

y 4720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 15 · ZESZYT 3

WARSZAWA 1977

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

| | |
|---|-----|
| D. i Z. MAZURKIEWICZOWIE, Z dziejów polskiej mechaniki do 1918 r. Об истории польской механики до 1918 года On the history of Polish mechanics before 1918 | 299 |
| M. J. SEWELL, Pewne przykłady zastosowania teorii katastrof w mechanice Примеры использования теории катастроф в механике Some mechanical aspects of catastrophe theory | 315 |
| K. GRYSA, Naprężenia i przemieszczenia w wirującym walcu kołowym ogrzewanym nieosiowosymetrycznie na pobocznicy Напряжения и перемещения в круглом вращающемся цилиндре при несимметрическом нагреве его боковой поверхности The stresses and displacements in a rotating circular cylinder due to axially non-symmetrical heating of its lateral surface | 335 |
| R. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHALSKI, Inwersyjna metoda badania modeli elastoоптычных z więzami sztywnymi Обратный метод исследования фотоупругих моделей с жесткими связями Inversional method of investigation of photo-elastic models | 351 |
| M. MAKOWSKI, G. SZEFER, Optymalne kształtowanie belki na podłożu sprężystym z uwzględnieniem ograniczeń naprężeń normalnych Оптимальное проектирование балки на упругом основании при ограничении величины нормальных напряжений Optimum shape design of a beam resting on elastic foundation with normal stress restrictions | 359 |
| J. KRAJEWSKI, St. MATYSIAK, Płaskie zagadnienie kontaktowe dla ośrodka Cosseratów w teorii naprężeń cieplnych Плоская контактная задача для среды Коссера в теории термических напряжений Plane contact problem of a Cosserat medium subject to thermal stresses | 369 |
| J. WŁASNY, Optymalne kształtowanie pręta ściskanego przy dużych ugięciach metodą programowania dynamicznego Оптимальное проектирование сжимаемого стержня при больших прогибах методом динамического программирования Optimal design of a compressed rod with large deflections by means of dynamic programming | 375 |
| T. SOŁKOWSKI, Analiza procesu wyciągania wytłoczki z uwzględnieniem niejednorodności wywołanej polem temperatury Анализ процесса вытяжки с утонением с учетом неоднородности вызванной температурным полем Analysis of ironing of a cup with non-homogeneity produced by a temperature field | 387 |
| BIULETYN INFORMACYJNY | 397 |

yl 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 15 · ZESZYT 3

WARSZAWA 1977

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

JERZY ANTONIAK — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
JAN SZARGUT, JÓZEF WIECKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
ANDRZEJ DRESCHER — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (587+113). Ark. wydawniczych 8,0. Ark. drukarskich 6,5. Papier druk. sat. III kl. 70 g, 70×100. Oddano do składania 30.IV.77 r. Druk ukończono w sierpniu 1977 r. Zam. 593/77 F-28 Cena zł 30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Z DZIEJÓW POLSKIEJ MECHANIKI DO 1918 R.

DANUTA i ZBIGNIEW MAZURKIEWICZOWIE (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracy przedstawimy krótki przegląd rozwoju polskiej mechaniki do 1918 r. i przypomnimy z tej dziedziny nasze ważniejsze osiągnięcia, które stanowią trwałą wkład polskich uczonych do nauki światowej.

Dotychczasowe badania w zakresie historii polskiej mechaniki nie zostały dotąd uwieńczone odpowiednio wyczerpującym opracowaniem monograficznym, które powinno oczywiście objąć materiał znacznie obszerniejszy od zawartego w tej rozprawie. Fragmentaryczne informacje o naszej twórczości w mechanice są rozrzucone we wstępach do pism zbiorowych, w księgach jubileuszowych, w artykułach biograficznych oraz we wstępnych rozdziałach niektórych, zwłaszcza dawniejszych, polskich monografi z mechaniki.

Za jedno z pierwszych można uznać bardzo krótkie (ss. 2) opracowanie z historii polskiej mechaniki pt. *Mechanika w Polsce*, zamieszczone w omówionym dalej dziele [1] *Mechanika teoretyczna* Jana Nepomucena FRANKEGO (1846 - 1918). W opracowaniu tym autor omówił jednak zaledwie kilka polskich podręczników i rozpraw z mechaniki, które były wydane do 1886 r.

Szczególnie cenną pozycję stanowi monografia [2] *Mechanika w swym rozwoju historycznym*, napisana przez Feliksa KUCHARZEWSKIEGO (1849 - 1935), profesora honorowego Politechniki Warszawskiej (od 1919 r.). Książka ta (ss. 226) obejmuje wykłady autora wygłoszone w 1921 r. w Politechnice Warszawskiej. Znajdujemy w niej przegląd historyczny rozwoju mechaniki teoretycznej i technicznej począwszy od czasów starożytnych aż do EINSTEINA, opracowany z dużym polotem i z głęboką znajomością tematu. W monografii tej F. KUCHARZEWSKI zamieścił, między innymi, szereg bardzo cennych wiadomości z historii mechaniki polskiej. Autor dokonał oceny i analizy omawianych odkryć naukowych, wskazując na ich współzależność oraz na duże znaczenie twórczych osiągnięć z mechaniki w rozwoju nauk przyrodniczych i w postępie technicznym. Odpowiednio dobrane cytaty oraz liczne notki biograficzne i ładny styl podnoszą wydatnie wartość oryginalnie opracowanej i bardzo wartościowej monografii historycznej F. KUCHARZEWSKIEGO.

Dużo interesujących informacji o polskich osiągnięciach naukowych w mechanice teoretycznej i technicznej, jak również notek biograficznych jest zamieszczonych w księgach pamiątkowych [3, 4, 5] oraz w okolicznościowych artykułach [6, 7], poświęconych rozwojowi polskiej mechaniki.

Nie można tu też pominąć nie opublikowanego wprawdzie, lecz cennego opracowania [8] Henryka BUZUNA (1900 - 1964), docenta Politechniki Warszawskiej. Aczkolwiek

praca tego autora nie została, niestety, ukończona, to jednak zawiera ona dużo wartościowych wiadomości z historii polskiej mechaniki.

Krótki zarys historii polskiej mechaniki przedstawiono również w ogłoszonej niedawno pracy [9].

Oczywiście oprócz wyżej wymienionych kilku opracowań dość ogólnych, opublikowano w różnych czasopismach i wydawnictwach książkowych szereg pozycji biograficznych polskich uczonych, dotyczących, między innymi, ich twórczości i osiągnięć w mechanice.

2. Pierwsze polskie prace z mechaniki

Najwcześniejsze polskie prace z mechaniki pochodzą z XVII wieku. Nie dotarły jeszcze w tym czasie do Polski osiągnięcia GALILEUSZA, HUYGENSA, a przede wszystkim NEWTONA.

Autorami pierwszych polskich prac z mechaniki byli wychowankowie szkoły jezuickiej: Adam KOCHAŃSKI (1631 - 1700), Wojciech TYLKOWSKI (1629 - 1695), Stanisław SOLSKI (1622 - 1701).

A. KOCHAŃSKI był wykładowcą jezuickich kolegiów m.in. we Florencji, w Moguncji i w Pradze. Następnie osiadł w Warszawie jako nadworny matematyk i bibliotekarz Jana Sobieskiego. Pisywał do wychodzących w Lipsku *Acta Eruditorum* oraz utrzymywał kontakty z matematykami różnych krajów, a m.in. z LEIBNIZEM. Rozprawy i traktaty A. KOCHAŃSKIEGO, napisane po łacinie, były utrzymane na poziomie ówczesnej wiedzy europejskiej. Należy tu przede wszystkim wymienić jego wartościową i oryginalną rozprawę *Analecta mathematica sive theoreses mechanicae novae de natura machinarum fundamentalium* (Wybrane prace matematyczne albo twierdzenia nowej mechaniki o naturze maszyn podstawowych), zamieszczoną w obszernym i sławnym dziele Kacpra SCHOTTA *Cursus mathematicus*, wydany w 1661 r. W rozprawie tej. A. KOCHAŃSKI podał podstawowe wiadomości ze statyki oraz z teorii maszyn prostych.

W. TYLKOWSKI w jednej z licznych swoich prac *Pars sexta physicae curiosae in qua Aristotelis mechanica explicantur* (Część szоста ciekawej fizyki, w której Arystotelesa mechanika jest wyjaśniona), wydanej w 1680 r. opisał różne maszyny proste, jak np.: krążek, wielokrążek, kołowrót, klin i śrubę.

Pierwsze dzieło z mechaniki w języku polskim, wydane w 1690 r. w Krakowie, opracował S. SOLSKI, nadając mu tytuł: *Architekt polski, to jest nauka ulżenia wszelkich ciężarów i używania potrzebnych machin ziemnych i wodnych*. Dzieło to zawiera około 200 stron z licznymi drzeworytami. Autor zamierzał opracować trzy księgi z zakresu mechaniki i budownictwa. Wydał jednak tylko jedną księgę, podzieloną na trzy tzw. «zabawy». Dzieło S. SOLSKIEGO jest podręcznikiem praktycznym, w którym o zagadnieniach teoretycznych znajdujemy wzmianki tylko w kilku miejscach. Chociaż w opisie działania dźwigni autor wykorzystał dowody S. STEVINA (1548 - 1620) i K. HUYGENSA (1629 - 1695), to jednak jego pojęcie o podstawowych prawach mechaniki było bardzo prymitywne. Przejawia się to np. w wyjaśnieniu S. SOLSKIEGO, że maszyny dlatego «gubią» część ciężaru, ponieważ przenoszą ją na «podstawek». Autor podał też opis wynalezionych przez siebie dwóch maszyn o «biegu nieustannym» (*perpetuum mobile*), które opisał również w oddziel-

nych pracach w języku łacińskim. Dzieło S. SOLSKIEGO ma duże znaczenie historyczne i jest interesujące ze względu na ówczesne słownictwo, stosowane w mechanice.

W pierwszej połowie XVIII wieku zaznacza się w Polsce zupełny upadek nauki. Piśmiennictwo uległo prawie całkowicie prądomi teologicznemu.

Następne dzieło, dotyczące m.in. mechaniki, zostało opracowane dopiero przez Józefa ROGALIŃSKIEGO i wydane w latach 1765 - 1776. Był to czterotomowy podręcznik *Doświadczenia skutków Rzeczy pod zmysły podpadających na publicznych Posiedzeniach w Szkolach Poznańskich Societatis Jesu na widok wystawione i wykładane*. Dzieło to zawiera trafne wywody o najbardziej podstawowych pojęciach mechaniki; wywody te jednak giną w rozwlekłym i napuszonym stylu, pełnym dziwactw językowych.

Większe zainteresowanie naukami przyrodniczymi występuje dopiero w miarę postępu reformy wychowania publicznego, przeprowadzonej przez Komisję Edukacji Narodowej. Na jej wezwanie toruńczyk Michał Jan HUBE (1737 - 1803) napisał w języku łacińskim dwa dzieła, przełożone na język polski i wydane w Krakowie przez Komisję Edukacji Narodowej. Pierwsze dzieło *Wstęp do fizyki dla szkół narodowych* ukazało się w 1783 r., następne zaś *Fizyka dla szkół narodowych. Część I. Mechanika* — w 1792 r. Drugie z tych dzieł (ss. 536) zawiera 176 rysunków i obejmuje podstawowe wiadomości z mechaniki teoretycznej, hydromechaniki i z mechaniki ciał niebieskich. Zostało ono ocenione bardzo wysoko. Autor znał bowiem doskonale literaturę przedmiotu i był wytrawnym pedagogiem. Nauki nie traktował dogmatycznie, podając wszędzie sposoby sprawdzenia głównych praw mechaniki. Warto podkreślić, że jego opracowanie charakteryzuje czysty i zwarty styl oraz poprawna terminologia, która przeniknęła do polskiego słownictwa stosowanego w mechanice nawet obecnie.

W XIX wieku sytuacja polityczna Polski stwarzała w kraju wyjątkowo niesprzyjające warunki dla rozwoju nauk ścisłych, a więc i mechaniki. Zatem wszelkie polskie znane rozprawy naukowe i podręczniki, opracowane w tym ciężkim okresie, zasługują na specjalne uznanie i podkreślenie.

W pierwszej połowie minionego stulecia zaznacza się działalność naukowa ośrodka warszawskiego.

Profesor matematyki Uniwersytetu Warszawskiego Rafał SKOLIMOWSKI (1781 - 1848) opublikował w 1824 r. litografowane wykłady *Nauka mechaniki i hydrauliki napisana i wykładana uczniom szkoły aplikacyjnej wojskowej*. Wykłady te, utrzymane na wysokim poziomie, tworzą folią o 1054 stronach. Pierwsza część obejmuje zasady mechaniki analitycznej, a druga zawiera zastosowanie mechaniki w artylerii i w inżynierii.

W tym okresie ukazało się również poza przekładami kilka oryginalnych prac teoretycznych z mechaniki, ogłoszonych w czasopiśmie *Ćwiczenia Naukowe*, które wychodziło w Warszawie w 1818 r. Współredaktorem tego czasopisma był Franciszek SKOMORÓWSKI, autor większości artykułów z zakresu statyki, kinematyki i dynamiki.

Kilka rozpraw z mechaniki opublikowano w *Rocznikach Towarzystwa Naukowego Krakowskiego*. Dwie z tych rozpraw przeciętnej wartości zostały opracowane przez Romana MARKIEWICZA. Pierwsza *O naturze i wielkości siły odśrodkowej* ukazała się w tomie IV w 1819 r., druga zaś o większej objętości (ss. 68) *Rozprawa o naturze i gatunkach sił, odmiany fizyczne sprawujących* — w tomie VI w 1821 r. Rozprawę o dużej wartości naukowej napisał profesor matematyki Uniwersytetu Krakowskiego, Karol HUBE.

Obszerna ta praca (ss. 125) ukazała się w tomie XIII w 1829 r. pt. *Rozprawa o fenomenach niektórych, pochodzących z ruchu wirowego z przydaniem uwag nad przerobieniem współrzędnych i niektórymi twierdzeniami tyczącymi się momentów*. Autor zajął się tu między innymi momentami bezwładności, elipsoidą bezwładności i ruchem bąka, podając kilka nowych, interesujących rozwiązań, uzyskanych za pomocą analizy matematycznej. Rozprawę tę, mało wówczas znaną, można zaliczyć do doskonałych polskich prac z mechaniki.

Warto też odnotować elementarny, lecz oryginalny podręcznik *Dynamika ciał stałych, kurs wykładany w gimnazjum realnym*, opracowany przez Augusta Ferdynanda BERNHARDTA (1804 - 1861), profesora szkoły realnej i Szkoły Sztuk Pięknych w Warszawie. Podręcznik ten, obejmujący litografowane wykłady (ss. 120), ukazał się w Warszawie w 1845 r. Spełnił on bardzo pożyteczną rolę dydaktyczną.

Poza tym, również w Warszawie był wydany w 1861 r. kurs elementarny *Mechanika ogólna*, napisany przez Alfonsa PUCHEWICZA (1821 - 1882), starszego nauczyciela gimnazjum realnego. Opracowanie to (ss. 514), zawierające 183 drzeworyty, obejmuje statykę i dynamikę ciał stałych oraz płynnych. Ze względu na prostotę i jasność wykładu kurs mechaniki A. PUCHEWICZA był uważany przez szereg lat za najlepszy polski podręcznik z mechaniki.

Należy jednak nadmienić, że wszystkie wyżej wymienione polskie prace i podręczniki z mechaniki stanowiły w omawianym okresie niestety bardzo nieznaczące i wtórne osiągnięcia w porównaniu z niezwykle wprost i dynamicznym rozwojem mechaniki zwłaszcza we Francji w drugiej połowie XVIII i na początku XIX wieku.

3. Mechanika polska w latach 1863 - 1918

Trudne warunki dla rozwoju nauk ścisłych w kraju spowodowały, że zwłaszcza w drugiej połowie XIX wieku wielu polskich uczonych i inżynierów prowadziło dość ożywioną działalność naukową na obczyźnie, a głównie we Francji i w Rosji.

3.1. Dorobek naukowy z mechaniki Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu. W latach 1871 - 1882 istotną rolę w krzewieniu polskiej myśli naukowej spełniło Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu, którego działalności wydawniczej, finansowanej przez Jana DZIAŁYŃSKIEGO (1829 - 1880) zawdzięczamy między innymi opublikowanie kilku polskich dobrych dzieł podręcznikowych i kilkunastu oryginalnych rozpraw naukowych z mechaniki.

Dokonyamy krótkiego przeglądu opublikowanych w wydawnictwach TNŚ polskich znaczniejszych prac z mechaniki, których autorami byli: jeden ze współorganizatorów TNŚ — Henryk Grach NIEWĘGŁOWSKI (1807 - 1881) oraz niektórzy członkowie TNŚ: Władysław KLUGER (1849 - 1884), Feliks KUCHARZEWSKI (1849 - 1935), Władysław GOSIEWSKI (1844 - 1911), Jan Nepomucen FRANKE (1846 - 1918), Kazimierz BRANDT (1839 - ?), Lucjan WOJCIECHOWSKI (1841 - 1909), Maurycy HULEWICZ i współpracujący z TNŚ, Adam MARTYNOWSKI (1842 - 1885).

W okresie 1873 - 1876 zostało opublikowane w Paryżu nakładem Biblioteki Kórnickiej (finansowanej przez J. Działyńskiego) dwutomowe dzieło *Kurs mechaniki rozumowej*, opracowane przez Henryka Gracha NIEWĘGŁOWSKIEGO, profesora matematyki w Wyższej

Szkole Polskiej, tzw. montparnaskiej w Paryżu. Tom pierwszy (ss. 560) zawiera statykę i dynamikę punktu materialnego, tom zaś drugi (ss. 897) obejmuje kinematykę, dynamikę układów materialnych, hydrostatykę i hydrodynamikę wraz z obszernym dodatkiem o całkowaniu równań ruchu. W ostatnim rozdziale autor opisał szereg praktycznych zagadnień z hydrauliki, należących właściwie do mechaniki technicznej. Dzieło H. G. NIEWĘGŁOWSKIEGO, aczkolwiek pozbawione dobrego słownictwa, wprowadzonego przez Komisję Edukacji Narodowej, stanowiło wartościowy i pożyteczny polski podręcznik z mechaniki teoretycznej, opracowany na ówczesnym poziomie uniwersyteckim.

Nakładem J. Działyńskiego ukazała się jeszcze w 1873 r. w Paryżu książka *Wykład hydrauliki wraz z teorią machin wodnych, poprzedzony wiadomościami wstępnymi z mechaniki analitycznej ciał płynnych* (ss. 1018), napisana przez inż. Władysława KLUGERA i inż. Feliksa KUCHARZEWSKIEGO, a w 1876 r. doskonałe dzieło W. KLUGERA *Wykład wytrzymałości materiałów i stałości budowli* (ss. XX+628). W pierwszym, obszernym dziele, mającym uzczyć czterechsetną rocznicę urodzin M. Kopernika, autorzy zawarli bogaty materiał z mechaniki ciał płynnych, z hydrauliki i z teorii maszyn wodnych. Po przedstawieniu podstaw hydrostatyki i hydrodynamiki, omówiono szereg zagadnień z hydrauliki, dotyczących między innymi przepływu wody w rurach i w kanałach otwartych, wzajemnego statycznego oddziaływania ciał stałych i płynnych i pomiaru prędkości przepływów cieczy. Dalej zamieszczono niektóre wiadomości i przykłady z zakresu obliczania maszyn wodnych oraz załączono pożyteczne dla projektantów tablice. Druga monografia, opracowana przez W. KLUGERA, zawiera zagadnienia z wytrzymałości materiałów i z mechaniki budowli, znajdujące zastosowanie w inżynierii lądowej i wodnej. Na pierwszych 28 stronach podał autor opracowanie historyczne wytrzymałości materiałów, co było wtedy nowością w literaturze tego rodzaju. Zasadniczy materiał obejmuje niektóre pojęcia ogólne i określenia, pojęcia geometryczne przekrojów (środkci ciężkości i momenty bezwładności), podstawowe wiadomości z zakresu stanu naprężenia i odkształcenia prętów prostych, równanie trzech momentów i jego zastosowanie, drgania prętów prostych, łuki dwuprzegubowe, parcie i odpór ziemi oraz stateczność murów oporowych. Do istotnych zalet omawianej monografii należy dobry poziom opracowania, odpowiadający ówczesnemu stanowi wiedzy z mechaniki technicznej, logiczny układ materiału, zwarty i przejrzysty sposób przedstawienia wszystkich zagadnień, dobre słownictwo oraz liczne przykłady. Dzieło W. KLUGERA można uznać za pierwszy polski podręcznik akademicki z wytrzymałości materiałów i z mechaniki budowli. Monografia ta, stanowiąca nasz poważny dorobek naukowy z mechaniki technicznej, nie ustępowała odpowiednim pozycjom autorów zagranicznych.

W. KLUGEROWI zawdzięczamy również dwie pierwsze polskie rozprawy naukowe, dotyczące pracy i działania turbin, opublikowane w Pamiętniku TNŚ w Paryżu (tom III, 1873 r. i IV, 1874 r.).

W. KLUGER był wybitnym polskim inżynierem-badaczem, wykładowcą hydrauliki i budowli wodnych w Szkole Inżynierów w Limie oraz projektantem wielu skomplikowanych obiektów zwłaszcza z inżynierii wodnej w Polsce i w Peru, a między innymi wodociągów dla Krakowa. Prowadzone przez niego wykłady wyróżniały się wysokim poziomem i utrwaliły jego nazwisko w peruwiańskiej uczelni.

Szczególne uznanie zyskały bardzo dobre rozprawy z mechaniki Władysława GOSIEWSKIEGO, wybitnego matematyka i fizyka, który był w owym czasie jednym z najbardziej

twórczych i płodnych naszych uczonych. Na łączną liczbę 15 prac ogłoszonych przez fizyków polskich w Pamiętniku TNS^Ś opublikował on 9 pozycji, z których 5 dotyczyło mechaniki.

W tomie I Pamiętnika TNS^Ś (1871 r.) W. GOSIEWSKI ogłosił obszerną pracę (13 rozdziałów) *O sprężystości ciał stałych jednorodnych*, w której przedstawił podstawy teorii sprężystości, rozpoczynając wykład od dynamiki. W końcowej części tej rozprawy autor wskazał na związek między równaniami teorii sprężystości i teorii mechanicznej światła, co stanowi jego oryginalny dorobek naukowy. W pracy *Przyczynek do teorii sił żywych* (tom III, 1873 r.) W. GOSIEWSKI podał nowy dowód twierdzenia Coriolisa. Następne dwie jego rozprawy dotyczą mechaniki molekularnej. W pierwszej z nich *O zasadniczej hipotezie mechaniki cząsteczkowej* (tom VII, 1875 r.) autor rozważył warunki, umożliwiające zastąpienie układu punktów materialnych układem ciągłym materialnym. W drugiej pracy *Dwa twierdzenia z mechaniki cząsteczkowej* (tom VIII, 1876 r.) W. GOSIEWSKI omówił zastosowanie potencjału Greena do analizy odkształceń długotrwałych. W tomie IX (1877 r.) znajdujemy rozprawę W. GOSIEWSKIEGO *O potencjale sprężystości*, w której autor wskazał na zgodność hipotezy Greena z zasadami mechaniki ciał sprężystych oraz podał związki (nierówności), jakie powinny być spełnione przez 21 współczynników, opisujących sprężystość ciała anizotropowego. Poza wymienionymi rozprawami był wydany w Paryżu (1873 r.) nakładem Jana Działyńskiego, opracowany przez W. GOSIEWSKIEGO, pierwszy zeszyt *Wykładu mechaniki cząsteczkowej (molekularnej)*. W pracy tej autor podał podstawowe pojęcia, związki geometryczne i fizyczne oraz równania mechaniki ciał odkształcalnych.

Tematyka prac z mechaniki, opublikowanych przez innych naszych autorów w Pamiętniku TNS^Ś, była związana ściśle z zagadnieniami ważnymi dla ówczesnej praktyki inżynierskiej.

Oryginalną i wartościową rozprawę (tom IV; 1874 r.) z zakresu kół zębatych o osiach wichrowatych napisał Jan Nepomucen FRANKE, profesor Szkoły Politechnicznej we Lwowie (1870 - ?). W tomach IV, VII, IX Pamiętnika TNS^Ś (1874 - 1878r.) znajdujemy cenne dla konstruktorów prace inż. Kazimierza BRANDTA, dotyczące najniekorzystniejszych obciążeń mostów oraz statyki mostów łukowych. Duże zainteresowanie zyskały w owym czasie przedstawione przez inż. Łucjana WOJCIECHOWSKIEGO sposoby obliczania powierzchni i objętości wykopów i nasypów (tom V, 1874 r. i IX, 1877 r.), opisane również w czasopiśmie francuskich. Przedmiotem dwóch dobrych rozpraw (tom VIII, 1876 r. i XI, 1879 r.) inż. Maurycego HULEWICZA są zagadnienia statyki i wytrzymałości belek wieloprzęsłowych i dźwigarów łukowych. Wartościowa praca (tom IX, 1877 r.) inż. Mieczysława SZYSTOWSKIEGO obejmuje niektóre zastosowania statyki wykreślnej wraz z zaproponowanym przez autora sposobem wyznaczania linii ciśnień w sklepieniu łukowym.

Dwie obszerne rozprawy (tom III, 1873 r. i IV, 1874 r.) o łącznej objętości 214 stron pod wspólnym tytułem *Teoria ciśnienia cieczy na ściany płaskie i na ściany krzywe*, opracowane przez inż. Adama MARTYNOWSKIEGO, zawierają wykład podstaw hydrostatyki i jej zastosowań do obliczenia ciśnienia cieczy na ściany zbiorników. Autor omówił wyznaczanie ciśnienia na ściany zbiorników walcowych, stożkowych i sferycznych, przeprowadzając dokładną analizę rozważonych przypadków. Wymienione rozprawy A. MARTYNOWSKIEGO stanowiły bardzo cenny materiał nie tylko dla ówczesnych, lecz również dla późniejszych teoretyków i praktyków, zajmujących się zagadnieniami hydrauliki. W innej, trzeciej

swojej pracy (tom V, 1875 r.) A. MARTYNOWSKI określił dla foremnych, płaskich przekrojów różnych brył geometrycznych tzw. rdzenie przekrojów, znajdujące duże zastosowanie przy badaniu stanu naprężenia elementów konstrukcyjnych.

Omówione wyżej opracowania książkowe, wydane nakładem J. Działyńskiego, i rozprawy, opublikowane w Pamiętniku TNS w Paryżu, stanowiły bardzo wartościowy materiał dla wielu polskich pracowników naukowych i inżynierów, były często cytowane w naszej literaturze naukowej nawet w latach późniejszych i miały istotny wpływ na rozwój polskiego piśmiennictwa z mechaniki. Monografie i rozprawy wydane przez TNS były tym cenniejsze, że w kraju w owym czasie wszelkie opracowania z nauk ścisłych ukazywały się niezwykle rzadko. Streszczenia rozpraw ogłaszanych w Pamiętniku były od 1874 r. publikowane w niemieckim czasopiśmie bibliograficznym *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, popularyzując w ten sposób polskie osiągnięcia naukowe w szerszym kręgu czytelników.

Pomimo krótkiego, bo zaledwie dwunastoletniego okresu istnienia (1870 - 1882) TNS, działalność jego pozostawiła trwałe ślady w dziejach nauki polskiej oraz ożywiła twórczość naukową i aktywność organizacyjną polskich uczonych, w wyniku której już po kilku latach od rozwiązania TNS powstały w kraju wydawnictwa naukowe i ukazały się omówione w innym miejscu tej pracy dzieła i rozprawy z mechaniki.

3.2. Rozwój mechaniki w uczelniach lwowskich. W końcu XIX i na początku XX wieku silny ośrodek mechaniki powstał we Lwowie. W tym okresie w uczelniach lwowskich działalność naukową w mechanice teoretycznej i technicznej prowadzili: Bruno ABDANK-ABAKANOWICZ (1852 - 1900), Oskar FABIAN (1846 - 1899), Jan Nepomucen FRANKE (1846 - 1918), Lucjan BÖTTCHER, Alfred DENIZOT (1873 - 1937), Marian SMOLUCHOWSKI (1872 - 1917), Maksymilian THULLIE (1853 - 1939) i Maksymilian Tytus HUBER (1872 - 1950).

Bruno ABDANK-ABAKANOWICZ, docent Politechniki Lwowskiej, wykładał statykę wykreślną i był autorem pierwszego z tej dziedziny podręcznika w języku polskim *Zarys statyki wykreślnej* (Lwów 1876), opracowanego z uwzględnieniem osiągnięć CULMANNA, RITTERA, MOHRA i WINKLERA. Zawdzięczamy jemu również wynalezienie integratu.

W 1886 r. był wydany we Lwowie akademicki podręcznik *Zarys mechaniki analitycznej, jako wstęp do fizyki umiętejnej*, opracowany przez Oskara FABIANA, profesora Uniwersytetu Lwowskiego. W tym wartościowym podręczniku (ss. 239) autor podał zasady kinematyki i dynamiki, wchodzące w zakres uniwersyteckich wykładów z fizyki.

W latach 1878 - 1887 ukazały się litografowane wykłady z mechaniki J. N. FRANKEGO, profesora Szkoły Politechnicznej we Lwowie, poprzedzające jego doskonałe dzieło *Mechanika teoretyczna* (ss. XXXI + 645), wydane w Warszawie (Kasa im. Józefa Mianowskiego). Dzieło J. N. FRANKEGO stanowiło w owym czasie wybitną pozycję literatury naukowo-dydaktycznej nie tylko w piśmiennictwie polskim, ale i europejskim. Na pierwszych 18 stronach autor przedstawił *Zarys historii mechaniki*, przeznaczając dwie strony dla krótkiej jeszcze wtedy historii mechaniki polskiej. Obszerny materiał z mechaniki analitycznej, opracowany w duchu LAGRANGE'A został podzielony na dwie części: *Kinematyka ciał sztywnych* i *Dynamika ciał sztywnych*. Na uwagę zasługuje fakt, że statykę zamieścił autor w drugiej części, traktując ją jako szczególnie dział dynamiki i odchodząc w ten sposób od

tradycyjnego podziału mechaniki na statykę, kinematykę i dynamikę. Ten logicznie uzasadniony i w owym czasie rzadko przyjmowany układ materiału jest stosowany do dnia dzisiejszego, zwłaszcza w uniwersyteckich podręcznikach z mechaniki teoretycznej. Ogólność i ścisłość wywodów autora przejawia się między innymi w obszernym potraktowaniu i wykorzystaniu zasady pracy wirtualnej oraz wariacyjnych zasad i równań dynamiki. Zamieszczone w monografii liczne zastosowania zasady d'Alemberta, równań Lagrange'a oraz zasady i równań kanonicznych Hamiltona wskazują na słuszne już w tym wczesnym okresie intencje autora w preferowaniu możliwie najogólniejszych i eleganckich metod rozwiązań różnych zagadnień mechaniki. Inną zaletę omawianego dzieła stanowi umieszczenie w końcowej części książki (ss. 461 - 604) pierwszy raz w języku polskim podstawowych równań i związków teorii sprężystości, hydromechaniki i gazomechaniki. Te ostatnie działy mechaniki (od s. 461) wchodzą obecnie do mechaniki technicznej. Na uwagę zasługuje fakt, że w głębokim umyśle J. N. FRANKEGO rodziła się wizja nadchodzącej rewolucji w mechanice, dokonanej w niedługim czasie przez A. EINSTEINA. Wskazują na to następujące słowa, zamieszczone przez autora na XXVIII stronie jego książki: „... musimy przypuścić, że owe trzy prawa Newtona, na których polega dzisiejsza dynamika, dadzą się wyprowadzić z praw ogólniejszych, jako wnioski. Czy takie uzasadnienie całej nauki o ruchu byłoby możliwe i korzystne, tego dziś przesądzać nie możemy”. Dzieło J. N. FRANKEGO spełniało przez wiele lat bardzo istotną rolę w nauczaniu mechaniki. J. N. FRANKE był również autorem wielu prac z kinematyki i dynamiki, opublikowanych w czasopismach polskich, francuskich i austriackich.

Dalszą godną uwagi pozycją był wydany w 1905 r. we Lwowie kurs litografowany (ss. 742) *Wykłady mechaniki ogólnej*, opracowany przez Lucjana BÖTTCHERA, profesora Politechniki Lwowskiej.

Przed pierwszą wojną światową oraz w okresie międzywojennym szereg wartościowych prac z mechaniki teoretycznej ogłosił w różnych czasopismach krajowych i zagranicznych Alfred DENIZOT, profesor Politechniki Lwowskiej, a następnie Uniwersytetu Poznańskiego. Prace jego dotyczą między innymi doświadczenia z wahadłem Foucaulta oraz ruchu względnego (Biul. Akad. Um., Kraków, 1905), swobodnego spadania ciał (Wiad. Mat., t. XXIII, 1919) i ruchu kulistego (Wiad. Mat., t. XXVI, 1922).

Spośród wielu znakomitych prac naszego światowej sławy fizyka Mariana SMOLUCHOWSKIEGO, profesora Uniwersytetu Lwowskiego (1899 - 1913), a następnie Uniwersytetu Jagiellońskiego (1913 - 1917), można wybrać pewne pozycje, w których autor podał rozwiązania kilku zagadnień mechaniki. Prace te ukazały się w dwóch wydawnictwach Akademii Umiejętności w Krakowie. Trzy takie pozycje były ogłoszone w latach 1903 - 1909 w Rozprawach Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Polskiej Akademii Umiejętności w Krakowie. W pierwszej z nich, pt. *O zjawiskach aerodynamicznych i połączonych z nimi objawach cieplnych* (1903 r.), M. SMOLUCHOWSKI wyprowadził równania aeromechaniki, wskazał na użyteczność metody podobieństwa dynamicznego i podał rozwiązania kilku zagadnień z aerodynamiki. W drugiej rozprawie *Przyczynki do teorii ruchów cieczy lepkich, zwłaszcza zagadnień dwuwymiarowych* (1907 r.) autor przedstawił rozwiązanie równań różniczkowych, określających dwuwymiarowy ruch cieczy lepkiej i opisał rodzaje badanej poruchy. Trzecią, trwałą pozycję stanowi jego rozprawa *O pewnym zagadnieniu z teorii sprężystości i o jego związku z wytworzeniem się gór faldowych* (1909 r.), w której znaj-

dujemy interesujący wywód teoretyczny powstawania gór fałdowych. W pracy tej punktem wyjścia oryginalnej koncepcji M. SMOLUCHOWSKIEGO jest równanie różniczkowe odkształconej powierzchni ściskanego sprężystego pasma płytowego na ciekłym podłożu. Ściskanie powodujące sfałdowanie płyty zostało określone jako obciążenie krytyczne przy jej wyboczeniu. Dwie z wymienionych wyżej rozpraw M. SMOLUCHOWSKIEGO były wydane również w wersji obcojęzycznej w Biuletynie Międzynarodowym Akademii Umiejętności w Krakowie, który był wtedy reprezentacyjnym czasopismem uczonych polskich, bardzo cenionym zagranicą. Pierwsza praca ukazała się pt. *Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent* (1903 r.), a następna, stanowiąca znaczne rozszerzenie trzeciej rozprawy, była ogłoszona pt. *Über ein gewisses Stabilitätsproblem der Elastizitätslehre und dessen Beziehung zur Entstehung von Faltegebirgen* (1909 r.)

Znaczny dorobek naukowy z mechaniki budowlanej w Politechnice Lwowskiej zawdzięczamy Maksymilianowi THULLIEMU, profesorowi tej uczelni. Opublikował on około 220 prac, z których większość dotyczyła różnych zagadnień statyki budowlanej. Przedmiotem jego prac były między innymi problemy stateczności sprężystej, statyki kratownic oraz sklepień łukowych i parcia ziemi. Opracowany przez M. THULLIEGO i kilkakrotnie wznawiany *Podręcznik statyki budowlanej* (Lwów 1886, ss. 312) obejmuje materiał dobrze przystosowany do ówczesnych potrzeb studentów wydziałów budowlanych wyższych uczelni technicznych. Zawarte w tym podręczniku zagadnienia z wytrzymałości materiałów i ze statyki budowlanej cechuje bardzo praktyczne ujęcie, przejawiające się w wielu przykładach i w pominięciu trudniejszych wywodów teoretycznych. Aczkolwiek omawiany podręcznik nie wyróżnia się dużą wartością naukową, to jednak stanowił on bardzo pożyteczną i na ówczesnym poziomie akademickim pierwszą pozycję ze statyki budowlanej w ośrodku lwowskim, a drugą w języku polskim po znakomitym dziele W. KLUGERA. W końcu XIX w. M. THULLIE zajął się przede wszystkim teorią żelbetu, stając się wkrótce jednym z jej współtwórców i przyczyniając się bardzo do rozwoju tej ważnej dziedziny techniki.

Na początku XX wieku zyskały światowy rozgłos prace Maksymiliana Tytusa HUBERA, ucznia J. N. FRANKEGO, profesora Politechniki Lwowskiej (1908 - 1928), Politechniki Warszawskiej (1928 - 1945), Politechniki Gdańskiej (1945 - 1949) i Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie (1949 - 1950). Ten niezwykle utalentowany uczyony odznaczał się nie tylko nieprzeciętnymi zdolnościami, ale również wyjątkową pracowitością, pomysłowością i intuicją inżynierską. Trwałe miejsce w nauce światowej zapewniły M. T. HUBEROWI jego prace z zakresu hipotez i kryteriów wytrzymałościowych oraz prace z zagadnień twardości i z teorii płyt ortogonalnie anizotropowych, nazwanych przez niego «płytami ortotropowymi».

Wielkie odkrycie naukowe M. T. HUBERA, dotyczące warunku plastyczności, było poprzedzone jego pomysłem hipotezy całkowitej energii odkształcenia. Wprawdzie hipotezę tę zaproponował w 1885 r. wybitny matematyk włoski E. BELTRAMI, lecz M. T. HUBER, nie znając pracy E. BELTRAMIEGO, doszedł w 1903 r. do podobnych wniosków, ogłaszając wyniki swoich rozważań w tomie XV *Prac Matematyczno-Fizycznych* (Warszawa, 1904) w pracy *O podstawach teorii wytrzymałości*. Wkrótce już jednak M. T. HUBER opublikował w *Czasopiśmie Technicznym* (Lwów 1904) rozprawę *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału*, wykazując w niej, że miarą wyężenia materiału jest jednostkowa energia odkształcenia postaciowego. Kryterium M. T. HUBERA znalazło potwierdzenie

nie w pracy R. v. MISESA (1913 r.) oraz w pracy H. HENCKY'EGO (1925 r.), którym nie było znane osiągnięcie polskiego uczonego. Odkrycie naukowe M. T. HUBERA, nazwane warunkiem plastyczności Hubera -Misesa-Hencky'ego, stanowi do dnia dzisiejszego podstawę teorii plastyczności.

Dalszym, poważnym w skali światowej osiągnięciem naukowym M. T. HUBERA było wyjaśnienie zagadnienia tzw. bezwzględnej miary twardości. Problem ten stanowił przedmiot jego rozprawy doktorskiej *Przyczynki do teorii stykania się ciał stałych sprężystych*, opublikowanej pt. *Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper* w czasopiśmie *Annalen d. Physik* (1904). M. T. HUBER wykazał, że proponowana przez znanego fizyka H. HERTZA bezwzględna miara twardości nie jest pewną cechą materiałową, lecz zależy również od kształtu stykających się ciał. Wyżej wymieniona rozprawa M. T. HUBERA wraz z późniejszą jego pracą, napisaną wspólnie z Z. FUCHSEM *Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Zylinder* (Rozkład naprężeń przy stykaniu się dwóch walców sprężystych) ogłoszoną w czasopiśmie *Physikalische Zeitschrift* (1914), stanowi trwały i wysoko oceniony wkład naukowy M. T. HUBERA w dziedzinę tzw. zagadnień stykowych teorii sprężystości.

M. T. HUBEROWI zawdzięczamy również rozwój teorii płyt ortotropowych. Aczkolwiek podstawy tej teorii były opracowane przez F. GEHRINGA i W. VOIGTA, to jednak M. T. HUBER pierwszy podał rozwiązania z zakresu statyki płyt ortotropowych oraz wykazał ich liczne zastosowania praktyczne, przede wszystkim w przybliżonych obliczeniach przemieszczeń i sił wewnętrznych, występujących w płytach żelbetowych, uźebrowanych, w rusztach belkowych itp. Pierwsze osiągnięcia M. T. HUBERA z teorii płyt ortotropowych i z praktycznego jej wykorzystania zostały przedstawione w jego pracy *Ogólna teoria płyt żelazo-betonowych i jej praktyczne zastosowanie do płyty prostokątnej, podpartej wzdłuż całego obwodu*, opublikowanej w *Czasopiśmie Technicznym* (Lwów 1914 r.). W dalszej, obszernej rozprawie *Teoria płyt prostokątne różnokierunkowych wraz z technicznymi zastosowaniami do płyt betonowych, krat belkowych itd.* ukończonej w 1918 r. i wydanej we Lwowie w 1921 r. M. T. HUBER zajął się ścisłym określeniem sztywności płyty ortotropowej oraz modyfikacją postaci jej równania różniczkowego, które w podanym przez niego zapisie jest stosowane do dnia dzisiejszego. Jedną z kilku ostatnich prac M. T. HUBERA, dotyczących płyt ortotropowych, jest monografia *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten* (Teoria płyt ortotropowych), wydana przez Akademię Nauk Technicznych (Warszawa 1929 r.) i obejmująca wykłady autora na Politechnice w Zurychu.

Twórczość naukowa M. T. HUBERA była wyjątkowo rozległa. Opracował on też szereg oryginalnych rozwiązań z mechaniki dla potrzeb lotnictwa, kolejnictwa, techniki maszynowej, uzbrojeniowej i budowlanej. Jego prace, stanowiące piękny polski dorobek naukowy z mechaniki, wywarły bardzo istotny wpływ na rozwój różnych dziedzin techniki. Dużo znakomitych i nie omówionych tu rozpraw naukowych oraz dzieł monograficznych M. T. HUBERA ukazało się po 1918 r.

3.3. Polskie osiągnięcia z mechaniki w Rosji. Znaczne osiągnięcia z mechaniki zawdzięczamy kilku wybitnym polskim uczonym, prowadzącym okresowo lub wyłącznie działalność naukową w uczelniach rosyjskich: Hipolitowi JEWNIEWICZOWI (1831 - 1905), Felik-

sowi JASIŃSKIEMU (1856 - 1899), Stanisławowi BELZECKIEMU (1856 - 1932) i Stanisławowi MILLEROWI (1880 - 1924).

Hipolit JEWNIWICZ, profesor Instytutu Technologicznego w Petersburgu, Petersburskiej Akademii Inżynierów Marynarki i Instytutu Inżynierów Cywilnych w Petersburgu był autorem kilku bardzo dobrych podręczników akademickich z mechaniki budowlanej i z teorii sprężystości oraz wielu wartościowych prac z hydromechaniki, hydrauliki i matematyki stosowanej, opublikowanych w polskim Przeglądzie Technicznym i w czasopiśmie rosyjskim *Inżynierski Żurnal*.

Wydane w języku rosyjskim podręczniki H. JEWNIWICZA *Kurs praktyczny mechaniki i Podręcznik do ustalenia praw wytrzymałości materiałów budowlanych wraz z teorią sprężystości ciał stałych* wypełniały lukę w technicznej literaturze rosyjskiej i wyróżniały się dobrym poziomem teoretycznym oraz zwięzłością i jasnością wykładu. Szczególnie cenną pozycję stanowi dzieło H. JEWNIWICZA *Teoria sprężystości i jej zastosowanie do nauki o wytrzymałości materiałów budowlanych oraz do zasad głównych statyki cieczy i dynamiki cieczy* (Warszawa 1910, ss. XII+296). Monografia ta, opracowana z uwzględnieniem najnowszych ówczesnych osiągnięć naukowych i wydana już po śmierci autora wyłącznie w języku polskim, jest pierwszą polską książką obejmującą całość materiału z teorii sprężystości. Zawiera ona wykłady H. JEWNIWICZA z podstaw teorii sprężystości wraz z jej zastosowaniami w zagadnieniach statyki prętów prostych i zakrzywionych, klinów, naczyń walcowych i kulistych oraz w zagadnieniach dynamiki prętów, płyt i rozchodzenia się drgań w ośrodku sprężystym i krystalicznym. Na kilku ostatnich stronach omawianej książki znajdujemy podstawowe równania statyki i dynamiki cieczy.

Pół wieku intensywnej działalności naukowej i dydaktycznej H. JEWNIWICZA utrwaliło jego nazwisko w uczelniach rosyjskich i w nauce polskiej.

Bardzo wysoko zostały odnotowane w historii mechaniki osiągnięcia wybitnego polskiego uczonego Feliksa JASIŃKIEGO, profesora Instytutu Inżynierów Komunikacji w Petersburgu (od 1894 r.). Był on autorem kilkudziesięciu prac naukowych oraz dwóch doskonałych dzieł podręcznikowych. Główna pionierska jego rozprawa naukowa dotyczyła stateczności sprężystej prętów. Ukazała się ona w 1893 r. w czasopiśmie francuskim *Annales des Ponts et Chaussées*, następnie w 1894 r. w języku rosyjskim, a w 1895 r. w *Przeglądzie Technicznym* pt. *Badania nad sztywnością prętów ściskanych*. Pracy tej zawdzięczamy ostateczne usunięcie wątpliwości w słuszność teorii wyboczenia L. EULERA. Powszechnie uznanie zyskały również inne rozprawy naukowe F. JASIŃKIEGO z zakresu wyboczenia sprężystego i niesprężystego, mające bardzo duże znaczenie praktyczne. Osiągnięcia te były w owym czasie wykorzystane przy racjonalnym projektowaniu ustrojów prętowych, występujących zwłaszcza w konstrukcjach mostowych.

W 1897 r. ukazało się w Petersburgu znakomite dzieło F. JASIŃKIEGO *Kurs teorii uprugosti* (Kurs teorii sprężystości) o objętości 238 stron. Duże zalety tej monografii przejawiają się w metodyce wykładu oraz w nowoczesnym ujęciu materiału; obejmującego między innymi podstawowe związki stanu naprężenia i odkształcenia, statyczne i dynamiczne równania różniczkowe równowagi ciał sprężystych i zadanie B. Saint-Venanta. Drugie dzieło F. JASIŃKIEGO *Kurs stroitielnoj miechaniki* (Kurs mechaniki budowlanej), wydane w 1898 r. również w Petersburgu, zawierało statykę ustrojów prętowych ze szczególnym uwzględnieniem kratownic płaskich i przestrzennych oraz praktycznych metod obli-

czania sklepień. Oba wymienione tu dzieła F. JASIŃSKIEGO nie ustępowały poziomem najlepszym pozycjom zagranicznym i stanowią w przekroju światowym cenny dorobek naukowy z mechaniki budowli oraz z teorii sprężystości.

Wybitne osiągnięcia i zasługi F. JASIŃSKIEGO w krótkim okresie jego pracy, pełnej poświęcenia dla nauki, znalazły piękną ocenę w następujących słowach światowej sławy uczonego rosyjskiego S. P. TIMOSZENKI: „*Jego przedwczesna śmierć przerwała świetną karierę profesorską, jednak w ciągu pięciu lat wykładów w instytucie udało mu się podnieść poziom przygotowania teoretycznego inżynierów rosyjskich. Jego podręczniki z mechaniki budowli i teorii sprężystości były w Rosji szeroko rozpowszechnione. Jasiński był wielkim profesorem. Uczelnia zyskała w jego osobie niezwykle połączenie inżyniera praktyka — który był wielkim uczonym o głębokiej znajomości swojego przedmiotu — oraz pierwszorzędного wykładowcy. Studenci rosyjscy w owym czasie mieli zupełną swobodę w wyborze zajęć i rozkładzie czasu pracy. Niewielu z nich uczęszczało na wykłady regularnie, jednak na wykładach Jasińskiego sala zawsze była przepelniona*”.

W uczelniach rosyjskich mechanika budowli i teoria sprężystości były reprezentowane jeszcze przez dwóch polskich uczonych: Stanisława BELZECKIEGO, profesora Politechniki Petersburskiej (1907 - 20), a następnie profesora Politechniki Warszawskiej (1921 - 27), oraz przez jego asystenta w Politechnice Petersburskiej — Stanisława MILLERA, późniejszego profesora Politechniki Warszawskiej (1920 - 25).

Rozprawy naukowe (około 20) S. BELZECKIEGO, ogłaszane do 1910 r. przeważnie w czasopiśmie rosyjskim Izwiestja Sobranija Inżenierow Putiej Soobszczenja, dotyczyły głównie statyki prętów zakrzywionych, ustrojów ramowych (a w tym ram typu Vierendeela) i niektórych płaskich zadań teorii sprężystości. Jego prace z zakresu racjonalnego kształtowania wytrzymałościowego dźwigarów łukowych były wysoko ocenione. Poza tym S. BELZECKI był autorem trzech podręczników akademickich, wydanych w Petersburgu zapewne w postaci skryptów: *Teoria sprężystości*, *Mechanika budowlana* i *Wytrzymałość materiałów*. Niezależnie od pracy naukowej S. BELZECKI zyskał duże uznanie jako konstruktor budowlany, wykonując między innymi projekty mostów przez rzeki Samur i Terek, dwa projekty mostów przez rzekę Don w Rostowie oraz projekt wiaduktu przez dolinę «Suchy Łóg» na linii kolejowej Moskwa—Kazań—Ekaterynburg.

Działalność S. MILLERA w Politechnice Petersburskiej przejawiała się do 1920 r. głównie w pracy dydaktycznej. Jego kilka dobrych prac z różnych działów mechaniki budowli ukazało się w okresie późniejszym w wydawnictwach krajowych.

3.4. Ważniejsze pozycje z mechaniki w Warszawie i w Krakowie. W ostatnich latach XIX w. i na początku XX w. odnotowujemy duże zainteresowanie naukami ścisłymi w Krakowie i w Warszawie.

Chlubna działalność naukowa TNS¹ w Paryżu, nawet po jego rozwiązaniu, wydajnie owocowała. Z inicjatywy dwóch byłych autorów prac matematycznych w Pamiętniku TNS¹, Mariana BARANIECKIEGO (1848 - 1895) i Samuela DICKSTEINA (1851 - 1939) powstały w Warszawie wydawnictwa naukowe, publikujące prace z różnych działów matematyki i fizyki, a w tym i z mechaniki.

Marian BARANIECKI, profesor Szkoły Politechnicznej we Lwowie (od 1885 r.) i jednocześnie Uniwersytetu Jagiellońskiego, był założycielem i przez kilka lat (1882 - 1885)

redaktorem wydawanej w Warszawie Biblioteki Matematyczno-Fizycznej (Kasa im. Józefa Mianowskiego), w której między innymi ukazało się omówione już znakomite dzieło *Mechanika teoretyczna* J. N. FRANKEGO, a następnie doskonały trzypiętomowy podręcznik akademicki *Zasady fizyki* (t. I - 1892, t. II - 1897, t. III - 1912) Augusta Wiktora WITKOWSKIEGO (1854 - 1913), profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego (1888 - 1913). Pierwszy tom (ss. XX + 463) dzieła A. W. WITKOWSKIEGO obejmuje materiał z mechaniki teoretycznej, mechaniki ciał sprężystych, hydromechaniki, gazomechaniki i akustyki. Wykład z mechaniki teoretycznej rozpoczął autor od kinematyki, następnie podał podstawowe pojęcia i prawa dynamiki, zagadnienia statyki oraz zasady energetyczne. Dalej są omówione odkształcenia sprężyste, własności ciał sprężystych oraz podstawowe równania i niektóre zagadnienia mechaniki cieczy i gazów. W ostatnim, piętnastym rozdziale pierwszego tomu autor opisał drgania sprężyste strun i prętów. Zawarty w tym dziele materiał, wzbogacony licznymi przykładami, cechuje bardzo staranne opracowanie pod względem dydaktycznym przy dużej dbałości autora o dobre i przejrzyste interpretacje fizyczne opisanych zagadnień, nawet kosztem pewnej rezygnacji z elegancji niektórych uogólnień matematycznych. Dwa następne tomy omawianego podręcznika obejmują inne działy fizyki. Dzieło A. W. WITKOWSKIEGO było powszechnie uznane za klejnot polskiej literatury naukowej.

Wkrótce z inicjatywy Samuela DICKSTEINA, profesora honorowego Uniwersytetu Warszawskiego (od 1919 r.) powstały w Warszawie trzy dalsze wydawnictwa: 1. *Prace Matematyczno-Fizyczne* (1888 r.), 2. *Dzieła i Rozprawy Matematyczno-Fizyczne* (1895 r. — wydawane wspólnie z Aleksandrem Czajewiczem) i 3. *Wiadomości Matematyczne* (1897 r.). W wydawnictwach tych były między innymi opublikowane niektóre wymienione poprzednio prace A. DENIZOTA oraz znakomite rozprawy M. T. HUBERA. Na szczególną uwagę zasługuje również ogłoszona w tomie I *Prac Matematyczno-Fizycznych* (1888 r.) rozprawa W. GOSIEWSKIEGO *O związku między zasadą najmniejszego działania i najprawdopodobniejszym układem*, w której znajdujemy pierwsze zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa w mechanice. W pracy tej W. GOSIEWSKI wykazał, że zasadę najmniejszego działania można zastąpić zasadą najprawdopodobniejszego układu. W *Pracach Matematyczno-Fizycznych* ukazało się również znakomite dzieło *Wstęp do fizyki teoretycznej* (Warszawa 1890, ss. XI + 458) Władysława NATANSONA (1864 - 1937), profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego (1917 - 1935). Wprawdzie w dziele tym autor przeznaczył mechanice tylko kilkadziesiąt stron, ograniczając swoje rozważania do klasycznych zasad i zagadnień dynamiki oraz odsyłając czytelnika zainteresowanego głównie mechaniką do podręcznika J. N. FRANKEGO, ale podany materiał cechuje rzadko spotykana oryginalność opracowania. Wszeczhronnie utalentowany umysł W. NATANSONA nie poskąpił w jego dziele głębokich interpretacji filozoficznych podstawowych pojęć fizycznych i zjawisk przyrodniczych, licznych cytatów, notek historycznych i bibliograficznych.

Kilka bardzo wartościowych pozycji z hydromechaniki, aeromechaniki i z teorii sprężystości było ogłoszonych w wydawnictwach Akademii Umiejętności w Krakowie. W 1890 r. w *Pamiętniku Akademii Umiejętności* ukazały się dwie cenne prace W. GOSIEWSKIEGO: 1. *O ciśnieniu kinetycznym w płynie nieściśliwym i jednorodnym*, 2. *O naturze ruchu wewnątrz elementu płynnego*, przy czym druga rozprawa jest wysoko oceniona nawet w wydanej niedawno (1962) doskonałej monografii A. C. ERINGERA *Nonlinear theory of continuous media*. W *Rozprawach Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Polskiej Akademii Umie-*

jętności w Krakowie i w Biuletynie Międzynarodowym Akademii Umiejętności w Krakowie znajdujemy bardzo dobre pozycje z kinematyki brył sztywnych i z mechaniki ośrodków ciągłych naszego wybitnego matematyka Kazimierza ŻORAWSKIEGO (1866 - 1953), profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego (1895 - 1918), a następnie Politechniki Warszawskiej (1919 - 1926) i Uniwersytetu Warszawskiego (1926 - 1935). Z pozycji tych, stanowiących małą część bogatego dorobku publikacyjnego K. ŻORAWSKIEGO, zyskała szczególnie duże zainteresowanie w kraju i zagranicą jego dwuczęściowa praca, ogłoszona w Rozprawach Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego PAU (1901, 1902) pt. *O pewnych zmianach długości liniowych elementów podczas ruchu ciągłego układu materialnych punktów* oraz w Biuletynie Międzynarodowym Akademii Umiejętności (1901) pt. *Über gewisse Änderungsgeschwindigkeiten von Linienelementen bei der Bewegung eines kontinuierlichen materiellen Systems*. W 1903 r. ukazały się jeszcze w Biuletynie Międzynarodowym Akademii Umiejętności dwie znakomite rozprawy z mechaniki naszego wybitnego matematyka Stanisława ZAREMBY (1863 - 1942) profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego (1900 - 1939). W jednej z tych prac *Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité* (O uogólnieniu klasycznej teorii lepkości) autor zaproponował pewne uogólnienie modeli ciał lepkosprężystych. W drugiej rozprawie *Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation* (O udoskonalonej postaci teorii relaksacji) S. ZAREMBA pierwszy zdefiniował obiektywne pochodne tensora naprężenia, wprawdając również pojęcie współbrotowej prędkości zmiany naprężenia. Zarówno wyżej wymienione rozprawy, jak też inne doskonałe prace (głównie z matematyki) S. ZAREMBY stanowią trwałą o światowym znaczeniu wkład do nauk ścisłych i są często z dużym uznaniem cytowane w pracach oryginalnych oraz w podręcznikach autorów polskich i zagranicznych. Nie będziemy tu omawiali prac z mechaniki S. ZAREMBY, opublikowanych po 1918 r., a przede wszystkim jego wspaniałego dwutomowego dzieła *Zarys mechaniki teoretycznej*, które ukazało się dopiero w latach 1933 - 1939.

W Politechnice Warszawskiej w pierwszym okresie jej istnienia mechanika teoretyczna była reprezentowana przez dwóch profesorów tej uczelni: Henryka CZOPOWSKIEGO (1863 - 1935) i Zygmunta STRASZEWICZA, (1860 - 1927), których podręczniki prawie przez 20 lat stanowiły podstawowy materiał w nauczaniu mechaniki teoretycznej na różnych wydziałach.

Prace H. CZOPOWSKIEGO, ogłoszone do 1918 r. w Przeglądzie Technicznym dotyczą teorii wodotrysków, niektórych zagadnień teorii sprężystości i zasad energetyki. Pierwsze dwutomowe (nieco skromniejsze od drugiego) wydanie jego podręcznika *Mechanika teoretyczna* (Warszawa 1911, ss. 740) obejmuje zasadniczy materiał ze statyki, kinematyki i dynamiki, bogato ilustrowany przykładami i dobrze przystosowany do studiów politechnicznych.

Cenną pozycją z mechaniki teoretycznej Z. STRASZEWICZA jest jego podręcznik *Nauka o ruchu* (Warszawa 1918, s. 376), zawierający podstawowy materiał z kinematyki i dynamiki. Inne prace Z. STRASZEWICZA mają charakter popularyzatorski, albo stanowią bardzo pożyteczne przekłady z języków obcych i dotyczą różnych dziedzin nauki i techniki.

Przedstawiony przegląd polskich prac z mechaniki obejmuje tylko znaczniejsze pozycje, ogłoszone do 1918 r. Wśród wielu wymienionych autorów nie wspomniano o kilku wybitnych polskich uczonych (jak np. Edward HABICH, Stefan DRZEWIECKI, Aleksander WASIU-

TYŃSKI, Stefan BRYŁA, Andrzej PSZENICKI, Czesław M. WITOSZYŃSKI, których działalność naukowa była wprawdzie silnie powiązana z mechaniką, ale trwałe i oryginalne ich osiągnięcia w rozważanym okresie dotyczą wynalazczości oraz nowych rozwiązań w zakresie konstrukcji budowlanych, okrętowych i lotniczych. Nie omówiono też przypadającej na okres późniejszy twórczości w mechanice znakomitego polskiego uczonego Antoniego Bonifacego PRZEBORSKIEGO (1871 - 1941); wcześniejsze jego prace w naszym rozeznaniu dotyczą wyłącznie matematyki.

Literatura cytowana w tekście¹⁾

1. J. N. FRANKE, *Mechanika teoretyczna*, Warszawa 1889.
2. F. KUCHARZEWSKI, *Mechanika w swym rozwoju historycznym*, Warszawa 1924.
3. Księga pamiątkowa «Politechnika Warszawska 1915 - 1925», Warszawa 1925.
4. Księga pamiątkowa «50 lat Wydziałów Inżynierii Budowlanej, Inżynierii Sanitarnej i Wodnej, Komunikacji, Geodezji i Kartografii Politechniki Warszawskiej 1915 - 1965», Warszawa 1965.
5. Księga pamiątkowa «50 lat Wydziałów Mechanicznych Politechniki Warszawskiej 1915 - 1965», Warszawa 1968.
6. J. MUTERMILCH, *Mechanika budowli na tle przygotowań do I Kongresu Nauki Polskiej*, Inżynieria i Budownictwo, 9 - 10 (1950), 457 - 452.
7. W. NOWACKI, *Rozwój teorii wytrzymałości materiałów w Polsce*, Mech. Teoret. Stos., 4, 6 (1968), 407 - 416.
8. H. BUZUN, *Historia mechaniki ogólnej i stosowanej w Polsce w okresie lat 1795 - 1945*. Maszynopis w archiwum Zakładu Historii Nauki i Techniki PAN.
9. D. i Z. MAZURKIEWICZOWIE, *Polskie tradycje w zakresie mechaniki teoretycznej i stosowanej*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki, 1, 18 (1973), 123 - 144.

Резюме

ОБ ИСТОРИИ ПОЛЬСКОЙ МЕХАНИКИ ДО 1918 ГОДА

В работе представлен обзор развития польской механики до 1918 г. После короткого представления первых польских работ из области механики, оговорен наш значительный вклад в развитие этой науки в период с 1863 по 1918 г. благодаря деятельности польских ученых в Обществе Естественного знания в Париже, в высших школах Львова, в русских университетах и политехнических институтах, а позднее в Ягеллонском Университете и Польской Академии Наук в Кракове, варшавских научных изданиях и Варшавской Политехнике.

Summary

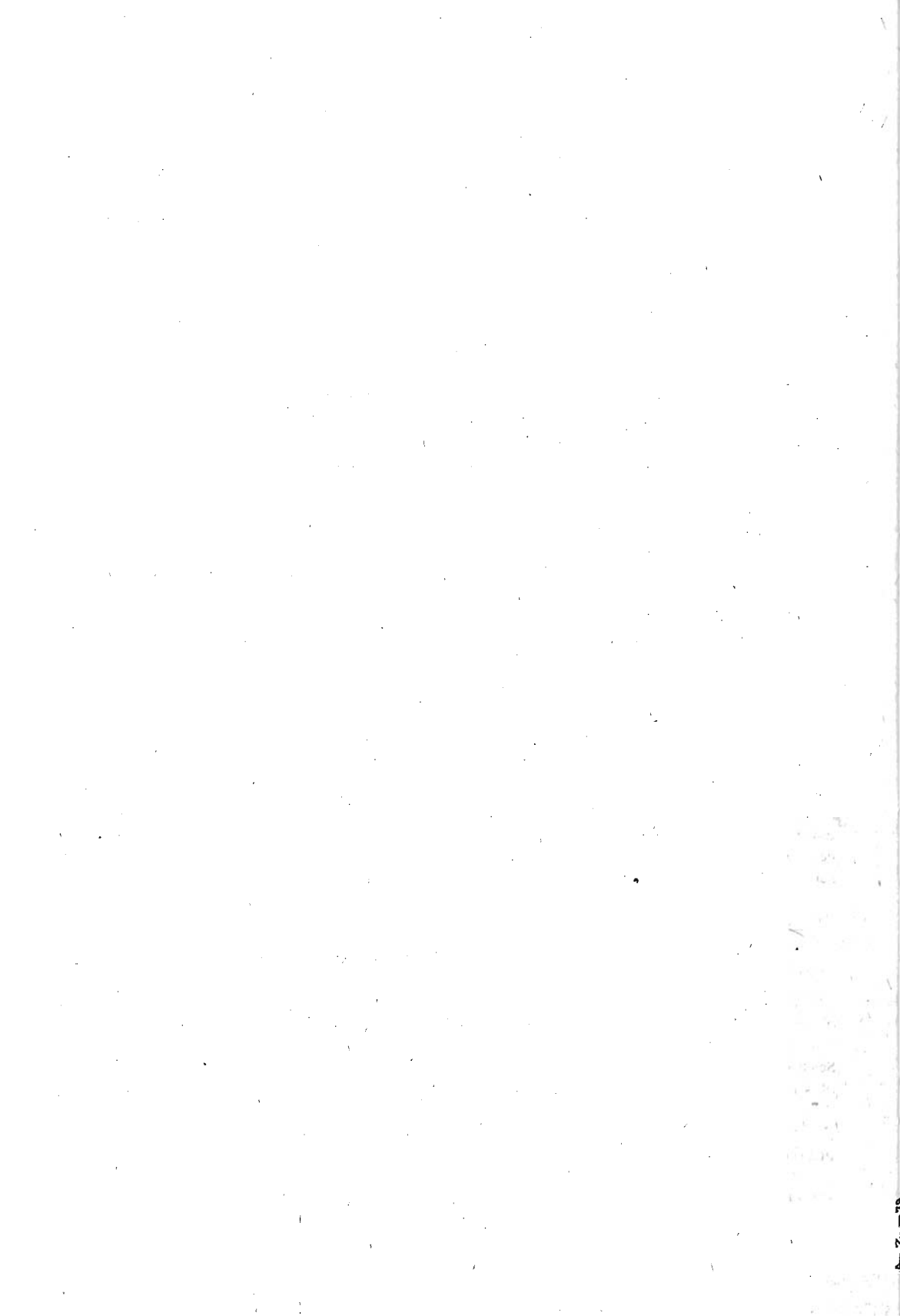
ON THE HISTORY OF POLISH MECHANICS BEFORE 1918

The paper presents a review on the development of Polish Mechanics before 1918. A short discussion of the first Polish papers dealing with mechanics is followed by a review on the considerable scientific achievements in that domain which are due to the activity of Polish scientists working at the Polish Society of Sciences in Paris, at the Lvov universities, at various Russian universities, and then at the Polish Academy of Sciences (PAU) and the Jagiellonian University in Cracow and the Warsaw Technical University.

1) W cytowanej literaturze pominięto pojedyncze, okolicznościowe notki biograficzne.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lutego 1977 r.



PEWNE PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA TEORII KATASTROF W MECHANICE*

M. J. SEWELL (READING, W. BRYTANIA)

1. Wstęp

Tematem artykułu jest zastosowanie teorii katastrof w mechanice; jego celem podanie przykładów, zrozumiałych bez specjalistycznego przygotowania matematycznego.

Większość podanych przykładów jest oryginalna. Powstały one przy okazji wygłaszania przez autora wykładów na temat zastosowań teorii katastrof, z których pierwszy miał miejsce na zebraniu Towarzystwa Matematycznego w Reading w 1974 r., a później m.in. w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki w Warszawie (w 1975 r.).

Ze względu na trudność i złożoność dowodu twierdzenia Thoma [1] i twierdzenia o uniwersalnym wygładzaniu, wydaje się uzasadnione najpierw pokazać na przykładach co twierdzenia te mówią, a do dowodów powrócić później.

Artykuł zawiera również opisy prostych doświadczeń. Czytelnik będzie mógł skonstruować własne przykłady, na wzór tu zamieszczonych, i przeanalizować je metodami teorii katastrof.

Stosowanie tej teorii ma wiele aspektów, które powinny być przedstawione zanim osiągnie się pełne zrozumienie jej giętkości interpretacyjnej. Zadaniem artykułu jest dać pewne wyobrażenie o temacie bez szczegółowego zgłębiania go. Rozważany jest problem: jeżeli teoria katastrof może opisać zdarzenia tak skomplikowane jak ewolucja embrionu [2], czy inne typy morfogenezy biologicznej [3], to czy można ją zastosować do ilościowej analizy problemów morfogenezy mechanicznej?

Prostym przykładem tej ostatniej może być quasi-statyczna ewolucja konstrukcji od jej stanu «naturalnego» (beznapięzeniowego) tzn., używając terminologii biologicznej, wyłowienie jej «ośrodka organizującego». Teorię katastrof, jak dotychczas, sformułowano jedynie dla przestrzeni o skończonej liczbie wymiarów. Dlatego bezpośrednie zastosowanie jej do problemów mechaniki wymaga rozważenia ich skończenie-wymiarowych aproksymacji. Pewne wskazówki daje tu praca [4].

2. Proste przykłady katastrof

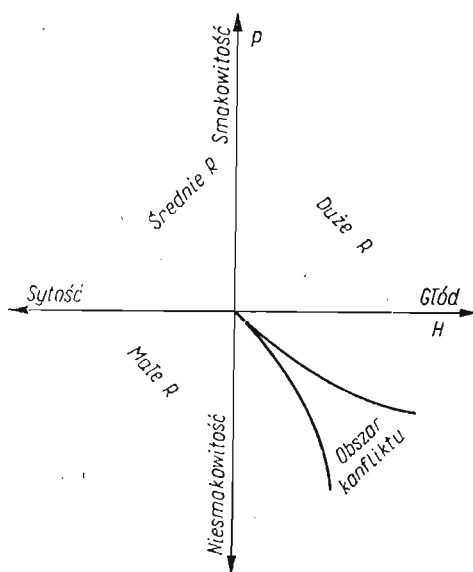
2.1. Katastrofa kuchenna. Aby wprowadzić w temat, zaczynijmy np. od apetytu i prześledźmy następnie pewien schemat geometryczny i zachodzące zależności. Przypuśćmy, że ktoś został poczęstowany jedzeniem. Jakie czynniki wpływają na R — jego zapal do

* Pracę przetłumaczył z angielskiego dr S. Świszczowski, a opracował dr hab. J. A. König.

jedzenia? Oczywiście, jednym z najistotniejszych jest głód H lub jego przeciwieństwo — H — nasylenie. Istnieje również i drugi czynnik, którym jest smakowitość jedzenia P lub jego przeciwieństwo $-P$.

Funkcja $R(H, P)$ wyraża jedną zmienną stanu przez dwie niezależne zmienne sterujące. Jeżeli obie wartości, H i P , są duże, to i R będzie duża. Jeżeli H będzie małe, a P duże, to R zapewne przyjmie wartość średnią. Gdy jednak H ma dużą, a P małą wartość, powstaje sytuacja, w której R przyjąć może wartość zarówno dużą, jak i małą.

Danie może mieć smak tak odstręczający, że nie można go jeść bez względu na to, jak jest się głodnym; można też być tak głodnym, że je się bez względu na smak jedzenia. Tę sytuację, w której obie decyzje: jeść lub nie jeść są możliwe, nazywamy «katastrofą kuchenną» [5]. Stosując terminologię ZEEMANA [6] nazwiemy głód i niesmakowitość potrawy czynnikami konfliktowymi.

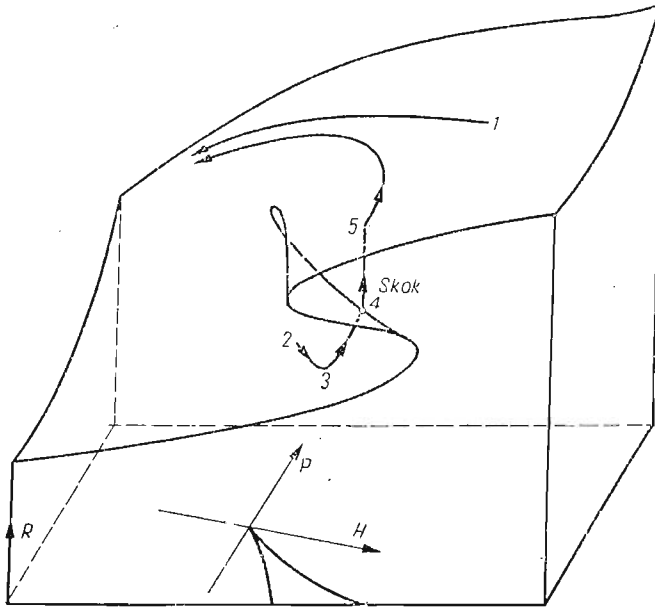


Rys. 1

Teoria katastrof sugeruje, że obszar konfliktowy ma na płaszczyźnie H, P kształt ostrego (rys. 1). Wartość funkcji $R(H, P)$ może być przedstawiona jako wysokość ponad płaszczyznę H, P ; w ten sposób w trójwymiarowej przestrzeni H, P, R powstanie pewna powierzchnia (rys. 2). Jest ona gładka, ale zawiera fałdę. Rzut tej fałdy na płaszczyznę H, P wyznacza obszar konfliktowy. Każda prosta pionowa, przechodząca przez ten obszar przecina powierzchnię z rys. 2 w trzech punktach. Inne proste pionowe przecinają ją tylko raz.

Narysujmy na tej powierzchni pewne przebiegi trajektorii posiłków. Zwykle posiłek zaczyna się w punkcie 1, gdzie H i P mają duże wartości, a następnie postępujemy, przy stałym P , w kierunku malejących H , dopóki R nie dojdzie do zera. Przebieg ten omija sfaldowanie. Rozważmy jednakże przypadek dziecka (historia prawdziwa 3), które lubi kurczaka z sosem chlebowym, a nie lubi go jeść bez sosu. Gdy brak sosu, przebieg posiłku

rozpocznie się od punktu 2, na najniższej części fałdy, gdzie H ma dużą wartość, ale R i P mają wartości niskie. Jeśli nie zmieniamy sterującej zmiennej P , to wartość H będzie rosła, podczas gdy R pozostanie bliskie zeru. Na szczęście można osiągnąć wzrost P poprzez obietnicę (w punkcie 3) dania dziecku kanapki z kurczędem i szklanki mleka (mniej więcej te same składniki co sosu chlebowego). Zmienia to trasę trajektorii w kierunku



Rys. 2

dolnej linii fałdy, a gdy zostanie ona osiągnięta (w punkcie 4), nastąpi skok na tę część powierzchni, na której wartość R jest duża (punkt 5). Następnie trajektoria zbliża się do tej, którą omawiano poprzednio i sytuacja jest uratowana.

Skok nastąpił, ponieważ środkowa, odwrotnie nachylona, powierzchnia fałdy powyżej obszaru konfliktu może być uznana za powierzchnię niestabilną, podczas gdy inne punkty na powierzchni można nazwać stabilnymi. Gładka linia sfaldowania (zarówno jej górna, jak i dolna część) powoduje w ten sposób «katastrofę», w sensie nagłej zmiany położenia punktu (w górę lub w dół) dla każdej trajektorii, która tam przechodzi.

Jaki jest pożytek z modelu «katastrofy kuchennej»? Po prostu wprowadza on nas, w sposób elementarny, w teorię katastrof. Początkujący powinien skonstruować swoje własne przykłady, w których zostałyby zidentyfikowane «podstawowe zmienne sterowania». Następnie można tworzyć przykłady o bogatszej zawartości. Jedną z podstawowych trudności jest dobór danych. Prawidłowy model teorii katastrof musi wyraźnie identyfikować podstawowe zmienne sterowania. Ścisłość tej identyfikacji zależy od rodzaju problemu.

2.2. Obwiednia normalnych do paraboli. Jak wiadomo [7], obwiednią normalnych do paraboli jest ostrze. Ostrze to możemy interpretować jako rzut na płaszczyznę x, y gładkiej,

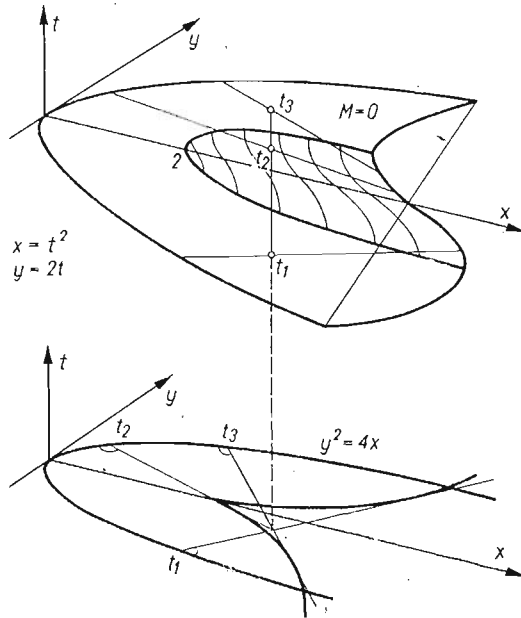
sfałdowanej trójwymiarowej powierzchni w przestrzeni x, y, t , gdzie t jest parametrem paraboli.

Normalną do paraboli $y^2 = 4x$, na płaszczyźnie x, y w punkcie $t^2, 2t$, jest krzywa

$$(2.1) \quad (y-2t)(x-t^2) = -t$$

lub inaczej

$$(2.2) \quad M(x, y, t) = t^3 - t(x-2) - y = 0.$$



Rys. 3

Powierzchnię tę przedstawiono na rys. 3. Sama linia fałdowa jest gładką krzywą przestrzenną, wzdłuż której płaszczyzna styczna do $M = 0$ jest pionowa. Jej równanie znaleźć można przez rozwiązanie układu $\partial M / \partial T = 0$ w połączeniu z $M = 0$, co daje

$$(2.3) \quad x-2 = 3t^2, \quad y = -2t^3.$$

Forma parametryczna $x = t^2, y = 2t$ paraboli może być rozpatrywana (niekonwencjonalnie) jako inna krzywa przestrzenna, która także leży na powierzchni $M = 0$.

Rozważmy teraz rzut powierzchni $M = 0$ na płaszczyznę x, y . Po wyczerpaniu t okazuje się, że rzut linii fałdowej jest krzywą o kształcie ostrza

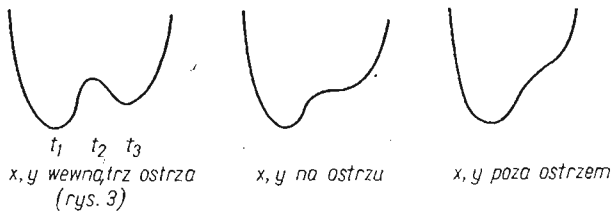
$$(2.4) \quad 4(x-2)^3 = 27y^2,$$

a rzutem paraboli przestrzennej jest jej parabola płaska $y^2 = 4x$. Rzuty te pokazano w niższej części rys. 3. Niech t_0 będzie dowolną daną wartością parametru t . Płaszczyzna pozioma $t = t_0$ przecina powierzchnię sfałdowaną $M = 0$ wzdłuż linii prostej. Linia ta przecina wznoszącą się linię fałdową tylko raz i jej rzut jest styczny do ostrza. Ale ten rzut jest także normalny do (płaskiej) paraboli w punkcie odpowiadającym parametrowi t_0 . Wobec tego krzywa o kształcie ostrza jest obwiednią normalnych do paraboli.

Przez każdy punkt płaszczyzny x, y przechodzi jedna normalna, natomiast przez każdy punkt wewnątrz ostrza przechodzą trzy normalne. Odpowiadające im wartości t znaleźć można, znajdując wartości np. t_1, t_2, t_3 , dla których oś t przechodzi przez powierzchnię sfałdowaną (rys. 4).

Istnieje kwadratowy potencjał generujący

$$(2.5) \quad V = 14t^4 - 12t^2(x-2) - ty + 14(x^2 + y^2)$$



Rys. 4

taki, że $\frac{1}{4}\sqrt{V}$ jest odległością pomiędzy dowolnym punktem x, y na płaszczyźnie x, y , a punktem $t^2, 2t$ na paraboli. Funkcja $V(t; x, y)$ ma przy tym następujące własności:

$$(2.6) \quad M = \partial V / \partial t, \quad \partial M / \partial t = \partial^2 V / \partial t^2.$$

Stacjonarne ze względu na t wartości tej odległości (np. gdy położenie paraboli ulega zmianie poprzez zmianę t w granicach od $-\infty$ do $+\infty$) odpowiadają wobec tego, jeśli rozpatrujemy po kolei każdy punkt (x, y) , wszystkim punktom (x, y, t) powierzchni $M = 0$. Gdy zmieniamy położenie paraboli, kwadrat odległości do niej z punktu (x, y) zachowuje się jak jedna z funkcji kwadratowych pokazanych (dla $y < 0$) na rys. 4, której wartości stacjonarne odpowiadają punktom początkowym normalnych.

Linia fałdowa na $M = 0$ oddziela punkty o maksymalnej odległości ($\partial V / \partial t = 0$, $\partial^2 V / \partial t^2 < 0$, wewnątrz fałdy) od punktów o odległości minimalnej ($\partial V / \partial t = 0$, $\partial^2 V / \partial t^2 > 0$ na zewnątrz fałdy).

W teorii katastrof parametr t uznaje się za zmienną stanu, a x, y za zmienne sterowania. W terminologii mechanicznej $\partial V / \partial t$ może być uważana za siłę, a fałdowa powierzchnia $M = 0$ może być uznana za «powierzchnię równowagi». Oczywiście, przy rozważaniach czysto geometrycznych wprowadzanie takiej terminologii nie jest konieczne.

Podstawą komputerowych obliczeń obwiedni (tak zwanych zbiorów bifurkacyjnych) jest metoda tworzenia kolejnych przekrojów poziomych poprzez powierzchnię sfałdowaną i rzutowanie tych prostych na powierzchnię sterującą. Metoda ta została zastosowana do wszystkich elementarnych katastrof o wymiarze ≤ 4 , badanych przez WOODCOCKA i POSTONA [8]. Może ona być porównana z metodą analityczną eliminacji t z równań $M = \partial M / \partial t = 0$.

Istnieje tu wyraźny związek z teorią optymalizacji, przejawiający się w szukaniu minimalnej odległości od zbioru wypukłego (parabola) nie tylko punktów na zewnątrz, lecz również i wewnątrz zbioru. Problemy dualne i przytoczone problemy punktu siodłowego mogą być również rozpatrywane z punktu widzenia teorii katastrof.

3. Co to jest teoria katastrof?

Teoria katastrof zajmuje się, w szczególności, określaniem pewnych podstawowych lokalnych cech jakościowych rozwiązań równań typu

$$(3.1) \quad \partial V / \partial x = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

otrzymanych z danego gładkiego potencjału generującego $V(x, \lambda_\alpha)$ z n zmiennymi stanu x_i i k parametrami sterującymi λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, k$). Tych n równań, wiążących $n+k$ zmiennych, określa k -wymiarową «rozmaitość katastrofy» [8], lub «powierzchnię równowagi» [9]. Na tej powierzchni istnieje pewna «granica stabilności» [9], na której zeruje się wyznacznik

$$(3.2) \quad \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right| = 0,$$

(np. linia fałdowa na rys. 3, na której płaszczyzna styczna do powierzchni równowagi jest prostopadła do przestrzeni sterującej). W tym sensie granica stabilności określa stany «równowagi krytycznej», dla których V może przestać być lokalnym minimum, co odpowiada osobliwościom rzutu powierzchni równowagi na przestrzeń sterowań. Jako konsekwencja tego rzutowania — granica stabilności w przestrzeni sterowania — (otrzymana w zasadzie przez wyeliminowanie n parametrów x z kolejnych $n+1$ równań) jest $k-1$ wymiarowym «miejszem upadku» uzależniającym k parametrów sterujących (np. samo ostrze na rys. 3). To miejsce upadku jest nazywane w teorii katastrof «zbiorem bifurkacji».

Twierdzenie Thoma [1, 3, 6] identyfikuje możliwe zbiory bifurkacji jako równoważne, w określonym sensie technicznym, z jedną z małej liczby katastrof nazwanych «katastrofami elementarnymi». Liczba ta jest skończona (w rzeczywistości ≤ 11), jeżeli $k \leq 5$, niezależnie od wartości n (która w takim razie może wynieść wiele tysięcy; pozwala to rozważać układy, które już zostały zdyskretyzowane, np. przez podział na elementy skończone i stosować zasady wariacyjne).

Jeśli wymiar przestrzeni sterowania $k \leq 4$, to wtedy istnieje co najwyżej 7 katastrof elementarnych. Są one wyrażalne [10] poprzez «wygładzenie» zwykłych wielomiarowych «zarodków» dla jednej lub dwu zmiennych stanu. W tablicy 1 przytoczono listę Thoma możliwych katastrof. Zmienne sterowania zostały w przedstawionej wersji ograniczone do u, v, w, t .

Przykład ostrza z poprzedniego rozdziału można otrzymać przez prostą zmianę zmiennych: $(x, n, v) \rightarrow (t, 2-x, y)$.

Przy stosowaniu teorii katastrof do konkretnego problemu nasuwa się pytanie, ile występuje w nim podstawowych parametrów sterowania i jaka jest ich interpretacja? Jeśli mamy do czynienia z zastosowaniem mechanicznym, V może być energią potencjalną systemu z x jako współrzędnymi uogólnionymi, a w mechanice konstrukcji, na przykład, parametry sterowania mogą być kombinacją obciążeń, wymiarów, niedokładności lub modułów [9]. Elastyczność spojrzenia jest sprawą na tym etapie zasadniczą, ponieważ zmienne sterowania pokazane na powyższej liście wygładzeń mogą nie mieć prostych interpretacji, np. mogą być algebraiczną kombinacją prostych sterowań fizycznych. Co więcej, nawet w kontekście mechanicznym, V nie musi być energią potencjalną. W rzeczywistości może przedstawiać (po dyskretyzacji) dowolny funkcjonal wynikający z zasad wariacyjnych. Ten ostatni może być rodzaju «mieszanego» i mieć jako zmienne zarówno

Tablica 1. Tablica Thoma

| Nazwa | Centrum organizacyjne | Uniwersalne wygładzenie |
|-----------------------|-----------------------|---|
| Zwykle minimum | $V = x^2$ | $V = x^2$ |
| Falda | $V = \frac{1}{3} x^3$ | $V = \frac{1}{3} x^3 + ux$ |
| Ostrze | $V = \frac{1}{4} x^4$ | $V = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ux^2 + vx$ |
| Jaskółczy ogon | $V = \frac{1}{5} x^5$ | $V = \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} ux^3 + \frac{1}{2} vx^2 + wx$ |
| Motyl | $V = \frac{1}{6} x^6$ | $V = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{4} ux^4 + \frac{1}{3} vx^3 + \frac{1}{2} wx^2 + tx$ |
| Umbilik hiperboliczny | $V = x^3 + y^3$ | $V = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$ |
| Umbilik eliptyczny | $V = x^3 - 3xy^2$ | $V = x^3 - 3xy^2 + wx^2 + y^2 - ux - vy$ |
| Umbilik paraboliczny | $V = xy^2 + x^4$ | $V = xy^2 + x^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy$ |

wielkości kinematyczne, jak i dynamiczne (takie jak przemieszczenia i naprężenia). W tym sensie wydaje się, że nie ma powodu, by zmienne stanu musiały być koniecznie zmiennymi konfiguracji, ale szczegółowe przykłady muszą dopiero zostać przebadane.

Zakładając, że wielkość k została prawidłowo ustalona, wybieramy z tablicy Thoma te wygładzenia uniwersalne, które zawierają k parametrów sterowania (zauważmy, że wszystkie one występują liniowo). Lokalny zbiór bifurkacyjny w początkowym układzie n -wymiarowym, w przestrzeni sterowań, powinien być równoważny jakościowo jednemu z układów narzuconych przez wybrany rodzaj wygładzenia. Analiza tego ostatniego jest łatwiejsza, ponieważ duża liczba mniej ważnych zmiennych stanu została usunięta podczas sekwencji rzutowań zawartych w dowodzie twierdzenia Thoma. Zbiory bifurkacyjne wyprowadzone z potencjałów, zawartych w tablicy Thoma, zostały dokładnie przebadane przez WOODCOCKA i POSTONA [8].

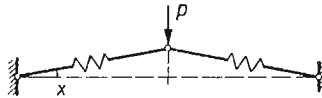
Jeśli $k = 2$, to istnieją co najwyżej dwa wygładzenia do wyboru, jeśli $k = 3$ jest ich co najwyżej 5. W praktyce wybór może być jeszcze bardziej zawężony przez spodziewany stopień wyrażeń w funkcji stanu. Na przykład przy nieliniowych «małych, ale skończonych» odkształceniach sprężystych, energia odkształcenia wyrażona w naprężeniach jest formą kwadratową, a naprężenia są z kolei formami kwadratowymi gradientu przemieszczeń. Dzięki temu możemy nie spodziewać się występowania wyrażeń o stopniu wyższym niż 4.

Idea wygładzenia jest ważna również z powodów, które wymienimy poniżej. Nie tylko każdy z centrów organizujących można otrzymać przez nadanie zmiennym sterowania z tablicy wartości zero, ale i odwrotnie — istnieje topologiczna równoważność, w której każda zmienna każdego z tych centrów może być reprezentowana przez odpowiednie wygładzenie uniwersalne. Oznacza to, że centrum organizujące, w rzeczywistości, rozdziela wygładzenie na zwykłe wielomiany ze współczynnikami liniowymi. W mechanice, w odróżnieniu od biologii, centrum organizujące może być nazwane fundamentalnym, naturalnym albo podstawowym. Zakłada się, że np. konstrukcja inżynierska, albo sieć krystaliczna zawierają w sobie pewne trywialne stany będące źródłem ich lokalnej ewolucji, która musi być opisana jakościowo przez uniwersalną energię wygładzenia.

W następnym rozdziale zostaną opisane proste modele matematyczne, dające precyzyjną ilustrację katastrofy ostrzowej, z różną interpretacją zmiennych sterowania i energii wygładzenia. Istnieje w analizie problem pewnych zadań mechanicznych, które nie pasują dokładnie do żadnej z energii wygładzeń zestawionych w tabelicy 1.

4. Przykłady zastosowania teorii katastrof w mechanice

4.1. Łuk mało wyniosły. Wieczko puszek z herbatnikami może być w przybliżeniu rozpatrywane jako mało wyniosła powłoka sferyczna podparta przegubowo wzdłuż obwodu. Naciśnięta w środku może nagle «przeskoczyć» przez płaszczyznę oparcia przegubowego do drugiego położenia równowagi o przeciwnej wypukłości i pozostać w tym położeniu mimo braku obciążenia.



Rys. 5

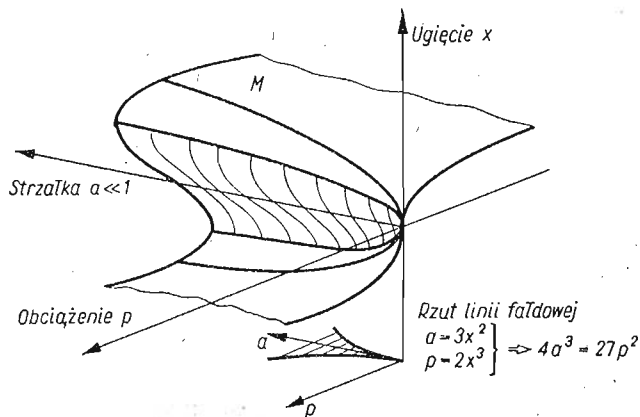
Pokazany na rys. 5 płaski model składa się z dwu sprężystych prętów ściskanych, o równej długości, opartych przegubowo na podporach, połączonych i obciążonych w węźle środkowym. Konfiguracja modelu opisana jest przy pomocy kąta x i «strzałki» łuku, $a = 2/l - \cos \alpha \approx \alpha^2 > 0$ dla małych α , gdzie $x = \pm \alpha$ (lub zero), gdy obciążenie $p = 0$.

Unormowana energia potencjalna, wyprowadzona w sposób przybliżony dla małych ugięć, ma postać

$$(4.1) \quad V = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2 + px.$$

Powierzchnia równowagi M w przestrzeni x, a, p jest dana równaniem

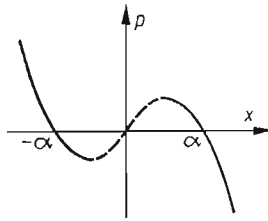
$$(4.2) \quad x^3 - ax + p = 0,$$



Rys. 6

wyprowadzonym z warunku $\partial V/\partial x = 0$ i przedstawionym na rys. 6. Jak widać, przedstawia ona powierzchnię fałdową. Rzut linii fałdowej na płaszczyznę a, p ma kształt ostrza.

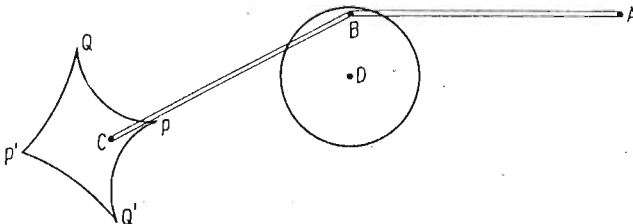
Model ten może być więc rozpatrywany jako prosty przykład uniwersalnego wygładzenia, któremu odpowiada katastrofa ostrzowa z tablicy Thoma. Zmiennymi sterującymi są obciążenie p i «strzałka» $a \ll 1$. W ten sposób można rozpatrzeć rodzinę łuków. Ilustruje to elastyczność podejścia, która może być wymagana przy korzystaniu z teorii katastrof; nie wszystkie parametry muszą być zmiennymi w pojedynczym zadaniu. Krzywa obciążenie–ugięcie powstaje jako przekrój powierzchni M z płaszczyzną prostopadłą do osi a , co pokazano na rys. 7. Katastrofą jest gwałtowny przeskok; zaciemniony obszar wewnątrz fałdy na rys. 6 reprezentuje niestabilne stany równowagi. Ten sam kształt rzutu (ostrze) wywiera wpływ na formę rys. 16, podanego dalej, w obszarze, w którym $A = 0$ i $a \rightarrow 0$.



Rys. 7

Można by się spytać, czy dyfuzja lub zagęszczenie defektów punktowych w wyniku działania siły na barierę potencjału pomiędzy dwoma atomami siatki krystalicznej ma podobny model lokalny, ktoś inny mógłby zauważyć, że charakterystyka napięcia prądu elektrycznego w diodzie tunelowej jest topologicznie podobna do krzywej na rys. 7.

4.2. Maszyna katastroficzna Zeemana. Jest to prosty przyrząd, który również ilustruje przeskok przy utracie stateczności. Może on być łatwo wykonany przy pomocy trzech pinesek, dwu pasków gumowych i koła ze sztywnej tektury. Całość powinna być złożona



Rys. 8

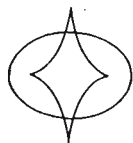
jak na rys. 8. Urządzenie to umożliwiła szybką demonstrację powstawania ostrza w przestrzeni sterowań. Pineski A i D są przymocowane do podłoża, kółko może się obracać dookoła punktu D (np. dzięki małej podkładce pomiędzy kołem a podłożem). Pineska B wpięta jest w koło w pobliżu jego brzegu. Jeden z pasków gumowych rozpięty jest pomiędzy punktami A i B . Jeden z końców drugiego paska przymocowany jest do punktu B ,

a drugi koniec tego paska C służy jako punkt sterujący (np. przy pomocy szpilki przechodzącej przez pasek w punkcie C).

Poruszając powoli końcem C można znaleźć takie położenie, w którym nastąpi gwałtowny przeskok na odwrotną stronę linii AD . Jeśli zrobimy to wielokrotnie i jeśli zaznamy igłą te punkty, w których nastąpił przeskok, wtedy okaże się, że na papierze powstała krzywa ostrzowa. Czułość urządzenia zależy od wielkości tarcia na osiach obrotów. Dogodnością tego przyrządu jest to, że zmiennymi sterowania są dwie współrzędne punktu C , a zatem, płaszczyzną sterowania jest tu płaszczyzna, na której wykonuje się doświadczenie. Dzięki temu krzywą ostrzową otrzymuje się bezpośrednio. W żargonie mechaniki stosowanej został tu użyty «przyrząd o sztywnym obciążeniu», który pokazuje nie wartość przyłożonego obciążenia, lecz jego położenie. Fizyczna interpretacja zmiennych sterowania jest wobec tego całkiem inna niż ta, która dotyczyła zmiennych p i a w poprzednim przykładzie.

Omawiany przykład został dokładnie zanalizowany w [11] i [12]. Rozwiązanie ogólne powierzchni równowagi ma linię fałdową oddzielającą obszary stateczne od niestatecznych [11], taką że jej rzut ma cztery ostrza, jak to pokazano na rys. 8. Dwie części QPQ' i $QP'Q'$ tego rzutu (lub zbioru «bifurkacji» jak można by to nazwać w teorii katastrof, lecz nie w mechanice) odpowiadają przeskokom odpowiednio po lewej i po prawej stronie punktu D .

4.3. Ewoluta elipsy. Obwiednią normalnych do elipsy (ewolutą) jest, jak wiadomo [7], krzywa z czterema ostrzami w płaszczyźnie sterowań x, y , jak to pokazano na rys. 9. Można postawić pytanie: jaka powinna być rozmaitość katastroficzna M w trójwymiarowej przestrzeni x, y, t , jeżeli t jest parametrem elipsy? Rozwiązanie globalne dla paraboli, podane wcześniej, okazało się takie same jak rozwiązanie lokalne, gdy istnieje tylko



Rys. 9

jedna fałda. Globalna obwiednia, albo zbiór bifurkacji, dla elipsy ma cztery ostrza i bardzo przypomina konchoidę Nikomedesa (rys. 8) otrzymaną dla maszyny katastroficznej. Czy istnieje więc ścisły związek pomiędzy gładką sfałdowaną rozmaitością (M maszyny) pokazanej w [11] (i elipsy)? Czytelnik łatwo znajdzie na to odpowiedź.

4.4. Słupy i tarcze. Jest to klasa konstrukcji, które, jeśli są obciążone mimośrodowo podczas idealnego eksperymentu (bez «niedokładności»), pozostają najpierw proste, ale mogą zachować pewną wytrzymałość nawet po rozgałęzieniu się (bifurkacji) drogi równowagi narysowanej we współrzędnych obciążenie–przemieszczenie w stanie wyboczonym. Najbardziej znanym przykładem są tzw. elastica (patrz [13], gdzie zamieszczono nowoczesną interpretację tego zjawiska). Model teoretyczny pokazany na rys. 10 składa się ze sztywnego elementu w kształcie litery T mającego na końcu wspornika małą półkę o długości η , na końcu której przyłożono pionowo siłę skupioną P , [9]. Obrót dookoła

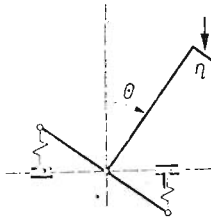
punktu 0 jest ograniczony przez dwie sprężyny, które przenoszą tylko siły pionowe. Całkowita energia potencjalna (unormowana) wynosi

$$(4.3) \quad V = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta - p(1 - \cos \theta + \eta \sin \theta)$$

i dla małych kątów θ przyjęc można

$$(4.4) \quad V = \frac{3}{8} \theta^4 - \frac{1}{2} (p-1) \theta^2 - p\eta \theta.$$

Rzut oka na tablicę Thoma upewnia, że jest to jeszcze jeden przykład katastrofy ostrzowej. Zmiennymi sterującymi są tym razem obciążenie $p-1$ i «niedokładność» $p\eta$. Teoria



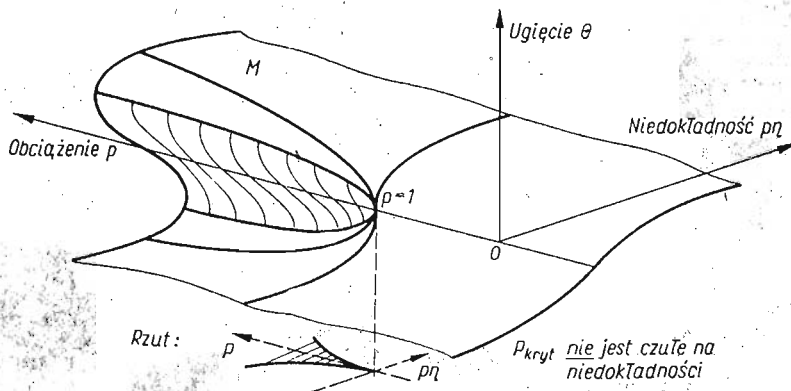
Rys. 10

wyglądzenia może z powodzeniem wskazać wyrażenie, które można zinterpretować jako efekt nieuniknionego powstania małej pary sił, natychmiast po przyłożeniu głównego obciążenia. Historycznie rzecz biorąc, takie niedokładności były czasem pomijane w początkach analizy mechanicznej.

Powierzchnia równowagi M jest dana równaniem $\partial V / \partial \theta = 0$, co prowadzi do

$$(4.5) \quad \frac{3}{2} \theta^3 - (p-1)\theta - p = 0.$$

Pokazano ją na rys. 11. Podobnie jak na rys. 7, ilustrującym zachowanie się mało wyniosłego łuku płaskiego, stany równowagi chwiejnej (maksimum potencjału V względem θ , przy

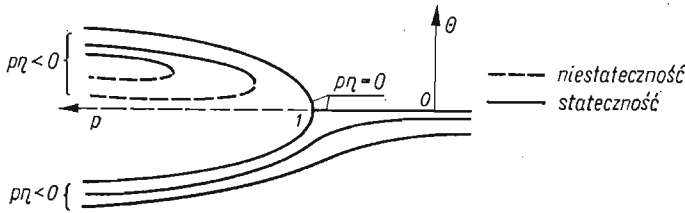


Rys. 11

ustalonych p i η) pokrywają się z zakreskowanym obszarem powierzchni M (wewnątrz fałdy), podczas gdy stany stateczne znajdują się po drugiej stronie fałdy.

To, że ostrze jest rzutem gładkiej powierzchni fałdowej, zostało pokazane w pracy [9], gdzie również wprowadzono pojęcie powierzchni równowagi w sensie mechanicznym.

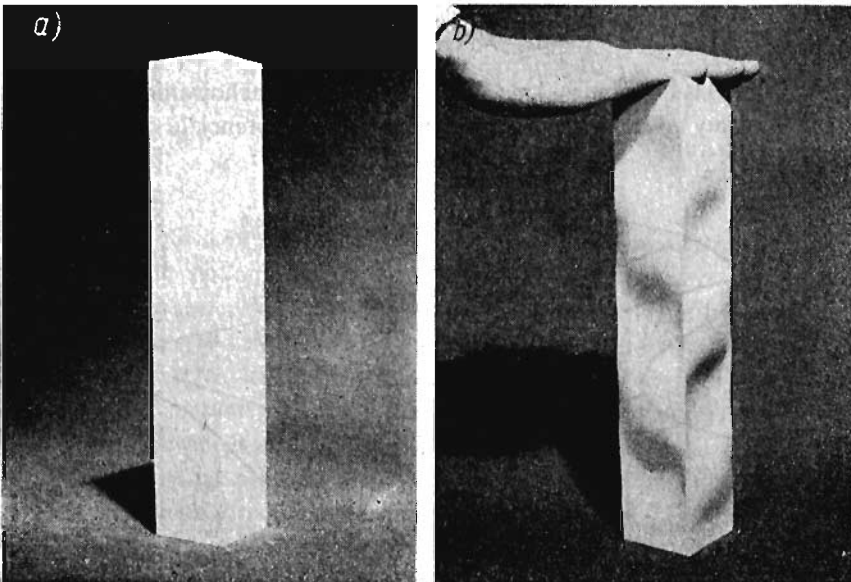
Przekroje powierzchni M płaszczyznami $p\eta = \text{const}$ pokazano na rys. 12. Wytrzymałość układu po rozgałęzieniu (wspomnianym powyżej) pokazano jako przekrój powierzchni M płaszczyzną $p\eta = 0$. «Niedokładne» drogi równowagi (obydwa znaki $p\eta$) wykazują te same tendencje, ale nie ma tu rozgałęzienia. Można to zademonstrować obciążając



Rys. 12

kwadratową rurę z materiału gumopodobnego (rys. 13). Wykonano ją w ten sposób, że każdy z jej czterech boków zachowuje się jak sprężysta tarcza prostokątna, o brzegach swobodnie podpartych; poddana ścisnaniu mimośrodowemu. Doświadczenia na takich rurach opisano w pracy [14].

4.5. Tarcze zakrzywione i powłoki. Jest to klasa konstrukcji, których własności zależą w znacznym stopniu od wielkości pewnych parametrów geometrycznych. Dla pewnych ich wartości wytrzymałość wyboczeniowa rzeczywistej konstrukcji jest bardzo czuła na nie-

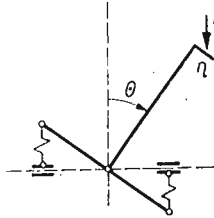


Rys. 13

dokładności wykonania. Konstrukcje o idealnych wymiarach, bez niedokładności wykazują po rozgałęzieniu znacznie zredukowaną wytrzymałość. Powodem tego jest niestabilność samego punktu rozgałęzienia [15, 16], odwrotnie niż ma to miejsce w przypadkach opisanych w poprzednim rozdziale.

Ilustracją tej własności może być tarcza zakrzywiona, ściskana równoległe do tworzących, o dostatecznie dużej krzywiznie [17]. W przypadku małej krzywizny punkt rozgałęzienia jest stabilny.

Jako prosta ilustracja służyć może konstrukcja wykonana przez dodanie pionowych sprężyn (w miejsce stałych podpór) do ramion elementu T [9], jak to przedstawiono na

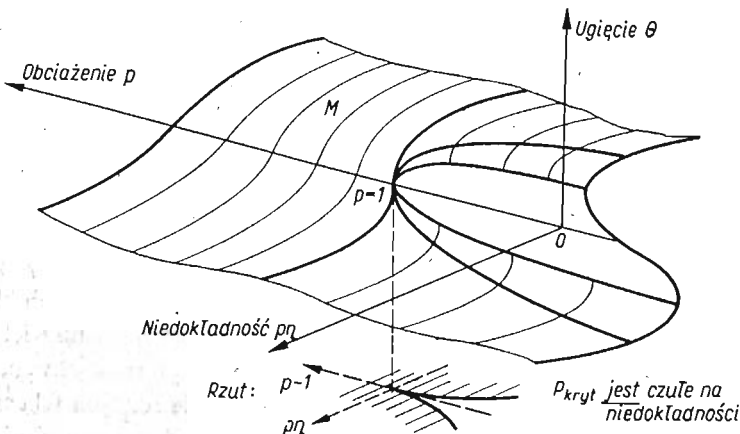


Rys. 14

rys. 14. Rozpiętość podpór może się teraz zmniejszyć podczas obciążenia, a nie pozostaje zawsze stała, jak to było w przypadku konstrukcji pokazanej na rys. 10. Unormowana energia odkształcenia wynosi teraz, dla małych θ :

$$(4.6) \quad V = \frac{1}{2} \sin^2 \theta - p(1 - \cos \theta) + \eta \sin \theta = -\frac{1}{8} \theta^4 - \frac{1}{2} (p-1) \theta^2 - \eta \theta.$$

Zmiana znaku członu z θ^4 ma bardzo duży wpływ na kształt powierzchni równowagi M (rys. 15). Fałda zawiera teraz punkty stabilne, a nie niestabilne jak poprzednio. Zwrot osi p uległ zmianie i jest teraz skierowany od ostrza. Wskazuje to, że małe niedokładności



Rys. 15

p wywołują teraz znaczne zmniejszenie p_{kr} (tj. wartości p na linii fałdowej) w stosunku do wartości $p = 1$ dla punktu rozgałęzienia. Użycie pojęcia ostrza jest analitycznym ujęciem czułości na niedokładność tak jak zostało ono użyte przez KOITERA [15, 16], który również narysował «separatryse», czyli rzut linii fałdowej na płaszczyznę $\eta\eta = 0$, ale nie wprowadził trójwymiarowej powierzchni równowagi.

4.6. Wyboczenie drugoplanowe i pewne związane z nim problemy. Dotychczas skoncentrowano uwagę na katastrofie ostrzowej, by podkreślić różnorodność interpretacji możliwą dla jednego przypadku. Punktem krytycznym jest tutaj punkt równowagi, dla którego układ

$$(4.7) \quad \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} - \omega m_{ij} \right) p_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ma n -krotną zerową wartość własną (m_{ij} jest macierzą dodatnio określoną). Jeśli $m = 1$, to zagadnienie jest proste, a rzutowanie prowadzące do ostrza po prostu zbiera wszystkie niekrytyczne współrzędne w pojedynczą zmienną stanu x , która występuje w ustalonym wygładzeniu (podobnie dzieje się w przypadku innych elementarnych katastrof o wymiarach jeden). Łatwo jest pokazać rzutowanie dla $m = 1$, np. przez zastosowanie [18] metod rozwiniętych w mechanice konstrukcji [19, 20]. Trzeba pamiętać, że w jakościowym kontekście mechaniki rzeczywista «wyttrzymałość» osobliwości, tj. wielkość krzywizny w punkcie ostrza, może być znaczna [13, 21], i wobec tego klasyfikacja jakościowa w twierdzeniu Thoma nie rozwiązuje całego problemu, nawet jeśli porządkuje go częściowo.

Katastrofa fałdowa może być rozpatrywana w podobny sposób w przypadkach, w których w wyrażeniu na energię pomijamy człony sześciennne. Wtedy powierzchnia równowagi jest pojedynczą gładką fałdą, zawierającą zmianę stateczności typu Poincarego w punkcie, w którym dwie drogi równowagi przecinają się na linii fałdowej. Ponieważ jednak odległość mierzona wzdłuż linii fałdowej nie oddaje teraz żadnych zmian jakościowych, mamy tu w istocie rzeczy do czynienia tylko z jedną zmienną sterującą (np. w kierunku poprzecznym do fałdy lub punktu granicznego), a zmienna u — w wygładzeniu $1/3(x^3) + ux$ — może mieć złożoną interpretację mechaniczną [22] (np. niedokładność minus kwadrat obciążenie).

Katastrofa ostrzowa może być tu rozpatrywana jako «organizująca» dwie fałdy (katastrofa wyższego rzędu organizuje katastrofę niższego rzędu w sposób hierarchiczny [8]).

Zwykle minimum w tablicy Thoma może być rozpatrywane jako ilustracja twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań w teorii sprężystości. Rozpatrzmy np. sprężynę (o długości l i module λ) podpierającą masę m , przemieniającą się o y , dla której energia

$$(4.8) \quad V = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} y^2 - mgy = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} \left(y - \frac{mgl}{\lambda} \right)^2 + \text{const.}$$

Jeśli dwie lub więcej wartości własnych ω znajdzie się w tym samym lub bliskich sobie punktach na powierzchni równowagi, można wtedy mówić o wyboczeniu wielomodulnym, albo o pierwszoplanowym i drugoplanowym wyboczeniu o pewnej sekwencji; mogą tu powstać różne problemy związane z oddziaływaniem na siebie różnych schematów wyboczenia (np. [13, 23]). Teoria katastrof gwarantuje, że jeżeli liczba sterowań nie przekracza czterech, to w jakościowym lokalnym opisie zbioru bifurkacji wszystkie możliwe postacie


wybożenia mogą być opisane nie więcej niż dwoma (odpowiednio dobranymi) zmiennymi stanu. Gdy krotność zerowej wartości własnej ω jest $m \geq 2$, konieczne staje się uwzględnienie nowych powierzchni fałdowych, mianowicie trzech umbilików wymienionych w tablicy 1 Thoma.

Oczywiście, gdy $m > 2$ rzutowanie, które zmniejsza liczbę zmiennych problemu, redukuje nie tylko wszystkie niekrytyczne współrzędne, lecz również pewne współrzędne krytyczne do dwu (lub jednej) zmiennych stanu pojawiających się w wygładzeniach. Wspomniane powyżej metody bezpośredniego rozwiązywania problemów nie korzystały, jak dotychczas, z tego ostatniego typu redukcji i prawdopodobnie dokładne zrozumienie go leży w przestudiowaniu sekwencji rzutowań stosowanych w dowodzie twierdzenia Thoma [1]. Powstaje pytanie, jak z mechanicznego punktu widzenia interpretować bezpośrednio dwie zmienne stanu x i y w problemach wielowymiarowych. Wydaje się, że mogą one reprezentować pewne ogólne cechy np. form deformacji, takie jak symetryczna (rys. 6) i antysymetryczna postać wybożenia.

Wycinek powłoki kulistej (niezbyt płaski) przechodzi w postać antysymetryczną, zanim zostanie osiągnięte maksymalne obciążenie, wynikające z wykresu na rys. 17. Obciążoną siłą skupioną kupa winylowa wyboży się według «trójroźnego» schematu utraty stateczności (model ten przedstawił prof. LECKIE z Uniwersytetu w Leicester).

Próbki rozciągane (zarówno pręty metalowe [24], jak i monokryształy [25, 26, 27]) mogą tracić stateczność na skutek powstania szyjki lub ścięcia, przed lub po osiągnięciu obciążenia maksymalnego.

Istnieją dane, że przykłady te są ilustracjami umbiliku hiperbolicznego ze zmiennymi x i y stowarzyszonymi odpowiednio z przemieszczeniami normalnym i stycznym. Szeroka tarcza z usztywnieniami, może wykazywać zarówno lokalną, jak globalną postać wybożenia i jeśli x i y są ich kombinacją [28] umowna energia potencjalna redukuje się wtedy [18] do takiej, jak dla umbiliku hiperbolicznego. Praca [18] zawiera jednak również mylące stwierdzenia i nieprawdziwe interpretacje, np. stwierdza ona, że tylko mechaniczne zmienne sterowania (poza obciążeniem) mogą być niedokładnościami. Przykłady przytoczone powyżej i poniżej przeczą temu wyraźnie.

 Dwupostaciowe przybliżone rozwiązanie HUTCHINSONA [29] dla początku pokrytycznego zachowania się zamkniętej powłoki sferycznej poddanej ciśnieniu zewnętrznemu jest ogólnie uważane za akceptowalne. Nie ogranicza się ono do przemieszczeń obrotowo-symetrycznych i jego zredukowane równania równowagi mogą być rozpatrywane jako wprowadzone z energii unormowanej

$$(4.9) \quad V = -3xy^2 + wx^2 + y^2 - ux - vy.$$

Tutaj w oznacza nadwyżkę obciążenia ponad wartość odpowiadającą podwójnemu punktowi rozgałęzienia, a u i v są parą niedokładności początkowych. Nie zachodzi tu liniowe rzutowanie, które przeprowadziłoby xy^2 w centra organizujące wymienione dla umbiliku eliptycznego i hiperbolicznego. Jednakże jest to zbyt mało, aby można było domniemywać, że problem ten może być ilustrowany umbilikiem parabolicznym.

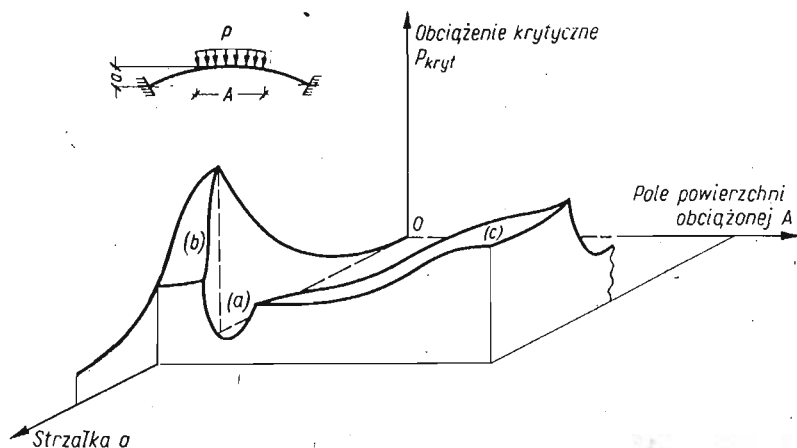
W ogólności, niedokładność może być wprowadzona od początku do każdej postaci wybożenia, tj. stowarzyszona z każdym wektorem własnym odpowiedniego problemu wartości własnych. Oznacza to istnienie wzajemnie jednoznacznego związku pomiędzy

niedokładnościami i n — początkowymi zmiennymi stanu. Co więcej, niedokładności mogą być sterowaniami i fakt ten musi być jakoś omijany w procesie redukcji zmiennych, jeśli mamy zidentyfikować ≤ 4 pierwszoplanowych zmiennych sterowania, a następnie podać związek pomiędzy nimi a co najwyżej dwiema efektywnymi zmiennymi stanu.

Jest jeszcze za wcześnie, by powiedzieć dokładnie jak to wykonać. Rozważmy jednak najczęściej chyba omawiany z problemów sprężystej niestateczności przykład długiego walca poddanego ścisłaniu osiowemu. W pracy [30] wykazano, przy dość ogólnych założeniach, że w rzeczywistości można spotkać tylko pięć kombinacji algebraicznych niedokładności kształtu. Problem redukuje się, w pewnym stadium, do dwu równań równowagi, które mogą być wyprowadzone z unormowanego potencjału

$$(4.10) \quad V = \frac{t_0 w + t_1 w + t_2 y}{w^2 - x^2 + y^2} - wx^2 + y^2 - uw - vy.$$

Tu również przez w oznaczono nadwyżkę obciążenia ponad jego wartość dla punktu rozgałęzienia, podczas gdy u, v, t_0, t_1, t_2 są członami typu obciążenie niedokładności (podniesione do kwadratu w przypadku t_1). Problem ten wymaga dalszych studiów.

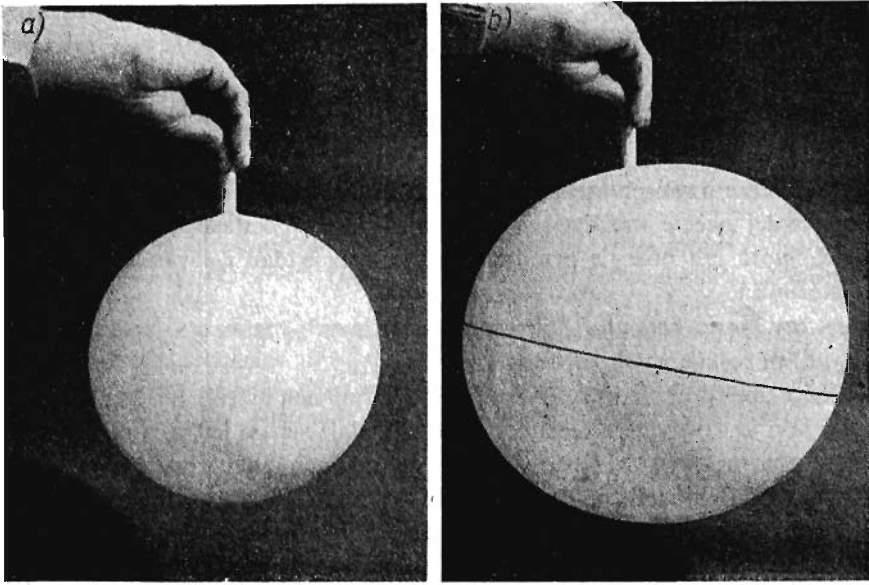


Rys. 16

Bardzo interesujące jest prześledzenie zmiany powierzchni równowagi powłok i kulistej (np. rys. 16), jeśli zwiększa się strzałka a . Jak już wspomniano, może się tu pojawić bifurkacja antysymetryczna. W przypadku wycinka powłoki kulistej, utwierdzonej na obwodzie, przebadano nie tylko efekt zmiany strzałki a , lecz również efekt zmiany powierzchni obciążonej A [31]. (Gdy $A = 0$, to obciążenie występuje tylko w jednym punkcie; $A = 1$ oznacza równomierne obciążenie na całej powierzchni). Trzy przekroje globalnego zbioru bifurkacji (z wygładzonymi stanami przejściowymi) w przestrzeni sterowania (P, a, A) przedstawiono łącznie na rys. 16. P jest tu obciążeniem całkowitym. Czwartym parametrem sterowania może być antysymetryczna (nie symetryczna) niedokładność; tu przyjęto ją równą zeru. Wydaje się, że istnieją co najmniej trzy zasadnicze, łączące się obszary: a) długa dolina utraty stateczności przez przeskok bez bifurkacji oraz rozdzielające obszary b) i c), tj. powierzchnię stabilnej bifurkacji dla obciążeń rozłożonych na małej powierzchni i powierzchnię niestabilnej bifurkacji dla obciążeń rozłożonych na dużej powierzchni.

Można zauważyć, że wygładzenie ostrzowe może być osadzone w umbiliku parabolicz-

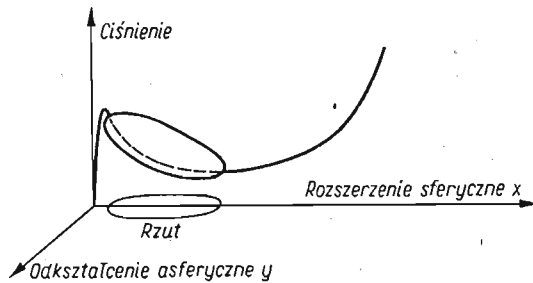
nym (przez przyjęcie $y = 0$). Pamiętając równanie zilustrowane rys. 6, można przyjąć, że istnieją podstawy, by interpretować y jako postać asymetryczną. Istnieje jednak niebezpieczeństwo, że jakiegokolwiek uproszczone rozważanie o odpowiednim umbiliku mogłoby być nieuzasadnione.



Rys. 17

Jako ostatni przykład mechaniczny rozpatrzmy gumowy balon meteorologiczny i jego zachowanie się podczas napełniania. Jak każdy balon stawia on znaczny opór w początkowej fazie, dopóki nie osiągnie się maksymalnego ciśnienia gazu. W tym stadium balon jest kulisty (rys. 17a), lecz zaraz potem ciśnienie zaczyna spadać, a rozmiary balonu rosną (napełnianie określone jest masą gazu, a nie jego ciśnieniem), a jego kształt staje się wyraźnie asferyczny (rys. 17b). Stan ten trwa dopóki ciśnienie nie osiągnie bardzo płytkiego minimum, przy znacznie powiększonych rozmiarach balonu, po czym balon powraca do kształtu kulistego [32].

Jeżeli niedokładności kształtu balonu (względem idealnej sfery) przyjmą za równe zero, to można by przypuszczać, że trajektorie globalnej równowagi balonu względem konfiguracji kulistosymetrycznej (x) i asymetrycznej (y) są takie, jak pokazano na rys. 18.



Rys. 18

Powstaje pytanie, czy można to rozpatrywać jako rozwinięcie sytuacji z rys. 7. Można by również uważać, że wersja lokalna sytuacji z rys. 12 każdej z obu bifurkacji jest właściwa z punktu widzenia teorii katastrof.

5. Zakończenie

Jak widać, można podać szereg zadziwiająco dokładnych przykładów mechanicznych dla wygładzeń wymienionych w tablicy Thoma. W związku z tym, większego znaczenia nabiera badanie rzutowań potrzebnych do klasyfikowania przykładów bardziej złożonych. Pozwoli to lepiej ocenić możliwości zastosowania teorii katastrof w nieliniowej teorii sprężystości, która jest obecnie przedmiotem licznych badań i stwarza wiele możliwości takich zastosowań.

Pytanie, czy teoria katastrof doprowadzi do nowych rozwiązań (a nie tylko nowych sformułowań) pozostaje na razie otwarte.

Na zakończenie spróbujemy odpowiedzieć, w terminach teorii katastrof, na nieuniknione pytanie: jaki jest pożytek z teorii katastrof. Wydaje się, że jedną z jej właściwości jest to, że dzieli ona matematyków, dosyć silnie, w opiniach o jej użyteczności, zależnie od ich zaangażowania w podejścia jakościowe lub ilościowe. Ci, którzy podchodzą do problemów z bardziej otwartym umysłem znajdują się w pobliżu granicy obszaru konfliktowego. Mogą zatem zostać nawróceni na wiarę w teorię katastrof (wzrost zaangażowania) lub się do niej zniechęcić (spadek).

Literatura cytowana w tekście

1. D. J. A. TROTMAN, E. C. ZEEMAN, *The classification of elementary catastrophes of codimension ≤ 5* , Warwick University, Preprint, 1974.
2. E. C. ZEEMAN, *Primary and secondary waves in developmental biology*, Lect. on Math. in the Life Sciences, 7, Amer. Math. Soc., Providence, USA, 1974.
3. R. THOM, *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*, Benjamin, New York 1972.
4. D. CHILLINGWORTH, *The catastrophe of buckling beam*, Proc. Symp. on Appli. of Topology and Dynamical Systems, University of Warwick, 1973/4.
5. M. J. SEWELL, *Kitchen catastrophe*, Reading University, Preprint, 1974.
6. E. C. ZEEMAN, *Applications of catastrophe theory*, Tokyo Int. Conf. on Manifolds, 1973.
7. A. W. SIDONS, K. S. SNELL, J. B. MORGAN, *A New Calculus*, Cambridge University Press, 1952.
8. A. E. R. WOODCOCK, T. POSTON, *A Geometrical Study of the Elementary Catastrophes*, Springer-Verlag, Berlin 1974.
9. M. J. SEWELL, *On the connexion between stability and the shape of the equilibrium surface* J. Mech. Phys. Solids, 14 (1966) 203 - 230.
10. R. THOM, *Topological models in biology*, Topology, 8 (1968) 313 - 335.
11. E. C. ZEEMAN, *A catastrophe machine*, Towards a Theoretical Biology, 4 (1972) 276 - 282.
12. T. POSTON, A. E. R. WOODCOCK, *Zeeman's catastrophe machine*, Proc. Camb. Phil. Soc., 74 (1973) 217 - 226.
13. B. BUDIANSKY, *Theory of buckling and post-buckling of elastic structures*, Advances in Applied Mechanics, 14 (1974).

14. M. J. SEWELL, *Interaction between the effects of local and overall imperfections on the buckling of elastic columns*, J. Mech. Phys. Solids, **22** (1974) 519 - 540.
15. W. T. KOITER, *Elastic stability and post-buckling behaviour*, in: Nonlinear Problems, University of Wisconsin Press, Madison 1963.
16. W. T. KOITER, *On the stability of elastic equilibrium*, NASA Tech. Trans. F10-833, 1967 (litum. pracy dokt. z r. 1945).
17. W. T. KOITER, *Buckling and post-buckling of a cylindrical panel under axial compression*, Trans. Nat. Aero. Inst. Amsterdam, **20** (1956) 71.
18. J. M. T. THOMPSON, *Towards a unified bifurcation theory*, Univ. College London, Preprint, 1974.
19. M. J. SEWELL, Private communication to J. M. T. Thompson describing the 'Static perturbation technique', 22 July, 1964. (See J. Mech. Phys. Solids, **13**, 247 (SEWELL) and **13**, 295 (THOMPSON), 1965.
20. M. J. SEWELL, *A general theory of equilibrium paths through critical points*, Proc. Roy. Soc. Lond., A **306** (1968), 201 - 238, A **315** (1970) 499 - 518.
21. J. W. HUTCHINSON, B. BUDIANSKY, *Analytical and numerical study of the effects of initial imperfections on the inelastic buckling of a cruciform column*, Proc. IUTAM Symp. Buckling of Struct., Harvard Univ., 1974.
22. M. J. SEWELL, *Elastic and plastic bifurcation theory*, Lectures to the Seminar on the Plasticity Theory and its Application in Techniques, University of Niš, Yugoslavia, 1975.
23. M. J. SEWELL, *A method of post-buckling analysis*, J. Mech. Phys. Solids, **17** (1969), 219 - 233.
24. R. HILL, J. W. HUTCHINSON, *Bifurcation phenomena in the plane tension test*, Harvard Report DEAP S-12, 1975.
25. N. H. MACMILLAN, A. KELLY, *The mechanical properties of perfect crystals*, Proc. Roy. Soc. Lond., A **330** (1972) 309 - 317.
26. J. M. T. THOMPSON, P. A. STURROCK, *Bifurcational instability of an atomic lattice*, J. Mech. Phys. Solids, **23** (1975) 21 - 37.
27. R. HILL, *On the elasticity and stability of perfect crystals at finite strain*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **77** (1975) 225 - 240.
28. V. TVERGAARD, *Imperfection-sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression*, Int. J. Solids Struct., **9** (1973) 177.
29. J. W. HUTCHINSON, *Imperfection sensitivity of externally pressurized spherical shells*, J. Appl. Mech., **34** (1967) 49 - 55.
30. J. HANSEN, *Influence of general imperfections in axially loaded cylindrical shells*, Report 26, Danish Center for Appl. Math. and Mech., 1974.
31. J. R. FITCH, B. BUDIANSKY, *Buckling and post-puckling behaviour of spherical caps under axisymmetric load*, AIAAJ, **8** (1970) 686 - 693.
32. H. ALEXANDER, *Tensile instability of initially spherical balloons*, Int. J. Engng. Sci., **9** (1971) 151.

Р е з ю м е

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ В МЕХАНИКЕ

Целью работы является ознакомление неспециалистов с основными идеями теории катастроф и возможностями ее применения. Теория катастроф, представляющая собой раздел качественного анализа дифференциальных уравнений, может найти применение в разных отраслях науки, позволяя найти новые точки зрения на многие задачи.

В начале работы представлены простые примеры конфликтных ситуаций и их качественного анализа. В разделе 3 дано более точное определение предмета теории катастроф. Проведена таблица Тома, в которой представлены возможные особенности решений уравнений состояния. Раздел 4, основной в данной работе, включает анализ нескольких простых примеров задач механики твердых деформируемых тел с точки зрения теории катастроф. Эти примеры относятся в основном к задачам потери устойчивости, бифуркации и т. п. В конце работы приведен обширный перечень литературы.

Summary

SOME MECHANICAL ASPECTS OF CATASTROPHE THEORY

The paper is aimed at introducing non-specialists into the catastrophe theory. Though the theory is a part of the qualitative analysis of differential equations, it seems to be applicable in various other fields since it allows for considering several problems from a new point of view.

Initial two chapters give some simple examples of conflict situations and present their qualitative study. Chapter 3 defines the subject of the catastrophe theory. The table of possible local singularities, given by Thom, is presented. In Chapter 4 several examples of problems are analysed in terms of the theory. The problems are taken from mechanics of deformable bodies and concern mainly such phenomena like loss of stability, bifurcation etc. The paper contains a large number of references dealing with the subject.

UNIWERSYTET W READING (W. BRYTANIA)

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 czerwca 1976 r.

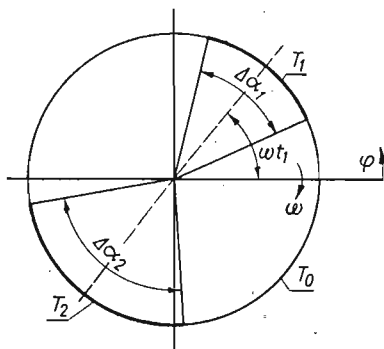
NAPRĘŻENIA I PRZEMIESZCZENIA W WIRUJĄCYM WALCU KOŁOWYM OGRZEWANYM NIEOSIOWOSYMETRYCZNIE NA POBOCZNICY^{*)}

KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

W pracy rozważa się pole naprężeń w obracającym się ze stałą prędkością kątową ω , nieskończenie długim walcu kołowym, którego pobocznica poddana jest działaniu odcinkami stałej temperatury, będącej funkcją kąta opasania (rys. 1). Zagadnienie rozpatrywane jest w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z , sztywno związanym z walcem. Wewnątrz walca panuje płaski stan odkształcenia; temperatura, przemieszczenia i naprężenia są zatem funkcjami zmiennych przestrzennych r, φ oraz czasu t .

Ponieważ zagadnienie rozpatrywane jest w układzie współrzędnych sztywno związanym z walcem, w równaniach ruchu dodaje się człon uwzględniający siłę odśrodkową. Pomija się natomiast siłę ciężkości. Zagadnienie to rozważane jest na gruncie teorii naprężeń cieplnych. Zakłada się, że w chwili początkowej temperatura walca była równa T_0 .



Rys. 1. Rozkład temperatury na brzegu walca w chwili $t_1 > 0$

Ponadto przyjmuje się, że pobocznica walca jest wolna od obciążeń. Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca, wywołany przytoczonym zespołem warunków, wyznaczony został w pracy [1]. W tej pracy wyznaczono dla rozważanego walca pole naprężeń cieplnych, jakie powstaje podczas tzw. regularnego reżimu cieplnego [por. 1, 11, 12].

^{*)} Praca nagrodzona III nagrodą na konkursie naukowym na prace teoretyczne z mechaniki, organizowanym przez Oddział PTMTS w Poznaniu w 1976 r.

2. Podstawowe związki i metoda rozwiązywania zagadnienia

Punktem wyjścia są równania ruchu [2]:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + X_r = \varrho_0 \ddot{u}_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + X_\varphi = \varrho_0 \ddot{u}_\varphi, \end{cases}$$

z warunkami brzegowymi dla $r = a$

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_{rr}(a, \varphi, t) = 0, \\ \sigma_{r\varphi}(a, \varphi, t) = 0. \end{cases}$$

Tutaj u_r , u_φ oznaczają współrzędne wektora przemieszczenia, $\sigma_{\alpha\beta}$ — współrzędne tensora naprężenia (α, β mogą przyjmować wartości r, φ, z), X_r, X_φ — siły masowe, ϱ_0 — gęstość, a — promień walca, $(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$.

Powyższe zagadnienie brzegowe można — wykorzystując związki Duhamela–Neumana dla płaskiego stanu odkształcenia [2]:

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{rr} + \lambda \varepsilon_{\varphi\varphi} - \gamma\theta, & \sigma_{r\varphi} = 2\mu \varepsilon_{r\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda \varepsilon_{rr} - \gamma\theta, \\ \sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\mu\gamma}{\lambda + \mu} \theta \end{cases}$$

oraz związki pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami [2]:

$$(4) \quad \begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \end{cases}$$

— sformułować w języku przemieszczeń. Przyjmując ponadto, że $X_r = \varrho_0 r \omega^2$, $X_\varphi = 0$, otrzymuje się następującą postać zagadnienia (1) - (2):

$$(1') \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right] + \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] + \\ + \varrho_0 r \omega^2 = \varrho_0 \ddot{u}_r + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right] + \mu \left[\nabla^2 u_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(u_\varphi - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] = \varrho_0 \ddot{u}_\varphi + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \Big|_{r=a} = \gamma \theta(\alpha, \varphi, t), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \Big|_{r=a} = 0, \end{cases}$$

gdzie λ, μ oznaczają stałe Lamégo, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, α_t — współczynnik rozszerzalności cieplnej, θ — temperaturę;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Dodanie do związków (1'), (2'), warunków początkowych dla naprężeń lub przemieszczeń zakończyłoby formułowanie zagadnienia dynamicznego. Jednakże przy rozwiązywaniu tego zagadnienia otrzymuje się niesłychanie skomplikowane transformaty Laplace'a potencjałów termosprężystego przemieszczenia [11], których odwrócenie jest bardzo trudne nawet przy zastosowaniu metod przybliżonych.

W celu ominięcia tych trudności w dalszych rozważaniach dokonuje się uproszczeń, wykorzystując pewne własności funkcji $\theta(r, \varphi, t)$, określającej w rozważanym przypadku pole temperatury.

Jak wspomniano we wprowadzeniu, funkcja ta została wyznaczona w pracy [1] i jest określona następująco:

$$(5) \quad \theta(r, \varphi, t) = t_0(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} [t_n^c(r, t) \cos n(\varphi - \omega t) + t_n^s(r, t) \sin n(\varphi - \omega t)],$$

gdzie (por. [1])

$$(6) \quad \begin{cases} t_0(r, t) = t_{0a} \left[1 - \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(rs_{0i})}{s_{0i} J_1(as_{0i})} e^{-s_{0i}^2 \kappa t} \right], \\ t_n^c(r, t) = \frac{2}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \delta_{ni} \frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni} J'_n(as_{ni})} \{ e^{-s_{ni}^2 \kappa t} \cos [n\omega t + \delta_{ni}] - \cos \delta_{ni} \}, \\ t_n^s(r, t) = -\frac{2}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \delta_{ni} \frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni} J'_n(as_{ni})} \{ e^{-s_{ni}^2 \kappa t} \sin [n\omega t + \delta_{ni}] - \sin \delta_{ni} \}. \end{cases}$$

W związkach (5) i (6) oznaczono:

$$t_{0a} = \frac{1}{2\pi} (\theta_1 \Delta \alpha_1 + \theta_2 \Delta \alpha_2), \quad t_{na} = \frac{2}{\pi n} \left[\theta_1 \sin \frac{n\Delta \alpha_1}{2} + \theta_2 (-1)^n \sin \frac{n\Delta \alpha_2}{2} \right], \quad \theta_1 = T_1 - T_0, \\ \theta_2 = T_2 - T_0, \quad \theta = T - T_0; \quad (\text{por. rys. 1}), \quad J_n(z) \text{ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju } n\text{-tego rzędu [3, 4], } s_{ni} \text{ — pierwiastki równania } J_n(as) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots; i = 1, 2, \dots) \\ \kappa \text{ — współczynnik przewodzenia temperatury, } \cos \delta_{ni} = \frac{\kappa s_{ni}^2}{\sqrt{\kappa^2 s_{ni}^4 + n^2 \omega^2}}; \quad \sin \delta_{ni} = \\ = \frac{n\omega}{\sqrt{\kappa^2 s_{ni}^4 + n^2 \omega^2}}; \quad J'_n(x) \equiv \frac{dJ_n(x)}{dx}; \quad \text{kąty } \Delta \alpha_1 \text{ i } \Delta \alpha_2 \text{ zaznaczono na rys. 1.}$$

$$\text{Funkcja } \theta(r, \varphi, t) \text{ jest rozwiązaniem równania przewodnictwa cieplnego } \nabla^2 \theta - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \\ = 0 \text{ z warunkiem początkowym } \theta(r, \varphi, 0) = 0 \text{ oraz warunkiem brzegowym } \theta(a, \varphi, t) = \\ = t_{0a} + \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \cos n(\varphi - \omega t) \text{ [1].}$$

Ze wzorów (5) i (6) wynika, że po pewnym czasie t , określonym nierównością $t > 0,5a^2/\kappa$ (podczas tzw. regularnego reżimu cieplnego [por. 1, 11, 12]), pole temperatury opisane będzie funkcją, w której wpływ członów eksponencjalnych jest pomijalnie mały. Funkcja ta zależy w tym przypadku od dwóch zmiennych: r oraz $\varphi - \omega t$. Przechodząc do nowych zmiennych, określonych transformacją

$$(7) \quad \begin{cases} r^* = r, \\ \varphi^* = \varphi - \omega t, \\ t^* = t, \end{cases}$$

łatwo można zauważyć, że człon inercyjny w obu równaniach (1') przyjmuje postać

$$\varrho_0 \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} - 2\omega \frac{\partial^2}{\partial t^* \partial \varphi^*} + \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^{*2}} \right) u_\alpha \quad (\alpha = r, \varphi),$$

w której — wobec powyższych uwag — można dla $t^* > 0,5a^2/\kappa$ pominąć pochodne po zmiennej t^* . Zatem dla $t^* > 0,5a^2/\kappa$

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^{*2}} \cong \varrho_0 \omega^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \varphi^{*2}},$$

równania (1') zaś przyjmują postać

$$(8) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi^*} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right] + \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi^*} \right) \right] + \varrho_0 r \omega^2 = \\ = \varrho_0 \omega^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^{*2}} + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi^*} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right] + \mu \left[\nabla^2 u_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(\mu_\varphi - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi^*} \right) \right] = \\ = \varrho_0 \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^{*2}} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi^*}. \end{cases}$$

W związkach (2') w miejsce zmiennej φ należy położyć φ^* . W równaniach (8), a także w następnych zależnościach, pominięto gwiazdkę przy r oraz przy operatorze ∇ , gdyż nie prowadzi to do nieporozumień.

Funkcję $\theta(r, \varphi^*, t^*)$ dla $t^* > 0,5a^2/\kappa$ zapisać można w postaci

$$(9) \quad \theta(r, \varphi^*, t^*)|_{t^* > 0,5a^2/\kappa} \cong t_{0a} + \theta^*(r, \varphi^*),$$

gdzie

$$(10) \quad \theta^*(r, \varphi^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \vartheta_n^c(r) \cos n\varphi^* + \vartheta_n^s(r) \sin n\varphi^* \}.$$

Tutaj

$$(11) \quad \begin{aligned} \vartheta_n^c(r) &= -\frac{2}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos^2 \delta_{ni} \frac{J_n(rS_{ni})}{S_{ni} J'_n(aS_{ni})} \cong t_n^c(r, t^*)|_{t^* > 0,5a^2/\kappa}, \\ \vartheta_n^s(r) &= \frac{1}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \sin 2\delta_{ni} \frac{J_n(rS_{ni})}{S_{ni} J'_n(aS_{ni})} \cong t_n^s(r, t^*)|_{t^* > 0,5a^2/\kappa}. \end{aligned}$$

Rozwiązań równań (8) poszukiwać będziemy w postaci sumy

$$(12) \quad u_\alpha = u_\alpha^\omega + u_\alpha^0 + u_\alpha^* \quad (\alpha = r, \varphi),$$

gdzie poszczególne składniki opisują przemieszczenie wywołane, odpowiednio, przez siłę odśrodkową $\varrho_0 r \omega^2$, temperaturę t_{0a} oraz temperaturę $\theta^*(r, \varphi^*)$.

Podobnie naprężeń poszukiwać będziemy jako sumy

$$(13) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^\omega + \sigma_{\alpha\beta}^0 + \sigma_{\alpha\beta}^*, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi, z).$$

Przemieszczenia i naprężenia w wirującym walcu są znane i wynoszą [5, 6]:

$$(14) \quad u_r^\omega = \frac{\omega^2 r}{8c_1^2} \left[a^2 - r^2 + \frac{a^2}{1-c^2} \right], \quad u_\varphi^\omega = 0,$$

$$(15) \quad \sigma_{rr}^\omega = \frac{\omega^2 \varrho_0}{4} (a^2 - r^2) (2 - c^2), \quad \sigma_{r\varphi}^\omega = 0,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^\omega = \frac{1}{4} \omega^2 \varrho_0 (a^2 - r^2) (2 - c^2) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \varrho_0 c^2,$$

gdzie $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho_0}$, $c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho_0}$, $c^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}$.

Przemieszczenia i naprężenia wywołane ogrzewaniem całej poboczniczy walca stałą temperaturą również są znane. W przypadku zagadnienia dynamicznego postać ich można znaleźć m.in. w pracach [7, 8, 9]; dla zagadnienia quasi-ustalonego są one odpowiednio równe [5, 10]:

$$(16) \quad u_r^0 = 2amt_{0a} \left\{ \frac{\varrho}{4(1-c^2)} - \frac{c^2 \varrho}{1-c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{0i}^2} e^{-\mu_{0i}^2 Fo} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_0'(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 Fo} \right\}; \quad u_\varphi^0 = 0;$$

$$\sigma_{rr}^0 = -4\gamma c^2 t_{0a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{0i}^2} e^{-\mu_{0i}^2 Fo} \left(1 + \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\varrho J_0'(\mu_{0i})} \right),$$

$$(17) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^0 = -4\gamma c^2 t_{0a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{0i}^2} e^{-\mu_{0i}^2 Fo} \left(1 - \frac{J_1(\varrho \mu_{0i})}{\varrho J_0'(\mu_{0i})} + \frac{\mu_{0i} J_0(\varrho \mu_{0i})}{J_0'(\mu_{0i})} \right),$$

$$\sigma_{r\varphi}^0 = 0,$$

gdzie $m = \frac{\gamma}{\varrho_0 c_1^2}$, $\varrho = \frac{r}{a}$, $\mu_{0i} = a s_{0i}$, $Fo = \frac{\kappa t}{a^2}$ jest liczbą Fouriera (bezwymiarowy czas). Z ograniczenia narzuconego na czas t wynika, że naprężenia podane w związkach (17) są pomijalnie małe ($Fo > 0,5$), wobec czego w związku (13) można pominąć składnik $\sigma_{\alpha\beta}^0$. Ponadto z porównania związków (12), (14) i (16) oraz (13), (15) i (17) wynika, że $u_\varphi^* = u_\varphi$ oraz $\sigma_{r\varphi}^* = \sigma_{r\varphi}$.

Do wyznaczenia pozostały następujące wielkości: u_α^* i $\sigma_{\alpha\beta}^*$ ($\alpha, \beta = r, \varphi$). Aby je znaleźć, należy rozwiązać układ równań

$$(18) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi^*} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r^*) \right] + \mu \left[\nabla^2 u_r^* - \frac{1}{r^2} \left(u_r^* + 2 \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi^*} \right) \right] = \varrho_0 \omega^2 \frac{\partial^2 u_r^*}{\partial \varphi^{*2}} + \gamma \frac{\partial \theta^*}{\partial r},$$

$$(\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi^*} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r^*) \right] + \mu \left[\nabla^2 u_\varphi^* - \frac{1}{r^2} \left(u_\varphi^* - 2 \frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi^*} \right) \right] = \varrho_0 \omega^2 \frac{\partial^2 u_\varphi^*}{\partial \varphi^{*2}} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi^*},$$

z warunkami

$$(19) \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi^*} + \frac{u_r^*}{r} \right) \Big|_{r=a} = \gamma \theta^*(a, \varphi^*),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi^*} + \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial r} - \frac{u_\varphi^*}{r} \Big|_{r=a} = 0.$$

Przemieszczeń u_r^* i u_φ^* poszukuje się przy pomocy przedstawienia Lamégo [2]:

$$(20) \quad \begin{Bmatrix} u_r^* \\ u_\varphi^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi^*} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{Bmatrix},$$

Postać naprężeń, przy wyznaczonych potencjałach Φ i Ψ , uzyskuje się ze związków:

$$(21) \quad \begin{cases} \sigma_{rr}^* = \varrho_0 c_1^2 \left\{ (1 - 2c^2) \nabla^2 \Phi + 2c^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi^*} \right] - m\theta^* \right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* = \varrho_0 c_1^2 \left\{ \nabla^2 \Phi - 2c^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi^*} \right] - m\theta^* \right\}, \\ \sigma_{r\varphi}^* = \varrho_0 c_2^2 \left\{ \nabla^2 \Psi + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right\}. \end{cases}$$

3. Wyznaczenia potencjałów Φ i Ψ

Potencjały Φ i Ψ muszą spełniać równania

$$(22) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} - \omega^2 \left\{ \frac{c_1^{-2}}{c_2^{-2}} \right\} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial \varphi^{*2}} \begin{Bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\theta^* \\ 0 \end{Bmatrix}$$

oraz warunki

$$(23) \quad \begin{cases} (1 - 2c^2) \nabla^2 \Phi + 2c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi^*} \right] \Big|_{r=a} = m\theta^*(a, \varphi^*), \\ \nabla^2 \Psi + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \Big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Funkcji Φ i Ψ — wobec (10) — poszukiwać będziemy w postaci

$$(24) \quad \begin{cases} \Phi(r, \varphi^*) \\ \Psi(r, \varphi^*) \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \Phi_n^c(r) \\ \Psi_n^c(r) \end{cases} \cos n\varphi^* + \begin{cases} \Phi_n^s(r) \\ \Psi_n^s(r) \end{cases} \sin n\varphi^*.$$

Współczynniki Φ_n^c , Φ_n^s , Ψ_n^c i Ψ_n^s spełniają następujące równania:

$$(25) \quad \begin{cases} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left[\left(\frac{n\omega}{c_1} \right)^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \right\} \begin{cases} \Phi_n^c \\ \Phi_n^s \end{cases} = m \begin{cases} \vartheta_n^c \\ \vartheta_n^s \end{cases}, \\ \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left[\left(\frac{n\omega}{c_2} \right)^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \right\} \begin{cases} \Psi_n^c \\ \Psi_n^s \end{cases} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Rozwiązania tych równań mają postać

$$(26) \quad \begin{cases} \Phi_n^c(r) \\ \Phi_n^s(r) \end{cases} = \frac{2mc_1^2}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} -\cos^2 \delta_{ni} \\ \sin \delta_{ni} \cos \delta_{ni} \end{matrix} \right\} \frac{J_n(rs_{ni})}{(n^2\omega^2 - c_1^2 s_{ni}^2) s_{ni} J_n'(as_{ni})} + \begin{cases} B_n^c \\ B_n^s \end{cases} J_n\left(\frac{n\omega}{c_1} r\right);$$

$$(27) \quad \begin{cases} \Psi_n^c(r) \\ \Psi_n^s(r) \end{cases} = \begin{cases} C_n^c \\ C_n^s \end{cases} J_n\left(\frac{n\omega}{c_2} r\right),$$

gdzie B_n^c , B_n^s , C_n^c , C_n^s oznaczają stałe.

Dla $r = a$, funkcje Φ_n^c , Φ_n^s , Ψ_n^c i Ψ_n^s muszą spełniać zależności:

$$(28) \quad \begin{cases} (1 - 2c^2) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n^c + 2c^2 \frac{d^2}{dr^2} \Phi_n^c + 2c^2 \frac{n}{r} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \Psi_n^s \Big|_{r=a} = mt_{na}, \\ (1 - 2c^2) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n^s + 2c^2 \frac{d^2}{dr^2} \Phi_n^s - 2c^2 \frac{n}{r} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \Psi_n^c \Big|_{r=a} = 0, \\ 2 \frac{n}{r} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \Phi_n^s + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Psi_n^c - 2 \frac{d^2}{dr^2} \Psi_n^c \Big|_{r=a} = 0, \\ -2 \frac{n}{r} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \Phi_n^c + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Psi_n^s - 2 \frac{d^2}{dr^2} \Psi_n^s \Big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Podstawienie związków (26) i (27) do zależności (28) pozwala zapisać układ równań na stałe B_n^c , B_n^s , C_n^c i C_n^s :

$$(29) \quad \begin{cases} P(1, \lambda_n) B_n^c + 2c^2 n R_n \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) C_n^s = 4ma^2 c^2 t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos^2 \delta_{ni} (\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2)^{-1}, \\ 2c^2 n R_n(\lambda_n) B_n^c + P_n \left(1, \frac{\lambda_n}{c} \right) C_n^s = -4ma^2 c^2 n t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos^2 \delta_{ni} (\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2)^{-1}, \\ P_n(1, \lambda_n) B_n^s - 2c^2 n R_n \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) C_n^c = -4ma^2 c^2 t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \delta_{ni} \sin \delta_{ni}}{\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2}, \\ 2c^2 n R_n(\lambda_n) B_n^s - P_n \left(1, \frac{\lambda_n}{c} \right) C_n^c = 4ma^2 c^2 n t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \delta_{ni} \sin \delta_{ni}}{\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2}, \end{cases}$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} P_n(y, x) &= [2c^2n(n-1) - (y\lambda_n)^2]J_n(xy) + 2c^2xyJ_{n+1}(xy), \\ R_n(x) &= (n-1)J_n(x) - xJ_{n+1}(x), \\ \lambda_n &= \frac{an\omega}{c_1}, \quad \mu_{ni} = as_{ni}. \end{aligned}$$

Układ równań algebraicznych (29) otrzymano wykorzystując wzory na sumy szeregów Fouriera–Bessela, wyprowadzone w pracy [13]. Rozwiązania tego układu są następujące:

$$(30) \quad \begin{aligned} \left. \begin{matrix} B_n^c \\ B_n^s \end{matrix} \right\} &= -4ma^2c^2t_{na}S_n^{-1} \left[P_n\left(1, \frac{\lambda_n}{c}\right) + 2c^2n^2R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) \right] \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\cos^2\delta_{ni}}{\cos\delta_{ni}\sin\delta_{ni}} \right\} (\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2)^{-1}, \\ \left. \begin{matrix} C_n^c \\ C_n^s \end{matrix} \right\} &= -4mna^2c^2t_{na}S_n^{-1} [P_n(1, \lambda_n) + 2c^2R_n(\lambda_n)] \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos\delta_{ni}\sin\delta_{ni}}{\cos^2\delta_{ni}} \right\} (\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } S_n = P_n(1, \lambda_n) P_n\left(1, \frac{\lambda_n}{c}\right) - 4c^4n^2R_n(\lambda_n)R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right).$$

Wykorzystując związki (30), (27), (26) i (23) otrzymuje się następującą postać potencjałów Φ i Ψ :

$$(31) \quad \begin{aligned} \Phi(\varrho, \varphi^*) &= 2ma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni}) \cos\delta_{ni} \cos(n\varphi^* + \delta_{ni})}{(\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2)J'_n(\mu_{ni})} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2c^2t_{na}J_n(\varrho\lambda_n)S_n^{-1} \left[P_n\left(1, \frac{\lambda_n}{c}\right) + 2c^2n^2R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos\delta_{ni}\cos(n\varphi^* + \delta_{ni})}{\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2} \right\}, \\ \Psi(\varrho, \varphi^*) &= -4ma^2c^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ t_{na}nS_n^{-1} [P(1, \lambda_n) + 2c^2R_n(\lambda_n)] \times \right. \\ &\quad \left. \times J_n\left(\varrho \frac{\lambda_n}{c}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos\delta_{ni}\sin(n\varphi^* + \delta_{ni})}{\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\cos\delta_{ni} = \frac{\mu_{ni}^2}{\sqrt{\mu_{ni}^4 + L^2\lambda_n^2}}, \quad \sin\delta_{ni} = \frac{L\lambda_n}{\sqrt{\mu_{ni}^4 + L^2\lambda_n^2}},$$

$$L = \frac{ac_1}{\varkappa}, \quad \varrho = \frac{r}{a}; \quad \varrho \in \langle 0, 1 \rangle.$$

4. Przemieszczenia i naprężenia

Przemieszczenia u_r^* , u_φ^* oraz naprężenia σ_{rr}^* , $\sigma_{\varphi\varphi}^*$, $\sigma_{r\varphi}^*$ uzyskuje się, wstawiając do wzorów (20) i (21) wyznaczone postaci potencjałów Φ i Ψ . Podwójne szeregi Fouriera–Bessela, poprzez które wyrażać się będą poszukiwane wielkości, można sprowadzić do pojedynczych szeregów Fouriera, wykorzystując wzory [13]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2)\mu_{ni}J'_n(\mu_{ni})} = \frac{\varrho^n}{2\lambda_n^2} - \frac{J_n(\varrho\lambda_n)}{2\lambda_n^2 J_n(\lambda_n)},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^2 - \lambda_n^2)J'_n(\mu_{ni})} = -\frac{J_{n+1}(\varrho\lambda_n)}{2\lambda_n J_n(\lambda_n)},$$

$$(32) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4 + L^2\lambda_n^2)\mu_{ni}J'_n(\mu_{ni})} = -\frac{\varrho^n}{2L^2\lambda_n^2} +$$

$$+ \frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{2L^2\lambda_n^2 M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \cos[\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n})],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4 + L^2\lambda_n^2)J'_n(\mu_{ni})} = \frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{2L\lambda_n M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \sin[\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n})],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4 + L^2\lambda_n^2)J'_n(\mu_{ni})} = \frac{M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{2L\lambda_n\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \cos\left[\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}^2 J_{n+1}(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4 + L^2\lambda_n^2)J'_n(\mu_{ni})} = -\frac{M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{2\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \sin\left[\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4}\right].$$

Tutaj

$$M_n(z) = \sqrt{\text{ber}_n^2 z + \text{bei}_n^2 z}, \quad \theta_n(z) = \text{arc tg } \frac{\text{bei}_n z}{\text{ber}_n z},$$

gdzie $\text{ber}_n z$, $\text{bei}_n z$ oznaczają funkcje Kelvina [3, 4].

Po żmudnych rachunkach i wykorzystaniu wzorów (32) otrzymuje się następujące postacie przemieszczeń i naprężeń:

$$(33) \quad u_r^*(\varrho, \varphi^*) = \frac{ma}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos \alpha_n \left[\frac{J_n(\varrho\lambda_n) + R_n(\varrho\lambda_n)}{L\lambda_n J_n(\lambda_n)} \sin(n\varphi^* - \alpha_n) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{nM_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{L\lambda_n M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \sin[n\varphi^* - \alpha_n - \theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n})] + \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \sin\left[n\varphi^* - \alpha_n + \theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4}\right] - \right.$$

$$\left. - 2c^2 \left\{ \frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{LJ_n(\lambda_n)} \sin(n\varphi^* - \alpha_n) + \frac{M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \sin\left[n\varphi^* - \alpha_n - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) + \frac{\pi}{4}\right] \right\} S_n^{-1} \left\{ \left[P_n\left(1, \frac{\lambda_n}{c}\right) + 2c^2 n^2 R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times [J_n(\varrho\lambda_n) + R_n(\varrho\lambda_n)] - n^2 J_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right) [P_n(1, \lambda_n) + 2c^2 R_n(\lambda_n)] \right\} \Bigg\};$$

$$\begin{aligned}
 (34) \quad u_{\varphi}^*(\varrho, \varphi^*) = & \frac{m a}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n t_{na} \cos \alpha_n \left[\frac{J_n(\varrho \lambda_n)}{L \lambda_n J_n(\lambda_n)} \cos (n \varphi^* - \alpha_n) - \right. \right. \\
 & - \frac{M_n(\varrho \sqrt{L \lambda_n})}{L \lambda_n M_n(\sqrt{L \lambda_n})} \cos [n \varphi^* - \alpha_n - \theta_n(\varrho \sqrt{L \lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L \lambda_n})] + \\
 & + 2c^2 \left\{ \frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{L J_n(\lambda_n)} \cos (n \varphi^* - \alpha_n) - \frac{M_{n+1}(\sqrt{L \lambda_n})}{\sqrt{L \lambda_n} M_n(\sqrt{L \lambda_n})} \cos \left[n \varphi^* - \alpha_n - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \theta_{n+1}(\sqrt{L \lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L \lambda_n}) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} S_n^{-1} \left\{ [P_n(1, \lambda_n) + 2c^2 R_n(\lambda_n)] \times \right. \\
 & \left. \times \left[J_n \left(\varrho \frac{\lambda_n}{c} \right) + R_n \left(\varrho \frac{\lambda_n}{c} \right) \right] - J_n(\varrho \lambda_n) \left[P_n \left(1, \frac{\lambda_n}{c} \right) + 2c^2 n^2 R_n \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) \right] \right\} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (35) \quad \sigma_{rr}^*(\varrho, \varphi^*) = & \frac{\gamma}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(t_{na} \cos \alpha_n \left[\frac{P_n(\varrho, \lambda_n)}{L \lambda_n J_n(\lambda_n)} \sin (n \varphi^* - \alpha_n) - \right. \right. \\
 & - [2c^2 n(n-1) - (\varrho \lambda_n)^2] \frac{M_n(\varrho \sqrt{L \lambda_n})}{L \lambda_n M_n(\sqrt{L \lambda_n})} \sin [n \varphi^* - \alpha_n - \theta_n(\varrho \sqrt{L \lambda_n}) + \\
 & + \theta_n(\sqrt{L \lambda_n})] + 2c^2 \varrho \frac{M_{n+1}(\varrho \sqrt{L \lambda_n})}{\sqrt{L \lambda_n} M_n(\sqrt{L \lambda_n})} \sin \left[n \varphi^* - \alpha_n - \theta_{n+1}(\varrho \sqrt{L \lambda_n}) + \right. \\
 & \left. + \theta_n(\sqrt{L \lambda_n}) + \frac{\pi}{4} \right] - 2c^2 S_n^{-1} \left\{ S_n^*(\varrho) + 2c^2 n^2 \left[P_n(\varrho, \lambda_n) R_n \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - P_n(1, \lambda_n) R_n \left(\varrho \frac{\lambda_n}{c} \right) \right] \right\} - \left\{ \frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{L J_n(\lambda_n)} \sin (n \varphi^* - \alpha_n) - \right. \\
 & \left. - \frac{M_{n+1}(\sqrt{L \lambda_n})}{\sqrt{L \lambda_n} M_n(\sqrt{L \lambda_n})} \sin \left[n \varphi^* - \alpha_n + \theta_{n+1}(\sqrt{L \lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L \lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^*(\varrho, \varphi^*) = & - \frac{\gamma}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(t_{na} \cos \alpha_n \left[\frac{P_n(\varrho, \lambda_n)}{L \lambda_n J_n(\lambda_n)} + \right. \right. \\
 & + 2(1-c^2) \varrho^2 \frac{\lambda_n J_n(\varrho \lambda_n)}{L J_n(\lambda_n)} \left. \right\} \sin (n \varphi^* - \alpha_n) - \frac{M_n(\varrho \sqrt{L \lambda_n})}{L \lambda_n M_n(\sqrt{L \lambda_n})} \{ [2c^2 n(n-1) + \\
 & + (\varrho \lambda_n)^2] \sin [n \varphi^* - \alpha_n - \theta_n(\varrho \sqrt{L \lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L \lambda_n})] - 2\varrho^2 c^2 L \lambda_n \cos [n \varphi^* - \\
 & - \alpha_n - \theta_n(\varrho \sqrt{L \lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L \lambda_n})] \} + \frac{2c^2 \varrho M_{n+1}(\varrho \sqrt{L \lambda_n})}{\sqrt{L \lambda_n} M_n(\sqrt{L \lambda_n})} \sin \left[n \varphi^* - \right. \\
 & \left. - \alpha_n - \theta_{n+1}(\varrho \sqrt{L \lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L \lambda_n}) + \frac{\pi}{4} \right] - 2c^2 S_n^{-1} \left\{ S_n^*(\varrho) + \right. \\
 & \left. + 2c^2 n^2 \left[P_n(\varrho, \lambda_n) R_n \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) - P_n(1, \lambda_n) R_n \left(\varrho \frac{\lambda_n}{c} \right) \right] + 2(1-c^2) (\varrho \lambda_n)^2 \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times J_n(\varrho \lambda_n) \left[P_n \left(1, \frac{\lambda_n}{c} \right) + 2c^2 n^2 R_n \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) \right] \times \left\{ \frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{L J_n(\lambda_n)} \sin(n\varphi^* - \alpha_n) - \right. \\
 & \left. - \frac{M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \sin \left[n\varphi^* - \alpha_n + \theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}; \\
 (37) \quad \sigma_{r\varphi}^*(\varrho, \varphi^*) = & \frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n t_{na} \cos \alpha_n \left[\frac{R_n(\varrho \lambda_n)}{L \lambda_n J_n(\lambda_n)} \cos(n\varphi^* - \alpha_n) - \right. \right. \\
 & - \frac{(n-1) M_n(\varrho \sqrt{L\lambda_n})}{L \lambda_n M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \cos[n\varphi^* - \alpha_n - \theta_n(\varrho \sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n})] - \\
 & - \left. \frac{\varrho M_{n+1}(\varrho \sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \cos \left[n\varphi^* - \alpha_n - \theta_{n+1}(\varrho \sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) + \frac{\pi}{4} \right] + \right. \\
 & + S_n^{-1} \left\{ S_n^{**}(\varrho) - 2c^2 \left[P_n \left(1, \frac{\lambda_n}{c} \right) R_n(\varrho \lambda_n) - P_n \left(\varrho, \frac{\lambda_n}{c} \right) R_n(\lambda_n) \right] \right\} \times \\
 & \times \left\{ \frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{L J_n(\lambda_n)} \cos(n\varphi^* - \alpha_n) - \frac{M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \cos \left[n\varphi^* - \alpha_n + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Związki (33) - (37) opisują przemieszczenia i naprężenia w walcu wirującym z prędkością kątową ω , wywołane przyłożoną na jego pobocznicy temperaturą $\theta^*(r, \varphi^*)$. Obowiązują one dla czasów $t^* > 0,5a^2\kappa^{-1}$. W poszczególnych wzorach zastosowano dodatkowe oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_n &= \frac{L}{\sqrt{L^2 + \lambda_n^2}}, \quad \sin \alpha_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{L^2 + \lambda_n^2}}, \\
 S_n^*(\varrho) &= P_n(\varrho, \lambda_n) P_n \left(1, \frac{\lambda_n}{c} \right) - 4c^4 n^2 R_n(\lambda_n) R_n \left(\varrho \frac{\lambda_n}{c} \right), \\
 S_n^{**}(\varrho) &= P_n(1, \lambda_n) P_n \left(\varrho, \frac{\lambda_n}{c} \right) - 4c^4 n^2 R_n(\varrho \lambda_n) R_n \left(\frac{\lambda_n}{c} \right).
 \end{aligned}$$

Aby otrzymać rozkład naprężeń i przemieszczeń w rozważanym na wstępie walcu, należy związki (33) - (37) oraz (14) - (16) wstawić do wzorów (12) i (13). Otrzymane sumy będą określać odpowiednio pola przemieszczeń i naprężeń, jakie powstaną w walcu podczas regularnego reżimu cieplnego.

Wyznaczone w ten sposób przemieszczenia i naprężenia są funkcjami dwóch zmiennych: bezwymiarowego promienia $\varrho = r/a$ oraz kąta $\varphi^* = \varphi - \omega t$. Ponadto zawierają trzy stałe parametry bezwymiarowe: $c = \frac{c_2}{c_1}$, $L = \frac{ac_1}{z}$, $A = \frac{1}{n} \lambda_n = \frac{a\omega}{c_1}$. Istotną rolę

odgrywa także wielkość $Fo = \frac{\kappa t}{a^2}$ (liczba Fouriera), gdyż przedstawione wyżej wyniki mają sens fizyczny dla czasu t określonego nierównością $Fo > 0,5$ [1, 11, 12].

Wspomniane wielkości bezwymiarowe, a więc ϱ , φ^* , Fo , c , L oraz Λ utworzone są przez dziewięć parametrów: r , φ , t , λ , μ , κ , ϱ_0 , ω oraz a ; stanowią one podstawę wielkości bezwymiarowych określających rozpatrywane zagadnienie [14]. Zatem warunki stałości tych sześciu bezwymiarowych parametrów stanowią dla rozpatrywanego problemu kryteria podobieństwa. Widoczne jest, że np. zwiększenie prędkości kątowej ω przy jednoczesnej stałości parametrów L i Λ powoduje skrócenie czasu trwania czysto niestacjonarnego reżimu cieplnego; stałość parametrów L i Λ można uzyskać dobierając walec o np. odpowiednio zmniejszonym promieniu a i współczynniku przewodzenia temperatury κ .

Bezwymiarowe liczby L i Λ osiągają dla metali wartości, których rząd wielkości można stosunkowo dobrze określić. Z uwagi na to, że wtedy $c_1 \sim 10^5$ cm/s oraz $\kappa \sim 10^{-1}$ cm²/s mamy $L \sim 10^6 a$, $\Lambda \sim 10^{-5} a \omega$.

Rozważmy przypadek, gdy $\omega \sim 10^2$ rad/s. Przyjmijmy również, że $a \sim 10$ cm. Wówczas $L \sim 10^7$, $\Lambda \sim 10^{-2}$, $L\Lambda \sim 10^5$, $\sqrt{L\Lambda} \sim 3 \times 10^2$. Ponadto, ograniczając się do pierwszych N (gdzie $N \sim 10^3$) wyrazów rozpatrywanych szeregów, można przyjąć $\alpha_n \approx 0$. Przy takich założeniach możliwe jest przedstawienie naprężeń $\sigma_{\alpha\beta}^*$ ($\alpha, \beta = r, \varphi$) w postaci prostszej, dobrze przybliżającej ich wartość ścisłą dla $\varrho \in \langle 0,5; 1 \rangle$. Pomijając mianowicie w szeregach, określających te naprężenia, składniki proporcjonalne do L^{-1} jako małe w porównaniu ze składnikami proporcjonalnymi do $L^{-0,5}$ oraz wykorzystując wzory przybliżone dla funkcji $M_n(z)$ i $\theta_n(z)$ dużego argumentu [3, 4]:

$$M_n(z) = \frac{\exp(z/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi z}}, \quad \theta_n(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2},$$

otrzymuje się dla $\varrho \in \langle 0,5; 1 \rangle$:

$$(38) \quad \sigma_{rr}^*(\varrho, \varphi^*) \approx -\frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^N t_{na} \left(-\sqrt{\frac{\varrho}{L\lambda_n}} \exp\left[-(1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}}\right] \sin\left[n\varphi^* - (1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}} + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\sin\left(n\varphi^* + \frac{\pi}{4}\right)}{S_n \sqrt{L\lambda_n}} \left\{ S_n^*(\varrho) + 2c^2 n^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[P_n(\varrho, \lambda_n) R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) - P_n(1, \lambda_n) R_n\left(\varrho \frac{\lambda_n}{c}\right) \right] \right\} \right),$$

$$(39) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^*(\varrho, \varphi^*) \approx -\frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^N t_{na} \left(\sqrt{\varrho} \exp\left[-(1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}}\right] \left\{ \varrho \cos\left[n\varphi^* + (1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}} + \frac{\pi}{4}\right] \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}} - \frac{1}{\sqrt{L\lambda_n}} \sin\left[n\varphi^* - (1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}} + \frac{\pi}{4}\right] \right\} + \frac{\sin\left(n\varphi^* + \frac{\pi}{4}\right)}{S_n \sqrt{L\lambda_n}} \left\{ S_n^*(\varrho) + 2c^2 n^2 \left[P_n(\varrho, \lambda_n) R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - P_n(1, \lambda_n) R_n\left(\varrho \frac{\lambda_n}{c}\right) \right] \right\} + 2(1-c^2)(\varrho\lambda_n)^2 J_n(\varrho\lambda_n) \left[P_n\left(1, \frac{\lambda_n}{c}\right) + 2c^2 R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) \right] \right\} \right),$$

$$(40) \quad \sigma_{r\varphi}^*(\varrho, \varphi^*) \approx \frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^N n t_{na} \left(\sqrt{\frac{\varrho}{L\lambda_n}} \exp \left[-(1-\varrho) \sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}} \right] \times \right. \\ \left. \times \cos \left[n\varphi^* - (1-\varrho) \sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}} + \frac{\pi}{4} \right] - \frac{\cos \left(n\varphi^* + \frac{\pi}{4} \right)}{S_n \sqrt{L\lambda_n}} \left\{ S_n^{**}(\varrho) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2c^2 \left[P_n \left(1, \frac{\lambda_n}{c} \right) R_n(\varrho\lambda_n) - P_n \left(\varrho, \frac{\lambda_n}{c} \right) R_n(\lambda_n) \right] \right\} \right).$$

Związki (38) - (40) są dobrymi przybliżeniami wyrażeń (35) - (37) dla $\omega \in (\varepsilon \times 10^2; \varepsilon \times 10^4)$ rad/s, gdzie $\varepsilon \sim 1$. Wynika z nich, że przy wzroście prędkości kątowej ω , obszar, w którym naprężenia główne przyjmują wartości różniące się istotnie od zera, lokalizuje się coraz bliżej powierzchni bocznej walca. Jednocześnie maleją naprężenia σ_{rr}^* i $\sigma_{r\varphi}^*$ (gdyż rośnie $L\lambda$), a zwiększa się wartość $\sigma_{\varphi\varphi}^*$.

Dla prędkości kątowych ω rzędu wyższego niż $10^4 \div 10^5$ rad/s wzory (38) - (40) przestają obowiązywać.

Na zakończenie rozważmy przypadek, gdy $\omega \ll 1$ rad/s. Przyjmując podobnie jak w poprzednim przypadku $a \sim 10$ cm mamy $L \sim 10^7$, $\lambda < 10^{-5}$, $L\lambda < 10^2$, $\sqrt{L\lambda} < 10$. Ponadto, ograniczając się do pierwszych \bar{N} (gdzie $\bar{N} \sim 10^3$) wyrazów rozpatrywanych szeregów, można przyjąć $\alpha_n \approx 0$. Zastępując funkcje Bessela $J_n(\lambda_n) = J_n(n\lambda)$ pierwszymi wyrazami ich rozwinięć w szeregi potęgowe, otrzymuje się

$$(41) \quad \sigma_{rr}^*(\varrho, \varphi^*)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{\bar{N}} t_{na} \left(\frac{n(n-1)}{L\lambda_n} \left\{ \varrho^n \sin n\varphi^* - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \sin [n\varphi^* - \theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n})] \right\} - \frac{\varrho}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \times \right. \\ \left. \times \left\{ M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) \sin \left[n\varphi^* + \theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \varrho^{n+1} M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) \sin \left[n\varphi^* + \theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \right);$$

$$(42) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^*(\varrho, \varphi^*)|_{\omega \ll 1} \approx - \frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{\bar{N}} t_{na} \left(\frac{n(n-1)}{L\lambda_n} \left\{ \varrho^n \sin n\varphi^* - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \sin \left[n\varphi^* - \theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) \right] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\varrho^2 M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \cos [n\varphi^* - \theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n})] - \right. \\ \left. - \frac{\varrho}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \left\{ M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) \sin \left[n\varphi^* + \theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \varrho^{n+1} (2n+1) M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) \sin \left[n\varphi^* + \theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \right),$$

$$\begin{aligned}
 (43) \quad \sigma_{r\varphi}^*(\varrho, \varphi^*)|_{\omega \ll 1} \approx & \frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{\bar{N}} n t_{na} \left(\frac{n-1}{L\lambda_n} \left\{ \varrho^n \cos n\varphi^* - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{M_n(\varrho \sqrt{L\lambda_n})}{M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \cos \left[n\varphi^* - \theta_n(\varrho \sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) \right] \right\} + \right. \\
 & + \frac{\varrho}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \left\{ M_{n+1}(\varrho \sqrt{L\lambda_n}) \cos \left[n\varphi^* + \theta_{n+1}(\varrho \sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\pi}{4} \right] - \varrho^{n+1} M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) \cos \left[n\varphi^* + \theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \Bigg).
 \end{aligned}$$

Gdy $\omega = 0$, otrzymujemy $\sigma_{\alpha\beta}^* = 0$ ($\alpha, \beta = r, \varphi$).

5. Podsumowanie wyników

Wyznaczone w pracy naprężenia i przemieszczenia składają się z dwóch zasadniczych składników: pierwszego — pochodzącego od ruchu obrotowego walca, oraz drugiego — będącego skutkiem ogrzewania jego powierzchni bocznej. Pierwszy składnik był znany w literaturze; drugi został wyznaczony dla chwil czasu odległych od chwili początkowej. Sprowadzenie zagadnienia dynamicznego przy pomocy transformacji układu współrzędnych do quasi-statycznego pozwoliło określić wielkości u_α^* , $\sigma_{\alpha\beta}^*$ ($\alpha, \beta = r, \varphi$) na stosunkowo prostej, choć rachunkowo żmudnej drodze. Otrzymane wyniki wskazują, że naprężenia w wirującym walcu, grzanym na pobocznicy, są periodycznymi funkcjami czasu (gdyż $\varphi^* = \varphi - \omega t$). W zależności zatem od różnicy temperatur działających na pobocznice (por. rys. 1) naprężenia będą oscylować w czasie z mniejszą lub większą amplitudą. W przypadku, gdy temperatura pobocznicy jest stała, naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$ są równe zeru (gdyż $t_{na} = 0$).

Interesujące są wnioski wynikające z rozważań dotyczących dużych oraz małych prędkości kątowych ω . W przypadku dużych prędkości kątowych mamy do czynienia ze spiętrzeniem naprężeń obwodowych przy pobocznicy walca, naprężenia zaś promieniowe i ścinające są bardzo bliskie zera. Na brzegu walca wartość $\sigma_{\varphi\varphi}^*$ jest w przybliżeniu równa $-2\gamma c^2 (\theta(a, \varphi, t) - t_{0a})$.

Dla ω bliskiego zeru również największe wartości osiąga $\sigma_{\varphi\varphi}^*$; gdy $\omega = 0$, mamy w całym przekroju poprzecznym walca $\sigma_{\alpha\beta}^* = 0$ ($\alpha, \beta = r, \varphi$). Ten ostatni wynik jest zgodny z twierdzeniem dotyczącym naprężeń cieplnych przy ustalonym reżimie cieplnym (por. np. [15], s. 161).

Przedstawione wyniki mają postać szeregów Fouriera o dosyć skomplikowanych współczynnikach. Zaletą jednak takiego przedstawienia jest fakt, że współczynniki te zależą tylko od czterech bezwymiarowych parametrów, w tym od bezwymiarowego promienia ϱ . Otrzymane wyniki stanowią zatem wygodne narzędzie do badań modelowych.

Literatura cytowana w tekście

1. K. GRYSA, *Nieustalone pole temperatury w wirującym walcu kołowym, wywołane utrzymywaną na jego poboczniczy odcinkami stałą temperaturą*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 15 (1977).
2. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
3. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1962.
4. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
5. S. TIMOSHENKO, I. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
6. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
7. T. MURA, *Dynamical thermal stress due to thermal shocks*, Res. Rep. Faculty of Engng., Meiji Univ., 8, 1956.
8. W. DERSKI, *A dynamical problem of thermoelasticity concerning a thin circular plate*, Arch. Mech., 2, 13 (1961).
9. K. GRYSA, M. KWIEK, *Stan naprężenia w walcu kołowym wywołany przyłożeniem stałej temperatury na pobocznicy*, Mech. Teoret. Stos., 1, 15 (1977).
10. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag, Wien 1958; tłum. ros., Moskwa 1963.
11. K. GRYSA, *Rozkład temperatury i naprężeń w walcu kołowym, wywołany ruchomym niesymetrycznym ogrzewaniem poboczniczy*, Rozpr. doktorska, Politechnika Poznańska, 1975.
12. А. Г. ХАРЛАМОВ, *Измерение теплопроводности твердых тел*, АТОМИЗДАТ, Москва 1973.
13. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos., 2, 15 (1977).
14. L. I. SIEDOW, *Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice*, WNT, Warszawa 1968.
15. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Изд. Наука, Москва 1966.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В КРУГЛОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ
ЦИЛИНДРЕ ПРИ НЕСИММЕТРИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ ЕГО
БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе приведены напряжения и перемещения в круглом вращающемся цилиндре во время регулярного теплового режима. Полученное решение имеет вид рядов Фурье, представленных при помощи безразмерных координат и параметров, содержащих физические константы.

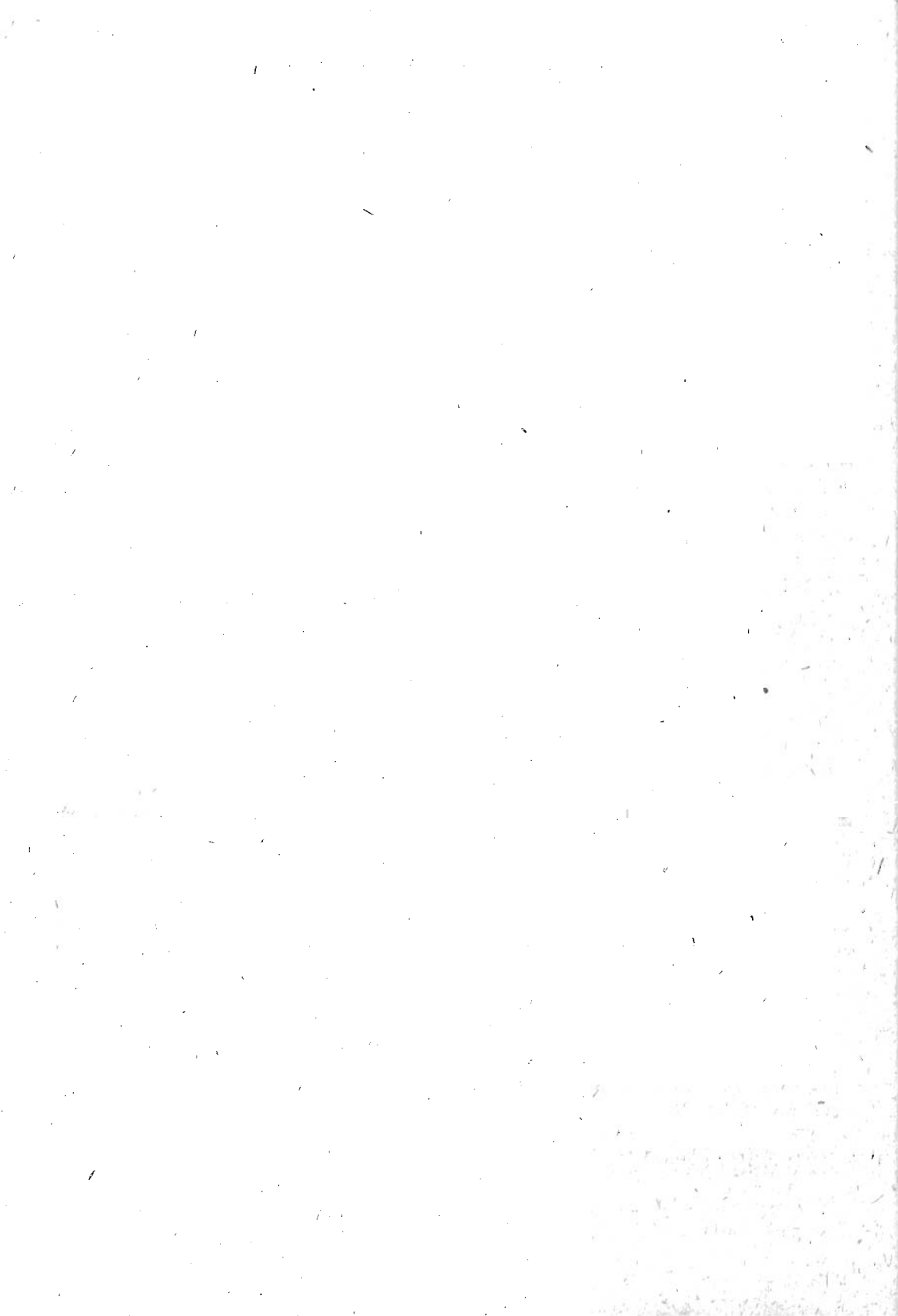
Summary

THE STRESSES AND DISPLACEMENTS IN A ROTATING CIRCULAR
CYLINDER DUE TO AXIALLY NON-SYMMETRICAL HEATING OF ITS
LATERAL SURFACE

The problem of stress and displacement distributions a rotating circular cylinder heated on its lateral surface is dealt with in case of a regular thermal process. The solution is given in a form of Fourier series involving dimensionless variables and dimensionless parameters determined by the mechanical and thermal properties of material.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1976 r.



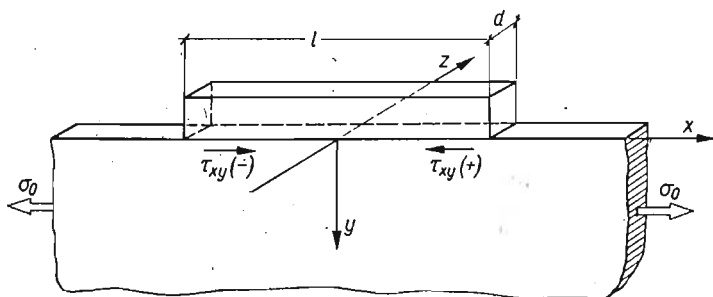
INWERSYJNA METODA BADANIA MODELI ELASTOOPTYCZNYCH Z WIĘZAMI SZTYWNYMI

ROMAN DOROSZKIEWICZ, JERZY LIETZ, BOGDAN MICHAŁSKI
(WARSZAWA)

W artykule tym przedstawimy pewne zagadnienie doświadczalnej analizy naprężeń referowane przez autorów w 1974 roku¹⁾, które można rozwiązać metodą elastooptyczną przy użyciu nieco innej techniki od ogólnie stosowanej.

Tematem badania było wyznaczenie stanu naprężenia w półpłaszczyźnie sprężystej, na brzegu której istnieje sztywna więź. Naprężenia te wymuszone są przez odkształcenia półpłaszczyzny w kierunku równoległym do brzegu. Głównym celem było znalezienie składowych naprężenia na linii styku półpłaszczyzny z więzią.

Rozpatrujemy nieodkształcalną więź o długości l , doskonale zespoloną z brzegiem sprężystej półpłaszczyzny w układzie odniesienia x, y, z , jak na rys. 1.



Rys. 1. Schemat modelu półpłaszczyzny z więzią

W oddaleniu od więzi półpłaszczyznę obciążamy równomiernym naprężeniem rozciągającym σ_0 , które wywołuje jednorodne pole odkształceń $\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$. Na skutek usztywniającego działania więzi, w jej otoczeniu pole odkształceń i naprężeń przestaje być jednorodne, a na końcach więzi oczekujemy znacznego spiętrzenia naprężeń.

Z pomiarów elastooptycznych uzyskujemy w każdym punkcie płaskiego modelu:

- 1) rząd izochromy $m = \sigma_1 - \sigma_2$ (naprężenia wyrażamy dla wygody bezwymiarowo w rzędach izochrom),
- 2) parametr izokliny φ .

¹⁾ R. S. Doroszkiewicz, J. Lietz, B. Michalski. Inwersyjna metoda badania modeli elastooptycznych z więzami sztywnymi. VI Symposium doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego. Warszawa — wrzesień 1974.

Szczególna sytuacja występuje jednak na granicy połączenia półpłaszczyzny z więzią. Z założenia nieodkształcalności więzi i nierozdzielności odkształceń wynika, że wydłużenie względne ε_x (rys. 1) musi być równe zero. Ten dodatkowy warunek $\varepsilon_x = 0$ wraz z wynikami pomiarów elastooptycznych m i φ pozwala w pełni określić stan naprężenia na granicy więzi. Z warunków równowagi i prawa Hooke'a, przy założeniu płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_z = 0$), łatwo wyprowadzić następujące wyrażenia na składowe stanu naprężenia:

$$(1) \quad \sigma_x = -\frac{\nu}{1-\nu} m \cos 2\varphi, \quad \sigma_y = -\frac{1}{1-\nu} m \cos 2\varphi, \\ \tau_{xy} = \frac{1}{2} m \sin 2\varphi.$$

Charakterystyczna, dla stanu naprężenia pod więzią, jest proporcjonalność do siebie naprężeń normalnych, gdyż $\sigma_x = \nu \sigma_y$.

Analizując wyniki obliczone z powyższych wzorów należy zwrócić uwagę na całkowity warunek równowagi. Z tego, że wypadkowa sił działających między więzią a półpłaszczyzną jest równa zero wynika, że

$$(2) \quad \int_{-l/2}^{l/2} \tau_{xy} dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_y dx = 0.$$

Pierwszy z tych warunków jest spełniony, gdy wykres $\tau_{xy}(x)$ jest antysymetryczny, co wynika z symetrii układu. Warunek drugi jest bardzo dobrym sprawdzianem poprawności wyznaczenia naprężeń σ_y . Wynika z niego oczywiście, że wielkość σ_y musi zmieniać znak. Ta zmiana znaku występuje w charakterystycznych dla zagadnienia punktach, w których $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, a $\varphi = 45^\circ$. Na obrazie elastooptycznym izoklina 45° wskazuje te punkty.

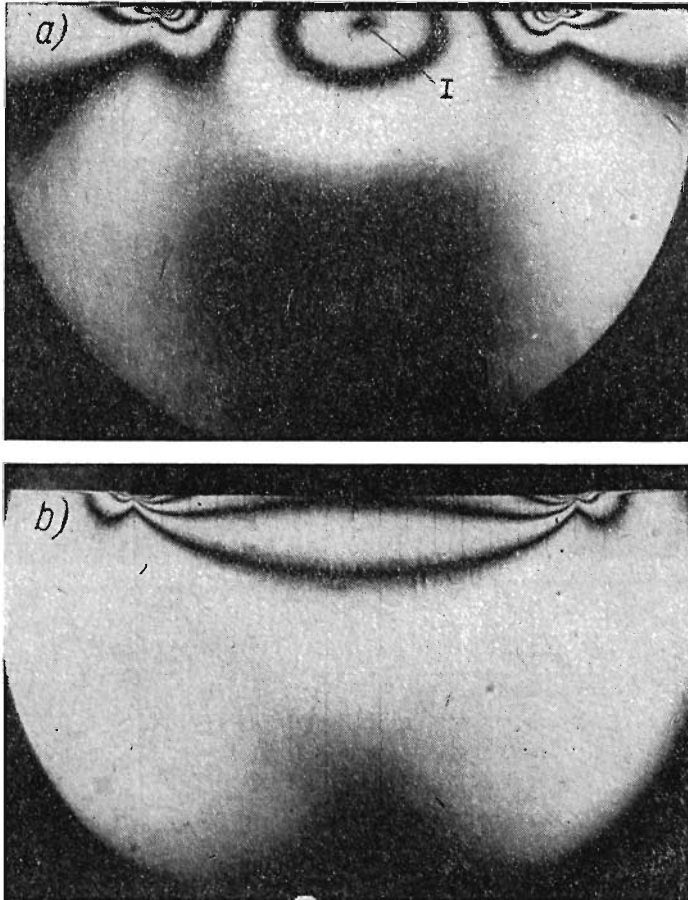
W rzeczywistości sprawę komplikuje wpływ skończonej grubości modelu. W zwykłych badaniach elastooptycznych przy umiarkowanych gradientach stanu naprężenia stosuje się modele o grubości do 10 mm przyjmując, że w modelach tych występuje płaski stan naprężenia, ponieważ mogą one swobodnie odkształcać się po grubości, a $\sigma_z = 0$. Jeżeli jednak z brzegiem modelu zespolona jest nieodkształcalna więź, to narzuca ona na brzegu nie tylko warunek $\varepsilon_x = 0$ ale również $\varepsilon_z = 0$. Związane z tym oddziaływanie ($\tau_{yz} \neq 0$) wprowadza w sąsiedztwie więzi trójwymiarowy stan naprężenia. W jego strefie obraz elastooptyczny jest nieprawidłowy i nieczytelny. Należy więc w miarę możliwości dążyć do zlikwidowania lub przynajmniej ograniczenia tego oddziaływania. Najwłaściwsza droga do wyeliminowania wpływu trójwymiarowości prowadzi, jak wynika z licznych badań prowadzonych przez autorów, do wykonania modelu o małej grubości, a więzi o możliwie dużych wymiarach. Decyduje tutaj stosunek l/d gdzie l oznacza długość więzi, d — grubość modelu. Doświadczenia wykazały, że przy l/d rzędu 30 - 40 wpływ grubości modelu przestaje odgrywać rolę.

Istnieje możliwość rozwiązania postawionego zagadnienia metodą badania elastooptycznego, ale nieco inną techniką opartą na zasadzie superpozycji. Potraktujmy stan naprężenia panujący w rozciąganej półpłaszczyźnie z więzią jako stan wynikający z superpozycji dwu stanów naprężenia. Symbolicznie zapiszemy to

$$S = S_I + S_{II},$$

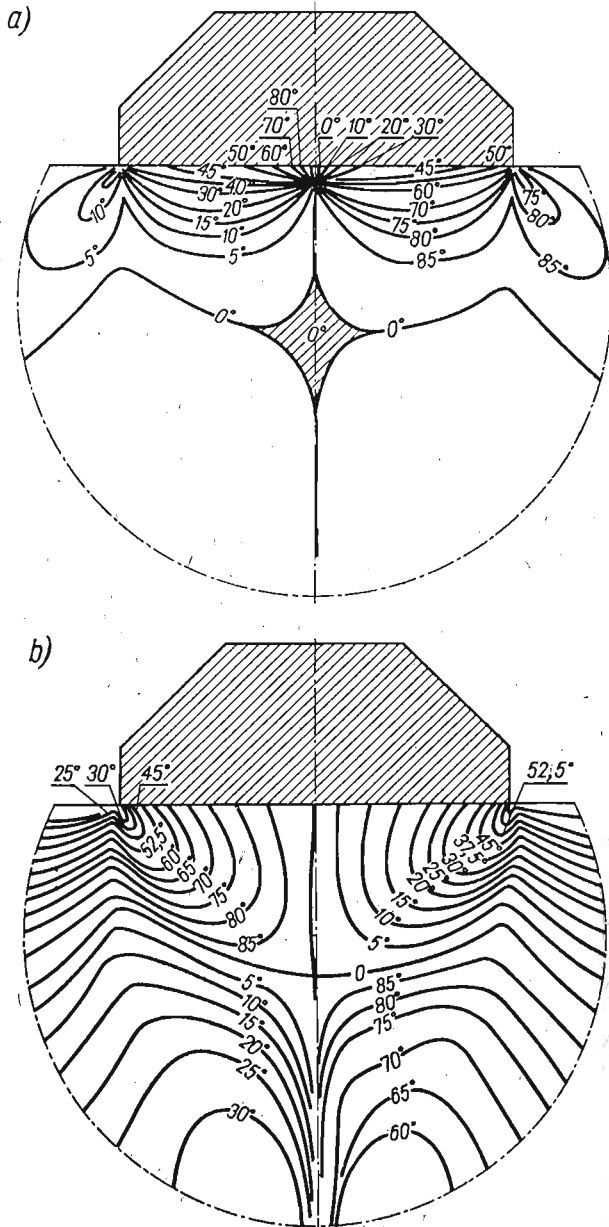
gdzie S_I oznacza jednorodny stan naprężenia wynikający z jednoosiowego rozciągania, S_{II} — stan naprężenia wywołany oddziaływaniem więzi, tzn. siłami wywieranymi na półpłaszczyznę przez więź.

Stan naprężenia taki sam, jak S_{II} , lecz przeciwnego znaku, można łatwo zrealizować poddając model równomiernemu rozciąganiu σ_0 i utrzymując go pod obciążeniem w stanie



Rys. 2. Izochromy: a) badanie proste, b) badanie inwersyjne

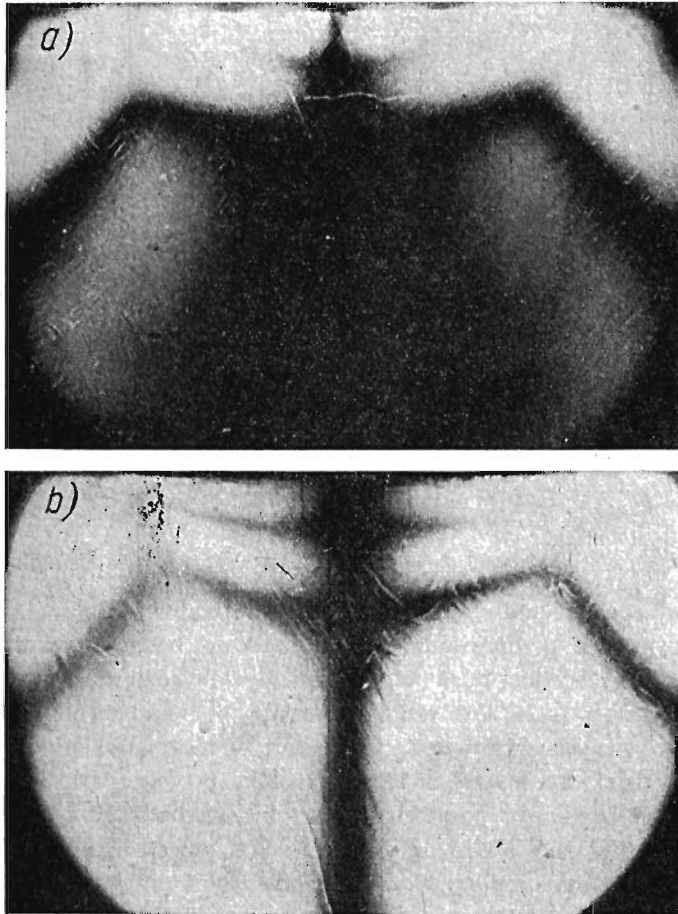
odkształconym. Do tak odkształconego modelu przyklejamy więź, a po całkowitym związaniu połączenia klejonego model odciążamy. Wokół więzi powstanie wówczas stan naprężenia $-S_{II}$, który można zarejestrować elastooptycznie. Dla tak przeprowadzonego badania przyjmujemy umownie nazwę «badanie inwersyjne» ze względu na odwrócenie czynności w badaniu (najpierw obciążenie, potem klejenie), jak również odwrócenie znaku naprężeń.



Rys. 3. Izokliny: a) badanie proste, b) badanie inwersyjne

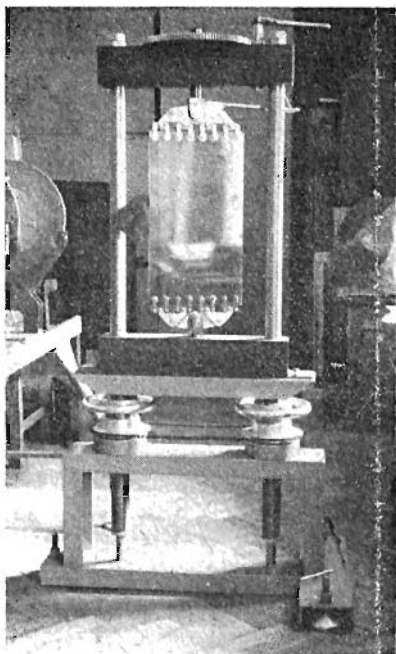
Wyznaczania naprężeń na granicy połączenia półpłaszczyzny z więzią dokonać można podobnie na podstawie danych elastoptycznych m i φ , z tym, że dodatkowym warunkiem na granicy jest

$$(3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \sigma_x &= \frac{1}{1-\nu} \sigma_0 - \frac{1}{1-\nu} m \cos 2\varphi, \\ \sigma_y &= \frac{1}{1-\nu} \sigma_0 - \frac{1}{1-\nu} m \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{m}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

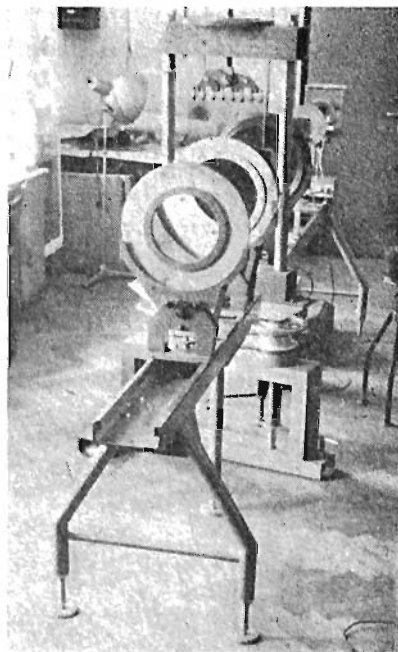


Rys. 4. Izoklina 0° : a) badanie proste, b) badanie inwersyjne

Składowe naprężenia (3) dadzą się łatwo przeliczyć na przypadek prosty (nieinwersyjny): σ_y i τ_{xy} zmieniają tylko znak, a do wartości σ_x trzeba ponadto dodać wartość naprężenia σ_0 , z jakim rozciągany był wstępnie model.



Rys. 5. Urządzenie do obciążania modelu



Rys. 6. Stanowisko badawcze

Naprężenia przeliczone oznaczamy gwiazdką:

$$(4) \quad \sigma_x^* = \sigma_0 - \sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu} (m \cos 2\varphi - \sigma_0),$$

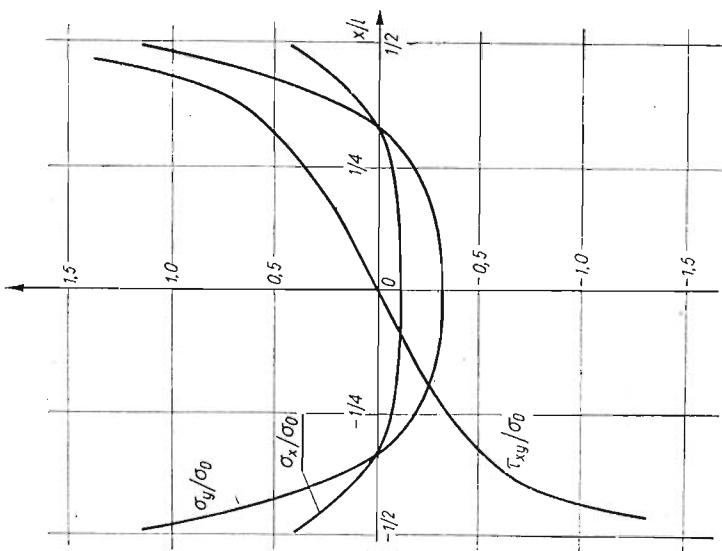
$$\sigma_y^* = -\sigma_y, \quad \tau_{xy}^* = -\tau_{xy}.$$

Wykresy τ_{xy}^* i σ_x^* również podlegają sprawdzeniu wg wzorów (2).

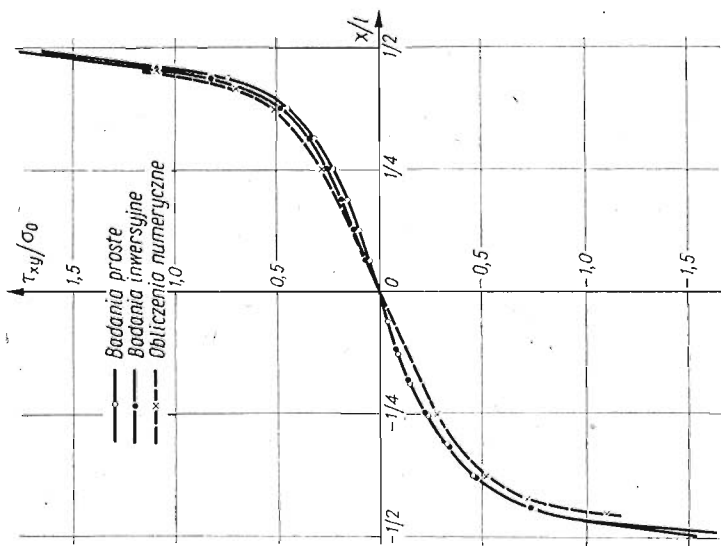
Korzyści płynące z przeprowadzonego dodatkowo badania inwersyjnego są bezsporne. Otrzymujemy bowiem te same wyniki z zupełnie różnych obrazów elastoptycznych (izochromy na rys. 2). Porównanie wyników pozwala ocenić dokładność badań i co ważniejsze w pewnych obszarach wartości naprężeń można dokładniej określić w badaniu inwersyjnym dzięki np. lepszej czytelności izoklin (porównaj rys. 3a oraz 3b). Można łatwo wykazać, że izoklina o parametrze 0 w obu przypadkach przebiega jednakowo, mimo iż pola izoklin są zupełnie różne. Potwierdzają to zdjęcia izoklin 0° (rys. 4a i b).

Wykorzystując doświadczenia wstępnych etapów badań przyjęto duże wymiary modelu (300×580 mm) uzyskując w ten sposób: a) zmniejszenie wpływu pełzania kleju; b) lepszą czytelność obrazu elastoptycznego zwłaszcza w sąsiedztwie więzi; c) wyższe rzędy izochrom przy zachowaniu korzystnego stosunku $l/d = 27$.

Model wykonano ze specjalnie odlanej płyty epoksydowej grubości 6 mm. Po środku dłuższego boku przyklejono stalową więź używając kleju epoksydowego z wypełniaczem aluminiowym. Obie krótsze krawędzie obciążono ośmioma siłami skupionymi za pomocą układu dźwigniowego (rys. 5).



Rys. 8. Wykresy naprężeń pod więzią



Rys. 7. Wykresy naprężeń stycznych pod więzią

Badania prowadzono w polaryskopie z równoległą wiązką światła, rzutując obrazy elastooptyczne na ekran. Zdjęcie stanowiska badawczego widoczne jest na rys. 6.

Na rys. 7 przedstawiono wykresy $\frac{\tau_{xy}}{\sigma_0}$ wzdłuż więzi, uzyskane z badania prostego i inwersyjnego. Ich zgodność jest wysoka. Dla porównania linią przerywaną pokazano wyniki obliczenia numerycznego, które przeprowadzono metodą elementów skończonych podaną przez O. C. ZIENKIEWICZA, dzieląc badany obszar na skończoną liczbę wielokątów.

Wykresy na rys. 8 przedstawiają ostateczne wyniki badania półpłaszczyzny z więzią, uzyskane z uśrednienia wyników badań prostych i inwersyjnych.

Autorzy uważają, że zaproponowany sposób badania warto jest stosować w pewnych przypadkach, jakimi mogą być np. pasma z więzami usztywniającymi, inkluzjami itp.

Резюме

ОБРАТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ФОТОУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ С ЖЕСТКИМИ СВЯЗЯМИ

Авторы предлагают метод исследования плоских фотоупругих моделей с жесткими связями. Суть его в том, что склеивание связи с моделью производится под нагрузкой а само фотоупругое исследование — без нагрузки. В работе показаны преимущества такой методики, особенно при параллельном проведении обычного опыта.

Метод иллюстрируется примером растянутой в одном направлении полуплоскости, к которой прикреплена жесткая связь конечной длины.

Summary

INVERSIONAL METHOD OF INVESTIGATION OF PHOTO-ELASTIC MODELS

The authors present a certain method of investigation of two-dimensional photoelastic models with rigid constraints. It consists in the fact that cementing of constraints with the model is performed under load, and photoelastic investigation — without external loads.

In the paper are presented advantages of the method, particularly when being used together with a conventional investigation.

The method is presented on an example of a half-plane under uni-axial load, the boundary of which is attached to a rigid constraint of finite length.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1976 r.

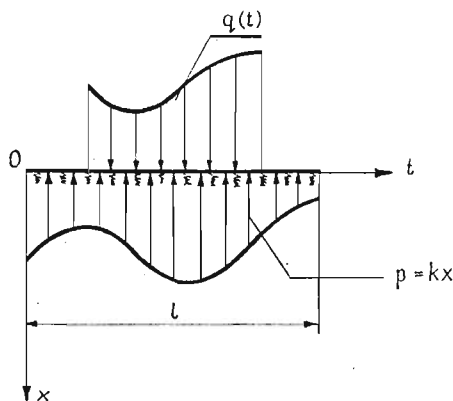
OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELKI NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM
Z UWZGLĘDNIENIEM OGRANICZEŃ NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH

MACIEJ MAKOWSKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

Przedmiotem pracy będzie optymalizacja kształtu (szerokości) belki spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera z uwagi na minimum objętości przy ograniczeniu naprężeń normalnych.

W tym celu w prostokątnym, kartezjańskim układzie współrzędnych Otx rozważymy belkę o skończonej długości, sprężystą, jednorodną, izotropową o przekroju prostokątnym (rys. 1).



Rys. 1

Linia ugięcia belki opisana jest znanym równaniem różniczkowym

$$(1.1) \quad (EJx'')'' + kx = q(t),$$

gdzie E oznacza moduł Younga, J — moment bezwładności, $x(t)$ — ugięcie belki, $q(t)$ — obciążenie, k — współczynnik podatności podłoża.

Rozważać będziemy belkę spoczywającą na podłożu o stałym współczynniku podatności k , o stałej wysokości i zmiennej, lecz symetrycznej względem osi belki, szerokości.

Szerokość belki możemy wyrazić w postaci

$$(1.2) \quad b(t) = \frac{12EJ(t)}{h^3E} = \frac{12}{h^3E} m(t),$$

gdzie $m(t) \stackrel{\text{df}}{=} EJ(t)$.

Szukanie minimum objętości belki przy takich założeniach równoważne jest szukaniu minimum funkcjonału $\int_0^l m(t) dt$.

W dalszym ciągu pracy belkę będziemy traktować jako układ sterowania, rozwiązując nieklasyczny problem wariacyjny na podstawie metody programowania dynamicznego BELLMANA.

2. Sformułowanie problemu

Rozważmy belkę opisaną równaniem

$$(2.1) \quad [m(t)x'']'' = q - kx.$$

Warunek ograniczający naprężenie normalne

$$(2.2) \quad |\sigma| \leq \sigma_d;$$

funkcjonał postaci

$$(2.3) \quad J_0 = \int_0^l m(t) dt.$$

Należy wyznaczyć taki kształt belki, który przy spełnieniu (2.1) i (2.2) realizuje minimum funkcjonału J_0 .

3. Rozwiązanie problemu

Ograniczenie (2.2) zastąpimy równoważnym ograniczeniem na drugą pochodną ugięcia. Korzystając ze wzoru

$$(3.1) \quad \sigma = \frac{|M|}{W} = \frac{|EJx''|}{J} \cdot \frac{h}{2} = \frac{|Ex''h|}{2}$$

i uwzględniając (2.2), otrzymujemy

$$(3.2) \quad |x''| < \sigma_0,$$

gdzie $\sigma_0 = \frac{2\sigma_d}{Eh}$.

Oznaczając $x'' \stackrel{\text{def}}{=} v$, które traktujemy jako nowe sterowanie [1], można sformułowany problem przedstawić następująco:

$$(3.3) \quad [m(t)x'']'' = q - kx,$$

$$(3.4) \quad x'' = v,$$

$$(3.5) \quad \Omega = \{v: |v| \leq \sigma_0\},$$

$$(3.6) \quad \min_{v \in \Omega} \int_0^l m(t) dt.$$

Równanie (3.4) przedstawiamy w postaci układu równań rzędu pierwszego:

$$(3.7) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v,$$

gdzie $x_1 \stackrel{df}{=} x$.

Umiejscawiając zagadnienie szukania $\min \int_{v \in \Omega}^l m(t) dt$ w szerszej klasie ze zmienną dolną granicą całkowania, mamy

$$(3.8) \quad f(\bar{x}, t) = \min_{v \in \Omega} \int_t^l m(u) du,$$

gdzie $\bar{x} \stackrel{df}{=} (x_1, x_2)$.

Równanie BELLMANA [1] dla wyznaczenia funkcji f ma postać

$$(3.9) \quad 0 = \min_{v \in \Omega} \left[m + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v \right].$$

Zależność w nawiasie kwadratowym od v jest liniowa, czyli minimum tego wyrażenia będzie osiągnięte na brzegu Ω .

Mamy więc równoważną postać równania Bellmana

$$(3.10) \quad 0 = \inf_{v \in \Omega} \left[m + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v \right],$$

a stąd otrzymujemy sterowanie optymalne

$$(3.11) \quad v = -\sigma_0 \operatorname{sgn} \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

które można zapisać w równoważnej postaci

$$(3.12) \quad |x''| = \sigma_0.$$

Rozwiązaniem optymalnym postawionego zadania jest więc belka równomiernej wytrzymałości.

Jakościowy charakter sterowania został znaleziony stosunkowo prosto, jednak w dalszym ciągu należy poszukać WKW na to, aby belka była równomiernej wytrzymałości i podać jej konstrukcję.

4. Belki o równomiernej wytrzymałości na podłożu sprężystym

4.1. Przypadek krzywizny stałego znaku. Rozważmy początkowo najprostszy przypadek, czyniąc zastrzeżenie

$$(4.1) \quad x'' > 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, l \rangle.$$

Warunek określający kształt belki ma postać: $\sigma = \sigma_d$, który zgodnie z (3.1) można zapisać

$$(4.2) \quad \frac{Ex''h}{2} = \sigma_d.$$

Równanie linii ugięcia belki po wykorzystaniu wzoru na moment bezwładności przyjmuje postać

$$\frac{h^2}{6} \left[\frac{E x'' h}{2} b(t) \right]'' = q - kx$$

lub

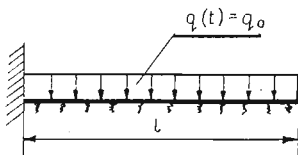
$$\frac{h^2}{6} [\sigma_a b(t)]'' = q - kx$$

po wykorzystaniu związku (4.2).

Mamy stąd

$$(4.3) \quad b''(t) = \frac{6}{h^2 \sigma_a} (q - kx).$$

Do wyznaczenia poszukiwanego kształtu belki mamy więc układ dwóch równań (4.2) (4.3). Są to równania różniczkowe rzędu drugiego, należy więc dołączyć do nich po dwa warunki początkowe lub brzegowe ze względu na $x(t)$ i $b(t)$.



Rys. 2

Jako przykład rozważmy belkę utwierdzoną na jednym i swobodną na drugim końcu, obciążoną w sposób stały $q(t) = q_0 = \text{const}$.

Rozwiązanie równania (4.2) ma postać

$$x = \frac{\sigma_a}{Eh} t^2 + C_1 t + C_2,$$

a po uwzględnieniu warunków początkowych $x(0) = x'(0) = 0$ otrzymujemy

$$(4.4) \quad x = \frac{\sigma_a}{Eh} t^2.$$

Po wstawieniu związku (4.4) do (4.3) otrzymujemy równanie

$$(4.5) \quad b''(t) = \frac{6}{h^2 \sigma_a} \left(q_0 - \frac{k \sigma_a}{Eh} t^2 \right),$$

którego rozwiązanie ma postać

$$(4.6) \quad b(t) = \frac{3q_0}{h^2 \sigma_a} t^2 - \frac{k}{2Eh^3} t^4 + C_3 t + C_4.$$

Warunki początkowe dla $b(t)$ otrzymujemy uwzględniając, że moment i siła poprzeczna powinny być równe zero dla $t = l$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} EJx''|_{t=l} = 0 &\Rightarrow b(l) = 0, \\ (EJx''')|_{t=l} = 0 &\Rightarrow b'(l) = 0. \end{aligned}$$

Uwzględniając te warunki mamy poszukiwany kształt belki

$$(4.7) \quad b(t) = \frac{3q_0}{h^2 \sigma_d} t^2 - \frac{k}{2Eh^3} t^4 + \frac{l}{h^2} \left(\frac{2kl^2}{Eh} - \frac{6q_0}{\sigma_d} \right) t + \frac{l^2}{h^2} \left(\frac{3q_0}{\sigma_d} - \frac{3kl^2}{2Eh} \right).$$

Do wyniku (4.7) możemy dojść również inną metodą. Z założenia $x'' = \sigma_0$, otrzymujemy reakcję podłoża równą $\frac{k}{2} \sigma_0 t^2$. Oznaczmy

$$(4.8) \quad q(t) = q_0 - \frac{k}{2} \sigma_0 t^2.$$

Moment od obciążenia $q(t)$ liczony z prawej strony przekroju ma postać

$$(4.9) \quad M(t) = - \int_t^l \left(q_0 - \frac{k}{2} \sigma_0 u^2 \right) (u-t) du.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$(4.10) \quad M(t) = -q_0 \frac{(l-t)^2}{2} + \frac{k \sigma_0}{2} \left(\frac{l^4}{4} - \frac{l^3 t}{3} + \frac{t^4}{12} \right).$$

Powyższy wynik otrzymaliśmy przy założeniu $x'' > 0$, czyli $M(t)$ jest ujemne dla $t \in \langle 0, l \rangle$.

Poszukiwany kształt belki otrzymamy, wykorzystując wzór

$$(4.11) \quad b(t) = \frac{6}{h^2 \sigma_d} |M(t)|.$$

Ponieważ $|M(t)| = -M(t)$, otrzymujemy ostatecznie wzór

$$(4.12) \quad b(t) = \frac{3q_0}{h^2 \sigma_d} t^2 - \frac{k}{2Eh^3} t^4 + \frac{l}{h^2} \left(\frac{2kl^2}{Eh} - \frac{6q_0}{\sigma_d} \right) t + \frac{l^2}{h^2} \left(\frac{3q_0}{\sigma_d} - \frac{3kl^2}{2Eh} \right)$$

identyczny ze wzorem (4.7) otrzymanym w poprzedniej metodzie.

Otrzymaliśmy optymalny kształt belki przy uczynionym *a priori* założeniu $x'' > 0$ dla $t \in (0, l)$.

Wyprowadzimy obecnie warunek konieczny i wystarczający na to, aby $x'' > 0$ dla $t \in (0, l)$.

Twierdzenie (4.1)

Założenie: $x'' > 0$ dla $t \in (0, l)$.

Teza: $q_0 - \frac{k}{2} \sigma_0 l^2 \geq 0$.

Dowód: $x'' > 0 \Rightarrow x'' = \sigma_0 \Rightarrow x = \frac{\sigma_0}{2} t^2 \Rightarrow kx = \frac{k}{2} \sigma_0 t^2$.

Oznaczmy $q(t) \stackrel{\text{def}}{=} q_0 - \frac{k}{2} \sigma_0 t^2$.

Ponieważ $q(t)$ jest funkcją malejącą, musi przyjmować wartości dodatnie dla $t \in \langle 0, l \rangle$, gdyż w przeciwnym przypadku nie byłoby spełnione założenie $x'' > 0$. Zauważmy, że

wartość równą zero może przyjmować $q(t)$ jedynie dla $t = l$ i że prawdziwa jest następująca implikacja:

$$q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 t^2 \geq 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, l \rangle \Rightarrow q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geq 0, \quad \text{cbdo.}$$

Twierdzenie (4.2)

Założenie:
$$q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geq 0.$$

Teza:
$$x'' > 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, l \rangle.$$

Dowód:

$$q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geq 0 \Rightarrow q(t) \stackrel{\text{df}}{=} q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 t^2 > 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, l \rangle.$$

Moment obliczony od obciążenia $q(t)$ przyjmuje wartości ujemne, czyli x'' przyjmuje wartości dodatnie, cbdo.

Otrzymaliśmy więc warunek konieczny i wystarczający na to, aby x'' było dodatnie w postaci nierówności

$$(4.13) \quad q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geq 0.$$

Wzór (4.12) przedstawia więc optymalny kształt belki przy założeniu, że parametry: q_0 , k , σ_0 i l spełniają relację: $q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geq 0$. Zauważmy, że jeżeli we wzorze (4.12) przejdziemy w granicy z k do zera otrzymamy znane rozwiązanie Galileusza:

$$(4.14) \quad b(t) = \frac{3q_0}{h^2\sigma_d} t^2 - \frac{6q_0 l}{h^2\sigma_d} + \frac{3l^2 q_0}{h^2\sigma_d}.$$

4.2. Przypadek zmiany znaku krzywizny. Rozważać teraz będziemy przypadek z jednokrotną zmianą krzywizny parabol w przedziale $(0, l)$; zakładamy więc, że:

$$(4.15) \quad x'' = \begin{cases} \sigma_0 & \text{dla} \quad 0 \leq t \leq a_1, \\ -\sigma_0 & \text{dla} \quad a_1 < t \leq l, \end{cases}$$

gdzie a_1 jest nieznanym punktem leżącym wewnątrz przedziału $(0, l)$.

Na podstawie założenia (4.15) mamy

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\sigma_0 t^2 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq a_1,$$

a po uwzględnieniu warunków zszycia:

$$x_1(a_1) = x_2(a_1), \quad x_1'(a_1) = x_2'(a_1).$$

Otrzymujemy

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}\sigma_0 t^2 + 2\sigma_0 a_1 t - \sigma_0 a_1^2 \quad \text{dla} \quad a_1 \leq t \leq l.$$

Przyjmując

$$(4.16) \quad q(t) = \begin{cases} -q_0 \frac{k}{2} \sigma t_0^2 & \text{dla } 0 \leq t \leq a_1, \\ q_0 - k \left(-\frac{\sigma_0}{2} t^2 + 2\sigma_0 a_1 t - \sigma_0 a_1^2 \right) & \text{dla } a_1 \leq t \leq l, \end{cases}$$

sprowadzamy zagadnienie do belki statycznie wyznaczalnej. Moment od obciążenia $q(t)$ dla $a_1 \leq t \leq l$ ma postać

$$M(t) = - \int_t^l \left[q_0 - k \left(-\frac{\sigma_0}{2} u^2 + 2\sigma_0 a_1 u - \sigma_0 a_1^2 \right) \right] (u-t) du.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$(4.17) \quad M(t) = (q_0 + k\sigma_0 a_1^2) \left(tl - \frac{l^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right) + \frac{k}{2} \sigma_0 \left(\frac{l^3}{3} t - \frac{l^4}{4} - \frac{t^4}{12} \right) + 2k\sigma_0 a_1 \left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^2}{2} t + \frac{t^3}{6} \right).$$

Podobnie w przedziale $0 \leq t \leq a_1$ mamy

$$(4.18) \quad M(t) = -q_0 \frac{(a_1 - t)^2}{2} + \frac{k\sigma_0}{2} \left(\frac{a_1^4}{4} - \frac{a_1^3}{3} t + \frac{t^4}{12} \right) + (q_0 + k\sigma_0 a_1^2) \left(a_1 t - \frac{l^2}{2} - \frac{a_1^2}{2} \right) + \frac{k}{2} \sigma_0 \left(\frac{l^3}{3} a_1 - \frac{l^4}{4} - \frac{a_1^4}{12} \right) + 2k\sigma_0 a_1 \left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^2}{2} a_1 + \frac{a_1^3}{6} \right).$$

Wartość momentu w punkcie $t = a_1$ wynosi

$$(4.19) \quad M(a_1) = (q_0 + k\sigma_0 a_1^2) \left(a_1 l - \frac{l^2}{2} - \frac{a_1^2}{2} \right) + \frac{k}{2} \sigma_0 \left(\frac{l^3}{3} a_1 - \frac{l^4}{4} - \frac{a_1^4}{12} \right) + 2k\sigma_0 a_1 \left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^2}{2} a_1 + \frac{a_1^3}{6} \right).$$

Na podstawie związku $EJx'' = -M$ i założenia, że w punkcie a_1 następuje skok x'' oraz faktu, że moment od obciążenia ciągłego jest funkcją ciągłą, wnioskujemy, że $M(a_1) = 0$.

Warunek $M(a_1) = 0$ pozwala wyznaczyć nieznaną wartość odciętej punktu, w którym następuje zmiana krzywizny. Po przekształceniach wyrażenia (4.19) i przyrównaniu do zera otrzymujemy równanie stopnia czwartego

$$(4.20) \quad a_1^4 - \frac{24}{5} l a_1^3 + \left(\frac{12q_0}{5k\sigma_0} + \frac{36l^2}{5} \right) a_1^2 - \left(\frac{24q_0 l}{5k\sigma_0} + 4l^3 \right) a_1 + \left(\frac{12q_0 l^2}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5} l^4 \right) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ze względu na a_1 pozwoli wyznaczyć optymalny kształt belki

po wykorzystaniu związku $b(t) = \frac{6}{h^2 \sigma_d} |M(t)|$.

Pierwiastki równania stopnia czwartego określają znane wzory, jednak w naszym przypadku istotne jest znalezienie WKW na to, aby równanie (4.20) posiadało dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty w przedziale $(0, l)$. W tym celu oprzemy się na następującej definicji i twierdzeniu [2]:

Definicja: Jeżeli w ciągu skończonym liczb rzeczywistych C_1, C_2, \dots, C_n zachodzi dla $1 \leq k \leq n-1$ nierówność $C_k \times C_{k+1} < 0$, to mówimy, że para liczb C_k, C_{k+1} stanowi odmianę.

Również w przypadku, gdy jest $C_k \times C_{k+p+1} < 0$, przy czym $C_{k+s} = 0$ dla $s = 1, 2, \dots, p$ ($1 \leq k, 1 \leq p, k+p < n$), to mówimy, że para liczb stanowi odmianę.

W ciągu 2, 3, -5, -1, 0, -2, 7, 0, 0, -9, -5 odmianę tworzą pary: 3, -5; -2, 7; 7, -9. Mamy więc trzy odmiany w tym ciągu.

Reguła Fouriera. Tworzymy dla danego wielomianu $f(x)$ stopnia n ciąg jego pochodnych: $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$. Pochodna $f^{(n)}(x)$ jest stała. Oznaczmy przez $N(x_0)$ ilość odmian w ciągu liczb $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$.

Twierdzenie Budana-Fouriera. Niech $f(x)$ będzie wielomianem rzeczywistym i niech $\alpha < \beta, f(\alpha) \neq 0, f(\beta) \neq 0$. Wtedy ilość zer wielomianu $f(x)$ w przedziale (α, β) wynosi $N(\alpha) - N(\beta)$, lub jest od tej liczby mniejsza o liczbę parzystą.

Rozważając $M(a_1)$ zauważamy, że l jest dwukrotnym pierwiastkiem tego wielomianu (gdyż $M(l) = 0$ i $M'(l) = 0$). Wielomian $M(a_1)$ można więc rozłożyć na czynniki:

$$M(a_1) = (a_1 - l)^2 \left(a_1^2 - \frac{14}{5} l a_1 + \frac{12q_0}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5} l^2 \right).$$

Wystarczy teraz zbadać zera drugiego czynnika w przedziale $(0, l)$; opierając się na twierdzeniu Budana-Fouriera mamy:

$$h(a_1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1^2 - \frac{14}{5} l a_1 + \frac{12q_0}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5} l^2,$$

$$h'(a_1) = 2a_1 - \frac{14}{5} l,$$

$$h''(a_1) = 2,$$

$$h(0) = \frac{12q_0}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5} l^2 > 0,$$

$$h'(0) = -\frac{14}{5} l < 0,$$

$$h''(0) = 2 > 0.$$

Mamy więc $N(0) = 2$.

$$h(l) = -\frac{6}{5} l^2 + \frac{12q_0}{5k\sigma_0},$$

$$h'(l) = -\frac{4}{5} l < 0,$$

$$h''(l) = 2 > 0.$$

Jeżeli $h(l)$ będzie ujemne, wtedy $N(l) = 1$ i zgodnie z twierdzeniem Budana-Fouriera ilość zer $h(a_1)$ w przedziale $(0, l)$ wynosić będzie $N(0) - N(l) = 1$.

Otrzymaliśmy więc WKW na to, aby równanie (4.20) miało dokładnie jeden pierwiastek leżący w przedziale $(0, l)$ w postaci

$$-\frac{6}{5}l^2 + \frac{12q_0}{5k\sigma_0} < 0$$

lub po przekształceniu

$$(4.21) \quad q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 < 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe

$$a_1^2 - \frac{14}{5}la_1 + \frac{12q_0}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5}l^2 = 0,$$

otrzymujemy dokładnie jeden pierwiastek leżący w przedziale $(0, l)$

$$(4.22) \quad a_1 = \frac{7}{5}l - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{136}{25}l^2 - \frac{48q_0}{5k\sigma_0}}.$$

Jeżeli rozważymy przypadek ogólny, gdy obciążenie jest dowolną funkcją $q(t)$ i założymy, że x'' zmienia znak w przedziale $(0, l)$ n razy w punktach a_1, a_2, \dots, a_n , to dochodzimy do następującego układu równań:

$$(4.23) \quad \begin{aligned} & - \int_{a_n}^l q(u)(u - a_n) du - k\sigma_0 \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k^2 \left(a_n l - \frac{l^2}{2} - \frac{a_n^2}{2} \right) + \\ & \quad + (-1)^n \frac{k}{2} \sigma_0 \left(-\frac{l^3}{3} a_n + \frac{l^4}{4} - \frac{a_n^4}{12} \right) + \\ & \quad + 2k\sigma_0 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k \left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^2}{2} a_n + \frac{a_n^3}{6} \right) = 0, \\ & - \int_{a_{n-1}}^{a_n} q(u)(u - a_{n-1}) du - k\sigma_0 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k^2 \left(a_{n-1} a_n - \frac{a_n^2}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2} \right) + \\ & \quad + (-1)^{n-1} \frac{k}{2} \sigma_0 \left(-\frac{a_n^3}{3} a_{n-1} + \frac{a_n}{4} + \frac{a_{n-1}^4}{12} \right) + \\ & \quad + 2k\sigma_0 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} a_k \left(\frac{a_n^3}{3} - \frac{a_n^2}{2} a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^3}{6} \right) = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & - \int_{a_2}^{a_3} q(u)(u - a_2) du - k\sigma_0 (-a_1^2 + a_2^2) \left(a_2 a_3 - \frac{a_3^2}{2} - \frac{a_2^2}{2} \right) + \\ & \quad + \frac{k}{2} \sigma_0 \left(-\frac{a_3^3}{3} a_2 + \frac{a_3^4}{4} + \frac{a_2^4}{12} \right) + 2k\sigma_0 (a_1 - a_2) \left(\frac{a_3^3}{3} - \frac{a_3^2}{2} a_2 + \frac{a_2^3}{6} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{a_1}^{a_2} q(u)(u-a_1)du - k\sigma_0(-a_1^2) \left((a_1 a_2 - \frac{a_2^2}{2} - \frac{a_1^2}{2}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{k}{2}\sigma_0 \left(-\frac{a_2^3}{3} a_1 + \frac{a_2^4}{4} + \frac{a_1^4}{12} \right) + 2k\sigma_0 a_1 \left(\frac{a_2^3}{3} - \frac{a_2^2}{2} a_1 + \frac{a_2^1}{6} \right) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Jeżeli istnieje rozwiązanie tego układu równań spełniające warunek $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < l$, to daje ono poszukiwane punkty zmian krzywizny parabol.

5. Zakończenie

W pracy wykazano, że optymalne kształtowanie belek na podłożu sprężystym, z uwagi na minimum objętości przy ograniczeniu naprężeń normalnych, prowadzi do belek równomiernej wytrzymałości. W odróżnieniu od znanych rozwiązań układów statycznie wyznaczalnych — wyznaczenie kształtu belki na podłożu winklerowskim nastęrcza poważne trudności. W pracy ograniczono się jedynie do przypadku belki jednoprzęsłowej, otrzymując ściśle analityczne rozwiązanie. Poszukiwanie optymalnego rozwiązania dla belki ciągłej na podłożu Winklera wymagałoby już odpowiedniej procedury numerycznej.

Literatura cytowana w tekście

1. R. BELLMAN, S. DREYFUS, *Programowanie dynamiczne*, PWE, Warszawa 1967.
2. A. FELDBAUM, *Podstawy teorii optymalnych układów sterowania automatycznego*, PWN, Warszawa 1967.
3. J. TOU, *Nowoczesna teoria sterowania*, WNT, Warszawa 1967.
4. A. TUROWICZ, *Geometria zer wielomianów*, PWN, Warszawa 1967.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе рассмотрена задача об оптимальной форме балки, лежащей на упругом основании Винклера. Искомым является минимум объема при ограничении величины нормальных напряжений. При помощи динамического программирования получено решение в виде равнопрочной балки. Дан метод построения такой балки, лежащей на упругом основании.

Summary

OPTIMUM SHAPE DESIGN OF A BEAM RESTING ON ELASTIC FOUNDATION WITH NORMAL STRESS RESTRICTIONS

In the paper the problem of shape optimization of a beam resting on elastic foundation is formulated. The problem of minimum weight is considered, under the condition of limited normal stresses. The solution is obtained by means of dynamic programming. The problem of a beam resting on a Winkler-type elastic foundation of uniform strength is considered in detail.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1976 r.

PLASKIE ZAGADNIENIE KONTAKTOWE DLA OŚRODKA
COSSERATÓW W TEORII NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH

JACEK KRAJEWSKI, STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

1. Wykaz oznaczeń

- (x_1, x_2, x_3) układ współrzędnych prostokątnych,
 $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{R}^3; x_1 = 0, x_2 \in \langle -a, a \rangle, x_3 \in \mathcal{R}\}$ obszar kontaktu,
 $D = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \in \mathcal{R}\}$,
 $\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \varepsilon$ stałe materiałowe,
 α_i współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej
 $\nu = (3\lambda + 2\mu)\alpha_i, e = \operatorname{div} \mathbf{u}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$,
 $\mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0)$ wektor przemieszczenia w płaskim stanie odkształcenia,
 $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3)$ wektor obrotu w płaskim stanie odkształcenia,
 $\theta \equiv \theta(x_1, x_2)$ temperatura,
 $[\sigma_{ij}]$ tensor naprężeń siłowych,
 $[\mu_{ij}]$ tensor naprężeń momentowych,
 $\bar{f}_c(x_1, \xi) = \mathcal{F}_c\{f(x_1, x_2); x_2 \rightarrow \xi\} =$
 $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2) \cos(\xi x_2) dx_2,$
 $\bar{f}_s(x_1, \xi) = \mathcal{F}_s\{f(x_1, x_2); x_2 \rightarrow \xi\} =$
 $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2) \sin(\xi x_2) dx_2,$
 $H(x)$ funkcja Heaviside'a,
 $\varrho \equiv \varrho(\xi) = \sqrt{\xi^2 + 1/l^2}, \Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) =$
 $= 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\varrho}\right),$
 $a_0 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}, l^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\alpha\mu}.$

1. Wprowadzenie

Rozważanie wciskania w półprzestrzeń mikropolarną sprężystą ograniczonego stempla zajmującego obszar Ω , przy założeniu, że kształt stempla oraz temperatura i siły działające na stempel nie zależą od zmiennej x_3 , prowadzi do mieszanego zagadnienia brzegowego dla półpłaszczyzny D opisanego przez:

1° układ równań równowagi i równanie przewodnictwa ciepła (dla $x_1 > 0$) [1]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha)\nabla^2 u_1 + (\lambda + \mu - \alpha)\frac{\partial e}{\partial x_1} + 2\alpha\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} &= \nu\frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \\ (\mu + \alpha)\nabla^2 u_2 + (\lambda + \mu - \alpha)\frac{\partial e}{\partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} &= \nu\frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \\ (\gamma + \varepsilon)\nabla^2 \varphi_3 - 4\alpha\varphi_3 + 2\alpha\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) &= 0, \\ \nabla^2 \theta &= 0; \end{aligned}$$

2° warunki regularności w nieskończoności:

$$(1.2) \quad \sigma_{ij}, \mu_{ij}, \theta \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty;$$

3° warunki brzegowe (dla $x_1 = 0$):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u_1(0, x_2) &= w(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a, \\ \sigma_{11}(0, x_2) &= 0 \quad \text{dla} \quad |x_2| > a, \\ \sigma_{12}(0, x_2) &= 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in \mathcal{R}, \\ \theta(0, x_2) &= \psi(x_2)H(a - |x_2|), \quad x_2 \in \mathcal{R}, \end{aligned}$$

gdzie $w(x_2)$ i $\psi(x_2)$ są znanymi funkcjami. Ze względu na liniowość równań równowagi (1.1), rozwiązanie zagadnienia można otrzymać stosując zasadę superpozycji, mianowicie dodając do rozwiązania izotermicznego zagadnienia stempla wciskanego w półprzestrzeń mikropolarną rozwiązanie zagadnienia nagrzanego stempla, który nie powoduje pionowych przemieszczeń na powierzchni kontaktu.

Zakładając, że rozwiązanie izotermicznego płaskiego zagadnienia kontaktowego dla półprzestrzeni jest na ogół znane (np. [7]), rozwiązania nasze ograniczymy do zbadania drugiego z wyżej wymienionych zagadnień. Omówione na wstępie zagadnienie wciskania stempla stanowi uogólnienie na teorię termosprężystości dla ośrodka Cosseratów zagadnień rozpatrywanych dla ośrodka Hooke'a między innymi w pracach [2÷4, 6].

2. Rozwiązanie zagadnienia pomocniczego

Rozpatrzmy sprężystą, jednorodną, izotropową i centrosymetryczną półprzestrzeń mikropolarną $x_1 \geq 0$ w płaskim stanie odkształcenia, na brzegu której działają obciążenia normalne $p(x_2)$ i temperatura $T(x_2)$. Zagadnienie to prowadzi do zagadnienia brzegowego dla półpłaszczyzny D opisanego przez: układ równań (1.1), warunki regularności w nieskończoności (1.2) oraz następujące warunki brzegowe:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}(0, x_2) &= p(x_2), \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0, \\ \theta(0, x_2) &= T(x_2), \quad x_2 \in \mathcal{R}, \end{aligned}$$

gdzie o funkcjach $p(x_2)$ i $T(x_2)$ zakładamy, że są przedziałami ciągłe i bezwzględnie całkowalne dla $x_2 \in \mathcal{R}$ oraz przyjmujemy, że

$$(2.2) \quad p(-x_2) = p(x_2), \quad T(-x_2) = T(x_2), \quad x_2 \in \mathcal{R}.$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia pomocniczego ma postać [1, 5]:

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2\mu} \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right]; \right. \\
 &\quad \left. \xi \rightarrow x_2 \right\} - \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha_t \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\bar{T}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + (1 - \Delta_0)x_1 - \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} \right) e^{-\xi x_1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} e^{-\rho x_1} \right]; \quad \xi \rightarrow x_2 \right\}, \\
 u_2(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2\mu} \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(-\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} \left(\frac{\rho}{\xi} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right]; \right. \\
 (2.3) \quad &\quad \left. \xi \rightarrow x_2 \right\} + \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha_t \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\bar{T}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(2a_0 \xi + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + (\Delta_0 - 1)x_1 \right) e^{-\xi x_1} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2a_0 \xi e^{-\rho x_1} \right]; \quad \xi \rightarrow x_2 \right\}, \\
 \varphi_3(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2\mu} \frac{2\lambda + \mu}{\lambda + \mu} \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right); \quad \xi \rightarrow x_2 \right\} - \\
 &\quad - \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \alpha_t \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\bar{T}(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right); \quad \xi \rightarrow x_2 \right\}, \\
 \theta(x_1, x_2) &= \mathcal{F}_c \{ \bar{T}_c(\xi) e^{-\xi x_1}; \quad \xi \rightarrow x_2 \}.
 \end{aligned}$$

Naprężenia możemy łatwo wyznaczyć z (2.3) i związków konstytutywnych podanych np. w [1].

3. Rozwiązanie zagadnienia kontaktowego

Rozpatrzmy teraz mieszane zagadnienie brzegowe dla półpłaszczyzny D opisane przez układ równań równowagi i równanie przewodnictwa ciepła (1.1), warunki wypromieniania w nieskończoności (1.2) oraz następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \left. \begin{aligned} \theta(0, x_2) &= \psi(x_2) H(a - |x_2|) & \text{dla } x_2 \in \mathcal{R}, \\ \sigma_{12}(0, x_2) &= 0 \\ \mu_{13}(0, x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{dla } x_2 \in \mathcal{R}, \\
 & \left. \begin{aligned} u_1(0, x_2) &= 0 & \text{dla } 0 \leq |x_2| < a, \\ \sigma_{11}(0, x_2) &= 0 & \text{dla } |x_2| > a. \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

O $\psi(x_2)$ założymy chwilowo, że jest funkcją parzystą. Do rozwiązania powyższego zagadnienia wykorzystamy rozwiązanie zagadnienia pomocniczego określone wzorami (2.3). Z (3.1)₁ oraz (2.3)₄ otrzymujemy

$$(3.2) \quad \bar{T}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \psi(x_2) \cos(\xi x_2) dx_2.$$

Spełniając pozostałe z warunków brzegowych (3.1) dostajemy (na podstawie (2.3) i związku konstytutywnego $\sigma_{11} = (2\mu + \lambda) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \nu\theta$) następujące dualne równania całkowe na niewiadomą funkcję $\bar{p}_c(\xi)$:

$$(3.3) \quad \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\bar{p}_c(\xi)}{\xi \Delta_0}; \quad \xi \rightarrow x_2 \right\} = - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_i \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\bar{T}_c(\xi)}{\xi \Delta_0}; \quad \xi \rightarrow x_2 \right\} \quad \text{dla } 0 \leq x_2 < a,$$

$$\mathcal{F}_c \{ \bar{p}_c(\xi); \quad \xi \rightarrow x_2 \} = 0 \quad \text{dla } x_2 > a.$$

Oznaczając teraz przez

$$(3.4) \quad A(\xi) = \frac{1}{\Delta_0} \left[\bar{p}_c(\xi) + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_i \bar{T}_c(\xi) \right]$$

oraz wykorzystując fakt, że

$$(3.5) \quad \theta(0, x_2) = \mathcal{F}_c \{ \bar{T}_c(\xi); \quad \xi \rightarrow x_2 \} = 0 \quad \text{dla } x_2 > a,$$

dualne równania (3.3) możemy zapisać w postaci:

$$(3.6) \quad \mathcal{F}_c \left\{ \frac{1}{\xi} A(\xi); \quad \xi \rightarrow x_2 \right\} = 0 \quad \text{dla } 0 \leq x_2 < a,$$

$$\mathcal{F}_c \{ \Delta_0 A(\xi); \quad \xi \rightarrow x_2 \} = 0 \quad \text{dla } x_2 > a.$$

Oczywistym rozwiązaniem równań (3.6) jest funkcja

$$(3.7) \quad A(\xi) = 0 \quad \text{dla } \xi \geq 0.$$

Wykorzystując teraz (3.7) i (3.4) otrzymujemy

$$(3.8) \quad \bar{p}_c(\xi) = - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_i \bar{T}_c(\xi),$$

gdzie $\bar{T}_c(\xi)$ jest znaną funkcją określoną wzorem (3.3).

Podstawiając funkcję $\bar{p}_c(\xi)$ określoną wzorem (3.8) do rozwiązania pomocniczego danego wzorami (2.3), dostajemy:

$$(3.9) \quad u_1(x_1, x_2) = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \alpha_i \mathcal{F}_c \{ \bar{T}_c(\xi) x_1 e^{-\xi x_1}; \quad \xi \rightarrow x_2 \},$$

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \alpha_i \mathcal{F}_s \left\{ \frac{1}{\xi} \bar{T}_c(\xi) (1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1}; \quad \xi \rightarrow x_2 \right\},$$

$$\varphi_3(x_1, x_2) \equiv 0,$$

$$\theta(x_1, x_2) = \mathcal{F}_c \{ \bar{T}_c(\xi) e^{-\xi x_1}; \quad \xi \rightarrow x_2 \}.$$

Wykorzystując związki konstytutywne dla liniowej teorii termosprężystości ośrodka Cosseratów [1] oraz (3.9), możemy składowe tensorów naprężeń siłowych i momentowych napisać w postaci:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu\alpha_1 \mathcal{F}_c \{ \bar{T}_c(\xi) (1+\xi x_1) e^{-\xi x_1}; \quad \xi \rightarrow x_2 \}, \\
 \sigma_{12}(x_1, x_2) &= -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu\alpha_1 \mathcal{F}_s \{ \xi x_1 \bar{T}_c(\xi) e^{-\xi x_1}; \quad \xi \rightarrow x_2 \}, \\
 \sigma_{21}(x_1, x_2) &= \sigma_{12}(x_1, x_2), \\
 \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu\alpha_1 \mathcal{F}_c \{ \bar{T}_c(\xi) (1-\xi x_1) e^{-\xi x_1}; \quad \xi \rightarrow x_2 \}, \\
 \sigma_{33}(x_1, x_2) &= -\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \alpha_1 \mathcal{F}_c \{ \bar{T}_c(\xi) e^{-\xi x_1}; \quad \xi \rightarrow x_2 \}, \\
 \mu_{i3}(x_1, x_2) &\equiv 0, \quad \mu_{3i}(x_1, x_2) \equiv 0, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

4. Wnioski końcowe

Z otrzymanego rozwiązania zagadnienia kontaktowego określonego wzorami (3.9) i (3.10) wynika, że:

1° Żadna ze składowych nie zależy od nowych stałych materiałowych $\alpha, \gamma, \varepsilon$.

2° Obrót i naprężenia momentowe są równe zeru w całej sprężystej półprzestrzeni,

przy czym spełniony jest związek $\varphi = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}$.

3° Składowe $u_1, u_2, \sigma_{ij}, (i, j = 1, 2, 3)$ mają taką samą postać jak w rozwiązaniu analogicznego zagadnienia kontaktowego rozpatrzonego dla ośrodka Hooke'a.

Z rozwiązania opisanego wzorami (3.9) i (3.10) można więc wysnuć takie same wnioski, jak np. w [3], mianowicie: naprężenia kontaktowe $\sigma_{11}(0, x_2)$ są proporcjonalne do temperatury, tj.

$$\sigma_{11}(0, x_2) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu\alpha_1 \psi(x_2) H(a-|x_2|).$$

Ponadto zachodzą związki:

$$\sigma_{22}(0, x_2) = \sigma_{11}(0, x_2) \quad \text{dla } x_2 \in \mathcal{R},$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2) = \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \alpha_1 \theta(x_1, x_2) \quad \text{dla } (x_1, x_2) \in \mathcal{D}.$$

W rozdziale 3 pracy przyjęto założenie, że temperatura pod stemplem jest rozłożona symetrycznie względem osi $0x_2$. Jeżeli założenie to zastąpimy warunkiem $\psi(-x_2) = -\psi(x_2)$ dla $x_2 \in (-a, a)$, wtedy otrzymamy rozwiązanie różniące się tylko od rozwiązania danego wzorami (3.9) i (3.10) rodzajem transformacji (kosinusową należałoby zamienić na sinusową i na odwrót oraz $\bar{T}_c(\xi)$ na $\bar{T}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \psi(x_2) \sin(\xi x_2) dx_2$).

A więc znowu otrzymamy rozwiązanie w takiej samej postaci, jak dla ośrodka Hooke'a.

Przyjmując dalej, że zamiast jednego stempla styka się bez nacisku spowodowanego siłami zewnętrznymi z półprzestrzenią mikropolarną kilka symetrycznie rozłożonych

względem osi Ox_2 stempli, otrzymamy rozwiązanie opisane wzorami (3.9) i (3.10), gdzie

za $\bar{T}_c(\xi)$ należy wstawić $\bar{T}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\omega} \psi(x_2) \cos(\xi x_2) dx_2$, (gdy $\psi(x_2)$ jest parzysta)

lub $\bar{T}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\omega} \psi(x_2) \sin(\xi x_2) dx_2$, (gdy $\psi(x_2)$ nieparzysta, wtedy w (3.9) i (3.10)

zmieniamy transformację kosinusową na sinusową i na odwrót), ω jest sumą odcinków zajętych przez stemple na półprostej $x_1 = 0$, $x_2 \geq 0$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. Z. OLESIAK, *O pewnych własnościach naprężeń cieplnych*, Mech. Teor. i Stos., **5**, 2 (1967).
3. Z. OLESIAK, *Some remarks on the contact problem of thermoelasticity for a semi-space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **13**, 8 (1965).
4. Z. OLESIAK, J. ŚLIŻEWICZ, *Stresses and strains in a semi-space heated on a constrained part of the boundary plane*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Techn., **13**, 8 (1965).
5. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Osobliwości naprężeń siłowych i momentowych w ciele mikropolarnym wuwolane obciążeniami*, Mech. Teor. i Stos., **11**, 4 (1973).
6. D. L. GEORGE, I. N. SNEDDON, *The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch*, J. Math. Mech., **11**, 5 (1962).
7. S. MATYSIAK, *Plaskie zagadnienie kontaktowe w niesymetrycznej teorii sprężystości*, Mech. Teor. i Stos., **13**, 2 (1975).

Резюме

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СРЕДЫ КОССЕРА В ТЕОРИИ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В рамках теории термонапряжений для линейной среды Коссера, рассмотрена двумерная задача о контакте между упругим полупространством и нагретым жестким штампом. Распределение температуры, не зависящее от координаты x_3 и времени t , известно а штамп свободно лежит на полупространстве.

Полученное решение для среды Коссера имеет такой же вид, как решение аналогичной задачи для среды Гука.

Summary

PLANE CONTACT PROBLEM OF A COSSERAT MEDIUM SUBJECT TO THERMAL STRESSES

The problem of contact between an elastic half-space and a heated rigid punch is considered within the theory of thermal stresses of a linear Cosserat medium. The temperature distribution under the punch is assumed to be a known function independent of x_3 and time t , the punch resting load-free at the surface of the halfspace. The solution obtained for a Cosserat medium has the same form as that referring to an analogous problem of a Hooke's body.

INSTYTUT MATEMATYKI I STATYSTYKI SGGW-AR WARSZAWA
INSTYTUT MECHANIKI UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 listopada 1976 r.

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRĘTA ŚCISKANEGO PRZY DUŻYCH UGIĘCIACH
METODĄ PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO*)

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

1. Wstęp

Rozwój komputerów o dużej pojemności pamięci operacyjnej i krótkim czasie dostępu do pamięci stałej sprawia, że na nowo pojawiają się dawniej niepraktyczne metody obliczeniowe. Coraz bardziej rozwijają się nowe, bezpośrednie metody obliczeń numerycznych. Coraz bardziej skuteczne stają się narzędzia analizy numerycznej, za pomocą których pokonano wiele nierozwiązywalnych uprzednio problemów i zadań. Możliwości współczesnej techniki obliczeniowej pozwalają efektywnie rozwiązać szereg zagadnień teorii optymalnego sterowania.

Jedną z metod tej teorii jest programowanie dynamiczne, które pojawiło się jako ogólna metoda rozwiązywania zagadnień wariacyjnych. Metody tej używa się również przy rozwiązywaniu innych zagadnień teorii optymalnego sterowania.

Ogólnie przez programowanie dynamiczne rozumie się optymalne sterowanie procesami, czyli takimi zjawiskami, na których przebieg mamy wpływ. Oddziaływanie to nazywane sterowaniem musimy tak dobrać, aby otrzymany rezultat był ekstremalny przy spełnieniu wszystkich ograniczeń nałożonych na proces. Idea programowania dynamicznego tkwi w zamianie jednego zadania z wieloma zmiennymi na ciąg zadań, kolejno rozwiązywanych, o mniejszej liczbie zmiennych. Optymalizację takiego wieloetapowego procesu prowadzi się na podstawie zasady optymalności BELLMANA, która jest szczególnie wygodna, jeżeli rozpatrywany proces ciągły może ulec dyskretyzacji (kwantyzacji). Związane to jest z przyjęciem odmiennych metod rachunkowych, z wykorzystaniem EMC, w których proces ciągły zastępuje się układem dyskretnym. Funkcje opisujące proces mogą być nieciągłe lub dane w postaci tablic.

Niektóre zadania teorii sprężystości rozwiązuje się tą metodą. W szczególności elementy konstrukcyjne z jedną współrzędną stanu można, używając programowania dynamicznego, rozwiązywać na dwa różne sposoby. W pierwszym, numerycznie całkuje się równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana. W drugim, numerycznie rozwiązuje się formułę rekurencyjną zwaną równaniem funkcyjnym Bellmana. Ten drugi sposób użycia idei programo-

*) Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. «Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych» — koordynowanego przez IPPT PAN.

wania dynamicznego nosi nazwę dyskretnej wersji programowania dynamicznego i z powodzeniem stosowany był w celu rozwiązania jednowymiarowych elementów konstrukcyjnych, w ujęciu wariacyjnym, przez POCZTMANA w pracach [1, 2]. Metoda ta pozwala przy użyciu współczesnych EMC rozwiązywać również równanie funkcyjne Bellmana z dwiema zmiennymi stanu. BARANENKO [3] użył dyskretnej metody programowania dynamicznego do wyznaczenia ugięć sprężystej, prostokątnej membrany, utwierdzonej na brzegu i obciążonej równomiernie na całej powierzchni, przy równoczesnym ograniczeniu ugięć. W pracy [4] ta sama metoda przeniesiona została na inne dwuwymiarowe zadania teorii sprężystości. ANGEL i BELLMAN [5] podają dalsze możliwości stosowania tej metody z równoczesnym dołączeniem niektórych procedur numerycznych w języku fortran. Autorzy podają między innymi literaturę dotyczącą rozwiązań szeregu dwuwymiarowych elementów konstrukcyjnych omawianą metodą.

Również w podejściu do optymalnego kształtowania elementów konstrukcyjnych tą metodą wskazać możemy na dwa odrębne sposoby. Pierwszy, polegający na całkowaniu równania Hamiltona–Jacobiego–Bellmana [6], oraz drugi, z wykorzystaniem równania funkcyjnego. Jak dotąd tylko kilka prac poświęconych jest zastosowaniu równania funkcyjnego Bellmana do optymalnego kształtowania w zadaniach teorii sprężystości. Poszukiwanie minimum objętości wspornika o przekroju prostokątnym, jednostronnie sztywno utwierdzonego, z materiału pelzającego, przy ograniczeniach geometrycznych przedstawiono w artykule [7]. Tą samą metodę wykorzystano w pracy [8], gdzie jako kryterium przyjęto minimum objętości pręta sprężystego poddanego zginaniu, z uwzględnieniem dużych przemieszczeń i nałożeniu dodatkowych ograniczeń. Algorytm programowania dynamicznego otrzymany dla procesu dyskretnego na podstawie zasady optymalności można stosować wykorzystując metody analityczne, z tym, że na ogół jest to niemożliwe, a w przypadkach kiedy to się udaje, postępowanie analityczne jest uciążliwe przy większej liczbie etapów [9]. W niniejszej pracy posługiwać się będziemy wyłącznie bezpośrednią metodą numeryczną.

Posługiwanie się dyskretną wersją programowania dynamicznego ma wiele zalet, które wynikają z odmiennego sposobu wyznaczania ekstremum, polegającego na przeszukiwaniu skończonego zbioru wartości. Taki sposób wyznaczania ekstremum umożliwia w naturalny sposób wprowadzenie wielu ograniczeń lokalnych, z którymi spotykamy się w realnych przypadkach. Między innymi, ograniczenie dopuszczalnych naprężeń, wymiarów, ugięć. Często te dodatkowe warunki upraszczają obliczenia, gdyż eliminują z procesu «przeszukiwania» te wartości zmiennej stanu i sterowania, które nie spełniają na danym etapie nałożonych ograniczeń. Możliwe są również globalne warunki ograniczające wartość energii czy też objętości.

Cytowane powyżej prace nie zawierają szczegółów obliczeń maszynowych, wspólnych dla wszystkich jednowymiarowych elementów konstrukcyjnych. Po sformułowaniu problemu i odwołaniu się do równania funkcyjnego podano wyniki końcowe. Celem tej pracy będzie pełniejsze przytoczenie szczegółów obliczeń maszynowych użytej metody w odniesieniu do sformułowanego poniżej zadania optymalnego kształtowania ściskanego słupa, przy dużych ugięciach. Część pierwsza poświęcona będzie obciążeniu siłą skupioną, w drugiej zaś uwzględnimy dodatkowo ciężar własny słupa.

2. Sformułowanie problemu

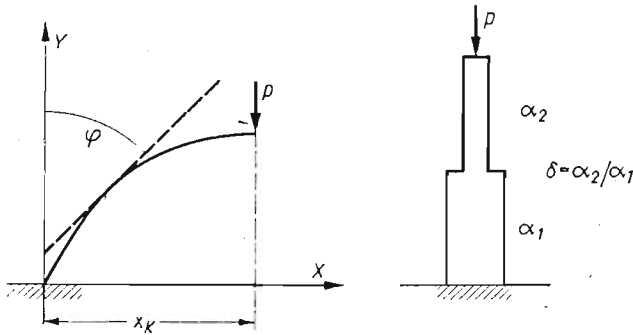
Rozważać będziemy sprężysty pręt, o przekroju prostokątnym, długości l , obciążony stałą siłą skupioną P taką, że $P > P_{kr}$, zachowującą kierunek działania (rys. 1). Sztywność pręta $\alpha = EI$ będzie opisana następująco: $\alpha_1 = EI_1$ dla odcinka $[0, l_1]$, $\alpha_2 = EI_2$ dla odcinka $(l_1, l_2]$. Poszukiwać będziemy takiej wartości $\delta = \alpha_2/\alpha_1$, która zapewni minimum odchylenia końca pręta x_k od stanu nieodkształconego.

(1)
$$\min_{\delta \in U_1} x_k,$$

gdzie $U_1 = \{\delta: 0 < \delta \leq 1\}$.

Równocześnie przyjmiemy następujące warunki ograniczające związane z:
 — ograniczeniem objętości V_0 pręta

(2)
$$V_0 = \text{const},$$



Rys. 1. Sposób obciążenia pręta

— zapewnieniem warunku równowagi, poprzez minimalizację energii potencjalnej E odkształconego pręta [10]:

(3)
$$\min_{\varphi \in U_2} E,$$

gdzie $U_2 = \{\varphi: 0 \leq \varphi(s) \leq \Pi \wedge \varphi(0) = 0\}, \quad 0 < s \leq l.$

Sposób rozwiązania. Energię potencjalną odkształcenia pręta przy wyboczeniu oraz potencjał siły zewnętrznej zapiszemy w postaci całek:

(4)
$$A_1 = \int_0^l \frac{\alpha}{2} (\varphi')^2 ds'; \quad A_2 = P \int_0^l \cos \varphi ds'.$$

Energia potencjalna E układu przedstawionego na rys. 1 ma postać

(5)
$$E = \int_0^{l_1} \left[\frac{\alpha_1}{2} (\varphi')^2 + P \cos \varphi \right] ds' + \int_{l_1}^l \left[\frac{\alpha_2}{2} (\varphi')^2 + P \cos \varphi \right] ds'.$$

Minimum wyrażenia (3) jest równoznaczne z przyjęciem pełnego, nieliniowego równania różniczkowego linii ugięcia.

Wprowadzając oznaczenia:

$$(6) \quad \frac{s'}{s} = l; \quad c_1 = \frac{Pl^2}{\alpha_1}; \quad \delta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \quad \varphi' = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{ds},$$

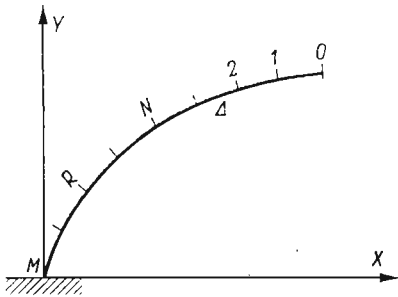
otrzymujemy następującą postać funkcjonału E

$$(7) \quad E = \frac{\alpha_1}{l} \left\{ \int_0^{s_1} \left[\frac{1}{2} (\varphi')^2 + c_1 \cos \varphi \right] ds + \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\delta}{2} (\varphi')^2 + c_1 \cos \varphi \right] ds \right\}.$$

Zastępując w (7) całkowanie sumowaniem, mamy, opuszczając czynnik α_1/l ,

$$(8) \quad E = \sum_{R=N+1}^M \left[\frac{1}{2} (\varphi'_R)^2 + c_1 \cos \varphi_R \right] \Delta + \sum_{R=1}^N \left[\frac{\delta}{2} (\varphi'_R)^2 + c_1 \cos \varphi_R \right] \Delta.$$

Porządek numeracji pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Numeracja etapów

Pochodną φ'_R zastąpimy dalej ilorazem różnicowym

$$(9) \quad \varphi'_R = \frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta}.$$

W miejsce wyjściowego funkcjonału (5) otrzymujemy jego wartość przybliżoną

$$(10) \quad E = \sum_{R=N+1}^M \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_R) \right] \Delta + \sum_{R=1}^N \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_R) \right] \Delta.$$

Minimum sumy (10) poszukiwać będziemy bezpośrednio wykorzystując EMC, na podstawie zasady optymalności Bellmana, według której «końcowy odcinek trajektorii optymalnej jest sam dla siebie optymalny». W wyniku jednokrotnej realizacji tej procedury wyznaczona zostanie linia ugięcia odkształconego pręta, a zatem i położenie końca x_k^1 , dla jednej wartości $\delta_1 \in U_1$, przy spełnieniu ograniczenia (2). Następnie procedura ta zostaje powtórzona dla innej wartości $\delta_2 \in U_1$. Jej realizacja daje inny stan równowagi oraz nowe położenie końca odkształconego pręta x_k^2 . Każdemu elementowi $\delta_i \in U_1$ odpo-

wiada jedno położenie końca x_k^i . Spośród elementów zbioru $X = \{x_k^i\}$, $i = 1, \dots, I$ wybiera się element minimalny. Wskaźnik I równy jest liczbie elementów zbioru U_1 i mówi o ilości powtórzeń równania funkcyjnego.

Najbardziej pracochłonne, w sensie potrzebnego nakładu obliczeń, jest wyznaczanie kolejnych stanów równowagi na podstawie (10). Poniżej przedstawione zostaną najważniejsze elementy tych obliczeń. Równanie funkcyjne Bellmana dla (10) ma postać

$$(11) \quad f_R(\varphi_R) = \min_{\varphi_{R-1} \in U_2} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_R) \right] \Delta + f_{R-1}(\varphi_{R-1}) \right\},$$

gdy $0 \leq R \leq N$, lub

$$(12) \quad f_R(\varphi_R) = \min_{\varphi_{R-1} \in U_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos \varphi_{R-1} \right] \Delta + f_{R-1}(\varphi_{R-1}) \right\},$$

gdy $N+1 \leq R \leq M$.

Obliczenia rozpoczynamy od swobodnego końca przesuwając się ku utwierdzeniu, gdzie dodatkowo musi być spełniony warunek $\varphi(0) = 0$.

Dla $N = 1$ z (11) otrzymujemy

$$(13) \quad f_1(\varphi_1) = \min_{\varphi_0 \in U_2} \left\{ \frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos \varphi_1 \right\} \Delta.$$

Podzielmy cały zbiór U_2 na ii równych części. Elementy tego zbioru oznaczać będziemy $\varphi(i)$, gdzie $i = 1, \dots, ii$. Odpowiedni indeks oznaczać będzie kolejny etap i tak na przykład $\varphi_0(i)$ będzie i -tą wartością sterowania na etapie pierwszym. Nadajmy więc sterowaniu pierwszą wartość $\varphi_0(1)$. Zmieniając zmienną sterowania $\varphi_0(1)$ na $\varphi_0(2)$ porównujemy wartość wyrażenia (13). Mniejszą z nich zapamiętuje się. Sterowaniu nadaje się kolejną wartość $\varphi_0(3)$, a obliczoną wartość (13) porównuje się z uprzednio zapamiętaną. Mniejszą z nich zachowuje się w pamięci w miejsce poprzedniej. Wyczerpując cały zbiór sterowań dopuszczalnych $\varphi_0(1), \varphi_0(2), \dots, \varphi_0(ii)$ otrzymujemy w końcu najmniejszą wartość wyrażenia (13) dla zmiennej stanu $\varphi_1(1)$.

W dalszym ciągu zmienimy stan na $\varphi_1(2)$ i z (13) wyznaczamy wartość najmniejszą, podstawiając kolejno za sterowanie $\varphi_0(1), \dots, \varphi_0(ii)$ ze zbioru U_2 . Obliczenia w tym etapie kończą się z chwilą stabilizowania funkcji $f_1(\varphi_1)$. Dyskretne wartości tej funkcji zapisuje się w pamięci maszyny, w formie tablicy $f[i, k]$, gdzie k oznacza numer etapu, i zaś wartość zmiennej stanu. Elementy $f[i, k]$ należy teraz zachować w pamięci EMC, gdyż będą potrzebne przy odtwarzaniu «ścieżki optymalnej». Te same operacje wykonujemy po cofnięciu się o jeden krok do tyłu i ustaleniu $k = 2$.

Z (11) otrzymujemy

$$(14) \quad f_2(\varphi_2) = \min_{\varphi_1 \in U_2} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_1) \right] \Delta + f_1(\varphi_1) \right\}.$$

Organizacja obliczeń na tym etapie jest podobna, z tym, że w miejsce $f_1(\varphi_1)$ podstawia się elementy macierzy $f[i, 1]$, to jest:

$$(15) \quad f_2(\varphi_2) = \min_{\varphi_1(i) \in U_2} \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1(i)}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_1(i)) \right] \Delta + f[i, 1].$$

Stabilizowane $f_2(\varphi_2)$ oznaczamy $f[i, 2]$. Elementy $f[i, 2]$, gdzie $i = 1, \dots, ii$ będą potrzebne do stabilizowania $f_3(\varphi_3)$ w etapie trzecim, a cała macierz $f[i, k]$ o $ii \times M$ elementach wykorzystana będzie przy odtwarzaniu «ścieżki optymalnej».

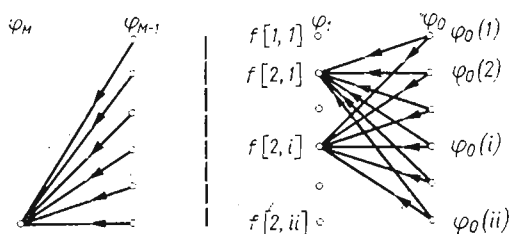
W etapie trzecim mamy:

$$(16) \quad f_3(\varphi_3) = \min_{\varphi_2(i) \in U_2} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2(i)}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_2(i)) \right] \Delta + f[i, 2] \right\}.$$

Po N -krotnym cofnięciu się znajdujemy się w punkcie $R = N$. Dla $N+1 \leq R \leq M$ operację minimum przeprowadza się tak samo, poprzez wielokrotne porównywanie, z tym, że należy posługiwać się wyrażeniem (12) w miejsce (11). W szczególności w ostatnim etapie otrzymamy

$$(17) \quad f_M(0) = \min_{\varphi_{M-1}(i) \in U_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{0 - \varphi_{M-1}(i)}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(0) \right] \Delta + f[i, M-1] \right\}.$$

Rysunek 3 przedstawia schematycznie sposób tablicowania $f_1(\varphi_1)$, $f_2(\varphi_2)$ oraz $f_M(0)$. Na dowolnym etapie R zmienna sterowania $\varphi_k(i)$ przyjmuje zawsze tę samą, skończoną liczbę ii wartości dyskretnych z przedziału $[0, \pi]$. Z chwilą osiągnięcia przeciwległego



Rys. 3. Sposób tablicowania funkcji celu

brzegu (sztywne utwierdzenie pręta), należy odtworzyć tak zwaną «ścieżkę optymalną» przy ruchu do przodu, to znaczy określić te wartości kąta $\varphi_k(i)$ ($k = 1, \dots, M$), które dały najmniejszą wartość energii E w M etapach. Oznaczmy te kąty φ_k^* ($k = 1, \dots, M$). Współrzędne punktów linii ugięcia określimy:

$$(18) \quad X_R = \sum_{i=M-1}^R \Delta \sin \varphi_i^*, \quad Y_R = \sum_{i=M-1}^R \Delta \cos \varphi_i^*.$$

Wyznaczenie ścieżki optymalnej kończy obliczenia dla danej, jednej wartości parametru $\delta \in U_1$. Dla innej wartości parametru $\delta \in U_1$ rozwiązuje się równania (11) i (12) według tego samego schematu na nowo. Każde kolejne rozwiązanie (11) i (12) daje odpowiednie położenie końca. Minimalną wartość x_k określimy na podstawie wykresu $x_k = f(\delta)$.

Wyniki. Objętość pręta V o przekroju prostokątnym, płaskobieżnego, o przekroju zmieniającym się skokowo, możemy zapisać następująco:

$$(19) \quad V = [F_1 s_1 + F_2 (s_2 - s_1)] l,$$

gdzie F_1, F_2 oznaczają przekroje pręta.

Po wprowadzeniu parametru δ objętość V wynosi

$$(20) \quad V = -\frac{12\alpha_1 l}{Eb^2} [s_1 + \delta(s_2 - s_1)],$$

lub korzystając z (6)

$$(21) \quad V = \frac{12Pl^3}{Eb^2 c_1} [s_1 + \delta(s_2 - s_1)],$$

gdzie c_1 jest bezwymiarową stałą.

Niech V_0 oznacza bezwymiarową objętość

$$(22) \quad V_0 = \frac{VEb^2}{12Pl^3}.$$

Wtedy wyrażenie (21) zapiszemy

$$c_1 V_0 = s_1 + \delta(s_2 - s_1).$$

Konkretne obliczenia przeprowadzono dla parametrów zestawionych w tablicy 1, wykorzystując EMC Odra 1204 oraz Cyber 72.

Tablica 1

| Rysunek | s_1 | s_2 | V_0 | δ | φ | Δ |
|---------|-------|-------|-------|----------|-----------|----------|
| 4, 5 | 0,5 | 0,5 | 0,180 | 0 ÷ 1 | 0 ÷ II | 0,05 |
| 6, 7 | 0,5 | 0,5 | 0,300 | 0 ÷ 1 | 0 ÷ II | 0,05 |
| 8, 9 | 0,5 | 0,5 | 0,370 | 0 ÷ 1 | 0 ÷ II | 0,05 |

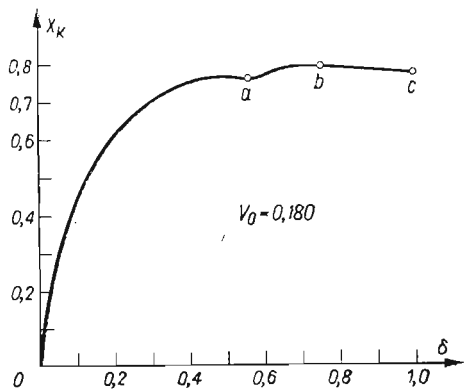
Na rysunkach 4, 6, 8 pokazano zależność odchylenia x_k końca pręta w funkcji δ , dla ustalonej w każdym przypadku stałej objętości V_0 .

Rysunki 5, 7, 9 przedstawiają linie ugięcia jakie otrzymano dla wybranych wartości parametru δ , oznaczonych literami a , b , c .

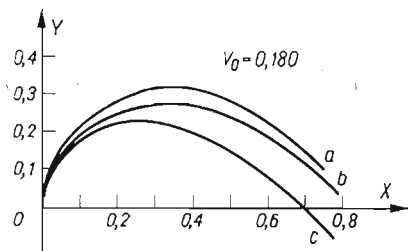
Przyjmując «małą» objętość pręta ($V_0 = 0,180$) cały pręt ulega odkształceniu niezależnie od rozkładu masy w przedziałach $[0, s_1]$ i $(s_1, s_2]$. Przy odpowiednim zwiększeniu objętości ($V_0 = 0,300$, rys. 6) pręt przy właściwym sposobie rozłożenia masy nie traci stateczności. Dwa minimalne odchylenia x_k zaznaczono na rys. 6 punktami b i c . Punkt a odpowiada przypadkowi, który nie ma znaczenia z technicznego punktu widzenia, gdyż górna część pręta doznaje bardzo dużych przemieszczeń (krzywa a rys. 7).

Dalsze zwiększanie objętości poszerza obszar statecznego zachowania się pręta, (rys. 8 i 9).

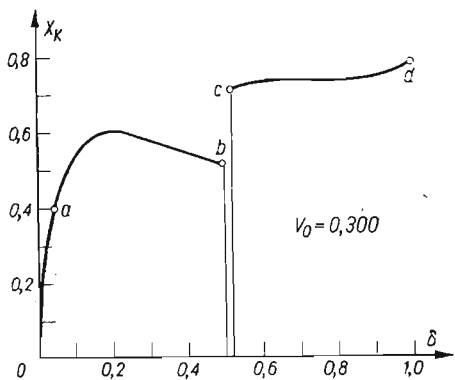
Wyznaczono również zależność kąta odchylenia końca pręta φ_k od stanu pierwotnego, dla rozpatrzonych wcześniej przypadków. Otrzymaną zależność pokazano na rys. 10. Wydaje się, że przyjęcie kryterium optymalności w postaci $\min_{\delta \in U_1} \varphi_k$ daje bardziej syntetyczny obraz form odkształcenia przy różnym sposobie rozkładu masy w przedziałach $[0, s_1]$ oraz $(s_1, s_2]$.



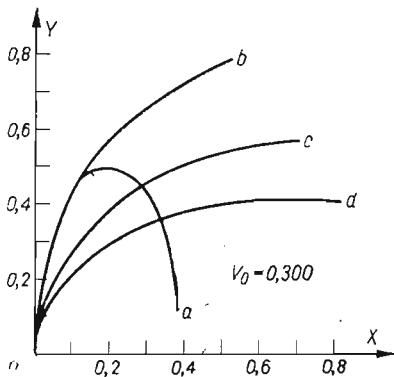
Rys. 4. Zależność odchylenia końca x_k od sposobu rozkładu masy



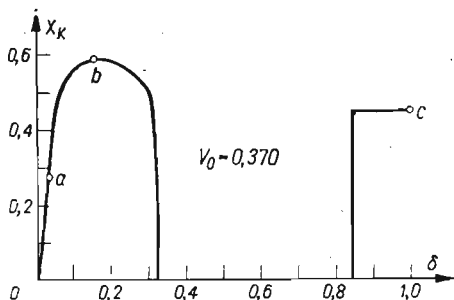
Rys. 5. Linie ugięcia pręta przy oznaczonych na rys. 4 przez a, b, c wartościach parametru δ



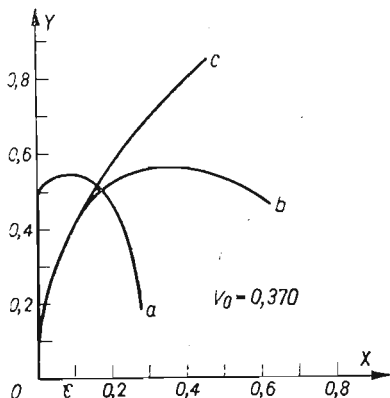
Rys. 6. Zależność odchylenia końca x_k w funkcji δ przy $V_0 = 0,300$



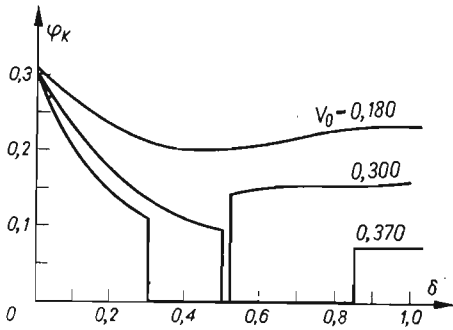
Rys. 7. Linie ugięcia pręta przy oznaczonych na rys. 6 przez a, b, c, d wartościach parametru δ



Rys. 8. Zależność odchylenia końca x_k w funkcji δ przy $V_0 = 0,370$



Rys. 9. Linie ugięcia pręta dla dowolnie wybranych punktów a, b, c z rys. 8



Rys. 10. Zależność kąta odchylenia końca pręta φ_k w funkcji δ dla trzech różnych wartości V_0

3. Wpływ ciężaru własnego

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy optymalne kształtowanie pręta z uwzględnieniem jego ciężaru własnego. Wszystkie poprzednie założenia pozostają w mocy, z tym, że w miejsce kryterium optymalności (1) przyjmujemy minimum kąta odchylenia końca φ_k .

$$(24) \quad \min_{\delta \in U_1} \varphi_k.$$

Funkcjonał (7) przyjmie postać

$$(25) \quad E = \int_0^{s_1} \left[\frac{1}{2} (\varphi')^2 + (c_1 + \tilde{c}_2) \cos \varphi \right] ds + \int_0^{s_2} \left[\frac{\delta}{2} (\varphi')^2 + (c_1 + \tilde{c}_3) \cos \varphi \right] ds,$$

gdzie

$$\tilde{c}_2 = \frac{l^3}{\alpha_1} \int_0^{s_1} q_r ds_r; \quad c_3 = \frac{l^2}{\alpha_1} \int_0^{s_2} q_v ds_v,$$

$$(26) \quad q_r = \frac{12\gamma}{Eb^2} \alpha_1 \quad \text{dla} \quad 0 \leq s \leq s_1,$$

$$q_v = \frac{12\gamma}{Eb^2} \alpha_2 \quad \text{dla} \quad s_1 < s \leq s_2,$$

γ oznacza ciężar właściwy.

Po podstawieniu (26) do (25) otrzymamy z dokładnością do stałego czynnika

$$(27) \quad E = \int_0^{s_1} \left[\frac{1}{2} (\varphi')^2 + \left(c_1 + c_2 \int_s^{s_1} ds_v \right) \cos \varphi \right] ds + \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\delta}{2} (\varphi')^2 + \left(c_1 + c_3 \int_s^{s_2} ds_v \right) \cos \varphi \right] ds,$$

gdzie

$$(28) \quad c_2 = \frac{12l^3}{Eb^2} \gamma; \quad c_3 = \delta c_2.$$

Postępując tak samo jak w części pierwszej otrzymujemy następującą postać równania funkcyjnego Bellmana:

$$(29) \quad F_R(\varphi_R) = \min_{\varphi_{R-1} \in U_2} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta} \right)^2 + (c_1 + c_2 \delta \Delta R) \cos \varphi_R \right] \Delta + f_{R-1}(\varphi_{R-1}) \right\},$$

gdz $0 \leq R \leq N$, lub

$$(30) \quad F_R(\varphi_R) = \min_{\varphi_{R-1} \in U_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta} \right)^2 + (c_1 + c_2 R \Delta) \cos \varphi_R \right] \Delta + f_{R-1}(\varphi_{R-1}) \right\},$$

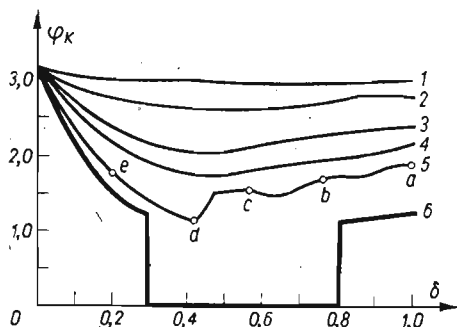
gdz $N+1 \leq R \leq M$.

Obliczenia prowadzono według schematu przedstawionego w części pierwszej dla parametrów zestawionych w tabelicy 2.

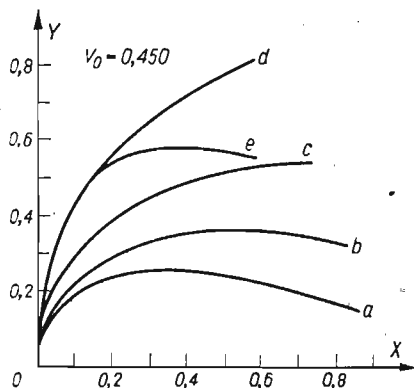
Tabelica 2

| Lp. | Rysunek | s_1 | s_2 | V_0 | c_2 | δ | φ | Δ |
|-----|---------|-------|-------|-------|-------|----------|-----------|----------|
| 1 | 11, 12 | 0,5 | 0,5 | 0,100 | 65 | 0÷1 | 1÷ Π | 0,05 |
| 2 | 11, 12 | 0,5 | 0,5 | 0,180 | 65 | 0÷1 | 1÷ Π | 0,05 |
| 3 | 11, 12 | 0,5 | 0,5 | 0,300 | 65 | 0÷1 | 1÷ Π | 0,05 |
| 4 | 11, 12 | 0,5 | 0,5 | 0,370 | 65 | 0÷1 | 1÷ Π | 0,05 |
| 5 | 11, 12 | 0,5 | 0,5 | 0,450 | 65 | 0÷1 | 1÷ Π | 0,05 |
| 6 | 11, 12 | 0,5 | 0,5 | 0,600 | 65 | 0÷1 | 1÷ Π | 0,05 |

Rysunek 11 przedstawia zależność kąta odchylenia końca pręta φ_k od δ dla różnych, stałych wartości objętości V_0 . Na rys. 12 pokazano linie ugięcia jakie otrzymuje się dla punktów a, b, c, d, e z rys. 11. Krzywa a odpowiada ciągłemu rozkładowi masy ($\delta = 1$). Kolejne krzywe b, c, d, e odpowiadają pogrubianiu dolnej części pręta (to jest przedziału $[0, s_1]$).



Rys. 11. Wykres zależności kąta odchylenia końca pręta φ_k w funkcji δ dla 6 różnych wartości V_0 , przy uwzględnieniu ciężaru własnego pręta



Rys. 12. Wybrane linie ugięcia dla punktów a, b, c, d, e z rys. 11

Literatura cytowana w tekście

1. Ю. М. Почтман, Б. А. Бараненко, *Применение метода динамического программирования к исследованию больших прогибов сжатых стержней*, Прикл. Мех., 5, 3 (1969), 132—135.
2. Ю. М. Почтман, Б. А. Бараненко, *Динамическое программирование и нелинейные задачи, статика тонких стержней*, ДАН, 182, 5 (1968), 1029 - 1031.
3. Б. А. Бараненко, Ю. М. Почтман, *Исследование деформации упругих мембран, стесненных ограничениями, методом динамического программирования*, Прикл. мат. мех., 5 (1969), 933—935.
4. Б. А. Бараненко, Б. К. Журакова, Л. А. Филипов, *Динамическое программирование в двумерных задачах теории упругости*, Прикл. мех., 7, 11 (1971), 59 - 64.
5. E. ANGEL, R. BELLMAN, *Dynamic programming and partial differential equations*, NY 1972.
6. M. MAKOWSKI, *Optymalizacja belek na podłożu sprężystym jako problem teorii sterowania*, pisma doktorska, Kraków 1972.
7. Ю. М. Почтман, *Динамическое программирование в задачах оптимизации конструкции подверженных ползучести*, Совет Физик Доклады, 16, 1 (1970), 29 - 30.
8. J. WŁASCHUT, *Optymalne kształtowanie pręta metodą programowania dynamicznego*, MTiS, 1, 15 (1977).
9. W. FINDEISEN, J. SZYMANOWSKI, A. WIERZBIŃSKI, *Metody obliczeniowe optymalizacji*, Warszawa 1973.
10. T. KOZŁOWSKI, S. PIECHNIK, Z. STOJEK, *Zastosowanie rachunku wariacyjnego do zagadnień mechaniki budowli*, Warszawa 1967.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ
БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается оптимальное распределение массы для двух участков стержня равной длины при заданном объеме. Сечение стержня прямоугольное. Критерием оптимальности является минимум перемещения конца стержня или минимум угла наклона касательной к оси стержня в этой точке. Состояние равновесия для послекритической деформации определено методом динамического программирования из условия минимума потенциальной энергии. Оптимальное распределение массы найдено на основании полученных кривых прогиба.

Summary

OPTIMAL DESIGN OF A COMPRESSED ROD WITH LARGE DEFLECTIONS
BY MEANS OF DYNAMIC PROGRAMMING

In this paper the method of determining the optimal ratio of the rigidities of two parts of the rod is presented. The rectangular cross-section is discussed. The flat-tapered rod compressed by a constant axial force or by an axial force and own weight at a fixed volume was considered. The aims of this paper are to minimize the displacement of the free end (in the first case) or to minimize the angle of deflection at that point (in the second case). The post-buckling equilibrium state has been found by minimizing the potential energy by means of the dynamic programming, Bellman's functional equation being used. The optimal mass distribution is obtained by analyzing the deflection lines.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 grudnia 1976 r.

1911

1911

1911

1911

1911

ANALIZA PROCESU WYCIĄGANIA WYTŁOCZKI Z UWZGLĘDNIENIEM NIEJEDNORODNOŚCI WYWOŁANEJ POLEM TEMPERATURY

TADEUSZ SOŁKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Przeważająca większość rozwiązań procesów obróbki plastycznej metali wykonana jest przy założeniu ciała sztywno-plastycznego jednorodnego. Istnieje jednak grupa procesów obróbki, w których występują znaczne różnice własności metalu w poszczególnych jego obszarach będące wynikiem niejednorodnego pola temperatury. Niejednorodność taka wywoływana jest celowo w procesach tłoczenia blach z miejscowym podgrzewaniem. Nagrzewa się obszar blachy, który doznaje dużych odkształceń, aby obniżyć tam opór płynięcia, natomiast chłodzi się obszar narażony na przenoszenie największego obciążenia, aby zachować w nim wyższą wytrzymałość materiału.

Procesy takie powinny być analizowane z uwzględnieniem niejednorodności materiału.

W niniejszej pracy przedstawiono analizę procesu wyciągania (pocienia ścianki) wytłoczki z podgrzewaniem jej przez gorący stempel lub sposobem indukcyjnym i intensywnym chłodzeniem od strony dna. Rozwiązania wykonane dla materiału niejednorodnego pozwalają ocenić wpływ wytworzonej różnicy temperatur na przebieg procesu i siłę wyciągania przy różnych kształtach matrycy i stopniach redukcji grubości ścianki.

2. Płaski stan odkształcenia ciała niejednorodnego

Zagadnienia z niejednorodnością ciała plastycznego były przedmiotem wielu prac. Spośród rozwiązań procesów obróbki plastycznej można odnotować wciskanie stempla [1, 5], prasowanie pasma [4], przecinanie pasma [2] i inne. W rozwiązaniach tych stosowano różne podejścia: dążenie do uzyskania rozwiązania zamkniętego [4, 5], podział materiału na skończoną ilość jednorodnych warstw o różnych własnościach [2] oraz rozwiązania numeryczne metodą charakterystyk [1, 5].

Uzyskanie rozwiązań zamkniętych dla bardziej złożonych procesów obróbki plastycznej napotyka duże trudności, dlatego mimo znacznej pracochłonności najbardziej efektywne będą rozwiązania numeryczne. Analizę teoretyczną procesu wyciągania przeprowadza się przy przyjęciu warunków płaskiego stanu odkształcenia, gdyż taki stan jest teoretycznie lepiej opracowany, a z dobrą dokładnością przybliża wyciąganie wytłoczek o dużym stosunku promienia do grubości blachy.

Podstawy metody charakterystyk dla płaskiego stanu odkształcenia ciała plastycznego niejednorodnego podano między innymi w pracach [1, 2, 5]. W przypadku ciała plastycz-

nego niejednorodnego, jego granica plastyczności przy ścinaniu jest funkcją współrzędnych $k = k(x, y)$. Składowe stanu naprężenia wyraża się za pomocą nowych zmiennych σ i φ w następujący sposób:

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + \sigma + k \cos 2\varphi, \\ \sigma_y &= \sigma_0 + \sigma - k \cos 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$, a φ jest kątem jaki tworzy większe z naprężeń głównych z osią x .

Tak wyrażone składowe stanu naprężenia spełniają tożsamościowo warunek plastyczności Hubera–Misesa dla funkcji $k(x, y)$ o dowolnej postaci.

Po wstawieniu do warunków równowagi płaskiego stanu odkształcenia składowych wyrażonych w postaci [1] uzyskuje się układ równań różniczkowych quasi-liniowych typu hiperbolicznego, który posiada dwie rodziny charakterystyk o równaniach:

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right), \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right).$$

Natomiast związki wzdłuż charakterystyk mają postać:

$$(3) \quad \begin{aligned} d\sigma + 2k d\varphi + \frac{\partial k}{\partial x} dy - \frac{\partial k}{\partial y} dx &= 0, \\ d\sigma - 2k d\varphi - \frac{\partial k}{\partial x} dy + \frac{\partial k}{\partial y} dx &= 0. \end{aligned}$$

Dla prędkości, zagadnienie przedstawia się dokładnie tak samo, jak w przypadku ciała jednorodnego: linie α i β są charakterystykami dla prędkości i obowiązują wzdłuż nich związki podane przez GEIRINGER:

$$(4) \quad dv_\alpha + v_\beta d\varphi = 0, \quad dv_\beta - v_\alpha d\varphi = 0.$$

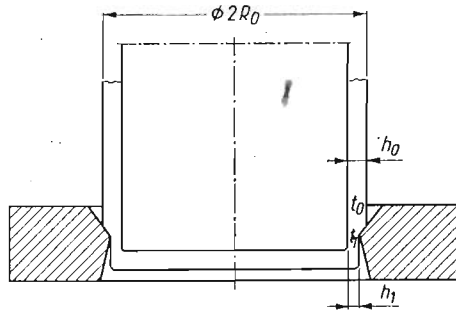
Można więc wyznaczyć pole prędkości za pomocą hodografu, przy czym zachowana jest własność prostokątności między styczną do linii poślizgu i styczną do jej odwzorowania na hodografie.

Warunkiem wystarczającym, aby moc dysypowana nie była ujemna jest według [3], aby kierunek wygięcia linii odwzorowania na hodografie był w każdym punkcie przeciwny niż kierunek wygięcia linii poślizgu.

3. Wyciąganie z podgrzewaniem i miejscowym chłodzeniem

Zasada procesu polega na podgrzewaniu wytłoczki od gorącego stempla lub sposobem indukcyjnym i chłodzeniu jej od strony dna przed rozpoczęciem i w czasie procesu wyciągania (rys. 1). Obszar odkształcenia jest strefą zmiany temperatury. Stopień wytworzonej niejednorodności materiału zależy od temperatury nagrzewania wytłoczki t_0 , czasu i sposobu chłodzenia, a ponadto może zmieniać się w trakcie przebiegu procesu.

Pełna analiza procesu wymagałaby wykonania wielu obliczeń dla różnych stadiów procesu oraz intensywności i czasów chłodzenia. Z punktu widzenia wymiany ciepła, zagadnienie jest również dość złożone. Dlatego, aby wykonanie rozwiązania dla tego typu procesu było możliwe, konieczne jest przyjęcie pewnych założeń upraszczających.



Rys. 1

Przy dużych wartościach promienia wytłoczki R_0 w stosunku do grubości ścianki h_0 , co z reguły ma miejsce, zagadnienie cieplne chłodzenia od dołu całego nagrzanego bloku metalu stempel–blacha–matryca można uprościć do przypadku chłodzenia płyty. Rozkład temperatur opisuje wówczas zależność

$$(5) \quad t(x, \theta) = \sum_{n=1}^i A_n \cos\left(\beta_n \frac{x}{g}\right) \exp\left[-\left(\frac{\beta_n}{g}\right)^2 \kappa \theta\right],$$

gdzie x oznacza odległość mierzona wzdłuż grubości płyty, θ — czas chłodzenia, g — grubość płyty, β_n — pierwiastki równania $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{Bi}} \beta$, Bi — liczbę Biota, κ — współczynnik wyrównywania temperatur.

Rozkład temperatury w płycie grubej można też przybliżyć parabolą

$$(6) \quad t = t_0 - \Delta t \left(\frac{x}{g}\right)^2,$$

gdzie $\Delta t = t_0 - t_1$, t_0 oznacza temperaturę środka płyty, t_1 — temperaturę powierzchni płyty.

Przy takich założeniach temperatura materiału w strefie odkształcenia zależy wyłącznie od współrzędnej wzdłuż wytłoczki i nie zmienia się po jej grubości. Aby uzyskać funkcję opisującą niejednorodność materiału wytłoczki, należy wyznaczyć granicę plastyczności materiału σ_p w funkcji temperatury.

Przykład funkcji niejednorodności. Dla stali węglowych zależność $\sigma_p(t)$ poniżej temperatury rekryształizacji można przybliżyć wielomianem

$$(7) \quad \sigma_p = At^2 + Bt + C.$$

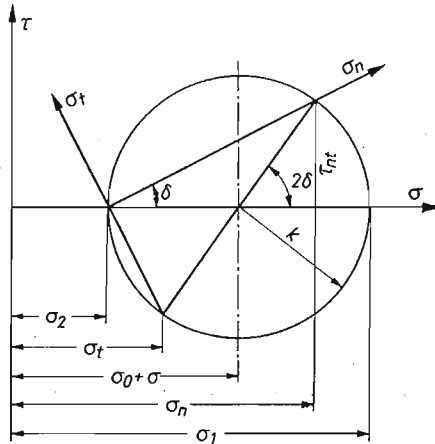
Wytłoczka ze stali 08X jest podgrzewana do temperatury $t_0 = 600^\circ\text{C}$. W procesie wyciągania jej dno i ścianka przeciągnięta są schładzane wodą do temperatury $t_1 = 240^\circ\text{C}$.

Po wstawieniu stałych A, B, C wyznaczonych w próbach jednoosiowego rozciągania w podwyższonych temperaturach oraz przyjmując uproszczony rozkład temperatury (6) uzyskuje się funkcję opisującą niejednorodność materiału wylotczki w postaci

$$(8) \quad \frac{k}{k_0} \left(\frac{x}{x_0} \right) = 1 + 2,64x^2 - 0,864x^4,$$

gdzie k_0 oznacza granicę plastyczności przy ścinaniu materiału w temperaturze t_0 , x_0 — wysokość strefy, wzdłuż której następuje spadek temperatury od t_0 do t_1 .

Rozwiązania procesu przeciągania dla materiału jednorodnego podali HILL, SOŁKOWSKI i in. [6]. Rozwiązanie procesu wyciągania wylotczki rozpoczynamy od sformułowania warunku brzegowego na linii styku materiału z matrycą. Założenie stałego rozkładu nacisku normalnego, jakie czyni się w rozwiązaniu tego procesu dla materiału jednorodnego, byłoby w naszym przypadku błędne.



Rys. 2

Rozpatrzmy bliżej stan naprężenia na powierzchni styku (rys. 2). Składowe stanu naprężenia wynoszą:

$$\sigma_n = \sigma_0 + \sigma + k \cos 2\delta,$$

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma - k \cos 2\delta,$$

$$\tau_{nt} = k \sin 2\delta,$$

gdzie δ jest kątem między kierunkiem normalnym do linii styku a naprężeniem głównym.

Ponieważ nacisk normalny nie jest znany, uwzględnienie tarcia na powierzchni styku jest możliwe tylko przy przyjęciu przybliżonej zależności stosowanej w obróbce plastycznej $\tau_{nt} = \mu k$, gdzie współczynnik μ ma charakter współczynnika tarcia. Można przyjąć, że współczynnik ten wzdłuż linii styku ma wartość stałą. Jednak ponieważ k jest zmienne, więc i siła tarcia jest zmienna.

Kąt między naciskiem normalnym a naprężeniem głównym wynosi $\delta = 0,5 \arcsin \mu$. W ten sposób znany jest kąt φ w każdym punkcie linii styku, gdyż $\varphi = \alpha + \delta$, a α jest kątem nachylenia matrycy.

Zmiana wartości k przy przechodzeniu od punktu do punktu wzdłuż linii styku wyraża się zmianą promienia koła i określonymi zmianami σ_n , σ_t , τ_{nt} , a σ i φ pozostają stałe.

Przy takich założeniach możemy określić szukane wielkości σ i φ na linii styku. Przykładowo w punkcie A (rys. 3) mamy

$$\sigma_{nA} = \sigma + k_A \cos 2\delta,$$

skąd

$$\sigma - \sigma_{nA} = -k_A \cos 2\delta.$$

Wprowadzamy nową wielkość $\bar{\sigma} = \sigma - \sigma_{nA}$, a wówczas $\bar{\sigma} = -k_A \cos 2\delta$. Wartość σ_{nA} będzie tu parametrem, który wyznaczy się na końcu rozwiązania.

Znając wartość $\bar{\sigma}$ i φ wzdłuż linii styku AB możemy rozwiązać zagadnienie brzegowe Cauchy'ego ABC stosując związki (2) i (3). Rozwiązanie wykonano metodą różnic skończonych. Najpierw bierze się wartości φ_1 i φ_2 w dwóch punktach wyjściowych i ze związków (2) oblicza się pierwsze przybliżenie współrzędnych x_M, y_M szukanego punktu M . Następnie ze związków (3) wyznacza się φ_M i $\bar{\sigma}_M$, po czym można przystąpić do obliczania drugiego i dalszych przybliżeń. Rozwiązanie przedstawione na rys. 3a wykonano dla $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0,31$, $h_1/h_0 = 0,76$ i funkcji niejednorodności materiału, jak w przykładzie.

Punkty A i B są punktami osobliwymi. Zakładamy w nich skoki wartości φ i obliczamy odpowiadające im wartości $\bar{\sigma}$ z zależności (3) wzdłuż charakterystyki α w punkcie A i β , w punkcie B dla $dx = 0$ i $dy = 0$.

Położenie punktu F wyznacza się z warunku, aby charakterystyki przecinały drugi brzeg blachy pod kątem $\pi/4$, gdyż tarcie na tym brzegu nie występuje.

Wyznaczona siatka linii poślizgu przesunięta jest w kierunku obszaru materiału o wyższej temperaturze.

Parametr σ_{nA} wyznacza się numerycznie z warunku, aby wypadkowa naprężeń na wejściu była równa zero, gdyż ciągnięcie jest bez przeciwciągu. Znając wartość σ_{nA} możemy określić rozkład σ_n na linii styku.

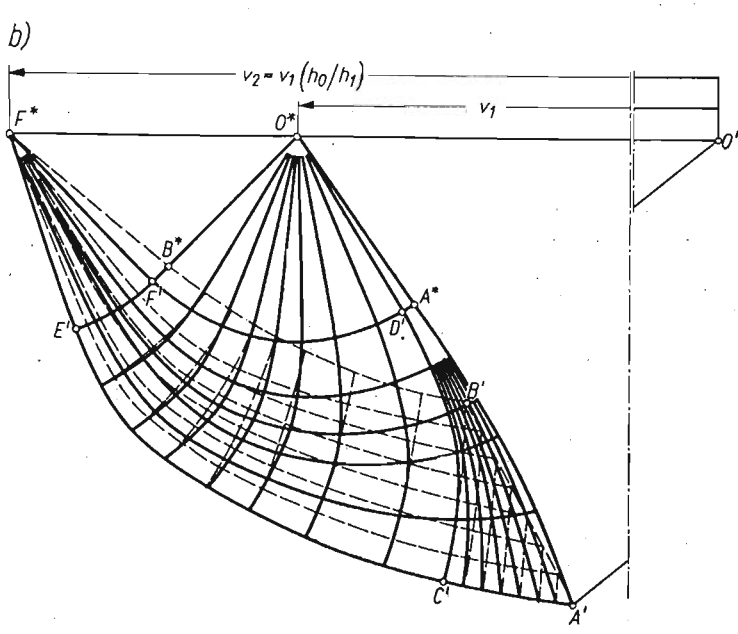
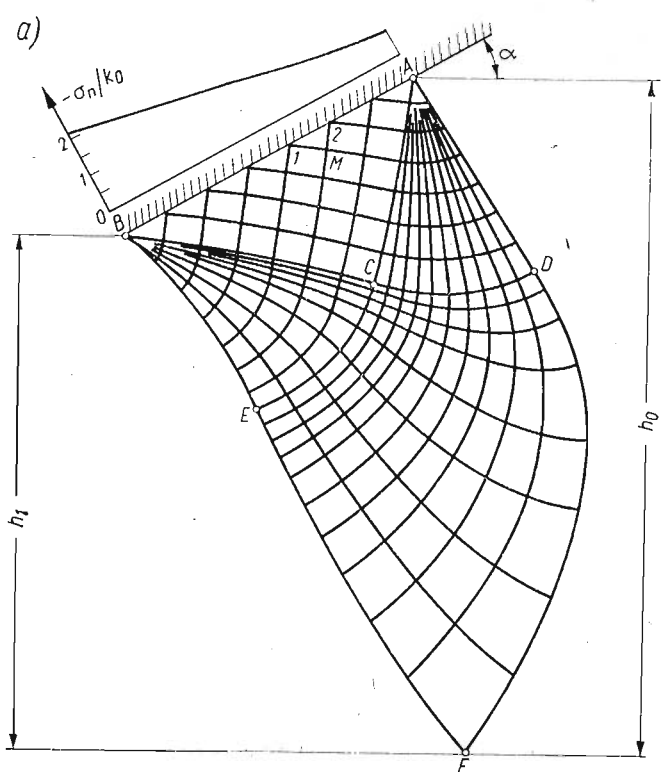
Wypadkowa naprężeń na wyjściu, po uwzględnieniu parametru σ_{nA} daje wartość naprężenia ciągnącego σ_c . Wartość naprężenia ciągnącego można również znaleźć obliczając sumę rzutów na oś x wszystkich sił działających na linii styku. Obie drogi obliczeń dają w wyniku tę samą wartość σ_c . Z przedstawionego rozwiązania można również znaleźć rozkład nacisku σ_n i naprężenie ciągnące σ_c dla innych stopni redukcji grubości blachy, gdyż założono, że wzdłuż grubości ścianki niejednorodność nie występuje.

Plan prędkości (rys. 3b) buduje się podobnie jak w przypadku materiału jednorodnego. Materiał na wejściu ma prędkość v_1 , a na wyjściu $v_2 = v_1 \cdot h_0/h_1$.

Linia $A'B'$ jest odwzorowaniem linii styku AB . Na odwzorowaniu tym wypadkowe wektorów prędkości są skierowane równoległe do linii styku.

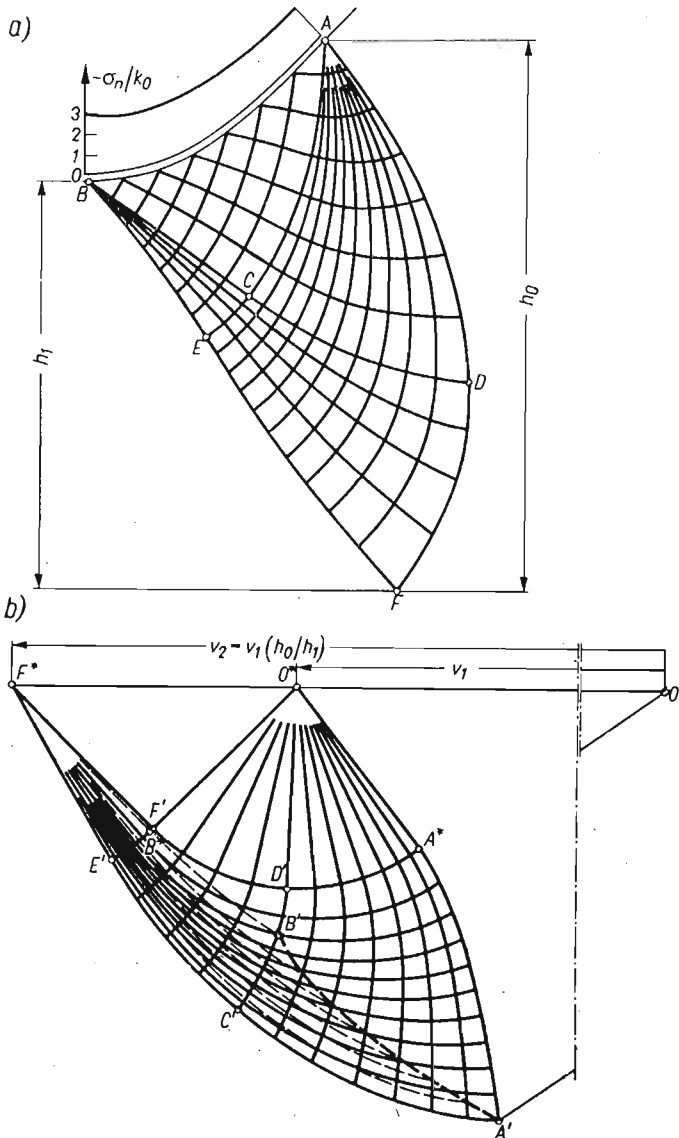
Hodograf na rys. 3b wyznaczono numerycznie, biorąc do obliczeń wartości kątów w węzłach siatki linii poślizgu. Przy wyznaczaniu tylko pierwszego przybliżenia siatki linii poślizgu, niedokładność na hodografie wartości v_1/v_2 w stosunku do wartości h_1/h_0 wynosi około 5%.

Z obserwacji hodografu i siatki linii poślizgu wynika, że krzywizny linii poślizgu i ich odwzorowań na hodografie są przeciwnie ukierunkowane, a więc warunek dodatniości mocy dysypowanej będzie spełniony. Uzyskane rozwiązanie jest kinematycznie dopuszczalne i stanowi ocenę górną wartości naprężenia ciągnącego.



Rys. 3

Przy założeniach przyjętych na początku analizy procesu, można również wykonać rozwiązanie procesu wyciągania dla matrycy o profilu krzywoliniowym, gdyż w każdym punkcie znany jest kąt α , a kąt δ jest stały i zależy od przyjętej wartości μ . Rozwiązanie



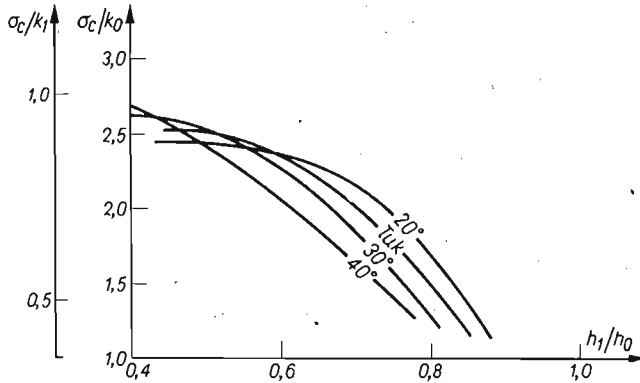
Rys. 4

dla matrycy o specjalnie zaprofilowanym łuku przedstawiono na rys. 4 przy $\mu = 0,31$, $h_1/h_0 = 0,75$ oraz funkcji niejednorodności, jak w przykładzie.

Na rys. 5 przedstawiono zależność naprężenia ciągnącego σ_c od stopnia pocienienia ścianki wytłoczki (stosunku h_1/h_0) dla różnych analizowanych kształtów matrycy. W za-

kresie stopni redukcji grubości nie objętych krzywymi mogą zająć inne schematy odkształcenia.

Teoretycznie, przeciągnięta ścianka wytłoczki może przenieść naprężenie ciągnące $2k_1$. Z obliczeń wynika więc, że dzięki wywołaniu niejednorodności temperaturowej można uzyskać duże, bardzo korzystne dla praktyki stopnie odkształcenia sięgające do $h_1/h_0 = 0,4$, co w zwykłym procesie wyciągania nie jest możliwe.



Rys. 5

4. Uwagi końcowe

Przedstawiony przykład wykazuje, że na podstawie teorii płaskiego płynięcia ciała niejednorodnego można analizować procesy obróbki plastycznej z niejednorodnością metalu wywołaną polem temperatury. Wpływ tej niejednorodności ma istotne znaczenie w procesach tłoczenia z miejscowym podgrzewaniem i chłodzeniem. Mimo dość dużej pracochłonności obliczeń, przyjęta procedura teoretycznej analizy procesu, przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej, może być z powodzeniem stosowana. Oprócz wyznaczenia naprężenia ciągnącego i nacisku normalnego, można jeszcze uzyskać ważne informacje o sposobie zalegania obszarów uplastycznionych i sztywnych. Potwierdzenie i uściślenie uzyskuje przewidywany intuicyjnie fakt, że strefa uplastyczniona przesuwa się w kierunku obszaru materiału o wyższej temperaturze, natomiast strefa chłodzona pozostaje w stanie sztywnym.

Wywołanie temperaturowej niejednorodności materiału daje możliwość uzyskania znacznych stopni odkształcenia, które normalnie nie mogłyby być zrealizowane.

Literatura cytowana w tekście

1. D. BERTHET, J. C. HAYOT, J. SALENÇON, *Poinçonnement d'un milieu semi-infini en matériau plastique de Tresca non-homogène*, Archiv. Mechanics (Archiw. Mech. Stos.), 24 (1972), 127 - 138.
2. М. Я. БРОВМАН, В. Л. МИТРИХИН, *Усилия при осадке неравномерно нагретых заготовок*, Кузн.-штамп. Проз., 10 (1968), 3 - 5.
3. D. J. F. EWING, R. HILL, *The plastic constraint of V-notched tension bars*, J. Mech. Phys. Sol., 15 (1967), 115 - 124.

4. А. А. Ильюшин, *Некоторые вопросы теории пластического течения*, Изв. АН СССР, ОТН, 2 (1958), 64 - 86.
5. W. KOWALCZYK, *The indentation problem of a semi-infinite transversally non-homogeneous body acted on by a rigid punch*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 13 (1965), 193 - 200.
6. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967, Rozdział VI, Procesy stacjonarne w płaskim stanie odkształcenia.

Резюме

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ВЫТЯЖКИ С УТОНЕНИЕМ С УЧЕТОМ
НЕОДНОРОДНОСТИ ВЫЗВАННОЙ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

В работе представлены примеры решения задачи о вытяжке стенки штампованной заготовки с подогревом и местным охлаждением. Использован метод характеристик для плоского течения пластически неоднородного тела. Получены сетки линий скольжения и годографы для прямолинейных и криволинейных матриц. Для заданного перепада температуры материала рассчитано напряжение вытяжки при разных формах матриц и разной степени деформации.

Summary

ANALYSIS OF IRONING OF A CUP WITH NON-HOMOGENEITY
PRODUCED BY A TEMPERATURE FIELD

The method of characteristics is applied to the problem of twodimensional plastic flow of a non-homogeneous plastic body to present the solutions of the cup ironing process with heating and local cooling. The slip-lines networks and hodographys are obtained for dies of rectilinear and curvilinear profiles. The stresses are determined, at a constant temperature differences in the material, at various strain stages and die profiles.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 stycznia 1977 r.

INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych przez przestrzeganie następujących wytycznych:

1. Prace powinny być napisane piśmem maszynowym w dwóch egzemplarzach (oryginał + kopia), na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronicznie z kolejną numeracją. Odbitki kserograficzne nie będą akceptowane jako oryginał.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie lub na maszynie, bardzo czytelnie, używając liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3, itd.; 2.1, 2.2, 2.3, itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikając zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to piśmowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Wykaz literatury należy podać wg kolejności cytowania w tekście, wymieniając: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2 itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nieprzestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, 00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA IV KWARTAŁ 1976 R.

I. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyło się 15 zebrań naukowych, na których wygłoszono 19 referatów o następującej tematyce:

| Lp. | Data | Prelegent | T e m a t | Liczba | |
|-----|----------|--|---|------------------|------------------|
| | | | | uczestni- ków | dysku- tantów |
| | | Oddział w Bydgoszczy | | | |
| 1 | | L. M. Kamiński | Zasady zachowania w dynamice | 13 | 3 |
| | | Oddział w Częstochowie | | | |
| 2 | 10.12.76 | Z. Orzechowski | Rola napięcia powierzchniowego w procesie rozpylania cieczy | 18 | 3 |
| | | Oddział w Gdańsku | | | |
| 3 | 29.11.76 | Z. Cywiński | X Kongres Stowarzyszenia AIPC-IVBH-IABSE w Tokio | 18 | 2 |
| | | Oddział w Gliwicach | | | |
| 4 | 12.10.76 | J. de Krasinski z Uniwersytetu w Calgary w Kana- dzie | Rozwój dyfuzora radialnego | 27 | 5 |
| 5 | 26.10.76 | B. Winnicki | Zarys rozwoju koncepcji przestrzeni | 15 | 3 |
| 6 | 30.11.76 | W. Bartelmus | Metoda diagnostyki drganiowej maszyn | 15 | 4 |
| | | Oddział w Łodzi | | | |
| 7 | 28.10.76 | Hidekazu-Fukuoka | Acousto elastycity | 26 | — |
| 8 | 18.11.76 | Horst Aurich z Technische Hochschule w Karl-Marx-Stadt | Nowoczesne metody obliczeń inżynierskich i konstruowanie z zastosowaniem maszyn cyfrowych | | |
| 9 | 18.11.76 | W. Szczepiński | Wzmocnienie metali w złożonych stanach naprężenia — studia eksperymentalne | 29 | 8 |

| Lp. | Data | Prelegent | T e m a t | Liczba | | |
|-----|----------|--|--|------------------|------------------|--|
| | | | | uczestni- ków | dysku- tantów | |
| | | Oddział w Opolu | | | | |
| | 15.12.76 | G. Szefer | Podstawy mechaniki ośrodka porowatego ze szczególnym uwzględnieniem konsolidacji | 26 | 7 | |
| | | Oddział w Poznaniu | | | | |
| 11 | 29.12.76 | St. Matysiak | Zagadnienia szczeliny w ośrodku Cosseratów ze związanymi obrotami | | | |
| 12 | 29.12.76 | J. Wranik | Iteracyjna metoda obliczania dowolnych tarcz w zakresie liniowo-sprężystym | 21 | 12 | |
| 13 | 29.12.76 | K. Grysa | Naprężenia i przemieszczenia w wirującym walcu kołowym ogrzewanym niesiowo-symetrycznie na poboczniczy | | | |
| 14 | 29.12.76 | A. Strzelczyk | Praca ortotropowej płyty pierścieniowej w stanie nadkrytycznym | | | |
| | | Oddział w Rzeszowie | | | | |
| 15 | 07.10.76 | W ramach III Sympozjum Dynamiki i Stateczności Konstrukcji — wspólne posiedzenie Sekcji Mechaniki Teoretycznej i Komitetu Mechaniki i Fizyki Ciała Stałego PAN, Sekcji Mechaniki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Zespołu Dynamiki Komitetu Budowy Maszyn PAN i Oddziału PTMITS w Rzeszowie | | | | |
| | | Oddział w Szczecinie | | | | |
| 16 | 28.11.76 | H. Ostapiuk | Pewien sposób obliczania struktury kratowej | 18 | 7 | |
| | | Oddział w Warszawie | | | | |
| 17 | 15.11.76 | B. Krajewski | Przemiana fazowa w ciele stałym, jako szczególny przypadek przewodzenia ciepła | 16 | 6 | |
| | | Oddział we Wrocławiu | | | | |
| 18 | 23.11.76 | R. Będziński | Zastosowanie elastooptycznych metod pomiarowych do analizy stanu odkształceń i naprężeń | 12 | 3 | |
| | | Oddział w Zielonej Górze | | | | |
| 19 | 03.12.76 | M. Dietrich z Warszawy | Problemy optymalizacji dźwignic | 5 | 1 | |

II. Seminaria

Oddział w Gdańsku przeprowadził w okresie od września do grudnia 1976 r. seminarium na temat «Analiza funkcjonalna». Dwugodzinne wykłady odbywały się raz na tydzień, a prowadził je doc. dr Bolesław PALCZEWSKI.

Oddział w Częstochowie zorganizował w dniu 13 listopada 1976 r. środowiskową sesję poświęconą «Zagadnieniom przepływów turbulentnych».

W czasie obrad wygłoszono następujące referaty:

1. J. ZIELIŃSKI, *Turbulencja w strudze zapalisadowej*,
2. S. DROBNIAK, *Rozwój swobodnej strugi osiowo-symetrycznej z zawirowaniem wstępnym*,
3. P. DOMAGAŁA, *Charakterystyki kątowe czujników z grzającym włóknem*,
4. S. BEDNAREK, *Analiza intensywności turbulencji w obszarze przybrzeżnym kierownicy turbinowej*,
5. T. TARNOWSKI, *Wpływ wydmuchu na naprężenia Reynoldsa w śladzie krawędziowym palisady łopatkowej*,
6. J. ELSNER, J. WILCZYŃSKI, *Problematyka semi-podobnych przepływów zapalisadowych*,
7. A. JARŻA, *Ewolucja przepływu za palisadą z wymuszonym upustem czynnika*.

W sesji wzięło udział 28 uczestników, w dyskusji zabrało głos 9 osób.

III. Konkursy naukowe

Oddział w Częstochowie przeprowadził ogólnokrajowy konkurs na prace doświadczalne z mechaniki technicznej. Na konkurs zgłoszono 5 prac, z których dwie nagrodzono.

Oddział w Poznaniu przeprowadził ogólnokrajowy konkurs na prace teoretyczne z mechaniki. Cztery ze zgłoszonych prac nagrodzono.

IV. Działalność wydawnicza

1. W IV kwartale wydano Zeszyt 4 Tomu 14 MECHANIKI TEORETYCZNEJ i STOSOWANEJ o objętości 11,5 arkusza wydawniczego.

2. Oddział w Gliwicach wydał drukiem zbiór referatów pt. *Ogólnopolski konkurs na prace doświadczalne z mechaniki, 15.XII.1975. Zbiór prac konkursowych*, z. 37, Gliwice 1976, s. 161.

V. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje następująca tablica:

| Lp. | Oddział | Stan na koniec III kw. 76 r. | Stan na koniec IV kw. 76 r. | Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym |
|-----|-------------|------------------------------|-----------------------------|---|
| 1 | Bydgoszcz | 27 | 27 | — |
| 2 | Częstochowa | 43 | 49 | +6 |
| 3 | Gdańsk | 59 | 59 | — |
| 4 | Gliwice | 141 | 140 | -1 |
| 5 | Kraków | 77 | 76 | -1 |
| 6 | Łódź | 52 | 52 | — |
| 7 | Opole | 18 | 18 | — |
| 8 | Poznań | 57 | 60 | +3 |
| 9 | Rzeszów | 31 | 31 | — |
| 10 | Szczecin | 31 | 32 | +1 |

| Lp. | Oddział | Stan na koniec III kw. 76 r. | Stan na koniec IV kw. 76 r. | Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym |
|-----|--------------|---------------------------------|--------------------------------|---|
| 11 | Warszawa | 220 | 214 | -6 |
| 12 | Wrocław | 63 | 63 | — |
| 13 | Zielona Góra | 19 | 19 | — |
| | Razem | 838 | 840 | +2 |

W okresie sprawozdawczym odbyło się zebranie Prezydium Zarządu Głównego PTMTS oraz 29 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

WYNIKI OGÓLNOKRAJOWYCH KONKURSÓW NAUKOWYCH NA PRACĘ Z DZIEDZINY MECHANIKI

1. Oddział w Częstochowie przeprowadził ogólnokrajowy konkurs na prace doświadczalne z mechaniki technicznej. Zgłoszono 5 prac. Pierwszej nagrody nie przyznano.

Drugą nagrodę w wysokości zł 8000 otrzymał dr M. BIJAK-ŻOCHOWSKI za pracę pt. *Pólniszcząca metoda pomiaru naprężeń własnych w głębi materiału.*

Trzecią nagrodę w wysokości zł 5000 otrzymał dr J. SZALA za pracę pt. *Wpływ sekwencji obciążeń na trwałość zmęczeniową.*

2. Oddział w Poznaniu przeprowadził ogólnokrajowy konkurs na prace teoretyczne z mechaniki. Pierwszej nagrody nie przyznano.

Dwie równorzędne drugie nagrody po zł. 7000 każda otrzymali: Stanisław MATYSIAK za pracę pt. *Zagadnienia szczeliny w ośrodku Cosseratów ze związanymi obrotami* i Józef WRANIK za pracę pt. *Iteracyjna metoda obliczania dowolnych tarcz w zakresie liniowo-sprężystym.*

Dwie równorzędne trzecie nagrody po zł 5000 każda otrzymali: Krzysztof GRYSA za pracę pt. *Naprężenia i przemieszczenia w wirującym walcu kołowym ogrzewanym nieosiowo-symetrycznie na pobocznicę* i Andrzej STRZELCZYK za pracę pt. *Praca ortotropowej płyty pierścieniowej w stanie nadkrytycznym.*

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- N. J. CYGANOWA, Uogólnione postacie wariacyjnych zasad mechaniki w pracach z końca XIX i początku XX wieku. Обобщенные формы дифференциальных вариационных принципов механики в исследованиях конца XIX, первой четверти XX века. Generalized forms of variational principles of mechanics at the end of the XIXth and beginning of the XXth century
- E. WALICKI, Wpływ sił bezwładności na przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi: nieruchomą i wirującą. Влияние сил инерции на течение вязкой жидкости в щели между неподвижной и вращающейся поверхностями вращения. Inertia effect in the flow of viscous fluid through a slot between fixed and rotating surfaces of revolution
- K. WYLEŻYŃ, Lepkosprężyste charakterystyki gumy i tulejowych gumowo-metalowych łączników typu «silentblock». Вязкоупругие характеристики резины и резино-металлических блок-шарниров типа сайлент-блок. Viscoelastic characteristics of rubber and flexible bushes of the «silentblock» type
- J. KOLENDA, O przybliżonych metodach rozwiązania nieliniowych równań ruchu elastycznie posadowionych silników tłokowych. О приближенных методах решения нелинейных уравнений движения амортизированных поршневых двигателей. On approximate solution methods of the non-linear motion equations of elastically mounted piston engines
- T. LISZKA, W. ŚWISTERSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Optymalne kształtowanie belek hiperstatycznych na drodze analitycznej i badań elastoопругих. Оптимальное проектирование статически неопределимых балок путем расчета и фотоупругих испытаний. Optimum design of statically indeterminate beams by analytical and photo-elastic methods
- M. ŚLĄKOWSKI, Sumowanie niektórych szeregów Bessela-Fouriera występujących w zagadnieniach przewodnictwa cieplnego. Суммирование некоторых рядов Бесселя-Фурье выступающих в задачах теплопроводности. Summation of certain Fourier-Bessel series occurring in heat transfer problems
- A. LITEWKA, Niestowarzyszone prawo płynięcia anizotropowych plastycznie stopów aluminium. Неассоциированный закон течения для анизотропных алюминиевых сплавов. Non-associated flow law for plastically anisotropic aluminium alloys
- Z. GORAJ, J. MARYNIAK, Z. PATORSKI, M. ZŁOCKA, Stateczność boczna w czasie dobiegu lądującego samolotu sportowego. Боковая устойчивость спортивного самолета движущегося по земле после посадки. The lateral stability of sports aircraft during landing run
- A. ZMITROWICZ, Tensor tarcia Coulomba. Тензор трения Куломба. Tensor of Coulomb friction
- K. TURSKI, Wytrzymałość stalowych prętów z karbem przy rozciąganiu w podwyższonych temperaturach. Высокотемпературное сопротивление стальных тержей с кольцевой выточкой. Strength of steel notched rods in tension at high temperatures
- S. ŁUKASIEWICZ, J. TUMIŁOWICZ, Stateczność powłoki cylindrycznej z obwodowym zalomem przy ścisnaniu osiowym. Устойчивость цилиндрической оболочки с изломом по окружности при осевом сжатии. Stability of a cylindrical shell with a circumferential notch under axial compression
- K. GRUDZIŃSKI, T. BURDA, L. ŁABUĆ, Wyznaczanie stanu naprężenia w osiowo-symetrycznym połączeniu klejonym obciążonym momentem skręcającym. Определение напряженного состояния в осесимметричном клеевом соединении нагруженном крутящим моментом. Determination of stress in axially-symmetric glued joint loaded by torque

Warunki prenumeraty

Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
