

y11720
-
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



**M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A**

KWARTALNIK

TOM 15 · ZESZYT 4

WARSZAWA 1977

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

52

SPIS TREŚCI

N. J. CYGANOWA, Uogólnione postacie wariacyjnych zasad mechaniki w pracach z końca XIX i początku XX wieku Обобщенные формы дифференциальных вариационных принципов механики в исследованиях конца XIX, первой четверти XX века Generalized forms of variational principles of mechanics at the end of the XIXth and beginning of the XXth century	403
E. WALICKI, Wpływ sił bezwładności na przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi: nieruchomą i wirującą Влияние сил инерции на течение вязкой жидкости в щели между неподвижной и вращающейся поверхностями вращения Inertia effect in the flow of viscous fluid through a slot between fixed and rotating surfaces of revolution	419
K. WYŁĘŻYCH, Lepkosprężyste charakterystyki gumy i tulejowych gumowo-metalowych łączników »typu silentblock« Вязкоупругие характеристики резины и резино-металлических блок-шарниров типа »сайлент-блок« Viscoelastic characteristics of rubber and flexible bushes of the silentblock type	427
J. KOLENDĄ, O przybliżonych metodach rozwiązania nieliniowych równań ruchu elastycznie posadowionych silników tłokowych О приближенных методах решения нелинейных уравнений движения амортизированных поршневых двигателей On approximate solution methods of the non-linear motion equations of elastically mounted piston engines	449
T. LISZKA, W. ŚWISTERSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Optymalne kształtowanie belek hiperstatycznych na drodze analitycznej i badań elastoоптычных Оптимальное проектирование статически неопределимых балок путем расчета и фотоупругих испытаний Optimum design of statically indeterminate beams by analytical and photo-elastic methods	463
M. CIAŁKOWSKI, Sumowanie niektórych szeregów Bessela-Fouriera występujących w zagadnieniach przewodnictwa ciepłego Суммирование некоторых рядов Бесселя-Фурье выступающих в задачах теплопроводности Summation of certain Fourier-Bessel series occurring in heat transfer problems	475
A. LIŁEWKA, Niestowarzyszone prawo płynięcia anizotropowych plastycznie stopów aluminium Неассоциированный закон течения для анизотропных алюминидовых сплавов Non-associated flow law for plastically anisotropic aluminium alloys	491
Z. GORAJ, J. MARYNIAK, Z. PATURSKI, M. ŻŁOSKA, Stateczność boczna w czasie dobiegu lądującego samolotu sportowego Боковая устойчивость спортивного самолета движущегося по земле после посадки The lateral stability of sports aircraft during landing run	501
A. ZMITROWICZ, Tensor tarcia Coulomba Тензор трения Куломба Tensor of Coulomb friction	517

cd. na s. III okładki

y11.720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 5 · Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 7 7

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИОННЫЙ

JERZY ANTONIAK — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
ANDRZEJ DRESCHER — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

РЕДАКЦИЯ

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

UOGÓLNIONE POSTACIE WARIACYJNYCH ZASAD MECHANIKI
W PRACACH Z KOŃCA XIX I POCZĄTKU XX WIEKU

N. J. CYGANOWA (WOLGOGRAD)

1. Uogólnione postacie wariacyjnych zasad mechaniki związane z uogólnieniem pojęcia
potencjału kinematycznego

W pracy KÖNIGSBERGERA [1] z 1897 r. zostały przedstawione zasady mechaniki w postaci wynikającej z uogólnienia definicji potencjału kinetycznego. Badania KÖNIGSBERGERA zostały zainspirowane pracami HELMHOLTZA. W pracy pt. *O fizycznej interpretacji zasady minimum działania* [2] oraz w *Wykładach dynamiki dyskretnych punktów materialnych* [3] HELMHOLTZ zrezygnował z charakterystycznego dla mechaniki założenia, że energia kinetyczna jest jednorodną kwadratową funkcją prędkości, a energia potencjalna zależy tylko od współrzędnych punktu (i czasu). Celem takiego postępowania było jednolite mechanistyczne ujęcie termo- i elektromechaniki.

Różnicę energii potencjalnej i kinetycznej, czyli podstawową funkcję Hamiltona, HELMHOLTZ nazwał potencjałem kinetycznym. Potencjał ów $H = V - T$ w ujęciu HELMHOLTZA może być dowolną funkcją uogólnionych współrzędnych, prędkości i czasu.

Uzupełniając H dodatkowymi członami, odpowiadającymi siłom zewnętrznym, HELMHOLTZ zapisał zasadę Hamiltona i odpowiednie równania Lagrange'a drugiego rodzaju w postaci uogólnionej

$$(1) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(H + \sum_{i=1}^k Q_i q_i \right) dt = 0,$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i.$$

We wzorach tych Q_i oznacza uogólnioną reakcję poruszającego się układu na zmianę współrzędnych q_i .

KÖNIGSBERGER posunął się jeszcze dalej niż HELMHOLTZ w uogólnianiu potencjału kinetycznego, zakładając go w postaci dowolnej funkcji czasu, współrzędnych i ich pochodnych po czasie. Wynikiem tego były uogólnione postacie różniczkowych i całkowych twierdzeń wariacyjnych.

Uogólniona zasada d'Alemberta-Lagrange'a ma postać

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{3n} \left[\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \ddot{x}_k} \right) - \dots + (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}} \left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} \right) - X_k \right] \delta x_k = 0,$$

gdzie H jest kinetycznym potencjałem — daną funkcją czasu, współrzędnych i ich pochodnych po czasie (do ν -tej włącznie), X_k są danymi funkcjami czasu i współrzędnych, a δx_k — wirtualnymi przemieszczeniami, które spełniają równania holonomicznych i liniowych nieholonomicznych więzów

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{3n} a_{rk} \delta x_k = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, l).$$

Z zasady (2) i równań (3) otrzymuje KÖNIGSBERGER za pomocą mnożników nieokreślonych uogólnione równania Lagrange'a pierwszego rodzaju dla holonomicznych i liniowych nieholonomicznych układów:

$$(4) \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k} \right) + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} \right) - X_k + \sum_{r=1}^l \lambda_r a_{rk} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, 3n),$$

oraz uogólnione równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla układów holonomicznych:

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \ddot{q}_i} \right) - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}} \right) + Q_i = 0.$$

We wzorze tym

$$Q_i = - \sum_{k=1}^{3n} X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

jest funkcją czasu i uogólnionych współrzędnych q_i .

W przypadku zwykłego potencjału kinetycznego równania (5) utożsamiają się z uogólnionymi równaniami Lagrange'a (1).

KÖNIGSBERGER otrzymał również uogólnioną zasadę minimum wymuszenia dla układów holonomicznych. Uogólniona definicja wymuszenia ma postać

$$(6) \quad Z = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{-\frac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(2\nu)}}} \left[\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k} \right) + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} \right) - X_k \right]^2.$$

Wymuszenie Z traktowane jest jako funkcja wielkości $x_k^{(2\nu)}$ przy ustalonych $x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{(2\nu-1)}$, lub odpowiednio funkcja wielkości $q_i^{(2\nu)}$ przy ustalonych $q_i, \dot{q}_i, \dots, q_i^{(2\nu-1)}$. Zakładając, że potencjał kinetyczny H jest całkowitą funkcją zmiennych $x_k^{(\nu)}$, nie zawierającą ich pochodnych, czyli

$$(7) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)} \cdot \partial x_\sigma^{(\nu)}} = 0, \quad \varrho \neq \sigma,$$

otrzymujemy

$$(8) \quad (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial q_i^{(2\nu)}} = \sum_{k=1}^{3n} \left[\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k} \right) + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} \right) - X_k \right] \frac{\partial x_k^{(2\nu)}}{\partial q_i^{(2\nu)}}.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial x_k^{(2\nu)}}{\partial q_i^{(2\nu)}} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i},$$

można sprowadzić równanie (8) do postaci

$$(-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial q_i^{(2\nu)}} = \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \right) + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}} \right) + Q_i,$$

z której na podstawie uogólnionych równań Lagrange'a (5) wynika, że

$$\frac{\partial Z}{\partial q_i^{(2\nu)}} = 0.$$

Zatem dla wartości $q_i^{(2\nu)}$ określonych za pomocą uogólnionych równań Lagrange'a (przy ustalonych $q_i, \dot{q}_i, \dots, q_i^{(2\nu-1)}$) i odpowiadających im wartości $x_k^{(2\nu)}$ (przy ustalonych $x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{(2\nu-1)}$) funkcja Z osiąga punkt ekstremalny. Jeżeli wszystkie pochodne $\partial^2 H / \partial x_k^{(\nu)2}$ są ujemne, to punkt ten odpowiada minimum Z , ponieważ Z jest wówczas dodatnie. W przypadku, gdy H jest zwykłym potencjałem kinetycznym, twierdzenie powyższe utożsamia się z zasadą minimum wymuszenia sformułowaną przez Gaussa. Z powyższego dowodu uogólnionej zasady minimum wymuszenia wynika, że jest ona odpowiednikiem uogólnionych równań Lagrange'a drugiego rodzaju.

2. Modyfikacja zasady Gaussa w «Mechanice» Macha

Analityczna postać zasady minimum wymuszenia we współrzędnych holonomicznych osiągnęła kształt ostateczny w wyniku badań uczonych austriackich A. WASSMUTA, E. SCHENKELA i P. LEITINGERA. Jednak owe prace, jak również wcześniejsze badania uczonych niemieckich i rosyjskich, poświęcone są zwykłej gaussowskiej postaci tej zasady. Dopiero w «Mechanice» MACHA [4] po raz pierwszy pojawia się propozycja modyfikacji twierdzenia przez odrzucenie części więzów układu. Chociaż MACH nie podał analitycznej postaci swej propozycji i zajmował się jedynie więzami holonomicznymi, to jednak jego pomysł stanowi ważne osiągnięcie austriackiej szkoły mechaniki, dające impuls do dalszych uogólnień.

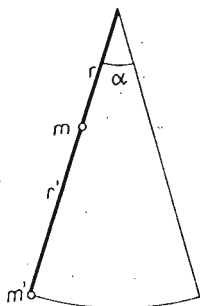
W «Mechanice» MACHA porównywane są odchylenia ruchów rzeczywistego i wirtualnego nie od ruchu swobodnego, jak u Gaussa, lecz od ruchu będącego wynikiem odrzucenia części więzów układu punktów materialnych. «Każdy z nowo wprowadzonych więzów — pisze Mach — zwiększa odchylenie sumaryczne, lecz wzrost ów jest zawsze minimalny ... Jeżeli zwiążemy ze sobą dwa lub kilka układów, to ruch będzie się odbywał z minimalnym odchyleniem od ruchów poszczególnych podukładów. Na przykład, jeżeli zbudujemy wahadło liniowe z kilku zwykłych wahadeł to ruch wahadła złożonego będzie wykazywał najmniejsze odchylenie od ruchów poszczególnych wahadeł» [4].

Na podstawie tak zmodyfikowanej zasady Gaussa, oblicza MACH przyśpieszenia wahadła złożonego.

«Przy odchyleniu α zwykle wahadło wykazuje przyśpieszenie $g \sin \alpha$. Jeżeli $\gamma \sin \alpha$ jest przyśpieszeniem punktu odległego o jednostkę długości od osi wahadła złożonego, to

$\Sigma m(g \sin \alpha - r\gamma \sin \alpha)^2$, lub $\Sigma m(g - r\gamma)^2$ osiąga minimum. Stąd $\Sigma m(g - r\gamma)r = 0$ lub $\gamma = g \frac{\Sigma mr}{\Sigma mr^2}$.»¹⁾

Zwracając uwagę na to, że taki sposób rozwiązania zagadnienia o przyspieszeniach wahadła złożonego jest najprostszy, MACH objaśnia to tym, że «w zasadzie Gaussa zawarte jest już całe doświadczenie Huygensa, Jakuba i Jana Bernoulli i innych»²⁾. Za pomocą



Rys. 1

przykładów MACH stara się wykazać, że «zasada Gaussa nie zawiera istotnie nowej treści»³⁾, że jest ona «nowa tylko formalnie, lecz nie merytorycznie»⁴⁾. Podobne zdanie o zasadzie Gaussa miał DURING. «Nawet to — kontynuuje Mach —, że ona (zasada Gaussa, przyp. autorki) obejmuje statyczne i dynamiczne zagadnienia, również nie stanowi o jej przewadze nad zasadą d'Alamberta w postaci Lagrange'a, o czym już wspominaliśmy»⁵⁾.

Pomijając niesłuszną krytykę zasady Gaussa, zauważmy, że «Męchanika» Macha zawiera wiele przykładów zastosowań tej zasady, przy czym wykorzystywane są różne postacie wzoru na wymuszenie. Pod tym względem praca ta jest bardzo interesująca, a prezentuje przecież ponadto nowy pomysł o odrzucaniu więzów.

Zajmiemy się teraz badaniami BOŁOTOWA, który rozwinął idee MACHA.

3. Zasada Gaussa w pracach Bołotowa

Praca BOŁOTOWA [5] wyróżnia się pośród wielu publikacji dotyczących zasady Gaussa. Miała ona duży wpływ na późniejsze badania tej zasady. Właśnie ta praca zainteresowała zasadą Gaussa CZETAJEWA. Wystarczy porównać pracę BOŁOTOWA z pierwszą publikacją CZETAJEWA [6] o zasadzie Gaussa, aby stwierdzić jej znaczenie dla uogólnień CZETAJEWA.

Przedstawimy teraz w skrócie wyniki badań BOŁOTOWA i porównamy tok jego rozumowania z późniejszym uogólnieniem na przypadek układów nieliniowych w pracach CZETAJEWA.

¹⁾ por. [4] s. 306 - 307

²⁾ tamże s. 307

³⁾ tamże s. 311

⁴⁾ tamże s. 312

⁵⁾ tamże s. 312

3.1. Zasada minimum wymuszenia w postaci Bołotowa. BOŁOTOW uogólnił zasadę Gaussa uwzględniając nowe koncepcje odrzucania wszystkich więzów jednokierunkowych oraz części więzów dwukierunkowych. W sformułowaniu BOŁOTOWA uogólniona zasada Gaussa brzmi następująco: «*odchylenie ruchu rzeczywistego od ruchu układu, w którym zostały odrzucone wszystkie jednokierunkowe więzy oraz dowolna liczba więzów dwukierunkowych jest mniejsze niż odchylenie dowolnego ruchu wirtualnego*».

W zasadzie uogólnionej zamiast Z mamy sumę

$$(1) \quad \frac{dt^4}{4} \sum m[(j_{ix} - j_{kx})^2 + (j_{iy} - j_{ky})^2 + (j_{iz} - j_{kz})^2] = \frac{dt^4}{2} S_{ik},$$

która jest miarą odchylenia k -tego ruchu od i -tego. Symbole j_{kx} , j_{ky} , j_{kz} oraz odpowiednio j_{ix} , j_{iy} , j_{iz} oznaczają rzuty na osie układu współrzędnych przyspieszeń punktu materialnego dla ruchów k -tego i i -tego w chwili czasu t (ruchy te nie muszą być wirtualne). Oba rodzaje ruchu zachowują przy tym identyczne współrzędne i prędkości punktów materialnych w chwili t .

Jeżeli i -ty ruch jest ruchem układu swobodnego w wyniku działania sił zewnętrznych, a k -ty ruch jest jednym z wielu możliwych dla danego układu, to wzór (1) jest identyczny ze wzorem na wymuszenie Z w zasadzie Gaussa. BOŁOTOW rozważa odrzucenie wszystkich jednokierunkowych więzów holonomicznych układu

$$(2) \quad \varphi_{\mu}(t, x, y, z) \geq 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

wraz z pewną liczbą więzów dwukierunkowych

$$(3) \quad f_{\lambda}(t, x, y, z) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

Dowód zmodyfikowanej zasady opiera się na dwóch następujących założeniach:

1) Wirtualne przemieszczenia układu z więzami (2) i (3) należą do wirtualnych przemieszczeń układu, pozbawionego wszystkich jednokierunkowych i części dwukierunkowych więzów.

2) Istnieją przemieszczenia wirtualne, których rzuty są proporcjonalne do różnic $j_{kx} - j_{ix}$, $j_{ky} - j_{iy}$, $j_{kz} - j_{iz}$. Faktycznie bowiem z warunków, jakie wynikają z więzów dla przyspieszeń w ruchu rzeczywistym (Bołotow nazywa go ruchem «pierwszym») oraz w k -tym ruchu wirtualnym, o identycznych współrzędnych i prędkościach punktów w chwili t wynikają zależności:

$$\sum \left[\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} (j_{kx} - j_{ix}) + \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial y} (j_{ky} - j_{iy}) + \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial z} (j_{kz} - j_{iz}) \right] = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l),$$

$$\sum \left[\frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x} (j_{kx} - j_{ix}) + \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial y} (j_{ky} - j_{iy}) + \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial z} (j_{kz} - j_{iz}) \right] \geq 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Porównując je z warunkami dla przemieszczeń wirtualnych

$$\sum \left[\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial z} \delta z \right] = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l),$$

$$\sum \left[\frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial z} \delta z \right] \geq 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

można założyć

$$\delta x = a(j_{kx} - j_{1x}), \quad \delta y = a(j_{ky} - j_{1y}), \quad \delta z = a(j_{kz} - j_{1z}),$$

gdzie a jest dowolnym mnożnikiem dodatnim. Wówczas z zasady d'Alemberta-Lagrange'a mamy

$$(4) \quad \sum [(X - mj_{1x})(j_{kx} - j_{1x}) + (Y - mj_{1y})(j_{ky} - j_{1y}) + (Z - mj_{1z})(j_{kz} - j_{1z})] \leq 0.$$

Założmy, że układ został pozbawiony więzów jednokierunkowych, a spośród dwukierunkowych zostało zachowane jedynie l_1 więzów. Ruch takiego układu, z zachowaniem poprzednich prędkości i sił zewnętrznych w chwili t , BOŁOTOW nazywa ruchem «zerowym». Przyspieszenia j_{0x}, j_{0y}, j_{0z} dla takiego ruchu wynikają z równania

$$(5) \quad \sum [(X - mj_{0x})\Delta\bar{x} + (Y - mj_{0y})\Delta\bar{y} + (Z - mj_{0z})\Delta\bar{z}] = 0,$$

przy czym $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ muszą spełniać warunki

$$\sum \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} \Delta\bar{x} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} \Delta\bar{y} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} \Delta\bar{z} \right] = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l_1).$$

Na podstawie pierwszego z podstawowych założeń można przyjąć

$$\Delta\bar{x} = a(j_{kx} - j_{1x}), \quad \Delta\bar{y} = a(j_{ky} - j_{1y}), \quad \Delta\bar{z} = a(j_{kz} - j_{1z}),$$

co pozwala zapisać równanie (5) w postaci

$$(6) \quad \sum [(X - mj_{0x})(j_{kx} - j_{1x}) + (Y - mj_{0y})(j_{ky} - j_{1y}) + (Z - mj_{0z})(j_{kz} - j_{1z})] = 0.$$

Odejmuje stronami równanie (6) i nierówność (4), otrzymujemy

$$(7) \quad \sum m(j_{0x}j_{kx} + j_{0y}j_{ky} + j_{0z}j_{kz}) - \sum m(j_{1x}j_{kx} + j_{1y}j_{ky} + j_{1z}j_{kz}) - \\ - \sum m(j_{0x}j_{1x} - j_{0y}j_{1y} + j_{0z}j_{1z}) + \sum m(j_{1x}^2 + j_{1y}^2 + j_{1z}^2) \leq 0.$$

Wprowadzając energię przyspieszeń

$$S_l = \frac{1}{2} \sum m(j_{1x}^2 + j_{1y}^2 + j_{1z}^2),$$

można wykazać, że

$$\sum m(j_{1x}j_{kx} + j_{1y}j_{ky} + j_{1z}j_{kz}) = S_l + S_k - S_{lk}.$$

W takim razie relacja (7) przyjmuje postać

$$S_{lk} - S_{0k} + S_{0l} \leq 0, \quad \text{lub} \quad S_{l0} \leq S_{k0} - S_{lk}.$$

Ponieważ $S_{lk} > 0$ to $S_{l0} < S_{k0}$, czyli odchylenie ruchu rzeczywistego od ruchu układu częściowo pozbawionego więzów jest mniejsze niż odchylenie dowolnego ruchu wirtualnego od ruchu układu częściowo pozbawionego więzów.

Dowód powyższy zachodzi również w przypadku liniowych więzów nieholonomicznych. Dwa podstawowe założenia, wykorzystywane w dowodzie BOŁOTOWA, są również najważniejszą częścią dowodu Czetajewa⁶⁾.

⁶⁾ por. [6] s. 70.

3.2. Zastosowanie uogólnionej zasady minimum wymuszenia w zagadnieniu osłabienia więzów jednokierunkowych. Załóżmy, że układ o więzach dwukierunkowych

$$f_\lambda(t, x, y, z) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l)$$

ma s współrzędnych q_1, q_2, \dots, q_s . Dodatkowe więzy jednokierunkowe

$$\varphi_\mu(t, x, y, z) \geq 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

wprowadzają m ograniczeń. Zawsze można określić współrzędne uogólnione w taki sposób, aby te ograniczenia miały postać

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_m \geq 0.$$

Niech w chwili t więzy jednokierunkowe są aktywne. Wówczas

$$q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_m = 0.$$

Zakładamy dodatkowo, że⁷⁾

$$\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0, \dots, \dot{q}_m = 0.$$

W takim razie drugie pochodne współrzędnych uogólnionych dla dowolnego ruchu wirtualnego spełniają warunki:

$$\ddot{q}_{1k} = \beta_{1k}, \ddot{q}_{2k} = \beta_{2k}, \dots, \ddot{q}_{mk} = \beta_{mk},$$

gdzie $\beta_{ik} \geq 0$ (por. [7]).

Aby otrzymać warunki na osłabienie (pasywność) więzów jednokierunkowych, BOŁOTOW rozważa sytuację, w której odrzucone są wszystkie więzy jednokierunkowe przy jednoczesnym zachowaniu więzów dwukierunkowych. Wówczas odchylenie k -tego ruchu wirtualnego od zerowego ruchu układu o zredukowanych więzach

$$S_{k0} = \frac{1}{2} \sum m[(j_{kx} - j_{0x})^2 + (j_{ky} - j_{0y})^2 + (j_{kz} - j_{0z})^2]$$

można otrzymać z wyrażenia energii kinetycznej dla tego układu. W tym celu należy zamienić w tym wyrażeniu człony drugiego rzędu względem $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ na różnice $\ddot{q}_{1k} - \ddot{q}_{10}, \ddot{q}_{2k} - \ddot{q}_{20}, \dots, \ddot{q}_{sk} - \ddot{q}_{s0}$. Wynika to z porównania wyrażen na różnice przyspieszeń

$$j_{kx} - j_{0x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} (\ddot{q}_{1k} - \ddot{q}_{10}) + \frac{\partial x}{\partial q_2} (\ddot{q}_{2k} - \ddot{q}_{20}) + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_s} (\ddot{q}_{sk} - \ddot{q}_{s0}),$$

i pochodne

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_s} \dot{q}_s,$$

Przyspieszenia $\ddot{q}_{10}, \ddot{q}_{20}, \dots, \ddot{q}_{s0}$, występujące we wzorze dla odchylenia S_{0k} , są obliczane z równań Lagrange'a dla układu o zredukowanych więzach. Natomiast przyspieszenia w ruchu rzeczywistym układu wyjściowego wynikają z warunku minimum odchylenia S_{0k} .

⁷⁾ Jeżeli $\dot{q}_1 > 0, \dot{q}_2 > 0, \dots, \dot{q}_m > 0$, to nie można niczego powiedzieć o drugich pochodnych $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_m$ (por. [7] s. 188).

Poszukiwanie tego minimum BOŁOTOW dzieli na dwa etapy. Najpierw określa się minimum S_{0k} dla ustalonych wartości przyspieszeń: $\ddot{q}_{1k} = \beta_{1k}$, $\ddot{q}_{2k} = \beta_{2k}$, ..., $\ddot{q}_{mk} = \beta_{mk}$. Wartości pozostałych przyspieszeń $\ddot{q}_{m+1,k}$, ..., \ddot{q}_{sk} obliczane są z warunków

$$\frac{\partial S_{0k}}{\partial \ddot{q}_{m+1,k}} = 0, \dots, \frac{\partial S_{0k}}{\partial \ddot{q}_{sk}} = 0.$$

Wyrażając w tych równaniach $\ddot{q}_{m+1,k}$, ..., \ddot{q}_{sk} przez β_{1k} , β_{2k} , ..., β_{mk} i wstawiając je do S_{0k} , otrzymujemy minimalną wartość odchylenia \bar{S}_{0k} .

Następnie oblicza się wartości β_{1k} , β_{2k} , ..., β_{mk} , dla których \bar{S}_{0k} osiąga minimum. BOŁOTOW pisze: «Jeżeli minimum \bar{S}_{0k} odpowiada dodatnim wartościom β , to odpowiednie więzy w chwili t ruchu rzeczywistego są pasywne, podczas gdy pozostałe są aktywne». Tak więc, problem podziału więzów jednokierunkowych na aktywne i pasywne w podejściu BOŁOTOWA jest teoretycznie prosty. Jednakże obliczenia praktyczne są bardzo żmudne. Biorąc to pod uwagę, Bołotow w § 4 swej pracy podaje kilka wskazówek usprawniających obliczenia.

Z tego, że S_{0k} jest jednorodną kwadratową funkcją różnic $\ddot{q}_{1k} - \ddot{q}_{10}$, $\ddot{q}_{2k} - \ddot{q}_{20}$, ..., ..., $\ddot{q}_{sk} - \ddot{q}_{s0}$, wynika jednorodność \bar{S}_{0k} względem różnic $\beta_{1k} - \ddot{q}_{10}$, $\beta_{2k} - \ddot{q}_{20}$, ..., $\beta_{mk} - \ddot{q}_{m0}$. Można zatem obliczać \bar{S}_{0k} w sposób następujący. We wzorze energii kinetycznej układu o zredukowanych więzach należy wyróżnić zbiór T_2 członów kwadratowych względem uogólnionych prędkości $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$. Następnie należy wyrugować z T_2 prędkości $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_s$ za pomocą równań

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_{m+1}} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_{m+2}} = 0, \dots, \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} = 0.$$

Wreszcie prędkości pozostałe $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ należy zastąpić różnicami $\beta_{1k} - \ddot{q}_{10}$, $\beta_{2k} - \ddot{q}_{20}$, ..., $\beta_{mk} - \ddot{q}_{m0}$.

Minimum absolutne funkcji \bar{S}_{0k} jest równe zeru i osiągane dla $\beta_{1k} = \ddot{q}_{10}$, $\beta_{2k} = \ddot{q}_{20}$, ..., ..., $\beta_{mk} = \ddot{q}_{m0}$. Lecz $\beta_{ik} \geq 0$ dla ruchu wirtualnego. Zatem minimum zerowe \bar{S}_{0k} , odpowiadające ruchowi rzeczywistemu, otrzymamy wtedy, gdy wszystkie przyspieszenia $\ddot{q}_{10}, \ddot{q}_{20}, \ddot{q}_{m0}$ są nieujemne. Jeżeli zaś niektóre wartości tych przyspieszeń są ujemne, to należy szukać minimum \bar{S}_{0k} na granicy obszaru dopuszczalnych wartości zmiennych β_{ik} (tzn. zakładać, że niektóre z nich mogą być zerowe).

Niech $\beta_{hk} = \beta_{ik} = \dots = 0$, a $\beta_{pk} > 0$, $\beta_{rk} > 0$, Wówczas wartości β_{ik} minimalizujące \bar{S}_{0k} na obszarze dopuszczalnym możemy obliczyć z warunków

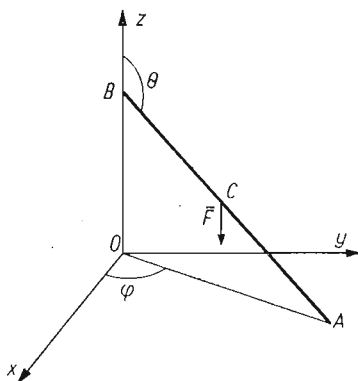
$$\frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \beta_{pk}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \beta_{rk}} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \beta_{hk}} \geq 0, \quad \frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \beta_{ik}} \geq 0, \dots$$

Następnie BOŁOTOW wykazał, że nie mogą istnieć jednocześnie dwa minima na granicy obszaru.

Jako przykład zastosowania swej teorii, BOŁOTOW przytacza takie zagadnienie. Jednorodny pręt o masie m oparty jest w chwili t jednym końcem o płaszczyznę $(x, 0, y)$, drugim zaś o oś z (rys. 2). Dopuszcza się możliwość utraty kontaktu między oporami a prętem. W chwili początkowej pręt jest w stanie spoczynku i działa nań siła $F(X, Y, Z)$, zaczepiona w środku ciężkości pręta. Należy ustalić, w jakich okolicznościach może nastąpić w chwili t utrata kontaktu między jednym z końców pręta a płaszczyzną podpierającą.

Oznaczmy przez \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} współrzędne środka ciężkości, $\varphi = \sphericalangle xOA$, $\theta = \sphericalangle ABz$ i przez l połowę długości pręta. Wówczas więzy jednokierunkowe mają postać

$$(1) \quad \bar{z} + l \cos \theta \geq 0, \quad \bar{x} - l \cos \varphi \sin \theta \geq 0, \quad \bar{y} - l \sin \varphi \sin \theta \geq 0.$$



Rys. 2

W chwili t są one spełnione równościowo. Energia kinetyczna układu bez więzów ma postać

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2 + \dot{\bar{z}}^2) + \frac{1}{2} R^2 m (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta),$$

gdzie R oznacza promień bezwładności pręta względem osi, poprowadzonej prostopadle do pręta przez jego środek ciężkości. Wybierając jako współrzędne uogólnione wielkości x_B , y_B , z_A , dla których zachodzą relacje

$$x_B = \bar{x} - l \cos \varphi \sin \theta, \quad y_B = \bar{y} - l \sin \varphi \sin \theta, \quad z_A = \bar{z} + l \cos \theta,$$

możemy zapisać warunki (1) w postaci

$$x_B \geq 0, \quad y_B \geq 0, \quad z_A \geq 0.$$

Sposób układania funkcji \bar{S}_{ok} został omówiony poprzednio. Ze wzoru na energię kinetyczną w zmiennych x_B , y_B , z_A , φ , θ :

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 + \dot{z}_A^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta (R^2 + l^2) + \dot{\theta}^2 (R^2 + l^2) - 2\dot{\varphi} (\dot{x}_B l \sin \theta \sin \varphi - \dot{y}_B l \sin \theta \cos \varphi) + 2\dot{\theta} (l \dot{x}_B \cos \theta \cos \varphi + l \dot{y}_B \cos \theta \sin \varphi + \dot{z}_A l \sin \theta)],$$

redukujemy $\dot{\varphi}$ i $\dot{\theta}$ na podstawie równań

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 0.$$

Następnie \dot{x}_B , \dot{y}_B , \dot{z}_A zastąpimy różnicami

$$\dot{x}_B - \dot{x}_{B0}, \quad \dot{y}_B - \dot{y}_{B0}, \quad \dot{z}_A - \dot{z}_{A0},$$

gdzie \dot{x}_{B0} , \dot{y}_{B0} , \dot{z}_{A0} oznaczają przyspieszenia układu swobodnego, czyli

$$\dot{x}_{B0} = \frac{X}{m}, \quad \dot{y}_{B0} = \frac{Y}{m}, \quad \dot{z}_{A0} = \frac{Z}{m}.$$

Otrzymujemy zatem wzór następujący:

$$\bar{S}_{0k} = \frac{1}{2} \frac{m}{R^2 + l^2} \left[\left(\ddot{x}_B - \frac{X}{m} \right)^2 (R^2 + \bar{x}^2) + \left(\ddot{y}_B - \frac{Y}{m} \right)^2 (R^2 + \bar{y}^2) + \left(\ddot{z}_A - \frac{Z}{m} \right)^2 (R^2 + \bar{z}^2) + 2 \left(\ddot{x}_B - \frac{X}{m} \right) \left(\ddot{y}_B - \frac{Y}{m} \right) \bar{x} \bar{y} + 2 \left(\ddot{x}_B - \frac{X}{m} \right) \left(\ddot{z}_A - \frac{Z}{m} \right) \bar{x} \bar{z} + 2 \left(\ddot{y}_B - \frac{Y}{m} \right) \left(\ddot{z}_A - \frac{Z}{m} \right) \bar{y} \bar{z} \right].$$

Na podstawie tego wzoru BOŁOTOW określa warunki, które powinna spełniać siła $\bar{F}(X, Y, Z)$, aby w chwili t następowała utrata kontaktu między końcami pręta i płaszczyznami podpierającymi.

1. Przyspieszenia końców pręta \ddot{x}_B , \ddot{y}_B , \ddot{z}_A są dodatnie, gdy końce te oddalają się od płaszczyzn oporowych. Zgodnie z uogólnioną zasadą Gaussa, przyspieszenia te można określić z warunków na minimum funkcji S_{0k} :

$$\frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \ddot{x}_B} = 0, \quad \frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \ddot{y}_B} = 0, \quad \frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \ddot{z}_A} = 0.$$

Otrzymujemy zatem

$$\ddot{x}_B = \frac{X}{m}, \quad \ddot{y}_B = \frac{Y}{m}, \quad \ddot{z}_A = \frac{Z}{m}.$$

Wartości te są dodatnie, gdy rzuty siły \bar{F} na osie układu współrzędnych są dodatnie.

Tak więc oba końce pręta tracą kontakt z oparciem, gdy

$$X > 0, \quad Y > 0, \quad Z > 0.$$

W podobny sposób można zbadać pozostałe przypadki.

2. Punkty A i B tracą kontakt z płaszczyznami x_0y i y_0z (lecz B pozostaje w kontakcie z płaszczyzną x_0z), gdy

$$Y < 0, \quad X > -\frac{Y\bar{x}\bar{y}}{R^2 + \bar{x}^2 + \bar{z}^2}, \quad Z > -\frac{Y\bar{y}\bar{z}}{R^2 + \bar{x}^2 + \bar{z}^2}.$$

3. Punkt B traci kontakt z płaszczyznami y_0z i x_0z (lecz punkt A pozostaje na płaszczyźnie x_0y), gdy

$$Z < 0, \quad X > -\frac{Z\bar{x}\bar{z}}{R^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad Y > -\frac{Z\bar{y}\bar{z}}{R^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}.$$

4. Koniec pręta B traci kontakt z płaszczyzną y_0z (lecz pozostaje na płaszczyźnie x_0z , a koniec A — na płaszczyźnie x_0y), gdy co najmniej jeden z rzutów Y , Z jest ujemny.

3. Zastosowanie uogólnionej zasady minimum wymuszenia w teorii uderzenia

W §§ 6 i 7 swej pracy BOŁOTOW udowadnia stosowalność uogólnionej zasady Gaussa w teorii uderzenia, obejmującej działanie zewnętrznego impulsu uderzeniowego lub nagłe wprowadzenie nowych więzów (możliwe jest też jednoczesne obu tych oddziaływań). Sformułowanie zasady minimum dla uderzenia poprzedzone jest pewnymi nowymi definicjami.

Jeżeli na początku uderzenia układ ma więzy $\varphi(t, x, y, z) \geq 0$, to pełna różniczka funkcji φ po czasie

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} V_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} V_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} V_z \right)$$

jest w trakcie uderzenia ujemna i nazywa się prędkością odkształcenia więzów.

Jeżeli na końcu uderzenia ograniczenie $\varphi(t, x, y, z) \geq 0$ staje się pasywne, to zupełna różniczka $d\varphi/dt$ uzyskuje wartość dodatnią, zwaną prędkością osłabienia więzów.

Ruchem częściowo swobodnym (lub ruchem drugim) nazywany jest ruch układu pod wpływem identycznych impulsów i nagle nakładanych więzów co w ruchu rzeczywistym, lecz po zredukowaniu wszystkich więzów jednokierunkowych i dowolnej liczby dwukierunkowych.

Uogólniona zasada minimum wymuszenia dla uderzeń formułowana jest w sposób następujący: «*Odchylenie rzeczywistego ruchu po uderzeniu od ruchu zwanego drugim jest najmniejsze pośród odchyień ruchów wirtualnych, które mają identyczne z ruchem rzeczywistym prędkości osłabienia więzów jednokierunkowych*» (por. [6] s. 35 - 36). BOŁOTOW przytacza dowód tej zasady dla więzów holonomicznych (w ogólnym przypadku nieustalonych). Można ów dowód rozszerzyć na przypadek liniowych więzów nieholonomicznych. Rozważany jest ruch układu n punktów materialnych M_i o masach m_i . Niech przed uderzeniem układ ma l więzów dwukierunkowych.

$$(1) \quad f_\lambda(t, x, y, z) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l)$$

oraz m więzów jednokierunkowych

$$(2) \quad F_\mu(t, x, y, z) \geq 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

W ogólnym przypadku uderzenie składa się z zewnętrznych impulsów $\vec{F}(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ i nagle wprowadzanych nowych więzów

$$(3) \quad \varphi_\nu(t, x, y, z) \geq 0, \quad \nu = (1, 2, \dots, p).$$

Na początku uderzenia (w chwili t) znane są prędkości punktów układu, a tym samym i prędkości odkształcania nowych więzów

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \alpha_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p).$$

Zakłada się, że więzy (3) pozostają aktywne w trakcie uderzenia.

Zgodnie z zasadą d'Alemberta-Lagrange'a, zachodzi

$$(4) \quad \sum \{ [X + m(v_{0x} - v_{1x})] \delta x + [Y + m(v_{0y} - v_{1y})] \delta y + [Z + m(v_{0z} - v_{1z})] \delta z \} \leq 0,$$

gdzie v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} są rzutami prędkości punktów M_i na początku uderzenia, v_{1x}, v_{1y}, v_{1z} oznaczają rzuty rzeczywistych prędkości tych punktów po uderzeniu, a $\delta x, \delta y, \delta z$ oznaczają rzuty wirtualnych przemieszczeń punktów układu, spełniające warunki:

$$(5) \quad \sum \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} \delta z \right) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l),$$

$$(6) \quad \sum \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_\mu}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_\mu}{\partial z} \delta z \right) \geq 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

$$(7) \quad \sum \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} \delta z \right) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, p).$$

W stanie częściowo swobodnym układ ma l_1 więzów typu (1) oraz więzy typu (3), które pozostają aktywne w trakcie uderzenia. Według zasady l'Alemberta-Lagrange'a dla tego ruchu mamy

$$(8) \quad \sum \{ [X + m(v_{0x} - v_{2x})] \Delta x + [Y + m(v_{0y} - v_{2y})] \Delta y + [Z + m(v_{0z} - v_{2z})] \Delta z \} = 0,$$

gdzie v_{2x} , v_{2y} , v_{2z} są rzutami rzeczywistych prędkości punktów układu częściowo swobodnego, a Δx , Δy , Δz oznaczają rzuty wirtualnych przemieszczeń, spełniające warunki:

$$\sum \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} \Delta z \right) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l_1),$$

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi_v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi_v}{\partial z} \Delta z \right) = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, p).$$

Warunki te odpowiadają więzom zachowanym w układzie częściowo swobodnym. We wzorze (8) występuje znak równości, ponieważ wszystkie stare więzy jednokierunkowe zostały odrzucone, a więzy nowe są aktywne.

Biorąc pod uwagę fakt, że wirtualne przemieszczenia układu rzeczywistego należą do zbioru wirtualnych przemieszczeń układu częściowo swobodnego (pierwsze założenie podstawowe), można zapisać równanie (8) w postaci

$$(9) \quad \sum \{ [X + m(v_{0x} - v_{2x})] \delta x + [Y + m(v_{0y} - v_{2y})] \delta y + [Z + m(v_{0z} - v_{2z})] \delta z \} = 0.$$

Odejmując stronami relacje (9) i (4) otrzymujemy

$$(10) \quad \sum m[(v_{2x} - v_{1x}) \delta x + (v_{2y} - v_{1y}) \delta y + (v_{2z} - v_{1z}) \delta z] \leq 0.$$

Następnie, rozważając warunki na prędkości rzeczywistego i wirtualnego ruchów układu po uderzeniu, BOŁOTOW wykazał, że istnieją przemieszczenia wirtualne proporcjonalne do różnicy tych prędkości. Rzuty prędkości punktów w ruchu rzeczywistym po uderzeniu spełniają warunki, wynikające z równań (1) dla więzów dwukierunkowych:

$$(11) \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} v_{1x} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} v_{1y} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} v_{1z} \right) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l),$$

oraz wynikające z relacji (3) i (2):

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi_v}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial x} v_{1x} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial y} v_{1y} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial z} v_{1z} \right) = \beta_v \geq 0, \quad (v = 1, 2, \dots, p),$$

$$(13) \quad \frac{\partial F_\mu}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x} v_{1x} + \frac{\partial F_\mu}{\partial y} v_{1y} + \frac{\partial F_\mu}{\partial z} v_{1z} \right) = \gamma_\mu > 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Jeżeli rozpatrujemy tylko takie rodzaje ruchu, że prędkości osłabienia więzów (3) są takie same, jak w ruchu rzeczywistym, a prędkości osłabienia więzów (2) są nie

mniejsze od odpowiednich wartości rzeczywistych, to prędkości wirtualne po uderzeniu spełniają warunki:

$$(14) \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} v_{kx} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} v_{ky} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} v_{kz} \right) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l),$$

$$(15) \quad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} v_{kx} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} v_{ky} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} v_{kz} \right) = \beta_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p),$$

$$(16) \quad \frac{\partial F_\mu}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x} v_{kx} + \frac{\partial F_\mu}{\partial y} v_{ky} + \frac{\partial F_\mu}{\partial z} v_{kz} \right) = \gamma_\mu^i \geq \gamma_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Odejmując stronami relacje (11), (12), (13) oraz odpowiednio (14), (15), (16), otrzymujemy

$$(17) \quad \sum \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} (v_{kx} - v_{1x}) + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} (v_{ky} - v_{1y}) + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} (v_{kz} - v_{1z}) \right] = 0,$$

$$(18) \quad \sum \left[\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} (v_{kx} - v_{1x}) + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} (v_{ky} - v_{1y}) + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} (v_{kz} - v_{1z}) \right] = 0,$$

$$(19) \quad \sum \left[\frac{\partial F_\mu}{\partial x} (v_{kx} - v_{1x}) + \frac{\partial F_\mu}{\partial y} (v_{ky} - v_{1y}) + \frac{\partial F_\mu}{\partial z} (v_{kz} - v_{1z}) \right] = \gamma_\mu^i - \gamma_\mu \geq 0.$$

Porównując to z warunkami (5), (6), (7) dla przemieszczeń wirtualnych, dochodzimy do wniosku, że można założyć

$$(20) \quad \delta x = k(v_{kx} - v_{1x}), \quad \delta y = k(v_{ky} - v_{1y}), \quad \delta z = k(v_{kz} - v_{1z}).$$

Podstawienie wyrażeń (20) do wzoru (10) daje

$$(21) \quad \sum m[(v_{2x} - v_{1x})(v_{kx} - v_{1x}) + (v_{2y} - v_{1y})(v_{ky} - v_{1y}) + (v_{2z} - v_{1z})(v_{kz} - v_{1z})] \leq 0.$$

Z relacji tej wynika potwierdzenie uogólnionej zasady Gaussa dla uderzenia. Faktycznie w przypadku uderzenia odchyleniem i -tego ruchu od k -tego jest

$$dt^2 \sum m[(v_{ix} - v_{kx})^2 + (v_{iy} - v_{ky})^2 + (v_{iz} - v_{kz})^2] = 2dt^2 T_{ik},$$

gdzie

$$(22) \quad T_{ik} = \frac{1}{2} \sum \dot{m}[(v_{ix} - v_{kx})^2 + (v_{iy} - v_{ky})^2 + (v_{iz} - v_{kz})^2].$$

Pomijając stały mnożnik $2dt^2$, możemy przyjąć jako odchylenie T_{ik} , czyli energię kinetyczną prędkości utraconych przy przejściu z i -tego do k -tego ruchu.

Na podstawie oczywistego związku

$$\sum m(v_{ix}v_{kx} + v_{iy}v_{ky} + v_{iz}v_{kz}) = T_l + T_k - T_{ik},$$

możemy przedstawić (21) w postaci

$$(23) \quad T_{12} \leq T_{k2} - T_{k1}.$$

Ponieważ $T_{k1} > 0$, z warunku (23) wynika

$$(24) \quad T_{12} < T_{k2},$$

czyli odchylenie rzeczywistego ruchu od częściowo swobodnego jest mniejsze niż odchylenie dowolnego ruchu wirtualnego.

Jeżeli przed uderzeniem układ miał tylko więzy dwukierunkowe, to relacje (21) i (23) stają się równościowe. Jeżeli ponadto ruchem «drugim» jest ruch układu bez więzów, to nierówność (24) wyraża klasyczną postać zasady Gaussa. Faktycznie, podstawiając do wzoru (24) wyrażenia T_{12} i T_{k2} dla układu swobodnego, otrzymamy

$$T_{10} + \sum [\dot{X}(v_{0x} - v_{1x}) + \dot{Y}(v_{0y} - v_{1y}) + \dot{Z}(v_{0z} - v_{1z})] < T_{k0} + \sum [\dot{X}(v_{0x} - v_{kx}) + \dot{Y}(v_{0y} - v_{ky}) + \dot{Z}(v_{0z} - v_{kz})],$$

skąd wynika, że funkcja

$$T_{k0} + \sum [\dot{X}(v_{0x} - v_{kx}) + \dot{Y}(v_{0y} - v_{ky}) + \dot{Z}(v_{0z} - v_{kz})]$$

osiąga minimum dla ruchu rzeczywistego w klasie ruchów wirtualnych.

BOŁOTOW zwraca uwagę na to, że APPEL [8] nazywa w swej książce ten wynik twierdzeniem Robina, gdy faktycznie jest to tylko postać zasady Gaussa dla uderzenia. Appel przeprowadza dowód zasady Robina, wykorzystując twierdzenie Carnota, które zachodzi tylko dla więzów ustalonych⁸⁾ na początku uderzenia. Uważa przy tym, że ograniczenie to dotyczy również zasady Robina. Wykazując, że twierdzenie Robina jest szczególnym przypadkiem zasady Gaussa, BOŁOTOW udowodnił słuszność zasady Robina również dla przypadków, gdy twierdzenie Carnota nie może być stosowane.

Zauważmy, że z relacji (23) wynika nie tylko nierówność (24) wyrażająca uogólnioną zasadę Gaussa, lecz również nierówność

$$(25) \quad T_{k1} < T_{k2}.$$

Wyraża ona twierdzenie, że odchylenie ruchu rzeczywistego po uderzeniu od ruchu wirtualnego jest mniejsze niż odchylenie ruchu wirtualnego od ruchu częściowo lub całkowicie swobodnego. Bołotow nie zauważył tego wniosku.

W § 10 swej pracy BOŁOTOW pokazuje zastosowanie uogólnionej zasady Gaussa na przykładzie zadania o zderzeniu dwóch ciał.

Dowód zasady Gaussa, podany w pracy BOŁOTOWA tylko dla więzów holonomicznych, przechodzi również w przypadku liniowych więzów nieholonomicznych.

Rozpatrując szeroką klasę zagadnień, związanych z uogólnioną zasadą minimum wymuszenia, pojęciem częściowej redukcji więzów, postacią analityczną i dowodem zasady minimum, zastosowaniem jej w teorii uderzenia, skomplikowanym zagadnieniem osłabienia więzów jednokierunkowych, BOŁOTOW pozostawał jednak cały czas w kręgu holonomicznych i liniowych nieholonomicznych układów. Układy z więzami nieliniowymi i nieholonomicznymi nie były rozpatrywane w jego pracy. Pozostawiło to otwartą kwestię dalszego uogólnienia zasady Gaussa. Zagadnienie to stało się przedmiotem badań CZETAJEWA, absolwenta Uniwersytetu Kazańskiego.

Literatura cytowana w tekście

1. KÖNIGSBERGER, *Über die Prinzipien der Mechanik*, Crelle's Journal, B. 118 (1897).
2. H. HELMHOLTZ, *Über die physikalische Bedeutung d. Prinzips d. kl. Wirkung*, Crelle's Journal, B. 100 (1886), 137 - 166, 213 - 222.

⁸⁾ por. [8] str. 452.

3. H. HELMHOLTZ, *Vorlesungen über d. Dynamik diskreter Massenpunkte*, Leipzig 1898.
4. Э. Мах, *Механика*, Историко-критический очерк её развития, 1909, стр. 306.
5. Е. А. Болотов, *О принципе Гаусса*, Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском университете, **21**, 3 (1916).
6. Н. Г. Четаев, *О принципе Гаусса*, Известия физико-математического общества при Казанском университете, сер. 3, т. VI, 1932—1933.
7. Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, Москва-Ленинград 1946, стр. 188.
8. П. Аппель, *Теоретическая механика*, ч. II. Москва, физматгиз, 1960, стр. 452.

POLITECHNIKA W WOLGOGRADZIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1975 r.

WPLYW SIŁ BEZWŁADNOŚCI NA PRZEPLYW CIECZY LEPKIEJ W SZCZELINIE
MIĘDZY POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI: NIERUCHOMĄ I WIRUJĄCĄ

EDWARD WALICKI (BYDGOSZCZ)

1. Wstęp

Laminarne przepływy cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi tarczami [2 - 10, 14, 15] stożkami [11, 12] oraz powierzchniami obrotowymi (13, 16, 17] budziły od dawna zainteresowanie ze względu na możliwości szerokich zastosowań praktycznych w budowie maszyn.

Różnego rodzaju metody badań teoretycznych można znaleźć w literaturze przytoczonej na końcu pracy. W większości istniejących badań autorzy ograniczają się w zasadzie do uproszczonej analizy wpływu sił lepkości na przepływ cieczy. Niektóre z przytoczonych prac uwzględniają częściowy wpływ sił bezwładności; wymienić tu można prace [7, 9, 12, 14 - 17]. Na uwagę zasługuje również praca [13], w której zbadano szczególny przypadek przepływu cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi z uwzględnieniem wpływu sił bezwładności. Jednak uzyskane tam rozwiązanie zachowuje swoją ważność jedynie dla pewnych, ściśle określonych kształtów powierzchni, dla których istnieje samopodobieństwo przepływu.

Celem tej pracy jest podanie w postaci ogólnej rozwiązania problemu sformułowanego w tytule pracy, bez dodatkowych założeń upraszczających dotyczących kształtu powierzchni ograniczających obszar przepływu. W rozważaniach uwzględniono wpływ sił bezwładności stosując metodę małego parametru do rozwiązania równań ruchu cieczy lepkiej podobnie, jak w pracach [1, 18].

2. Równania ruchu

Aby rozpatrzyć badany przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi o wspólnej osi symetrii (rys. 1), wprowadzimy krzywoliniowy ortogonalny układ współrzędnych x, θ, y związany z wewnętrzną powierzchnią. Oś x niech będzie skierowana wzdłuż tworzącej wewnętrznej powierzchni, oś y — w poprzek szczeliny, prostopadle do tej tworzącej. Wewnętrzna nieruchoma powierzchnia niech będzie opisana funkcją $R = R(x)$ oznaczającą jej promień, zaś grubość szczeliny $h = h(x)$ — spełniającą zależność $h \ll R$ — niech oznacza odległość między powierzchniami, mierzoną wzdłuż normalnej do wewnętrznej powierzchni.

Parametrami fizycznymi przepływu są składowe prędkości v_x, v_θ, v_y oraz ciśnienie p . Ze względu na osiową symetrię przepływu parametry te nie zależą od kąta θ .

Równania ruchu — przy założeniu, że $h \ll R$ — podane są dla ogólnego przypadku przepływu w przyjętym układzie współrzędnych x, θ, y w pracach [13, 16, 17]. Dokonując w tych równaniach oszacowań charakterystycznych dla przepływów w cienkich warstwach cieczy otrzymamy

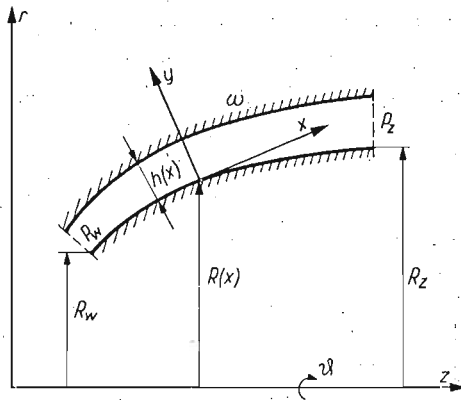
$$(2.1) \quad \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{R'}{R} v_\theta^2 \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$(2.2) \quad \rho \left(v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + \frac{R'}{R} v_x v_\theta \right) = \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2},$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$(2.4) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Tutaj i dalej w pracy przecinkiem oznacza się pochodną względem zmiennej x .



Rys. 1

Z równania (2.3) wynika zależność:

$$(2.5) \quad p = p(x).$$

Warunki brzegowe dla składowych prędkości są następujące:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} v_x = v_y = 0 & \quad \text{dla} \quad y = 0, \quad y = h, \\ v_\theta = 0 & \quad \text{dla} \quad y = 0, \quad v_\theta = R\omega \quad \text{dla} \quad y = h. \end{aligned}$$

Ponadto na wlocie i wylocie ze szczeliny powinny być spełnione następujące warunki brzegowe dla ciśnienia:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} p = p_w & \quad \text{dla} \quad x = x_w, \\ p = p_z & \quad \text{dla} \quad x = x_z. \end{aligned}$$

Równań (2.1) - (2.4) użyjemy do wyznaczenia parametrów przepływu cieczy w szczelinie.

3. Całki równań ruchu

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe określone następującymi związkami:

$$(3.1) \quad \xi = \frac{x}{R_0}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \bar{v}_x = \frac{v_x}{R_0 \omega},$$

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0}{R_0 \omega}, \quad \bar{v}_y = \frac{v_y}{h \omega}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\mu \omega} \left(\frac{h}{R_0} \right)^2$$

oraz oznaczając symbolem Re lokalną liczbę Reynoldsa

$$(3.2) \quad Re = \frac{\rho R_0 \omega h}{\mu},$$

możemy sprowadzić równania ruchu (2.1) - (2.4) — przy uwzględnieniu (2.5) — do bezwymiarowej postaci:

$$(3.3) \quad \lambda \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \xi} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \eta} - \frac{1}{R} \frac{d\bar{R}}{d\xi} \bar{v}_0^2 \right) = - \frac{d\bar{p}}{d\xi} - \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \eta^2},$$

$$(3.4) \quad \lambda \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \xi} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \eta} + \frac{1}{R} \frac{d\bar{R}}{d\xi} \bar{v}_x \bar{v}_0 \right) = \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \eta^2},$$

$$(3.5) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial(\bar{R}\bar{v}_x)}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \eta} = 0;$$

gdzie oznaczono przez R_0 — średnią wartość promienia powierzchni wewnętrznej, $R_0 \omega$ — prędkość charakterystyczną przepływu, $\lambda = Re \frac{h}{R_0}$ — zmodyfikowaną liczbę Reynoldsa.

Zmodyfikowana liczba Reynoldsa w przepływach laminarnych spotykanych w praktyce spełnia zależność. $\lambda < 1$.

Z równań (3.3) i (3.4) wynika, że dla przepływów zachodzących przy małych liczbach Reynoldsa, λ jest małym parametrem układu (3.3) - (3.5); zatem jego rozwiązania można przedstawić w postaci szeregów potęgowych względem λ :

$$(3.6) \quad \bar{v}_x = \bar{v}_x^{(0)} + \lambda \bar{v}_x^{(1)} + \lambda^2 \bar{v}_x^{(2)} + \dots$$

$$(3.7) \quad \bar{v}_0 = \bar{v}_0^{(0)} + \lambda \bar{v}_0^{(1)} + \lambda^2 \bar{v}_0^{(2)} + \dots$$

$$(3.8) \quad \bar{v}_y = \bar{v}_y^{(0)} + \lambda \bar{v}_y^{(1)} + \lambda^2 \bar{v}_y^{(2)} + \dots$$

$$(3.9) \quad \bar{p} = \bar{p}^{(0)} + \lambda \bar{p}^{(1)} + \lambda^2 \bar{p}^{(2)} + \dots$$

Podstawiając przewidywane rozwiązania (3.6) - (3.9) do układu (3.3) - (3.5) oraz grupując wyrażenia stojące przy tych samych potęgach λ otrzymamy układy równań różniczkowych liniowych względem niewiadomych funkcji $\bar{v}_x^{(i)}$, $\bar{v}_0^{(i)}$, $\bar{v}_y^{(i)}$ oraz $\bar{p}^{(i)}$. Ograniczając się do liniowego przybliżenia i wracając do wielkości wymiarowych możemy napisać

$$(3.10) \quad \frac{\partial^2 v_x^{(0)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp^{(0)}}{dx},$$

$$(3.11) \quad \frac{\partial^2 v_0^{(0)}}{\partial y^2} = 0,$$

$$(3.12) \quad \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} [Rv_x^{(0)}],$$

$$(3.13) \quad \frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp^{(1)}}{dx} + \frac{\varrho}{\mu} \left[v_x^{(0)} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} + v_y^{(0)} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial y} - \frac{R'}{R} v_\theta^{(0)2} \right],$$

$$(3.14) \quad \frac{\partial^2 v_\theta^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{\varrho}{\mu} \left[v_x^{(0)} \frac{\partial v_\theta^{(0)}}{\partial x} + v_y^{(0)} \frac{\partial v_\theta^{(0)}}{\partial y} + \frac{R'}{R} v_x^{(0)} v_\theta^{(0)} \right],$$

$$(3.15) \quad \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} [Rv_x^{(1)}].$$

Warunki brzegowe zgodnie z (2.6) i (2.7) przyjmują teraz postać:

$$(3.16) \quad \begin{cases} v_x^{(0)} = v_x^{(1)} = v_y^{(0)} = v_y^{(1)} = 0 & \text{dla } y = 0, y = h, \\ v_\theta^{(0)} = v_\theta^{(1)} = 0 & \text{dla } y = 0, v_\theta^{(0)} = R\omega, v_\theta^{(1)} = 0 & \text{dla } y = h, \\ p^{(0)} = p_w, p^{(1)} = 0 & \text{dla } x = x_w, \\ p^{(0)} = p_z, p^{(1)} = 0 & \text{dla } x = x_z. \end{cases}$$

Całkując równania (3.10) - (3.15) przy spełnieniu warunków brzegowych (3.16) — podobnie jak uczyniono to w pracach [16, 17] — otrzymamy:

$$(3.17) \quad v_x^{(0)} = \frac{B}{2\mu} \frac{1}{Rh^3} (yh - y^2),$$

$$(3.18) \quad v_\theta^{(0)} = \omega \frac{R}{h} y,$$

$$(3.19) \quad v_y^{(0)} = \frac{B}{2\mu} \frac{h'}{Rh^4} (y^2h - y^3),$$

$$(3.20) \quad p^{(0)} = \frac{[A(x) - A_z]p_w - [A(x) - A_w]p_z}{A_w - A_z},$$

$$(3.21) \quad v_x^{(1)} = \frac{C}{2\mu} \frac{1}{Rh^3} (yh - y^2) - \frac{\varrho\omega^2 RR'}{60\mu h^2} (4yh^3 - 9y^2h^2 + 5y^4) + \\ + \frac{\varrho B^2}{1680\mu^3} \frac{(Rh)'}{R^3 h^7} (-2yh^5 + 9y^2h^4 - 35y^4h^2 + 42y^5h - 14y^6),$$

$$(3.22) \quad v_\theta^{(1)} = -\frac{\varrho B\omega^2}{120\mu^2} \frac{(Rh)'}{Rh^5} (2yh^4 - 5y^4h + 3y^5),$$

$$(3.23) \quad v_y^{(1)} = \left(\frac{C}{2\mu} \frac{h'}{Rh^4} + \frac{\varrho\omega^2 RR'h'}{10\mu h} \right) (y^2h - y^3) + \\ + \frac{\varrho\omega^2}{60\mu} \frac{1}{R} \left(\frac{R^2 R'}{h^2} \right)' (2y^2h^3 - 3y^3h^2 + y^5) + \\ + \frac{\varrho B^2}{1680\mu^3} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{(Rh)'}{R^2 h^7} \right)' (y^2h^5 - 3y^3h^4 + 7y^5h^2 - 7y^6h + 2y^7) + \right. \\ \left. + \frac{(Rh)'h'}{R^3 h^7} (5y^2h^4 - 12y^3h^3 + 14y^5h - 7y^6) \right],$$

$$(3.24) \quad p^{(1)} = D(x) - \frac{[A(x) - A_z]D_w - [A(x) - A_w]D_z}{A_w - A_z},$$

gdzie dla uproszczenia zapisu oznaczono:

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(x) = \int \frac{dx}{R(x)h^3(x)}, \quad A_w = A(x_w), \quad A_z = A(x_z); \\ D(x) = \frac{3}{20} \rho \omega^2 R^2 - \frac{3 \rho B^2}{560 \mu^2} \frac{1}{R^2 h^2}, \quad D_w = D(x_w), \quad D_z = D(x_z); \\ B = \frac{p_w - p_z}{A_z - A_w}, \quad C = \frac{D_z - D_w}{A_z - A_w}. \end{array} \right.$$

Rozwiązanie określonego zagadnienia, zgodnie z wzorami (3.6) - (3.9), stanowią sumy rozwiązań cząstkowych.

4. Dyskusja otrzymanych wyników

Podane w poprzednim punkcie pracy wzory dla składowych prędkości można przedstawić w uproszczonej postaci niezależnie od kształtu powierzchni ograniczających przepływ:

$$(4.1) \quad v_x = F_1 f_1(\eta) + F_2 f_2(\eta) + F_3 f_3(\eta),$$

$$(4.2) \quad v_\theta = F_4 f_4(\eta) + F_5 f_5(\eta),$$

$$(4.3) \quad v_y = F_6 f_6(\eta) + F_7 f_7(\eta) + F_8 f_8(\eta) + F_9 f_9(\eta),$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono:

$$f_1(\eta) = \eta - \eta^2, \quad f_2(\eta) = 4\eta - 9\eta^2 + 5\eta^4,$$

$$f_3(\eta) = -2\eta + 9\eta^2 - 35\eta^4 + 42\eta^5 - 14\eta^6,$$

$$f_4(\eta) = \eta, \quad f_5(\eta) = 2\eta - 5\eta^4 + 3\eta^5,$$

$$f_6(\eta) = \eta^2 - \eta^3, \quad f_7(\eta) = 2\eta^2 - 3\eta^3 + \eta^5,$$

$$f_8(\eta) = \eta^2 - 3\eta^3 + 7\eta^5 - 7\eta^6 + 2\eta^7,$$

$$f_9(\eta) = 5\eta^2 - 12\eta^3 + 14\eta^5 - 7\eta^6.$$

F_i oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju poprzecznego szczeliny, różnicy ciśnień między wlotem i wylotem ze szczeliny oraz od prędkości kątowej wirującej powierzchni.

Z postaci wzorów opisujących składową wzdłużną prędkości v_x wynika, że główną jej częścią jest paraboliczny profil płaskiego przepływu Poiseuille'a [funkcja $f_1(\eta)$ na rys. 2] uwarunkowany istnieniem różnicy ciśnień na wlocie i wylocie ze szczeliny i ruchem wirowym powierzchni zewnętrznej.

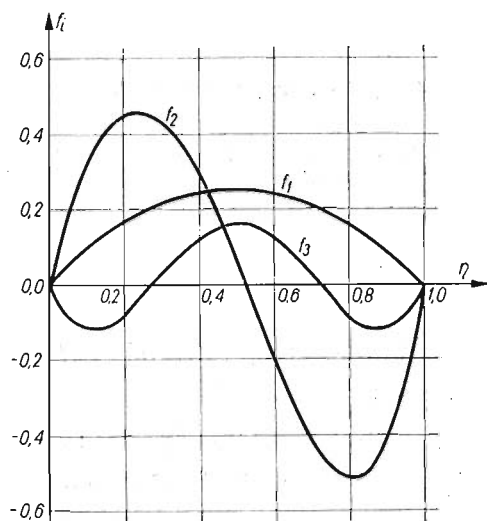
Na główną część składowej prędkości wzdłużnej nakłada się przepływ wtórny, wywołany ssącym działaniem wirującej powierzchni zewnętrznej. Przepływ wtórny opisany jest drugim składnikiem prędkości v_x i prędkością v_y ; profile przepływu wtórnego reprezentowane są przez funkcje $f_2(\eta)$ na rys. 2 oraz $f_6(\eta)$, ... $f_9(\eta)$ na rys. 4.

Profile prędkości obwodowej v_θ opisane funkcjami $f_4(\eta)$ i $f_5(\eta)$ przedstawione zostały na rys. 3, przy czym główną częścią prędkości jest profil identyczny z profilem przepływu

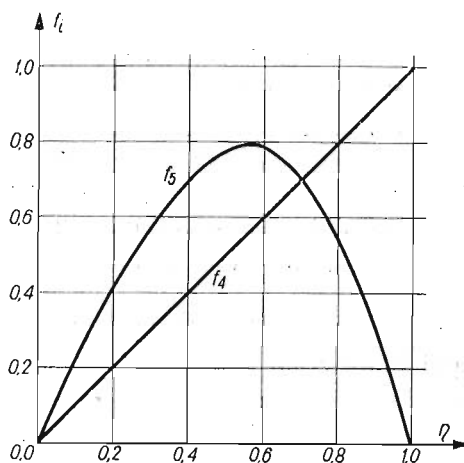
Couette'a między płaszczyznami, z których jedna jest w spoczynku, a druga porusza się z lokalną prędkością równą $\omega \cdot R(x)$.

W pracach [16, 17] rozwiązano podobne zagadnienia z częściowym uwzględnieniem sił bezwładności. Porównując otrzymane wyniki z wynikami tych prac można stwierdzić, że siły bezwładności powodują symetryczne względem osi szczeliny zmiany w głównych częściach profilów prędkości wzdłużnej (funkcja $f_3(\eta)$ na rys. 2) i prędkości obwodowej (funkcja $f_5(\eta)$ na rys. 3). Ponadto siły bezwładności powodują również stosunkowo duże zmiany w wypadkowym profilu prędkości poprzecznej v_y .

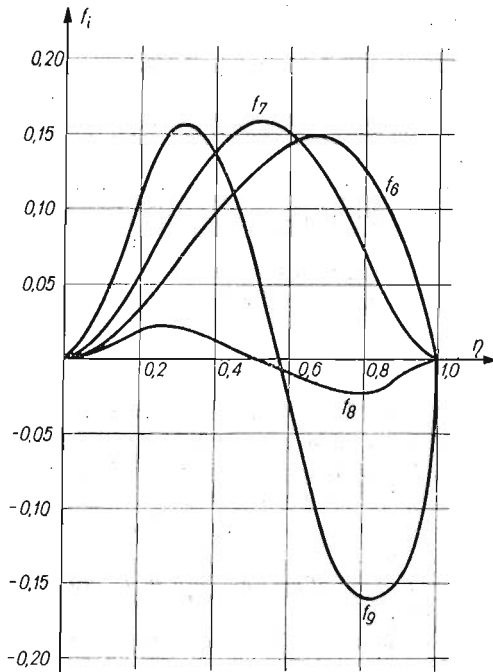
Zmiany wywołane wpływem sił bezwładności są stosunkowo niewielkie dla przepływów powolnych ($\lambda \ll 1$) i mogą być pominięte. Natomiast dla przepływów charakterystycznych



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

dla szybkoobrotowych wzdłużnych łożysk ślizgowych zmiany te mogą osiągać lub nawet przewyższać rząd wielkości głównych profilów prędkości wzdłużnej czy obwodowej.

Ilościowe określenie wielkości tych zmian jest możliwe tylko dla określonych kształtów powierzchni ograniczających przepływ, różnicy ciśnień na wlocie i wylocie ze szczeliny oraz prędkości kątowej wirującej powierzchni.

Rozważone w pracy przybliżenie liniowe zachowuje swoją ważność dla małych wartości λ ; dla wartości λ bliskich jedności należy uwzględnić dalsze wyrazy szeregów (3.6) - (3.9).

Literatura cytowana w tekście

1. W. KAHLERT, *Der Einfluss der Tragheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie*, *Igenr — Arch.*, **16** (1948), 321 - 342.
2. T. VANNERUS, *Rotierende Scheiben für Luftvorwärmer mit geblasen — wirkung*, *Ang. Wärmetechn.*, **6** (1955), 251 - 262.
3. W. RICE, *An analytical and experimental investigation of multiple disk pumps and compressors*, *J. Eng. for Power*, *Trans. ASME, Ser. A*, **3**, **85** (1963), 191 - 200.
4. W. RICE, *An analytical and experimental investigation of multiple disk turbines*, *J. Eng. for Power*, *Trans. ASME, Ser. A*, **1**, **87** (1965), 29 - 36.
5. J. -L. PEUBE, F. KREITH, *Écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques parallèles en rotation*, *J. Mécanique*, **2**, **5** (1966), 260 - 281.
6. F. KREITH, H. VIVIAND, *Laminar source flow between two parallel coaxial disks rotating at different speeds*, *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME, Ser. E*, **3**, **34** (1967), 541 - 547.

7. L. MATSCH, W. RICE, *An asymptotic solution for laminar flow of an incompressible fluid between rotating disks*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1, 35 (1968), 155 - 159.
8. K. E. BOYD, W. RICE, *Laminar inward flow of an incompressible fluid between corotating disks with full peripheral admission*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 2, 35 (1968), 229 - 237.
9. H. J. SNECK, *The eccentric face seal with a tangentially varying film thickness*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, Ser. F, 4, 91 (1969), 748 - 755.
10. R. G. ADAMS, W. RICE, *Experimental investigation of the flow between corotating disks*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, Ser. E, 3, 37 (1970), 844 - 849.
11. W. RICE, K. W. MCALISTER, *Laminar throughflow of Newtonian fluid between coaxial rotating cones*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1, 37 (1970), 210 - 212.
12. A. SZANIAWSKI, *Przeptyw lepkiej cieczy nieściśliwej w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego*, Prace IPPT PAN, 15 (1970).
13. K. W. MCALISTER, W. RICE, *Throughflows between rotating surfaces of revolution, having similarity solutions*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 4, 37 (1970), 924 - 930.
14. L. L. TING, J. E. MAYER, Jr., *The effects of temperature and inertia on hydrostatic thrust bearing performance*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, Ser. F, 2, 93 (1971), 307 - 312.
15. E. MAKAY, P. R. TRUMPLER, *Inertia effects in fully developed axisymmetric laminar flow*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, Ser. F, 3, 93 (1971), 408 - 414.
16. E. WALICKI, *Przeptyw cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 12 (1974), 7 - 16.
17. E. WALICKI, *Viscous fluid flow in a slot of the curvilinear thrust bearing*, Méc. Appliquée, Rev. Roum. Sci. Tech., 4, 20 (1975), 483 - 493.
18. E. REINHARDT, J. W. LUND, *The influence of fluid inertia on the dynamic properties of journal bearings*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, Ser. F, 2, 97 (1975), 159 - 167.

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ НА ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛИ МЕЖДУ НЕПОДВИЖНОЙ И ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

В работе рассмотрено стационарное, ламинарное течение вязкой жидкости в щели между поверхностями вращения с общей осью симметрии: неподвижной и вращающейся. Для решения задачи применяются уравнения пограничного слоя для осесимметрического течения в системе криволинейных координат x, θ, y , связанных с одной из этих поверхностей. Уравнения пограничного слоя решаются методом малого параметра. Получены формулы, определяющие такие параметры течения, как компоненты скорости v_x, v_θ, v_y и давление p .

S u m m a r y

INERTIA EFFECT IN THE FLOW OF VISCOUS FLUID THROUGH A SLOT BETWEEN FIXED AND ROTATING SURFACES OF REVOLUTION

In this paper is considered the steady laminar flow of viscous fluid through a slot between the fixed and rotating surfaces of revolution having a common axis of symmetry. The boundary layer equations are expressed in terms of the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system x, θ, y linked with one of these surfaces. The method of perturbation is used to solve the boundary layer equations. As a result, the formulae defining such parameters of the flow as the velocity components v_x, v_θ, v_y , and pressure p are obtained.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
W BYDGOSZCZY

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 sierpnia 1976 r.

LEPKOSPĘŻYSTE CHARAKTERYSTYKI GUMY
I TULEJOWYCH GUMOWO-METALOWYCH
ŁĄCZNIKÓW TYPU «SILENTBLOCK»

KAROL W Y L E Ż Y C H (GLIWICE)

1. Wstęp

Zastosowanie gumy, jako tworzywa konstrukcyjnego, w przemyśle maszynowym i motoryzacyjnym w ciągu ostatnich lat znacznie wzrosło i stało się przedmiotem licznych prac teoretycznych i doświadczalnych [1 - 7]. Ze względu na rozpraszanie znacznych energii przez gumę poddaną zmiennym w czasie odkształceniom wytwarza się z niej wszelkiego rodzaju amortyzatory, wibroizolatory, opony, zderzaki, sprzęgła elastyczne, tłumiki drgań, łączniki sprężyste itp. Elementy gumowe wchodzące w skład prawie wszystkich zespołów pojazdu mechanicznego w poważnym stopniu redukują przenikanie do nadwozia hałasu i drgań, wpływają korzystnie na działanie samych mechanizmów i decydują o przydatności pojazdu, jego zdolnościach eksploatacyjnych, ekonomiczności czy komforcie jazdy.

Guma jest polimerem cechującym się specyficznymi własnościami, jej zależność naprężenie-odkształcenie zależy od rodzaju stanu odkształcenia i jego prędkości. Jak dowodzi statystyczna teoria ośrodków kauczukopodobnych, podlegają one prawu Hooke'a przy ścinaniu, natomiast nie podlegają temu prawu przy rozciąganiu lub ściskaniu [8]. Dlatego też charakterystyki mechaniczne próbki gumowej mogą różnić się od charakterystyk określonych postaci konstrukcyjnych, jakimi są wszelkiego rodzaju tulejowe łączniki gumowo-metalowe. Łączniki te składają się głównie z dwóch współosiowych tulei metalowych, pomiędzy którymi znajduje się guma w sposób trwały powiązana z obu tulejami [6, 9]. Ze względu na technologię wykonania łączniki te dzielimy na: a) silentblocki, b) flexiblocki.

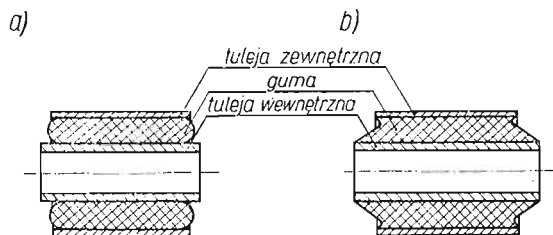
Silentblock (rys. 1a) składa się z dwóch współosiowych tulei metalowych, pomiędzy które wprasowano pod dużym naciskiem tuleję gumową. W trakcie wykonywania silentblocku uzyskuje się w nim wstępny stan naprężenia, na skutek którego powstaje trwałe połączenie pomiędzy tulejami metalowymi a gumą.

Flexiblock (rys. 1b) składa się zasadniczo z dwóch tulei metalowych, także współosiowych, pomiędzy którymi została zwulkanizowana guma.

W przeważającej liczbie przypadków wykonane dotąd prace badawcze dotyczą określenia różnych własności reologicznych gum przy jednoosiowym stanie naprężenia, głównie

przy ściskaniu, np. własności relaksacyjnych gum tzn. postaci modułu sprężystości podłużnej, czasu relaksacji czy dyskretnych widm czasów relaksacji [10 - 12].

W pracy [13] FORYSIOWIE, dla walca wykonanego z pewnego gatunku gumy miękkiej poddanego skręcaniu, zbadali jego pełzanie, drgania własne oraz zależność amplitudy drgań wymuszonych od częstotliwości momentu wymuszającego. Pewne własności reologiczne walców gumowych wyznaczone z prób statycznego pełzania zostały opublikowane przez autora w pracach [14, 15], a niektóre charakterystyki dynamiczne w pracy [16].



Rys. 1. Tulejowe gumowo-metalowe łączniki sprężyste: a) silentblock, b) flexiblock

Prac badawczych poświęconych gumowo-metalowym łącznikom sprężystym jest niewiele. Wynika to przede wszystkim z braku specjalistycznego oprzyrządowania czy też gotowych stanowisk badawczych oraz spowodowane jest tajemnicą strzeżoną przez poszczególne firmy produkujące te elementy. Najbardziej zaawansowane w tej dziedzinie są prace badaczy radzieckich [17 - 23].

2. Cel badań

W badaniach dążono do określenia różnic występujących między charakterystykami reologicznymi przy odkształceniu postaciowym dwóch gatunków gumy oraz tulejowymi łącznikami sprężystymi, w których guma poddana została wstępnemu sprężeniu powstającemu w trakcie montażu silentblocku.

Wyniki badań statycznych oparto na długotrwałych próbach pełzania w temperaturze otoczenia przeprowadzonych przy różnych poziomach naprężeń, a wyniki badań dynamicznych — na dynamicznej relaksacji przy stałej amplitudzie odkształcenia mieszczącej się w zakresie liniowym, stosując różne częstotliwości.

3. Matematyczny opis poszukiwanych wielkości

Opisane w niniejszej pracy funkcje lepkosprężyste odnoszą się do izotermicznego procesu odkształcania ośrodka izotropowego, podlegającego zasadzie superpozycji Boltzmanna, stanowiącej podstawę teorii ciał liniowo lepkosprężystych.

Dla ciał tych zależności między składowymi dewiatora stanu naprężeń s_{ij} a składowymi dewiatora stanu odkształceń ε_{ij} oraz naprężeniem hydrostatycznym σ_0 a odkształceniem objętościowym θ można zapisać w postaci [24, 25]

$$(1) \quad \varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2G_0} \left[s_{ij}(t) + \int_{-\infty}^t \Pi(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \right];$$

$$(2) \quad \theta(t) = \frac{1}{K_0} \left[\sigma_0(t) + \int_{-\infty}^t \Pi_0(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right],$$

przedstawiającej sobą prawo naprężenie-odkształcenie typu pełzania.

Prawo odwrotne typu relaksacyjnego ma postać

$$(3) \quad s_{ij}(t) = 2G_0 \left[\varepsilon_{ij}(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right],$$

$$(4) \quad \sigma_0(t) = K_0 \left[\theta(t) - \int_{-\infty}^t R_0(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right],$$

gdzie $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$ oznaczają jądra pełzania odkształcenia postaciowego i objętościowego, $R(t)$, $R_0(t)$ — jądra relaksacji odkształcenia postaciowego i objętościowego, G_0 , K_0 — natychmiastowe moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego.

Można łatwo wykazać, że pomiędzy funkcjami określającymi własności reologiczne ośrodka, przy odkształceniach postaciowych zachodzą zależności:

$$(5) \quad \Pi(t) = 2G_0 \frac{d\Phi(t)}{dt},$$

$$(6) \quad R(t) = -\frac{1}{2G_0} \frac{d\Psi(t)}{dt},$$

$$(7) \quad G_0 = \frac{1}{2\Phi(0)} \quad \text{lub} \quad G_0 = \frac{\Psi(0)}{2},$$

gdzie $\Phi(t)$ i $\Psi(t)$ są funkcjami pełzania i relaksacji odkształcenia postaciowego.

3.1. Funkcja pełzania przy skręcaniu walca cienkościennego oraz tulejowego gumowo-metalowego łącznika. Skręcanie walca cienkościennego oraz tulejowego gumowo-metalowego łącznika sprężystego pozwala na realizację dewiatorowego stanu naprężenia, przy czym w pierwszym przypadku osiągany jest praktycznie jednorodny, a w drugim przypadku niejednorodny rozkład naprężeń ścinających (płaskie ścinanie).

Przykładając do powierzchni czołowych walca parę sił o stałym momencie $M_s = M(t) = \text{const}$, którego wektor jest zgodny z osią walca, uzyskamy stan naprężenia, scharakteryzowany średnim naprężeniem

$$(8) \quad \sigma_{12} = \frac{2M_s}{\pi g(R_1 + R_2)^2},$$

gdzie g jest grubością ścianki walca, a R_1 i R_2 odpowiednio promieniem wewnętrznym i zewnętrznym walca.

Funkcję pełzania odkształcenia postaciowego można określić z zależności

$$(9) \quad \Phi(t) = \frac{\varepsilon_{12}(t)}{\sigma_{12}(0)},$$

gdzie $\varepsilon_{12}(t) = \gamma(t)/2$ jest jedyną składową dewiatora odkształceń a $\gamma(t)$ odkształceniem postaciowym wyznaczonym ze związku geometrycznego

$$(10) \quad \gamma(t) = \varphi(l, t) \frac{R_2}{l},$$

w którym $\varphi(l, t)$ jest przemieszczeniem kątowym tworzącej próbki o długości l .

Korzystając z (8), (9) i (10) otrzymujemy

$$(11) \quad \Phi(t) = \frac{\pi g R_2 (R_1 + R_2)^2}{4l M_s} \varphi(l, t).$$

Jeśli do zewnętrznej tulei metalowej silentblocku przyłożyć parę sił o momencie $M_s = M(t) = \text{const}$, którego wektor leży na osi tulei, przy jednoczesnym zablokowaniu (unieruchomieniu) tulei wewnętrznej, to w gumie występować będzie stan naprężenia ścinającego określony naprężeniem $\sigma_{r\varphi}$. Dla wygody rozważań przyjęto, że oś z układu współrzędnych walcowych r, φ , z pokrywa się z osią silentblocku.

Z warunku równowagi mamy

$$(12) \quad M_s = \int_0^{2\pi} \int_0^l \sigma_{r\varphi}(r) r^2 d\varphi dz,$$

skąd

$$(13) \quad \sigma_{r\varphi}(r) = \frac{M_s}{2\pi r^2 l},$$

gdzie r, l oznaczają promień i długość tulei gumowej.

Zgodnie z zasadą superpozycji Boltzmanna, związek (1) między odkształceniem a naprężeniem można wyrazić w postaci

$$(14) \quad \varepsilon_{r\varphi}(t) = \int_0^t \frac{\partial \sigma_{r\varphi}(r, \tau)}{\partial \tau} \Phi(t - \tau) d\tau,$$

gdzie

$$(15) \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right].$$

Składowe przemieszczenia w przypadku skręcania silentblocku są następujące:

$$(16) \quad u_r = 0 \quad \text{oraz} \quad u_\varphi = r\varphi,$$

czyli

$$(17) \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

W dalszych przekształceniach skorzystamy z funkcji uogólnionych Heaviside'a $H(t)$ i Diraca $\delta(t)$ określonych w sposób następujący

$$(18) \quad H(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

oraz

$$(19) \quad \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0, \\ \infty & \text{dla } t = 0 \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

mających własności

$$(20) \quad \frac{dH(t)}{dt} = \delta(t), \quad \int_0^t f(t) \delta(t) dt = f(0),$$

$$\int_0^t f(t, \tau) \delta(\tau) d\tau = f(t, 0) H(t).$$

Jeśli oznaczyć działające w chwili $t = 0^+$ naprężenie w tulei gumowej przez $\sigma_{r\varphi}(r, 0)$, wtedy podstawiając

$$(21) \quad \sigma_{r\varphi}(r, t) = \sigma_{r\varphi}(r, 0) H(t)$$

do równania (14) oraz korzystając z (13) otrzymamy równanie

$$(22) \quad \Phi(t) = \frac{\pi l}{M_s} r^3 \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Po scałkowaniu powyższego równania, przy uwzględnieniu, że $\varphi(R_1, t) = 0$, funkcja przemieszczenia skręcanego tulejowego gumowo-metalowego łącznika ma postać

$$(23) \quad \Phi(t) = \frac{2\pi l R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) M_s} \varphi(R_2, t),$$

gdzie $\varphi(R_2, t)$ oznaczają kąt skręcania tulei metalowej zewnętrznej w czasie próby, R_1, R_2 — promień wewnętrzny i zewnętrzny tulei gumowej.

3.2. Drgania ustalone przy okresowym skręcaniu walca cienkościennego oraz tulejowego gumowo-metalowego łącznika. Niech dewiator odkształceń zmienia się w sposób harmoniczny w czasie

$$(24) \quad \varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mn}^0 e^{i\omega t}, \quad m, n = 1, 2, 3,$$

gdzie ε_{ij}^0 oznacza amplitudę ewiatora odkształceń, ω — częstość wymuszenia, $i = \sqrt{-1}$ — jednostkę urojoną.

Zasada superpozycji ujmująca zależność między dewiatorem naprężeń a dewiatorem odkształceń ma postać

$$(25) \quad s_{mn}(t) = \int_0^t \frac{\partial \varepsilon_{mn}(\tau)}{\partial \tau} \Psi(t - \tau) d\tau,$$

a uwzględniając (24) otrzymujemy

$$(26) \quad s_{mn}(t) = i\omega \varepsilon_{mn}^0 \int_0^t \Psi(t - \tau) e^{i\omega \tau} d\tau.$$

Korzystając z własności splotu równanie (26) można zapisać w postaci

$$(27) \quad s_{mn}(t) = i\omega \varepsilon_{mn}^{\circ} e^{i\omega t} \int_0^t \Psi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Ponieważ rozpatrujemy drgania ustalone ciała lepkosprężystego, proces odkształcenia stabilizuje się [24], zaś wszystkie wielkości przy danej częstotliwości wymuszenia są stałe. Można więc przejść z górną granicą całkowania do nieskończoności, a całkę

$$(28) \quad \int_0^{\infty} \Psi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \Psi^*(i\omega)$$

uważać jako transformację Laplace'a funkcji Ψ . Równanie (27) przyjmie wówczas postać

$$(29) \quad s_{mn}(\omega) = i\omega \Psi^*(i\omega) e^{i\omega t},$$

lub po podstawieniu

$$(30) \quad i\omega \Psi^*(i\omega) = R^*(i\omega),$$

mamy

$$(31) \quad R^*(i\omega) = \frac{S_{mn}(\omega)}{\varepsilon_{mn}^{\circ} e^{i\omega t}}.$$

Korzystając ze wzoru Eulera

$$(32) \quad e^{-i\omega\tau} = \cos\omega\tau - i\sin\omega\tau,$$

możemy (28) przedstawić w postaci

$$(33) \quad \Psi^*(i\omega) = \int_0^{\infty} \Psi(\tau) \cos\omega\tau d\tau - i \int_0^{\infty} \Psi(\tau) \sin\omega\tau d\tau.$$

Podstawiając związek (33) do (30) otrzymujemy

$$(34) \quad R^*(i\omega) = \omega \int_0^{\infty} \Psi(\tau) \sin\omega\tau d\tau + i\omega \int_0^{\infty} \Psi(\tau) \cos\omega\tau d\tau$$

lub

$$(35) \quad R^*(i\omega) = R'(\omega) + iR''(\omega),$$

gdzie:

$$(36) \quad R'(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \Psi(\tau) \sin\omega(\tau) d\tau,$$

$$R''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \Psi(\tau) \cos\omega(\tau) d\tau$$

można traktować jako sinusowe i cosinusowe transformaty Fouriera funkcji relaksacji.

Wprowadzając nowe podstawienia

$$(37) \quad \begin{aligned} R'(\omega) &= R^*(i\omega) \cos \delta(\omega), \\ R''(\omega) &= R^*(i\omega) \sin \delta(\omega), \end{aligned}$$

po uwzględnieniu (35), zależność (30) przyjmie postać

$$(38) \quad R^*(i\omega) \cos \delta(\omega) + iR^*(i\omega) \sin \delta(\omega) = \frac{s_{mn}(\omega)}{\varepsilon_{mn}^\circ e^{i\omega t}}$$

lub

$$(39) \quad s_{mn}(\omega) = \varepsilon_{mn}^\circ R^*(i\omega) e^{i(\omega t + \delta(\omega))},$$

czyli dewiator naprężeń jest przesunięty w fazie względem dewiatora odkształceń o kąt przesunięcia fazowego $\delta(\omega)$, oraz zależny będzie od częstości wymuszenia ω .

Między modułem odkształcenia postaciowego $G^*(i\omega)$ a modułem częstotliwościowym $R^*(i\omega)$ zachodzi zależność

$$(40) \quad R^*(i\omega) = 2G^*(i\omega),$$

czyli

$$(41) \quad G^*(i\omega) = \frac{s_{mn}(\omega)}{2\varepsilon_{mn}^\circ} e^{-i(\omega t + \delta(\omega))},$$

lub

$$(42) \quad G^*(i\omega) = \frac{s_{mn}^\circ(\omega)}{2\varepsilon_{mn}^\circ} e^{-i\delta(\omega)}.$$

Jak wynika z (42), moduł odkształcenia postaciowego w przypadku ciała liniowo-lepkospreżystego jest wielkością zespoloną

$$(43) \quad G^*(i\omega) = G'(\omega) - iG''(\omega),$$

w którym $G'(\omega)$ jest dynamicznym modułem zachowawczym, a $G''(\omega)$ dynamicznym modułem stratności.

Kąt przesunięcia fazowego $\delta(\omega)$, zwany także kątem stratności, zależy od własności lepkospreżystych gumy i może w badaniach eksperymentalnych posłużyć za miarę własności tłumieniowych.

Podając powierzchnię czołową walca cienkościennego harmonicznym drganiom typu

$$(44) \quad \varphi(l, t) = \operatorname{Re}[\varphi^\circ e^{i\omega t}] = \varphi^\circ \cos \omega t,$$

wywołujemy zmianę składowej ε_{12} dewiatora odkształceń

$$(45) \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^\circ \cos \omega t,$$

gdzie φ° i ε_{12}° są amplitudami kąta skręcania i składowej ε_{12} . Zespolony moduł odkształcenia postaciowego (42) przyjmuje wtedy postać

$$(46) \quad G^*(i\omega) = \frac{\sigma_{12}^\circ(\omega)}{2\varepsilon_{12}^\circ} e^{-i\delta(\omega)}.$$

Przy braku sił masowych oraz minimalnym udziale sił bezwładności, korzystając z (8), (10) i (46) otrzymujemy wzór na wartość bezwzględna zespolonego modułu odkształcenia postaciowego

$$(47) \quad |G^*(i\omega)| = \frac{2I}{\pi g R_2 (R_1 + R_2)^2} \frac{M^0(\omega)}{\varphi^0},$$

w którym $M^0(\omega)$ jest amplitudą momentu skracającego.

Jeśli tuleję metalową zewnętrzną łącznika poddać periodycznemu skracaniu

$$(48) \quad \varphi(R_2, t) = R_e[\varphi^0(R_2)e^{i\omega t}] = \varphi^0(R_2)\cos\omega t,$$

to tuleja gumowa poddana zostanie zmiennym odkształceniom

$$(49) \quad \varepsilon_{r\varphi}(r) = \varepsilon_{r\varphi}^0(r)\cos\omega t,$$

gdzie $\varphi^0(R_2)$ i $\varepsilon_{r\varphi}^0(r)$ są amplitudami skracania tulei zewnętrznej i składowej $\varepsilon_{r\varphi}$.

Zespolony moduł odkształcenia (42) w przypadku dynamicznego skracania tulejowego gumowo-metalowego łącznika ma postać

$$(50) \quad G^*(i\omega) = \frac{\sigma_{r\varphi}^0(r)}{2\varepsilon_{r\varphi}^0(r)} e^{-i\delta(\omega)}.$$

Biorąc pod uwagę podobne założenia jak uprzednio, korzystając z (12), (17) i (50) oraz przeprowadzając całkowanie przy warunku $\varphi^0(R_1) = 0$, wzór na wartość bezwzględna zespolonego modułu odkształcenia postaciowego łącznika jest następujący

$$(51) \quad |G^*(i\omega)| = \frac{R_2^2 - R_1^2}{4\pi l R_1^2 R_2^2} \frac{M^0(\omega)}{\varphi^0(R_2)}.$$

4. Omówienie badań. Wyniki doświadczeń

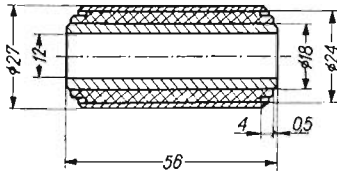
Zarówno badania statycznego pełzania jak i dynamicznej relaksacji przeprowadzone były na prototypowych stanowiskach badawczych, zaprojektowanych przez autora, a wykonanych w Instytucie Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej.

Długotrwałe próby statycznego pełzania próbek gumowych oraz silentblocków przeprowadzono na pełzarce pozwalającej dokonywać odczytów przemieszczeń kątowych badanego elementu z dokładnością 40''.

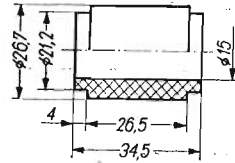
Badania dynamiczne zostały przeprowadzone na maszynie opartej na kinematycznym sposobie wymuszenia przemieszczeń kątowych. Maszyna ta umożliwia prowadzenie badań dynamicznych przy zachowaniu stałego przemieszczenia średniego oraz zmiennej amplitudzie. Pomiaru kąta przesunięcia fazowego dokonywano przy zastosowaniu sterowanego impulsu pochodzącego z zasilanego napięciem stałym kontaktronu zwieranego wirującymi dwoma magnesami, nakładanego odpowiednio na sygnał przemieszczenia kąтового i momentu skracającego. Dokładny opis stanowiska badawczego wraz ze sposobem pomiaru kąta przesunięcia fazowego przedstawiony został w pracy [15].

Użyte do badań próbki cienkościennie posiadały następujące wymiary długość $l = 90$ mm, promień wewnętrzny $R_1 = 12$ mm, promień zewnętrzny $R_2 = 15$ mm i wykonane były ze zwulkanizowanych mieszanek gumowych o symbolach ME 150 - 50 i ME 150 - 60, posiadające wytrzymałość na rozciąganie odpowiednio $22,3 \text{ MN/m}^2$, i $17,5 \text{ MN/m}^2$ oraz średnie twardości $52,52 \text{ }^\circ\text{Sh}$ i $73,68 \text{ }^\circ\text{Sh}$.

Stosowane w badaniach silentblocki typu G.2 (rys. 2) posiadały tulejki gumowe (rys. 3) wykonane z tych samych gatunków gum, co próbki walcowe.



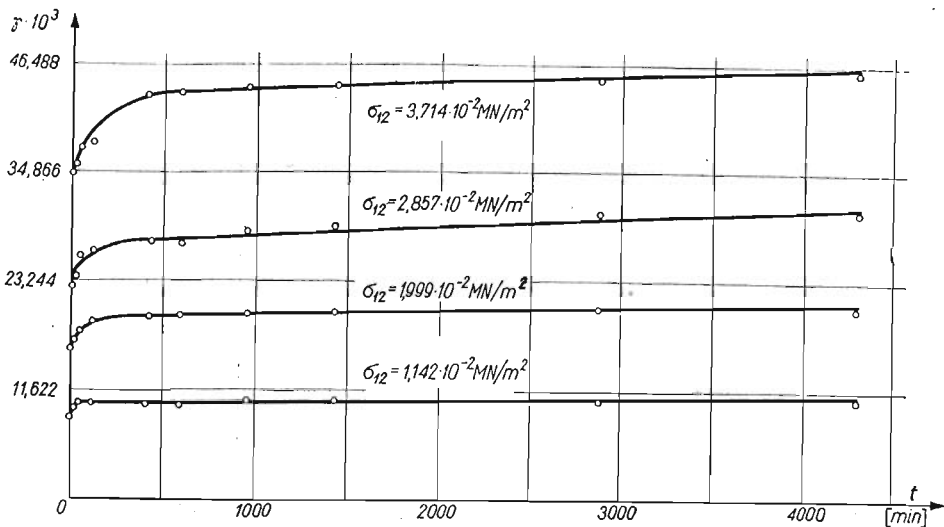
Rys. 2. Silentblock G2



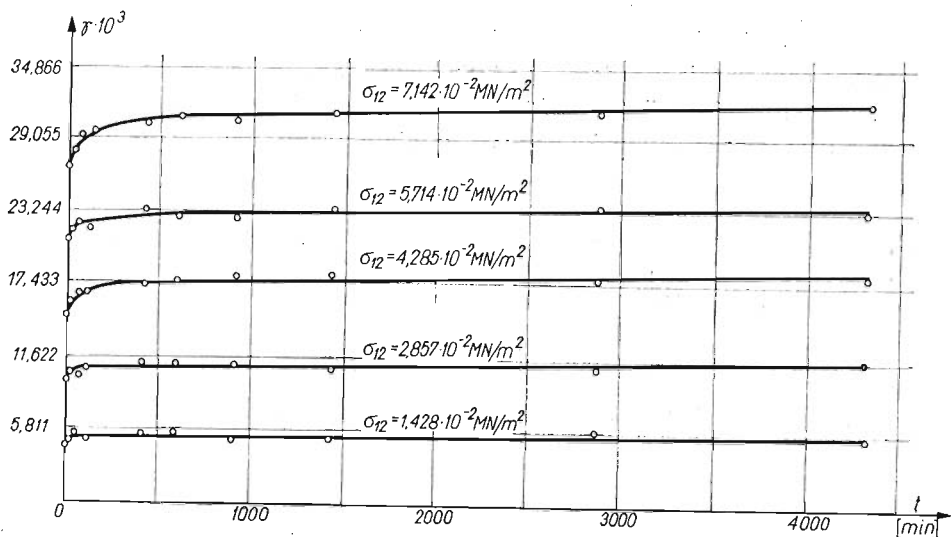
Rys. 3. Tulejka gumowa użyta do montażu silentblocku G2

Badania statyczne oraz dynamiczne przeprowadzone były w temperaturze otoczenia w okresie trzech miesięcy po wulkanizacji gumy dla próbek walcowych oraz jednego roku od chwili montażu dla silentblocków. Do sporządzania wykresów oraz opracowania analitycznego wyników badań użyto wartości pomiarowych, średnich z czterech próbek.

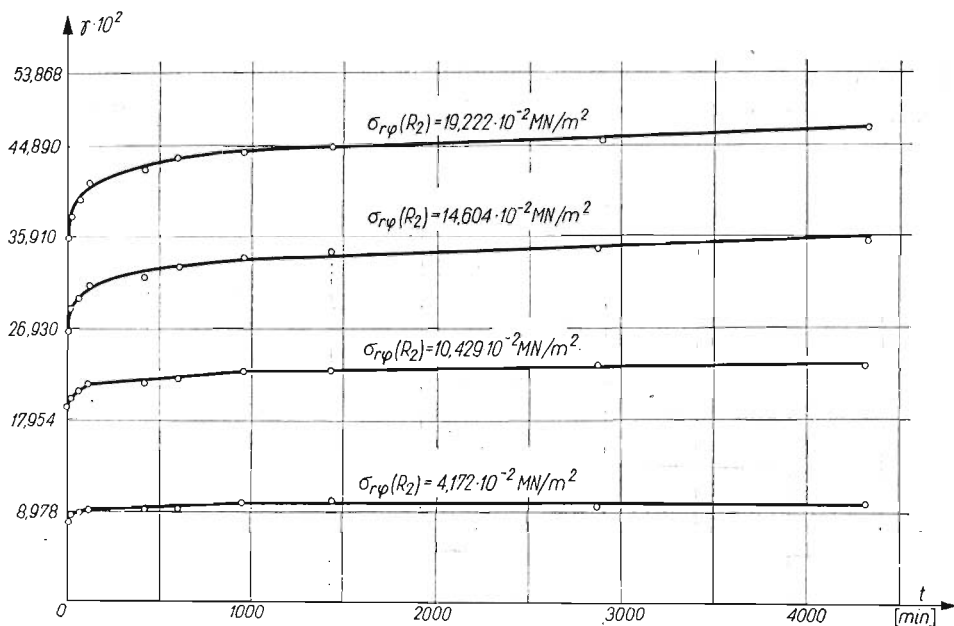
4.1. Pełzanie statyczne. Obydwa rodzaje gum i silentblocków poddawano próbie statycznego pełzania przy różnych poziomach momentów skręcających, dokonując pomiarów kąta skręcania w czasie pełzania. Czas trwania pełzania wynosił 72 godziny. Krzywe pełzania dla poszczególnych poziomów naprężeń próbek gumowych przedstawiono na rys. 4 i 5, a dla silentblocków na rys. 6 i 7. Na podstawie tych krzywych sporządzono krzywe



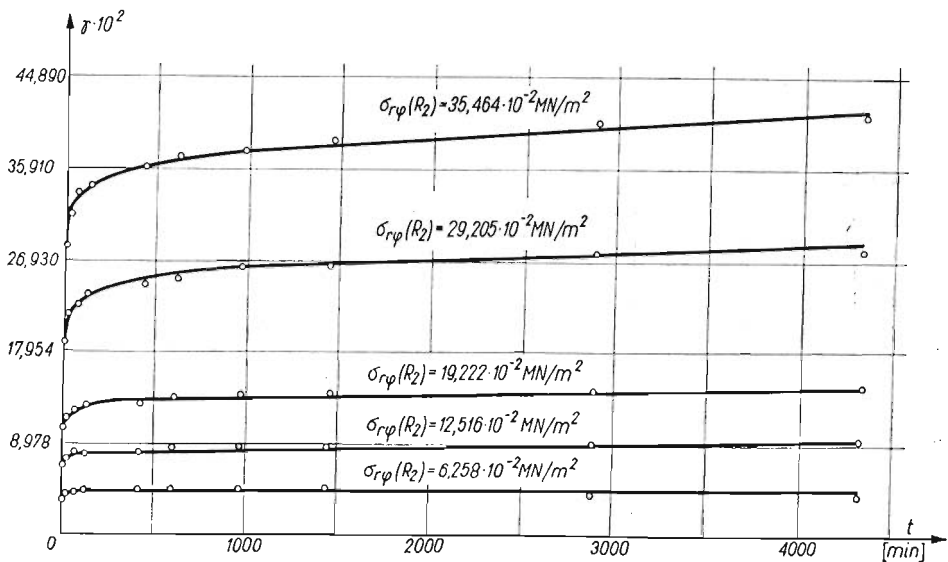
Rys. 4. Krzywe pełzania cienkościennego walca gumowego ME 150 - 50 przy różnych poziomach naprężeń



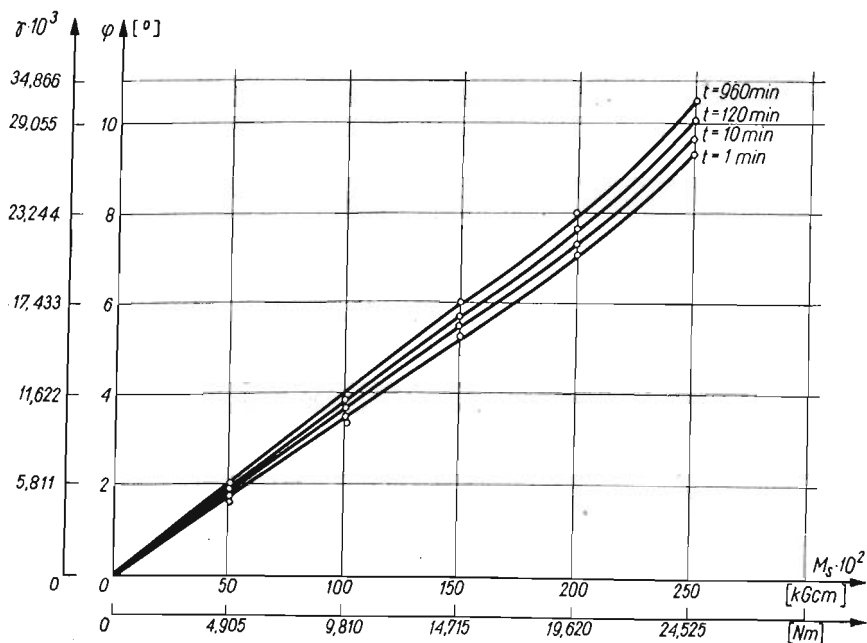
Rys. 5. Krzywe pełzania cienkościennego walca gumowego ME 150 - 60 przy różnych poziomach naprężeń



Rys. 6. Krzywe pełzania silentblocku z tuleją gumową ME 150 - 50 przy różnych poziomach naprężeń

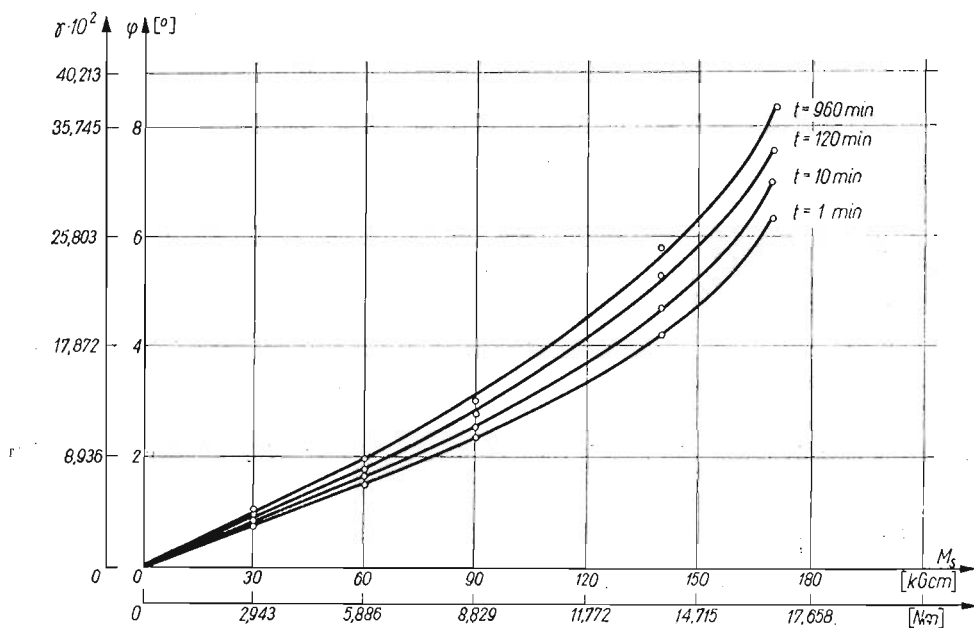


Rys. 7. Krzywe pełzania silentblocku z tuleją gumową ME 150 - 60 przy różnych poziomach naprężeń



Rys. 8. Krzywe izochroniczne cienkościennego walca gumowego ME 150 - 60

izochroniczne dla ustalonych czasów pełzania 1, 10, 120 i 960 min. służące do wyznaczenia zakresu liniowości. Przykładowe przebiegi tych izochron pokazano dla próbki gumowej na rys. 8 i dla silentblocku posiadającego tuleję gumową z tego samego gatunku gumy na rys. 9.



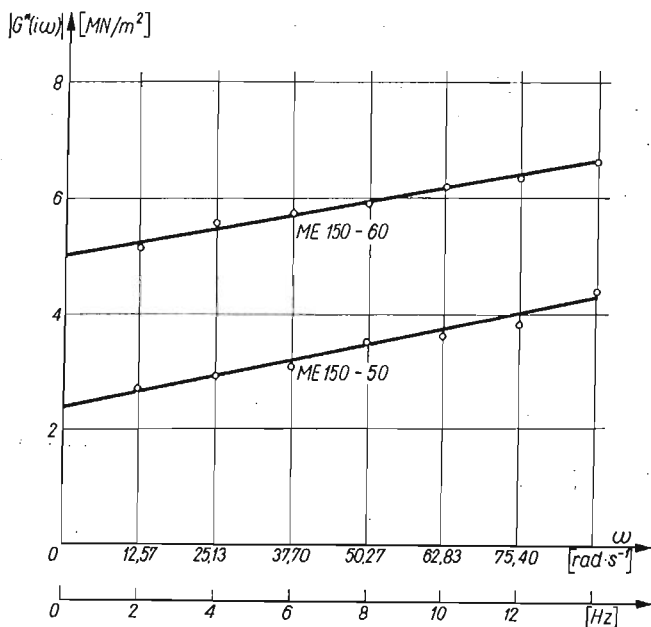
Rys. 9. Krzywe izochroniczne silentblocku z tuleją gumową ME 150 - 60

Dla próbek walcowych zakres liniowości wynosił: dla gumy ME 150 - 50 $7^{\circ}30'$; dla ME 150 - 60 $6^{\circ}10'$; co odpowiada odkształceniu postaciowemu $\gamma \cdot 10^3$ odpowiednio 21,806 i 17,948. Silentblocki miały zakres liniowy: dla tulei gumowej ME 150 - 50 $9^{\circ}50'$; dla ME 150 - 60 $2^{\circ}40'$, co odpowiada odkształceniu $\gamma \cdot 10^2$ odpowiednio 43,982 i 11,714.

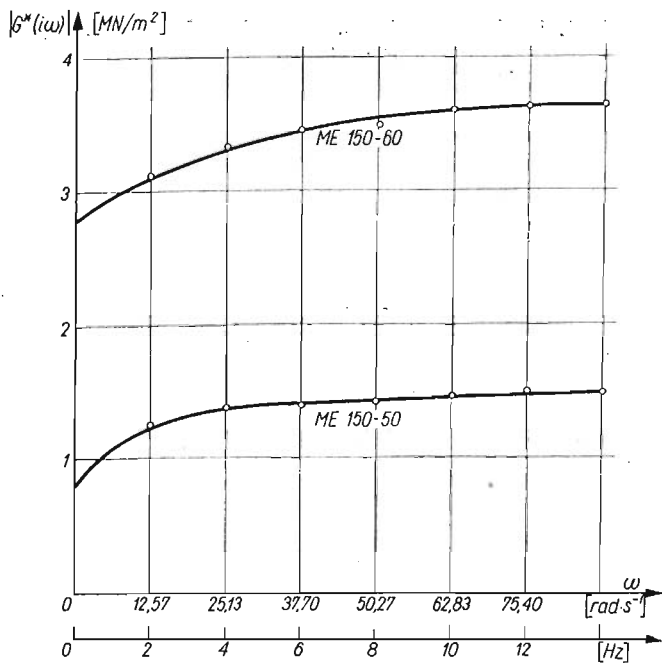
4.2. Dynamiczna relaksacja. Próby dynamiczne zarówno próbek gumowych, jak i silentblocków przeprowadzono w zakresie częstości 2 - 14 Hz przy stałej amplitudzie przemieszczenia kąowego, mieszczącej się w zakresie liniowości próbek i silentblocków. W czasie badań dokonywano na rejestratorze firmy Brüel-Kjaer zapisu amplitud momentu skręcającego dla stosowanych w badaniach częstości wymuszeń.

Na rys. 10 przedstawiono wyniki pomiaru modułu bezwzględного odkształcenia postaciowego dla próbek gumowych, a na rys. 11 dla silentblocków.

Pomiary kąta stratności przeprowadzone za pomocą mechanicznego miernika przesunięcia fazowego wykazały, że może on być uważany za wielkość stałą w zakresie częstości stosowanych w badaniach. I tak dla gumy ME 150 - 50 $\delta = 3^{\circ}45'$, $\text{tg } \delta = 0,065$; dla ME 150 - 60 $\delta = 5^{\circ}53'$, $\text{tg } \delta = 0,1030$, a dla silentblocku odpowiednie do rodzaju tulei gumowej $\delta = 6^{\circ}48'$, $\text{tg } \delta = 0,1191$ oraz $\delta = 8^{\circ}03'$, $\text{tg } \delta = 0,1413$.



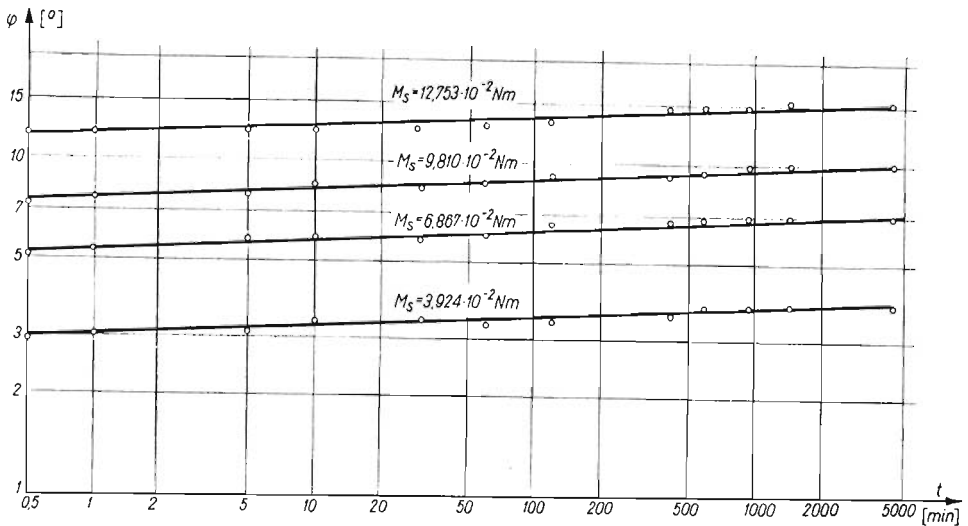
Rys. 10. Moduł bezwzględny odkształcenia postaciowego $|G^*(i\omega)|$ cienkościennych walców gumowych w funkcji częstości wymuszenia ω



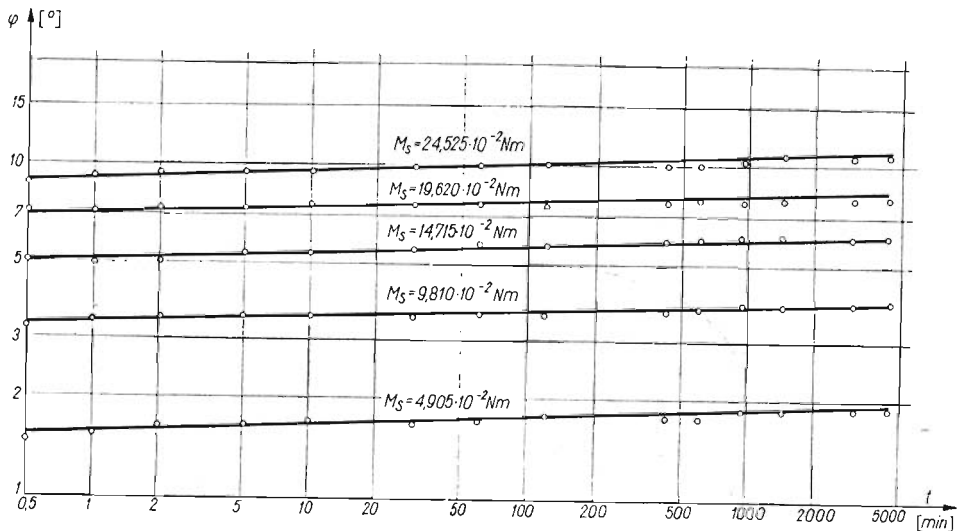
Rys. 11. Moduł bezwzględny odkształcenia postaciowego $|G^*(i\omega)|$ silerblocków w funkcji częstości wymuszenia ω

5. Analiza i dyskusja wyników badań

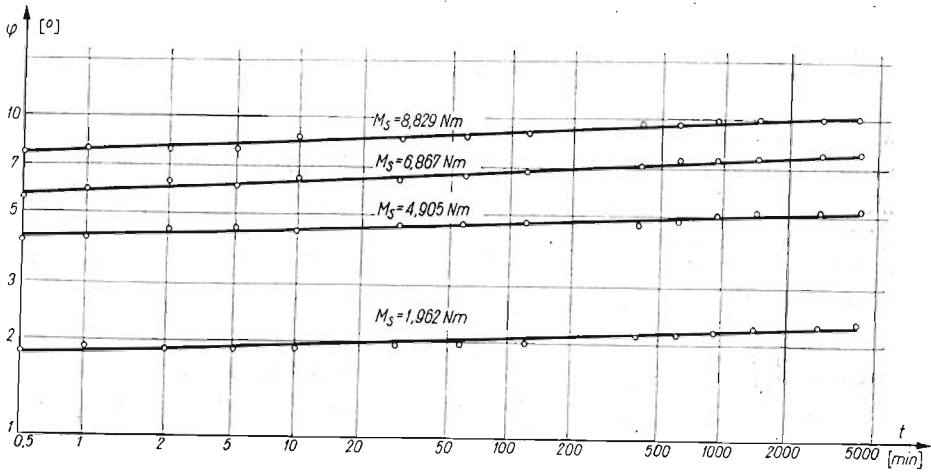
5.1. **Badania statyczne.** Uzyskane wyniki przemieszczeń kątowych w czasie, dla stosowanych w badaniach momentów skręcających, nanoszono na wykresy w układzie podwójnie logarytmicznym, w którym na poziomej osi odmierzonego czas, a na osi pionowej kąt skręcania, rys. 12 - 15.



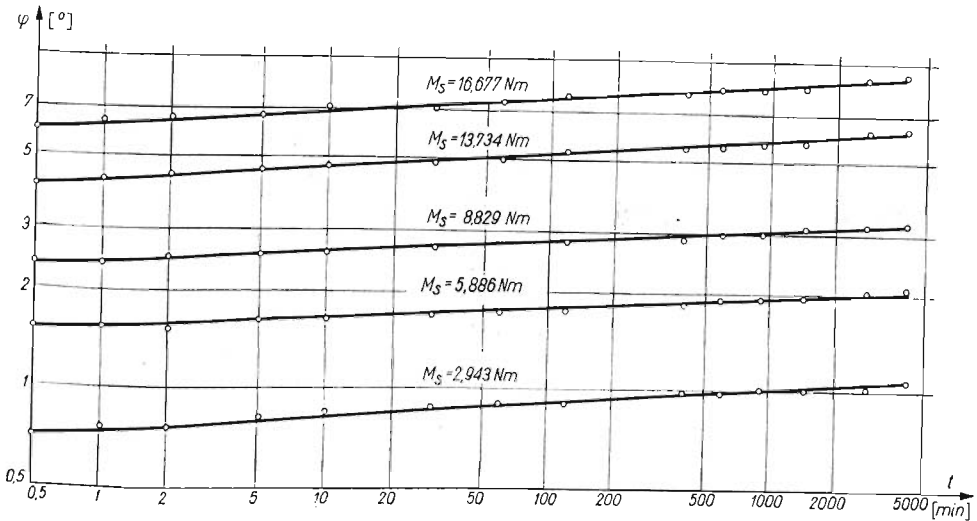
Rys. 12. Przebieg pełzania cienkościennego walca gumowego ME 150 - 50 dla różnych wartości momentu skręcającego



Rys. 13. Przebieg pełzania cienkościennego walca gumowego ME 150 - 60 dla różnych wartości momentu skręcającego



Rys. 14. Przebieg pelzania silentblocku z tuleją gumową ME 150 - 50 dla różnych wartości momentu skręcającego



Rys. 15. Przebieg pelzania silentblocku z tuleją gumową ME 150 - 60 dla różnych wartości momentu skręcającego

Jak wynika z rysunków, przebieg zmian przemieszczenia kąowego można opisać równaniem

$$(52) \quad \varphi(t) = A + Bt^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Uwzględniając (23) funkcja pelzania zarówno dla próbek gumowych oraz silentblocków przyjmie postać

$$(53) \quad \Phi(t) = E + Ft^\alpha,$$

gdzie A, B, E, F, α są stałymi.

Na wielkość natychmiastowego odkształcenia, a tym samym na natychmiastowy moduł odkształcenia zdefiniowany jako

$$(54) \quad G_0 = \lim_{t \rightarrow 0} G(t),$$

podstawowy wpływ wywiera technika wykonania badań.

Wielkości G_0 mogą być wyznaczone przy dostatecznie dużych prędkościach obciążenia, względnie wykorzystując zasadę superpozycji temperaturowo-czasowej redukując krzywe podatności do wysokich temperatur.

W niniejszych badaniach, nie dysponując powyższymi technikami badawczymi, przyjęto, że odkształcenie natychmiastowe odpowiada przedziałowi czasowemu $t_0 = 3$ sekundy (pierwszy pomiar).

Postać funkcji pełzania wyznaczono analitycznie na podstawie wyników mieszczących się w zakresie liniowym. Stosując metodę najmniejszych kwadratów, obliczono współczynniki E , F , i α , otrzymując funkcje pełzania odkształcenia postaciowego w postaci: dla gumy ME 150 - 50

$$(55) \quad \Phi(t) \cdot 10^2 = 25,022 + 14,112t^{0,0815}, \left[\frac{\text{m}^2}{\text{MN}} \right]$$

dla gumy ME 150 - 60

$$(56) \quad \Phi(t) \cdot 10^2 = 12,917 + 4,459t^{0,0814}, \left[\frac{\text{m}^2}{\text{MN}} \right]$$

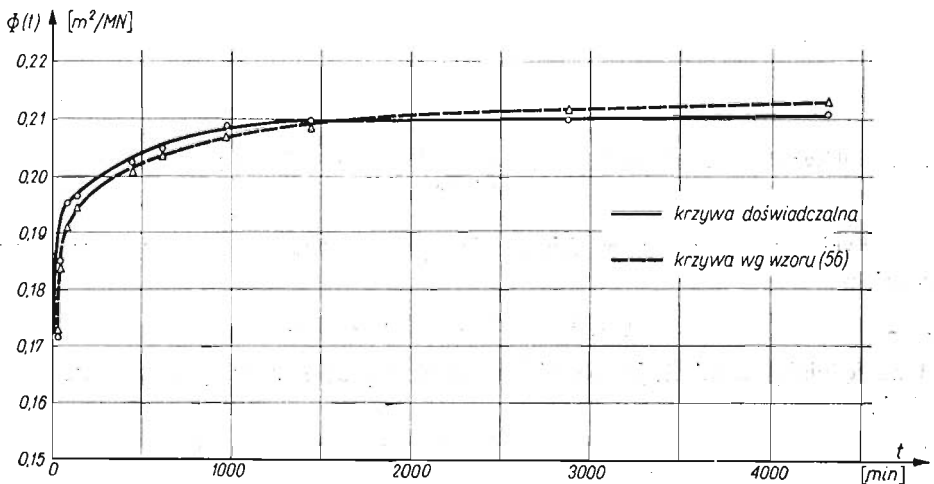
dla silentblocku o tulei gumowej ME 150 - 50

$$(57) \quad \Phi(t) \cdot 10^2 = 69,840 + 9,450t^{0,133}, \left[\frac{\text{m}^2}{\text{MN}} \right]$$

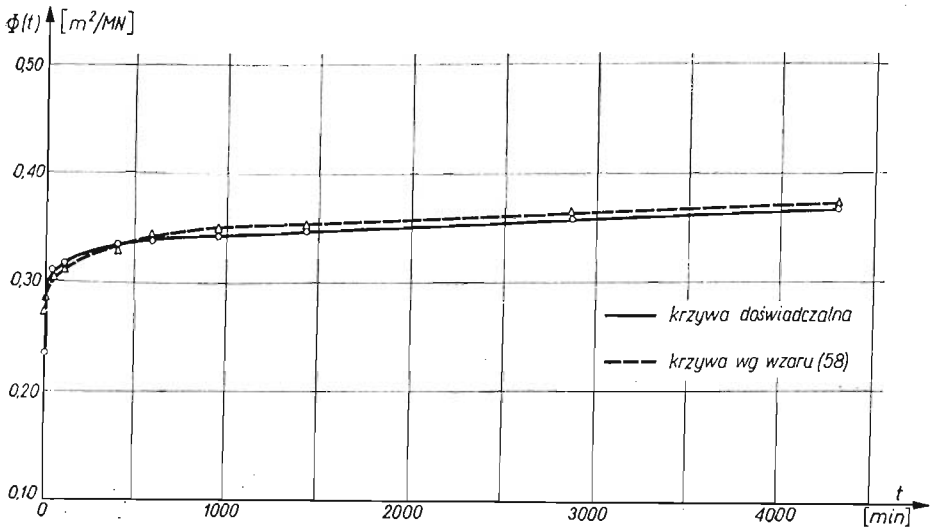
dla silentblocku o tulei gumowej ME 150 - 60

$$(58) \quad \Phi(t) \cdot 10^2 = 28,594 + 4,264t^{0,160}, \left[\frac{\text{m}^2}{\text{MN}} \right]$$

Na rys. 16 pokazano przebieg funkcji pełzania dla gumy ME 150 - 60, a na rys. 17 dla silentblocku z tuleją gumową wykonaną z tego samego gatunku gumy.



Rys. 16. Funkcja pełzania $\Phi(t)$ cienkościennego walca gumowego ME 150 - 60



Rys. 17. Funkcja pełzania $\Phi(t)$ silentbloku z tuleją gumową ME 150 - 60

5.2. Badania dynamiczne. Wyniki obliczonych modułów bezwzględnych odkształcenia postaciowego na podstawie dokonanych pomiarów momentu skręcającego przy różnych częstościach wymuszenia dla próbek gumowych pokazano na rys. 10, a dla silentbloku na rys. 11. Układ punktów pomiarowych dla próbek gumowych wskazuje, że w zakresie stosowanych częstości można je opisać równaniem

$$(59) \quad |G^*(i\omega)| = a + b\omega.$$

Po obliczeniu współczynników a i b dla gumy ME 150 - 50 równanie powyższe ma postać

$$(60) \quad |G^*(i\omega)| = 2,3799 + 0,0202\omega, \left[\frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$$

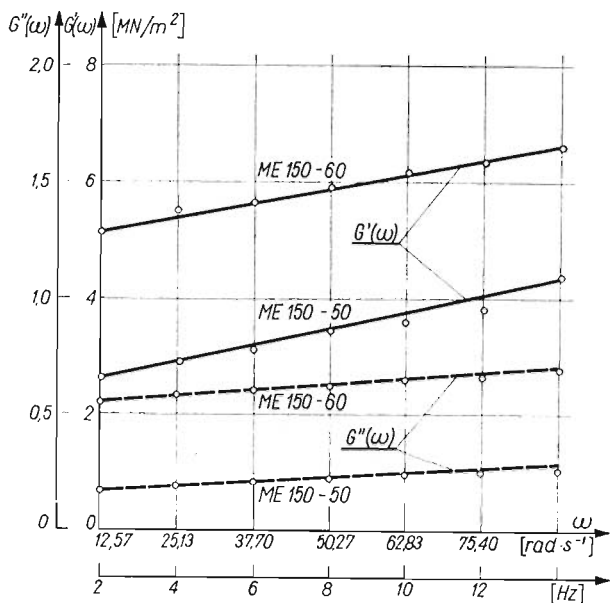
a dla gumy ME 150 - 60

$$(61) \quad G^*(i\omega) = 5,0510 + 0,0184\omega, \left[\frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right].$$

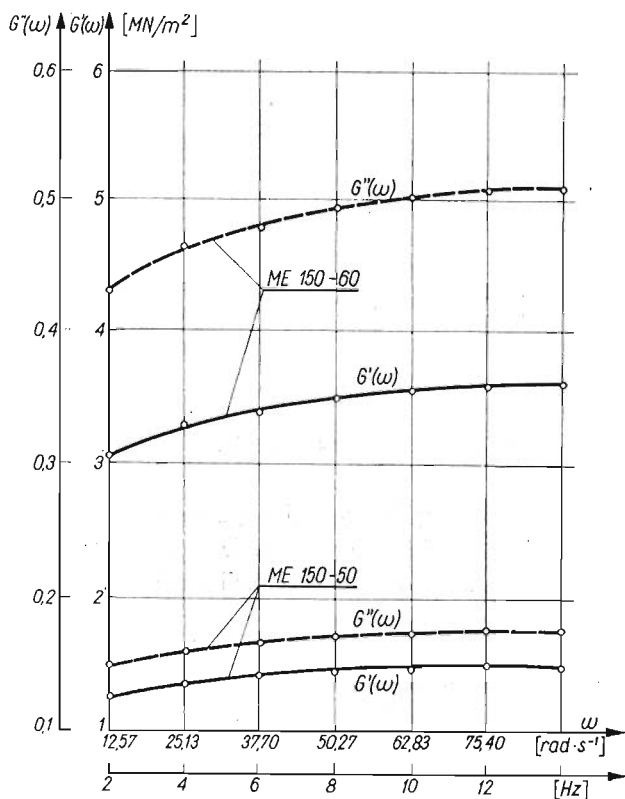
Ponieważ kąty stratności dla obydwu rodzajów gum są stałe, przeto składowe zespolonego modułu odkształcenia postaciowego w zakresie stosowanych w badaniach częstości będą przedstawiały także postać liniową w funkcji częstości. Przebiegi tych wielkości zostały przedstawione na rys. 18.

Porównując sumy kwadratów odchyłek oraz przeciętny błąd procentowy w próbach analitycznego opisu przebiegu zmian wartości bezwzględnej modułu postaciowego silentbloku w zależności od częstości wymuszenia ω , stwierdzono, że najlepsze wyniki otrzymuje się dla równania

$$(62) \quad |G^*(i\omega)| = m - \frac{1}{1 + k\omega^p},$$



Rys. 18. Dynamiczny moduł zachowawczy $G'(\omega)$ oraz dynamiczny moduł stratności $G''(\omega)$ gumowych walców cienikościennych w funkcji częstości wymuszenia ω



Rys. 19. Dynamiczny moduł zachowawczy $G'(\omega)$ oraz dynamiczny moduł stratności $G''(\omega)$ silerblocków z różnymi tulejami gumowymi w funkcji częstości wymuszenia ω

Dla silentblocku z tuleją gumową ME 150 - 50 zależność powyższa ma postać

$$(63) \quad |G^*(i\omega)| = 1,7834 - \frac{1}{1 + 0,271\omega^{0,513}}, \left[\frac{MN}{m^2} \right],$$

a dla silentblocku z tuleją gumową ME 150 - 60

$$(64) \quad |G^*(i\omega)| = 3,8157 - \frac{1}{1 + 0,011\omega^{1,410}} \cdot \left[\frac{MN}{m^2} \right]$$

Przebieg zmian dynamicznego modułu zachowawczego oraz dynamicznego modułu stratności został pokazany na rys. 19. Ma on taki sam charakter jak wartość bezwzględna modułu, ponieważ w przypadku silentblocku kąt stratności jest także wielkością stałą.

6. Wnioski

1. Na podstawie wykreślonych charakterystyk statycznych (izochron) (rys. 8, 9), stwierdzono, że zarówno badane zwulkanizowane mieszanki gumowe oraz tulejowe gumowo-metalowe łączniki sprężyste typu silentblock z tulejami gumowymi wykonanymi z tych samych gatunków gum posiadają zakres liniowy w sensie Boltzmann'a i to tym większy, im niższą mają twardość. Wielkości odkształceń mieszczących się w zakresie liniowym są o około jeden rząd większe dla silentblocku.

2. Układy punktów pomiarowych (rys. 12 - 15) dla zwulkanizowanych mieszanek gumowych o różnych twardościach oraz dla silentblocków wskazują, że krzywe pełzania, dla zakresu liniowego i nieliniowego, mogą być opisane takim samym wzorem, tj. równaniem (52).

3. Natychmiastowe oraz chwilowe moduły odkształcenia postaciowego dla silentblocków są dużo mniejsze aniżeli dla próbek wykonanych z tych samych zwulkanizowanych mieszanek gumowych. Oznacza to, że wstępny stan naprężenia w gumie powoduje zmniejszenie jej sztywności.

4. Natychmiastowy moduł odkształcenia postaciowego obliczony analitycznie dla czasu $t = 0$ jest dla próbek gumowych o 30 - 45%, a dla silentblocków o około 10% większy od wyznaczonego na podstawie pomiaru kąta skręcenia dla czasu początkowego $t = 3$ s, a w stosunku do wyników pomiaru dla czasu $t = 1$ min wielkości te różnią się odpowiednio, o 35 - 55% i 15%. Dlatego też wydaje się być uzasadnionym, aby dla celów praktycznych moduł odkształcenia postaciowego był podawany na podstawie wyników uzyskiwanych w dłuższych czasach np. jak to zaleca angielska norma [26] dotycząca wyznaczania modułu odkształcenia na podstawie wyników z próby pełzania lub relaksacji dla czasu $t = 1$ min.

5. Dynamiczne badania okresowej relaksacji wykazały, że w zakresie stosowanych w badaniach częstości moduł bezwzględny odkształcenia postaciowego dla próbek gumowych rośnie w sposób liniowy z częstością (rys. 10), a dla silentblocków rośnie asymptotycznie do pewnej ustalonej wartości i przy dalszym wzroście częstości jest od niej praktycznie niezależny (rys. 11).

6. Pomiarzy kąta stratności δ wykazały, że w zakresie częstości stosowanych w badaniach zarówno dla próbek gumowych, jak i silentblocków kąt ten może być przyjęty za wielkość stałą niezależną od częstości. Porównując średnie wartości tego kąta zmierzonego dla

próbek gumowych i silentblocku, którego tuleja wykonana została z tego samego gatunku gumy, można stwierdzić, że różnią się one między sobą dosyć znacznie. W obydwu przypadkach większy kąt występuje w silentblocku. Dla gumy ME 150 - 50 wzrost tego kąta jest rzędu 80%, a dla gumy ME 150 - 60 wynosi około 35%.

7. Ponieważ kąt stratności δ w każdym przypadku można przyjąć jako wielkość stałą, przeto składowe zespolonego modułu odkształcenia postaciowego: dynamiczny moduł zachowawczy $G'(\omega)$ i dynamiczny moduł stratności $G''(\omega)$ mają taki sam przebieg jak moduł bezwzględny (rys. 19, 20).

Literatura cytowana w tekście

1. Э. Э. Лавендел, *Общие решения теории упругости для несжимаемого материала*. В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 7, Рига, Зинатне 1961.
2. J. C. SNOWDON, *Rubberlike materials, their internal damping and role in vibration isolation*, *Journal of Sound Vibration* 2, 2 (1965).
3. W. R. KRIGBAUM, R. J. ROE, *Survey of the theory of rubberlike elasticity*, *Rubber Chemistry and Technology*, 5, 38 (1965).
4. Д. А. ДИБРА, М. И. СНИЕГС, *Решение задач теории упругости методом сеток для несжимаемого материала*, В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 21, Рига, Зинатне 1971.
5. Э. Э. Лавендел, М. И. СНИЕГС, *Применение метода конечных элементов в плоской задаче для несжимаемого материала*. В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 21, Рига, Зинатне 1974.
6. J. JAWORSKI, *Guma w pojazdach mechanicznych*, WKiŁ, Warszawa 1962.
7. Држ. Краус и др., *Усиление эластомеров*, Мир, Москва 1968.
8. Л. ТРЕЛОАР, *Физика упругости каучука*, Издательство Иностранной Литературы, Москва 1953.
9. Z. JAŚKIEWICZ, *Elementy pojazdów mechanicznych, Łączniki sprężyste*, PWT, Warszawa 1959.
10. A. V. TOBOLSKY, K. J. MURAKAMI, *Existence of a sharply defined maximum relaxation time for mono-disperse polystyrene*, *Journal of Polymer Science*, 40 (1959).
11. Ю. С. УРЖУМЦЕВ, А. В. ПУТАН, Э. В. КАЛПРОЗЕ, *Аппроксимация релаксационных спектров*, *Механика Полимеров*, 4 (1967).
12. Г. М. БАРТЕНЕВ, Л. А. ШЕЛКОВНИКОВА, Л. А. АКОПЯН, *К вопросу о спектрах времен релаксации в полимерах*, *Механика Полимеров*, 1 (1973).
13. A. FORYŚ, A. FORYŚ, *Rezonans mechaniczny przy drganiach skrętnych pręta lepkosprężystego*, *Rozprawy Inżynierskie* 19, 3 (1971).
14. K. WYLEŻYCH, *Wyznaczenie niektórych własności lepkosprężystych walca gumowego poddanego skręcaniu*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika* 52, Gliwice 1973.
15. K. WYLEŻYCH, *Badania pewnych własności reologicznych wybranego gatunku zwulkanizowanej mieszanki gumowej*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika* 52, Gliwice 1973.
16. K. WYLEŻYCH, *Wyznaczenie charakterystyk dynamicznych gumy przy periodycznym skręcaniu walca pełnego. Zastosowanie sterowanego impulsu do pomiaru kąta stratności*, *Mech. Teoret. i Stos.* 3, 13 (1975).
17. В. Н. ПОТУРАЕВ, И. И. КРУШ, В. И. ДЫРА, *Определение вязко-упругих характеристик резино-металлических деталей при деформации сдвига и метод их учета при расчетах колебательных систем*. В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 17, Рига, Зинатне 1972.
18. А. И. БЕЛЬЦЕР, *Синтез резино-металлического амортизатора, характеристика которого минимально отклоняется от равночастотной*. В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 22, Рига, Зинатне 1972.
19. С. И. ДЫМНИКОВ, *Расчет резино-металлического шарнира сборного типа*. В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 22, Рига, Зинатне 1972.
20. С. И. ДЫМНИКОВ, *Расчет предварительного напряженных резиновых элементов*. В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 22, Рига, Зинатне 1972.

21. С. И. Дымников, *Предварительно напряженные резиновые элементы и их расчет*. В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 23, Рига, Зинатне 1972.
22. В. Н. Потураев, В. И. Дырда, Д. В. Голованов, *О механических свойствах резиновых элементов тяжелых вибромашин*. В книге: *Вопросы динамики и прочности*, 29, Рига, Зинатне 1974.
23. В. Н. Потураев, В. И. Дырда, И. И. Круш, *Прикладная механика резины*, Наукова Думка, Киев 1975.
24. А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, *Основы математической теории термовязко-упругости*, Наука, Москва 1970.
25. М. А. Колтунов, *К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации*, Механика Полимеров 4 (1966).
26. Norma angielska BS 903 Part A15: 1958 *Determination of creep and stress relaxation*.

Р е з ю м е

ВЯЗКОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗИНЫ И РЕЗИНО-МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БЛОК-ШАРНИРОВ ТИПА САЙЛЕНТ-БЛОК

В работе представлены результаты исследований реологических свойств двух сортов резины и резино-металлических шарниров типа сайлент-блок, которых резиновая втулка была этого же сорта. На основании статических и динамических исследований определены: предел пропорциональности, мгновенный модуль сдвига, функция ползучести, абсолютный модуль сдвига, динамический модуль вязкости. Показано существование различий реологических свойств самой резины и готового резино-металлического шарнира, в котором резина работает в предварительном напряженном состоянии, являющимся результатом технологии сборки.

S u m m a r y

VISCOELASTIC CHARACTERISTICS OF RUBBER AND FLEXIBLE BUSHES OF THE SILENTBLOCK TYPE

In the paper the results of experimental investigations of rheological properties of rubber and silent-block bush are presented. Basing on the static and dynamic tests, the following results are obtained: linearity range, instantaneous modulus in shear, creep function, and complex modulus in shear. The results obtained show a difference in rheological properties of rubber and the bush due to the initial state of stress imposed on rubber in the bush during technological processing.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 grudnia 1976 r.

O PRZYBLIŻONYCH METODACH ROZWIĄZANIA
NIELINIOWYCH RÓWNAŃ RUCHU ELASTYCZNIE
POSADOWIONYCH SILNIKÓW TŁOKOWYCH

JANUSZ KOLEND A (GDAŃSK)

1. Wstęp

Opis ruchu elastycznie posadowionych silników tłokowych z uwzględnieniem zmienności prędkości kątowej silnika wymaga zastosowania nieliniowych równań różniczkowych. Dodatkowym źródłem nieliniowości równań ruchu mogą być charakterystyki sztywności i tłumienia podkładek elastycznych. Liniowe składniki równań ruchu mają z reguły większe wartości niż nieliniowe człony, co ułatwia uzyskanie przybliżonych rozwiązań. W praktyce najczęściej wykorzystuje się w tym celu liniowe równania ruchu traktując prędkość kątową silnika jako stałą wielkość, przy czym w przypadku nieliniowych charakterystyk sztywności i tłumienia podkładek zastępuje się je liniowymi charakterystykami [1, 2, 3]. W pracach [4, 5, 6] uwzględniono zmienność prędkości kątowej silnika przy zastosowaniu metod asymptotycznych. W niniejszej pracy porównano wyniki obliczeń uzyskanych przy pomocy wymienionych przybliżonych metod z rezultatami obliczeń na EMC metodą Rungego-Kutty. Ze względu na dużą czasochłonność obliczeń numerycznych ograniczono się przy tym do rozpatrzenia pionowych drgań jednocylindrowego silnika. Wyniki obliczeń mogą służyć do oceny dokładności i przydatności rozpatrywanych przybliżonych metod do analizy drgań elastycznie posadowionych silników tłokowych.

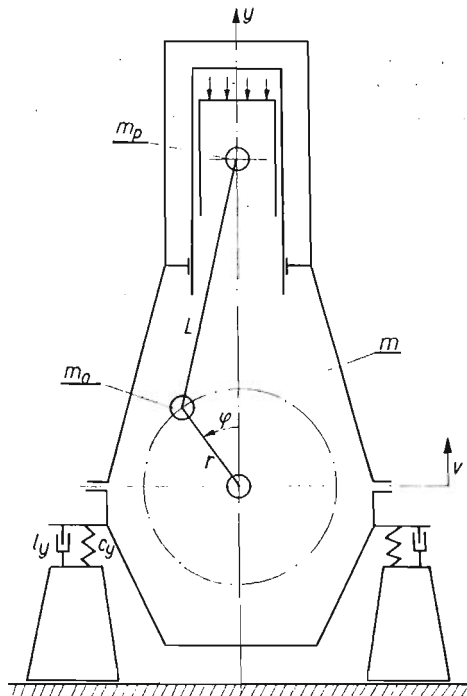
2. Model obliczeniowy

Schemat rozpatrywanego układu drgającego przedstawiono na rys. 1. Równania ruchu tego układu mają postać [4]:

$$(2.1) \quad \ddot{v} + b^2 v = \frac{\varepsilon}{m} [-l_y \dot{v} + m_p r \dot{\varphi}^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) + m_0 r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] + \\ + \frac{\varepsilon^2}{m} \left[m_p r \ddot{\varphi} \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) + m_0 r \ddot{\varphi} \sin \varphi \right];$$

$$(2.2) \quad \ddot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{I} \left[rT + \sum_k C_k \sin(\xi k \varphi + v_k) - B - \sum_l B_l \sin(\eta l \varphi + \sigma_l) - h \dot{\varphi} + \right. \\ + m_p r \ddot{v} \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) + m_0 r \ddot{v} \sin \varphi + \frac{1}{2} m_p r \dot{\varphi}^2 (\lambda \sin \varphi - 2 \sin 2\varphi - \\ - 3 \lambda \sin 3\varphi - \lambda^2 \sin 4\varphi) + m_p g r \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) + m_0 g r \sin \varphi \left. \right] + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2I} m_p r^2 \ddot{\varphi} \left(-\lambda \cos \varphi + \cos 2\varphi + \lambda \cos 3\varphi + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 4\varphi \right).$$

Do obliczeń przyjęto następujące wartości parametrów układu: $m = 4000$ [kg] — łączna masa układu drgającego; $m_p = 50$ i 100 [kg] — masa niewyrównoważona w ruchu postępowo-zwrotnym, skupiona na osi sworznia tłokowego; $m_0 = 0$ i 50 [kg] — wirująca masa niewyrównoważona, skupiona na osi czopa korbowego; $r = 0,15$ [m] — długość



Rys. 1. Schemat rozpatrywanego układu drgającego

m — łączna masa układu m_0 — wirująca masa niewyrównoważona, skupiona na osi czopa korbowego; m_p — niewyrównoważona masa w ruchu postępowo-zwrotnym, skupiona na osi sworznia tłokowego; L — długość korbowodu; r — długość ramienia korby; c_y — współczynnik sztywności podkładek elastycznych; I_y — współczynnik wiskotycznego tłumienia podkładek elastycznych; v — pionowe przemieszczenie układu; φ — kąt obrotu korby

ramienia korby; $\lambda = r/L = 0,125$ — wartość ilorazu długości ramienia korby i długości korbowodu; $b = \sqrt{\frac{c_y}{m}} = \frac{1}{2} 25\pi$ i $\frac{1}{1,6} 25\pi$ [rad/s] — częstość drgań własnych układu;

$\nu = \frac{I_y}{2mb} = 0,1$ i $0,5$ — bezwymiarowy współczynnik wiskotycznego tłumienia pod-

kładek elastycznych; $I = I' + m_p r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \lambda^2 \right) + m_0 r^2 = 8$ i 12 [kgm²], I' — mo-

ment bezwładności wirujących mas wyrównoważonych względem osi wału; $rT = = 1700 \left(1 - 0,75 \frac{\dot{\varphi} - 25\pi}{25\pi} \right)$ [Nm] — średnia wartość momentu napędowego silnika,

pochodzącego od sił gazowych; $B_1 = \frac{1}{6} 10^4 \left(\frac{\dot{\varphi}}{25\pi} \right)^2$ [Nm] — średnia wartość momentu

oporowego odbiornika mocy; $C_1 = \frac{\pi}{4} 6,87 \cdot 25^2 \cdot 0,15$ [Nm], $C_2 = \frac{\pi}{4} 9,65 \times$

$\times 25^2 \cdot 0,15$ [Nm], $C_3 = \frac{\pi}{4} 8,04 \cdot 25^2 \cdot 0,15$ [Nm], $C_4 = \frac{\pi}{4} 3 \cdot 25^2 \cdot 0,15$ [Nm] — amplitudy harmoniczných składowych momentu napędowego silnika od sił gazowych; $\vartheta_1 = \frac{\pi}{180} 52$ [rad], $\vartheta_2 = \frac{\pi}{180} 26$ [rad], $\vartheta_3 = \frac{\pi}{180} 9$ [rad], $\vartheta_4 = \frac{\pi}{180} 357$ [rad] — fazy harmoniczných składowych momentu napędowego silnika od sił gazowych; $\xi = \frac{1}{2}$ — liczba cykli pracy silnika przypadająca na jeden obrót wału; $B_l = 0$ — amplitudy harmoniczných składowych momentu oporowego odbiornika mocy; $h = \frac{200}{6 \cdot 25\pi}$ [Nms/rad] — współczynnik wiskotycznego tłumienia przy obracaniu wału korbowego; $g = 9,81$ [m/s²] — przyspieszenie ziemskie.

3. Przybliżone rozwiązania

Do obliczeń wykorzystano:

- 1) rozwiązania liniowych równań ruchu,
- 2) rozwiązania uzyskane metodą Kryłowa-Bogolubowa-Mitropolskiego (KBM), w pierwszym przybliżeniu,
- 3) rozwiązania uzyskane metodą uśredniania w pierwszym przybliżeniu.

Ad 1. Przy założeniu, że prędkość kątowna silnika jest stała, równanie (2.1) posiada rozwiązanie

$$(3.1) \quad v = v_0 = \frac{(m_p + m_0)r\omega^2}{m \sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 + \left(l_y \frac{\omega}{m}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta_1) + \frac{m_p r \lambda \omega^2}{m \sqrt{(b^2 - 4\omega^2)^2 + \left(2l_y \frac{\omega}{m}\right)^2}} \cos(2\omega t - \delta_2),$$

$$\sin \delta_1 = \frac{l_y \omega}{m \sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 + \left(l_y \frac{\omega}{m}\right)^2}}, \quad \sin \delta_2 = \frac{2l_y \omega}{m \sqrt{(b^2 - 4\omega^2)^2 + \left(2l_y \frac{\omega}{m}\right)^2}}.$$

Prędkość kątowną $\omega = \omega_0$ wyznaczono z równania

$$(3.2) \quad rT(\omega_0) - B(\omega_0) - h\omega_0 = 0.$$

Wynosi ona $\omega_0 = 25\pi$ [rad/s].

Ad 2. Asymptotyczna metoda KBM daje w pierwszym przybliżeniu następujące rozwiązania równań (2.1) i (2.2) dla stanów ustalonych [4]:

$$(3.3) \quad v = v_1 = a \cos(\varphi + \psi) + \varepsilon u, \quad a = \frac{(m_p + m_0)r\omega^2}{m(\omega + b) \sqrt{(b - \omega)^2 + \left(\frac{1}{2m} l_y\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l_y}{2m(\omega - b)}, \quad u = \frac{m_p r \lambda \omega^2}{m(b^2 - 4\omega^2)},$$

przy czym ω spełnia równanie

$$(3.4) \quad rT(\omega) - B(\omega) - h\omega - \frac{1}{4\omega^2} a^2 b^2 l_y (\omega + b) = 0.$$

Ad 3. Stosując metodę uśredniania wprowadza się zamianę zmiennych¹⁾ zgodnie z wzorami:

$$(3.5) \quad v = A \cos(\varphi + \phi), \quad \dot{v} = -Ab \sin(\varphi + \phi), \quad \dot{\phi} = \Omega$$

i przekształca równania (2.1), (2.2) do postaci

$$(3.6) \quad \dot{A} = \varepsilon X_R, \quad \dot{\phi} = \varepsilon Y_R, \quad \dot{\Omega} = \varepsilon Z_R.$$

Funkcje X_R, Y_R, Z_R określono w pracy [5]. Rozwiązań równań (3.6) poszukuje się w postaci

$$(3.7) \quad \begin{aligned} A &= a + \varepsilon U(a, \psi, \omega, \varphi), \\ \phi &= \psi + \varepsilon V(a, \psi, \omega, \varphi), \\ \Omega &= \omega + \varepsilon W(a, \psi, \omega, \varphi), \end{aligned}$$

gdzie a, ψ, ω oznaczają wolnozmiennne składowe, zaś U, V, W wibracyjne składniki. Po podstawieniu (3.7) do równań (3.6) i uśrednieniu otrzymuje się dla stanów ustalonych rozwiązania w pierwszym «nieulepszonym» przybliżeniu [5]

$$(3.8) \quad a = \frac{(m_p + m_0) r \omega^2}{2mb \sqrt{(b - \omega)^2 + \left(\frac{1}{2m} l_y\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{l_y}{2m(\omega - b)},$$

przy czym prędkość kątowna ω określona jest zależnościami

$$(3.9) \quad rT(\omega) - B(\omega) - h\omega + \frac{1}{2}(m_p + m_0)abr\omega \sin \psi = 0, \quad \sin \psi = -\frac{abl_y}{(m_p + m_0)r\omega^2}.$$

W pierwszym «ulepszonym» przybliżeniu drgania masy m wyrażają się zależnością

$$(3.10) \quad v = (a + \varepsilon U) \cos(\varphi + \psi + \varepsilon V) \cong (a + \varepsilon U) \cos(\varphi + \psi) - \varepsilon a V \sin(\varphi + \psi).$$

Funkcje U i V wynoszą

$$(3.11) \quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{4bm\omega} \left\{ abl_y \sin 2(\varphi + \psi) + (m_p + m_0) r \omega^2 \cos(2\varphi + \psi) - \right. \\ &\quad \left. - 2m_p r \lambda \omega^2 \left[\cos(\varphi - \psi) - \frac{1}{3} \cos(3\varphi + \psi) \right] \right\}, \\ V &= \frac{1}{4abm\omega} \left\{ abl_y \cos 2(\varphi + \psi) - (m_p + m_0) r \omega^2 \sin(2\varphi + \psi) - \right. \\ &\quad \left. - 2m_p r \lambda \omega^2 \left[\sin(\varphi - \psi) + \frac{1}{3} \sin(3\varphi + \psi) \right] \right\}. \end{aligned}$$

W wyniku podstawienia (3.11) do (3.10) otrzymuje się

$$(3.12) \quad v = a \frac{\omega + b}{2\omega} \cos(\varphi + \psi) - \frac{m_p r \lambda \omega^2}{3bm} \cos 2\varphi = a_1 \cos(\varphi + \psi) - b_1 \cos 2\varphi.$$

W zależnościami (3.9) zamiast amplitudy a wystąpi zatem w pierwszym «ulepszonym» przybliżeniu amplituda $a_1 = a \frac{\omega + b}{2\omega}$.

¹⁾ Analogiczną zamianę zmiennych stosowano w pracach [5, 6].

4. Rozwiązanie numeryczne

Do obliczeń numerycznych zastosowano metodę Rungego-Kutty, często używaną do wyznaczania rozwiązań układów równań różniczkowych zwyczajnych [7]. Dokładność tej metody zależy od rzędu zastosowanych formuł i kroku całkowania. Przyjęto formuły IV rzędu, wygodne do programowania ze względu na ich prostotę i zapewniające wystarczającą dokładność obliczeń (błąd w jednym kroku jest rzędu ϱ^5 , gdzie ϱ oznacza krok całkowania). Przyjęto krok całkowania $\varrho = 6,67704 \cdot 10^{-4}$ [s], odpowiadający obrotowi wału silnika o kąt $\varphi = 3^\circ$ przy prędkości kątowej $\omega_0 = 25\pi$ [rad/s], (tj. przy 750 obr/min) i zapewniający wystarczająco gęsty podział przedziałów zmienności funkcji trygonometrycznych, występujących w równaniach (2.1) i (2.2). Równania te zastąpiono układem równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{v} &= z, & \dot{\varphi} &= x, \\ \dot{x} &= \frac{mD - AB}{mC - A^2}, & \dot{z} &= \frac{AD - BC}{mC - A^2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$A = r \left[(m_p + m_0) \sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda m_p \sin 2\varphi \right],$$

$$B = x^2 r [(m_p + m_0) \cos \varphi + m_p \lambda \cos 2\varphi] - I_y z - c_y v,$$

$$C = I - m_p r^2 \left(-\frac{1}{2} \lambda \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \lambda \cos 3\varphi + \frac{1}{8} \lambda^2 \cos 4\varphi \right),$$

$$D = rT(x) + \sum_k C_k \sin(\xi k \varphi + \vartheta_k) - B(x) - hx + m_p gr \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) + \\ + m_0 gr \sin \varphi + \frac{1}{4} m_p r^2 x^2 (\lambda \sin \varphi - 2 \sin 2\varphi - 3 \lambda \sin 3\varphi - \lambda^2 \sin 4\varphi).$$

Wartości początkowe dla $t = \varphi = 0$ wyznaczano z zależności (3.1) dla $x(0) = \omega_0 = 25\pi$ [rad/s]. Stwierdzono, że przy takich wartościach początkowych następowało stosunkowo szybkie ustalanie się obliczeniowych parametrów ruchu silnika, co umożliwiło przerwanie obliczeń po 720 krokach całkowania.

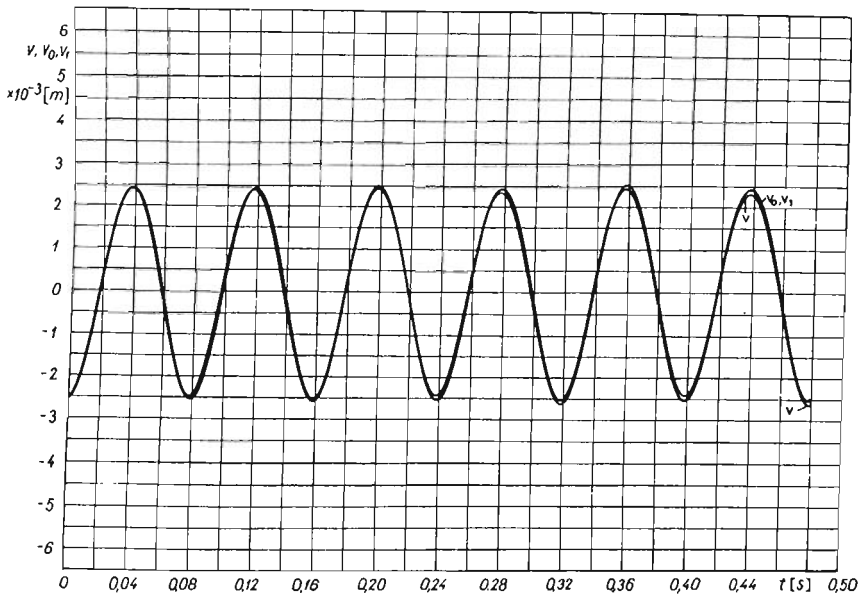
5. Wyniki obliczeń

W obliczeniach ograniczono się do analizy drgań układu w stosowanym w praktyce zakresie wartości ilorazu podstawowej częstości wymuszeń do częstości drgań własnych amortyzowanego obiektu $\mu = \omega/b > \sqrt{2}$. Pomimo że tłumienie w podkładkach elastycznych jest na ogół małe, zbadano także zachowanie się analizowanego układu i przydatność wymienionych w rozdziale 3 przybliżonych metod w przypadku silniejszego tłumienia, przyjmując wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia podkładek $\nu = I_y/2 mb = 0,5$. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 1, a wybrane przebiegi drgań silnika w funkcji czasu oraz wyznaczonej metodą Rungego-Kutty prędkości kątowej silnika w funkcji czasu przedstawiono na rys. 2-5.

Tablica 1. Wyniki obliczeń parametrów ruchu silnika

Lp.	Parametry układu drgającego				Metoda I				Metoda II I przybliżenie				Metoda III I «ulepszone» przybliżenie				Metoda Rungego-Kutty			
	m_0	m_p	I	$\frac{\omega_0}{b}$	ν	v_m	a	b_1	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$	v_m	a	b_1	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$	$v_m = a$	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$	a_1	b_1	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$	v_m	$\frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$
	[kg]	[kg]	[kgm ²]			[mm]	[mm]	[mm]		[mm]	[mm]	[mm]		[mm]		[mm]	[mm]		[mm]	
1	0	50	8	2	0,1	2,5389	2,4780	0,0624	1	2,5489	2,4862	0,0625	0,9997	3,7312	0,9991	2,7992	0,1561	0,9993	2,6322	0,9989
2	0	50	12	2	0,1	2,5389	2,4780	0,0624	1	2,5489	2,4862	0,0625	0,9997	3,7312	0,9991	2,7992	0,1561	0,9993	2,5901	1,0000
3	0	100	8	2	0,5	4,2376	4,1602	0,1208	1	4,5561	4,4617	0,1251	0,9949	6,6667	0,9845	5,0276	0,3088	0,9883	4,1615	0,9736
4	0	100	12	2	0,5	4,2376	4,1602	0,1208	1	4,5561	4,4617	0,1251	0,9949	6,6667	0,9845	5,0276	0,3088	0,9883	4,1807	0,9783
5	50	100	8	2	0,5	6,3166	6,2404	0,1208	1	6,8039	6,7286	0,1252	0,9885	9,9228	0,9652	7,5347	0,3042	0,9735	6,3091	0,9564
6	50	100	12	2	0,5	6,3166	6,2404	0,1208	1	6,8039	6,7286	0,1252	0,9885	9,9228	0,9652	7,5347	0,3042	0,9735	6,2722	0,9630
7	50	100	8	1,6	0,5	6,4847	6,4406	0,1227	1	7,1432	7,0875	0,1307	0,9718	8,9713	0,9421	7,4677	0,2381	0,9524	6,4432	0,9456
8	50	100	12	1,6	0,5	6,4847	6,4406	0,1227	1	7,1432	7,0875	0,1307	0,9718	8,9713	0,9421	7,4677	0,2381	0,9524	6,4395	0,9536

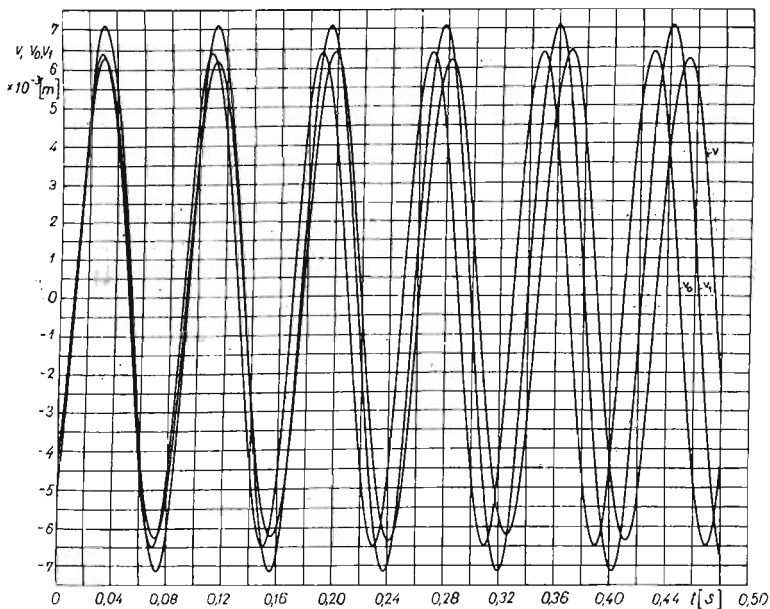
v_m — maksymalne przemieszczenie silnika; a , a_1 — amplituda pierwszej harmonicznej drgań silnika, b_1 — amplituda drugiej harmonicznej drgań silnika, ω — średnia prędkość kątowna silnika, $\omega_0 = 25 \pi$ [rad/s], φ_s [rad] — kąt obrotu wału silnika w czasie do $t = 0$ do $t = 720 \cdot 6,67704 \cdot 10^{-4}$ [s].



Rys. 2. Wykres przebiegu pionowych drgań układu w funkcji czasu dla $m_0 = 0$, $m_p = 50$ [kg], $b =$

$$= \frac{1}{2} 25\pi \text{ [rad/s]}, \nu = 0, I = 8 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

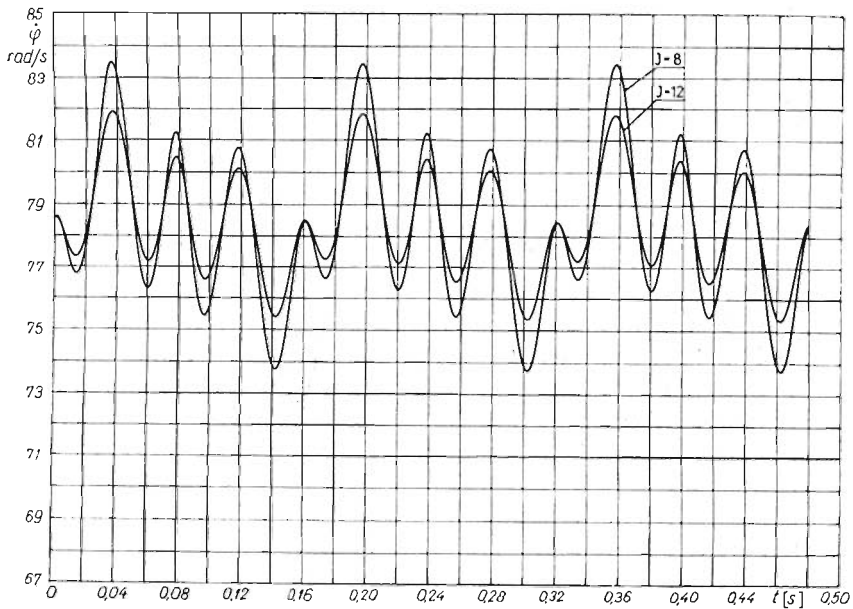
v — według Rungego-Kutty dla $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, $v(0) = v_0(0)$, $\dot{v}(0) = \dot{v}_0(0)$; v_0 — ustalone drgania według rozwiązania liniowego równania ruchu; v_1 — ustalone drgania według metody KBM



Rys. 3. Wykres przebiegu pionowych drgań układu w funkcji czasu dla $m_0 = 50$ [kg], $m_p = 100$ [kg],

$$b = \frac{1}{1,6} 25\pi \text{ [rad/s]}, \nu = 0,5, I = 8 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

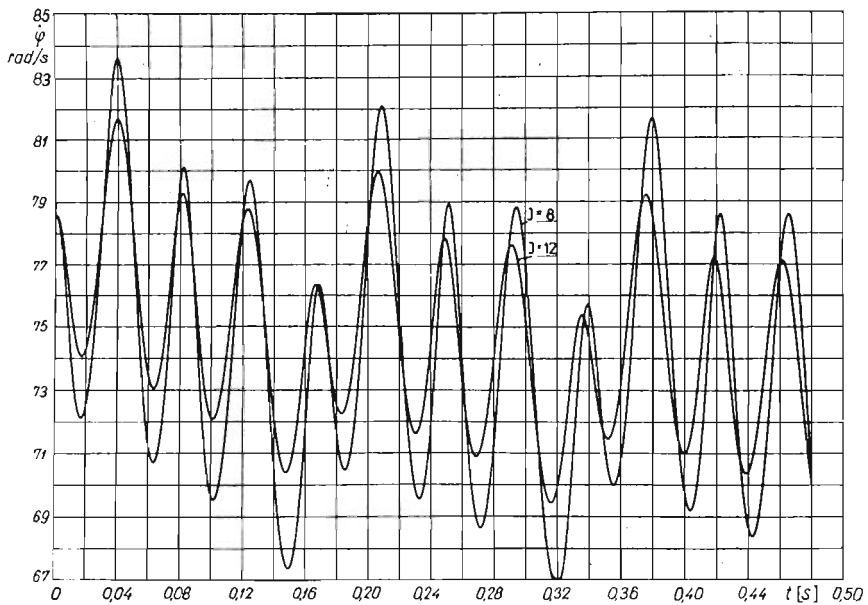
v — według Rungego-Kutty dla $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, $v(0) = v_0(0)$, $\dot{v}(0) = \dot{v}_0(0)$; v_0 — ustalone drgania według rozwiązania liniowego równania ruchu; v_1 — ustalone drgania według metody KBM



Rys. 4. Wykres przebiegu prędkości kątowej silnika w funkcji czasu dla $m_0 = 0$, $m_p = 50$ [kg], $b =$

$$= \frac{1}{2} 25\pi \text{ [rad/s]}, \nu = 0,1, I = 8 \text{ i } 12 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$\dot{\phi}(0) = \omega_0, \quad v(0) = v_0(0), \quad \dot{v}(0) = \dot{v}_0(0)$$



Rys. 5. Wykres przebiegu prędkości kątowej silnika w funkcji czasu dla $m_0 = 50$ [kg], $m_p = 100$ [kg],

$$b = \frac{1}{1,6} 25\pi \text{ [rad/s]}, \nu = 0,5, I = 8 \text{ i } 12 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$\dot{\phi}(0) = \omega_0, \quad v(0) = v_0(0), \quad \dot{v}(0) = \dot{v}_0(0)$$

6. Uwagi końcowe

W przypadku liniowych charakterystyk sztywności i tłumienia założenie o stałości prędkości kątowej pozwala wyznaczyć z wystarczającą w praktyce dokładnością parametry drgań silnika w oparciu o liniowe równania różniczkowe ruchu. Rozwiązania takie nie uwzględniają jednakże wpływu tłumiących własności podkładek na stratę mocy i spadek prędkości kątowej silnika, co może okazać się istotne, zwłaszcza przy większych wartościach współczynników tłumienia podkładek. Z równania (2.2) wynika, że dodatkowy moment oporowy na wale, wywołany drganiami silnika, wynosi

$$(6.1) \quad \Delta M = -m_p r \ddot{v} \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) - m_0 r \ddot{v} \sin \varphi.$$

Po podstawieniu do (6.1) rozwiązań (3.1), otrzymuje się stały składnik dodatkowego momentu oporowego

$$(6.2) \quad (\Delta M)_0 = \frac{(m_p + m_0)^2 r^2 \omega^4}{2m \sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 + \left(l_y \frac{\omega}{m} \right)^2}} + \frac{(m_p r \lambda \omega^2)^2}{m \sqrt{(b^2 - 4\omega^2)^2 + \left(2l_y \frac{\omega}{m} \right)^2}}.$$

W celu uwzględnienia spadku prędkości kątowej silnika na skutek tłumienia w podkładkach należy zatem równanie (3.2) zastąpić równaniem

$$(6.3) \quad rT(\omega) - B(\omega) - h\omega - (\Delta M)_0 = 0.$$

Wyznaczone na podstawie (3.1) i (6.3) parametry ruchu analizowanego układu podano w tablicy 2.

Tablica 2. Wyniki obliczeń parametrów ruchu silnika z zależności (3.1) i równania (6.3)

Lp.	Parametry układu drgającego				Metoda I z uwzględnieniem dodatkowego momentu oporowego		
	m_0	m	$\frac{\omega_0}{b}$	ν	a	b_1	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$
	[kg]	[kg]			[mm]	[mm]	
1	0	50	2	0,1	2,4806	0,0624	0,9984
2	0	100	2	0,5	4,1752	0,1209	0,9771
3	50	100	2	0,5	6,2921	0,1212	0,9481
4	50	100	1,6	0,5	6,4862	0,1236	0,9322

a, b_1 — amplitudy pierwszej i drugiej harmonicznej drgań silnika, ω — średnia prędkość kątowa silnika, $\omega_0 = 25 \pi$ [rad/s], φ_s [rad] — kąt obrotu wału silnika w czasie od $t = 0$ do $t = 720 \cdot 6,67704 \cdot 10^{-4}$ [s].

Zależność (6.2) przedstawić można w postaci

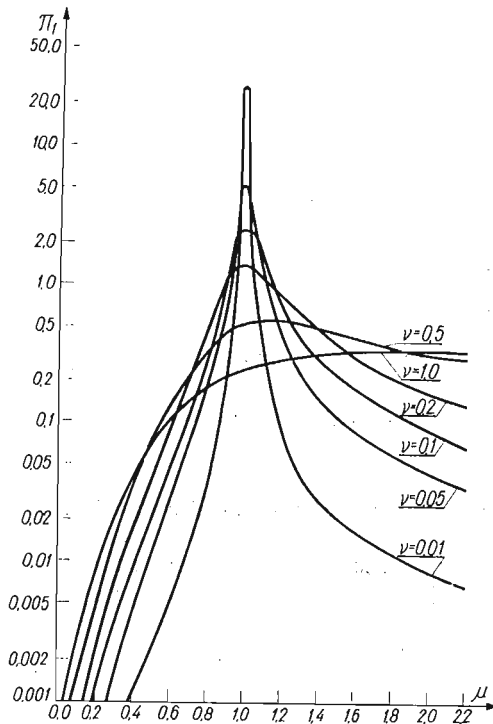
$$(6.4) \quad (\Delta M)_0 = \frac{1}{m} (m_p + m_0)^2 r^2 \omega^2 \pi_1 + \frac{1}{m} m_p^2 r^2 \omega^2 \pi_2,$$

gdzie oznaczono

$$\pi_1 = \frac{\mu^3 \nu}{(1 - \mu^2)^2 + 4\mu^2 \nu^2}, \quad \pi_2 = \frac{4\lambda^2 \mu^2 \nu}{(1 - 4\mu^2)^2 + 16\mu^2 \nu^2}.$$

Bezwymiarowy współczynnik π_2 ma w praktyce znacznie mniejszą wartość niż współczynnik π_1 . Zależność wartości współczynnika π_1 od wartości ilorazu częstości $\mu = \omega/b$ dla różnych wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia $\nu = l_y/2mb$ przedstawiono na rys. 6. Maksymalne wartości π_1 występują przy

$$\mu = \sqrt{2\nu^2 - 1 + \sqrt{(2\nu^2 - 1)^2 + 3}}.$$



Rys. 6. Zależność wartości współczynnika π_1 od wartości ilorazu częstości $\mu = \omega/b$ dla różnych wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia $\nu = l_y/2mb$

W ogólnym przypadku drgań silników rzędowych z cylindrami w układzie V równanie (6.3) przyjmuje postać

$$(6.5) \quad crT(\omega) - B(\omega) - h\omega - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Delta M dt = 0,$$

gdzie c jest liczbą wykorbień wału korbowego, przy czym zgodnie z [4] i przyjętymi w tej pracy oznaczeniami zachodzą zależności:

$$\Delta M = -m_{p1} P_1 - m_{p2} P_2 - m_0 P_3,$$

$$P_{1/2} = -\frac{1}{2} \left[4cr^2 \alpha \dot{\alpha} \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \lambda^2 \right) + \sum_{n=0}^{c-1} \left\{ 2r^2 f_2 f_3 \omega^2 (\gamma^2 \cos^2 \delta \pm \beta \gamma \sin 2\delta + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta^2 \sin^2 \delta) + 2r^2 f_3^2 \omega (2\gamma \dot{\gamma} \cos^2 \delta \pm \dot{\beta} \gamma \sin 2\delta \pm \dot{\gamma} \beta \sin 2\delta + 2\beta \dot{\beta} \sin^2 \delta) + 2rf_3 \ddot{u} (\gamma \cos \delta \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \beta \sin \delta) - 2rb_1 f_3 \ddot{y} (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) + 2rc_1 f_3 \dot{\beta} (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) \mp 2rf_3 \ddot{v} (\alpha \sin \delta \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \cos \delta) - 2r^2 f_1 f_3 (\ddot{y} \cos \delta \pm \dot{\beta} \sin \delta) (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) - r^2 \omega^2 \alpha^2 \left[\frac{1}{2} \lambda \sin(\theta \mp \delta) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin 2(\theta \mp \delta) - \frac{3}{2} \lambda \sin 3(\theta \mp \delta) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin 4(\theta \mp \delta) \right] + 4r^2 \omega \alpha \dot{\alpha} \left[\frac{1}{2} \lambda \cos(\theta \mp \delta) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \cos 2(\theta \mp \delta) - \frac{1}{2} \lambda \cos 3(\theta \mp \delta) - \frac{1}{8} \lambda^2 \cos 4(\theta \mp \delta) \right] \mp 2r(a_n \pm e) f_3 \ddot{y} (\alpha \sin \delta \pm \right. \\ \left. \pm \cos \delta) \pm 2rc_1 f_3 \ddot{\alpha} (\alpha \sin \delta \pm \cos \delta) - 2r^2 f_1 f_3 \alpha \ddot{\alpha} + 2r(a_n \pm e) f_3 \dot{\beta} (\alpha \cos \delta \mp \sin \delta) - \right. \\ \left. \left. - 2rf_3 \dot{w} (\alpha \cos \delta \mp \sin \delta) - 2rb_1 f_3 \ddot{\alpha} (\alpha \cos \delta \mp \sin \delta) \right\} \right],$$

$$P_3 = -\frac{1}{2} \left\{ 2cr^2 \gamma \dot{\gamma} \omega + 2cr^2 \beta \dot{\beta} \omega - 2cr^2 \ddot{\alpha} + cr^2 (\beta \ddot{y} - \gamma \dot{\beta}) + \sum_{n=0}^{c-1} \left[-2r^2 \gamma \dot{\gamma} \omega \cos 2\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + r^2 \gamma^2 \omega^2 \sin 2\theta + 2r^2 \beta \dot{\beta} \omega \cos 2\theta - r^2 \beta^2 \omega^2 \sin 2\theta + 2r\gamma \ddot{u} \sin \theta - 2r\beta \ddot{u} \cos \theta - \right. \right. \\ \left. \left. - 2rb_0 \gamma \ddot{y} \sin \theta + 2rb_0 \beta \dot{\gamma} \cos \theta + 2rc_0 \gamma \dot{\beta} \sin \theta - 2rc_0 \beta \dot{\beta} \cos \theta - r^2 \gamma \ddot{y} \sin 2\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + r^2 \beta \ddot{y} \cos 2\theta + r^2 \gamma \dot{\beta} \cos 2\theta - 2r^2 \gamma \dot{\beta} \omega \sin 2\theta - 2r^2 \beta \dot{\gamma} \omega \sin 2\theta - 2r^2 \beta \gamma \omega^2 \cos 2\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + r^2 \beta \dot{\beta} \sin 2\theta - 2r\ddot{v} \sin(\theta - \alpha) + 2rc_0 \ddot{\alpha} \sin(\theta - \alpha) - 2a_n r \dot{\gamma} \sin(\theta - \alpha) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2r\dot{w} \cos(\theta - \alpha) + 2ra_n \dot{\beta} \cos(\theta - \alpha) - 2b_0 r \ddot{\alpha} \cos(\theta - \alpha) \right] \right\},$$

$$f_1 = \cos(\theta \mp \delta) + \frac{1}{4} \lambda \cos 2(\theta \mp \delta),$$

$$f_2 = \cos(\theta \mp \delta) + \lambda \cos 2(\theta \mp \delta),$$

$$f_3 = \sin(\theta \mp \delta) + \frac{1}{2} \lambda \sin 2(\theta \mp \delta),$$

$$\theta = \omega t + nd_n \pi.$$

Wielkości u , v , w , α , β i γ są rozwiązaniami liniowych równań różniczkowych ruchu, które można uzyskać m.in. z podanych w pracy [4] równań (4.1) przez podstawienie $\dot{\varphi} = \omega$, $\varphi = \omega t$.

Wyrażenia opisujące funkcje $P_{1/2}$ i P_3 upraszczają się dla silników wielocylindrowych. Przykładowo, dla silników o układach wykorbień podanych w tabl. 3 otrzymuje się:

dla silnika 4/1

$$P_{1/2} = SK_1 (\sin \omega t - \cos \omega t + 2\lambda \sin 2\omega t) + K_2,$$

$$P_3 = rS[(\ddot{y} - \alpha \dot{\beta}) (\sin \omega t - \cos \omega t) - (\dot{\beta} + \alpha \ddot{y}) (\cos \omega t + \sin \omega t)],$$

dla silnika 4/2

$$P_{1/2} = SK_1(3\sin\omega t + \cos\omega t) + K_2,$$

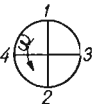

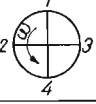

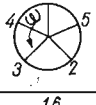

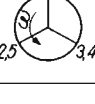
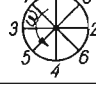
$$P_3 = rS[(\ddot{\gamma} - \alpha\ddot{\beta})(3\sin\omega t + \cos\omega t) - (\ddot{\beta} + \alpha\ddot{\gamma})(3\cos\omega t - \sin\omega t)],$$

dla silnika 5/1

$$P_{1/2} = SK_1 \left[0,264\sin\omega t + 0,364\cos\omega t + \frac{1}{2} \lambda(4,736\sin 2\omega t + 1,528\cos 2\omega t) \right],$$

$$P_3 = rS[(\ddot{\gamma} - \alpha\ddot{\beta})(0,264\sin\omega t + 0,364\cos\omega t) - (\ddot{\beta} + \alpha\ddot{\gamma})(0,264\cos\omega t - 0,364\sin\omega t)];$$

Tablica 3

Liczba wykorzystanie	Oznaczenie silnika	Układ wykorzystanie	Liczba wykorzystanie	Oznaczenie silnika	Układ wykorzystanie
4	4/1		8	8/1	
4	4/2		8	8/2	
5	5/1		8	8/3	
6	6/1		8	8/4	

dla silnika 6/1

$$P_{1/2} = \frac{9}{4} r^2 \lambda [(\ddot{\gamma} \cos \delta \pm \ddot{\beta} \sin \delta) (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) - 2\omega^2 (\gamma^2 \cos^2 \delta \pm \beta \gamma \sin 2\delta + \beta^2 \sin^2 \delta + \alpha^2 + \alpha \ddot{\alpha}) \sin 3\omega t - 3r^2 \omega (2\gamma \dot{\gamma} \cos^2 \delta \pm \dot{\beta} \gamma \sin 2\delta \pm \dot{\gamma} \beta \sin 2\delta + 2\beta \dot{\beta} \sin^2 \delta + 2\alpha \dot{\alpha}) \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 - \lambda \cos 3\omega t \right),$$

$$P_3 = 0,$$

dla silnika 8/1

$$P_{1/2} = 2K_2, \quad P_3 = 0;$$

dla silnika 8/2

$$P_{1/2} = 2K_2, \quad P_3 = 0;$$

dla silnika 8/3

$$P_{1/2} = SK_1 [(3 - 2\sqrt{2}) \sin\omega t + (1 - \sqrt{2}) \cos\omega t], \quad P_3 = 0,$$

dla silnika 8/4

$$P_{1/2} = SK_1 [(3-2\sqrt{2}) \sin \omega t - (1-\sqrt{2}) \cos \omega t], \quad P_3 = 0.$$

W powyższych zależnościach oznaczono:

$$K_1 = r [\ddot{\gamma}(\alpha \sin \delta \pm \cos \delta) - \ddot{\beta}(\alpha \cos \delta \mp \sin \delta)],$$

$$K_2 = \frac{1}{4} r^2 \lambda^2 [(\ddot{\gamma} \cos \delta \pm \ddot{\beta} \sin \delta) (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) - 4\omega^2 (\gamma^2 \cos^2 \delta \pm \beta \gamma \sin 2\delta + \\ + \beta^2 \sin^2 \delta + \alpha^2) + \alpha \ddot{\alpha}] \sin 4\omega t - \frac{1}{2} r^2 \omega (2\gamma \dot{\gamma} \cos^2 \delta \pm \beta \dot{\beta} \sin 2\delta \pm \gamma \dot{\beta} \sin 2\delta + \\ + 2\beta \dot{\beta} \sin^2 \delta + 2\alpha \dot{\alpha}) (4 + \lambda^2 - \lambda^2 \cos 4\omega t),$$

S oznacza odległość osi sąsiednich cylindrów, leżących w jednej płaszczyźnie. Różnica pomiędzy funkcjami $P_{1/2}$ dla silników 8/3 i 8/4 wynika z przeciwnego kierunku obrotów w tych silnikach.

Porównując wyniki obliczeń parametrów ruchu analizowanego silnika metodami KBM i uśredniania z wynikami uzyskanymi metodą Rungego-Kutty stwierdzono, że rezultaty obliczeń metodami KBM i Rungego-Kutty różnią się stosunkowo mało (por. rys. 2 i 3), natomiast wartości amplitud pionowych drgań silnika w obszarze ponadrezonansowym, obliczone metodą uśredniania w pierwszym «nieulepszonym» przybliżeniu, są większe od analogicznych wartości uzyskanych pozostałymi metodami (por. tabl. 1). Mniejsze różnice w porównaniu do rezultatów otrzymanych metodami KBM i Rungego-Kutty wykazują wyniki obliczeń metodą uśredniania w pierwszym «ulepszonym» przybliżeniu. Stwierdzono także, że w miarę zbliżania się do rezonansu różnice pomiędzy wynikami obliczeń poszczególnymi metodami maleją.

Przeprowadzone obliczenia dają możliwość względnego porównania i oceny przydatności rozpatrywanych metod do analizy drgań elastycznie posadowionych silników tłokowych. Należy przy tym zaznaczyć, że metody KBM i uśredniania umożliwiają uwzględnienie nieliniowości charakterystyk sztywności i tłumienia podkładek. Mogą one być także stosowane, podobnie jak metoda Rungego-Kutty, do analizy procesów przejściowych [4].

Literatura cytowana w tekście

1. В. КЭР, Вильсон, *Вибрационная техника*, Гос. Научно-Техн. Изд. Машиностр. Лит., Москва 1963.
2. О. К. Найдено, П. П. Петров, *Амортизация судовых двигателей и механизмов*, Судпромгиз, Ленинград 1962.
3. Z. PIETRAS, *Drgania wymuszone okrętowych silników spalinowych tłokowych ustawionych na elastycznych podkładkach*, Budownictwo Okrętowe, 3 (1973).
4. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych z cylindrami w układzie V*, Mech. Teoret. i Stos., 4, 13 (1975).
5. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych*, Mech. Teoret. i Stos., 3, 14 (1976).
6. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastycznie zawieszonych silników tłokowych przy kinematycznych wymuszeniach stochastycznych*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 15 (1977).
7. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WN-T, Warszawa 1974.

Р е з ю м е

О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДВИЖЕНИЯ АМОРТИЗИРОВАННЫХ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

В работе приводятся результаты расчетов вертикальных колебаний и угловой скорости одноцилиндрового двигателя, установленного на амортизаторах. Применяются решения линейных уравнений движения, метод Крылова-Боголюбова-Митропольского и метод усреднения, а также метод Рунге-Кутты. Полученные результаты могут служить для оценки точности и пригодности рассматриваемых приближенных методов.

S u m m a r y

ON APPROXIMATE SOLUTION METHODS OF THE NON-LINEAR MOTION
EQUATIONS OF ELASTICALLY MOUNTED PISTON ENGINES

In this paper vertical vibrations and rotation speed of an one-cylinder, elastically mounted piston engine are considered. The solutions of linear motion equations, the Krylov-Bogolubov-Mitropolskij and the averaging methods as well as the Runge-Kutta method are applied. The results of calculations can be used for the estimation of the accuracy and applicability of the approximate methods presented.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 stycznia 1977 r.

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELEK HIPERSTATYCZNYCH NA DRODZE
ANALITYCZNEJ I BADAŃ ELASTOOPTYCZNYCH

TADEUSZ LISZKA, WOJCIECH ŚWISTERSKI,
MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

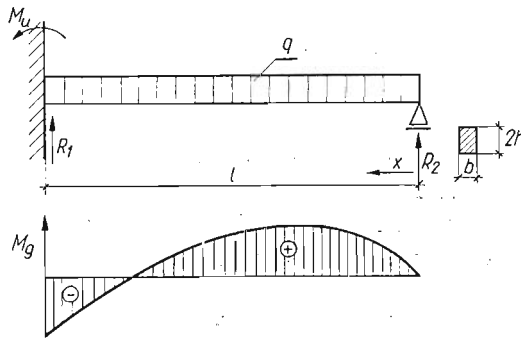
Optymalne kształtowanie belek sprężystych przy spełnieniu warunku wytrzymałościowego sprowadza się z reguły do tzw. kształtów równomiernej wytrzymałości. Jednakże warunek równomiernej wytrzymałości na czyste zginanie prowadzi do zerowych powierzchni przekroju w miejscach zerowania się momentu zginającego; wynik taki nie jest ani poprawny teoretycznie z uwagi na występowanie tam naprężeń stycznych, ani nie stwarza możliwości realizacji praktycznej.

W obecnej pracy zajmiemy się optymalizacją belek hiperstatycznych uwzględniając oprócz naprężeń σ_x nie tylko naprężenia styczne τ_{zx} , lecz również naprężenia normalne σ_z . W przypadku belek niepryzmatycznych składowe te na ogół nie zerują się we włóknach skrajnych o największych naprężeniach σ_x . Jako zmienną kształtowania przyjmujemy wysokość prostokątnego przekroju belki $h = h(x)$ przy ustalonej szerokości $b = \text{const}$. Takie ujęcie zezwoli na weryfikację doświadczalną uzyskanego wyniku metodą elasto-optyczną w jej najprostszym wariantcie. Przyjęte kryterium jest mianowicie równoważne warunkowi wystąpienia tego samego rzędu izochromy na zewnętrznym nieobciążonym brzegu belki, gdzie panuje jednoosiowy stan naprężenia o kierunku stycznym do konturu. Jeżeli na nieobciążonym konturze zewnętrznym wystąpi w istocie stały rząd izochromy, to świadczy to o wyrównaniu naprężeń tam występujących. W dotychczasowej literaturze poświęcono kilka prac optymalnemu kształtowaniu belek przy uwzględnieniu naprężeń stycznych. KUTKOW i CZELNOKOW [1] badają belkę prostokątną swobodnie podpartą na dwóch podporach. Dowodzą, że uwzględnienie naprężeń stycznych ma niewielki, pomijalnie mały wpływ na objętość belki. W innej pracy [2] CZELNOKOW analizuje belki z uwzględnieniem także warunku sztywności. HAUG i KIRMSER [3] optymalizują kształt belki swobodnie podpartej na dwóch podporach przy ograniczeniu ugięcia i uwzględnieniu ciężaru własnego. Narzucone ograniczenia dotyczą także głównego naprężenia normalnego i maksymalnego stycznego, obliczonego jednak jak dla belki przyzmatycznej. MARTISZJUS [4, 5] podaje wzory na kształt belek prostokątnych, swobodnie podpartych, przy uwzględnieniu — obok zginania i ściskania — także wpływu siły podłużnej. Nie podaje jednak żadnych przykładów. Naprężenia styczne mogą odegrać większą rolę przy kształtowaniu belek cienkościennych (GRYZ [6]).

Metoda elastoptyczna dla weryfikacji teoretycznych wyników optymalizacji kształtu była również stosowana. IOSIPESCU [7] stosował metodę elastoptyczną do weryfikacji optymalnego kształtu wspornika. OWCZAREK [8] podał sposób doświadczalnej — elastoptycznej optymalizacji kształtu połączeń słupów z belkami.

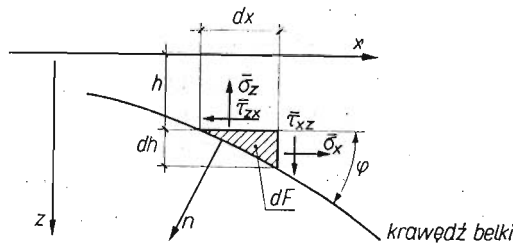
2. Sformułowanie zadania

Do rozważań przyjęto przykładowo belkę jednokrotnie hiperstatyczną utwierdzoną na jednym końcu i swobodnie podpartą na drugim (rys. 1). Zakłada się, że naprężenie zredukowane we włóknach skrajnych belki jest większe od naprężenia zredukowanego



Rys. 1

w jej osi, na całej jej długości. Założenie to będzie sprawdzone na końcu pracy. Przy przyjęciu zasady wyrównania naprężeń w skrajnych włóknach belki przy stałej jej szerokości b wysokość belki $2h$ musi ulegać zmianie. Zmienność wymiarów belki prowadzi do powstania stanu naprężenia zilustrowanego na rys. 2. Naprężenia τ_{zx} i σ_z we włóknach skrajnych,



Rys. 2

oznaczone przez $\bar{\tau}_{zx}$ i $\bar{\sigma}_z$ można będzie obliczyć wprost z warunków brzegowych, bez analizy ich rozkładu w przekroju belki. Można mianowicie napisać następujące warunki równowagi trójkątnego elementu:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} dF \cos \varphi \bar{\tau}_{zx} - \bar{\sigma}_x dF \sin \varphi &= 0, \\ dF \cos \varphi \bar{\sigma}_z - \bar{\tau}_{zx} dF \sin \varphi &= 0, \end{aligned}$$

z których wynikają następujące wzory na naprężenia:

$$(2.2) \quad \bar{\tau}_{zx} = \bar{\sigma}_x \cdot \frac{dh}{dx},$$

$$(2.3) \quad \bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_x \left(\frac{dh}{dx} \right)^2,$$

przy czym przyjmiemy, że $\bar{\sigma}_x$ jest z dostateczną dokładnością wyznaczone wzorem elementarnej wytrzymałości materiałów

$$\bar{\sigma}_x = \frac{M(x)}{J(x)} \cdot h(x)$$

gdzie $M(x)$ oznacza moment zginający, zaś $J(x) = \frac{2}{3}bh^3(x)$ — moment bezwładności przekroju belki względem osi obojętnej zginania.

Wzory (2.2) i (2.3) obowiązują dla nieobciążonej krawędzi belki, mogą jednak być stosowane również w przypadku działania obciążenia ciągłego q , bowiem z reguły $q \ll \bar{\sigma}_x$.

Przy pomocy ogólnie znanych zależności dla płaskiego stanu naprężenia można łatwo wykazać, że w rozpatrywanym elemencie istnieje jednoosiowy stan naprężenia, a jedyne niezerowe naprężenie ma kierunek styczny do krawędzi belki. Jego wartość wynosi

$$(2.4) \quad \sigma_1 = \bar{\sigma}_x \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right].$$

Przyjęcie zasady wyrównania naprężeń prowadzi do następującej zależności:

$$(2.5) \quad |\sigma_1| = \sigma_0$$

gdzie σ_0 jest naprężeniem dopuszczalnym.

Dla belek statycznie niewyznaczalnych charakterystyczne jest przechodzenie wykresu momentu zginającego przez wartość zerową. W miejscu zmiany znaku momentu warunek kształtowania (2.5) będzie spełniony jedynie w granicy, mianowicie przy $\bar{\sigma}_x \rightarrow 0$ otrzymamy $dh/dx \rightarrow \infty$.

Przyjmijmy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(2.6) \quad \eta = \frac{h}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad r = \frac{R_2}{ql}, \quad p_1 = \frac{4\sigma_0 b}{3\sqrt{3}q}.$$

Podstawiając (2.6) do (2.4) z uwzględnieniem (2.5) i (2.3) otrzymujemy następujące równanie, określające optymalną wysokość belki $\eta = \eta(\xi)$:

$$(2.7) \quad \eta'^2 - \eta^2 \cdot \frac{\sqrt{3} p_1}{|2r\xi - \xi^2|} + 1 = 0.$$

Powyższe równanie jest równaniem nieliniowym pierwszego rzędu, dla którego napisać można następujące warunki brzegowe

$$(2.8) \quad \eta'(r) = \eta'(1) = 0$$

omówione szczegółowo w rozdziale 3.

Wymaga ono jednak dodatkowego warunku dla wyznaczenia niewiadomej reakcji r . Warunku tego nie można sformułować bez jednoczesnego rozwiązania równania różniczkowego linii ugięcia belki. Jest ono równaniem drugiego rzędu, przy czym dla belek hiperstatycznych dysponujemy dodatkowymi warunkami brzegowymi, których jest tyle, ile wynosi stopień hiperstatyczności belki, a które można «wypożyczyć» dla rozwiązania równania (2.7). Równanie różniczkowe linii ugięcia belki przyjmiemy w formie zlinearyzowanej

$$(2.9) \quad EJ(x)w''(x) + M(x) = 0,$$

a po sprowadzeniu do postaci bezwymiarowej

$$(2.10) \quad \eta^3(\xi)u''(\xi) + 2r\xi - \xi^2 = 0,$$

gdzie $u = 4Eb/3g \cdot w/l$ jest bezwymiarowym ugięciem.

Warunki podparcia belki dostarczają następujących trzech warunków brzegowych;

$$(2.11) \quad u(0) = u(1) = u'(1) = 0,$$

z których dwa dowolne wykorzystać można do przeprowadzenia całkowania równania (2.10), natomiast trzeci posłuży do wyznaczenia reakcji r .

Problem sformułowany powyżej równaniami (2.7), (2.10), (2.11), daje się rozwiązać efektywnie przy pomocy maszyny cyfrowej. Dla celów obliczeniowych, należy przekształcić równania (2.7), (2.10), (2.11) do postaci:

$$(2.12.1) \quad \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3} p_1 \eta^2(\xi)}{|2r\xi - \xi^2|} - 1},$$

$$(2.12.2) \quad \frac{du(\xi)}{d\xi} = v(\xi),$$

$$(2.12.3) \quad \frac{dv(\xi)}{d\xi} = -\frac{2r\xi - \xi^2}{\eta^2(\xi)},$$

$$u(0) = u(1) = v(1) = 0.$$

Ostateczną objętość belki wyznaczmy ze wzoru

$$(2.13) \quad V(r) = \int_0^1 \eta(\xi; r) d\xi.$$

3. Rozwiązanie numeryczne

Równanie wyznaczające profil belki (2.12.1) można całkować niezależnie od równań linii ugięcia, gdyż sprzężenie między tymi równaniami występuje jedynie poprzez niewiadomy parametr r .

Dla dowolnie przyjętej (jeszcze nieznaney) wartości r równanie (2.12.1) posiada w przedziale $[0, 1]$ dwa punkty osobliwe (dla $\xi = 0$ i $\xi = 2r$). Wyznaczono więc przybliżone rozwinięcie funkcji $\eta(\xi)$ w otoczeniu tych punktów osobliwych. Ze względu na symetrię

funkcji $\eta(\xi)$ w przedziale $[0, 2r]$ względem punktu r , jej rozwinięcie w otoczeniu obu punktów osobliwych można przedstawić wspólnym wzorem:

$$(3.1) \quad \eta(\zeta) = \eta_0 + \eta_1 \zeta^{1/2} + \eta_2 \zeta + \eta_3 \zeta^{3/2} + \dots,$$

gdzie

$$(3.2) \quad \zeta = \begin{cases} \xi & \text{dla } \xi \in [0, r] \\ |\xi - 2r| & \text{dla } \xi \in [r, 2r] \end{cases}$$

Podstawiając (3.1) do (2.12.1) i porównując współczynniki przy tych samych potęgach otrzymuje się wielkości $\eta_1, \eta_2 \dots$ wyrażone poprzez nieznaną wielkość przekroju η_0 w punkcie osobliwym:

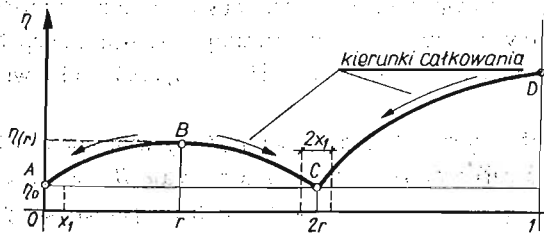
$$(3.3) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \eta_0 \sqrt{\frac{2\sqrt{3} p_1}{r}}, \\ \eta_2 &= \eta_0 \frac{\sqrt{3} p_1}{r}, \\ \eta_3 &= \eta_0 \left[\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3} p_1}}{12} + \frac{\sqrt{2p_1 p_1}}{\sqrt[4]{3}} \right) r^{-3/2} - \frac{\sqrt{2r}}{3\sqrt[4]{3p_1} \eta_0} \right]. \end{aligned}$$

Z postaci rozwinięcia (3.1) wynika, że:

- 1° Wysokość belki w punkcie osobliwym jest skończona ($\eta_0 \neq 0$), zatem nie pojawia się przegub, jak w klasycznym rozwiązaniu uwzględniającym jedynie naprężenie σ_x .
- 2° Nachylenie brzegu belki w punkcie osobliwym dąży do ∞ (człon $\eta_1 \zeta^{1/2}$ w równaniu (3.1)).

Dla $\zeta \leq x_1$ (gdzie x_1 przyjęto dla zapewnienia odpowiedniej dokładności obliczeń) profil belki wyznaczono z rozwinięcia (3.1), natomiast w pozostałym obszarze otrzymano go z numerycznego całkowania równania (2.12.1).

Rozwiązanie numeryczne metodą Rungego-Kutty było stabilne jedynie wtedy, gdy całkowanie przeprowadzono w kierunku malejących wartości $\eta(\xi)$, czyli od B do A , B do C , oraz D do C (rys. 3). Wyznaczenie profilu belki wymagało więc znalezienia war-

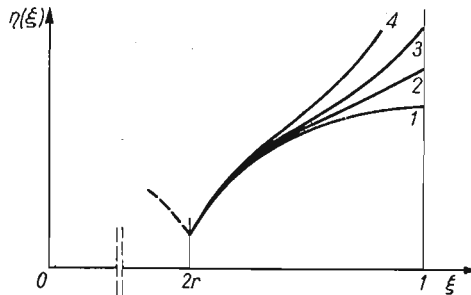


Rys. 3

tości początkowych $\eta(\xi)|_{\xi=r}$ oraz $\eta(\xi)|_{\xi=1}$. Wykorzystując warunek symetrii $\eta'(\xi)|_{\xi=r} = 0$ otrzymano pierwszy warunek początkowy w postaci

$$(3.4) \quad \eta(\xi)|_{\xi=r} = \frac{r}{\sqrt{\sqrt{3} p_1}}.$$

Z warunku tego wyznaczono rozwiązanie $\eta(\xi)$ w przedziale $[r, x_1]$ i porównując otrzymaną wartość $\eta(x_1)$ z tą samą wartością otrzymaną z szeregu (3.1) wyznaczono wartość współczynnika η_0 . Przy całkowaniu w przedziale $[2r + x_1, 1]$ naturalne wydało się wykorzystanie warunku ciągłości w punkcie $x = 2r + x_1$ do wyznaczenia wartości początkowej $\eta(1)$. Przeprowadzone obliczenia wykazały jednak, że warunek ciągłości był spełniony z przyjętą dokładnością niezależnie od przyjętej wartości $\eta(1)$ (rys. 4). Wykorzystano to



Rys. 4

do przeprowadzenia dodatkowej minimalizacji objętości belki przyjmując najmniejszą możliwą wartość wysokości belki w przekroju utwierdzonym (krzywa 1)

$$(3.5) \quad \eta(\xi)|_{\xi=1} = \sqrt{\frac{2r-1}{\sqrt{3} p_1}}$$

(przy której $\eta'(1) = 0$).

Dla ostatecznego wyznaczenia kształtu belki należy wyznaczyć wartość reakcji r . Wykorzystano do tego celu równania ugięć belki (2.12.2) i (2.12.3). Całkowano je metodą Rungego-Kutty 4 rzędu, wykorzystując jako warunki początkowe równania (2.11.2, 3). Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej Odra 1204 z wykorzystaniem bibliotecznej procedury «Runge-Kutta 4» z automatycznym wyborem kroku całkowania. Reakcję r wyznaczono drogą kolejnych przybliżeń, wykorzystując ostatni, nie spełniony dotychczas warunek $u(0) = 0$, z którego otrzymano wartość $r = 0,30807$ odpowiadającą optymalnemu rozwiązaniu.

Mimo bardzo czasochłonnych obliczeń (różne metody wyznaczania funkcji η w kilku przedziałach, konieczność całkowania równań w przedziale BC w dwu przeciwnych kierunkach) otrzymano rozwiązanie z dokładnością trzech miejsc znaczących.

We wszystkich obliczeniach numerycznych wartość parametru p wynosiła 44,06, a wyniki obliczeń, które przedstawia tablica 1, uzyskano dla wartości $r = 0,30807$. Odpowiednia minimalna wartość bezwymiarowej objętości $V = 0,035214$.

Kształt belki otrzymany w niniejszej pracy jest podobny do uzyskanego przez OLHOFFA [9], który analizuje optymalny kształt z uwagi na drgania belek utwierdzonych.

Dla porównania przeprowadzono obliczenia $\eta(\xi)$ przy nieuwzględnieniu dodatkowych naprężeń $\bar{\sigma}_z$ i $\bar{\tau}_{zx}$. Wychodząc z warunku wyrównania naprężeń na zewnętrznych włóknach

Tablica 1. Wyniki obliczeń numerycznych kształtu belki

ξ	η	ξ	η
1,000	0,070 922	0,640	0,016 246
0,980	0,070 322	0,626	0,011 028
0,950	0,067 792	0,617	0,004 779
0,920	0,064 263	0,615	0,004 589
0,900	0,061 638	0,566	0,020 232
0,880	0,058 890	0,516	0,026 887
0,860	0,056 058	0,466	0,031 081
0,840	0,053 157	0,416	0,033 204
0,820	0,050 191	0,366	0,034 615
0,800	0,047 156	0,316	0,035 265
0,780	0,044 041	0,266	0,033 621
0,760	0,040 829	0,166	0,031 081
0,740	0,037 495	0,116	0,028 557
0,720	0,034 001	0,066	0,022 949
0,700	0,030 290	0,020	0,014 509
0,680	0,026 264	0,001	0,007 806
0,660	0,021 736	0,000	0,002 474

belki $\bar{\sigma}_x = \sigma_0$, przy przyjęciu wielkości bezwymiarowych według (2.6) otrzymujemy następujące równanie:

$$(3.6) \quad \eta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3} p_1} \sqrt{|2r\xi - \xi^2|}.$$

Ze względu na pojawienie się przegubu w punkcie $\xi = 2r$ belka przestaje być hiperstatyczną i warunki równowagi pozostają spełnione niezależnie od przyjętej wartości r . Dlatego też, odmiennie niż poprzednio, całkowanie linii ugięcia nie pozwoli wyznaczyć wartości r . Umożliwia to przeprowadzenie dodatkowej optymalizacji.

Wstawiając (3.6) do równania (2.13) otrzymujemy po efektywnym scałkowaniu wyrażenie na objętość belki

$$(3.7) \quad V(r) = \frac{1}{2} (1-r) \sqrt{1-2r} + \frac{1}{2} r^2 \ln \frac{r}{1-r-\sqrt{1-2r}} + \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Warunek minimum objętości, $dV/dr = 0$ dostarcza następującego równania:

$$(3.8) \quad \pi r - \sqrt{1-2r} + r \ln \frac{1-\sqrt{1-2r}}{1+\sqrt{1-2r}} = 0.$$

Równanie powyższe posiada rozwiązanie $r = 0,3273$, której to wartości odpowiada wartość objętości $V = 0,03362$. Jest to wartość nieco niższa od objętości belki otrzymanej przy uwzględnieniu naprężeń $\bar{\sigma}_z$ i $\bar{\tau}_{zx}$.

Ten sam wynik można otrzymać całkując linię ugięcia przy dodatkowym założeniu, że linia ugięcia i jej pochodne są ciągłe również w punkcie $\xi = 2r$.

Dla kontroli przyjętego na wstępie założenia odnośnie największego wytyżenia we włóknach skrajnych przeprowadzono następujące rozważanie: szukane jest ξ_{\min} , dla któ-

rego naprężenie zastępcze na krawędzi zewnętrznej jest równe naprężeniu zastępczemu na osi belki

$$(3.9) \quad \sigma_{red}|_{z=h} = \sigma_{red}|_{z=0}$$

KRZYŻ i ŻYCZKOWSKI podają [10] wzór (1.6.4) na τ_{zx} w osi obojętnej belki o zmiennej wysokości

$$\tau_{zx}|_{z=0} = \frac{3}{2} \tau_{sr} \left[1 - \frac{M}{T \cdot h} \frac{dh}{dx} \right]$$

Przy przyjęciu (2.4) oraz faktu, że

$$\sigma_{red}|_{z=0} = \sqrt{3} |\tau_{zx}|_{z=0}$$

(według hipotezy Hubera-Misesa), otrzymujemy następujące równanie:

$$(3.10) \quad \frac{|M|}{h} \left[1 + \frac{3}{2} \left| \frac{dh}{dx} \right| + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{dM}{dx} \right|$$

Przyjęto następnie wielkości bezwymiarowe (2.6) oraz dwa pierwsze wyrazy szeregu (3.1) i znaleziono przy pomocy maszyny cyfrowej wartość $\xi_{min} = 0,00233$. Wartość ta jest znacznie mniejsza od uzyskanej przez innych autorów, pomijających τ_{zx} i σ_z we włókna skrajnych. Uzyskany wynik wskazuje, że w bezpośrednim otoczeniu podpory oraz punktu $\xi = 1 - 2r$, gdzie $M = 0$ (rys. 1) ma miejsce odstępstwo od przyjętego założenia. Jest ono niewykrywalne na drodze elastoptycznej, bowiem podpora jest miejscem przyłożenia siły skupionej, a w miejscu zerowania się momentu zginającego, pomijając dokładność realizacji obciążenia ciągłego, wobec małej wysokości belki występuje przestrzenny stan naprężenia.

4. Podobieństwo modelowe

Przed przystąpieniem do weryfikacji doświadczalnej na drodze elastoptycznej wprowadzono odpowiednie prawo podobieństwa mechanicznego rządzące niniejszym doświadczeniem.

Traktujemy jako prototyp belkę, która została obliczona przy pomocy maszyny cyfrowej dla przyjętej wartości p_1 . Szukany jest kształt belki modelowej, dla której parametr obciążenia p_1^* jest różny od przyjętego do obliczeń.

Dla wyprowadzenia prawa podobieństwa założymy, że zmieniamy obciążenie i szukamy nowego przekroju belki, przy którym naprężenie w skrajnych włóknach nie ulegnie zmianie

$$(4.1) \quad p_1^* = k p_1, \quad \eta^* = n \cdot \eta$$

Wstawiając (4.1) do (2.7) otrzymujemy:

$$(4.2) \quad n^2 \eta'^2 - n^2 \eta^2 \frac{k p_1 \sqrt{3}}{|2r\xi - \xi^2|} + 1 = 0,$$

$$(2.7) \quad \eta'^2 - \eta^2 \frac{p_1 \sqrt{3}}{|2r\xi - \xi^2|} + 1 = 0.$$

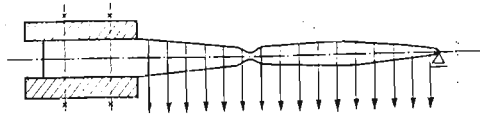
Z powyższych równań można wyprowadzić następujące prawo podobieństwa modelowego, wiążące podziałkę obciążeń k i podziałkę wysokości belki n

$$(4.3) \quad n = \sqrt{\frac{1}{\eta'^2(k-1)+k}},$$

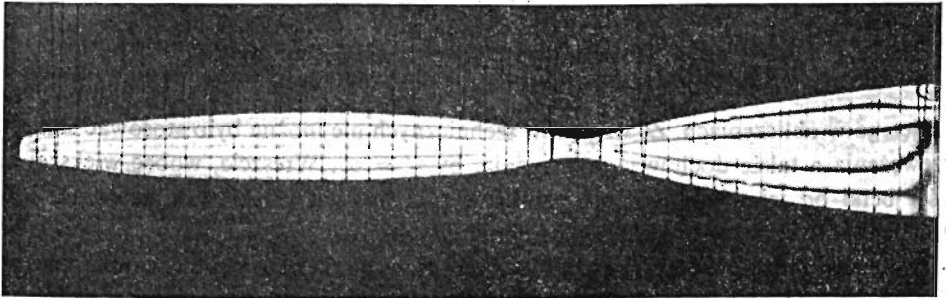
w którym istotną rolę odgrywa wartość pochodnej kształtu belki. Prawo to pozwala obliczyć zmienność kształtu równomiernej wytrzymałości przy zmienionym obciążeniu.

5. Badania elastoptyczne

Do badań przyjęto belkę wykonaną z materiału elastoptycznego PSM-1 produkcji Photolastic Inc. Grubość belki $b = 1/4'' = 6,35$ mm. Obciążenie belki ciągle zostało przybliżone za pomocą 40 specjalnych ciężarków ołowianych o masie 0,2 kg każdy, wiszących na nitkach na belce w odstępach 0,5 cm. Dokładność modelu w stosunku do wynikających z tablicy 1 wymiarów wynosi $\pm 0,3$ mm. Belkę umieszczono w kołowym polaryskopie firmy Zeiss Jena i obserwowano w ciemnym polu widzenia w świetle sodowym żółtym. Fotografia na rys. 6 przedstawia wynik doświadczenia. W tablicy 2 zamieszczono wyniki



Rys. 5



Rys. 6

pomiarów rzędu izochrom przy pomocy metody Senarmonta, zdjęte na dolnej krawędzi belki w punktach pomiarowych co 0,5 cm poczynając od utwierdzonego końca belki. Fotografia pokazuje dosyć dobre wyrównanie rzędu izochrom wzdłuż dolnej krawędzi belki. Nieco niższe wyężenie w lewej części belki należy przypisać niedokładności utwierdzenia. Wyznaczono średnią arytmetyczną rzędów izochromy \bar{m} dla punktów 2 ÷ 14 i 17 ÷ 39.

W obliczeniach pominięto punkty krańcowe belki oraz 2 punkty położone w miejscu silnego przewężenia. Zgodność obrazu elastoptycznego z przewidywaniami teoretycznymi w miejscu silnego przewężenia nie może być analizowana. W miejscu tym obciążenie ciągle wywierane na belkę za pośrednictwem ciężarków odbiega poważnie od idealnego,

Tablica 2. Wyniki pomiarów elastoptycznych

Nr punktu	rz. izochrom	Nr punktu	rz. izochrom
1	—	21	3,10
2	2,63	22	3,08
3	2,67	23	3,04
4	2,65	24	3,07
5	2,64	25	3,09
6	2,68	26	3,11
7	2,64	27	3,06
8	2,65	28	3,06
9	2,64	29	3,06
10	2,67	30	3,04
11	2,68	31	3,11
12	2,71	32	3,10
13	2,75	33	3,07
14	2,92	34	3,09
15*	3,21	35	3,08
16*	4,10	36	3,05
17	3,22	37	3,04
18	2,95	38	3,10
19	3,03	39	3,12
20	3,08	40	—

Średnia arytmetyczna rzędu izochromy $\bar{m} = 2,936$,
odchylenie standardowe $S_m = 0,202$,

współczynnik zmienności $W_s = \frac{S_m}{\bar{m}} = 6,88\%$,

* punkty nie wzięte do obliczeń średniej arytmetycznej

przyjętego w obliczeniach. Ze względów technicznych nie można było stosować silniejszego przewężenia a także dochować wymagania, by $\eta' = \infty$. Wreszcie, wobec większej szerokości belki od jej wysokości, nie panuje w tym miejscu płaski stan naprężeń, którego istnienie zakłada się w modelach elastoptycznych.

Dokonano także obliczeń odchylenia standardowego S_m oraz współczynnika zmienności $W_s = S_m/\bar{m}$. Zmniejszenie rozbieżności między wynikami teoretycznymi a doświadczalnymi mogłoby nastąpić dopiero po zwiększeniu dokładności obu tych podejść. Z jednej strony rozwiązanie teoretyczne nie uwzględnia obciążenia q w warunkach brzegowych dla skrajnych włókien poddanych działaniu tego obciążenia (górnym) i naprężeń stykowych. Z drugiej strony błąd badań doświadczalnych związany jest z niedokładnością obciążenia i odstępstwami od idealnego utwierdzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. А. И. Кутков, Р. В. Челноков, *Влияние касательных напряжений от перезывающих сил на объем балки равного сопротивления при продольно-поперечном изгибе*. В сб.: *Материалы Научно-технической конференции по строительной механике и строительным конструкциям*, 1966 г., Казань 1963, 70—75.

2. Р. В. ЧЕЛНОКОВ, *Проектирование балок равного сопротивления по продольно-поперечному изгибу*. В сб.: *Материалы второй конференции молодых научных работников*, Секция физ.-техн. и механ. математ., Казань 1965, 141—151.
3. E. HAUG Jr, P. G. KIRMSER, *Minimum weight design of beams with inequality constraints on stress and deflections*, Trans. ASME, E. 34 (1967) 999 - 1004.
4. А. П. МАРТИШОС, *К расчету изгибаемых элементов с переменной высотой поперечного сечения*, Лит. Механ., Сб. 1967, 16—20.
5. А. П. МАРТИШОС, *Касательные напряжения переменного сечения*, Научные труды Высших Учебных Заведений Лит. ССР, Механика 2, 1966, 71—75.
6. J. GRYCZ, *Wyznaczenie kształtów izostaticznych belek skrzynekowych o zmiennych grubościach pólek i środków*, Zesz. Nauk. Polit. Warsz. 68, (1963), 53 - 60.
7. N. IOSIPESCU, *Cercetări teoretice și experimentale asupra grinzilor cu înălțime variabila*. An. Univ. Bucuresti. Ser. Stiint. Natur. Matem.-Mecan., 15 (1966) 63 - 86.
8. S. OWCZAREK, *Metoda wyznaczania optymalnych kształtów słupów monolitycznych połączonych z belkami, na podstawie elastooptycznych badań modelowych*, Pr. zb. *Metody optymalizacji urządzeń odkształcalnych*, Cz. 1. PAN, Biuro Kadr Naukowych i Spraw Osobowych, Ossolineum 1968.
9. N. OLHOFF, *Maximizing higher order eigenfrequencies of beams with constraints on the design geometry*, DCAMM Rept. 108. Sept. 1976.
10. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność, Zadania i przykłady*, PWN 1962.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ
БАЛОК ПУТЕМ РАСЧЕТА И ФОТОУПРУГИХ ИСПЫТАНИЙ

В работе сделана попытка определить оптимальную форму балки, свободно опертой на одном конце и защемленной на другом, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Вычисления учитывают добавочные напряжения σ_x и τ_{xz} , возникающие в краевых волокнах балки из-за изменения ее высоты. Приведены основные уравнения и показан процесс их интегрирования. По результатам численных вычислений подготовлена фотоупругая модель. Экспериментальные испытания подтвердили теоретические выводы.

S u m m a r y

OPTIMUM DESIGN OF STATICALLY INDETERMINATE BEAMS
BY ANALYTICAL AND PHOTO-ELASTIC METHODS

In the paper an attempt is made of determining the optimal shape of a cantilever beam of constant width subjected to uniformly distributed load and simply supported at the other end.

Additional stresses σ_x and τ_{xz} appearing as a consequence of variable height of the beam are considered. All necessary equations are presented and the procedure of solving them is shown. In accordance with numerical results, the photoelastic model of the beam has been made and investigated in a circular polariscope. Experiments showed a satisfactory agreement with theoretical results.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW
KONSTRUKCJI MASZYN POLITECHNIKI
KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1977 r.

SUMOWANIE NIĘKTÓRYCH SZEREGÓW BESSELA-FOURIERA WYSTĘPUJĄCYCH
W ZAGADNIENIACH PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

MICHAŁ CIAŁKOWSKI (POZNAŃ)

Oznaczenia

- $J_\beta(\xi), Y_\beta(\xi)$ funkcje Bessela I i II rodzaju rzędu β , argumentu ξ ,
 $I_\beta(\xi), K_\beta(\xi)$ zmodyfikowane funkcje Bessela I i II rodzaju rzędu β , argu-
 mentu ξ ,
 $\eta(\xi)$ funkcja Heviside'a,
 $\delta(\xi)$ dystrybucja Diraca,
 ψ współczynnik charakteryzujący rodzaj warunku brzegowego
 (liczba Biota),
 β współczynnik określający kształt ciała,
 F_0 liczba Fouriera (bezwymiarowy czas),
 ξ bezwymiarowa współrzędna punktu.

W wielu zagadnieniach przewodnictwa ciepłego rozwiązanie odpowiedniego problemu wyraża się poprzez funkcje Bessela. I tak np. rozkład temperatur w płycie nieograniczonej (o zerowej temperaturze jednej powierzchni) oraz symetryczny rozkład temperatur w walcu nieograniczonym możemy wyrazić w postaci bezwymiarowej następującym wzorem:

$$(1) \quad \vartheta(\xi, F_0) = -\frac{2\beta + \psi}{\psi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\psi^2 \xi^\beta J_\beta(\mu_m \xi) e^{-\mu_m^2 F_0}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) \mu_m J_{\beta-1}(\mu_m)}, \quad \begin{array}{l} \xi \in \langle 0; 1 \rangle \\ F_0 \in \langle 0; +\infty \rangle, \end{array}$$

będącym rozwiązaniem równania przewodnictwa ciepłego

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{1-2\beta}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}, \quad \begin{array}{l} \xi \in \langle 0; 1 \rangle \\ F_0 \in \langle 0; +\infty \rangle \end{array}$$

z warunkami:

— warunek początkowy

$$\vartheta(\xi, 0) = \xi^{2\beta}, \quad \xi \in \langle 0; 1 \rangle,$$

— warunek brzegowy

$$-\left. \frac{\partial \vartheta(\xi, F_0)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \psi \vartheta(\xi, F_0)|_{\xi=1}, \quad F_0 \in (0; +\infty), \quad \psi = \text{const.}$$

Parametr β występujący w równaniu przewodnictwa ciepłego charakteryzuje kształt ciała np.: $\beta = -1/2$ — kula, $\beta = 0$ — walec, $\beta = 1/2$ — płyta.

Dla wartości parametru β w rozwiązaniu (1), równanie określające wartości własne stowarzyszonego zagadnienia brzegowego ma postać

$$(2) \quad -\frac{J_\beta(\mu)}{J_{\beta-1}(\mu)} = \frac{\mu}{\psi}.$$

Kolejne pierwiastki równania (2) oznaczamy przez $\mu_m^{(\beta)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Dla przejrzystości zapisu będziemy opuszczać indeks β przy wartości własnej $\mu_m^{(\beta)}$. Równanie (2) wynika z powyższego warunku brzegowego i dla rozważanego równania przewodnictwa możemy napisać go również w formie

$$\left\{ \frac{d}{d\xi} [\xi^\beta J_\beta(\mu\xi)] + \psi \xi^\beta J_\beta(\mu\xi) \right\} \Big|_{\xi=1} = 0 \quad \text{lub} \quad \mu J_{\beta-1}(\mu) + \psi J_\beta(\mu) = 0.$$

Wynika stąd, że równanie (2) obejmuje wszystkie trzy postacie warunków brzegowych:

- warunek brzegowy I rodzaju $J_\beta(\mu) = 0$, $\psi \rightarrow +\infty$,
- warunek brzegowy II rodzaju $J_{\beta-1}(\mu) = 0$, $\psi = 0$,
- warunek brzegowy II rodzaju $\mu J_{\beta-1}(\mu) + \psi J_\beta(\mu) = 0$, $\psi > 0$.

Dalej pokażemy, że znajomość pierwiastków równania (2) pozwala na wyznaczanie sum pewnych szeregów trygonometrycznych (gdyż funkcje Bessela rzędu połówkowego wyrażają się przez funkcje trygonometryczne) oraz sum pewnych szeregów zawierających funkcje Bessela rzędu zerowego.

Wprowadzone wzory rozszerzymy na sumowanie innych szeregów otrzymanych przez wykorzystanie związków pomiędzy funkcjami Bessela argumentu rzeczywistego i urojonego.

Przedstawimy też sumowanie szeregu w postaci

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m \xi) J_\beta(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^2 + s)(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)},$$

który jest w szczególnym przypadku transformatą Laplace'a (dla $a^2 = s$) szeregu (1). Podobne szeregi występują również przy nadaniu rozkładów temperatur dla bardzo małych liczb Fouriera określonych wzorem (1); mianowicie dla $Fo \ll 1$ mamy

$$2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^\beta J_\beta(\mu_m \xi) e^{-\mu_m^2 Fo}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}(\mu_m)} \approx \frac{2\psi^2}{Fo} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^\beta J_\beta(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) \left(\mu_m^2 + \frac{1}{Fo} \right) J_{\beta-1}(\mu_m)}.$$

W metodzie sumowania szeregów wykorzystujemy wzory zachodzące dla dystrybucji Diraca.

1. Szereg podstawowy

Ponieważ układ funkcji Bessela $\{J_\beta(\mu_m \xi)\}$, gdzie μ_m są określone wzorem (2), jest zupełny, przeto dla dystrybucji $\delta = \delta(\xi - \varrho)$ ma miejsce związek ([1], s. 244)

$$(3) \quad \delta(\xi - \varrho) = 2\varrho\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m \varrho) J_\beta(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)}, \quad \begin{array}{l} \varrho \in \langle 0; 1 \rangle, \\ \xi \in \langle 0; 1 \rangle, \end{array}$$

Ze względu na symetrię funkcji delta mamy również

$$(4) \quad \delta(\varrho - \xi) = 2\xi\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta}(\mu_m \xi) J_{\beta}(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)}.$$

Ponieważ

$$(5) \quad \int_0^{\xi} f(\hat{\xi}) \delta(\hat{\xi} - \varrho) d\hat{\xi} = f(\varrho),$$

to biorąc $f(\xi) = \xi I_{\beta}(a\xi)$ mamy

$$(6) \quad \int_0^{\xi} \delta(\hat{\xi} - \varrho) \hat{\xi} I_{\beta}(a\hat{\xi}) d\hat{\xi} = \varrho I_{\beta}(a\varrho).$$

Związek (6), na mocy (3), przyjmuje postać

$$(7) \quad \begin{aligned} \varrho I_{\beta}(a\varrho) &= 2\varrho\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta}(\mu_m \varrho) \int_0^{\xi} \hat{\xi} J_{\beta}(\mu_m \hat{\xi}) I_{\beta}(a\hat{\xi}) d\hat{\xi}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ &= 2\psi^2 \varrho \xi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{d\xi} [I_{\beta}(a\xi)] \frac{J_{\beta}(\mu_m \varrho) J_{\beta}(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} + \\ &\quad - 2\psi^2 \varrho \xi \sum_{m=0}^{\infty} I_{\beta}(a\xi) \frac{J_{\beta}(\mu_m \varrho) \frac{d}{d\xi} [J_{\beta}(\mu_m \xi)]}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} \end{aligned}$$

lub

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} H_{\beta}(\xi, \varrho) - \frac{\frac{d}{d\xi} I_{\beta}(a\xi)}{I_{\beta}(a\xi)} H_{\beta}(\xi, \varrho) = -\frac{I_{\beta}(a\varrho)}{I_{\beta}(a\xi)} \frac{1}{\xi},$$

gdzie

$$(9) \quad H_{\beta}(\xi, \varrho) = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta}(\mu_m \varrho) J_{\beta}(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)}$$

jest szeregiem podstawowym.

Związek (8) traktujemy jako równanie różniczkowe z niewiadomą funkcją $H_{\beta}(\xi, \varrho)$ i poszukujemy jego rozwiązania w formie

$$(10) \quad H_{\beta}(\xi, \varrho) = u_{\beta}(\xi, \varrho) I_{\beta}(a\varrho),$$

stąd równanie określające funkcję $u_{\beta}(\xi, \varrho)$ jest w postaci

$$(11) \quad \frac{\partial u_{\beta}}{\partial \xi} - \frac{\frac{d}{d\xi} I_{\beta}(a\xi)}{I_{\beta}(a\xi)} u_{\beta} = -\frac{1}{I_{\beta}(a\xi)} \frac{1}{\xi}.$$

Następnie wykorzystując związek (wyznacznik Wrońskiego funkcji $I_\beta(a\xi)$ i $K_\beta(a\xi)$)

$$(12) \quad I_\beta(a\xi)K'_\beta(a\xi) - I'_\beta(a\xi)K_\beta(a\xi) = -\frac{1}{a\xi}$$

redukujemy (11) do postaci

$$(13) \quad I_\beta(a\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}[u_\beta(\xi, \varrho) - K_\beta(a\xi)] - \frac{d}{d\xi}I_\beta(a\xi)[u_\beta(\xi, \varrho) - K_\beta(a\xi)] = 0.$$

Rozwiązanie równania (13) jest następujące:

$$(14) \quad u_\beta(\xi, \varrho) = CI_\beta(a\xi) + K_\beta(a\xi), \quad C - \text{stała.}$$

Zatem

$$(15) \quad H_\beta(\xi, \varrho) = I_\beta(a\varrho)[CI_\beta(a\xi) + K_\beta(a\xi)].$$

Szereg (9) jest szeregiem symetrycznym względem ξ i ϱ , wobec tego otrzymujemy

$$(16) \quad H_\beta(\xi, \varrho) = \eta(\xi - \varrho)L_1(\xi, \varrho, \psi, a) + \eta(\varrho - \xi)L_1(\varrho, \xi, \psi, a), \quad \xi, \varrho \in \langle 0; 1 \rangle,$$

gdzie $L_1(\xi, \varrho, \psi, a) = I_\beta(a\varrho)[C(a, \psi)I_\beta(a\xi) + K_\beta(a\xi)]$.

Stałą C określimy kładąc teraz we wzorze (9) $\xi = 1$, czyli

$$(17) \quad [CI_\beta(a) + K_\beta(a)]I_\beta(a\varrho) = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m)J_\beta(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2)J_{\beta-1}^2(\mu_m)}.$$

Korzystając z ortogonalności funkcji Bessela z warunkiem (2), po przemnożeniu obustronnym równania (17) przez $\varrho J_\beta(\mu_m\varrho)$ i scałkowaniu w granicach od 0 do 1 otrzymujemy

$$[CI_\beta(a) + K_\beta(a)]\{aJ_\beta(\mu_m)I_{\beta-1}(a) - \mu_m I_\beta(a)J_{\beta-1}(\mu_m)\} = J_\beta(\mu_m),$$

a uwzględniając (2)

$$(18) \quad C(a, \psi) = -\frac{K_\beta(a)}{I_\beta(a)} + \frac{1}{I_\beta(a)} \frac{1}{aI_{\beta-1}(a) + \psi I_\beta(a)}.$$

W szczególnym przypadku

$$(18a) \quad C = \begin{cases} -\frac{K_\beta(a)}{I_\beta(a)} & \text{dla warunku brzegowego I rodzaju,} \\ -\frac{K_\beta(a)}{I_\beta(a)} + \frac{1}{I_\beta(a)} \cdot \frac{1}{aI_{\beta-1}(a)} & \text{dla warunku brzegowego II rodzaju.} \end{cases}$$

Dla warunku brzegowego II rodzaju w szeregu podstawowym (9) wykorzystujemy związek (2). Zatem

$$L_1(\xi, \varrho, \psi, a) = \frac{I_\beta(a\varrho)}{I_\beta(a)} \left[-K_\beta(a) \cdot I_\beta(a\xi) + I_\beta(a) \cdot K_\beta(a\xi) + \frac{I_\beta(a\xi)}{aI_{\beta-1}(a) + \psi I_\beta(a)} \right],$$

$$L_1(1, \varrho, \psi, a) = \frac{I_\beta(a\varrho)}{aI_{\beta-1}(a) + \psi I_\beta(a)}.$$

Całkując związek (16) z wagą $\xi^{\beta+1}$ w granicach od 0 do ξ , mamy

$$(19) \quad \bar{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = \int_0^{\xi} \hat{\xi}^{\beta+1} H_{\beta}(\hat{\xi}, \varrho) d\hat{\xi} = \int_0^{\xi} \hat{\xi}^{\beta+1} L_1(\hat{\xi}, \varrho, \psi, a) d\hat{\xi} + \\ + \int_0^{\varrho} \hat{\xi}^{\beta+1} L_1(\varrho, \hat{\xi}, \psi, a) d\hat{\xi} = \frac{1}{a^2} [\varrho^{\beta} + \xi^{\beta+1} L_3(\xi, \varrho, \psi, a)],$$

gdzie

$$L_3(\xi, \varrho, \psi, a) = aI_{\beta}(a\varrho)[C(a, \psi)I_{\beta+1}(a\xi) - K_{\beta+1}(a\xi)] = \\ = \frac{aI_{\beta}(a\varrho)}{I_{\beta}(a)} \left[-K_{\beta}(a)I_{\beta+1}(a\xi) - I_{\beta}(a)K_{\beta+1}(a\xi) + \frac{I_{\beta+1}(a\xi)}{aI_{\beta-1}(a) + \psi I_{\beta}(a)} \right], \\ L_3(1, \varrho, \psi, a) = -I_{\beta}(a\varrho) \frac{2\beta + \psi}{aI_{\beta-1}(a) + \psi I_{\beta}(a)}.$$

Z drugiej strony

$$(20) \quad \bar{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta}(\mu_m \varrho) \int_0^{\xi} \hat{\xi}^{\beta+1} J_{\beta}(\mu_m \hat{\xi}) d\hat{\xi}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2)J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m \xi) J_{\beta}(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2)\mu_m J_{\beta-1}^2(\mu_m)}.$$

Analogicznie

$$\bar{\bar{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = \int_0^{\varrho} \hat{\varrho}^{\beta+1} H_{\beta}(\xi, \hat{\varrho}) d\hat{\varrho} = \frac{1}{a^2} [\xi^{\beta} + \varrho^{\beta+1} L_3(\varrho, \xi, \psi, a)],$$

a z drugiej strony

$$\bar{\bar{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta}(\mu_m \xi) \int_0^{\varrho} \hat{\varrho}^{\beta+1} J_{\beta}(\mu_m \hat{\varrho}) d\hat{\varrho}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2)J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta}(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2)\mu_m J_{\beta-1}^2(\mu_m)}.$$

Stąd widać, że funkcje $\bar{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$ i $\bar{\bar{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$ są symetryczne względem zmiennych ξ i ϱ , $\bar{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = \bar{\bar{J}}_1(\varrho, \xi, \psi, a)$ oraz $\bar{J}_1(\varrho, \xi, \psi, a) = \bar{\bar{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$.

Wobec tego

$$(20a) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{\beta+1} J_{\beta}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{\mu_m (\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2)J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = \eta(\xi - \varrho) \bar{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a) + \eta(\varrho - \xi) \bar{\bar{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = \\ = \eta(\xi - \varrho) \frac{1}{a^2} [\varrho^{\beta} + \xi^{\beta+1} L_3(\xi, \varrho, \psi, a)] + \eta(\varrho - \xi) \frac{1}{a^2} [\xi^{\beta} + \varrho^{\beta+1} L_3(\varrho, \xi, \psi, a)].$$

W szczególnym przypadku dla I warunku brzegowego ($\psi \rightarrow \infty$) i $\beta = 0$, podstawiając w (20a) $\xi = 1$ otrzymamy

$$(21) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \varrho)}{\mu_m(\mu_m^2 + a^2) J_1(\mu_m)} = \frac{1}{a^2} \left[1 - \frac{I_0(a\varrho)}{I_0(a)} \right].$$

Całkując teraz $\bar{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$ z wagą $\varrho^{\beta+1}$ w granicach od 0 do ϱ oraz $\bar{\bar{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$ z wagą $\xi^{\beta+1}$ w granicach od 0 do ξ , otrzymujemy symetryczny wzór względem zmiennych ξ i ϱ

$$(22) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi\varrho)^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{\mu_m^2(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = \eta(\xi - \varrho) \bar{J}_2(\xi, \varrho, \psi, a) + \eta(\varrho - \xi) \bar{\bar{J}}_2(\xi, \varrho, \psi, a),$$

gdzie

$$\bar{J}_2(\xi, \varrho, \psi, a) = \int_0^{\varrho} \hat{\varrho}^{\beta+1} \bar{J}_1(\xi, \hat{\varrho}, \psi, a) d\hat{\varrho} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\varrho^{2\beta+2}}{2\beta+2} + (\xi\varrho)^{\beta+1} L_2(\xi, \varrho, \psi, a) \right],$$

$$\bar{\bar{J}}_2(\xi, \varrho, \psi, a) = \int_0^{\xi} \hat{\xi}^{\beta+1} \bar{\bar{J}}_1(\hat{\xi}, \varrho, \psi, a) d\hat{\xi} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\xi^{2\beta+2}}{2\beta+2} + (\varrho\xi)^{\beta+1} L_2(\varrho, \xi, \psi, a) \right].$$

Stąd

$$\bar{J}_2(\xi, \varrho, \psi, a) = \bar{\bar{J}}_2(\varrho, \xi, \psi, a) \quad \text{oraz} \quad \bar{J}_2(\varrho, \xi, \psi, a) = \bar{\bar{J}}_2(\xi, \varrho, \psi, a), \\ L_2(\xi, \varrho, \psi, a) = I_{\beta+1}(a\varrho) [C(a, \psi) I_{\beta+1}(a\xi) - K_{\beta+1}(a\xi)] = \\ = \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{I_{\beta}(a)} \left[-K_{\beta}(a) I_{\beta+1}(a\xi) - I_{\beta}(a) K_{\beta+1}(a\xi) + \frac{I_{\beta+1}(a\xi)}{a I_{\beta-1}(a) + \psi I_{\beta}(a)} \right], \\ L_2(1, \varrho, \psi, a) = - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{a} \frac{2\beta + \psi}{a I_{\beta-1}(a) + \psi I_{\beta}(a)}.$$

Kładąc w (22) $\xi = 1$ otrzymujemy zależność

$$(22a) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m)}{\mu_m^2(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\varrho^{\beta+1}}{2\beta+2} - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{a} \frac{2\beta + \psi}{a I_{\beta-1}(a) + \psi I_{\beta}(a)} \right],$$

$$|a| > 0.$$

W szczególności dla warunku brzegowego II rodzaju ($\psi = 0$)

$$(22b) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m)}{\mu_m^2(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta}^2(\mu_m)} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\varrho^{\beta+1}}{2\beta+2} - \frac{2\beta}{a^2} \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{I_{\beta-1}(a)} \right], \quad |a| > 0,$$

a dla I warunku brzegowego uzyskujemy ($-J_{\beta-1}(\mu_m) = J_{\beta+1}(\mu_m)$),

$$(23) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho)}{\mu_m^2(\mu_m^2 + a^2)J_{\beta+1}(\mu_m)} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\varrho^{\beta+1}}{2\beta+2} - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{aI_{\beta}(a)} \right], \quad |a| > 0,$$

stąd dla $\varrho = 1$.

$$(23a) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2(\mu_m^2 + a^2)} = \begin{cases} \frac{1}{a^2} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} ha}{a} \right], & \beta = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{I_1(a)}{aI_0(a)} \right], & \beta = 0, \\ -\frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{ctg} ha}{a} \right], & \beta = \frac{1}{2}, \quad |a| > 0. \end{cases}$$

Obliczając granicę wyrażeń po prawej stronie zależności (23a) dla $a \rightarrow 0$ otrzymamy

$$(23b) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^4} = \begin{cases} \frac{1}{3}; & \beta = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{16}; & \beta = 0, \\ \frac{1}{45}; & \beta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Oczywiście wartości własne μ_m są różne dla różnych wartości parametru β . Posługując się wzorem (22) możemy obliczyć np. sumę szeregu typu

$$(24) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi\varrho)^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + a^2)(\mu_m^2 + b^2)(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)},$$

wykorzystując związek

$$\frac{1}{\mu_m^2 + a^2} - \frac{1}{\mu_m^2 + b^2} = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{\mu_m^2} - \frac{1}{\mu_m^2 + b^2} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{\mu_m^2 + a^2}.$$

Zatem

$$(24a) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + a^2)(\mu_m^2 + b^2)(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = \frac{1}{b^2 - a^2} \{ \eta(\xi - \varrho) [L_2(\xi, \varrho, \psi, b) - L_2(\xi, \varrho, \psi, a)] + \\ + \eta(\varrho - \xi) [L_2(\varrho, \xi, \psi, b) - L_2(\varrho, \xi, \psi, a)] \}.$$

W szczególności dla warunku brzegowego I rodzaju

$$(25) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^2 + a^2)(\mu_m^2 + b^2) J_{\beta+1}(\mu_m)} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\frac{I_{\beta+1}(b\varrho)}{bI_{\beta}(b)} - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{aI_{\beta}(a)} \right],$$

a dla $\varrho = 1$

$$(25a) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu_m^2 + a^2)(\mu_m^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2 - a^2} \times \begin{cases} \frac{\operatorname{tgh} a}{a} - \frac{\operatorname{tgh} b}{b}, & \beta = \frac{1}{2}, \\ \frac{I_1(a)}{aI_0(a)} - \frac{I_1(b)}{bI_0(b)}, & \beta = 0, \\ \frac{\operatorname{ctgh} a}{a} - \frac{\operatorname{ctgh} b}{b} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}, & \beta = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$|a| > 0, \quad |b| > 0.$

Przechodząc w związku (25a) do granicy przy $b \rightarrow 0$ otrzymamy wzór (23a). Przedstawione wzory możemy również wykorzystać do obliczenia sum szeregów stanowiących transformaty Laplace'a naprężeń termicznych stycznich $\sigma_t(\xi, Fo)$ i promieniowych $\sigma_r(\xi, Fo)$, wywołanych działaniem pola temperatury (1) w walcu nieskończonym. Wyrażają się one wzorami:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sigma_t(\xi, Fo)] &= \mathcal{L} \left\{ 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_m^2 Fo}}{\mu_m(\mu_m^2 + \psi^2)} J_1(\mu_m) \left[\frac{J_1(\mu_m)}{\mu_m} + \frac{J_1(\mu_m \xi)}{\mu_m \xi} - J_0(\mu_m \xi) \right] \right\} = \\ &= \frac{\psi}{s[\sqrt{s} I_1(\sqrt{s}) + \psi I_0(\sqrt{s})]} \left[I_0(\sqrt{s} \xi) - \frac{1}{\sqrt{s} \xi} I_1(\sqrt{s} \xi) - \frac{1}{\sqrt{s}} I_1(\sqrt{s}) \right] \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sigma_r(\xi, Fo)] &= \mathcal{L} \left\{ 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_m^2 Fo}}{\mu_m(\mu_m^2 + \psi^2)} J_1(\mu_m) \left[\frac{J_1(\mu_m)}{\mu_m} - \frac{J_1(\mu_m \xi)}{\mu_m \xi} \right] \right\} = \\ &= \frac{\psi}{s[\sqrt{s} I_1(\sqrt{s}) + \psi I_0(\sqrt{s})]} \left[\frac{1}{\sqrt{s} \xi} I_1(\sqrt{s} \xi) - \frac{1}{\sqrt{s}} I_1(\sqrt{s}) \right]. \end{aligned}$$

Sumy tych szeregów są przypadkami szczególnymi wyprowadzonych wzorów. Jako ilustrację zastosowania otrzymanych zależności obliczymy rozkład temperatur (1) w walcu nieskończonym dla $Fo \ll 1$. Wówczas funkcję $\exp(-\mu_m^2 Fo)$ możemy zastąpić trzema pierwszymi wyrazami jej rozwinięcia w szereg MacLaurina.

Zatem

$$\begin{aligned} 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \xi) e^{-\mu_m^2 Fo}}{(\mu_m^2 + \psi^2) \mu_m J_1(\mu_m)} &\approx 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2) \mu_m J_1(\mu_m)} \frac{1}{1 + \frac{\mu_m^2 Fo}{1!} + \frac{(\mu_m^2 Fo)^2}{2!}} = \\ &= \frac{2\psi^2}{Fo^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2) J_1(\mu_m)} \frac{2}{\left(\mu_m^2 + \frac{1+i}{Fo} \right) \left(\mu_m^2 + \frac{1-i}{Fo} \right)} = \\ &= \frac{i}{Fo} \left[2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2) J_1(\mu_m)} \frac{1}{\mu_m^2 \frac{1+i}{Fo}} - 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2) J_1(\mu_m)} \frac{1}{\mu_m^2 + \frac{1-i}{Fo}} \right]. \end{aligned}$$

Wykorzystując teraz wzór (20a) otrzymamy

$$2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2) \mu_m J_1(\mu_m)} \frac{1}{1 + \frac{\mu_m^2 F_0}{1!} + \frac{(\mu_m^2 F_0)^2}{2!}} =$$

$$= 1 -$$

$$+ \frac{2}{F_0} \frac{D_1\left(\frac{\xi \gamma}{\sqrt{F_0}}\right) \left[C_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{F_0}}\right) + \psi D_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{F_0}}\right) \right] - D_2\left(\frac{\xi \alpha}{\sqrt{F_0}}\right) \left[C_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{F_0}}\right) + \psi D_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{F_0}}\right) \right]}{\left[C_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{F_0}}\right) + \psi D_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{F_0}}\right) \right]^2 + \left[C_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{F_0}}\right) + \psi D_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{F_0}}\right) \right]^2},$$

$$\alpha = 2^{1/4}$$

gdzie

$$D_1\left(\frac{\xi \alpha}{\sqrt{F_0}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{2(4k)}}{((4k)!)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{2(4k+1)}}{((4k+1)!)^2} -$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{2(4k+3)}}{((4k+3)!)^2},$$

$$D_2\left(\frac{\xi \alpha}{\sqrt{F_0}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{2(4k+2)}}{((4k+2)!)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{2(4k+1)}}{((4k+1)!)^2} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{2(4k+3)}}{((4k+3)!)^2},$$

$$C_1\left(\frac{\xi \alpha}{\sqrt{F_0}}\right) = \frac{\xi \alpha}{\sqrt{F_0}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{4k+3}}{(4k+3)!} \frac{\left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{4k+4}}{(4k+4)!} -$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{4k+3}}{(4k+3)!} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{4k}}{(4k)!} \frac{\left(\frac{\xi \alpha}{2\sqrt{F_0}}\right)^{4k+1}}{(4k+1)!} \right],$$

$$C_2\left(\frac{\xi\alpha}{\sqrt{Fo}}\right) = \frac{\xi\alpha}{\sqrt{Fo}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{Fo}}\right)^{4k+1}}{(4k+1)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{Fo}}\right)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{Fo}}\right)^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{Fo}}\right)^{4k+3}}{(4k+3)!} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{Fo}}\right)^{4k}}{(4k)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{Fo}}\right)^{4k+1}}{(4k+1)!} \right].$$

W celu zwiększenia dokładności wzorów, funkcję $\exp(-\mu_m^2 Fo)$ możemy zastąpić dla $Fo \ll 1$ większą liczbą wyrazów rozwinięcia jej w szereg Mac Laurina. Dalej postępowanie jest analogiczne do powyższego.

2. Szeregi o sumach wyrażonych przez zwyczajne funkcje Bessela

Zastosowanie wprowadzonych wzorów możemy znacznie poszerzyć, wykorzystując związki zachodzące pomiędzy funkcjami Bessela argumentu rzeczywistego i urojonego. Dla zmodyfikowanych funkcji Bessela argumentu urojonego mamy następujące związki:

$$I_\nu(a\xi i) = e^{\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(a\xi),$$

$$K_\nu(a\xi i) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} [J_\nu(a\xi) - iY_\nu(a\xi)].$$

Weźmy teraz pod uwagę następujące wyrażenia występujące po prawych stronach wzorów (16), (20) i (22).

Podstawiając ai w miejsce a otrzymujemy

(26)

$$L_1(\xi, \varrho, \psi, ai) = \frac{\pi}{2} \frac{J_\beta(a\varrho)}{J_\beta(a)} \left[Y_\beta(a) J_\beta(a\xi) - Y_\beta(a\xi) J_\beta(a) + \frac{2}{\pi} \frac{J_\beta(a\xi)}{aJ_{\beta-1}(a) + \psi J_\beta(a)} \right],$$

(27)

$$L_2(\xi, \varrho, \psi, ai) = \frac{\pi}{2} \frac{J_{\beta+1}(a\varrho)}{J_\beta(a)} \left[J_\beta(a) Y_{\beta+1}(a\xi) - J_{\beta+1}(a\xi) Y_\beta(a) - \frac{2}{\pi} \frac{J_{\beta+1}(a\xi)}{aJ_{\beta-1}(a) + \psi J_\beta(a)} \right],$$

(28)

$$L_3(\xi, \varrho, \psi, ai) = \frac{\pi}{2} \frac{aJ_\beta(a\varrho)}{J_\beta(a)} \left[J_\beta(a) Y_{\beta+1}(a\xi) - J_{\beta+1}(a\xi) Y_\beta(a) - \frac{2}{\pi} \frac{J_{\beta+1}(a\xi)}{aJ_{\beta-1}(a) + \psi J_\beta(a)} \right].$$

W szczególności dla $\xi = 1$

$$(26a) \quad L_1(1, \varrho, \psi, ai) = \frac{\pi}{2} \frac{J_\beta(a\varrho)}{aJ_{\beta-1}(a) + \psi J_\beta(a)},$$

$$(27a) \quad L_2(1, \varrho, \psi, ai) = -\frac{J_{\beta+1}(a\varrho)}{a} \frac{2\beta + \psi}{aJ_{\beta-1}(a) + \psi J_\beta(a)},$$

$$(28a) \quad L_3(1, \varrho, \psi, ai) = -J_\beta(a\varrho) \frac{2\beta + \psi}{aJ_{\beta-1}(a) + \psi J_\beta(a)}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób sumy następujących szeregów:

$$(29) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m \xi) J_\beta(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^2 - a^2)(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = \eta(\xi - \varrho) L_1(\xi, \varrho, \psi, ai) + \eta(\varrho - \xi) L_1(\varrho, \xi, \psi, ai),$$

$$(30) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{\beta+1} J_\beta(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 - a^2)(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) \mu_m J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = -\eta(\xi - \varrho) \frac{1}{a^2} [\varrho^\beta + \xi^{\beta+1} L_3(\xi, \varrho, \psi, ai)] - \eta(\varrho - \xi) \frac{1}{a^2} [\xi^\beta + \varrho^{\beta+1} L_3(\varrho, \xi, \psi, ai)],$$

$$(31) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\varrho \xi)^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 - a^2)(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) \mu_m^2 J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = -\eta(\xi - \varrho) \frac{1}{a^2} \left[\frac{\varrho^{2\beta+2}}{2\beta+2} + (\xi \varrho)^{\beta+1} L_2(\xi, \varrho, \psi, ai) \right] - \\ + \eta(\varrho - \xi) \frac{1}{a^2} \left[\frac{\xi^{2\beta+2}}{2\beta+2} + (\xi \varrho)^{\beta+1} L_2(\varrho, \xi, \psi, ai) \right].$$

W szczególnym przypadku, gdy $\xi = 1$, wzory powyższe mają stosunkowo prostą postać. Weźmy jeszcze pod uwagę wyrażenie (24a).

Podstawiając $b = a$ i mamy

$$(32) \quad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{(\mu_m^4 - a^4)(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ = \frac{1}{2a^2} \{ \eta(\xi - \varrho) [L_2(\xi, \varrho, \psi, a) - L_2(\xi, \varrho, \psi, ai)] + \\ + \eta(\varrho - \xi) [L_2(\varrho, \xi, \psi, a) - L_2(\varrho, \xi, \psi, ai)] \}.$$

Dla I warunku brzegowego ($\psi \rightarrow \infty$) oraz $\xi = 1$ wzór (32) przyjmie postać

$$(32a) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^4 - a^4) J_{\beta-1}(\mu_m)} = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{J_{\beta+1}(a\varrho)}{aJ_\beta(a)} - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{aI_\beta(a)} \right].$$

Podstawiając z kolei do (32a) w miejsce a wielkość $\sqrt{i} a$ dochodzi się do funkcji Kelvina. W szczególności dla $\beta = 0$ na podstawie powyższych wzorów otrzymuje się zależność

$$(33) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^4 + a^4) J_1(\mu_m)} = \frac{1}{\sqrt{2} a^3} \frac{(\operatorname{ber} a - \operatorname{bei} a) \operatorname{ber}_1(a\varrho) + (\operatorname{ber} a + \operatorname{bei} a) \operatorname{bei}_1(a\varrho)}{\operatorname{ber}^2 a + \operatorname{bei}^2 a},$$

a w granicy dla $a \rightarrow 0$

$$(33a) \quad 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(\mu_m \varrho)}{\mu_m^4 J_1(\mu_m)} = \frac{\varrho(2 - \varrho^2)}{16}.$$

Dokonując analogicznych podstawień w związkach (20a) i (30), przez ich odjęcie i dodanie stronami otrzymamy

$$2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^4 + a^4) \mu_m J_1(\mu_m)} = \frac{1}{a^4} \left[1 - \frac{\operatorname{ber} a \cdot \operatorname{ber} a\varrho + \operatorname{bei} a \cdot \operatorname{bei} a\varrho}{\operatorname{ber}^2 a + \operatorname{bei}^2 a} \right],$$

$$2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_m \cdot J_0(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^4 + a^4) J_1(\mu_m)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{bei} a \cdot \operatorname{bei} a\varrho - \operatorname{ber} a \cdot \operatorname{ber} a\varrho}{\operatorname{ber}^2 a + \operatorname{bei}^2 a},$$

gdzie funkcje $\operatorname{ber} a\varrho$, $\operatorname{bei} a\varrho$ i $\operatorname{ber}_1 a\varrho$, $\operatorname{bei}_1 a\varrho$ są funkcjami Kelvina odpowiednio rzędu zero i jeden.

3. Uwagi końcowe

W wielu przypadkach technicznych mamy do czynienia nie z pełnym walcem, kulą czy symetrycznie ogrzewaną (chłodzoną) płytą lecz z walcem wydrążonym, kulą wydrążoną i niesymetrycznie ogrzewaną (chłodzoną) płytą. Zjawisko jednowymiarowego przewodnictwa cieplnego dla tych ciał można ująć jednym wspólnym równaniem różniczkowym:

$$(34) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{1 - 2\beta}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}, \quad \xi \in \langle \xi_1; 1 \rangle, \quad \xi_1 > 0, \quad F_0 \in \langle 0; +\infty \rangle,$$

z warunkami:

— warunek początkowy

$$\vartheta(\xi, 0) = 1, \quad \xi \in \langle \xi_1; 1 \rangle,$$

— warunek brzegowy na powierzchni wewnętrznej

$$\left[\frac{\partial \vartheta(\xi, F_0)}{\partial \xi} - \psi_1 \vartheta(\xi, F_0) \right]_{\xi=\xi_1} = 0, \quad F_0 \in (0; \infty), \quad \psi_1 = \text{const},$$

— warunek brzegowy na powierzchni zewnętrznej

$$\left[\frac{\partial \vartheta(\xi, F_0)}{\partial \xi} + \psi_2 \vartheta(\xi, F_0) \right]_{\xi=1} = 0; \quad F_0 \in (0; \infty); \quad \psi_2 = \text{const}.$$

Rozwiązanie równania (34) z podanymi warunkami wyraża się wzorem

$$\vartheta(\xi, F_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{\beta} A_m \sigma_{\beta}(\mu_m \xi) e^{-\mu_m^2 F_0},$$

gdzie funkcja $\sigma_{\beta}(\mu_m \xi)$ jest funkcją walcową w postaci

$$\sigma_{\beta}(\mu_m \xi) = J_{\beta}(\mu_m \xi) - \frac{\mu_m J_{\beta-1}(\mu_m) + \psi_2 J_{\beta}(\mu_m)}{\mu_m Y_{\beta-1}(\mu_m) + \psi_2 Y_{\beta}(\mu_m)} Y_{\beta}(\mu_m \xi),$$

a współczynniki A_m są określone wzorem

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\int_{\xi_1}^1 \vartheta(\xi, 0) \xi^{1-\beta} \sigma_{\beta}(\mu_m \xi) d\xi}{\int_{\xi_1}^1 \xi \sigma_{\beta}^2(\mu_m \xi) d\xi} = \\ &= \frac{-\sigma_{\beta-1}(\mu_m) + \xi_1^{1-\beta} \sigma_{\beta-1}(\mu_m \xi_1)}{\frac{1}{2} [\sigma_{\beta}^2(\mu_m) - \sigma_{\beta-1}(\mu_m) \sigma_{\beta+1}(\mu_m) - \sigma_{\beta}^2(\mu_m \xi_1) + \sigma_{\beta-1}(\mu_m \xi_1) \sigma_{\beta+1}(\mu_m \xi_1)]} \end{aligned}$$

oraz równanie określające wartości własne ma postać

$$\frac{\sigma_{\beta}(\mu \xi_1)}{\sigma_{\beta-1}(\mu \xi_1)} = \frac{\mu}{\psi_1}.$$

Układ funkcji σ_{β} jest układem ortogonalnym i zupełnym. Zatem dystrybucję Diraca możemy wyrazić przez funkcje $\{\sigma_{\beta}(\mu_m \xi)\}$ analogicznie do (3) i (4). Postępując podobnie jak poprzednio uzyskamy wzory sumacyjne dla szeregów zawierających funkcje $\sigma_{\beta}(\mu_m \xi)$.

Przy rozwiązywaniu dwuwymiarowych zagadnień przewodzenia ciepła w walcu nieskończonym mamy do czynienia często z sumowaniem szeregów Bessela-Fouriera zawierających funkcje Bessela rzędu całkowitego n . Dla takich funkcji równanie określające liczby μ_m ma postać

$$(35) \quad -\frac{J_n(\mu)}{J_n'(\mu)} = \frac{\mu}{\psi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Kolejne pierwiastki równania oznaczamy przez $\mu_m^{(n)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Postępując analogicznie jak w przypadku funkcji $H_{\beta}(\xi, \varrho)$ uzyskamy równanie dla szeregu podstawowego $H_{\beta}(\xi, \varrho)$ w postaci

$$(36) \quad \frac{\partial H_n}{\partial \xi} - \frac{a I_n'(a\xi)}{I_n(a\xi)} H_n + \frac{I_n(a\varrho)}{I_n(a\xi)} \frac{1}{2\xi} = 0, \quad |a| > 0.$$

Z drugiej zaś strony

$$H_n(\xi, \varrho) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_n(\mu_m^{(n)} \varrho) J_n(\mu_m^{(n)} \xi)}{J_n^2(\mu_m^{(n)}) - J_{n-1}(\mu_m^{(n)}) J_{n+1}(\mu_m^{(n)})} \frac{1}{(\mu_m^{(n)})^2 + a^2}.$$

Rozwiązanie równania (36) jest następujące:

$$(37) \quad H_n(\xi, \varrho) = \eta(\xi - \varrho) L_1^{(n)}(\xi, \varrho, \psi, a) + \eta(\varrho - \xi) L_1^{(n)}(\varrho, \xi, \psi, a),$$

gdzie

$$L_1^{(n)}(\xi, \varrho, \psi, a) = \frac{I_n(a\varrho)}{I_n(a)} \left[-K_n(a) I_n(a\xi) + K_n(a\xi) I_n(a) + \frac{I_n(a\xi)}{aI_n'(a) + \psi I_n(a)} \right].$$

Związek (37) może być wykorzystany dla znalezienia sum innych szeregów po dokonaniu identycznych operacji jak w części pierwszej pracy. Tutaj rolę parametru odgrywa całkowita liczba n . Przy rozpatrywaniu symetrycznych rozkładów temperatur w walcu nieskończonym, kuli i płycie nieograniczonej (z warunkiem początkowym $\vartheta(\xi, 0) = 1$ i brzegowym jak w części pierwszej pracy), bezwymiarowy rozkład temperatur można wyrazić wzorem

$$\vartheta(\xi, Fo) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\psi^2 \xi^\beta J_{-\beta}(\mu_m \xi) e^{-\mu_m^2 Fo}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) \mu_m J_{-(\beta-1)}(\mu_m)}, \quad \xi \in \langle 0; 1 \rangle, \quad Fo \in \langle 0; \infty \rangle,$$

a wartości własne stowarzyszonego zagadnienia brzegowego określa równanie

$$\frac{J_{-\beta}(\mu)}{J_{-(\beta-1)}(\mu)} = \frac{\mu}{\psi}.$$

Wtedy dla wartości własnych określonych powyższym wzorem należy zmienić w wyprowadzonych poprzednio wzorach znak wskaźnika rzędu przy funkcjach Bessela na przeciwny.

Przedstawione w pracy wzory można również uzyskać przez różniczkowanie szeregów podstawowych. Takie postępowanie przedstawione jest w pracy [2] (dla $\beta = 0$, $n = 0$, $\psi \rightarrow \infty$) i [6] (dla $\beta = 0$, $n \geq 0$, $\psi \rightarrow \infty$).

Zaletą wyprowadzonych wzorów jest ich ogólność w sensie warunków brzegowych (ujmują wszystkie trzy warunki brzegowe), jak również możliwość sumowania szeregów trygonometrycznych występujących przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych z zakresu przewodnictwa cieplnego.

Literatura cytowana w tekście

1. A. N. TICHONOW, A. A. SAMARSKI, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1963.
2. S. WOELKE, *Summation of certain Bessel series occurring in elasticity problems*, Arch. Mech. Stos., 3, 22 (1970).
3. N. W. MC LACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
4. J. MUSIELAK, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.
5. H. MESCHKOWSKI, *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik*, BI Hochschultaschenbücher, Band 51, Mannheim 1963.
6. K. GRYSA, *Rozkład temperatury i naprężeń w walcu kołowym, wywołany ruchomym niesymetrycznym ogrzewaniem pobocznicy*, praca doktorska, Poznań 1975.

Резюме

СУММИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ БЕССЕЛЯ-ФУРЬЕ ВЫСТУПАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В работе представлен метод суммирования некоторых рядов Бесселя-Фурье с параметром, выступающих в задачах теплопроводности. В зависимости от значения параметра, можно получить сумму рядов для функций Бесселя порядков 0 и 0,5. Можно использовать этот метод и к определению суммы рядов с цилиндрическими функциями других порядков.

S u m m a r y

SUMMATION OF CERTAIN FOURIER-BESSEL SERIES OCCURRING
IN HEAT TRANSFER PROBLEMS

The method of summation of some Bessel-Fourier series with a parameter occurring in heat-transfer problems is described. Depending on the value of the parameter, the sums of zero and half order Bessel functions are obtained. The methods of derivation of the formulae for the Bessel functions of other orders are also given.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1977 r.

NIESTOWARZYSZONE PRAWO PŁYNIĘCIA ANIZOTROPOWYCH PLASTYCZNIE STOPÓW ALUMINIUM

ANDRZEJ LITWKA (POZNAŃ)

1. Wstęp

Badania plastycznego płynięcia przeprowadzone dla blachy wykonanej ze stopu aluminium PA4 [2] wykazały rozbieżność pomiędzy odkształceniami plastycznymi pomierzonymi doświadczalnie a uzyskanymi w oparciu o stowarzyszone prawo płynięcia. W wyniku pomiarów granic plastyczności przy rozciąganiu w płaszczyźnie blachy stwierdzono, że granica plastyczności jest niezależna od orientacji próbki. Natomiast równoczesny pomiar odkształceń plastycznych wykazał, że odkształcenia plastyczne zmieniają się w zależności od kierunku, w którym próbka została wycięta. Zaobserwowane odchylenie od stowarzyszonego prawa płynięcia wyniknęło więc stąd, że przy pomiarze granic plastyczności stwierdzono izotropię transwersalną [3], natomiast pomiar odkształceń plastycznych wykazał istnienie ortotropii plastycznej. W takim przypadku stowarzyszone prawo płynięcia nie może dać poprawnego opisu plastycznego płynięcia, gdyż stałość granicy plastyczności wymaga, ażeby warunek plastyczności dla naprężeń w płaszczyźnie blachy był izotropowy, natomiast potencjał plastyczności musi być anizotropowy, z uwagi na stwierdzoną anizotropię odkształceń plastycznych.

W niniejszej pracy przedstawiono opis początkowego plastycznego płynięcia przy osiowym rozciąganiu próbek wykonanych ze stopów aluminium PA2 i PA4, uzyskany w oparciu o niestowarzyszone prawo płynięcia, w którym jako potencjał plastyczności wykorzystano anizotropowy warunek plastyczności zaproponowany przez OTA, SHINDO i FUKUOKĘ [4].

2. Sformułowanie problemu

Warunek plastyczności OTA, SHINDO i FUKUOKI, stanowiący modyfikację znanego anizotropowego warunku HILLA [1], uwzględniającą odmiennosć własności materiału przy ściskaniu i rozciąganiu, ma postać

$$(2.1) \quad 2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + \\ + 2N\sigma_{12}^2 - C\sigma_{11} - D\sigma_{22} - E\sigma_{33} = 1,$$

gdzie:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} 2F &= \frac{1}{X_{22}X'_{22}} + \frac{1}{X_{33}X'_{33}} - \frac{1}{X_{11}X'_{11}}, \\ 2G &= \frac{1}{X_{33}X'_{33}} + \frac{1}{X_{11}X'_{11}} - \frac{1}{X_{22}X'_{22}}, \\ 2H &= \frac{1}{X_{11}X'_{11}} + \frac{1}{X_{22}X'_{22}} - \frac{1}{X_{33}X'_{33}}, \\ C &= \frac{X_{11} - X'_{11}}{X_{11}X'_{11}} & 2L &= \frac{1}{X_{23}^2}, \\ D &= \frac{X_{22} - X'_{22}}{X_{22}X'_{22}} & 2M &= \frac{1}{X_{31}^2}, \\ E &= \frac{X_{33} - X'_{33}}{X_{33}X'_{33}} & 2N &= \frac{1}{X_{12}^2}, \end{aligned}$$

gdzie X_{11} , X_{22} , X_{33} oraz X'_{11} , X'_{22} , X'_{33} są granicami plastyczności, odpowiednio, przy rozciąganiu i ściskaniu w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach określonych przez osie układu współrzędnych x_1 , x_2 , x_3 , natomiast X_{12} , X_{23} , X_{31} są odpowiednimi granicami plastyczności przy ścinaniu. W dalszych rozważaniach przyjęto, że osie x_1 i x_2 leżą w płaszczyźnie blachy, przy czym oś x_1 pokrywa się z kierunkiem walcowania blachy, natomiast oś x_3 jest prostopadła do płaszczyzny blachy.

W dalszym ciągu rozważań wygodnie było się posłużyć stosunkami przyrostów odkształceń, które w przypadku rozciągania próbki nachylonej pod kątem α do kierunku osi x_1 mają dla potencjału plastyczności wyrażonego równaniami (2.1) i (2.2) następującą postać:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \nu_{21} &= \frac{d\varepsilon_{2,2}^p}{d\varepsilon_{1,1}^p} = \frac{A_1 - A_2 \cos^2 2\alpha - \frac{2}{\sigma(\alpha)} (C \sin^2 \alpha + D \cos^2 \alpha)}{A_3 + A_2 \cos^2 2\alpha - A_4 \cos 2\alpha - \frac{2}{\sigma(\alpha)} (C \cos^2 \alpha + D \sin^2 \alpha)}, \\ \nu_{31} &= \frac{d\varepsilon_{3,3}^p}{d\varepsilon_{1,1}^p} = \frac{-A_5 + A_4 \cos 2\alpha - \frac{2}{\sigma(\alpha)} E}{A_3 + A_2 \cos^2 2\alpha - A_4 \cos 2\alpha - \frac{2}{\sigma(\alpha)} (C \cos^2 \alpha + D \sin^2 \alpha)}, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma(\alpha)$ jest naprężeniem występującym w próbce, a $d\varepsilon_{1,1}^p$, $d\varepsilon_{2,2}^p$, $d\varepsilon_{3,3}^p$ są przyrostami odkształceń plastycznych, mierzonymi, odpowiednio, po długości, szerokości i grubości próbki, oraz gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= F + G - 2N, & A_4 &= 2(F - G), \\ A_2 &= F + G + 4H - 2N, & A_5 &= 2(F + G), \\ A_3 &= F + G + 2N, \end{aligned}$$

Zależność granicy plastyczności $\sigma(\alpha)$ przy osiowym obciążeniu przedstawia poniższe równanie

$$(2.4) \quad [F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha + H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] \sigma^2(\alpha) - (C \cos^2 \alpha + D \sin^2 \alpha) \sigma(\alpha) = 1.$$

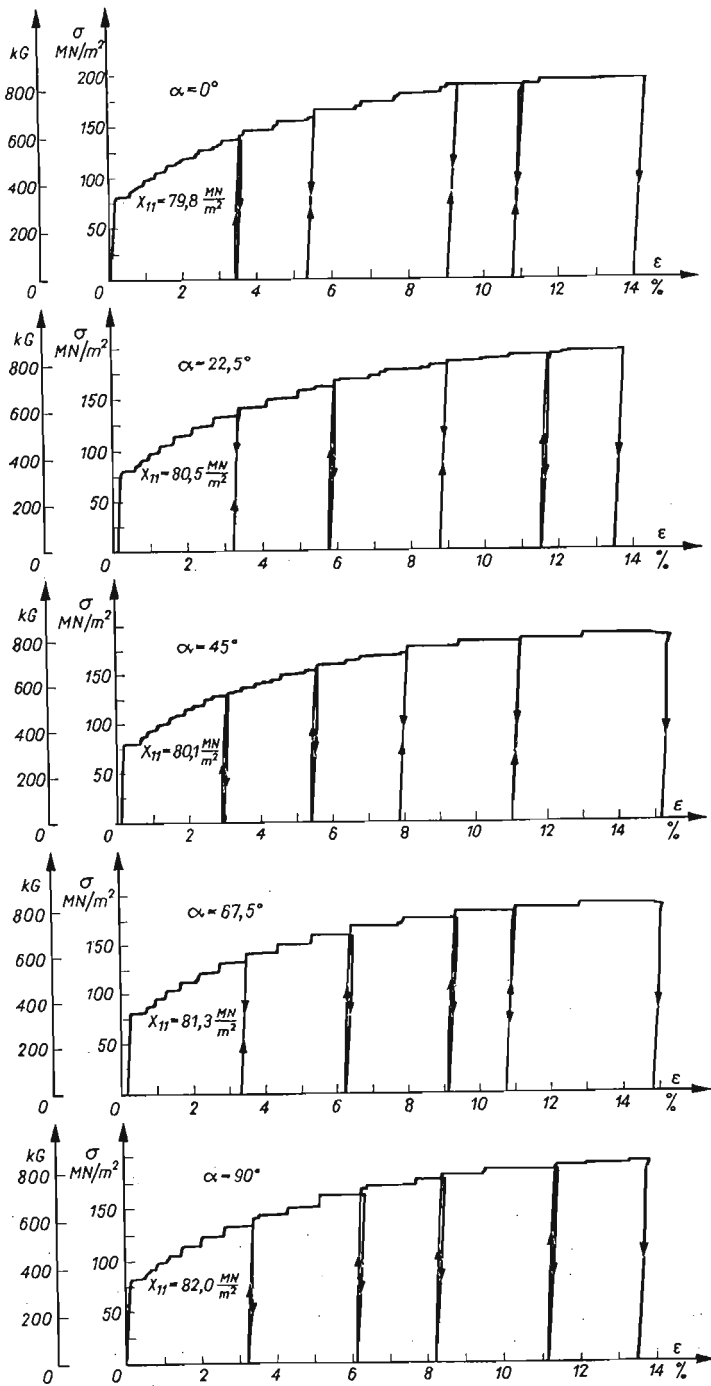
Sposób przeprowadzenia pomiarów odkształceń plastycznych oraz pomiar granic plastyczności omówiono w pracy [2], gdzie pokazano również krzywe rozciągania dla stopu aluminium PA4. Krzywe rozciągania utrwalone rejestratorem MKe B. Holle dla stopu PA2 przy rozciąganiu próbek pod różnymi kątami w stosunku do kierunku walcowania pokazano na rys. 1. Przebieg tych krzywych w zakresie odkształceń plastycznych wskazuje na istnienie wyraźnego efektu Portevina-Le Chateliera, natomiast krzywe dla stopu PA4, przedstawione w pracy [2] nie wykazywały tego efektu.

Granice plastyczności przedstawione na rys. 2 są w przypadku stopu PA2 wyraźnymi granicami plastyczności, określonymi jako punkt załamania krzywej rozciągania w chwili pojawienia się odkształceń plastycznych. Natomiast granice plastyczności dla stopu PA4, pokazane na rys. 2, są umownymi granicami plastyczności, określonymi dla odkształceń plastycznych o wartości równej 0,2%. Z rys. 2 wynika, że w przypadku badanych stopów aluminium obserwuje się przy pomiarze granic plastyczności izotropię w płaszczyźnie blachy. Na podstawie rys. 1 oraz krzywych rozciągania dla stopu PA4, pokazanych w pracy [2] można stwierdzić, że badane materiały wykazują również izotropię modułów wzmocnienia, co wynika z pokrywania się krzywych dla próbek wycinanych pod różnymi kątami do kierunku walcowania.

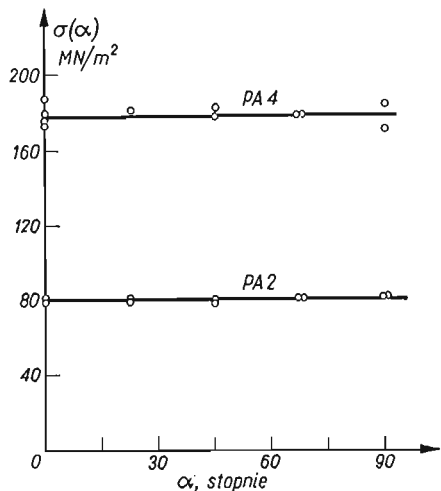
Rysunek 3 przedstawia określone doświadczalnie stosunki przyrostów odkształceń plastycznych dla początkowego plastycznego płynięcia stopów PA2 i PA4. Bezpośredni pomiar tych wielkości był kłopotliwy i niedokładny, gdyż wymagał bardzo precyzyjnego pomiaru niewielkich odkształceń plastycznych w chwili przejścia materiału w stan plastyczny. Z tego względu stosunki przyrostów odkształceń plastycznych ν_{21} i ν_{31} obliczano na podstawie pomierzonych stosunków odkształceń plastycznych ν_{21}^* i ν_{31}^* wykorzystując zależności:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \nu_{21} &= \nu_{21}^* + \varepsilon_{1'1'}^p \cdot \frac{d\nu_{21}^*}{d\varepsilon_{1'1'}^p}, \\ \nu_{31} &= \nu_{31}^* + \varepsilon_{1'1'}^p \cdot \frac{d\nu_{31}^*}{d\varepsilon_{1'1'}^p}, \end{aligned}$$

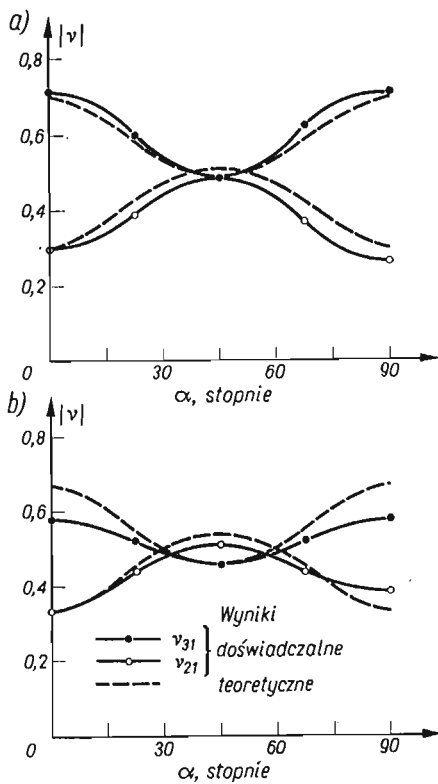
oraz rys. 4. Ze względu na to, że $\nu_{21}^* \rightarrow \nu_{21}$ oraz $\nu_{31}^* \rightarrow \nu_{31}$ dla $\varepsilon_{1'1'}^p \rightarrow 0$, poszukiwane wartości ν_{21} i ν_{31} znajdowano z rys. 4 jako punkty przecięcia krzywych z osią pionową. Z badań doświadczalnych [2] otrzymano również granice plastyczności dla ściskania dla $\alpha = 0^\circ$ i 90° . Ze względu na małą grubość blachy (5 mm dla PA4 i 2 mm dla PA2) nie można było przeprowadzić pomiarów granic plastyczności X_{33} i X'_{33} , natomiast pomiar X_{12} był kłopotliwy ze względu na konieczność realizacji czystego ścinania. Doświadczalnie pomierzono więc tylko cztery spośród dziewięciu granic plastyczności, które występują w równaniu (2.1), ponieważ jednak w przypadku płaskiego stanu naprężenia nie występują stałe L i M (porównaj równania (2.3)) brakuje tylko trzech granic plastyczności X_{33} , X'_{33} oraz X_{12} . Do jakościowego porównania wyników doświadczeń z wynikami otrzymanymi z równań (2.3) stałe te nie są jednak potrzebne. Pamiętając, że granica plastyczności $\sigma(\alpha)$ jest stała dla wszystkich kątów α , co również pociąga za sobą równość $F = G$ oraz $C = D$, otrzymujemy z równań (2.3), biorąc również pod uwagę równanie (2.4), stałe wartości ν_{21} i ν_{31} , niezależne od kąta α . Jest to oczywiście sprzeczne z przedstawionymi na rys. 3 wynikami pomiarów przyrostów odkształceń plastycznych.



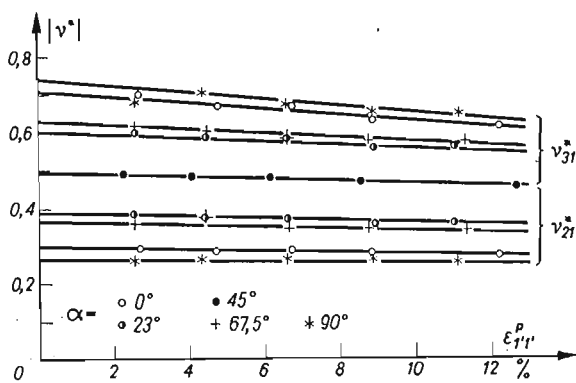
Rys. 1. Krzywe rozciągania dla stopu aluminium PA4



Rys. 2. Granice plastyczności przy rozciąganiu dla stopów aluminium PA2 i PA4



Rys. 3. Stosunki przyrostów odkształceń plastycznych ν_{21} i ν_{31} dla różnych kątów α dla stopów aluminium:
a) PA4, b) PA2



Rys. 4. Zależność stosunków ν_{21}^* i ν_{31}^* od odkształceń $\epsilon_{1,1}^p$

Dla przeprowadzenia ilościowej analizy wyników konieczne było znalezienie brakujących stałych X_{33} , X'_{33} i X_{12} . W tym miejscu należy wyraźnie rozgraniczyć dwa następujące problemy:

a) obliczenie brakujących granic plastyczności dla warunku plastyczności $f(\sigma_{ij})$ zapisanego równaniem (2.1), wyspecyfikowanego dla przypadku izotropii transwersalnej,

b) obliczenie brakujących stałych dla potencjału plastyczności $g(\sigma_{ij}, \alpha)$ zapisanego równaniem (2.1), dostosowanego do szczególnego przypadku anizotropii, przy którym zachodzą równości $F = G$ i $C = D$.

Wyznaczone w ten sposób brakujące stałe umożliwią znalezienie ostatecznej postaci potencjału plastyczności.

3. Obliczenie brakujących stałych

3.1. Stałe dla warunku plastyczności. Brakujące granice X_{33} , X'_{33} i X_{12} obliczone zostały przy wykorzystaniu następujących warunków:

a) warunek nieściśliwości materiału, który, biorąc pod uwagę stwierdzone doświadczalnie równości $X_{11} = X_{22}$ oraz $X'_{11} = X'_{22}$ pociąga za sobą równość

$$(3.1) \quad \frac{X_{33} - X'_{33}}{2X_{33}X'_{33}} = - \frac{X_{11} - X'_{11}}{X_{11}X'_{11}};$$

b) warunek, ażeby dla $\alpha = 0^\circ$ stosunek ν_{21} , wyrażony równaniem (2.3)₁ był równy doświadczalnie pomierzonej wartości. Po przekształceniu równań (3.1) i (2.3)₁ otrzymujemy następujące zależności

$$(3.2) \quad \left[\frac{2(\nu_{21}^{(0)} + 1)}{X_{11}X'_{11}} + \frac{X_{11} - X'_{11}}{\sigma(0)X_{11}X'_{11}} (1 - \nu_{21}^{(0)}) \right] (X'_{33})^2 - 2 \frac{X_{11} - X'_{11}}{X_{11}X'_{11}} X'_{33} - 1 = 0,$$

$$X_{33} = \frac{X_{33}}{1 + 2 \frac{X_{11} - X'_{11}}{X_{11}X'_{11}} X'_{33}},$$

służące do obliczenia wartości X_{33} oraz X'_{33} , gdzie $\nu_{21}^{(0)}$ jest wartością stosunku przyrostów odkształceń dla $\alpha = 0$;

c) warunek stałości granicy plastyczności $\sigma(\alpha)$, który, biorąc pod uwagę równanie (2.4) ma postać

$$(3.3) \quad N = F + 2H,$$

skąd można obliczyć X_{12} .

3.2. Stałe dla potencjału plastyczności. Z równań (2.3) i (2.4) widać, że o istnieniu stwierdzonej doświadczalnie anizotropii decyduje w rozpatrywanym przypadku tylko stała N . W związku z tym wartości X_{33} i X'_{33} będzie można obliczyć z równania (3.2), natomiast wartość N musi być inna niż określona równaniem (3.3). Poszukiwaną wartość N obliczono

z warunku, że stosunek ν_{31} , przedstawiony równaniem (2,3)₂ musi być dla kąta $\alpha = 45^\circ$ równy zmierzonej doświadczalnie wartości. Dla $\alpha = 45^\circ$ równanie (2.3)₂ ma postać

$$(3.4) \quad \nu_{31}^{(45)} = \frac{-2F - \frac{E}{\sigma(45)}}{F + N - \frac{C}{\sigma(45)}}$$

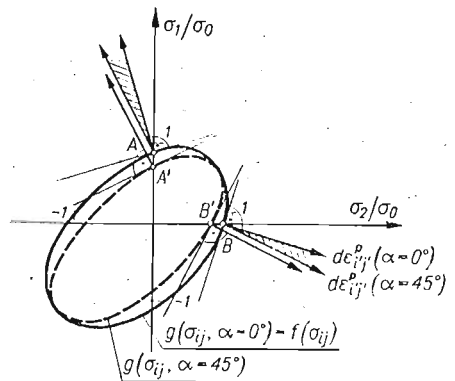
gdzie $\sigma(45)$ jest wartością, która musi spełniać równanie (2.4). Po przekształceniu równań (3.4) i (2.4) otrzymujemy następujące zależności:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \nu_{31}^{(45)} \sigma^2(45) + \frac{1}{2} \left(C + \frac{E}{\nu_{31}^{(45)}} \right) \sigma(45) + 1 &= 0, \\ N &= \frac{C}{\sigma(45)} - F - \frac{1}{\nu_{31}^{(45)}} \left(2F + \frac{E}{\sigma(45)} \right) \end{aligned}$$

służące do obliczenia wartości N . Należy tu podkreślić, że równie dobrze można by wykorzystać warunek dotyczący $\nu_{21}^{(45)}$ zamiast $\nu_{31}^{(45)}$.

4. Omówienie wyników

Interpretację geometryczną potencjału plastyczności $g(\sigma_{ij}, \alpha)$ w układzie osi głównych σ_1 i σ_2 przy stałych określonych równaniami (3.2) i (3.5), przedstawiono dla stopu PA4 na rys. 5. Dla drugiego badanego materiału, to znaczy stopu PA2, ślady powierzchni



Rys. 5. Ślady powierzchni plastycznego płynięcia dla stopu PA4

płynięcia były podobne. Linia ciągłą przedstawiono ślad powierzchni płynięcia dla $\alpha = 0^\circ$, a przerywaną dla $\alpha = 45^\circ$. Występująca na rys. 5 wielkość σ_0 jest średnią arytmetyczną X_{11} i X'_{11} . Łatwo zauważyć, że warunek plastyczności $f(\sigma_{ij})$ zapisany dla granic plastyczności pomierzonych doświadczalnie i obliczonych w punkcie 3.1 pokrywa się z potencjałem plastyczności $g(\sigma_{ij}, \alpha)$ dla $\alpha = 0$. Na rys. 5 pokazano również określone doświadczalnie kierunki wektorów przyrostów odkształceń plastycznych $d\epsilon_{ij}^p$, dla $\alpha = 0$ i 45° . Zakresowany obszar jest zakresem zmienności kierunków $d\epsilon_{ij}^p$, dla różnych kątów α . Z rys. 5

widać, że normalne do $g(\sigma_{ij}, \alpha = 45^\circ)$ poprowadzone w punktach A' i B' odpowiadają określonym doświadczalnie kierunkom $d\epsilon_{ij}^p$, dla $\alpha = 45^\circ$. Zbieżność wyników doświadczalnych z wartościami obliczonymi z równań (2.3) dla potencjału plastyczności $g(\sigma_{ij}, \alpha)$ jest wyraźniej widoczna na rys. 3, gdzie przedstawiono stosunki przyrostów odkształceń plastycznych ν_{21} i ν_{31} dla stopów aluminium PA2 i PA4.

Istotnym brakiem przedstawionych tu badań jest fakt, że ograniczają się one tylko do osiowego rozciągania próbek, to znaczy ograniczają się do stanu w dwóch punktach A i B przestrzeni naprężeń. Analiza byłaby pełniejsza, gdyby możliwe było przeprowadzenie badań dla stanu naprężenia, w którym występują obydwie naprężenia główne. Nie jest jednak praktycznie możliwe przeprowadzenie takich badań z wymaganą dokładnością. Odpada tutaj możliwość badania na próbkach rurkowych, gdyż nie jest możliwe wykonanie próbki rurkowej, która mogłaby zachować badane własności blach, natomiast badanie na próbkach krzyżowych, dwukierunkowo rozciąganych wymaga specjalnej maszyny wytrzymałościowej i nie zapewnia dostatecznie jednorodnego stanu naprężenia.

Przedstawione w niniejszej pracy wyniki mogą być nieco zniekształcone z uwagi na fakt występowania plastycznych odkształceń postaciowych $\epsilon_{1'2}'$ przy rozciąganiu osiowym próbek wykonanych z materiału plastycznie anizotropowego. Problem polega mianowicie na tym, że w przypadku rozciągania osiowego sposób mocowania próbki utrudnia lub uniemożliwia powstanie odkształceń postaciowych, przez co stan naprężenia przestaje być stanem osiowym. Przyrost odkształceń postaciowych obliczony dla potencjału plastyczności (2.1) przedstawia się następująco:

$$(4.1) \quad d\epsilon_{1'2}' = -\frac{d\lambda}{4} \{ [F - G - (F + G + 4H - 2N) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha \cdot \sigma(\alpha) - (C - D) \sin 2\alpha \}.$$

gdzie $d\lambda$ jest mnożnikiem.

Z równania (4.1) wynika, że $d\epsilon_{1'2}' = 0$ dla $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$ i 90° przy $F = G$ i $C = D$. Otrzymane wyniki badań doświadczalnych mogą być więc zakłócone jedynie w przypadku próbek wycinanych pod kątami $\alpha = 22,5^\circ$ i $67,5^\circ$, dla których odkształcenia postaciowe przybierają wartości ekstremalne. Nie wystąpi jednak z tego tytułu żadne zniekształcenie wyników dla $\alpha = 45^\circ$, gdzie zaobserwowano największe odchylenie od stowarzyszonego prawa płynięcia. Oznacza to, że odchylenie wyników doświadczalnych od stowarzyszonego prawa płynięcia nie jest spowodowane czynnikiem ubocznym, jakim mogłoby być zniekształcenie osiowego stanu naprężenia.

5. Wnioski

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że opis plastycznego płynięcia anizotropowych blach wykonanych ze stopów aluminium PA2 i PA4 może być przeprowadzony przy zastosowaniu niestowarzyszonego prawa płynięcia. W przypadku badanych materiałów zaobserwowane odchylenie od stowarzyszonego prawa płynięcia nie jest spowodowane zakłóceniami osiowego rozciągania próbek, wywołanymi powstawaniem plastycznych odkształceń postaciowych.

Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proc. Roy. Soc. A193 (1948), 281 - 297.
2. A. LITEWKA, *Nieprawidłowości plastycznego plynienia anizotropowego stopu aluminium PA4*, VII Sympozjum Badań Dośw. w Mech. Ciała Stałego, Warszawa 1976, 322 - 332.
3. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogenous anisotropic elastic-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 4, 8 (1956), 671 - 694.
4. T. OTA, A. SHINDO, H. FUKUOKA, *A consideration on anisotropic yield criterion*, Proc. 9th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., 1959, 117 - 120.

Резюме

НЕАССОЦИИРОВАННЫЙ ЗАКОН ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

В работе рассмотрено применение неассоциированного закона течения для пластического течения анизотропных алюминиевых сплавов PA2 и PA4. В качестве пластического потенциала использовано анизотропное условие течения, предложенное Отой, Шиндо и Фукуокой. В работе описывается способ вычисления постоянных, для которых получается наилучшее совпадение результатов вычислений с опытом.

Summary

NON-ASSOCIATED FLOW LAW FOR PLASTICALLY ANISOTROPIC ALUMINIUM ALLOYS

The application of non-associated flow rule for plastic flow of anisotropic aluminium alloys sheets PA2 and PA4 is presented. The anisotropic yield criterion proposed by Ota, Shindo and Fukuoka was used as a plastic potential. The method of calculation of constants to obtain the best fit with experimental results of plastic strain increment ratios is described.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lutego 1977 r.

STATECZNOŚĆ BOCZNA W CZASIE DOBIEGU LĄDUJĄCEGO SAMOŁOTU SPORTOWEGO

ZDOBYSLAW G O R A J, JERZY M A R Y N I A K, ZBIGNIEW P A T U R S K I,
M A R I A Z L O C K A (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienia dynamiki samolotu w czasie ruchu po ziemi i wiążący się z tym problem shimmy są obecnie intensywnie badane w szeregu ośrodkach zagranicznych [2, 3, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 20].

COLLINS i BLACK [2, 3] badali shimmy samolotu przy uwzględnieniu ciągnowej teorii pneumatyków sformułowanej przez von SHLIPPE i DIETRICH A oraz przy uwzględnieniu teorii punktowej sformułowanej przez MORELAND A. W swoich pracach nie uwzględniali wpływu ruchu samolotu na własności dynamiczne rozważanego podwozia.

PACEJKA w pracy [14] wprowadził bardzo złożony model pneumatyka, który może być opisany równaniami różniczkowymi cząstkowymi I rzędu. Przyjęcie modelu PACEJKI [14] do badań dynamicznych rozbiegu i dobiegu samolotu prowadzi do znacznych trudności obliczeniowych nawet przy zastosowaniu szybkołatających maszyn cyfrowych o dużej pamięci. Ponadto teoria PACEJKI powstała w oparciu o pewien uproszczony wyidealizowany model pneumatyka odnośnie jego struktury wewnętrznej, układu nitek kordu osnowy i kostek bieźnika i dlatego nie powinna być stosowana do opon innych niż radialne.

W pracy [13] PACEJKA analizował własności dynamiczne koła ogumionego formułując transmisyjne równania pneumatyków. Są to równania różniczkowe zwyczajne I rzędu względem niewiadomych sił i momentów sił generowanych na pneumatykach. Badanie własności dynamicznych koła ogumionego przeprowadził w oparciu o analizę transmitancji widmowej dla otrzymanego układu równań.

PODGORSKI, KRAUTER i RAND [15] analizowali shimmy przedniego podwozia samolotu przy uwzględnieniu punktowej teorii MORELAND A badając wpływ geometrii podwozia, niewyważenia koła i nieregularności drogi na własności dynamiczne podwozia. Nie uwzględniali wpływu ruchu całego samolotu.

ROGERS i BREWER podali w pracy [16] metodę eksperymentalnego wyznaczania współczynników w równaniu transmisyjnym pneumatyka w oparciu o odwrotne przekształcenie Laplace'a. STUBBS, BYRDSONG i SLEEPER [20] symulowali eksperymentalnie dynamiczne własności podwozia samolotu dla 4 różnych konstrukcji przy uwzględnieniu bocznego opływu. NEJMARK i FUF AJEW [12] badali shimmy przedniego podwozia samolotu przy uwzględnieniu teorii pneumatyka sformułowanej przez KIEDYSZA.

W żadnej z cytowanych prac nie uwzględniono wpływu ruchu całego samolotu na

dynamikę podwozia. Nie uwzględniono również wpływu sił i momentów aerodynamicznych na współczynniki w równaniach transmisyjnych pneumatyków.

W niniejszej pracy dynamiczne równania ruchu samolotu otrzymano stosując równania Boltzmann-Hamela. Na podstawie obliczonych wartości i wektorów własnych macierzy stanu wyróżniono 2 postacie drgań własnych układu, które decydują o dynamice samolotu w czasie ruchu po ziemi: wysokoczęstotliwościowe *wężykowanie przedniego podwozia* i niskoczęstotliwościowe *odchylanie samolotu*. Zbadano wpływ najważniejszych parametrów układu na częstości i tłumienia postaci drgań własnych.

2. Dynamiczne równania ruchu samolotu kolującego po ziemi

Do opisu dynamiki samolotu przyjęto cztery następujące układy odniesienia (rys. 1, 2):

— układ inercjalny $Ox_0 y_0 z_0$ związany z ziemią oraz trzy nieinercjalne układy współrzędnych $O_i x_i y_i z_i$ związane z samolotem, powstałe przez kolejne prawoskrętne obroty ortogonalne i przesunięcia równoległe;

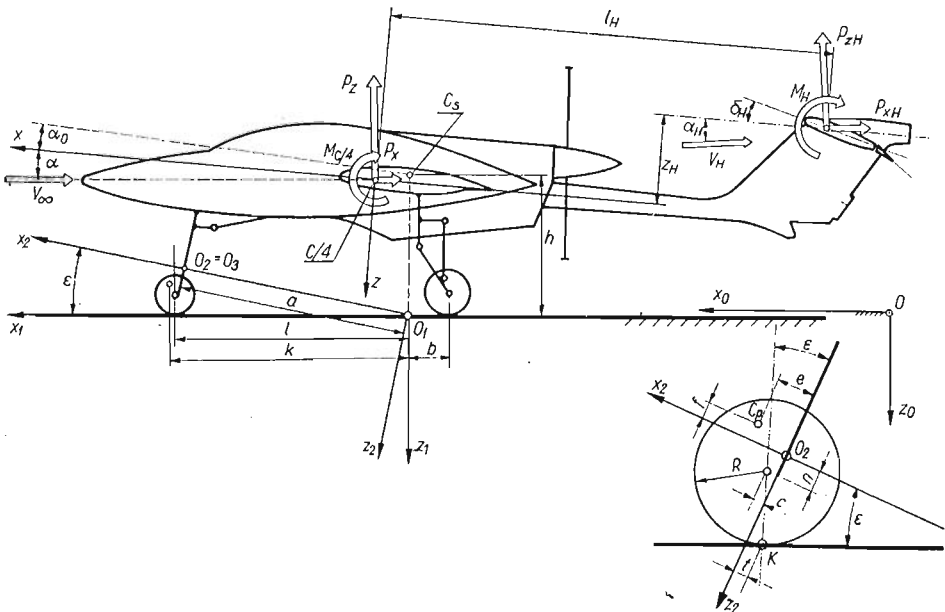
— układ $O_1 x_1 y_1 z_1$ powstały przez obrót układu $Ox_0 y_0 z_0$ wokół osi z o kąt odchylenia samolotu ψ ;

— układ $O_2 x_2 y_2 z_2$ powstały przez obrót układu $O_1 x_1 y_1 z_1$ wokół osi y_1 o konstrukcyjny kąt ε pochylenia osi goleni przedniego podwozia i przesunięcie równoległe do punktu O_2 ;

— układ $O_3 x_3 y_3 z_3$ powstały przez obrót układu $O_2 x_2 y_2 z_2$ wokół osi z_2 o kąt δ skręcenia koła przedniego podwozia.

Punkt O_1 jest rzutem środka masy samolotu na płaszczyznę ziemi.

Punkt O_2 (i pokrywający się z nim punkt O_3) jest punktem przecięcia osi x_2 z osią goleni przedniego podwozia.



Rys. 1. Samolot M17 w ruchu po ziemi

Położenie samolotu opisano za pomocą czterech współrzędnych uogólnionych x_0, y_0, ψ, δ w układzie współrzędnych $Ox_0 y_0 z_0$ związanym z ziemią oraz czterech quasi-współrzędnych uogólnionych x_1, y_1, ψ, δ w układzie quasi-współrzędnych $O_1 x_1 y_1 z_1$ związanych z samolotem.

Równania transformacyjne z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości zapisano następująco:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 \cos \psi + \dot{y}_0 \sin \psi, \\ \dot{y}_1 &= -\dot{x}_0 \sin \psi + \dot{y}_0 \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}, \\ \dot{\delta} &= \dot{\delta}. \end{aligned}$$

Równania ruchu samolotu otrzymano na podstawie:
— holonomicznych równań Boltzmann-Hamela [9]

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^4 \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \gamma_{r\mu\alpha} \omega_\alpha = Q_\mu^*,$$

gdzie $\mu = 2, 3, 4$, oraz

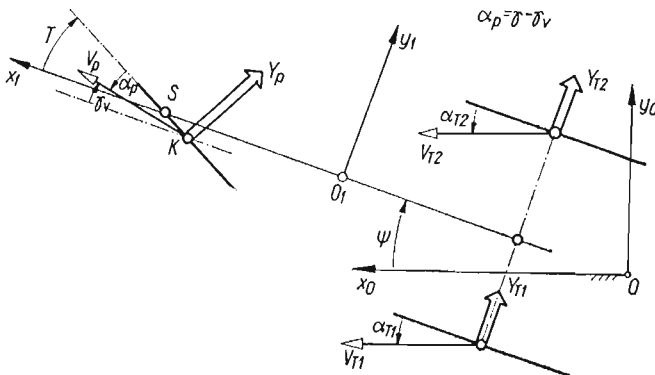
— równań transmisyjnych pneumatyków [13],
dla przedniego podwozia:

$$(3a) \quad \dot{Y}_p \frac{\sigma}{V} + Y_p = C_{p1} \alpha_p + C_{p2} \Phi_p,$$

dla głównego podwozia:

$$(3b) \quad \dot{Y}_{Ti} \frac{\sigma}{V} + Y_{Ti} = C_T \alpha_{Ti}; \quad i = 1, 2,$$

gdzie σ oznacza współczynnik relaksacji pneumatyka, Y — siłę boczną generowaną na pneumatyku, α — kąt bocznego znoszenia pneumatyka, C_1, C_2 — współczynniki sztywności pneumatyka odpowiednio bocznego znoszenia i przechylenia, Φ_p — kąt przechylenia płaszczyzny koła przedniego podwozia, przy czym indeksy p i T oznaczają odpowiednio podwozie przednie i tylne.



Rys. 2. Kąty znoszenia α_p, α_{Ti} oraz siły boczne Y_p, Y_{Ti} działające na pneumatyki

Obliczone na podstawie definicji niezerowe symbole Boltzmanna $\gamma_{\mu\alpha}^r$ wynoszą:

$$\gamma_{23}^1 = -\gamma_{32}^1 = 1, \quad \gamma_{13}^2 = -\gamma_{31}^2 = -1.$$

Dynamiczne równania ruchu samolotu odpowiadające quasi-współrzędnym y_1, ψ, δ otrzymano na podstawie równań (2) stosując metodę macierzową przedstawioną w pracy [7]. W wyniku otrzymano różniczkowe równanie macierzowe w postaci normalnej:

$$(4) \quad \dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{T}_{QW}^{(2,3)})^{-1} \cdot (-\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{T}_{\pi}^{(1)} - \mathbf{T}_{QW}^{(2,3)} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{T}_R^{(2,3)} + \\ + \mathbf{T}_{\pi}^{(2,3)} - \mathbf{T}_Q^{(1,2,3)T} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{Q}_G + \mathbf{Q}_A),$$

gdzie \mathbf{w} oznacza macierz quasi-prędkości, $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{T}_{QW}^{(2,3)}$ — macierze bezwładności nie zawierające kombinacji quasi-prędkości, $\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{T}_{QW}^{(2,3)}$ — te składniki macierzy bezwładności, które zawierają kombinacje quasi-prędkości, $\mathbf{T}_{\pi}^{(1)}, \mathbf{T}_{\pi}^{(2,3)}$ — macierze pochodnych energii kinetycznej względem quasi-współrzędnych, $\mathbf{T}_Q^{(1)}, \mathbf{T}_Q^{(2,3)}$ — macierze pochodnych energii kinetycznej względem quasi-prędkości, $\mathbf{\Gamma}$ — macierz współczynników Boltzmanna, $\mathbf{Q}_G, \mathbf{Q}_A$ — macierze sił uogólnionych odpowiednio ciężkości i aerodynamicznych.

Indeksy (1) oraz (2, 3) odpowiadają umownemu podziałowi samolotu na trzy bryły: (1) koło przedniego podwozia wraz z golenią bez uwzględnienia ruchów obrotowych koła, (2) samolot bez goleni i koła przedniego podwozia oraz bez uwzględnienia obrotów kół podwozia głównego, (3) koła podwozia przedniego i głównego przy uwzględnieniu rzeczywistych ruchów tych kół w celu opisu efektów groskopowych [7]. Metoda wyznaczenia wszystkich zdefiniowanych powyżej macierzy dla pełnego przypadku nieliniowego oraz metoda linearyzacji macierzowego równania różniczkowego jest podana w pracy [7]. Energię kinetyczną bryły umownej nr (1) wyznaczono na podstawie znajomości prędkości liniowych środka masy w układzie $O_2 x_2 y_2 z_2$:

$$(5) \quad \begin{aligned} V_{x_2} &= V \cos \varepsilon - \dot{\psi} e \sin \delta \cos \varepsilon - \delta e \sin \delta, \\ V_{y_2} &= \dot{y}_1 + \dot{\psi} (a \cos \varepsilon + e \cos \delta \cos \varepsilon - f \sin \varepsilon) + \dot{\delta} e \cos \delta, \\ V_{z_2} &= V \sin \varepsilon - \dot{\psi} e \sin \delta \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

oraz prędkości kątowych w układzie $O_3 x_3 y_3 z_3$:

$$(6) \quad \Omega_{x_3} = -\dot{\psi} \sin \varepsilon \cos \delta, \quad \Omega_{y_3} = \dot{\psi} \sin \varepsilon \sin \delta, \quad \Omega_{z_3} = \dot{\psi} \cos \varepsilon + \dot{\delta}.$$

Kąt przechylenia Φ_p koła przedniego podwozia obliczono ze wzoru:

$$(7) \quad \sin \Phi_p = \sin \delta \cdot \sin \varepsilon,$$

natomiast kąty znoszenia kół α_p i $\alpha_T = \alpha_{T1} = \alpha_{T2}$ obliczono następująco:

$$(8) \quad \alpha_p = \gamma - \gamma_v; \quad \alpha_T = \arctg \frac{-\dot{y}_1 + b\dot{\psi}}{V},$$

przy czym

$$\gamma = \arcsin \frac{\sin \delta \cos \varepsilon}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta \sin^2 \varepsilon}},$$

$$\gamma_v = \arctg \frac{V_{ky1}}{V_{kx1}},$$

gdzie: V_{kx1}, V_{ky1} — prędkości punktu kontaktu K (rys. 2) odpowiednio wzdłuż osi x_1 i y_1 .

Prędkości punktu kontaktu K obliczono na podstawie wzoru:

$$\vec{V}_k = \vec{V}_{o1} + \vec{\psi} \times \overline{O_1 O_3} + (\vec{\psi} + \vec{\delta}) \times \overline{O_3 K}.$$

Jedynym niezerowym składnikiem macierzy sił ciężkości Q_G jest Q_3^*

$$(9) \quad Q_3^* = M_p g \sin \delta \sin \epsilon.$$

Siły i momenty aerodynamiczne uwzględniono w równaniu bocznego znoszenia odpowiadającego quasi-współrzędnej y_1 oraz w równaniu odchylenia odpowiadającego quasi-współrzędnej ψ . Na podstawie prac [1, 4, 5, 6, 17, 18] obliczono bezwymiarowe pochodne siły bocznej \bar{Y} oraz momentu odchyłającego \bar{N} względem kąta ślizgu β oraz bezwymiarowej prędkości kątowej odchylenia $\bar{\psi}$:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta} &= -a_r(1-ds) \frac{S_v}{S}, \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta} &= \frac{C_z^2}{4\pi\lambda} + a_r \frac{S_v}{S} \frac{l_b}{b} - 0,96w_3 \frac{S_k}{S} \frac{d_k}{b} \sqrt{\frac{h_{k1}}{h_{k2}}} \sqrt[3]{\frac{S_{k1}}{S_{k2}}}, \\ \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{\psi}} &= -2 \frac{l_v}{b} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{\psi}} &= -0,02 \cdot C_z^2 - 0,3C_{x0} + 2 \left(\frac{l_v}{b} \right)^2 \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta}, \end{aligned}$$

gdzie a_r oznacza pochodną siły nośnej na usterzeniu pionowym względem kąta natarcia, d_s — współczynnik bocznego załamania strug za skrzydłem, S , S_v , S_k — powierzchnie odpowiednio płata, usterzenia kierunku oraz boczna kadłuba, C_z — współczynnik siły nośnej, C_{x0} — współczynnik oporu profilowego, λ — wydłużenie geometryczne płata skończonego, l_b — odległość środka parcia usterzenia kierunku od środka masy samolotu, d_k — długość kadłuba, h_{k1} , h_{k2} , S_{k1} , S_{k2} — wysokość oraz szerokość kadłuba odpowiednio w 1/4 (indeks 1) oraz w 3/4 (indeks 2) długości kadłuba, b — rozpiętość płata, l_A — ciężew aerodynamiczną płata, w_3 — współczynnik zależny od geometrii samolotu [18].

Uwzględniając, że dla małych kątów ślizgu β ,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\dot{y}_1}{V} \approx \beta,$$

oraz że

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \dot{y}_1} \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial \beta} \approx \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \dot{y}_1} V,$$

otrzymano:

$$(11) \quad \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \dot{y}_1} = \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial \dot{y}_1} = \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta}.$$

Siły i momenty aerodynamiczne odpowiednio w równaniu boczego znoszenia i odchylenia wynoszą:

$$(12) \quad \begin{aligned} Y_A &= \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta} \dot{y}_1 \frac{1}{2} \rho V^2 S + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} \frac{1}{2} \rho V^2 S, \\ N_A &= \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta} \dot{y}_1 \frac{1}{2} \rho V^2 S b + \frac{\partial \bar{N}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} \frac{1}{2} \rho V^2 S b. \end{aligned}$$

Uwzględniając (3) ÷ (11) oraz linearyzując na podstawie pracy [7] macierze występujące w równaniu (4), otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu zapisany w postaci macierzowej następująco:

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{Y}_P \\ \dot{Y}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 2} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 2} \\ & & \frac{V}{\sigma} & 0 \\ \mathbf{O}_{2 \times 3} & \mathbf{O}_{2 \times 3} & 0 & \frac{V}{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_r & \\ & & \mathbf{T}_1 & -\mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{q} \\ Y_P \\ Y_T \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 — macierze jednostkowe odpowiednio o wymiarach 2×2 i 3×3 , $\mathbf{O}_{2 \times 3}$, $\mathbf{O}_{3 \times 2}$, $\mathbf{O}_{3 \times 3}$ — macierze zerowe odpowiednio o wymiarach 2×3 , 3×2 , 3×3 ,

$$\mathbf{O}_r = \begin{bmatrix} 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{w} = \text{col}[\dot{y}_1, \dot{\psi}, \dot{\delta}]$ — macierz kolumnowa quasi-prędkości, $\mathbf{q} = \text{col}[y_0, \psi, \delta]$ — macierz kolumnowa współrzędnych uogólnionych,
— macierz bezwładności

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_s & M_p k & M_p e \\ M_p k & M_p k^2 + J_{Tz} + J_{px} \sin^2 \varepsilon + J_{pz} \cos^2 \varepsilon & M_p k e + J_{pz} \cos \varepsilon \\ M_p e & M_p k e + J_{pz} \cos \varepsilon & M_p e^2 + J_{pz} \end{bmatrix},$$

— macierz tłumienia

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta} \frac{1}{2} \rho V^2 S & \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \dot{\psi}} \frac{1}{2} \rho V^2 S - M_s V & 0 \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta} \frac{1}{2} \rho V^2 S b & \frac{\partial \bar{N}}{\partial \dot{\psi}} \frac{1}{2} \rho V^2 S b - M_p k V & J_{py} \frac{V}{R} \sin \varepsilon \\ 0 & -M_p V e - J_{py} \frac{V}{R} \sin \varepsilon & -K_p \end{bmatrix},$$

— macierz sztywności

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & M_p g e \sin \varepsilon + t Z_p \sin \varepsilon + S_p & \end{bmatrix},$$

— uogólniona macierz sztywności pneumatyków

$$T_1 = \begin{bmatrix} -\frac{C_{p1}}{V} & -\frac{C_{p1}l}{V} & \frac{C_{p1}t}{V} & 0 & 0 & C_{p1} \cos \varepsilon + C_{p3} \sin \varepsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{C_{T1}}{V} & \frac{C_{T1}b}{V} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

— macierz sił uogólnionych pneumatyków

$$T_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & l & -t & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

przy czym M_p , M_s oznaczają masy odpowiednio przedniego podwozia (przednie koło wraz z golenią) oraz całego samolotu, J_{px} , J_{py} , J_{pz} — momenty bezwładności przedniego podwozia względem układu osi $O_3 x_3 y_3 z_3$, J_{py} — centralny moment bezwładności przedniego koła względem osi równoległej do osi $O_3 y_3$, ε — kąt pochylenia goleni przedniego podwozia, b , t , k , e , R , l — wielkości geometryczne pokazane na rys. 1, K_p , S_p — sztywność i tłumienie wiskotyczne drgań skrętnych przedniego podwozia, g , Z_p — przyspieszenie ziemskie oraz nacisk pionowy na koła przedniego podwozia.

W macierzowym równaniu ruchu (13) uwzględniono, że współczynniki sztywności pneumatyków C_{p1} , C_{p3} , C_T oraz nacisk pionowy Z_p zależą od sił i momentów aerodynamicznych. Nacisk na podwoziu przednim Z_p i głównym Z_G obliczono ze wzorów:

$$Z_p = \frac{Q_c(b + \mu h) - C_M}{b + l}, \quad Z_G = Q_c - Z_p,$$

gdzie

$$C_M = (c_{mbu} + c_{mH}) \frac{1}{2} \rho V^2 S l_A,$$

$$c_{mH} = -\kappa''_{Hx} c_{zH} + \kappa''_{Hz} \left(c_{x0} + \frac{c_{zH}^2}{\pi \Lambda_{EH}} \right),$$

$$c_{zH} = a_1 (\alpha - \alpha_0 - \varepsilon + \delta_H),$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_0),$$

$$Q_c = Q - \frac{1}{2} \rho V^2 S c_z,$$

przy czym Q oznacza ciężar samolotu, l , b , h — współrzędne punktów kontaktu podwozia przedniego i głównego wzdłuż osi x_1 oraz osi z_1 , α_0 — kąt pomiędzy poziomą montażową i prostą zerowej siły nośnej, α — geometryczny kąt natarcia, ε — kąt odchylenia strug za płatem, δ_H — kąt wychylenia steru wysokości, $\kappa''_{Hx} = \frac{S_H l_H}{S l_A}$, $\kappa''_{Hz} = \frac{S_H z_H}{S l_A}$ — cechy

objętościowe usterzenia wysokości, c_{ZH} — współczynnik siły nośnej usterzenia wysokości, A_{EH} — wydłużenie efektywne płata.

Założono, że sztywności pneumatyków C_{p1} , C_{p3} , C_T są liniowymi funkcjami nacisków pionowych Z_p , Z_G :

$$C_{p1} = k_{p1}Z_p; \quad C_{p3} = k_{p3}Z_p; \quad C_T = k_G Z_G.$$

3, Analiza postaci drgań własnych

Macierz fundamentalna układu równań różniczkowych (13) może być przedstawiona na podstawie [8] w postaci:

$$(14) \quad X = \left[\begin{array}{c|cc} x_{01} e^{\lambda_1 t} & \begin{array}{c} A_{1j} e^{\xi_j t} \cos(\eta_j t - \alpha_{1j}) \\ A_{2j} e^{\xi_j t} \cos(\eta_j t - \alpha_{2j}) \\ A_{Nj} e^{\xi_j t} \cos(\eta_j t - \alpha_{Nj}) \end{array} & \begin{array}{c} A_{1j} e^{\xi_j t} \sin(\eta_j t - \alpha_{1j}) \\ A_{2j} e^{\xi_j t} \sin(\eta_j t - \alpha_{2j}) \\ A_{Nj} e^{\xi_j t} \sin(\eta_j t - \alpha_{Nj}) \end{array} \\ \hline & & \end{array} \right] x_{0N} e^{\lambda_N t},$$

gdzie A_{ij} oznaczają amplitudy kolejnych składowych na j -tej postaci drgań własnych, α_{ij} — przesunięcia fazowe kolejnych składowych j -tej postaci drgań własnych, ξ_j , η_j — współczynnik tłumienia i częstość kołowa oscylacji j -tej postaci drgań własnych.

Postaciami drgań własnych kołującego samolotu nazwano na podstawie [8] kolumny macierzy fundamentalnej (14). W celu obliczenia współczynników tłumienia ξ i częstości kołowych oscylacji η zastosowano algorytm Householdera. Obliczenia numeryczne przeprowadzono w języku FORTRAN 4 na maszynie cyfrowej CDC-6400 dla samolotu M17 w konfiguracji lądowania. Rysunki 3 ÷ 6 wykreślono na plotterze firmy CALCOMP pracującym w układzie *online* z maszyną cyfrową CDC-6400.

Analizując wektory i wartości własne macierzy stanu R , gdzie

$$R = \left[\begin{array}{c|cc} A^{-1} & O_{33} & O_{32} \\ \hline O_{33} & E_3 & O_{32} \\ \hline & & \frac{V}{\sigma} \quad 0 \\ & O_{23} & O_{23} & 0 \quad \frac{V}{\sigma} \\ \hline & & & T_1 & -E_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline E_3 & O_r \\ \hline & T_2 \end{array} \right],$$

stwierdzono, że o dynamicznych własnościach kołującego samolotu decydują 2 postacie drgań własnych:

— *wężykowanie przedniego podwozia* — oscylacyjna postać drgań własnych o częstościach około 8 Hz dla małych współczynników tłumienia ($S_p < 10$ Nm/(rd/s)) oraz nieoscylacyjna dla dużych współczynników tłumienia ($S_p > 10$ Nm/(rd/s)). Ruchem dominującym [8] *wężykowania przedniego podwozia* są narastające drgania skrętne goleni dla współczynników relaksacji pneumatyków $\sigma > 0,07$ m dla małych prędkości ruchu oraz malejące dla współczynników relaksacji $\sigma < 0,07$ m niezależnie od prędkości ruchu (rys. 3);

— *odchylenie samolotu* — oscylacyjna postać drgań własnych o częstościach około 0,4 Hz dla prędkości $V > 5$ m/s. Ruchami dominującymi *odchylenia samolotu* jest znoszenie boczne y_1 sprzężone z odchyleniem ψ . Dla współczynników tłumienia viskotycznego

drgań skrętnych goleni przedniego podwozia $S_p < 40 \text{ Nm}/(\text{rd/s})$ *odchylanie samolotu* jest malejące.

Macierz stanu \mathbf{R} (14) ma ponadto 2 wartości własne rzeczywiste ujemne ($-700 < \xi < -100$) oraz 2 wartości własne zerowe odpowiadające współrzędnym cyklicznym y_1, ψ .

Na rys. 3 - 6 przedstawiono zależność współczynników tłumienia i częstości oscylacji *wężykowania przedniego podwozia i odchylania samolotu* w funkcji prędkości ruchu V dla różnych współczynników relaksacji pneumatyków σ , różnych kątów pochylenia goleni ε i różnych współczynników tłumienia viskotycznego S_p . Na podstawie współczynników tłumienia i częstości oscylacji obliczono odpowiadające czasy stłumienia amplitud danej postaci do połowy oraz okresy drgań.

Z rys. 3 wynika, że współczynnik relaksacji pneumatyków σ bardzo silnie wpływa na tłumienie *wężykowania*. Przy współczynnikach relaksacji $\sigma > 0,07 \text{ m}$ i dla prędkości mniejszych od 20 m/s *wężykowanie* jest niestateczne. *Odchylanie* przy prędkościach powyżej 3 m/s praktycznie nie zależy od współczynnika relaksacji σ . Niestateczność *wężykowania* może być szczególnie niebezpieczna z uwagi na wysoką częstość drgań ($\sim 8 \text{ Hz}$). Z praktyki wiadomo, że ruch stateczny z człowiekiem w układzie sterowania jest możliwy, o ile częstość narastających oscylacji układu niesterowanego nie przekracza 2 Hz .

Na rys. 4 przedstawiono tłumienie i częstość *wężykowania i odchylania* przy współczynniku tłumienia $S_p = 2 \text{ Nm}/(\text{rd/s})$ dla różnych kątów pochylenia goleni ε . Ujemne kąty pochylenia goleni bardzo silnie ustateczniają *wężykowanie* oraz uniestateczniają *odchylanie* przy jednoczesnym zmniejszeniu częstości *odchylania* z około $0,4 \text{ Hz}$ do około $0,2 \text{ Hz}$. Częstość *wężykowania* praktycznie nie zależy od kąta pochylenia goleni ε .

Na rys. 5 przedstawiono tłumienie i częstość *wężykowania i odchylania* przy współczynniku tłumienia $S_p = 20 \text{ Nm}/(\text{rd/s})$ dla różnych kątów pochylenia goleni ε . Silne tłumienie drgań skrętnych goleni S_p spowodowało, że *wężykowanie* przy prędkościach $V > 6 \text{ m/s}$ jest postacią nieoscylacyjną. Kąt pochylenia goleni ε ma niewielki wpływ na *wężykowanie*, natomiast ma silny wpływ na *odchylanie*. Ujemne kąty pochylenia goleni ε uniestateczniają *odchylanie* przy jednoczesnym zmniejszeniu częstości *odchylania*.

Na rys. 6 przedstawiono tłumienie i częstość *wężykowania i odchylania* dla kąta pochylenia goleni $\varepsilon = 7^\circ$ przy różnych współczynnikach tłumienia S_p w układzie sterowania podwoziem przednim. Współczynnik tłumienia *odchylania* samolotu, a także częstość *odchylania i wężykowania* praktycznie nie zależą od współczynnika S_p . Wzrost współczynnika S_p bardzo silnie natomiast ustatecznia *wężykowanie* przedniego podwozia. *Wężykowanie* przedniego podwozia będzie stateczne jeżeli $S_p > 1,2 \text{ Nm}/(\text{rd/s})$.

4. Dane przyjęte do obliczeń numerycznych

$$M_p = 15 \text{ kg}$$

$$M_s = 900 \text{ kg}$$

$$J_{px} = 0,54 \text{ kgm}^2$$

$$J_{py} = 0,55 \text{ kgm}^2$$

$$J_{pz} = 0,11 \text{ kgm}^2$$

$$f = 0,12 \text{ m}$$

$$J_{py} = 0,21 \text{ kgm}^2$$

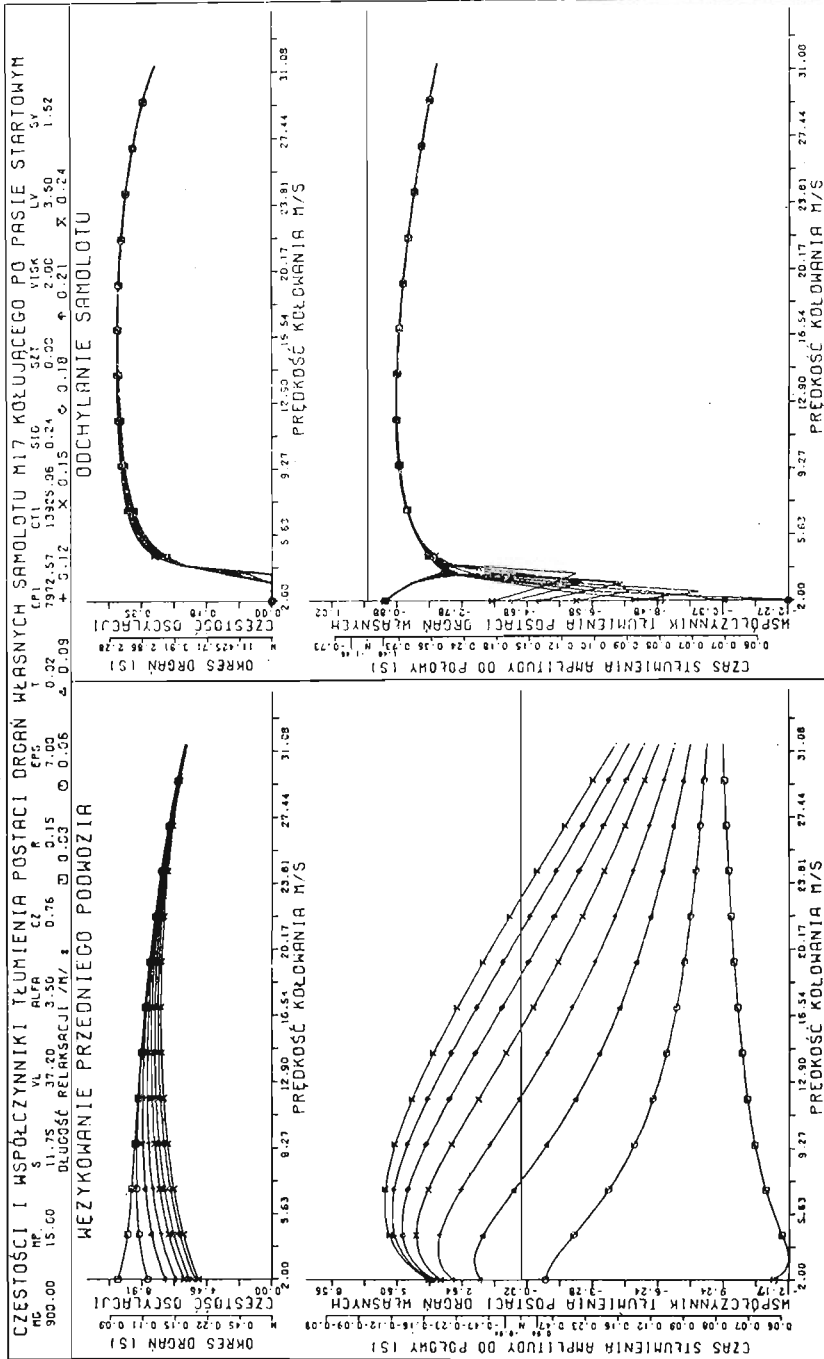
$$\varepsilon = 7^\circ$$

$$b = 0,41 \text{ m}$$

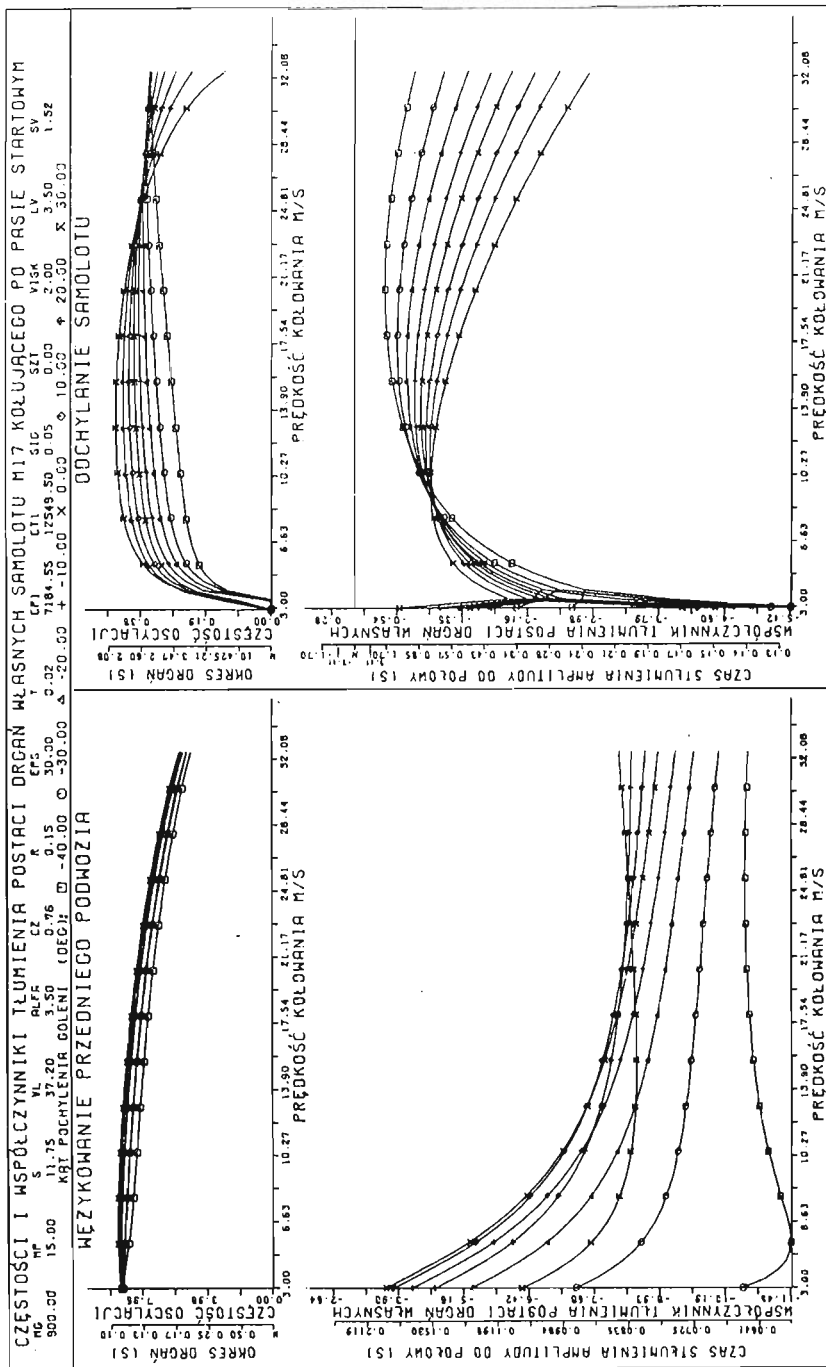
$$l = 0,02 \text{ m}$$

$$k = 1,7 \text{ m}$$

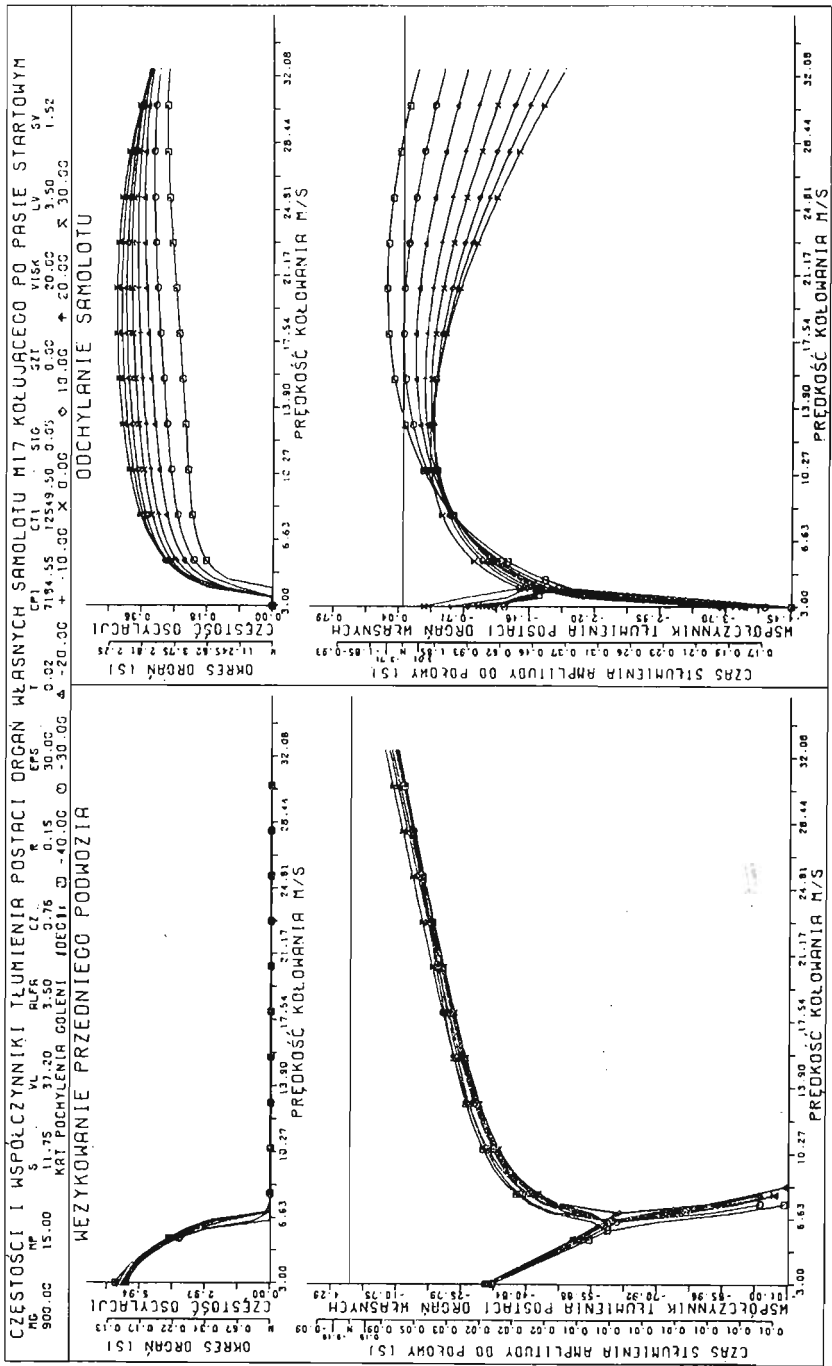
$$h = 1,05 \text{ m}$$



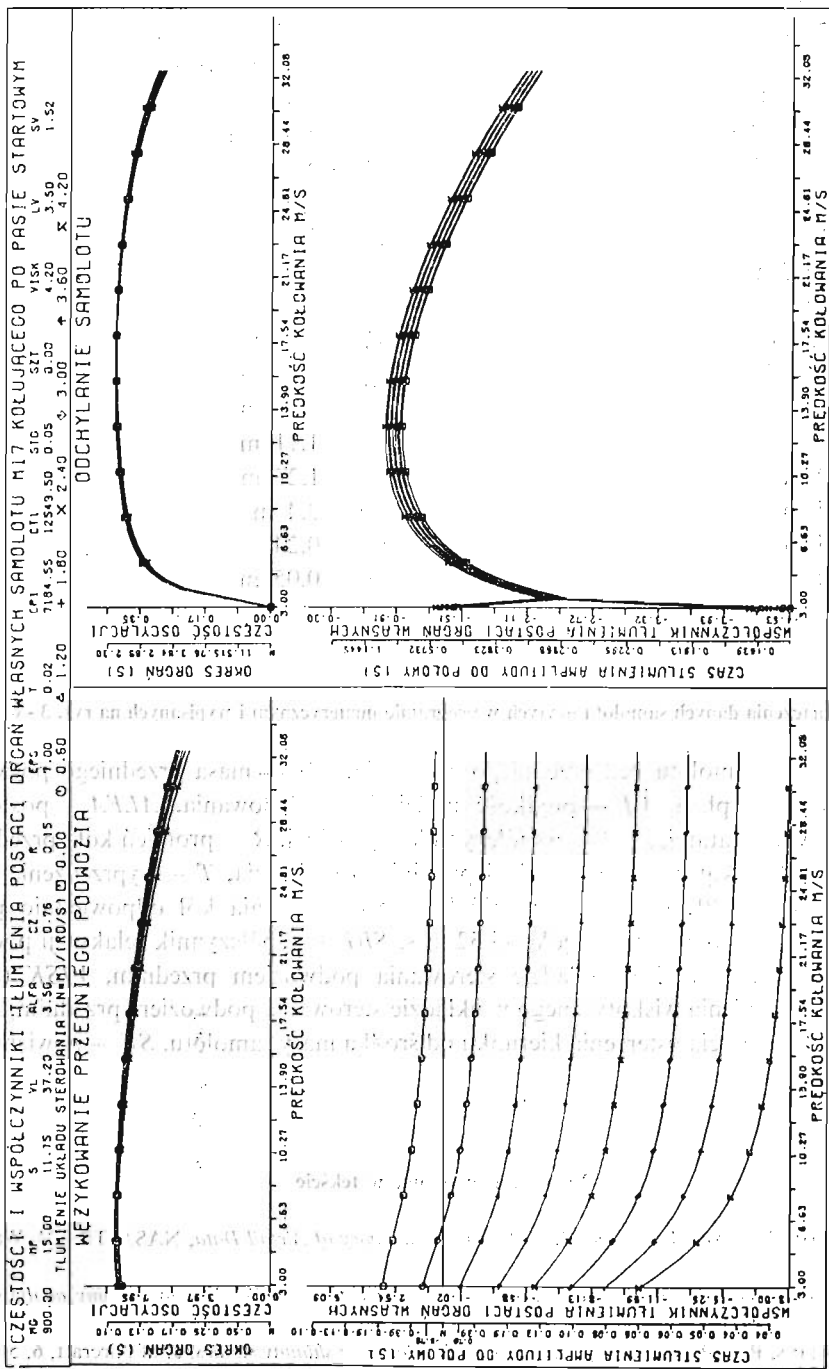
Rys. 3. Wpływ współczynnika relaksacji σ i prędkości V na postacie drgań własnych samolotu w czasie ruchu po ziemi



Rys. 4. Wpływ kąta pochylenia gołeni przedniego podwozia i prędkości V na postacie drgań własnych samolotu w czasie ruchu po ziemi przy współczynniku tłumienia viskozycznego $S_p = 2 \text{ Nm}/(\text{rd/s})$



Rys. 5. Wpływ kąta pochylenia gołeni przedniego podwozia i prędkości V na postacie drgań własnych samolotu w czasie ruchu po ziemi przy współczynniku tłumienia wiskotycznego $S_p = 20 \text{ Nm/(rd/s)}$



Rys. 6. Wpływ współczynnika tłumienia viskozynowego S_p i prędkości V na postacie drgań własnych samolotu w czasie ruchu po ziemi

$e = 0,0$ m	$\Lambda_{EII} = 4$
$R = 0,15$ m	$k_{p1} = 10,5$ (N/rd)/N
$l = 1,72$ m	$k_{p3} = 1,0$ (N/rd)/N
$K_p = 0$ Nm/rd	$k_G = 5,0$ (N/rd)/N
$S_p = 2$ Nm/(rd/s)	$a_r = 2$ (1/rd)
$g = 9,81$ m/s ²	$d_s = 0$
$c_{mbu} = -0,05$	$S_r = 1,52$ m ²
$C_{x0} = 0,01$	$S_k = 2,5$ m ²
$a_1 = 0,061$ /deg	$\lambda = 7,5$
$\alpha_0 = -1,4^\circ$	$l_V = 3,5$ m
$S = 11,75$ m ²	$d_k = 0,8$ m
$\rho = 1,23$ kg/m ³	$h_{k1} = 0,52$ m
$\delta_H = 0^\circ$	$h_{k2} = 0,57$ m
$S_H = 2$ m ²	$s_{k1} = 1,11$ m
$l_H = 3,49$ m	$s_{k2} = 1,27$ m
$Z_H = 0,84$ m	$b = 9,4$ m
$l_A = 1,25$ m	$w_3 = 0.24$
$\mu = 0,04$	$\sigma = 0.05$ m
$\alpha = 3,5^\circ$	

5. Oznaczenia danych samolotu użytych w programie numerycznym i wypisanych na rys. 3 - 6

MG — masa samolotu bez przedniego podwozia, MP — masa przedniego podwozia, S — powierzchnia płata, VL — prędkość podejścia do lądowania, $ALFA$ — postojowy geometryczny kąt natarcia, CZ — współczynnik siły nośnej, R — promień koła przedniego podwozia, EPS — kąt pochylenia goleni przedniego podwozia, T — wyprzedzenie (śląd) przedniego koła, $CP1$, $CT1$ — sztywność bocznego znoszenia kół odpowiednio przedniego i tylnego podwozia przy prędkości 32 m/s, SIG — współczynnik relaksacji pneumatyków, SZT — sztywność w układzie sterowania podwoziem przednim, $VISK$ (S_p) — współczynnik tłumienia wiskotycznego w układzie sterowania podwoziem przednim, LV — odległość środka parcia usterzenia kierunku od środka masy samolotu, SV — powierzchnia usterzenia kierunku.

Literatura cytowana w tekście

1. T. H. ABBOT, A. E. VON DOENHOFF, S. L. STIVERS, *Summary of Airfoil Data*, NASA TR-824, Washington 1945.
2. R. L. COLLINS, *Theories on the mechanics of the tires and their applications to shimmy analysis*, J. of Aircraft, 8, 4 (1971).
3. R. L. COLLINS, R. I. BLACK, *Tire parameters for landing-gear shimmy studies*, J. of Aircraft, 6, 5 (1969).
4. Engineering Sciences Data (Data Sheets: *Aerodynamics, Aircraft, Controls, Flaps, Wings*), Royal Aeronautical Society, London.
5. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley and Sons, Inc, New York, London, Sydney, Toronto 1972.

6. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, PWN, Warszawa 1961.
7. Z. GORAJ, *Macierzowy zapis nieliniowych równań ruchu generowanych formalizmem Lagrange'a*, Mech. Teoret. Stos., **14**, 2 (1976).
8. Z. GORAJ, *Stateczność strukturalna modeli matematycznych pojazdów jednośladowych*, Praca doktorska w Politechnice Warszawskiej (nie publikowana), Warszawa 1977.
9. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
10. J. MARYNIAK, M. ZŁOCKA, *Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł i sprężystości układu sterowania*, Mech. Teoret. Stos., **14**, 2 (1976).
11. J. MARYNIAK, A. BANAŚ, Z. GORAJ, Z. PATORSKI, M. ZŁOCKA, *Boczna równowaga, stateczność i sterowność samolotu*, Sprawozdanie dla OBR-SK Mielec Nr 80/76, Warszawa 1976.
12. Ю. И. НЕЙМАРК, Н. А. ФУФАЕВ, *Динамика неголономных систем*, Наука, Москва 1967.
13. H. B. PACEJKA, *Analysis of the dynamic response of a rolling string-type tire model to lateral wheel — plane vibrations*, Vehicle System Dynamics **1**, 37 - 66 (1972).
14. H. B. PACEJKA, *The Wheel Shimmy Phenomenon*, Ph. D. thesis, Delft Technical Institute, The Netherlands, Delft 1966.
15. W. A. PODGÓRSKI, A. I. KRAUTER, R. H. RAND, *The Wheel shimmy problem: its relationship to wheel and road irregularities*, Vehicle System Dynamics **4**, 9 - 41 (1975).
16. L. C. ROGERS, H. K. BREWER, *Synthesis of tire equations for use in shimmy and other dynamics studies*, J. of Aircraft, **8**, 9 (1971).
17. F. O. SMETANA, D. C. SUMMEG, R. K. CARDEN, *Light Aircraft Lift, Drag and Moment Prediction — a Review and Analysis*, NASA CR-2523, Washington 1975.
18. F. C. SMETANA, D. C. SUMMEG, W. D. JOHNSON, *Riding and Handling Qualities of Light Aircraft — a Review and Analysis*, NASA CR-1975, Washington 1972.
19. R. F. SMILEY, *Correlation, Evaluation, and Extension of Linearized Theories for Tire Motion and Wheel Shimmy*, NASA 1299, Washington 1957.
20. S. M. STUBBS, Z. A. BYRDSOONG, R. K. SLEEPER, *An Experimental Simulation Study of Four Crosswind Landing — Gear Concepts*, NASA TND-7864, Washington 1975.

Р е з ю м е

БОКОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СПОРТИВНОГО САМОЛЕТА ДВИЖУЩЕГОСЯ
ПО ЗЕМЛЕ ПОСЛЕ ПОСАДКИ

В работе представлена математическая модель спортивного самолета, движущегося по земле после посадки. Учитывается пять степеней свободы. Нестационарные боковые силы, действующие на шины колес, считаются линейными функциями бокового перемещения, угла перекоса стойки и стационарных аэродинамических сил. Уравнения движения выведены с помощью уравнений Больцмана-Гамеля для голономных систем.

На основе полного анализа установлено, что решающими для динамических свойств самолета движущегося по земле являются две формы собственных колебаний: рыскание переднего шасси и отклонение самолета. Рассмотрен также эффект изменений параметров самолета.

S u m m a r y

THE LATERAL STABILITY OF SPORTS AIRCRAFT DURING
LANDING RUN

Mathematical model of the sports aircraft during the landing run with five degrees of freedom is presented. Non-steady state tyre side forces are developed as linear function of sideslip, camber angle and stationary aerodynamics forces. The equations of motion in quasi — coordinates are derived by application of Boltzmann-Hamel equations for the system with holonomic constraints.

Results of the full analysis show that the aircraft during the landing run has two physically significant modes, which are referred to here as the shimmy and yaw modes. An effect of parameters changes is discussed.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lutego 1977 r.

TENSOR TARCIA COULOMBA*)

ALFRED ZMITROWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

W zagadnieniach dynamiki ciał stałych nie rozwikłanym do końca problemem jest opis matematyczny niezachowawczych sił tarcia w połączeniach i w miejscach styku elementów konstrukcji.

Podstawowymi cechami każdego takiego opisu winno być oparcie się o wyniki podstawowych badań fizycznych oraz łatwość stosowania tego opisu w badaniach ruchu ciał. Istnienie sił tarcia na powierzchniach styku poruszających się ciał pociąga za sobą konieczność uwzględnienia warunków granicznych ruchu, historii przemieszczeń oraz stanu więzów w styku [1, 2]. Niezbędny jest więc również taki opis tarcia, aby możliwa była analiza całokształtu zjawisk towarzyszących ruchowi.

W pracach poświęconych dynamice ciał stałych z udziałem sił tarcia na ogół wykorzystuje się znany model tarcia Coulomba, np.: [1; 3, 4]. Ten sam opis tarcia stosowany jest w problemach kontaktowych oraz wytrzymałości połączeń tarciovych i układów warstwowych przy quasi-statycznej zmianie obciążenia, np.: [5]. Do nielicznych należą prace będące próbą znalezienia, w oparciu o założenia Coulomba, wygodnego dla dynamiki opisu tarcia [6, 7].

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie opisu siły tarcia w postaci tensora uwzględniającego złożone własności powierzchni trących się.

2. Zagadnienia tarcia suchego

Tarciem suchym suwnym nazywa się całokształt zjawisk występujących między stykającymi się, niesmarowanymi powierzchniami ciał stałych, spowodowanych działaniem siły normalnej dociskającej te ciała i siły stycznej przemieszczającej lub usiłującej je przemieścić [8]. Zazwyczaj przy omawianiu tarcia przedstawia się dwa jego mechanizmy: tarcie statyczne i tarcie kinetyczne.

W niniejszej pracy rozważa się przypadek poruszających się względem siebie ciał znajdujących w styku. Przyjmuje się, że na powierzchni styku obowiązują prawa tarcia kinetycznego. Względne przemieszczenie ciał nazywa się poślizgiem.

Siła wzajemnego docisku ciał i prędkość poślizgu są tzw. parametrami tarcia, bowiem stanowią one bezpośrednią przyczynę omawianego zjawiska i wpływają na jego charakter.

*) Praca wykonana w ramach planu badań MR I/26, temat 09.3.

Dotychczas zdaniem autora nie opracowano ogólnej teorii, która określałaby jednoznacznie współczynniki tarcia lub siłę tarcia w zależności od własności ciał i parametrów tarcia. Podstawowa trudność tkwi w dużej liczbie czynników wpływających w sposób istotny na przebieg zjawiska tarcia [8]. W pracy przyjęto, że siła tarcia określona jest znanym wzorem Amontonsa i Coulomba. Stały w czasie współczynnik tarcia μ zależy od materiału trących się ciał i konfiguracji powierzchni styku.

Zwykle zakłada się, że chropowatość powierzchni styku trących się ciał jest jednorodna i izotropowa.

HUBER [9] zauważył, że współczynnik tarcia podłużnego może być różny od współczynnika tarcia poprzecznego na skutek np.: rodzaju obróbki (struganie, toczenie) lub struktury walcowniczej ciał. Możemy mówić zatem o chropowatości ortotropowej i anizotropowej.

3. Model tarcia ortotropowego Hubera

Tarcie odpowiadające chropowatości ortotropowej nazywamy tarcie ortotropowym. Kierunek siły tarcia w tym przypadku jest przeciwny kierunkowi poślizgu przy ruchu w kierunkach ortotropii. Jeśli poślizg następuje w innych kierunkach, kierunek siły tarcia nie pokrywa się z nimi. Mówimy wtedy, że siła tarcia zbacza z kierunku prędkości poślizgu.

Niech osie x, y układu Oxy pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii na płaszczyźnie styku. Niech μ_1 i μ_2 są współczynnikami tarcia wzdłuż osi x i y , natomiast μ_α współczynnikiem odpowiadającym poślizgowi w kierunku tworzącym kąt α z osią x . HUBER w [9] przyjął, że

$$(3.1) \quad \mu_\alpha = \mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha.$$

Postulując zależność (3.1) Huber wzorował się na zależności między naprężeniami normalnymi w płaskim stanie naprężenia

$$(3.2) \quad \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha,$$

gdzie σ_α , σ_x i σ_y są naprężeniami normalnymi na bokach trójkątnego elementu wyciętego z napiętej płaszczyzny. Kąt, o który musi zbaczać kierunek siły tarcia od kierunku poślizgu przy $\alpha \in (0, \pi/2)$, oznacza się przez β . Wyznaczając kąt β HUBER wykorzystał analogię z kątem, o który zbacza naprężenie całkowite p_α określone wzorem

$$(3.3) \quad p_\alpha = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2},$$

od kierunku naprężenia normalnego σ_α w płaskim stanie naprężenia. Tangens tego kąta wynosi

$$(3.4) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha}{-\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha}.$$

Zgodnie z powyższymi założeniami składowe T_x i T_y siły tarcia dane są wyrażeniami

$$(3.5) \quad T_x = \mu_\alpha N \cos(\alpha - \beta) = \frac{\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}} \mu_1 N \cos \alpha,$$

$$(3.6) \quad T_y = \mu_\alpha N \sin(\alpha - \beta) = \frac{\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}} \mu_2 N \sin \alpha.$$

Z wzorów (3.5) i (3.6) nie można wydzielić części zależnej tylko od funkcji kąta α charakteryzującego kierunek poślizgu na powierzchni styku.

4. Tensor tarcia suwnego i jego własności

Weźmy dwie dwuwymiarowe przestrzenie wektorowe \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 . Przyjmijmy w \mathcal{E}_1 ortogonalną bazę wersorów \mathbf{k}_i ($i = 1, 2$) a w \mathcal{E}_2 dowolną bazę wersorów \mathbf{e}_j ($j = 1, 2$). Niech przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_2 \equiv \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ będzie produktem tensorowym przestrzeni \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 . Każdy element tej przestrzeni jest liniową kombinacją polibaz $\mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Może być więc zapisany w postaci

$$(4.1) \quad \mathbf{Q} = Q^{ij} \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Niech \mathcal{A} będzie liniowym odwzorowaniem przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{E}_1$ w przestrzeń tensorową $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{E}_1$. Wówczas

$$(4.2) \quad \bigvee_{\mathbf{Q} \in \mathcal{T}_2} \bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathcal{T}_1} \mathcal{A}(\mathbf{a}) = \mathbf{Q}\mathbf{a},$$

gdzie $\mathcal{A}(\mathbf{a}) \in \mathcal{T}_1$, [10].

Niech elementami przestrzeni \mathcal{E}_1 będą kontrawariantne wektory \mathbf{t} tarcia odpowiadające jednostkowemu dociskowi, a elementami przestrzeni \mathcal{E}_2 będą dowolne kontrawariantne wersory \mathbf{v} wektora prędkości poślizgu.

Definicja: Nieosobliwy tensor \mathbf{Q} nazywamy tensorem tarcia, jeżeli \mathbf{Q} nasunięty lewostronnie na wersor \mathbf{v} wektora prędkości poślizgu jest wektorem przeciwnym do wektora siły tarcia Coulomba \mathbf{t} przy jednostkowym docisku, tzn.

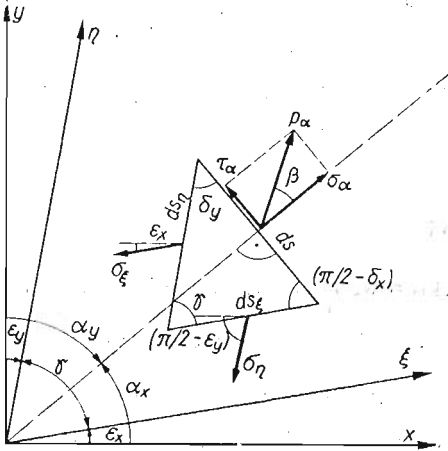
$$(4.3) \quad \mathbf{t} = -\mathbf{Q}\mathbf{v}.$$

Wektor siły tarcia przy dowolnym docisku N określa zależność

$$(4.4) \quad \mathbf{T} = N\mathbf{t}.$$

W przypadku tarcia ortotropowego przyjęto nieortogonalny układ współrzędnych $O\xi\eta$ na płaszczyźnie styku. Kąty γ , ϵ_x , ϵ_y orientują układ $O\xi\eta$ względem prostokątnego układu Oxy , rys. 1. Kierunek poślizgu określają α_x i α_y . Założono, że rozkład sił tarcia

w ukośnokątnym układzie współrzędnych jest taki jak rozkład naprężeń na bokach trójkątnego elementu w płaskim stanie naprężenia. Element taki wraz z orientacją względem układu współrzędnych i kierunku poślizgu pokazano na rys. 1. Przyjęto, że naprężenia p_α na boku ds rozkładają się na naprężenia równoległe do linii ξ i η na bokach ds_ξ i ds_η .



Rys.-1. Analogia tarcia ortotropowego z płaskim stanem naprężenia

Naprężenia p_α określa wzór (3.3), w którym

$$(4.5) \quad \sigma_\alpha = \frac{1}{\sin \gamma} (\sigma_\xi \cos^2 \delta_x + \sigma_\eta \sin^2 \delta_y),$$

$$(4.6) \quad \tau_\alpha = \frac{1}{\sin \gamma} (\sigma_\eta \cos \delta_y \sin \delta_y - \sigma_\xi \cos \delta_x \sin \delta_x).$$

gdzie, $\delta_x = \alpha_x - \epsilon_x$ i $\delta_y = \pi/2 - \alpha_y + \epsilon_y$.

Niech μ_1 i μ_2 są współczynnikami tarcia wzdłuż osi ξ i η , a μ_α jest współczynnikiem tarcia przy poślizgu w kierunku nachylonym do osi x pod kątem α_x i przez założoną analogię z p_α określonym wzorem

$$(4.7) \quad \mu_\alpha = \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{(\mu_1 \cos^2 \delta_x + \mu_2 \sin^2 \delta_y)^2 + (\mu_2 \cos \delta_y \sin \delta_y - \mu_1 \cos \delta_x \sin \delta_x)^2}.$$

Kąt zбочzenia kierunku tarcia od kierunku poślizgu przy $\alpha \in (0, \pi/2)$ określa wzór

$$(4.8) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_\eta \cos \delta_y \sin \delta_y - \sigma_\xi \cos \delta_x \sin \delta_x}{\sigma_\xi \cos^2 \delta_x + \sigma_\eta \sin^2 \delta_y},$$

gdzie za σ_ξ i σ_η należy podstawić odpowiednio μ_1 i μ_2 . Zgodnie z przyjętymi założeniami otrzymano następujące wzory na składowe siły tarcia w układzie Oxy

$$(4.9) \quad T^1 = -N(\mu_1 \cos \epsilon_x ds_\eta + \mu_2 \sin \epsilon_y ds_\xi) = \\ = -\frac{N}{\sin \gamma} [\mu_1 \cos \epsilon_x \cos(\alpha_x - \epsilon_x) + \mu_2 \sin \epsilon_y \cos(\alpha_y - \epsilon_y)],$$

$$(4.10) \quad T^2 = -N(\mu_1 \sin \epsilon_x ds_\eta + \mu_2 \cos \epsilon_y ds_\xi) = \\ = -\frac{N}{\sin \gamma} [\mu_1 \sin \epsilon_x \cos(\alpha_x - \epsilon_x) + \mu_2 \cos \epsilon_y \cos(\alpha_y - \epsilon_y)].$$

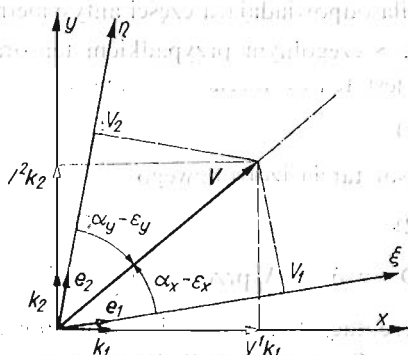
W powyższych związkach wykorzystano następujące zależności:

$$(4.11) \quad ds_{\xi} = \frac{\sin \delta_y}{\sin \gamma} \quad \text{i} \quad ds_{\eta} = \frac{\cos \delta_x}{\sin \gamma}.$$

Łatwo zauważyć, że $\cos(\alpha_x - \varepsilon_x)$ i $\cos(\alpha_y - \varepsilon_y)$ są kosinusami kierunkowymi wektora prędkości poślizgu w układzie ukośnokątnym $O\xi\eta$, rys. 2. Kosinusy kierunkowe wektora prędkości w układzie Oxy określają relacje

$$(4.12) \quad \cos \alpha_x = \frac{V^1}{\sqrt{(V^1)^2 + (V^2)^2}} \quad \text{i} \quad \cos \alpha_y = \frac{V^2}{\sqrt{(V^1)^2 + (V^2)^2}},$$

gdzie V^1 i V^2 są składowymi wektora prędkości poślizgu w bazie $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$.



Rys. 2. Wektor prędkości poślizgu i jego składowe

Zgodnie z wyprowadzonymi wzorami reprezentacją tensora tarcia w wybranym powyżej przypadku tarcia jest następująca macierz

$$(4.13) \quad (\mathbf{Q}) = (Q^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1 \cos \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_2 \sin \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \\ \frac{\mu_1 \sin \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_2 \cos \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \mu_1, \mu_2 \in \langle 0, +\infty \rangle \quad \text{i} \quad \varepsilon_x, \varepsilon_y \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

Nadto musi być spełniony warunek

$$(4.15) \quad (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

Utworzony w ten sposób tensor \mathbf{Q} oraz ogólny tensor tarcia mają następujące właściwości:

1. Moc siły pochodzącej od części antysymetrycznej tensora tarcia jest równa zeru.

D o w ó d: Reprezentacją macierzową antysymetrycznej części tensora tarcia jest macierz

$$(4.16) \quad (\mathbf{Q}^A) = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(4.17) \quad A = \frac{1}{2} (Q^{21} - Q^{12}).$$

Siłą tarcia przy jednostkowym docisku, pochodzącą od części antysymetrycznej tensora tarcia jest

$$(4.18) \quad \mathbf{t}^A = -\mathbf{Q}^A \mathbf{v}.$$

Wersor \mathbf{v} w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ może być przedstawiony następująco

$$(4.19) \quad \mathbf{v} = [v^1, v^2]^T.$$

Stąd, otrzymujemy moc siły \mathbf{t}^A

$$(4.20) \quad M = -\mathbf{v}^T(\mathbf{Q}^A \mathbf{v}) = -[v^1, v^2] \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Siła odpowiadająca części antysymetrycznej tensora tarcia ma charakter zachowawczy.

2. Szczególnym przypadkiem tensora tarcia o ortotropii zgodnej z osiami układu Oxy jest tensor tarcia ortotropowego

$$(4.21) \quad \mathbf{Q} = \mu_1 \mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{e}_2,$$

i tensor tarcia izotropowego

$$(4.22) \quad \mathbf{Q} = \mu(\mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{e}_2).$$

D o w ó d: W przestrzeni \mathcal{E}_2 wybrano ortonormalną bazę wersorów $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Elementy reprezentacji tensora tarcia ortotropowego otrzymano wprost z (4.13) zakładając $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $\mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$. Ponadto przy wyznaczaniu reprezentacji tensora tarcia izotropowego z (4.13) przyjęto dodatkowo $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$.

3. Każdy tensor tarcia ortotropowego i izotropowego jest tensorem symetrycznym.

D o w ó d: Ponieważ w przypadku tensora tarcia ortotropowego i izotropowego

$$(4.23) \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q},$$

więc częścią symetryczną tensora tarcia jest

$$(4.24) \quad \mathbf{Q}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}.$$

Część antysymetryczna tego tensora równa jest zeru.

4. Każdy tensor tarcia ortotropowego (4.13) którego elementy reprezentacji utworzono przy zachowaniu warunków (4.14) i (4.15) ma dwie rzeczywiste wartości własne i dwa wektory własne.

D o w ó d: Wartości własne tensora tarcia \mathbf{Q} określa równanie

$$(4.25) \quad \det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Stąd po łatwych przekształceniach otrzymuje się dla tensora (4.13) równanie kwadratowe postaci

$$(4.26) \quad \lambda^2 \cos^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \lambda(\mu_1 + \mu_2) \cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{4}(\mu_1 \sin 2\varepsilon_x + \mu_2 \sin 2\varepsilon_y)^2 + \\ + (\mu_1 \cos^2 \varepsilon_x + \mu_2 \sin^2 \varepsilon_y) \cdot (\mu_1 \sin^2 \varepsilon_x + \mu_2 \cos^2 \varepsilon_y) = 0.$$

Przy spełnieniu warunków (4.14) i (4.15) wyróżnik tego równania jest nieujemny ($\Delta \geq 0$), więc pierwiastki są liczbami rzeczywistymi.

5. Każdy tensor tarcia ortotropowego (4.21) ma dwie wartości własne, którymi są liczby μ_1 i μ_2 oraz dwa wektory własne postaci

$$(4.27) \quad \mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

D o w ó d: W przypadku tensora tarcia ortotropowego równanie (4.25) sprowadza się do postaci

$$(4.28) \quad (\mu_1 - \lambda) (\mu_2 - \lambda) = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są μ_1 i μ_2 . Stąd już łatwo określić wektory własne spełniające równanie

$$(4.29) \quad \mathbf{Qm} = \lambda \mathbf{m}.$$

6. Każdy tensor tarcia izotropowego ma wartość własną podwójną równą współczynnikowi tarcia μ , a jego wektorem własnym jest dowolny wektor.

Prosty dowód pominięto.

W przypadku tarcia ortotropowego (4.21), współczynnik tarcia odpowiadający poślizgowi w kierunku określonym kątem α wynika z wzoru (4.7) po podstawieniu $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ i $\gamma = \pi/2$,

$$(4.30) \quad \mu_\alpha = \sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}.$$

W przypadku tarcia izotropowego (4.22) współczynnik tarcia μ_α można otrzymać z (4.7) po podstawieniu $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $\gamma = \pi/2$ oraz $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$. Stąd

$$(4.31) \quad \mu_\alpha = \mu.$$

Dla różnych formuł matematycznych współczynnika μ_α (3.1) i (4.30) wynikają różne zależności na składowe wektorów siły tarcia, (3.5) (3.6) i (4.9) (4.10). Sposoby wyznaczenia kąta β w [9] i niniejszej pracy są identyczne.

Dla porównania uzyskanych wyników z pracą [9] przeprowadzono obliczenia błędu względnego między formułami matematycznymi μ_α określonymi wzorami (3.1) i (4.30). W tym celu utworzono następującą funkcję błędu

$$(4.32) \quad \Delta(\alpha, \kappa) = \frac{\sqrt{(\kappa \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}}{\kappa \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} - 1,$$

gdzie $\mu_1 = \kappa \mu_2$. Wartości współczynników tarcia μ_1 i μ_2 nie mogą zbyt różnić się, jak również różnica ta z reguły maleje z czasem na skutek np.: docierania się elementów maszyn i urządzeń [9]. Porównanie wartości współczynników tarcia podanych w ogólnie dostępnych poradnikach inżynierskich pozwala oszacować zmienności κ . Przykładowo rozważmy tarcie: a) stali o stal — $\mu_1, \mu_2 \in \langle 0,18; 0,15 \rangle$ stąd $\kappa \in \langle 1,2; 0,83 \rangle$, b) stali o żelwo — $\mu_1, \mu_2 \in \langle 0,17; 0,11 \rangle$ więc $\kappa \in \langle 1,55; 0,65 \rangle$, c) skóry o drewno — $\mu_1, \mu_2 \in \langle 0,5; 0,3 \rangle$, $\kappa \in \langle 1,67; 0,6 \rangle$.

Maksymalny błąd oszacowano przez określenie kresu górnego funkcji błędów przy różnych przedziałach zmienności współczynnika κ , otrzymując

$$(4.33) \quad \sup_{\substack{\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle \\ \kappa \in \langle 0,5; 2 \rangle}} \Delta(\alpha, \kappa) \leq 0,0612 \equiv 6,12\%,$$

$$(4.34) \quad \sup_{\substack{\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle \\ \kappa \in \langle 0,2; 5 \rangle}} \Delta(\alpha, \kappa) \leq 0,343 \equiv 34,3\%,$$

$$(4.35) \quad \sup_{\substack{\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle \\ \kappa \in \langle 0,1; 10 \rangle}} \Delta(\alpha, \kappa) \leq 0,7403 \equiv 74,03\%.$$

Wyniki te wskazują na małą różnicę między przedstawianymi modelami tarcia ortotropowego, gdy $\kappa \in \langle 0,5; 2 \rangle$, co jak wykazano wystarczy dla praktyki inżynierskiej. Można więc stwierdzić, że model tarcia HUBERA i prezentowany w niniejszej pracy, określają zbliżone co do wartości siły tarcia gdy współczynniki μ_1 i μ_2 nie różnią się zbyt.

Przyjęty opis sił tarcia na powierzchni styku należy skonfrontować z wynikami doświadczalnymi.

5. Przykład numeryczny

W celu sprawdzenia użyteczności wprowadzonego opisu tarcia wykonano szereg testowych przykładów numerycznych dla ruchu punktu materialnego po chropowatej płaszczyźnie opisanego prostym równaniem

$$(5.1) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{T},$$

gdzie m masa punktu, \mathbf{r} wektor położenia, \mathbf{F} siła czynna, \mathbf{T} opór tarcia. Wektory równania (5.1) można przedstawić w następującej postaci

$$(5.2) \quad \mathbf{r} = [x, y]^T, \quad \mathbf{F} = [F_x, F_y]^T, \quad \mathbf{T} = -N\mathbf{Q}\mathbf{v},$$

gdzie

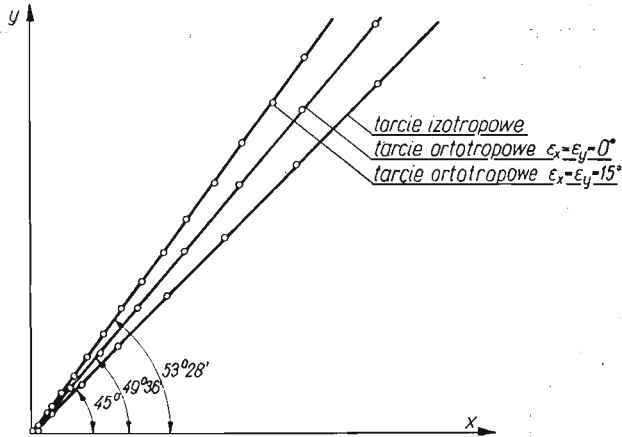
$$(5.3) \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_y & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_y & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \end{bmatrix}.$$

Stąd wektor siły tarcia można przedstawić w postaci

$$(5.4) \quad \mathbf{T} = -N \begin{bmatrix} \frac{\mu_1 \cos \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_2 \sin \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \\ \frac{\mu_1 \sin \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_2 \cos \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_y & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \end{bmatrix}.$$

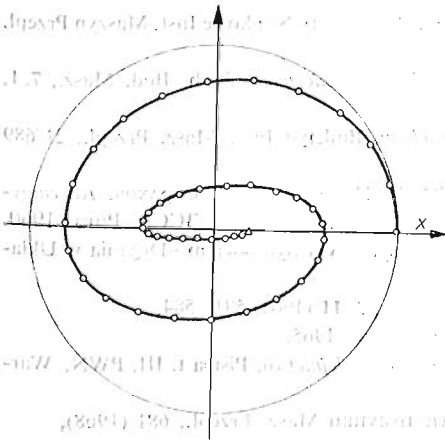
Równanie ruchu rozwiązano metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu.

Na rys. 3 przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych równania (5.1) gdy $\mathbf{F} = \text{const}$ i jest nachylona do osi x pod kątem 45° , a tarcie ma charakter tarcia ortotropowego ($\mu = 0,12$) ortotropowego ($\mu_1 = 0,17$; $\mu_2 = 0,12$) i anizotropowego ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = 15^\circ$; $\mu_1 = 0,17$; $\mu_2 = 0,12$). Punkt materialny porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym po prostej. Odległości między punktami przedstawionymi na rys. 3 odpowiadają jednokowym odstępom czasu ($\Delta t = 0,5$ [s]).

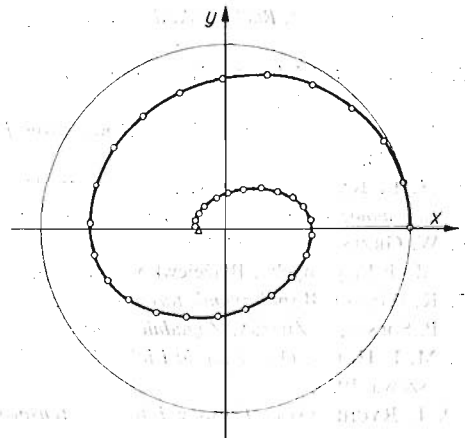


Rys. 3. Tor punktu poruszającego się po chropowatej płaszczyźnie pod działaniem stałego wektora siły nachylonego do osi x pod kątem 45°

Na rys. 4, 5, 6 podano wyniki rozwiązania równania ruchu, gdy $F = -kr$ (k — stała), a charakterystyki tarcia izotropowego (rys. 4), ortotropowego (rys. 5) i ortotropowego (rys. 6) są jak w przykładzie poprzednim. Warunki początkowe ruchu dobrano tak, aby torem punktu był okrąg w przypadku braku sił oporu. Po chropowatej płaszczyźnie punkt



Rys. 4. Tor punktu poruszającego się pod wpływem siły centralnej, po płaszczyźnie z tarcie izotropowym

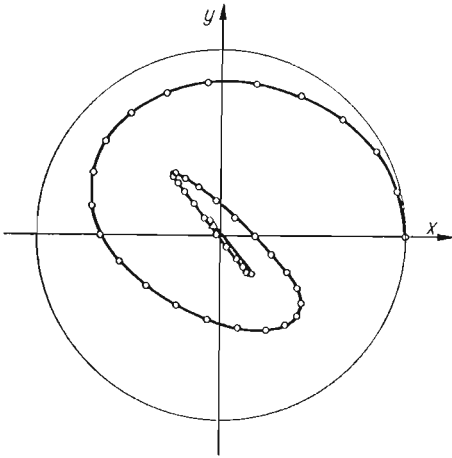


Rys. 5. Tor punktu poruszającego się pod wpływem siły centralnej, po płaszczyźnie z tarcie ortotropowym $\epsilon_x = \epsilon_y = 0^\circ$

porusza się ruchem opóźnionym i ostatecznie zatrzymuje się w miejscu wskazanym na rysunkach. Przedstawione na rysunkach punkty odpowiadają jednakowym odstępom czasu ($\Delta t = 0,2$ [s]).

Przeprowadzone eksperymenty numeryczne wykazały, że gdy wartości współczynników tarcia na kierunkach głównych znacznie różnią się, w przykładzie z $\epsilon_x = \epsilon_y = 15^\circ$

ponad 3 razy (rys. 6), punkt dąży do poruszania się po torze o kierunku prawie pokrywającym się z kierunkiem najmniejszego tarcia. Po wykonaniu kilku gasnących wahań na tym torze, ostatecznie zatrzymuje się.



Rys. 6. Tor punktu poruszającego się pod wpływem siły centralnej, po płaszczyźnie z tarcie ortotropowym $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 15^\circ$.

Literatura cytowana w tekście

1. S. W. E. EARL^s, E. J. WILLIAMS, *A linearized analysis for frictionally damped systems*, Jour. of Sound Vibr., 24 4, (1972) 445 - 458.
2. A. ZMITROWICZ, *Ruch płaski dwóch brył sztywnych z prostą styku*, Zeszyty Naukowe Inst. Maszyn Przepl. 1 (1977).
3. Z. OSIŃSKI, *Wpływ tarcia suchego na ruchy drgające układów mechanicznych*, Arch. Bud. Masz., 7, 1, (1960) 99 - 116.
4. J. WIĘCKOWSKI, *Dynamika belki warstwowej z tarcie suchym*, Biuletyn Inst. Masz. Przepl., 21/689 (1971).
5. Н. Г. КАЛИНИН, Ю. А. ЛЕБЕДЕВ, В. И. ЛЕБЕДЕВА, Ю. Г. ПОНОВКО, Г. И. СТРАХОВ, *Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях*, - Издат. Акад. Наук ЛССР, Рига, 1960.
6. W. GRZESIKIEWICZ, *Opis tarcia suchego w układach mechanicznych*, VII Symposium «Drgania w Układach Fizycznych», Białeżewko, maj 1976.
7. K. WOLSKI, *Współczynnik tarcia jako wektor*, Arch. Bud. Masz., 3, 11 (1964) 581 - 584.
8. P. SOLSKI, S. ZIEMBA, *Zagadnienia tarcia suchego*, PWN, Warszawa 1965.
9. M. T. HUBER, *Opory tarcia i ich rola w niektórych zagadnieniach kolejnictwa*, Pisma t. III, PWN, Warszawa 1957.
10. I. RYCHLEWSKI, *Tensory i funkcje tensorowe*, Biuletyn Instytutu Masz, Przepl., 681 (1968),

Резюме

ТЕНЗОР ТРЕНИЯ КУЛОМБА

В работе дано определение тензора трения. Совмещение этого тензора с единичным вектором скорости скольжения дает вектор, противоположный вектору силы трения на поверхности контакта твердых тел. Приведены свойства тензора трения и его особенности. Разработанная математическая модель трения сравнивается с моделью ГУБЕРА [9].

Приведены расчеты для точки, движущейся по шероховатой плоскости под действием постоянной или зависящей от положения точки силы.

S u m m a r y

TENSOR OF COULOMB FRICTION

The paper presents a definition of a friction tensor. If that tensor is composed with a versor of a slip speed vector, then vector will be obtained which is reverse to the vector of friction force on the contact surface of solid bodies. The properties of the friction tensor and its particular cases are given. The presented model is compared with the model of Huber [9].

An exemplary calculation of a motion of a point on a rough surface with exciting force either constant or position — dependent was made.

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH PAN
GDAŃSK-WRZESZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 marca 1977 r.

WYTRZYMAŁOŚĆ STALOWYCH PRĘTÓW Z KARBEM PRZY ROZCIĄGANIU W PODWYŻSZONYCH TEMPERATURACH

KAROL T U R S K I (WARSZAWA)

1. Wstęp

Teoretyczne rozwiązanie uzyskane w ramach teorii ciała sztywno idealnie plastycznego dla rozciąganego pręta z karbem weryfikowano w normalnych i obniżonych temperaturach dla różnych materiałów [1, 2]. Badania te możemy podzielić na dwie grupy. Pierwszą grupę tworzą doświadczenia prowadzone w takich warunkach, że przy rozciąganiu gładkiej próbki występuje wyraźna granica plastyczności. Do drugiej grupy należą badania, w których nie było widocznego momentu uplastycznienia materiału. Podobieństwo cech krzywych umocnienia w każdej z grup umożliwiało wybranie określonej definicji granicy plastyczności ważnej w odniesieniu do danej grupy badań.

Celem niniejszej pracy było określenie wpływu temperatur od 20 do 700°C na zachowanie się rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów stalowych z karbami. W tym zakresie temperatur zmienia się typ krzywej umocnienia próbki gładkiej, przy 20°C występuje przystanek plastyczności, natomiast po odpowiednim nagrzeniu próbki, jak wiadomo, nie ma tego zjawiska. Aby porównywać naprężenia uplastyczniające próbki rozciągane w różnych temperaturach wprowadzono nową definicję umownej granicy plastyczności. Przyjmowano, że uplastycznienie następuje, gdy praca dysypowana jest równa pewnej ustalonej części całkowitej pracy dysypowanej liczonej do momentu osiągnięcia maksymalnej siły.

2. Technika doświadczalna

Badania przeprowadzono na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej ZD-100 z piecem rurowym. Próbki wstawiano do nagrzanego pieca, w którym przebywały przed rozciąganiem 20 do 25 minut w celu wyrównania rozkładu temperatury. Temperaturę mierzono termoparą Pt-Rh-Pt, którą mocowano do próbki.

Z każdej próby otrzymywano wykres siły w funkcji przemieszczenia trawers maszyny. Dzięki małym luzom całego układu, początkowy nieliniowy odcinek wykresu był niewielki w porównaniu do zakresu sprężystego i można było, drogą ekstrapolacji odcinka liniowego, znaleźć punkt, od którego liczono wydłużenia próbki. Po rozerwaniu próbki dokładnie składano dwie jej części i w miejscu pęknięcia mierzono średnicę za pomocą suwmiarki o dokładności 0,05 mm.

Do badań użyto stal stopową ŁH-15 oraz stal 4. Próbki, toczone z pręta, miały gwintowane końce służące do mocowania w uchwytach zrywarki. Całkowita długość próbki

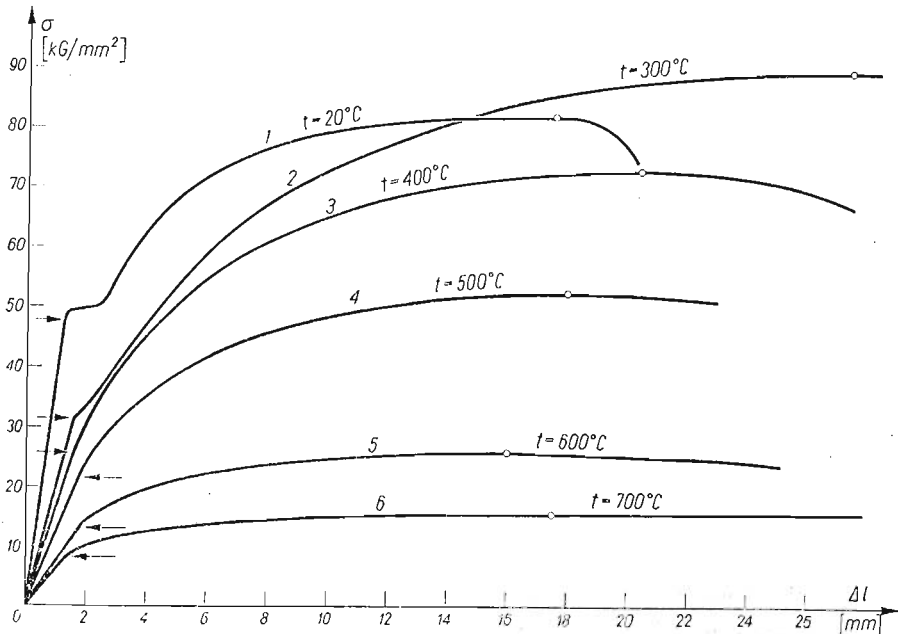
wynosiła 160 mm, długość części roboczej — 110 mm. Wymiary części pomiarowej próbki podane są na wykresie z wynikami doświadczeń.

W pierwszej serii zbadano próbki gładkie w różnych temperaturach. Drugą serię próbek wykonano z karbem kątowym o stosunku średnicy pręta $2C$ do średnicy dna karbu $2R$ wynoszącym około 2,2 i kącie rozwarcia karbu 71° . Zgodnie z rozwiązaniami teoretycznymi opartymi na modelu ciała sztywno idealnie plastycznego nośność pręta o kącie rozwarcia karbu 71° osiąga maksimum, gdy $C/R \geq 2,2$. Ta seria próbek służyła do zbadania wpływu temperatury od 20 do 700°C na uplastycznienie i wytrzymałość pręta z karbem. Zagadnienie jest interesujące z tego powodu, że przy temperaturze pokojowej karb pęka w sposób kruchy, natomiast w temperaturach wysokich pęknięcie poprzedzone jest znacznymi odkształceniami plastycznymi.

Dla zweryfikowania niektórych rezultatów otrzymanych w badaniach stali ŁH-15 powtórzono badania próbek z karbem wykonując je ze stali 4.

3. Wyniki doświadczeń

Badania rozciągania próbek ze stali ŁH-15 wykonano w temperaturach 20, 300, 400, 500, 600, 700°C .¹⁾ Na rys. 1 pokazano wyniki badań próbek gładkich, na rys. 2 podano wykresy dla próbek z karbem. Wielkość naprężenia określano dzieląc siłę odpowiadającą danemu wydłużeniu przez początkowy najmniejszy przekrój próbki. Strzałką oznaczono koniec proporcjonalnego wydłużenia, a za pomocą małego kółka zaznaczono punkt odpowiadający maksymalnej sile.

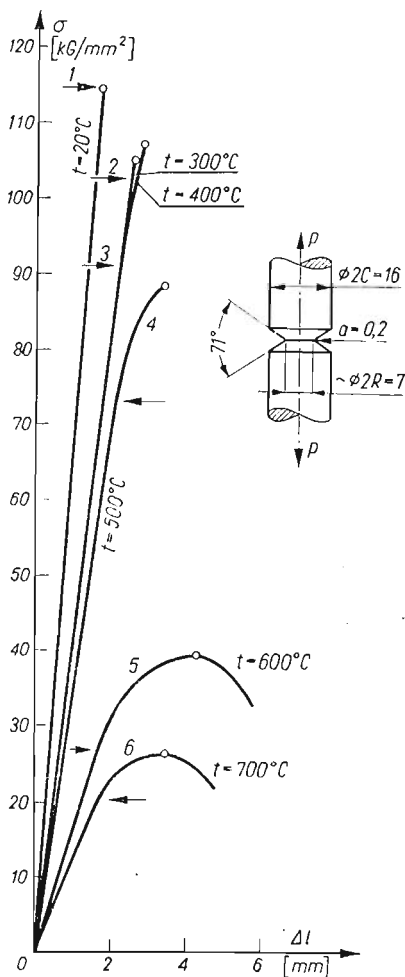


Rys. 1

¹⁾ H. Krasowski, Badanie zachowania się metalu przy rozciąganiu w różnych temperaturach, praca dypl., Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 1976.

Dla temperatury 20 i 300°C (rys. 1) przy badaniu gładkich próbek widać wyraźnie granicę plastyczności. Na pozostałych wykresach następuje płynne przejście od zakresu sprężystego do plastycznego.

Próbki z karbem zachowywały się odmiennie od próbek gładkich przy badaniu w tej samej temperaturze. Przy rozciąganiu w temperaturze 20°C próbka z karbem (rys. 2)



Rys. 2

pekła w zakresie sprężystych wydłużeń. Próbki rozciągane w temperaturze 300, 400, 500°C pękły w tym zakresie naprężeń, gdzie występowało małe odchylenie od prostoliniowego wykresu. Jednakże w tych czterech przypadkach próbki pękły w sposób kruchy. Próbki rozciągane w temperaturze 600 oraz 700°C zrywały się w sposób ciągliwy.

Wpływ temperatury powoduje taką zmianę przebiegu wykresów $\sigma(\Delta l)$ (rys. 1 i 2), że żadna ze znanych metod określenia naprężenia uplastyczniającego nie może być przyjęta równocześnie do wszystkich podanych krzywych. Dlatego wprowadzono nową definicję granicy plastyczności. Przyjęto, że uplastycznienie następuje przy naprężeniu odpowia-

jącemu stałej części całkowitej mocy dysypowanej do momentu osiągnięcia maksymalnej siły.

Wyrażenie

$$(3.1) \quad W = \int_0^{\Delta l_p(\sigma_{max})} \sigma d(\Delta l_p),$$

(Δl_p — plastyczna część wydłużenia) oznacza pracę na jednostkę przekroju próbki zużytą na plastyczną deformację materiału do momentu osiągnięcia maksymalnej siły. Wartości Δl_p określano prowadząc z dowolnego punktu na wykresie $\sigma(\Delta l)$ prostą równoległą do początkowego liniowego odcinka wykresu.

Aby znaleźć wartość naprężenia uplastyczniającego dany odkształcany element, wprowadzamy wyrażenie

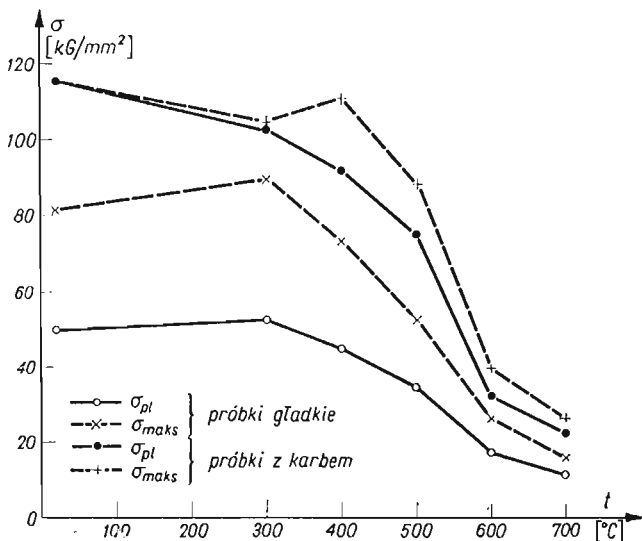
$$(3.2) \quad W_p = \int_0^{\Delta l_p(\sigma_p)} \sigma d(\Delta l_p),$$

oznaczające pracę wykonaną na plastyczną deformację do wydłużenia Δl_p określonego w ten sposób, że niezależnie od przebiegu wykresu $\sigma(\Delta l)$ współczynnik

$$(3.3) \quad a_p = W_p/W$$

zachowuje stałą wartość.

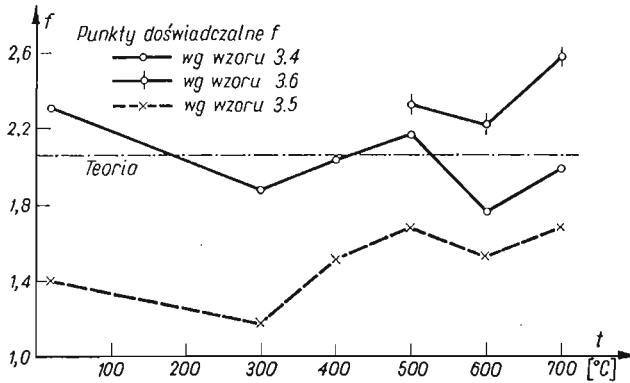
Wartość współczynnika a_p wybrano tak, aby dla wykresu 1 (rys. 1) granica plastyczności leżała na przystanku plastyczności. W danym przypadku wybrano $a_p = 0,05$. Na rys. 3 pokazano zmianę naprężenia uplastyczniającego w funkcji temperatury badania (linie ciągłe) oraz przebieg maksymalnego naprężenia (linie przerywane) dla próbek gładkich i próbek z karbem.



Rys. 3

W przypadku rozciągania próbek gładkich w wybranych tu temperaturach, największą wytrzymałość materiału zmierzono przy 300°C (punkty +). W miarę wzrostu temperatury powyżej 300°C wytrzymałość próbki stopniowo zmniejsza się. Odpowiednio do wytrzymałości zmienia się również granica plastyczności (punkty białe).

Dla próbki z karbem rozciąganej w temperaturze 20°C wykres był prostoliniowy aż do zerwania, wobec czego naprężenie uplastyczniające, według przyjętej definicji, równe jest naprężeniu maksymalnemu. W temperaturze 300°C następuje zmniejszenie wytrzymałości próbki z karbem w porównaniu z badaniami przy 20 i 400°C (linia przerywana, punkty +). Natomiast naprężenie uplastyczniające stopniowo spada ze wzrostem temperatury (linia ciągła, punkty czarne). Próbki z karbem rozciągane w temperaturze od 20 do 500°C pękły zanim wykres $\sigma(\Delta l)$ osiągnął ekstremum. Rozciąganie takich samych próbek w temperaturze 600 i 700°C wywoływało zerwanie przy siłach mniejszych od siły maksymalnej.



Rys. 4

Na rys. 4 pokazano, jak temperatura zmienia umocnienie wywołane przez karb. Wykres oznaczony linią ciągłą obliczono według wzoru

$$(3.4) \quad f_p = \sigma_k / \sigma_g,$$

gdzie σ_k i σ_g oznaczają granice plastyczności odpowiednio próbki z karbem i próbki gładkiej (rys. 3).

Punkty doświadczalne połączone linią przerywaną obliczono według wzoru

$$(3.5) \quad f_m = \bar{\sigma}_k / \bar{\sigma}_g,$$

gdzie $\bar{\sigma}_k$ i $\bar{\sigma}_g$ oznaczają maksymalne naprężenie podane na rys. 3.

Teoretyczną własność współczynnika $f = 2,06$ wyznaczono dla karbu o stosunku $C/R = 0,057$ z odpowiedniego wykresu [2].

Wartości współczynnika obliczonego dla nowej definicji granicy plastyczności (3.4) porównano z wartościami współczynnika wyznaczonymi dla tradycyjnej definicji uplastycznienia [1]. Uplastycznienie wiąże się tu z punktem, przy którym tangens kąta pochylenia stycznej do wykresu $\sigma(\Delta l)$ równy jest dwóm trzecim tangensa kąta pochylenia początko-

wego prostoliniowego odcinka wykresu. Oznaczając przez σ_{sk} oraz σ_{sg} odpowiednio naprężenie uplastyczniające próbkę gładką i próbkę z korbem otrzymamy

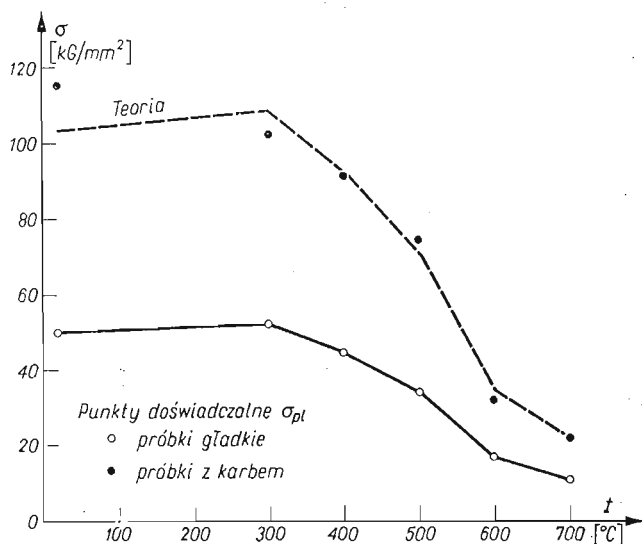
$$(3.6) \quad f = \sigma_{sk}/\sigma_{sg}.$$

Rozwiązanie teoretyczne pomijające wpływ temperatury przewiduje stałą wartość współczynnika umocnienia niezależnie od temperatury badania. Natomiast wyniki doświadczeń pokazują, że współczynnik f zmienia się w funkcji temperatury. W przypadku współczynnika f obliczonego według wzoru (3.4), jego wartości różnią się od wartości teoretycznej od +12% do -14%. Największe odchylenie od rozwiązania teoretycznego ma miejsce przy temperaturze 600°C, przy której stal ŁH-15 posiada dobre własności plastyczne.

Wartości współczynnika f_m obliczone według wzoru (3.5) są znacznie mniejsze od teoretycznej wielkości f . Najmniejsza wartość tego współczynnika odpowiada temperaturze 300°C, przy której otrzymano największą wytrzymałość i wydłużenie w momencie osiągnięcia maksymalnej siły dla próbki gładkiej (rys. 3). Wzrost temperatury powyżej 300°C wywołuje wzrost współczynnika f_m obliczonego ze wzoru (3.5).

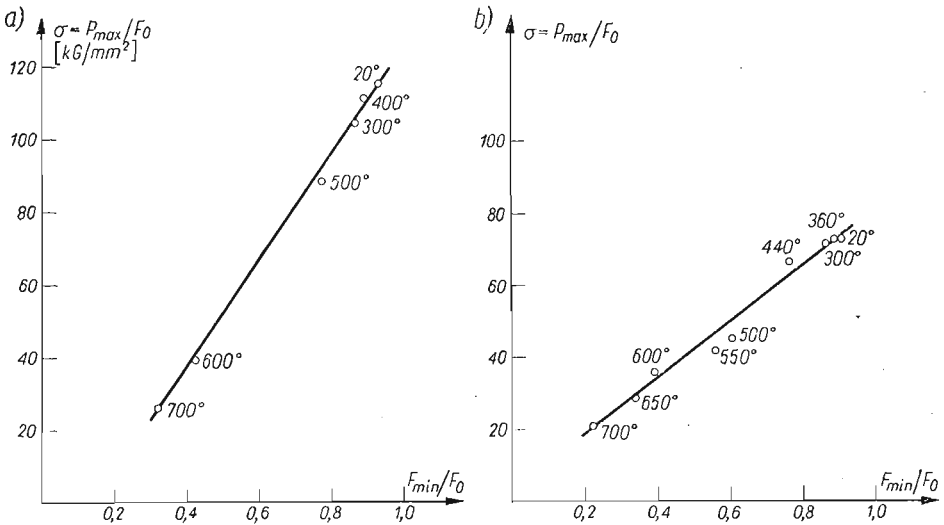
Na rys. 4 naniesiono również punkty doświadczalne wyznaczone według wzoru (3.6) dla trzech temperatur, przy których można było wyznaczyć takie wielkości. Zasadnicze wnioski omówione poprzednio, to znaczy, że współczynnik f zmienia się w funkcji temperatury i różni się od współczynnika teoretycznego, pozostają ważne również przy tej tradycyjnej definicji naprężenia uplastyczniającego.

Na rys. 5 linią przerywaną pokazano wykres teoretyczny zmiany naprężenia uplastyczniającego próbkę z korbem przy rozciąganiu w różnych temperaturach. Wykres otrzymano mnożąc odpowiednie rzędne wykresu dla próbek gładkich (rys. 3, punkty białe) przez teoretyczny współczynnik umocnienia $f = 2,06$. Położenie punktów eksperymentalnych wskazuje, że rozwiązanie teoretyczne dobrze opisuje wyniki doświadczeń w podwyższonych temperaturach.



Rys. 5

Na rys. 6 pokazano zależność pomiędzy maksymalnym naprężeniem umownym (odpowiadającym największej sile) i względnym zmniejszeniu przekroju próbki w momencie zerwania. Przy punktach doświadczalnych podano temperaturę badania. Linie proste



Rys. 6

dobrane metodą minimum kwadratu błędu dobrze opisują wyniki doświadczeń w zakresie temperatur stosowanych w tej pracy. Rysunek 6a zawiera dane z badań próbek ze stali ŁH-15. Na rys. 6b pokazano wyniki dla podobnych wymiarowo próbek ze stali węglowej 4.

4. Wnioski

Przy rozciąganiu próbek gładkich ze stali ŁH-15 osiągnęły one największą wytrzymałość i wydłużenie w punkcie ekstremalnym w temperaturze 300°C. Próbki z karbem rozciągane w temperaturze 300°C były słabsze niż próbki badane w temperaturze 20 oraz 400°C.

Naprężenie uplastyczniające próbki z karbem zmniejsza się ze wzrostem temperatury w zakresie od 20 do 700°C, podczas gdy dla próbek gładkich najwyższą granicę plastyczności zmierzono przy 300°C.

Naprężenie uplastyczniające pręta z karbem można opisać za pomocą współczynnika obliczonego przy założeniach teorii ciała sztywno idealnie plastycznego.

Doświadczalnie stwierdzono, że istnieje liniowa zależność między maksymalną nośnością pręta z karbem i redukcją jego przekroju przy zerwaniu w różnych temperaturach.

Literatura cytowana w tekście

1. L. DIETRICH, J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Nośność graniczna elementów konstrukcji*, PWN, Warszawa 1970.
2. L. DIETRICH, K. TURSKI, *Doświadczalna analiza wytrzymałości prętów z karbem w niskich temperaturach*, Rozpr. Inż., 3, 20, (1972).

Резюме

ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ
С КОЛЬЦЕВОЙ ВЫТОЧКОЙ

В работе представлено исследование влияния температуры в диапазоне от 20°C до 700°C на предел текучести стержней с V-образной выточкой. Для сравнения напряжения текучести в разных температурах приводится новое определение предела текучести. Течение наступает, когда работа, затраченная на пластическую деформацию, достигает определенной части полной работы, подсчитываемой до точки максимума силы.

Summary

STRENGTH OF STEEL NOTCHED RODS IN TENSION
AT HIGH TEMPERATURES

The paper deals with the influence of temperature between 20 to 700°C on the behaviour of axially-symmetric rods subject to tension. To compare the yield conditions of rods stretched at different temperatures, a new definition of the yield point is introduced. It is assumed that yielding develops when the work dissipated equals a definite fraction of the total plastic work measured up to moment of the force reaching its maximum.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA
KIELCE

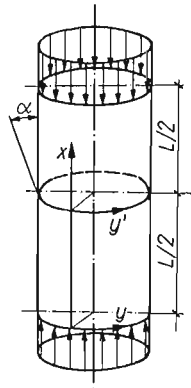
Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1977 r.

STATECZNOŚĆ POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ Z OBWODOWYM ZAŁOMEM
PRZY ŚCISKANIU OSIOWYM

STANISŁAW ŁUKASIEWICZ, JERZY TUMIŁOWICZ (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Celem pracy jest zbadanie na drodze teoretycznej wpływu osiowo-symetrycznego załomu (rys. 1) na stateczność ściskanej powłoki walcowej. Tego rodzaju nieciągłość stycznej do południka może powstać przy spawaniu dwóch odcinków rur, jeżeli nastąpi przy tym tzw. wciągnięcie szwu. Załom ma zwykle niewielką głębokość i charakteryzuje się małym kątem między stycznymi do południka po obu jego stronach. Nawet w pobliżu załomu powierzchnia środkowa mało różni się od powierzchni walcowej.



Rys. 1

Badania stateczności powłoki walcowej z wstępnymi niedoskonałościami kształtu prowadzono już od dawna (niektóre rozwiązania przedstawione są w monografii [1]). Jednak autorom pracy nie znane są w literaturze światowej opracowania dotyczące wpływu na stateczność nieciągłości stycznej do powierzchni. Prawdopodobnie przedstawione tu zagadnienie nie było dotychczas badane teoretycznie.

W pracy przyjęto, że powłoka jest cienka, izotropowa i ma stałą grubość. Zagadnienie rozwiązano korzystając z równań technicznej teorii powłok DONNELLA-WŁASOWA. W przypadku powłoki walcowej ze wstępnymi niedoskonałościami kształtu mają one następującą postać (rys. 1)

$$(1) \quad \frac{D}{h} \Delta \Delta w = L(w + w_0, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

$$(2) \quad \frac{1}{E} \Delta \Delta \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w + 2w_0) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

gdzie w jest ugięciem powłoki (dodatnim do wnętrza), Φ — funkcją naprężeń, $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$, $\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E — modułem sprężystości materiału powłoki, ν — liczbą Poissona, h — grubością powłoki, R — promieniem walca $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — operator Laplace'a, $L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ jest nieliniowym operatorem różniczkowym.

Kształt powłoki został określony przez ugięcie wstępne w_0 , które przyjęto w postaci

$$(3) \quad \begin{aligned} w_0 &= f_0 e^{k\left(x - \frac{L}{2}\right)}, & x < \frac{L}{2}, \\ w_0 &= f_0 e^{-k\left(x - \frac{L}{2}\right)}, & x \geq \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

gdzie f_0 jest głębokością, załomu, α_0 oznacza kąt załomu pokazany na rys. 1, określony przez $\operatorname{tg} \alpha_0 = \left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=L/2} = kf_0$, L — długość powłoki.

Stosując równania (1) i (2) przyjęto, że współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni środkowej badanej powłoki są stałe w całym obszarze i równe jedności. Postawione zagadnienie rozwiązano metodą Ritza.

Przed podjęciem rozwiązania wykonano doświadczenie, którego celem było stwierdzenie w jakim stopniu istnienie załomu w powłoce wpływa na kształt pofalowania. Próby przeprowadzono na modelach powłok wykonanych z kartonu o wymiarach: $R = 70$ mm, $L = 325$ mm, $h = 0,3$ mm. Załom miał głębokość około 1 mm i kąt około 20° . Po obciążeniu modeli okazało się, że istnienie załomu nie wpływa zasadniczo na formę odkształceń i tylko zmniejsza liczbę fal obwodowych, np. z 6 do 4. Pofalowanie było symetryczne względem płaszczyzn załomu. Przeprowadzone doświadczenia miały charakter jedynie jakościowy i obciążenia krytycznych nie zmierzono. Biorąc pod uwagę wyniki doświadczeń postanowiono przyjąć ugięcie w postaci funkcji stosowanych przy badaniu stateczności walcowej doskonałej oraz powłok zbliżonych kształtem do walca [2].

Istnienie załomu w powłoce powoduje występowanie silnego zginania w jego sąsiedztwie po obciążeniu powłoki. W rozwiązaniu można rozpatrywać tylko jedną połówkę powłoki. Podstawowy stan naprężeń błonowych w powłoce o małym kącie załomu może być zastąpiony przez stan naprężeń identyczny jak w powłoce bez załomu i pewne dodatkowe obciążenie poprzeczne $1/2q$. Wielkość tego obciążenia wynika z równowagi załomu (rys. 2)

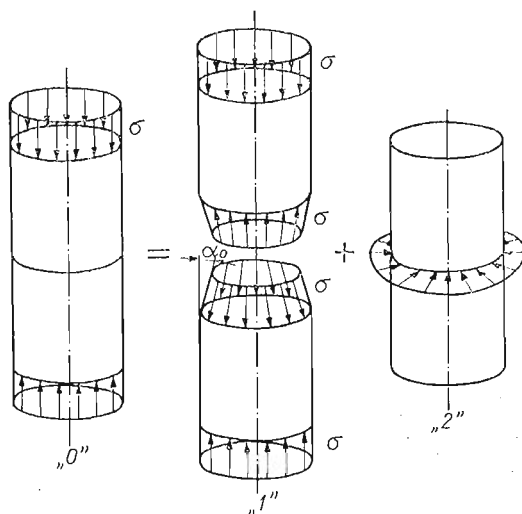
$$(4) \quad q = -2\sigma_{xx} \Big|_{x=\frac{L}{2}} h \sin \alpha_0.$$

Przed rozwiązaniem zagadnienia nieliniowego określono siły krytyczne na podstawie zlinearyzowanego równania (2). Ugięcie przyjęto w postaci:

$$(5) \quad w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + pw_1(x, y) + f_2,$$

gdzie m — liczba półfal na tworzącej, nieparzysta — odkształcenie symetryczne względem załomu, n — liczba fal obwodowych.

Składnik $p \cdot w_1(x, y)$ reprezentuje stan zgięciowy istniejący przed wyboczeniem (rys. 2). Jego wartość obliczono analizując ugięcie powłoki walcowej poddanej działaniu obciążenia q w połowie długości. Funkcja w spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia. Przy



Rys. 2

obliczaniu sił błonowych uwzględniono również składową pochodzącą od stanu zgięciowego przed pofalowaniem. Pełna energia potencjalna była minimalizowana ze względu na parametr f_1 . Okazało się, że składniki uwzględniające stan zgięciowy przed pofalowaniem nie miały wpływu na wartości sił krytycznych. W dalszych obliczeniach, opartych na równaniach nieliniowych zrezygnowano ze składnika reprezentującego podstawowy stan zgięciowy w przewidywanej postaci odkształcenia.

Zależność górnej siły krytycznej od kąta załomu α_0 uzyskana na podstawie rozwiązania zagadnienia w ujęciu liniowym była bardzo podobna do zależności otrzymanej z równań nieliniowych i nie będzie tu przedstawiona.

2. Rozwiązanie zagadnienia

Do badania stateczności powłoki w ujęciu nieliniowym przyjęto następującą funkcję ugięcia:

$$(6) \quad w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + f_3,$$

$x \leq \frac{L}{2}$, m — liczba półfal wzdłuż tworzącej walca, n — liczba fal na obwodzie.

Spełnia ona warunki brzegu swobodnie podpartego.

Jeśli m jest liczbą nieparzystą można przyjąć, że druga połowa powłoki odkształca się w sposób opisany identyczną funkcją; odkształcenia będą symetryczne względem załomu. W przypadku m parzystego, gdy rozpatrywana część powłoki odkształca się w sposób określony przez (6) a deformację drugiej połowy opisuje wzór

$$(7) \quad w = -f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + f_3,$$

w jest ciągle wraz z pochodnymi na całej powłoce, a pełna energia potencjalna drugiej powłoki jest opisana identycznym wzorem jak pierwszej. Jednocześnie z rozpatrywaną częścią odkształcać się będzie pozostała część powłoki. Mamy wtedy wyboczenie o postaci niesymetrycznej względem płaszczyzny załomu.

Odpowiadający przyjętym odkształceniom rozkład naprężeń błonowych został obliczony z równania ciągłości odkształceń dla powłoki cylindrycznej:

$$(8) \quad \frac{1}{E} \Delta \Delta \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Równanie to różni się od (2) brakiem po prawej stronie składnika $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Przy małej krzywiznie południka w okolicy załomu (mały kąt α_0 — rzędu paru stopni oraz niezbyt małe f_0) pominięty wyraz jest dużo mniejszy od składników prawej strony równania (8). W przypadku odkształcenia osiowo-symetrycznego równania (2) i (8) są identyczne.

Z powodu powyższego uproszczenia w rozwiązaniu nie występuje w sposób jawny parametr załomu f_0 , a efekt załomu jest scharakteryzowany jedynie przez kąt załomu α_0 . Po wstawieniu założonego ugięcia (6) do równania (8) i scałkowaniu otrzymuje się funkcję naprężeń:

$$(9) \quad \Phi/E = f_1^2 \frac{r^2 n^2}{2} \left(\frac{1}{16n^4} \cos \frac{2ny}{R} + \frac{1}{16r^4} \cos \frac{2rx}{R} \right) + \\ + f_1 f_2 r^2 n^2 \left[\frac{1}{(3r, n)} \sin \frac{3rx}{R} \sin \frac{ny}{R} - \frac{1}{(r, n)} \sin \frac{rx}{R} \sin \frac{ny}{R} \right] + \\ + f_1 \frac{r^2 R}{(r, n)} \sin \frac{rx}{R} \sin \frac{ny}{R} - f_2 \frac{R}{8r^2} \cos \frac{2rx}{R} - \frac{py^2}{2},$$

gdzie $(ar, bn) = [(ar)^2 + (bn)^2]^2$; $r = \frac{m\pi R}{L}$.

Parametr f_3 ugięcia wyznacza się z warunku cykliczności przemieszczeń obwodowych v :

$$(10) \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0.$$

Pochodną przemieszczenia można obliczyć biorąc pod uwagę zależność między przemieszczeniami a odkształceniem oraz prawo Hooke'a. Otrzymamy

$$(11) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R}.$$

Ponieważ wyrażenie (11) jest funkcją x oraz y , warunek (10) może być spełniony tylko po uśrednieniu w kierunku zmiennej x . Otrzymamy

$$(12) \quad \frac{f_3}{R} = -\frac{\nu p}{E} + f_1^2 \frac{n^2}{8R^2} - \frac{f_2}{2R}.$$

Pełna energia potencjalna wynosi

$$(13) \quad \mathcal{E} = U_c + U_\theta + L,$$

gdzie energia naprężeń błonowych:

$$(14) \quad U_c = \frac{h}{2E} \int_0^{L/2} \int_0^{2\pi R} [(\Delta\Phi)^2 - (1+\nu)L(\Phi, \Phi)] dx dy,$$

a energia zginania powłoki

$$(15) \quad U_\theta = \frac{D}{2} \int_0^{L/2} \int_0^{2\pi R} [(\Delta w)^2 - (1-\nu)L(w, w)] dx dy.$$

Praca sił zewnętrznych L składa się z dwóch części:

— pracy L_1 sił błonowych na zbliżeniu końców powłoki

$$(16) \quad L_1 = h \int_0^{2\pi R} \Delta\sigma_{xx}|_{x=0} dy,$$

gdzie Δ jest połową zmiany odległości między końcami powłoki, dodatnią przy skróceniu

$$(17) \quad \Delta = - \int_0^{L/2} \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_0^{L/2} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx;$$

— pracy L_2 dodatkowego obciążenia q na przemieszczeniu załomu

$$(18) \quad L_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} q \cdot w \Big|_{x=\frac{L}{2}} dy = h \sin \alpha_0 \int_0^{2\pi R} \sigma_{xx} \Big|_{x=\frac{L}{2}} w \Big|_{x=\frac{L}{2}} dy,$$

$$(19) \quad L = L_1 + L_2.$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych bezwymiarowych:

$$(20) \quad \hat{E} = \mathcal{E} \frac{2R^2}{\pi E L h^4}, \quad \vartheta = \frac{r}{h} = \frac{m\pi R}{nL}, \quad \hat{p} = \frac{\dot{p}R}{Eh}$$

$$\xi_1 = f_1/h, \quad \xi_2 = f_2/h,$$

pełną energię potencjalną można zapisać w postaci:

$$(21) \quad E = E_1 \xi_1^4 + E_2 \xi_1^2 \xi_2^2 + E_3 \xi_1^2 \xi_2 + E_4 \xi_1^2 + E_5 \xi_1^2 p + +$$

$$+ E_6 \xi_2^2 + E_7 \xi_2^2 p + E_8 \xi_2 p + E_9 p.$$

Współczynniki $\hat{E}_1 \dots \hat{E}_9$ są niezależne od \hat{p} , ξ_1 , ξ_2 .

Dla nieparzystych m wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{1}{128} n^4 (1 + \vartheta^4) \frac{h}{R}, \\
 E_2 &= \frac{1}{4} (n\vartheta)^4 \left[\frac{1}{(3\vartheta, 1)} + \frac{1}{(\vartheta, 1)} \right] \frac{h}{R}, \\
 E_3 &= -\frac{1}{16} n^2 \left[1 + \frac{8\vartheta^4}{(\vartheta, 1)} \right] + 2 \sin \alpha_0 (n\vartheta)^2 \left[\frac{1}{(3\vartheta, 1)} + \frac{1}{(\vartheta, 1)} \right] \frac{R}{L}, \\
 E_4 &= n^4 \frac{h}{R} \frac{(\vartheta, 1)}{48(1-\nu^2)} + \frac{1}{4} \frac{R}{h} \frac{\vartheta^4}{(\vartheta, 1)} - 2 \frac{R}{L} \frac{R}{h} \sin \alpha_0 \frac{\vartheta^2}{(\vartheta, 1)}, \\
 (22) \quad E_5 &= -\frac{1}{4} n^2 [\vartheta^2 + 2 \sin \alpha_0] \frac{R}{L}, \\
 E_6 &= \frac{1}{6(1-\nu^2)} (n, \vartheta)^4 \frac{h}{R} + \frac{1}{8} \frac{R}{h}, \\
 E_7 &= -\frac{1}{2} (n\vartheta)^2, \\
 E_8 &= -2 \frac{R}{h} \frac{R}{L} \sin \alpha_0, \\
 E_9 &= \frac{R}{h} + 4\nu \sin \alpha_0 \frac{R}{h} \frac{R}{L}.
 \end{aligned}$$

W przypadku m parzystego niektóre współczynniki mają nieco inną postać:

$$\begin{aligned}
 E_3 &= -\frac{1}{16} n^2 \left[1 + \frac{8\vartheta^4}{(\vartheta, 1)} \right], \\
 (23) \quad E &= n^4 - \frac{(\vartheta, 1)}{48(1-\nu^2)} + \frac{1}{4} \frac{R}{h} \frac{\vartheta^4}{(\vartheta, 1)}, \\
 E_8 &= 2 \sin \alpha_0 \frac{R}{h} \frac{R}{L}.
 \end{aligned}$$

Pełną energię potencjalną zminimalizowano ze względu na parametry ξ_1 i ξ_2

$$(24) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi_2} = 0.$$

Ze wzorów (24) otrzymano w przypadku $\xi_1 \neq 0$ (odkształcenie nieosiowo-symetryczne) zależność \hat{p} od ξ_2 :

$$(25) \quad \hat{p} = -\frac{-4E_1 E_6 \xi_2 + (E_2 \xi_2^2 + E_3 \xi_2 + E_4) (2E_2 \xi_2 + E_3)}{2E_1 (2E_7 \xi_2 + E_8) - E_5 (2E_2 \xi_2 + E_3)}$$

oraz zależność ξ_1 od ξ_2 i \hat{p} :

$$(26) \quad \xi_1^2 = -\frac{2E_6 \xi_2 + 2E_7 \xi_2 \hat{p} + E_8 \hat{p}}{2E_2 \xi_2 + E_3}.$$

Powyższe wzory opisują rodzinę krzywych równowagi o dwóch parametrach: n oraz ϑ (ϑ jest zmienną dyskretną, odpowiada całkowitym wartościom m i n).

Krzywe przedstawiono w układzie współrzędnych $\hat{e}-\hat{p}$, gdzie

$$(27) \quad \hat{e} = \frac{2\Delta R}{Lh}$$

jest bezwymiarowym parametrem charakteryzującym skrócenie powłoki. Korzystając ze wzorów (17) i (27), założonej postaci ugięcia i obliczonej funkcji naprężeń otrzymuje się wzór wiążący \hat{p} oraz \hat{e}

$$(28) \quad \hat{e} = \hat{p} + \frac{1}{8} \vartheta^2 n^2 \frac{h}{R} \left(\xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \right).$$

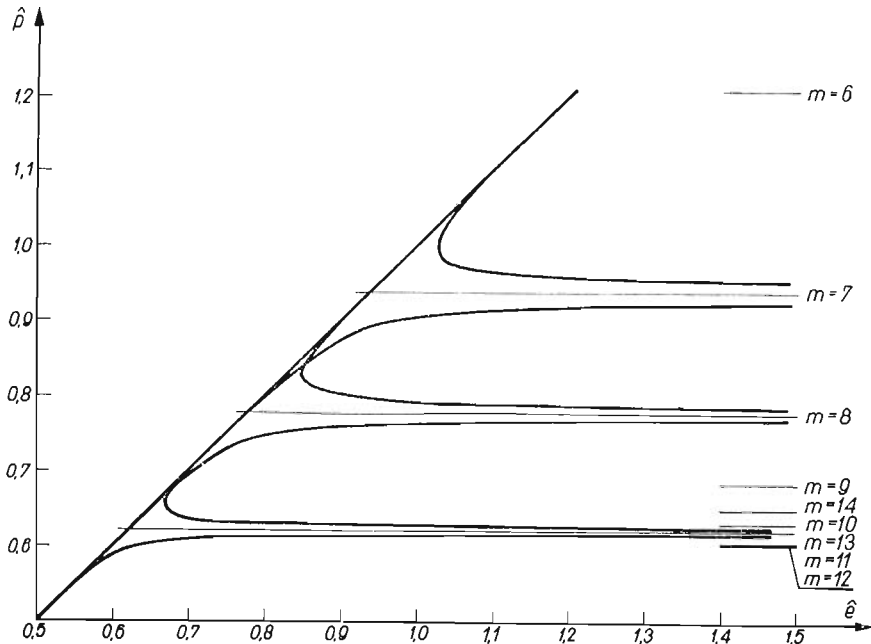
W ramach założonego modelu odkształcenia powłoki (6) pozostaje zbadanie przypadku, gdy $\xi_1 = 0$. Odkształcenie jest wtedy osiowo-symetryczne:

$$(29) \quad w = -\frac{1}{2} f_2 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \frac{1}{2} f_2 + f_3.$$

Pierwsze z równań (24) jest spełnione tożsamościowo, drugie daje zależność

$$(30) \quad \xi_2 = -\frac{E_8 \hat{p}}{2(E_6 + E_7 \hat{p})}.$$

Dla każdego m istnieje krzywa osiowo-symetrycznych stanów równowagi, rozpoczynająca się w punkcie $\hat{p} = 0, \hat{e} = 0$, od której odłączają się linie opisujące odkształcenia o różnych liczbach fal na obwodzie powłoki (rys. 3).

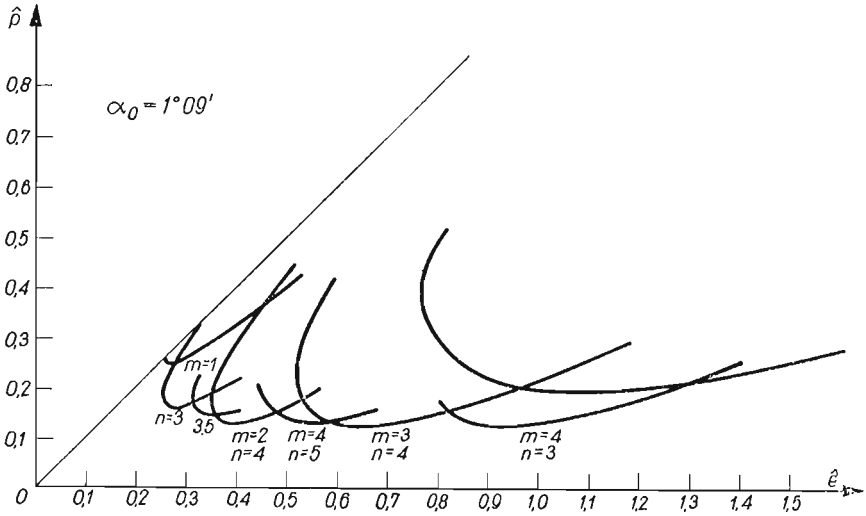


Rys. 3. Krzywe równowagi stanów osiowo-symetrycznych przy $\alpha_0 = 2^\circ 52'$

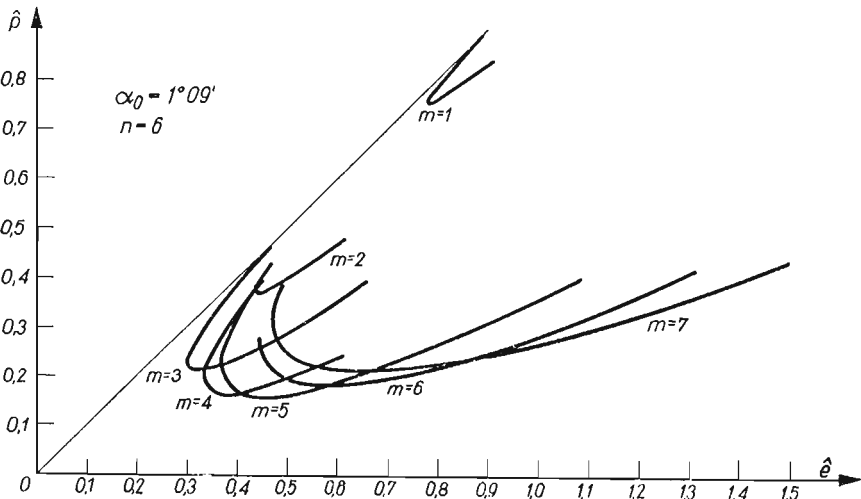
3. Wyniki obliczeń numerycznych

Obliczenia przeprowadzono dla $\nu = 0,3$; $h/R = 0,01$; $L/R = 4$. Na rys. 4 - 7 przedstawione są krzywe stanów równowagi odpowiadające różnym liczbom fal. Nie pokazano wykresów dla $n = 1, 2$ oraz $n > 6$ gdyż odpowiadają one dużym siłom i odkształceniom i opisują nie realizujące się stany równowagi. Z tego samego względu nie przedstawiono wykresów dla $m > 9$.

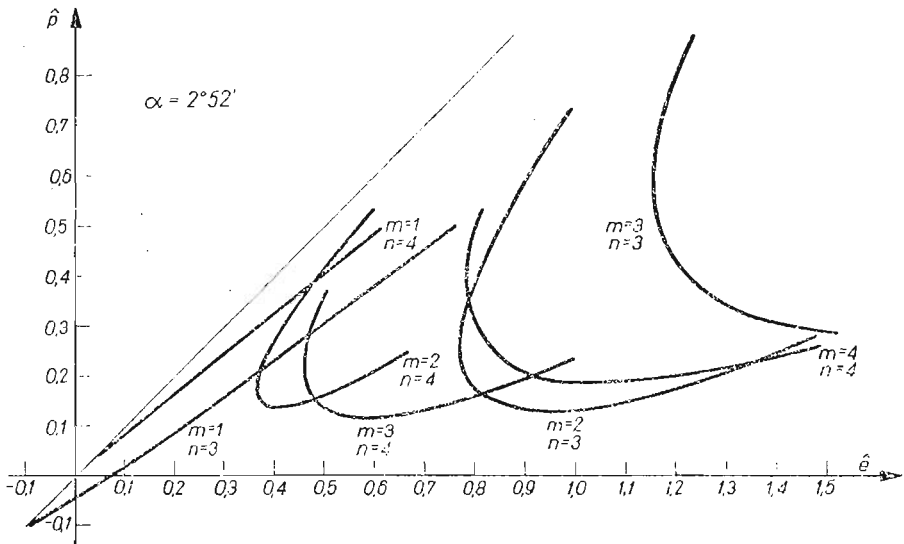
Krzywe nieosiowo-symetrycznych stanów równowagi rozpoczynają się blisko prostej $\hat{p} = \hat{e}$, dalej przy wzroście ξ_2 na ogół przebiegają w kierunku zmniejszającego się \hat{p} i \hat{e} ,



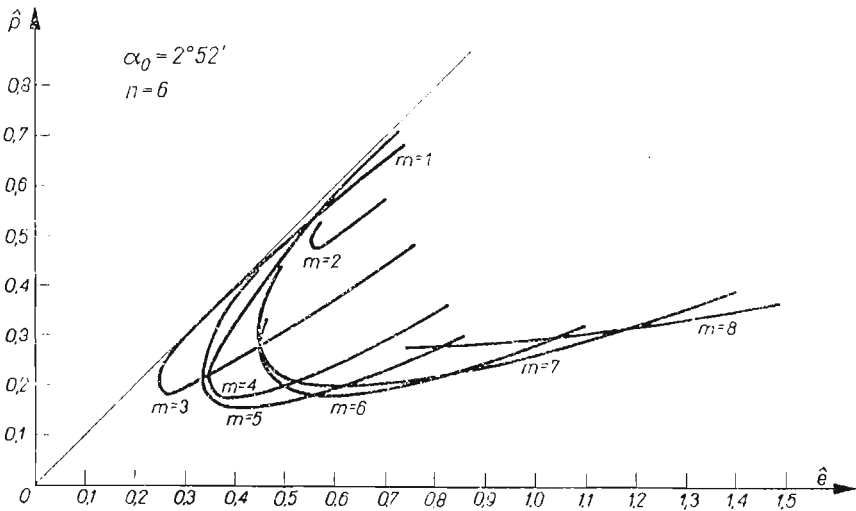
Rys. 4. Krzywe stanów równowagi przy $\alpha_0 = 1^\circ 09'$ dla $n = 3, 4, 5$



Rys. 5. Krzywe stanów równowagi przy $\alpha_0 = 1^\circ 09'$ dla $n = 6$



Rys. 6. Krzywe stanów równowagi przy $\alpha_0 = 2^\circ 52'$ dla $n = 3, 4$



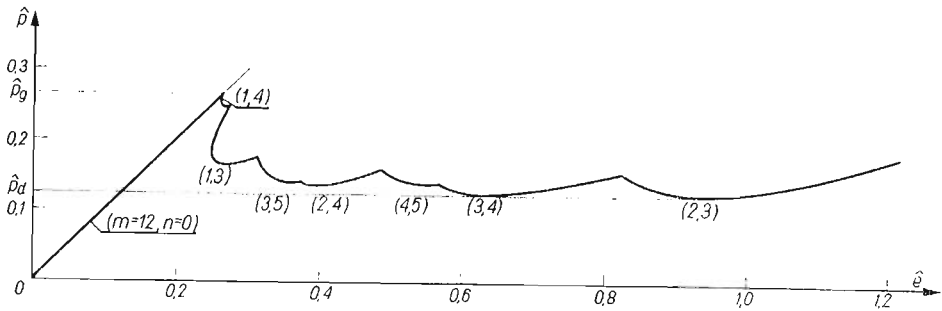
Rys. 7. Krzywe stanów równowagi przy $\alpha_0 = 2^\circ 52'$ dla $n = 6$

osiągają minimum i dążą ku rosnącym \hat{p} i \hat{e} . Wyjątek stanowią krzywe odpowiadające $m = 1$ oraz $n = 3 \div 6$ przy $\alpha_0 = 2^\circ 52'$ — są one stale rosnące. Wartość kąta załomu najbardziej wpływa na przebieg linii odpowiadających małym m oraz n . Ze wzrostem α_0 linie te przesuwają się do dołu i wyprostowują się. Z przebiegu linii określonej parametrami $\alpha_0 = 2^\circ 52'$, $m = 1$, $n = 3$ wynika, że może istnieć stan równowagi powłoki pofalowanej bez obciążenia.

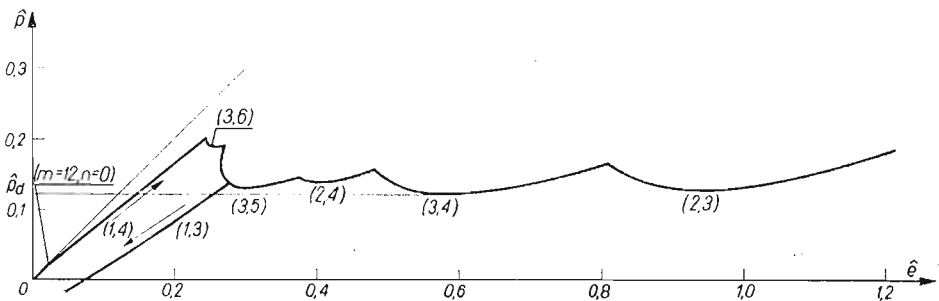
Przy obciążeniu powłoka początkowo odkształca się osiowo-symetrycznie. Krzywe równowagi stanów osiowo-symetrycznych rozpoczynają się w początku układu współ-

rzędnych i przebiegają początkowo (co najmniej do $\hat{p} \approx 0,57$) bardzo blisko prostej $\hat{p} = \hat{e}$. Powyżej każda z nich ma asymptotę poziomą przy \hat{p} zależnym od m , a niezależnym od kąta załomu. Za asymptotą poziomą przy dalszym wzroście p krzywe zbliżają się nieograniczenie do prostej stanów niepofalowanych. Niektóre linie równowagi przedstawione są na rys. 3. Dla ustalonego m przebieg krzywej stanu osiowo-symetrycznego zależy od wielkości kąta załomu. Gdy maleje on do zera, krzywa dąży do pokrycia się z linią $\hat{p} = \hat{e}$. W przypadku doskonałej powłoki cylindrycznej, osiowo-symetryczne stany równowagi są możliwe na prostej stanów niepofalowanych oraz na prostych równoległych do osi \hat{e} . Siły krytyczne przy osiowo-symetrycznych odkształceniach powłoki doskonałej określają położenie asymptot w przypadku powłoki z załosem. Ich zależność od m przedstawia tabl. 1 ($2m$ oznacza tam liczbę półfal wzdłuż tworzącej walca — wzór (29)).

Na podstawie przedstawionych wyników obliczeń można określić spodziewany przebieg zależności między siłą a skróceniem powłoki przy ściskaniu. Spośród wielu otrzymanych rozwiązań (dla różnych m i n), spełniających warunek minimum pełnej energii potencjalnej względem parametrów f_1 oraz f_2 , należy wybrać te, które mogą się zrealizować. Przyjmując jako kryterium wyboru krzywych ich wysokość położenia na wykresie $\hat{e} - \hat{p}$ otrzymano wykresy ściskania powłok o kącie załomu $1^\circ 09'$ oraz $2^\circ 52'$ przedstawione na rys. 8 i 9.



Rys. 8. Krzywa obciążenia powłoki z załosem o kącie $\alpha_0 = 1^\circ 09'$



Rys. 9. Krzywa obciążenia powłoki z załosem o kącie $\alpha_0 = 2^\circ 52'$

Przy $\alpha_0 = 1^\circ 09'$ powłoka początkowo odkształca się osiowo-symetrycznie, $m = 12$. Jest to pofalowanie o bardzo małej amplitudzie i praktycznie nie zmniejsza sztywności powłoki. Przy $\hat{p} = \hat{p}_g = 0,264$ (górną siłą krytyczną) linie stanów symetrycznych przecinają się z krzywą $m = 1, n = 4$. Następuje przeskok, przy którym spada siła albo wzrasta

Tablica 1

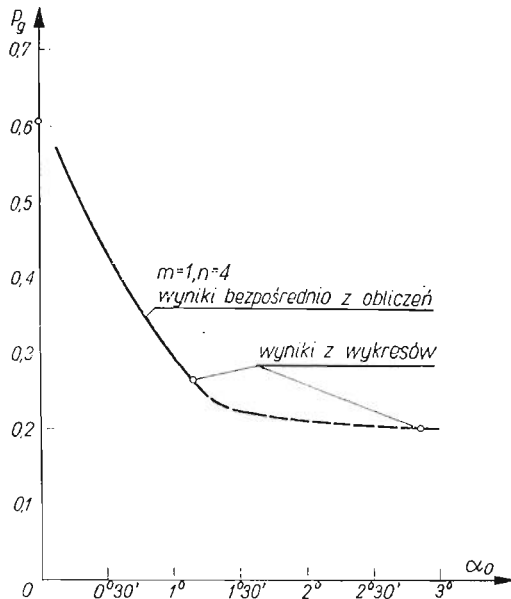
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
\hat{p}_a	40,57	10,15	4,523	2,571	1,679	1,208	0,938	0,778	0,683	0,631	0,608	0,606	0,621	0,649	0,688

skrócenie (lub też zmienia się jedno i drugie — w zależności od urządzenia obciążającego powłokę). Dalej stan powłoki zmienia się według krzywej girlandowej. Dolna siła krytyczna wynosi $\hat{p}_d = 0,125$.

W przypadku załomu o kącie $\alpha_0 = 2^\circ 52'$, już przy $\hat{p} = 0,0234$ następuje przejście w stan niesymetryczny. Następnie siła i skrócenie rosną przy $m = 1, n = 4$; widać wyraźne zmniejszenie sztywności powłoki. Górna siła krytyczna ma w tym przypadku wartość 0,200. Dalej następuje przeskok lub powłoka deformuje się według przedstawionej krzywej — w zależności od sposobu obciążenia. Dolna siła krytyczna wynosi $\hat{p} = 0,122$. Interesujące zjawisko zachodzi przy odciążaniu powłoki. Ostatnia faza odciążania przebiega inaczej niż pierwsza część obciążania. Po usunięciu obciążenia powłoka pozostanie pofalowana, odkształcenie pozostanie także przy niezbyt silnym rozciąganiu.

Na obu wykresach ściskania powłoki widoczna jest tendencja wzrostu stosunku m/n przy zbliżaniu końców powłoki. Oznacza to zmianę proporcji zakłębnień — względne zwiększenie ich wymiaru obwodowego i jest zgodne z wynikami doświadczeń przeprowadzonych na powłokach «doskonałych» [1].

Zależność górnej siły krytycznej od wielkości kąta załomu przedstawia rys. 10. Przy małych kątach górną siłę krytyczną określa punkt przecięcia linii stanów symetrycznych oraz niesymetrycznych. W tym zakresie zależność jest przedstawiona linią ciągłą. Gdy



Rys. 10. Zależność górnej siły krytycznej od kąta załomu

kąt załomu $\alpha_0 \rightarrow 0$ rozwiązanie zagadnienia wyznaczenia sił krytycznych przechodzi w znane rozwiązanie dla powłoki doskonałej ($\hat{p} = 0,605$). Jeżeli kąt załomu jest większy, przejście powłoki w stan niesymetryczny nie wyznacza górnej siły krytycznej (w przeciwieństwie do powłoki walcowej doskonałej). Za punktem bifurkacji siła rośnie dalej i osiąga największą wartość przy większych odkształceniach. W tym przypadku górną

siłę krytyczną określa najwyżej położony punkt wykresu ściskania powłoki; odpowiedni odcinek zależności $\hat{p}_g(\alpha_0)$ zaznaczono na rys. 10 linią przerywaną.

Należy podkreślić, że w przedstawionym rozwiązaniu badano tylko stany równowagi. Zmiana liczby pofalowań na powłoce nie zachodzi statycznie, przejściu na kolejny odcinek krzywej girlandowej towarzyszy mały przeskok. Z tego względu wykres ściskania uzyskany doświadczalnie będzie różnił się od krzywej przedstawionej na rys. 8 i 9.

4. Wnioski

Z przedstawionego rozwiązania wynika, że istnienie obwodowego złomu na ściskanej powłoce walcowej ma niekorzystny wpływ na jej stateczność. Szczególnie silny jest wpływ na górną siłę krytyczną. Załom o kącie 1° powoduje zmniejszenie górnej siły krytycznej o 50%. Natomiast dolna siła krytyczna mało zależy od kąta załomu. Przy ściskaniu powłoki z załomem o bardzo małym kącie następuje przeskok, podobnie jak w przypadku powłoki doskonałej. Im kąt załomu większy, tym przeskok będzie mniejszy, przy kącie o wielkości rzędu paru stopni powłoka może odkształcić się bez przeskoku związanego z dużym spadkiem siły i znacznym skróceniem.

Literatura cytowana w tekście

1. А.С. Волмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, Москва 1967.
2. St. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSKOWSKI: On the stability and the postbuckling equilibrium of shells of revolution, *ZAMM*, 51 (1971) 635 - 639.

Р е з ю м е

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ИЗЛОМОМ ПО ОКРУЖНОСТИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В работе обсуждается влияние поперечного излома поверхности цилиндрической оболочки на ее устойчивость при осевом сжатии. Такой излом может получиться в результате сварки цилиндрических труб. Задача решена в нелинейной постановке методом Ритца. Исследовано влияние величины угла излома на верхнюю и нижнюю критическую силу.

S u m m a r y

STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL WITH A CIRCUMFERENTIAL NOTCH UNDER AXIAL COMPRESSION

The paper concerns the effect of a circumferential notch at the surface of the axially compressed cylindrical shell on its stability. Such a notch may be a result of welding of two cylindrical pipes. The problem is solved by means of the Ritz method. The effect of the value of the notch angle on the critical force and postbuckling behaviour is examined.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1977 r.

WYZNACZENIE STANU NAPRĘŻENIA
W OSIOWO-SYMETRYCZNYM POŁĄCZENIU KLEJONYM OBCIĄŻONYM
MOMENTEM SKRĘCAJĄCYM

KAROL GRUDZIŃSKI, TADEUSZ BURDA, LEON ŁABUĆ (SZCZECIN)

1. Wstęp

Klejenie metali w skali przemysłowej datuje się od czasów drugiej wojny światowej i zostało zastosowane po raz pierwszy w brytyjskich fabrykach samolotów. W latach powojennych ten sposób łączenia metali znalazł szerokie zastosowanie w przemyśle precyzyjnym, elektrotechnicznym, maszynowym, motoryzacyjnym, raketowym i innych. W miarę wzrostu jakości produkowanych klejów, postępu technologii klejenia i rozwoju prac badawczych, klejenie metali wprowadzane jest do coraz to nowych gałęzi przemysłu. Obecnie stosuje się je nie tylko do łączenia blach i elementów cienkościennych, ale również do grubościennych i odpowiedzialnych złączy konstrukcyjnych, przenoszących znaczne obciążenie.

Liczne badania oraz praktyka wskazują na dużą przydatność i szerokie możliwości zastosowania klejenia do łączenia elementów o powierzchniach walcowych i stożkowych [1 - 15].

Przy odpowiednim zaprojektowaniu i wykonaniu, połączenia takie mogą przenosić znaczne siły osiowe i momenty skręcające, przy pełnym wykorzystaniu własności wytrzymałościowych materiałów łączonych.

Połączenia klejone wykazują szereg zalet w porównaniu z tradycyjnymi połączeniami wciskowymi, wpustowymi i klinowymi. Do istotnych zalet zaliczyć można brak naprężeń wstępnych — montażowych oraz brak działania karbu. W połączeniach wciskowych obciążonych dynamicznie, na skutek okresowo zmiennych sprężystych odkształceń elementów, występują bardzo często lokalnie małe poślizgi stykających się powierzchni. Poślizgi te wywołują tzw. korozję cierną, niszczą powierzchnię styku i zmniejszają z upływem czasu nośność połączenia, a często są również przyczyną występowania pęknięć zmęczeniowych czopa [16]. Zastosowanie klejenia wydaje się również mieć korzystny wpływ na izolację i tłumienie drgań oraz hałasu.

Wprowadzenie klejenia na szerszą skalę do łączenia odpowiedzialnych elementów maszyn uwarunkowane jest nie tylko odpowiednio wysokiej jakości klejami i technologią klejenia. Niezbędne do osiągnięcia tego celu są również racjonalne metody obliczeń wytrzymałościowych. Opracowanie takich metod, musi być oparte na gruntowej znajomości własności mechanicznych klejów oraz szczegółowej analizie naprężeń i odkształceń w elementach łączonych i warstwie kleju.

W dotychczasowej praktyce przy obliczeniach wytrzymałościowych i interpretacji wyników badań doświadczalnych połączeń walcowych i stożkowych, z uwagi na znacznie większą (jeden do dwóch rzędów) wartość modułu sprężystości metalu w porównaniu z klejem, elementy łączone traktuje się często jako ciała sztywne [6, 15]. W pracach [2, 3] na przykładzie połączeń walcowych wykazano, że przyjęcie takiego założenia stanowi zbyt duże uproszczenie zagadnienia i prowadzi do fałszywych wniosków odnośnie pracy połączenia i wytrzymałości kleju.

Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy jest ogólny model osiowo symetrycznego połączenia klejonego, obciążonego momentem skręcającym. W modelu tym elementy łączone oraz warstwę kleju traktuje się jako ciała sprężyste odkształcalne. Celem rozważań jest wyznaczenie równań opisujących przebieg zmienności naprężeń w elementach łączonych i warstwie kleju na długości połączenia. Rozwiązanie szczegółowe wyznaczono dla połączenia stożkowego. W oparciu o wyniki obliczeń numerycznych omówiono wpływ parametrów materiałowych i konstrukcyjnych połączenia na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju.

♦

2. Model połączenia

Model rozważanego połączenia klejonego przedstawiono schematycznie na rys. 1. Przyjęto następujące założenia:

- 1) elementy łączone — zwane dalej umownie walcem i tulejką — są ciałami osiowo-symetrycznymi o przekroju poprzecznym zmieniającym się w sposób ciągły i łagodny na długości połączenia;
- 2) adhezja kleju do metalu wyklucza poślizg na powierzchniach granicznych;
- 3) przekroje poprzeczne po obciążeniu połączenia momentem skręcającym pozostają płaskie (hipoteza płaskich przekrojów), a do wyznaczenia naprężeń i odkształceń łączonych elementów przyjmuje się wzory znane z wytrzymałości materiałów;
- 4) grubość warstwy kleju jest mała i stała na przekroju poprzecznym, może się natomiast zmieniać na długości połączenia;
- 5) naprężenia styczne w warstwie kleju w przekrojach prostopadłych do osi połączenia są małe i pomijalne;
- 6) przy dostatecznie małych odkształceniach klej spełnia prawo Hooke'a dla czystego ścinania [20].

Przekrój poprzeczny połączenia, na którym zaznaczono odkształcenie warstwy kleju oraz przemieszczenia kątowe charakterystycznych punktów przedstawia rys. 2. Z rysunku tego oraz przyjętych założeń wynikają następujące związki geometryczne i statyczne:

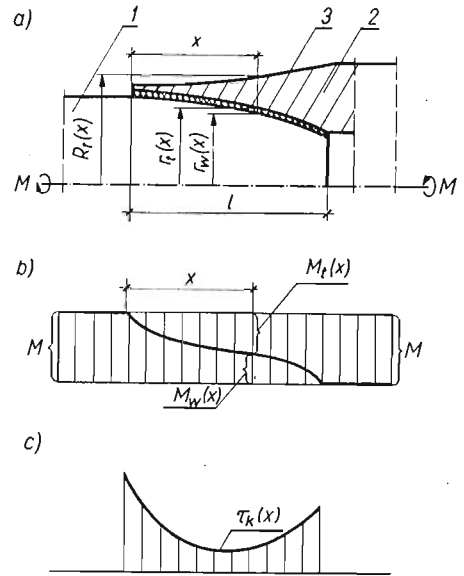
$$(1) \quad \varphi_t(x) + \varphi_k(x) = \varphi_w(x),$$

$$(2) \quad \frac{d\varphi_t}{dx} + \frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{d\varphi_w}{dx},$$

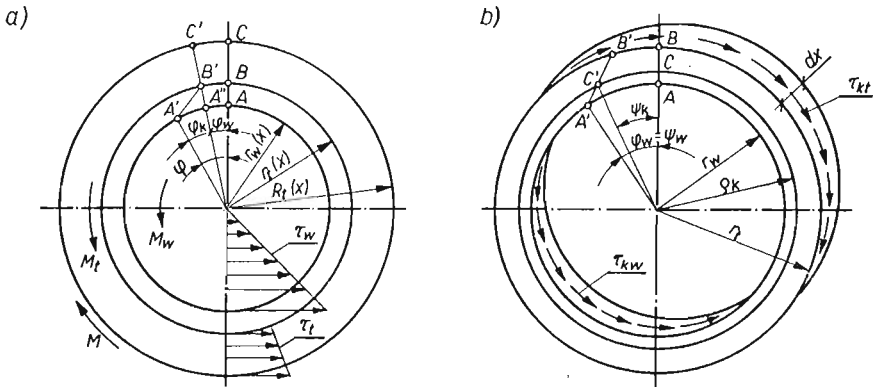
$$(3) \quad M_w(x) + M_t(x) = M,$$

$$(4) \quad \frac{dM_w}{dx} + \frac{dM_t}{dx} = 0,$$

gdzie $\varphi_w(x)$, $\varphi_t(x)$, $\varphi_k(x)$ oznaczają przemieszczenia kątowe wałka, tulejki i kleju w przekroju x (rys. 2a), $M_w(x)$, $M_t(x)$ — momenty skręcające wałek i tulejkę w przekroju x , zaś M — moment skręcający połączenie.



Rys. 1. Osiowo symetryczne połączenie klejone: a) schemat połączenia (1 — wałek, 2 — tulejka, 3 — warstwa kleju); b) orientacyjny wykres momentów skręcających wałek i tulejkę; c) orientacyjny wykres naprężeń stycznych obwodowych w warstwie kleju



Rys. 2. Przemieszczenia kątowe i odkształcenie warstwy kleju w przekroju x połączenia przedstawionego na rys. 1

Z wytrzymałości materiałów znane są wzory na kąt skręcenia wałka i tulejki

$$(5) \quad \frac{d\varphi_w}{dx} = \frac{M_w(x)}{G_w I_{0w}(x)},$$

$$(6) \quad \frac{d\varphi_t}{dx} = \frac{M_t(x)}{G_t I_{0t}(x)},$$

gdzie $I_{0w}(x)$, $I_{0t}(x)$ oznaczają biegunowe momenty bezwładności przekroju wałka i tulejki, zaś G_w , G_t współczynniki sprężystości poprzecznej materiałów wałka i tulejki.

Zmianę momentu na długości dx połączenia określają zależności:

$$(7) \quad \frac{dM_w}{dx} = 2\pi r_w^2(x) \tau_{kw}(x),$$

$$(8) \quad \frac{dM_t}{dx} = 2\pi r_t^2(x) \tau_{kt}(x),$$

gdzie $\tau_{kw}(x)$, $\tau_{kt}(x)$ oznaczają naprężenia styczne obwodowe na powierzchniach granicznych kleju z wałkiem i tulejką (rys. 2b).

Dzieląc stronami (7) i (8) i uwzględniając (4), otrzymuje się dla naprężeń stycznych w warstwach granicznych zależność:

$$(9) \quad |\tau_{kt}(x)| = \left| \frac{r_w^2(x)}{r_t^2(x)} \tau_{kw}(x) \right|.$$

Z nierówności $r_w < r_t$ wynika, że $\tau_{kt} < \tau_{kw}$. Naprężenia styczne na powierzchni walcowej myślowo wyodrębnionego pierścienia kleju (rys. 2b) można wyrazić wzorem [17]:

$$(10) \quad \tau_k = G_k \left(\frac{dv}{d\rho_k} - \frac{v}{\rho_k} \right),$$

gdzie v jest przemieszczeniem (CC') punktów kleju na promieniu ρ_k w kierunku obwodowym. Z rys. 2b wynika zależność:

$$(11) \quad \psi_k = \frac{v}{\rho_k}.$$

Po zrózniczkowaniu (11) i uwzględnieniu (10) otrzymuje się

$$(12) \quad d\psi_k = \frac{\tau_k}{G_k} \frac{d\rho_k}{\rho_k}.$$

Dla małych grubości warstwy kleju można pominąć zmianę wartości naprężeń stycznych i przyjąć, że

$$(13) \quad |\tau_{kw}| \approx |\tau_{kt}| \approx |\tau_k|.$$

Całkując (12) w granicach od r_w do r_t otrzymuje się

$$(14) \quad \varphi_k(x) = \frac{\tau_k(x)}{G_k} \ln \frac{r_t(x)}{r_w(x)}.$$

Zależność (14) po uwzględnieniu (7) i (13) przyjmuje postać

$$(15) \quad \varphi_k(x) = \left[\frac{1}{2\pi G_k r_w^2(x)} \ln \frac{r_t(x)}{r_w(x)} \right] \frac{dM_w}{dx}.$$

Różniczkując (15) względem x otrzymuje się

$$(16) \quad \frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{1}{2\pi G_k} \left\{ -\frac{1}{r_w^3(x)} \left[1 + 2 \ln \frac{r_t(x)}{r_w(x)} \right] \frac{dr_w}{dx} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_t(x)r_w^2(x)} \frac{dr_t}{dx} \frac{dM_w}{dx} + \left[\frac{1}{r_w^2(x)} \ln \frac{r_t(x)}{r_w(x)} \right] \frac{d^2 M_w}{dx^2} \right\}.$$

Na podstawie równania (2), po uwzględnieniu (3), (5), (6) i (16) oraz wprowadzeniu bezwymiarowej funkcji

$$(17) \quad y(x) = \frac{M_w(x)}{M}$$

otrzymuje się równanie

$$(18) \quad y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = e(x),$$

gdzie

$$(19) \quad b(x) = -\frac{1}{r_w(x)} \left[\frac{1}{\ln \frac{r_t(x)}{r_w(x)}} + 2 \right] \frac{dr_w}{dx} + \frac{1}{r_t(x) \ln \frac{r_t(x)}{r_w(x)}} \frac{dr_t}{dx},$$

$$(20) \quad c(x) = -2 \frac{G_k}{G_w} \left[\frac{1}{I_{0w}(x)} + \frac{1}{I_{0t}(x)} \right] \frac{r_w^2(x)}{\ln \frac{r_t(x)}{r_w(x)}},$$

$$(21) \quad e(x) = -2 \frac{G_k}{G_w} \frac{1}{I_{0t}(x)} \cdot \frac{r_w^2(x)}{\ln \frac{r_t(x)}{r_w(x)}}.$$

Równanie różniczkowe (18) opisuje rozkład momentu skręcającego wałek na długości l osiowo symetrycznego połączenia klejonego przedstawionego na rys. 1. Warunki brzegowe dla funkcji $y(x)$ mają postać

$$(22) \quad y(0) = 1, \quad y(l) = 0.$$

Mając wyznaczoną funkcję $y(x)$ można już łatwo wyznaczyć naprężenia styczne w warstwie kleju. Na podstawie (7), (13) i (17) otrzymuje się

$$(23) \quad \tau_k(x) = \frac{M}{2\pi r_w^2(x)} \frac{dy}{dx}.$$

Współczynniki równania (18) mają skomplikowaną postać. Chcąc rozwiązać równanie (18) należy najpierw określić funkcje występujące we współczynnikach (19) - (21), opisujące geometrię połączenia. W charakterze przykładu rozważone zostanie połączenie stożkowe, które ma szczególnie duże znaczenie praktyczne.

3. Połączenie stożkowe

Schemat połączenia stożkowego pokazano na rys. 3. Średnicę zewnętrzną tulejki na długości l połączenia przyjmuje się jako stałą. Promień czopa i gniazda stożkowego określają zależności (rys. 3):

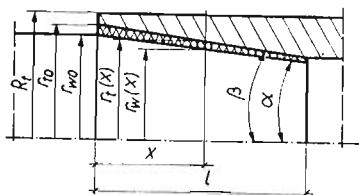
$$(24) \quad r_w(x) = r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha,$$

$$(25) \quad r_t(x) = r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta.$$

Różniczkując (24) i (25) otrzymuje się

$$(26) \quad \frac{dr_w}{dx} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$(27) \quad \frac{dr_t}{dx} = -\operatorname{tg} \beta.$$



Rys. 3. Schemat połączenia klejonego stożkowego

Biegunowe momenty bezwładności przekrojów wałka i tulejki są równe

$$(28) \quad I_{0w}(x) = \frac{\pi}{2} r_w^4(x) = \frac{\pi}{2} (r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha)^4,$$

$$(29) \quad I_{0t}(x) = \frac{\pi}{2} (R_t^4 - r_t^4(x)) = \frac{\pi}{2} [R_t^4 - (r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta)^4].$$

Po podstawieniu (24) - (29) do (18) - (21) otrzymuje się równanie:

$$(30) \quad y''(x) + \tilde{b}(x)y'(x) + \tilde{c}(x)y(x) = \tilde{e}(x),$$

gdzie

$$(31) \quad \tilde{b}(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha} \left[\frac{1}{\ln \frac{r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta}{r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha}} + 2 \right] - \frac{\operatorname{tg} \beta}{(r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta) \ln \frac{r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta}{r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha}},$$

$$(32) \quad \tilde{c}(x) = \frac{-4}{(r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha)^2 \ln \frac{r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta}{r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha}} \times \left[\frac{(r_{w0} - x \operatorname{tg} \beta)^4}{R_t^4 - (r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta)^4} \frac{G_k}{G_t} + \frac{G_k}{G_w} \right],$$

$$(33) \quad \tilde{e}(x) = -4 \frac{G_k}{G_w} \frac{(r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha)^2}{[R_t^4 - (r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta)^4] \ln \frac{r_{t0} - x \operatorname{tg} \beta}{r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha}}.$$

Równanie różniczkowe (30) o współczynnikach (31) - (33) opisuje rozkład momentu skręcającego wałek na długości l połączenia stożkowego przedstawionego na rys. 3.

Zależność (23) opisująca rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju po uwzględnieniu (24) przyjmuje postać

$$(34) \quad \tau_k(x) = \frac{M}{2\pi(r_{w0} - x \operatorname{tg} \alpha)^2} \frac{dy}{dx}.$$

Ze względu na złożoną postać wzorów (31) - (33), określających zmienne współczynniki, rozwiązanie równania (30) i badanie wpływu parametrów konstrukcyjnych i materiałowych na stan naprężenia w połączeniu, mogą być wykonane jedynie metodami numerycznymi.

Przyjmując wartości kątów $\alpha = \beta = 0$ (rys. 3) otrzymuje się połączenie walcowe. Dla takiego przypadku równanie (30) przyjmuje prostszą postać

$$(35) \quad y''(x) - \frac{4}{r_{w0}^2 \ln \frac{r_{t0}}{r_{w0}}} \left[\frac{r_w^4}{R_t^4 - R_{t0}^4} \frac{G_k}{G_t} - \frac{G_k}{G_w} \right] y(x) = -4 \frac{G_k}{G_t} \frac{r_{w0}^2}{R_t^4 - r_{t0}^4} \frac{1}{\ln \frac{r_{t0}}{r_{w0}}}.$$

Uwzględniając dla momentów bezwładności przekrojów wałka i tulejki zależności:

$$(36) \quad I_{0w} = \frac{\pi}{2} r_{w0}^4,$$

$$(37) \quad I_{0t} = \frac{\pi}{2} (R_t^4 - r_{t0}^4)$$

i przyjmując dla małej grubości g warstwy kleju

$$(38) \quad \ln \frac{r_{t0}}{r_{w0}} = \ln \left(1 - \frac{g}{r_{w0}} \right) \approx -\frac{g}{r_{w0}},$$

otrzymuje się

$$(39) \quad y''(x) - \frac{4}{gr_{w0}} \left(\frac{G_k}{G_t} \frac{I_{0w}}{I_{0t}} + \frac{G_k}{G_t} \right) y(x) = -\frac{4}{gr_{w0}} \frac{G_k}{G_t} \frac{I_{0w}}{I_{0t}}.$$

Równanie (39) opisuje rozkład momentu skręcającego wałek na długości połączenia walcowego o stałej grubości warstwy kleju.

Naprężenia styczne w warstwie kleju, w oparciu o (34) wyznacza się z zależności

$$(40) \quad \tau_k(x) = \frac{M}{2\pi r_{w0}^2} \frac{dy}{dx}.$$

Równania (39) i (40) wyprowadzone z równań (30) i (34) są identyczne z równaniami otrzymanymi wcześniej, opisanymi w pracach [2, 3]. Połączenie walcowe można traktować jako szczególny przypadek połączenia stożkowego o kącie pochylenia tworzącej $\alpha = \beta = 0$ (rys. 3).

4. Przykładowe wyniki obliczeń numerycznych

Do numerycznego rozwiązania równania różniczkowego (30) wykorzystano metodę różnicową zwyczajną opisaną w pracy [18]. Program obliczeń na maszynie cyfrową ODRA 1204 został napisany w postaci ogólnej i umożliwia wyznaczenie rozkładu i wartości naprężeń stycznych w warstwie kleju na długości l połączenia w funkcji momentu skręcającego M przy uwzględnieniu dowolnych wartości stałych materiałowych (G_w , G_t i G_k) i parametrów konstrukcyjnych (α , β , l , r_{w0} , r_{t0} , R_t), występujących we wzorach (31) - (33), określających współczynniki równania (30). Algorytm, program i szczegółowe wyniki obszernych obliczeń numerycznych oraz ich analizę zawiera praca [19]. Poniżej przedstawiono i omówiono jedynie niewielką część tych wyników.

W celu zbadania wpływu stałych materiałowych elementów łączonych i kleju na stan naprężenia w warstwie kleju, przyjęto jako dane następujące wartości współczynników sprężystości poprzecznej:

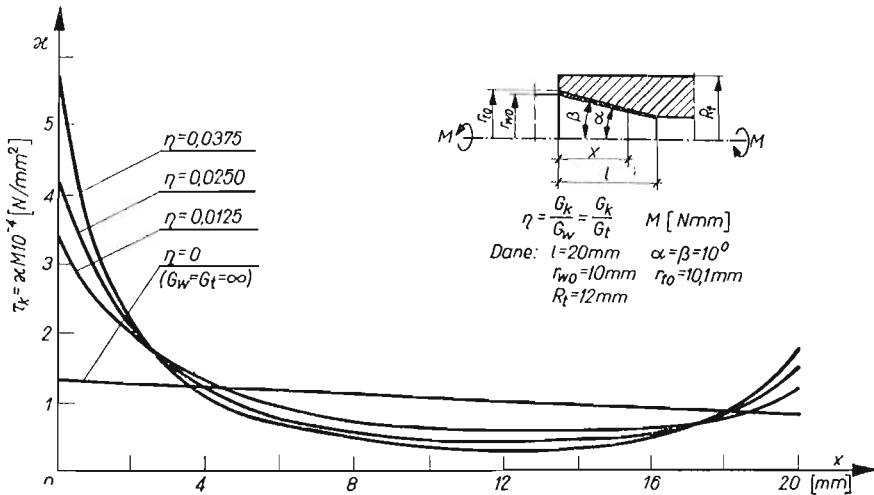
- dla klejów epoksydowych [20] $G_k = 0,1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$,
- dla stali $G = 8,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$,
- dla miedzi $G = 4,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$,
- dla aluminium i duraluminium $G = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

Z wzorów (31) - (34) wynika, że wpływ na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju mają nie same wartości tych współczynników, lecz ich stosunki G_k/G_w i G_k/G_t . Po odpowiednim podstawieniu powyższych wartości i założeniu, że wałek i tulejka wykonane są z jednego materiału otrzymuje się zakres zmienności stosunku:

$$\frac{G_k}{G_w} = \frac{G_k}{G_t} = 0,0125 \div 0,0371.$$

Dolna wartość odnosi się do elementów złącza wykonanych ze stali, górna — do elementów aluminiowych oraz duraluminiowych.

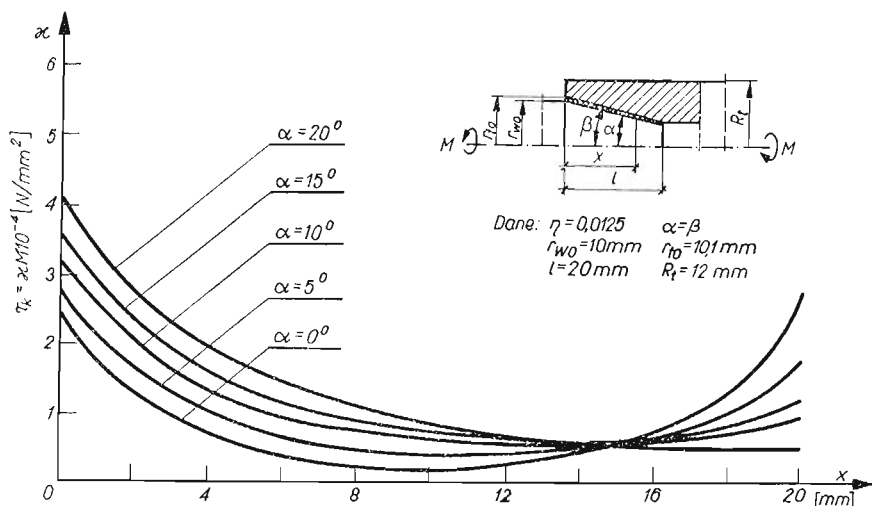
Wpływ stałych materiałowych na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju obrazuje rys. 4. Prosta $\eta = 0$ przedstawia rozkład naprężeń stycznych, przy założeniu, że elementy łączone (wałek i tulejka) są ciałami doskonale sztywnymi ($G_w = G_t = \infty$).



Rys. 4. Wpływ stosunku współczynników sprężystości poprzecznej kleju i elementów łączonych na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju

Z przebiegu krzywych przedstawionych na rys. 4 wynika, że wpływ współczynników sprężystości kleju i łączonych materiałów na rozkład naprężeń stycznych jest istotny. Odnosi się to w szczególności do szczytowych wartości naprężeń w kleju, mających istotny wpływ na wytrzymałość złącza i przebieg jego niszczenia.

Wpływ niektórych parametrów konstrukcyjnych połączenia stożkowego na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju obrazują rys. 5, 6 i 7.

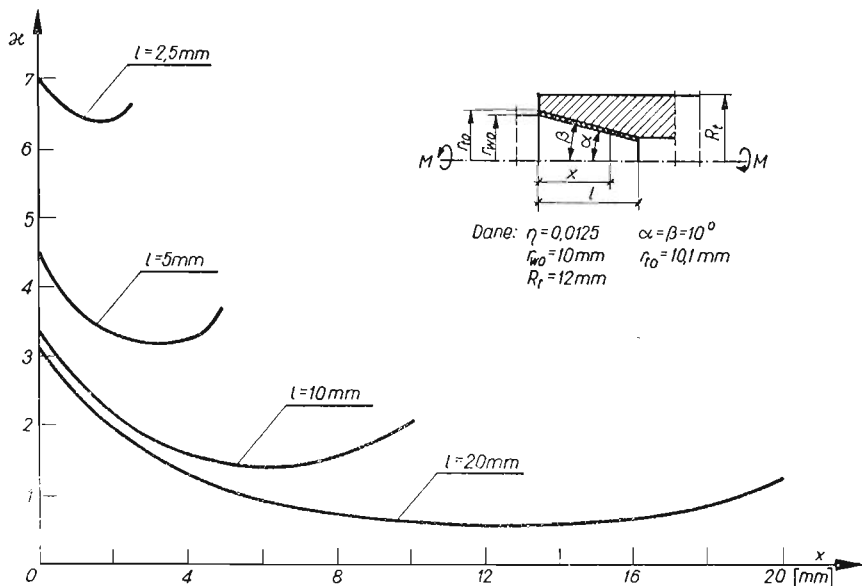


Rys. 5. Wpływ kąta pochylenia tworzącej stożka na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju

Z przebiegu krzywych na rys. 5 widać, że ze wzrostem kąta α rosną naprężenia w przekroju $x = 0$, a jednocześnie maleją naprężenia w przekroju $x = l$. Ze względów konstrukcyjnych, kąt pochylenia tworzącej stożka (rys. 3) musi spełniać warunek:

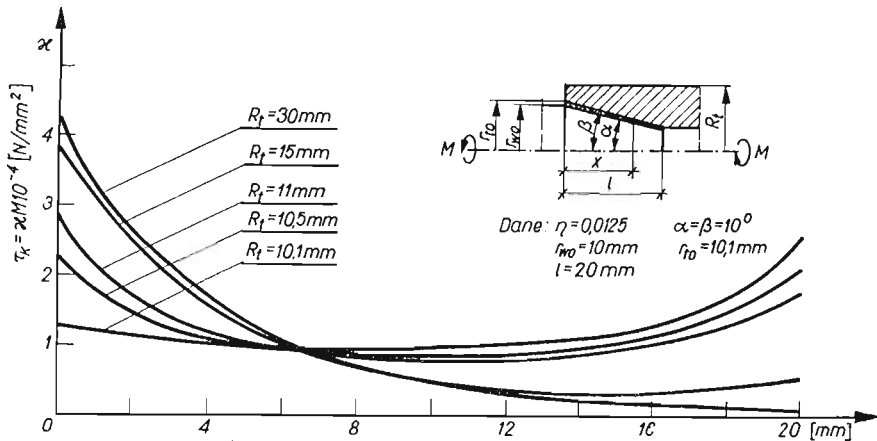
$$(41) \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{r_{w0}}{l}.$$

Dla przyjętych do obliczeń wartości $r_{w0} = 10 \text{ mm}$, $l = 20 \text{ mm}$, kąt ten nie może być większy niż 25° . Należy również zaznaczyć, że przedstawiona powyżej teoria odnosi się tylko do małych wartości kątów α i β , z uwagi na przyjęte na początku założenia.



Rys. 6. Wpływ długości połączenia stożkowego na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju

Wpływ długości l połączenia przy stałym kącie α pochylenia stożka przedstawia rys. 6. Z przebiegu krzywych widać, że ze wzrostem długości połączenia naprężenia w warstwie kleju maleją, wzrasta jednak nierównomierność ich rozkładu i stosunek maksymalnej wartości naprężenia do jego wartości minimalnej i średniej.



Rys. 7. Wpływ promienia zewnętrznego tulejki połączenia stożkowego na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju

Na rys. 7 przedstawiono wpływ promienia zewnętrznego R tulejki na rozkład naprężeń stycznych w kleju. Krzywa $R_t = 10,1$ przedstawia rozkład naprężeń dla przypadku gdy praktycznie promień zewnętrzny wałka i tulejki są jednakowe. Ze wzrostem promienia zewnętrznego tulejki wzrastają naprężenia w przekroju $x = 0$, a maleją w przekroju $x = l$.

5. Uwagi i wnioski końcowe

Przedstawione w niniejszej pracy rozważanie i wyniki dotyczą modelu, w którym przyjęto szereg założeń upraszczających, przyjmowanych zwykle w teorii wytrzymałości materiałów. Pomimo tego wyprowadzone dla osiowo symetrycznego połączenia klejonego ogólne równanie różniczkowe (18), jak również wynikające z niego równanie (30) dla połączeń stożkowych, mają skomplikowaną postać i nie można ich rozwiązać znanymi sposobami analitycznymi. Dla uzyskania konkretnych wyników zachodzi konieczność rozwiązania odpowiedniego równania sposobem numerycznym, co jednakże przy wykorzystaniu ETO nie przedstawia większych trudności.

Opracowany na maszynie cyfrową ODRA 1204 program obliczeń dla połączeń stożkowych umożliwia szybkie wyznaczenie rozkładu i wartości naprężeń stycznych w warstwie kleju dla dowolnych zadanych wartości parametrów konstrukcyjnych i stałych materiałowych. Może on być z pożytkiem wykorzystany przy projektowaniu jak również przy programowaniu i interpretacji wyników badań doświadczalnych tego typu połączeń.

Z otrzymanych wyników obliczeń numerycznych (rys. 4 - 7) widać, że rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju na długości połączenia jest nieliniowy. W skrajnych przekrojach połączenia występują duże spiętrzenia naprężeń, znacznie przewyższające wartości średnie.

Są one spowodowane odkształceniami sprężystymi łączonych elementów. Analiza wyników obliczeń wykazuje, że zarówno parametry konstrukcyjne jak i współczynniki sprężystości materiałów łączonych i kleju mają istotny wpływ na rozkład naprężeń stycznych. Wynika z tego ważny praktyczny wniosek, że traktowanie w osiowo symetrycznym połączeniu klejonym elementów metalowych, pomimo znacznej (sięgającej dwóch rzędów) różnicy wartości współczynników sprężystości metalu i kleju, stanowi zbyt duże uproszczenie i prowadzi do poważnych błędów.

Przyjęty w pracy model osiowo symetrycznego połączenia klejonego pozwala wyjaśnić wpływ szeregu istotnych czynników na rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju oraz elementach łączonych i stanowi podstawę do poszukiwania rozwiązań optymalnych pod względem wytrzymałościowym. Zagadnienie to zostanie szczegółowo omówione w oddzielnej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. M. DEINHARDT, F. BLUME, H. KLEINERT, *Einsatzbedingungen der Klebtechnik zur Herstellung von Maschinenelementverbindungen*, Schweiss-Technik, 8, 22 (1972).
2. K. GRUDZIŃSKI, J. LORKIEWICZ, *Wytrzymałość na skręcanie klejonych połączeń walcowych*, Przegląd Mechaniczny, 8, 29 (1970).
3. K. GRUDZIŃSKI, J. LORKIEWICZ, *Analiza naprężeń w walcowej spoinie klejowej*, Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna nt. «Problemy wytrzymałości konstrukcji klejonych», Zbiór referatów, Szczecin 1972.
4. K. GRUDZIŃSKI, *Optymalizacja walcowego połączenia klejonego obciążonego momentem skręcającym*, Zbiór referatów konferencji, jak wyżej.
5. K. GRUDZIŃSKI, J. LORKIEWICZ, *Doświadczenia własne w stosowaniu klejenia metali*, Zbiór referatów konferencji, jak wyżej.
6. W. KOREWA, *Klejenie połączenia czopowego*, Przegląd Mechaniczny, 18, 31 (1972).
7. H. LEYH, *Drehmomentübertragung in geklebten Wellen — Nabenverbindungen*, Praca doktorska, Stuttgart 1963.
8. J. LORKIEWICZ, *Klejenie przedłużaczy wiertel i rozwiertaków*, Mechanik, 2, 40 (1967).
9. Я. М. КЕРШЕНБАУМ, В. Н. ПРОТАСОВ, В. И. АГАНЧЕВ, *Соединение стыков высоконапорных трубопроводов склеиванием*, Строительство трубопроводов, 5 (1971).
10. T. SIEGMÜLLER, *Zastosowanie klejenia metali do łączenia rur stalowych kolumn wiertniczych*, Przegląd Spawalnictwa, 3, 23 (1971).
11. R. SIKORA, *Klejenie rur*, Mechanik, 2, 45 (1972).
12. K. SCHMIDT, *Metalkleben in Schienen-Fahrzeugbahn*, Eisenbahningenieur, 9, 19 (1968).
13. H. SCHLEGEL, *Ausnutzung physikalische Effekte beim Kleben von Rundverbindungen*, ZIS Mitteilungen, 7 (1971).
14. А. П. ВЛАДИЗЬВСКИЙ, Э. А. АННЕНБЕРГ, Э. А. МАЙОРОВА, И. В. ТАРАСЕВИЧ, *Сборные цилиндрические зубчатые колеса*, Машиностроение, 8 (1970).
15. M. WARSZYŃSKI, B. ONYSZKO, M. ZYCH-PORĘBSKA, *Optymalne konstrukcje połączeń klejonych*, Przegląd Mechaniczny 17, 29 (1970).
16. A. A. BARTEL, *Passungsrost bzw. Reiboxydation-besondere Verschleissprobleme*, Der Maschinenschaden 7/8, 11/12, 36 (1963), 3/4, 37 (1964).
17. S. TIMOSHENKO, I. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
18. G. N. POŁOŻY, N. A. PACHARIEWA, J. Z. STIEPANIENKO, P. S. BONDARENKO, I. M. WIELIKOIWANIENKO, *Metody przybliżonych obliczeń*, WNT, Warszawa 1966.
19. T. BURDA, *Analiza naprężeń i odkształceń w połączeniu klejonym stożkowym obciążonym momentem skręcającym*, Praca dyplomowa, Politechnika Szczecińska, Szczecin 1973.

20. K. GRUDZIŃSKI, *Badania własności mechanicznych klejów i połączeń klejonych przy czystym ścinaniu*, Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna nt. «Problemy wytrzymałości konstrukcji klejonych», Zbiór referatów, Szczecin 1972.

Р е з ю м е

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ
КЛЕЕВОМ СОЕДИНЕНИИ НАГРУЖЕННОМ КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ

В работе дан аналитический метод расчета напряженного состояния в осесимметричном клеевом соединении, нагруженном крутящим моментом. Соединяемые элементы и слой клея считаются упругими. Выведены уравнения, описывающие распределение крутящих моментов в соединяемых элементах и распределение касательных напряжений в слое клея по длине соединения. Детально рассмотрены конические соединения. Оговорено влияние физических констант материала и конструктивных параметров на распределение касательных напряжений в слое клея.

S u m m a r y

DETERMINATION OF STRESS IN AXIALLY-SYMMETRIC GLUED JOINT
LOADED BY TORQUE

The paper presents an analytical method of determining the state of stress in an axially-symmetric glued joint loaded by a torque. In the model proposed the elements of the joint and the glue layer are treated as elastic deformable bodies. The equations are derived which yield the formulae describing the distribution of twisting moments in the elements of the joint, and the shearing stress in the glue layer.

A conical joints is discussed in more detail. The influence of material constants and structural parameters on the shearing stress distribution is outlined.

INSTYTUT BUDOWY MASZYN
POLITECHNIKI SZCZECIŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 maja 1977 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej
za I kwartał 1977 r.

I. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyło się 12 zebrań naukowych, na których wygłoszono 15 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba		
				uczest- ników	dysku- tantów	
1	2	3	4	5	6	
		Oddział w Bydgoszczy				
1.	09.03.77	J. Steinborn	O porównywalności cech wytrzymałościowych nowych tworzyw konstrukcyjnych	12	3	
2.	09.03.77	W. Weiner	Wpływ promieniowania podczerwonego na cechy konstrukcyjne żywic epoksydowych zbrojonych włóknem szklanym	12	4	
		Oddział w Częstochowie				
3.	07.01.77	J. Kaczmarek	O rozwoju badań i nauczania w zakresie technologii maszyn, a zwłaszcza za pomocą skrawania	66	5	
4.	10.01.77	K. Birkenmajer	Wrażenia z Kongresu Amerykańskiego Towarzystwa Geologicznego	32	2	
5.	24.02.77	M. Bijak- -Zochowski	Półniszcząca metoda pomiaru naprężeń własnych w głąb materiału	28	4	
6.	24.02.77	J. Szala	Wpływ sekwencji obciążeń na trwałość zmęczeniową			
7.	24.03.77	W. Gajewski	Ewolucja koncepcji palenisk fluidalnych	14	2	
		Oddział w Gdańsku				
8.	26.02.77	H. Walukiewicz	Twierdzenia wzajemne w dynamice statystycznej	18	5	
		Oddział w Łodzi				
9.	23.02.77	R. E. D. Bishop	Vibration and balancing of a flexible rotor	54	8	

1	2	3	4	5	6
		Oddział w Poznaniu			
10.	21.02.77	G. Szefer	Tendencje rozwojowe w mechanice ośrodków porowatych	26	5
		Oddział w Szczecinie			
11.	27.01.77	M. Kmiecik, A. Jazukiewicz	Nośność graniczna okretowych pokryw lukowych	} 45	} 11
12.	31.03.77	K. Grudziński, T. Burda, L. Łabuć	Wyznaczenie stanu naprężenia w osiowo symetrycznym połączeniu klejonym obciążonym momentem skręcającym		
13.	31.03.77	K. Grudziński, T. Burda, L. Łabuć	Optymalizacja osiowo symetrycznego połączenia klejonego obciążonego momentem skręcającym		
		Oddział w Warszawie			
14.	14.03.77	A. Morecki	Metody doświadczalne w biomechanice	14	17
		Oddział we Wrocławiu			
15.	05.02.77	M. Wereszko	Stan obecny i perspektywy techniki strumieniowej	7	4

II. Sympozja

Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach od 9 do 15 marca 1977 r. XVI Sympozjon pod hasłem «Modelowanie w mechanice». Obrady toczyły się w Wiśle Jarzębatej.

W Sympozjonie wzięło udział 112 osób, głosów dyskusji było 141. Wygłoszono 47 referatów, w tym 4 przeglądowe.

III. Seminaria

1. Oddział w Gdańsku zorganizował w okresie od stycznia do marca 1977 r. seminarium nt. «Analiza funkcjonalna». Dwugodzinne wykłady odbywały się raz na tydzień, a prowadził je doc. dr B. PALCZEWSKI.

2. Pod patronatem przewodniczącego Oddziału w Gliwicach odbyło się Seminarium Studenckiego Kola Naukowego Mechaniki Stosowanej im. Prof. W. Burzyńskiego. W czasie obrad seminarium, w którym brali udział również uczestnicy sympozjonu, wygłoszono 13 referatów. W seminarium SKN brali udział studenci z Politechniki Śląskiej, z Politechniki Warszawskiej i z Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie.

IV. Kursy

Oddział w Poznaniu zorganizował w dniach 7.03.—21.03.77 r. kurs na temat „Optymalizacja w mechanice ciał odkształcalnych”. W kursie wzięło udział 28 uczestników.

V. Akcja wydawnicza

1. W okresie sprawozdawczym ukazał się Zeszyt 1, o objętości 9 arkuszy wydawniczych, Tomu 15 MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ.

2. Oddział w Gliwicach wydał metodą małej poligrafii: 1) J. Wojnarowski — *Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych*”, str. 319, Gliwice 1977; 2) zbiór referatów XVI Sympozjonu pod hasłem «Modelowanie w mechanice».

VI. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach PTMTS ilustruje następująca tabela:

Lp.	Oddział	Stan na koniec IV kw. 76	Stan na koniec I kw. 77	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym
1.	Bydgoszcz	27	27	—
2.	Częstochowa	49	50	+1
3.	Gdańsk	59	58	-1
4.	Gliwice	140	139	-1
5.	Kraków	76	76	—
6.	Łódź	52	52	—
7.	Opole	18	18 ^{*)}	—
8.	Poznań	60	61	+1
9.	Rzeszów	31	31 ^{*)}	—
10.	Szczecin	32	33	+1
11.	Warszawa	214	228	+14
12.	Wrocław	63	63	—
13.	Zielona Góra	19	19 ^{*)}	—
	R a z e m	840	855	+15

W okresie sprawozdawczym odbyło się 8 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

*) Dane z poprzedniego okresu sprawozdawczego z powodu braku aktualnych sprawozdań za I kwartał 1977 r.

KOŁOKWIA EUROMECH W 1978 R.

Nazwa, termin i miejsce	Przewodniczący
99. Low-Reynolds-number flow 29 marca — 1 kwietnia 1978 Jablonna, Polska	Dr. M. E. O'Neill, Department of Mathematics University College London WC1E 6BT, England and Dr R. Herczyński, Warszawa
97. Constitutive equations and methods of solution in Viscoelasticity 29 maja — 1 czerwca 1978 Smolenice, Czechoslovakia	Prof. J. Brilla, Institute of Applied Mathematics and Com- puting Techniques, Comenius University, Bratislava, Czechoslovakia
100. Modern aspects of the mathematical theory elasticity 29 maja — 1 czerwca 1978 Pisa, Italy	Prof. T. Manacorda, Istituto Matematica Applicata Università di Pisa, Pisa, Italy and Prof. P. Villaggio, Pisa and Prof. R. J. Knops, Edinburgh

101. Interaction between flow and radiative heat transfer
27—29 czerwca 1978
Poitiers, France
Prof. J. L. Peube,
Laboratoire d'Energetique Solaire,
University of Poitiers,
86022 Poitiers, France
102. Breaking waves, surf and run-up on beaches
18—21 lipca 1978
Bristol, England
Dr. D. H. Peregrine,
School of Mathematics University of Bristol,
Bristol, England
103. Continuum models of crystals
21—25 sierpnia 1978
Jabłonna, Polska
Prof. H. Zorski,
Inst. Podst. Problemów Techniki, Świętokrzyska 21
00-049 Warszawa, Polska
104. Mechanics of colloidal dispersions
4—7 września 1978
Leuven, Belgium
Prof. J. Mewis,
Instituut voor Chemie-ingenieurs-technik,
de Croylaan 2,
B-3030 Heverlee, Belgium
and Prof. A. Watillon, Brussels
105. Modelling and prediction of fracture toughness
4—6 września 1978
Cambridge, England
Prof. M. F. Ashby,
Department of Engineering University of Cambridge,
Trumpington Street,
Cambridge CB2 1PZ,
England
106. Two-dimensional and quasi-two-dimensional turbulence
6—8 września 1978
Grenoble, France
Prof. M. Lesieur,
Institut de Mécanique,
B.P. 53, Centre de Tri,
38041 Grenoble-Cedex, France
and Prof. U. Frisch, Nice
107. Instability and convection in fluid layers
11—13 września 1978
Grenoble, France
Prof. E. J. Hopfinger,
Institut de Mécanique,
B.P. 53, Centre de Tri,
38041 Grenoble-Cedex, France
and Prof. P. Atten, Grenoble
108. Control of structural vibration
18—21 września 1978
Edinburgh, Scotland
Dr. G. T. S. Done,
Department of Mechanical Engineering
University of Edinburgh,
Mayfield Road,
Edinburgh EH9 3JL,
Scotland
109. Dispersion in environmental flow systems
25—27 września 1978
Delft, The Netherlands
Dr. G. Abraham,
Delft Hydraulics Laboratory,
Box 177,
Delft, The Netherlands
and Dr. H. N. C. Breusers,
Delft
110. Contact problems and load transfer in mechanical assemblages
28—30 września 1978
Linköping, Sweden
Prof. B. G. A. Persson,
Linköping Institute of Technology,
S-581 83 Linköping, Sweden
and Dr. B. Fredriksson,
Linköping

111. Constitutive modelling in inelasticity
Wrzesień 1978
Mariánské Lázně, Czechoslovakia

Doc. Ing. Z. Sobotka Dr. Sc.,
Institute of Theoretical and Applied
Mechanics,
Nové Město, Vyšehradská 49,
12849 Praha 2, Czechoslovakia

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- R. KOTOWSKI, Dyskretne modele dyslokacji
Дискретные модели дислокаций
Discrete models of dislocations
- T. MAJEWSKI, Samoczynne wyważanie wirnika podpartego sprężycie w dwóch kierunkach
Автоматическое уравновешивание ротора, поддерживаемого упруго в двух направлениях
- J. HOLNICKI-SZULC, Zagadnienia sprężania w ośrodkach dwufazowych
Предварительное напряжение в двухфазовых средах
On the prestressing in diphase media
- J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, Wpływ spadochronu na ruch zasobnika osiowo symetrycznego zrzuconego z samolotu
Влияние парашюта на движение осево-симметрического объекта сбрасываемого с самолета
The influence of a parachute on the motion of an axially symmetric airdropped object
- S. PIĘSNIK, Kinematyczna równoważność układów sił
Кинематическая эквивалентность систем сил
Kinematic equivalence of a system of forces
- K. RUP, Modyfikacja metody uśredniania funkcjonalnych poprawek w zagadnieniach konwekcji wymuszonej i przepływu ciepła
Модификация метода осреднения функциональных поправок
An extension of the averaging method of functional errors
- J. WRANIK, Iteracyjna metoda obliczania dowolnych ciał odkształcalnych w zakresie liniowo sprężystym
Итерационный метод расчета произвольных линейно упругих тел
Iteration method of calculating arbitrary deformable bodies in a linear elastic range
- J. WRANIK, Obliczanie tarcz metodą iteracyjną
Расчет дисков итерационным методом
Calculation of discs by means of iteration method

BIULETYN INFORMACYJNY

J. II 720

MECHANIKA TEORETYCZNA
I STOSOWANA



SPIS TREŚCI TOMU XV/1977

Zeszyt 1

K. GRYSA, M. KWIEK, Stan naprężeń w walcu kołowym wywołany przyłożeniem stałej temperatury na robocznicy	3
Тепловые напряжения в круглом цилиндре вызванные внезапным изменением температуры на его краю	
Dynamical thermal stresses in a circular cylinder due to sudden change of temperature on its surface	
W. ŚWISTERSKI, Badania elastoptyczne modeli płaskich z wykorzystaniem holografii	11
Исследование плоских моделей методом голографической фотоупругости	
Photoelastic investigation of two-dimensional models by means of holography	
K. RUP, J. TALER, Określenie nieustalonego pola temperatury w ścianie płaskiej przy zmiennym współczynniku przewodnictwa cieplnego	21
Определение нестационарного температурного поля в плоской стенке с переменным коэффициентом теплопроводности	
Determination of transient temperature fields in plane walls of variable thermal conductivity	
J. KUBIK, O wyznaczaniu naprężeń cieplnych wywołanych ruchomymi obciążeniami termicznymi	29
Примечания к определению тепловых напряжений вызванных движущимися термическими нагрузками	
On the determination of thermal stresses due to moving heat sources	
A. STRZELCZYK, S. WOJCIECH, Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności ortotropowej płyty pierścieniowej	37
Численное решение задачи об устойчивости кольцевой пластины с цилиндрической ортотропией	
Numerical solution of the problem of stability of an orthotropic annular plate	
J. STELMARCZYK, Obliczanie charakterystyki dynamicznej konstrukcji płytowo-sprężynowej za pomocą metody sztywnych elementów skończonych	57
Определение динамической характеристики плитно-пружинной конструкции методом жестких конечных элементов	
The rigid finite element method of determining the dynamic characteristic of a plate-spring structure	
W. TRĄPCZYŃSKI, Analiza rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych dla zagadnienia naporu ścian o różnych kształtach	69
Исследование кинематически допустимых решений для задачи напора стенок различного профиля	
Analysis of kinematically admissible solutions of earth-moving processes in the cases of various pushing wall forms	
J. KOLENDA, Nieliniowe drgania elastycznie zawieszonych silników tłokowych przy kinematycznych wymuszeniach stochastycznych	87
Нелинейные колебания упруго подвешенных поршневых двигателей при случайных кинематических возбуждениях	
Nonlinear vibrations of elastically suspended piston engines at kinematic stochastic excitations	

J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, Badanie teoretyczne własności dynamicznych lotu obiektów zrzuconych z samolotu	99
Teoreticheskie ispytaniya dinamicheskikh svoystv poleta ob'ektov sbrasyvaemykh s samoleta	
Theoretical research of dynamical flight characteristics of bodies disposed from an aircraft	
J. BŁASCHUT, Optymalne kształtowanie pręta metodą programowania dynamicznego	125
Оптимальное проектирование стержня методом динамического программирования	
Optimum design of a flexible bar by means of dynamic programming	
BIULETYN INFORMACYJNY	131
Zeszyt 2	
N. Ja. CYGANOWA, Zastosowanie metody Gaussa w mechanice ośrodków ciągłych	147
Приложение принципа Гаусса к механике сплошной среды	
Application of the Gauss principle in continuum mechanics	
R. WOJNAR, Zastosowanie formuły Liebmana do opracowywania wyników badań elastooptycznych	155
Применение формулы Либманна для обработки результатов фотоупругих испытаний	
Application of the Liebmman formula to the evaluation of photoelastic measurements	
W. KUPEL, S. MATYSIAK, Tarcze i płyty sprężyste z więzami liniowymi dla deformacji	179
Упругие диски и пластины с линейными связями для деформации	
Elastic plates with linear constraints of deformation	
K. DEMS, J. LIPIŃSKI, Redukcja macierzy sztywności, mas i tłumienia	195
Сокращение размеров матриц жесткости, масс и демпфирования	
Reduction of the stiffness, mass and damping matrices	
K. GRYSA, O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela	205
О суммировании некоторых рядов Фурье-Бесселя	
Summation of certain Fourier-Bessel series	
K. GRYSA, Nieustalone pole temperatury w wirującym walcu kołowym wywołane utrzymywaną na jego pobocznicę odcinkami stałą temperaturą	215
Температурное поле во вращающемся крутовом цилиндре при кусочно-постоянной температуре его боковой поверхности	
Non-steady state of temperature in a rotating circular cylinder due to piecewise constant temperature on its surface	
A. BŁINOWSKI, O sformułowaniu i poprawności pewnej klasy zadań z nieliniowej dynamiki lin rozciągliwych	227
О формулировке и корректности некоторого класса задач по нелинейной динамике тросов	
On the formulation and the correctness of some class of problems concerning nonlinear dynamics of strings	
J. KUJAWSKI, Techniczna teoria grubych tarcz ortotropowych	239
Техническая теория толстых ортотропных дисков	
Technical theory of stretching thick orthotropic plates	
S. JANECKI, Drgania własne belek z uwzględnieniem wpływu ścinania	247
Свободные колебания с учетом деформации сдвига	
Free vibrations of beams influenced by the shear effect	
J. SKŁADZIEŃ, Analiza krzyżowoprądowego konwekcyjnego rekuperatora Fielda oraz pętlicowego ze stratami ciepła do otoczenia	265
Анализ конвекционного рекуператора Фильда и петлевого с перекрестными потоками теплоносителей и с потерями тепла	
Analysis of the convective crossflow Field and loop recuperator with heat losses	

W. SZYSZKOWSKI, Analiza bardzo dużych ugięć sprężystych ściskanych osiowo powłok walcowych i stożkowych	275
Расчет сжимаемых в осевом направлении цилиндрических и конических упругих оболочек при больших перемещениях	
Analysis of large elastic deflections of axially compressed cylindrical and conical shells	
BIULETYN INFORMACYJNY	293
Zeszyt 3	
D. i Z. MAZURKIEWICZOWIE, Z dziejów polskiej mechaniki do 1918 r.	299
On the history of Polish mechanics before 1918	
Об истории польской механики до 1918 года	
M. J. SEWELL, Pewne przykłady zastosowania teorii katastrof w mechanice	315
Примеры использования теории катастроф в механике	
Some mechanical aspects of catastrophe theory	
K. GRYSA, Naprężenia i przemieszczenia w wirującym walcu kołowym ogrzewanym niesiowo-symetrycznie na pobocznicę	335
Напряжения и перемещения в круглом вращающемся цилиндре при несимметрическом нагреве его боковой поверхности	
The stresses and displacements in a rotating circular cylinder due to axially non-symmetrical heating of its lateral surface	
R. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHALSKI, Inwersyjna metoda badania modeli elastoопtycznych z więzami sztywnymi	351
Обратный метод исследования фотоупругих моделей с жесткими связями	
Inversional method of investigation of photo-elastic models	
M. MAKOWSKI, G. SZEFER, Optymalne kształtowanie belki na podłożu sprężystym z uwzględnieniem ograniczeń naprężeń normalnych	359
Оптимальное проектирование балки на упругом основании при ограничении величины нормальных напряжений	
Optimum shape design of a beam resting on elastic foundation with normal stress restrictions	
J. KRAJEWSKI, St. MATYSIAK, Płaskie zagadnienie kontaktowe dla ośrodka Cosseratów w teorii naprężeń cieplnych	369
Плоская контактная задача для среды Коссера в теории термических напряжений	
Plane contact problem of a Cosserat medium subject to thermal stresses	
J. WŁASCHUT, Optymalne kształtowanie pręta ściskanego przy dużych ugięciach metodą programowania dynamicznego	375
Оптимальное проектирование сжимаемого стержня при больших прогибах методом динамического программирования	
Optimal design of a compressed rod with large deflections by means of dynamic programming	
T. SOŁKOWSKI, Analiza procesu wyciągania wytloczki z uwzględnieniem niejednorodności wywołanej polem temperatury	387
Анализ процесса вытяжки с утонением с учетом неоднородности вызванной температурным полем	
Analysis of ironing of a cup with non-homogeneity produced by a temperature field	
BIULETYN INFORMACYJNY	397
Zeszyt 4	
N. Ja. CYGANOWA, Uogólnione postacie wariacyjnych zasad mechaniki w pracach z końca XIX i początku XX wieku	403
Обобщенные формы дифференциальных вариационных принципов механики в исследованиях конца XIX, первой четверти XX века	
Generalized forms of variational principles of mechanics at the end of the XIXth and beginning of the XXth century	

E. WALICKI, Wpływ sił bezwładności na przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi: nieruchomą i wirującą	419
Влияние сил инерции на течение вязкой жидкости в щели между неподвижной и вращающейся поверхностями вращения	
Inertia effect in the flow of viscous fluid through a slot between fixed and rotating surfaces of revolution	
K. WYLEŻYCH, Lepkosprężyste charakterystyki gumy i tulejowych gumowo-metalowych łączników typu „silentblock”	427
Вязкоупругие характеристики резины и резино-металлических блокшарников типа сайлент-блок	
Viscoelastic characteristics of rubber and flexible bushes of the „silentblock” type	
J. KOLENDĄ, O przybliżonych metodach rozwiązania nieliniowych równań ruchu elastycznie posadowionych silników tłokowych	449
О приближенных методах решения нелинейных уравнений движения амортизированных поршневых двигателей	
On approximate solution methods of the non-linear motion equations of elastically mounted piston engines	
T. LISZKA, W. ŚWISTERSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Optymalne kształtowanie belek hiperstatycznych na drodze analitycznej i badań elastoоптычных	463
Оптимальное проектирование статически неопределимых балок путем расчета и фотоупругих испытаний	
Optimum design of statically indeterminate beams by analytical and photo-elastic methods	
M. SIAŁKOWSKI, Sumowanie niektórych szeregów Bessela-Fouriera występujących w zagadnieniach przewodnictwa cieplnego	475
Суммирование некоторых рядов Бесселя-Фурье выступающих в задачах теплопроводности	
Summation of certain Fourier-Bessel series occurring in heat transfer problems	
A. LITEWKA, Niestowarzyszone prawo płynięcia anizotropowych plastycznie stopów aluminium	491
Неассоциированный закон течения для анизотропных алюминиевых сплавов	
Non-associated flow law for plastically anisotropic aluminium alloys	
Z. GORAJ, J. MARYNIAK, Z. PATURSKI, M. ZŁOCKA, Stateczność boczna w czasie dobiegu lądującego samolotu sportowego	501
Боковая устойчивость спортивного самолета движущегося по земле после посадки	
The lateral stability of sports aircraft during landing run	
A. ZMITROWICZ, Tensor tarcia Coulomba	517
Тензор трения Куломба	
Tensor of Coulomb friction	
K. TURSКИ, Wytrzymałość stalowych prętów z karbem przy rozciąganiu w podwyższonych temperaturach	529
Высокотемпературное сопротивление стальных стержней с кольцевой выточкой	
Strength of steel notched rods in tension at high temperatures	
S. ŁUKASIEWICZ, J. TUMIŁOWICZ, Stateczność powłoki cylindrycznej z obwodowym zalodem przy ścisnaniu osiowym	537
Устойчивость цилиндрической оболочки с изломом по окружности при осевом сжатии	
Stability of a cylindrical shell with a circumferential notch under axial compression	
K. GRUDZIŃSKI, T. BURDA, L. ŁAWUĆ, Wyznaczenie stanu naprężenia w osiowo-symetrycznym połączeniu klejonym obciążonym momentem skręcającym	551
Определение напряженного состояния в осесимметричном клеевом соединении нагруженном крутящим моментом	
Determination of stress in axially-symmetric glued joint loaded by torque	
BIULETYN INFORMACYJNY	563

SPIS TREŚCI

cd. ze s. II okładki

- K. Turski, Wytrzymałość stalowych prętów z karbem przy rozciąganiu w podwyższonych temperaturach 529
Высокотемпературное сопротивление стальных стержней с кольцевой выточкой
Strength of steel notched rods in tension at high temperatures
- S. Łukasiewicz, J. Tumiłowicz, Stateczność powłoki cylindrycznej z obwodowym załomem przy ścisnaniu osiowym 537
Устойчивость цилиндрической оболочки с изломом по окружности при осевом сжатии
Stability of a cylindrical shell with a circumferential notch under axial compression
- K. Grudziński, T. Burda, L. Łabuć, Wyznaczenie stanu naprężenia w osiowo symetrycznym połączeniu klejonym obciążonym momentem skręcającym 551
Определение напряженного состояния в осесимметричном клеевом соединении нагруженном крутящим моментом
Determination of stress in axially-symmetric glued joint loaded by torque 563

BIULETYN INFORMACYJNY

Warunki prenumeraty

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowy doręczyciele w terminach:

— do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i na cały rok następny,

— do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch 0-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
