

J^u 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK
TOM 13 • ZESZYT 2



P^a

WARSZAWA 1975
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

W. NOWACKI, Termodyfuzja w ciele stałym Термодиффузия в твердом теле Thermodiffusion in solids	143
A. GRIGORIAN, B. FRADLIN, Rozwój mechaniki analitycznej w pracach A. Przeborskiego i A. Wundheilera Развитие аналитической механики в трудах А. Пшеборского и А. Вундхейлера Contribution of A. Przeborski and A. Wundheiler to the development of analytical mechanics	159
W. WODZICKI, Drgania maszyn o korpusach odkształcalnych podpartych elastycznie na podatnej konstrukcji Вибрации машин с деформируемыми корпусами закрепленных на податливой конструкции посредством упругих элементов Vibration of machines with deformable bodies elasticity supported on flexible structures	169
S. MATYSIAK, Płaskie zagadnienie kontaktowe w niesymetrycznej teorii sprężystości Плоские контактные задачи в несимметричной теории упругости Plane contact problem of asymmetric elasticity	183
J. KUBIK, Jednowymiarowe dynamiczne pole naprężeń cieplnych wywołane ruchomym polem temperatury Одномерное динамическое поле термических напряжений вызванных подвижным температурным полем One-dimensional dynamic thermal stress field due to a moving temperature field	197
J. NIZIOŁ, A. MARTYNUSKA, Zastosowanie tłumików Stockbridge'a do tłumienia drgań belek i strun Применение демпферов Стокбриджа для демпфирования колебаний балок и струн Application of Stockbridge dampers to the damping of string and beam vibrations	209
J. MIASTKOWSKI, Metodyka statycznych badań doświadczalnych plastycznego płynięcia metali Методика статических экспериментальных исследований пластических деформаций металлов Methods of static experimental studies of plastic flow of metals	225
J. BIAŁKIEWICZ, Teoretyczna analiza procesu wyciskania rury Теоретическое исследование процесса выдавливания трубы Theoretical analysis of the pipe extrusion process	253
J. MARYNIAK, Z. GORAJ, Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu i oscylacje steru Влияние жесткости и демпфирования в системе управления рулем высоты на продольную устойчивость самолета и на осцилляции руля Influence of stiffness and damping in the elevator control system on longitudinal stability of an aircraft and vibrations of an elevator	261
B. WOSIEWICZ, W sprawie macierzy sztywności i wektora obciążeń szerelementu К вопросу о матрице жесткости и векторе нагрузок сверхэлемента To the problems of stiffness matrix and load vector of a superelement	283
BIULETYN INFORMACYJNY	287

J¹¹ 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 13 · ZESZYT 2

WARSZAWA 1975

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY, WŁADYSŁAW BOGUSZ, IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 710 (597+113) egz. Arkuszy wydawn. 11,5. Arkuszy drukarskich 10,25. Papier druk. sat. III kl. 70 g. 70×100. Oddano do składania 30.I.1975 r. Druk. ukończono w kwietniu 1975 r. Zam. 177/75. B-34. Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

TERMODYFUZJA W CIELE STAŁYM*)

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Istnieją liczne przykłady wnikania cieczy i gazów do ciała stałego. Przyczyny te wywołują odkształcenie ciała, jego pęcznienie i skurcz. I tak, wodór wnikający pod ciśnieniem do stali wywołuje jej znaczną deformację. Cienkie blaszki, do których wnika wodór wyginają się, cienkie płytki doznają zwichrzenia.

Równie brzemienny w skutki jest wpływ ogrzania ciała w procesie dyfuzyjnym. Wiemy z doświadczenia, jak zmienia się rozkład wilgotności w ośrodku porowatym wskutek zmiany pola temperatury. Do przyspieszenia wydzielania się gazu z metalu stosuje się podgrzanie ciała, a takie procesy, jak nawęglanie czy odwęglanie stali następują w obecności zmiennego pola temperatury.

Istniała potrzeba stworzenia jednolitej teorii obejmującej wzajemne oddziaływanie procesu dyfuzyjnego charakteryzowanego koncentracją względnie potencjałem chemicznym, procesu termicznego charakteryzowanego polem temperatury oraz procesu deformacji ciała opisanego przez wektor przemieszczenia i stan naprężenia.

Taką teorię dla układów dwuskładnikowych (dla stałych roztworów) opracował PODSTRIGACZ w 1961 r. [1]. Następnie teorię tę uogólnił na układy wieloskładnikowe. Wraz ze swymi współpracownikami rozwiązał szereg zagadnień szczegółowych, przeważnie jednowymiarowych [9, ÷ 10], dotyczących termodyfuzji w stałych roztworach.

Celem niniejszego opracowania problemowo-przeglądowego jest wprowadzenie do tego nowego działu mechaniki ciała stałego, leżącego na pograniczu teorii sprężystości i chemii fizycznej.

Podając w ogólnych zarysach teorię PODSTRIGACZA, dodaję do niej szereg uzupełnień natury termodynamicznej (nierówności termodynamiczne) oraz szereg twierdzeń ogólnych.

2. Najprostszy model dyfuzji

Rozpatrzmy najprostszy model procesu dyfuzji, opisany fenomenologicznym związkiem Ficka. Później dopiero uogólnimy go, wykorzystując prawa termodynamiki procesów nieodwracalnych.

Poniżej rozpatrywać będziemy układ dwuskładnikowy, złożony z jednego ruchliwego i drugiego nieruchliwego składnika. Jako model służyć nam może gaz rozpuszczony w metalu lub ciecz w porowatym szkielecie sprężystym. W naszych rozważaniach rolę

*) Referat generalny wygłoszony na Konferencji «Mechanika Ciała Stałego» w Krynicy, sierpień 1974 r.

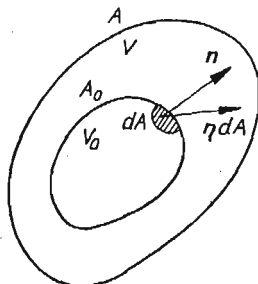
układu odniesienia dla przepływów dyfuzyjnych spełniać będzie siatka krystaliczna nieruchomego składnika.

Rozpatrzmy ciało B o objętości V , ograniczone powierzchnią A . W ciele tym zachodzi proces dyfuzyjny, polegający na wyrównywaniu się stężeń w ramach jednej fazy.

Wydzielmy z ciała B dowolne podciało B_0 o objętości V_0 , ograniczone powierzchnią A_0 (rys. 1). Dla B_0 sporządzimy bilans przepływu materii, otrzymując równanie globalne

$$(2.1) \quad \int_{A_0} \eta \cdot n dA = \int_{V_0} \left(-\frac{\partial c}{\partial t} + \sigma \right) dV.$$

Przez η oznaczamy wektor przepływu dyfuzyjnego (o wymiarze $\text{kg}/\text{cm}^2 \text{ sek}$), przez n wektor normalnej do powierzchni A_0 . Dalej przez c oznaczamy koncentrację, rozumianą jako ilość substancji na element objętościowy (kg/cm^3). Wreszcie przez σ oznaczamy intensywność źródła masy, ilość masy wytwarzanej w jednostce objętości i jednostce czasu (wymiar $\text{kg}/\text{cm}^3 \text{ sek}$).



Rys. 1

Stosując do całki powierzchniowej w (2.1) przekształcenie Gaussa, mamy

$$(2.2) \quad \int_{V_0} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} \eta - \sigma \right) dV = 0.$$

Ze względu na założoną dowolność podobszaru, otrzymujemy z (2.2) równanie lokalne

$$(2.3) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div} \eta + \sigma.$$

Równanie (2.3) przedstawia podstawowe prawo dyfuzji.

Z badań doświadczalnych wynika, że przepływ dyfuzyjny jest proporcjonalny do gradientu koncentracji, a współczynnikiem proporcjonalności jest pewna (na ogół stała) wielkość zwana współczynnikiem dyfuzji

$$(2.4) \quad \eta = -D \text{grad} c.$$

Związek ten jest słuszny dla ciała izotropowego. Występująca tu wielkość D ma wymiar cm^2/sek ; jest zatem niezależna od jednostki, w której mierzy się ilość substancji. Znak minus w związku (2.4) pochodzi stąd, że dyfuzja przebiega w kierunku przeciwnym do wzrostu koncentracji. Prawo fenomenologiczne (2.4) nazywamy prawem Ficka.

Eliminując η z równań (2.3) i (2.4) dochodzimy do podstawowego równania dyfuzji

$$(2.5) \quad D\nabla^2 c - \frac{\partial c}{\partial t} = -\sigma(\mathbf{x}, t) \quad \text{na } V \times [0, \infty].$$

Do równania dyfuzji należy dodać warunek brzegowy i początkowy.

Załóżmy, że mamy do czynienia z mieszanymi warunkami brzegowymi. Niech na A_1 określona będzie koncentracja $f(\mathbf{x}, t)$, na A_2 — przepływ masy $h(\mathbf{x}, t)$. Tutaj $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Mamy zatem

$$(2.6) \quad c(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \text{ na } A_1 \times [0, \infty]; \quad -D \frac{\partial c(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = h(\mathbf{x}, t) \text{ na } A_2 \times [0, \infty].$$

Warunek początkowy podaje rozkład stężenia w chwili $t = 0$

$$(2.7) \quad c(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V.$$

Funkcje f, h, g są danymi funkcjami.

Równanie (2.5) opisujące proces dyfuzji nie zawiera członu związanego z deformacją ciała. Jest to poważny mankament; doświadczenie bowiem uczy, że czynniki mechaniczne (np. drgania) mają wpływ na proces dyfuzyjny.

Nietrudno nam będzie w tej przybliżonej teorii ująć proces odwrotny, oddziaływanie dyfuzji na deformację ciała.

Proces dyfuzji, podobnie jak wzrost temperatury, wywołuje w ciele trwałe odkształcenia ε_{ij}^0 . Całkowite odkształcenie ciała składa się z dwu części, z dystorsji ε_{ij}^0 oraz z odkształceń sprężystych ε'_{ij} :

$$(2.8) \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}.$$

Z drugiej strony, odkształcenia sprężyste są funkcjami liniowymi naprężeń

$$(2.9) \quad \varepsilon'_{ij} = 2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \delta_{ij} \sigma_{kk}.$$

Tutaj

$$2\mu' = \frac{1}{2\mu}, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

a μ, λ są stałymi Lamégo. Wstawmy (2.9) do (2.8) i rozwiążmy te równania względem naprężeń. Otrzymamy związki konstytutywne

$$(2.10) \quad \sigma_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + \lambda(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^0) \delta_{ij}.$$

Odształcenia trwałe, spowodowane procesem dyfuzyjnym tworzą tensor symetryczny

$$(2.11) \quad \varepsilon_{ij}^0 = \alpha_c \delta_{ij} c.$$

Jest to własność fizyczna ciała izotropowego. Wskazuje ona, że element objętościowy (na ściankach którego jest $\sigma_{ij} = 0$) może zmieniać w trakcie dyfuzji jedynie objętość, a nie postać. Wielkość α_c jest współczynnikiem dyfuzyjnej rozszerzalności liniowej.

Wstawiając (2.11) do (2.10), mamy

$$(2.12) \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma_c c) \delta_{ij},$$

gdzie

$$\gamma_c = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c.$$

Zauważmy analogię związków (2.12) z równaniami Duhamela–Neumanna dla termosprężystości.

Jeśli związki konstytutywne (2.12) wstawić do równań ruchu

$$(2.13) \quad \sigma_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{na } V \times [0, \infty],$$

i wykorzystując definicję tensora odkształcenia

$$(2.14) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

gdzie \mathbf{u} jest wektorem przemieszczenia, to w rezultacie otrzymamy układ równań przemieszczeniowych teorii sprężystości z członem dyfuzyjnym

$$(2.15) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \gamma_c \text{grad } c.$$

Dodając równanie dyfuzji

$$(2.16) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{D} \partial_t \right) c + \frac{1}{D} \sigma(\mathbf{x}, t) = 0,$$

otrzymujemy komplet równań niesprężonej dyfuzji w ciele odkształcalnym.

Droga rozwiązania jest tu następująca. Rozwiązujemy równanie dyfuzji (2.16) przy danym warunku brzegowym i początkowym, a znaną już funkcję c wstawiamy do prawej strony równań przemieszczeniowych (2.15). Rozwiązanie układu równań (2.15) prowadzi do przemieszczeń \mathbf{u} , odkształceń ε_{ij} i naprężeń σ_{ij} .

Układ równań (2.15), (2.16) stanowi pełną analogię do równań teorii naprężeń cieplnych (niesprężona termosprężystość). Dodać należy jednak, że w zagadnieniach dyfuzji w ciele stałym przeważa inny typ warunków. Na ogół warunek początkowy jest niejednorodny, gdyż zazwyczaj interesuje nas zmiana rozkładu koncentracji (danego dla $t = 0$) dla kolejnych $t > 0$ i to przy jednorodnym warunku brzegowym. Ponadto w chwili $t = 0$ rozkład koncentracji zazwyczaj wyraża się funkcjami ze skończonymi nieciągłościami (skokami).

Dla układu równań (2.15) i (2.16) można podać szereg twierdzeń ogólnych. W postaci swej są one analogiczne do wyprowadzonych w ramach teorii naprężeń cieplnych [11].

Poniżej podamy jedynie dwa twierdzenia. Pierwsze wynika z przemnożenia przez c równania (2.16) i scałkowania po obszarze. Otrzymamy tu równanie

$$(2.17) \quad \frac{d\mathcal{A}}{dt} + \chi_c = D \int_A c \frac{\partial c}{\partial n} dA + \int_V \sigma c dV.$$

Tutaj

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_V c^2 dV, \quad \chi_c = D \int_V (c_{,i})^2 dV.$$

Równanie (2.17) można interpretować jako równanie energetyczne, gdzie \mathcal{A} jest potencjałem dyfuzyjnym, a χ_c — funkcją dyfuzyjnej dysypacji. Równanie (2.17) służy między innymi do udowodnienia twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań równania parabolicznego (2.16).

Rozpatrzmy twierdzenie o wzajemności prac. Niech dane będą dwa układy przyczyn i skutków. Do przyczyn zaliczymy działanie źródeł masy oraz działanie wywołane przez warunki brzegowe i początkowe. Drugi układ przyczyn i skutków wyróżniamy «primami».

Twierdzenie o wzajemności prac ma tu postać

$$(2.18) \quad \int_V \sigma^* c' dV + \int_V g c' dV + D \int_A c'^* \frac{\partial c}{\partial n} dA = \int_V \sigma'^* c dV + \int_V g' c dV + D \int_A c^* \frac{\partial c'}{\partial n} dA.$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenia splotowe

$$\sigma^* c' = \int_0^t \sigma(\mathbf{x}, t-\tau) c'(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \int_0^t \sigma(\mathbf{x}, \tau) c'(\mathbf{x}, t-\tau) d\tau.$$

Równanie (2.18) posłużyć może do skonstruowania rozwiązań równania (2.16) przy pomocy funkcji Greena.

3. Podstawy termodynamiczne dyfuzji w ciele stałym

Wyprowadzimy obecnie podstawowe związki termodyfuzji opierając się na prawach termodynamiki procesów nieodwracalnych.

Pierwsze prawo termodynamiki ma postać

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} (\mathcal{K} + \mathcal{U}) = \mathcal{L} + \frac{dQ}{dt}.$$

Tutaj \mathcal{U} jest energią wewnętrzną, \mathcal{K} — energią kinetyczną, \mathcal{L} — mocą sił zewnętrznych, a $\frac{dQ}{dt}$ — ciepłem absorbowanym przez ciało.

Prawo to przedstawimy w postaci

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \int_V (U + \varrho v_i v_i) dV = \int_V X_i v_i dV + \int_A p_i v_i dA - \int_V q_{i,t} dV, \quad \dot{u}_i = v_i.$$

Tutaj U jest energią wewnętrzną odniesioną do jednostki objętości, X_i jest składową siły masowej, $p_i = \sigma_{ji} n_j$ jest składową siły powierzchniowej, a q_i jest składową wektora przepływu ciepła.

Prawo zachowania energii (3.2) prowadzi, przy wykorzystaniu równań ruchu

$$(3.3) \quad \sigma_{ji,j} + X_i = \varrho \ddot{u}_i$$

i przekształcenia Gaussa–Ostrogradzkiego, do prawa lokalnego

$$(3.4) \quad \dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,t}.$$

Zasada zachowania energii dla materiałów rzeczywistych jest ograniczona przez drugie prawo termodynamiki

$$(3.5) \quad T \dot{S} = -q_{i,t} - \mathcal{M} \dot{c}.$$

Tutaj T jest temperaturą bezwzględną w punkcie \mathbf{x} i chwili t , S jest entropią odniesioną do jednostki objętości, \mathcal{M} — potencjałem chemicznym.

Temperaturę T traktujemy jako temperaturę średnią ciała stałego i materii dyfundującej.

Eliminując człon $q_{i,t}$ z równań (3.4) i (3.5), otrzymamy równanie

$$(3.6) \quad \dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + T \dot{S} + \mathcal{M} \dot{c}.$$

Ponieważ różniczka energii wewnętrznej jest różniczką zupełną, to

$$(3.7) \quad \dot{U} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial U}{\partial S} \dot{S} + \frac{\partial U}{\partial c} \dot{c}.$$

Z porównania (3.6) i (3.7) wynikają związki:

$$(3.8) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad \mathcal{M} = \frac{\partial U}{\partial c}.$$

Przyjmijmy energię wewnętrzną $U(\varepsilon_{ij}, S, c)$ w postaci

$$(3.9) \quad U(\varepsilon_{ij}, S, c) = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 - \nu_s S \varepsilon_{kk} - \nu_c c \varepsilon_{kk} + \frac{m}{2} S^2 + \frac{\alpha}{2} c^2 - \delta c S.$$

Wykorzystując związki (3.8) dochodzimy do następujących związków konstytutywnych:

$$(3.10) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \nu_s S - \nu_c c) \delta_{ij},$$

$$(3.11) \quad \theta = -\nu_s \varepsilon_{kk} + mS - \delta c,$$

$$(3.12) \quad \mathcal{M} = -\nu_c \varepsilon_{kk} - \delta S + \alpha c, \quad \theta = T - T_0.$$

Postać energii wewnętrznej (3.9) oraz związki konstytutywne (3.10)–(3.12) posłużą nam do wyprowadzenia nierówności termodynamicznych w punkcie 6.

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie korzystać z innej funkcji stanu, z energii swobodnej $F = U - ST$. Mamy zatem

$$(3.13') \quad \dot{F} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - S \dot{T} + \mathcal{M} \dot{c}.$$

Przyjmując następujące rozwinięcie funkcji $F(\varepsilon_{ij}, \theta, c)$ w szereg Taylora w otoczeniu stanu naturalnego ($\varepsilon_{ij} = 0, T = T_0, c = 0$)

$$(3.13'') \quad F(\varepsilon_{ij}, \theta, c) = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{nn} - \gamma_0 \varepsilon_{kk} \theta - \gamma_c \varepsilon_{kk} c + \frac{a}{2} c^2 - \frac{n}{2} \theta^2 - dc\theta.$$

Zważywszy na (3.13'') mamy

$$(3.14) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma_0 \theta - \gamma_c c) \delta_{ij},$$

$$(3.15) \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \gamma_0 \varepsilon_{kk} + n\theta + dc,$$

$$(3.16) \quad \mathcal{M} = \frac{\partial F}{\partial c} = -\gamma_c \varepsilon_{kk} - d\theta + ac.$$

Wróćmy do bilansu entropii. Zważywszy na prawo zachowania masy (przy $\sigma = 0$) mamy

$$(3.17) \quad T \dot{S} = -q_{i,t} + \mathcal{M} \eta_{i,t}.$$

Związkowi temu możemy nadać postać

$$(3.18) \quad \dot{S} = -\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} + \left(\frac{\mathcal{M} \eta_i}{T}\right)_{,i} + \Omega,$$

gdzie

$$(3.19) \quad \Omega = - \left(\frac{q_i T_{,i}}{T^2} + \eta_{,i} \left(\frac{\mathcal{M}}{T} \right)_{,i} \right) > 0.$$

Równanie (3.18) przedstawia lokalny przyrost entropii w czasie, przy czym dwa pierwsze człony odnoszą się do wymiany entropii z otoczeniem, a człon ostatni wyraża produkcję entropii. W myśl postulatu termodynamiki procesów nieodwracalnych jest $\Omega > 0$.

Zródło entropii przedstawić możemy w postaci

$$(3.20) \quad \Omega = \frac{1}{T} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}^{(a)} + \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{X}^{(n)}),$$

gdzie

$$(3.21) \quad \mathbf{X}^{(a)} = -\frac{1}{T} \text{grad } T, \quad \mathbf{X}^{(n)} = -T \text{grad} \left(\frac{\mathcal{M}}{T} \right).$$

Zródła entropii związane są z przyczynami procesów nieodwracalnych, z wielkościami intensywnymi, zwanymi bodźcami termodynamicznymi $\mathbf{X}^{(a)}, \mathbf{X}^{(n)}$. Zródło entropii jest równe iloczynowi wektorowemu bodźców termodynamicznych $\mathbf{X}^{(a)}, \mathbf{X}^{(n)}$ i sprzężonych z nimi przepływów $\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}$.

Z drugiej strony, między wektorami przepływów a bodźcami termodynamicznymi istnieją związki na ogół nieliniowe

$$(3.22) \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{X}^{(a)}, \mathbf{X}^{(n)}), \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}^{(a)}, \mathbf{X}^{(n)}).$$

Dla przepływów laminarnych przyjmiemy te związki w postaci liniowej:

$$(3.23) \quad \begin{cases} \mathbf{q} = L_{qq} \mathbf{X}^{(a)} + L_{qn} \mathbf{X}^{(n)}, \\ \boldsymbol{\eta} = L_{nq} \mathbf{X}^{(a)} + L_{nn} \mathbf{X}^{(n)}, \end{cases}$$

albo

$$(3.24) \quad \begin{cases} \mathbf{q} = -\frac{L_{qq}}{T} \text{grad } T - L_{nq} \text{grad} \left(\frac{\mathcal{M}}{T} \right), \\ \boldsymbol{\eta} = -\frac{L_{nq}}{T} \text{grad } T - L_{nn} \text{grad} \left(\frac{\mathcal{M}}{T} \right). \end{cases}$$

Związki (3.23) nazywamy związkami fenomenologicznymi. Wielkości L_{ij} są wielkościami stałymi. Spełniają one założenie wzajemności: ($L_{qn} = L_{nq}$). Mamy ponadto $L_{qq} > 0$, $L_{nn} > 0$, $L_{nn}L_{qq} - L_{nq}^2 > 0$.

4. Dyfuzo-sprężystość i termosprężystość

Założmy najpierw, że proces dyfuzyjny odbywa się w warunkach izotermicznych. Ciepło jest z ciała stale odprowadzane; w ciele panuje stała temperatura T_0 , temperatura stanu naturalnego.

Zasada zachowania energii (3.13') (przy $\dot{T} = 0$) przyjmuje postać

$$(4.1) \quad \dot{F}' = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \mathcal{M} \dot{c}.$$

Z bilansu entropii (przy $q_{i,t} = 0$) otrzymamy

$$(4.2) \quad T_0 \dot{S} = \mathcal{M} \eta_{t,t}.$$

Wreszcie ze związków fenomenologicznych (3.24) odczytamy

$$(4.3) \quad q = 0, \quad \eta = -\frac{L_{\eta\eta}}{T_0} \text{grad } \mathcal{M}.$$

Z wyrażenia (3.13) dla energii swobodnej, przy $\theta = 0$ znajdziemy

$$(4.4) \quad F(\varepsilon_{ij}, c) = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{nn} - \gamma_c c \varepsilon_{kk} + \frac{a}{2} c^2.$$

Uwzględniając związki:

$$(4.5) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \mathcal{M} = \frac{\partial F}{\partial c},$$

otrzymamy równanie konstytutywne

$$(4.6) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma_c c) \delta_{ij},$$

$$(4.7) \quad \mathcal{M} = ac - \gamma_c \varepsilon_{kk}.$$

Związek (4.6), rozszerzone prawo Hooke'a, pokrywa się z uprzednio uzyskanym związkiem (2.12), otrzymanym bez rozważań termodynamicznych.

W wyrażeniu na potencjał chemiczny (4.7) występuje dylatacja. Zobaczmy poniżej, że $a > 0$, $\gamma_c > 0$. Zatem potencjał chemiczny wzrasta ze wzrostem stężenia, natomiast maleje ze wzrostem dylatacji (oczywiście przy $\varepsilon_{kk} > 0$).

Eliminując potencjał chemiczny z równań (4.3) i (4.7), w rezultacie mamy

$$(4.8) \quad \eta = -D \text{grad } c + \chi \text{grad div } \mathbf{u},$$

gdzie

$$D = \frac{L_{\eta\eta} a}{T_0} > 0, \quad \chi = \frac{L_{\eta\eta} \gamma_c}{T_0} > 0.$$

Otrzymaliśmy tu, wykorzystując prawa termodynamiki procesów nieodwracalnych, rozszerzone prawo Ficka. Dochodzi tu człon $\chi \text{grad div } \mathbf{u}$, uwzględniający wpływ odkształcenia ciała na przepływ masy dyfundującej.

Równanie dyfuzji otrzymamy wstawiając (4.8) do zasady zachowania masy

$$(4.9) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div } \eta.$$

W rezultacie dochodzimy do równania

$$(4.10) \quad (D\nabla^2 - \partial_t) c - \chi \nabla^2 \text{div } \mathbf{u} = 0.$$

Równanie to wraz z równaniami przemieszczeniowymi

$$(4.11) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \gamma_c \text{grad } c$$

stanowią komplet równań opisujących proces dyfuzji w ciele stałym, przy zachowaniu stanu izotermicznego.

Równaniom (4.10), (4.11) możemy jeszcze nadać inną postać. Jeśli (4.3)₂ wstawić do zasady zachowania masy, to otrzymamy

$$(4.12) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{L_{\eta\eta}}{T_0} \nabla^2 \mathcal{M}.$$

Wykorzystajmy teraz związek konstytutywny (4.7), z którego otrzymamy

$$(4.13) \quad c = \frac{1}{a} (\mathcal{M} + \gamma_c \varepsilon_{kk}).$$

Wstawiając (4.13) do (4.12), mamy

$$(4.14) \quad (D\nabla^2 - \partial_t) \mathcal{M} - \gamma_c \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = 0.$$

Uzupełniając równania teorii sprężystości otrzymamy z (4.11) przez wykorzystanie (4.13)

$$(4.15) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda^* + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \gamma_\mu \operatorname{grad} \mathcal{M},$$

gdzie

$$\lambda^* = \lambda - \frac{\gamma_c^2}{a}, \quad \gamma_\mu = \gamma_c / a.$$

Zauważmy, że układ równań (4.14), (4.15) stanowi pełną analogię do sprzężonych równań termosprężystości [12].

Załóżmy z kolei, że w ciele stałym nie występuje proces dyfuzyjny ($c = 0$). Ciało znajduje się jedynie pod działaniem pola temperatury.

W tym przypadku jest

$$(4.16) \quad F = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{nn} - \gamma_0 \varepsilon_{kk} \theta - \frac{n}{2} \theta^2.$$

Uwzględniając związki:

$$(4.17) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad S = - \frac{\partial F}{\partial T},$$

otrzymamy następujące równania konstytutywne:

$$(4.18) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma_0 \theta) \delta_{ij},$$

$$(4.19) \quad S = \gamma_0 \varepsilon_{kk} + n\theta.$$

Z równań fenomenologicznych (3.24) mamy

$$(4.20) \quad \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \mathbf{q} = - \frac{L_{qq}}{T} \operatorname{grad} T.$$

Z bilansu entropii (3.17) wynika, że

$$(4.21) \quad \dot{S} = - \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{L_{qq}}{T^2} \nabla^2 \theta.$$

Powiązanie równań (4.21) i (4.19) daje nam, po dokonaniu linearyzacji, równanie przewodnictwa cieplnego

$$(4.22) \quad k \nabla^2 \theta = \gamma_0 \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} + n\dot{\theta}$$

lub

$$(4.23) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa} \partial_i \right) \theta - \eta \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = 0, \quad \text{gdzie} \quad k = \frac{L_{qa}}{T_0^2}, \quad \varkappa = k/n, \quad \eta = \gamma/k.$$

Równania przemieszczeniowe uzyskane przez wprowadzenie związków Duhamela-Neumanna do równań ruchu (3.3) mają postać

$$(4.24) \quad \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) u_{j,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i + \gamma_0 \theta_{,i}.$$

Pominięcie członu $\eta \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}$ w równaniu przewodnictwa ciepłego prowadzi do znacznego uproszczenia zagadnienia. W tym bowiem przypadku równania (4.23) i (4.24) stają się od siebie niezależne. Opisują one tzw. techniczną teorię naprężeń cieplnych.

5. Równania różniczkowe termodyfuzji

Poniżej wyprowadzimy równania różniczkowe termodyfuzji. Podstawą naszych rozważań będą związki konstytutywne (3.14)–(3.16), dalej związki fenomenologiczne (3.24) oraz równanie bilansu entropii

$$(5.1) \quad T \dot{S} = -q_{i,i} + \mathcal{M} \eta_{i,i}$$

i równania zasady zachowania masy

$$(5.2) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}.$$

Wyliminujmy ze związków fenomenologicznych (3.24) wielkość $\operatorname{grad}(\mathcal{M}/T)$. Wtedy

$$(5.3) \quad \mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T + \alpha \boldsymbol{\eta},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{L_{q\eta}}{L_{\eta\eta}}, \quad k = \frac{1}{T_0 L_{\eta\eta}} (L_{\eta\eta} L_{qa} - L_{q\eta}^2).$$

Z równania (3.24)₂ uzyskamy

$$(5.4) \quad \boldsymbol{\eta} = -\frac{L_{\eta\eta}}{T} \operatorname{grad} \mathcal{M} - \frac{L_{\eta\eta}}{T} \left(\alpha - \frac{\mathcal{M}}{T} \right) \operatorname{grad} T.$$

Wstawmy \mathbf{q} ze związku (5.3) do bilansu entropii (5.1), uwzględniając przy tym związek (5.4). W rezultacie otrzymamy

$$T \dot{S} = k \nabla^2 T + \alpha L_{\eta\eta} \left[\frac{1}{T} \nabla^2 \mathcal{M} + \frac{1}{T} \left(\frac{\mathcal{M}}{T} - \alpha \right) \nabla^2 T + \left(\alpha - \frac{2\mathcal{M}}{T} \right) \frac{T_{,i}^2}{T^2} \right].$$

Po przesunięciu członów małych w stosunku do $k \nabla^2 T$ (takich jak $(\alpha \operatorname{div} \boldsymbol{\eta})$ [1]) oraz przy pominięciu członów nieliniowych, mamy

$$(5.5) \quad T \dot{S} \approx k \nabla^2 T.$$

Wstawmy $\boldsymbol{\eta}$ ze związku (5.4) do równania (5.2). Otrzymamy tu

$$(5.6) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{L_{\eta\eta}}{T} \nabla^2 \mathcal{M} + L_{\eta\eta} \left[\left(\alpha - \frac{2\mathcal{M}}{T} \right) \frac{T_{,i}^2}{T^2} - \frac{1}{T} \left(\alpha - \frac{\mathcal{M}}{T} \right) \nabla^2 T \right].$$

Po pominięciu członów małych w stosunku do pierwszego członu po prawej stronie równania (5.6) i po pominięciu członów nieliniowych, mamy

$$(5.6') \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{L_{\eta\eta}}{T} \nabla^2 \mathcal{M}.$$

Wykorzystajmy teraz równania konstytutywne (3.15) i (3.16). Z porównania równań (5.5) i (3.15) i po linearyzacji otrzymamy rozszerzone równanie przewodnictwa ciepłego

$$(5.7) \quad (k' \nabla^2 - n \partial_t) \theta = \gamma_0 \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} + d \dot{c}, \quad k' = k/T_0.$$

Podobnie, eliminując potencjał chemiczny \mathcal{M} z równań (5.6) i (3.16), otrzymamy rozszerzone równanie dyfuzji

$$(5.8) \quad (a \nabla^2 - m \partial_t) c = \nabla^2 (\gamma_c \operatorname{div} \mathbf{u} + d \theta), \quad m = \frac{T_0}{L_{\eta\eta}}.$$

Jeśli wstawić związek konstytutywny (3.14) do równań ruchu, to otrzymamy równanie wektorowe

$$(5.9) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \gamma_0 \operatorname{grad} \theta + \gamma_c \operatorname{grad} c.$$

Otrzymaliśmy komplet równań termodyfuzji, w którym ze sobą sprzężone są funkcje c , \mathbf{u} i θ [1].

Ale układ tych równań nie cechuje się symetrią; jest niewygodny w rozwiązywaniu. Dlatego też dokonamy próby zamiany koncentracji c przez potencjał chemiczny \mathcal{M} .

Rozwiążmy równanie konstytutywne (3.16) względem c

$$(5.10) \quad ac = \mathcal{M} + \gamma_c \varepsilon_{kk} + d \theta$$

i wstawmy koncentrację z (5.10) do związku konstytutywnego (3.15). Wtedy

$$(5.11) \quad aS = \bar{\gamma}_0 \varepsilon_{kk} + \bar{n} \theta + d \mathcal{M},$$

gdzie

$$\bar{\gamma}_0 = \gamma_0 a + d \gamma_c, \quad \bar{n} = an + d^2.$$

Wstawmy (5.11) do równania (5.5), a (5.10) do równania (5.6). W rezultacie otrzymamy układ równań:

$$(5.12) \quad (\bar{k} \nabla^2 - \bar{n} \partial_t) \theta = \bar{\gamma}_0 \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} + d \dot{\mathcal{M}},$$

$$(5.13) \quad (D \nabla^2 - \partial_t) \mathcal{M} = \gamma_\mu \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} + d \dot{\theta}, \quad \bar{k} = ka/T_0, \quad \gamma_\mu = \gamma_c.$$

Eliminując koncentrację c z równań ruchu (5.9) przy użyciu związku (5.10), otrzymamy równanie wektorowe

$$(5.14) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda' + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \frac{1}{a} (\bar{\gamma}_0 \operatorname{grad} \theta + \gamma_\mu \operatorname{grad} \mathcal{M}),$$

$$\lambda' = \lambda - \gamma_c^2/a, \quad \gamma_\mu = \gamma_c.$$

Równania (5.12) (5.13) i (5.14) stanowią komplet równań dyfuzji wyrażony przez funkcje \mathbf{u} , θ i \mathcal{M} . Równania te cechują się pełną symetrią, co ma ważne znaczenie przy wyprowadzaniu twierdzeń takich, jak twierdzenia wariacyjne, twierdzenie o wzajemności prac itd.

Interesujący jest przypadek szczególny równań termodyfuzji, mianowicie pominięcie wpływu odkształcenia na proces termodyfuzji w ciele. W tym przypadku układ równań termodyfuzji upraszcza się do postaci

$$(5.15) \quad (\bar{k}\nabla^2 - \bar{n}\partial_t)\theta - d\dot{\mathcal{M}} = 0,$$

$$(5.16) \quad (D\nabla^2 - \partial_t)\mathcal{M} - d\dot{\theta} = 0,$$

$$(5.17) \quad \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda' + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho\ddot{\mathbf{u}} + \frac{1}{\alpha}(\bar{\gamma}_0\text{grad}\theta + \gamma_\mu\text{grad}\mathcal{M}).$$

Uproszczenie to rozdziela nam układ równań (5.15) (5.16) od równania (5.17). Z rozwiązania układu równań (5.15) (5.16) wyznaczamy funkcje θ , \mathcal{M} . Funkcje te, już jako funkcje znane, wstawiamy do równania (5.17).

6. nierówności termodynamiczne

W dalszych rozważaniach, zwłaszcza dotyczących zagadnień jednoznaczności rozwiązań potrzebne będą pewne nierówności termodynamiczne.

Rozpatrzmy energię zewnętrzną (3.9)

$$(6.1) \quad 2U(e_{ij}, S, c) = 2\mu e_{ij}e_{ij} + Ke^2 - 2\nu_s Sc - 2\nu_c ec + mS^2 + \alpha c^2 - 2\delta cS.$$

Wprowadziliśmy tu w miejsce tensora odkształceń ε_{ij} , dewiator odkształceń e_{ij} , gdzie

$$(6.2) \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad e_{jj} = 0, \quad e = \varepsilon_{kk}.$$

Rozwiążmy teraz równania konstytutywne (3.11), (3.12) względem S i c . Otrzymamy następujące związki:

$$(6.3) \quad S = \frac{1}{\Delta}(\alpha\theta + \delta\mathcal{M} + \bar{\nu}_s e),$$

$$(6.4) \quad c = \frac{1}{\Delta}(\delta\theta + m\mathcal{M} + \bar{\nu}_c e),$$

gdzie

$$\Delta = \alpha m - \delta^2 \neq 0, \quad \bar{\nu}_c = \nu_s \delta + \nu_c m, \quad \bar{\nu}_s = \nu_s \alpha + \nu_c \delta.$$

Wstawienie związków (6.3) i (6.4) do (6.1) prowadzi po uporządkowaniu do wyrażenia

$$(6.5) \quad 2U = 2\mu e_{ij}e_{ij} + e^2 \left[K - \frac{1}{\Delta}(\nu_s^2 \alpha + \nu_c^2 m + 2\nu_s \nu_c \delta) \right] + \frac{1}{\Delta}(\alpha\theta^2 + m\mathcal{M}^2 + 2\delta\theta\mathcal{M}).$$

Ale energia wewnętrzna jest funkcją kwadratową, dodatnio zdefiniowaną. Powinno być zatem

$$(6.6) \quad \begin{cases} \mu > 0, & K > \frac{1}{\Delta}(\nu_s^2 \alpha + \nu_c^2 m + 2\nu_s \nu_c \delta), \\ \Gamma = \frac{1}{\Delta}(\alpha\theta^2 + m\mathcal{M}^2 + 2\delta\theta\mathcal{M}) > 0. \end{cases}$$

Rozpatrzmy najpierw ostatnie wyrażenie, które przedstawimy w postaci

$$(6.7) \quad \Gamma = \frac{(\delta\mathcal{M} + \alpha\theta)^2 + (m\alpha - \delta^2)\mathcal{M}^2}{\alpha(m\alpha - \delta^2)} > 0.$$

Powyższa nierówność będzie spełniona, gdy $\alpha > 0$, $m > 0$, $m\alpha - \delta^2 > 0$. Na tej samej zasadzie słuszna jest nierówność

$$(6.8) \quad \frac{1}{\Delta} (v_s^2\alpha + v_c^2m + 2\delta v_s v_c) > 0.$$

Zbadajmy równanie konstytutywne (3.10) i rozwiążmy je względem ε_{ij} . Wtedy

$$(6.9) \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_s S \delta_{ij} + \alpha_c c \delta_{ij} + 2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \delta_{ij} \sigma_{kk}.$$

Tutaj $\alpha_c > 0$, $\alpha_s > 0$, gdyż ze wzrostem entropii i wzrostem koncentracji wzrasta odkształcenie. Zatem $v_s = 3K\alpha_s > 0$, $v_c = 3K\alpha_c > 0$.

W ten sposób otrzymaliśmy wszelkie nierówności dotyczące współczynników występujących w równaniach konstytutywnych (3.10)–(3.12)

$$\mu > 0, \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad v_s > 0, \quad v_c > 0, \quad m > 0, \quad \alpha > 0, \quad m\alpha - \delta^2 > 0.$$

7. Równania falowe. Reprezentacje typu Lamégo i Galerkina [14]

W dalszych rozważaniach wprowadzimy dla wygody działań nowe oznaczenia. Pozostawiając wektor \mathbf{u} , oznaczmy pole temperatury przez θ_1 , a potencjał chemiczny przez θ_2 .

Wprowadzając intensywność źródła ciepła W_1 i źródła masy dyfundowanej W_2 , otrzymamy układ równań:

$$(7.1) \quad \square_2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{X} = \text{grad}(\gamma_1 \theta_1 + \gamma_2 \theta_2),$$

$$(7.2) \quad D_1 \theta_1 = \gamma_1 \text{div } \dot{\mathbf{u}} + d\dot{\theta}_2 - W_1,$$

$$(7.3) \quad D_2 \theta_2 = \gamma_2 \text{div } \dot{\mathbf{u}} + d\dot{\theta}_1 - W_2.$$

Tutaj:

$$\square_2 = \mu \nabla^2 - \rho \partial_t^2, \quad D_1 = k_1 \nabla^2 - c_1 \partial_t, \quad D_2 = k_2 \nabla^2 - c_2 \partial_t, \quad \gamma_1 = 3K\alpha_1, \quad \gamma_2 = 3K\alpha_2,$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \mu > 0, \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0.$$

Dokonajmy dekompozycji wektora przemieszczenia \mathbf{u} i wektora sił masowych \mathbf{X} na część potencjalną i solenoidalną:

$$(7.4) \quad \mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}, \quad \text{div } \boldsymbol{\psi} = 0,$$

$$(7.5) \quad \mathbf{X} = \text{grad } \vartheta + \text{rot } \boldsymbol{\eta}, \quad \text{div } \boldsymbol{\eta} = 0.$$

Wstawiając powyższe wektory do równań różniczkowych termodyfuzji, otrzymamy układ równań:

$$(7.6) \quad \square_1 \phi = \gamma_1 \theta_1 + \gamma_2 \theta_2 - \vartheta,$$

$$(7.7) \quad \square_2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\eta},$$

$$(7.8) \quad D_1 \theta_1 = \gamma_1 \nabla^2 \dot{\phi} + d\dot{\theta}_2 - W_1,$$

$$(7.9) \quad D_2 \theta_2 = \gamma_2 \nabla^2 \dot{\phi} + d\dot{\theta}_1 - W_2, \quad \square_1 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 - \rho \partial_t^2.$$

Widoczne jest, że równania (7.6) (7.8) i (7.9) są ze sobą sprzężone. Eliminując z tych równań funkcje θ_1, θ_2 , otrzymamy równanie fali podłużnej

$$(7.10) \quad [\square_1 H - (\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) \partial_t \nabla^2] \phi = -(H\vartheta + M_1 W_1 + M_2 W_2).$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenia:

$$H = D_1 D_2 - d^2 \partial_t^2, \quad M_1 = \gamma_1 D_2 + \gamma_2 d \partial_t, \quad M_2 = \gamma_1 d \partial_t + \gamma_2 D_1.$$

Z równania (7.10) spostrzegamy, że fala podłużna podlega tłumieniu i dyspersji. Natomiast fala poprzeczna (7.7) nie jest zakłócona (w przestrzeni nieskończonej) ani przez pole temperatury, ani przez pole potencjału chemicznego.

Podamy poniżej odmienną reprezentację funkcji $\mathbf{u}, \theta_1, \theta_2$, przy użyciu funkcji wektorowej $\boldsymbol{\chi}$ i dwu skalarnych funkcji ψ_1, ψ_2 . Droga eliminacji otrzymamy z układu równań (7.1), (7.2), (7.3) następujące równania:

$$(7.11) \quad \Omega \square_2 \mathbf{u} = -\Omega \mathbf{X} + \text{grad } \square_1 M \mathbf{X} - \square_2 P_1 \text{ grad } W_1 - \square_2 P_2 \text{ grad } W_2,$$

$$(7.12) \quad \Omega \theta_1 = -P_1 \partial_t \text{ div } \mathbf{X} - \square_1 H_2 W_1 - \square_1 \Gamma W_2,$$

$$(7.13) \quad \Omega \theta_2 = -P_2 \partial_t \text{ div } \mathbf{X} - \square_1 \Gamma W_1 - \square_1 H_1 W_2.$$

Tutaj

$$\Omega = H_1 H_2 - \Gamma^2 = \square_1 (\square_1 H - (\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) \partial_t \nabla^2) = \square_1 \Theta,$$

$$H_1 = D_1 \square_1 - \gamma_1^2 \partial_t \nabla^2, \quad H_2 = D_2 \square_1 - \gamma_2^2 \partial_t \nabla^2, \quad \Gamma = (d \square_1 + \gamma_1 \gamma_2 \nabla^2) \partial_t,$$

$$P_1 = \gamma_1 H_2 + \gamma_2 \Gamma, \quad P_2 = \gamma_2 H_1 + \gamma_1 \Gamma, \quad M = (\lambda + \mu) H - (\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) \partial_t.$$

W prawych stronach równań (7.11)–(7.13) występują jedynie źródła \mathbf{X}, W_1, W_2 . Wprowadźmy następującą reprezentację funkcji $\mathbf{u}, \theta_1, \theta_2$:

$$(7.14) \quad \mathbf{u} = -\Omega \boldsymbol{\chi} + \text{grad div } \square_1 M \boldsymbol{\chi} - P_1 \text{ grad } \psi_1 - P_2 \text{ grad } \psi_2,$$

$$(7.15) \quad \theta_1 = -\square_2 P_1 \partial_t \text{ div } \boldsymbol{\chi} - \square_1 H_2 \psi_1 - \square_1 \Gamma \psi_2,$$

$$(7.16) \quad \theta_2 = -\square_2 P_2 \partial_t \text{ div } \boldsymbol{\chi} - \square_1 \Gamma \psi_1 - \square_1 H_1 \psi_2.$$

Wprowadzając powyższą reprezentację do równań (7.11)–(7.13), otrzymamy proste równania falowe

$$(7.17) \quad \square_2 \Omega \boldsymbol{\chi} = \mathbf{X}, \quad \Omega \psi_1 = W_1, \quad \Omega \psi_2 = W_2.$$

Rozwiązanie tych równań daje funkcje $\boldsymbol{\chi}, \psi_1, \psi_2$. Wstawienie tych funkcji do reprezentacji (7.14)–(7.16) prowadzi do wyznaczenia funkcji $\mathbf{u}, \theta_1, \theta_2$.

Przedstawiony tu sposób mieści w sobie szereg przypadków szczególnych. Przykładowo, jeśli mamy do czynienia z dyfuzją substancji do ciała przy jednoczesnym zachowaniu warunków izotermiczności ($\theta_1 = 0$), to do dyspozycji stoi nam układ równań:

$$(7.18) \quad \square_2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{ grad div } \mathbf{u} + \mathbf{X} = \gamma_2 \text{ grad } \theta_2,$$

$$(7.19) \quad D_2 \theta_2 = \gamma_2 \partial_t \text{ div } \mathbf{u} - W_2.$$

Postępując się reprezentacją

$$(7.20) \quad \mathbf{u} = -H_2 \boldsymbol{\chi} + \text{grad div } [(\lambda + \mu) D_2 - \gamma_2^2 \partial_t] \boldsymbol{\chi} - \gamma_2 \text{ grad } \psi_2,$$

$$(7.21) \quad \theta_2 = -\gamma_2 \square_2 \partial_t \text{ div } \boldsymbol{\chi} - \square_1 \psi_2,$$

dochodzimy do równań falowych

$$(7.22) \quad \square_2 H_2 \boldsymbol{\chi} = \mathbf{X}, \quad H_2 \psi_2 = W_2.$$

Interesujące są związki między funkcjami ϕ, ψ a funkcjami χ, ψ_1, ψ_2 . Otrzymuje się je z rozpatrzenia jednorodnych równań falowych:

$$(7.23) \quad \square_2 \Omega \chi = 0, \quad \Omega \psi_1 = 0, \quad \Omega \psi_2 = 0.$$

Rozwiązanie równania (7.23)₁ przyjmujemy w postaci

$$(7.24) \quad \chi = \chi' + \chi''.$$

Funkcje χ', χ'' spełniają, w myśl twierdzenia Boggio, równania:

$$(7.25) \quad \Omega \chi' = 0, \quad \square_2 \chi'' = 0.$$

Wstawiając (7.24) do reprezentacji (7.14), mamy

$$(7.26) \quad \mathbf{u} = -\Omega \chi'' + \text{grad} \square_1 M(\chi' + \chi'') - P_1 \text{grad} \psi_1 - P_2 \text{grad} \psi_2$$

i przekształcając powyższe wyrażenie do postaci (7.4), otrzymujemy

$$(7.27) \quad \phi = -P_1 \psi_1 - P_2 \psi_2 + \square_1 M \text{div} \chi',$$

$$(7.28) \quad \psi = -\text{rot} \square_1 M \chi''.$$

Dowodzi się, że zarówno reprezentacja (7.4) jak i (7.14)–(7.16) prowadzą do rozwiązań kompletnych [14]. Zostało ostatnio przez FICHERA [15, 16] udowodnione twierdzenie o jednoznaczności, twierdzenie o istnieniu rozwiązań układu równań (7.1)–(7.3).

Wreszcie zostały ostatnio [13] wyprowadzone twierdzenia ogólne, zasada prac wirtualnych oraz twierdzenie o wzajemności prac. Zwłaszcza ostatnie twierdzenie może mieć znaczenie przy poszukiwaniu rozwiązań przy użyciu funkcji Greena.

Równania termodyfuzji stanowią rozszerzenie równań sprzężonej termosprężystości. Równania te stanowią nowy typ równań fizyki matematycznej. Układ równań jest bowiem hiperboliczny ze względu na część niewiadomych funkcji, a paraboliczny ze względu na pozostałe funkcje.

Jednak poza znaczeniem matematycznym, ważny jest aspekt mechaniczny — opisanie zjawiska termodyfuzji. Dodać trzeba, że ze zbliżaniem się do rzeczywistości model nasz będzie się znacznie komplikował. Trzeba będzie odejść od niektórych poczynionych założeń. Jednym z założeń tu poczynionych jest stałość współczynnika dyfuzji. Ale tylko w nielicznych przypadkach założenie to może się ostać; przeważa zależność współczynnika od koncentracji, co czyni od razu równanie dyfuzji nieliniowym. W przyszłości uwzględnić trzeba będzie działanie reakcji chemicznych, co znacznie komplikuje model przez wprowadzenie członów nieliniowych. Dalszym istniejącym tu ograniczeniem jest założenie układu dwuskładnikowego. Co prawda włączenie wielu składników podwyższa trudności matematyczne rozwiązania, nie nastęrcza jednak dodatkowych trudności pojęciowych.

Literatura cytowana w tekście

1. С. Підстригач, *Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі*. Академія наук УРСР, 2 (1961).
2. Я. С. Подстригач, В. С. Павлина, *Основные уравнения плоских вопросов термодифузії*, Прикладная Механика, 3 (1965).

3. Я. С. Подстригач, В. С. Павлина, *Диффузионные процессы в неравномерно нагретом деформируемом слое*, Вопросы механики реального твердого тела, вып. 1, изд. АН УССР, Киев 1962.
4. Я. С. Підстригач, В. С. Павлина, *Дифузія в нерівномірно нагрітому деформованому шарі при повноті масообміну з оточуючим середовищем*, Український фізичний журнал, 6, 7 (1962).
5. Я. С. Подстригач, В. С. Павлина, *Диффузионные процессы в нагретом деформируемом шаре*, Вопросы механики реального твердого тела, изд. 2, Киев 1964.
6. В. С. Павлина, *Влияние неравномерного розподілу температури і деформації на дифузію у тівнескінченному тілі*, Український фізичний журнал, 6, 10 (1965).
7. Я. С. Подстригач, В. С. Павлина, *Влияние процесса диффузии на концентрацию напряжений около кругового отверстия*, Концентрация напряжений, вып. 1, Киев 1965.
8. В. С. Павлина, *О влиянии диффузии на температурные напряжения в окрестности цилиндрической полости*, Физико-химическая механика материалов, 4 (1965).
9. Я. С. Подстригач, В. С. Павлина, Р. Н. Швец, *К теории реологических моделей твердых тел*, Физико-химическая механика материалов, 3 (1970).
10. Я. С. Підстригач, В. С. Павлина, *Загальні стітвідношення термодинаміки твердих розчинів*, Український фізичний журнал, 5, 6 (1970).
11. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
12. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966.
13. W. NOWACKI, *Dynamic problems of thermodiffusion in elastic solids*, Proc. Vibr. Probl., 15, 2 (1974).
14. W. NOWACKI, *Stress functions in thermodiffusion in solids. Księga jubileuszowa prof. Mauro Picone*, (w druku).
15. G. FICHERA, *Uniqueness, existence and estimate of the solution in the dynamical problem of thermodiffusion in an elastic solid*, Arch. of Mech., 26, 5 (1974).
16. G. FICHERA, *Existence theorems in elasticity*, Handbuch der Physik, 2, 6a (1972).

Р е з ю м е

ТЕРМОДИФФУЗИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

В настоящей обзорно-проблемной работе представлены предположения, зависимости и основные уравнения термодиффузии в твердом теле, в трактовке Ю. С. Подстригача. Рассмотрены термодинамические основы и некоторые термодинамические неравенства рассматриваемой теории.

Сложная система уравнений термодиффузии, описывающих перемещения тела и термодинамический потенциал, благодаря введению упругих потенциалов и представлений типа Галеркина, сведена к более простым волновым уравнениям.

S u m m a r y

THERMODIFFUSION IN SOLIDS

The paper of a problem-review character presents the assumptions, relations and basic equations of thermodiffusion in solids as approached by J. S. Podstrigač. Thermodynamic foundations and certain thermodynamic inequalities are discussed. The complicated system of thermodiffusion equations describing the field of displacements and chemical potential of the body are reduced to wave equations of a comparatively simple form owing to the introduction of elastic potentials and a Galerkin-type representation.

INSTYTUT MECHANIKI
UNIWEYSYTET WARSZAWSKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1974 r.

ROZWÓJ MECHANIKI ANALITYCZNEJ W PRACACH A. PRZEBORSKIEGO
I A. WUNDHEILERA

ASZOT TIGRANOWICZ GRIGORIAN, BORYS NAUMOWICZ FRADLIN (MOSKWA)

Uczeni polscy A. PRZEBORSKI i A. WUNDHEILER wnieśli wybitny wkład do rozwoju mechaniki.

Udziałem A. PRZEBORSKIEGO jest rozszerzenie zasady d'Alemberta-Lagrange'a na dynamikę układów mechanicznych z nieliniowymi nieholonomicznymi więzami pierwszego rodzaju oraz sformułowanie dla tego rodzaju układu uogólnionych równań dynamicznych typu równań Maggi.

A. WUNDHEILER był jednym z twórców mechaniki analitycznej układów holonomicznych i nieholonomicznych, opartej na fundamentach współczesnej geometrii różniczkowej i rachunku tensorowego.

Intencją autorów niniejszej pracy jest przedstawienie czytelnikowi krótkiego przeglądu historycznego podstawowych prac A. PRZEBORSKIEGO i A. WUNDHEILERA w dziedzinie mechaniki analitycznej.

1. A. Przeborski jako jeden z twórców nieliniowej mechaniki nieholonomicznej.
Rozwój idei A. Przeborskiego w pracach M. F. Szulgina

PRZEBORSKI [1, 5,6] rozpatruje ruch układu punktów materialnych, na które nałożone są holonomiczne lub nieholonomiczne więzy pierwszego lub drugiego rodzaju, których równania

$$(1) \quad f_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p; p < 3n)$$

mogą być algebraicznymi związkami pomiędzy współrzędnymi x_j ($j = 1, 2, \dots, 3n$) punktów układu, lub też równaniami różniczkowymi pierwszego lub drugiego rzędu, liniowymi bądź nieliniowymi względem pochodnych \dot{x}_j i \ddot{x}_j .

Zapisując równania ruchu w postaci Newtona

$$(2) \quad m_j \ddot{x}_j = X_j + R_j$$

lub w postaci d'Alemberta-Lagrange'a

$$(3) \quad (m_j \ddot{x}_j - X_j - R_j) \alpha_j = 0,$$

gdzie α_j są dowolnymi liczbami, i przyjmując, że znany jest charakter realizacji więzów, tak aby ich reakcje R_j można było rozpatrywać jako funkcje w postaci

$$(4) \quad R_j = R_j(t, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, \lambda_r), \\ (k = 1, 2, \dots, 3n; r = 1, 2, \dots, s),$$

gdzie λ_r są parametrami zależnymi od przyłożonych sił, rozpatrzmy zagadnienie określenia reakcji więzów i zbudowania różniczkowych równań ruchu układu.

Zagadnienie to oczywiście da się rozwiązać jedynie, gdy $s = p$. Jeżeli funkcje (4) są liniowe względem parametrów λ_r , to liniowymi w stosunku do nich będą również równania wyznaczające te parametry.

Niech

$$(5) \quad R_j \delta x_j = N_j \delta x_j,$$

gdzie wielkości

$$(6) \quad N_j = N_j(t, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k)$$

są znanymi funkcjami, a przemieszczenia wirtualne δx_r wyznaczone są przez pozostałe przemieszczenia wirtualne δx_ρ ($\rho = s+1, s+2, \dots, 3n$) z równań

$$(7) \quad A_{rj} \delta x_j = 0,$$

gdzie wielkości

$$(8) \quad A_{rj} = A_{rj}(t, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k) \quad (r = 1, 2, \dots, s; s = p)$$

są znanymi funkcjami.

Z (5) i (7) wynika, że

$$(9) \quad R_j = N_j + \lambda_r A_{rj}.$$

Jeżeli związki (1) są holonomiczne lub nieholonomiczne pierwszego rzędu, lub nieholonomiczne drugiego rzędu, liniowe względem przemieszczeń \ddot{x}_k , to parametry λ_r wyznaczone są przez układ równań liniowych

$$(10) \quad \frac{1}{m_j} \frac{\partial f_r}{\partial \xi_j} (X_j + N_j + \lambda_i A_{ij}) + \omega_r = 0,$$

gdzie odpowiednio dla wskazanych rodzajów więzów

$$(11) \quad \xi_j = \begin{cases} x_j, \\ \dot{x}_j, \\ \ddot{x}_j, \end{cases}$$

a wielkość

$$(12) \quad \omega_r = \omega_r(t, x_j, \dot{x}_j)$$

przedstawia określoną funkcję.

Niech na więzy nałożone na układ składa się m holonomicznych, h nieholonomicznych pierwszego rzędu, g nieholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem składowych przyspieszeń

$$(13) \quad f_\alpha = 0,$$

$$(14) \quad f_\beta = 0,$$

$$(15) \quad f_\gamma = 0,$$

($\alpha = 1, 2, \dots, m; \beta = m+1, m+2, \dots, m+h; \gamma = m+h+1, m+h+2, \dots, m+h+g = p$), przy czym równania (15) na mocy związków

$$(16) \quad x_j = x_j(t, q_i)$$

można przedstawić w postaci

$$(17) \quad \dot{q}_\omega = \dot{q}_\omega(t, q_\varepsilon, r_\lambda), \quad (\omega, \varepsilon = 1, 2, \dots, \mu; \lambda = 1, 2, \dots, \nu = \mu - h),$$

gdzie r_λ są pewnymi parametrami, które na mocy związków (15)–(17) określone są przy pomocy równań różniczkowych

$$(18) \quad \dot{r}_l = \dot{r}_l(t, q_\varepsilon, r_\lambda, s_u), \quad (l = 1, 2, \dots, \nu; u = 1, 2, \dots, \nu - g),$$

zależnych od innych parametrów s_u .

Skorzystajmy z ogólnego równania dynamiki (3), w których zgodnie ze związkami (7) położymy $\alpha_j = \delta x_j$, oraz dołączymy doń dowolne równania

$$(19) \quad A_{\rho+v, j} \delta x_j = \delta \sigma_v, \quad (v = 1, 2, \dots, 3n - p = \varrho),$$

gdzie $\delta \sigma_v$ są dowolnymi liczbami, a współczynniki

$$(20) \quad A_{\rho+v, j} = A_{\rho+v, j}(t, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k)$$

na mocy (16)–(20) można rozpatrywać jako funkcje

$$(21) \quad A_{\rho+v, j} = A_{\rho+v, j}(t, q_\varepsilon, r_\lambda, s_u).$$

Z (7) i (19) otrzymamy

$$(22) \quad \delta x_j = a_{jv} \delta \sigma_v,$$

gdzie wielkości a_{jv} określane są z tożsamości

$$(23) \quad A_{lj} a_{jv} = 0,$$

przy czym rząd macierzy $\|a_{jk}\|$, na mocy niezależności równań (7) i (19), równy jest $3n - p$.

Podstawiając do ogólnego równania mechaniki (3) za α_j — wyrażenia (22), uwzględniając (9) i (23), otrzymamy różniczkowe równania ruchu układu nieholonomicznego nie zawierające mnożników

$$(24) \quad (m_j \ddot{x}_j - X_j - N_j) a_{jv} = 0.$$

Równania te na mocy związków (16)–(18) są zależnościami funkcyjnymi względem zmiennych $q_\varepsilon, r_\lambda, s_u$. Jeżeli określić z nich parametry s_u i znalezione wyrażenia podstawić do równań (18) otrzymamy układ $\mu + \nu$ równań różniczkowych (17)–(18) z taką liczbą niewiadomych funkcji

$$(25) \quad q_\omega = q_\omega(t), \quad r_\lambda = r_\lambda(t).$$

W przypadku, gdy na układ nałożone są wyłącznie idealne nieholonomiczne więzy pierwszego rodzaju

$$(26) \quad f_\beta = b_{\beta j}(t, x_k) \dot{x}_j + b_\beta(t, x_k) = 0,$$

tj. $q = 0$, otrzymane dynamiczne równania ruchu Przeborskiego przechodzą w równania Maggi.

Jeżeli w charakterze parametrów r_λ weźmie się uogólnione prędkości \dot{q}^2 , a w charakterze parametrów s_u — uogólnione przyspieszenia \ddot{q}_λ , to dla scharakteryzowania ruchu układu otrzymamy ν równań różniczkowych typu (24) i (18) drugiego rzędu względem q_v i $\mu - \nu$

równań typu (17) pierwszego rzędu względem q_e , razem układ μ równań na określenie μ niewiadomych funkcji:

$$(27) \quad q_\omega = q_\omega(t).$$

W przypadku $\nu = \mu$ spośród poszukiwanych μ równań ruchu wszystkie będą równaniami drugiego rzędu względem funkcji (27).

Okazuje się, że równania Przeborskiego (24) są niezmiennicze względem wyboru dowolnych funkcji (20) w związkach (19).

Gdy zależność pomiędzy składowymi prędkości punktów układu \dot{x}_j i prędkościami Lagrange'a \dot{q}_e jest liniowa, tj.

$$(28) \quad \dot{x}_j = c_{j\omega}(t, q_e) \dot{q}_\omega + c_j(t, q_e),$$

z równań Przeborskiego (24) wynikają równania Appela wyrażone przez funkcję przyspieszeń.

Idee PRZEBORSKIEGO znalazły kontynuację w pracach uczonego radzieckiego M. F. SZULGINA.

SZULGIN otrzymał nader ogólne równania różniczkowe dynamiki nieholonomicznej w współrzędnych Lagrange'a, zawierające jedną funkcję — energię kinetyczną lub energię przyspieszeń. Podstawę wyprowadzenia tych równań stanowi aksjomat o możliwości uwolnienia od więzów oraz zasada najmniejszego wymuszenia Gaussa. Korzystając ze związków (7) i (9), zasadę Gaussa można zapisać w postaci

$$(29) \quad (m_j \ddot{x}_j - X_j - N_j) \delta \ddot{x}_j = 0.$$

Wariacje $\delta \ddot{x}_j$ nie są tu jednak niezależne, a do reakcji więzów wchodzi składowe N_j zależne od własności ruchu mechanicznego i przy znanym charakterze realizacji więzów stanowiące znane funkcje kinematycznych elementów ruchu, oraz składowe

$$(30) \quad N'_j = \lambda_r A_{rj} = \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \dot{x}_j},$$

które, na mocy (7) mają własności reakcji i mogą być określone dopiero w wyniku badania ruchu. Zatem N_j i N'_j można nazwać odpowiednio częścią czynną i bierną reakcji R_j .

Przechodząc do niezależnych współrzędnych Lagrange'a q_μ ($\mu = 1, 2, \dots, k$) wyrazimy zależność (29) w postaci

$$(31) \quad [L_\mu(T) - Q_\mu - P_\mu - Q'_\mu] \delta \dot{q}_\mu = 0,$$

skąd

$$(32) \quad L_\mu(T) = Q_\mu + P_\mu + Q'_\mu,$$

gdzie

$$(33) \quad Q_\mu = X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_\mu}, \quad P_\mu = N_j \frac{\partial x_j}{\partial q_\mu}, \quad L_\mu(T) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu},$$

przy czym, w wyniku badania własności ruchu, wielkości

$$(34) \quad P_\mu^* = P_\mu(t, q_\lambda, \dot{q}_\lambda, \ddot{q}_\lambda) \quad (\mu, \lambda = 1, 2, \dots, k)$$

uważa się za znane.

Na podstawie równań węzłów nieholonomicznych, łatwo jest stwierdzić, że

$$(35) \quad \frac{\partial f_e}{\partial \dot{q}_\mu} \ddot{q}_\mu + \varphi_e = 0,$$

$$(36) \quad \frac{\partial f_e}{\partial \xi_\mu} \delta \ddot{q}_\mu = 0,$$

$$(e = m+1, m+2, \dots, m+h; \quad r = m+1, m+2, \dots, p),$$

gdzie, dla węzłów (14) i (15), mamy odpowiednio

$$(37) \quad \xi_\mu = \dot{q}_\mu, \quad \xi_\mu = \ddot{q}_\mu,$$

a φ_e jest wyrażeniem nie zawierającym przyspieszeń.

Wprowadzając mnożniki węzłów na mocy (33) i (36), otrzymamy

$$(38) \quad Q'_\mu = P_\mu^* + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \xi_\mu}.$$

W ten sposób równania ruchu (32) ostatecznie przyjmują postać

$$(39) \quad L_\mu(T) = Q_\mu + P_\mu + P_\mu^* + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \xi_\mu}.$$

W celu pełnego scharakteryzowania ruchu układu, do równań tych należy dołączyć równania węzłów nieholonomicznych (14)–(15) wyrażone we współrzędnych Lagrange'a.

Oczywistą jest rzeczą, że układ równań (39) jest równoważny układowi uogólnionych równań Gibbsa-Appela z nieokreślonymi mnożnikami

$$(40) \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\mu} = Q_\mu + P_\mu + P_\mu^* + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \xi_\mu}.$$

SZULGIN stawia problem sprowadzenia równań ruchu do najmniejszej ich liczby. Wykazuje on, że z zależności zachodzących pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i współrzędnymi Lagrange'a a składowymi prędkości i przyspieszeń otrzymać można związki

$$(41) \quad \ddot{x}_j = A_{j\nu} \ddot{q}_\nu + A_j,$$

$$(42) \quad \delta \ddot{x}_j = A_{j\nu} \delta \ddot{q}_\nu,$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, r = k-h-g; \quad j = 1, 2, \dots, 3n),$$

gdzie \ddot{q}_ν i $\delta \ddot{q}_\nu$ są wzajemnie niezależnymi przyspieszeniami Lagrange'a i ich wariacjami, a $A_{j\nu}$ i A_j są pewnymi określonymi funkcjami zmiennych t , q_ν i \dot{q}_ν , przy czym z (41) wynika, że

$$(43) \quad A_{j\nu} = \frac{\partial \ddot{x}_j}{\partial \ddot{q}_\nu}.$$

Jeśli wprowadzić teraz do rozważań energię przyspieszeń, to zasada Gaussa (29) na mocy związków (42)–(43) przekształci się do postaci

$$(44) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\nu} - E_\nu - \Delta_\nu \right) \delta \ddot{q}_\nu = 0,$$

skąd otrzymamy równania ruchu układu bez mnożników więzów

$$(45) \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_v} = E_v + \Delta_v,$$

gdzie

$$(46) \quad E_v = A_{jv} X_j, \quad \Delta_v = A_{jv} N_j.$$

Równania te pozostają prawdziwe i w nieholonomicznych współrzędnych. Mogą one być przedstawione w postaci

$$(47) \quad \frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_v} = 0, \quad R = S - E_v \ddot{q}_v,$$

lub

$$(48) \quad L_v(T_0) + \frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_v} = E_v + Q_v.$$

Równania (47) można uważać za uogólnioną zasadę Appela–Meiera, a równania (48) — za uogólnione równania Cenowa.

Jak wykazał to MASŁOW [6] otrzymane równania dają się uogólnić także na przypadek ruchu układów mechanicznych o nieliniowych więzach dowolnego rzędu.

2. Rozwój absolutnej mechaniki reonomicznej w pracach A. Wundheilera

Do WUNDHEILERA [2–4] należy priorytet w dziedzinie budowy absolutnej geometrii i mechaniki reonomicznej. Mając na uwadze potrzeby mechaniki klasycznej zachowuje on uprzywilejowaną rolę czasu i rozpatruje wielowymiarową geometrię odkształconej przestrzeni Riemanna (geometrię reonomiczną), która charakteryzuje się grupą transformacji współrzędnych

$$(49) \quad x^\lambda = x^\lambda(x^\nu, t).$$

Badając ruch nieholonomicznego reonomicznego układu o energii kinetycznej

$$(50) \quad T = \frac{1}{2} a_{\lambda\mu}(x^\nu, t) \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu + a_\lambda(x^\nu, t) \dot{x}^\lambda + \frac{1}{2} A(x^\nu, t),$$

otrzymujemy rozmaitość konfiguracji i czasu V_{n+1} o metryce

$$(51) \quad ds^2 = 2T dt^2 = a_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu + 2a_\lambda dx^\lambda dt + A dt^2.$$

Równanie $t = \text{const}$ określa jednoparametrową rodzinę uprzywilejowanych powierzchni $V_n(t)$ w V_{n+1} .

Według WUNDHEILERA, ruch układu mechanicznego można rozpatrywać jako pewną krzywą w V_{n+1} lub jako ruch odwzorowującego punktu w odkształcalnej przestrzeni $V_n(t)$ o metryce

$$(52) \quad d\sigma^2 = a_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu.$$

WUNDHEILER uważa za niemożliwe identyfikowanie punktów w przestrzeni $V_n(t)$ po transformacji współrzędnych, w związku z tym bada niezmiennosc równań względem ogólnej transformacji o postaci (49). Jednakże ta forma transformacji, zawierająca pa-

rametr t , nie daje możliwości wykorzystania klasycznego rachunku tensorowego. Dlatego też WUNDHEILER proponuje odpowiednie zmodyfikowanie konwencjonalnego aparatu rachunku tensorowego, wprowadzając pojęcie silnych obiektów tensorowych.

Układ n wielkości nazwiemy silnym wektorem, jeżeli transformują się one według zwykłego prawa

$$(53) \quad V^e = \frac{\partial x^e}{\partial x^\omega} V^\omega.$$

Ponieważ

$$(54) \quad dx^e = \frac{\partial x^e}{\partial x^\omega} dx^\omega + \frac{\partial x^e}{\partial t} dt,$$

więc dx^ω nie jest silnym wektorem.

Jeśli f jest silnym skalarzem, to $\frac{\partial f}{\partial x^\omega}$ jest silnym wektorem kowariantnym; w tym przypadku

$$(55) \quad \frac{\partial f}{\partial x^e} = \frac{\partial f}{\partial x^\omega} \cdot \frac{\partial x^\omega}{\partial x^e}.$$

Kowariantny silny wektor

$$(56) \quad v_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} = a_{\lambda\mu} \dot{x}^\mu + a_\lambda$$

nazywa się podłużną prędkością ruchu układu, a kowariantny silny tensor

$$(57) \quad a_{\lambda\mu} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial \dot{x}^\mu}$$

— tensorem podstawowym.

Absolutną różniczką silnego wektora v^λ nazywa się wyrażenie

$$(58) \quad Dv^\lambda = dv^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda v^\nu dx^\mu + \Gamma_\nu^\lambda v^\nu dt.$$

Analogicznie

$$(59) \quad Dv_\nu = dv_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda v_\lambda dx^\mu - \Gamma_\nu^\lambda v_\lambda dt,$$

gdzie

$$(60) \quad \begin{aligned} 2\Gamma_{\omega,\lambda\mu} &= \partial_\lambda a_{\mu\omega} + \partial_\mu a_{\omega\lambda} - \partial_\omega a_{\lambda\mu}, \\ 2\Gamma_{\omega\lambda} &= \partial_t a_{\mu\omega} + \partial_\mu a_{\omega\omega} - \partial_\omega a_{\mu\omega}, \\ \Gamma_{\lambda\mu}^\omega &= a^{\omega\lambda} \Gamma_{\nu\lambda\mu}, \quad \Gamma_\mu^\omega = a^{\omega\nu} \Gamma_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Pochodne silnych wektorów określa się za pomocą wzorów

$$(61) \quad \begin{aligned} \nabla_\omega v^\lambda &= \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\omega} + \Gamma_{\nu\omega}^\lambda v^\nu, \\ \nabla_t v^\lambda &= \frac{\partial v^\lambda}{\partial t} + \Gamma_\nu^\lambda v^\nu - a^\mu \nabla_\mu v^\lambda. \end{aligned}$$

Na przykład dla silnego skalara f otrzymujemy zamiast $\frac{\partial f}{\partial t}$ wyrażenie

$$\nabla_t f = \frac{\partial f}{\partial t} - a^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}.$$

Wprowadzimy także pojęcie tensora rozciągania przestrzeni odkształcalnej $V_n(t)$

$$(62) \quad W_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (\partial_t a_{\lambda\mu} - \nabla_\mu a_\lambda - \nabla_\lambda a_\mu).$$

Tensor ten w pewnym stopniu odzwierciedla specyfikę geometrii reonomicznej. Może być rozpatrywany jako miara rozciągania przestrzeni odkształcalnej $V_n(t)$, ponieważ znika on w przypadku ruchu sztywnego przestrzeni. Jednoczesne znikanie tensora rozciągania i wielkości $A - a_\lambda a^\lambda$ stanowi warunek konieczny i dostateczny skleronomiczności przestrzeni. Okazuje się, że znikanie tensora rozciągania jest warunkiem koniecznym i dostatecznym przemienności przemieszczeń w $V_n(t)$, ponieważ

$$(\delta\bar{\delta} - \bar{\delta}\delta)x^\lambda = W_{\lambda\nu}^\nu (\bar{\delta}x^\nu dt - \delta x^\nu \bar{d}t).$$

Do tej chwili rozpatrywaliśmy holonomiczne parametry x^λ i odpowiednie transformacje w postaci (49). Określiśmy geometrię reonomiczną jako teorię niezmienników grupy transformacji współrzędnych (49). WUNDHEILER rozpatruje również transformacje parametrów nieholonomicznych

$$(63) \quad dq^\lambda = b_i^\lambda(q^\nu, t) dq^i + b^\lambda(q^\nu, t) dt.$$

Teorię niezmienników grupy transformacji współrzędnych nieholonomicznych w postaci (63) nazywa on geometrią reoniehologomiczną. Przemieszczeniom, dla których $dt = 0$, odpowiadają równania

$$(64) \quad dq^\lambda = b_i^\lambda dq^i.$$

Przemieszczenia te tworzą wirtualną reoniehologomiczną podprzestrzeń. Wektor v^λ należy do tej podprzestrzeni wirtualnej, jeżeli daje się przedstawić w postaci

$$(65) \quad v^\lambda = b_i^\lambda v^i.$$

W zastosowaniach geometrii reoniehologomicznej w mechanice znaczną rolę odgrywa wektor

$$(66) \quad S_t = b_i^\lambda \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda (B - b_t b^t) - \nabla_t B_\lambda - B^\omega \nabla_\omega B_\lambda - W_{\lambda\omega} B^\omega \right],$$

który WUNDHEILER nazywa absolutną siłą odśrodkową. We wskazanym wyrażeniu B^ω jest tak zwaną odwrotną prędkością układu reoniehologomicznego

$$(67) \quad B^\omega = b^\omega - b_i^\omega b^i,$$

a B i b_t określone są przez metrykę odpowiedniej przestrzeni

$$(68) \quad ds^2 = b_{ij}(q^r, t) dq^i dq^j + 2b_i(q^r, t) dq^i dt + B(q^r, t).$$

Dla przestrzeni reoniehologomicznej tensor rozciągania wyraża się wzorem

$$(69) \quad W_{ij} = b_i^\lambda b_j^\mu W_{\lambda\mu} - B_t H_{ji}^\lambda,$$

gdzie $W_{\lambda\mu}$ jest tensorem rozciągania dla odpowiedniej nadrzędnej przestrzeni reonomicznej, a H_{ji}^λ — jednym z dwu tensorów krzywizny wymuszonej

$$(70) \quad H_{ji}^\lambda = b_i^\omega b_j^\nu \nabla_\nu b_\omega^\lambda, \quad H_i^\nu = b_i^\omega \nabla_t b_\omega^\nu.$$

Wychodząc z uogólnionej zasady Hamiltona–Ostrogradzkiego w postaci

$$(71) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\bar{\delta}T + Q_i \bar{\delta}x^i) dt = 0,$$

gdzie

$$(72) \quad \bar{\delta} = \delta - \delta t \cdot \frac{d}{dt}$$

oznacza silną wariację przemienną z operacją silnej różniczki δ wzdłuż toru, WUNDHEILER otrzymuje ogólne różniczkowe równania ruchu nieholonomicznego, reonomicznego układu mechanicznego w quasi-współrzędnych w postaci

$$(73) \quad \frac{Dv^i}{dt} + W_k^i v^k = Q_i + S_i,$$

w których każdy człon ma sens mechaniczny i jest wielkością niezmienniczą. Na przykład, w przypadku wirującej płaszczyzny S_i oznacza odśrodkową siłę bezwładności. Stąd nazwa absolutny wektor odśrodkowej. Człon $W_k^i v^k$ można interpretować jako analog siły bezwładności Coriolisa.

Zauważymy na zakończenie, że wspólnie z J. SYNGE i G. VRANCEANU zasługą A. WUNDHEILERA jest zbadanie stateczności równowagi ruchu nieholonomicznego układu mechanicznego przy pomocy metod rachunku tensorowego i geometrii nieholonomicznej.

W ogólności należy zauważyć, że zasadnicze trudności powstałe na drodze do zbadania geometrii wewnętrznej nieholonomicznej rozmaitości udało się przezwyciężyć dopiero w końcu lat czterdziestych uczonemu radzieckiemu W. W. WAGNEROWI w pracy *Geometria różniczkowa rozmaitości nieholonomicznych*, która otrzymała pierwszą nagrodę na VIII międzynarodowym konkursie im. N. I. Łobaczewskiego w Kazaniu w 1937 r.

Budowa geometryczno-różniczkowej aksjomatyki dynamiki klasycznej układów należy do ucznia W. W. WAGNERA — A. W. GOCHMANA (patrz: A. W. Gochman, *Geometryczno-różniczkowe podstawy klasycznej dynamiki układów*, wyd. Uniwersytetu Saratowskiego, Saratów 1969).

Literatura cytowana w tekście

1. A. PRZEBORSKI, *Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeitschr., **36** (1932), 184–194.
2. A. WUNDHEILER, *Ueber die Variationsgleichungen für affine geodätische Linien und nichtholonome, nicht-konservative dynamische Systeme*, Prace Mat.-Fiz., **38** (1931), 129–147.
3. A. WUNDHEILER, *Absolute Bewegungsgleichungen der Mechanik*, Verhandl. des intern. Math. Kongress, Zürich 1932, s. 264–265.
4. A. WUNDHEILER, *Rheonome Geometrie, Absolute Mechanik*, Prace Mat.-Fiz., **40** (1933), 97–142.
5. A. PRZEBORSKI, *Sur les forces dépendant des accélérations*, Compt. rend. d'Acad. Sci. de Paris, **197** (1933).
6. A. PRZEBORSKI, *Wykłady mechaniki teoretycznej*, t. I, II, Warszawa 1930–1935.

Р е з ю м е

РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ТРУДАХ А. ПШЕБОРСКОГО
И А. ВУНДХЕЙЛЕРА

В статье освещается выдающийся вклад двух видных польских ученых А. Пшеборского и А. Вундхейлера в развитие аналитической механики.

А. Пшеборский является одним из основоположников нелинейной неголономной механики. Он распространил на динамику механических систем с нелинейными неголономными связями первого порядка принцип Даламбера-Лагранжа и установил для систем указанного типа обобщенные динамические уравнения. Дальнейшее развитие идеи А. Пшеборского получили в исследованиях советского ученого М. Ф. Шульгина, который установил весьма общие дифференциальные уравнения неголономной динамики в лагранжевых координатах, содержащие одну функцию — кинетическую энергию, или энергию ускорений.

А. Вундхейлер — один из основателей построения аналитической механики голономных и неголономных систем на основе методов современной дифференциальной геометрии и тензорного исчисления. Ему принадлежит приоритет в построении абсолютной реономной геометрии и механики.

S u m m a r y

CONTRIBUTION OF A. PRZEBORSKI AND A. WUNDHEILER
TO THE DEVELOPMENT OF ANALYTICAL MECHANICS

The considerable contributions of A. Przeborski and A. Wundheiler to the development of analytical mechanics are discussed in the paper. A. Przeborski is one of the founders of non-linear anholonomic mechanics: he generalized the d'Alembert-Lagrange principle to the dynamics and mechanical systems with non-linear anholonomic constraints of the first kind and thus derived the generalized dynamic equations for such systems. The ideas of A. Przeborski were further developed by a Soviet scientist M. F. Sulgin who succeeded in obtaining a rather general set of differential equations of non-holonomic dynamics in Lagrangean coordinates involving but one function — the kinetic energy or the acceleration energy.

A. Wundheiler is one of the co-founders of analytical mechanics of holonomic and non-holonomic systems on the basis of the methods of modern differential geometry and tensor calculus. He has to be considered as the first mechanician to construct the absolute rheonomic geometry and mechanics.

INSTYTUT HISTORII PRZYRODOZNAWSTWA I TECHNIKI
AKADEMII NAUK ZSRR, MOSKWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 sierpnia 1974 r.

DRGANIA MASZYN O KORPUSACH ODKSZTAŁCALNYCH PODPARTYCH
ELASTYCZNIE NA PODATNEJ KONSTRUKCJI

WIESŁAW W O D Z I C K I (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Znajomość drgań układu złożonego z maszyny mocowanej elastycznie na fundamencie lub konstrukcji podpierającej, przed zmontowaniem całości układu, posiada ważne znaczenie praktyczne. Umożliwia to osiągnięcie wymaganych coraz to wyższych parametrów technicznych i technologicznych takich układów, zwiększenie ich trwałości i niezawodności, poprawę warunków pracy i bezpieczeństwa obsługi oraz stosowanie czulej aparatury kontrolno-pomiarowej.

Dynamika maszyn o korpusach sztywnych pracujących na sztywnym fundamencie znalazła już dość pełne opracowanie w takich pracach, jak [1, 2, 3]. Natomiast uwzględnienie podatności konstrukcji podpierającej ma miejsce w opracowaniach [4, 5, 6, 7, 8].

W wielu jednak przypadkach ważne znaczenie poznawcze, jak i praktyczne ma uwzględnienie podatności korpusu samej maszyny, gdyż dla maszyn szybkobieżnych lub o dużej mocy jednostkowej dynamika układu w równej mierze zależy od odkształcalności korpusu maszyny, co i podatności konstrukcji wsporczej lub podłoża.

Dlatego też celem tej pracy, która stanowi część pracy [9], było opracowanie wystarczająco dokładnej i możliwie ogólnej metody wyznaczania drgań układu złożonego z maszyny o korpusie odkształcalnym podpartej za pośrednictwem elementów elastycznych na podatnej konstrukcji, gdy drgania wywołuje wymuszenie generowane przez pracującą maszynę.

Postawiony cel wymagał opracowania:

- a) metody wyznaczania charakterystyki dynamicznej dowolnej maszyny o podatnym korpusie, traktowanej jako swobodna w przestrzeni,
- b) metody wyznaczania charakterystyki dynamicznej dowolnej konstrukcji podpierającej maszynę,
- c) metody uwzględniania dowolnego złożonego układu wymuszenia, jaki generuje podczas swej pracy maszyna,
- d) metody analizy drgań rozpatrywanego układu.

Dla scharakteryzowania pod względem dynamicznym liniowego układu mechanicznego służą tzw. współczynniki podatności dynamicznej zwane inaczej receptancjami, które definiują się jako stosunek uogólnionego przemieszczenia dowolnego punktu układu do uogólnionego wymuszenia, które wywołało to przemieszczenie. Używając do zapisu liczb zespolonych można wyrazić to wzorem

$$(1.1) \quad \bar{a}_{x_j y_k} = \frac{\bar{x}_j}{\bar{P}_{y_k}} = \frac{X_j e^{i(\omega t + \varphi_{kj})}}{P_{y_k} e^{i\omega t}} = \frac{X_j}{P_{y_k}} e^{i\varphi_{kj}},$$

gdzie ω — oznacza częstość wymuszenia, P_{yk} — amplitudę wymuszenia, X_j — amplitudę przemieszczenia, φ_{kj} — kąt przesunięcia fazowego.

W przypadku działania wymuszeń na N punktów układu wiąże się w oparciu o zasadę superpozycji przemieszczenia z wymuszeniami za pomocą układu równań, który w postaci macierzowej można zapisać:

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{12} & \dots & \bar{\alpha}_{1N} \\ \bar{\alpha}_{21} & \bar{\alpha}_{22} & \dots & \bar{\alpha}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{N1} & \bar{\alpha}_{N2} & \dots & \bar{\alpha}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_N \end{bmatrix}$$

lub w zapisie symbolicznym

$$(1.3) \quad \{\bar{x}_j\} = [\bar{\alpha}_{jk}] \{\bar{P}_k\},$$

gdzie $[\bar{\alpha}_{jk}]$ jest macierzą podatności dynamicznej, inaczej receptancji i stanowi charakterystykę dynamiczną układu.

Często przy analizie korzystniej jest wprowadzić wymuszenia jako funkcje przemieszczeń. Uzyskuje się to z przekształcenia (1.3) do postaci

$$(1.4) \quad \{\bar{P}_j\} = [\bar{\alpha}_{jk}]^{-1} \{\bar{x}_k\}.$$

Macierz $[\bar{\alpha}_{jk}]^{-1}$ nazywa się macierzą sztywności dynamicznej lub inaczej macierzą impedancji i oznaczono ją dalej symbolem $[\bar{a}_{jk}]$. Należy zaznaczyć, że jedynie dla układu o jednym stopniu swobody impedancja jest odwrotnością receptancji i można ją wyznaczyć doświadczalnie, natomiast dla układów o wielu stopniach swobody doświadczalnie wyznacza się macierz receptancji i na jej podstawie oblicza się macierz impedancji, stosując zależność

$$(1.5) \quad [\bar{a}_{jk}] = [\bar{\alpha}_{jk}]^{-1}.$$

2. Analiza teoretyczna

Przystępując do analizy teoretycznej przyjęto ogólny model zagadnienia odpowiadający właściwościom układu: maszyna o korpusie odkształcalnym — elementy elastyczne — podatna konstrukcja podpierająca, którego schemat funkcjonalny pokazuje rys. 1. Na rysunku tym zaznaczono poszczególne możliwości ruchu oraz odpowiadające im sztywności i tłumienie elementów elastycznych.

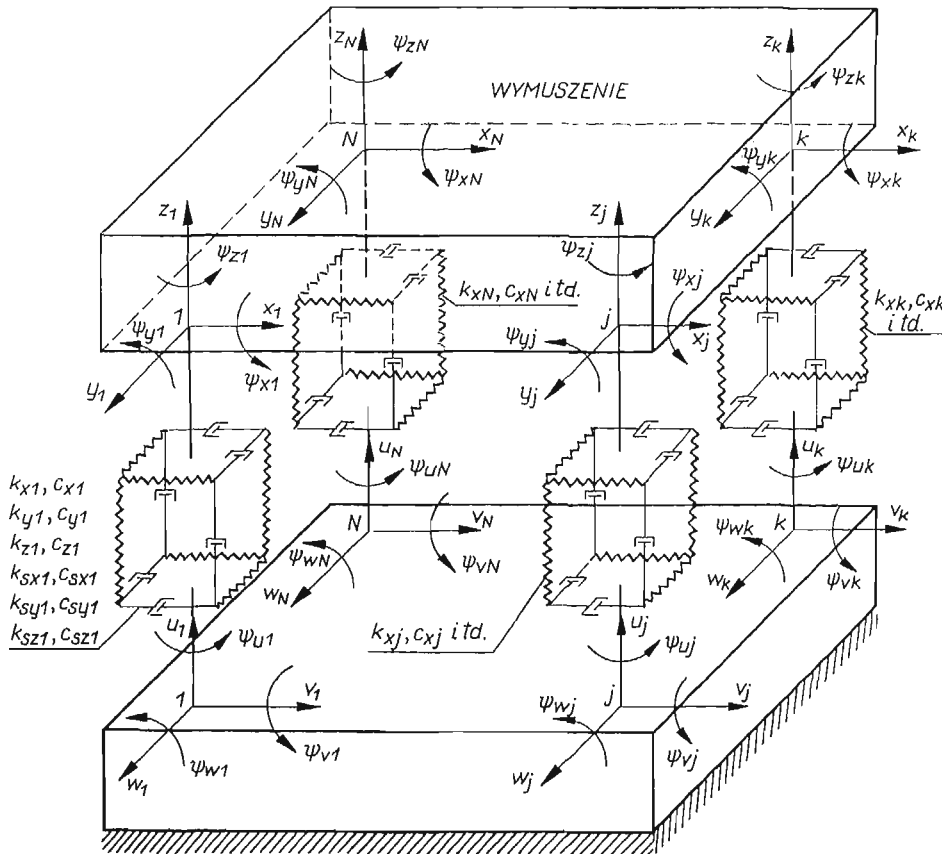
Model ten posiada następujące cechy:

— korpus maszyny oraz konstrukcja podpierająca traktowane są jako układy liniowe odkształcalne o ciągłym rozkładzie masy, sztywności i tłumienia,

— korpus maszyny podparty jest na konstrukcji w dowolnych N punktach liniowymi bezmasowymi elementami pośredniczymi, charakteryzującymi się sztywnością i tłumieniem. Dla elementów tych przyjęto model Voigta,

— zamocowanie elementów pośredniczych z korpusem maszyny, jak i z konstrukcją podpierającą zapewnia trzy możliwe przemieszczenia liniowe oraz trzy możliwe obroty,

— na korpus maszyny działa wymuszenie w postaci układu sił i momentów okresowych nieharmonicznych.

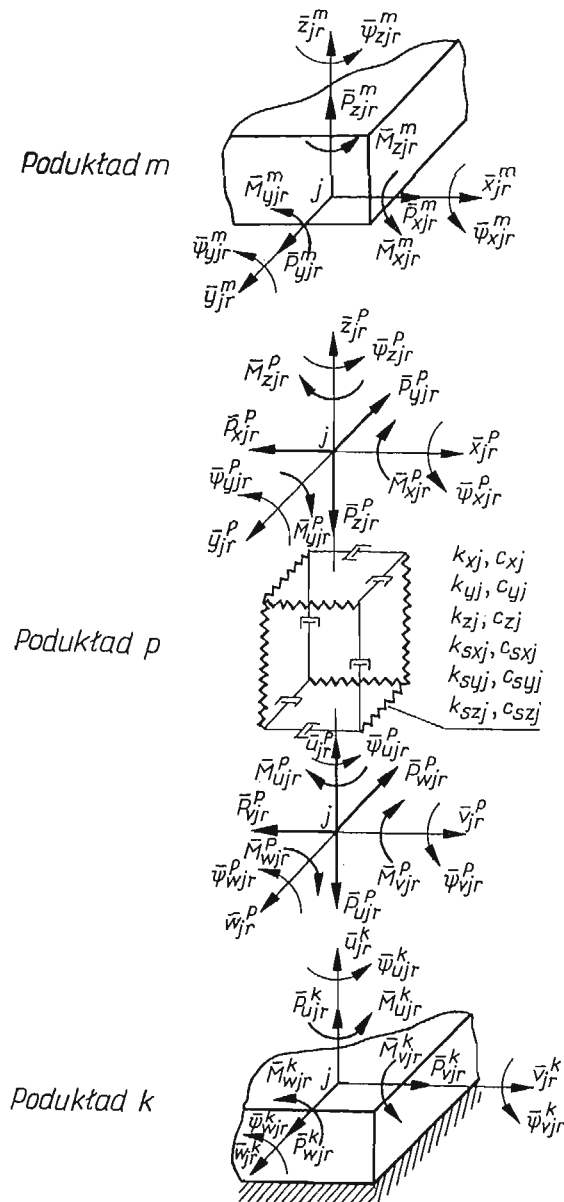


Rys. 1. Schemat funkcjonalny układu: maszyna o korpusie odkształcalnym — elementy elastyczne — podatna konstrukcja podpierająca

Omawiany wyżej model teoretyczny, przy założeniu małych drgań wokół położenia równowagi statycznej oraz niewielkich w tym zakresie odchyłek od liniowości, stanowi odpowiednik spotykanych w praktyce przypadków układów maszynowych, w których maszyna o odkształcalnym korpusie, wykazującym wewnętrzne tłumienie, jest podparta elastycznymi podkładkami lub amortyzatorami specjalnej konstrukcji na odkształcalnej i wykazującej tłumienie konstrukcji podpierającej. Dla układów liniowych, dzięki możliwości stosowania zasady superpozycji, przemieszczenie wywołane wymuszeniem okresowym znajduje się jako sumę przemieszczeń wywołanych kolejnymi składnikami harmo-

nicznymi wymuszenia. Wystarczy więc, aby metoda ogólna rozwiązania zagadnienia pozwalała otrzymać rozwiązanie dla dowolnej r -tej harmonicznej wymuszenia.

W przypadkach praktycznych bardzo często wystarcza ograniczenie szeregu harmoniczných do dwóch lub trzech składników z uwagi na fakt, że amplitudy wyższych harmoniczných sił lub momentów generowanych przez maszyny są małe w porównaniu z amplitudami pierwszych dwóch lub trzech harmoniczných.



Rys. 2. Rozbicie układu z rys. 1 na podukłady dla j -tego punktu podparcia

Układ drgający o schemacie funkcjonalnym przedstawionym na rys. 1 można rozbić na trzy podukłady, mianowicie:

- podukład m — maszyna o korpusie odkształcalnym,
- podukład p — układ elastycznych elementów podpierających,
- podukład k — podatna konstrukcja podpierająca.

Należy przy tym uwzględnić wzajemne oddziaływanie na siebie tych podukładów w czasie drgań.

Rysunek 2 pokazuje rozbitcie w j -tym punkcie z zaznaczeniem poszczególnych możliwości ruchu oraz sił i momentów wzajemnego oddziaływania dla r -tej harmoniczej wymuszenia. Zachodzą przy tym następujące warunki ciągłości i równowagi:

a) dla j -tego punktu styku elementu z maszyną:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \bar{x}_{jr} &= \bar{x}_{jr}^m = \bar{x}_{jr}^p, \\ \bar{y}_{jr} &= \bar{y}_{jr}^m = \bar{y}_{jr}^p, \\ \bar{z}_{jr} &= \bar{z}_{jr}^m = \bar{z}_{jr}^p, \\ \bar{\psi}_{xjr} &= \bar{\psi}_{xjr}^m = \bar{\psi}_{xjr}^p, \\ \bar{\psi}_{yjr} &= \bar{\psi}_{yjr}^m = \bar{\psi}_{yjr}^p, \\ \bar{\psi}_{zjr} &= \bar{\psi}_{zjr}^m = \bar{\psi}_{zjr}^p; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{xjr}^m &= -\bar{P}_{xjr}^p, \\ \bar{P}_{yjr}^m &= -\bar{P}_{yjr}^p, \\ \bar{P}_{zjr}^m &= -\bar{P}_{zjr}^p, \\ \bar{M}_{xjr}^m &= -\bar{M}_{xjr}^p, \\ \bar{M}_{yjr}^m &= -\bar{M}_{yjr}^p, \\ \bar{M}_{zjr}^m &= -\bar{M}_{zjr}^p; \end{aligned}$$

b) dla j -tego punktu styku elementu z konstrukcją podpierającą:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \bar{v}_{jr} &= \bar{v}_{jr}^k = \bar{v}_{jr}^p, \\ \bar{w}_{jr} &= \bar{w}_{jr}^k = \bar{w}_{jr}^p, \\ \bar{u}_{jr} &= \bar{u}_{jr}^k = \bar{u}_{jr}^p, \\ \bar{\psi}_{vjr} &= \bar{\psi}_{vjr}^k = \bar{\psi}_{vjr}^p, \\ \bar{\psi}_{wjr} &= \bar{\psi}_{wjr}^k = \bar{\psi}_{wjr}^p, \\ \bar{\psi}_{ujr} &= \bar{\psi}_{ujr}^k = \bar{\psi}_{ujr}^p; \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{vjr}^k &= -\bar{P}_{vjr}^p, \\ \bar{P}_{wjr}^k &= -\bar{P}_{wjr}^p, \\ \bar{P}_{zjr}^k &= -\bar{P}_{zjr}^p, \\ \bar{M}_{vjr}^k &= -\bar{M}_{vjr}^p, \\ \bar{M}_{wjr}^k &= -\bar{M}_{wjr}^p, \\ \bar{M}_{ujr}^k &= -\bar{M}_{ujr}^p. \end{aligned}$$

Przemieszczenia j -tego punktu podukładu m (maszyna) można wyrazić wzorami (2.5).

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{Jr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{x}_{wJr}, \\
\bar{y}_{Jr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{y}_{wJr}, \\
\bar{z}_{Jr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{z}_{wJr}, \\
\bar{\psi}_{xJr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{\psi}_{wxJr}, \\
\bar{\psi}_{yJr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{\psi}_{wyJr}, \\
\bar{\psi}_{zJr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{\psi}_{wzJr}.
\end{aligned}$$

(2.5)

Symbole $\bar{\alpha}_{jkr}$ oznaczają odpowiednie receptancje swobodnej maszyny, a symbole $\bar{x}_{wjr}, \bar{y}_{wjr}, \bar{z}_{wjr}, \bar{\psi}_{wxjr}, \bar{\psi}_{wyjr}, \bar{\psi}_{wzjr}$ oznaczają odpowiednie przemieszczenia w rozważanych punktach wywołane na swobodnej maszynie działaniem wymuszenia generowanego przez pracującą maszynę.

Z uwagi na identyczny charakter równań układ (2.5), dla uproszczenia zapisu, a także programowania obliczeń na maszynie cyfrowej przedstawiono w zapisie skróconym

$$(2.6) \quad \bar{z}_{jr}^m = \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{jkr} \bar{P}_{kr}^m + \bar{z}_{wjr}, \quad j = 1, \dots, n,$$

gdzie n jest wielokrotnością liczby punktów podparcia N .

W najogólniejszym przypadku $n = 6N$, gdy w układzie (2.5) rozpatruje się występowanie wszystkich rodzajów przemieszczeń, sił i momentów. Wyrażenie (2.6) w zapisie macierzowym ma postać

$$(2.7) \quad \{\bar{z}_{jr}^m\} = [\bar{\alpha}_{jkr}] \{\bar{P}_{kr}^m\} + \{\bar{z}_{wjr}\},$$

gdzie macierz $[\bar{\alpha}_{jkr}]$ jest macierzą receptancji maszyny swobodnej. Po uwzględnieniu w (2.7) zależności (2.1) i przekształceniu otrzymuje się

$$(2.8) \quad \{\bar{P}_{kr}^m\} = [\bar{a}_{jkr}] (\{\bar{z}_{jr}\} - \{\bar{z}_{wjr}\}),$$

gdzie macierz $[\bar{a}_{jkr}]$ jest macierzą impedancji maszyny swobodnej.

Podobnie jak poprzednio, dla maszyny przemieszczenia j -tego punktu podukładu k (konstrukcja podpierająca) można wyrazić macierzowo

$$(2.9) \quad \{\bar{u}_{jr}^k\} = [\bar{\beta}_{jkr}] \{\bar{P}_{kr}^k\},$$

gdzie macierz $[\bar{\beta}_{jkr}]$ jest macierzą podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej.

Uwzględniając w (2.9) zależności (2.3) po przekształceniu otrzymuje się

$$(2.10) \quad \{\bar{P}_{kr}^k\} = [\bar{b}_{jkr}] \{\bar{u}_{jr}\},$$

gdzie macierz $[\bar{b}_{jkr}]$ jest macierzą sztywności dynamicznej konstrukcji podpierającej.

Tak więc wzory (2.8) i (2.10) pozwalają wyznaczyć macierze uogólnionych sił występujących w punktach styku maszyny i konstrukcji podpierającej z elementami elastycznymi w zależności od macierzy uogólnionych przemieszczeń tych punktów i macierzy sztywności dynamicznej.

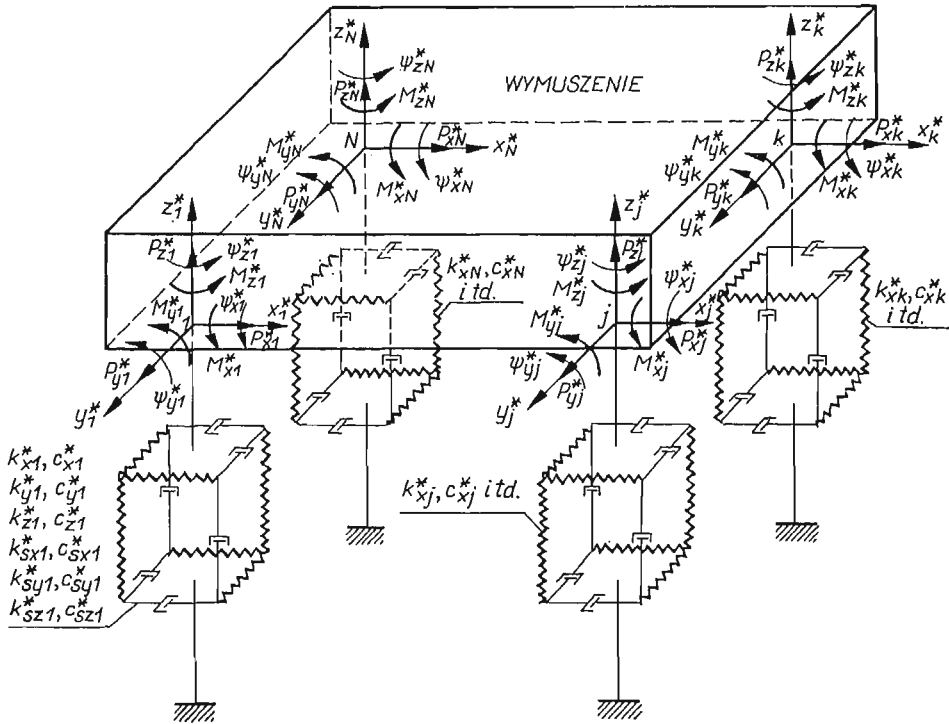
Wyznaczanie charakterystyki dynamicznej maszyny wymaga opracowania metody pośredniej, albowiem zrealizowanie swobodnego w przestrzeni stanu maszyny jest praktycznie niemożliwe. Dlatego też rozpatruje się układ pomocniczy, którego schemat funkcjonalny wraz z oznaczeniem możliwych ruchów w miejscach podparcia pokazuje rys. 3.

Odkształcalny korpus maszyny podpira się w rozpatrywanych poprzednio punktach liniowymi elementami elastycznymi, lecz o znanych parametrach k_j^* (sztywność) i c_j^* (tłumienie).

Przyjęto dalej, że na układ, oprócz wymuszenia generowanego przez pracującą maszynę, działa w punktach podparcia maszyny znane dodatkowe zewnętrzne wymuszenie okresowe, które na rys. 3 oznaczono symbolami \bar{P}_j^* i \bar{M}_j^* z odpowiednimi indeksami kierunków.

Układ z rys. 3 można rozbić na dwa podukłady:

- podukład m — maszyna o korpusie odkształcalnym,
- podukład p^* — elementy elastyczne o znanych parametrach.



Rys. 3. Schemat funkcjonalny układu pomocniczego do wyznaczania charakterystyki dynamicznej maszyny

Na rys. 4 pokazano to dla j -tego punktu wraz z oznaczeniem możliwych przemieszczeń liniowych i możliwych obrotów oraz występujących sił i momentów.

Stosując zapis skrócony, warunki ciągłości i równowagi dla j -tego punktu rozdzielania można zapisać w postaci równości macierzy

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \{\bar{z}_{jr}^*\} &= \{\bar{z}_{jr}^{m*}\} = \{\bar{z}_{jr}^{p*}\}, \\ \{\bar{P}_{jr}^{m*}\} &= -\{\bar{P}_{jr}^{p*}\}, \end{aligned} \quad j = 1, \dots, n.$$

Przemieszczenia j -tego punktu podparcia podukładu m (maszyna) dają się zapisać

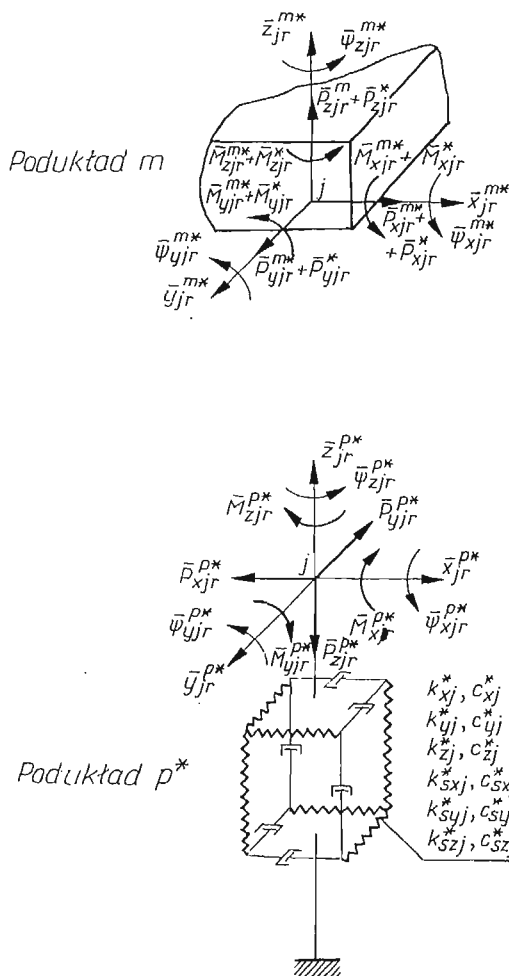
$$(2.12) \quad \{\bar{z}_{jr}^{m*}\} = [\bar{\alpha}_{jkr}] \{\bar{P}_{kr}^{m*}\} + \{\bar{P}_{kr}^*\} + \{\bar{z}_{wjr}\},$$

natomiast przemieszczenia j -tego punktu podukładu p jako

$$(2.13) \quad \{\bar{z}_{jr}^{p*}\} = [\bar{\delta}_{jrr}^*] \{\bar{P}_{kr}^{p*}\},$$

gdzie macierz podatności $[\bar{\delta}_{jrr}^*]$ elementów elastycznych o znanych parametrach jest macierzą diagonalną, a jej elementy wyrażają się wzorem

$$(2.14) \quad \bar{\delta}_{jrr}^* = \frac{1}{k_j^* + i\omega c_j^*}.$$



Rys. 4. Rozbicie układu z rys. 3 na podukłady dla j -tego punktu podparcia

Po podstawieniach i przekształceniach wyrażenie (2.12) przybiera postać

$$(I + [\bar{\alpha}_{jkr}] [\bar{\delta}_{jkr}^*]^{-1}) \{\bar{z}_j^*\} = [\bar{\alpha}_{jkr}] \{\bar{P}_{kr}^*\} + \{\bar{z}_{wj}^*\},$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Z kolei rozpatruje się dwa przypadki:

1. W układzie pomocniczym nie występuje wymuszenie generowane przez pracującą maszynę (maszyna nie pracuje), lecz tylko znane wymuszenie zewnętrzne w punktach jej podparcia. Wówczas w (2.15) znika składnik $\{\bar{z}_{wj}^*\}$ i otrzymuje się

$$(2.16) \quad [\bar{\alpha}_{jkr}] = [\bar{\gamma}_{jkr}] (I - [\bar{\delta}_{jkr}^*]^{-1} [\bar{\gamma}_{jkr}])^{-1},$$

gdzie $[\bar{\gamma}_{jkr}]$ jest kwadratową macierzą receptancji układu pomocniczego z rys. 3 i jej elementy mogą być wyznaczone doświadczalnie na tymże układzie pomocniczym.

2. Na układ pomocniczy działa tylko wymuszenie generowane przez pracującą maszynę, przy braku wymuszenia zewnętrznego w punktach podparcia maszyny. Wówczas (2.15) przyjmuje postać

$$(2.17) \quad \{\bar{z}_{wj_r}\} = (I + [\bar{\alpha}_{jkr}][\bar{\delta}_{j_r}^*]^{-1})\{z_{wj_r}^*\},$$

gdzie macierz $\{z_{wj_r}^*\}$ jest kolumnową macierzą przemieszczeń punktów podparcia maszyny w układzie pomocniczym, gdy działa tylko wymuszenie generowane przez pracującą maszynę, a jej elementy wyznacza się doświadczalnie na układzie pomocniczym, jako odpowiednie przemieszczenia punktów podparcia układu pomocniczego wywołane pracą maszyny. Ponieważ wygodniej jest używać macierz sztywności dynamicznej $[\bar{a}_{jkr}]$ dlatego przekształcając (2.16) otrzymuje się

$$(2.18) \quad [\bar{a}_{jkr}] = [\bar{\alpha}_{jkr}]^{-1} = [\bar{\gamma}_{jkr}]^{-1} - [\bar{\delta}_{j_r}^*]^{-1}.$$

Macierz receptancji $[\bar{\beta}_{jkr}]$ konstrukcji podpierającej można wyznaczyć doświadczalnie bezpośrednio na rzeczywistym obiekcie w oparciu o definicję receptancji, a macierz impedancji $[\bar{b}_{jkr}]$ przez odwrócenie macierzy receptancji

$$(2.19) \quad [\bar{b}_{jkr}] = [\bar{\beta}_{jkr}]^{-1}.$$

Związki między siłami i przemieszczeniami dla j -tego elementu elastycznego podparcia, uwzględniając warunki równowagi (2.2) i (2.4), można w zapisie macierzowym wyrazić

$$(2.20) \quad \begin{aligned} -[k_j](\{\bar{z}_{j_r}\} - \{\bar{u}_{j_r}\}) - [c_j](\dot{\{\bar{z}_{j_r}\}} - \dot{\{\bar{u}_{j_r}\}}) &= \{\bar{P}_{j_r}^m\}, \\ [k_j](\{\bar{z}_{j_r}\} - \{u_{j_r}\}) + [c_j](\dot{\{\bar{z}_{j_r}\}} - \dot{\{u_{j_r}\}}) &= \{\bar{P}_{j_r}^k\}, \end{aligned}$$

gdzie $[k_j]$ i $[c_j]$ są diagonalnymi macierzami sztywności i tłumienia elementów elastycznego podparcia, a $\dot{\{\bar{z}_{j_r}\}}$ i $\dot{\{\bar{u}_{j_r}\}}$ kolumnowymi macierzami pochodnych przemieszczeń maszyny i konstrukcji wsporczej.

Podstawiając do (2.20) wyrażenia (2.8) i (2.10) oraz przedstawiając odpowiednie przemieszczenia zespolone w postaci

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \bar{z}_{j_r} &= \bar{Z}_{j_r} e^{i\omega t}, \\ \bar{u}_{j_r} &= \bar{U}_{j_r} e^{i\omega t}, \\ \bar{z}_{wj_r} &= \bar{Z}_{wj_r} e^{i\omega t}, \\ \bar{z}_{wj_r}^* &= \bar{Z}_{wj_r}^* e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

gdzie \bar{Z}_{j_r} , \bar{U}_{j_r} , \bar{Z}_{wj_r} , $\bar{Z}_{wj_r}^*$ są amplitudami zespolonymi rozpatrywanych przemieszczeń, otrzymuje się po uprzednim uproszczeniu przez $e^{i\omega t}$ wyrażenie

$$(2.22) \quad \begin{aligned} ([k_j] + i\omega[c_j] + [\bar{a}_{jkr}])\{\bar{Z}_{j_r}\} - ([k_j] + i\omega[c_j])\{\bar{U}_{j_r}\} &= \{\bar{P}_{wj_r}\}, \\ ([k_j] + i\omega[c_j])\{\bar{Z}_{j_r}\} - ([k_j] + i\omega[c_j] + [\bar{b}_{jkr}])\{\bar{U}_{j_r}\} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.23) \quad \{\bar{P}_{wj_r}\} = ([\bar{a}_{jkr}] + [\bar{\delta}_{j_r}^*]^{-1})\{\bar{Z}_{wj_r}^*\}.$$

(2.26)

$$\begin{bmatrix}
k_1 + a'_{11r} & a'_{12r} & \dots & a'_{1nr} & -k_1 & 0 & \dots & 0 & -(r\omega c_1 + a''_{11r}) & -a''_{12r} & \dots & -a''_{1nr} & r\omega c_1 & 0 & \dots & 0 \\
a'_{21r} & k_2 + a'_{22r} & \dots & a'_{2nr} & 0 & -k_2 & \dots & 0 & -a''_{21r} & -(r\omega c_2 + a''_{22r}) & \dots & -a''_{2nr} & 0 & r\omega c_2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a'_{n1r} & a'_{n2r} & \dots & k_n + a'_{nnr} & 0 & 0 & \dots & -k_n & -a''_{n1r} & -a''_{n2r} & \dots & -(r\omega c_n + a''_{nnr}) & 0 & 0 & \dots & r\omega c_n \\
k_1 & 0 & \dots & 0 & -(k_1 + b'_{11r}); & -b'_{12r} & \dots & -b'_{1nr} & -r\omega c_1 & 0 & \dots & 0 & r\omega c_1 + b''_{11r} & b''_{12r} & \dots & b''_{1nr} \\
0 & k_2 & \dots & 0 & -b'_{21r}; & -(k_2 + b'_{22r}) & \dots & -b'_{2nr} & 0 & -r\omega c_2 & \dots & 0 & b''_{21r} & r\omega c_2 + b''_{22r} & \dots & b''_{2nr} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & k_n & -b'_{n1r} & -b'_{n2r} & \dots & -(k_n + b'_{nnr}) & 0 & 0 & \dots & -r\omega c_n & b''_{n1r} & b''_{n2r} & \dots & r\omega c_n + b''_{nnr} \\
r\omega c_1 + a''_{11r} & a''_{12r} & \dots & a''_{1nr} & -r\omega c_1 & 0 & \dots & 0 & k_1 + a'_{11r} & -a'_{12r} & \dots & a'_{1nr} & -k_1 & 0 & \dots & 0 \\
a''_{21r}; & r\omega c_2 + a''_{22r} & \dots & a''_{2nr} & 0 & -r\omega c_2 & \dots & 0 & a'_{21r} & k_2 + a'_{22r} & \dots & a'_{2nr} & 0 & -k_2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a''_{n1r} & a''_{n2r} & \dots & r\omega c_n + a''_{nnr} & 0 & 0 & \dots & -r\omega c_n & a'_{n1r} & a'_{n2r} & \dots & k_n + a'_{nnr} & 0 & 0 & \dots & -k_n \\
r\omega c_1 & 0 & \dots & 0; & -(r\omega c_1 + b''_{11r}); & -b''_{12r} & \dots & -b''_{1nr} & k_1 & 0 & \dots & 0 & -(k_1 + b'_{11r}) & -b'_{12r} & \dots & -b'_{1nr} \\
0 & r\omega c_2 & \dots & 0 & -b''_{21r}; & -(r\omega c_2 + b''_{22r}) & \dots & -b''_{2nr} & 0 & k_2 & \dots & 0 & -b'_{21r} & -(k_2 + b'_{22r}) & \dots & -b'_{2nr} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & r\omega c_n & -b''_{n1r} & -b''_{n2r} & \dots & -(r\omega c_n + b''_{nnr}); & 0 & 0 & \dots & k_n & -b'_{n1r} & -b'_{n2r} & \dots & -(k_n + b'_{nnr})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
z'_{1r} \\
z'_{2r} \\
\vdots \\
z'_{nr} \\
u'_{1r} \\
u'_{2r} \\
\vdots \\
u'_{nr} \\
z''_{1r} \\
z''_{2r} \\
\vdots \\
z''_{nr} \\
u''_{1r} \\
u''_{2r} \\
\vdots \\
u''_{nr}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
P'_{w1r} \\
P'_{w2r} \\
\vdots \\
P'_{wnr} \\
0 \\
0 \\
\vdots \\
0 \\
P''_{w1r} \\
P''_{w2r} \\
\vdots \\
P''_{wnr} \\
0 \\
0 \\
\vdots \\
0
\end{bmatrix}$$

Przedstawiając symboliczny zapis macierzowy (2.22) w postaci rozwiniętej, po uprzednim rozbiciu zespolonych wyrazów na część rzeczywistą i urojoną

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \bar{Z}_{jr} &= z'_{jr} + iz''_{jr}, \\ \bar{U}_{jr} &= u'_{jr} + iu''_{jr}, \\ \bar{a}_{jkr} &= a'_{jkr} + ia''_{jkr}, \\ \bar{b}_{jkr} &= b'_{jkr} + ib''_{jkr}, \\ \bar{P}_{wjr} &= P'_{wjr} + iP''_{wjr} \end{aligned}$$

otrzymuje się macierzowy zapis (2.26) układu równań służących do obliczenia przemieszczeń punktów podparcia układu z rys. 1. Przy czym amplitudy rzeczywiste oraz kąty przesunięcia fazowego przemieszczeń maszyny i konstrukcji podpierającej dla j -tego punktu podparcia oblicza się ze wzorów

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \bar{Z}_{jr} &= \sqrt{z'^2_{jr} + z''^2_{jr}}; & \operatorname{tg} \varphi_{zjr} &= \frac{z''_{jr}}{z'_{jr}}, \\ \bar{U}_{jr} &= \sqrt{u'^2_{jr} + u''^2_{jr}}; & \operatorname{tg} \varphi_{ujr} &= \frac{u''_{jr}}{u'_{jr}}. \end{aligned}$$

Do rozwiązania układu równań (2.26) ułożono program obliczeń na maszynie cyfrową ODRA 1204.

Omówiona metoda wyznaczania drgań układów maszynowych może odnosić się nie tylko do punktów podparcia, lecz również do każdego dowolnego punktu maszyny czy konstrukcji podpierającej. Postępowanie jest wówczas, analogiczne jak dla j -tego punktu podparcia.

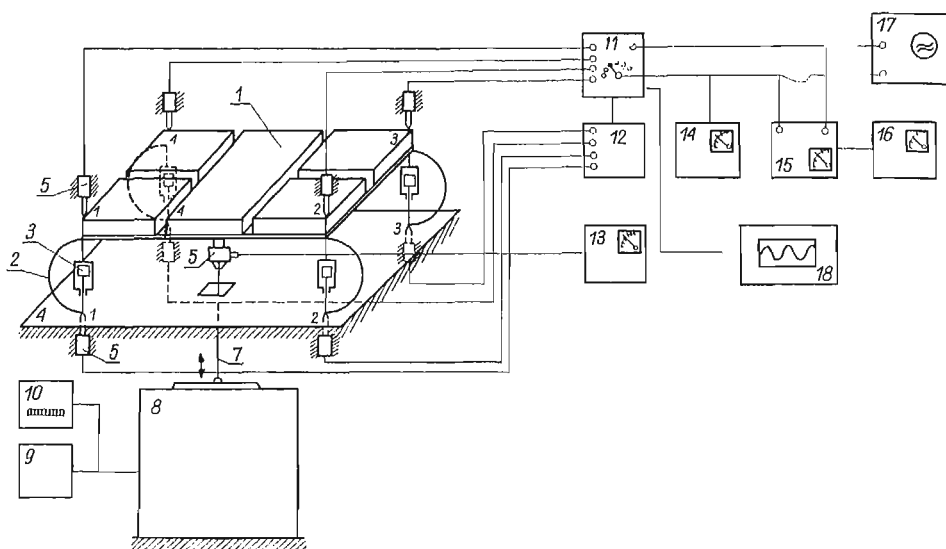
Jednak obliczenia te nie są tak istotne, jak obliczenia drgań punktów podparcia, które można wykorzystać do rozwiązania zagadnienia izolacji drgań, znalezienia wielkości sił przenoszonych na fundament czy korpus maszyny, a także mogą stanowić podstawę do opracowania programu doboru optymalnego podparcia, zapewniającego w danym układzie żądany poziom drgań.

3. Weryfikacja doświadczalna metody

W celu sprawdzenia poprawności opracowanej metody, a także możliwości praktycznego jej zastosowania, przeprowadzono badania modelowe na stanowisku badawczym, którego schemat wraz ze schematem blokowym używanej aparatury pomiarowej pokazuje rys. 5.

Poza tym w celu doświadczalnego wyznaczenia charakterystyk dynamicznych modelu maszyny i modelu konstrukcji podpierającej zbudowano odpowiednie stoiska badawcze i przeprowadzono na nich pomiary.

Obliczone na maszynie cyfrowej w Ośrodku Elektronicznej Techniki Obliczeniowej Politechniki Łódzkiej wartości amplitud przemieszczeń i kątów przesunięcia fazowego porównano z wynikami badań modelowych dla 48 różnych wariantów pomiarowych.



Rys. 5. Schemat układu do badań modelowych

1 — model maszyny, 2 — sprężyny podparcia, 3 — tłumiki olejowe, 4 — model konstrukcji podpierającej, 5 — czujnik przemieszczeń, 6 — piezoelektryczny czujnik siły, 7 — ciężno stalowe, 8 — wzbudnik drgań, 9 — generator, 10 — falomierz liczący, 11 — miernik N-101, 12 — przystawka miernika N-101, 13 — miernik drgań SM-231, 14 — miliwoltomierz V-611, 15 — fazomierz MF-1, 16 — woltomierz U-720, 17 — oscyloskop OKD 505 A, 18 — rejestrator RAP-4

Uzyskano średnią względną różnicę amplitud przemieszczeń 12,0% oraz średnią różnicę kątów przesunięcia fazowego 8,3°.

Z uwagi na zakres mierzonych przemieszczeń (32–248 μm) oraz dokładność stosowanej złożonej aparatury pomiarowej uzyskaną zgodność można uznać za zadowalającą.

Stanowi to potwierdzenie prawidłowości omawianej metody oraz programów obliczeń na maszynie cyfrowej.

4. Uwagi końcowe

Dokonana analiza teoretyczna zagadnienia pozwala na wyznaczenie przed zamontowaniem maszyny w miejscu jej pracy następujących wielkości:

- drgań układu złożonego z maszyny o korpusie odkształcalnym mocowanej na podatnej konstrukcji podpierającej poprzez elastyczne elementy pośredniczące;
- charakterystyk dynamicznych maszyn i konstrukcji podpierającej, ich porównanie z ewentualną oceną np. na drodze statystycznej;
- sił dynamicznego oddziaływania na maszynę lub konstrukcję podpierającą, przy założonym poziomie drgań układu.

Wyprowadzone związki poza oceną stanu drgań układów maszynowych mogą stanowić podstawę do opracowania programu obliczeń na maszynie cyfrowej, dla doboru parametrów c i k elastycznego podparcia zapewniającego żądany poziom drgań zarówno maszyny, jak i konstrukcji podpierającej.

Literatura cytowana w tekście

1. Ch. CREDE, *Vibration and Shock Isolation*, John Wiley and Sons, London 1962.
2. I. A. GOLIŃSKI, *Wibroizolacja maszyn wirnikowych*, Arkady, Warszawa 1964.
3. N. MAHAREM, H. METWALLY, *The effectiveness of the dynamic vibration absorber in coupled vibrations*, Alexandria University Press. Alexandria 1970.
4. C. B. BIEZENO, R. GRAMMEL, *Elastic problems of single machine elements*, London and Glasgow 1956.
5. Z. PARSZEWSKI, *Pewna metoda dynamicznego wyrównoważania maszyn wirnikowych*, ABM, 5, 2 (1958).
6. Z. PARSZEWSKI, P. GROOTENHUIS, *Balancing multi bearing machines*, The Engineer, Vol. 211, Nr 5483, London 1961.
7. L. WAŚKO, *Drgania maszyn mocowanych elastycznie na fundamencie podatnym przy wymuszeniu nieharmonicznym*, Praca doktorska, PŁ., 1972.
8. Z. PARSZEWSKI, L. WAŚKO, *Elastic Isolation Between Machine and Flexible Foundation*, The Third World Congress The Theory of Machines and Mechanisms, Kupari 1971.
9. W. WODZIŃSKI, *Drgania maszyn o korpusach odkształcalnych podpartych elastycznie na podatnej konstrukcji*, Praca doktorska, PŁ., 1973.

R e z y u m e

WIBRACII MASZYN S DEFORMIRUJEMYMI KORPUSAMI ZAKREPLONYCH
NA PODATLIWY KONSTRUKCII POSREDSTWEM UPRTYCH ELEMENTOW

W robocie przywodzic metod wyznaczenia wibracji systemu skladajacej z maszyny s deformowalnym korpusem zakreplonej na podatliwej niesujacej konstrukcji przy pomocy izolujacej systemu uprtych i dempfiujacych elementow.

Pozyskane zavisimosti pozwalaj wyznaczc wibracje maszyny i niesujacej konstrukcji zablawogwornie do montazu maszyny na roboczym miejscu. Istotnikiem tych wibracji s wytworzone dowolne periodyczne wysilki powstajace przy robocie maszyny.

Dla rozwiaycia tych zavisimosci skladzono program wychniszen na cyfrowej maszynie. Rozwiazano przy tym metod kowennego wyznaczenia dynamicznej charakterystyki maszyny rozsmatrywajacej jak swobodna w przestrzeni. Robota zawiera takze eksperymentalna weryfikacje wywiedzionych zavisimosci.

S u m m a r y

VIBRATION OF MACHINES WITH DEFORMABLE BODIES ELASTICITY
SUPPORTED ON FLEXIBLE STRUCTURES

The paper presents the method of determining the vibrations of a system composed of the machine with deformable body supported on a flexible structure by means of a set of elastic and damping elements. On the grounds of the equations obtained it is possible to calculate the vibrations of both the machine and of the supporting structure before the machine is mounted on its place of work. The sources of these vibrations are arbitrary periodic forces which arise due to the motion of the machine. In order to solve the equations, the programme for a digital computer was prepared. The method of determining the dynamic characteristics of the machine, considered to be free in the space, was also elaborated. The paper also includes the experimental verification of the formulae derived.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1974 r.

PLASKIE ZAGADNIENIE KONTAKTOWE W NIESYMETRYCZNEJ
TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W pracy rozpatrzmy statyczne zagadnienie kontaktowe dla półprzestrzeni sprężystej, mikropolarnej, jednorodnej, izotropowej i centrosymetrycznej w płaskim stanie odkształcenia. Deformację opisywać będą wektory: przemieszczenia \mathbf{u} i obrotu $\boldsymbol{\varphi}$ w postaci ([1], [2]):

$$(1.1) \quad \mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \quad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3).$$

Stan naprężenia określają tensory: naprężeń siłowych σ_{ji} i naprężeń momentowych μ_{ji} , gdzie:

$$(1.2) \quad \sigma_{ji} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}, \quad \mu_{ji} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

Zagadnienia kontaktowe w ramach klasycznej teorii sprężystości posiadają bogatą literaturę; między innymi monografie [3]–[8]. W teorii niesymetrycznej ze związanymi obrotami ($\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}$) płaskie zagadnienie stempla rozpatrzono w [9], [10]. W pracach [11], [12] rozpatrzono zagadnienie kontaktowe w osiowo-symetrycznym stanie odkształcenia w ramach liniowej niesymetrycznej teorii sprężystości.

2. Podstawowe równania i zależności

Układ równań równowagi (pomijamy siły masowe i momenty masowe) dla płaskiego stanu odkształcenia (1.1) ma postać [2]:

$$(2.1) \quad \begin{cases} (\mu + \alpha) \nabla_1^2 u_1 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_1 e + 2\alpha \partial_2 \varphi_3 = 0, \\ (\mu + \alpha) \nabla_1^2 u_2 + (\lambda + \mu - \alpha) \partial_2 e - 2\alpha \partial_1 \varphi_3 = 0, \\ [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha] \varphi_3 + 2\alpha (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = 0, \end{cases}$$

przez α , λ , μ , γ , ε oznaczyliśmy stałe materiałowe, zaś $\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ oznacza dwuwymiarowy operator Laplace'a, $e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$ (dylatacja).

Składowe naprężenia (1.2) związane są z przemieszczeniem i obrotem (1.1) przy pomocy następujących związków konstytutywnych:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda) \partial_1 u_1 + \lambda \partial_2 u_2, \\ \sigma_{22} &= (2\mu + \lambda) \partial_2 u_2 + \lambda \partial_1 u_1, \\ \sigma_{12} &= (\mu + \alpha) \partial_1 u_2 + (\mu - \alpha) \partial_2 u_1 - 2\alpha \varphi_3, \\ \sigma_{21} &= (\mu + \alpha) \partial_2 u_1 + (\mu - \alpha) \partial_1 u_2 + 2\alpha \varphi_3, \\ \mu_{i3} &= (\gamma + \varepsilon) \partial_i \varphi_3, \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Składowe $\sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$ wyznacza się ze wzorów:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \mu_{3i} &= \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \mu_{i3}, \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

3. Sformułowanie zagadnienia stempla i sprowadzenie go do układu dualnych równań całkowych

Rozpatrzmy teraz półprzestrzeń $D = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 \geq 0, -\infty < (x_2, x_3) < \infty\}$, na którą za pośrednictwem sztywnego, nieskończenie długiego w kierunku osi $0x_3$ stempla działa na jednostkę długości siła $P = P(x_1, x_2)$. Ponadto zakładamy, że przekrój stempla płaszczyznami $x_3 = \text{const}$ jest zawsze jednakowy.

Warunki brzegowe dla rozważanego zagadnienia zapiszemy w postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_1(0, x_2) &= f(x_2) && \text{dla } |x_2| < c, \\ \sigma_{11}(0, x_2) &= 0 && \text{dla } |x_2| > c, \\ \sigma_{12}(0, x_2) &= \mu_{13}(0, x_2) = 0 && \text{dla } -\infty < x_2 < \infty \end{aligned}$$

oraz uwzględniać będziemy warunki regularności w nieskończoności

$$(3.2) \quad \sigma_{ji} \rightarrow 0, \quad \mu_{ji} \rightarrow 0 \quad \text{przy } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty.$$

Przy rozwiązywaniu zagadnienia brzegowego (3.1) wykorzystamy rozwiązanie pomocnicze, mianowicie najpierw rozpatrzmy półprzestrzeń D w płaskim stanie odkształcenia (1.1) z następującymi warunkami brzegowymi:

$$(3.3) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0, \quad \text{dla } -\infty < x_2 < \infty.$$

Rozwiązanie układu równań równowagi (2.1) z warunkami (3.3) i (3.2) jest postaci [2], [13]:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left\{ \left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{|\xi|} + x_1 \right) e^{-|\xi|x_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-|\xi|x_1}) \right\} e^{-i\xi x_2} d\xi, \\ u_2(x_1, x_2) &= \frac{i}{2\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \frac{|\xi|}{\xi} \left\{ \left(-\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{|\xi|} + x_1 \right) e^{-|\xi|x_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} \left(\frac{\rho}{|\xi|} e^{-\rho x_1} - e^{-|\xi|x_1} \right) \right\} e^{-i\xi x_2} d\xi, \\ \varphi_3(x_1, x_2) &= \frac{i}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \frac{|\xi|}{\xi} \frac{2\mu + \lambda}{2(\lambda + \mu)} \left(e^{-|\xi|x_1} - \frac{|\xi|}{\rho} e^{-\rho x_1} \right) e^{-i\xi x_2} d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left\{ (1+x_1|\xi|) e^{-|\xi|x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-ax_1} - \frac{|\xi|}{\varrho} e^{-|\xi|x_1} \right) \right\} e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \sigma_{12}(x_1, x_2) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \frac{|\xi|}{\xi} \left\{ x_1 |\xi| e^{-|\xi|x_1} + 2a_0 \xi^2 (e^{-ax_1} - e^{-|\xi|x_1}) \right\} e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \sigma_{21}(x_1, x_2) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \frac{|\xi|}{\xi} \left\{ x_1 |\xi| e^{-|\xi|x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{|\xi|}{\varrho} \left(\frac{\varrho^2}{\xi^2} e^{-ax_1} - e^{-|\xi|x_1} \right) \right\} e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \sigma_{22}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left\{ (-1+x_1|\xi|) e^{-|\xi|x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-ax_1} - \frac{|\xi|}{\varrho} e^{-|\xi|x_1} \right) \right\} e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \mu_{13}(x_1, x_2) &= \frac{-2ia_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} (e^{-|\xi|x_1} - e^{-ax_1}) e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \mu_{23}(x_1, x_2) &= \frac{2a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi| \tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-|\xi|x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho} e^{-ax_1} \right) e^{-i\xi x_2} d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

We wzorach (3.4) i (3.5) $\tilde{p}(\xi)$ oznacza transformację Fouriera

$$\tilde{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2) e^{i\xi x_2} d\xi
 \tag{3.6}$$

oraz

$$\Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{|\xi|}{\varrho} \right), \quad \varrho \equiv \left(\xi^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2},
 \tag{3.7}$$

a przez a_0, l^2 oznaczyliśmy:

$$a_0 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad l^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\alpha\mu}.
 \tag{3.8}$$

Aby rozwiązać równania równowagi (2.1) z mieszanymi warunkami brzegowymi (3.1) należy znaleźć taką funkcję $p(x_2)$ [określoną w (3.3)], aby spełnione były warunki (3.1). Zauważmy, że rozwiązanie (3.4) i (3.5) spełnia tożsamościowo (3.1)₃ i (3.1)₄, (tzn. $\sigma_{12}(0, x_2) = \mu_{13}(0, x_2) = 0$ dla $-\infty < x_2 < \infty$).

Rozpatrzmy teraz następujące dwa przypadki:

Przypadek 1: o funkcji $f(x_2)$, określonej w (3.1), zakładamy, że:

$$(3.9) \quad f(x_2) = f(-x_2) \neq \text{const dla } x_2 \in (-c, c).$$

Wykorzystując (3.9), (3.1)₁ i (3.1)₂ oraz (3.4) i (3.5) uzyskujemy następujący układ dualnych równań całkowych:

$$(3.10) \quad \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi} \frac{1}{\Delta_0(\xi)} \cos(\xi x_2) d\xi = f(x_2) \quad \text{dla } 0 \leq x_2 < c,$$

$$\int_0^\infty \tilde{p}(\xi) \cos(\xi x_2) d\xi = 0 \quad \text{dla } x_2 > c.$$

Można zauważyć, że jeżeli przejdziemy do granicy ze stałymi materiałowymi a_0 , $l^2 \rightarrow 0$ to $\Delta_0(\xi) \rightarrow 1$ i układ dualnych równań całkowych (3.10) odpowiada układowi dla zagadnienia kontaktowego w klasycznej teorii sprężystości ([8] s. 433).

Przypadek 2: o funkcji $f(x_2)$ określonej w (3.1) zakładamy, że

$$(3.11) \quad f(x_2) = -f(-x_2) \quad \text{dla } x_2 \in (-c, c).$$

Wykorzystując (3.11), (3.1)₁, (3.1)₂ oraz (3.4) i (3.5) uzyskujemy następujący układ dualnych równań całkowych:

$$(3.12) \quad \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi} \frac{1}{\Delta_0(\xi)} \sin(\xi x_2) d\xi = f(x_2) \quad \text{dla } 0 \leq x_2 < c,$$

$$\int_0^\infty \tilde{p}(\xi) \sin(\xi x_2) d\xi = 0 \quad \text{dla } x_2 > c.$$

Jeżeli przejdziemy do granicy ze stałymi materiałowymi l^2 , $a_0 \rightarrow 0$ to $\Delta_0(\xi) \rightarrow 1$ i układ (3.12) odpowiada układowi równań całkowych dla odpowiedniego zagadnienia w ramach klasycznej teorii sprężystości ([8] s. 438).

4. Rozwiązanie układów dualnych równań całkowych (3.10) i (3.12)

Wprowadzając teraz następujące oznaczenia:

$$(4.1) \quad \eta = \xi c, \quad x_2 = cy$$

oraz wykorzystując fakt, że

$$(4.2) \quad \cos z = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z J_{-\frac{1}{2}}(z), \quad \sin z = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z J_{\frac{1}{2}}(z),$$

dla przypadku 1 (układ dualnych równań całkowych (3.10)) otrzymamy:

$$(4.3) \quad \int_0^\infty \eta^{-1} [\eta^{5/2} \psi(\eta)] (1 + H(\eta)) J_{-\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = g(y) \quad \text{dla } 0 < y < 1,$$

$$\int_0^\infty [\eta^{5/2} \psi(\eta)] J_{-\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = 0 \quad \text{dla } y > 1,$$

gdzie

$$(4.4) \quad H(\eta) \equiv \frac{1 - \Delta_0\left(\frac{\eta}{c}\right)}{\Delta_0\left(\frac{\eta}{c}\right)},$$

$$(4.5) \quad g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{f(cy)}{\sqrt{y}},$$

zaś

$$(4.6) \quad \psi(\eta) \equiv q\left(\frac{\eta}{c}\right), \quad \text{gdzie} \quad \tilde{p}(\xi) = \xi^2 q(\xi).$$

W przypadku 2 [układ dualnych równań całkowych (3.12)] używając (4.1) i (4.2)₂ możemy zapisać w postaci:

$$(4.7) \quad \int_0^{\infty} \eta^{-1} [\eta^{5/2} \psi(\eta)] (1 + H(\eta)) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = g(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,$$

$$\int_0^{\infty} [\eta^{5/2} \psi(\eta)] J_{\frac{3}{2}}(\eta y) d\eta = 0, \quad \text{dla} \quad y > 1,$$

gdzie $H(\eta)$ jest określone wzorem (4.4), $g(y)$ wzorem (4.5), zaś $\psi(\eta)$ wzorem (4.6)

Teraz naszym zadaniem będzie wyznaczenie niewiadomych funkcji z równań (4.3) i (4.7). Metoda, którą zastosujemy została podana przez KINGA [15], [14]. Rozpatrzono tam następujący układ dualnych równań całkowych:

$$(4.8) \quad \int_0^{\infty} \xi^\alpha [1 + F(\xi)] \varphi(\xi) J_\nu(\xi x) d\xi = h(x) \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\xi) J_\nu(\xi x) d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x > 1,$$

gdzie $F(\xi)$, $h(x)$ funkcje znane, niewiadomą jest funkcja $\varphi(\xi)$.

Metoda [15] polega na tym, że rozwiązanie przybliżone układu równań (4.8) dla $|F(\xi)| \ll 1$ można przyjąć w postaci

$$(4.9) \quad \varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi),$$

gdzie funkcja $\varphi_0(\xi)$ spełnia następujący układ dualnych równań całkowych:

$$(4.10) \quad \int_0^{\infty} \xi^\alpha \varphi_0(\xi) J_\nu(\xi x) d\xi = h(x) \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \varphi_0(\xi) J_\nu(\xi x) d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x > 1,$$

funkcja zaś $\varphi_1(\xi)$ spełnia układ dualnych równań całkowych w postaci:

$$(4.11) \quad \int_0^{\infty} \xi \varphi_1(\xi) J_\nu(\xi x) d\xi = h_1(x) \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(\xi) J_\nu(\xi x) d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x > 1,$$

gdzie

$$(4.12) \quad h_1(x) = - \int_0^{\infty} \xi^\alpha F(\xi) \varphi_0(\xi) J_\nu(\xi x) d\xi.$$

W równaniach (4.3) i (4.7) funkcja $H(\eta)$ określona wzorem (4.4) ma postać

$$H(\eta) \equiv \frac{1}{\Delta_0 \left(\frac{\eta}{c} \right)} - 1 = \frac{c^2}{c^2 + 2a_0 \eta^2 \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \frac{c^2}{l^2}}} \right)} - 1.$$

Dla $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \gg 1$ lub $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$ mamy $|H(\eta)| \ll 1$, możemy więc do równań (4.3) i (4.7) zastosować metodę podaną wzorami (4.9), (4.10), (4.11) i (4.12).

Przypadek 1: Rozwiązanie układu dualnych równań całkowych (4.3) przyjmujemy w postaci

$$(4.13) \quad \psi(\eta) = \psi_0(\eta) + \psi_1(\eta).$$

Na podstawie (4.10) funkcja $\psi_0(\eta)$ musi spełniać następujący układ równań:

$$(4.14) \quad \int_0^{\infty} \eta^{-1} [\eta^{5/2} \psi_0(\eta)] J_{-\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = g(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,$$

$$\int_0^{\infty} [\eta^{5/2} \psi_0(\eta)] J_{-\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1.$$

Układ równań (4.14) ma taką samą postać, jak układ równań odpowiadający zagadnieniu stempla działającego na półprzestrzeń sprężystą w płaskim stanie odkształcenia w klasycznej teorii sprężystości ([8] s. 434).

Rozwiązanie układu równań (4.14) jest znane, [8], i ma postać

$$(4.15) \quad \psi_0(\eta) = \frac{c(\mu + \lambda)\mu}{\pi(2\mu + \lambda)} \left\{ - \frac{1}{\eta} J_1(\eta) \int_0^1 (1-y^2)^{-1/2} \frac{f(cy)}{\sqrt{cy}} dy + \right. \\ \left. + \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} dt \int_0^1 y \frac{f(cyt)}{\sqrt{yt}} J_0(\eta y) dy \right\},$$

gdzie funkcja $f(x)$ jest podana we wzorze (3.1).

Funkcja $\psi_1(\eta)$ musi spełniać następujący układ równań całkowych:

$$(4.16) \quad \int_0^{\infty} \eta^{-1} [\eta^{5/2} \psi(\eta)] J_{-\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = g_1(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,$$

$$\int_0^{\infty} [\eta^{5/2} \psi(\eta)] J_{-\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1,$$

gdzie

$$(4.17) \quad g_1(y) = - \int_0^{\infty} \eta^{-1} H(\eta) [\eta^{5/2} \psi_0(\eta)] J_{-\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta.$$

Rozwiązaniem układu równań (4.16) jest

$$(4.18) \quad \psi_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{1}{\eta} J_1(\eta) \int_0^1 (1-y^2)^{-1/2} g_1(y) dy + \right. \\ \left. + \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} dt \int_0^1 y g_1(yt) J_0(y\eta) d\eta \right\}.$$

Przybliżone rozwiązanie układu dualnych równań całkowych (3.10) będzie miało postać

$$(4.19) \quad \tilde{p}(\xi) \equiv \frac{\eta^2}{c^2} q\left(\frac{\eta}{c}\right) = \xi^2 [\psi_0(c\xi) + \psi_1(c\xi)],$$

gdzie ψ_0 jest określone przez (4.15) a ψ_1 przez (4.18).

Rozkład przemieszczeń, obrotów i naprężeń pochodzących od działania symetrycznego stempla określonego przez warunki brzegowe (3.1) oraz (3.9) uzyskujemy podstawiając do (3.4) i (3.5) funkcję $\tilde{p}(\xi)$ określoną wzorem (4.19).

Przypadek 2. Stosując metodę rozwiązania podaną wzorami (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) i (4.12) do układu równań (4.7) wprowadzamy rozwiązania w postaci

$$(4.20) \quad \psi(\eta) = \hat{\psi}_0(\eta) + \hat{\psi}_1(\eta),$$

gdzie $\hat{\psi}_0(\eta)$ musi spełniać następujący układ równań całkowych:

$$(4.21) \quad \int_0^{\infty} \eta^{-1} [\eta^{5/2} \hat{\psi}_0(\eta)] J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = g(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,$$

$$\int_0^{\infty} [\eta^{5/2} \hat{\psi}_0(\eta)] J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1.$$

Układ równań (4.21) ma taką samą postać, jak układ dualnych równań całkowych odpowiadający odpowiedniemu zagadnieniu stempla w klasycznej teorii sprężystości ([8] s. 439).

Rozwiązaniem (4.21) jest

$$(4.22) \quad \hat{\psi}_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\eta^{-1} J_0(\eta) \int_0^1 y(1-y^2)^{-1/2} g(y) dy + \right. \\ \left. + \int_0^1 t(1-t^2)^{-1/2} dt \int_0^1 \eta g(\eta t) J_0(y\eta) d\eta \right],$$

funkcja zaś $\hat{\psi}_1(\eta)$ musi spełniać następujący układ równań:

$$(4.23) \quad \int_0^\infty \eta^{-1} [\eta^{5/2} \hat{\psi}_1(\eta)] J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = g_2(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1, \\ \int_0^\infty [\eta^{5/2} \hat{\psi}_1(\eta)] J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1,$$

gdzie

$$(4.24) \quad g_2(y) = - \int_0^\infty \eta^{-1} H(\eta) [\eta^{5/2} \hat{\psi}_0(\eta)] J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta.$$

Rozwiązanie układu równań (4.23) ma postać

$$(4.25) \quad \hat{\psi}_1(\eta) = \left[\eta^{-1} J_0(\eta) \int_0^1 y(1-y^2)^{-1/2} g_2(y) dy + \right. \\ \left. + \int_0^1 t(1-t^2)^{-1/2} dt \int_0^1 \eta g_2(\eta t) J_0(\eta y) d\eta \right].$$

Rozwiązanie przybliżone układu dualnych równań całkowych (3.12) uzyskujemy w postaci

$$(4.26) \quad \tilde{p}(\xi) = \xi^2 [\hat{\psi}_0(\xi c) + \hat{\psi}_1(\xi c)],$$

gdzie $\hat{\psi}_0(\xi c)$ jest określone wzorem (4.22), a $\hat{\psi}_1(\xi c)$ wzorem (4.25).

Rozkład przemieszczeń, obrotów i naprężeń pochodzących od działania na półprzestrzeń D stemplem o warunkach brzegowych (3.1) i z założeniem (3.11), uzyskujemy przedstawiając (4.26) do (3.4) i (3.5).

5. Przypadek szczególny

Oddzielnego rozwiązania wymaga zagadnienie stempla gładko zakończonego, które jest opisane następującymi warunkami brzegowymi:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u_1(0, x_2) &= \text{const} & \text{dla} & \quad |x_2| < c, \\ \sigma_{11}(0, x_2) &= 0 & \text{dla} & \quad |x_2| > c, \\ \sigma_{12}(0, x_2) &= \mu_{13}(0, x_2) = 0 & \text{dla} & \quad -\infty < x_2 < \infty \end{aligned}$$

oraz warunkami regularności w nieskończoności (3.2).

Podobnie jak w pracy [16] dla klasycznej teorii sprężystości i w pracy [9] dla niesymetrycznej teorii sprężystości ze związanymi obrotami, zamiast rozpatrywać warunki (5.1), rozwiązywać będziemy układ równań (2.1) z następującymi warunkami brzegowymi:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{(0, x_2)} &= 0, & \text{dla } |x_2| < c, \\ \sigma_{11}(0, x_2) &= 0, & \text{dla } |x_2| > c, \\ \sigma_{12}(0, x_2) = \mu_{13}(0, x_2) &= 0 & \text{dla } -\infty < x_2 < \infty. \end{aligned}$$

Wykorzystując (3.4), (3.5) oraz (5.2) uzyskujemy następujący układ dualnych równań całkowych:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \sin(\xi x_2) d\xi &= 0 & \text{dla } 0 \leq x_2 < c, \\ \int_0^\infty \tilde{p}(\xi) \cos(\xi x_2) d\xi &= 0 & \text{dla } x_2 > c. \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć niewiadomą funkcję $\tilde{p}(\xi)$ z powyższego układu równań całkowych najpierw scałkujemy po x_2 drugie równanie z (5.3). Wtedy układ dualnych równań całkowych (5.3) możemy zapisać w postaci:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \sin(\xi x_2) d\xi &= 0 & \text{dla } 0 \leq x_2 < c, \\ \int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi} \sin(\xi x_2) d\xi &= B & \text{dla } x_2 > c, \end{aligned}$$

gdzie B oznacza nieznaną stałą.

Jeżeli wykorzystamy oznaczenia (4.1), (4.4) oraz zależności (4.2) to układ (5.4) zapiszemy następująco:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \eta \Psi(\eta) [1 + H(\eta)] J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta &= 0 & \text{dla } 0 < y < 1, \\ \int_0^\infty \Psi(\eta) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} B \frac{c}{\sqrt{y}} & \text{dla } y > 1, \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenie:

$$(5.6) \quad \Psi(\eta) \equiv \tilde{p}\left(\frac{\eta}{c}\right) \frac{c}{\sqrt{\eta}}.$$

Dla $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \gg 1$ lub $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$ mamy $|H(\eta)| \ll 1$ [funkcja $H(\eta)$ jest określona wzorem (4.4)], zatem możemy zastosować przybliżoną metodę Kinga cytowaną już w pracy [wzory (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) i (4.12)].

Rozwiązanie układu dualnych równań całkowych (5.5) przyjmujemy w postaci

$$(5.7) \quad \Psi(\eta) = \Psi_0(\eta) + \Psi_1(\eta),$$

gdzie funkcja $\Psi_0(\eta)$ spełnia następujący układ dualnych równań całkowych:

$$(5.8) \quad \int_0^{\infty} \eta \Psi_0(\eta) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \Psi_0(\eta) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} B \frac{c}{\sqrt{y}} \quad \text{dla} \quad y > 1,$$

a funkcja $\Psi_1(\eta)$ jest rozwiązaniem następującego układu równań:

$$(5.9) \quad \int_0^{\infty} \eta \Psi_1(\eta) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = k(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \Psi_1(\eta) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1,$$

gdzie przez $k(y)$ oznaczyliśmy

$$(5.10) \quad k(y) = - \int_0^{\infty} \eta H(\eta) \Psi_0(\eta) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1.$$

Układy równań (5.8) i (5.9) są znanego typu [14].

Rozwiązaniem układu dualnych równań całkowych (5.8) jest [17], [14]

$$(5.11) \quad \Psi_0(\eta) = \frac{2}{\pi} B \frac{c}{\sqrt{\eta}} J_0(\eta),$$

stąd podstawiając (5.11) do (5.10) otrzymujemy

$$(5.12) \quad k(y) = - \frac{2}{\pi} B c \int_0^{\infty} \sqrt{\eta} H(\eta) J_0(\eta) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta =$$

$$= - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} B \frac{c}{\sqrt{y}} \int_0^{\infty} H(\eta) J_0(\eta) \sin(\eta y) d\eta, \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1.$$

Rozwiązanie układu równań całkowych (5.9) możemy zapisać w następującej postaci [17], [14]:

$$(5.13) \quad \Psi_1(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \eta \int_0^1 J_1(t\eta) dt \int_0^t \frac{y^{3/2}}{\sqrt{t^2 - y^2}} k(y) dy,$$

gdzie $k(y)$ dane jest wzorem (5.12).

Wykorzystując (5.6) i (5.7), mamy

$$(5.14) \quad \tilde{p}\left(\frac{\eta}{c}\right) = \frac{2}{\pi} B J_0(\eta) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\eta}{c} \int_0^1 J_1(t\eta) dt \int_0^t \frac{y^{3/2}}{\sqrt{t^2 - y^2}} k(y) dy.$$

Jeżeli wykorzystamy teraz fakt, że dla $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$ funkcję $\varrho(\eta)$ [wzór (3.7)] możemy aproksymować następująco [11]:

$$(5.15) \quad \varrho = \sqrt{\frac{\eta^2}{c^2} + \frac{1}{l^2}} \approx \frac{\eta}{c} + \frac{c}{2\eta l^2},$$

to funkcję $H(\eta)$ [wzór (4.4)] możemy zapisać w postaci

$$(5.16) \quad H(\eta) = -A_0 \frac{\eta^2}{\eta^2 + \Omega^2},$$

gdzie

$$(5.17) \quad A_0 = \frac{a_0}{l^2 + a_0}, \quad \Omega^2 = \frac{c^2}{2(l^2 + a_0)},$$

zaś a_0, l^2 dane jest przez (3.8).

Wykorzystując teraz następujące całki [18]:

$$(5.18) \quad \int_0^\infty J_0(ax) \sin(bx) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < b < a, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} & \text{dla } 0 < a < b, \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\beta^2 + x^2} J_0(ux) dx = \frac{\text{sh}(a\beta)}{\beta} K_0(\beta u), \quad \text{dla } a > 0, \text{ Re } \beta > 0, u > a.$$

Tu K_0 jest funkcją Mac-Donalda. Wykorzystując (5.18) możemy funkcję $k(y)$ [wzór (5.12)] przedstawić w postaci

$$(5.19) \quad k(y) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} B A_0 \Omega K_0(\Omega) \frac{c}{\sqrt{y}} \text{sh}(y\Omega).$$

Dalej możemy zapisać, że

$$(5.20) \quad \int_0^t \frac{y^{3/2}}{\sqrt{t^2 - y^2}} k(y) dy = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} B A_0 \Omega K_0(\Omega) c \int_0^t \frac{y}{\sqrt{t^2 - y^2}} \text{sh}(\Omega y) dy.$$

Ale

$$\int_0^t \frac{y}{\sqrt{t^2 - y^2}} \text{sh}(\Omega y) dy = \Omega \int_0^t \sqrt{t^2 - y^2} \text{ch}(\Omega y) dy = \Omega t^2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \text{ch}(tx\Omega) dx.$$

Powyższa całka po obliczeniu ma dość skomplikowaną postać (zawierać będzie funkcje I_1, L_1 — funkcje Bessela i Mac-Donalda) zatem, ponieważ dla $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$ mamy $\Omega \ll 1$, więc możemy przyjąć $\text{ch}(tx\Omega) \approx 1$.

Stąd

$$(5.21) \quad \int_0^t \frac{y}{\sqrt{t^2 - y^2}} \text{sh}(\Omega y) dy \approx \frac{\pi}{4} \Omega t^2.$$

Zanotujemy teraz następującą całkę [18]:

$$(5.22) \quad \int_0^1 x^{\nu+1} J_{\nu}(ax) dx = a^{-1} J_{\nu+1}(a), \quad \text{dla } \operatorname{Re} \nu > -1,$$

zatem wstawiając do (5.14) wzór (5.20), następnie wykorzystując (5.21), (5.22) oraz (4.1), otrzymamy

$$(5.23) \quad \tilde{p}(\xi) = \frac{2}{\pi} B J_0(\xi c) - \frac{1}{\pi} B A_0 \Omega^2 K_0(\Omega) J_2(\xi c).$$

6. Wyznaczanie naprężeń kontaktowych $\sigma_{11}(0, x_2)$ (dla $|x_2| < c$)

Wykorzystując (3.5)₁ mamy

$$(6.1) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \cos(\xi x_2) d\xi.$$

Zatem, ponieważ [18]

$$(6.2) \quad \int_0^{\infty} J_{\nu}(ax) \cos(\beta x) dx = \frac{\cos\left(\nu \arcsin \frac{\beta}{a}\right)}{\sqrt{a^2 - \beta^2}} \quad \text{dla } \beta < a$$

możemy napisać

$$(6.3) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = -\frac{4}{\pi} \frac{B}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{c^2 - x_2^2}} + \frac{2}{\pi} \frac{B}{\sqrt{2\pi}} A_0 \Omega^2 K_0(\Omega) \frac{1 - 2 \frac{x_2^2}{c^2}}{\sqrt{c^2 - x_2^2}}, \quad \text{dla } |x_2| < c.$$

Stałą B można wyznaczyć z faktu, że siła wypadkowa działająca na półprzestrzeń D za pośrednictwem stępła jest równa P . Zatem stałą B można określić z następującej równości:

$$(6.4) \quad P = \int_{-c}^c \sigma_{11}(0, x_2) dx_2,$$

stąd po podstawieniu do (6.4) wzoru (6.3) otrzymujemy

$$(6.5) \quad B = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} P.$$

7. Uwagi końcowe

Rozpatrzmy teraz przejście graniczne ze stałymi materiałowymi $l^2, a_0 \rightarrow 0$. W tym celu zanotujemy następujące granice:

$$(7.1) \quad \begin{cases} \lim_{l^2, a_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\varrho} = \lim_{l^2, a_0 \rightarrow 0} \left(\xi^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{-1/2} = 0, & \lim_{l^2, a_0 \rightarrow 0} \Delta_0(\xi) = 1, \\ \lim_{l^2, a_0 \rightarrow 0} H(\eta) = \lim_{l^2, a_0 \rightarrow 0} \frac{1 - \Delta_0(\xi)}{\Delta_0(\xi)} = 0. \end{cases}$$

Zatem

$$(7.2) \quad \lim_{l^2, a_0 \rightarrow 0} \psi_1(\xi c) = 0, \quad \lim_{l^2, a_0 \rightarrow 0} \hat{\psi}_1(\xi c) = 0, \quad \lim_{l^2, a_0 \rightarrow 0} \Psi(\xi c) = 0,$$

gdzie ψ_1 jest określone wzorem (4.18), $\hat{\psi}_1$ wzorem (4.25) zaś Ψ_1 wzorem (5.13). Zatem jeżeli wykorzystamy granice (7.1) w (3.4) i (3.5), a następnie jeśli uwzględnimy dla poszczególnych przypadków rozwiązanie na funkcję $\check{p}(\xi)$ dane odpowiednimi wzorami: (4.19) wraz z (4.15), (4.26) wraz z (4.22) i (5.14), to otrzymamy rozkład przemieszczeń i naprężeń dla analogicznych zagadnień kontaktowych w klasycznej teorii sprężystości [8].

Można także zauważyć, że charakter osobliwości naprężeń $\sigma_{11}(0, x_2)$ dla $x_2 = c$ i $x_2 = -c$ w przypadku stempla omawianego w rozdziale 5 pozostaje niezmienny w stosunku do klasycznej teorii sprężystości (rozpatrzyliśmy przypadek, gdy $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$). Rozpatrzone w pracy przypadki (1) i (2) zagadnienia stempla (rozdział 4) oraz przypadek z rozdziału 5 umożliwiają otrzymanie w prosty sposób, wobec zasady superpozycji, rozwiązania, gdy funkcja $f(x_2)$ [dana w (3.1)] nie jest ani parzysta, ani nieparzysta dla $x_2 \in (-c, c)$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. W. NOWACKI, Bull. Acad. Polon. Sci, Techn., 6 (1971), 237, [427].
3. Л. А. ГАЛИН, *Контактные задачи теории упругости*, Гостехиздат, Москва 1953.
4. Л. И. ШТЕЕРМАН, *Контактные задачи теории упругости*, Гостехиздат, Москва 1949.
5. Я. С. УФЛЯНД, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, Издат. АН СССР, Москва-Ленинград 1963.
6. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
7. И. Н. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, изд., 3, Изд. АН СССР, Москва-Ленинград 1949.
8. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, New York 1951.
9. R. MUKI, E. STERNBERG, ZAMP, 5, 16 (1965).
10. M. SOKOŁOWSKI, *O teorii naprężeń momentowych*, PWN, Warszawa 1972.
11. J. DYSZLEWICZ, W. RUDNICKI, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech., 11 (1972) 465, [851].
12. R. S. DHALIWAL, Arch. Mech. Stos., 24, 4 (1972), [645].
13. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, Mech. Teor. i Stos., 4 (1973).
14. I. N. SNEDDON, *Mixed Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Duke University, 1960 (Report).
15. L. V. KING, Proc., Roy. Soc. A., 153 (1936), [1-16].
16. I. N. SNEDDON, *Integral Transform Methods for the Solution of Mixed Boundary Value Problems in the Classical Theory of Elasticity* (Skrypt).
17. E. C. TITCHMARSH, *Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, 1948.
18. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений*, Изд. НАУКА, Москва 1971.

Резюме

ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ В НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе рассмотрена, в рамках несимметрической теории упругости, [1, 2] задача о полупространстве в плоском деформированном состоянии под воздействием идеального жесткого штампа (без учета сил трения). Рассматривается перемещение под штампом $u_1(0, x_2) = f(x_2)$ для $|x_2| < c$

при предположении, что $f(x_2) = f(-x_2)$ или $f(x_2) = -f(-x_2)$ для $|x_2| < c$. Задача сводится к системе двойственных интегральных уравнений, которые в дальнейшем решаются с помощью метода предложенного в [15, 14]. Для случая, когда $f(x_2) = \text{const}$, исследована особенность напряжений $\delta_{11}(0, x_2)$ в точках $x_2 = c$ и $x_2 = -c$. Наконец, рассматриваются предельные переходы материальная константа $\alpha_0 l^2 \rightarrow 0$ стремится к нулю.

S u m m a r y

PLANE CONTACT PROBLEM OF ASYMMETRIC ELASTICITY

In the paper the static contact problem of a rigid punch and a half-space is considered in the framework of asymmetric elasticity [1, 2]. It is assumed that the medium is in a plane state of strain, and the friction forces are neglected. The displacement under the punch $u_1(0, x_2) = f(x_2)$ for $|x_2| < c$ is considered assuming $f(x_2) = f(-x_2)$ or $f(x_2) = -f(-x_2)$. The problem is reduced to a system of dual integral equations and solved by means of the method given in [15], [14].

In the case of $f(x_2) = \text{const}$ the stress singularities at the points $x_2 = c$ and $x_2 = -c$ are discussed. The limiting case of the material constant $\alpha_0 l^2 \rightarrow 0$ tending to zero is also considered.

INSTYTUT MECHANIKI
UNIwersytet warszawski

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1974 r.

JEDNOWYMIAROWE DYNAMICZNE POLE NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH
WYWOŁANE RUCHOMYM POLEM TEMPERATURY

JÓZEF KUBIK (POZNAŃ)

1. Wstęp

Zagadnienie naprężeń cieplnych w elementach konstrukcyjnych wywołanych ruchomymi obciążeniami termicznymi stanowi ważny problem z punktu widzenia zastosowań technicznych, np. w procesach obróbki cieplnej czy też obróbki skrawaniem.

Ruchome obciążenie termiczne działające na element może być dane w postaci poruszającego się źródła ciepła lub też ruchomego pola temperatury.

Większość prac poświęconych problemom naprężeń cieplnych wywoływanych obciążeniami termicznymi dotyczy zagadnień quasi-statycznych (nie uwzględniano wpływu sił bezwładności na współrzędne stanu naprężenia). Dynamicznym zagadnieniem naprężeń cieplnych zajmował się ŻÓRAWSKI [7], który wyznaczył pole naprężeń dla płaskiego ruchomego źródła ciepła w przestrzeni lepkosprężystej.

Należy nadmienić, że niestacjonarnym przepływem ciepła w elementach sprężystych, wywołanym wskutek przyłożonego ruchomego pola temperatury, zajmował się ROŻNOWSKI w pracach [4, 5, 6]. W pracach tych autor przeprowadzał swe rozważania w ramach teorii przewodnictwa cieplnego i nie określał stanu naprężenia w tych elementach.

W niniejszej pracy wyznaczono rozkład temperatury i naprężeń cieplnych w półprzestrzeni sprężystej, $x_1 \geq 0$, wywołanych ruchomym obciążeniem termicznym w postaci $T_0 \eta(vt - x_1) \cdot \eta(t)$, poruszającym się w głąb półprzestrzeni ze stałą prędkością v . Zagadnienie potraktowano jako dynamiczne.

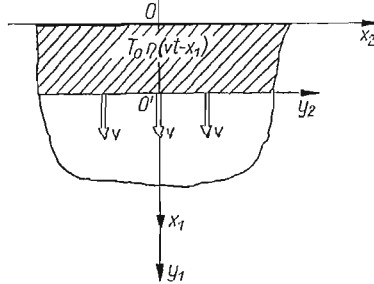
W szczególnym przypadku, gdy $v = 0$, problem sprowadza się do znanego w teorii naprężeń cieplnych zagadnienia DANIŁOWSKIEJ [1].

Oznaczenia

- α_t współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej,
- δ_{ij} symbol Kroneckera,
- $\eta(\xi)$ funkcja Heaviside'a,
- G moduł odkształcenia postaciowego,
- κ współczynnik przewodzenia temperatury,
- λ stała Lamégo,
- ν współczynnik Poissona,
- ∇^2 operator Laplace'a,
- ρ gęstość,
- s parametr transformacji Laplace'a,
- σ_{ij} współrzędne tensora naprężenia,
- t czas,
- T temperatura względna, odniesiona do stałej temperatury stanu beznaprężeniowego,
- u_i współrzędne wektora przemieszczenia,
- x_i, y_i współrzędne kartezjańskie.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy półprzestrzeń $x_1 \geq 0$, ogrzewaną ruchomą temperaturą w postaci $T_0 \eta(vt - x_1) \cdot \eta(t)$ rozprzestrzeniającą się w głąb półprzestrzeni z prędkością v (przekrój półprzestrzeni w płaszczyźnie $x_3 = 0$ przedstawia rys. 1). Temperatura o ustalonej wartości T_0 w chwili $t = 0^+$ została przyłożona nagle do brzegu $x_1 = 0$ półprzestrzeni i następnie ruchome czoło tej temperatury o równaniu $x_1 = vt$ przemieszcza się w kierunku



Rys. 1.

prostopadłym do brzegu półprzestrzeni ze stałą prędkością v . Tak więc, pole temperatury w półprzestrzeni opisane jest w taki sposób, że przyjmuje wartość stałą równą T_0 w obszarze $x_1 < vt$ (bezpośrednio z tyłu ruchomego czoła temperatury) oraz na czołe $x_1 = vt$, x_1 , $t \in (0, \infty)$, natomiast przed czołem, czyli dla $x_1 > vt$, x_1 , $t \in (0, \infty)$, zmienia się zgodnie z równaniem przewodnictwa ciepła.

Zakładamy przy tym, że brzeg półprzestrzeni $x_1 = 0$ jest wolny od naprężeń oraz że warunki początkowe dla temperatury i przemieszczeń są jednorodne. Przyjmujemy, że materiał ciała jest izotropowy i doskonale sprężysty, a jego parametry fizyczne nie zależą od temperatury.

Poszukiwać będziemy rozwiązań dla pola temperatury i naprężeń w półprzestrzeni uwzględniając przy tym wpływ sił bezwładności na stan naprężenia.

3. Pole temperatury

W celu określenia pola temperatury w półprzestrzeni rozwiązać należy jednowymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego w postaci

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} T = 0, \quad x_1, t \in (0, \infty),$$

z następującymi warunkami:

$$(3.2) \quad T(x_1, t = 0) = 0, \quad x_1 > 0,$$

$$(3.3) \quad T(x_1, t) = \begin{cases} T_0, & \text{dla } 0 \leq x_1 < vt, \\ \theta(x_1, t), & \text{dla } x_1 \geq vt, \end{cases}$$

gdzie $\theta(x_1, t)$ spełnia równanie (3.1) w obszarze $x_1 > vt$, ($t > 0$) oraz warunki

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \theta(x_1 = vt, t) &= T_0, & t > 0, \\ \theta(x_1 \rightarrow \infty, t) &\rightarrow 0, & t > 0. \end{aligned}$$

W celu rozwiązania równania (3.1) wprowadzimy ruchomy układ współrzędnych y_1, y_2, y_3 związany z poruszającą się temperaturą T_0 . Po zastosowaniu transformacji liniowej

$$y_1 = x_1 - vt; \quad y_2 = x_2; \quad y_3 = x_3$$

oraz

$$x_1 \equiv x, \quad y_1 \equiv y,$$

równanie (3.1) w nowym układzie przyjmie postać

$$(3.5) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{T}(y, t) + \frac{v}{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \hat{T}(y, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \hat{T}(y, t) = 0,$$

przy czym funkcja $\hat{T}(y, t)$ jest określona dla $y \in (-\infty, \infty)$ i dla $t \in [0, \infty)$.

Warunki (3.2), (3.3) i (3.4) można obecnie zapisać jak następuje:

$$(3.6) \quad \hat{T}(y, t = 0) = 0, \quad |y| < \infty,$$

$$(3.7) \quad \hat{T}(y, t) = T_0, \quad \text{dla } y \leq 0, \quad t > 0$$

oraz

$$(3.8) \quad \hat{T}(y \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad t > 0.$$

Rozwiązanie równania (3.5) zapiszemy za pomocą dwóch funkcji \hat{T}_1 i \hat{T}_2 określonych odpowiednio dla ujemnych i dodatnich wartości y

$$(3.9) \quad \hat{T} = \begin{cases} \hat{T}_1, & \text{dla } y \leq 0, \\ \hat{T}_2, & \text{dla } y > 0, \end{cases} \quad t > 0.$$

Na podstawie warunku (3.7) łatwo zauważyć, że funkcja \hat{T}_1 jest wielkością stałą równą T_0 , natomiast \hat{T}_2 otrzymamy rozwiązując równanie (3.5) dla $y > 0$ z warunkiem początkowym (3.6) oraz brzegowym w postaci

$$(3.10) \quad \hat{T}_2(y = 0, t) = T_0, \quad t > 0.$$

Stosując zatem do równania (3.5) transformację Laplace'a i wykorzystując warunek początkowy (3.6) oraz warunek (3.10) otrzymamy transformatę rozwiązania \hat{T}_2 w postaci

$$(3.11) \quad \hat{T}_{2L}(y, s) = \frac{T_0}{s} e^{\left[\frac{v}{2\kappa} + \sqrt{\frac{1}{\kappa} \left(s + \frac{v^2}{4\kappa} \right)} \right] y}, \quad y > 0.$$

Po wykonaniu nad rozwiązaniem (3.11) odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymamy, dla $y > 0$,

$$\hat{T}_2(y, t) = \frac{1}{2} T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa} y} \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{v}{2} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{v}{2} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right\}.$$

Tak więc wzór (3.9) można ostatecznie zapisać jak następuje:

$$(3.12) \quad \hat{T}(y, t) = \begin{cases} T_0, & \text{dla } y \leq 0, \\ \frac{1}{2} T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa} y} \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{v}{2} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{v}{2} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] \right\}, & \text{dla } y > 0. \end{cases}$$

Podstawiając do otrzymanego rozwiązania (3.12) związek

$$y = x - vt$$

otrzymamy rozwiązanie dla pola temperatury zapisane w układzie współrzędnych związanych z półprzestrzenią w następującej postaci:

$$(3.13) \quad T(x, t) = \begin{cases} T_0, & \text{dla } x \leq vt, \\ \frac{1}{2} T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\}, & \text{dla } x > vt, \end{cases}$$

czyli jest to rozwiązanie równania (3.1), które spełnia dane warunki (3.2), (3.3) i (3.4). Należy dodać, że drugie z rozwiązań (3.13) odpowiada funkcji $\theta(x, t)$ z warunku (3.3).

Jak łatwo zauważyć, rozwiązanie (3.13) dla prędkości $v = 0$ przyjmuje znaną postać uzyskaną przez DANIŁOWSKĄ [1]

$$T(x, t) = T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right).$$

4. Pole naprężenia

Współrzędne stanu naprężenia σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) w rozważanej półprzestrzeni wyznaczmy w oparciu o funkcję potencjału termosprężystego przemieszczenia Φ , która w przypadku jednowymiarowym zdefiniowana jest związkiem

$$(4.1) \quad u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x_1, t),$$

gdzie u_1 jest współrzędną wektora przemieszczenia na osi x_1 .

Funkcja potencjału Φ związana jest z temperaturą T równaniem falowym w postaci

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = \vartheta_0 T; \quad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_1,$$

przy czym $c = \sqrt{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{2G}{\rho}}$ jest prędkością rozchodzenia się fali dylatacyjnej w ośrodku sprężystym.

Znajomość funkcji potencjału Φ pozwoli wyznaczyć współrzędne tensora naprężenia σ_{ij} dla półprzestrzeni z następujących zależności ([3], s. 183):

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \nabla^2 \Phi \right) + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

$i, j = 1, 2, 3, \quad \delta_{ij} \text{ — delta Kroneckera,}$

które w przypadku jednowymiarowym mają postać:

$$(4.3) \quad \sigma_{11} = \rho \ddot{\Phi},$$

$$(4.4) \quad \sigma_{22} = \rho \ddot{\Phi} - 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{c^2} \ddot{\Phi} - 2G \vartheta_0 T$$

oraz

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0,$$

przy czym naprężenia (4.3) i (4.4) spełniać muszą następujące warunki:

$$(4.5) \quad \sigma_{11}(x = 0, t) = 0,$$

$$(4.6) \quad \sigma_{11}(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad \sigma_{22}(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad t > 0.$$

Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem funkcji potencjału Φ . Wykorzystując rozwiązanie (3.13) dla pola temperatury w rozważanej półprzestrzeni, równanie (4.2) możemy napisać jak następuje:

$$(4.7) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = \begin{cases} \vartheta_0 T_0, & \text{dla } x \leq vt; \\ \frac{1}{2} \vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\}, & \text{dla } x > vt. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (4.7) przyjmiemy w postaci sumy

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

przy czym Φ_1 spełnia równanie

$$(4.8) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_1 = \vartheta_0 T_0 \eta(vt-x),$$

natomiast Φ_2 jest rozwiązaniem równania

$$(4.9) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_2 = \frac{1}{2} \vartheta_0 T_0 \eta(x-vt) \times \\ \times \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\}.$$

Zajmiemy się najpierw równaniem (4.8). Prawą stronę tego równania możemy zapisać w postaci całkowej jak następuje:

$$\eta(vt-x) \vartheta_0 T_0 = \frac{2}{\pi} \vartheta_0 T_0 \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} [1 - \cos \alpha vt] \sin \alpha x dx.$$

Stosując następnie do równania (4.8) transformację Laplace'a [2] otrzymamy

$$(4.10) \quad \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{1L} - \frac{s^2}{c^2} \Phi_{1L} = \frac{2}{\pi} \vartheta_0 T_0 \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \alpha^2 v^2} \right) \sin \alpha x dx.$$

Rozwiązaniem równania (4.10) jest funkcja

$$(4.11) \quad \Phi_{1L} = \frac{\vartheta_0 T_0}{s^3} \frac{c^2 v^2}{c^2 - v^2} \left\{ e^{-\frac{s}{v}x} - e^{-\frac{s}{c}x} \right\}.$$

Ponieważ do wyznaczenia naprężeń wykorzystywać będziemy drugą pochodną funkcji Φ względem czasu [patrz wzory (4.3) i (4.4)], dlatego należy wyznaczyć $\ddot{\Phi}_1$, co łatwo uzyskać ze względu na zależność

$$(4.12) \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi \right\} = s^2 \Phi_L.$$

Wykonując zatem we wzorze (4.11) odwrotną transformację Laplace'a i wykorzystując zależność (4.12) otrzymamy szukaną funkcję $\ddot{\Phi}_1$ w postaci

$$(4.13) \quad \mathcal{L}^{-1} \{ s^2 \Phi_{1L} \} = \ddot{\Phi}_1 = \frac{\vartheta_0 T_0}{c^2 - v^2} c^2 v^2 \left\{ \eta \left(t - \frac{x}{v} \right) - \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\}.$$

Rozważmy obecnie równanie (4.9). Wykonując transformację Laplace'a nad tym równaniem otrzymamy

$$(4.14) \quad \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{2L} - \frac{s^2}{c^2} \Phi_{2L} = A(s) e^{-x \sqrt{\frac{s}{\kappa}}} (1 - e^{-\frac{s}{v} x}),$$

gdzie

$$A(s) = \frac{1}{2} \vartheta_0 T_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s - \frac{v^2}{\kappa}} + \frac{v}{\sqrt{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{s - \frac{v^2}{\kappa}} \right).$$

Rozwiązaniem równania (4.14) jest funkcja

$$(4.15) \quad \Phi_{2L} = A(s) \frac{1}{s \left(\frac{s}{c^2} - \frac{1}{\kappa} \right)} \left\{ e^{-\frac{s}{c} x} - e^{-x \sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right\} + \\ + A(s) \frac{1}{\frac{s^2}{c^2} - \left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} + \frac{s}{v} \right)^2} \left\{ e^{-x \left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} + \frac{s}{v} \right)} - e^{\frac{s}{c} x} \right\}.$$

Stosując do rozwiązania (4.15) odwrotną transformację Laplace'a i uwzględniając zależność (4.12) otrzymamy:

$$(4.16) \quad \mathcal{L}^{-1} \{ s^2 \Phi_{2L} \} = \ddot{\Phi}_2 = -B \left\{ c^2 \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) E_1^+ - \frac{vc}{1 - \frac{v^2}{c^2}} E_1^- \right\} + \\ + B \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (E_2^+ + E_2^-) + 2B\eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \left\{ c^2 \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) e^{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \right. \\ \left. - \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} + \frac{vc}{1 - \frac{v^2}{c^2}} E_3 - \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} E_4 \right\} - \\ - D\eta \left(t - \frac{x}{v} \right) \left\{ \frac{a}{2} (s_1 F_1^1 - s_2 F_1^2) + \frac{1}{v\sqrt{\kappa}} (\sqrt{s_1} F_2^1 - \sqrt{s_2} F_2^2) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad \text{c.d.} \quad & -\frac{1}{2\kappa}(F_1^1 - F_1^2) + \frac{a}{2} \left[\frac{s_1^2}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^1 - \frac{s_2^2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^2 \right] - \frac{2avc^3}{\kappa(v^2 - 4c^2)} F_3 + \\
 & + \frac{2+av^2}{2v\sqrt{\kappa}} \left[\frac{s_1\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^1 - \frac{s_2\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^2 - \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_4 \right] + \\
 & + \frac{v}{2\kappa\sqrt{\kappa}} \left[\frac{\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^1 - \frac{\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^2 - \frac{4\kappa c^3}{v^2\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_4 \right] - \\
 & - \frac{1}{2\kappa} \left[\frac{s_1}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^1 - \frac{s_2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^2 - \frac{4c^3 F_3}{v(v^2 - 4c^2)} \right] + \\
 & + D\eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \left\{ a \left[s_1 e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - e s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + \right. \\
 & + \frac{2}{v\sqrt{\kappa}} \left(\sqrt{s_1} F_1^5 - \sqrt{s_2} F_2^5 \right) - \frac{1}{\kappa} \left[e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] - \\
 & - \frac{4avc^3}{\kappa(v^2 - 4c^2)} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} - a \left[\frac{s_1^2}{v^2 - s_1} e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{s_2^2}{v^2 - s_2} e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] + \\
 & + \frac{2+av^2}{v\sqrt{\kappa}} \left[\frac{s_1\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^1 - \frac{s_2\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^2 - \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_6 \right] + \\
 & + \frac{1}{\kappa} \left[\frac{s_1}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{s_2}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] - \\
 & \left. - \frac{v}{\kappa\sqrt{\kappa}} \left[\frac{\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^1 - \frac{\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^2 - \frac{4\kappa c^3}{v^2\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_6 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 F_1^1 = e^{s_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)} & \left\{ e^x \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa} \left(t - \frac{x}{v} \right)} + \sqrt{s_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right] + \right. \\
 & \left. + e^{-x} \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa} \left(t - \frac{x}{v} \right)} - \sqrt{s_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1^2 = e^{s_2 \left(t - \frac{x}{v} \right)} & \left\{ e^x \sqrt{\frac{s_2}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa} \left(t - \frac{x}{v} \right)} + \sqrt{s_2 \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-x} \sqrt{\frac{s_2}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - \sqrt{s_2\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \Bigg\}, \\
F_2^1 &= e^{s_1\left(t-\frac{x}{v}\right)} \left\{ e^{-x} \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - \sqrt{s_1\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] - \right. \\
& \quad \left. e^{-x} \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} + \sqrt{s_1\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \right\}, \\
F_2^2 &= e^{s_2\left(t-\frac{x}{v}\right)} \left\{ e^{-x} \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - \sqrt{s_2\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] - \right. \\
& \quad \left. - e^{x} \sqrt{\frac{s_2}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} + \sqrt{s_2\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \right\}; \\
F_3 &= e^{\frac{v^2}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \left\{ e^{x\frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} + v\sqrt{\frac{1}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + e^{-x\frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - v\sqrt{\frac{1}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \right\}, \\
F_4 &= e^{\frac{v^2}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \left\{ e^{-x\frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - v\sqrt{\frac{1}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] - \right. \\
& \quad \left. - e^{x\frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} + v\sqrt{\frac{1}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \right\}, \\
F_5^1 &= e^{s_1\left(t-\frac{x}{c}\right)} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{s_1\left(t-\frac{x}{c}\right)} \right], \\
F_5^2 &= e^{s_2\left(t-\frac{x}{c}\right)} \operatorname{erf} \left[\sqrt{s_2\left(t-\frac{x}{c}\right)} \right], \\
F_6 &= e^{\frac{v^2}{\kappa}\left(t-\frac{x}{c}\right)} \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{v^2}{\kappa}\left(t-\frac{x}{c}\right)} \right], \\
E_1^\pm &= e^{\frac{1}{\kappa}c^2t} \left\{ e^{-x\frac{c}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v\sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] \pm e^{x\frac{c}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + c\sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$E_2^\pm = e^{\frac{v^2}{\kappa} t} \left\{ e^{-x \frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] \pm e^{x \frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right\},$$

$$E_3 = e^{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right],$$

$$E_4 = F_6,$$

$$a = \frac{v^2 - c^2}{v^2 c^2},$$

$$s_1 = \frac{1}{\kappa} \frac{c^2 v^2}{(v+c)^2},$$

$$s_2 = \frac{1}{\kappa} \frac{c^2 v^2}{(v-c)^2},$$

$$B = \frac{T_0 \vartheta_0}{4}, \quad D = \frac{1}{8} T_0 \vartheta_0 \kappa v c = \frac{1}{2} B \kappa v c.$$

Podstawiając teraz $\ddot{\Phi} = \ddot{\Phi}_1 + \ddot{\Phi}_2$, gdzie $\ddot{\Phi}_1$ jest dana wzorem (4.13) i $\ddot{\Phi}_2$ wzorem (4.16), do (4.3) i (4.4) oraz korzystając ze wzoru (3.13) otrzymamy końcowe wzory dla σ_{11} i σ_{22} .

Łatwo wykazać, że otrzymane w ten sposób naprężenia σ_{11} i σ_{22} są ograniczone dla $x \rightarrow \infty$, a nadto spełniony jest warunek brzegowy (4.5).

5. Analiza wyników i wnioski

Wyznaczone wzory dla naprężeń σ_{11} i σ_{22} można zapisać w postaci sum trzech funkcji w następujący sposób:

$$(5.1) \quad \sigma_{11}(x, t) = A_1^1(x, t) + A_2^1 \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) + A_3^1 \eta \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

oraz

$$(5.2) \quad \sigma_{22}(x, t) = A_1^2(x, t) + A_2^2 \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) + A_3^2 \eta \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

gdzie

$$A_1^1(x, t) = - \frac{B \varrho}{1 - \frac{c^2}{v^2}} \{ (2c^2 - v^2) E_1^+ - v c E_1^- + v^2 (E_2^+ + E_2^-) \},$$

$$A_2^1(x, t) = 2B \varrho \left\{ \frac{1}{1 - \frac{c^2}{v^2}} \left[(2c^2 - v^2) e^{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} - v^2 e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} + v c E_3 - v^2 E_4 - 2v^2 \right] \right\} -$$

$$+ D \varrho \left\{ a \left[s_1 e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - s_2 e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] + \frac{2}{v \sqrt{\kappa}} \left[\sqrt{s_1} F_5^1 - \sqrt{s_2} F_5^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\kappa} \left[e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] - \frac{4 a v c^2}{\kappa (v^2 - 4c^2)} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + a \left[\frac{s_1^2}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{s_2^2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] + \\
& + \frac{2 + av^2}{v\sqrt{\kappa}} \left[\frac{s_1 \sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^1 - \frac{s_2 \sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^2 - \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_6 \right] + \\
& + \frac{1}{\kappa} \left[\frac{s_1}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{s_2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{4c^3}{v(v^2 - 4c^2)} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] - \\
& - \frac{v}{\kappa\sqrt{\kappa}} \left[\frac{\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^1 - \frac{\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^2 - \frac{4\sqrt{\kappa}c^3}{v^2(v^2 - 4c^2)} F_6 \right] \Bigg\}, \\
A_3^1(x, t) = & 4B\varrho \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - D\varrho \left\{ \frac{1}{2} a (s_1 F_1^1 - s_2 F_1^2) + \frac{1}{v\sqrt{\kappa}} (\sqrt{s_1} F_2^1 - \sqrt{s_2} F_2^2) - \right. \\
& - \frac{1}{2\kappa} (F_1^1 - F_1^2) + \frac{1}{2} a \left(\frac{s_1^2}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^1 - \frac{s_2^2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^2 \right) - \\
& - \frac{2avc^3}{\kappa(v^2 - 4c^2)} F_3 + \frac{2 + av^2}{2v\sqrt{\kappa}} \left(\frac{s_1 \sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^1 - \frac{s_2 \sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^2 \right) - \\
& - \frac{2 + av^2}{2v\sqrt{\kappa}} \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_4 + \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{s_1}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^1 - \right. \\
& \left. - \frac{s_2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^2 - \frac{4c^3}{v(v^2 - 4c^2)} F_3 \right) - \\
& \left. - \frac{v}{2\kappa\sqrt{\kappa}} \left(\frac{\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^1 - \frac{\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^2 - \frac{4\sqrt{\kappa}c^3}{v^2(v^2 - 4c^2)} F_4 \right) \right\},
\end{aligned}$$

przy czym

$$A_1^2(x, t) = \frac{\lambda}{c^2 \varrho} A_1^1(x, t) - G\vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\},$$

$$A_2^2(x, t) = \frac{\lambda}{c^2 \varrho} A_2^1(x, t),$$

$$A_3^2(x, t) = \frac{\lambda}{c^2 \varrho} A_3^1(x, t) + G\vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - 2 \right\}.$$

Funkcje $A_1^1(x, t)$ i $A_1^2(x, t)$ charakteryzują naprężenia powstałe od razu w każdym punkcie półprzestrzeni. Funkcje $A_2^1(x, t)\eta(t-x/c)$ i $A_2^2(x, t)\eta(t-x/c)$ charakteryzują naprężenia poruszające się z prędkością c , których czoło w chwili t_c jest opisane równaniem $t_c = x/c$. Natomiast funkcje $A_3^1(x, t)\eta(t-x/v)$ i $A_3^2(x, t)\eta(t-x/v)$ opisują naprężenia w półprzestrzeni rozprzestrzeniające się z prędkością v wskutek ruchu pola temperatury. Ich czoło w chwili $t_v = \text{const}$ ma równanie $t_v = x/v$.

Dokonując przejścia z $v \rightarrow 0$ we wzorach (5.1) i (5.2), czyli obliczając granice

$$\lim_{v \rightarrow 0} \sigma_{11}(x, t; v)$$

oraz

$$\lim_{v \rightarrow 0} \sigma_{22}(x, t; v),$$

otrzymamy naprężenia

$$\sigma_{11}(x, t; v = 0) = \varrho T_0 \vartheta_0 c^2 \left[B_1(x, t) - B_2(x, t) \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

oraz

$$\sigma_{22}(x, t; v = 0) = \frac{\lambda}{c^2 \varrho} \sigma_{11}(x, t; v = 0) - 2G \vartheta_0 T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right),$$

przy czym

$$B_1(x, t) = \frac{1}{2} e^{\frac{c^2}{\kappa} t} \left\{ e^{\frac{xc}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + c \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) + e^{-\frac{xc}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - c \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) \right\},$$

$$B_2(x, t) = e^{\frac{c^2}{\kappa} t} \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Otrzymane w ten sposób naprężenia dla $v = 0$ mają postać identyczną z naprężeniami uzyskanymi przez DANIŁOWSKĄ [1].

Istotnym z punktu widzenia zastosowań inżynierskich wydaje się być przypadek, w którym prędkość ruchu pola temperatury jest mała w porównaniu z prędkością rozchodzenia się fali sprężystej, czyli dla przypadku

$$(5.3) \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1.$$

Analizując naprężenia (5.1) i (5.2) przy uwzględnieniu zależności (5.3) otrzymamy

$$(5.4) \quad \bar{\sigma}_{11}(x, t) = -\varrho B c^2 \left\{ 2E_1^+ - \frac{v}{c} E_1^- \right\} + 4B \varrho v^2 \eta \left(t - \frac{x}{v} \right) + \\ + 2B \varrho c^2 \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \left\{ e^{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{c}{x} \right)} + \frac{v}{c} E_3 \right\}$$

oraz

$$(5.5) \quad \bar{\sigma}_{22}(x, t) = \frac{\lambda}{c^2 \varrho} \bar{\sigma}_{11}(x, t) - G \vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\} + G \vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - 2 \right\} \eta(vt - x).$$

Widzimy zatem, że dla małych wartości prędkości v spełniających zależność (5.3), wzory na naprężenia $\bar{\sigma}_{11}$ i $\bar{\sigma}_{22}$ w półprzestrzeni ulegają znacznemu uproszczeniu. Natomiast charakter jakościowy tych naprężeń pozostaje niezmienny.

Literatura cytowana w tekście

1. В. И. Даниловская, *Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы*, Прикл. Мат. Мех., 9, 2 (1950).
2. В. А. Дишкин, А. П. Прудников, *Справочник по операционному исчислению*, Москва 1965.
3. W. NOWAKSI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
4. T. ROŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in along cylinder with moving boundary condition*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. techn., 13, 45 (1965).
5. T. ROŻNOWSKI, *Niestacjonarne pole temperatury w półprzestrzeni w przypadku ruchomego ogrzania na brzegu*, Rozpr. Inż., 17, 4 (1969).
6. T. ROŻNOWSKI, K. SKALSKI, *Niestacjonarny przepływ ciepła w grubej rurze ogrzewanej ruchomym polem temperatury*, Rozpr. Inż., 19, 4 (1971).
7. M. ŻÓRAWSKI, *Moving dynamic heat sources in a viscoelastic space and certain basic solutions for moving sources*, Arch. Mech. Stos., 12, 2 (1961).

Р е з ю м е

ОДНОМЕРНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ВЫЗВАННЫХ ПОДВИЖНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

В работе рассматриваются динамические термические напряжения в упругом полупространстве $x \geq 0$ вызываемые подвижной термической нагрузкой вида $T_0\eta(vt-x)$, где T_0 — постоянная температура перемещающаяся вглубь пространства со скоростью v , а через $\eta(\xi)$ обозначена функция Хевисайда. Задача решается с помощью методов теории термических напряжений.

S u m m a r y

ONE-DIMENSIONAL DYNAMIC THERMAL STRESS FIELD DUE TO A MOVING TEMPERATURE FIELD

The paper presents the determination of dynamic thermal stresses in an elastic halfspace $x \geq 0$ due to a moving thermal loading of the following form: $T_0\eta(vt-x)$, ($\eta(\xi)$ — Heaviside's function), in which T_0 represents the constant temperature propagating at a velocity v inside the halfspace.

The problem is considered within the framework of the theory of non-coupled thermoelasticity.

PRACOWNIA TEORII KONSOLIDACJI I TERMODYFUZJI
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1974 r.

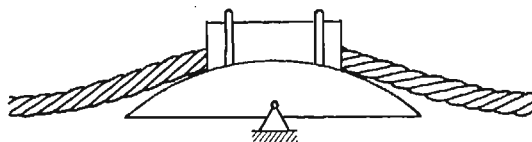
ZASTOSOWANIE TŁUMIKÓW STOCKBRIDGE'A
DO TŁUMIENIA DRGAŃ BELEK I STRUN

JÓZEF NIZIOŁ, ANDRZEJ MARTYNUŠKA (KRAKÓW)

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest przeanalizowanie skuteczności tłumienia tłumików Stockbridge'a stosowanych do tłumienia drgań belek i strun.

Teoretyczne rozwiązanie zagadnienia tłumienia drgań układów o ciągłym rozmieszczeniu masy nastęrcza wiele trudności i często okazuje się niemożliwe bez stosowania wielu uproszczeń. Z problemami takimi spotykamy się przy rozważaniu tłumienia drgań suwnic, rurociągów napowietrznych, przewodów linii wysokiego napięcia itp.



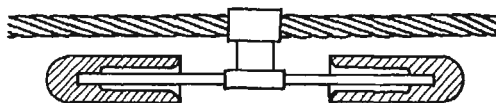
Rys. 1.

W niniejszej pracy zajęto się analizą drgań przewodów linii wysokiego napięcia tłumionych za pomocą tłumików Stockbridge'a. Drgania takich przewodów są zjawiskiem bardzo niebezpiecznym. W polskich warunkach najczęściej spotykanym źródłem drgań są «wiry Kármána». Jest to zjawisko występujące podczas opływania prętów przez płyny polegające na odrywaniu się cząsteczek płynu od pręta z pewną określoną częstotliwością. Powstaje w ten sposób okresowo zmieniająca się siła stanowiąca wymuszenie drgań. Charakterystyczny dla tego rodzaju drgań jest ich poprzeczny, w stosunku do przepływu płynu, kierunek. Wiszące na wolnym powietrzu przewody są narażone na działanie wiatru, który powoduje powstawanie w nich takich właśnie drgań poprzecznych.

W pracy niniejszej nie będziemy zatrzymywać się nad samym mechanizmem powstawania drgań, lecz przyjmiemy, że wymuszenia drgań są znane, a dobierać będziemy skuteczny tłumik dynamiczny.

Na przewody linii wysokiego napięcia stosowane są liny. Ich zamocowanie zrealizowane jest w ten sposób, że spoczywa ona na tak zwanej łódce, do której przymocowana jest nakładka (rys. 1). Tego typu utwierdzenie powoduje, że w pobliżu uchwytów sztywność liny jest największa i maleje ona w kierunku od «uchwyty». W związku z tym w pobliżu łódki występują największe naprężenia. Poszczególne druty wchodzące w skład drgającej liny poddawane są działaniu cyklicznych naprężeń o zmieniającym się znaku. Zjawisko to w połączeniu z dużymi naprężeniami kontaktowymi w obrębie uchwytu powoduje zmęczeniowe zniszczenie liny w tym obszarze.

W związku z tym zachodzi konieczność tłumienia drgań liny, szczególnie w pobliżu uchwytów. Na podstawie badań na liniach rzeczywistych stwierdzono, że najczęściej występujące drgania mieszczą się w zakresie 10–35 Hz i wówczas uzyskiwane są największe amplitudy drgań. Tłumiki dynamiczne powinny być głównie nastrojone na ten zakres częstotliwości.



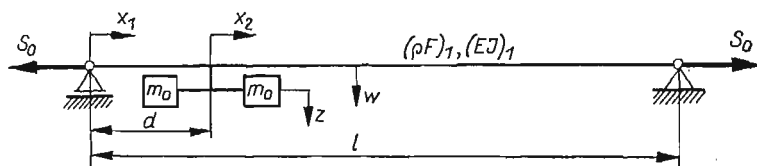
Rys. 2.

Stosowane są dwie metody tłumienia drgań:

- a) tłumienie integralne — tłumiki Stockbridge'a (rys. 2),
- b) tłumienie lokalne w miejscach niebezpiecznych — tłumienie pętlicowe.

1. Drgania własne belki z naciągiem tłumionej tłumikiem Stockbridge'a

Rozważamy drgania belki jednorodnej, zamocowanej przegubowo, poddanej rozciągającej sile osiowej, na której podwieszono tłumik Stockbridge'a (rys. 3).



Rys. 3.

Na rys. 3 przyjęto następujące oznaczenia

- x_1 — współrzędna bieżąca dla belki mierzona od podpory,
- x_2 — współrzędna bieżąca dla tłumika mierzona od punktu podwieszenia tłumika,
- $(\rho F)_1$ — gęstość belki na jednostkę długości,
- $(\rho F)_2$ — gęstość pręta wchodzącego w skład tłumika na jednostkę długości,
- $m_2 = (\rho F)_2 l_2$ — masa pręta tłumika,
- $(EJ)_1$ — sztywność zginania belki,
- $(EJ)_2$ — sztywność zginania pręta wchodzącego w skład tłumika,
- m_0 — masa tłumika,
- d — odległość punktu podwieszenia tłumika od podpory,
- S_0 — naciąg belki,
- l — długość przęsła,
- l_2 — długość pręta wchodzącego w skład tłumika,
- a — odległość środka ciężkości masy m_0 od końca pręta,
- w — przemieszczenie punktów belki,
- z — przemieszczenie względne punktów pręta w stosunku do belki,
- z_0 — przemieszczenie względne środka masy m_0 w stosunku do belki.

Układ równań opisujących ruch belki i tłumika ma postać

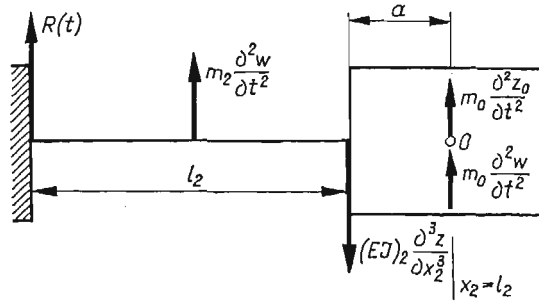
$$(1.1) \quad \begin{aligned} (EJ)_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (\rho F)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \delta_1(x_1 - d)R(t), \\ (EJ)_2 \frac{\partial^4 z}{\partial x_2^4} + (\rho F)_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\rho F)_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie przez $R(t)$ oznaczono siłę określoną następująco:

$$(1.2) \quad R(t) = - (EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0} - (m_0 + m_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d},$$

δ jest funkcją Diraca. Jest to siła wzajemnego oddziaływania belki i tłumika. Dla powyższego układu równań warunki brzegowe dla belki mają postać

$$(1.3) \quad \begin{aligned} w(0, t) &= 0, & w(l, t) &= 0, \\ w''(0, t) &= 0, & w''(l, t) &= 0, \end{aligned}$$



Rys. 4.

dla tłumika (rys. 4)

$$(1.4) \quad \begin{aligned} z(0, t) &= 0, & m_0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} &= (EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=l_2} - B, \\ z'(0, t) &= 0, & J_0 \ddot{\varphi} &= -a(EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=l_2} - (EJ)_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=l_2} + M_B. \end{aligned}$$

Przyjęto tu

$$(1.5) \quad B = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d},$$

$$(1.6) \quad M_B = -\frac{l_2}{2} m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d},$$

$$(1.7) \quad m_2 = (\rho F)_2 l_2,$$

$$(1.8) \quad z_0 = z(l_2, t) + a\varphi = z(l_2, t) + a \frac{\partial z(x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2},$$

$$(1.9) \quad J_0 = \int_{(m_0)} r^2 dm_0$$

masowy moment bezwładności tłumika względem osi 0.

Rozwiązanie układu (1.1) przyjmujemy w postaci

$$(1.10) \quad \begin{aligned} w(x_1, t) &= X(x_1) \sin(\omega t + \varphi), \\ z(x_2, t) &= Z(x_2) \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

gdzie ω jest nie znaną na razie częstością drgań układu. Po wstawieniu (1.10) do (1.1) i wykorzystaniu (1.2) otrzymamy

$$(1.11) \quad \begin{aligned} (EJ)_1 X^{IV} - (\rho F)_1 \omega^2 X - S_0 X'' &= \delta(x_1 - d) 2[-(EJ)_2 Z'''(0) + (m_0 + m_2) X(d) \omega^2], \\ (EJ)_2 Z^{IV} - (\rho F)_2 \omega^2 Z - (\rho F)_2 X(d) \omega^2 &= 0. \end{aligned}$$

Drugie równanie układu (1.11) zapiszemy w postaci

$$(1.12) \quad Z^{IV}(x_2) - k_2^4 Z(x_2) = k_2^4 X(d),$$

gdzie oznaczono

$$(1.13) \quad k_2^4 = \frac{(\rho F)_2}{(EJ)_2} \omega^2.$$

Rozwiązanie równania (1.12) przyjmuje postać

$$(1.14) \quad Z(x_2) = Z_0(x_2) + Z_s(x_2),$$

gdzie $Z_s(x_2)$ jest całką szczególną równą

$$(1.15) \quad Z_s(x_2) = -X(d).$$

Natomiast $Z_0(x_2)$ to całka ogólna równania jednorodnego

$$(1.16) \quad Z_0(x_2) = A_2^{(1)} \sin k_2 x_2 + B_2^{(1)} \cos k_2 x_2 + G_2^{(1)} \operatorname{sh} k_2 x_2 + D_2^{(1)} \operatorname{ch} k_2 x_2.$$

Na podstawie warunków brzegowych (1.4) otrzymamy następujący układ równań

$$(1.17) \quad \begin{aligned} A_2^{(1)} \varepsilon + B_2^{(1)} \kappa &= \gamma X(d), \\ A_2^{(1)} \mu - B_2^{(1)} \vartheta &= -\eta X(d), \\ G_2^{(1)} &= -A_2^{(1)}, \\ D_2^{(1)} &= X(d) - B_2^{(1)}, \end{aligned}$$

z którego obliczono stałe

$$(1.18) \quad \begin{aligned} A_2^{(1)} &= A_2 X(d), & A_2 &= \frac{\gamma \vartheta - \eta \kappa}{\varepsilon \vartheta + \mu \kappa}, \\ B_2^{(1)} &= B_2 X(d), & B_2 &= \frac{\varepsilon \eta + \mu \gamma}{\varepsilon \vartheta + \mu \kappa}, \\ G_2^{(1)} &= G_2 X(d), & G_2 &= \frac{\eta \kappa - \gamma \vartheta}{\varepsilon \vartheta + \mu \kappa}, \\ D_2^{(1)} &= D_2 X(d), & D_2 &= 1 - \frac{\varepsilon \eta + \mu \gamma}{\varepsilon \vartheta + \mu \kappa}. \end{aligned}$$

W zależnościach (1.17) i (1.18) oznaczono

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \sin k_2 l_2 + k_2 a \cos k_2 l_2 - \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \cos k_2 l_2 - \operatorname{sh} k_2 l_2 - k_2 a \operatorname{ch} k_2 l_2 - \\
 &\quad - \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \operatorname{ch} k_2 l_2, \\
 \varkappa &= \cos k_2 l_2 - k_2 a \sin k_2 l_2 + \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \sin k_2 l_2 - \operatorname{ch} k_2 l_2 - k_2 a \operatorname{sh} k_2 l_2 - \\
 &\quad - \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l_2, \\
 (1.19) \quad \gamma &= -\operatorname{ch} k_2 l_2 - k_2 a \operatorname{sh} k_2 l_2 - \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l_2, \\
 \mu &= J_0 \omega^2 k_2 \cos k_2 l_2 + a(EJ)_2 k_2^3 \cos k_2 l_2 + (EJ)_2 k_2^2 \sin k_2 l_2 - J_0 \omega^2 k_2 \operatorname{ch} k_2 l_2 + \\
 &\quad + a(EJ)_2 k_2^3 \operatorname{ch} k_2 l_2 + (EJ)_2 k_2^2 \operatorname{sh} k_2 l_2, \\
 \vartheta &= J_0 \omega^2 k_2 \sin k_2 l_2 + a(EJ)_2 k_2^3 \sin k_2 l_2 - (EJ)_2 k_2^2 \cos k_2 l_2 + J_0 \omega^2 k_2 \operatorname{sh} k_2 l_2 - \\
 &\quad - a(EJ)_2 k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l_2 - (EJ)_2 k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l_2, \\
 \eta &= \frac{l_2^2}{2} (\varrho F)_2 \omega^2 + J_0 \omega^2 k_2 \operatorname{sh} k_2 l_2 - a(EJ)_2 k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l_2 - (EJ)_2 k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l_2.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie więc rozwiązanie równania (1.12) można zapisać w formie

$$(1.20) \quad Z(x_2) = X(d) \left[\frac{\gamma \vartheta - \eta \varkappa}{\varepsilon \vartheta + \mu \varkappa} \sin k_2 x_2 + \frac{\varepsilon \eta + \mu \gamma}{\varepsilon \vartheta + \mu \varkappa} \cos k_2 x_2 + \right. \\
 \left. + \frac{\eta \varkappa - \gamma \vartheta}{\varepsilon \vartheta + \mu \varkappa} \operatorname{sh} k_2 x_2 + \left(1 - \frac{\varepsilon \eta + \mu \gamma}{\varepsilon \vartheta + \mu \varkappa} \right) \operatorname{ch} k_2 x_2 - 1 \right].$$

Z drugiego z równań (1.11) można obliczyć

$$(1.21) \quad X(d) \omega^2 = \frac{(EJ)_2}{(\varrho F)_2} Z^{IV}(x_2) - \omega^2 Z(x_2).$$

Wstawiając (1.21) do pierwszego równania (1.11) dostajemy do rozwiązania równanie

$$(1.22) \quad X^{IV}(x_1) - h_1^2 X''(x_1) - k_1^4 X(x_1) = \delta(x_1 - d) 2[-\alpha_g Z'''(0) + \\
 + \alpha_g \alpha_m Z^{IV}(0) - \omega^2 \alpha_{gm} Z(0)],$$

w którym przyjęto oznaczenia

$$(1.23) \quad \begin{aligned}
 h_1^2 &= \frac{S_0}{(EJ)_1}, \\
 k_1^4 &= \omega^2 \frac{(\varrho F)_1}{(EJ)_1}, \\
 \alpha_g &= \frac{(EJ)_2}{(EJ)_1}, \\
 \alpha_m &= \frac{m_0 + m_1}{(\varrho F)_2}, \\
 \alpha_{gm} &= \frac{m_0 + m_2}{(EJ)_1}.
 \end{aligned}$$

Traktując równanie (1.22) jako równanie niejednorodne, jego rozwiązanie przyjmiemy w postaci sumy całki ogólnej wyrażającej się wzorem

$$(1.24) \quad X_0(x_1) = A_1 \sin r_1 x_1 + B_1 \cos r_1 x_1 + G_1 \operatorname{sh} r_2 x_1 + D_1 \operatorname{ch} r_2 x_1$$

oraz całki szczególnej przyjmującej postać

$$(1.25) \quad X_s(x_1) = R_1 \int_0^{x_1} f(u) \sin r_1 (u - x_1) du - R_2 \int_0^{x_1} f(u) \operatorname{sh} r_2 (u - x_1) du,$$

r_1, r_2, R_1, R_2 i $f(u)$ określone są następująco

$$(1.26) \quad r_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{h_1^4 + 4k_1^4} - h_1^2}{2}},$$

$$(1.27) \quad r_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{h_1^4 + 4k_1^4} + h_1^2}{2}},$$

$$(1.28) \quad R_1 = \frac{r_1^2 r_2 + r_2^3}{r_1^5 r_2 + 2r_1^3 r_2^3 + r_1 r_2^5},$$

$$(1.29) \quad R_2 = \frac{r_1^3 + r_1 r_2^2}{r_1^5 r_2 + 2r_1^3 r_2^3 + r_1 r_2^5},$$

$$(1.30) \quad f(u) = -\delta(u-d)2[\alpha_g Z'''(0) - \alpha_m \alpha_g Z^{IV}(u-d) + \alpha_{gm} \omega^2 Z(u-d)].$$

Posługując się funkcją Heaviside'a $\sigma_2(x_1 - d)$ całkę szczególną możemy zapisać wzorem

$$(1.31) \quad X_s(x_1) = -\sigma_2(x_1 - d)2[\alpha_g Z'''(0) - \alpha_m \alpha_g Z^{IV}(0) + \omega^2 \alpha_{gm} Z(0)] \times \\ \times [R_1 \sin r_1 (d - x_1) - R_2 \operatorname{sh} r_2 (d - x_1)].$$

Rozwiązanie równania (1.22) przyjmie więc postać

$$(1.32) \quad X(x_1) = A_1 \sin r_2 x_1 + B_1 \cos r_1 x_1 + G_1 \operatorname{sh} r_2 x_1 + D_1 \operatorname{ch} r_2 x_1 + \\ + \sigma_2(x_1 - d)2KX(d)[R_1 \sin r_1 (d - x_1) - R_2 \operatorname{sh} r_2 (d - x_1)].$$

Przez K oznaczono

$$(1.33) \quad K = -2k_2^3 \alpha_g \frac{\eta\kappa - \gamma\vartheta}{\varepsilon\vartheta + \mu\kappa} + \omega^2 \alpha_g \alpha_m \frac{(\partial F)_2}{(EJ)_2}.$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych (1.3) dostajemy $B_1 = D_1 = 0$ oraz układ równań postaci

$$(1.34) \quad A_1 \{ \sin r_1 l + 2K \sin r_1 d [R_1 \sin r_1 (d-l) - R_2 \operatorname{sh} r_2 (d-l)] \} + \\ + G_1 \{ \operatorname{sh} r_2 l + 2K \operatorname{sh} r_2 d [R_1 \sin r_1 (d-l) - R_2 \operatorname{sh} r_2 (d-l)] \} = 0, \\ -A_1 \{ r_1^2 \sin r_1 l + 2K \sin r_1 d [R_1 r_1^2 \sin r_1 (d-l) + R_2 r_2^2 \operatorname{sh} r_2 (d-l)] \} + \\ + G_1 \{ r_2^2 \operatorname{sh} r_2 l - 2K \operatorname{sh} r_2 d [R_1 r_1^2 \sin r_1 (d-l) + R_2 r_2^2 \operatorname{sh} r_2 (d-l)] \} = 0.$$

Układ ten posiada rozwiązanie nietrywialne wtedy, gdy jego wyznacznik główny jest równy zeru.

Z rozwinięcia tego wyznacznika otrzymano równanie charakterystyczne, z którego można wyznaczyć częstotliwości drgań ω_n układu belka—tłumik. Równanie to ma postać

$$(1.35) \quad \frac{1}{k_1^2 \sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{h_1^4 + 4k_1^4 + h_1^2}}{h_1^4 + 4k_1^4}} \sin r_1 d \operatorname{sh} r_2 l \sin r_1 (d-l) \right] - \\ - \sqrt{\frac{\sqrt{h_1^4 + 4k_1^4 - h_1^2}}{h_1^4 + 4k_1^4}} \sin r_1 l \operatorname{sh} r_2 d \operatorname{sh} r_2 (d-l) + \frac{\sin r_1 l \operatorname{sh} r_2 l}{2K} = 0.$$

Jeżeli związek (1.35) jest spełniony, to jedną spośród dwóch stałych A_{1n} i G_{1n} można przyjąć dowolnie. Wyznaczono więc

$$(1.36) \quad \frac{A_{1n}}{G_{1n}} = - \frac{\operatorname{sh} r_{2n} l + 2K_n \operatorname{sh} r_{2n} d [R_{1n} \sin r_{1n} (d-l) - R_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} (d-l)]}{\sin r_{1n} l + 2K_n \sin r_{1n} d [R_{1n} \sin r_{1n} (d-l) - R_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} (d-l)]}.$$

Oznaczając dla prostoty zapisu

$$(1.37) \quad \frac{A_{1n}}{G_{1n}} = q_n$$

można ostatecznie rozwiązania równań (1.12) i (1.22) przedstawić wzorami

$$(1.38) \quad X_n(x_1) = G_{1n} \{ q_n \sin r_{1n} x_1 + \operatorname{sh} r_{2n} x_1 + \sigma_2 (x_1 - d) 2K_n [q_n \sin r_{1n} d + \\ + \operatorname{sh} r_{2n} d] [R_{1n} \sin r_{1n} (d - x_1) - R_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} (d - x_1)] \},$$

$$(1.39) \quad Z_n(x_2) = G_{1n} \left\{ [q_n \sin r_{1n} d + \operatorname{sh} r_{2n} d] \left[\frac{\gamma_n \vartheta_n + \eta_n \varkappa_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \varkappa_n} \sin k_{2n} x_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon_n \eta_n + \mu_n \gamma_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \varkappa_n} \cos k_{2n} x_2 + \frac{\eta_n \varkappa_n + \gamma_n \vartheta_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \varkappa_n} \operatorname{sh} k_{2n} x_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\varepsilon_n \eta_n + \mu_n \gamma_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \varkappa_n} \right) \operatorname{ch} k_{2n} x_2 - 1 \right] \right\}.$$

2. Drgania wymuszone belki z naciągami i tłumieniem wewnętrznym

Rozwiązano również problem drgań wymuszonych z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego. Równanie ruchu w tym przypadku przyjmuje postać

$$(2.1) \quad (EJ)_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \tau_1 (EJ)_1 \frac{\partial^5 w}{\partial x_1^4 \partial t} + (\rho F)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S_0 \tau_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} - S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \\ = - \delta(x_1 - d) 2 \left[(EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0} + (m_0 + m_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=0} \right] + H(x_1) \sin vt, \\ (EJ)_2 \frac{\partial^4 z}{\partial x_2^4} + \tau_2 (EJ)_2 \frac{\partial^5 z}{\partial x_2^4 \partial t} + (\rho F)_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\rho F)_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d} = 0,$$

gdzie

$H(x_1) \sin vt$ — obciążenie zewnętrzne wymuszające drgania,

τ_1 — współczynnik tłumienia wewnętrznego w belce,

τ_2 — współczynnik tłumienia wewnętrznego w tłumiku Stockbridge'a.

Rozwiązania tego układu równań poszukiwano w formie

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w(x_1, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_1) T_n^{(1)}(t), \\ z(x_2, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x_2) T_n^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Funkcje $X_n(x_1)$ i $Z_n(x_2)$ są funkcjami własnymi określonymi w poprzednim paragrafie związkami (1.38) i (1.39).

Podstawiając (2.2) do (2.1) otrzymano

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(1)}(X_n^{IV} - h_1^2 X_n'') + \tau_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n^{(1)}(X_n^{IV} - h_1^2 X_n'') + \frac{(\varrho F)_1}{(EJ)_1} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^{(1)} X_n = \\ &= -\delta(x_1 - d) 2 \left[\frac{(EJ)_2}{(EJ)_1} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n'''(0) T_n^{(2)} + \frac{m_0 + m_2}{(EJ)_1} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(d) \dot{T}_n^{(1)} \right] + \frac{H(x_1)}{(EJ)_1} \sin \nu t, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(2)} Z_n^{IV} + \tau_2 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n^{(2)} Z_n^{IV} + \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^{(2)} Z_n + \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^{(1)} X_n(d) = 0. \end{aligned}$$

Dla dalszych obliczeń wyprowadzono pewne związki. W celu uproszczenia zapisu wprowadzono operator $\eta[F_i(x)]$. Działanie tym operatorem polega na pomnożeniu przez funkcję $F_i(x)$, a następnie przecałkowaniu po długości drgającej belki w granicach od zera do l .

Przekształcając (1.22) i działając operatorem $\eta[X_k(x_1)]$ otrzymano

$$(2.4) \quad \int_0^l (X_n^{IV} - h_1^2 X_n'') X_k dx_1 = k_{1n}^4 \int_0^l X_n X_k dx_1 + 2K_n X_k(d).$$

Warunki brzegowe (1.3) powodują, że

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \int_0^l X_n^{IV} X_k dx_1 &= \int_0^l X_n X_k^{IV} dx_1, \\ \int_0^l X_n'' X_k dx_1 &= \int_0^l X_n X_k'' dx_1. \end{aligned}$$

Stąd można obliczyć

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \int_0^l X_n X_k dx_1 &= -(1 - \delta_{nk}) \frac{2[K_k X_n(d) - K_n X_k(d)]}{k_{1n}^4 - k_{1k}^4} + \delta_{nk} \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1, \\ \int_0^l (X_n^{IV} - h_1^2 X_n'') X_k dx_1 &= -(1 - \delta_{nk}) \frac{2k_{1n}^4 [K_k X_n(d) - K_n X_k(d)]}{k_{1n}^4 - k_{1k}^4} + \\ &+ \delta_{nk} k_{1k} \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1 + 2K_n X_k(d). \end{aligned}$$

Przez δ_{nk} oznaczono deltę Kronekera.

Przekształcono (1.12) jak powyżej i zadziałano operatorem $\eta[Z_i(x_2)]$ otrzymując

$$(2.7) \quad \int_0^{l_2} Z_n^{IV} Z_i dx_2 = k_{2n}^4 \int_0^{l_2} Z_n(x_2) Z_i(x_2) dx_2 + k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2.$$

Tym razem warunki brzegowe (1.4) sprawiają, że

$$(2.8) \quad \int_0^{l_2} Z_n^{IV}(x_2) Z_i(x_2) dx_2 = M_{ni} + \int_0^{l_2} Z_i^{IV}(x_2) Z_n(x_2) dx_2,$$

gdzie

$$(2.9) \quad M_{ni} = Z_n'''(l_2) Z_i(l_2) - Z_n''(l_2) Z_i'(l_2) + Z_n'(l_2) Z_i''(l_2) - Z_n(l_2) Z_i'''(l_2).$$

Korzystając z (2.8) i (2.9) obliczono

$$(2.10) \quad \int_0^{l_2} Z_n Z_i dx_2 = (1 - \delta_{ni}) \frac{1}{k_{2n}^4 - k_{2i}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - \right. \\ \left. - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + M_{ni} \right] + \delta_{ni} \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2, \\ \int_0^{l_2} Z_n^{IV} Z_i dx_2 = (1 - \delta_{ni}) \frac{k_{2n}^4}{k_{2n}^4 - k_{2i}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + M_{ni} \right] + \delta_{ni} k_{2i}^4 \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2 + k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2.$$

Po zadziałaniu na pierwsze z równań (2.3) operatorem $\eta[X_k(x_1)]$, a na drugie operatorem $\eta[Z_i(x_2)]$ i uwzględnieniu (2.6) oraz (2.10) otrzymano układ równań różniczkowych wiążących funkcje czasu

$$(2.11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} \ddot{T}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \dot{T}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} T_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{kn} T_n^{(2)} = \Theta_k \sin \nu t, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{in} \ddot{T}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{in} \dot{T}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{in} T_n^{(2)} + \Pi_{in} \ddot{T}_n^{(1)} = 0.$$

W (2.11) przyjęto oznaczenia

$$(2.12) \quad \alpha_{kn} = -(1 - \delta_{kn}) 2 \frac{(\partial F)_1}{(EJ)_1} \frac{K_k X_n(d) - K_n X_k(d)}{k_{1n}^4 - k_{1k}^4} + \delta_{kn} \frac{(\partial F)_1}{(EJ)_1} \int_0^l X_k^2 dx_1 + \\ + 2\alpha_{gm} X_n(d) X_k(d), \\ \Gamma_{kn} = -(1 - \delta_{kn}) 2\tau_1 k_{1n}^4 \frac{K_k X_n(d) - K_n X_k(d)}{k_{1n}^4 - k_{1k}^4} + \delta_{kn} \tau_1 k_{1n}^4 \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1 + \\ + 2\tau_1 X_k(d) K_n,$$

(2.12)

[c.d.]

$$\beta_{kn} = \frac{\Gamma_{kn}}{\tau_1},$$

$$\Lambda_{kn} = -2\alpha_g Z_n''''(0) X_k(d),$$

$$\Omega_{in} = (1 - \delta_{in}) \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2 (k_{1n}^4 - k_{1i}^4)} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - \right. \\ \left. - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + M_{ni} \right] + \delta_{ni} \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2,$$

$$\Lambda_{in} = (1 - \delta_{in}) \frac{\tau_2 k_{2n}^4}{k_{2n}^4 - k_{2i}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + M_{ni} \right] + \\ + \delta_{ni} \tau_2 k_{2i}^4 \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2 + \tau_2 k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2,$$

$$E_{in} = \frac{\Lambda_{in}}{\tau_2},$$

$$\Pi_{in} = \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2,$$

$$\Theta_k = \int_0^l H(x_1) X_k(x_1) dx_1.$$

Rozwiązanie równań (2.1) ma postać (2.2), gdzie $T_n^{(1)}(t)$ i $T_n^{(2)}(t)$ podlegają wyznaczeniu z (2.11).

Przy obliczeniach praktycznych wystarczy ograniczyć się do kilku wyrazów sumy, np.

$$(2.13) \quad w(x_1, t) \cong X_{k-1}(x_1) T_{k-1}^{(1)}(t) + X_k(x_1) T_k^{(1)}(t) + X_{k+1}(x_1) T_{k+1}^{(1)}(t),$$

gdzie k jest numerem wyrazu sumy (2.2), dla którego

$$(2.14) \quad \omega_k \cong 2\pi\nu.$$

3. Drgania wymuszone struny z tłumieniem wewnętrznym tłumionej tłumikiem Stockbridge'a

Równania różniczkowe opisujące ruch drgający struny z tłumieniem wewnętrznym tłumionej tłumikiem Stockbridge'a mają postać

$$(3.1) \quad S_0 \tau_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - (\varrho F)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(x_1 - d) 2 \left[(EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0} + \right. \\ \left. + (m_0 + m_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d} \right] - H(x_1) \sin \nu t,$$

$$(EJ)_2 \frac{\partial^4 z}{\partial x_2^4} + \tau_2 (EJ)_2 \frac{\partial^5 z}{\partial x_2^4 \partial t} + (\varrho F)_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\varrho F)_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d} = 0.$$

Rozwiązanie przyjęto w postaci

$$(3.2) \quad \begin{aligned} w(x_1, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_1) T_n^{(1)}(t), \\ z(x_2, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x_2) T_n^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Funkcje $X_n(x_1)$ i $Z_n(x_2)$ są funkcjami własnymi zagadnienia drgań swobodnych takiego układu

$$(3.3) \quad X_n(x_1) = \sin \lambda_n x_1 + \sigma_2(x_1 - d) \frac{2K_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n d \sin \lambda_n(d-l),$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} K_n &= -2k_{2n}^3 \frac{(EJ)_2}{S_0} \frac{\eta_n \alpha_n - \gamma_n \vartheta_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \alpha_n} - \frac{m_0 + m_2}{S_0} \frac{(EJ)_2}{(\varrho F)_2} k_{2n}^4, \\ \lambda_n &= \omega_n^2 \frac{(\varrho F)_1}{S_0}. \end{aligned}$$

Funkcja $Z_n(x_2)$ jest określona w (1.20). Częstości drgań własnych ω_n są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$(3.5) \quad \frac{\lambda}{2K} \sin \lambda l + \sin \lambda d \cdot \sin \lambda(d-l) = 0.$$

Rozwiązanie układu (3.1) sprowadza się więc do określenia funkcji $T_n^{(1)}(t)$ i $T_n^{(2)}(t)$. Są one rozwiązaniem układu równań

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} \ddot{T}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{kn} \dot{T}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} T_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{kn} T_n^{(2)} &= \Theta_k \sin \nu t \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{in} \ddot{T}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{in} \dot{T}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{in} T_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{in} \ddot{T}_n^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

który otrzymano z (3.1) przez odpowiednie przekształcenie. W (3.6) przyjęto oznaczenia

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \alpha_{kn} &= (1 - \delta_{kn}) 2 \frac{(\varrho F)_1}{S_0} \frac{K_n X_k(d) - K_k X_n(d)}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} - \delta_{kn} \frac{(\varrho F)_1}{S_0} \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1 - \\ &\quad - 2 \frac{m_0 + m_2}{S_0} X_n(d) X_k(d), \\ \beta_{kn} &= -2K_n X_k(d) + (1 - \delta_{kn}) 2\lambda_n^2 \frac{K_n X_k(d) - K_k X_n(d)}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} - \delta_{kn} \lambda_k^2 \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

$$\Gamma_{kn} = \tau_1 \beta_{kn},$$

$$\Lambda_{kn} = 2 \frac{(EJ)_2}{S_0} Z_n'''(0) X_k(d),$$

$$\Pi_{in} = \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} X_n(d) \int_0^l Z_i(x_2) dx_2,$$

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \Theta_k &= -\frac{1}{S_0} \int_0^l H(x_1) X_k(x_1) dx_1, \\
 \text{[c.d.]} \quad \Omega_{in} &= (1 - \delta_{in}) \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \frac{1}{k_{2n}^4 - k_{2k}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + \right. \\
 &\quad \left. + M_{ni} \right] + \delta_{in} \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2, \\
 \Delta_{in} &= \tau_2 \Xi_{in}, \\
 \Xi_{in} &= (1 - \delta_{in}) \frac{k_{2n}^4}{k_{2n}^4 - k_{2i}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + M_{ni} \right] + \\
 &\quad + \delta_{in} k_{2i}^4 \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2 + k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2.
 \end{aligned}$$

Analityczne wyznaczenie wszystkich częstości i form własnych drgań belek czy strun sprzężonych z tłumikiem Stockbridge'a jest niemożliwe ze względu na przestępny charakter równań (1.35) czy (3.5). Pociąga to za sobą dalsze komplikacje przy wyznaczaniu współczynników w równaniach (2.11) dla belek (3.6) w przypadku strun. To z kolei wiąże się z zagadnieniem znalezienia drgań wymuszonych. W bardzo wielu zagadnieniach praktycznych, w oparciu o przedstawione powyżej rozważania, można uzyskać zadowalające wyniki i stwierdzić w jakim stopniu tłumik Stockbridge'a jest skuteczny. Otóż jeżeli w układzie możliwe są tylko drgania z wysokimi częstościami bez względu na ich charakter, czy to będą drgania wymuszone czy samowzbudne, to wówczas wzory (1.35) i (3.5) ulegają znacznemu uproszczeniu. Ponieważ występujące w (3.5) wyrażenie K [określone w (1.33)] spełnia warunek

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} K = \infty,$$

z dostatecznie dużą więc dokładnością można w miejsce (3.5) przyjąć

$$(3.8) \quad \sin \left[\omega \sqrt{\frac{(\varrho F)_1}{S_0}} d \right] \sin \left[\omega \sqrt{\frac{(\varrho F)_1}{S_0}} (l-d) \right] = 0,$$

co daje bardzo proste ciągi wartości własnych i funkcji własnych. Dla krajowych linii elektroenergetycznych najwyższych napięć najczęściej występujące drgania zawierają się w granicach 10–30 Hz, co odpowiada zakresowi form własnych między 50 a 200. Drgania z tego zakresu stwarzają zagrożenie zmęczeniowe i należy je wytłumiać. Dla realnych linii elektroenergetycznych przyjęcie (3.8) jest więc w pełni uzasadnione. Wzór (3.8) można również uzyskać bezpośrednio z (1.35) dokonując w tym ostatnim przejścia granicznego przy $(EJ)_1$ zdążającym do zera i przyjęciu dużych ω_n .

4. Przykład

W celu szacunkowej oceny przeprowadzonych rozważań policzono przykład liczbowy. Policzono 3 przypadki:

- 1) drgania struny bez tłumika,
- 2) drgania struny z tłumikiem Stockbridge'a I,
- 3) drgania struny z tłumikiem Stockbridge'a II.

Dla prostoty obliczeń wzięto tylko po jednym wyrazie szeregu (3.2)

$$w(x_1, t) \cong X_k(x_1) T_k^{(1)}(t),$$

$$z(x_2, t) \cong Z_k(x_2) T_k^{(2)}(t),$$

a rozwiązań poszukiwano w postaci

$$T_k^{(1)}(t) = A_k \sin \nu t + B_k \cos \nu t,$$

$$T_k^{(2)}(t) = C_k \sin \nu t + D_k \cos \nu t.$$

Jako uzasadnienie takiego podejścia można przyjąć, że rozważa się przypadek rezonansowy i składniki szeregu (3.2) odpowiadające formie rezonansowej będą zdecydowanie przeważać nad pozostałymi. Takie podejście upraszcza znacznie żmudne obliczenia i pozwala oszacować rząd skuteczności tłumienia.

Przy doborze danych starano się zachować, o ile to było możliwe, rzeczywiste parametry przęsła linii wysokiego napięcia i tłumika, z wyjątkiem $(\varrho F)_2$, τ_2 i $(EJ)_2$, których nie udało się uzyskać na podstawie dostępnych materiałów. Wobec czego przyjęto

- a) $\tau_1 = \tau_2$,
- b) $(\varrho F)_1 = (\varrho F)_2$ — dla tłumika I,
 $(\varrho F)_1 = 2(\varrho F)_2$ — dla tłumika II,
- c) $(EJ)_2 = 13 \text{ [kG m}^2\text{]}$ — co odpowiada rzeczywistej sztywności liny.

Odległość punktu podwieszenia tłumika od podpory ustalono wykorzystując fakt, że powinien on być umocowany w brzuscu fali stojącej, która powstanie w strunie.

Dla częstości $\nu = 20 \text{ Hz}$ powstanie 113 półfal, co daje $d = 1,7 \text{ m}$. Wielkość ta pokrywa się z doświadczalnymi danymi BSİPE «Energoprojekt» O/Kraków, który podaje, że optymalna wartość d wynosi $d = 1,5\text{--}2,0 \text{ [m]}$.

Częstość drgań ω_k wyznaczono z równania charakterystycznego (3.5) wykorzystując zależność jaką musi ona spełniać

$$\omega_k \cong 2\pi\nu.$$

Dane wyjściowe oraz wyniki zestawiono w tabl. 1 i 2.

Przez a_k oznaczono

$$a_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2},$$

ponieważ

$$T_k^{(1)} = A_k \sin \nu t + B_k \cos \nu t = a_k \sin(\nu t + \varphi),$$

więc przyjęte

$$b_k = a_k \sin \lambda_k d$$

jest amplitudą drgań w punkcie $x = d$, a jej wielkość zależy od skuteczności tłumienia.

Obliczeń dokonano z dokładnością do H , gdzie H oznacza amplitudę wymuszenia.

Tablica 1. Dane wyjściowe

Wielkość	Wymiar	Struna	Tłumik I	Tłumik II
ν	Hz	20	—	—
l	m	400	—	—
S_0	kG	3900	—	—
$(\rho F)_1$	kG m ⁻¹	0,1967	—	—
d	m	1,7	—	—
τ_1	s	0,3782	—	—
J_0	kg m ²	—	0,00231	0,00053
m_0	kg	—	0,780	0,139
l_2	m	—	0,26	0,26
a	m	—	0,02	-0,03
$(\rho F)_2$	kg m ⁻¹	—	0,1967	0,0983
$(EJ)_2$	kG m ²	—	13	13
τ_2	s	—	0,3782	0,3782
ω_k	radian s ⁻¹	126,06	126,03	126,06

Tablica 2. Wyniki

Stała	Wymiar	Struna bez tłumika	Struna z tłumikiem	
			tłumik I	tłumik II
k_{2k}	m ⁻¹	×	3,9612	3,2898
ε_k	l	×	-0,5861	-0,5644
κ_k	l	×	-1,2523	-0,6845
γ_k	l	×	-1,7553	-1,4951
μ_k	kg m s ⁻²	×	457,9541	213,2848
ϑ_k	kg m s ⁻²	×	-418,2535	-284,7983
η_k	kg m s ⁻²	×	-340,9878	-129,8952
A_{2k}	l	×	-0,9353	22,8450
B_{2k}	l	×	1,8394	-16,6524
G_{2k}	l	×	0,9353	-22,8450
D_{2k}	l	×	-0,8394	17,6524
K_k	m ⁻¹	×	-0,3834	5,3683
λ_k	m ⁻¹	0,8838	0,8912	0,8912
α_{kk}	m ⁻¹ s ²	0,0207	-0,0035	1,4575
β_{kk}	m ⁻¹	177,50	55,6028	-22951
Γ_{kk}	m ⁻¹ s ³	67,1305	21,0289	-8675,4780
Ω_{kk}	m ⁻³ s ²	×	-0,0446	-2,0373
Ξ_{kk}	m ⁻³	×	-726,6404	-315,5993 · 10 ²
Δ_{kk}	m ⁻³ s	×	-274,8153	-119,3596 · 10 ²
Π_{kk}	m ⁻³ s ²	×	0,0050	0,0077
Θ_k	m ⁻¹	0,5778 · 10 ⁻³ H	0,1808 · 10 ⁻³ H	6,6414 · 10 ⁻³ H
Λ_{kk}	m ⁻¹	×	0,7739	-10,82888
A_k	l	0,5954 · 10 ⁻⁷ H	0,0286 · 10 ⁻⁷ H	0,0256 · 10 ⁻⁷ H
B_k	l	4,3031 · 10 ⁻⁷ H	0,6825 · 10 ⁻⁷ H	0,0608 · 10 ⁻⁷ H
a_k	l	4,3440 · 10 ⁻⁷ H	0,6827 · 10 ⁻⁷ H	0,0650 · 10 ⁻⁷ H
b_k	l	4,3440 · 10 ⁻⁷ H	0,6816 · 10 ⁻⁷ H	0,0649 · 10 ⁻⁷ H

5. Zakończenie

Skuteczne tłumienie drgań, zwłaszcza w liniach elektroenergetycznych, jest zagadnieniem bardzo ważnym szczególnie dla linii krajowych, gdzie intensywność drgań jest stosunkowo duża i może spowodować zagrożenie zmęczeniowe przewodów.

Z przeprowadzonych rozważań otrzymuje się zależności analityczne między parametrami linii, tłumika, amplitudą i częstotliwością drgań wymuszonych a amplitudą drgań w linii. Z zależności tych, przynajmniej w tej formie w jakiej je uzyskano, nie można, jeżeli chodzi o konkretne rozwiązanie inżynierskie, dobrać optymalnych parametrów tłumika zapewniających eliminację drgań.

Zależności te są bardzo złożone i wyznaczenie w sposób ogólny odpowiednich parametrów zapewniających minimum amplitudy wiąże się z dużymi trudnościami rachunkowymi. Niemniej jednak można w sposób stosunkowo prosty sprawdzić skuteczność danego tłumika. Uczyniono tak w przykładzie liczbowym, gdzie obydwa tłumiki wykazały bardzo dobrą skuteczność tłumienia drgań przy częstotliwości 20 Hz.

Podana metoda jest ogólna i może być stosowana przy dowolnej liczbie tłumików na przęśle.

Literatura cytowana w tekście

1. R. CLAREN, S. DIANA, *Mathematical analysis of transmission line vibration*, Transmissions papers 1967.
2. А. П. Филиппов, *Колебания механических систем*, «Наукова Думка», Киев 1955.
3. F. SALVI, *Opracowanie na temat drgań polskich przewodów i tłumików drgań*, Kraków 1970, skr-53/70 X — 37 654.
4. *Колебания и устойчивость машин*, «Наука», Москва 1968.
5. A. BAR, J. NIZIOŁ, *Wyznaczenie sztywności na zginanie przewodu AFL-8-525*, Mech. Teoret. i Stos., 12 (1974).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕМПФЕРОВ СТОКБРИДЖА ДЛЯ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК И СТРУН

В работе рассматриваются вынужденные колебания свободнолежащей балки растягиваемой с помощью осевой силы S . На балке подвешен демпфер Стокбриджа. Демпфер рассматривается в качестве массы закрепленной на конце упругой балки. Путем применения метода Фурье получена система сопряженных дифференциальных уравнений, из которой определяются собственные функции и собственные значения.

Получено также решение для колебаний струны. Предельный переход в решении для балки приводит к тем же результатам, что и для струны с демпфером. Выведены формулы на амплитуду вынужденных колебаний балки с учетом внутреннего демпфирования для случаев балок с демпфером и без демпфера.

На основе полученных формул можно подобрать параметры демпфера и место его расположения на балке обеспечивающие наилучшее демпфирование колебаний балки.

Полученные результаты иллюстрируются с помощью численного примера с конкретными данными для электроэнергетических линий высокого напряжения.

S u m m a r y

APPLICATION OF STOCKBRIDGE DAMPERS TO THE DAMPING OF STRING
AND BEAM VIBRATIONS

Forced vibrations of a simply supported beam extended by an axial force S are considered. A Stockbridge damper suspended at the beam is considered as a mass attached to its end. Application of the Fourier method leads to a system of coupled differential equations yielding the corresponding eigenfunctions and eigenvalues. Vibrations of a string with a Stockbridge damper are also considered and the result is equivalent to that obtained from the solution for a beam by means of a limiting procedure. The formulae are derived which give the forced vibration amplitude of a beam with internal damping with or without the damper. The results obtained enable us to select the parameters of the damper and its location ensuring its most effective action. The results are illustrated by a numerical example concerning high-tension electric transmission lines.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lipca 1974 r.

METODYKA STATYCZNYCH BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH
PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA METALI

JÓZEF MIASTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Rzeczywiste warunki pracy elementów konstrukcyjnych charakteryzują się dużą różnorodnością. Znaczna część detali urządzeń i konstrukcji pracuje w warunkach przestrzennego lub płaskiego stanu naprężenia. Znajomość własności materiału, określonych w warunkach jednoosiowego stanu naprężenia, jest często niewystarczająca przy obliczeniach wytrzymałościowych takich elementów. Dlatego też, aktualnym zadaniem mechaniki ciała stałego są badania własności materiałów w warunkach zbliżonych do rzeczywistych i badania zmian tych własności pod wpływem zmiennych warunków pracy.

Istniejące teorie plastyczności mają na ogół dobre potwierdzenie doświadczalne w opisie zachowania metali w warunkach złożonego stanu naprężenia przy proporcjonalnych obciążeniach. Teorie te są jednak niewystarczające do opisu praw plastycznego płynięcia tych metali przy złożonych obciążeniach. Wynika to z niedostatecznego uwzględnienia anizotropii własności mechanicznych, pojawiających się w wyniku odkształceń plastycznych. Dla zbudowania podstaw teorii plastyczności ciała anizotropowego niezbędne jest nagromadzenie odpowiedniego materiału doświadczalnego. Realizacja tego celu wymaga bardziej udoskonalonej techniki badawczej, stosowania urządzeń i przyrządów pozwalających na realizację różnorodnych programów obciążania lub odkształcania przy złożonych stanach naprężenia. Wyższe wymagania odnoszą się również do dokładności pomiarów obciążeń i odkształceń.

W pracy omówiono metody badań doświadczalnych metali odkształcanych plastycznie różnymi sposobami obciążenia w warunkach złożonego stanu naprężenia. Zwrócono uwagę na rozmaite formy przedstawiania wyników badań i ich interpretację.

Łatwo zauważyć, że brak jest w pracy omówienia podstawowych metod badania własności mechanicznych metali. Wynika on stąd, że zagadnienia te są obszernie opisane w licznych opracowaniach książkowych. Można je znaleźć, między innymi, w monografiach: KATARZYŃSKIEGO, KOCAN DY i ZAKRZEWSKIEGO [1] oraz SIEMUSZKINA [28].

2. Definicja granicy plastycznego płynięcia

Ważnym czynnikiem przyspieszającym rozwój teorii plastycznego płynięcia — opartej na założeniu istnienia potencjału plastycznego — uwzględniającej wzmocnienie materiału, są badania doświadczalne powierzchni plastyczności. Przy wyznaczaniu tych powierzchni istotną rolę odgrywa wybór kryterium uplastycznienia, z którym związane są poważne trudności. Brak ścisłej definicji granicy plastyczności doprowadził do dużej swobody w określaniu powierzchni płynięcia przez różnych autorów. Jedni, powierzchnię utożsamiają z granicą proporcjonalności, inni — z granicą sprężystości. Znaczna część badaczy określa granicę płynięcia jako naprężenia odpowiadające danej wartości odkształceń plastycznych, przy czym i tu również brak jednolitego podejścia. Niektórzy przyjmują małe wartości odkształceń plastycznych (np. 0,01% czy 0,02%), inni poczynając od 0,02%

aż do 0,2%, a nawet 0,5%. W pracy TAYLORA, QUINNEYA [2] przez część wykresu obciążenie–odkształcenie, odpowiadającą dużym odkształceniom plastycznym, prowadzono linię prostą, której przecięcie z osią obciążeń wyznaczało wartość granicy plastyczności. Możliwe jest również przyjmowanie za granicę płynięcia punktu przecięcia dwóch prostych, przy czym jedna z nich jest przedłużeniem zakresu sprężystego, a druga przechodzi przez część wykresu odpowiadającą, podobnie jak w poprzednim sposobie, dużym odkształceniom plastycznym [3]. Spotyka się również metodę, w której za granicę plastyczności przyjmuje się punkt zetknięcia z krzywą obciążenie–odkształcenie stycznej o module mniejszym od modułu sprężystego. Metoda ta ma tę wadę, że w zależności od charakteru krzywej naprężenia–odkształcenia punkt styczności określa inną wartość odkształcenia trwałego, i to tym większą, im łagodniejsze jest zakrzywienie wykresu za obszarem sprężystym.

Brak jednolitego kryterium wyznaczania granicy plastyczności powoduje, że wyników wielu prac doświadczalnych nie można z sobą porównywać. Przyjęcie jednolitego sposobu określania granicy plastyczności pozwoliłoby wyeliminować te trudności. KACZANOW [29, 30] proponuje wyznaczanie granicy plastyczności metodą siecznej. W metodzie tej początkowo wyznacza się dwie granice plastyczności dla dwóch sąsiednich, dostatecznie dużych wartości odkształcenia plastycznego, np. $\sigma_{0,1}$ i $\sigma_{0,2}$ dla $\Delta\varepsilon_1 = 0,1\%$ i $\Delta\varepsilon_2 = 0,2\%$. Następnie «rzeczywista» granica płynięcia określona zostaje na drodze geometrycznej lub analitycznej ekstrapolacji do zerowej wartości odkształcenia trwałego. Najbardziej prosta jest ekstrapolacja liniowa, dla której «rzeczywista» wartość granicy płynięcia wyraża się zależnością

$$(1) \quad \sigma_{0,0} = \frac{\sigma_{0,1}\Delta\varepsilon_2 - \sigma_{0,2}\Delta\varepsilon_1}{\Delta\varepsilon_2 - \Delta\varepsilon_1}.$$

Wydaje się, że do czasu rozstrzygnięcia tej kwestii słuszne jest podawanie wyników badań doświadczalnych dla całej rodziny powierzchni plastyczności. Na przykład, w pracach [8, 9, 12, 25, 26, 27] wyznaczane są powierzchnie dla granicy proporcjonalności oraz dla odkształceń trwałych $\varepsilon_{pl} = 0,01\%$, $0,02\%$, $0,1\%$, $0,2\%$, $0,3\%$, $0,4\%$ i $0,5\%$.

3. Badanie plastycznego płynięcia metali przy prostych rodzajach obciążenia

Podstawową próbą badania mechanicznych własności metali jest próba jednoosiowego rozciągania. Oprócz niej stosowane są próby ściskania okrągłych próbek cylindrycznych pełnych oraz skręcanie próbek w postaci cienkościennych rurek. Metodyka tych badań jest znana i opisywana w obszernych monografiach, np. [1, 28], natomiast wymagają omówienia pewne specjalne metody odkształcania próbek. Jedną z nich jest próba odkształcania z dużymi deformacjami, podana przez ERBELA w pracy [4]. W metodzie tej badania przeprowadzane są na próbkach w postaci cienkiego pierścienia umieszczonego między dwoma dociskany mi siłą osiową stemplami. Pierścień zewnętrzny, w którym umieszczona jest próbka, i trzpień wewnątrz próbki zapobiegają wyływowi materiału w kierunku promieniowym na zewnątrz i do środka. Aby zapobiec ślizganiu stempli po próbce podczas skręcania, powierzchnie czołowe stempli mają specjalne nacięcia. W pierwszej fazie próby stemple obciążane są znaczną siłą osiową, wywołującą w próbce ciśnienie hydrostatyczne. Następnie stemple zostają obracane względem siebie wokół wspólnej osi. W ten sposób otrzymuje się zależność momentu skręcającego od kąta skręcania. Przy

odpowiednim doborze ciśnienia uzyskiwane są bardzo duże odkształcenia próbki, dochodzące do kilku tysięcy procent.

Inna metoda, za pomocą której można również uzyskiwać duże deformacje, podana jest w pracy MARCINIAKA [5]. Polega ona na skręcaniu próbki w postaci cienkiej okrągłej tarczy z otworem w środku. Tarcza mocowana jest na obwodzie zewnętrznym i wewnętrznym. Na powierzchni czołowej próbki wykreśla się promienie i okręgi. Podczas skręcania uchwytu wewnętrznego względem zewnętrznego, prostoliniowe promienie ulegają zakrzywieniu. Przy danym momencie skręcającym wielkość naprężeń w tarczy zmienia się wzdłuż promienia. Analiza postaci zakrzywionych promieni pozwala określić zależność naprężeń od zniekształceń.

W pracy LITOŃSKIEGO [6] podana została metoda wyznaczania zależności naprężeń od odkształceń przy ścinaniu w oparciu o próbę skręcania stożkowych prętów.

Oryginalna metoda badawcza opisana została w pracy MARCINIAKA [7]. Pozwala ona na badanie wpływu wstępnych odkształceń plastycznych na przebieg wzmocnienia metali za pomocą rozciągania niejednorodnych próbek walcowych. Niejednorodny stan próbki uzyskuje się przez poddanie pręta walcowego częściowemu przeciągnięciu przez stożkowy otwór pierścienia ciągowego, a następnie spęczaniu drugiego końca w tej samej stożkowej tulei. W wyniku takiego zabiegu, walcowemu początkowo prętowi nadaje się postać stożka. Jedna jego średnica jest mniejsza od średnicy wyjściowego pręta, a druga — większa. Tylko w środkowym przekroju średnica materiału nie uległa zmianie i jego własności są takie, jak materiału wyjściowego. Po jednej stronie tego przekroju materiał doznał osiowego wydłużenia, po drugiej — spęczenia. Stożkowy profil wzdłuż próbki zapewnia ciągłość zmian stanu odkształcenia materiału od wartości około -4% do $+4\%$. Z tak przygotowanego materiału wykonuje się próbkę walcową do badania na jednoosiowe rozciąganie. Na walcową powierzchnię próbki, przed rozciąganiem, nanosi się cienkie rysy. Pomiaru wydłużeń odcinków między rysami pozwalają na wyznaczanie rozkładu odkształceń wzdłuż próbki. Ponieważ wstępne odkształcenia plastyczne są zmienne na długości próbki, badania te pozwalają określić wpływ wstępnych odkształceń na kształt krzywej umocnienia metalu, na podstawie badania jednej próbki.

4. Badanie plastycznego płynięcia metali przy złożonych sposobach obciążenia próbek rurkowych

4.1. Uwagi ogólne

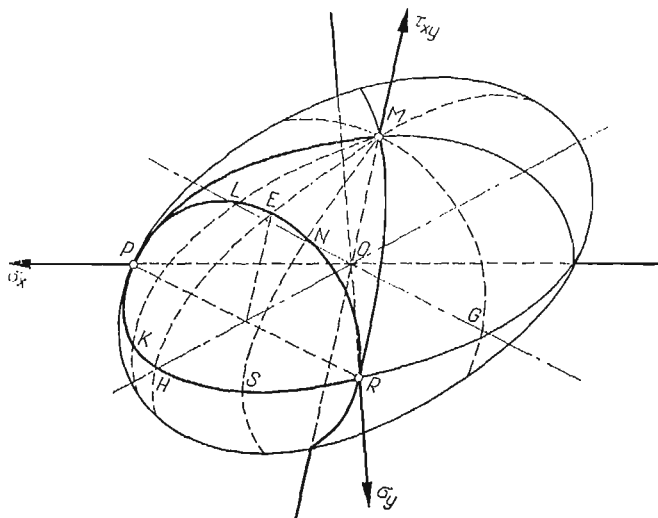
Znajomość zachowania się materiału przy prostych obciążeniach jest niewystarczająca aby było można dokładnie przewidzieć jego zachowanie w warunkach złożonego stanu obciążenia. Badania doświadczalne plastycznego płynięcia przy złożonych obciążeniach przeprowadzane są z reguły w płaskim stanie naprężenia, tj. gdy jedno z naprężeń głównych, np. σ_3 , jest równe zeru. W układzie współrzędnych prostokątnych x, y, z , płaszczyzny xy pokrywają się z płaszczyzną kierunków głównych 1 i 2, istnieją wobec tego tylko składowe naprężenia σ_x, σ_y i τ_{xy} . Pozostałe składowe naprężenia równają się zeru.

Główną przyczyną szerokiego rozpowszechnienia badań doświadczalnych w płaskim stanie naprężenia jest łatwość ich realizacji. Dla pokazania różnych schematów obciążenia, stosowanych przy badaniu doświadczalnym materiałów w płaskim stanie naprężenia, rozpatrzmy warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego w postaci

$$(2) \quad \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2,$$

gdzie k jest granicą plastyczności przy ścinaniu.

W warunku tym $k = \sigma_{pl} \sqrt{3}$, gdzie σ_{pl} jest granicą plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu.



Rys. 1

Obrazem geometrycznym tego wyrażenia w przestrzeni naprężeń σ_x , σ_y , τ_{xy} , jest elipsoida (rys. 1) o jednej osi pokrywającej się z osią τ_{xy} . Dwie pozostałe osie elipsoidy leżą w płaszczyźnie $\sigma_x \sigma_y$, przy czym są one dwusiecznymi kątów między osiami σ_x i σ_y . Na powierzchni elipsoidy można wyodrębnić pewne szczególne elipsy, które odpowiadają stosowanym w doświadczeniach różnym sposobom obciążania próbek. Elipsa przebiegająca przez punkty PM , na której $\sigma_y = 0$, odpowiada na przykład doświadczeniu, w którym próbki rurkowe są jednocześnie skręcane i rozciągane lub ściskane siłą osiową, jeżeli jako x przyjąć kierunek tworzących na próbce. Stany naprężenia określone punktami leżącymi na elipsie przechodzącej przez punkty MR ($\sigma_x = 0$), można zrealizować przez skręcanie próbki rurkowej z jednoczesnym obciążaniem jej ciśnieniem wewnętrznym (dodatni kierunek osi σ_y) lub ciśnieniem zewnętrznym (kierunek ujemny osi σ_y). Jest oczywiste, że dla uniknięcia składowej osiowej naprężenia σ_x (wywołanej ciśnieniem wewnętrznym), końce próbki nie mogą być zamknięte. Elipsa przechodząca przez punkty PHR , na której $\tau_{xy} = 0$, odpowiada jednoczesnemu obciążaniu próbek rurkowych siłą osiową (rozciągającą lub ściskającą) i ciśnieniem wewnętrznym lub zewnętrznym. Stany naprężenia na tej elipsie mogą być również realizowane przy obciążaniu próbek płaskich, jednocześnie w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, naprężeniami o różnej wielkości.

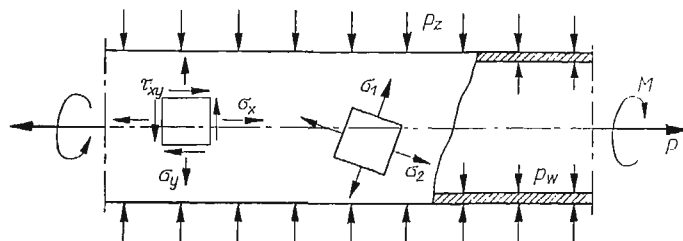
Na próbkach płaskich istnieje również możliwość uzyskiwania stanów naprężenia odpowiadających punktom elipsy $PLENR$. Sposób realizowania tych stanów naprężenia zostanie omówiony w punkcie 5.2.

Ze względu na rodzaj użytych próbek, badania doświadczalne płynięcia plastycznego materiałów w warunkach złożonego stanu naprężenia można podzielić na dwie grupy. Do grupy pierwszej, liczniejszej, zaliczamy badania na próbkach rurkowych, do grupy

drugiej — badania na próbkach płaskich. W pracy omówione zostaną obie grupy badań, ich zalety i wady.

4.2. Badania na próbkach rurkowych

4.2.1. Wiadomości wstępne. Jak już wspomniano w poprzednim punkcie, jednym ze sposobów przeprowadzenia badań materiałów w warunkach złożonego stanu naprężenia są doświadczenia na cienkościennych próbkach rurkowych (rys. 2). Siła osiowa



Rys. 2

P wywołuje równomiernie rozłożone naprężenia osiowe, moment skręcający M daje na ściance równomiernie rozłożone naprężenia styczne, i wreszcie, pod działaniem ciśnienia p w próbce pojawiają się naprężenia obwodowe. Dowolna kombinacja w/w obciążeń wywołuje w próbce określony płaski stan naprężenia. W tabelicy 1 podano zestawienie wszyst-

Tablica 1. Sposoby obciążania próbek rurkowych

Nr	Siła osiowa	Ciśnienie	Skręcanie
1	rozciąganie	wewn.	—
2	„	zewn.	—
3	„	—	skręc.
4	„	wewn.	„
5	„	zewn.	„
6	ściskanie	wewn.	—
7	„	zewn.	—
8	„	—	skręc.
9	„	wewn.	„
10	„	zewn.	„
11	—	wewn.	skręc.
12	—	zewn.	skręc.

kich możliwych sposobów obciążania próbek rurkowych, które pozwalają realizować dowolny stan naprężenia na elipsoidzie z rys. 1.

Przybliżone wzory na naprężenia osiowe σ_x , naprężenia obwodowe σ_y i styczne τ_{xy} (przy skręcaniu) mają w ogólnym przypadku następującą postać:

$$(3) \quad \sigma_x = \frac{P}{\pi h(d+h)} + \frac{pd^2}{4h(d+h)},$$

$$(4) \quad \sigma_y = \frac{pd^2}{2h(d+h)},$$

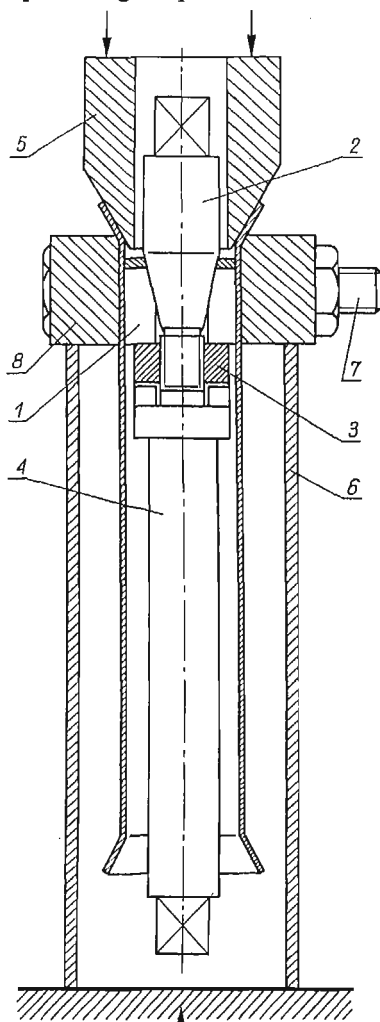
$$(5) \quad \tau_{xy} = \frac{2M}{\pi dh(d+h)},$$

gdzie przez h oznaczono grubość ścianki, a przez d — średnicę wewnętrzną próbki.

Ponieważ, z założenia, grubość ścianki rurki jest mała w porównaniu ze średnicą ($h/d = 0,05-0,02$), można przyjąć, że rozkład składowych naprężeń σ_x , σ_y i τ_{xy} na grubości ścianki jest jednorodny. Podane naprężenia będą więc składowymi tensora naprężenia również na zewnętrznej powierzchni próbki.

W zależności od rozwiązania konstrukcyjnego urządzenia badawczego, pod działaniem ciśnienia wewnętrznego może pojawiać się w próbce składowa osiowa naprężenia lub nie. Jak wiadomo, w przypadku zamkniętego na końcach cylindra, ciśnienie wewnętrzne wywołuje stan naprężenia, którego składowa obwodowa jest dwa razy większa od składowej osiowej.

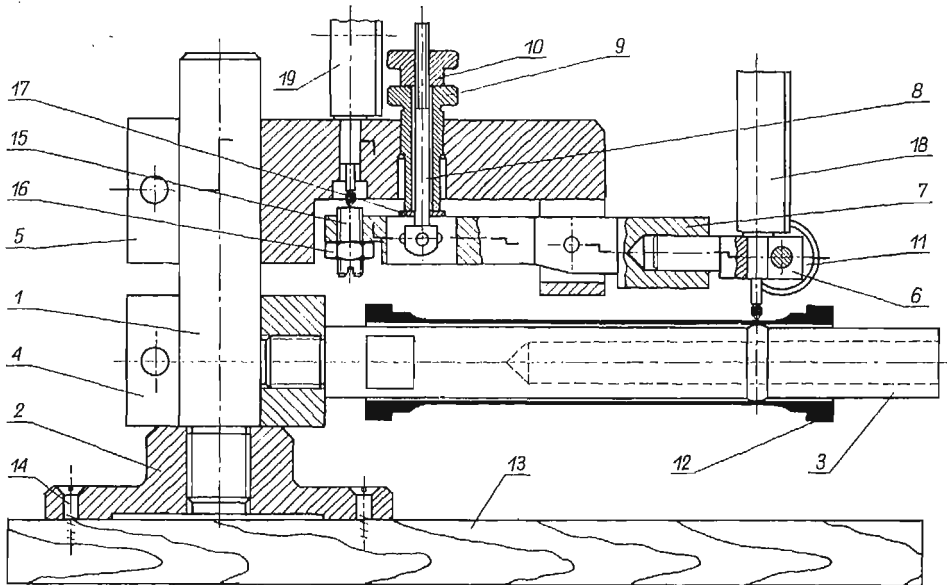
4.2.2. *Próbki i ich przygotowanie do badań.* Istnieją dwa sposoby przygotowania do badań próbek rurek. Jeden sposób polega na wykonywaniu ich z pręta, drugi — z gotowych rur [8-12]. W drugim sposobie odcinki rury o odpowiedniej długości



Rys. 3

poddawane są selekcji. Do badań dopuszczane mogą być tylko te próbki, które mają prawidłowy przekrój kołowy i równomierny rozkład grubości w badanym obszarze. Następnie, na końcach próbek formuje się stożkowe uchwyty. Na rys. 3 pokazano konstrukcję urządzenia do roztlaczania kołnierzy. Urządzenie to jest tak pomyślane, aby podczas roztlaczania końców, obszar środkowy próbki nie przenosił obciążeń i nie doznawał w związku z tym dodatkowych odkształceń. Jest to o tyle ważne, że roztlaczanie wykonuje się zwykle po uprzednim wyżarzaniu. Wyżarzanie ma na celu usunięcie anizotropii własności mechanicznych, wywołanych zgniotem przy ciągnięciu, oraz ułatwienie roztlaczania kołnierzy.

Próbka mocowana jest na tulei dzielonej 1 przez dokręcanie nakrętki 3 na trzpieniu 2 za pośrednictwem trzonek 4. Po tym zabiegu trzonek 4 zostaje usunięty. Następnie na próbkę zakłada się obejmę 8 i silnie skręca śrubami 7. Całość, po wstawieniu w tuleję 6, jest ustawiana na stole prasy, a wciskany z góry stożkowy stempel 5 roztlacza koniec próbki.



Rys. 4

Przed przystąpieniem do badań próbki muszą być dokładnie zmierzone. Ze względu na zależności (3), (4) i (5) należy określić średnice wewnętrzne i grubości ścianek. Pomiar średnicy wewnętrznej można wykonać średnicówką. Można ją również obliczyć na podstawie znajomości średnicy zewnętrznej i grubości ścianki. Pomiar taki jest jednak obarczony większym błędem niż bezpośredni.

Do pomiaru grubości ścianki konieczne są dodatkowe urządzenia. Jedno z rozwiązań takiego urządzenia pokazano na rys. 4. Urządzenie wyposażone jest w dwa czujniki mikronowe. Jeden — pomiarowy 18 — służy do bezpośredniego pomiaru grubości próbki, drugi czujnik — kontrolny 19 — służy do odpowiedniego ustawienia dźwigni 7, w której umocowany jest czujnik pomiarowy. Ponieważ maksymalny przesuw trzpienia czujnika mikronowego, wynoszący około 1,2 mm, jest mniejszy od grubości kołnierza próbki, dla założenia jej na wspornik 3 konieczne jest uniesienie dźwigni wraz z czujnikiem pomia-

rowym do góry. Po wsunięciu próbki na wspornik, dźwignia zostaje opuszczona do położenia pierwotnego, przy którym czujnik pomiarowy ustawiony był na wypukłości wspornika w położeniu zerowym. Powrót do położenia pierwotnego możliwy jest dzięki wskazaniom drugiego czujnika (kontrolnego), umocowanego w korpusie przyrządu. Wskazówka czujnika kontrolnego, po opuszczeniu dźwigni, musi mieć położenie identyczne z tym, jakie ustalono przed jej uniesieniem, i przy którym ustawiono wartość zerową czujnika pomiarowego. Unieruchomienie dźwigni we właściwym położeniu dokonywane jest za pomocą nakrętek 9 i 10.

4.2.3. Przyrządy i aparatura badawcza. W literaturze jest cały szereg pozycji, które w sposób wyczerpujący podają rozwiązania konstrukcyjne oraz możliwości eksploatacyjne maszyn do badań wytrzymałościowych produkowanych seryjnie [1, 28, 31, 32]. Jedne z nich służą do przeprowadzania prostych prób wytrzymałościowych, takich jak: rozciąganie, ściskanie czy zginanie, inne — do badań wytrzymałościowych w złożonym stanie naprężenia. Mogą być również maszyny uniwersalne, które łączą możliwości jednych i drugich. Jednym z bardziej rozpowszechnionych typów maszyn uniwersalnych do badań przy złożonych sposobach obciążenia jest zrywarka zbudowana w VEB Werkstoffprüfmaschinen w Lipsku (dawniej Schopper). Umożliwia ona przeprowadzanie oddzielnych prób na rozciąganie, ściskanie, zginanie i skręcanie, poddawanie próbek rurekowi działaniu ciśnienia wewnętrznego oraz pozwala na jednoczesne zastosowanie kombinacji rozciągania, ściskania, skręcania i ciśnienia wewnętrznego. Według tablicy 1, będą to sposoby obciążania oznaczone numerami 1, 3, 4, 6, 8, 9 i 11. Tego typu maszyny pozwalają na przeprowadzanie badań wg programów, w których regulowanymi i kontrolowanymi parametrami są zewnętrzne obciążenia, a więc, są to maszyny typu siłowego.

Dla wielu metali wraz ze wzrostem odkształceń plastycznych gwałtownie maleje wzmocnienie. Wówczas to, przy realizacji programów według zewnętrznych obciążeń, nie ma możliwości ani zachowania stałych parametrów odkształcenia, ani dokładnego określania ich zmian. Dlatego, oprócz seryjnie produkowanych maszyn uniwersalnych wymienionego typu, do badań w złożonym stanie naprężenia używane są również specjalne urządzenia. Są to zarówno urządzenia typu siłowego, jak i kinematycznego. W tych ostatnich, regulowanymi i kontrolowanymi parametrami są przemieszczenia punktów odkształcanej próbki. Jeszcze jedną — trzecią — grupę będą stanowiły maszyny z programowodzącymi układami, w których mogą być realizowane dowolne programy obciążania lub odkształcania próbki.

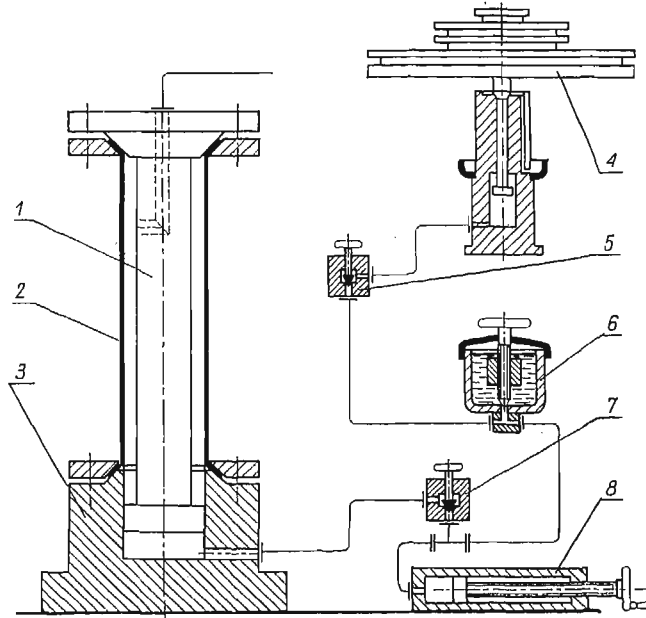
Forma wykresów rozciągania lub ściskania większości materiałów konstrukcyjnych przy statycznym obciążaniu w normalnej temperaturze może nie zależeć od typu maszyny, o ile zachowana będzie w badaniach podobna prędkość odkształcania (w granicach nie mających jeszcze wpływu na wyniki badań). Wyjątek stanowią tu jedynie materiały o wyraźnej granicy plastyczności.

Dla wyeliminowania wpływu sprężystych odkształceń układu obciążającego oraz wpływu przemieszczeń układu dźwigniowego maszyny, odkształcenia próbek należy mierzyć na wydzielonej bazie.

Typ maszyny odgrywa istotną rolę również przy badaniu pełzania. Metodyka tych badań nie będzie w pracy omawiana, ale warto podkreślić, że bez pełnej automatyzacji

obciążania i pomiarów — za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych, urządzeń programowych, elektronicznych układów sterujących oraz rejestratorów — badanie z daną prędkością odkształcenia lub z daną prędkością przyrostu naprężenia byłoby niemożliwe.

Na kilku przykładach zostanie teraz podany opis rozwiązań konstrukcyjnych urządzeń specjalnych pracujących w krajowych i zagranicznych ośrodkach naukowych. W IPPT PAN w Warszawie są dwa różne urządzenia tego typu. Jedno z nich jest pokazane na rys. 5. Urządzenie jest wyposażone w dwa niezależne hydrauliczne układy obciążające. Schemat działania jednego z układów zasilających pokazany jest po prawej stronie rysunku. Olej



Rys. 5

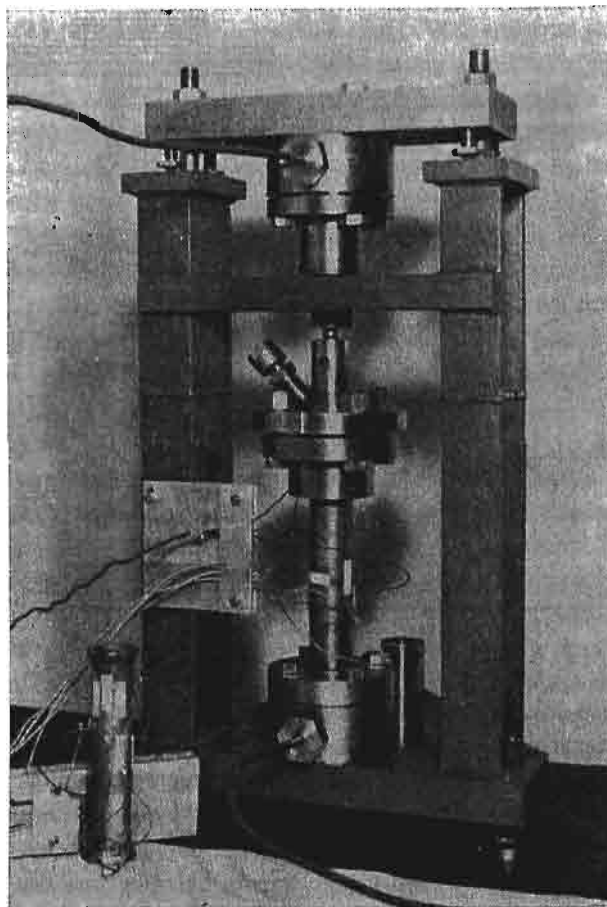
zassany ze zbiornika 6 do cylindra 8 jest kierowany do przyrządu pod ciśnieniem, o wielkości którego decyduje ciężar obciążników 4. Jeden układ obciążający wywołuje w próbce 2 osiowe naprężenia, drugi — doprowadza olej pod ciśnieniem do wnętrza próbki, wywołując w niej naprężenia obwodowe. Niezależność obydwu układów obciążających pozwala na realizację dowolnej drogi obciążenia na płaszczyźnie naprężeń obwodowych i osiowych. Wielkości obciążeń określone są z wartości ciśnienia układów zasilających. Odkształcenia próbek mierzone są za pomocą tensometrów mocowanych na powierzchni próbek.

Opis konstrukcji i schemat działania drugiego urządzenia jest podany w pracy TURSKIEGO [10]. Na rys. 6 pokazany jest widok głowicy urządzenia, w której próbka jest mocowana i obciążana. Podobnie jak w pierwszym rozwiązaniu (rys. 5), przyrząd jest wyposażony w dwa niezależne hydrauliczne układy obciążające. Rozwiązanie konstrukcyjne głowicy pozwala na obciążanie próbek dowolną kombinacją osiowego rozciągania lub ściskania i ciśnienia wewnętrznego.

Oryginalną maszynę do badań doświadczalnych na próbkach rurkowych zbudowano w Institute of Technology w Tokio, w Japonii (SHIRATORI, IKEGAMI i KANEKO [13]). Ma-

szyna umożliwia poddawanie cienkościennych próbek rurkowych różnym kombinacjom obciążenia osiowego, wewnętrznego lub zewnętrznego ciśnienia i skręcania. Maszyna pozwala więc na realizację wszystkich dwunastu sposobów obciążania z tablicy 1.

Precyzyjną maszynę do jednoczesnego obciążania próbek rurkowych siłą osiową, momentem skręcającym i ciśnieniem wewnętrznym w normalnej temperaturze skonstruowano na Uniwersytecie w Moskwie [33]. Elektryczne tensometry oporowe, naklejane na powierzchni próbki, pozwalają na sterowanie i rejestrację przebiegu doświadczenia. Ogólny widok maszyny jest pokazany na rys. 7. Próbka 8 obciążana jest za pośrednictwem dwu-

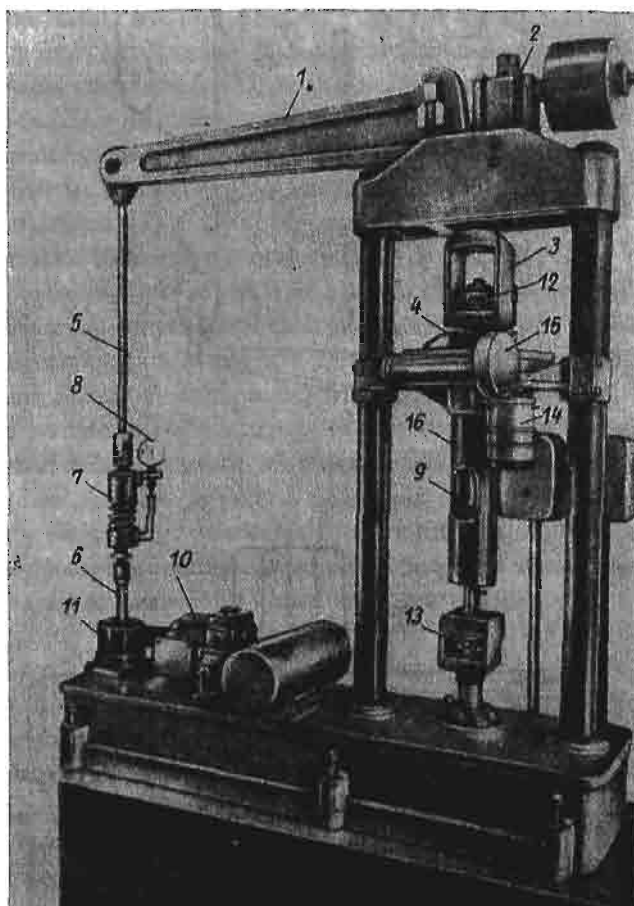


Rys. 6

ramiennej dźwigni 1, pryzmy 2 i obejmy 3, w której zamocowany jest uchwyt 4. Naciąg drugiego ramienia dźwigni odbywa się przez cięgno 5 i śrubę 6. Między cięgnem a śrubą umieszczona jest sprężyna 7. Wskaźnik 9, rejestrujący odkształcenia sprężyny, pozwala odczytywać wielkość obciążenia przyłożonego do próbki. Podczas obciążania osiowego próbki silnik 10 przesuwa śrubę za pomocą przekładni ślimakowej 11. Przeguby 12 i 13 zapewniają osiowe przyłożenie siły do próbki. Moment skręcający przekazywany jest do próbki od silnika elektrycznego 14 przez reduktor ślimakowy 15, którego korpus połączony

jest z obudową 16. Moment skręcający i siła osiowa mierzone są za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych naklejanych na obciążony obszar uchwytu 4. Elektroniczny system sterujący oraz układy wykreślnego programowania i rejestrowania maszyny gwarantują realizowanie badań według dowolnego programu w czasie.

Innym, szeroko znanym, ośrodkiem w ZSRR wyposażonym w specjalne urządzenia do badania próbek rurkowych jest Uniwersytet w Leningradzie.

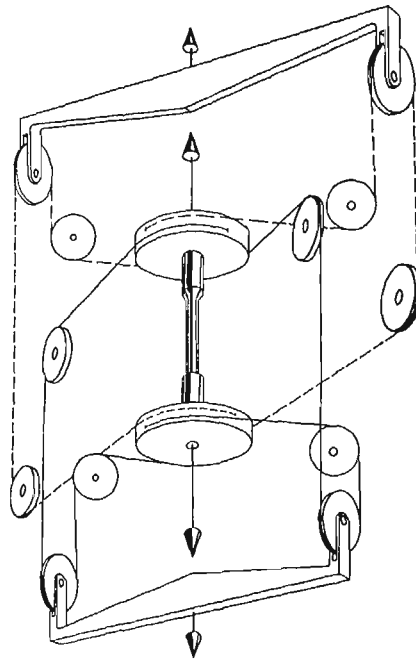


Rys. 7

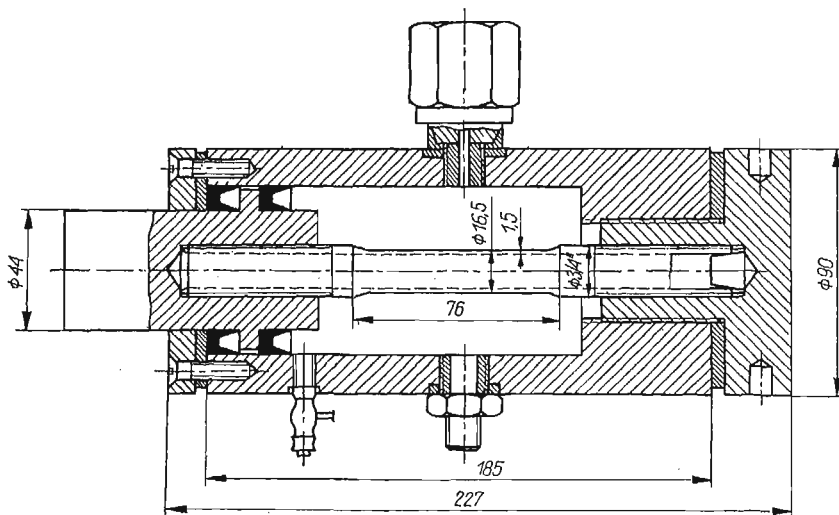
W pracy FINDLEYA i GJELSVIKA [14] opisana jest maszyna do prób na skręcanie z jednoczesnym rozciąganiem próbek rurkowych, zbudowana w Brown University, USA. Schemat działania pokazany jest na rys. 8.

W pracach NAGHDIEGO i współpracowników [15, 16] podany jest opis aparatury znajdującej się w University of Michigan, USA. Aparatura ta umożliwia badania próbek rurkowych na rozciąganie z jednoczesnym skręcaniem.

Podobne urządzenia do badania próbek rurkowych, obciążanych kombinacją osiowego rozciągania i skręcania, znajdują się w Yale University, New Haven, Conn, USA (PHILLIPS [17]) oraz w Hughes Aircraft Company Inc., Culver City, California, USA (FEIGEN [18]).



Rys. 8



Rys. 9

W pracy DAVIS [19] podany jest opis maszyny umożliwiającej obciążanie próbek dowolną kombinacją siły osiowej, momentu skręcającego i ciśnienia wewnętrznego. Znajduje się ona w East Pittsburgh, Pa, Westinghouse Research Laboratories, USA.

Opis specjalnej aparatury badawczej, wykonanej w University of Manchester, England, można znaleźć w pracy GILLA i PARKERA [20]. Aparatura pozwala na przeprowadzanie

badania próbek rurkowych poddawanych jednoczesnemu działaniu siły osiowej, ciśnienia wewnętrznego i momentu skręcającego.

Wymienione wyżej urządzenia tworzą z reguły samodzielne jednostki obciążająco-rejestrujące. Badania próbek rurkowych w płaskim stanie naprężenia mogą być również przeprowadzane w przyrządach stanowiących wyposażenie uzupełniające maszyn wytrzymałościowych. Przykładem takiego rozwiązania jest aparat wykonany w Mechanical Engineering Department, METU, Ankara, Turkey, którego rysunek (rys. 9) został zaczerpnięty z pracy BRATTA i KANANA [21]. Aparat umożliwia obciążanie próbek rurkowych dowolną kombinacją osiowego ściskania i ciśnienia zewnętrznego, tzn. przeprowadzanie badań w trzeciej ćwiartce płaszczyzny naprężeń głównych.

Inne rozwiązanie aparatu pracującego w połączeniu ze zrywarką uniwersalną zostało podane w pracy SMITHA i ALMROTHA [22]. Aparat umożliwia obciążanie próbek rurkowych jednoczesnym działaniem siły osiowej i momentu skręcającego. Został on skonstruowany w Lockheed Palo Alto Research Laboratory, Palo Alto, Calif., USA.

Urządzenia do badania próbek pod działaniem złożonych sposobów obciążania znajdują się również w wielu innych ośrodkach naukowych. Na przykład, można tu wymienić Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej [23, 24] oraz Laboratorium Szkoły Politechnicznej w Paryżu we Francji.

Omówionych zostało wiele odmian aparatury do badania materiałów w złożonych stanach naprężenia, jednakże praca nie ma na celu pokazania ich wszystkich. W tym krótkim przeglądzie chodziło jedynie o pokazanie różnorodności rozwiązań konstrukcyjnych aparatury badawczej i zwrócenie uwagi na dużą ilość ośrodków naukowych na świecie, zajmujących się badaniami w warunkach złożonego stanu naprężenia. Świadczy to bowiem przekonująco o ważnej roli i znaczeniu tych badań.

4.2.4. Uwagi końcowe. Badania na próbkach rurkowych są trudne, wymagają specjalnych urządzeń i są bardzo praco- i czasochłonne. Mimo to, korzyści jakie z nich płyną spowodowały szerokie ich rozpowszechnienie. Nie zawsze jednak zdajemy sobie sprawę z tego, że oprócz niewątpliwych zalet, badania na próbkach rurkowych są obciążone istotnymi wadami. Do najważniejszych z nich zaliczamy:

1. Brak możliwości badania materiału w postaci blach.
2. Trudności w przygotowaniu próbek o żądanej anizotropii plastycznej.
3. Trudności przy zachowaniu stałego stosunku między składowymi naprężeniami podczas obciążania, ze względu na zmiany średnicy próbki przy jej odkształcaniu.
4. Warunki naprężenia panujące w próbce rurkowej nie są dokładnie dwuwymiarowe (zakłócony płaski stan naprężenia), ponieważ naprężenia obwodowe wywoływane są przez ciśnienie wewnętrzne i zewnętrzne.

Dlatego też, równoległe do badań na próbkach rurkowych, są stosowane i rozwijane metody badań próbek płaskich w dwuwymiarowym stanie naprężenia. Niektóre z tych metod są w znacznym stopniu wolne od wad wyżej wymienionych. Oprócz tego, badania te cechuje duża prostota i łatwość przygotowania próbek. Nie oznacza to jednak, że badania na próbkach płaskich są w stanie zastąpić omówione uprzednio doświadczenia na próbkach rurkowych. Jedne i drugie badania wzajemnie się uzupełniają i powinny być rozwijane równoległe.

Wyniki doświadczeń przeprowadzanych na próbkach płaskich, a zwłaszcza badania krzywej granicznej, która dla początkowo izotropowego materiału ma kształt elipsy *PLENR* na rys. 1, w połączeniu z wynikami badań próbek rurkowych, będą mogły lepiej i dokładniej odzwierciedlać zmiany elipsoidy granicznej związane z anizotropią, a wywołane w początkowo izotropowym materiale plastycznymi odkształceniami.

Stosowane są różne metody badania własności materiałów na próbkach płaskich w warunkach złożonego stanu naprężenia. Różnią się one od siebie zarówno kształtem próbek, jak i sposobem ich obciążania. Jedne próbki są gładkie inne z nacięciami. Mogą być rozciągane, zginane lub obciążane kombinacją dwuosowego rozciągania, dwuosowego ściskania oraz rozciągania i ściskania.

5. Metody badań doświadczalnych płynięcia plastycznego metali na próbkach płaskich

5.1. Wiadomości wstępne

Stosowane są różne metody badania własności materiałów na płaskich próbkach w warunkach złożonego stanu naprężenia. Do najważniejszych z nich zaliczamy:

1. Określanie powierzchni płynięcia metodą jednoosiowego rozciągania próbek płaskich — metoda W. Szczepińskiego.
2. Określanie powierzchni płynięcia metodą rozciągania płaskich próbek krzyżowych.
3. Określanie powierzchni płynięcia metodą dwuosowego ściskania.
4. Określanie powierzchni płynięcia metodą obciążania pasma kombinacją rozciągania i ściskania poprzecznego.
5. Określanie powierzchni płynięcia metodą rozciągania płaskich próbek z nacięciami.
6. Badanie powierzchni płynięcia metodą zginanych płyt.

Niżej zostanie podany krótki opis poszczególnych metod.

5.2. Określanie powierzchni płynięcia metodą jednoosiowego rozciągania płaskich próbek — metoda W. Szczepińskiego

Rozpatrzmy elipsę *PLENR* utworzoną przez przecięcie elipsoidy płaszczyzną $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{pl}$ prostopadłą do płaszczyzny $\sigma_x \sigma_y$. Podstawiając do warunku plastyczności (2) sumę $\sigma_x + \sigma_y$, zamiast σ_{pl} , otrzymujemy zależność $\sigma_x + \sigma_y = \tau_{xy}^2$, która musi być spełniona na tej elipsie (na elipsie *PLENR*).

Z wykresu Mohra (rys. 10) wynika, że zależność ta ma miejsce jedynie wtedy, gdy jedno z naprężeń głównych jest równe zeru. Znaczy to, że punkty leżące na elipsie *PLENR* odpowiadają stanowi jednoosiowego rozciągania w różnych kierunkach względem osi x . Na przykład punkt *E*, w którym $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy}$, odpowiada jednoosiowemu rozciąganiu w kierunku nachylonym do osi x pod kątem $\alpha = 45^\circ$.

Na rys. 11 pokazano przypadek stanu naprężenia elementarnego prostokąta *ABCD*, którego położenie jest niezmiennie w stosunku do osi x i y . Graniczny stan naprężenia w materiale równoległoboku jest realizowany w wyniku osiągnięcia przez naprężenia rozciągające σ_x określonej wartości granicznej σ_x .

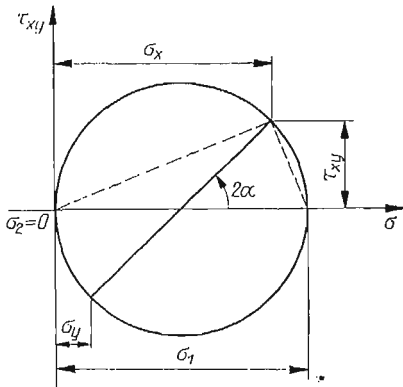
W przypadku materiału izotropowego położenie prostokąta *ABCD* w odniesieniu do osi współrzędnych jest obojętne, ponieważ w jego wnętrzu zawsze można znaleźć inny równoległobok znajdujący się w tym samym stanie granicznym, ale na krawędziach którego będą istniały tylko naprężenia normalne.

Po nabyciu przez materiał anizotropii, w wyniku wstępnych odkształceń plastycznych — np. w kierunku osi x — obrót taki jest niedopuszczalny.

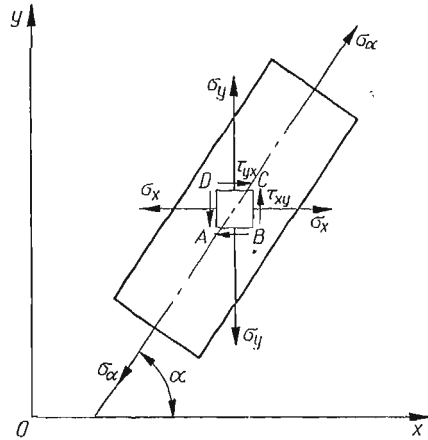
Dla znanych kątów α , między kierunkiem wstępnego odkształcenia a kierunkiem obciążenia wtórnego σ_α , zgodnie ze znanymi zależnościami, można napisać:

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\kappa \cdot \cos^2 \alpha, \\ \sigma_y &= \sigma_\kappa \cdot \sin^2 \alpha, \\ \tau_{yx} &= \tau_{xy} = \sigma_\kappa \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

gdzie przez σ_x , σ_y , τ_{xy} oznaczono składowe granicznego stanu naprężenia równoległoboku $ABCD$.



Rys. 10



Rys. 11

Doświadczalne badania zmian formy krzywej granicznej *PLENR* (rys. 1) przeprowadza się, w oparciu o podane wyżej rozważania, metodą jednoosiowego rozciągania próbek wycinanych (w różnych kierunkach) z materiału poddanego wstępnej plastycznej deformacji.

Sposób wyznaczania i badania powierzchni plastyczności metodą jednoosiowego rozciągania płaskich próbek został podany przez SZCZEPIŃSKIEGO w roku 1963 w pracy [25]. Pozornie ta metoda jest podobna do innych znanych sposobów badania anizotropii materiałów w oparciu o próby jednoosiowego rozciągania. Badania te biorą początek od pracy von GÖLERA i SACHSA [34] z roku 1929, w której autorzy zwrócili uwagę na odmienne własności mechaniczne w próbkach wyciętych w różnych kierunkach w odniesieniu do kierunku walcowania blach z mosiądzu i srebra. Podobne zjawisko dla aluminium stwierdzili następnie SCHMIDT i WASSERMANN [35] w roku 1931. Z nowszych prac, w których zajmowano się badaniem anizotropii polikrystalicznych metali metodą rozciągania próbek wycinanych w różnych kierunkach można wymienić [36–38, 54–56]. Wyniki tych badań przedstawiano we współrzędnych biegunowych, gdzie wzdłuż promieni odkładane są wartości badanego parametru lub we współrzędnych prostokątnych, w których badana wielkość mechaniczna jest funkcją kąta α .

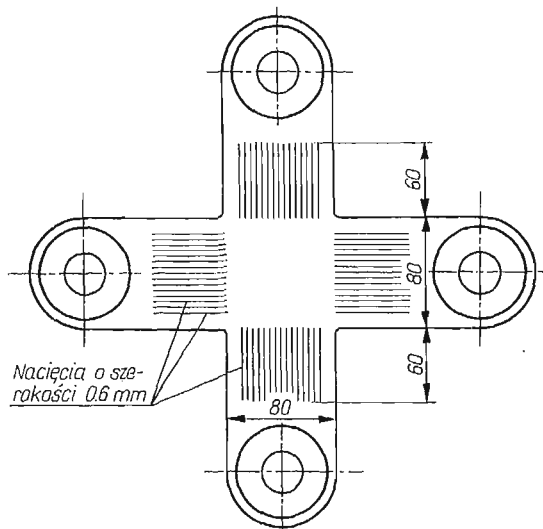
Podany przez SZCZEPIŃSKIEGO związek wyników prób jednoosiowego rozciągania z krzywą graniczną *PLENR* na powierzchni plastyczności (rys. 1) umożliwił przeprowa-

dzenie szerszej i głębszej analizy wyników doświadczeń. W oparciu o tę metodę wykonano do tej pory zaledwie kilka badań [25–27, 39, 57] ale otrzymane z nich wyniki zasługują na uwagę. Metodę tę stosowałem w swoich badaniach wtórnej powierzchni płynięcia przy poszukiwaniu efektu pamięci materiału poddanego dużym odkształceniom plastycznym. Wyniki tych badań zostały podane w pracy [27].

Najprostsze doświadczenia, zgodnie z omawianą metodą, przeprowadza się w następujący sposób. Dużą próbkę, wyciętą z arkusza blachy, poddaje się rozciąganiu w określonym kierunku aż do momentu uzyskania planowanej wartości obciążenia. Następnie, po odciążeniu, z tej dużej próbki wycina się małe próbki pod różnymi kątami α do kierunku wstępnego obciążenia. Każdą małą próbkę poddaje się ponownemu jednoosiowemu rozciąganiu dla znalezienia zależności naprężenia-odkształcenia. Wykresy te są podstawą do wyznaczania krzywej granicznej, odpowiadającej elipsie *PLENR* na powierzchni plastyczności dla materiału przed plastycznym odkształceniem.

5.3. Określanie powierzchni płynięcia metodą badania płaskich próbek krzyżowych

Bardzo często w konstrukcjach budowlanych połączenia wykonane są z płaskich elementów blaszanych. W większości przypadków na konstrukcje te działają obciążenia statyczne, przy czym dopuszcza się w nich nieznaczny rozwój odkształceń plastycznych.

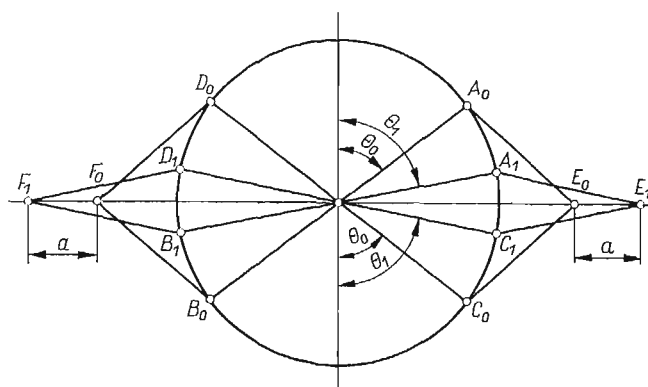


Rys. 12

Zastępując próbki rurkowe płaskimi, możliwe jest przeprowadzenie badań doświadczalnych tych próbek w warunkach zbliżonych do rzeczywistych, w jakich pracują elementy blaszane konstrukcji budowlanych. Kształt tych próbek zależy od rodzaju obciążeń jakim będą one poddawane. Na rys. 12 pokazano płaską próbkę krzyżową, taką, jakie w pracach [58–60] stosowano do badań w warunkach dwuosiowego rozciągania. Wąskie przecięcia w ramionach wykonuje się dla uzyskania wyrównanego obciążenia części środkowej próbki. Plastyczne odkształcenie początkowo rozwija się w częściach chwytowych próbki,

osłabionych nacięciami. Po umocnieniu się materiału w ramionach próbki, wywołanym plastycznym odkształceniem, wzrost obciążenia wywołuje następnie plastyczne odkształcenia w części środkowej próbki. Odkształcenia próbki mierzono elektrycznymi tensometrami oporowymi i tensometrami mechanicznymi. W pobliżu nacięć, na stosunkowo małych obszarach (4–5 mm), występowała podczas obciążania koncentracja naprężeń, która jednak w miarę zbliżania się do obszaru środkowego próbki zanikała. W obszarze pomiarowym próbki naprężenia rozkładały się więc dostatecznie równomiernie. Stopień jednorodności naprężeń w rejonie rozmieszczonych czujników pomiarowych ustalano na podstawie wykresów $\sigma - \varepsilon$ (naprężenie-odkształcenie) wyznaczanych w różnych miejscach i kierunkach. Próbkę obciążano w specjalnym urządzeniu dźwigniowym. Zwiększanie obciążeń odbywało się w nim przez napełnianie wodą pojemnika zawieszonoego na dźwigni obciążającej.

Odmienne urządzenie do dwuosowego rozciągania próbek krzyżowych zostało podane przez GORBA i OSTROWSKIEGO w pracach [62, 63].



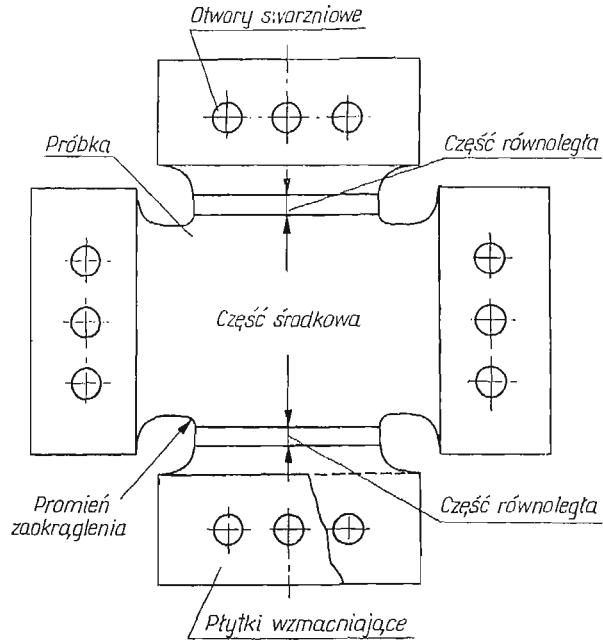
Rys. 13

Zagadnieniem badania płaskich próbek, poddawanych dwuosowemu rozciąganiu, zajmują się również SHIRATORI i IKEGAMI w pracy [40]. Stosowane przez nich próbki krzyżowe różnią się znacznie od pokazanych na rys. 12. Próbkę obciążane są w specjalnej maszynie badawczej. Obciążenie robocze jest wywoływane przez olej doprowadzany pod ciśnieniem z dwóch pomp. Każda pompa zasila dwa hydrauliczne podnośniki ustawione na przeciw siebie. Obciążenie to jest przekazywane do próbki za pośrednictwem wodzika i uchwytu. Do wodzików przymocowany jest mechanizm równomiernego przesuwu, typu pantografu, który utrzymuje próbkę w stałym położeniu środkowym. Połączenia sworzniowe w uchwytach są dodatkowym zabezpieczeniem próbek przed poślizgiem.

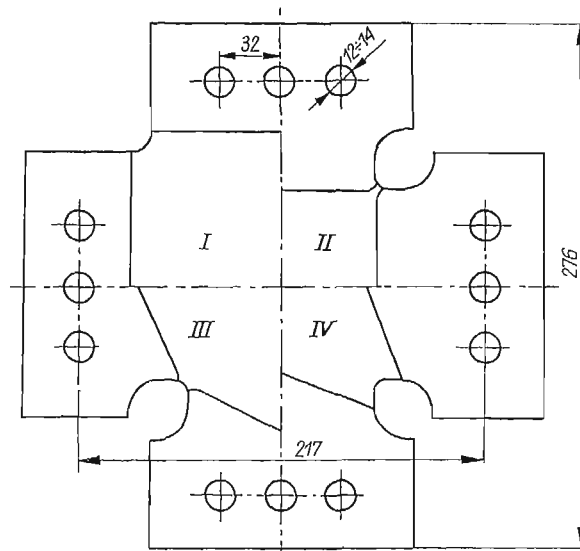
Na rys. 13 pokazano schemat mechanizmu do równomiernego przesuwu. Jak już wyżej wspomniano, jest to mechanizm typu pantografu, złożony z sześciu prętów — A_0B_0 , C_0D_0 , A_0E_0 , C_0E_0 , D_0F_0 i B_0F_0 . Pręty te są połączone sworzniami w punktach A_0 , B_0 , C_0 , D_0 , E_0 i F_0 . Środki prętów — A_0B_0 i C_0D_0 — są przymocowane do podstawy maszyny, a punkty E_0 i F_0 — do wodzików umieszczonych na przeciw siebie. Podczas przesuwania się punktu E_0 do położenia E_1 , pręty A_0B_0 i C_0D_0 obrócą się odpowiednio do położenia A_1B_1 i C_1D_1 . Zatem, punkt F_0 przesunie się do położenia F_1 , o odcinek równy

$E_0 E_1$. Tak więc, przesunięcia dwóch wodzików są równe, a środek próbki nie ulega przesunięciu w czasie przeprowadzanych badań. Obciążenie doprowadzane do próbki jest mierzone między uchwytem a wodzikiem.

Próbki używane do badań składały się z płaskiego krzyżowego korpusu i ośmiu płytek wzmacniających ramiona próbki. Kształt i części składowe próbki pokazane są na rys. 14.



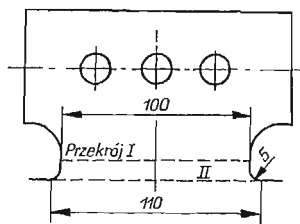
Rys. 14



Rys. 15

W metodyce badań tego typu próbek wymagane jest aby: a) obszar równomiernej plastycznej deformacji w próbce był możliwie duży, b) stan naprężenia w wymienionym obszarze był jednoznacznie określony dla danego obciążenia. Pierwszy warunek związany jest z rozmiarem i kształtem poszczególnych obszarów próbki, natomiast drugi warunek związany jest z zaokrąglonym przejściem między ramionami próbki. Oba te warunki zostały zbadane doświadczalnie, a wyniki tych badań uwzględnione przy ostatecznym wyborze kształtu i wymiarów próbki. Doświadczalne badania równomierności odkształceń przeprowadzono na czterech odmianach próbek (rys. 15). Najkorzystniejszym rozwiązaniem okazała się próbka typu *III*. W próbce tej płyty wzmacniające mają od strony środkowej wklęsłe wycięcia. Zmniejszają one wpływ oddziaływania ramion na środkowy obszar próbki.

Na podstawie pomiarów rozkładu naprężeń w obszarze środkowym próbki stwierdzono, że zaokrąglenie między ramionami próbki nie ma większego wpływu na warunki naprężenia panujące w tym obszarze. Najkorzystniejsza sytuacja jest jednak wówczas, gdy promień tego zaokrąglenia jest możliwie mały. Naprężenie nominalne jest, jak wiadomo, definiowane jako iloraz obciążenia przez powierzchnię przekroju. Naprężenia te obliczono dla dwóch przekrojów, *I* i *II*, (rys. 16). Cyfrą *I* oznaczono przekrój najwęższej części



Rys. 16

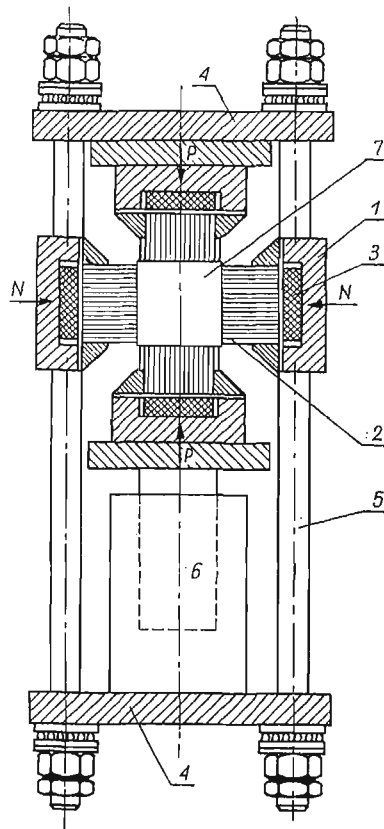
ramienia próbki, a przez *II* — przekrój przechodzący przez punkty styku stycznej do dwóch sąsiednich zaokrągleń. Próbkę poddano dwuosiomu obciążeniu, podczas których za pomocą tensometrów w kształcie rozety mierzono odkształcenia sprężyste. Określone na tej podstawie naprężenia porównano z wartościami obliczonymi. Okazało się, że zgodność ta jest lepsza dla przekroju *II*. A więc, naprężenia w centralnym obszarze próbki określano dzieląc wartości obciążenia przez pole przekroju *II*.

Łatwo zauważyć, że obszary równomiernej plastycznej deformacji w próbkach są inaczej uzyskiwane w metodzie Bałdina–Trofimowa i inaczej w metodzie Shiratori–Ikegami. W pierwszym przypadku — przez odpowiednie nacięcia części chwytowych, w drugim — przez odpowiedni kształt i geometrię płytek wzmacniających części chwytowe próbki.

5.4. Określanie powierzchni płynięcia metodą dwuosowego ściskania

W pracach BAŁDINA, GEMMERLINGA i TROFIMOWA [59, 60], oprócz badań w warunkach dwuosowego rozciągania, przedstawiono również sposób przeprowadzania prób przy dwuosowym ściskaniu. Próbki wykonywano w formie grubych płytek o wymiarach 80×80 mm i grubości 14 do 16 mm.

Na rys. 17 pokazano schemat urządzenia ściskającego. Jak wiadomo, w zwykłych próbach na jednoosiowe ściskanie badane próbki umieszcza się między dwiema sztywnymi płytami prasy. Wadą tych badań jest to, że tarcie między płytami a powierzchniami czołowymi próbek przeszkadza w swobodnym rozwijaniu poprzecznych odkształceń i tworzeniu płaszczyzn poślizgu w końcowych częściach próbek. Dla zmniejszenia wpływu powyższego niekorzystnego zjawiska w urządzeniu na rys. 17 wprowadzono tzw. stempel



Rys. 17

podatny, złożony z pakietu wąskich płytek 2, sprężystej podkładki gumowej 3 i metalowego cylindra 1. Płytki, nie związane ze sobą, mają możliwość rozsuwania się w czasie pracy. Przekazywanie obciążenia na próbkę przez pakiet wąskich płytek (nazywanych grzebieniem) zapewnia znaczną swobodę w rozwijaniu poprzecznych odkształceń, w płaszczyźnie rysunku, końcowych części próbek. W kierunku grubości próbek istnieje w dalszym ciągu ograniczenie deformacji, tak jak przy stemplach sztywnych. Swobodna deformacja w kierunku grubości mogłaby mieć miejsce jedynie wtedy, gdyby nacisk na próbkę był wywierany za pośrednictwem pręcików, tak aby na grubości próbek umieszczonych było szereg oddzielnych igiełek. Takie rozwiązanie konstrukcyjne byłoby jednak zbyt skomplikowane.

Przyjęcie podatnego stempla w kształcie pakietu płytek oraz smarowanie czołowych powierzchni próbek proszkiem grafitowym ograniczało poprzeczną deformację w kierunku grubości do bardzo wąskich obszarów krańcowych (5–6 mm). Pozostała część badanego materiału próbki, a zwłaszcza strefa, w której dokonywano pomiarów, była wolna od wpływu trójosiowego stanu naprężenia. W kierunku poziomym (nacisk N) próbkę obciążano w poziomej prasie, w kierunku pionowym (nacisk P) — za pomocą hydraulicznego podnośnika 6. Podnośnik umieszczony jest w trawersie złożonej z dwóch płyt 4 i połączonych czterema ściągaczami 5.

Odmienne rozwiązania konstrukcyjne urządzeń obciążających do badania próbek przy dwuosowym, a nawet przy trójosiowym, ściskaniu podane są między innymi w pracach SOŁNCEWA i JAGNA [61] oraz KRISCHA i WERNERA [41].

5.5. Określanie powierzchni płynięcia metodą obciążania pasma kombinacją rozciągania i poprzecznego ściskania

W pracach BALDINA, GEMMERLINGA i TROFIMOWA [59, 60] podana została metodyka badań pasma poddawanego rozciąganiu w jednym kierunku i ściskaniu w drugim, prostopadłym do pierwszego. Układ obciążający jest podobny do zestawu podanego na rys. 17. Różnica dotyczy tylko sposobu obciążania poziomego. Próbka w kształcie pasma ustawiona wymiarem długości w kierunku poziomym jest w tym kierunku rozciągana za pomocą zwykłej zrywarki poziomej. Ściskanie próbki (nacisk P), podobnie jak na rys. 17, realizuje się hydraulicznym podnośnikiem poprzez podatne stemple. Podkładka gumowa 3, ułożona na dnie stalowego cylindra 1, ma na celu zabezpieczać równomierny rozkład obciążenia na płytce i niezależny udział każdej z nich w procesie obciążania.

Podobne badania, polegające na rozciąganiu płyty przy równoczesnym poprzecznym jej ściskaniu pomiędzy dwoma stemplami, przeprowadzili BOWDEN i JUKES [42].

5.6. Określanie powierzchni płynięcia metodą rozciągania płaskich próbek z nacięciami

Metodę tę pierwszy zaproponował BIJLARD [43], a teorię podał HILL [49–51]. Polega ona na rozciąganiu płaskich próbek z naciętymi bruzdami (rys. 18), w których w momencie uplastycznienia pojawia się płaski dwuwymiarowy stan naprężenia. Metoda opiera się na analizie możliwości wystąpienia lokalnej linii nieciągłości prędkości oddzielającej sztywne obszary.

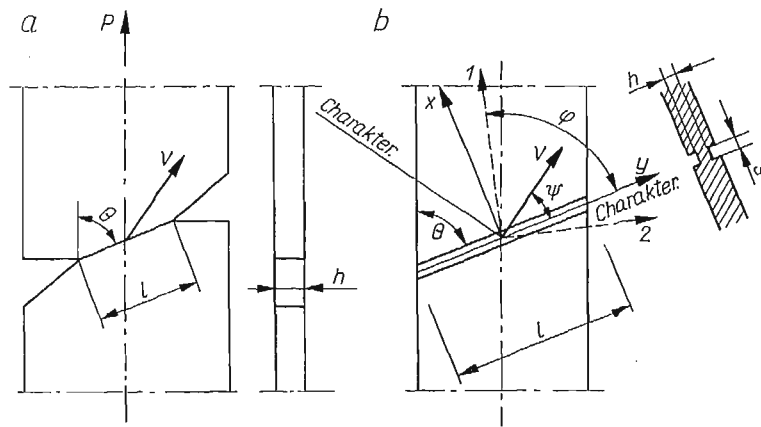
Wyniki badań określa się za pomocą parametrów Lodego μ i ν oraz przedstawia w głównych naprężeniach i odkształceniach. Jeżeli pasmo osłabione dwoma niesymetrycznie naciętymi korbami lub nacięte po obu stronach dwiema bruzdami (rys. 18) zostanie poddane jednoosiowemu rozciąganiu, to w strefie materiału łączącej dna korbów lub w bruzdzie pojawią się odkształcenia plastyczne. Zostaną one wywołane przy odpowiedniej wartości siły rozciągającej P . Odkształcenia te będą miały charakter ukośnego przeźwienia. Części materiału sąsiadujące z szyjką będą w stanie sprężystym, który przy małych wartościach odkształceń może być uważany jako sztywny. Względny ruch obu części sztywnych próbki określony jest przez wektor przemieszczenia lub wektor prędkości przemieszczenia V . Wektor ten jest nachylony do linii szyjki pod kątem ψ (rys. 18). Istnienie korbów lub bruzd lokalizuje odkształcenia materiału w osłabionej strefie. Wynika

stąd, że kierunek względnego przemieszczenia sztywnych części jest zależny od kąta nachylenia strefy osłabionej i od własności materiału. Jeżeli szerokość s jest dużo mniejsza od długości l , to kierunek wzdłuż szyjki i kierunek prostopadły do wektora V można uważać za nierozciągliwe. W teorii ciała idealnie plastycznego kierunki te są kierunkami charakterystyk prędkości. Zgodnie z oznaczeniami na rys. 18b, składowe wektora prędkości V wyniosą:

$$(7) \quad V_x = V \sin \psi, \quad V_y = V \cos \psi$$

a składowe tensora prędkości odkształcenia wyznaczmy z zależności

$$(8) \quad \dot{\epsilon}_x = \frac{V_x}{s} = \frac{V \sin \psi}{s}, \quad \dot{\epsilon}_y = 0, \quad \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{V_y}{2s} = \frac{V \cos \psi}{2s}.$$



Rys. 18

Główne prędkości odkształcenia otrzymamy ze wzorów:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \frac{V}{2s}(1 + \sin \psi), \\ \dot{\epsilon}_2 &= -\frac{V}{2s}(1 - \sin \psi), \end{aligned} \quad (\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_2).$$

Trzecia główna prędkość odkształcenia może być wyznaczona z warunku zmian objętości materiału w stanie plastycznym. Dla materiału nieściśliwego wynosi ona

$$(10) \quad \dot{\epsilon}_3 = -\frac{V}{s} \sin \psi.$$

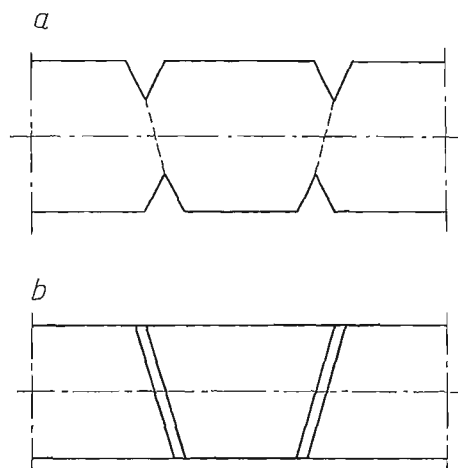
Kierunki główne prędkości nachylone są do kierunku szyjki pod kątami $\varphi = \pi/4 \pm \psi/2$.

Jak już wyżej wspomniano, w szyjce rozciąganych próbek, w momencie uplastycznienia pojawia się płaski stan naprężenia. W ogólnym przypadku stan ten jest statycznie niewyznaczalny, z wyjątkiem przypadku, gdy materiał jest izotropowy. Spełniony jest wówczas warunek współosiowości kierunków głównych tensorów naprężenia i prędkości

odkształcenia. Rozpatrując równowagę elementu wyciętego w szyjce otrzymamy następujące wyrażenia na naprężenia główne:

$$(11) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_0}{\cos \psi} [\sin(\theta - \psi) + \cos \theta], \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_0}{\cos \psi} [\sin(\theta - \psi) - \cos \theta], \end{aligned} \quad \sigma_3 = 0,$$

gdzie $\sigma_0 = P/hl$, jest naprężeniem działającym pomiędzy brzegiem szyjki a obszarem sztywnym. Stan ten jest ważny tylko dla odpowiednio szerokiego pasma, a metoda daje dobre wyniki badania materiału tylko do chwili uplastycznienia.



Rys. 19

Dla materiału izotropowego w płaszczyźnie pasma wyznaczamy z doświadczenia kierunek nieciągłości prędkości V dla szeregu próbek o różnym nachyleniu bruzdy θ oraz wartość siły rozciągającej w momencie uplastycznienia. Na tej podstawie obliczamy naprężenia główne, które po naniesieniu na płaszczyznę $\sigma_1 \sigma_2$ pozwalają na weryfikację warunku plastyczności.

Możliwe jest również przeprowadzenie analizy wyników, uzyskanych tą metodą, za pomocą parametrów Lodego μ i ν [49].

Wadą omówionej metody jest to, że kąt ψ nie może być dany, a wynika jedynie z własności badanego materiału. Mimo to, o przydatności jej świadczy szereg prac dotyczących badania zarówno metali [3, 43–46], jak i innych materiałów [47].

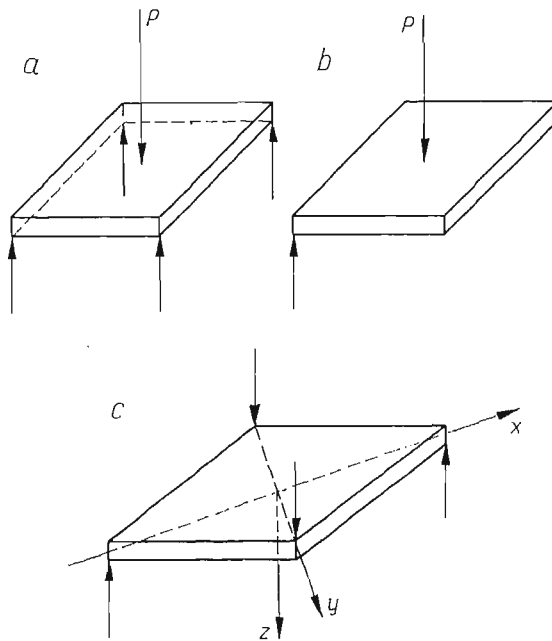
Istotnym elementem samego doświadczenia jest ustalenie kierunku względnego przesunięcia części nieuplastycznionych. W tym celu na powierzchni próbki należy nanieść siatkę rys równoległych i prostopadłych do kierunku dłuższego boku próbki. Porównanie rys siatki przed i po rozciąganiu pozwala na określenie kąta ψ . Pewne odmiany podanej metody wyznaczania wektora przemieszczenia podają prace [44, 46, 48].

Niesymetrycznie nacięte karby lub bruzdy mogą być przyczyną skręcania dwóch części sztywnych próbki. Dla uniknięcia tego niekorzystnego efektu, na próbce nacina się dwie pary osłabień, tak jak to pokazuje rys. 19.

Opisana metoda daje dobre wyniki przede wszystkim przy badaniu powierzchni plastyczności materiału wyjściowego, ale BARAYA i PARKER [46] wykazali, że może ona być stosowana również do opisu wtórnych powierzchni płynięcia materiałów po plastycznym odkształceniu.

5.7. Badanie powierzchni płynięcia metodą zginanych płyt

Metoda badania powierzchni plastyczności, oparta na teorii płyt, została podana w pracy THEOCARISA i HAZELLA [52]. Zaletą tej metody jest to, że pozwala na badanie kształtu powierzchni w całej dwuwymiarowej płaszczyźnie naprężeń głównych. Badania przeprowadza się na płytach równoległobocznych poddawanych działaniu kombinacji



Rys. 20

momentów zginających. Do wyznaczenia punktów w drugiej i czwartej ćwiartce płaszczyzny momentów zginających używa się płyt równoległobocznych, zginanych dwoma parami sił przyłożonych w narożnikach. Wyznaczanie punktów w pierwszej i trzeciej ćwiartce jest bardziej złożone. Polega na superpozycji wyników badań: płyty kwadratowej podpartej w czterech narożnikach i obciążonej w środku oraz płyty kwadratowej podpartej w dwóch przeciwległych narożnikach i obciążonej w środku.

Na rys. 20 pokazano trzy różne sposoby obciążania płyt równoległobocznych do badania całej powierzchni plastyczności w płaszczyźnie głównych momentów zginających.

Metoda pozwala na badanie powierzchni plastyczności zarówno materiału wyjściowego, jak i po wstępnym odkształceniu plastycznym.

Płyty o różnej geometrii, poddawane różnym sposobom obciążenia, znajdują się w różnych warunkach płaskiego stanu naprężenia. Metoda jakkolwiek bardzo prosta jest obar-

czona pewną niedoskonałością. Wynika ona stąd, że zginanie wytwarza na grubości płyty nierównomierny rozkład naprężeń. Dlatego też, uzyskane wyniki dostarczają informacji o względnych kształtach powierzchni plastyczności, a nie o jej absolutnych rozmiarach. Badania krzywych płynięcia, zarówno materiału wyjściowego, jak i po wstępnym odkształceniu plastycznym, przeprowadza się na płytach o tej samej grubości.

Wytnijmy z płyty prostokątnej równoległobok utworzony przez linie łączące środki boków prostokąta. Powierzchnię siodłową dla tego równoległoboku otrzymamy wówczas, gdy obciążymy go w narożnikach dwiema parami sił skupionych i przeciwnie skierowanych. W wyniku takiego obciążenia, na bokach równoległoboku pojawiają się równomiernie rozłożone momenty skręcające, które wywołują zginanie. Taka równoległoboczna płyta, obciążona w narożnikach przeciwnie skierowanymi parami sił skupionych (rys. 20c), jest próbką przeznaczoną do badania drugiej i czwartej ćwiartki dwuwymiarowej płaszczyzny momentów zginających. Przez zmianę stosunku przekątnych rombu uzyskuje się różne kombinacje głównych momentów zginających w drugiej i czwartej ćwiartce.

Do badania granicy plastyczności w pierwszej i trzeciej ćwiartce płaszczyzny głównych momentów zginających należy używać płyt kwadratowych podpartych w narożnikach i obciążonych siłą skupioną w środku (rys. 20a i 20b).

Istotnym elementem badań w tej metodzie są pomiary ugięć płyt. Interesujący sposób tych pomiarów metodą Moire przedstawił THEOCARIS [53]. Został on zastosowany przez THEOCARISA i HAZELLA [52] do badania powierzchni plastyczności aluminium w stanie wyjściowym i po plastycznym odkształceniu.

Literatura cytowana w tekście

1. S. KATARZYŃSKI, S. KOCAŃDA, M. ZAKRZEWSKI, *Badanie własności mechanicznych metali*, WNT, Warszawa 1967.
2. G. J. TAYLOR, H. QUINNEY, *The plastic distortion of metals*, Phil. Trans. Roy. Soc., A 230 (1931), 323–362.
3. G. LIANIS, H. FORD, *An experimental investigation of the yield criterion and the stress-strain law*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 5 (1957).
4. S. ERBEL, *Metodyka wyznaczania krzywej umocnienia dla bardzo dużych odkształceń*, Mechanik, 10 (1966).
5. Z. MARCINIAK, *Influence of the sign change of the load on the strain hardening curve of a copper test piece subject to torsion*, Arch. Mech. Stosow., 6 (1961), 743–752.
6. J. LITOŃSKI, *Nowa metoda wyznaczania krzywej naprężenie — odkształcenie przy ścinaniu*, Rozpr. Inż., 19, 3 (1971), 485–500.
7. Z. MARCINIAK, *Badanie wpływu wstępnych odkształceń plastycznych na przebieg wzmocnienia metali metodą rozciągania niejednorodnych próbek*, Prace IPPT PAN, Warszawa 45/1971.
8. J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Doświadczalne badania powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu*, Mech. Teoret. Stosow., 3, 2 (1965), 55–66.
9. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności (część druga)*, Mech. Teoret. Stosow., 6, 1 (1968), 3–31.
10. K. TURSKI, *Badanie wpływu odkształcenia plastycznego na zachowanie się metalu przy różnych drogach wtórnego obciążenia*, Mech. Teoret. Stosow., 9, 1 (1971), 155–199.
11. R. MARJANOWIČ, *Ponašanje površina tečenja pri složenom cikličnom naprezanju (Behaviour of yield surface under complex cyclic loading, in Serbian)*, Doktorska Disertacija, Univerzitet u Beogradu, Bor, Jugoslavija, 1970.
12. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności*, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1966.

13. E. SHIRATORI, K. IKEGAMI, K. KANEKO, *Subsequent yield surface determined in consideration of the Bauschinger effect*, Internat. Symposium on Foundation of Plasticity, Warsaw, 1972, Nordhoff Internat. Publishing-Groningen.
14. W. N. FINDLEY and A. GJELSVIK, *A bi-axial testing machine for plasticity, Creep or relaxation under variable principal — stress ratios*, Preceedings, Am. Soc. for Testing and Materials, 1962.
15. P. M. NAGHDI, F. ESSENBERG and W. KOFF, *An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity*, Journal of Appl. Mech., **25**, 2 (1958).
16. P. M. NAGHDI and J. C. ROWLEY, *An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **3** (1954) 63–80.
17. A. PHILLIPS, *Combined tension-torsion tests for aluminium alloy 2S-O*, Journal of Appl. Mechanics, Trans. ASME, **74** (1952) 496–500.
18. M. FEIGEN, *Inelastic behavior under combined tension and torsion*, Proc. of the 2nd U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., 1954.
19. E. A. DAVIS, *Combined tension-torsion tests with fixed principal directions*, Journal Appl. Mechanics, **22**, 3 (1955).
20. S. S. GILL and J. PARKER, *Plastic stress-strain relationships — Some experiments on the effect of loading path and loading history*, Journal of Appl. Mechanics, March, 1959.
21. J. F. BRATT and Ö. KANAN, *Determination of the yield condition in the third quadrant of the stress plane*, Journal of Appl. Mechanics, Series E, **33**, 1 (1966).
22. S. SMITH and B. O. ALMROTH, *An experimental investigation of plastic flow under biaxial stress*, Journal of the Society for Exper. Stress Analysis, Exper. Mechanics, **10**, 6 (1970).
23. Z. GABRYSZEWSKI, *Zmiana funkcji plastyczności w procesie obciążania*, Dysertacja doktorska, Politechnika Wroclawska, 1962.
24. R. ŻUCHOWSKI, *Wpływ skręcania na wtórne rozciąganie stali*, Zeszyty Naukowe Politechniki Wroclawskiej, Mechanika X, nr 73, Wroclaw 1963, s. 101–117.
25. W. SZCZEPIŃSKI, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stosow., **15**, 2, (1963), 275–296.
26. W. SZCZEPIŃSKI and J. MIASTKOWSKI, *An experlmental study of the effect of the prestraining history on the yield surfaces of an aluminium alloy*, J. Mech. Phys. Solids, **16** (1968) 153–162.
27. J. MIASTKOWSKI, *Doświadczalne badania efektu pamięci wstępnie odkształconego materialu*, Prace IPPT PAN, Warszawa 62/1972.
28. О. Г. СЕМУШКИН, *Механические испытания металлов*, Изд. «Высшая Школа», Москва 1972.
29. Л. М. КАЧАНОВ, *Об экспериментальном определении последующих поверхностей нагружения и эффекта Баушингера*, Исследования по упруг. и пластичности, сб. 8, Изд. ЛГУ, 1971.
30. Л. М. КАЧАНОВ, *К вопросу об экспериментальном построении поверхностей текучести*, Изв. АН СССР, Механика Твёрдого Тела, **4** (1971).
31. Б. А. АВДЕЕВ, *Испытательные машины и приборы*, Москва, Машигиз, 1957.
32. А. А. ИЛЮШИН и В. С. ЛЕНСКИЙ, *Сопротивление материалов*, М., Физматгиз, 1959.
33. И. С. БОГАТЫРЕВ, А. А. ИЛЮШИН, В. С. ЛЕНСКИЙ и В. М. ПАНФЕРОВ, *Машина СН для исследования пластического деформирования металлов при сложном нагружении*, Инж. Журнал, **1** (1961).
34. F. von GÖLER, G. SACHS, Zs. Physik, **56** (1929) 495.
35. E. SCHMID, G. WASSERMANN, Metallwirtschaft, **10** (1931) 409.
36. J. КЛЕПАЧКО, *О релакс при упругом деформировании анизотропных металлов*, Mech. Teoret. Stosow., **7**, 2 (1969).
37. W. TRUSZKOWSKI, *Zagadnienia anizotropii zgniecionych metali polikrystalicznych*, Arch. Hutn., **1**, 2 (1956).
38. K. SAITO and H. IGAKI, *Anisotropy produced by plastic deformation*, Proc. First Japan Congr. Test. Materials, Kyoto 1958, 111–114.
39. A. BERIO, L. BORTOLOTTI, P. MANCA, A. PAGLIETTI, *On the plastic behaviour of time dependent materlals. Theoretical and experimental investigation*, Arch. of Mech., **24**, 3 (1972), 351–361.
40. E. SHIRATORI and K. IKEGAMI, *A new biaxial tensile testing machine with flat specimens*, Bull. Tokyo, Inst. Technol., **82** (1967), 105–118.

41. A. KRISCH, W. WERNER, *Zugversuche im nahezu dreiaxig gleichen Spannungszustand*, Materialprüfung, 5, 10 (1963).
42. P. B. BOWDEN, J. A. JUKES, *The plastic yield behaviour of polymethacrylate*, J. Mat. Sci., 3 (1968), 183.
43. P. P. BIJLARD, Pub. Inst. Ass. Bridge and Structural Engrs., 6, 27 (1940).
44. B. B. HUNDY, A. P. GREEN, *A determination of plastic stress-strain relations*, J. Mech. Phys. Solids, 3 (1954), 16.
45. J. P. ELLINGTON, *An investigation of plastic stress-strain relationships using grooved tensile specimens*, J. Mech. Phys. Solids, 7 (1958), 276.
46. G. L. BARAYA, J. PARKER, *Determination of yield surfaces by notched strip specimens*, Int. J. Mech. Sci., 5 (1963), 353–363.
47. A. DRESCHER, *O pewnej metodzie wyznaczania kryterium zniszczenia polimerów*, Mech. Teoret. Stosow., 7, 3 (1969).
48. G. L. BARAYA, J. PARKER and J. W. FLOWETT, *Mechanical and photographic processes for producing a grid of lines*, Int. J. Mech. Sci., 5 (1963), 365–367.
49. R. HILL, *Mathematical theory of plasticity*, p. 18, Clarendon Press, Oxford 1950.
50. R. HILL, *On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets*, J. Mech. Phys. Solids, 1 (1952), 19–30.
51. R. HILL, *A new method for determining the yield criterion and plastic potential of ductile metals*, J. Mech. Phys. Solids, 2 (1953), 272.
52. P. S. THEOCARIS and C. R. HAZELL, *Experimental investigation of subsequent yield surfaces using the moire method*, J. Mech. Phys. Solids, 13 (1965), 281–294.
53. P. S. THEOCARIS, *Moire method in plates*, Proc. IASS Symp., Warsaw 1963.
54. П. П. ПЕТРИЦЕВ, *Упруго-пластические деформации анизотропного тела*, Вестник МГУ, 8 (1952).
55. Е. К. АШКЕНАЗИ, *Построение предельных поверхностей для плоского напряженного состояния анизотропных материалов по экспериментальным данным*, Заводская Лаборатория, 2 (1964).
56. П. Г. МИКЛЯЕВ, Я. Б. ФРИДМАН, *Об оценке механических свойств и характера разрушения анизотропных металлов*, Заводская Лаборатория, 2 (1966).
57. М. Л. ГОРЬ, Д. М. КАРПИНОС, А. А. ОСТРОВСКИЙ, *Исследование влияния предварительной пластической деформации на вид кривых текучести*, Проблемы Прочности, 6 (1970).
58. В. Л. АХРЕМЕНКО, И. А. КОЗЛОВ, *К исследованию двухосного растяжения на плоских образцах*, Заводская Лаборатория, 8 (1968).
59. В. А. БАЛДИН, В. А. ГЕММЕРЛИНГ, В. И. ТРОФИМОВ, *Экспериментальное исследование упруго-пластической работы малоуглеродистой стали при простом и сложном нагружении*, Тр. ЦНИПС, Исследования по стальным конструкциям, Госстройиздат, Москва 1956.
60. В. А. БАЛДИН, В. И. ТРОФИМОВ, *Экспериментальное исследование условия текучести строительной стали на плоских образцах*, Изв. АН СССР ОТН, 3 (1958).
61. Г. А. СОЛНЦЕВА, Ю. И. ЯГН, *Реверсер для испытаний материалов на трехосное сжатие*, Заводская Лаборатория, 3 (1959).
62. М. Л. ГОРЬ, А. А. ОСТРОВСКИЙ, *Приспособление для двухосного растяжения крестовидных образцов*, Проблемы Прочности, 6 (1970).
63. М. Л. ГОСЬ, А. А. ОСТРОВСКИЙ, *Приспособления и устройства для исследования механических свойств материалов*, Изд. «Наукова Думка», Киев 1973.

Резюме

МЕТОДИКА СТАТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТАЛЛОВ

В работе представлена методика статических экспериментальных исследований пластических деформаций металлов при сложном нагружении. Особенное внимание уделяется исследованию поверхности текучести в плоском напряженном состоянии осуществляемом для плоских и трубчатых образцов.

S u m m a r y

METHODS OF STATIC EXPERIMENTAL STUDIES OF PLASTIC FLOW OF METALS

Methods of quasi-static experiments of plastic flow of metals under complex loading are presented. Attention is paid mainly to the investigations of yield surfaces in plane stress conditions performed on flat or tubular specimens.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

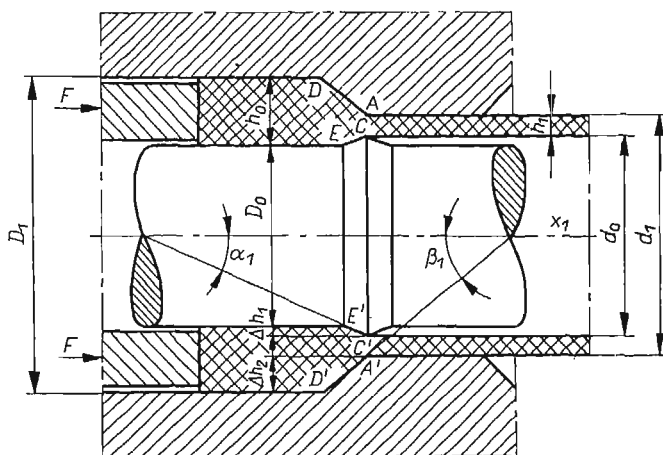
Praca została złożona w Redakcji dnia 23 sierpnia 1974 r.

TEORETYCZNA ANALIZA PROCESU WYCISKANIA RURY

JERZY BIAŁKIEWICZ (KRAKÓW)

1. Wstęp

Teoria płynięcia ośrodka sztywno-idealnie plastycznego w warunkach osiowo-symetrycznego stanu naprężenia i odkształcenia obejmuje swym zakresem wiele ważnych praktycznie zagadnień. Pomimo istotnego postępu w przystosowaniu analizy opisującej ją równań do zastosowań, kierując się znaczną czasochłonnością, a nawet nieosiągalnością ścisłych rozwiązań, niejednokrotnie rezygnujemy z opisu osiowo-symetrycznego rozpatru-



Rys. 1

jąc formalnie zagadnienie w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Postępowanie takie w oparciu o prace porównawcze przeprowadzone przez THOMSENA i współpracowników [1] w licznych przypadkach prowadzi do dobrego przybliżenia zwłaszcza dla wyznaczenia wielkości sił występujących w procesie deformacji plastycznej. W rezultacie przeprowadzonych porównań dla wybranych zagadnień brzegowych [2] stwierdzono np., że średnie ciśnienie dla procesu wciskania stempla w warunkach osiowo-symetrycznych jest o 9,8% większe od obliczonego dla tego samego zagadnienia w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, natomiast siła wciskania ostrego klina dla kąta 60° jest około 12% niższa od wynikającej z rozwiązania osiowo-symetrycznego. Podobną analizę porównawczą można przeprowadzić dla szeregu innych ważnych praktycznie przypadków, jak np. procesu kucia matrycowego przedstawionego w pracy [3], gdzie zastosowano teorię płaskiego stanu odkształcenia do rozwiązania problemu w warunkach symetrii osiowej, kiedy wycięcia w obu połówkach matrycy tworzą powierzchnie obrotowe.

Poniżej podane zostanie rozwiązanie procesu wyciskania rury schematycznie przedstawionego na rys. 1. Istotną cechą charakteryzującą rozpatrywany proces jest brak sy-

metrii w obszarze odkształceń plastycznych *ECAD*. Fakt ten spowodowany jest nierównomierną redukcją grubości ścianki rury od strony średnicy zewnętrznej D_1 i wewnętrznej D_0 $\left(\frac{D_1 - d_1}{2} \neq \frac{d_0 - D_0}{2} \right)$ oraz w ogólnym przypadku odmiennymi kątami nachylenia krawędzi *AD* i *EC* względem osi x_1 ($\beta_1 \neq \alpha_1$). Założenia te eliminują możliwość wskazania bezpośredniego, uzasadnionego technologicznie odpowiednika rozpatrywanego procesu osiowo-symetrycznego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Można wprowadzić analogię z procesem przeciągania blachy z małą redukcją grubości rozwiązany przez HILLA i TUPPERA [4], niemniej jednak tylko w przypadku spełnienia wyżej sprecyzowanego warunku symetrii.

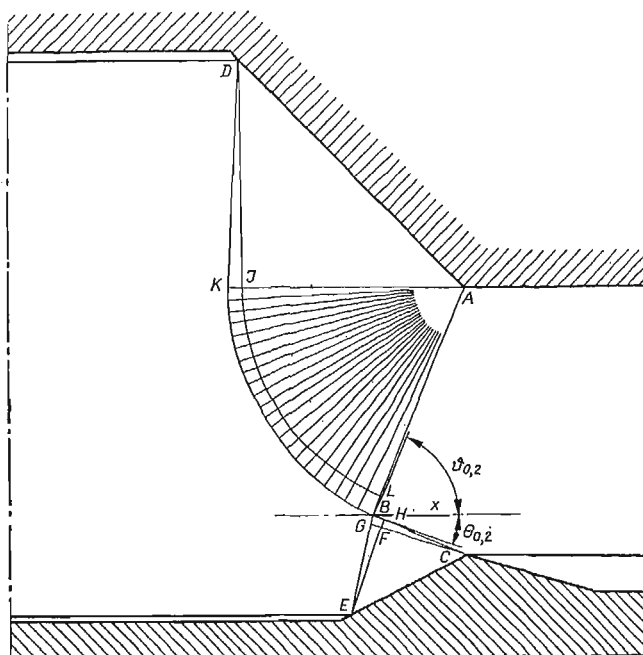
2. Analiza teoretyczna

Analizie zostanie poddany szczególny przypadek procesu, dla którego obszar plastyczny scharakteryzowany jest stosunkami wymiarów $\Delta h_2 / \Delta h_1 = 4$ oraz $h_0 / h_1 = 2,04$. Przyjmujemy, że na liniach kontaktu materiału z matrycą nie występują siły tarcia.

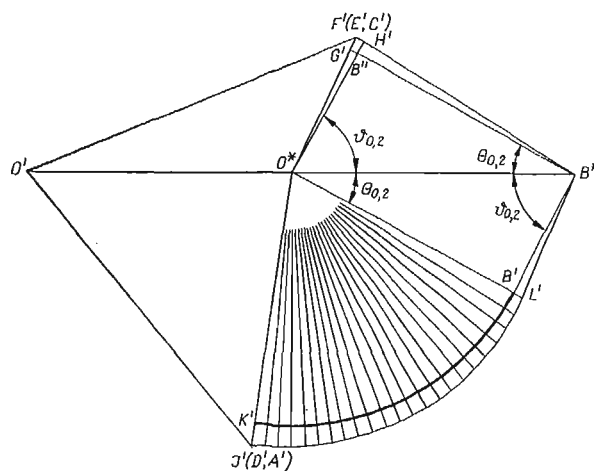
Możliwość zastosowania teorii płaskiego stanu odkształcenia do rozwiązania podobnego problemu osiowo-symetrycznego została przedyskutowana przez HILLA [5] na przykładzie redukcji grubości ścianki wytłoczki bez zmiany jej średnicy wewnętrznej (wyniki analizy HILLA przytoczono w książce [2]).

Całkowita redukcja grubości ścianki rury $\frac{h_0 - h_1}{h_0} 100\% = 51\%$ w naszym przypadku jest również w znacznej mierze realizowana na średnicy zewnętrznej (41%). Niewielkie odkształcenia mające miejsce na średnicy wewnętrznej (około 10%) nie zmieniają w sposób istotny przeprowadzonej przez HILLA analizy oszacowań. Należy więc oczekiwać, że przytoczone poniżej rozwiązanie przy zastosowaniu teorii płaskiego stanu odkształcenia powinno dać dobre przybliżenie wystarczające dla celów praktycznych. Załóżmy, że rozkład nacisków wzdłuż linii kontaktu materiału z matrycą *AD* i trzpieniem *CE* jest stały na całej ich długości. Oczywiście wielkości tych nacisków z uwagi na wspomniany brak symetrii będą na obydwu krawędziach różne. Przyjmując je jako parametry (wartości na początku rozwiązania są nieznanne) otrzymujemy w otoczeniu linii *AD* i *CE* elementarne przypadki zagadnień Cauchy'ego prowadzące do jednorodnych pól naprężeń *AJD* i *CFE* (rys. 2 i 3). Do pól tych przylegają wycinki biegunowe o prostoliniowych krawędziach wychodzących z punktów osobliwych: *A*, *D*, *C* i *E*. Kąty wycinków biegunowych na obecnym etapie rozwiązania są nieznanne. Wychodząc następnie z łuków kołowych *JK* i *JL* oraz *GF* i *HF* można zbudować siatki w czworokątach krzywoliniowych *JLBK* i *FHBG* rozwiązując zagadnienia charakterystyczne.

Zasadniczo rozwiązanie sprowadza się do wyznaczenia położenia punktu *B*, w którym obie części siatki charakterystyk stykają się. W punkcie tym zbiegające się charakterystyki tej samej rodziny muszą mieć wspólną styczną. Teoretycznie punkty te w obszarze rozwiązania wyznaczają pewną krzywą. Z uwagi jednak na skończoną gęstość linii charakterystyk, która ściśle wiąże się z przyjętą podziałką kątową wachlarzy (w pracy przyjęto $\Delta\gamma = 3^\circ$) otrzymano dwa położenia punktu *B*, wskazując tym samym dwa różne roz-



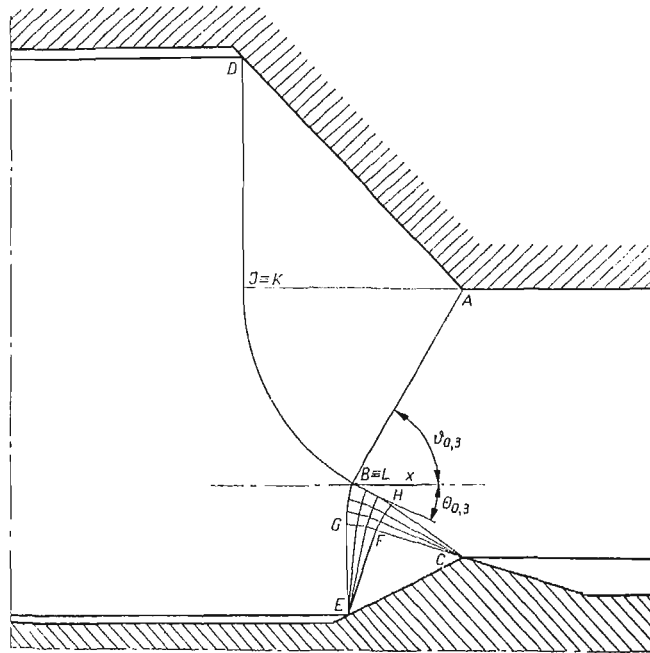
Rys. 2



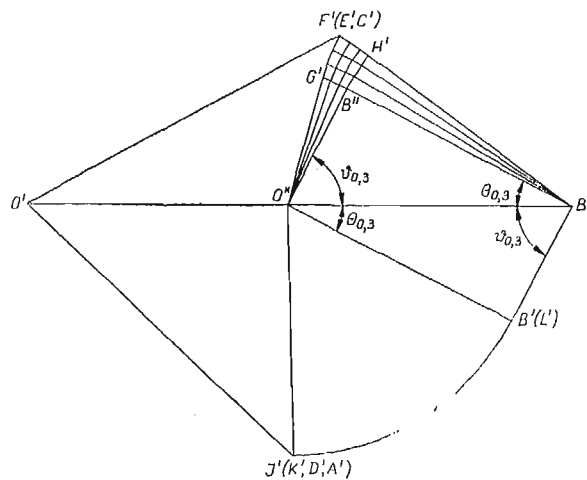
Rys. 2a

wiązania kinematycznie dopuszczalne, stanowiące górną ocenę siły wywołującej płynięcie plastyczne (rys. 2 i 3).

Plany prędkości dla obydwu rozwiązań przedstawiono na rys. 2a i 3a. Budowę ich rozpoczynamy od założenia prędkości z jaką porusza się sztywna część materiału na lewo od linii DBE . Jeśli przyjmiemy, że wynosi ona V_1 wówczas z warunku nieściśliwości



Rys. 3

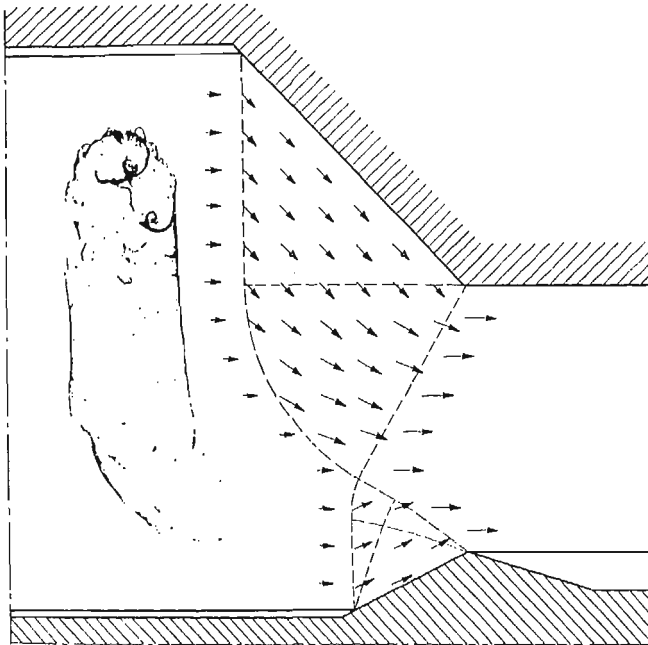


Rys. 3a

otrzymamy prędkość materiału po wyciśnięciu, $V_2 = V_1 \frac{h_0}{h_1}$. Na hodografach prędkości te reprezentują wektory odłożone z bieguna O' w kierunku równoległym do osi x płaszczyzny fizycznej, przy czym $\vec{O'O}^* = \vec{V}_1$ i $\vec{O'B}^* = \vec{V}_2$. Linie poślizgu $DKBHC$ i $ALBGE$ są liniami nieciągłości prędkości. Prędkości w punkcie B od strony obszarów plastycznych powyżej i poniżej osi x odwzorowane są na hodografach odpowiednio przez wektory $\vec{O'B}'$, $\vec{O'B}''$. Położenie punktów B' i B'' , jak zaznaczono na rysunkach, wyznaczono przy

pomocy kątów $\vartheta_{0,i}$ i $\theta_{0,i}$, jakie tworzą charakterystyki AB i BC z osią x w punkcie B . Prędkości po prawej stronie odcinków BK i BG linii nieciągłości odwzorowane są przez łuki okręgów $B'K'$ i $B'G'$ ze środkiem w punkcie O^* . Podobnie prędkości po lewej stronie odcinków BL i BH linii nieciągłości przedstawiają łuki $B'L'$ i $B'H'$ ze środkiem w punkcie B^* .

Dane wyjściowe na tych łukach prowadzą do zagadnień charakterystycznych dla pól $K'B'L'J'$ i $G'B'H'F'$, których punkty odwzorowują prędkości wewnątrz obszarów $KBLJ$ i $GBHF$. Oczywiście wektory $\vec{O'J'}$ i $\vec{O'F'}$ opisujące prędkości pól trójkątnych DJA i EFC będą równoległe odpowiednio do ścianki matrycy AD i trzpienia EC .

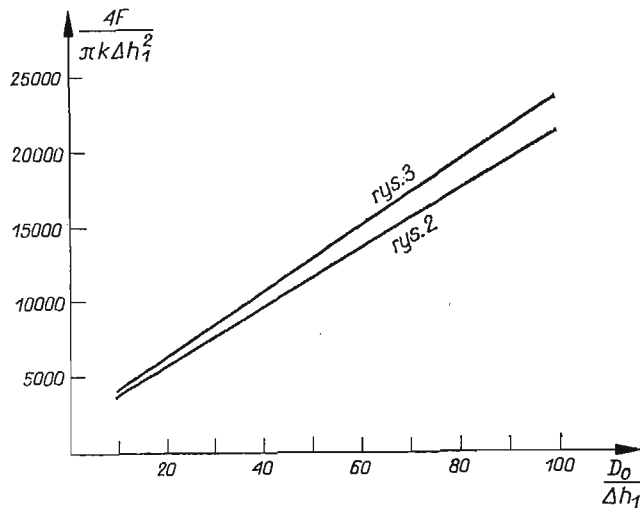


Rys. 4

Posługując się siatką linii poślizgu i odpowiadającym jej hodografem (rys. 3 i 3a), na rys. 4 przedstawiono w skali wektory prędkości w polu odkształcenia plastycznego. Wzdłuż zarysowujących się linii prądu płynięcia widoczne jest zwiększenie modułów wektorów prędkości. Z faktu tego możemy wnioskować o spełnieniu w całym obszarze odkształcenia warunku dodatniości dysypacji mocy. Analogiczny wniosek wypływa z rozwiązania przedstawionego na rys. 2 i 2a. Odpowiedni rysunek pominięto z uwagi na nie duże różnice w rozkładach pól prędkości dla obydwu rozwiązań.

Wstępnie sparametryzowane wielkości nacisków na krawędziach AD i CE dla uzyskanych siatek linii poślizgu można ustalić w oparciu o warunek brzegowy. Z równowagi bowiem sztywnej i zarazem swobodnej części materiału wynika, że wypadkowa naprężeń po prawej stronie linii ABC jest równa zero. Warunek ten łącznie ze związkami wzdłuż charakterystyk pozwala określić wartość średniego ciśnienia w dowolnym punkcie pola linii poślizgu. Wyczerpujące informacje związane ze sposobem formułowania związków analitycznych zamieszczono w książkach [1, 2, 5].

Wielkość siły naciskającej F powodującej proces płynięcia plastycznego można wyznaczyć na dwóch drogach: poprzez zrównoważenie naprężeń wzdłuż charakterystyk DB i BE lub obliczenie wartości składowej poziomej nacisku, jaki materiał wywiera na powierzchnię roboczą matrycy AD i trzpienia CE .



Rys. 5

Na rys. 5 przedstawiono szczególny przypadek zależności siły wyciskania od położenia obszaru plastycznego względem osi symetrii przyjmując $h_1 = 12$ mm i $\Delta h_1 = 2,5$ mm.

Na osi pionowej wykresu odłożono bezwymiarową wielkość siły $\frac{4F}{\pi k \Delta h_1^2}$ (k stanowi granicę plastyczności materiału na ścianie), natomiast oś poziomą związano z wartością średnicy wewnętrznej rury przed procesem wyciskania $D_0/\Delta h_1$. Z wykresu wynika, że bliższe ścisłego będzie rozwiązanie przedstawione na rys. 2 (oznaczenia linii przyporządkowano odpowiadającym im rozwiązaniom). Oczywiście należy pamiętać, że stosownie do uwag zawartych we wstępie wartość siły uzyskana w oparciu o teorię płaskiego stanu odkształcenia będzie niższa niż wynikałoby to z rozwiązania osiowo-symetrycznego. Można jednak przyjąć, że w miarę oddalania się obszaru plastycznego od osi symetrii (na rys. 5 wraz ze wzrostem odciętej $D_0/\Delta h_1$) różnica ta będzie malała do zera. Dolnego zakresu $D_0/\Delta h_1$, dla którego rozwiązanie przy zastosowaniu teorii płaskiego stanu odkształcenia ma sens, nie ustalono.

3. Uwagi końcowe

Duże znaczenie praktyczne procesu wyciskania związane jest ze szczególnymi jego wartościami techniczno-ekonomicznymi. Rury bowiem otrzymane na drodze wyciskania charakteryzują się polepszoną strukturą wewnętrzną, dużą dokładnością oraz dobrą jakością powierzchni. Wytwarzanie ich związane jest również ze znaczną oszczędnością materiałową. Możliwość rozszerzenia zastosowań procesu wyciskania wymaga opracowania

metod obliczeń wielkości siły, która stanowi niezbędną informację dla projektanta odpowiednich urządzeń. Przedstawione rozwiązanie z niesymetrycznym obszarem plastycznym może stanowić jeden z ogólniejszych przypadków procesu wyciskania w warunkach osiowo-symetrycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. E. G. THOMSEN, C. T. YANG, S. KOBAYASHI, *Mechanics of plastic deformation in metal processing*, Mc-Millan Co, 1965.
2. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967, 193-199.
3. J. BIAŁKIEWICZ, W. SZCZEPIŃSKI, *O mechanice kucia w matrycy*, Mech. Teoret. Stos., 2, 9 (1971).
4. R. HILL and S. J. TUPPER, *A new theory of plastic deformation in wire-drawing*, J. Iron and Steel Inst., 159, 1948.
5. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.

Резюме

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫДАВЛИВАНИЯ ТРУБЫ

В работе представлено решение для процесса выдавливания трубы с несимметричной пластической областью полученное на основе теории плоского деформированного состояния. В результате графического анализа получены два различных кинематически допустимых решения. Для каждого из них построен годограф. Представлено также распределение векторов скоростей в области пластической деформации.

Summary

THEORETICAL ANALYSIS OF THE PIPE EXTRUSION PROCESS

Solution of the extrusion process of a tube characterized by unsymmetrical plastic region is considered under plane strain conditions. As a result of graphical analysis, two different kinematically admissible solutions are obtained together with the corresponding hodographs. The distribution of velocity vectors in the field of plastic deformation is also found.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 października 1974 r.

WPLYW SZTYWNOŚCI I TŁUMIENIA W UKŁADZIE STEROWANIA STEREM
WYSOKOŚCI NA STATECZNOŚĆ PODŁUŻNĄ SAMOŁOTU I OSCYLACJE STERU*

JERZY MARYNIAK, ZDOBYSLAW GORAJ (WARSZAWA)

1. Wstęp

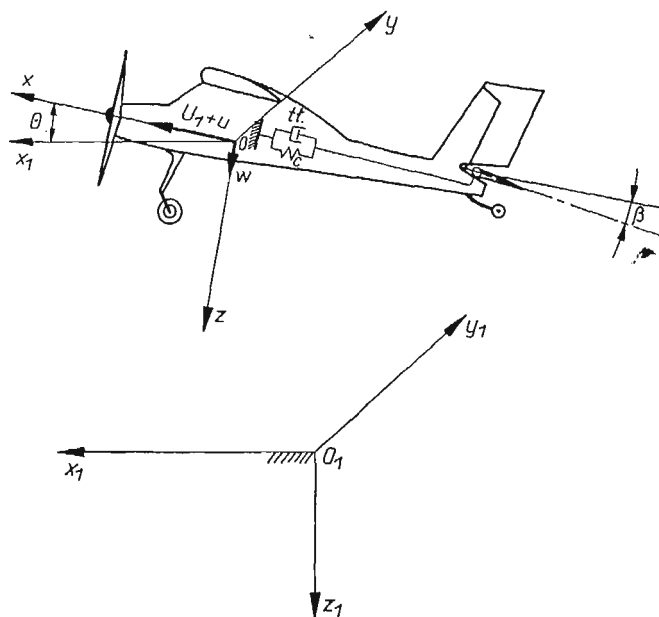
W pracy zbadano wpływ sztywności układu sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu. Rzeczywistą sztywność i tłumienie układu sterowania zastąpiono sztywnością zastępczą c i o tłumieniu wiskotycznym p . Zastosowano teorię małych zakłóceń [1, 2, 6, 7, 8], co pozwoliło uzyskać liniowe równania ruchu [4, 5]. Założono, że występują zakłócenia tylko symetrycznych ruchów samolotu. Powyższe zakłócenia mają wpływ wyłącznie na symetryczne obciążenia samolotu. Pozwala to na rozprzęgnięcie układu różniczkowych równań ruchu [3]. Założono, że konstrukcja samolotu jest doskonale sztywna oraz że ster kierunku i lotki są nieruchome względem samolotu. W oparciu o powyższe założenia, położenie układu: samolot + drgający ster wysokości opisano za pomocą czterech współrzędnych uogólnionych. W celu uzyskania różniczkowych równań ruchu w układzie nieinercyjnym [1, 10] wyprowadzono wyrażenie na bezwzględną energię kinetyczną układu, a następnie zastosowano równania Boltzmanna-Hamela.

W dotychczas opublikowanej literaturze wyprowadzenie równań ruchu samolotu z elementami drgającymi prowadzono w dwóch etapach: wyprowadzono równania ruchu dla samolotu sztywnego, a następnie oddzielnie wyprowadzono równania Lagrange'a II rodzaju dla elementów drgających i łącząc obie metody próbowano wprowadzić sprzężenia do równań ruchu samolotu sztywnego [2, 6, 7, 8]. Taka metoda nie zawsze gwarantowała wprowadzenie wszystkich sprzężeń w równaniach ruchu, co wykazano w niniejszej pracy. Następnie, uzyskane różniczkowe równania ruchu zapisano w postaci macierzowej [5, 9, 11, 12, 14]. Doprowadzono macierzowy układ równań do równania macierzowego I rzędu. Znalezione wartości i wektory własne, co pozwoliło na obliczenie współczynników tłumienia i częstości oscylacji wahań fugoidalnych, oscylacji szybkich oraz drgań steru. Przez porównanie z wynikami otrzymanymi dla samolotu sztywnego oraz dla swobodnego steru drgającego w inercyjnym układzie odniesienia w opływie i bez opływu, zbadano wpływ sztywności układu sterowania na stateczność. Obliczenia przeprowadzono dla samolotu sportowego na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego przy wykorzystaniu standardowych procedur.

* Fragmenty pracy były referowane na IX Międzynarodowej Konferencji «Dynamiki Maszyn» w Smolenicach (CSRS) 1974 r. i na Sympozjum «Drgania w układach fizycznych», Poznań 1974 r.

2. Równania ruchu samolotu

Równania ruchu samolotu wyprowadzono stosując równania Boltzmanha-Hamela dla układów holonomicznych w quasi-współrzędnych, które są uogólnieniem równań Lagrange'a II rodzaju. Należy podkreślić, że dla samolotu, w układzie współrzędnych związanym ze środkiem masy samolotu, nie można napisać klasycznych równań Lagrange'a II rodzaju, gdyż układ współrzędnych związany z samolotem nie jest układem inercjalnym.



Rys. 1. Układ współrzędnych i przemieszczeń kątowych

Wprowadzono układ współrzędnych $Oxyz$ związany ze środkiem masy samolotu i w tym układzie przyjęto następujące quasi-współrzędne i quasi-prędkości:

U — quasi-prędkość w kierunku osi x ,

W — quasi-prędkość w kierunku osi z ,

Q — quasi-prędkość kątowa wokół osi y ,

θ — quasi-współrzędna (kąt obrotu samolotu wokół osi y),

β — quasi-współrzędna (kąt wychylenia steru wysokości z położenia określonego warunkami lotu ustalonego).

Wprowadzono również inercjalny układ odniesienia $O_1x_1y_1z_1$, w którym położenie samolotu wraz z drgającym sterem określono za pomocą czterech współrzędnych uogólnionych:

x_1, z_1 — współrzędne uogólnione określające położenie środka masy samolotu,

θ — kąt obrotu samolotu względem osi y_1 ,

β — kąt wychylenia steru wysokości z położenia określonego warunkami lotu ustalonego.

Równania Boltzmann-Hamela dla układów holonomicznych mają postać [4]

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \gamma_{\alpha\mu}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^*$$

gdzie: $\mu, r, \alpha = 1, 2, \dots, k$.

Zależności pomiędzy prędkościami uogólnionymi i quasi-prędkościami są określone za pomocą związków:

$$(2) \quad \omega_\sigma = \sum_{\alpha=1}^k a_{\sigma\alpha} \dot{q}_\alpha \quad \text{oraz} \quad \dot{q}_\sigma = \sum_{\mu=1}^k b_{\sigma\mu} \omega_\mu,$$

przy czym

$$a_{\sigma\alpha} = a_{\sigma\alpha}(q_1, \dots, q_k), \quad b_{\sigma\mu} = b_{\sigma\mu}(q_1, \dots, q_k)$$

oraz $a_{\sigma\mu}$ są elementami macierzy odwrotnej do macierzy $b_{\sigma\mu}$, tzn.

$$(3) \quad [a_{\sigma\mu}] = [b_{\sigma\mu}]^{-1}.$$

W powyższych wzorach π_μ oznacza quasi-współrzędną, natomiast ω_μ — quasi-prędkość, przy czym $\dot{\pi}_\mu = \omega_\mu$.

Stan układu: samolot + drgający ster wysokości opisano więc za pomocą wektora współrzędnych uogólnionych: $\text{col}[q_1, q_2, q_3, q_4] = \text{col}[x_1, z_1, \theta, \beta]$ oraz prędkości uogólnionych: $\text{col}[\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4] = \text{col}[\dot{x}_1, \dot{z}_1, \dot{Q}, \dot{\beta}]$, a także za pomocą wektora quasi-współrzędnych:

$$\text{col}[\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4] = \text{col}[\pi_u, \pi_w, \theta, \beta]$$

oraz quasi-prędkości:

$$\text{col}[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = \text{col}[U, W, Q, \dot{\beta}].$$

Związki kinematyczne pomiędzy układami $Oxyz$ i $O_1 x_1 y_1 z_1$ są następujące:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= U \cos \theta + W \sin \theta, \\ \dot{z}_1 &= -U \sin \theta + W \cos \theta. \end{aligned}$$

Na podstawie (2), (3), (4) określono macierze: $[a_{\sigma\mu}]$ i $[b_{\sigma\mu}]$:

$$(5) \quad [b_{\sigma\mu}]_{\substack{\sigma=1\dots 4 \\ \mu=1\dots 4}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[a_{\sigma\mu}]_{\substack{\sigma=1\dots 4 \\ \mu=1\dots 4}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po zróżniczkowaniu macierzy $[a_{\sigma\mu}]$ względem θ otrzymano:

$$\left[\frac{\partial a_{\sigma\mu}}{\partial \theta} \right]_{\substack{\sigma=1\dots 4 \\ \mu=1\dots 4}} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trójwskaznikowe symbole Boltzmanna $\gamma_{\mu\alpha}^r$ występujące w równaniach (1) obliczono na podstawie definicji [4]

$$(6) \quad \gamma_{\mu\alpha}^r = \sum_{\sigma=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{r\lambda}}{\partial q_\sigma} \right) b_{\lambda\mu} b_{\rho\alpha}.$$

Ponieważ macierze (5) zależą tylko od współrzędnej uogólnionej θ i mają budowę quasi-diagonalną, wyrażenie (6) upraszcza się do postaci

$$(7) \quad \gamma_{\mu,\alpha}^r = \sum_{\sigma=1}^2 \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial \theta} (b_{3\mu} b_{\sigma\alpha} - b_{3\alpha} b_{\sigma\mu}),$$

gdzie $r = 1, 2$; $\mu, \alpha = 1, 2, 3$.

Obliczone na podstawie (7) niezerowe symbole Boltzmanna mają wartość:

$$(8) \quad \gamma_{13}^2 = -\gamma_{31}^2 = -1; \quad \gamma_{23}^1 = -\gamma_{32}^1 = 1.$$

Bezwzględna energia kinetyczna w quasi-prędkościach układu samolot sztywny + drgający ster wysokości jest następująca [1]:

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_i m_i [(U + Qz_i)^2 + (W - Qx_i)^2] + \frac{1}{2} \sum_i m_i \{ [\dot{\beta} \xi_i \sin(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H) + U + Qz_i]^2 + [\dot{\beta} \xi_i \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H) + W - Qx_i]^2 \}.$$

samolot bez steru ster

Wprowadzając momenty statyczne i bezwładności całego samolotu S_y, J_y oraz steru wysokości $S_{H\eta}, J_{H\eta}$, doprowadzono energię kinetyczną układu do następującej postaci:

$$T^* = \frac{1}{2} m U^2 + \frac{1}{2} m W^2 + \frac{1}{2} J_y Q^2 + \frac{1}{2} J_{H\eta} \dot{\beta}^2 + S_{H\eta} \sin(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H) \times \\ \times U \dot{\beta} + S_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H) W \dot{\beta} + \{ J_{H\eta} + S_{H\eta} [I_H \cos(\alpha_{zH} + \beta_H) - z_H \sin(\alpha_{zH} + \beta_H)] \} \dot{\beta} Q.$$

Po obliczeniu energii kinetycznej układu T^* w quasi-prędkościach i uwzględnieniu (1) i (8) otrzymano układ równań ruchów symetrycznych samolotu w postaci ogólnej:

— równania ruchu samolotu jako ciała sztywnego

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial U} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_u} + \frac{\partial T^*}{\partial W} Q = Q_u^*,$$

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial W} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_w} - \frac{\partial T^*}{\partial U} Q = Q_w^*,$$

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial Q} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_Q} + \frac{\partial T^*}{\partial U} W - \frac{\partial T^*}{\partial W} U = Q_Q^*,$$

— równanie uwzględniające ruchy steru wysokości β

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \beta} = Q_{\dot{\beta}}^*.$$

Po zróżniczkowaniu energii kinetycznej i uwzględnieniu sił działających na samolot otrzymano z (9)–(12) układ równań w postaci (13)–(16).

W równaniach (13)–(16) wprowadzono oznaczenia małych zmian quasi-prędkości oraz quasi-współrzędnych:

u — przyrost prędkości lotu ustalonego U_1 w kierunku osi x ,

w — przyrost prędkości w kierunku osi z ,

q — przyrost prędkości kątowej pochylania, obrót wokół osi y ,

ϑ — zmiana kąta pochylania — obrót wokół osi y .

$$(13) \quad m\dot{u} + S_{H\eta} \sin(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) \dot{\beta} - X_u u - X_w w - X_q q + mg \cos \theta_1 \vartheta - X_\beta \beta = 0,$$

$$(14) \quad m\dot{w} + S_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) \ddot{\beta} - Z_u u - Z_w w - (mU_1 + Z_q)q + mg \sin \theta_1 \vartheta - Z_\beta \beta = 0,$$

$$(15) \quad J_y \dot{q} + A\ddot{\beta} - M_w \dot{w} - M_u u - M_w w - M_q q - M_\beta \dot{\beta} - M_\beta \beta = 0,$$

$$(16) \quad S_{H\eta} \sin(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) \dot{u} + S_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) \dot{w} + A\dot{q} + \\ + J_{H\eta} \dot{\beta} - B_u u - B_w w - [B_q + U_1 S_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H)]q + \\ + \left[l_s k_{HP} - \frac{1}{6} \rho U_H l_{SH} a_2 (\xi_1^3 + \xi_2^3) \right] \dot{\beta} + \left(ck_H^2 l_S^2 - \frac{1}{2} \rho U_H^2 S_H l_{SH} b_2 \right) \times \\ \times \beta - S_{H\eta} g \cos(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) = 0.$$

W równaniach powyższych zostały wprowadzone siły uogólnione pochodzące od sił i momentów aerodynamicznych, od tłumienia i sztywności układu sterowania oraz sił ciężkości. Przyjęto, że siły i momenty aerodynamiczne są stacjonarne, co pozwoliło na wprowadzenie pochodnych aerodynamicznych. Wzory na pochodne aerodynamiczne dotyczące ruchów steru wyprowadzono zgodnie z [2] i [3].

Układ równań (13)–(16) przy założeniu nieskończenie sztywnego układu sterowania sprowadza się do układu opisującego ruchy samolotu sztywnego i jest przedstawiony w pracach [2] i [3].

Powyższa metoda opisu ruchu samolotu może być zastosowana przy uwzględnieniu dowolnie dużej skończonej liczby stopni swobody, zarówno dla ruchów symetrycznych, antysymetrycznych lub też asymetrycznych. Jej zaletą to jednolite podejście bez rozdziału na ruchy samolotu sztywnego i części elastyczne lub drgające oraz pewność, że zostaną uwzględnione sprzężenia w równaniach ruchu.

3. Rozwiązanie równań ruchu i badanie stateczności

Układ równań (13)–(16) przekształcono do postaci bezwymiarowej dzieląc równania sił przez $\rho U_1^2 S$, a równania momentów przez $\rho U_1^2 S l_H$. Aby współczynnik przy q równał się 1, oraz w równaniach momentów zawiasowych steru przy $\ddot{\beta}$ również równał się 1, doprowadzono równania momentów do tzw. postaci zmodyfikowanej dzieląc równanie (15) przez j_y/μ oraz (16) przez $j_{H\eta}/\mu$.

Wprowadzono oznaczenia przyjęte w lotnictwie [2, 3, 6, 7, 8]:

$$\hat{t} = \frac{m}{\rho S U_1} \text{ czas aerodynamiczny,}$$

$$\mu = \frac{m}{\rho S l_H} \text{ względna gęstość samolotu,}$$

$\bar{t} = t/\hat{t}$ czas bezwymiarowy,

$j_y = \frac{J_y}{m l_H^2}$, $j_{H\eta} = \frac{J_{H\eta}}{m l_H^2}$, $s_{H\eta} = \frac{S_{H\eta}}{m l_H}$ bezwymiarowe momenty bezwładności i statyczne,

\bar{u} , \bar{w} , \bar{q} , $\bar{\beta}$ bezwymiarowe prędkości liniowe i kątowe,

Otrzymano układ równań w postaci bezwymiarowej zmodyfikowanej, gdzie w celu ujednoczenia zapisu wprowadzono dodatkowe oznaczenia:

$$(17) \quad \dot{\bar{u}} + x_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} - x_u \ddot{\bar{u}} - x_w \ddot{\bar{w}} - \frac{x_q}{\mu} \ddot{\bar{q}} + x_{\vartheta} \ddot{\bar{\vartheta}} - x_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} = 0,$$

$$(18) \quad \dot{\bar{w}} + z_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} - z_u \ddot{\bar{u}} - z_w \ddot{\bar{w}} - \left(1 - \frac{z_q}{\mu}\right) \ddot{\bar{q}} + x_{\vartheta} \text{tg } \theta_1 \ddot{\bar{\vartheta}} - z_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} = 0,$$

$$(19) \quad \bar{m}_{\dot{w}} \dot{\bar{w}} + \dot{\bar{q}} + \bar{m}_{\ddot{\beta}} \ddot{\bar{\beta}} + \bar{m}_u \ddot{\bar{u}} + \bar{m}_w \ddot{\bar{w}} + \bar{m}_q \ddot{\bar{q}} + \bar{m}_{\dot{\beta}} \dot{\bar{\beta}} + \bar{m}_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} = 0,$$

$$(20) \quad \bar{b}_u \ddot{\bar{u}} + \bar{b}_w \ddot{\bar{w}} + \bar{b}_q \ddot{\bar{q}} + \ddot{\bar{\beta}} + \bar{b}_u \ddot{\bar{u}} + \bar{b}_w \ddot{\bar{w}} + \bar{b}_q \ddot{\bar{q}} + \bar{b}_{\dot{\beta}} \dot{\bar{\beta}} + \bar{b}_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} = \bar{b}_0,$$

przy czym pochodne aerodynamiczne sił w postaci bezwymiarowej mają postać:

$$x_{\ddot{\beta}} = \frac{s_{H\eta} \sin(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H)}{\mu}, \quad z_{\ddot{\beta}} = \frac{s_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H)}{\mu},$$

$$x_u = -C_x, \quad z_u = -C_z,$$

$$x_w = \frac{1}{2} C_z, \quad z_q = -\frac{1}{2} \left(\frac{S_H}{S} \right) \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H},$$

$$x_q = \frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \left(C_{zH} - \frac{\partial C_{xH}}{\partial \alpha_H} \right), \quad z_w = -\frac{1}{2} \left(C_x + \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \right),$$

$$x_{\vartheta} = \frac{1}{2} C_z,$$

$$x_{\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_H}{U_1} \right)^2 \left(\frac{S_H}{S} \right) \frac{\partial C_{xH}}{\partial \beta}, \quad z_{\beta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{U_H}{U_1} \right)^2 \left(\frac{S_H}{S} \right) \frac{\partial C_{zH}}{\partial \beta}.$$

Zmodyfikowane pochodne aerodynamiczne momentów w postaci bezwymiarowej są następujące:

$$\bar{m}_{\dot{w}} = \frac{1}{2} \frac{S_H}{S} a_1 \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \frac{\mu}{j_y},$$

$$\bar{m}_{\ddot{\beta}} = \frac{\rho S \mu}{m^2 l_H j_y} \{ J_{H\eta} + S_{H\eta} [l_H \cos(\alpha_{zH} + \beta_H) - z_H \sin(\alpha_{zH} + \beta_H)] \},$$

$$\bar{m}_u = -\frac{\mu}{j_y} \frac{l_s}{l_H} C_m, \quad \bar{m}_w = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{j_y} \frac{l_s}{l_H} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha},$$

$$\bar{m}_q = \frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{1}{j_y} \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H}, \quad \bar{m}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{1}{j_y} \left(\frac{U_H}{U_1} \right)^2 \frac{l_{SH}}{l_H} k',$$

$$\bar{m}_{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{j_y} \left(\frac{U_H}{U_1} \right)^2 \frac{S_H}{S} a_2,$$

— pochodne aerodynamiczne równania ruchu steru wysokości:

$$\begin{aligned}\bar{b}_{\dot{u}} &= \frac{S_{H\eta}}{j_{H\eta}} \mu \sin(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H), & \bar{b}_{\dot{w}} &= \frac{S_{H\eta}}{j_{H\eta}} \mu \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H), \\ \bar{b}_{\dot{q}} &= \frac{\mu \rho S}{l_H j_{H\eta} m^2} \{J_{H\eta} + S_{H\eta} [l_H \cos(\alpha_{zH} + \beta_H) - z_H \sin(\alpha_{zH} + \beta_H)]\}, \\ \bar{b}_u &= -\frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{\mu}{j_{H\eta}} \frac{l_{sH}}{l_H} \left(\frac{U_H}{U_1}\right)^2 \frac{\partial C_{mzH}}{\partial u}, \\ \bar{b}_w &= -\frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{\mu}{j_{H\eta}} \frac{l_{sH}}{l_H} b_1 \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right), \\ \bar{b}_q &= -\frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \left(\frac{U_H}{U_1}\right)^2 \frac{l_{sH}}{l_H} \frac{b_1}{j_{H\eta}} s_{-H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H), \\ \bar{b}_{\dot{\beta}} &= \frac{\mu}{j_{\eta H}} \left[\frac{l_s k_{HP}}{m U_1 l_H} - \frac{1}{6} \rho \left(\frac{U_H}{U_1}\right) \frac{l_{sH}}{l_H} \frac{a_2}{m} (\xi_1^3 + \xi_2^3) \right], \\ \bar{b}_\beta &= \frac{\mu}{j_{H\eta}} \left[\frac{c k_H^2 l_s^2}{\rho U_1^2 S l_H} - \frac{1}{2} \left(\frac{U_H}{U_1}\right)^2 \frac{S_H}{S} \frac{l_{sH}}{l_H} b_2 \right], \\ \bar{b}_0 &= \frac{S_{H\eta}}{j_{H\eta}} \frac{g \mu^2 l_H}{U_1^2} \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H).\end{aligned}$$

Układ równań (17)–(20) zapisano w postaci macierzowej:

$$(21) \quad \mathbf{A}\ddot{\bar{x}} + \mathbf{B}\dot{\bar{x}} + \mathbf{C}\bar{x} = \mathbf{D},$$

gdzie

— macierz współczynników bezwładności:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & z & 0 \\ 0 & \bar{m}_{\dot{w}} & 1 & \bar{m}_{\dot{\beta}} \\ \bar{b}_{\dot{u}} & \bar{b}_{\dot{w}} & \bar{b}_{\dot{q}} & 1 \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników tłumienia:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -x_u & -x_w & -\frac{x_q}{\mu} & 0 \\ -z_u & -z_w & -\left(1 - \frac{z_q}{\mu}\right) & 0 \\ \bar{m}_u & \bar{m}_w & \bar{m}_q & \bar{m}_{\dot{\beta}} \\ \bar{b}_u & \bar{b}_w & \bar{b}_q & \bar{b}_{\dot{\beta}} \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników sztywności:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_\beta & -x_\beta \\ 0 & 0 & x_\beta \operatorname{tg} \theta_1 & -z_\beta \\ 0 & 0 & 0 & \bar{m}_\beta \\ 0 & 0 & 0 & \bar{b}_\beta \end{bmatrix},$$

— macierz wyrazów wolnych:

$$\mathbf{D} = \operatorname{col} [0, 0, 0, \bar{b}_0],$$

przy czym

$$\bar{x} = \text{col} [\bar{\pi}_u, \bar{\pi}_w, \bar{\vartheta}, \bar{\beta}].$$

Następnie przekształcono równanie macierzowe (21) II rzędu do równania macierzowego rzędu I [5, 9, 12] wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \bar{x} \end{bmatrix}.$$

Równanie macierzowe I rzędu ma postać (E oznacza macierz jednostkową):

$$(22) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \dot{\bar{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \bar{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest suma rozwiązań: rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania pełnego. W celu znalezienia częstości i tłumień ruchów samolotu wystarczy rozwiązać równanie jednorodne.

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Równanie macierzowe jednorodne przybierze postać

$$(23) \quad \mathbf{Q} \dot{\bar{q}} + \mathbf{P} \bar{q} = \mathbf{O}.$$

Macierzą fundamentalną powyższego równania jest następująca macierz kwadratowa stopnia 8:

$$[\bar{q}_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad \bar{q}_{20} e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad \bar{q}_{80} e^{\lambda_8 t}],$$

gdzie \bar{q}_{i0} — macierz kolumnowa wartości początkowych

$$\bar{q}_{i0} = [\bar{u}_{i0}, \bar{w}_{i0}, \bar{q}_{i0}, \dot{\bar{\beta}}_{i0}, \bar{\pi}_{u_{i0}}, \bar{\pi}_{w_{i0}}, \bar{\vartheta}_{i0}, \bar{\beta}_{i0}].$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest następujące:

$$(24) \quad \bar{q}(t) = \sum_{i=1}^8 C_i \bar{q}_{i0} e^{\lambda_i t}$$

gdzie \bar{q}_{i0} — wektor własny odpowiadający i -tej wartości własnej λ_i ,

C_j — stałe zależne od warunków początkowych.

W celu znalezienia wartości i wektorów własnych podstawiono rozwiązanie szczególne $\bar{q} = \bar{q}_w e^{\lambda t}$ do (23) i po przekształceniu otrzymano:

$$\mathbf{Q} \lambda \bar{q}_w + \mathbf{P} \bar{q}_w = \mathbf{O}.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\mathbf{R} = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P},$$

otrzymano

$$[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{R}] \bar{q}_w = \mathbf{O},$$

gdzie

$$\mathbf{R} = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P} = -\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

$$(25) \quad \mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{array} \right].$$

Ostatecznie problem sprowadza się do wyznaczenia wartości i wektorów własnych macierzy \mathbf{R} .

Trzeba podkreślić praktyczną korzyść, jaka wynika z przedstawienia macierzy \mathbf{R} w postaci macierzy blokowej. Otóż zamiast odwracać macierz \mathbf{Q} o wymiarach 8×8 i mnożyć następnie macierze o wymiarach 8×8 , wystarczy odwrócić macierz \mathbf{A} i mnożyć macierz o wymiarach 4×4 . Skraca to znacznie czas obliczeń na maszynie cyfrowej.

Otrzymano wartości własne zespolone sprzężone w postaci:

$$\bar{\lambda}_k = \bar{\xi}_k \pm i\bar{\eta}_k,$$

oraz rzeczywiste

$$\bar{\lambda}_l = \bar{\xi}_l.$$

Dla samolotu statecznego wszystkie części rzeczywiste wartości własnych muszą być ujemne:

$$\bar{\xi}_k < 0, \quad k = 1, \dots, 8.$$

Należy zaznaczyć, że wśród 8 wartości własnych zawsze dwie będą zerowe, gdyż quasi-prędkości U_1 , W_1 odpowiadają quasi-współrzędnym cyklicznym i to wyjaśnia istnienie zerowych wartości własnych i odpowiadających im jednostkowych wektorów własnych [4, 13].

4. Zbadanie wpływu ruchu drgającego steru na ruch samolotu sztywnego oraz zbadanie wpływu ruchu samolotu na ruch steru w opływie stacjonarnym i bez opływu

W celu porównania współczynników tłumienia i częstości drgań wahań fugoidalnych i oscylacji szybkich rozwiązano równania ruchu samolotu sztywnego z nieskończenie sztywnym układem sterowania. Wyniki przedstawiono wykreślnie i przeprowadzono analizę.

Aby zbadać wpływ ruchów samolotu na drgania steru wyprowadzono równanie ruchów drgających steru w inercjalnym układzie odniesienia. Rozważono 2 przypadki:

A. Ster swobodny w opływie stacjonarnym. Równanie ruchu otrzymano w następującej postaci z równania (20) układu równań (17)–(20) przy założeniu, że $u = w = q = 0$

$$(26) \quad \ddot{\bar{\beta}} + \bar{b}_{\beta} \dot{\bar{\beta}} + \bar{b}_0 \bar{\beta} = \bar{b}_0,$$

gdzie pochodne aerodynamiczne \bar{b}_{β} , \bar{b}_0 i \bar{b}_0 przedstawiono wyżej.

B. Ster swobodny bez opływu. Równanie ruchu otrzymano z równania (26) opisującego ruchy steru z opływem aerodynamicznym, przy założeniu, że $u = w = q = 0$, oraz po odrzuceniu członów reprezentujących wpływ opływu $U_H = 0$ w bezwymiarowych pochodnych aerodynamicznych $\bar{b}_{\dot{\beta}}$ i \bar{b}_{β} .

W obu przypadkach otrzymano równania różniczkowe zwyczajne II rzędu opisujące drgania tłumione. Znaleziono współczynniki tłumienia drgań $\bar{\xi}_k$ i częstości oscylacji $\bar{\eta}_k$ przez rozwiązanie równania charakterystycznego, które jest w tym przypadku równaniem kwadratowym. Otrzymane wyniki porównano z wartością własną $\bar{\lambda}_{5,6} = \bar{\xi}_{5,6} \pm i\bar{\eta}_{5,6}$, która opisuje ruchy steru w nieinercyjnym układzie związanym z samolotem i uwzględnia wpływ ruchów samolotu na ruchy steru wysokości.

5. Przykład liczbowy i wnioski

Obliczenia przykładowe wykonano dla lekkiego samolotu turystycznego klasy «Wilga». Rozwiązano pełny układ równań (17)–(20) wyznaczając wektory własne \bar{q}_{iw} i odpowiadające im wartości własne $\bar{\lambda}_{iw}$ macierzy stanu \mathbf{R} (25).

Wszystkie obliczenia wykonano według własnych programów na EMC GIER w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego.

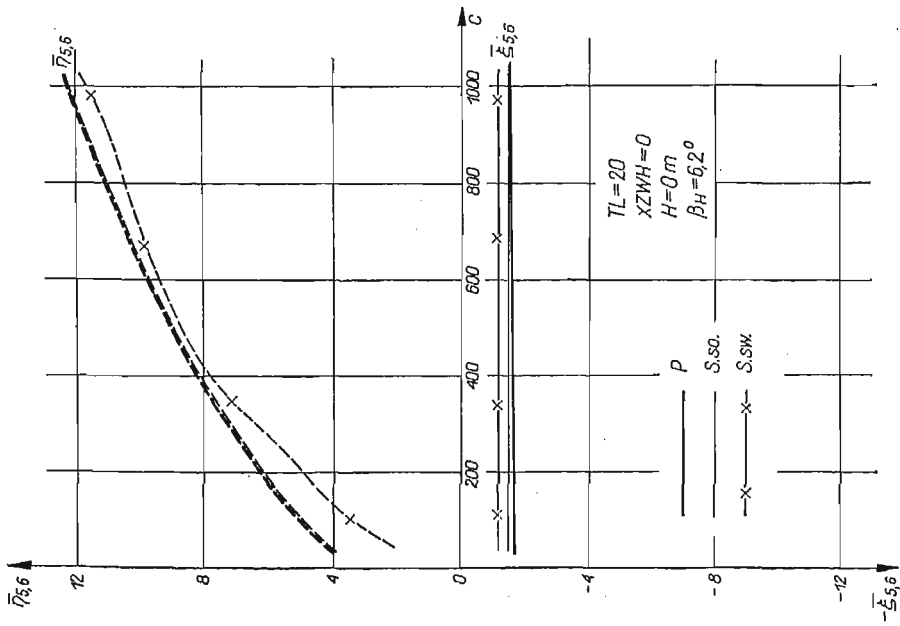
Jako parametry zmienne traktowano:

- C — sztywność układu sterowania sterem wysokości,
- TL — tłumienie w układzie sterowania sterem wysokości,
- $XZWH$ — wyważenie steru wysokości mierzone w odniesieniu do ciężwiy steru,
- V — prędkość lotu samolotu,
- \bar{h}_1 — zapas stateczności statycznej samolotu z trzymanym sterem,
- H — wysokość lotu samolotu nad poziomem morza.

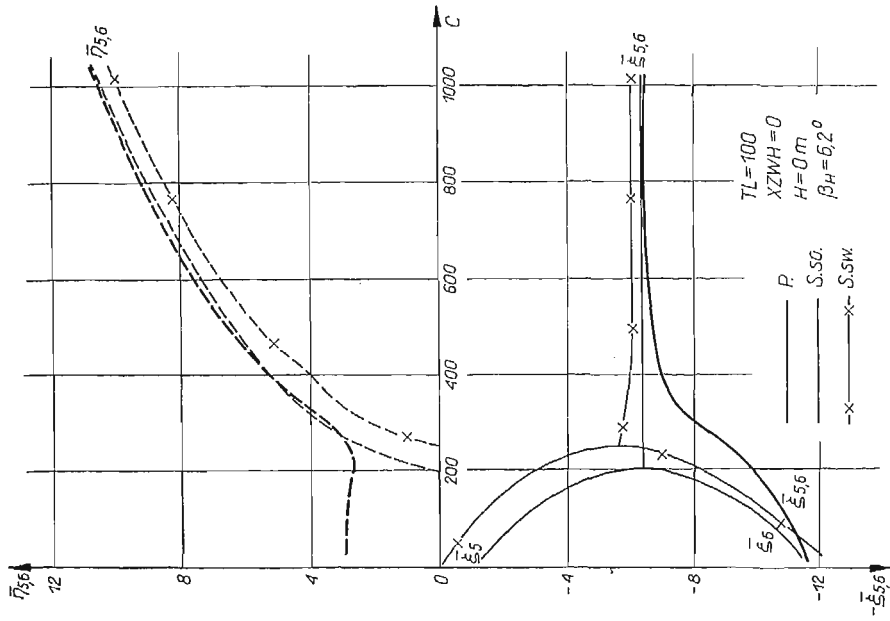
Wyniki przedstawiono w postaci wykresów, na których linią ciągłą naniesiono zmiany współczynników tłumienia $\bar{\xi}_{iw}$, a przerywaną częstości oscylacji $\bar{\eta}_{iw}$. Jednakowymi indeksami oznaczono na wszystkich wykresach odpowiadające sobie wartości własne, charakteryzujące te same ruchy samolotu i steru wysokości:

- $\bar{\lambda}_{1,2} = \bar{\xi}_{1,2} \pm i\bar{\eta}_{1,2}$ — szybkie oscylacje lub ruchy aperiodyczne samolotu odpowiadające pochylaniu wokół środka ciężkości $\bar{\vartheta}$ i \bar{q} ,
- lub $\bar{\lambda}_1 = \bar{\xi}_1$
- $\bar{\lambda}_2 = \bar{\xi}_2$
- $\bar{\lambda}_{3,4} = \bar{\xi}_{3,4} \pm i\bar{\eta}_{3,4}$ — wahania fugoidalne lub ruchy aperiodyczne odpowiadające przemieszczeniom poziomym i pionowym samolotu \bar{u} i \bar{w} ,
- lub $\bar{\lambda}_3 = \bar{\xi}_3$
- $\bar{\lambda}_4 = \bar{\xi}_4$
- $\bar{\lambda}_{5,6} = \bar{\xi}_{5,6} \pm i\bar{\eta}_{5,6}$ — drgania periodyczne lub ruchy aperiodyczne steru wysokości samolotu wokół osi zawieszenia $\bar{\beta}$.
- lub $\bar{\lambda}_5 = \bar{\xi}_5$
- $\bar{\lambda}_6 = \bar{\xi}_6$

Na wykresach przedstawiono wyniki charakteryzujące drgania steru otrzymane przy uwzględnieniu trzech stopni swobody samolotu: pochylenia $\bar{\vartheta}$, zmian prędkości poziomej u i pionowej w — linia gruba oznaczona literą P (pełne równania). Natomiast wyniki dotyczące drgań steru izolowanego pokazano liniami cienkimi z oznaczeniami: $S.so$ — drgania steru z uwzględnieniem opływu powietrza i $S.sw$ — drgania swobodne steru bez uwzględnienia sił i momentów aerodynamicznych.



Rys. 2. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania C przy tłumieniu układu $TL = 20$



Rys. 3. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania C przy tłumieniu układu $TL = 100$

A. Wpływ sztywności układu sterowania na drgania steru wysokości. Z rys. 2–4 wynika, że dla idealnie wyważonego steru wysokości $XZWH = 0$, tzn. gdy środek ciężkości znajduje się na osi obrotu steru, uwzględnienie stopni swobody samolotu sztywnego ma istotny wpływ przy większym tłumieniu w układzie sterowania $TL = 200$ (rys. 4). Natomiast praktycznie nie wpływa ono na charakter rozwiązań przy tłumieniu małym $TL = 20$ (rys. 2). Wniosek ten dotyczy zarówno częstości drgań steru $\bar{\eta}_{5,6}$, jak i tłumienia drgań $\bar{\xi}_{5,6}$ (rys. 2).

Dla ściśle określonego tłumienia w układzie sterowania TL , w zależności od sztywności układu C , ruchy steru z aperiodycznych silnie tłumionych $\bar{\xi}_5 < 0$ i $\bar{\xi}_6 < 0$, przechodzą w oscylacje periodyczne tłumione $\bar{\xi}_{5,6} < 0$ o częstości $\bar{\eta}_{5,6}$ (rys. 3 i 4).

Sztywność układu sterowania C przy małym tłumieniu TL nie ma istotnego wpływu na tłumienie drgań $\bar{\xi}_{5,6}$, natomiast ma istotny wpływ na częstość drgań $\bar{\eta}_{5,6}$ (rys. 2).

Przy większym tłumieniu w układzie sterowania można określić ściśle sztywność krytyczną, przy której wystąpi przejście z ruchów aperiodycznych na oscylacje periodyczne (rys. 4 i 5), niekorzystne dla samolotu.

Na rys. 5 przedstawiono wyniki dla tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ i częstości $\bar{\eta}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności C przy różnych tłumieniach w układzie sterowania TL dla przypadku pełnego. Jak wynika z analizy, tłumienie w istotny sposób wpływa na częstość oscylacji i ich tłumienie, natomiast sztywność, przy określonym tłumieniu, na charakter drgań steru (rys. 5 i 4).

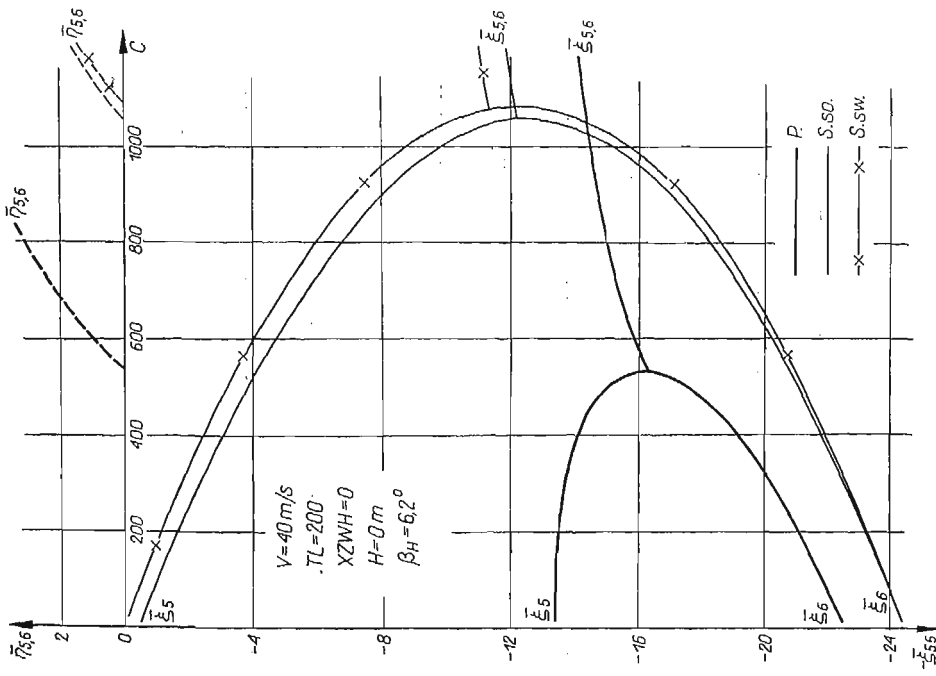
Należy stwierdzić, na podstawie rys. 3–5, że przy badaniu drgań steru należy uwzględnić stopnie swobody wynikające z przemieszczeń samolotu jako układu sztywnego, a nie ograniczać się wyłącznie do badań steru izolowanego.

B. Wpływ tłumienia w układzie sterowania na drgania steru wysokości. Uwzględnienie stopni swobody samolotu sztywnego ma istotny wpływ na określenie wielkości tłumienia krytycznego w układzie sterowania (rys. 6–8). Szczególnie silnie wpływa to przy mniejszej sztywności układu sterowania (rys. 6). Charakter drgań steru wysokości w funkcji tłumienia nie zmienia się bez względu na sztywność układu (rys. 8). Dotyczy to również uwzględnienia tłumienia aerodynamicznego i dodatkowych stopni swobody (rys. 6 i 7).

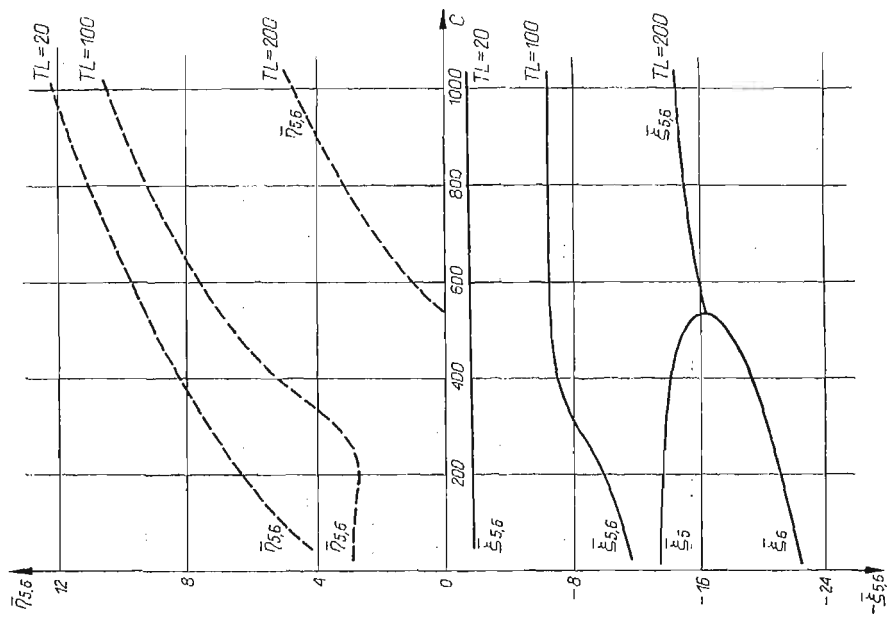
Przy małym tłumieniu w układzie sterowania TL występują drgania okresowe steru o częstości $\bar{\eta}_{5,6}$, zawsze tłumione, $\bar{\xi}_{5,6} < 0$. Ze wzrostem tłumienia częstość oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ maleje do zera przy równoczesnym wzroście tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru. Przy krytycznym tłumieniu TL drgania okresowe przechodzą w silnie tłumione ruchy aperiodyczne $\bar{\xi}_5 < 0$ i $\bar{\xi}_6 < 0$.

Siły i momenty aerodynamiczne wpływają tłumiąco na ruchy steru (rys. 6–8), $\bar{\xi}_{5,6} < 0$ nawet przy $TL = 0$.

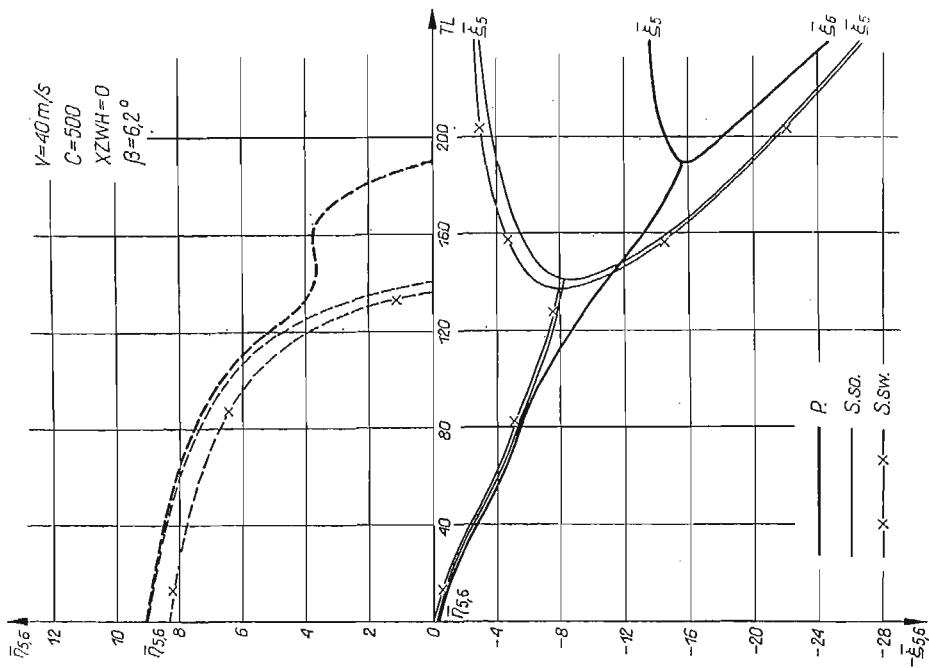
C. Wpływ wyważenia steru wysokości na jego drgania. Wyważenie steru wysokości silnie wpływa na charakter ruchów steru w zależności od tłumienia w układzie sterowania (rys. 12). Przy małym tłumieniu $TL = 20$ –100 występują drgania okresowe, których tłumienie wzrasta wraz z wyważeniem steru, tzn. $XZWH \rightarrow 0$. Przy wzroście tłumienia $TL > 100$ pojawiają się ruchy aperiodyczne steru wysokości silnie tłumione w zakresie wyważenia $-0,27 \leq XZWH \leq 0,24$ (rys. 12). Natomiast dla steru z niewyważeniem



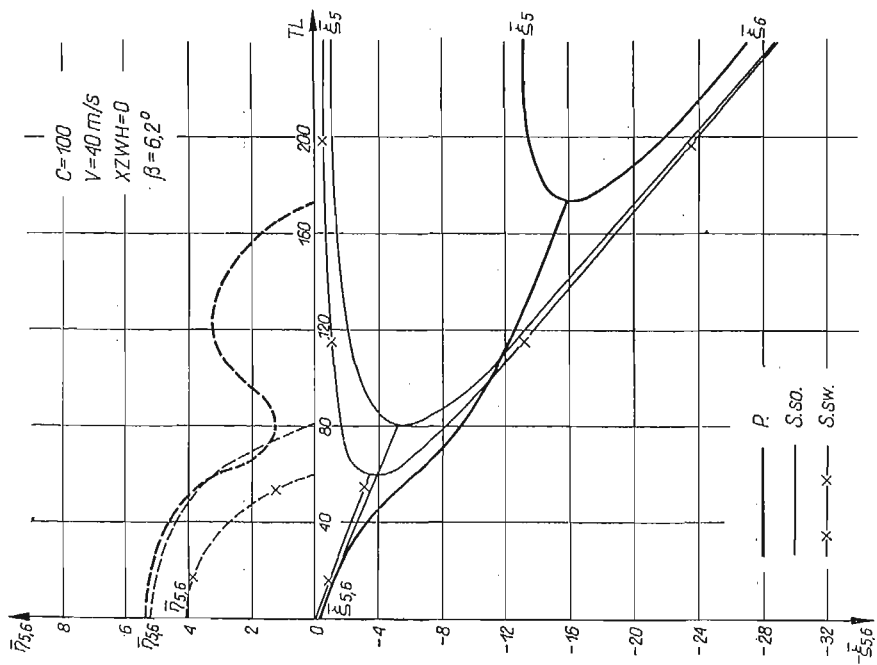
Rys. 4. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania C przy tłumieniu układu $TL = 200$



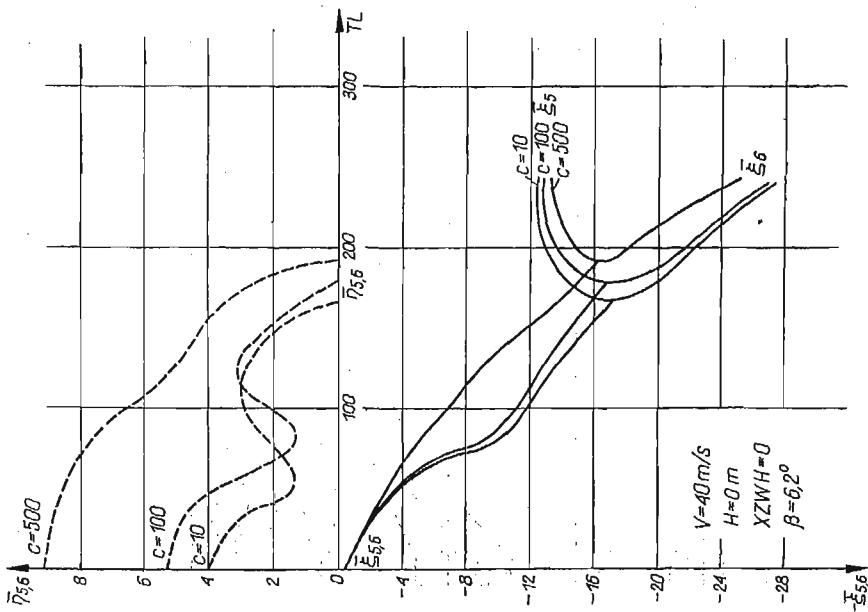
Rys. 5. Porównanie zmian częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania C dla trzech parametrów tłumienia układu



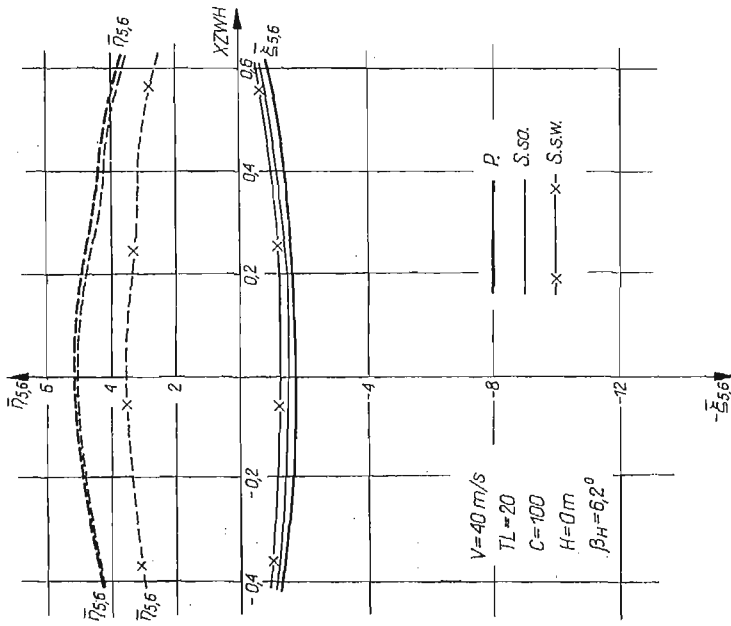
Rys. 7. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji tłumienia w układzie sterowania TL przy sztywności układu $C = 500$



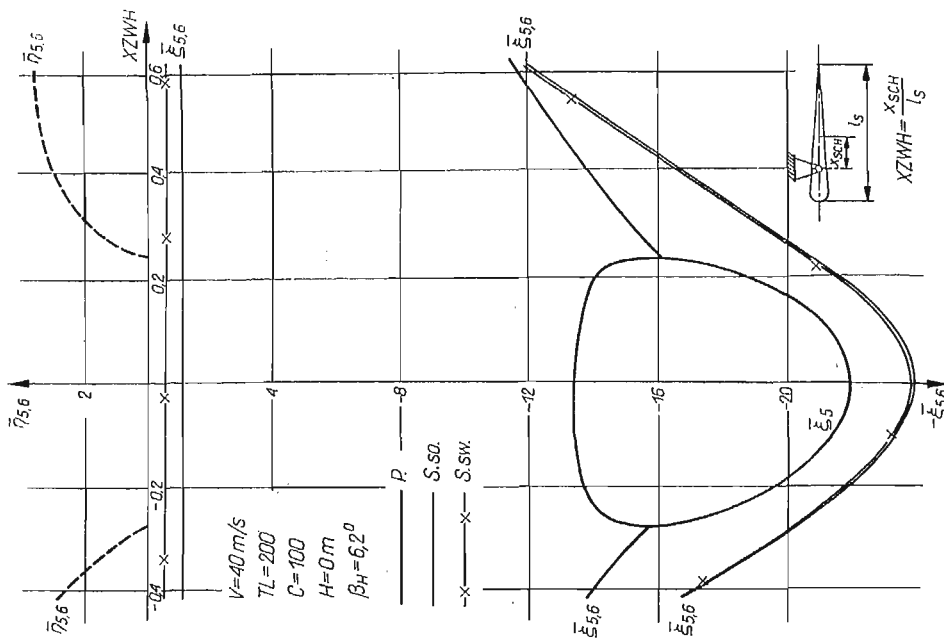
Rys. 6. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji tłumienia w układzie sterowania TL przy sztywności układu $C = 100$



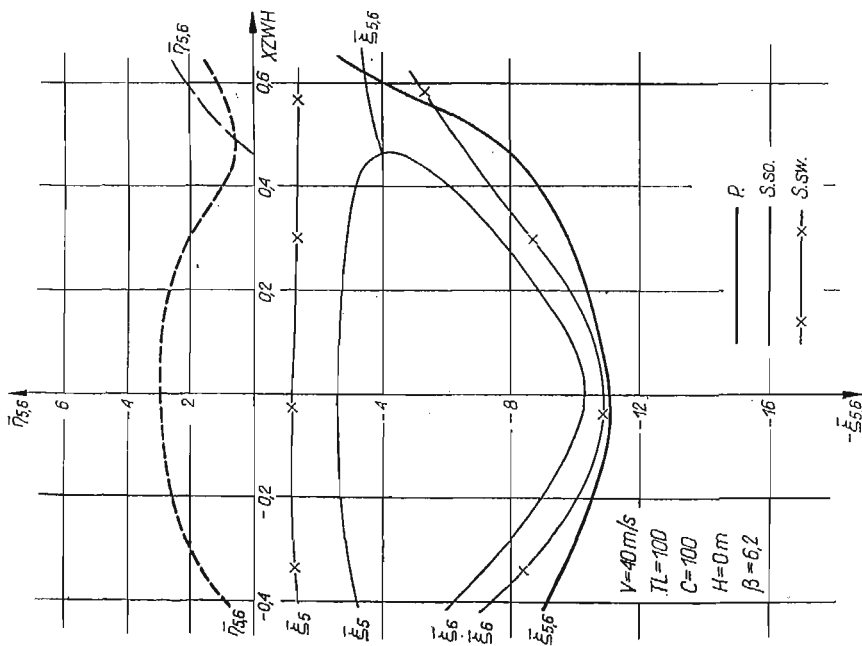
Rys. 8. Porównanie zmian częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji tłumienia w układzie sterowania TL dla trzech parametrów sztywności układu



Rys. 9. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości $XZWH$ przy sztywności układu sterowania $C = 100$ i tłumieniu $TL = 20$



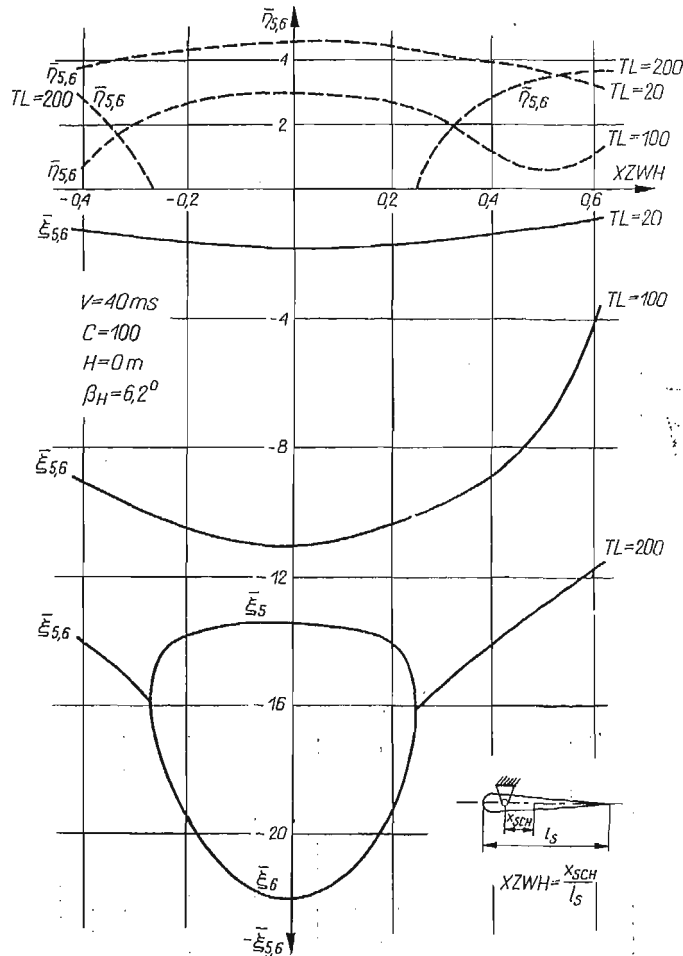
Rys. 11. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{s,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{s,6}$, drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości $XZWH$ przy sztywności układu sterowania $C = 100$ i tłumieniu $TL = 200$



Rys. 10. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{s,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{s,6}$, drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości $XZWH$ przy sztywności układu sterowania $C = 100$ i tłumieniu $TL = 100$

przednim $XZWH < -0,27$ i tylnym $XZWH > 0,24$ występują drgania okresowe z tłumieniem malejącym.

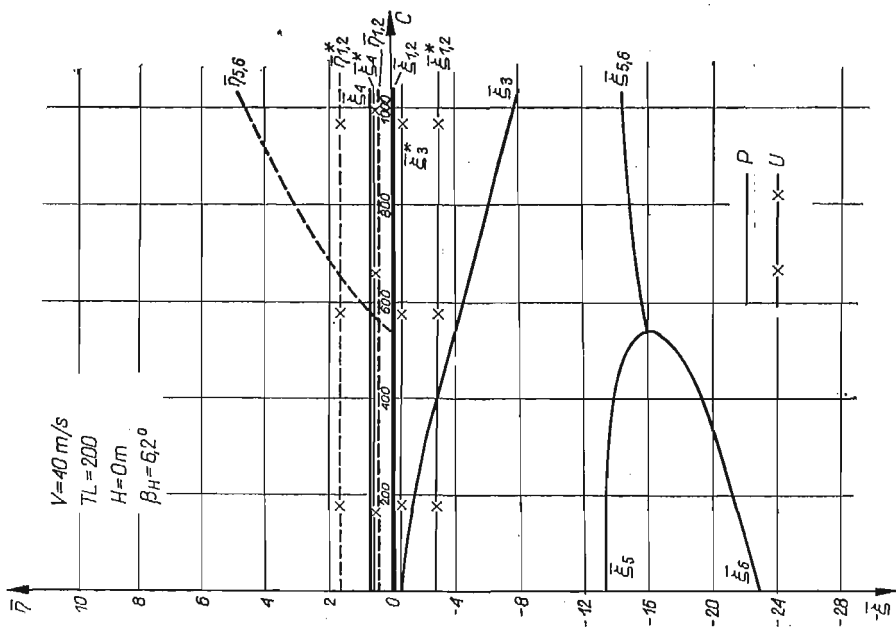
Uwzględnienie stopni swobody samolotu sztywnego ma istotny wpływ na miarodajność wyników określających charakter ruchów steru przy większych wartościach tłumienia i sztywności, co ma miejsce w układach sterowania z urządzeniami wspomagającymi



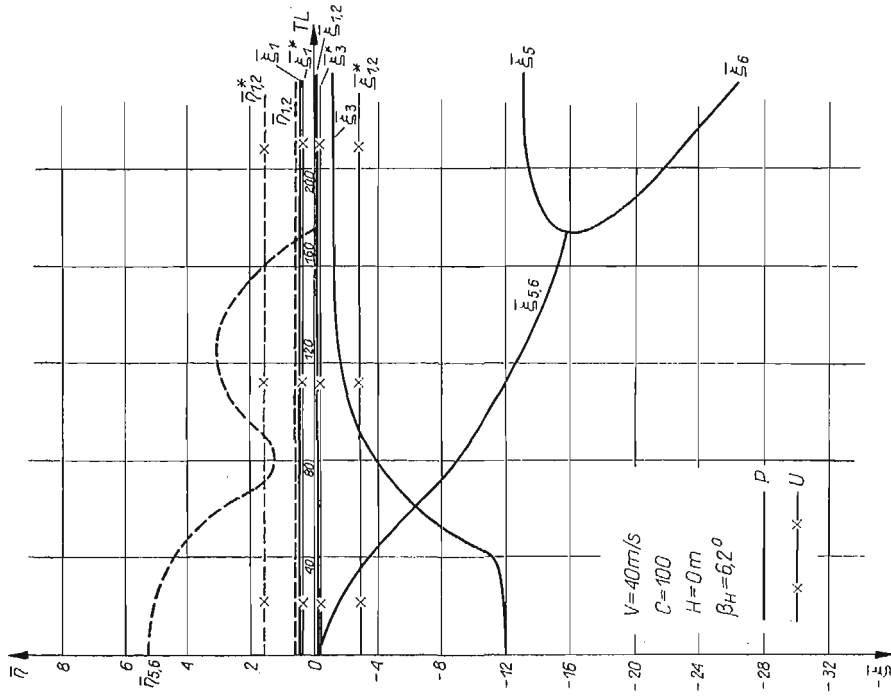
Rys. 12. Porównanie zmian częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości $XZWH$ przy sztywności układu sterowania $C = 100$ i trzech wartościach parametrów tłumienia

(boosterami) (rys. 10 i 11). Natomiast przy układach sterowania sprężystych o małym tłumieniu wyniki otrzymane dla steru izolowanego i w rzeczywistym układzie samolotu są tego samego rzędu i wskazują na identyczny charakter oscylacji steru wysokości (rys. 9).

D. Wpływ sztywności i tłumienia układu sterowania sterem wysokości i stopnia wyważenia steru na stateczność podłużną samolotu. Na rys. 13, 14 porównano zmiany współczynników oscylacji $\bar{\eta}$ i tłumienia $\bar{\xi}$ otrzymanych dla samolotu sztywnego z nieruchomym sterem wysokości



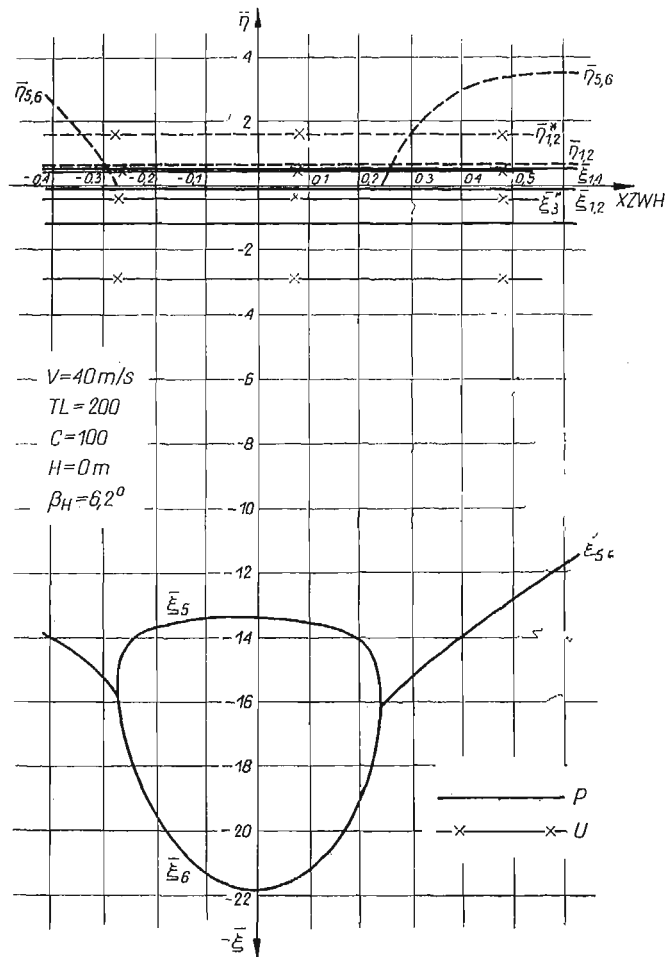
Rys. 13. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}$ i tłumienia $\bar{\xi}$ ruchów symetrycznych samolotu i drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania sterem wysokości



Rys. 14. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}$ i tłumienia $\bar{\xi}$ ruchów symetrycznych samolotu i drgań steru wysokości w funkcji tłumienia układu sterowania sterem wysokości

«U» z wynikami otrzymanymi przy uwzględnieniu sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości oraz wpływu stopnia wyważenia steru wysokości «P».

Zmiany sztywności (rys. 13) i tłumienia (rys. 14) w układzie sterowania sterem wysokości wpływają zarówno na oscylacje szybkie, zmieniając współczynniki tłumienia $\bar{\xi}_{1,2}$ i częstotliwości oscylacji $\bar{\eta}_{1,2}$, jak i na tłumienie przemieszczeń fugoidalnych $\bar{\xi}_3$.



Rys. 15. Zmiany częstotliwości oscylacji $\bar{\eta}$ i tłumienia $\bar{\xi}$ ruchów symetrycznych samolotu i drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości

Stopień statycznego wyważenia steru wysokości tzn. względna odległość położenia środka masy od osi obrotu nie ma istotnego wpływu jakościowego na ruchy samolotu, natomiast silnie wpływa na drgania steru (rys. 15).

Drgania steru wysokości w rozpatrywanym przypadku są zawsze silnie tłumione $\bar{\xi}_{5,6} < 0$ (rys. 13–15), a charakter drgań steru zależy jest od sztywności i tłumienia w układzie sterowania (rys. 13 i 14) oraz od stopnia wyważenia steru (rys. 15).

6. Wnioski ogólne

Zastosowanie równań Boltzmana–Hamel'a przy wyprowadzaniu w quasi-współrzędnych równań ruchu obiektów swobodnych, tzn. obiektów latających jak i pojazdów, umożliwia w stosunkowo prosty sposób uwzględnienie wahań elementów ruchomych i drgań sprężystych konstrukcji.

Przy badaniu drgań powierzchni sterowych należy uwzględniać stopnie swobody samolotu sztywnego, które poprzez sprzężenie ruchów mają ilościowy i jakościowy wpływ na charakter rozwiązań (rys. 2–12).

W rozpatrywanym przypadku oscylacje steru lub ruchy aperiodyczne są silnie tłumione i nie wykazują silnego wpływu jakościowego na stateczność samolotu. Jednak nie należy tego uogólniać i odnosić do innych obiektów latających.

W przedstawionych rozważaniach przyjęto aerodynamikę stacjonarną, co może mieć niekorzystny wpływ na rezultaty obliczeń w zakresie większych częstości drgań steru.

Literatura cytowana w tekście

1. И. АППЕЛЬ, *Теоретическая механика*, Изд. Физ.-Мат., Москва 1960.
2. В. ЕТКИН, *Dynamics of Flight Stability and Control*, New York 1959.
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, PWN, Łódź—Warszawa 1961.
4. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
6. J. MARYNIAK, *Uproszczona stateczność podłużna szybowca w locie holowanym*, Mech. Teoret. i Stos., 1 (1967).
7. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, Mech. Teoret. i Stos., 3 (1967).
8. J. MARYNIAK, M. LOSTAN, *Wpływ odkształcalności giętej skrzydła na stateczność podłużną szybowca*, Mech. Teoret. i Stos., 2 (1970).
9. К. ОГАТА, *Методы пространства станбв в теории стерования*, WNT, Warszawa 1974.
10. Л. А. ПАРС, *Аналитическая динамика*, Изд. Наука, Москва 1971.
11. T. TRAJDOS-WRÓBEL, *Matematyka dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1966.
12. J. I. НЕЙМАК, N. А. ФУРАЛЕВ, *Динамика уклатдбв неholономических*, PWN, Warszawa 1971.
13. К. А. АБГАРЯН, *Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем*, Изд. Наука, Москва 1973.
14. И. В. СТРАЖЕВА, В. С. МЕЛКУМОВ, *Векторно-матричные методы в механике полета*, Машиностроение, Москва 1973.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ
РУЛЕМ ВЫСОТЫ НА ПРОДОЛЬНОЮ УСТОЙЧИВОСТЬ САМОЛЕТА
И НА ОСЦИЛЛЯЦИИ РУЛЯ

В работе рассматривается влияние жесткости и демпфирования в системе управления рулем высоты а также уравновешенности руля на устойчивость самолета и на колебания руля высоты.

Уравнения движения самолета с осциллирующим рулем были выведены с применением уравнения Больцмана–Хамеля для голономных систем.

Решение сведено к определению собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы состояния. Проведены вычислительные расчеты для спортивного самолета, полученные результаты сопоставляются с результатами расчетов для жесткого самолета.

S u m m a r y

INFLUENCE OF STIFFNESS AND DAMPING IN THE ELEVATOR CONTROL SYSTEM ON LONGITUDINAL STABILITY OF AN AIRCRAFT AND VIBRATIONS OF AN ELEVATOR

In the paper, the titled problem, including the analysis of elevator mass balance, is presented. The equations of motion of an aircraft with oscillating elevator are derived by application of Boltzmann-Hamel's equations for holonomic systems. The solution is obtained by the method of eigen-values and eigenvectors of the state matrix. The numerical calculations performed for the light aircraft are compared with results for the same aircraft with blocked elevator.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1974 r.

W SPRAWIE MACIERZY SZTYWNOŚCI I WEKTORA OBCIĄŻEŃ SUPERELEMENTU*)

BOGDAN WOSIEWICZ (POZNAŃ)

Artykuł J. WRANIKA [4] omawiający wymienione w tytule zagadnienie zawiera pewne nieścisłości. Ze względu na wagę tematu, dotyczącego jednej z metod rozwiązywania dużych konstrukcji metodą elementów skończonych na maszynach o małych pamięciach, zamierzam zabrać głos w tej sprawie.

1. Cytując monografię ZIENKIEWICZA, WRANIK pisze: *W pracy [6] wykazano możliwość eliminacji węzłów wewnętrznych przy zastosowaniu minimalizacji funkcjonału χ* . ZIENKIEWICZ wykorzystuje warunki minimalizacji funkcjonału energii χ jedynie do zbudowania układu równań dla superelementu. Niewiadome odpowiadające węzłom wewnętrznym (węzły grupy b według określeń WRANIKA) eliminowane są przez podział układu równań na bloki i formalne wykorzystanie algebry macierzy, w identyczny sposób, jak czyni to WRANIK przy wyprowadzaniu zależności (4) i (5)¹⁾. Jest to szczególnie widoczne w pierwszym angielskim wydaniu pracy ZIENKIEWICZA [5] (por. również prace DEMSA [1] i PRZEMIENIECKIEGO [2]).

2. W pracy [4] zamieszczone jest następujące określenie macierzy sztywności i wektora obciążeń superelementu (str. 405): *Macierz sztywności \mathbf{K} jest zbiorem sił występujących w węzłach grupy a w wyniku wymuszonych przemieszczeń jednostkowych $x_a = 1$, wektor $\vec{\mathbf{K}}_p$ zaś zbiorem sił występujących w węzłach superelementu wywołanych siłami zewnętrznymi*. Moim zdaniem, powyższe określenie jest niewystarczające. Jak wiadomo, równania metody elementów skończonych napisane dla dowolnego elementu traktować można jako wzory transformacyjne metody przemieszczeń [3]. Superelementy są szczególnymi przypadkami elementów [5, 6]. Stąd poszczególne wyrazy macierzy superelementu są siłami występującymi w węzłach superelementu²⁾ w układzie geometrycznie wyznaczalnym w wyniku wymuszonych przemieszczeń jednostkowych tych węzłów. Wyrazy wektora obciążeń superelementu interpretować należy jako siły występujące w węzłach superelementu w układzie geometrycznie wyznaczalnym w wyniku działania obciążenia zewnętrznego. Układem geometrycznie wyznaczalnym dla superelementu jest superelement z zamocowanymi węzłami grupy a .

Zwracam jeszcze uwagę, że bez zamocowania węzłów superelementu nie można obliczyć sił w tych węzłach wywołanych wymuszonymi przemieszczeniami.

3. Z określeń macierzy i wektora obciążeń superelementu zawartych w [4] wynika natychmiast, że macierz \mathbf{A}_{aa} w zależności (8) i wektor $\vec{\mathbf{b}}_a$ w zależności (10) są odpowied-

*) Artykuł jest wypowiedzią autora w związku z pracą J. Wranika opublikowaną w MTiS, 3 (1974) s. 401.

¹⁾ Numery wzorów i oznaczenia podawane są według pracy Wranika [4].

²⁾ Węzły superelementu, to węzły grupy a (określenia tego używa także Wranik).

nio macierzą sztywności i wektorem obciążeń superelementu³⁾. Z czego wynika dalej, że formuły (9) i (13), a więc także wzory (4) i (5) są nieprawdziwe. Z drugiej strony wiemy, że zależności (4) i (5) są słuszne, powstały bowiem na drodze formalnych przekształceń układu równań (1). Wynika stąd wniosek, że przedstawione przez WRANIKA rozumowanie zmierzające do fizycznego zinterpretowania zależności (4) i (5) nie jest poprawne.

4. Można wykazać, że korzystając z uściślonych tutaj określeń macierzy i wektora obciążeń superelementu uzyskuje się w sposób bezpośredni wzory na obliczanie tych wielkości. Wzory te okazują się identyczne z wzorami (4) i (5) otrzymanymi w [4] drogą formalnych przekształceń. Tok postępowania jest następujący:

— Należy zamocować węzły grupy a i obciążyć superelement obciążeniem zewnętrznym a następnie obliczyć siły występujące w tych węzłach. Wektor tych sił jest wektorem obciążeń superelementu.

— Należy uwalniać poszczególne węzły grupy a , wymuszać jednostkowe przemieszczenia tych węzłów i obliczać siły jakie wystąpią w węzłach grupy a . Wartości tych sił są odpowiednimi wyrazami macierzy sztywności superelementu.

Wykonajmy w sposób ogólny opisane powyżej czynności dla superelementu wyodrębnionego z dowolnej konstrukcji. Równania metody elementów skończonych dla tego superelementu mają postać [5]

$$(1)^4) \quad \begin{Bmatrix} \vec{F}_a \\ \vec{F}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}_a \\ \vec{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{b}_a \\ \vec{b}_b \end{Bmatrix},$$

gdzie przez \vec{F}_a i \vec{F}_b oznaczono odpowiednio siły występujące w węzłach grupy a i b . Z uwagi na zrównoważenie węzłów grupy b mamy $\vec{F}_b \equiv \mathbf{0}$, węzły grupy a zrównoważone zostaną dopiero przy rozpatrywaniu całej konstrukcji [5]. Nadajmy przemieszczeniom x_a wartości równe zeru, co oznacza zamocowanie węzłów grupy a . Rozwiązując układ równań (1) przy przemieszczeniach $x_a = 0$, wyznaczmy przemieszczenia węzłów superelementu wywołane obciążeniem zewnętrznym. W tym celu należy zmodyfikować odpowiednio wektor obciążeń i macierz współczynników przy niewiadomych. Zasady takiej modyfikacji opisane są szczegółowo w pracach [3] i [6]. Tutaj zauważymy tylko, że wprowadzając przemieszczenia i -tego węzła równe $x_i = \alpha$ należy:

— do poszczególnych wyrazów wektora obciążeń dodać pomnożone przez α wyrazy i -tej kolumny, a i -ty wyraz wektora obciążeń należy zastąpić wartością α ;

— i -ty wiersz i i -tą kolumnę macierzy współczynników przy niewiadomych należy wyzerować, a na głównej przekątnej postawić liczbę 1. Po wykonaniu takiej modyfikacji dla poszczególnych $x_a = 0$ otrzymamy układ równań

$$(2) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}_a \\ \vec{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \vec{b}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{I} \text{ — macierz jednostkowa}),$$

którego rozwiązaniem są wektory:

$$(3) \quad \begin{aligned} \vec{x}_b &= -A_{bb}^{-1} \vec{b}_b, \\ \vec{x}_a &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

³⁾ Np. dla macierzy A_{aa} mamy w [4] takie określenie: *macierz kwadratowa utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy a kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy a .*

⁴⁾ Numeracja wzorów dotyczy teraz artykułu autora.

Po podstawieniu rozwiązań (3) do równań (1) otrzymamy siły, które występują w poszczególnych węzłach superelementu

$$(4) \quad \begin{Bmatrix} \vec{F}_a \\ \vec{F}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{bb}^{-1} \vec{b}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{b}_a \\ \vec{b}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{b}_a - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \vec{b}_b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}.$$

Stąd wektor obciążeń superelementu, który składa się z sił wywołanych w poszczególnych węzłach grupy a ma postać

$$(5) \quad \vec{k}_p = \vec{b}_a - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \vec{b}_b.$$

W podobny sposób otrzymamy macierz sztywności superelementu. Należy teraz wyznaczyć siły w węzłach grupy a przy kolejno wymuszanych przemieszczeniach jednostkowych tych węzłów, lecz tym razem bez obciążenia zewnętrznego. Jeżeli mamy s węzłów grupy a , zagadnienie to prowadzi do rozwiązania s układów równań. Zauważmy, że we wszystkich przypadkach zmodyfikowana macierz współczynników przy niewiadomych będzie identyczna, jak w zależności (2). Wynika to z faktu, że wszystkie węzły grupy a mają określone przemieszczenia. Układy równań różnić się będą tylko wektorem wyrazów wolnych. Korzystając z możliwości algebry macierzy układy te rozwiążemy jednocześnie. Po modyfikacji mamy

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{aa} \\ \mathbf{x}_{ba} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{ba} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

W zależności powyższej kolejne kolumny macierzy \mathbf{x}_{aa} i \mathbf{x}_{ba} są przemieszczeniami poszczególnych węzłów superelementu przy wymuszonych jednostkowych przemieszczeniach węzłów grupy a . Poszczególne elementy wektora wyrazów wolnych powstały przez modyfikację tego wektora dla poszczególnych wymuszeń $x_a = 1$ ($\vec{b}_a = \vec{b}_b = \mathbf{0}$). Rozwiązując układy równań (6), otrzymamy

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_{aa} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{x}_{ba} &= -\mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba}. \end{aligned}$$

Podstawiając zależności (7) do (1) otrzymamy siły w poszczególnych węzłach superelementu od wymuszonych przemieszczeń ($\vec{b}_a = \vec{b}_b = \mathbf{0}$):

$$(8) \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{aa} \\ \mathbf{F}_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie macierz sztywności superelementu ma postać

$$(9) \quad \mathbf{K} = \mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba}.$$

Wprowadzone w ten sposób wzory (5) oraz (9) są identyczne z wzorami otrzymanymi drogą formalnych przekształceń [4, 5, 6]. Przedstawione powyżej postępowanie stanowi zatem fizyczną interpretację tych przekształceń. Wskazuje jednocześnie na praktyczny sposób wykonywania obliczeń macierzy i wektora obciążeń superelementu bezpośrednio z definicji.

Literatura cytowana w tekście

1. K. DEMS, *Wielostopniowa synteza macierzy sztywności*, Mech. Teor. Stos., 4, 11 (1973), 407–415.
2. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, New York 1968.
3. G. RAKOWSKI, *Metoda elementów skończonych w mechanice budowli*, Inż. Bud., 4–6, 28 (1971).
4. J. WRANIK, *Macierz sztywności i wektor obciążeń superelementu*, Mech. Teoret. Stos., 3, 12 (1974), 401–405.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, London 1967.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Warszawa 1972.

Р е з ю м е

К ВОПРОСУ О МАТРИЦЕ ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОРЕ НАГРУЗОК
СВЕРХЭЛЕМЕНТА

В работе обращается внимание на неточности содержащиеся в работе [4]. Непосредственно из определения выводятся формулы на матрицу жесткости и вектор нагрузок сверхэлемента.

S u m m a r y

TO THE PROBLEMS OF STIFFNESS MATRIX AND LOAD VECTOR
OF A SUPERELEMENT

Certain incorrect results occurring in paper [4] are pointed out. The formulae for stiffness matrices and load vectors of a superelement are derived directly from their definitions.

AKADEMIA ROLNICZA W POZNANIU

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 grudnia 1974 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

KOLOKWIMUM EUROMECH 53 «TERMOPLASTYCZNOŚĆ»

Jabłonna, 16–19 września 1974 r.

W dniach 16–19 września 1974 r. odbyło się w Jabłonie k. Warszawy 53 Kolokwium Euromech na temat «Termoplastyczności». Organizatorem kolokwium był Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, przewodniczącym — prof. dr Piotr PERZYNA, sekretarzem — dr Witold KOSIŃSKI. Było to drugie z kolei (po 49. na temat «Mechaniki zawieszin i roztworów polimerów») kolokwium Euromech w Polsce w 1974 r.

Celem wrześniowego międzynarodowego spotkania specjalistów, czynnie pracujących w tematyce termoplastyczności, było przedstawienie ostatnich osiągnięć naukowych w tej dziedzinie oraz przedyskutowanie nowych kierunków jej rozwoju.

W obradach wzięło udział 44 uczestników z 12 krajów: Bułgarii (1), Czechosłowacji (2), Francji (4), Japonii (1), Jugosławii (1), NRD (1), RFN (3), Polski (17), Rumunii (2), W. Brytanii (2), Włoch (8) i USA (2).

Otwierając konferencję, prof. dr P. PERZYNA stwierdził, że w ostatnich latach teoria termoplastyczności stała się rozległą i ważną dyscypliną mechaniki, a to dzięki szerokim możliwościom jej zastosowań do współczesnych problemów techniki, takich jak: technika i technologia reaktorowa, nowoczesne źródła energii, przemysł chemiczny. W dalszym ciągu swego wystąpienia prof. PERZYNA omówił cel i zadania spotkania, podkreślając że nie jest możliwe omówienie w czasie czterodniowego spotkania wszystkich problemów, które składają się na teorię termoplastyczności. Wysunął jednak na czoło zagadnień jedno z głównych — termomechaniczne sprzężenie w materiałach.

W imieniu dyrekcji Instytutu Podstawowych Problemów Techniki uczestników kolokwium powitał członek korespondent PAN prof. dr A. SAWCZUK.

Obrady były podzielone na siedem tematycznych sesji, w trakcie których wygłoszono 30 referatów, w tym 6 generalnych. Uczestnicy otrzymali streszczenia wszystkich referatów, natomiast pełne teksty większości z nich zostaną opublikowane w specjalnym numerze Archiwum Mechaniki Stosowanej w 1975 r. (w numerze 5).

Problematyka poruszana w czasie konferencji dotyczyła: różnych matematycznych opisów podstaw termoplastyczności; fizykalnych i eksperymentalnych aspektów występujących przy formułowaniu równań konstytutywnych w zależnej i niezależnej od czasu plastyczności, z wpływem efektów termicznych; geometrycznych aspektów skończonych deformacji niesprężystych; badań zjawiska wpływu temperatury na granicę plastyczności; analizy termodynamicznych ograniczeń nakładanych na związki konstytutywne wraz z opisem termomechanicznego sprzężenia; rozwiązań problemów początkowo-brzegowych w termoplastyczności przy niesprężonych i sprzężonych równaniach pola; istnienia fal termicznych w ciałach stałych z fizykalnego i praktycznego punktu widzenia; nowych rezultatów badań termoplastycznego zachowania się materiałów; podstawowych twierdzeń w termoplastyczności.

Pierwsza przedpołudniowa sesja poniedziałkowa (16.IX) była poświęcona matematycznym podstawom termoplastyczności. Referat generalny wygłosił prof. J. KRATOCHVIL (Praga). Przedstawił w nim trzy istniejące podejścia w opisie termomechanicznych własności ciał niesprężystych. Swoją uwagę autor skupił na opisie w ramach teorii materiałów z parametrami wewnętrznymi (wewnętrznymi zmiennymi stanu). Opis ten rozszerzył, wykorzystując matematyczną teorię materiałów prostych (Noll 1972) oraz teorię materiałów z zakresem sprężystym (Owen 1970).

Referat prof. Th. LEHMANN (Bochum) wygłoszony po referacie generalnym dotyczył procesów termomechanicznych z dużymi jednorodnymi deformacjami sprężysto-plastycznymi. Oprócz problemu opisu procesów autor poruszył sprawę wpływu temperatury na deformacje sprężysto-plastyczne.

Kolejnym mówcą był prof. Z. BYCHAWSKI (Rzeszów), który zajął się opisem materiałów reologicznych w obecności pola temperatury, wykazujących plastyczne i zależne od czasu własności. Mówca wywodził funkcjonalne (całkowe) związki konstytutywne, opierając się na pewnych warunkach całkowalności odkształceń.

Z kolei dr P. MAZILU (Bukareszt) zajął się w swoim wystąpieniu badaniem materiału sprężysto-termoplastycznego typu prędkościowego. Formułując algebraiczne kryteria obciążenia i odciążenia i zakładając całkowitą zamianę pracy plastycznej w ciepło, referent wywodził zmodyfikowane (hiperboliczne) równanie przewodnictwa ciepła (Vernotte 1958).

Ostatni referat tej sesji wygłoszony przez dr. M. MIČUNOVIČA (Kragujevac) dotyczył geometrycznego aspektu dużych deformacji termoplastycznych. Wykazano w nim, że przy założeniu addytywności deformacji termosprężystej i plastycznej nie jest możliwe zrealizowanie tych ostatnich przez pocięcie ciała na fizycznie małe części.

Popołudniowa sesja, poświęcona fizykalnym podstawom termoplastyczności, zaczęła się generalnym referatem dr. J. ZARKI (Paryż). W szerokim potraktowaniu zagadnienia autor przedstawił przegląd wybranych teorii fizycznych ciał o własnościach sprężysto-lepkoplastycznych poddanych wpływowi temperatury. Omówione zostały mechanizmy plastycznego płynięcia w kryształach z punktu widzenia współczesnej teorii dyslokacji.

Referat następny, przedstawiony przez prof. Y. HORIE (Raleigh, North Carolina), dotyczył badania, w ramach teorii fizycznej, zależności granicy plastyczności od zmian temperatury. Wywiedzioną zależność porównano z istniejącymi wynikami eksperymentów w kryształach.

Z kolei dr V. KAFKA (Praga) zajął się wytłumaczeniem mechanizmów płynięcia w polikryształach w ramach teorii poślizgów. Nieizotermiczna teoria plastyczności rozwinięta przez autora opierała się na koncepcji występowania mikronaprężeń jako jednej ze zmiennych stanu.

Drugi dzień obrad został poświęcony problemom podstaw termodynamicznych termoplastyczności i propagacji fal. W referacie generalnym, w sesji przedpołudniowej, prof. P. PERZYNA (Warszawa) zajął najpierw uwagę słuchaczy krótkim omówieniem istniejącej koncepcji termodynamicznego opisu materiałów dysypatywnych, a w dalszej części skupił się na podejściu do termodynamiki kontinuum w ramach jednoznacznych struktur materialnych (Kosiński i Perzyna — 1973). Problem, jaki wysunął się na czoło tej części wykładu, to ograniczenia nakładane na relację dostępności w przestrzeni stanów termodynamicznych wynikające ze spełnienia praw termodynamiki. Mówca przedstawił następnie lokalne i całkowite nierówności dysypacji energii jako podstawowe ograniczenia na odwzorowania konstytutywne w budowanych teoriach materiałów niesprężystych. Drugi podstawowy problem przedyskutowany w tym referacie to opis sprzężeń termomechanicznych.

Referat prof. S. NEMAT-NASSERA (Evanston, Illinois) dotyczył rozważań nad istnieniem potencjałów niesprężystych w teoriach materiałów sprężysto-plastycznych opisywanych parametrami wewnętrznymi. Założenie istnienia uogólnionych związków Onsagera między wielkościami odpowiedzialnymi za niesprężyste zachowanie się materiałów umożliwiło autorowi wyprowadzenie interesujących warunków odnośnie do: normalności tensora deformacji niesprężystych, termodynamicznej stabilności i wypukłości powierzchni potencjałów niesprężystych.

Z kolei prof. J. KRATOCHVIL omówił metodę wyprowadzenia równań konstytutywnych dla materiałów niesprężystych. Wybierając podejście przez parametry wewnętrzne, mówca przedstawił kolejne etapy wyprowadzenia z ogólnych związków konstytutywnych szczególnej postaci równań, dobrze opisujących realne materiały.

Dr A. PAGLIETTI (Cagliari, Sardinia) zajął się termodynamiczną teorią materiałów sprężysto-plastycznych przy założeniu rozkładalności całkowitej deformacji na części: termosprężystą i plastyczną (Green i Naghdí, 1965). W ramach tej teorii autor zajął się geometrią deformacji oraz wyznaczeniem deformacji uniwersalnych.

W ostatnim referacie przedpołudniowym dr J. ZARKA przedstawił wspólną pracę z dr. W. K. NOWACKIM (Paryż, stacja PAN) dotyczącą weryfikacji istniejących klasycznych hipotez w sprzężonej termoplastyczności.

Popołudniową sesję zapoczątkował prof. S. NEMAT-NASSER referatem generalnym o falach termicznych (tzw. drugim dźwięku) w ciałach stałych. Historyczny rozwój teoretycznych i doświadczalnych badań

nad tym problemem został wzbogacony przez autora przedstawieniem fizycznej teorii fal termicznych rozumianych jako rozprzestrzenianie się zaburzeń w gazie fononowym wypełniającym ośrodki materialne. Liczne fotogramy zarejestrowanych fal termicznych w zestalonym helu były interesującą ilustracją wykładu i potwierdzeniem tezy o konieczności uwzględnienia skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła przy rozwiązywaniu wielu problemów mechaniki, a w szczególności w obecności niskich temperatur.

Następujące potem dwa kolejne referaty dotyczyły problemu wyprowadzenia warunków propagacji sprzężonych fal termomechanicznych w ogólnych ośrodkach materialnych. Referat dr. W. KOSTŃSKIEGO (Warszawa) był poświęcony wyprowadzeniu, przy możliwie najslabszych założeniach, termodynamicznej teorii materiałów z parametrami wewnętrznymi, w ramach której można rozpatrywać termiczne fale uderzeniowe i przyspieszenia. Otrzymane w pracy funkcjonalne równanie dla strumienia ciepła zostało po zróżniczkowaniu sprowadzone do związku Maxwella-Cattaneo przewodnictwa ciepła. Przykład liniowego materiału sprężysto-lepkoplastycznego, w którym istnieją cztery sprzężone, termomechaniczne, rzeczywiste, symetryczne fale uderzeniowe, zakończył referat.

W drugim, o podobnym temacie, referacie dr I. SULICIU (Bukareszt) zajął się warunkami istnienia symetrycznych i rzeczywistych prędkości fal przyspieszenia w materiale z parametrami wewnętrznymi. Jednym z warunków, jakie otrzymał autor, była potrzeba traktowania strumienia ciepła jako parametru wewnętrznego. Implikacje z drugiego prawa termodynamiki w dyskusji realności fal przyspieszenia były podsumowaniem referatu.

Trzeci dzień (18.IX) zaczął się referatem generalnym prof. G. YAGAWY (Tokio) ze wspólnej pracy z N. MIYAZAKI i Y. ANDO. Dotyczył on zastosowania metody elementów skończonych do rozwiązywania problemów dużych deformacji sprężysto-plastycznych z uwzględnieniem termodynamiki. Przyrostowy formalizm użyty w referacie dopuszczał uwzględnienie zarówno nieliniowości geometrycznej, jak i fizycznej. Przykład ilustrujący metodę dotyczył sprężysto-plastycznego pełzania osiowoosymetrycznej powłoki. Według autora przedstawiona metoda może być zastosowana do rozwiązywania problemów występujących przy projektowaniu konstrukcji reaktorów, oraz wszędzie tam, gdzie obciążeniom towarzyszą zmiany temperatur.

Referat dr. S. GOLDSTEINA (Paryż) także dotyczył zastosowania metody elementów skończonych do numerycznego rozwiązania problemów brzegowych inżynierii reaktorowej. W referacie uwzględniono cykliczne zmiany temperatury, napromieniowanie, pełzanie i efekty plastyczne.

Zagadnienia techniki reaktorowej inspirowały także autora następnego referatu — dr. J. L. HEADA (Londyn). Opis termomechanicznych zjawisk występujących w wysokotemperaturowym reaktorze chłodzonym gazem, problemy projektowania rdzenia reaktora, a także rozwiązanie niesprężonego zagadnienia brzegowego dla rdzenia złożyły się na treść tego interesującego wystąpienia.

Ostatnim mówcą sesji poświęconej rozwiązywaniu problemów brzegowych w termoplastyczności był doc. P. RAFALSKI (Świerk). Przedstawił on matematyczną metodę poszukiwania rozwiązania problemu brzegowego w naprężeniach dla sprężysto-plastycznego ciała przez zastosowanie rozkładu hilbertowskiej przestrzeni rozwiązań na sumę prostą dwóch podprzestrzeni.

W szóstej z kolei sesji, poświęconej badaniom eksperymentalnym, referat generalny wygłosił doc. J. KLEPACZKO (Warszawa). Referat składał się z krótkiego przeglądu używanych technik doświadczalnych przy dynamicznych badaniach materiałów oraz ze szczegółowego omówienia istniejących w literaturze (głównie amerykańskiej) wyników badań termicznych uderzeń w próbkach metalowych w zakresie odkształceń niesprężystych.

W referacie C. ALBERTINIEGO, R. CENERINIEGO, S. CURIONIEGO i M. MONTAGNANIEGO (Ispira) zajęto się badaniem zachowania przykrycia zbiornika reaktora oraz rdzenia pod wpływem gwałtownych obciążeń. Badano także zachowanie się elementów konstrukcji reaktora pod wpływem dynamicznie przyłożonych źródeł ciepła.

Referat prof. J. HARDINGA (Oxford) dotyczył analizy czułości próbek z α -tytanu na zmiany temperatury i prędkości odkształcenia. Bogato ilustrowany wynikami eksperymentalnymi referat zawierał też interpretację występujących przy badaniu zjawisk (w ramach teorii termicznie aktywowanych procesów w kryształach).

Dr J. LIŃSKI (Warszawa) zajął się dla odmiany zbadaniem zjawisk występujących przy próbie skręcania niejednorodnych, plastycznych i lepkoplastycznych próbek rurkowych z uwzględnieniem gene-

racji ciepła na skutek deformacji plastycznych. Autor wykazał istnienie dwóch rodzajów niestateczności i podał kryterium ich występowania. Swoje wystąpienie zakończył podaniem przykładu numerycznego.

Jeszcze jedno wystąpienie, popołudniowe, doc. J. KŁEPACZKI było poświęcone omówieniu efektów historii prędkości odkształcenia i temperatury w polikrystalicznych próbkach metalowych obciążonych dynamicznie. Przedstawione wyniki eksperymentalne skłoniły referenta do stwierdzenia, że wpływ historii nie może być pominięty przy formułowaniu związków konstytutywnych opisujących plastyczne zachowanie się metali.

W ostatnim dniu, na sesję poświęconą twierdzeniom o jednoznaczności, stateczności i problemom wariacyjnym w termoplastyczności złożyły się cztery referaty. W pierwszym, prof. R. de BOER (Hannover) zajął się zbadaniem istnienia rozwiązania problemu brzegowego w teorii lepkoplastyczności dla względnie powolnych procesów. Udowodnione w referacie twierdzenia były oparte na dwóch postulatach stateczności sformułowanych w naprężeniach i w prędkościach odkształceń.

We wspólnym referacie z prof. Z. MROZEM dr B. RANIECKI (Warszawa) zanalizował warunki wystarczające do udowodnienia jednoznaczności problemu początkowo-brzegowego w prędkościach, istniejącego w termoplastyczności przy małych odkształceniach. Równanie pola dla rozpatrywanego problemu wyprowadzono, wykorzystując klasyczny formalizm termodynamiki oraz zasadę ortogonalności Zieglera.

W przedostatnim referacie dr A. BALTOV (Sofia) badał energetyczne kryterium stabilności dla termomechanicznych ciał lepkoplastycznych opisywanych parametrami wewnętrznymi. Wyprowadzone kryterium stabilności w sensie Liapunova wykorzystał przy badaniu konkretnego przykładu rozciąganych próbek.

W ostatnim referacie Kolokwium dr B. HALPHEN (Paryż) wyprowadził, wykorzystując formalizm wariacyjny, zasadę ekstremalną i warunek jednoznaczności dla problemu dużych deformacji sprężysto-lepkoplastycznych z uwzględnieniem sprzężenia termomechanicznego.

W podsumowaniu obrad prof. P. PERZYNA zwrócił uwagę na szeroką gamę zagadnień poruszanych przez uczestników w referatach i podczas dyskusji. Wymienił tutaj kolejno problemy leżące u podstaw matematycznych i termodynamicznych termoplastyczności, zagadnienia fizykalnych i eksperymentalnych badań, a także konkretne rozwiązania problemów brzegowych. Stwierdził, że dzięki problematyce poruszanej w konferencji daje się zauważyć coraz lepsze współdziałanie, często mimowolne, różnorodnej tematyki teorii lepkoplastyczności. Powoduje to, że teoria ta staje się coraz lepiej uporządkowaną dziedziną mechaniki, dostarczającą nie tylko teoretycznych rozwiązań problemów kontinuum odkształcalnego, lecz, co ważniejsze, coraz więcej użytecznych i konkretnych rozwiązań technicznych i konstrukcyjnych. Pozytywnym zjawiskiem jest przy tym fakt, że rozwiązywane problemy inspirowane są często bezpośrednio przez praktykę inżynierską. Prof. PERZYNA wysoko ocenił twórczą atmosferę panującą w czasie konferencji, a to dzięki licznym, często gorącym dyskusjom nie tylko podczas obrad, ale i w kularach. Serdecznie dziękując za udział w Kolokwium, prof. PERZYNA życzył uczestnikom dalszych sukcesów naukowych. W imieniu uczestników podziękowanie za zaproszenie do udziału w Kolokwium, za stworzenie dogodnych warunków do podzielenia się z innymi swoimi osiągnięciami i do poznania rezultatów innych, złożył dr J. L. HEAD.

Witold Kosiński (Warszawa)

IX KONFERENCJA DYNAMIKI MASZYN

Smolenice, 23–26 września 1974 r.

Międzynarodowe Konferencje Dynamiki Maszyn mają już kilkunastoletnią tradycję. Pierwsze z nich, począwszy od 1958 r., były organizowane przez Czechosłowacką Akademię Nauk. Udział przedstawicieli Polski był jednak od samego początku liczny i liczący się. W 1963 r. podjęto decyzję, że konferencje te będą organizowane wspólnie przez ČSAV i PAN, na przemian w Czechosłowacji i w Polsce. W Polsce odbyły się dotychczas: IV Konferencja — w 1965 r. w Krakowie (współorganizatorem była AGH),

VII Konferencja -- w 1971 r. w Gliwicach (współorganizatorem była Politechnika Śląska). Stronę polską, formalnie biorąc, reprezentuje od kilku lat Zespół Dynamiki Maszyn, wchodzący w skład Sekcji Kształtowania Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN.

Miejscem obrad na terenie Czechosłowacji są od początku dwa pałacyki: w Liblicach koło Pragi, gdy organizatorem jest Ustav Termomechaniky ČSAV w Pradze, i w Smolenicach koło Bratysławy, gdy organizatorem jest Ustav Mechaniky Strojov SAV w Bratysławie. Z powodu ograniczonych warunków lokalowych w obradach na terenie Czechosłowacji bierze udział nie więcej niż 120 osób, podczas gdy na terenie Polski uczestników bywa ponad 300.

Ostatnia, IX Konferencja odbyła się w dniach 23–26 września 1974 r. w Smolenicach. Wzięło w niej udział 23 uczestników z Polski, reprezentujących IPPT-PAN (3 osoby), Politechnikę Warszawską (9 osób), AGH (6 osób), Politechnikę Wrocławską (2 osoby) oraz Politechnikę Poznańską, Politechnikę Śląską i WSI w Bydgoszczy (po jednej osobie). Polacy wygłosili 16 referatów, na ogólną liczbę 49; kilkakrotnie pełnili funkcje przewodniczących obrad; brali żywy udział w dyskusjach.

Poza Czechami, Słowakami i Polakami w konferencji uczestniczyli obywatele ZSRR, NRD, Węgier, Bułgarii, Rumunii, RFN i Francji. Zgodnie z przyjętymi wcześniej ustaleniami, referaty mogły być wygłaszane w językach organizatorów konferencji (czeski, słowacki, polski) lub w językach kongresowych, natomiast teksty przesłane do opublikowania musiały być napisane w języku angielskim (ze streszczeniem rosyjskim) lub rosyjskim (ze streszczeniem angielskim). Dwutomowe wydawnictwo «Proceedings of the IXth Conference on Dynamics of Machines», zrealizowane metodą malej poligrafii, ma łącznie prawie 700 stron.

Tematyka konferencji miała być ograniczona tylko do zagadnień optymalizacji w dynamice maszyn, w szczególności w dynamice mechanizmów, oraz do zagadnień wibroizolacji. Miały być przy tym przyjmowane prace wyłącznie o charakterze technicznym, nadające się do zastosowań. Te założenia były na ogół dotrzymane, zaledwie kilka prac nie wiązało się z przyjętą tematyką lub miało charakter formalno-matematyczny.

Na zakończenie podjęto uchwałę, że wiodącym współorganizatorem następnej, X Konferencji Dynamiki Maszyn będzie Politechnika Warszawska. Konferencja odbędzie się w jesieni 1976 r., a tematyka obrad będzie dotyczyć:

- pomiarów maszyn w procesach identyfikacji,
- optymalizacji maszyn,
- wibroakustyki.

Eugeniusz Kamiński (Warszawa)

METODY OBLICZENIOWE W MECHANICE NIELINIOWEJ

(Konferencja szkoleniowa, Jabłonna, 23–28 września 1974 r.)

Rozwój technik obliczeniowych, związanych z wykorzystaniem komputerów, ma istotny wpływ na rozwój mechaniki i na wprowadzenie jej osiągnięć w działalność inżynierską. W Polsce, wykorzystanie komputerów do rozwiązywania zagadnień mechaniki i problemów inżynierskich jest znacznie opóźnione w stosunku do przodujących technologicznie krajów, a jednocześnie jest niedostateczne w porównaniu do osiągniętego u nas poziomu w zakresie teorii. W związku z tym istotną sprawą jest wprowadzenie efektywnych metod komputerowych, szczególnie do tych dziedzin mechaniki, które są u nas dobrze rozwinięte. Świadomość potrzeby wprowadzenia i spopularyzowania tych metod odczuwana była od pewnego czasu zarówno przez pracowników nauki rozwijających podstawy takich działów mechaniki, jak teoria nieliniowej sprężystości, teoria plastyczności czy niektóre działy mechaniki budowli, jak i inżynierów zainteresowanych głównie wprowadzeniem osiągnięć naukowych do techniki. Wychodząc z takich przesłanek, Sekcja Mechaniki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN postanowiła zorganizować konferencję szkoleniową poświęconą metodom obliczeniowym w mechanice nieliniowej.

Inicjatywa zorganizowania i koncepcja takiej konferencji wyszła od prof. A. SAWCZUKA. Do wygłoszenia referatów zaproszono pracowników jednego z najbardziej zaawansowanych ośrodków rozwijających metody numeryczne w inżynierii — Instytutu Statyki i Dynamiki Uniwersytetu w Sztutgarcie, którym kieruje prof. J. H. ARGYRIS. Odpowiedni zespół autorski przygotował specjalnie na potrzeby tej konferencji teksty na około 30 godzin wykładowych.

Cykl wykładów obejmował następujące zagadnienia:

1. *Metoda elementów skończonych w zagadnieniach statyki i dynamiki. Podstawy analizy.* Przedstawiono wprowadzenie do metody elementów skończonych ze specjalnym uwzględnieniem naturalnego sformułowania. Wyprowadzono równania teorii sprężystości w notacji macierzowej wraz z podstawowymi twierdzeniami energetycznymi. W zakończeniu podano wiele uwag praktycznych o możliwych błędach numerycznych powstających podczas procesu obliczeniowego.

2. *Numeryczna analiza liniowych zagadnień dynamicznych.* Omówiono wiele procedur dynamicznej analizy liniowych sprężystych układów konstrukcyjnych. Szczegółowo rozpatrzono trzy metody:

— równoczesną iterację wektorową z przyśpieszeniem Czebyszewa (dla układów o liczbie stopni swobody większej od 500),

— metodę Housholdera–Givensa (dla układów o liczbie stopni swobody nie przekraczającej 500),

— metodę Jacobiego (do zagadnień o niewielkiej liczbie stopni swobody, z reguły nie przekraczającej 100).

3. *Stateczność i duże przemieszczenia.* Przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych sformułowanej w przemieszczeniach do analizy zagadnień, w których nie można pominąć wpływu zmiany geometrii konstrukcji przy wyprowadzaniu równań równowagi. Część I wykładu poświęcona była zagadnieniom wyoboczenia liniowego. Część II obejmowała zagadnienia bardziej skomplikowane, kiedy deformacja konstrukcji jest nieliniową funkcją działającego obciążenia.

4. *Nieliniowe zagadnienia dynamiczne.* Omówiono wiele prac dotyczących całkowania nieliniowych równań ruchu metodą «step by step». Prezentowane metody umożliwiają analizę układów konstrukcyjnych do 2000 stopni swobody.

5. *Zagadnienia fizycznie nieliniowe.* Metodę elementów skończonych zastosowano do analizy konstrukcji wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego, wykorzystując dwie powszechnie znane metody postępowania: metodę sztywności stycznych i metodę obciążeń początkowych.

6. *Zagadnienia liniowej i nieliniowej analizy zbiorników.* Przedstawiono wyznaczanie obciążenia granicznego dla trójwymiarowych elementów betonowych. Omówiono geometryczną idealizację konstrukcji żelbetonowych i sprężonych. Do opisu zachowania się materiału zaproponowano dwa modele ciał: model Mohra–Coulomba (trójparametrowy) oraz model pięcioparametrowy eliptyczno-paraboloidalny.

Wszystkie wykłady cieszyły się prawie pełną frekwencją. Teksty wykładów będą wydane w języku polskim przez «Ossolineum». W skład ekipy wykładowców, wybranej przez prof. J. H. ARGYRISA spośród pracowników jego Instytutu wchodził: H. P. MLEJNEK, K. A. BRAUN, D. A. NAGY, B. BICHAT, J. S. DOLTSINIS i K. J. WILLAM. Konferencja szkoleniowa zgromadziła 61 uczestników. Pracownicy szkół wyższych stanowili ponad połowę uczestników. Instytuty naukowe PAN i placówek wojskowych reprezentowane były przez 14 osób. Tyle samo uczestników reprezentowało biura projektowe i ośrodki badawczo-rozwojowe budownictwa i komunikacji. Kilku nie zarejestrowanych uczestników dojeżdżało z Warszawy. W konferencji wzięło udział 9 profesorów i docentów, 17 doktorów oraz 35 inżynierów (projektantów, asystentów i doktorantów).

Wydaje się, że konferencja szkoleniowa spełniła swe zadanie przedstawienia w sposób logiczny osiągnięć i kierunków badań w pewnym dziale mechaniki komputerowej, a także zbliżenia współczesnej problematyki badawczej i inżynierskiej do polskich środowisk technicznych.

Zainteresowanie konferencją takich ośrodków, jak Centrum Techniki Okrętowej, ETOB, Mostostal, świadczy również o technicznej przydatności konferencji.

Jacek Bauer (Warszawa)

KOŁOKWIUM EUROMECH 54
«SKOŃCZONE DEFORMACJE W TEORII PLASTYCZNOŚCI»

Jabłonna, 30 września–3 października 1974 r.

Kolokwium «Euromech 54» na temat skończonych deformacji w teorii plastyczności odbyło się w Domu Zjazdów Polskiej Akademii Nauk w Jabłonie w okresie od 30 września do 3 października 1974 r.

W obradach brało udział 42 zarejestrowanych uczestników z 13 krajów europejskich, mianowicie z: Austrii — 1, Belgii — 1, Bulgarii — 1, Czechosłowacji — 1, Anglii — 6, Francji — 4, Republiki Federalnej Niemiec — 3, Polski — 20, Rumunii — 1, Szwecji — 1, Turcji — 1, Węgier — 1, Włoch — 1. Spośród polskich uczestników Politechnikę Warszawską reprezentowała 1 osoba, Politechnikę Krakowską — 4 osoby, Politechnikę Poznańską — 2, Politechnikę Świętokrzyską — 1, oraz Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN — 12 osób.

Instytucją organizującą Kolokwium był Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk.

Przewodniczącym i organizatorem Kolokwium był prof. Antoni SAWCZUK.

W 6 sesjach ogłoszono 29 referatów, w tym 2 referaty problemowe.

Głównym celem spotkania w ramach Kolokwium Euromech jest zgromadzenie naukowców i inżynierów z krajów europejskich i umożliwienie im bezpośredniego kontaktu oraz otwartej dyskusji w celu zwiększenia efektywności prowadzonych badań.

Spotkanie niezbyt dużej grupy ludzi będących specjalistami w zakresie teorii plastyczności, rozszerzonej na zakres skończonych odkształceń, umożliwiło nawiązanie bezpośrednich kontaktów i dyskusji. O żywym zainteresowaniu świadczy niemal stuprocentowa obecność uczestników w obradach, począwszy od pierwszej do ostatniej sesji. Zainteresowanie obradami przekraczało zresztą w znacznym stopniu grono zarejestrowanych uczestników. Wielu pracowników takich instytucji, jak: Politechnika Warszawska, Uniwersytet Warszawski, WAT, ETOB, IPPT dojeżdżało codziennie do Jabłony w celu wysłuchania referatów i wzięcia udziału w dyskusjach.

Program obrad został podzielony na sesje o następującej tematyce:

1. Równania konstytutywne dla materiałów sprężysto-plastycznych przy dużych odkształceniach — aspekty fizyczne i matematyczne. W ramach tego tematu ogłoszono następujące referaty: *Behaviour of elastic-plastic solids at high pressures*, H. G. HOPKINS; *On the kinematics of elastic-plastic finite strain*, F. SIDOROFF; *Internal state variable and rate type descriptions of dynamic plasticity at finite deformations*, P. PERZYNA; *Elastic-plastic viscoplastic constitutive equations and ordinary waves*, M. PIAU; *Constitutive equations for large dynamic plastic deformations*, J. R. WILLIS; *A three-fields variational theorem for the rate problem of finite strain elasto-plasticity with discontinuous fields*, M. KLEIBER; *Continuum model of regularity jointed media*, L. W. MORLAND; *Universal deformations for thermo-elastic-plastic materials*, A. PAGLIETTI; *Variational principles for rate boundary-value problems in finite plasticity*, J. J. TELEGA; *On yielding of hyperelastic materials*, A. SAWCZUK, J. MIELNICZUK; *Theory of finite creep deformations*, K. H. GERAETS.

2. Analiza konstrukcji sprężysto-plastycznych w zakresie skończonych odkształceń — zagadnienia statyczne i dynamiczne, metody rozwiązywania zagadnień brzegowych uwzględniające różne aspekty geometrycznej nieliniowości. W ramach tego tematu ogłoszono referaty: *Axisymmetric plastic deformation using finite element method*, O. MAHRENHOLTZ, W. KLIE; *Buckle propagation in submarine pipelines*, A. C. PALMER, J. MARTIN; *Finite deformations and inelastic collapse of spherical shells under asymmetric inward radial loads*, L. M. HABIP; *Finite shear of elastic-plastic dilatant materials*, Z. MRÓZ, Cz. SZYMAŃSKI; *Une nouvelle classe de lois de comportement décrivant les grandes déformations visco-élastoplastiques*, P. GUELIN, P. STUTZ; *Experimental verification of non-coaxiality of the flow rule for granular material*, A. DRESCHER; *On the behaviour of bulk materials in complex loading*, T. HUECKEL; *Rotationally symmetric plane plastic flow of a Cosserat type Coulomb material*, N. BOGDANOVA-BONT-CHEVA, H. LIPPMANN; *On the termination of the process of finite plastic deformations*, M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI; *Optimal plastic design for large displacement*, A. GAWĘCKI, A. GARSTECKI.

3. Stateczność i jednoznaczność w zakresie skończonych odkształceń. Tytuły referatów: *Uniqueness and stability at finite deformation of elastic-plastic solids*, B. STORAKERS; *Instability conditions in the deep-drawing and stretch-forming of sheet metals*, P. B. MELLOR; *Stability analysis of rigid plastic structures at*

the yield-point load, M. K. DUSZEK; *A uniqueness theorem in the theory of finite inelastic strain*, W. KOŚCIŃSKI.

4. Inżynierskie zastosowania teorii skończonych deformacji sprężysto-plastycznych, procesy formowania metali. Tytuły referatów: *Membrane-like deformations in sheet metal forming; a comparison of Mises and Tresca approaches*, H. LIPPMANN; *Rigid perfectly-plastic analysis of beams finite-deflections under static loads*, A. GÜRKÖK, H. G. HOPKINS; *Large plastic deformations of compressed cylindrical and conical shells*, S. ŁUKASIEWICZ; *Some experiments on round restrained reinforced-concrete slabs*, C. T. MORLEY.

Dniży nacisk w obradach położono na zagadnienia formułowania związków konstytutywnych dla materiałów sprężysto-plastycznych i plastycznych w zakresie skończonych deformacji. Przedyskutowano różne podejścia w metodach opisu materiału: prędkościowe równania konstytutywne oraz wprowadzenie wewnętrznych zmiennych. W referacie generalnym H. G. HOPKINS z W. Brytanii przedstawił obecny stan wiedzy w zakresie zachowania się sprężysto-plastycznego ośrodka poddanego dużym ciśnieniom. Wykazał on podstawowe znaczenie zagadnień związanych ze specyfikacją deformacji oraz z termodynamicznymi równaniami stanu przy teoretycznym formułowaniu problemu dynamicznej propagacji fal naprężenia charakteryzujących się silną nieliniowością. Zagadnienie rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych rządzących tym problemem oraz technika numeryczna zostały również szczegółowo omówione.

Następnym zagadnieniem, na które zwrócono szczególną uwagę w czasie obrad, były problemy stateczności i jednoznaczności rozwiązań dla materiałów sprężysto-plastycznych przy skończonych deformacjach. W referacie generalnym poświęconym tym zagadnieniom B. STORAKERS ze Szwecji przedyskutował możliwości zastosowania teorii jednoznaczności i stateczności ośrodka ciągłego sformułowanej przez R. HILLA do takich konstrukcji, jak belki, płyty i powłoki. Wskazał on również na istotny wpływ początkowej niedokładności geometrycznej na nośność graniczną konstrukcji. W ramach tego zagadnienia w czasie obrad przedyskutowano analizę wpływu zmian geometrii konstrukcji spowodowanych plastyczną deformacją oraz różnej definicji obiektywnej prędkości naprężenia na zagadnienie stateczności po osiągnięciu obciążenia uplastyczniającego. Podkreślono istotne znaczenie tego zagadnienia dla praktyki inżynierskiej.

Z satysfakcją należy stwierdzić, że w czasie spotkania przedstawiono wiele wartościowych rozwiązań problemów brzegowych przy skończonych plastycznych deformacjach, niektóre z nich znajdują bezpośrednie zastosowanie w nowoczesnej technologii. Między innymi przedstawiono szczegółową analizę zachowania się sztywno idealnie plastycznej belki przy dużych przemieszczeniach, wskazując istotny wpływ sposobu zamocowania brzegów (możliwość osiowego przesuwu) na zależność obciążenie-ugięcie.

W studiach dotyczących optymalnego projektowania przy dużych plastycznych przemieszczeniach zwrócono uwagę na fakt, że optymalnie zaprojektowana konstrukcja może okazać się niestateczna w chwili uplastycznienia, podczas gdy konstrukcja projektowana według innych kryteriów (np. stały przekrój) jest stateczna.

Prezentowano interesujące rozwiązania i wyniki doświadczeń dla cylindrycznych i stożkowych powłok poddanych osiowemu ścisłaniu w zakresie dużych odkształceń.

W grupie prac poświęconych technice numerycznej przedstawiono m. in. przybliżoną metodę obliczania naprężeń i odkształceń dla zagadnień osiowo-symetrycznych przy dużych odkształceniach.

Niektóre problemy dyskutowane w czasie Kolokwium wynikały z potrzeb praktyki inżynierskiej. Do nich należą zagadnienia formowania metalu oraz nośność podwodnych rurociągów.

P. B. MELLOR (W. Brytania) omówił zagadnienia stateczności przy obciąganiu i głębokim tłoczeniu blach. Przedstawił on porównanie teoretycznie wyznaczonej granicznej prędkości tłoczenia powłok cylindrycznych z danymi eksperymentalnymi. Następnie zaproponował zastosowanie zmodyfikowanej metody, opracowanej u nas przez prof. Marciniaka, dla wyznaczania granicznych odkształceń przy obciąganiu blach.

H. LIPPMANN (RFN) wykazał, że zastosowanie prostszego warunku plastyczności Treski i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia do zagadnień osiowo-symetrycznego formowania blach prowadzi do wyników bardziej zgodnych z eksperymentem niż przy zastosowaniu nieliniowego warunku Hubera-Misesa.

A. C. PALMER (W. Brytania) przedstawił wyniki badań teoretycznych i eksperymentalnych nad zagadnieniem wpływu początkowego wybożenia podwodnych rurociągów na ich nośność. Wskazał on na niebezpieczeństwo związane z możliwością propagowania się wybożenia na duże odległości. Otrzymane

wyniki zostały wykorzystane przy projektowaniu rurociągów na Morzu Północnym. Metody teorii plastyczności pozwoliły rozwiązać ważny problem techniczny.

Jak można się zorientować z podanego spisu referatów, Kolokwium objęło także wiele innych ważnych i ciekawych zagadnień.

Dzięki referatom i dyskusjom jesteśmy w stanie wyraźniej widzieć pewne otwarte problemy, jak również wydobyc aktualnie ważne kierunki rozwoju w teorii plastycznego płynięcia przy skończonych odkształceniach. Wyraźniej się formują najważniejsze sposoby opisu sprężysto-plastycznego zachowania się materiałów, podejścia do zagadnienia pełzania w konsekwentnie nieliniowym ujęciu oraz badania stateczności w zakresie skończonych deformacji sprężysto-plastycznych.

Obrady podsumował prof. Piotr PERZYNA.

Nie przewiduje się opublikowania wygłoszonych prac w formie specjalnego wydawnictwa pokonferencyjnego, natomiast autorzy mają możliwość zamieszczenia wygłoszonych prac w specjalnym numerze «Archiwum Mechaniki Stosowanej» poświęconym tematyce kolokwium Euromech 53 i Euromech 54.

Maria Duszek (Warszawa)

SPRAWOZDANIE

z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki
Teoretycznej i Stosowanej za IV kwartał 1974 r.

I. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyło się 16 zebrań naukowych, na których wygłoszono 19 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczestników	dyskutantów
Oddział w Bydgoszczy					
1	29.11.74	A. Golik	Zastosowanie schematów strukturalnych w mechanice	12	4
2	29.11.74	Fr. Siemieniako	Analiza harmoniczna kaskad pneumatycznych	12	5
Oddział w Częstochowie					
3	22.10.74	R. Szewalski	Nowe koncepcje podwyższenia granicy sprawności i mocy jednostkowej turbin i bloków energetycznych	46	4
4	28.11.74	R. Janiczek	Łomonosow — wielka postać XVIII wieku	10	2
Oddział w Gdańsku					
5	05.12.74	J. Wekezer	Analiza prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach otwartych metodą elementów skończonych	30	11
Oddział w Gliwicach					
6	18.11.74	W. Brzozowski	Aktualna sytuacja i perspektywy budowy siłowni z generatorami MGD	14	5

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczestników	dyskutantów
Oddział w Krakowie					
7	19.12.74	M. Baczyńska	Wpływ niejednorodności stanu naprężeń w przekroju poprzecznym połączenia na obciążenia zwojów	11	6
8	19.12.74	J. Domski	Problem stempla na podłożu konsolidującym	11	
Oddział w Łodzi					
9	03.10.74	G. M. Eason (Glasgow)	Wave propagation in a naturally curved elastic rod	12	10
10	31.10.74	H. Göcke	Mechanismendynamik, speziell Koppelgetriebe-Analyse, von der Berechnung bis zur vollautomatisierten Zeichnung und Bildschirmausgabe		
11	31.10.74	H. Aurich	Probleme der statischen und dynamischen Berechnung von Werkzeugmaschinen (Gestellberechnung)		
Oddział w Poznaniu					
12	28.10.74	J. Mączyński	Nowe zastosowania teorii aproksymacji	18	4
Oddział w Szczecinie					
13	07.10.74	Z. Cywiński	Metoda Crossa w zastosowaniu do rozwiązywania cienkościennych belek ciągłych	17	5
14	19.12.74	W. Anderle	Metoda SK Berlin w żelbetowym budownictwie szkieletu	28	5
Oddział w Warszawie					
15	18.10.74	G. Lallement (Besançon)	Synteza i optymalizacja liniowych układów dynamicznych	23	2
16	18.10.74	R. Gutowski	Pewne zagadnienia syntezy nieliniowych układów dynamicznych	23	5
17	02.12.74	Z. Kączkowski	O czasoprzestrzennych elementach skończonych. Czy masa jest wektorem	26	9
Oddział we Wrocławiu					
18	08.10.74	J. Bauer	Metoda elementów skończonych w zagadnieniach górotworu	8	4
19	02.12.74	I. Kisiel	O mechanice ilów	15	6

II. Sympozja

Oddział w Gdańsku zorganizował IV Sympozjum na temat «Filtracji». Odkondu się ono w dniach 18 i 19 listopada 1974 r. z udziałem około 100 osób.

Podczas Sympozjum wygłoszono następujące referaty:

1. A. Czerwińska, *Zastosowanie metody hybrydowej do rozwiązywania odwrotnych zagadnień filtracji*,
2. B. Dembski, *Zastosowanie modelowania numerycznego do badania zjawiska przepływu wody w spękanych masach skalnych*,
3. R. Skawiński, *Eksperymentalne badania nieliniowości przepływów w ośrodkach porowatych*,
4. A. Czamara, W. Czamara, J. Kowalski, *Badania infiltracji przy sztucznym zasileniu wód gruntowych*,
5. B. Jacenkov, A. Wita, *Obliczanie filtracji w dwóch horyzontach wodonośnych przedzielonych słabo przepuszczalną warstwą*,
6. B. Jacenkov, A. Piątek, *Badania analogowe kontaktu hydraulicznego kanału z wodami podziemnymi*,
7. B. Jacenkov, A. Wita, *Hydraulika penetracji iniektu*,
8. B. Katkowska, *Badania modelowe przepływu wody na elektrycznych modelach ciągło-sieciowych*,
9. J. Flisowski, K. Knapik, A. Wieczysty, *Zastosowanie analizatora siatkowego do rozwiązywania zadań filtracji ustalonej i nieustalonej*,
10. R. Poźniak, *Zmiany kierunku przepływu wód podziemnych w rejonie zapory w okresie wstępnego napełnienia zbiornika*,
11. J. Kowalski, T. Molski, *Badanie infiltracyjnego ujęcia wody metodą analogii elektrohydrodynamicznej*,
12. B. Kordas, M. Maciejewska, *Obliczenia wydajności studni z poziomymi zbieraczami umieszczonej pod dnem zbiornika*,
13. B. Broś, J. Kowalski, B. Haszto, *Kształtowanie się filtracji w zaporze ziemnej zbiornika osadowego na drobnoziarniste odpady po przeróbce węgla kamiennego*,
14. A. Sadurski, *Przykład zastosowania metod numerycznych do analizy zespołu studzien artezyjskich*,
15. T. Sukowski, *Metody numeryczne w projektowaniu odwodnień wykopów budowlanych*.

W dyskusji nad referatami zabrało głos 31 osób.

III. Kursy

1. Oddział w Częstochowie przeprowadził kurs na temat «Wstęp do teorii systemów wielkich». Kurs obejmował 30 godzin wykładowych. Prowadził go dr R. Krzywiec. W kursie uczestniczyło 36 osób.

2. Oddział w Poznaniu przeprowadził kurs na tematy: A. Teoria zniszczenia, B. Teoria aproksymacji. Kurs trwał od 11 listopada do 16 grudnia 1974 r. i obejmował 6 wykładów. W kursie uczestniczyło 30 osób.

IV. Konkursy

1. Oddział w Gdańsku przeprowadził ogólnokrajowy konkurs na prace teoretyczne z dziedziny mechaniki. Zgłoszono ogółem 23 prace.

Dwie drugie nagrody po zł 8000 — otrzymali: dr Wiesław KUFEL za pracę pt. *Sterowana dyskretyzacja płyty i powłok*; mgr Elżbieta FILIPOW-CISKOWSKA za pracę pt. *Model symulacji losowych pól odchylenia w zastosowaniu do dwuwymiarowych zagadnień technicznych*.

Dwie trzecie nagrody po zł 5000 — otrzymali: dr inż. Walerian SZYSZKOWSKI za pracę pt. *Analiza bardzo dużych ugięć sprężystych ściskanych osiowo powłok walcowych i stożkowych*; dr inż. Wiesław WOJEWÓDZKI za pracę pt. *Pelzanie konstrukcji w zmiennych warunkach obciążenia i temperatury*.

Wyróżnienia otrzymali: mgr inż. Grzegorz JEMIBLITA za pracę pt. *Techniczna teoria płyty*; mgr. inż. Wiesław OSTACHOWICZ za pracę pt. *Dyskretny model obliczania drgań własnych i stateczności prętów osiowo obciążonych o dowolnie zmiennym przekroju*; dr Jerzy WEKEZER za pracę pt. *Statyka prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach otwartych*.

2. Oddział w Częstochowie przeprowadził konkurs na prace doświadczalne z mechaniki technicznej. Wpłynęło 18 prac.

Pierwszej nagrody postanowiono nie przyznać.

Drugą nagrodę w wysokości zł 8000 — przyznano dr. Tadeuszowi BEDNARSKIEMU (z Warszawy) za pracę pt. *Wyznaczenie elementów kinematyki procesów metodą stereo-fotograficzno-rzutową*.

Dwie równorzędne trzecie nagrody po zł 5000 — otrzymali: mgr inż. Reinhold KALUŻA (z Opola) za pracę pt. *Analiza statyczna powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej przy nierównomiernych przemieszczeniach jej dolnego brzegu w aspekcie badań modelowych*; mgr inż. Janusz WILCZYŃSKI (z Częstochowy) za pracę pt. *Wpływ podłużnego gradientu ciśnienia na pole prędkości za palisadą płaskich płytek*.

Trzy wyróżnienia otrzymali: dr Andrzej DRESCHER (z Warszawy) za pracę pt. *Zastosowanie elastooptyki do badania praw plastycznego płynięcia ośrodków rozdrobionych* — zł 2000; dr inż. Stanisław OCHELSKI, prof. dr hab. Zbigniew ORŁOŚ, mgr inż. Manfred SZOPA, mgr inż. Kazimierz TOMASZEWSKI (z Warszawy) za pracę pt. *Wytrzymałościowe badania modeli zbiorników ciśnieniowych* — zł 3000; dr inż. Karol WYLEŻYCH (z Gliwic) za pracę pt. *Wyznaczanie charakterystyk dynamicznych gumy przy periodycznym skręcaniu walca pełnego. Zastosowanie sterowanego impulsu do pomiaru kąta stratności* — zł 2000.

V. Działalność wydawnicza

1. Oddział w Gdańsku wydał materiały konferencyjne na Sympozjum na temat «Filtracji».

2. Czwarty zeszyt MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ o objętości 14,5 arkusza wydawniczego ukazał się w styczniu 1975 r.

VI. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach PTMTS ilustruje następująca tabela:

Lp.	Oddział	Stan na koniec III kw. 74	Stan na koniec IV kw. 74	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym
1	Bydgoszcz	20	21	+1
2	Częstochowa	37	37	—
3	Gdańsk	50	53	+3
4	Gliwice	120	122	+2
5	Kraków	73	74	+1
6	Łódź	39	44	+5
7	Poznań	57	58	+1
8	Rzeszów	11	11	—
9	Szczecin	31	31	—
10	Warszawa	211	219	+8
11	Wrocław	64	64	—
	R a z e m	713	734	21

W okresie sprawozdawczym odbyło się plenarne zebranie Zarządu Głównego Towarzystwa, zebranie prezydium Zarządu Głównego oraz 21 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

**SPRAWOZDANIE Z VI SYMPOZJUM
«DRGANIA W UKŁADACH FIZYCZNYCH»
Poznań, 6—7 września 1974 r.**

Politechnika Poznańska i Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (Oddział w Poznaniu) zorganizowały w Poznaniu w dniach 6—7 września 1974 r. VI Sympozjum «Drgania w Układach Fizycznych». Jednym z inicjatorów tych spotkań w Poznaniu i ich organizatorem był dr Edmund KARAŚKIEWICZ — profesor zwyczajny i długoletni kierownik Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej. Sympozjum było wyrazem pamięci i stanowi kontynuację prac prowadzonych przez dotychczasowego organizatora poznańskich spotkań profesora Edmunda KARAŚKIEWICZA.

Sympozjum było roboczą platformą pracowników nauki i techniki zainteresowanych problematyką drgań i dynamiką układów mechanicznych.

Z uwagi na ograniczony czas trwania i liczbę zgłoszonych referatów obrady Sympozjum prowadzone były w dwóch sekcjach:

Sekcja A — «Ogólne zagadnienia teorii drgań» (pod przewodnictwem prof. dr. hab. inż. Romana GUTOWSKIEGO),

Sekcja B — «Zastosowanie teorii drgań» (pod przewodnictwem prof. dr. hab. inż. Zbigniewa OSIŃSKIEGO).

W ramach Sympozjum wygłoszono następujące referaty:

Referaty plenarne

1. Roman GUTOWSKI, *Ruch programowy (synteza) nieliniowych układów drgających.*
2. Zbigniew OSIŃSKI, *Drgania maszyn przy wymuszeniach o charakterze impulsowym, zdeterminowane i przypadkowe.*

Referaty w sekcji A — Ciągłe i dyskretne modele matematyczne obiektów dynamicznych, istnienie i stateczność rozwiązań oscylacyjnych, układy samowzbudne parametryczne itp., metody numeryczne teorii drgań.

1. Józef BAJKOWSKI, Wanda SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Obszary przyciągania rezonansu kombinowanego w nieliniowym układzie o dwóch stopniach swobody.*
2. Czesław CEMPEL, Antoni KUŚNIERZ, *Drgania giętne belek o nieciągłych własnościach.*
3. Zbigniew DŻYGADŁO, *Numeryczna analiza drgań odcztałcałnego samolotu lub rakiety metodą elementów skończonych.*
4. Włodzimierz GAWROŃSKI, *Wpływ błędów pomiarowych i wariacji parametrów układu na częstość drgań własnych.*
5. Jerzy KIERKOWSKI, *Analiza drgań płyty prostokątnej o zmiennej grubości metodą elementów skończonych.*
6. Witold KOŚCIŃSKI, *Zachowanie się amplitud fali przyspieszenia i fali uderzeniowej w ośrodkach niesprężystych.*
7. Stefan KOTOWSKI, *Badania jakościowe rozwiązań układu o dwóch stopniach swobody.*
8. Robert KRZYWIEC, *O systemowym formułowaniu zagadnień drgań nieliniowych. Systemy wielkie drgań kwadratowych.*
9. Jerzy MARYNIAK, Zdobysław GORAJ, *Wpływ sztywności układu sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu.*
10. Agnieszka MUSZYŃSKA, *Ruch symetrycznego wirnika.*
11. Józef NIZIOŁ, *Drgania i stabilność żyroskopu całkującego w ujęciu nieliniowym.*
12. Józef NIZIOŁ, *Drgania nieliniowe żyroskopu całkującego w ujęciu probabilistycznym.*
13. Ryszard PISKORSKI, *Dynamika układu ciągłego o zmiennej strukturze.*
14. Andrzej SZYDŁOWSKI, *O pewnych kryteriach stateczności ruchu.*
15. Andrzej ŚWIDER, *Drgania samowzbudne z wymuszeniem układu prętowego.*
16. Andrzej TOMCZYK, Wanda SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *O pewnej przybliżonej metodzie optymalnej stabilizacji drgań nieliniowego układu dynamicznego o wielu stopniach swobody.*
17. Zbigniew WALCZYK, *Badanie stabilności ruchu liniowych układów ciągłych i zastosowanie do badania ruchu wirników wielopodporowych.*
18. Józef WIĘCKOWSKI, *Dynamika belek o zmiennej strukturze.*

Referaty w sekcji B — Identyfikacja i modelowanie obiektów dynamicznych, drgania maszyn i urządzeń — analiza, synteza, minimalizacja drgań, wibroizolacja, wibrotechnika.

1. Bogdan ADAMCZYK, Wiesława KUNISZYK-JÓŹKOWIAK, Elżbieta SADOWSKA, Ferdynand JAGIEŁŁO, *Badanie rozchodzenia się fal podłużnych w stalowych spiralach śrubowych.*
2. Arkadiusz BARCZAK, Mieczysław OFIERZYŃSKI, *Przybliżona analiza drgań bocznych nadwozia wagonu dla nieliniowego układu zawieszenia.*
3. Stefan BERCZYŃSKI, Andrzej WITEK, *Analityczne wyznaczanie własności dynamicznych belek frezarek wspornikowych.*
4. Czesław CEMPEL, Urszula KOSIEL, *Identyfikacja obiektów mechanicznych — przegląd metod.*
5. Czesław CEMPEL, Ewa RUNGE, *Identyfikacja wymuszeń wąskopasmowych metodą trzech parametrów.*
6. Czesław CEMPEL, *Podatnościowa koncepcja uderzeniowego wielomasowego eliminatora drgań UWED.*
7. Czesław CEMPEL, Ryszard NOWICKI, *Dynamika grupy maszyn podobnych osadzonych na wspólnym fundamencie.*
8. Czesław CEMPEL, Marek MAJEWSKI, *Optymalizacja oddziaływań w układzie człowiek-operator-ręczne narzędzie udarowe.*
9. Czesław CEMPEL, Marek MAJEWSKI, *Identyfikacja własności dynamicznych ręki człowieka — operatora we współpracy z narzędziem wibracyjnym.*
10. Czesław CEMPEL, Zdzisław GOLEC, *Uderzeniowy wielomasowy eliminator drgań (UWED) przy wymuszeniu poliharmonicznym.*
11. Sławomir JANECKI, *Wytrzymałość i drgania łopatek wirnikowych ostatnich stopni turbin parowych.*
12. Eugeniusz KAMIŃSKI, *Układy amortyzujące o zmiennej strukturze.*
13. Henryk KAŹMIERCZAK, *Wpływ parametrów mechanicznych podpory na dynamikę amortyzowanego układu.*
14. Henryk KUBZDELA, *Archiwizacja drgań maszyn na taśmie magnetofonowej.*
15. Antoni KUŚNIERZ, *Zastosowanie uderzeniowego eliminatora drgań do minimalizacji dynamiczności jednowymiarowych układów ciągłych.*
16. Władysław LISEWSKI, Andrzej LACHOWICZ, *Doświadczalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych układu masowo-sprężystego frezarek wspornikowych.*
17. Stanisław MICHAŁOWSKI, *Optymalny dobór elementów zawieszenia sprzężarki tlokowej.*
18. Edward MOTAK, *Wibroizolacja powierzchniowa fundamentów maszyn i urządzeń.*
19. Mieczysław OFIERZYŃSKI, *O wpływie zawieszenia nadwozia na stateczność biegu pojazdu szynowego.*
20. Edward PIOTROWSKI, *Dynamika symetrycznego ruchu samolotu PSL w fazie przejściowej z uwzględnieniem analizy pracy kanału podłużnego autopilota.*
21. Franciszek PRZYSTUPA, Włodzimierz WŁODARSKI, Marek PRZYSTUPA, *Tłumiki drgań skrętnych układów napędowych z przegubami Cardana.*
22. Wojciech SAŁATA, *Zastosowanie kompensacji bezwładnościowej do wibroizolacji ręcznych narzędzi udarowych.*
23. Jerzy SZCZYGIEŁ, *Sily tarcia wewnętrznego w wybranych materiałach konstrukcyjnych przy jednoosiowych stanach naprężeń.*
24. Jerzy WAPIENNIK, *Badanie stateczności pewnego układu mechanicznego z uderzeniowym tłumikiem dynamicznym.*
25. Józef WOJNAROWSKI, Andrzej BUCHACZ, *Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych do wyznaczania widma częstości drgań własnych.*

Ogółem w Sympozjum wzięło udział około 120 uczestników z całej Polski.

Jerzy Maryniak (Poznań)

KRAJOWY KONKURS NAUKOWY NA PRACE DOŚWIADCZALNE Z MECHANIKI

Gliwicki Oddział PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS w Warszawie ogłasza Krajowy Konkurs na prace doświadczalne z mechaniki.

W konkursie mogą brać udział tylko członkowie PTMTS, nie posiadający tytułu profesora, docenta lub stopnia doktora habilitowanego.

Prace konkursowe, zawierające elementy nowości w stosunku do aktualnego stanu wiedzy, należy przesłać do Sekretariatu Oddziału Gliwickiego PTMTS (ul. Powstańców 12, p. 24, 44-100 Gliwice, Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej) w terminie do dnia 15 września 1975 r.

Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani zgłoszona do druku. Maszynopis pracy należy przesłać w 3 egzemplarzach w formie nadającej się do druku; jego objętość nie powinna przekraczać 15 stron nie licząc rysunków i wykresów.

Pracę należy opatrzyć godłem, a nazwisko, imię i adres uczestnika wraz z podaniem miejsca pracy podać w zamkniętej kopercie.

Dopuszczone do konkursu prace uczestnicy zreferują na publicznym zebraniu naukowym w terminie określonym przez Zarząd.

Prace oceniać będzie Sąd konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału w porozumieniu z Zarządem Głównym.

Konkurs prowadzony będzie zgodnie z regulaminem Konkursów Naukowych PTMTS.

Nagrody

I — 12.000 zł

II — 8.000 zł

dwie III po 5.000 zł

Zarząd Oddziału zastrzega sobie prawo nieprzyznania lub innego podziału nagród.

KOMUNIKAT

OGÓLNOKRAJOWY KONKURS NA NAJLEPSZĄ PRACĘ Z DZIEDZINY MECHANIKI (z wyłączeniem prac natury czysto doświadczalnej)

Oddział Łódzki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zgodnie z decyzją Zarządu Głównego ogłasza konkurs

na najlepszą pracę z dziedziny mechaniki
(z wyłączeniem prac natury czysto doświadczalnej)

Konkurs jest ograniczony, dostępny tylko dla członków PTMTS nie posiadających tytułu profesora, docenta lub stopnia doktora habilitowanego. Za najlepsze prace zostaną przyznane następujące nagrody

I nagroda — 12.000 zł

II nagroda — 8.000 zł

III nagroda — 6.000 zł

IV nagroda — 4.000 zł

Prace konkursowe należy przysłać do dnia 10 października 1975 r. na ręce sekretarza Łódzkiego Oddziału PTMTS doc. dr J. Ziółkowskiego, Politechnika Łódzka, Instytut Maszyn i Urządzeń Włókienniczych, ul. Żeromskiego 116, 90-924 Łódź.

Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani złożona do druku. Maszynopis pracy należy przesłać w 3 egzemplarzach; jego objętość nie powinna przekraczać 20 stron.

Konkurs prowadzony będzie zgodnie z regulaminem Konkursów Naukowych PTMTS.

Zarząd Oddziału zastrzega sobie prawo nieprzyznania lub innego podziału nagród.

KOMUNIKAT

Zarząd Oddziału Gliwickiego PTMTS organizuje XV Jubileuszowy Sympozjon pod hasłem «Optymalizacja w Mechanice», który odbędzie się w Beskidzie Śląskim w lutym 1976 r. i obejmować będzie następujące grupy problemowe:

1. Procesy i systemy cieplne
2. Maszyny i urządzenia energetyczne

3. Sterowanie optymalne
4. Dynamika maszyn
5. Odształcalne ustroje prętowe i powierzchniowe
6. Metody eksperymentalne i modelowanie układów
7. Teoria konstrukcji
8. Metody statystyczne

Korespondencję w sprawie Sympozjum prosimy kierować pod adresem: Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Oddział w Gliwicach, 44-101 Gliwice, ul. Powstańców 12, pok. 24, tel. 91-10-01 do 03, w. 3.

**SYMPOZJA
MIĘDZYNARODOWEJ UNII MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ (IUTAM)
1975**

IUTAM Symposium on the Dynamics of Vehicles on Roads and Railway Tracks

Miejsce: Delft University of Technology, Delft, Netherlands

Data: 18-22 sierpnia 1975

Przewodniczący: dr H. B. PACEJKA, Vehicle Research Lab., Mekelweg 2, Delft, Netherlands

Second IUTAM Symposium Transsonicum

Miejsce: Göttingen, BRD

Data: 8-13 września 1975

Przewodniczący: prof. K. OSWATITSCH, Inst. für Strömungslehre Technische Hochschule Wien, 1040 Wien, Karlplatz 13, Austria

Joint IUTAM/IMU Symposium on Application of Methods of Functional Analysis to Problems of Mechanics

Miejsce: Marseille, France

Data: 2-6 września 1975

Przewodniczący: prof. P. GERMAIN, Université Paris VI, Mécanique Théorique-Tour 66-4, Place Jussieu, 75 230 Paris, Cedex D5, France

Joint IUTAM/IUPAB Symposium on Biodynamics of Animal Locomotion

Miejsce: Cambridge, UK

Data: 1-5 września 1975

Przewodniczący: prof. Sir James LIGHTHILL, Dept. of Applied Mathematics and Theoretical Physics, The University of Cambridge, Silver Street, Cambridge, UK

IUTAM Symposium on Aeroelasticity in Turbomachines

Miejsce: Paris, France

Data: 20-25 października 1975

Przewodniczący: prof. R. LEGENDRE, O.N.E.R.A., 29, Avenue de la Division Leclerc, 92 Chatillon, France

1976

IUTAM Symposium on Structure of Turbulence and Drag Reduction

Miejsce: Washington, D.C. or Pennsylvania, USA

Data: 7-12 czerwca 1976.

Przewodniczący: dr F. N. FRENKIEL, Computation and Mathematics Dept. Naval Ship Research and Development Center, Bethesda, Maryland 20034, USA

IUTAM Symposium on Stochastic Problems in Dynamics

Miejsce: Southampton, UK

Data: 19-23 lipca 1976

Przewodniczący: prof. B. L. CLARKSON, Inst. of Sound and Vibration Research, University of Southampton, Southampton, UK

IUTAM Symposium on Surface Gravity Waves in Water of Varying Depth

Miejsce: Canberra, Australia

Data: lipiec 1976

Przewodniczący: prof. J. R. RADOK, The Horace Lamb Institute of Oceanography, 9 Emily Avenue Clapham, South Australia 5062

14th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics

Miejsce: Delft, Netherlands

Data: 30 sierpnia — 4 września 1976

Korespondencję należy przesyłać pod adresem:

IUTAM 1976 c/o KIVI

23 Prinsessegracht, The Hague, Netherlands

1977

IUTAM Symposium on High Velocity Deformation of Solids

Miejsce: Tokyo, Japan

Data: 1977

Przewodniczący: prof. S. FUKUI, c/o prof. K. KAWATA, Inst. of Space and Aeronautical Science University of Tokyo, 4-6-1, Komaba, Meguro-ku Tokyo, Japan

IUTAM Symposium on Modern Problems in Elastic Wave Propagation

Miejsce: nie jest jeszcze ustalone

Data: 1977

Współprzewodniczący: prof. J. D. ACHENBACH, The Technological Institute, Northwestern University, Evanston, Ill. 60201, USA and
prof. J. MIKLOWITZ, Division of Engineering and Applied Science, California Institute of Technology, Pasadena, California 91109, USA

Second IUTAM Symposium on Rotating Fluids

Miejsce i data: nie są jeszcze ustalone

Przewodniczący: nie jest jeszcze wyznaczony

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- S. KOSAŃDA, Badania i obliczenia prędkości rozwoju pęknięć zmęczeniowych
Исследование и расчёт скорости распространения усталостных трещин
Investigation and evaluation of fatigue cracks growth rate
- S. KOSAŃDA, J. KOZUBOWSKI, O możliwości rozszerzenia metodyki badań powierzchni pęknięć zmęczeniowych
О возможностях расширения методов исследования поверхности усталостных трещин
On the possibility of widening the range of methods of investigation of fatigue crack surface
- E. WALICKI, Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi: nieruchomą i drgającą skrętnie
Течение вязкой жидкости в щели между двумя поверхностями вращения из которых одна неподвижна а вторая совершает крутильные колебания
Viscous fluid flow through in a slot between two surfaces of revolution: one of them fixed and the other one — torsionally oscillating
- H. OLESIAK, A. P. WILCZYŃSKI, O pewnych możliwościach zastosowania tarcz ściskanych w badaniach materiałowych
О некоторых возможностях применения сжимаемых дисков для определения механических констант материала
On possibilities of applications of compressed discs in material testing
- A. TROJNACKI, Wpływ tarcia w przegubach na przebieg wyboczenia pręta ściskanego
Влияние трения в шарнирах на процесс продольного изгиба сжатого стержня
The influence of friction in the hinges on the buckling process of a column
- Z. KUROWSKI, S. OSNELSKI, Ekstrapolacyjna metoda opisu prób pełzania przy obciążeniach wielostopniowych
Экстраполяционный метод описания испытаний на ползучесть при многоступенчатых нагрузках
Extrapolation method of description of creep tests at multi-step loadings
- A. GOŁĘBIEWSKA-LASOTA, A. P. WILCZYŃSKI, Izotropia jako przypadek graniczny wieloskładnikowego ośrodka ortotropowego
Изотропия, как предельный случай многокомпонентной ортотропной среды
Isotropy as the limiting case of orthotropic multiphase media
- F. TWARDOSZ, T. WEGNER, Obrotowo-symetryczne drgania własne powłoki stożkowej z materiału ściśliwego nieliniowo sprężystego
Собственные круглосимметрические колебания конической оболочки на сжимаемого нелинейно-упругого материала
Rotationally symmetric free vibrations of a conical shell made of compressible, non-linear elastic material
- J. ŁUCZKO, Wpływ dodatkowych nieliniowych zaburzeń na charakterystyki probabilistyczne klasycznych równań opisujących drgania samowzbudne
Влияние дополнительных нелинейных возмущений на вероятностные характеристики классических уравнений описывающих колебания самовозбуждающихся систем
Influence of additional non-linear perturbations on the probabilistic characteristics of classical equations describing self-excited vibrations
- B. ROGOWSKI, O strukturze rozwiązań w zagadnieniach płyt ortotropowych
О структуре решений задач об ортотропных пластинах
On the structure of solutions in the problems of orthotropic plates

- T. BEDNARSKI, Wyznaczanie kinematyki procesów deformacji metodą stereofotograficzno-rzutową
Стереофотограмметрический проективный метод определения кинематики процессов деформации
Determination of the kinematics of deformation processes by stereophotogrammetric projective method
- S. OSNIELSKI, Z. ORŁOŚ, M. SZOPA, K. TOMASZEWSKI, Wytrzymałościowe badania modeli zbiorników ciśnieniowych
Прочностные исследования моделей сосудов давления
Strength investigations of pressure vessel models
- W. OSTASNOWICZ, Dyskretny model obliczania drgań własnych i stateczności prętów osiowo obciążonych o dowolnie zmiennym przekroju
Дискретная модель для расчета устойчивости и собственных колебаний нагруженных вдоль оси стержней переменного сечения
The discrete model of calculation of natural vibration frequency and stability of axially loaded rods with arbitrarily variable cross-sections
- K. WYŁEŻYCH, Wyznaczanie charakterystyk dynamicznych gumy przy periodycznym skręcaniu walca pełnego. Zastosowanie sterowanego impulsu do pomiaru kąta stratności
Определение динамических характеристик резины при периодической скручивании сплошного цилиндра. Применение управляемого импульса для замера угла потерь
Determination of dynamic characteristics of rubber at the periodic twist of a solid cylinder.
Application of the controlled impulse to the loss angle measurement

Cena zł 30.—

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Prenumeratory indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter), 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
