

JII 720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 15 · ZESZYT 1

WARSZAWA 1977

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

<p>K. GRYSA, M. KWIEK, Stan naprężeń w walcu kołowym wywołany przyłożeniem stałej temperatury na pobocznicę Тепловые напряжения в круглом цилиндре вызванные внезапным изменением температуры на его краю Dynamical thermal stresses in a circular cylinder due to sudden change of temperature on its surface</p>	3
<p>W. ŚWISTERSKI, Badania elastoопtyczne modeli płaskich z wykorzystaniem holografii Исследование плоских моделей методом голографической фотоупругости Photoelastic investigation of two-dimensional models by means of holography</p>	11
<p>K. RUP, J. TALER, Określenie nieustalonego pola temperatury w ścianie płaskiej przy zmiennym współczynniku przewodnictwa cieplnego Определение нестационарного температурного поля в плоской стенке с переменным коэффициентом теплопроводности Determination of transient temperature fields in plane walls of variable thermal conductivity</p>	21
<p>J. КУВИК, О вьзначаніи напруżeń теплньх вьволаьных рухомьми обцяжєніями термическими нарузками On the determination of thermal stresses due to moving heat sources</p>	29
<p>A. STRZELCZYK, S. WOJŚCIECH, Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności ortotropowej płyty pierścieniowej Численное решение задачи об устойчивости кольцевой пластины с цилиндрической ортотропией Numerical solution of the problem of stability of an orthotropic annular plate</p>	37
<p>J. STELMARCZYK, Obliczanie charakterystyki dynamicznej konstrukcji płytowo-sprężynowej za pomocą metody sztywnych elementów skończonych Определение динамической характеристики плитно-пружинной конструкции методом жестких конечных элементов The rigid finite element method of determining the dynamic characteristic of a plate-spring structure</p>	57
<p>W. TRAMPZYŃSKI, Analiza rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych dla zagadnienia naporu ścian o różnych kształtach Исследование кинематически допустимых решений для задачи напора стенок различного профиля Analysis of kinematically admissible solutions of earth-moving processes in the cases of various pushing wall forms</p>	69
<p>J. KOLEŃDA, Nieliniowe drgania elastycznie zawieszonych silników tłokowych przy kinematycznych wymuszeniach stochastycznych Нелинейные колебания упруго подвешенных поршневых двигателей при случайных кинематических возбуждениях Nonlinear vibrations of elastically suspended piston engines at kinematic stochastic excitations</p>	87
<p>J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, Badanie teoretyczne własności dynamicznych lotu obiektów zrzućanych z samolotu Теоретические испытания динамических свойств полета объектов сбрасываемых с самолета Theoretical research of dynamical flight characteristics of bodies disposed from an aircraft</p>	99
<p>J. WŁASNYC, Оптымалне kształтованіе прєта методą програмованія динамического Оптымалное проектирование стержня методом динамического программирования Optimum design of a flexible bar by means of dynamic programming</p>	125
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	131

471 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 15 · ZESZYT 1

WARSZAWA 1977

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 W a r s z a w a, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (587+113) egz. Arkuszy wydawn. 11,0. Arkuszy drukarskich 9,0. Papier druk. sat. III kl.
70 g, 70×100. Oddano do składania 30.XI.1976 r. Druk ukończono w kwietniu 1977 r.
Zam. 1673/76. F-11. Cena zł 30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

STAN NAPRĘŻEŃ W WALCU KOŁOWYM WYWOŁANY PRZYŁOŻENIEM
STAŁEJ TEMPERATURY NA POBOCZNICY

KRZYSZTOF GRYSA, MARIA KWIEK (POZNAŃ)

W pracy rozpatruje się długi walec kołowy o promieniu a , do poboczniczy którego w pewnej chwili czasu $t_0 = 0$ zostaje przyłożona stała temperatura T_0 , mierzona od temperatury stanu naturalnego walca. Zagadnienie rozpatrywane jest w walcowym układzie współrzędnych r, φ, z , przy czym za oś z obrano oś walca. Rozważania prowadzone są dla punktów walca dostatecznie odległych od jego końców, w związku z czym można założyć płaski stan odkształcenia. Zagadnienie jest kołowo-symetryczne, tzn. $u_r = u_r(r, t)$, $u_\varphi = u_z = 0$, $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(r, t)$, gdzie u_r, u_φ, u_z — współrzędne wektora przemieszczenia; wskaźniki α, β mogą przyjmować wartości r, φ lub z .

Naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$ można wyrazić przez przemieszczenie u_r i temperaturę θ związkami [1]:

$$(1) \quad \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} - \gamma\theta,$$

$$(2) \quad \sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} - \gamma\theta,$$

$$(3) \quad \sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \gamma\theta,$$

$$(4) \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0,$$

gdzie

λ, μ — stałe Lamégo, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, α_t — współczynnik rozszerzalności cieplnej, $\theta = \theta(r, t)$ — temperatura punktów przekroju poprzecznego walca, mierzona od temperatury stanu naturalnego.

Rozkład temperatury θ wewnątrz walca opisany jest równaniem przewodnictwa cieplnego, [1]:

$$(5) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta = 0,$$

gdzie κ — współczynnik przewodzenia temperatury.

Stan przemieszczeń w walcu określa równanie [1]:

$$(6) \quad (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) u_r + F_r = \rho_0 \ddot{u}_r + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial r},$$

gdzie F_r — siła masowa, ρ_0 — gęstość, $(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$,

W rozpatrywanym zagadnieniu temperatura θ i przemieszczenie u_r muszą spełniać następujące warunki:

$$(7) \quad \begin{aligned} t = 0 \\ \theta(r, 0) = 0, \\ u_r(r, 0) = 0, \\ \dot{u}_r(r, 0) = 0. \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} r = a \\ \theta(a, t) = T_0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} = \gamma T_0. \end{aligned}$$

Przy rozwiązywaniu tego problemu zostaną uwzględnione efekty inercyjne wynikłe ze zmiany temperatury w czasie, tzn. w odróżnieniu od rozważań zawartych m.in. w [1, 2], w równaniu (6) nie pomija się członu bezwładnościowego.

Prezentowane w pracy podejście do problemu nie jest nowe, gdyż stosowali je również MURA [3] i DERSKI [4]. W pracy [3] ograniczono się tylko do wyznaczenia przemieszczeń; w pracy [4] wyznaczono ponadto naprężenia w walcu, lecz wynik zawarty w tej pracy obarczony jest błędem, prawdopodobnie drukarskim (wskazywałby na to poprawny tok obliczeń w cytowanej pracy). Jednakże fakt przeoczenia tego błędu w korekcie świadczy o tym, że duża liczba oznaczeń użytych do skonstruowania wyniku utrudniła zweryfikowanie tegoż wyniku w porównaniu ze znanymi przypadkami szczególnymi. Ponadto użycie do opisu zarówno przemieszczeń w pracy [3], jak i naprężeń w pracy [4] funkcji Thomsona [6] utrudnia analizę otrzymanych wyników, o czym świadczy brak tejże analizy w obu cytowanych pracach.

W pracy niniejszej podaje się postaci naprężeń σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ dane przez liczby bezwymiarowe zawierające stałe materiałowe. Wpływ sił masowych F_r na naprężenia pomija się. Pomija się również szczegółowe rachunki prowadzące do przedstawionych dalej wyników, gdyż pokrywają się one z obliczeniami przedstawionymi w pracy [4]. W ostatniej części pracy zawarta jest analiza otrzymanych wyników.

Rozwiązanie równania (5) z warunkami (7)₁ i (8)₁ jest następujące [1, 2]:

$$(9) \quad \theta(r, t) = T_0 \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_k \frac{r}{a}\right)}{\mu_k J_1(\mu_k)} e^{-\mu_k^2 \frac{\kappa}{a^2} t} \right),$$

gdzie μ_k są miejscami zerowymi funkcji $J_0(\mu)$; $J_0(z)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu.

Mając na uwadze związek (9) można rozwiązać równanie (6) z warunkami (7)₂, (7)₃ i (8)₂ na drodze pokazanej w pracy [4]. Wykorzystując następnie zależności (1) i (2) można naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ przedstawić w postaci następującej:

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}(\varrho, F_0) = c^2 \gamma T_0 \left\{ 1 - \frac{2I_1(L)}{LI_0(L)} - 2S_1(\varrho) + \right. \\ \left. + 4L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(\varrho\mu_k)}{\varrho J_1(\mu_k)} - 1 + \frac{\mu_k^2 J_0(\varrho\mu_k)}{L^2 J_1(\mu_k)} \right] \frac{\exp(-F_0\mu_k^2)}{\mu_k^2(\mu_k^2 + L^2)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l(\varrho) \sin(LFo v_l) \frac{Lv_l}{v_l^2 + L^2} \left(4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 - L^2}{\mu_k^4 + L^2 v_l^2} - \frac{1}{c^2} \right) -$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l(\varrho) \cos(LFo v_l) \frac{v_l^2}{v_l^2 + L^2} \left(\frac{4L^2}{v_l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 + v_l^2}{\mu_k^4 + L^2 v_l^2} + \frac{1}{c^2} \right) \Bigg\},$$

$$(11) \quad \sigma_{\varphi\varphi}(\varrho, Fo) = c^2 \gamma T_0 \left\{ 1 - \frac{2I_1(L)}{LI_0(L)} - 2S_2(\varrho) + \right.$$

$$+ 4L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\mu_k^2 J_0(\varrho \mu_k)}{2c^2 L^2 J_1(\mu_k)} + \frac{\mu_k J_0(\varrho \mu_k)}{J_1(\mu_k)} - \frac{J_1(\varrho \mu_k)}{\varrho J_1(\mu_k)} - 1 \right] \frac{\exp(-Fo \mu_k^2)}{\mu_k^2 (\mu_k^2 + L^2)} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \hat{\beta}_l(\varrho) \sin(LFo v_l) \frac{Lv_l}{v_l^2 + L^2} \left(4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 - L^2}{\mu_k^4 + L^2 v_l^2} - \frac{1}{c^2} \right) -$$

$$\left. - \sum_{l=1}^{\infty} \hat{\beta}_l(\varrho) \cos(LFo v_l) \frac{v_l^2}{v_l^2 + L^2} \left(4 \frac{L^2}{v_l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 + v_l^2}{\mu_k^4 + L^2 v_l^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right\},$$

gdzie

$$S_1(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L^2}{\mu_k^2 (\mu_k^2 + L^2)} \frac{\varrho \mu_k^2 I_0\left(\frac{\varrho \mu_k^2}{L}\right) - 2c L I_1\left(\frac{\varrho \mu_k^2}{L}\right)}{\varrho \mu_k^2 I_0\left(\frac{\mu_k^2}{L}\right) - 2c^2 \varrho L I_1\left(\frac{\mu_k^2}{L}\right)},$$

$$S_2(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L^2}{\mu_k^2 (\mu_k^2 + L^2)} \frac{\varrho \mu_k^2 (1 - 2c^2) I_0\left(\frac{\varrho \mu_k^2}{L}\right) + 2c^2 L I_1\left(\frac{\varrho \mu_k^2}{L}\right)}{\varrho \mu_k^2 I_0\left(\frac{\mu_k^2}{L}\right) - 2c^2 \varrho L I_1\left(\frac{\mu_k^2}{L}\right)},$$

$$\beta_l(\varrho) = 2 \frac{\varrho v_l J_0(\varrho v_l) - 2c^2 J_1(\varrho v_l)}{\varrho J_1(v_l) [v_l^2 - 4c^2(1 - c^2)]},$$

$$\hat{\beta}_l(\varrho) = 2 \frac{(1 - 2c^2) \varrho v_l J_0(\varrho v_l) + 2c^2 J_1(\varrho v_l)}{\varrho J_1(v_l) [v_l^2 - 4c^2(1 - c^2)]},$$

$\varrho = r/a$ — bezwymiarowy promień, $Fo = \frac{\pi t}{a^2}$ — liczba kryterialna Fouriera, będąca

jednocześnie bezwymiarowym czasem, $c^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$, $c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho_0}$, $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho_0}$,

ϱ_0 — gęstość, v_l — pierwiastki równania $J_0(v) - \frac{2c^2}{v} J_1(v) = 0$, $L = \frac{ac_1}{\varkappa}$ — bezwymiarowa liczba, określająca wpływ wielkości ϱ_0 , \varkappa i a na wielkość i charakter naprężeń. Wśród parametrów określających tę liczbę znajdują się również stałe λ i μ , lecz ich wpływ na

naprężenia lepiej charakteryzuje wyżej wprowadzona bezwymiarowa wielkość c . Liczba L szerzej omówiona jest w dalszych częściach pracy; warto nadmienić, że analiza wpływu tej liczby na pewne rozwiązania problemów termosprężystości zawarta jest w pracy [5] s. 420—421; $J_n(z)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju n -tego rzędu [6], $I_n(z)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju n -tego rzędu [6].

Parametry κ , a , ϱ_0 i czas t występują tylko w wyrażeniach dwóch liczb bezwymiarowych: L i F_0 . Liczby te zatem opisują w pełny sposób wpływ wyżej wymienionych parametrów na wielkość naprężeń. Chcąc np. uzyskać przejście od związków (10), (11) do naprężeń, uzyskanych przy pominięciu w równaniu (6) członu inercyjnego, należy wykonać przejście z L do nieskończoności przy niezmiennym F_0 . Otrzymuje się wówczas, że

$$\lim_{L \rightarrow \infty} S_1(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2} = 0,5$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} S_2(\varrho) = 0,5$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{I_1(L)}{LI_0(L)} = 0,$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{Lv_1}{v_1^2 + L^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{v_1^2}{v_1^2 + L^2} = 0,$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2L^2}{\mu_k^2(\mu_k^2 + L^2)} = \frac{2}{\mu_k^2}$$

i w efekcie

$$(12) \quad \sigma_{rr}^{gr} = \lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_{rr} = 4c^2\gamma T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\varrho} J_1(\varrho\mu_k) - J_1(\mu_k) \right] \frac{\exp(-F_0\mu_k^2)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)},$$

$$(13) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{gr} = \lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_{\varphi\varphi} = 4c^2\gamma T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_k J_0(\varrho\mu_k) - J_0(\mu_k) - \frac{1}{\varrho} J_1(\varrho\mu_k) \right] \frac{\exp(-F_0\mu_k^2)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}.$$

Związki (12) i (13) są zgodne z wynikami cytowanymi w [1, 2].

Liczba L osiąga dla metali na ogół bardzo duże wartości, ze względu na fakt, że $c_1 \sim \sim 10^5$ cm/s oraz $\kappa \sim 10^{-1}$ cm²/s. Zatem $L \sim 10^6 a$, wobec czego dla niezbyt małych a wpływ członów zawierających L w mianowniku w związkach (10) i (11) na wartość naprężeń $\sigma_{rr}(\varrho, F_0)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(\varrho, F_0)$ jest znikomy. W tym stanie rzeczy graniczne wartości naprężeń podane we wzorach (12) i (13) są ich bardzo dobrym przybliżeniem.

Wpływ zmiany temperatury w czasie na zmiany naprężeń, wyrażający się funkcjami zależnymi od L , może wystąpić tylko wtedy, gdy L osiągnie wartości zbliżone do jedności. Jest to możliwe do osiągnięcia wtedy, gdy promień a walca jest dużo mniejszy od jedności lub współczynnik przewodzenia temperatury κ dużo większy od jedności.

Mając na uwadze rząd wielkości liczby L można, dla rozpatrywanego przypadku (metale), skorzystać ze wzorów przybliżonych dla zmodyfikowanych funkcji Bessela

dużego argumentu:

$$I_n(L) = \frac{e^L}{\sqrt{2\pi L}} \left[1 + O\left(\frac{1}{L}\right) \right].$$

Wówczas

$$\frac{I_1(L)}{LI_0(L)} \approx \frac{1}{L}.$$

Funkcje Bessela, zawierające w argumentcie liczbę L^{-1} można zastąpić pierwszym wyrazem ich rozwinięcia w szeregi potęgowe. Mamy stąd

$$S_1(\varrho) \approx S_2(\varrho) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{L}.$$

Ponadto pomijając wyrazy zawierające w mianowniku L^2 możemy napisać związki (10) i (11) w postaci przybliżonej:

$$(14) \quad \left. \begin{matrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_{rr}^{gr} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{gr} \end{matrix} \right\} + c^2 \gamma T_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \beta_l(\varrho) \\ \hat{\beta}_l(\varrho) \end{matrix} \right\} \sin(LFo \nu_l) \frac{L\nu_l}{\nu_l^2 + L^2} \left(4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 - L^2}{\mu_k^4 + L^2 \nu_l^2} - \frac{1}{c^2} \right).$$

Dla liczb Fouriera $Fo > 3$ mamy $\exp(-Fo\mu_k^2) \ll 10^{-6}$ i wartości σ_{rr}^{gr} i $\sigma_{\varphi\varphi}^{gr}$ można w związku (14) pominąć. Zatem pozostaną wyrażenia

$$(15) \quad \left. \begin{matrix} \sigma_{rr}^{res} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{res} \end{matrix} \right\} = c^2 \gamma T_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \beta_l(\varrho) \\ \hat{\beta}_l(\varrho) \end{matrix} \right\} \sin(LFo \nu_l) \frac{L\nu_l}{\nu_l^2 + L^2} \left(4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 - L^2}{\mu_k^4 + L^2 \nu_l^2} - \frac{1}{c^2} \right).$$

Wynika stąd, że po wyrównaniu się temperatury wewnątrz walca pozostaną pewne naprężenia resztkowe σ_{rr}^{res} i $\sigma_{\varphi\varphi}^{res}$. Naprężenia te nie będą znikwały z upływem czasu, gdyż — rozbijając sumę znajdującą się po prawej stronie związku (15) na sumę skończoną od $l = 1$ do $l = L_0$ oraz sumę nieskończoną od $l = L_0 + 1$ i dobierając odpowiednio L_0 — można wyróżnić w obu naprężeniach człon mający własności bardzo zbliżone do własności funkcji okresowej.

Uwaga powyższa wynika z postaci równania

$$(16) \quad J_0(\nu) - \frac{2c^2}{\nu} J_1(\nu) = 0,$$

którego pierwiastkami są wielkości ν_l , znajdujące się w argumentcie sinusa, stojącego pod rozważaną sumą. Dla dużych wartości ν , pierwiastki równania (16) można dobrze przybliżyć pierwiastkami równania

$$(17) \quad \frac{\nu}{2c^2} = \operatorname{tg} \left(\nu - \frac{\pi}{4} \right),$$

którego postać można otrzymać, zastępując funkcje $J_0(\nu)$ i $J_1(\nu)$ odpowiednimi wzorami asymptotycznymi [6]. Pierwiastki równania (17) są postaci

$$\nu_l = \pi l + \frac{3\pi}{4} - \varepsilon_l,$$

gdzie $\lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l = 0$, $0 < \varepsilon_l < \frac{1}{l}$.

Jeśli teraz w związku (15) oznaczyć $\Omega_l = Lv_l$, to łatwo można zauważyć, że dla l większych od odpowiednio dużego L_0

$$\Omega_l = \frac{4l+3}{4} \pi L - \varepsilon_l L.$$

Zatem, aby wspomniana suma nieskończona opisywała funkcję mającą własności zbliżone do własności funkcji okresowej, trzeba przyjąć $L_0 \gg L$.

Naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$, dane związkami (10) i (11) są funkcjami dwóch bezwymiarowych zmiennych: $q = r/a$ i $Fo = \frac{\kappa t}{a^2}$, oraz dwóch liczb bezwymiarowych, stałych dla danego

jednorodnego walca: $c^2 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}$ oraz $L = \frac{ac_1}{\kappa}$. Wielkości te utworzone są przez

siedem parametrów: $r, t, \lambda, \mu, \kappa, q_0$ oraz a ; stanowią one podstawę wielkości bezwymiarowych określających rozpatrywane zjawisko [7] s. 58–59. Zatem warunki stałości tych czterech bezwymiarowych parametrów stanowią dla rozważanego problemu termosprężystości kryteria podobieństwa [7]. Widoczne jest, że np. stałość liczb c i L przy różnych kombinacjach parametrów λ, μ, a, κ i q_0 może spowodować jedynie zmianę skali czasu.

Otrzymane postaci naprężeń stanowią zatem wygodne narzędzie do badań modelowych.

Literatura cytowana w tekście

1. H. PARKUS, *Stationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag Wien, 1959; tłum. ros. Moskwa 1963.
2. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
3. T. MURA, *Dynamical thermal stress due to thermal shocks*, Res. Rep. Fac. of Engng., Meiji Univ., 8 (1956).
4. W. DERSKI, *A dynamic problem of thermoelasticity concerning a thin circular plate*, Arch. Mech. Stos., 2, 13 (1961).
5. S. WOELKE, *Naprężenia dynamiczne w cienkiej tarczy kołowej wywołane działaniem niestabilnych źródeł ciepła*, Rozpr. Inż., 3, 17 (1969).
6. G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1962.
7. L. I. SIEDOW, *Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice*, WNT, Warszawa 1968.

Р е з ю м е

ТЕПЛОВЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОМ ЦИЛИНДРЕ ВЫЗВАННЫЕ ВНЕЗАПНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ЕГО КРАЮ

В работе представлены функции, описывающие тепловые напряжения в круглом цилиндре, с учетом инерциальных эффектов, вытекающие из изменения температуры по времени. Эти функции представлены при помощи безразмерных координат и безразмерных параметров, содержащих материальные константы. Анализ результатов показал, в частности, что после выравнивания температуры в цилиндре остаются небольшие напряжения.

S u m m a r y

DYNAMICAL THERMAL STRESSES IN A CIRCULAR CYLINDER DUE TO SUDDEN CHANGE OF TEMPERATURE ON ITS SURFACE

The paper presents the functions describing thermal stresses in a long circular cylinder in the case when its surface undergoes a sudden change of temperature due to heating it to a uniform temperature T_0 . These functions are found from a differential equation of this problem, the inertia effects being taken into account. The stresses are given in terms of dimensionless variables and dimensionless numbers determined by the mechanical and thermal properties of material. The analysis of the results shows that thermal stresses do not vanish when the time tends to infinity.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 lipca 1975 r.

BADANIA ELASTOOPTYCZNE MODELI PŁASKICH Z WYKORZYSTANIEM HOLOGRAFII

WOJCIECH ŚWISTERSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

W połowie lat sześćdziesiątych, gdy rozwinięto techniki holograficzne, zaczęto stosować je w dziedzinie doświadczalnej analizy naprężeń i odkształceń. Jedną z najczęściej stosowanych do analizy naprężeń i odkształceń technik holograficznych jest interferometria.

Zasada interferometrii holograficznej została opisana w szeregu artykułach, [10, 12], także w kraju [13, 17].

Nową technikę interferometrii można z powodzeniem zastosować w pierwszej i najstarszej spośród metod doświadczalnej analizy naprężeń i odkształceń — w metodzie elastoptycznej. Jak wiadomo, wykorzystuje ona światło spolaryzowane do badania rozkładu naprężeń i odkształceń w modelach płaskich lub przestrzennych. Połączenie interferometrii holograficznej z elastoptyką, lub, inaczej mówiąc, wprowadzenie elastoptyki do interferometrii holograficznej, pozwala w większym stopniu wykorzystać falę świetlną jako nośnik informacji.

Pełny opis fali świetlnej wymaga podania amplitudy, fazy częstości, stanu polaryzacji i kierunku propagacji. Wszystkie te parametry można wykorzystać jako nośniki informacji. W elastoptyce konwencjonalnej rejestruje się:

- a) rozkład amplitudy,
- b) częstość (lub długość fali),
- c) stan polaryzacji,
- d) kierunek polaryzacji.

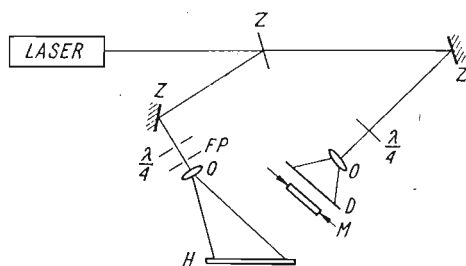
Przy dysponowaniu spójnym źródłem fali świetlnej — laserem, rejestracja fazy daje możliwość zapisania i odtworzenia interferencyjnych obrazów przestrzennych.

Pierwsze próby zastosowania interferometrii holograficznej w elastoptyce dotyczą badania płaskich modeli typu tarcz, w świetle przechodzącym.

O ile konwencjonalne techniki elastoptyczne dostarczają informacji o izoklinach i izochromach w płaskim modelu, wykonanym z tworzywa wykazującego dwójłomność wymuszoną, to interferometria holograficzna wzbogaca tę informację o izopachy, umożliwiając w ten sposób wyznaczenie całkowitego stanu naprężenia w każdym punkcie modelu.

2. Badanie modelu znajdującego się w płaskim stanie naprężenia

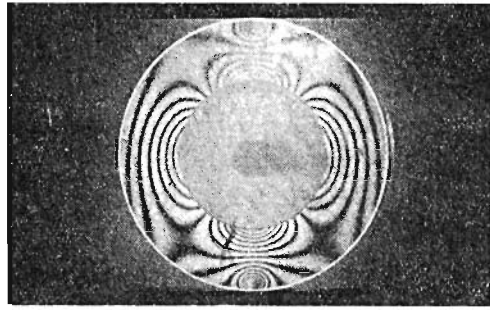
W celu uzyskania obrazu izopach użyto stanowiska, którego schemat zamieszczono na rys. 1. Przedstawiony układ służy do rejestracji hologramów obiektów fazowych. Użyty tu laser helowo-neonowy został wykonany w Laboratorium Instytutu Fizyki UJ w Krakowie. Jego moc wynosi ok. 4 mW przy pracy w modzie TM₀₀, a długość wypromieniowanej fali świetlnej wynosi 6328 Å. Wiązka światła laserowego jest liniowo spola-



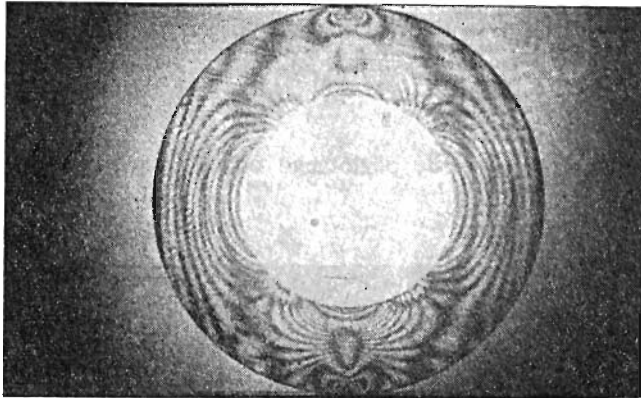
Rys. 1

ryzowana w płaszczyźnie prostopadłej do stołu holograficznego. Na drodze wiązek, przedmiotowej i odniesienia, umieszczono liniowe ćwierćfalówki zorientowane tak, by wytwarzały światło spolaryzowane kołowo i by skrętność polaryzacji obu wiązek była taka sama. Obiekt *O* służy do nadania wiązce światła laserowego takiej rozbieżności, by na matówce (dyfuzor *D*) uzyskać plamę stanowiącą tło dla modelu *M*. Do badań użyto dwu modeli w formie płaskich jednakowych pierścieni o wymiarach: średnice: $D = 71$ mm, $d = 38,5$ mm, grubość $g = 6$ mm. Pierścień z żywicy Epidian 2 — czulej optycznie służył do uzyskania jednoczesnego obrazu izochrom i izopach (rys. 3), zaś pierścień ze szkła organicznego, metapleksu do uzyskania obrazu samych izopach (rys. 2). Obrazy na rys. 2 i 3 uzyskano metodą dwukrotnej ekspozycji: przy modelach odciążonych i obciążonych siłami skupionymi działającymi wzdłuż pionowych średnic modeli. Do ekspozycji użyto płyt holograficznych AGFA-Gevaert 10 E 75. Wszystkie elementy układu holograficznego (stół, uchwyty) nie wchodzi w skład żadnego z zestawów holograficznych dostępnych w handlu, lecz zostały sporządzone w charakterze prototypów. Wiązka odniesienia, spolaryzowana tak samo jak przedmiotowa, odpowiada analizującemu filtrowi w polaryskopie, w tym wypadku z jasnym polem widzenia. Obraz elastoptyczny powstający w modelu jest widoczny dopiero w procesie rekonstrukcji, przy obserwacji obrazu urojonego. Na rys. 2 przedstawiono model z metapleksu obciążony siłą $P = 20$ kp. Izopachy są liniami wyraźnie zarysowanymi i kontrastowymi. Ze względu na niską czułość optyczną metapleksu izochromy nie występują. Na rys. 2 istnieje pionowa oś symetrii, a brak poziomej. Zniekształcenie to spowodowane jest błędem liniowych ćwierćfalówek*).

Dyskusję wpływu błędu od liniowych płytek opóźniających podaje AJOVALASIT [15]. Ponadto na rys. 2 zarys izopach, w okolicy górnego punktu przyłożenia siły, jest mniej wyraźny. Wynika to z faktu jego przemieszczenia się podczas obciążenia. Dolny punkt przyłożenia siły jest nieruchomy.



Rys. 2



Rys. 3

Ustawienie matówki na drodze światła spójnego i spolaryzowanego niewątpliwie pogarsza spójność światła padającego na model, jak również obniża stopień jego polaryzacji. Fotografie 2 i 3 pokazują, że ów niekorzystny wpływ nie jest na tyle silny, by uniemożliwić interpretację obrazów.

Na rys. 3 przedstawiono pierścień z rys. 2. Fotografia ta różni się od poprzedniej obrazem izochrom, nałożonym na obraz izopach i modyfikującym go.

W otoczeniu (tzn. obszarze modelu od $m - 1/2$ do $m + 1/2$) izochrom o rzędach m całkowitych parzystych, izopachy ciemne mają rzędy półówkowe, natomiast w otoczeniu izochrom o rzędach całkowitych nieparzystych ciemnym izochrom należy przyporządkować rzędy całkowite. Powstawanie tego zjawiska w elastoptyce holograficznej wyjaśnili FOURNEY i MATE, [7], a wcześniej NISIDA i SAITO, [18], przy użyciu interferometrii konwencjonalnej. Autorzy ci wyprowadzili wzór na rozkład natężenia światła w obrazie interferometryczno-elastoptycznym, który po przyjęciu niewielkich uproszczeń, można przedstawić w następującej postaci:

$$(1) \quad J = 1 + 2\cos m_p \tau \cos m\pi + \cos^2 m\tau$$

*^o Ćwierćfalówki liniowe do światła laserowego ($\delta = 1582 \text{ \AA}$) Producent: HSB Meakin Ltd 9 Tredown Rd London SE26 5QQ

gdzie m — rząd izochromy, m_p — rząd izopachy.

a) Jeżeli $m = \pm 2k$, gdzie $k = 0, 1, 2 \dots$ (otoczenie izochrom parzystych), to wzór na rozkład natężenia światła na płycie holograficznej ma postać

$$(2) \quad J = 2 + 2\cos m_p \pi$$

b) Jeżeli $m = \pm(2k+1)$ gdzie $k = 0, 1, 2 \dots$ (obszar izochrom nieparzystych), to wzór (1) przyjmuje postać

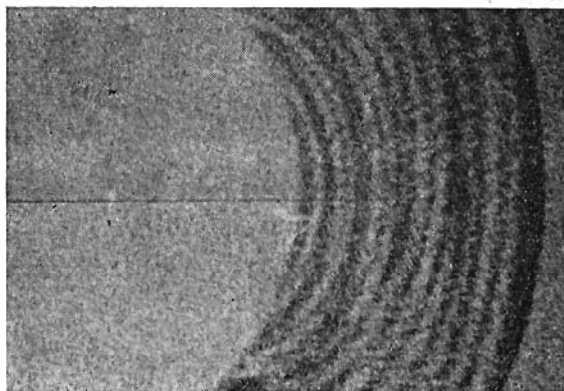
$$(3) \quad J = 2 - 2\cos m_p \pi$$

c) Jeżeli $m = \pm \frac{(2k+1)}{2}$, gdzie $k = 0, 1, 2 \dots$ (miejsce, gdzie występuje izochroma półkrowa — ciemny prążek), to wzór (1) przyjmuje postać

$$(4) \quad J = 1,$$

co oznacza, że izopachy znikają.

Rys. 4. przedstawia powiększenie poziomego odcinka średnicy pierścienia pokaza-



Rys. 4

nego na rys. 3: Brak symetrii względem poziomej średnicy nie jest przeszkodą dla zmierzzonego rozdzielania naprężeń głównych wzdłuż tej średnicy, bowiem nie analizuje się kąta nachylenia linii izopach do rozpatrywania przekroju. Na podstawie fotografii z rys. 4, przy uwzględnieniu anomalnego obrazu izopach, możliwe jest rozdzielanie naprężeń w przekroju poziomym. Prawo elastooptyczne można przyjąć w postaci

$$(5) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = m,$$

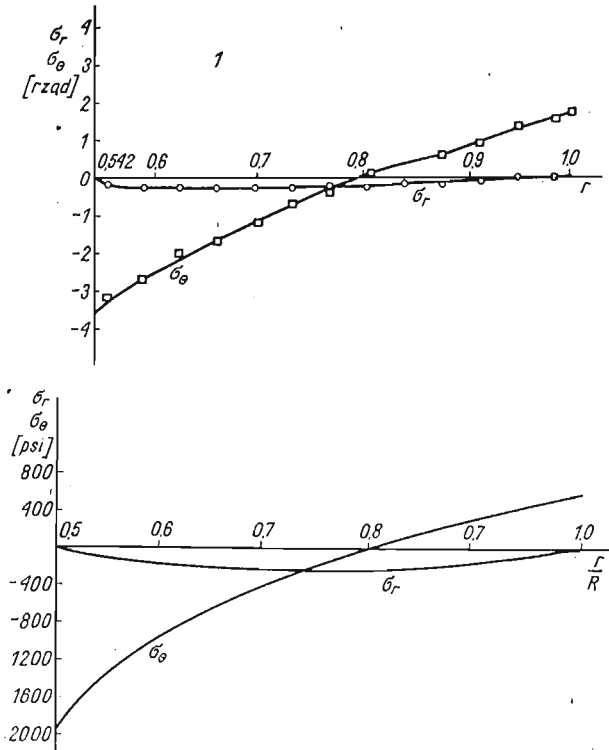
zaś informację uzyskaną z obrazu izopach przedstawić następująco

$$\sigma_1 + \sigma_2 = m_p.$$

Na zewnętrznym, nieobciążonym brzegu, zarówno rząd izopachy jak i rząd izochromy wskazują tę samą wartość naprężenia głównego, a zatem równanie izopach można też napisać w postaci

$$(6) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = km,$$

gdzie $k > 1$, co widać na fotografiach, gdyż prążki izopach są gęstsze. Równania (5) i (6) można rozwiązać ze względu na σ_1 i σ_2 dla dowolnie wielu punktów badanego prze-

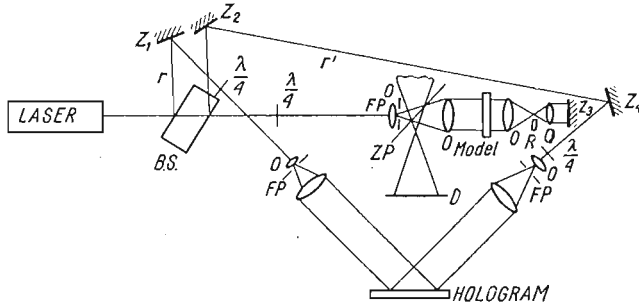


Rys. 5a i b

kroju, a znalezione ich wartości nanieść na wykres w jednostkach rzędu izochrom. Wykres taki przedstawiono na rys. 5a. Na rys. 5b pokazano, dla porównania, teoretyczny wykres σ_1 i σ_2 , bądź σ_r i σ_θ dla pierścienia o stosunku średnic $D/d = 2$. W niniejszych doświadczeniach stosunek ten wynosił 1,85. Charaktery obu wykresów są podobne.

3. Otrzymywanie izochrom i izopach niezależnie

Układ stanowiska, na którym możliwe jest otrzymywanie oddzielnych obrazów izochrom i izopach, przedstawia rys. 6. Jest to układ o 2 wiązkach odniesienia. Wiązka światła liniowo spolaryzowanego przechodzi przez szklany blok, spełniający rolę płytki światłodzielącej. Obie powierzchnie płytki odbijają część światła, dla obu wiązek odniesienia oznaczonych r i r' . Są one spolaryzowane kołowo, mają tę samą skrętność i, pada-



Rys. 6

jąc na płytę holograficzną pod różnymi kątami, zapewniają separację przestrzenną ugiętych fal w procesie rekonstrukcji. Podczas pierwszych dwóch ekspozycji używa się jedynie jednej z wiązek odniesienia np. r . Kołową półfalówkę, która obraca płaszczyznę polaryzacji światła eliptycznie spolaryzowanego o 90° , a nie zmienia stanu polaryzacji światła kołowo spolaryzowanego, umieszcza się tak, by jedynie wiązka, odbijająca się od zwierciadła Z_3 i wchodząca ponownie do modelu, przechodziła przez nią. Powoduje to eliminację izochrom, ponieważ każda z dwóch składowych promienia, rozchodzącego się w modelu wzdłuż kierunków naprężeń głównych, doznaje opóźnień a_1 i a_2 , a przy ponownym przejściu a_2 i a_1 , gdzie indeksy 1 i 2 są związane z kierunkami głównymi. Kołowa półfalówka wykonana jest z kryształu kwarcu, tak, by oś optyczna była prostopadła do jego płaszczyzny, a światło przechodziło równoległe do osi optycznej.

Trzeciej ekspozycji dokonuje się przy modelu obciążonym identycznie jak dla ekspozycji drugiej, przy użyciu wiązki odniesienia r' i usuniętej kołowej półfalówce. Składowe wiązki przedmiotowej doznają opóźnień względnych $2a_1$ i $2a_2$, ponieważ wiązka zachowuje ten sam stan polaryzacji przy dwukrotnym przejściu modelu.

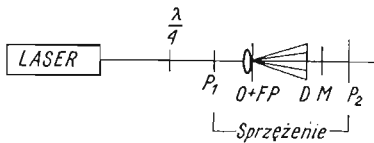
Jeżeli podczas rekonstrukcji użyjemy wiązki r , to otrzymamy obraz izopach, przy użyciu zaś wiązki r' uzyskamy obraz izochrom, niezakłócony izopachami. Można także wykorzystać układ z rys. 3, przy użyciu tylko jednej wiązki odniesienia. Wówczas pomiędzy drugą a trzecią ekspozycją należy obrócić płytę holograficzną wokół osi leżącej w jej płaszczyźnie o pewien kąt, tak by było możliwe rozdzielenie dwu niezależnych od siebie obrazów, zarejestrowanych na płycie. Umieszczenie płyty, podczas rekonstrukcji, w położeniu, jakie zajmowała przy pierwszych ekspozycjach, dostarcza obrazu izopach, a w położeniu odpowiadającym trzeciej ekspozycji, dostarcza obrazu izochrom.

4. Rejestracja obrazu izoklin

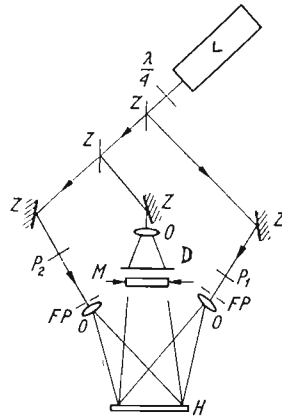
By rejestrować obraz izoklin można posłużyć się polaryskopem, który można otrzymać modyfikując następująco stanowisko przedstawione na rys. 7. Likwiduje się wiązkę odniesienia, a w wiązkę obiektową wstawia się dwa liniowe filtry polaryzacyjne skrzyżowane ze sobą i mechanicznie sprzężone: P_1 za ćwierćfalówką i przed obiektyw, a P_2 między model, a płytę holograficzną (rys. 7.). Jednoczesny obrót P_1 i P_2 dostarcza obserwatorowi

obrazu izoklin o parametrach określonych chwilowym położeniem P_1 i P_2 . Taki wariant rejestracji izoklin jest nieco sztuczny i może przysporzyć trudności interpretacyjnych ze względu na monochromatyczność światła i jednocześnie występowanie izochrom.

Innym holograficznym sposobem jest wykorzystanie spójności światła laserowego. W układzie z rys. 8 każda z dwóch wiązek odniesienia jest spolaryzowana liniowo, a ich



Rys. 7



Rys. 8

płaszczyzny polaryzacji są wzajemnie prostopadłe. Światło padające na model jest spolaryzowane kołowo, skrętność dowolna.

Układ pokazany na rys. 8 jest bardzo czuły na przesunięcia płyty holograficznej. Dla odtworzenia *a posteriori* obrazu izoklin należy wywołać płytę holograficzną nie ruszając jej z miejsca, jak to się dzieje przy holografowaniu w czasie rzeczywistym.

Obraz modelu wytworzony w procesie rekonstrukcji należy obserwować przez liniowy filtr polaryzacyjny. Stosownie do jego pozycji, izokliny o różnych parametrach widoczne są jako półszare linie, ponieważ w procesie rejestracji model oświetlony był światłem kołowo-spolaryzowanym.

5. Podsumowanie

Przedstawione wyniki badań własnych autora oraz opisy stanowisk zaczerpnięte z literatury dają pogląd o obecnym stanie badań w dziedzinie elastoptyki holograficznej. Możliwe jest stosowanie kilku wariantów tej techniki badawczej:

a) uzyskiwanie w interferometrze holograficznym obrazu izopach oraz kojarzenie go z obrazem izochrom i izoklin, otrzymanym z konwencjonalnego polaryskopu.

b) Uzyskiwanie w interferometrze holograficznym jednocześnie obrazu izochrom i izopach oraz kojarzenie go z obrazem izoklin otrzymanym z polaryskopu konwencjonalnego, bądź zmodyfikowanego według rys. 7 stanowiska holograficznego.

c) Uzyskiwanie obrazów elastoptycznych sposobem „czysto holograficznym” w ukła-

dzie jak na rys. 6 i 8. Rejestracji izoklin można dokonać według zasady z rys. 8. Wtedy obie wiązki odniesienia muszą być liniowo spolaryzowane.

Stosując technikę elastooptyki holograficznej można osiągnąć wysoką dokładność pomiarów, które otrzymuje się na drodze prostszej, unikając doświadczalnych metod pomiaru zmian grubości modelu płaskiego lub stosowania przybliżonego całkowania dla znalezienia sumy naprężeń głównych.

Podziękowanie

Badania autora wykonane były w ramach problemu węzłowego nr. 06.2.3 pn. «Rozwój badań, opracowanie konstrukcji i budowa urządzeń laserowych».

Autor wyraża podziękowanie kol. mgr inż. TADEUSZOWI FEUEROWI za wiele cennych uwag merytorycznych, wykorzystanych przy prowadzeniu doświadczeń i redagowaniu niniejszej publikacji.

Literatura cytowana w tekście

1. M. M. FROCHT, *Photoelasticity*, Tom 1, 1941, Tom 2, 1948, J. Wiley Sons.
2. H. WOLF, *Spannungsoptik*, Springer, 1961.
3. C. E. TAYLOR, C. E. BOWMAN, W. P. NORTH, W. F. SWINSON, *Applications of lasers to photoelasticity*, *Exp. Mech.*, **6**, 6 (1966).
4. M. E. FOURNEY, *Application of holography to photoelasticity*, *Exp. Mech.*, **8**, 1 (1968).
5. E. HOSP, G. WUTZKE, *Die Anwendung der Holographie in der ebenen Spannungsoptik*, *Materialprüf.*, **11**, 12 (1969).
6. E. HOSP, G. WUTZKE, *Holographische Ermittlung der Hauptspannungen in ebenen Modellen*, *Materialprüf.*, **12**, 1 (1970).
7. M. E. FOURNEY, K. V. MATE, *Further applications of holography to photoelasticity*, *Exp. Mech.*, **10**, 5 (1970).
8. D. C. HOLLOWAY, R. H. JOHNSON, *Advancements in holographic photoelasticity*, *Exp. Mech.*, **11**, 2 (1971).
9. R. J. SANFORD, A. J. DURELLI, *Interpretation of fringes in stress-holo-interferometry*, *Exp. Mech.*, **11**, 4 (1971).
10. R. O'REGAN, T. D. DUDDERAR, *A new holographic interferometer for stress analysis*, *Exp. Mech.*, **11**, 6 (1971).
11. J. D. HOVANESIAN, *Elimination of isochromatics in photoholographic photoelasticity*, *Strain*, Oct. 1971.
12. S. K. DHIR, H. A. PETERSON, *An application of holography to complete stress analysis of photoelastic models*, *Exp. Mech.*, **11**, 12 (1971).
13. M. DASZKIEWICZ, *Holografia w świetle spolaryzowanym — elastooptyka holograficzna*, Ref. nr 7 z Konf. Nauk. nt. Holografia — jej zastosowania w nauce i technice, Warszawa 1973.
14. J. CERNOSEK, S. McDONALD, *On the effect of quarter-wave-plate errors in stress-holo-interferometry*, *Exp. Mech.*, **14**, 10 (1974).
15. A. AJOVALASIT, *Holographic photoelasticity: influences of inaccuracies of optical retarders on isochromatics and isopachics*, *J. Strain Anal.*, **9**, 1 (1974).
16. A. ASSA, A. A. BETSER, *A new method for the recording and independent reconstruction of the isopachic and isochromatic fringe patterns with a single hologram*, TAE Report 181, Technion I.I.T., Haifa 1973.
17. T. FEUER, M. J. MATCZAK, *Podstawy interferometrii holograficznej*, *Czasopismo Techniczne*, 4M (1973).
18. M. NISIDA, H. SAITO, *A new interferometric method of two-dimensional stress analysis*, *Exp. Mech.*, **4**, 12 (1974).

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ
ФОТОУПРУГОСТИ

В работе приведены результаты экспериментов проведенных с целью получения изопах на плоском кольце, подвергнутом сжатию двумя сосредоточенными силами, действующими вдоль вертикального диаметра. Применен метод голографической фотоупругости. На основании экспериментальных данных разделены главные напряжения в симметричном сечении. Приведены выводы и сравнение экспериментальных данных с теоретическим решением. Представлено современное состояние знаний в области голографической фотоупругости.

Summary

PHOTOELASTIC INVESTIGATION OF TWO-DIMENSIONAL MODELS BY MEANS OF
HOLOGRAPHY

In the paper are shown the results of original experiments. They were carried out in order to obtain the isopachic fringe patterns on a plane ring subjected to two external forces acting along the vertical diameter. A method of holographic photoelasticity is applied. The experimental data obtained allowed the two principal stresses to be separated along the symmetry line. The conclusions are drawn and a comparison with the theoretical solution is made. The present state of knowledge in the field of holographic photoelasticity is reported.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW
KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 stycznia 1976 r.

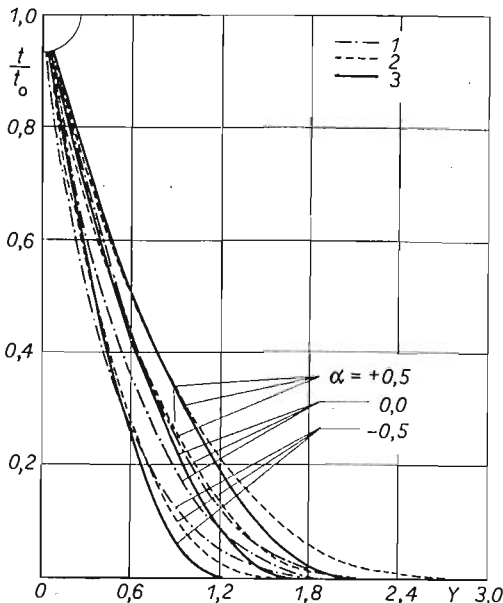
OKREŚLENIE NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY W ŚCIANCIE PŁASKIEJ PRZY
ZMIENNYM WSPÓLCZYNNIKU PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

KAZIMIERZ RUP, JAN TALER (KRAKÓW)

1. Wstęp

Obecnie większość zagadnień przewodnictwa cieplnego analizuje się przy pomocy metod przybliżonych. Zastosowana w pracy metoda bilansu cieplnego [1], jest obok metod wariacyjnych [2, 3, 4, 5] jedną z najbardziej uniwersalnych analitycznych metod przybliżonych rozwiązywania, zarówno liniowych, jak i nieliniowych równań różniczkowych przewodzenia ciepła. Rozwiązanie problemu wymienionego w tytule przeprowadzono w dwóch etapach: najpierw określono pole temperatury w ścianie przy założeniu stałego współczynnika przewodnictwa cieplnego przy pomocy metody bilansu cieplnego, a następnie wykorzystując metodę linearyzacji optymalnej [6] uwzględniono zależność współczynnika przewodnictwa cieplnego od temperatury. Rozwiązania tego problemu można otrzymać stosując metodę bilansu cieplnego i wykorzystując transformację [1]

$$(1.1) \quad \vartheta(t) = \int_0^t c q dt,$$



Rys. 1. Rozkład temperatury w ścianie płaskiej w I fazie wnikania ciepła: 1 — rozwiązanie dokładne, 2 — rozwiązanie Goodmana, 3 — rozwiązanie otrzymane w pracy

gdzie c — ciepło właściwe, ρ — gęstość, t — temperatura, lub transformację Kirchhoffa

$$(1.2) \quad \vartheta(t) = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t \lambda(t) dt,$$

gdzie λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Sposób określania nieustalonego pola temperatury zastosowany w niniejszej pracy jest nieco dokładniejszy od metody bilansu cieplnego z wykorzystaniem transformacji (1.1) [1], co przedstawiono na rys. 1. Ponadto sposób ten można zastosować w przypadku konwekcyjnej wymiany ciepła na powierzchni ciała, tj. dla warunków granicznych III rodzaju, przy współczynniku przewodnictwa cieplnego zależnym od temperatury. Wykorzystanie metody bilansu cieplnego w tym przypadku jest niemożliwe ze względu na nieodpowiedniość transformacji (1.1) i (1.2), co przedstawiono w pracy [7].

Oznaczenia

$a = \frac{\lambda}{c\rho}$	współczynnik wyrównania temperatury,
a_0, a_1, a_2	stałe,
b_0, b_1, b_2	stałe,
c	ciepło właściwe,
$Fo = \frac{\alpha\tau}{L^2}$	liczba Fouriera,
L	grubość płyty,
t	temperatura,
t_0	temperatura powierzchni,
t_p	temperatura początkowa,
u	temperatura powierzchni izolowanej,
x	współrzędna,
α	stała,
δ	głębokość wnikania ciepła,
λ	współczynnik przewodnictwa cieplnego,
ρ	gęstość
τ	czas.

2. Charakterystyka metody bilansu cieplnego i metody linearyzacji optymalnej

Metoda bilansu cieplnego wykorzystuje pojęcie głębokości wnikania ciepła $\delta(\tau)$ (głębokości penetracji), którą można określić jako największą odległość na jaką w danym czasie wnika ciepło tzn. w odległości $x \geq \delta(\tau)$ od powierzchni ciała temperaturę można w przybliżeniu przyjąć równą temperaturze początkowej i ciepło nie jest przekazywane na odległość większą niż $\delta(\tau)$. Pojęcie głębokości wnikania ciepła zostało pierwszy raz wprowadzone przez BIOTA [5], a także szeroko wykorzystywane w metodach wariacyjnych innych autorów np. VUJANOVICA [2] oraz LEBONA-LAMBERMONTA [4]. W metodzie bilansu cieplnego rozpatrywane są dwie fazy wnikania ciepła. W pierwszej fazie wnikania ciepła głębokość penetracji jest mniejsza od grubości ciała (płyty). W drugiej fazie «front» ciepła osiąga przeciwną ścianę ciała, której temperatura ulega wówczas zmianie.

Punktem wyjściowym prowadzącym do całki bilansu cieplnego jest równanie przewodnictwa cieplnego:

$$(2.1) \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

gdzie τ — czas, $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — współczynnik wyrównania temperatury, x — współrzędna.

Następnie całkując równanie (2.1) w granicach od 0 do $\delta(\tau)$ otrzymuje się

$$(2.2) \quad c\rho \int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial t}{\partial \tau} dx = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\delta(\tau)} - \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Uwzględniając reguły różniczkowania całki po parametrze (reguła Leibniza) przekształcona zostanie lewa strona równania (2.1), która przyjmuje postać

$$(2.3) \quad c\rho \left\{ \frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} t(x, \tau) dx - t[\delta(\tau), \tau] \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} \right\} = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\delta(\tau)} - \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Ponieważ w pierwszej fazie wnikania ciepła

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\delta(\tau)} = 0$$

(co wynika z definicji głębokości wnikania ciepła),
oraz

$$t[\delta(\tau), \tau] = t_p$$

(również z definicji głębokości wnikania ciepła),
to równanie bilansu ciepła ma postać

$$(2.4) \quad \frac{d}{d\tau} [\theta_I - c\rho t_p \delta(\tau)] = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

gdzie

$$\theta_I = c\rho \int_0^{\delta(\tau)} t_1 dx, \quad \text{dla } 0 \leq \delta(t) \leq L,$$

t_p — temperatura początkowa ciała.

W drugiej fazie wnikania ciepła głębokość penetracji jest równa grubości ścianki tj. $\delta(\tau) = L$ i wówczas równanie bilansu po uwzględnieniu faktu, że $t(x, \tau)|_{x=L} = u(\tau)$ wynika z równania (2.3) i ma postać

$$(2.5) \quad \frac{d\theta_{II}}{d\tau} = \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=L} - \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

gdzie

$$\theta_{II} = c\rho \int_0^L t dx,$$

$u(\tau)$ — temperatura przeciwległej ścianki.

Następnie scharakteryzowana zostanie metoda optymalizacji linearnej, zastosowana do równań przewodnictwa cieplnego przez VUJANOVICA [6].

W przypadku gdy współczynnik przewodnictwa cieplnego zmienia się z temperaturą pole temperatury opisuje równanie

$$(2.6) \quad c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right].$$

W metodzie linearyzacji optymalnej rozważa się równanie liniowe, które «optymalnie» linearyzuje równanie (2.6):

$$(2.7) \quad c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \psi \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

gdzie ψ jest parametrem nastawialnym, dobieranym w ten sposób, aby równanie (2.7) aproksymowało równanie (2.6) w sposób optymalny.

Wartość ψ_{opt} równa się

$$(2.8) \quad \psi_{opt} = \frac{B+C}{A},$$

gdzie

$$(2.9) \quad \begin{aligned} A &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right]^2 dx d\tau, \\ B &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{x_0}^{x_1} \lambda'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \left[\frac{\partial t}{\partial x} \right]^2 dx d\tau, \\ C &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(t) \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right]^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.10) \quad \lambda'(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt}.$$

Przedziały całkowania zależą od rozważanego problemu. Dokładny opis metody można znaleźć w pracy [6].

3. Określenie pola temperatury

Przedmiotem niniejszej pracy jest określenie pola temperatury w ścianie płaskiej przy następujących warunkach brzegowych:

$$(3.1) \quad t(x, \tau)|_{x=0} = t_0, \quad \tau_0 > 0$$

$$(3.2) \quad \lambda \frac{t(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0,$$

gdzie λ — współczynnik przewodności cieplnej ścianki w temperaturze t , L — grubość ścianki oraz warunku początkowym

$$(3.3) \quad t_p = 0.$$

Współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału ścianki określony jest związkiem

$$(3.4) \quad \lambda = \lambda_0 \left(1 + \alpha \frac{t}{t_0} \right),$$

gdzie α — stała, t — temperatura w rozpatrywanym punkcie ścianki.

Najpierw przy pomocy metody bilansu cieplnego określono pole temperatury przy założeniu $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$, a następnie wykorzystując metodę linearyzacji optymalnej uwzględniono zmienność współczynnika przewodności cieplnej od temperatury.

a) *Analiza pola temperatury przy $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$.* Pole temperatury aproksymowane zostanie wielomianem drugiego stopnia:

$$(3.5) \quad t_1(x, \tau) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Stałe a_0 , a_1 i a_2 wyznaczone zostaną z (3.1) oraz z warunków:

$$(3.6) \quad t_1(x, \tau)|_{x=\delta} = 0,$$

$$(3.7) \quad \lambda_0 \frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = 0.$$

Związki (3.6) i (3.7) wynikają z definicji głębokości wnikania ciepła.

Ostatecznie po wstawieniu a_0 , a_1 i a_2 do (3.5) otrzymuje się wyrażenie określające temperaturę

$$(3.8) \quad t_1(x, \tau) = t_0 \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq \delta,$$

$$(3.9) \quad t_1(x, \tau) = 0, \quad \delta \leq x \leq L.$$

Równanie różniczkowe dla określenia $\delta(\tau)$ otrzymuje się podstawiając (3.8) do (2.4)

$$(3.10) \quad \delta \frac{d\delta}{d\tau} = 6a.$$

Po scałkowaniu równania (3.10) przy warunku początkowym $\delta(\tau)|_{\tau=0} = 0$ otrzymuje się

$$(3.11) \quad \delta = 3,464 \sqrt{\tau a}.$$

W drugiej fazie wnikania ciepła pole temperatury również aproksymowane jest wielomianem II stopnia

$$(3.12) \quad t_{II}(x, \tau) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$

Stałe b_0 , b_1 i b_2 otrzymuje się z warunków (3.1) i (3.2) oraz z warunku

$$t(x, \tau)|_{x=L} = u(\tau).$$

Po wstawieniu wyznaczonych b_0 , b_1 i b_2 do (3.12) otrzymuje się

$$(3.13) \quad t_{II}(x, \tau) = (t_0 - u) \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 + u, \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1.$$

Temperaturę $u(\tau)$ wyznacza się z równania różniczkowego otrzymanego przez podstawienie (3.13) do (2.5):

$$(3.14) \quad \frac{du}{d\tau} = -\frac{3a}{L^2} [u(\tau) - t_0],$$

z którego po scałkowaniu przy warunku początkowym $u(\tau)|_{\tau=\tau_1} = 0$ otrzymuje się następującą zależność na $u(\tau)$:

$$(3.15) \quad u(\tau) = t_0 [1 - e^{-3(Fo - Fo_1)}], \quad Fo \geq Fo_1.$$

Czas τ_1 wyznacza się z związku (3.11) po podstawieniu $\delta = L$.

Liczba Fouriera odpowiadająca τ_1 wynosi $Fo_1 = \frac{1}{12}$.

b) *Analiza pola temperatury przy $\lambda = \lambda_0 \left(1 + \alpha \frac{t}{t_0}\right)$.* Podstawiając $t_1(x, \tau)$ do zależności (2.9) i całkując odpowiednio w granicach: $x_0 = 0$, $x_1 = \delta(\tau)$ i $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \tau|_{x=\delta}$, otrzymuje się

$$(3.16) \quad \begin{aligned} A &= \frac{4}{(12a)^{3/2}} \Phi(\tau), \\ B &= \frac{8\lambda_0\alpha}{3(12a)^{3/2}} \Phi(\tau), \\ C &= \left[\frac{4\lambda_0}{(12a)^{3/2}} + \frac{4\lambda_0\alpha}{3(12a)^{3/2}} \right] \Phi(\tau), \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{t_0^2}{\tau^{3/2}} d\tau.$$

Po podstawieniu zależności (3.16) do (2.8) mamy:

$$(3.17) \quad \psi_{opt} = \lambda_0(1 + \alpha).$$

Podstawiając ψ_{opt} zamiast λ_0 do zależności (3.11), zależność określająca pole temperatury w I fazie wnikania ciepła (3.8) ma postać

$$(3.18) \quad \begin{aligned} t_I &= t_0 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{12a(1+\alpha)\tau}} \right)^2, & 0 \leq x \leq \delta, \\ t_I &= 0, & \delta \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Przeprowadzając analogiczne rozważania dla drugiej fazy wnikania ciepła otrzymuje się następujące zależności:

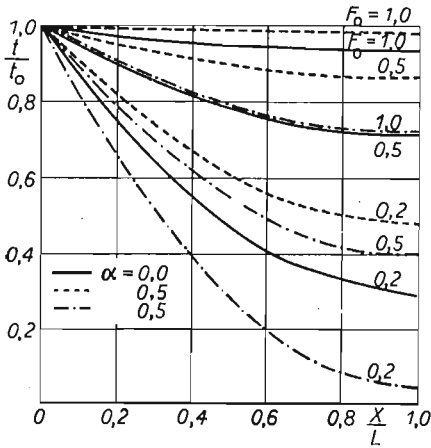
$$(3.19) \quad \psi_{opt} = \lambda_0(1 + \alpha)$$

oraz

$$(3.20) \quad t_{II}(x, \tau) = (t_0 - u) \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 + u, \quad Fo \geq Fo_1,$$

gdzie

$$(3.21) \quad u = t_0 [1 - e^{-3(1+\alpha)(Fo - Fo_1)}], \quad Fo \geq Fo_1.$$



Rys. 2. Rozkład temperatury w ścianie płaskiej w II fazie wnikania ciepła dla różnych liczb Fouriera

Na rys. 1 i 2 przedstawione zostały zmiany temperatury odpowiednio w I i II fazie wnikania ciepła przy współczynniku przewodnictwa cieplnego zależnym od temperatury.

Na rys. 1 porównano otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym i zależnością GOODMANA [1]

$$(3.22) \quad \frac{t}{t_0} = \left[1 - \frac{Y}{\sqrt{6(1+\alpha)}} \right]^3,$$

gdzie

$$Y = \frac{x}{2} \frac{1}{\sqrt{a\tau}}.$$

Zależność (3.22) otrzymano wykorzystując transformację (1.1) i aproksymując pole temperatury wielomianem 3 stopnia

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(1 - \frac{x}{\delta(\tau)} \right)^3,$$

gdzie

$$\vartheta_0 = \int_0^{t_0} c\rho dt$$

i stosując dalej do przetransformowanego równania różniczkowego (2.1)

$$(3.24) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right]$$

metodę bilansu cieplnego identyczną jak w przypadku równania (2.1).

4. Wnioski

Zastosowanie metody bilansu cieplnego i następnie metody linearyzacji optymalnej pozwala na łatwe, przybliżone rozwiązanie nieliniowego równania przewodnictwa cieplnego. Zaletą metody jest stosunkowo duża łatwość rozwiązywania nieliniowych zagadnień

przewodnictwa cieplnego w porównaniu z metodami wariacyjnymi. Dokładność aproksymacji rozwiązania ściślego wzrasta wraz ze wzrostem α a więc przeciwnie niż w rozwiązaniu T. R. Goodmana [1].

Literatura cytowana w tekście

1. T. R. GOODMAN, *Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer*, Vol. 1, 1964.
2. B. VUJANOVIĆ, *A Variational Principle for Non-Conservative Dynamical Systems*, ZAMM, 55 (1975).
3. B. KRAJEWSKI, *On a direct variational method for nonlinear heat transfer*, Inter. J. Heat and Mass Transfer, 4, 18 (1975).
4. G. LEBON, J. CASAS-VAZQUEZ, *Lagrangian formulation of unsteady non-linear heat transfer problems*, J. Engin. Math., 1, 8 (1974).
5. M. A. BIOT, *New methods in heat flow analysis with application to flight structures*, J. Aeronaut. Sci., 24 (1957).
6. B. VUJANOVIĆ, *Application of the optimal linearization method to the heat transfer problem*, Inter. J. Heat and Mass Transfer, 6, 16 (1973).
7. E. M. KOOPMAN, R. N. SPARROW, *Heat transfer in reactor components having temperature — dependent thermal conductivity*, Nuclear Sci. and Engin., 3, 42 (1970).

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Применяя по-очередно интегральный метод теплового баланса и метод оптимальной линейризации, получено приближенное распределение температуры в плоской стенке в двух фазах проникания тепла, при коэффициенте теплопроводности, линейно зависящим от температуры. Полученные результаты удовлетворительно аппроксимируют точные решения.

Summary

DETERMINATION OF TRANSIENT TEMPERATURE FIELDS IN PLANE WALLS OF VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY

Applying successively the heat balance integral method and the optimal linearization method, the transient temperature distribution is determined in a plane wall with linear dependence of thermal conductivity on temperature, in two phases of heat penetration. The results obtained approximate fairly well the exact solutions.

INSTYTUT APARATURY PRZEMYSŁOWEJ
I ENERGETYKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 lutego 1976 r.

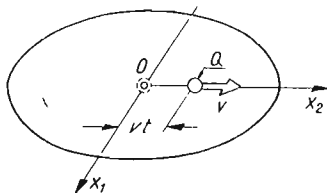
O WYZNACZANIU NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH WYWOŁANYCH RUCHOMYMI OBCIĄŻENIAMI
TERMICZNYMI

JÓZEF KUBIK (POZNAŃ)

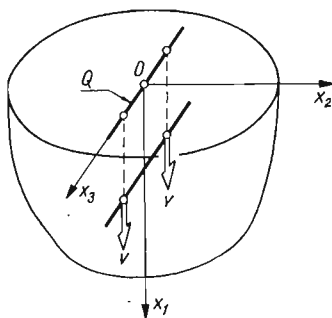
Oznaczenia

- α_t współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej,
- $\eta(\xi)$ funkcja Heaviside'a,
- $\delta(\xi)$ funkcja Diraca,
- G moduł odkształcenia postaciowego,
- κ współczynnik przewodzenia temperatury,
- λ stała Lamégo,
- σ_{ij} współrzędne tensora naprężenia,
- t czas,
- T temperatura względna, odniesiona do stałej temperatury stanu beznaprężeniowego,
- u_i współrzędne wektora przemieszczenia,
- x_i, ξ_i współrzędne kartezjańskie.

Badanie efektów mechanicznych wywołanych ruchomymi obciążeniami termicznymi w ośrodkach sprężystych stanowi istotną część obszernej dziedziny termosprężystości i odgrywa dużą rolę w praktyce inżynierskiej. Pola naprężeń i odkształceń w takich przypadkach najczęściej są wywołane ruchomymi źródłami ciepła o charakterze punktowym,



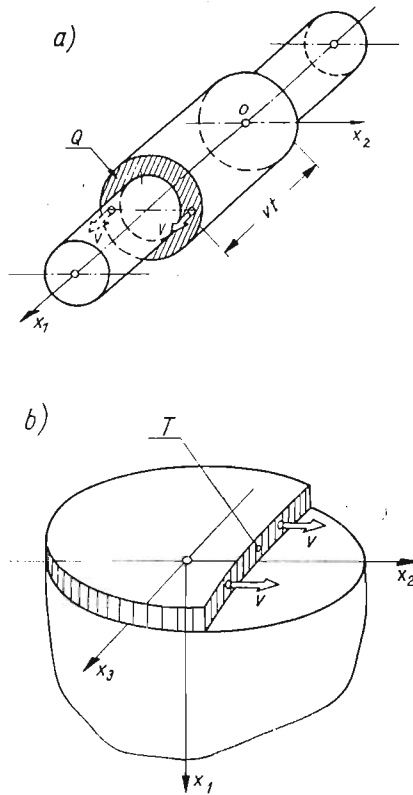
Rys. 1



Rys. 2

liniowym lub powierzchniowym, o zmiennej lub stałej wydajności w czasie. Źródła mogą się przemieszczać w ośrodku lub po jego powierzchni z prędkością v . Przykładowo, działanie ruchomych źródeł przedstawiono na rys. 1, 2, 3a, b.

Z wyżej wymienionym charakterem obciążeń termicznych spotykamy się w licznych procesach technologicznych, np. hartowania powierzchniowego, spawania, napawania,



Rys. 3

zgrzewania liniowego oraz przy opływach elementów konstrukcyjnych (powłoki, rury) przez płyny o podwyższonej lub obniżonej temperaturze w porównaniu z temperaturą elementu. Ponadto ruchome obciążenia termiczne występują (obok obciążeń typu mechanicznego) przy każdej kinematycznej współpracy elementów konstrukcji z uwzględnieniem tarcia.

Prezentowana praca zawiera pewien przegląd dotychczas publikowanych rozwiązań zadań termosprężystości z ruchomymi źródłami ciepła (por. [1]–[33]). Przedmiotem dyskusji są warunki stosowania ruchomych układów współrzędnych, kolejności stosowania transformacji całkowitych do ruchomych obciążeń termicznych oraz budowy rozwiązań równań termosprężystości przy wykorzystaniu funkcji Greena.

1. Ruchome układy współrzędnych

Wyznaczanie naprężeń cieplnych wywołanych ruchomymi obciążeniami termicznymi sprowadza się do rozwiązania podstawowego układu równań termosprężystości:

$$(1.1) \quad \nabla^2 T - \frac{1}{\alpha} \dot{T} = -\frac{1}{\alpha} Q(x_i, t, v),$$

$$(1.2) \quad G \nabla^2 u_i + (\lambda + G) \partial_i \varepsilon_{ii} - (3\lambda + 2G) \alpha_i \partial_i T = \rho \ddot{u}_i,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i, l = 1, 2, 3$$

przy zadanych warunkach początkowych i brzegowych. Równanie (1.1) jest równaniem przewodnictwa cieplnego, natomiast równania (1.2) są znanymi równaniami przemieszczeniowymi.

W większości prac poświęconych omawianym zagadnieniom, do rozwiązywania równania przewodnictwa (1.1) wykorzystuje się ruchome układy współrzędnych związane z poruszającymi się źródłami ciepła. Przewodzi to do znacznych ułatwień przy budowie rozwiązań tego równania. W takim przypadku, po zastosowaniu liniowej transformacji układu współrzędnych według związków

$$\xi_i = x_i - v_i t, \quad (i = 1, 2, 3), \quad v_i = \text{const},$$

równanie przewodnictwa (1.1) w ruchomym układzie współrzędnych ξ_i ma postać

$$(1.3) \quad \nabla_{\xi}^2 \hat{T} - \frac{1}{\kappa} (\vec{v} \cdot \nabla_{\xi} \hat{T}) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = - \frac{1}{\kappa} \hat{Q}(\xi_i, t),$$

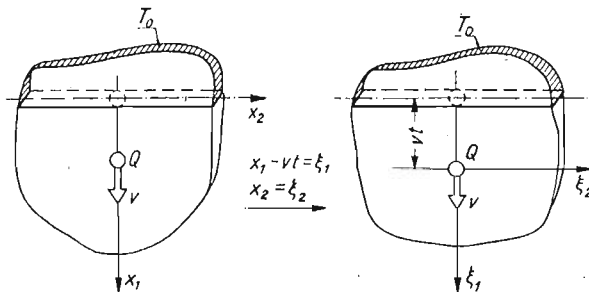
$$\nabla_{\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right),$$

przy czym rozważane źródło ciepła jest nieruchome. Jeśli ponadto intensywność źródła nie zależy od czasu, czyli $\hat{Q} = \hat{Q}(\xi_i)$ oraz wpływ warunków początkowych można pominąć, to pochodna $\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \equiv 0$ i równanie (1.3) przyjmuje postać

$$(1.4) \quad \nabla_{\xi}^2 \hat{T} - \frac{1}{\kappa} (\vec{v} \cdot \nabla_{\xi} \hat{T}) = - \frac{1}{\kappa} \hat{Q}(\xi_i).$$

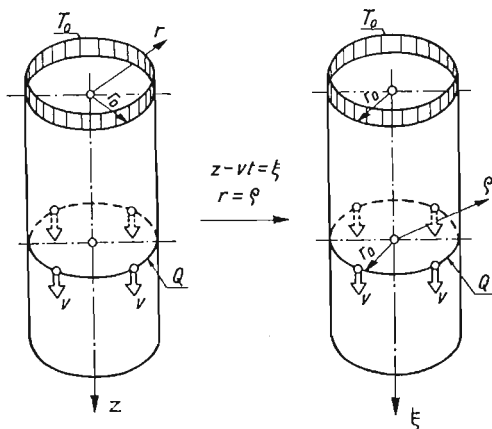
Równanie (1.4) odpowiada quasi-ustalonym zagadnieniom termosprężystości. Należy nadmienić, że większość prac poświęconych ruchomym obciążeniom termicznym dotyczy właśnie zagadnień quasi-ustalonych.

Możliwość stosowania ruchomych układów współrzędnych zależy od kształtu i ruchu rozważanych źródeł oraz od kształtu badanego obszaru. W obszarze nieograniczonym i przy źródłach o niezmiennym w czasie kształcie, stosowanie ruchomych układów współrzędnych ułatwia wyznaczanie pól temperatur i naprężeń. W przypadku działania ruchomo-



Rys. 4

mych źródeł w ośrodkach ograniczonych wprowadzanie ruchomych układów współrzędnych nie ułatwia procesu rozwiązywania równań termosprężystości (1.1) i (1.2). Wtedy bowiem kosztem «unieruchomienia» źródła ciepła brzeg obszaru staje się ruchomy. Ilustrują to przykłady pokazane na rys. 4 i 5. W takich przypadkach przy wyznaczaniu rozwiązań pojawiają się trudności ze stosowaniem transformacji Laplace'a.



Rys. 5

Analogiczne uwagi dotyczą przypadków, w których zmienia się w czasie kształt geometryczny obciążeń termicznych, np.: gdy źródła ciepła typu $Q = T_0 \eta(vt-r)\eta(t)$ lub $Q = T_0 \delta(R-vt)\eta(t)$, działają odpowiednio na powierzchni koła o zmieniającym się w czasie promieniu r lub na powierzchni kuli o zmiennym w czasie promieniu R . Wygodniej zatem rozważać obszary ograniczone we współrzędnych nieruchomych związanych z tymi obszarami.

2. Wykorzystanie funkcji Greena

Przy budowie rozwiązań równań termosprężystości w przypadku ruchomych obciążeń termicznych możemy również wykorzystać metodę funkcji Greena. Znajomość odpowiednich funkcji Greena pozwoli nam otrzymać rozwiązania dla ruchomych źródeł ciepła o wydatku zmiennym w czasie i względem miejsca.

Rozwiązania równań termosprężystości dla chwilowego źródła ciepła $Q_0 \delta(\xi_i) \delta(t)$ w przestrzeni nieograniczonej w układzie współrzędnych ξ_i wyznaczono w pracy [31]. Rozwiązania te wyznaczono w ruchomym układzie współrzędnych ξ_i , który porusza się ze stałą prędkością v względem układu nieruchomego x_i w kierunku osi x_3 . Otrzymane w tym przypadku wyniki dla temperatury $\hat{T}^*(\xi_i, t)$ i przemieszczeń $u_j^*(\xi_i, t)$ można wykorzystać przy wyznaczaniu temperatury i przemieszczeń dla źródła o wydatku zmiennym w czasie w układzie ξ_i według wzorów

$$(2.1) \quad \begin{cases} \hat{T}(\xi_i, t) = \int_0^t \hat{Q}(\tau) \hat{T}^*(\xi_i, t-\tau) d\tau, \\ \hat{u}_j(\xi_i, t) = \int_0^t \hat{Q}(\tau) \hat{u}_j^*(\xi_i, t-\tau) d\tau. \end{cases}$$

Jeżeli ponadto źródło działa na pewnym obszarze I , to temperaturę i przemieszczenia otrzymamy na podstawie związków:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \hat{T}^F(\xi_i, t) = \int_I \hat{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) \hat{T}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3, \\ \hat{u}_j^F(\xi_i, t) = \int_I \hat{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) \hat{u}_j^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \end{cases}$$

Posługiwanie się funkcjami $\hat{T}^*(\xi_i, t)$ i $\hat{u}_j^*(\xi_i, t)$, jak łatwo zauważyć, ogranicza się tylko do źródeł ciepła, które w układzie ξ_i nie zmieniają w czasie zajmowanego obszaru.

Takie ograniczenia nie występują natomiast, gdy funkcję Greena dla poruszających się źródeł wyznaczmy w układzie nieruchomym x_i . Jeżeli np. wyznaczmy rozkład temperatury $T^\delta(x_i, t; v)$ i naprężeń $\sigma_{ij}^\delta(x_i, t; v)$ dla poruszającego się źródła punktowego o postaci $Q_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(vt - x_3) \eta(t)$, to dla źródeł liniowych typu

$$(2.3) \quad \begin{cases} 1^\circ Q_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \eta(vt - x_3) \eta(t), \\ 2^\circ Q_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \eta(x_3 - vt) \eta(t), \end{cases}$$

temperaturę i naprężenia otrzymamy odpowiednio przez superpozycję

$$(2.4) \quad \begin{cases} T^{1^\circ}(x_i, t; v) = \int_0^{vt} T^\delta(x_1, x_2, x_3 - u, t; v) du, \\ \sigma_{ij}^{1^\circ}(x_i, t; v) = \int_0^{vt} \sigma_{ij}^\delta(x_1, x_2, x_3 - u, t; v) du, \end{cases}$$

oraz

$$(2.5) \quad \begin{cases} T^{2^\circ}(x_i, t; v) = \int_{vt}^\infty T^\delta(x_1, x_2, x_3 - u, t; v) du, \\ \sigma_{ij}^{2^\circ}(x_i, t; v) = \int_{vt}^\infty \sigma_{ij}^\delta(x_1, x_2, x_3 - u, t; v) du. \end{cases}$$

Wykorzystując natomiast temperaturę $\bar{T}^\delta(r, z, t; v)$ i naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}^\delta(r, z, t; v)$ wywołane działaniem źródła $Q_0 \delta(z) \delta(vt - r) \eta(t)$, możemy wyznaczyć temperaturę i naprężenia dla źródła działającego na powierzchni koła o zmiennym w czasie promieniu, tzn. dla źródła o postaci $Q_0 \delta(z) \eta(vt - r) \eta(t)$. Poszukiwane rozwiązania mają postać

$$(2.6) \quad \begin{cases} T^n(r, z, t; v) = \int_0^{vt} \bar{T}^\delta(r - u, z, t; v) du, \\ \sigma_{ij}^n(r, z, t; v) = \int_0^{vt} \bar{\sigma}_{ij}^\delta(r - u, z, t; v) du. \end{cases}$$

W przytoczonych wyżej rozważaniach zakładaliśmy milcząco, że prędkość ruchu źródła v jest stała. W przypadku prędkości v zmiennej w czasie we wszystkich otrzymanych wzorach należy w miejsce vt podstawić $\int_0^t v dt$.

O słuszności stosowanej we wzorach (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) superpozycji świadczą prace autora oraz prace [1] i [32].

3. Stosowanie transformacji całkowych

Przy rozwiązywaniu równań (1.1) i (1.2) wykorzystuje się najczęściej całkową transformację względem współrzędnych miejsca oraz transformację Laplace'a względem czasu.

W przypadku rozważania ruchomych obciążeń termicznych (ruchome źródła ciepła lub ruchome warunki brzegowe) przy konstrukcji rozwiązań podstawowych, wyżej wymienione transformacje całkowe należy stosować z pewną ostrożnością. Omówimy to bliżej na przykładzie płaskiego ruchomego źródła ciepła działającego w przestrzeni nieograniczonej. Kierunek ruchu źródła oraz intensywność jego działania opisuje wzór

$$(3.1) \quad Q(x, t) = Q_0 \delta(vt - x) \eta(t),$$

gdzie $\delta(u)$ jest funkcją Diraca, $\eta(u)$ — funkcją Heaviside'a.

Dyskusję ograniczymy do zbadania równania przewodnictwa cieplnego, które w tym przypadku ma postać

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} T - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} T = - \frac{Q_0}{\kappa} \delta(vt - x) \eta(t),$$

przy czym funkcja temperatury T , określona jest w obszarze $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in [0, +\infty)$, zaś parametr $v \geq 0$. Po wykorzystaniu jako pierwszej transformacji Laplace'a względem czasu zdefiniowanej jak następuje

$$\begin{cases} T_L(x, s) = \int_0^{\infty} T(x, t) e^{-st} dt, \\ T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} T_L(x, s) e^{st} ds, \quad i = \sqrt{-1}, \end{cases}$$

oraz przyjęciu jednorodnego warunku początkowego dla temperatury równania (3.2), możemy napisać

$$(3.3) \quad \frac{d^2}{dx^2} T_L - \frac{s}{\kappa} T_L = - \frac{Q_0}{\kappa} \frac{1}{v} e^{-s \frac{x}{v}},$$

przy czym transformata źródła ciepła (prawa strona równania (3.3)) wymaga, aby $x > 0$. Fakt ten wyklucza stosowanie do równania (3.3) wykładniczej transformacji Fouriera względem x . W tym przypadku możliwe jest zastosowanie transformacji cosinusowej lub sinusowej, jednakże pod warunkiem, że z góry wiemy czy funkcja $T_L(x, s)$ jest funkcją parzystą lub nieparzystą względem x . Tę niedogodność można usunąć uwzględniając w prawej stronie równania (3.3) funkcję Heaviside'a w postaci $\eta(x)$.

Przedstawionych trudności unika się, jeżeli do równania (3.2) zastosować w pierwszej kolejności transformację Fouriera względem zmiennej miejsca, a następnie transformację Laplace'a względem czasu. Poprawność tak stosowanych transformacji można wykazać wykonując przejścia graniczne dla $v \rightarrow 0$ w otrzymanych wynikach, które w granicy są zgodne z rozwiązaniami dla źródła nieruchomego.

Literatura cytowana w tekście

1. F. BRYNDZA, *Pole temperatury w rurze półnieskończonej wywołane działaniem ruchomego źródła ciepła*, Dysertacja na stopień doktora nauk technicznych, Politechnika Poznańska, Poznań 1974.
2. J. IGNACZAK, *Dynamic displacement field produced by a point source of heat moving with uniform velocity in an infinite elastic solid*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 3, **12**, (1964).
3. A. JAHANSHANI, *Elastic plates subjected to moving heat sources*, Journ. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs, 4, **91**, 1, (1965).
4. A. JAHANSHANI, *Thermoviscoelastic stresses for moving temperature fields*, Jour. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs, 2, **92** (1966).
5. В. А. Колесниченко, Ю. М. Коляно, *Температурные напряжения в анизотропной пластинке нагреваемой движущимся источником тепла*, ФХОМ, **5** (1971).
6. Ю. М. Коляно, А. Н. Кулик, *Квазистатическая задача термоупругости для полубесконечной пластинки по ребру которой движется источник тепла*, П. Мех. 7, **11** (1975).
7. J. KONIECZNY, *Naprężenia w półprzestrzeni sprężystej wywołane przyłożoną na brzegu temperaturą*, Zeszyty Naukowe PP (w druku).
8. J. KRZEMIŃSKI, *Thermal stresses in an infinite cylindrical shell due to a moving heat source*, Arch. Mech. Stos. 3, **17** (1965).
9. J. KUBIK, *Pole temperatury, naprężeń i przemieszczeń w tarczy półnieskończonej wywołane działaniem ruchomego źródła ciepła*, Dysertacja na stopień doktora nt., PP Poznań 1972.
10. J. KUBIK, *Naprężenia termiczne w półprzestrzeni sprężystej wywołane ruchomym źródłem ciepła*, Rozp. Inż. 2, **22** (1974).
11. J. KUBIK, *Jednowymiarowe dynamiczne pole naprężeń cieplnych wywołane ruchomym polem temperatury*, Mech. Teoret. Stos., 2, **13**, (1975).
12. J. KUBIK, *Wpływ prędkości ruchu źródła ciepła na efekty mechaniczne w półprzestrzeni sprężystej*, Arch. Budowy Maszyn, 1, **23** (1976).
13. Г. С. МАКАР, *Напряженное состояние в бесконечном цилиндре вызванное движущимся осесимметричным температурным полем*, Вопр. Мех. Реальн. Тверд. Тела, в. 3, Наукова Думка, **42** (1964).
14. E. MELAN, *Warmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle*, Ing. Arch., 20, 46 (1952).
15. M. R. AKIYAMA, K. NAKANO, Y. BANZAI, *Thermal stresses in an infinite circular cylinder exposed to moving heat sources*, Bull. JSME 7, 506 (1964).
16. T. NAKADA, S. HASHIMOTO, *Heat conduction in a semi-infinite solid heated by a moving heat source along the boundary*, Bull. JSME, 6, **59** (1963).
17. W. NOWACKI, *A quasi-stationary thermoelastic problem in three dimensions*, BULL. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 5 (1957).
18. W. NOWACKI, *O pewnym quasi-ustalonym zagadnieniu termosprężystości*, Rozp. Inż., 3, 5 (1957).
19. W. PAJAŁ, *Wpływ ruchomego, gasnącego po czasie t nagrzania brzegu na pola temperatury, naprężeń i przemieszczeń w sprężystej tarczy półnieskończonej*, Dysertacja na stopień doktora nt., Poznań 1973.
20. W. PIESZOCKI, *The stresses in an infinite wedge due to a heat source*, Arch. Mech. Stos. 1 **11**, (1959).
21. В. Г. ПЕТРЕНКО, *К вопросу распределения температурного поля во полуограниченной составной пластине при наличии движущегося точечного источника*, Укр. Мат. Ж., 4, **19** (1967).
22. Я. С. ПОДСТРИГАЧ, Р. Н. ШВЕЦ, *Осесимметричное напряженное состояние в бесконечной цилиндрической оболочке вызванное движущимся температурным полем*, Теория пластин и оболочек, Киев 1962.
23. T. ROŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in a long circular cylinder with heat moving over the lateral surface*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci Techn., 5, **12** (1964).
24. T. ROŻNOWSKI, *An axially symmetric thermoelastic problem with a moving boundary condition*, Arch. Mech. Stos., 5, **17** (1965).
25. T. ROŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in a long cylinder with moving boundary condition*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 1, **13** (1965).

26. T. ROŻNOWSKI, *Niestacjonarne pole temperatury w półprzestrzeni w przypadku ruchomego ogrzania na brzegu*, Rozpr. Inż., 4, 17 (1968).
27. T. ROŻNOWSKI, *The plane problem of thermoelasticity with a moving boundary condition*, Arch. Mech. Stos., 5, 21 (1969).
28. T. ROŻNOWSKI, *Niestacjonarny przepływ ciepła w grubej rurze ogrzanej ruchomym polem temperatury*, Rozpr. Inż., 4, 19 (1971).
29. D. ROSENTAL, *The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments*, Trans. ASME, 8 (1946).
30. D. ROSENTAL, R. H. CAMERON, *Temperature distribution in cylinder heated by point source moving along its axis*, Trans. ASME.
31. Z. SOBECZYŃSKA, *Działanie ruchomego punktowego źródła ciepła w przestrzeni nieograniczonej*, Mech. Teoret. Stos. 1, 7 (1969).
32. S. SZYMAŃSKI, *Ruchome źródło ciepła w półnieskończonej tarczy*, Dysertacja na stopień doktora nt., Poznań (1972).
33. M. ŻÓRAWSKI, *Moving dynamic heat sources in a visco-elastic space and certain basic solutions for moving sources*, Arch. Mech. Stos., 2, 13 (1961).

Р е з ю м е

ПРИМЕЧАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕПЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
ВЫЗВАННЫХ ДВИЖУЩИМИСЯ ТЕРМИЧЕСКИМИ НАГРУЗКАМИ

Работа содержит обсуждение опубликованных до сих пор решений задач термоупругости с движущимся источником тепла. Предметом дискуссии являются вопросы, характерные для движущихся нагрузок, а именно: в каких случаях применение движущейся системы координат облегчает решение уравнений термоупругости, возможность построения решений с использованием функций Грина, условия применения интегральных преобразований по координатам и времени при исследовании подвижных термических напряжений.

S u m m a r y

ON THE DETERMINATION OF THERMAL STRESSES DUE TO MOVING HEAT SOURCES

The paper contains a review of the existing solutions of thermoelastic problems involving the moving heat sources (cf. [1 - 33]). The discussion is concerned with the application of convective coordinate systems, the order of application of integral transforms to moving thermal loadings, and the construction of thermoelasticity solutions by means of the Green functions.

PRACOWNIA TEORII KONSOLIDACJI
I TERMODYFUZJI IPPT POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1975 r.

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI ORTOTROPOWEJ PŁYTY PIERŚCIENIOWEJ^{*)}

ANDRZEJ STRZELCZYK, STANISŁAW WOJCIECH (BIELSKO-BIAŁA)

1. Wstęp

Problem stateczności płyt pierścieniowych obciążonych osiowo-symetrycznie siłami działającymi w płaszczyźnie środkowej płyty, nie posiada rozwiązania ogólnego, mimo, że wielu autorów podaje rozwiązania szczególne tego zagadnienia.

Zagadnienie stateczności izotropowych płyt pierścieniowych omawia się w pracach [3, 4, 6, 7, 11]. W pracach [3, 4, 11], podano ściśle rozwiązania następujących przypadków:

praca [3] — płyta utwierdzona i obciążona tylko wzdłuż brzegu zewnętrznego. W rozwiązaniu zakłada się, że powierzchnia środkowa płyty jest osiowo-symetryczna;

praca [4] — płyta obciążona w taki sposób, że naprężenia radialne σ_r i obwodowe σ_θ są równe:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \left(\frac{r_w}{r}\right)^2 \cdot p_0,$$

gdzie r_w — promień wewnętrzny pierścienia, r — współrzędna promieniowa, p_0 — parametr obciążenia;

praca [11] — płyta obciążona takim samym ciśnieniem na brzegu zewnętrznym i wewnętrznym płyty.

ROZSA, [7], podał przybliżone rozwiązanie zagadnienia dla płyty utwierdzonej i ściskanej wzdłuż brzegu zewnętrznego oraz dla płyty utwierdzonej i ściskanej wzdłuż brzegu wewnętrznego. W pracy [6] otrzymano rozwiązanie numeryczne dla niektórych sposobów podparcia przy założeniu, że powierzchnia środkowa płyty po wyboczeniu jest osiowo-symetryczna.

Zagadnienie stateczności płyt ortotropowych rozważa się w pracach [1, 5, 8, 10], przy czym uzyskane dla poszczególnych przypadków podparcia i obciążenia rozwiązania przybliżone, zakładają przeważnie osiowo-symetryczną postać wyboczenia (prace [1, 5, 10]). W pracy [8] przedstawiono przybliżone rozwiązanie zagadnienia dla płyt wzdłuż obu krawędzi swobodnie podpartych, bądź utwierdzonych.

^{*)} Praca nagrodzona na konkursie na prace teoretyczne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Łodzi w 1975 r.

2. Cel pracy

Celem pracy jest przedstawienie przybliżonego rozwiązania zagadnienia obliczania najmniejszych wartości obciążeń krytycznych dla płyt pierścieniowych, cylindrycznie ortotropowych, obciążonych równomiernie siłami promieniowymi w płaszczyźnie środkowej płyty. Rozwiązanie otrzymane metodą energetyczną Rayleigha-Ritza, obejmuje dwanaście sposobów podparcia płyty, przy dowolnym stosunku ciśnień działających na krawędź wewnętrzną i zewnętrzną płyty. Podano sposób przybliżonego określenia liczby średnic węzłowych, dla której wartość obciążenia krytycznego jest najmniejsza. Przedstawione na wykresach i tablicach wyniki obliczeń mogą być wykorzystane w obliczeniach inżynierskich.

3. Obliczenie całkowitej energii potencjalnej płyty

Całkowitą energię potencjalną płyty oblicza się według wzoru

$$(3.1) \quad V = V_n + V_\theta,$$

gdzie V_n — energia potencjalna sił zewnętrznych, V_θ — energia potencjalna płyty spowodowana zginaniem płyty.

Wielkości V_n i V_θ wyrażają się wzorami:

$$(3.2) \quad V_n = \frac{1}{2} \int_{r_w}^{r_z} \int_0^{2\pi} \left[N_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r d\theta dr,$$

$$(3.3) \quad V_\theta = \frac{1}{2} \int_{r_w}^{r_z} \int_0^{2\pi} \left[M_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + M_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2M_{r\theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{w}{r} \right) \right] r d\theta dr,$$

gdzie M_r , M_θ oznaczają odpowiednio promieniowy i obwodowy moment zginający, $M_{r\theta}$ — moment skręcający, w — ugięcie płyty, r_w , r_z — promień zewnętrzny i wewnętrzny płyty, N_r , N_θ — jednostkowe siły normalne w płaszczyźnie środkowej płyty w kierunku promieniowym i obwodowym.

Momenty M_r , M_θ , $M_{r\theta}$, występujące w (3.3), można obliczyć ze wzorów:

$$(3.4) \quad M_r = -D_r \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$(3.5) \quad M_\theta = -D_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right],$$

$$(3.6) \quad M_{r\theta} = -2D_k \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{w}{r} \right),$$

gdzie

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)},$$

$$D_{\theta} = \frac{E_{\theta} h^3}{12(1-\nu_r \nu_{\theta})},$$

$$D_k = \frac{G h^3}{12},$$

ν_r, ν_{θ} — stałe Poissona, E_r, E_{θ} — moduły sprężystości w kierunku promieniowym i obwodowym, G — moduł sprężystości poprzecznej, h — grubość płyty.

Siły błonowe N_r, N_{θ} występujące w (3.2) można obliczyć ze wzorów podanych w pracy [2]:

$$(3.7) \quad N_r = h \left[\frac{p_w \cdot \varrho_w^{k_1+1} - p_z}{1 - \varrho_w^{2k_1}} \varrho^{k_1-1} - \frac{p_w - p_z \varrho_w^{k_1-1}}{1 - \varrho_w^{2k_1}} \varrho_w^{k_1-1} \varrho^{-k_1-1} \right],$$

$$(3.8) \quad N_{\theta} = k_1 h \left[\frac{p_w \varrho_w^{k_1+1} - p_z}{1 - \varrho_w^{2k_1}} \varrho^{k_1-1} + \frac{p_w - p_z \varrho_w^{k_1-1}}{1 - \varrho_w^{2k_1}} \varrho_w^{k_1-1} \varrho^{-k_1-1} \right],$$

gdzie p_w, p_z oznaczają ciśnienia działające odpowiednio wzdłuż obwodu zewnętrznego i wewnętrznego płyty, $\varrho_w = \frac{r_w}{r_z}$ — bezwymiarowa wartość promienia wewnętrznego

płyty, $k_1^2 = \frac{E_{\theta}}{E_r}$ — współczynnik ortotropii.

Po podstawieniu (3.7), (3.8), do wzoru (3.2) i (3.4), (3.5), (3.6) do wzoru (3.3) zgodnie ze wzorem (3.1), otrzymuje się:

$$(3.9) \quad V = \frac{D_r}{2} \int_{\varrho_w}^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \nu_{\theta} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \right. \\ \left. + k^2 \left[\nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + (l^2 - \nu_{\theta}) \left[\frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \left(\frac{w}{\varrho} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. - p^* \left[\left(F_1 \varrho^{k_1-1} + F_2 \varrho^{-k_1-1} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \varrho} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + k_1 \left(F_1 \varrho^{k_1-1} - F_2 \varrho^{-k_1-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} \varrho d\theta d\varrho,$$

gdzie: $\varrho = \frac{r}{r_z}$ — promień bezwymiarowy

k^2, l^2 — współczynniki ortotropii określone wzorami:

$$k^2 = \frac{D_{\theta}}{D_r}, \quad l^2 = \frac{2D_k}{D_r} + \nu_{\theta},$$

$p^* = \frac{p_w h r_z^2}{D_r}$ — bezwymiarowa wartość obciążenia krytycznego,

$$F_1 = \frac{\varrho_w^{k_1+1} - \alpha}{1 - \varrho_w^{k_1+1}}, \quad F_2 = \frac{1 - \alpha \varrho_w^{k_1-1}}{\varrho_w^{2k_1} - 1} \cdot \varrho_w^{k_1+1}, \quad \alpha = \frac{p_w}{p_z}.$$

4. Określenie wartości obciążenia krytycznego

Najmniejszą wartość obciążenia krytycznego wyznaczono metodą Rayleigha–Ritza. Założono, że funkcja w określająca ugięcie płyty ma postać:

$$(4.1) \quad w = W \cdot \cos m\theta,$$

gdzie W jest funkcją jednej zmiennej ϱ , a m liczbą średnic węzłowych. Przypadek $m = 0$ odpowiada osiowosymetrycznej postaci wybożenia.

Następnie przyjęto, że:

$$(4.2) \quad W = W(\varrho) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i \eta_i(\varrho),$$

gdzie f_i są współczynnikami, a $\eta_i(\varrho)$ są funkcjami współrzędnej ϱ .

Ponadto, założono, że $\eta_i(\varrho)$ są postaci:

$$(4.3) \quad \eta_i(\varrho) = \sum_{j=1}^{j=t} a_{i,j} \cdot \varrho^{i+j-1},$$

przy czym t = liczba geometrycznych warunków brzegowych płyty, $a_{i,j}$ — współczynniki, których wartość zależy od sposobu podparcia płyty.

Poszukiwaną wartość obciążenia krytycznego wyznaczono z warunków, że całkowita energia potencjalna płyty w stanie równowagi jest minimalna, tzn.:

$$(4.4) \quad \frac{\partial v}{\partial f_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Po uwzględnieniu w (4.4) zależności (4.3), (4.2), (4.1), (3.9) i po dokonaniu odpowiednich przekształceń, równania (4.4) przyjmują postać:

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^{j=n} (y_{i,j} - p^* x_{i,j}) f_j = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$y_{i,j} = \int_{\rho_w}^1 \sum_{p=0}^t \sum_{q=0}^t \{ [(i+p-1)(i+p+v_0-2) - v_0 m^2] (j+q-2)(j+q-1) + \\ + [(i+p-1)(i+p-2)v_0 + (i+p-1)k^2 - k^2 m^2] (j+q-1-m^2) + [(j+q-1) \times \\ \times (j+q+v_0-2) - v_0 m^2] (i+p-1)(i+p-2) + [(j+q-1)(j+q-2)v_0 + \\ + (j+q-1)k^2 - k^2 m^2] (i+p-1-m^2) + 4(l^2 - v_0)m^2(i+p-2)(j+q-2) \} \times \\ \times a_{i,p} a_{j,q} \varrho^{i+j+p+q-5} d\varrho,$$













$$x_{i,j} = 2 \int_{\rho_w}^1 \sum_{p=0}^t \sum_{q=0}^t [(F_1 \varrho^{k_1} + F_2 \varrho^{-k_1})(i+p-1)(j+q-1) + \\ + k_1^2 m^2 (F_1 \varrho^{k_1} - F_2 \varrho^{-k_1})] a_{i,p} a_{j,q} \varrho^{i+j+p+q-4} d\varrho.$$

Warunkiem koniecznym istnienia niezerowego rozwiązania układu równań liniowych (4.5) jest spełnienie równania



$$(4.6) \quad \det(\mathbf{Y} - p^* \mathbf{X}) = 0,$$

gdzie $\mathbf{X} = (x_{i,j})$, $\mathbf{Y} = (y_{i,j})$ — macierze kwadratowe stopnia n .

Tablica 1. Zestawienie geometrycznych warunków brzegowych w zależności od sposobu podparcia płyty

Nr przypadku	Sposób podparcia płyty	Liczba warunków t	Numery warunków
I		4	1, 2, 3, 4
II		3	1, 2, 4
III		2	2, 4
IV		3	2, 3, 4
V		3	1, 2, 3
VI		2	1, 2
VII		1	2
VIII		2	2, 3
IX		2	1, 3
X		1	1
XI		3	1, 3, 4
XII		2	1, 4

Tablica 2. Porównanie wartości p^* z wynikami

n	Schemat stat.						
		$q_w = 0,1$	$q_w = 0,3$	$q_w = 0,5$	$q_w = 0,1$	$q_w = 0,3$	$q_w = 0,5$
1		132,00	27,000	25,6366	126,111	16,254	6,5361
2		120,28	26,670	25,566	108,740	13,613	5,5109
3		118,13	26,601	25,099	101,957	13,135	5,4403
4		117,77	26,501	25,029	100,324	13,127	5,4397
5		117,72	26,498	25,025	99,844	13,126	5,4396
6		117,708	26,497	25,025	99,710	13,126	5,4396
	Wynik wg [6]	117,71	26,496	25,026	99,659	13,126	5,440

Ostatecznie problem wyznaczania obciążeń krytycznych, zgodnie z (4.6), sprowadził się do uogólnionego zagadnienia wartości własnych macierzy, które można efektywnie rozwiązać numerycznie za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej.

5. Określenie wartości współczynników $a_{i,j}$

Funkcje współrzędnych $\eta_i(\varrho)$, występujące we wzorze na funkcję ugięcia W , powinny spełniać odpowiednie geometryczne warunki brzegowe płyty.

Warunki te mogą mieć jedną z następujących postaci:

$$1^\circ \quad \eta_i(\varrho_w) = \sum_{j=0}^i a_{i,j} \varrho_w^{i+j-1} = 0,$$

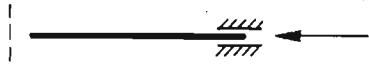
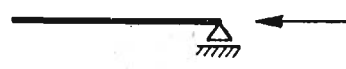
$$2^\circ \quad \eta_i(1) = \sum_{j=0}^i a_{i,j} = 0,$$

$$3^\circ \quad \frac{d\eta_i(\varrho_w)}{d\varrho} = \sum_{j=0}^i a_{i,j} (i+j-1) \varrho_w^{i+j-2} = 0,$$

$$4^\circ \quad \frac{d\eta_i(1)}{d\varrho} = \sum_{j=0}^i a_{i,j} (i+j-1) = 0.$$

W tablicy 1 podano zestawienie rozpatrywanych przypadków podparcia płyty i przyporządkowanie im ograniczenia na funkcje współrzędnych. Przy założeniu, że $a_{i,i} = 1$ wartości współczynników dla $i = 1, 2, \dots, n$, oraz $j = 0, 1, \dots, i-1$ wyznacza się rozwiązując n układów równań liniowych o i niewiadomych.

otrzymanymi w pracy [6] ($k^2 = k_1^2 = 1, l^2 = 1, \nu_0 = 1/3$)

					
$q_w = 0,1$	$q_w = 0,3$	$q_w = 0,5$	$q_w = 0,1$	$q_w = 0,3$	$q_w = 0,5$
17,542	16,201	29,97	4,83	3,161	2,5772
14,202	14,809	25,52	4,37	3,157	2,4865
14,19	14,801	25,50	4,14	3,157	2,4818
13,92	14,700	25,385	4,08	3,107	2,4687
13,87	14,692	25,384	4,05	3,099	2,4661
13,858	14,691	25,382	4,048	3,097	2,4660
13,848	14,69	25,385	4,043	3,098	2,468

6. Określenie liczby średnic węzłowych

Dla określenia liczby średnic węzłowych m , której odpowiada najmniejsza wartość obciążenia krytycznego p^* , zastosowano metodę przybliżoną, podaną w pracy [8]. Zgodnie z [8], problem sprowadza się do rozwiązania równania kwadratowego

$$(6.1) \quad az^2 + bz + c = 0,$$

gdzie $z = m^2$.

Dla przyjętej postaci funkcji współrzędnych współczynniki a, b, c są równe:

$$a = X_2 Y_4,$$

$$b = 2 \cdot X_0 Y_4,$$

$$c = X_0 Y_2 - X_2 Y_0,$$

gdzie: $X_0 = \int_0^1 \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^t (F_1 q^{k_1} + F_2 q^{-k_1}) i j a_{1,i} a_{1,j} q^{i+j-2} dq,$

$$X_2 = \int_0^1 \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^t (F_1 q^{k_1} - F_2 q^{-k_1}) a_{1,i} a_{1,j} q^{i+j-2} dq,$$

$$Y_0 = \int_0^1 \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^t \{ij [(i-1) + \nu] (j-1) + k^2 + \nu (i-1)\} a_{1,i} a_{1,j} q^{i+j-3} dq,$$

$$Y_2 = \int_0^1 \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^t \{ \nu j (j-1) + k^2 j + i [k^2 + \nu (i-1)] + 2(\nu - l^2) (i-1) (j-1) \} a_{1,i} a_{1,j} q^{i+j-3} dq,$$

$$Y_4 = \int_{p_w}^1 \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l a_{1,i} a_{1,j} \rho^{i+j-3} d\rho, \quad v = v_0$$

Jako m przyjmuje się:

(6.2) $m = \begin{cases} 0 & \text{jeśli równanie (6.1) ma pierwiastki zespolone lub rzeczywiste i równo-} \\ & \text{cześnie oba ujemne, entier } (\sqrt{\max(z_1, z_2)}), & \text{w przypadkach pozostałych,} \\ & \text{gdzie } z_1, z_2 \text{ są pierwiastkami równania (6.1).} \end{cases}$

7. Opis algorytmu obliczeń

Celem wykonania obliczeń numerycznych opracowano program w języku ALGOL 1900. W programie można wyodrębnić następujące zasadnicze fazy:

1. Wyznaczanie współczynników $a_{i,j}$. Układy równań rozwiązuje się metodą Gaussa-Jordana.
2. Określenie liczby m — według wzorów podanych w punkcie 6.
3. Obliczanie elementów macierzy X i Y .
4. Obliczanie wartości własnych równania (4.6) w tym:
 - A. obliczanie macierzy odwrotnej do X metodą rozszerzania,
 - B. obliczanie współczynników wielomianu charakterystycznego macierzy $Z = YX$ metodą Danilewskiego,
 - C. obliczanie zer wielomianu charakterystycznego metodą Bairstowa.

Obliczenia zrealizowano na maszynie ODRA 1305 z pojedynczą precyzją (liczby pamiętane z dokładnością do 11 cyfr znaczących).

8. Analiza wyników obliczeń

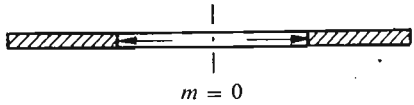
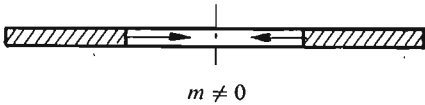
Wyniki obliczeń dla przypadków płyty obciążonej wzdłuż brzegu wewnętrznego podano w tablicach 3–5, a dla pozostałych przypadków obciążenia na rys. 1–12. Liczby nad krzywymi oznaczają liczbę średnic węzłowych, dla których krytyczna wartość obciążenia jest najmniejsza. Obliczenia prowadzono dla płyt obciążonych:

- a) ciśnieniem działającym tylko na brzeg wewnętrzny płyty, tablice (3–5),
- b) ciśnieniem ujemnym działającym tylko na wewnętrzny brzeg płyty, tablice (3–5),
- c) jednakowym ciśnieniem działającym na obu krawędziach płyty tzn. $p_z = p_w$, (rys. 1–6),

d) ciśnieniem działającym na obu krawędziach płyty, przy czym $\frac{p_z}{p_w} = 1000$, co praktycznie odpowiada obciążeniu ciśnieniem działającym tylko na zewnętrznym brzegu płyty (rys. 7–12).

W każdym z podanych wyżej sposobów obciążenia płyty, obliczenia prowadzono dla dwunastu schematów podparcia płyty (patrz tablica 1). Dla każdego sposobu obciążenia i podparcia płyty obliczono wartość siły krytycznej dla:

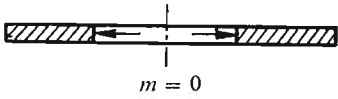
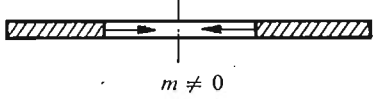
Tablica 3. Wartości bezwymiarowego obciążenia krytycznego $p^* = \frac{p_0 h r^2}{D_r}$

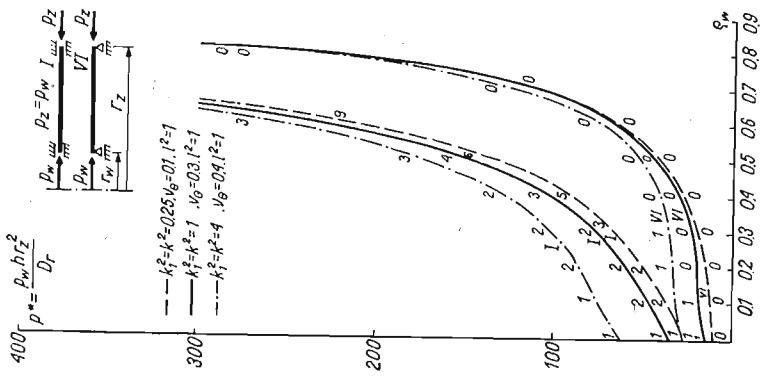
Sposób obciąż.													
		liczba m wszędzie równa 0						liczbę m podano pod wartością p^*					
Nr przyp.	k	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71
I	0,5	348	338	377	479	673	1105	356 5	256 7	215 9	201 11	209 15	237 21
	1,0	421	375	401	487	686	1124	666 4	448 5	364 6	329 8	331 11	365 15
	2,0	738	530	501	560	740	1160	1796 3	1054 4	777 5	662 6	628 8	669 11
II	0,5	132	128	145	182	258	430	316 5	224 6	188 7	173 10	177 14	198 19
	1,0	149	135	148	183	258	426	585 4	391 5	305 6	282 8	274 10	298 13
	2,0	263	191	182	206	273	441	1468 3	899 4	660 4	552 6	528 8	542 10
III	0,5	25,3	20,9	21,3	25,0	33,6	53,4	110 2	746 3	60,6 4	56,6 6	54,2 7	59,2 10
	1,0	39,5	26,7	23,9	26,0	33,5	52,4	154 1	100 2	87,4 3	79,9 3	77,9 5	80,2 6
	2,0	143	71,7	48,6	41,4	43,9	59,7	185 1	175 2	137 2	139 3	142 3	162 6
IV	0,5	102	93,9	102	124	162	282	113 2	75,0 3	60,6 4	54,9 5	54,9 7	61,0 10
	1,0	143	115	114	132	179	282	155 1	101 2	85,6 3	83,4 4	83,5 5	93,1 7
	2,0	378	218	173	170	205	307	184 1	179 1	138 2	142 3	148 4	165 5

Tablica 4. Wartości bezwymiarowego obciążenia krytycznego $p^* = \frac{p_w h r_z^2}{D_r}$

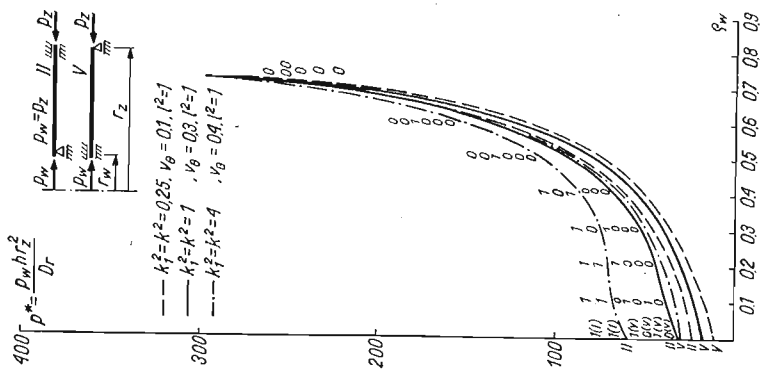
Sposób obciąż.	 $m = 0$						 $m \neq 0$						
	Nr przyp.	$\frac{q_w}{k}$	liczba m wszędzie równa 0					liczbę m podano pod wartością p^*					
			0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61
V	0,5	249	239	266	333	473	779	297 5	217 6	178 7	166 9	170 12	191 17
	1,0	317	275	290	348	482	794	561 4	371 5	294 4	261 7	259 9	287 13
	2,0	614	423	375	411	528	836	1608 3	931 4	638 4	515 5	485 7	521 10
VI	0,5	85,7	81,5	91,0	113	160	257	254 4	180 5	151 7	138 8	140 11	156 15
	1,0	104	90,1	95,7	116	161	267	465 3	302 4	239 5	212 6	207 8	225 11
	2,0	218	145	129	140	178	273	1336 3	740 3	518 4	425 5	386 7	393 8
VII	0,5	6,22	3,27	2,06	1,44	1,08	0,840	80,4 2	52,2 2	41,5 3	36,4 3	35,1 4	37,3 6
	1,0	25,7	12,8	7,84	5,42	4,02	3,13	95,7 2	73,8 1	54,8 2	49,7 2	45,8 3	46,7 4
	2,0	138	63,4	36,7	24,2	17,5	13,4	138 2	105 1	103 2	85,7 2	88,0 3	85,7 3
VIII	0,5	43,8	39,2	41,9	50,9	70,3	115	93,5 1	52,5 2	41,4 3	35,7 4	36,2 5	39,7 7
	1,0	88,4	63,3	58,0	63,2	80,7	124	95,3 1	77,4 1	55,5 2	49,0 3	52,3 4	55,7 5
	2,0	340	173	120	103	110	147	140 1	105 1	103 2	85,5 2	75,8 3	97,3 4

Tablica 5. Wartości bezwymiarowego obciążenia krytycznego $p^* = \frac{p_w h r_z^2}{D_r}$

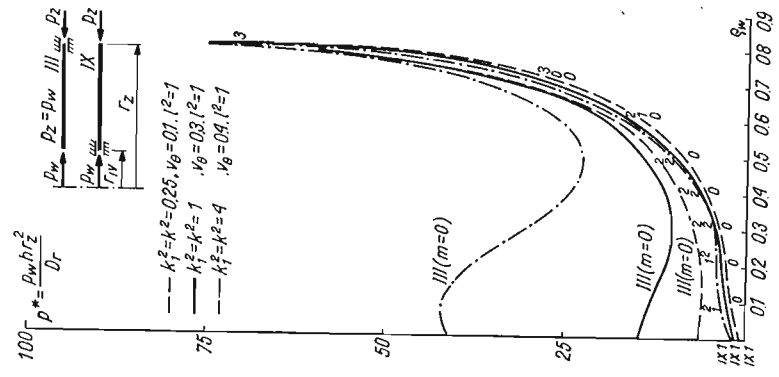
Sposób obciąż.	 $m = 0$							 $m \neq 0$								
	Nr przyp.	$\frac{q_w}{k}$	liczba m wszędzie równa 0							liczbę m podano pod wartością p^*						
			0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71		
IX	,5	43,8	39,2	41,9	50,9	70,2	115	71,6 4	46,3 4	40,1 4	39,7 6	42,4 8	47,7 10			
	1,0	88,5	63,2	58,0	63,2	80,5	124	126 3	69,3 3	55,3 3	51,3 4	57,1 6	64,1 7			
	2,0	340	173	118	104	110	148	328 2	168 2	128 3	92,7 3	90,0 4	96,1 5			
X	,5	6,25	3,27	2,06	1,44	1,08	,840	43,4 2	31,7 3	26,7 3	25,5 4	26,4 5	29,9 6			
	1,0	25,7	12,8	7,84	5,42	4,02	3,14	64,6 2	41,7 2	38,1 2	29,6 3	29,9 3	31,6 4			
	2,0	138	63,4	36,7	24,2	17,5	13,4	267 1	107 2	68,2 2	68,9 2	45,6 3	47,5 3			
XI	,5	102	93,9	102	124	170	282	84,9 3	60,2 4	50,9 5	47,9 6	49,4 8	56,5 11			
	1,0	143	115	114	133	179	274	192 3	114 3	91,4 4	82,1 5	80,1 6	89,1 8			
	2,0	378	218	173	171	206	307	673 2	383 2	215 3	179 4	155 4	161 6			
XII	,5	25,3	21,0	21,3	25,0	33,5	53,5	68,7 3	47,4 3	38,3 4	35,1 5	35,0 6	39,0 8			
	1,0	39,5	26,7	23,9	26,0	33,5	52,3	142 2	90,7 3	64,3 3	56,9	54,5	56,9			
	2,0	143	71,3	48,6	41,3	43,8	59,6	536 2	258 2	175 3	106 4	109 5	112 7			



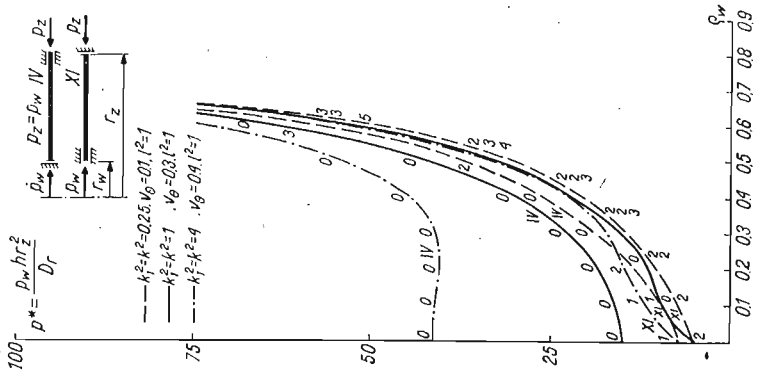
Rys. 1



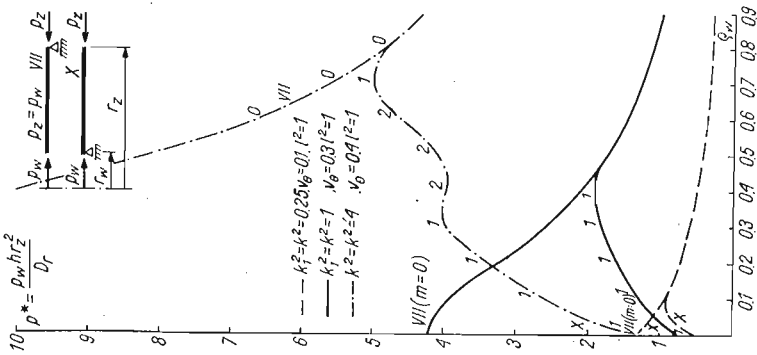
Rys. 2



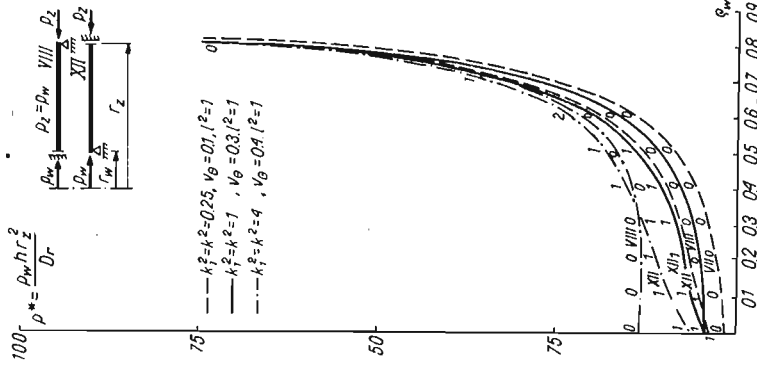
Rys. 3



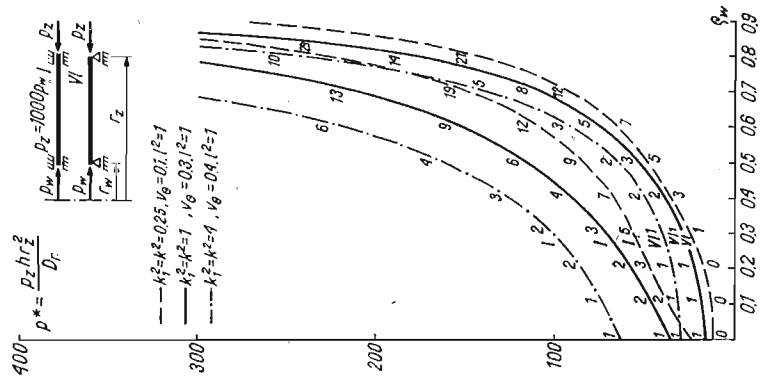
Rys. 4



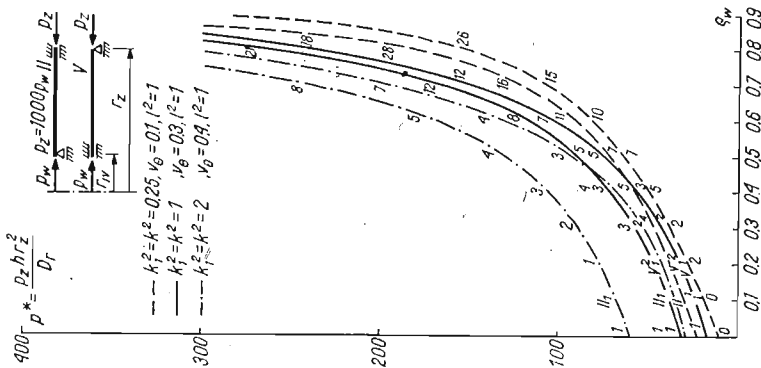
Rys. 5



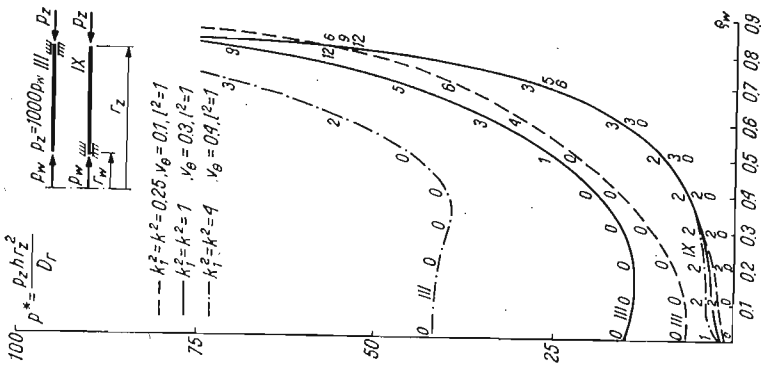
Rys. 6



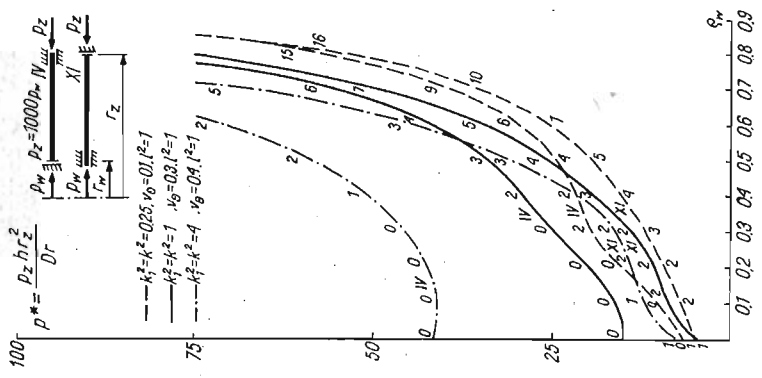
Rys. 7



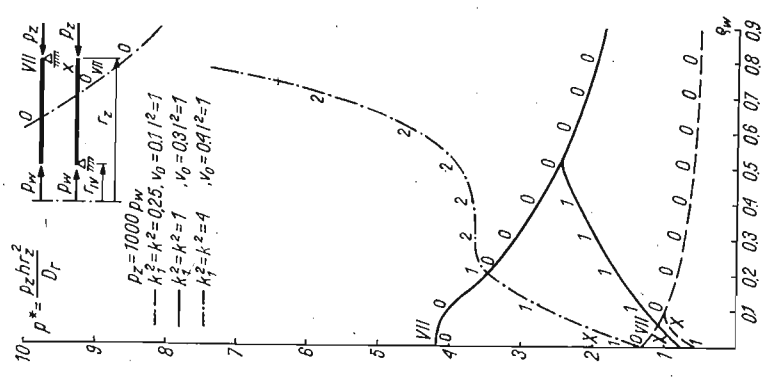
Rys. 8



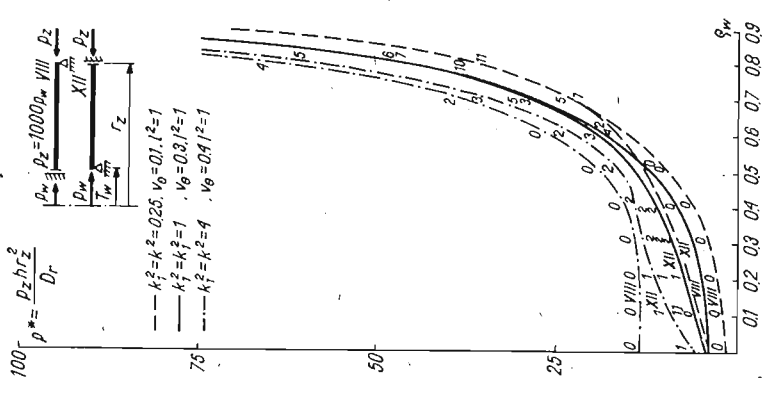
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

- płyty izotropowej ($k_1^2 = k^2 = 1$, $\nu_0 = 0,3$, $l^2 = 1$),
- płyty ortotropowej, wzmocnionej w kierunku promieniowym

$$(k_1^2 = k^2 = 0,25, \nu_0 = 0,1, l^2 = 1),$$

- płyty ortotropowej, wzmocnionej w kierunku obwodowym

$$(k_1^2 = k^2 = 4, \nu_0 = 0,4, l^2 = 1).$$

Wartości obciążenia krytycznego wyznaczono dla q_w zmieniającego się od 0,01 ÷ 0,91 co 0,1.

Przedstawiony w pracy sposób przybliżonego wyboru liczby średnich węzłowych m , dla której wartość obciążenia krytycznego jest najmniejsza, w niektórych przypadkach okazał się zawodny. Największe błędy w wyborze liczby m wystąpiły dla płyty obciążonej tym samym ciśnieniem działającym na obu krawędziach i podpartej według schematu *V*.

Na przykład dla płyty izotropowej, według wzoru (6.2) otrzymano m zmieniające się od $m = 1$, dla $q_w = 0,01$, do $m = 6$ dla $q_w = 0,91$. W rzeczywistości, najmniejszą wartość obciążenia krytycznego w tym przypadku otrzymuje się przy $m = 1$ dla $q_w = 0,01, 0,11, 0,21$ i przy $m = 0$ dla $q_w \geq 0,3$. W innych przypadkach wartość m była wybierana prawidłowo, w sporadycznych jedynie przypadkach różniła się od właściwej o jedność.

Dla opisanych wyżej przypadków niewłaściwego doboru liczby m , wartość najmniejszego obciążenia krytycznego wyznaczono metodą prób i błędów. Porównując otrzymane wyniki z wynikami podanymi w znanych pracach, należy wnioskować, że przy uwzględnieniu odpowiednio dużej liczby wyrazów szeregu funkcyjnego, przybliżającego funkcję W , można otrzymać wyniki z błędem względnym $\leq 0,1\%$ (przy pojedynczej precyzji obliczeń, w niektórych przypadkach, tylko dla $q_w \leq 0,8$). Dla otrzymania wyników z błędem nie większym niż 1% wystarcza uwzględnić 3, 4 wyrazy szeregu funkcyjnego. Najmniej dokładne wyniki otrzymano dla płyt obciążonych od wewnątrz.

W tablicy 2 przedstawiono porównanie otrzymanych wyników z wynikami zamieszczonymi w pracy [6] (rezultaty tej pracy należą do najdokładniejszych, jakie spotkano w dostępczej literaturze) dla płyty izotropowej. Badając ciąg różnic $S_n = p_n^* - p_{n-1}^*$ (p_n oznacza wartość siły krytycznej uzyskanej przy założeniu funkcji W złożonej z n wyrazów szeregu (4.2)) stwierdzono, że ciąg ten dąży do zera przez wartości dodatnie. Ciąg ten nie jest jednak ściśle malejący. Dlatego przy ocenie dokładności wyników nie można ograniczyć się do sprawdzenia wartości jednej różnicy S_n . Na przykład, dla płyty izotropowej utwierdzonej na brzegu zewnętrznym i obciążonej ciśnieniem przyłożonym na brzegu wewnętrznym płyty ($q_w = 0,5$, $\nu = 1/3$) ciąg różnic jest następujący: 0,071, 0,467, 0,070, 0,004. Gdyby w tym przypadku dokonać oceny dokładności wyników pierwszego przybliżenia, ograniczając się do pierwszej różnicy, to w rezultacie otrzyma się błędny wniosek, że błąd bezwzględny jest w granicach 0,1 wobec błędu rzeczywistego około 0,61. W większości przypadków największą poprawę wyników uzyskano w drugim przybliżeniu (w granicznych przypadkach błąd kilkuset procent zmniejszył się do kilkudziesięciu procent).

9. Uwagi końcowe

Z analizy uzyskanych wyników wynikają następujące wnioski:

A. Najmniejszą wartość obciążenia na ogół otrzymuje się przy założeniu niesymetrycznej postaci wyboczenia płyty ($m \neq 0$).

B. Rzeczywista liczba średnic węzłowych m zależy od:

- sposobu obciążenia płyty (przy ciśnieniu ujemnym działającym na wewnętrzny brzeg płyty otrzymuje się zawsze niesymetryczną postać wyboczenia),
- sposobu podparcia płyty,
- bezwymiarowej wartości wewnętrznego promienia płyty,
- wartości stałych ortotropii k_1^2 i k^2 , (z wyjątkiem przypadków IX i X, mniejszym wartościom $k_1^2 = k^2$ odpowiadają większe liczby średnic węzłowych),

C. Dla małych ϱ_w zmiana m o 1 powoduje otrzymanie wyników różniących się od prawidłowych nawet o kilkaset procent.

D. Gdy $\varrho_w \rightarrow 1$ i poprawna wartość m jest rzędu kilkudziesięciu, zmiana m o kilka jednostek nie ma większego wpływu na wynik.

E. W niektórych przypadkach przyjęcie $W = f_1 \eta_1(\varrho)$ pozwala obliczyć wartość krytyczną z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością. I tak dla płyty izotropowej i $\varrho_w > 0,1$ (dla płyty ortotropowej otrzymuje się podobne wyniki): błąd względny nie przekracza 10% w następujących przypadkach płyt obciążonych:

- tylko ciśnieniem wzdłuż brzegu wewnętrznego i podpartych według schematu II (tylko dla $\varrho_w \leq 0,5$), III i XII;
- ciśnieniem ujemnym wzdłuż brzegu zewnętrznego i podpartych według schematu IV, VI, VIII, X, XI, XII;
- ciśnieniem działającym tylko wzdłuż brzegu zewnętrznego i podpartych wzdłuż schematu I, IV, X, XII;
- ciśnieniem działającym z taką samą wartością na oba brzegi płyty i podpartych według schematu I, IV, VII, X, XII.

Ponieważ przy założeniu, że $W = f_1 \eta_1(\varrho)$ określenie wartości krytycznej prowadzi do prostych i stosunkowo nielicznych operacji matematycznych, można do obliczeń wykorzystać zwykły kalkulator elektroniczny.

F. Zamieszczone w pracy wykresy pozwalają nie tylko na określenie wartości obciążeń krytycznych, ale dają pewne wskazówki co do wyboru ϱ_w (szczególnie ważne dla płyt podpartych według schematu VII i X, obciążonych wzdłuż brzegu zewnętrznego), przy których płyta jest najbardziej stateczna.

G. Dla płyt konstrukcyjnie ortotropowych wzmocnionych żebrami, lepszą stateczność zapewnia wzmocnienie w kierunku promieniowym.

Zastosowana metoda obliczania obciążeń krytycznych teoretycznie zapewnia otrzymanie wyników z dowolną dokładnością. Praktycznie otrzymane rozwiązania obarczone są błędami wynikającymi z faktu, że obliczenia prowadzono z pojedynczą precyzją. Stwierdzono, że pojedyncza precyzja pozwala otrzymywać wyniki wystarczająco dokładne dla $\varrho_w \leq 0,8$. Dla $\varrho_w > 0,8$ wydaje się celowe wykonywanie obliczeń z podwójną precyzją. Dla kompletności przedstawionych wyników przy wykonaniu wykresów dla $\varrho_w = 0,8, 0,9$ i podparciu płyty według schematu nr I, wykorzystano wyniki z pracy [8].

Literatura cytowana w tekście

1. Э. Ф. Бурмистров, X. М. Маслов, *Устойчивость круглых кольцевых ортотропных пластинок*, Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений упругих тел, 3 (1967), 144 - 162.
2. С. Г. Лехницкий, *Анизотропные пластинки*, Гостехиздат, Москва 1947.
3. S. MAJUMDAR, *Buckling of a thin annular plate under uniform compression*, AIAA. Journal, 9, 9 (1971) 1701 - 1707.
4. E. H. MANSFIELD, *On the buckling of an annular plate*, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 13, 1 (1960) 16 - 23.
5. G. K. RAMAIAH, K. VIJAYAKUMAR, *Buckling of polar orthotropic annular plates under uniform internal pressure*, AIAA Journal, 12, 8 (1974) 1045 - 1050.
6. E. PYTEL, Z. WASZCZYŻYŃ, *Numeryczna analiza symetrycznego wyboczenia sprężystej płyty pierścieniowej na tle istniejących rozwiązań*, Czasopismo Techniczne, 76, 4 (1972) 36 - 42.
7. M. ROZSA, *Stability analysis of thin annular plates compressed along the outer or inner edge by uniformly distributed radial forces*, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 53 (1966) 359 - 377.
8. A. STRZELCZYK, *Wyboczenie płyt pierścieniowych cylindrycznie ortotropowych*, Arch. Bud. Maszyn, 22, 4 (1975) 437 - 449.
9. M. TROMBSKI, *Zagadnienia płyt pierścieniowych o ortotropii cylindrycznej w ujęciu nieliniowym*, Zeszyty Naukowe PŁ, nr 156, Mechanika, z. 32, Łódź 1972.
10. E. B. UNTHGENANNT, R. S. BRANT, *Buckling of orthotropic annular plates*, AIAA Journal, 8, 11 (1970) 2102 - 2104.
11. N. YAMAOKI, *Buckling of annular plate under uniform compression*, J. Appl. Mech., 25E (1958) 267 - 273.

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПИЕЙ

В работе приведено решение задачи о критических нагрузках для кольцевых пластин с цилиндрической ортотропией, нагруженных осесимметрично давлением на краях. До сих пор решения такой задачи имелись лишь для некоторых случаев нагружения и опирания пластины. Полученное приближенное решение (метод Релея-Ритца) и численные результаты относятся к пластинам:

- нагруженным различными давлениями на внутреннем и внешнем контурах;
- имеющим 12 способов опирания;
- изотропным и ортотропным.

Приведен способ расчета числа узловых диаметров, отвечающего минимальному значению критической нагрузки.

Summary

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF STABILITY OF AN ORTHOTROPIC ANNULAR PLATE

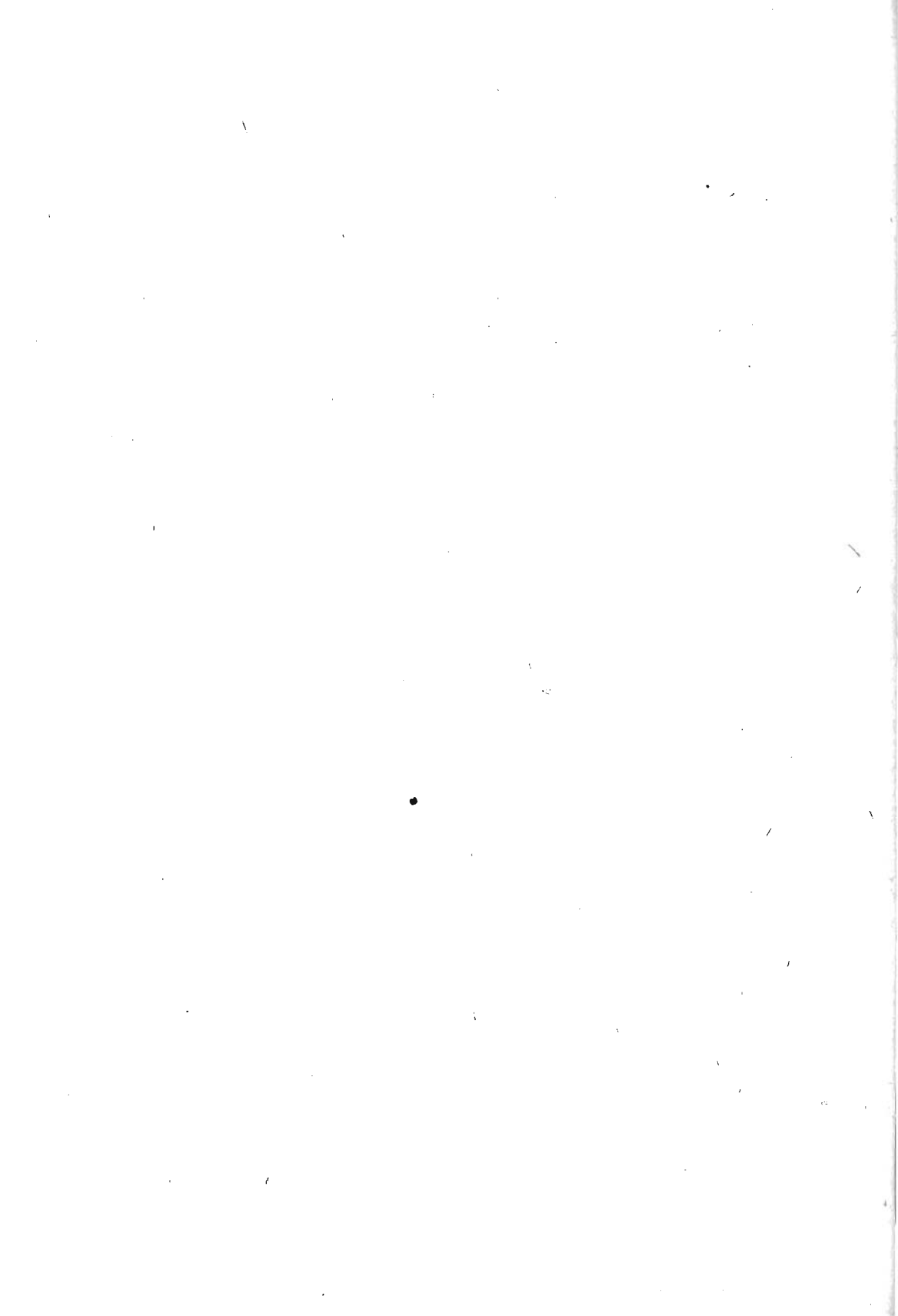
The problem of calculating the critical load of cylindrically orthotropic annular plates under uniform pressure is solved by the Rayleigh-Ritz method. Up to now the problem was solved only under certain loading and supporting conditions. The approximate solution presented and the numerical results of computation obtained contain the following examples of plates:

- loaded by different pressures applied to the inside and at the outside edges;
- supported according to 12 various schemes;
- isotropic and orthotropic.

The method of calculating the number of diametral nodal lines corresponding to the least critical value was given.

INSTYTUT MECHANICZNO-KONSTRUKCYJNY
FILIA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ W BIELSKU-BIAŁYM

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 marca 1976 r.



OBLICZANIE CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNEJ KONSTRUKCJI
PLYTOWO-SPRĘŻYNOWEJ ZA POMOCĄ METODY SZTYWNYCH ELEMENTÓW
SKOŃCZONYCH*)

JERZY STELMARCZYK (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Wzrost mocy jednostkowych i szybkobieżności maszyn spowodował konieczność dokładniejszej znajomości cech dynamicznych układów podpierających maszyny, traktowanych dotychczas jako idealnie sztywne.

Własności dynamiczne podparcia zawiera jego charakterystyka — macierz dynamiczna, której elementy — receptancje są to wielkości określające, dla widma częstości, stosunek przemieszczeń punktów podparcia wywołanych harmonicznymi siłami wymuszającymi do tych sił, przy założeniu liniowości układu [2].

Receptancje — podatności dynamiczne podparcia są funkcjami parametrów układu i częstości wymuszenia. Podatne podparcie maszyny można podzielić na konstrukcję podpierającą i fundament. Konstrukcję podpierającą stanowią elementy, poprzez które mocuje się maszynę na fundamencie. Mogą to być różne elementy: podkładki izolujące, np. gumowe, sprężyny, skomplikowane układy kratownic, ram lub płyty podparte sprężyscie.

Konstrukcja podpierająca stanowi często układ ciągły, masowy, anizotropowy, zawierający tłumienie. Można tu przytoczyć przykład mocowania silnika napędowego na statku, gdzie konstrukcję podpierającą stanowi płyta lub konstrukcja spawana z kształtowników i zespół elementów sprężystych. Podobne konstrukcje podpierające stosowane są też dla maszyn energetycznych.

Konstrukcja podpierająca izoluje drgania maszyny od podłoża i jednocześnie modyfikuje wartości częstości rezonansowych układu maszyna — podparcie. Określenie charakterystyki dynamicznej konstrukcji podpierającej pozwala na określenie stanu dynamicznego układu i stanowi jeden z głównych problemów dla konstruktora. Charakterystykę dynamiczną konstrukcji można uzyskać w wyniku obliczeń i badań doświadczalnych.

Określenie charakterystyki dynamicznej w wyniku eksperymentu musi być przeprowadzone na obiekcie rzeczywistym i pozwala stwierdzić w jaki sposób będzie się zachowywał już wykonany układ. W przypadku, gdy szkodliwe efekty dynamiczne są wyższe od dopuszczalnych, wykonanie poprawek na obiekcie rzeczywistym jest żmudne i kosztowne. Jednakże, prowadząc badania wielu konstrukcji podpierających i katalogując ich charakterystyki dynamiczne, konstruktor, w fazie projektowania, może dobrać kon-

*) Praca nagrodzona na konkursie na prace z mechaniki teoretycznej i stosowanej, zorganizowanym przez Łódzki Oddział PTMTS w 1975 r.

strukcję podpierającą, zapewniającą właściwą pracę układu. W dużej liczbie przypadków konstrukcji jest to jedyna możliwość, ponieważ matematyczny model obliczeniowy, z uwagi na wierność odtworzenia układu rzeczywistego, uniemożliwi obliczenie charakterystyki lub będzie modelem uproszczonym, wnoszącym znaczne błędy.

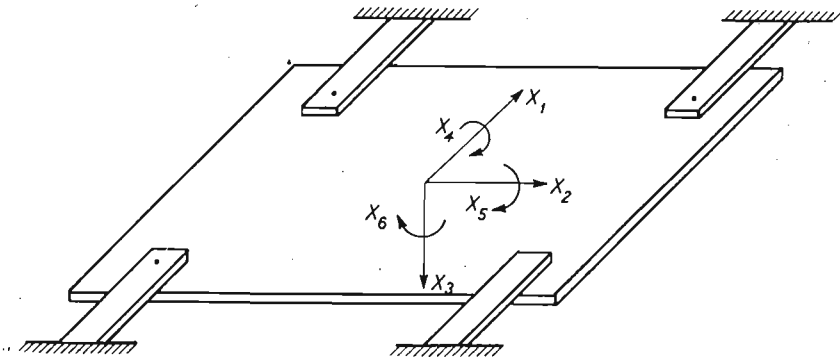
Klasyczne metody obliczeniowe z zadowalającą dokładnością pozwalają na określenie charakterystyk dynamicznych w stosunkowo prostych przypadkach konstrukcji, tzn. wtedy, gdy mamy do czynienia z konstrukcjami podpierającymi, dla których obliczeniowy dyskretny układ zastępczy dobrze odtwarza układ rzeczywisty.

Duże nadzieje w dziedzinie obliczeń charakterystyk dynamicznych złożonych konstrukcji prętowych i płytowych rokuje metoda elementów skończonych [1, 3, 4, 7, 9], w szczególności metoda sztywnych elementów skończonych [6], jednakże stosowanie ich do obliczeń związane jest z maszynami cyfrowymi o bardzo dużych pojemnościach pamięci i szybkościach obliczeń. Poza tym, stosowanie tych metod w zagadnieniach dynamicznych stanowi dla każdej konstrukcji osobne, skomplikowane zadanie.

W dalszej części opracowania wykonane będą obliczenia charakterystyki dynamicznej konstrukcji płytowo-sprężynowej przy użyciu metody sztywnych elementów skończonych oraz dokonana zostanie weryfikacja tych obliczeń na stanowisku modelowym.

2. Obliczenie charakterystyki dynamicznej konstrukcji

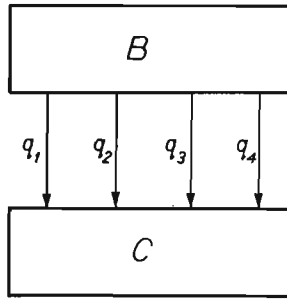
Analizowana konstrukcja (rys. 1) złożona jest z płyty podpartej na czterech płaskich sprężynach mocowanych do fundamentu. Poczynione zostały następujące założenia upraszczające:



Rys. 1

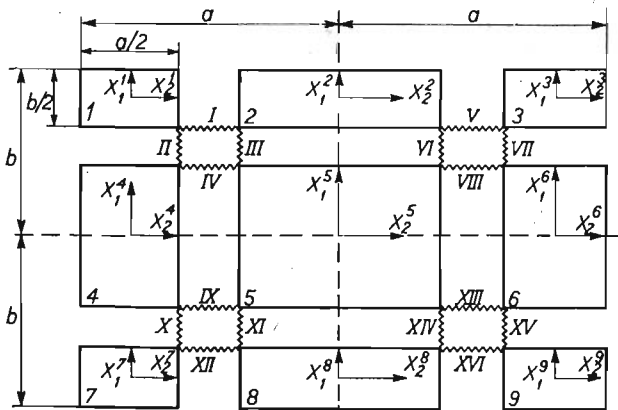
1. Brak tłumienia w układzie,
2. fundament, do którego są mocowane sprężyny, jest sztywny,
3. podparcie płyty przyjęto jako punktowe,
4. sprężyny pracują tylko na zginanie w płaszczyźnie x_1x_3 .

Układ ten można przedstawić schematycznie (rys. 2), jako złożony z dwóch podukładów — płyty B i sprężyn C , które są scharakteryzowane receptancjami $[\beta]$ i $[\gamma]$. Macierze te zostaną zapisane w dalszej części tak, aby wskaźniki przy receptancjach miały ozna-



Rys. 2

czenia wynikające z podziału płyty na sztywne elementy skończone. Dlatego też najpierw zostanie wyznaczona macierz dynamiczna płyty. Do obliczenia receptancji płyty metodą SES zostanie ona podzielona na dziewięć sztywnych elementów skończonych połączonych elementami sprężystymi. Schemat podziału i przyjęte układy osi pokazano na rys. 3.



Rys. 3

Sztywności elementów sprężystych, którymi połączone są SES, oblicza się ze wzorów wytrzymałościowych [5] dla płyty o wymiarach $a \times b$ (podział liniami przerywanymi). Początek układu współrzędnych przyjęto w środku masy każdego SES. Przesunięcia $q_1^s, q_2^s, \dots, q_s^s$ odpowiadają współrzędnym $x_1^s, x_2^s, \dots, x_s^s$. Równania ruchu wyprowadzono w oparciu o równania Lagrange'a drugiego rodzaju i mają postać:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s^s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s^s} + \frac{\partial U}{\partial q_s^s} = Q_s^s.$$

Energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^u \sum_{s=1}^6 m_s^r (\dot{q}_s^r)^2.$$

Natomiast energię potencjalną oblicza się z zależności

$$(3) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{l=1}^u e^{r-p} k_s^{r-p,l} (\Delta V_s^{r-p,l})^2.$$

Użyte we wzorach oznaczenia wyrażają: r, p — numer SES ($r = 1, 2, \dots, n$, $p = 1, 2, \dots, n$), s — wskaźnik oznaczający ukierunkowanie oznaczonego parametru względem układu osi $s = 1, 2, 3, \dots, 6$, l — numer elementu sprężystego w połączeniu między r -tym i p -tym SES

Odształcenia elementów sprężystych w układzie osi związanych z tymi elementami są równe

$$(4) \quad \Delta V_s^{r-p,l} = V_s^{r-p,l} - V_s^{p-r,l}.$$

Dla uzależnienia energii potencjalnej od współrzędnych uogólnionych, przemieszczenia elementów sprężystych należy wyrazić w układzie osi związanych z SES:

$$(5) \quad \{V^{r-p,l}\}_{1-3} = [C^{r-p,l}]\{W^{r-p,l}\}_{1-3},$$

$$\{V^{r-p,l}\}_{4-6} = [C^{r-p,l}]\{W^{r-p,l}\}_{4-6}.$$

Występuje w nich macierz cosinusów kierunkowych:

$$(6) \quad [C^{r-p,l}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{1,1}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{1,2}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{1,3}^{r-p,l} \\ \cos \varphi_{2,1}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{2,2}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{2,3}^{r-p,l} \\ \cos \varphi_{3,1}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{3,2}^{r-p,l}; & \cos \varphi_{3,3}^{r-p,l} \end{bmatrix}.$$

Zależności określające przemieszczenia, wyrażone w układzie osi związanych z SES, w funkcji współrzędnych uogólnionych, wyglądają następująco:

$$(7) \quad \{W^{r-p,l}\}_{1-3} = \{q^r\}_{1-3} - [z^{r-p,l}]\{q^r\}_{4-6},$$

$$\{W^{r-p,l}\}_{4-6} = \{q^r\}_{4-6}$$

Macierz współrzędnych zamocowania elementu sprężystego do r -tego SES jest:

$$(8) \quad [z^{r-p,l}] = \begin{bmatrix} 0 & z_3^{r-p,l} & -z_2^{r-p,l} \\ -z_3^{r-p,l} & 0 & z_1^{r-p,l} \\ z_2^{r-p,l} & -z_1^{r-p,l} & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając zależności (2)÷(8) w równaniach Lagrange'a (1), uzyskuje się 6n jednorodnych równań różniczkowych opisujących ruch układu. Równania te można zapisać

$$(9) \quad [M]\{\ddot{q}\} + [H]\{q\} = \{Q\}.$$

Macierz $[H]$ złożona z bloków $[H^{r,p}]$ jest macierzą symetryczną względem głównej przekątnej. Sposób wyznaczania bloków $[H^{r,p}]$ oraz usystematyzowane wzory podane są w pracy [6].

Rozpatrywany przypadek konstrukcji płytowo-sprężynowej przedstawia sobą układ przestrzenny o osiach równoległych. Uwzględniając, że dla takiego przypadku oraz dla takiej konstrukcji stosuje się elementy o trzech stopniach swobody — ruch wzdłuż osi x_3 ,

oraz obroty x_4 i x_5 , otrzymujemy wzory (9) w formie znacznie uproszczonej. I tak macierz cosinusów kierunkowych ma postać:

$$(10) \quad [C^{r-p,l}] = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

a macierze mas i współrzędnych uogólnionych dla r -tego SES są:

$$(11) \quad [M^r] = \begin{bmatrix} m_3^r & 0 & 0 \\ 0 & m_4^r & 0 \\ 0 & 0 & m_5^r \end{bmatrix},$$

$$(12) \quad \{q^r\} = \begin{bmatrix} q_3^r \\ q_4^r \\ q_5^r \end{bmatrix}.$$

Bloki $[H^{r,p}]$ określone są zależnościami:

$$(13) \quad [H^{rr}] = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} -z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} \\ \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} -z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} k_4^{r-p,l} + z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} -z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_2^{r-p,l} \\ \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} -z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_2^{r-p,l}; & \sum_{p=1}^9 \sum_{l=1}^{XVI} k_5^{r-p,l} + z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} \end{bmatrix},$$

$$(14) \quad [H^{rp}] = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{XVI} -k_3^{r-p,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} k_3^{r-p,l} z_2^{p-r,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} -k_3^{r-p,l} z_1^{p-r,l} \\ \sum_{l=1}^{XVI} z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} -k_4^{r-p,l} - z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_2^{p-r,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} z_2^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_1^{p-r,l} \\ \sum_{l=1}^{XVI} -z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_2^{p-r,l}; & \sum_{l=1}^{XVI} -k_5^{r-p,l} - z_1^{r-p,l} k_3^{r-p,l} z_1^{p-r,l} \end{bmatrix}.$$

Siły uogólnione określone są związkami:

$$(15) \quad \{Q^r\} = \begin{bmatrix} Q_3^r \\ Q_4^r \\ Q_5^r \end{bmatrix}.$$

Równania ruchu mają postać:

$$(16) \quad \begin{bmatrix} [M^1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [M^2] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [M^9] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{q}^1\} \\ \{\ddot{q}^2\} \\ \vdots \\ \{\ddot{q}^9\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [H^{1,1}], [H^{1,2}] \dots [H^{1,9}] \\ [H^{2,1}], [H^{2,2}] \dots [H^{2,9}] \\ \dots \\ [H^{9,1}], [H^{9,2}] \dots [H^{9,9}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q^1\} \\ \{q^2\} \\ \vdots \\ \{q^9\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{Q^1\} \\ \{Q^2\} \\ \vdots \\ \{Q^9\} \end{bmatrix}$$

lub

$$(17) \quad \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q}.$$

Ponieważ siły wymuszające są siłami harmonicznymi

$$(18) \quad Q = Q e^{i\omega t},$$

to rozwiązanie ma też postać harmoniczną

$$(19) \quad q = q e^{i\omega t}.$$

Uwzględniając (18) i (19) w (17) otrzymujemy

$$(20) \quad (\mathbf{H} - \mathbf{M}\omega^2) \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

lub

$$(21) \quad \mathbf{q} = (\mathbf{H} - \mathbf{M}\omega^2)^{-1} \cdot \mathbf{Q}.$$

Charakteryzująca płytę macierz receptancji \mathbf{B} jest równa

$$(22) \quad \mathbf{B} = (\mathbf{H} - \mathbf{M}\omega^2)^{-1}.$$

Do dalszych obliczeń korzystnie jest wybrać tylko te elementy macierzy, które mają znaczenie przy łączeniu podukładu płyty z innymi podukładami. Dlatego np. do połączenia z podukładem sprężyn \mathbf{C} wystarczająca jest następująca postać macierzy:

$$(23) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}; \beta_{1,3}; \beta_{1,7}; \beta_{1,9} \\ \beta_{3,1}; \beta_{3,3}; \beta_{3,7}; \beta_{3,9} \\ \beta_{7,1}; \beta_{7,3}; \beta_{7,7}; \beta_{7,9} \\ \beta_{9,1}; \beta_{9,3}; \beta_{9,7}; \beta_{9,9} \end{bmatrix},$$

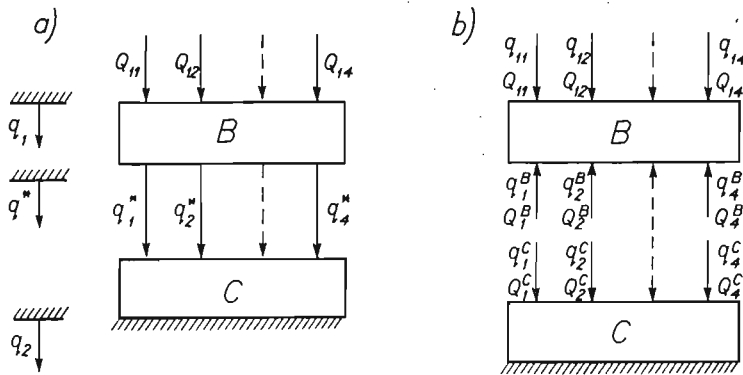
gdzie każdy ze składników jest stosunkiem przemieszczenia środka masy SES w kierunku x_3 do siły działającej w tym kierunku. Oczywiście, każda z receptancji obliczona jest z uwzględnieniem własności dynamicznych płyty i obciążenia na nią działającego i charakteryzuje ją dynamicznie. Ponieważ podukład sprężyn \mathbf{C} jest połączony z płytą w punktach będących środkami mas SES, macierz płyty w postaci (23) całkowicie wystarcza do uzyskania charakterystyki dynamicznej układu płyta-sprężyny i nie komplikuje dalszych obliczeń.

Należy tu dodać, że dla każdej częstości wymuszenia ω macierz płyty w postaci (23) uzyskiwana jest w wyniku obliczeń prowadzących do postaci (22), a następnie wybrania tylko interesujących nas wartości. Charakterystyka dynamiczna sprężyn, a więc macierz ich receptancji \mathbf{C} ma postać:

$$(24) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{99} \end{bmatrix}.$$

Wskaźniki przy receptancjach związane są z punktami mocowania sprężyn do płyty. Charakterystyka dynamiczna układu płyta-sprężyny określona zostanie w oparciu o warunki składania charakterystyk podukładów [2, 8]. Zgodnie z oznaczeniami na rys. 4 warunki ciągłości są:

$$(25) \quad \mathbf{q}^B = \mathbf{q}^C = \mathbf{q}^* = \mathbf{q}_1,$$



Rys. 4

natomiast warunki równowagi

$$(26) \quad Q^B + Q^C = Q^* = Q_1.$$

Wiedząc, że:

$$(27) \quad q^B = B \cdot Q^B,$$

$$(28) \quad q^C = C \cdot Q^C,$$

uwzględniając (26) i (28) w równaniu (25) i biorąc pod uwagę (27), otrzymujemy ostatecznie

$$(29) \quad q_1 = (B^{-1} + C^{-1})^{-1} \cdot Q_1.$$

W ten sposób została wyznaczona charakterystyka konstrukcji podpierającej płytowo-sprężynowej, określająca receptancje będące stosunkami przemieszczeń na poziomie 1 do sił wymuszających, wywołujących te przemieszczenia, działających na poziomie 1. Czyli, że

$$(30) \quad A_1 = (B^{-1} + C^{-1})^{-1}.$$

W podobny sposób można wyznaczyć pozostałe receptancje konstrukcji podpierającej. Obliczenia macierzy dynamicznej zostały zaprogramowane i wykonane na maszynie cyfrowej Odra 1204.

Płyta. Obliczenia wykonano dla płyty prostokątnej o wymiarach $400 \times 600 \times 3$ mm ($2a \times 2b \times h$) wykonanej ze stali ST5 ($E = 2,1 \times 10^{11}$ N/m²; $G = 8,1 \times 10^{10}$ N/m²; $\nu = 0,3$).

Dane do obliczeń: 1. Sztywności elementów sprężystych: Elementy sprężyste I, IV, V, VIII, IX, XII, XIII, XVI

$$k_1 = \frac{Eha}{2b} = 209\,000\,000 \text{ N/m}$$

$$k_2 = k_3 = \frac{Gha}{2\alpha b} = 67\,500\,000 \text{ N/m} \quad (\alpha = 1,2)$$

$$k_4 = \frac{Gh^3a}{12b} = 121 \text{ Nm}$$

$$k_5 = \frac{Eh^3a}{24(1-\nu^2)b} = 173 \text{ Nm}.$$

Elementy sprężyste II, III, VI, VII, X, XI, XIV, XV

$$k_1 = k_3 = \frac{Ghb}{2\lambda a} = 152\,000\,000 \text{ N/m}$$

$$k_2 = \frac{Ehb}{2a} = 472\,000\,000 \text{ N/m}$$

$$k_4 = \frac{Eh^3b}{24(1-\nu^2)a} = 380 \text{ Nm}$$

$$k_5 = \frac{Gh^3b}{12a} = 274 \text{ Nm.}$$

Tablica 1

Numer SES	Masy uogólnione		
	m_3^r	$m_4^r \cdot 10^6$	$m_5^r \cdot 10^6$
	kg	Nms ²	Nms ²
1	2	3	4
1	0,36	300,27	675,27
2	0,72	600,54	5400,54
3	0,36	300,27	675,27
4	0,72	2400,54	1350,54
5	0,144	4801,08	10801,08
6	0,72	2400,54	1350,54
7	0,36	300,27	675,27
8	0,72	600,54	5400,54
9	0,36	300,27	675,27

2. Masy uogólnione podano w tablicy 1.

3. Współrzędne zamocowania elementów sprężystych do SES podano w tablicy 2.

Sprężyny. Płyta została podparta czterema płaskimi sprężynami wykonanymi z brązu krzemowego CuSi3Mn $E = 1,2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ i $\rho = 8800 \text{ kg/m}^3$ o wymiarach $40 \times 3 \times 80 \text{ mm}$. Traktując sprężyny jak belki według [2], obliczamy receptancję ze wzoru

$$(31) \quad \gamma = \frac{(\sin \lambda l + \sin h \lambda l)(\cos \lambda l - \cosh \lambda l) - (\cos \lambda l + \cosh \lambda l)(\sin \lambda l - \sin h \lambda l)}{2EI\lambda^3(1 + \cos \lambda l \cosh \lambda l)}$$

gdzie

$$(32) \quad \lambda l = \left(\frac{A\rho l^4 \omega^2}{EI} \right)^{1/4}$$

Oczywiście, wszystkie receptancje $\gamma_{11}, \gamma_{33}, \gamma_{77}, \gamma_{99}$ są sobie równe.

Tablica 2

Współrzędne zamocowania	Wartości współrzędnych	Współrzędne zamocowania	Wartości współrzędnych
$z_5^{r-p, I}$	m	$z_5^{r-p, I}$	m
$z_1^{1-2, I}; z_1^{1-4, II}; z_1^{4-5, IX}; z_1^{4-7, X}$ $z_1^{7-4, X}; z_1^{7-8, XII}; z_1^{4-1, II}$	0,075	$z_2^{1-2, I}; z_2^{2-1, I}; z_2^{1-4, II}; z_2^{2-5, III}$ $z_2^{2-3, V}; z_2^{3-2, V}; z_2^{2-5, VI}; z_2^{2-6, VII}$	-0,05
$z_1^{1-2, V}; z_1^{3-6, VII}; z_1^{6-5, VIII};$ $z_1^{6-5, XIII}; z_1^{6-9, XV}; z_1^{9-6, XV};$ $z_1^{9-8, XVI}$	-0,075	$z_2^{7-4, X}; z_2^{8-5, XIV}; z_2^{8-5, XI}$ $z_2^{9-6, XV}; z_2^{7-8, XII}; z_2^{8-7, XII}$ $z_2^{8-9, XVI}; z_2^{9-8, XVI}$	0,05
$z_1^{2-1, I}; z_1^{2-5, III}; z_1^{5-2, IV}; z_1^{5-4, IV}$ $z_1^{5-4, IX}; z_1^{5-8, XI}; z_1^{8-5, XI};$ $z_1^{8-7, XII}$	-0,15	$z_2^{4-1, II}; z_2^{5-2, III}; z_2^{5-2, VI}$ $z_2^{6-3, VII}; z_2^{4-3, IV}; z_2^{5-4, IV}$ $z_2^{5-6, VIII}; z_2^{6-5, VIII}$	0,1
$z_1^{2-3, V}; z_1^{2-5, VI}; z_1^{5-2, VI};$ $z_1^{5-6, VIII}; z_1^{5-6, XIII}; z_1^{5-8, XIV}$ $z_1^{8-5, XIII}; z_1^{8-9, XVI}$	0,15	$z_2^{2-5, IX}; z_2^{5-4, IX}; z_2^{2-7, X}$ $z_2^{3-6, XIII}; z_2^{6-5, XIII}; z_2^{5-8, XIV}$ $z_2^{5-8, XI}; z_2^{6-9, XV}$	-0,1
$z_3^{r-p, I}$	0		

Korzystając z podanych wzorów zaprogramowano, dla przedstawionych danych, obliczenia receptancji na maszynie cyfrową. Weryfikację metody wyznaczania charakterystyki dynamicznej przeprowadzono dla wyznaczonych częstości rezonansowych układu płyta-sprężyna, uzyskanych jako rozwiązanie równania częstości. Równanie częstości układu otrzymuje się z warunku rezonansu układu tzn. równości

$$(33) \quad \frac{1}{\alpha_{ik}} = 0,$$

gdzie α_{ik} jest dowolnym elementem macierzy A_1 .

Warunek ten sprowadza się do poszukiwania miejsc zerowych wyznacznika macierzy

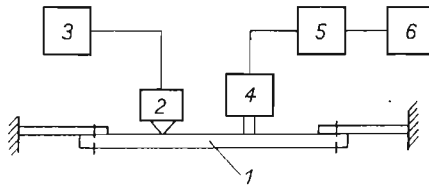
$$B^{-1} + C^{-1},$$

ponieważ w wyniku jej odwrócenia otrzymujemy macierz A_1 (30). W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano następujące wartości częstości rezonansowych:

$$\omega_{rez} = 185; 246; 389; 644 \text{ s}^{-1}.$$

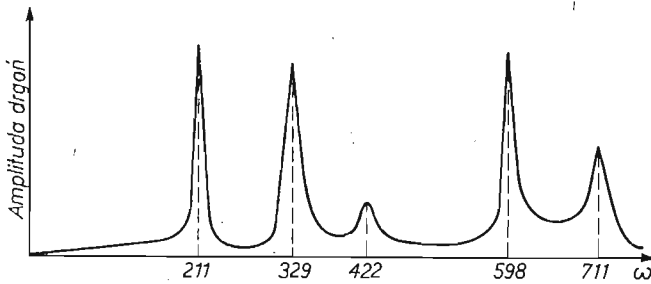
3. Doświadczalne sprawdzenie metody obliczeniowej

Badania doświadczalne, przeprowadzone dla sprawdzenia przedstawionej metody obliczeniowej, zawierały test rezonansowy konstrukcji płytowo-sprężynowej z rys. 1, zamocowanej sztywno do fundamentu, będącego konstrukcją spawaną z kształtowników. Schemat blokowy układu pomiarowego przedstawia rys. 5.



Rys. 5

Na rys. 5 oznaczono: 1 — konstrukcja płytowo-sprężynowa, 2 — piezoelektryczny czujnik przyspieszeń typ KD-12/070222-RFT-Dresden, 3 — miernik drgań SM-231-RFT-Dresden, 4 — elektrodynamiczny wzбудnik drgań PR-9270/01-Philips, 5 — generator akustyczny 12 × GO17 Tesla, 6 — częstotściomierz liczący PFL-4-Zopan.



Rys. 6

Na podstawie wykonanych pomiarów sporządzono wykres rezonansowy przedstawiony na rys. 6.

Wyniki obliczeń częstości rezonansowych wraz z ich wartościami zmierzonymi zestawiono w tabelicy 3.

Tabelica 3

Częstość obliczona ω	Częstość zmierzona ω^*	Błąd	
		$\frac{\omega^* - \omega}{\omega^*}$	100%
rad/s	rad/s		
185	211		12,3
246	329		25,2
389	422		7,8
563	598		5,8
644	711		9,4

4. Ocena wyników i wnioski

Zgodność wyników otrzymanych na drodze obliczeniowej i z pomiarów należy ocenić jako bardzo dobrą. Rozbieżności między wartościami ω i ω^* są wynikiem przede wszystkim założenia punktowego podparcia płyty i wynikającego z tego założenia sposobu wyznaczenia sztywności sprężyn. W rzeczywistości połączenie to znacznie zwiększa sztywność konstrukcji w stosunku do konstrukcji przyjętej do obliczeń.

Duży wpływ na dokładność wyników obliczeń ma liczba SES, na które zostanie podzielona płyta. Przy podziale płyty na SES decydujące znaczenie mają możliwości maszyny cyfrowej, którą można użyć do obliczeń, ponieważ wymiar macierzy receptancji płyty jest określony iloczynem: $m \times n = (\text{liczba SES} \times \text{liczba stopni swobody}) \times (\text{liczba SES} \times \text{liczba stopni swobody})$. W obliczanym przypadku macierz ta miała wymiar 27×27 .

W oparciu o przeprowadzone obliczenia i badania można stwierdzić, że zastosowana do obliczeń metoda SES rokuje duże nadzieje przy analitycznym wyznaczaniu charakterystyki dynamicznej pewnych rodzajów konstrukcji podpierających, co ma szczególnie istotne znaczenie w praktyce inżynierskiej. Istotnym momentem jest duża dokładność wyników uzyskanych dla analizowanej konstrukcji przy znacznych uproszczeniach modelu obliczeniowego.

Jakkolwiek wyznaczenie charakterystyki dynamicznej dla każdej konstrukcji stanowi tu oddzielne zagadnienie, zresztą trudne, to łatwość zaprogramowania i wykonania obliczeń na maszynie cyfrowej całkowicie uzasadnia stosowanie tej metody.

Literatura cytowana w tekście

1. I. A. ARGYRIS, A. S. L. CHAN, *Application of finite elements in space and time*, Ing. Archiv., **41**, 235 - 257 (1972).
2. R. E. D. BISHOP, D. C. JOHNSON, *The Mechanics of Vibration*, Cambridge University Press, Cambridge 1960.
3. I. W. CLOUGH, I. L. TOCHER, *Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending*, First Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson, AFB, 515 - 541 (1965).
4. L. R. HERRMANN, *Finite Element Bending Analysis for Plates*, J. Eng. Div., ASCE, EM5, 13 - 26 (1967).
5. M. T. HUBER, *Stereomechanika techniczna*, PWN, Warszawa 1958,
6. J. KRUSZEWSKI-MAJEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Nauk., Pol. Gdańska, Nr 165, Mechanika z. XII (1971).
7. S. NEMAT-NASSER, K. N. LEE, *Finite — Element Formulations for Elastic Plates by General Variational Statement with Discontinuous Fields*, DCAMM Reports No. 39 (January 1973).
8. J. STELMARCZYK, *Analiza drgań maszyn wirnikowych metodą składania charakterystyk dynamicznych zespołów*, Praca doktorska, Łódź 1972.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛИТНО-ПРУЖИННОЙ КОНСТРУКЦИИ МЕТОДОМ ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Динамической характеристикой податливой конструкции является матрица коэффициентов динамической податливости, называемых рецептаниями, которые являются функциями частоты возбуждения и параметров конструкции. Современные конструкции отличаются податливостью,

сложной конфигурацией, сложным распределением массы и жесткости а также демпфированием. Поэтому динамические характеристики таких конструкций обычно определяются опытным путем.

В данной работе представлен метод расчета динамической характеристики плитно-пружинной конструкции при помощи жестких конечных элементов. Этот метод использован для определения рецептанций плиты. С использованием рецептанций получена матрица динамических податливостей конструкции. Вычисления проведены на ЭВМ и проверены экспериментально.

S u m m a r y

THE RIGID FINITE ELEMENT METHOD OF DETERMINING THE DYNAMIC CHARACTERISTIC OF A PLATE-SPRING STRUCTURE

Characteristics of a flexible structure is represented by a matrix of dynamic flexibility coefficients i.e. receptances, which are functions of the excitation frequency and the structure parameters. The present-day constructions are characterized by their high flexibility and intricate shapes, complex distribution of masses and stiffnesses, and by their damping properties. In general, it is proposed to use an experimental method to find dynamic characteristics of structures. The paper presents a rigid finite element method of determining the dynamic characteristics of plate-spring structures. The method is used to determine the matrix of receptances of the plate. The construction is dynamically characterized by means of receptances. The dynamic characteristics of the construction was calculated by a digital computer. The results of calculations were verified experimentally, and the results seem to be very promising.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1976 r.

ANALIZA ROZWIĄZAŃ KINEMATYCZNIE DOPUSZCZALNYCH DLA ZAGADNIENIA NAPORU ŚCIAN O RÓŻNYCH KSZTAŁTACH*

WIESŁAW TRĄMPCZYŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Wyraźny rozwój w ostatnich latach matematycznej teorii mechaniki ośrodków sypkich pozwala na uzyskanie rozwiązań uwzględniających zarówno statykę, jak i kinematykę dla szeregu praktycznie ważnych procesów. Oczywiście nadal istnieje wiele poważnych trudności dotyczących przyjęcia odpowiedniego modelu opisującego rzeczywiste własności fizyczne ośrodka lub nawet sformułowania zagadnień brzegowych dla konkretnych przypadków.

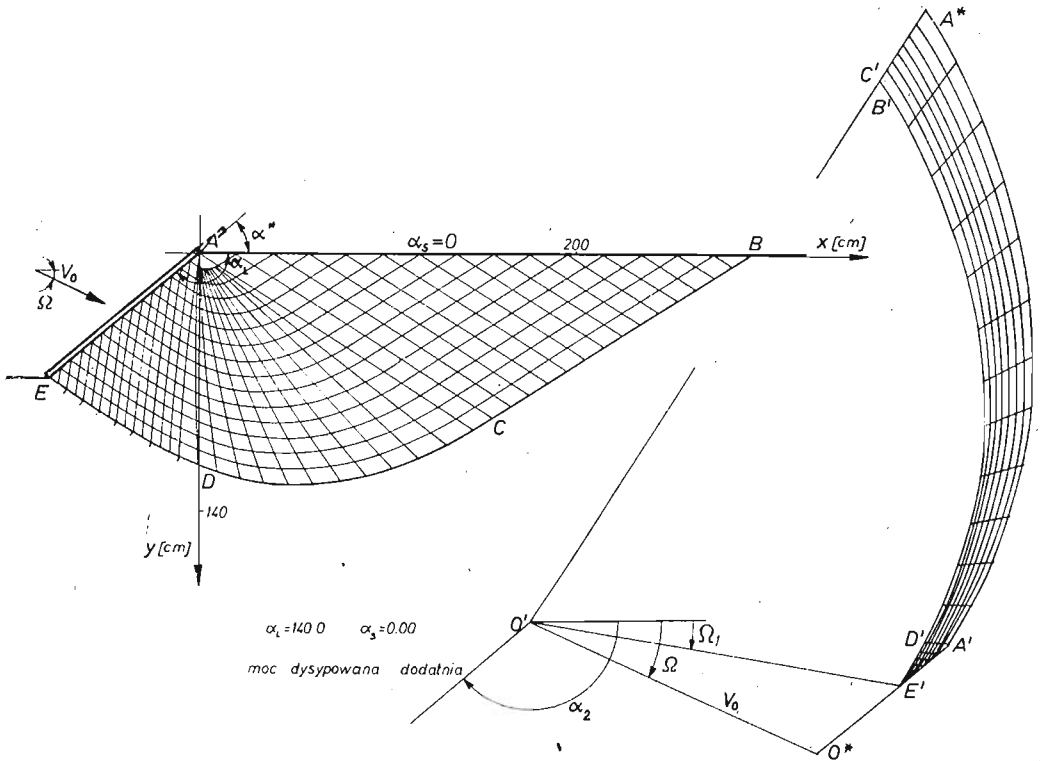
Wiele efektywnych rozwiązań uzyskuje się przyjmując sztywno idealnie-plastyczny model ośrodka oraz płaski stan odkształcenia. Rozwiązywanie zadań brzegowych dla tego typu zagadnień ma już dosyć bogatą literaturę (np. [1, 2, 3, 4]). Mimo że w wielu przypadkach zauważono istnienie ograniczeń utrudniających uzyskanie poprawnych rozwiązań (np. [4, 5]), brak było pełniejszej analizy przeprowadzonej pod tym kątem. Zazwyczaj ograniczano się do prezentowania rozwiązań poprawnych, ewentualnie krótkiej dyskusji trudności w ich uzyskaniu.

W pracy pokazano ograniczenia możliwości uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych dla zagadnienia naporu ścian o różnych kształtach (odpowiadały one kształtom narzędzi do robót ziemnych). Rozważania przeprowadzono dla ośrodka ważkiego opisanego warunkiem plastyczności Coulomba-Mohra ze spójnością oraz stowarzyszonego prawa płynięcia. Szersze opracowanie tego tematu można znaleźć w pracy autora [6].

2. Statyka i kinematyka procesu

Rozpatrzmy ruch ośrodka ograniczonego prostoliniowym brzegiem swobodnym nachylonym pod kątem α_s , wywołany przesuwaniem płaskiej ściany tworzącej z poziomem kąt α_i (rys. 1). Na powierzchni kontaktu ściany, przesuwaną się z prędkością V_0 , z ośrodkiem występuje suche tarcie określone współczynnikiem tarcia μ . Zagadnienie to było już przedstawiane w różnych pracach. W związku z tym jedynie krótko zostanie omówiony sposób rozwiązania.

*) Praca wykonana w ramach realizacji problemu węzłowego 05.12: Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych.



Rys. 1

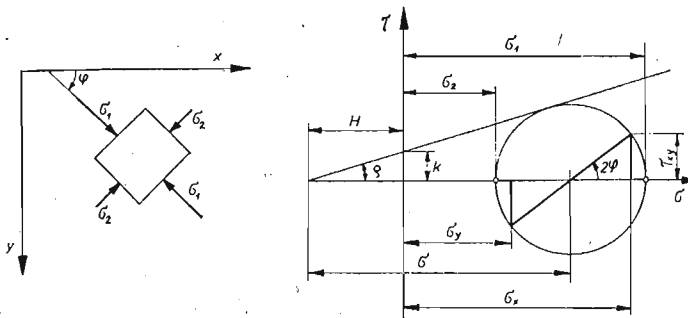
2.1. Statyka. Stan równowagi granicznej opisują równania równowagi:

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma,$$

oraz warunek stanu granicznego Coulomba–Mohra, który dla płaskiego stanu odkształcenia ma postać

$$(2) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 \sin^2 \varrho,$$

gdzie ϱ jest kątem tarcia wewnętrznego ośrodka, zaś H wytrzymałością na trójosiowe izotropowe rozciąganie (rys. 2).



Rys. 2

Wprowadzając podstawienie:

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma(1 \pm \sin \varrho \cos 2\varphi) - H, \quad \tau_{xy} = \sigma \sin \varrho \sin 2\varphi$$

gdzie φ jest kątem jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego z osią x ; układ równań (1) i (2) rozwiązuje się metodą charakterystyk uzyskując następujące równania charakterystyk oraz zależności wzdłuż nich:

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon),$$

$$d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg} \varrho d\varphi = \gamma(dy \pm \operatorname{tg} \varrho dx),$$

gdzie

$$\varepsilon = \pi/4 - \varrho/2.$$

2.2. Kinematyka. Ze względu na złożone własności rzeczywistych ośrodków sypkich oraz brak dostatecznej ilości badań doświadczalnych, dotychczas nie ma jednolitego poglądu na sprawę formułowania równań plastycznego płynięcia ośrodka. Istnieje szereg propozycji praw fizycznych (np. [7, 8, 9, 10, 11, 12]) z których każda budzi kontrowersje. Nie wnikając w ich przyczyny w niniejszej pracy ograniczono się do analizy kinematyki ośrodka przy użyciu prawa płynięcia zaproponowanego przez DRUCKERA i PRAGERA [7].

Jest ono uogólnieniem na ośrodki rozdrobnione tzw. stowarzyszonego prawa płynięcia w postaci

$$(5) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności natomiast funkcja F jest warunkiem plastyczności.

Równania kinematyki, które przyjmują postać:

$$(6) \quad \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \sin 2\varphi - \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \cos 2\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} (\sin \varrho - \cos 2\varphi) - \frac{\partial V_y}{\partial y} (\sin \varrho + \cos 2\varphi) = 0$$

rozwiązuje się metodą charakterystyk uzyskując następujące równania charakterystyk oraz zależności wzdłuż nich:

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon), \quad dV_x + dV_y \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon) = 0.$$

Konsekwencją tak sformułowanego prawa jest współosiowość kierunków głównych tensorów $\dot{\varepsilon}_{ij}$ i σ_{ij} oraz ortogonalność wektora prędkości odkształcenia plastycznego, odłożonego odpowiednio w przestrzeni naprężeń, do powierzchni plastyczności. Ta ostatnia własność pozwala na sformułowanie twierdzeń ekstremalnych (patrz np. [13]).

Dla znalezienia wektorów prędkości posługiwano się metodą graficznego całkowania związków wzdłuż charakterystyk, polegającą na konstruowaniu hodografu, która została zaproponowana przez GREENA [14].

Uzyskane w przedstawiony powyżej sposób rozwiązania, w których:

1) spełnione są warunki brzegowe dla prędkości oraz warunki na granicy strefy plastycznej i sztywnej,

2) moc dysypowana nie jest ujemna,

są kinematycznie dopuszczalne, a wyznaczone siły stanowią ocenę górną rzeczywistych sił powierzchniowych wywołujących plastyczne płynięcie. W przedstawionych dalej zadaniach o uzyskaniu tego typu rozwiązań decydowało spełnienie drugiego z wymienionych warunków. Sprawdzano go metodą wykreślną zaproponowaną przez FORDA [15]. Polega ona na graficznym sprawdzeniu nierówności:

$$(8) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0$$

w wszystkich punktach pola. Zadania w których chociażby w jednym punkcie była ona niespełniona uważano za niepoprawne.

Ponieważ, w tych zagadnieniach, rozwiązania kinematyczne buduje się w oparciu o uprzednio znaną statykę, skonstruowanie przedłużenia stanu naprężenia w obszar sztywny [16] dla rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych pozwala na uzyskanie rozwiązań kompletnych (ściślych).

3. Ograniczenia uniemożliwiające uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych

Układ równań dla naprężeń rozwiązywano numerycznie przy pomocy EMC Odra 1204. Posługując się metodą MASSAU [17], poczynając od swobodnego brzegu rozwiązywano kolejno: zagadnienie Cauchy'ego, zagadnienie z punktem osobliwym i zagadnienie mieszane.

Wpływ na uzyskane wyniki mają następujące wielkości:

k [kG/cm²] — spójność ośrodka ($k = H \operatorname{tg} \varrho$),

ϱ' [°] — kąt tarcia wewnętrznego,

γ [kG/cm³] — ciężar objętościowy,

μ — współczynnik tarcia pomiędzy ścianą a ośrodkiem,

oraz warunki zadania: kształt brzegu swobodnego, profil ściany oraz kierunek jej ruchu.

W pracy ograniczono się do analizy możliwości uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych w zależności od kształtu brzegu swobodnego, profilu ściany oraz kierunku jej ruchu. Pozostałe wielkości przyjmowano za stałe:

$$\gamma = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ [kG/cm}^3\text{]}, \quad \varrho = 25^\circ, \quad \mu = 0,2 \quad k = 0,5 \text{ [kG/cm}^2\text{]}.$$

Ze względu na brak rozwiązań analitycznych tego typu problemów wnioski wyciągano na podstawie obserwacji szeregu rozwiązań konkretnych zagadnień brzegowych. Należy więc do wszelkich wniosków podchodzić z dużą ostrożnością i traktować je jedynie jako możliwość występowania opisywanych dalej efektów.

3.1. Wpływ kierunku ruchu ściany napierającej na możliwość uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. Podobnie jak kształt rozpatrywanych ścian napierających, przyjmujemy, że ich ruch odpowiadać będzie charakterowi pracy narzędzi do robót ziemnych. Ponieważ w rozważaniach teoretycznych rozpatrujemy jedynie początek ruchu, ograniczać będziemy się do przesuwu prostoliniowego, a ewentualnym ograniczeniom, ze względu na możliwość uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych podlegać będzie jego kierunek.

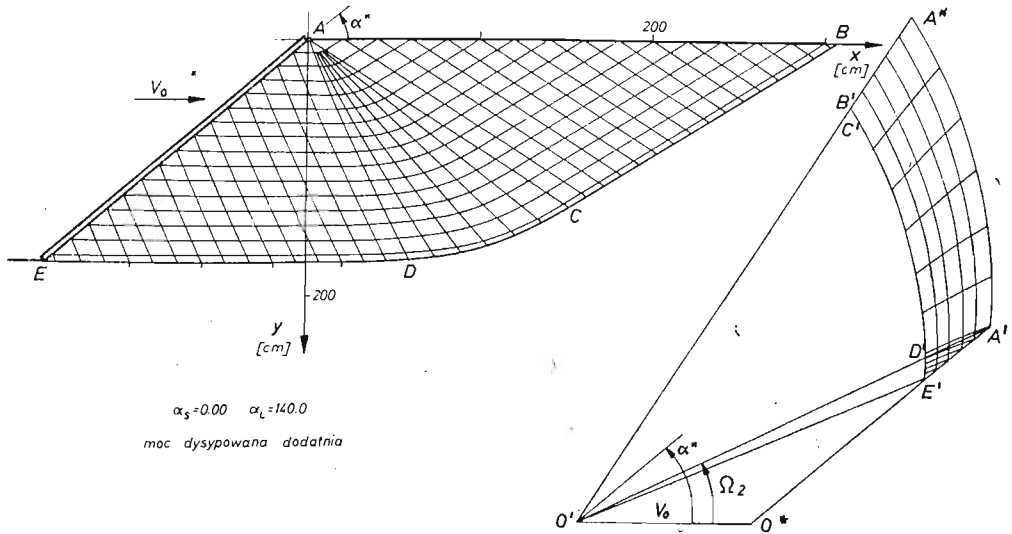
Kąt nachylenia prędkości V_0 , Ω , której na hodografie odpowiada wektor $O'O^*$ (rys. 1) musi spełniać warunek

$$(9) \quad \Omega_1 \leq \Omega \leq \alpha_2$$

(za dodatnie uważa się kąty odkładane od osi x zgodnie z ruchem wskazówek zegara) gdzie Ω_1 jest kątem nachylenia wektora prędkości przesuwu ośrodka wzdłuż charakterystyki β w punkcie E , będącej linią nieciągłości prędkości. Dla $\Omega_1 > \Omega$ punkt O^* znajduje się na odcinku $E'A'$ i przesuw ośrodka wzdłuż ściany napierającej odbywa się do dołu. Ponieważ przystępując do rozwiązania założono przeciwny kierunek tego ruchu, co pociąga za sobą odpowiedni zwrot naprężeń stycznych na ścianie, moc dysypowana w punkcie E jest ujemna.

Graniczna wielkość kąta α_2 wynika natomiast z charakteru rozpatrywanego procesu. Np. w zagadnieniu przedstawionym na rys. 4 $\alpha_2 = 0$ i odpowiada kątowi nachylenia dolnej części łyżki ładowarki. Gdy $\Omega_1 > \alpha_2$ następuje wciskanie w ośrodek dolnej części łyżki co nie odpowiada charakterowi pracy tego typu narzędzi. W przypadku naporu płaskich ścian (np. rys. 1) $\alpha_2 = \alpha_1$.

Jeżeli w zagadnieniu przedstawionym na rys. 2 założymy poziomą prędkość przesuwu ściany to warunek 9 jest niespełniony i moc dysypowana w punkcie E jest ujemna. Załóżmy więc że przesuw ośrodka wzdłuż ściany odbywa się do dołu (przeciwnie niż poprzednio)



Rys. 3

i rozwiążmy zagadnienie od nowa (rys. 3). Dla tak postawionego zadania poprawne rozwiązanie uzyskuje się dla

$$(10) \quad \alpha^* \leq \Omega \leq \Omega_2$$

gdzie Ω_2 jest kątem nachylenia wektora przesuwu ośrodka wzdłuż charakterystyki β w punkcie A , będącej linią nieciągłości prędkości. Uzasadnienie obu granicznych wielkości kąta Ω jest analogiczne do poprzedniego. Poprawne rozwiązanie można więc uży-

skąć w zakresie kątów nachylenia wektora prędkości przesuwu odpowiadającego bardziej wysuwaniu się ściany z ośrodka nie zaś jej naporowi.

Wynika stąd, że dla poziomego przesuwu ściany nie można otrzymać, w przypadku przedstawionym na rys. 1, poprawnego rozwiązania ponieważ wartość $\Omega = 0$ nie zawiera się w żadnym z zakresów określonych nierównościami 9 i 10.

W zagadnieniach, w których kierunek przesuwu ściany jest określony z góry maksymalny kąt jej nachylenia ograniczony jest wynikającą z rozwiązania wielkością kąta Ω_1 w punkcie E , gdyż spełniony musi być warunek 9.

W przypadkach, gdy ściana napierająca wystaje ponad brzeg swobodny ośrodka (na rys. 1 zaznaczono to linią przerywaną) w punkcie A dodatkowo musi być spełniony warunek (dotyczy to zagadnień, w których ściana bezpośrednio styka się z obszarem uplastycznionym)

$$(11) \quad \alpha^* \leq \Omega_2,$$

gdzie Ω_2 jest kątem nachylenia wektora prędkości ośrodka wzdłuż charakterystyki β w punkcie A , skąd otrzymujemy ograniczenie kąta nachylenia ściany

$$(12) \quad \alpha_L \leq \frac{3}{4}\pi - \varrho/2 + \alpha_s.$$

W przeciwnym razie, rozkładając prędkość ośrodka w punkcie A na kierunek normalny i styczny do ściany otrzymujemy składową normalną skierowaną do ściany.

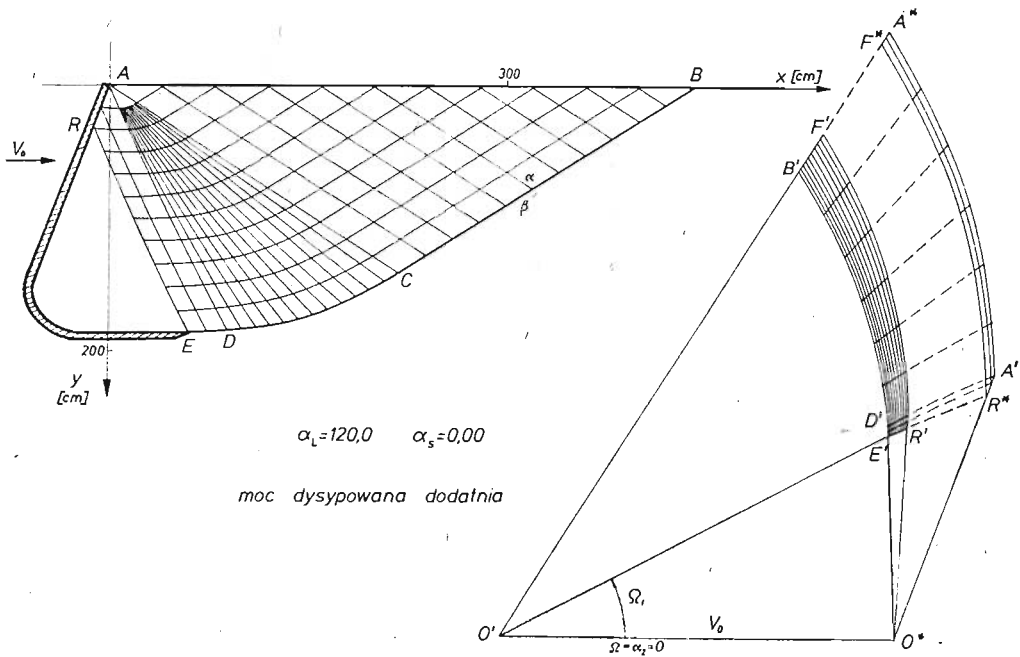
Dalsze rozważania dotyczące wpływu kształtu brzegu swobodnego i profilu narzędzia na możliwość uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych przeprowadzono przy założeniu, że kąt nachylenia wektora prędkości ściany spełnia nierówności 9 i 12.

3.2. Wpływ kształtu brzegu swobodnego na możliwość uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. W przypadku poziomego brzegu swobodnego ośrodka uzyskiwano rozwiązania kinematycznie dopuszczalne dla wszystkich rozpatrywanych przypadków, niezależnie od wielkości obszaru uplastycznionego. Znaczy to, że niezależnie od tego czy w rozwiązaniu statycznym występowało tylko zagadnienie Cauchy'ego, czy zagadnienie Cauchy'ego i zagadnienie z punktem osobliwym, czy też zagadnienie Cauchy'ego, zagadnienie z punktem osobliwym i zagadnienie mieszane (co jest zależne od kształtu ściany napierającej) w rozwiązaniu moc dysypowana była dodatnia (np. rys. 4).

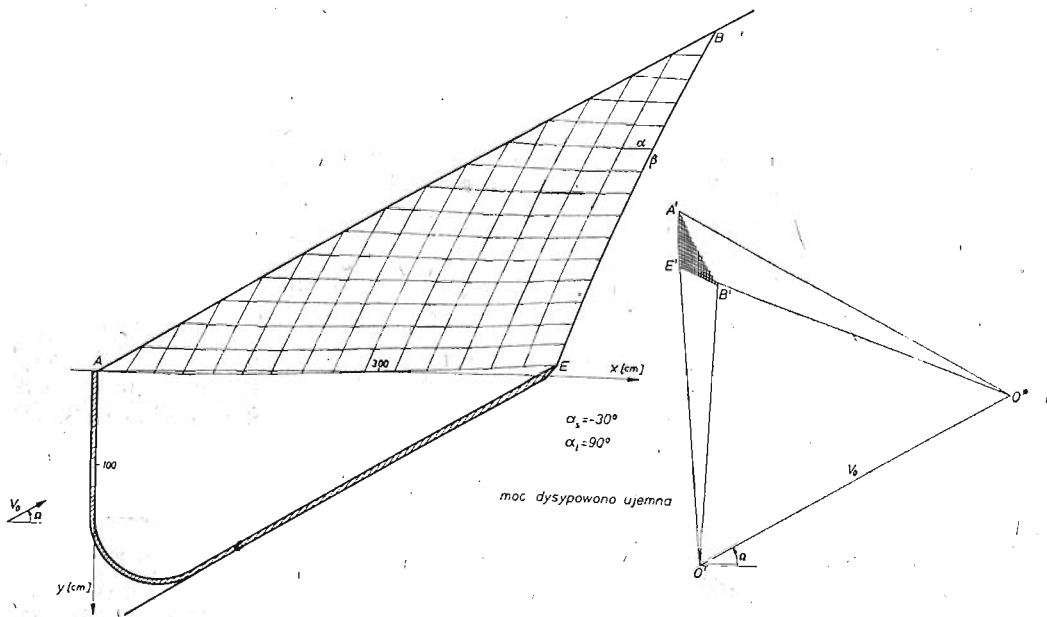
W przypadku płaskiego brzegu nachylonego do poziomu pod kątem $\alpha_s < 0$, na skutek uwzględnienia ciężaru objętościowego ośrodka, charakterystyki α i β w obszarze zagadnienia Cauchy'ego mają krzywiznę ujemną ($K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta s}$, gdzie ξ jest kątem pomiędzy

osią x a styczną do charakterystyki w danym punkcie, a Δs odległością między dwoma sąsiednimi punktami. Za kierunek dodatni charakterystyk przyjęto kierunek zgodny z ich wykreśleniem, tzn. od brzegu swobodnego). W zadaniach, w których obszar plastyczny ograniczał się tylko do w/w zagadnienia moc dysypowana była ujemna (rys. 5).

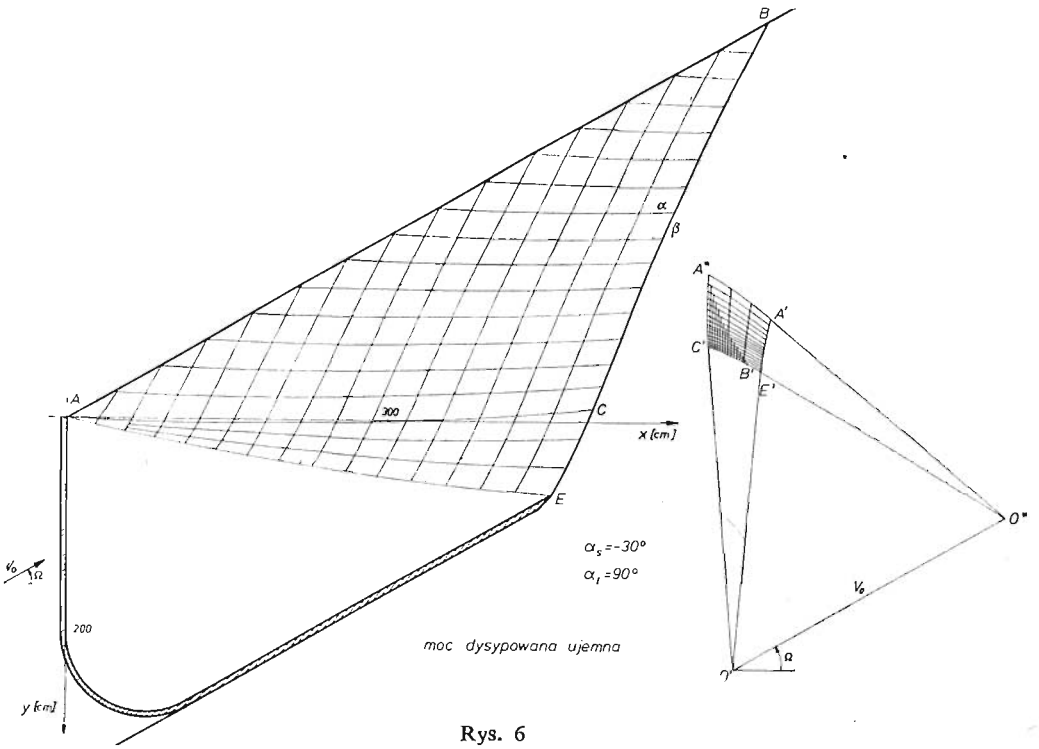
W obszarze zagadnienia charakterystycznego z punktem osobliwym zwiększa się ujemna krzywizna charakterystyk α , zaś charakterystyki β są liniami o krzywiznie dodatniej. W zadaniach, w których obszar plastyczny występowało zagadnienie Cauchy'ego oraz zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym, dla kierunku przesuwu ściany równoległego do brzegu swobodnego, zależnie od wielkości kąta rozwarcia wachlarza



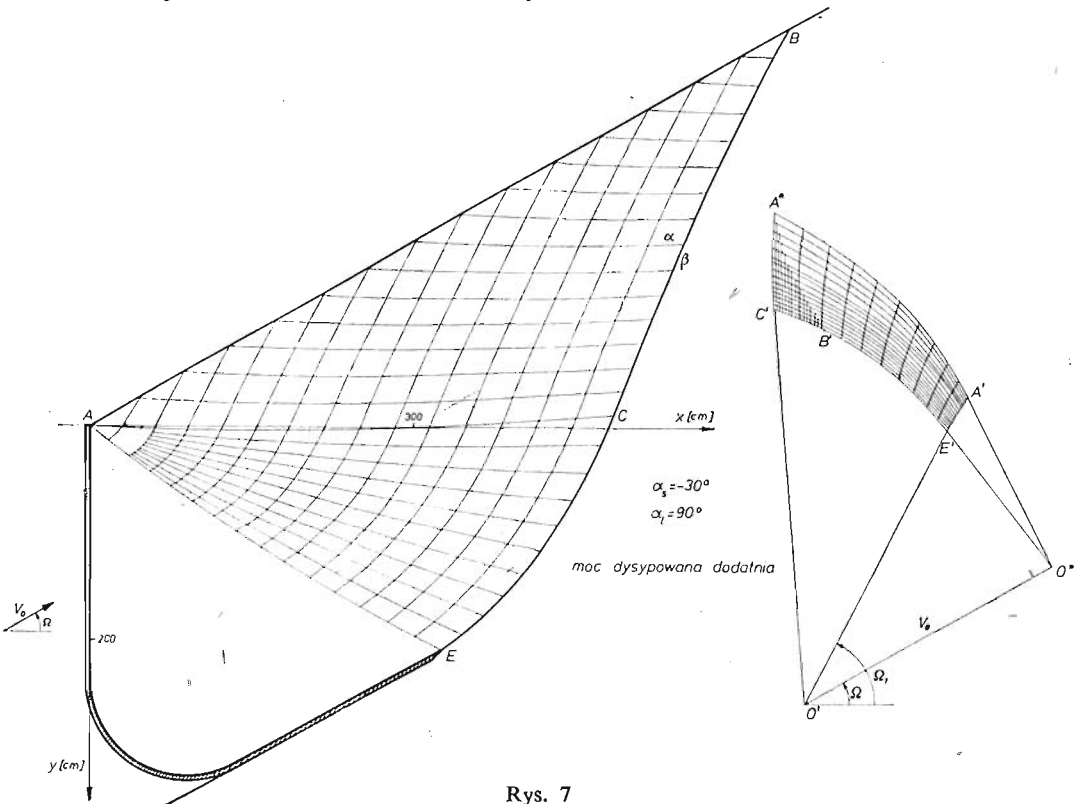
Rys. 4



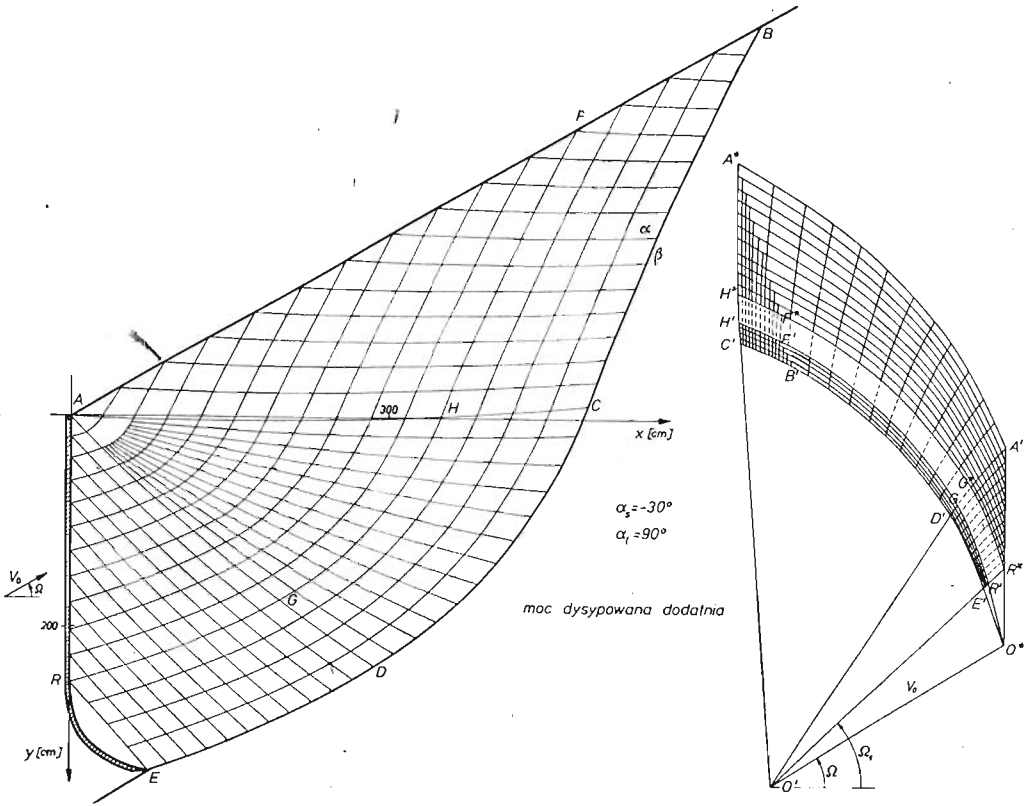
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

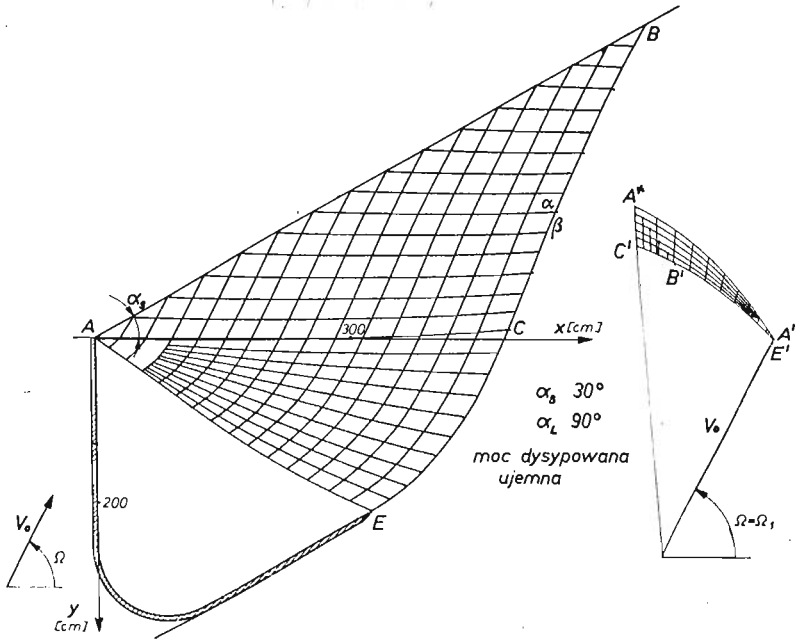
uzyskiwano rozwiązania kinematycznie dopuszczalne (rys. 7) lub nie (rys. 6). Dla tego przypadku istnieje pewna krytyczna wielkość wachlarza, po przekroczeniu której można otrzymać poprawne rozwiązania.

Gdy w obszarze uplastycznionym występowało także zagadnienie mieszane, niezależnie od jego wielkości, dla tego kierunku ruchu otrzymywano rozwiązania kinematycznie dopuszczalne (rys. 8).

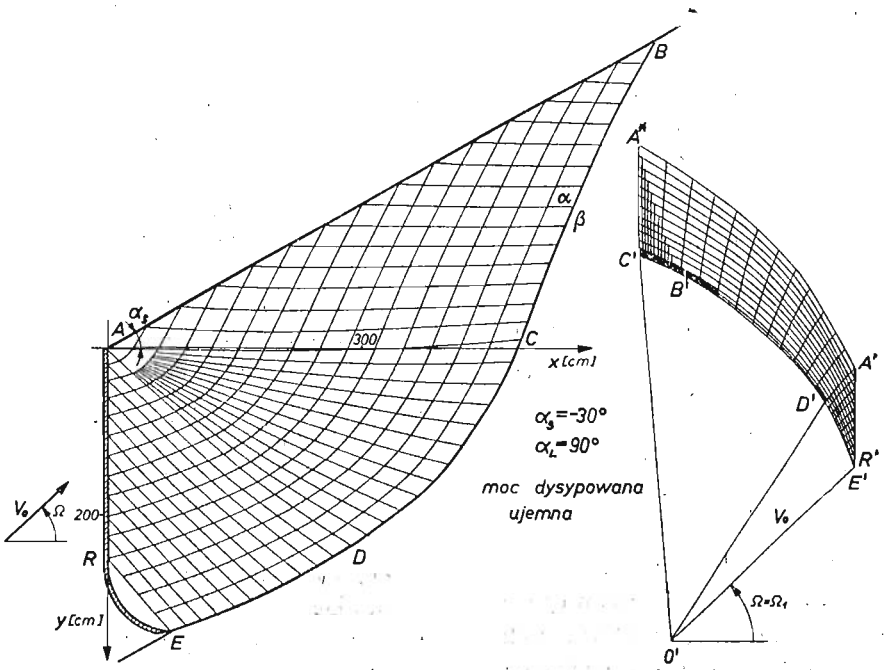
O ile w zagadnieniach przedstawionych na rys. 5 i 6 moc dysypowana jest ujemna niezależnie od wielkości kąta Ω , o tyle w przykładach przedstawionych na rys. 7 i 8 uzyskanie rozwiązań poprawnych zależy od jego wielkości. Na rys. 9 i 10 pokazano rozwiązanie tych samych zagadnień (co na rys. 7 i 8) z tym, że $\Omega = \Omega_1$. W obu przypadkach moc dysypowana jest ujemna.

Dopiero dla zagadnienia naporu płaskiej ściany (rys. 11) uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych jest niezależne od kąta nachylenia wektora prędkości jej przesuwu.

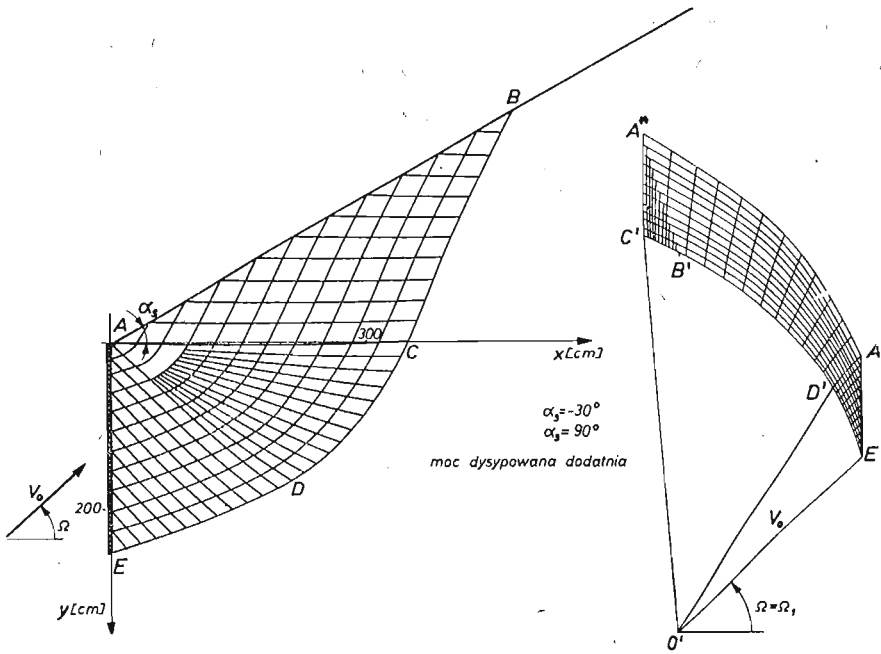
W przypadku płaskiego brzegu swobodnego nachylonego pod kątem $\alpha_s > 0$, na skutek uwzględnienia ciężaru objętościowego ośrodka, charakterystyki α i β w obszarze zagadnienia Cauchy'ego mają krzywiznę dodatnią. W zadaniach, w których obszar plastyczny ograniczał się tylko do w/w zagadnienia rozwiązania kinematycznie dopuszczalne uzyskiwano zależnie od wielkości kąta Ω . W przedstawionym na rys. 12 zagadnieniu dla $\Omega = \alpha_s$



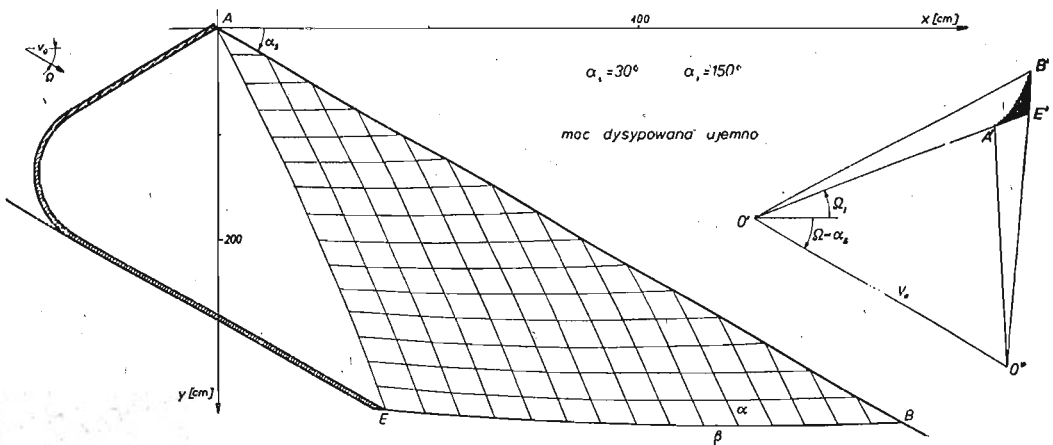
Rys. 9



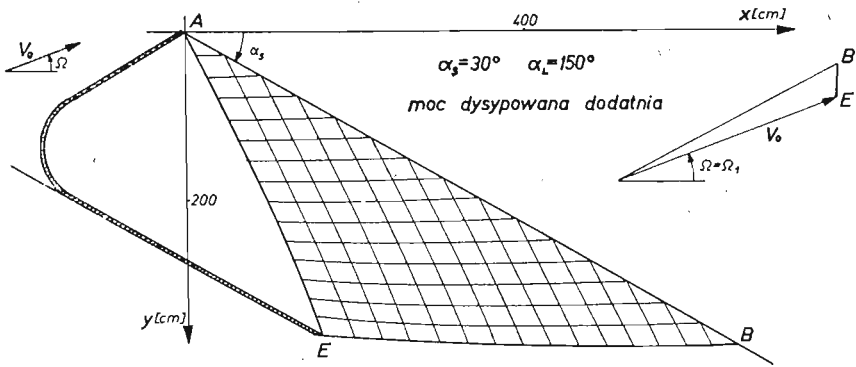
Rys. 10



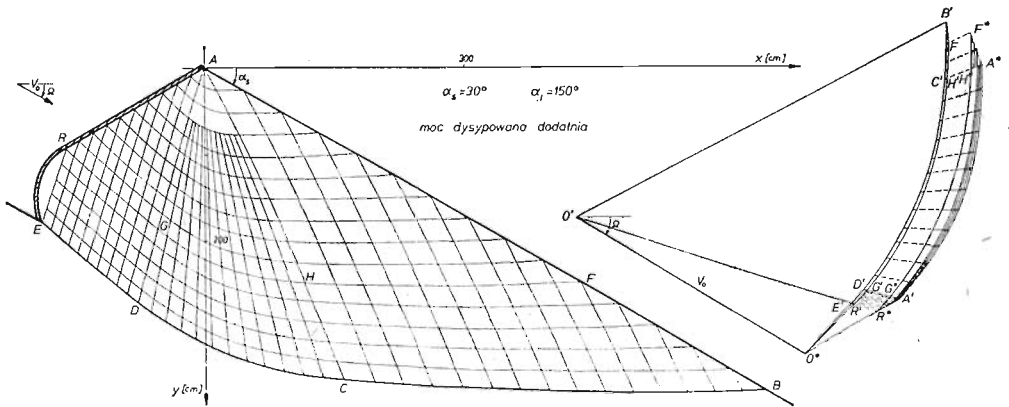
Rys. 11



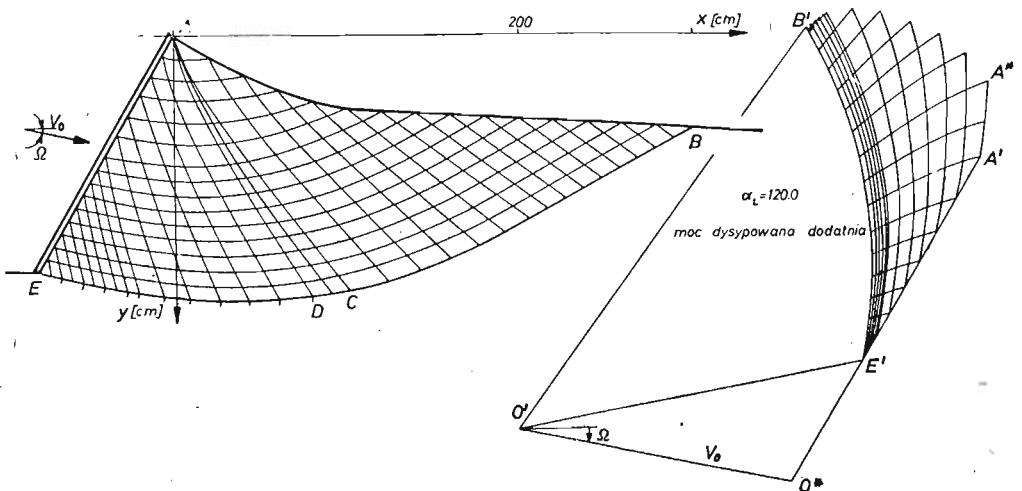
Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15

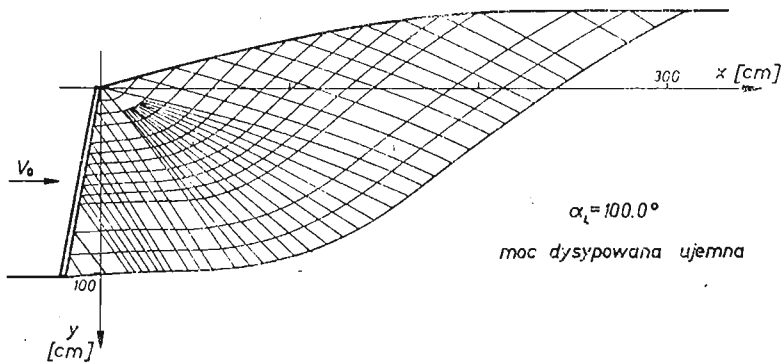
(przesuw równoległy do brzegu) moc dysypowana jest ujemna, natomiast dla $\Omega = \Omega_1$ (rys. 13) jest ona dodatnia.

W przypadkach, w których w obszarze plastycznym poza zagadnieniem Cauchy'ego występowało zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym lub zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym i zagadnienie mieszane we wszystkich rozpatrywanych zadaniach uzyskiwano rozwiązania kinematycznie dopuszczalne (rys. 14).

Przedstawione powyżej ograniczenia nie dotyczą ośrodka nieważkiego. Charakterystyki α w całym obszarze plastycznym są liniami prostymi natomiast charakterystyki β bądź są liniami prostymi bądź ich krzywizna jest dodatnia (zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym). Dla takiego ośrodka, niezależnie od kąta nachylenia brzegu swobodnego, otrzymuje się rozwiązania kinematycznie dopuszczalne.

W przypadku brzegu swobodnego wklęsłego (rys. 15) charakterystyki α mają krzywiznę ujemną natomiast krzywizna charakterystyk β jest dodatnia. Pozwala to na uzyskiwanie we wszystkich przypadkach rozwiązań poprawnych.

Natomiast jeżeli brzeg swobodny ośrodka jest wypukły, charakterystyki β mają krzywiznę ujemną w obszarze zagadnienia Cauchy'ego i zagadnienia mieszane, a dodatnią



Rys. 16

w obszarze zagadnienia charakterystycznego z punktem osobliwym. Krzywizna charakterystyk α we wszystkich wspomnianych obszarach jest dodatnia. Powoduje to uzyskiwanie mocy dysypowanej ujemnej we wszystkich zadaniach (np. rys. 16).

3.3. Wpływ kształtu ściany napierającej na możliwość otrzymania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. Przedstawiając wpływ kształtu ściany napierającej na rozwiązanie rozpatrywać będziemy zagadnienia w których swobodny brzeg ośrodka jest płaski natomiast pod pojęciem kształtu ściany rozumiemy jedynie konfigurację tej jej części, na której kończą się charakterystyki β (odcinek RA na rys. 4). W przypadku kończenia się ich na linii nieciągłości prędkości (odcinek RE na rys. 4), kształt ściany znajdującej się za nią nie ma wpływu na rozwiązanie kinematyczne.

Kąt α_1 w punkcie A , musi być na tyle duży, by spełniony był warunek

$$(13) \quad \varphi_1 \geq \varphi_c$$

(φ_1 — kąt φ na ścianie w punkcie A , φ_c — kąt φ na brzegu w punkcie A) gdyż w przeciwnym przypadku w polu naprężenia powstaje linia nieciągłości. Jak pokazano w [18] uniemożliwia to zbudowanie poprawnej kinematyki.

Korzystając z zależności wzdłuż charakterystyki β w punkcie A

$$(14) \quad d\sigma - 2\sigma \operatorname{tg} \varrho d\varphi = 0$$

skąd

$$\sigma_l = \sigma_c \exp(2 \operatorname{tg} \varrho (\varphi_l - \varphi_c)),$$

oraz warunku tarcia na ścianie

$$(15) \quad \mu = \frac{-\tau_n}{\sigma_n},$$

gdzie

$$I_n = -\sigma_l \sin \varrho \sin 2(\varphi_l - \alpha),$$

$$\sigma_n = \sigma_l (1 + \sin \varrho \cos 2(\varphi_l - \alpha)) - H,$$

σ_l i φ_l — naprężenie oraz kąt φ na ścianie,

σ_c i φ_c — naprężenie oraz kąt φ na brzegu,

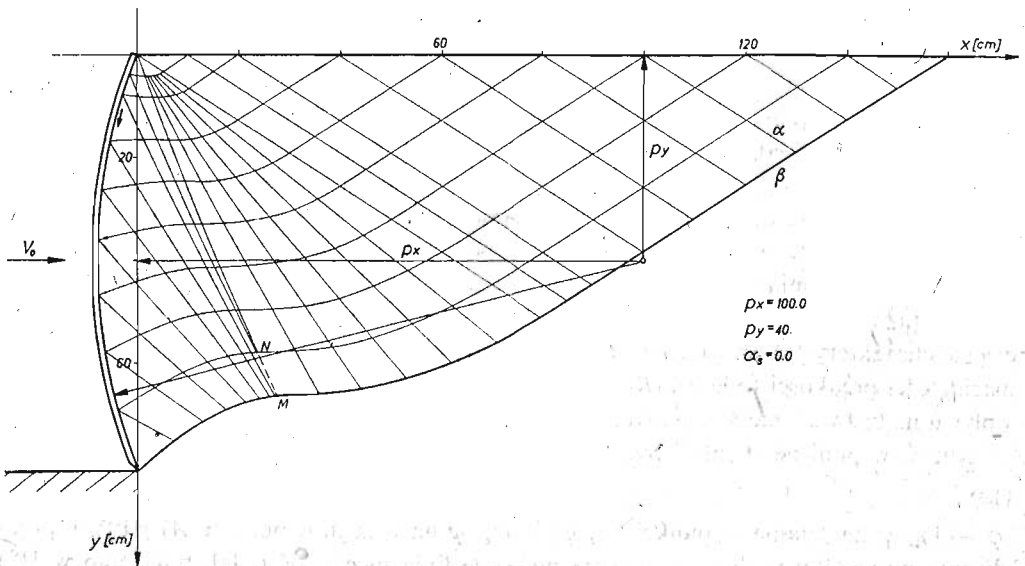
$$\alpha = \varphi_l - (\alpha_l - \pi/2),$$

przyjmując: $\varphi_l = \varphi_c$, $\sigma_l = \sigma_c = \frac{H}{1 - \sin \varrho}$; po przekształceniach z (14) i (15) otrzymujemy równość

$$\mu = \frac{\sin 2(\varphi_c - \alpha)}{1 + \cos 2(\varphi_c - \alpha)} = \operatorname{tg}(\varphi_c - \alpha)$$

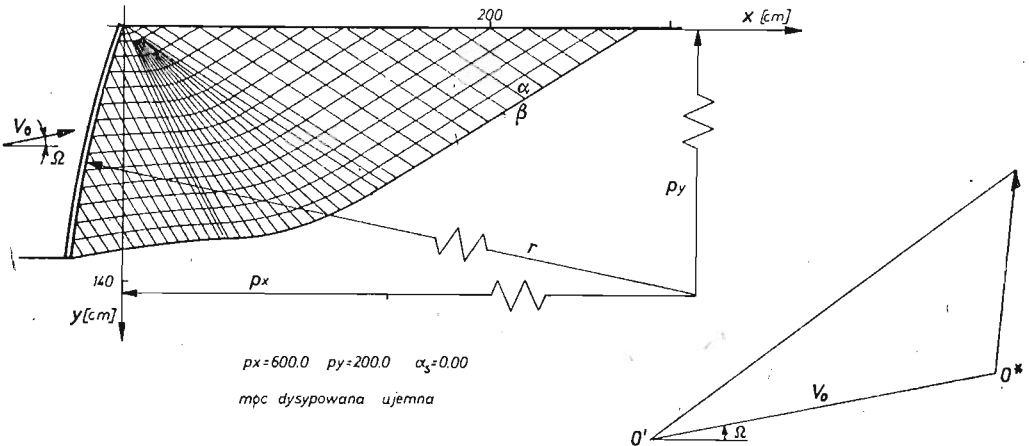
skąd

$$(16) \quad \alpha_l \geq \varphi_c - \operatorname{arctg} \mu + \pi/2.$$

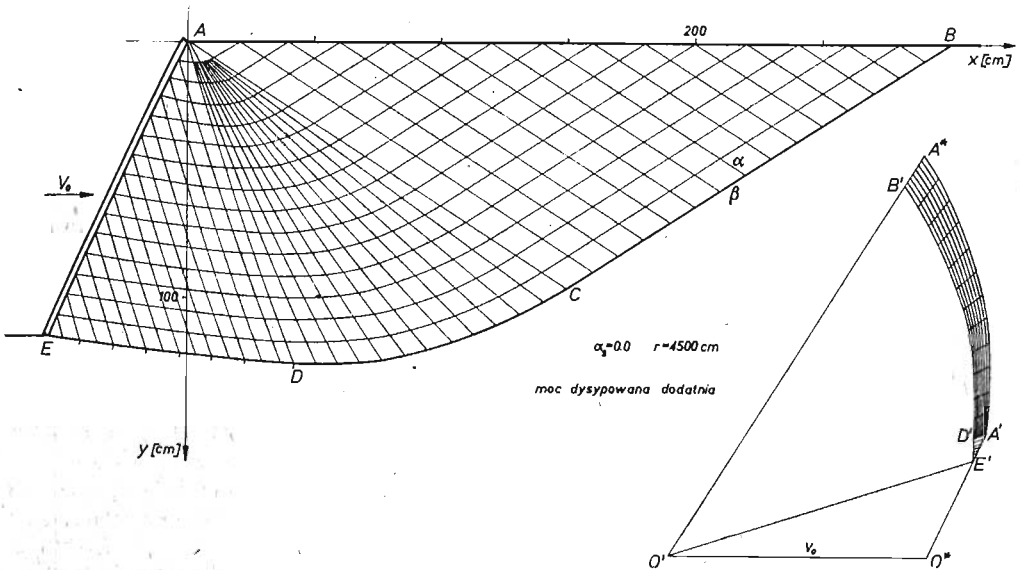


Rys. 17

Uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych w przypadku naporu ścian o krzywiznie ujemnej (analogicznie jak poprzednio za kierunek dodatni uważać będziemy kierunek od początku układu współrzędnych, na rys. 17 zaznaczono to strzałką, i $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi_1}{\Delta s}$ gdzie ξ_1 jest kątem pomiędzy osią x a styczną do ściany w danym punkcie, natomiast Δs jest odległością pomiędzy dwoma punktami) zależne jest od wielkości krzywizny. Charakterystyki α wychodząc ze ściany pod zmieniającym się wzdłuż jej konturu kątem mają tendencję do zbiegania się, natomiast charakterystyki β w obszarze zagadnienia mieszanego stają się liniami o krzywiznie ujemnej (na granicy z obszarem zagadnienia charakterystycznego z punktem osobliwym występuje punkt przegięcia, np. punkt M na rys. 17). Powoduje to uzyskiwanie mocy dysypowanej ujemnej. Uwzględnienie ciężaru



Rys. 18



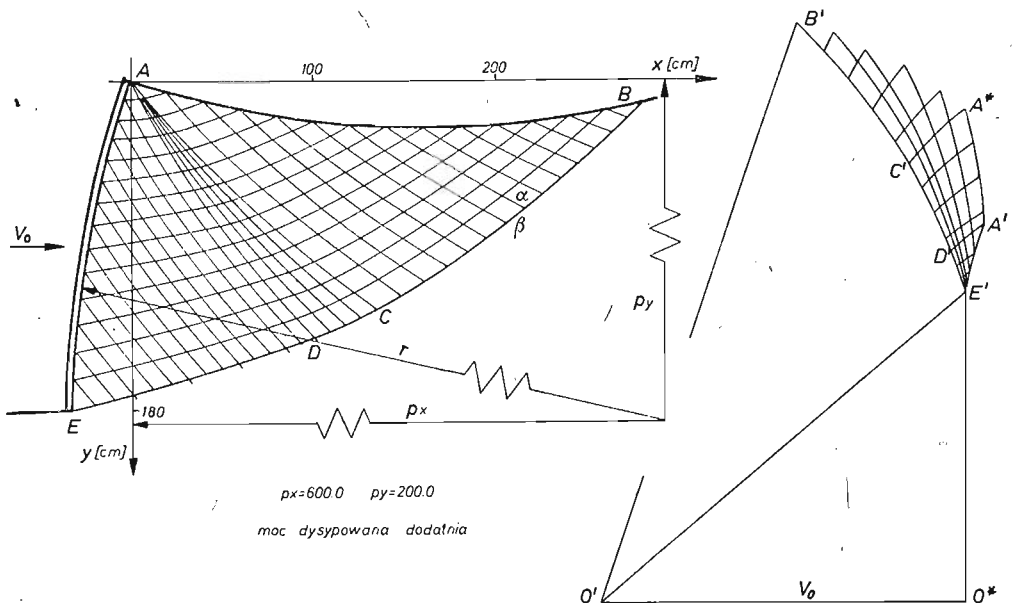
Rys. 19

objętościowego ośrodka powoduje, że istnieje pewna dla danego zagadnienia, krzywizna krytyczna nie przekraczając której charakterystyki β w obszarze zagadnienia mieszanego mają krzywiznę dodatnią i możemy uzyskać rozwiązania kinematycznie dopuszczalne. Dla przypadku przedstawionego na rys. 18 numerycznie określona wielkość krzywizny krytycznej wynosi $r_k = 5500$ cm przy $p_y = 200$ cm (gdzie r_k jest promieniem krytycznym). Dla $r < r_k$ moc dysypowana jest ujemna (rys. 18), a dla $r \geq r_k$ jest dodatnia (rys. 19).

W przypadku ośrodka nieważkiego, w obszarze zagadnienia mieszanego charakterystyki α są liniami prostymi, a kąt pomiędzy nimi a styczną do ściany napierającej jest wielkością stałą. Niezależnie od wielkości ujemnej krzywizny ściany charakterystyki te zbiegają się, natomiast charakterystyki β mają krzywiznę ujemną. Taka konfiguracja charakterystyk powoduje, że moc dysypowana jest ujemna. Oznacza to, że dla ośrodka nieważkiego mamy $r_k = \infty$ i poprawne rozwiązania można uzyskać jedynie dla płaskiej ściany.

W przypadku dostatecznie dużej krzywizny ściany, zarówno dla ośrodka ważkiego (rys. 17), jak i nieważkiego, charakterystyki α przecinają się w zakresie obszaru uplastycznionego co powoduje powstanie linii nieciągłości naprężeń (odcinek MN), a to uniemożliwia zbudowanie poprawnej kinematyki.

W punktach 3.1, 3.2, 3.3 pokazano osobno wpływ kierunku ruchu ściany, kształtu ściany napierającej i konfiguracji brzegu swobodnego na uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. Ponieważ jednak w konkretnych przypadkach praktycznych wpływy poszczególnych elementów nakładają się, przedstawione w punkcie 3 ograniczenia należy traktować jedynie jako tendencję zachowania się rozwiązania pod wpływem omawianych czynników. Np. dobierając odpowiedni kształt brzegu swobodnego możemy uzyskać poprawne rozwiązania dla ściany o krzywiznie większej od krytycznej (rys. 20).



Rys. 20

4. Wnioski

Przedstawiona analiza wskazuje, iż wprawdzie teoria mechaniki ośrodków sypkich pozwala na rozwiązanie bardzo dużej klasy zadań, jednakże w wielu przypadkach praktycznych istnieje szereg ograniczeń uniemożliwiających uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. Tak więc ograniczenia występowały w przypadku swobodnego brzegu nachylonego pod pewnym kątem do poziomu brzegu wypukłego, ściany napierającej o krzywiznę ujemnej oraz dla pewnych kątów nachylenia wektora prędkości przesuwu ściany. Wydaje się, że jedną z istotnych przyczyn tego jest przyjęcie silnego założenia, że cały materiał, łącznie ze swobodnym brzegiem, znajduje się w stanie plastycznym. Prawdopodobnie w takich przypadkach występują ruchome obszary sztywne, nie będące w stanie plastycznym i dochodzące do swobodnego brzegu (zjawisko to zauważono np. w pracy [19]). Zbudowanie rozwiązań teoretycznych w takich warunkach jest bardzo trudne i jak dotąd, tego rodzaju rozwiązań brak.

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1958.
2. Z. MRÓZ, A. DRESCHER, *Podstawy teorii plastyczności ośrodków rozdrobnionych*, Wyd. PAN, 1972.
3. E. DEMBICKI, *Stany graniczne gruntów: teoria i zastosowanie*, Gdańskie Tow. Naukowe, 1970.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1974.
5. A. DRESCHER, *O pewnych rozwiązaniach kinematycznych płaskiego płynięcia ośrodków rozdrobnionych*, Prace IPPT 3I (1972).
6. W. TRĄPCZYŃSKI, *Mechanika procesów urabiania gruntów jako zagadnienie teorii plastyczności*, Praca doktorska, IPPT PAN, 1975.
7. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis of limit design*, Quart. Appl. Math., 10, 157 - 165 (1952).
8. A. W. JENIKE, R. T. SHIELD, *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*, J. Appl. Mech, 26, 599 - 602 (1959).
9. Z. MRÓZ, *On a theory of density-hardening media*, Acta Mech., 1972.
10. G. de JOSSELIN de JONG, *Statics and kinematics in the failable zone of a granular material*, Waltman Delft 1959.
11. A. J. M. SPENCER, *A theory of kinematics of ideal soil under plane strain conditions*, Journ. Mech. Phys. Solids, 12, 337 - 351 (1964).
12. Г. А. ГЕНЕВ, *Вопросы динамики зернистых сред*, Акад. Строит. Архитект. СССР, Москва 1958.
13. Praca zbiorowa, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
14. A. P. GREEN, *A theoretical investigation of the compression of a ductile material between smooth flat dies*, Phil. Mag., 42, 900 - 918 (1951).
15. H. FORD, *Advanced mechanics of materials*, Longmans Green, London 1960.
16. L. DIETRICH, W. TRĄPCZYŃSKI, *Przedłużenie stanu naprężenia w obszar sztywny dla pewnych rozwiązań w mechanice gruntów*, Rozpr. Inż., 22, 4, 631 - 644 (1974).
17. MASSAU, *Memoire sur l'integration graphique des equations aux deucees partolles*, Gand., 1900 - 1903.
18. A. DRESCHER, *Some remarks on plane flow of granular media*, Arch. Mech. Stos., 24, 5 - 6, 837 - 848 (1972).
19. A. DRESCHER, G. de JOSSELIN de JONG, *Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material*, J. Mech. Phys. Solids, 20 (1972).

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ
ЗАДАЧИ НАПОРА СТЕНОК РАЗЛИЧНОГО ПРОФИЛЯ

В работе представлены ограничения существующие для кинематически допустимых решений задачи о напоре стенок, имеющих профиль инструментов для земляных работ (напр. ковш погрузчика или отвал бульдозера). Исследование проведено на основании математической теории пластичности для весомой среды, удовлетворяющей условию пластичности Кулона-Мора с учетом работы на растяжение и ассоциированному закону течения. Основанием для выводов был анализ численных решений ряда конкретных краевых задач.

Summary

ANALYSIS OF KINEMATICALLY ADMISSIBLE SOLUTIONS OF EARTH-MOVING
PROCESSES IN THE CASES OF VARIOUS PUSHING WALL FORMS

In the paper kinematically admissible solutions for earthmoving processes due to various buckets of loading machines are presented. On the basis of the mathematical theory of plasticity, theoretical solutions are obtained by means of the associated flow rule and the Coulomb-Mohr limit state, mass density being taken into account. Analysis of numerical solutions of several boundary problems makes it possible to draw certain general conclusions.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
PAN WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 marca 1976 r.

NIELINIOWE DRGANIA ELASTYCZNIE ZAWIESZONYCH SILNIKÓW TŁOKOWYCH PRZY KINEMATYCZNYCH WYMUSZENIACH STOCHASTYCZNYCH

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

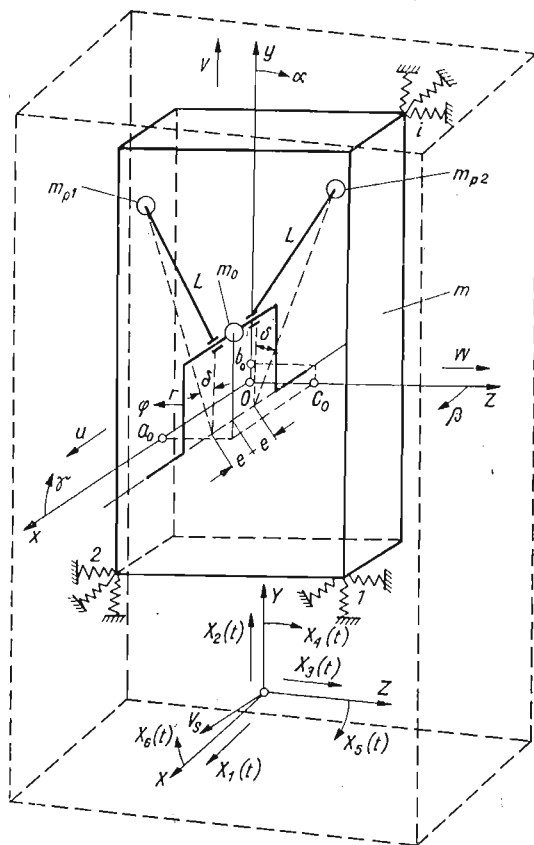
1. Wstęp

Silniki tłokowe zainstalowane na środkach transportu lądowego lub morskiego (zwanych dalej pojazdami) poddawane są kinematycznym wymuszeniom, wynikającym z losowych ruchów pojazdu na skutek nierówności nawierzchni drogi lub falowania morza. Wymuszenia te wpływają na wartości parametrów drgań silników, a tym samym na warunki ich pracy, żywotność i niezawodność. Wskazuje to na celowość uwzględniania tego typu wymuszeń przy analizie drgań silników. W przypadkach, gdy wymuszenia wywołane obrotami wału silnika i zmiennymi składowymi momentu reakcyjnego są pomijalnie małe w stosunku do kinematycznych wymuszeń, obliczenia mogą być wykonane w oparciu o prace dotyczące wpływu losowych przemieszczeń fundamentów na drgania amortyzowanych obiektów nie posiadających własnych źródeł wymuszeń (np. [1]).

Poniżej rozpatrzono w pierwszym przybliżeniu częściej występujący w praktyce przypadek, gdy wymuszenia związane z pracą silnika nie mogą być pominięte, a losowe zaburzenia wartości parametrów drgań silnika są małe. W celu uwzględnienia nierównomierności obrotów silnika oraz oddziaływania drgań na silnik, jako nieidealne źródło energii, prędkość kątową silnika potraktowano jako wielkość zmienną. Do obliczeń zastosowano metodę linearyzacji [2]. Ograniczono się przy tym do silników z cylindrami w układzie V , gdyż wyniki obliczeń mogą być łatwo wykorzystane dla silników o pionowym układzie cylindrów i silników typu bokser.

2. Równania ruchu

Obliczeniowy schemat rozpatrywanego układu przedstawia rys. 1. Masa m oznacza łączną masę silnika i sztywno połączonych z nim elementów (np. łączną masę zespołu pędnego pojazdu samochodowego lub łączną masę zespołu silnik-sztywne sprzęgło-odbiornik mocy). Elastyczne elementy zawieszenia 1, 2, ..., i , ... są zamocowane do masy m oraz do konstrukcyjnego elementu pojazdu, którym może być nadwozie samoniosące lub rama pojazdu samochodowego, fundament zespołu prądotwórczego na statku etc. Równania ruchu układu wyprowadzono dla ustalonego kierunku ruchu pojazdu i niezmiennej w czasie ilości paliwa zasilającego silnik napędowy pojazdu, przy której pojazd porusza się ze średnią prędkością $V_s = \text{const}$. Jako układ odniesienia dla pojazdu przyjęto układ współrzędnych ortokartezjańskich XYZ , którego początek przemieszcza się



Rys. 1. Obliczeniowy schemat układu: m — łączna masa silnika i sztywno połączonych z nim elementów; m_0 — wirująca masa niewyrównoważona, odpowiadająca jednemu wykorbieniu i skupiona na osi czopa korbowego; $m_{p1/2}$ — niewyrównoważona masa w ruchu postępowo-zwrotnym, odpowiadająca jednemu cylindrowi i skupiona na osi sworzni tłokowego; L — długość korbowodu; r — długość ramienia korby; a_0, b_0, c_0 — współrzędne punktu przecięcia z osią wału prostej prostopadłej do osi wału, poprowadzonej ze środka ciężkości masy m_0 pierwszego wykorbienia, w stanie spoczynku układu i przy $\varphi = 0$, w układzie współrzędnych x, y, z ; e — odległość osi korbowodu od środka ciężkości masy m_0 ; u, v, w — przemieszczenia środka ciężkości masy m w kierunkach osi x, y, z ; x, y, z — osie pokrywające się z głównymi centralnymi osiami bezwładności masy m w stanie spoczynku układu i przy $\varphi = 0$, nieruchome względem układu współrzędnych X, Y, Z ; α, β, γ — kąty obrotu masy m względem jej głównych centralnych osi bezwładności; δ — połowa kąta pomiędzy płaszczyznami dwóch rzędów cylindrowych, φ — kąt obrotu pierwszego wykorbienia; X, Y, Z — układ współrzędnych, którego osie pokrywają się z głównymi centralnymi osiami bezwładności pojazdu w stanie spoczynku układu, a początek przemieszcza się w kierunku wyznaczonym przez ruch pojazdu z prędkością $V_s = \text{const}$; V_s — średnia prędkość pojazdu; $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ — przemieszczenia środka ciężkości pojazdu w kierunkach osi X, Y, Z ; $X_4(t), X_5(t), X_6(t)$ — kąty obrotu pojazdu względem jego głównych centralnych osi bezwładności

w kierunku wyznaczonym przez ruch pojazdu ze stałą prędkością V_s , pokrywający się z układem głównych centralnych osi bezwładności pojazdu w stanie spoczynku układu drgającego. W przypadku ruchu pojazdu po nierównej nawierzchni środek ciężkości pojazdu doznaje losowych przemieszczeń liniowych $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ względem początku układu XYZ w kierunkach osi X , Y , Z i pojazd wykonuje ruchy obrotowe względem swych głównych centralnych osi bezwładności. Losowe przemieszczenia kątowe oznaczono $X_4(t)$, $X_5(t)$, $X_6(t)$.

Przyjęto, że układ współrzędnych xyz jest nieruchomy względem układu XYZ i pokrywa się z układem głównych centralnych osi bezwładności masy m w stanie spoczynku układu drgającego przy kącie obrotu pierwszego wykorbienia $\varphi = 0$. W obliczeniach uwzględniono, że amplitudy drgań obrotowych α , β i γ masy m są w praktyce małe i w rozkładach funkcji trygonometrycznych tych kątów w szeregi potęgowe zachowano tylko pierwsze wyrazy.

Gdy punkt zamocowania i -tego elementu elastycznego do konstrukcyjnego elementu pojazdu ma w stanie spoczynku układu drgającego współrzędne x_{is} , y_{is} , z_{is} w układzie XYZ , to na skutek losowych przemieszczeń pojazdu $X_1(t) - X_6(t)$ punkt ten dozna następujących przemieszczeń w kierunkach osi X , Y , Z :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u'_{is} &= X_1 - x_{is} + (x_{is} \cos X_6 - y_{is} \sin X_6) \cos X_5 + [z_{is} \cos X_4 + (y_{is} \cos X_6 + \\ &\quad + x_{is} \sin X_6) \sin X_4] \sin X_5, \\ v'_{is} &= X_2 - y_{is} + (y_{is} \cos X_6 + x_{is} \sin X_6) \cos X_4 - z_{is} \sin X_4, \\ w'_{is} &= X_3 - z_{is} + [z_{is} \cos X_4 + (y_{is} \cos X_6 - x_{is} \sin X_6) \sin X_4] \cos X_5 - \\ &\quad - (x_{is} \cos X_6 - y_{is} \sin X_6) \sin X_5. \end{aligned}$$

Rozpatrzono przypadek, gdy przemieszczenia $X_1(t) - X_6(t)$ stanowią stacjonarne i stacjonarnie skorelowane procesy stochastyczne o małych wartościach realizacji, znanych charakterystykach statystycznych i o wartościach oczekiwanych równych zeru. Dla małych wartości realizacji procesów $X_4(t)$, $X_5(t)$ i $X_6(t)$ zależności (2.1) przyjmują postać

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u'_{is} &= X_1 - y_{is} X_6 + z_{is} X_5, \\ v'_{is} &= X_2 + x_{is} X_6 - z_{is} X_4, \\ w'_{is} &= X_3 + y_{is} X_4 - x_{is} X_5. \end{aligned}$$

Jeśli oś x ma względem osi X kosinusy kierunkowe l_1, m_1, n_1 , oś y względem osi $Y - l_2, m_2, n_2$ i oś z względem osi $Z - l_3, m_3, n_3$, to przemieszczenia w/w punktu w kierunkach osi x, y i z wyniosą

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_{is} &= l_1 u'_{is} + m_1 v'_{is} + n_1 w'_{is}, \\ v_{is} &= l_2 u'_{is} + m_2 v'_{is} + n_2 w'_{is}, \\ w_{is} &= l_3 u'_{is} + m_3 v'_{is} + n_3 w'_{is}. \end{aligned}$$

Z uwzględnieniem (2.2) otrzymuje się

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_{is} &= l_1 X_1 + m_1 X_2 + n_1 X_3 + (n_1 y_{is} - m_1 z_{is}) X_4 + (l_1 z_{is} - n_1 x_{is}) X_5 + \\ &\quad + (m_1 x_{is} - l_1 y_{is}) X_6, \\ v_{is} &= l_2 X_1 + m_2 X_2 + n_2 X_3 + (n_2 y_{is} - m_2 z_{is}) X_4 + (l_2 z_{is} - n_2 x_{is}) X_5 + \\ &\quad + (m_2 x_{is} - l_2 y_{is}) X_6, \end{aligned}$$

$$w_{is} = l_3 X_1 + m_3 X_2 + n_3 X_3 + (n_3 y_{is} - m_3 z_{is}) X_4 + (l_3 z_{is} - n_3 x_{is}) X_5 + \\ (m_3 \dot{x}_{is} - l_3 y_{is}) X_6.$$

Współczynniki sztywności i tłumienia dla elastycznych elementów zawieszenia odniesiono do liniowych przemieszczeń poprzecznych przekrojów tych elementów, gdyż wpływ kątowych przemieszczeń poprzecznych przekrojów jest przy małych założeniu amplitudach drgań obrotowych masy m i wartościach realizacji procesów $X_4 - X_6$ znacznie mniejszy.

Energję potencjalną V analizowanego układu drgającego i funkcję rozproszenia energii (Rayleigha) D wyrazić można zatem w postaci

$$(2.5) \quad V = \frac{1}{2} \sum_i [c_{xi}(u_i - u_{is})^2 + c_{yi}(v_i - v_{is})^2 + c_{zi}(w_i - w_{is})^2] + \\ + g \sum_{n=0}^{c-1} [m_{p1} (\eta_n^p)_{m_{p1}} + m_{p2} (\eta_n^p)_{m_{p2}} + m_0 (\eta_n^p)_{m_0}],$$

$$(2.6) \quad D = \frac{1}{2} \sum_i [l_{xi}(\dot{u}_i - \dot{u}_{is})^2 + l_{yi}(\dot{v}_i - \dot{v}_{is})^2 + l_{zi}(\dot{w}_i - \dot{w}_{is})^2] + \frac{1}{2} h \dot{\varphi}^2,$$

gdzie c_{xi} , c_{yi} , c_{zi} — oznaczają współczynniki sztywności i -tego elastycznego elementu przy odkształceniach w kierunkach osi x , y i z , l_{xi} , l_{yi} , l_{zi} — współczynniki wiskotycznego tłumienia i -tego elastycznego elementu przy odkształceniach jw., u_i , v_i , w_i — przemieszczenia punktu zamocowania i -tego elastycznego elementu do masy m w kierunkach osi x , y i z [3], $m_{p1/2}$ — niewyrównoważoną masą w ruchu postępowo-zwrotnym, odpowiadającą jednemu cylindrowi i skupioną na osi sworznia tłokowego, m_0 — niewyrównoważoną masą wirującą, odpowiadającą jednemu wykorbieniu i skupioną na osi czopa korbowego η_n^p — pionowe przemieszczenie niewyrównoważonych mas n -tego wykorbienia, wywołane obrotem wału korbowego o kąt φ [3] (licząc od pionowego położenia pierwszego wykorbienia), c — liczbę wykorbień, g — przyspieszenie ziemskie, h — współczynnik wiskotycznego tłumienia przy obrotach wału silnika.

Współczynniki tłumienia l_{xi} , l_{yi} , l_{zi} mają na ogół małe wartości, stąd przy małych założeniu wartościach realizacji procesów $X_1(t) - X_6(t)$ można w pierwszym przybliżeniu pominąć wielkości \dot{u}_{is} , \dot{v}_{is} , \dot{w}_{is} w zależności (2.6)¹⁾. Na podstawie równania Lagrange'a drugiego rodzaju, zależności (2.4) — (2.6) i wyrażeń wyprowadzonych w rozdziale 2 pracy [3] otrzymuje się po wprowadzeniu małego parametru ε następujące równania ruchu w pierwszym przybliżeniu dla ustalonych i bliskich ustalonym stanów pracy silnika:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} m\dot{u} + c_x u - U_y \gamma + U_z \beta &= \varepsilon \left(P_1 + \sum_i c_{xi} u_{is} \right), \\ m\dot{v} + c_y v - V_z \alpha + V_x \gamma &= \varepsilon \left(P_2 + \sum_i c_{yi} v_{is} \right), \\ m\dot{w} + c_z w - W_x \beta + W_y \alpha &= \varepsilon \left(P_3 + \sum_i c_{zi} w_{is} \right), \end{aligned}$$

¹⁾ Gdy wartości iloczynów $l_{xi} \dot{u}_{is}$, $l_{yi} \dot{v}_{is}$, $l_{zi} \dot{w}_{is}$ nie są w pierwszym przybliżeniu pomijalnie małe, uwzględnić je można analogicznie, jak poniżej iloczyny $c_{xi} u_{is}$, $c_{yi} v_{is}$, $c_{zi} w_{is}$.

$$I_x \ddot{\alpha} + c_{xx} \alpha - V_z v + W_y w - c_{zx} \gamma - c_{xy} \beta - crT(\omega_0) = \varepsilon \left[P_4 + \sum_i (c_{zi} y_i w_{is} - c_{yi} z_i v_{is}) \right],$$

$$I_y \ddot{\beta} + c_{yy} \beta - W_x w + U_z u - c_{xy} \alpha - c_{yz} \gamma = \varepsilon \left[P_5 + \sum_i (c_{xi} z_i u_{is} - c_{zi} x_i w_{is}) \right],$$

$$I_z \ddot{\gamma} + c_{zz} \gamma - U_y u + V_x v - c_{yz} \beta - c_{zx} \alpha = \varepsilon \left[P_6 + \sum_i (c_{yi} x_i v_{is} - c_{xi} y_i u_{is}) \right],$$

$$I \ddot{\psi} = \varepsilon P_7.$$

Zachowano tu oznaczenia przyjęte w pracy [3], przy czym

$$P_j = R_j + m_{p1}(F_j)_1 + m_{p2}(F_j)_2 + m_0 Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, 7, \quad R_7 = R_0^{(c)}.$$

Równania (2.7) przekształcić można analogicznie, jak w pracy [3] do postaci odpowiadającej jednoczęstościowym drganiom

$$(2.8) \quad \ddot{q}_m + \lambda_m^2 q_m = \frac{\varepsilon}{M_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} \left(P_j + \sum_{k=1}^6 b_{jk} X_k \right),$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\varepsilon}{I} P_7,$$

gdzie

$$b_{11} = l_1 \sum_i c_{xi}, \quad b_{12} = m_1 \sum_i c_{xi}, \quad b_{13} = n_1 \sum_i c_{xi},$$

$$b_{14} = \sum_i c_{xi} (n_1 y_{is} - m_1 z_{is}), \quad b_{15} = \sum_i c_{xi} (l_1 z_{is} - n_1 x_{is}),$$

$$b_{16} = \sum_i c_{xi} (m_1 x_{is} - l_1 y_{is}),$$

$$b_{21} = l_2 \sum_i c_{yi}, \quad b_{22} = m_2 \sum_i c_{yi}, \quad b_{23} = n_2 \sum_i c_{yi},$$

$$b_{24} = \sum_i c_{yi} (n_2 y_{is} - m_2 z_{is}), \quad b_{25} = \sum_i c_{yi} (l_2 z_{is} - n_2 x_{is}),$$

$$b_{26} = \sum_i c_{yi} (m_2 x_{is} - l_2 y_{is}),$$

$$b_{31} = l_3 \sum_i c_{zi}, \quad b_{32} = m_3 \sum_i c_{zi}, \quad b_{33} = n_3 \sum_i c_{zi},$$

$$b_{34} = \sum_i c_{zi} (n_3 y_{is} - m_3 z_{is}), \quad b_{35} = \sum_i c_{zi} (l_3 z_{is} - n_3 x_{is}),$$

$$b_{36} = \sum_i c_{zi} (m_3 x_{is} - l_3 y_{is}),$$

$$b_{41} = \sum_i (l_3 c_{zi} y_i - l_2 c_{yi} z_i), \quad b_{42} = \sum_i (m_3 c_{zi} y_i - m_2 c_{yi} z_i),$$

$$\begin{aligned}
 b_{43} &= \sum_i (n_3 c_{zi} y_i - n_2 c_{yi} z_i), \\
 b_{44} &= \sum_i [c_{zi} y_i (n_3 y_{is} - m_3 z_{is}) - c_{yi} z_i (n_2 y_{is} - m_2 z_{is})], \\
 b_{45} &= \sum_i [c_{zi} y_i (l_3 z_{is} - n_3 x_{is}) - c_{yi} z_i (l_2 z_{is} - n_2 x_{is})], \\
 b_{46} &= \sum_i [c_{zi} y_i (m_3 x_{is} - l_3 y_{is}) - c_{yi} z_i (m_2 x_{is} - l_2 y_{is})], \\
 b_{51} &= \sum_i (l_1 c_{xi} z_i - l_3 c_{zi} x_i), \quad b_{52} = \sum_i (m_1 c_{xi} z_i - m_3 c_{zi} x_i), \\
 b_{53} &= \sum_i (n_1 c_{xi} z_i - n_3 c_{zi} x_i), \\
 b_{54} &= \sum_i [c_{xi} z_i (n_1 y_{is} - m_1 z_{is}) - c_{zi} x_i (n_3 y_{is} - m_3 z_{is})], \\
 b_{55} &= \sum_i [c_{xi} z_i (l_1 z_{is} - n_1 x_{is}) - c_{zi} x_i (l_3 z_{is} - n_3 x_{is})], \\
 b_{56} &= \sum_i [c_{xi} z_i (m_1 x_{is} - l_1 y_{is}) - c_{zi} x_i (m_3 x_{is} - l_3 y_{is})], \\
 b_{61} &= \sum_i (l_2 c_{yi} x_i - l_1 c_{xi} y_i), \quad b_{62} = \sum_i (m_2 c_{yi} x_i - m_1 c_{xi} y_i), \\
 b_{63} &= \sum_i (n_2 c_{yi} x_i - n_1 c_{xi} y_i), \\
 b_{64} &= \sum_i [c_{yi} x_i (n_2 y_{is} - m_2 z_{is}) - c_{xi} y_i (n_1 y_{is} - m_1 z_{is})], \\
 b_{65} &= \sum_i [c_{yi} x_i (l_2 z_{is} - n_2 x_{is}) - c_{xi} y_i (l_1 z_{is} - n_1 x_{is})], \\
 b_{66} &= \sum_i [c_{yi} x_i (m_2 x_{is} - l_2 y_{is}) - c_{xi} y_i (m_1 x_{is} - l_1 y_{is})].
 \end{aligned}$$

Wielkości M_m i $\Phi_j^{(m)}$ określono w pracy [3], a λ_m jest tą spośród częstości drgań własnych masy m , której wartość jest najbardziej zbliżona do wartości podstawowej częstości wymuszeń wynikających z wirowania wału silnika.

Przy braku stochastycznych wymuszeń drgania masy m opisują się zależnościami [3]

$$(2.9) \quad u = u_0 + \varrho_1, \quad v = v_0 + \varrho_2, \quad \dots, \quad \gamma = \gamma_0 + \varrho_6,$$

gdzie $u_0, v_0, \dots, \gamma_0$ oznaczają stałe składniki, wywołane stałą składową momentu reakcyjnego, $\varrho_j(t) = \Phi_j^{(m)} q_m(t)$, natomiast $q_m(t)$ jest rozwiązaniem równań (2.8) przy $X_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, 6$. Poniżej wyznaczono $q_m(t)$ z uwzględnieniem wpływu procesów $X_k(t)$.

3. Rozwiązanie równań ruchu

W celu rozwiązania równań (2.8) wprowadza się zamianę zmiennych według wzorów

$$(3.1) \quad q_m = A \cos(\varphi + \psi), \quad \dot{q}_m = -A \lambda_m \sin(\varphi + \psi), \quad \dot{\varphi} = \Omega$$

i przekształca równania (2.8) do postaci

$$(3.2) \quad \dot{A} = X_R + X_F, \quad \dot{\Psi} = Y_R + Y_F, \quad \dot{\Omega} = Z_R,$$

gdzie A, Ψ, Ω oznaczają nowe zmienne,

$$X_R = -\frac{\varepsilon}{M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \sin(\varphi + \Psi),$$

$$Y_R = \varepsilon \left[\lambda_m - \Omega - \frac{1}{AM_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \cos(\varphi + \Psi) \right],$$

$$Z_R = \frac{\varepsilon}{I} P_7,$$

$$X_F = -\frac{\varepsilon}{M_m \lambda_m} \sin(\varphi + \Psi) \sum_{j,k=1}^6 \Phi_j^{(m)} b_{jk} X_k,$$

$$Y_F = -\frac{\varepsilon}{AM_m \lambda_m} \cos(\varphi + \Psi) \sum_{j,k=1}^6 \phi_j^{(m)} b_{jk} X_k.$$

Z członów oznaczonych indeksem R należy oddzielić wibracyjne składniki. Płynnie zmieniające się wielkości A, Ψ, Ω i φ oznaczono indeksem p , a wielkości A, Ψ, Ω i φ uwzględniające wpływ losowych oddziaływań — gwiazdką. Po odrzuceniu z członów X_R, Y_R i Z_R wibracyjnych składników analogicznie jak w pracy [4] otrzymuje się równania

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{A}_p &= X_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \\ \dot{\Psi}_p &= Y_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \\ \dot{\Omega}_p &= Z_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \end{aligned}$$

natomiast równania uwzględniające wpływ stochastycznych wymuszeń przyjmują postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{A}^x &= X_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{M_m \lambda_m} \zeta(t) \sin(\varphi^x + \Psi^x) = F^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varphi^x, \zeta, \varepsilon), \\ \dot{\Psi}^x &= Y_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{A^x M_m \lambda_m} \zeta(t) \cos(\varphi^x + \Psi^x) = G^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varphi^x, \zeta, \varepsilon), \\ \dot{\Omega}^x &= Z_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) = H^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon), \end{aligned}$$

gdzie

$$\zeta(t) = \sum_{j,k=1}^6 \phi_j^{(m)} b_{jk} X_k(t),$$

$$\begin{aligned} X_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) &= \varepsilon X_{R1}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x) + \varepsilon^2 X_{R2}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x), \\ Y_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) &= \varepsilon Y_{R1}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x) + \varepsilon^2 Y_{R2}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x), \\ Z_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) &= \varepsilon Z_{R1}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x) + \varepsilon^2 Z_{R2}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x). \end{aligned}$$

Funkcje $X_{R1}^x, X_{R2}^x, \dots, Z_{R2}^x$ określone są zależnościami (3.6) w pracy [4], przy czym $\omega^x = \Omega^x$.

Przy małych z założenia wartościach realizacji procesów $X_k(t)$ odchylenia

$$(3.5) \quad \delta A = A^x - A_p, \quad \delta \Psi = \Psi^x - \Psi_p, \quad \delta \Omega = \Omega^x - \Omega_p$$

są małe. Ograniczając się zatem do liniowych członów rozkładów według potęg odchylenia (3.5) otrzymuje się na podstawie (3.3) — (3.5).

$$\begin{aligned} \delta \dot{A} &= F^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varphi_p, \zeta, \varepsilon) - X_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta A \frac{\partial X_R^x}{\partial A_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \\ &\quad + \delta \Psi \frac{\partial X_R^x}{\partial \Psi_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta \Omega \frac{\partial X_R^x}{\partial \Omega_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \\ (3.6) \quad \delta \dot{\Psi} &= G^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varphi_p, \zeta, \varepsilon) - Y_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta A \frac{\partial Y_R^x}{\partial A_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \\ &\quad + \delta \Psi \frac{\partial Y_R^x}{\partial \Psi_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta \Omega \frac{\partial Y_R^x}{\partial \Omega_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \\ \delta \dot{\Omega} &= H^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) - Z_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta A \frac{\partial Z_R^x}{\partial A_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \\ &\quad + \delta \Psi \frac{\partial Z_R^x}{\partial \Psi_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta \Omega \frac{\partial Z_R^x}{\partial \Omega_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon). \end{aligned}$$

Wielkości A_p, Ψ_p, Ω_p są rozwiązaniami równań (3.3), przy czym $\varphi_p = \Omega_p t$.

W analizowanym przypadku równania (3.6) przedstawić można w postaci

$$(3.7) \quad \dot{Y}_j(t) + \sum_{n=1}^3 a_{jn} Y_n(t) = Z_j(t), \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$Y_1(t) = \delta A, \quad Y_2(t) = \sigma \Psi, \quad Y_3(t) = \delta \Omega,$$

$$[a_{jn}] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial X_R^x}{\partial A_p} & -\frac{\partial X_R^x}{\partial \Psi_p} & -\frac{\partial X_R^x}{\partial \Omega_p} \\ -\frac{\partial Y_R^x}{\partial A_p} & -\frac{\partial Y_R^x}{\partial \Psi_p} & -\frac{\partial Y_R^x}{\partial \Omega_p} \\ -\frac{\partial Z_R^x}{\partial A_p} & -\frac{\partial Z_R^x}{\partial \Psi_p} & -\frac{\partial Z_R^x}{\partial \Omega_p} \end{bmatrix},$$

$$Z_1(t) = -\frac{1}{2M_n \lambda_m i} \zeta(t) [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} - e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}],$$

$$Z_2(t) = -\frac{1}{2A_p M_m \lambda_m} \zeta(t) [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} + e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}],$$

$$Z_3(t) = 0.$$

Ograniczono się do wyznaczenia rozwiązań szczególnych $Y_j(t)$ spełniających zerowe warunki początkowe, gdyż w celu otrzymania rozwiązania ogólnego układu (3.7) wystarczy dodać do $Y_j(t)$ rozwiązanie ogólne układu równań jednorodnych, które dla dostatecznie długiego czasu t dzięki istnieniu tłumienia można zaniedbać.

Wyrażając proces $\zeta(t)$ przez jego rozkład widmowy

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\phi(\omega),$$

gdzie $\phi(\omega)$ oznacza funkcję losową, której różniczki spełniają warunek

$$\langle d\phi^*(\omega) d\phi(\omega_1) \rangle = S(\zeta, \omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1,$$

można napisać

$$(3.8) \quad Z_1(t) = -\frac{1}{2M_m \lambda_m i} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} - e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}] e^{i\omega t} d\phi(\omega),$$

$$Z_2(t) = -\frac{1}{2A_p M_m \lambda_m} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\Omega t + \Psi_p)} + e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}] e^{i\omega t} d\phi(\omega),$$

przy czym $\langle \rangle$ oznacza wartość oczekiwaną, $\phi^*(\omega)$ — zespoloną funkcję sprzężoną z $\phi(\omega)$, $S(\zeta, \omega)$ — gęstość widmową procesu $\zeta(t)$, δ — funkcję delta Diraca. Funkcja korelacyjna procesu $\zeta(t)$ wyraża się zależnością

$$(3.9) \quad K_{\zeta}(\tau) = \sum_{j,k=1}^6 [\phi_j^{(m)} b_{jk}]^2 K_{X_k}(\tau) + \sum_{j,k=1}^6 \phi_j^{(m)} b_{jk} \sum_{\substack{l,r=1 \\ l,r \neq jk}}^6 \phi_l^{(m)} b_{lr} [R_{X_k X_r}(\tau) + R_{X_k X_r}(-\tau)]$$

gdzie K_{X_k} jest funkcją korelacyjną procesu $X_k(t)$, $R_{X_k X_r}$ — funkcją korelacji wzajemnej procesów $X_k(t)$ i $X_r(t)$. Gęstość widmowa procesu $\zeta(t)$ związana jest z funkcją korelacyjną $K_{\zeta}(\tau)$ relacją

$$(3.10) \quad S(\zeta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\zeta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Rozwiązania szczególne odpowiadające funkcjom (3.8) mogą być przedstawione w postaci

$$(3.11) \quad Y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_j(\omega, t) d\phi(\omega), \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie $y_j(\omega, t)$ są rozwiązaniami szczególnymi układu liniowych równań różniczkowych

$$(3.12) \quad \dot{y}_1 + \sum_{n=1}^3 a_{1n} y_n = -\frac{1}{2M_m \lambda_m i} e^{i\omega t} [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} - e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}],$$

$$\dot{y}_2 + \sum_{n=1}^3 a_{2n} y_n = -\frac{1}{2A_p M_m \lambda_m} e^{i\omega t} [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} + e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}],$$

$$\dot{y}_3 + \sum_{n=1}^3 a_{3n} y_n = 0.$$

Rozwiązania $y_j(\omega, t)$ mają zatem postać

$$(3.13) \quad y_j(\omega, t) = A_j(\omega) e^{i(\omega + \Omega_p)t} + B_j(\omega) e^{i(\omega - \Omega_p)t}, \quad j = 1, 2, 3,$$

przy czym współczynniki $A_j(\omega)$ i $B_j(\omega)$ otrzymuje się z równań (3.12) po podstawieniu do nich (3.13). Dla rozwiązań szczególnych $Y_j(t)$ otrzymuje się z uwzględnieniem (3.11) i (3.13) rozkład widmowy

$$(3.14) \quad Y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_j(\omega) e^{i(\omega + \Omega_p)t} + B_j(\omega) e^{i(\omega - \Omega_p)t}] d\phi(\omega),$$

za pomocą którego korzystając z własności różniczek $d\phi(\omega)$ wyznacza się funkcje korelacyjne i wariancje rozwiązań

$$(3.15) \quad K_{y_j}(t_1, t_2) = e^{i\Omega_p(t_1 - t_2)} \int_{-\infty}^{\infty} A_j^*(\omega) A_j(\omega) e^{i\omega(t_2 - t_1)} S(\zeta, \omega) d\omega + \\ + e^{-i\Omega_p(t_2 - t_1)} \int_{-\infty}^{\infty} [B_j^*(\omega) B_j(\omega) e^{i\omega(t_2 - t_1)} S(\zeta, \omega) d\omega,$$

$$(3.16) \quad D^2[Y_j(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [A_j(\omega)]^2 S(\zeta, \omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} [B_j(\omega)]^2 S(\zeta, \omega) d\omega.$$

$A_j^*(\omega)$ i $B_j^*(\omega)$ są zespolonymi funkcjami sprzężonymi odpowiednio z $A_j(\omega)$ i $B_j(\omega)$. Należy zaznaczyć, że $Y_j(t)$ są funkcjami stacjonarnymi w szerszym sensie, gdyż ich funkcje korelacyjne zależą od różnicy $t_2 - t_1$, a wartości oczekiwane przy założeniu

$$(3.17) \quad \langle \zeta(t) \rangle = 0$$

są równe zeru. Oznacza to, że w tym przypadku

$$(3.18) \quad \langle A^x \rangle = A_p, \quad \langle \psi^x \rangle = \Psi_p, \quad \langle \Omega^x \rangle = \Omega_p.$$

Dla stanów ustalonych i bliskich ustalonym wielkości A_p , Ψ_p i Ω_p są rozwiązaniami równań

$$(3.19) \quad 0 = \varepsilon X_{R1}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) + \varepsilon^2 X_{R2}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p), \\ 0 = \varepsilon Y_{R1}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) + \varepsilon^2 Y_{R2}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p), \\ 0 = \varepsilon Z_{R1}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) + \varepsilon^2 Z_{R2}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p).$$

W celu wyznaczenia dysypacji energii w układzie zawieszenia silnika można zgodnie z postacią funkcji P_7 [3] napisać

$$(3.20) \quad \varepsilon Z_{R1}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) + \varepsilon^2 Z_{R2}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) = \frac{1}{I} [crT(\Omega_p) - B(\Omega_p) - h\Omega_p - (\Delta M)_0],$$

gdzie r oznacza długość ramienia korby, $T(\Omega_p)$ — średnią wartość siły gazowej działającej prostopadle do jednego wykorbienia na promieniu r , $B(\Omega_p)$ — średnią wartość momentu oporowego odbiornika mocy (na sprzęgle silnika), $(\Delta M)_0$ — stały składnik dodatkowego momentu oporowego na wale silnika (wywołanego drganiem masy m). Przy założeniu (3.17) wartość oczekiwana straty mocy silnika, odpowiadającej dysypacji energii w układzie zawieszenia silnika, wynosi

$$(3.21) \quad \langle (\Delta N)_0 \rangle = (\Delta M)_0 \Omega_p.$$

4. Uwagi końcowe

Wyznaczone rozwiązania dotyczą kinematycznych wymuszeń będących stacjonarnymi procesami stochastycznymi. W przypadku, gdy wymuszenia ruchu pojazdu są niestacjonarnymi funkcjami losowymi, które mogą być przedstawione w postaci iloczynu stacjonarnej funkcji losowej i współczynnika będącego funkcją czasu, zagadnienie może być rozwiązane podobnie [5]. Metoda zastosowana w niniejszej pracy może być przydatna do analizy drgań silników również przy innych wymuszeniach stochastycznych (np. rozpatrywanych w pracy [4]), losowych zaburzeniach charakterystyk układu itp., przy czym dla uzyskania należytej dokładności obliczeń winny być spełnione warunki

$$\delta A \ll A_p, \quad \delta \Psi \ll \Psi_p, \quad \delta \Omega \ll \Omega_p.$$

Metoda ta może okazać się zatem zbyt mało dokładna przy intensywnych losowych zaburzeniach ruchu pojazdu, co często ma miejsce np. w warunkach transportu morskiego. Do analizy wpływu dużych kotłusań statku na nieliniowe drgania silników celowe może być zastosowanie maszyny analogowej w oparciu o stochastyczny analogowy model falowania morza [6] i znajomość funkcji przenoszenia kadłuba statku [7].

Literatura cytowana w tekście

1. М. З. Коловский, *Вынужденные колебания амортизированного объекта при случайных воздействиях*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, 1 (1963).
2. Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике*, Изд. Сов. Радио, Москва 1961.
3. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastyczne posadowionych silników tłokowych z cylindrami w układzie V*, Mech. Teor. i Stos., 4, 13 (1975).
4. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastyczne posadowionych silników tłokowych przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych*, Mech. Teor. i Stos. 3, 14 (1976).
5. А. А. СВИЕЗНИКОВ, *Podstawowe metody funkcji losowych*, PWN, Warszawa 1965.
6. М. КОСТЕЦКИ, *Stochastyczny analogowy model falowania morza*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Okrętowe XXI, 196 (1973).
7. А. М. БАСИН, *Качка судов*, Изд. Транспорт, Москва 1969.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГО ПОДВЕШЕННЫХ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ

В работе рассматриваются нелинейные одночастотные колебания амортизированных поршневых двигателей с шестью степенями свободы, установленных на средствах транспорта и возмущаемых случайными неровностями дороги. Угловая скорость двигателя считается переменной величиной. При помощи метода линеаризации определяются корреляционные функции и дисперсии приращений амплитуды колебаний, фазового угла и угловой скорости двигателя, вызванных случайными движениями транспортного средства.

Summary

NONLINEAR VIBRATIONS OF ELASTICALLY SUSPENDED PISTON ENGINES AT KINEMATIC STOCHASTIC EXCITATIONS

The paper deals with nonlinear one-frequency vibrations of piston engines with six degrees of freedom, elastically mounted on transport means and randomly excited in consequence of an uneven road surface. Rotation velocity of the engine is treated as a variable. The correlation functions and dispersions of increments of vibration amplitude, phase angle and angular velocity of the engine, resulting from random movements of a vehicle, are derived by means of the linearization method.

INSTYTUT OKRĘTOWY
POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 kwietnia 1976 r.

BADANIE TEORETYCZNE WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH LOTU OBIEKTÓW ZRZUCANYCH Z SAMOLOTU

JERZY MARYNIAK, KAZIMIERZ MICHAŁEWICZ, ZYGMUNT WINCZURA
(WARSZAWA)

1. Wstęp

Problemy budowy i zastosowania urządzeń sterujących swobodnym lotem obiektów bądź hamowania i przyspieszania ruchu tych ciał są częstym przedmiotem badań [2, 3, 9, 10, 11, 13, 14, 15]. Wymienione urządzenia służą do ukształtowania z góry zadanego toru lotu obiektu. Odpowiednie ukształtowanie ciała pozwala na uzyskanie wymaganej celności zrzutu, zabezpieczenie przed odbiciem od podłoża — rykoszetowaniem, oraz uzyskanie określonej prędkości upadku.

W pracy rozpatrzono dynamikę: usterzonego obiektu smukłego spadającego swobodnie [9, 10, 11, 15], obiektu sterowanego sterem głębokości [13, 15] oraz obiektu z raketowym urządzeniem hamująco-przyspieszającym [14, 15]. Obiekty traktowano jako ciała sztywne o trzech stopniach swobody. Otrzymany układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego silnie nieliniowych scałkowano numerycznie metodą Runge-Kutta na EMC ZAM-41 w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych [35, 37]. Dla różnych parametrów zrzutu obliczono tory lotu, zmianę kąta pochylenia θ , kąta natarcia α , prędkości: podłużnej U , poprzecznej W i całkowitej V_c .

Wprowadzając metodę zamrożonych współczynników i małych zakłóceń badanie stateczności sprowadzono do wyznaczenia wektorów własnych Z_j i odpowiadających im wartości własnych $\lambda_{j,j+1}$ macierzy stanu R [9, 11, 12, 13, 14]. Charakterystyki aerodynamiczne uzyskano w wyniku badań modelowych w tunelu aerodynamicznym w Instytucie Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej [9, 10, 15]. Geometrię i rozkłady mas wyznaczono na drodze obliczeń teoretycznych i pomiarów doświadczalnych.

2. Przyjęte układy współrzędnych

Ruch układu materialnego opisuje się jednoznacznie za pomocą współrzędnych i czasu w przestrzeni zdarzeń zwanej czasoprzestrzenią [7].

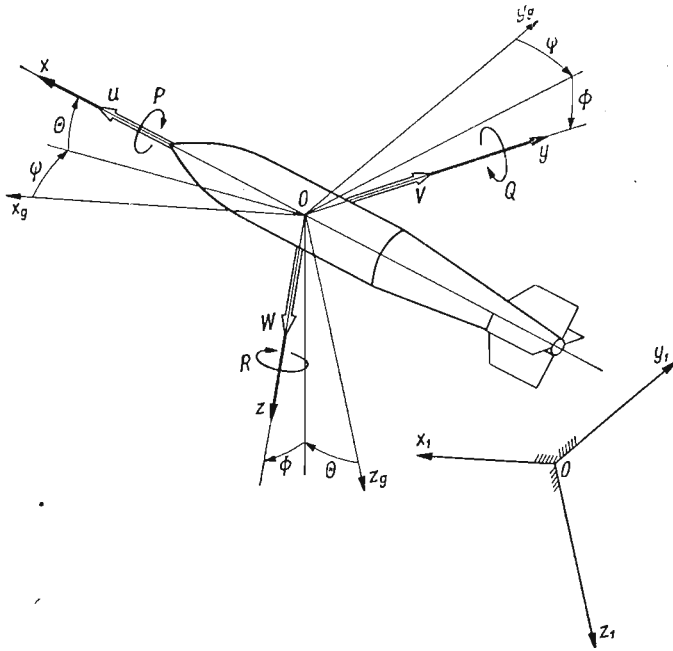
Do opisu dynamiki obiektu ruchomego niezbędne są cztery układy odniesienia, [5, 9, 26]:

- układ $Oxyz$ sztywno związany z poruszającym się obiektem,
- układ prędkościowy $Ox_a y_a z_a$ związany z kierunkiem przepływu ośrodka,
- nieruchomy układ grawitacyjny $Ox_1 y_1 z_1$ związany z Ziemią,

— układ grawitacyjny $Ox_g y_g z_g$ związany z poruszającym się obiektem, równoległy do układu nieruchomego $Ox_1 y_1 z_1$.

Chwilowe położenie obiektu jako ciała sztywnego opisano przez położenie środka masy obiektu

$$(1) \quad \bar{r}_1 = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}$$



Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia

mierzonego względem nieruchomego układu współrzędnych $Ox_1 y_1 z_1$ związanego z Ziemią oraz kątów obrotu obiektu Ψ, θ, Φ . Kąty obrotu wyznaczają jednoznacznie położenie układu współrzędnych ściśle związanego z obiektem $Oxyz$ względem grawitacyjnego układu $Ox_g y_g z_g$ równoległego do nieruchomego układu $Ox_1 y_1 z_1$. Przyjęte kąty obrotu są kątami quasi-eulerowskimi zwanymi również samolotowymi, [4, 5, 9]: Φ — kąt przechylenia, θ — kąt pochylenia, Ψ — kąt odchylenia.

Ruch obiektu opisany został w centralnym układzie $Oxyz$, sztywno związanym z ciałem o osiach skierowanych, jak na rys. 1.

Składowe wektorów chwilowych prędkości: liniowej \bar{V}_c i kątowej $\bar{\Omega}$ w przyjętym układzie współrzędnych przedstawione na rys. 1 wyrażają się zależnościami (2) i (4).

Wektor prędkości liniowej \bar{V}_c :

$$(2) \quad \bar{V}_c = U \cdot \bar{i} + V \cdot \bar{j} + W \cdot \bar{k},$$

gdzie U — prędkość podłużna, V — prędkość boczna, W — prędkość poprzeczna.

Związki kinematyczne między prędkościami liniowymi $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ mierzonymi w układzie nieruchomym $Ox_1 y_1 z_1$ a składowymi prędkościami U, V, W , rys. 1, mają postać, [5, 9, 10, 29]

$$(3) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \Lambda_v \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix},$$

gdzie macierz transformacji Λ_v ma postać:

$$\Lambda_v = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\Psi, & \sin\Phi\sin\theta\cos\Psi + \cos\Phi\sin\theta\cos\Psi + \\ & -\cos\Phi\sin\Psi, & +\sin\Phi\sin\Psi, \\ \cos\theta\sin\Psi, & \sin\Phi\sin\theta\sin\Psi + \cos\Phi\sin\theta\sin\Psi + \\ & +\cos\Phi\cos\Psi, & -\sin\Phi\cos\Psi, \\ \sin\theta, & \sin\Phi\cos\theta, & \cos\Phi\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Wektor chwilowej prędkości kątowej $\bar{\Omega}$

$$(4) \quad \bar{\Omega} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$$

gdzie P — kątowa prędkość przechylenia, Q — kątowa prędkość pochylenia, R — kątowa prędkość odchylenia.

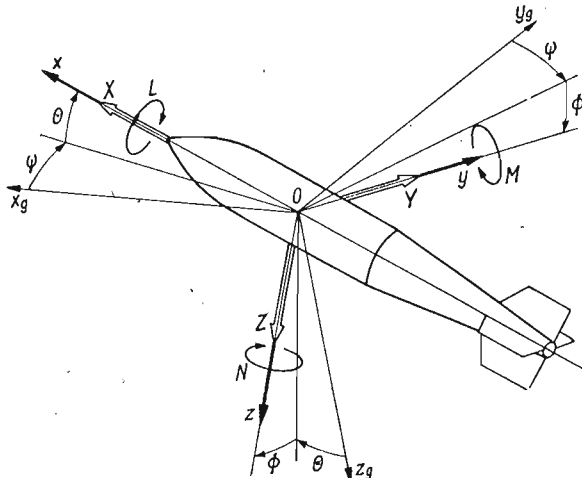
Prędkości kątowe P, Q, R z rys. 1 są liniowymi związkami prędkości uogólnionych $\dot{\Phi}, \dot{\theta}, \dot{\Psi}$ o współczynnikach zależnych od współrzędnych uogólnionych Φ, θ, Ψ i wyrażają się następującą zależnością: [5, 9, 10]

$$(5) \quad \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \Lambda_\Omega \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix},$$

gdzie macierz transformacji Λ_Ω ma postać:

$$\Lambda_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\Phi \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Wektory sił zewnętrznych i momentów sił zewnętrznych działających na obiekt, rys. 2, mają postać:



Rys. 2. Siły i momenty działające na pojemnik

— wektor sił zewnętrznych \bar{F} :

$$(6) \quad \bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

gdzie X — siła podłużna, Y — siła boczna, Z — siła poprzeczna,

— wektor momentu głównego \bar{m}

$$(7) \quad \bar{m} = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k},$$

gdzie L — moment przechylający, M — moment pochylający, N — moment odchylający.

3. Dynamiczne równania ruchów symetrycznych obiektu

Pośród szeregu obiektów, poruszających się na pograniczu dwóch ośrodków lub wewnątrz ośrodka, określonych mianem obiektów ruchomych [9], w niniejszej pracy analizowano dynamikę nieodkształcalnych obiektów swobodnych.

Nieodkształcalnym obiektem nazwano ciało, w którym dwa dowolne jego punkty nie zmieniają odległości od siebie. Badając ruch rzeczywistego obiektu wprowadza się następujące założenia:

— układ współrzędnych $Oxyz$ związany jest z poruszającym się obiektem i jego początek pokrywa się ze środkiem masy ciała,

— na poruszający się obiekt działają siły ciężkości, aerodynamiczne i napędu raketowego.

Równania ruchu obiektu wyprowadzono w oparciu o podstawowe równania dynamiki, [7]:

$$(8) \quad \frac{d\bar{\Pi}_c}{dt} = \bar{F}, \quad \frac{d\bar{K}_c}{dt} = \bar{m}.$$

Dla obiektu o stałej masie $m = \text{const}$ otrzymano:

$$(9) \quad m \left(\frac{\delta V_c}{\delta t} + \bar{\Omega} \times \bar{V}_c \right) = \bar{F},$$

$$(10) \quad \frac{\delta \bar{K}_c}{\delta t} + \bar{\Omega} \times \bar{K}_c = \bar{m}.$$

Stosując przekształcenia [7, 9, 10] oraz rzutując wektorowe równania ruchu (9) i (10) na osie układu współrzędnych otrzymano dynamiczne równania ruchów: postępowego i obrotowego w postaci skalarnej [9, 10]. Do otrzymanego układu równań (9) i (10) dochodzą:

— związki kinematyczne uwzględniające przemieszczenia między układami grawitacyjnym i związanym z obiektem, (3),

— zależność między prędkościami kątowymi P, Q, R i prędkościami uogólnionymi Φ, θ, Ψ , (5).

Układ równań (9) (10) oraz (5) opisuje ruch obiektu w układzie związanym z ciałem $Oxyz$. Dodatkowy układ równań (3) jest układem wiążącym równania obiektu w układzie $Oxyz$ z nieruchomym układem inercyjnym $Ox_1y_1z_1$.

Prawe strony równań (9) i (10) zawierają siły i momenty sił zewnętrznych działające na obiekt ruchomy, będące funkcjami zmiennych opisujących ruch i położenie ciała $U, V, W, P, Q, R, \Phi, \theta, \Psi$. Składowe sił zewnętrznych i momentów działających na obiekt wyrażają się zależnościami:

— siły ciężkości

$$(11) \quad \begin{aligned} X_g &= -mg \sin \theta, \\ Y_g &= mg \cos \theta \sin \Phi, \\ Z_g &= mg \cos \theta \cos \Phi, \end{aligned}$$

— siły aerodynamiczne

$$(12) \quad \begin{aligned} P_x &= \frac{1}{2} \rho S V_p^2 C_x \text{ — opór,} \\ P_y &= \frac{1}{2} \rho S V_p^2 C_y \text{ — siła boczna,} \\ P_z &= \frac{1}{2} \rho S V_p^2 C_z \text{ — siła nośna,} \end{aligned}$$

— momenty aerodynamiczne

$$(13) \quad \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \rho S L V_p^2 C_L \text{ — moment przechylający,} \\ M_y &= \frac{1}{2} \rho S L V_p^2 C_n \text{ — moment odchylający,} \\ M_z &= \frac{1}{2} \rho S L V_p^2 C_m \text{ — moment pochylający,} \end{aligned}$$

gdzie ρ — gęstość powietrza, S — przekrój poprzeczny korpusu obiektu, L — długość charakterystyczna, $C_x, C_y, C_z, C_L, C_n, C_m$ — bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne.

W pracy tej szeroko przeanalizowano ruch obiektu swobodnego w płaszczyźnie Ox_1z_1 . Ponieważ przedmiotem badań są symetryczne [5, 6, 9, 23, 24, 29] ruchy obiektu, to znaczy, że:

$$(14) \quad \begin{aligned} V &= 0, \\ P &= R = 0, \\ \Phi &= \Psi = 0, \\ L &= N = 0. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę zależności (14), otrzymano z (9) (10) (3) (5) układ równań opisujących płaski ruch obiektu swobodnego, który po uwzględnieniu (11) (12) (13) ma postać:

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{dt} &= -QW - g \sin \theta + \frac{1}{m} (X_q Q + X_w W + X_o + P_p - P_{II}) \\
 \frac{dW}{dt} &= QU + g \cos \theta + \frac{1}{m} [(Z_q + Z_{qs})Q + (Z_w + Z_{ws})W + Z_o] \\
 \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{J_y} [(M_q + M_{qs})Q + M_w W + M_o] \\
 \frac{d\theta}{dt} &= Q \\
 \frac{dx_1}{dt} &= U \cos \theta + W \sin \theta \\
 \frac{dz_1}{dt} &= -U \sin \theta + W \cos \theta,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

gdzie:

$$X_o = -\frac{1}{2} \rho S V_c^2 [C_x(\alpha) \cos \alpha - C_z(\alpha) \sin \alpha]$$

$$Z_o = -\frac{1}{2} \rho S V_c^2 [C_z(\alpha) \cos \alpha + C_x(\alpha) \sin \alpha]$$

$$M_o = \frac{1}{2} \rho S L V_c^2 C_m(\alpha),$$

przy czym: $\alpha = \arctg \frac{W}{U}$, $V_c^2 = U^2 + W^2$.

Stosując przedstawioną metodę przeprowadzono badania dynamicznych własności osiowosymetrycznych obiektów zrzuconych z samolotu. Przeanalizowano trzy modele fizyczne pojemników lotniczych:

- pojemnik klasyczny swobodnie spadający po zrzucie z nosiciela,
- pojemnik z dołączonym sterem głębokości realizującym aerodynamiczne zakrzywienie toru,
- pojemnik z raketowym układem hamująco-przyspieszającym.

Opis matematyczny własności dynamicznych wyżej omówionych modeli fizycznych sprowadza się do wspólnego modelu matematycznego opisujący jednoznacznie nieodkształcalny obiekt swobodny o więzach holonomicznych [9]. Różnice wynikające z różnych konstrukcyjnych modeli uwzględnia się w wektorach stanu poprzez wprowadzenie odpowiednich zmiennych zwanych zmiennymi stanu. Występujące w układzie równań (15) współczynniki $X_q, X_w, Z_q, Z_w, M_q, M_w$ noszą nazwę pochodnych aerodynamicznych [4, 5, 6, 29, 31, 34], a współczynniki Z_{qs}, Z_{ws}, M_{qs} — pochodnych silnikowych [6]. Wyznacza się je zgodnie z przyjętą w lotnictwie zasadą przy badaniu stateczności obiektów latających, przy założeniu, że zmiany symetryczne ruchu powodują zmiany symetrycznych sił i momentów, a zmiany antysymetryczne-antysymetrycznych [4, 5, 6, 9, 10, 12, 29, 31, 32].

Pochodne aerodynamiczne analizowanych modeli mają postać:

— dla pojemników klasycznych [10, 11]:

$$\begin{aligned}
 X_q &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} \frac{S}{S_b} \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \int_{x_2}^{x_1} C_1(x) x dx, \\
 X_w &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} S \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}, \\
 Z_q &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} \frac{S}{S_b} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \int_{x_2}^{x_1} C_1(x) x dx, \\
 Z_w &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} S \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}, \\
 M_q &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} \frac{S}{S_b} L \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \int_{x_2}^{x_1} C_1(x) x dx, \\
 M_w &= \frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} SL \frac{\partial C_m}{\partial \alpha},
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

— dla pojemników usterzonych [13]:

$$\begin{aligned}
 X_q &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} S \left[\frac{\partial C_{xH}}{\partial \alpha} l_H + \frac{\partial C_{xK}}{\partial \alpha} \frac{1}{S_b} \int_{x_2}^{x_1} C_1(x) x dx \right], \\
 X_w &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} S \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}, \\
 Z_q &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} S \left[\frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha} l_H + \frac{\partial C_{zK}}{\partial \alpha} \frac{1}{S_b} \int_{x_2}^{x_1} C_1(x) x dx \right], \\
 Z_w &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} S \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}, \\
 M_q &= -\frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} SL \left[\frac{\partial C_{mH}}{\partial \alpha} l_H + \frac{\partial C_{mK}}{\partial \alpha} \frac{1}{S_b} \int_{x_2}^{x_1} C_1(x) x dx \right], \\
 M_w &= \frac{1}{2} \rho \frac{W^2 + U^2}{U} SL \frac{\partial C_m}{\partial \alpha};
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

— dla pojemników z raketowym układem hamująco-przyspieszającym pochodne aerodynamiczne wyrażają się podobnie jak dla pojemników klasycznych, a pochodne silnikowe mają postać [6, 14]:

$$\begin{aligned}
 Z_{qs} &= l_s (m_{sp} - m_{sH}), \\
 Z_{ws} &= \frac{1}{2} \rho V S (C_{sp} - C_{sH}), \\
 M_{qs} &= l_s^2 (m_{sH} - m_{sp}),
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

gdzie S_b — powierzchnia przekroju podłużnego pojemnika, $C_1(x)$ — funkcja zmiany przekroju poprzecznego pojemnika wzdłuż długości, l_H — odległość od SC pojemnika do osi obrotu steru, l_s — odległość od SC pojemnika do dyszy silnika raketowego, $\frac{Q_p}{gt_s}$ — wydatek sekundowy gazów prochowych, $\frac{2P_s}{\rho V_c^2 S} = C_s$ — współczynnik ciągu silników raketowych.

4. Własności kinematyczne i geometryczne ruchu obiektów zrzuconych z samolotu

Równania (15) opisujące ruch obiektu zrzuconego z samolotu są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi rzędu drugiego, silnie nieliniowymi, o zmiennych współczynnikach. Scałkowano je numerycznie wykorzystując metodę Runge–Kutta przy czym analizę numeryczną przeprowadzono w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych, [35, 37].

Opracowane programy mają na celu zbadanie wpływu:

- parametrów lotu nosiciela,
- parametrów konstrukcyjnych obiektu zrzuconego, takich jak kąt wychylenia steru β_H , wielkość siły hamującej P_H , przyspieszającej P_p , na tor lotu obiektu $f(x_1, z_1)$, zmianę kąta natarcia α , kąta pochylenia θ , prędkość upadku V_k i inne parametry charakteryzujące ruch.

Obliczenia wykonano dla następujących parametrów:

- prędkości zrzutu $V_0 = 100, 150, 200, 250$ [m/s];
- kąt pochylenia w chwili zrzutu $\theta_0 = -15, 0, 15$ [°];
- wartości sił $P_H = P_p = 2000, 4000, 6000$ [kG];
- kąt wychylenia steru pojemnika $\beta_H = 0, 15, 30$ [°];

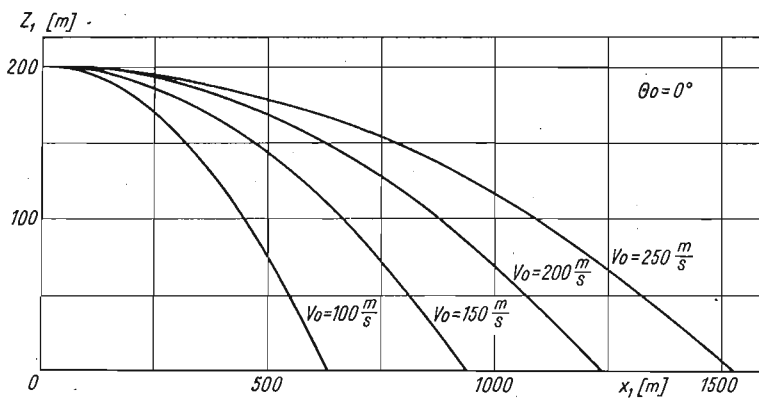
przy zachowaniu stałych wartości pozostałych parametrów, jak np.: charakterystyk geometrycznych, masowych, aerodynamicznych.

Charakterystyczne wyniki obliczeń dla badanych modeli przedstawiono w formie wykresów na rys. 3÷18.

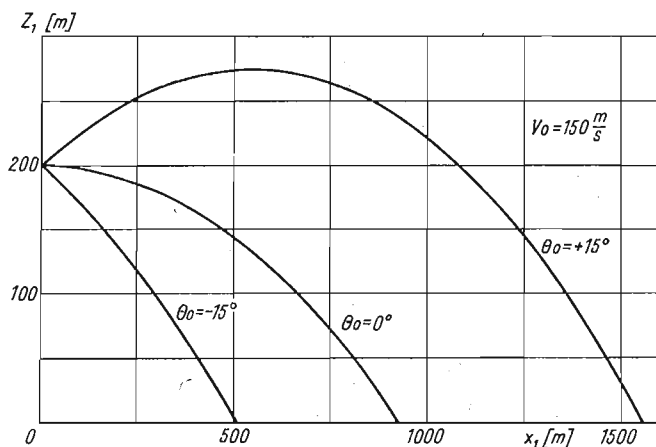
a) *Klasyczny pojemnik lotniczy*. Z analizy otrzymanych wyników obliczeń [10] wpływa wniosek, że profil toru $z_1 = z_1(x_1)$ w istotny sposób zależy od prędkości zrzutu V_0 , rys. 3, i początkowego kąta pochylenia θ_0 rys. 4. Ze wzrostem prędkości zrzutu V_0 donośność pojemnika znacznie rośnie, a tym samym i jego tor staje się bardziej płaski, co doprowadzić może przy pewnej wartości kąta upadku θ_k do rykoszetu. Podobnie wzrost początkowego kąta pochylenia θ_0 powoduje duże zwiększenie donośności przy czym jego wpływ na zmianę kąta upadku θ_k jest nieznaczny; np. przyrost kąta $\Delta\theta_0 = 30^\circ$ powoduje przyrost kąta $\Delta\theta_k \cong 0,1$ rad, rys. 4.

Zmiana kąta pochylenia θ na torze ma charakter oscylacji gasnących, rys. 5. Wzrost prędkości zrzutu V_0 powoduje zmniejszenie kąta upadku θ_k oraz zwiększenie częstości i zmniejszenie amplitudy oscylacji, rys. 5.

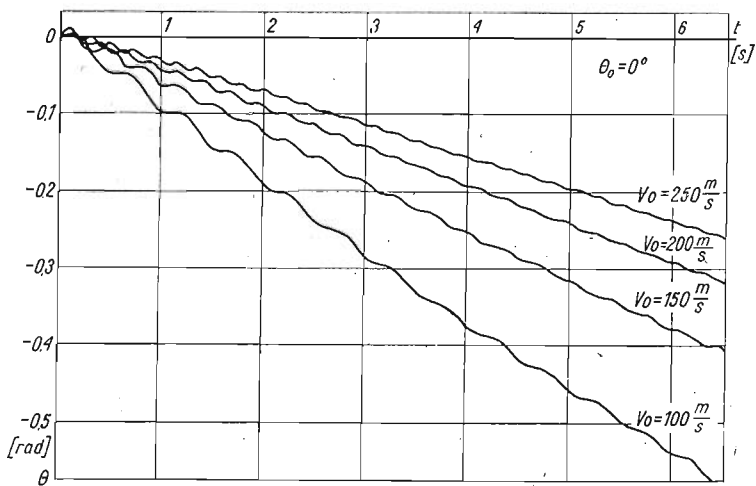
Z charakteru zmian kąta natarcia α , rys. 6, i prędkości pionowej W , rys. 7, na torze wynika, że ruch pojemnika swobodnie spadającego jest ruchem periodycznym, tłumionym przy czym tłumienie silnie wzrasta z przyrostem prędkości, rys. 6 i rys. 7.



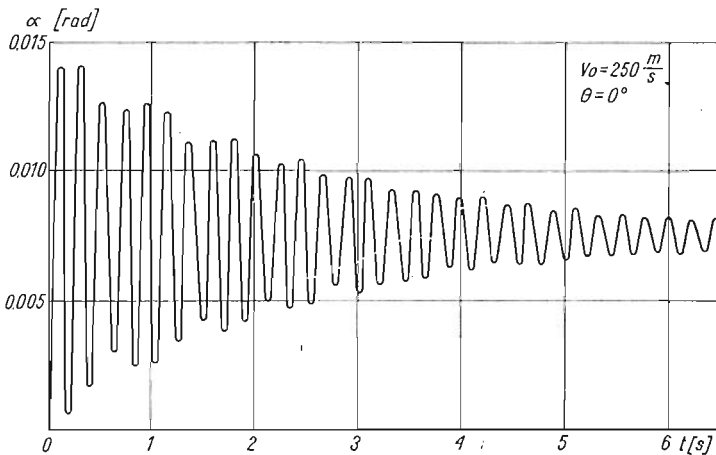
Rys. 3. Tory lotu pojemnika dla różnych prędkości zrzutu



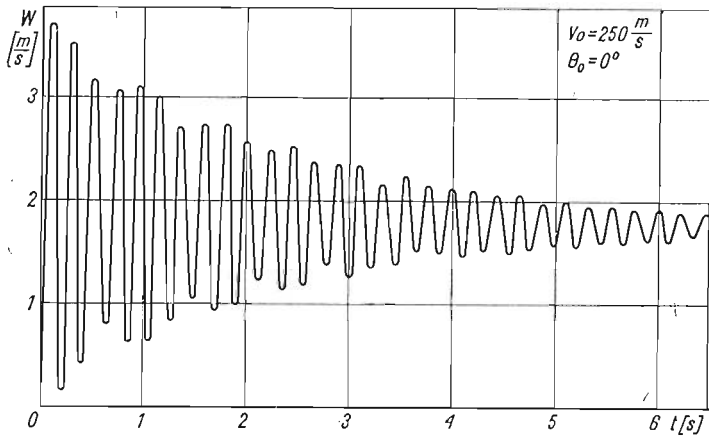
Rys. 4. Tory lotu pojemnika dla różnych wartości początkowych kątów pochylenia pojemnika



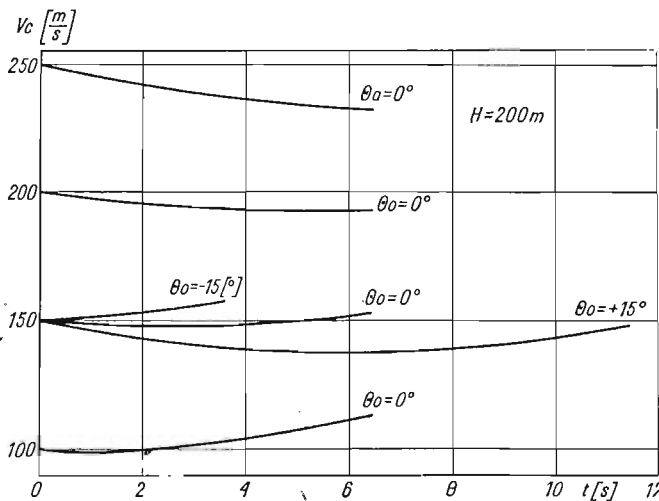
Rys. 5. Zmiany kąta pochylenia pojemnika dla różnych prędkości zrzutu



Rys. 6. Oscylacje kąta natarcia pojemnika dla prędkości zrzutu $V_0 = 250$ m/s



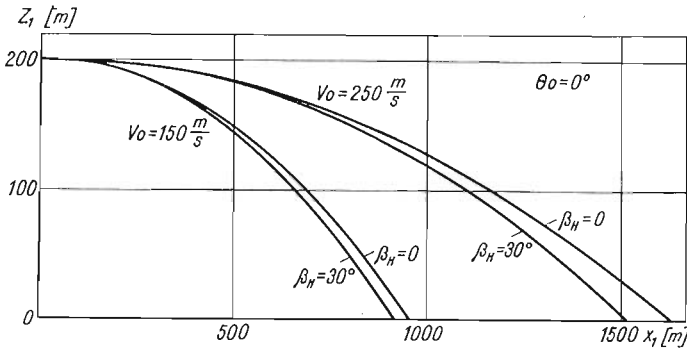
Rys. 7. Oscylacje prędkości poprzecznej pojemnika dla prędkości zrzutu $V_0 = 250$ m/s



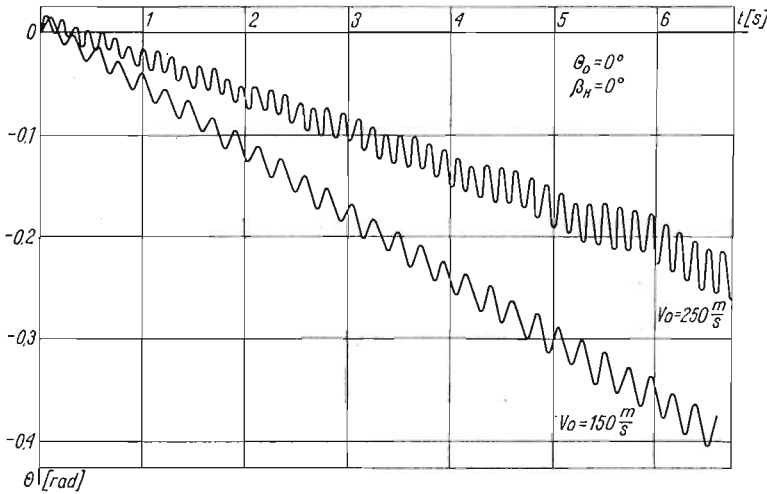
Rys. 8. Zmiany prędkości całkowitej pojemnika dla różnych prędkości zrzutu V_0 i różnych kątów pochylenia θ

Wektor prędkości całkowitej pojemnika V_c zmienia się jak na rys. 8. W pierwszej fazie lotu następuje wyhamowanie prędkości a następnie zaczyna ona wzrastać, przy czym możliwą do osiągnięcia prędkością w swobodnym spadku jest prędkość graniczna.

b) *Pojemnik lotniczy sterowany aerodynamicznym sterem głębokości.* Z przeprowadzonych obliczeń [13] wynika, że profil toru pojemnika sterowanego $z_1 = z_1(x_1)$ w istotny sposób zależy od prędkości zrzutu ciała. Ze wzrostem tej prędkości donośność pojemnika rośnie, a więc tor staje się coraz bardziej płaski, rys. 9.



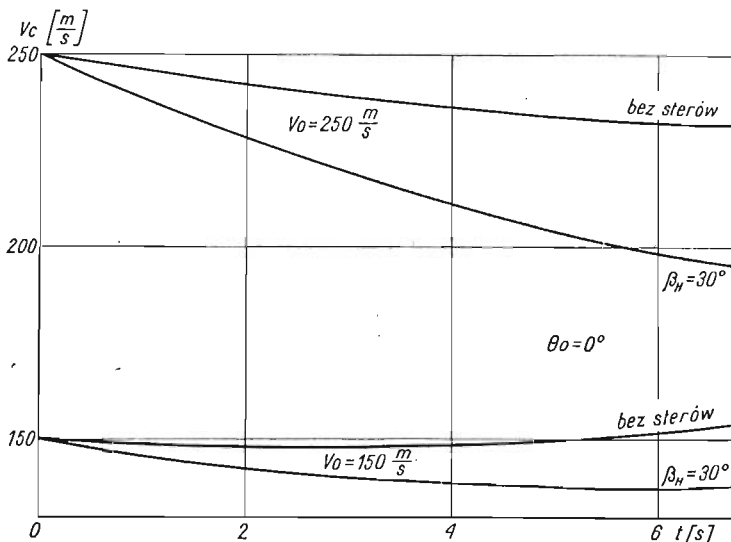
Rys. 9. Wykres profilu toru lotu pojemnika dla różnych prędkości zrzutu V_0 i kątów wychylenia steru β_H



Rys. 10. Wykres zmian kąta pochylenia θ przy zerowym wychyleniu steru $\beta_H = 0^\circ$ i różnych prędkościach zrzutu V_0

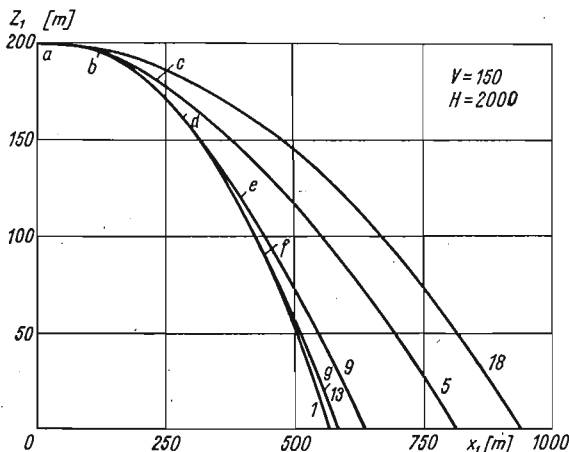
Wpływ kąta wychylenia steru głębokości na profil toru jest mały. Przykładowo, przy prędkości $V_0 = 250$ [m/s] wychylenie steru o kąt $\Delta\beta_H = 30^\circ$ powoduje zmniejszenie donośności o $\Delta X_1 \cong 100$ [m], rys. 9. Z charakteru zmian kąta natarcia α i pochylenia θ , rys. 10, wynika, że ruch pojemnika na torze jest ruchem periodycznym. Dołączona dodatkowa powierzchnia powoduje unięstatecznienie ruchu. Zwiększenie wychylenia steru o kąt $\Delta\beta_H$ powoduje ustatecznienie ruchu, gdyż przy małych kątach β amplituda wahań

ma tendencję do wzrostu, natomiast przy większych kątach β_H utrzymuje się na stałym, choć podwyższonym poziomie. Skuteczność zakrzywienia toru nie jest duża np. wychylenia steru o kąt $\Delta\beta_H = 30^\circ$ powoduje zwiększenie kąta pochylenia o $\Delta\theta \cong 0,2$ rad przy dużych wahanich. Prędkość całkowita usterzonego pojemnika w stosunku do klasycznego znacznie spada, z tym, że wzrost kąta wychylenia steru powoduje większy spadek prędkości, rys. 11.



Rys. 11. Charakter zmian prędkości całkowitej V_c dla różnych prędkości początkowych pojemnika z wychylnym sterem i bez steru

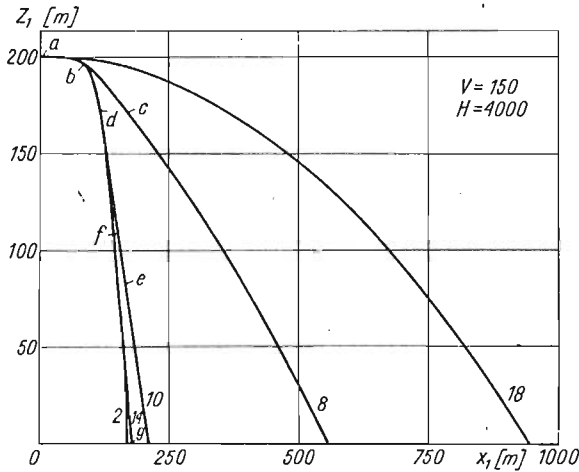
c) *Pojemnik lotniczy z raketowym układem hamująco-przyspieszającym.* Z analizy otrzymanych wyników obliczeń numerycznych [14] wynika, że profil toru lotu pojemnika $z_1 = z_1(x_1)$ w istotny sposób zależy od prędkości rzutu V_0 i wielkości sił hamująco-przyspieszających, rys. 12 i rys. 13. Dla danej siły rakietowej wzrost prędkości rzutu powoduje



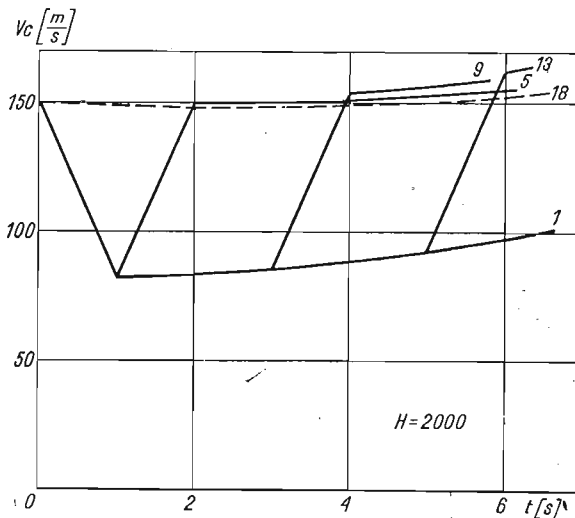
Rys. 12. Wykres profilu toru lotu pojemnika dla prędkości rzutu $V_0 = 150$ m/s i wartości siły hamującej $H = 2000$ kG i przyspieszającej $P = 2000$ kG

zwiększenie donośności pojemnika natomiast przy ustalonej prędkości zrzutu przyłożenie większej siły hamująco-przyspieszającej powoduje zmniejszenie donośności, przy czym istotnym czynnikiem jest czas włączenia silnika przyspieszającego, rys. 12, 13. Wzrost przedziału czasowego między czasem zakończenia pracy silnika hamującego t_{KH} , a czasem odpalenia silnika przyspieszającego t_{pp} powoduje większe wystromienie toru, a tym samym zmniejszenie donośności (rys. 12, rys. 13).

Interesujący przebieg ma zmiana wektora prędkości całkowitej V_C pojemnika na torze, rys. 14, rys. 15. Dla porównania wyników na jednym wykresie przedstawiono krzywe zmiany wektora prędkości dla swobodnego spadku pojemnika oraz dla lotu po-



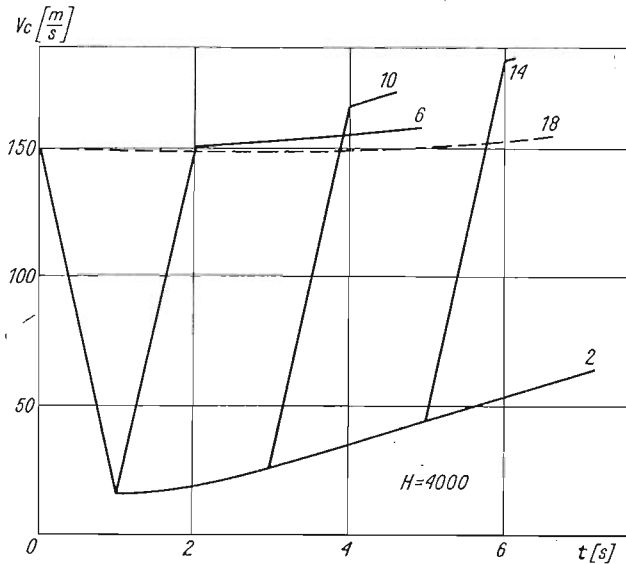
Rys. 13. Wykres profilu toru lotu pojemnika dla prędkości zrzutu $V_0 = 150$ m/s i wartości siły hamującej $H = 4000$ kG i przyspieszającej $P = 4000$ kG



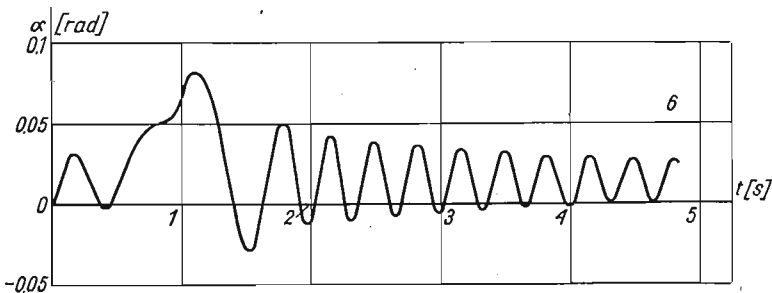
Rys. 14. Charakter zmian prędkości całkowitej V_C dla prędkości początkowej pojemnika $V_0 = 150$ m/s i wartości siły hamującej $H = 2000$ kG i przyspieszającej $P = 2000$ kG

jemnika z przyłożonymi określonymi wartościami sił raketowych P_H i P_p , rys. 14 i rys. 15. Z analizy uzyskanych przebiegów wynika, że przy danej prędkości zrzutu większa wartość siły hamującej powoduje większy spadek prędkości całkowitej i analogicznie większa wartość siły przyspieszającej powoduje wzrost prędkości całkowitej, a w tym i prędkości końcowej V_K . Określona wartość siły hamującej P_H lub przyspieszającej P_p powoduje podobne efekty hamowania lub przyspieszania przy różnych prędkościach zrzutu. Na prędkość końcową pojemnika ma wpływ przerwa czasowa Δt_a określona wzorem $\Delta t_a = t_{pp} - t_{KH}$, przy czym im ta przerwa jest większa tym wartość prędkości końcowej wzrasta. Wynika to stąd, że prędkość końcowa jest sumą prędkości swobodnego spadku w czasie Δt_a oraz prędkości rozpędzania podczas działania silnika przyspieszającego, rys. 14 i rys. 15.

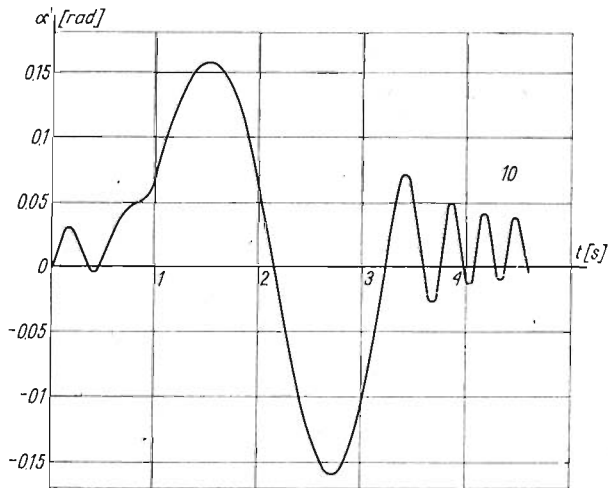
Z wykresów przedstawiających zmianę kąta natarcia α na torze, rys. 16 i rys. 17, wynika, że kąt natarcia zmienia się periodycznie, przy czym amplituda i okres wahań



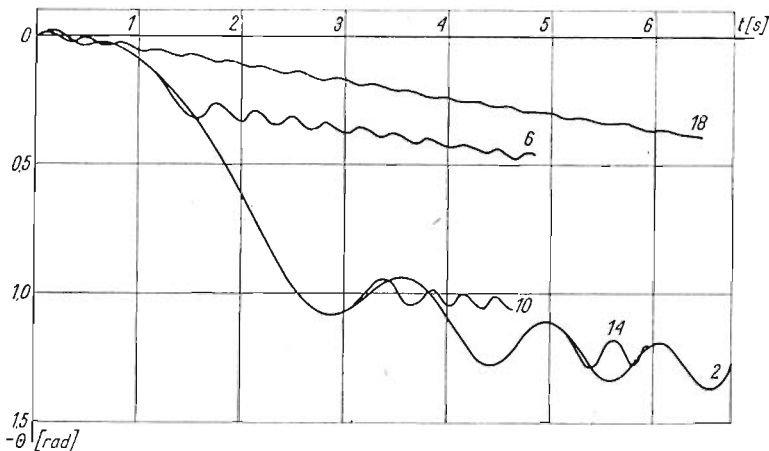
Rys. 15. Charakter zmian prędkości całkowitej V_c dla prędkości początkowej pojemnika $V_0 = 150$ m/s i wartości siły hamującej $H = 4000$ kG i przyspieszającej $P = 4000$ kG



Rys. 16. Charakter zmian kąta natarcia α na torze przy prędkości zrzutu $V_0 = 150$ m/s i wartości siły hamującej $H = 4000$ kG i przyspieszającej $P = 4000$ kG. Silnik przyspieszający działa bezpośrednio po silniku hamującym



Rys. 17. Charakter zmian kąta natarcia α na torze przy prędkości zrzutu $V_0 = 150$ m/s i wartości siły hamującej $H = 4000$ kG i przyspieszającej $P = 4000$ kG. Silnik przyspieszający zostaje włączony po czasie $\Delta t = 2$ s od chwili zakończenia pracy silnika hamującego



Rys. 18. Wykresy zmian kąta pochylenia θ dla prędkości zrzutu $V_0 = 150$ m/s i wartości sił hamującej H i przyspieszającej P równych $H = P = 4000$ kG włączanych w różnych momentach czasu

zależą od wielkości oraz czasu przyłożenia sił rakietowych do pojemnika. Pojemnik w czasie ruchu ustaje na torze, rys. 16 - 18. Szybsze włączenie silnika przyspieszającego powoduje szybsze ustanie ruchu.

Zmiana kąta pochylenia θ na torze ma charakter oscylacyjny, rys. 18. Zasadniczy wpływ na wielkość kąta upadku pojemnika θ_K ma czas włączenia silnika przyspieszającego w ustalonych parametrach zrzutu i wielkościach sił przyspieszającej i hamującej. Stwierdzono, że późniejsze włączenie silnika przyspieszającego powoduje duży wzrost (do ~ 1 rad) kąta θ w czasie swobodnego lotu pojemnika a następnie powolne oscylacje z jednoczesnym powolnym i ciągłym wzrostem, rys. 18.

5. Własności dynamiczne ruchu obiektów zrzuconych z samolotu

Do badania własności dynamicznych ruchu pojemników lotniczych można zastosować uproszczone modele matematyczne obiektu fizycznego. W pracy, analizując ruchy podłużne obiektów zrzuconych z samolotu, uproszczono model matematyczny tego zjawiska poprzez linearyzację równań ruchu (15) stosując metodę zamrożonych współczynników i małych zakłóceń. Przyjęta metoda zakłada, że w ruchu obiektu latającego występują małe odchylenia od określonych w danej chwili warunków lotu. Można ją stosować w przypadku, gdy lot nie zachodzi przy krytycznych kątach natarcia α_{kr} oraz gdy zmiany położenia kąтового są małe, [9, 10, 11].

Linearyzację przeprowadzono w określonym punkcie toru przy założeniu:

$$\theta = \theta_1 + \vartheta \text{ — kąt toru,}$$

$$Q = Q_1 + q \text{ — prędkość kątowa pochylenia,}$$

$$U = U_1 + u \text{ — składowa podłużna prędkości postępowej,}$$

$$W = W_1 + w \text{ — składowa poprzeczna prędkości postępowej,}$$

θ_1, Q_1, U_1, W_1 — kąt toru; prędkość: kątowa pochylenia, prędkość podłużna i poprzeczna w chwili t_1 , dla ściśle określonego położenia. Wartości te są obliczane na drodze całkowania numerycznego układu równań nieliniowych (15).

Układ równań różniczkowych (15), po zlinearyzowaniu, [9, 11, 12], oraz uporządkowaniu, w zapisie macierzowym, ma następującą postać:

$$(19) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} = \mathbf{0},$$

gdzie:

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ — macierz kwadratowa współczynników bezwładności,

$\mathbf{B} = [b_{ij}]$ — macierz kwadratowa współczynników tłumienia,

$\mathbf{C} = [c_{ij}]$ — macierz kwadratowa współczynników sztywności,

$\mathbf{D} = [d_{ij}]$ — macierz kolumnowa wyrazów wolnych,

przy czym

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{col}[IIu, IIw, \vartheta]$$

$$\mathbf{x} = \text{col}[u, w, \vartheta]$$

Rozwiązanie zagadnienia sprowadzono do wyznaczenia wektorów własnych \mathbf{Z}_j i odpowiadających im wartości własnych $\lambda_{j,j+1} = \xi_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1}$ macierzy stanu \mathbf{R} wyrażającej się zależnością, [9, 11, 12]:

$$(20) \quad \mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{array} \right].$$

Wyznaczenie wektorów własnych \mathbf{Z}_j , odpowiadających ściśle określonym wartościom własnym λ_j , pozwala na identyfikację odpowiednich ruchów rozpatrywanego modelu fizycznego badanego obiektu.

Rozwiązanie ogólne układu równań (19) jest liniową kombinacją wszystkich rozwiązań szczególnych i dla niepowtarzających się wartości własnych ma postać:

$$(21) \quad \mathbf{Z} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{Z}_j \exp(\lambda_j, t),$$

gdzie:

Z_j — jest wektorem własnym, odpowiadającym wartości własnej λ_j ,

C_j — stałe wyznaczone z warunków początkowych, będących wartościami zakłóceń od parametrów ruchu, dla chwili $t = t_1$,

$\lambda_{j,j+1}$ — wartości własne macierzy stanu \mathbf{R} ,

$\eta_{j,j+1}$ — częstość oscylacji o okresie $T_j = \frac{2\pi}{\eta_j}$,

$\xi_{j,j+1}$ — współczynnik tłumienia, jeżeli wszystkie $\xi < 0$, wahania są tłumione, tzn. ruch obiektu jest asymptotycznie stateczny w sensie Lapunowa,

$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\xi_j}$ — czas stłumienia amplitudy do połowy,

przy czym liczba wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych Z_j jest równa n — liczbie równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego.

Stosując opisaną metodę zbadano stateczność podłużną modeli pojemników lotniczych przedstawionych w rozdz. 4.

Postawiony problem rozwiązano przy pomocy maszyny cyfrowej. Program obliczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy został opracowany oraz obliczenia wykonano w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych [36, 38].

Otrzymano cztery wartości własne, które zidentyfikowano analizując odpowiadające im wektory własne Z_j :

$\lambda_{1,2} = \xi_{1,2} \pm i\eta_{1,2}$ — odpowiada szybkim oscylacjom pochyłającym ϑ , zawsze silnie tłumionym $\xi_{1,2} < 0$, z równoczesnym przemieszczeniem poprzecznym pojemnika lotniczego w ,

lub $\lambda_{3,4} = \xi_{3,4} \pm i\eta_{3,4}$ — odpowiada poprzecznym wahaniom periodycznym o częstości $\eta_{3,4}$ lub przemieszczeniom aperiodycznym α, w ; charakteryzuje ruchy rozbieżne $\xi_3 > 0$, $\xi_4 < 0$ lub słabo tłumione wahania.

$$\lambda_3 = \xi_3$$

$$\lambda_4 = \xi_4$$

Charakterystyczne wyniki obliczeń dla analizowanych modeli pojemników lotniczych przedstawiono na rys. 19÷24. Wykreślono zmiany współczynników tłumienia ξ_j i częstości oscylacji η_j w funkcji czasu spadku pojemnika t . W celu określenia położenia pojemnika przedstawiono również tor lotu $z_1 = f(x_1)$, obliczony w rozdz. 4.

a) *Klasyczny pojemnik lotniczy*. Macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ równania (19) dla klasycznego pojemnika lotniczego mają postać:

— macierz współczynników bezwładności

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_y \end{bmatrix},$$

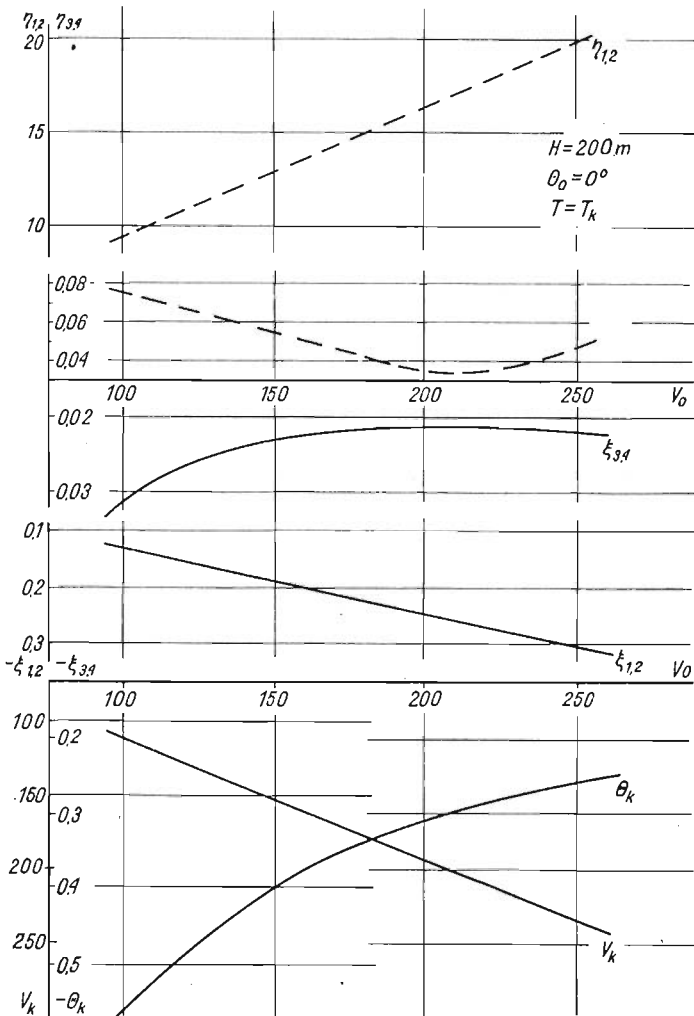
— macierz współczynników tłumienia

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -X_u & mQ_1 - X_w & mW_1 - X_q \\ -(mQ_1 + Z_u) & -Z_w & -(mU_1 + Z_q) \\ -M_u & -M_w & -M_q \end{bmatrix},$$

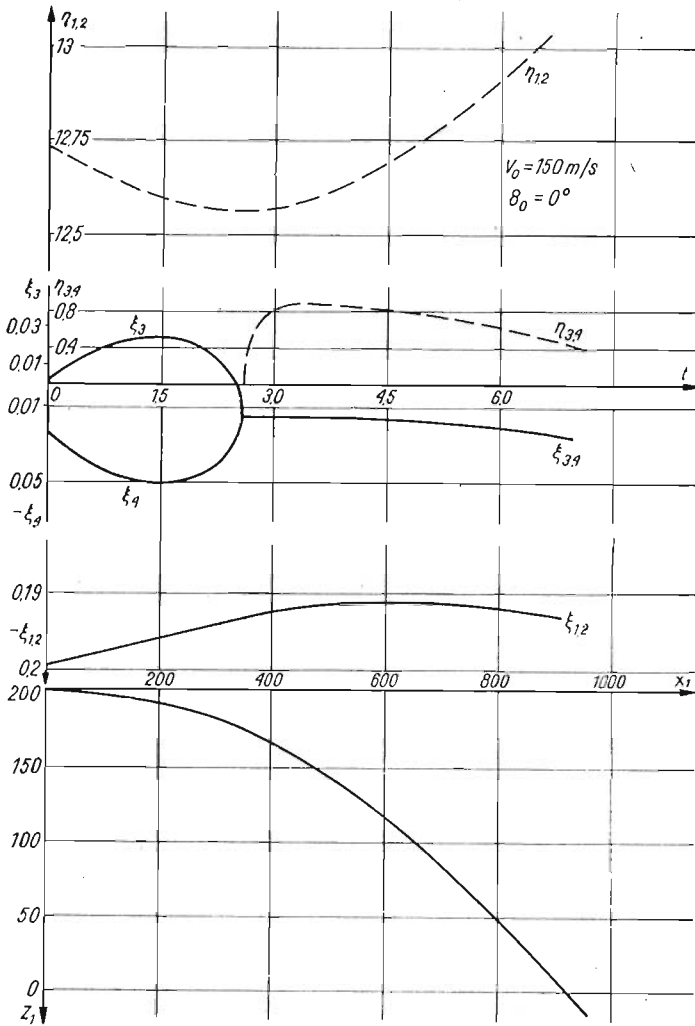
— macierz współczynników sztywności

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & X_3 \\ 0 & 0 & Z_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Z analizy zmian wartości własnych, rys. 19, w funkcji czasu lotu tzn. w zależności od położenia na torze, wynika, że ruch pojemnika klasycznego w początkowej fazie jest lotem niestacycznym $\xi_3 > 0$. W pierwszej fazie lotu po zrzucie pojemnik wykonuje powolne ruchy aperiodyczne nietłumione $\xi_3 > 0$ i $\xi_4 < 0$, z równoczesnymi silnie tłumionymi oscylacjami $\xi_{1,2} < 0$ o częstotliwości $\eta_{1,2}$. W dalszym locie następuje ustanie ruchu,



Rys. 19. Zmiany współczynnika tłumienia ξ , częstotliwości oscylacji η , kąta upadku θ_k i prędkości upadku V_k w funkcji prędkości zrzutu V_0 w chwili końcowej $T = T_k$

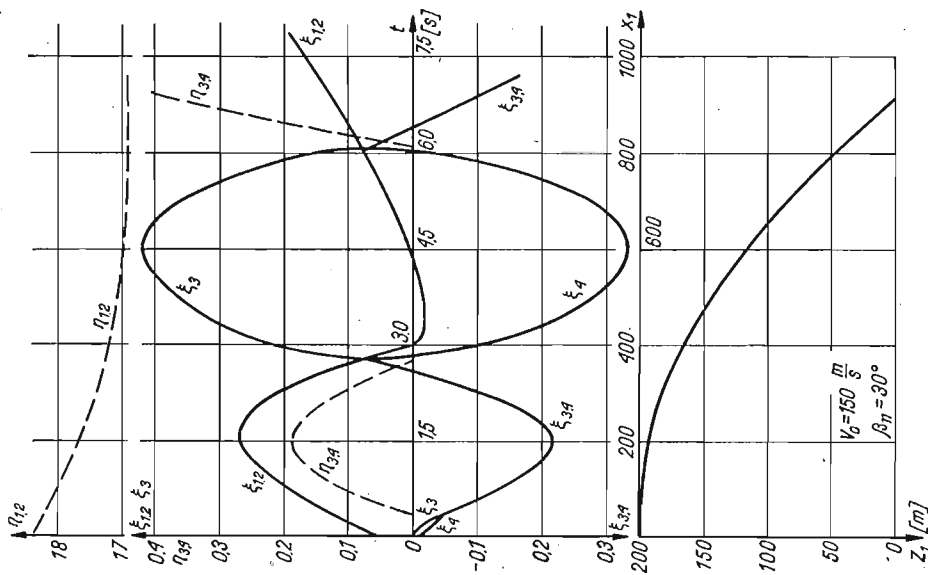


Rys. 20. Zmiany współczynnika tłumienia ξ , częstości oscylacji η i toru lotu $x_1 = f(z_1)$ w funkcji czasu t dla prędkości początkowej rzutu $V_0 = 150 \text{ m/s}$

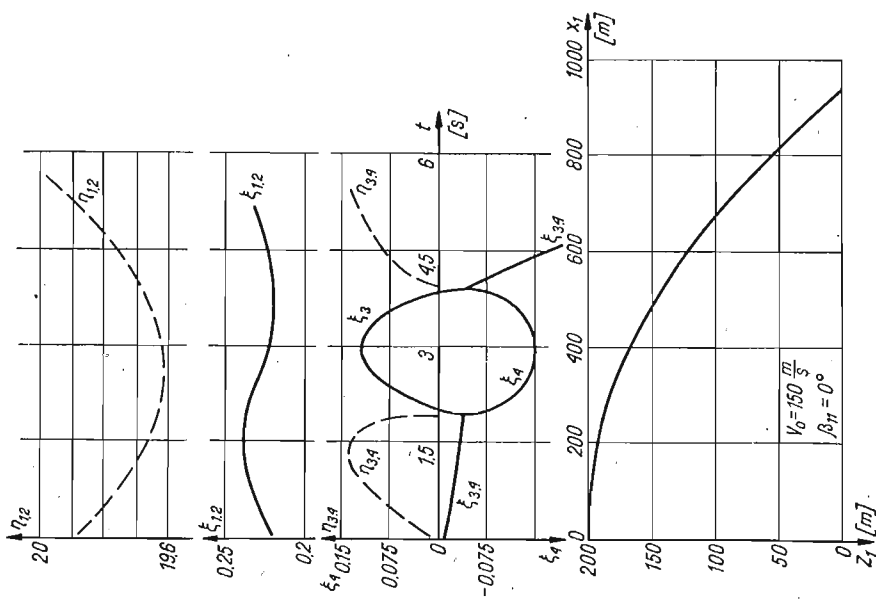
zarówno szybkie oscylacje o częstości $\eta_{1,2}$ są tłumione $\xi_{1,2} < 0$, jak i wahania periodyczne o niskiej częstości $\eta_{3,4}$ są zanikające $\xi_{3,4} < 0$.

Wyniki przedstawione na rys. 20 potwierdzają stateczność lotu pojemnika w końcowej fazie spadku: $\xi_{1,2} < 0$ i $\xi_{3,4} < 0$. Ze wzrostem prędkości rzutu V_0 wzrastają szybkie oscylacje wywołane „usztynieniem” aerodynamicznym ($\eta_{1,2}$ rośnie), przy równoczesnym silnym wzroście tłumienia (ujemna wartość $\xi_{1,2}$ maleje). Zmiany tłumionych wahań fugoidalnych są bardzo małe.

b) *Sterowany pojemnik lotniczy z wychylanym sterem głębokości.* Macierze **A**, **B**, **C** równania (19) sterowanego pojemnika lotniczego wyrażają się podobnie jak w przypadku pojemnika klasycznego, natomiast różna jest postać poszczególnych wyrazów macierzy.



Rys. 22. Zmiany współczynników tłumienia ξ_j i współczynników częstości oscylacji η_j w funkcji czasu spadania dla $V_0 = 150 \text{ m/s}$ i $\beta_H = 30^\circ$



Rys. 21. Zmiany współczynnika tłumienia ξ_j i współczynników częstości oscylacji η_j w funkcji czasu spadania dla $V_0 = 150 \text{ m/s}$ i $\beta_H = 0^\circ$

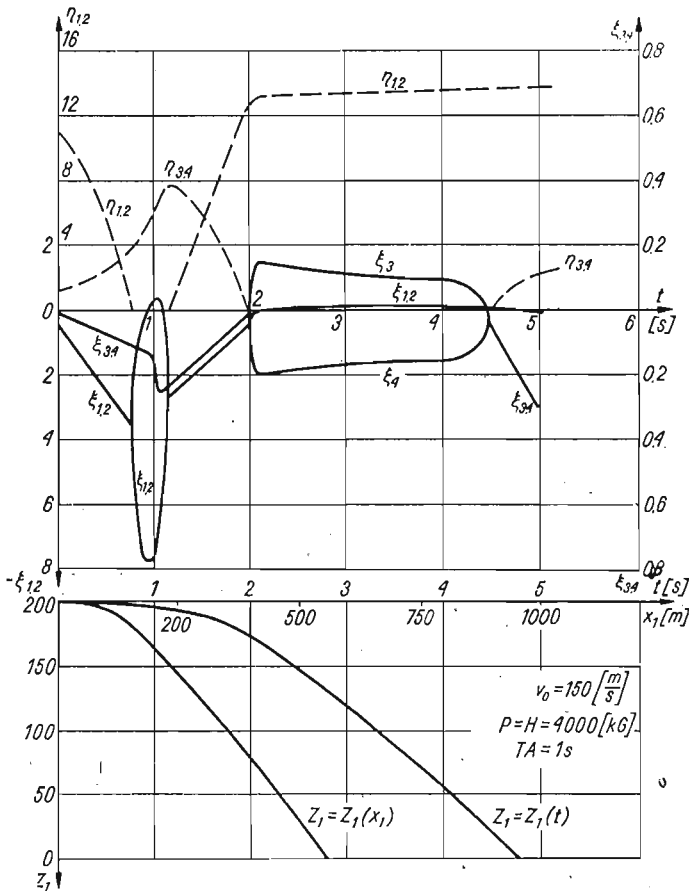
Analiza wyników wykazuje, że umieszczenie steru głębokości o przyjętych kształtach i wielkości powoduje słabe uniestatecznienie lotu pojemnika: $\xi_{1,2} > 0$ i w pewnych fazach lotu: $\xi_3 > 0$, rys. 21.

Wychylenie steru o kąt β_H w niewielkim stopniu pogłębia niestateczność lotu, rys. 22. Tak przyjęte stery wykazują jednocześnie małą skuteczność, co jest spowodowane silnymi własnościami stabilizującymi brzechw i pierścieni kierujących pojemnika klasycznego.

c) *Pojemnik lotniczy z raketowymi silnikami hamująco-przyspieszającymi.* Macierze **A, B, C** równania (19) dla pojemnika lotniczego z raketowym układem hamująco-przyspieszającym są następujące:

— macierz współczynników bezwładności

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_y \end{bmatrix},$$



Rys. 23. Zmiany współczynników tłumienia ξ_i i współczynników częstości oscylacji η_i w funkcji czasu spadania pojemnika dla prędkości rzutu $V_0 = 150 \text{ m/s}$ i wartości sił hamującej H i przyspieszającej P równych $H = P = 4000 \text{ kg}$. Silnik przyspieszający włączony bezpośrednio po wyłączeniu silnika hamującego

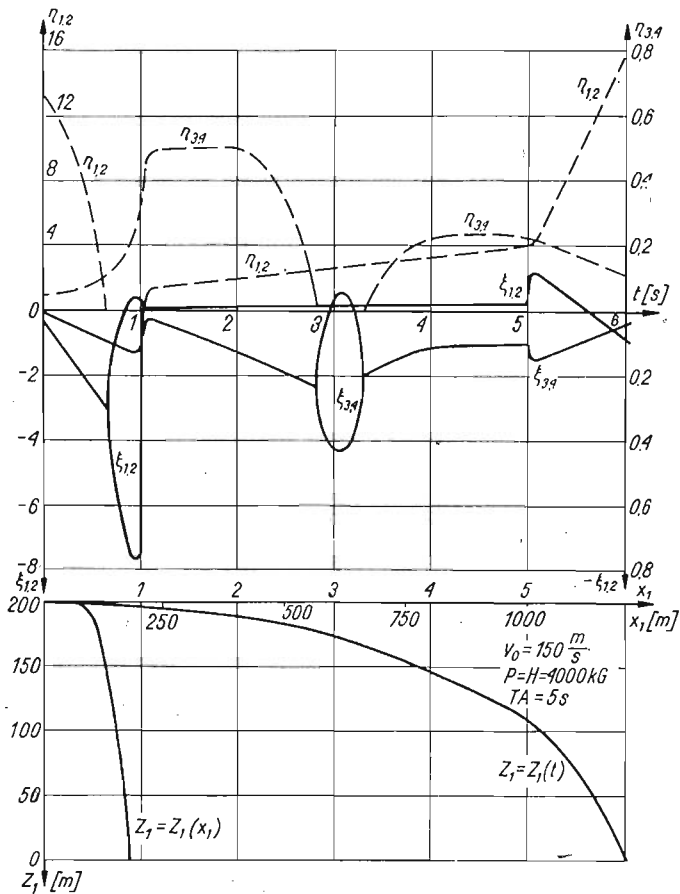
— macierz współczynników tłumienia

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -X_u, & mQ_1 - X_w, & mW_1 - X_q, \\ -mQ_1 - Z_u, & -Z_w - Z_{ws}, & mU_1 - Z_q - Z_{qs}, \\ -M_u, & -M_w, & -M_q - M_{qs}, \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników sztywności

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & mg \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analiza uzyskanych wyników pozwala wyciągnąć następujący wniosek. Mianowicie, włączenie lub wyłączenie silnika raketowego powoduje uniestatecznienie ruchu, przy czym rodzaj niestateczności jest zależny od momentu włączenia silnika przyspieszającego:



Rys. 24. Zmiany współczynników tłumienia ξ_j i współczynników częstości oscylacji η_j w funkcji czasu spadania pojemnika dla prędkości zrzutu $V_1 = 150 \text{ m/s}$ i wartości sił hamującej H i przyspieszającej P równych $H = P = 4000 \text{ kg}$. Lot pojemnika przy działających silnikach hamującym i przyspieszającym włączonym po czasie $\Delta t = 4 \text{ s}$ od chwili zakończenia pracy silnika hamującego

a) Przypadek włączenia silnika przyspieszającego natychmiast po zakończeniu pracy silnika hamującego, rys. 23. Z analizy otrzymanych wartości własnych wynika, że ruch pojemnika w czasie pracy obu silników jest ruchem statecznym: $\xi_{1,2} < 0$ i $\xi_{3,4} < 0$, przy czym włączenie silnika przyspieszającego powoduje zmniejszenie stateczności. Następna faza ruchu badanego obiektu jest niestateczna. Pojemnik wykonuje powolne ruchy aperiodyczne nietłumione: $\xi_3 > 0$ i $\xi_4 < 0$, z równocześnie nietłumionymi oscylacjami $\xi_{1,2} > 0$ o częstości $\eta_{1,2}$. W końcowej fazie lotu następuje ustatecznienie ruchu. Zarówno szybkie oscylacje $\eta_{1,2}$ są tłumione: $\xi_{1,2} < 0$, jak również periodyczne wahania fugoidalne zanikają.

b) Przypadek włączenia silnika przyspieszającego w określonym czasie po zakończeniu pracy silnika hamującego, rys. 24. Analizując otrzymane wartości własne stwierdzono niestateczność dynamiczną w fazie lotu po zakończeniu pracy silnika hamującego: $\xi_{1,2} > 0$. Pojemnik wykonuje nietłumione oscylacje: $\xi_{1,2} > 0$ o częstości $\eta_{1,2}$ z jednoczesnymi powolnymi periodycznymi ruchami fugoidalnymi $\eta_{3,4}$ silnie tłumionymi $\xi_{3,4} < 0$. Włączenie silnika przyspieszającego powoduje pogłębienie niestateczności $\xi_{1,2} > 0$ i osiąga większą wartość. W końcowej fazie lotu następuje ustatecznienie ruchu. Szybkie oscylacje $\eta_{1,2}$ są mocniej tłumione $\xi_{1,2} < 0$, jak również periodyczne wahania fugoidalne są wahaniami tłumionymi $\xi_{3,4} < 0$.

6. Wnioski

Przedstawione metody badania własności dynamicznych pojemników lotniczych dają ciągłą informację o ruchu obiektu na torze, w przeciwieństwie do analizy ruchu metodami balistyki zewnętrznej, w wyniku której uzyskuje się informacje wyłącznie o ruchu środka masy. W wyniku przeprowadzonej analizy dynamicznej ruchu obiektu smukłego wiadome jest, że ciało zrzucone z małej wysokości z pokładu nosiciela uzyskuje tak mały kąt upadku θ_K , że istnieje duża możliwość odbicia się go od podłoża. W związku z tym nasuwa się konieczność zastosowania urządzeń, które spowodowałyby zwiększenie kąta upadku przez wystromienie toru. Przeanalizowano zastosowanie steru głębokości, którego zadaniem było zakrzywienie toru lotu obiektu bez uprzedniego wytracania jego energii kinetycznej oraz układu hamująco-przyspieszającego opartego na wykorzystaniu silników raketowych. Stwierdzono, że skuteczność zastosowanego steru do zakrzywienia toru lotu obiektu jest mała ze względu na to, że dołączona dodatkowa powierzchnia okazała się elementem destabilizującym ruch obiektu. Natomiast raketowy układ hamująco-przyspieszający okazał się skuteczny i w pełni realizuje postawione wymagania. Oczywiście jest fakt, że praktyczna realizacja takiego układu nastęrczy określone trudności. Ponieważ silniki raketowe charakteryzują się prawie stałym ciągiem, układ hamująco-przyspieszający wykorzystujący je jest mało «elastyczny» w sensie wykorzystania, tzn. warunki zrzutu muszą być ściśle określone.

Wyżej omówione układy nie wyczerpują wszystkich możliwości sterowania swobodnym lotem obiektu. Po wszechstronnej analizie wszystkich wariantów przedstawionymi metodami można wybrać optymalny układ sterujący uwzględniając jako kryteria optymalizacji: możliwości techniczne i ekonomiczne realizacji, stopień spełnienia postawionych wymagań i inne warunki mające wpływ na parametry urządzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. W. ALBRING, *Angewandte Stromungslehre*, Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1961.
2. Z. DŻYGADŁO, A. KRZYŻANOWSKI, E. PIOTROWSKI, *Dynamika lotu osiowosymetrycznego ciała ze sztywnym urządzeniem hamującym*, Biuletyn WAT, Rok XXII, Zeszyt 11 (255), Warszawa 1973.
3. Z. DŻYGADŁO, A. KRZYŻANOWSKI, E. PIOTROWSKI, *Dynamika lotu osiowo-symetrycznego ciała z wiotkim urządzeniem hamującym*, Biuletyn WAT, Rok XXIII, Zeszyt 1 (257), Warszawa 1974.
4. B. ETKIN, *Dynamics of Flight, Stability and Control*, John Wiley, New York 1959.
5. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York 1972.
6. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, cz. I i II, PWN, Łódź—Warszawa 1961.
7. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
8. S. F. HOERNER, *Aerodynamics Drag*, Otterbein Press Dayton, Ohio 1951.
9. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe, Mechanika nr 32, Wyd. Pol. Warsz., 1975.
10. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, F. MISIAK, Z. WINCZURA, *Obliczenia teoretyczne własności dynamicznych bomb lotniczych*, Inf. ITWL, nr 49, Warszawa 1975.
11. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, F. MISIAK, Z. WINCZURA, *Stateczność podłużna bomb lotniczych*, Inf. ITWL, nr 49, Warszawa 1975.
12. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu i oscylacje steru*, Mech. Teoret. Stos., 2, 13 (1975).
13. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, F. MISIAK, Z. WINCZURA, *Wpływ wychylenia steru wysokości na własności dynamiczne bomb lotniczych*, Inf. ITWL, nr 50, Warszawa 1976.
14. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, *Wpływ silników hamująco-przyśpieszających na własności dynamiczne bomby w ruchu płaskim*, Inf. ITWL, nr 51, Warszawa 1976.
15. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, J. OSTROWSKI, Z. WINCZURA, *Zagadnienia aerodynamiki bomb lotniczych w zakresie prędkości poddźwiękowych*, Inf. ITWL, nr 51, Warszawa 1976.
16. J. N. NIELSEN, *Missile Aerodynamics*, McGraw Hill, New York, Toronto, London 1960.
17. F. J. REGAN, J. SMITH, *The Aeroballistics of a Terminally Corrected Spinning Projectile (TCSP)*—AIAA Paper No, 74 - 796. August 1974.
18. Y. ROCARD, — *Dynamic Instability — Automobiles, Aircraft, Suspension Bridges*, Crosby Lockwood and Son, London 1957.
19. H. SCHLICHTING, E. TRUCKENBRODT, *Aerodynamik des Flugzeuges*, Teil I, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959.
20. H. SCHLICHTING, E. TRUCKENBRODT, *Aerodynamik des Flugzeuges*, Teil II, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960.
21. L. I. SIEDOW, *Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice*, WNT, Warszawa 1968.
22. J. SZAPIRO, *Balistyka zewnętrzna*, MON, Warszawa 1956.
23. K. A. АБГАРИН, И. М. РАПОПОРТ, *Динамика ракет*, Машиностроение, Москва 1969.
24. Р. Б. ДОУ, *Основы теории современных снарядов*, «Наука», Москва 1964.
25. Ф. Р. ГАНТМАХЕР, *Теория матриц*, «Наука», Москва 1966.
26. А. А. ЛЕБЕДЕВ, И. С. ЧЕРНОБРОВКИН, *Динамика полета беспилотных летательных аппаратов*, Машиностроение, Москва 1973.
27. И. Ф. КРАСНОВ, В. Н. КОШЕВОЙ, А. Н. ДАНИЛОВ, В. Ф. ЗАХАРЧЕНКО, *Аэродинамика ракет*, Высшая школа, Москва 1968.
28. В. Д. КУРОВ, Ю. М. ДОЛЖАНСКИЙ, *Основы проектирования пороховых ракетных снарядов*, Оборонгиз, Москва 1961.
29. А. МИЕЛЕ, *Механика полета*, т. 1, Теория траекторий полета, «Наука», 1965.
30. Г. М. МОСКАЛЕНКО, *Инженерные методы проектирования в ракетодинамике*, Машиностроение, Москва 1974.
31. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолета*, Оборонгиз, Москва 1957.
32. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, И. В. СТРАЖЕВА, *Динамика полета. Траекторий летательных аппаратов*, Оборонгиз, Москва 1963.

33. В. К. Святодух, *Динамика пространственного движения управляемых ракет*, Машиностроение, Москва 1969.
34. И. В. СТРАЖЕВА, В. С. МЕЛКУМОВ, *Векторно-матричные методы в механике полёта*, Машиностроение, Москва 1973.
35. S. MARUSZKIEWICZ, W. WIEREMIEJCZYK, *Program obliczeń numerycznych parametrów ruchu obiektu w swobodnym spadku. Program: Tor 1 - 1*, Pracownia Obliczeniowa ITWL, Warszawa 1975 (nie publikowane).
36. A. KRUTKOW, S. MARUSZKIEWICZ, W. WIEREMIEJCZYK, *Program obliczeń numerycznych stateczności podłużnej obiektu. Program: TOR 1 - 2*, Pracownia Obliczeniowa ITWL, Warszawa 1975 (nie publikowane).
37. S. MARUSZKIEWICZ, *Program obliczeń numerycznych parametrów ruchu obiektu w swobodnym spadku. Program: TOR 1 - 3*, Pracownia Obliczeniowa ITWL, Warszawa 1975 (nie publikowane).
38. S. MARUSZKIEWICZ, *Program obliczeń numerycznych stateczności podłużnej obiektu, Program: TOR 1 - 4*, Pracownia Obliczeniowa ITWL, Warszawa 1975 (nie publikowane).

Р е з ю м е

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ПОЛЕТА ОБЪЕКТОВ СБРАСЫВАЕМЫХ С САМОЛЕТА

В работе рассматриваются динамические свойства следующих объектов; свободно падающего объекта с хвостовым оперением, объекта с отклоненным рулем высоты и объекта с ракетным двигателем торможения — ускорения. Объект считается жестким телом с тремя степенями свободы. Получена система нелинейных уравнений второго порядка. Уравнения интегрированы численным методом с учетом принятых начальных условий.

После линеаризации методом малых возмущений, испытания устойчивости приведены к решению собственных векторов и соответствующих им собственных значений.

Аэродинамические характеристики получены экспериментально путем испытания моделей в аэродинамических трубах.

S u m m a r y

THEORETICAL RESEARCH OF DYNAMICAL FLIGHT CHARACTERISTICS OF BODIES
DISPOSED FROM AN AIRCRAFT

The paper deals with the dynamics of a freely falling slender body, equipped with control surfaces, body with deflected height control surfaces, and body with the rocket type braking-accelerating unit. The object is concerned as a rigid body with three degrees of freedom. The obtained system of strongly non-linear, ordinary, second order differential equations is solved numerically under prescribed initial conditions. Using the method of freezed coefficients and the perturbation method the stability analysis was reduced to finding the eigenvalues and eigenvectors. Aerodynamical characteristics were obtained as a result of model testing in a wind tunnel.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca złożona została w Redakcji dnia 21 kwietnia 1976 r.



OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRĘTA METODĄ PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

1. Wstęp

Metodę programowania dynamicznego wykorzystuje się w mechanice nie tylko do rozwiązywania jedno i dwuwymiarowych elementów konstrukcyjnych, lecz również do ich optymalnego kształtowania.

W pracy [1] rozwiązano nieliniowe zadanie statyki pręta. Wychodząc z minimum energii potencjalnej wyznaczono linię ugięcia pręta sprężystego, jednostronnie sztywnie utwierdzonego, dowolnie obciążonego momentem i siłą skupioną oraz obciążeniem ciągłym, przy ograniczeniach geometrycznych. Stosując programowanie dynamiczne POCZTMAN podał [2] optymalny kształt belki wspornikowej o przekroju prostokątnym, stałej szerokości, ze względu na minimum objętości, przy ograniczeniach nałożonych na geometrię belki z materiału pełzającego.

Znane są rozwiązania zadań wariacyjnych o pochodnych cząstkowych, które sprowadzają się do liniowych równań różniczkowych typu parabolicznego lub eliptycznego, określonych na obszarach regularnych i nieregularnych [4, 5]. Próba użycia metody programowania dynamicznego do optymalnego kształtowania elementów konstrukcji prowadzi do nieliniowego równania Hamiltona–Jacobiego lub posługując się koncepcją dyskretnej aproksymacji procesu ciągłego otrzymuje się równanie funkcyjne rozwiązywane numerycznie w sposób odmienny od bezpośrednich obliczeń maszynowych. Pomimo wielu trudności [6] metoda ta posiada dużo zalet, które wynikają z procesu «poszukiwania» rozwiązania optymalnego, a nie otrzymywania go za pomocą rachunku. Umożliwia to pokonanie wielu trudności związanych ze stosowaniem zwykłego podejścia rachunku wariacyjnego.

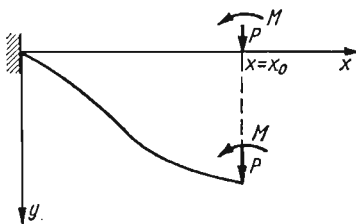
W pracy [3] przedstawiono rozwiązanie dwugranicznego zadania wariacyjnego dla pręta sprężystego, jednorodnego z uwzględnieniem ograniczeń geometrycznych, jako zadanie sterowania optymalnego. Poszukując minimum energii potencjalnej zdeformowanego pręta o stałym przekroju metodą równania funkcyjnego Bellmana, otrzymano linię ugięcia pręta dla kilku obciążeń zewnętrznych siłą skupioną.

2. Sformułowanie problemu

Celem tej pracy jest próba optymalnego kształtowania pręta przy dużych przemieszczeniach, z tym, że przedstawione zostaną głównie szczegóły obliczeń maszynowych zastosowanej metody. Rozważać będziemy ściśle równanie linii ugięcia, a jako kryterium optymalności przyjmujemy minimum objętości.

Niech będzie dany jednorodny, sprężysty pręt, jednostronnie sztywno utwierdzony, obciążony momentem M oraz siłą skupioną P w punkcie $x = x_0$. Rozwiązań poszukiwać będziemy dla $M \neq 0$ i $P \neq 0$. Moment M i siła P mogą przemieszczać się tylko wzdłuż prostej $x = x_0$, zaś pręt bez tarcia może przesuwać się przez prawe zamocowanie.

Taki charakter obciążenia sprawia, że długość l pręta jest pierwotnie nieustalona i każdorazowo wyznacza ją wielkość obciążenia. Dodatkowo zażądajmy, aby w stanie równowagi prawy koniec pręta pozostał poziomy (rys. 1). Przy takim sposobie obciążenia



Rys. 1. Sposób obciążenia pręta

zenia siłą P i momentem M należy znaleźć przekrój, który zapewni minimum objętości przy spełnieniu równania równowagi i warunków brzegowych. Zadanie to sformułujemy poniżej w kategoriach teorii optymalnego sterowania [8]. Zaś do jego rozwiązania użyta zostanie wersja dyskretna programowania dynamicznego.

a) *Równanie stanu.* Równanie stanu będzie równaniem równowagi pręta, które w układzie współrzędnych (s, φ) można zapisać

$$(1) \quad \varphi' = \frac{M(s)}{\alpha}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{ds}.$$

b) *Warunki brzegowe.* Na sztywno zamocowanym końcu będzie

$$(2) \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

c) *Ograniczenia.* Zbiór ograniczeń U_d będzie zawierał ograniczenia nałożone na:

— kąt, tj. $a \leq |\varphi| \leq \Phi$, $a > 0$, $\Phi < \pi/2$, przy czym w całym przedziale całkowania $0 < s < 1$ przyjęto $a = 0$, 1 oraz $\Phi = 1,54$,

— geometrię pręta, tj. siła P oraz moment M mogą przesuwać się po prostej $x = x_0$; prawy koniec pręta pozostaje poziomy

$$(3) \quad \varphi(1) = \frac{\pi}{2};$$

— sposób wykonania (pręt może swobodnie, bez tarcia przesuwać się pod siłą P).

d) *Funkcja celu.* Niech przekrój poprzeczny pręta będzie prostokątny o stałej wysokości. Objętość jest wtedy proporcjonalna do sztywności $\alpha(s)$. Poszukiwać będziemy takiej sztywności $\alpha(s)$, aby zapewnić minimum objętości $c_0 \int_0^l \alpha(s) ds$ to jest

$$(4) \quad V^* = \min_{\alpha} c_0 \int_0^l \alpha(s) ds.$$

Sposób rozwiązania. Z uwagi na kształt równania stanu wygodniej jest wyeliminować $\alpha(s)$ z (1) i wstawić do (4). Otrzymamy równoważny problem, w którym rolę zmiennej sterowania spełniać będzie kąt φ . Zbiór dopuszczalnych wartości sterowań U_d wyznaczą ograniczenia i warunek brzegowy, to jest c) oraz b). Proces poszukiwania optymalnego sterowania prowadzić będziemy ze stałym krokiem długości Δ . Ponieważ nie znamy długości l odkształconego pręta, a zatem nie wiemy z ilu etapów będzie składał się nasz proces, konieczne jest przyjęcie z góry pewnej liczby etapów. Niech kk oznacza tę liczbę. Wtedy wstawiając (1) do (4) otrzymujemy

$$(5) \quad V = c_0 \int_0^l \frac{M}{\varphi'} ds.$$

Zastępując całkowanie w (5) sumą kk składników mamy

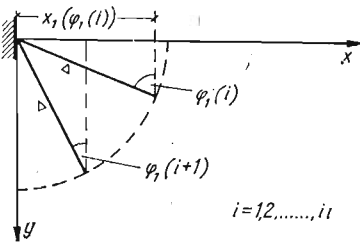
$$(6) \quad V \approx c_0 \sum_{k=1}^{kk} \frac{M_k}{\varphi'_k} \Delta.$$

Dalej podzielmy cały zbiór sterowań dopuszczalnych U_d na ii części, niekoniecznie równych. Równanie Bellmana przyjmie w naszym przypadku postać

$$(7) \quad f_k(c) = \min_{\varphi_k \in U_d} \left\{ c_0 \frac{M - P[x_0 - (x(c) + \Delta \sin \varphi_k)]}{(\varphi_k - c)/\Delta} \Delta + f_{k-1}(\varphi_k) \right\},$$

gdzie $f_0 = 0$, $k = 1, 2, \dots, kk$, P, M — stała siła i moment przyłożony na końcu, k — numer etapu.

Rozważmy kilka aspektów związanych najpierw z tablicowaniem funkcji $f(c)$, a potem z określeniem optymalnego kształtu $\alpha(s)$ i linii ugięcia $y = y(x)$.



Rys. 2. Wyznaczanie współrzędnych wektora stanu x_1 na etapie pierwszym ($k = 1$)

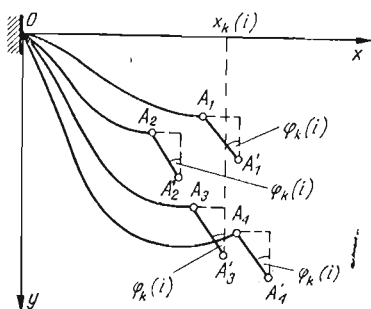
Etap pierwszy ($k = 1$) $\varphi_1(i)$ — i -ta wartość sterowania ze zbioru U_d , $\varphi_1(i+1)$ — $i+1$ -sza wartość sterowania ze zbioru U_d , $x_1(\varphi_1(i)) = \Delta \sin(\varphi_1(i))$ — i -ta współrzędna wektora stanu w układzie współrzędnych (x, y) na etapie pierwszym, $X_1(\varphi_1(i+1)) = \Delta \sin(\varphi_1(i+1))$ — $i+1$ -sza składowa wektora stanu w układzie współrzędnych (x, y) na etapie pierwszym.

Z równania (7) otrzymujemy dla $k = 1$ następującą postać $f_1(c)$:

$$(8) \quad f_1(c) = c_0 \frac{M - P[x_0 - \Delta \sin(\varphi_1)]}{(\varphi_1 - \frac{\pi}{2})/\Delta} \Delta.$$

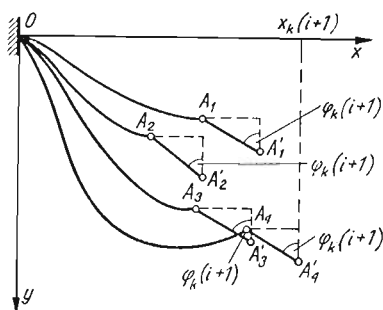
W wyniku zrealizowania pierwszego kroku otrzymujemy *ii* wartości $f_1(\varphi_1)$ oraz tyle samo wartości $x_1(\varphi_1)$. Wartości $x_1(\varphi_1)$ oraz $f_1(\varphi_1)$ wpisujemy do tablicy dwuwymiarowej $x[1, i]$ oraz $f[1, i]$, gdyż będą potrzebne do określenia ścieżki optymalnej przy ruchu powrotnym.

Dowolny etap k. Na etapie *k* tablicujemy *ii* wartości $f_k(c)$ oraz *ii* wartości wektora stanu $x_k(c)$. Niech $OA_1, OA_2, \dots, OA_{ii}$ będą krzywymi odpowiadającymi optymalnym przejściom z punktów A_1, A_2, \dots, A_{ii} do początku układu współrzędnych O . Krzywe te



Rys. 3. Wyznaczanie współrzędnych wektora stanu $x_k(i)$ na dowolnym etapie *k* (sterowanie $\varphi_k(i)$)

otrzymaliśmy w wyniku zrealizowania $k - 1$ kroków do tyłu startując z punktu O . Nadajmy sterowaniu φ_k ze zbioru sterowań dopuszczalnych pierwszą wartość $\varphi_k(i)$. Wykorzystując (7) porównujemy $f_k(c)$ dla krzywej $OA_1A'_1$ z wartością $f_k(c)$ dla krzywej $OA_2A'_2$. Mniejszą z nich zapamiętuje się. Dalej kolejno porównuje się wartości f_k dla krzywych $OA_3A'_3, \dots, OA_{ii}A'_{ii}$. Najmniejsza wartość funkcji celu wybiera odpowiednią krzywą. Niech będzie to np. $OA_3A'_3$. Wtedy współrzędna wektora stanu na etapie *k* jest współrzędną punktu A'_3 . Powiemy wtedy, że sterowanie $\varphi_k(i)$ realizuje na krzywej $OA_3A'_3$ minimum funkcji celu ze względu na *k* etapów. W pamięci stałej lub operacyjnej maszyny zapisujemy wartość sterowania $\varphi_k(i)$, współrzędną x_3 oraz wartość funkcji celu.



Rys. 4. Wyznaczanie współrzędnych wektora stanu $x_k(i+1)$ na dowolnym etapie *k* (sterowanie $\varphi_k(i+1)$)

Po nadaniu sterowaniu nowej wartości $f_k(i+1) \in U_d$ ustalamy, na której krzywej zapewnia ono minimum (7). Niech będzie to $OA_4A'_4$. Wtedy kolejne współrzędne na etapie *k* wynoszą: dla wektora stanu będzie to odcinek $Ox_k(i+1)$, dla sterowania $\varphi_k(i+1)$, dla f_k wartość zrealizowana dla krzywej $OA_4A'_4$. Etap *k* kończy się, gdy wyczerpiemy wszystkie wartości dopuszczalne $\varphi_k \in U_d$.

Sposób obliczania (7) na etapie $k+1$ jest identyczny z tym, że zamiast OA_1 mamy teraz $OA_3A'_3$, zamiast OA_2 będzie $OA_4A'_4$ itd.

Etap ostatni. Nie znając liczby etapów na początku należy sprawdzać czy wartość każdej współrzędnej stanu etapu k nie przekracza \tilde{x}_0 . Jeśli $x[k, i]$ oznacza stan i na etapie k , to proces rozwiązywania (7) kończy się z chwilą, gdy

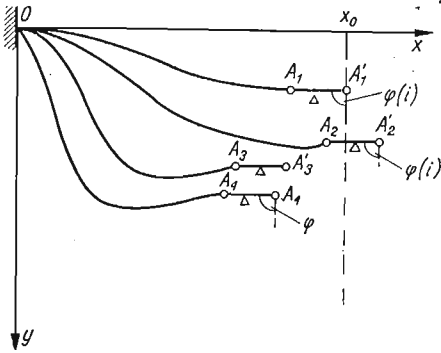
$$(9) \quad |x[k, i] - x_0| < \varepsilon,$$

gdzie ε jest pewną stałą.

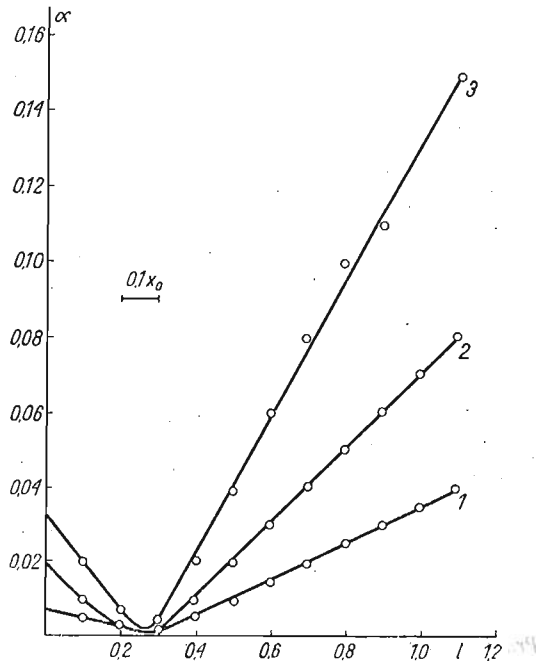
Zgodnie z nałożonym ograniczeniem koniec pręta powinien być poziomy. Ograniczenie to spełnimy jeśli równocześnie będzie

$$(10) \quad |x[k, i] - x_0| < \varepsilon \wedge \varphi_k(i) = \pi/2.$$

Na rys. 5 żądanie to spełnia stan odpowiadający $OA_1A'_1$. Z chwilą osiągnięcia prostej $x = x_0$ należy odtworzyć ścieżkę optymalną odpowiadającą na rys. 5 krzywej $OA_1A'_1$.



Rys. 5. Zakończenie procesu tablicowania funkcji celu przy ruchu «wstecz»



Rys. 6. Optymalny kształt pręta: 1 - $P = 0,5$, $M = 0,35$; 2 - $P = 1,0$, $M = 0,70$; 3 - $P = 2,0$, $M = 1,40$.

Wykorzystując zapisane wartości funkcji celu, współrzędnych wektora stanu oraz sterowania optymalnego na poszczególnych etapach, przy ruchu do «przodu» znajdujemy postępując się (5) i (7) przekrój pręta $\alpha(s)$ oraz linię ugięcia $OA_1A'_1$.

Rozwiązanie przeprowadzono dla $x_0 = 1$ m, przy obciążeniu siłą P równą 0,5; 1,0; 2,0 kG i momentem skupionym $M = 0,35; 0,70; 1,40$ kGm. Otrzymany przekrój optymalny przedstawiony jest na rys. 6. Cały przedział sterowań dopuszczalnych został podzielony na 40 części. Stała wartość kroku $\Delta = 0,1x_0$. Wartość ε w (10) przyjęto 0,01. Obliczenia przeprowadzono na EMC Odra 1204.

Literatura cytowana w tekście

1. А. БАРАНЕНКО, Ю. М. ПОЧТМАН, *Динамическое программирование и нелинейные задачи статики тонких стержней*, ДАН, 5, 185; (1968), 1029 – 1031.
2. Ю. М. ПОЧТМАН, *Динамическое программирование в задачах оптимизации конструкции подверженных ползучести*, Докл. Физ. Наук 1, 17 (1970), 29 – 30.
3. А. БАРАНЕНКО, Ю. М. ПОЧТМАН, *О решении некоторых нелинейных краевых задачи теории гибких стержней с помощью динамического программирования*, Прикл. Механика, 1, 7 (1971), 128 – 132.
4. N. DISTEFANO, *Dynamic programming and the solution of the biharmonic equation*, Intern. J. for Numerical Methods in Eng., 2, 3 (1971), 199 - 213.
5. E. ANGEL, R. BELLMAN, *Dynamic programming and partial differential equations*, New York 1972.
6. R. BELLMAN, *Adaptacyjne procesy sterowania*, Warszawa 1965.
7. R. BELLMAN, *Programowanie dynamiczne*, Warszawa 1969.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе представлено решение задачи о минимизации объема стержня при больших перемещениях. Задача сформулирована в терминах теории управления и решена методом динамического программирования в дискретной постановке. В качестве иллюстрации приведены некоторые детали численных расчетов.

Summary

OPTIMUM DESIGN OF A FLEXIBLE BAR BY MEANS OF DYNAMIC PROGRAMMING

In this paper, the minimum-volume design of a flexible bar with large deflections is shown. The minimum-volume problem is formulated as an example of the control theory and solved by using the ideas of dynamic programming in its discrete version. To illustrate the method of solution, details of numerical calculations are presented.

INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1976 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ i STOSOWANEJ ZA II i III KWARTAŁY 1976 R.

1. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyło się 21 zebrań naukowych, na których wygłoszono 25 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
Oddział w Bydgoszczy					
1.	21.05.76	J. Przybył	Urządzenie treningowe do nau- czania mechaniki technicznej	15	5
2.	21.05.76	J. Szala	Programowane badania zmęcze- niowe elementów maszyn	15	3
3.	07.06.76	K. Wernerowski	Analiza doświadczalna przyspie- szeń mechanizmu krzywkowego	16	4
4.	07.06.76	J. Gąsiorowski	Bezdotykowa analiza doświad- czalna przemieszczeń mechanizmu krzywkowego	16	4
5.	05.07.76	K. Wernerowski	Analiza mechanizmu krzywko- wego	11	2
6.	05.07.76	J. Gąsiorowski	Bezdotykowa metoda pomiaru prędkości i przyspieszeń mecha- nizmu krzywkowego	11	3
Oddział w Częstochowie					
7.	12.05.76	L. Tomski	Stateczność układów mechanicz- nych z wewnętrznymi więzami sprężystymi	14	5
8.	21.05.76	B. Ziółkiewicz	Badanie chropowatości powierz- chni cięcia jako czynnika zależ- nego od zmian struktury stali 45	29	3
9.	02.06.76	H. Zorski	O podstawowych pojęciach teorii dyslokacji	34	3
10.	20.09.76	T. Burakowski	Zasady działania i zastosowanie termowizji (wraz z pokazem)	46	5

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
Oddział w Gdańsku					
11.	22.05.76	J. Stankiewicz	Zastosowanie kalkulatorów elek- tronicznych do obliczeń powłok obrotowych o zmiennej grubości	25	5
12.	29.09.76	G. Orlik	Własności statystyczne deformacji kształtu stalowych zbiorników cy- lindrycznych	17	4
Oddział w Gliwicach					
13.	04.06.76	J. Szargut	Metody numeryczne w oblicze- niach przepływu ciepła	19	3
Oddział w Łodzi					
14.	10.06.76	J. R. Baumgarten	Identification of dynamics systems	21	4
Oddział w Opolu					
15.	05.05.76	St. Dmitruk	Problemy technicznej dopuszczal- ności modeli w mechanice	32	6
16.	07.04.76	O. Mateja	Podstawy systemu programów metody elementów skończonych	19	4
Oddział w Poznaniu					
17.	24.09.76	Y. Pironneau	Dynamika rotorów	12	5
Oddział w Rzeszowie					
18.		Z. Bychawski	Relacje z udziału w sympozjach zagranicznych	7	7
Oddział w Szczecinie					
19.	01.04.76	H. Lupa i A. Step- niewski	Modelowanie warunków brzego- wych w dynamice wód grunto- wych	33	10
20.	01.04.76	H. Lupa i A. Step- niewski	Twierdzenie o trzech siłach skoń- czonych		
21.	29.04.76	J. Baran	Zastosowanie dynamiki ruchu przestrzennego ciała sztywnego z więzami do teorii identyfikacji obiektu modelowanego ciałem sztywnym	17	4
22.	28.05.76	Z. Cywiński (z Gdańska)	Nośność graniczna stalowych be- lek hybrydowych		
Oddział w Warszawie					
23.	07.06.76	E. Radwański	Perspektywy zastosowania energii jądrowej w przemyśle	14	8
24.	21.09.76	P. Grassman (z Zürichu)	Granice obciążalności atmosfery (Grenzen der Belastbarkeit der Atmosphäre)	30	4
Oddział w Zielonej Górze					
25.	01.04.76	J. Stefaniak	Przekształcenia całkowe w mecha- niece ciała stałego	15	6

2. Sympozja

Oddział w Poznaniu zorganizował w dniach 28 i 29 maja 1976 r. symposium nt. «Drgania w układach fizycznych». Symposium odbyło się w Błażejewku pod Poznaniem. W obradach uczestniczyło 106 osób. Liczba głosów dyskusji wyniosła 193. Wygłoszony został jeden referat plenarny prof. B. SKALMIERSKIEGO pt. «Zagadnienie przekroczeń granic obszarów przez sygnały wyjściowe dynamicznych wielowymiarowych układów liniowych i nieliniowych». Prócz tego wygłoszono 58 referatów w trzech sekcjach: modelowanie obiektów dynamicznych — modele ciągłe, modelowanie obiektów dynamicznych — modele dyskretne, drgania maszyn i urządzeń.

Oddział w Warszawie zorganizował w dniach 28—29 września 1976 r. VII Symposium Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego. Sprawozdanie z tego Symposium zamieszczone jest oddzielnie w niniejszym numerze MTiS.

3. Seminaria

Oddział w Opolu zorganizował seminarium na temat «Podstawy mechaniki ośrodka ciągłego» prowadzone przez doc. dr. J. KUBIKĄ. Wykłady odbywały się w ciągu kwietnia i maja 1976 r. W seminarium wzięło udział 17 osób, a w dyskusjach 5.

Oddział we Wrocławiu zorganizował w dniu 29 maja 76 r. seminarium na temat «Nowe propozycje w dziedzinie hydrogeologicznego i geotechnicznego prognozowania odwadniania górotworu». Podczas seminarium wygłoszone zostały następujące referaty: mgr inż. L. JAROCKI — «Niedostatki dotychczasowych rozwiązań filtracji dla prognoz odwadniania górotworu»; doc. dr hab. A. KRZYWICKI — «Zagadnienie filtracji w odkształcalnym górotworze»; doc. dr hab. J. WOJCIECHOWSKI — «Prognozowanie osiadań na skutek odwadniania».

W seminarium wzięły udział 33 osoby, a w dyskusji — 7.

4. Kursy

Oddział w Częstochowie przeprowadził kurs na temat «Holografia i jej zastosowanie w technice». Wygłoszono 16 wykładów. Kurs zorganizowany był wspólnie z Radą Zakładową ZNP przy Politechnice Częstochowskiej oraz z Instytutem Maszyn Ciepłych Politechniki Częstochowskiej. W kursie wzięło udział 15 osób.

Oddział w Poznaniu przeprowadził kurs na temat «Termodynamiki ośrodków ciągłych». Trwał on w okresie od 5 kwietnia do 14 czerwca 1976 r. W kursie wzięło udział 30 osób.

5. Akcja wydawnicza

W okresie sprawozdawczym ukazały się: zeszyt 2 o objętości 10,5 arkusza wydawniczego i zeszyt 3 o objętości 7,75 arkusza wydawniczego tomu 14 MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ.

Oddział w Poznaniu wydał w bardzo starannej formie materiały konferencyjne na organizowane Symposium nt. «Drgania w układach fizycznych».

Oddział w Gliwicach wydał drukiem tom pt. «Mechanika teoretyczna i stosowana w Politechnice Śląskiej. Przegląd problematyki badawczej». Gliwice 1976, s. 73.

Oddział w Gliwicach przygotował do druku na makietach i oddał do Drukarni Politechniki Śląskiej zbiór referatów ogólnopolskiego konkursu na prace doświadczalne z mechaniki.

Oddział w Warszawie wydał w b. starannej formie zbiór referatów wygłoszonych podczas VII Symposium Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, o objętości 519 stron, oraz program z informatorem o objętości 12 stron.

6. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje następująca tabela:

Lp.	Oddział	Stan na koniec I kw. 76 r.	Stan na koniec III kw. 76 r.	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym
1	Bydgoszcz	24	27	+3
2	Częstochowa	41	43	+2
3	Gdańsk	54	59	+5
4	Gliwice	135	141	+6
5	Kraków	75	77	+2
6	Łódź	52	52	—
7	Opole	18	18	—
8	Poznań	57	57	—
9	Rzeszów	25	31	+6
10	Szczecin	31	31	—
11	Warszawa	222	220	-2
12	Wrocław	64	63	-1
13	Zielona Góra	18	19	+1
R a z e m		816	838	+22

W okresie sprawozdawczym odbyły się 32 zebrania organizacyjne w Oddziałach.

VII SYMPOZJUM DOŚWIADCZALNYCH BADAŃ W MECHANICE CIAŁA STAŁEGO

W dniach 28—29.IX.1976 odbyło się w Warszawie VII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego. Sympozjum było zorganizowane przez Warszawski Oddział Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Sekcję Mechaniki Doświadczalnej Komitetu Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych Polskiej Akademii Nauk oraz Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej. W skład Komitetu Organizacyjnego Sympozjum wchodziły następujące osoby: prof. dr Z. BRZOSKA (przewodniczący), dr inż. L. ADAMIEC (sekretarz), mgr inż. W. MIRSKI (sekretarz), doc. dr hab. P. JASTRZĘBSKI, dr inż. J. KAPKOWSKI, prof. dr S. KOCANĀDA, doc. dr hab. J. STUPNICKI, prof. dr W. SZCZEPIŃSKI.

Celem Sympozjum było zaprezentowanie najważniejszych, zarówno z naukowego jak i technicznego punktu widzenia, kierunków w badaniach doświadczalnych. W Sympozjum uczestniczyło 150 osób. Wygłoszono 48 referatów, których pełne teksty zawarte są w materiałach Sympozjum.

Otwierając Sympozjum, przewodniczący Komitetu Organizacyjnego prof. Z. BRZOSKA powitał w imieniu Komitetu uczestników obrad. Krótkie przemówienia powitalne wygłosili także: sekretarz Zarządu Głównego PTMTS i Dyrektor Instytutu Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej P.W. prof. M. DIETRICH oraz przewodniczący Warszawskiego Oddziału PTMTS prof. J. RUTKOWSKI. Odczytano również list przewodniczącego Komitetu Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych prof. A. SAWCZUKA skierowany do uczestników Sympozjum. Wszyscy mówcy podkreślali znaczenie badań doświadczalnych dla rozwoju Mechaniki. W swoim liście prof. A. SAWCZUK napisał między innymi: „*Od postępów mechaniki uprawianej i rozwijanej przez państwa, którą w skrócie nazywamy «doświadczalną», zależy postęp w zakresie całej dyscypliny, od teorii do zastosowań. Badania doświadczalne w naszej dziedzinie naukowej spełniają rolę szczególną: są inspiracją dla poszukiwań teoretycznych, są kontrolą propozycji i wyników teoretycznych.*”

a zarazem są samodzielną domeną twórczości, poznania i wynalazczości. Stąd uwaga, jaka na obecnym etapie rozwoju polskiej mechaniki skupia się na problemach doświadczalności.

Wymagania przyszłości rozwoju gospodarczego i kulturalnego naszego kraju stawiają przed mechaniką odpowiedzialne zadania. Dla sprostania zamówieniu społecznemu trzeba stworzyć i opracować nowe metody badań zjawisk mechanicznych, wykorzystując zdobycze fizyki, chemii, biologii i zapewne innych nauk. Pomiaru odkształceń i wytrzymałości w wysokich temperaturach i w obecności sprzężeń termomechanicznych, pomiary gęstości i orientacji spękań dla celów formułowania i weryfikacji kontynualnych teorii uszkodzeń i zniszczenia stanowią przykłady tych zagadnień, jakie stoją przed nami do rozwiązania z uwagi na potrzeby ochrony zdrowia, rozwoju energetyki, przemysłu chemicznego, górnictwa i rolnictwa."

Obrazy odbyły się w siedmiu sesjach poświęconych referatom określonych grup tematycznych.

Sesja I i II. Badania modelowe i metody badań

Sesjom tym przewodniczyli kolejno prof. S. KOCANDA (Warszawa) i prof. M. ZAKRZEWSKI (Wrocław) Wygłoszono następujące referaty:

P. S. THEOCARIS (Grecja), *The method of Caustics — a powerful experimental method for study of singular stress fields*,

Stanisław MAZURKIEWICZ (PK), *Zastosowanie metody światła rozproszonego do badania naprężeń w dwóch belkach obciążonych silami skupionymi*,

Andrzej DRESCHER, Stanisław OSTAFICZUK, Stanisław RUDOWSKI, Wiesław TRĄMPCZYŃSKI (IPPT), *Fotogrametryczna metoda pomiaru płaskiej deformacji*,*)

Marek BIAK-ZOCHOWSKI (PW), *Określenie rozkładu naprężeń własnych w głęb materialu metodą miejscowej trepanacji*,

Aniela GLINICKA, Przemysław JASTRZĘBSKI, Sławomir WICHNIEWICZ (PW), *Przykład porównania metody rastrów z metodą elastooptyczną*,

Witold MIRSKI, Jacek STUPNICKI (PW), *Wpływ chropowatości powierzchni na rozkład normalnych i stycznych oddziaływań ciał stałych*,

Antoni BIEGUS, Zbigniew KOWAL (PW), *Badania modelowe sił wewnętrznych w prętach struktur z płytową warstwą zewnętrzną*,

Tadeusz BORZĘCKI (PG), *Wpływ odkształceń wykonawczych na charakterystyki wytrzymałościowe ściskanych płyt cienkich z wzdłużnym układem usztywnień*,

Eugeniusz GROZIK, Jan KAŁWAK, Andrzej KANIA, Jerzy ZAWADZKI (PW), *Quasi-eksploatacyjne badania wytrzymałościowe laminatowych bębnow wirówek cukrowniczych*,

Ryszard WOJNAR (IPPT), *Uogólnione macierze Jonesa i ich zastosowanie w elastooptyce*,

Waldemar CUDNY, Zdzisław DYŁAG (WAT), *Przykład zastosowania metody elastooptycznej do badania konstrukcji ramowej*,

Stanisław PIETRUSZEWSKI (AR Lublin), *Badania rozkładu naprężeń w podłożu sprężystym obciążonym dwoma stemplami*,

Przemysław JASTRZĘBSKI (PW), *Wpływ wstępnych wydłużeń trwałych na wyoboczenie niesprężyste prętów metalowych*,

Zbigniew ORŁOŚ, Aleksander WRZESZCZ (WAT), *Zastosowanie pomiarów twardości do określania charakterystyk mechanicznych tworzywa epoksydowego*,

Witold BODASZEWSKI, Henryk FRĄCKIEWICZ, Zdzisław TERESZKOWSKI, Stanisław TRELA (PŚw. Radom), *Badania sprężystych pól naprężenia w węzłach belek cienkościennych projektowanych za pomocą statycznie dopuszczalnych pól naprężeń*.

W dyskusji nad tymi referatami zabralo głos 23 mówców.

*) Referat będzie wydrukowany w Rozprawach Inżynierskich, Nr 1, 1977 r.

Sesja III. Zmęczenie i pelzanie

Sesji przewodniczył doc. J. STUPNICKI (Warszawa). Wygłoszono następujące referaty:

A. JAKOWLUK, W. OSIPIUK (PBiał.), *Wytrzymałość na pelzanie żeliwa sferoidalnego w niestacjonarnych temperaturach*,*)

Grzegorz GLINKA (PW), *Wzrost pęknięć zmęczeniowych w polu naprężeń pozostających,*

Tadeusz ROBAKOWSKI (I.Spaw. Gliwice), *Wytrzymałość zmęczeniowa złączy zgrzewanych tarciovo,*

Stanisław KOCĄNDA, Andrzej LIKOWSKI, Janusz SADOWSKI (WAT), *O możliwości odtworzenia zmęczeniowego pęknięcia w stali o podwyższonej wytrzymałości 18 G2A na podstawie badań mikrofraktograficznych,*

Bolesław DRAŻKOWIAK, Stanisław KOCĄNDA, Leopold SIEKLUCKI (WAT), *Badania prędkości rozwoju pęknięć zmęczeniowych w stali o podwyższonej wytrzymałości 18 G2A,*

Stanisław KOCĄNDA, Czesław GOSS (WAT), *Badania zmęczeniowe stali 18 G2A w zakresie malej liczby cykli zmian obciążenia,*

Andrzej KOCĄNDA (PW), *Badania niskocyklicznego zmęczenia stali NC10,*

Marian NOWAK, Jerzy ZAWADZKI (PW), *Wybrane zagadnienia metodyki badań na zmęczenie poliamidów.*

W dyskusji nad referatami wzięło udział 20 osób.

Sesja II A i III A. Badania własności materiałów

Sesjom przewodniczyli kolejno prof. Z. BRZOSKA (Warszawa), doc. A. JAKOWLUK (Białystok) i prof. Z. ORŁOŚ (Warszawa). Wygłoszono następujące referaty:

Stefan BALICKI, Stanisław DYSZY (PCz.), *Zastosowanie metody ścinania do szybkiej oceny jakości stali ferrytyczno-perlitycznych SPW,*

Sławomir POPŁAWSKI (PW), *Wyznaczanie własności anizotropowych materiałów stałych przez zastosowanie specjalnej klasy węglbników,*

Irena SŁOWIKOWSKA, Stanisław GORZKOWSKI (PW), *Badania elastooptycznych własności poliuretanów,*
Zdzisław GABRYCZEWSKI, Czesław WITKOWSKI (PW), *Zależność odkształceń od naprężeń w płaskim stanie naprężenia dla żeliwa Z125,*

Andrzej LITEWKA (PP), *Nieprawidłowości plastycznego płynięcia anizotropowego stopu aluminium PA4,*
Feliks SEYNA, Andrzej RUDNIK (IBJ-Świerk), *Określenie zależności między naprężeniem i prędkością odkształcenia w temperaturze 733, 783, 843°K stali 15 HM na podstawie długotrwałej próby twardości,*

Sławomir POPŁAWSKI (PW), *Porównanie zmian modułu Younga dla aluminium A00 i Al po odkształceniach plastycznych wprowadzonych w temperaturze otoczenia i ciekłego azotu,*

Jan SIUTA, Ryszard ŻUCHOWSKI (PW), *Pomiary modułu sprężystości wzdłużnej w niskich temperaturach,*
Eugeniusz ŚWIĄTEK, Kazimierz TOKARZ, Jerzy ZAWADZKI, Bogumił ZiÓLKOWSKI (PW), *Doraźne charakterystyki wytrzymałościowe wybranych polimerów termoplastycznych w obniżonych temperaturach,*

Adam WOJTYCZKA, Marek ZAKRZEWSKI (PW), *Próba oszacowania odporności materiału na pęknięcie za pomocą kryterium cieplnomechanicznego,*

Jadwiga HALAUNBRENNER (PK), *Zależność współczynnika rozszerzalności liniowej rozciągniętego jednoosiowo paska guny od stopnia deformacji próbki,*

Henryk GŁOWACKI (PW), *Badania podatności sprężystej — statycznej filców, wołoku, sukna, kaszmiru i skóry irchy,*

Paweł MUSZYŃSKI, Marek ZAKRZEWSKI (PW), *Sposób wyznaczania ciepła właściwego ciał stałych w temperaturach kriogenicznych,*

Lech BEDNAROWICZ (PW), *Efekt skali w laminatach epoksydowo-szklanych,*

Zdzisław GABRYCZEWSKI, Marek PRZYSTUPA (PW), *Efekty termiczne w laminatach zbrojonych włóknem szklanym.*

W dyskusji wzięło udział 23 osoby.

*) Referat będzie wydrukowany w Archiwum Budowy Maszyn w 1977 r.

Sesja IV i V. Elastoplastyka. Elastoplastyczne metody badania naprężeń

Sesjom przewodniczyli kolejno doc. P. JASTRZĘBSKI (Warszawa) i prof. Z. BRZOSKA (Warszawa). Wygłoszono następujące referaty:

Joanna KRUSZYŃSKA, Jacek STUPNICKI (PW), *Dokładność wymiarów modeli z żywicy Epidian 5 odlewanych na zimno i na gorąco*,

Irena SŁOWIKOWSKA, Antoni KOZŁOWSKI, Szczepan PAĆKO (PW), *Badania kompozycji żywic epoksydowych na modele do elastoplastycznej metody zamrażania*,

Henry FESSLER, Mirosław PERLA (Nottingham, Anglia), Andrzej LITEWKA (PP), *Możliwość wielokrotnego użycia trójwymiarowego modelu w technice zamrażania naprężeń*,

Antoni KOZŁOWSKI, Irena SŁOWIKOWSKA (PW), *Badania nad kompozycjami żywic epoksydowych do elastooptycznej warstwy powierzchniowej*,

Waldemar CUDNY, Stanisław DONIMIRSKI, Zdzisław DYŁĄG (WAT), *Technika badań pewnych przypadków obróbki plastycznej metodą optycznie czulej warstwy powierzchniowej*,

Romuald BĘDZIŃSKI, Ludomir JANKOWSKI, Franciszek ROMANÓW (PW), *Badania elementów nadwozia autobusu elastooptyczną metodą warstwy powierzchniowej*,

Wacław MIŁANOWSKI, Roman KOPER, Jacek GOWIN, Andrzej ZDANOWICZ (AR Lublin), *Badania naprężeń w tarczy koła samochodu ciężarowego metodą elastooptycznej warstwy powierzchniowej*,

Roman DOROSZKIEWICZ, Jerzy LIETZ, Bogdan MICHAŁSKI (IPPT), *Trójwymiarowe badania elastooptyczne zapory filtrowej*,

Zbigniew ORŁOŚ, Manfred SZOPA, Kazimierz TOMASZEWSKI (WAT), *Badanie stanu naprężenia osiowo-symetrycznych połączeń króćcowych*,

Roman DOROSZKIEWICZ, Jerzy LIETZ, Bogdan MICHAŁSKI (IPPT), *Elastooptyczne badania modelu przestrzennego szybu i wyrobisk przyszybowych*.

W dyskusji nad referatami głos zabrało 22 mówców.

Na zakończenie Sympozjum wystąpili prof. Z. BRZOSKA i prof. J. RUTKOWSKI. Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego prof. Z. BRZOSKA w swoim przemówieniu podsumował wyniki obrad. Oceniając Sympozjum od strony naukowej, stwierdził, iż w porównaniu ze stanem przedstawionym na poprzednim Sympozjum zarysował się znaczny postęp w dziedzinie analizy stanu odkształcenia i naprężenia metodami elastooptycznymi (zwiększono dokładność pomiarów, opracowano nowe materiały, rozszerzono tematykę na badania zagadnień przestrzennych). Poprawa nastąpiła również w metodach badania zmęczenia materiałów. Dalszy rozwój badań doświadczalnych wymaga większej aktywizacji środowiska. W tym celu konieczne jest rozszerzenie form działania instytucji odpowiedzialnych za ten rozwój. Jako przykład mogą tu służyć formy stosowane w Komitecie Budowy Maszyn PAN, np. forma pracy ciągłej.

W końcowej części swojego wystąpienia prof. Z. BRZOSKA w imieniu Komitetu Organizacyjnego podziękował uczestnikom Sympozjum za aktywny udział. Szczególnie gorące podziękowanie złożył p. H. ROŚNICKIEJ za duży wkład pracy w przygotowanie sprawnego przebiegu Sympozjum. Także serdeczne podziękowania złożył prof. Z. BRZOSKA od siebie dla pozostałych członków Komitetu Organizacyjnego.

Przewodniczący Warszawskiego Oddziału PTMST prof. J. RUTKOWSKI powiedział między innymi, że Warszawski Oddział, prócz kontynuowania dotychczasowych form działalności, dołoży wszelkiej pomocy w organizacji nowych form aktywizacji środowiska.

Leon Adamiec (Warszawa)

TRÓJWYMIAROWE ZAGADNIENIA W MECHANICE PĘKANIA KOŁOKWIUM EUROMECH 77

Kołokwium odbyło się w Paryżu, w Ecole Polytechnique, w dniach 6—8 września 1976 r. Organizatorami byli P. René LABBENS (dyrektor naukowy Creusot-Loire) i profesor Ecole Polytechnique D. RADENKOWIĆ. Kołokwium było poświęcone zagadnieniom analizy współczynników intensywności naprężeń wzdłuż frontu szczeliny, określonych z pomocą metod analitycznych lub numerycznych oraz kryteriów propagacji

szczelin w zależności od kształtu i wymiarów szczelin. Również dopuszczone były prace dotyczące szczelin dwuwymiarowych w powłokach i w płytach.

Słowo wstępne wygłosił profesor P. GERMAIN. Przedstawione zostały następujące referaty (w porządku chronologicznym):

- M. J. G. BROEKHOVEN, *Zmęczenie i pękanie w przypadku szczelin o skomplikowanej trójwymiarowej konfiguracji*,
- J. LEMAITRE, *Rozszerzenie koncepcji prędkości energii szczeliny na nieliniowe zagadnienia trójwymiarowe*,
- D. R. OWEN i D. SHANTARAM, *Dynamiczna propagacja szczelin w ciałach trójwymiarowych*,
- W. H. IRVINE, *Analiza rozprzestrzeniania się szczeliny i szybkiego pęknięcia w grubych elementach*,
- D. STAHN i J. G. BLAUDEL, *Badania doświadczalne rozprzestrzeniania się szczelin w przypadku kruchych, wydrążonych walców, na skutek naprężeń cieplnych*,
- D. PORTCH i B. J. L. DARLSTON, *Rozprzestrzenianie się szczelin od rys powierzchniowych*,
- N. G. OHLSON, *Badania doświadczalne kryteriów zapoczątkowania szczelin w złożonych obciążeniach typu I i III*,
- G. BARTHOLOME i W. SCHMITT, *Analiza szczelin w dyszach*,
- G. PEARSON, *Współczynniki intensywności naprężeń w przypadku spękanych dysz*,
- R. LABBENS, *Przykład trójwymiarowego pęknięcia zbiornika ciśnieniowego*,
- F. H. BUECKNER, *Podstawowe pola i funkcje wagowe dla I typu szczelin osiowoosymetrycznych i eliptycznych*,
- A. J. CARLSSON i K. M. MARKSTRÖM, *Zastosowanie zasady wzajemności dla określenia parametrów szczeliny*,
- J. HELIOT, *Funkcje wagowe w przypadku zagadnień trójwymiarowych szczelin symetrycznych*,
- J. P. BENTHEM, *Trójwymiarowy stan naprężenia w wierzchołku ćwierćnieskończony szczeliny w półprzestrzeni*,
- D. BERGEZ, *O wpływie kontaktu powierzchni szczeliny na definicję współczynników intensywności naprężenia w spękanych płytach i powłokach, podejście trójwymiarowe*,
- E. SOMMER, L. HODULAK i M. KORDISCH, *Charakterystyki wzrostu szczelin częściowych*,
- J. C. RADON, *Szczelina w dwuosiowym polu naprężenia*,
- A. QUIRK, *Wpływ charakterystyki obciążenia maszyny wytrzymałościowej na pękanie spękanych płaskich płyt*,
- A. PELLISSIER-TANON, *Program badań doświadczalnych kryterium niestateczności lupliwych szczelin w stalach ferrytycznych w strefie przejściowej*,
- J. M. BOISSENOT, *Studium dopuszczalności spękań w walcach młyńskich*,
- H. D. BUI, *Metoda równań całkowitych w rozwiązywaniu zagadnień płaskich szczelin dowolnego kształtu*,
- S. N. MAITI i J. C. MISRA, *Naprężenia cieplne w długim walcu z nieskończonym szeregiem równoległych szczelin osiowoosymetrycznych*,
- B. K. NEALE, *Wpływ kształtu szczeliny przy pękaniu*,
- I. LOTSBERG i P. G. BERGEN, *Obliczanie zmęczeniowego wzrostu szczelin wewnętrznych*,
- M. F. S. PEREIRA, J. HEAD i C. E. TURNER, *Analiza zagadnień szczelin trójwymiarowych z pomocą standardowych elementów izoparametrycznych*,
- W. POTUCEK, *Rozprzestrzenianie się szczelin w płytach z betonu sprężonego i ich wpływ na zachowanie się płyt*,
- Z. OLESIAK, *O pewnych modelach szczelin z wymianą ciepła*,
- S. K. BHANDARI, *O trójwymiarowych teoriach spękanych szczelin*,
- J. M. BOISSENOT, M. DUBOIS i J. C. LACHAT, *Studium trójwymiarowego kryterium niestateczności szczeliny*.

Obrazy odbywały się w Ecole Polytechnique, w historycznej sali imienia Henri Poincaré'go i trwały codziennie od 9³⁰ do 18, z przerwą na obiad (w tym samym budynku). Wieczorem pierwszego dnia organizatorzy wydali przyjęcie dla wszystkich uczestników Kolokwium. Historia wielkiej szkoły matematyki i mechaniki francuskiej była widoczna na każdym kroku. Przy wejściu, w budynku, stoi pomnik Laplace'a; w sali, w której dyskutowaliśmy zagadnienia pęknięcia, naukę pobierali uczeni tej miary, co L. M. H. NAVIER, de SAINT VENANT, P. E. CLAPEYRON, J. LIOUVILLE, CARNOT, E. N. LAGUERRE. Profesorami mechaniki byli tam: LAGRANGE, FOURIER, POISSON, AMPÈRE, MATHIEU, NAVIER, DUHAMEL, STURM, ROY, MANDEL, a profesorami analizy matematycznej — między innymi: AMPÈRE, POINSON, CAUCHY,

NAVIER, MATHIEU, LIOUVILLE, CHASLES, DUHAMEL, STURM, HERMITE, JORDAN, HADAMARD, P. LÉVY i SCHWARTZ.

Dyskusja po referatach była fachowa i na ogół bardzo ożywiona. Czynny udział w dyskusjach wzięła grupa znanych profesorów amerykańskich, powracających z Kongresu w Delft (J. DUNDURS, L. M. KEER, S. NEMAT-NASSER). Nie przybył profesor G. SIH, który zresztą miał wygłosić referat.

Obrady zamknął profesor D. RADENKOVIĆ, który stwierdził między innymi, że w Kolokwium wzięło udział 55 osób, a referatów wygłoszono 29. 20 osób reprezentowało Francję (9 referatów), 7 osób — Wielką Brytanię (8 referatów), 7 — RFN (4), 5 — USA (1), 5 — Holandię (2), 3 — Szwecję (2), 3 — Włochy (0), 2 — Szwajcarię (0), 1 — Austrię (1), 1 — Norwegię (1), 1 — Polskę (1). Najwięcej prac dotyczyło analizy (popartej weryfikacją doświadczalną) współczynników intensywności naprężenia, kryteriów wzrostu szczeliny i niestateczności (13 prac). 6 referatów było poświęconych metodom analitycznym, również w sześciu zastosowano metodę elementów skończonych. Metodę bilansu energii zastosowało 5 autorów, zagadnienia zmęczenia rozpatrzono w 2 pracach, zagadnienia termiczne — w trzech.

Wydaje mi się, że Kolokwium, a zwłaszcza dyskusja po referatach i wymiana poglądów, były interesujące i bardzo przyteczne.

Zbigniew Olesiak (Warszawa)

W następnym zeszyście ukażą się prace:

- N. Ja. CYGANOWA, Zastosowanie metody Gaussa w mechanice ośrodków ciągłych
Приложение принципа Гаусса к механике сплошной среды
Application of the Gauss principle in continuum mechanics
- R. WOJNAR, Zastosowanie formuły Liebmana do opracowywania wyników badań elastoptycznych
Применение формулы Либманна для обработки результатов фото-упругих испытаний
Application of the Liebmann formula to the evaluation of photoelastic measurements
- W. KUPEL, S. MATYSIAK, Tarcze i płyty sprężyste z więzami liniowymi dla deformacji
Упругие диски и пластины с линейными связями для деформации
Elastic plates with linear constraints of deformation
- K. DEMS, J. LIPIŃSKI, Redukcja macierzy sztywności, mas i tłumienia
Сокращение размеров матриц жесткости, масс и демпфирования
Reduction of the stiffness, mass and damping matrices
- K. GRYSA, O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela
О суммировании некоторых рядов Фурье-Бесселя
Summation of certain Fourier-Bessel series
- K. GRYSA, Nieustalone pole temperatury w wirującym walcu kołowym wywołane utrzymywaną na jego poboczniczy odcinkami stałą temperaturą
Температурное поле во вращающемся круговом цилиндре при кусочно-постоянной температуре его боковой поверхности
Non-steady state of temperature in a rotating circular cylinder due to piecewise constant temperature on its surface
- A. WLIŃSKI, O sformułowaniu i poprawności pewnej klasy zadań z nieliniowej dynamiki lin
О формулировке и корректности некоторого класса задач по нелинейной динамике тросов
On the formulation and the correctness of some class of problems concerning nonlinear dynamics of strings
- J. KUŁAWSKI, Techniczna teoria grubych tarcz ortotropowych
Техническая теория толстых ортотропных дисков
Technical theory of stretching thick orthotropic plates
- S. JANECKI, Drgania własne belek z uwzględnieniem wpływu ścinania
Свободные колебания с учетом деформации сдвига
Free vibrations of beams influenced by the shear effect
- J. SKŁADZIEN, Analiza krzyżowoprądowego konwekcyjnego rekuperatora Fielda oraz pętlicowego ze stratami ciepła do otoczenia
Анализ конвекционного рекуператора Фильда и петлевого с перекрестными потоками теплоносителей и с потерями тепла
Analysis of the convective crossflow Field and loop recuperator with heat losses
- W. SZYSZKOWSKI, Analiza bardzo dużych ugięć sprężystych ściskanych osiowo powłok walcowych i stożkowych
Расчет сжимаемых в осевом направлении цилиндрических и конических упругих оболочек при больших перемещениях
Analysis of large elastic deflections of axially compressed cylindrical and conical shells

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

SPIS TREŚCI TOMU XIV/1976

Zeszyt 1

- A. SAWICKI, Z zagadnień hydrosprężystości płyt 3
Некоторые вопросы гидроупругости плит
Certain problems of hydroelasticity of plates
- W. KUFEL, Sterowana dyskretyzacja płyt i powłok 19
Управляемая дискретизация пластин и оболочек
Controlled discretization of plates and shells
- H. GRYBÓŚ, Wyboczenie uderzeniowe pręta o dużej smukłości 33
Ударное выпучивание стержня с большой гибкостью
Impact buckling of a slender rod
- M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYŹYŃ, Dynamika płaskiej wiązki przewodów przy prądach zwarciovych 45
Динамика плоской системы электропроводов при токах короткого замыкания
Dynamics of a plane group of conductors under short-circuit current
- J. MARYNIAK, M. ZŁOCKA, Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł i sprężystości układu sterowania 83
Боковая устойчйвость самолета и колебания элеронов при изгибающей деформации крыльев при наличии упругости в системе управления
Lateral stability of a plane and aileron vibrations, flexibility of wings of elasticity of control system being taken into consideration
- W. MIERZEJEWSKI, Rozwiązywanie problemów dynamiki płyt prostokątnych na podstawie zmodyfikowanej metody sił Nowackiego 83
Решение задач динамики прямоугольных пластин на основе модифицированного метода Новацкого
Solution of the vibration problem of rectangular plates based on a modification of Nowacki's method
- W. KOSIŃSKI, Analiza jednowymiarowych fal uderzeniowych i przyspieszenia w ośrodku niesprężystym 95
Анализ одномерных ударных волн и волн ускорения в неупругой среде
Analysis of one-dimensional shock and acceleration waves in inelastic medium
- B. BIENIASZ, Wpływ zastosowania kondensacji kropłowej w pojedynczym termosyfonie dwufazowym na współczynnik przenikania ciepła przez ściankę skraplacza 127
Влияние применения каплевидной конденсации в одинарном двухфазовом термосифоне на коэффициент теплопроводности стенки конденсатора
The effect of application of dropwise condensation in single two-phase thermosiphon on the heat transfer coefficient across the condenser wall
- A. PIENIAŻEK, W. PIENIAŻEK, O pewnej nowej metodzie analizy stateczności rozwiązań układów nieliniowych o jednym stopniu swobody 137
О некотором новом методе анализа устойчивости решений нелинейных систем с одной степенью свободы
On a certain new method of analyzing the stability of solutions for nonlinear systems with one degree of freedom

E. WALICKI, A. TOPOLIŃSKI, Powolny przepływ cieczy lepkiej w płaskim kanale o nagłym lokalnym rozszerzeniu	149
Медленное течение вязкой жидкости в плоском канале с внезапным местным расширением	
Slow viscous fluid flow in the channel with a locally recessed walls	
A. WILCZYŃSKI, Stateczność płaskiej postaci zginania belki o osi załamanej	163
Устойчивость плоской формы изгиба балки с переломленной осью	
Stability of plane form of bending of a beam with the deflected axis	
B. BIENIASZ, Graniczna moc dwufazowego termosyfonu rurowego ze względu na kryterium odrywania kondensatu	175
Пределная мощность двухфазового трубчатого термосифона на условия отрыва конденсата	
Limit power of a two-phase pipe thermosiphon with respect to condensate liquid instability	
BIULETYN INFORMACYJNY	183
Zeszyt 2	
Władysław BOGUSZ — Wspomnienie pośmiertne	195
J. WILK, Skończone odkształcenia wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok przy uwzględnieniu kinematycznego uwzględnienia materiału	199
Конечные деформации гибких осесимметричных оболочек при учете кинематического упрочнения материала	
Finite deformations of slender axi-symmetric shells made of materials obeying the kinematic strain-hardening law	
M. JANOWSKI, H. КОРЕСКИ, Elektryczny układ analogowy dla geometrycznie nieliniowych zagadnień płyt o dowolnej geometrii	215
Электрическая аналоговая модель для геометрических нелинейных пластинок произвольного контура	
The electric analog system for geometrically nonlinear plates of arbitrary contour	
S. BIELAK, Calka równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego powłoki walcowe	229
Интеграл дифференциального уравнения в частных производных для цилиндрических оболочек	
The integral of a partial differential equations of cylindrical shells	
B. KOWALCZYK, T. RATAJCZAK, Iteracyjna metoda wyznaczania częstości drgań własnych i amplitud układu o skończonej liczbie stopni swobody	237
Итерационный метод вычисления собственных колебаний и амплитуд системы с конечным числом степеней свободы	
An iterative method to determine natural frequencies and modes of a multidegree-of-freedom system	
F. JARZYŃSKI, Nguyen van Tinh, Zastosowanie metody macierzy przeniesienia w obliczeniu drgań własnych układu belkowo-liniowego	253
Применение метода матриц переноса для расчета свободных колебаний в балочно-тросовой системе	
Application of the transfer matrix method to the calculation of free vibration in a beam-cable system	
A. GAJEWSKI, Optymalne kształtowanie wirującego pręta z uwzględnieniem nieliniowości fizycznej materiału	261
Оптимальное формирование вращающегося стержня с учетом физической нелинейности материала	
Optimal structural design of the rotating rod with physical nonlinearity of material	
Z. ONISZCZUK, Swobodne drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych inercyjnym elementem sprężystym	273
Свободные поперечные колебания систем двух балок связанных инерционным упругим элементом	
Free transverse vibrations of an elastically connected double-beam system	

T. LISZKA, M. ŻYCZKOWSKI, Optymalne kształtowanie nierównomiernie nagranych tarcz wirujących z uwagi na nośność sprężystą i graniczną	283
Оптимальное формирование неравномерно нагретых вращающихся дисков по упругому и пластическому предельным состоянием	
The optimal design of nonuniformly heated rotating discs with respect to their elastic and limit carrying capacity	
A. MUSZYŃSKA, Niektóre problemy modelowania układów mechanicznych	303
Некоторые вопросы моделирования механических систем	
Certain problems of modelling of mechanical systems	
Z. GORAJ, Macierzowy zapis nieliniowych równań ruchu generowanych formalizmem Lagrange'a	315
Матричная запись нелинейных уравнений движения, порождаемых методом Лагранжа	
Matrix representation of non-linear equations of motion derived by the application of Lagrange's formalism	
BIULETYN INFORMACYJNY	327
Zeszyt 3	
T. HUCKEL, O opisie fizycznie nieliniowej sprężystości materiałów sypkich	335
К вопросу об описании физически нелинейной упругости сыпучих материалов	
On the description of non-linear elasticity of granular media	
Z. MALINOWSKI, O pewnej metodzie analizy wpływu tarcia w procesie plastycznego ściskania próbeki walcowej	347
О некотором методе анализа влияния трения в процессе пластического сжатия цилиндрического образца	
On a method of friction analysis in plastically compressed cylindrical specimen	
J. NIZIOŁ, N. KONDRACIUK, Przykład badania dokładności liniowego układu dynamicznego w przypadku niestacjonarnym	361
Исследование точности линейной динамической системы в нестационарном случае	
Example of investigating the accuracy of a linear dynamic system in a nonstationary case	
J. KOLEŃDA, Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych	371
Нелинейные колебания амортизированных поршневых двигателей при широкополосных стохастических возмущениях	
Nonlinear vibrations of elastically mounted piston engines at wide-band stochastic excitations	
S. BIELAK, Statyka powłoki walcowej zamkniętej pracującej w stanie zgięciowym	383
Статический расчет замкнутой цилиндрической оболочки при работе на изгиб	
Statics of a closed cylindrical shell in the moment state	
J. NIZIOŁ, A. PIENIAŻEK, Drgania ciężna w płaszczyźnie zwisu z uwzględnieniem jego sztywności na zginanie	393
Колебания провода в плоскости свиса с учетом его жесткости на изгиб	
Vibrations of cable in the sag-span plane with regard its bending stiffness	
W. WALICKI, Hydromagnetyczny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi	417
Гидромагнитное течение вязкой жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения	
Hydromagnetic flow of viscous fluid between rotating surfaces of revolution	
A. TRZĘSOWSKI, Średnie naprężenia w stochastycznym ośrodku wieloskładnikowym	427
Среднее напряжение в стохастически неоднородной среде	
Mean stress in a multi-component stochastic medium	
J. WRANIK, List do Redakcji	439
Письмо в Редакцию	
Letter to the Editor	
BIULETYN INFORMACYJNY	441

Cz. RYMARZ, Modele fenomenologiczne ośrodka ciekłokrystalicznego	451
Феноменологические модели жидких кристаллов Phenomenological models of a liquid crystalline medium	
S. ZAHORSKI, Kinematyczna analiza przepływów cieczy nieliniowo lepko-sprężystych	465
Кинематический анализ течения нелинейно-вязко-упругой жидкости Kinematical flow analysis of non-linear viscoelastic fluids	
B. MICHALSKI, Badania mechanicznych i optycznych własności polimetakrylanu metylu modyfikowanego ftalanem dwubutyłu	481
Исследование механических и оптических свойств полиметакрилана метила модифицированного фталаном двубутила Investigation of mechanical and optical properties of polymethyl-metacrylate modified with di-buthyle phtalate	
Z. OLESIAK, W. WĄGROWSKA, Zagadnienie mikropolarnie sprężystej rury grubościennej	493
Решение толстостенной трубы в постановке микрополярной теории упругости The problem of a micropolar elastic thick-walled tube	
L. JARECKI, Termodynamika deformacji krystalitów polimeru zanurzonych w naprężonym ośrodku amorficznym	505
Термодинамика деформирования кристаллов полимера окруженных напряженной аморфной средой Thermodynamics of crystallite deformation in a stressed amorphus polymer matrix	
R. BOGACZ, O stateczności wzajemnego oddziaływania oscylatora i ciągu w ruchu względnym	519
Об устойчивости взаимодействия осцилятора с напряженной струной в относительном движении On stability of interaction between an oscillator and a tie in relative motion	
S. ŁUKASIEWICZ, A. WAWRZYŃIAK, Analiza pozakrytyczna idealnych powłok obrotowych o małej krzywiznie południka przy obciążeniach złożonych	535
Послекритический анализ идеальных оболочек вращения при малых кривизнах меридиана и комбинированной нагрузке Postcritical analysis of ideal shells of revolution	
S. ŁUKASIEWICZ, A. WAWRZYŃIAK, Stateczność powłok obrotowych o małej krzywiznie południka przy obciążeniach złożonych	547
Устойчивость оболочек вращения при малой кривизне меридиана и комбинированной нагрузке Stability of shells of revolution with a slightly curved generator under complex load	
J. J. TELEGA, O operatorowym podejściu do formułowania zasad wariacyjnych dla ośrodków plastycznych	557
Об операторном подходе к формулированию вариационных принципов для пластических сред An operator approach to the formulation of variational principles for plastic solids	
J. PIETRUCHA, Z. SZEWCZYK, Metoda sterowania modalnego i jej zastosowanie do ustalenia lotu śmigłowca	571
Метод модального управления и его применение к стабилизации полета вертолета Modal control method and its application to the stabilization of helicopter flight	
W. MIERZEJEWSKI, Zmodyfikowana metoda sił Nowackiego w dynamice płyt z uwzględnieniem odkształceń postaciowych i bezwładności obrotowej	585
Модифицированный метод сил Новацкого в динамике пластин с учетом инерции вращения и перерезывающих сил The modified Nowacki method in dynamics of plates, the influence of shearing forces and the rotary inertia being taken into account	
H. WALUKIEWICZ, Twierdzenie wzajemne i funkcja Greena dla układów dyskretnych z losowym wymuszeniem	591
Теорема о взаимности и функции Грина для дискретных систем со случайными воздействиями Reciprocal theorem and Green's function for discrete systems with random excitations	
BIULETYN INFORMACYJNY	599

Warunki prenumeraty

Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorki indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

Indeks 36523

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
