

J 11 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 15 · ZESZYT 2

WARSZAWA 1977

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

N. Ja. CYGANOWA, Zastosowanie metody Gaussa w mechanice ośrodków ciągłych Приложение принципа Гаусса к механике сплошной среды Application of the Gauss principle in continuum mechanics	147
R. WOJNAR, Zastosowanie formuły Liebmanna do opracowywania wyników badań elastoоптычных Применение формулы Либманна для обработки результатов фото-упругих испытаний Application of the Liebmann formula to the evaluation of photoelastic measurements	155
W. KUPEL, S. MATYSIAK, Tarcze i płyty sprężyste z więzami liniowymi dla deformacji Упругие диски и пластины с линейными связями для деформации Elastic plates with linear constraints of deformation	179
K. DEMS, J. LIPIŃSKI, Redukcja macierzy sztywności, mas i tłumienia Сокращение размеров матриц жесткости, масс и демпфирования Reduction of the stiffness, mass and damping matrices	195
K. GRYSA, O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela О суммировании некоторых рядов Фурье-Бесселя Summation of certain Fourier-Bessel series	205
K. GRYSA, Nieustalone pole temperatury w wirującym walcu kołowym wywołane utrzymywaną na jego poboczniczy odcinkami stałą temperaturą Температурное поле во вращающемся круговом цилиндре при кусочно-постоянной температуре его боковой поверхности Non-steady state of temperature in a rotating circular cylinder due to piecewise constant temperature on its surface	215
A. BLINOWSKI, O sformułowaniu i poprawności pewnej klasy zadań z nieliniowej dynamiki lin rozciągłych О формулировке и корректности некоторого класса задач по нелинейной динамике тросов On the formulation and the correctness of some class of problems concerning nonlinear dynamics of strings	227
J. KUJAWSKI, Techniczna teoria grubych tarcz ortotropowych Техническая теория толстых ортотропных дисков Technical theory of stretching thick orthotropic plates	239
S. JANECKI, Drgania własne belek z uwzględnieniem wpływu ścinania Свободные колебания с учетом деформации сдвига Free vibrations of beams influenced by the shear effect	247
J. SKŁADZIEŃ, Analiza krzyżowoprądowego konwekcyjnego rekuperatora Fielda oraz pętlicowego ze stratami ciepła do otoczenia Анализ конвекционного рекуператора Фильда и петлевого с перекрестными потоками теплоносителей и с потерями тепла Analysis of the convective crossflow Field and loop recuperator with heat losses	265
W. SZYSZKOWSKI, Analiza bardzo dużych ugięć sprężystych ściskanych osiowo powłok walcowych i stożkowych Расчет сжимаемых в осевом направлении цилиндрических и конических упругих оболочек при больших перемещениях Analysis of large elastic deflections of axially compressed cylindrical and conical shells	275
BIULETYN INFORMACYJNY	293

11 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 15 · ZESZYT 2

WARSZAWA 1977

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
JAN SZARGUT, JÓZEF WIECKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
ANDRZEJ DRESCHER — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (587+113). Ark. wydawn. 10,75. Ark. drukarskich 9,5. Papier druk. sat. III kl. 80 g, 70×100. Oddano do składania 28.I.77 r. Druk ukończono w czerwcu 1977 r. Zam. 113/77 F-28 Cena zł 30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ZASTOSOWANIE ZASADY GAUSSA W MECHANICE OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

N. Ja. CYGANOWA (WOLGOGRAD)

Pierwsze zastosowanie zasady Gaussa w mechanice kontinuum znajdujemy w pracy CZETAJEW [1], poświęconej zagadnieniu ewolucji idealnej gasnącej gwiazdy. Za pomocą tej zasady CZETAJEW otrzymał kryterium, pozwalające z kilku możliwych w okolicy punktu bifurkacji stanów równowagi wybrać taki stan, który odpowiada rzeczywistej ewolucji ciała ciekłego.

Ewolucja gasnącej gwiazdy polega na kolejnym przechodzeniu z jednej statecznej konfiguracji do drugiej. CZETAJEW ujął to zagadnienie w taki sposób: należy wyznaczyć ciąg statecznych konfiguracji dla stanów równowagi jednorodnego ciała ciekłego, obracającego się wokół osi przechodzącej przez środek ciężkości i kurczącego się ze stałą prędkością w kierunku radialnym pod wpływem wzajemnego przyciągania cząstek cieczy.

Taki ciąg statecznych konfiguracji CZETAJEW otrzymał za pomocą twierdzenia Lagrange'a o stateczności w przypadku istnienia funkcji U .

Stan równowagi dla wartości parametrów zaburzeń A_1, A_2, \dots, A_n spełniających układ równań

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial A_i} = 0$$

jest stateczny, jeżeli tym wartościom parametrów odpowiada $\max U$. Wartości parametrów i funkcji U są zmienne w czasie, zatem konfiguracje stateczne tworzą zbiór ciągły.

Traktując czas t i parametry A_i określające konfigurację stanu równowagi, jako współrzędne w przestrzeni $n+1$ -wymiarowej, możemy odwzorować w tej przestrzeni ciąg statecznych stanów równowagi w postaci krzywej przecięcia powierzchni (1). W ogólnym przypadku krzywa ta dzieli się na kilka gałęzi, które mogą również przecinać się. Każdemu ciągowi stanów równowagi odpowiada określona gałąź (C). Jeżeli punkt M gałęzi (C) należy jednocześnie do innej gałęzi, nazywamy go punktem bifurkacji. CZETAJEW pokazał, że zasada Gaussa pozwala wybrać w punkcie bifurkacji gałąź stanów równowagi odpowiadającą dalszej ewolucji układu.

W rzeczywistym ruchu ciała ciekłego moment pędu względem osi obrotu pozostaje stały. Jeżeli oś z jest osią obrotu, to warunek ten można zapisać w postaci

$$(2) \quad \omega \int (x^2 + y^2) dm = C,$$

gdzie ω oznacza prędkość obrotu. W przypadku kurczenia się ciała warunek (2) wymaga wzrostu ω , a tym samym i wzrostu siły odśrodkowej. Relację (2) można traktować jako równanie więzów. Ruchem swobodnym w danym zagadnieniu jest ruch bez ograniczenia (2), czyli ruch ze stałą prędkością obrotu. Tak więc, w ruchu swobodnym nie uwzględnia-

my siły powodującej promieniowe kurczenie się ciała. Odchylenie ruchu rzeczywistego od swobodnego dla cząstki masy dm ma następujące współrzędne (pomijamy wielkości nieskończenie małe trzeciego rzędu):

$$x\omega\delta\omega dt^2, \quad y\omega\delta\omega dt^2, \quad 0.$$

Wymuszenie dla całego ciała wynosi

$$Z = dt^4 \omega^2 (\delta\omega)^2 \int (x^2 + y^2) dm.$$

Z warunku minimum wymuszenia wynika, że rzeczywistej zmianie konfiguracji stanu równowagi odpowiada minimalny przyrost prędkości obrotowej $\delta\omega$. Ponieważ z warunku (2) mamy

$$\delta\omega = -C \frac{\delta \int (x^2 + y^2) dm}{\left[\int (x^2 + y^2) dm \right]^2},$$

to moduł przyrostu momentu bezwładności ciała względem osi obrotu

$$\left| \delta \int (x^2 + y^2) dm \right|$$

również osiąga minimum. W takim razie rzeczywistą gałąź ewolucji w punkcie bifurkacji określa maksimum momentu $\int (x^2 + y^2) dm$.

1. Prace Tamuża

W pracy TAMUŻA [2] zasada minimum wymuszenia została przeniesiona na ciało sztywno-plastyczne bez wzmocnienia. Autor rozważa ciało sztywno-plastyczne, którego objętość V ogranicza odcinkowo gładka powierzchnia S . Na części tej powierzchni S_T dane są siły powierzchniowe T_i , a na pozostałej części S_v — prędkości v_i . W określonej chwili czasu $t = t_0$ znane są prędkości $v_i^*(x, y, z, t)$ w obszarze V , czyli znane są również prędkości odkształceń

$$\dot{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2} (v_{i,j}^* + v_{j,i}^*).$$

Prędkościami dopuszczalnymi są takie v_i , które spełniają warunki kinematyczne na S_v , warunek nieściśliwości w V i postulat ciągłości ciała. W chwili $t = t_0$ dopuszczalne prędkości są jednocześnie rzeczywistymi:

$$v_i(x, y, z, t)_{t=t_0} = v_i^*(x, y, z, t_0).$$

Dopuszczalne prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$ i kinematycznie dopuszczalne naprężenia σ_{ij} spełniają prawo płynięcia dla danej funkcji $f(\sigma_{ij})$:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Dopuszczalne przyśpieszenia w_i i dopuszczalne przyśpieszenia odkształceń $\ddot{\epsilon}_{ij}$ definiowane są następująco:

$$w_i = \frac{\partial v_i(x, y, z, t)}{\partial t}, \quad \ddot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (w_{ij} + w_{ji}).$$

W dalszej części pracy analizowane są ograniczenia na $\ddot{\epsilon}_{ij}$, wynikające z prawa płynięcia dla różnych przypadków powierzchni płynięcia [3].

Jeżeli powierzchnia

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

jest gładka i wypukła; to prawo płynięcia ma postać

$$(1.1) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \begin{cases} \lambda = 0, & \text{jeżeli } f < 0, \\ \lambda \geq 0, & \text{jeżeli } f = 0. \end{cases}$$

Różniczkując po czasie, otrzymujemy:

$$(1.2) \quad \ddot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) \begin{cases} \dot{\lambda} = 0, & \lambda = 0, & \text{jeżeli } f < 0, \\ \dot{\lambda} \geq 0, & & \text{jeżeli } f = 0, \lambda = 0, \\ \dot{\lambda} & \text{dowolne,} & \text{jeżeli } \lambda > 0. \end{cases}$$

W dalszym przypadku dla $\lambda = 0$ mamy

$$\ddot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

czyli dopuszczalne przyspieszenia odkształceń spełniają prawo płynięcia. W trzecim przypadku brak ograniczeń na $\ddot{\epsilon}_{ij}$.

Uogólnione prawo płynięcia dla odcinkowo-liniowej powierzchni płynięcia $f_k = a_{ijk} \cdot \sigma_{ij}$ ma postać

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda}_k a_{ijk} \begin{cases} \dot{\lambda}_k = 0 & , & \text{jeżeli } f_k < 0, \\ \dot{\lambda}_k \geq 0 & , & \text{jeżeli } f_k = 0. \end{cases}$$

Różniczkując względem czasu, otrzymujemy

$$(1.3) \quad \ddot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda}_k a_{ijk} \begin{cases} \dot{\lambda}_k = 0 & , & \text{jeżeli } f_k < 0, \\ \dot{\lambda}_k \geq 0 & , & \text{jeżeli } f_k = 0, \lambda_k = 0, \\ \dot{\lambda}_k & \text{— dowolne,} & \text{jeżeli } \lambda_k > 0. \end{cases}$$

Tak więc dla $\lambda_k = 0$ przyspieszenie odkształcenia $\ddot{\epsilon}_{ij}$ spełnia uogólnione prawo płynięcia. W przypadku $\lambda_r \neq 0$, $\lambda_k = 0$, $f_k < 0$ ($k \neq r$), przyspieszenie $\ddot{\epsilon}_{ij}$ jest prostopadłe do powierzchni $f_r = a_{ijr} \cdot \sigma_{ij}$, lecz może mieć zwrot w kierunku wnętrza obszaru wypukłego. Jeżeli stan naprężeń odpowiada wierzchołkowi powierzchni płynięcia, to nie ma żadnych ograniczeń na $\ddot{\epsilon}_{ij}$. Zasada minimum wymuszenia ma w tym przypadku taką postać: funkcjonał wymuszenia

$$I = \int_{(V)} \frac{m w_i^2}{2} dV - \int_{(V)} P_i w_i dV - \int_{(S_r)} T_i w_i dS + \int_{(V)} \sigma_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} dV,$$

gdzie P_i są siłami masowymi, a m gęstością materiału, osiąga minimum dla rzeczywistych w_i^* , $\ddot{\epsilon}_{ij}^*$, σ_{ij}^* w klasie wartości kinematycznie dopuszczalnych w_i , $\ddot{\epsilon}_{ij}$, σ_{ij} .

Dowód tego twierdzenia oparty jest na analizie różnicy wartości funkcjonału $I^* - I$ dla pól rzeczywistych i dopuszczalnych. Wykorzystując fakt, że rzeczywiste przyspieszenia w_i^* i naprężenia σ_{ij}^* spełniają równania ruchu

$$\sigma_{ij}^* + P_i - m w_i^* = 0,$$

a σ_{ij}^* dodatkowo — statyczne warunki brzegowe

$$\sigma_{ij}^* n_j = T_i,$$

można wyrażenie $I^* - I$ sprowadzić do postaci

$$I^* - I = - \int_{(V)} \frac{m(w_i^* - w_i)^2}{2} dV + \int_{(V)} \ddot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) dV.$$

Na podstawie warunków (1.2), (1.3), które spełniają dopuszczalne przyspieszenia odkształceń dla różnych powierzchni płynięcia, można wykazać, że wyrażenie

$$\ddot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})$$

nie jest dodatnie. W takim razie $I^* - I < 0$, czyli $I^* < I$. Następnie udowodniono jednoznaczność pola przyspieszeń w dowolnej chwili czasu.

W pracy TAMUŻA zawarte jest również ważne z punktu widzenia zastosowań praktycznych uogólnienie zasady minimum wymuszenia dla pól przyspieszeń mających nieciągłości na powierzchniach, dzielących ciało na skończoną liczbę podobszarów o ciągłych przyspieszeniach.

2. Prace Reitmana

Zasada Gaussa została uogólniona dla szerokiej klasy ciał odkształcalnych w dwóch publikacjach REITMANA [4, 5]. Funkcjonał wymuszenia dla dowolnego ciała odkształcalnego przyjęto w postaci

$$(2.1) \quad I = \int_{(V)} \frac{\rho(\ddot{u}_j)^2}{2} dV - \int_{(V)} P_j \ddot{u}_j dV - \int_{(S_T)} T_j \ddot{u}_j dS + \int_{(V)} \sigma_{jk} \ddot{\epsilon}_{jk} dV,$$

którą można otrzymać biorąc za punkt wyjścia wzór na wymuszenie dla układu punktów materialnych

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2.$$

Ponieważ siły i masy nie podlegają wariacji, prawą stronę tego wzoru można zapisać, jako

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{m_i \ddot{x}_i^2}{2} - X_i \ddot{x}_i \right).$$

W przypadku ciała stałego, zamiast poszczególnych mas skupionych, mamy elementy objętości dV . Zatem sumę $\sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \ddot{x}_i^2$ zamieniamy na całkę

$$\int \frac{\rho \ddot{u}_j^2}{2} dV,$$

w której występują gęstość ρ i składowe \ddot{u}_j przyspieszeń.

Sumowanie

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \ddot{x}_i$$

jest równoważne trzem pozostałym członom całkowym we wzorze (2.1). Jak wiadomo, siły związane z dowolnym ciałem odkształcalnym można podzielić na zewnętrzne i wewnętrzne. Z kolei siły zewnętrzne dzielimy na masowe P_j i powierzchniowe T_j . Odpowiadają im druga i trzecia całka w wyrażeniu (2.1). Natomiast trzecia całka związana jest ze stanem sił wewnętrznych, czyli naprężeń. Zamiast składowych przyśpieszeń przemieszczeń występują w niej przyśpieszenia odkształceń $\ddot{\epsilon}_{jk}$. Kinematycznie dopuszczalne przyśpieszenia odkształceń związane są równaniami

$$(2.2) \quad \ddot{\epsilon}_{jk} = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{jk} + \ddot{u}_{kj})$$

z przyśpieszeniami przemieszczeń, a rzeczywiste przyśpieszenia spełniają równania ruchu

$$\sigma_{jk,k} + P_j - \rho \ddot{u}_j = 0.$$

Różnica wartości funkcjonału I dla ruchu rzeczywistego i kinematycznie dopuszczalnego może być zapisana w postaci

$$I - I^* = - \int_{(V)} \frac{\rho (\ddot{u}_j - \ddot{u}_j^*)^2}{2} dV + \int_{(V)} \ddot{\epsilon}_{jk} (\sigma_{jk} - \sigma_{jk}^*) dV.$$

Z tego wzoru REITMAN otrzymał warunek dostateczny na minimum funkcjonału wymuszenia. Warunek ten żąda identyczności naprężeń odpowiadających ruchowi rzeczywistemu i dopuszczalnemu w rozważanej chwili czasu:

$$(2.3) \quad \sigma_{jk} = \sigma_{jk}^*.$$

Warunek ten jest spełniony w ciałach sprężystym i sprężysto-plastycznym opisanym w ramach teorii deformacyjnej, jeżeli w danej chwili czasu określone są odkształcenia. Natomiast dla ciała sztywno-plastycznego bez wzmocnienia, opisanego w ramach teorii płynięcia, wystarczy ustalić prędkości odkształceń związane z naprężeniami przez prawo płynięcia. W przypadku ośrodka lepkiego, w którym do jednoznacznego określenia naprężeń potrzebne są odkształcenia i prędkości odkształceń, należy założyć wartości prędkości odkształceń.

Reitman stosuje zasadę minimum wymuszenia do zagadnienia proporcjonalnego obciążenia ciała sztywno-plastycznego, które jest ważne z praktycznego punktu widzenia. Ciało zachowuje przy tym swój kształt, czyli spełnia warunek

$$(2.4) \quad u_j = f(t) \eta_j,$$

gdzie η_j nie zależy od t .

Podstawienie wzoru (2.4) do (2.1) z uwzględnieniem (2.2) prowadzi do warunku

$$(2.5) \quad (K + N - Z)^2 / M = \max.$$

Wprowadzono w nim takie oznaczenia:

$$M = \int_{(V)} \rho \eta_j^2 dV, \quad Z = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma_{jk} (\eta_{jk} + \eta_{kj}) dV,$$

$$K = \int_{(S_T)} T_j \eta_j dS, \quad N = \int_{(V)} P_j \eta_j dV.$$

W przypadku $P_j = 0$ warunek (2.5) redukuje się do postaci

$$(K - Z)^2 / M = \max,$$

która wyraża warunek Rżanicyna dla sztywno-plastycznych belek i płyt [6], otrzymany z zasady minimum Lagrange'a.

Zasadę Gaussa zastosował Reitman również dla zagadnień powłok sztywno-plastycznych. Wymuszenie sił wewnętrznych

$$\int_{(V)} \sigma_{jk} \ddot{\epsilon}_{jk} dV$$

w przypadku takich powłok ma postać

$$\sigma_i \int_{(V)} \frac{1}{3} \sqrt{2} \sqrt{p_{\epsilon}^{\cdot\cdot} - q_z p_{\epsilon}^{\cdot\cdot\cdot} + Z^2 p_{\epsilon}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}},$$

gdzie σ_i oznacza intensywność naprężenia, a $p_{\epsilon}^{\cdot\cdot}$, $p_{\epsilon}^{\cdot\cdot\cdot}$, p są kwadratowymi wielomianami illiczyna, w których występują przyspieszenia odkształceń.

Dla przypadku czasy kulistej z materiału sztywno-plastycznego bez wzmocnienia Reitman otrzymał wzory obliczeniowe, stosując minimalizację funkcjonału wymuszenia.

3. Zastosowanie zasady minimum wymuszenia w teorii filtracji

W pracy KILCZEWSKIEGO i SZEPELEWSKIEJ [7] pokazano, że zasada Gaussa w postaci zmodyfikowanej wynika z równania ruchu

$$(3.1) \quad \frac{\dot{p}}{\sigma} \frac{d\bar{v}}{dt} = - \frac{\gamma}{k} \bar{v} - \text{grad } p - \bar{k}\gamma$$

dla przepływu filtracyjnego cieczy. We wzorze tym $\gamma = \rho g$ oznacza ciężar właściwy, \bar{v} — prędkość cząstki cieczy, p — ciśnienie hydrodynamiczne, \bar{k} — wektor jednostkowy w kierunku pionowej osi z , k — współczynnik filtracji, σ — porowatość ośrodka filtrującego.

Jeżeli ciecz jest nieściśliwa a ośrodek filtrujący — nieodkształcalny, to

$$(3.2) \quad \text{div}(\delta\bar{u}) = 0,$$

gdzie $\delta\bar{u}$ oznacza wektor wirtualnych przemieszczeń cząstek cieczy. Z twierdzenia Ostrogradskiego warunek ten można przepisać w postaci globalnej

$$(3.3) \quad \iiint_{(V)} \text{div}(\delta\bar{u}) dV = \iint_{(S)} \bar{n} \delta\bar{u} dS = 0.$$

Warunki (3.2) i (3.3) są równaniami więzów. Siły $\frac{\gamma}{k} \bar{v} \Delta V$ działające na element objętości ΔV traktowane są jako aktywne, a siły $\text{grad } p \cdot \Delta V$ — jako reakcje więzów.

Następnie wprowadza się pojęcia więzów idealnych. Więzy zdefiniowane warunkami (3.2) i (3.3) są idealne, jeżeli wirtualna praca reakcji tych więzów jest nieujemna:

$$(3.4) \quad \delta A = - \int \int \int_{(V)} \delta \bar{u} \text{grad } p dV \geq 0.$$

Na podstawie relacji (3.2) i (3.3) możemy napisać

$$(3.5) \quad \delta A = - \int \int_{(S)} p \bar{n} \delta \bar{u} dS.$$

Założono, że powierzchnia ograniczająca przepływ filtracyjny składa się z części powierzchni warstwy wodoszczelnej, sztywnych ścian, powierzchni depresji, odcinków wycieku oraz z przepuszczających ciecz granic basenów wodnych. Jeżeli ciecz przepływa z basenu A o głębokości H_1 do basenu B o głębokości H_2 i warstwa wodoszczelna jest pozioma, to warunek idealności więzów (3.4) jest spełniony, gdy

$$(3.6) \quad \int \int_{(S_A)} (H_1 - z) \cdot |\delta u_n| \cdot dS_A \geq \int \int_{(S_B)} (H_2 - z) \cdot |\delta u_n| \cdot dS_B.$$

W ten sposób więzy idealne muszą spełniać warunki (3.3), (3.2) i (3.6).

Wymuszenie

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{R}_i^2}{m_i},$$

gdzie \bar{R}_i oznacza reakcje więzów idealnych, dla przypadku cieczy filtrującej ma postać

$$Z = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{\rho \Delta V_i}{\sigma}} (\text{grad } p_i \cdot \Delta V_i)^2,$$

lub

$$(3.7) \quad Z = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\rho} \int \int \int_{(V)} (\text{grad } p)^2 dV.$$

Wykorzystując równanie ruchu (3.1) można zapisać wymuszenie w postaci

$$(3.8) \quad Z = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\rho} \int \int \int_{(V)} \left(\frac{\rho}{\sigma} \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{\gamma}{k} \bar{v} + k\gamma \right)^2 dV$$

lub pomijając siły bezwładnościowe i stały mnożnik zredukować do wzoru następującego:

$$(3.9) \quad Z = \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} [v_x^2 + v_y^2 + (v_z + k)^2] dV,$$

gdzie v_x, v_y, v_z oznaczają składowe wektora prędkości \bar{v} w układzie współrzędnych, którego punkt początkowy usytuowany jest na warstwie wodoszczelnej.

Następnie wykazano nieujemność wariacji wymuszenia:

$$(3.10) \quad \delta Z = \iiint_{(V)} [v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + (v_z + k) \delta v_z] dV \geq 0.$$

Wynika to z tego, że warunek (3.4) można zapisać w postaci

$$(3.11) \quad \iiint_{(V)} [v_x \delta w_x + v_y \delta w_y + (v_z + k) \delta w_z] dV \geq 0,$$

zakładając

$$\delta \bar{u} = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \delta \bar{w},$$

gdzie $\delta \bar{w}$ oznacza wariację przyśpieszenia, i pomijając siły bezwładnościowe. Przy tym wariacje δw_x , δw_y , δw_z spełniają warunki więzów (3.2), (3.3) i (3.6).

Zamieniając wariacje przyśpieszeń we wzorze (3.11) na wariacje prędkości spełniające identyczne warunki, otrzymano warunek (3.10). Wyraża on zmodyfikowaną zasadę Gaussa: wartość wymuszenia (3.9) dla pola rzeczywistych prędkości cieczy filtrującej jest mniejsza od wartości wymuszenia otrzymanej dla dowolnego pola prędkości spełniającego warunki (3.2), (3.3), (3.6). Stąd na podstawie wzoru (3.7) wypływa wniosek, że całka

$$\iiint_{(V)} (\text{grad } p)^2 dV$$

osiąga dla przepływu rzeczywistego wartość minimalną.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Г. Четаев, *Об устойчивых фигурах равновесия некоторой однородной массы вращающейся жидкости под действием сил лучистого сжатия к центру тяжести*, Известия физико-математического общества при Казанском Университете, 1, 3, Казань 1926.
2. В. П. Тамуж, *Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела*, П.М.М., 24, 4 (1962).
3. В. ПРАГЕР, *Проблемы теории пластичности*, Москва 1958, 25—27, 47—49.
4. М. И. Рейтман, *Об одном методе решения задач динамики твердого тела и его приложении к неупругим оболочкам*, Известия АН СССР, Механика и машиностроение, 1964.
5. М. И. Рейтман, *Общий вариационный принцип в механике сплошной среды и его применение*, Строительная механика и расчет сооружений, Москва 1965, 9—12.
6. А. Р. Ржаницын, *Экстремальное свойство формы движения жестко-пластической системы, нагруженной за пределом несущей способности*, Известия АН СССР, Отделение технических наук, Механика и Машиностроение, 2 (1959).
7. Н. А. Кильчевский, Н. Н. Шепелевская, *Принцип наименьшего принуждения и некоторые его приложения в теории фильтрации*, Научные доклады высшей школы, Раздел „Строительство”, 4, (1958).

POLITECHNIKA W WOLGOGRAZDZIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 sierpnia 1975 r.

ZASTOSOWANIE FORMUŁY LIEBMANNA
DO OPRACOWYWANIA WYNIKÓW BADAŃ ELASTOOPTYCZNYCH

RYSZARD WOJNAR (WARSZAWA)

1. Wstęp

Podstawowym problemem pojawiającym się przy stosowaniu metod elastoptycznych opartych na pomiarze względnej dwójłomności wymuszonej do wyznaczania pól naprężeń jest problem tzw. rozdzielania naprężeń, tj. wyznaczenia wartości naprężeń normalnych na podstawie obrazów izochrom i izoklin. Metody elastoptyczne pozwalają w ogólnym wypadku trójwymiarowego stanu naprężenia wyznaczyć tylko naprężenie styczne i różnice naprężeń normalnych [1]. Dodatkową informację np. o wartości jednego z naprężeń normalnych lub o wartości ich sumy, konieczną do rozdzielania naprężeń, uzyskujemy korzystając z metod nieelastoptycznych, np. całkując jedno z różniczkowych równań równowagi lub jedno z różniczkowych równań zgodności odkształceń. W szczególności, z tych ostatnich, jak wiadomo, wynika, iż w zagadnieniu statycznym suma naprężeń normalnych spełnia różniczkowe równanie Laplace'a, np. [2, 3].

Jedynie na powierzchni modelu lub w zagadnieniu dwuwymiarowym, a więc gdy znana jest jedna z trzech składowych normalnych tensora naprężenia, możemy rozdzielić naprężenia korzystając tylko z obrazów izochrom i izoklin. Należy jednak dodać, że również i wtedy, jeśli z jakichś powodów wywołanych np. warunkami doświadczenia można uzyskać obrazy izochrom i izoklin tylko przy jednym kierunku prześwietlania modelu (jest nim na ogół w zagadnieniach dwuwymiarowych kierunek prostopadły do powierzchni modelu), to do wyznaczania składowych normalnych tensora naprężenia musimy skorzystać z metod nieelastoptycznych. Metody te są tym bardziej trudne i kłopotliwe, gdy dysponujemy samym tylko obrazem izochrom.

W pracy niniejszej chcemy zwrócić uwagę na ułatwienia, jakie można uzyskać stosując w zagadnieniach dwu- i trójwymiarowych formułę Liebmanna lub jej uogólnienia.

2. Formuły typu Liebmanna

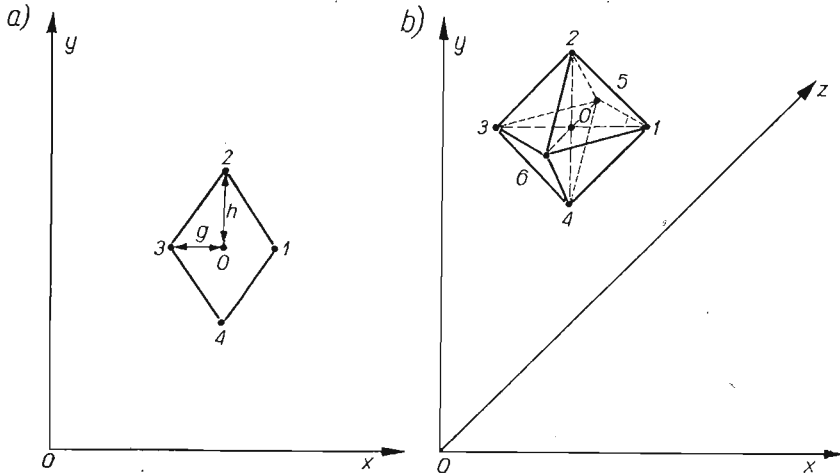
Jak wiadomo, jeśli w pewnym dwuwymiarowym obszarze określona jest funkcja harmoniczna $S(x, y)$, tzn. funkcja spełniająca równanie Laplace'a

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) S(x, y) = 0$$

i jeśli wartości tej funkcji w wierzchołkach rombu 1, 2, 3, 4, o przekątnych równoległych do osi Ox , Oy (rys. 1a), wynoszą odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 , zaś wartość funkcji w punkcie przecięcia się przekątnych wynosi S_0 , to ma miejsce następujący związek, [4, 5]:

$$(2) \quad S_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+(g/h)^2} (S_1 + S_3) + \frac{1}{1+(h/g)^2} (S_2 + S_4) \right],$$

przy czym g/h oznacza stosunek długości przekątnej równoległej do osi x do długości przekątnej równoległej do osi y . Związek ten jest słuszny z dokładnością do wyrazów zawierających pochodne cząstkowe funkcji S czwartego i wyższego rzędu.



Rys. 1. Różnicowe siatki punktów do formuł Liebmanna

Jeśli $g = h$, tzn. jeśli romb jest kwadratem, to

$$(3) \quad S_0 = \frac{1}{4} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4),$$

skąd

$$(4) \quad S_4 = 4S_0 - S_1 - S_2 - S_3.$$

Z kolei, jeśli funkcja harmoniczna określana jest w przestrzeni trójwymiarowej, a więc jeśli zachodzi równanie

$$(5) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S(x, y) = 0,$$

i jeśli jej wartości w wierzchołkach ośmiościanu o jednakowych przekątnych wynoszą S_i , $i = 1, \dots, 6$, wartość zaś w środku wynosi S_0 (patrz rys. 1b), to ma miejsce proste uogólnienie formuły (3)

$$(6) \quad S_0 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 S_i.$$

Również i ono jest słuszne z dokładnością do wyrazów zawierających pochodne cząstkowe S rzędu czwartego i wyższego.

Szczególnym przypadkiem zagadnień trójwymiarowych jest zagadnienie osiowo symetryczne. Wtedy funkcje zależą tylko od zmiennej z skierowanej wzdłuż osi symetrii i od zmiennej r prostopadłej do tej osi, a równanie Laplace'a jest, następujące [3]:

$$(7) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) S(z, r) = 0.$$

Różnicowym odpowiednikiem tego równania jest związek

$$(8) \quad S_0 = \frac{1}{4} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4),$$

jeśli punkt O leży na Oz , lub

$$(9) \quad S_0 = \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{h}{2r} \right) S_1 + \left(1 - \frac{h}{2r} \right) S_3 + S_2 + S_4 \right],$$

jeśli punkt O nie leży na osi Oz (porównaj Dodatek 1). S_1, S_2, S_3, S_4 , są to wartości funkcji S w narożach kwadratu 1, 2, 3, 4, którego przekątne skierowane są równoległe do osi Oz i Or (rys. 1a, przy czym oś Oz odpowiada osi Oy , zaś Or osi Ox z tego rysunku). Formuła (9) w odróżnieniu od formuł poprzednich słuszna jest jednak tylko z dokładnością do wyrazów zawierających pochodne cząstkowe trzeciego i wyższych rzędów w kierunku Or i pochodne czwartego i wyższych rzędów w kierunku Oz .

Formułę (3) po raz pierwszy podał w swoim wykładzie BOLTZMANN w r. 1892, [5, 6]. Niezależnie wyprowadził ją RUNGE, [7]. Formuła ogólniejsza (2) i formuła dla zagadnień trójwymiarowych (6) należy do LIEBMANNA [5]. Dowód zbieżności tych formuł do rozwiązania równania różniczkowego przy malejącym kroku różnicowym podany jest w [8], patrz też [9, 10, 11].

3. Zastosowanie formuł typu Liebmanna

3.1. Zagadnienia dwuwymiarowe. Jeśli możemy uzyskać tylko obraz izochrom w prostopadłej do modelu elastoptycznego wiązce światła spolaryzowanego, to rozdzielić naprężenia można¹⁾:

1) metodą doświadczalną zaproponowaną przez TESAŘA [12], polegającą na wywierceniu otworków w interesujących punktach modelu i wyznaczeniu stanu naprężenia na podstawie obrazu izochrom wokół tego otworku,

2) metodami obliczeniowymi: metodą rozwiązania równania Laplace'a lub metodą charakterystyk [13, 14].

Metoda doświadczalna powoduje lokalną zmianę własności sprężystych modelu wokół otworka i dlatego nie może być stosowana do zbyt dużej ilości punktów. Z kolei metody

¹⁾ Pomijamy tu, zgodnie z ograniczeniem uczynionym we wstępie, metody oparte na bezwzględnych pomiarze dwójłomności, a więc w szczególności metody polegające na otrzymywaniu izopach metodami interferencji klasycznej i holograficznej. Pomijamy też metody pomiaru zmian grubości modelu tarczowego lub pomiaru efektów termicznych w celu wyznaczenia sumy naprężeń głównych, jako nieelastoptyczne i mało dokładne. Oczywiście jest jednak, że proponowana w tekście metoda nadaje się również do opracowywania wyników takich pomiarów.

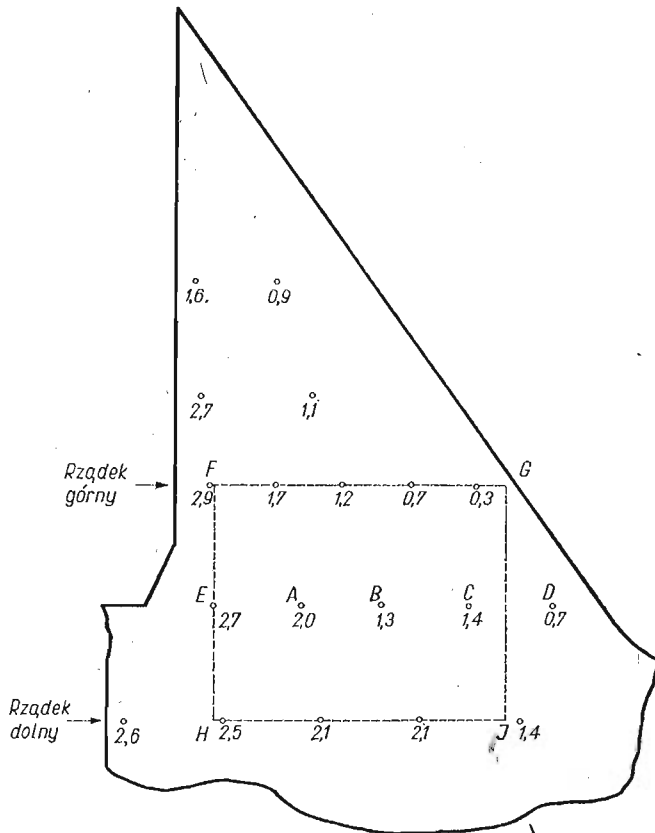
numeryczne są dość kłopotliwe w zastosowaniu: pracochłonne przy obliczeniach ręcznych, dość trudne w zaprogramowaniu maszyny cyfrowej dla dowolnego kształtu modelu. W szczególności metoda charakterystyk wymaga podania dość gęstej, a więc uciążliwej w sporządzeniu, tablicy wartości izochrom $m(x, y)$ w całym obszarze badanego ośrodka.

W związku z tym nasuwają się dwie możliwości wykorzystania formuły Liebmana:

a) zastosowanie formuły Liebmana w połączeniu z metodą TESARA pozwala zmniejszyć ilość wierconych w modelu otworów;

b) wynikający z formuły Liebmana związek (4) pozwala badać harmonicznąść rozwiązania uzyskiwanego metodą charakterystyk i ewentualnie wygładzić rozwiązanie lub je ekstrapolować.

Przykład 1. Na rys. 2 podano wartości sumy S naprężeń normalnych w modelu zapory w jednostkach stałej modelowej K , na podstawie wyników pracy [15], w której zastosowano do rozdzielania naprężeń metodę wiercenia otworków w poszczególnych interesujących punktach. Zajmiemy się stanem naprężenia wzdłuż linii ED będącej geometryczną granicą zapory. Pokażemy, że można było uniknąć wiercenia otworków A lub B stosując



Rys. 2. Sumy naprężeń głównych w poszczególnych punktach modelu zapory grawitacyjnej obciążonej ciężarem własnym, wyznaczone metodą wiercenia otworków, wg. [15]. Wartości naprężeń podano w jednostkach stałej modelowej K . Linia przerywaną oznaczono prostokąt, w którym szukamy sumy naprężeń metodą iteracji

tylko jeden raz formułę Liebmanna oraz obu tych otworków stosując tę formułę w sposób iteracyjny.

Dokonajmy interpolacji graficznej wartości sumy naprężeń S znalezionych metodą TESAŘA w rzędku FG i HJ , a to celem uzyskania wartości sumy S w wierzchołkach „2” i „4” (rys. 1a) rombów, których środki przypadają w punktach A lub B .

Znajdujemy, stosując formułę (2), w której przyjmujemy $g/h = 2/3$, że w jednostkach stałej modelowej:

$$(10) \quad S_A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1,444} (2,7 + 1,3) + \frac{1}{3,25} (1,46 + 2,2) \right] = 1,95,$$

$$S_B = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1,444} (2,0 + 1,4) + \frac{1}{3,25} (0,9 + 2,05) \right] = 1,63.$$

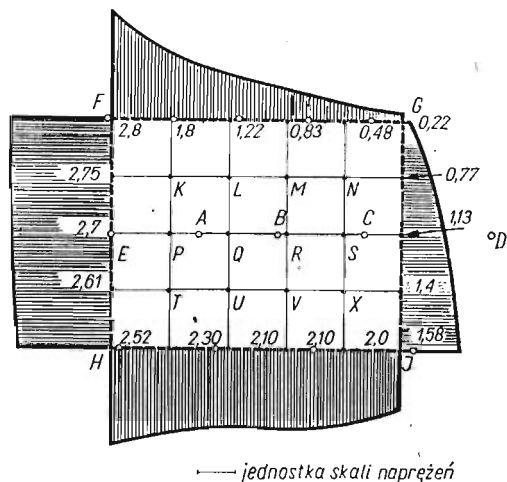
Wskaźniki A , B oznaczają, że wartość S odnosi się do tych punktów. Porównując je z bezpośrednio zmierzonymi metodą TESAŘA, widzimy, że odpowiednie różnice wynoszą 0,05 i 0,33. Mieszczą się one w granicach błędu doświadczalnego. Mianowicie, w metodzie TESAŘA sumę naprężeń głównych wyznacza się na podstawie maksymalnych wartości naprężeń na brzegu otworka: m_I i m_{II} , za pomocą wzoru, por. [12],

$$(12) \quad S = \sigma' + \sigma'' = \frac{1}{2} (m_I + m_{II}).$$

Zgodnie z [15, 23] dokładność pomiaru każdej z wartości m_I i m_{II} wynosiła 0,5 rzędu izochromy, zatem średni błąd kwadratowy sumy S wynosił

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} \times 0,5 \cong 0,35,$$

co usprawiedliwia wartość różnic między wielkościami zmierzonymi a obliczonymi.



Rys.3. Sieć różnicowa do znalezienia sumy naprężeń metodą iteracji w prostokącie $FGHJ$ z rys. 2. Krzywe nad polami zakreskowanymi przedstawiają w jednostkach stałej modelowej przebieg sumy naprężeń wzdłuż boków prostokąta. Podane liczby oznaczają wartości sumy naprężeń w brzegowych węzłach sieci (wykorzystane do dalszych obliczeń). Szukamy wartości naprężeń w punktach K , L , ..., V , X . Kółkami oznaczono położenia otworków (por. rys. 2)

Aby się przekonać, które z powyższych wartości S_A i S_B , zmierzone czy obliczone, zgadzają się bardziej z wartościami zmierzonymi w pozostałych punktach, zastosujemy metodę iteracyjną. Pozwoli nam ona uzyskać dokładniejsze wartości sumy naprężeń oraz pozwoli wykazać, że można było uniknąć wiercenia obu otworków A i B . Wydzielmy z rozważanego ośrodka obszar prostokąta $FGHJ$ (rys. 2). Bok GJ zamyka prostokąt w ten sposób, by mieściła się w nim całkowita liczba elementarnych kwadratów siatki różnicowej, co znacznie ułatwia obliczenia. Wartości sumy naprężeń na bokach prostokąta znajdujemy na drodze interpolacji graficznej z danych doświadczalnych otrzymanych metodą TESARŃA. W szczególności wartość „1,13” pośrodku boku GJ znajdujemy z interpolacji wzdłuż odcinka $ABCD$. Następnie biorąc dla każdego węzła sieci średnią z wartości otrzymanych na drodze interpolacji liniowej w kierunku poziomym i pionowym, znajdujemy przybliżenie zerowe rozwiązania na sumę naprężeń S wewnątrz prostokąta (rys. 3). Wartości kolejnych iteracji zamieszczone są w tablicy 1. Widzimy, że wartości otrzymane już w pierwszej iteracji ulegają w dalszych iteracjach niewielkim zmianom.

Tablica 1. Kolejne iteracje dla prostokątnego podobszaru zapory

Punkt		K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	X
interpolacja liniowa	pozioma	2,35	1,96	1,48	1,15	2,38	2,06	1,77	1,46	2,40	2,14	1,90	1,64
	pionowa	1,92	1,43	1,16	0,61	2,04	1,66	1,49	0,74	2,18	1,88	1,80	0,89
przybliżenie zerowe		2,14	1,70	1,32	0,88	2,21	1,86	1,63	1,10	2,29	2,01	1,85	1,26
iteracja I		2,12	1,64	1,26	0,92	2,24	1,88	1,50	1,28	2,28	2,02	1,75	1,59
iteracja II		2,11	1,62	1,15	0,95	2,24	1,85	1,54	1,28	2,29	2,00	1,80	1,61
iteracja III		2,10	1,58	1,24	0,92	2,24	1,85	1,52	1,31	2,29	2,01	1,81	1,62
iteracja IV		2,09	1,60	1,21	0,95	2,24	1,84	1,55	1,30	2,29	2,01	1,81	1,63
iteracja V		2,10	1,59	1,23	0,94	2,23	1,85	1,54	1,32	2,29	2,01	1,82	1,63

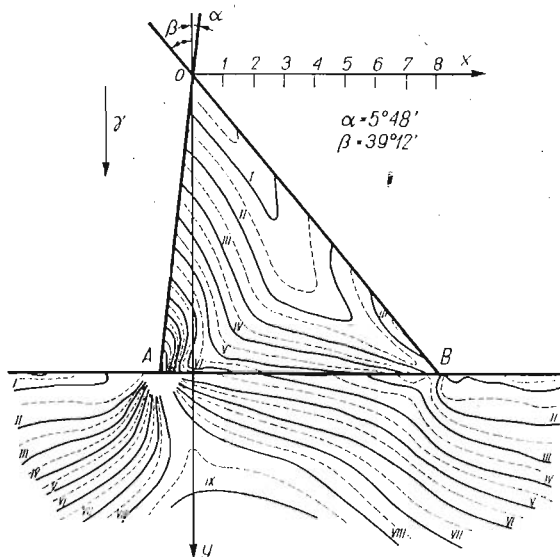
Jeśli korzystając z wyników tablicy 1 i rozmieszczenia punktów A i B względem odpowiednich par punktów (P, Q) i (Q, R) znajdziemy na drodze interpolacji liniowej wartości S_A i S_B , jako

$$(12) \quad S_A \cong \frac{1}{2}(S_P + S_Q) = 2,04,$$

$$S_B \cong S_R + \frac{1}{8}(S_Q - S_R) = 1,58,$$

to zobaczymy, zwłaszcza na przykładzie S_B , że wartości znalezione metodą obliczeniową, dane związkami (10), są w lepszej zgodności z wynikami (12) uzyskanymi na drodze iteracyjnej niż wyniki uzyskane z bezpośredniego pomiaru doświadczalnego, podane na rys. 2. Świadczy to o zaletach metody obliczeniowej.

Przykład 2. Korzystając z obrazu izochrom mamy znaleźć sumę naprężeń $S(x, y = 10)$ wzdłuż podstawy AB trójkąta obciążonego ciężarem własnym γ i posadowionego na półpłaszczyźnie o 2,4 razy niższym module Younga i takiej samej stałej Poissona ($\nu = 0,5$). Proporcje trójkąta, kierunek działania siły γ i obraz izochrom pokazany jest na rys. 4.

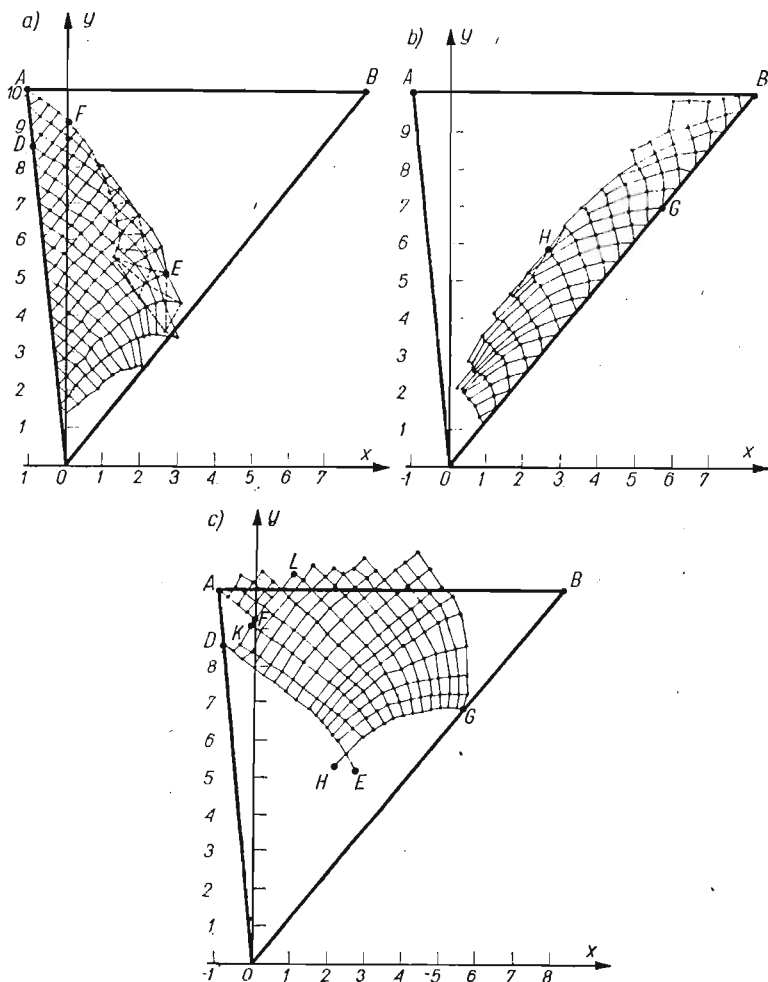


Rys. 4. Obraz izochrom w tarczy niejednorodnej omawianej w przykładzie 2. Liczby rzymskie numerują całkowite rzędy izochrom

Do rozdzielania naprężeń wykorzystaliśmy metodę charakterystyk. Spodziewaliśmy się, dzięki ekstrapolacyjnym właściwościom formuł różnicowych tej metody, wyznaczyć stan naprężenia wzdłuż linii niejednorodności AB , obchodząc w ten sposób trudność modelowania płaskiego stanu naprężenia wzdłuż linii niejednorodności, występującą przy stosowaniu niejednorodnej tarczy [16]²⁾.

Do części linii niejednorodności AB mogliśmy się zbliżyć budując sieć charakterystyk od strony boku OB , tzn. rozwiązując problem brzegowy rys. (5b). Aby zbliżyć się do pozostałej części linii AB rozwiązywaliśmy najpierw problem brzegowy budując sieć charakterystyk od strony boku OA (rys. 5a). Następnie rozwiązywaliśmy problem charakterystyczny, tzn. budowaliśmy sieć charakterystyk wychodząc ze znanych już charakterystyk należących do dwu rodzin. Problem charakterystyczny rozwiązywaliśmy dwukrotnie, raz wychodząc z charakterystyk DE i GH , i drugi raz wychodząc z charakterystyk AF i KL (rys. 5c). Okazało się jednak, że między rozwiązaniem $S(x, y = 10)$, tzn. na linii AB , otrzymanym

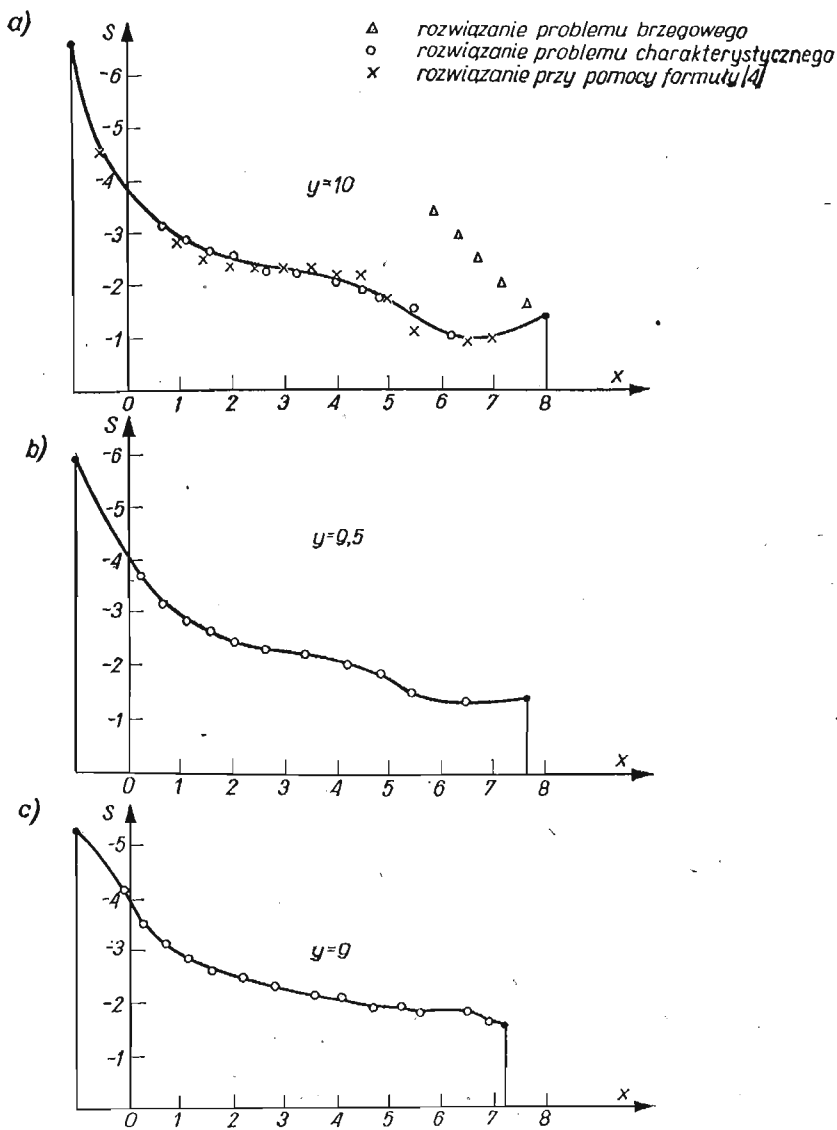
²⁾ Zasadnicza trudność w zastosowaniu tarczy, a więc bryły trójwymiarowej, do modelowania niejednorodnego ośrodka w dwuwymiarowym stanie naprężenia polega na tym, że wzdłuż granicy zmian własności ośrodka musi być spełniony warunek ciągłości sił i przemieszczeń opisywanych przez trójwymiarowe wektory. W związku z tym, w ogólności, wzdłuż wspomnianej granicy panuje nie dwuwymiarowy a trójwymiarowy stan naprężenia.



Rys. 5. Charakterystyki otrzymane przy rozwiązywaniu zagadnienia brzegowego, rys. rys. a), b) oraz charakterystycznego, rys. c) (por. przykład 2)

z rozwiązania problemu brzegowego a otrzymanym z problemu charakterystycznego zachodziła nieuzasadniona nieciągłość (rys. 6a).

Celem znalezienia poprawnego rozwiązania sporządziliśmy, korzystając z rozwiązania problemu charakterystycznego i brzegowego, wykresy zależności $S(x, y = 9,5)$ i $S(x, y = 9)$, które okazały się ciągłe (rys. 6b, c), a następnie umieszczając na prostej $y = 9,5$ punkty 0, 1, 3, na prostej $y = 9$ punkt 2, a na prostej $y = 10$ punkt 4, znaleźliśmy stosując formułę (4) szukany przebieg $S(x, y = 10)$ (rys. 6a). Przebieg ten jest ciągły i zgodny z rozwiązaniem problemu charakterystycznego. Wnioskujemy stąd, że nieciągłość rozwiązań $S(x, y = 10)$ otrzymanych z problemu charakterystycznego i brzegowego była wynikiem błędu w interpretacji obrazu izochrom jako różnicy naprężeń głównych, błędu wywołanego prawdopodobnie trójwymiarowym stanem naprężenia panującym w pobliżu



Rys. 6. Przebieg sumy naprężeń głównych (w jednostkach 2 K) wzdłuż trzech przekrojów trójkąta z rys. 4. Linia ciągła oznacza przebiegi przyjęte

AB. W zagadnieniu charakterystycznym, w którym brano wartość izochrom w punktach bardziej oddalonych od odcinka *AB* niż w zagadnieniu brzegowym, błąd ten był mniejszy.

Należy zauważyć, że średni błąd kwadratowy ΔS_2 wyników otrzymanych za pomocą formuły (4) wynosi (por. [17])

$$(13) \quad \Delta S_2 = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} \Delta S_0 \cong 4,4 \cdot \Delta S_0,$$

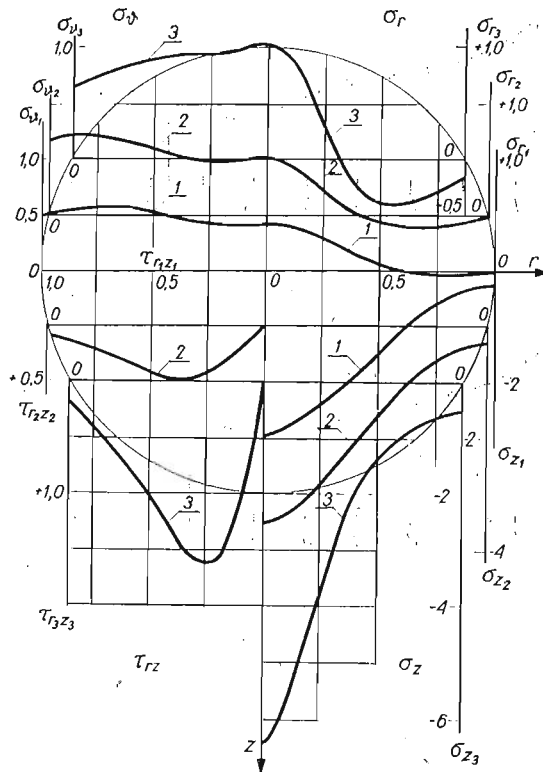
przy czym założyliśmy, że błędy wartości wyjściowych

$$\Delta S_0 = \Delta S_1 = \Delta S_3 = \Delta S_4$$

są sobie równe. Ze względu na czynnik ≈ 4 we wzorze (13) prowadzenie obliczeń przy pomocy formuły (4) wymaga dokładnych danych wyjściowych.

3.2. Osiowosymetryczne zagadnienie trójwymiarowe. Formuły (8) i (9) można wykorzystać do rozdzielenia naprężeń w zadaniach osiowo-symetrycznych metodą numerycznego rozwiązywania równania Laplace'a (7) na podstawie dostarczonych przez pomiar elastooptyczny warunków brzegowych, podobnie jak analogiczne formuły w zagadnieniach płaskiego stanu naprężenia (por. Dodatek I). Ponadto możemy je wykorzystywać do interpolacji i ekstrapolacji wyników otrzymywanych metodami punktowymi, takimi jak metody elastooptycznej warstwy perforowanej [15, 18] lub metody tensometryczne [19].

Stosowalność formuł (8) i (9) sprawdziliśmy opierając się na doświadczalnym rozwiązaniu dla kuli ściskanej wzdłuż średnicy siłami skupionymi, podanym w pracy [20] (rys. 7), gdzie znaleziono składowe tensora naprężeń w trzech przekrojach: $z = 0$, $z = 1/4$, $z = 1/2$, przy czym kierunek osi z , będącej osią walcowego układu współrzędnych pokrywał się z kierunkiem działania zewnętrznych sił ściskających, promień kuli wynosił 1.



Rys. 7. Składowe naprężenia w kuli sprężystej ściskanej osiowo siłą P . Wartości naprężeń podane są w jednostkach naprężenia nominalnego $\sigma_n = P/\pi r^2$ i oznaczone są przez σ_r , σ_z , σ_θ , τ_{rz} . Promień kuli R przyjęto równy 1, wg. Filimonowej [20]

Znając składowe σ_r , σ_θ , σ_z obliczamy przez zwykłe dodanie wartości sumy

$$S_i = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

w punktach 1, 2, 3, 4, a następnie znajdujemy wartość S_0 według formuł (8) albo (9).

W tablicy 2 porównano wyniki otrzymane za pomocą formuł (8) i (9), (kolumna VI) z bezpośrednimi wynikami eksperymentalnymi (kolumna IV), wziętymi z wymienionej pracy. Na ogół, w granicach błędu doświadczalnego, zachodzi zgodność obu wielkości.

Jeśli więc znamy wartość sumy naprężeń normalnych w punktach 1, 2, 3, 4, to stosując formułę (8) albo (9) możemy ją wyznaczyć w punkcie O z wystarczającą dokładnością i w ten sposób interpolować wyniki punktowych metod pomiaru składowych tensora naprężenia. Formuły te możemy stosować również do ekstrapolacji wyników.

P r z y k ł a d 3. Stosując metodę elastoptycznej warstwy perforowanej znajdujemy bezpośrednio naprężenia główne σ' , σ'' , a więc również ich sumę

$$\sigma' + \sigma'' = \sigma_r + \sigma_z.$$

Wartość $\sigma''' = \sigma_\theta$ jest znana tylko wzdłuż osi symetrii $r = 0$, gdzie

$$\sigma_\theta = \sigma_r,$$

a więc:

$$(14) \quad S(r = 0, z) = 2\sigma_r + \sigma_z.$$

Jeżeli punkty 2, 0, 4, ułożymy na osi $r = 0$, to ponieważ $S_1 = S_3$, ze wzoru (8) wynika, że

$$(15) \quad S_1 = 2S_0 - \frac{1}{2}(S_2 + S_4).$$

Dla (tablica 2) $S_0 = S(r = 0, z = 0) = -2,15$, $S_2 = S_4 = S\left(r = 0, z = \frac{1}{4}\right) = -2,6$, otrzymamy

$$S_1 = S_3 = S\left(r = \frac{1}{4}, z = 0\right) = -1,7,$$

bepośrednio zaś z pomiaru mamy również:

$$S_{\text{exp}}\left(r = \frac{1}{4}, z = 0\right) = -1,7.$$

3.3. Uściślenie doświadczalnych wartości funkcji harmonicznej. Jeśli wiemy, że funkcja, której pole wartości mierzymy doświadczalnie, jest funkcją harmoniczną, to możemy zastosować formułę Liebmanna do uściślenia tych wartości. Postępowanie jest takie, jak przy numerycznym rozwiązywaniu równania Laplace'a (por. [13]) z tym, że wartości znalezione doświadczalnie uważamy za przybliżenie zerowe w iteracyjnym ciągu przybliżeń rozwiązania. Sposobem tym można poprawić i uzupełnić znalezione doświadczalnie wartości sumy naprężeń głównych. Szczególnie korzystne jest jego zastosowanie przy wyznaczaniu naprężeń metodą kombinowania pomiaru elastoptycznego z pomiarem odkształceń siatki naniesionej na badany obiekt (por. [21, 22]). W metodzie tej z pomiaru elastoptycznego

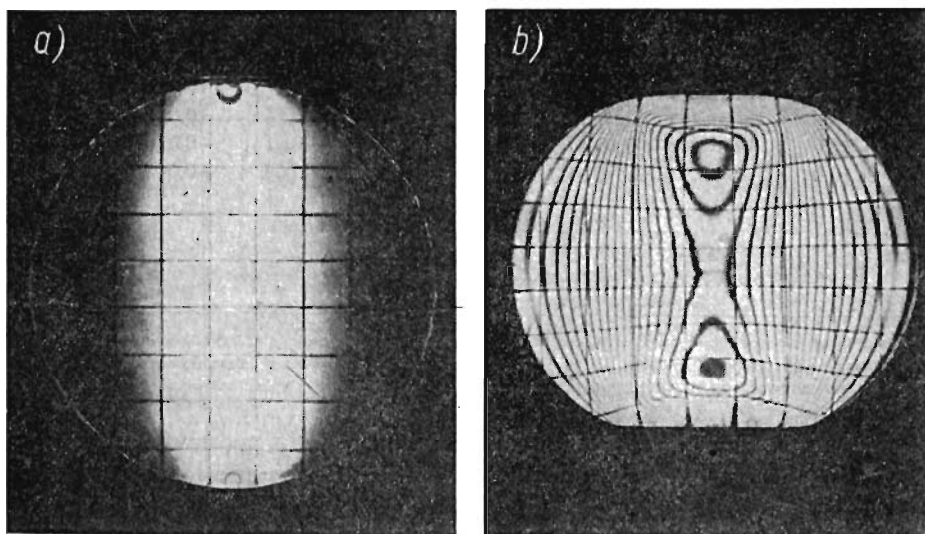
Tablica 2. Porównanie wyników eksperymentalnych, [20], rys. 7, z wynikami otrzymanymi metodą interpolacji (wzory (8), (9)) dla kuli ściskanej osiowo

I nr punktu	II Współrzędne punktu		III			IV $S_{exp} =$ $= \sigma_z + \sigma_r + \sigma_\theta$	V błąd danych eksperymentalnych	VI $S_{interpol.}$	VII $\Delta = S_{exp}$ $- S_{interpol.}$	VIII $\frac{\Delta}{S_{exp}}$ %
	r	z	σ_z	σ_r	σ_θ					
1	0,0	0	-2,95	0,4	0,4	-2,15		-2,15	0	0
2	0,25	0	-2,4	0,3	0,4	-1,7		-1,66	0,04	2
3	0,5	0	-1,45	0,05	0,55	-0,85		-0,86	0,01	1
4	0,75	0	-0,6	-0,05	0,6	-0,05				
5	0	0,25	-3,6	0,5	0,5	-2,6	7%	-2,71	0,11	4
6	0,25	0,25	-2,9	0,25	0,5	-2,15		-1,82	0,33	15
7	0,5	0,25	-1,6	-0,1	0,65	-1,05		-0,88	0,17	16
8	0,75	0,25	-0,65	-0,1	0,7	-0,05				
9	0	0,5	-6,4	1,0	1,0	-4,4	12%			
10	0,25	0,5	-3,95	0,3	0,9	-2,75				
11	0,5	0,5	-1,4	-0,4	0,8	-1,0				

wyznaczamy różnicę naprężeń głównych i ich kierunki, a z pomiaru odkształceń siatki sumę naprężeń głównych. Pomiar siatkowy jest jednak przynajmniej o rząd wielkości mniej dokładny niż pomiar elastoptyczny i dlatego dla sensownego połączenia wyników obu pomiarów celem rozdzielania naprężeń konieczne jest poprawienie wyników pomiaru odkształceń siatki (porównaj Dodatek II).

Przykład 4. Tarcza kołowa o średnicy 4,4 cm i grubości 1 cm, wykonana z żywicy poliuretanowej PU-2 o module Younga $E = 33 \text{ kG/cm}^2$, liczbie Poissona $\nu = 0,5$ i elastoptycznej stałej materiałowej $K = 0,30 \text{ kG/cm}^2$ ściskana jest wzdłuż średnicy siłą $P = 8,3 \text{ kG}$. Na tarczę naniesiono za pomocą stempla i farby drukarskiej kwadratową siatkę. Bok elementarnego kwadratu siatki ma długość 0,5 cm. Wyznamy pole sumy naprężeń $S(x, y)$ w obszarze tarczy łącząc wyniki pomiaru elastoptycznego, pomiaru odkształceń siatki i obliczeń iteracyjnych.

Siatkę przed i po odkształceniu przedstawiono na rys. 8. Wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych, którego początek znajduje się w środku tarczy kołowej. Każdy kwadrat numerujemy parą liczb $(y/a, x/a)$, gdzie (x, y) są to współrzędne środka danego



Rys. 8. Kolowa tarcza elastoptyczna z naniesioną siatką: przed i po odkształceniu, patrz przykład 4. Rozjaśnienie w części środkowej rys. a) wywołane jest przez niewielkie obciążenie wstępne

kwadratu. Tablica 3 przedstawia wyniki pomiarów odkształceń i wyznaczone na ich podstawie średnie wartości sumy naprężeń dla poszczególnych kwadratów siatki. Wartości S dla kwadratów $(4, 0)$, $(4, 1)$ bierzemy z teoretycznego rozwiązania zagadnienia półpłaszczyzny obciążonej prostopadłe na brzegu siłą skupioną, wartości dla kwadratów $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$ z elastoptycznego pomiaru naprężeń brzegowych. Budujemy teraz układ równań Liebmanna dla wartości funkcji S w węzłach kwadratowej sieci różnicowej znajdujących się pośrodku kwadratów siatki. Węzłom tym przypisujemy numery odpowiednich kwadratów. Na rys. 9 widoczne są wyniki kolejnych iteracji tego układu. Dla przyspieszenia zbieżności w węzłach, w których występowały silne oscylacje

Tablica 3

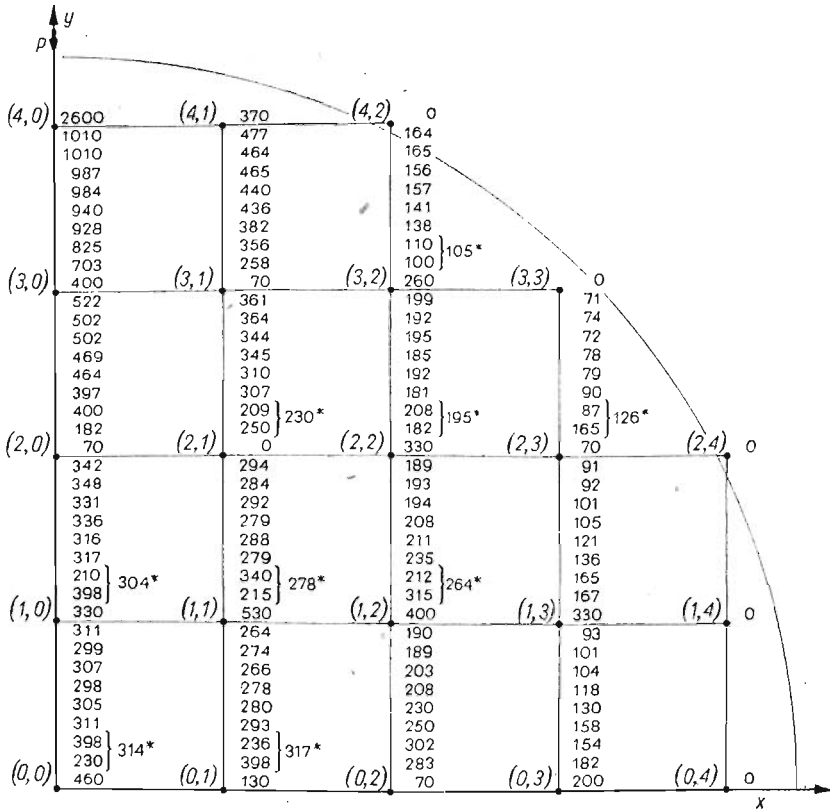
Kwadrat	^{*)} $\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta x' = x_2' - x_1'$	$\frac{\varepsilon_x = \Delta x' - \Delta x}{\Delta x}$	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta y' = y_1' - y_2'$	$\frac{\varepsilon_x = \Delta y' - \Delta y}{\Delta y}$	$\varepsilon_x + \varepsilon_y$	$S = \sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 66 (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ kG/cm ²
0,0	9,8	10,8	0,10	9,8	8,1	-0,17	-0,07	- 4,6
0,1	10,0	11,0	0,10	9,8	8,6	-0,12	-0,02	- 1,3
0,2	9,9	10,6	0,07	9,8	9,0	-0,08	-0,01	- 0,7
0,3	9,8	10,0	0,02	9,8	9,3	-0,05	-0,03	- 2,0
0,4								0
1,0	9,6	10,9	0,13	10,0	8,2	-0,18	-0,05	- 3,3
1,1	10,0	10,8	0,08	10,0	8,4	-0,16	-0,08	- 5,3
1,2	10,0	10,5	0,05	10,0	8,9	-0,11	-0,06	- 4,0
1,3	9,8	10,0	0,02	10,0	9,3	-0,07	-0,05	- 3,3
1,4								0
2,0	9,8	10,8	0,10	9,8	8,7	-0,11	-0,01	- 0,7
2,1	10,0	11,0	0,10	9,8	8,8	-0,10	0	0
2,2	10,0	10,2	0,02	9,9	9,2	-0,07	-0,05	- 3,3
2,3	9,8	10,0	0,02	10,0	9,9	-0,01	0,01	- 0,7
2,4								0
3,0	9,8	10,6	0,08	10,3	8,9	-0,14	-0,06	- 4,0
3,1	10,0	11,0	0,10	10,3	9,2	-0,11	-0,01	- 0,7
3,2	10,0	10,0	0	10,3	9,9	-0,04	-0,04	- 2,6
3,3								0
4,0								-26,0
4,1								- 3,7
4,2								0

* Rzeczywisty element siatki tensometrycznej, ze względu na wady jej wykonania, jest tylko w przybliżeniu kwadratem o boku a . Długości jego boków w ogólności nie są sobie równe i wynoszą Δx , Δy przed odkształceniem oraz $\Delta x'$, $\Delta y'$ po odkształceniu. Pomiary prowadzono przy dwukrotnym powiększeniu. Długości podane są w milimetrach.

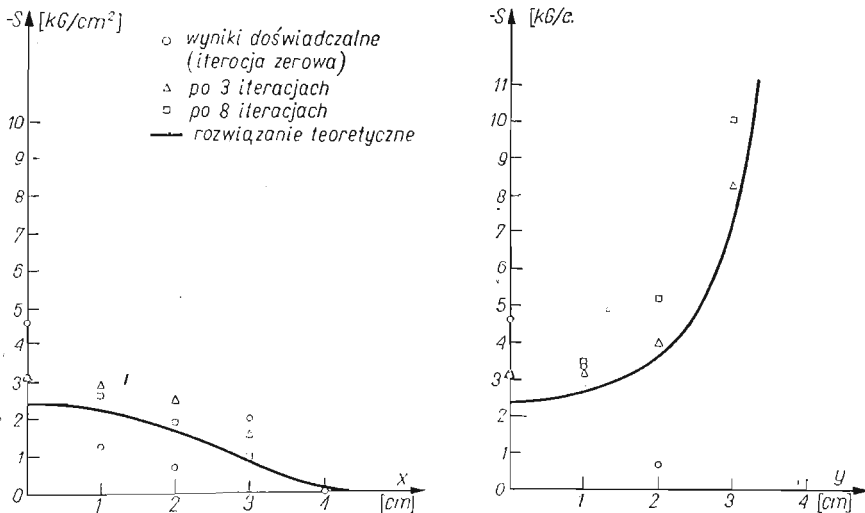
wartości kolejnych iteracji, dokonaliśmy ich uśrednienia. Na podstawie danych z rys. 9 sporządziliśmy na rys. 10 wykres funkcji S wzdłuż średnicy prostopadłej do kierunku działania siły ściskającej (oś x), i średnicy pokrywającej się z tym kierunkiem. Obserwujemy, że już po trzech iteracjach zachodzi znaczna poprawa wyników doświadczalnych i zbliżenie ich do ścisłego rozwiązania teoretycznego. Dokładność wyników iteracji niższa jest wzdłuż osi y , co wynika z bardziej stromego przebiegu funkcji S wzdłuż tej osi.

4. Zakończenie

Pokazaliśmy powyżej, że zastosowanie formuł typu Liebmana ułatwia opracowanie wyników badań elastooptycznych zagadnień płaskich i osiowo symetrycznych, jak również pozwala uściślić wyniki doświadczalne. W związku z tym chcielibyśmy zwrócić jeszcze uwagę na to, że wartości otrzymane metodą Liebmana obciążone są mniejszym błędem przypadkowym niż wyjściowe wartości brzegowe, co wynika stąd, że w metodzie tej bierze się pewnego rodzaju średnią wartości brzegowych. Dla skonkretyzowania rozważmy



Rys. 9. Wyniki kolejnych iteracji w węzłach sieci różnicowej. Wskaźnik iteracji wzrasta począwszy od dołu każdej kolumny wyników. Gwiazdkami oznaczono wynik uśrednienia stosowany do dalszych iteracji. Wartości naprężeń w kg/cm^2 pomnożono przez czynnik (-100)



Rys. 10. Wyniki wybranych iteracji wzdłuż promienia prostopadłego do kierunku działania siły (oś x) i zgodnego z tym kierunkiem (oś y), porównane z rozwiązaniem teoretycznym

obszar dwuwymiarowy $AB \dots GH$ pokazany na rys. 11. Przypuśćmy, że na podstawie znanych wartości brzegowych $S_A, S_B, \dots, S_G, S_H$ chcemy znaleźć za pomocą formuły Liebmanna (3) wartości funkcji S w punktach wewnętrznych 1, 2, 3, 4. Mamy następujący układ równań

$$4S_1 = S_2 + S_3 + S_A + S_B,$$

$$4S_2 = S_1 + S_4 + S_C + S_D,$$

$$4S_3 = S_1 + S_4 + S_G + S_H,$$

$$4S_4 = S_2 + S_3 + S_E + S_F,$$

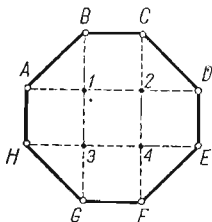
którego rozwiązaniem jest

$$S_1 = \frac{1}{12} \left[\frac{7}{2} (S_A + S_B) + \frac{1}{2} (S_E + S_F) + S_C + S_D + S_G + S_H \right],$$

$$S_2 = \frac{1}{12} \left[\frac{7}{2} (S_C + S_D) + \frac{1}{2} (S_G + S_H) + S_A + S_B + S_E + S_F \right],$$

$$S_3 = \frac{1}{12} \left[\frac{7}{2} (S_G + S_H) + \frac{1}{2} (S_C + S_D) + S_A + S_B + S_E + S_F \right],$$

$$S_4 = \frac{1}{12} \left[\frac{7}{2} (S_E + S_F) + \frac{1}{2} (S_A + S_B) + S_C + S_D + S_G + S_H \right].$$



Rys. 11. Obszar, dla którego przedyskutowano wpływ przypadkowego błędu warunku brzegowego na błąd rozwiązań układu równań Liebmanna

Jeśli błąd wartości S w każdym punkcie brzegowym jest taki sam i wynosi δ , wtedy błąd średni kwadratowy każdej z wartości S_i , $i = 1, 2, 3, 4$, wynosi

$$\Delta S_i = \frac{1}{12} \left(\frac{49}{4} + \frac{49}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 + 1 + 1 \right)^{1/2} \delta \cong 0,45\delta,$$

a więc jest przeszło dwukrotnie mniejszy od wartości δ . Natomiast błąd maksymalny

$$\Delta_{\max} S_i = \frac{1}{12} \left(\frac{7}{2} + \frac{7}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 + 1 \right) \delta = \delta$$

jest równy wartości δ .

Podziękowanie

Panu Dr inż. B. MICHAŁSKIEMU dziękuję za dyskusję niektórych zagadnień związanych z niniejszą pracą.

Dodatek I. Równanie różniczkowe może być wyprowadzone jako warunek znikania wariacji funkcjonału

$$(I.1) \quad \delta P(S) = \left[\frac{d}{de} P(S + eS^1) \right]_{e=0},$$

przy czym

$$(I.2) \quad P(S) = \int_D \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz,$$

gdzie D jest polem przekroju rozważanej bryły osiowo-symetrycznej płaszczyzną stałego kąta azymutalnego $\vartheta = \text{const}$.

Przybliżając pochodne cząstkowe w wyrażeniu (I.2) przez różnice przednie

$$(I.3) \quad \frac{dS}{dr} \cong \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{h}, \quad \frac{dS}{dz} \cong \frac{S_{i,j+1} - S_{i,j}}{h},$$

gdzie pierwszy wskaźnik „ i ” numeruje węzły sieci różnicowej w kierunku osi r , drugi wskaźnik „ j ” — w kierunku osi z , zaś h jest krokiem sieci różnicowej, dostajemy następujący analogon funkcjonału (I.2).

$$(I.4) \quad P_p(S) = \sum_D \frac{i}{h} [(S_{i+1,j} - S_{i,j})^2 + (S_{i,j+1} - S_{i,j})^2].$$

Pamiętamy, że $r = ih$.

Sumowanie rozciąga się po wszystkich wskaźnikach i, j należących do obszaru D . Przyjmujemy przy tym konwencję, że różnica wartości funkcji $S_{i+1,j} - S_{i,j}$ lub $S_{i,j+1} - S_{i,j}$ brana w sąsiednich punktach, z których jeden należy do obszaru D , a drugi nie należy, wynosi zero. Znikanie wariacji funkcjonału (I.4) wymaga by spełniony był układ równań

$$(I.5) \quad (i-1)S_{i-1,j} + i(S_{i+1,j} + S_{i,j+1} + S_{i,j-1}) = (4i-4)S_{i,j}.$$

Z kolei przybliżając pochodne cząstkowe w wyrażeniu (I.2) przez iloraz różnicowy wsteczny

$$(I.6) \quad \frac{dS}{dr} \cong \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{h}, \quad \frac{dS}{dz} \cong \frac{S_{i,j} - S_{i,j-1}}{h}$$

dostajemy następujący analogon funkcjonału (I.2)

$$(I.7) \quad P_w(S) = \sum_D \frac{i}{h} [(S_{i,j} - S_{i-1,j})^2 + (S_{i,j} - S_{i,j-1})^2].$$

Przyjmujemy przy tym konwencję, że różnica wartości funkcji $S_{i,j} - S_{i-1,j}$ lub $S_{i,j} - S_{i,j-1}$ brana w sąsiednich punktach, z których jeden należy do obszaru D , a drugi nie należy, wynosi zero.

Znikanie wariacji funkcjonału (I.7) wymaga by spełniony był układ równań

$$(I.8) \quad (i+1)S_{i+1,j} + i(S_{i-1,j} + S_{i,j+1} + S_{i,j-1}) = (4i+1)S_{i,j}.$$

Można dowieść w sposób podobny, jak to czynią autorzy pracy [8] dla dwuwymiarowego równania Laplace'a, że przy malejącym kroku sieci h rozwiązanie zarówno równania (I.5) jak i (I.8) dąży do rozwiązania równania różniczkowego (7). W związku z tym, zgodnie ze znanym twierdzeniem o granicy sumy ciągów, również rozwiązanie równania powstałego z dodania równań (I.5) i (I.8)

$$(I.9) \quad (2i-1)S_{i-1,j} + (2i+1)S_{i+1,j} + 2i(S_{i,j+1} + S_{i,j-1}) = 8iS_{i,j}$$

będącego w istocie równaniem (9), dąży przy $h \rightarrow 0$ do rozwiązania równania (7). Równanie różnicowe (9) możemy otrzymać również bezpośrednio z równania różniczkowego (7) przybliżając pierwszą pochodną przez iloraz różnicowy środkowy

$$(I.10) \quad \frac{dS}{dr} = \frac{S_{i+1,j} - S_{i-1,j}}{2h};$$

oczywiście przybliżamy ponadto

$$(I.11) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = \frac{S_{i+1,j} - 2S_{i,j} + S_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{S_{i,j+1} - 2S_{i,j} + S_{i,j-1}}{h^2}.$$

Podany niżej przykład wskazuje, że symetryczna formuła (8), (9) lepiej przybliża równanie różniczkowe niż formuły niesymetryczne (I.5) czy (I.8).

P r z y k ł a d 5. Rozważmy nieskończony stożek sprężysty o kącie wierzchołkowym wynoszącym $2\alpha = \pi/2$, obciążony w wierzchołku wzdłuż osi symetrii siłą F . Wartości naprężeń, a więc i wartości sumy naprężeń S są w takim stożku znane, [24]. W walcowym układzie współrzędnych mamy

$$(I.12) \quad S = -\frac{Q}{4\pi} \frac{m+1}{m-1} \frac{\cos\theta}{R^2},$$

przy czym

$$Q = F \frac{4(m-1)}{m(1-\cos^3\alpha) - (m-2)(1-\cos\alpha)\cos\alpha}, \quad \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

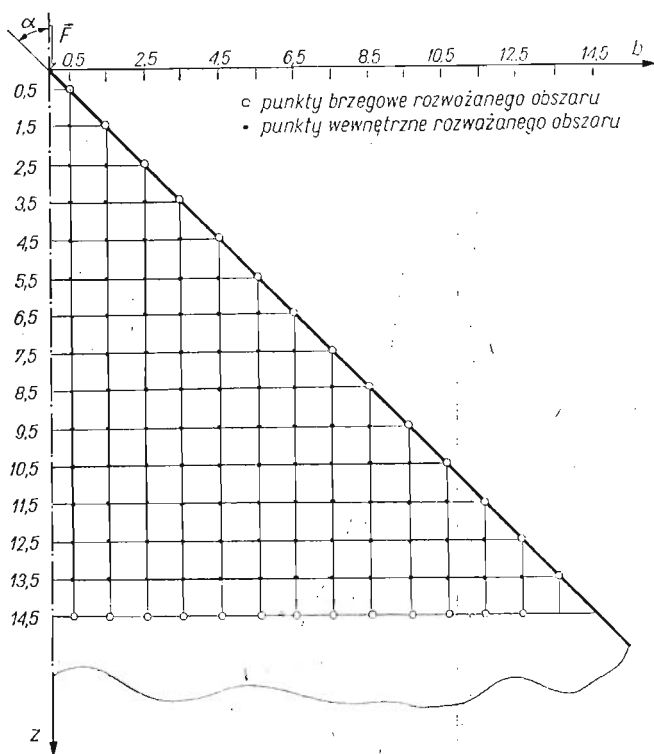
m jest odwrotnością liczby Poissona,

$$R = \sqrt{b^2 + z^2}, \quad \cos\theta = z/R.$$

Wartość siły F przyjęliśmy taką, by

$$\frac{Q}{4\pi} \frac{m+1}{m-1} = 100.$$

Rozpatrzmy obszar stożka zawarty między płaszczyzną $z = 0$ (na której leży wierzchołek stożka), a płaszczyzną $z = 14,5$. Przyjmujemy, że na brzegach tego obszaru znamy wartości (teoretyczne) sumy naprężeń S . Wartości S we wnętrzu obszaru znajdujemy posługując się wyprowadzonymi formułami różnicowymi, stosując kwadratową siatkę różnicową o kroku $h = 1$. Rozmieszczenie sieci różnicowej w stosunku do przekroju stożka przedstawione jest na rys. 12. Układ równań różnicowych rozwiązaliśmy metodą

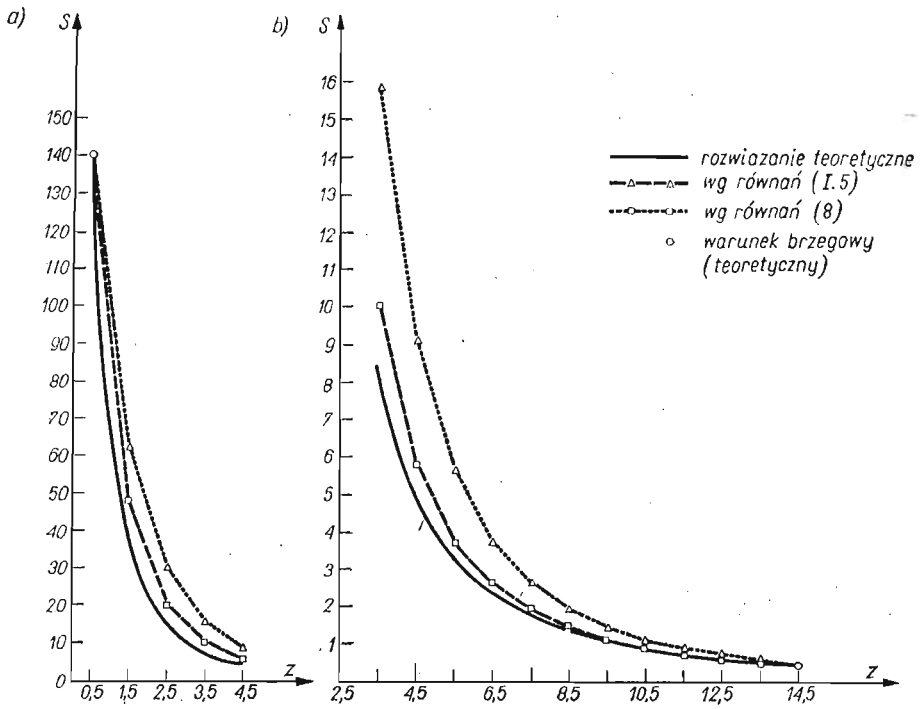


Rys. 12. Położenie sieci różnicowej względem przekroju stożka płaszczyzną $\vartheta = \text{constans}$. Stała sieci $h = 1$

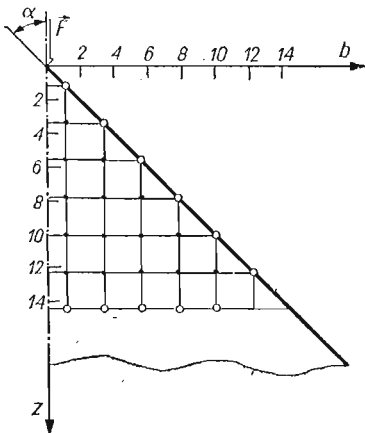
iteracyjną, przy czym kryterium skończenia procesu iteracji było to, by wartości S otrzymane w dwóch kolejnych iteracjach nie różniły się w żadnym z węzłów sieci więcej niż o 10^{-3} . Za zerowe przybliżenie rozwiązania przyjęliśmy dla każdego przekroju $z = \text{constans}$ wartość brzegową S tego przekroju. Obliczenia przeprowadziliśmy zarówno za pomocą zszytyzowanej formuły (8)-(9) jak i formuły (1.5). W obu wypadkach kryterium zakończenia obliczeń zostało osiągnięte po 53 iteracjach. Na rys. 13 porównane są uzyskane w ten sposób wyniki numeryczne z teoretycznymi. Widzimy, że formuła (9) daje wartości znacznie bliższe teoretycznych niż formuła (1.5). Pasują one dość dobrze do rozwiązania teoretycznego nawet w obszarze silnej koncentracji naprężeń, to jest dla małych z .

Można dodać, że wprawdzie osiągnięcie dużej dokładności rozwiązania wymaga odpowiednio dużej liczby iteracji, to jednak w naszym przykładzie już po kilku iteracjach następuje dość dobre przybliżenie funkcji S . Widać to na rys. 15, gdzie podano wyniki kilku pierwszych iteracji przy stosunkowo rzadkiej sieci, o stałej $h = 29/13 = 2,23$, pokazanej na rys. 14.

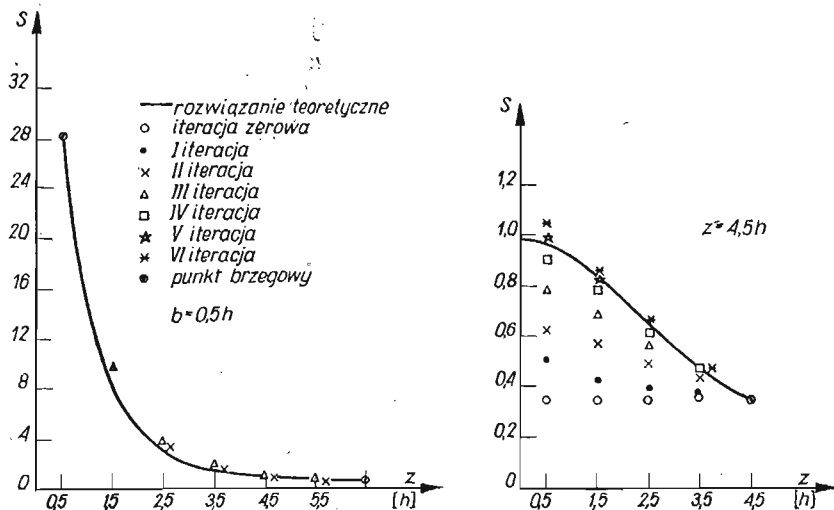
Dodatek II. Rozważmy siatkę kwadratową o długości boku a , naniesioną na badaną tarczę sprężystą. Po odkształceniu ośrodka element siatki przyjmuje w przybliżeniu kształt równoległoboku o długości boku wynoszącej w kierunku x i y odpowiednio a_x i a_y . Zmiany



Rys. 13. Wyniki obliczeń po 53 iteracjach, wg. formuł (9) i (1.5) porównane z rozwiązaniem teoretycznym: a) wyniki dla małych z ($z \leq 4,5$), b) wyniki dla większych wartości z ($z \geq 3,5$). Oba wykresy odnoszą się do przebiegu naprężeń wzdłuż prostej $b = 0,5$, por. rys. 12



Rys.14. Położenie rzadszej sieci różnicowej względem przekroju stożka; stała sieci $h = 29/13 \approx 2,23$



Rys. 15. Wyniki kilku pierwszych iteracji dla sieci różnicowej z rys. 14; a) przebiegi wzdłuż prostej $b = 0,5h$, b) przebiegi wzdłuż prostej $z = 4,5h$

długości boków są więc $u = a_x - a$ i $v = a_y - a$, średnie odkształcenia na odcinku a są $\varepsilon_x = u/a$ i $\varepsilon_y = v/a$, średnia zaś wartość sumy naprężeń na obszarze oka siatki wynosi

$$(II.1) \quad S = \sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu} \frac{u+v}{a}.$$

Jeśli błąd pomiaru położenia punktu wynosi δ , to średni kwadratowy błąd pomiaru długości odcinka wynosi $\sqrt{2} \delta$, błąd zaś pomiaru zmiany długości odcinka wynosi $\sqrt{2} \sqrt{2} \delta = 2\delta$. Względny średni kwadratowy błąd sumy naprężeń wynosi

$$(II.2) \quad \frac{\Delta S}{S} = \frac{\sqrt{2} 2 \delta}{|u+v|},$$

przy czym założyliśmy, że błąd pomiaru składowych przemieszczenia u i v jest taki sam. W korzystnym przypadku, gdy u i v są tego samego znaku i tego samego rzędu wielkości dostajemy

$$(II.3) \quad \frac{\Delta S}{S} = \sqrt{2} \frac{\delta}{u}.$$

W mniej korzystnych przypadkach, zwłaszcza gdy u i v są co do modułu tego samego rzędu lecz przeciwnych znaków, błąd jest oczywiście większy. Drukarskie techniki nanoszenia siatki pozwalają wykonywać linie szerokości $0,2 \div 0,3$ mm, przebieg środka których możemy określić z dokładnością rzędu $0,1$ mm; zatem $\delta = 0,1$ mm. Aby błąd pomiaru wartości S był nie większy niż 10%, przemieszczenia winny wynosić zgodnie z (II.3) przynajmniej $1,4$ mm, co przy $a = 1$ cm odpowiada odkształceniom 14%. Są to więc odkształcenia duże, poza zakresem słuszności klasycznej teorii sprężystości.

Z powyższego widzimy trzy przyczyny powstawania błędu przy tym sposobie wyznaczania sumy $S(x, y)$: a) uśrednianie po obszarze oka siatki zamiast pomiaru punktowego,

b) błąd pomiaru przemieszczenia, c) konieczność stosowania dużych odkształceń. Doświadczalne zmniejszenie jednej z tych przyczyn (przy tej samej technice nanoszenia siatki) pociąga za sobą wzrost przynajmniej jednej z przyczyn pozostałych. Jednakże źródła błędów b) i c) można usunąć na drodze obliczeniowej, korzystając z tego, że $S(x, y)$ winna być funkcją harmoniczną, spełniającą równanie Laplace'a. Równanie to zastępujemy przez układ równań algebraicznych, będących równaniami Liebmana zapisanymi dla poszczególnych węzłów sieci różnicowej. Węzły sieci różnicowej umieszczamy w środkach poszczególnych elementów siatki. Za zerowe przybliżenie rozwiązania iteracyjnego układu przyjmujemy znalezione doświadczalnie wartości funkcji $S(x, y)$ w poszczególnych okach siatki. Ponieważ znaleziony doświadczalnie przebieg $S(x, y)$ zgodny jest przynajmniej jakościowo z przebiegiem funkcji $S(x, y)$ dla zadania klasycznej teorii sprężystości, dlatego proces iteracyjny jest szybkozbieżny.

Literatura cytowana w tekście

1. H. JESSOP, *Photoelasticity*, Handbuch der Physik, Bd VI, pp. 183-186, Springer, Berlin 1958.
2. S. TIMOSHENKO, J. GOODIER, *Theory of elasticity*, Mc Graw Hill, N. York 1951.
3. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, s. 170, PWN, Warszawa 1970.
4. M. FROCHT, *Photoelasticity*, vol. II, p. 289, J. Wiley, N. York 1948.
5. H. LIEBMANN, *Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildung*, Sitzungsberichte der math. physik. Klasse der Bayerischen Akad. der Wissensch. zu München 1918 J., s. 385.
6. H. BUCHHOLZ, *Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeitet und die Theorie der Figur der Erde*, s. 150 - 176, J. A. Barth, Leipzig 1908.
7. C. RUNGE, *Über eine Methode, die partiell Differentialgleichung $\Delta u = \text{constans}$ numerisch zu integrieren*, Z. f. Math. u. Phys. **56**, 225 (1908).
L. RICHARDSON, *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, **A210**, 307 (1911).
8. R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY, *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*, Mathem. Annalen **100**, 32 (1928).
9. *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, ed. P. FRANK, R. MISES, Part I, p. 734, Dover Publ., N. York 1961.
10. L. COLLATZ, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych*, tłum. z niem., PWN, Warszawa 1960.
11. B. DEMIDOWICZ, I. MARON, E. SZUWAŁOWA, *Metody numeryczne*, cz. II, tłum. ros., PWN, Warszawa 1965.
12. V. TESAŘ, *La photoélasticimétrie et ses applications dans la construction aéronautique*, La Sci. aérienne, **2**, 372 (1933).
M. MILBAUER, M. PERLA, *Fotoelasticimetrické přístroje a měřicí metody*, s. 395-400, Praha 1959.
13. M. FROCHT, op. cit., p. 238.
14. W. SZCZEPIŃSKI, *Method of characteristics in computations of the experimental stress analysis*, Bull. Acad. Polon Sci., Sér. Sci. techn., **XII**, 619 (1964).
15. B. MICHALSKI, *Zastosowanie warstwy perforowanej do badań przestrzennych w elastooptyce*, praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1973.
16. R. WOJNAR, *Analityczne wyznaczanie dwuwymiarowego st. naprężenia na podstawie danych elastooptycznych w pracy zbiorowej: «Metody pomiarów odkształceń i naprężeń w materiałach i konstrukcjach budowlanych»*, red. A. BRANDT, Ossolineum, Warszawa 1971.
17. A. ZAJDEL, *Elementarna ocena błędów pomiarowych*, tłum. ros., PWN, Warszawa 1967.
18. R. DOROSZKIEWICZ, *Elastooptyka*, PWN, Warszawa 1975.
19. A. BRANDT, *Metoda pomiaru sześciu składowych stanu odkształcenia*, praca zbiorowa cytowana w [16].

20. Е. Филимонова, *Определение напряжений в осесимметрической задаче на объемных моделях из оптически чувствительными наклейками*, Труды VII всесоюзной конференции по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений, Таллин, 23—26 ноября 1971, Таллин 1971.
21. Н. С. Розанов, *Метод тензосетки и его приложение к исследованию напряженного состояния гидросооружений*, Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники им. В. Е. Веденеева, техническая информация, Москва 1958.
22. J. HEYMANN, *Eine Verbindung der Spannungsoptik mit der Dehnungsgittermethode*, Beiträge zur Spannungs- und Dehnungsanalyse, Bd. V, hgb. K. Schröder, Akademie-Verlag, Berlin 1968.
23. В. MICHAŁSKI, informacja ustna.
24. A. I. LURJE, *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie*, tłum. z ros., Akademie-Verlag, Berlin 1963, s. 140.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЛИБМАННА ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ФОТО-УПРУГИХ ИСПЫТАНИЙ

Представлена возможность использования разностных формул типа Либманна для обработки результатов фото-упругих испытаний. В частности это относится к:

- а) интерполяции результатов, полученных экспериментальными точечными методами;
- б) экстраполяции результатов — однако лишь в небольшой области, порядка величины шага разностной сетки;

в) проверке и уточнению измеренных величин суммы нормальных напряжений.

Даны примеры применения этого подхода к плоской и осесимметричной задачам теории упругости.

Summary

APPLICATION OF THE LIEBMANN FORMULA TO THE EVALUATION OF PHOTOELASTIC MEASUREMENTS

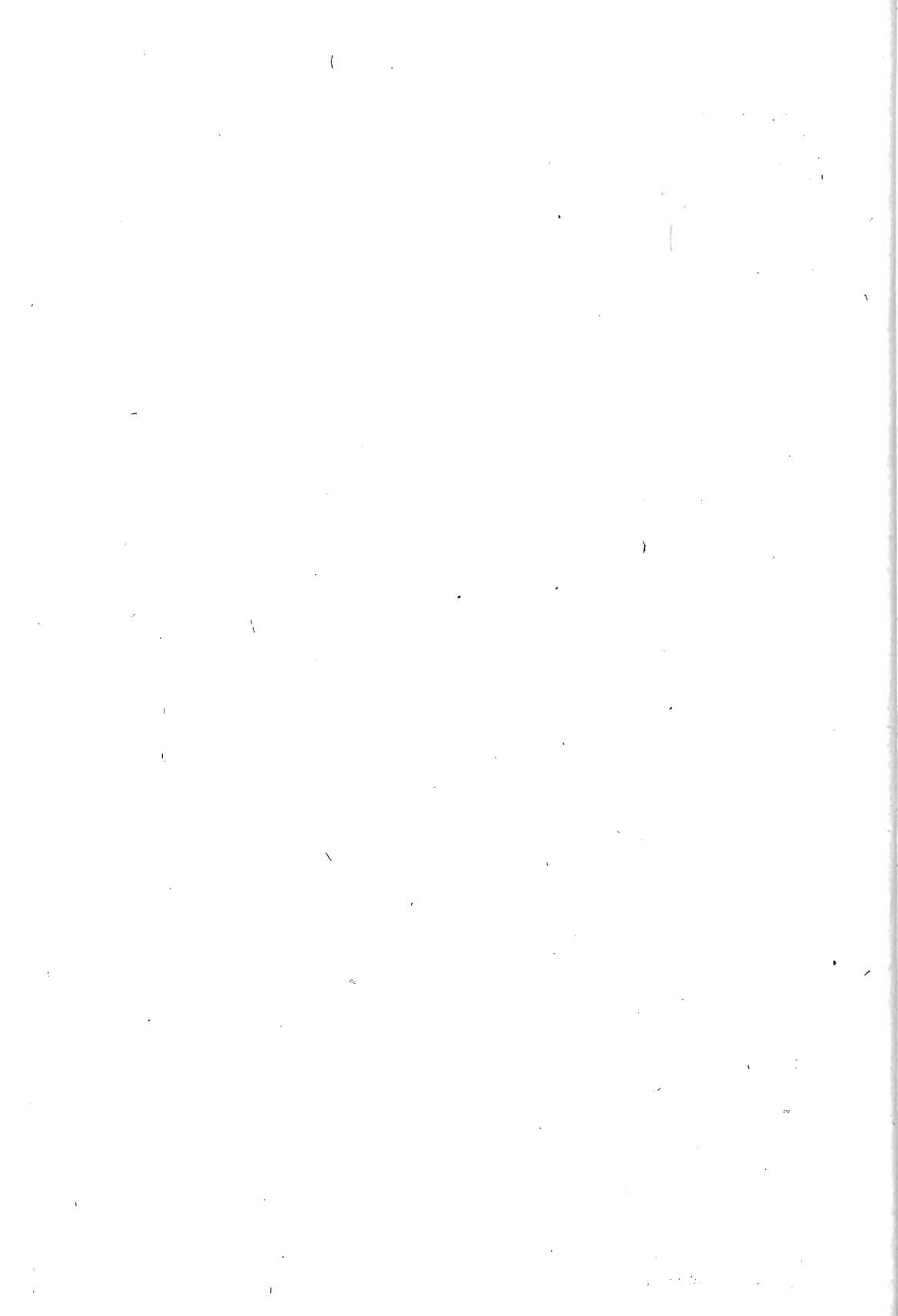
The possibilities of a using of the difference expressions of Liebmann's type in the evaluation of the results of photoelastic investigations are discussed. The following techniques are considered:

- a) interpolation of the results obtained by experimental point methods,
- b) extrapolation of the results — but only in a limited region, of the order the difference mesh size,
- c) verification and improvement of accuracy of the measured values of a sum of normal stresses.

The examples of application of these possibilities to plane and axially symmetric problems of elasticity are given.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lipca 1975 r.; w wersji ostatecznej dnia 2 sierpnia 1976 r.



TARCZE I PŁYTY SPRĘŻYSTE Z WIĘZAMI LINIOWYMI DLA DEFORMACJI

WIESŁAW KUFEL, STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

W pracy konstruuje się model tarcz i płyt sprężystych w oparciu o mechanikę ośrodków ciągłych z więzami [1].

Założono, że funkcja deformacji dźwigara jest liniowa względem nieznanymi funkcji, opisujących ruch powierzchni dolnej i górnej dźwigara, oraz wyróżnionej zmiennej przestrzennej y opisującej kierunek prostopadły do tych powierzchni. Ograniczenia te nazwano więzami liniowymi dla deformacji. Wykorzystując znane metody wariacyjne, otrzymano podstawowy układ równań modelu. Następnie sformułowano kryterium szacujące dokładność otrzymanych rozwiązań oraz podano, dla ogólnej klasy obciążeń, rozwiązanie zamknięte płaskiego stanu odkształcenia. Na zakończenie rozpatrzono dwa zagadnienia brzegowe dla warstwy sprężystej obciążonej samozrównoważonymi układami sił, działającymi równoległe do osi y .

Wykaz oznaczeń

- ∂A brzeg zbioru A ,
- $\{a\}$ zbiór jednopunktowy,
- B obszar w przestrzeni fizycznej równy iloczynowi $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (0, h)$ z układem współrzędnych, Z^1, Z^2, y , konfiguracja odniesienia,
- $f(x)|_{x \in A}$ obciążenie funkcji f do zbioru A ,
- π iloczyn kartezjański, $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$,
- π_0, π_1 powierzchnia dolna i górna powłoki,
- $\partial\pi_0$ podparta część brzegu, tj. zbioru $\partial\pi \times \{0\}$,
- I przedział czasu,
- h grubość powłoki w konfiguracji odniesienia,
- n wektor zewnątrznie normalny do ∂B ,
- \tilde{n} wektor zewnątrznie normalny do $\partial\pi$,
- χ funkcja deformacji,
- b siła masowa, zależna od Z, y, t ,
- p obciążenia powierzchniowe, zależne od Z, y, t ,
- p_0, p_1 obciążenia powierzchniowe powierzchni π_0, π_1 ,
- P obciążenie powierzchniowe brzegu $\partial\pi \times \langle 0, h \rangle$,
- k energia kinetyczna,
- σ tensor naprężenia,
- ϵ tensor odkształcenia,
- Ψ^0, Ψ^1 funkcje deformacji powierzchni dolnej i górnej,
- r masowe siły reakcji, zależne od Z, y, t ,
- s powierzchniowe siły reakcji, zależne odpowiednio od $(Z, y) \in \partial B, t \in I$,
- u siły reakcji podpór,

- $|a|$ wartość bezwzględna a ,
 ρ gęstość masy,
 λ, μ stałe Lamégo,
 f^0, f^1 uogólnione siły masowe, określone wzorami (2.4)_{1,2}
 i^0, i^1 uogólnione siły bezwładności, określone wzorami (2.4)₃.

1. Liniowa aproksymacja funkcji deformacji

Założmy, że konfiguracją odniesienia rozpatrywanego dźwigara powierzchniowego jest obszar B , równy iloczynowi kartezjańskiemu przedziałów $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (O, h)$. Punkty należące do tych przedziałów oznaczamy będziemy kolejno przez Z^1, Z^2, y .

Niech $\chi = \chi(\mathbf{Z}, y, t)$, gdzie $\mathbf{Z} = (Z^K)$, $K = 1, 2$, $t \in I = \langle t_0, t_1 \rangle$, będzie funkcją deformacji dźwigara, a $\Psi^0(\mathbf{Z}, t)$, $\Psi^1(\mathbf{Z}, t)$ funkcjami opisującymi ruch jego powierzchni dolnej i górnej, tj. powierzchni $\pi \times \{O\}$ oraz $\pi \times \{h\}$, gdzie $\pi = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Psi^0(\mathbf{Z}, t) &= \chi(\mathbf{Z}, O, t), \\ \Psi^1(\mathbf{Z}, t) &= \chi(\mathbf{Z}, h, t). \end{aligned}$$

Założmy, że funkcja deformacji χ dźwigara zależy od Ψ^0, Ψ^1 w następujący sposób

$$(1.2) \quad \chi(\mathbf{Z}, y, t) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \Psi^0(\mathbf{Z}, t) + \frac{y}{h} \Psi^1(\mathbf{Z}, t).$$

Przyjmujemy więc, że trójwymiarowy ruch ciała materialnego opisany jest ruchem powierzchni dolnej i górnej tak, by składowe deformacji włókien materialnych prostopadłych do π_0 były funkcjami liniowymi zmiennej y . Inaczej mówiąc, gdy znamy ruch powierzchni dolnej i górnej dźwigara, znamy też, przez związki (1.2), ruch całego ciała. Funkcjami poszukiwanymi są tutaj funkcje Ψ^0, Ψ^1 , które spełniają taką samą rolę, jak współrzędne uogólnione w mechanice analitycznej.

Dodając do prawej strony (1.2) wielomian

$$w_n(y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) (\mathbf{a}_n y^n + \mathbf{a}_{n-1} y^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_1 y),$$

gdzie \mathbf{a}_i , $i = 1, 2, \dots, n$ są pewnymi ustalonymi stałymi, otrzymujemy, że składowe deformacji włókien materialnych prostopadłych do π_0 nie są wtedy funkcjami liniowymi y , ale dowolnymi wielomianami stopnia n . Przypadkiem tym nie będziemy się tutaj zajmować.

Ograniczenia (1.2) funkcji deformacji χ są przykładem więzów wewnętrznych [1].

Obciążenia powierzchniowe tarczy lub płyty $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Z}, y, t)$, $(\mathbf{Z}, y) \in \partial B$ składają się z obciążeń powierzchni dolnej i górnej, które oznaczymy przez \mathbf{p}_0 i \mathbf{p}_1 , obciążeń brzegu $\partial\pi \times (O, h)$, oznaczonych przez \mathbf{P} oraz obciążeń brzegu $\partial\pi_0 = \partial\pi \times \{O\}$, które oznaczymy przez \mathbf{u} .

W przypadku podparcia brzegu płyty w punktach należących do $\partial\tilde{\pi}_0 \subset \partial\pi_0$, rozważać będziemy ograniczenia funkcji deformacji (więzy brzegowe) w postaci

$$(1.3) \quad \chi(\mathbf{Z}, O, t)|_{\mathbf{z} \in \partial\tilde{\pi}_0} = \Psi^0(\mathbf{Z}, t)|_{\mathbf{z} \in \partial\tilde{\pi}_0} = \tilde{\Psi}^0(\mathbf{Z}, t).$$

Obciążenia \mathbf{u} brzegu $\partial\tilde{\pi}_0$ są wtedy równe nieznanym oddziaływaniom podparcia brzegu, które wyznaczymy w dalszym ciągu.

2. Równania ruchu

Podstawowy układ równań dla funkcji Ψ^0, Ψ^1 otrzymuje się z zasady prac wirtualnych, którą zapisać można w postaci

$$(2.1) \quad \int_B [\rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}}) - \text{div} \boldsymbol{\sigma}] \delta \boldsymbol{\chi} dv + \int_{\partial B} (\mathbf{p} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \delta \boldsymbol{\chi} d\partial B = 0.$$

W ramach liniowej teorii sprężystości, stan naprężenia, po uwzględnieniu związków (1.2), określają następujące wielkości

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{KL} &= 2\mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{(K,L)}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{(K,L)}^1 \right] + \\ &\quad + \lambda \delta_{KL} \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{M,M}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{M,M}^1 - \frac{1}{h} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1) \right], \\ \sigma_{K3} &= -\frac{\mu}{h} (\Psi_K^0 - \Psi_K^1) + \mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{3,K}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{3,K}^1 \right], \\ \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu) \left[-\frac{1}{h} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1) \right] + \lambda \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{M,M}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{M,M}^1 \right]. \end{aligned}$$

Stosując znany formalizm wariacyjny [1], otrzymujemy następujący układ równań

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{h\mu}{3} \left(\Psi_K^0 + \frac{1}{2} \Psi_K^1 \right)_{,LL} + \frac{h(\lambda + \mu)}{3} \left(\Psi_L^0 + \frac{1}{2} \Psi_L^1 \right)_{,LK} - \\ - \frac{\lambda}{2} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1)_{,K} + \frac{\mu}{2} (\Psi_3^0 + \Psi_3^1)_{,K} - \frac{\mu}{h} (\Psi_K^0 - \Psi_K^1) + f_K^0 = i_K^0, \\ \frac{h\mu}{3} \left(\frac{1}{2} \Psi_K^0 + \Psi_K^1 \right)_{,LL} + \frac{h(\lambda + \mu)}{3} \left(\frac{1}{2} \Psi_L^0 + \Psi_L^1 \right)_{,LK} - \\ - \frac{\lambda}{2} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1)_{,K} - \frac{\mu}{2} (\Psi_3^0 + \Psi_3^1)_{,K} + \frac{\mu}{h} (\Psi_K^0 - \Psi_K^1) + f_K^1 = i_K^1, \\ \frac{h\mu}{3} \left(\Psi_3^0 + \frac{1}{2} \Psi_3^1 \right)_{,LL} - \frac{\mu}{2} (\Psi_L^0 - \Psi_L^1)_{,L} + \\ + \frac{\lambda}{2} (\Psi_L^0 + \Psi_L^1)_{,L} - \frac{(2\mu + \lambda)}{h} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1) + f_3^0 = i_3^0, \\ \frac{h\mu}{3} \left(\frac{1}{2} \Psi_3^0 + \Psi_3^1 \right)_{,LL} - \frac{\mu}{2} (\Psi_L^0 - \Psi_L^1)_{,L} - \frac{\lambda}{2} (\Psi_L^0 + \Psi_L^1)_{,L} + \\ + \frac{(\lambda + 2\mu)}{h} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1) + f_3^1 = i_3^1, \end{aligned}$$

gdzie $K, L = 1, 2$, i $q = 1$.

Występujące w (2.3) uogólnione siły masowe \mathbf{f}^0 , \mathbf{f}^1 oraz uogólnione siły bezwładności \mathbf{i}^0 , \mathbf{i}^1 określone są wzorami

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}^0 &= \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \mathbf{b} dy + \mathbf{p}^0, \\ \mathbf{f}^1 &= \int_0^h \frac{y}{h} \mathbf{b} dy + \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{i}^\alpha &= \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Psi}^\alpha} - \frac{\partial k}{\partial \Psi^\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$k = \frac{1}{2} \int_0^h \left| \left(1 - \frac{y}{h}\right) \dot{\Psi}^{r0} + \frac{y}{h} \dot{\Psi}^{r1} \right|^2 dy.$$

Równania (2.3) winny być spełnione dla każdego $(\mathbf{Z}, t) \in \pi \times I$. Z kolei na $\partial\pi \times I$ winny być spełnione geometryczne warunki brzegowe [1] postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \boldsymbol{\sigma} dy \mathbf{\hat{n}}^* &= \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \mathbf{P} dy, \\ \int_0^h \frac{y}{h} \boldsymbol{\sigma} dy \mathbf{\hat{n}}^* &= \int_0^h \frac{y}{h} \mathbf{P} dy, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{\hat{n}}^*$ oznacza wersor zewnątrznie normalny do $\partial\pi$, a składowe tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ określa się związkami (2.2).

W przypadku podparcia płyty w punktach $\mathbf{Z} \in \partial\tilde{\pi}_0$, geometryczne warunki brzegowe przyjmą postać (1.3), zaś wielkości

$$(2.6) \quad \left[\int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \boldsymbol{\sigma} dy \mathbf{\hat{n}}^* - \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \mathbf{P} dy \right]_{\mathbf{Z} \in \partial\tilde{\pi}_0}$$

obliczone dla Ψ^0 i Ψ^1 spełniających warunki (1.3) są równe nieznanym oddziaływaniom u tego podparcia.

Występujące w (2.4) i (2.5) całki są znane, gdyż znana jest zależność funkcji podcałkowych od y .

Równania (2.3)—(2.4) oraz warunki (2.5), wraz z warunkami początkowymi, stanowią podstawowy układ równań rozpatrywanych tarcz i płyt sprężystych.

3. Ocena stosowalności modelu

Rozwiązując podstawowy układ równań (2.3)—(2.5) znajdujemy funkcje Ψ^0, Ψ^1 , które po podstawieniu do związków (1.2) określają funkcję deformacji dźwigara, traktowanego jako trójwymiarowy ośrodek sprężysty. Obliczona tak funkcja deformacji (oznaczmy ją przez χ^*), nie spełnia na ogół równań klasycznej teorii sprężystości tj. równań

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \rho \ddot{\chi} - \operatorname{div} \sigma - \rho \mathbf{b} &= 0, \\ \sigma \mathbf{n} - \mathbf{p} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\sigma = 2\mu \epsilon + \lambda \operatorname{tr} \epsilon \delta.$$

Lewe strony (3.1), w przypadku $\chi = \chi^*$, nie są więc na ogół równe zero. Oznaczmy je odpowiednio przez \mathbf{r} i \mathbf{s} . Funkcje te w mechanice ośrodków ciągłych z więzami nazywa się siłami reakcji [1].

Normy sił reakcji

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{r}_k\| &= \|\rho \ddot{\chi}_k - \sigma_{kl,l} - \rho \mathbf{b}_k\|, \\ \|\mathbf{s}_k\| &= \begin{cases} \|\sigma_{kl} n^l - p_{ok}\| & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \pi_0, \\ \|\sigma_{kl} n^l - p_{1k}\| & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \pi_1, \\ \|\sigma_{kl} n^l - P_k\| & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \partial\pi \times \langle 0, h \rangle - \partial\tilde{\pi}_0, \\ \|\sigma_{kl} n^l - u_k\| & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \partial\tilde{\pi}_0 \end{cases} \end{aligned}$$

charakteryzują różnicę między ruchem χ^* (ruchem przybliżonym), a ruchem χ spełniającym (3.1). Zależą one od stałych materiałowych λ, μ , stałych określających obciążenia zewnętrzne, równania więzów oraz stałych charakteryzujących kształt ciała.

Oznaczmy wszystkie te parametry przez $\delta_i, \delta_i \in \mathcal{R}, i = 1, 2, \dots, i_0$.

Mówimy, że rozpatrywany model jest stosowalny, jeżeli istnieją takie przedziały $\Delta_i^n, n = 1, 2, \dots, n_0, n_0 \geq 1$, że dla $\delta_i \in \Delta_i^n$ spełnione są nierówności

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{r}_k\| &< \varepsilon, \\ \|\mathbf{s}_k\| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie ε jest daną liczbą taką, że $0 < \varepsilon \ll 1$. Liczba ta powinna być ustalona dla każdego problemu brzegowego w zależności od norm sił \mathbf{b} i \mathbf{p} , takich samych jak normy (3.2).

Dla przykładu, w przypadku gdy $\mathbf{b} \neq 0, \mathbf{p} \neq 0, \varepsilon$ może być równy $\min\left(\frac{\varepsilon^0}{\|\mathbf{b}\|}, \frac{\varepsilon^0}{\|\mathbf{p}\|}\right)$, a ε^0 równe np. 0,05.

W przypadku, gdy nie istnieją przedziały Δ_i^n , w których zachodziłyby związki (3.3), rozwiązanie nie aproksymuje rozwiązania wzorcowego i przedstawiony model nie może być stosowany.

4. Rozwiązanie ogólne dla płaskiego stanu odkształcenia

Załóżmy, że funkcja deformacji χ zależy jedynie od Z^1 , y oraz $\chi_2 = \text{const}$. Oznacza to, że poszukiwane funkcje są funkcjami jednej zmiennej przestrzennej Z^1 , która oznaczać będziemy przez Z ;

$$\begin{aligned}\Psi_1^\alpha(Z^1, Z^2) &= \Psi_1^\alpha(Z), \\ \Psi_2^\alpha(Z^1, Z^2) &= \text{const}, \\ \Psi_3^\alpha(Z^1, Z^2) &= \Psi_3^\alpha(Z), \quad \alpha = 0, 1.\end{aligned}$$

Niech ponadto siły masowe, wraz z powierzchniowymi obciążeniami zewnętrznymi, spełniają warunek $b_k = 0$, $p_2^z = 0$. Równania (2.3) przyjmą wtedy postać

$$(4.1) \quad \begin{cases} \Psi_{1,11}^0 + \frac{1}{2} \Psi_{1,11}^1 + (A-B)\Psi_{3,1}^0 + (A+B)\Psi_{3,1}^1 - C(\Psi_1^0 - \Psi_1^1) + f_1^0 = 0, \\ \frac{1}{2} \Psi_{1,11}^0 + \Psi_{1,11}^1 - (A+B)\Psi_{3,1}^0 - (A-B)\Psi_{3,1}^1 + C(\Psi_1^0 - \Psi_1^1) + f_1^1 = 0, \\ \Psi_{3,11}^0 + \frac{1}{2} \Psi_{3,11}^1 + (D-E)\Psi_{1,1}^0 + (D+E)\Psi_{1,1}^1 - F(\Psi_3^0 - \Psi_3^1) + f_3^0 = 0, \\ \frac{1}{2} \Psi_{3,11}^0 + \Psi_{3,11}^1 - (D+E)\Psi_{1,1}^0 - (D-E)\Psi_{1,1}^1 + F(\Psi_3^0 - \Psi_3^1) + f_3^1 = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(4.2) \quad \begin{aligned} A &= \frac{3\mu}{2h(\lambda+2\mu)}, & B &= \frac{3\lambda}{2h(\lambda+2\mu)}, & C &= \frac{3\mu}{h^2(\lambda+2\mu)}, \\ D &= \frac{3\lambda}{2h\mu}, & E &= \frac{3}{2h}, & F &= \frac{3(\lambda+2\mu)}{\mu h^2}. \end{aligned}$$

Dodając stronami (4.1)₁ i (4.1)₂ oraz (4.1)₃ i (4.1)₄, a następnie odejmując od (4.1)₁ równanie (4.1)₂ oraz od (4.1)₃ równanie (4.1)₄ otrzymujemy:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{3}{2} u_{,11} - 2B y_{,1} = -(f_1^0 + f_1^1), \\ \frac{3}{2} v_{,11} - 2E w_{,1} = -(f_1^0 + f_1^1), \\ \frac{1}{2} w_{,11} + 2A v_{,1} - 2C w = f_1^1 - f_1^0, \\ \frac{1}{2} y_{,11} + 2D u_{,1} - 2F y = f_3^1 - f_3^0, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} u &= \Psi_1^0 + \Psi_1^1, & w &= \Psi_1^0 - \Psi_1^1, \\ v &= \Psi_3^0 + \Psi_3^1, & y &= \Psi_3^0 - \Psi_3^1. \end{aligned}$$

Układ równań (4, 3) rozwiążemy najpierw w przypadku, gdy znane są wartości funkcji u, w, v, y oraz ich pochodnych w danym punkcie $Z_0 \in (a_1, b_1)$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} &u(Z_0), v(Z_0), w(Z_0), y(Z_0), \\ &u_{,1}(Z_0), v_{,1}(Z_0), w_{,1}(Z_0), y_{,1}(Z_0). \end{aligned}$$

Całkując dwukrotnie równanie (4.3) i uwzględniając warunki (4.4) otrzymujemy

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u(Z) = &u(Z_0) + u_{,1}(Z_0)(Z - Z_0) + \frac{4}{3} B \int_{Z_0}^Z y(Z) dZ - \\ &- \frac{4}{3} B y(Z_0)(Z - Z_0) - \frac{2}{3} \int_{Z_0}^Z \left[\int_{Z_0}^{Z'} (f_1^0 + f_1^1) dZ \right] dZ'. \end{aligned}$$

Analogicznie, z równania (4.3)₂ otrzymujemy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} v(Z) = &v(Z_0) + v_{,1}(Z_0)(Z - Z_0) + \frac{4}{3} E \int_{Z_0}^Z w(Z) dZ - \\ &- \frac{4}{3} E w(Z_0)(Z - Z_0) - \frac{2}{3} \int_{Z_0}^Z \left[\int_{Z_0}^{Z'} (f_3^0 + f_3^1) dZ \right] dZ'. \end{aligned}$$

Z kolei z równań (4.3)_{3,4} wyznaczmy funkcje $w(Z), y(Z)$. Podstawiając do (4.3) pochodną funkcji $v(Z)$ określoną wzorem (4.6), dostajemy

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} w_{,11} - 2Cw + \frac{8}{3} AEw = &-2Av_{,1}(Z_0) + \\ &+ \frac{8}{3} EA w(Z_0) + \frac{4}{3} A \int_{Z_0}^Z (f_3^0 + f_3^1) dZ - f_1^0 + f_1^1. \end{aligned}$$

Uwzględniając równość $\frac{8}{3} AE - 2C = 0$, gdzie A, C, E określone są wzorami (4.2), równanie (4.7) otrzymujemy w postaci

$$(4.8) \quad w_{,11} = -4Av_{,1}(Z_0) + \frac{16}{3} AEw(Z_0) + \frac{8}{3} A \int_{Z_0}^Z (f_3^0 + f_3^1) dZ + 2(f_1^1 - f_1^0).$$

Całkując dwukrotnie związek (4.8) względem Z i uwzględniając warunki (4.4) znajdujemy funkcję

$$(4.9) \quad \begin{aligned} w(Z) = &-4Av_{,1}(Z_0) \left(\frac{Z^2}{2} - \frac{Z_0^2}{2} \right) + 4Av_{,1}(Z_0) Z_0 (Z - Z_0) + \\ &+ \frac{16}{3} AEw(Z_0) \left(\frac{Z^2}{2} - \frac{Z_0^2}{2} \right) - \frac{16}{3} AEw(Z_0) Z_0 (Z - Z_0) + \\ &+ \frac{8}{3} A \int_{Z_0}^Z \left\{ \int_{Z_0}^{Z'} \left[\int_{Z_0}^{Z''} (f_3^0 + f_3^1) dZ \right] dZ'' \right\} dZ' - 2 \int_{Z_0}^Z \left[\int_{Z_0}^{Z'} (f_1^0 - f_1^1) dZ \right] dZ'. \end{aligned}$$

Podstawiając do (4.3)₄ pochodną funkcji $u(Z)$, określoną wzorem (4.5) otrzymujemy

$$(4.10) \quad \frac{1}{2}y_{,11} + \left(\frac{8}{3}DB - 2F\right)y = -2Du_{,1}(Z_0) + \\ + \frac{8}{3}BDy(Z_0) + \frac{4}{3} \int_{Z_0}^Z (f_1^0 + f_1^1)dZ + f_3^1 - f_3^0.$$

W tym przypadku wyrażenie $\frac{8}{3}DB - 2F$, stojące przy $y(Z)$, jest mniejsze od zera (co łatwo sprawdzić wykorzystując związki (4.2)). Wprowadzając oznaczenia

$$(4.11) \quad -m^2 = \frac{16}{3}DB - 4F = -\frac{48(\lambda + \mu)}{h^2(\lambda + 2\mu)}, \\ g(Z) = -4Du_{,1}(Z_0) + \frac{16}{3}BDy(Z_0) + \frac{8}{3} \int_{Z_0}^Z (f_1^0 + f_1^1)dZ - 2(f_3^0 - f_3^1),$$

równanie (4.10) zapisać można w postaci

$$(4.12) \quad y_{,11}(Z) - m^2y(Z) = g(Z).$$

Rozwiązanie ogólne (4.12) ma postać; [3], s. 457—458:

$$(4.13) \quad y(Z) = \frac{e^{mZ}}{2m} \int_{Z_0}^Z e^{-mZ}g(Z)dZ - \frac{e^{-mZ}}{2m} \int_{Z_0}^Z e^{mZ}g(Z)dZ + C_1 e^{mZ} + C_2 e^{-mZ},$$

gdzie $C_1 = \frac{1}{2m} e^{-mZ_0} [my(Z_0) + y_{,1}(Z_0)]$, $C_2 = \frac{e^{mZ_0}}{2m} [my(Z_0) - y_{,1}(Z_0)]$.

Funkcje (4.5), (4.6), (4.9) i (4.13) są rozwiązaniami ogólnymi układu (4.3). Podstawiając je do związków

$$(4.14) \quad \Psi_1^0 = \frac{u+w}{2}, \quad \Psi_1^1 = \frac{u-w}{2}, \\ \Psi_3^0 = \frac{v+y}{2}, \quad \Psi_3^1 = \frac{v-y}{2}$$

otrzymujemy rozwiązania ogólne układu (4.1).

W przypadku braku warunków (4.4), funkcje u , w , v , y zależą od ośmiu stałych a_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, które wyznaczamy z warunków brzegowych (2.5) lub (2.5)₂ i (2.6):

$$(4.15) \quad u(Z) = a_1 Z + a_2 + \frac{4}{3} B \int y(Z)dZ - \frac{2}{3} \int \left[\int (f_1^0 + f_1^1)dZ \right] dZ, \\ v(Z) = a_3 Z + a_8 + \frac{4}{3} E \int w(Z)dZ - \frac{2}{3} \int \left[\int (f_3^0 + f_3^1)dZ \right] dZ, \\ w(Z) = \frac{8}{3} A \int \left\{ \int \left[\int (f_3^0 + f_3^1)dZ \right] dZ \right\} dZ - \\ - 2 \int \left[\int (f_1^0 - f_1^1)dZ \right] dZ - 2Aa_3 Z^2 + a_6 Z + a_7, \\ y(Z) = \frac{e^{mZ}}{2m} \int e^{-mZ}g(Z)dZ - \frac{e^{-mZ}}{2m} \int e^{mZ}g(Z)dZ + a_4 e^{mZ} + a_5 e^{-mZ},$$

gdzie m jest określone związkiem (4.11)₁, a

$$g(Z) = \frac{8}{3} \int (f_1^0 + f_1^1) dZ - 2(f_3^0 - f_3^1) - \frac{4}{3} Da_1.$$

Występujące w (4.15) całki nieoznaczone powinny być brane ze stałymi równymi zero, gdyż stałe różne od zera dodano już do stałych a_i .

Oznaczając z kolei składowe objętościowych sił reakcji przez r_1, r_2 , a składowe powierzchniowych sił reakcji przez s_1, s_2 oraz korzystając z definicji sił reakcji mamy

$$(4.16) \quad \begin{cases} r_1 = -(\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3}) & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in B, \\ r_3 = -(\sigma_{31,1} + \sigma_{33,3}) & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in B, \\ s_1 = \begin{cases} s_1^\alpha = \sigma_{13} n_3^\alpha - p_1^\alpha & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \pi^\alpha, \\ s_1^* = \sigma_{11} \tilde{n}_1 - P_1 & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \partial\pi \times \langle 0, h \rangle - \partial\tilde{\pi}_0, \\ \tilde{s}_1 = \sigma_{11} \tilde{n}_1 - u_1 & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \partial\tilde{\pi}_0, \end{cases} \\ s_3 = \begin{cases} s_3^\alpha = \sigma_{33} \tilde{n}_3 - p_3^\alpha & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \pi^\alpha, \\ s_3^* = \sigma_{31} \tilde{n}_1 - P_3 & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \partial\pi \times \langle 0, h \rangle - \partial\tilde{\pi}_0, \\ \tilde{s}_3 = \sigma_{31} \tilde{n}_1 - u_3 & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \partial\tilde{\pi}_0. \end{cases} \end{cases}$$

Podstawiając do (4.16) wielkości (2.2), otrzymamy

$$(4.17) \quad \begin{aligned} r_1 &= -(\lambda + 2\mu) \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{1,11}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{1,11}^1 \right] - \frac{\lambda + \mu}{h} (\Psi_{3,1}^1 - \Psi_{3,1}^0), \\ r_3 &= -\mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{3,11}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{3,11}^1 \right] - \frac{\lambda + \mu}{h} (\Psi_{1,1}^1 - \Psi_{1,1}^0), \\ s_1^0 &= -\frac{\mu}{h} (\Psi_1^1 - \Psi_1^0) - \mu \Psi_{3,1}^0 - p_1^0, \\ s_1^1 &= \frac{\mu}{h} (\Psi_1^1 - \Psi_1^0) + \mu \Psi_{3,1}^0 - p_1^1, \\ s_3^0 &= -\frac{(\lambda + 2\mu)}{h} (\Psi_3^1 - \Psi_3^0) - \lambda \Psi_{1,1}^0 - p_3^0, \\ s_3^1 &= \frac{\lambda + 2\mu}{h} (\Psi_3^1 - \Psi_3^0) + \lambda \Psi_{1,1}^0 - p_3^1, \\ s_1^* &= \pm (\lambda + 2\mu) \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{1,1}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{1,1}^1 \right] + \frac{\lambda}{h} (\Psi_3^1 - \Psi_3^0) - P_1, \\ \tilde{s}_1 &= \pm (\lambda + 2\mu) \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{1,1}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{1,1}^1 \right] + \frac{\lambda}{h} (\Psi_3^1 - \Psi_3^0) - u_1, \\ s_3^* &= \pm \mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{3,1}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{3,1}^1 + \frac{1}{h} (\Psi_1^1 - \Psi_1^0) \right] - P_3, \\ \tilde{s}_3 &= \pm \mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{3,1}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{3,1}^1 + \frac{1}{h} (\Psi_1^1 - \Psi_1^0) \right] - u_1. \end{aligned}$$

Wzory (4.17) wykorzystamy w dalszym ciągu do oceny rozwiązań szczegółowych.

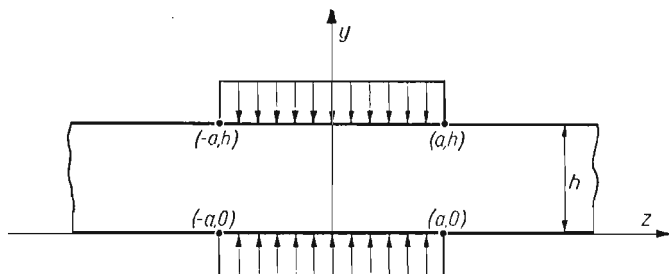
5. Przykłady

a) Rozpatrzmy warstwę sprężystą z obciążeniem postaci:

$$\begin{aligned} p_1^0 &= p_1^1 = 0, \\ p_3^0 &= pH(a-|Z|), \\ p_3^1 &= -p_3^0, \end{aligned}$$

gdzie

$$H(a-|z|) = \begin{cases} 1 & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \text{--- funkcja Heaviside'a.}$$



Rys. 1

Oznacza to, zgodnie ze wzorem (2.4)_{1,2}, że uogólnione siły zewnętrzne f^0 i f^1 są postaci

$$(5.1) \quad \begin{aligned} f_1^0 &= f_1^1 = 0, \\ f_3^0 &= p_3^0, \quad f_3^1 = p_3^1. \end{aligned}$$

Uwzględniając związki (5.1) w równaniach (4.15), otrzymujemy

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u(Z) &= a_1 Z + a_2 + \frac{4}{3} B \int y(Z) dZ, \\ v(Z) &= a_3 Z + a_8 + \frac{4}{3} E \int w(Z) dZ, \\ w(Z) &= -2Aa_3 Z^2 + a_6 Z + a_7, \\ y(Z) &= \frac{e^{mZ}}{2m} \int e^{-mZ} g(Z) dZ - \frac{e^{-mZ}}{2m} \int e^{mZ} g(Z) dZ + a_4 e^{mZ} + a_5 e^{-mZ}, \end{aligned}$$

gdzie

$$g(Z) = -4pH(a-|Z|) - \frac{4}{3} Da_1.$$

Rozpatrywana warstwa sprężysta jest tak obciążona, że funkcje deformacji powierzchni dolnej i górnej powinny być symetryczne względem osi y , tj.:

$$\Psi_3^1(Z) = \Psi_3^1(-Z), \quad \Psi_3^0(Z) = \Psi_3^0(-Z).$$

Skoro $\Psi_3^0 + \Psi_3^1 = v$ oraz $\Psi_3^0 - \Psi_3^1 = y$, to

$$(5.3) \quad v(Z) = v(-Z), \quad y(Z) = y(-Z).$$

Całkując związek (5.2)₄, otrzymujemy

$$(5.4) \quad y(Z) = \frac{4p}{m^2} H(a-|Z|) + \frac{4}{3} \frac{Da_1}{m^2} + b_1 \frac{e^{mZ} + e^{-mZ}}{2} + b_2 \frac{e^{mZ} - e^{-mZ}}{2},$$

gdzie $b_1 = a_4 + a_5$ i $b_2 = a_4 - a_5$.

Z warunku (5.3)₂ otrzymujemy $b_2 = 0$. Z kolei z warunku $\lim_{Z \rightarrow \pm\infty} y(Z) = 0$ otrzymujemy $b_1 = 0$ i $a_1 = 0$.

Podstawiając funkcję (5.4), po uwzględnieniu $b_1 = b_2 = a_1 = 0$, do (5.2)₁ otrzymujemy

$$(5.5) \quad u(Z) = a_2 + \frac{16p}{3m^2} BZH(a-|Z|).$$

Funkcja $w(Z)$ określona związkiem (5.2)₃ powinna także znikać w nieskończoności. Oznacza to, że $a_3 = a_6 = a_7 = 0$, czyli $w(Z) = 0$. Uwzględniając te warunki w równaniu (5.2)₂ oraz $\lim_{Z \rightarrow \pm\infty} v(Z) = 0$, otrzymujemy $a_8 = 0$, czyli $v(Z) = 0$.

Stałą a_2 występującą w (5.5) wyznaczmy z warunku $\Psi_1^0(O) = 0$, co wobec znikania funkcji $w(Z)$ daje warunek $u(O) = 0$. Stąd $a_2 = 0$.

Poszukiwane funkcje mają więc postać

$$(5.6) \quad \begin{cases} w(Z) = v(Z) = 0, \\ u(Z) = \frac{16p}{3m^2} BZH(a-|Z|), \\ y(Z) = \frac{4p}{m^2} H(a-|Z|). \end{cases}$$

Uwzględniając (4.14) i (5.6), otrzymujemy

$$(5.7) \quad \begin{cases} \Psi_1^0 = \frac{8}{3m^2} BpZH(a-|Z|), \\ \Psi_1^1 = \Psi_1^0, \\ \Psi_3^0 = \frac{2p}{m^2} H(a-|Z|), \\ \Psi_3^1 = -\Psi_3^0. \end{cases}$$

Funkcje (5.7) są w tym przypadku rozwiązaniami układu (4.2). Podstawiając (5.7) do (1.2) otrzymujemy funkcję deformacji dla płaskiego stanu odkształcenia w postaci

$$(5.8) \quad \begin{cases} \chi_1 = \frac{8}{3m^2} BpZH(a-|Z|), \\ \chi_3 = \frac{2p}{m^2} \left(1 - \frac{2y}{h}\right) H(a-|Z|). \end{cases}$$

Obliczając, po uwzględnieniu (5.7), siły reakcji (4.17)₁₋₆, mamy

$$(5.9) \quad \begin{cases} r_1 = r_3 = 0, \\ s_1^0 = s_1^1 = 0, \\ s_3^0 = p \left[\frac{(\lambda + 2\mu)^2 - 4\lambda^2}{48(\lambda + \mu)} \delta - 1 \right] H(a - |Z|), \\ s_3^1 = -s_3^0, \end{cases}$$

gdzie $\delta = h/a$. Siły reakcji (5.9) są funkcjami stałych materiałowych λ , μ , intensywności obciążeń p oraz parametru opisującego stosunek wysokości do długości przedziału, w którym działają obciążenia.

Wprowadźmy następującą normę sił reakcji

$$(5.10) \quad \|s_3^0\| = \max_{Z \in R} |s_3^0| = |p(\omega\delta - 1)|,$$

gdzie

$$\omega = \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - 4\lambda^2}{48(\lambda + \mu)}.$$

Parametrem opisującym tutaj granice stosowalności otrzymanego rozwiązania jest δ . Jeżeli $2\mu \neq \lambda$, tzn. $(\lambda + 2\mu)^2 - 4\lambda^2 \neq 0$, funkcja (5.10) jest liniowa względem δ i dla $\delta^* = \frac{1}{\omega}$ mamy $\|s_3^0\| = 0$. Dla tego przypadku rozwiązanie (5.8) jest także rozwiązaniem równań (3.1), tj. równań klasycznej teorii sprężystości. Z kolei dla $\delta \in (\delta^* - \varepsilon, \delta^* + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, rozwiązanie (5.8) aproksymuje nieznanne rozwiązanie układu (3.1) z błędem równym $\varepsilon\omega$. Widać stąd, że zarówno przy $h \rightarrow \infty$, jak i $a \rightarrow 0$, rozwiązanie (5.8) jest coraz gorsze (wartość bezwzględna siły reakcji s_3^0 dąży do nieskończoności).

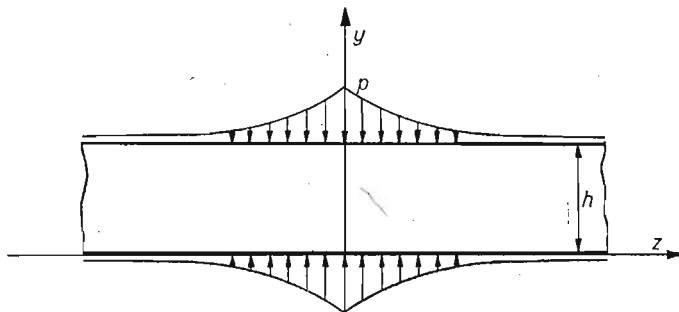
W przypadku $2\mu = \lambda$ mamy $s_3^0 = -pH(a - |Z|)$.

Powierzchniowa siła reakcji s_3^0 jest tutaj rzędu obciążenia zewnętrznego ($s_3^0 = -p_3^0$) i rozwiązanie nie może być stosowane do opisu problemu w ramach klasycznej teorii sprężystości.

b) Rozpatrzmy teraz obciążenie warstwy postaci:

$$p_1^0 = p_1^1 = 0, \quad p_3^0 = pe^{-\frac{|Z|}{c}}, \quad p_3^1 = -p_3^0,$$

gdzie $C = \text{const} > 0$ (rys. 2).



Rys. 2

W tym przypadku uogólnione siły f^0 i f^1 są postaci

$$f_1^0 = f_1^1 = 0, \quad f_3^0 = p_3^0, \quad f_3^1 = p_3^1.$$

Poszukiwane funkcje u , w , v , y są teraz równe

$$(5.11) \quad \begin{cases} w(Z) = v(Z) = 0, \\ u(Z) = -\frac{16pBc^3}{3(m^2c^2-1)} \operatorname{sgn} Z e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ y(Z) = \frac{4pc^2}{c^2m^2-1} e^{-\frac{|Z|}{c}}, \quad c^2m^2 \neq 1. \end{cases}$$

Podstawiając (5.11) do (4.14) otrzymujemy

$$(5.12) \quad \begin{cases} \Psi_1^0 = -\frac{8pBc^3}{3(c^2m^2-1)} \operatorname{sgn} Z e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ \Psi_3^0 = \frac{2pc^2}{c^2m^2-1} e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ \Psi_1^1 = \Psi_1^0, \\ \Psi_3^1 = -\Psi_3^0. \end{cases}$$

Postępując podobnie jak w przypadku a), otrzymamy siły reakcji w postaci

$$(5.13) \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{4p\mu c^3}{h(c^2m^2-1)} \operatorname{sgn} Z e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ r_3 &= -\frac{2pc\mu}{m^2c^2-1} \left(1 - \frac{2y}{h}\right) e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ s_1^0 &= \frac{2p\mu c}{c^2m^2-1} \operatorname{sgn} Z e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ s_1^1 &= s_1^0, \\ s_3^0 &= p e^{-\frac{|Z|}{c}} \left[\frac{4(\lambda+2\mu)c^2}{h(c^2m^2-1)} + \operatorname{sgn} Z \left(\frac{4\lambda^2c^2}{h(c^2m^2-1)(\lambda+\mu)} - 1 \right) \right], \\ s_3^1 &= s_3^0, \quad m^2c^2 \neq 1. \end{aligned}$$

Wprowadzając analogiczne do (5.10), normy sił reakcji, z równań (5.13) otrzymujemy

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \|r_1\| &= \left| \frac{4p\mu(\lambda+2\mu)\delta}{(\lambda+2\mu)\delta^2 - 48(\lambda+\mu)} \right|, \\ \|r_3\| &= \frac{\delta}{2} \|r_1\|, \\ \|s_1^0\| &= \|r_3\|, \\ \|s_3^0\| &= \max \left\{ p \frac{4[(\lambda+2\mu)^2 + \lambda^2]\delta}{(\lambda+2\mu)\delta^2 - 48(\lambda+\mu)} + 1, \right. \\ &\quad \left. p \frac{4[-(\lambda+2\mu)^2 + \lambda^2]\delta}{(\lambda+2\mu)\delta^2 - 48(\lambda+\mu)} + 1 \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $\delta = h/c$ jest parametrem opisującym stosowność otrzymanego rozwiązania.

Składowe objętościowych sił reakcji: podłużna r_1 i poprzeczna r_3 dążą do zera, jeżeli grubość warstwy jest coraz mniejsza (lub $c \rightarrow \infty$). Podobnie zachowują się podłużne powierzchniowe siły reakcji s_1^0, s_1^1 . W przypadku składowych poprzecznych powierzchniowych sił reakcji s_3^0, s_3^1 otrzymamy dla $\delta = 0, s_3^0 = 1$. Oznacza to, że przy zmniejszeniu grubości warstwy (lub zwiększeniu c przy ustalonym h) rozwiązanie (5.13) nie opisuje zachowania się warstwy pod danym obciążeniem. Ponadto, ze wzorów (5.14)₄ wynika, że $\|s_3^0\| > 1$ dla $\delta \neq 0$. Otrzymane rozwiązanie (5.13) nie może więc być stosowane dla żadnej δ (poprzeczne siły reakcji powierzchniowych są większe od sił przyłożonych).

6. Uwagi końcowe

Rozważane w pracy tarcze i płyty stanowią szczególną klasę ciał sprężystych z więzami dla deformacji. Założono, że funkcja deformacji dźwigara jest liniowa względem nieznanymi funkcji opisujących ruch powierzchni dolnej i górnej dźwigara oraz wyróżnionej zmiennej przestrzennej opisującej kierunek prostopadły do tych powierzchni.

Podstawowy układ równań otrzymuje się z zasady d'Alemberta. Rozwiązując podstawowy układ równań wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi (tj. wyznaczając niewiadome funkcje Ψ^0, Ψ^1 , opisujące ruch powierzchni dolnej i górnej) możemy, wykorzystując funkcję więzów dla deformacji, określić ruch dźwigara traktowanego jako ciało trójwymiarowe. Otrzymana funkcja deformacji jest określona w każdym punkcie ciała i na ogół różni się od funkcji deformacji, jaką otrzymalibyśmy w ramach klasycznej teorii sprężystości. W pracy formuluje się kryterium stosowalności modelu, pozwalające ocenić różnicę między otrzymanym rozwiązaniem modelowym, a nieznanym rozwiązaniem liniowej teorii sprężystości.

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia otrzymuje się, dla dowolnego obciążenia zewnętrznego, rozwiązanie zamknięte.

Praca zilustrowana jest dwoma przykładami warstwy sprężystej obciążonej samorównoważonymi układami sił działających pionowo na dźwigar.

Sformułowany model tarcz i płyt sprężystych jest szczególnym przypadkiem modelu warstwowego powłok, którego opis znajduje się w [2].

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do elastokinytyki form konstrukcyjnych*, (w:) *Dźwigary powierzchniowe*, Ossolineum, 1975.
2. W. KUFEL, *Modele warstwowe grubych płyt i powłok*, *Rozpr. Inż.*, 4 (1976).
3. Н. М. МАТВЕЕВ, *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*, Минск 1974.

Резюме

УПРУГИЕ ДИСКИ И ПЛАСТИНЫ С ЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ ДЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ

В статье конструируется модель упругих дисков и пластин в терминах механики сплошной среды с прямыми связями. Принято, что функция деформации диска или пластины линейная по отношению к неизвестным функциям, описывающим движение нижней и верхней поверхности

конструкции а также по отношению к выделенной пространственной переменной, описывающей нормальное к этим поверхностям направление. Такие ограничения названы линейными связями для деформаций. С помощью известных вариационных методов получена основная система уравнений модели.

Сформулирован критерий, оценивающий точность полученных решений и приведены точные решения плоского состояния деформации для общего случая нагружения. В заключение рассмотрены две краевые задачи для упругого слоя, нагруженного самоуравновешенными системами сил, действующими параллельно к оси выделенной пространственной переменной.

S u m m a r y

ELASTIC PLATES WITH LINEAR CONSTRAINTS OF DEFORMATION

A model of elastic plates is constructed on the basis of continuum mechanics with simple constraints. The function of deformation of the plate is assumed, to be linear in the unknown functions describing the motions of its lower and upper surfaces and in the coordinate normal to those surfaces. These limitations are called the linear constraints of deformation. The fundamental equations of the model are derived by means of variational methods. A criterion of estimating the accuracy of the solutions derived is then formulated and closed form solutions of the plane strain cases are given for a general case of loading. In conclusion, the boundary value problems are considered for an elastic layer loaded by self-equilibrated forces normal to the surfaces.

INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 maja 1976 r.

REDUKCJA MACIERZY SZTYWNOŚCI, MAS I TŁUMIENIA

KRZYSZTOF DEMS, JANUSZ LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Stosowanie metody elementów skończonych prowadzi zawsze do rozwiązywania dużych układów równań, a w przypadku zagadnień drgań do konieczności wyznaczania wartości własnych macierzy o dużych rozmiarach. Można tu napotkać trudności natury numerycznej, jak również należy się liczyć z czasochłonnością obliczeń. Było to przyczyną podjęcia przez wielu autorów prac, mających na celu zmniejszenie rozmiarów macierzy występujących w konkretnym zagadnieniu [1, 2, 3, 7]. Najczęściej stosowanym postępowaniem jest metoda kompensacji niewiadomych, polegająca na podziale wszystkich niewiadomych na dwa zbiory i uzależnienie jednego z nich od drugiego, np. [2]. Należy tu podkreślić, że postępowanie to przeprowadzane jest po utworzeniu układu równań dla całej rozpatrywanej konstrukcji.

W pracy niniejszej podjęto próbę rozwiązania zagadnienia kompensacji na etapie znacznie wcześniejszym, bo już na etapie tworzenia macierzy związanych z pojedynczym elementem, ograniczając się do rozpatrywania zagadnień dwuwymiarowych. Rozpatrywane ciało modelować będziemy elementami izoparametrycznymi [3], wprowadzając pierwotnie jako stopnie swobody w każdym węźle siatki składowe przemieszczenia, ich pierwsze pochodne oraz drugie pochodne mieszane. Zapewni to ciągłość funkcji przemieszczeń oraz ich pierwszych pochodnych wzdłuż krawędzi stykających się elementów. Przyjęto dalej, że głównymi stopniami swobody będą jedynie przemieszczenia węzłów siatki, a ich odpowiednie pochodne podlegać będą kompensacji. Uzależnienie pochodnych od głównych stopni swobody dokonano w oparciu o metodę różnic skończonych. Uzyskano w ten sposób znaczne zmniejszenie globalnej liczby niewiadomych, którymi są teraz wyłącznie składowe przemieszczenia węzłów, co prowadzi w efekcie do znacznego zmniejszenia rozmiarów macierzy opisujących dane zagadnienie.

Stosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania zagadnień drgań sprowadza się w efekcie do rozwiązania równania różniczkowego w postaci macierzowej [3]

$$K\delta + C \frac{\partial}{\partial t} \delta + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta + F = 0,$$

gdzie K — macierz sztywności konstrukcji;

C — macierz tłumienia konstrukcji;

M — macierz mas konstrukcji;

F — macierz kolumnowa sił węzłowych w przypadku drgań wymuszonych;

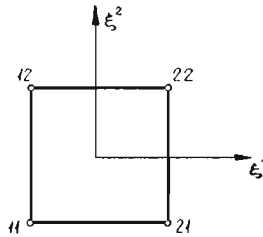
δ — macierz kolumnowa uogólnionych przemieszczeń węzłów.

Macierze \mathbf{K} , \mathbf{C} , \mathbf{M} powstają jako odpowiednie sumy macierzy obliczanych dla kolejnych elementów. Rozwiązanie postawionego problemu sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia macierzy \mathbf{K} , \mathbf{C} i \mathbf{M} dla elementu. Dalsze postępowanie jest typowe dla klasycznej metody elementów skończonych.

2. Funkcje jednostkowe w elemencie

Rozpatrzmy prostokątny element w lokalnym układzie współrzędnych (rys. 1). Przyjmijmy, że w elemencie określona jest ciągła i różniczkowalna funkcja $F(\xi^1, \xi^2)$, którą zastępować będziemy jej przybliżeniem postaci

$$(1) \quad F(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{Q}\mathbf{f}_e,$$



Rys. 1

gdzie \mathbf{f}_e jest macierzą kolumnową zawierającą węzłowe wartości przybliżanej funkcji i ewentualnie jej pochodne, a \mathbf{Q} jest macierzą wierszową funkcji jednostkowych. Funkcje jednostkowe wyrazimy poprzez wielomiany Hermite'a zgodnie z zależnością

$$(2) \quad Q^{ikpq}(\xi^1, \xi^2) = H^{pi}(\xi^1)H^{aq}(\xi^2), \quad \begin{array}{l} i, k = 1, 2, \\ p, q = 0, 1, \end{array}$$

gdzie

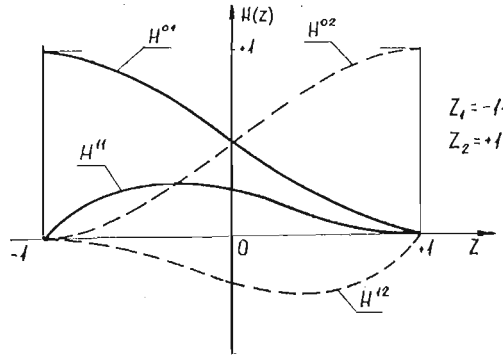
$$\left[\frac{d^r H^{pi}(z)}{dz^r} \right]_{z=z_j} = \delta_{ij} \delta_{rp},$$

- i — indeks węzła, dla którego funkcja jest określona,
- j — indeks węzła, w którym oblicza się wartości funkcji,
- p — rząd wielomianu Hermite'a,
- r — rząd pochodnej względem z .

W szczególności, wielomiany rzędu zerowego i pierwszego określone dla zbioru dwóch punktów ($z_1 = -1, z_2 = +1$) przyjmują postać

$$\begin{aligned} H^{01} &= \frac{1}{4}(z^3 - 3z + 2), & H^{11} &= \frac{1}{4}(z^3 - z^2 - z + 1), \\ H^{02} &= \frac{1}{4}(-z^3 + 3z + 2), & H^{12} &= \frac{1}{4}(-z^3 - z^2 + z + 1). \end{aligned}$$

Ich przebieg pokazany jest na rys. 2.

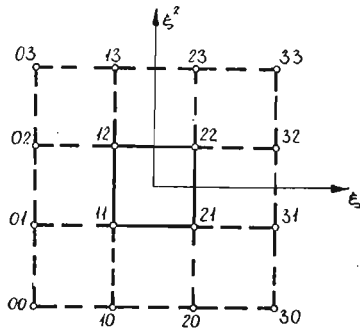


Rys. 2

Uwzględniając w (2) wspomniane wyżej wielomiany rzędu zerowego i pierwszego, żądamy równocześnie znajomości czterech parametrów określających funkcję F w każdym węźle, tzn. wartości funkcji, jej obu pierwszych pochodnych i pochodnej mieszanej względem zmiennej ξ^1 i ξ^2 . Zatem macierz f_e musi przyjąć postać

$$(3) \quad f_e = [f_{11}, f_{11,\xi^1}, f_{11,\xi^2}, f_{11,\xi^1\xi^2}, f_{12}, f_{12,\xi^1}, \dots, f_{22,\xi^1\xi^2}],$$

gdzie symbole po przecinku oznaczają różniczkowanie względem odpowiedniej zmiennej. Zgodnie z przyjętym założeniem, macierz f_e powinna zawierać jedynie wartości węzłowe przybliżanej funkcji. Zastąpimy zatem pochodne występujące w (3) ich różnicowymi



Rys. 3

przybliżeniami zależnymi jedynie od węzłowych wartości funkcji. W tym celu dołączamy do rozpatrywanego elementu elementy sąsiednie (rys. 3). Pochodne węzłowo-rozpatrywanej funkcji zastąpimy zatem przybliżeniami:

$$f_{ik,\xi^1} = \frac{1}{4} (f_{i+1,k} - f_{i-1,k}),$$

$$(4) \quad f_{ik,\xi^2} = \frac{1}{4} (f_{i,k+1} - f_{i,k-1}),$$

$$f_{ik,\xi^1\xi^2} = \frac{1}{16} (f_{i+1,k+1} + f_{i-1,k-1} - f_{i+1,k-1} - f_{i-1,k+1}).$$

Wykorzystując (2) i (4) w zależności (1), otrzymamy

$$(5) \quad F(\xi^1, \xi^2) = \bar{Q}f_e,$$

gdzie f_e jest macierzą zawierającą jedynie węzłowe wartości funkcji w rozpatrywanym elemencie i elementach sąsiednich, natomiast \bar{Q} jest macierzą przekształconych funkcji jednostkowych o postaci

$$(6) \quad \bar{Q}^{ik}(\xi^1, \xi^2) = R^i(\xi^1)R^k(\xi^2), \quad i, k = 0, 1, 2, 3,$$

gdzie funkcja R wyrażona jest poprzez wielomiany Hermite'a

$$R^0 = \frac{1}{4}H^{11}, \quad R^2 = -\frac{1}{4}H^{11} - H^{20},$$

$$R^1 = \frac{1}{4}H^{21} - H^{10}, \quad R^3 = -\frac{1}{4}H^{21}.$$

Dla elementu z rys. 3 funkcje te mają postać

$$R^0(z) = \frac{1}{16}(z^3 - z^2 - z + 1),$$

$$R^1(z) = \frac{1}{16}(-3z^3 + z^2 + 11z - 9),$$

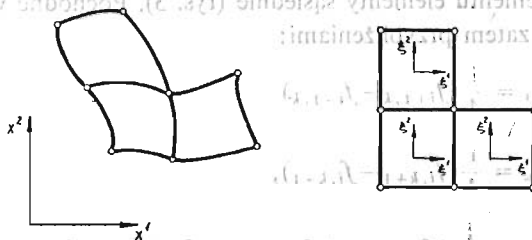
$$R^2(z) = \frac{1}{16}(3z^3 + z^2 - 11z - 9),$$

$$R^3(z) = \frac{1}{16}(-z^3 - z^2 + z + 1).$$

Postępowanie opisane powyżej powoduje, że rozpatrywana funkcja, której przybliżenie dane jest przez (5), przy przejściu z elementu do elementu zachowuje ciągłość swojej wartości, obu pierwszych pochodnych i drugiej pochodnej mieszanej.

3. Transformacja układu współrzędnych

Przyjmujemy, że rozpatrywany obszar podzielony został na krzywoliniowe elementy czworokątne (rys. 4). W każdym elemencie wprowadzony został lokalny układ współ-



Rys. 4

rzędnych $\xi^1 \xi^2$, przy czym transformacja z układu globalnego do lokalnego następuje według zależności

$$(7) \quad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \hat{Q} \begin{bmatrix} x_e^1 \\ x_e^2 \end{bmatrix},$$

gdzie x_e^1 x_e^2 są macierzami współrzędnych węzłów w układzie globalnym, x^1 i x^2 są współrzędnymi dowolnego punktu elementu, a macierz \hat{Q} ma postać

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix}.$$

Biorąc pod uwagę wspomnianą wyżej transformację, wykazuje się, że dowolna funkcja o postaci (5), określona poprzez zmienne lokalne, zachowuje ciągłość swojej wartości wzdłuż krawędzi sąsiednich elementów krzywoliniowych i obu pierwszych pochodnych względem zmiennych globalnych.

4. Wyznaczanie macierzy sztywności, mas i tłumienia

Składowe przemieszczenia wewnątrz elementu określać będziemy w lokalnym układzie współrzędnych, przyjmując je w postaci podobnej do (5)

$$(8) \quad \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = \hat{Q} \delta_e, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix}, \quad \delta_e = \begin{bmatrix} \delta_e^1 \\ \delta_e^2 \end{bmatrix},$$

gdzie \hat{Q} jest macierzą funkcji jednostkowych (6), a δ_e jest macierzą przemieszczeń węzłów elementu rozpatrywanego i elementów sąsiednich (rys. 3).

Tak określone przemieszczenia zachowują ciągłość swoich wartości i obu pierwszych pochodnych względem zmiennych globalnych wzdłuż krawędzi sąsiednich elementów.

Wykorzystując funkcję przemieszczeń (8), macierz sztywności przedstawimy w znanej postaci [3]

$$(9) \quad k_e = \iint \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B} dx^1 dx^2,$$

gdzie $\bar{\mathbf{D}}$ jest macierzą sprężystości, a \mathbf{B} macierzą określającą związek między odkształceniami w dowolnym punkcie elementu i przemieszczeniami węzłowymi δ_e . Szczegółowe wyznaczanie współczynników tej macierzy dla elementów tarczowych i płytowych podane jest w pracach [5, 6].

Macierz mas elementu określona jest zależnością [3]

$$(10) \quad m_e = \int_{V_e} \hat{Q}^T \rho \hat{Q} dV,$$

gdzie \hat{Q} jest macierzą funkcji jednostkowych (6), a ρ masą właściwą.

Macierz tłumienia określamy z kolei jako [3]

$$(11) \quad c_e = \int_{V_e} \hat{Q}^T \mu \hat{Q} dV,$$

gdzie \hat{Q} jest, jak poprzednio, macierzą funkcji jednostkowych, a μ współczynnikiem tłumienia.

5. Przykład numeryczny

Celem sprawdzenia przydatności proponowanej metody, wykorzystano ją do wyznaczenia częstości drgań własnych i postaci drgań cienkich płyt. W tym przypadku funkcje ugięcia (8) upraszczają się do postaci

$$(12) \quad w(\xi^1, \xi^2) = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{w}_e,$$

gdzie \mathbf{w}_e jest macierzą kolumnową przemieszczeń węzłów (tj. ugięć prostopadłych do powierzchni płyty) elementu i jego sąsiadów (rys. 3), a $\bar{\mathbf{Q}}$ jest macierzą funkcji jednostkowych. Zakładając, że rozpatrywać będziemy elementy izotropowe o stałej grubości, współczynniki macierzy sztywności określone na podstawie zależności (9) otrzymujemy w postaci [5]

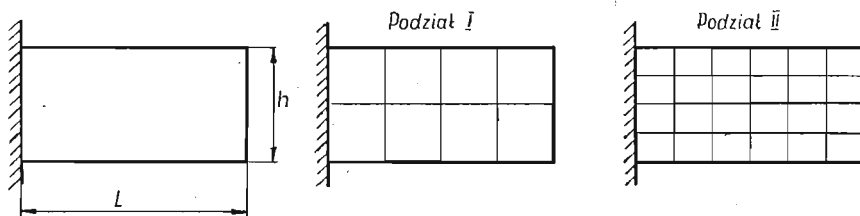
$$(13) \quad k_e^{ijpq} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} D [(\bar{Q}_{,x^1x^1}^{ip} + \bar{Q}_{,x^2x^2}^{ip})(\bar{Q}_{,x^1x^1}^{jq} + \bar{Q}_{,x^2x^2}^{jq}) - \\ - (1-\nu)(\bar{Q}_{,x^1x^1}^{ip} \bar{Q}_{,x^2x^2}^{jq} + \bar{Q}_{,x^2x^2}^{ip} \bar{Q}_{,x^1x^1}^{jq} - 2\bar{Q}_{,x^1x^2}^{ip} \bar{Q}_{,x^1x^2}^{jq})] J d\xi^1 d\xi^2,$$

gdzie J jest jacobianem przekształcenia (7), D — sztywnością elementu płyty, a drugie pochodne funkcji jednostkowych względem zmiennych globalnych wyznaczmy w oparciu o pochodne tych funkcji względem zmiennych lokalnych ξ^1, ξ^2 i wzór transformacyjny (7). Współczynniki macierzy mas określonej wzorem (10) przyjmują postać

$$(14) \quad m_e^{ijpq} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho t \bar{Q}^{ip} \bar{Q}^{jq} J d\xi^1 d\xi^2,$$

gdzie ρ jest masą właściwą, t — grubością elementu płyty oraz J — jacobianem przekształcenia.

Obliczenia zostały zrealizowane w pojedynczej precyzji na EMC ODRA 1305, wykorzystując biblioteczny podprogram obliczania wartości własnych oparty na metodzie HOUSEHOLDERA. Rozwiązano przykładowo zagadnienie drgań własnych prostokątnej płyty utwierdzonej jedną krawędzią, przy uwzględnieniu różnych stosunków długości boków, wprowadzając dwa sposoby podziału płyty na elementy (rys. 5).



Rys. 5

W tablicach 1, 2, 3 zestawiono wartości częstości drgań własnych uzyskane dla płyt o stosunku boków $L/h = 1, 2, 5$ oraz porównano je z wynikami uzyskanymi przez BARTONA [4], PLUNKETTA [3] i ZIENKIEWICZA [3].

Tablica 1 $L/h = 1$

Postać drgań	$\omega/\sqrt{D qtL^4}$			
	wg metody prezentowanej w pracy		wg Bartona	
	Podział		met. Ritza	Doświadczalna
	I	II		
1	2,995	3,427	3,494	3,37
2	7,900	8,244	8,547	8,26
3	20,089	21,864	21,44	20,55
4	27,475	28,627	27,46	27,15
5	29,803	30,959	31,17	29,75
6	55,701	55,385		
7	62,721	68,146		
8	71,020	72,089		

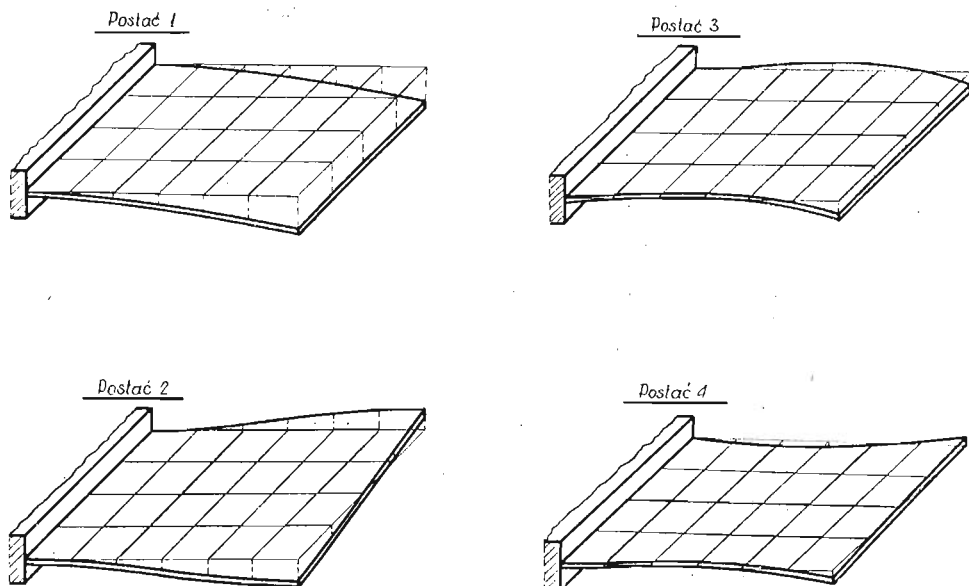
Tablica 2 $L/h = 2$

Postać drgań	$\omega/\sqrt{D qtL^4}$					
	wg metody prezentowanej w pracy		wg Bartona		Doświadczalnie Plunketta	wg Zienkiewicza 64 elem.
	podział		met. Ritza	Doświadczalna		
	I	II				
1	3,341	3,471	3,472	3,36	3,50	3,44
2	14,574	14,801	14,93	14,43	14,50	14,77
3	22,528	23,026	21,01	20,86	21,70	21,50
4	48,851	49,281	48,71	46,90	48,10	48,19
5	65,150	68,194	94,49	93,99	60,50	60,54
6	93,807	98,199			92,30	91,79
7	97,876	99,016			92,80	92,78
8	123,435	130,066			118,70	119,34

Tablica 3 $L/h = 5$

Postać drgań	$\omega/\sqrt{D qtL^4}$			
	wg metody prezentowanej w pracy		wg Bartona	
	Podział		met. Ritza	Doświadczalna
	I	II		
1	3,490	3,458	3,45	3,32
2	23,845	23,133	21,52	20,88
3	34,109	34,045	34,73	32,40
4	68,362	69,592	105,9	97,35
5	105,841	104,998		
6	125,002	139,442		
7	190,907	185,953		
8	278,957	229,001		

Rys. 6 przedstawia przykładowo cztery pierwsze postacie drgań dla płyty o stosunku boków $L/h = 2$ przy II sposobie podziału.



Rys. 6

Jako dane liczbowe przyjęto:

moduł Younga $E = 2,11 \times 10^{11}$ [N/m²],

liczba Poissona $\nu = 0,3$,

gęstość $\rho = 7,83 \times 10^3$ [kg/m³],

grubość płyty $t = 2,54 \times 10^{-3}$ [m],

długość płyty $L = 5,08 \times 10^{-2}$ [m].

6. Wnioski końcowe

Przedstawiona metoda obliczeń stwarza nową możliwość redukcji stopni swobody w zagadnieniach drgań rozwiązywanych metodą elementów skończonych. W klasycznym ujęciu, stosując elementy izoparametryczne, w każdym węzle siatki wprowadza się dla każdej składowej przemieszczenia cztery nie znane początkowo parametry (przemieszczenia i odpowiednie pochodne). Stosując postępowanie opisane w punkcie 2, redukujemy liczbę nie znanych parametrów dla każdej składowej przemieszczenia do jednego (wartość przemieszczenia). Zatem globalna liczba niewiadomych dla wszystkich węzłów siatki maleje czterokrotnie. Prowadzi to do operowania macierzami o czterokrotnie mniejszych wymiarach. Jest to główną zaletą proponowanej metody. Uzyskane wyniki numeryczne wykazały zadawalającą zgodność z wynikami uzyskiwanymi przez różnych autorów na drodze teoretycznej i doświadczalnej, co pozwala wnioskować o przydatności proponowanej koncepcji.

Literatura cytowana w tekście

1. B. IRONS, *Eigenvalue economisers in vibration problems*, J. Roy. Ac. Soc., **67**, (1963), 526.
2. R. J. GUYAN, *Reduction of stiffness and mass matrices*, J.A.I.A.A., **3**, (1965), 380.
3. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
4. M. V. BARTON, *Vibration of rectangular and skew cantilever plates*, J. Appl. Mech., **18**, (1951), 129 - 34.
5. K. DEMS, J. LIPIŃSKI, *Zastosowanie różnic skończonych do tworzenia macierzy sztywności w metodzie elementów skończonych na przykładzie zginanej płyty*, Mech. Teoret. Stos., **4**, **12**, (1974), 547 - 60.
6. K. DEMS, J. LIPIŃSKI, *Application of finite differences for solving the two-dimensional elasticity problem by means of the finite element method*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., **6**, (1975), 49 - 58.
7. R. BATHE, E. WILSON, *Large eigenvalue problems in dynamic analysis*, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., EM6, **98** (1972).

Резюме

СОКРАЩЕНИЕ РАЗМЕРОВ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ, МАСС
И ДЕМПФИРОВАНИЯ

В работе представлен способ сокращения размеров матриц жесткости, масс и демпфирования, используемых при решении задач динамики сплошной среды методом конечных элементов. Такое сокращение достигнуто путем использования конечных разностей при построении этих матриц.

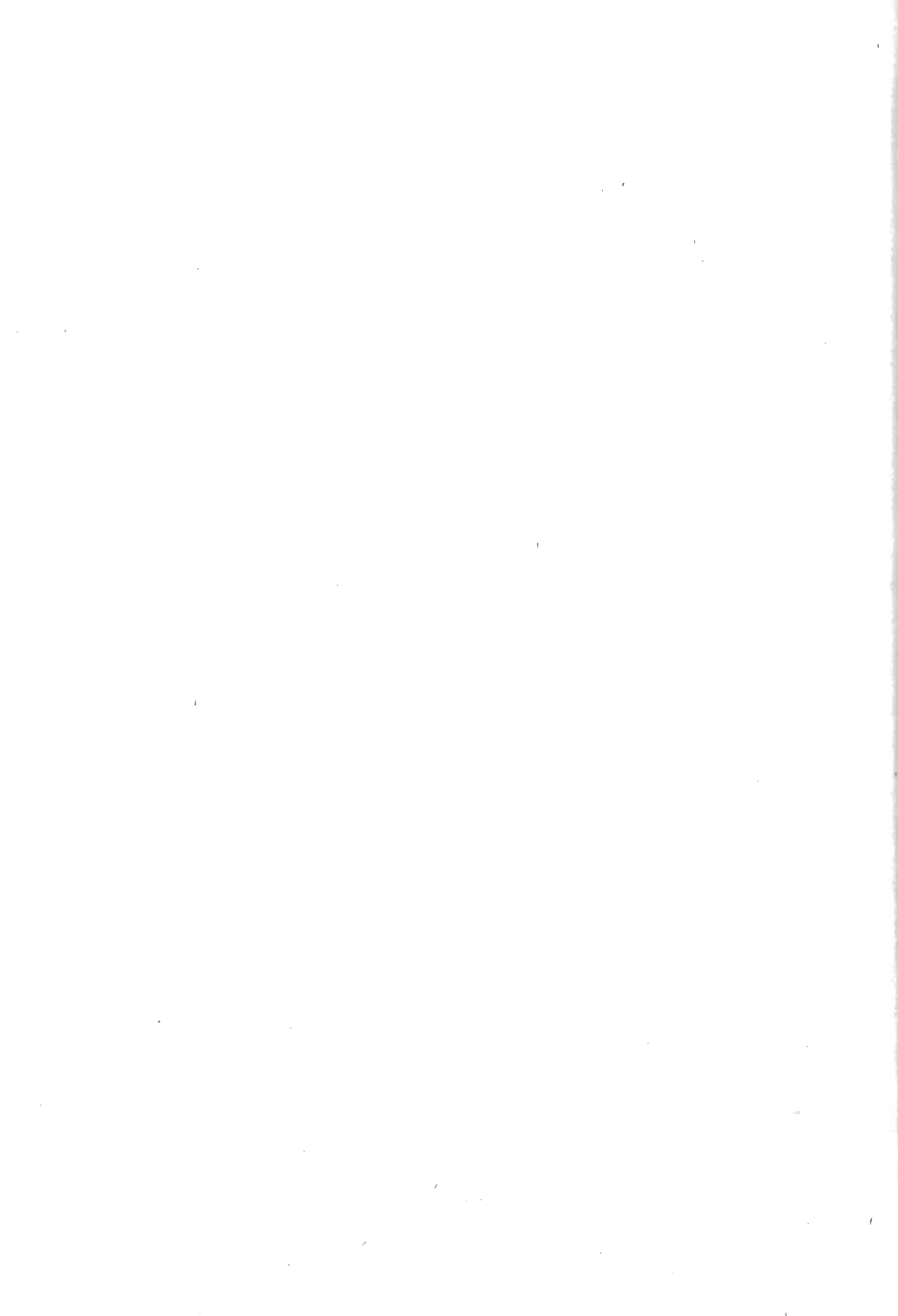
Summary

REDUCTION OF THE STIFFNESS, MASS AND DAMPING MATRICES

The paper deals with the problem of reduction of the stiffness, mass and damping matrices, which are due to the application of the finite element method to solving the dynamic problems of continua. Reduction of the dimensions of the matrices is obtained by means of the finite differences used for constructing the matrices in question.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 czerwca 1976 r.



O SUMOWANIU PEWNYCH SZEREGÓW FOURIERA-BESSELA

KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

Przy rozważaniu zagadnień termosprężystości, dotyczących wyznaczania pól mechanicznych i pola temperatury w walcu kołowym w przypadku, gdy dane na jego poboczniczy wielkości są funkcjami kąta, otrzymane rozwiązania mają postać szeregów Fouriera-Bessela. Tego typu szeregi mogą pojawić się również w innych zagadnieniach, zwłaszcza gdy są one rozpatrywane w cylindrycznym układzie współrzędnych.

W pracy niniejszej wyznaczono sumy szeregów postaci

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}^s J_{n+k}(\mu_{ni} x) J_{n+l}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 \pm a^2) J_{n+l}^2(\mu_{ni})},$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots, s, k, l = 0, 1$, μ_{ni} — i -te miejsce zerowe funkcji Bessela $J_n(\mu)$, a — dowolna stała rzeczywista różna od zera, $x, y \in (0, 1)$.

Sumy szeregów typu (1) są znane w pewnych szczególnych przypadkach dla $n = 0$ oraz $x = 1$ (por. [1, 2, 3] i in.). Jednakże sumy szeregów postaci (1) nie były dotychczas — jak się wydaje — publikowane.

Metodę wyznaczania sum szeregów tego typu podał WOELKE [3], który jednakże ograniczył się tylko do przypadku $n = 0$. Polega ona na wykorzystaniu tzw. całki Lom-mela [4, 5]

$$(2) \quad \int_a^b x U_n(\lambda x) V_n(\mu x) dx = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} [U_n(\lambda x) \mu x V_n'(\mu x) - V_n(\mu x) \lambda x U_n'(\lambda x)]_a^b,$$

gdzie $\lambda \neq \mu$ — dowolne liczby rzeczywiste lub zespolone, $b > a \geq 0$,

$U_n(x), V_n(x)$ — rozwiązania równania Bessela [2],

$$f'(u) \equiv \frac{df}{du}.$$

1. Szereg podstawowy

Rozważmy ciąg funkcji $\{t_{(n)m}(x; y)\}_{m=1,2,\dots}$, określony następująco:

$$(3) \quad t_{(n)m}(x; y) = \begin{cases} 2x \sum_{i=1}^m \frac{J_n(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{J_{n+1}^2(\mu_{ni})} & \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \in R \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

Tutaj y jest pewną liczbą z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Funkcje $t_{(n)m}(x; y)$ są lokalnie całkowlne oraz mają następujące własności:

$$i) \bigwedge_{M>0} \bigvee_{c<+\infty} \left| \int_{x_1-y}^{x_2-y} t_{(n)m}(x; y) dx \right| < C \text{ dla } |x_1-y|, |x_2-y| < M \quad (m = 1, 2, \dots),$$

ii) dla dowolnych $x_1 \neq y, x_2 \neq y, x_1 \leq x_2$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x_1-y}^{x_2-y} t_{(n)m}(x; y) dx = \begin{cases} 0, & \text{gdy } (x_1-y)(x_2-y) > 0, \\ 1, & \text{gdy } (x_1-y)(x_2-y) < 0. \end{cases}$$

Własności i) oraz ii) funkcji $t_{(n)m}(x; y)$ są pokazane w monografii WATSONA ([2], rozdz. XVIII). Jak zatem wynika ze znanego twierdzenia o ciągach funkcyjnych typu δ (por. [6], s. 47), ciąg $t_{(n)m}(x; y)$ jest zbieżny dystrybucyjnie do $\delta(x-y)$, tzn. dla każdej funkcji $\varphi(x) \in C_0^\infty$ [6] mamy

$$(4) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_{(n)m}(x; y) \varphi(x) dx = \varphi(y) = (\delta(x-y), \varphi(x)).$$

Co więcej — ze względu na określenie ciągu $t_{(n)m}(x; y)$ — wystarczy, aby w związku (4) funkcje $\varphi(x) \in C^\infty$.

Stąd

$$(5) \quad 2x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x) J_n(\mu_{ni}y)}{J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \delta(x-y),$$

przy czym związek (5) należy rozumieć w sensie równości (4). Tutaj $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$; $\delta(x-y)$ — dystrybucja δ -Diraca o przesuniętym argumentcie.

Analogicznie można pokazać, że

$$(5') \quad 2y \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x) J_n(\mu_{ni}y)}{J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \delta(y-x),$$

gdzie $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$.

Pomnożymy teraz funkcje $t_{(n)m}(x; y)$ przez $I_n'(ax)$, (gdzie $I_n(z)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela n -tego rzędu [2], zaś a — dowolna stała rzeczywista) oraz scałkujemy ten iloczyn od zera do x , gdzie $x > y$. Wykorzystując (2) oraz związek $J_n(iz) = i^n I_n(z)$ ($i = \sqrt{-1}$) można wynik tego całkowania zapisać w postaci równania różniczkowego

$$(6) \quad S_{n,m}(x; y) - \frac{I_n(ax)}{a I_n'(ax)} \frac{\partial}{\partial x} S_{n,m}(x, y) = \int_0^x \frac{I_n(a\xi) t_{(n)m}(\xi; y)}{2ax I_n'(ax)} d\xi,$$

gdzie

$$S_{n,m}(x, y) = \sum_{i=1}^m \frac{J_n(\mu_{ni}x) J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})}.$$

Jak łatwo sprawdzić, ciąg $\{S_{n,m}(x, y)\}_{m=1, 2, \dots}$ jest zbieżny niemal jednostajnie dla $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$. Wykonując w równaniu (6) przejście z m do ∞ otrzymujemy stąd — wobec związku (4) — równanie różniczkowe

$$(7) \quad S_n(x, y) - \frac{I_n(ax)}{aI_n'(ax)} \frac{\partial}{\partial x} S_n(x, y) = \frac{I_n(ay)}{2axI_n'(ax)}.$$

Tutaj

$$(8) \quad S_n(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{n,m}(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{nl}x)J_n(\mu_{nl}y)}{(\mu_{nl}^2 + a^2)J_{n+1}^2(\mu_{nl})}.$$

Rozwiązaniem równania (7) jest funkcja

$$(9) \quad S_n(x, y) = A_n I_n(ax) + \frac{1}{2} I_n(ay) K_n(ax), \quad x \neq 0,$$

gdzie A_n — stała, którą wyznacza się z warunku

$$(10) \quad S_n(1, y) = 0, \text{ wynikającego z (8);}$$

zaś $K_n(ax)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela II rodzaju n -tego rzędu.

Biorąc pod uwagę fakt, że funkcja $S_n(x, y)$ jest symetryczna względem obu zmiennych, oraz uwzględniając (9) i (10) otrzymuje się sumę szeregu (8):

$$(11) \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{nl}x)J_n(\mu_{nl}y)}{(\mu_{nl}^2 + a^2)J_{n+1}^2(\mu_{nl})} = 2a^2 \{ \eta(x-y) F_{n1}(a, x) I_n(ay) + \eta(y-x) F_{n1}(a, y) I_n(ax) \},$$

gdzie $\eta(z)$ jest funkcją Heavyside'a, oraz

$$F_{n1}(p, z) = \frac{1}{4p^2 I_n(p)} [K_n(pz) I_n(p) - K_n(p) I_n(pz)]; \quad x, y \in (0, 1).$$

W dalszych związkach używać się jeszcze będzie następującego oznaczenia skracającego:

$$F_{n2}(p, z) = \frac{1}{4p^2 I_n(p)} [K_n(p) I_{n+1}(pz) + K_{n+1}(pz) I_n(p)].$$

Nietrudno zauważyć, że

$$F_{n1}(p, 1) = 0,$$

$$F_{n2}(p, 1) = \frac{1}{4p^3 I_n(p)}.$$

Związek (11) jest podstawą wszystkich następnych wyprowadzonych zależności. Dla $n = 0$ związek (11) sprowadza się do postaci wyprowadzonej w pracy [3].

2. Inne szeregi typu (1)

Przy wszystkich następnych przekształceniach będziemy uważać, że $x \neq y$ oraz $x, y \in (0, 1)$. W związku z tym przeprowadzone różniczkowania dotyczyć będą funkcji ciągłych lub szeregów zbieżnych jednostajnie i bezwzględnie (określonych dla $x < y$ oraz $y < x$, przy czym $x, y \in (0, 1)$) i rozumiane będą w zwykłym sensie.

Zróżniczkowanie związku (11) względem zmiennej x prowadzi do następującej zależności:

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^3 \{ \eta(x-y) I_n(ay) F_{n2}(a, x) - \\ - \eta(y-x) I_{n+1}(ax) F_{n1}(a, y) \}.$$

Jeśli w (12) położyć $x = 1$, to otrzymuje się związek

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{I_n(ay)}{2I_n(a)}, \quad y \in (0, 1).$$

Jeśli w (12) dokonać przejścia granicznego z a do zera, to otrzymuje się wzór

$$(14) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni} J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \frac{1}{2x} \left(\frac{y}{x} \right)^n \eta(x-y).$$

Przejście z x do 1 we wzorze (14), lub przejście z a do zera we wzorze (13), daje znany rezultat [por. 1]:

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{y^n}{2}, \quad y \in (0, 1).$$

Mnożąc związek (12) obustronnie przez $-a^{-2}$, związek (14) przez a^{-2} i dodając je stronami otrzymuje się:

$$(16) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni} (\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \eta(x-y) \left\{ \frac{1}{2a^2 x} \left(\frac{y}{x} \right)^n - 2a I_n(ay) F_{n2}(a, x) \right\} + \\ + \eta(y-x) 2a I_{n+1}(ax) F_{n1}(a, y).$$

Podstawiając w (16) $x = 1$, otrzymuje się wzór:

$$(17) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni} (\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2a^2} \left[y^n - \frac{I_n(ay)}{I_n(a)} \right], \quad y \in (0, 1).$$

Związek (17) można również łatwo wyprowadzić na innej drodze, rozkładając na ułamki proste [7, 8] funkcję $f(a) = I_n(ay)/aI_n(a)$.

Zróżniczkowanie związku (16) po y pozwala uzyskać zależność ($y \neq x$):

$$(18) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = 2a^2 \{ \eta(x-y) I_{n+1}(ay) F_{n2}(a, x) + \\ + \eta(y-x) I_{n+1}(ax) F_{n2}(a, y) \}.$$

Jeśli w (18) położyć $x = 1$, to otrzymuje się związek

$$(19) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{I_{n+1}(ay)}{2aI_n(a)}, \quad y \in (0, 1).$$

Przejście w (19) z a do zera daje w wyniku [por. 1]:

$$(20) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{\mu_{ni}^2 J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{y^{n+1}}{4(n+1)}, \quad y \in (0,1),$$

zaś przyjmując w (19) $y = 1$, otrzymuje się

$$(21) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{ni}^2 + a^2} = \frac{I_{n+1}(a)}{2aI_n(a)}.$$

Przechodząc z a do zera w (21) bądź z y do jedności w (20) dostaje się znany związek

$$(22) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{ni}^2} = \frac{1}{4(n+1)}.$$

Rozważmy jeszcze szereg postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+k}(\mu_{ni}x)J_{n+k}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})}$$

gdzie $k = 0,1$, $a \neq b$, b — nowa dowolna stała. Szereg ten można zapisać w postaci

$$(23) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+k}(\mu_{ni}x)J_{n+k}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \\ = \frac{1}{b^2 - a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu_{ni}^2 + a^2} - \frac{1}{\mu_{ni}^2 + b^2} \right] \frac{J_{n+k}(\mu_{ni}x)J_{n+k}(\mu_{ni}y)}{J_{n+1}^2(\mu_{ni})}.$$

Biorąc pod uwagę (23), (18) i (11) łatwo jest uzyskać sumy następujących szeregów:

$$(24) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \frac{2}{b^2 - a^2} \{ \eta(x-y)[a^2 I_n(ay)F_{n1}(a, x) - \\ - b^2 I_n(by)F_{n1}(b, x)] + \eta(y-x)[a^2 I_n(ax)F_{n1}(a, y) - b^2 I_n(bx)F_{n1}(b, y)] \}.$$

$$(25) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \frac{2}{b^2 - a^2} \{ \eta(x-y)[a^2 I_{n+1}(ay)F_{n2}(a, x) - \\ - b^2 I_{n+1}(by)F_{n2}(b, x)] + \eta(y-x)[a^2 I_{n+1}(ax)F_{n2}(a, y) - b^2 I_{n+1}(bx)F_{n2}(b, y)] \}.$$

Przyjmując w (25) $x = 1$ otrzymuje się

$$(26) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \left[\frac{I_{n+1}(ay)}{aI_n(a)} - \frac{I_{n+1}(by)}{bI_n(b)} \right], \quad y \in (0,1).$$

Do wyprowadzenia dalszych zależności potrzebne są wzory [2]:

$$K_n(ip) = -\frac{\pi}{2}i^{-n}\{Y_n(p) + iJ_n(p)\},$$

$$I_n(ip) = i^n J_n(p),$$

gdzie $Y_n(p)$ — funkcja Bessela II rodzaju n -tego rzędu. Korzystając z tych związków otrzymujemy

$$F_{n1}(ip, z) = -i^n G_{n1}(p, z),$$

$$F_{n2}(ip, z) = i^{-n+1} G_{n2}(p, z),$$

gdzie

$$G_{n1}(p, z) = \frac{\pi}{8p^2 J_n(p)} [Y_n(p)J_n(pz) - Y(pz)J_n(p)],$$

$$G_{n2}(p, z) = \frac{\pi}{8p^2 J_n(p)} [Y_n(p)J_{n+1}(pz) - Y_{n+1}(pz)J_n(p)].$$

Korzystając z powyższych wzorów i związków (11)—(13), (16)—(19), (24)—(26) można — zastępując w nich stałe a i b stałymi urojonymi ia oraz ib — uzyskać następujące zależności:

$$(27) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^2 \{ \eta(x-y)G_{n1}(a, x)J_n(ay) + \\ + \eta(y-x)G_{n1}(a, y)J_n(ax) \},$$

$$(28) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^3 \{ \eta(x-y)J_n(ay)G_{n2}(a, x) + \\ + \eta(y-x)J_{n+1}(ax)G_{n1}(a, y) \},$$

$$(29) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{J_n(ay)}{2J_n(a)}, \quad y \in (0, 1),$$

$$(30) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{\mu_{ni}(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \eta(x-y) \left\{ 2aJ_n(ay)G_{n2}(a, x) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2a^2x} \left(\frac{y}{x} \right)^n \right\} + \eta(y-x) 2aJ_{n+1}(ax)G_{n1}(a, y),$$

$$(31) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}y)}{\mu_{ni}(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{J_n(ay)}{J_n(a)} - y^n \right], \quad y \in (0, 1),$$

$$(32) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^2 \{ \eta(x-y)J_{n+1}(ay)G_{n2}(a, x) + \\ + \eta(y-x)J_{n+1}(ax)G_{n2}(a, y) \},$$

$$(33) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{J_{n+1}(ay)}{2aJ_n(a)} \quad y \in (0, 1),$$

$$(34) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{ni}^2 - a^2} = \frac{J_{n+1}(a)}{2aJ_n(a)},$$

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \\ = \frac{2}{a^2 + b^2} \{ \eta(x-y)[a^2J_n(ay)G_{n1}(a, x) - b^2I_n(by)F_{n1}(b, x)] + \\ + \eta(y-x)[a^2J_n(ax)G_{n1}(a, y) - b^2I_n(bx)F_{n1}(b, y)] \},$$

$$(36) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \\ = \frac{2}{a^2 + b^2} \{ \eta(x-y)[a^2J_{n+1}(ay)G_{n2}(a, x) - b^2I_{n+1}(by)F_{n2}(b, x)] + \\ + \eta(y-x)[a^2J_{n+1}(ax)G_{n2}(a, y) - b^2I_{n+1}(bx)F_{n2}(b, y)] \},$$

$$(37) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \left[\frac{J_{n+1}(ay)}{aJ_n(a)} - \frac{I_{n+1}(by)}{bI_n(b)} \right].$$

Kontynuując procedurę wyznaczania sum szeregów Fouriera-Bessela, wskazaną przez WOELKEGO [3], można by napisać jeszcze cały szereg interesujących zależności. Poprzestaniemy jednakże na pokazanych wyżej związkach. Należy stwierdzić, że wszystkie wprowadzone wzory można dla $n = 0$ znaleźć w pracy [3].

3. Szeregi, których sumy wyrażają się przez funkcje Thomsona (Kelvina)

Zastępując w związkach (11)–(37) stałe a i b przez stałe zespolone $\sqrt{i}a$ oraz $\sqrt{i}b$ otrzymuje się szeregi, których sumy wyrażają się przez kombinacje funkcji Thomsona [2]. W szczególności można poprzez te funkcje wyrazić sumy szeregów, zawierających w mianownikach swoich składników wyrażenia $\mu_{ni}^4 + a^4$.

I tak podstawiając wielkość $\sqrt{i}a$ zamiast a oraz b do związku (35) otrzymujemy

$$(38) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^4 + a^4)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \\ = \frac{M_n(ax)M_n(ay)}{2a^2} \left\{ [\eta(x-y) + \eta(y-x)] \frac{N_n(a)}{M_n(a)} \sin[\theta_n(ax) + \theta_n(ay) + \phi_n(a) - \theta_n(a)] - \right. \\ \left. - \left[\eta(x-y) \frac{N_n(ax)}{M_n(ax)} \sin[\theta_n(ay) + \phi_n(ax)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta(y-x) \frac{N_n(ay)}{M_n(ay)} \sin[\theta_n(ax) + \phi_n(ay)] \right] \right\}.$$

Wykonując takie samo podstawienie we wzorze (36) dostajemy

$$(39) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^4 + a^4)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} =$$

$$= \frac{M_{n+1}(ax)M_{n+1}(ay)}{2a^2} \left\{ [\eta(x-y) + \eta(y-x)] \frac{N_n(a)}{M_n(a)} \sin[\theta_{n+1}(ax) + \right.$$

$$+ \theta_{n+1}(ay) + \phi_n(a) - \theta_n(a)] - \left[\eta(x-y) \frac{N_{n+1}(ax)}{M_{n+1}(ax)} \sin[\theta_{n+1}(ay) + \right.$$

$$\left. + \phi_{n+1}(ax)] + \eta(y-x) \frac{N_{n+1}(ay)}{M_{n+1}(ay)} \sin[\theta_{n+1}(ax) + \phi_{n+1}(ay)] \right\}.$$

Podobnie — podstawiając w związkach (17) i (30) wielkość $\sqrt{i} a$ w miejsce a , następnie zaś dodając lub odejmując stronami otrzymane wyniki — uzyskujemy wzory

$$(40) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^4 + a^4)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2a^2} \frac{M_n(ay)}{M_n(a)} \sin[\theta_n(a) - \theta_n(ay)],$$

$$(41) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^2J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^4 + a^4)\mu_{ni}J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2a^2} \left\{ y^n - \frac{M_n(ay)}{M_n(a)} \cos[\theta_n(a) - \theta_n(ay)] \right\}.$$

Tutaj

$$M_n(z) = \sqrt{\text{ber}_n^2 z + \text{bei}_n^2 z},$$

$$N_n(z) = \sqrt{\text{ker}_n^2 z + \text{kei}_n^2 z},$$

$$\theta_n(z) = \text{arctg} \left(\frac{\text{bei}_n z}{\text{ber}_n z} \right),$$

$$\phi_n(z) = \text{arctg} \left(\frac{\text{kei}_n z}{\text{ker}_n z} \right),$$

$\text{ber}_n z$, $\text{bei}_n z$, $\text{ker}_n z$, $\text{kei}_n z$ — funkcje Kelvina n -tego rzędu. Są one powiązane ze zmodyfikowanymi funkcjami Bessela związkami [9]:

$$I_n(zi^{1/2}) = (-i)^n [\text{ber}_n z + i \text{bei}_n z] = (-i)^n M_n(z) e^{i\theta_n(z)},$$

$$K_n(zi^{1/2}) = i^n [\text{ker}_n z + i \text{kei}_n z] = i^n N_n(z) e^{i\phi_n(z)}.$$

4. Uwagi końcowe

Przedstawione w niniejszej pracy wzory sumacyjne dla szeregów Fouriera-Bessela, zależnych od dwóch zmiennych, są uogólnieniem wyników pracy [3]. Wzory te, sprowadzające się w szczególnych przypadkach do znanych w literaturze związków, wyprowadzono na gruncie teorii dystrybucji.

Otrzymane w tej pracy wyniki mogą znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu m.in. problemów teorii sprężystości czy termosprężystości.

Jako przykład zastosowania niektórych z wyprowadzonych zależności w teorii termo-sprężystości rozważmy związek $(1-25)_{RL}$, przedstawiony na s. 12 w pracy [10], opisujący *bezwładność termiczną* pola temperatury w nieosiowosymetrycznie grzanym, obracającym się walcu:

$$\theta^B(\varrho, \varphi, t) = -2 \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \delta_{ni} \sin [n(\varphi - \omega t) + \delta_{ni}] \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\},$$

gdzie

$$\sin \delta_{ni} = \frac{n\omega a^2}{\sqrt{\kappa^2 \mu_{ni}^4 + n^2 \omega^2 a^4}}, \quad \cos \delta_{ni} = \frac{\kappa \mu_{ni}^2}{\sqrt{\kappa^2 \mu_{ni}^4 + n^2 \omega^2 a^4}},$$

$$\varrho \in (0, 1), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad t > T_0,$$

$t_{na}, \omega, \kappa, a, T_0$ — stałe.

Korzystając ze wzorów (40) i (41) po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$\theta^B(\varrho, \varphi, t) = - \sum_{i=1}^{\infty} t_{na} \varrho^n \cos n(\varphi - \omega t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} t_{na} \frac{M_n \left(\varrho a \sqrt{\frac{\omega n}{\kappa}} \right)}{M_n \left(a \sqrt{\frac{\omega n}{\kappa}} \right)} \cos \left[n(\varphi - \omega t) + \theta_n \left(a \sqrt{\frac{\omega n}{\kappa}} \right) - \theta_n \left(\varrho a \sqrt{\frac{\omega n}{\kappa}} \right) \right].$$

W podobny sposób przekształcić można pozostałe wzory, opisujące w cytowanej pracy temperaturę, naprężenia, przemieszczenia, etc.

Literatura cytowana w tekście

1. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Wien, Springer-Verlag 1958, tłum. ros. Moskwa 1963.
2. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge at the University Press, 1962.
3. S. WOELKE, *Summation of certain Bessel series occurring in elasticity problems*, AMS, 3, 22 (1970).
4. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company Inc., 1951.
5. A. GRAY, G. B. MERTHEWS, T. M. MAC ROBERT, *Bessel Functions*, Macmillan, London 1922.
6. Z. SZMYDT, *Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe*, PWN, Warszawa 1972.
7. F. LEJA, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1964.
8. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
9. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
10. K. GRYSA, *Rozkład temperatury i naprężeń w walcu kołowym, wywołany ruchomym niesymetrycznym ogrzewaniem pobocznicą*, Rozprawa doktorska, Poznań, XI, 1975.

Резюме

O СУММИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

В работе определены суммы нескольких рядов Фурье-Бесселя, зависящих от двух переменных. Решения получены путем анализа $\delta(x)$ -образных последовательностей $\{t_{(n)m}(x, y)\}_{m=1, 2, \dots}$ и использования свойств интеграла Ломмеля. В частном случае, для рядов, зависящих от одной переменной, получены известные в литературе формулы.

Summary

SUMMATION OF CERTAIN FOURIER-BESSEL SERIES

In this paper the sums of Fourier-Bessel series, which are functions of two variables, are derived. The sequences $\{t_{(n)m}(x; y)\}_{m=1, 2, \dots}$ converging distributionally to $\delta(x)$ and properties of Lommel's integral are the points of departure. In particular cases sums of the series considered have a form well known from the literature.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lipca 1976 r.

NIEUSTALONE POLE TEMPERATURY W WIRUJĄCYM WALCU KOŁOWYM,
WYWOŁANE UTRZYMYWANĄ NA JEGO POBOCZNICY ODCINKAMI STAŁĄ
TEMPERATURĄ

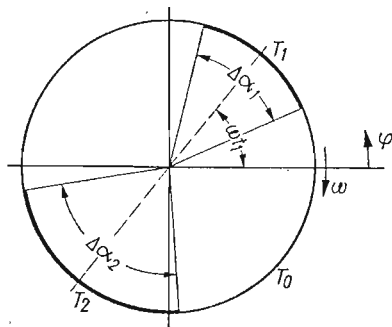
KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

1. Postawienie zagadnienia

W pracy rozważa się rozkład temperatury w długim walcu kołowym w przypadku, gdy jego powierzchnia boczna poddana jest działaniu temperatury będącej funkcją kąta opasania, a sam walec obraca się wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω . Zakłada się, że w chwili początkowej temperatura walca, jak i jego otoczenia była stała i wynosiła T_0 .

Zagadnienie to rozpatrywane jest w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z , sztywno związanym z walcem. Rozważania prowadzone są dla punktów walca dostatecznie odległych od obu jego końców, w związku z czym przyjmuje się, że rozkład temperatury wewnątrz walca jest funkcją czasu t i zmiennych przestrzennych r i φ .

Rozkład temperatury na brzegu walca w chwili $t_1 > 0$ pokazany jest na rys. 1.



Rys. 1. Rozkład temperatury na brzegu walca
w chwili $t_1 > 0$

Aby określić rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca w dowolnej chwili czasu, należy rozwiązać równanie przewodnictwa cieplnego

$$(1) \quad \nabla^2 \theta - \frac{1}{z} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

gdzie $\theta = T - T_0$, $\theta = \theta(r, \varphi, t)$,
z warunkiem początkowym

$$(2) \quad \theta(r, \varphi, 0) = 0$$

i warunkiem brzegowym

$$(3) \quad \theta(a, \varphi, t) = \theta_1 \left[\eta \left(x + \frac{\Delta\alpha_1}{2} \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta\alpha_1}{2} \right) \right] + \\ + \theta_2 \left[\eta \left(x - \pi + \frac{\Delta\alpha_2}{2} \right) - \eta \left(x - \pi - \frac{\Delta\alpha_2}{2} \right) \right].$$

Tutaj:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

κ — współczynnik przewodzenia temperatury,

$\eta(x)$ — funkcja Heaviside'a,

$\theta_1 = T_1 - T_0$, $T_1 = \text{const}$,

$\theta_2 = T_2 - T_0$, $T_2 = \text{const}$,

$x = (\varphi - \omega t) \bmod 2\pi$.

Warunek (3) opisuje rozkład temperatury na poboczniczy walca, przy czym zamiast podanych na rys. 1 wielkości T_1 i T_2 w związku (3) wpisano temperatury względne θ_1 i θ_2 . Warunek ten można przedstawić w wygodniejszej do obliczeń postaci, rozkładając funkcję Heaviside'a w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ w szereg trygonometryczny

$$(4) \quad \theta(a, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi} (\theta_1 \Delta\alpha_1 + \theta_2 \Delta\alpha_2) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi n} \left[\theta_1 \sin \frac{n\Delta\alpha_1}{2} + (-1)^n \theta_2 \sin \frac{n\Delta\alpha_2}{2} \right] \cos n(\varphi - \omega t) \right\}.$$

2. Rozwiązanie równania przewodnictwa ciepłego

Rozwiązania równania (1) poszukuje się w postaci

$$(5) \quad \theta(r, \varphi, t) = t_0(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ t_{1n}(r, t) \cos n(\varphi - \omega t) + t_{2n}(r, t) \sin n(\varphi - \omega t) \}.$$

Podstawiając (5) do (1) otrzymuje się układ równań różniczkowych:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 t_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_0}{\partial r} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial t_0}{\partial t} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 t_{1n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{1n}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} t_{1n} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial t_{1n}}{\partial t} + \frac{n\omega}{\kappa} t_{2n} = 0,$$

$$(8) \quad \frac{\partial^2 t_{2n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{2n}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} t_{2n} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial t_{2n}}{\partial t} - \frac{n\omega}{\kappa} t_{1n} = 0,$$

których rozwiązania muszą spełniać warunki:

$$(9) \quad t_0(r, 0) = 0; \quad t_{1n}(r, 0) = 0; \quad t_{2n}(r, 0) = 0;$$

$$(10) \quad t_{0a} \equiv t_0(a, t) = \frac{1}{2\pi} (\theta_1 \Delta \alpha_1 + \theta_2 \Delta \alpha_2),$$

$$(11) \quad t_{na} \equiv t_{1n}(a, t) = \frac{2}{\pi n} \left[\theta_1 \sin \frac{n \Delta \alpha_1}{2} + \theta_2 (-1)^n \sin \frac{n \Delta \alpha_2}{2} \right],$$

$$(12) \quad t_2(a, t) = 0.$$

Rozwiązanie równania (6) z warunkami (9)₁ i (10) jest znane w literaturze i wyraża się wzorem [1, 2]

$$(13) \quad t_0(r, t) = t_{0a} \left[1 - \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(rs_{0i})}{s_{0i} J_1(as_{0i})} e^{-s_{0i}^2 \kappa t} \right],$$

gdzie przez s_{0i} oznaczono pierwiastki równania $J_0(as) = 0$, a — promień walca, $J_0(x)$ — funkcję Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu.

W celu rozwiązania układu równań (7), (8) z warunkami (9)₂, (9)₃, (11) i (12) posłużymy się skończoną transformacją Hankela [4]. W związku z tym o funkcjach $t_{1n}(r, t)$ i $t_{2n}(r, t)$ należy założyć, że przy ustalonym t spełniają warunki Dirichleta, tzn. mają skończoną ilość ekstremów w przedziale $(0, a)$ oraz że mają skończoną ilość skończonych nieciągłości w tym przedziale i nie mają nieciągłości nieskończonej.

Przy tych założeniach transformata Hankela funkcji ma postać [4]

$$(14) \quad \bar{f}(s_{ni}) = \int_0^a r f(r) J_n(rs_{ni}) dr,$$

natomiast funkcja przez swoją transformatę wyraża się wzorem

$$(15) \quad f(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(rs_{ni})}{[J'_n(as_{ni})]^2} \bar{f}(s_{ni}),$$

gdzie s_{ni} oznacza pierwiastki równania $J_n(as) = 0$, $J_n(x)$ — funkcję Bessela pierwszego rodzaju n -tego rzędu.

Po przetransformowaniu wymienionych wyżej równań i warunków otrzymuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(16) \quad -s_{ni}^2 \bar{t}_{1n} - \frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{t}_{1n}}{dt} + \frac{n\omega}{\kappa} \bar{t}_{2n} = t_{na} a s_{ni} J'_n(as_{ni}),$$

$$(17) \quad -s_{ni}^2 \bar{t}_{2n} - \frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{t}_{2n}}{dt} - \frac{n\omega}{\kappa} \bar{t}_{1n} = 0,$$

których rozwiązania muszą zniknąć dla $t = 0$.

Rozwiązaniem układu równań (16), (17) są funkcje $\bar{t}_{jn}(s_{ni}, t)$ ($j = 1, 2$) wyrażające się następującymi związkami:

$$(18) \quad \bar{t}_{1n}(s_{ni}, t) = \kappa t_{na} \frac{as_{ni} J'_n(as_{ni})}{s_{ni}^4 \kappa^2 + n^2 \omega^2} e^{-s_{ni}^2 \kappa t} \{ \kappa s_{ni}^2 \cos n\omega t - n\omega \sin n\omega t - \kappa s_{ni}^2 e^{\kappa s_{ni}^2 t} \},$$

$$(19) \quad \bar{t}_{2n}(s_{ni}, t) = -\kappa t_{na} \frac{as_{ni} J'_n(as_{ni})}{s_{ni}^4 \kappa^2 + n^2 \omega^2} e^{-s_{ni}^2 \kappa t} \{ n\omega \cos n\omega t + \kappa s_{ni}^2 \sin n\omega t - n\omega e^{\kappa s_{ni}^2 t} \}.$$

Po zastosowaniu do (18) i (19) wzoru (15) otrzymuje się rozwiązania układu równań (7), (8):

$$(20) \quad t_{1n}(r, t) = \frac{2}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \delta_{ni} \frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni} J'_n(as_{ni})} \{ \exp(-s_{ni}^2 \kappa t) \cos [n\omega t + \delta_{ni}] - \cos \delta_{ni} \},$$

$$(21) \quad t_{2n}(r, t) = -\frac{2}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \delta_{ni} \frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni} J'_n(as_{ni})} \{ \exp(-s_{ni}^2 \kappa t) \sin [n\omega t + \delta_{ni}] - \sin \delta_{ni} \},$$

gdzie oznaczono

$$\sin \delta_{ni} = \frac{n\omega}{\sqrt{\kappa^2 s_{ni}^4 + n^2 \omega^2}}, \quad \cos \delta_{ni} = \frac{\kappa s_{ni}^2}{\sqrt{\kappa^2 s_{ni}^4 + n^2 \omega^2}}.$$

Korzystając ze związków (5), (13), (20), (21) i wprowadzając bezwymiarową współrzędną $\varrho = r/a$ otrzymujemy rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca

$$(22) \quad \theta(\varrho, \varphi, t) = t_{0a} \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 Fo} \right] + \\ + 2 \sum_{i=1}^{\infty} t_{na} \left\{ - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} \cos \delta_{ni} \cos [n(\varphi - \omega t) + \delta_{ni}] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu_{ni}^2 Fo} \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} \cos \delta_{ni} \cos [n\varphi + \delta_{ni}] \right\}.$$

Tutaj

$\mu_{ni} = as_{ni}$ — miejsca zerowe funkcji $J(\mu)$,

$Fo = \frac{\kappa t}{a^2}$ — liczba kryterialna Fouriera (bezwymiarowy czas),

$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle$.

3. Analiza otrzymanego rozwiązania

Ze względu na charakter zmian pola temperatury w czasie niektórzy autorzy (por. [5, 6]) wprowadzając podział stanu nieustalonego na:

- czysto niestacjonarny reżim ciepły ($Fo < 0,5$),
- regularny reżim ciepły ($Fo > 0,5$).

W czysto niestacjonarnym reżimie pole temperatury w sposób złożony zależy od fizycznych własności ciała, jego geometrii, rozmiarów oraz od warunków początkowych i brzegowych. Reżim regularny przedstawia sobą stadium procesu uporządkowanego, kiedy czasowo-przestrzenne zmiany temperatury zależą od geometrii ciała, jego fizycznych własności, rozmiarów i warunków brzegowych, natomiast nie zależą od warunków początkowych.

W celu przeanalizowania związku (22) przedstawmy go w postaci

$$(23) \quad \theta(\varrho, \varphi, t) = \theta^N(\varrho, \varphi, Fo) + \theta^B(\varrho, \varphi, t) + \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t),$$

gdzie oznaczono

$$(24) \quad \theta^N(\varrho, \varphi, Fo) = -2t_{0a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 Fo} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos n\varphi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} e^{-\mu_{ni}^2 Fo} \right\},$$

$$(25) \quad \theta^B(\varrho, \varphi, t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \delta_{ni} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \times \right. \\ \left. \times (\sin[n(\varphi - \omega t) + \delta_{ni}] - e^{-\mu_{ni}^2 Fo} \sin[n\varphi + \delta_{ni}]) \right\},$$

$$(26) \quad \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t) = t_{0a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos n(\varphi - \omega t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\}.$$

Korzystając ze znanego związku [2]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} = \begin{cases} \frac{\varrho^n}{2} & \text{dla } \varrho \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{dla } \varrho = 1, \end{cases}$$

można wyrażenie (26) sprowadzić do postaci

$$(27) \quad \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t) = t_{0a} + \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \varrho^n \cos n(\varphi - \omega t).$$

Poszczególne wyróżnione wyrażenia mają sens następujący:

– $\theta^N(\varrho, \varphi, Fo)$ opisuje zmianę temperatury poszczególnych punktów walca wskutek nagrzewania, na którą nie ma wpływu ruch obrotowy walca;

– $\theta^B(\varrho, \varphi, t)$ opisuje *bezwładność termiczną*, będącą wynikiem ruchu obrotowego walca wokół swojej osi. Wyrażenie to będzie nieco szerzej omówione w dalszej części pracy, a wpływ jego na rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca jest zilustrowany rysunkiem 3;

– $\theta^S(\varrho, \varphi - \omega t)$ jest właściwie funkcją dwóch zmiennych: bezwymiarowego promienia ϱ oraz różnicy $\varphi - \omega t$. Zmiana czasu t o Δt powoduje podobną zmianę wartości funkcji

θ^S , jak zmiana kąta φ o $\Delta\varphi = -\omega\Delta t$. Zatem θ^S opisuje ustalony rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca, dla którego istnieje oś symetrii. Nietrudno bowiem zauważyć, że θ^S jest parzystą funkcją argumentu $\varphi - \omega t$.

Rozkład temperatury dany wzorem (27) można interpretować jako pole temperatury nieruchomego walca po upływie bardzo długiego czasu, opisane w biegunowym układzie współrzędnych ϱ , $\varphi - \omega t = \varphi$. Cechą charakterystyczną tego wyrażenia jest brak zależności od własności fizycznych ciała, jego wymiarów i warunków początkowych.

W reżimie czysto niestacjonarnym nie można pominąć żadnego z wyrażień występujących w związkach (24), (25), (27).

W reżimie regularnym ($Fo > 0,5$) funkcja $\theta(\varrho, \varphi, t)$ opisująca pole temperatury przyjmuje znacznie prostszą postać. Można bowiem pominąć wszystkie wyrażenia zawierające $\exp(-\mu_{ni}^2 Fo)$ oprócz największego, tzn. $\exp(-\mu_{01}^2 Fo)$. Wyróżnione w związku (23) wyrażenia przyjmą postaci

$$(24)_{RR} \quad \theta^N(\varrho, \varphi, Fo) = -2t_{0a} \frac{J_0(\varrho\mu_{01})}{\mu_{01} J_1(\mu_{01})} e^{-\mu_{01}^2 Fo} = \theta^N(\varrho, Fo),$$

$$(25)_{RR} \quad \theta^B(\varrho, \varphi, t) = \theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) = \\ = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \delta_{ni} \sin [n(\varphi - \omega t) + \delta_{ni}] \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\}.$$

Wyrażenie (27) nie zmieni swojej postaci.

Związek (23) można zatem dla $Fo > 0,5$ przedstawić następująco

$$(23)_{RR} \quad \theta(\varrho, \varphi, t) = \theta^N(\varrho, Fo) + \theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) + \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t).$$

Pierwszy z wyróżnionych członów szybko dąży do zera z upływem czasu. Oba pozostałe są właściwie funkcjami dwóch zmiennych; opisują one stan quasi-ustalony. Widoczne jest, że na *bezwładność termiczną* ma istotny wpływ prędkość kątowa ω ; wartość bowiem funkcji $\theta^B(\varrho, \varphi - \omega t)$ zależy od $\sin \delta_{ni}$.

Przy prędkościach kątowych ω , spełniających warunek

$$(28) \quad \omega \ll \frac{\kappa}{a^2},$$

mamy $\sin \delta_{ni} \ll 1$ i $\theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) \approx 0$. Pole temperatury będzie wówczas dane związkiem

$$(29) \quad \theta(\varrho, \varphi, t) \approx \theta^N(\varrho, Fo) + \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t),$$

z którego widać, że ruch obrotowy praktycznie nie ma wpływu na sposób przenikania ciepła do wnętrza walca.

Wreszcie zauważmy, że dla $Fo > 1,5$ człon $\theta^N(\varrho, Fo)$ wnosi we wzorze (23)_{RR} poprawkę rzędu $10^{-4}t_{0a}$, którą można pominąć.

Wprowadzając pojęcie czasu charakterystycznego $\tau_0 = a^2/\kappa\mu_{01}^2$ (jest to czas charakteryzujący szybkość nagrzewania się walca w reżimie regularnym) zauważyć można, że warunek $Fo > 0,5$, określający czas, dla którego reżim cieplny nazywany jest regularnym, oznacza $t > 3\tau_0$, natomiast $Fo > 1,5$, dla którego we wzorze (23)_{RR} można pominąć pierwszy składnik, oznacza $t > 9\tau_0$.

Przy braku ruchu obrotowego ($\omega = 0$) związek (23) przekształca się do postaci

$$(30) \quad \theta(\varrho, \varphi, t) = t_{0a} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos n\varphi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} e^{-t_{ni}^2 Fo} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \varrho^n \cos n\varphi.$$

Na osi walca temperatura zmienia się w sposób niezależny od ruchu obrotowego. Podstawiając we wzorze (22) $\varrho = 0$ otrzymujemy

$$(31) \quad \theta(0, \varphi, t) = t_{0a} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\mu_{0i}^2 Fo)}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} \right\} = \theta(Fo).$$

Identyczną funkcję opisującą zmianę w czasie temperatury na osi walca otrzymuje się w przypadku rozważania rozkładu temperatury opisanego związkiem (13) lub (30). Jak zatem widać, w rozważanym zagadnieniu ruch obrotowy nie ma wpływu na temperaturę punktów leżących na osi walca. Głębsza analiza wzoru (31) podana jest m.in. w monografiach [1, 3].

Na koniec rozważmy przypadek dużych prędkości kątowych ω . Funkcję $\theta^B(\varrho, \varphi - \omega t)$, daną dla $Fo > 0,5$ związkiem (25)_{RR}, przekształćmy w tym celu do postaci

$$(32) \quad \theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \sin n(\varphi - \omega t) \sum_{i=1}^{\infty} \sin \delta_{ni} \cos \delta_{ni} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\} - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos n(\varphi - \omega t) \sum_{i=1}^{\infty} \sin^2 \delta_{ni} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\}.$$

Oznaczając $A = \frac{\omega a^2}{\kappa}$ i korzystając z faktu, że

$$\sin \delta_{ni} = \frac{n\omega a^2}{\sqrt{\kappa^2 \mu_{ni}^4 + n^2 \omega^2 a^4}}, \quad \cos \delta_{ni} = \frac{\kappa \mu_{ni}^2}{\sqrt{\kappa^2 \mu_{ni}^4 + n^2 \omega^2 a^4}},$$

można związek (32) zapisać następująco:

$$\theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} [S_n^+(\varrho) \sin n(\varphi - \omega t) + S_n^-(\varrho) \cos n(\varphi - \omega t)],$$

gdzie

$$(33) \quad S_n^+(\varrho) = An \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4 + A^2 n^2) J_{n+1}(\mu_{ni})}, \\ S_n^-(\varrho) = An \sum_{i=1}^{\infty} \frac{An J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4 + A^2 n^2) \mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})}.$$

Opierając się na wynikach pracy [9], mamy

$$(34) \quad \begin{aligned} S_n^+(\varrho) &= \frac{M_n(\varrho\sqrt{An})}{2M_n(\sqrt{An})} \sin[\theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})], \\ S_n^-(\varrho) &= \frac{\varrho^n}{2} - \frac{M_n(\varrho\sqrt{An})}{2M_n(\sqrt{An})} \cos[\theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} M_n(z) &= \sqrt{\text{ber}_n^2 z + \text{bei}_n^2 z}, \\ \theta_n(z) &= \text{arctg} \left(\frac{\text{bei}_n z}{\text{ber}_n z} \right), \end{aligned}$$

$\text{ber}_n z$, $\text{bei}_n z$ — funkcje Thomsona (Kelvina) [7, 8].

Wykorzystanie wzorów (34) pozwala związek (32) przedstawić w postaci pojedyncze sumy nieskończonej

$$(35) \quad \begin{aligned} \theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \varrho^n \cos n(\varphi - \omega t) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \frac{M_n(\varrho\sqrt{An})}{M_n(\sqrt{An})} \cos[n(\varphi - \omega t) + \theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})], \end{aligned}$$

której zbieżność dla $\varrho \in (0, 1)$ wykazano w pracy [10].

Podstawiając (35) do (23)_{RR} otrzymujemy następującą postać funkcji, opisującej rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca w czasie reżimu regularnego:

$$(36) \quad \begin{aligned} \theta(\varrho, \varphi, t) &= \theta^N(\varrho, Fo) + t_{0a} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \frac{M_n(\varrho\sqrt{An})}{M_n(\sqrt{An})} \cos[n(\varphi - \omega t) + \theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})], \end{aligned}$$

gdzie $\theta^N(\varrho, Fo)$ określone jest związkiem (24)_{RR}. Składnik ten nie zależy od prędkości kątowej ω .

Z postaci (36) funkcji $\theta(\varrho, \varphi, t)$ wynika, że zasadniczy wpływ na zmienność temperatury w czasie w punktach przekroju poprzecznego walca ma suma, zawierająca funkcje $M_n(z)$ i $\theta_n(z)$, przy czym ułamek $\frac{t_{na} M_n(\varrho\sqrt{An})}{M_n(\sqrt{An})}$ decyduje o amplitudzie tych zmian, zaś funkcja $\cos[n(\varphi - \omega t) + \theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})]$ — o szybkości oscylowania temperatury wokół wartości t_{0a} (składnik $\theta^N(\varrho, Fo)$ dla $Fo > 1,5$ wnosi do tej wartości pomijalnie małą poprawkę).

Jeśli prędkość kątowa ω będzie odpowiednio duża, to — biorąc pod uwagę tylko skończoną liczbę wyrazów rozważanego szeregu — można funkcje $M_n(\sqrt{An})$ zastąpić ich rozwinięciem asymptotycznym [7, 8]:

$$(37) \quad M_n(\sqrt{An}) \sim \frac{\exp\left(\sqrt{\frac{An}{2}}\right)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{An}} \sqrt{\lambda_n^2(\sqrt{An}) + \chi_n^2(\sqrt{An})},$$

gdzie

$$\lambda_n(z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ (-1)^r \cos \frac{r\pi}{4} \left(\prod_{s=1}^r \frac{4n^2 - (2s-1)^2}{8sz} \right) \right\},$$

$$\chi_n(z) = - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ (-1)^r \sin \frac{r\pi}{4} \left(\prod_{s=1}^r \frac{4n^2 - (2s-1)^2}{8sz} \right) \right\};$$

o ile tylko $\sqrt{An} \gg n^2$ dla wszystkich $n \leq N_0$ (N_0 — ilość rozważanych składników szeregu).

Ułamek $\frac{t_{na} M_n(\varrho \sqrt{An})}{M_n(\sqrt{An})}$ może osiągać wartości z przedziału $(0, t_{na})$. Jednakże postać (37) rozwinięcia asymptotycznego funkcji $M_n(\sqrt{An})$ wskazuje, że dla dużych wartości A rozważany ułamek może osiągać bardzo małe wartości nawet dla wartości ϱ zbliżonych do jedności. Zatem wewnątrz walca temperatura będzie w rozważanym przypadku oscylować wokół t_{0a} . Jednakże przy brzegu walca pozostanie widoczny efekt *bezwładności termicznej*.

Zbliżony do osiowosymetrycznego rozkład temperatury wewnątrz walca przy dużych prędkościach kątowych jest efektem «rozmycia» zmiennych warunków termicznych na brzegu.

Odległość ϱ_w od brzegu walca taką, że dla $\varrho < 1 - \varrho_w$ temperatura punktów walca będzie się różnić od t_{0a} o mniej niż $0,1t_{0a}$, nazwiemy głębokością wnikania temperatury. Z przytoczonej analizy funkcji $\theta(\varrho, \varphi, t)$ wynika, że przy ustalonych κ i a głębokość wnikania ϱ_w będzie malała ze wzrostem prędkości kątowej ω .

4. Przykład liczbowy

Rozważmy pole temperatury w walcu ze stali węglowej. Warunki brzegowe dla tego walca przyjmujemy następujące:

$$T_1 = 300^\circ\text{C}, \quad T_2 = T_0 = 20^\circ\text{C}, \quad \Delta\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\alpha_2 = 0.$$

Stąd

$$\theta_1 = 280^\circ, \quad \theta_2 = 0^\circ.$$

Dane charakteryzujące walec są następujące:

$$\kappa = 0,119 \text{ cm}^2/\text{s}, \quad a = 5 \text{ cm}.$$

Stąd

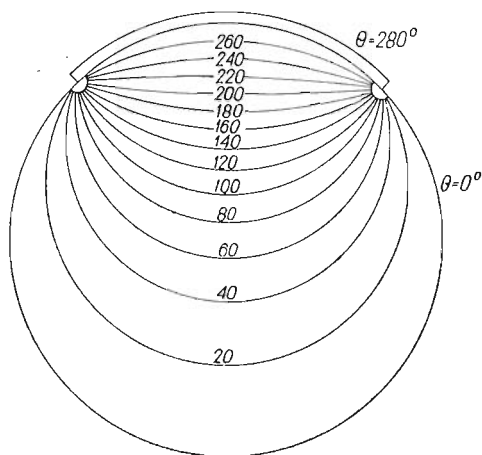
$$Fo = 0,00476t \text{ [s]},$$

$$t_{0a} = 70 \text{ [deg]},$$

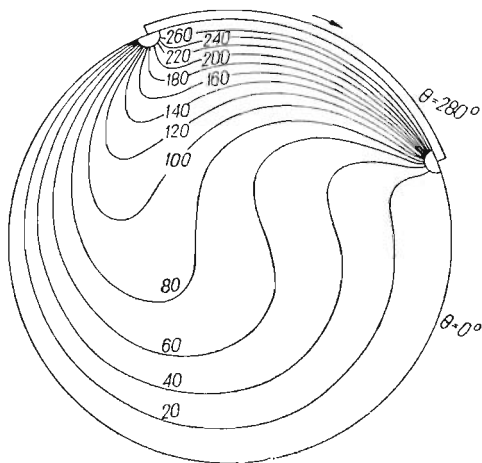
$$t_{na} = \frac{560}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{4} \text{ [deg]}.$$

Czas charakterystyczny $\tau_0 = 37,4$ s. Regularny reżim cieplny rozpocznie się zatem po czasie $3\tau_0 = 112,2$ s.

Pole temperatury w przekroju poprzecznym obliczono dla walca nieruchomego (rys. 2), dla walca obracającego się wokół swojej osi z prędkością kątową $\omega = 1$ obr./min. (rys. 3) oraz dla walca obracającego się z prędkością kątową $\omega = 120$ obr./min. (rys. 4). Na rysunkach 3 i 4 jest dobrze widoczny efekt *bezwładności termicznej*. Rysunek 4 pokazuje

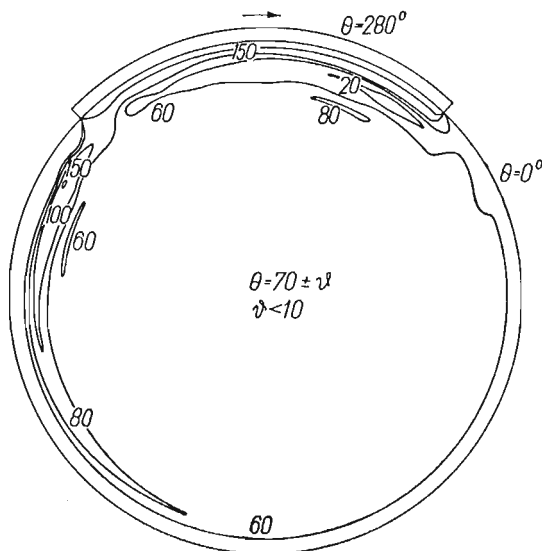


Rys. 2. Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym nieruchomego walca dla $t > 9\tau_0$



Rys. 3. Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca obracającego się z prędkością kątową $\omega = 1$ obr./min. dla $t > 9\tau_0$

niewielki zafałszowany obraz temperatury w przekroju walca (dane numeryczne dla 1201 punktów przekroju poprzecznego okazały się niewystarczające dla zrobienia dokładniejszego rysunku), ale widać na nim, że ze wzrostem prędkości kątowej maleje głębokość wnikania temperatury do walca.



Rys. 4. Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca obracającego się z prędkością kątową $\omega = 120$ obr./min. dla $t > 9\tau_0$

Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej ODRA 1204. Dane dotyczące zer funkcji Bessela wzięto z tablic [11].

W zakończeniu pragnę serdecznie podziękować mgr mgr Marii KWIEK i Jackowi NEUMANNOWI za przeprowadzenie obliczeń numerycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. П. П. Юшков, *Функции Бесселя и их приложения к задаче об охлаждении цилиндра*, Изд. Академии Наук БССР, Минск 1962.
2. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Wien, Springer-Verlag 1959; tłum. ros. Moskwa 1963.
3. А. В. ЛЫКОВ, *Теория теплопроводности*, Гостехиздат 1952.
4. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company Inc., 1951.
5. Г. М. КОНДРАТЬЕВ, *Регулярный тепловой режим*, Гос. Изд. Тех.-Теорет. Лит., Москва 1954.
6. А. Г. ХАРЛАМОВ, *Измерение теплопроводности твердых тел*, АТОМИЗДАТ, Москва 1973.
7. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge at the University Press, 1962.
8. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
9. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos., 2, 15, (1977).
10. K. GRYSA, *Rozkład temperatury i naprężeń w długim walcu kołowym, wywołany ruchomym niesymetrycznym ogrzewaniem pobocznic*, Rozprawa doktorska, XI, 1975.
11. *Таблицы нулей функций Бесселя*, Библиотека Математических Таблиц, Вып. 44, Москва 1967.

Резюме

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ КОСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ЕГО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе рассматривается нестационарное температурное поле в неограниченном вращающемся круговом цилиндре при условиях нагрева его боковой поверхности имеющих вид $T(\varphi, t)$. Задача решена путем интегральных преобразований. Получено решение в виде суммы трех слагаемых, которые имеют определенный физический смысл. В конце работы приведен числовой пример, иллюстрирующий зависимость между распределением температуры в цилиндре и его угловой скоростью.

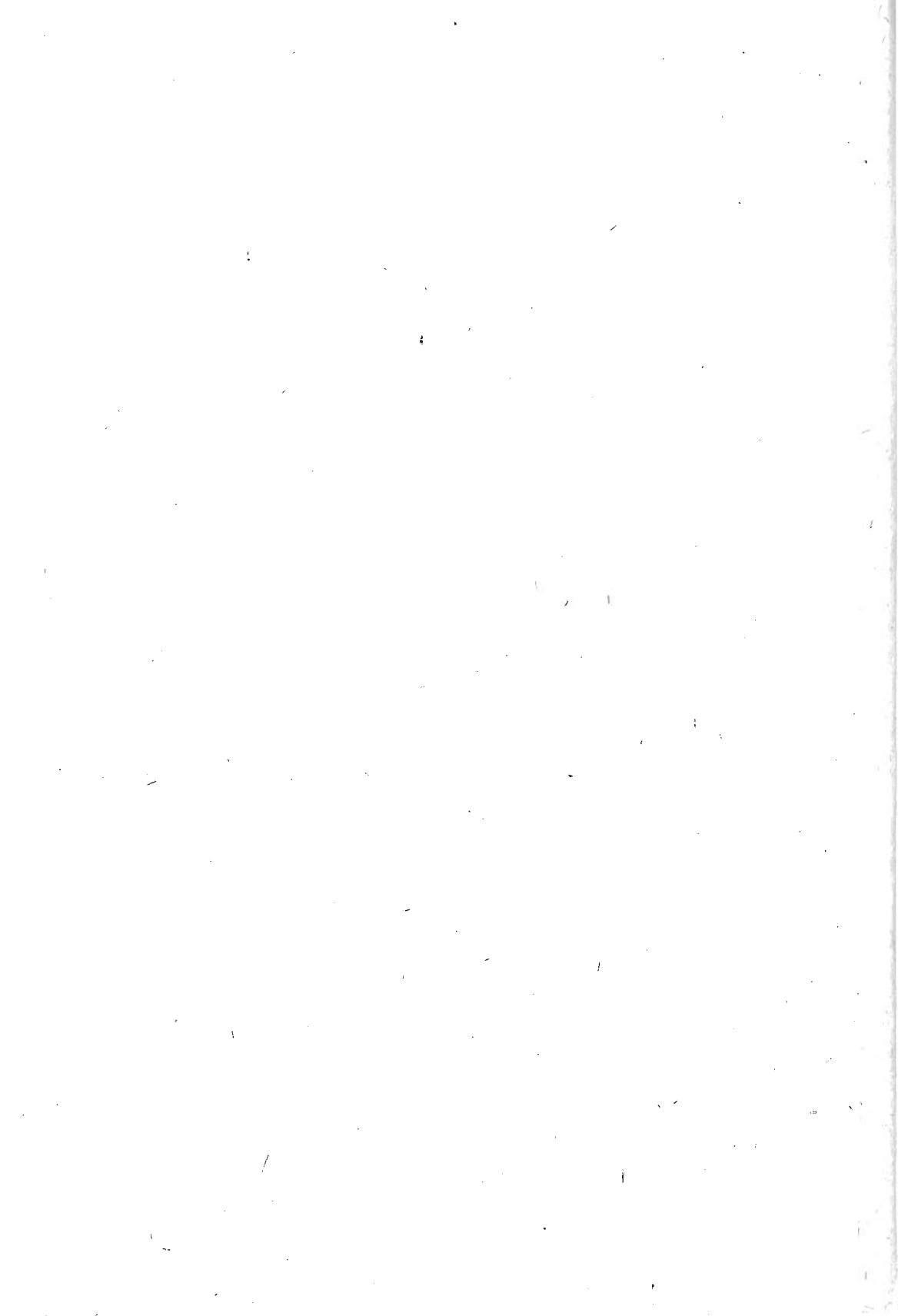
Summary

NON-STEADY STATE OF TEMPERATURE IN A ROTATING CIRCULAR CYLINDER DUE TO PIECE-WISE CONSTANT TEMPERATURE ON ITS SURFACE

In this paper non-steady distribution of temperature in a rotating circular cylinder is considered for the case, when its lateral surface undergoes a sudden change of temperature. The function $T(\varphi, t)$ describing the boundary condition satisfies Dirichlet's conditions for $\varphi \in (0, 2\pi)$. The problem is solved by using the finite Hankel transform. The solution is given as a sum of three parts, the physical sense of which is easy for interpretation. In the last section of the paper a numerical example illustrating the dependence of the field of temperature on the angular velocity of the cylinder is given.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lipca 1976 r.



O SFORMUŁOWANIU I POPRAWNOŚCI PEWNEJ KLASY ZADAŃ Z NIELINIOWEJ DYNAMIKI LIN ROZCIĄGLIWYCH

ANDRZEJ B L I N O W S K I (WARSZAWA)

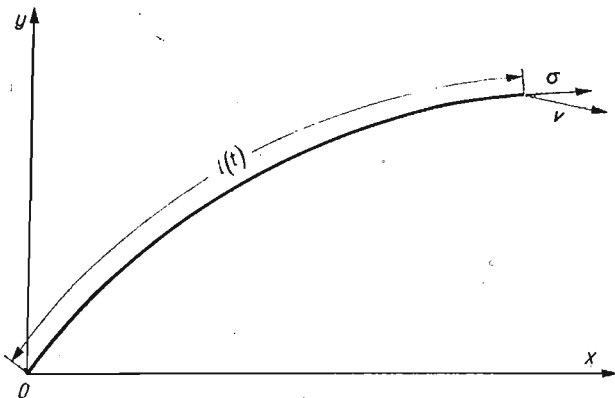
1. Wstęp

W pracy [1] autor niniejszej pracy wspólnie z S. GAJDĄ rozpatrywał sprzężone zagadnienie, którego istotną częścią było nieliniowe, dwuwymiarowe zadanie o swobodnym locie rozciągliwej liny.

Przy okazji tego zadania powstał problem poprawności sformułowania zagadnień brzegowych na brzegu ruchomym, np. przy wyciąganiu liny z zasobnika lub też odwijaniu z bębna. W niniejszej pracy sformułujemy pełne zadanie trójwymiarowe, zbadamy typ równań i rozpatrzmy jeden z warunków poprawności sformułowania pewnej klasy zagadnień brzegowych.

2. Równania ruchu

W rozdziale tym, dla wygody czytelnika, podamy wyprowadzenie równań ruchu dla rozciągliwej liny.¹⁾ Linę traktować będziemy jako sprężyste kontinuum jednowymiarowe zanurzone w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Nie będziemy tu uwzględniać skończonej grubości liny, tj. zaniedbamy jej sztywność przy zginaniu oraz moment bezwładności przekroju poprzecznego, nie uwzględniamy również skręcenia liny.



Rys. 1

¹⁾ Równania te można znaleźć np. w [3], jednakże «przetłumaczenie» ich na stosowaną w niniejszej pracy symbolikę byłoby co najmniej tak samo pracochłonne, jak wyprowadzenie ich od nowa.

Przy tych założeniach, kinematyka liny opisana jest całkowicie przez podanie wektora położenia $\mathbf{R}(S, \tau)$ jako funkcji czasu τ i współrzędnej materialnej S , o której założymy, że pokrywa się ona liczbowo z miarą długości liny w stanie nieodkształconym. Przez s oznaczać będziemy długość liny w stanie odkształconym. Wprowadzimy oznaczenia:

$$F = \frac{\partial s(S, \tau)}{\partial S} \quad \text{— gradient deformacji,}$$

$$\varepsilon = F - 1 \quad \text{— wydłużenie,}$$

$$\mathbf{t} = \frac{\frac{\partial \mathbf{R}(S, \tau)}{\partial S}}{\left| \frac{\partial \mathbf{R}(S, \tau)}{\partial S} \right|} \quad \text{— jednostkowy wektor styczny,}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}(S, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{— prędkość,}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(S, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{— przyspieszenie.}$$

Mnożenie wektorów oznaczać będziemy w zwykły sposób, natomiast czasową pochodną materialną (przy ustalonym S) oznaczać będziemy kropką np.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}}.$$

Korzystać będziemy z następujących znanych zależności z geometrii różniczkowej

$$(2.1) \quad \frac{\partial s(S, \tau)}{\partial S} = \left| \frac{\partial \mathbf{R}(S, \tau)}{\partial S} \right|,$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \mathbf{t}(s, \tau)}{\partial s} = \mathbf{n}\kappa,$$

gdzie \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym, a κ krzywizną liny. Jeżeli ρ jest gęstością masy na jednostkę długości, to oczywiście dla k a ż d y c h dwu punktów materialnych $S_1, S_2, S_2 > S_1$, zachodzi

$$(2.3) \quad \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \rho ds = \int_{S_1}^{S_2} \rho_0 dS,$$

gdzie ρ_0 oznacza gęstość w stanie nieodkształconym. Otrzymamy stąd natychmiast lokalne prawo zachowania masy

$$(2.4) \quad \rho F = \rho_0.$$

Natychmiastowym wnioskiem z (2.4) jest następujący odpowiednik znanego wzoru trójwymiarowego (dla dowolnego odcinka materialnego):

$$(2.5) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} f(s, \tau) \rho ds = \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \dot{f}(s, \tau) \rho ds,$$

gdzie $f(s, \tau)$ jest dowolną funkcją (gęstością).

Przy omówionych na początku tego rozdziału założeniach, naturalne jest postulowanie, dla dowolnego odcinka materialnego i dla dowolnego pola prędkości, następującego bilansu energetycznego:

$$(2.6) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \rho w ds = \sigma \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \Big|_{S_2} - \sigma \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \Big|_{S_1} + \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} ds - \frac{d}{d\tau} \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \rho \frac{v^2}{2} ds,$$

lub, korzystając z (2.5), w postaci

$$(2.7) \quad \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \left[\rho \dot{w} - \frac{d}{ds} (\sigma \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \right] ds = 0,$$

gdzie σ jest siłą naciągu liny, $w = w(F)$ — gęstością masową energii sprężystej, a \mathbf{r} — gęstością sił zewnętrznych na jednostkę długości (opór ośrodka, siły masowe). Wykonując różniczkowanie i korzystając z tego, że (2.7) obowiązywać ma dla każdego odcinka materialnego, możemy (2.7) przepisać w postaci

$$(2.8) \quad \left(\rho \frac{\partial \dot{w}}{\partial F} F - \sigma \right) \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \mathbf{t} + \sigma \kappa \mathbf{n} + \mathbf{r} - \rho \dot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z zależności

$$(2.9) \quad \dot{F} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial S} \cdot \mathbf{t} = F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \cdot \mathbf{t},$$

którą łatwo sprawdzić przez bezpośrednie różniczkowanie.

Z niezmienniczości względem transformacji Galileusza wynika natychmiast, że oba te człony muszą oddzielnie być równe zero i że wyrażenie w nawiasie w drugim członie musi być tożsamościowo równe zero, natomiast z zasady obiektywności materialnej wynika, że z kolei współczynnik przy $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}$ (pierwszy nawias) jest tożsamościowo równy zero. Mamy zatem równanie ruchu

$$(2.10) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s} \mathbf{t} + \sigma \kappa \mathbf{n} + \mathbf{r} = \rho \dot{\mathbf{v}}$$

oraz równanie konstytutywne

$$(2.11) \quad \sigma = \rho \frac{dw(F)}{dF} F = \rho_0 \frac{dw(F)}{dF} \quad ^2)$$

Przechodząc od różniczkowania po s do różniczkowania po S i oznaczając

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial R^1}{\partial S} &\equiv u^1; & \frac{\partial R^2}{\partial S} &\equiv u^2; & \frac{\partial R^3}{\partial S} &\equiv u^3; \\ \dot{R}^1 &\equiv u^4; & \dot{R}^2 &\equiv u^5; & \dot{R}^3 &\equiv u^6, \end{aligned}$$

²⁾ Wzory (2.10) i (2.11) można traktować jako szczególny przypadek ogólnej teorii Greena i Lawsa (por. [3], wzory (4.1) s. 150 i (6.3) s. 153).

gdzie R^i — składowe wektora \mathbf{R} w pewnej bazie kartezjańskiej, a także oznaczając

$$(2.13) \quad \sqrt{\frac{d\sigma}{dF} \frac{1}{\rho F}} \equiv \lambda_1; \quad \sqrt{\frac{\delta}{\rho F^2}} \equiv \lambda_2,$$

$$(2.14) \quad \frac{u^1}{F} \equiv \sin\theta \cos\varphi; \quad \frac{u^2}{F} \equiv \sin\theta \sin\varphi; \quad \frac{u^3}{F} \equiv \cos\theta,$$

(takie podstawienie wolno nam zastosować, ponieważ $\frac{\partial R}{\partial S} \frac{1}{F} = \mathbf{t}$ jest wektorem jednostkowym, θ i φ są kątami Eulera), możemy zapisać (2.10) w postaci układu 6 równań pierwszego rzędu (dochodzą 3 równania $\dot{u}^1 = \frac{\partial u^4}{\partial S}$; $\dot{u}^2 = \frac{\partial u^5}{\partial S}$; $\dot{u}^3 = \frac{\partial u^6}{\partial S}$).

$$(2.15) \quad \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} A_{ij} \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial S} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial u^6}{\partial S} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{u}^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{u}^6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(2.16) \quad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ \alpha_{ij} & 0 \end{bmatrix},$$

$$(2.17) \quad [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \lambda_2^2 (\sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta) & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi & \lambda_1^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \lambda_2^2 (\sin^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta) & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin\theta \cos\theta \cos\varphi & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin\theta \cos\theta \sin\varphi & \lambda_1^2 \cos^2\theta + \lambda_2^2 \sin^2\theta \end{bmatrix},$$

a $[\delta_{ij}]$ jest macierzą jednostkową 3×3 . Wzór (2.15) należy rozumieć w sensie wektorowym w pewnej 6-cio wymiarowej przestrzeni u .

3. Badanie równań ruchu

Zbadamy wartości własne macierzy $[A_{ij}]$. Równanie charakterystyczne przybiera postać

$$(3.1) \quad \det \begin{bmatrix} -\xi \delta_{ij} & \delta_{ij} \\ \alpha_{ij} & -\xi \delta_{ij} \end{bmatrix} = 0.$$

Dla większości zagadnień fizycznych możemy przyjąć, że $\lambda_1^2 > \lambda_2^2$ (np. dla liniowego pręta i małych odkształceń $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = \varepsilon$). Mnożąc odpowiednio przez ξ i dodając do siebie wiersze macierzy $[A_{ij}]$ oraz wprowadzając oznaczenia

$$\eta \equiv \frac{\xi^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

i korzystając z (2.14), możemy (3.1) sprowadzić do postaci

$$(3.2) \quad \det \begin{bmatrix} t_1^2 - \eta & t_1 t_2 & t_1 t_3 \\ t_1 t_2 & t_2^2 - \eta & t_2 t_3 \\ t_1 t_3 & t_2 t_3 & t_3^2 - \eta \end{bmatrix} = 0.$$

Macierz w równaniu (3.2) ma postać reprezentacji tensora $\mathbf{t} \otimes \mathbf{t} - \eta \mathbf{1}$, czyli η są wartościami własnymi pewnej diady $\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$, przy czym, jak pamiętamy, \mathbf{t} jest wektorem jednostkowym, zatem $\eta = 0$ jest dwukrotnym pierwiastkiem równania (3.2), a $\eta = 1$ jednokrotnym i, co za tym idzie, wartości $\pm \lambda_2$ są dwukrotnymi pierwiastkami równania (3.1), natomiast wartości $\pm \lambda_1$, są jego pierwiastkami pojedynczymi. Rozwiązaliśmy zatem równanie 6 stopnia (3.1) i stwierdziliśmy, że wszystkie jego pierwiastki są rzeczywiste, jeżeli tylko naciąg liny jest nieujemny. Jeżeli dodatkowo istnieją lewe jednostkowe wektory własne macierzy $[A_{ij}]$ tworzące bazę przestrzeni u , to układ (2.15), a zatem i (2.10), jest hiperboliczny [2].

Sprawdźmy więc istnienie wektorów własnych $l_i^{(k)}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), tj. wektorów spełniających równości:

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^6 l_i^{(p)} A_{ik} = \xi^{(p)} l_k^{(p)}; \quad \sum_{i=1}^6 l_i^{(p)2} = 1^3$$

tworzących bazę w u . Jeżeli $l_i^{(p)}$ są składowymi wektora własnego przynależnego p -tej wartości własnej $\xi^{(p)}$, to

$$(3.4) \quad [l_1^{(p)} \dots l_6^{(p)}] \begin{bmatrix} -\xi^{(p)} \delta_{ij} & \delta_{ij} \\ \alpha_{ij} & -\xi^{(p)} \delta_{ij} \end{bmatrix} = [0, 0, 0, 0, 0, 0].$$

Równanie (3.4) sprowadza się do następujących warunków:

$$(3.5) \quad l_1^{(p)} = \xi^{(p)} l_4^{(p)}; \quad l_2^{(p)} = \xi^{(p)} l_5^{(p)}, \quad l_3^{(p)} = \xi^{(p)} l_6^{(p)}$$

$$(3.6) \quad [l_4^{(p)}, l_5^{(p)}, l_6^{(p)}] \left(\begin{bmatrix} \alpha_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_{ij} (\xi^{(p)})^2 \end{bmatrix} \right) = [0, 0, 0]$$

macierz $[\alpha_{ij}]$ jest macierzą symetryczną i $(\xi^{(p)})^2$ są jej wartościami własnymi, zatem istnieje macierz ortogonalna $[\beta_{pk}]$ określone wzorem:

$$[\beta_{pk}] = [l_k^{(p)}] \quad p = 1, 2, 3, \quad k = 4, 5, 6.$$

Korzystając z (3.5) utworzymy pełną macierz $[l_k^{(p)}]$ ($p, k = 1, \dots, 6$)

³⁾ druga z tych równości zależy od wyboru jednostek, jednakże, jeżeli da się ją spełnić przy pewnym wyborze jednostek, to również spełnić się da przy każdym innym.

$$(3.7) \quad [I_k^{(p)}] = \begin{bmatrix} -\lambda_1 I_4^{(1)}, & -\lambda_1 I_5^{(1)}, & -\lambda_1 I_6^{(1)}, & I_4^{(1)}, & I_5^{(1)}, & I_6^{(1)} \\ \lambda_1 I_4^{(1)}, & \lambda_1 I_5^{(1)}, & \lambda_1 I_6^{(1)}, & I_4^{(1)}, & I_5^{(1)}, & I_6^{(1)} \\ -\lambda_2 I_4^{(2)}, & -\lambda_2 I_5^{(2)}, & -\lambda_2 I_6^{(2)}, & I_4^{(2)}, & I_5^{(2)}, & I_6^{(2)} \\ \lambda_2 I_4^{(2)}, & \lambda_2 I_5^{(2)}, & \lambda_2 I_6^{(2)}, & I_4^{(2)}, & I_5^{(2)}, & I_6^{(2)} \\ -\lambda_2 I_4^{(3)}, & -\lambda_2 I_5^{(3)}, & -\lambda_2 I_6^{(3)}, & I_4^{(3)}, & I_5^{(3)}, & I_6^{(3)} \\ \lambda_2 I_4^{(3)}, & \lambda_2 I_5^{(3)}, & \lambda_2 I_6^{(3)}, & I_4^{(3)}, & I_5^{(3)}, & I_6^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Jeżeli wyznacznik tej macierzy jest różny od zera to, przy ustalonym wyborze jednostek, jesteśmy w stanie znaleźć liniowo niezależny układ jednostkowych wektorów własnych (choć na ogół nie jest to układ ortonormalny).

Odejmuując od siebie odpowiednie wiersze i kolumny macierzy łatwo dochodzimy do zależności

$$(3.8) \quad \det[I_k^{(p)}] = -\varrho \lambda_1 \lambda_2^2 \det \begin{bmatrix} \beta_{ij} & 0 \\ 0 & \beta_{ij} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det[\beta_{ij}] \neq 0$ i $\lambda_1 \neq 0$, to wyznacznik różny jest od zera, gdy $\lambda_2 \neq 0$. Zatem warunkiem hiperboliczności układu jest $\lambda_2 > 0$. Widzimy zatem, że dla liny rozciągłej równania pozostają hiperboliczne tak długo, jak długo naciąg jej jest różny od zera. Powstaje pytanie: czy układ zachowuje hiperboliczność dla liny nierozciągłej? Można by się spodziewać, że układ pozostanie hiperboliczny, ponieważ skrajnym przypadkiem liny nierozciągłej jest struna, a równanie struny jest równaniem hiperbolicznym.

Wykażemy tu na przykładzie zadania płaskiego (bierzemy zadanie płaskie w celu zmniejszenia pracochłonności obliczeń), że przypuszczenie to nie jest słuszne, a hiperboliczność równania struny jest wynikiem linearyzacji.

W przypadku liny nierozciągłej lewa strona równania (2.6) będzie równa zero i w wyniku analogicznego rozumowania otrzymujemy równanie ruchu (2.10) w niezmięnionej postaci, natomiast zamiast prawa konstytutywnego (2.11) otrzymujemy warunek

$$(3.9) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

(oczywiście $s = S$ i $F = 1$). Warunek ten jest spełniony tożsamościowo, wynika on bowiem

$$\text{natychmiast z warunku nierozciągłości } F = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial S} \right| = 1.$$

Warunek ten dla przypadku płaskiego możemy zapisać również w postaci

$$(3.10) \quad \frac{\partial R_1}{\partial S} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial R_2}{\partial S} = \sin \varphi,$$

gdzie φ jest kątem nachylenia stycznej do liny względem osi x_1 . Przy tych oznaczeniach

uwzględniając, że w tym przypadku $\kappa = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, mamy:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \cos \varphi - \sigma \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r_1 &= \varrho \dot{v}_1, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s} \sin \varphi + \sigma \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r_2 &= \varrho \dot{v}_2. \end{aligned}$$

Widzimy, że w układzie nie występuje pochodna czasowa niewiadomej σ , zatem nie możemy przedstawić układu w postaci analogicznej do (2.15), jednakże z matematycznego punktu widzenia jest obojętne, którą zmienną wyróżnimy (typ równania od tego nie będzie zależał). Oznaczając

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \alpha &\equiv \cos \varphi; & \beta &\equiv \sigma \sin \varphi, \\ \gamma &\equiv \sin \varphi; & \delta &\equiv \sigma \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$(3.13) \quad \sigma \equiv q_1, \quad \varphi \equiv q_2, \quad v_1 \equiv q_3, \quad v_2 \equiv q_4$$

oraz uwzględniając związki

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \frac{\dot{\partial R}_1}{\partial s} &= \dot{\cos \varphi} = \frac{\partial v_1}{\partial s}, \\ \frac{\dot{\partial R}_2}{\partial S} &= \dot{\sin \varphi} = \frac{\partial v_2}{\partial S}, \end{aligned}$$

otrzymujemy następujący układ równań:

$$(3.15) \quad \begin{bmatrix} 0, & -0, & \frac{\delta \varrho}{\sigma}, & \frac{\beta \varrho}{\sigma} \\ 0, & 0, & -\frac{\gamma \varrho}{\sigma}, & \frac{\alpha \varrho}{\sigma} \\ 0 & -\gamma, & 0 & 0 \\ 0 & \alpha, & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial s} \\ \frac{\partial q_2}{\partial s} \\ \frac{\partial q_3}{\partial s} \\ \frac{\partial q_4}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix},$$

gdzie wielkości f_i są funkcjami φ, σ lecz nie ich pochodnych.

Wartości własne macierzy współczynników są rozwiązaniami równania

$$(3.16) \quad \xi^2 \left(\xi^2 - \frac{\varrho}{\sigma} \right) = 0.$$

Równanie to posiada cztery pierwiastki rzeczywiste: $\sqrt{\frac{\varrho}{\sigma}}$, $-\sqrt{\frac{\varrho}{\sigma}}$ oraz podwójny pierwiastek $\xi = 0$.

Nietrudno zauważyć, że lewe wektory własne przynależne do niezerowych wartości własnych muszą spełniać zależność $I_1^{(p)} = 0$.

Dla zerowych wartości własnych pierwsze równanie:

$$I_1^{(p)} \cdot 0 + I_2^{(p)} \cdot 0 + I_3^{(p)} \cdot 0 + I_4^{(p)} \cdot 0 = 0 \cdot I_1^{(p)}$$

jest spełnione automatycznie i pozostają trzy równania:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} -\gamma I_3^{(p)} + \alpha I_4^{(p)} &= 0, \\ \frac{\delta \varrho}{\sigma} I_1^{(p)} - \frac{\gamma \varrho}{\sigma} I_2^{(p)} &= 0, \\ \frac{\beta \varrho}{\sigma} I_1^{(p)} + \frac{\alpha \varrho}{\sigma} I_2^{(p)} &= 0. \end{aligned}$$

Drugie i trzecie z tych równań zawiera jedynie $I_1^{(p)}$ i $I_2^{(p)}$, przy czym wyznacznik układu tych dwu równań jest różny od zera:

$$(3.18) \quad \det \begin{bmatrix} \delta, & -\delta \\ \beta, & \alpha \end{bmatrix} = \sigma \neq 0,$$

wynika stąd, że $I_1^p = I_2^p = 0$.

Zatem wszystkie cztery wektory własne mają pierwszą składową równą zeru, czyli nie mogą być one liniowo niezależne i układ (3.15) nie jest hiperboliczny. Zauważymy natomiast że równania (3.11) możemy zapisać w postaci

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r_1 \cos \varphi - r_1 \sin \varphi &= \rho(\dot{v}_1 \cos \varphi - \dot{v}_2 \sin \varphi), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s} + r_2 \cos \varphi + r_2 \sin \varphi &= \rho(\dot{v}_1 \cos \varphi + \dot{v}_2 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Dla zamocowanej na końcach struny, pozostającej w spoczynku przy pewnym stałym naciągu początkowym wzdłuż pewnej prostej (np. osi x_1 kartezjańskiego układu współrzędnych) i przy braku sił masowych, jak łatwo wykazać, wektor małego przemieszczenia od położenia równowagi oraz jego pochodne czasowe są prostopadłe do \mathbf{t} z dokładnością do małych wyższego rzędu.

W związku z tym z (3.19) mamy

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = 0, \quad \text{tj.} \quad \sigma = \text{const},$$

natomiast pierwsze równanie przybiera postać liniowego równania hiperbolicznego o stałych współczynnikach względem przemieszczenia u_2 , ($u_1 = 0$), mamy bowiem

$$\varphi \approx \text{tg } \varphi = \frac{\partial u_2}{\partial s}$$

i stąd

$$(3.20) \quad \sigma \frac{d^2 u_2}{ds^2} - \rho \ddot{u}_2 = 0,$$

zatem w wyniku linearyzacji odzyskujemy własność hiperboliczności.

4. Poprawność warunków brzegowych na brzegu ruchomym

W wielu zagadnieniach, w których rozpatrywany jest lot liny, mamy do czynienia z wyciąganiem liny z zasobnika, rozwijaniem z bębna itp., przy czym w skali całego zadania, wymiary zasobnika (lub bębna) są niewielkie i możemy je zaniedbać przyjmując np. dla zasobnika $x = 0$, tak jakby lina przechodziła w tym miejscu przez blok lub oczko (kip). Przy formułowaniu warunków brzegowych należy w tym przypadku zachować określoną ostrożność i zdanie się wyłącznie na inżynierską intuicję może się okazać zawodne, tym bardziej że mamy do czynienia nie tylko z ruchomym lecz wręcz nieznanym brzegiem (na ogół nie znamy wartości współrzędnej S w punkcie przestrzennym $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

Ponieważ mamy do czynienia z układem hiperbolicznym, możemy się spodziewać, że rozwiązanie zagadnienia metodą «krok po kroku» doprowadzić nas może, przy odpo-

wiednim algorytmie, do celu. W tym przypadkū nieznany brzeg możemy budować w trakcie rozwiązania i na każdym następnym kroku odcinek brzegu traktować możemy jako dany z kroku poprzedniego.

Powstaje pytanie — ile musimy założyć warunków brzegowych, aby dla każdego kolejnego kroku zagadnienie początkowo-brzegowe było poprawnie sformułowane.

Za ROZDIESTWIENSKIM i JANIENKĄ [2] wprowadzimy pojęcie charakterystyk wychodzących i przychodzących. Niech będzie dane równanie różniczkowe charakterystyki przechodzącej przez pewien punkt brzegu

$$(4.1) \quad \frac{dS}{d\tau} = \xi^{(k)}(S, \tau).$$

Rozwiązanie tego równania możemy przedstawić w postaci parametrycznej

$$(4.2) \quad S = S(\theta), \quad \tau = \tau(\theta)$$

przy czym, niech parametr θ ustalony będzie tak aby na brzegu $\theta = 0$ oraz aby $\frac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta} > 0$.

Charakterystyką przychodzącą nazywamy taką charakterystykę, która leży wewnątrz obszaru dla $\theta < 0$, w przypadku przeciwnym charakterystykę nazywamy charakterystyką wychodzącą (por. rys. 2).

Jeżeli na rozpatrywanym brzegu dane jest k zależności

$$(4.3) \quad C_i(S, \tau, u) = 0,$$

to warunkiem koniecznym poprawności sformułowania problemu (por. [2]) jest, aby

$$(4.4) \quad k = n - p,$$

gdzie n jest liczbą równań, a p — liczbą p r z y c h o d z ą c y c h charakterystyk. Dla zagadnienia płaskiego macierz naszego układu ma postać:

$$(4.5) \quad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \\ -\alpha_1, & -\alpha_2, & 0, & 0 \\ -\alpha_2, & \alpha_3, & 0, & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $u_1 \equiv \frac{\partial x_1}{\partial S}, \quad u_2 \equiv \frac{\partial x_2}{\partial S}, \quad u_3 \equiv \dot{x}_1, \quad u_4 \equiv \dot{x}_2$

$$\alpha_1 \equiv \frac{1}{F^2}(\lambda_1^2 u_1^2 + \lambda_2^2 u_2^2),$$

$$\alpha_2 \equiv \frac{1}{F^2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)u_1 u_2,$$

$$\alpha_3 \equiv \frac{1}{F^2}(\lambda_1^2 u_2^2 + \lambda_2^2 u_1^2).$$

Wartościami własnymi macierzy $[A_{ij}]$ są $\pm \lambda_1$ i $\pm \lambda_2$. Wyrażmy warunki brzegowe na ruchomym brzegu przez S, τ, u . Warunek «zaczepienia w oczku» ma postać

$$(4.6) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

czyli

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2}.$$

Jako drugi związek może służyć np. przyjęcie danej wartości σ lub też założenie, że energia nie może się magazynować w zasobniku (nieślusne np. dla bębna o skończonym momencie bezwładności samego bębna i zwoju liny), czyli, że praca wykonana przez linę równa jest dopływowi energii wraz z liną (kinetycznej i sprężystej) plus straty na tarcie:

$$(4.7) \quad \rho w v + \rho \frac{v^2}{2} - f v = \sigma v,$$

gdzie $v \equiv |v|$, f — moduł siły tarcia w punkcie wyjścia liny z zasobnika, czyli

$$(4.8) \quad \rho w(F) + \rho \frac{v^2}{2} - f = \sigma(F),$$

zatem, uwzględniając (4.6),

$$(4.9) \quad \begin{aligned} v_1 &= -\varphi(F, f)t_1, \\ v_2 &= -\varphi(F, f)t_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\varphi(F, f) \equiv \frac{1}{F} \sqrt{2 \left(\frac{\sigma(F)}{\rho} + \frac{f}{\rho} - w(F) \right)}.$$

Ponieważ F wyraża się przez u_1 i u_2 , zatem mamy dwa warunki brzegowe typu

$$C_i(\mathbf{u}) = 0.$$

Zauważymy teraz, że równanie różniczkowe brzegu ma postać

$$(4.10) \quad \frac{dS}{d\tau} = \frac{v}{F} = \varphi(F, f)$$

$$\left(\text{pamiętamy, że wzdłuż charakterystyk } \frac{dS}{d\tau} = \xi^{(w)} \right).$$

Na rys. 2 naszkicowane są odcinki charakterystyk. Przypadek (a) odpowiada sytuacji, gdy

$$(4.11) \quad \lambda_2 > \varphi(F, f),$$

natomiast przypadek (b) — odwrotnej nierówności.

W przypadku (a) wystarczą nam dwa warunki brzegowe, natomiast w przypadku (b) wymagane są trzy warunki, czyli, oprócz (4.9), należałoby dać jeszcze np. kierunek stycznej na wyjściu z oczka. Przy warunku $\sigma = \text{const}$ mamy analogiczną sytuację, tj. możemy mieć przypadek (a) lub (b) i, co więcej, sytuacja może się zmieniać w trakcie jednego procesu.

Wracając do «energetycznego» warunku, widać jasno, że przy dostatecznie dużej sile tarcia będziemy mieli przypadek (a). Jeżeli zaniedbamy siłę tarcia, to (4.11) przyjmie postać

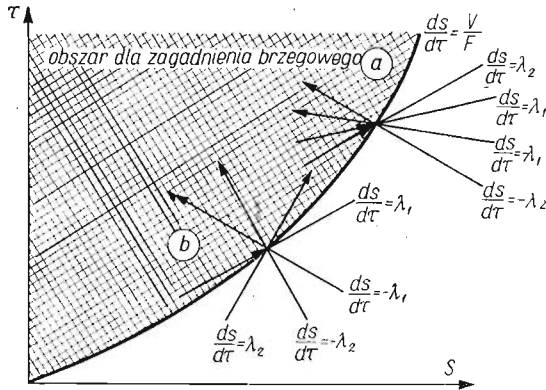
$$(4.12) \quad 2w - \frac{dw}{dF} F = \alpha(F),$$

gdzie $\alpha(F) > 0$.

Jeżeli rozwiążemy (4.12) z warunkiem $w(1) = 0$, to otrzymamy

$$(4.13) \quad w = F^2 \int_F^1 \frac{\alpha(F)}{F^3} dF.$$

Jednakże wyrażenie to dla dowolnego $F > 1$ ma wartość ujemną, zatem nie może opisywać gęstości energii.



Rys. 2

Nie istnieje zatem takie sprężyste prawo konstytutywne, przy którym mógłby być spełniony warunek (4.11) bez siły tarcia.

Fizyczna interpretacja faktu, że w sytuacji (b) potrzebny jest dodatkowy warunek, jest następująca: λ_2 jest prędkością propagacji wzdłuż linii małego sygnału «giętnego» (względem długości w stanie nieodkształconym), zatem $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ jest realną prędkością propagacji tego sygnału. Jeżeli prędkość wypływu z «oczka» przekracza tę wartość, to «informacja» o kącie nachylenia stycznej nie dociera do oczka i kąt ten musi być w $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dodatkowo dany, co jest dość oczywiste, np. w skrajnym przypadku kiedy wypychamy linię z oczka zamiast ją wyciągać.

Pokazaliśmy tu, że liczba koniecznych warunków «na oczku» może być różna, a nawet może się zmieniać w trakcie jednego procesu. Oczywiście zagadnienie liczby warunków brzegowych nie wyczerpuje kwestii poprawności zagadnienia brzegowego. Nie będziemy tu jednak badać pozostałych warunków poprawności (por. [2] s. 95), ponieważ na ogół bywają one spełnione nieomal przy każdym rozsądnym sposobie postawienia warunków brzegowych.

Otwarta również pozostaje sprawa poprawności warunków brzegowych w przypadku linii nie rozciągłej.

Literatura cytowana w tekście

1. A. BLINOWSKI, S. GAJDA, *Zagadnienia lotu cienia rozciągłego*, Biul. PTU-WITU, 15/76.
2. В. Л. РОЖДЕНСТВЕНСКИЙ, Н. Н. ЯНЕНКО, *Системы квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике*, Наука, Москва 1968.
3. A. E. GREEN, N. LAWS, *A general theory of rods*, Proc. Roy. Soc., London, Ser. A293 (1966), 145 - 155.

Резюме

О ФОРМУЛИРОВКЕ И КОРРЕКТНОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЗАДАЧ
ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ ТРОСОВ

Рассматривается нелинейная задача динамики растяжимого гибкого троса (напр. разматывающегося из контейнера). Приводится вывод дифференциальных уравнений динамики, анализируется тип уравнений, находятся характеристики и указывается их физический смысл. На основе общей теории гиперболических систем рассматривается корректность постановки краевых условий на переменном контуре (в точке выхода троса из контейнера).

Summary

ON THE FORMULATION AND THE CORRECTNESS OF SOME CLASS
OF PROBLEMS CONCERNING NONLINEAR DYNAMICS OF STRINGS

Nonlinear dynamic problem of a string with variable mass is considered. The derivation of the differential equations of string dynamics is given, and also the type and the characteristics of the system are determined. The physical meaning of the characteristics is pointed out. On the basis of the general theory of hyperbolic systems, the correctness of the boundary value problem with the variable boundary is discussed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 sierpnia 1976 r.

TECHNICZNA TEORIA GRUBYCH TARCZ ORTOTROPOWYCH

JERZY KUJAWSKI (BIAŁYSTOK)

Analizę stanu naprężenia w tarczach grubych należy przeprowadzać za pomocą teorii uwzględniającej pełne tensory stanów naprężenia i odkształcenia.

Uściśloną teorię tarcz izotropowych opracował KĄCZKOWSKI [1]. Zgodnie z tą teorią stany naprężenia i odkształcenia w tarczy grubej można określić za pomocą funkcji naprężenia, analogicznej do funkcji Airy'ego oraz funkcji w przemieszczenia powierzchni zewnętrznych tarczy w kierunku do nich prostopadłym.

Materiały konstrukcyjne o silnej anizotropii charakteryzującej się tym, że między współczynnikami sprężystości zachodzą następujące zależności $A_{33} \ll A_{\alpha\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) i $A_{33} \ll A_{ll}$ ($l = 4, 5$) wykazują dużą podatność na poprzeczne odkształcenia [2, 3]. Fakt ten wymaga stosowania teorii uściślonych nawet w przypadku cienkich tarcz o odpowiednio dużej podatności na poprzeczne odkształcenia.

Klasyczna teoria tarcz może prowadzić również do dużych błędów w przypadku analizy naprężeń w pobliżu otworów, których średnica jest nieduża w porównaniu z grubością tarczy.

Z powyższych względów w pracy niniejszej przedstawimy techniczną teorię grubych tarcz ortotropowych.

Praca stanowi uogólnienie kinematycznej metody uściślonego obliczania grubych tarcz o ortotropii cylindrycznej [3].

1. Równania podstawowe

1.1. Podstawowe związki teorii sprężystości. Rozpatrzmy w ramach liniowej teorii sprężystości tarczę wykonaną z materiału jednorodnego, ortotropowego i idealnie liniowo sprężystego. Przyjmujemy, że osie x_α ($\alpha = 1, 2$) kartezjańskiego układu współrzędnych leżą w płaszczyźnie środkowej tarczy, a płaszczyzny ograniczające tarczę mają równania $x_3 = \pm h$, gdzie $2h$ jest grubością tarczy.

W celu skrócenia zapisu formuł zastosowano zapis wskaźnikowy i częściowo konwencję sumacyjną. Wskaźniki oznaczone małymi literami łańcuskimi i, j , przyjmują wartości 1, 2, 3. Wskaźniki oznaczone literami greckimi α, β przyjmują wartości 1, 2.

W obszarze tarczy muszą być spełnione podstawowe związki teorii sprężystości, to jest związki Cauchy'ego

$$(1.1) \quad \varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

równania konstytutywne

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{23} &= 2A_{44} \varepsilon_{23}, \\ \sigma_{31} &= 2A_{55} \varepsilon_{31}, \\ \sigma_{12} &= 2A_{66} \varepsilon_{12} \end{aligned}$$

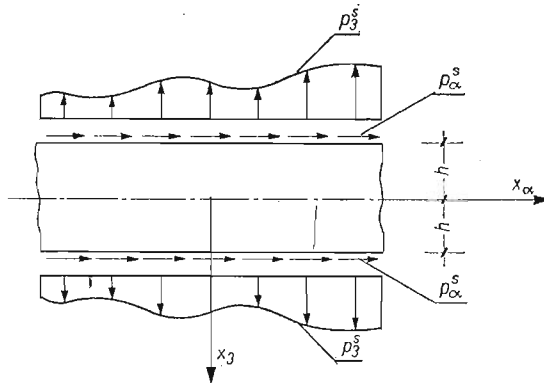
oraz równania równowagi

$$(1.3) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) oraz A_{nn} ($n = 4, 5, 6$) są współczynnikami sprężystości materiału.

Warunki brzegowe na powierzchniach granicznych $x_3 = \pm h$ mają postać

$$(1.4) \quad \sigma_{\alpha 3} = \pm p_\alpha^S, \quad \sigma_{33} = p_3^S.$$



Rys. 1

Ponadto obciążenie tarczy stanowią siły masowe X_α . Siły powierzchniowe działające na tarczę są dowolnie zmiennymi funkcjami x_α .

1.2. Pola przemieszczeń i naprężeń. Pole przemieszczenia w tarczy przyjmujemy w postaci

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^0 + u_\alpha^1(1 - 3\zeta^2), & u_3 &= [u_3^0 + u_3^1(1 - \zeta^2)]\zeta, \\ \zeta &= x_3/h, \end{aligned}$$

u_i^k ($k = 0, 1$) są nieznanymi funkcjami zmiennych x_α .

Z warunków brzegowych (1.4) otrzymujemy

$$(1.6) \quad \begin{aligned} u_\alpha^1 &= \frac{h}{6} \left(u_{3,\alpha}^0 - \frac{p_\alpha^S}{G\tau_\alpha} \right), \\ u_3^1 &= \frac{1}{2} u_3^0 - \frac{h^2}{6} \frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} \left(u_{3,\alpha}^0 - \frac{p_\alpha^S}{G\tau_\alpha} \right)_{,\alpha} + \frac{h}{2} \frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} u_{\alpha,\alpha}^0 - \frac{h}{2A_{33}} p_3^S, \end{aligned}$$

gdzie $\tau_1 = A_{55}/G$, $\tau_2 = A_{44}/G$, G jest dowolnie przyjętym porównawczym modułem sprężystości poprzecznej np. A_{66} .

Ze względu na przyjęte pole przemieszczenia, pole naprężenia przedstawimy w postaci

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= \sigma_{\varphi}^0 + \sigma_{\varphi}^1(1 - 3\zeta^2), \\ \sigma_{12} &= A_{66}[\varepsilon_{12}^0 + \varepsilon_{12}^1(1 - 3\zeta^2)], \\ \sigma_{\alpha 3} &= p_{\alpha}^S \zeta + G\tau_{\alpha} u_{3,\alpha}^1(1 - \zeta^2)\zeta, \end{aligned}$$

gdzie składowe stanu naprężenia σ_{φ} ($\varphi = 11, 22, 33$) są określone przez wzory (1.2).

Siły wewnętrzne odniesione do płaszczyzny środkowej tarczy zdefiniowane są następująco:

$$(1.8) \quad N_{\alpha\beta} = h \int_{-1}^1 \sigma_{\alpha\beta} d\zeta, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

stąd po podstawieniu (1.7) i wykorzystaniu faktu, że $h \int_{-1}^1 (1 - 3\zeta^2) d\zeta = 0$, otrzymujemy

$$(1.9) \quad \begin{aligned} N_{11} &= 2hA_{11}\varepsilon_{11}^0, \\ N_{22} &= 2hA_{22}\varepsilon_{22}^0, \\ N_{12} &= 2hA_{66}\varepsilon_{12}^0. \end{aligned}$$

1.3. Układ równań różniczkowych. Ze względu na założone pole przemieszczeń (1.5) równania równowagi zostaną spełnione w sensie całkowym w następującej postaci [3]:

$$(1.10) \quad 2h \int_0^1 (\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha 3,3} + X_{\alpha}) d\zeta = 0, \quad h \int_0^1 (\sigma_{\alpha 3,\alpha} + \sigma_{33,3}) d\zeta = 0.$$

Na podstawie (1.7) i (1.10) dochodzimy do układu równań różniczkowych:

$$(1.11) \quad L_{ij}u_j^0 = f_i,$$

gdzie

$$(1.12) \quad \begin{aligned} L_{11} &= 2h(A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2), & L_{12} &= L_{21} = 2h(A_{12} + A_{66})\partial_1^2, \\ L_{22} &= 2h(A_{66}\partial_1^2 + A_{22}\partial_2^2), & L_{\alpha 3} &= 2A_{\alpha 3}\partial_{\alpha}, \\ f_{\alpha} &= -2(p_{\alpha}^S + hX_{\alpha}), \\ L_{3\alpha} &= \frac{h^2}{8} \frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} G\partial_{\alpha}(\nabla_{\tau}^2) - \frac{3}{2} A_{3\alpha}\partial_{\alpha}, \\ L_{33} &= -\frac{h}{24} G \left[\frac{h^2}{A_{33}} (A_{31}\partial_1^2 + A_{32}\partial_2^2) - 3 \right] \nabla_{\tau}^2 - \frac{3}{2} \frac{A_{33}}{h}, \\ f_3 &= -\frac{3}{2} p_3^S + \frac{h^2}{8} \frac{G}{A_{33}} \nabla_{\tau}^2 p_3^S - \frac{h}{2} \partial_{\alpha} p_{\alpha}^S - \\ &\quad - \frac{h^2}{24} \frac{1}{A_{33}} \nabla_{\tau}^2 \left(\frac{A_{31}}{\tau_1} \partial_1 p_1^S + \frac{A_{32}}{\tau_2} \partial_2 p_2^S \right), \\ \nabla_{\tau}^2 &= \tau_1 \partial_1^2 + \tau_2 \partial_2^2. \end{aligned}$$

Równania (1.11) są uwikłanym układem różniczkowych równań cząstkowych łącznie ósmego rzędu.

Układ równań można rozwickłać wprowadzając funkcje przemieszczeń spełniające następujące niejednorodne równania różniczkowe:

$$(1.14) \quad \det[L_{ij}]\Phi_j = f_i.$$

Poszukiwane przemieszczenia wyznaczamy z zależności

$$(1.15) \quad u_1^0 = \begin{bmatrix} \Phi_1 & L_{12} & L_{13} \\ \Phi_2 & L_{22} & L_{23} \\ \Phi_3 & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}, \quad u_2^0 = \begin{bmatrix} L_{11} & \Phi_1 & L_{13} \\ L_{21} & \Phi_2 & L_{33} \\ L_{31} & \Phi_3 & L_{33} \end{bmatrix}, \quad u_3^0 = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \Phi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \Phi_2 \\ L_{31} & L_{32} & \Phi_3 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie (1.12) i (1.14) otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$(1.16) \quad A_{33} \left[\frac{h^2}{36} \frac{G}{A_{33}} \left(h^2 \frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} \partial_\alpha^2 - 3 \right) \nabla_\tau^2 + 1 \right] L_1 \Phi_i + \left(\frac{h^2}{12} \frac{G}{A_{33}} \nabla_\tau^2 - 1 \right) L_2 \Phi_i = -\frac{1}{6h} f_i,$$

gdzie

$$L_1 = A_{11} A_{66} \partial_1^4 + [A_{11} A_{22} - A_{12}(A_{12} + 2A_{66})] \partial_1^2 \partial_2^2 + A_{22} A_{66} \partial_2^4,$$

$$L_2 = A_{13}^2 A_{66} \partial_1^4 + [A_{11} A_{23}^2 + A_{22} A_{13}^2 - 2A_{13} A_{23}(A_{12} + A_{66})] \partial_1^2 \partial_2^2 + A_{23}^2 A_{66} \partial_2^4.$$

W tarczach o średniej grubości i cieńszych, w których stosunek grubości do mniejszego boku $2h/a \leq 1/5$, układ równań można uprościć.

Jeśli $\frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} < 5$ to człon równania różniczkowego zawierający $h^4/36$ jest wielkością

małą w stosunku do pozostałych, gdyż $\left(\frac{h}{a}\right)^2 = \frac{1}{100}$.

Po jego pominięciu otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$(1.17) \quad \left(\frac{h^2}{12} \frac{G}{A_{33}} \nabla_\tau^2 - 1 \right) (L_2 - A_{33} L_1) \Phi_i = -\frac{1}{6h} f_i.$$

Gdy siły powierzchniowe i masowe są równe zeru, funkcję rozwikłującą Φ wyznaczamy z następującego równania różniczkowego jednorodnego szóstego rzędu:

$$(1.18) \quad \left(\frac{h^2}{12} \frac{G}{A_{33}} \nabla_\tau^2 - 1 \right) (L_2 - A_{33} L_1) \Phi = 0.$$

Równanie to można zastąpić układem dwu równań

$$(1.19) \quad \left(A_{55} \partial_1^2 + A_{44} \partial_2^2 - \frac{12}{h^2} A_{33} \right) \Phi' = 0,$$

$$(A \partial_1^4 + 2B \partial_1^2 \partial_2^2 + C \partial_2^4) \Phi'' = 0,$$

gdzie

$$A = (A_{13}^2 - A_{11} A_{33}) A_{66},$$

$$2B = A_{11} A_{23}^2 + A_{22} A_{13}^2 - 2A_{13} A_{23}(A_{12} + A_{66}) - A_{11} A_{22} A_{33} + A_{12} A_{33}(A_{12} + 2A_{66}),$$

$$C = (A_{23}^2 - A_{22} A_{33}) A_{66},$$

$$\Phi = \Phi' + \Phi''.$$

Dla tarczy izotropowej układ równań (1.19) przyjmuje postać

$$(1.20) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{24}{h^2} \right) \Phi' = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi' = 0,$$

gdzie $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$.

Podobne równania otrzymał na innej drodze KĄCZKOWSKI (por. [1] s. 873), z tym, że zamiast współczynnika $\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{24}{h^2}$ znajduje się nieco większy współczynnik $\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{30}{h^2}$.

Poszukiwane przemieszczenia po pominięciu sił masowych i powierzchniowych wyznaczamy z zależności

$$(1.21) \quad \begin{aligned} u_1^0 &= (L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22})\Phi, \\ u_2^0 &= -(L_{11}L_{23} - L_{21}L_{13})\Phi, \\ u_3^0 &= (L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})\Phi. \end{aligned}$$

Na podstawie (1.12) i (1.21) mamy

$$(1.22) \quad \begin{aligned} u_1^0 &= 4h\partial_1 [A_{23}(A_{12} + A_{66})\partial_2^2 - A_{13}(A_{66}\partial_1^2 + A_{22}\partial_2^2)]\Phi, \\ u_2^0 &= -4h\partial_2 [A_{23}(A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2) - A_{13}(A_{12} + A_{66})\partial_1^2]\Phi, \\ u_3^0 &= 4h^2 \{A_{11}A_{66}\partial_1^4 + [A_{11}A_{22} - A_{12}(A_{12} + 2A_{66})]\partial_1^2\partial_2^2 + A_{22}A_{66}\partial_2^4\}\Phi. \end{aligned}$$

1.4. Warunki brzegowe. W warunkach brzegowych na poboczniczy walca ograniczającej tarczę mogą występować w różnych kombinacjach trzy wielkości geometryczne

$$(1.23) \quad u_n, u_s, u_3$$

i trzy statyczne

$$(1.24) \quad \sigma_n, \sigma_{ns}, \sigma_{n3}.$$

Indeksami n i s oznaczono wielkości statyczne i geometryczne w kierunku normalnej i stycznej do brzegu tarczy.

Zarówno warunki geometryczne, jak i statyczne możemy spełnić jedynie w sposób całkowity.

Z uwagi na założone pole przemieszczeń otrzymaliśmy układ równań różniczkowych łącznie ósmego rzędu. Pozwala to spełnić po cztery warunki brzegowe na poboczniczy tarczy.

Możemy zatem dokładniej spełnić te warunki brzegowe, które mają najbardziej istotny wpływ na stany naprężenia i przemieszczenia w tarczy.

Przyjmujemy więc cztery wielkości geometryczne

$$(1.25) \quad u_n^0, u_n^1, u_s^0, u_3^0,$$

i cztery statyczne

$$(1.26) \quad \sigma_n^0, \sigma_n^1, \sigma_{ns}^0, \sigma_{n3}.$$

Gdy korzystamy z uproszczonego równania (1.17), spełniamy po trzy spośród wymienionych wyżej warunków brzegowych.

2. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono techniczną teorię grubych tarcz ortotropowych, obciążonych w sposób możliwie ogólny.

Teoria ta pozwala na spełnienie wszystkich związków liniowej teorii sprężystości dla ortotropowego ciała trójwymiarowego z wyjątkiem równań równowagi, które są spełnione w sensie całkowym.

W rezultacie otrzymano uwikłany układ trzech równań różniczkowych cząstkowych łącznie ósmego rzędu do wyznaczenia trzech wielkości geometrycznych — uśrednionych po grubości tarczy, przemieszczeń u_α^0 ($\alpha = 1, 2$) oraz przemieszczenia u_3^0 powierzchni zewnętrznych tarczy, w kierunku do nich prostopadłym.

Układ równań rozwikłano, wprowadzając funkcje przemieszczeń Φ_j ($j = 1, 2, 3$), metodą wyznacznikową dla układów różniczkowych równań liniowych.

Ilustracja omówionej teorii prostymi przykładami jest przedstawiona w pracach [3, 4].

Literatura cytowana w tekście

1. Z. KĄCZKOWSKI, *Theory of thick plates*, Arch. Mech. Stos., 6, 23, (1971).
2. Ю. М. ТАРНОПОЛЬСКИЙ, А. В. РОЗЕ, *Особенности расчета деталей из армированных пластиков*, Изд. „Зинатне”, Рига 1969.
3. J. KUJAWSKI, *Obrotowo-symetryczny stan naprężenia w grubych tarczach o ortotropii cylindrycznej*, Rozpr. Inż., 3, 23, (1975).
4. J. KUJAWSKI, *Średniej grubości tarcze wirujące*, Arch. Bud. Maszyn, 3, 24, (1971)

Резюме

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОЛСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ДИСКОВ

В работе представлен уточненный способ расчета толстых, ортотропных дисков, подвергнутых действию поверхностных сил со всеми тремя составляющими и массовых сил. Проблема решена в перемещениях, что дало возможность точно удовлетворить отношениям линейной теории упругости, за исключением уравнений равновесия, которые будут удовлетворены в интегральном смысле.

В результате получена система трёх дифференциальных уравнений совместно восьмого порядка для определения неизвестных функций перемещения. Это позволяет удовлетворить четырем граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, ограничивающей диск. В дисках средней толщины совместный порядок системы уравнений можно уменьшить до шестого порядка путем отбрасывания малых членов.

Summary

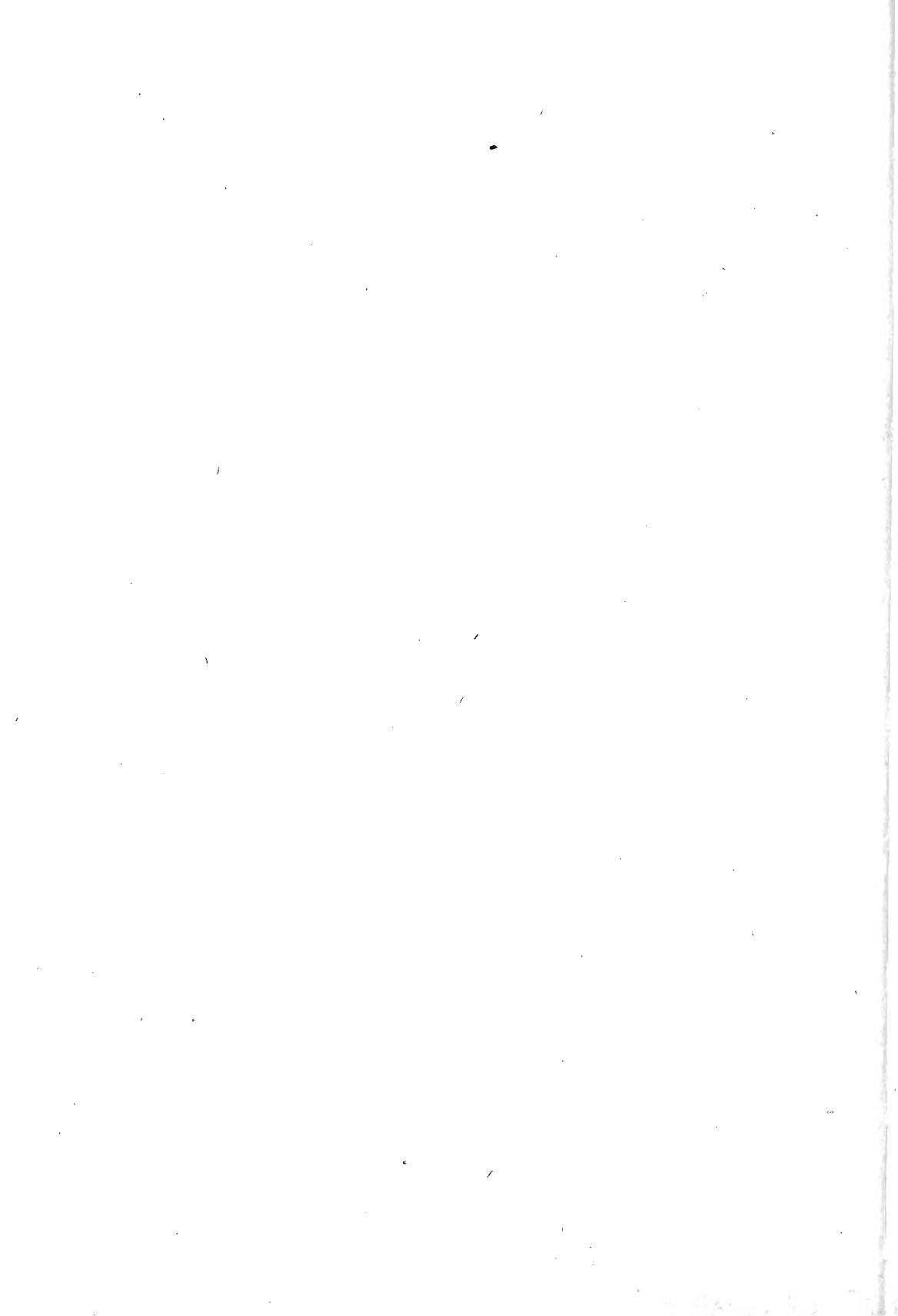
TECHNICAL THEORY OF STRETCHING THICK ORTHOTROPIC PLATES

The paper presents an improved calculation method of thick orthotropic plates subject to the action of arbitrary surface and body forces. The problem is solved in displacements what makes it possible to satisfy precisely the relations of the theory of linear elasticity for orthotropic three-dimensional body, except the equilibrium equations which are satisfied in the general sense.

The obtained system of three eighth order differential equations allows for determining the unknown of displacement functions satisfying three boundary conditions on the cylinder surface bounding the plate. In moderately thick plates the equation order may be reduced to six by disregarding the small terms of higher order.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1976 r.



DRGANIA WŁASNE BELEK Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU ŚCINANIA

ŚLAWOMIR JANECKI (GDAŃSK)

1. Wstęp

W praktyce inżynierskiej, przy ocenie dynamicznego zachowania się szeregu elementów konstrukcyjnych zastępuje się je modelami jednowymiarowymi (pręty, belki). Klasyczna teoria tych modeli opiera się na szeregu hipotez kinematycznych, będących w swej istocie wewnętrznymi więzami geometrycznymi, nakładanymi na ruch ciała jako trójwymiarowego ośrodka ciągłego. W zależności od przyjętych hipotez można otrzymać różne modele, a na ich podstawie różne równania opisujące ruch.

Przyjmowane hipotezy kinematyczne mogą prowadzić do modeli, które nie nadają się do opisu zjawisk falowych, bądź do modeli prowadzących do równań falowych. Przykładem pierwszych jest model belki Eulera-Bernoulliego, a drugich model belki Timoszenki. Model Eulera-Bernoulliego, oparty na hipotezie płaskich i prostopadłych do osi belki przekrojów po jej odkształceniu, stosuje się do wyznaczania najniższych częstości drgań poprzecznych belek smukłych. Model ten nie obejmuje drugorzędnych efektów powodowanych obrotem przekrojów poprzecznych podczas ruchu oraz naprężeniami ścinającymi. Dla belek mało smukłych, posiadających wymiary poprzeczne, porównywalne z ich długością, wspomniane wyżej drugorzędne wpływy mogą mieć duże znaczenie, zwłaszcza przy badaniu rozchodzenia się fal oraz drgań o wyższych częstościach. Poprawkę uwzględniającą obrót przekrojów poprzecznych podczas ruchu belki wprowadził RAYLEIGH, natomiast poprawkę uwzględniającą wpływ sił poprzecznych na ugięcie wprowadził TIMOSZENKO [1].

Problematyką związaną z modelem zaproponowanym przez TIMOSZENKĘ zajmowało się szereg badaczy. Charakter falowy równań ruchu opartych na powyższym modelu badano w pracach [2, 3, 4], drgania własne belki w [2—13], drgania wymuszone w [14, 15, 16]. Pełniejszy przegląd poruszanych tu zagadnień został dokonany w [17]. W pracach [18—21] zajmowano się odpowiednim doбором, występującego w równaniach Timoszenki, współczynnika ścinania charakteryzującego nierównomierność rozkładu naprężeń stycznych w przekrojach poprzecznych belki. Szereg prac poświęcono również doskonaleniu modelu. Wychodząc z trójwymiarowej, zlinearyzowanej teorii sprężystości przy ogólniejszych założeniach dotyczących deformacji w pracach [19—24] otrzymano nowe sformułowania teorii.

W niniejszej pracy, opierając się na ogólniejszych założeniach dotyczących deformacji przekrojów poprzecznych, podano algorytm budowania bardziej dokładnych wariantów

teorii drgań poprzecznych belek uwzględniających ścinanie. Wyprowadzony układ równań może być stosowany do badania dynamicznego zachowania się belek krótkich. Układ ten w szczególnym przypadku sprowadza się do układu Timoszenki.

2. Spis ważniejszych oznaczeń

- A, I pole powierzchni i moment bezwładności przy zgięciu przekrojów poprzecznych belki,
 $I_{1x_i}, I_{x_i x_j}$ momenty bezwładności przekrojów poprzecznych belki występujące przy ścinaniu ($i, j = 1, 2, \dots, R$),
 L, λ długość i smukłość belki,
 ρ, E, G gęstość materiału oraz moduły sprężystości podłużnej i postaciowej,
 u_0 przemieszczenie całkowite punktu materialnego znajdującego się na osi belki,
 ω, γ_i kąty zgięcia i ścinania ($i = 1, 2, \dots, R$),
 Q, M, H_j siła poprzeczna, moment gnący i momenty ścinania,
 q, m, h_j obciążenia zewnętrzne belki ($j = 1, 2, \dots, R$),
 p, k_n bezwymiarowa i względna częstość drgań własnych,
 x_k, t współrzędne miejsca i czasu ($k = 1, 2, 3$),
 $\varepsilon_{ij}, z_{ij}, \eta_j$ bezwymiarowe charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego belki charakteryzujące wpływ deplanacji przy ścinaniu ($i, j = 1, 2, \dots, R$),
 χ_j funkcja deplanacji ($j = 1, 2, \dots, R$).

3. Model Timoszenki

W celu prześledzenia założeń przy ustalaniu modelu zgięcia belki z uwzględnieniem ścinania i momentów obrotowych wyprowadzimy równania ruchu Timoszenki [1]. Aby tego dokonać rozważymy elementarny odcinek belki (rys. 1, 2). Dla prostoty ograniczymy się do rozważania odkształcenia odbywającego się w jednej płaszczyźnie.

Pod wpływem obciążeń oś elementu belki wygina się i tworzy z osią OX_3 kąt

$$(1) \quad \alpha = \omega + \gamma,$$

gdzie ω, γ są odpowiednio kątem powstałym w wyniku zginania i ścinania (rys. 1). Przy założeniu małych odkształceń, całkowity kąt pochylenia materialnej osi belki można przyjąć

$$(2) \quad \alpha = \frac{\partial u_0}{\partial x_3},$$

gdzie $u_0(x_3, t)$ jest przemieszczeniem całkowitym punktu materialnego znajdującego się na osi belki.

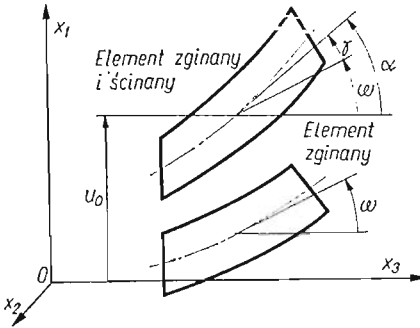
W teorii Timoszenki, przy utrzymaniu słuszności hipotezy płaskich przekrojów, związki fizyczne zachodzące pomiędzy siłami wewnętrznymi i odkształceniami przyjmuje się następująco:

$$(3) \quad M = EJ \frac{\partial \omega}{\partial x_3}, \quad Q = \kappa GA \gamma,$$

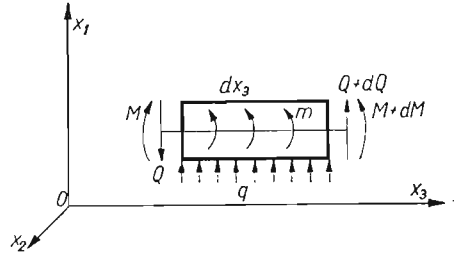
gdzie M, Q są odpowiednio momentem gnącym i siłą poprzeczną, κ współczynnikiem ścinania uwzględniającym nierównomierny rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym belki.

Na podstawie rys. 2 można ustalić następujące równania równowagi elementarnego odcinka belki

$$(4) \quad \frac{\partial Q}{\partial x_3} + q = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x_3} + Q + m = 0.$$



Rys. 1. Schemat odkształcenia elementu belki



Rys. 2. Schemat obciążeń elementu belki

Kiedy obciążenia zewnętrzne są obciążeniami masowymi bezwładnościowymi, to wtedy

$$(5) \quad q = -\rho A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad m = -\rho J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.$$

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne

$$(6) \quad \zeta = \frac{x_3}{L}, \quad \tau = \frac{c_E}{L} t, \quad u = \frac{u_0}{L},$$

na podstawie związków (1)–(5) można otrzymać następujący układ równań:

$$(7) \quad \frac{\partial^4 \omega}{\partial \zeta^4} - \frac{\partial^4 \omega}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\omega + \gamma) = 0,$$

$$\kappa \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\omega + \gamma) = 0,$$

dla kątów zgięcia ω i ścinania γ , albo równanie

$$(8) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial \zeta^4} - \left(1 + \frac{1}{\bar{\mu}^2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + \frac{1}{\bar{\mu}^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0$$

dla przemieszczenia bezwymiarowego u .

W napisanych wyżej równaniach wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(9) \quad \lambda = \frac{L}{\sqrt{I/A}}, \quad \bar{\mu}^2 = \kappa \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2, \quad c_G^2 = \frac{G}{\rho}, \quad c_E^2 = \frac{E}{\rho},$$

gdzie λ jest smukłością belki, natomiast c_E i c_G są odpowiednio prędkością rozchodzenia się fal wzdłużnych i poprzecznych.

Równanie (8) w literaturze przedmiotu znane jest jako równanie Timoszenki.

4. Uogólniony model zgięcia poprzecznego

Przy ustalaniu modelu belki i wyprowadzeniu równań ruchu przyjmować będziemy, że:

1) rozważana belka jest prosta i ma stałe, bisymetryczne przekroje poprzeczne;
2) belka jest wykonana z materiału jednorodnego i izotropowego, dla którego ważne jest prawo Hooke'a;

3) ruch belki odbywa się w jednej płaszczyźnie; w trakcie ruchu przekroje poprzeczne pierwotnie płaskie obracają się i deplanują, nie zmieniając swych wymiarów poprzecznych;

4) odkształcenia i przemieszczenia są na tyle małe, że opis ruchu zostanie dokonany na stanie nieodkształconym belki;

5) naprężenia styczne działające w płaszczyźnie przekroju poprzecznego belki oraz naprężenia normalne działające z tego przekroju będziemy uważać za istotne, natomiast pozostałe za drugorzędne i będziemy je pomijać przy ustalaniu związków fizycznych;

6) rozkłady naprężeń w kierunku poprzecznym po szerokości belki będziemy przyjmować jako niezmiennie.

Zgodnie z powyższymi założeniami składowe przemieszczenia dowolnej cząstki belki znajdującej się przed odkształceniem w miejscu $P(x_1)$ przekroju $x_3 = \text{const}$, można przyjąć w postaci

$$(10) \quad u_1 = u_0(x_3, t), \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 = -x_1 \omega(x_3, t) + \sum_{i=1}^R \chi_i(x_1) \gamma_i(x_3, t),$$

gdzie $\omega(x_3, t)$, $\gamma_i(x_3, t)$ są nieznanymi funkcjami określającymi sztywny obrót i deplanację przekroju wzdłuż długości belki, natomiast $\chi_i(x_1)$ są znanymi funkcjami, spełniającymi określone warunki i charakteryzującymi rozkład deplanacji w danym przekroju.

Znając składowe przemieszczenia możemy wyznaczyć składowe tensora odkształcenia. Zgodnie z założeniami, ograniczając się do teorii zlinearyzowanej mamy

$$(11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(-\omega + u'_0 + \sum_{i=1}^R \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \gamma_i \right), \quad \varepsilon_{33} = -x_1 \omega' + \sum_{i=1}^R \chi_i \gamma_i', \end{aligned}$$

gdzie „primem” oznaczono pochodną względem zmiennej x_3 .

Przyjmując, że pochylenie całkowite osi pręta jest

$$(12) \quad u'_0 = \omega + \sum_{i=1}^R \gamma_i,$$

to niezerowe składowe tensora odkształcenia można przepisać

$$(13) \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^R \left(1 + \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \right) \gamma_i, \quad \varepsilon_{33} = -x_1 \omega' + \sum_{i=1}^R \chi_i \gamma_i'.$$

Na skutek odkształcania się belki pod wpływem obciążeń zewnętrznych pojawiają się wewnętrzne siły sprężystości. Uwzględniając założenia dotyczące materiału, z którego wykonana jest belka, istotne składowe tensora naprężenia możemy przyjąć

$$(14) \quad \tau_{13} = 2G\varepsilon_{13}, \quad \tau_{33} = E\varepsilon_{33}.$$

Przy powyższych ustaleniach i poczynionych założeniach równania zgięcia belki wyrowadzimy z ogólnych równań ruchu ciał smukłych opisanych dowolnymi modelami jednowymiarowymi ośrodka ciągłego [26]. Wspomniane równania mają postać

$$(15) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_3} - \mathbf{Q}^* + \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{H} i \mathbf{Q}^* są wektorami uogólnionych sił wewnętrznych występujących w przekrojach poprzecznych, natomiast \mathbf{h} i $\tilde{\mathbf{h}}$ są wektorami obciążeń powierzchniowych i masowych. Wspomniane wektory określone są następująco:

$$(16) \quad \mathbf{H} = \int_A (\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{e}_3) U dA, \quad \mathbf{Q}^* = \int_A \text{tr}_{(1,3)}(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{U}) dA,$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \int_A \varrho(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{u}}) U dA,$$

gdzie \mathbf{F} , $\tilde{\mathbf{T}}$, ϱ , \mathbf{f} są kolejno gradientem deformacji, symetrycznym tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa, gęstością materiału i intensywnością rozkładu obciążeń masowych. Nadto tensor

$$(17) \quad \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{q}},$$

gdzie

$$(18) \quad \mathbf{u} = \Phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}(x_3, t)).$$

Funkcja wektorowa Φ jest funkcją znaną, $\hat{\mathbf{x}}$ jest wektorem pozycyjnym w obszarze A przekroju poprzecznego belki w stanie niezdeformowanym, \mathbf{q} jest wektorem współrzędnych uogólnionych.

Przyjmując w rozważanym przypadku wektor współrzędnych uogólnionych następująco:

$$(19) \quad \mathbf{q} = \text{col}(u_0, \omega, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_R),$$

składowe tensora \mathbf{U} na podstawie (17) można napisać

$$(20) \quad U^{rs} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & -x_1, & \chi_1, & \dots, & \chi_R \end{bmatrix}.$$

Wtedy ze związków (16) dla przypadku zlinearyzowanego otrzymujemy definicje składowych sił wewnętrznych:

$$(21) \quad Q = \int_A \tau_{13} dA, \quad M = - \int_A x_1 \tau_{33} dA,$$

$$H_j = \int_A \chi_j \tau_{33} dA, \quad Q_j^* = \int_A \frac{\partial \chi_j}{\partial x_1} \tau_{13} dA,$$

$$(j = 1, 2, \dots, R).$$

Z ogólnych równań (15) otrzymujemy skalarne równania ruchu:

$$(22) \quad \begin{aligned} Q' + q + \tilde{q} &= 0, \\ M' + Q + m + \tilde{m} &= 0, \\ H'_j - Q_j^* + h_j + \tilde{h}_j &= 0, \\ (j &= 1, 2, \dots, R). \end{aligned}$$

Wykorzystując zależności (13) i (14) siły wewnętrzne (21) można uzależnić od odkształceń. Otrzymujemy

$$(23) \quad \begin{aligned} Q &= G \sum_{i=1}^R S_i \gamma_i, & M &= E \left(I \omega' - \sum_{i=1}^R I_{1x_i} \gamma_i' \right), \\ H_j &= E \left(-I_{1x_j} \omega' + \sum_{i=1}^R I_{x_i x_j} \gamma_i' \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(24) \quad \begin{aligned} S_i &= \int_A \left(1 + \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \right) dA, & I &= \int_A x_1^2 dA, \\ I_{1x_j} &= \int_A x_1 \chi_j dA, & I_{x_i x_j} &= \int_A \chi_i \chi_j dA, \\ & & (i, j &= 1, 2, \dots, R) \end{aligned}$$

są geometrycznymi charakterystykami przekroju poprzecznego belki.

Funkcje $\chi_i(x_1)$ można dobrać w taki sposób, aby dla każdego i było

$$(25) \quad S_i = kA,$$

gdzie k jest pewną liczbą, którą określimy w dalszej części pracy.

Wtedy siłę poprzeczną można napisać jako

$$(26) \quad Q = kGA \sum_{i=1}^R \gamma_i.$$

Siły wewnętrzne Q_j^* wygodnie jest przedstawić następująco:

$$(27) \quad Q_j^* = G_j - Q,$$

gdzie

$$(28) \quad \begin{aligned} G_j &= GA \sum_{i=1}^R \kappa_{ij} \gamma_i, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{A} \int_A \left(1 + \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \right) \left(1 + \frac{\partial \chi_j}{\partial x_1} \right) dA \\ & & (i, j &= 1, 2, \dots, R). \end{aligned}$$

Wykorzystując (10), (16) i (20) oraz przyjmując $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, obciążenia masowe bezwładnościowe można napisać:

$$(29) \quad \begin{aligned} \tilde{q} &= -\varrho A \ddot{u}_0, & \tilde{m} &= -\varrho \left(I \ddot{\omega} - \sum_{i=1}^R I_{1x_i} \ddot{\gamma}_i \right), \\ \tilde{h}_j &= \varrho \left(I_{1x_j} \ddot{\omega} - \sum_{i=1}^R I_{x_i x_j} \ddot{\gamma}_i \right) \\ & (j = 1, 2, \dots, R), \end{aligned}$$

gdzie kropką oznaczono pochodną względem zmiennej t . Wprowadzając bezwymiarowe zmienne, siły wewnętrzne i obciążenia:

$$(30) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{x_3}{L}, & \tau &= \frac{c_E}{L} t, & u &= \frac{u_0}{L}, \\ \bar{Q} &= \frac{Q}{EI/L^2}, & \bar{M} &= \frac{M}{EI/L}, & \bar{H}_j &= \frac{H_j}{EI_{x_j x_j} L}, & \bar{G}_j &= \frac{G_j}{EI_{x_j x_j} L^2}, \\ \bar{q} &= \frac{q}{EI/L^3}, & \bar{m} &= \frac{m}{EI/L^2}, & \bar{h}_j &= \frac{h_j}{EI_{x_j x_j} L^2} \end{aligned}$$

oraz bezwymiarowe parametry

$$(31) \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{L}{\sqrt{I/A}}, & \varepsilon_{ij} &= \frac{I_{x_j x_j}}{I}, & \eta_i &= \frac{I_{1x_i}}{I}, \\ & (i, j = 1, 2, \dots, R) \end{aligned}$$

Wyprowadzone wyżej równania (22) i związki (12), (23), (26), (28) i (29) można przedstawić w postaci bezwymiarowej.

Związek kinematyczny

$$(32) \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \omega + \sum_{i=1}^R \gamma_i.$$

Równania ruchu:

$$(33) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \zeta} + \bar{q} &= 0, & \frac{\partial \bar{M}}{\partial \zeta} + \bar{Q} + \bar{m} &= 0, & \frac{\partial \bar{H}_j}{\partial \zeta} + \frac{1}{\varepsilon_{jj}} \bar{Q} - \bar{G}_j + \bar{h}_j &= 0, \\ & (j = 1, 2, \dots, R) \end{aligned}$$

po pominięciu obciążeń powierzchniowych.

Siły wewnętrzne:

$$(34) \quad \begin{aligned} \bar{Q} &= k \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \sum_{i=1}^R \gamma_i, & \bar{M} &= -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\omega + \sum_{i=1}^R \eta_i \gamma_i \right), \\ \bar{H}_j &= \frac{1}{\varepsilon_{jj}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\eta_j \omega + \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i \right), & \bar{G}_j &= \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_{ij}} \sum_{i=1}^R \varkappa_{ij} \gamma_i. \end{aligned}$$

Obciążenia masowe:

$$(35) \quad \bar{q} = -\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad \bar{m} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(-\omega + \sum_{i=1}^R \eta_i \gamma_i \right),$$

$$\bar{h}_j = -\frac{1}{\varepsilon_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(-\eta_j \omega + \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i \right).$$

Do jednoznacznego opisu ruchu niezbędne są jeszcze odpowiednie warunki dla sił wewnętrznych i przemieszczeń na końcach belki. W ogólnym przypadku dla sił wewnętrznych na powierzchniach czołowych dowolnego modelu jednowymiarowego mamy (por. [26])

$$(36) \quad \mathbf{H} = \varepsilon \hat{\mathbf{h}}, \quad \hat{\mathbf{h}} = \int_A \hat{\mathbf{p}} U dA,$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, natomiast $\hat{\mathbf{p}}$ jest wektorem obciążenia zewnętrznego przekrojów krańcowych; gdy $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, to wtedy $\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

W rozpatrywanym zadaniu

$$(37) \quad \mathbf{H} = \text{col}(Q, M, H_1, \dots, H_R).$$

Z punktu widzenia zastosowań praktyczne znaczenie mają warunki dla swobodnego, podpartego przegubowo i utwierdzonego końca belki.

W poszczególnych przypadkach mamy:

$$(38) \quad Q = M = H_j = 0,$$

na końcu swobodnym,

$$(39) \quad u = M = H_j = 0,$$

na końcu podpartym przegubowo oraz

$$(40) \quad u = \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

na końcu utwierdzonym.

5. Przypadki szczególne

Obecnie rozpatrzmy pewne przypadki szczególne wynikające z przedstawionych powyżej rozważań.

Eliminując z dwu ostatnich równań (33) siłę poprzeczną wyznaczoną z równania pierwszego oraz wykorzystując zależności (32), (34) i (35), układ równań ruchu można sprowadzić do postaci:

$$(41) \quad \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \left(-\omega + \sum_{i=1}^R \eta_i \gamma_i \right) - \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \left(-\omega + \sum_{i=1}^R \eta_i \gamma_i \right) - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\omega + \sum_{i=1}^R \gamma_i \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \left(-\eta_j \omega + \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i \right) - \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \left(-\eta_j \omega + \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i \right) -$$

$$- \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\omega + \sum_{i=1}^R \gamma_i \right) = 0,$$

$$(j = 1, 2, \dots, R).$$

Kładąc w nich $R = 1$, $\eta_i = \varepsilon_{ij} = 0$ otrzymujemy układ równań (7) wynikający z teorii Timoszenki, gdzie

$$(42) \quad \kappa_{11} = \kappa = \frac{1}{A} \int_A \left(1 - \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \right)^2 dA.$$

W przypadku ogólniejszym teorii rzędu pierwszego ($R = 1$), mamy do czynienia z sześcioma niewiadomymi \bar{Q} , \bar{M} , \bar{H} , u , ω i γ . Można je wyznaczyć z układu równań różniczkowych:

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= \omega + \gamma, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \eta^2} \bar{M} + \frac{\varepsilon \eta}{\varepsilon - \eta^2} \bar{H}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} &= \frac{\eta}{\varepsilon - \eta^2} \bar{M} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \eta^2} \bar{H}, \\ \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \zeta} &= \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \bar{M}}{\partial \zeta} &= -\bar{Q} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} - \eta \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2}, \\ \varepsilon \frac{\partial \bar{H}}{\partial \zeta} &= -\bar{Q} + \kappa \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \gamma - \eta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2} \\ &(\varepsilon = \varepsilon_{11}, \eta = \eta_1, \kappa = \kappa_{11}), \end{aligned}$$

napisanych na podstawie (32) - (35) oraz odpowiednich warunków początkowych i brzegowych.

W dalszym ciągu wykorzystamy powyższe równania przy badaniu wpływu parametrów ε , η i λ na częstości drgań własnych belki wspornikowej.

Teorię rzędu wyższego ($R > 1$) zbadamy na przykładzie drgań swobodnych harmonicznym belki obustronnie podpartej przegubowo. Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci

$$(44) \quad \begin{aligned} \omega &= \Omega \cos \alpha_n \zeta \cos p \tau, & \gamma_i &= \Gamma_i \cos \alpha_n \zeta \cos \tau, \\ \alpha_n &= \pi n, & (i &= 1, 2, \dots, R; n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Podstawiając je do (41) otrzymujemy układ równań algebraicznych jednorodnych:

$$(45) \quad \begin{aligned} &\left[1 - \left(1 + \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \right) k_n^2 \right] \Omega + \sum_{i=1}^R \left[-\eta_i - \left(1 - \eta_i \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \right) k_n^2 \right] \Gamma_i = 0, \\ &\left[-\eta_j - \left(1 - \eta_j \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \right) k_n^2 \right] \Omega + \sum_{i=1}^R \left[\left(\varepsilon_{ij} + \mu^2 \frac{\lambda^2}{\alpha_n^2} \kappa_{ij} \right) - \left(1 + \varepsilon_{ij} \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \right) k_n^2 \right] \Gamma_i = 0, \\ &(j = 1, 2, \dots, R) \end{aligned}$$

do wyznaczenia względnych częstości drgań własnych

$$(46) \quad k_n = \frac{p}{\alpha_n^2/\lambda},$$

gdzie

$$\mu = \frac{c_G}{c_E}.$$

Wprowadzając macierze:

$$(47) \quad \mathbf{A} = (a_{ij}), \quad \mathbf{B} = (b_{ij}),$$

gdzie

$$(48) \quad \begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{i+1,1} &= a_{1,i+1} = -\eta_i, & a_{i+1,j+1} &= \varepsilon_{ij} + \mu^2 \frac{\lambda^2}{\alpha_n^2} \varkappa_{ij}, \\ b_{11} &= 1 + \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2}, & b_{1,i+1} &= b_{i+1,1} = 1 - \eta_i \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2}, & b_{i+1,j+1} &= 1 + \varepsilon_{ij} \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

oraz wektor

$$(49) \quad \mathbf{x} = \text{col}(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_R),$$

równania (45) można przepisać w postaci macierzowej

$$(50) \quad (\mathbf{A} - k_n^2 \mathbf{B}) \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Powyższy układ równań posłuży nam do wyznaczenia względnej częstości drgań własnych k_n .

Macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są symetryczne i nieosobliwe, stąd wartości własne równania (50) będą rzeczywiste.

6. Przykłady

Wykorzystując przedstawione powyżej równania wykonano obliczenia numeryczne częstości względnych

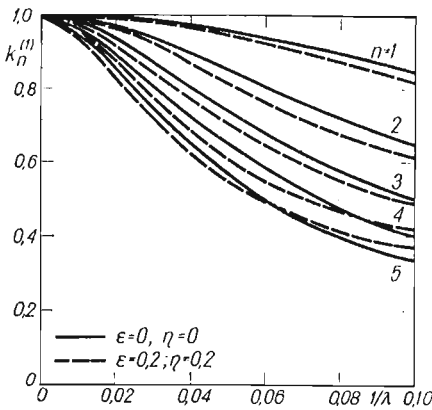
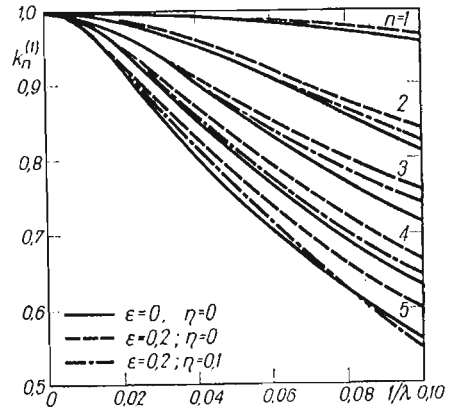
$$(51) \quad k_n = \left(\frac{p}{p_0} \right)_n$$

dla harmoniczných drgań własnych poprzecznych belki wspornikowej według teorii rzędu $R = 1$ oraz belki podpartej obustronnie przegubowo dla $R \geq 1$. Wielkość p_0 jest bezwymiarową częstością własną drgań poprzecznych belki wyznaczoną z teorii Eulera-Bernoulliego (bez wpływu momentów obrotowych i sił tnących).

Wyniki obliczeń dla $R = 1$ i różnych wartości parametrów $\varepsilon = \varepsilon_{11}$, $\eta = \eta_1$, przy ustalonej wartości $\bar{\mu}^2 = \varkappa(c_G/c_E)^2 = 1/3$ w funkcji smukłości belki λ , zostały przedstawione na rys. 3 dla belki wspornikowej i na rys. 4 i 5 dla belki podpartej przegubowo. Przegląd otrzymanych wyników prowadzi do następujących stwierdzeń.

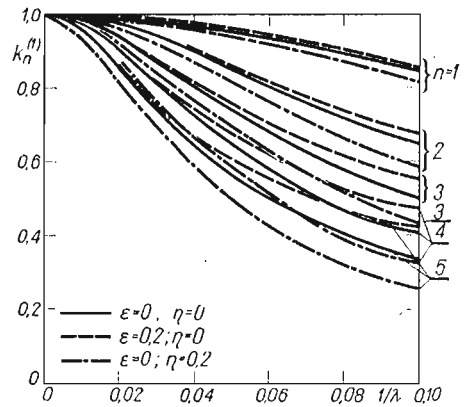
Rys. 3. Wpływ parametrów geometrycznych na względne częstotliwości drgań poprzecznych belki wspornikowej

$$\left(R = 1, \bar{\mu}^2 = \frac{1}{3} \right)$$



Rys. 4. Wpływ parametrów geometrycznych na względne częstotliwości drgań poprzecznych belki podpartej przegubowo

$$\left(R = 1, \bar{\mu}^2 = \frac{1}{3} \right)$$



Rys. 5. Wpływ parametrów geometrycznych na względne częstotliwości drgań poprzecznych belki podpartej przegubowo

$$\left(R = 1, \bar{\mu}^2 = \frac{1}{3} \right)$$

— Momenty obrotowe przekrojów poprzecznych i ścinanie powodują zmniejszanie wartości częstotliwości drgań własnych. Obniżenie to jest większe dla belek krępych i harmonik o numerach wyższych. Stwierdzenie to potwierdza wnioski uzyskane we wcześniejszych pracach [1, 5, 6, 10, 15].

— Wpływ parametrów ϵ i η występujących w teorii ogólniejszej od teorii Timoszenki ($\epsilon = 0, \eta = 0$) na częstotliwości drgań własnych jest następujący: wzrost wartości parametru ϵ powoduje podwyższenie częstotliwości, natomiast wzrost parametru η ich obniżenie.

Do przeprowadzenia obliczeń częstotliwości względnych k_n według równań (50) dla $R \geq 1$, niezbędne są charakterystyki geometryczne $\eta_i, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ określone wzorami (28) i (31), zależnymi od funkcji deplanacji χ_i . Stąd pierwszym krokiem jest ich wyznaczenie dla

konkretnego przekroju poprzecznego. Dla belki posiadającej prostokątne przekroje poprzeczne o wymiarach $b \times 2h$, funkcje χ_i powinny spełniać następujące warunki:

$$(52) \quad \begin{aligned} 1. & \chi_i(-x_1) = -\chi_i(x_1), \\ 2. & \tau_{13}/x_1 = \pm h = 0, \\ 3. & S_i = kA, \end{aligned}$$

gdzie b i h są odpowiednio szerokością i połową wysokości przekroju.

Napisane wyżej warunki spełniają funkcje określone wzorami

$$(53) \quad \chi_i = \frac{1}{2} h \xi \left[(k-1)(3-\xi^2) + \sum_{m=1}^i \frac{(1-\xi^2)^m}{(m-1)!} \right]$$

$$(i = 1, 2, \dots, R),$$

gdzie

$$\xi = \frac{x_1}{h}, \quad \xi \in \langle 1, -1 \rangle.$$

Ze wzorów (28) i (31) oraz zależności (53) dla belki o przekrojach prostokątnych mamy

$$(54) \quad \begin{aligned} \eta_i &= \frac{6}{5} (k-1) + \eta_i^{(1)}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{51}{35} (k-1)^2 + 3(k-1) (\varepsilon_i + \varepsilon_j) + \varepsilon_{ij}^{(1)}, \\ \kappa_{ij} &= 2(k-1) + \frac{6}{5} (k-1)^2 + \frac{3}{4} (k-1) (\kappa_i + \kappa_j) + \kappa_{ij}^{(1)}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(55) \quad \begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= \frac{3}{2} \sum_{m=1}^i \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{(2s+3)(m-1)!}, \\ \varepsilon_k &= \sum_{m=1}^k \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{(m-1)!} \frac{s+3}{(2s+3)(2s+5)}, \\ \varepsilon_{ij}^{(1)} &= \frac{3}{4} \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j \sum_{s=0}^{m+n} \frac{(-1)^s \binom{m+n}{s}}{(m-1)!(n-1)!(2s+3)}, \\ \kappa_k &= \sum_{m=1}^k \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{(m-1)!} \left[\frac{1}{2s+1} - \frac{2m+1}{2s+3} \right], \end{aligned}$$

$$\kappa_{ij}^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j \sum_{s=0}^{m+n-2} \frac{(-1)^s \binom{m+n-2}{s}}{(m-1)!(n-1)!} \left[\frac{1}{2s+1} - \frac{2(m+n+1)}{2s+3} + \frac{(2m+1)(2n+1)}{2s+5} \right].$$

Liczbę k wyznaczmy z warunku niewystępowania wewnętrznej sprzeczności teorii w jej szczególnym przypadku gdy $R = 1$ i $\varepsilon = \eta = 0$. Wtedy z ostatniego równania ruchu (43) jest

$$(56) \quad \bar{Q} = \alpha_{11} \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \gamma.$$

Z drugiej strony na podstawie zależności (26) określającej siłę poprzeczną dla $R = 1$ mamy

$$(57) \quad \bar{Q} = k \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \gamma.$$

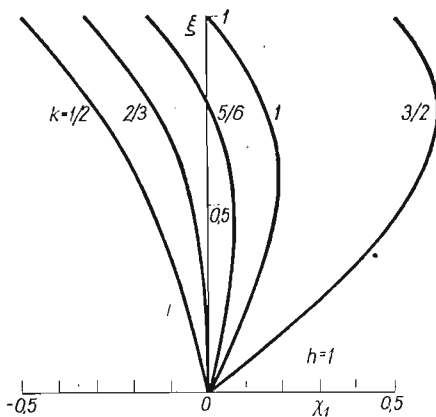
Z porównania powyższych zależności i wzoru (28) otrzymujemy

$$(58) \quad k = \alpha_{11} = \frac{1}{A} \int_A \left(1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right)^2 dA.$$

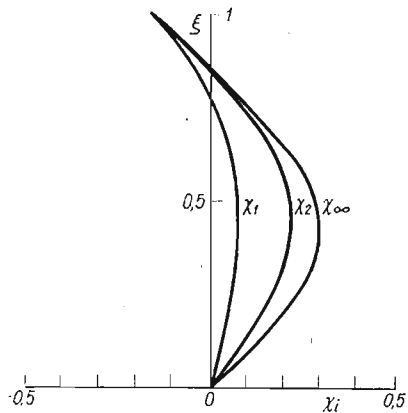
Z powyższego warunku dla belki o przekroju prostokątnym po uwzględnieniu (53) otrzymujemy $k = 5/6$.

Identyczną wartość we wzorze (3) określającym siłę poprzeczną dla belki o przekroju prostokątnym proponuje COWPER [20].

W zależności od wartości parametru k funkcje deplanacji $\chi_i(x_1, k)$ mają różny kształt. Na rys. 6 wykreślono $\chi_1(x_1)$ dla $k = 1/2, 2/3, 5/6, 1$ i $3/2$ natomiast na rys. 7 χ_i dla $k = 5/6$.



Rys. 6. Funkcja deplanacji χ_1



Rys. 7. Funkcje deplanacji χ_i dla $k = \frac{5}{6}$

Obraz przedstawionych rozkładów deplanacji jest jakościowo zgodny z deplanacjami dla pręta o przekroju kołowym, otrzymanymi na podstawie teorii POCHHAMMERA-CHREE przy różnych stosunkach promienia przekroju do długości fali [25].

Z porównania krzywych deplanacji, podanych na rys. 6 i w pracy [25] można wnosić, że liczba $k = 2/3$ proponowana przez TIMOSZENKĘ jest wartością graniczną, rozdzielającą deplanacje odpowiadające falom długim od deplanacji dla fal dostatecznie krótkich. Nadto obserwuje się, że dla k mniejszych deplanacja przekroju poprzecznego staje się mniejsza.

Mając określone charakterystyki geometryczne można przystąpić do wyznaczenia częstości drgań własnych belki podpartej przegubowo o prostokątnych przekrojach poprzecznych. Rozważając równanie (50) i uwzględniając zależności (54) i (55) w przypadku $R = 1$, można pokazać, że względne częstości drgań własnych $k_n^{(r)}$ nie zależą od liczby k charakteryzującej rozkład deplanacji w przekroju. W rozważanym przypadku z (50) otrzymamy równanie częstości

$$(59) \quad (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)k_n^4 + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})k_n^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0.$$

Uwzględniając (48), (54) i (55) mamy:

$$(60) \quad \begin{aligned} b_{11}b_{22} - b_{12}^2 &= \left(\frac{6}{5}k^2\right) \left[\frac{17}{14} + \frac{1}{70} \left(\frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^2 \right] \left(\frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^2, \\ a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} &= \left(\frac{6}{5}k^2\right) \left\{ \mu^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\alpha_n}\right)^2 \right] + \left[\frac{17}{14} + \frac{1}{35} \left(\frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^2 \right] \right\}, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= \left(\frac{6}{5}k^2\right) \left[\frac{1}{140} + \mu^2 \left(\frac{\lambda}{\alpha_n}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Stąd widać, że dla $R = 1$ bezwymiarowe częstości $k_n^{(r)}$ ($r = 1, 2$) nie zależą od k . Podobnie jest dla $R > 1$.

Wyniki obliczeń w przypadku $R = 1$ według modelu Timoszenki ($\varepsilon = \eta = 0$) dla $k = 2/3, 5/6, 1$ oraz według modelu uogólnionego dla smukłości $\lambda = 10, 25$ i 50 przedstawiono w tablicy 1. Z przeglądu otrzymanych wyników widać, że $k_n^{(r)}$ liczone z równań

Tablica 1. Bezwymiarowe częstości drgań $k_n^{(r)}$ ($r = 1, 2$) belki podpartej przegubowo o przekroju prostokątnym ($\nu = 0.25$)

λ	n	Model belki Timoszenki $ \varepsilon = 0, n = 0 $						Model uogólniony $ R = 1 $	
		$k = \frac{2}{3}$		$k = \frac{5}{6}$		$k = 1$		$k_n^{(1)}$	$k_n^{(2)}$
		$k_n^{(1)}$	$k_n^{(2)}$	$k_n^{(1)}$	$k_n^{(2)}$	$k_n^{(1)}$	$k_n^{(2)}$		
10	1	0,80805	5,79150	0,85327	6,85575	0,88094	7,96845	0,85355	6,82108
	2	0,57716	2,02709	0,64781	2,25753	0,69680	2,51853	0,64951	2,24883
	3	0,43184	1,20410	0,50287	1,29253	0,55642	1,40175	0,50660	1,28879
	4	0,34048	0,85906	0,40530	0,90208	0,45276	0,95949	0,41122	0,90011
	5	0,27946	0,66984	0,33725	0,69383	0,38574	0,72792	0,34533	0,69267
25	1	0,95838	30,51909	0,97016	37,68564	0,97674	176,55547	0,97017	37,46993
	2	0,86215	8,48140	0,89693	10,19062	0,91756	44,91814	0,89707	10,13657
	3	0,75499	4,30453	0,80875	5,02296	0,84265	20,51761	0,80924	4,99883
	4	0,65833	2,77679	0,72350	3,15836	0,76677	11,95379	0,72452	3,14474
	5	0,57716	2,02709	0,64781	2,25753	0,69680	7,96845	0,64951	2,24883
50	1	0,98899	118,29765	0,99222	147,39126	0,99398	176,55547	0,99222	146,52850
	2	0,95838	30,51909	0,97016	37,68564	0,97674	44,91814	0,97017	37,46993
	3	0,91356	14,22325	0,93708	17,34043	0,95037	20,51761	0,93711	17,24450
	4	0,86215	8,48140	0,89693	10,19062	0,91756	11,95379	0,89707	10,13657
	5	0,80805	5,79150	0,85327	6,85575	0,88094	7,96845	0,85355	6,82108

Timoszenki przy współczynniku $k = 5/6$ rekomendowanym przez COWPERA [20], mają wartości bliskie w porównaniu z wartościami częstości wyznaczonymi na podstawie modelu ogólniejszego, zwłaszcza dla większych smukłości λ .

Wyniki obliczeń w przypadku $R \geq 1$ według modelu uogólnionego dla $\lambda = 10$ zostały zestawione w tablicy 2. Na podstawie otrzymanych wyników widać, że dla każdego R istnieje $r = 1, 2, \dots, R+1$ gałęzi częstości drgań własnych. Nadto dla każdego n przy ustalonym r częstości $k_n^{(r)}$ maleją ze wzrostem i są ograniczone od dołu.

Tablica 2. Bezwymiarowe częstości drgań $k_n^{(r)}$ belki podpartej przegubowo o przekroju prostokątnym ($\lambda = 10, \nu = 0,25$)

$R \backslash n$	1	2	3	4	5
1	0,853548 6,82108	0,853541 6,81700 18,0939	0,853541 6,81700 17,7382 31,4361	0,853541 6,81700 17,7328 29,3617 47,3689	0,853541 6,81700 17,7328 29,2355 41,3318
2	0,649512 2,24883	0,649362 2,24768 4,73632	0,649362 2,24768 4,65047 7,98125	0,649362 2,24768 4,64918 7,47048 11,9212	0,649362 2,24768 4,64918 7,44027 10,4203
3	0,506605 1,28879	0,505992 1,28826 2,25317	0,505992 1,28826 2,21696 3,63587	0,505992 1,28826 2,21641 3,41423 5,35815	0,505992 1,28826 2,21641 3,40084 4,74438
4	0,411217 0,900108	0,409772 0,899814 1,37502	0,409768 0,899814 1,35589 2,11292	0,409768 0,899814 1,35560 1,99212 3,05985	0,409768 0,899814 1,35560 1,98488 2,70088

Częstości względne $k_n^{(r)}$ drgań własnych belki dwustronnie podpartej przegubowo zależą od stosunku μ^2 prędkości rozchodzenia się fal poprzecznych i wzdłużnych oraz od ilorazu $c_n(\lambda) - \frac{\pi n}{\lambda}$. Z uwagi na równość $c_{kn}(k\lambda) = c_n(\lambda)$ ($k, n = 1, 2, \dots$) częstości względne kn -tej harmoniki drgań belki o smukłości $k\lambda$, równe są częstościom n -tej harmoniki drgań belki o smukłości λ , dla danej gałęzi rozwiązań i ustalonej wartości μ^2 .

7. Uwagi końcowe

Na podstawie przytoczonych powyżej rozważań i wyników obliczeń widać, że przedstawiony model zgięcia belki umożliwia obliczenie częstości drgań własnych dla skończonego ciągu gałęzi rozwiązań. Dla R funkcji deplanacji przekroju otrzymuje się $R+1$ gałęzi

częstości, zależnych od $R(R+2)$ współczynników liczbowych η_i , ε_{ij} i κ_{ij} , ($i, j = 1, 2, \dots, R$) charakteryzujących kształt i rozkład deplanacji przekrojów poprzecznych belki. W przypadku szczególnym $R = 1$ i przyjęciu $\eta_1 = \varepsilon_{11} = 0$ otrzymuje się model belki Timoszenki. Badając drgania belki dwustronnie podpartej przegubowo o przekrojach prostokątnych stwierdzono, że częstości drgań własnych nie zależą od liczby k charakteryzującej rozkład deplanacji w przekroju, w odróżnieniu od teorii Timoszenki. Najlepsza zgodność wyników otrzymanych na podstawie modelu będącego przedmiotem pracy i modelu Timoszenki występuje przy przyjęciu liczby $k = 5/6$ rekomendowanej przez COWPERA.

Niezbędne jest doświadczalne potwierdzenie istnienia częstości drgań własnych znajdujących się na gałęziach $r \geq 2$ proponowanego modelu. Dalsze badania teoretyczne winny polegać na doskonaleniu przedstawionego modelu poprzez włączenie do rozważań wpływu odkształcenia poprzecznego belki i wzajemnego sprzężenia ugięć występujących w dwu płaszczyznach oraz na zastosowaniu tego modelu do zagadnień drgań wymuszonych i falowych.

Literatura cytowana w tekście

1. S. P. TIMOSZENKO, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Phil. Magazine, Ser., 6, 41 (1921).
2. J. PRESCOTT, *Elastic waves and vibrations of thin rods*, Phil. Magazine, Ser. 7, 33 (1942).
3. W. FLÜGGE, *Die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben*, ZAMM, 22 (1942).
4. Я. С. Уфлянд, *Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин*, Прикл. мат. мех., 12 (1948).
5. E. T. KRUSZEWSKI, *Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam*, NACA TN No 1909, 1949.
6. R. W. TRAIL-NASH, A. R. COLLAR, *The effects of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibrations of beams*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 2, 6 (1953).
7. R. A. ANDERSON, *Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory*, J. Appl. Mech., 20 (1953).
8. М. Ш. ФЛЕКСЕР, *Об учете влияния инерции вращения и перерезывающих сил на поперечные колебания стержня конечной длины*, Инж. сборник, 23 (1956).
9. D. RASKOVIC, *Wartości funkcji własnych dla drgań poprzecznych belek jednorodnych z uwzględnieniem wpływu ścinania i bezwładności obrotowej*, Rozpr. Inż., 6 (1958).
10. T. C. HUANG, *The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions*, J. Appl. Mech., 28 (1961).
11. W. C. HURTY, M. F. RUBINSTEIN, *Rotary inertia and shear in beam vibration*, J. of Franklin Inst., 278 (2) (1964) 124.
12. K. K. KAPUR, *Vibrations of a Timoshenko beam using finite element approach*, J. Acoust. Soc. Am., 40 (1966) 1058.
13. T. M. WANG, *Natural frequencies of continuous Timoshenko beams*, J. Sound Vibr., 13 (4), (1970).
14. G. HERRMANN, *Forced motions of Timoshenko beams*, J. Appl. Mech., 1, 22 (1955).
15. B. A. BOLEY, C. C. CHAO, *Some solutions of the Timoshenko beam equations*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
16. Г. Я. ЛЕОНТЬЕВ, *К учету деформации сдвига и инерции вращения сечения в теории колебаний не-призматических стержней*, Изв. АН СССР, Мех. и машиностр., 1 (1960).
17. K. WILMAŃSKI, *Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoszenki*, Mech. Teoret. Stos., 2, 2 (1964).
18. R. D. MINDLIN, H. DERESIEWICZ, *Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams*, Proc. Second U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954.
19. A. D. S. BARR, *Cross-section distortion and the Timoshenko beam equation*, J. Appl. Mech., 1, 26 (1959).
20. G. R. COWPER, *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory*, J. Appl. Mech., 2, 33 (1966).

21. D. GROSS, *Timosheiko-theorie and elastodynamik*, Schiffbauforschung 5 - 6, 8 (1969).
22. E. VOLTERRA, E. C. ZACHMANOGLU, *Free and forced vibrations of streight elastic bars according to the method of internal constraints*, Ing. Arch., 6, 26 (1957).
23. A. V. K. MURTHY, *Vibrations of short beams*, AIAA Journal, 1, 8 (1970).
24. B. AALAMI, B. ATZORI, *Flexural vibrations and Timoshenko's beam theory*, AIAA Journal, 5, 12 (1974).
25. H. N. ABRAMSON, H. J. PLASS, E. A. RIPPERGER, *Stress wave propagation in rods and beams*, Advances in Appl. Mech., 5 (1958).
26. С. Янэцкий, Уравнения движения тонких тел замещенных одномерными моделями сплошной среды, Проблемы машиностроения, издательство „Наукова Думка” (w druku).

Резюме

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

В работе показана новая модель балки. При принятых предположениях относительно деформаций получены уравнения движения. В частном случае они сводятся к уравнению Тимошенко. Учитывая то, что во время движения имеет место не только вращение, но и искривление поперечных сечений балки, составляющие перемещений определяются уравнениями (10). Затем на основании общих зависимостей (15)—(18) для тонких одномерных тел, получены уравнения движения (33), определены внутренние силы (34) и внешние нагрузки (35) для принятой модели балки. Приведены результаты вычислений собственных частот для консольной (фиг. 3) и шарнирно опертой балок (фиг. 4, 5, табл. 1, 2).

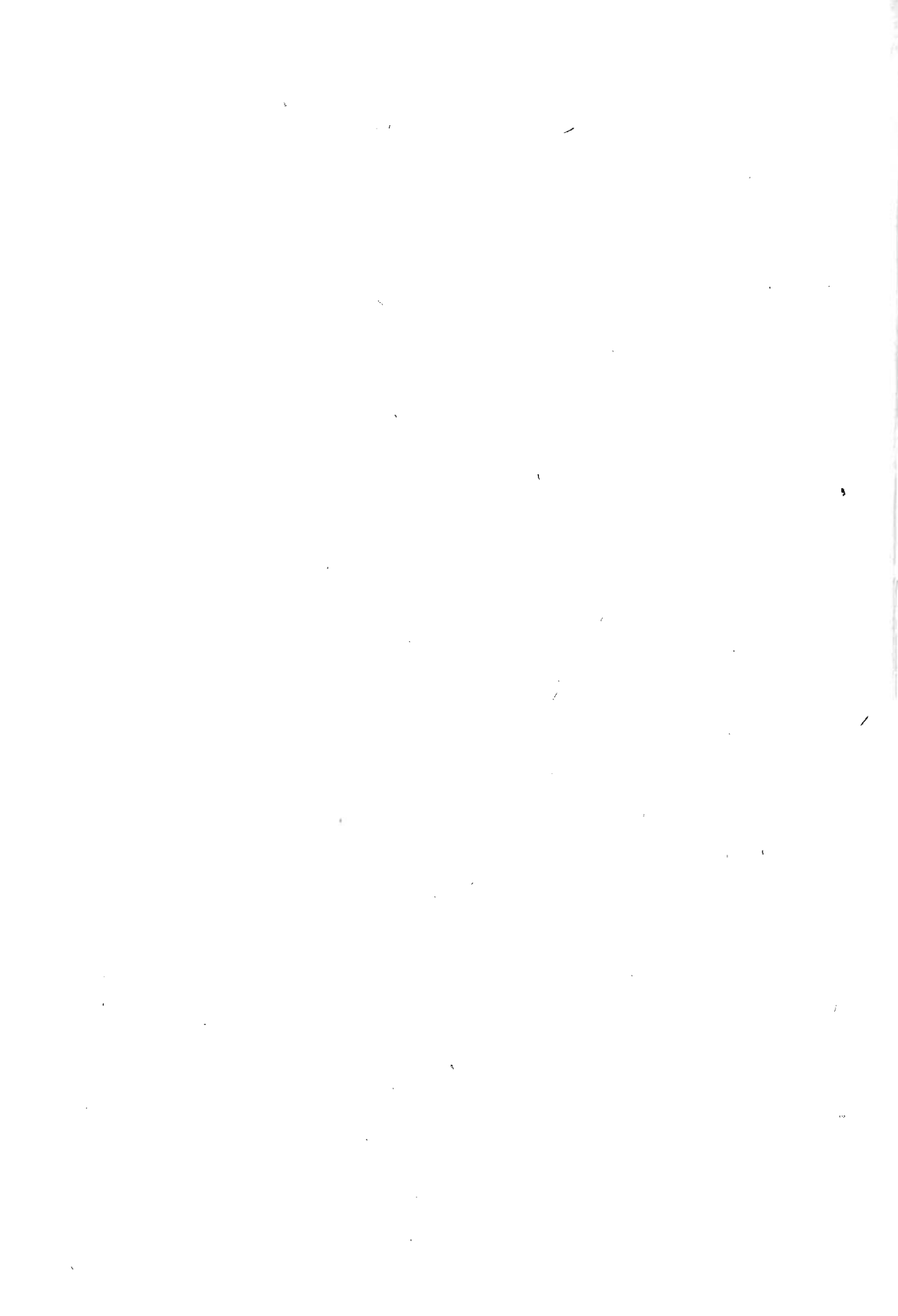
Summary

FREE VIBRATIONS OF BEAMS INFLUENCED BY THE SHEAR EFFECT

The paper presents a new model of tranverse vibrations of uniform beams. Basing on the assumptions concerning the cross-sectional deformation of the beam, the motion equations are presented; a particular case of these equations are the equations given by Timoshenko. Under the assumption that the external loads acting upon the beam produce rotation and warping of its cross-sections, the components of displacement are given by (10). Using the generalized equations of a slender body (15)—(18), the equations of motion (33) for the considered model of the beam have been found as well as the expressions describing the internal forces (34) and external loads (35). Calculation results of eigenfrequencies for two special cases viz. the cantilever beam (Fig. 3) and the simply supported beam (Fig. 4, 5; Table 1, 2) have been presented.

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH PAN W GDAŃSKU

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 sierpnia 1976 r.



ANALIZA KRZYŻOWOPRĄDOWEGO KONWEKCYJNEGO
REKUPERATORA FIELDA ORAZ PĘTLICOWEGO
ZE STRATAMI CIEPŁA DO OTOCZENIA

JAN SKŁADZIEŃ (GLIWICE)

Oznaczenia

A_n, B_n, C_n wyrazy szeregu funkcyjnego zależne od zmiennej y , podane dla rekuperatora Fielda w [2], dla rekuperatora pętlicowego w [3],

k_{i-j} zredukowany współczynnik przenikania ciepła od strumienia i -tego do j -tego ($k_{i-j} = k_{j-i}$),

(K_{i-j}) liczba kryterialna określona zależnością:

$$(K_{i-j}) = \frac{k_{i-j} x_0 y_0}{W_i}$$

\dot{Q}_0 strumień ciepła odpływający do otoczenia,

t temperatura,

W pojemność cieplna strumienia ($W_2 = W_3$),

X, Y współrzędne bezwzględne,

x, y współrzędne bezwymiarowe: $x = \frac{X}{x_0}$; $y = \frac{Y}{y_0}$,

x_0, y_0 wymiary odniesieniowej powierzchni przepływu ciepła,

α stosunek pojemności cieplnych strumieni:

$$\alpha = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_3}{W_1}$$

β pomocnicza wielkość określona zależnością:

$$\beta = \alpha \cdot \theta_{1w_{\max}}$$

\varkappa, \varkappa_0 stosunki zredukowanych współczynników przenikania ciepła; \varkappa — por. tabl. 1,

$$\varkappa_0 = \frac{k_{1-0}}{k_{1-2}}$$

θ bezwymiarowa temperatura: $\theta = \frac{t - t_{\min}}{t_{1d} - t_{\min}}$,

$\Delta\theta_0$ bezwymiarowa wielkość określająca straty ciepła do otoczenia (bezwymiarowy przyrost temperatury jaki wystąpiłby w przypadku doprowadzenia ciepła traconego na rzecz otoczenia \dot{Q}_0 do czynnika o takiej samej pojemności cieplnej, jaką ma w rekuperatorze medium ogrzewane):

$$\Delta\theta_0 = \frac{\dot{Q}_0}{W_2(t_{1d} - t_{\min})}$$

d przy dopływie,

i i -ty strumień; $i = 1$ dla czynnika grzejącego,

max maksymalny,

min minimalny,

- o otoczenie,
- śr średni,
- w przy wypływie.

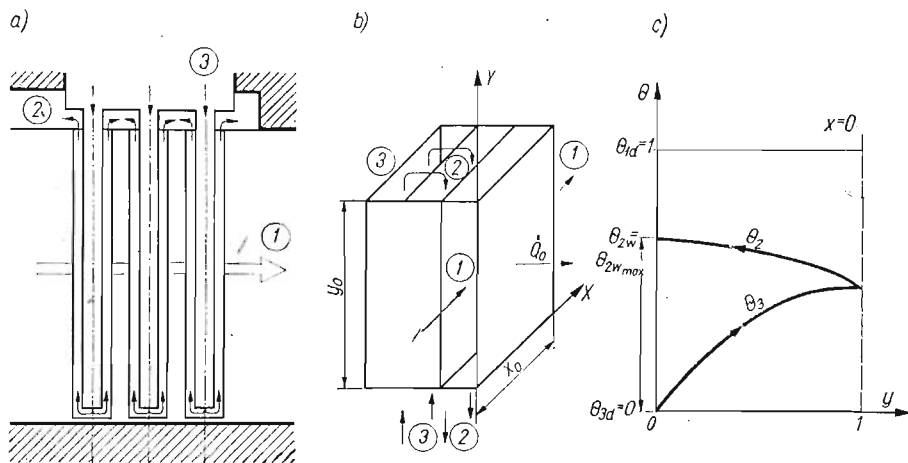
1. Założenia

— Czynnik ogrzewany płynie adiabatycznymi strugami, pomiędzy którymi nie ma wymiany ani ciepła ani masy. Czynnik grzejący albo płynie też adiabatycznymi strugami, albo ulega całkowitemu wymieszaniu w przekrojach poprzecznych do kierunku przepływu. W tym drugim przypadku temperatura medium cieplejszego jest funkcją tylko jednej zmiennej.

- W rekuperatorze panuje stan ustalony.
- Nie występuje przepływ ciepła wzdłuż przegród.
- Współczynniki przenikania ciepła k_{i-j} oraz pojemności cieplne W_i posiadają stałe wartości. Tym samym stałe są liczby kryterialne (K_{i-j}) oraz obowiązuje równość $W_2 = W_3$.
- Nie występuje przepływ ciepła przez promieniowanie.
- Z otoczeniem ma przez przegrodę kontakt czynnik grzejący.
- Temperatura otoczenia jest stała.

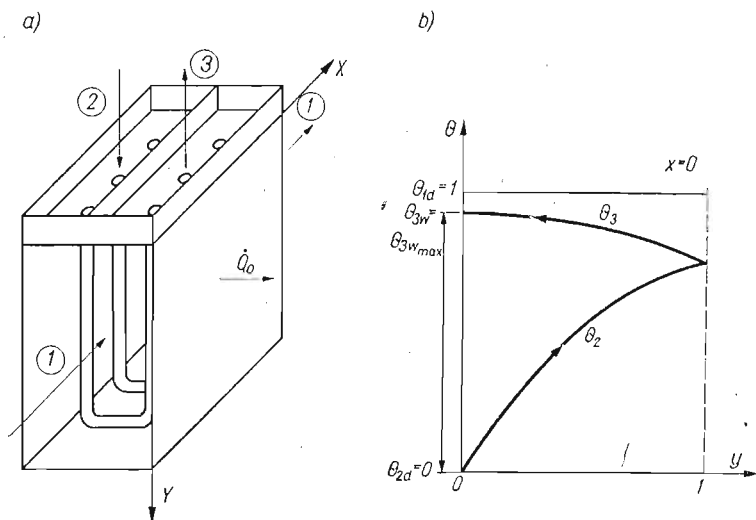
2. Wstęp

Rekuperator Fielda i rekuperator pętlicowy są trójstrumieniowymi wymiennikami ciepła, w których występuje jeden strumień czynnika grzejącego, płynący na zewnątrz elementów grzejnych oraz dwa strumienie czynnika ogrzewanego. W związku z tym trzeba brać pod uwagę dwie powierzchnie grzejne wewnątrz wymiennika, poprzez które ma miejsce przepływ ciepła pomiędzy strumieniami mediów. W przypadku uwzględnienia strat ciepła do otoczenia występuje trzecia powierzchnia grzejna oddzielająca czynnik cieplejszy od otoczenia. Powierzchnie wymiany ciepła zostały zastąpione prostokątami



Rys. 1. Rekuperator Fielda z krzyżowym przepływem czynników: a) schemat wymiennika, b) model teoretyczny, c) rozkład temperatur

o wymiarach x_0, y_0 . W rezultacie rozpatrywane współczynniki k_{i-j} są współczynnikami zredukowanymi, równymi iloczynom rzeczywistych współczynników przenikania ciepła i rzeczywistych powierzchni podzielonych przez odniesieniową powierzchnię $x_0 \cdot y_0$.



Rys. 2. Rekuperator pętlicowy z krzyżowym przepływem czynników: a) schemat wymiennika, b) rozkład temperatur

W rekuperatorze Fielda pokazanym na rys. 1 występuje przepływ ciepła poprzez przegrody oddzielające strumień 1 czynnika grzejącego od otoczenia i od strumienia 2 oraz przez przegrodę oddzielającą strumienie 2 i 3 czynnika ogrzewanego. W rekuperatorze pętlicowym (rys. 2) strumień 1 medium grzejącego oddaje ciepło poprzez trzy przegrody oddzielające go od otoczenia oraz od strumieni 2 i 3 medium ogrzewanego.

3. Klasyczny przepływ krzyżowy

W klasycznym krzyżowoprądowym rekuperatorze czynniki płyną adiabatycznymi strugami i dlatego temperatura każdego strumienia jest funkcją dwóch zmiennych przestrzennych. Przy sporządzaniu równań bilansu energii bierze się pod uwagę elementarne powierzchnie grzejne o wymiarach $dX \cdot dY$.

3.1. Rekuperator Fielda. Równania bilansu energii dla konwekcyjnego krzyżowoprądowego rekuperatora Fielda, w którym występują straty ciepła do otoczenia, mają postać (wraz z warunkami brzegowymi):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & k_{1-2}(t_1 - t_2) + k_{1-0}(t_1 - t_0) = -\frac{W_1}{y_0} \frac{\partial t_1}{\partial X}, \\
 & k_{1-2}(t_1 - t_2) - k_{2-3}(t_2 - t_3) = -\frac{W_2}{x_0} \frac{\partial t_2}{\partial Y}, \\
 & k_{2-3}(t_2 - t_3) = \frac{W_3}{x_0} \frac{\partial t_3}{\partial Y}, \\
 & t_1|_{x=0} = t_{1d}, \quad t_3|_{y=0} = t_{3d}, \quad t_2|_{y=1}(x) = t_3|_{y=1}(x),
 \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 (\kappa_0 + 1)\theta_1 + \frac{1}{(K_{1-2})} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= \kappa_0 \theta_0 + \theta_2, \\
 (\kappa + 1)\theta_2 - \frac{1}{(K_{2-3})} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} &= \kappa \theta_1 + \theta_3, \\
 \theta_3 + \frac{1}{(K_{2-3})} \frac{\partial \theta_3}{\partial y} &= \theta_2, \\
 \theta_1|_{x=0} &= 1, \quad \theta_3|_{y=0} = 0, \quad \theta_2|_{y=1} = \theta_3|_{y=1}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Dla $\theta_0 \neq 0$ układ równań (2) nie daje się w prosty sposób rozwiązać. Jeżeli jednak temperatura otoczenia jest równa temperaturze czynnika ogrzewanego przy dopływie do wymiennika ($\theta_0 = 0$), to wówczas można skorzystać z metody podanej w [2] i dostaje się wtedy rozwiązanie w postaci:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= e^{-(\kappa_0 + 1)(K_{1-2})x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}(y)x^n \right], \\
 \theta_2 &= e^{-(\kappa_0 + 1)(K_{1-2})x} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(y)x^{n-1}, \\
 \theta_3 &= e^{-(\kappa_0 + 1)(K_{1-2})x} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y)x^{n-1}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Średnia temperatura czynnika ogrzewanego przy wypływie z wymiennika jest określona zależnością:

$$\theta_{2w_{sr}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n|_{y=0} \int_0^1 x^{n-1} e^{-(\kappa_0 + 1)(K_{1-2})x} dx.
 \tag{4}$$

W pracy [2] podane są zależności określające A_n , B_n i C_n dla rekuperatora Fielda.

3.2. Rekuperator pętlicowy. Równania bilansu energii dla niezaiolowanego ciepłnie konwekcyjnego rekuperatora pętlicowego z przepływem krzyżowym mają wraz z warunkami brzegowymi postać:

$$\begin{aligned}
 k_{1-2}(t_1 - t_2) + k_{1-3}(t_1 - t_3) + k_{1-0}(t_1 - t_0) &= -\frac{W_1}{y_0} \frac{\partial t_1}{\partial X}, \\
 k_{1-2}(t_1 - t_2) &= \frac{W_2}{x_0} \frac{\partial t_2}{\partial Y}, \\
 k_{1-3}(t_1 - t_3) &= -\frac{W_3}{x_0} \frac{\partial t_3}{\partial Y}, \\
 t_1|_{x=0} &= t_{1d}, \quad t_2|_{y=0} = t_{2d}, \quad t_2|_{y=1}(x) = t_3|_{y=1}(x).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 (\kappa + 1 + \kappa_0)\theta_1 + \frac{1}{(K_{1-2})} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= \kappa_0\theta_0 + \theta_2 + \kappa\theta_3, \\
 \theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} &= \theta_1, \\
 \theta_3 - \frac{1}{(K_{3-1})} \frac{\partial \theta_3}{\partial y} &= \theta_1, \\
 \theta_1|_{x=0} &= 1; \quad \theta_2|_{y=0} = 0; \quad \theta_2|_{y=1} = \theta_3|_{y=1}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Rozwiązanie układu równań (6) dla $\theta_0 = 0$ po skorzystaniu z metody podanej w [3] ma postać:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= e^{-(\kappa+1+\kappa_0)(K_{1-2})x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}(y)x^n \right], \\
 \theta_2 &= e^{-(\kappa+1+\kappa_0)(K_{1-2})x} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(y)x^{n-1}, \\
 \theta_3 &= e^{-(\kappa+1+\kappa_0)(K_{1-2})x} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y)x^{n-1}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Średnią temperaturę czynnika ogrzewanego przy wypływie określa wzór:

$$\theta_{3w\text{sr}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n|_{y=0} \int_0^1 x^{n-1} e^{-(\kappa+1+\kappa_0)(K_{1-2})x} dx.
 \tag{8}$$

W pracy [3] podane są zależności określające A_n , B_n i C_n dla rekuperatora pętlicowego.

4. Całkowite wymieszanie czynnika grzejącego

Gdy występuje pełne wymieszanie strumienia czynnika grzejącego w przekrojach prostokątnych do kierunku przepływu, wtedy temperatura θ_1 jest funkcją tylko zmiennej x : $\theta_1 = \theta_1(x)$. Równania bilansu energii strumieni 2 i 3 nie ulegają zmianie, nieco inną postać przybiera równanie bilansu dla czynnika grzejącego. Aby otrzymać to równanie należy wziąć pod uwagę wycinek powierzchni grzejnej o wymiarach $y_0 \cdot dX$. Taki sam efekt daje scałkowanie w granicach $0 \div 1$ względem zmiennej y obu stron pierwszego równania układu (1) i (2) lub (5) i (6).

Równanie bilansu energii dla strumienia 1 ma tu w przypadku rekuperatora Fielda postać

$$(\kappa_0 + 1)\theta_1 + \frac{1}{(K_{1-2})} \frac{d\theta_1}{dx} = \kappa_0\theta_0 + \int_0^1 \theta_2 dy.
 \tag{2a}$$

Dla rekuperatora pętlicowego otrzymuje się

$$(\kappa + 1 + \kappa_0)\theta_1 + \frac{1}{(K_{1-2})} \frac{d\theta_1}{dx} = \kappa_0\theta_0 + \int_0^1 (\theta_2 + \kappa\theta_3) dy.
 \tag{6a}$$

Pozostałe równania układu (2) i (6) pozostają bez zmian. Równania bilansu energii dla strumieni 2 oraz 3 czynnika ogrzewanego rozwiązuje się tak samo jak dla rekuperatorów bez strat [4] i po wykorzystaniu warunków brzegowych dotyczących tych strumieni otrzymuje się wzory określające temperatury θ_2 i θ_3 . Po wstawieniu otrzymanych zależności do (2a) względnie (6a) dostaje się równanie różniczkowe zwyczajne:

$$(9) \quad \frac{d\theta_1}{dx} + [\beta + (K_{1-0})]\theta_1 = (K_{1-0})\theta_0,$$

gdzie $\beta = \alpha \cdot \theta_{iw_{\max}}$ zależy od rodzaju rekuperatora (tablica 1). Rozwiązanie (9) po wykorzystaniu warunku $\theta_1(0) = 1$ ma postać

$$(10) \quad \theta_1 = \left[1 - \frac{(K_{1-0})\theta_0}{\beta + (K_{1-0})} \right] e^{-[\beta + (K_{1-0})]x} + \frac{(K_{1-0})\theta_0}{\beta + (K_{1-0})}.$$

Tablica 1. Wielkości określone w odmienny sposób w rozpatrywanych typach rekuperatorów

Wielkość	Rekuperator Fielda	Rekuperator pętlicowy
t_{min}	t_{3a}	t_{2d}
\varkappa	$\frac{k_{1-2}}{k_{2-3}}$	$\frac{k_{1-3}}{k_{1-2}}$
θ_{iw}	θ_{2w}	θ_{3w}
$\theta_{iw_{\max}}$ [4]	$\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4/\varkappa} \operatorname{ctgh}[(K_{2-1})\sqrt{1 + 4/\varkappa}]}$	$1 - e^{-(K_{2-1}) - (K_{3-1})}$

Dla $\theta_0 = 0$ otrzymuje się

$$(10a) \quad \theta_1 = e^{-[\beta + (K_{1-0})]x}.$$

Bezwymiarowa temperatura czynnika ogrzewanego przy wypływie z rekuperatora w obu przypadkach [4] jest określona wzorem:

$$(11) \quad \theta_{iw} = \theta_1 \cdot \theta_{iw_{\max}}.$$

Uwzględnienie (10) daje po scałkowaniu w granicach $0 \div 1$ względem zmiennej x średnią temperaturę czynnika ogrzewanego przy wypływie w postaci

$$(12) \quad \theta_{iw_{sr}} = \frac{\beta/\alpha}{\beta + (K_{1-0})} \left\{ (K_{1-0})\theta_0 + [1 - e^{-\beta - (K_{1-0})}] \left[1 - \frac{(K_{1-0})\theta_0}{\beta + (K_{1-0})} \right] \right\}.$$

Dla $\theta_0 = 0$ mamy

$$(12a) \quad \theta_{iw_{sr}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\beta}{\beta + (K_{1-0})} [1 - e^{-\beta - (K_{1-0})}].$$

Ilość ciepła oddawaną do otoczenia \dot{Q}_0 można obliczyć z bilansu jako różnicę pomiędzy ciepłem oddanym przez czynnik grzejący i ciepłem pochłoniętym przez medium ogrzewane, tj.

$$(13) \quad \dot{Q}_0 = [W_1(1 - \theta_1|_{x=1}) - W_2 \cdot \theta_{iw_{sr}}](t_{1d} - t_{min}).$$

Wielkość \dot{Q}_0 można również określić biorąc pod uwagę ilość ciepła przechodzącą przez przegrodę oddzielającą strumień czynnika grzejącego od otoczenia, mianowicie

$$(14) \quad \dot{Q}_0 = \int_0^1 k_{1-0}(t_{1d} - t_{min})(\theta_1 - \theta_0)x_0 y_0 dx.$$

Po wykorzystaniu (13) lub (14) otrzymuje się wyrażenie określające bezwymiarowe straty ciepła do otoczenia:

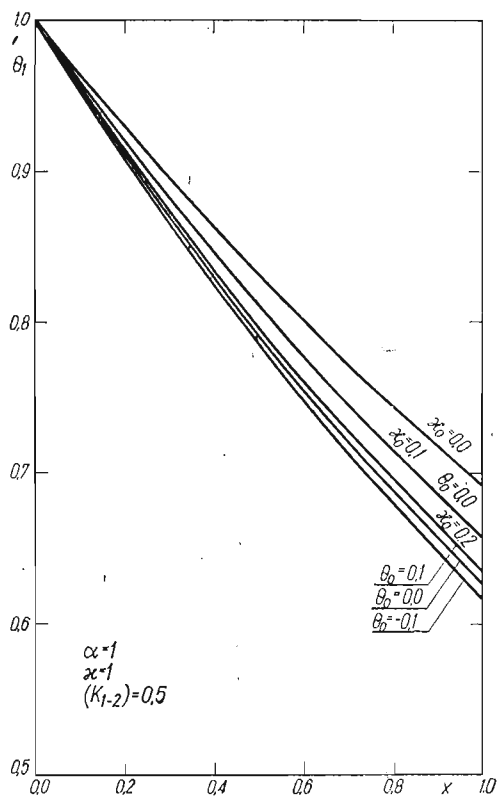
$$(15) \quad \Delta\theta_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{(K_{1-0})}{\beta + (K_{1-0})} \left\{ \left[1 - \frac{(K_{1-0})\theta_0}{\beta + (K_{1-0})} \right] [1 - e^{-\beta - (K_{1-0})}] - \beta\theta_0 \right\}.$$

Dla $\theta_0 = 0$ mamy

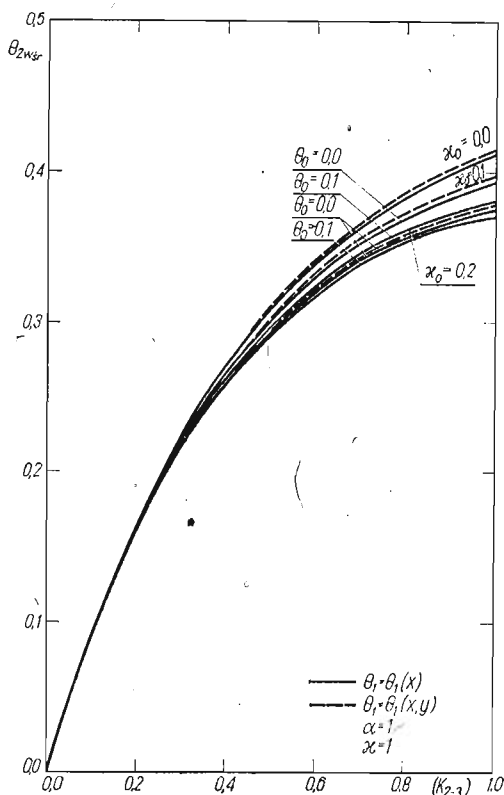
$$(15a) \quad \Delta\theta_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{(K_{1-0})}{\beta + (K_{1-0})} [1 - e^{-\beta - (K_{1-0})}].$$

5. Wyniki przykładowych obliczeń, wnioski

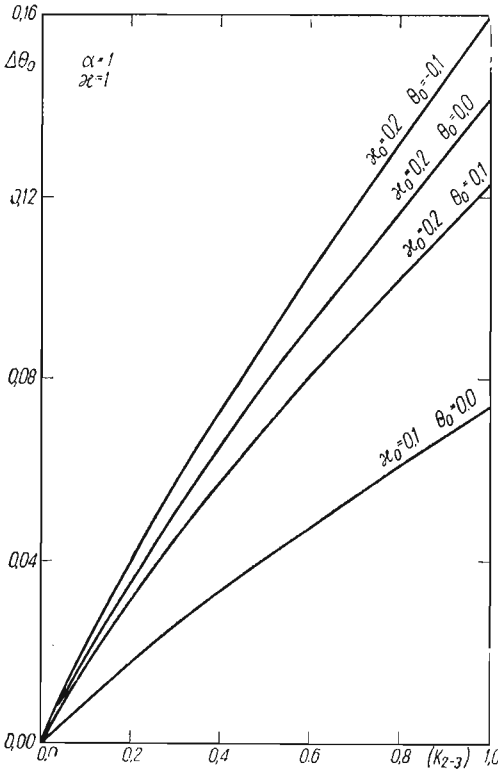
Na podstawie wyprowadzonych wzorów wykonano obliczenia, których wyniki są przedstawione na rys. 3, 4 i 5 dla rekuperatora Fielda oraz na rys. 6, 7 i 8 dla rekuperatora pętlcowego. Rys. 3 i 6 przedstawiają spadek temperatury czynnika grzejącego wzdłuż



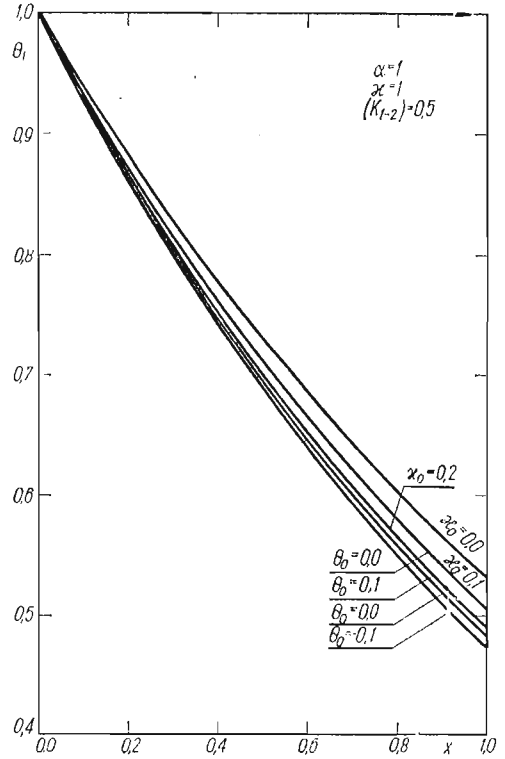
Rys. 3. Zmienność temperatury czynnika grzejącego $\theta_1 = \theta_1(x)$ w rekuperatorze Fielda



Rys. 4. Zależność średniej temperatury podgrzania od kryterium (K_{2-3}) w rekuperatorze Fielda

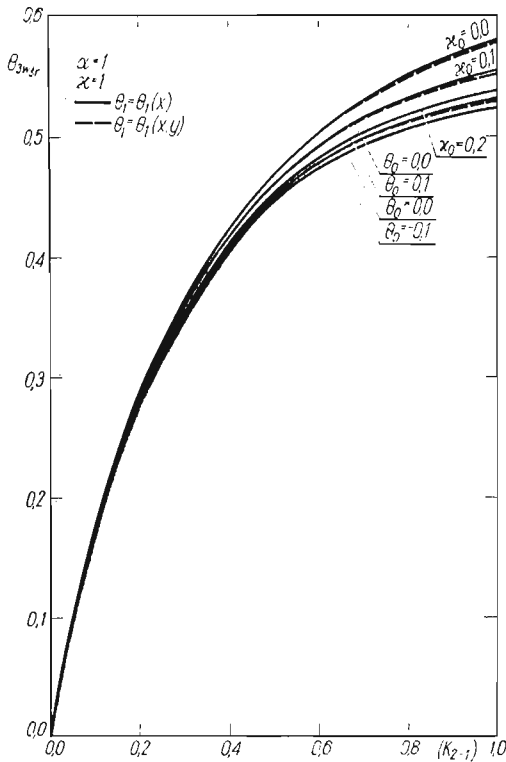


Rys. 5. Zależność bezwymiarowych strat ciepła od kryterium (K_{2-3}) w rekuperatorze Fielda dla przypadku całkowitego wymieszania strumienia czynnika grzejącego

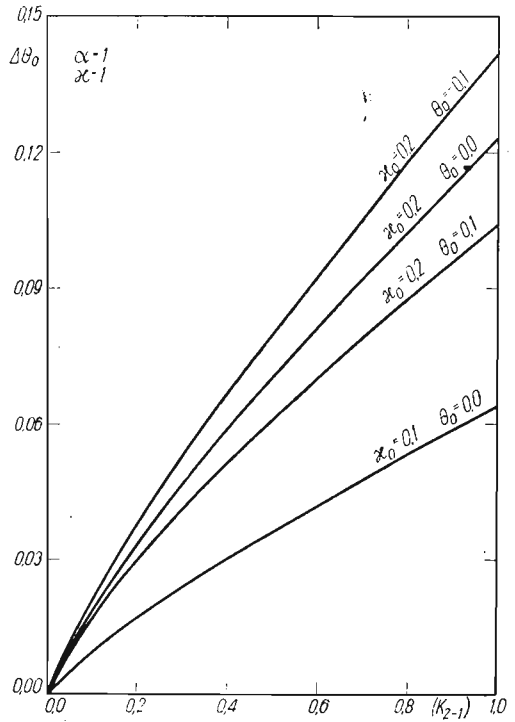


Rys. 6. Zmienność temperatury czynnika grzejącego $\theta_1 = \theta_1(x)$ w rekuperatorze pętlicowym

długości rekuperatora, przy całkowitym wymieszaniu ($\theta_1 = \theta_1(x)$). Szybkość, z jaką maleje temperatura θ_1 zwiększa się ze wzrostem stosunku κ_0 oraz w mniejszym stopniu ze spadkiem bezwymiarowej temperatury otoczenia θ_0 . Rysunki 4 i 7 przedstawiają zależność średniej bezwymiarowej temperatury podgrzania od bezwymiarowej powierzchni przepływu ciepła (K_{2-3}) względnie (K_{2-1}) . Z wykresów zamieszczonych na tych rysunkach widać, że wyniki obliczeń, wykonanych dla klasycznego przepływu krzyżowego (linie przerywane) i dla przypadku całkowitego wymieszania czynnika grzejącego są bardzo zbliżone. Różnice są rzędu ułamka procenta. Dla małych wartości kryterium (K_{2-3}) względnie (K_{2-1}) wpływ strat ciepła na temperaturę podgrzania czynnika chłodniejszego jest niewielki. Dla większych wartości liczb kryterialnych wpływ stosunku κ_0 na θ_{iwsr} jest widoczny, temperatura θ_0 ma natomiast mniejsze znaczenie. Rysunki 5 i 8 przedstawiają dla przypadku całkowitego wymieszania czynnika grzejącego zależność bezwymiarowo określonych strat ciepła od bezwymiarowej powierzchni (K_{2-3}) lub (K_{2-1}) . Z analizy zmienności temperatury $\Delta\theta_0$ oraz θ_{iwsr} wynika, że straty ciepła do otoczenia $\Delta\theta_0$ są znacznie wyższe niż spadek temperatury θ_{iwsr} w porównaniu do wymiennika bez strat.



Rys. 7. Zależność średniej temperatury podgrzania od kryterium (K_{2-1}) w rekuperatorze pętlicowym



Rys. 8. Zależność bezwymiarowych strat ciepła od kryterium (K_{2-1}) w rekuperatorze pętlicowym dla przypadku całkowitego wymieszania strumienia czynnika grzejącego

Literatura cytowana w tekście

1. G. D. RABINOVICH, *On a particular case of stationary heat transfer with crossflow of heat agents*, Int. Jour. of Heat and Mass Transfer, 5 (1962) 409 - 412.
2. J. SKŁADZIEN, *Analiza rekuperatora Fielda przy krzyżowym przepływie czynników bez wymieszania*, ZNPS, Energetyka, 45 (1973).
3. J. SKŁADZIEN, *Analiza konwekcyjnego rekuperatora pętlicowego z krzyżowym przepływem czynników*, Mech. Teoret. Stos. 1, 13 (1975).
4. J. SKŁADZIEN, *Rozkład temperatur w rekuperatorze Fielda przy krzyżowym przepływie czynników*, ZNPS, Energetyka, 39 (1971).

Резюме

АНАЛИЗ КОНВЕКЦИОННОГО РЕКУПЕРАТОРА ФИЛЬДА И ПЕТЛЕВОГО С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ ПОТОКАМИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ И С ПОТЕРЯМИ ТЕПЛА

В статье приведен теплообмен в конвекционном рекуператоре Фильда и петлевом с перекрестными потоками теплоносителей и с потерями тепла. При анализе конвекционных рекуператоров используются общепринятые предположения.

Summary

ANALYSIS OF THE CONVECTIVE CROSSFLOW FIELD AND LOOP
RECUPERATOR WITH HEAT LOSSES

The convective cross-flow Field and loop recuperators with heat losses have been considered in the paper. The usual assumptions of the analysis of convective recuperators have been accepted.

INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 października 1976 r.

ANALIZA BARDZO DUŻYCH UGIĘĆ SPRĘŻYSTYCH ŚCISKANYCH OSIOWO POWŁOK WALCOWYCH I STOŻKOWYCH

WALERIAN SZYSZKOWSKI (WARSZAWA)

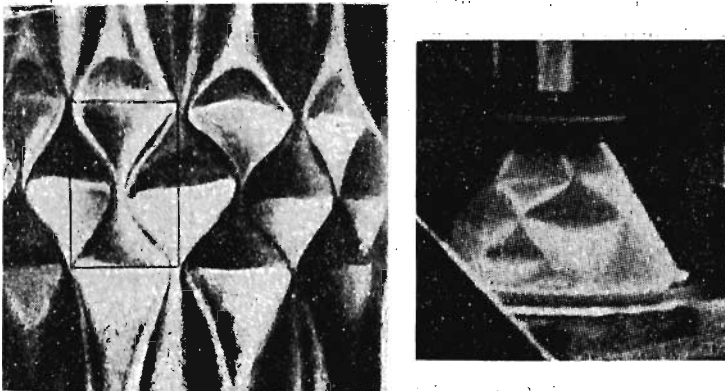
1. Wstęp

Analizę dużych ugięć prowadzi się zwykle na podstawie nieliniowej tzw. technicznej teorii powłok, wykorzystując przy tym metody wariacyjne. Postać ugiętej sprężystości powłoki jest aproksymowana układem funkcji z pewną liczbą wolnych parametrów.

Rozwiązania uzyskane tą drogą są bardzo pracochłonne rachunkowo, a w wielu przypadkach dają dosyć zasadnicze rozbieżności w porównaniu z wynikami prac doświadczalnych. Te rozbieżności przypisuje się przybliżonemu charakterowi stosowanych równań. Obecnie brak jest teorii tak dokładnej, a z drugiej strony nie nazbyt skomplikowanej rachunkowo, która przy obecnym poziomie wiedzy matematycznej, pozwalałaby uzyskać efektywne wyniki. Dlatego szeroko prowadzone są próby innego podejścia do tego typu zagadnień.

Taki nieklasyczny sposób rozwiązania zagadnienia zachowania się powłok walcowych i stożkowych poddanych działaniu osiowych sił ściskających przedstawiony jest w prezentowanej pracy.

Utracie stateczności analizowanych konstrukcji towarzyszy pojawienie się bardzo dużych ugięć, a ich cechą charakterystyczną jest kształt podobny do pokazanego na rys. 1.



Rys. 1

W obydwu przypadkach, po utracie stateczności powierzchnia deformuje się w prawie płaskie trójkątne obszary, połączone wzdłuż powierzchni silnie zakrzywionych. Wiadomo, że dla typowych materiałów konstrukcyjnych dopuszczalne odkształ-

cenie sprężyste jest niewielkie. Przykładowo, dla stali, przy przyjęciu $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm² $R_e = 4 \cdot 10^3$ KG/cm² otrzymujemy $\varepsilon_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}$. Oznacza to, że dopuszczalna sprężysta deformacja powłok charakteryzuje się zmianą metryki powierzchni środkowej mniejszą niż 0,2%. Jeżeli taka deformacja związana jest ze znaczną, tak jak na rys. 1, zmianą postaci powierzchni, to rzeczywista powierzchnia odkształcona musi być bardzo zbliżona do powierzchni przekształconej izometrycznie tzn. otrzymanej tylko przez zginanie i charakteryzującej się niezmiennością pierwszej formy kwadratowej powierzchni. W pracy pokazano, w jaki sposób można analizować zachowanie się powłok, przybliżając rzeczywistą powierzchnię odkształconą, nie układem funkcji, ale pewną klasą powierzchni, tzw. quasi-izometrycznych do powierzchni początkowej.

Ponieważ w ogólnym przypadku nie można zbudować powierzchni odkształconej izometrycznie, która jednocześnie byłaby regularna, jako przybliżenie rzeczywistej powierzchni odkształconej F będziemy przyjmować powierzchnię \bar{F} , która jest izometrycznym przekształceniem powierzchni początkowej, za wyjątkiem pewnego obszaru S , niewielkiego w stosunku do całej powierzchni F .

Obszar jest tak dobrany, że cała powierzchnia \bar{F} zawarta jest w klasie powierzchni regularnych, a więc jest ciągła i ma ciągłą pochodną. Z izometryczności powierzchni $\bar{F}-S$ wynika, że jej krzywizna Gaussa jest równa zero, tak jak krzywizna powierzchni początkowej.

Klasę powierzchni quasi-izometrycznych \bar{F} opisujemy skończoną liczbą parametrów q_1, \dots, q_k . Ich wartości wyznaczono wykorzystując zasadę wariacyjną Lagrange'a, która mówi, że pod działaniem danego konserwatywnego obciążenia zewnętrznego, spośród wszystkich możliwych konfiguracji \bar{F} spełniających warunki brzegowe, powłoka przyjmie taką, dla której funkcjonal $W(\bar{F})$ będzie stacjonarny,

$$W(\bar{F}) = U(\bar{F}) - A_p(\bar{F}),$$

gdzie:

$U(\bar{F})$ — energia deformacji zgromadzona w konstrukcji na wskutek zmiany powierzchni od konfiguracji początkowej F_0 do konfiguracji \bar{F} .

$A_p(\bar{F})$ — odpowiadająca tej zmianie praca sił zewnętrznych p .

Pisząc warunek stacjonarności w postaci

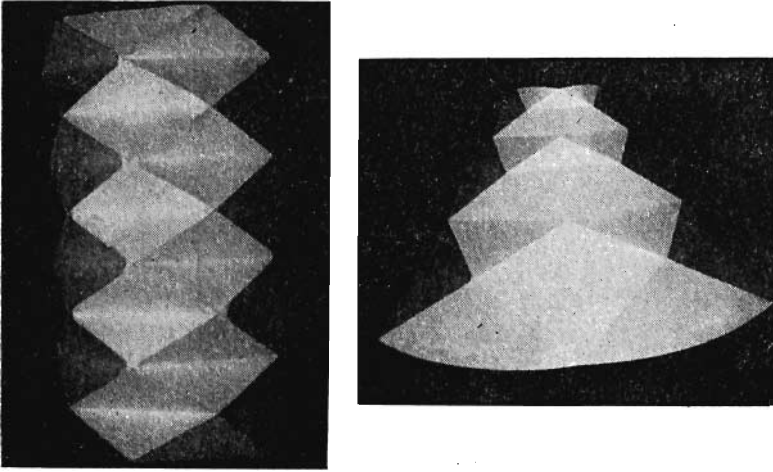
$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial q_k} = 0,$$

otrzymamy zależności, których odpowiednia analiza pozwala określić zależności między parametrami q_1, \dots, q_k a obciążeniem p .

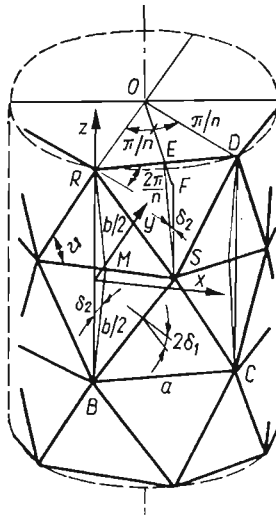
2. Geometria powierzchni zdeformowanej

Model powierzchni izometrycznych, przydatny do symulacji rzeczywistych powłok odkształconych, pokazany jest na rys. 2.

Potrzebne do dalszych rozważań wielkości geometryczne dla powłoki walcowej przedstawiono na rys. 3.



Rys. 2



Rys. 3

Przyjmujemy oznaczenia:

n — liczba elementów romboidalnych na obwodzie, w ujęciu klasycznym odpowiada to liczbie fal w kierunku obwodowym, wtedy $a = \frac{2\pi R}{n}$;

$\lambda = \frac{a}{b}$ — stosunek szerokości elementu romboidalnego do jego wysokości;

$2\delta_1$ — kąt płaski między płaszczyznami trójkątów, mierzony wzdłuż krawędzi ukośnych;

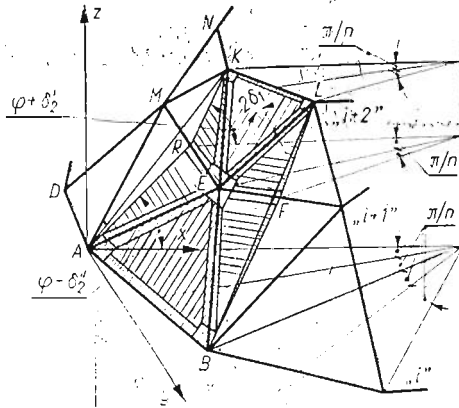
$2\delta_2$ — kąt płaski między płaszczyznami trójkątów, mierzony wzdłuż krawędzi poziomych.

Po elementarnych wyprowadzeniach otrzymamy:

$$(2) \quad \sin \delta_2 = \lambda \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n},$$

$$\cos 2\delta_1 = \frac{1 - (1 + 2\lambda^2) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}.$$

Dla powłoki stożkowej model obliczeniowy pokazano na rys. 4.



Rys. 4

W tym przypadku zależności geometryczne mają bardziej złożoną postać i są następujące:

$$\cos(\varphi - \delta_2'') = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{n}} \frac{A - \cos \frac{\pi}{n}}{A - \cos \alpha},$$

$$(3) \quad \cos(\varphi + \delta_2') = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{n}} \frac{A \cos \frac{\pi}{n} - 1}{A \cos \alpha - 1},$$

$$\cos 2\delta_1 = \frac{1 - \frac{\lambda d}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cos(\varphi - \delta_2'')}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} [\sin^2(\varphi - \delta_2'') + \left(\frac{\lambda d}{2}\right)^2 - \lambda_d \cos(\varphi - \delta_2'') \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}]}}.$$

gdzie oznaczono:

φ — kąt między tworzącą a podstawą stożka niezdeformowanego,

$$\alpha = \frac{\pi}{n} \cos \varphi,$$

$$A = \frac{\sin \alpha}{\lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\lambda}\right)^2},$$

$$\lambda_d = \frac{2 \sin \alpha}{A - \cos \alpha}.$$

Warto zauważyć, że poszczególne wartości kątów nie zależą od położenia elementu obliczeniowego względem tworzącej. Wynika to z przyjęcia pewnych geometrycznych założeń, wyjaśnionych dokładnie w [6].

Między innymi, wysokości poszczególnych segmentów romboidalnych, mierzone wzdłuż ścianki są następujące

$$b_i = \frac{R}{\cos \varphi} e^{-i \frac{b \cos \alpha}{2R}} \left(1 - e^{-i \frac{b \cos \alpha}{R}}\right),$$

gdzie: R — promień dolnej podstawy stożka,

b — wysokość elementu romboidalnego dla modelu powłoki walcowej,

i — kolejny poziom licząc od podstawy.

Łatwo przekonać się, że wzory (3) przyjmują postać (2), jeżeli $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (powłoka walcowa), natomiast model z rys. 4 przechodzi w model pokazany na rys. 3.

W dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko modelem powłoki stożkowej. Wszystkie zależności dotyczące modelu powłoki walcowej otrzymuje się przy $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Warto zauważyć, że dla wartości

$$\lambda_{gr} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

model «składa się» tak, że jego wysokość staje się równa zero. Narzuca to ograniczenie na wartość λ w postaci

$$\lambda < \lambda_{gr}.$$

Ostatecznie, z przedstawionych rozważań wynika, że taka czysto izometrycznie odkształcona powłoka opisywana jest za pomocą dwóch parametrów λ i n .

Następnym etapem jest zastąpienie krawędzi, wzdłuż których łączą się płaszczyzny trójkątne, powierzchniami silnie zakrzywionymi o bardzo małej, ale skończonej szerokości. W tym przypadku przyjęto je w postaci wycinków powierzchni stożkowych. Obszary te będziemy nazywać żebrami. Ich kształt dla i -tego elementu pokazuje rys. 5.

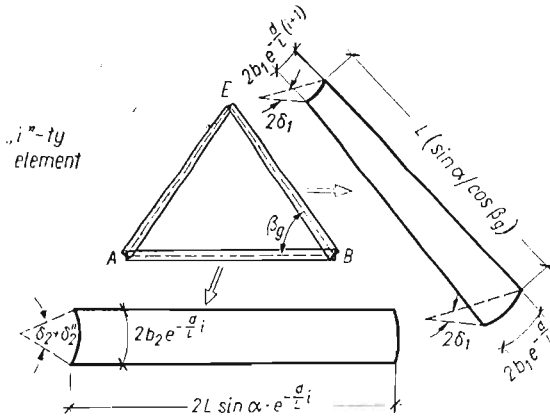
Wprowadzono oznaczenia:

b_1 — szerokość żebra ukośnego, mierzona przy podstawie dla poziomu $i = 0$ (przy dolnej podstawie stożka),

b_2 — szerokość żebra poziomego dla poziomu $i = 0$,

$$\frac{d}{e^L} = A,$$

$$L = \frac{R}{\cos \varphi}.$$



Rys. 5

Dla modelu odpowiadającego powłoce walcowej żebro ukośne będzie miało stałą szerokość (patrz np. [4]).

Przyjmijmy bezwymiarowe wielkości charakterystyczne, będące stosunkiem największej szerokości żebrow do ich długości, to znaczy:

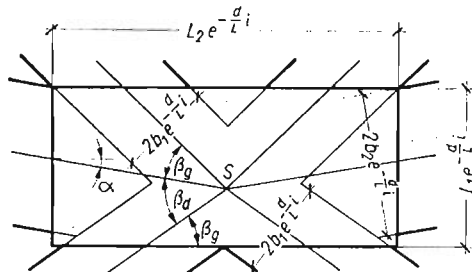
$$\mu_1 = \frac{2b_1}{L \sin \alpha}; \quad \mu_2 = \frac{2b_2}{L \sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \beta_g}$$

Okazuje się, że te wielkości są bardzo sobie bliskie (patrz [6]) tak, że nie popełniając dużego błędu można przyjąć

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{2b_1}{R} \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \cos \beta$$

W ten sposób otrzymujemy trzeci parametr charakteryzujący zdeformowaną powierzchnię.

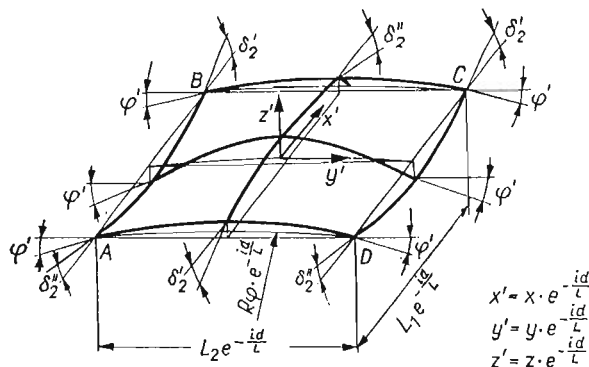
Otoczenie punktu powstałego z przecięcia się teoretycznych linii żebrow (rys. 6) będziemy nazywali wierzchołkiem.



Rys. 6

W obszarze wierzchołka, fragmenty płaskich trójkątów i stożkowych żebrow, a więc elementy o powierzchni rozwijalnej, muszą się tak do siebie dopasować, aby cała powierzchnia była powierzchnią regularną. Oczywiście, w obszarze wierzchołka powierzchnia musi mieć krzywiznę Gaussa różną od zera, a więc nie jest ona izometrycznym przekształ-

ceniem powierzchni początkowej i nie można jej otrzymać przez czyste zginanie. Przyjęto, że obszarem tym jest prostokąt o wymiarach podanych na rys. 6. Wielkości L_1 i L_2 można obliczyć, po elementarnych przekształceniach, jako funkcje parametrów λ , n i μ . Charakter ugięcia pokazany jest na rys. 7.



Rys. 7

Wzdłuż boków AB i DC wierzchołek łączy się z żebrami poziomymi, a wzdłuż AD i BC z parami żeber ukośnych. Stąd wynikają wartości kątów podane na rysunku.

Analityczną postać ugięcia przyjęto w postaci

$$(4) \quad w = A \sin \frac{2\pi x}{L_1} + B \cos \frac{\pi x}{L_1} \cos \frac{2\pi y}{L_2} + C \cos \frac{\pi y}{L_2},$$

gdzie:

$$A = \frac{L_1}{2\pi} (\operatorname{tg} \delta_2'' - \operatorname{tg} \delta_2') e^{-\frac{id}{L}},$$

$$B = \frac{L_2}{2\pi} (\operatorname{tg} \delta_2'' + \operatorname{tg} \delta_2') e^{-\frac{id}{L}},$$

$$C = \frac{L_2}{\pi} \operatorname{tg} \left[\arcsin \left(\sin \varphi - \sin \frac{\pi}{n} \right) - \frac{2\mu \sin \alpha}{\sin 2\beta_q} \operatorname{tg} \varphi \right] e^{-\frac{id}{L}}.$$

Funkcja ta spełnia geometryczne warunki brzegowe, narzucone na wielkości kątów obrotów krawędzi w narożach płyty i w środkach boków.

Do spełnienia pozostają jeszcze warunki zgodności w płaszczyźnie prostokąta, takie aby pasował on do pozostałych elementów. Wobec skomplikowanego kształtu krawędzi wierzchołka warunki tak sformułowane są zbyt kłopotliwe, możliwe jest natomiast inne podejście. Powierzchnia otaczająca obszar wierzchołka jest powierzchnią izometrycznie przekształconą bez odkształceń powierzchni środkowej, a więc też bez dodatkowych naprężeń błonowych. Te naprężenia, będące wynikiem zmiany pierwszej formy kwadratowej powierzchni pojawią się tylko w obszarze wierzchołka. Ich wartości wyznaczmy z jednego z równań teorii powłok, traktując wierzchołek, jako powłokę małą wyniosłą.

$$(5) \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k w,$$

gdzie Φ — klasyczna funkcja naprężeń.

Warunkami brzegowymi dla funkcji Φ będzie znikanie naprężeń na brzegu. Prawa strona równania (5), po podstawieniu zależności (4), jest znaną funkcją współrzędnych lokalnych wierzchołka i parametrów λ , n , i μ .

Równanie (5) rozwiązano numerycznie za pomocą metody różnic skończonych, otrzymując, dla danych parametrów geometrycznych, wartości Φ w danych punktach wierzchołka. Szczegóły obliczeń podano w [6].

3. Energia wewnętrzna

Mając określoną powierzchnię aproksymującą, przystępujemy do obliczenia związanej z nią energii sprężystej. Obliczymy energię przypadającą na jeden «segment» oznaczony na rys. 4 literami *ABLK*. Wzdłuż obwodu powłoki jest n takich elementów. Bardzo ważną własnością modelu z rys. 4 jest to, że energia zgromadzona w elemencie nie zależy od jego położenia wzdłuż tworzącej. Dowód tego znajduje się w pracy [6]. Wobec tego, do obliczenia energii zgromadzonej w całym modelu wystarczy znaleźć energię związaną z jednym elementem i pomnożyć ją przez liczbę elementów. W obszarach, w których krzywizna Gaussa jest równa zero, energia ta będzie wynikiem tylko zginania. Obliczymy ją ze wzoru

$$(6) \quad \Delta U = \frac{D}{2} \int \int_S [(\Delta \kappa_i)^2 + (\Delta \kappa_j)^2 + 2\nu (\Delta \kappa_i) (\Delta \kappa_j) + 2(1-\nu) (\Delta \kappa_{ij})^2] dS,$$

gdzie S — pole powierzchni izometrycznych, $\Delta \kappa_i$, $\Delta \kappa_j$, $\Delta \kappa_{ij}$ — zmiany krzywizny w układzie ortogonalnym (i, j) ; przy czym zmiany krzywizny liczymy w sposób ścisły jako różnicę krzywizny powierzchni początkowej i krzywizny powierzchni zdeformowanej. Jako przykład podamy obliczenie energii dla elementu trójkątnego powłoki walcowej. Jeżeli przyjąć kierunek x wzdłuż tworzącej, to

$$\Delta \kappa_x = 0 - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R}, \quad \Delta \kappa_y = \Delta \kappa_{xy} = 0,$$

wtedy

$$\Delta U_p = \frac{D}{2} \frac{ab-F}{R^2},$$

gdzie F — pole powierzchni żeber i wierzchołków w jednym segmencie obliczeniowym.

Wprowadzając współczynniki bezwymiarowe, otrzymamy

$$\Delta U_p = D \cdot \frac{2\pi^2}{\lambda n^2} \left\{ 1 - \mu \frac{1+3\lambda^2}{2\lambda} + 2\mu^2(1+\lambda^2) \right\}.$$

Dla powłoki stożkowej otrzymuje się wyrażenie nieco dłuższe

$$\Delta U_p = D \frac{2\pi}{n} \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \ln \left(\frac{\sin \alpha}{\lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\lambda} \right)^2} \right) \cdot (1-B),$$

gdzie

$$B = \frac{-\mu}{\cos \alpha} \left[\sin \alpha + \frac{A \cos \alpha - 1}{A \sin 2\beta_g} \right] \frac{A^2 + 1}{A^2 + A} - \mu^2 (\lambda^2 + \sin^2 \alpha + 1) \frac{A+1}{A}.$$

Dla obszaru wierzchołka wykorzystać można uproszczone klasyczne wzory na zmianę krzywizny w postaci

$$\Delta \kappa_j = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}; \quad \Delta \kappa_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j},$$

gdzie w miejsce w podstawić należy funkcję (4).

Energję błonową zgromadzoną w wierzchołku obliczamy ze wzoru

$$(7) \quad \Delta U_b = \frac{h}{2E} \iint_F [(\nabla^2 \Phi)^2 - (1+\nu) L(\Phi, \Phi)] dF,$$

gdzie funkcję Φ wyznaczono z równania (5). Wzór ostatni można przekształcić do postaci

$$\Delta U_b = 6D(1-\nu^2) \left(\frac{R}{h}\right)^2 \cdot \frac{L_1 L_2}{R^2} I_s(\lambda, n, \mu, \varphi).$$

Funkcję I_s wyznaczono w sposób przybliżony aproksymując wyniki obliczeń numerycznych. Ma ona postać

$$I_s = \left(\frac{\pi}{n} \sin \varphi\right)^4 \left(\frac{1}{\lambda^2} + 275\lambda^2 - 790\lambda + 691 + \frac{\lambda^8}{8}\right) \left(1 + \frac{16,6 \sqrt{\lambda}}{n^2}\right) \times \\ \times \left[\frac{1-6\mu(0.775-\mu)}{(\lambda-1)^2+1}\right] \left[1 + 0.12 \left(\frac{\pi}{n\lambda} \cos \varphi\right)^2\right].$$

Błąd aproksymacji, w szerokim zakresie zmienności parametrów n , λ , μ i φ , nie przekraczał 5%. Szczegóły obliczeń można znaleźć w [6].

Pracę sił zewnętrznych wyznaczono jako iloczyn siły osiowej przez zmianę wysokości całej powłoki, łatwą do wyliczenia przy znanej geometrii deformacji. Przedstawia się ona następująco:

$$(8) \quad A_p = 2\pi R^2 h \sigma_0 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \frac{1+A}{A} \left\{ \frac{A-1}{A} \sin \varphi - \left(\cos \alpha - \frac{1}{A}\right) \sin(\varphi + \delta'_2) - \right. \\ \left. - \mu \sin \alpha \sin \varphi \cdot \frac{A+1}{A} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta'_2 + \delta''_2}{2}}{\frac{\delta'_2 + \delta''_2}{2}} - 1\right) \right\} \frac{A^2 - A^{2(1-m)}}{A^2 - 1},$$

gdzie: m — liczba segmentów wzdłuż tworzącej, σ_0 — średnie naprężenia ściskające w kierunku tworzącej.

4. Analiza numeryczna

Otrzymaliśmy w ten sposób obydwie człony funkcjonau energii W jako funkcje parametrów λ , n i μ .

Warunki (1) zapiszą się teraz w postaci

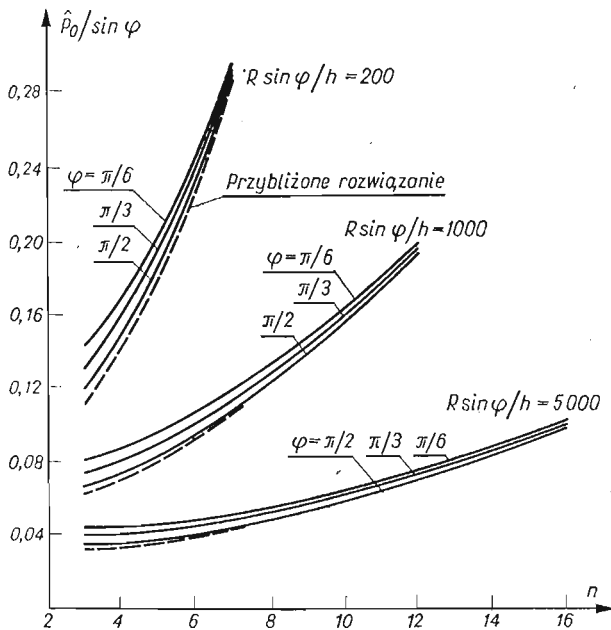
$$(9) \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \mu} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0;$$

Te trzy równania, po wykonaniu różniczkowania, przedstawiają układ trzech nieliniowych równań algebraicznych, wiążących pięć wielkości bezwymiarowych n , λ , μ , $\frac{\sigma_0 R}{Eh}$, $\frac{R}{h} \sin \varphi$. W obliczeniach układ (9) praktyczniej jest doprowadzić do postaci

$$(10) \quad \begin{aligned} F_1\left(n, \mu, \lambda, \frac{R}{h}\right) &= 0, \\ F_2\left(n, \mu, \lambda, \frac{R}{h}\right) &= 0, \\ \hat{p}_0 &= \frac{\sigma_0 R}{Eh} = f\left(\mu, n, \lambda, \frac{R}{h}\right), \end{aligned}$$

która pozwala, przy zadanej wartości $\frac{R}{h}$ i φ , wyznaczyć \hat{p}_0 jako funkcję jednego z parametrów geometrycznych n , μ , λ .

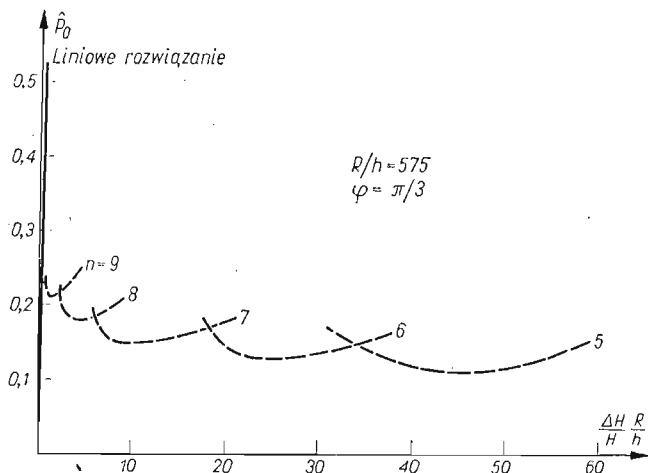
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla kolejnych wartości $n \geq 3$. Przykład uzyskanych zależności pokazuje rys. 8.



Rys. 8

Okazało się, że przy danej wartości $\frac{R}{h} \sin \varphi$ istnieje pewna maksymalna wartość $n = n_{\max}$, dla której układ (10) ma jeszcze rozwiązanie. Oznacza to, że niemożliwa jest stateczna konfiguracja powierzchni dla $n > n_{\max}$. Siłę odpowiadającą wartości $n = n_{\max}$ oznaczono \hat{p}_N . W dalszej części pokażemy, że ma ona istotne znaczenie w teorii stateczności sprężystej powłok.

Inny wariant obliczeń wykonano odrzucając trzeci z warunków (9). Rys. 9 pokazuje obliczone zależności dla jednej zadanej wartości $\frac{R}{h} \sin \varphi = 500$; $\frac{\Delta H}{H}$ jest względną zmianą wysokości powłoki.



Rys. 9

Wykres ten pokazuje przebieg procesu deformacji powłoki. Najbardziej na lewo, prawie pionowa linia odpowiada procesowi w zakresie małych odkształceń przed utratą stateczności. Po przekroczeniu obciążeń krytycznych, powierzchnia powłoki gwałtownie faluje się, przy jednoczesnym gwałtownym spadku obciążenia. Liczba fal w kierunku obwodowym spada do wartości odpowiadającej pierwszej statecznej postaci (n_{max}), przy dalszym wzroście skrócenia następuje przeskok na następną stateczną postać z liczbą fal o jeden mniejszą, itd. W badaniach eksperymentalnych jako wartość tzw. dolnego obciążenia krytycznego podaje się zwykle wartość, do której zmniejsza się obciążenie w momencie utraty stateczności formy pierwotnej (np. [7], [8], [9]).

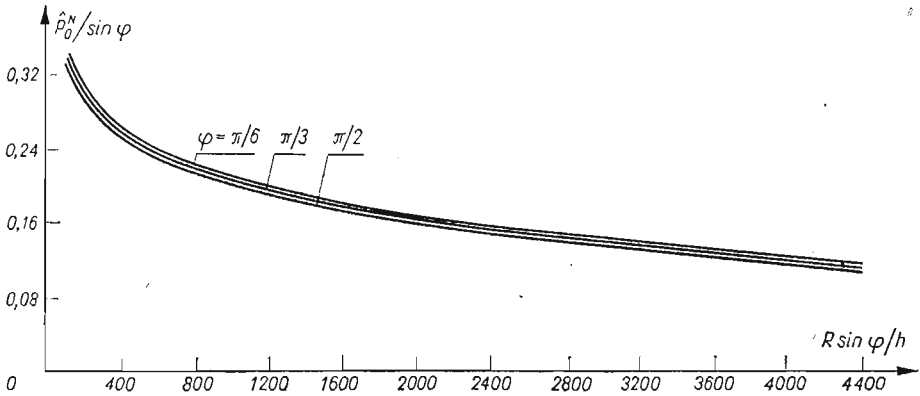
W przedstawionych rozważaniach jej odpowiednikiem jest więc wartość \hat{p}_0^N . Na rys. 10 pokazano jej zależność w funkcji $\frac{R}{h} \sin \varphi$.

Zwraca się uwagę na następujące fakty:

1. Krzywe dla różnych φ praktycznie pokrywają się. Wskazuje to na możliwość przeliczenia wyników badań uzyskanych dla powłok walcowych na dowolne powłoki stożkowe. Ten wniosek był wysuwany przez wielu autorów prac eksperymentalnych (np. [9]), nie został jednak dotąd właściwie teoretycznie udokumentowany.

2. W porównaniu z wynikami badań doświadczalnych, szczególnie licznych dla powłok walcowych ([7, 9, 12]), krzywa z wykresu 10 wykazuje zadowalającą zgodność.

3. Rozwiązania klasyczne (za pomocą równań technicznej teorii powłok) jako wartości współczynnika dolnego obciążenia krytycznego podają zawsze wartość stałą, niezależną od stosunku R/h , natomiast bardzo czułą na postać funkcji aproksymującej. Jest to jedną z istotniejszych wad tych rozwiązań.



Rys. 10

Kilka ciekawych wniosków można uzyskać zakładając, że liczba fal jest stosunkowo duża, tak że zależności (3) można uprościć do postaci

$$(11) \quad \delta'_2 \cong \delta''_2 \cong \frac{\lambda}{2} \frac{\pi}{n} \sin \varphi,$$

$$\delta_1 \cong \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2} \frac{\pi}{n} \sin \varphi.$$

Natomiast funkcjonal energii da się zapisać następująco

$$(12) \quad W = D \sqrt{\eta \frac{h}{R}} (\bar{A} + \eta^2 \bar{B} - \eta \hat{p}_0 \bar{C}) \sin^{3/2} \varphi,$$

gdzie $\eta = \frac{R \sin \varphi}{h} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 = \eta_s \sin \varphi,$

$$\hat{p}_s = \frac{\sigma_0}{E} \frac{R}{h \sin \varphi} = \hat{p}_0 \frac{1}{\sin \varphi},$$

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ — funkcje tylko λ i μ .

Warunek stacjonarności funkcjonału W wyraża się teraz zależnościami

$$(13) \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \mu} = 0,$$

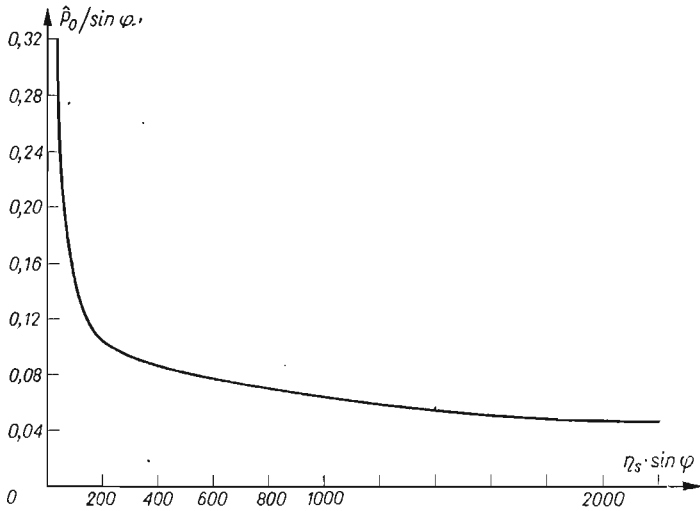
Ich numeryczna analiza daje zależność pokazaną na rys. 11.

Jeżeli przez P oznaczymy całkowitą siłę osiową ściskającą, to dla powłoki walcowej

$$\hat{p}_0^{(w)} = \frac{\sigma_0^{(w)} R_w}{E h_w} = \frac{P}{2\pi E h_w^2},$$

dla powłoki stożkowejj

$$\hat{p}_0^{(s)} = \frac{\sigma_0^{(s)} R_s}{E h_s} = \frac{P}{2\pi E h_s^2 \sin \varphi}.$$



Rys. 11

Ponieważ z wykresu 11 wynika

$$\hat{p}_0^{(w)} \left(\frac{R \sin \varphi}{h} \right) = \frac{\hat{p}_0^{(s)} \left(\frac{R \sin \varphi}{h} \right)}{\sin \varphi},$$

stąd

$$(14) \quad P = 2\pi E h^2 \sin^2 \varphi \hat{p}_0^{(w)} \left(\frac{R \sin \varphi}{h} \right).$$

Wzór (14) pokazuje w jaki sposób wykorzystać zależność opisującą powłokę walcową do obliczenia siły przenoszonej przez dowolną powłokę stożkową. Mianowicie w miejsce argumentu R_w/h_w należy przyjąć $R_s \sin \varphi/h_s$, gdzie R_w i h_w oznaczają promień i grubość ścianki walca, natomiast R_s i h_s są odpowiednio promieniem dolnej podstawy i grubością ścianki stożka.

Parametr η w przypadku powłoki walcowej można interpretować jako wielkość charakteryzującą ugięcie. Wynika to z analizy przekroju ugiętej powłoki (rys. 12). Otrzymujemy wtedy następujące zależności:

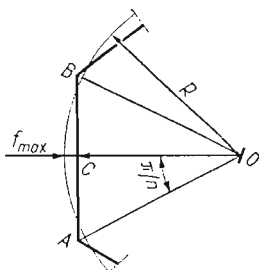
$$f_{max} \cong R \left(1 - \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \right) \approx \frac{R}{3} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2.$$

Wprowadzając bezwymiarowy parametr ugięcia ξ mamy

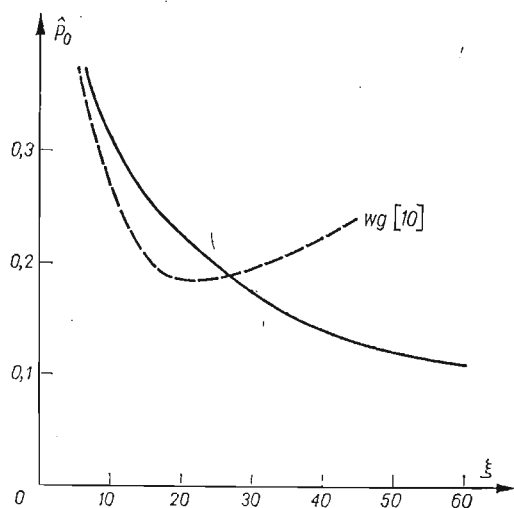
$$(15) \quad \xi = \frac{f_{max}}{h} = \frac{1}{3} \frac{R}{h} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 = \frac{\eta}{3}.$$

Wykorzystując wykres na rys. 11 i zależności (15) otrzymujemy zależność pokazaną na rys. 13.

Linia przerywaną narysowano zależność podaną w pracy [10], a uzyskaną drogą klasyczną. Weryfikacja doświadczalna (np. [7]) przemawia za linią wyzyskaną w prezentowanej pracy.



Rys. 12



Rys. 13

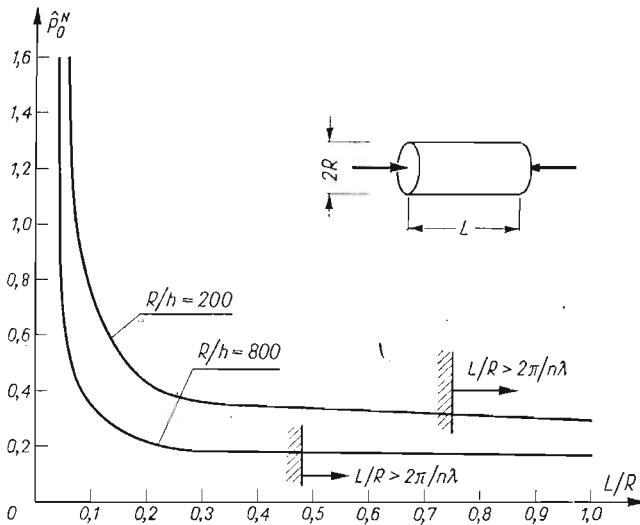
Z przedstawionego wykresu wynika, że stosowanie równań technicznej teorii powłok daje jednakowo poprawne wyniki tylko dla ugięć nie przekraczających około 20 -krotnie grubości powłoki.

5. Uwagi końcowe

Przedstawiona tu analiza dużych ugięć powłok, polegająca na aproksymowaniu zdeformowanej konstrukcji układem odpowiednich powierzchni quasiizometrycznych, pozwoliła na uzyskanie wielu rezultatów znanych z badań doświadczalnych, a których nie można było otrzymać z analizy nieliniowych równań teorii powłok.

Zasadniczą zaletą analizy jest możliwość rozważania zagadnień bez ograniczeń dotyczących wielkości przemieszczeń, co czyni ją bardzo użyteczną w tych przypadkach, gdzie ugięcia są na tyle duże, że znane równania teorii powłok nie są w stanie właściwie opisać problemu.

W prezentowanej pracy nie mówi się o warunkach brzegowych. Jak wykazują liczne badania (np. [13]), wpływają one zasadniczo na zachowanie się powłoki w zakresie małych odkształceń (zmieniają tzw. górną siłę krytyczną), natomiast przy dużych ugięciach (takich, jak rozpatrywane w pracy) wpływ ten jest znacznie mniejszy. Należy przy tym podkreślić, że jest on duży tylko dla przypadków praktycznie nie realizujących się w rozwiązaniach konstrukcyjnych. Natomiast w pozostałych, wpływ ten wraz ze wzrostem długości powłoki zanika bardzo szybko. Dla przykładu na rys. 14 pokazano zależności między dolną siłą krytyczną a długością powłoki walcowej L , uzyskane na drodze doświadczalnej [9].



Rys. 14

W pracy [6] wykazano, że wpływ długości tworzącej powłoki jest do pominięcia, jeżeli tylko «mieści się» tam jeden rząd pofalowań o parametrach, które można wyznaczyć na podstawie prezentowanej analizy. Ogranicza to klasę rozpatrywanych powłok do takich, które spełniają warunek

$$(16) \quad \frac{L_s}{R} \geq \frac{1 - \frac{1}{\left(\frac{\sin \alpha}{\lambda} + \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}}\right)^2}}{\cos \varphi},$$

gdzie: L — długość tworzącej, α , λ — wielkości charakteryzujące deformację powłoki o danych parametrach.

Для повло́к вальцовых warunk ten upraszcza się do postaci

$$\frac{L}{R} \geq \frac{2\pi}{n\lambda}$$

Wartości graniczne dla $R/h = 200$ i $R/h = 800$ zostały na rys. 14 zaznaczone liniami pionowymi. Widać, że na prawo od tych linii wartości obciążeń są praktycznie stałe niezależnie od długości powłoki.

Inne ograniczenie wynika ze skończonej sprężystości materiału. Pewne wyniki wstępnych rozważań przedstawiono w [5]. Sprowadzają się one do wyznaczenia dopuszczalnej minimalnej liczby fal n_{\min} , przy której kończy się proces deformacji czysto sprężystej. Dalsze skracanie się powłoki możliwe jest tylko poprzez pojawienie się przegubów plastycznych tworzących się wzdłuż żeber geometrycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. N. J. HOFF, W. A. MADSEN, J. MAYERS, *Post-buckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells*, AJAA Journ., **14** (1966) 126 - 133.
2. Y. YOSHIMURA, *On the mechanism of buckling of circular cylindrical shell under axial compression*, Repts. Inst. Sci. and Tech. Univ. Tokyo, **5** (1951).
3. A. P. COPPA, *Inextensional buckling configurations of conical shells*, AJAA Journ., **4** (1967) 913 - 920.
4. W. SZYSZKOWSKI, *Geometrical analysis of the post-buckling behaviour of thin cylindrical and conical shells under axial compression*, Arch. Bud. Masz., **1** (1975) 3 - 26.
5. S. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSZKOWSKI, *Metody geometryczne w nieliniowej teorii powłok*, Mat. Symp. Konstr. Powł., Kraków 1974.
6. W. SZYSZKOWSKI, *Stateczność powłok obrotowych w ujęciu geometrycznym*, Praca doktorska, Polit. Warszawska, 1973.
7. R. L. DE NEUFVILLE, *Influence of geometry on the number of buckles in cylinder*, AJAA Journ., **2** (1965) 364 - 365.
8. R. L. DE NEUFVILLE, I. I. CONNOR, *Post-buckling behaviour of thin cylinders*, J. Eng. Mech. Div., 1968, EM 2, 585 - 603.
9. V. I. WEINGARTEN, E. I. MORGAN, P. SEIDE, *Elastic stability of thin walled cylindrical and conical shells under axial compression*, AJAA Journ., **5** (1965) 913 - 920.
10. P. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
11. А. В. ПОГОРЕЛОВ, *Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек*, Москва 1967.
12. Э. И. ГРИГОЛЮК, В. В. КАБАНОВ, *Устойчивость круговых цилиндрических оболочек*, Итоги Науки, Москва 1967.
13. В. О. АЛМРОТН, *Influence of edge conditions on the stability of axially compressed cylindrical shells*, AJAA Journ., **1** (1965), 134 - 140.

Резюме

РАСЧЕТ СЖИМАЕМЫХ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

В работе представлен анализ изотропных цилиндрических и конических оболочек, подвергнутых осевому сжатию. В основу метода взят вариационный принцип Лагранжа, в котором использовано кинематически допустимое поле перемещений. Для определения этого поля использованы свойства квази-изометричной трансформации поверхности. Это позволило решить задачу без ограничений относительно величины перемещений.

S u m m a r y

ANALYSIS OF LARGE ELASTIC DEFLECTIONS OF AXIALLY
COMPRESSED CYLINDRICAL AND CONICAL SHELLS

The paper presents an analysis of the post-buckling behaviour of isotropic cylindrical and conical shells subject to axial compression.

The starting point of the paper is the Lagrange variational principle, the application of which consists in assuming a kinematically admissible strain and displacement fields. The fields are determined by considering the geometry of quasi-isometric deformations of the shell after buckling. That enables us to solve the problem with no limitation on the magnitude of the displacements.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 października 1976 r.



BIULETYN INFORMACYJNY

II SYMPOZJUM MECHANIKI STOSOWANEJ

W dniach 12 - 15 października 1976 r. odbyło się w Moskiewskiej Wyższej Szkole Technicznej im. Baumana kolejne, drugie Sympozjum Mechaniki Stosowanej. Sympozja te, organizowane w ramach współpracy między Instytutem Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej i Wydziałem Ogólnotechnicznym MWTU im. Baumana, odbywają się corocznie na przemian w Warszawie i w Moskwie i mają na celu wymianę osiągnięć naukowo-badawczych oraz inspirację nowych kierunków badawczych i zainicjowanie prac wspólnych. Otwarcia obrad Sympozjum dokonał prorektor MWTU prof. K. S. KOLESNIKOW. Wskazał on na celowość takich spotkań, podkreślając, że spotykają się one z dużym zainteresowaniem.

Obrady II Sympozjum Mechaniki Stosowanej odbywały się w trzech sekcjach.

Sekcja I. Zagadnienia dynamiki, drgań i stateczności poruszających się ciał sprężystych

Wygłoszono następujące referaty:

- R. GUTOWSKI, E. MZYK (PW) — *Flutter pewnego modelu skrzydła o nieliniowej charakterystyce sprężystej typu histerezyowego,*
- W. A. ŚWIETLIICKI, A. M. GUSKOW (MWTU) — *Badania stateczności dynamicznej podatnego pręta w warstwie oleju,*
- W. W. ZELENCOV, W. M. MICHOW (MWTU) — *Poprzeczne drgania przegubowo podpartego pręta o zmiennej długości,*
- W. ŁUCJANEK, T. SZUSTER, (PW) — *Drgania łopat przegubowego wirnika nośnego śmigłowca,*
- F. R. GEKKER, W. W. ROMANOW (MWTU) — *Warunki występowania «samoodkręcania się» połączeń gwintowych przy drganiach osiowych,*
- I. S. KOZŁOV (MWTU) — *Nowe zadania modelowe mechaniki nieba i jego mechaniczna interpretacja,*
- M. DIETRICH, W. OZIMOWSKI, Z. WALCZAK (PW) — *O bezpieczeństwie dźwigu,*
- W. A. ŚWIETLIICKI, O. S. NARAJKIN (MWTU) — *Równania drgań nieliniowych płaskiej sprężyny spiralnej,*
- A. A. POŻALOSTIN (MWTU) — *Pewne problemy drgań wymuszonych powłok wypełnionych cieczą,*
- J. MARYNIAK, T. BEŁDOWICZ (PW) — *Wpływ parametrów konstrukcyjnych kół kierowanych na własności dynamiczne pojazdu samochodowego,*
- A. N. KOŁOBOW, W. A. ZUJEV, B. D. SEMIENOW (MWTU) — *Obliczanie obciążeń dynamicznych na rolkę przenośnika taśmowego przy transporcie pojedynczego ciężaru,*
- H. A. ŁOBOW (MWTU) — *Obciążenia dynamiczne dźwigu mostowego przy rozruchu i hamowaniu.*

Sekcja II. Zagadnienia optymalizacji maszyn i procesów

- T. KOPYT, W. MIERZEJEWSKI, J. WITKOWSKI (PW) — *Zagadnienia kontaktu zębów o różnych sztywnościach,*
- L. H. RESZETOV (MWTU) — *Racjonalne układy konstrukcji mostów,*
- W. N. BARANOW, J. E. ZACHAROW (MWTU) — *Zagadnienia teorii i obliczania mechanizmów jednoczesnego sterowania,*
- F. I. FUSJAK (MWTU) — *Analityczne przedstawienie niedokładności występujących w przekładniach falowych,*
- G. A. TIMOFIEJEV (MWTU) — *Falowe przekładnie zębate z generatorem fali odkształcanym zewnętrznie,*
- Z. NOWAK, W. POGORZELSKI (PW) — *Zastosowanie programowania dynamicznego do optymalizacji parametrów wysięgnika teleskopowego żurawia,*
- J. E. NITUSOV (MWTU) — *Zagadnienia optymalizacji energetycznej procesów i konstrukcji wzbudzanych siłami urządzeń elektromagnetycznych z ograniczonym przemieszczeniem,*

- A. M. ROMASZKO, W. H. FEODOSJEW, M. P. ALEKSANDROW (MWTU) — *O optymalnym wykorzystaniu materiałów par ciernych w mechanizmach hamowania dźwignic,*
 I. W. STASENKO (MWTU) — *Obliczenia nła pelzanie rurociągów pracujących w wysokich temperaturach,*
 E. I. BUTYKA (MWTU) — *Przemieszczenia i sprzężenia wzdlłuż zadanej osi w mechanic.*

Sekcja III. Eksperymentalne metody badania dynamiki i wytrzymałości maszyn

- J. KAPKOWSKI, J. STUPNICKI (PW) — *Techniczne zastosowania analizy propagacji obszarów plastycznych,*
 B. N. USZAKOW (MWTU) — *Polaryzacyjno-optyczne metody badania naprężeń w konstrukcjach złożonych (kompozytach),*
 W. MIRSKI, J. STUPNICKI (PW) — *Wpływ chropowatości powierzchni na rozkład normalnych i stycznych oddziaływań ciał stałych,*
 P. K. POPOW (MWTU) — *Dokładność dynamiczna przenoszenia napędu w zębatych przekładniach falowych,*
 M. BIJAK-ŻOCHOWSKI (PW) — *Pólniszcząca metoda badania rozkładu naprężeń własnych w głęb materiału*
 B. JANCELEWICZ, R. KRASOŃ, A. REJMAN (PW) — *Badania nośności statycznej i trwałości zmęczeniowej połączeń klejowo-mechanicznych w duralowych konstrukcjach cienkościennych,*
 W. F. RESZCZIKOW (MWTU) — *Odporność na zadzieranie olejów przekładniowych i wpływ na nią grubości filmu olejowego,*
 A. CHUDZIKIEWICZ, J. CZAJKA, J. KISIŁOWSKI (PW) — *O analizie realizacji procesu stochastycznego w dynamice maszyn,*
 A. W. WIERSZYŃSKI (MWTU) — *Odkształcalność spawanych belkowych konstrukcji dźwigowych w czasie produkcji i eksploatacji.*

Organizatorzy Sympozjum umożliwili uczestnikom zwiedzanie laboratoriów Katedr: Dynamiki i Wytrzymałości Materiałów, Mechaniki Teoretycznej i Dźwignic, a także wystawy osiągnięć uczelni.

Następne III Sympozjum Mechaniki Stosowanej odbędzie się w pierwszej połowie października 1977 r. w Warszawie.

M. Dietrich (Warszawa)

SZKOŁA «METODA WARSTWY OPTYCZNEJ CZYNNEJ WYZNACZANIA ODKSZTAŁCEŃ I NAPRĘŻEŃ W KONSTRUKCJACH»

Jabłonna-Warszawa, 2-11 lutego 1977 r.

W dniach 2 - 11 lutego 1977 r. odbyły się zajęcia Szkoły na temat zastosowań warstwy optycznie czynnej w analizie odkształceń i naprężeń w konstrukcjach.

Metoda warstwy optycznie czynnej jest metodą mogącą znaleźć szerokie zastosowanie w instytutach naukowo-badawczych, biurach projektowych i uczelniach technicznych. Metoda ta może oddać usługi w procesie konstruowania i optymalizacji maszyn i urządzeń, pojazdów i konstrukcji budowlanych; pozwala szybko wizualizować pola odkształceń i naprężeń w konstrukcjach; może stanowić nowoczesne narzędzie w ręku konstruktora i badacza. Między innymi metoda ta oddaje ogromne usługi w zakresie obserwacji tworzenia się stref odkształceń plastycznych, propagacji granic stref plastycznych oraz procesów adaptacji konstrukcji. Dotychczas tylko nieliczne ośrodki w kraju prowadzą prace badawcze przy użyciu tej metody. Powodem tego jest między innymi, brak aparatury, wysokie ceny materiałów elastooptycznych i trudności ich importu oraz brak krajowej literatury poświęconej technice pomiarów i analizie wyników.

W trakcie trwania Szkoły zostały przedstawione możliwości pracy metodą warstwy optycznie czynnej przy wykorzystaniu urządzeń badawczych budowlanych w kraju i przy wykorzystaniu materiałów elastooptycznych sporządzonych z krajowych żywic epoksydowych. Ponadto zostały zaprezentowane oryginalne, dotychczas nie opublikowane metody analizy wyników.

Wykłady prowadzone były przez pracowników zajmujących się metodą warstwy optycznie czynnej od wielu lat i posiadających w tej dziedzinie własny dorobek naukowy — z Instytutu Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej oraz z Instytutu Chemii i Technologii Organicznej Politechniki Warszawskiej.

Program wykładów przedstawiał się następująco:

doc. J. STUPNICKI — Wprowadzenie, dwójłomność wymuszona, prawa elastoptyki, polaryskop o świetle spolaryzowanym liniowo i kołowo;

— Efekt umieszczenia modelu w polaryskopie o świetle spolaryzowanym liniowo i kołowo, izochromy i izokliny; Optyczne stałe materiałowe;

— Metody analizy wyników, wyznaczanie odkształceń i naprężeń głównych w modelach elastoptycznych;

— Polaryskop do badań metodą warstwy optycznie czynnej, prześwietlanie normalne i skośne; metody badań i rejestracji wyników; przykłady praktycznych zastosowań metody warstwy optycznie czynnej do badań konstrukcji; metody kompensacji;

mgr inż. A. KOZŁOWSKI — Technologia wytwarzania warstw optycznie czynnych i nanoszenia ich na konstrukcje; warstwy płaskie i powłoki;

dr J. KAPKOWSKI — Metody analizy wyników otrzymanych metodą warstwy optycznie czynnej, współczynniki korekcyjne; metoda charakterystyk;

dr J. KAPKOWSKI (ćwiczenia audytor.) — Opracowanie wyników wykonanych badań; zbiorcze obrazy izoklin i izochrom; wyznaczenie stałych materiałowych i rozkładów odkształceń na brzegu; zastosowanie wykresów współczynników korekcyjnych;

dr J. SŁOWIKOWSKA — Tworzywa sztuczne na warstwy optycznie czynne;

dr J. KAPKOWSKI (ćwiczenia audytor.) — Opracowanie wyników wykonanych badań; wyznaczenie odkształceń i naprężeń w punktach odległych od brzegu;

dr J. KAPKOWSKI (ćwiczenia audytor.) — Opracowanie wyników wykonanych badań; opracowanie sprawozdania.

Zajęcia laboratoryjne prowadzone były na terenie Instytutu Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej i polegały na samodzielnym wykonaniu przez każdy zespół pięciu ćwiczeń o następującej tematyce:

1. Odlewanie warstw optycznie czynnych płaskich,
2. Badanie własności sprężysto-optycznych materiału,
3. Nakładanie warstwy optycznie czynnej na badaną konstrukcję,
4. Odlewanie powłok optycznie czynnych,
5. Przeprowadzenie pomiarów.

Sluchacze Szkoły zostali wyłonieni drogą eliminacji. Ostatecznie w Szkole uczestniczyło 41 osób spośród zgłoszonych 75 kandydatów. Reprezentowali oni 32 ośrodki, w tym 16 przemysłowych ośrodków naukowo-badawczych i 16 instytutów wyższych uczelni. Poziom był zróżnicowany — w zajęciach uczestniczył 1 profesor, 1 docent, 8 doktorów, 31 magistrów inżynierów. Powodowało to pewne trudności ze względu na różnice w przygotowaniu słuchaczy. Wszyscy słuchacze wykazali ogromne zainteresowanie tematem, w trakcie dyskusji poruszane były zagadnienia znacznie wybiegające poza ramy Szkoły, a dotyczące możliwości zastosowania metody do badań będących aktualnie przedmiotem własnych prac badawczych słuchaczy. Omawiano możliwość i sposoby zastosowania metody w pracach o charakterze podstawowym oraz w budowie pojazdów samochodowych i szynowych, w budowie maszyn roboczych, w odlewnictwie, w budownictwie itd.

Wszyscy słuchacze podkreślali korzyści, jakie wnieśli dzięki uczestnictwu w zajęciach Szkoły, i sugerowali celowość powtórzenia jej dla pozostałych osób, które nie mogły wziąć udziału w Szkole ze względu na ograniczoną liczbę miejsc w laboratoriach.

Stanisław Bogdański (Warszawa)

SYMPOZJA

MIĘDZYNARODOWEJ UNII MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ (IUTAM)

1978

1. The Joint COSPAR/IAU/URSI/IUGG/IUTAM Symposium on Atmospheres and Surfaces of the Planets

Miejsce: Innsbruck, Austria

Data: 28 maja - 11 czerwca 1978

Przewodniczący: Dr. T. Owen, Department of Earth and Space Sciences, State University of New York, Stony Brook, N.Y. 11790, USA

2. IUTAM Symposium on Variational Methods in the Mechanics of Solids

Miejsce: Northwestern University, Evanston, Illinois

Data: 1978

Przewodniczący: Professor S. Nemat-Nasser, The Technological Institute, Northwestern University, Evanston, Illinois 60201, USA

Professor Kyuichiro Washizu, Department of Aeronautics and Astronautics, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

3. IUTAM Symposium on Metal Forming Plasticity

Miejsce: Munich, BRD (może ulec zmianie)

Data: 1978

Przewodniczący: Professor Dr. H. Lippmann, Lehrstuhl für Mechanik (A), Technische Universität München, Postfach 202420, D 8000 München 2, BRD

4. IUTAM Symposium on the Physics and Mechanics of Ice

Miejsce: Copenhagen, Denmark

Data: 1978

Przewodniczący: Professor P. Tryde, Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Denmark

5. IMU/IUTAM Symposium on Group Theoretical Methods in Mechanics

Miejsce: Novosibirsk, USSR (może ulec zmianie)

Data: 1978

Przewodniczący: nie jest jeszcze wyznaczony

6. IUTAM Symposium on Non-Newtonian Fluid Mechanics

Miejsce: Louvain, Belgium

Data: 1978

Przewodniczący: nie jest jeszcze wyznaczony

1979

1. IUTAM Symposium on Approximate Methods for Navier-Stokes Problems

Miejsce: Paderborn, BRD

Data: 1979

Przewodniczący: nie jest jeszcze wyznaczony

2. IUTAM Symposium on Optical Methods in Mechanics of Solids

Miejsce: Poitiers, France

Data: nie jest jeszcze ustalona

Przewodniczący: Professor A. Lagarde, Laboratoire de Mécanique des Solides, Université de Poitiers, 40 Avenue de Rectuer-Pineau, F-86022 Poitiers, France

3. Third IUTAM Symposium on Shell Theory

Miejsce: Tbilisi, USSR

Data: nie jest jeszcze ustalona

Przewodniczący: Academician I.N. Vekua, President, Georgian Academy of Sciences, Dzerzhinskovo 8, Tbilisi 38004, USSR

4. IUTAM/IUGG Symposium on Monsoon Dynamics

Miejsce i data: nie są jeszcze ustalone

Przewodniczący: Professor Sir James Lighthill, University of Cambridge, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Silver Street, Cambridge CB3 9EW, England

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- D. i Z. MAZURKIEWICZOWIE, Z dziejów polskiej mechaniki do 1918 r.
Об истории польской механики до 1918 года
On the history of Polish mechanics before 1918.
- M. J. SEWELL, Pewne przykłady zastosowania teorii katastrof w mechanice
Примеры использования теории катастроф в механике
Some mechanical aspects of catastrophe theory
- K. GRYSA, Naprężenia i przemieszczenia w wirującym walcu kołowym ogrzewanym nieosiowo-
symetrycznie na robocznicy
Напряжения и перемещения в круглом вращающемся цилиндре при несимметри-
ческом нагреве его боковой поверхности
The stresses and displacements in a rotating circular cylinder due to axially non-symmetrical
heating of its lateral surface.
- R. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MIŁCHALSKI, Inwersyjna metoda badania modeli elastoоптычных
z więzami sztywnymi
Обратный метод исследования фотоупругих моделей с жесткими связями
Inversional method of investigation of photo-elastic models
- M. MAKOWSKI, G. SZEFER, Optymalne kształtowanie belki na podłożu sprężystym z uwzględnie-
niem ograniczeń naprężeń normalnych
Оптимальное проектирование балки на упругом основании при ограничении величины
нормальных напряжений
Optimum shape design of a beam resting on elastic foundation with normal stress restrictions.
- J. KRAJEWSKI, S. MATYSIAK, Płaskie zagadnienie kontaktowe dla ośrodka Cosseratów w teorii
naprężeń cieplnych
Плоская контактная задача для среды Коссера в теории термических напряжений
Plane contact problem of a Cosserat medium subject to thermal stresses
- J. WŁASCHUT, Optymalne kształtowanie pręta ściskanego przy dużych ugięciach metodą programo-
wania dynamicznego
Оптимальное проектирование сжимаемого стержня при больших прогибах методом
динамического программирования
Optimal design of a compressed rod with large deflections by means of dynamic programming
- T. SOŁKOWSKI, Analiza procesu wyciągania wytłoczki z uwzględnieniem niejednorodności wywo-
lanej polem temperatury
Анализ процесса вытяжки с уточнением с учетом неоднородности вызванной темпе-
ратурным полем
Analysis of ironing of a cup with non-homogeneity produced by a temperature field.

BIULETYN INFORMACYJNY

Warunki prenumeraty

Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratory indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

Indeks 36523

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
