

Ju 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 13 • ZESZYT 1



Pw

WARSZAWA 1975

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

<p>J. STURNICKI, Rola i metody doświadczalnej analizy naprężeń w rozwiązywaniu współczesnych problemów mechaniki ciała stałego Роль и экспериментальные методы анализа напряжений в решении современных задач механики твердого тела Role and experimental methods of stress analysis in solutions of contemporary solid mechanics problems</p>	3
<p>J. GIERLIŃSKI, Przybliżone obliczanie płaskich prętowych przekryć strukturalnych Приближенный расчет плоских стержневых структурных перекрытий Approximate calculations of a rod structural plate</p>	21
<p>R. KRZYWIŚC, O modelowaniu wału wielopodporowego z wieloma tarczami za pomocą wielkiego systemu bioscylatorów. Cz. II. Bioscylatory wielowskaźnikowe. Modelowanie wału О моделировании многоподшипникового вала со многими дисками с помощью большой системы биосцилляторов. Часть II. Биосцилляторы со многими индексами. Моделирование вала On modelling the multi-span shafts with several discs by means of a great system of bi-oscillators. Part. II. Multi-indicial bi-oscillators. Modelling of a shaft</p>	41
<p>J. SKŁADZIEŃ, Analiza konwekcyjnego rekuperatora pętlicowego z krzyżowym przepływem czynników Анализ конвекционного петлевого рекуператора с перекрестными потоками теплоносителей Analysis of the convective crossflow loop recuperator</p>	57
<p>B. ROGOWSKI, Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego Функции перемещений для упругой трансверсально-изотропной среды Displacement functions for transversally isotropic media</p>	69
<p>J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, Numeryczne rozwiązanie problemu drgań własnych na przykładzie płyt Численное решение задачи о собственных колебаниях на примере плит Numerical solution to the problem of free vibrations using plates as the example</p>	85
<p>T. KUŹMICEWICZ, Dynamika liny odwijającej się z ruchomego obiektu latającego Динамика троса разматывающегося из подвижного объекта Dynamics of a cable winding off from a moving flying object</p>	95
<p>A. PIENIAŻEK, W. PIENIAŻEK, Stateczność techniczna drgań bocznych pojedynczego zestawu kołowego poruszającego się wzdłuż toru z nieliniową sprężystością poprzeczną Техническая устойчивость боковых колебаний единичного подвижного состава, движущегося по рельсам с нелинейной поперечной упругостью Technical stability of lateral vibrations of a single wheel set moving along the rail with non-linear lateral elasticity</p>	107
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	117

71720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 13 · ZESZYT 1

WARSZAWA 1975

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY, WŁADYSŁAW BOGUSZ, IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (590+110) egz. Arkuszy wydawn. 11,5. Arkuszy drukarskich 8,75. Papier druk. sat. III kl. 70 g. 70×100. Oddano do składania 13.XI. 1974 r. Druk ukończono w kwietniu 1975 r. Zam. 1659/74. B-58 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROLA I METODY DOŚWIADCZALNEJ ANALIZY NAPRĘŻEŃ W ROZWIĄZYWANIU
WSPÓŁCZESNYCH PROBLEMÓW MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO*)

JACEK STUPNICKI (WARSZAWA)

Postępujący w szybkim tempie rozwój przybliżonych metod obliczeniowych i rozwój metod symulacji na maszynach analogowych mogą wywołać wrażenie, że następuje zmierzch badań doświadczalnych. Prowadzenie pomiarów na rzeczywistych obiektach lub na modelach jest na ogół bardzo pracochłonne. Znacznie szybciej i taniej można obecnie wykonywać numeryczne i analogowe badania uzyskując wyniki, których dokładność, liczona w ułamkach procenta, zdaje się gwarantować ich niepodważalność. Nastąpił więc spadek zapotrzebowania ze strony przemysłu na prace usługowe, co ograniczyło fundusze laboratoriów. W krajach o wieloletnich tradycjach w dziedzinie badań doświadczalnych widoczne było zahamowanie rozwoju ośrodków badawczych.

Stagnacja w badaniach doświadczalnych nie trwała długo, ostatnie lata przynoszą wzrost zainteresowania badaniami doświadczalnymi o nieco innym charakterze niż poprzednio. Nie podejmuje się obecnie prac doświadczalnych, które można zastąpić analizą numeryczną. Rola współczesnych metod doświadczalnych uwydatnia się przede wszystkim w badaniach podstawowych. Ich pierwszoplanowa funkcja, to obserwacja nowych zjawisk lub zjawisk dotychczas nie zauważonych. Funkcja drugoplanowa, to weryfikacja prawdziwości założeń przyjętych podczas budowy modeli matematycznych i sprawdzenie dopuszczalności poczynionych uproszczeń.

W zakresie doświadczalnej analizy naprężeń badania doświadczalne są niezastąpione w zagadnieniach kontaktowych, w szeroko pojętych zagadnieniach dynamicznych układów o złożonej geometrii, w zagadnieniach lepkosprężystych, lepkoplastycznych lub w układach o własnościach anizotropowych. Stało się jasne, że dla harmonijnego rozwoju wszystkich dziedzin muszą być ożywione laboratoria i musi być przywrócone ich znaczenie.

Istnieje ogromna różnorodność metod doświadczalnych. Stając przed koniecznością dokonania wyboru metod wartych prezentacji na Sympozjum, przyjąłem zasadę omówienia tych, które okazały się w ostatnich latach najbardziej efektywne, lub tych, które roszą nadzieję nowych możliwości.

Stare metody badań mogą dać ciekawe informacje, jeśli zostaną użyte poza tradycyjnymi dziedzinami zastosowań. Jednakże na ogół nowe zadania wymagają zwykle nowych metod. Daje się zauważyć powszechną dążność w tym kierunku. W zakresie np. metod optycznych — wykorzystanie: efektu Kerra (dwójłomności w polu elektrycznym), efektu

*) Referat przeglądowy wygłoszony na VI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa 19–20.IX.1974 r. Sprawozdanie z obrad Sympozjum jest zamieszczone w Biuletynie Informacyjnym niniejszego numeru MTiS.

Cotton–Moutona (dwójłomności w polu magnetycznym), efektu Faradaya (skręcenia płaszczyzny polaryzacji w polu magnetycznym).

Możliwość wciągnięcia dodatkowych pól fizycznych do badań trójwymiarowych stanów naprężeń dyskutował H. K. ABEN [1, 2]. Stwierdził on konieczność rozszerzenia klasy przypadków, które mogą być badane na polaryskopach, na modele przestrzenne o nieliniowej zmianie naprężeń wzdłuż osi przechodzącego promienia. Główną trudnością na tej drodze jest zbyt proste wyrażenie na opóźnienie fazowe głównych drgań opuszczających model

$$(1) \quad \delta = C \int_0^h (\sigma_1 - \sigma_2) dz.$$

Równanie (1) wyrażające ogólne prawo Wertheima wykazuje, że niemożliwe jest na bazie pomiarów optycznych (końcowych) otrzymanie informacji na temat rozkładu naprężeń wzdłuż drogi promienia.

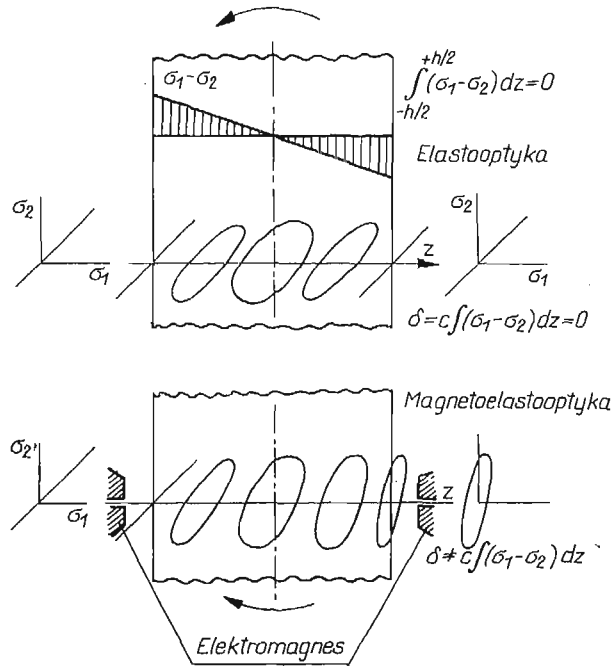
Jeśli w modelu zachodzi obrót głównych płaszczyzn polaryzacji spowodowany zmianą kierunku naprężeń głównych $d\varphi/dz$ lub spowodowany dodatkowymi polami $d\psi/dz$, prawo Wertheima przestaje być prawdziwe. Równania elastooptyczne zawierające informacje na temat rozkładu naprężeń wzdłuż osi promienia mogą być wówczas wyrażone następująco [2]:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dE_1}{dz} &= i \frac{C}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) E_1 + \frac{d}{dz} (\varphi - \psi) E_2, \\ \frac{dE_2}{dz} &= -\frac{d}{dz} (\varphi - \psi) + i \frac{C}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) E_2, \end{aligned}$$

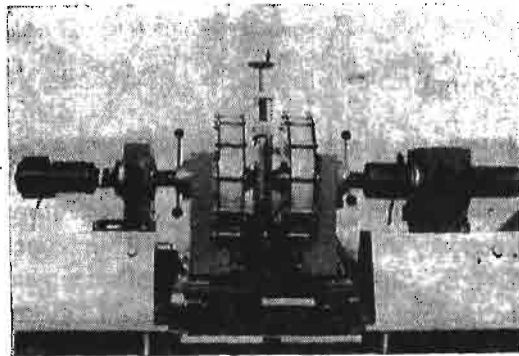
gdzie E_1 i E_2 oznaczają składowe wektora natężenia światła, o kierunkach naprężeń głównych σ_1 i σ_2 . Dlatego, wprowadzając sztucznie obrót płaszczyzny polaryzacji lub obrót kierunków głównych naprężeń, można badać trójwymiarowe stany naprężeń na polaryskopach transmisyjnych. H. K. ABEN rozważa możliwość uzyskania obrotu płaszczyzn polaryzacji przez stosowanie modeli o uprzednio zamrożonych polach naprężeń (metoda proponowana przez DRUCKERA w 1942 r. [4]), przez wykonanie modeli z optycznie aktywnych polimerów [5], które charakteryzują się zdolnościami skręcenia płaszczyzny polaryzacji bez istnienia naprężeń, oraz przez stosowanie silnych pól magnetycznych.

W kolejnej publikacji [3] ABEN podaje wartości naprężeń uzyskane podczas badania na magnetopolaryskopie płyty z otworem kołowym zginanej w płaszczyźnie osi otworu (rys. 1, 2). Otrzymane wartości współczynnika koncentracji naprężeń porównane z jedynym teoretycznym rozwiązaniem dla płyty nieskończonej i z szeregiem wyników doświadczalnych uzyskanych innymi metodami wykazują interesującą zbieżność.

Drugim przykładem poszukiwań nowych efektów, które mogą być wykorzystane w badaniach materii, jest praca S. PAUTHIER-CAMIER [6]. Autorka, poza rozpatrywaniem możliwości wykorzystania dodatkowych pól, zwraca uwagę na tak proste metody, jak: pomiar współczynnika załamania światła, pomiar absorpcji światła i pomiar dichroizmu. Są to metody dotychczas nie wykorzystywane, a mogące dostarczyć informacji o zmianach w strukturze materii, przy czym pomiarowy strumień światła nie wywołuje żadnych zniekształceń analizowanej struktury.



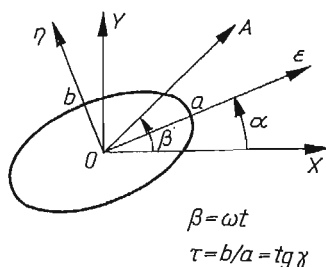
Rys. 1



Rys. 2

Prowadzone są poszukiwania sposobów uściślenia danych otrzymywanych z badań metodami uznanymi za tradycyjne. Przykładem może być tu praca J. EBBENI [7] na temat wyznaczania odkształceń złożonych, przestrzennych konstrukcji z materiałów nieprzezroczystych, o powierzchniach rozpraszających światło. Wiadomo, że dla takich konstrukcji uzyskane metodą holograficzną obrazy, poza nielicznymi przypadkami, są trudne do interpretacji. Wyznaczenie odkształceń jest wówczas niemożliwe. W proponowanej metodzie, przez zastosowanie kombinacji holografii i metody rastrów, autor uzyskał pola odkształceń tak złożonych struktur, jak szkielety kostne.

W zakresie automatyzacji pomiarów elastoptycznych uznanie zdobyła metoda elektro-
nicznego pomiaru składowych eliptycznie spolaryzowanego światła [8]. Promień spolary-
zowanego eliptycznie światła jest jednoznacznie określony przez stosunek półosi elipsy,
orientację jednej z półosi oraz kierunek obrotu promienia. Zgodnie z oznaczeniami poda-
nymi na rys. 3 dłuższa półoś elipsy tworzy kąt α z poziomą osią układu odniesienia. Elip-



Rys. 3

tyczność promienia $\tau = b/a = \operatorname{tg} \gamma$. Energia światła przechodzącego przez analizator
o płaszczyźnie polaryzacji OA tworzącej kąt β z osią x może być wyrażona jako

$$(3) \quad E = \frac{a^2 + b^2}{2} \left[1 + \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \cos 2(\beta - \alpha) \right] = \frac{a^2 + b^2}{2} \left[1 + \cos 2\gamma \cos 2(\beta - \alpha) \right].$$

Jeśli analizator obracać ze stałą prędkością, to strumień światła przechodzącego można
rozłożyć na dwa składniki: jeden o stałej energii

$$E_1 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

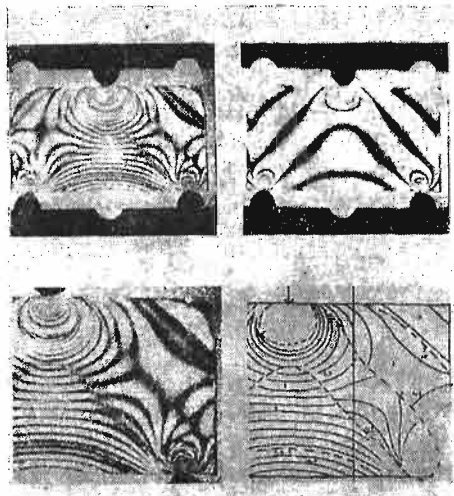
i drugi o zmieniającej się energii

$$(4) \quad E_2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \left[\frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \cos 2(\omega t - \alpha) \right].$$

Jeśli natężenie światła przechodzącego mierzyć za pomocą fotopowielacza, otrzymamy
zmodulowany sygnał zawierający interesujące informacje. Mierzone dwa napięcia V_1 i V_2
są proporcjonalne do E_1 i E_2 . Stosunek amplitudy zmiennego napięcia V_2 do stałego
napięcia V_1 określa eliptyczność promienia. Faza 2α sygnału V_2 , który zmienia się z pod-
wójną częstotliwością obrotów analizatora $2\omega t$, określa zwrot głównej półosi elipsy. Kierunek
obrotów promienia może być łatwo określony przez umieszczenie dodatkowo ćwierćfa-
łówki na drodze promienia.

Układ pomiarowy składa się ze źródła światła (lasera HeNe), fotopowielacza i analizu-
jącego układu elektronicznego. Dla uzyskania najlepszych wyników należy stosować ma-
teriały o niskiej czułości optycznej, aby względne opóźnienie faz było mniejsze od $\pi/2$.
Dokładność pomiarów opóźnienia jest rzędu tysięcznych radiana, a dokładność ustalenia
kierunku szybkiej osi jest rzędu 1 stopnia. Pomiar jest punktowy (średnica strumienia
światła wynosi około 0,25 mm). Prezentowany układ może być stosowany do badań mo-
deli płaskich, badań metodą warstwy optycznie czynnej, jak i do pomiarów trójwymiaro-
wych modeli metodą światła rozproszonego.

Na uwagę zasługują wysiłki mające na celu opracowanie połowych metod wyznaczania absolutnych wartości opóźnień. Można wówczas korzystać jedynie z tych możliwości, jakie stwarza optyka. Z wielu prac publikowanych na ten temat wynika, że pozostaje do przezwyciężenia jeszcze wiele trudności. Według oceny przedstawionej przez HOVANESIANA [9] błędy wynikłe z ustalenia pozycji izopach są na ogół małe, natomiast ustalenie przebiegu izochrom jest obciążone dużym błędem, szczególnie gdy izopachy i izochromy są równoległe i gęstość ich występowania w analizowanym obszarze jest zbliżona (rys. 4).



Rys. 4

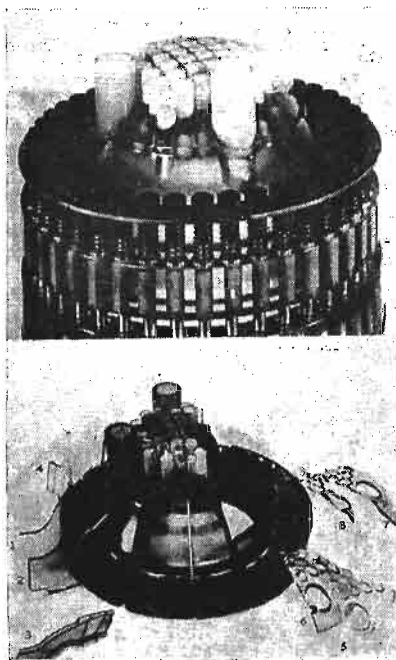
W dziedzinie, którą można objąć wspólnym tytułem — klasyczne, zaawansowane metody doświadczalnej analizy naprężeń, można wyodrębnić następujące kierunki:

- badania dużych skomplikowanych konstrukcji przestrzennych,
- badania dynamiki konstrukcji, dynamiki pęknięć i propagacji fal naprężeń,
- badania materiałów anizotropowych i konstrukcji niejednorodnych,
- badania zagadnień plastyczności,
- badania zagadnień termosprężystości.

W każdym z wymienionych kierunków w ostatnim okresie można zanotować ciekawe osiągnięcia [10]. Omówimy je pokrótce w podanej kolejności.

1. Badanie dużych skomplikowanych konstrukcji przestrzennych

Jest to kierunek o wyraźnie użytkowym charakterze, mający wieloletnie tradycje. Zdobywa on coraz większą popularność dzięki opracowaniu odpowiednich technologii budowy modeli i metod ich analiz. Zapewnienie podobieństwa modelowego wymaga przede wszystkim zachowania podobieństwa kształtu, tolerancji wykonania, braku naprężeń własnych. Aby te warunki były spełnione, gdy podejmuje się wykonanie odlewów modeli o dużych gabarytach służących do analizy takich konstrukcji, jak karтеры silników,



Rys. 5

korpusy turbin, łoża obrabiarek, zbiorniki reaktorów, należy zapewnić spełnienie bardzo ostrych warunków technologicznych. Dokładność pomiarów zależy od dokładności wykonania modeli, na którą wpływają następujące czynniki:

- a) skurcz modelu, współczynniki rozszerzalności cieplnej materiałów modelu i materiału formy;
- b) budowa formy i rdzeni formierskich, ich dokładność wykonania, odkształcalność wszystkich elementów pod ciężarem wlewu;
- c) termiczne własności materiału modelowego i materiału formy;
- d) temperatura odlewania i utwardzania oraz gęstość materiału modelu w temperaturze odlewania;
- e) warunki wygrzewania modelu.

Osiągnięcie zamierzonych efektów w badaniach skomplikowanych modeli jest możliwe dzięki wieloletniej praktyce personelu laboratoriów, ustaleniu ilościowych danych dla określonych gatunków żywic, ścisłemu przestrzeganiu technologii. Rysunek 5 ukazuje model głowicy reaktora, który służył do badań sztywności i do badań naprężeń metodą zamrażania [11].

2. Badania dynamiki konstrukcji, dynamiki pęknięć i propagacji fal naprężeń

Kierunek ten przeżywa gwałtowny rozwój, związany z nowymi możliwościami, jakie dają laserowe źródła światła oraz szeroki asortyment materiałów modelowych, w których prędkości rozchodzenia się fal naprężeń są bądź bardzo małe ($v = 100$ m/sek dla żywic

poliuretanowych), bądź duże (dochodzące do $v = 5000$ m/sek dla szkła). Ze względu na duże współczynniki tłumienia materiałów modelowych mniej rozwijają się metody analizy drgań; prace te idą raczej w kierunku analizy obciążeń udarowych i propagacji fal naprężeń. W latach pięćdziesiątych wiele prac dotyczyło weryfikacji optyczno-mechanicznych własności materiałów modelowych w warunkach obciążeń udarowych [12]. Stwierdzono, że dla szybko przebiegających procesów ($de/dt \sim 10^2$ 1/sek) czułość materiałów modelowych jest zwykle większa o 10 ÷ 30% od czułości dla obciążeń quasi-statycznych. Ta zmienność własności nie nastęrcza jednak zbytnich trudności z uwagi na występowanie zmian naprężeń w określonych pasmach częstości.

Prowadzone są poszukiwania metod łatwego rozdziału głównych naprężeń. Podczas gdy u nas, w pewnych przypadkach, doskonale wyniki daje metoda charakterystyk, w literaturze naukowej podawane są opisy metod wykorzystujących jednocześnie dane z metody rastrów oraz elastooptyki lub wykorzystujących metodę skośnego prześwietlenia [13]. W pewnych przypadkach zamierzone efekty można uzyskać na drodze analitycznej, proponowanej przez J. W. DALLY [14]. Drugie równanie potrzebne do wyznaczenia głównych naprężeń znajduje on wykorzystując szczególne własności modelu, np. sztywne podparcie lub warunek symetrii (co określa równania odkształceń), lub wykorzystując własności fali normalnej lub poprzecznej w takich obszarach modelu, gdzie występują one osobno.

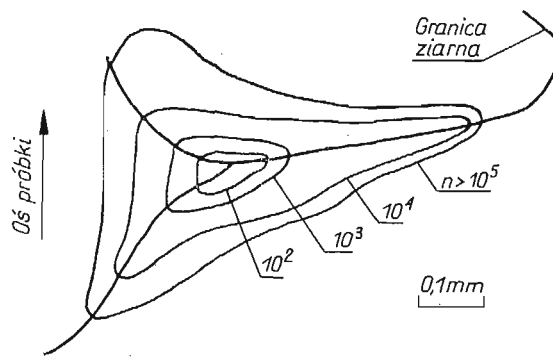
Pewne badania dynamiczne dotyczą zagadnień trójwymiarowych. Ze zrozumiałych względów nie mogą być tu zastosowane metody zamrażania naprężeń; pozostają do dyspozycji metody światła rozproszonego, modeli warstwowych. Najlepsze dotychczas wyniki uzyskano metodą modeli warstwowych z wklejanymi polaroidami [15] dzięki zastosowaniu bardzo cienkich filtrów polaryzacyjnych (0,05 mm), doborowi odpowiednich żywic i klejów. W badaniach sprawdzających obserwowano przechodzenie fal naprężeń przez płaszczyzny sklejeń bez żadnych zakłóceń. Metodą tą uzyskano kilka interesujących wyników. Praktyczne zastosowania dynamicznej elastooptyki są bardzo szerokie. Wystarczy wspomnieć tak ważne przykłady badań geofizycznych, jak ustalenie kierunków propagacji fal naprężeń w wielowarstwowych ośrodkach lub w ośrodkach z pustkami w kształcie wyrobisk górniczych lub w ośrodkach z inkluzjami sztywnymi o kształcie wypełnień. Badano optymalny sposób rozmieszczenia ładunków wybuchowych dla uzyskania właściwego kierunku pęknięcia w niejednorodnych ośrodkach, takich jak złoża mineralne. Badano rozchodzenie się fal wynikające z trzęsień ziemi; zachowanie się budowli w wyniku drgań podłoża. Pewne trudności w tych pracach istnieją w dziedzinie ustaleń warunków podobieństwa modelowego.

Inny przykład zastosowań elastooptyki dynamicznej, to badania nieniszczące. Możliwa jest wizualizacja pęknięć konstrukcji przez załamywanie się na nich fal Rayleigha (powierzchniowych). Obserwowano wyraźną zmianę w odbitej i rozproszonej fali w zależności od stosunku głębokości pęknięcia do długości propagowanej fali. Stwierdzono, że dla głębokości pęknięcia rzędu $d/\lambda = 1/16 \div 1/8$ odbita fala Rayleigha jest wyraźnie widoczna.

Coraz większe zainteresowanie budzi możliwość zastosowania elastooptyki do badań propagacji pęknięcia. Ogromne możliwości tej metody wykazują ostatnio prace KOBAYASHI [16,18], na temat zatrzymywania propagacji pęknięć, oraz praca SMITHA [17].

3. Badania konstrukcji niejednorodnych i materiałów anizotropowych

Kierunek ten ma również w ostatnich latach duże osiągnięcia. Wiążą się one z możliwościami stwarzanymi przez zastosowanie metody warstwy optycznie czynnej, która wielokrotnie była stosowana do badań stanów sprężysto-plastycznych [29, 30, 31]. Ostatnio znalazła ona zastosowanie w badaniach naprężeń na granicach ziarn [19, 20, 21]. Ze względu na porównywalność obszarów koncentracji odkształceń z grubością warstwy optycznie czynnej, istnieją trudności z interpretacją uzyskanych obrazów izochrom. Kieruje to badania na drogę skrajnie cienkich warstw optycznie czynnych (0,01—0,05 mm) i konieczność zwielokrotnienia rzędów izochrom. Dotychczasowe wyniki dotyczące: rozprzestrzeniania się obszarów odkształceń plastycznych wzdłuż granic ziarn, określania współczynników koncentracji odkształceń na dnie karbów o małych promieniach w za-



Rys. 6

leżności od konfiguracji krystalitów, rozprzestrzeniania się stref plastycznych przy obciążeniach cyklicznych, pozwalają sądzić o wielkich możliwościach metody warstwy optycznie czynnej. Stwierdzono, między innymi [21] dla próbek stalowych, pierwsze oznaki koncentracji odkształceń w pobliżu styków trzech ziarn już przy pierwszym cyklu obciążenia. Wartości tych odkształceń dochodziły nawet do kilku procent dla naprężeń poniżej 300 MN/m^2 . W dalszych cyklach obciążeń (do 10^4 — 10^5 cykli) odkształcenia w strefach wzrastały, a obszar stref odkształceń plastycznych jednocześnie ulegał powiększeniu (rys. 6). W dalszym etapie (po 10^5 cykli) następowała stabilizacja i do 10^6 cykli nie obserwowano powstawania pęknięć. W pewnych próbach w zakresie $5 \cdot 10^4$ — 10^5 cykli, oprócz rozrostu stref odkształceń, obserwowano pojawienie się nowych stref leżących również na granicach ziarn. W pewnych przypadkach strefy deformacji rozprzestrzeniały się do wnętrza ziarn. Dla większych naprężeń (powyżej 300 MN/m^2 dla stali) zmiany deformacji miały zasadniczo inny charakter. W miarę wzrostu liczby cykli strefy koncentracji odkształceń rozprzestrzeniały się, pokrywając coraz większą część powierzchni próbki; wzrastały też maksymalne odkształcenia.

Do prac tego samego kierunku badań należy analiza struktur makroanizotropowych, takich jak materiały zbrojone. Poza wykorzystywaniem metody warstwy optycznie czynnej

[22] i metody rastrów rozwinęto badania oparte na materiale elastoptycznym o strukturze ortotropowej [23]. Zbudowany jest on z włókna szklanego i odpowiednio dobranych żywic epoksydowych, poliestrowych lub innych, posiadających współczynnik załamania światła równy współczynnikowi dla włókien szklanych ($n = 1,548 \pm 0,003$). Opracowano technologie dla dokładnego zwilżenia włókien, usunięcia wszystkich baniek powietrza i uzyskania równomiernej struktury. Maksymalna zawartość szkła w płytach wynosiła 55%.

SAMPSON [24] sformułował wyrażenia na zależności efektów optycznych od naprężeń w materiałach ortotropowych, wprowadzając trzy stałe materiałowe.

Dla izotropowych materiałów zależność pomiędzy różnicą głównych naprężeń a efektem optycznym jest następująca

$$(5) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = nk.$$

Wyrażenie to może być przekształcone do postaci

$$(6) \quad n = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{k} - \frac{\sigma_y}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\tau_{xy}}{k}\right)^2}.$$

Wynika z niego, że efekt elastoptyczny składa się z dwóch składników dodawanych wektorowo. Pierwszy składnik jest zależny od naprężeń normalnych o kierunkach x i y , drugi składnik jest zależny od naprężeń stycznych. Poza tym dwie wzajemnie prostopadłe składowe naprężeń normalnych wywołują efekty optyczne o przeciwnych znakach.

Mamy więc trzy składniki: $n_x = \sigma_x/k$, $n_y = \sigma_y/k$, $n_{xy} = \tau_{xy}/k$, których w badaniach materiałów izotropowych nie trzeba wyodrębniać. W materiałach ortotropowych mają one istotne znaczenie. Ortotropowy materiał musi mieć bowiem wyodrębnione trzy stałe materiałowe: k_x , k_y , k_{xy} , które mogą być określone w trakcie badań skalujących. Otrzymany efekt elastoptyczny jest równy

$$(6a) \quad n = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{k_x} - \frac{\sigma_y}{k_y}\right)^2 + \left(\frac{2\tau_{xy}}{k_{xy}}\right)^2}.$$

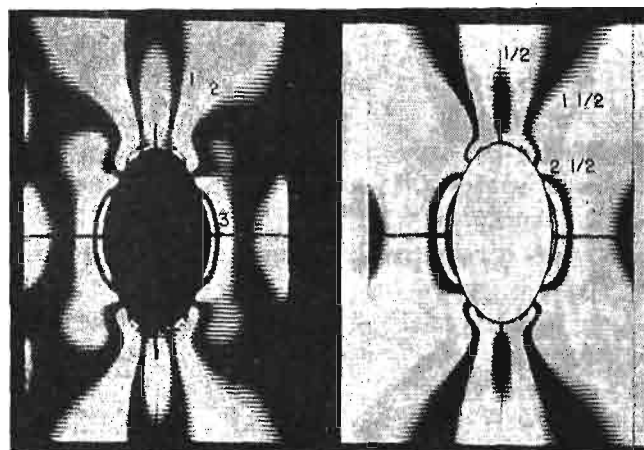
Wyrażenie (6a) może być przedstawione graficznie na kole Mohra dla efektu optycznego. Poszukiwane wartości naprężeń są równe

$$(7) \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{k_{xy}}{2} n \sin 2\theta', \\ \left(\frac{\sigma_x}{k_x} - \frac{\sigma_y}{k_y}\right) &= n \cos 2\theta', \end{aligned}$$

gdzie kąt $2\theta'$ jest kątem na kole Mohra.

Rozdział naprężeń σ_x i σ_y może być dokonany np. metodą różnicy naprężeń stycznych.

DALLY i PRABHAKARAN [23] wyprowadzili zależności pomiędzy efektem optycznym a naprężeniami, uwzględniając różne zawartości żywicy i włókien szklanych, uzyskując bardziej ogólne wyrażenia. Jednakże prostsze wyrażenia SAMPSONA dają prawie równie dobrą dokładność.



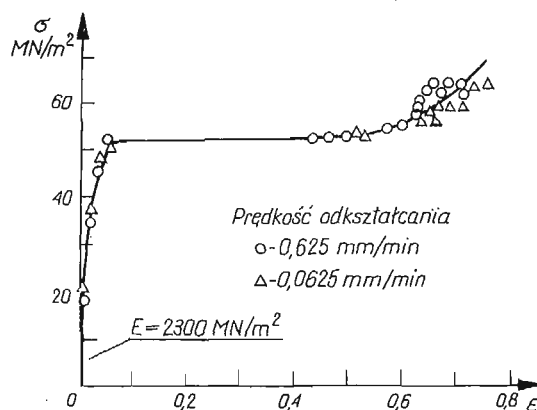
Rys. 7

Dla przykładu podajemy za [25] rozkład izochrom dla ortotropowej tarczy z otworem eliptycznym poddanej równomiernemu rozciąganiu (rys. 7). Jest to wynik badań na zlecenie przemysłu (płyty i powłoki z materiałów zbrojonych z otworami są stosowane w licznych konstrukcjach).

4. Badanie zagadnień plastyczności

Kierunek badań dotyczący analiz plastyczności, w ostatnim okresie również znacznie powiększył swoje możliwości. Pojawiło się wiele publikacji opisujących badania zjawisk plastyczności, w których wykorzystano szczególnie własności poliwęglanów jako materiału modelowego.

Aby można badać na modelach zjawiska plastyczne i interpretować otrzymane wyniki, przyjmuje się, że powinny być spełnione trzy podstawowe kryteria:



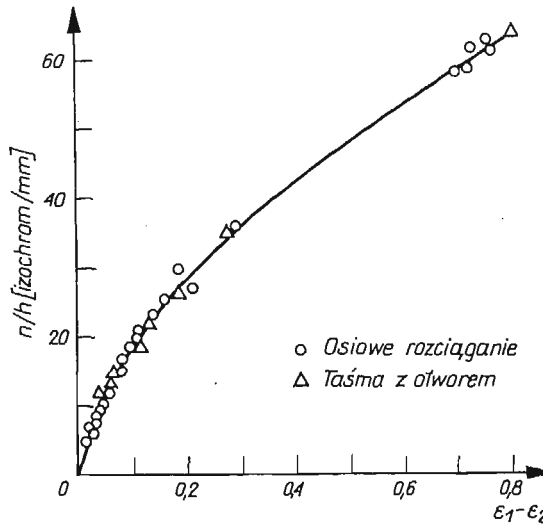
Rys. 8

1. Powinien być podobny przebieg krzywych zależności odkształceń od naprężeń dla modelu i dla konstrukcji.

2. Identyczne musi być kryterium płynięcia.

3. Identyczne powinny być liczby Poissona dla modelu i dla konstrukcji w całym zakresie sprężystym i plastycznym.

W. A. BRILL i G. A. GURTMAN [26, 27] wyznaczyli zależność odkształceń od naprężeń dla poliwęglanu (rys. 8). Jest ona podobna do przyjmowanej w teorii plastyczności charakterystyki sprężysto-plastycznej. Stwierdzili oni również, że wpływ pełzania jest niewielki. Wartość współczynnika Poissona wahała się od $\nu = 0,32$ dla odkształceń sprężystych do



Rys. 9

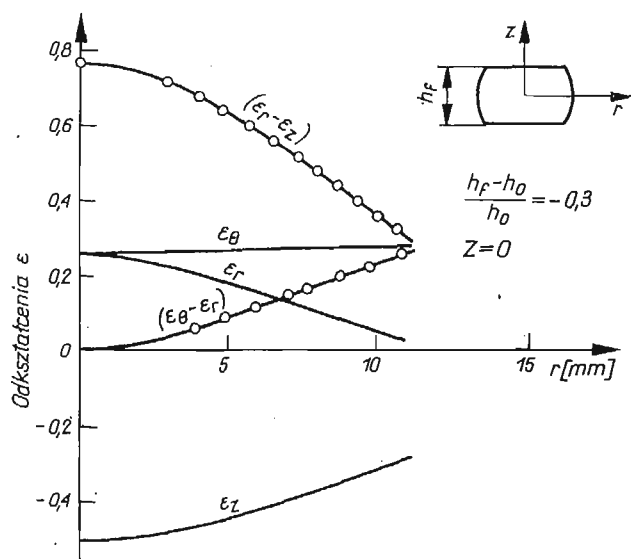
$\nu = 0,42$ dla małych odkształceń plastycznych ($\epsilon < 0,1$). BRILL badał również własności optyczno-mechaniczne. Zależność pomiędzy efektem elastoptycznym a różnicą odkształceń jest wprawdzie nieliniowa, wykazuje jednak monotoniczny wzrost aż do $\epsilon = 0,8$ (rys. 9).

WHITFIELD i SMITH [28] stwierdzili, że dla konstrukcji z poliwęglanu z dostateczną dokładnością można stosować kryterium HUBERA-MISESA. W pracy BRILLA podane są przykłady badania stref plastycznych i wartości współczynnika koncentracji naprężeń w zależności od stopnia przekroczenia granicy plastyczności.

Poliwęglan okazał się dobrym materiałem dla badań plastyczności elementów trójwymiarowych. Pozostały w modelu po odciążeniu efekt optyczny może być analizowany normalnymi metodami elastoplastyki przestrzennej. Po wycięciu z modelu plasterków, zwykle bardzo cienkich (grubość rzędu ułamka milimetra), można obserwować trwałe odkształcenie w dowolnym przekroju. DALLY i MULC badali trwałe odkształcenia krótkich próbek ściskanych o przekroju kołowym. Trwałe odkształcenie wynosiło około 30%. Dla rozdzielenia głównych odkształceń założono nieściśliwość materiału. Wartości od-

kształceń głównych można było wówczas wyznaczyć na podstawie wyników prześwietlenia plasterków wyciętych w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Przykład wyników podaje rys. 10. Tego typu badania wydają się być bardzo przydatne dla różnych dziedzin, np. dla obróbki plastycznej. Pewne zastrzeżenia budzi przyjęcie, na podstawie makroskopowych badań próbek poddanych osiowemu rozciąganiu, założenia o podobieństwie procesów uplastycznienia poliwęglanu i polikrystalicznych materiałów konstrukcyjnych.

Powyższej wady nie posiadają wspomniane już badania procesów uplastycznienia rzeczywistych elementów konstrukcji przy użyciu warstw optycznie czynnych [29, 30, 31, 32]. Jednak są one ograniczone do zagadnień płaskich. Osobną trudność stanowi identy-

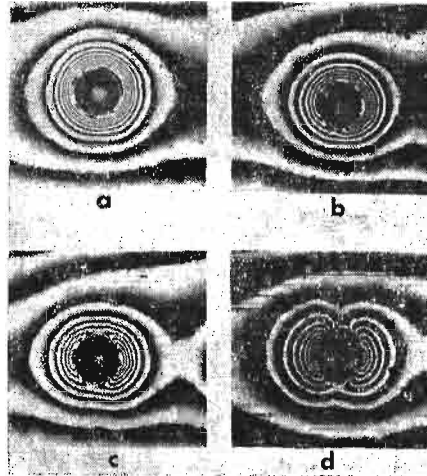


Rys. 10

fikacja uzyskanych obrazów, szczególnie gdy obszary uplastycznienia są porównywalne wymiarami z grubością warstw optycznych. Dla wyznaczenia granic obszarów plastycznych opracowano wiele efektywnych metod postępowania.

W czasie trwania Sympozjum podane zostały przykłady użycia metod warstwy optycznie czynnej dla badania procesu przystosowania się konstrukcji.

Ciekawą metodę badania naprężeń własnych zaproponował UNDERWOOD [33]. Polega ona na obserwacji deformacji, jaka powstaje w wyniku wciśnięcia kulki w gładką powierzchnię konstrukcji. Dzięki zastosowaniu interferometrycznej metody pomiaru odkształceń uzyskał bardzo wyraźny obraz odkształceń plastycznych (rys. 11). Wszelkie odchylenia od osiowo-symetrycznego przebiegu prążków wskazują na istnienie naprężeń. Przez odpowiednie badania skalujące można wyznaczyć ich wartość. Układ jest najbardziej czuły dla jednoosiowego rozciągania, pewne trudności w interpretacji obrazów istnieją dla przypadków dwukierunkowego ściskania. Nieco trudności nastęrcza również różna sztywność podparcia elementu badanego.



Rys. 11

5. Badanie zagadnień termosprężystości

Kierunek ten jest dotychczas najslabiej rozwinięty. Wynika to z jednej strony z trudności związanych z pomiarem rozkładów temperatur, szczególnie w złożonych konstrukcjach przestrzennych, z drugiej strony — z trudności w ich modelowaniu na stanowiskach badawczych i pomiaru efektów wywołanych polami cieplnymi. Potrzeby techniki oraz złożoność procesów, szczególnie w przypadku istnienia niejednorodnych konstrukcji, zmusza do prac w tym kierunku. Szczególne potrzeby widoczne są w energetyce, gdzie zmęczenie termiczne powoduje ogromne straty.

Opracowano kilka metod badań naprężeń temperaturowych. Są to:

— metody analogii, w których badania odbywają się na modelach zimnych drogą wymuszenia odpowiednich odkształceń wyznaczonych na podstawie rozkładów temperatury;

— metoda budowy złożonych modeli, których pewne elementy mają uprzednio zamrożone odkształcenia; po sklejeniu modelu odkształcenia te są wyzwolone przez podgrzanie całego modelu do temperatury zamrażania;

— metoda nagrzewania lub ochładzania modeli elastoosprężystych.

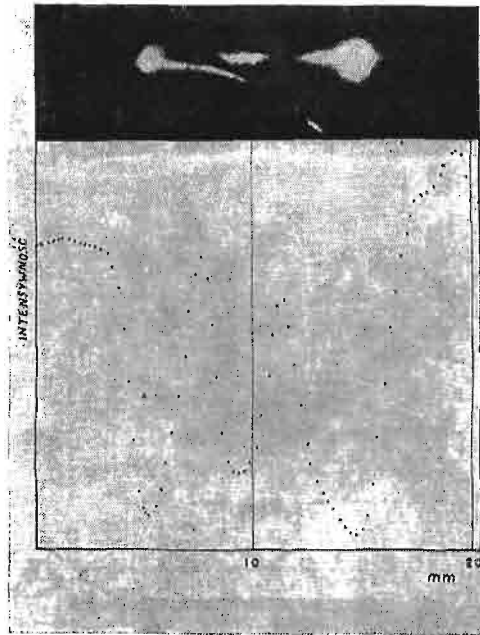
Trzecia, najbardziej bezpośrednia metoda pozwala na badania stanów nieustalonych i jest najbardziej obiecująca. Nastręcza jednak wiele trudności, do których należą:

— wywołanie określonych pól temperatur w modelach,

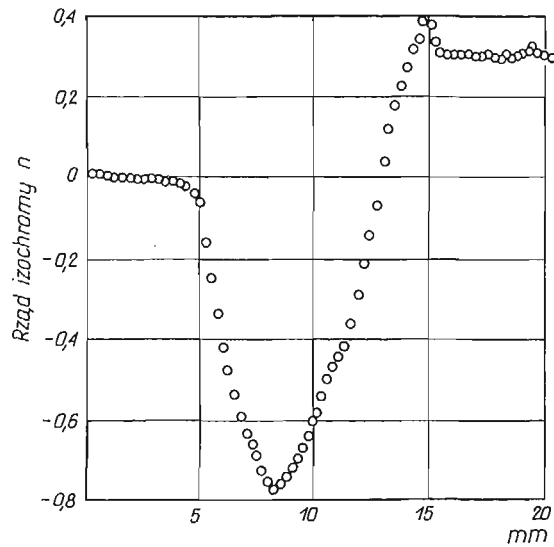
— dokonywanie badań w warunkach temperatur różnych od otoczenia,

— dobór odpowiednich materiałów modelowych i określenie ich własności w całym zakresie stosowanych temperatur. W pewnych przypadkach wymagane jest, by własności te zmieniały się tak, jak własności materiałów konstrukcyjnych w temperaturach pracy analizowanych konstrukcji.

Pomimo tych trudności coraz częściej publikowane są prace podające opis i wyniki takich badań. Dla przykładu omówmy prace J. D. FISHBURN [34]. Zastosował on metodę



Rys. 12



Rys. 13

światła rozproszonego do analizy ustalonych i zmiennych w czasie naprężeń temperaturowych w grubościennych połączeniach rurociągów. Układ obciążający model zapewniał utrzymanie stałego ciśnienia wewnętrznego ($p = 0,7 \text{ MN/m}^2$). Ponadto był realizowany przepływ cieczy immersyjnej o temperaturach 10° i 100°C . W pierwszym etapie przy użyciu modelu z zatopionymi termoparami zarejestrowano zmianę temperatur w trakcie prze-

plywu cieczy, a następnie na drugim modelu dokonywano pomiarów zmian naprężeń, rejestrując obrazy na taśmie filmowej. W trakcie analizy wyników zrobiono podstawowe założenia, że nie zachodzi obrót płaszczyzny polaryzacji wzdłuż drogi promienia.

Zgodnie z teorią badań naprężeń w świetle rozproszonym intensywność światła rozproszonego J jest wyrażona zależnością

$$(8) \quad J_s = J_0 A [\sin 2\beta \sin(2\pi n + B) + C],$$

gdzie stałe A i C zależą od rozpraszających własności materiału modelu, intensywności odbicia światła przez powierzchnię modelu, absorpcji światła i niejednorodności modelu. Intensywność światła utrwalona na taśmie filmowej zależy dodatkowo od własności materiałów fotograficznych i procesu wywołania. Aby te czynniki wyeliminować trzeba dokonać pomiaru względnego. Dzięki użyciu kompensatorów (ćwierćfalówki i półfalówki) możemy otrzymać trzy różne jasności światła utrwalonego na taśmie: J_0 , $J_{\pi/2}$, J_π . Autor udowadnia, że rząd izochromy modelu wyraża się zależnością

$$(9) \quad n = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2J_0} - \frac{1}{2J_\pi}}{\frac{1}{J_{\pi/2}} - \frac{1}{2J_0} - \frac{1}{2J_\pi}} \right],$$

a różnica wtórnych, głównych naprężeń wyraża się zależnością

$$(10) \quad \sigma'_1 - \sigma'_2 = k \frac{\partial n}{\partial s} = \frac{k}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2J_0} - \frac{1}{2J_\pi}}{\frac{1}{J_{\pi/2}} - \frac{1}{2J_0} - \frac{1}{2J_\pi}} \right].$$

Jeśli wykonać wiele pomiarów J_0 , $J_{\pi/2}$, J_π wzdłuż przekroju S , można wyznaczyć wartości rzędu izochromy wzdłuż tego przekroju.

Rysunek 12 podaje przykład utrwalonego obrazu i dokonanych odczytów intensywności światła, rys. 13 — wyznaczone wartości rzędów izochrom. Opisana praca dowodzi jak wiele można otrzymać przez właściwe, skrupulatne opracowanie wyników badań. Trudności napotymane przy posługiwaniu się metodą światła rozproszonego, wynikające z otrzymywania niskich rzędów izochrom i niskiej jakości obrazów, w tym przypadku zostały przełamane. Wykazano, że elastooptyka jest narzędziem do analizy przestrzennych, zmiennych w czasie, stanów naprężeń termicznych.

W podanym przeglądzie aktualnych kierunków rozwoju metod badań stosowanych w mechanice ciała stałego świadomie pominąłem większość prac wykonanych w kraju, gdyż o nich mówili osobiście autorzy w swoich wystąpieniach na Sympozjum. Spośród ogromnej liczby prac publikowanych corocznie wybrałem te, które według mojej opinii stanowią istotny krok naprzód i stanowią ilustrację aktualnych możliwości. Doświadczalne metody badań w mechanice ciała stałego stanowią bowiem ogromną, szybko rozwijającą się dziedzinę. Poza oczywistym, zupełnie podstawowym, znaczeniem dla rozwoju nauki i dla zaspokojenia potrzeb techniki stanowią doskonałą szkołę dla rozwoju kadry, dając jej możliwości osiągnięcia osobistego zadowolenia i satysfakcji z otrzymanych rezultatów.

Literatura cytowana w tekście

1. H. K. ABEN, *Additional Physical Fields in Photoelasticity*, JUTAM Symposium on the Photoelastic Effect and its Applications, Brussel, September 1973.
2. H. K. ABEN, *Magnetophotoelasticity — Photoelasticity in Magnetic Field*, Experimental Mechanics, **10**, 3 (1970) 97–105.
3. H. K. ABEN, S. IDNURM, *Stress Concentration in Bent Plates by Magnetophotoelasticity*, 5 International Conference on Experimental Stress Analysis, Udine 1974.
4. D. C. DRUCKER, *Photoelastic Analysis of Transverse Bending of Plates in the Standard Transmission Polariscopes*, J. Appl. Mech., **9** (1942) 161–164.
5. Е. И. КЛАВУНОВСКИЙ, Б. В. ЛОПАТИН, Л. Т. ВОРОНЦОВА, Ю. И. ПЕТРОВ, М. И. ШВАРЦМАН, *О структуре оптически активных полимеров на основе эфиров метакриловой и итаконовой кислот, высокомолекулярные соединения*, **6** (10), (1964) 1806–1809.
6. S. RAUTHIER-SAMIER, *The Available Experimental Methods for Measuring Optical Properties of Matter*, JUTAM Symposium on the Photoelastic Effect and its Applications, Brussel 1973.
7. J. EBBENI, *Combination of Moiré and Holographical Methods to Determine the Straine State in a Diffuse Object*, 5 International Conference on Experimental Stress Analysis, Udine 1974.
8. A. ROBERT, *The Application of Poincaré's Sphere to Photoelasticity*, JUTAM Symposium on Photoelastic Effect and its Applications, Brussel 1973.
9. J. D. HOVANESIAN, *Recent Work in Absolute Measurement of Birefringence*, JUTAM Symposium on Photoelastic Effect and its Applications, Brussel 1973.
10. J. W. DALLY, *Classical and Advanced Method in Photoelasticity*, JUTAM Symposium on Photoelastic Effect and its Applications, Brussel 1973.
11. M. M. LEVEN, R. C. SAMPSON, *Photoelastic Stress and Deformation Analysis of Nuclear Reactor Components*, Proc. SESA, **17**, 1 (1959) 161–180.
12. A. B. J. CLARK, R. J. SANFORD, *A Comparison of Static and Dynamic Properties of Photoelastic Materials*, Proc. SESA, **20**, 1 (1963) 148–151.
13. P. D. FLYNN, M. M. FROCHT, *On the Photoelastic Separation of Principal Stresses Under Dynamic Conditions in Oblique Incidence*, J. Appl. Mech., **28**, 1 (1961) 144–145.
14. J. W. DALLY, *Data Analysis in Dynamic Photoelasticity*, Experimental Mechanics, 7–8 (1967).
15. J. W. DALLY, W. F. RILEY, *Initial Studies in Three-Dimensional Dynamic Photoelasticity*, J. Appl. Mech., **34**–2 (1967) 405–410.
16. A. S. КОБАЯШИ, *Experimental Techniques in Fracture Mechanics*, Iowa State University Press SESA-Monograph, 1973.
17. W. SMITH, *Use of Three-Dimensional Photoelasticity in Fracture Mechanics*, Experimental Mechanics, **30**, 2 (1973) 539.
18. A. S. КОБАЯШИ, B. G. WADE, D. E. MAIDEN, *Photoelastic Investigation on the Crack-arrest Capability of a Hole*, Experimental Mechanics, **29**, 1 (1972) 32–37.
19. Z. BRZOSKA, R. JEŃDRZEJCZYK, *Badania odkształceń na granicach kryształów*, Praca nie publikowana.
20. А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, Л. А. КРАСНОВ, В. А. КУШНЕРОВ, *Применение метода фотоупругих покрытий к исследованию деформаций зерен металлов*, Труды НИИЖТа, **62** (1967).
21. А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, Л. А. КРАСНОВ, В. А. КУШНЕРОВ, *Исследование накопления деформаций при циклическом нагружении методом фотоупругих покрытий*, Труды НИИЖТа, **96** (1970).
22. J. W. DALLY, J. ALFIREVICH, *Application of Birefringent Coating to Glass-fiber-reinforced Plastics*, Experimental Mechanics, **9** (1969), 97–102.
23. J. W. DALLY, R. PRAVNAKARAN, *Photo-orthotropic-elasticity*, Experimental Mechanics, **28** (1971) 346–356.
24. R. C. SAMPSON, *A Stress Optic Law for Photoelastic Analysis of Orthotropic*, Experimental Mechanics, **27** (1970) 210–215.
25. R. PRAVNAKARAN, J. W. DALLY, *The Application of Photoorthotropic Elasticity*, Journal of Strain Analysis, 7–4 (1972) 253–260.
26. W. A. BRILL, *Basic Studies in Photoplasticity*, Ph. D. Thesis Stanford University, 1965.

27. G. A. GURTMAN, W. C. JENTINS, K. T. TUNG, *Charakterization of a Birefringent for Use in Photoelastoplasticity*, Douglas Report SM. 47796, January 1965.
28. J. K. WHITFIELD, C. W. SMITH, *Charakterization Studies of a Potential Photoelasto-plastic Material*, *Experimental Mechanics*, 12-2 (1972).
29. P. S. THEOCARIS, *Experimental Solution of Elastic-plastic Plane Stress Problems*, *J. Appl. Mech.*, Dec. 1962.
30. J. KARKOWSKI, J. STUPNICKI, *Doświadczalne badanie elementów maszyn projektowanych metodą nośności granicznej*, *Rozpr. Inżynierskie*, 21, 1 (1973) 161-173.
31. J. KARKOWSKI, J. STUPNICKI, *Propagation of Plastic Zones in a Strip Weakened by an Array of Holes*, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 25, 3 (1973) 569-573.
32. А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, М. Х. АХМЕТЗЯНОВ, *Экспериментальное исследование напряжений и деформаций в неупругих элементах*, Докл. на III Всесоюзном съезде по механике в 1968 г. В кн. „Расчет пространственных конструкций”, № 13, Стройиздат, 1970.
33. J. H. UNDERWOOD, *Residual-stress Measurement Using Surface Displacements Around an Indentation*, *Experimental Mechanics*, 30 (1973) 373-380.
34. J. D. FISHBURN, *Analysis of the Thermal Stress in Complex Model Using Scattered Light Photoelasticity*, Fifth International Conference on Experimental Stress Analysis, Udine 1974.

PRZYBLIŻONE OBLICZANIE PŁASKICH PRĘTOWYCH PRZEKRYĆ STRUKTURALNYCH

JACEK GIERLIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Wraz z rozwojem budownictwa uprzemysłowionego wzrasta ilość konstrukcji wykonanych z elementów powtarzalnych. Do tego rodzaju ustrojów należą między innymi prętowe przekrycia strukturalne (rys. 1). Z tego też względu wzrasta zainteresowanie projektantów metodami obliczania tych konstrukcji.

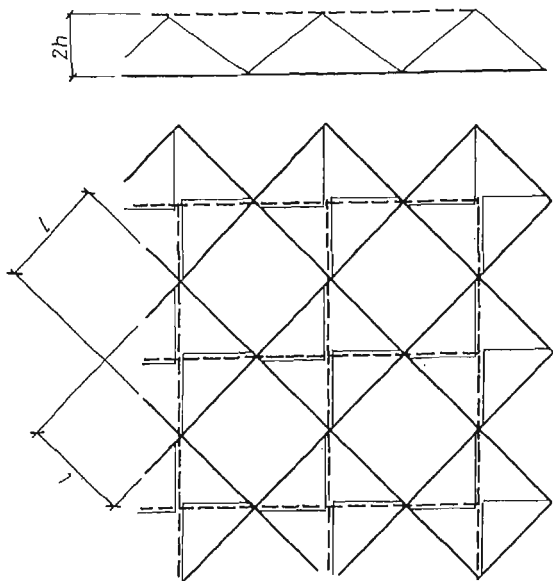
Do tej pory opublikowano wiele prac omawiających zarówno ściśle [1–3], jak i przybliżone [4–12] metody analizy statycznej przekryć strukturalnych. Mimo to, brak jest stosunkowo prostej metody przybliżonego obliczania tych konstrukcji, która jednocześnie obejmowałaby możliwie szeroką ich klasę. Niniejsza praca, zawierająca propozycję nowej metody obliczania przekryć strukturalnych, stanowi próbę wypełnienia tej luki.

Podstawową ideą przedstawionej metody jest traktowanie przekrycia strukturalnego jako płyty trójwarstwowej, której warstwy zewnętrzne są równoległymi płaskimi kratownicami odległymi od siebie o $2h$, a warstwa środkowa zespołem krzyżulców. Model ciągły kratownic zewnętrznych przyjęto według prac WOŹNIAKA [15] oraz KLEMMMA i WOŹNIAKA [16]. Natomiast koncepcję opisu zespołu krzyżulców za pomocą modelu ciągłego zaproponowano w prezentowanej pracy. Analizę płytowych sił wewnętrznych w zastępczej płycie trójwarstwowej przeprowadzono w oparciu o liniową teorię tych ustrojów, przedstawioną w pracach [13, 14].

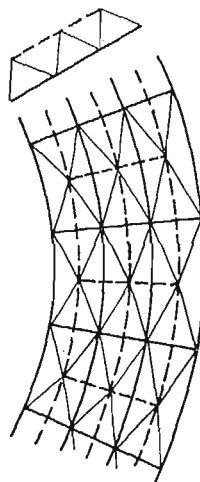
W pracy zastosowano następujące oznaczenia wskaźnikowe: małe litery greckie α, β, ν przebiegają ciąg 1, 2 i podlegają konwencji sumacyjnej, duże litery greckie Δ, Λ przebiegają ciąg I, II, III, ... i nie podlegają konwencji sumacyjnej. Ponadto pionową kreską oznaczono pochodną kowariantną, a przecinkiem pochodną cząstkową.

2. Założenia

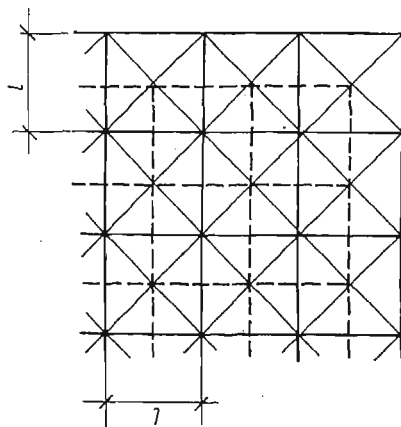
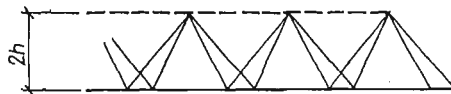
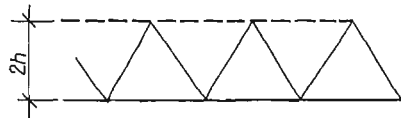
W pracy rozpatrzono przekrycia strukturalne o dwóch typach siatek zewnętrznych. Pierwszy, to siatka skonstruowana z rodzin prętów ciągłych, oznaczonych symbolem Δ (rys. 1a, b, d). W tym przypadku płaszczyznę, na której kształtowana jest siatka, parametryzujemy układem współrzędnych krzywoliniowych θ^1, θ^2 . Typ drugi, to siatka heksagonalna pokazana na rys. 1c (siatka górna). Przy formułowaniu zależności dotyczących tej siatki, jej płaszczyznę parametryzujemy układem współrzędnych kartezjańskich x^2, x^1 . Kierunek normalny do płaszczyzn siatek zewnętrznych oznaczmy θ^3 lub x^3 . Struktura



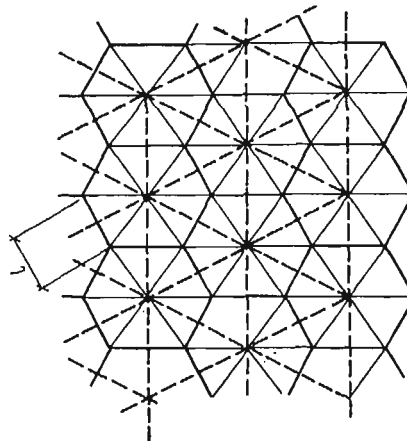
Rys. 1b



Rys. 1d



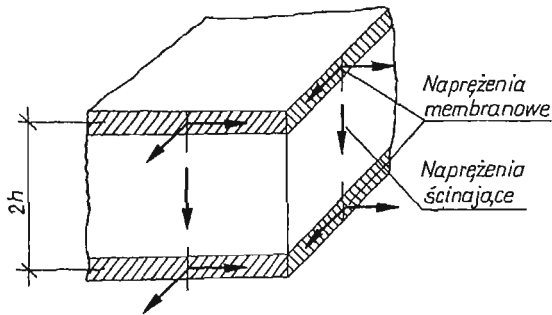
Rys. 1a



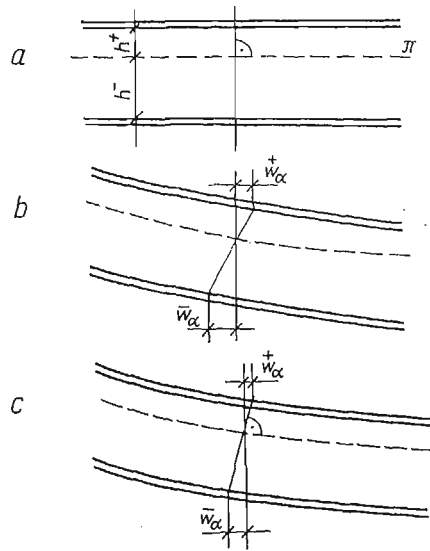
Rys. 1c

prętowa całej konstrukcji jest regularna, a długości l poszczególnych prętów są niewielkie w porównaniu z wymiarami ustroju. Kierunek osi dowolnego pręta określamy za pomocą wektora jednostkowego T . Obciążenie ustroju stanowią siły zaczepione w węzłach. Pozwala to na przyjęcie założenia o przegubowym połączeniu prętów w węzłach [1].

Analizy statycznej przekrycia strukturalnego dokonamy wprowadzając ustrój zastępczy w postaci płyty trójwarstwowej.



Rys. 2



Rys. 3

Zgodnie z liniową teorią deformacji tych płyt przyjmiemy (por. [13, 14]), że warstwy zewnętrzne przenoszą napężenia membranowe, natomiast warstwa środkowa jedynie pionowe napężenia styczne (rys. 2). Założymy, że przemieszczenia tych warstw są nie-wielkie w porównaniu z grubością $2h$ płyty. Wprowadzimy różniczkowalne funkcje w , w_+ i w_- opisujące odpowiednio przemieszczenia pionowe i poziome warstw zewnętrznych. Znacznikiem „+” oznaczono tutaj wielkości odnoszące się do warstwy górnej, a odnoszące się do warstwy dolnej „-”. Oznaczenia te będą stosowane w miarę potrzeby w dalszych rozważaniach pracy.

Założymy, że istnieje pewna płaszczyzna obojętna π , równoległa do warstw zewnętrznych i znajdująca się pomiędzy nimi, której punkty nie doznają przemieszczeń poziomych. Położenie płaszczyzny π określają odległości h^+ , h^- od warstw zewnętrznych. Przyjmiemy, że punkty warstw zewnętrznych leżące przed odkształceniem na prostej prostopadłej do płaszczyzny π (rys. 3a) doznają jednakowych przemieszczeń pionowych, czyli

$$(2.1) \quad w^+ = w^- = v.$$

Natomiast przemieszczenia poziome tych punktów powiązane są zależnością (rys. 3b)

$$(2.2) \quad w_{\alpha}^{+} = -\frac{1}{\lambda} w_{\alpha}^{-},$$

$$\text{w której } \lambda = \frac{h^{-}}{h^{+}}, \quad h^{+} = \frac{2h}{1+\lambda}, \quad h^{-} = \frac{2h}{1+\lambda} \lambda.$$

Zakładamy, że przesunięcia węzłów przekrycia strukturalnego są identyczne z przesunięciami odpowiadających im punktów płyty trójwarstwowej, tzn. wartości funkcji w, w_{α}^{+} i w, w_{α}^{-} w punktach odpowiadających węzłom są równe przesunięciom tych węzłów.

Obrót płaszczyzny π w kierunku osi θ^{α} charakteryzować będziemy funkcją

$$(2.3) \quad u_{\beta} = \frac{w_{\alpha}^{+} - w_{\alpha}^{-}}{2h} \epsilon_{\alpha\beta}^{\alpha}.$$

Na podstawie (2.2) i (2.3) znajdujemy

$$(2.4) \quad w_{\alpha}^{+} = \frac{-2h}{1+\lambda} u_{\beta} \epsilon_{\alpha}^{\beta}, \quad w_{\alpha}^{-} = \frac{2\lambda h}{1+\lambda} u_{\beta} \epsilon_{\alpha}^{\beta}.$$

Funkcje v i u_{α} , opisujące płytowy stan przemieszczenia ustroju, określone są na płaszczyźnie π .

3. Stan odkształcenia

Wraz z przemieszczeniem całego ustroju doznają przemieszczeń i odkształceń poszczególne pręty. Oznaczając liniowe odkształcenia jednostkowe pręta symbolem e i zakładając liniowość funkcji przemieszczeń (2.1), (2.2) pomiędzy sąsiednimi węzłami możemy [15, 16] w odniesieniu do prętów siatek zewnętrznych napisać zależność

$$(3.1) \quad e = T^{\alpha} T^{\beta} w_{\alpha} |_{\beta}.$$

Oznaczając

$$(3.2) \quad \gamma_{\alpha\beta} = w_{\beta} |_{\alpha},$$

po uwzględnieniu (3.1), otrzymujemy

$$(3.3) \quad e = T^{\alpha} T^{\beta} \gamma_{\alpha\beta}.$$

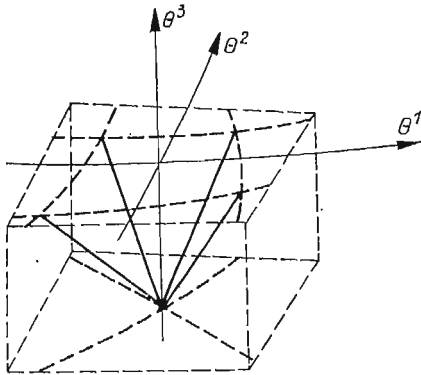
Odpowiednią zależność w odniesieniu do krzyżulców napiszemy na podstawie następującego rozumowania. Wyodrębnimy z obszaru warstwy środkowej pewną umowną bryłę zawierającą wiązkę krzyżulców zbiegających się w jednym węźle warstwy dolnej (lub górnej) (rys. 4). Wobec założenia o regularności przekrycia przyjmujemy, że bryła ta stanowi powtarzalny element warstwy środkowej. Przyrostowi długości Δl krzyżulca odpo-

wiada obrót bryły (odkształcenie postaciowe) pokazany na rys. 5. Oznaczając przez γ_α składowe tego obrotu w kierunkach osi θ^α możemy napisać następujące zależności

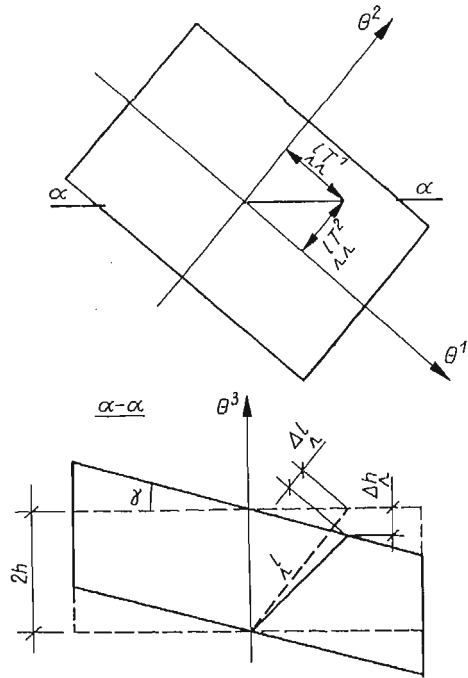
$$\frac{\Delta l}{\Delta h} = \frac{2h}{l} = T^3, \quad \Delta h = l T^\alpha \gamma_\alpha,$$

wynikające z rozważań geometrycznych. Uwzględniając równość $e = \frac{\Delta l}{\Delta h}$ mamy

$$(3.4) \quad e = T^3 T^\alpha \gamma_\alpha.$$



Rys. 4



Rys. 5

Składowe γ_α określające kąt odkształcenia postaciowego warstwy środkowej płyty trójwarstwowej wyrażamy za pomocą składowych stanu przemieszczenia w następujący sposób [14]

$$\gamma_\alpha = \frac{w_\beta^+ - w_\beta^-}{2h} \epsilon_{\alpha\beta}^\beta + \frac{w|_\alpha^+ + w|_\alpha^-}{2},$$

skąd wobec (2.1) i (2.3) otrzymujemy

$$(3.5) \quad \gamma_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}^\beta u_\beta + v|_\alpha.$$

Podstawienie (3.5) do (3.4) daje

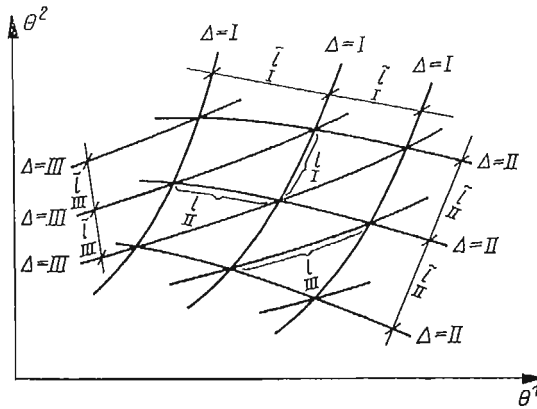
$$(3.6) \quad e = T^3 T^\alpha (\epsilon_{\alpha\beta}^\beta u_\beta + v|_\alpha).$$

4. Stan naprężenia i związki konstytutywne

Na skutek obciążenia ustroju w jego prętach wystąpią siły podłużne P . Zakładając jednorodność i liniową sprężystość każdego pręta i oznaczając przez $\frac{EA}{\Delta}$ sztywność podłużną pręta, mamy

$$(4.1) \quad P = EAe.$$

Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem związków konstytutywnych dla poszczególnych elementów konstrukcji.



Rys. 6

W pierwszej kolejności rozpatrzmy siatki zewnętrzne przekrycia. W przypadku siatki skonstruowanej z rodzin prętów ciągłych (por. rys. 6) potencjał sprężysty σ określony jest za pomocą zależności

$$(4.2) \quad \sigma = \frac{1}{2} \sum_{\Delta} \frac{1}{l\tilde{l}} \int_{-l/2}^{l/2} P^2 / EA ds,$$

w której \tilde{l} jest odległością sąsiednich prętów w rodzinie Δ . Po wprowadzeniu tensora o składowych

$$(4.3) \quad A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \sum_{\Delta} T^{\alpha} T^{\beta} T^{\lambda} T^{\mu} \frac{EA}{\tilde{l}}$$

i po podstawieniu (3.3) (4.1) do (4.2) otrzymujemy na σ następujące wyrażenie

$$(4.4) \quad \sigma = \frac{1}{2} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu}.$$

W przypadku siatki heksagonalnej (rys. 7) wzór na potencjał sprężysty ma postać [16]

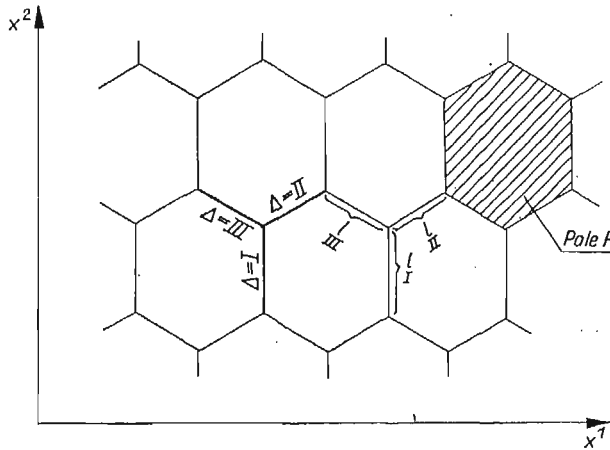
$$(4.5) \quad \sigma = \frac{1}{2F} \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{P^2}{EA} ds,$$

przy czym F jest polem sześciokąta stanowiącego «oczko» siatki. Definiując następująco składowe tensora sztywności sprężystej

$$(4.6) \quad A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{F} \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} T^{\alpha} T^{\beta} T^{\lambda} T^{\mu} EA l,$$

otrzymujemy na σ wyrażenie analogiczne do (4.4)

$$\sigma = \frac{1}{2} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu}.$$



Rys. 7

Składowe stanu napięcia $p^{\alpha\beta}$ płaskiej siatki określimy za pomocą zależności [17]

$$p^{\alpha\beta} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{\alpha\beta}},$$

z której wobec (4.4) znajdujemy

$$(4.7) \quad p^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}.$$

Z kolei rozważymy warstwę środkową ustroju. Oznaczając przez Ω pole podstawy bryły zawierającej jedną wiązkę krzyżulców (rys. 4), potencjał σ warstwy środkowej wyrazimy następująco

$$(4.8) \quad \sigma = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\Lambda=1}^{\Lambda^0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{P^2}{EA} ds,$$

gdzie Δ^0 jest liczbą krzyżulców zbiegających się w jednym węźle. Podstawiając do tego wyrażenia zależności (3.4) i (4.1) znajdujemy

$$\sigma = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\Delta=1}^{\Delta^0} T^{\alpha} T^{\beta} T^3 T^3 E A l \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}.$$

Po wprowadzeniu tensora sztywności

$$(4.9) \quad C^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\Delta=1}^{\Delta^0} T^{\alpha} T^{\beta} T^3 T^3 E A l$$

potencjał σ wyrazimy za pomocą związku

$$(4.10) \quad \sigma = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}.$$

Składowe p^{α} charakteryzujące stan naprężenia warstwy środkowej otrzymamy z zależności

$$p^{\alpha} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{\alpha}},$$

która prowadzi do

$$(4.11) \quad p^{\alpha} = C^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}.$$

Wyprowadzone w tym rozdziale związki (4.7) i (4.11) są związkami konstytutywnymi przekrycia strukturalnego. Zakładamy, że określone tymi związkami wielkości p^{α} i $p^{\alpha\beta}$ opisują stan naprężenia płyty trójwarstwowej. Podstawiając do wyrażen (4.7) i (4.11) zależności (4.3) i (4.9) oraz (3.3), (3.4) i (4.1) otrzymujemy następujące zależności ilustrujące interpretację fizyczną składowych $p^{\alpha\beta}$ i p^{α}

$$(4.12) \quad p^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} T^{\alpha} T^{\beta} P / \tilde{l},$$

$$p^{\alpha} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\Delta} T^{\alpha} T^3 P l.$$

Ostatnią z wielkości charakteryzujących strukturę przekrycia jest parametr λ określający położenie płaszczyzny obojętnej π . Przyjmujemy, że położenie tej płaszczyzny zależy od stosunku gęstości sztywności warstwy górnej do warstwy dolnej, skąd wynika

$$(4.13) \quad \lambda = \frac{\sum_{\Delta} \bar{R}}{\sum_{\Delta} R},$$

gdzie $R = \frac{EA l}{F}$ w przypadku siatki heksagonalnej lub $R = \frac{EA}{\tilde{l}}$ w przypadku innych siatek.

5. Równania równowagi

Znając stan naprężenia w poszczególnych warstwach płyty można przystąpić do określenia płytowych sił wewnętrznych. Rozpatrzmy na początek momenty $M^{\alpha\beta}$ względem płaszczyzny obojętnej wywołane napięciami występującymi w warstwach zewnętrznych. Przyjmując dodatnie zwroty napięć jak na rys. 8, otrzymujemy wyrażenie

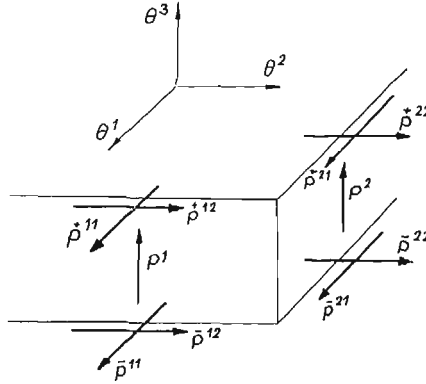
$$(5.1) \quad M^{\alpha\beta} = \epsilon_{\lambda}^{\beta} (\bar{h} p^{\alpha\lambda} - h p^{\alpha\lambda}).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= u_{\beta, \alpha}, \\ D^{\alpha\beta\nu\mu} &= \left(\frac{2h}{1+\lambda} \right)^2 (A^{+\alpha\beta\nu\mu} + \lambda^2 \bar{A}^{\alpha\beta\nu\mu}), \\ \mathring{D}^{\alpha\beta\mu\lambda} &= \epsilon_{\rho}^{\beta} \epsilon_{\pi}^{\lambda} D^{\alpha\rho\mu\pi}. \end{aligned}$$

i korzystając ze wzorów (2.2) (3.2) i (4.7), zależność (5.1) można przekształcić do postaci

$$(5.3) \quad M^{\alpha\beta} = \mathring{D}^{\alpha\beta\mu\lambda} \kappa_{\mu\lambda}$$



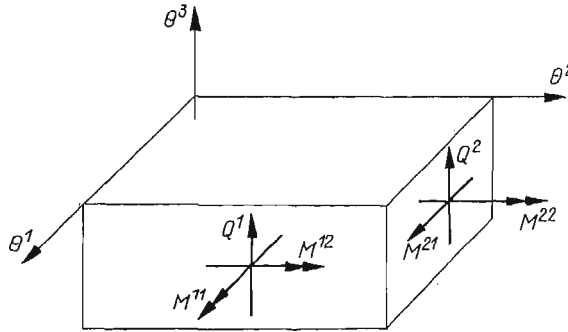
Rys. 8

Siły poprzeczne wywołane napięciami p^{α} występującymi w warstwie środkowej wyznaczmy ze związku

$$Q^{\alpha} = p^{\alpha},$$

który po uwzględnieniu (4.11) przybiera postać

$$(5.4) \quad Q^{\alpha} = C^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}.$$



Rys. 9

Założymy następnie, że występujące w niektórych typach przekryć siły podłużne $N^{\alpha\beta}$ określone zależnościami

$$N^{\alpha\beta} = \overset{+}{p}^{\alpha\beta} + \overset{-}{p}^{\alpha\beta}$$

mają niewielki wpływ na odkształcenie ustroju, wobec czego pominiemy je w dalszych rozważaniach.

Rozpatrując wycinek płyty trójwarstwowej obciążony siłami $M^{\alpha\beta}$ i Q^α (rys. 9) otrzymujemy następujące równania równowagi [14]

$$(5.5) \quad \begin{aligned} Q^\alpha|_\alpha + f &= 0, \\ M^{\alpha\beta}|_\alpha + \epsilon_{\alpha}^{\beta} Q^\alpha &= 0, \end{aligned}$$

gdzie f jest funkcją obciążenia. Podstawienie (5.3) i (5.4) do tych równań prowadzi do

$$(5.6) \quad (C^{\alpha\beta}\gamma_\beta)|_\alpha + f = 0, \quad (\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}\kappa_{\lambda\mu})|_\alpha - \epsilon_{\alpha}^{\beta} C^{\alpha\lambda}\gamma_\lambda = 0.$$

Powyższe związki stanowią układ równań równowagi wyrażony w odkształceniach. Wstawiając do (5.6) zależności (3.5) i (5.2)₁, wyrażamy te równania w przemieszczeniach

$$(5.7) \quad [C^{\alpha\beta}(\epsilon_{\beta}^{\lambda}u_\lambda + v|_\beta)]|_\alpha + f = 0, \quad (\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}u_\mu|_\lambda)|_\alpha - \epsilon_{\alpha}^{\beta} C^{\alpha\lambda}(\epsilon_{\lambda}^{\mu}u_\mu + v|_\lambda) = 0.$$

Rozwiązanie tego układu równań względem niewiadomych funkcji u_α , v określa stan przemieszczenia przekrycia strukturalnego przy zmiennych wartościach składowych tensorów sztywności $\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ i $C^{\alpha\beta}$.

W przypadku stałych własności mechanicznych $A = \text{const}$, $I = \text{const}$ i $T^\alpha = \text{const}$ wartości składowych tensorów $\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ i $C^{\alpha\beta}$ są jednakowe w obszarze ustroju

$$\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu} = \text{const}, \quad C^{\alpha\beta} = \text{const}.$$

Układ (5.7) upraszcza się wtedy do postaci

$$(5.8) \quad C^{\alpha\beta}(\epsilon_{\beta}^{\lambda}u_\lambda + v|_\beta)|_\alpha + f = 0, \quad \mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}u_\mu|_\lambda - \epsilon_{\alpha}^{\beta} C^{\alpha\lambda}(\epsilon_{\lambda}^{\mu}u_\mu + v|_\lambda) = 0.$$

W zakończeniu tego rozdziału przedstawimy uproszczoną postać układu (5.7) wprowadzając założenie analogiczne do założenia Love'a–Kirchhoffa przyjmowanego w klasycznej teorii płyt [14, 18]. Przyjmujemy mianowicie, że punkty warstw zewnętrznych leżące na prostej prostopadłej do płaszczyzny π , po odkształceniu pozostają na prostej, która jest prostopadła do powierzchni obojętnej (rys. 3c). Konsekwencją tego założenia jest zależność

$$(5.9) \quad u_\alpha = \epsilon_{\alpha}^{\beta} v|_\beta.$$

Eliminując z równań równowagi (5.5) siły poprzeczne Q^α , po przekształceniach i uwzględnieniu (5.2)_{1,3} otrzymujemy równanie

$$(5.10) \quad (D^{\alpha\beta\lambda\mu}v|_{\lambda\mu})|_{\alpha\beta} - f = 0,$$

które w przypadku $D^{\alpha\beta\lambda\mu} = \text{const}$ przyjmuje postać

$$(5.11) \quad D^{\alpha\beta\lambda\mu}v|_{\alpha\beta\lambda\mu} - f = 0.$$

6. Obliczanie sił w prętach

W wyniku rozwiązania układu równań (5.8), przy danych warunkach brzegowych wynikających ze sposobu podparcia przekrycia, otrzymujemy składowe v i u_α . Siły w prętach ustroju znajdujemy na podstawie zależności (4.1), która w odniesieniu do prętów siatek zewnętrznych ma postać

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \overset{+}{P}_\Delta &= -\frac{2h}{1+\lambda} \overset{+}{E} \overset{+}{A} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \epsilon_{\alpha}^{\nu} u_{\nu} |_{\beta}, \\ \overset{-}{P}_\Delta &= \frac{2h}{1+\lambda} \lambda \overset{-}{E} \overset{-}{A} \overset{-}{T} \overset{-}{T} \overset{-}{T} \epsilon_{\alpha}^{\nu} u_{\nu} |_{\beta}, \end{aligned}$$

co znajdujemy wykorzystując związki (2.4) i (3.1).

Wzory na siły w krzyżulcach znajdujemy podstawiając do (4.1) zależność (3.6), co daje

$$(6.2) \quad \overset{+}{P}_\Delta = \overset{+}{E} \overset{+}{A} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} (\epsilon_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} + v|_{\alpha}).$$

Podczas znajdowania sił w prętach przekrycia wartości składowych stanu przemieszczenia i ich pochodnych obliczamy w przekrojach środkowych prętów.

Gdy stan przemieszczenia ustroju określamy na podstawie równania uproszczonego (5.10), wówczas siły w prętach siatek zewnętrznych znajdujemy podstawiając związek (5.9) do zależności (6.1), co daje

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \overset{+}{P}_\Delta &= \frac{-2h}{1+\lambda} \overset{+}{E} \overset{+}{A} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} v|_{\alpha\beta}, \\ \overset{-}{P}_\Delta &= \frac{2h}{1+\lambda} \lambda \overset{-}{E} \overset{-}{A} \overset{-}{T} \overset{-}{T} \overset{-}{T} v|_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Nieco inaczej postępujemy podczas obliczania sił w krzyżulcach. Z równania równowagi (5.5) znajdujemy

$$Q^{\alpha} = \epsilon_{\beta}^{\alpha} M^{\lambda\beta} |_{\lambda}.$$

Podstawiając do powyższego związek zależności (5.3), (5.2)₁ i (5.9), otrzymujemy

$$(6.4) \quad Q^{\alpha} = D^{\beta\alpha\lambda\mu} v|_{\beta\lambda\mu}.$$

Siły w poszczególnych prętach znajdujemy z zależności

$$(6.5) \quad \frac{1}{\Omega} \sum_{\Delta} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} P I = D^{\beta\alpha\lambda\mu} v|_{\beta\lambda\mu}$$

wynikającej z (4.16)₂ i (6.4) oraz z warunków równowagi węzła, w którym zbiegają się krzyżulce.

7. Podstawowe zależności we współrzędnych biegunowych

W przypadkach przekryć strukturalnych pierścieniowych w planie wygodnie jest posługiwać się układem współrzędnych biegunowych $\varrho = 1$, $\varphi = 2$. Rozpatrzmy przekrycie pierścieniowe, którego siatki zewnętrzne są siatkami biegunowymi (rys. 1d). Dzięki temu jedynie $D^{\rho\rho\rho\rho}$ i $D^{\varphi\varphi\varphi\varphi}$ są niezerowe. Ponadto zachodzą równości $C^{\rho\varphi} = C^{\varphi\rho} = 0$. Uwzględniając wartości dwuwektora Ricciego w biegunowym układzie współrzędnych (por. np. [17]) z (5.2)₃ znajdujemy

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{D}^{\rho\varphi\rho\varphi} &= \varrho^{-2} D^{\rho\rho\rho\rho}, \\ \overset{\circ}{D}^{\varphi\rho\rho\rho} &= \varrho^2 D^{\varphi\varphi\varphi\varphi}, \end{aligned}$$

przy czym pozostałe składowe tensora $\overset{\circ}{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ są równe zeru. Związki fizyczne (5.3) i (5.4) mają teraz postać

$$(7.1) \quad \begin{aligned} Q^\rho &= C^{\rho\rho} \gamma_\rho, & Q^\varphi &= C^{\varphi\varphi} \gamma_\varphi, \\ M^{\rho\rho} &= M^{\varphi\varphi} = 0, \\ M^{\rho\varphi} &= \varrho^{-2} D^{\rho\rho\rho\rho} \kappa_{\rho\varphi}, \\ M^{\varphi\rho} &= \varrho^2 D^{\varphi\varphi\varphi\varphi} \kappa_{\varphi\rho}. \end{aligned}$$

Zamieniając pochodne kowariantne na pochodne cząstkowe, napiszemy związki geometryczne (3.5) i (5.2)₁ w formie

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \gamma_\rho &= \varrho^{-1} u_\rho + v_{,\rho}, & \gamma_\varphi &= -\varrho u_\rho + v_{,\varphi}, \\ \kappa_{\rho\varphi} &= u_{\varphi,\rho} - \varrho^{-1} u_\rho, & \kappa_{\varphi\rho} &= u_{\rho,\varphi} - \varrho^{-1} u_\varphi, \end{aligned}$$

a równania równowagi (5.5) po uwzględnieniu (7.1)₃ mają postać

$$(7.3) \quad \begin{aligned} Q^\rho_{,\rho} + Q^\varphi_{,\varphi} + \varrho^{-1} Q^\rho + f &= 0, \\ M^{\varphi\rho}_{,\varphi} + \varrho Q^\varphi &= 0, \\ M^{\rho\varphi}_{,\rho} + 2\varrho^{-1} M^{\rho\varphi} + \varrho^{-1} M^{\varphi\rho} - \varrho^{-1} Q^\rho &= 0. \end{aligned}$$

Przyjmijmy dalej, że sposób podparcia i obciążenia ustroju spełnia warunki kołowej symetrii, oraz przyjmijmy równość $u_\rho = 0$. Związki geometryczne (7.2) sprowadzą się do

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \gamma_\rho &= \varrho^{-1} u_\rho + v_{,\rho}, & \gamma_\varphi &= 0, \\ \kappa_{\rho\varphi} &= u_{\varphi,\rho} - \varrho^{-1} u_\rho, & \kappa_{\varphi\rho} &= -\varrho^{-1} u_\varphi, \end{aligned}$$

natomiast równania równowagi (7.3) otrzymujemy w postaci

$$(7.5) \quad \begin{aligned} (\varrho Q^\rho)_{,\rho} + \varrho f &= 0, & Q^\varphi &= 0, \\ (\varrho^2 M^{\rho\varphi})_{,\rho} + \varrho M^{\varphi\rho} + \varrho Q^\rho &= 0. \end{aligned}$$

Po całkowaniu równania (7.5)₁ otrzymamy

$$(7.6) \quad \varrho Q^\rho = - \int \varrho f d\varrho + C_1,$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania. Podstawiając (7.6) do (7.5)₃ otrzymujemy

$$(7.7) \quad (\varrho^2 M^{\rho\varphi})_{,\rho} + \varrho M^{\varphi\rho} = \int \varrho f d\varrho - C_1.$$

Podstawiając następnie do równań (7.6) i (7.7) związki fizyczne (7.1) i geometryczne (7.4) znajdujemy

$$(7.8) \quad \begin{aligned} C^{\rho\rho}(u_\varphi + \varrho v_{,\rho}) &= \frac{1}{\varrho} \left(C_1 - \int \varrho f d\varrho \right), \\ [D^{\rho\rho\rho\rho}(u_{\varphi,\rho} - \varrho^{-1} u_\rho)]_{,\rho} - \varrho^2 D^{\varphi\varphi\varphi\varphi} u_\varphi &= \int \varrho f d\varrho - C_1. \end{aligned}$$

Powyższe równania są układem równań równowagi wyrażonym w przemieszczeniach.

W równaniu (7.8)₂ występuje tylko jedna niewiadoma u_φ . Po rozwiązaniu tego równania funkcję u_φ wstawiamy do przekształconego równania (7.8)₁, co daje

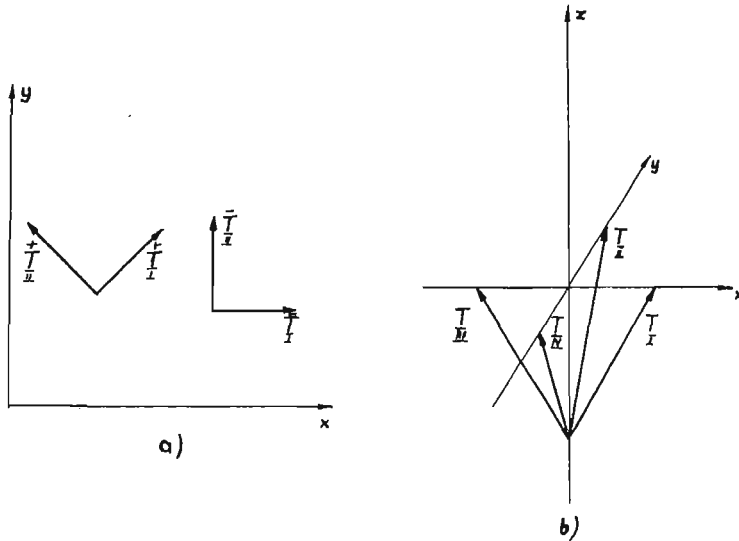
$$(7.9) \quad v = \int \frac{1}{\varrho} \left[\frac{1}{\varrho C^{\rho\rho}} \left(C_1 - \int \varrho f d\varrho \right) - u_\varphi \right] d\varrho + C_2,$$

gdzie C_2 jest stałą całkowania.

8. Podstawowe zależności we współrzędnych prostokątnych

Rozpatrzmy w pierwszej kolejności przekrycie strukturalne o siatce diagonalnej pokazanej na rys. 1b. Przyjmując kierunki osi $x = 1, y = 1$ równoległe do prętów siatki dolnej (rys. 10a) składowe wektorów kierunkowych siatek zewnętrznych otrzymujemy następującej wartości:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \overset{+}{T}_I^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \overset{+}{T}_I^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \overset{+}{T}_{II}^1 &= \frac{-1}{\sqrt{2}}, & \overset{+}{T}_{II}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \bar{T}_I^1 &= 1, & \bar{T}_I^2 &= 0, & \bar{T}_{II}^1 &= 0, & \bar{T}_{II}^2 &= 1. \end{aligned}$$



Rys. 10

Przyjmując jednakowe pola przekrojów prętów siatek zewnętrznych i oznaczając

$$R = \frac{EA}{l},$$

gdzie l jest długością prętów siatki górnej, możemy składowe $A^{\alpha\beta\mu\lambda}$ wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \overset{+}{A}^{xxxx} = \overset{+}{A}^{yyyy} = \overset{+}{A}^{xxyy} = \overset{+}{A}^{xyxy} = \overset{+}{A}^{yxyx} = \overset{+}{A}^{xyyx} = \overset{+}{A}^{yxyx} = \overset{+}{A}^{xyxx} = \overset{+}{A}^{yyxx} = \frac{1}{2}R, \\ \bar{A}^{xxxx} = \bar{A}^{yyyy} = R\sqrt{2}, \end{aligned}$$

przy czym pozostałe składowe $\overset{+}{A}^{\alpha\beta\mu\lambda}$ i $\bar{A}^{\alpha\beta\mu\lambda}$ są równe zero.

Podstawiając otrzymane wartości do (5.2)₂ znajdujemy

$$(8.2) \quad \begin{aligned} D^{xxxx} = D^{yyyy} &= \left(\frac{1}{2} + \lambda^2 \sqrt{2} \right) \left(\frac{2h}{1+\lambda} \right)^2 R, \\ D^{xxyy} = D^{xyxy} = D^{yxyx} = D^{yyxx} &= D^{xyyx} = D^{yxyx} = D^{yyxx} = \frac{1}{2} R \left(\frac{2h}{1+\lambda} \right)^2, \end{aligned}$$

gdzie $\lambda = \sqrt{2}$.

Następnie, wobec wartości składowych wektorów kierunkowych krzyżulców (rys. 10b)

$$(8.3) \quad \begin{aligned} T^1_I &= \frac{l}{l_k \sqrt{2}}, & T^2_I &= 0, & T^3_I &= \frac{2h}{l_k}, \\ T^1_{II} &= 0, & T^2_{II} &= \frac{l}{l_k \sqrt{2}}, & T^3_{II} &= \frac{2h}{l_k}, \\ T^1_{III} &= \frac{-l}{\sqrt{2} l_k}, & T^2_{III} &= 0, & T^3_{III} &= \frac{2h}{l_k}, \\ T^1_{IV} &= 0, & T^2_{IV} &= \frac{-l}{\sqrt{2} l_k}, & T^3_{IV} &= \frac{2h}{l_k}, \end{aligned}$$

gdzie $l_k = \sqrt{4h^2 + l^2}/2$ jest długością krzyżulców, oraz wobec $\Omega = 2l^2$, składowe tensora $C^{\alpha\beta}$ wynoszą

$$(8.4) \quad C^{xx} = C^{yy} = \frac{8h^2 EA_k}{l_k^3}, \quad C^{xy} = C^{yx} = 0,$$

przy czym założono jednakowe pola przekrojów A_k wszystkich krzyżulców.

Podstawiając (8.2) do (5.2)₃, a następnie wraz z (8.4) do układu równań równowagi (5.8), otrzymujemy po przekształceniach

$$(8.5) \quad \begin{aligned} C^{xx}(u_y + v_{,x})_{,x} + C^{yy}(-u_x + v_{,y})_{,y} + f &= 0, \\ D^{xyxy} u_{x,xx} - 2D^{xyyx} u_{y,xy} + D^{yyyy} u_{x,yy} + C^{yy}(-u_x + v_{,y}) &= 0, \\ D^{yxyx} u_{y,yy} - 2D^{yxxy} u_{x,xy} + D^{xxxx} u_{y,xx} - C^{xx}(u_y + v_{,x}) &= 0. \end{aligned}$$

Powyższy układ równań równowagi można przepisać w postaci analogicznej do wyprowadzonej w pracy [19] w odniesieniu do płyt trójwarstwowych:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} L_{11} v + L_{12} u_x + L_{13} u_y &= f, \\ L_{21} v + L_{22} u_x + L_{23} u_y &= 0, \\ L_{31} v + L_{23} u_x + L_{33} u_y &= 0. \end{aligned}$$

Występujące w tych równaniach operatory różniczkowe, po uwzględnieniu (8.2) i (8.4) i wprowadzeniu oznaczeń

$$(8.7) \quad \begin{aligned} C &= \frac{2h^2 EA_k}{l_k^3}, \\ D &= R \left(\frac{2h}{1+\lambda} \right)^2, \quad K = \frac{1}{2} + \lambda^2 \sqrt{2}, \end{aligned}$$

wyrażamy za pomocą następujących wzorów

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= -C(\partial_{xx} + \partial_{yy}), \\
 L_{12} &= L_{21} = C\partial_y, \\
 L_{13} &= L_{31} = -C\partial_x, \\
 L_{22} &= D\left(\frac{1}{2}\partial_{xx} + K\partial_{yy}\right) - C, \\
 L_{23} &= L_{32} = -D\partial_{xy}, \\
 L_{33} &= D\left(\frac{1}{2}\partial_{yy} + K\partial_{xx}\right) - C.
 \end{aligned}
 \tag{8.8}$$

Uzależniając składowe v, u_x, u_y od funkcji przemieszczeń $\Phi(x, y)$ za pomocą związków

$$v = \begin{vmatrix} L_{22} & L_{23} \\ L_{23} & L_{23} \end{vmatrix} \Phi, \quad u_x = \begin{vmatrix} L_{23} & L_{12} \\ L_{33} & L_{31} \end{vmatrix} \Phi, \quad u_y = \begin{vmatrix} L_{12} & L_{22} \\ L_{13} & L_{23} \end{vmatrix} \Phi,
 \tag{8.9}$$

otrzymujemy tożsamościowe spełnienie równań (8.6)_{2,3}.

Równanie (8.6)₁ prowadzi, po uwzględnieniu (8.9), do następującego równania różniczkowego

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{33} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} \Phi = f.
 \tag{8.10}$$

Równanie to, po uwzględnieniu wzorów (8.8), możemy przekształcić do następującej postaci

$$DC[-0,5DK(\partial_{xx} + \partial_{yy})(\partial_{xxxx} + \partial_{yyyy}) + CK(\partial_{xxxx} + \partial_{yyyy}) - D(K^2 - 0,75)\partial_{xx}\partial_{yy}(\partial_{xx} + \partial_{yy}) + 2,5C\partial_{xx}\partial_{yy}] \Phi = f.
 \tag{8.11}$$

Wzory określające składowe v, u_x i u_y znajdujemy rozwijając wyznaczniki (8.9) i uwzględniając wzory (8.8)

$$\begin{aligned}
 v &= [0,5D^2K(\partial_{xxxx} + \partial_{yyyy}) + D^2(K^2 - 0,75)\partial_{xx}\partial_{yy} - DC(K + 0,5)(\partial_{xx} + \partial_{yy}) + C^2] \Phi, \\
 u_x &= C\partial_y[D(K - 1)\partial_{xx} + 0,5D\partial_{yy} - C] \Phi, \quad u_y = C\partial_x[D(K - 1)\partial_{yy} + 0,5D\partial_{xx} - C] \Phi.
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

Powyższe wzory określające składowe stanu przemieszczenia otrzymano na podstawie pełnego układu równań równowagi (5.8).

Natomiast przyjmując założenie «o prostych normalnych» (5.9), stan przemieszczenia ustroju określamy na podstawie uproszczonego równania równowagi (5.11), które w przypadku siatki diagonalnej przyjmuje postać

$$(K\partial_{xxxx} + 3\partial_{xx}\partial_{yy} + K\partial_{yyyy})v = \frac{f}{D}.
 \tag{8.13}$$

Równanie to wykazuje formalną analogię do równania równowagi płyty ortotropowej, wyprowadzonego przy założeniu Love'a-Kirchhoffa.

Rozpatrzmy z kolei przekrycie strukturalne o siatce równoległej (rys. 1a) i o jednakowych przekrojach prętów siatek zewnętrznych. Jedyne niezerowe składowe tensorów sztywności sprężystej to

$$(8.14) \quad \overset{\circ}{D}^{xyxy} = \overset{\circ}{D}^{yxyx} = 2D, \quad C^{xx} = C^{yy} = 2C,$$

przy czym współczynnik $\lambda = 1$.

W tym przypadku operatory $L_{\alpha\beta}$ występujące w układzie równań (8.6) są określone za pomocą następujących wzorów:

$$(8.15) \quad \begin{aligned} L_{11} &= -C(\partial_{xx} + \partial_{yy}), & L_{12} &= L_{21} = C\partial_y, & L_{13} &= L_{31} = -C\partial_x, \\ L_{22} &= 2D\partial_{yy} - C, & L_{23} &= L_{32} = 0, & L_{33} &= 2D\partial_{xx} - C, \end{aligned}$$

co prowadzi do następującego równania na funkcję przemieszczeń

$$(8.16) \quad 2CD[\partial_{xxxx}(C - 2D\partial_{yy}) + \partial_{yyyy}(C - 2D\partial_{xx})]\Phi = f.$$

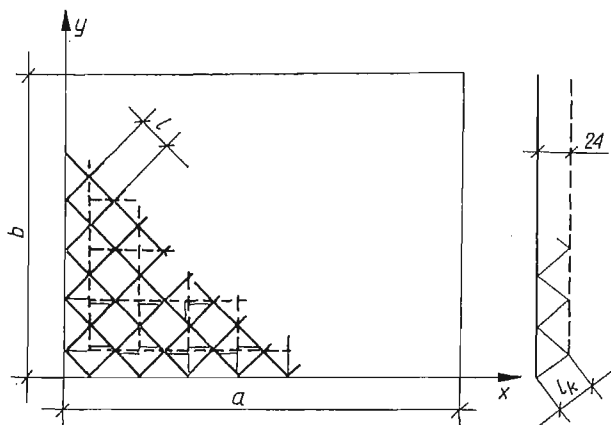
Identyczną postać tego równania otrzymano niezależnie w pracy [5].

Uproszczone równanie równowagi (5.11) ma w przypadku przekrycia o siatce równoległej postać

$$(8.17) \quad (\partial_{xxxx} + \partial_{yyyy})v = \frac{f}{2D}.$$

9. Przykład liczbowy. Uwagi końcowe

W tym punkcie przedstawimy przykład obliczeń prostokątnego przekrycia strukturalnego o siatce diagonalnej, swobodnie podpartego (rys. 11).



Rys. 11

Na podstawie rozważań przedstawionych w pracy [20] wiadomo, że rozwiązanie równania (8.11) przy warunkach brzegowych wynikających ze swobodnego podparcia

wszystkich krawędzi przekrycia otrzymamy, przyjmując funkcję przemieszczeń Φ w postaci zaproponowanej przez Naviera

$$(9.1) \quad \begin{aligned} \Phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \alpha_m &= \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}. \end{aligned}$$

Przedstawiając obciążenie f w postaci szeregu trygonometrycznego

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

gdzie

$$f_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy,$$

współczynniki Φ_{mn} obliczamy według wzoru

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \Phi_{mn} &= \frac{f_{mn}}{CD} [0,5 DK(\alpha_m^2 + \beta_n^2)(\alpha_m^4 + \beta_n^4) + CK(\alpha_m^4 + \beta_n^4) + \\ &\quad + D(K^2 - 0,75)\alpha_m^2 \beta_n^2 (\alpha_m^2 + \beta_n^2) + 2,5 C\alpha_m^2 \beta_n^2]^{-1}. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe rozwiązanie do wzorów (8.12) otrzymujemy zależności określające składowe v , u_x i u_y w postaci

$$(9.3) \quad \begin{aligned} v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ u_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ u_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \end{aligned}$$

w których współczynniki rozwinięcia dane są zależnościami

$$\begin{aligned} V_{mn} &= [0,5D^2K(\alpha_m^4 + \beta_n^4) + D^2(K^2 - 0,75)\alpha_m^2 \beta_n^2 + CD(K + 0,5)(\alpha_m^2 + \beta_n^2) + C^2] \Phi_{mn}, \\ X_{mn} &= [(1 - K)CD\alpha_m^2 - 0,5CD\beta_n^2 - C^2] \beta_n \Phi_{mn}, \\ Y_{mn} &= [(1 - K)CD\beta_n^2 - 0,5CD\alpha_m^2 - C^2] \alpha_m \Phi_{mn}, \end{aligned}$$

przy czym współczynniki Φ_{mn} określone są wzorami (9.2).

Znając stan przemieszczenia konstrukcji przystąpimy do wyznaczenia sił w prętach. Siły w prętach siatek zewnętrznych znajdujemy wstawiając do wzorów (6.1) związki (8.1) i (9.3)

$$\begin{aligned}
 \overset{+}{P}_I &= -EA \frac{2h}{1+\lambda} \left(T^1 T^1 u_{y,x} + T^1 T^2 u_{y,y} - T^2 T^1 u_{x,x} - \right. \\
 &\quad \left. - T^2 T^2 u_{x,y} \right) = -\frac{h}{1+\lambda} EA \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(X_{mn} \beta_n - \\
 &\quad - Y_{mn} \alpha_m) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + (-X_{mn} \alpha_m + Y_{mn} \beta_m) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y], \\
 \overset{+}{P}_{II} &= -\frac{2h}{1+\lambda} EA \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(X_{mn} \beta_n - Y_{mn} \alpha_m) \sin \alpha_m y \times \\
 &\quad \times \sin \beta_n y + (X_{mn} \alpha_m - Y_{mn} \beta_n) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y], \\
 \overset{-}{P}_I &= \frac{2h\lambda}{1+\lambda} EA \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \alpha_m \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
 \overset{-}{P}_{II} &= \frac{2h\lambda}{1+\lambda} EA \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \beta_n \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.
 \end{aligned}
 \tag{9.4a}$$

Z kolei siły w krzyżulcach otrzymamy podstawiając do wzoru (6.2) związki (8.3) i (9.3):

$$\begin{aligned}
 \overset{P}{I} &= EA_k T^1 T^3 (u_y + v_x) = \frac{2hlEA_k}{\sqrt{2}l_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{mn} \alpha_m + Y_{mn}) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
 \overset{P}{II} &= \frac{2hlEA_k}{\sqrt{2}l_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{mn} \beta_n - X_{mn}) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\
 \overset{P}{III} &= \frac{-2hlEA_k}{\sqrt{2}l_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{mn} \alpha_m + Y_{mn}) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
 \overset{P}{IV} &= \frac{-2hlEA_k}{\sqrt{2}l_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{mn} \beta_n - X_{mn}) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y.
 \end{aligned}
 \tag{9.4b}$$

Wartości sił należy obliczać w przekrojach środkowych poszczególnych prętów.

W celu sprawdzenia poprawności przedstawionych rozważań przeprowadzono obliczenia numeryczne ugięć według wzorów (9.3) oraz sił w prętach według wzorów (9.4). Obliczenia te wykonano przyjmując następujące dane:

$$\begin{aligned}
 a &= b = 24 \text{ m}, & h &= 0,75 \text{ m}, \\
 l &= 2 \text{ m}, & f &= -0,2 \text{ T/m}^2,
 \end{aligned}$$

wszystkie przekroje prętów przyjęto jednakowe o polu $A = 10 \text{ cm}^2$.

Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymano następujące wyniki:

maksymalne ugięcie pionowe	4,1 cm,
maksymalna siła w pręcie siatki zewnętrznej	12,88 T,
maksymalna siła w krzyżulcu	6,43 T.

Wyniki te porównano z wynikami obliczeń otrzymanymi przy zastosowaniu modelu kratownicy przestrzennej (metoda odkształceń). Rozbieżności maksymalnych wielkości geometrycznych do 9% i maksymalnych wielkości statycznych do 12% przemawiają za stosowaniem przedstawionej metody.

Jednakże podczas stosowania tej metody do obliczeń statycznych należy zdawać sobie sprawę z ewentualnych błędów obarczających wyniki, a spowodowanych pominięciem wpływu sił podłużnych $N^{\alpha\beta}$ na odkształcenia ustroju. Siły te bowiem znikają jedynie w pewnych przypadkach siatek przekryć strukturalnych, a to gdy

$$p^{+\alpha\beta} + p^{-\alpha\beta} = 0.$$

Po uwzględnieniu (2.2) (3.2) i (4.8) stwierdzamy, że równość ta ma miejsce, jeżeli

$$A^{+\alpha\beta\mu\nu} = \lambda A^{-\alpha\beta\mu\nu},$$

gdzie λ jest współczynnikiem określonym wzorem (4.14). Natomiast w przypadkach występowania sił podłużnych $N^{\alpha\beta}$, rozwiązania pozbawione wspomnianego błędu możemy otrzymać traktując przekrycie strukturalne jako ustrój płytowo-tarczowy. Równania statyki uwzględniające efekt tarczowy w przekryciach strukturalnych wyprowadzono w pracy [23].

Do zalet omawianej metody należy także możliwość analizy jakościowej rozpatrywanych konstrukcji. Wyprowadzone równania w łatwy sposób pozwalają ocenić wpływ zmian poszczególnych charakterystyk na pracę przekrycia. Informacje takie są bardzo istotne przy wstępnej analizie konstrukcji.

Metoda ta może być również stosowana do analizy statycznej przekryć strukturalnych rozmaitych typów. Przy czym obliczenia można przeprowadzać na podstawie pełnego układu równań lub, w uzasadnionych przypadkach, na podstawie równania uproszczonego.

Zastosowana analogia płyty trójwarstwowej pozwala bezpośrednio korzystać z rozwiązań optymalnych dotyczących tych płyt, przedstawionych w pracach [21, 22].

Literatura cytowana w tekście

1. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
2. R. ŚWITKA, *Obliczanie rusztów kratowych*, XVIII Konf. KI PAN i PZITB, Krynica 1972.
3. W. GUTKOWSKI, *Płyty kratowe z elementów powtarzalnych*, Rozpr. Inż., 1(1965).
4. E. SUZUKI, H. KITAMURA, M. YAMADA, *The analysis of the space truss plate by difference equations*, The Int. Conf. on Space Structures, University of Surrey, 1966.
5. A. GOMULIŃSKI, M. WITKOWSKI, *Pewien sposób obliczania struktur kratowych*, Arch. Inż. Łąd., 1(1972).
6. R. PEŁA, *Statyka przestrzennej konstrukcji prętowej płyty strukturalnej*, Rozpr. Inż., 4(1971).
7. E. KUBICA, *Obliczanie ugięć przekryć siatkowych*, Prace nauk. Inst. Budow. P. Wr., 5 (1971).
8. J. D. RENTON, *The related behaviour of plane grids, space grids and plates*, The Int. Conf. on Space Structures, University of Surrey, 1966.

9. J. D. RENTON, *General properties of space grids*, Int. J. Mech. Sci., 1 (1970).
10. B. KATO, K. TAKANASHI, Y. TSUSHIMA, Y. HIRATA, *A space truss of square pyramid units*, The Int. Conf. on Space Structures, University of Surrey, 1966.
11. L. KOLLAR, *Continuum method of analysis for double-layer space trusses with upper and lower chord planes of different rigidities*, Acta Technica Ac., Sci. Hung., 76 (1974) 53-63.
12. F. LEDERER, *Fachwerk und Uostplatten*, Werner-Verlag, Düsseldorf 1972.
13. L. F. I. PLANTEMA, *Sandwich construction. The bending and buckling of sandwich beams, plates and shells*, Wiley and Sons. Amsterdam 1966.
14. A. С. ВОЛЬМИР, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехтеориздат, Москва 1956.
15. Cz. WOŹNIAK, *Modele ciagle gęstych siatek prętowych*, Arch. Inż. Łąd., 2 (1965).
16. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Gęste heksagonalne siatki sprężyste*, Mech. Teor. Stos., 3 (1970).
17. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
18. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
19. N. J. HOFT, *Bending and buckling of rectangular sandwich plates*, NACA T.N.no 2225, 1950.
20. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inż. Łąd., 1 (1966).
21. W. DZIENISZEWSKI, *Niektóre przypadki kształtowania trójwarstwowych płyt swobodnie podpartych o równomiernej wytrzymałości*, Rozpr. Inż., 4 (1969).
22. J. GIERLIŃSKI, *Niektóre przypadki prostokątnych płyt trójwarstwowych o równej wytrzymałości opartych na układach belek*, Arch. Inż. Łąd., 1 (1973).
23. J. GIERLIŃSKI, *Równania liniowej teorii sprężystych powłok strukturalnych* (w przygotowaniu do druku).

Р е з ю м е

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ
СТРУКТУРНЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ

В работе представлен приближенный метод расчета плоских стержневых структурных перекрытий. Такого типа конструкция состоит из двух параллельных стержневых сеток, соединенных с помощью крестовин. Длины стержней внешних сеток и крестовин являются небольшими по сравнению с габаритами конструкции. Кроме того, структура системы регулярна. На основании этих предположений была выведена сплошная модель системы внешних сеток и системы крестовин. Принималось при этом, что внешние слои модельной конструкции способны переносить лишь мембранные напряжения, а внутренний слой — лишь вертикальные касательные напряжения. К определенной таким образом конструкции была применена статическая модель трехслойной плиты. На основе фундаментальной системы уравнений, описывающих такую систему, были выведены уравнения статики структурного перекрытия. Рассуждения проиллюстрированы примером.

S u m m a r y

APPROXIMATE CALCULATIONS OF A ROD STRUCTURAL PLATE

In the paper considered is presented a method of calculations of regular rod structural plate. This is understood to be a certain kind of spatial truss whose all nodes are situated on two parallel planes. The nodes are connected with rods forming two plane networks and a set of cross braces. The network of the considered construction is dense and regular. The basic equations were derived on applying a sandwich plate as the continuous model of lattice structure. The numerical example is given.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1974 r.

O MODELOWANIU WAŁU WIELOPODPOROWEGO Z WIELOMA TARCZAMI ZA POMOCĄ
WIELKIEGO SYSTEMU BIOSCYLATORÓW
CZĘŚĆ II. BIOSCYLATORY WIELOWSKAŹNIKOWE. MODELOWANIE WAŁU

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

W pracy skonstruowano prosty, ale oryginalny model dyskretny sprężystego wału ważkiego na wielu podporach sprężystych, obciążonego wieloma tarczami. Jest nim bioscylator wielowskaźnikowy o sześciu stopniach swobody (trzy w ruchu postępowym, trzy w ruchu obrotowym), za pomocą którego modelujemy: n_3 przekrojów podporowych wału, n_4 przekrojów obciążonych tarczami, n_5 przekrojów redukcji mas, w przestrzeni n_1 -wymiarowej, przy uwzględnieniu n_2 rodzajów ruchu.

Rozważania przeprowadzono w terminologii wielociągów, których algebrę i elementy analizy sformułował autor w oddzielnej pracy. Otrzymane równania różniczkowe są pięciociągowe o współczynnikach wyrażonych ciągami dziesięciociągowymi.

1. Bioscylator jednowskaźnikowy o 2 stopniach swobody

Wprowadzamy oznaczenia:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_j],$$

gdzie $j = 1, 2$ — wskaźnik ilości stopni swobody ciągu jednowskaźnikowego stopni swobody układu mechanicznego, x_1 — wartość wektora przemieszczenia \bar{x}_1 w ruchu postępowym punktu, x_2 — wartość wektora obrotu (kąta) \bar{x}_2 w ruchu obrotowym¹⁾ punktu;

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [\dot{x}_j]$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości prędkości liniowej i kątowej w ruchu układu mechanicznego, gdzie \dot{x}_1 — wartość wektora prędkości (liniowej) $\dot{\bar{x}}_1$ w ruchu postępowym punktu, \dot{x}_2 — wartość wektora prędkości (kątowej) $\dot{\bar{x}}_2$ w ruchu obrotowym punktu;

$$\ddot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = [\ddot{x}_j]$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości przyspieszenia: liniowego i kątowego w ruchu układu mechanicznego, gdzie \ddot{x}_1 — wartość wektora przyspieszenia liniowego $\ddot{\bar{x}}_1$ w ruchu po-

¹⁾ Mamy tutaj właściwie ruch punktu po okręgu — ruch wahadła matematycznego.

stępowym punktu, \ddot{x}_2 — wartość wektora przyspieszenia kąowego $\ddot{\bar{x}}_2$ w ruchu obrotowym punktu;

$${}^2\bar{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = [m_{j_1 j_2}],$$

gdzie $j_1 = j_2 = 1, 2$ — wskaźnik ciągu dwuwskaznikowego współczynników bezwładności (mas) samego układu mechanicznego, m_{11} — masa punktu w ruchu postępowym z wartością x_1 przemieszczenia \bar{x}_1 proporcjonalną do wartości S_1 siły sprężystej \bar{S}_1 , m_{12} — moment bezwładności masy punktu względem osi obrotu podzielony przez długość wahadła, jako masa uogólniona w ruchu postępowym o wartości przemieszczenia proporcjonalnej do wartości S_2 momentu sprężystego \bar{S}_2 , m_{21} — masa punktu w ruchu obrotowym względem osi obrotu o wartości obrotu proporcjonalnej do wartości S_1 siły sprężystej \bar{S}_1 pomnożona przez długość odpowiedniego wahadła, jako masa uogólniona, m_{22} — moment bezwładności masy punktu względem osi obrotu odpowiedniego wahadła, jako masa uogólniona punktu w ruchu obrotowym z wartością x_2 obrotu \bar{x}_2 proporcjonalną do wartości S_2 momentu sprężystego \bar{S}_2 .

Oznaczamy również przez:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = [S_j]$$

— ciąg jednowskaźnikowy uogólnionych sił sprężystych, gdzie S_1 — wartość wektora siły sprężystej \bar{S}_1 w ruchu postępowym, S_2 — wartość wektora momentu sprężystego \bar{S}_2 w ruchu obrotowym, jako siły sprężystej uogólnionej²⁾;

$${}^2\bar{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = [s_{j_1 j_2}]$$

— ciąg dwuwskaznikowy współczynników sprężystości danego układu mechanicznego, gdzie s_{11} — współczynnik sprężystości przy obciążeniu masy m_{11} siłą \bar{S}_1 , s_{12} — współczynnik sprężystości przy obciążeniu masy uogólnionej m_{12} momentem \bar{S}_2 , s_{21} — współczynnik sprężystości przy obciążeniu masy uogólnionej m_{21} siłą \bar{S}_1 , s_{22} — współczynnik sprężystości przy obciążeniu masy uogólnionej m_{22} momentem \bar{S}_2 ;

$${}^2\bar{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = [r_{j_1 j_2}]$$

— ciąg dwuwskaznikowy współczynników tłumienia danego układu mechanicznego, gdzie r_{11} — współczynnik tłumienia (oporu) masy m_{11} , na którą działa siła tłumienia \bar{R}_1 o wartości R_1 , r_{12} — współczynnik tłumienia (oporu) masy m_{12} , na którą działa moment sił tłumienia \bar{R}_2 o wartości R_2 , r_{21} — współczynnik tłumienia (oporu) masy m_{21} , na którą działa siła tłumienia \bar{R}_1 , r_{22} — współczynnik tłumienia (oporu) masy m_{22} , na którą działa moment sił tłumienia \bar{R}_2 ;

$${}^2\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = [R_j]$$

²⁾ W jednym równaniu (sił) moment sprężysty jest siłą sprężystą uogólnioną, w drugim natomiast równaniu (momentów) siła sprężysta jest momentem sprężystym uogólnionym.

— ciąg jednowskaźnikowy uogólnionych sił tłumienia danego układu mechanicznego, gdzie R_1 — wartość wektora siły tłumienia \bar{R}_1 w ruchu postępowym, R_2 — wartość wektora momentu siły tłumienia \bar{R}_2 w ruchu obrotowym, jako uogólnionej siły tłumienia³⁾;

$$\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = [f_j(t)]$$

— ciąg jednowskaźnikowy uogólnionych sił wymuszających danego układu mechanicznego, gdzie $f_1(t)$ — wartość wektora siły wymuszającej \bar{f}_1 w ruchu postępowym, $f_2(t)$ — wartość wektora momentu sił wymuszających \bar{f}_2 w ruchu obrotowym jako uogólnionej siły wymuszającej⁴⁾.

Przyjmujemy, że:

1 — wartość x_1 przemieszczenia \bar{x}_1 oscylatora postępowego jest proporcjonalna do wartości \ddot{x}_1 jego przyspieszenia liniowego $\ddot{\bar{x}}_1$ oraz wartości \ddot{x}_2 przyspieszenia kąowego $\ddot{\bar{x}}_2$ oscylatora obrotowego, czyli $x_1 \sim \ddot{x}_1$, $x_1 \sim \ddot{x}_2$, przy czym $\ddot{x}_2 \sim x_2$;

2 — wartość x_2 kąta obrotu \bar{x}_2 oscylatora obrotowego jest proporcjonalna do wartości \ddot{x}_1 przyspieszenia liniowego $\ddot{\bar{x}}_1$ oscylatora postępowego oraz wartości \ddot{x}_2 swojego przyspieszenia kąowego $\ddot{\bar{x}}_2$, czyli $x_2 \sim \ddot{x}_1$, $x_2 \sim \ddot{x}_2$, przy czym $\ddot{x}_1 \sim x_1$.

Wynikają stąd następujące związki liniowe:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_1 &= -s_{11}x_1, & m_{12}\ddot{x}_2 &= -s_{12}x_2, \\ m_{21}\ddot{x}_1 &= -s_{21}x_1, & m_{22}\ddot{x}_2 &= -s_{22}x_2, \end{aligned}$$

które jeśli są spełnione przez funkcje $x_1(t)$, $x_2(t)$, to wtedy można otrzymać dwa równania różniczkowe stanowiące układ

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 &= -(s_{11}x_1 + s_{12}x_2), \\ m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 &= -(s_{21}x_1 + s_{22}x_2), \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 &= 0, \\ m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 &= 0, \end{aligned}$$

które są także spełnione przez te funkcje.

Otrzymany układ liniowy równań różniczkowych jednorodnych o stałych współczynnikach możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

to jest

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{0}.$$

Wykorzystaliśmy tutaj definicję mnożenia ciągu dwuwskaźnikowego przez ciąg jednowskaźnikowy podaną w pracach [1, 2]. Iloczyn ten jest w przypadku szczególnym identyczny z mnożeniem macierzy.

³⁾ Patrz notka poprzednia dotycząca siły sprężystej.

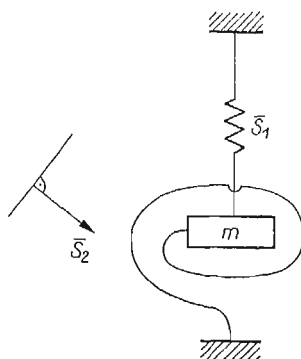
⁴⁾ Patrz obie notki poprzednie.

Jeśli więc na punkt materialny \bar{x} o własnościach ${}^2\bar{m}$ działa uogólniona siła sprężysta \bar{S} , to zachodzi proporcja $\ddot{\bar{x}} \sim \bar{x}$, czyli zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a [5]⁵⁾

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} = -{}^2\bar{s} \cdot \bar{x}.$$

Taki układ mechaniczny [4] będziemy ilustrowali za pomocą masy na jednej sprężynce postępowo-obrotowej podatnej na odkształcenia liniowe względem współrzędnej uogólnionej \bar{x} , to znaczy w kierunku \bar{x}_1 i wokół osi prostopadłej do kąta płaskiego x_2 , który jest wartością kąta obrotu \bar{x}_2 jako wektora równoległego do tej osi.

Przyjęty schemat rysunkowy układu mechanicznego pokazano na rys. 1.



Rys. 1

Definicja 1.0. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$$\bar{P}(t, \bar{x}(t), \ddot{\bar{x}}(t), {}^2\bar{m}, {}^2\bar{s}) = \bar{0}$$

jednorodnym liniowym o współczynnikach stałych nazywamy bioscylatorem harmonicznym swobodnym⁶⁾ o dwóch stopniach swobody.

Często identyfikujemy równanie opisujące zjawisko z samym zjawiskiem nazywając je krótko bioscylatorem swobodnym. Interpretację mechaniczną bioscylatora o dwóch stopniach swobody przedstawiamy za pomocą jednej sprężynki płaskiej postępowo-obrotowej nazwanej bisprężynką o dwóch stopniach swobody.

Definicja 1.1. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$$\bar{P}(t, \bar{x}(t), \ddot{\bar{x}}(t), {}^2\bar{m}, {}^2\bar{s}, \bar{f}(t)) = \bar{0}$$

niejednorodnym liniowym o współczynnikach stałych nazywamy bioscylatorem wymuszonym o dwóch stopniach swobody.

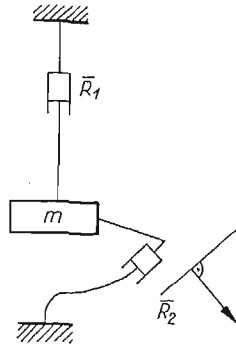
⁵⁾ W pracy tej sformułowano uogólnione prawo Hooke'a układów wielokrotnych jako wielkich systemów stereomechanicznych.

⁶⁾ Swobodny ze względu na brak wymuszeń oraz ośrodek bez oporów.

Model mechaniczny takiego układu jest punktem o współrzędnej uogólnionej \bar{x} posiadającym własności ${}^2\bar{m}$, na który działa uogólniona siła sprężysta \bar{S} i wymuszająca \bar{f} , to znaczy zgodnie z prawem Newtona dla wielkich systemów [9]⁷⁾ mamy

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{f}(t).$$

Układ ten ilustrujemy za pomocą masy na bisprężynce płaskiej obciążonej uogólnioną siłą wymuszającą \bar{f} . Przedstawiono go na rys. 2.



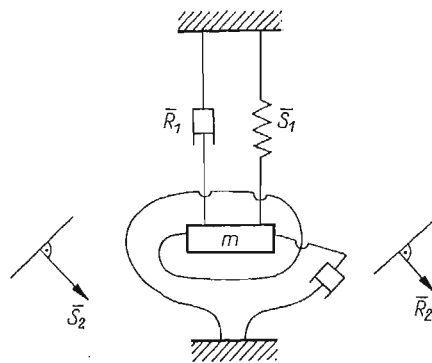
Rys. 2

Definicja 1.2. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$$P[(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t), {}^2\bar{m}, {}^2\bar{r}, {}^2\bar{s}, \bar{f}(t))] = \bar{0}$$

niejednorodnym liniowym, zawierającym $\ddot{\bar{x}}$, o współczynnikach stałych nazywamy bioscytlatorem wymuszonym tłumionym⁸⁾ o dwóch stopniach swobody.

W modelu mechanicznym takiego układu należy dodatkowo uwzględnić tłumik postępowo-obrotowy dwuwymiarowy nazywany bitłumikiem. Pokazano go na rys. 3.



Rys. 3

⁷⁾ Jest to uogólnienie prawa Newtona dla układów mechanicznych wielokrotnych, jako systemów wielkich, opisanych za pomocą ciągów wielowskaźnikowych.

⁸⁾ Tłumienie może być tak zewnętrzne, jak i wewnętrzne.

Bitłumik uwzględnia tłumienie proporcjonalne do wartości $\dot{\bar{x}}$ prędkości uogólnionej $\dot{\bar{x}}$, wywołane uogólnioną siłą tłumiącą \bar{R} , to znaczy tak od siły tłumiącej R_1 w ruchu postępowym, jak i od momentu tłumiącego R_2 w ruchu obrotowym punktu.

W ten sposób równanie bioscyłatora wymuszonego tłumionego dwuwymiarowego o dwóch stopniach swobody ma postać

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{r} \cdot \dot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{f}(t).$$

Jest rzeczą zrozumiałą, że można rozważać różne przypadki szczególne takiego równania różniczkowego ciągów jednowskaźnikowych, którego współczynniki są ciągami dwuwskaźnikowymi.

W szczególności układ–ciąg równań rozważanych uprzednio, mianowicie

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + r_1 \cdot \dot{x}_1 + s_1 \cdot x_1 = f_1(t),$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + r_2 \cdot \dot{x}_2 + s_2 \cdot x_2 = f_2(t),$$

jako ciąg jednowskaźnikowy oscylatorów: 1) postępowego, 2) obrotowego, w postaci

$$[m_1, m_2] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + [r_1, r_2] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + [s_1, s_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

wynika z równania bioscyłatora wymuszonego tłumionego.

2. Bioscyłator jednowskaźnikowy o 6 stopniach swobody

Wprowadzamy oznaczenia:

$${}^2\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}^T = [x_{j_1 j_2}]^T, \quad \begin{matrix} j_1 = 1, 2, 3; \\ j_2 = 1, 2 \end{matrix}$$

— ciąg dwuwskaźnikowy ilości stopni swobody (współrzędnych niezależnych) układu mechanicznego, gdzie j_1 — wskaźnik ilości stopni swobody określonego rodzaju i wymiaru przestrzeni ortokartezjańskiej, j_2 — wskaźnik ilości rodzajów stopni swobody [1] przemieszczenia, 2) obrotu], \bar{x}_1 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor przemieszczenia podczas ruchu postępowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, \bar{x}_2 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor swobodny obrotu podczas ruchu obrotowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej;

$${}^2\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{21} & \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{12} & \dot{x}_{22} & \dot{x}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{31} & \dot{x}_{32} \end{bmatrix}^T = [\dot{x}_{j_1 j_2}]^T; \quad \begin{matrix} j_1 = 1, 2, 3; \\ j_2 = 1, 2 \end{matrix}$$

— ciąg dwuwskaźnikowy prędkości układu mechanicznego, gdzie j_1 — wskaźnik ilości współrzędnych wektora prędkości określonego rodzaju, j_2 — wskaźnik ilości rodzajów prędkości [1] w ruchu postępowym, 2) w ruchu obrotowym], $\dot{\bar{x}}$ — ciąg jednowskaźnikowy

wy jako wektor prędkości (liniowej) w ruchu postępowym punktu, $\dot{\bar{x}}_2$ — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor swobodny prędkości (kątovej) w ruchu obrotowym punktu;

$${}^2\ddot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{11} & \ddot{x}_{21} & \ddot{x}_{31} \\ \ddot{x}_{12} & \ddot{x}_{22} & \ddot{x}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{11} & \ddot{x}_{12} \\ \ddot{x}_{21} & \ddot{x}_{22} \\ \ddot{x}_{31} & \ddot{x}_{32} \end{bmatrix}^T = [\ddot{x}_{j_1 j_2}]^T; \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy przyspieszeń układu mechanicznego, gdzie j_1 — wskaźnik ilości współrzędnych wektora przyspieszeń określonego rodzaju, j_2 — wskaźnik ilości rodzajów przyspieszeń [1] w ruchu postępowym, 2) w ruchu obrotowym], $\ddot{\bar{x}}_1$ — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor przyspieszenia (liniowego) w ruchu postępowym punktu, $\ddot{\bar{x}}_2$ — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor przyspieszenia (kątovej) w ruchu obrotowym punktu.

Mamy również

$${}^4\bar{m} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{11} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{12} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{13} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{21} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{22} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{23} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{31} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{32} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{33} \end{bmatrix} = [{}^2\bar{m}_{j_3 j_4}] = [m_{j_1 j_2 j_3 j_4}]$$

— ciąg czterowskaźnikowy współczynników bezwładności, jako mas uogólnionych danego układu mechanicznego, gdzie j_1 — wskaźnik ilości rodzajów ruchu [1] postępowego, 2) obrotowego], j_2 — wskaźnik ilości ruchów w danym rodzaju ruchu⁹⁾, j_3 — wskaźnik ogólnej ilości 6 stopni swobody w obu ruchach: postępowym i obrotowym (trzy pierwsze wyrazy dotyczą równań sił, trzy dalsze wyrazy uwzględniają równania momentów sił), j_4 — wskaźnik trzykrotnego wystąpienia dwóch ruchów: postępowego i obrotowego ze względu na dwa razy po trzy stopnie swobody układu w ruchu postępowym i obrotowym.

Definiujemy także przez:

$${}^2\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \end{bmatrix}^T = [S_{j_1 j_2}]^T, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy uogólnionych sił sprężystych, gdzie j_1, j_2 — wskaźniki, jak w ${}^2\bar{x}$, \bar{S}_1 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor sił sprężystych¹⁰⁾ podczas ruchu postępowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, \bar{S}_2 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor swobodny momentów sił sprężystych¹¹⁾ podczas ruchu obrotowego

⁹⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹⁰⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹¹⁾ Patrz rozdział poprzedni.

punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej;

$${}^4\bar{s} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{11} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{12} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{13} \\ \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{21} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{22} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{23} \\ \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{31} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{32} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{33} \end{bmatrix} = [{}^2\bar{s}_{j_3 j_4}] = [s_{j_1 j_2 j_3 j_4}]$$

— ciąg czterowskaźnikowy współczynników sprężystości danego układu mechanicznego¹²⁾, gdzie j_1, j_2, j_3, j_4 — wskaźniki jak w ${}^4\bar{m}$;

$${}^4\bar{r} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{11} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{12} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{13} \\ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{21} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{22} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{23} \\ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{31} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{32} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{33} \end{bmatrix} = [{}^2\bar{r}_{j_3 j_4}] = [r_{j_1 j_2 j_3 j_4}]$$

— ciąg czterowskaźnikowy współczynników tłumienia danego układu mechanicznego¹³⁾, gdzie j_1, j_2, j_3, j_4 — wskaźniki, jak w ${}^4\bar{m}$;

$${}^2\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{bmatrix}^T = [R_{j_1 j_2}]^T, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy uogólnionych sił tłumienia danego układu mechanicznego, gdzie j_1, j_2 — wskaźniki, jak w ${}^2\bar{x}$, \bar{R}_1 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor uogólniony sił tłumienia¹⁴⁾ podczas ruchu postępowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, \bar{R}_2 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor swobodny uogólnionych¹⁵⁾ sił (momentów sił) tłumienia podczas ruchu obrotowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej;

$${}^2\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) & f_{31}(t) \\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & f_{32}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) \end{bmatrix}^T = [f_{j_1 j_2}(t)]^T, \\ j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy uogólnionych sił wymuszających danego układu mechanicznego, gdzie j_1, j_2 — wskaźniki, jak w ${}^2\bar{x}$, $\bar{f}_1(t)$ — ciąg jednowskaźnikowy, jako wektor sił wymuszających podczas ruchu postępowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej;

¹²⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹³⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹⁴⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹⁵⁾ Jak wyżej.

miarowej, $\bar{f}_2(t)$ — ciąg jednowskaźnikowy, jako wektor swobodny uogólnionych sił (momentów sił) wymuszających ruchu obrotowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Zauważmy, że wprowadzone ciągi dwuwskaźnikowe, jako dwuelementowe ciągi jednowskaźnikowe mogą mieć interpretację podwójną:

- 1) jako ciągi dwuwskaźnikowe współrzędnych dwóch wektorów, z których drugi jest zawsze swobodny,
- 2) jako dwuelementowe ciągi jednowskaźnikowe — wektory, z których drugi jest zawsze swobodny.

Postępując podobnie, jak w rozdziale poprzednim, formułujemy następujące definicje.

Definicja 2.0. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$${}^2\bar{P}[(t), {}^2\bar{x}(t), {}^2\dot{\bar{x}}(t), {}^2\ddot{\bar{x}}(t), {}^4\bar{m}, {}^4\bar{r}, {}^4\bar{s}, {}^2\bar{f}(t)] = {}^20$$

niejednorodnym liniowym, zawierającym ${}^2\ddot{\bar{x}}$, o współczynnikach stałych [1, 2] nazywamy biosycylorem wymuszonym tłumionym¹⁶⁾ o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{11} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{11} \\ \ddot{x}_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{12} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{21} \\ \ddot{x}_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{13} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{31} \\ \ddot{x}_{32} \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{11} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{12} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{13} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{11} \left[\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{12} \left[\begin{array}{c} x_{21} \\ x_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{13} \left[\begin{array}{c} x_{31} \\ x_{32} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} f_{11}(t) \\ f_{21}(t) \end{array} \right], \end{array} \right.$$

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{21} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{11} \\ \ddot{x}_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{22} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{21} \\ \ddot{x}_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{23} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{31} \\ \ddot{x}_{32} \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{21} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{22} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{23} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{21} \left[\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{22} \left[\begin{array}{c} x_{21} \\ x_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{23} \left[\begin{array}{c} x_{31} \\ x_{32} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} f_{31}(t) \\ f_{12}(t) \end{array} \right], \end{array} \right.$$

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{31} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{11} \\ \ddot{x}_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{32} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{21} \\ \ddot{x}_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{33} \left[\begin{array}{c} \ddot{x}_{31} \\ \ddot{x}_{32} \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{31} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{32} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{33} \left[\begin{array}{c} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{31} \left[\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{32} \left[\begin{array}{c} x_{21} \\ x_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{33} \left[\begin{array}{c} x_{31} \\ x_{32} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} f_{22}(t) \\ f_{32}(t) \end{array} \right], \end{array} \right.$$

¹⁶⁾ Tłumienie może być zewnętrzne, jak i wewnętrzne.

czyli

$$\begin{bmatrix} {}^2\bar{m}_{11} & {}^2\bar{m}_{12} & {}^2\bar{m}_{13} \\ {}^2\bar{m}_{21} & {}^2\bar{m}_{22} & {}^2\bar{m}_{23} \\ {}^2\bar{m}_{31} & {}^2\bar{m}_{32} & {}^2\bar{m}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\ddot{\bar{x}}, {}_2\ddot{\bar{x}}, {}_3\ddot{\bar{x}}] + \begin{bmatrix} {}^2\bar{r}_{11} & {}^2\bar{r}_{12} & {}^2\bar{r}_{13} \\ {}^2\bar{r}_{21} & {}^2\bar{r}_{22} & {}^2\bar{r}_{23} \\ {}^2\bar{r}_{31} & {}^2\bar{r}_{32} & {}^2\bar{r}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\dot{\bar{x}}, {}_2\dot{\bar{x}}, {}_3\dot{\bar{x}}] + \begin{bmatrix} {}^2\bar{s}_{11} & {}^2\bar{s}_{12} & {}^2\bar{s}_{13} \\ {}^2\bar{s}_{21} & {}^2\bar{s}_{22} & {}^2\bar{s}_{23} \\ {}^2\bar{s}_{31} & {}^2\bar{s}_{32} & {}^2\bar{s}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\bar{x}, {}_2\bar{x}, {}_3\bar{x}] = \begin{bmatrix} {}_1\bar{f}(t) \\ {}_2\bar{f}(t) \\ {}_3\bar{f}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie

$${}_k\ddot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{k1} \\ \ddot{x}_{k2} \end{bmatrix}, \quad {}_k\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{k1} \\ \dot{x}_{k2} \end{bmatrix}, \quad {}_k\bar{x} = \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3$$

oraz

$${}_1\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) \\ f_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad {}_2\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_{31}(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix}, \quad {}_3\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_{22}(t) \\ f_{32}(t) \end{bmatrix},$$

przy czym mnożenie ciągów dwuwskaznikowych przez ciągi jednowskaznikowe jest zgodne z regułą mnożenia macierzy, co wyjaśnia schemat przyjętego mnożenia ciągów czterowskaznikowych przez ciągi dwuwskaznikowe¹⁷⁾, w którym obowiązuje mnożenie wierszy ${}^4\bar{m}$ przez wiersz $[{}_1\ddot{\bar{x}}, {}_2\ddot{\bar{x}}, {}_3\ddot{\bar{x}}]$.

Modelem mechanicznym takiego układu jest punkt o współrzędnej uogólnionej ${}^2\bar{x}$ posiadający własności bezwładnościowe ${}^4\bar{m}$, na który działa uogólniona siła sprężysta ${}^2\bar{s}$ oporu (tłumienia) ${}^2\bar{r}$ i wymuszająca ${}^2\bar{f}$.

Przedstawimy go w postaci masy skupionej na bisprężynce postępowo-obrotowej, przedstawiającej sześć stopni swobody układu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej z dołączonym bitłumikiem postępowo-obrotowym. Bisprężynka obrazuje uogólnione siły sprężyste ${}^2\bar{s}$ proporcjonalne do sił bezwładności (o czterowskaznikowych współczynnikach proporcjonalności). Bitłumik uwzględnia tłumienie proporcjonalnie do prędkości uogólnionej ${}^2\dot{\bar{x}}$, wywołane uogólnioną siłą tłumienia ${}^2\bar{r}$, to znaczy pochodzące od siły tłumiącej \bar{R}_1 w ruchu postępowym układu, jak i od siły uogólnionej (momentu siły) \bar{R}_2 w jego ruchu obrotowym.

Definicja 2.1. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$${}^2\bar{P}[t, {}^2\bar{x}(t), {}^2\dot{\bar{x}}(t), {}^4\bar{m}, {}^4\bar{s}, {}^2\bar{f}(t)] = {}^2\bar{0}$$

niejednorodnym liniowym o współczynnikach stałych nazywamy bioscytorem wymuszonym o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy

$$\begin{bmatrix} {}^2\bar{m}_{11} & {}^2\bar{m}_{12} & {}^2\bar{m}_{13} \\ {}^2\bar{m}_{21} & {}^2\bar{m}_{22} & {}^2\bar{m}_{23} \\ {}^2\bar{m}_{31} & {}^2\bar{m}_{32} & {}^2\bar{m}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\ddot{\bar{x}}, {}_2\ddot{\bar{x}}, {}_3\ddot{\bar{x}}] + \begin{bmatrix} {}^2\bar{s}_{11} & {}^2\bar{s}_{12} & {}^2\bar{s}_{13} \\ {}^2\bar{s}_{21} & {}^2\bar{s}_{22} & {}^2\bar{s}_{23} \\ {}^2\bar{s}_{31} & {}^2\bar{s}_{32} & {}^2\bar{s}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\dot{\bar{x}}, {}_2\dot{\bar{x}}, {}_3\dot{\bar{x}}] = \begin{bmatrix} {}_1\bar{f}(t) \\ {}_2\bar{f}(t) \\ {}_3\bar{f}(t) \end{bmatrix},$$

¹⁷⁾ Kilka reguł mnożenia ciągów wielowskaznikowych przez ciągi wielowskaznikowe sformułowano w pracach [1, 2].

czyli

$${}^4\bar{m} \cdot {}^2\ddot{\bar{x}} + {}^4\bar{s} \cdot {}^2\dot{\bar{x}} = {}^2\bar{f}(t).$$

W modelu mechanicznym takiego układu nie występuje bitłumik, ponieważ ośrodek, w którym odbywa się ruch, jest idealny, bezoporowy i nie istnieją siły tłumiące.

Zauważmy, że bioscylator dwuwskaznikowy o sześciu stopniach swobody skonstruowany jest z trójelementowego ciągu (wymiar przestrzeni euklidesowej) ciągów jednowskaznikowych bioscylatorów o dwóch stopniach swobody.

W przypadku szczególnym

$$\begin{bmatrix} m_{1111} & m_{1211} \\ m_{2121} & m_{2221} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} r_{1111} & r_{1211} \\ r_{2121} & r_{2221} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} s_{1111} & s_{1211} \\ s_{2121} & s_{2221} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix},$$

$$\ddot{x}_{11} = \ddot{x}_1, \quad \ddot{x}_{12} = \ddot{x}_2, \quad \dot{x}_{11} = \dot{x}_1, \quad \dot{x}_{12} = \dot{x}_2, \quad x_{11} = x_1, \quad x_{12} = x_2,$$

$$f_{11}(t) = f_1(t), \quad f_{12}(t) = f_2(t)$$

oraz przy pozostałych współczynnikach równych zero, otrzymujemy równanie bioscylatora wymuszonego tłumionego o dwóch stopniach swobody:

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{r} \cdot \dot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{f}(t)$$

wyprowadzone w rozdziale poprzednim.

W szczególności wynika stąd równanie

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + r_1 \cdot \dot{x}_1 + s_1 \cdot x_1 = f_1(t)$$

oraz równanie

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + r_2 \cdot \dot{x}_2 + s_1 \cdot x_1 = f_2(t)$$

oscylatora obrotowego, które wprowadziliśmy w rozważaniach poprzednich.

W ten sposób pokazaliśmy, że oba odrębne równania dwóch niezależnych ruchów można uogólnić w podanym wyżej sensie bioscylatora dwuwskaznikowego o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Pokażemy jeszcze dalsze uogólnienia tego problemu, mianowicie rozszerzając rozważania na przestrzeń n -wymiarową.

3. Bioscylator dwuwskaznikowy o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej

Zauważmy, że równanie bioscylatora o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni n -wymiarowej ma postać wielowskaznikową analogiczną do równania bioscylatora o $2 \cdot 3$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, które rozpatrywaliśmy wyżej¹⁸⁾.

¹⁸⁾ Rozdział poprzedni.

Wynika to stąd, że walencje zewnętrzne (wskaźniki po stronie lewej u góry) ciągów dwu-wskaźnikowych zmiennych niezależnych \bar{x} , ${}^2\bar{x}$, ${}^2\ddot{\bar{x}}$ pozostają niezmiennione.

Powiększa się jedynie wymiar ich walencji wewnętrznych oraz wymiar tych walencji wewnętrznych ciągów współczynników, które wskazują na wymiar przestrzeni ortokartezjańskiej. Obecnie przestrzeń ta jest n -wymiarowa.

Wobec tego mamy

$${}^2\bar{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(k)} \\ \bar{x}_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(k)} & \dots & x_{n1}^{(k)} \\ x_{12}^{(k)} & \dots & x_{n2}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(k)} & x_{12}^{(k)} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1}^{(k)} & x_{n2}^{(k)} \end{bmatrix}^T = [x_{j_1 j_2}]^T, \quad \begin{array}{l} j_1 = 1, \dots, n; \\ j_2 = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2^{19)}; \end{array}$$

$${}^4\bar{m} = [{}^2\bar{m}_{j_3 j_4}] = [m_{j_1 j_2 j_3 j_4}], \quad j_1 = j_2 = 1, 2; \quad j_3 = j_4 = 1, \dots, n;$$

$${}^4\bar{r} = [{}^2\bar{r}_{j_3 j_4}] = [r_{j_1 j_2 j_3 j_4}]; \quad {}^4\bar{s} = [{}^2\bar{s}_{j_3 j_4}] = [s_{j_1 j_2 j_3 j_4}];$$

$${}^2\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{n1} \\ R_{12} & \dots & R_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ \vdots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} \end{bmatrix}^T = [R_{j_1 j_2}]^T, \quad j_1 = 1, \dots, n; \quad j_2 = 1, 2;$$

$${}^2\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{n1} \\ S_{12} & \dots & S_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ \vdots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} \end{bmatrix}^T = [S_{j_1 j_2}]^T;$$

$${}^2\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{n1}(t) \\ f_{12}(t) & \dots & f_{n2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ \vdots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) \end{bmatrix}^T = [f_{j_1 j_2}]^T.$$

Uwzględniając dotychczasowe rozważania, układ równań

$${}^4\bar{m} \cdot {}^2\ddot{\bar{x}} + {}^4\bar{r} \cdot {}^2\dot{\bar{x}} + {}^4\bar{s} \cdot {}^2\bar{x} = {}^2\bar{f}(t)$$

nazywamy równaniem wielociągowym [1, 2] bioscylatora wymuszonego tłumionego o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej. Występują tu dwuciągi funkcji i pochodnych oraz czterociągi współczynników stałych.

4. Ciąg w -wskaźnikowy bioscylatorów o $2n$ sztopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej

Przyjmijmy, że w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej mamy w rodzin, czyli ciąg w -wskaźnikowy bioscylatorów, przy czym każda z nich zawiera n_q , $q = 1, \dots, w$ bioscylatorów wymuszonych tłumionych o $2n$ stopniach swobody. Wtedy

$${}^{2+w}\bar{x}^{(k)} = [x_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{2+w}}]^{(k)},$$

$$j_1 = 1, \dots, n; \quad j_2 = 1, 2; \quad j_q = 1, \dots, n_q; \quad q = 3, \dots, 2+w,$$

gdzie wskaźnik $k = 0$ dotyczy funkcji czasu, wskaźnik $k = 1$ dotyczy pierwszej pochodnej, wskaźnik $k = 2$ dotyczy drugiej pochodnej funkcji czasu.

¹⁹⁾ Wskaźnik $k = 0$ dotyczy funkcji, $k = 1$ — pierwszej pochodnej, $k = 2$ — drugiej pochodnej względem czasu.

Jest rzeczą zrozumiałą, że

$${}^{2+w}\bar{x}^{(k)} = \left[\left[\left[\begin{array}{ccc} x_{11}^{(k)} & \dots & x_{n1}^{(k)} \\ x_{12}^{(k)} & \dots & x_{n2}^{(k)} \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_3 \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_4 \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_{2+w} \end{array} \right]_1 \right].$$

Siły wymuszające (strony prawe równań), jak i wszystkie siły są również ciągami $(2+w)$ -wskaznikowymi.

Współczynniki przy funkcji ${}^{2+w}\bar{x}$, pochodnej pierwszej ${}^{2+w}\dot{\bar{x}}$, pochodnej drugiej ${}^{2+w}\ddot{\bar{x}}$ są $[1, 2]$ $2(2+w)$ -wskaznikowe, to znaczy mają postać ${}^{2(2+w)}\bar{m}$, ${}^{2(2+w)}\bar{r}$, ${}^{2(2+w)}\bar{s}$.

Wskaźniki nieparzyste przedstawiają «wiersze», wskaźniki parzyste natomiast «kolumny» układu wielociągowego równań różniczkowych:

$${}^{2(2+w)}\bar{m} \cdot {}^{2+w}\ddot{\bar{x}} + {}^{2(2+w)}\bar{r} \cdot {}^{2+w}\dot{\bar{x}} + {}^{2(2+w)}\bar{s} \cdot {}^{2+w}\bar{x} = {}^{2+w}\bar{f}(t)$$

dla $t \in \langle t_1, t \rangle$, wypisanego na podobieństwo układu «macierzowego» równań. Jest to równanie różniczkowe wielociągowe w -wskaznikowego bioscylatora wymuszonego tłumionego o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej. Występują tu $(2+w)$ -ciągi funkcji i pochodnych oraz $2(2+w)$ -ciągi współczynników stałych.

Zauważmy, że w przypadku $w = 0$, mamy równanie bioscylatora dwuwskaznikowego o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej, które było tematem rozważań rozdziału poprzedniego.

5. Ciąg trójwskaznikowy bioscylatorów o $2 \cdot 3$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej

Przyjmijmy obecnie $n = 3$ i $w = 3$, to znaczy rozważmy w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej trzy rodziny, czyli ciąg trójwskaznikowy bioscylatorów przyjmując, że każda z nich zawiera n_q , $q = 1, 2, 3$ bioscylatorów wymuszonych tłumionych o $2 \cdot 3$ stopniach swobody. Mamy teraz

$${}^{2+3}\bar{x}^{(k)} = [x_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5}^{(k)}], \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2; \quad j_q = 1, \dots, n_q; \quad q = 3, 4, 5,$$

gdzie j_1 jest wskaźnikiem wymiaru przestrzeni euklidesowej, j_2 — wskaźnikiem ilości ruchów (rodzajów stopni swobody), j_3 — wskaźnikiem ilości bioscylatorów pierwszej rodziny (rodzaju), j_4 — wskaźnikiem ilości bioscylatorów drugiej rodziny (rodzaju), j_5 — wskaźnikiem ilości bioscylatorów trzeciej rodziny (rodzaju) $k = 0$ — wskaźnikiem funkcji czasu ${}^{2+3}\bar{x}$, $k = 1$ — wskaźnikiem pierwszej pochodnej ${}^{2+3}\dot{\bar{x}}$, $k = 2$ — wskaźnikiem drugiej pochodnej ${}^{2+3}\ddot{\bar{x}}$ funkcji czasu.

Stąd wynika, że

$${}^{2+3}\bar{x}^{(k)} = \left[\left[\left[\begin{array}{ccc} x_{11}^{(k)} & x_{21}^{(k)} & x_{31}^{(k)} \\ x_{12}^{(k)} & x_{22}^{(k)} & x_{32}^{(k)} \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_3 \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_4 \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_5 \end{array} \right]_1 \right].$$

Siły wymuszające (prawe strony równań), jak i wszystkie siły są również ciągami $(2+3)$ -wskaznikowymi. Współczynniki przy funkcji ${}^{2+w}\bar{x}$, pochodnej pierwszej ${}^{2+w}\dot{\bar{x}}$, pochodnej drugiej ${}^{2+w}\ddot{\bar{x}}$ są $[1, 2]$ $2(2+3)$ -wskaznikowe, to znaczy mają postać ${}^{2(2+3)}\bar{m}$, ${}^{2(2+3)}\bar{r}$, ${}^{2(2+3)}\bar{s}$.

Wskaźniki nieparzyste przedstawiają «wiersze», wskaźniki parzyste natomiast «kolumny» układu pięciowskaźnikowego²⁰⁾ równań różniczkowych o współczynnikach dziesięciowskaźnikowych:

$${}^{10}\bar{m} \cdot {}^5\ddot{\bar{x}} + {}^{10}\bar{r} \cdot {}^5\dot{\bar{x}} + {}^{10}\bar{s} \cdot {}^5\bar{x} = {}^5\bar{f}(t), \text{ dla } t \in \langle t_1, t \rangle,$$

wypisanego na podobieństwo układu «macierzowego». Jest to równanie różniczkowe pięciociągowe (pięciowskaźnikowe) bioscyłatora wymuszonego tłumionego o $2 \cdot 3$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Gdy walencja zewnętrzna (wskaźnik po lewej stronie u góry) $w = 2$, to mamy równanie bioscyłatora dwuwskaźnikowego o 6 stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, które było tematem rozważań rozdziału 2.

6. Modelowanie wału waźkiego z wieloma tarczami na wielu podporach za pomocą bioscyłatora pięciowskaźnikowego o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej

Widzimy, że rozpatrywane oscylatory i bioscyłatory można było uogólnić na przestrzenie wielowymiarowe. Obecnie pokażemy, że można je, między innymi, zastosować do modelowania omówionej na początku trójelementowej konstrukcji \bar{k} złożonej z waźkiego wału sprężystego obciążonego dowolną, skończoną liczbą waźkich tarcz, podpartego w dowolnej, skończonej ilości łożysk zwanych podporami. Zakładamy przy tym, że nie uwzględniamy współdziałania innych elementów maszyny, urządzenia, zespołu maszyn, w skład których wchodzi omawiana konstrukcja \bar{k} , sama traktowana jako element ciągu wielowskaźnikowego podzespołów pewnego układu mechanicznego nazwanego systemem maszynowym.

Inaczej mówiąc, wał z tarczami i łożyskami rozpatrujemy jako izolowany układ mechaniczny, chociaż jest on podsystemem złożonego systemu maszynowego.

W rozdziałach poprzednich pokazaliśmy, że konstrukcja \bar{k} :

- 1) istnieje w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, w której
- 2) pewne przekroje wału jako elementarne twory trójwymiarowe posiadają dwa rodzaje ruchów, mianowicie postępowe wzdłuż trzech osi ortokartezjańskiego układu odniesienia oraz obrotowe dookoła tych trzech osi;
- 3) została sprowadzona do trzech rodzajów przekrojów wału, mianowicie podporowych, obciążonych tarczami, obciążonych masami zredukowanymi.

Te pięć zasadniczych elementów dotychczasowych rozważań, czyli: wymiar przestrzeni, ilość rodzajów ruchów przekrojów wału, przekroje podporowe, przekroje obciążone tarczami, przekroje obciążone masami zredukowanymi, wprowadziliśmy do modelu matematycznego układu mechanicznego nazwanego ciągiem trójwskaźnikowym bioscyłatorów, czyli bioscyłatorem pięciowskaźnikowym o $2 \cdot 3$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Wobec tego możemy przyjąć, że: a) pierwszą rodzinę rozważanych w rozdziale poprzednim bioscyłatorów stanowi n_3 podpór konstrukcji \bar{k} z przekrojami podporowymi,

²⁰⁾ To znaczy pięciociągów funkcji, pochodnych pierwszych i pochodnych drugich.

b) drugą rodzinę bioscylatorów stanowi n_4 tarcz z przekrojami wału, na których są one osadzone, c) trzecią rodzinę bioscylatorów stanowi n_5 mas zredukowanych wału z tymi jego przekrojami, do których przeprowadzono redukcję jego masy całkowitej.

Reasumując stwierdzamy, że jeśli: 1) $j_1 = 1, \dots, n_1$, $n_1 = 3$ jest wskaźnikiem wymiaru przestrzeni euklidesowej, 2) $j_2 = 1, \dots, n_2$, $n_2 = 2$ jest wskaźnikiem rodzajów ruchu postępowego lub obrotowego, 3) $j_3 = 1, \dots, n_3$ jest wskaźnikiem ilości łożysk (podpór) z przekrojami podporowymi, 4) $j_4 = 1, \dots, n_4$ jest wskaźnikiem ilości tarcz z przekrojami wału oraz 5) $j_5 = 1, \dots, n_5$ jest wskaźnikiem ilości mas zredukowanych z odpowiednimi przekrojami wału, to ruch sprężystej konstrukcji \bar{k} , jako układu pięciociągowego (pięciowskaźnikowego) będącego wielkim²¹⁾ systemem dynamicznym [4], zgodnie z drugim prawem Newtona [9] oraz przy uwzględnieniu prawa Hooke'a [5] w ośrodku z oporami i przy istnieniu sił wymuszających, jest opisany za pomocą systemu wielkiego bioscylatorów, mianowicie równaniem bioscylatora pięciowskaźnikowego o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej:

$${}^{10}\bar{m} \cdot {}^5\ddot{\bar{x}} + {}^{10}\bar{r} \cdot {}^5\dot{\bar{x}} + {}^{10}\bar{s} \cdot {}^5\bar{x} = {}^5\bar{f}(t), \quad t \in \langle t_1, t \rangle,$$

gdzie stałe współczynniki są ciągami dziesięciowskaźnikowymi [1, 2].

W literaturze znane są tylko niektóre przypadki szczególne [10, 11] rozwiązań układów równań różniczkowych nazwanych tutaj bioscylatorem pięciowskaźnikowym.

Być może warto zająć się nimi korzystając z elektronicznej techniki obliczeniowej lub konstruując odpowiednie analogi elektryczne, za pomocą których rozwiązanie danych wielociągowych układów równań przedstawionych algorytmami macierzowymi nie byłoby zbyt trudne.

Literatura cytowana w tekście

1. R. KRZYWIEC, *Wielociągi*, Praca doktorska, nie publikowana.
2. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 11 (1971).
3. M. T. HUBER, *Stereomechanika Techniczna*, Warszawa 1951.
4. R. KRZYWIEC, *O formalizowaniu pojęcia układu*, Arch. Bud. Masz., 2 (1971).
5. R. KRZYWIEC, *O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Hooke'a układów stereomechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 11 (1971).
6. L. S. PONTRIAGIN, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Warszawa 1964.
7. W. W. STIEPANOW, *Równania różniczkowe*, Warszawa 1956.
8. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 11 (1971).
9. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe uogólnienie prawa dynamiki układów wielokrotnych — wielkich systemów mechanicznych*, Zesz. Nauk. Politechniki Częstochowskiej, 1971, nr 72, Mechanika, z. 6.
10. В. А. ГРОВОВ, *Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин*, Москва 1961.
11. Ф. М. ДИМЕНТБЕРГ, *Изгибные колебания вращающихся валов*, Москва 1959.

²¹⁾ Wielkim nazywamy system, który jest opisany zmiennymi wielociągowymi, gdzie ciąg wielowskaźnikowy można nazywać wielkim systemem ciągów, zgodnie z pracami autora [1, 2, 12, 13].

12. R. KRZYWIEC, *Organizacja wielociągowa systemów wielkich (Wstęp do teorii systemów wielkich)*, Praca habilitacyjna (w druku).
13. R. KRZYWIEC, Materiały Seminarium na temat: «Modelowanie matematyczne systemów wielkich», prowadzonego przez autora w ZUM IPPT PAN (przygotowane do druku).

Р е з ю м е

О МОДЕЛИРОВАНИИ МНОГОПОДШИПНИКОВОГО ВАЛА СО МНОГИМИ
ДИСКАМИ С ПОМОЩЬЮ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ БИОСЦИЛЛЯТОРОВ
ЧАСТЬ II. БИОСЦИЛЛЯТОРЫ СО МНОГИМИ ИНДЕКСАМИ.
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВАЛА

В работе построена простая, но оригинальная дискретная модель упругого весомого вала на многих упругих опорах нагруженного многими дисками. Моделью является биосциллятор со многими индексами с шестью степенями свободы (три для поступательного, и три для вращательного движения), моделирующий: n_3 напорных сечений вала, n_4 сечений нагруженных с помощью дисков, n_5 сечений приведения масс в n_1 -мерном пространстве, при учете n_2 видов движения. Рассуждения ведутся на языке многократных последовательностей, алгебра и элементы анализа которых сформулированы автором в отдельной работе. Полученные дифференциальные уравнения содержат пятикратные последовательности, с коэффициентами выражающимися через десятикратные последовательности.

S u m m a r y

ON MODELLING THE MULTI-SPAN SHAFTS WITH SEVERAL DISCS BY MEANS OF A GREAT
SYSTEM OF BI-OSCILLATORS. PART II. MULTI-INDICIAL BI-OSCILLATORS. MODELLING
OF A SHAFT

A simple, original discrete elastic model is constructed of a ponderable elastic shaft, resting on several elastic supports and loaded by many discs. It is a multi-indicial bi-oscillator with six degrees of freedom (three translations, three rotations), which is used to model: n_3 cross-sections at the supports, n_4 cross-sections loaded by discs, n_5 cross-sections of mass reduction in n_1 -dimensional space, at n_2 kinds of motion. The terminology of "multiseries" is used in the paper, their algebra and foundations of analysis being presented by the author in a separate paper. The differential equations derived are «five-series» with coefficients being expressed by «ten-series» sequences.

UNIwersytet warszawski, filia w BiaŁymstoku

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1972; w wersji ostatecznej — dnia 29 maja 1974 r.

ANALIZA KONWEKCYJNEGO REKUPERATORA PĘTLICOWEGO Z KRZYŻOWYM
PRZEPIływEM CZYNNIKÓW

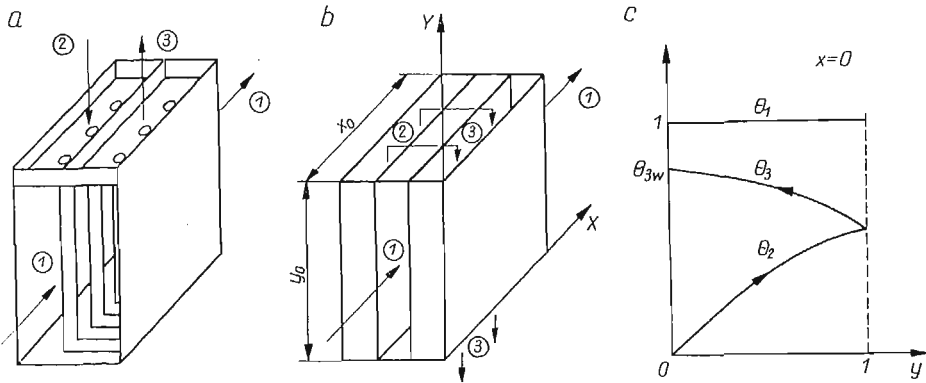
JAN SKŁADZIEŃ (GLIWICE)

1. Wstęp

Przy rozpatrywaniu dowolnego rekuperatora z przepływem krzyżowym można w odniesieniu do każdego z czynników przyjąć dwa krańcowe założenia określające jego zachowanie się. W klasycznych rekuperatorach krzyżowo-prądowych zakłada się przepływ adiabatycznymi, nie mieszającymi się strugami, pomiędzy którymi nie ma wymiany ani ciepła, ani masy. Można też przyjąć całkowite wymieszanie w płaszczyznach poprzecznych do kierunku przepływu i temperatura danego czynnika jest wówczas funkcją tylko jednej zmiennej. Przypadki takie występują również przy rozpatrywaniu rekuperatora pętlicowego z przepływem krzyżowym, którego schemat wraz z modelem teoretycznym jest pokazany na rys. 1. Przypadek całkowitego wymieszania obu czynników wydaje się nie mieć większego znaczenia praktycznego. Założenie wymieszania czynnika ogrzewanego ma sens w przypadku rekuperatora składającego się z pojedynczego, względnie grupy równoległe ustawionych elementów. W przypadku większej ilości elementów ustawionych w kilku rzędach słuszne wydaje się być założenie przepływu czynnika chłodniejszego adiabatycznymi strugami. W odniesieniu do medium grzejącego można teraz przyjąć dwa przeciwstawne założenia, w rzeczywistości zaś będzie panował pewien stan pośredni. Przypadek całkowitego wymieszania tego czynnika jest znacznie łatwiejszy do rozwiązania [4]. Przypadek «czystego» przepływu krzyżowego bez wymieszania, dla jednego szczególnego przypadku ($k_{1-2} = k_{1-3}$), również został rozwiązany [2]. Wyniki obliczeń, choć otrzymane w stosunkowo prosty sposób, poprzez transformację Laplace'a równań bilansu energii, niezbyt nadają się do obliczeń cyfrowych, zwłaszcza przeprowadzanych na maszynie matematycznej. Wynika to z konieczności rozwiązywania równań przestępnych. W niniejszej pracy podany jest inny, przy tym bardziej ogólny, sposób rozwiązania zagadnienia. Po sprowadzeniu układu równań bilansowych do równania całkowego określa się kształt rozwiązania. Po założeniu na tej podstawie szeregów określających przebieg temperatur poszczególnych strumieni znajduje się współczynniki funkcyjne występujące w tych szeregach. Ze względu na rekurencyjny charakter wyprowadzonych zależności, nadają się one do obliczeń przeprowadzanych na matematycznej maszynie cyfrowej.

2. Sformułowanie problemu

Model teoretyczny rozpatrywanego rekuperatora pokazany jest na rys. 1. Powierzchnia wymiany ciepła została rozbita na dwa prostokąty o wymiarach x_0, y_0 . Gdyby zdarzył się przypadek różnych powierzchni po obu stronach punktu zwrotnego, w równaniach bilansu



Rys. 1. Wymiennik pętlicowy z krzyżowym przepływem czynników: a) schemat wymiennika, b) model teoretyczny, c) rozkład temperatur

występują zredukowane współczynniki przenikania ciepła. Dla stanu ustalonego, po pominięciu strat ciepła oraz przepływu ciepła wzdłuż przegród, otrzymuje się z bilansu energii dla klasycznego przepływu krzyżowego układ równań różniczkowych:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} k_{1-2}(t_1 - t_2) + k_{1-3}(t_1 - t_3) &= -\frac{W_1}{y_0} \frac{\partial t_1}{\partial X}, \\ k_{1-2}(t_1 - t_2) &= \frac{W_2}{x_0} \frac{\partial t_2}{\partial Y}, \\ k_{1-3}(t_1 - t_3) &= -\frac{W_3}{x_0} \frac{\partial t_3}{\partial Y}, \end{aligned}$$

gdzie:

- k_{i-j} — współczynnik przenikania ciepła od strumienia i -tego do j -tego,
- t_i — temperatura i -tego strumienia,
- W_i — pojemność cieplna i -tego strumienia,
- x_0, y_0 — wymiary powierzchni wymiany ciepła,
- X, Y — współrzędne bezwzględne.

Zakładając $W_2 = W_3$ oraz przyjmując współrzędne bezwymiarowe

$$(2.2) \quad x = \frac{X}{x_0}, \quad y = \frac{Y}{y_0},$$

otrzymuje się:

$$(2.3a) \quad (\alpha + 1)\theta_1 + \frac{1}{(K_{1-2})} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \theta_2 + \alpha\theta_3,$$

$$(2.3b) \quad \theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = \theta_1,$$

$$(2.3c) \quad \theta_3 - \frac{1}{(K_{3-1})} \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = \theta_1,$$

gdzie

$$(2.4) \quad \kappa = \frac{k_{1-3}}{k_{1-2}}; \quad (K_{1-2}) = \frac{k_{1-2}x_0y_0}{W_1}; \quad (K_{2-1}) = \frac{k_{1-2}x_0y_0}{W_2}; \\ (K_{3-1}) = \frac{k_{1-3}x_0y_0}{W_3} = \frac{k_{1-3}x_0y_0}{W_2}.$$

θ_i jest bezwymiarowo wyrażoną temperaturą i -tego strumienia

$$(2.5) \quad \theta_i = \frac{t_i - t_{2d}}{t_{1d} - t_{2d}}; \quad t_{1d} = t_1|_{x=0}; \quad t_{2d} = t_2|_{y=0}.$$

Warunki brzegowe dla układu równań (2.3) przyjmują postać

$$(2.6) \quad \theta_1|_{x=0} = 1; \quad \theta_2|_{y=0} = 0; \quad \theta_2|_{y=1} = \theta_3|_{y=1}.$$

W dalszych rozważaniach zakłada się stałość wielkości k_{i-j} i W_i , a tym samym stałość κ , (K_{1-2}) , (K_{2-1}) i (K_{3-1}) .

3. Rozwiązanie zagadnienia

Układ równań różniczkowych (2.3) można sprowadzić do jednego równania całkowego z jedną niewiadomą. W tym celu należy wyznaczyć funkcje θ_2 i θ_3 z równań (2.3b) i (2.3c). Z równania (2.3b) po zastosowaniu warunku $\theta_2|_{y=0} = 0$ otrzymuje się

$$(3.1) \quad \theta_2 = (K_{2-1})e^{-(K_{2-1})y} \int_0^y e^{(K_{2-1})\bar{y}} \theta_1(x, \bar{y}) d\bar{y}.$$

Po przekształceniu równania (2.3c) i uwzględnieniu warunku równości temperatur θ_2 i θ_3 w punkcie $y = 1$ otrzymuje się

$$(3.2) \quad \theta_3 = e^{(K_{3-1})y} \left[(K_{2-1})e^{-(\kappa+1)(K_{2-1})} \int_0^1 e^{(K_{2-1})\bar{y}} \theta_1(x, \bar{y}) d\bar{y} + (K_{3-1}) \int_y^1 e^{-(K_{3-1})\bar{y}} \theta_1(x, \bar{y}) d\bar{y} \right].$$

Zastosowanie warunku $\theta_1|_{x=0} = 1$ po odpowiednich przekształceniach równania (2.3a) daje:

$$(3.3) \quad \theta_1 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} \left\{ 1 + (K_{1-2}) \int_0^x e^{(\kappa+1)(K_{1-2})\bar{x}} [\theta_2(\bar{x}, y) + \kappa\theta_3(\bar{x}, y)] d\bar{x} \right\}.$$

Aby dostać jedno równanie z jedną niewiadomą należy wstawić zależności (3.1) i (3.2) do (3.3)

$$(3.4) \quad \theta_1 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} \left\{ 1 + (K_{1-2}) \int_0^x e^{(\kappa+1)(K_{1-2})\bar{x}} \left\{ (K_{2-1})e^{-(K_{2-1})y} \int_0^y e^{-(K_{2-1})\bar{y}} \theta_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa e^{(K_{3-1})y} \left[(K_{2-1})e^{-(\kappa+1)(K_{2-1})} \int_0^1 e^{(K_{2-1})\bar{y}} \theta_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} + (K_{3-1}) \int_y^1 e^{-(K_{3-1})\bar{y}} \theta_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right] \right\} d\bar{x} \right\}.$$

Równanie całkowe (3.4) rozwiązać można metodą kolejnych przybliżeń. Przyjmując jako zerowe przybliżenie

$$(3.5) \quad \theta_1^0 = 0$$

otrzymuje się po wstawieniu (3.5) do prawej strony równania (3.4)

$$(3.6) \quad \theta_1^1 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x}.$$

Pierwsze przybliżenie podstawione do (3.4) daje drugie przybliżenie

$$(3.7) \quad \theta_1^2 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} [1 + xa_1(y)],$$

gdzie

$$(3.8) \quad a_1(y) = (K_{1-2}) \{1 - e^{-(K_{2-1})y} + \kappa e^{(K_{3-1})y} [e^{-(K_{3-1})y} - e^{-(\kappa+1)(K_{2-1})y}] + \kappa [1 - e^{-(K_{3-1})(1-y)}]\}.$$

Kolejne przybliżenia mają postać

$$(3.9) \quad \theta_1^3 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} [1 + xa_1(y) + x^2 a_2(y)],$$

$$(3.10) \quad \theta_1^4 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} [1 + xa_1(y) + x^2 a_2(y) + x^3 a_3(y)].$$

Ogólnie będzie zatem

$$(3.11) \quad \theta_1^n = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} [1 + xa_1(y) + x^2 a_2(y) + \dots + x^{n-1} a_{n-1}(y)],$$

przy czym wyrażenia $a_1(y)$, $a_2(y)$, ..., mają nieregularny kształt i począwszy od $a_2(y)$ dość złożoną postać. Wstępne rozwiązanie równania całkowego (3.4) umożliwi na podstawie (3.11) założenie funkcji θ_1 w postaci szeregu

$$(3.12) \quad \theta_1 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}(y) x^n \right],$$

lub

$$(3.13) \quad \theta_1 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) x^{n-1},$$

gdzie

$$(3.14) \quad A_1 = 1.$$

Widać przy tym, że spełniony jest już tu warunek $\theta_1|_{x=0} = 1$. Po wstawieniu (3.13) do równań (2.3b) i (2.3c) otrzymuje się kolejno:

$$(3.15) \quad \theta_2 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(y) x^{n-1},$$

$$(3.16) \quad \theta_3 = e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) x^{n-1},$$

przy czym zachodzą związki

$$(3.17) \quad B_n(y) + \frac{1}{(K_{2-1})} \frac{dB_n(y)}{dy} = A_n(y),$$

$$(3.18) \quad C_n(y) - \frac{1}{(K_{3-1})} \frac{dC_n(y)}{dy} = A_n(y).$$

Ze względu na warunki brzegowe (2.6) funkcje $B_n(y)$ oraz $C_n(y)$ muszą spełniać zależności

$$(3.19) \quad B_n|_{y=0} = 0; \quad B_n|_{y=1} = C_n|_{y=1}.$$

Nie wykorzystane dotąd równanie (2.3a) po wstawieniu doń zależności określających funkcje θ_1 , θ_2 i θ_3 daje warunek

$$(3.20) \quad \bigwedge_{n=1,2,\dots} A_{n+1}(y) = \frac{(K_{1-2})}{n} [B_n(y) + \varkappa C_n(y)].$$

Kolejność rozwiązywania będzie zatem następująca: korzystając z (3.14) wyznacza się na podstawie (3.17)÷(3.19) funkcje $B_1(y)$ i $C_1(y)$, których znajomość na podstawie (3.20) umożliwia znalezienie funkcji $A_2(y)$. Mając $A_2(y)$ oblicza się następnie $B_2(y)$ i $C_2(y)$ z równań (3.17)÷(3.19) i potem w podobny sposób można wyznaczać kolejne wyrazy szeregów. Postępowanie według podanej kolejności prowadzi do otrzymania następujących wyników:

$$(3.21) \quad B_1(y) = 1 + B_{1,1}e^{-(K_{2-1})y}; \quad B_{1,1} = -1;$$

$$(3.22) \quad C_1(y) = 1 + C_{1,1}e^{(K_{3-1})y}; \quad C_{1,1} = -e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}$$

oraz po wprowadzeniu

$$(K_{1-3}) = \frac{k_{1-3} x_0 y_0}{W_1}$$

otrzymamy

$$(3.23) \quad A_2(y) = (K_{1-2}) + (K_{1-3}) + (K_{1-2})B_{1,1}e^{-(K_{2-1})y} + (K_{1-3})C_{1,1}e^{(K_{3-1})y},$$

$$(3.24) \quad B_2(y) = (K_{1-2}) + (K_{1-3}) + (B_{2,1} + B_{2,2}y)e^{-(K_{2-1})y} + B_{2,3}e^{(K_{3-1})y},$$

$$B_{2,3} = \frac{(K_{1-3})}{\varkappa + 1} C_{1,1}, \quad B_{2,2} = (K_{1-2})(K_{2-1})B_{1,1}, \quad B_{2,1} = -(K_{1-2}) - (K_{1-3}) - B_{2,3};$$

$$(3.25) \quad C_2(y) = (K_{1-2}) + (K_{1-3}) + (C_{2,1} + C_{2,2}y)e^{(K_{3-1})y} + C_{2,3}e^{-(K_{2-1})y},$$

$$C_{2,3} = \frac{(K_{1-3})}{\varkappa + 1} B_{1,1}, \quad C_{2,2} = -(K_{1-3})(K_{3-1})C_{1,1},$$

$$C_{2,1} = (B_{2,1} + B_{2,2} - C_{2,3})e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})} + B_{2,3} - C_{2,2};$$

$$(3.26) \quad A_3(y) = \frac{1}{2!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^2 + \frac{1}{2} [(K_{1-2})(B_{2,1} + B_{2,2}y)e^{-(K_{2-1})y} + (K_{1-2})B_{2,3}e^{(K_{3-1})y} + (K_{1-3})e^{(K_{3-1})y}(C_{2,1} + C_{2,2}y) + (K_{1-3})C_{2,3}e^{-(K_{2-1})y}];$$

$$\begin{aligned}
(3.27) \quad B_3(y) &= \frac{1}{2!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^2 + (B_{3,1} + B_{3,2}y + B_{3,3}y^2) e^{-(K_{2-1})y} + \\
&+ (B_{3,4} + B_{3,5}y) e^{(K_{3-1})y}, \quad B_{3,5} = \frac{(K_{1-3})}{2(\varkappa+1)} C_{2,2}, \quad B_{3,4} = \frac{(K_{1-2})}{2(\varkappa+1)} (B_{2,3} + \varkappa C_{2,1}) - \\
&- \frac{B_{3,5}}{(K_{2-1}) + (K_{3-1})}, \quad B_{3,3} = \frac{1}{2^2} (K_{1-2})(K_{2-1}) B_{2,2}, \quad B_{3,2} = \frac{1}{2} (K_{1-2})(K_{2-1}) \times \\
&\times (B_{2-1} + \varkappa C_{2,3}), \quad B_{3,1} = -\frac{1}{2!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^2 - B_{3,4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.28) \quad C_3(y) &= \frac{1}{2!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^2 + (C_{3,1} + C_{3,2}y + C_{3,3}y^2) e^{(K_{3-1})y} + \\
&+ (C_{3,4} + C_{3,5}y) e^{-(K_{2-1})y}, \quad C_{3,5} = \frac{(K_{1-3})}{2(\varkappa+1)} B_{2,2}, \quad C_{3,4} = \frac{(K_{1-3})}{2(\varkappa+1)} (B_{2,1} + \varkappa C_{2,3}) + \\
&+ \frac{C_{3,5}}{(K_{2-1}) + (K_{3-1})}, \quad C_{3,3} = -\frac{1}{2^2} (K_{1-3})(K_{3-1}) C_{2,2}, \quad C_{3,2} = -\frac{1}{2} (K_{3-1}) \times \\
&\times (K_{1-2})(B_{2,3} + \varkappa C_{2,1}), \quad C_{3,1} = (B_{3,1} + B_{3,2} + B_{3,3} - C_{3,4} - C_{3,5}) e^{-(K_{2-1}) - (K_{3-1})} + \\
&+ B_{3,4} + B_{3,5} - C_{3,2} - C_{3,3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.29) \quad A_4(y) &= \frac{1}{3!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^3 + \frac{1}{3} [(K_{1-2}) e^{-(K_{2-1})y} \sum_{i=1}^3 B_{3,i} y^{i-1} + \\
&+ (K_{1-2}) e^{(K_{3-1})y} \sum_{i=1}^2 B_{3,3+i} y^{i-1} + (K_{1-3}) e^{(K_{3-1})y} \sum_{i=1}^3 C_{3,i} y^{i-1} + \\
&+ (K_{1-3}) e^{-(K_{2-1})y} \sum_{i=1}^2 C_{3,3+i} y^{i-1}];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.30) \quad B_4(y) &= \frac{1}{3!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^3 + e^{-(K_{2-1})y} \sum_{i=1}^4 B_{4,i} y^{i-1} + e^{(K_{3-1})y} \sum_{i=1}^3 B_{4,4+i} y^{i-1}, \\
B_{4,7} &= \frac{(K_{1-3})}{3(\varkappa+1)} C_{3,3}, \quad B_{4,6} = \frac{(K_{1-2})}{3(\varkappa+1)} (B_{3,5} + \varkappa C_{3,2}) - \frac{2B_{4,7}}{(K_{2-1}) + (K_{3-1})}, \\
B_{4,5} &= \frac{(K_{1-2})}{3(\varkappa+1)} (B_{3,4} + \varkappa C_{3,1}) - \frac{B_{4,6}}{(K_{2-1}) + (K_{3-1})}, \quad B_{4,4} = \frac{1}{3^2} (K_{1-2})(K_{2-1}) B_{3,3}, \\
B_{4,3} &= \frac{1}{3 \cdot 2} (K_{1-2})(K_{2-1})(B_{3,2} + \varkappa C_{3,5}), \quad B_{4,2} = \frac{1}{3 \cdot 1} (K_{1-2})(K_{2-1})(B_{3,1} + \varkappa C_{3,4}), \\
B_{4,1} &= -\frac{1}{3!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^3 - B_{4,5};
\end{aligned}$$

$$(3.31) \quad C_4(y) = \frac{1}{3!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^3 + e^{(K_{3-1})y} \sum_{i=1}^4 C_{4,i} y^{i-1} + e^{-(K_{2-1})y} \sum_{i=1}^3 C_{4,i} y^{i-1},$$

$$C_{4,7} = \frac{(K_{1-3})}{3(\kappa+1)} B_{3,3}, \quad C_{4,6} = \frac{(K_{1-3})}{3(\kappa+1)} (B_{3,2} + \kappa C_{3,5}) + \frac{2C_{4,7}}{(K_{2-1}) + (K_{3-1})},$$

$$C_{4,5} = \frac{(K_{1-3})}{3(\kappa+1)} (B_{3,1} + \kappa C_{3,4}) + \frac{C_{4,6}}{(K_{2-1}) + (K_{3-1})}, \quad C_{4,4} = -\frac{1}{3^2} (K_{1-3})(K_{3-1}) C_{3,3},$$

$$C_{4,3} = -\frac{1}{3 \cdot 2} (K_{3-1})(K_{1-2}) (B_{3,5} + \kappa C_{3,2}); \quad C_{4,2} = -\frac{1}{3 \cdot 1} (K_{3-1})(K_{1-2}) (B_{3,4} + \kappa C_{3,1}),$$

$$C_{4,1} = e^{-(K_{2-1}) - (K_{3-1})} \left(\sum_{i=1}^4 B_{4,i} - \sum_{i=1}^3 C_{4,4+i} \right) + \sum_{i=1}^3 B_{4,4+i} - \sum_{i=2}^4 C_{4,i}.$$

Ogólnie dla $n = 2, 3 \dots$

$$(3.32) \quad A_n = \frac{[(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n-1} \left[(K_{1-2}) e^{-(K_{2-1})y} \sum_{i=1}^{n-1} B_{n-1,i} y^{i-1} + \right.$$

$$\left. + (K_{1-2}) e^{(K_{3-1})y} \sum_{i=1}^{n-2} B_{n-1,n-1+i} y^{i-1} + (K_{1-3}) e^{(K_{3-1})y} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1,i} y^{i-1} + \right.$$

$$\left. + (K_{1-3}) e^{-(K_{2-1})y} \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-1,n-1+i} y^{i-1} \right],$$

$$B_n = \frac{[(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^{n-1}}{(n-1)!} + e^{-(K_{2-1})y} \sum_{i=1}^n B_{n,i} y^{i-1} + e^{(K_{3-1})y} \sum_{i=1}^{n-1} B_{n,n+i} y^{i-1},$$

$$B_{n,2n-1} = \frac{(K_{1-3}) C_{n-1,n-1}}{(n-1)(\kappa+1)}, \quad \bigwedge_{i=n-2, n-3, \dots, 2, i} B_{n,n+i} = \frac{(K_{1-2})(B_{n-1,n-1+i} + \kappa C_{n-1,i})}{(n-1)(\kappa+1)} -$$

$$- \frac{i B_{n,n+1+i}}{(K_{2-1}) + (K_{3-1})}, \quad B_{n,n} = \frac{(K_{1-2})(K_{2-1}) B_{n-1,n-1}}{(n-1)^2},$$

$$\bigwedge_{i=n-1, n-2, \dots, 3, 2} B_{n,i} = \frac{(K_{1-2})(K_{2-1})(B_{n-1,i-1} + \kappa C_{n-1,n-2+i})}{(n-1)(i-1)},$$

$$B_{n,1} = -\frac{[(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^{n-1}}{(n-1)!} - B_{n,n+1},$$

$$C_n = \frac{[(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^{n-1}}{(n-1)!} + e^{(K_{3-1})y} \sum_{i=1}^n C_{n,i} y^{i-1} + e^{-(K_{2-1})y} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n,n+i} y^{i-1},$$

$$C_{n,2n-1} = \frac{(K_{1-3}) B_{n-1,n-1}}{(n-1)(\kappa+1)}, \quad \bigwedge_{i=n-2, n-3, \dots, 2, 1} C_{n,n+i} = \frac{(K_{1-3})(B_{n-1,i} + \kappa C_{n-1,n-1+i})}{(n-1)(\kappa+1)} +$$

$$+ \frac{i C_{n,n+1+i}}{(K_{2-1}) + (K_{3-1})}, \quad C_{n,n} = -\frac{(K_{1-3})(K_{3-1}) C_{n-1,n-1}}{(n-1)^2},$$

$$(3.32) \quad \bigwedge_{i=n-1, n-2, \dots, 3, 2} C_{n,i} = - \frac{(K_{3-1})(K_{1-2})(B_{n-1, n-2+i} + \kappa C_{n-1, i-1})}{(n-1)(i-1)},$$

[c.d.]

$$C_{n,1} = e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})} \left(\sum_{i=1}^n B_{n,i} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n, n+i} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} B_{n, n+i} - \sum_{i=2}^n C_{n,i}.$$

Aby określić ilość przekazanego ciepła wystarczy znajomość temperatury czynnika ogrzewanego przy wypływie z wymiennika $\theta_{3w} = \theta_3|_{y=0}$. Ciepło pobrane przez czynnik ogrzewany wyraża się bowiem wzorem

$$(3.33) \quad \dot{Q} = W_2(t_{1d} - t_{2d})\theta_{3w_{sr}},$$

gdzie

$$(3.34) \quad \theta_{3w_{sr}} = \int_0^1 \theta_3|_{y=0}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0) \int_0^1 e^{-(n+1)(K_{1-2})x} x^{n-1} dx,$$

$$(3.35) \quad \begin{aligned} C_1(0) &= 1 + C_{1,1}, \\ C_2(0) &= (K_{1-2}) + (K_{1-3}) + C_{2,1} + C_{2,3}, \\ C_3(0) &= \frac{1}{2!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^2 + C_{3,1} + C_{3,4}, \\ C_4(0) &= \frac{1}{3!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^3 + C_{4,1} + C_{4,5}; \end{aligned}$$

ogólnie

$$(3.36) \quad \bigwedge_{n=2, 3, \dots} C_n(0) = \frac{1}{(n-1)!} [(K_{1-2}) + (K_{1-3})]^{n-1} + C_{n,1} + C_{n, n+1}.$$

4. Rozwiązanie równań bilansu energii przy całkowitym wymieszaniu jednego z czynników

Zależności podane uprzednio odnoszą się do przypadku, gdy czynniki robocze płyną adiabatycznymi, nie mieszającymi się strugami. Jeśli w czasie przepływu czynnik grzejący ulega całkowitemu wymieszaniu [$\theta_1 = \theta_1(x)$], wówczas [4] temperatury poszczególnych strumieni są określone wzorami:

$$(4.1) \quad \theta_1 = e^{-\gamma x}, \quad \theta_2 = \theta_1 [1 - e^{-(K_{2-1})y}], \quad \theta_3 = \theta_1 [1 - e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})(1-y)}],$$

gdzie

$$(4.2) \quad \gamma = \frac{W_2}{W_1} [1 - e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}] = \frac{(K_{1-2})}{(K_{2-1})} [1 - e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}].$$

Średnią temperaturę czynnika ogrzewanego przy wypływie z wymiennika określa tu zależność

$$(4.3) \quad \theta_{3w_{sr}} = \frac{(K_{2-1})}{(K_{1-2})} (1 - e^{-\gamma}).$$

W przypadku całkowitego wymieszania strumieni czynnika ogrzewanego $\theta_2 = \theta_2(y)$; $\theta_3 = \theta_3(y)$ układ równań bilansu energii przyjmuje postać

$$(4.4a) \quad (\kappa + 1)\theta_1 + \frac{1}{(K_{1-2})} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \theta_2 + \kappa\theta_3,$$

$$(4.4b) \quad \theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})} \frac{d\theta_2}{dy} = \int_0^1 \theta_1 dx,$$

$$(4.4c) \quad \theta_3 - \frac{1}{(K_{3-1})} \frac{d\theta_3}{dy} = \int_0^1 \theta_1 dx.$$

Układ (4.4) można otrzymać bądź bezpośrednio z bilansów energii, bądź też przez scałkowanie w granicach $0 \div 1$ względem zmiennej x równań (2.3b) i (2.3c). Warunki brzegowe są tu opisane, podobnie jak uprzednio, równaniami (2.6). Z równania (4.4a) po zastosowaniu warunku $\theta_1|_{x=0} = 1$ otrzymuje się

$$(4.5) \quad \theta_1 = \left(1 - \frac{\theta_2 + \kappa\theta_3}{\kappa + 1}\right) e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})x} + \frac{\theta_2 + \kappa\theta_3}{\kappa + 1}.$$

Po podstawieniu (4.5) do równań (4.4b) i (4.4c) otrzymuje się układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$(4.6) \quad \theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})} \frac{d\theta_2}{dy} = C + \frac{1-C}{\kappa+1} \theta_2 + \frac{1-C}{\kappa+1} \kappa\theta_3,$$

$$(4.7) \quad \theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})} \frac{d\theta_2}{dy} = \theta_3 - \frac{1}{(K_{3-1})} \frac{d\theta_3}{dy},$$

gdzie

$$(4.8) \quad C = \frac{1 - e^{-(\kappa+1)(K_{1-2})}}{(\kappa+1)(K_{1-2})}.$$

Po wyznaczeniu θ_3 z (4.6) i podstawieniu otrzymanej zależności do (4.7) otrzymuje się równanie

$$(4.9) \quad \frac{d^2\theta_2}{dy^2} - C(\kappa-1)(K_{2-1}) \frac{d\theta_2}{dy} - C\kappa(K_{2-1})^2\theta_2 = -C\kappa(K_{2-1})^2.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$(4.10) \quad \theta_2 = M_1 e^{\mu_1 y} + M_2 e^{\mu_2 y} + 1,$$

gdzie

$$(4.11) \quad \mu_{1,2} = \frac{1}{2} C(K_{2-1}) [\kappa - 1 \mp \sqrt{(\kappa - 1)^2 + 4\kappa/C}].$$

Podobny wygląd posiada funkcja określająca temperaturę θ_3

$$(4.12) \quad \theta_3 = N_1 e^{\mu_1 y} + N_2 e^{\mu_2 y} + 1.$$

Po wyznaczeniu na podstawie (4.6) stałych N_1 i N_2 jako funkcji stałych M_1 i M_2 oraz po uwzględnieniu dwóch nie wykorzystanych dotąd warunków brzegowych otrzymuje się ostatecznie

$$(4.13) \quad \theta_2 = 1 - \frac{\nu_2 e^{\nu_2} e^{\nu_1 y} - \nu_1 e^{\nu_1} e^{\nu_2 y}}{\nu_2 e^{\nu_2} - \nu_1 e^{\nu_1}} e^{-C(K_2-1)y},$$

$$(4.14) \quad \theta_3 = 1 - \frac{\nu_2 e^{\nu_1} e^{\nu_2 y} - \nu_1 e^{\nu_2} e^{\nu_1 y}}{\nu_2 e^{\nu_2} - \nu_1 e^{\nu_1}} e^{-C(K_2-1)y},$$

gdzie

$$(4.15) \quad \nu_{1,2} = \mu_{1,2} + C(K_2-1).$$

Temperatura czynnika ogrzewanego przy wypływie z wymiennika jest taka sama w każdym punkcie i wynosi

$$(4.16) \quad \theta_{3w} = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{(\kappa-1)^2 + 4\kappa/C}}{\kappa+1} \operatorname{ctgh} \left[\frac{1}{2} C(K_2-1) \sqrt{(\kappa-1)^2 + 4\kappa/C} \right]}.$$

5. Uwagi końcowe

Podane powyżej rozwiązania równań bilansu energii, zarówno dla przypadku, gdy nie występuje wymieszanie, jak również dla całkowitego wymieszania jednego z czynników, posiadają charakter bezwymiarowy. Występują w nich bezwymiarowe temperatury oraz kryteria podobieństwa i sympleksy. Do jednoznacznego określenia zagadnienia konieczna jest znajomość trzech spośród sześciu charakterystycznych wielkości (cztery kryteria podobieństwa, stosunek pojemności cieplnych oraz stosunek współczynników przenikania ciepła).

Rozwiązanie podane dla klasycznego, czystego przepływu krzyżowego mimo pozornie dość skomplikowanej postaci dobrze nadaje się do obliczeń dokonywanych na cyfrowej maszynie matematycznej. Przykładowe obliczenia wykazały przy tym, że ciąg $C_n(0)$ jest szybko zbieżny do zera.

Literatura cytowana w tekście

1. J. MADEJSKI, *Teoria wymiany ciepła*, PWN, Warszawa 1963.
2. G. D. RABINOVICH, *On a Particular Case of Stationary Heat Transfer with Crossflow of Heat Agents* Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 5 (1962), 409-412.
3. J. SKŁADZIEŃ, *Analiza rekuperatora Fielda przy krzyżowym przepływie czynników bez wymieszania*, ZNPS, Energetyka, 45 (1973).
4. J. SKŁADZIEŃ, *Rozkład temperatur w rekuperatorze Fielda przy krzyżowym przepływie czynników*, ZNPS, Energetyka, 39 (1971).
5. R. A. STEVENS, J. FERNANDEZ, J. R. WOOLF, *Mean Temperature Difference in One, Two and Three-Pass Crossflow Heat Exchangers*, Trans. ASME, 79 (1957) 287.

Р е з ю м е

АНАЛИЗ КОНВЕКЦИОННОГО ПЕТЛЕВОГО РЕКУПЕРАТОРА
С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ ПОТОКАМИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ

В работе рассматривается тепловой поток в конвекционном петлевом рекуператоре с перекрестным течением без смешивания. Используются общепринятые при анализе конвекционных рекуператоров предположения. Вытекающая из энергетических балансов система уравнений решалась до настоящего времени [2] с помощью преобразования Лапласа. В настоящей работе постулируется решение в виде ряда, а впоследствии подбираются функциональные коэффициенты этого ряда. Полученное решение удобно для расчетов на цифровой вычислительной машине.

S u m m a r y

ANALYSIS OF THE CONVECTIVE CROSSFLOW LOOP RECUPERATOR

Heat exchange in the convective loop recuperator with unmixed crossflow is considered. The usual assumptions of the analysis of convective recuperators are accepted. In the paper [2] the energy balance equations were solved by means of the Laplace transformation. In this paper the approximate solution is obtained with the help of integral equations. This solution suggests a particular form of the solution, and a system of simple differential equations is derived. The solution obtained is suitable for computer-aided calculations.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 stycznia 1974 r.

FUNKCJE PRZEMIESZCZEŃ DLA OŚRODKA POPRZECZNIE IZOTROPOWEGO

BOGDAN R O G O W S K I (ŁÓDŹ)

Wstęp

LECHNICKI [1] podał funkcję naprężeń dla ciał o izotropii poprzecznej, której stosowanie ograniczone jest do zagadnień osiowo-symetrycznych. Wyprowadzona przez NOWACKIEGO [2] funkcja naprężeń, spełniająca równanie różniczkowe czwartego rzędu, ma szersze zastosowanie, nie obejmuje jednak tych zagadnień, w których na obwodzie obiektu dane są trzy warunki brzegowe. W pracy [3] pokazano, że stan naprężenia i przemieszczenia w ośrodku poprzecznie izotropowym można wyrazić przez dwie funkcje spełniające równania różniczkowe, odpowiednio, drugiego i czwartego rzędu. Podane w pracy [3] funkcje rozwiązujące rozszerzyły zakres możliwych rozwiązań, jednak użycie ich do rozwiązywania problemów brzegowych napotyka poważne trudności [4]. W pracy [5] pokazano, że stan naprężenia i przemieszczenia można w przypadku zagadnienia osiowo-symetrycznego wyrazić przez dwie funkcje naprężeń, spełniające równania różniczkowe drugiego rzędu.

W pracy niniejszej pokażemy, że możliwe jest dalsze rozprężenie podstawowego układu równań zagadnienia równowagi ciała trójwymiarowego i w konsekwencji wyrażenie stanu naprężenia i przemieszczenia w liniowym, poprzecznie izotropowym sprężystym ośrodku ciągłym przez trzy funkcje, z których każda spełnia cząstkowe równanie różniczkowe drugiego rzędu.

Równania tego samego rzędu otrzymuje się dla dwóch funkcji przemieszczeń w płaskim zagadnieniu ośrodka ortotropowego, dla którego przestrzenne zagadnienie równowagi sprowadzono w pracy [6] do całkowania równań szóstego rzędu.

1. Podstawowy układ równań zagadnienia równowagi sprężystego ośrodka poprzecznie izotropowego

Rozpatrzmy w ramach liniowej teorii sprężystości statyczne zagadnienie jednorodnego, liniowo-sprężystego, poprzecznie izotropowego ciała trójwymiarowego.

Przyjmijmy kartezjański układ współrzędnych, w którym płaszczyzna $x_3 = 0$ pokrywa się z płaszczyzną izotropii.

Wykorzystując uogólnione prawo Hooke'a dla ośrodka poprzecznie izotropowego [1]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda_1 \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + \lambda_2 \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{33} + 2\mu_1 \varepsilon_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha 3} &= 2\mu_2 \varepsilon_{\alpha 3}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_2 \varepsilon_{\gamma\gamma} + \lambda_3 \varepsilon_{33}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2; \end{aligned}$$

równania równowagi:

$$(1.2) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

oraz związki Cauchy'ego

$$(1.3) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

można otrzymać dla omawianego ośrodka, przy pominięciu sił masowych X_i , następujący układ równań dla przemieszczeń

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (\lambda_1 + \mu_1)u_{\beta,\beta\alpha} + \mu_1 u_{\alpha,\beta\beta} + \mu_2 u_{\alpha,33} + (\lambda_2 + \mu_2)u_{3,3\alpha} &= 0, \\ (\lambda_2 + \mu_2)u_{\beta,\beta 3} + \mu_2 u_{3,\beta\beta} + \lambda_3 u_{3,33} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie u_α, u_3 są rzutami wektora przemieszczenia u_i na płaszczyzny, odpowiednio, równoległe i normalne do izotropowej płaszczyzny $x_3 = \text{const}$.

Występujące w (1.1) i (1.4) parametry materiałowe λ_i, μ_α wyrażają się przez techniczne stałe wzorami:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu + \nu_1 \nu_2}{1 - \nu - 2\nu_1 \nu_2}, & \mu_1 &= G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ \lambda_2 &= E \frac{\nu_1}{1 - \nu - 2\nu_1 \nu_2}, & \mu_2 &= G_1, \\ \lambda_3 &= E_1 \frac{1 - \nu}{1 - \nu - 2\nu_1 \nu_2}, & E\nu_1 &= E_1 \nu_2, \end{aligned}$$

gdzie E, ν — moduł Younga i współczynnik Poissona charakteryzują własności sprężyste w płaszczyznach $x_3 = \text{const}$ (izotropowe), a E_1, G_1, ν_1 są modułami sprężystości i współczynnikiem Poissona w kierunku prostopadłym do tych płaszczyzn.

2. Funkcje przemieszczeń

Wprowadzimy funkcje przemieszczeń $\varphi(x_1, x_2, x_3), \varphi_3(x_1, x_2, x_3)$ takie, aby

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= a \partial_\alpha \varphi + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \varphi_3, \\ u_3 &= \partial_3 \varphi; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \end{aligned}$$

gdzie a jest stałą, ε_α^β symbolem permutacyjnym ($\varepsilon_1^1 = \varepsilon_2^2 = 0, \varepsilon_1^2 = 1, \varepsilon_2^1 = -1$), a dla symboli różniczkowania przyjęto oznaczenia

$$\frac{\partial \dots}{\partial x_\alpha} = \partial_\alpha(\dots), \quad \frac{\partial \dots}{\partial x_3} = \partial_3(\dots).$$

Podstawiając (2.1) do (1.4) otrzymujemy

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \partial_\alpha \{(\lambda_1 + 2\mu_1)a\Delta + [\lambda_2 + \mu_2(a+1)]\partial_3^2\} \varphi + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta [\mu_1 \Delta + \mu_2 \partial_3^2] \varphi_3 &= 0, \\ \partial_3 \{[(\lambda_2 + \mu_2)a + \mu_2]\Delta + \lambda_3 \partial_3^2\} \varphi &= 0, \end{aligned}$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a względem zmiennych x_α .

Równania te będą spełnione, jeśli funkcje φ , φ_3 będą rozwiązaniami równań

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \{(\lambda_1 + 2\mu_1)a\Delta + [\lambda_2 + \mu_2(a+1)]\partial_3^2\}\varphi = 0, \\ & \{[(\lambda_2 + \mu_2)a + \mu_2]\Delta + \lambda_3\partial_3^2\}\varphi = 0, \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \left(\Delta + \frac{\mu_2}{\mu_1}\partial_3^2\right)\varphi_3 = 0.$$

Niezerowe rozwiązania dla funkcji φ otrzymujemy wtedy, gdy operatory różniczkowe występujące w (2.3) są identyczne, na to zaś potrzeba, aby

$$(2.5) \quad \frac{\lambda_3}{(\lambda_2 + \mu_2)a + \mu_2} = \frac{\lambda_2 + \mu_2(a+1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)a} = \frac{1}{s^2}.$$

Eliminując w równaniach (2.5) stałą a otrzymujemy równanie dla s^2

$$(2.6) \quad \mu_2\lambda_3s^4 - [(\lambda_1 + 2\mu_1)\lambda_3 - (\lambda_2 + 2\mu_2)\lambda_2]s^2 + (\lambda_1 + 2\mu_1)\mu_2 = 0.$$

Z kolei dla stałej a otrzymujemy

$$(2.7) \quad a = \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \mu_2}s^2 - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}.$$

Jeśli s_1^2 , s_2^2 są pierwiastkami równania (2.6) i funkcje φ_1 i φ_2 spełniają równania

$$(2.8) \quad \left(\Delta + \frac{1}{s_\alpha^2}\partial_3^2\right)\varphi_\alpha = 0; \quad \alpha = 1, 2,$$

to funkcje te spełniają także równania (2.3).

Parametrom s_1^2 , s_2^2 danym wzorami wynikającymi z (2.6)

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} s_1^2 \\ s_2^2 \end{array} \right\} &= \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)\lambda_3 - (\lambda_2 + 2\mu_2)\lambda_2}{2\mu_2\lambda_3} \pm \left[\left(\frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)\lambda_3 - (\lambda_2 + 2\mu_2)\lambda_2}{2\mu_2\lambda_3} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_3} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

odpowiadają stałe, odpowiednio, a_1 i a_2 , które zgodnie z (2.7) wynoszą

$$(2.10) \quad \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \mu_2} \begin{Bmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \end{Bmatrix} - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}.$$

Wykorzystując równości wynikające z (2.6)

$$(2.11) \quad \begin{aligned} s_1^2 s_2^2 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_3}, \\ s_1^2 + s_2^2 &= \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)\lambda_3 - (\lambda_2 + 2\mu_2)\lambda_2}{\mu_2\lambda_3}. \end{aligned}$$

dochodzimy do wniosku, że stałe a_1 i a_2 związane są zależnością

$$(2.12) \quad a_1 \cdot a_2 = 1,$$

czyli

$$(2.12') \quad a_2 = a_1^{-1}.$$

Składowe wektora przemieszczenia możemy zgodnie z (2.1) wyrazić przez funkcje $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ wzorami

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= \partial_\alpha(a_1 \varphi_1 + a_1^{-1} \varphi_2) + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \varphi_3, \\ u_3 &= \partial_3(\varphi_1 + \varphi_2); \quad \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

Jeśli w związkach (2.13) wprowadzimy nowe oznaczenia

$$(2.14) \quad a_1 = k, \quad \varphi_1 = \psi_1, \quad a_1^{-1} \varphi_2 = \psi_2, \quad \varphi_3 = \psi_3,$$

to otrzymamy

$$(2.15) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= \partial_\alpha(k\psi_1 + \psi_2) + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \psi_3, \\ u_3 &= \partial_3(\psi_1 + k\psi_2). \end{aligned}$$

Funkcje ψ_i ($i = 1, 2, 3$) spełniają równania wynikające z (2.8) i (2.4)

$$(2.16) \quad \left(\Delta + \frac{1}{s_i^2} \partial_3^2 \right) \psi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

w których parametry s_i^2 zależą od technicznych stałych sprężystości ośrodka i wynoszą zgodnie z (1.5), (2.4), (2.9)

$$(2.17) \quad s_1^2, s_2^2 = \begin{cases} \text{I; } & \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}, \quad \text{gdym } \alpha^2 - \beta > 0, \quad \text{tj. } \frac{G}{G_1} > \gamma, \\ \text{II; } & \alpha \quad \text{gdym } \alpha^2 - \beta = 0, \quad \text{tj. } \frac{G}{G_1} = \gamma, \\ \text{III; } & \alpha \pm i\sqrt{\beta - \alpha^2}, \quad \text{gdym } \alpha^2 - \beta < 0, \quad \text{tj. } 0 < \frac{G_1}{G} < \gamma, \end{cases}$$

$$(2.18) \quad s_3^2 = \frac{G}{G_1},$$

przy czym

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{G}{G_1} - \nu_1 \frac{E}{E_1} \right), \\ \beta &= \frac{1}{1-\nu^2} \frac{E}{E_1} \left(1 - \nu_1^2 \frac{E}{E_1} \right) > 0, \\ \gamma &= \nu_1 \frac{E}{E_1} + (1-\nu) \sqrt{\beta}. \end{aligned}$$

Stała k wchodząca do związków dla składowych wektora przemieszczenia wyraża się zgodnie z (2.14) i (2.10) wzorem

$$(2.20) \quad k = \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \mu_2} s_1^2 - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}.$$

Zależnie od właściwości sprężystych ośrodka parametry s_1^2 i s_2^2 mogą być rzeczywiste dodatnie (różne przyp. I), (równe przyp. II) lub zespolone, sprzężone (przyp. III) (por. [1]).

Taka może być również stała k dana wzorem (2.20). Dla większości materiałów konstrukcyjnych parametry te są rzeczywiste. Na przykład materiały-kompozycje typu laminaty, które, jak wiadomo, charakteryzują się silną anizotropią ($E/E_1 \approx 5-15$, $G/G_1 \approx 5-100$ [7]) będą należały do tej klasy materiałów.

W pracy [3], gdzie trójwymiarowe, statyczne zagadnienie ośrodka poprzecznie izotropowego sprowadzono do całkowania kolejnych równań drugiego i czwartego rzędu, operatory różniczkowe występujące w tych równaniach zawierają parametry analogiczne do danych wzorami (2.17), (2.18). Także równanie dla funkcji naprężeń podanej w [2] zależy od analogicznych parametrów.

Uwzględnienie (2.15) w (1.3), a tych ostatnich w (1.1) prowadzi do wyrażenia składowych tensora naprężenia przez pochodne cząstkowe funkcji przemieszczeń. Po wykorzystaniu zależności, jakie zachodzą między parametrami s_1^2 , s_2^2 , k i równań (2.16) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -\mu_2(k+1)\partial_3^2(\psi_1+\psi_2)-2\mu_1\partial_2^2(k\psi_1+\psi_2)+2\mu_1\partial_{12}^2\psi_3, \\
 \sigma_{22} &= -\mu_2(k+1)\partial_3^2(\psi_1+\psi_2)-2\mu_1\partial_1^2(k\psi_1+\psi_2)-2\mu_1\partial_{12}^2\psi_3, \\
 \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\mu_1\partial_{12}^2(k\psi_1+\psi_2)+\mu_1(\partial_2^2\psi_3-\partial_1^2\psi_3), \\
 \sigma_{13} &= \mu_2(k+1)\partial_{13}^2(\psi_1+\psi_2)+\mu_2\partial_{23}^2\psi_3, \\
 \sigma_{23} &= \mu_2(k+1)\partial_{23}^2(\psi_1+\psi_2)-\mu_2\partial_{13}^2\psi_3, \\
 \sigma_{33} &= \mu_2(k+1)\partial_3^2\left(\frac{1}{s_1^2}\psi_1+\frac{1}{s_2^2}\psi_2\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Związki (2.15) i (2.21) opisują składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia przy pomocy cząstkowych pochodnych trzech funkcji przemieszczeń, spełniających równania różniczkowe drugiego rzędu (2.16). Sprowadzenie zagadnień równowagi do całkowania równań drugiego rzędu ułatwia rozwiązywanie problemów brzegowych.

Większość materiałów poprzecznie izotropowych posiada takie właściwości sprężyste, że np. w płytach wykonanych z tych materiałów istotny wpływ na stany naprężenia i przemieszczenia mają poprzeczne ścinanie oraz naprężenia normalne poprzeczne do płaszczyzny środkowej [12]. Zachodzi tu zatem konieczność budowania ścisłych rozwiązań dla ciał trójwymiarowych na gruncie teorii sprężystości.

3. Szczególny przypadek ośrodka poprzecznie izotropowego

Założmy, że mamy do czynienia z takim ośrodkiem poprzecznie izotropowym, dla którego parametry s_1^2 i s_2^2 wynoszą

$$s_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_3}, \quad s_2^2 = 1.
 \tag{3.1}$$

Wówczas warunek (2.11)₁ spełniony jest tożsamościowo, a równość w (2.11)₂ zachodzi wtedy, gdy moduł sprężystości postaciowej w kierunku normalnym do płaszczyzn izo-

tropowych $x_3 = \text{const}$ związany jest z pozostałymi parametrami materiałowymi ośrodka zależnością

$$(3.2) \quad \mu_2 = \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)\lambda_3 - \lambda_2^2}{\lambda_1 + 2\mu_1 + \lambda_3 + 2\lambda_2}.$$

Mamy tu zatem cztery niezależne stałe sprężyste.

Uwzględniając (3.1) i (3.2) we wzorze (2.20) otrzymujemy dla stałej k

$$(3.3) \quad k = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3 - \mu_2}.$$

Związki dla składowych wektora przemieszczenia i tensora naprężenia otrzymuje się uwzględniając (3.3) i (3.1) w (2.15) i (2.21) w postaci:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= \partial_\alpha \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3 - \mu_2} \psi_1 + \psi_2 \right) + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \psi_3, \\ u_3 &= \partial_3 \left(\psi_1 + \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3 - \mu_2} \psi_2 \right); \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\mu_2 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_3 - \mu_2} \partial_3^2 (\psi_1 + \psi_2) - 2\mu_1 \partial_2^2 \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3 - \mu_2} \psi_1 + \psi_2 \right) + 2\mu_1 \partial_{12}^2 \psi_3, \\ \sigma_{22} &= -\mu_2 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_3 - \mu_2} \partial_3^2 (\psi_1 + \psi_2) - 2\mu_1 \partial_1^2 \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3 - \mu_2} \psi_1 + \psi_2 \right) - 2\mu_1 \partial_{12}^2 \psi_3, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= 2\mu_1 \partial_{12}^2 \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3 - \mu_2} \psi_1 + \psi_2 \right) + \mu_1 (\partial_2^2 \psi_3 - \partial_1^2 \psi_3), \\ \sigma_{13} &= \mu_2 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_3 - \mu_2} \partial_{13}^2 (\psi_1 + \psi_2) + \mu_2 \partial_{23}^2 \psi_3, \\ \sigma_{23} &= \mu_2 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_3 - \mu_2} \partial_{23}^2 (\psi_1 + \psi_2) - \mu_2 \partial_{13}^2 \psi_3, \\ \sigma_{33} &= \mu_2 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_3 - \mu_2} \partial_3^2 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + 2\mu_1} \psi_1 + \psi_2 \right). \end{aligned}$$

Funkcje przemieszczeń $\psi_i(x_1, x_2, x_3)$ spełniają tu równania

$$(3.6) \quad \left(\Delta + \frac{1}{s_i^2} \partial_3^2 \right) \psi_i = 0; \quad i = 1, 2, 3,$$

przy czym

$$(3.7) \quad s_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_3}; \quad s_2^2 = 1, \quad s_3^2 = \frac{G}{G_1}.$$

Istnieje duża klasa poprzecznie izotropowych materiałów konstrukcyjnych, których stałe sprężyste z dobrym przybliżeniem spełniają związek (3.2), który, przy wykorzystaniu zależności (1.5), ma postać

$$(3.8) \quad \frac{G}{G_1} = \nu_1 \frac{E}{E_1} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{E}{E_1} \left(1 - \nu_1^2 \frac{E}{E_1} \right) + \frac{1-\nu}{2},$$

w której wszystkie składniki występujące po prawej stronie są dodatnie. Do tych materiałów należą niektóre tworzywa sztuczne uzbrojone siatkami z włókien szklanych, drutów stalowych czy siatkami azbestowymi.

Warunek (3.8) spełniony jest, między innymi, w przypadku ośrodka izotropowego.

4. Przypadek izotropii

Szczególnym przypadkiem omawianego w pracy ośrodka jest ciało izotropowe, dla którego

$$(4.1) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \lambda_3 = \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Jeśli w wyrażeniach (3.4) i równaniach (3.6) zastosujemy podstawienie

$$(4.2) \quad \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3 - \mu_2} \psi_1 + \psi_2 = \Omega, \quad \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3 - \mu_2} \left[1 - \left(\frac{\lambda_3 - \mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^2 \right] \psi_2 = \psi, \quad \psi_3 = \varphi,$$

i wykorzystamy wynikającą z (3.2) zależność

$$(4.3) \quad \left(\frac{\lambda_3 - \mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^2 = \frac{\lambda_3 - \mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1 - \mu_2},$$

to otrzymamy

$$(4.4) \quad u_\alpha = \partial_\alpha \Omega + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \varphi, \quad u_3 = \frac{\lambda_3 - \mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \partial_3 \Omega + \partial_3 \psi,$$

$$(\Delta + \partial_3^2) \psi = 0,$$

$$(4.5) \quad \left(\Delta + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + 2\mu_1} \partial_3^2 \right) \Omega + \frac{(\lambda_3 - \mu_2)(\lambda_1 + 2\mu_1 - \mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + 2\mu_1)} \partial_3^2 \psi = 0,$$

$$\left(\Delta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \partial_3^2 \right) \varphi = 0.$$

Pole przemieszczeń opisane jest w tym przypadku wzorami (4.4) za pomocą trzech funkcji ψ , Ω , φ , które spełniają równania różniczkowe (4.5).

W granicznym przypadku ośrodka izotropowego otrzymuje się z (4.4) i (4.5) po uwzględnieniu (4.1)¹⁾

$$(4.6) \quad u_\alpha = \partial_\alpha \Omega + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \varphi,$$

$$u_3 = \partial_3(\Omega + \psi),$$

¹⁾ Harmoniczność funkcji ψ wynika bezpośrednio z (4.2) jedynie dla $\frac{\lambda_3 - \mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \neq 1$. Okazuje się jednak, że równania (4.4), (4.5) pozostają słuszne także dla $\frac{\lambda_3 - \mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} = 1$ i wtedy mają postać (4.6) i (4.7), co łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, podstawiając (4.6) i (4.7) do równań przemieszczeniowych ośrodka izotropowego.

przy czym funkcje przemieszczeń Ω , φ , ψ spełniają równania

$$(4.7) \quad \Delta_3 \psi = 0, \quad \Delta_3 \varphi = 0, \quad 2(1-\nu)\Delta_3 \Omega + \partial_3^2 \psi = 0,$$

gdzie

$$\Delta_3 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Przypadek (2.17)₂, w którym

$$s_1^2 = s_2^2 = \alpha = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{G}{G_1} - \nu_1 \frac{E}{E_1} \right)$$

można sprowadzić przez podstawienie $x_3' = x_3 \alpha$ do analogicznego zagadnienia dotyczącego ośrodka izotropowego, opisanego związkami (4.6) i równaniami (4.7)

5. Płaski stan naprężenia w ośrodku ortotropowym

W przestrzennym zagadnieniu równowagi ośrodka ortotropowego nie jest możliwe zastosowanie podanego sposobu rozprężenia układu równań problemu, [8, 9, 10]. Jest to natomiast możliwe dla ciał o ortotropii poprzecznej, znajdujących się w płaskim stanie naprężenia lub płaskim stanie odkształcenia.

Rozpatrzmy ciało ortotropowe, w którym osie przyjętego prostokątnego, kartezjańskiego układu współrzędnych pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii. Stan naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia rozpatrywanego ośrodka opisuje się uogólnionym prawem Hooke'a wiążącym naprężenia $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ i małe odkształcenia $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ [11]²⁾

$$(5.1) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

związkami Cauchy'ego:

$$(5.2) \quad \varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = v_{,y}, \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x},$$

równaniami równowagi:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + X &= 0, \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + Y &= 0 \end{aligned}$$

oraz warunkami brzegowymi, wynikającymi ze sposobów podparcia i obciążenia obiektu.

Występujące w (5.1) c_{11} , c_{22} , c_{12} , c_{66} są parametrami materiałowymi rozpatrywanego ośrodka ortotropowego, a w (5.2) u i v są składowymi wektora przemieszczenia, odpowiednio, w kierunku osi x i y .

²⁾ We wzorach tego punktu użyjemy tradycyjnych oznaczeń współrzędnych prostokątnych (x, y) zamiast poprzednio występujących (x_1, x_2, x_3) .

Wykorzystując związki (5.2) i (5.1) możemy sprowadzić równania równowagi (5.3) do równań wyrażonych przez przemieszczenia $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, które przy pominięciu sił masowych X i Y mają postać

$$(5.4) \quad \begin{aligned} c_{11}u_{,xx} + c_{66}u_{,yy} + (c_{12} + c_{66})v_{,xy} &= 0, \\ c_{66}v_{,xx} + c_{22}v_{,yy} + (c_{12} + c_{66})u_{,xy} &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzimy funkcję przemieszczeń $\phi(x, y)$ taką, aby

$$(5.5) \quad u = a\phi_{,x}, \quad v = \phi_{,y},$$

gdzie a jest stałą.

Podstawienie (5.5) do (5.4) prowadzi do równań dla funkcji ϕ

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \{c_{11}a\phi_{,xx} + [c_{66}(a+1) + c_{12}]\phi_{,yy}\}_{,x} &= 0, \\ \{[c_{12}a + c_{66}(a+1)]\phi_{,xx} + c_{22}\phi_{,yy}\}_{,y} &= 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$(5.7) \quad \begin{aligned} c_{11}a\phi_{,xx} + [c_{66}(a+1) + c_{12}]\phi_{,yy} &= f(y), \\ [c_{12}a + c_{66}(a+1)]\phi_{,xx} + c_{22}\phi_{,yy} &= h(x). \end{aligned}$$

Jednorodne równania (5.7)

$$(5.8) \quad \begin{aligned} c_{11}a\phi_{,xx} + [c_{66}(a+1) + c_{12}]\phi_{,yy} &= 0, \\ [c_{12}a + c_{66}(a+1)]\phi_{,xx} + c_{22}\phi_{,yy} &= 0 \end{aligned}$$

mają niezerowe rozwiązania wtedy, gdy

$$(5.9) \quad \frac{c_{22}}{c_{12}a + c_{66}(a+1)} = \frac{c_{66}(a+1) + c_{12}}{c_{11}a} = \frac{1}{s^2}$$

Z (5.9) otrzymujemy równanie dla parametru s^2

$$(5.10) \quad c_{66}c_{22}s^4 - [c_{11}c_{22} - c_{12}(c_{12} + 2c_{66})]s^2 + c_{11}c_{66} = 0$$

oraz dla stałej a wyrażenie

$$(5.11) \quad a = \frac{c_{22}}{c_{12} + c_{66}}s^2 - \frac{c_{66}}{c_{12} + c_{66}}.$$

Pierwiastkom s_1^2 , s_2^2 równania (5.10) odpowiadają dwie funkcje spełniające równania

$$(5.12) \quad \phi_{\alpha,xx} + \frac{1}{s_\alpha^2}\phi_{\alpha,yy} = 0; \quad \alpha = 1, 2$$

będące rozwiązaniami równań (5.8).

Składowe wektora przemieszczenia wyrażają się przez te funkcje wzorami wynikającymi z (5.5)

$$(5.13) \quad \begin{aligned} u &= a_1\phi_{1,x} + a_2\phi_{2,x}, \\ v &= \phi_{1,y} + \phi_{2,y}, \end{aligned}$$

gdzie a_1 , a_2 są stałymi odpowiadającymi parametrom s_1^2 , s_2^2 , które oblicza się ze wzoru (5.11).

Parametry s_1^2, s_2^2 wyrażają się przez stałe sprężystości wzorami analogicznymi do (2.17), w których w tym przypadku

$$(5.14) \quad \alpha = \frac{c_{11}}{c_{66}} - \frac{c_{12}(c_{12} + 2c_{66})}{c_{66}c_{22}},$$

$$\beta = \frac{c_{11}}{c_{22}} > 0$$

mają takie same właściwości, jak parametry dla poprzecznie izotropowego ciała trójwymiarowego omówionego w punkcie 2 (por. też [1]).

Podobnie, jak dla ciała trójwymiarowego, mamy tu

$$(5.15) \quad a_1 \cdot a_2 = 1.$$

Wprowadzając oznaczenia $a_1 = k, \phi_1 = \psi_1, a_1^{-1}\phi_2 = \psi_2$, otrzymujemy z (5.13)

$$(5.16) \quad u = k\psi_{1,x} + \psi_{2,x},$$

$$v = \psi_{1,y} + k\psi_{2,y},$$

przy czym funkcje ψ_α spełniają równania analogiczne do (5.12)

$$(5.17) \quad \psi_{\alpha,xx} + \frac{1}{s_\alpha^2} \psi_{\alpha,yy} = 0; \quad \alpha = 1, 2,$$

a stała k dana jest wzorem

$$(5.18) \quad k = \frac{c_{22}}{c_{12} + c_{66}} s_1^2 - \frac{c_{66}}{c_{12} + c_{66}}.$$

Składowe tensora naprężenia wyrażają się przez funkcje $\psi_\alpha(x, y)$ wzorami, które otrzymuje się ze związków (5.1), (5.2) i (5.16). Wykorzystanie zależności, jakie zachodzą między występującymi w tych związkach parametrami i równań (5.17) prowadzi do następujących wyrażeń:

$$(5.19) \quad \sigma_x = -c_{66}(k+1)(\psi_{1,yy} + \psi_{2,yy}),$$

$$\sigma_y = -c_{66}(k+1)(\psi_{1,xx} + \psi_{2,xx}),$$

$$\tau_{xy} = c_{66}(k+1)(\psi_{1,xy} + \psi_{2,xy}).$$

Związki (5.16), (5.19) i równania (5.17), w których stała k dana jest wzorem (5.18), a parametry s_1^2, s_2^2 wzorami (2.17), w których α i β mają wartości (5.14), stanowią ogólne rozwiązanie równań jednorodnych (5.8).

Dla znalezienia ogólnego rozwiązania wyjściowego problemu trzeba znaleźć ponadto rozwiązanie szczególne równań (5.7). Z równań (5.7) wyznaczmy

$$(5.20) \quad \phi_{,xx} = \frac{c_{22}f(y) - [c_{66}(a+1) + c_{12}]h(x)}{M}$$

$$\phi_{,yy} = \frac{c_{11}ah(x) - [c_{12}a + c_{66}(a+1)]f(y)}{M}$$

przy założeniu, że wyznacznik tego układu jest różny od zera

$$(5.21) \quad M = c_{11}c_{22}a - [(c_{66}(a+1) + c_{12})[c_{66}(a+1) + c_{12}a]] \neq 0,$$

tj. stała a przyjmuje dowolne wartości z wyjątkiem

$$(5.21') \quad a \neq k, \quad a \neq k^{-1},$$

gdzie k dane jest wzorem (5.18).

Z równań (5.20) otrzymujemy

$$(5.22) \quad \frac{c_{22}f''(y)}{M} = \frac{c_{11}ah''(x)}{M}.$$

Wynika stąd, że funkcje $f(y)$ i $h(x)$ muszą mieć postać

$$(5.23) \quad f(y) = by^2 + cy + d, \quad h(x) = \frac{c_{22}}{c_{11}a}bx^2 + gx + m.$$

Uwzględniając (5.23) w (5.20) i całkując te ostatnie, otrzymujemy dla funkcji $\phi(x, y)$

$$(5.24) \quad \phi(x, y) = c_{22} \left(\frac{3}{2}Ay^2x^2 + Byx^2 \right) + c_{11}aCx^2 - [c_{66}(a+1) + c_{12}] \left(\frac{c_{22}}{4ac_{11}}Ax^4 + \frac{1}{3}Cx^3 \right) + Dxy + Ex^2 + Fx - [c_{12}a + c_{66}(a+1)] \left(\frac{1}{4}Ay^4 + \frac{1}{3}By^3 \right) + Gy^2 + Hy + K,$$

gdzie $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ są stałymi dowolnymi.

Składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia wyrażają się tu wzorami:

$$(5.25) \quad \begin{aligned} u = a\phi_{,x} = & c_{22}a(3Ay^2x + 2Byx) + c_{11}a^2Cy^2 + \\ & + [c_{66}(a+1) + c_{12}] \left(\frac{c_{22}}{c_{11}}Ax^3 + aCx^2 \right) + aDy + 2Eax + Fa, \end{aligned}$$

$$v = \phi_{,y} = c_{22}(3Ayx^2 + Bx^2) + 2c_{11}aCxy + \\ + [c_{12}a + c_{66}(a+1)](Ay^3 + By^2) + Dx + 2Gy + H;$$

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \sigma_x = & [(c_{22}c_{11} - c_{12}^2)a - c_{66}c_{12}(a+1)](3Ay^2 + 2By) + \\ & + c_{66}(a+1)(3c_{22}Ax^2 + 2c_{11}aCx) + 2c_{11}aE + 2c_{12}G, \\ \sigma_y = & -c_{22}c_{66}(a+1)(3Ay^2 + 2By) + 3\frac{c_{22}}{c_{11}}[c_{22}c_{11} - c_{12}c_{66}(a+1) - c_{12}^2]Ax^2 + \\ & + 2a[c_{11}c_{22} - c_{12}c_{66}(a+1) - c_{12}^2]Cx + 2c_{12}aE + 2c_{22}G, \\ \tau_{xy} = & 2c_{22}c_{66}(a+1)(3Ayx + Bx) + 2c_{66}(a+1)ac_{11}Cy + c_{66}(a+1)D. \end{aligned}$$

Za pomocą rozwiązań (5.25) i (5.26) można opisać stany naprężenia i przemieszczenia w tarczach o skończonych wymiarach w szczególnych przypadkach warunków brzegowych (metoda odwrotna). Dane zagadnienie brzegowe w tarczach prostokątnych można rozwiązać wykorzystując ogólne rozwiązanie, które jest sumą rozwiązań (5.16), (5.19), (5.17) oraz (5.25) i (5.26).

6. Przypadek izotropii

Związki (5.16) i równania (5.17) można przekształcić w odpowiednie związki i równania opisujące płaski stan naprężenia w ośrodku izotropowym.

Jeśli zastosujemy w (5.16) i (5.17) podstawienie

$$(6.1) \quad k\psi_1 + \psi_2 = \Omega, \quad (1-k^2)\psi_1 = \varphi,$$

to otrzymamy

$$(6.2) \quad u = \Omega_{,x}, \quad v = k\Omega_{,y} + \varphi_{,y},$$

$$s_1^2 \varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = 0,$$

$$(6.3) \quad s_2^2 \Omega_{,xx} + \Omega_{,yy} + A\varphi_{,yy} = 0,$$

gdzie oznaczono

$$(6.4) \quad A = \frac{k(s_1^2 - s_2^2)}{s_1^2(k^2 - 1)}.$$

W przypadku ośrodka izotropowego, dla którego

$$(6.5) \quad C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2},$$

otrzymujemy z (2.17), (5.14) oraz (5.18)

$$(6.6) \quad s_1^2 = s_2^2 = k = 1.$$

Uwzględniając (6.6) w (6.4) stwierdzamy, że dla stałej A otrzymujemy w tym przypadku symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$.³⁾

Dla obliczenia granicy wyrażenia (6.4) przyjmiemy taki przypadek ośrodka ortotropowego, dla którego

$$(6.7) \quad s_1^2 = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad s_2^2 = 1, \quad c_{66} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}.$$

Łatwo sprawdzić, że równanie (5.10) jest spełnione tu tożsamościowo.

Podstawiając (5.18) oraz (6.7)₁ i (6.7)₂ do (6.4) i uwzględniając wynikające z (6.7)₃ równości

$$(6.8) \quad k = \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{22} - c_{66}} = \frac{c_{11} - c_{66}}{c_{12} + c_{66}},$$

$$\frac{c_{22} - c_{12} - 2c_{66}}{(c_{22} + c_{12})(c_{22} - c_{11})} = \frac{1}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}},$$

otrzymujemy dla stałej A

$$(6.9) \quad A = \frac{(c_{12} + c_{66})^2 (c_{11} + c_{22} + 2c_{12})}{c_{11}(c_{12} + c_{22})^2}.$$

³⁾ W tym przypadku niezerową funkcję φ , wiążącą się z funkcją ψ_1 za pomocą wzoru (6.1)₂ należy rozumieć jako graniczną funkcję ciągu $\varphi^{(k)}$, gdy $k \rightarrow 1$.

W przypadku izotropii, dla której zachodzą zależności (6.5) mamy

$$(6.10) \quad A = \frac{1}{2}(1+\nu).$$

Tak więc dla izotropii otrzymuje się w przypadku płaskiego stanu naprężenia

$$(6.11) \quad u = \Omega_{,x}, \quad v = \Omega_{,y} + \varphi_{,y},$$

$$(6.12) \quad \Delta\varphi = 0, \quad \Delta\Omega + \frac{1+\nu}{2}\varphi_{,yy} = 0.$$

7. Płaski stan odkształcenia

Wyprowadzone w punkcie 6 funkcje przemieszczeń opisują zarówno płaski stan naprężenia, jak również płaski stan odkształcenia, a więc płaski problem teorii sprężystości. W obu zagadnieniach podstawowy układ równań różniczkowych zagadnienia równowagi ma postać (5.4), a jedynie różne są stałe współczynniki w równaniach dla obu zagadnień.

W przypadku płaskiego stanu naprężenia jest:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} c_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & c_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ c_{12} &= c_{21} = \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \end{aligned}$$

a w przypadku płaskiego stanu odkształcenia

$$(7.2) \quad \begin{aligned} c_{11} &= \frac{E_1}{B}(1-\nu_{23}\nu_{32}), & c_{22} &= \frac{E_2}{B}(1-\nu_{13}\nu_{31}), \\ c_{12} &= c_{21} = \frac{E_1}{B}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) = \frac{E_2}{B}(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}), \\ B &= 1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}, \end{aligned}$$

gdzie przez E_i ($i = 1, 2$), ν_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$) oznaczono moduły Younga i współczynniki Poissona, przy czym indeksy 1, 2, 3 odpowiadają głównym kierunkom sprężystości, odpowiednio, x, y, z .

Parametr k , dany wzorem (5.18) oraz α i β , od których zależą parametry s_1^2 i s_2^2 , określone zależnościami (5.14) wyrażają się przez techniczne stałe wzorami:

— dla płaskiego stanu naprężenia

$$(7.3) \quad \begin{aligned} k &= \frac{E_2 s_1^2 - G(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1 \nu_{21} + G(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \\ \alpha &= \frac{E_1}{2G} - \nu_{12}, \\ \beta &= \frac{E_1}{E_2}; \end{aligned}$$

— dla płaskiego stanu odkształcenia

$$(7.4) \quad k = \frac{(1 - \nu_{13}\nu_{31})s_1^2 - \frac{GB}{E_2}}{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32} + \frac{GB}{E_2}},$$

$$\alpha = \frac{E_1}{2G(1 - \nu_{13}\nu_{31})} - \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{1 - \nu_{13}\nu_{31}},$$

$$\beta = \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})}.$$

Wykorzystując (7.2) i wykonując w (5.16), (5.17) przejście graniczne, otrzymano rozwiązania dla płaskiego stanu odkształcenia w ośrodku izotropowym. Mają one postać:

$$(7.5) \quad u = \Omega_{,x}, \quad v = \Omega_{,y} + \psi_{,y},$$

gdzie funkcje $\Omega(x, y)$, $\psi(x, y)$ są rozwiązaniami równań

$$(7.6) \quad \Delta\psi = 0, \quad 2(1 - \nu)\Delta\Omega + \psi_{,yy} = 0.$$

Tak więc, sprowadzono płaski problem teorii sprężystości ośrodka ortotropowego do całkowania równań drugiego rzędu (5.17). Dla ośrodka izotropowego rozwiązania mają postać (6.2) i (6.3) dla płaskiego stanu naprężenia oraz (7.5), (7.6) w przypadku płaskiego stanu odkształcenia.

W obu zagadnieniach występują ponadto rozwiązania w postaci wielomianów (5.25), (5.26), w których parametry sprężyste wyrażają się wzorami, odpowiednio, (7.1) i (7.2).

Literatura cytowana w tekście

1. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Гостехиздат, 1950.
2. W. NOWACKI, *O wyznaczaniu naprężeń i odkształceń w ciele sprężystym o izotropii poprzecznej*, Arch. Mech. Stos., 5, 4 (1953).
3. HU. HAI-CHANG, *On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transv. isotr. body*, Acta Sci Sinica, 2, 2 (1953).
4. С. Г. Лехницкий, *Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты*, ПММ. 26 (1962).
5. A. SINGH, *Stress distributions within solids of revolution*, ZAMM, 39, 12 (1959).
6. Z. MOSSAKOWSKA, *Funkcje naprężeń dla ciał sprężystych o ortotropii trójosiowej*, AMS, 7, 1 (1955).
7. Ю. М. ТАРНОПОЛЬСКИЙ, А. В. РОЗЕ, *Особенности расчета деталей из армированных пластиков*, Рига 1969.
8. В. Д. КУПРАДЗЕ, Т. Г. ГЕГЕЛИА, М. О. БЕШЕЛЕЙШВИЛИ, Т. В. БУРЧУЛАДЗЕ, *Трехмерные задачи математической теории упругости*, Изд-во Тбилисского ун-та, 1968.
9. И. В. КИМ, Р. Я. СУНЧЕЛЕВ, *Об одной контактной задаче для ортотропного полупространства*, Прикл. механ., 6, 7 (1970).
10. С. I. BORȘ, *Teoria elasticității corpurilor anisotrope*, București, Editura Academiei R. S. Romănia. 1970.
11. A. E. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th ed. Dover Publications, 1944.
12. B. ROGOWSKI, *Zginanie płyty poprzecznie izotropowej*, AIL, 4 (1974).

Резюме

ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ УПРУГОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Трехмерная статическая задача линейной теории упругости трансверсально-изотропной среды сведена к интегрированию трех дифференциальных уравнений второго порядка, для трех функций перемещений. Для всех трех функций присутствующие в уравнениях дифференциальные операторы обладают одинаковым строением

$$L_i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}; \quad i = 1, 2, 3,$$

где константы s_i^2 зависят от материальных констант среды. Приводятся выражения компонент вектора перемещения и тензора напряжения через выведенные функции перемещений. Уравнения такого же строения получены для двух функций, являющихся функциями перемещений плоской задачи теории упругости ортотропной среды. Показаны также уравнения для трех функций перемещений при трехмерной задаче, или же для двух функций перемещений при плоских задачах, а также описание поля перемещений с помощью этих функций, для случая изотропной среды.

Summary

DISPLACEMENT FUNCTIONS FOR TRANSVERSALLY ISOTROPIC MEDIA

Three-dimensional, static problem of linear elasticity of a transversally isotropic medium is reduced to the solution of a system of three-second order differential equations for three displacement functions. The differential operators applied to the functions have the same form

$$L_i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}; \quad i = 1, 2, 3,$$

constants s_i^2 depending on the material parameters of the medium. Components of the displacement vector and stress tensor are expressed in terms of the displacement functions. Similar equations are also obtained for two displacement functions governing the plane problem of elasticity of orthotropic bodies.

The corresponding equations are also shown in the cases of three functions (spatial problem) or two functions (plane problem) describing the displacement field in isotropic media.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

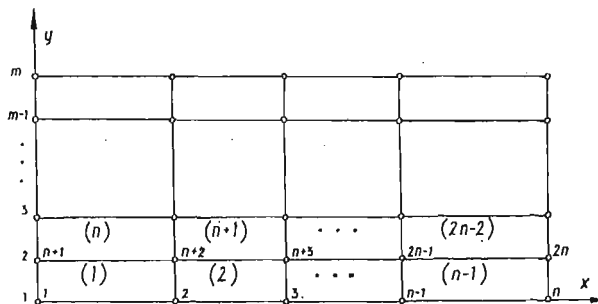
Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lutego 1974 r.

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU DRGAŃ WŁASNYCH NA PRZYKŁADZIE PŁYT

JERZY GOŁAŚ, ZYGMUNT KASPERSKI (OPOLE)

1. Wstęp

Rozważania analityczne dotyczące problemu drgań własnych konstrukcji powierzchniowych posiadają bogatą literaturę, przykładowo [1, 2, 3]. W praktyce jednak napotyka się często bardziej złożone ustroje ciągłe, jakimi są np. płyty o różnych kształtach i dowolnych warunkach brzegowych, o zmiennej grubości, jak i podparte w swoim obszarze. Jak wiadomo, metody klasyczne mogą być skutecznie stosowane jedynie w prostych przypadkach.



Rys. 1. Podział płyty, numeracja węzłów i elementów

W pracy niniejszej przedstawiono metodę numeryczną wyznaczania częstości drgań własnych konstrukcji powierzchniowych, zilustrowaną na przykładzie płyt, przyjmującą za punkt wyjścia metodę elementów skończonych w ujęciu ZIENKIEWICZA [4]. Ustrój ciągły (płytę) dzieli się na skończoną liczbę odkształcalnych elementów prostokątnych o 12 parametrach węzłowych (rys. 1). Metoda ta, jak to będzie wykazane dalej, daje dobre rezultaty nawet przy podziale na małą liczbę elementów (można więc dostatecznie dokładnie i szybko wykonywać obliczenia nawet na małych maszynach cyfrowych). Przedstawiony w pracy sposób można bez trudu uogólnić na rozwiązanie problemu drgań własnych innych ustrojów ciągłych, jak np. powłoki i tarcze. Proponowana metoda ma ponadto tę zaletę, że obejmuje dowolne warunki brzegowe, dowolne rodzaje podparć w obszarze oraz zmienną grubość.

Autorzy sądzą, że wiele elementów przedstawionej metody (np. odwracanie macierzy trójkątnych, zamiana wskaźników podwójnych na pojedyncze itp.) może być pożytecznych do innych obliczeń, gdzie ilość informacji zapamiętywanych w maszynie cyfrowej oraz czas obliczeń odgrywają istotną rolę i nieraz nie pozwalają na przeprowadzenie efektywnych obliczeń.

2. Teoretyczny opis metody

Jak wiadomo, problem drgań własnych dźwigarów powierzchniowych sprowadza się do obliczenia takich liczb ω^2 , dla których równanie

$$(2.1) \quad [K] \{X\} = \omega^2 [M] \{X\}$$

ma nietrywialne rozwiązanie $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}^T$, gdzie $[K]$ jest macierzą sztywności, a $[M]$ macierzą mas. Zakładamy, że macierze $[K]$ i $[M]$ są macierzami kwadratowymi stopnia p . Wielkości $\omega_i^2 (i = 1, 2, \dots, p)$, dla których $\{X\} \neq \{0\}$ nazywamy wartościami własnymi równania (2.1), a wektory $\{X\}_i$ odpowiadające wartościom ω_i^2 nazywamy wektorami własnymi równania (2.1).

Proponowana metoda rozwiązania zagadnienia drgań własnych ma na celu:

1) znalezienie takiej macierzy symetrycznej $[A]$, dla której znajomość wartości i wektorów własnych pozwoli na proste obliczenie wartości i wektorów własnych równania (2.1) (stosunkowo najlepiej opracowane są metody obliczania wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznych),

2) zmniejszenie do minimum ilości informacji oraz działań w maszynie cyfrowej, tak by można było rozwiązywać zadania o jak największej liczbie stopni swobody.

W dalszej części tego rozdziału zakładamy, że znany jest sposób obliczania elementów macierzy sztywności $[K]$ i macierzy mas $[M]$, dla konkretnego ustroju ciągłego.

W algebrze liniowej znane jest twierdzenie, że dla każdej macierzy symetrycznej i dodatnio określonej $[B]$ istnieje taka macierz rzeczywista trójkątna górna $[S]$, że $[B] = [S]^T [S]$, gdzie $[S]^T$ jest macierzą transponowaną do macierzy $[S]$. Jak wiadomo [4] macierz sztywności $[K]$ jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną, zatem istnieje taka macierz $[Q]$, że $[K] = [Q]^T [Q]$. Macierz $[Q]$ można wyznaczyć metodą BANACHIEWICZA [5]. Jeżeli przez k_{ij} oznaczymy elementy macierzy $[K]$, a przez q_{ij} elementy macierzy $[Q]$, to zachodzą zależności

$$(2.2) \quad \begin{aligned} q_{11} &= \sqrt{k_{11}}, & q_{1j} &= \frac{k_{1j}}{q_{11}}, & j > 1, \\ q_{ii} &= \sqrt{k_{ii} - \sum_{t=1}^{i-1} q_{it}^2}, & 1 < i &\leq p, \\ q_{ij} &= \frac{k_{ij} - \sum_{t=1}^{i-1} q_{it} q_{jt}}{q_{ii}}, & i < j, \\ q_{ij} &= 0, & i > j. \end{aligned}$$

Ponieważ $[K] = [Q]^T [Q]$, to równanie (2.1) można zapisać w postaci

$$(2.3) \quad [Q]^T [Q] \{X\} = \omega^2 [M] \{X\}.$$

Podstawiając do równania (2.3) $[Q] \{X\} = \{U\}$, skąd $\{X\} = [Q]^{-1} \{U\}$ otrzymamy równanie

$$[Q]^T \{U\} = \omega^2 [M] [Q]^{-1} \{U\}.$$

Mnożąc lewostronnie powyższe równanie przez macierz $([Q]^T)^{-1}$ otrzymamy równanie

$$(2.4) \quad ([Q]^T)^{-1}[M][Q]^{-1}\{U\} = \lambda\{U\},$$

gdzie $\lambda = 1/\omega^2$.

Wykażemy teraz, że jeżeli macierz $[M]$ jest macierzą symetryczną, to macierz $[A] = ([Q]^T)^{-1}[M][Q]^{-1}$ jest macierzą symetryczną, tzn. $[A]^T = [A]$.

Rzeczywiście

$$[A]^T = [([Q]^T)^{-1}[M][Q]^{-1}]^T = ([Q]^{-1})^T\{([Q]^T)^{-1}[M]\}^T = ([Q]^{-1})^T[M]^T\{([Q]^T)^{-1}\}^T.$$

Ale $([Q]^{-1})^T = ([Q]^T)^{-1}$ oraz $\{([Q]^T)^{-1}\}^T = [Q]^{-1}$ i $[M]^T = [M]$, zatem $[A]^T = [A]$.

Tak więc, wartości własne ω_i^2 równania (2.1) wyrażają się przez wartości własne symetrycznej macierzy $[A]$ wzorem

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\lambda_i},$$

wektory zaś własne zależnością

$$\{X\}_i = [Q]^{-1}\{U\}_i,$$

gdzie wektory $\{U\}_i$ są wektorami własnymi macierzy $[A]$.

3. Realizacja metody na maszynie cyfrowej

Z opisu metody podanego w rozdziale 2 wynika, że elementy macierzy $[K]$ potrzebne są jedynie do tworzenia wyrazów macierzy $[Q]$. Ze wzorów (2.2) wynika, że aby obliczyć wyraz q_{ij} macierzy $[Q]$ wystarczy mieć element k_{ij} macierzy $[K]$ i wcześniej obliczone, odpowiednie elementy macierzy $[Q]$. Zatem macierz $[Q]$ można tworzyć i umieszczać w pamięci maszyny cyfrowej w to samo miejsce, które zajmują elementy macierzy $[K]$. Ponieważ macierz $[K]$ jest symetryczna, a macierz $[Q]$ trójkątna górna, wystarczy więc pamiętać tylko te elementy k_{ij} macierzy $[K]$, dla których $j \geq i$. W tym celu należy jednak zamienić wskaźniki podwójne w wyrazach macierzy $[K]$ i $[Q]$ na wskaźniki pojedyncze. Można tego dokonać w następujący sposób:

Jeżeli jest dana macierz

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pp} \end{bmatrix}$$

i chcemy zapamiętać jej elementy c_{ij} dla $j \geq i$ (górną część) jako odpowiednie elementy jednowymiarowej tablicy T w sposób

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_p \\ * & t_{p+1} & \dots & t_{2p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & t_{p(p+1)/2} \end{bmatrix},$$

gdzie przez * oznaczono elementy niepamiętane, wówczas między numerami elementów macierzy $[C]$ i numerami elementów tablicy T zachodzi związek

$$c_{ij} = t_{(i-1)p+j-i+r_i},$$

gdzie r_i jest ciągiem liczb całkowitych określonym wzorem rekurencyjnym

$$(3.1) \quad \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_i = r_{i-1} - i + 2 \quad \text{dla } i = 2, 3, \dots, p. \end{cases}$$

Można sprawdzić, że wówczas otrzymamy ciągłą pojedynczą numerację elementów prawego trójkąta macierzy $[C]$.

Taki sposób przyporządkowania wskaźnikom podwójnym wskaźników pojedynczych pozwala na proste zapisanie wszystkich działań na macierzach symetrycznych i trójkątnych górnych. Korzystając z (3.1) wzory (2.2) przyjmują postać

$$q_1 = \sqrt{k_1}, \quad q_j = \frac{k_j}{q_1}, \quad \text{dla } j = 2, 3, \dots, p,$$

$$q_{(i-1)p+r_i} = \sqrt{k_{(i-1)p+r_i} - \sum_{t=1}^{i-1} [q_{(i-1)p+i-t+r_t}^2]}, \quad 1 < i \leq p,$$

$$q_{(i-1)p+j-i+r_i} = \frac{k_{(i-1)p+j-i+r_i} - \sum_{t=1}^{i-1} [q_{(i-1)p+i-t+r_t} q_{(i-1)p+j-t+r_t}]}{q_{(i-1)p+r_i}}$$

dla $i < j$.

Z równania (2.4) wynika, że do obliczenia wartości i wektorów własnych macierzy $[A]$ potrzebna jest tylko macierz $[Q]^{-1}$ (gdyż $([Q]^T)^{-1}$ jest macierzą transponowaną do macierzy $[Q]^{-1}$) oraz macierz $[M]$. Macierz odwrotna do macierzy trójkątnej górnej jest też macierzą trójkątną górną.

Podamy teraz prosty algorytm szybkiego odwracania macierzy trójkątnej górnej $[Q]$. Załóżmy, że $[B] = [Q]^{-1}$, tzn. że $[Q][B] = [I]$, gdzie $[I]$ jest macierzą jednostkową. Elementy macierzy $[B]$ oznaczmy przez b_{ij} . Korzystając z tego, że macierze $[Q]$ i $[B]$ są trójkątne górne i że ich iloczyn jest macierzą jednostkową, otrzymamy następujące układy równań na wyznaczenie elementów b_{ij} macierzy $[B]$:

układ 1, p — równań

$$\begin{aligned} q_{11} b_{11} &= 1, \\ q_{11} b_{12} + q_{12} b_{22} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ q_{11} b_{1p} + q_{12} b_{2p} + \dots + q_{1p} b_{pp} &= 0, \end{aligned}$$

układ 2, $p-1$ — równań

$$\begin{aligned} q_{22} b_{22} &= 1, \\ q_{22} b_{23} + q_{23} b_{33} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ q_{22} b_{2p} + q_{23} b_{3p} + \dots + q_{2p} b_{pp} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

układ $p-1, 2$ — równania

$$\begin{aligned} q_{p-1, p-1} b_{p-1, p-1} &= 1, \\ q_{p-1, p-1} b_{p-1, p} + q_{p-1, p} b_{pp} &= 0, \end{aligned}$$

układ $p, 1$ — równanie

$$q_{pp} b_{pp} = 1.$$

Tak więc, układ o numerze i ($i = 1, 2, \dots, p$) powstał z przemnożenia wiersza o numerze i macierzy $[Q]$ przez kolumny o numerach $i, i+1, \dots, p$ macierzy $[B]$. Z tych układów równań można wyznaczyć elementy b_{ij} ($j \geq i$) rozwiązując powyższe układy w odwrotnej kolejności, tzn. najpierw układ o numerze p , następnie o numerze $p-1$, itd., na końcu układ o numerze 1.

Otrzymuje się proste wzory na elementy macierzy $[B]$

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \frac{1}{q_{ii}}, \\ b_{ij} &= \frac{-\sum_{k=i+1}^j q_{ik} b_{kj}}{q_{ii}}, \quad \begin{aligned} i &= n, n-1, \dots, 1, \\ j &= n, n-1, \dots, i+1, \\ j &> i. \end{aligned} \end{aligned}$$

Z wzorów tych wynika ponadto, że elementy macierzy $[Q]^{-1}$ można umieścić w to samo miejsce pamięci maszyny cyfrowej, w którym znajdują się odpowiednie elementy macierzy $[Q]$, tzn., że nie ma potrzeby wprowadzać dodatkowej macierzy $[B]$. Korzystając ze związków (3.1) oraz wprowadzając zamiast symbolu „=” symbol podstawienia „:=”, otrzymamy wzory na elementy macierzy odwrotnej

$$\begin{aligned} q_{(l-1)p+ri} &:= \frac{1}{q_{(l-1)p+ri}}, \\ q_{(l-1)p+j-l+ri} &:= \frac{-\sum_{k=l+1}^j (q_{(l-1)p+k-l+ri} q_{(k-1)p+j-k+rk})}{q_{(l-1)p+ri}}. \end{aligned}$$

Mając dane macierze $[Q]^{-1}$ oraz $[M]$ można obliczyć elementy macierzy $[A] = ([Q]^T)^{-1}[M][Q]^{-1}$. Wartości i wektory własne macierzy symetrycznej można obliczyć metodą HOUSEHOLDERA [5] (można też skorzystać z programu bibliotecznego maszyny cyfrowej Odra 1204), a następnie wartości i wektory własne równania (2.1).

4. Przykłady liczbowe

Przedstawiony algorytm został zrealizowany na maszynie cyfrowej Odra 1204 i sprawdzony na szeregu przykładów liczbowych. Macierz sztywności $[K]$ obliczono w sposób podany w pracy [6]. Zupełnie analogicznie budowano macierz mas $[M]$. W tablicy 1 przedstawiono przykładowo macierz mas dla prostokątnego elementu płyty o wymiarach $2a \times 2b$ i stałej grubości t . Cały tok postępowania w przypadku obliczania drgań własnych płyty można ująć w ogólnym schemacie blokowym (rys. 2). Przeliczono szereg przykładów liczbowych, dla których pewne wyniki znane są w literaturze [3].

Przykład 4.1. Należy obliczyć częstotliwości drgań własnych ω_i dla płyty kwadratowej na dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartej, a na pozostałych dwóch zamocowanej całkowicie. Dane: długość krawędzi 600 cm, $\nu = 0,167$, $E = 200\ 000\ \text{kG/cm}^2$,

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = 0,0025 \frac{\text{kGsek}^2}{\text{cm}^4}, \text{ grubość stała } t = 10\ \text{cm}.$$

Otrzymane wyniki przy podziale płyty na 9 jednakowych elementów kwadratowych o wymiarach $200 \times 200\ \text{cm}$ podano w tablicy 2.

Tablica 2

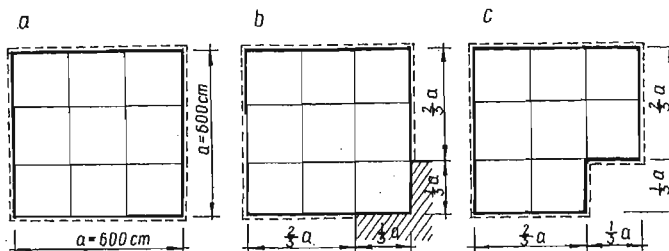
<i>i</i>	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica
1	2,083404	2,08	~ 0
2	3,900229	3,93	~ 0,6
3	4,892954	4,96	~ 1,2
4	6,088433	6,76	~ 10,0
5	7,730949	7,33	~ 5,1
6	9,619610	9,27	~ 3,6

Przykład 4.2. Należy określić częstotliwość drgań własnych dla płyty kwadratowej na wszystkich krawędziach zamocowanej całkowicie. Dane i podział jak w przykładzie 4.1. Uzyskane wyniki przedstawiono w tablicy 3.

Tablica 3

<i>i</i>	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica
1	2,593180	2,58	~ 0,4
2	5,279482	5,27	~ 0,2
3	7,627460	7,78	~ 2,0
4	10,384540	—	—
5	10,581960	9,82	~ 7,6
6	12,732980	11,80	~ 7,6

Przykład 4.3. Należy określić częstotliwości drgań własnych dla trzech schematów płyt o kształtach i warunkach podparcia, jak na rys. 3. Płyta przedstawiona na rys. 3a jest swobodnie podparta na całym obwodzie, płyta o schemacie rys. 3b posiada nieciągłe warunki podparcia (w okolicy dolnego prawego narożnika zamocowana całkowicie), zaś



Rys. 3.

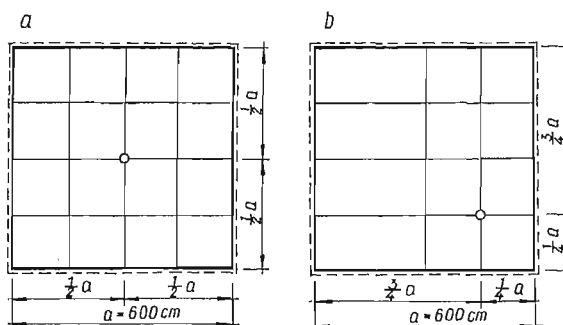
plyta rys. 3c jest wycięta w pobliżu naroża i swobodnie podparta na wszystkich krawędziach. Dane i podział jak w przykładzie 4.1. Uwaga! Płytę o schemacie rys. 3c liczono jak płytę prostokątną, przyjmując dla jej części wyciętej grubość równą $1/1000 t$.

Obliczone wartości pierwszych dwóch częstotliwości drgań własnych podano w tablicy 4.

Tablica 4

i	Schemat 3a			Schemat 3b	Schemat 3c
	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i obliczone
1	1,493427	1,42	~ 5,1	1,707662	2,482604
2	3,700391	3,54	~ 4,5	3,841016	4,051212

Przykład 4.4. Dla płyty kwadratowej swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach i dodatkowo podpartej punktowo w swoim obszarze (rys. 4) należy wyznaczyć częstotliwości drgań własnych. Dane, jak w przykładzie 4.1. Podział na elementy pokazano na rys. 4a i b.



Rys. 4.

Wartości pierwszych dwóch częstotliwości drgań własnych umieszczono w tablicy 5.

Tablica 5

i	Schemat 4a			Schemat 4b		
	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica
1	3,685225	3,54	~ 4,1	1,895003	2,18	~ 13,0
2	3,767554	3,77	~ 0	3,767543	—	—

5. Wnioski

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda, przyjmująca za punkt wyjścia odkształcalne prostokątne elementy skończone o 12 parametrach węzłowych, pozwala z bardzo dużą dokładnością wyznaczać częstotliwości drgań własnych dla płyt o nieregularnym konturze, o dowolnych warunkach brzegowych, o zmiennej sztywności płyt z otworami i dowolnie podpartych w swoim obszarze.

Z podanych przykładów wynika, że otrzymuje się bardzo dobre rezultaty już przy niezbyt gęstym podziale rzeczywistego ustroju ciągłego na elementy. Jest metodą bardzo szybką. Średni czas obliczeń dla powyższych przykładów, łącznie z obliczaniem macierzy sztywności i macierzy mas, wynosił 20 minut na maszynie cyfrowej Odra 1204. Przy użyciu tej metody można obliczać drgania własne dla złożonych układów płytowych.

W przypadku obliczania drgań własnych dla innych dźwigarów powierzchniowych cały tok postępowania pozostaje taki sam. Zmieni się tylko sposób obliczania macierzy sztywności układu $[K]$ i macierzy mas $[M]$.

Możliwości programu są różne w zależności od zestawu maszyny cyfrowej. Dla zestawu bez pamięci zewnętrznej można rozwiązywać zadania do około 100 stopni swobody. Przy zestawie z pamięcią bębnową możliwości są oczywiście znacznie większe.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1961.
2. S. KALISKI i in., *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
3. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa 1964.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
5. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.
6. J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, A. PEER-KASPERSKA, J. MAKOWSKI, *Zastosowanie iteracji Seidla w metodzie elementów skończonych na przykładzie obliczeń statycznych płyt*, Mech. Teor. i Stos., 3, 12 (1974).

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ НА ПРИМЕРЕ ПЛИТ

В работе представлен численный метод определения частоты собственных колебаний поверхностных конструкций проиллюстрированный на примере плит. Континуальная система разделяется на конечное число деформируемых прямоугольных элементов с 12-ю степенями свободы. Метод дает возможность, с большой точностью, определять частоты собственных колебаний для плит с нерегулярным контуром, с произвольными краевыми условиями, со скачкообразно меняющейся жесткостью, плит с отверстиями и произвольно опирающихся по своей области. Рассчитан ряд конкретных числовых примеров. Возможности программы, написанной на языке Алгол 1204, различаются в зависимости от оснащения цифровых машин. Для системы лишенной блока внешней памяти можно решать задачи с около 100 степенями свободы. В случае с оставас барабанной памятью — возможности гораздо больше.

Summary

NUMERICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF FREE VIBRATIONS USING PLATES AS THE EXAMPLE

In the paper the method of solution to problems of free vibrations of homogeneous plates with arbitrary boundary conditions has been presented. The applied method of numerical calculations, based

on the finite element method, decreases the amount of information remembered by a digital computer to a minimum, thus allowing for solution of the considerable problem of free vibrations. Many elements of the given algorithm may be applied to calculations of free vibrations of other cranes with no other changes.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA W OPOLU

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 maja 1974 r.

DYNAMIKA LINY ODWIJAJĄCEJ SIĘ Z RUCHOMEGO OBIEKTU LATAJĄCEGO

TADEUSZ KUŹMICEWICZ (ZIELONKA)

1. Wstęp

Problem liny rozpatrywany był w szeregu prac związanych ze statecznością holowanych balonów i szybowców [1, 11, 14], holowanych urządzeń nie posiadających siły nośnej [6] oraz spadochronów (hamulców aerodynamicznych) pracujących w prędkościach naddźwiękowych [10].

Prace [8, 12] obejmują stateczność układu obiekt holujący–lina–obiekt holowany.

W pracach tych w stateczności obiektu uwzględniano wpływ liny jako pewne dodatkowe siły [1] lub siły i momenty [11, 12, 14] w punkcie przymocowania jej do obiektu w postaci tzw. pochodnych liniowych. Pochodne liniowe wyprowadzane były przy założeniu, że lina znajduje się w położeniu chwilowej równowagi w odniesieniu do jej warunków brzegowych. Konfigurację liny i jej naciąg przyjęto w pracy [1] jako funkcje położenia, a w pracach [11, 12, 14] jako funkcje położenia i prędkości obiektu.

W pracach [2, 3, 7, 8, 9] rozważano głównie dynamikę liny holowniczej. Równania ruchu obiektu holującego i holowanego służyły do określenia warunków brzegowych. Prace [8, 9] prowadzono przy następujących założeniach upraszczających:

- krzywizna liny jest mała,
- stały naciąg wzdłuż długości liny,
- lina nierozciągliwa.

W wyniku prac [8, 9] określono warunki stabilności podłużnej i poprzecznej układu holowniczego. W pracach [2, 3, 7] wyprowadzono równania giętkiej liny obciążonej siłami aerodynamicznymi. Dla badania dynamiki liny rozwinięto dwie metody aproksymacyjne przybliżonych rozwiązań: metodę średnich wartości i metodę momentu kąowego. Określono kształt przewodu w stanie równowagi oraz częstości własne dla ruchów podłużnych i poprzecznych układu. Prezentowane metody przybliżonego rozwiązania są słuszne dla lin o małych krzywiznach. Pierwszym przybliżeniem rozwiązania jest linia prosta o średniej wartości nachylenia.

W niniejszej pracy rozpatrzono dynamikę wiotkiej, nierozciągliwej liny obciążonej siłami aerodynamicznymi odwijającej się ze szpuli umieszczonej na latającym obiekcie. Szpula jest umieszczona tak, że jej oś podłużna pokrywa się z osią podłużną latającego obiektu.

W rozpatrywanym przypadku lina wykonuje ruch obiegowy z dużą prędkością kątową wokół osi podłużnej szpuli oraz ulega skręcaniu wokół osi własnej. Tak odwijająca się lina ma względem powietrza znaczną prędkość poprzeczną i równą zeru prędkość styczną. Ze

względu na to, że współczynnik oporu normalnego liny jest 30 razy większy od współczynnika oporu stycznego obciążenia aerodynamiczne odwijającej się liny są większe niż w omówionych powyżej pracach.

Rozpatrywany sposób odwijania liny ma miejsce przy przerzucaniu lin (przewodów łączności, lin ratowniczych) przez przeszkody terenowe uniemożliwiające lub utrudniające ciągnięcie.

Wyprowadzone poniżej równania ruchu liny są uogólnieniem równań otrzymanych w pracach [3, 7]. Złożone warunki brzegowe odwijającej się liny, duża prędkość skręcania oraz występowanie dużych krzywizn liny uniemożliwiły zastosowanie metod aproksymacyjnych użytych w pracach [3, 7] do rozwiązania otrzymanego układu równań.

W omawianym sposobie rozwijania liny największy naciąg spodziewany jest na niewielkiej długości za obiektem.

Założenie to pozwoliło na sprowadzenie układu równań różniczkowych nieliniowych typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych do układu równań różniczkowych nieliniowych zwyczajnych. Otrzymany układ równań badano na długości liny równej długości zwoju szpuli dla różnych warunków początkowych końca liny określonych przez parametry latającego obiektu oraz dla różnych wymiarów szpuli.

Oznaczenia

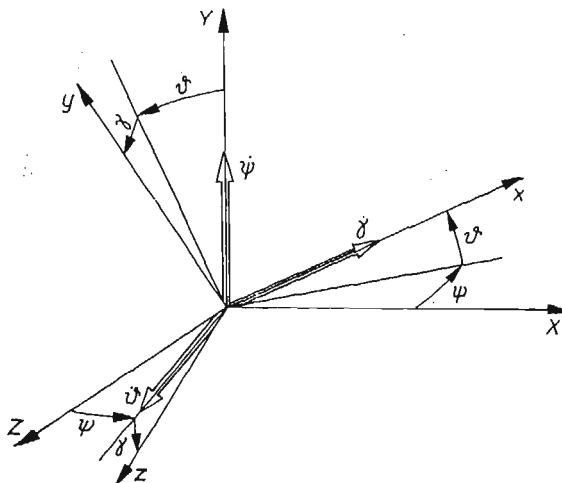
x, y, z [m]	składowe położenia liny w układzie współrzędnych związanych z liną,
V_x, V_y, V_z [m/s]	składowe prędkości liny w układzie współrzędnych związanym z liną,
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ [1/s]	składowe prędkości kątowej liny w układzie współrzędnych związanym z liną,
θ [rad]	kąt pochylenia liny,
ψ [rad]	kąt odchylenia liny,
γ [rad]	kąt przechylenia liny,
C_t, C_n	współczynniki aerodynamiczne siły stycznej i normalnej do liny określone w stosunku do jej średnicy i długości jednostkowej,
R [kG]	siła aerodynamiczna,
T [kG]	naciąg liny,
d [m]	średnica liny,
l [m]	długość liny,
m [kGs ² /m]	masa liny na jednostkę długości,
ρ [kGs ² /m ³]	gęstość powietrza,
g [m/s ²]	przyspieszenie ziemskie,
C [1/m]	stała zależna od promienia szpuli,
r [m]	promień szpuli,
V_o [m/s]	prędkość obiektu,
w	wektor położenia punktu liny.

2. Kinematyka liny

Prędkość i przyspieszenie punktu na lince w przestrzeni trójwymiarowej zmieniają się zarówno co do wielkości, jak i kierunku.

Lina umownie zostanie podzielona na elementy o długości dl , a położenie poszczególnych punktów liny rozpatrywane będzie wzdłuż liny.

Dla uproszczenia zapisu równań ruchu liny przyjęto układ współrzędnych związany z liną oznaczony jako O_{xyz} . Jako układ odniesienia przyjęty został układ współrzędnych związany z ziemią O_{XYZ} . Położenie układu O_{xyz} względem układu odniesienia O_{XYZ} określają trzy kąty oznaczone jako ϑ , ψ , γ (rys. 1).



Rys. 1. Położenie układu współrzędnych związanego z liną

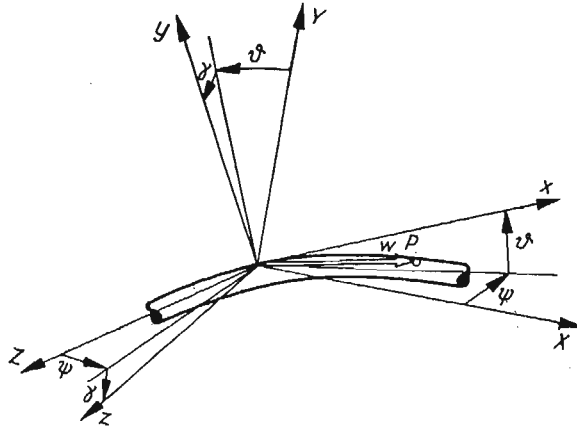
Układ O_{xyz} został przyjęty tak, że oś O_x jest zawsze styczna do liny i jest dodatnia w kierunku rozwijania się liny ze szpuli. Oś O_y jest prostopadła do stycznej i leży w płaszczyźnie, w której prędkość liny V obraca się w danej chwili. Ten kierunek określa się jako normalny, a wspólnie ze styczną tworzy tzw. płaszczyznę styczną. Oś O_z jest prostopadła do płaszczyzny stycznej i określa kierunek binormalny.

Przejście z układu O_{xyz} do układu odniesienia O_{XYZ} określają cosinusy kierunkowe według tablicy 1.

Tablica 1

	x	y	z
X	$\cos\vartheta\cos\psi$	$-\cos\psi\cos\gamma\sin\vartheta + \sin\psi\sin\gamma$	$\sin\psi\cos\gamma + \sin\vartheta\cos\psi\sin\gamma$
Y	$\sin\vartheta$	$\cos\vartheta\cos\gamma$	$-\cos\vartheta\sin\gamma$
Z	$-\cos\vartheta\sin\psi$	$\sin\psi\sin\gamma + \sin\vartheta\sin\psi\sin\gamma$	$\cos\psi\cos\gamma + \sin\vartheta\sin\psi\sin\gamma$

Położenie punktu P liny w układzie O_{xyz} określa wektor, który może zmieniać się co do wielkości, jak i kierunku. Przesunięcie punktu P wzdłuż liny określa się odległością l .



Rys. 2. Położenie punktu na linii

Położenie punktu P liny w układzie O_{xyz} można zapisać jako

$$(1) \quad \bar{w} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Odwijająca się lina ma względem układu odniesienia prędkość kątową $\bar{\omega}$:

$$(2) \quad \bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}.$$

Różniczkując (1) otrzymujemy prędkość punktu P na linii

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\delta\bar{w}}{\delta t} + \bar{\omega} \times \bar{w}$$

lub

$$(3) \quad \frac{d\bar{w}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} + \bar{\omega}_y z - \omega_z y \right) \bar{i} + \left(\frac{dy}{dt} + \omega_z x - \omega_x z \right) \bar{j} + \left(\frac{dz}{dt} + \omega_x y - \omega_y x \right) \bar{k}.$$

Wprowadzając do (3) oznaczenia

$$\frac{dx}{dt} + \omega_y z - \omega_z y = V_x,$$

$$\frac{dy}{dt} + \omega_z x - \omega_x z = V_y,$$

$$\frac{dz}{dt} + \omega_x y - \omega_y x = V_z$$

i różniczkując (3), otrzymujemy przyspieszenie punktu P liny

$$(4) \quad \frac{d^2\bar{w}}{dt^2} = \left(\frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y \right) \bar{i} + \left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z \right) \bar{j} + \left(\frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) \bar{k}.$$

W czasie rozwijania lina obraca się względem układu odniesienia o kąty ϑ , ψ , γ . Prędkości zmian tych kątów są odpowiednio równe $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}$. Rzutując składowe $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}$ prędkości kątowej punktu P liny na osie układu O_{xyz} otrzymujemy

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma, \\ \omega_z &= \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Podstawiając (5) do (3) i (4) otrzymujemy ostatecznie prędkość i przyspieszenie punktu na linii

$$(6) \quad \frac{d\bar{w}}{dt} = [\dot{x} + z(\dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma) - y(\dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma)] \bar{i} + \\ + [\dot{y} + x(\dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma) - z(\dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta)] \bar{j} + \\ + [\dot{z} + y(\dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta) - x(\dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma)] \bar{k},$$

$$(7) \quad \frac{d^2\bar{w}}{dt^2} = [\dot{V}_x + V_z(\dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma) - V_y(\dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma)] \bar{i} + \\ + [\dot{V}_y + V_x(\dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma) - V_z(\dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta)] \bar{j} + \\ + [\dot{V}_z + V_y(\dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta) - V_x(\dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma)] \bar{k}.$$

3. Równania ruchu liny

Przy wyprowadzaniu równań ruchu przyjęto następujące założenia upraszczające dotyczące liny:

- jednorodna wzdłuż całej długości,
- przekrój kołowy,
- doskonale giętka,
- nierozciągliwa.

Na element liny o długości dl działają następujące siły: naciąg liny, siła aerodynamiczna, ciężar liny oraz siła bezwładności. Równanie ruchu elementu liny w postaci wektorowej można zapisać jako

$$(8) \quad m\ddot{\bar{w}} = \bar{F},$$

gdzie m — masa liny na jednostkę długości,

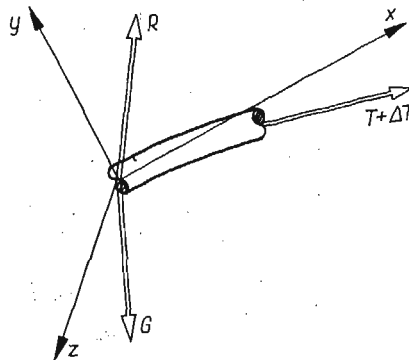
$$\bar{F} = \bar{R} + \bar{G} + \bar{T},$$

R — siła aerodynamiczna,

G — siła ciężkości,

T — naciąg liny.

Poniżej zostaną kolejno rozpatrzone siły działające na linę.



Rys. 3. Siły działające na element liny

3.1. Siła aerodynamiczna. Siłę aerodynamiczną R w układzie O_{xyz} można zapisać jako

$$\bar{R} = R_x \cdot \bar{i} + R_y \cdot \bar{j} + R_z \cdot \bar{k}.$$

Stosując współczynniki aerodynamiczne siły normalnej C_n i siły stycznej C_t , określone w stosunku do średnicy liny i długości jednostkowej, wprowadzone w pracy [11] składowe normalna i styczna siły aerodynamicznej elementu dl liny mają postać

$$(9) \quad \begin{aligned} R_n &= \frac{1}{2} \rho d dl (V_y^2 + V_z^2) C_n, \\ R_t &= \frac{1}{2} \rho d dl V_x^2 C_t. \end{aligned}$$

Rzutuując (9) na osie układu O_{xyz} otrzymamy

$$(10) \quad \begin{aligned} R_x &= \frac{1}{2} \rho d dl V_x^2 C_t, \\ R_y &= \frac{1}{2} \rho d dl (V_y^2 + V_z^2) C_n \cos \delta, \\ R_z &= \frac{1}{2} \rho d dl (V_y^2 + V_z^2) C_n \sin \delta, \end{aligned}$$

gdzie δ oznacza kąt, jaki tworzy wypadkowa prędkość normalna liny z osią O_y

$$\cos \delta = \frac{V_y}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}; \quad \sin \delta = \frac{V_z}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}.$$

Podstawiając powyższe do (10) otrzymujemy zależności na składowe siły aerodynamicznej

$$(11) \quad \begin{aligned} R_x &= \frac{1}{2} \rho d dl V_x^2 C_t, \\ R_y &= \frac{1}{2} \rho d dl V_y \sqrt{V_y^2 + V_z^2} C_n, \\ R_z &= \frac{1}{2} \rho d dl V_z \sqrt{V_y^2 + V_z^2} C_n. \end{aligned}$$

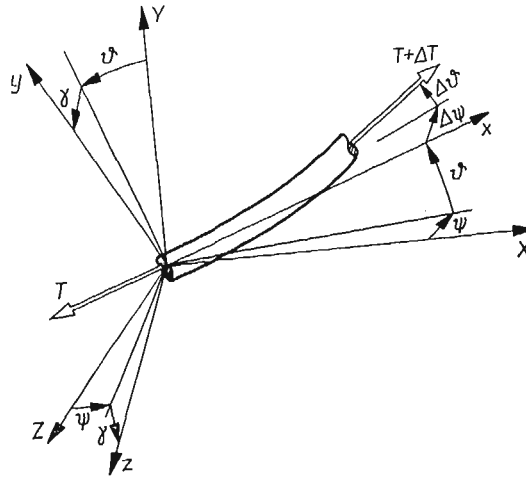
3.2. Naciąg liny. Naciąg liny T w układzie O_{xyz} ma postać

$$\bar{T} = T_x \bar{i} + T_y \bar{j} + T_z \bar{k}.$$

Przyrost naciągu liny o długości dl jest wynikiem obrotu elementu o kąty $d\vartheta$ i $d\varphi$.

Suma rzutów naciągu elementu dl na osie układu współrzędnych O_{xyz} wynosi

$$\begin{aligned} T_x &= -T + (T + dT) \cos d\vartheta \cos d\varphi, \\ T_y &= (T + dT) \sin d\vartheta \cos d\varphi, \\ T_z &= -(T + dT) \sin d\varphi \cos(\vartheta + d\vartheta) \cos \gamma. \end{aligned}$$



Rys. 4. Naciąg elementu liny

Zakładając, że

$$\begin{aligned}\cos d\psi &\approx \cos d\vartheta \approx 1, \\ \sin d\psi &\approx d\psi, \\ \sin d\vartheta &\approx d\vartheta\end{aligned}$$

oraz pomijając małe wyższego rzędu otrzymujemy

$$(12) \quad \begin{aligned}T_x &= dT, \\ T_y &= Td\vartheta, \\ T_z &= -Td\psi \cos\vartheta \cos\gamma.\end{aligned}$$

3.3. Siła ciężkości. Siłę ciężkości elementu liny dl w układzie O_{xyz} można zapisać

$$\bar{G} = G_x \bar{i} + G_y \bar{j} + G_z \bar{k}.$$

Rzutuując G na osie układu O_{xyz} otrzymujemy składowe

$$(13) \quad \begin{aligned}G_x &= -G \sin\vartheta, \\ G_y &= -G \cos\vartheta \cos\gamma, \\ G_z &= G \cos\vartheta \sin\gamma.\end{aligned}$$

3.4. Równania ruchu. Rozpisując równanie (8) na osie układu O_{xyz} i podstawiając (7), (11), (12), (13) — po przekształceniach otrzymujemy układ równań ruchu elementu liny

$$(14) \quad \frac{1}{g} \left[\frac{\partial V_x}{\partial t} - V_y \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cos\gamma - \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos\vartheta \sin\gamma \right) + V_z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \cos\vartheta \cos\gamma + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \sin\gamma \right) \right] = \\ = \frac{1}{mg} \frac{\partial T}{\partial l} - \sin\vartheta - \frac{\rho d}{2mg} V_x^2 C_t,$$

$$(15) \quad \frac{1}{g} \left[V_x \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cos\gamma - \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos\vartheta \sin\gamma \right) + \frac{\partial V_y}{\partial t} - V_z \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin\vartheta \right) \right] = \\ = \frac{1}{mg} T \frac{\partial \psi}{\partial l} - \cos\vartheta \cos\gamma - \frac{\rho d}{2mg} V_y \sqrt{V_y^2 + V_z^2} C_n,$$

$$(16) \quad \frac{1}{g} \left[-V_x \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \cos \vartheta \cos \gamma + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \sin \gamma \right) + V_y \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \vartheta \right) + \frac{\partial V_z}{\partial t} \right] = \\ = \frac{1}{mg} T \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos \vartheta \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \gamma - \frac{\rho d}{2mg} V_z \sqrt{V_y^2 + V_z^2} C_n.$$

Układ równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego opisujących ruch liny nie jest zamknięty; dodatkowe równania stanowią będą zależności kinematyczne.

3.5. Związki kinematyczne. Obrót końca elementu liny o kąty $d\vartheta$ i $d\psi$ powoduje przyrosty prędkości liniowych punktów na lince w kierunkach normalnym i binormalnym. Zależności te dają uzupełniające równania układu (14) ÷ (16)

$$(17) \quad \frac{\partial V_x}{\partial l} - V_y \frac{\partial \vartheta}{\partial l} + V_z \frac{\partial \psi}{\partial l} \cos \vartheta \cos \gamma = 0,$$

$$(18) \quad V_x \frac{\partial \vartheta}{\partial l} + \frac{\partial V_y}{\partial l} - V_z \frac{\partial \psi}{\partial l} \sin \vartheta \cos \gamma = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cos \gamma,$$

$$(19) \quad -V_x \frac{\partial \psi}{\partial l} \cos \vartheta \cos \gamma + V_y \frac{\partial \psi}{\partial l} \sin \vartheta \cos \gamma + \frac{\partial V_z}{\partial l} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \cos \vartheta \cos \gamma,$$

$$(20) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial l} = C.$$

Równania (14) ÷ (20) opisujące dynamikę liny są nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi pierwszego rzędu typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych.

Wykorzystując zależność

$$(21) \quad \frac{dl}{dt} = V_0,$$

gdzie V_0 — prędkość odwijania liny równa prędkości lotu obiektu, sprowadzono układ równań (14) ÷ (20) do układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Po przekształceniach układ równań (14) ÷ (20) przyjmuje postać

$$(22) \quad \frac{dV_x}{dl} + (V_z \sin \gamma - V_y \cos \gamma) \frac{d\vartheta}{dl} + (V_z \cos \vartheta \cos \gamma + V_y \cos \vartheta \sin \gamma) \frac{d\psi}{dl} - \frac{1}{mV_0} \frac{dT}{dl} = \\ = -\frac{g}{V_0} \sin \vartheta - \frac{\rho d}{2mV_0} V_x^2 C_n,$$

$$(23) \quad \frac{dV_y}{dl} + \left(V_x \cos \gamma - \frac{T}{mV_0} \right) \frac{d\vartheta}{dl} - (V_x \cos \vartheta \sin \gamma + V_z \sin \vartheta) \frac{d\psi}{dl} - V_z \frac{d\gamma}{dl} = \\ = -\frac{g}{V_0} \cos \vartheta \cos \gamma - \frac{\rho d}{2mV_0} V_y \sqrt{V_y^2 + V_z^2} C_n,$$

$$(24) \quad \frac{dV_z}{dl} - V_x \sin \gamma \frac{d\vartheta}{dl} + \left(V_y \sin \vartheta - V_x \cos \vartheta \cos \gamma + \frac{T}{mV_0} \cos \vartheta \cos \gamma \right) \frac{d\psi}{dl} + \\ + V_y \frac{d\gamma}{dl} = \frac{g}{V_0} \cos \vartheta \sin \gamma - \frac{\rho d}{2mV_0} V_z \sqrt{V_y^2 + V_z^2} C_n,$$

$$(25) \quad \frac{dV_x}{dl} - V_y \frac{d\vartheta}{dl} + V_z \cos\vartheta \cos\gamma \frac{d\psi}{dl} = 0,$$

$$(26) \quad \frac{dV_y}{dl} + (V_x - V_0 \cos\gamma) \frac{d\vartheta}{dl} + V_z \sin\vartheta \cos\gamma \frac{d\psi}{dl} = 0,$$

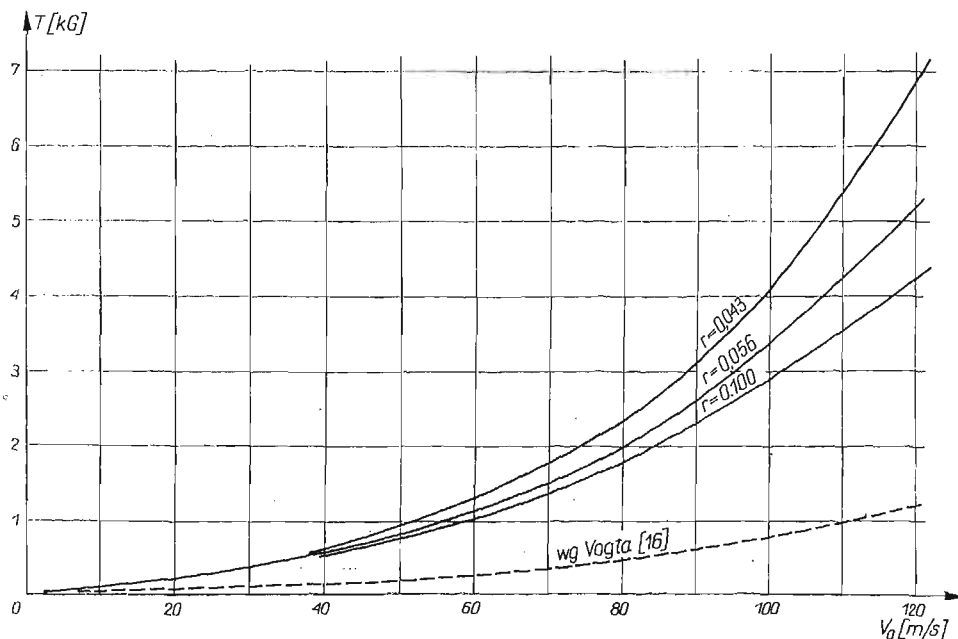
$$(27) \quad \frac{dV_z}{dl} + (V_y \sin\vartheta \cos\gamma - V_x \cos\vartheta \cos\gamma + V_0 \cos\vartheta \cos\gamma) \frac{d\psi}{dl} = 0,$$

$$(28) \quad \frac{d\gamma}{dl} = C.$$

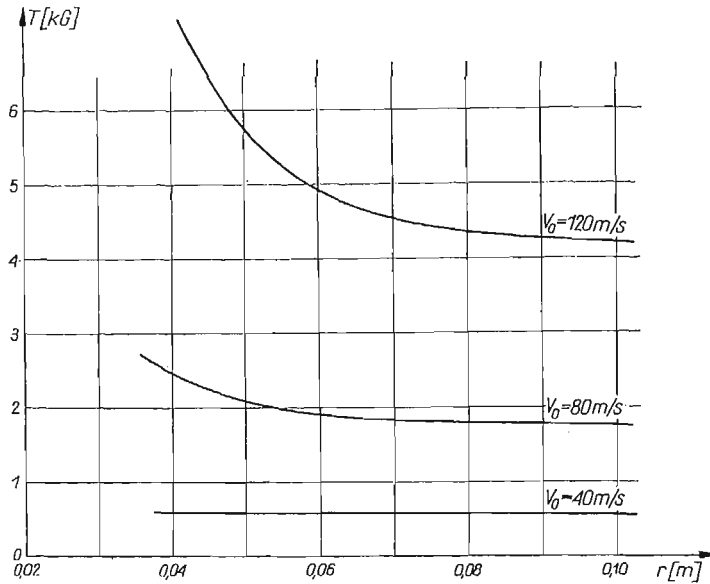
W czasie odwijania lina ma największą prędkość «obiegania» bezpośrednio za obiektem, w związku z tym największe obciążenia liny występują na początkowym odcinku. Dla zbadania wpływu dynamiki rozwijania na wielkość naciągu liny wystarczy badać przedstawiony układ równań różniczkowych zwyczajnych na niewielkiej długości liny za obiektem. Układ równań (22)÷(28) rozwiązano metodą numeryczną Runge-Kutta-Gila dostosowaną do języka FORTRAN.

4. Przykład liczbowy i wnioski

Przykład liczbowy przeprowadzono dla wiotkiej liny o ciężarze jednostkowym $G = 0,0005 \left[\frac{\text{kG}}{\text{m}} \right]$ i średnicy $d = 0,0005$ [m]. W obliczeniach zmieniano kolejno parametry początkowe kątego położenia liny na wyjściu z obiektu, prędkość obiektu oraz promień szpuli. Pozwoliło to na określenie wpływu tych parametrów na wielkość naciągu liny.



Rys. 5. Zmiana naciągu liny w funkcji prędkości obiektu

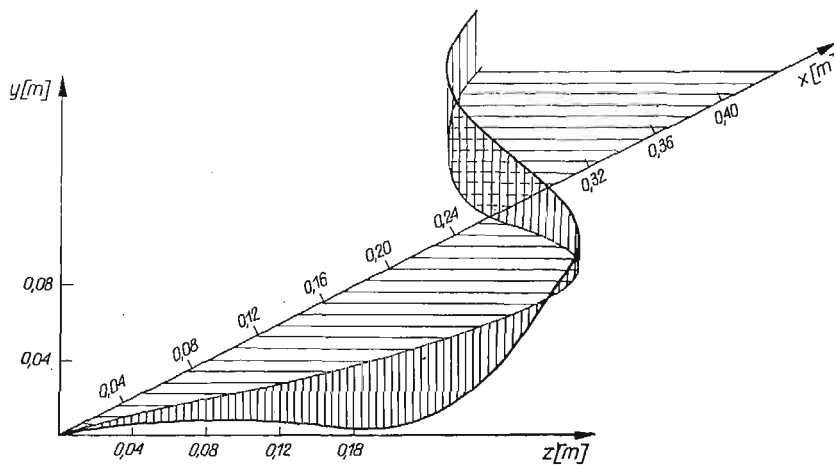


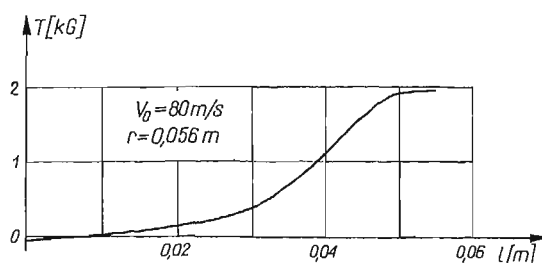
Rys. 6. Zmiana naciągu liny w funkcji promienia szpuli

Zależność naciągu liny w funkcji prędkości obiektu przedstawiono na rys. 5, a na rys. 6 wpływ promienia szpuli na wielkość naciągu.

Obliczenia wykazały, że:

- wielkość naciągu liny zależy silnie od prędkości obiektu (rys. 5) oraz promienia szpuli (rys. 6),
- początkowy naciąg liny wynikający z odklejania ze szpuli ma nieistotny wpływ na wielkość naciągu,

Rys. 7. Konfiguracja odwijanej liny z lecącego obiektu z prędkością $V_0 = 80 \text{ m/s}$



Rys. 8. Zmiana naciągu wzdłuż długości liny

— maksymalna wartość naciągu występuje na długości liny równej około połowie zwoju (rys. 8); na dalszej części liny naciąg zmienia się nieznacznie.

Przykładową konfigurację liny odwijającej się z obiektu lecącego z prędkością $V_0 = 80$ $[\text{m/s}]$ przedstawiono na rys. 7. Charakter konfiguracji jest zgodny z doświadczeniem. Otrzymane wyniki naciągu liny porównano z wynikami uzyskanymi przez VOGTA w pracy [16] (rys. 5).

Literatura cytowana w tekście

1. L. W. BRYANT, W. S. BROWN, N. E. SWEETING, *Collected researches on the stability of kites and towed gliders*, Reports and Memoranda, 2303 (1942).
2. T. C. CANNON, J. GENIN, *Dynamical behaviour of a materially damped flexible towed cable*, Aeronautical Quarterly, Vol. XXIII, May 1972.
3. T. C. CANNON, J. GENIN, *Three-dimensional dynamical behaviour of flexible towed cable*, Aeronautical Quarterly, Vol. XXIII, August 1972.
4. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
6. H. R. HOPKIN, *An approximate treatment of the stability of towed unbanked object in a condition of zero lift*, Reports and Memoranda, 3675 (1969).
7. R. R. HUFFMAN, J. GENIN, *The dynamical behaviour of flexible cable in uniform flow field*, Aeronautical Quarterly, Vol. XXII, May 1971.
8. J. D. DE-LAURIER, *A stability analysis of cable-body systems totally immersed in a fluid stream*, Report NASA, CR-2021, April 1972.
9. J. D. DE-LAURIER, *A stability analysis for tethered aerodynamically shaped ballons*, Journal of Aircraft, 9, 9 (1972).
10. R. H. MAC NEAL, *Flutter of towed rigid decelerators*, Report NASA, CR-766, 1967.
11. J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym*, Mech. Teoret. i Stos. 1 (1967).
12. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna w zespole holowniczym*, Mech. Teoret. i Stos., 3 (1967).
13. J. MARYNIAK, *Konfiguracja liny holowniczej szybowca z uwzględnieniem sił aerodynamicznych*, Technika Lotnicza i Astronautyczna, 6 (1967).
14. J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza stateczności bocznej szybowca holowanego na linie*, Mech. Teoret. i Stos., 1 (1969).
15. *Nowoczesne metody numeryczne*, Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington. Middlesex, PWN, Warszawa 1965.
16. R. VOGT, *Dynamika naprowadzania raketowych pocisków przeciwpancernych kierowanych przewodowo*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1971.

Р е з ю м е

ДИНАМИКА ТРОСА РАЗМАТЫВАЮЩЕГОСЯ ИЗ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА

В работе рассмотрена динамика троса разматывающегося из катушки находящейся на подвижном объекте. Ось катушки параллельна оси объекта. Динамика троса описана с помощью нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа в частных производных. Полученная система уравнений приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Прделаны численные расчеты для различных скоростей объекта и радиусов катушки. В результате расчетов получена зависимость максимального натяжения троса от кинематических и геометрических параметров объекта.

S u m m a r y

DYNAMICS OF A CABLE WINDING OFF FROM A MOVING FLYING OBJECT

In the paper is considered the dynamics of a cable winding off from a reel placed on a flying object. The longitudinal axis of the reel is parallel to the longitudinal axis of the object. The cable dynamics is described by hyperbolic-type non-linear partial differential equations. The set of equations obtained is reduced to ordinary differential equations, and numerical calculations are done for various velocities of the flying object and various reel radii. As a result of the calculations, the maximum tension of the cable is expressed in terms of the kinematic and geometric parameters of the object.

WOJSKOWY INSTYTUT TECHNICZNY UZBROJENIA

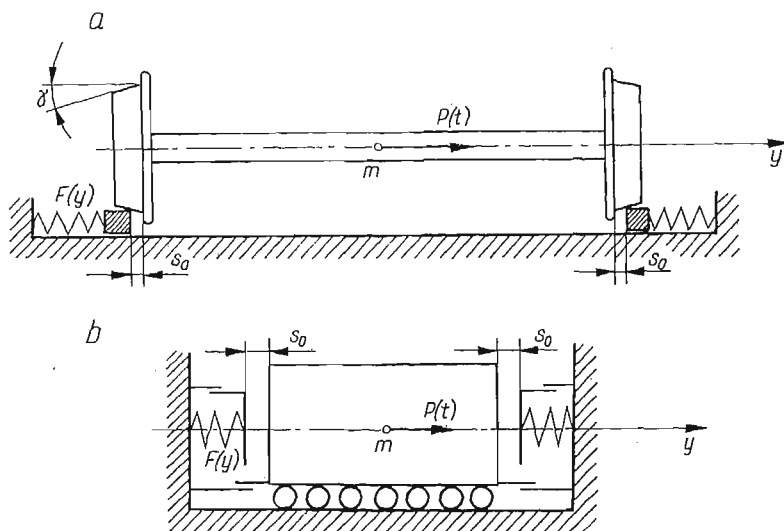
Praca została złożona w Redakcji dnia 8 maja 1974 r.

STATECZNOŚĆ TECHNICZNA DRGAŃ BOCZNYCH POJEDYNCZEGO ZESTAWU
KOŁOWEGO PORUSZAJĄCEGO SIĘ WZDŁUŻ TORU Z NIELINIOWĄ SPRĘŻYSTOŚCIĄ
POPZECZNĄ

ALICJA PIENIAŻEK, WIESŁAW PIENIAŻEK (KRAKÓW)

1. Wstęp

W niniejszej pracy zastosujemy przedstawioną w [1] teorię badania stateczności technicznej nieliniowych układów nieautonomicznych, do badania pewnego układu o jednym stopniu swobody, którego schemat i model dynamiczny jest przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1

Modelem takim można zastąpić np. pojedynczy zestaw kołowy pojazdu szynowego poruszający się wzdłuż toru i wykonujący drgania boczne w pionowej płaszczyźnie przechodzącej przez jego oś obrotu, bez uwzględnienia sił wynikających z tzw. poślizgów sprężystych, które zachodzą w strefie kontaktu koła z szyną. Siły te będą uwzględnione w następnych pracach, w których będą rozpatrywane układy o dwóch stopniach swobody, uwzględniające drgania wspomnianego zestawu w płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez jego oś obrotu.

Przyjmijmy dalej, że zderzenia występujące po przekroczeniu luzu są plastyczne; tzn. koło po dotknięciu szyny swoim obrzeżem porusza się dalej wraz z nią jako jedno ciało.

Przyjmijmy także, że charakterystyka bocznej sprężystości szyny jest nieliniowa i zostanie określona później.

Dla tak opisanego układu określimy stateczność techniczną względem pewnych obszarów i zaburzeń stale działających, z punktu widzenia poprzecznego oddziaływania zestawu na tor, w celu określenia dopuszczalnych prędkości ruchu poprzecznego zestawu lub odpowiedniej sztywności poprzecznej ramy toru (szyn wraz z podkładami). Obszary stateczności będą przyjęte z praktycznego punktu widzenia. Zaburzenia stale działające zostaną wprowadzone do równań ruchu, aby uwzględnić ciągłe zmiany bocznej sztywności toru, spowodowane chociażby warunkami atmosferycznymi, niejednorodnością materiału, czy też zmiennym przekrojem poprzecznym szyny.

Do analizy przyjmijmy stały kąt γ nachylenia profilu koła (rys. 1), w związku z czym składowa pozioma siły tarcia, występująca w równaniu ruchu, jest wielkością stałą. W rzeczywistości profil ma kształt krzywoliniowy i składowa ta jest zmienna, ponieważ zmienny jest kąt γ nachylenia płaszczyzny stycznej do profilu i szyny w punkcie ich styku. Zmiany te będą dalej uwzględniane także w postaci zaburzeń stale działających.

Zaburzenia stale działające, pochodzące od zmiennej sztywności szyn i zmiennej składowej siły tarcia, przyjmijmy jako jedną funkcję przemieszczenia bocznego i prędkości tego przemieszczenia $R(y, \dot{y})$, której przebiegu nie możemy określić ściśle, ale wiemy o niej, że jest ograniczona i nie przekracza pewnej wielkości, co można ująć zależnością

$$|R(y, \dot{y})| \leq \varrho, \quad \varrho > 0.$$

Zaburzenia stale działające będą miały charakter siły.

W dalszym ciągu pracy podamy warunki stateczności technicznej dla naszego układu, przy czym zażądamy, aby boczne przemieszczenie szyn nie przekraczało pewnej wielkości, gwarantującej odkształcenia sprężyste.

2. Określenie charakterystyki sprężystej układu i obszarów stateczności. Równanie różniczkowe ruchu

Nieliniową charakterystykę sprężystą układu przyjmijmy w postaci

$$(2.1) \quad F(y) = \frac{C_0}{b_0} \operatorname{tg}[b_0(|y| - s_0)] \delta^{-1} (|y| - s_0) \operatorname{sgn} y,$$

gdzie

C_0 — współczynnik sztywności poprzecznej toru w przybliżonym przypadku liniowym,

b_0 — współczynnik przeliczeniowy, określony wzorem

$$(2.2) \quad b_0 = \frac{\pi}{2d_0},$$

$2d_0$ — odległość między asymptotami tangensoidy,

s_0 — luz szynowy,

y — przemieszczenie poprzeczne,

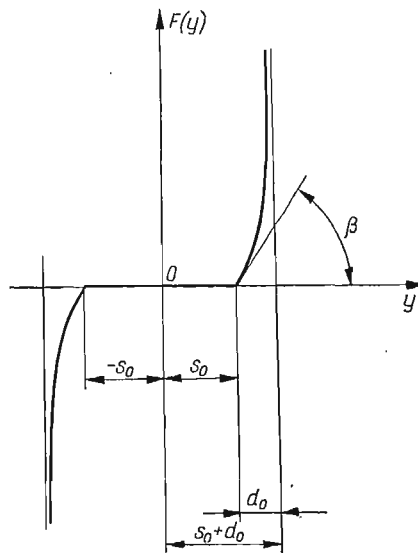
$\delta^{-1}(|y| - s_0)$ — funkcja określona następująco:

$$(2.3) \quad \delta^{-1}(|y| - s_0) = \begin{cases} 0, & \text{dla } (|y| - s_0) < 0, \\ 1, & \text{dla } (|y| - s_0) \geq 0, \end{cases} \quad s_0 > 0.$$

W celu określenia współczynnika sztywności C_0 (w przybliżonym przypadku liniowym), należy obliczyć prawostronną pochodną funkcji (2.1) w punkcie $y = s_0$ (lub jej pochodną lewostronną w punkcie $y = -s_0$). Po obliczeniu pochodnej prawostronnej funkcji (2.1) otrzymujemy zależność

$$(2.4) \quad F'(s_0+) = C_0 = \operatorname{tg} \beta.$$

Charakterystyka sprężysta układu jest przedstawiona na rys. 2



Rys. 2

Równanie różniczkowe drgań poprzecznych, dla układu przedstawionego na rys. 1, ma postać

$$(2.5) \quad m\ddot{y} + (T \cos \gamma) \operatorname{sgn} \dot{y} + (T \cos \gamma) \delta^{-1}(|y| - s_0) \operatorname{sgn} \dot{y} = -\frac{C_0}{b_0} \operatorname{tg}[b_0(|y| - s_0)] \times \\ \times \delta^{-1}(|y| - s_0) \operatorname{sgn} y - T_1 \delta^{-1}(|y| - s_0) \operatorname{sgn} \dot{y} + P_0 \sin pt + R_0(y, \dot{y}),$$

gdzie

- m — masa zestawu kołowego,
- T — siła tarcia między szyną i kołem,
- T_1 — siła tarcia między szyną i podłożem,
- P_0 — siła wymuszająca,
- p — częstość siły wymuszającej,
- $R_0(y, \dot{y})$ — zaburzenia stale działające,

$\delta_1^{-1}(|y| - s_0)$ — funkcja, określona w sposób następujący:

$$(2.6) \quad \delta_1^{-1}(|y| - s_0) = \begin{cases} 1, & \text{dla } (|y| - s_0) < 0, \\ 0, & \text{dla } (|y| - s_0) \geq 0, \end{cases} \quad s_0 > 0.$$

Zauważmy, że funkcja ta «gasi» siłę tarcia koła o jedną z szyn z chwilą przekroczenia luzu szynowego.

Równanie (2.5) można sprowadzić do postaci bezwymiarowej, wygodnej w dalszej analizie. Zrobimy to przez wprowadzenie podstawień

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \tau = pt, \quad \frac{y}{s_0} = x, \quad \frac{d_0}{s_0} = d, \quad b_0 s_0 = b, \quad c = mp^2 s_0, \quad Tc^{-1} \cos \gamma = H, \\ T_1 c^{-1} = H_1, \quad P_0 c^{-1} = P, \quad R_0 c^{-1} = R, \quad C_0 b_0^{-1} c^{-1} = C. \end{aligned}$$

Funkcje $\delta^{-1}(|y| - s_0)$ i $\delta_1^{-1}(|y| - s_0)$ mają obecnie postać:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \delta^{-1}(|x| - 1) &= \begin{cases} 0, & \text{dla } (|x| - 1) < 0, \\ 1, & \text{dla } (|x| - 1) \geq 0, \end{cases} \\ \delta_1^{-1}(|x| - 1) &= \begin{cases} 1, & \text{dla } (|x| - 1) < 0, \\ 0, & \text{dla } (|x| - 1) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (2.7) i (2.8) otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu w bezwymiarowej postaci

$$(2.9) \quad \ddot{x} + H[\delta_1^{-1}(|x| - 1) + 1] \operatorname{sgn} \dot{x} = -C \operatorname{tg}[b(|x| - 1)] \delta^{-1}(|x| - 1) \operatorname{sgn} x - \\ - H_1 \delta^{-1}(|x| - 1) \operatorname{sgn} \dot{x} + P \sin \tau + R(x, \dot{x}),$$

lub, po wprowadzeniu nowych zmiennych $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$ równoważny układ równań pierwszego rzędu:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -C \operatorname{tg}[b(|x| - 1)] \delta^{-1}(|x| - 1) \operatorname{sgn} x_1 - H[\delta_1^{-1}(|x| - 1) + 1] \operatorname{sgn} x_2 - \\ &\quad - H_1 \delta^{-1}(|x| - 1) \operatorname{sgn} x_2 + P \sin \tau + R(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Przyjmijmy obecnie obszary stateczności. Z uwagi na występujący luz, ruch zestawu możemy podzielić na dwie fazy:

I — od położenia początkowego do wyczerpania luzu,

II — od chwili zetknięcia się jednego koła zestawu z szyną (luz szynowy wyczerpany), do momentu, gdy prędkość boczno-ruchu zmaleje do zera (szyna osiągnie maksymalne boczne odkształcenie sprężyste).

W związku z powyższym przyjmijmy następujące obszary stateczności:

— dla pierwszej fazy ruchu:

obszar warunków początkowych:

$$(2.11) \quad Q_0^I(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2): |x_1| < x_{10}, |x_2| < v\};$$

obszar domknięty warunków ruchu:

$$(2.11a) \quad Q^I = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq 1, |x_2| \leq v\},$$

— dla drugiej fazy ruchu:

obszar warunków początkowych:

$$(2.12) \quad Q_0^I = \{(x_1, x_2): |x_1| < 1, |x_2| < v\},$$

obszar domknięty warunków ruchu:

$$(2.12a) \quad Q^I = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq a, |x_2| \leq v\},$$

obszar zewnętrzny:

$$(2.12b) \quad Q_z = \{(x_1, x_2): |x_1| < (1+d), |x_2| < v_1\}, \quad v_1 > v.$$

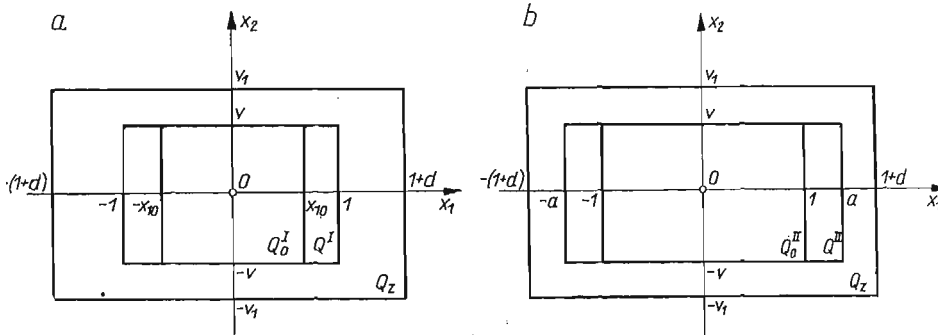
W powyższych zależnościach, określających obszary, mamy:

$$v = \frac{v_0}{s_0}, \quad a = \frac{a_0}{s_0},$$

gdzie

v_0 — maksymalna prędkość bocznego ruchu zestawu,

a_0 — maksymalna amplituda bocznego ruchu zestawu.



Rys. 3

Na rys. 3 obszary stateczności są przedstawione na płaszczyźnie fazowej (x_1, x_2) . Z rysunku widać, że obszar ruchu dla pierwszej fazy ruchu jest obszarem warunków początkowych w drugiej fazie.

W dalszym ciągu zajmiemy się drugą fazą ruchu z uwagi na odkształcenia szyny jakie w niej zachodzą. W takim razie, w układzie (2.10) należy przyjąć: $\delta^{-1}(|x_1| - 1) = 1$, $\delta_1^{-1}(|x_1| - 1) = 0$. Do dalszej analizy mamy zatem układ

$$(2.10a) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -H \operatorname{sgn} x_2 - H_1 \operatorname{sgn} x_2 - C \operatorname{tg}[b(|x_1| - 1)] \operatorname{sgn} x_1 + P \sin \tau + R(x_1, x_2). \end{cases}$$

3. Analiza stateczności technicznej układu (2.10a)

Jedną z metod badania stateczności technicznej układów nieliniowych jest zmodyfikowana, druga metoda Lapunowa. Dla badanego układu dobieramy odpowiednią funkcję skalarną i na podstawie jej własności oceniamy stateczność techniczną układu.

W naszym przypadku przyjmiemy funkcję dwóch zmiennych $V(x_1, x_2)$, niezależną od czasu w sposób jawny, klasy C^1 i określimy warunki wystarczające stateczności technicznej.

Jeżeli przyjęta funkcja $V(x_1, x_2)$ spełnia następujące warunki:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} 1^\circ & V(x_1, x_2) > 0 \quad \text{dla} \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \\ 2^\circ & \dot{V}(x_1, x_2) \leq 0 \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in Q_z \setminus Q_0^{\text{II}}, \\ 3^\circ & \sup_{(x_1, x_2) \in Q_0^{\text{II}}} V(x_1, x_2) < \inf_{(x_1, x_2) \in Q_z \setminus Q^{\text{II}}} V(x_1, x_2), \end{aligned}$$

to układ jest technicznie stateczny ze względu na obszary Q_0^{II} , Q^{II} i zaburzenia stale działające.

Dla układu (2.10a) przyjmiemy obecnie funkcję $V(x_1, x_2)$ w postaci

$$(3.2) \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_1^{x_1} \{C \operatorname{tg}[b(|u|-1)] \operatorname{sgn} u \delta^{-1}(|u|-1)\} du.$$

Pochodna funkcji (3.2) względem czasu, wynosi:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \dot{V} &= x_2 \{ \dot{x}_2 + C \operatorname{tg}[b(|x_1|-1)] \delta^{-1}(|x_1|-1) \operatorname{sgn} x_1 \} = \\ &= x_2 \{ -(H+H_1) \operatorname{sgn} x_2 + P \sin \tau + R(x_1, x_2) \}. \end{aligned}$$

Oszacujemy pochodną (3.3), zakładając, że:

$$(3.4) \quad |P \sin \tau| \leq \tilde{P}, \quad |R(x_1, x_2)| \leq \varrho.$$

Otrzymujemy:

$$(3.5) \quad \frac{dV}{dt} \leq |x_2| [-(H_1+H) + \tilde{P} + \varrho],$$

skąd wynika, że pochodna względem czasu będzie niedodatnia, gdy

$$(3.6) \quad \tilde{P} \leq (H+H_1) - \varrho.$$

Czyli, maksymalna amplituda siły wymuszającej nie powinna przekraczać tłumienia pomniejszonego o największą wartość zaburzeń stale działających. Drugi warunek z (3.1) jest więc spełniony.

Sprawdzimy obecnie trzeci z warunków (3.1). Obliczymy funkcję $V(x_1, x_2)$ z (3.2). Po scałkowaniu otrzymujemy

$$(3.2a) \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{C}{b} \ln |\cos b(|x_1|-1)|.$$

Z powyższego widać, że $V(x_1, x_2)$ jest dodatnia, ponieważ drugi człon przyjmuje wartości tylko ujemne, a dla: $|x_1| = 1$ zeruje się.

Aby był spełniony trzeci warunek (3.1) powinno być

$$(3.7) \quad \sup_{(x_1, x_2) \in Q_0^{\text{II}}} V(x_1, x_2) = V_1 < \inf_{(x_1, x_2) \in Q_z \setminus Q^{\text{II}}} V(x_1, x_2) = V_2.$$

Wartość V_1 na brzegu ∂Q_0^{II} wynosi

$$(3.8) \quad V_1 \Big|_{\partial Q_0^{\text{II}}} = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}v^2.$$

Wartość V_2 na brzegu ∂Q^{II} wynosi ($v = 0$)

$$(3.9) \quad V_2 \Big|_{\partial Q^{\text{II}}} = \frac{C}{b} \ln |\cos b(|x_1| - 1)| = \frac{C}{b} \ln |\cos b(|a| - 1)|.$$

W zależności (3.9) uwzględniliśmy, że $\ln |\cos b(|x_1| - 1)|$ przyjmuje tylko ujemne wartości.

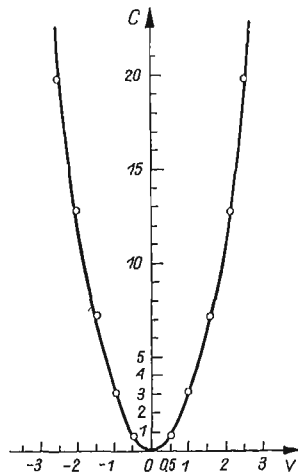
Wobec powyższego z (3.7) otrzymujemy, po uwzględnieniu (3.8) i (3.9)

$$(3.10) \quad C > \frac{b}{\ln [\cos^2 b(|a| - 1)]} v^2.$$

Szywność poprzeczna toru powinna, przy założonej wielkości dopuszczalnego odkształcenia poprzecznego toru i danej prędkości ruchu poprzecznego zestawu, przyjmować wartości spełniające zależność (3.10).

4. Przykład liczbowy

Na podstawie [3], przyjmijmy następujące dane liczbowe: $m = 1500$ [kg], $s_0 = 0,005$ [m], $\gamma = 0,05$ [rd], $p = 10,676$ [s⁻¹], $a_0 = 0,01$ [m], nacisk koła na szynę $G_k = 50\,000$ [N], $d_0 = 0,002$ [m].



Rys. 4

Wartości sztywności poprzecznej szyn dla różnych prędkości poprzecznego ruchu zestawu są ujęte w tablicy 1.

Zależność (3.10) można przedstawić graficznie, z wykorzystaniem danych w tablicy 1. Jest to pokazane na rys. 4.

Tablica 1

$v_0 \left[\frac{m}{s} \right]$	0,00025	0,0005	0,0075	0,001	0,00125	0,0015
v	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v^2	0,25	1,0	2,25	4,0	6,25	9,0
C	0,799	3,199	7,198	12,796	19,994	28,791
$C_0 \cdot 10^6 \left[\frac{N}{m} \right]$	0,537	2,149	4,837	8,599	13,430	19,351

5. Wnioski i uwagi końcowe

Z podanych warunków stateczności (3.6) i (3.10) wynika, że układ jest technicznie stateczny, gdy maksymalna amplituda siły wymuszającej nie przekroczy siły tarcia tłumiącej drgania, pomniejszonej o maksymalną wartość zaburzeń stale działających. Z drugiego warunku wynika ponadto, że boczna sztywność toru jest uzależniona od maksymalnej prędkości ruchu poprzecznego zestawu. Zależność ta (rys. 4) określa tę sztywność lub ogranicza prędkość «plastycznego» uderzenia w szynę. I tak, przy danej bocznej sztywności toru można określić maksymalną prędkość v , przekształcając odpowiednio zależność (3.10). Odwrotnie, przy danej prędkości bocznego ruchu zestawu, można określić boczna sztywność toru, przy założeniu, że maksymalne wychylenie szyn nie przekroczy zakresu odkształcenia sprężystego. Mając sztywność można określić inne parametry toru (rozstaw podkładów, typ szyny itp.).

Analiza została przeprowadzona dla zakresu ruchu poprzecznego, w którym luz został przekroczony. W pierwszym zakresie ruchu, do wyczerpania luzu, ruch jest niestateczny. Po przekroczeniu luzu zestaw przechodzi w drugi zakres i gdy spełniona jest nierówność (3.10), jego ruch jest technicznie stateczny.

Literatura cytowana w tekście

1. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna*, PWN, Warszawa 1972.
2. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Stabilność układów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1973.
3. Т. А. Тивилов, *Асимптотические методы исследования колебаний подвижного состава*, Труды Ростовского-на-Дону Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, Издательство Транспорт, Москва 1970.

Резюме

ТЕХНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ БОКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ЕДИНИЧНОГО
ПОДВИЖНОГО СОСТАВА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО РЕЛЬСАМ С НЕЛИНЕЙНОЙ
ПОПЕРЕЧНОЙ УПРУГОСТЬЮ

В работе рассматривается техническая устойчивость некоторой механической системы с одной степенью свободы, с нелинейной упругой характеристикой, с зазором и с демпфированием посредством сухого трения, совершающей вынужденные колебания вызываемые гармонической силой.

На характеристики этой системы (упругость и демпфирование) влияют непрерывно действующие возмущения. Области устойчивости рассматриваются с практической точки зрения. Для решения задачи применяется второй метод Ляпунова.

Полученные зависимости, (2.6) и (3.11) определяющие условия устойчивости, содержат коэффициент упругости, демпфирование и скорость поперечного движения. Одна из этих зависимостей (3.11) представлена графически.

Summary

TECHNICAL STABILITY OF LATERAL VIBRATIONS OF A SINGLE WHEEL SET MOVING ALONG THE RAIL WITH NON-LINEAR LATERAL ELASTICITY

The technical stability of the mechanical system with one degree of freedom, with non-linear characteristic of elasticity, play and damping by dry friction, is considered. This system performs forced lateral vibrations produced by a harmonic force. The system is acted on by constantly acting perturbations of the characteristics of elasticity and damping. The regions of the stability were considered from the practical point of view. The problem is analysed by means of the second method of Lapunov. Relations (2.6) and (3.11), obtained by this procedure, contain: damping, the coefficient of rigidity and the velocity of lateral motion of the body. These relations are conditions of the technical stability. Relation (3.11) is shown graphically in Fig. 4.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 sierpnia 1974 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

PODSUMOWANIE DZIAŁALNOŚCI ODDZIAŁU GLIWICKIEGO POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ Z OKAZJI 30-LECIA PRL

JÓZEF WOJNAROWSKI (GLIWICE)

XVI Walne Zgromadzenie Oddziału Gliwickiego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zbiegło się z 30-leciem PRL i stało się dobrą okazją do tego, aby przedstawić zakres działania osiągnięcia i metody pracy kolejnych Zarządów ze wskazaniem na rolę spełnianą w krzewieniu i rozwijaniu mechaniki teoretycznej i stosowanej na Górnym Śląsku. Przedstawione sprawozdanie za lata 1958–1974 daje pogląd na osiągnięcia naukowe i dorobek Oddziału Gliwickiego, będąc równocześnie pozycją dokumentalną Towarzystwa.

Pierwsze lata

W dniu 13 marca 1958 r. w Warszawie odbyło się zebranie członków założycieli Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Zebrani członkowie uchwalili powstanie Towarzystwa i jego statut oraz powołali 8 Oddziałów (w Warszawie, Gdańsku, Gliwicach, Krakowie, Łodzi, Poznaniu, Szczecinie i Wrocławiu).

Oddział Gliwicki PTMTS założyli pracownicy naukowcy Politechniki Śląskiej: Stanisław BODASZEWSKI, Stanisław BRZozowski, Zbigniew BUDZIANOWSKI, Włodzimierz BURZYŃSKI, Marian JANUSZ, Stefan KAUFMAN, Jakub MANES i Stanisław OCHEŃDUSZKO.

Komisja Organizacyjna w wyżej wymienionym składzie, działając w charakterze Tymczasowego Zarządu Oddziału, dokonał przyjęcia i weryfikacji 22 członków Oddziału oraz zwołał w dniu 22 października 1958 r. pierwsze Walne Zebranie Członków Towarzystwa.

W wyniku wyboru i ukonstytuowania się pierwszy Zarząd Oddziału rozpoczął działalność w składzie: Marian JANUSZ — przewodniczący, Zbigniew BUDZIANOWSKI — sekretarz, Adam TUROWSKI — skarbnik, Jerzy KOŁAKOWSKI — członek Zarządu, Zygmunt WUSATOWSKI — członek Zarządu.

Komisja Rewizyjna przewodniczył Stefan KAUFMAN, a Sądowni Koleżeńskiemu — Stanisław OCHEŃDUSZKO.

Rozwój ilościowy Oddziału Gliwickiego za lata 1958–1974 przedstawia tablica 1.

Skład osobowy Władz Towarzystwa w latach 1958–1974 przedstawiał się następująco: przewodniczącymi Zarządu Oddziału byli kolejno: M. JANUSZ, J. DIETRZYCH, O. POPOWICZ, K. KUTARBA, T. KOCHMAŃSKI, J. ANTONIAK, J. WOJNAROWSKI. Wiceprzewodniczącymi Zarządu Oddziału byli: J. DIETRZYCH, J. LEDWOŃ, J. SZARGUT, W. KRÓL, T. OPOLSKI, J. NIEWIADOMSKI, J. BURSA, Sz. BORKOWSKI, St. GDULA. Sekretarzami byli kolejno: Zb. BUDZIANOWSKI, J. LEDWOŃ, M. ZARZYCKI, T. ŚWIERZAWSKI, St. GDULA, J. ROZEWICZ, J. ANTONIAK, J. FOLWARCZNY, W. SZUŚCIK. Funkcje skarbnika Zarządu Oddziału pełnili kolejno: A. TUROWSKI, J. NAWROCKI, J. MAMES, A. JAKUBOWICZ, St. GDULA, T. LAMBER, A. TYLIKOWSKI. Komisja Rewizyjna przewodniczyli: S. KAUFMAN, K. KUTARBA, J. NIEWIADOMSKI, T. KOCHMAŃSKI, T. LAMBER, J. ANTONIAK.

**Tablica 1. Liczbowe zestawienie członków PTMTS — O. Gliwice
w latach 1958-1974**

Rok	Liczba członków	Rok	Liczba członków
1958	26	1967	59
1959	34	1968	58
1960	43	1969	54
1961	50	1970	56
1962	55	1971	62
1963	51	1972	62
1964	45	1973	99
1965	57	1974	120
1966	58	(i pólr.)	

Cel e i zadania Towarzystwa

Gliwicki Oddział PTMTS postawił sobie m.in. następujące cele:

— krzewienie i rozwijanie mechaniki teoretycznej i stosowanej oraz współdziałanie w jej szerzeniu i rozpowszechnianiu,

— skupianie i powiększanie liczby młodych pracowników nauki i przemysłu pracujących w dziedzinie mechaniki na terenie Górnego Śląska.

Przy zachowaniu obowiązujących przepisów prawnych i statutowych Gliwicki Oddział Towarzystwa realizował swoje zadania poprzez:

- organizowanie zebrań naukowych, odczytów, wykładów, seminariów, kursów i sympozjonów;
- popieranie i nagradzanie badań naukowych;
- organizowanie konkursów naukowych z nagrodami;
- współdziałanie w pracach nad dziejami wkładu polskiego do mechaniki teoretycznej i stosowanej;
- udzielanie informacji naukowych zainteresowanym instytucjom;
- utrzymywanie łączności z pokrewnymi stowarzyszeniami w kraju i za granicą;
- czynny udział w zjazdach krajowych i zagranicznych;
- wydawanie zeszytów naukowych i książek;
- przyjmowanie od władz, instytucji i osób prywatnych pomocy w postaci subwencji, darowizn i zasiłków.

Problematyka naukowa pierwszych lat pracy Oddziału publikowana była w serii specjalnych Zeszytów wydawanych pt. «Sprawozdania z Zebrań Naukowych».

Kolejne Zarządy nie tylko kontynuowały dotychczasowe formy pracy Towarzystwa, ale wydatnie je wzbogaciły. Do nowych form działalności Towarzystwa należy zaliczyć konferencje naukowe, sympozjony, okolicznościowe wykłady i monotematyczne kursy.

W 1961 r. zorganizowano ogólnopolską konferencję poświęconą teorii powłok cienkościennych. W lutym 1962 r. w Szczyrku odbył się sympozjon pod hasłem «Zastosowania techniczne entropii i egzergii». Sympozjon ten zapoczątkował coroczny zwyczaj rozszerzonych spotkań naukowych Gliwickiego Oddziału PTMTS, a dzięki zapraszaniu członków pozostałych Oddziałów Towarzystwa sympozjony te uzyskały charakter ogólnopolski, stwarzając platformę wymiany myśli między paralelnymi środowiskami naukowymi.

Konkursy

Organizowane przez Oddział Gliwicki PTMTS konkursy naukowe miały na celu pobudzenie młodej kadry do pracy naukowej i w rzeczywistości dawały możliwości wykazania się wartościowymi osiągnięciami w pracy naukowej, zwłaszcza wstępującym na drogę naukową pracownikom specjalizującym się w dziedzinie mechaniki.

W omawianym okresie Zarządy Oddziału zorganizowały 7 konkursów, na których przyznano 36 nagród i 13 wyróżnień.

Pierwszy konkurs naukowy z zakresu mechaniki technicznej zorganizowano w 1960 r. Fundusz na przyznanie nagród uzyskano w Prezydium Miejskiej Rady Narodowej w Gliwicach. Na konkurs wpłynęło 9 prac. Uczestnicy dopuszczeni do końcowego etapu konkursu ogłosili swoje prace na specjalnej sesji w dniach 14 i 15 marca 1961 r. Sąd Konkursowy po rozpatrzeniu prac na posiedzeniu odbytym w dniu 15 marca przyznał:

I nagrodę — Feliksowi ANDERMANOWI za pracę pt. *Tarcze kwadratowe i prostokątne sprężone kablem o trasie kołowej*;

II nagrodę — Szczepanowi BORKOWSKIEMU za pracę pt. *Metoda zespolonej funkcji naprężeń w teorii lupin malowyniosłych*;

III nagrodę — Bogdanowi SKALMIERSKIEMU za pracę pt. *Bęben wielolinowy obciążony siłą tarcia*.

Dyplomy uznania otrzymali:

— Stanisław LESSAER za pracę pt. *Obliczanie ściany zamkniętego zbiornika okrągłego poddanego działaniu symetrycznych jednokierunkowych obciążeń poziomych*;

— Czesław WOŹNIAK za pracę pt. *Metoda macierzowo-iteracyjna wyznaczania sił kompensacyjnych w rurociągach płaskich*.

Akcję pierwszego konkursu naukowego Oddziału Gliwickiego PTMTS zakwalifikowano jako udaną i postanowiono kontynuować ją w latach następnych.

Drugi konkurs na prace teoretyczne z mechaniki teoretycznej i stosowanej zorganizowano w 1962 r. Nagrody konkursowe zostały ufundowane przez Prezydium Miejskiej Rady Narodowej w Gliwicach. Wpłynęło 9 prac. Wszystkie prace zostały dopuszczone do ogłoszenia na Sesji Konkursu Naukowego w dniu 17.12.1962 r. Sąd konkursowy w składzie: F. ANDERMAN, S. BODASZEWSKI, Z. BUDZIANOWSKI, J. DIETRZYCH, M. JANUSZ, J. LEDWOŃ — przewodniczący, J. NAWROCKI, J. SUCHOŃ — przewodniczący PMRN w Gliwicach, po rozpatrzeniu prac przyznał:

I nagrodę — Czesławowi WOŹNIAKOWI za pracę pt. *Odkształcenia skończone powłok cienkich*;

dwie II nagrody — Oswaldowi MATEI za pracę pt. *Z zagadnień stateczności pala*; — Julianowi MARSZAŁOWI za pracę pt. *Kinematyka i dynamika pewnego układu mas wirujących*;

dwie III nagrody — Stanisławowi GDULI za pracę pt. *Wymiana ciepła w ciałach stałych przy periodycznych zmianach temperatury otaczającego je ośrodka*; — Zdzisławowi JASKÓLE za pracę pt. *Dźwięk podstawą stosunku niektórych cech konstrukcyjnych*.

Trzeci konkurs został zorganizowany w 1964 r. dzięki ufundowaniu nagród przez Wydział Kultury Miejskiej Rady Narodowej w Gliwicach. Na konkurs wpłynęło 6 prac. Sąd konkursowy w składzie: J. DIETRZYCH, W. KRÓL, J. LEDWOŃ, S. OCHĘDUSZKO, O. POPOWICZ, J. SZARGUT — przewodniczący, przyznał:

I nagrodę — Józefowi WOJNAROWSKIEMU za pracę pt. *Funkcja tlumienia pręta gumowego przy obciążeniach skrętnych*;

dwie II nagrody — Jackowi ŻELKOWSKIEMU za pracę pt. *Nowa metoda zimnego modelowania wpływu z palników do komór spalania pyłu węglowego*; — Stanisławowi GDULI za pracę pt. *Bezwładność cieplna przegrody płaskiej*;

dwie III nagrody — Tadeuszowi BESOWI za pracę pt. *Wnikanie ciepła przy przepływie laminarnym w kanale płaskim i cylindrycznym*; — Józefowi WOJASOWI za pracę pt. *Hipoteza Georga Sinesa w świetle badań złącz spawanych*.

Czwarty konkurs w 1966 r. został zorganizowany dzięki subwencji przewodniczącego Prezydium Miejskiej Rady Narodowej w Gliwicach. Na konkurs wpłynęło 11 prac. Do konkursu dopuszczono 9. Sąd konkursowy w składzie: J. DIETRZYCH, W. KRÓL, J. LEDWOŃ, S. OCHĘDUSZKO, J. SZARGUT — przewodniczący, przyznał:

I nagrodę — Tadeuszowi BESOWI za pracę pt. *Przepływ ciepła w laminarnym strumieniu cieczy chłodzącej reaktor jądrowy*;

trzy II nagrody — Antoniemu GUZIKOWI za pracę pt. *Obliczanie współczynnika przenoszenia ciepła w regeneratorsze o działaniu niesymetrycznym*; — Stanisławowi KOPCOWI za pracę pt. *Sala widowiskowa bez ludzi jako obiekt w procesie regulacji temperatury*; — Zdzisławowi SULIMOWSKIEMU za pracę pt. *Zakotwienie na zasadzie przyczepności cięgna sprężającego w betonie*;

dwie III nagrody — Edwardowi KOSTOWSKIEMU za pracę pt. *Obliczenia cieplne dwuszczelinowego rekuperatora opromienianego*; — Stanisławowi LOSCE, Oswaldowi MATEI i Eugeniuszowi ŚWITOŃSKIEMU za pracę pt. *Badania modelowe stateczności hiperbolicznych chłodni wieżowych obciążonych statycznie wiatrem przy jednoczesnym uwzględnieniu ciężaru własnego powłoki*.

Ponadto przyznano wyróżnienie Jerzemu TOMECZKOWI za pracę pt. *Wyznaczanie optymalnych rozmiarów pionowego pierścieniowego kanału chłodzącego w materiale chłodzonym na drodze konwekcji swobodnej*.

Piąty Konkurs Naukowy Oddziału Gliwickiego PTMTS odbył się w 1967 r. Na konkurs wpłynęło 10 prac. Sąd konkursowy w składzie: J. DIETRZYCH, W. KRÓL, K. KUTARBA, J. LEDWOŃ, J. NIEWIADOMSKI i J. SZARGUT — przewodniczący, przyznał:

I nagrodę — Ryszardowi HAGLOWI za pracę pt. *Walcarka nawrotna jako obiekt regulacji i pomiarów*;
dwie II nagrody — Tadeuszowi BESOWI za pracę pt. *Optymalizacja parametrów termodynamicznych w urządzeniu wyparnym*, — Jerzemu TOMECZKOWI za pracę pt. *Nieustalone stany cieplne w wodnym reaktorze jądrowym*;

trzy III nagrody — Michałowi FERENCOWI za pracę pt. *O pewnej metodzie pomiaru charakterystyk częstotliwościowych obiektu wieloparametrowego*; — Edwardowi KOSTOWSKIEMU za pracę pt. *Rozkład temperatur w opromienionym elemencie Fielda (ujęcie analityczne)*; — Jerzemu SZENDEROWI za pracę pt. *Optymalizacja przewodności mechanizmów metodą Monte Carlo i za pomocą aproksymacji wielomianami optymalnymi*;

wyróżnienie — Janowi ORLACZOWI za pracę pt. *Badania współczynnika tarcia tłoczyw termoutwardzalnych*.

Na szósty konkurs naukowy Oddziału Gliwickiego PTMTS w 1970 r. wpłynęło 14 prac. Sąd konkursowy w składzie: J. ANTONIAK, S. BORKOWSKI, Z. BUDZIANOWSKI, J. BURSA, J. FOLWARCZNY, T. KOCHMAŃSKI, L. MÜLLER postanowił nie przyznać I nagrody.

Dwie równorzędne II nagrody otrzymali: — Andrzej DRESCHER i Bogdan MICHAŁSKI za pracę pt. *Reologiczne, mechaniczne i optyczne własności polimetakrylanu metylu w warunkach złożonej historii obciążenia*; — Janusz KLEPACZKO za pracę pt. *Zmodyfikowany pręt Hopkinsona*.

Cztery III nagrody otrzymali: — Marek BIJAŁ-ZOCHOWSKI za pracę pt. *Statystyka sił dynamicznych w przekładniach zębatych*; — Jacek STUPNICKI za pracę pt. *Badanie smarowania elastohydrodynamicznego metodą elastooptyczną*; — Andrzej WILK za pracę pt. *Określenie nadwyżek dynamicznych w kolach zębatych przy szybkościach rezonansowych*; — Józef WRANIN za pracę pt. *Wyznaczanie zmian stałych sprężystości materiału występujących na grubości modelu gipsowego*.

Wyróżnienia w wyżej wymienionym konkursie otrzymali: — Witold BŁAŻEWICZ za pracę pt. *Wpływ naprężeń własnych na prędkość propagacji pęknięcia zmęczeniowego w blachach duralowych*; — Jadwiga HALAUNBRENNER, Mieczysław KMIECIK za pracę pt. *Zjawisko rezonansu w kontakcie ciał sprężystych*; — Ewa KAJRUNAJTYS za pracę pt. *Badania modelu układów prętowych metodą eliminacji*; — Jerzy KAPUŚCIŃSKI za pracę pt. *Modelowanie własności lepkosprężystych polimerów*; — Zdzisław TERESZKOWSKI za pracę pt. *Doświadczalna metoda wyznaczania obciążeń krytycznych w płytach*.

Siądmy Konkurs Oddziału Gliwickiego PTMTS na prace teoretyczne z mechaniki zorganizowany w 1973 r. miał charakter ogólnopolski. Na konkurs wpłynęło 26 prac. Trzydzieści prac dopuszczono do referowania na Zebraniu Naukowym Towarzystwa w dniu 10 grudnia 1973 r. Sąd konkursowy w składzie: S. BORKOWSKI, J. DIETRZYCH, Z. OSIŃSKI, B. SKALMIERSKI, J. SZARGUT — przewodniczący, J. WOJNAROWSKI, przyznał:

I nagrodę — Józefowi TELEDZE za pracę pt. *O ośrodkach plastycznych opisywanych równaniem konstytutywnym: $\sigma_{ij} = \Phi_0 \delta_{ij} + \Phi_1 \epsilon_{ij} + \Phi_2 \epsilon_{ik} \epsilon_{kj}$* ;

II nagrodę — Bogdanowi ROGOWSKIEMU za pracę pt. *Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznego izotropowego*;

dwie III nagrody — Michałowi KLEIBEROWI za pracę pt. *Kinematyka continuum sprężysto-plastycznego*; — Piotrowi KONDERLI za pracę pt. *Nieliniowe rozwiązanie powłoki o kształcie hiperboloidy jednopowłokowej*.

Nagrodę Specjalną JM Rektora Politechniki Śląskiej przyznano Eugeniuszowi ŚWITOŃSKIEMU za pracę pt. *Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych*.

Ponadto przyznano cztery wyróżnienia: — Grzegorzowi JEMIELICIE za pracę pt. *Zginanie płyty kwadratowej z centrycznie położonym otworem kwadratowym*; — Witoldowi KOSIŃSKIEMU za pracę pt. *Równanie ewolucji w teorii materiałów dysypatywnych*; — Andrzejowi SAWICKIEMU za pracę pt. *O pewnym przypadku drgań elastycznych płyty sprzężonej z ograniczonym obszarem cieczy idealnej*; — Janowi SKŁADZIENIOWI za pracę pt. *Analiza konwekcyjnego rekuperatora pętlcowego z krzyżowym przepływem czynników*.

Sympozjony

Sympozjony i konwersatoria organizowane corocznie w lutym w Beskidzie Śląskim stały się już tradycyjną formą działalności Towarzystwa. Stwarzały one warunki dla bezpośredniej, a więc przez to samo żywej, wymiany myśli badawczej; dla poddania pod dyskusję problemów aktualnie będących na «warsztatach» w ośrodkach naukowych w kraju. Ponadto wyprzedzały publikacyjne przekazywanie informacji naukowej, a przez to umożliwiały szybsze zapoznawanie się z pracami z dziedziny mechaniki mogącymi przedstawiać dla zainteresowanych określoną wartość.

Do chwili obecnej odbyło się 13 sympozjonów, w czasie których wygłoszono 279 referatów, sumarycznie w sympozjonach wzięło udział 1008 uczestników. Szczegółowy wykaz sympozjonów ujmuje tablica 2.

Tablica 2

Lp.	Rodzaj, data i miejscowość	Hasło	Liczba referatów	Liczba uczestników
1	2	3	4	5
1.	Ogólnopolska Konferencja 11–12.4.1961, Gliwice	Powłoki cienkościenne	12	120
2.	II Sympozjum Termodynamiki Technicznej –14.2.1963, Szczyrk	Zastosowania techniczne entropii i egzergii	19	80
3.	Konwersatorium 7–14.2.1964 Szczyrk	Spotkanie techniki konwencjonalnej z techniką nuklearną	20	80
4.	Konwersatorium 8–13.2.1965, Szczyrk	Zastosowanie maszyn matematycznych we współczesnej mechanice	24	80
5.	Konwersatorium 7–12.2.1966, Szczyrk	Zagadnienia termiczne i plastyczne w mechanice	19	49
6.	Konwersatorium 1–7.2.1967, Szczyrk	Zagadnienia optymalizacji w mechanice	22	56
7.	Konwersatorium 26.2–2.3.1968, Szczyrk	Zagadnienia optymalizacji w mechanice	26	63
8.	Sympozjon 17–23.2.1969, Szczyrk	Modelowanie w mechanice	23	83
9.	Sympozjon 17–23.2.1970, Szczyrk	Metody statystyczne w mechanice	33	79
10.	Sympozjon 18–24.2.1971, Wisła	Metody statystyczne w mechanice	23	71
11.	Sympozjon 2–9.2.1972, Wisła	Metody statystyczne w mechanice. Stabilność. Pomiary. Modelowanie	21	72

1	2	3	4	5
12.	Sympozjon 10-14.2.1973, Szczyrk	Metody statystyczne w mecha- nicie. Stochastyczna teoria ma- szyn	15	76
13.	Sympozjon 12-18.2.1974 r. Wisła	Optymalizacja w mechanice	26	99

Po raz pierwszy w 1974 r. równoległe z obradami XIII Sympozjonu odbyło się pod patronatem przewodniczącego Zarządu PTMTS Oddziału w Gliwicach seminarium Studenckiego Koła Naukowego Mechaniki Stosowanej im. Włodzimierza Burzyńskiego. W seminarium brali również udział uczestnicy Sympozjonu.

Zebrania naukowe

Zebrania naukowe były formą ciągłej działalności Zarządu PTMTS Oddziału Gliwice. W okresie szesnastolecia zorganizowano w sumie 118 zebrań. Na zebraniach naukowych Towarzystwa, włączając w to sympozjony, konkursy i konferencje naukowe, wygłoszono ogółem 473 referaty. Zestawienie liczbowe zebrań w poszczególnych latach działalności Towarzystwa ujmuje tablica 3.

Tablica 3. Liczba zebrań naukowych

Rok	Liczba zebrań	Rok	Liczba zebrań
1958	2	1966	9
1959	9	1967	9
1960	11	1968	8
1961	9	1969	1
1962	9	1970	6
1963	9	1971	3
1964	10	1972	5
1965	7	1973	5
		1974	6
		(I półr.)	

Wykłady i kursy

Działalność szkoleniowa prowadzona przez Gliwicki Oddział PTMTS miała wieloraki charakter i swoim zasięgiem obejmowała zarówno środowisko naukowe, jak również inżynierów zatrudnionych w przemyśle.

Trzy cykle wykładów dla inżynierów z przemysłu zorganizowano w 1962 r. «Stal jako materiał konstrukcyjny» to temat pierwszego cyklu zorganizowanego w dniu 16.3.1962 r. w Gliwicach wspólnie z Polskim Związkiem Inżynierów i Techników Budownictwa Oddział w Gliwicach. Referaty wygłosili: J. DIETRICH, F. STAUB, E. ŚLEDZIEWSKI, W. WACHNIEWSKI. «Beton jako tworzywo budowlane» to tytuł cyklu wykładów z dnia 6.6.1962 r. wygłoszonych w Gliwicach. Wykładowcami byli Z. PRUZIŃSKI, M. ROBAKOWSKI, L. ROWIŃSKI, A. SZMIR. «Problemy projektowo-konstrukcyjne» były tematem trzeciego cyklu wykładów, zorganizowanego na terenie Częstochowy w dniu 23.11.1962 r. Referaty wygłosili: J. DIETRICH, W. KRÓL, J. MAMES.

Dwie konferencje naukowe zorganizowane 8.12.1969 r. miały charakter szkoleniowy. Na pierwszej z nich, pod nazwą «Metody zwężkowe pomiaru strumieni heterogenicznych» referaty, wygłosili: Cz. GRACZYK, J. ŁATA, A. OBTUŁOWICZ, C. ŚWIERCZYŃSKI, M. TEISSEYRE. Na drugiej konferencji, pod nazwą «Pneumatyczne elementy techniki cyfrowej», referat wygłosił V. CHUDY.

Dwuletni cykl wykładów (1969–1971) nt. «Podstawy mechaniki ośrodka ciąglego odkształcalnego» oraz «Seminarium z matematyki stosowanej» prowadził członek Zarządu PTMTS Oddziału w Gliwicach Sz. BORKOWSKI.

Dynamika nieliniowych układów mechanicznych była tematem wykładów prowadzonych przez członka PTMTS Oddziału w Gliwicach R. GRYBOSIA w latach 1971–1972.

W kwietniu 1972 r. Zarząd PTMTS Oddziału Gliwickiego wspólnie z Biurem Doskonalenia Kadr PAN zorganizował w Jabłonnie pod Warszawą dwutygodniowy kurs poświęcony procesom stochastycznym. Wykłady na kursie prowadzili głównie członkowie Gliwickiego Oddziału, mianowicie:

- B. SKALMIERSKI — z *Podstaw aksjomatycznych rachunku prawdopodobieństwa i z Teorii stabilności układów stochastycznych*;
- A. TYLIKOWSKI — z *Teorii procesów stochastycznych, Stochastycznych równań różniczkowych i z Stabilności stochastycznych ciągłych układów dynamicznych*;
- E. CZOGAŁA — z *Drgań przypadkowych ciągłych układów dynamicznych*;
- J. MARSZAŁ — z *Zastosowań metod quasi-statycznych w mechanice*;
- L. MÜLLER — z *Pomiarów sygnałów stochastycznych*.

W charakterze zaproszonych gości referaty wygłosili: W. BOGUSZ¹, J. MURZEWSKI¹, Z. OSIŃSKI², M. ZABAWA¹.

Działalność wydawnicza

Działalność wydawniczą rozpoczęto w 1959 r. Była to seria 8 zeszytów pt. «Sprawozdania z Zebrań Naukowych». Ostatni zeszyt ukazał się w 1962 r. W latach następnych wydawano w zasadzie zeszyty zawierające referaty zgłoszone na sympozjony.

Od 1972 r. obok zeszytów wydawanych z okazji sympozjonów, wydawane są również drukiem prace członków Oddziału Gliwickiego PTMTS. Prace te są najczęściej rozszerzeniem treści przeglądowych referatów wygłoszonych na zebraniach naukowych Towarzystwa. W ramach tej serii wydano dotychczas 6 prac.

Dla popularyzacji Międzynarodowego Układu Jednostek Miar SI Zarząd Oddziału powołał w 1964 r. Komisję Jednostek SI w składzie: Stanisław OCHĘDUSZKO (przewodniczący), Janusz DIETRZYCH, Tadeusz GAWRYŚ i Henryk GÓRNIĄK. Wynikiem pracy Komisji było wydanie 4 Informatorów Komisji Jednostek SI o łącznym nakładzie 2000 egzemplarzy.

Wykaz prac wydanych staraniem PTMTS Oddział Gliwice:

1. Sprawozdania z Zebrań Naukowych Oddziału Gliwickiego PTMTS, Zeszyt 1. Gliwice—Częstochowa, 1959, s. 80.
2. Sprawozdania z Zebrań Naukowych Oddziału Gliwickiego PTMTS, Zeszyt 2, Gliwice—Częstochowa, 1960, s. 102.
3. Sprawozdania z Zebrań Naukowych Oddziału Gliwickiego PTMTS, Zeszyt 3. Gliwice—Częstochowa, 1960, s. 99.
4. Sprawozdania z Zebrań Naukowych Oddziału Gliwickiego PTMTS, Zeszyt 4. Gliwice—Częstochowa, 1961, s. 73.
5. Sprawozdania z Zebrań Naukowych Oddziału Gliwickiego PTMTS. Konferencja Naukowa «Powłoki cienkościenne» — Streszczenie referatów, Zeszyt 5. Gliwice—Częstochowa, 1961, s. 86.
6. Sprawozdania z Zebrań Naukowych Oddziału Gliwickiego PTMTS, Zeszyt 6. Gliwice—Częstochowa, 1961, s. 104.

¹PTMTS Oddział Kraków

²PTMTS Oddział Warszawa

7. Sprawozdania z Zebrań Naukowych Oddziału Gliwickiego PTMTS. Konkurs Naukowy z Zakresu Mechaniki Technicznej, 14–15 marca 1961 r. Prace konkursowe. Zeszyt 7. Gliwice–Częstochowa, 1961, s. 102.
8. Sprawozdania z Zebrań Naukowych Oddziału Gliwickiego PTMTS, Zeszyt 8. Gliwice–Częstochowa, 1962, s. 84.
9. II Sympozjon Termodynamiki Technicznej, 7–14 luty 1973 — «Zastosowania techniczne entropii i egzergii». Streszczenia referatów, Gliwice, 1963, s. 89.
10. Materiały na Konwersatorium «Spotkanie techniki konwencjonalnej z techniką nuklearną» — luty 1964 r. Opublikowano w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej, Nr 99, ENERGETYKA, z. 12, Gliwice, 1964, s. 89.
11. Międzynarodowy Układ Jednostek i jego korzyści. Informator Komisji Jednostek SI, Nr 1. PTMTS Oddział Gliwice, Gliwice, 1964, s. 4.
12. Stosowanie układu SI w mechanice. Informator Komisji Jednostek SI, Nr 2. PTMTS Oddział Gliwice, Gliwice, 1964, s. 4.
13. Stosowanie jednostek układu SI w technice ciepłej. Informator Komisji Jednostek SI, Nr 3. PTMTS Oddział Gliwice, Gliwice, 1964, s. 4.
14. Zastosowanie układu SI do przepływu materii i ciepła. Informator Komisji Jednostek SI, Nr 4. PTMTS Oddział Gliwice, Gliwice, 1965.
15. Konwersatorium «Zastosowanie maszyn matematycznych we współczesnej mechanice». Streszczenia referatów. PTMTS Oddział Gliwice, Zakład Energetyki Lądowej przy Katedrze Teorii Maszyn Ciepłych Politechniki Śląskiej, Gliwice, 1965, s. 134.
16. Konwersatorium «Zagadnienia termiczne i plastyczne w mechanice». 7–12 lutego 1966r. Streszczenia referatów.
17. Konwersatorium «Zagadnienie optymalizacji w mechanice». 1–7 lutego 1967. Streszczenia referatów
18. Konwersatorium «Zagadnienia optymalizacji w mechanice». 26.2.–3.3.1968. Materiały konferencyjne.
19. Sympozjon «Modelowanie w mechanice». 17–23 lutego 1969. Zeszyt Specjalny Politechniki Śląskiej, s. 124.
20. Sympozjon pod hasłem «Metody statystyczne w mechanice». Streszczenia referatów. Gliwice, 1970, s. 117.
21. II Sympozjon pod hasłem «Metody statystyczne w mechanice». Gliwice, 1971, s. 64.
22. Sympozjon pod hasłem «Metody statystyczne w mechanice. Stabilność. Pomiary. Modelowanie» Referaty, Gliwice, 1972, s. 188.
23. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Metody statystyczne w mechanice*, Gliwice 1971, s. 142.
24. L. MÜLLER. *Przyrządy do badania procesów stochastycznych*, Gliwice 1971, s. 63.
25. J. ANTONIAK, A. WIANECKI, *Badanie procesów stochastycznych w technice górniczej przy zastosowaniu metod symulacji na maszynach cyfrowych*, Gliwice 1971, s. 64.
26. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Stabilność w mechanice*, Gliwice 1972, s. 171.
27. E. CZOGAŁA, *Niestacjonarne procesy stochastyczne w układach dynamicznych o stałych rozłożonych*, Gliwice 1973.
28. J. WOJNAROWSKI, J. ŻMUDA, *Podstawowe problemy równowagi szczeliny w ośrodku sprężystym*, Gliwice 1973, s. 85.
29. Sympozjon pod hasłem «Optymalizacja w mechanice». Zbiór referatów. Gliwice–Wisła, luty 1974, s. 318.
30. Szesnastolecie PTMTS Oddział Gliwice. Sprawozdanie za lata 1958–1974, Gliwice, marzec 1974, s. 67.

Inne wydarzenia

W kronice PTMTS Oddziału Gliwickiego należy również zanotować następujące wydarzenia.

Ósmy Zjazd Delegatów PTMTS w dniu 28 maja 1966 r. w uznaniu za wkład do nauki polskiej na polu mechaniki oraz zasług położonych dla Towarzystwa nadał godność Członka Honorowego PTMTS Włodzimierzowi BURZYŃSKIEMU.

Szesnasty Zjazd Delegatów PTMTS, który odbył się 1 czerwca 1974 r., nadał godność Członka Honorowego PTMTS Marianowi JANUSZOWI.

W dniu 25 lutego 1969 r. na plenarnym zebraniu Zarządu Głównego z grupy członków PTMTS Oddziału Gliwickiego wyłoniono Częstochowski Oddział PTMTS, którego założycielami byli członkowie Oddziału Gliwickiego: Jerzy KOŁAKOWSKI, Tadeusz OPOLSKI i Roman JANICZEK.

Członkowie naszego Oddziału czynnie uczestniczyli w Zjazdach Delegatów PTMTS w Warszawie:

— na VI Zjeździe Delegatów PTMTS funkcję przewodniczącego obrad pełnił J. DIETRZYCH,

— obradom w czasie Uroczystego Zjazdu Członków Towarzystwa z okazji dziesięciolecia PTMTS w listopadzie 1968 r. przewodniczył M. JANUSZ,

— na XIII Zjeździe Delegatów PTMTS w 1971 r. funkcję sekretarza pełnił J. FOLWARCZNY, a członkiem Komisji Matki i Skrutacyjnej był B. SKALMIERSKI.

W dniu 20.06.1970 r. na XII Zjeździe Delegatów PTMTS w Warszawie zastępcą Członka Zarządu Głównego został wybrany Z. BUDZIANOWSKI, który pełnił tę funkcję przez dwie kolejne kadencje, tj. do 1972 r.

W dniu 1.06.1974 r. na XVI Zjeździe Delegatów PTMTS Członkiem Zarządu Głównego został wybrany J. ANTONIAK.

Zagraniczni goście towarzystwa

Gośćmi PTMTS Oddziału Gliwickiego byli:

— Dr. Ing. Wolfgang FRATSCHER (Drezno), Dipl.-Ing. Günter GRUHN (Drezno) i Dipl.-Ing. R. NITSCH (Drezno), którzy wygłosili referaty na Sympozjonie w Szczyrku w 1963 r.

— Dr. inż. Lia G. MUCHADZE (Tbilisi), który wygłosił referat na Sympozjonie w Szczyrku w 1968 r.

— Vladimir CHUDY (CSSR), który wygłosił referat na Konferencji Naukowej w Gliwicach w 1969 r.

Następne lata

Reasumując należy podkreślić, że Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Oddział Gliwice prowadzi działalność naukową w zakresie dyscypliny mechanika w bardzo szerokim znaczeniu tego słowa. Różnorodność tematyki naukowej pozwalała na rozwijanie zagadnień nie tylko z mechaniki, ale również leżących na pograniczu tej dyscypliny. Szeroki wachlarz problemów, jaki obejmuje zakres zainteresowań członków PTMTS Oddziału Gliwickiego powinien być bardziej ukierunkowany, a to z uwagi na tendencję koncentracji działalności naukowej w wybranych kierunkach. Pewną próbą ukierunkowania prac jest tematyka corocznie organizowanych sympozjonów. Następne więc lata to poszukiwanie nowych form, ukierunkowanie działalności naukowej Towarzystwa, większe zbliżenie do przemysłu oraz kontakty międzynarodowe. Udoskonalanie wszystkich form działalności jest niezbędnym czynnikiem dalszego rozwoju Towarzystwa.

SYMPOZJON «DOŚWIADCZALNE BADANIA PRZEPŁYWÓW TURBULENTNYCH» TURBULENCJA-74

W dniach 20–22 czerwca 1974 roku odbył się w Częstochowie Ogólnopolski Sympozjon, którego tematyka, obok zagadnień związanych z analizą mikrostruktury przepływów turbulentnych i techniką pomiarową stosowaną w eksperymentalnym studium zjawiska, obejmowała również przegląd problemów uwzględniających wpływ turbulencji w dziedzinie maszyn i urządzeń przepływowych. Współorganizatorem Sympozjonu, obok Instytutu Maszyn Ciepłych Politechniki Częstochowskiej i Instytutu Maszyn Przepływowych Politechniki Łódzkiej, było Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej — Oddział w Częstochowie.

W skład Komitetu Organizacyjnego wchodził: prof. dr inż. W. GUNDLACH (przewodniczący), doc. dr hab. inż. J. ELSNER (sekretarz), prof. dr inż. J. KOŁAKOWSKI, doc. dr inż. J. MICZKA, dr inż. J. CIEPŁUCHA, inż. Z. MĄDRY, mgr inż. M. PIETRAS, mgr inż. J. WILCZYŃSKI (członkowie).

W Sympozjone uczestniczyli przedstawiciele szeregu krajowych ośrodków akademickich, instytutów Polskiej Akademii Nauk oraz goście z ośrodków zagranicznych (CSRS i NRD) zajmujących się podobną tematyką badawczą.

Z okazji Sympozjonu zorganizowana została również wystawa, połączona z prelekcjami i demonstracją działania specjalistycznej aparatury pomiarowej produkowanej przez ośrodki krajowe: MERATRONIK — Szczecin, ZMG — PAN Kraków, ITLiH — PW oraz firmy zagraniczne: DISA — Dania, THERMOSYSTEM i GOERTZ — USA.

- W ramach siedmiu sesji plenarnych wygłoszono 27 referatów w czterech grupach tematycznych:
- Eksperyment w przepływach turbulentnych (9 referatów),
 - Metrologia przepływów turbulentnych (9 referatów),
 - Różne zagadnienia przepływowe (4 referaty),
 - Ogólna problematyka turbulencji (5 referatów).

Referenci reprezentowali następujące ośrodki: Częstochowa (8 referatów), Kraków (5 referatów), Łódź (5 referatów), Warszawa (3 referaty), Drezno-NRD (2 referaty) oraz Gdańsk, Gdynia, Ostrawa-CSRS (po 1 referacie).

Na poszczególnych sesjach wygłoszono w chronologicznej kolejności następujące referaty.

Sesja I. Przewodniczący sesji — prof. dr inż. W. GUNDLACH (IMP PŁ).

1. J. OSTROWSKI (ITLiH PW), *Problematyka badań przepływów turbulentnych* (referat przeglądowy),
2. H. WOLF (Technische Universität Drezno), *Über den Einfluss der Schaufelgrenzschichten bei Verdichtertgittern.*
3. J. ELSNER, J. WILCZYŃSKI (IMC PCz.), *Doświadczalne studium przepływu przez palisadę lopatkową przy zmiennej turbulencji wstępnej i różnych kątach napływu strugi.*

Sesja II. Przewodniczący sesji — prof. dr E. TULISZKA (IWSOiK Poznań).

4. A. JARŻA (IMC PCz.) *Struktura przepływu za palisadą płytek przy odsysaniu czynnika z krawędzi,*
5. J. CIEPLUCHA (IMP PŁ), *Badania przepływu turbulentnego w komorze wirowej,*
6. L. ZAWADZKI (IMI UWłók. PŁ), *Pomiary przepływu w komorach przedzalmicznych.*

Sesja III. Przewodniczący sesji — prof. dr hab. inż. R. PUZYREWSKI (IMP PAN Gdańsk).

7. T. TARNOWSKI (IMC PCz.), *Turbulencja przepływu za palisadą profili kierowniczych przy wydmuchu czynnika przez krawędzie spływu łopatek,*
8. T. DROZD (I. Lot. Warszawa), *Badania nieizotermicznych przepływów burzliwych w przewodach,*
9. J. WILCZYŃSKI (IMC PCz.), *Przepływ za palisadą ciał symetrycznych przy istnieniu podłużnego gradientu ciśnienia.*

Sesja IV. Przewodniczący sesji — doc. dr hab. inż. W. JUNGOWSKI (ITLiH PW).

10. A. SMOLARSKI (ZMG PAN Kraków), *Technika pomiarowa w badaniach turbulencji* (referat przeglądowy),
11. J. KIELBASA, J. RYSZ, A. SMOLARSKI (ZMG PAN Kraków) *Wzorcowanie sond termooanemometrycznych metodą pomiaru fazy fal temperaturowych generowanych w przepływie,*
12. J. ELSNER, S. PŁUSA (IMC PCz.), *Odzworcowanie sygnału sondy termooanemometrycznej w zakresie większych prędkości przepływu,*
13. M. GORSKI, A. JARŻA (IMC PCz.), *Uwagi o linearyzacji odpowiedzi czujnika drucikowego termooanemometru,*
14. Z. SMÓLSKI (ITLiH PW), *Badania eksperymentalne tunelu wirowego.*

Sesja V. Przewodniczący sesji — dr inż. Z. SMÓLSKI (ITLiH).

15. J. KIELBASA, J. PIWOWARCZYK, J. RYSZ, A. SMOLARSKI, B. STASICKI (ZMG PAN Kraków), *Zastosowanie korelatora IP 73I do badań przepływów turbulentnych,*
16. J. ELSNER, T. TARNOWSKI (IMC PCz.), *Charakterystyki kątowe mosikowego układu termooanemometrycznego,*
17. T. SIDOR (IMI SUE AGH Kraków), *Badania właściwości dynamicznych termometrów oporowych o cienkim drucie metodą wymuszeń impulsowych,*

18. S. PALKA, A. SMOLARSKI, J. ŻURAWSKA (ZMG PAN Kraków), *Lasery anemometr dopplerowski z cyfrową analizą wyników.*

Sesja VI. Przewodniczący sesji — doc. dr hab. inż. J. ELSNER. (IMC PCz).

19. K. JEŻOWIECKA-KABSCH (ITCiMP P. Wr.), *Wpływ burzliwości na ruch mieszanin dwufazowych,*
 20. L. DOBRZAŃSKI (ITC Łódź), *Wpływ struktury strugi na proces spalania w świetle przygotowań do badań modelowych palników energetycznych,*
 21. J. NOWAKOWSKI (ITC Łódź), *Badania wentylatorów przeciwbieżnych,*
 22. St. MAŃKOWSKI (WSMW Gdynia), *Próba nowego sformułowania teorii dyszy nośnej poduszki w warunkach przepływu turbulentnego.*

Sesja VII. Przewodniczący sesji — prof. dr hab. inż. J. KRZYŻANOWSKI (IMP PAN Gdańsk).

23. W. ALBRING (Technische Universität Drezno), *Möglichkeiten physikalischer und mathematischer Beschreibung turbulenter Bewegungen,*
 24. J. ELSNER, J. ZIELIŃSKI (IMC PCz.), *Studium pól prędkości i temperatury za palisadą ciał symetrycznych,*
 25. J. NOSKIEWIČ, J. JANALIK, P. STAVA (Vysoka Skola Banská Ostrava), *Primenenie indukcionnoho metoda dlja izmerenija vremennogo i linejnogo mikromasštaba turbulentnogo potoka v krugovom truboprovode,*
 26. S. APANASEWICZ (IEL Łódź), *O pewnych statystycznych problemach teorii turbulencji,*
 27. J. KOŁODKO (IMP PAN Gdańsk), *Próba określenia najbardziej celowych z teoretycznego punktu widzenia kierunków badań doświadczalnych w dziedzinie turbulencji.*

Umieszczony w materiałach Sympozjonu referat: E. P. DYBAN i E. EPIK (Instytut Techničeskoj Teplofiziki Kiev), *Turbulentnost' v nekatorych elementach teploenergetičeskich ustanovok* nie został wygłoszony ze względu na nieobecność autorów.

W obradach uczestniczyły 103 osoby. W dyskusji wzięło udział 42 uczestników.

Obrady Sympozjonu podsumował prof. dr hab. inż. J. KRZYŻANOWSKI (IMP PAN Gdańsk), omawiając wyniki dyskusji przeprowadzonej na zebraniu przewodniczących sesji. Prof. KRZYŻANOWSKI podkreślił ogólną opinię o celowości tego typu spotkań naukowych oraz o potrzebie intensyfikacji badań z zakresu turbulencji.

Organizację następnego Sympozjonu pod hasłem «TURBULENCJA 78» proponuje się znów powierzyć ośrodkowi częstochowsko-łódzkiemu.

Ze względu na konieczność synchronizacji tej imprezy z kalendarzem innych konferencji z zakresu mechaniki cieczy i gazów, propozycja ta zostanie skonsultowana z Komitetem Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN.

J. Wilczyński (Częstochowa)

«MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH I JEJ ZASTOSOWANIA INŻYNIERSKIE» SYMPOZJUM FRANCUSKO-POLSKIE

Nicea, 30.VI. — 7.VII. 1974 r.

Sympozjum jest kontynuacją spotkań polsko-francuskich w dziedzinie mechaniki, zapoczątkowanych przez Sympozjum Polsko-Francuskie na temat reologii i mechaniki ośrodków sypkich, które odbyło się w Jabłonie, w 1972 r. Pomimo znacznie szerszej problematyki przedstawionej na Sympozjum w Nicei, strona francuska zachowała poprzednią nazwę tj. «Symposium Franco-Polonais de Rheologie et de Mecanique des Sols».

Organizatorem Sympozjum ze strony Polskiej był Komitet Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN, ze strony francuskiej odbyło się ono pod auspicjami Centre Nationale de la Recherche Scientifique.

Cele Sympozjum oraz zakres tematyki zostały nakreślone podczas rozmów i wzajemnych kontaktów grupy profesorów polskich i francuskich, głównie: prof. P. GERMAINA, J. MANDELA, J. KRAVTCZENKO oraz W. NOWACKIEGO i A. SAWCZUKA.

Celem Sympozjum miało być przedstawienie wyników dotychczasowej współpracy, a z drugiej strony szersze przedstawienie tematyki badań dla utworzenia możliwości nawiązania kontaktów w nowych kie-

runkach. Z tego względu obydwie strony wyszły znacznie poza zakres problemów przedstawionych na Sympozjum w Jablonnie.

W Sympozjum wzięło udział łącznie 58 uczestników. Grupa polska w liczbie 20 osób, reprezentowała IPPT PAN, Uniwersytet Warszawski oraz Politechniki: Warszawską, Krakowską, Gdańską, Wrocławską oraz Centrum Naukowe PAN w Paryżu. Trzon grupy francuskiej stanowili przedstawiciele Institut de Mécanique de Grenoble, Institut de Mécanique Théorique et Appliquée, Université Paris VI i Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique.

Wygłoszonych zostało łącznie 38 referatów, z czego po 18 referatów francuskich i polskich oraz 2 referaty pod wspólnym polsko-francuskim autorstwem. Referaty zostały podzielone dość umownie na 6 grup tematycznych, w ramach których zostało wygłoszonych 10 referatów problemowych.

Ponieważ pełne teksty prac mają ukazać się w formie książkowej, jako materiały pokonferencyjne w ramach wydawnictwa IPPT PAN «Biblioteka Mechaniki Stosowanej» w dalszym ciągu więc nie będą wymieniane dokładnie tytuły poszczególnych referatów — zostaną jedynie wymienieni autorzy i będzie naszkicowana tematyka.

Problemy ogólne. Tutaj został umieszczony referat generalny prof. W. NOWACKIEGO na temat metod rozwiązywania i problematyki dystorsji w mikropolarnej teorii sprężystości. C. HARTMAN (Univ. Paris VI) rozważał wpływ efektów struktury mikroskopowej na zachowanie się ośrodka mikropolarnego. P. PERZYNA (IPPT) przedstawił podstawy termodynamicznej teorii plastyczności i lepkoplastyczności materiałów napromieniowanych. B. RANIECKI (IPPT) omówił zasady wariacyjne i ograniczające nierówności w sprzężonej termoplastyczności dla procesów nieizotermicznych.

Teoria plastyczności. W referacie problemowym Z. MROZA (IPPT) omówiono zastosowanie modeli fenomenologicznych wzmocnienia plastycznego do obciążeń cyklicznych i opisu ośrodków sypkich. K. TURSKI (IPPT) przedstawił nowe wyniki w zakresie doświadczalnych badań nad warunkiem plastyczności dla metali przy obciążeniach zmiennych. J. P. BOEHLER (IM Grenoble) i A. SAWCZUK (IPPT) przedstawili uogólnienie kryteriów plastyczności Treski-Misesa i Coulomba na przypadek ortotropii cylindrycznej materiału.

Q. S. NGUYEN (Ecole Polyt.) rozważał opis płynięcia materiału ze wzmocnieniem przy użyciu parametrów wewnętrznych.

W referacie problemowym J. L. AURIAULT, J. KRAVTCHEK, R. NEGRE, R. SIBILLE (IMG) przedstawili osiągnięcia grupy z Grenoble w zakresie analitycznych metod całkowania równań teorii plastyczności w stanach płaskich i obrotowo-symetrycznych. Dwuwymiarowy problem równowagi granicznej wokół otworu kołowego w płaskim ośrodku Coulomba był badany zarówno teoretycznie jak też doświadczalnie przez grupę z Ecole Polytechnique w składzie: Y. D'ESCATHA, B. HALPHEN, J. MANDEL, P. HABIB, M. P. LUONG, J. ZARKA.

Metody obliczeniowe i zastosowania. W referacie problemowym A. SAWCZUKA (IPPT) zostały przedstawione problemy obliczenia płyt plastycznych ze zwróceniem uwagi na rozwiązania zupełne.

J. A. KÖNIG (IPPT) przedstawił zagadnienia przystosowania się konstrukcji przy obciążeniach zmiennych, a M. KLEIBER (IPPT) równania i koncepcje obliczania skończonych odkształceń konstrukcji sprężysto-plastycznych. W referacie Z. WASZCZYŻYNA (Polit. Krakowska) przedstawiono nowe modyfikacje i zastosowania metody półodwrotnej numerycznego całkowania do obliczenia konstrukcji sprężysto-plastycznych.

Referat problemowy Z. MARCINIAKA (Polit. Warszawska) dotyczył zastosowania teorii plastyczności do analizy zniszczenia blach przy formowaniu plastycznym.

P. GUELIN i P. STUTZ (IM Grenoble) zajęli się opracowaniem odpowiednich algorytmów numerycznych obliczania dużych sprężysto-plastycznych odkształceń w układzie współrzędnych sferycznych.

Możliwościami rozwinięcia prostych metod wariacyjnych i nowymi zastosowaniami ich do rozwiązania zadań teorii plastyczności zajął się G. DUVAUT (Univ. Paris VI).

M. FREMOND, A. PECHER i J. SALENÇON (Ecole Polytechn.) przedstawili zastosowanie metody elementów skończonych w połączeniu z odpowiednimi metodami iteracyjnymi do obliczania płaskich zadań teorii plastyczności.

Ośrodki sypkie. W ramach referatu problemowego W. SZCZEPIŃSKI (IPPT) przedstawił wyniki prac teoretycznych i doświadczalnych nad kinematyką ruchu i skrawania ośrodków rozdrobnionych.

Nowe wyniki badań teoretycznych nad równaniami konstytutywnymi dla materiałów rozdrobnionych przedstawił T. HUECKEL (IPPT), natomiast wyniki doświadczeń na płaskim modelu takiego materiału referował A. DRESCHER (IPPT). J. ZAWIDZKI (IPPT) omówił przepływy nieściśliwe przez kanały zbieżne.

Mechanika cieczy i polimerów. Nieliniowy problem płaski przepływu lepko-sprężystej cieczy w obszarach wyjściowych kanału był rozważany przez S. ZAHORSKIEGO (IPPT). Porównaniem wyników analitycznych z doświadczalnymi rozkładu pól prędkości zajęli się Ph. LE ROY i J. M. PIERRARD (IM Grenoble).

Podstawowe koncepcje budowania równań konstytutywnych polimerów w oparciu o analizę mechanizmów molekularnych zostały przedstawione w referacie problemowym A. ZIABICKIEGO (IPPT).

Zniszczenie, zmęczenie, mechanika skał. Obszerny przegląd prac prowadzonych w Ecole Polytechnique nad zmęczeniem i zniszczeniem materiałów i konstrukcji został przedstawiony w referacie problemowym D. BERGEZA, H. D. BUI, K. DANGA VANA, B. RADENKOVIĆA i P. HABIBA.

P. BAQUE i B. ROUCIN (Ecole des Mine) rozważali mikromechanikę inkluzji przy wyczerpaniu nośności ośrodka plastycznego.

Jedną z prób analizy naturalnej deformacji skał (paleodeformacji) przedstawił P. SIRIEYS (Univ. P. Sabatier — Toulouse). Problematyki płynięcia i zmęczenia skał dotyczył referat M. DAYRE (IMG Grenoble).

Zagadnienia kontaktowe i fundamentowanie. Referat E. DEMBICKIEGO i W. ODRABIŃSKIEGO (Politechnika Gdańska) dotyczył rozkładu obciążeń pod ciągłymi ławami fundamentowymi na podłożu niesprężystym. Oddziaływanie sąsiadujących ze sobą fundamentów posadowionych na sprężystym, uwarstwowionym podłożu było przedmiotem pracy B. CORDARY, J. P. GIROUD (IM Grenoble) oraz Cz. RYBAKA (Politechnika Wrocławska). W obydwu wymienionych referatach rozważania teoretyczne były weryfikowane doświadczalnie. Ciekawą metodę doświadczalną wyznaczania rozkładu granicy plastyczności w półprzestrzeni osiowo-symetrycznej w oparciu o wzory Hertza przedstawili J. FRELAT i J. ZARKA (Ecole Polyt.).

Teoria konsolidacji. W referacie problemowym W. DERSKI (IPPT) przedstawił podstawowe równania termokonsolidacji opartej na sprzężeniu pól temperatury i gradientu naprężeń. J. L. AURIAULT (IM Grenoble) uogólnił podstawowe koncepcje teorii konsolidacji na ośrodki dwufazowe zbudowane z materiałów prostych.

Propagacja fal. Problemem propagacji fali kulistej i dyfrakcji przez sztywną inkluzję zajęli się A. GÉRARD (Univ. Paris VI) a analizę fal powstających przez poślizg sztywnej kuli po gumowej płycie przedstawił W. BISMUTH i J. M. TATRAUX-PARO (Centre de Physique — Marseille).

W. K. NOWACKI (Centrum Naukowe PAN w Paryżu) zajął się całkowaniem numerycznym równań falowych w półpłaszczyźnie lepko-sprężysto-plastycznej, z otworem kołowym.

Metody dynamiczne przy doświadczalnym wyznaczaniu własności mechanicznych materiałów niesprężystych były przedmiotem pracy D. GUITARDA i A. VAUTRINA (Centre Sci. Universitaire — Epinal).

Referaty były przedmiotem obszernej, często bardzo ożywionej dyskusji, zarówno podczas obrad, jak też przy późniejszych spotkaniach w mniejszym gronie.

Na spotkaniach z władzami Uniwersytetu Nicejskiego (obrady odbywały się na terenie Domaine de Valrose, Université de Nice) jak też miasta Nicei, było silnie podkreślone zainteresowanie Sympozjum i rozwojem kontaktów polsko-francuskich. W spotkaniach tych uczestniczyli również przedstawiciele ambasady PRL we Francji.

Warto podkreślić sprawną organizację Sympozjum, jak też programu towarzyskiego i kulturalnego oraz serdeczną gościnność gospodarzy. Szczególnie należy podkreślić rolę profesorów Paula GERMATNA i Juliena KRAVTCZENKO w wytworzeniu miłej, przyjacielskiej atmosfery, jaka panowała podczas i poza obradami.

Przytoczone uwagi upoważniają do wysnucia wniosku, że warto kontynuować spotkania typu odbytego Sympozjonu. Spełniło ono dobrze rolę we wzajemnej wymianie informacji o prowadzonych badaniach i powinno procentować w postaci nowych prac, dalej tworzonych przez zespoły polsko-francuskie.

Przewiduje się, że następne sympozjum polsko-francuskie odbędzie się w Polsce w 1977 r.

Z. Waszczyszyn (Kraków)

VI SYMPOZJUM DOŚWIADCZALNYCH BADAŃ W MECHANICE CIAŁA STAŁEGO

W dniach 19–20.IX. 1974 r. odbyło się w Warszawie VI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego. Zostało ono zorganizowane przez Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej oraz przez Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej.

W skład Komitetu Organizacyjnego wchodziły następujące osoby: prof. dr Z. BRZOSKA (przewodniczący), dr inż. J. KAPKOWSKI (sekretarz), mgr. inż. W. MIŃSKI (sekretarz), doc. dr hab. P. JASTRZĘBSKI, prof. dr S. KOCAŃDA, doc. dr hab. J. STUPNICKI, prof. dr W. SZCZEPIŃSKI. Celem Sympozjum było zaprezentowanie najważniejszych, z naukowego i technicznego punktu widzenia, kierunków w badaniach doświadczalnych i ukazanie prac krajowych na tle najnowszych światowych tendencji w tej dziedzinie. Dla zaprezentowania metod i wyników badań prowadzonych w kraju przewidziano wygłoszenie 44 referatów, zakwalifikowanych przez Komitet Organizacyjny spośród prac zgłoszonych. Dla przedstawienia zaś aktualnych światowych kierunków rozwoju metod badań stosowanych w mechanice ciała stałego przewidziano wygłoszenie w trakcie obrad trzech referatów przeglądowych. Przedstawione uczestnikom materiały Sympozjum zawierały po raz pierwszy pełne teksty referatów, które zostały uszeregowane w następujące grupy tematyczne:

- metody badań w mechanice ciała stałego,
- zmęczenie, pełzanie, relaksacja,
- badanie ośrodków sypkich,
- badanie statyki i dynamiki konstrukcji,
- badanie stateczności konstrukcji,
- badania materiałowe.

W Sympozjum wzięło udział 226 osób, reprezentujących następujące ośrodki naukowe i przemysłowe (w nawiasach podane są liczby uczestników): Warszawa (125), Gdańsk (13), Poznań (12), Wrocław (10), Kraków (9), Częstochowa (9), Białystok (8), Gliwice (7), Kielce-Radom (7), Łódź (6), Szczecin (5), Lublin (4), Opole (3), Elbląg (3), Rzeszów (3), Gdynia (1), Bydgoszcz (1). Zwraca uwagę duża liczba uczestników reprezentujących ośrodki akademickie (156) i mała liczba uczestników reprezentujących przemysł (8). Wśród referatów zakwalifikowanych do wygłoszenia 35 pochodziło z ośrodków akademickich, 9 — z IPPT PAN, a 3 — z instytutów resortowych.

Otwierając obrady Sympozjum, przewodniczący Komitetu Organizacyjnego prof. Z. BRZOSKA powitał w imieniu Komitetu uczestników obrad. Krótkie przemówienia powitalne wygłosili również: przewodniczący Oddziału Warszawskiego PTMTS i zarazem dyrektor Instytutu Mechaniki Stosowanej PW — prof. M. DIETRICH, a także przewodniczący Zarządu Głównego PTMTS — prof. Z. KĄCZKOWSKI. Zarówno prof. M. DIETRICH, jak i prof. Z. KĄCZKOWSKI zwrócili uwagę na zaznaczającą się w kraju przewagę jakościową i ilościową prac teoretycznych nad pracami doświadczalnymi w mechanice. Nie jest to zgodne z aktualnymi tendencjami światowymi. Mechanika jest tą dziedziną naukową, która w znacznym stopniu powinna się opierać na badaniach doświadczalnych. Stwierdzając to, II Kongres Nauki Polskiej uznał za konieczne szybszy rozwój metod eksperymentalnych. W celu wyrównania dysproporcji, o których mówi uchwała II Kongresu Nauki Polskiej PTMTS prowadzi różne akcje, jak na przykład organizowanie Sympozjów Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego oraz konkursów na prace doświadczalne.

Podczas obrad Sympozjum odbyło się 6 sesji.

Sesja I. Metody badań w mechanice ciała stałego.

Sesji przewodniczył prof. W. SZCZEPIŃSKI (Warszawa), a następnie prof. J. SZMELTER (Warszawa) Wygłoszono następujące referaty:

- J. STUPNICKI (PW), *Rola i metody doświadczalnej analizy naprężeń w rozwiązywaniu współczesnych problemów mechaniki ciała stałego* (referat przeglądowy*),
- A. KICZKO, Z. ORŁOŚ, K. TOMASZEWSKI (WAT), *Przykłady wykorzystania interferometrii holograficznej w doświadczalnej analizie odkształceń,*
- Z. TERESZKOWSKI (WSI Kielce-Radom), *Doświadczalna metoda określania pracy konstrukcji cienkościennych,*
- Z. ORŁOŚ, L. SIEKLUCKI, K. TOMASZEWSKI (WAT), *Badania tensometryczne odkształceń i naprężeń własnych,*
- J. WĄSOWSKI (PW), *Badanie kształtu powłok przy pomocy map morowych,*
- E. KWAŚNIAK, J. STUPNICKI (PW), *Pomiary procesów szybko zmiennych w badaniach elastohydrodynamicznego smarowania,*

*) Referat jest wydrukowany w niniejszym numerze MTiS.

- W. GONTARZ, W. MIRSKI, J. STUPNICKI (PW), *Metoda wyznaczania rozkładu stycznych i normalnych obciążeń brzegu na podstawie wyników badań elastoptycznych*,
 R. WOJNAR (IPPT), *Zastosowanie formuły Liebmanna do opracowywania wyników badań elastoptycznych*,
 R. JĘDRZEJCZYK (PW), *Metody kompensacji a zwielokrotnianie izochrom w elastoptyce*,
 R. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHAŁSKI (IPPT), *Inwersyjna metoda badania modeli elastoptycznych z więziami sztywnymi*,
 W. JARZĘBOWSKI, Z. ORŁOŚ, K. TOMASZEWSKI (WAT), *Niektóre problemy technologii wykonywania modeli przestrzennych do badań elastoptycznych*,
 B. MICHAŁSKI (IPPT), *Modele do weryfikacji dokładności wyników trójwymiarowych badań elastoptycznych*.

W dyskusji nad referatami przedstawionymi w tej sesji w sumie zabrało głos 26 mówców.

Sesja II. Zmęczenie, pełzanie, relaksacja

Sesji przewodniczył prof. M. ZAKRZEWSKI (Wrocław), a następnie — prof. J. ZAWADZKI (Wrocław). Wygłoszono następujące referaty:

- S. KOCAŃDA (WAT), *Problemy badań prędkości rozwoju pęknięć zmęczeniowych w metalach i powierzchniowych pęknięć (referat przeglądowy)***,
 M. NOWAK, J. ZAWADZKI (PW), *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu blokowego w funkcji temperatury*,
 A. JAKOŃLUK, M. JAROCKI, W. OSIPIUK (WSI Biał.), *Wpływ wysokości stopnia naprężenia na kumulację uszkodzeń przy pełzaniu żeliwa szarego*,
 A. P. WILCZYŃSKI (PW), *Badanie pełzania przy użyciu metod kontaktowych*,
 J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ (PK), *Zjawiska cieplne, dylatacyjne i optyczne towarzyszące relaksacji naprężenia w gumach*,
 A. JAKOŃLUK, M. CZECH (WSI Biał.), *Wpływ stabilizacji mechanicznej na relaksację preszpanu transformatorowego*.

W dyskusji nad referatami przedstawionymi w tej sesji w sumie zabrało głos 21 mówców.

Sesja III. Badanie ośrodków sypkich

Sesji tej przewodniczył prof. A. JAKOŃLUK (Białystok). Wygłoszono następujące referaty:

- A. DRESCHER (IPPT), *Laboratoryjne metody doświadczalne w mechanice ośrodków rozdrobionych (referat przeglądowy)*,
 H. GAWDA, A. ZDANOWICZ (AR Lubl.), *Badanie odkształceń w gruntach metodą ultradźwiękową*,
 A. BOLT, E. DEMBICKI, W. CICHY, W. ODROBIŃSKI, A. TEJCHMAN, B. ZADROGA (PG), *Badania modelowe podłoża obciążonego fundamentem*,
 E. GŁASKA (IPPT), *Badanie anizotropii własności plastycznych ośrodków sypkich zmodyfikowanym aparatem bezpośredniego ścinania*,
 A. DRESCHER (IPPT), *Zastosowanie elastoptyki do badania własności mechanicznych ośrodków sypkich*.

W dyskusji nad referatami przedstawionymi w tej sesji w sumie zabrało głos 17 mówców.

Sesja IV. Badanie statyki i dynamiki konstrukcji

Sesji tej przewodniczył prof. Z. KĄCZKOWSKI (Warszawa). Wygłoszono następujące referaty:

- J. LIETZ (IPPT), *Elastoptyczne badanie warstwy ścisłkanej*,
 J. KAPKOWSKI (PW), *Propagacja obszarów plastycznych przy obciążeniach powtarzalnych*,
 J. KINOWSKI (I. Lot.), *Badania rozrządu silników czterosuwowych*,
 H. KOPECKI, M. KOPKOWICZ, J. WALCZAK (WSI Rzeszów), *Elastoptyczne badanie modelowe rozkładów naprężeń w zamkach łopatek turbin silników przepływowych*,
 A. BUTT-HUSSAIN (I. Lot), *Charakter zależności spiętrzania odkształceń od wymiarów karbu konstrukcyjnego i poziomu naprężenia nominalnego w laminacie ortotropowym*,

** Referat ukaże się drukiem w MTiS, 13, 3 (1975).

W. KOWALSKI, Z. ORŁOŚ, M. SZOPA, K. TOMASZEWSKI (WAT), *Elastoptyczne badania modeli zbiorników ciśnieniowych*,

K. GRABCZYŃSKI, A. SZWARANOWICZ (IT Bud. W-wa), *Badania modelowe wiaduktu Trasy Łazienkowskiej*,
A. BLUM, A. SIEMIENIĘC (AGH), *Tensometryczne badania składowych sił wewnętrznych kratowego dźwigarą skrzynkowego*,

J. KUBISSA (PW, Płock), *Wpływ sprężania na wytrzymałość połączenia klejowego*.

W dyskusji nad referatami przedstawionymi w tej sesji w sumie zabrało głos 24 mówców.

Sesja V. Badanie stateczności konstrukcji

Przewodniczącym tej sesji był prof. T. OPOLSKI (Częstochowa). Wygłoszono następujące referaty:

P. JASTRZĘBSKI, S. WICHNIEWICZ (PW), *Analiza doświadczalna stateczności niesprężystej ściskanych osiowo prętów i powłok o przekroju pierścieniowym*,

J. MISIAK, J. DREWNIĄK (PW), *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów ramowych dwupasmowych prostokątnych*,

C. MICKIEWICZ, R. WOJTASZEWSKI (PSz), *Badanie doświadczalne stateczności powłok w kształcie paraboloidy hiperbolicznej wykonanych z trapezowych blach faldowych*.

W dyskusji nad tymi referatami zabrało głos 10 mówców.

Sesja VI. Badania materiałowe

Przewodniczącym sesji był prof. S. KOCANĀDA (Warszawa). Wygłoszono następujące referaty:

R. MARJANOWIĆ NIŻ (Jugosławia), W. SZCZEPIŃSKI (IPPT) *Dwuosiowe cykliczne obciążenie mosiądzu M-63; zachowanie się powierzchni plastyczności*,

M. WOLNA (IPPT), *Badanie własności elastoptycznych kompozycji żywic epoksydowych i epoksydowanych oligoestrów*,

B. KUBICKI (PW), *Badanie energii niszczenia w strukturze nieciągłej*,

J. WOJNAROWSKI, K. WYLEŻYCH (P. Śl.), *Nowa metoda pomiaru własności tłumieniowych gumy*,

F. RUDOL (PK), *Określenie właściwości mechanicznych na podstawie kształtu odcisku stożka*,

S. BALICKI, S. DYSZY (P Cz.), *Próba szybkiej oceny tworzyw w oparciu o naprężenia ścinająco-ściskające*,

F. BIEDA (WAT), *Ilościowe określenie zużycia łożysk tocznych smarowanych smarami plastycznymi*,

A. JAKOWLUK, M. DUDZIAK, J. KOŁYBKO (WSI Biał.), *Wpływ parametrów wymuszenia na moduły dynamiczne pasa klinowego przy rozciąganiu*.

W dyskusji nad referatami przedstawionymi w tej sesji w sumie zabrało głos 18 mówców.

Na zakończenie Sympozjum przewodniczący Komitetu Organizacyjnego prof. Z. BRZOSKA wygłosił krótkie przemówienie, w którym podsumował wyniki obrad. Stwierdził między innymi, że podczas obrad VI Sympozjum dało się zauważyć znacznie żywszą dyskusję i wymianę informacji niż na poprzednich sympozjach. Taka wymiana informacji, podczas obrad sympozjów, jest jednak zbyt rzadka. Sprawy badań doświadczalnych powinny znaleźć bieżące odbicie, np. w formie krótkich komunikatów na łamach jednego z czasopism zajmujących się problemami mechaniki.

Referaty przedstawione na Sympozjum świadczą, że nowoczesne metody badań doświadczalnych (metoda warstwy optycznie czynnej, metoda rastrów, holografia i in.) znajdują zastosowanie w pracach krajowych ośrodków naukowych. Jednak jest ono niewielkie. Najgorsza sytuacja pod tym względem istnieje w przemyśle, gdzie metody te są prawie nieznanne. Również mało popularne są one w instytutach resortowych. Opóźnienie krajowej techniki pomiarowej w stosunku do przodujących ośrodków zagranicznych wynosi 10-15 lat. Należy więc dążyć jak najszybciej do zmniejszenia tego opóźnienia. W znacznym stopniu powinno się do tego przyczynić VI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego.

Na zakończenie swego wystąpienia prof. Z. BRZOSKA serdecznie podziękował w imieniu Komitetu Organizacyjnego wszystkim uczestnikom, a szczególnie autorom referatów i dyskutantom. Szczególnie gorąco podziękowania złożył p. H. ROŚIŃSKIEJ, która włożyła wiele pracy w przygotowanie sprawnego przebiegu Sympozjum. Także serdeczne podziękowanie złożył prof. BRZOSKA od siebie dla pozostałych członków Komitetu Organizacyjnego.

T. Szopa (Warszawa)

SPRAWOZDANIE
z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej
za II i III kwartał 1974 r.

I. Zebrania Naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyły się 23 zebrania naukowe, na których wygłoszono 32 referaty o następującej tematyce

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	L i c z b a	
				Uczest- ników	Dysku- tantów
1	2	3	4	5	6
Oddział w Bydgoszczy					
1.	09.04.74	E. Walicka	Przepływ ściśliwego płynu lepkiego w szczelinie między wirującymi powierzchniami krzywoliniowymi,	14	4
2.	09.04.74	B. Siolkowski	Wyżęzenie materiału w płaszczyźnie pieców obrotowych,	14	8
3.	16.05.74	T. Kabat	Analogie fizyczne w mechanice układów sprężystych,	14	5
4.	25.09.74	T. Sauter	Przegląd nowych rozwiązań mechanicznych z dziedziny transportu wewnętrznego,	19	6
Oddział w Częstochowie					
5.	06.04.74	K. Kleja	Aktualne zagadnienia badań wytrzymałości ruchowej elementów maszyn,	24	3
6.	27.06.74	St. Piechnik	Pełzanie prętów przy obciążeniu łącznym,	19	4
Oddział w Gdańsku					
7.	02.05.74	P. Wilde	Przemówienie okolicznościowe dla uczczenia 250-lecia Akad. Nauk w ZSRR,	17	4
8.	02.05.74	A. Sawicki	Z zagadnień hydrosprężystości płyt,		
9.	16.05.74	Wł. Gawroński	Wpływ błędów pomiarowych i wariacji parametrów układu na częstość drgań własnych,	16	5
Oddział w Gliwicach					
10.	02.04.74	W. Derski	O mechanice ośrodków porowatych,	28	5
11.	21.05.74	M. Baran	Krajowa energetyka roku 2000,	26	4
12.	11.06.74	K. Kutarba	Problemy konstrukcji i budowy turbin parowych wielkiej mocy dla elektrowni jądrowych,	34	6

1	2	3	4	5	6
Oddział w Krakowie					
13.	22.05.74	St. Mazurkiewicz	Badanie procesów relaksacyjnych w poliamidzie,	18	6
14.	22.05.74	G. Szefer	Sprawozdanie z udziału w pracach Szkoły Matematycznej im. Banacha,		
Oddział w Łodzi					
15.	09.05.74	E. Kącki	O pewnym algorytmie optymalizacji tłumienia drgań belki,	11	2
	10.05.74	Zebranie naukowe nt. „Holografia i jej zastosowanie w technice”.		40	4
Wygłoszono referaty:					
16.		R. Pawluczyk	Interferometria holograficzna obiektów nieprzezroczystych,		
17.		R. Pawluczyk	Zasady holografii,		
18.		E. Mróz	Zastosowanie techniczne zjawiska plamkowania,		
	31.05.74	cd. zebrania naukowego nt. „Holografia i jej zastosowanie w technice”.		42	5
19.		M. Daszkiewicz	Elastoptyka holograficzna,		
20.		W. Chabroz	Analiza deformacji metodą prążków moiré,		
21.	28.06.74	B. Roth (Stanford University, USA)	Mechanika robota III generacji,	22	6
Oddział w Poznaniu					
22.	09.04.74	J. Perz	Zagadnienie stateczności tarczy kołowej z promieniowymi rozcięciami,	12	5
23.	08.05.74	J. Stefaniak	Płaskie źródła zaburzeń w nieograniczonych ośrodkach sprężystych,	29	4
24.	31.05.74	E. Wall	Uwagi o wyważaniu elementów mocowanych mimośrodowo,	18	5
Oddział w Szczecinie					
25.	24.04.74	Prof. Lawendel (Politechnika Ryska)	Synteza optymalna maszyn i mechanizmów,	27	5
26.	25.04.74	M. Mielczarek	Badanie i ocena stanu obciążenia przekładni zębatej w ujęciu systemowym,	12	8
27.	26.04.74	Prof. Lawendel	Obliczanie elementów z tworzywa o wysokiej elastyczności,	22	5
28.	17.05.74	J. Głomb	Współczesne problemy w mostownictwie,	26	5
29.	28.06.74	K. Grudziński	Metodyka analityczna wyznaczania stanu obciążenia prowadnic frezarek,	20	5

1	2	3	4	5	6
		Oddział w Warszawie			
30.	06.05.74	Zebrań Okrągłego Stołu (wolnodyskusyjne), Z. Brzoska	Stateczność w mechanice,	42	22
		Oddział we Wrocławiu			
31.	06.05.74	P. Konderla	Zagadnienie nieliniowości w powłokach obrotowych.	21	9

II. Sympozja

1. Oddział w Częstochowie zorganizował w dniach 20—22 czerwca 1974 r. Ogólnopolski Sympozjon na temat «Doświadczalne badania przepływów turbulentnych». Sprawozdanie z tego sympozjonu jest zamieszczone oddzielnie.

2. Oddział w Krakowie zorganizował w dniach 25—27 kwietnia 1974 r. Sympozjum na temat «Konstrukcje powłokowe — teoria i zastosowania». Współorganizatorami Sympozjum byli: Sekcja Mechaniki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Instytut Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej oraz Komisja Mechaniki Stosowanej Krakowskiego Oddziału PAN. W Sympozjum uczestniczyło 160 osób, w dyskusji wzięło udział 40 osób.

Wygłoszono 40 następujących referatów:

1. Cz. WOŹNIAK, *Podstawy nieliniowej mechaniki powłok*,
2. W. PIETRASZKIEWICZ, *Nieliniowe teorie powłok sprężystych*,
3. R. DĄBROWSKI, *Inżynierskie metody w teorii powłok*,
4. J. ORKISZ, Z. WASZCZYŻYN, *Metody komputerowe w teorii powłok*,
5. S. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSZKOWSKI, *Metody geometryczne w nieliniowej teorii powłok*,
6. M. ŻYCZKOWSKI, *Zagadnienia optymalizacji teorii powłok*,
7. S. JONIAK, *Wyznaczanie postaci funkcji ugięcia po utracie stateczności powłoki stożkowej w drodze doświadczalnej*,
8. J. FILIPKOWSKI, J. FALKOWSKI, *Badanie modelowe połączeń rurociągów*,
9. R. ŁĄCZKOWSKI, *Badania konstrukcji powłokowych na modelach ze szkła organicznego*,
10. A. OLEŚNIEWICZ, *Badania na modelu i w skali naturalnej lupinowego przekrycia szedowego o rozpiętości 52 m*,
11. L. KONIECZNY, *Inżynierskie zastosowania teorii powłok w projektowaniu konstrukcji okrętowych*,
12. K. KOZŁOWSKI, *Metody obliczeń drgań własnych powłok stosowane w przemyśle okrętowym*,
13. J. SZULC, *Stalowe belki powłokowe*,
14. Cz. RYSZEWSKI, *Aktualne problemy projektowania dużych powłokowych chłodni kominowych*,
15. R. KAŁUŻA, O. MATEJA, *Niektóre problemy statyki powłokowych chłodni kominowych przy nierównomiernym przemieszczeniu ich dolnego brzegu*,
16. W. SZYC, F. TWARDOSZ, *Zagadnienie deformacji powłoki walcowej pod wpływem ruchomych obciążeń*,
17. J. ZIELNICA, *Zagadnienie wybożenia powłoki stożkowej obciążonej siłami podłużnymi i poprzecznymi poza granicę sprężystości*,
18. S. BUĆKO, A. ZIELIŃSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Zastosowanie podwójnych szeregów Fouriera do obliczania dowolnie obciążonych utwierdzonych powłok walcowych*,
19. Z. GŁAŻEWSKI, *Stateczność powłok obrotowych z uwzględnieniem odkształceń w płaszczyznach prostopadłych do powierzchni środkowej*,

20. E. PYTEL, *Wpływ pełzania materiału w zakresie podkrytycznym na stateczność ściskanej powłoki walcowej z osiowo-symetryczną niedokładnością kształtu,*
21. J. MURZEWSKI, *Problemy teorii losowej nośności powłok,*
22. E. BIELEWICZ, *Wpływ odchyłki geometrycznych i obciążeń losowych w teorii powłok sprężystych,*
23. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w powłokach,*
24. J. LAMPARSKI, *Konstrukcje powłokowe w lotnictwie,*
25. B. LISOWSKI, *Architektura konstrukcji powłokowych,*
26. J. LEDWOŃ, *Konstrukcje powłokowe w inżynierii lądowej i wodnej,*
27. Cz. EIMER, *Projektowanie sprężenia powłok i zastosowanie w obliczeniach obudowy reaktorów jądrowych,*
28. J. GIERLIŃSKI, A. KÖNIG, *Statyka prętowych powłok strukturalnych,*
29. M. DACKO, J. SZMELTER, *Analiza statyczna układów powłokowo-prętowych metodą elementów skończonych,*
30. J. SZMELTER, M. WIECZOREK, *Graficzne przedstawienie wyników obliczeń w konstrukcjach powierzchniowych,*
31. S. DOBROCIŃSKI, M. SUWALSKA, *Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania cienkich powłok osiowo-symetrycznych,*
32. P. KONDERLA, *Nieliniowe rozwiązanie powłoki o kształcie hiperboloïdy jednowłokowej,*
33. Cz. BRANICKI, M. SKOWRONEK, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy statycznej cienkich powłok walcowych,*
34. Cz. BRANICKI, P. TUPAMAKI, E. MELERSKI, M. SKOWRONEK, *Numeryczna analiza wolno podpartych układów tarczownicowo-powłokowych,*
35. A. SAWCZUK, *Teoria powłok plastycznych,*
36. M. KLEIBER, *Ogólna teoria powłok sprężysto-plastycznych,*
37. J. POROWSKI, *Niektóre zagadnienia projektowania konstrukcji powłokowych w aparaturze chemicznej,*
38. Z. BYCHAWSKI, *Problemy reologii powłok i jej zastosowań,*
39. Sz. BORKOWSKI, *Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termodynamiki powłok,*
40. Z. DŻYGADŁO, *Zagadnienie aerosprężystości w teorii powłok.*

3. Oddział w Poznaniu zorganizował w dniach 6 i 7 września 1974 r. VI Sympozjum nt. «Drgania w układach fizycznych». Sprawozdanie z tego sympozjum będzie zamieszczone oddzielnie (Biul. Inf. MTiS nr 2/75).

III. Kursy

Oddział w Częstochowie przeprowadził kurs nt. «Powstawanie i rozwój pęknięć (zmęczeniowych)». Kurs odbył się w okresie kwiecień—czerwiec 1974 r. Liczba słuchaczy wynosiła 40 osób. Tematyka wykładów była następująca:

1. Prof. dr M. SOKOŁOWSKI, *Matematyczne metody badania warunków powstawania i rozwoju pęknięć,*
2. Prof. dr M. ZAKRZEWSKI, *Elementy mechaniki pęknięć,*
3. Doc. dr L. GOŁASKI, *Fizyczny obraz pęknięć zmęczeniowych,*
4. Dr W. BŁAŻEWICZ, *Prędkość rozwoju pęknięć zmęczeniowych,*
5. Dr J. KOZUBOWSKI, *Elektrooptyczne badania mikrofraktograficzne.*

Kurs był zorganizowany wspólnie z Instytutem Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Częstochowskiej.

IV. Działalność wydawnicza

1) W okresie sprawozdawczym ukazały się dwa zeszyty MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ — nr 2 o objętości 7,5 arkusza wydawniczego i nr 3 o objętości 16,25 arkusza wydawniczego.

2) Oddział w Gliwicach wydał sprawozdanie z okazji 16-lecia istnienia Oddziału PTMTS w Gliwicach. Objętość wydawnictwa wyniosła 67 stron. Koszty druku materiałów pokryto z dotacji Politechniki Śląskiej.

3) Oddział w Poznaniu wydał techniką małej poligrafii materiały na VI Sympozjum nt. «Drgania w układach fizycznych». Materiały zawierały streszczenia referatów wraz z niezbędnymi wzorami i rysunkami, opracowane i wydane bardzo starannie.

V. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje następująca tablica:

Lp.	Oddział	Stan na koniec I kw. 1974 r.	Stan na koniec III kw. 1974 r.	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozd.
1.	Bydgoszcz	19	20	+1
2.	Częstochowa	36	37	+1
3.	Gdańsk	49	50	+1
4.	Gliwice	114	120	+6
5.	Kraków	68	73	+5
6.	Łódź	39	39	—
7.	Poznań	53	57	+4
8.	Rzeszów	11	11 ^{*)}	—
9.	Szczecin	31	31	—
10.	Warszawa	229	211 ^{**)}	-18
11.	Wrocław	64	64	—
	Razem:	713	713	—

*) Dane z poprzedniego okresu.

***) Liczba członków zmniejszyła się na skutek skreślenia osób zalegających z opłatą składek.

W okresie sprawozdawczym odbył się Zjazd Delegatów PTMTS. Ponadto odbyły się dwa zebrania Zarządu Głównego Towarzystwa, jedno zebranie Głównej Komisji Rewizyjnej oraz 43 zebrania organizacyjne w Oddziałach.

XVI POLSKA KONFERENCJA MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO

Szesnasta Polska Konferencja Ciała Stałego odbyła się w Krynicy w dniach od 26 sierpnia do 3 września 1974 r. Tematyka konferencji dotyczyła różnorodnych zagadnień mechaniki ośrodka ciągłego i jej zastosowań: teorii sprężystości, lepkosprężystości, plastyczności, teorii dyslokacji, zagadnień termicznych, dynamicznych, optymalizacji, metod numerycznych i in. Przedstawiano prace od czysto teoretycznych aż po ściśle stosowane.

W konferencji, oprócz specjalistów polskich, wzięło udział wielu uczestników z zagranicy, spośród których można wymienić takie nazwiska, jak prof. Ch. MASSONNET z Francji, prof. E. STERNBERG i prof. P. S. SYMONDS z USA, prof. J. D. CAMPBELL z Wielkiej Brytanii, prof. H. LIPPMANN z RFN i inni. Ogólna liczba uczestników — 205, w tym 65 gości zagranicznych. Spośród uczestników polskich było 65 uczestników z IPPT PAN.

Wygłoszono 114 referatów w tym 8 referatów generalnych. Odbyła się również dyskusja «panelowa» na temat *Rola eksperymentu w formułowaniu równań konstytutywnych*. Ramowy program konferencji przedstawiał się następująco:

Data	Sesja przedpołudniowa		Sesja popołudniowa			
	Referat generalny	Liczba referatów	Sesja A		Sesja B	
			Tytuł sesji	Liczba referatów	Tytuł sesji	Liczba referatów
26.08.	W. Nowacki Problemy termodyfuzji w ciałach stałych	8	Sprężystość	4	Lepkosprężystość	5
27.08.	P. S. Symonds Metody szacowania niesprężystych deformacji konstrukcji obciążonych impulsami	6	Kompozyty	3	Problemy dynamiczne i falowe	4
28.08.	B. Nayrolles Syntetyczne streszczenie prac J. T. Moreau na temat procesów w ciałach sprężysto-plastycznych	6	Płyty i powłoki	5	Plastyczność	6
29.08.	H. Lippmann Zasady ekstremalne i wariacyjne w plastyczności	7	Metody stochastyczne	3	Nośność graniczna	5
30.08.	J. D. Campbell Efekty termiczne i prędkościowe w plastyczności metali	8	Ciała z więzami Dyslokacje	6	Elementy skończone	8
31.08.	W. Szczepiński O problemach mechaniki kruszenia skał	7	Metody eksperymentalne	3	Wyboczenie	6
2.09.	Ch. Massonnet Mechanika konstrukcji i optymalizacja	5	Optymalizacja	4	Przepływy	5
3.09.	E. Sternberg O asymptotach deformacji i naprężeń na końcach szczeliny w zagadnieniach statycznych	4				

Goście zagraniczni wygłosili 41 referatów (w tym 6 generalnych), uczestnicy polscy — 73, w tym z IPPT — 37.

Następna, siedemnasta konferencja odbędzie się w Szczyrku w dniach 2—8 września 1975 r.

A. König (Warszawa).

KOMUNIKAT

O KONKURSACH NAUKOWYCH PTMTS W ROKU 1975

Oddział PTMTS w Gliwicach zgłosił gotowość zorganizowania ogólnopolskiego konkursu na prace doświadczalne z zakresu mechaniki.

Oddział PTMTS w Łodzi zgłosił gotowość zorganizowania ogólnopolskiego konkursu na prace teoretyczne z zakresu mechaniki.

Szczegóły dotyczące obu konkursów zostaną podane w terminie późniejszym.

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- W. NOWACKI, Termodyfuzja w ciele stałym
Термодиффузия в твердом теле
Thermodiffusion in solids
- A. GRIGORIAN, B. FRANDLIN, Rozwój mechaniki analitycznej w pracach A. Przeborskiego i A. Wundheilera
Развитие аналитической механики в трудах А. Пшеборского и А. Вундхейлера
Contribution of A. Przeborski and A. Wundheiler to the development of analytical mechanics
- W. WODZICKI, Drgania maszyn o korpusach odkształcalnych podpartych elastycznie na podatnej konstrukcji
Вибрации машин с деформируемыми корпусами закрепленных на податливой конструкции посредством упругих элементов
Vibration of machines with deformable bodies elastically supported on flexible structures
- S. MATYSIAK, Płaskie zagadnienie kontaktowe w niesymetrycznej teorii sprężystości
Плоские контактные задачи в несимметрической теории упругости
Plane contact problem of non-symmetric elasticity
- J. KUBIK, Jednowymiarowe dynamiczne pole naprężeń cieplnych wywołane ruchomym polem temperatury
Одномерное динамическое поле термических напряжений вызванных подвижным температурным полем
One-dimensional dynamic thermal stress field due to a moving temperature field
- J. NIŻIOŁ, A. MARTYNUSKI, Zastosowanie tłumików Stockbridge'a do tłumienia drgań belek i strun
Применение демпферов Стокбриджа для демпфирования колебаний балок и струн
Application of Stockbridge dampers to the damping of string and beam vibrations
- J. MIĄSTKOWSKI, Metodyka statycznych badań doświadczalnych plastycznego płynięcia metali
Методика статических экспериментальных исследований пластических деформаций металлов
Methods of static experimental studies of plastic flow of metals
- J. WIAŁKIEWICZ, Teoretyczna analiza procesu wyciskania rury
Теоретическое исследование процесса выдавливания трубы
Theoretical analysis of the pipe extrusion process
- J. MARYNIAK, Z. GORAJ, Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu i oscylacje steru
Влияние жесткости и демпфирования в системе управления рулем высоты на продольную устойчивость самолета и на осцилляции руля
Influence of stiffness and damping in the elevator control system on longitudinal stability of an aircraft and vibrations of an elevator
- B. WOSIEWICZ, W sprawie macierzy sztywności i wektora obciążeń superelementu
К вопросу о матрице жесткости и векторе нагрузок сверхэлемента
To the problems of stiffness matrix and load vector of a superelement

BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Prenumeratory indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter), 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
