

Ju 720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

**MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA**

KWARTALNIK

TOM 14 • ZESZYT 4

Pw

WARSZAWA 1976
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

<p>Cz. RYMARZ, Modele fenomenologiczne ośrodka ciekłokrystalicznego Феноменологические модели жидких кристаллов Phenomenological models of a liquid crystalline medium</p>	451
<p>S. ZANORSKI, Kinematyczna analiza przepływów cieczy nieliniowo lepkością Кинематический анализ течения нелинейно-вязко-упругой жидкости Kinematical flow analysis of non-linear viscoelastic fluids</p>	465
<p>B. MICHAŁSKI, Badania mechanicznych i optycznych własności polimetakrylanu metylu modyfikowanego ftalanem dwubutyłu Исследование механических и оптических свойств полиметакрилатана метила модифицированного фталатом двубутила Investigation of mechanical and optical properties of polymethyl metacrylate modified with di-butyle phtalate</p>	481
<p>Z. OLESIAK, M. WĄGROWSKA, Zagadnienie mikropolarnej sprężystej rury grubościenniej Решение толстостенной трубы в постановке микрополярной теории упругости The problem of a micropolar elastic thick-walled tube</p>	493
<p>L. JARECKI, Termodynamika deformacji krystalitów polimeru zanurzonego w naprężonym ośrodku amorficznym Термодинамика деформирования кристаллов полимера опогруженных внапряженной аморфной среде Thermodynamics of crystallite deformation in a stressed amorphous polymer matrix</p>	505
<p>R. BOGA CZ, O stateczności wzajemnego oddziaływania oscylatora i ciągu w ruchu względnym Об устойчивости взаимодействия осциллятора с напряженной струной в относительном движении On stability of interaction between an oscillator and a tie in relative motion</p>	519
<p>S. ŁUKASIEWICZ, A. WAWRZYŃIAK, Stateczność powłok obrotowych o małej krzywiznie południka przy obciążeniach złożonych Устойчивость оболочек вращения при малой кривизне меридиана и комбинированной нагрузке Stability of shells of revolution with a slightly curved generator under complex load</p>	535
<p>S. ŁUKASIEWICZ, A. WAWRZYŃIAK, Analiza pozakrytyczna idealnych powłok obrotowych o małej krzywiznie południka, przy obciążeniach złożonych Посткритический анализ идеальных оболочек вращения при малых кривизнах меридиана и комбинированной нагрузке Postcritical analysis of ideal shells of revolution</p>	547
<p>J. J. TELEGA, O operatorowym podejściu do formułowania zasad wariacyjnych dla ośrodków plastycznych Об операторном подходе к формулированию вариационных принципов для пластических сред An operator approach to the formulation of variational principles for plastic solids</p>	557

cd. na s. III okładki

J 11 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 4 · Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 7 6
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 680 (580+100) egz. Arkuszy wydawn. 11,5. Arkuszy drukarskich 9,75. Papier wkłesłodruk. sat. III kl. 100 g. 70×100. Oddano do składania 13.VIII.1976 r. Druk ukończono w grudniu 1976 r. Zam. 1142/76. J-105. Cena zł30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

MODELE FENOMENOLOGICZNE OŚRODKA CIEKŁOKRYSTALICZNEGO

CZESŁAW R Y M A R Z (WARSZAWA)

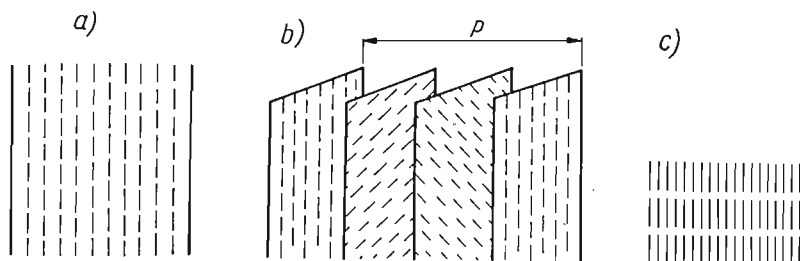
1. Wstęp

Molekuły niektórych związków organicznych posiadają wydłużony kształt. Gdy pozostają w stanie odpowiedniego zbliżenia (zagęszczenia), mogą wówczas tworzyć strukturę ciekłego kryształu lub inaczej cieczy anizotropowej. Jest to ośrodek, który posiada zarówno cechy cieczy, jak i ciała stałego. Przejawia więc on anizotropię zjawisk elektrycznych, magnetycznych, mechanicznych, a stąd również anizotropię zjawisk optycznych.

Anizotropie takie, jak wiadomo, występują często w ciałach stałych szczególnie krystalicznych, lecz nie są obserwowane w cieczach. Są to bowiem zjawiska makroskopowe stanowiące uśrednienie skomplikowanych zjawisk mikroskopowych i dlatego występują tylko w ośrodkach wykazujących dalekozasięgowe uporządkowanie. Uporządkowanie takie nie występuje w klasycznych cieczach. Wynika stąd, że stan ciekłokrystaliczny jest odmienny od stanów skupienia — ciecz lub ciało stałe, gdyż łączy w sobie cechy obydwu tych stanów. Dlatego jego opis makroskopowy wymaga nowych teorii modelowych. Ponieważ ciekłe kryształy mogą mieć różną budowę wewnętrzną, dlatego modele takie mogą również mieć zróżnicowaną strukturę w zależności od typu opisywanego kryształu.

Wyróżnia się zasadniczo trzy podstawowe typy kryształów ciekłych.

Kryształy nematiczne charakteryzują się uporządkowaniem kierunkowym wydłużonych molekuł. Natomiast środki ciężkości tych molekuł zajmują położenie przypadkowe (rys. 1a).



Rys. 1

Kryształy cholesterolowe posiadają wyższy poziom uporządkowania niż nematiczne. Można je traktować jako zbiór płaszczyzn o strukturze kryształu nematicznego, w których kierunki uporządkowania zmieniają się śrubowo przy przejściu od płaszczyzny do płaszczyzny. W ten sposób posiadają one przestrzenną śrubową strukturę okresową (rys. 1b).

Kryształy smektyczne wykazują najwyższy poziom uporządkowania. W tym przypadku są uporządkowane nie tylko molekuly lecz również środki ich ciężkości, które tworzą szereg równoległych płaszczyzn (rys. 1c).

Teorie modelowe tych kryształów pomimo istotnych różnic powinny zawierać również pewne ogólne cechy wspólne i te będą głównie przedmiotem naszych zainteresowań. Chodzi bowiem o poznanie zasadniczych własności ich konstrukcji. Niemniej rozpatrywane modele, poza ich aspektem ogólnym, będą dotyczyły głównie kryształów nematycznych.

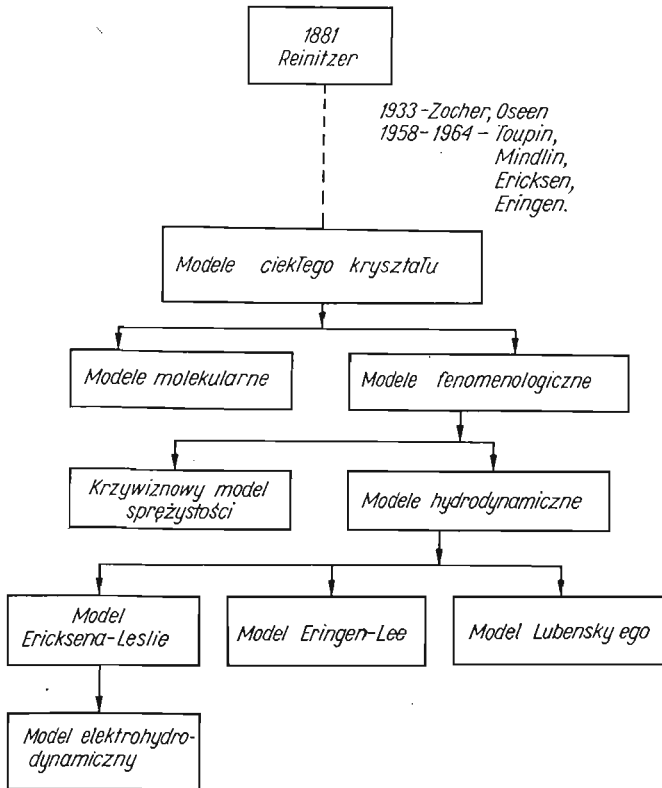
Należy podkreślić, że WANG prowadząc klasyfikację materiałów w oparciu o grupy symetrii materiałowej (z punktu widzenia ogólnych koncepcji teorii równań konstytutywnych) wykazał możliwość istnienia materiałów nie będących ani cieczami, ani ciałami stałymi [1]. Do podobnego wniosku doszedł również COLEMAN [2]. Stanowi to interesujący przykład uzasadnienia istnienia pewnego typu materiału na podstawie rozważań czysto teoretycznych. Stan ciekłokrystaliczny zwany mezofazą został doświadczalnie odkryty dość dawno (REINITZER 1888), jednak przez wiele lat był głównie przedmiotem badań doświadczalnych [6]. Brak było bowiem teoretycznych środków modelowych zarówno w zakresie molekularnym, jak i fenomenologicznym. Z jednej bowiem strony, trzeba było opracować odpowiednie środki opisu cech fizycznych cieczy, a z drugiej — środki modelowe opisu (na poziomie fenomenologicznym) ciągłych pól mikrostrukturalnych, w których można było ująć własności złożonej wewnętrznej budowy ciał fizycznych.

Okres właściwego rozwoju modeli fenomenologicznych, które nas głównie interesują, przypada na lata 1950—1960. Wtedy to sformułowano zasadnicze koncepcje opisu ośrodków z mikrostrukturą, a więc ośrodków z dodatkowymi (poza przemieszczeniem lub prędkością) stopniami swobody. Są to prace TOUPINA [3], MINDLINA [4], ERINGENA [5] i innych autorów. Stworzyły one podstawy do efektywnego modelowania zjawisk w ośrodku ciekłokrystalicznym, który stał się przedmiotem zainteresowań takich badaczy, jak FRANK, ERICKSEN, ERINGEN, de GENNES, LESLIE i inni. Wymieniamy tu oczywiście tylko nazwiska autorów, którzy zajmowali się aspektami fenomenologicznymi tej teorii. Obecnie można wyróżnić następujące modele ośrodka ciekłokrystalicznego: model zgięciowo-sprężysty, modele hydrodynamiczne, modele elektrohydrodynamiczne, modele magnetohydrodynamiczne. Nie są to wszystkie możliwe modele, lecz jedynie podstawowe ich grupy. Poza nimi istnieją modele molekularne mające często charakter półfenomenologiczny (ze względu na stosowane środki modelowe) lub inne, które powstają na podstawie rozważań molekularnych (patrz np. praca LUBENSKY'EGO [9]). Ogólną sytuację z tego zakresu przedstawia rys. 2.

Celem niniejszego opracowania, które posiada charakter przeglądowo-konfrontacyjny, jest ogólna prezentacja pojęć i środków modelowych, którymi operują powyższe teorie, ocena zakresu ich stosowalności oraz przyjętych uproszczeń i przybliżeń. Modele te są na ogół niekonsystentne, a niektóre z nich prowadzą do paradoksów i zjawisk niefizycznych. Chodzi również o ocenę modeli pod tym kątem widzenia. Powinno to stanowić bazę do dalszych prac w tym zakresie, a głównie do uściślenia stosowanych modeli i wyeliminowania występujących niejednoznaczności.

W ostatnich latach obserwuje się znaczny wzrost zainteresowania ciekłymi kryształami ze względu na ich bardzo obiecujące zastosowania na skalę przemysłową (rzutniki obrazów, ekrany telewizyjne, bardzo czułe mierniki temperatury, modulatory światła oraz inne

nie zbadane możliwości aplikacyjne). Jest to bowiem stan materiału, w którym za pomocą stosunkowo niewielkich oddziaływań zewnętrznych można zmienić istotnie jego makroskopowe cechy fizyczne. Nic też dziwnego, że wiele związków ciekłokrystalicznych odkryto i odkrywa się w materii biologicznej, która bardzo elastycznie reaguje na warunki otoczenia. Rozszerza to znacznie zakres zainteresowań ciekłymi kryształami i wymaga pogłębionego ich badania.



Rys. 2

W rozdziale drugim przedstawiamy mikrostrukturalny opis kinematyki ośrodka ciekłokrystalicznego. W rozdziale trzecim dyskutujemy cechy modelu krzywiznowego FRANKA, a w czwartym — modeli hydrodynamicznych.

2. Opis mikrostrukturalny kinematyki ośrodka ciekłokrystalicznego

Przy budowie modeli ciągłych korzysta się z zasad zachowania masy, pędu, momentu pędu, energii, ładunku oraz z zasady wzrostu entropii, biorąc pod uwagę onsagerowską postać termodynamiki procesów nieodwracalnych. Ponadto uwzględnia się: niezależność relacji fizycznych od układu odniesienia i od wyboru układu jednostek. Nie oznacza to bynajmniej, że wszystkie modele skonstruowane w myśl powyższych zasad i założeń modelują realne sytuacje fizyczne. Należy bowiem uwzględniać jeszcze cechy indywidualne

materiału przez określenie odpowiednich równań konstytutywnych, a ponadto skonfrontować wyniki uzyskane dla modelu z wynikami eksperymentu.

Ruch ośrodka ciekłokrystalicznego opisuje się między innymi za pomocą funkcji ruchu

$$(2.1) \quad x^k = f^k(X^\alpha, t),$$

gdzie x^k jest położeniem cząstki X^α w chwili t . Najwygodniej jednak ruch takiego ośrodka opisywać za pomocą pola prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Jest to znana własność cieczy, dla której w równaniu konstytutywnym występują gradienty prędkości (model cieczy Stokesa). Przy modelowaniu dynamiki ośrodka o złożonej strukturze wewnętrznej każdy punkt traktowany jest jako odkształcalna cząstka. W takim przypadku funkcje $f^k(X^\alpha, t)$, bądź składowe pola prędkości, opisują ruch ośrodka masy takiej cząstki. Specyfikacja tych lub innych cech cząstki prowadzi do określenia mikrostruktury ośrodka, co oznacza, że poza polem prędkości uwzględnia się istnienie innych pól mikrostrukturalnych stopni swobody. Dla kryształów ciekłych określa się następujące pola mikrostruktury:

1. *Mikrostruktura ośrodka mikropolarnego* [5]. Oznacza się

$$(2.2) \quad \xi_k = Q_{k\alpha}(\mathbf{X}, t)\Sigma^\alpha,$$

gdzie ξ_k, Σ^α są odpowiednio wektorami promieniami punktów cząstki mikrostrukturalnej po deformacji i przed deformacją, zaczepionymi w środku jej masy. $Q_{k\alpha}$ jest macierzą ortogonalną, co oznacza, że jedyną deformacją jakiej doznaje cząstka (przypisana punktowi \mathbf{X}) jest jej sztywny obrót. Przyjęcie tej koncepcji oznacza, że molekuly kryształu ciekłego są traktowane jako nieodkształcalne, przy czym cząstka materialna modeluje na ogół zachowanie się nie jednej molekuly, lecz pewnego dużego ich zespołu, który doznaje obrotu jako całość. Tak zdefiniowana mikrostruktura jest bardzo ogólna. Nie uwzględnia ona faktu, że kryształ ciekły zbudowany jest z wydłużonych molekuł. Określona jest ona w opisie materialnym.

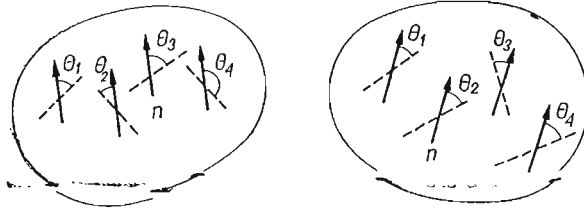
2. *Pole dyrektorów \mathbf{n} i uporządkowań S* . ERICKSEN przedstawia własności mikrostrukturalne kryształu ciekłego za pomocą pola wektorów jednostkowych \mathbf{n} , które nazywa «dyrektorami» [7]. Modelują one skierowanie osi wydłużonych molekuł lub ich grup. Długość «dyrektorów» pozostaje stała w czasie ruchu. Założenie to podyktowane jest głównie względami wygody opisu, lecz ogranicza możliwości modelowe tak zdefiniowanego pola mikrostruktury, gdyż traci się możliwość uwzględnienia zmian ewentualnego ruchu obrotowego molekuł względem osi wydłużenia. Należy również podkreślić, że «dyrektory» opisują tylko uśrednione uporządkowanie ośrodka ciekłokrystalicznego bez indywidualizacji zachowania się molekuł (bez ich ruchu cieplnego), a więc są to środki modelowe, wyraźnie fenomenologiczne. Celem wzbogacenia środków opisu wprowadza się ponadto skalarnie pole parametru uporządkowania zdefiniowanego następująco:

$$(2.3) \quad S = \langle \sin \theta \rangle,$$

gdzie θ jest kątem odchylenia molekuly od kierunku \mathbf{n} , a $\langle \rangle$ znakiem uśrednienia. przy uwzględnieniu statystyki kierunkowej odchyień $f(\theta)$ osi molekuł od średniego kierunku \mathbf{n} , co można zapisać w następujący sposób (por. rys. 3):

$$(2.4) \quad S = \int_0^\pi \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta\right) f(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Gdy $S = 0$ wówczas mamy do czynienia z cieczą, natomiast $S = 1$ oznacza idealne uporządkowanie wszystkich molekuł otoczenia punktu \mathbf{X} wzdłuż wektorów \mathbf{n} . Sytuacja ostatnia na skutek ruchów cząstek nigdy w rzeczywistości nie występuje i dlatego w realnych kryształach ciekłych $0 < S < 1$.



Rys. 3

3. *Pole tensorowe uporządkowań.* Wprowadzone pole «direktorów» \mathbf{n} prowadzi do kłopotliwych sytuacji, gdy kierunki \mathbf{n} i $-\mathbf{n}$ traktowane są jako ekwiwalentne. Dlatego DE GENNES [8] zaproponował, aby mikrostrukturę ośrodka ciekłokrystalicznego opisywać za pomocą pola tensorów bezśladowych $Q_{ij}(\mathbf{r})$. LUBENSKY [9] przedstawił sposób wyznaczania tego tensora, wychodząc z następującego tensora określonego dla molekuly α :

$$(2.5) \quad Q_{ij}^\alpha = v_i^\alpha v_j^\alpha - \frac{1}{3} \delta_{ij}.$$

Po wprowadzeniu tensora uśrednionego

$$R_{ij} = \sum_{\alpha} Q_{ij}^\alpha(\mathbf{r}, t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}^\alpha(t)],$$

definiujemy pole tensora makroskopowego $Q_{ij}(\mathbf{r}, t)$ w sposób następujący:

$$(2.6) \quad Q_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{\langle R_{ij}(\mathbf{r}, t) \rangle m}{\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle},$$

gdzie m jest masą molekuly, a $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle$ wartością średnią gęstości rozkładu molekuł (gęstość masy ośrodka ciekłokrystalicznego).

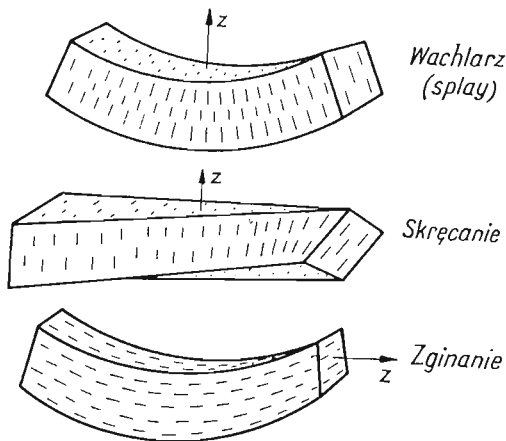
Tensorowy sposób opisu mikrostruktury staje się porównywalny z opisem za pomocą «direktorów» i pola S , jeśli zauważyć, że dla jednoosiowego kryształu nematycznego tensor $Q_{ij}(\mathbf{r}, t)$ wyraża się następująco:

$$(2.7) \quad Q_{ij}(\mathbf{r}, t) = S \left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right),$$

gdzie S jest parametrem uporządkowania, a n_i, n_j składowymi «direktorów». LUBENSKY [9] dyskutuje równoważność tych opisów, lecz nie wszystkie kwestie zostały wyjaśnione (tensor Q_{ij} posiada 5 różnych składowych, a wektor \mathbf{n} trzy). Są to podstawowe opisy mikrostruktury kryształów ciekłych.

3. Krzywiznowa teoria sprężystości

W kryształach ciekłym istnieje uporządkowanie dalekiego zasięgu, co powoduje, że kryształ wykazuje sztywność na odkształcenia zgięciowo-skręceniowe. Teoria opisująca te zjawiska została zapoczątkowana przez ZOCHERA [10] i OSEENA w 1933 [11], a następnie rozwinięta przez FRANKA w 1958 [12]. Przedstawimy przybliżenie liniowe tej teorii, zakładając małe odkształcenia krzywiznowe. Rozróżnimy trzy rodzaje takich odkształceń (por. rys. 4): a) odkształcenia typu wachlarz, b) odkształcenia skręceniowe, c) odkształcenia zgięciowe.



Rys. 4

Jeżeli wymiarowy parametr charakterystyczny odkształcenia (promień krzywizny) jest dużo większy od długości molekuł, to do opisu procesu deformacji można stosować model ciągły. Oznacza to, że molekuły zmieniają swoje kierunki przestrzenne bardzo powoli w porównaniu np. z wymiarami ciała. Jeżeli oś z układu współrzędnych skierować zgodnie z kierunkiem osi molekuł, to składowe stanu deformacji dla poszczególnych jej rodzajów przyjmują postać:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} a_1 &= \partial n_x / \partial x, & a_2 &= \partial n_y / \partial y \text{ dla wachlarza,} \\ a_3 &= -\partial n_y / \partial x, & a_4 &= \partial n_x / \partial y \text{ dla skręcania,} \\ a_5 &= \partial n_x / \partial z, & a_6 &= \partial n_y / \partial z \text{ dla zginania.} \end{aligned}$$

Ponieważ powyższe rodzaje deformacji są sprężyste, stąd w przybliżeniu liniowym energia swobodna ma postać następującą:

$$(3.2) \quad F = \sum_{i=1}^6 k_i a_i + \sum_{i,j=1}^6 k_{ij} a_i a_j,$$

gdzie k_i , k_{ij} są stałymi materiałowymi, które należy wyznaczyć doświadczalnie. Wyrażenie (3.2) na energię swobodną upraszcza się, gdy uwzględniamy jej niezmienniczość względem przekształceń charakteryzujących symetrię ośrodka.

1. Energia F nie powinna zmieniać się przy sztywnym obrocie ośrodka względem osi z , gdyż nie ulegają zmianie położenia molekuł. Z warunku tego wynika, że $k_3 = 0$,

a ponadto różne są od zera tylko następujące składowe tensora k_{ij} : $k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{12}, k_{24}$.

2. Gdy molekuly są niepolarne lub polarne, lecz rozłożone z równym prawdopodobieństwem w obydwu przeciwnych kierunkach, wówczas wybór znaku wektora \mathbf{n} jest dowolny i energia nie powinna zmieniać się przy przekształceniu (z zachowaniem skrętności)

$$\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n} \quad \text{lub} \quad x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -x,$$

co daje następujący warunek:

$$(3.3) \quad k_1 = k_{12} = 0.$$

Symetria przy $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ występuje powszechnie w kryształach ciekłych.

3. Gdy w kryształcie ciekłym występują symetrie zwierciadlane, czyli gdy kryształ nie jest enancjomorficzny (co może zachodzić często w skali makroskopowej, chociaż poszczególne molekuly nie wykazują takich symetrii), wówczas zachodzi zależność

$$(3.4) \quad k_2 = k_{12} = 0.$$

Ogólnie wyrażenie na energię sprężystą zapisane w formie niezmienniczej (niezależnej od kierunku osi z) posiada postać

$$(3.5) \quad F = \frac{1}{2}k_{11}(\nabla \cdot \mathbf{n} - s_0)^2 + \frac{1}{2}k_{22}(\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} + t_0)^2 + \frac{1}{2}k_{33}(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n})^2 - k_{12}(\nabla \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n}),$$

gdzie $s_0 = -k_1/k_{11}$, $t_0 = -k_2/k_{22}$. Wynika stąd, że energia F zależy od n_i oraz $n_{i,j}$.

Ponieważ F przy stałych deformacjach stanowi potencjał dla sił wewnętrznych, stąd otrzymujemy następujące równanie konstytutywne:

$$(3.6) \quad \Pi_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial n_{i,j}} = A\varepsilon_{ijk}n_k - k_{33}(\mathbf{n} \cdot \nabla n_i)n_j - B\delta_{ij},$$

gdzie ε_{ijk} jest całkowicie antysymetrycznym tensorem, a

$$A = k_{22}(\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} + t_0) - k_{12}(\nabla \cdot \mathbf{n}),$$

$$B = k_{11}(\nabla \cdot \mathbf{n} - s_0) - k_{12}\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n},$$

zaś dla wektora krzywiznowych sił wewnętrznych

$$(3.7) \quad f_i = \partial F / \partial n_i = A\varepsilon_{ijk}n_{k,j} + k_{33}(\mathbf{n} \cdot \nabla n_j)n_{j,i}.$$

Zakłada się, że stan równowagi dla kryształku ciekłego osiągany jest przy minimum energii swobodnej

$$(3.8) \quad G = \int_v dv F(n_i, n_{i,j}),$$

co oznacza, że

$$\delta G = 0.$$

Prowadzi to do następującego równania równowagi:

$$(3.9) \quad \partial \Pi_{ij} / \partial x_j + f_i = \gamma n_i,$$

gdzie γ jest mnożnikiem Lagrange'a, który wyznacza się z warunku $n^2 = 1$. Analizując to równanie dochodzimy do wniosku, że żądanie, aby wektor \mathbf{n} pozostawał jednostkowy, równoważne jest żądaniu, aby wewnętrzne siły krzywiznowe $h_i = \Pi_{ij,j} + f_i$ były równo-

ległe do pola «direktorów». Sens fizyczny tego żądania nie jest zbyt jasny, a ponadto okazuje się, że rozwiązania zagadnień granicznych dla równania (3.9) niekonieczne są stabilne (patrz [13]). Żądanie to wynika z ograniczeń (więzów) kinematycznych. Należy również podkreślić [13], że przedstawiony model zawiera człon diwergencyjny w gęstości energii F , który może być zawsze zamieniony na człon powierzchniowy i dlatego został on opuszczony w (3.5). Sytuacja taka stwarza jednak możliwości niejednoznacznego zdefiniowania tensora Π_{ij}

$$(3.10) \quad \Pi'_{ij} = \Pi_{ij} + \partial A_{ijk} / \partial x_k,$$

gdzie tensor A_{ijk} jest antysymetryczny względem indeksów j, k . Dodanie tensora A_{ijk} do Π_{ij} nie zmienia jednak postaci równania (3.9). Pomimo to interpretacja fizyczna członu powierzchniowego jest konieczna, gdyż inaczej struktura teorii staje się niejasna. Należy zająć się tym w oddzielnym opracowaniu.

Efekty krzywiznowe w kryształach ciekłych są bardzo niewielkie (stałe materiałowe k_{ij} są rzędu 10^{-6} dyn) w porównaniu z efektami zmiany objętości, lecz należy je uwzględnić, gdyż mogą one powodować znaczne zmiany jakościowe ich zachowania się.

4. Modele hydrodynamiczne

Poza sztywnością zgięciowo-skręciową, właściwą dla ciał stałych, kryształy ciekłe zachowują się jak ciecze. Molekuły wydłużone mogą bowiem poruszać się dość łatwo względem siebie wzdłuż wydłużonych osi.

Temu przepływowi uporządkowanemu przeciwstawiają się ruchy ciepłe w kierunku poprzecznym, a zatem należy rozpatrywać łącznie efekty krzywiznowe z efektami hydrodynamicznymi. Teorię uwzględniającą połączone efekty opracowali ERICKSEN i LESLIE [14, 15]. Przedstawimy jej zarys i ocenę. Będziemy operować następującymi polami ciągłymi: polem gęstości masowej ρ , polem prędkości \mathbf{v} , polem «direktorów» \mathbf{n} , polem temperatur T . Zachowanie się tych pól opisuje następujący układ równań:

1. Równanie ciągłości masy

$$(4.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Będziemy zakładać, że ośrodek jest nieściśliwy. Założenie to dla stanu ciekłego jest w pełni uzasadnione. Zatem równanie ciągłości przyjmuje postać

$$(4.2) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0.$$

2. Równanie ruchu wynikające z zasady zachowania pędu

$$(4.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} (J_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} + t_{ij}) = 0,$$

gdzie $J_i = \rho v_i$ jest gęstością pędu, a T_{ij} i t_{ij} są odpowiednio tensorami naprężeń odwracalnych i dysypacyjnych. Tensor T_{ij} określony jest w sposób następujący:

$$(4.4) \quad T_{ij} = \rho v_i v_j - p \delta_{ij} - \Pi_{kj} n_{k,i},$$

gdzie p jest ciśnieniem hydrodynamicznym.

Tensor t_{ij} określony jest następująco:

$$(4.5) \quad t_{ij} = -\alpha_1 n_k n_h d_{kh} n_i n_j - \alpha_2 n_j N_i - \alpha_3 n_i N_j - \alpha_4 d_{ij} - \alpha_5 n_i n_k d_{kj} - \alpha_6 d_{ik} n_k n_j,$$

gdzie

$$(4.6) \quad d_{ij} = v_{(i,j)},$$

$$(4.7) \quad N_i = \dot{n}_i - (\boldsymbol{\omega}_{ij} \times \mathbf{n}_j)_i,$$

$$(4.8) \quad \dot{n}_i = \frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(n_i),$$

$$(4.9) \quad \omega_{ij} = \mathbf{v}_{[i,j]}.$$

Jak wynika z (4.7) wektor \mathbf{N} określa prędkość ruchu względnego «direktorów» (względem cieczy).

Z (4.5) wynika natomiast, że naprężenia dyspacyjne zależą w sposób łączny od gradientów prędkości d_{ij} , od kierunków «direktorów» n_i oraz prędkości ich ruchu względnego N_i . α_i są stałymi materiałowymi. Stałą α_4 można utożsamiać z klasyczną stałą lepkości postaciowej μ , a pozostałe są stałymi lepkościowymi ciekłego kryształu. Jest ich pięć, lecz tylko trzy z nich są niezależne. Stałe te są następujące: $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha_6 - \alpha_5$, α_3 . Wynika to z warunku niezmienniczości obrotowej energii oraz z relacji symetrii Onsagera. Wyznaczeniem trzech stałych lepkości zajmował się w Polsce w 1935 r. M. MIĘSOWICZ, były one zgodne z wartościami stałych wyznaczonymi ostatnio. Równania konstytutywne (4.4) i (4.5) wyprowadził LESLIE [15].

3. Równanie dla «direktorów»

$$(4.10) \quad \frac{\partial}{\partial t}(I\dot{n}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(I\dot{n}_i n_j) + II_{ij,j} + f_i + f'_i = \gamma n_i,$$

gdzie I jest momentem bezwładności wydłużonej (pałeczkowatej) molekuly. II_{ij} i f_i zostały określone uprzednio [patrz (3.6), (3.7)], a f'_i jest wektorem lepkościowych sił wewnętrznych określonym następująco:

$$(4.11) \quad f'_i = (\alpha_3 - \alpha_2) N_i + (\alpha_3 + \alpha_2) d_{ij} n_j.$$

4. Równanie transportu entropii

$$(4.12) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla(\rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}) = R,$$

gdzie s jest gęstością entropii, \mathbf{q} strumieniem ciepła.

Prawo Fouriera dla kryształu ciekłego przyjmuje postać

$$(4.13) \quad q_i = -\beta_1 n_i n_j T_{,j} - \beta_2 T_{,i},$$

a produkcja entropii wyraża się w następujący sposób:

$$(4.14) \quad TR = -t_{ij} d_{ij} - II_{ji} N_{ij} + f'_i N_i - T^{-1} q_i T_{,i}.$$

Zasada zachowania momentu pędu prowadzi do następującej relacji symetryzującej:

$$(4.15) \quad T_{0ij} - T_{0ji} + II_{ik} n_{j,k} - II_{jk} n_{i,k} + n_i f_j - n_j f_i = 0,$$

gdzie T_{0ij} jest tensorem naprężeń odwracalnych (w ośrodku bez dysypacji).

Należy stwierdzić, że w modelu powyższym równanie «direktorów» nie posiada charakteru zasady zachowania. Wiąże się z tym fakt, że nie istnieje lokalny niezmiennik odpowiadający obrotowi «direktorów». Prowadzi to w konsekwencji do paradoksu istnienia skończonej prędkości propagacji zaburzeń nieskończenie długiej fali. Ponadto, pojawiają się inne trudności natury modelowej. Założenie np., że «direktory» nie zmieniają długości w czasie ruchu oznacza nieuwzględnianie zmiany momentu pędu molekuly względem jej wydłużonej osi, a więc pominięcie jej rotacji względem tej osi.

Porównajmy model ERICKSENA-LESLIE z modelem LUBENSKY'EGO [9], który jest wynikiem rozważań na poziomie molekularnym oraz przeprowadzonych uśrednień. Równania wynikające z zasad zachowania masy, energii, pędu i momentu pędu przybierają postać:

$$(4.16) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + p_{i,i} = 0,$$

$$(4.17) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + J_{i,i} = 0,$$

$$(4.18) \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sigma_{ji,j} = 0,$$

$$(4.19) \quad \frac{\partial L_i}{\partial t} + \frac{\partial M_i}{\partial t} + \tau_{ji,j} = 0,$$

gdzie ρ jest gęstością pędu, ε gęstością energii wewnętrznej, J_i jest gęstością strumienia energii, L_i , M_i są gęstościami orbitalnego i lokalnego momentu pędu, a τ_{ji} tensorem naprężeń momentowych. Wszystkie powyżej przedstawione wielkości makroskopowe są uśrednieniami odpowiednich wielkości mikroskopowych. Mianowicie

$$(4.20) \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t)),$$

gdzie α jest numerem molekuly, a m_{α} jej masą,

$$(4.21) \quad p_i = \langle p_i(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_{\alpha} p_i^{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t)),$$

$$(4.22) \quad L_i = \sum_{\alpha} (\mathbf{x}^{\alpha} \times \mathbf{p}^{\alpha})_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t)),$$

$$(4.23) \quad M_i = \sum_{\alpha} I(\mathbf{v}^{\alpha} \times \dot{\mathbf{v}}^{\alpha})_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t)) = \rho/m I_{ij} \Omega_j,$$

gdzie I jest momentem bezwładności wydłużonych molekul, \mathbf{v} wektorem kierunkowym molekuly, I_{ij} makroskopowym tensorem momentów bezwładności, a Ω_j wektorem uśrednionej prędkości kątowej obrotu zespołu molekul. Tensor I_{ij} określony jest w sposób następujący:

$$(4.24) \quad I_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{I}{\rho} \sum_{\alpha} (\delta_{ij} - v_i^{\alpha} v_j^{\alpha}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}(t))$$

lub po uwzględnieniu (2.4) i (2.6):

$$(4.25) \quad I_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{I}{m} \left[\frac{2}{3} \delta_{ij} - S(\mathbf{x}, t) \left[n_i(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \right].$$

Jeżeli bierzemy pod uwagę tylko ruch sztywny molekuł, wówczas składowa prostopadła Ω do \mathbf{n} wyrazi się w sposób następujący:

$$(4.26) \quad \Omega_{\perp i} = (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}})_i.$$

W przypadku ruchów niesztywnych relacja ta nie jest ścisła; jednak gdy zmiany przestrzenno-czasowe \mathbf{n} są niewielkie można uznać ją za zadowalającą. Ponieważ założenie $\mathbf{n}^2 = 1$ w czasie ruchu oznacza, że składowa Ω równoległa do \mathbf{n} jest w przybliżeniu równa zeru, zatem zasada zachowania momentu pędu (4.19) przyjmuje postać

$$(4.27) \quad J \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}]_i + \frac{\partial L_i}{\partial t} + \tau_{ji,j} = 0,$$

gdzie $J = \rho I/m \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} S \right)$.

Po wyeliminowaniu $\frac{\partial L_i}{\partial t}$ za pomocą (4.18) otrzymamy

$$(4.28) \quad J \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}]_i + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \tau_{ji,j} = 0,$$

gdzie

$$(4.29) \quad \tau'_{ji} = \tau_{ji} - \varepsilon_{ikl} x_k \sigma_{lj}.$$

Porównajmy równanie (4.27) z równaniem «direktorów» (4.10) modelu ERICKSENA-LESLIE. Jeżeli przyjąć, że mamy do czynienia z opisem przestrzennym, zdefiniować można siłę g_i w sposób następujący:

$$g_i = f_i + f'_i - \gamma n_i$$

oraz założyć, że $I = \text{const}$, wówczas otrzymamy równanie

$$(4.30) \quad I \ddot{\mathbf{n}}_i + g_i + \Pi_{ji,j} = 0.$$

Po założeniu, że $J = I$, pomnożeniu (4.30) przez $\varepsilon_{ikl} n_k$ i wprowadzeniu następujących określeń

$$(4.31) \quad \varepsilon_{kij} \sigma_{ij} = \varepsilon_{kij} (n_i g_j - \Pi_{jl} n_{i,l}),$$

$$(4.32) \quad \tau'_{ij} = \varepsilon_{ilk} n_l \Pi_{kj},$$

otrzymamy równanie (4.27).

Można jednak łatwo zauważyć, że brak jest jednoznacznej relacji pomiędzy g_i , Π_{ji} oraz σ_{ij} . Po zdefiniowaniu bowiem g_i , Π_{ji} w sposób następujący:

$$(4.33) \quad g_i = \frac{\partial F}{\partial n_i} - \gamma n_i + \beta_j n_{i,j},$$

$$(4.34) \quad \Pi_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial n_{i,j}} - \beta_j n_i,$$

gdzie β_j są dowolnymi stałymi, γ wyznacza się z warunku $n^2 = 1$, a F jest gęstością energii swobodnej Franka, nie zmieniają się zależności pomiędzy zasadą zachowania momentu pędu i równaniem «direktorów».

Inny model hydrodynamiczny kryształu ciekłego uzyskali ERINGEN i LEE [16]. Jest on przykładem modelu mikropolarnego. Równania tego modelu są następujące:

$$(4.35) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$(4.36) \quad \frac{d}{dt}(i_{kl}) + \varepsilon_{kmn} v_n i_{lm} + \varepsilon_{lmn} v_n i_{km}.$$

Jest to równanie mikroinercji stanowiące wyższe przybliżenie momentowe zasady zachowania masy (przybliżenie drugiego stopnia)

$$(4.37) \quad t_{ji,j} + \rho f_i = \rho \dot{v}_i,$$

$$(4.38) \quad m_{ji,j} + \varepsilon_{imn} t_{mn} + \rho l_i = \rho \dot{\sigma}_i,$$

$$(4.39) \quad \rho \dot{\varepsilon} = \rho h + q_{i,i} + t_{ij}(v_{i,j} - \varepsilon_{ijk} v_k) + m_{ij} v_{j,i}.$$

Są to równania odpowiadające zasadom zachowania pędu, momentu pędu i energii. Występujące tutaj wielkości to i_{kl} — gęstość momentów bezwładności (molekuł), \mathbf{v} wektor prędkości kątowej, m_{ji} tensor naprężeń momentowych, l_i gęstości momentów sił, σ_i gęstości momentów pędu, które wyrażają się następująco:

$$(4.40) \quad \sigma_l = (i_{mn} \delta_{lk} - i_{lk}) v_k.$$

W modelu tym występuje opis materialny. Ruch punktu materialnego, zgodnie z koncepcją mikrostruktury podaną w (2.1), (2.2) przedstawia się następująco:

$$(4.41) \quad x'_k = x_k(X^\alpha, t) = Q_{k\alpha}(X^\alpha, t) \Sigma_\alpha.$$

Z modelu ERINGENA-LEE istnieje również przejście do modelu ERICKSENA-LESLIE (patrz [17]). Wystarczy założyć, że wektor jest jednostkowy oraz równoległy do «direktora» \mathbf{n} w konfiguracji odniesienia (chodzi tutaj o opis materialny). Wtedy

$$(4.42) \quad n_i = \xi_i = Q_{i\alpha} \Sigma_\alpha,$$

$$(4.43) \quad I n_k n_l = \rho i_{kl}.$$

Równanie «direktorów» staje się równoważne zasadzie zachowania momentu pędu, gdy zachodzą relacje podobne do relacji między modelem LUBENSKY'EGO i ERICKSENA-LESLIE. Występuje tu również wyżej wspomniana niejednoznaczność.

Równanie mikroinercji przybiera przy tych założeniach postać zasady zachowania momentów bezwładności

$$(4.44) \quad \dot{I} + I v_{i,i} = 0.$$

W ten sposób można powiedzieć, że modele LUBENSKY'EGO i ERINGENA-LEE są równoważne, chociaż pierwszy z nich jest przybliżony. Pełne badanie ich równoważności będzie przedmiotem osobnych rozważań.

5. Zakończenie

Przedstawiliśmy ośrodki kinematyczne oraz modele opisujące zachowanie się kryształów ciekłych. Podaliśmy przy tym tylko niezbędne i podstawowe wiadomości z tego zakresu. Istnieją bowiem obszerne opracowania przeglądowe zawierające pełniejsze prezen-

тации теории феноменологических oraz szereg głębokich rozważań fizycznych. Szczególnie wartościowa jest najnowsza, obszerna praca przeglądowa z tego zakresu STEPHENA i STRALEYA [13].

Uwagę naszą skoncentrowaliśmy raczej na krytycznej ocenie istniejących środków modelowych. Występujące niejednoznaczności w modelu ERICKSENA-LESLIE przy definicji tensora Π_{ij} oraz w relacji pomiędzy modelami ERICKSENA-LESLIE, LUBENSKY'EGO i ERINGENA-LEE wymagają odrębnego badania.

Kryształy ciekłe wykazują niezwykle interesujące efekty powierzchniowe dopasowania struktury uporządkowań w warstwie przylegającej do ścianek (do geometrii ścianek). Są one bardzo silne. Zagadnieniu temu poświęcono również zbyt mało uwagi (patrz [18]). Niezwykle ważne praktycznie są rozważania z zakresu efektów optyczno-elektrycznych, optyczno-akustycznych itp. Zagadnienia te będą przedmiotem dalszych badań teoretycznych i eksperymentalnych. Niezbędne do tego celu modele elektro- i magneto hydrodynamiczne zostaną przedyskutowane w oddzielnym opracowaniu.

Literatura cytowana w tekście

1. C. C. WANG, *A general theory of superfluids*, ARMA, 6, 20 (1965).
2. B. D. COLEMAN, *Simple liquid crystals*, ARMA, 6, 20 (1965).
3. R. A. TOUPIN, *Theory of elasticity with couple stresses*, ARMA, 17 (1964).
4. R. D. MINDLIN, *Microstructure in linear elasticity*, ARMA, 16 (1964).
5. A. C. ERINGEN, *Theory of micromorphic media*, Int. J. Eng. Sci., 2 (1964) 205.
6. G. H. BROWN, W. G. SHOW, *The mesomorphic state of liquid crystals*, Chem. Rev., 6, 57 (1957), 1049 - 1157.
7. J. L. ERICKSEN, *Anisotropic fluids*, ARMA, 4 (1960), 231 - 237.
8. P. G. de GENNES, *Phenomenology of short-range-order effects in the isotropic phase of nematic materials*, Phys. Lett., 8, 30A (1969), 454 - 455.
9. T. C. LUBENSKY, *Molecular description of nematic liquid crystals*, Phys. Rev., 2, 6 (1970) 2497 - 2514.
10. H. ZÖCHER, *Anisotropy effects in liquid crystals*, Trans. Faraday Soc., 29 (1933).
11. C. W. OSEEN, *The theory of liquid crystals*, Trans. Faraday Soc., 29 (1933), 883 - 889.
12. F. C. FRANK, *On the theory of liquid crystals*, Discussion Faraday Soc., 25 (1958), 19 - 28.
13. M. J. STEPHEN, J. P. STRALEY, *Physics of liquid crystals*, Rev. Mod. Phys., 4, 46 (1974), 617 - 704.
14. J. L. ERICKSEN, *Hydrostatic theory of liquid crystals*, ARMA, 9 (1962), 371 - 378.
15. F. M. LESLIE, *Some constitutive equations for liquid crystals*, ARMA, 4, 28 (1968), 265 - 283.
16. A. C. ERINGEN, J. D. LEE, *Wave propagation in nematic liquid crystals*, J. Chem. Phys., 12, 54 (1971), 5027 - 5034.
17. A. C. ERINGEN, J. D. LEE, *Theories of liquid crystals and ordered fluids*, 2, (1973), 315 - 330.
18. J. L. ERICKSEN, *Liquid crystals and Cosserat surfaces*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 2, 22 (1974), 213-219.

Резюме

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

В работе представлены основные формальные средства макроскопического описания поведения жидких кристаллов. Обсуждена также структура феноменологических гидродинамических моделей, причем выявлены случаи их неэквивалентности и неединственности. Это касается главным образом зависимости между моделью Эриксона-Лесли и моделями Любенского и Эрингена-Ли в области принципа сохранения момента количества движения.

Работа имеет обзорный характер и является введением в тематику «Модели жидких кристаллов», которая будет предметом дальнейших исследований. Электрогидродинамические и магнито-гидродинамические модели, представляющие собой развитие гидродинамических моделей, будут обсуждены в отдельной публикации.

Summary

PHENOMENOLOGICAL MODELS OF A LIQUID CRYSTALLINE MEDIUM

Fundamental formal means have been presented of a macroscopic behaviour of liquid crystals. The structure of phenomenological hydrodynamic models has also been discussed, attention being attracted to their non-equivalence and ambiguity. This refers mainly to the relation between the Ericksen-Leslie's model and those of Lubensky and Eringen-Lee within the conservation principle of the angular momentum.

The work is both a review and a comparison and constitutes an introduction into the subject «Models of liquid crystals» to which further study will be devoted. Electrohydrodynamic and magneto hydrodynamic models, which are developed from hydrodynamic models, will be discussed in a separate publication.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 listopada 1975 r.

KINEMATYCZNA ANALIZA PRZEPLYWÓW CIECZY NIELINIOWO LEPKOSPĘŻYSTYCH

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W chwili obecnej rozwój reologii nienewtonowskich cieczy lepkospężytych odbywa się w kilku kierunkach opierających się na trzech podstawowych podejściach: 1) empirycznym, 2) asymptotycznym i 3) kinematycznym.

W najstarszym historycznie podejściu empirycznym zasadnicze znaczenie posiada zgodność postulowanych równań konstytutywnych z zachowaniem się cieczy rzeczywistych. Ograniczony charakter klasycznego modelu cieczy Newtona oraz dążenie do ilościowego ujęcia takich zjawisk, jak zmienna lepkość cieczy przy różnych szybkościach przepływu, efekty relaksacyjne i efekty naprężeń normalnych, przepływy wtórne w rurach o przekrojach niekołowych itp., doprowadziły do olbrzymiej ilości różnych modeli empirycznych stosowanych przez różnych autorów (por. np. [1, 2, 3, 4]). Niewątpliwą zaletą podejścia empirycznego jest możliwość uzyskania stosunkowo prostych równań pozwalających na efektywne rozwiązania wielu zagadnień praktycznych. Zasadniczą jego wadą jest brak jakichkolwiek gwarancji, że równania empiryczne dobrze opisujące własności cieczy w pewnych szczególnych przepływach okażą się wystarczająco dobre dla innych przepływów.

Podejście asymptotyczne, oparte na teoretycznych podstawach mechaniki ośrodków ciągłych, pozwala na uzyskanie uproszczonych równań konstytutywnych dla przepływów wystarczająco powolnych, opóźnionych, z małymi deformacjami, małymi częstościami itp. Dzięki podstawowym dziś pracom RIVLINA, GREENA, COLEMANA, NOLLA, TRUESDELLA i innych badaczy (por. [5, 6, 7, 8, 9]), ten sposób doprowadził do sformułowania matematycznej teorii rozwinięć asymptotycznych oraz do rozwiązania wielu interesujących zagadnień. Poważną wadą asymptotycznego podejścia są dość silne założenia ograniczające, co prowadzi do zadowalających wyników tylko przy ścisłym spełnieniu tych założeń. W większości wypadków konieczna jest również znajomość rozwiązań odpowiednich zagadnień opisywanych równaniami Naviera-Stokesa (por. [5, 10]).

Dla ilustracji posłużymy się przykładem nieściśliwej cieczy rzędu drugiego (por. [5]), której równanie konstytutywne dość dobrze opisuje stosunkowo powolne przepływy cieczy lepkospężytych z małymi czasami charakterystycznymi (naturalnymi). Równanie to przybiera postać (por. np. [10])

$$(1.1) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \eta_0 \mathbf{A}_1 - \eta_0 \theta \mathbf{A}_2 + \eta_0 (\theta + \theta^*) \mathbf{A}_1^2, \quad \text{tr} \mathbf{A}_1 = 0,$$

gdzie $\mathbf{T}(t)$ jest tensorem naprężenia, p — ciśnieniem hydrostatycznym, zaś \mathbf{A}_i ($i = 1, 2, \dots$) oznaczają kinematyczne tensory Rivlina-Ericksena (por. [6, 5]) zdefiniowane następująco:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T, \\ \mathbf{A}_{n+1} &= \dot{\mathbf{A}}_n + \mathbf{A}_n \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{A}_n, \end{aligned}$$

przy czym $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest polem prędkości, zaś kropką oznaczono materialną pochodną względem czasu. Stała materiałowa η_0 posiada wymiar lepkości, a stałe θ i θ^* — wymiar czasu (θ — charakterystyczny czas cieczy). W założeniu, że przepływ jest przepływem pełzającym (quasi-statycznym), dla którego pole prędkości i ciśnienie mogą być przedstawione w postaci: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots$, $p = p_1 + p_2 + \dots$, gdzie jedyneką oznaczono odpowiednie wielkości dla cieczy newtonowskiej, równania równowagi prowadzą do zależności (por. [11]):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \nabla p_1 - \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v}_1 &= 0, \\ \nabla p_2 - \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v}_2 &= -\eta_0 \theta \operatorname{div}(\mathbf{A}_2(\mathbf{v}_1) - \mathbf{A}_1^2(\mathbf{v}_1) + \eta_0 \theta^* \operatorname{div} \mathbf{A}_1^2(\mathbf{v}_1)), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pierwsze z powyższych równań jest równaniem Naviera-Stokesa dla przepływu quasi-statycznego, drugie posiada identyczną strukturę, a jego prawa strona zależy wyłącznie od \mathbf{v}_1 , tj. od prędkości odpowiadającej rozwiązaniu zagadnienia brzegowego dla cieczy newtonowskiej. PIPKIN [10] przedyskutował przypadki, w których prawa strona (1.3)₂ jest pewnym polem bezwirowym.

Powyższy przykład dobrze ilustruje rolę, jaką znajomość rozwiązań równań Naviera-Stokesa odgrywa przy stosowaniu metody kolejnych przybliżeń dla nieściślej cieczy rzędu drugiego, której model jest rozwinięciem asymptotycznym równań konstytutywnych cieczy prostej (por. [5, 9]).

Podejście kinematyczne, zgodne z odpowiednią klasyfikacją przepływów (por. [5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]), pozwala na wyprowadzenie uproszczonych równań konstytutywnych przy założeniu szczególnych historii deformacji, geometrii przepływów itp. W literaturze można spotkać różne sposoby kinematycznej klasyfikacji przepływów (por. TRUDELLE, NOLL [5] TANNER [12], LODGE [14], LODGE i WALTERS [15]); w dalszych rozważaniach będziemy postępować zgodnie ze schematem zaproponowanym przez NOLLA [19] i rozwiniętym w pracach autora [16, 17, 18]. Zalecą takiego podejścia jest możliwość uzyskania ogólnych dla danej klasy przepływów równań konstytutywnych oraz możliwość bezpośrednich porównań między różnymi przepływami należącymi do tej samej klasy. Jednakże kinematyczna analiza przepływów często prowadzi do zbyt złożonych równań, zawierających większą liczbę funkcji lub stałych materiałowych.

W niniejszym przeglądzie omawiamy krótko różne sposoby kinematycznej klasyfikacji przepływów, a następnie przechodzimy do przedyskutowania przepływów wiskozymetrycznych (PW), ruchów ze stałą historią deformacji (RSHD) i ruchów z proporcjonalną historią deformacji (RPHD). Dalszymi uogólnieniami będą ruchy z nałożonymi proporcjonalnymi historiami deformacji (RNPHD), a w szczególności przepływy złożone z ustalonego przepływu podstawowego (wiskozymetrycznego lub rozciągającego) i małych dodatkowych zaburzeń o charakterze oscylacyjnym.

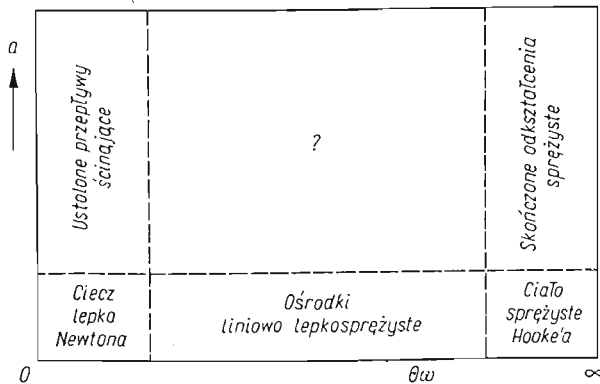
2. Różne sposoby kinematycznej klasyfikacji przepływów

Rozwój mechaniki ośrodków ciągłych, a w szczególności nieliniowych cieczy lepko-sprężystych, doprowadził do stwierdzenia, że tylko określone własności cieczy odgrywają istotną rolę w przepływach charakteryzujących się szczególnym typem historii kinema-

tycznej (por. TRUESDELL, NOLL [5], PIPKIN [10], ASTARITA, DENN [13]). Innymi słowy, ilość informacji o własnościach danej, nawet bardzo ogólnej, cieczy jest ograniczona i zależy wyłącznie od tego do jakiej klasy kinematycznej należy rozważany przepływ. W tym też sensie niektóre równania konstytutywne (np. nieściśliwej cieczy rzędu drugiego) otrzymane za pomocą metod asymptotycznych zachowują swoją ważność dla określonych klas przepływów (por. [5]).

Stosowane przez niektórych autorów sposoby kinematycznej klasyfikacji przepływów są różne, a nawet nie zawsze prowadzą do rozłącznego podziału przepływów. O wyborze takiego lub innego sposobu podziału może decydować matematyczna prostota równań, możliwość wykorzystania równań obowiązujących w ramach tej samej klasy do opisu różnych przepływów, a nawet znaczenie danej klasy przepływów w zastosowaniach praktycznych. Rozważmy kilka spotykanych w literaturze sposobów klasyfikacji przepływów.

Zgodnie z propozycją PIPKINA [10], wszystkie ścinające przepływy cieczy lepkosprężystych można rozważać na następującym schemacie (rys. 1). Na osi odciętych odkłada się



Rys. 1

iloczyn charakterystycznego czasu cieczy θ (np. średniego czasu relaksacji) przez częstość ω charakteryzującą przepływ, przy czym skala jest taka, że iloczyn ten zmienia się od zera do nieskończoności. Na osi rzędnych odmierza się bezwymiarową amplitudę deformacji a . Dla małych wartości $\theta\omega$ otrzymujemy ustalone przepływy ścinające (por. p. 3), a dla bardzo dużych $\theta\omega$ — skończone odkształcenia ośrodków sprężystych. Ponieważ małe amplitudy a odpowiadają liniowej lepkosprężystości, w lewym dolnym rogu schematu, tj. dla bardzo małych $\theta\omega$ i a , jest miejsce dla klasycznych lepkich cieczy Newtona. W prawym dolnym rogu, tj. dla bardzo dużych $\theta\omega$ i bardzo małych a , należy umieścić ośrodki liniowo sprężyste. Chociaż powyższy schemat dobrze ilustruje rolę, jaką parametry o wymiarze czasu, a ściślej stosunek czasu charakterystycznego cieczy θ do czasu ω^{-1} — charakteryzującego proces, odgrywają przy badaniu przepływów, niewiele potrafimy powiedzieć o środkowej części diagramu. Tutaj mieszczą się wszystkie przepływy, dla których istotne są lepkosprężyste własności cieczy, a deformacje wystarczająco duże.

Inną klasyfikację, opierającą się na wcześniejszych rozważaniach LODGE'ŃA [2], proponuje TANNER [12], który dzieli przepływy na «silne» i «slabe». Przykładami tych klas

przepływów są proste przepływy rozciągające (PR) i ścinające, opisane następującymi polami prędkości:

$$(2.1) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2}G(2ix - jy - kz), \quad v = \gamma iy,$$

przy czym G oznacza podłużny gradient rozciągania, a γ — poprzeczny gradient ścinania. Przymiotniki «silne» i «słabe» pochodzą od względnej zdolności danego przepływu do odkształcania mikrostruktury cieczy, co prowadzi do istotnie różnych pól naprężeń. Obliczenie separacji płaszczyzn znajdujących się początkowo blisko siebie pokazuje, że w przepływach rozciągających (silnych) mamy wykładniczą zależność od czasu (proporcjonalną do $\exp 2G(\tau - t)$, gdzie t oznacza aktualną chwilę czasu), a w przepływach ścinających (słabych) — co najwyżej algebraiczną (np. rzędu $\gamma^2(\tau - t)^2$). Wszystkie przepływy można w ten sposób zaliczyć albo do słabych, albo też do silnych. Na przykład, ruchy ze stałą historią deformacji (por. p. 4) należą do przepływów słabych (por. [12]).

Bardziej złożoną kinematyczną klasyfikację przepływów zaproponował niedawno LODGE [14] (por. także LODGE i WALTERS [15]), dzieląc wszystkie przepływy na «ścinające» i «rozciągające» (PR). W myśl jego definicji przepływ należy do klasy przepływów ścinających, jeśli: 1) każdy poruszający się element materialny zachowuje swoją objętość, 2) istnieje jednoparametrowa rodzina izometrycznych (nierozciągliwych) powierzchni materialnych, którą można związać z odpowiednim układem współrzędnych konwekcyjnych (deformujących się razem z ośrodkiem). Dalszy podział obejmuje definicje przepływów jednokierunkowych, ustalonych, niezależnych od czasu itp. Klasyfikacja LODGE'A pozwala łatwo stwierdzić, czy dany przepływ jest «zbliżony do wiskozymetrycznego» w sensie definicji PIPKINA i OWENA [20] oraz czy jego historia jest stała (por. p. 3). Na przykład przepływ w ortogonalnym reometrze MAXWELLA [21] charakteryzuje się stałą historią deformacji, podczas gdy przepływy w reometrze balansowym i reometrze z mimośrodowymi cylindrami nie wykazują tej własności (por. [15, 18]).

Klasyfikacja kinematyczna omawiana w dalszych punktach została zapoczątkowana pracami COLEMANA i NOLLA (por. [19, 22]), w których w sposób ogólny zdefiniowano przepływy wiskozymetryczne (PW), przepływy ze stałą historią deformacji (RSHD) i inne. Decydujące znaczenie przy takiej klasyfikacji posiada historia gradientu deformacji, a ściślej jego części odpowiedzialnej za czyste wydłużenie (bez efektów obrotu). Dla pewnych szczególnych historii deformacji, nawet ogólna ciecz prosta COLEMANA-NOLLA (por. [5]) o mniej lub bardziej złożonej «pamięci» niewiele ma do zapamiętania, a jej równanie konstytutywne upraszcza się istotnie.

Punktem wyjścia do dalszej analizy będzie równanie konstytutywne nieściśliwej cieczy prostej w postaci następującej:

$$(2.2) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \int_{s=0}^{\infty} \mathfrak{F}(\mathbf{F}'_t(s)), \quad \det \mathbf{F}'_t(s) = 1,$$

gdzie $\mathbf{T}(t)$ jest tensorem naprężenia, p — ciśnieniem hydrostatycznym, a funkcjonal konstytutywny \mathfrak{F} spełnia warunek izotropii (por. [5])

$$(2.3) \quad \mathbf{R}(0) \int_{s=0}^{\infty} \mathfrak{F}(\mathbf{F}'_t(s)) \mathbf{R}^T(0) = \int_{s=0}^{\infty} \mathfrak{F}(\mathbf{R}(s) \mathbf{F}'_t(s)) \mathbf{R}^T(0), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(s)|_{s=0},$$

dla każdego ortogonalnego $\mathbf{R}(s)$ i każdej historii gradientu względnej deformacji $\mathbf{F}'_t(s)$ rozumianej jako

$$(2.4) \quad \mathbf{F}'_t(s) = \mathbf{F}'_t(t-s), \quad s \in [0, \infty),$$

przy czym gradient deformacji względem konfiguracji odniesienia w aktualnej chwili czasu t wynika z definicji

$$(2.5) \quad \mathbf{F}_t(\tau) = \nabla \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad \xi(\tau) = \chi_t(\mathbf{x}, \tau),$$

gdzie $\chi_t(\mathbf{x}, \tau)$ określa ruch ośrodka. Pole prędkości wynika z zależności

$$(2.6) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{d}{d\tau} \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\tau=t}.$$

Prawy tensor względnej deformacji (tensor Cauchy-Greena) (por. [5]) definiuje się następująco:

$$(2.7) \quad \mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\tau), \quad \mathbf{C}_t(t) = \mathbf{F}_t(t) = \mathbf{1}.$$

3. Przepływy wiskozymetryczne

Bardzo obszerna i geometrycznie prosta klasa przepływów wiskozymetrycznych (oznaczanych dalej skrótem PW) najwcześniej zainteresowała badaczy z uwagi na jej znaczenie teoretyczne i liczne zastosowania w technologii, badaniach laboratoryjnych itp. (por. [5, 23]).

Dla ilustracji własności cieczy ujawniających się w ustalonych i nieustalonych PW, posłużymy się przykładem prostego przepływu ścinającego (por. [23]), dla którego pole prędkości i równania ruchu przyjmują w kartezjańskim układzie współrzędnych postać następującą:

$$(3.1) \quad v^x = \kappa y, \quad v^y = v^z = 0,$$

$$(3.2) \quad \xi(\tau) = x + \kappa y(\tau - t), \quad \eta(\tau) = y, \quad \zeta(\tau) = z,$$

gdzie κ jest stałą szybkością ścinania (gradientem ścinania), a współrzędne (ξ, η, ζ) wyznaczają położenie cząstki w dowolnym czasie $\tau < t$. Historia gradientu względnej deformacji (2.5) w postaci

$$(3.3) \quad \mathbf{F}'_t(s) = \mathbf{1} - s\mathbf{M}, \quad [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $[\mathbf{M}]$ jest stałą macierzą, po wstawieniu do (2.2) i wykorzystaniu (2.3) prowadzi do zależności

$$(3.4) \quad \mathbf{T}(t) + p\mathbf{1} = \mathbf{h}(\mathbf{M}).$$

Funkcja \mathbf{h} jest funkcją izotropową spełniającą warunek

$$(3.5) \quad \mathbf{Q}\mathbf{h}(\mathbf{M})\mathbf{Q}^T = \mathbf{h}(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T).$$

dla każdego ortogonalnego \mathbf{Q} . Wybierając \mathbf{Q} w postaci

$$(3.6) \quad [\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

otrzymamy dla tensora naprężenia macierz następującą:

$$(3.7) \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & 0 \\ T^{21} & T^{22} & 0 \\ 0 & 0 & T^{33} \end{bmatrix}.$$

Powyższe wyniki są również prawdziwe dla każdego przepływu, w którym historia gradientu deformacji dla wybranej cząstki materialnej i chwili czasu ma postać (3.3) w pewnej ortonormalnej bazie \mathbf{g}_i . Dowodzi się (por. [5, 23]), że baza taka istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M}^2 = \mathbf{0}$. Przepływy spełniające powyższe warunki są przepływami lokalnie wiskozymetrycznymi.

Wprowadzając definicje trzech funkcji wiskozymetrycznych w sposób następujący:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \tau(\kappa) &= \kappa\eta(\kappa) = T^{12}, \\ \sigma_1(\kappa) &= T^{11} - T^{33}, \\ \sigma_2(\kappa) &= T^{22} - T^{33}, \end{aligned}$$

możemy równanie konstytutywne (3.4) sprowadzić do postaci

$$(3.9) \quad \mathbf{T}(t) = T^{33}\mathbf{1} + \tau(\kappa)(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T) + \sigma_1(\kappa)\mathbf{N}\mathbf{N}^T + \sigma_2(\kappa)\mathbf{N}^T\mathbf{N},$$

gdzie $\mathbf{N} = \kappa^{-1}\mathbf{M}$.

Z teorii przepływów wiskozymetrycznych (por. [5, 23]) wynika, że:

1) Wszystkie dotychczas podane zależności są słuszne dla zmiennej (obracającej się) bazy \mathbf{g}_i ; zatem funkcje wiskozymetryczne są funkcjami materiałowymi niezależnymi od przyjętej bazy współrzędnych.

2) Funkcja naprężenia ścinającego $\tau(\kappa)$ i funkcje różnic naprężeń normalnych $\sigma_1(\kappa)$, $\sigma_2(\kappa)$ są odpowiednio nieparzystą i parzystymi funkcjami zmiennej κ .

3) Analogiczne rozważania są prawdziwe również dla przypadku, w którym tensor \mathbf{M} (stały dla prostego ścinania), szybkość κ i baza \mathbf{g}_i zależą od czasu aktualnego t .

Ustalony PW można zatem zdefiniować jako przepływ, dla którego

$$(3.10) \quad \mathbf{F}'_t(s) = \mathbf{R}(s)(\mathbf{1} - s\mathbf{M}), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{1},$$

przy czym $\mathbf{R}(s)$ jest tensorem ortogonalnym dla każdego $0 \leq s < \infty$, a tensor \mathbf{M} w bazie \mathbf{g}_i ma postać (3.3)₂.

Uogólniając powyższą definicję na przepływy nieustalone, można stwierdzić, że dla nieustalonego lokalnego PW

$$(3.11) \quad \mathbf{F}'_t(s) = \mathbf{R}(s)(\mathbf{1} + g(s)\mathbf{M}(t)), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{1},$$

gdzie $g(s)$ jest funkcją s , zależną również od parametru t (por. (4.14)₂). Dany PW jest przepływem globalnie wiskozymetrycznym, jeśli zależność (3.11) jest spełniona wzdłuż

toru każdej cząstki materialnej. W tym przypadku zamiast funkcji (3.8) wprowadza się następujące funkcjonały materiałowe (por. [5]):

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \int_{s=0}^{\infty} (g(s)) &= T^{12}, \\ \mathfrak{S}_1 \int_{s=0}^{\infty} (g(s)) &= T^{11} - T^{33}, \\ \mathfrak{S}_2 \int_{s=0}^{\infty} (g(s)) &= T^{22} - T^{33}. \end{aligned}$$

Odpowiednie równanie konstytutywne przyjmuje postać podobną do (3.9), przy czym zamiast funkcji wiskozymetrycznych należy wstawić funkcjonały (3.12).

Klasa PW znajdująca szerokie zastosowanie w reometrii i przetwórstwie polimerów obejmuje liczne znane przepływy, jak przepływ Poiseuille'a i Couette'a, przepływy helikoidalne i skręcające, przepływ w reogoniometrze Weissenberga itp. Należy jednak pamiętać, że istnieją również inne ważne przepływy nie należące do klasy PW, jak np. przepływy rozciągające (PR), przepływy w zbieżnych kanałach i dyszach, przepływy w reometrach z mimosrodami itp. (por. [18]).

4. Przepływy ze stałą i proporcjonalną historią deformacji

Istotnym uogólnieniem klasy ustalonych PW są tzw. ruchy ze stałą historią deformacji (oznaczane dalej jako RSHD) zdefiniowane przez NOLLA [19] oraz COLEMANA [22]. Dla tych ruchów, podobnie jak dla ustalonych PW, historia deformacji otoczenia danej cząstki jest zawsze taka sama, z dokładnością do sztywnego obrotu.

W myśl definicji RSHD (por. [19, 16]) gradient deformacji względem konfiguracji odniesienia w dowolnie wybranej chwili 0 przybiera postać

$$(4.1) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp(\tau \mathbf{M}), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1},$$

przy czym \mathbf{M} jest stałym tensorem (zależnym co najwyżej od parametru t), zaś \mathbf{Q} — dowolnym tensorem ortogonalnym (np. charakteryzującym obrót cząstki od chwili 0 do chwili aktualnej t).

Biorąc pod uwagę, że

$$(4.2) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau) \mathbf{F}_0(t)$$

oraz wykorzystując (2.7), otrzymamy historię prawego tensora względnej deformacji w postaci następującej:

$$(4.3) \quad \mathbf{C}_t^i(s) = \mathbf{F}_t^i T(s) \mathbf{F}_t^i(s) = \exp(-s \mathbf{L}^T) \exp(-s \mathbf{L}),$$

gdzie $\mathbf{L}(t)$ jest obróconym tensorem parametrycznym (por. [24]) oraz

$$(4.4) \quad \mathbf{L}(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{M} \mathbf{Q}^T(t).$$

Tensor \mathbf{L} jest gradientem pola prędkości w obracającym się układzie odniesienia i jego związek z gradientem przestrzennym $\bar{\mathbf{L}}_1$ jest następujący:

$$(4.5) \quad \bar{\mathbf{L}}_1(t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t).$$

Dowodzi się (por. [24, 18]), że wszystkie ustalone i jednorodne pola prędkości, dla których $\bar{\mathbf{L}}_1 = \text{const}$, generują RSHD, przy czym $\mathbf{Q}(\tau) \equiv \mathbf{1}$. Natomiast nie dla wszystkich RSHD odpowiednie pola prędkości są ustalone i jednorodne; warunek $\bar{\mathbf{L}}_1 = \text{const}$ jest warunkiem wystarczającym, aby $\dot{\bar{\mathbf{L}}}_1 = 0$.

Klasyfikację RSHD zdefiniowanych wzorem (4.1) można przeprowadzić zgodnie ze schematem NOLLA [19] (por. [18]). Otrzymujemy w ten sposób trzy podklasy, dla których:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \text{I} - \mathbf{M}^2 &= \mathbf{0}, \\ \text{II} - \mathbf{M}^2 &\neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^3 = \mathbf{0}, \\ \text{III} - \mathbf{M}^n &\neq \mathbf{0} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Podklasa (I) obejmuje wszystkie ustalone PW, dla których zawsze $\mathbf{M}^2 = \mathbf{0}$ i definicja (4.1) staje się równoważna (3.10). Do podklasy (II) zalicza się tzw. *podwójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne* (por. HUIŁGOL [25]), powstałe ze złożenia niektórych pól prędkości dla zwykłych PW. Najbardziej interesującą wydaje się podklasa (III) obejmująca oprócz *potrójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych* (por. [25]), ustalone przepływy rozciągające (PR), przepływy w ortogonalnym reometrze Maxwella i inne (por. [18]). Warto również podkreślić, że przepływy powstające ze złożenia kilku PW mogą należeć do każdej z trzech wymienionych podklas. I tak np. złożenie przepływów Poiseuille'a i Couette'a daje wiskozymetryczny przepływ helikoidalny, podczas gdy złożenie dwóch prostopadłych przepływów ścinających prowadzi do przypadku czystego ścinania, równoważnego przepływowi rozciągającemu (PR) (por. [16, 25]).

Podstawienie (4.3) do równania konstytutywnego nieściśliwej cieczy prostej w postaci

$$(4.7) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \mathfrak{G} \left(\mathbf{C}_i^t(s) \right), \quad \det \mathbf{C}_i^t(s) = 1,$$

gdzie \mathfrak{G} jest funkcjonałem izotropowym, prowadzi do zależności (por. [18]):

$$(4.8) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \mathbf{g}(\mathbf{L}), \quad \mathbf{Qg}(\mathbf{L})\mathbf{Q}^T = \mathbf{g}(\mathbf{QLQ}^T).$$

Twierdzenie o reprezentacji udowodnione przez WANGA [26] daje

$$(4.9) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3),$$

gdzie \mathbf{A}_i ($i = 1, 2, 3$) oznaczają trzy pierwsze tensory kinematyczne Rivlina-Ericksena [por. (1.2)]. Dla wielu interesujących przypadków, a w szczególności, gdy wartości własne tensora \mathbf{A}_1 są różne, funkcja \mathbf{f} w (4.9) zależy tylko od argumentów \mathbf{A}_1 i \mathbf{A}_2 . Mamy wówczas (por. [6]):

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}(t) = & -p\mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 + \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \\ & + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) + \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) + \alpha_8 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2), \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{A}_i ($i = 1, \dots, 8$) są funkcjami wspólnych niezmienników utworzonych z \mathbf{A}_1 i \mathbf{A}_2 .

Dla każdego RSHD ilość niezależnych funkcji materiałowych wynosi co najwyżej pięć. Na przykład dla prostego rozciągania (PR), dla którego $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^2$, otrzymamy

$$(4.11) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \beta_1 (\text{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1 + \beta_2 (\text{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1^2.$$

Funkcje β_1 i β_2 wyrażają się w prosty sposób przez funkcje materiałowe α_i . Istnieje zatem możliwość wykorzystania równań konstytutywnych określonych dla niektórych przepływów podklasy (III) do opisu własności cieczy w innych przepływach należących do tej samej podklasy, np. w przepływach rozciągających (por. [17, 18]).

Dalszym uogólnieniem klasy RSHD są tzw. ruchy z proporcjonalną historią deformacji (por. ZAHORSKI [17]), oznaczane dalej jako RPHD. W założeniu, że w zależności podobnej do (4.1) wykładnik tensorowy odpowiedzialny za historię czystego odkształcenia jest proporcjonalny do pewnej gładkiej funkcji czasu $k(\tau)$, otrzymamy następującą definicję RPHD:

$$(4.12) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\exp(k(\tau)\mathbf{M}), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1}, \quad k(0) = 0,$$

gdzie \mathbf{M} jest stałym tensorem, a $\mathbf{Q}(\tau)$ — tensorem ortogonalnym.

Postępując podobnie jak poprzednio, można wykazać, że dla RPHD (por. [17]):

$$(4.13) \quad \mathbf{C}'_i(s) = \mathbf{F}'_i{}^T(s)\mathbf{F}'_i(s) = \exp(g(s)\mathbf{N}^T)\exp(g(s)\mathbf{N}),$$

gdzie

$$(4.14) \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t), \quad g(s) = k(t-s) - k(t).$$

Wprowadzając pojęcie obróconego tensora parametrycznego (por. [24]), mianowicie

$$(4.15) \quad \mathbf{L}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\dot{k}(t)\mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{N}(t)\dot{k}(t),$$

otrzymamy równoważną definicję RPHD:

$$(4.16) \quad \mathbf{C}'_i(s) = \exp\left(\frac{g(s)}{\dot{k}(t)}\mathbf{L}^T\right)\exp\left(\frac{g(s)}{\dot{k}(t)}\mathbf{L}\right).$$

Tensor \mathbf{L} jest również gradientem pola prędkości w obracającym się układzie odniesienia.

Podobnie jak dla RSHD można dowieść, że wszystkie jednorodnie w przestrzeni pola prędkości, dla których $\bar{\mathbf{L}}_1(t) = \mathbf{N}\dot{k}(t)$, gdzie $\mathbf{N} = \text{const}$, generują RPHD, przy czym $\mathbf{Q}(\tau) \equiv \mathbf{1}$ (por. [17]), jeśli tylko funkcja $\dot{k}(t)$ jest całkowalna. Także klasyfikację RPHD przeprowadza się podobnie [por. (4.6)]. O zaliczeniu przepływu do danej podklasy decyduje tensor \mathbf{M} , \mathbf{N} lub \mathbf{L} . Podklasa (I) obejmuje wszystkie nieustalone PW z proporcjonalną historią w zdefiniowanym sensie. Ruchy złożone z dwóch lub trzech nieustalonych PW będą na ogół należeć do podklasy (II) i (III). Nieustalone przepływy rozciągające (PR) z proporcjonalną historią deformacji oraz pewne nieustalone przepływy w reometrach nowego typu (por. [18]) znajdą się w podklasie (III).

Podstawiając (4.13) lub (4.16) do równania konstytutywnego (4.7), otrzymamy

$$(4.17) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \int_{s=0}^{\infty} (g(s); \mathbf{N}) = -p\mathbf{1} + \int_{s=0}^{\infty} (g(s); \mathbf{L}),$$

przy czym funkcjonały \int lub \mathfrak{R} są równocześnie funkcjami izotropowymi argumentów \mathbf{N} lub \mathbf{L} .

Twierdzenie o reprezentacji dla RPHD (ZAHORSKI [17]) rozróżnia trzy następujące przypadki: 1) \mathbf{A}_1 ma trzy różne wartości własne, 2) \mathbf{A}_1 ma tylko dwie równe wartości własne, 3) \mathbf{A}_1 ma trzy identyczne wartości własne. Na podstawie tego twierdzenia równania konstytutywne przyjmują jedną z poniższych postaci:

$$(4.18) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{L}}}(g(s); \mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t)),$$

$$(4.19) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{M}}}(g(s); \mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \mathbf{A}_3(t)).$$

Funkcjonały \mathcal{L} lub \mathcal{M} są równocześnie izotropowymi funkcjami argumentów zapisanych po średniku. Dla równania (4.18) pozostaje w mocy rozwinięcie typu (4.10), z tym że odpowiednie α_i zależą od czasu aktualnego t oraz wspólnych niezmienników utworzonych z \mathbf{A}_1 i \mathbf{A}_2 . Jeśli funkcja $k(\tau)$ zawiera inne parametry przepływu, np. częstość drgań, to α_i zależą również od tych parametrów.

Jako ilustrację RPHD rozważmy nieustalony przepływ w ortogonalnym reometrze Maxwella (por. [21]). Ponieważ równanie typu (4.10) jest słuszne zarówno dla przepływu w reometrze Maxwella (podklasa III), jak i dla przepływu rozciągającego (PR), funkcje materiałowe lub ich kombinacje wyznaczone dla przepływu w reometrze mogą być wykorzystane w sposób przybliżony do wyznaczania lepkości podłużnej w przepływie rozciągającym z identyczną zależnością od czasu $k(\tau)$.

5. Przepływy z nałożonymi proporcjonalnymi historiami deformacji i przepływy złożone

W celu dalszego uogólnienia definicji (4.1) i (4.2) można założyć, że dla wielu przepływów złożonych gradient deformacji względem konfiguracji w chwili 0 przyjmuje postać (por. [17])

$$(5.1) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp\left(\sum_{i=1}^n k_i(\tau) \mathbf{M}_i\right), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1}, \quad k_i(0) = 0,$$

gdzie $\mathbf{M}_i (i = 1, \dots, n)$ oznaczają stałe tensory, $k_i(\tau)$ — dowolne gładkie funkcje czasu, zaś $\mathbf{Q}(\tau)$ — tensor ortogonalny. Dla tak zdefiniowanych ruchów z nałożonymi proporcjonalnymi historiami deformacji (oznaczanych skrótem RNPHD), przyjmujemy ponadto, że

$$(5.2) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \prod_{i=1}^n \exp(k_i(\tau) \mathbf{M}_i), \quad \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i,$$

tzn. że tensory \mathbf{M}_i wzajemnie komutują.

Postępując podobnie jak poprzednio i oznaczając

$$(5.3) \quad g_i(s) = k_i(t-s) - k_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

otrzymamy

$$(5.4) \quad \mathbf{C}'_i(s) = \exp\left(\sum_{i=1}^n g_i(s) \mathbf{N}_i^T\right) \exp\left(\sum_{i=1}^n g_i(s) \mathbf{N}_i\right)$$

lub

$$(5.5) \quad \mathbf{C}'_i(s) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{g_i(s)}{\dot{k}_i(t)} \mathbf{L}_i^T\right) \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{g_i(s)}{\dot{k}_i(t)} \mathbf{L}_i\right),$$

gdzie

$$(5.6) \quad \mathbf{N}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}_i\mathbf{Q}^T(t), \quad \mathbf{L}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}_i\dot{\mathbf{k}}_i(t)\mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{N}_i\dot{\mathbf{k}}_i(t).$$

Podobnie jak dla RPHD, pola prędkości z gradientami w postaci $\bar{\mathbf{L}}_1 = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{k}}_i(t)\mathbf{N}_i$, gdzie \mathbf{N}_i są stałymi komutującymi tensorami, a $\dot{\mathbf{k}}_i(t)$ — funkcjami całkowalnymi, zawsze generują przepływy należące do RNPHD. Klasyfikację tych przepływów można również przeprowadzić badając własności tensora $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{k}}_i(t)\mathbf{N}_i(t)$. Na przykład, dla ruchów złożonych z dwóch PW, dla których $\mathbf{L}'^2 = \mathbf{L}''^2 = \mathbf{0}$, przepływ określony przez $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}''$ należy do podklasy PW, wtedy i tylko wtedy, jeśli

$$(5.7) \quad \mathbf{L}'\mathbf{L}'' = \mathbf{L}''\mathbf{L}' = \mathbf{0}.$$

Przykładem takiego przepływu jest przepływ helikoidalny, w którym prędkość kątowa i osiowa zależą w różny sposób od czasu.

Równania konstytutywne dla omawianej obecnie klasy RNPHD otrzymamy podstawiając np. (5.4) do równania (4.7). Mamy wówczas (por. [17])

$$(5.8) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \int_{s=0}^{\infty} (g_i(s); \mathbf{N}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

przy czym

$$(5.9) \quad \mathbf{Q} \int_{s=0}^{\infty} (g_i(s); \mathbf{N}_i)\mathbf{Q}^T = \int_{s=0}^{\infty} \left(\alpha_i g_i(s); \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{Q}\mathbf{N}_i\mathbf{Q}^T \right)$$

dla każdego ortogonalnego \mathbf{Q} i wszystkich zbiorów rzeczywistych niezerowych α_i . Podobne równania obowiązują również dla tensorów \mathbf{L}_i .

Szczególnie interesujący, ze względu na liczne zastosowania, jest przypadek dwóch nałożonych ruchów, z których pierwszy (oznaczony wskaźnikiem 1) jest ruchem podstawowym, najczęściej ustalonym, a drugi (oznaczony wskaźnikiem 2) — ruchem dodatkowym nałożonym na ruch podstawowy. Wówczas

$$(5.10) \quad \mathbf{C}'_i(s) = \exp(g_1(s)\mathbf{N}_1^T)\mathbf{C}_2(s)\exp(g_1(s)\mathbf{N}_1),$$

gdzie

$$(5.11) \quad \mathbf{C}_2(s) = \exp(g_2(s)\mathbf{N}_2^T)\exp(g_2(s)\mathbf{N}_2).$$

Należy pamiętać, że dla przepływów izochorycznych

$$(5.12) \quad \det \mathbf{C}'_i(s) = \det \mathbf{C}_1(s) = \det \mathbf{C}_2(s) = 1, \quad \text{tr} \mathbf{N}_1 = \text{tr} \mathbf{N}_2 = 0.$$

Podstawiając (5.10) do (4.7) można pokazać (por. [27, 28]), że

$$(5.13) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \int_{s=0}^{\infty} \mathfrak{R}(g_1(s), \mathbf{G}(s); \mathbf{N}_1), \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}_2(s) - \mathbf{1},$$

przy czym \mathfrak{R} jest funkcjonalem względem $g_1(s)$ i $\mathbf{G}(s)$ oraz izotropową funkcją argumentu \mathbf{N}_1 .

Dla pewnych typów ruchów dodatkowych, mianowicie dla historii mało różniących się w sensie odpowiedniej normy, można uzyskać bardziej konkretną postać równania (5.13). Zgodnie z zasadą zanikającej pamięci (por. [5]), jeśli funkcjonal \mathfrak{R} jest różniczkowo-

walny w sensie Fréchet'a względem $\mathbf{G}(s)$ w sąsiedztwie zerowej historii, będąc jednocześnie ciągłym względem $g_1(s)$ i \mathbf{N}_1 , to

$$(5.14) \quad \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s), \mathbf{G}(s); \mathbf{N}_1) = \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s), \mathbf{0}; \mathbf{N}_1) + \delta_{\mathbf{G}} \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s)|\mathbf{G}(s); \mathbf{N}_1) + o(\|\mathbf{G}(s)\|^2),$$

gdzie $\delta_{\mathbf{G}}\mathfrak{R}$ oznacza funkcjonal liniowy względem $\mathbf{G}(s)$ oraz

$$(5.15) \quad \lim_{\|\mathbf{G}\| \rightarrow 0} \frac{o(\|\mathbf{G}(s)\|^2)}{\|\mathbf{G}\|(s)^2} = 0, \quad \text{tr } \delta_{\mathbf{G}} \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s)|\mathbf{G}(s); \mathbf{N}_1) = 0.$$

Funkcjonal liniowy względem $\mathbf{G}(s)$ może być przedstawiony w postaci całki

$$(5.16) \quad \delta_{\mathbf{G}} \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s)|\mathbf{G}(s); \mathbf{N}_1) = \int_0^{\infty} \Phi(g_1(s); \mathbf{N}_1) [\mathbf{G}(s)] ds,$$

gdzie $\Phi[\mathbf{G}(s)]$ oznacza transformację liniową.

Dalszy postęp w rozwinięciu równań (5.13), (5.16) uzyskuje się dla ustalonych wiskozymetrycznych lub rozciągających przepływów podstawowych. Wtedy funkcjonal $\mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s), \mathbf{0}; \mathbf{N}_1)$ sprowadza się do postaci zbliżonej do (3.9) lub (4.11). Możliwe jest również rozwinięcie wyrażenia podcałkowego w (5.16), przy czym współczynniki rozwinięcia są funkcjami zarówno s , jak i $\kappa^2 = \text{tr} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1$ (por. [27]).

Często ruchy dodatkowe charakteryzujące się małymi deformacjami występują w postaci okresowo oscylujących zaburzeń nałożonych na ustalone przepływy podstawowe. Można wówczas rozważać dwa rodzaje zagadnień: 1) wpływ szybkości odkształcenia przepływu podstawowego na dynamiczne charakterystyki (lepkości, moduły, podatności itp.) cieczy w przepływie zaburzonym, 2) wpływ częstości, amplitudy itp. zaburzeń na parametry ustalonego przepływu podstawowego. Z punktu widzenia geometrii przepływu, zaburzenia mogą występować w kierunku równoległym i prostopadłym do kierunku przepływu podstawowego.

Na przykład, lepkości dynamiczne cieczy w zaburzonych przepływach ścinających są z reguły mniejsze niż odpowiednia lepkość $\eta(0)$ dla przepływu ustalonego przy zerowej szybkości ścinania. Dla bardzo małych częstości otrzymuje się następujące wartości graniczne (por. [27, 28]):

$$(5.17) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{\parallel}(\kappa, \omega) = \frac{d\tau(\kappa)}{d\kappa} = \eta(\kappa) \left(1 + \frac{d \ln \eta}{d \ln \kappa} \right)$$

przy zaburzeniach równoległych oraz

$$(5.18) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{\perp}(\kappa, \omega) = \frac{\tau(\kappa)}{\kappa} = \eta(\kappa)$$

przy zaburzeniach prostopadłych. $\tau(\kappa)$ jest wiskozymetryczną funkcją naprężenia ścinającego, a $\eta(\kappa)$ — funkcją lepkości dla przepływu ustalonego. Podobne zależności obowiązują również dla modułów dynamicznych i wielkości charakteryzujących naprężenia normalne (por. [28, 29]).

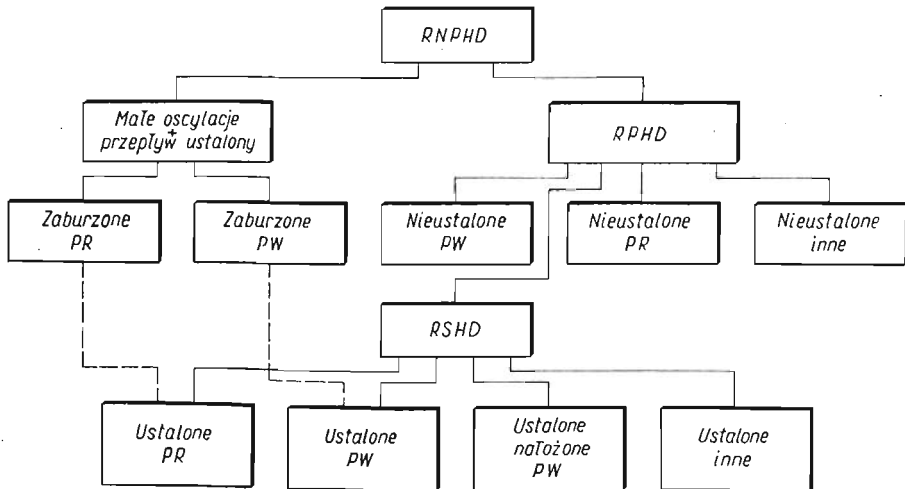
Jak wykazali JONES i WALTERS [30] wpływ małych oscylujących zaburzeń na charakterystyki przepływu podstawowego może być w pewnych przypadkach dość znaczny.

Oznaczając przez ε mały parametr określający stosunek szybkości zmiany amplitudy równoległego zaburzenia do szybkości ustalonego ścinania κ , otrzymamy

$$(5.19) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \Delta \langle T^{12} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \kappa^3 \int_0^{\infty} \psi(s, \kappa^2) s^2 ds \quad \text{dla} \quad \varepsilon = \text{const.}$$

A zatem zmiana średniego naprężenia ścinającego $\langle T^{12} \rangle$ jest w granicy $\omega \rightarrow 0$ proporcjonalna do kwadratu parametru ε^2 . Podobne zmiany występują dla naprężeń normalnych oraz w przypadku zaburzeń prostopadłych. Doświadczalnie zaobserwowano (por. [30]) przeszło 10% redukcję średniego momentu obrotowego dla roztworów poliakrylamidu badanych w reometrze Weissenberga z zaburzonym przepływem obrotowym.

Przedstawiona w niniejszym punkcie klasa RNPHD obejmuje wszystkie poprzednio omówione klasy przepływów jako przypadki szczególne. Na rys. 2 podano schemat klasyfikacji ułatwiający zrozumienie relacji między różnymi klasami przepływów.



Rys. 2

Na zakończenie krótkiego przeglądu zagadnień, poświęconych kinematycznej analizie przepływów cieczy lepkosprężystych, należy jeszcze raz podkreślić ogólny charakter takiego podejścia. Znajomość kinematyki danego przepływu, należącego do określonej klasy, pozwala na wykorzystanie właściwych równań konstytutywnych bez żadnych dodatkowych założeń modelowych. Stwarza to z kolei możliwość porównywania przepływów należących do tej samej klasy lub podklasy. Należy jednak pamiętać, że stosowanie analizy kinematycznej do rozwiązania różnych zagadnień brzegowych jest procesem typowo iteracyjnym. Założenie określonej kinematyki przepływu, a następnie stosowanie uproszczonych równań konstytutywnych wymaga ponownego sprawdzenia warunków przepływu łącznie z warunkami brzegowymi. Również rola badań doświadczalnych, pozwalających na określenie odpowiednich funkcji lub parametrów materiałowych charakterystycznych dla danej klasy przepływów, jest w dalszym ciągu bardzo istotna.

Literatura cytowana w tekście

1. M. REINER, *Rheology*, Handbuch der Physik, vol. VI, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.
2. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, London—New York 1964.
3. A. H. P. SKELLAND, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, New York—London—Sydney 1967.
4. S. MIDDLEMAN, *The Flow of High Polymers. Continuum and Molecular Rheology*, New York—London—Sydney—Toronto 1968.
5. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, vol. III/3, Berlin—Heidelberg—New York 1965.
6. R. S. RIVLIN, J. E. ERICKSEN, *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal., **4** (1955) 681.
7. W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rational Mech. Anal., **2** (1958) 197.
8. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal., **1** (1957) 1.
9. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **6** (1960) 355.
10. A. C. PIPKIN, *Lectures on Viscoelasticity Theory*, New York—Heidelberg—Berlin 1972.
11. S. ZAHORSKI, *Powolne przepływy cieczy lepkosprężystych w obszarach wejściowych rur i kanałów*, Mech. Teoret. Stos., **12** (1974) 561.
12. R. I. TANNER, *Progress in experimental rheology*, «Theoretical Rheology» pod red. HUTTONA, PEARSONA i WALTERSA, London 1975, 235.
13. G. ASTARITA, M. M. DENN, *The effect of the non-Newtonian properties of polymer solutions on flow fields*, «Theoretical Rheology» pod red. HUTTONA, PEARSONA i WALTERSA, London 1975, 333.
14. A. S. LODGE, *Body Tensor Fields in Continuum Mechanics, with Applications to Polymer Rheology*, New York 1975.
15. A. S. LODGE, K. WALTERS, *Some examples of the use of body coordinate systems in the kinematics of continuous media*, Rheol. Acta, **14** (1975) 573.
16. S. ZAHORSKI, *Flows with constant stretch history and extensional viscosity*, Arch. Mech., **23** (1971) 433.
17. S. ZAHORSKI, *Flows with proportional stretch history*, Arch. Mech., **24** (1972) 681.
18. S. ZAHORSKI, *Pewne niewiskozymetryczne przepływy cieczy lepkosprężystych*, Mech. Teoret. Stos., **10** (1972) 29.
19. W. NOLL, *Motions with constant stretch history*, Arch. Rational Mech. Anal., **11** (1962) 97.
20. A. C. PIPKIN, D. R. OWEN, *Nearly viscometric flows*, Phys. Fluids, **10** (1967) 836.
21. B. MAXWELL, R. P. CHARTOFF, *Studies of a polymer melt in an orthogonal rheometer*, Trans. Soc. Rheol., **9** (1965) 41.
22. B. D. COLEMAN, *Kinematical concepts with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic liquids*, Arch. Rational Mech. Anal., **9** (1962) 273.
23. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment*, Berlin—Heidelberg—New York 1966.
24. R. R. HUIJLGOL, *Non-viscometric motions with constant stretch history*, A. I. Ch. E. Symp., Washington D. C. 1969.
25. R. R. HUIJLGOL, *On the construction of motions with constant stretch history*, MRC Technical Reports 954, Madison 1968; 975, Madison 1969.
26. C.-C. WANG, *A representation theorem for the constitutive equation of a simple material in motions with constant stretch history*, Arch. Rational Mech. Anal., **20** (1965) 329.
27. S. ZAHORSKI, *Motions with superposed proportional stretch histories as applied to combined steady and oscillatory flows of simple fluids*, Arch. Mech., **25** (1973) 575.
28. S. ZAHORSKI, *Dynamiczne i stacjonarne własności cieczy lepkosprężystych w złożonych przepływach ścinających*, Mech. Teoret. Stos., **11** (1973) 277.
29. H. C. BOOIJ, *Effect of superimposed steady shear flow on dynamic properties of polymeric fluids*, Ph. D. Thesis, Leiden 1970.

30. T. E. R. JONES, K. WALTERS, *The behaviour of materials under combined steady and oscillatory shear*, J. Phys. A. Gen. Phys., 4 (1971) 85.

Р е з ю м е

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

В современной реологии вязко-упругих жидкостей можно выделить три общих подхода: 1) эмпирический подход, 2) асимптотический подход — применяемый для медленных или опаздывающих течений, 3) кинематический подход, в котором выводятся упрощенные физические уравнения для отдельных случаев истории деформирования, геометрии течения и т. п.

В работе представлен кинематический подход, на основании которого коротко оговорены свойства вискозиметрических течений, течений с постоянными и пропорциональными историями деформирования а также других, более сложных течений, включая течения с накладываемой пропорциональной историей деформирования. Ряд выбранных случаев течения рассмотрен более детально.

S u m m a r y

KINEMATICAL FLOW ANALYSIS OF NON-LINEAR VISCOELASTIC FLUIDS

In the modern rheology of viscoelastic fluids three general ways of approach can be distinguished: 1) an empirical approach, 2) an asymptotic approach applied for slow or retarded motions, 3) a kinematical classification approach for which certain simplified constitutive equations are derived for particular deformation histories, flow geometries etc.

According to the kinematical approach we briefly discuss properties of viscometric flows, flows with constant and proportional stretch histories as well as other more complex flows, including flows with superposed proportional stretch histories. Certain examples of particular classes of flows are discussed in greater detail.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 maja 1975 r.



BADANIA MECHANICZNYCH I OPTYCZNYCH WŁASNOŚCI POLIMETAKRYLANU METYLU MODYFIKOWANEGO FTALANEM DWUBUTYLU*)

BOGDAN MICHAŁSKI (WARSZAWA)

1. Uwagi wstępne

Wszystkie znane obecnie przezroczyste tworzywa sztuczne wykazują w mniejszym lub większym stopniu efekt dwójłomności wymuszonej, czyli są czułe optycznie. Czułość optyczna, jaką odznaczają się tworzywa sztuczne, nie stanowi w ogromnej większości przypadków przeszkody w ich użyciu. Istnieją jednak również takie sytuacje, gdy od materiału wymaga się nie tylko określonych własności mechanicznych, dobrej obrabialności i przezroczystości, lecz żąda się ponadto, aby miał on możliwie najmniejszą dwójłomność wymuszoną i pozostawał jednorodny pod względem optycznym nawet przy stosunkowo dużym obciążeniu. Materiały takie są w szczególności potrzebne w pewnych rodzajach badań elastooptycznych. Tak na przykład, pewne elementy urządzeń do obciążania modeli elastooptycznych muszą być wykonywane z materiałów o możliwie niewielkiej czułości optycznej. Materiały takie mogą również okazać się przydatne w niektórych przypadkach do budowy prowizorycznych układów optycznych.

Jeśli wymagania odnośnie braku efektu dwójłomności wymuszonej nie są zbyt wysokie, wówczas użyć można często zwykłego handlowego polimetakrylanu metylu (znanego pod handlowymi nazwami metapleks, plexiglas, perspex i lucite). Jest to bowiem materiał mający czułość optyczną kilkunastokrotnie niższą od czułości optycznej typowych żywic epoksydowych i poliestrowych, a ponadto odznaczający się korzystnymi własnościami mechanicznymi, stosunkowo dużą wytrzymałością ($\sigma_r = 750\text{—}1200 \text{ kG/cm}^2$) i wysoką granicą proporcjonalności, dobrą obrabialnością, zadowalającą przezroczystością i stosunkowo niskim kosztem.

Istnieją jednak przypadki, gdy od materiału żąda się, by wykazywał on w tak niewielkim stopniu efekt dwójłomności wymuszonej, że nie można użyć wówczas zwykłego handlowego polimetakrylanu metylu. Największe wymagania pod względem braku czułości optycznej stawia się materiałom używanym do wykonywania modeli do trójwymiarowych badań elastooptycznych metodą warstwy czynnej optycznie.

Metoda ta, należąca do klasycznych metod trójwymiarowej elastooptyki, polega na wykonaniu modelu z materiału nieczułego optycznie i wklejeniu w miejscu rozpatrywanego przekroju warstwy materiału o identycznych własnościach mechanicznych, lecz wykazującego czułość optyczną. Przy prześwietlaniu tak wykonanego modelu w polaryskopie elastooptycznym rejestrujemy obrazy izochrom i izoklin w analizowanym płas-

*) Badania prowadzono w Pracowni Doświadczalnej Analizy Naprężeń IPPT — PAN

kim przekroju modelu. Czytelnicy interesujący się tą metodą znaleźć mogą bardziej szczegółowe informacje o niej na przykład w pracy [1].

W metodzie warstwy optycznie czynnej żąda się, aby czułość optyczna materiału modelowego była wielokrotnie (100 lub więcej razy) mniejsza niż czułość optyczna typowych żywic epoksydowych i co najmniej dziesięciokrotnie mniejsza od czułości optycznej zwykłego handlowego polimetakrylanu metylu.

Jak wiadomo z literatury, zmniejszenie czułości optycznej polimetakrylanu metylu osiągnąć można modyfikując go ftalanem dwubutyłu. Zwiększając stopniowo zawartość ftalanu dwubutyłu otrzymujemy materiał o coraz to mniejszej czułości optycznej aż wreszcie, po przekroczeniu pewnej granicznej wartości, materiał o przeciwnym znaku efektu optycznego¹⁾.

Jednak pomimo tego, że polimetakrylan metylu modyfikowany ftalanem dwubutyłu wykorzystywany był przez wielu autorów do wykonywania modeli elastoptycznych z warstwą czynną optycznie, autorzy posługujący się tym materiałem w badaniach elastoptycznych nie przeprowadzali na ogół jego dokładnego wzorcowania i w publikacjach ich brak jest nie tylko dokładniejszych danych odnośnie technologii wykonania i własności użytego materiału, lecz najczęściej nie podają oni nawet dokładnego składu tego materiału.

W tej sytuacji autor artykułu, przystępując do trójwymiarowych badań elastoptycznych na modelach z warstwą czynną optycznie, uznał za celowe i wskazane przeprowadzenie dokładnych badań wzorcujących materiału modelowego, mających na celu nie tylko wyznaczenie doraźnych własności optycznych, jak i mechanicznych, lecz również własności reologicznych w praktycznie interesującym przedziale czasu.

Rezultaty tych badań opisano w niniejszej pracy.

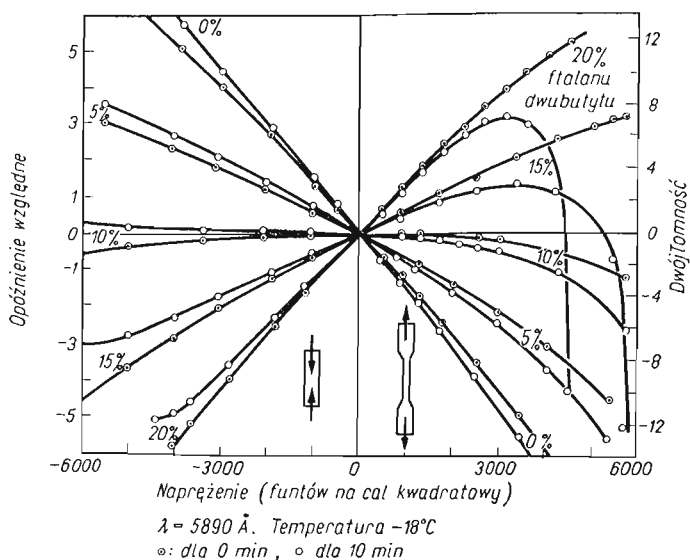
2. Własności modyfikowanego polimetakrylanu metylu

Cechy specjalnego polimetakrylanu metylu modyfikowanego ftalanem dwubutyłu nie są jeszcze dobrze znane, w przeciwieństwie do zwykłego polimetakrylanu metylu, którego własności zbadano przy różnych zakresach obciążeń i dla którego zaproponowano kilka sposobów opisu cech mechanicznych i optycznych [2, 3, 4, 5, 6]. Jedną z nielicznych publikacji, zawierających nieco więcej danych o optycznych i mechanicznych własnościach tego materiału, jest praca [7], której autorzy przeprowadzili badania kilku składów polimetakrylanu metylu o różnej zawartości ftalanu dwubutyłu.

Jednym z ważniejszych praktycznie spostrzeżeń zawartych w powyższej pracy jest stwierdzenie, że polimetakrylan metylu o znacznej zawartości ftalanu dwubutyłu wykazuje

¹⁾ Zazwyczaj przyjmuje się, że dwójłomność ma znak dodatni, gdy materiał ma cechy dodatniego kryształu jednoosiowego i znak ujemny — gdy materiał ma cechy ujemnego kryształu. W pracy przyjęto odwrotną konwencję znaków w celu uzyskania lepszej czytelności otrzymanych wykresów pełzania. Przy przyjęciu normalnej konwencji znaków zarejestrowane efekty optyczne miałyby w większości znak ujemny i krzywe pełzania musiałyby wówczas znajdować się po stronie ujemnych wartości.

inną dwójłomność przy ściskaniu, aniżeli przy rozciąganiu w przeciwieństwie do zwykłego polimetakrylanu metylu, który zachowuje się podobnie przy rozciąganiu i ściskaniu. Modyfikowany polimetakrylan odznacza się liniową zależnością efektu optycznego od naprężenia w dosyć szerokim zakresie przy naprężeniach ściskających i wyraźnie nieliniową przy naprężeniach rozciągających (rys. 1).



Rys. 1. Zależność efektu optycznego od naprężenia dla polimetakrylanu metylu o różnej zawartości ftalanu dwubutylny, według badań Lamble'a i Dahmoucha [7]

Ze stwierdzenia nieliniowej zależności efektu optycznego modyfikowanego polimetakrylanu metylu od naprężenia wyływają ważne wnioski natury praktycznej.

Tak więc w przypadku użycia tego materiału do wykonania modeli elastoptycznych lub elementów urządzeń obciążających nie jest możliwe dobranie bezwzględnie optymalnego składu i przy ustalaniu najodpowiedniejszej zawartości modyfikatora należy brać pod uwagę konkretne warunki badania: średnią wartość i znak naprężenia w analizowanej strefie (inna będzie optymalna zawartość modyfikatora w przypadku przewagi naprężeń rozciągających, a inna w przypadku dominujących naprężeń ściskających), przewidywany czas badania itd.

Badania przeprowadzone przez LAMBLE'A i DAHMOUCHA [7] rzuciły ciekawe światło na własności optyczne modyfikowanego polimetakrylanu metylu i wyniki ich są cenne z praktycznego punktu widzenia, nie wyjaśniły one jednak w pełni cech tego materiału. Autorzy pracy ograniczyli się zasadniczo do stwierdzenia faktu optycznej nieliniowości i nie pokusili się o dokładniejsze wyjaśnienie reologicznych własności optycznych zbadanego materiału. Autorzy przeprowadzali pomiary jedynie bezpośrednio po obciążeniu i po upływie 10 minut od chwili przyłożenia obciążenia, co stanowi zbyt krótki okres czasu jak na potrzeby typowego badania elastoptycznego.

3. Przedmiot i opis badań

Przeprowadzone badania miały na celu:

1. Ustalenie wpływu zawartości ftalanu dwubutyłu na własności optyczne i mechaniczne zmodyfikowanego polimetakrylanu metylu przy krótkotrwałym obciążeniu oraz ustalenie optymalnej zawartości modyfikatora dla określonego poziomu naprężeń i warunków badania.

2. Poznanie aktywnego pełzania optycznego zmodyfikowanego polimetakrylanu metylu przy stałym obciążeniu i pełzania odwrotnego. Ustalenie dopuszczalnego czasu badania modelu elastoptycznego wykonanego ze zmodyfikowanego polimetakrylanu metylu przy założonej dokładności wyników.

3. Stwierdzenie, czy zmodyfikowany polimetakrylan metylu może być uważany za materiał o liniowej charakterystyce.

4. Stwierdzenie, czy w zmodyfikowanym polimetakrylanie metylu istnieje wprost proporcjonalna zależność pomiędzy odkształceniem a dwójłomnością, podobnie jak w zwykłym polimetakrylanie metylu.

Badania wpływu zawartości ftalanu dwubutyłu na własności optyczne i mechaniczne zmodyfikowanego polimetakrylanu metylu podzielonego na trzy etapy. Pierwszy etap obejmował badania, mające na celu wstępne poznanie cech różnych materiałów o zawartości modyfikatora różniącej się w dość szerokim zakresie²⁾. W drugim etapie zawężono zakres badań do kilku składów, w obrębie których spodziewano się składu optymalnego i wytypowano dwa optymalne składy polimetakrylanu metylu: materiał najodpowiedniejszy do badania modeli z przewagą naprężeń rozciągających i materiał najwłaściwszy dla naprężeń ściskających. Trzeci etap badań obejmował dokładne badania reologicznych własności optycznych materiałów uznanych za najlepsze.

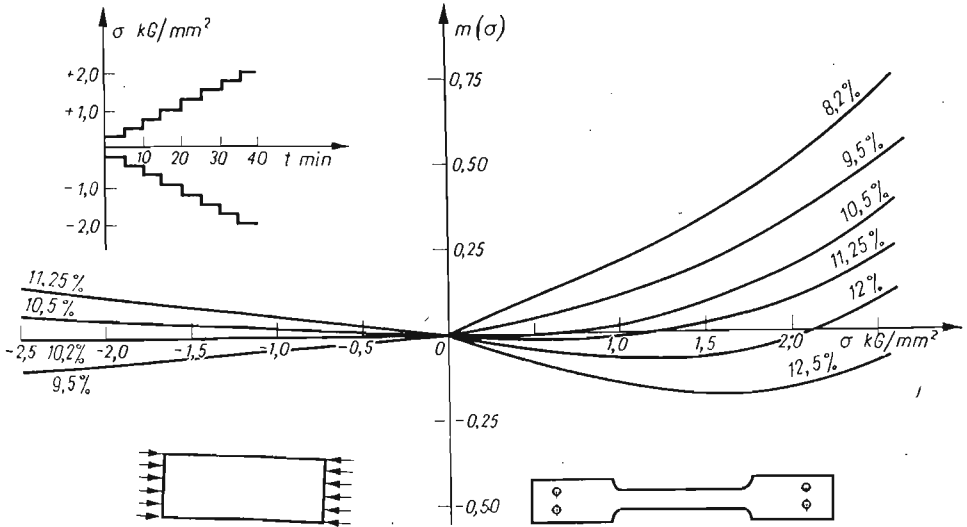
Badania pierwszego etapu przeprowadzono na dwóch rodzajach próbek. Zachowanie się materiału przy naprężeniach rozciągających badano na próbkach o kształcie «wioselka»; długość części prostokątnej próbki wynosiła 120 mm, zaś jej przekrój 10 × 5 mm. Do badania własności materiału przy naprężeniach ściskających użyto próbek o kształcie prostopadłościennym o wymiarach 40 × 40 × 90 mm.

Badane próbki były umieszczone w przestrzeni pomiarowej polaryskopu o rozproszonym źródle monochromatycznego światła sodowego. Żądany program jednoosiowego rozciągania realizowano za pośrednictwem układu dźwigniowego, zapewniającego płynne przykładanie i zdejmowanie obciążenia. Badania prowadzono w temperaturze pokojowej.

Osiowe wydłużenie próbek mierzono za pośrednictwem ekstensometru zegarowego Schoppera o bazie pomiarowej 50 mm i działce elementarnej 1/100 mm. Dwójłomność wymuszoną w płaszczyźnie próbki mierzono metodą kompensacji goniometrycznej SENARMONTA. Dokładność zastosowanej metody pomiaru efektów optycznych wynosząca około $\pm 0,01$ rzędu iz. uważana być może za wystarczającą, nawet jeśli zważyć, że wartości rejestrowanych efektów optycznych były niewielkie i nie przekraczały zasadniczo wartości 0,5 rzędu iz.

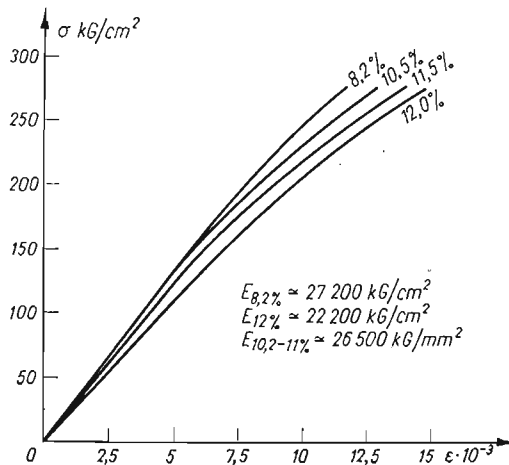
²⁾ Próbki polimetakrylanu metylu o różnej zawartości ftalanu dwubutyłu wykonane były w Zakładach Chemicznych w Oświęcimiu przez p. Tadeusza Krawczyka pod kierunkiem mgr inż. Grzegorzewicza.

Pomiary prowadzono przy skokowo wzrastającym obciążeniu. Program obciążenia przyjęto taki sam przy badaniu próbek rozciąganych, jak i przy badaniu próbek ściskanych. Na rys. 2 przedstawiono otrzymane wykresy $m(\sigma)$. Wartości $m(\sigma)$ na rys. 2 i następujących



Rys. 2. Zależność dwójmowności od naprężenia dla polimetakrylanu metylu o różnej zawartości ftalanu dwubutylny przy schodkowym wzroście naprężenia, według badań autora

srowadzono do jednostkowej grubości modelu, co pozwala na ich porównywalność. Na rys. 3 widoczne są krzywe zależności $\epsilon(\sigma)$ dla czterech spośród zbadanych materiałów, wyznaczone przy naprężeniach rozciągających.



Rys. 3. Zależność odkształcenia od naprężenia dla polimetakrylanu metylu o różnej zawartości ftalanu dwubutylny przy naprężeniach rozciągających

Analiza uzyskanych wyników pozwala na wyciągnięcie dwóch wniosków:

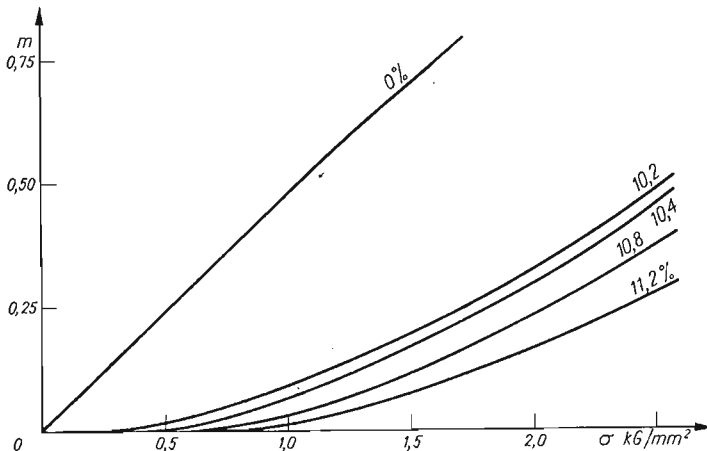
a) Polimetakrylan metylu o znacznej zawartości ftalanu dwubutyłu (w granicach od 8 do 12%) wykazuje zasadniczo w dość dużym zakresie liniową zależność $\varepsilon(\sigma)$, tak przy naprężeniach ściskających, jak i rozciągających. Pozostaje to w widocznej sprzeczności z efektami optycznymi tego materiału (zależność $m(\sigma)$ w przypadku naprężeń rozciągających jest wyraźnie nieliniowa).

b) Jak widać z wykresu $\varepsilon(\sigma)$, zawartość ftalanu dwubutyłu ma tylko nieznaczny wpływ na cechy mechaniczne materiału. Tak na przykład, zmiana ilości modyfikatora w granicach od 10,2 do 11,2% towarzyszy zmiana «umownego modułu sprężystości» o około 5%. Jest to istotne spostrzeżenie. Opierając się na nim można było bowiem w dalszym ciągu poniechać pomiarów odkształceń i ograniczyć się wyłącznie do pomiaru efektów optycznych. Pozwoliło to na uproszczenie techniki laboratoryjnej badania.

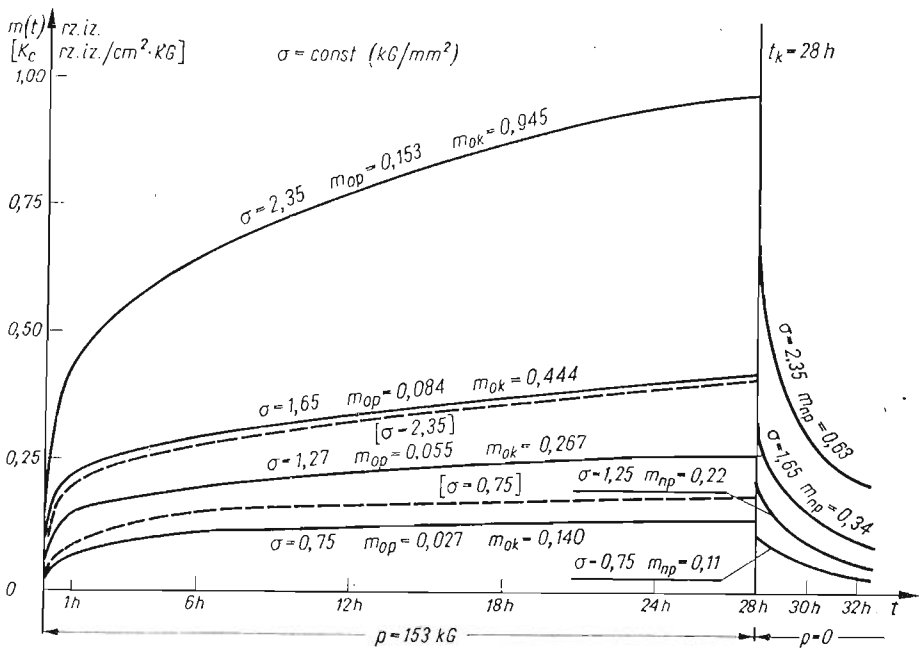
Badania drugiego etapu dotyczyły materiałów wyselekcjonowanych w poprzednim etapie. Badania przy naprężeniach ściskających prowadzono, podobnie jak poprzednio, na próbkach o kształcie prostokątnym o wymiarach $40 \times 40 \times 90$ cm. W etapie tym zbadano własności optyczne materiałów o trzech różnych zawartościach ftalanu dwubutyłu równych: 10,4%, 10,2% i 10,0%. Otrzymane wyniki doprowadziły do ustalenia składu materiału o minimalnej czułości optycznej przy naprężeniach ściskających. Za optymalny uznano materiał zawierający 10,2% ftalanu dwubutyłu. Stwierdzono, że materiał o tym składzie ma bardzo wysoką stałą materiałową ($K_1 \approx 10\,000$ kG/cm rząd).

Badania materiałów przy naprężeniach rozciągających prowadzono na próbkach o zbieżnym kształcie strefy pomiarowej. Zastosowanie tych próbek przyczyniło się do znacznego uproszczenia i przyspieszenia badań, gdyż przy tym sposobie można otrzymać wykresy pełzania przy różnych poziomach obciążenia analizując poszczególne przekroje jednej próbki.

Na rys. 4 przedstawiono otrzymane wykresy zależności $m(\sigma)$ dla materiałów o różnych składach. Na rysunku tym naniesiono ponadto wykres $m(\sigma)$ dla handlowego polimeta-

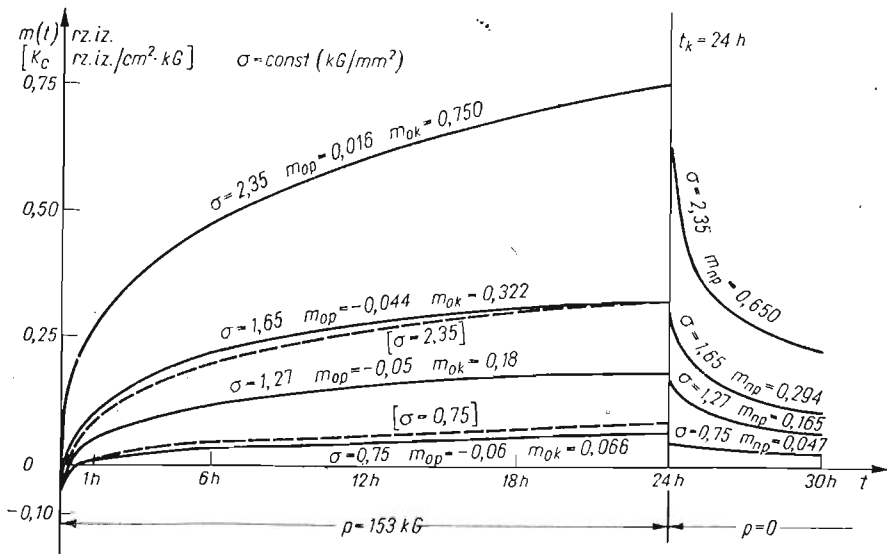


Rys. 4. Zależność $m(\sigma)$ dla polimetakrylanu metylu o różnej zawartości ftalanu dwubutyłu przy stałych naprężeniach rozciągających ($t = 1$ godz)



Rys. 5. Pełzanie optyczne polimetakrylanu metylu zawierającego 10,2% ftalanu dwubutyly; czas badania — 32 godziny

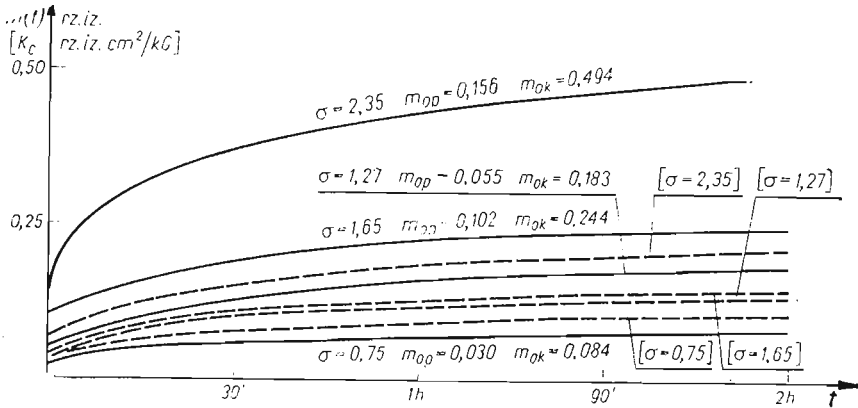
m_{op} — efekt elastoopptyczny zmierzony bezpośrednio po przyłożeniu obciążenia, m_{ok} — efekt elastoopptyczny zmierzony po upływie 28 godz. od chwili przyłożenia obciążenia, m_{np} — efekt elastoopptyczny zmierzony po upływie 4 godz. od chwili odciążenia



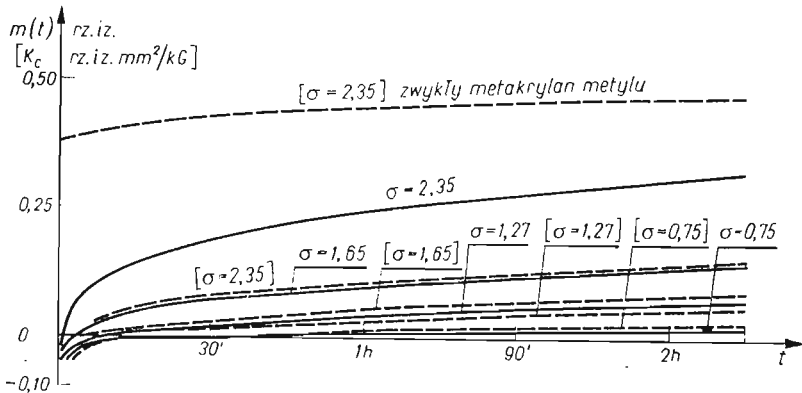
Rys. 6. Pełzanie optyczne polimetakrylanu metylu zawierającego 11,2% ftalanu dwubutyly; czas badania — 32 godziny

m_{op} — efekt elastoopptyczny zmierzony bezpośrednio po przyłożeniu obciążenia, m_{ok} — efekt elastoopptyczny zmierzony po upływie 24 godz. od chwili przyłożenia obciążenia, m_{np} — efekt elastoopptyczny zmierzony po upływie 6 godz. od chwili odciążenia

krylanu metylu, nie zawierającego ftalanu dwubutyli. Otrzymane wykresy różnią się nieco od wykresów dla analogicznych materiałów uzyskanych w poprzednim etapie, gdyż odpowiadają one stałej wartości obciążenia, podczas gdy badania poprzedniego etapu prowadzono przy obciążeniu schodkowym. Za najlepszy materiał dla naprężeń rozciągających uznano materiał zawierający 11,2% ftalanu dwubutyli.



Rys. 7. Pełzanie optyczne polimetakrylanu metylu zawierającego 10,2% ftalanu dwubutyli w ciągu pierwszych dwóch godzin od chwili przyłożenia obciążenia
 m_{0p} — efekt elastooptyczny zmierzony bezpośrednio po przyłożeniu obciążenia, m_{0k} — efekt elastooptyczny zmierzony po upływie 2 godz. od chwili przyłożenia obciążenia



Rys. 8. Pełzanie optyczne polimetakrylanu metylu zawierającego 11,2% ftalanu dwubutyli w ciągu pierwszych dwóch godzin od chwili przyłożenia obciążenia

Trzeci etap badań miał na celu, jak już wspomniano, poznanie optycznych własności reologicznych dwóch wyselekcjonowanych materiałów. Badanie ograniczono do zakresu naprężeń rozciągających i przeprowadzono je na próbkach o kształcie «wioselka». Badano pełzanie aktywne przy stałym obciążeniu, przy różnych poziomach naprężenia i pełzanie odwrotne po obciążeniu próbki. Na rys. 5 i 6 uwidoczniłoby krzywe pełzania aktywnego

i odwrotnego dla całego zakresu badania, zaś na rys. 7 i 8 — przedstawiono w większej skali krzywe pełzania aktywnego tych samych materiałów dla najbardziej interesującego początkowego okresu badania.

4. Analiza wyników badania

Wyraźnie reologiczny charakter cech optycznych polimetakrylanu metylu modyfikowanego ftalanem dwubutyli nasuwa podstawowe pytanie, czy zaobserwowane efekty mieszczą się w ramach związków fizycznych liniowych względem naprężenia. Zbadać to można najwygodniej w oparciu o zasadę superpozycji, analogiczną do zasady superpozycji BOLZMANN, którą dla wypadku pełzania odpowiadającego jednowymiarowemu stanowi naprężenia wyrazić można wzorem

$$m(t) = \int_0^t K_c(t-\tau)m(\tau)d\tau,$$

gdzie m jest zmierzonym efektem optycznym, występująca zaś pod całką funkcja K_c , zwana funkcją pełzania optycznego, ma postać

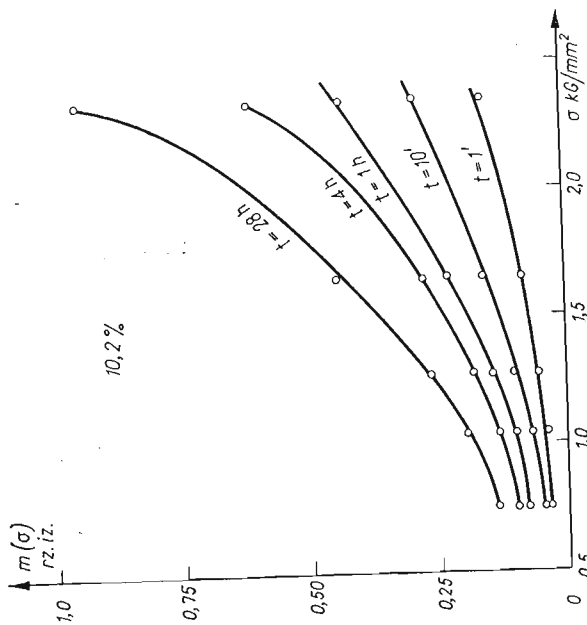
$$K_c(t, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_c(t, \sigma_0)}{\sigma_0};$$

m_c oznacza zarejestrowany efekt optyczny przy aktywnym pełzaniu.

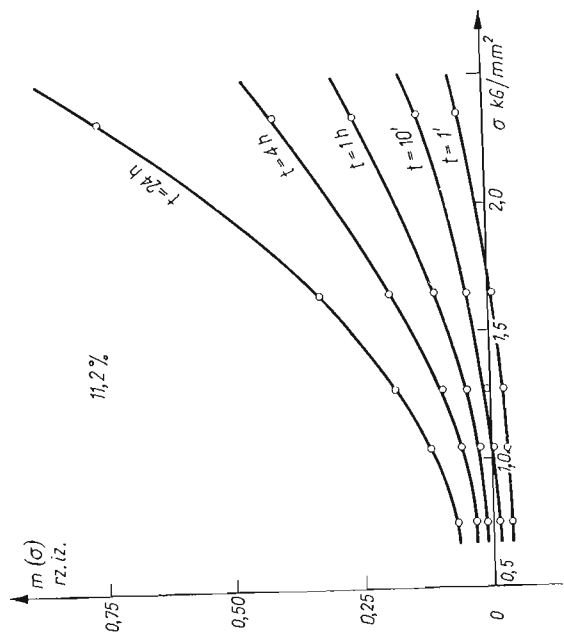
Jeśli zachowanie się materiału jest liniowe, wówczas funkcja pełzania zależy jedynie od czasu i reprezentuje własności optyczne rozpatrywanego materiału. Tak więc, dla materiału liniowego wartości tej funkcji muszą być niezależne od naprężenia. Wynika stąd, że chcąc sprawdzić, czy badany materiał jest liniowy wystarczy obliczyć odpowiednie funkcje pełzania oraz stwierdzić, czy są one niezależne od naprężenia.

Na rys. 5—8 wykreślono przerywanymi liniami funkcje pełzania dla różnych poziomów naprężenia. Już pobieżna analiza pozwala stwierdzić, że funkcje te są wyraźnie zależne od naprężenia; świadczy to o silnej nieliniowości materiału. Charakter tej nieliniowości jest jeszcze lepiej widoczny z wykresów przedstawionych na rys. 9—12, na których uwidoczniono zależności $m(\sigma)$ i $K_c(\sigma)$ dla kilku wybranych czasów dla obu zbadanych materiałów. W przypadku materiału liniowego zależności $K_c(\sigma)$ powinny mieć postać prostych równoległych do osi x . Nachylenie krzywych $K_c = K_c(\sigma)$ może być miarą nieliniowości.

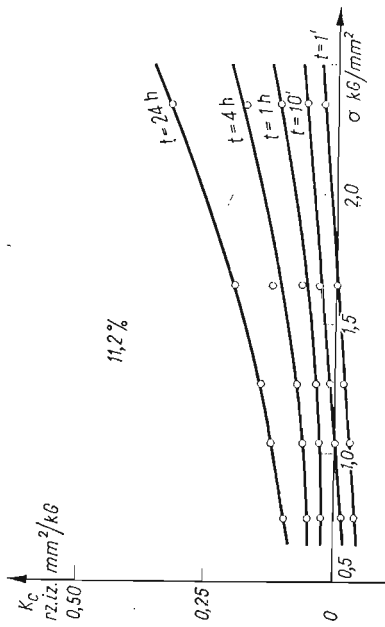
Na zakończenie warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden szczegół. W pracy ABAUDA [4] stwierdzono, że w zwykłym polimetakrylanie metylu istnieje wprost proporcjonalna zależność pomiędzy odkształceniami a dwójłomnością wymuszoną. Analogiczny wynik otrzymano także w pracy [7]. W przypadku polimetakrylanu modyfikowanego ftalanem dwubutyli zjawisko to nie zachodzi. Przekonać się o tym można wykreślając zależność pomiędzy K_c a J_c (J_c — funkcja pełzania mechanicznego). Gdyby zachodziła bowiem proporcjonalność pomiędzy odkształceniami a dwójłomnością wówczas punkty K_c — J_c musiałyby leżeć na prostej przechodzącej przez początek układu. Tak jednak nie jest, punkty te nie leżą na prostej.



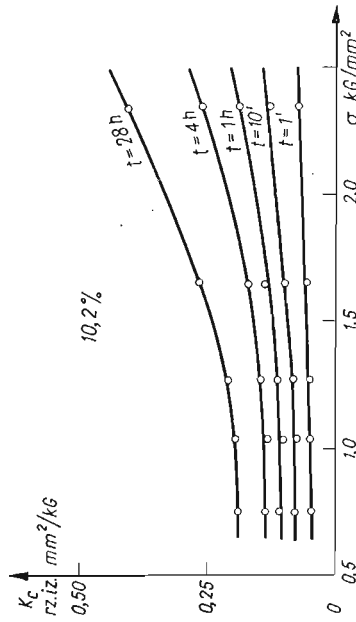
Rys. 9. Zależność $m(\sigma)$ dla polimetakrylanu metylu zawierającego 10,2% ftalanu dwubutyłu przy różnych czasach obciążenia



Rys. 10. Zależność $m(\sigma)$ dla polimetakrylanu metylu zawierającego 11,2% ftalanu dwubutyłu przy różnych czasach obciążenia



Rys. 12. Zależność K_c (σ) dla polimetakrylanu metylu zawierającego 11,2% ftalanu dwubutyli przy różnych czasach obciążenia



Rys. 11. Zależność K_c (σ) dla polimetakrylanu metylu zawierającego 10,2% ftalanu dwubutyli przy różnych czasach obciążenia

Literatura cytowana w tekście

1. R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHALSKI, *Metody warstwy elastoptycznej w zastosowaniu do modelowania badania przestrzennych zagadnień kontaktowych*, Rozpr. Inż., 3, 15 (1967), 457 - 458.
2. J. T. PINDERA, *Reologiczne własności materiałów modelowych*, WNT, Warszawa 1962.
3. J. MARTIN, J. E. GRIFFITH, *Creep relaxation of plexiglas IIA for simple stress*, Jour. of the Engin. Mech. Div., Proc. of ASCE, 6 (1956).
4. J. ABAUD, *Recherches sur la relation contrainte-birefringence dans le plexiglas M 222*, Rech. Aero., 26 (1952), 31 - 39.
5. H. WOLF, *Spannungsoptik*, Springer-Verlag, Berlin. Göttingen, Heidelberg 1961.
6. H. A. ROBINSON, R. RUGGY, E. SLANTH, Jour. of Appl. Phys., 15 (1944), 343.
7. J. H. LAMBLE, E. S. DAHMOUCH, *Photoelastic properties of plasticized polymethyle methacrylate in the glassy state*, Brit. Jour. of Appl. Phys., 6 (1958).
8. A. DRESCHER, B. MICHALSKI, *Reologiczne, mechaniczne i optyczne własności polimetakrylanu metylu w warunkach złożonej historii obciążenia*, Mech. Teor. i Stos. 2, 9 (1971), 241 - 261.

Р е з ю м е

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ПОЛИМЕТАКРИЛАНА МЕТИЛА МОДИФИЦИРОВАННОГО ФТАЛАНОМ
ДВУБУТИЛА

В работе представлены результаты исследований полиметакрилана метила модифицированного фталаном двубутила. Цель этих исследований — установить влияние примеси фталана двубутила на оптические и механические свойства материала, а также найти количество фталана, при котором материал имеет минимальную оптическую чувствительность. Исследована активная и обратная ползучесть двух выбранных составов материала в практически существенном интервале времени.

S u m m a r y

INVESTIGATION OF MECHANICAL AND OPTICAL PROPERTIES OF POLYMETHYL
METACRYLATE MODIFIED WITH DI-BUTHYLE PHTALATE

The paper deals with the investigations of the mechanical and optical properties of polymethyl methacrylate modified with di-buthyle phtalate and with determination of the contents of di-buthyle phtalate at which the material obtained reveals the minimum optical sensitivity. Also investigated was the active and recovery creep at constant loading in the practically interesting time range for two materials of particular compositions.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1975 r.

ZAGADNIENIE MIKROPOLARNIE SPRĘŻYTEJ RURY GRUBOŚCIENNEJ

ZBIGNIEW OLESIAK, MONIKA WĄGROWSKA (WARSZAWA)

W pracy ograniczymy się do rozpatrzenia zagadnień osiowo-symetrycznych w przypadku walca o przekroju pierścienia kołowego. Podobnie jak to ma miejsce w klasycznej teorii sprężystości, rozpatrzmy oddzielnie dwa zagadnienia: pierwsze z nich można uważać za uogólnienie zagadnienia Lamégo, drugie da się sprowadzić, w przypadku klasycznym, do zagadnienia skręcania. Przyjmujemy ośrodek mikropolarny z niezwiązanymi obrotami. Jeśli chodzi o ośrodek ze związanymi obrotami to jeszcze KOITER [3] podał przykład skręcania pręta o przekroju kołowym, ogólniej zagadnienie rozpatrzył SOKOŁOWSKI [4, 5]. Rozważania ogólne dotyczące ośrodka mikropolarnego znajdujemy w monografiach NOWACKIEGO [1]. Skręcanie prętów pryzmatycznych rozpatrywali SMITH [6], IESAN [7], USIDUS [9, 10]. Fale rotacyjne rozpatrzył NOWACKI [2], a drgania mikropolarnie sprężystych walców kołowych SMITH [6] oraz WILLSON [8].

Przedstawione rozwiązania otrzymano nie w przypadku ogólnym, lecz przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków, np. w przypadku uogólnionego zagadnienia Lamégo, które odpowiada równaniom różniczkowym (2.2), założono, że spełnione są warunki identyczne jak w przypadku klasycznym. Okazało się, że rozwiązanie w płaskim stanie odkształcenia nie różni się, przy identycznych warunkach brzegowych, od klasycznego. Założenie, że w całym obszarze walca znikają naprężenia normalne σ_{zz} nie prowadzi teraz do zagadnienia płaskiego stanu naprężenia w mikropolarnej teorii sprężystości, lecz powoduje wprowadzenie pewnego «skrępowania» w postaci dodatkowego związku między stałymi całkowania. Naszym celem jest znalezienie możliwie prostych rozwiązań odpowiadających pewnym warunkom brzegowym, przy pewnych założeniach upraszczających (np., że $u_{z,z}$, u_r i φ_0 nie zależą od z). W ten sposób układ równań różniczkowych (1.1) lub (1.2) został sprowadzony odpowiednio do układu równań różniczkowych zwyczajnych (2.2) lub (3.4).

Układ równań (1.2) jest uogólnieniem równań klasycznej teorii sprężystości odpowiadających skręcaniu prętów w przypadku osiowej symetrii i może dotyczyć również przekrojów dwuspójnych w odróżnieniu od dotychczas rozpatrywanych jednospójnych. Nie zajmujemy się tu jednak badaniem zagadnień skręcania lub wpływu, jaki ma przyjęcie w obliczeniach modelu ośrodka mikropolarnego na wielkość momentu skręcającego, czy też kąta skręcania pręta pryzmatycznego (np. USIDUS [9, 10]). Interesować nas będzie rozkład naprężeń momentowych i siłowych wewnątrz walca wywołany działaniem sił i momentów na pobocznicę walca. Nie dyskutujemy tu również, co było przyczyną powstania naprężeń momentowych, mogą one być wynikiem działania na przykład pola magnetycznego.

Jeżeli założymy, że naprężenia momentowe $\mu_{rr}(a) = m_a$, $\mu_{rr}(b) = m_b$, działające na powierzchniach walcowych są stałe, to, przy założeniach p. 4 otrzymamy, że rozkład naprężeń momentowych $\mu_{rr}(r)$ i $\mu_{\theta\theta}(r)$ wzdłuż promienia przypomina rozkład naprężeń normalnych w klasycznym zadaniu Lamégo.

1. Równania podstawowe

W przypadku osiowej symetrii, układ równań różniczkowych równowagi w przemieszczeniach i obrotach, momentowej teorii sprężystości z niezwiązanymi obrotami przyjmuje znaną postać [1], którą podamy tu w zmodyfikowanym zapisie:

$$\begin{aligned}
 & (\mu + \alpha) \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_r + (\lambda + \mu - \alpha) e_{,r} - 2\alpha \varphi_{0,z} = 0, \\
 (1.1) \quad & (\mu + \alpha) \left(B_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z + (\lambda + \mu - \alpha) e_{,z} + \frac{2\alpha}{r} (r\varphi_0)_{,r} = 0, \\
 & (\gamma + \varepsilon) \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_0 - 4\alpha \varphi_0 + 2\alpha (u_{r,z} - u_{z,r}) = 0. \\
 & (\mu + \alpha) \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_\theta + 2\alpha (\varphi_{r,z} - \varphi_{z,r}) = 0, \\
 (1.2) \quad & (\gamma + \varepsilon) \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_r - 4\alpha \varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon) \kappa_{,r} - 2\alpha u_{0,z} = 0, \\
 & (\gamma + \varepsilon) \left(B_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_z - 4\alpha \varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon) \kappa_{,z} + \frac{2\alpha}{r} (ru_0)_{,r} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.3) \quad e = \frac{1}{r} (ru_r)_{,r} + u_{z,z}, \quad \kappa = \frac{1}{r} (r\varphi_r)_{,r} + \varphi_{z,z},$$

$$(1.4) \quad B_0 f = \frac{1}{r} (rf)_{,r},$$

$$(1.5) \quad B_1 f = \left[\frac{1}{r} (rf)_{,r} \right]_{,r},$$

μ , λ , α , β , γ , ε są stałymi materiałowymi.

W układzie współrzędnych walcowych r , θ , z oraz przy założeniu osiowej symetrii układy równań różniczkowych (1.1) i (1.2) są niezależne. Pierwszy z nich będzie spełniony przez wektory $\mathbf{u} = (u_r, 0, u_z)$ i $\boldsymbol{\varphi} = (0, \varphi_0, 0)$ przy znikających następujących składowych naprężeń siłowych i momentowych: $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta r}$, $\sigma_{\theta z}$, $\sigma_{z\theta}$, μ_{rr} , $\mu_{\theta\theta}$, μ_{zz} , μ_{rz} i μ_{zr} . Drugi z nich spełnią wektory $\mathbf{u} = (0, u_\varphi, 0)$ i $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_r, 0, \varphi_z)$, a znikać będą następujące składowe naprężeń: σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , σ_{rz} , σ_{zr} , $\mu_{r\theta}$, $\mu_{\theta r}$, $\mu_{\theta z}$ oraz $\mu_{z\theta}$.

W klasycznej teorii sprężystości rozpatrywane są trzy warianty zagadnienia Lamégo (rury grubościennej), mianowicie płaski stan odkształcenia, płaski stan naprężenia oraz

rura zamknięta dnami (dot. przekrojów w odpowiedniej odległości od den). W dalszej części pracy rozpatrzemy oddzielnie dwa przypadki odpowiadające układowi równań różniczkowych (1.1) i układowi równań (1.2) oraz przedyskutujemy przypadki szczególne.

2. Rozwiązanie układu równań różniczkowych (1.1)

Zakładamy, że naprężenia siłowe i momentowe nie zależą od współrzędnej z . Z odpowiednich wzorów:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu u_{r,r} + \lambda e, \\ \sigma_{rz} &= \mu(u_{z,r} + u_{r,z}) - \alpha(u_{r,z} - u_{z,r}) + 2\alpha\varphi_0, \\ \mu_{r0} &= \gamma\left(\varphi_{0,r} - \frac{1}{r}\varphi_0\right) + \varepsilon\left(\varphi_{0,r} + \frac{1}{r}\varphi_0\right), \end{aligned}$$

wynika, że $u_{z,z}$, u_r oraz φ_0 nie zależą od z . Równania (1.1) przyjmą postać następującą:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (2\mu + \lambda)B_1 u_r + (\lambda + \mu - \alpha)u_{z,zr} &= 0, \\ (\mu + \alpha)B_0 u_z + 2\alpha \frac{1}{r}(r\varphi_0),r &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon)B_1 \varphi_0 - 4\alpha\varphi_0 - 2\alpha u_{z,r} &= 0. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy teraz trzy przypadki:

a) $u_z \equiv 0$ — płaski stan odkształcenia,

b) $\sigma_{zz} \equiv 0$, skąd $(2\mu + \lambda)u_{z,z} = -\lambda \frac{1}{r}(ru_r),r$,

c) $\sigma_{zz} = \text{const} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$.

Przypadek a). Dla $u_z \equiv 0$, rozwiązując pierwsze równanie (2.2), otrzymamy: $u_r = Ar + B/r$, z drugiego równania wyniknie, że $r\varphi_0 = C$, a z trzeciego równania dostaniemy, że $C = 0$, a więc dokładnie rozwiązanie klasycznego zagadnienia Lamégo.

Przypadek b). Biorąc pod uwagę, że $(2\mu + \lambda)u_{z,zr} = -\lambda B_1 u_r$, otrzymamy z pierwszego równania (2.2) równanie $B_1 u_r = 0$, skąd wynika $u_r = Ar + B/r$. Drugie i trzecie równanie (2.2) przyjmie postać następującą:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha)(ru_{z,r}),r + 2\alpha(r\varphi_0),r &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon)B_1 \varphi_0 - 4\alpha\varphi_0 - 2\alpha u_{z,r} &= 0. \end{aligned}$$

Całkując pierwsze z powyższych równań otrzymamy równanie

$$(2.4) \quad (\mu + \alpha)u_{z,r} + 2\alpha\varphi_0 = \frac{1}{r}C,$$

a następnie przekształcając drugie równanie (2.3) dostaniemy

$$(2.5) \quad B_1 \varphi_0 - \frac{1}{l^2} \varphi_0 = \frac{C}{2\mu l^2} \frac{1}{r},$$

gdzie $l^2 = \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}{4\mu\alpha}$. Całka równania (2.5) ma postać następującą:

$$(2.6) \quad \varphi_0 = C_1 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) + C_2 K_1 \left(\frac{r}{l} \right) - \frac{C}{2\mu} \frac{1}{r},$$

gdzie I_1 jest funkcją Bessela urojonego argumentu, a K_1 funkcją MacDonalda. Z kolei, po podstawieniu (2.6) do (2.4) i scałkowaniu, otrzymamy

$$(2.7) \quad u_z = \frac{1}{\mu} C \ln r + C_3 z - \frac{2\alpha l}{\mu + \alpha} \left[C_1 I_0 \left(\frac{r}{l} \right) + C_2 K_0 \left(\frac{r}{l} \right) \right].$$

Po przekształceniach i podstawieniu do wzorów na naprężenia, otrzymamy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \left(A - C_3 - \frac{B}{r^2} \right), \\ \sigma_{rz} &= \frac{C}{r}, \\ \mu_{r\theta} &= \frac{1}{l} (\gamma + \varepsilon) \left[C_1 I_0 \left(\frac{r}{l} \right) - C_2 K_0 \left(\frac{r}{l} \right) \right] - \frac{2\varepsilon}{r} \left[C_1 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) + C_2 K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ponadto, z założenia znikania σ_{zz} , mamy

$$(2.9) \quad (2\mu + \lambda) C_3 = -2\lambda A.$$

Z powyższych wzorów wynika, że stałe A oraz B można wyznaczyć z warunków brzegowych $\sigma_{rr}(a) = -p_a$, $\sigma_{rr}(b) = -p_b$, a niezależnie stałe C_1 i C_2 wyznaczymy z warunków $\mu_{r,z}(a) = \mu_a$, $\mu_{r\theta}(b) = \mu_b$. Stałą C wyznacza się np. z warunku $\sigma_{rz}(a) = t_a$, wtedy wartość liczbowa $\sigma_{rz}(b)$ wynika z obliczeń i nie może być przyjęta dowolnie. Rezultat taki nie jest niespodziewany, wynika bowiem z założenia o niezależności naprężeń od zmiennej z . Jeżeli $\mu_a = \mu_b = t_a = t_b = 0$, to rozwiązanie znowu nie różni się od klasycznego, z wyjątkiem być może wartości stałych materiałowych.

P r z y p a d e k c). Wykorzystując obecnie wzór $\sigma_{zz} = \text{const}$, otrzymamy

$$(2.10) \quad (2\mu + \lambda) u_{z,z} = -\lambda \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2};$$

rozwiązując następnie równania (2.2) stwierdzimy, że dyskusja przebiega podobnie jak w p. b).

3. Rozwiązanie układu równań różniczkowych (1.2)

Podobnie jak poprzednio wyjdźmy z założenia, że składowe naprężeń i momentów na pobocznicę $\sigma_{r\theta}$, μ_{rz} oraz μ_{rr} nie zależą od zmiennej z . Z odpowiednich wzorów [1]:

$$(3.1) \quad \sigma_{r\theta} = (\mu + \alpha) u_{0,r} - (\mu - \alpha) \frac{1}{r} u_0 - 2\alpha \varphi_z,$$

$$(3.2) \quad \mu_{rz} = \gamma (\varphi_{r,z} - \varphi_{z,r}) - \varepsilon (\varphi_{r,z} - \varphi_{z,r}),$$

$$(3.3) \quad \mu_{rr} = 2\gamma \varphi_{r,r} + \beta \frac{1}{r} (r \varphi_r)_{,r} + \beta \varphi_{z,z},$$

otrzymamy, że wtedy φ_r , φ_z oraz u_0 nie zależą od z . Równania (1.2) przyjmą postać następującą:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha) B_1 u_0 - 2\alpha \varphi_{z,r} &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon) B_1 \varphi_r - 4\alpha \varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon) \kappa_{,r} &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon) B_0 \varphi_z - 4\alpha \varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon) \kappa_{,z} + 2\alpha \frac{1}{r} (r u_0)_{,r} &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ w rozważanym przypadku

$$(3.5) \quad \kappa = \frac{1}{r} (r \varphi_r)_{,r},$$

otrzymamy, że

$$(3.6) \quad \kappa_{,r} = B_1 \varphi_r, \quad \kappa_{,z} = 0.$$

Po zróżniczkowaniu równania (3.4)₃ względem r i przekształceniach dostaniemy układ równań różniczkowych w następującej postaci:

$$(3.7) \quad 2\mu B_1 u_0 - (\gamma + \varepsilon) B_1 \varphi_{z,r} = 0,$$

$$(3.8) \quad B_1 \varphi_r - \sigma^2 \varphi_r = 0,$$

$$(3.9) \quad B_1 \varphi_{z,r} - \frac{1}{l^2} \varphi_{z,r} = 0.$$

Rozwiązując równania (3.8) i (3.9), a następnie (3.7) otrzymamy

$$(3.10) \quad \varphi_r = A_1 I_1(\sigma r) + C_1 K_1(\sigma r),$$

$$(3.11) \quad \varphi_{z,r} = A_2 I_1\left(\frac{r}{l}\right) + C_2 K_1\left(\frac{r}{l}\right),$$

$$(3.12) \quad \varphi_z = l A_2 I_0\left(\frac{r}{l}\right) - l C_2 K_0\left(\frac{r}{l}\right) + C,$$

$$(3.13) \quad 2\mu u_0 = (\gamma + \varepsilon) \left[A_2 I_1\left(\frac{r}{l}\right) + C_2 K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] + A_3 r + \frac{1}{r} C_3,$$

$$\text{gdzie } \sigma^2 = \frac{4\alpha}{4\gamma + \beta}, \quad l^2 = \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}{4\alpha\mu}.$$

Z warunków brzegowych na składową normalną naprężenia momentowego otrzymamy

$$(3.14) \quad A_1 = \frac{m_a K(b) - m_b K(a)}{I(a) K(b) - I(b) K(a)},$$

$$(3.15) \quad C_1 = \frac{m_a I(b) - m_b I(a)}{I(a) K(b) - I(b) K(a)},$$

gdzie

$$m_a = \mu_{rr}(a), \quad m_b = \mu_{rr}(b),$$

$$I(x) = (2\gamma + \beta) \sigma J_0(\sigma x) - \frac{2\gamma}{x} I_1(\sigma x),$$

$$K(x) = (2\gamma + \beta) \sigma K_0(\sigma x) + \frac{2\gamma}{x} K_1(\sigma x).$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych na składową styczną tensora naprężeń momentowych $\mu_{rz}(a) = n_a$ oraz $\mu_{rz}(b) = n_b$, obliczymy kolejne dwie stałe całkowania:

$$(3.16) \quad A_2 = \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \frac{n_b K_1\left(\frac{a}{l}\right) - n_a K_1\left(\frac{b}{l}\right)}{I_1\left(\frac{a}{l}\right) K_1\left(\frac{b}{l}\right) - I_1\left(\frac{b}{l}\right) K_1\left(\frac{a}{l}\right)},$$

$$(3.17) \quad C_2 = \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \frac{n_a I_1\left(\frac{b}{l}\right) - n_b I_1\left(\frac{a}{l}\right)}{I_1\left(\frac{a}{l}\right) K_1\left(\frac{b}{l}\right) - I_1\left(\frac{b}{l}\right) K_1\left(\frac{a}{l}\right)}.$$

Pozostałe dwie stałe wyznaczmy z warunku na składową styczną naprężenia siłowego na pobocznicę walca $\sigma_{r\theta}(a) = \tau_a$, $\sigma_{r\theta}(b) = \tau_b$. Otrzymamy

$$(3.18) \quad C_3 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \{ \tau_b - \tau_a + [a] - [b] \},$$

$$(3.19) \quad \alpha \left(\frac{1}{\mu} A_3 - 2C \right) = \frac{1}{b^2 - a^2} \{ b^2 \tau_b - a^2 \tau_a + a^2 [a] - b^2 [b] \},$$

gdzie przyjęliśmy następujące oznaczenie:

$$(3.20) \quad [r] = \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \left\{ A_2 \left[\frac{1}{l} I_0\left(\frac{r}{l}\right) - \frac{1}{r} I_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] - C_2 \left[\frac{1}{l} K_0\left(\frac{r}{l}\right) - \frac{1}{r} K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] \right\} + \\ + \frac{\alpha}{2\mu l} (\gamma + \varepsilon) \left[A_2 I_0\left(\frac{r}{l}\right) + C_2 K_0\left(\frac{r}{l}\right) \right] - 2\alpha l \left[A_2 I_0\left(\frac{r}{l}\right) - C_2 K_0\left(\frac{r}{l}\right) \right].$$

Normalne naprężenia momentowe w kierunku osi z nie mogą być przyjęte w sposób dowolny i są określone poprzednimi wzorami, przyjmując postać następującą:

$$(3.21) \quad \mu_{zz} = \beta \frac{1}{l} A_1 I_0\left(\frac{r}{l}\right) - \beta \frac{1}{l} C_1 K_0\left(\frac{r}{l}\right);$$

wynika stąd, że μ_{zz} zależą od r . W podobny sposób otrzymamy

$$(3.22) \quad \sigma_{z\theta} = 2\alpha \left[A_1 I_1\left(\frac{r}{l}\right) + C_1 K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right].$$

W rozwiązaniu przedstawionym wzorami (3.10), (3.12) i (3.13) występuje 7 stałych całkowania, z których 6 wyznaczyliśmy z warunków brzegowych, siódmą wyznaczmy poszukując tylko takich rozwiązań układu równań (3.7)–(3.9), które zarazem spełniają równanie (3.4)₃. Dodatkowa stała wynika z podwyższenia rzędu równania, w trakcie rozseparowywania układu, na skutek różniczkowania równania (3.4)₃. W ten sposób otrzymamy związek

$$(3.23) \quad 2\alpha A_3 + \mu C = 0.$$

Jeżeli $n_a = n_b = 0$, stałe A_2 i C_2 znikają. Jeżeli ponadto $\tau_a = \tau_b = 0$, rozwiązanie układu równań różniczkowych redukuje się do φ_r w postaci podanej w (3.10); u_θ oraz φ_z znikają wtedy tożsamościowo.

4. Rozwiązanie w przypadku $\mu_{zz} = \text{const}$.

Rozwiązanie otrzymane w poprzednim punkcie zawierało tę niedogodność, że naprężenia momentowe w kierunku osi z nie były stałe, lecz dane wzorem (3.21). Załóżmy obecnie, że $\mu_{zz} = \text{const} = C$. Warunek ten będzie spełniony, gdy

$$(4.1) \quad (2\gamma + \beta)\varphi_{z,z} = D, \quad \beta \frac{1}{r} (r\varphi_r)_{,r} = C - D.$$

Przy założeniu, że C_1 i D_1 nie zależą od z , otrzymamy następujące wzory

$$(4.2) \quad \varphi_r = \frac{C-D}{2} r + \frac{1}{r} C_1,$$

$$(4.3) \quad \varphi_z = \frac{D}{2\gamma + \beta} z + D_1,$$

$$(4.4) \quad \kappa = \frac{(2\gamma + \beta)C - 2\gamma D}{(2\gamma + \beta)\beta}.$$

Podstawiając powyższe wzory do układu równań różniczkowych (1.2) otrzymamy

$$(4.5) \quad \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_0 = 0,$$

$$(4.6) \quad u_{0,z} = -2\varphi_r,$$

$$(4.7) \quad (ru_0)_{,r} = 2r\varphi_z.$$

Równania (4.6) i (4.7) będą spełnione, gdy u_0 przyjmie postać następującą:

$$(4.8) \quad u_0 = \frac{D-C}{\beta} zr - 2C_1 \frac{z}{r} + D_1 r,$$

oraz gdy

$$(4.9) \quad 2\gamma D = (2\gamma + \beta)C,$$

skąd wynika, że $\kappa \equiv 0$. Ponadto otrzymamy

$$(4.10) \quad \varphi_r = -\frac{1}{4\gamma} Cr + \frac{1}{r} C_1,$$

$$(4.11) \quad \varphi_z = \frac{1}{2\gamma} Cz + D_1,$$

$$(4.12) \quad u_0 = \frac{1}{2\gamma} Crz + D_1 r - \frac{2}{r} C_1 z,$$

$$(4.13) \quad \sigma_{r0} = \frac{4\mu}{r^2} C_1 z,$$

$$(4.14) \quad \mu_{rr} = -\frac{1}{2} C - 2C_1 \frac{\gamma}{r^2},$$

$$(4.15) \quad \mu_{00} = -\frac{1}{2} C + 2C_1 \frac{\gamma}{r^2}.$$

Wynika stąd następujący związek:

$$(4.16) \quad \mu_{rr} + \mu_{00} = -C,$$

otrzymujemy również, że:

$$(4.17) \quad \mu_{rz} = \mu_{zr} = 0, \quad \sigma_{z0} = \mu u_{0,z}.$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych na składowe normalne naprężeń momentowych $\mu_{rr}(a) = m_a$, $\mu_{rr}(b) = m_b$ otrzymamy

$$(4.18) \quad 2\gamma C_1 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (m_b - m_a),$$

$$(4.19) \quad C = 2 \frac{m_a a^2 - m_b b^2}{b^2 - a^2},$$

$$(4.20) \quad \mu_{rr} = \frac{m_b b^2 - m_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (m_b - m_a) \frac{1}{r^2},$$

$$(4.21) \quad \mu_{00} = \frac{m_b b^2 - m_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (m_b - m_a) \frac{1}{r^2}.$$

Funkcje (4.10)—(4.12) będą rozwiązaniem układu równań różniczkowych (1.2), jeżeli pochodna składowej stycznej naprężenia względem zmiennej z przyjmie następujące wartości na powierzchniach walcowych:

$$(4.22) \quad \sigma_{r0,z}(a) = \frac{2\mu}{\gamma} \frac{b^2}{b^2 - a^2} (m_a - m_b),$$

$$\sigma_{r,z} b = \frac{2\mu}{\gamma} \frac{a^2}{b^2 - a^2} (m_b - m_a)$$

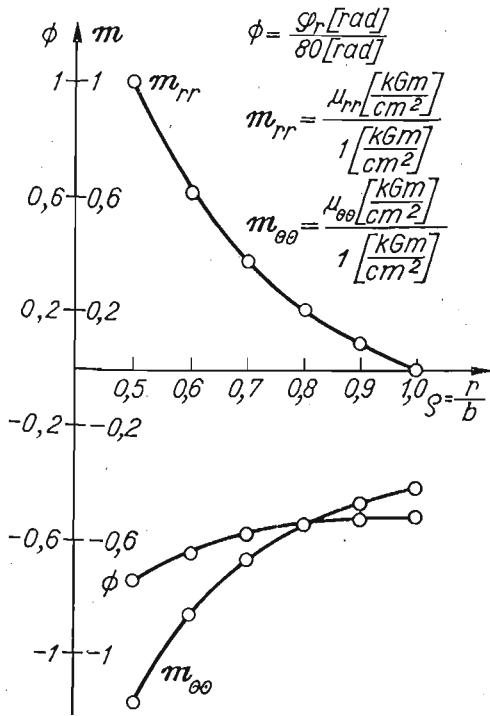
oraz gdy

$$(4.23) \quad \mu_{zz} = C = 2 \frac{m_a a^2 - m_b b^2}{b^2 - a^2}.$$

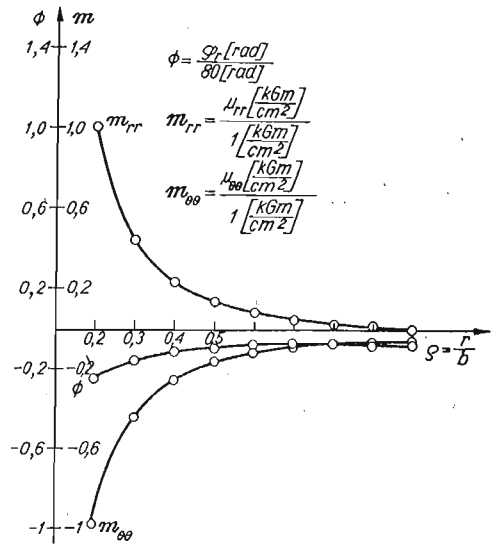
Stała D_1 , występująca we wzorach (4.11) i (4.12) nie odgrywa żadnej roli, jeżeli warunki brzegowe są dane w naprężeniach i naprężeniach momentowych.

5. Uwagi końcowe

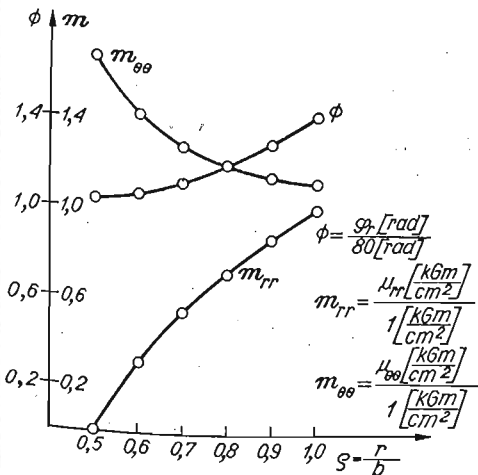
Założenia wprowadzone przy rozwiązywaniu poszczególnych przypadków wpływają na liczbę możliwych do spełnienia warunków brzegowych. W przypadku a) (p. 2) możliwe były do spełnienia tylko warunki na σ_{rr} (lub u_r), z kolei w przypadku b) jeden z warunków na σ_{rz} , na powierzchni walcowej $r = a$, lub $r = b$, musiał wynikać z rozwiązania, w przeciwnym razie nie byłoby spełnione założenie, że naprężenia nie zależą od współrzędnej z .



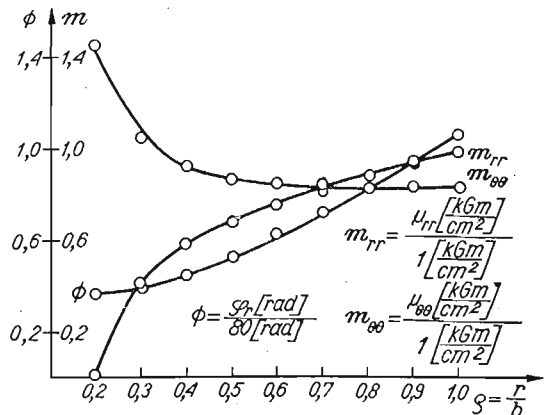
Rys. 1. μ_{rr} przyłożone na powierzchni wewnętrznej, $a/b = 0,5$



Rys. 2. μ_{rr} przyłożone na powierzchni wewnętrznej, $a/b = 0,2$



Rys. 3. μ_{rr} przyłożone na powierzchni zewnętrznej, $b/a = 2$



Rys. 4. μ_{rr} przyłożone na powierzchni zewnętrznej, $b/a = 5$

Założenie, w p. 4, że $\mu_{zz} = \text{const}$ oraz że wielkości C_1 i D_1 są stałymi pozwoliło na dowolne dysponowanie tylko dwoma warunkami brzegowymi z trzech, np. $\mu_{rr}(a)$ i $\mu_{rr}(b)$. Z podanych rozwiązań widać, że przy danych stałych normalnych naprężeniach momentowych na powierzchniach walca muszą wystąpić określone naprężenia momentowe i styczne w przekroju poprzecznym, prostopadłym do osi walca; obok naprężeń momentowych μ_{rr} wystąpi dodatkowo składowa styczna naprężenia siłowych σ_{r0} .

Warto również zwrócić uwagę na to, że stałe całkowania C_1 i C , w zagadnieniu z p. 4, nie zależą od stałych materiałowych, podobnie jak w zagadnieniu Lamégo. Inaczej rzecz się dzieje w przypadku zagadnienia rozpatrywanego w p. 3, gdzie μ_{rr} zależy od stałych materiałowych.

Na załączonych rysunkach podaliśmy wykresy naprężeń momentowych μ_{rr} i μ_{00} oraz składowej promieniowej wektora obrotu φ_r wzdłuż promienia rury, w przypadku zadania rozpatrywanego w p. 3 i znikania pozostałych składowych naprężeń na powierzchniach walcowych. Rozpatrzono cztery przypadki dla dwóch stosunków promienia zewnętrznego i wewnętrznego walca ($b/a = 2$, $b/a = 5$) oraz dla naprężeń momentowych μ_{rr} danych na zewnętrznej powierzchni walca i zerowych na powierzchni wewnętrznej lub na odwrót. Jak było do przewidzenia, naprężenia momentowe μ_{rr} zanikają szybciej wraz z głębokością w porównaniu z zagadnieniem z p. 4, gdzie charakter wykresów jest identyczny, jak w zagadnieniu Lamégo. Rysunki sporządzono we współrzędnych bezwymiarowych, a normalne bezwymiarowe naprężenia momentowe $\left(\frac{1}{2\gamma}\mu_{rr}\right)$ na odpowiednich powierzchniach są równe jedności. Stałe materiałowe wynoszą odpowiednio $\sigma = 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$, $2\gamma = 1$, $\beta = 0$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971, *Theory of micropolar elasticity*, CISM-25, Springer Verlag, 1970.
2. W. NOWACKI, *Propagation of rotation waves in asymmetric elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 7, 16 (1968) 309.
3. W. KOITER, *Couple-stresses in the theory of elasticity I, II*, Proc. Ned. Akad. Wet., (1964), 17 - 44.
4. M. SOKOŁOWSKI, *Couple-stresses in problems of torsion of prismatic bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 8, 13 (1965).
5. M. SOKOŁOWSKI, *O teorii naprężeń momentowych w ośrodkach ze związanymi obrotami*, PWN Warszawa 1972.
6. A. C. SMITH *Torsion and vibrations of cylinders of a micropolar elastic solid*. W: *Recent Advances in Eng. Sciences*, tom 5/II, Gordon & Breach, 1970.
7. D. IEŞAN, *Torsion of micropolar elastic beams*, Int. J. Engng. Sci., 11 (1971), 9.
8. A. J. WILLSON, *The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder*, Int. J. Engng. Sci., 10, (1972), 17 - 22.
9. C. USIDUS, *Wpływ naprężeń momentowych w dwóch modelach ciał mikropolarnych na rozwiązania zagadnień płaskich oraz teorii skręcania*, Rozprawa doktorska, IPPT PAN (1973).
10. C. USIDUS, *Naprężenia momentowe w tarczy kołowej*, Rozpr. Inż., 1, 21 (1973).
11. Z. OLESIAK, M. WĄGROWSKA, *Micropolar, elastic, thick-walled tube*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech. (w druku).

Резюме

РЕШЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ В ПОСТАНОВКЕ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В рамках микрополярной моментной теории упругости рассматривается задача толстостенной трубы, нагруженной по цилиндрическим поверхностям. Обсуждены три случая, отвечающие обобщенной задаче Ляме, обобщенному кручению и распределению моментов, нормальных к боковым поверхностям. Результаты даны также в виде диаграмм.

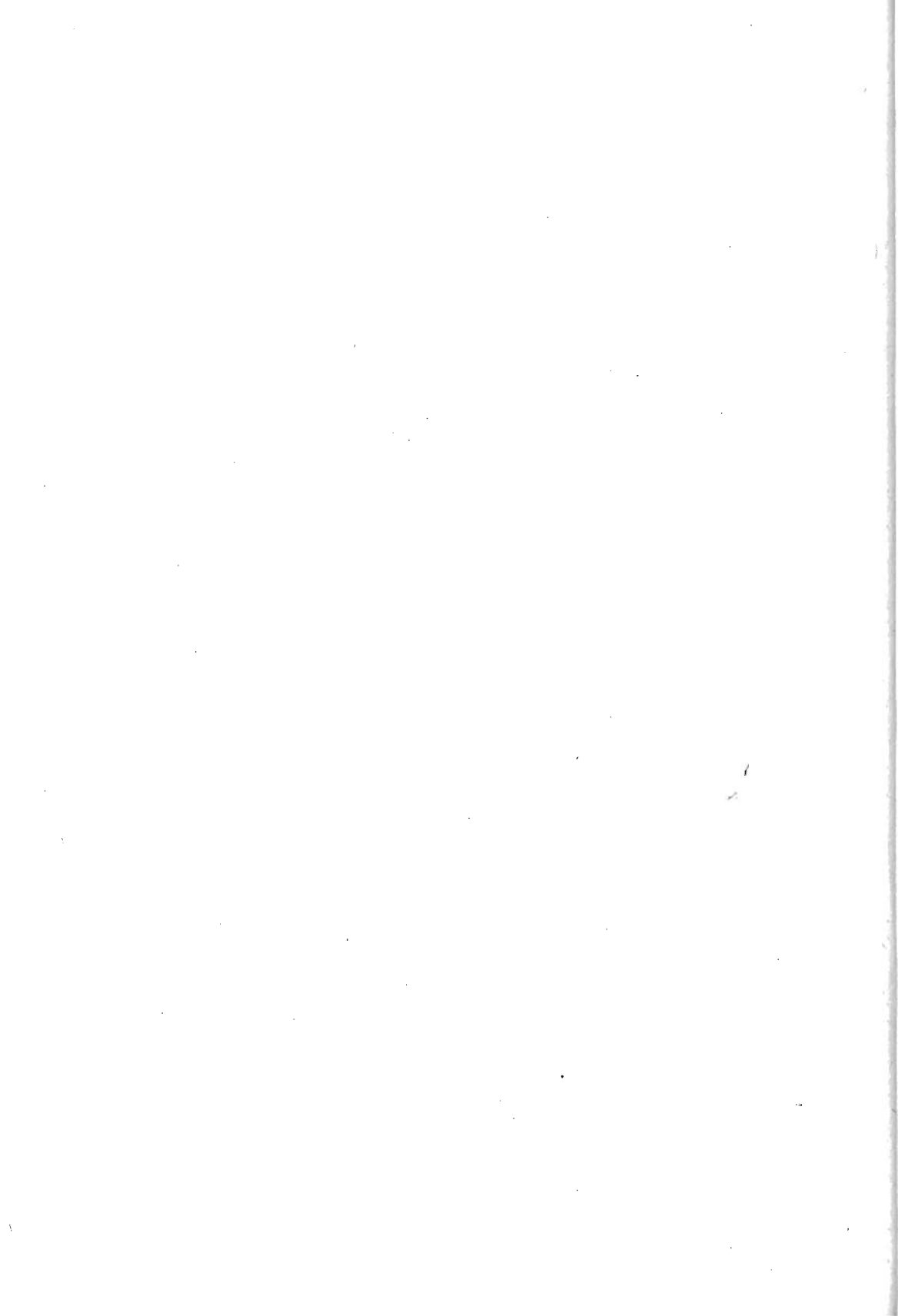
Summary

THE PROBLEM OF A MICROPOLAR ELASTIC THICK-WALLED TUBE

Within the frames of the micropolar theory of elasticity with free rotations, the problem of a thick-walled tube is considered under tractions applied to the cylindrical surfaces. Three cases are examined corresponding to the generalized Lamé problem, generalized torsion and the torsion due to a distribution of moments normal to the surfaces. The results are presented also in the diagrams.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1975 r.



TERMODYNAMIKA DEFORMACJI KRYSZTAŁITÓW POLIMERU ZANURZONYCH W NAPRĘŻONYM OŚRODKU AMORFICZNYM

LESZEK JARECKI (WARSZAWA)

Szeroko stosowane kalorymetryczne, dylatometryczne, rentgenowskie, mikroskopowe i inne metody badań strukturalnych wskazują na to, że w niektórych polimerach można mówić o zjawisku krystalizacji oraz występowaniu struktury krystalicznej i amorficznej. Krystaliczne próbki polimeru mają zwykle strukturę polikrystaliczną, gdzie poniżej temperatury topnienia występują równocześnie dwie fazy, krystaliczna i amorficzna, nie będące ze sobą w równowadze termodynamicznej. Powszechnie wiadomo, że taką częściowo krystaliczną strukturę posiadają włókna, folie i inne wyroby formowane z polimerów zdolnych do krystalizacji.

W czasie formowania czy przetwarzania polimerów często krystalizacji towarzyszy deformacja i orientacja makrocząsteczek łańcuchowych fazy amorficznej, wywołana działaniem sił zewnętrznych (przy rozciąganiu, wytłaczaniu, prasowaniu itp). W takich warunkach, w obszarach amorficznych powstają naprężenia działające następnie na krystality i powodujące ich deformację. Oczywiście, ze względu na anizotropowość fizycznych i mechanicznych własności krystalitów, energia oraz wielkość deformacji zależą od orientacji tych krystalitów w polu sił zewnętrznych deformujących układ.

W jednej z wcześniejszych prac ZIABICKI [1] zwrócił uwagę na to, że wzrost równowagowej temperatury topnienia polimerów w warunkach orientacji molekularnej może być wywołany nie tylko deformacją łańcuchów fazy amorficznej, ale także deformacją krystalitów zanurzonych w deformowanym ośrodku amorficznym. FLISI ze współpracownikami [2] próbowali w sposób półempiryczny określić energię deformacji krystalitów, lecz przewidywane przez nich efekty są niewiarygodnie silne. Wyniki badań przeprowadzonych przez tych autorów nie mogą być brane pod uwagę, ponieważ przyjęto założenie, że kryształy deformują się tak samo, jak faza amorficzna, co prowadzi do deformacji kryształów 10^3 - 10^4 razy większych niż w rzeczywistości.

Niniejsza praca stanowi próbę określenia energii swobodnej i entalpii deformacji części krystalicznej polimeru i zależności tych funkcji termodynamicznych od orientacji krystalitów w przyłożonym zewnętrznym polu sił deformujących. Znajomość zależności funkcji termodynamicznych od deformacji krystalitów pozwoliłaby na oszacowanie wpływu tego efektu na termodynamikę i kinetykę krystalizacji polimerów oraz na orientację krystalitów.

1. Założenia modelowe

Rozważanym układem jest zbiór krystalitów polimeru zanurzonych w ośrodku amorficznym. Wymiary krystalitów są znacznie mniejsze od makroskopowych wymiarów bada-

nej próbki, z drugiej strony zaś znacznie większe od wymiarów elementów kinetycznych fazy amorficznej (segmentów statystycznych). W tej sytuacji otoczenie amorficzne można traktować jako ośrodek ciągły, w którym zanurzone są drobne ciała krystaliczne. W celu uproszczenia obliczeń założono również jednorodność matrycy amorficznej.

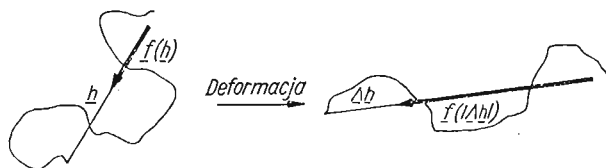
Na poziomie molekularnym ośrodek amorficzny może mieć strukturę usieciowaną, gdzie łańcuchy polimeru łączą się ze sobą w węzłach lub też strukturę nieusieciowaną ze swobodnymi łańcuchami (roztwory, stopy). W pierwszym przypadku faza amorficzna ma własności ciała sprężystego, przy czym sprężystość związana jest głównie z entropią łańcuchów tworzących sieć.

W świetle dotychczasowych badań wydaje się, że wpływ oddziaływań wewnątrzcząsteczkowych i międzycząsteczkowych na własności sprężyste jest stosunkowo mały [3-8]. Znane są równania konstytutywne elastyczności polimerów usieciowanych, wyprowadzone na gruncie kinetycznej teorii elastyczności kauczków, analogicznej do kinetycznej teorii gazu doskonałego. W zakresie małych deformacji równania stanu sformułowane zostały przy założeniu gaussowskiej statystyki konformacji łańcuchów [9, 10], a dla dużych deformacji zakładano statystyki niegaussowskie [11-13]. Dość często stosowane jest również fenomenologiczne równanie zaproponowane dla większych deformacji przez MOONEYA i RIVLINA [14, 15].

Jeśli faza amorficzna ma strukturę nieusieciowaną (roztwory, stopy), to zachowuje się ona jak ciecz lepka. Deformacja makrocząsteczek łańcuchowych następować może jedynie na skutek lepkiego tarcia z cząsteczkami rozpuszczalnika (rozcieńczone roztwory), bądź z sąsiednimi łańcuchami (roztwory i stopy) podczas przepływu.

W wyniku deformacji molekularnej między końcami każdej zdeformowanej makrocząsteczki działa siła elastyczna \mathbf{f} skierowana wzdłuż wektora \mathbf{h} łączącego końce łańcucha (rys. 1). Siła ta powoduje powstawanie naprężeń w zdeformowanym polimerze amorficznym i określa «lokalne» naprężenie \mathbf{p} w otoczeniu jednego łańcucha [16]

$$(1.1) \quad \mathbf{p}(\mathbf{h}) = \nu \mathbf{f} \mathbf{h}^T - p_0 \mathbf{I},$$



Rys. 1. Deformacja makrocząsteczki łańcuchowej

gdzie ν jest liczbą łańcuchów w jednostce objętości fazy amorficznej. Siła elastyczna \mathbf{f} zdefiniowana jest następująco:

$$(1.2) \quad \mathbf{f}(\mathbf{h}) \equiv \frac{\partial F(h, T)}{\partial h} \frac{\mathbf{h}}{h},$$

gdzie F oznacza energię swobodną makrocząsteczki łańcuchowej, T — temperaturę bezwzględną, p_0 — ciśnienie otoczenia, zaś \mathbf{I} — tensor jednostkowy.

Dla łańcuchów gaussowskich, przy zaniedbaniu energii oddziaływań wewnątrzcząsteczkowych, siła elastyczna jest liniową funkcją wektora odległości \mathbf{h} końców łańcucha [17]

$$(1.3) \quad \mathbf{f}(\mathbf{h}) = 3 \frac{kT}{\langle h_0^2 \rangle} \mathbf{h},$$

gdzie parametr statystyczny $\langle h_0^2 \rangle$ jest średnim kwadratem odległości końców swobodnego łańcucha, k — stałą Boltzmanna.

Dla łańcuchów niegaussowskich (rozkład Kuhna-Grüna), z uwzględnieniem oddziaływań wewnątrzcząsteczkowych w przybliżeniu modelu izomerów obrotowych, wyrażenie na siłę elastyczną ma postać [19]

$$(1.4) \quad \mathbf{f}(\mathbf{h}) = - \frac{2\nu kT}{\langle h_0^2 \rangle} \left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left(\frac{h^2}{\langle h_0^2 \rangle} \varepsilon_0 \right)^{i-1} \right] \mathbf{h}.$$

W tym wyrażeniu charakterystyka statystyczna $\langle h_0^2 \rangle$ określa średni kwadrat odległości końców łańcucha zbudowanego ze swobodnie połączonych segmentów długości a_0 , zdefiniowanej następująco:

$$(1.5) \quad a_0 = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ l \rightarrow \infty}} a(h, l),$$

gdzie a jest długością segmentu statystycznego zdeformowanego łańcucha o skończonej długości konturowej l . Współczynniki A_i we wzorze (1.4) mają postać rozwinięcia w szereg względem małego parametru ε_0 , będącego odwrotnością liczby segmentów statystycznych o długości a_0 w łańcuchu

$$(1.6) \quad A_i = \sum_{j=i}^{\infty} A_{ij} \varepsilon_0^{j-i},$$

gdzie $\varepsilon_0 = a_0/l$;

$$(1.6a) \quad A_{11} = \frac{3}{2},$$

$$(1.6b) \quad A_{12} = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \varphi) \frac{(1+2w)^2}{[1 + (1 + \cos \varphi)w]^3},$$

$$(1.6c) \quad A_{22} = \frac{9}{4} \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \varphi) \frac{(1+2w)^2}{[1 + (1 + \cos \varphi)w]^3} \right\}.$$

Wyrażenia na współczynniki A_{ij} wyprowadzono dla trzech typów izomerów (trans, gauche-1, gauche-2), gdzie α jest kątem wartościowości, φ kątem rotacji izomeru gauche mierzonym względem izomeru trans (potencjał rotacyjny symetryczny względem izomeru trans)

$$(1.6d) \quad w = \exp(-\Delta E/kT),$$

gdzie ΔE jest różnicą energii izomerów obrotowych.

ABBE i FLORY [20] oraz ALLEGRA i AVITABILE [21] analizowali deformację pojedynczego łańcucha polietylenu stosując tzw. metodę macierzy FLORY'EGO, lecz autorzy ci nie uzyskali analitycznych wyrażeń na energię swobodną czy siłę elastyczną zdeformowanego łańcucha. Uzyskano jedynie wyniki numeryczne.

Tensor naprężeń w dowolnym punkcie polimeru amorficznego, traktowanego jako ośrodek ciągły i jednorodny, jest średnią tensora «lokalnego» naprężenia \mathbf{p} względem aktualnego rozkładu wektorów koniec–koniec, $W(\mathbf{h})$

$$(1.7) \quad \langle \mathbf{p} \rangle \equiv \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{p}(\mathbf{h}) W(\mathbf{h}) d\mathbf{h}.$$

Zakładając afiniczną deformację łańcuchów, rozumianą jako deformację wektorów \mathbf{h} (rys. 1), tensor naprężeń $\langle \mathbf{p} \rangle$ ma postać szeregu [18]

$$(1.8) \quad \langle \mathbf{p} \rangle = \frac{2}{3} \frac{\nu k T}{\sqrt{\det \mathbf{\Gamma}}} \left[A_1 \frac{\langle h_*^2 \rangle}{\langle h_0^2 \rangle} \mathbf{\Gamma} + \frac{1}{5} A_2 \frac{\langle h_*^4 \rangle}{\langle h_0^2 \rangle^2} (2\mathbf{\Gamma}^2 + \mathbf{\Gamma} \operatorname{tr} \mathbf{\Gamma}) \varepsilon_0 + \dots \right] - p_0 \mathbf{I},$$

gdzie $\mathbf{\Gamma}$ jest tensorem deformacji molekularnej zdefiniowanym

$$(1.8a) \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^T,$$

($\mathbf{\Lambda}$ — tensor gradientu deformacji).

$\langle h_*^2 \rangle$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) są średnimi wartościami dla niezdeformowanego, wyjściowego układu rzeczywistych łańcuchów (sieci, stopy, roztwory). Dla idealnej (stała funkcjonalność) i monodispersyjnej (jednakowa długość łańcuchów) sieci polimeru [22, 23]

$$(1.9) \quad \frac{\langle h_*^2 \rangle}{\langle h_0^2 \rangle} = \frac{2}{s_n},$$

gdzie $s_n = 3, 4, \dots$ określa funkcjonalność węzła sieci.

Naprężenia pojawiające się w otoczeniu amorficznym działają następnie na krystality powodując ich deformację. Deformacja ta jest jednak znacznie mniejsza od deformacji otoczenia. Wynika to z faktu, że moduły sprężystości krystalitów są o trzy, cztery rzędy wyższe od modułów polimeru w stanie amorficznym. Nie wnikając w morfologię krystalitów, w przewidywanym zakresie naprężeń krystality można traktować jako anizotropowe i jednorodne ciała liniowo-sprężyste, nawet jeśli uwzględni się nieliniowe deformacje otoczenia amorficznego.

STACHURSKI i WARD [24] wyznaczyli doświadczalnie wartości modułów sprężystości krystalitów polietylenu zakładając cylindryczną symetrię własności sprężystych (pięć stałych materiałowych).

Ostatnio MC CULLOUGH [25] zaproponował metodę obliczania modułów sprężystości krystalitów polimerów na podstawie numerycznie wyznaczonych zależności energii oddziaływań wewnątrzcząsteczkowych i międzycząsteczkowych od deformacji komórki elementarnej. Autor [25] przeprowadził obliczenia energii oddziaływań dla krystalicznych parafin i polietylenu uwzględniając możliwe defekty, sztywne, równoległe przesunięcia łańcuchów względem siebie, sztywne obroty łańcucha i skręcenia w łańcuchu. Powszechnie wiadomo, że metody takie można stosować dla wyznaczenia stabilnych struktur ciał kry-

stalicznych, ale obliczone wartości energii mogą być obarczone poważnym błędem, toteż wartości modułów mogą również odbiegać od rzeczywistości.

W celu sformułowania warunków brzegowych założono, że na brzeg każdego jednorodnego ciała liniowo-sprężystego, zanurzonego w ośrodku amorficznym, działa jednorodne pole naprężeń σ takie, jak w fazie amorficznej bez inkluzji krystalicznych:

$$(1.10) \quad \sigma(\partial X) = \langle p \rangle = \text{const},$$

gdzie ∂X określa brzeg ciała. W rzeczywistości inkluzje krystaliczne powodują zaburzenia jednorodności pola naprężeń w otoczeniu amorficznym, ale zaburzenia te mogą być zaniedbane jeśli krystality są nieliczne i dość małe w porównaniu z makroskopowymi wymiarami całej próbki. Z uwagi na te założenia dalsze obliczenia będą miały sens dla polimerów o niskich stopniach krystaliczności.

2. Deformacja jednorodnego ciała anizotropowego

W celu wyznaczenia energii swobodnej i entalpii części krystalicznej rozważanego układu należy określić naprężenie i deformację w obszarze każdego z krystalitów. Pola tensorów naprężenia σ i odkształcenia e wewnątrz każdego ciała krystalicznego dla danych warunków brzegowych w postaci (1.10) określone są przez układ równań teorii sprężystości.

Trzy równania równowagi, przy założeniu braku sił masowych i zanikaniu przyspieszeń, mają postać

$$(2.1) \quad \sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

gdzie σ_{ij} są składowymi tensora naprężenia w zewnętrznym, kartezjańskim układzie odniesienia. Zgodnie z powyższymi założeniami zależność między tensorem deformacji e i tensorem naprężenia σ w każdym punkcie ciała będzie przybliżona liniowym równaniem konstytutywnym

$$(2.2) \quad e = \mathfrak{S}\sigma.$$

Tensor \mathfrak{S} , wyrażony w tym samym układzie odniesienia co tensor naprężenia i określający podatność, jest tensorem czwartej walencji, stałym w obszarze ciała (jednorodność).

Rozwiązaniem układu równań teorii sprężystości, spełniającym warunek zgodności odkształceń, jest jednorodne pole naprężeń w całym obszarze rozważanego ciała i takie jak w otoczeniu amorficznym

$$(2.3) \quad \sigma(x) = \sigma(\partial x) = \langle p \rangle.$$

Dla izotermicznej i quasi-statycznej deformacji gęstość energii swobodnej ciał liniowo-sprężystych obliczyć można z ogólnego wzoru [26]

$$(2.4) \quad f = \int \sigma : de = \frac{1}{2} \text{tr}(e\sigma),$$

a gęstość entalpii ze wzoru

$$(2.5) \quad h = Ts - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{e}\boldsymbol{\sigma}),$$

gdzie s jest gęstością entropii ciała. Dla polimerów przyjęc można, że entropia s kryształu nie zmienia się z deformacją [27].

Korzystając z rozwiązania (2.3) układu równań teorii sprężystości, prawo Hooke'a dla rozważanego ciała można zapisać w postaci

$$(2.6) \quad \mathbf{e} = \mathfrak{S} : \langle \mathbf{p} \rangle.$$

Stąd

$$(2.7) \quad f = \frac{1}{2} \text{tr}[(\mathfrak{S} : \langle \mathbf{p} \rangle) \langle \mathbf{p} \rangle].$$

Podobnie można zapisać wyrażenie (2.5) na gęstość entalpii.

Zwykle składowe tensora czwartej walencji \mathfrak{S} podane są w układzie osi głównych (ciała ortotropowe), dlatego też wyrażenie (2.7) należy przedstawić w tym układzie.

Ciała zawieszane w fazie amorficznej mogą być różnie zorientowane względem ustalonego, zewnętrznego układu współrzędnych, w którym określone zostało tensorowe pole naprężeń $\langle \mathbf{p} \rangle$. Wobec tego wyrażenie (2.7) należy stosować dla każdego z ciał oddzielnie, transformując te wzory do układu osi głównych. Niech osie główne danego ciała tworzą z ustalonym układem odniesienia kąty Eulera $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Przy transformacji do układu osi głównych, składowe tensora \mathfrak{S} przechodzą w składowe, których wartości są zwykle znane z pomiarów doświadczalnych. Równocześnie tensor naprężenia $\langle \mathbf{p} \rangle$ przyjmuje postać

$$(2.8) \quad \langle \mathbf{p} \rangle \rightarrow \mathbf{R}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \langle \mathbf{p} \rangle \mathbf{R}^T(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3),$$

gdzie \mathbf{R} jest tensorem transformacji polegającej na obrocie do układu osi głównych ciała.

Po transformacji określonej przez tensor obrotu \mathbf{R} wyrażenie (2.7) na gęstość energii swobodnej przyjmuje następującą postać

$$(2.9) \quad f(\mathfrak{D}) = \frac{1}{2} \text{tr}\{[\mathfrak{S} : (\mathbf{R}\langle \mathbf{p} \rangle \mathbf{R}^T)] \mathbf{R}\langle \mathbf{p} \rangle \mathbf{R}^T\}.$$

Podobnie zapisać można wzór (2.5) na gęstość entalpii deformowanego ciała. Symbol \mathfrak{D} określa trójkę kątów Eulera. Zależność energii swobodnej i entalpii od orientacji deformowanego ciała w naprężonym ośrodku amorficznym wynika z zależności tensora obrotu \mathbf{R} od kątów Eulera \mathfrak{D} .

Znajomość składowych tensora \mathfrak{S} charakteryzującego własności mechaniczne ciała oraz tensora naprężenia $\langle \mathbf{p} \rangle$ panującego w ośrodku amorficznym wystarczy do wyznaczenia swobodnej energii oraz entalpii ciała. Ogólnie tensor naprężenia $\langle \mathbf{p} \rangle$ można znaleźć metodami doświadczalnymi, ale dla odkształceń powodujących afiniczną deformację łań-

cuchów fazy amorficznej znane jest również analityczne wyrażenie na tensor naprężeń¹ w postaci (1.8). W tym przypadku dyskutowane funkcje termodynamiczne zależą od tensora deformacji molekularnej $\mathbf{\Gamma}$

$$(2.10) \quad f = f(\mathfrak{S}; \mathbf{\Gamma}) \quad \text{oraz} \quad h = h(\mathfrak{S}; \mathbf{\Gamma}).$$

3. Deformacja zbioru ciał izotropowych i liniowo sprężystych

Jak już wspomniano, polimery krystaliczne są ciałami polikrystalicznymi, zawierającymi również fazę amorficzną. W warunkach izotropowych, kiedy na układ nie działają siły deformujące lub kiedy deformacja jest izotropowa, rozkład kątowy osi głównych krystalitów jest również izotropowy. Najczęściej jednak, w interesujących nas przypadkach, występuje orientacja zarówno części amorficznej (orientacja segmentów statystycznych), jak i części krystalicznej (orientacja osi głównych), przy czym stwierdzono doświadczalnie, że orientacja krystalitów jest dużo silniejsza od orientacji fazy amorficznej [28 - 31].

W celu wyznaczenia energii swobodnej i entalpii części krystalicznej polimeru należy dokonać uśrednienia tych funkcji termodynamicznych, wyprowadzonych dla pojedynczego kryształu uwzględniając aktualną funkcję rozkładu kątowego osi głównych:

$$(3.1) \quad \langle f \rangle = \int f(\mathfrak{S}) \chi(\mathfrak{S}) d\mathfrak{S},$$

$$(3.2) \quad \langle h \rangle = \int h(\mathfrak{S}) \chi(\mathfrak{S}) d\mathfrak{S},$$

gdzie $\chi(\mathfrak{S})$ jest znormalizowaną funkcją rozkładu kątowego osi głównych ciał krystalicznych

$$(3.3) \quad \int \chi(\mathfrak{S}) d\mathfrak{S} = 1.$$

Dla ciał izotropowych otrzymuje się w sposób trywialny

$$(3.4) \quad \langle f \rangle = f \quad \text{oraz} \quad \langle h \rangle = h.$$

Niestety, nieznane jest obecnie wyrażenie, które opisywałoby rozkład kątowy krystalitów w zależności od wszystkich czynników mających wpływ na orientację fazy krystalicznej. Można wymienić kilka mechanizmów orientacji. Jednym z nich jest mechanizm o charakterze termodynamicznym, prowadzący do rozkładu odpowiadającego minimum energii swobodnej całego układu [38]. Orientacja w roztworach i stopach może następować także w wyniku oddziaływań hydrodynamicznych krystalitów z płynącym ośrodkiem. Ostatnio ZIABICKI [32, 38] przewidział występowanie w polimerach silnego efektu o charakterze kinetycznym, związanego z ograniczeniami kątowymi dla nukleacji fazy krystalicznej. Efekt ten występuje w przypadku, kiedy elementy kinetyczne fazy amorficznej nie są kuliste (walce, prostopadłościany itp.). Ograniczenia te prowadzić mogą do silnych orientacji krystalitów powstających z orientowanego polimeru amorficznego [33, 38].

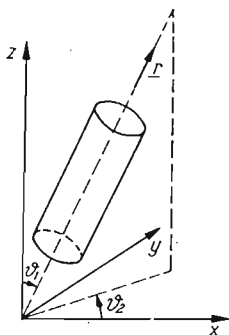
4. Deformacja ciał o symetrii jednoosiowej

Założymy teraz, że krystality polimeru są ciałami jednorodnymi o symetrii jednoosiowej. Celowość przybliżenia kryształów modelem ciała jednorodnego dyskutowali STACHURSKI i WARD [24]. Wyznaczyli oni składowe tensora charakteryzującego podatność kryształów polietylenu. Tensor ten ma postać tensora dla ciał o symetrii jednoosiowej, charakteryzujących się pięcioma stałymi podatnościami. Jednorodność własności sprężystych w całym obszarze ciała zapewnia nam stałość tensora \mathfrak{S} w każdym punkcie tego ciała.

Orientacja ciała jednorodnego o symetrii jednoosiowej jest jednoznacznie określona dwoma kątami ϑ_1 i ϑ_2 (rys. 2). Prawo Hooke'a dla ciał o jednoosiowej symetrii tensora podatności można zapisać w postaci [34]

$$(4.1) \quad \mathbf{e} = k_1(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + k_2\boldsymbol{\sigma} + k_3(\mathbf{r}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) + \frac{1}{2}k_4\left[(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{r}\mathbf{r}^T + (\mathbf{r}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})\mathbf{I} + \frac{1}{2}k_5\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})^T + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}\mathbf{r}^T\right],$$

gdzie k_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) są stałymi sprężystości, a \mathbf{r} jest wersorem osi symetrii ciała.



Rys. 2. Ciało o symetrii jednoosiowej i orientacji ϑ_1, ϑ_2

W zapisie macierzowym tensor podatności \mathfrak{S} reprezentowany jest macierzą kwadratową s_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$). Dla ciał o symetrii jednoosiowej macierz s_{ij} określona jest przez pięć niezależnych stałych materiałowych i ma postać:

$$(4.2) \quad s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & s_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{44} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2(s_{11} - s_{13}) \end{bmatrix}$$

Dla kryształów polietylenu STACHURSKI i WARD [24] podają:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 1,7 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{dynę}, & s_{33} &= 0,5 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{dynę}, \\ s_{44} &= 66,5 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{dynę}, & s_{12} &= -0,85 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{dynę}, \\ s_{13} &= 0,25 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{dynę}. \end{aligned}$$

Związek między składowymi macierzy (4.2) a stałymi k_i można znaleźć przyjmując we wzorze (4.1)

$$\vartheta_1 = 0^\circ \quad \text{oraz} \quad \vartheta_2 = 0^\circ.$$

Odpowiada to sytuacji, kiedy oś ciała pokrywa się z osią Oz zewnętrznego układu odniesienia. Dokonując odpowiednich przekształceń prowadzących do porównania prawa Hooke'a w postaci tensorowej z prawem Hooke'a zapisanym macierzowo otrzymujemy:

$$(4.3a) \quad k_1 = s_{12},$$

$$(4.3b) \quad k_2 = s_{11} - s_{12},$$

$$(4.3c) \quad k_3 = s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44},$$

$$(4.3d) \quad k_4 = 2(s_{13} - s_{12}),$$

$$(4.3e) \quad k_5 = 2s_{12} - 2s_{11} + s_{44}.$$

Zgodnie z założeniem, na brzeg każdego ciała zanurzonego w deformowanym ośrodku amorficznym działa jednorodne pole naprężeń $\langle \mathbf{p} \rangle$. Z równań teorii sprężystości wynika, że dla takich warunków brzegowych pole tensora naprężeń wewnątrz każdego ciała jest jednorodne i takie, jak na brzegu (rozdz. 1).

Po podstawieniu we wzorze (4.1) tensora naprężeń w postaci (2.3) i po wykonaniu prostych przekształceń gęstości energii swobodnej i entalpii ciała jednorodnego o symetrii jednoosiowej i orientacji osi ϑ_1, ϑ_2 wyrażają się następująco:

$$(4.4) \quad f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{e}\langle \mathbf{p} \rangle) = \frac{1}{2} \{k_1(\operatorname{tr}\langle \mathbf{p} \rangle)^2 + k_2 \operatorname{tr}\langle \mathbf{p} \rangle^2 + k_3[\operatorname{tr}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T\langle \mathbf{p} \rangle)]^2 + k_4(\operatorname{tr}\langle \mathbf{p} \rangle)\operatorname{tr}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T\langle \mathbf{p} \rangle) + k_5 \operatorname{tr}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T\langle \mathbf{p} \rangle^2)\},$$

$$(4.5) \quad h(\vartheta_1, \vartheta_2) = Ts - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{e}\langle \mathbf{p} \rangle).$$

Wyrażenia te otrzymuje się, jeżeli zauważyć, że

$$(4.6) \quad \operatorname{tr}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T\langle \mathbf{p} \rangle) = \mathbf{r}^T\langle \mathbf{p} \rangle\mathbf{r}, \quad \langle \mathbf{p} \rangle^T = \langle \mathbf{p} \rangle, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T\langle \mathbf{p} \rangle^2) = \mathbf{r}^T\langle \mathbf{p} \rangle^2\mathbf{r} = (\langle \mathbf{p} \rangle\mathbf{r})^T\langle \mathbf{p} \rangle\mathbf{r} = \operatorname{tr}(\langle \mathbf{p} \rangle\mathbf{r}\mathbf{r}^T\langle \mathbf{p} \rangle).$$

Średnią energię swobodną i średnią entalpię zdeformowanych ciał jednoosiowych otrzymamy przez uśrednienie wyrażeń (4.4) i (4.5) po wszystkich orientacjach. Należy wyrażenia te uśrednić po rozkładzie kątowym $\chi(\vartheta_1, \vartheta_2)$ wektorów \mathbf{r} . W stanie niezorientowanym, kiedy rozkład kątowy osi ciał jest izotropowy

$$(4.7) \quad \chi(\vartheta_1, \vartheta_2) = 1/4\pi,$$

średnia energia swobodna fazy krystalicznej polimeru w przybliżeniu ciał jednoosiowych ma postać

$$(4.8) \quad \langle f \rangle = \frac{Q_k}{2Q_a} [P_1(\operatorname{tr}\langle \mathbf{p} \rangle)^2 + P_2 \operatorname{tr}\langle \mathbf{p} \rangle^2],$$

a średnia entalpia

$$(4.9) \quad \langle h \rangle = Ts - \frac{\rho_k}{2\rho_a} [P_1(\text{tr}\langle \mathbf{p} \rangle)^2 + P_2 \text{tr}\langle \mathbf{p} \rangle^2],$$

gdzie ρ_a , ρ_k odpowiednio gęstość fazy amorficznej i krystalicznej;

$$(4.9a) \quad P_1 = k_1 + \frac{1}{15}k_3 + \frac{1}{5}k_4,$$

$$(4.9b) \quad P_2 = k_2 + \frac{2}{15}k_3 + \frac{1}{3}k_5.$$

Wzory te uzyskano po scałkowaniu wyrażenia (4.4) po izotropowym rozkładzie kątowym osi (4.7) oraz po wykonaniu prostych przekształceń. Wyrażenia takiej postaci otrzymuje się również dla ciał izotropowych [35]. Uśrednienie energii swobodnej i entalpii ciał po izotropowym rozkładzie kątowym osi prowadzi więc do wyrażeń otrzymanych dla ciał izotropowych. Wyrażenia (4.8) i (4.9) stanowią pierwszy krok w oszacowaniu tych funkcji termodynamicznych dla deformowanych obszarów krystalicznych polimeru.

Dla afinicznych deformacji łańcuchów fazy amorficznej, kiedy tensor naprężeń $\langle \mathbf{p} \rangle$ określony jest przez tensor deformacji molekularnej $\mathbf{\Gamma}$ za pomocą wyrażenia (1.8), zmiana energii swobodnej ciał odpowiadająca danej deformacji ma w tym przybliżeniu następującą postać:

$$(4.10) \quad \langle f \rangle = \frac{2}{3} \nu k T \frac{\rho_k}{\rho_a} \left\{ p_0(P_1 + P_2) A_1 \frac{\langle h_*^2 \rangle}{\langle h_0^2 \rangle} \left(\frac{\text{tr} \mathbf{\Gamma}}{\sqrt{\det \mathbf{\Gamma}}} - 3 \right) + \right. \\ \left. + 2A_1 \frac{\langle h_*^2 \rangle}{\langle h_0^2 \rangle} \left[P_1 \left(\frac{(\text{tr} \mathbf{\Gamma})^2}{\det \mathbf{\Gamma}} - 9 \right) + P_2 \left(\frac{\text{tr} \mathbf{\Gamma}^2}{\det \mathbf{\Gamma}} - 3 \right) \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon_0 \frac{p_0(P_1 + P_2)}{5} A_2 \frac{\langle h_*^4 \rangle}{\langle h_0^2 \rangle^2} \left[\frac{2 \text{tr} \mathbf{\Gamma}^2 + (\text{tr} \mathbf{\Gamma})^2}{\sqrt{\det \mathbf{\Gamma}}} - 15 \right] + \dots \right\}.$$

W numerycznych obliczeniach gęstości energii swobodnej i entalpii deformowanych ciał o jednoosiowej symetrii własności sprężystych przyjęto pięć stałych materiałowych podanych w pracy [24] dla polietylenu. Obliczenia przeprowadzono na podstawie ogólnego wzoru (4.10) dla mas cząsteczkowych 10 000, 32 000 i 100 000 przy założeniu jednoosiowej i izochorycznej deformacji molekularnej, danej tensorem:

$$(4.11) \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}, \quad (\det \mathbf{\Gamma} = 1),$$

gdzie λ jest krotnością wydłużenia ($\lambda \geq 1$). Wyniki przedstawiono na rys. 3. Zmiany energii swobodnej fazy krystalicznej, wywołane deformacją matrycy amorficznej, są dodatnie i rosną ze wzrostem deformacji molekularnej, podczas gdy entalpia deformacji jest ujemna i maleje z wydłużeniem λ . Z wykresów przedstawionych na rys. 3 widać, że

energetyczne efekty deformacji są silniejsze dla polimerów o niższej masie cząsteczkowej. W obliczeniach przyjęto różnicę energii izomerów obrotowych [17]:

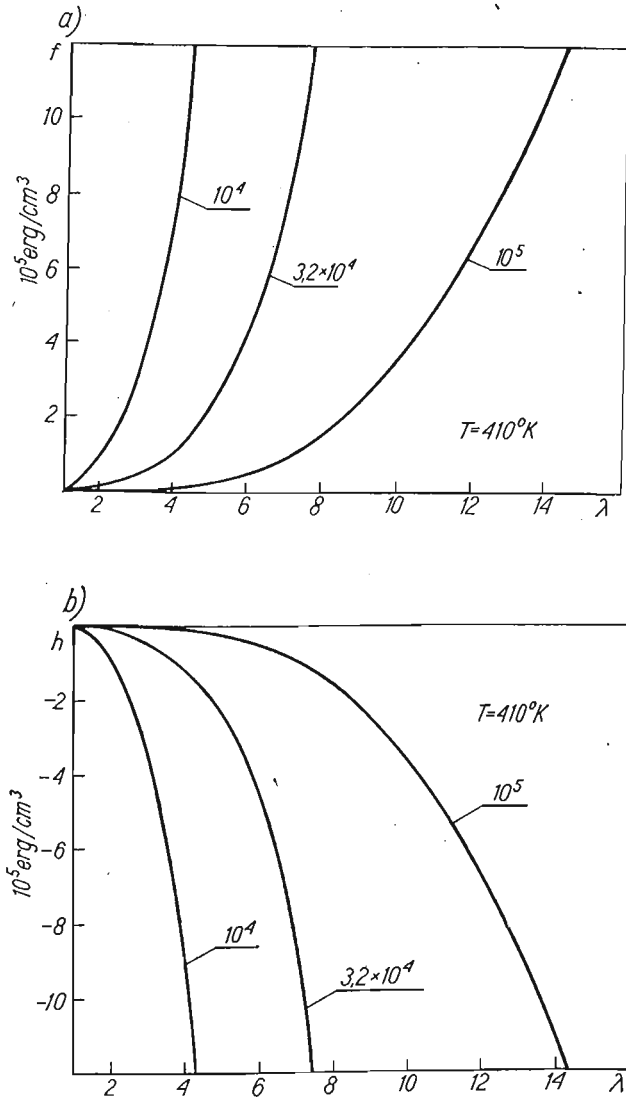
$$\Delta E = 5,1 \times 10^{-14} \text{ ergów,}$$

oraz gęstość fazy amorficznej [37]

$$\rho_a = 0,855 \text{ g/cm}^3$$

i krystalicznej [38]

$$\rho_k = 1,014 \text{ g/cm}^3.$$



Rys. 3. Zależność gęstości entalpii deformacji (b) i energii swobodnej (a) od wydłużenia (jednoosiowe rozciąganie) dla kryształów polietylenu i różnych mas cząsteczkowych

5. Podsumowanie

Oszacowane w tej pracy zmiany energii swobodnej krystalitów, wywołane naprężeniami w ośrodku amorficznym, są o dwa rzędy mniejsze od odpowiednich zmian energii swobodnej amorficznej części polimeru [18] (na jednostkę objętości faz). Podobnie niewielkie są zmiany entalpii krystalitów w porównaniu ze zmianami entalpii fazy amorficznej [18]. Należy podkreślić, że wyrażenia na funkcje termodynamiczne dla fazy krystalicznej wyprowadzono zakładając afiniczność deformacji molekularnej oraz że w obliczeniach numerycznych ograniczono się do wyrazów drugiego rzędu względem tensora deformacji molekularnej \mathbf{T} .

Założenie afiniczności wydaje się uzasadnione dla polimerów nieusieciowanych. W sieciach łańcuchy nie zawsze deformują się afinicznie. Szczególnie dla dużych deformacji sieci, efekty nieafiniczności i kooperacji łańcuchów mogą odgrywać znaczną rolę.

Podstawową trudność w wyznaczeniu średnich funkcji termodynamicznych części krystalicznej polimeru stanowi nieznajomość rozkładów orientacji krystalitów.

Literatura cytowana w tekście

1. A. ZIABICKI, *Polimery*, **18**, (1973), 615.
2. U. FLISI, V. ZAMBONI, G. NOVAJRA, G. PEVERI, *Europ. Polymer J.*, **9** (1973), 1187.
3. G. ALLEN, U. BIANCHI, C. PRICE, *Trans. Faraday Soc.*, **59** (1963), 2493.
4. M. SHEN, P. J. BLATZ, *J. Appl. Phys.*, **39** (1968), 4937.
5. M. SHEN, *Macromol.*, **2** (1969), 358.
6. R. J. ROE, W. R. KRIGBAUM, *J. Polymer Sci.*, **61** (1962), 167.
7. P. J. FLORY, C. A. HOEVE, A. CIFERRI, *J. Polymer Sci.*, **34** (1959), 337.
8. M. SHEN, M. CROUCHER, *Rev. Macromol. Chem.* (w druku).
9. H. M. JAMES, E. GUTH, *J. Chem. Phys.*, **11** (1943), 453.
10. P. J. FLORY, *J. Am. Chem. Soc.*, **78** (1956), 5222.
11. M. C. WANG, E. GUTH, *J. Chem. Phys.*, **20** (1952), 114.
12. K. J. SMITH, A. CIFERRI, J. J. HERMANS, *J. Polymer Sci.-Phys.*, **2** (1964), 1025.
13. K. J. SMITH, *J. Polymer Sci.-Phys.*, **9** (1971), 2119.
14. M. J. MOONEY, *J. Appl. Phys.*, **11** (1940), 582.
15. R. S. RIVLIN, w książce «Rheology» pod red. F. ERICHA vol. 1, Academic Press, N. Y. 1956.
16. A. ZIABICKI, *Mech. Teoret. i Stos.*, **9** (1971), 403.
17. M. B. ВОЛЬКЕНШТЕЙН, *Конфигурационная Статистика Полимерных Цепей*, Москва-Ленинград 1959, с. 411.
18. L. JARECKI, *Prace IPPT*, 29/1974 (praca doktorska).
19. L. JARECKI, *Prace IPPT*, 46/1975, s. 139 - 160.
20. Y. ABE, P. J. FLORY, *J. Chem. Phys.*, **52** (1970), 2814.
21. G. ALLEGRA, G. AVATABILE, *J. Chem. Phys.*, **56** (1972), 238.
22. G. RONCA, G. ALLEGRA, *J. Chem. Phys.*, **63** (1975) 4104.
23. J. WALASEK, *Prace IPPT* 8/1976.
24. Z. H. STACHURSKI, I. M. WARD, *J. Macromol. Sci.-Phys.*, **B3**, **3** (1969), 427.
25. R. L. McCULLOUGH, *J. Macromol. Sci.-Phys.*, **B9**, **1**, (1974), 97.
26. F. J. NYE, *Własności fizyczne kryształów*, PWN (1962).
27. T. ALFREY, *Mechanical Behaviour of High Polymers*, N. Y. 1948.
28. W. R. KRIGBAUM, R. J. ROE, *J. Polymer Sci.*, **A2** (1964), 4391.
29. R. KITAMARU, H. DONG, W. TSUII, *Intern. Symp. on Macromol. Chem.*, Tokyo-Kyoto 1966, Preprints, **8**, 98.

30. A. WASIAK, Prace IPPT, 38/1973.
31. A. WASIAK, Prace IPPT 39/1973.
32. A. ZIABICKI, J. Chem. Phys. (w druku).
33. B. WODNICKA, Prace IPPT, praca doktorska (w przygotowaniu).
34. J. RYCHLEWSKI, *Tensory i funkcje tensorowe*, (wyklady-1972).
35. Niepublikowane prace PFP IPPT PAN — Sprawozdanie z tematu węzłowego 03.1.2 za rok 1972.
36. G. ALLEN, G. GEE, G. J. WILSON, *Polymer*, 1 (1960), 466.
37. P. H. GEIL, *Polymer Single Crystals*, Wiley-Interscience, N. Y. 1963.
38. A. ZIABICKI, L. JARECKI, V-th Europhysics Conference on Macromolecular Physics, «Orientation Effects in Solid Polymers», Budapest 1976.

Резюме

ТЕРМОДИНАМИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРИСТАЛЛОВ ПОЛИМЕРА
ПОГРУЖЕННЫХ В НАПРЯЖЕННОЙ АМОРФНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается совокупность мелких кристаллитов полимера, находящихся в напряженной аморфной среде. Аморфный материал считается сплошной средой с однородным полем напряжений, определенным по предпосылке аффинной деформации полимерных цепей.

Тензор напряжений в аморфном материале представлен в виде ряда по отношению к $(\Gamma \epsilon_0)$, где Γ — тензор молекулярной деформации, а ϵ_0 число обратное к количеству сегментов цепи.

Полагается, что кристаллические включения малы по сравнению с макроскопическими размерами системы и что их плотность в смысле объема мала. С другой стороны можно принять, что малые с макроскопической точки зрения включения больше имеют значительно размеры, чем кинетические элементы аморфной среды (статистические сегменты). Так как деформации кристаллитов значительно меньше деформаций аморфных областей (отношение модулей $1:10^{-4}$) то в исследуемом интервале напряжений можно описывать деформацию каждого включения законом Гука для анизотропных тел.

Уравнения теории упругости для включений решены при предпосылках об отсутствии массовых сил, ускорений и при однородном поле краевых напряжений, полученным из рассмотрения аморфной фазы. Рассчитаны плотности энтальпии и свободной энергии для одиночного включения в зависимости от его ориентации, после чего проведено усреднение согласно распределению ориентаций. Решен пример для полиэтилена, для которого принята осевая симметрия упругих свойств кристаллов (пять упругих постоянных).

Summary

THERMODYNAMICS OF CRYSTALLITE DEFORMATION
IN A STRESSED AMORPHOUS POLYMER MATRIX

The system of small crystals embedded in the deformed amorphous matrix is considered. The amorphous part of the system is treated as a homogeneous continuum with uniform field of stress controlled by the affine deformation of polymer chains.

The stress tensor in the amorphous matrix is presented as the series expansion over $(\Gamma \epsilon_0)$, where Γ is the tensor of molecular deformation, ϵ_0 — the inverse number of statistical chain segments. This form of the stress tensor results from the deformation theory of the isolated chain macromolecule.

It has been assumed that crystalline inclusions are small as compared with the macroscopic dimensions of the considered system, and their number in a unit volume is small. On the other hand, these small inclusions are much larger than the kinetic elements of the amorphous phase (statistical chain segments).

The stress resulting from the deformation of the amorphous matrix affects the crystalline inclusions. Deformation of the inclusions is much smaller than the deformation of the amorphous part.

Free energy of deformation of crystalline inclusions subjected to the uniform stress field on its surface has been calculated as a function of the orientation of crystal axes with respect to the main axes of the stress tensor. The orientation - dependent free energy has been subsequently averaged over the orientation distribution of crystal axes.

Example calculations concerned polyethylene.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1975 r.

O STATECZNOŚCI WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA OSCYLATORA I CIĘGNA W RUCHU WZGLĘDNYM

ROMAN BOGACZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Badania dotyczące stateczności układów ciągłych wymuszonych ruchomymi obciążeniami (zwłaszcza typu inercyjnego) są rozwijane w różnych dziedzinach fizyki i techniki zarówno ze względu na liczne zastosowania, jak również ze względów poznawczych.

Badaniu układów mechanicznych tego typu poświęcono m.in. pracę [1], w której przeprowadzono jakościową analizę wpływu prędkości ruchu siły skupionej o stałej wartości, przemieszczającej się wzdłuż belki spoczywającej na sprężystym podłożu na odkształcenia belki. W pracach [2] i [3] uogólniono powyższe rezultaty na przypadek obciążenia układem rozstawionych sił skupionych i uresorowanych mas. Autorzy pracy [3] badali również wpływ prędkości ruchu na częstość drgań własnych, jednak kierując się wykorzystaniem rezultatów w kolejnictwie ograniczyli rozważania do względnie małych prędkości ruchu wynoszących poniżej 20% prędkości krytycznej, co przy przyjętych parametrach toru i podłoża nie wymagało analizy stateczności.

Analizie stateczności układów ograniczonych obciążonych poruszającymi się masami poświęcono szereg prac. Do najbardziej znaczących należą tu prace [4 ÷ 6].

Autorzy prac [4] i [5] przedstawili odkształcenia belki o podpartych końcach w postaci sumy szeregu fal stojących, sprowadzając zagadnienie stateczności do analizy obszarów rezonansu parametrycznego równania różniczkowego zwyczajnego.

Uzyskane wyniki mają charakter przybliżony i są niekiedy obarczone istotnym błędem. Znany jest bowiem z doświadczenia fakt, że odkształcenia dla tego rodzaju obciążeń mają charakter fal bieżących, co teoretycznie rozważono w [6] i innych pracach S. KALISKIEGO, analizując przypadek obciążenia o charakterze ciągłym.

Zagadnienie stateczności, które prezentujemy w niniejszym komunikacie, stanowi uzupełnienie badań dotyczących ruchomych obciążeń skupionych, a także uogólnienie rozważań dotyczących obciążeń ciągłych, takich jak gęsto, równomiernie rozłożone oscylatory [6, 7], badanych zarówno na gruncie mechaniki elektrodynamiki, jak i elektrofononiki [8].

Rozważymy zatem stateczność układu złożonego z nieograniczonego ciężna, masy skupionej i bezmasowych elementów o własnościach lepkosprężystych łączących masę z ciężnem oraz otoczeniem. W niezaburzonym ruchu względnym masa i prostoliniowe ciężno spoczywają w dwóch inercjalnych układach współrzędnych, zachowując stałą odległość pomiędzy masą i ciężnem.

Analiza stateczności ruchu tak sprecyzowanego, uproszczonego modelu układu, poza aspektem poznawczym może być przydatna do wyjaśnienia szeregu zjawisk, które należy eliminować w pewnych dziedzinach techniki, m.in. w transporcie, włókiennictwie, a niekiedy wykorzystać np. w bardziej złożonych układach teorii pól połączonych [8].

W drugiej części pracy sformułujemy problem podając równania ruchu i warunki brzegowe dla przypadku jedno i dwupunktowego oddziaływania oscylatora z ciągnem, w części trzeciej podamy rozwiązanie zagadnienia oraz sposób uzyskania równań charakterystycznych. Część czwartą poświęcimy kryteriom i obszarom stateczności, część piątą analizie numerycznej dla wybranych przypadków, kończąc pracę uwagami będącymi podsumowaniem uzyskanych rezultatów.

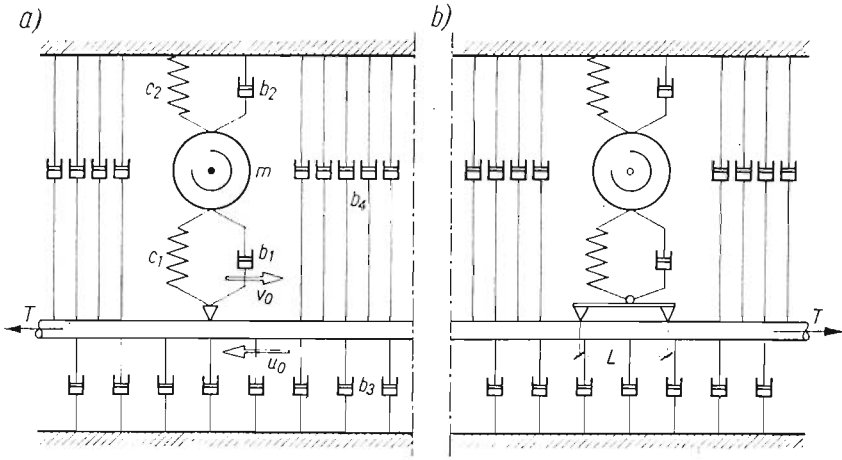
Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a prędkość sprężystych fal poprzecznych w ciągnie,
- b_1 współczynnik lepkości elementu łączącego ciągnie z masą oscylatora,
- b_2 współczynnik lepkości elementu łączącego masę oscylatora z otoczeniem,
- b_3 współczynnik wewnętrzznego tłumienia ciągnia na jednostkę długości,
- b_4 współczynnik zewnętrznego tłumienia ciągnia na jednostkę długości,
- c_1 stała sprężysta elementu łączącego ciągnie z masą oscylatora,
- c_2 stała sprężysta elementu łączącego masę oscylatora z otoczeniem,
- h_1, h_2 współczynniki zanikania lub narastania fal w przestrzeni,
- k_1, k_2 liczby falowe,
- L odległość pomiędzy punktami oddziaływania oscylatora dwupunktowego z ciągnem,
- m masa oscylatora,
- P_1 siła w elemencie łączącym masę oscylatora z ciągnem,
- R, Z zbiory liczb rzeczywistych i zespolonych,
- T siła naciągu ciągnia,
- U_0 prędkość ruchu ciągnia względem otoczenia w kierunku przeciwnym do osi ξ ,
- v_0 prędkość ruchu oscylatora względem ciągnia w kierunku osi x , (ξ),
- W przemieszczenie poprzeczne ciągnia w kierunku osi y lub ζ ,
- x, y kartezjański układ współrzędnych związany z oscylatorem,
- z_1 przemieszczenie punktu styku oscylatora z ciągnem,
- z_2 przemieszczenie masy oscylatora,
- ε_0 dekrement zanikania i narastania drgań w czasie,
- ξ, ζ kartezjański układ współrzędnych związany z ciągnem,
- ϱ liniowa gęstość masy ciągnia,
- ω_0 częstość drgań układu oscylator–ciągnie.

2. Sformułowanie problemu, równania ruchu i warunki brzegowe

Rozważymy liniowy model układu złożony z nieskończonego, napiętego ciągnia oddziałującego z otoczeniem poprzez gęsto, równomiernie rozłożone tłumiki oraz z oscylatora (masy skupionej połączonej z ciągnem i otoczeniem elementami lepko-sprężystymi).

W niezaburzonym ruchu względnym masy i ciągnia napięcie w elementach łączących jest równe zero. Schemat układu dla przypadku jedno i dwupunktowego oddziaływania oscylatora z ciągnem ilustrują rys. 1a i 1b.



Rys. 1

Analizę ruchu przeprowadzimy przy następujących założeniach: prędkości względnego ruchu u_0, v_0 są stałe. Tarcie w punktach oddziaływania oscylatora z cięgnem jest pomijalnie małe. Ciężno nie przenosi momentów gnących. Masy elementów łączących są pomijalnie małe. Nie uwzględnia się oddziaływań grawitacyjnych.

W celu opisu ruchu układu w stanie zaburzenia statycznej równowagi oscylatora wprowadzimy dwa inercjalne układy współrzędnych ξ, ζ — związany z cięgnem oraz x, y związany z oscylatorem.

Osie współrzędnych skierujemy tak, aby słuszne były relacje:

$$(2.1) \quad \xi - x - v_0 t = 0; \quad \zeta - y = 0.$$

Przy przyjętych założeniach ruch ciężna opiszemy równaniem poprzecznych drgań struny. Równanie to słuszne dla $x \neq 0$ w przypadku oscylatora jednopunktowego oraz $|x| \neq L/2$ w przypadku oscylatora dwupunktowego po zapisaniu w układzie współrzędnych x, y przyjmie postać

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - 2v_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + (v_0^2 - a^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a(\beta_3 + \beta_4) \frac{\partial W}{\partial t} - a[(\beta_3 + \beta_4)v_0 - \beta_4 u_0] \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

gdzie

$$W = W(x, t), \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad \beta_i = \frac{b_i}{qa} \quad (i = 3, 4).$$

Relację pomiędzy przemieszczeniem masy oscylatora $z_2(t)$ oraz punktem styku z cięgnem $z_1(t)$ (dla oscylatora jednopunktowego $z_1(t) = -W(0, t)$) opiszemy następującym równaniem:

$$(2.3) \quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} + a(\beta_1 + \beta_2) \frac{dz_2}{dt} - a\beta_1 \frac{dz_1}{dt} + a^2(\alpha_1 + \alpha_2)z_2 - a^2\alpha_1 z_1 = 0,$$

$$\alpha_j = \frac{c_j}{ma^2}, \quad \beta_j = \frac{b_j}{ma} \quad (j = 1, 2),$$

przy czym siłę oddziaływania oscylatora na ciężko określa wyrażenie

$$(2.4) \quad P_1(t) = a^2 m \left[\alpha_1 (z_2 - z_1) + \alpha \beta_1 / a \frac{d(z_2 - z_1)}{dt} \right].$$

Czyniąc zadość warunkowi wypromieniowania żądamy zanikania rozwiązań w nieskończoności

$$(2.5) \quad W(x, t) \Big|_{\substack{x \rightarrow \pm \infty \\ v_0^2 < a^2}} \rightarrow 0.$$

Zależność pomiędzy oddziaływaniem oscylatora na ciężko i ciężko na oscylator zapiszemy

$$(2.6) \quad P_1(t) + P_2(t) = 0.$$

Natomiast warunek ciągłości przemieszczeń wyraża się wzorami:

dla oscylatora jednopunktowego

$$(2.7) \quad W_1(0, t) = W_2(0, t) = -z_1(t),$$

gdzie

$$(2.8) \quad W_1(x, t) = W(x, t)|_{x < 0} \quad \text{i} \quad W_2(x, t) = W(x, t)|_{x > 0};$$

dla oscylatora dwupunktowego

$$(2.9) \quad \begin{aligned} W^{(1)}(-L/2, t) &= W^{(0)}(-L/2, t); & W^{(0)}(L/2, t) &= W^{(2)}(L/2, t), \\ W^{(1)}(-L/2, t) + W^{(2)}(L/2, t) &= -2z_1(t), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} W^{(0)}(x, t) &= W(x, t)|_{-L/2 < x < L/2}; & W^{(1)}(x, t) &= W(x, t)|_{x < -L/2}; \\ W^{(2)}(x, t) &= W(x, t)|_{x > L/2}. \end{aligned}$$

Siłę oddziaływania ciężko na oscylator dla przypadku jednopunktowego oddziaływania wyraża wzór

$$(2.10) \quad P_2(t) = a^2 \varrho \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2^{(2)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0},$$

natomiast dla przypadku dwupunktowego oddziaływania o elemencie łączącym połączonym przegubowo i symetrycznie słuszny jest związek

$$(2.11) \quad P_2(t) = 2a^2 \varrho \left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=-L/2} = 2\varrho a^2 \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=L/2}.$$

Układ równań (2.2), (2.3) wraz z podanymi wyżej warunkami w pełni opisują zagadnienie. Przystąpimy zatem do określenia postaci rozwiązania problemu oraz dyskusji jego stabilności.

3. Rozwiązanie zagadnienia, równania charakterystyczne

Rozwiązania układu równań (2.2), (2.3) poszukiwać będziemy w postaci

$$(3.1) \quad W(x, t) = X(x)e^{\lambda_0 t}; \quad z_j(t) = B_j e^{\lambda_0 t}; \quad p_j(t) = \pm P_0 e^{\lambda_0 t}, \quad j = 1, 2.$$

Po podstawieniu (3.1) do (2.2) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne względem $X(x)$ o rozwiązaniach w postaci

$$(3.2) \quad X(x) = \sum_{s=1}^2 A_{ns} e^{r_s x}; \quad r = h_s + ik_s; \quad h_s, k_s \in R; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Przy czym dekrementy zanikania fal oraz liczby falowe w przypadku okresowego ruchu oscylatora określają wzory:

$$(3.3) \quad h_{1/2} = \frac{-\eta}{2(1-v^2)} \pm \frac{\sqrt{\eta^2 - 4\omega^2 + \sqrt{(\eta^2 - 4\omega^2)^2 + 16\omega^2[1 + \beta_3 + \beta_4(1+uv)]^2}}}{2\sqrt{2}(1-v^2)},$$

$$(3.4) \quad k_{1/2} = \frac{\omega v}{1-v^2} \pm \frac{\sqrt{2}\omega[\beta_3 + \beta_4(1+uv)]}{(1-v^2)\sqrt{\eta^2 - 4\omega^2 + \sqrt{(\eta^2 - 4\omega^2)^2 + 16\omega^2[1 + \beta_3 + \beta_4(1+uv)]^2}}}$$

gdzie $\lambda = \lambda_0 a^{-1}$, $\omega = \text{Im}(\lambda) = \frac{\omega_0}{a}$, $v = v_0 a^{-1}$, $u = u_0 a^{-1}$, $\eta = \beta_3 v + \beta_4(v-u)$.

Zgodnie z warunkiem wypromieniowania, po wykorzystaniu warunku zgodności (2.7) oraz na podstawie (2.8) i (3.2) otrzymamy:

$$(3.5) \quad W_n(x, t) = A_0 \{ H[-(-1)^n(v+1)] \exp[(h_1 + ik_1)x + \lambda_0 t] + H[(-1)^n(1-v)] \times \\ \times \exp[(h_2 + ik_2)x + \lambda_0 t],$$

gdzie:

$$(3.6) \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x > 0, \\ 1 & \text{dla } x \geq 0; \end{cases}$$

$$k_1 \omega (1-|v|) \geq 0; \quad k_2 \omega \leq 0,$$

$$(3.7) \quad h_1(1+v) \geq 0; \quad h_2(1-v) \leq 0 \quad \text{dla } \text{Re } \lambda \geq 0.$$

Wykorzystując powyższe oznaczenia oraz związki (2.7) i (2.10), otrzymamy następującą relację pomiędzy przemieszczeniem cięgna a siłą skupioną określoną przez (3.1) przyłożoną w $x = 0$

$$(3.8) \quad W(x, t) = \frac{-P_0 A_0^{-1}}{a^2 \rho [h_1 - h_2 + i(k_1 - k_2)]} [W_1(x, t) H_0(-x) + W_2(x, t) H_0(x)],$$

gdzie

$$H_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1/2 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Kładąc w (3.8) $x = 0$ określimy przemieszczenia $z_1(t)$ dla przypadku oddziaływania jednopunktowego (rys. 1a), które przyjmie postać

$$(3.9) \quad z_1(t) = \frac{-P_0 e^{\lambda_0 t} H(1-|v|)}{a^2 \rho [h_1 - h_2 + i(k_1 - k_2)]}.$$

Związek pomiędzy obciążeniem $p(t)$ i przemieszczeniem $z_1(t)$ w przypadku oscylatora dwupunktowego (rys. 1b) można otrzymać wykorzystując bądź liniowość układu i stosując zasadę superpozycji, bądź (postępując podobnie jak w przypadku oscylatora jedno-

punktowego) zastępując związki (2.7) i (2.10) warunkami (2.9) i (2.11). Ostatecznie otrzymamy

$$(3.10) \quad z_1(t) = \frac{-P_0 e^{2\omega t}}{2a^2 \varrho [h_1 - h_2 + i(k_1 - k_2)]} \left[H(1 - |v|) + \frac{1}{2} e^{-(h_1 + ik_1)L} + \text{sign}(1 - |v|) e^{-(h_2 + ik_2)L} \right].$$

Analogiczną relację wyrażoną przez parametry oscylatora otrzymamy w wyniku spełnienia rozwiązaniami o postaci (3.1) równania ruchu (2.3) oraz związku (2.4). Relacja ta przyjmie postać

$$(3.11) \quad z_1(t) = \frac{-P_0 \gamma_1 e^{2\omega t}}{a^2 \varrho} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2) \lambda}{\alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 + \beta_1 \beta_2) \lambda^2 + \lambda(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \beta_1 \lambda^2)},$$

gdzie $\gamma_1 = \varrho m^{-1}$.

Porównując stronami (3.9) lub (3.10) z (3.11) otrzymamy dla ustalonych parametrów układu $\alpha_i, \beta_i, \gamma_1, L$ oraz parametrów ruchu u, v równanie charakterystyczne względem λ . Równanie to, które symbolicznie zapiszemy w formie następującej relacji:

$$(3.12) \quad \Phi(\lambda, s) = 0,$$

gdzie

$$\lambda \in Z, \quad s \in S, \quad s = \langle u, v \rangle, \quad S = UxV, \quad u, v \in R,$$

będzie stanowić podstawę do dyskusji stateczności ruchu rozważanego układu.

4. Kryteria i obszary niestateczności

Kierując się własnościami rozwiązań (3.1) zbiór parametrów ruchu S podzielimy na trzy podzbiory, które nazywać będziemy: obszarami niestateczności — S_I , obszarami quasi-stateczności — S_Q oraz obszarami stateczności — S_S . Własności poszczególnych obszarów określone są następująco:

$$(4.1) \quad S_I = \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in Z^+} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\},$$

$$(4.2) \quad S_Q = \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in I} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\},$$

$$(4.3) \quad S_S = S - (S_Q \cup S_I),$$

gdzie $Z^+ = \{z: [\text{Re}(z) > 0]\}$, $I = \{z: [\text{Re}(z) = 0]\}$. Przy czym następujący zbiór elementów

$$(4.4) \quad S_{Id} = \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in R^+} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\} - \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in (Z^+ - R)} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\}$$

nazywać będziemy obszarami niestateczności o charakterze dywergentnym.

Zbiór

$$(4.5) \quad S_{Io} = \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in (Z^+ - R)} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\} - S_{Id}$$

nazywać będziemy obszarem oscylacyjnej utraty stateczności. Natomiast zbiór określony następująco:

$$(4.6) \quad S_{Im} = S_I - S_{Id} - S_{Io}$$

nazywać będziemy obszarem utraty stateczności o charakterze dywergentno-oscyłacyjnym lub mieszanym.

Wyznaczenie *explicite* zbioru S_I z równania (4.12) jest zwykle czasochłonne, a w przypadku równań algebraicznych stopnia wyższego aniżeli czwarty lub niewymiernych równań charakterystycznych możliwe tylko w szczególnych przypadkach.

Analizę stateczności ułatwia niekiedy wykorzystanie pomocniczych kryteriów stateczności, których spełnienie równoznaczne jest następującemu warunkowi:

$$(4.7) \quad \bigwedge_{\lambda} [\Phi(\lambda, s_0) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0]$$

dla ustalonych parametrów układu i parametrów ruchu.

W przypadku, gdy równanie charakterystyczne ma postać wielomianu powszechnie stosowane są następujące kryteria pomocnicze:

Kryterium HURWITZA (omówione m.in. w [11]) żądające dodatniości wyznacznika oraz jego głównych minorów, którego wyrazami są odpowiednie współczynniki wielomianu.

Kryterium MICHAJŁOWA (patrz [11]) polega na badaniu konfiguracji krzywej

$$(4.8) \quad \Phi_1 = f(\Phi_2)$$

danej parametrycznie dla $-\infty < \omega < +\infty$, gdzie:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1(\omega, s_0) = \operatorname{Re}[\Phi(\lambda, s_0)|_{\lambda=i\omega} = 0], \\ \Phi_2 &= \Phi_2(\omega, s_0) = \operatorname{Im}[\Phi(\lambda, s_0)|_{\lambda=i\omega} = 0]. \end{aligned}$$

Uogólnione kryterium MICHAJŁOWA [7], w którym analizuje się ukształtowanie krzywych

$$(4.10) \quad \Phi_j(\omega, s) = 0, \quad j = 1, 2; \quad \omega \in \Omega$$

w przestrzeni $\Omega \times U \times V$ umożliwiają przejrzysty podział parametrów na obszary stateczności i niestateczności.

W przypadkach bardziej złożonych równań charakterystycznych, w których wymienione kryteria nie obowiązują, wykorzystujemy elementy teorii funkcji zmiennej zespolonej oraz metody przybliżone i technikę cyfrową. W niniejszym komunikacie, w celu przykładowego określenia obszarów niestateczności, wykorzystamy również następujące kryteria pomocnicze będące rozwinięciem uogólnionego twierdzenia MICHAJŁOWA.

Załóżmy, że istnieje taki zbiór Q^* , $Q^* \subset Q$, w którym $\omega = \varphi_j(s)$ ($j = 1, 2$) są ciągłymi, jednoznaczными gałęziami $\Phi_j(\omega, s) = 0$, tj.

$$(4.11) \quad [\omega = \varphi_j(s)] \equiv [\Phi_j(\omega, s) = 0] \quad \text{dla} \quad \langle \omega, s \rangle \in Q^*$$

oraz następujące podzbiory:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} Q_L^* &= \{q: [(\Phi(q) = 0) \wedge (q \in Q^*)]\}, \\ S^* &= \{s: \bigvee_{\omega} [\langle \omega, s \rangle \in Q^*]\}, \\ S_L^* &= \{s: \bigvee_{\omega} [\langle \omega, s \rangle \in Q_L^*]\}, \end{aligned}$$

$$S^{*(j)} = \left\{ \langle u, v \rangle: \bigvee_{0 < K < 1} [(u = u_0 + Ku_j - Ku_0) \wedge (v = v_0 + Kv_j - Kv_0) \wedge (\langle u, v \rangle \in S^*)] \right\}.$$

Zbiór parametrów ruchu S^* posiada następujące własności:

Własność 1. Jeżeli istnieje $q^0 = \langle \omega^0, s^0 \rangle$, ($q^0 \in Q_L^*$) taki, że $\varphi_j(s^0)$, ($j = 1, 2$) jest analityczna oraz spełniony jest następujący warunek

$$(4.13) \quad \bigvee_{s_1, s_2} \bigwedge_{s^{(1)}, s^{(2)}} [(s^{(1)} \in S^{*(1)} \wedge (s^{(2)} \in S^{*(2)})) \Rightarrow (\varphi_1(s^{(1)}) - \varphi_2(s^{(1)})(\varphi_1(s^{(2)}) - \varphi_2(s^{(2)}) < 0)],$$

to istnieje niepusty zbiór $S_I^* = S_I \cap S^*$ będący obszarem niestateczności.

Własność 2. Jeżeli; $\varphi_j(s)$, ($j = 1, 2$) jest analityczna dla $s \in S_L^*$, istnieje taki $q^0 \in Q_L^*$, że spełniony jest warunek (4.13) oraz zachodzi

$$(4.14) \quad \bigvee_{s_1, s_2} [(s_1 \in S^* \cap S_S) \vee (s_2 \in S^* \cap S_S)],$$

to S_L^* jest podzbiorem obszaru quasi-niestateczności ($S_L^* \subset S_Q$) i tworzy granicę pomiędzy obszarami stateczności i niestateczności.

Powyższe własności są wystarczającymi warunkami na to, aby istniał obszar niestateczności oraz granica tego obszaru.

Istnienie obszaru niestateczności przy spełnionym warunku (4.13) łatwo wykazać rozwijając $\Phi(\lambda, s)$ w otoczeniu q^0 w szereg Taylora. Układ równań otrzymany po rozdzielaniu części rzeczywistej i urojonej (w przypadku aproksymacji rozwinięcia liniowym przybliżeniem oraz wykorzystaniu faktu, że $\frac{\partial \Phi_j}{\partial v^0}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial u^0}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial \omega^0} \in R$) przyjmie postać:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} (\omega - \omega^0) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} \varepsilon + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v^0} (v - v^0) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} (u - u^0) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} (\omega - \omega^0) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} \varepsilon + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v^0} (v - v^0) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u^0} (u - u^0) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono: $\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-1}$,

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial \omega^0} = \left. \frac{\partial \Phi_j(\omega, u, v)}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega = \omega^0 \\ u = u^0 \\ v = v^0}} \quad \text{oraz analogicznie} \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial u^0}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial v^0}.$$

Wyrażenie określające dekrement narastania fali wyznaczony z powyższego układu równań wyrazi się wzorem

$$(4.16) \quad \varepsilon = \frac{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v^0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v^0} \right) (v^0 - v) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u^0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u^0} \right) (u^0 - u)}{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} \right)^2}.$$

W szczególnym przypadku, w którym q^0 jest punktem przegięcia jednej z powierzchni Φ_j (punkt typu parabolicznego) o płaszczyźnie stycznej będącej zarazem styczną do drugiej powierzchni, aby otrzymać związek podobny do (4.16) należy uwzględnić trzy lub więcej wyrazów szeregu. Z postaci wzoru (4.16) wynika, że w otoczeniu s_0 istnieje takie $s = s_I$, że $\varepsilon(s_I) > 0$, czyli $s_I \in S_I$.

Wykorzystując fakt, że $\Phi(\lambda, s)$ jest analityczna dla $q \in Q_L^*$ łatwo wykazać własność 2.

Wymienione wyżej własności oraz kryteria pozwalają na zbadanie zagadnienia stateczności rozważanego przez nas układu. Analizie numerycznej dla wybranych przypadków poświęcimy następną część niniejszej pracy.

5. Analiza numeryczna

5.1. Przypadek jednopunktowego oddziaływania oscylatora z ciągnem. Równanie charakterystyczne oddziaływania ciągnia z tłumikami otrzymamy spełniając równanie (2.2) rozwiązaniami (3.1), (3.2). Przyjmie ono następującą formę:

$$(5.1) \quad \lambda^2 + (\beta_3 + \beta_4 - 2ur)\lambda - \beta_3 ur + r^2(u^2 - 1) = 0.$$

Natomiast podstawą do dyskusji stateczności oddziaływania jednopunktowego oscylatora z tłumionym ciągnem będzie równanie (3.12) zapisane następująco:

$$(5.2) \quad \frac{(1-v^2)H(1-|v|)}{[(\beta_3 + \beta_4)(\beta_3 + \beta_4 + 8\lambda)v^2 + \beta_4^2 u^2 - 2(\beta_3 + \beta_4 + 2\lambda)\beta_4 uv + 4(\lambda - \beta_3 - \beta_4)\lambda]^{1/2}} + \frac{\gamma_1 [\lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2)\lambda + \alpha_1 + \alpha_2]}{(\alpha_1 + \beta_1 \beta_2)\lambda^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \beta_1 \lambda^2)\lambda + \alpha_1 \alpha_2} = 0.$$

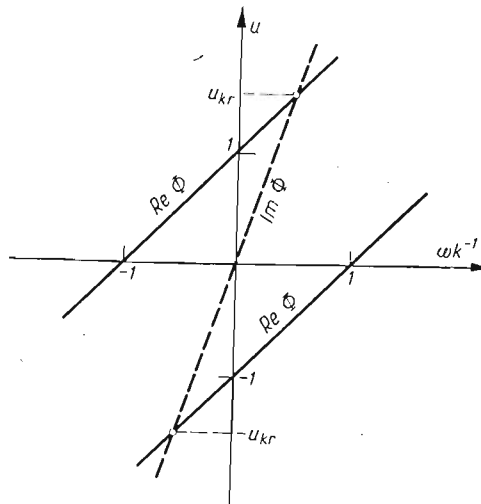
Stosując do (5.1) uogólnione kryterium MICHAJŁOWA otrzymamy następujące wyrażenie określające granicę obszaru niestateczności:

$$(5.3) \quad u_{kr} = \frac{\beta_3 + \beta_4}{\beta_4}$$

oraz obszar niestateczności

$$(5.4) \quad U_I = \left\{ u : |u| > \frac{\beta_3 + \beta_4}{\beta_4} \right\}; \quad U_I \times V = S_I^{(1)} \subset S_I.$$

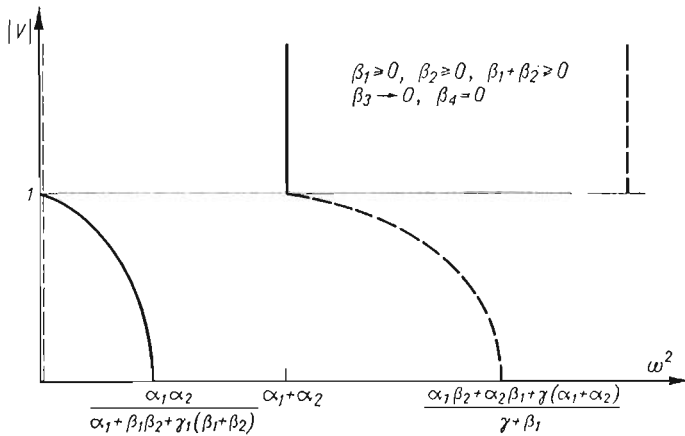
Konfigurację krzywych Φ_1 i Φ_2 [określonych wzorem (4.9)] na płaszczyźnie fazowej $\omega k^{-1}, u$ dla równania (5.1) przedstawiono na rys. 2.



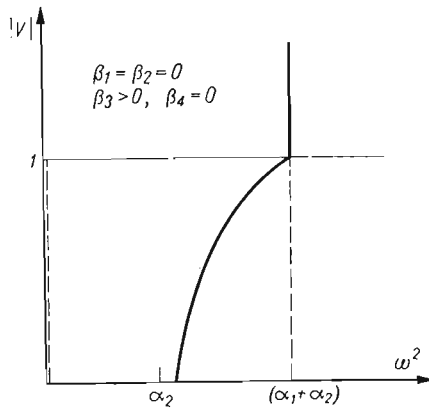
Rys. 2

Zauważmy, że w szczególnym przypadku, gdy $\beta_3 = 0$ ze wzoru (5.3) otrzymujemy znaną w literaturze wartość prędkości krytycznej tłumików przemieszczających się wzdłuż struny. Rezultat ten podany jest m.in. w pracy [10] poświęconej analizie stateczności struny, której gęstość opisana jest funkcją losową.

Obraz płaszczyzny fazowej ω, v ilustrujący stateczność oddziaływania oscylatora z ciągnem uzyskany na podstawie równania charakterystycznego (5.2) dla wybranych parametrów układu przedstawiono na rys. 3 i 4.



Rys. 3



Rys. 4

Na podstawie wykresu przedstawionego na rys. 3 dla $|u| < 1$, $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\beta_3 \rightarrow 0$, $\beta_4 \rightarrow 0$ można wnioskować, że gdyby Φ_1 oraz Φ_2 określić w przestrzeni ω, u, v , to uogólnione kryterium stateczności MICHAJŁOWA byłoby spełnione dla całego zakresu prędkości v poza wartością $v = 1$

$$(5.5) \quad \{ \langle u, v \rangle : [(|u| < 1) \wedge (v \neq 1)] \} \subset S_S.$$

Natomiast z wykresu przedstawionego na rys. 4 dla $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_3 > 0$, $\beta_4 = 0$ wynika, że pomimo zmiany konfiguracji krzywych Φ_1 i Φ_2 dla $|v| < 1$ obszar

$$(5.6) \quad \{\langle u, v \rangle : [(u \in R) \wedge (|v| < 1)]\} \subset S_S$$

pozostaje obszarem stateczności, a obszar

$$(5.7) \quad \{\langle u, v \rangle : [(u \in R) \wedge (|v| > 1)]\} \subset S_Q$$

przechodzi w obszar quasi-niestateczności.

Fakt, że wartość prędkości ciągną względem otoczenia nie ma wpływu na stateczność wynika z braku względnego tłumienia ciągną ($\beta_4 = 0$).

W przypadku $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\beta_3 = \beta_4 = 0$ możemy badać stateczność oscylatora współdziałającego z ciągnem wykorzystując kryterium stateczności HURWITZA. Jest ono równoważne warunkom:

dla $|v| \leq 1$

$$(5.8) \quad \begin{aligned} & [(\alpha_1 + \beta_1 \beta_2)(1 - v^2) + 2(\beta_1 + \beta_2)\gamma_1][\beta_1(1 - v^2) + 2\gamma_1]^{-1} > 0, \\ & [(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)(1 - v^2) + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\gamma_1][\beta_1(1 - v^2) + 2\gamma_1]^{-1} > 0, \\ & [(\alpha_1 + \alpha_2)2\gamma_1 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)(1 - v^2)][(\alpha_1 + \beta_1 \beta_2)(1 - v^2) + 2(\beta_1 + \beta_2)\gamma_1] > \\ & > \alpha_1 \alpha_2 [\beta_1(1 - v^2) + 2\gamma_1] \end{aligned}$$

oraz dla $|v| > 1$.

$$(5.9) \quad \beta_1 + \beta_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 > 0.$$

Z (5.8) wynika, że dla $|v| < 1$ ruch oscylatora jest stateczny. Pokrywa się to z wnioskiem (5.6) uzyskanym dla $\beta_3 > 0$. Podobnie, obszar (5.7) jest obszarem asymptotycznej stateczności jedynie wtedy, gdy $\beta_1 + \beta_2 > 0$.

Na uwagę zasługuje fakt, że ukształtowanie obszarów stateczności w rozważanych dotychczas przypadkach różni się zasadniczo od obszarów uzyskanych w [7] dla układu gęsto, równomiernie rozłożonych oscylatorów. Szereg jakościowo nowych efektów wynika z analizy dwupunktowego oddziaływania pojedynczego oscylatora z układem ciągłym, co będzie teraz przedmiotem rozważań.

5.2. Oddziaływanie dwupunktowe. Równanie charakterystyczne dla przypadku dwupunktowego oddziaływania z ciągnem (rys. 1b), otrzymane po wykorzystaniu związków (3.10) i (3.11), wyrazi się następująco:

$$(5.8) \quad \frac{H(1 - v^2) + \frac{1}{2}e^{-(h_1 + ik_1)L} + \frac{1}{2}\text{sign}(1 - v^2)e^{-(h_2 + ik_2)L}}{2\gamma_1 L[h_1 - h_2 + i(k_1 - k_2)]} = \\ = \frac{\lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2)\lambda + \alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 \lambda^3 + (\alpha_1 + \beta_1 \beta_2)\lambda^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)\lambda + \alpha_1 \alpha_2}.$$

Oznaczając: $A = \lambda L$, $4\gamma_1 L = \gamma_2$, $\alpha_j L^2 = \kappa_j$; ($j = 1, 2$), $\beta_i L = \delta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\omega L = \Theta$, $\varepsilon_0 a^{-1} L = \sigma$ oraz kładąc $\delta_3 = \delta_4 = 0$, co znacznie upraszcza rachunkową część pracy, otrzymamy

$$(5.9) \quad (1 + \delta_1 F)A^3 + [\delta_1 + \delta_2 + (\kappa_1 + \delta_1 \delta_2)F]A^2 + [\kappa_1 + \kappa_2 + (\kappa_1 \delta_2 + \kappa_2 \delta_1)F]A + \\ + \kappa_1 \kappa_2 F = 0,$$

gdzie

$$F = F(A, v) = \frac{\exp\left(\frac{-A}{1-|v|}\right) + \left[2 + \exp\left(\frac{-A}{1-|v|}\right)\right] H(1-v^2) - H(v^2-1) \exp\left(\frac{-A}{|v|-1}\right)}{\gamma_2(v^2-1)^{-1}}$$

Szereg wniosków dotyczących wpływu poszczególnych rodzajów tłumienia, uzyskanych dla przypadku jednopunktowego oddziaływania, pozostaje słusznych. Aby umożliwić porównanie wyników uzyskanych dla pojedynczego oscylatora z rezultatami prac [6, 7], uzyskanymi dla oscylatorów swobodnych, rozważymy bardziej szczegółowo przypadek $\kappa_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Jeżeli w (5.9) uwzględnić, że $A = \sigma + i\Theta$ oraz zażądać niezależnego spełnienia równania zarówno przez część rzeczywistą jak urojoną, wówczas otrzymamy następujący układ równań:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \sigma^2 + A(\sigma, \Theta)\sigma + \kappa_1 - \Theta^2 - B(\sigma, \Theta)\Theta &= 0 \\ 2\sigma\Theta + A(\sigma, \Theta)\Theta + B(\sigma, \Theta)\sigma &= 0, \end{aligned} \quad \text{dla } |v| \geq 1,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A(\sigma, \Theta) &= \frac{v^2-1}{\gamma_2} e^{-\frac{\sigma}{v+1}} \left(\cos \frac{\Theta}{v+1} - e^{-\frac{2\sigma}{v^2-1}} \cos \frac{\Theta}{v-1} \right), \\ B(\sigma, \Theta) &= \frac{v^2-1}{\gamma_2} e^{-\frac{\sigma}{v+1}} \left(\sin \frac{\Theta}{v+1} - e^{-\frac{2\sigma}{v^2-1}} \sin \frac{\Theta}{v-1} \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że z postaci układu równań (5.10) wynika, iż σ jest parzystą funkcją Θ . Wystarczy więc rozważyć zakres $\Theta \geq 0$. Kładąc w równaniach (5.10) $\sigma = 0$ otrzymać możemy zależności określone wzorami (4.9), które mogą posłużyć do badania stateczności z wykorzystaniem własności podanych w części 4.

W celu uwypuklenia wpływu poszczególnych parametrów na konfigurację obszarów niestateczności na rys. 5÷7 naniesiono wyniki oszacowań przy różnych założeniach.

Wykresy przedstawione na rys. 5 uzyskano przyjmując, że

$$(5.11) \quad \left| \exp\left(\frac{-A}{|v|-1}\right) - \exp\left(\frac{-A}{|v|+1}\right) \right| \leq 2,$$

ilustrują one wpływ parametrów κ_1 , γ_2 na kształt obszaru, w którym znajdować się może krzywa Φ_1 dana równaniem $\Phi_1(\Theta, v) = 0$. Na rys. 6 naniesiono obszary $\sigma(\Theta, v) \geq 0$, których granicami są krzywe Φ_2 . Obszary te wyznaczono wykorzystując warunek

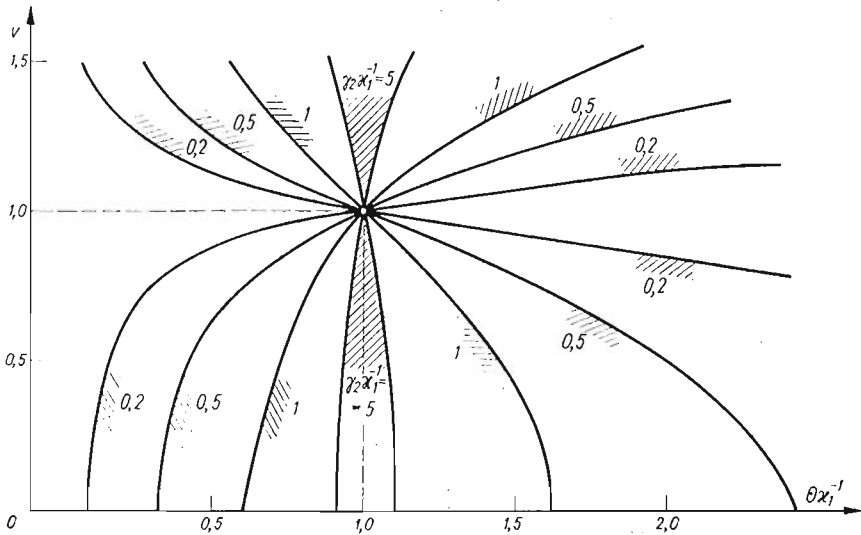
$$(5.12) \quad \sigma \geq 0 \Rightarrow A(\sigma, \Theta) \leq 0,$$

którego słuszność można wykazać stosując do równania (5.9) twierdzenie Rouché.

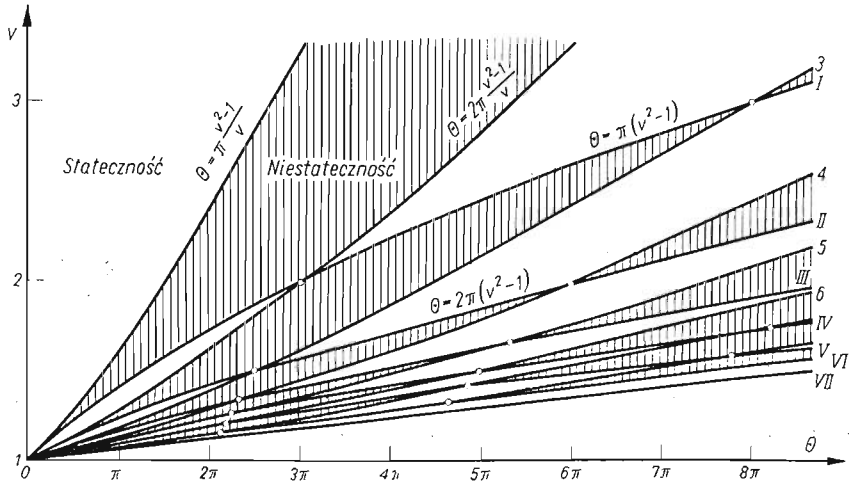
Nałożenie obszarów z rys. 5 i 6 pozwala na oszacowanie odpowiadającego $\sigma \geq 0$ zakresu prędkości v w zależności od κ_1 i γ_2 . Oszacowanie jest tym lepsze, im większa jest wartość parametru γ_2 oraz im mniejsza wartość κ_1 . Charakterystyczny jest fakt, że może istnieć taka graniczna wartość $v = v_c$, że

$$V_{cs} = \{v: (|v| > v_c)\}$$

jest zakresem stateczności ruchu układu. Łatwo zauważyć, że jeżeli $\kappa_1 \rightarrow 0$ (np. jeśli $L \rightarrow 0$), to $v_c \rightarrow 1$, co pokrywa się z rezultatami uzyskanymi dla przypadku jednopunktowego oddziaływania oscylatora z ciągnem.



Rys. 5

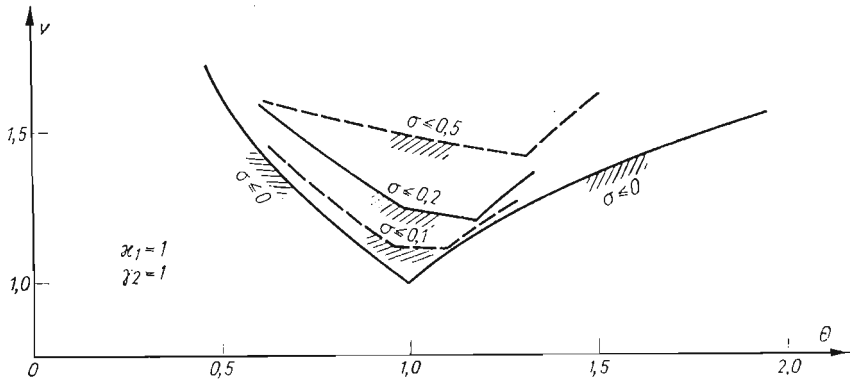


Rys. 6

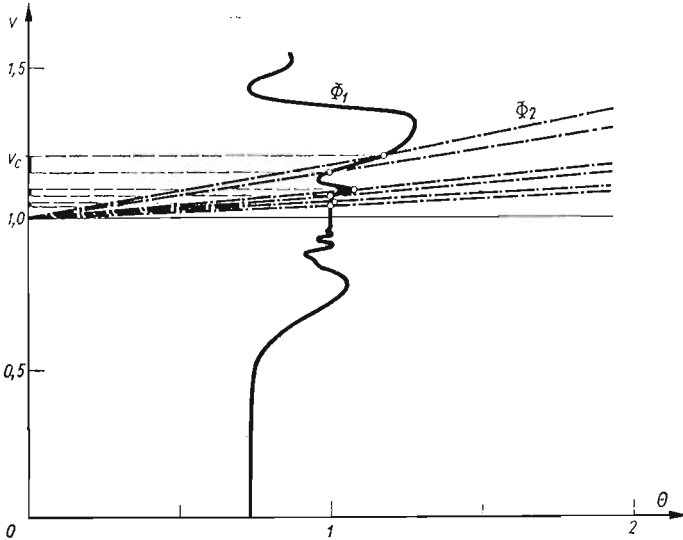
Na rys. 7 naniesiono obszary możliwych rozwiązań niestatecznych o dekrementach: $\sigma > 0$; $\sigma > 0,1$; $\sigma > 0,2$; $\sigma > 0,5$ dla $\kappa_1 = \gamma_2 = 1$.

Z kształtu wykresów wynika, że większe wartości dekrementu narastania drgań są możliwe przy większych wartościach prędkości ruchu.

Ukształtowanie krzywych Φ_1 i Φ_2 na płaszczyźnie Θ, v oraz konfigurację zakresów niestateczności dla $\kappa_1 = \gamma_2 = 1$ ilustruje rys. 8.



Rys. 7



Rys. 8

Widzimy, że w przypadku tym, typowym dla dwupunktowego oddziaływania obszar niestateczności składa się z nieskończonej, przeliczalnej liczby zakresów niestateczności o charakterze oscylacyjnym, z których pierwszy z dokładnością do 0,02 jest następujący $1,15 < |v| < 1,20$, a pozostałe należą do zbioru $1,0 < |v| < 1,09$.

Przy prędkości $v = 1$ możliwa jest utrata stateczności ciągu, która w zależności od wartości współczynników tłumienia może mieć charakter dywergentny lub oscylacyjny.

6. Uwagi końcowe

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że układ oscylator-ciężno-otoczenie w ruchu względnym w przypadku ciągu tłumionego tłumikami o charakterystyce $\beta_4 > 0$ jest niestateczny przy prędkościach ruchu ciągu względem otoczenia $|u_0| > a(1 + \beta_3/\beta_4)$.

Jednopunktowe oddziaływanie oscylatora powoduje utratę stateczności układu tylko przy prędkości względnego ruchu równej prędkości poprzecznych fal sprężystych w ciągnie.

Dwupunktowe oddziaływanie oscylatora powoduje utratę stateczności przy prędkościach ruchu z ograniczonego przedziału, w którym znajduje się przeliczalny (dla nietłumionego układu nieskończony) zbiór zakresów niestateczności. Z uwagi na liniowość diskutowanego przez nas układu rozwiązania niestateczne narastają nieograniczenie. W realnych, nieliniowych układach występowałyby cykle graniczne, które po przyjęciu nieliniowych równań ruchu można wyznaczyć stosując procedurę podaną w pracy [9].

Wydaje się, że rezultaty uzyskane dla względnie prostego modelu pozostaną jakościowo słuszne dla bardziej złożonych układów tego typu i pozwolą wyjaśnić niektóre z istotnych problemów dotyczących stateczności.

Literatura cytowana w tekście

1. J. T. KENNEY, *Stady-state vibrations of beams on elastic foundation for moving load*, J. Appl. Mech. 4, 21, (1954).
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Dynamika mas skupionych poruszających się po belce leżącej na sprężystym podłożu*, Rozpr. Inż., 2, 13 (1965).
3. А. П. Филипов, С. С. Кохмацюк, *Динамические воздействия подвижных нагрузок на стержни*, Наукова Думка, Киев 1967.
4. В. В. Болотин, Труды МИИТ 74, Транскельдифиздат М. 1950.
5. H. D. NELSON, R. A. CONVER, *Dynamic instability of beam carrying moving masses*, J. Appl. Mech., 4, 38 (1971).
6. S. KALISKI, *Perfect resonance of viscoelastic surface waves in bounded body, with a set of oscillators or masses moving over the surface*, Arch. Appl. Mech., 6, 20 (1968).
7. R. BOGACZ, *Interaction between a moving set of nonlinear oscillators and a travelling wave*, Proc. Vibr. Probl., 1, 9 (1968).
8. S. KALISKI, *The perfect self-excited piezoquartz resonator with an external electron stream*, Proc. Vibr. Probl., 4, 9 (1968).
9. R. BOGACZ, *Об основных видах решений некоторой самовозбуждающейся нелинейной системы с бегущей волной*, Труды Пятой Международной Конференции по Нелинейным Колебаниям, Киев 1969.
10. S. KALISKI, S. WOROSZYŁ, *O pewnym samowzbudnym falowym układzie stochastycznym*, Biul. WAT, 1973.
11. И. Г. Арманович, Г. А. Луниц, Л. Э. Эльсгольц, *Теория Устойчивости*, Наука, Москва 1965.

Резюме

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С НАПРЯЖЕННОЙ СТРУНОЙ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Работа посвящена анализу устойчивости системы, состоящей из осциллятора, движущегося вдоль неограниченной струны, которая в свою очередь движется по отношению к окружающей среде. Полагается, что скорость относительного движения постоянна.

Представлены критерии устойчивости для случаев одно и двухточечного взаимодействия осциллятора со струной. Определены области неустойчивости. Их структура в случае одного осциллятора существенно отличается от структуры таких областей для системы осцилляторов, движущихся вдоль струны или для случая электронов, взаимодействующих с поверхностными волнами.

S u m m a r y

ON STABILITY OF INTERACTION BETWEEN AN OSCILLATOR AND A TIE IN RELATIVE MOTION

The paper is devoted to stability analysis of the system consisting of an oscillator which moves along the unbounded tie (string). The tie and the surroundings are also in relative motion. The velocities of motion are assumed to be constant.

The criterions of instability are given. Existence of instability regions in the case of one and two points of interactions between the oscillator and the tie is proved. The configuration of instability regions in the case of single oscillator is fundamentally different from that occurring in the case of the set of oscillators which moves along the string or in the case of electrons interacting with surface waves.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 grudnia 1975 r.

STATECZNOŚĆ POWŁOK OBROTOWYCH O MAŁEJ KRZYWIŹNIE POŁUDNIKA, PRZY
OBCIĄŻENIACH ZŁOŻONYCH

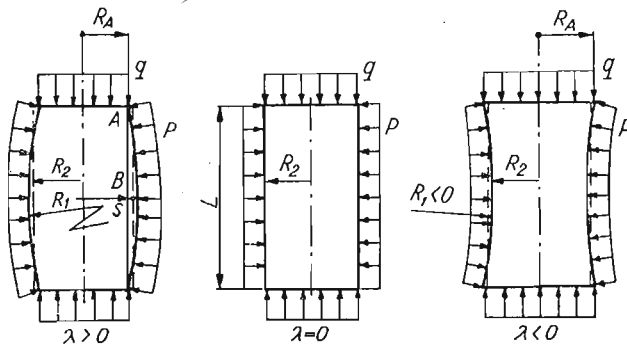
STANISŁAW ŁUKASIEWICZ, ANDRZEJ WAWRZYŃIAK (WARSZAWA)

Tematem pracy jest zagadnienie stateczności powłoki osiowo-symetrycznej o kształcie zbliżonym do walca, poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego i jednocześnie ściskanej osiowo. W niniejszej pracy zbadano, jaki jest wpływ zakrzywienia południka powłoki na stateczność takiej powłoki przy obciążeniu złożonym.

Zagadnienie stateczności powłoki o kształcie zbliżonym do walca rozpatrywane było w przypadku obciążeń niezależnych w pracach [1] i [2]. Jednakże brak dotychczas rozwiązania postawionego zadania w przypadku, gdy oba obciążenia działają jednocześnie. Zadanie rozwiązano opierając się na równaniach udoskonalonej technicznej teorii powłok [3]. Rozpatrywane powłoki przedstawiono na rys. 1. Ich kształt został scharakteryzowany przez współczynnik $\lambda = R_2/R_1$, gdzie R_1 i R_2 są głównymi promieniami krzywizny, R_1 jest promieniem krzywizny południka. Ponieważ $R_2 \ll R_1$, λ jest wielkością małą, która powinna się zawierać w przedziale $-0,1 < \lambda < 0,1$. Przyjęto dalej, że rozpatrywane powłoki są izotropowe i mają stałą grubość oraz że ich promienie krzywizny są stałe i równe swym średnim wartościom. Gdy promień R_1 uznamy za stały, średni promień krzywizny R_2 powłoki przedstawionej na rys. 1, obliczany jako średnia arytmetyczna z promieni w przekroju A i B, wynosi

$$(1) \quad R_{2sr} = R_2 = \frac{1}{2} \left\{ R_A \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}{\sqrt{1 - \bar{\mu}^2}} + R_1 (1 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}) \right\},$$

gdzie $\bar{\mu} = L/2R_1$ jest parametrem charakteryzującym długość powłoki.



Rys. 1

Związana z zakrzywieniem południka strzałka łuku s nie powinna być większa niż $1/5R_2$, co daje warunek

$$(2) \quad \frac{L}{R_2} < \frac{2s}{R_2} \sqrt{\frac{2R_2}{s|\lambda|} - 1} = 0,4 \sqrt{\frac{10}{|\lambda|} - 1}.$$

Dla $|\lambda| = 0,1$ otrzymujemy $L/R_2 \leq \sim 4,0$ dla $\lambda = 0$, $L \rightarrow \infty$. Z zależności geometrycznych wynika również, że

$$(3) \quad \frac{s}{R_2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}{\lambda} < \frac{1}{5},$$

wtedy $\bar{\mu}^2 \leq 0,4\lambda$, a więc $\bar{\mu}^2$ jest wielkością małą w stosunku do jedności. Biorąc powyższe pod uwagę możemy zależność (1) uprościć i otrzymamy dla średniego promienia krzywizny i $|\lambda| \ll 1$ następujący wzór przybliżony

$$(4) \quad R_2 = R_A \frac{1 + 0,25 \lambda^2 \mu^2}{1 - 0,5 \lambda \mu^2},$$

gdzie $\mu = \bar{\mu}\lambda = L/2R_2$, $\lambda = R_2/R_1$.

Założenie, że współczynnik λ jest wielkością małą, bliską zeru, pozwala przyjąć, że kształt badanych powłok nie różni się znacznie od kształtu walcowego. Dzięki temu w dalszej części pracy można uznać, że współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni środkowej powłoki są stałe i równe jedności.

Zastosowane równania udoskonalonej technicznej teorii powłok mają postać (3):

$$(5) \quad \begin{aligned} D \left(\Delta + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right)^2 w - \Delta_k \Phi &= L(w, \Phi) + P_z, \\ \frac{1}{Eh} \left(\Delta + \frac{1}{R_1 R_2} \right)^2 \Phi + \Delta_k w &= -\frac{1}{2} L(w, w), \end{aligned}$$

gdzie E — oznacza moduł sprężystości, h — grubość powłoki, R_1, R_2 — główne promienie krzywizny powierzchni środkowej, w — ugięcie powłoki, Φ — funkcję naprężeń.

Siły błonowe wyrażone są przez następujące związki

$$(6) \quad \begin{aligned} N_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_1} \int Q_x dx, \\ N_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{R_2} \int Q_y dy, \\ N_{xy} &= N_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ (operator Laplace'a),}$$

$$(7) \quad \Delta_k = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$L(w, \Phi) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

Gdy badamy stan równowagi powłoki w momencie utraty stateczności, możemy uznać, że jej ugięcia są w tym momencie jeszcze bardzo małe, a więc $L(w, w) = 0$. Wtedy jako funkcję naprężeń występującą w operatorze $L(w, \Phi)$ możemy przyjąć funkcję naprężeń dla stanu podstawowego, to jest stanu przed wyboczeniem się powłoki. Wówczas układ równań (5) staje się liniowy i może być sprowadzony do jednego równania

$$(8) \quad \left(\Delta + \frac{1}{R_1 R_2}\right)^2 \left(\Delta + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)^2 w + \frac{Eh}{D} \Delta_k \Delta_k w = \\ = \frac{1}{D} \left(\Delta + \frac{1}{R_1 R_2}\right)^2 [\varkappa_{xx} N_{xx} + \varkappa_{yy} N_{yy} + 2\varkappa_{xy} N_{xy} + P_z],$$

gdzie \varkappa_{ij} są zmianami krzywizn, N_{ij} siłami błonowymi w powłoce przed wyboczeniem.

Przyjmujemy, że brzegi powłoki są swobodne. Na powłokę działa z zewnątrz stałe ciśnienie normalne p oraz obciążenie ściskające osiowo przyłożone do brzegu, o natężeniu q .

Siłę błonową N_{xx} łatwo określimy z równania równowagi części powłoki odciętej płaszczyzną prostopadłą do osi. Otrzymamy

$$(9) \quad N_{xx} = -q \frac{R_2 R_A}{r^2} - p \frac{R_2}{2} \left(1 - \frac{R_A^2}{r^2}\right),$$

gdzie promienie R_A , R_2 , r określone są na rys. 1. Promień R_2 i r jest zmienny i zależy od kąta φ . Gdy współczynnik λ jest wielkością bliską zero $-0,1 < \lambda < 0,1$, promienie te zmieniają się nieznacznie. Zakładając, że w przybliżeniu są one stałe i równe swym średnim wartościom w obszarze powłoki, otrzymamy

$$(10) \quad N_{xx} = -q \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \mu^2\right) - p \frac{R_2}{2} \lambda \mu^2,$$

gdzie μ jest parametrem odniesionym do promienia R_2 i charakteryzującym długość powłoki: $\mu = L/2R_2$.

Jeżeli w dalszej części pracy będziemy stosować oznaczenie $R_2 = R$ wprowadzimy współczynnik charakteryzujący sposób obciążenia powłoki i jej długość

$$(11) \quad \zeta = \frac{q}{pR} \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \mu^2\right) + \frac{1}{2} \lambda \mu^2,$$

wtedy $N_{xx} = -\zeta pR$. Wykorzystując równanie rzutów sił na kierunek normalny $\frac{N_{xx}}{R_1} + \frac{N_{yy}}{R_2} = -p$ otrzymamy

$$(12) \quad N_{yy} = pR(-1 + \lambda \zeta).$$

Określimy teraz równowagę powłoki przy obciążeniu krytycznym. Załóżmy, że ugięcie powłoki określone jest funkcją

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R},$$

gdzie m jest liczbą półfal w kierunku południkowym, n liczbą półfal w kierunku obwodowym.

Po podstawieniu do równania (8) i wprowadzeniu oznaczeń

$$\hat{p} = \frac{pR(1-\nu^2)}{Eh}, \quad r = \frac{m\pi R}{L}, \quad k = \frac{h^2}{12R^2},$$

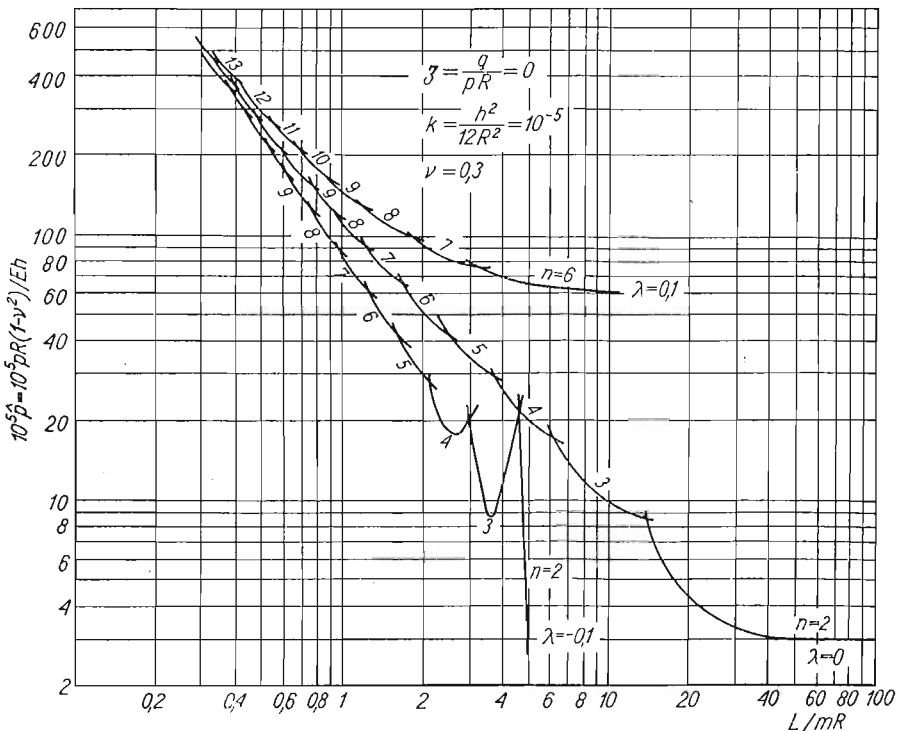
otrzymujemy

$$(13) \quad \hat{p} = k \frac{(r^2 + n^2 - 1 - \lambda^2)^2}{n^2 - 1 + \zeta[r^2 - \lambda n^2 + \lambda - \lambda^2]} + \frac{(1-\nu^2)[r^2 + \lambda n^2 - \lambda^2 + \lambda]^2}{[r^2 + n^2 - \lambda]\{n^2 - 1 + \zeta[r^2 - \lambda n^2 + \lambda - \lambda^2]\}}.$$

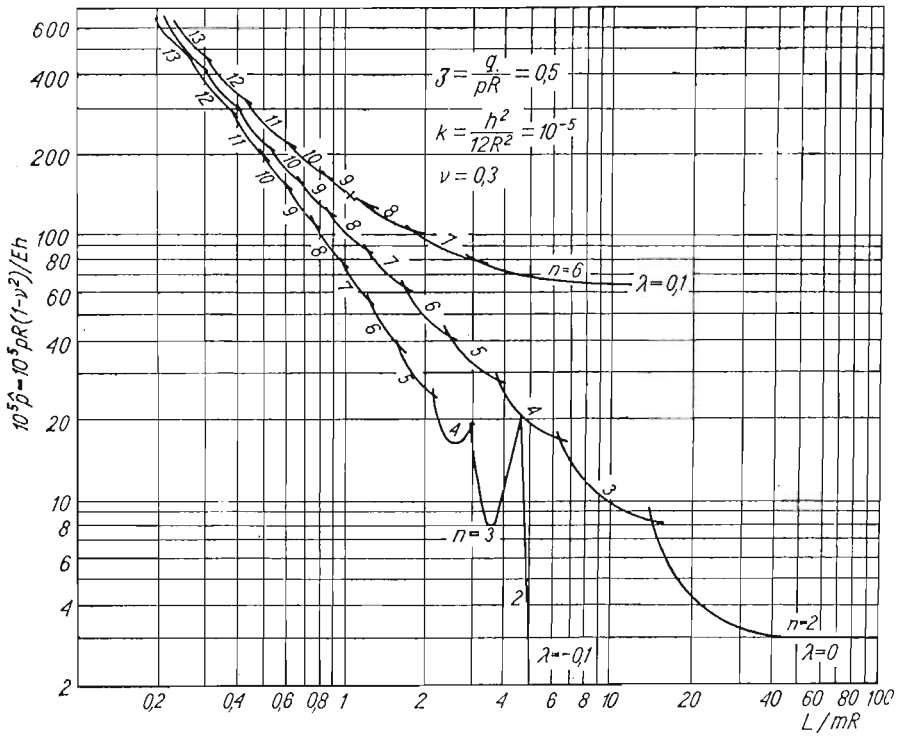
Obciążenie \hat{p} jest funkcją dyskretnych wartości parametrów m i n . Najmniejszą wartość \hat{p} oznaczono przez p_k i przedstawiono na rys. 2, 3 i 4 dla $\nu = 0,3$ i $k = 10^{-5}$ i różnych wielkości parametrów λ i ζ .

Rysunek 2 przedstawia wykres dla $\zeta = 0$ i dla $\lambda = -0,1; 0$ i $0,1$. Dotyczy więc powłoki obciążonej tylko ciśnieniem zewnętrznym p .

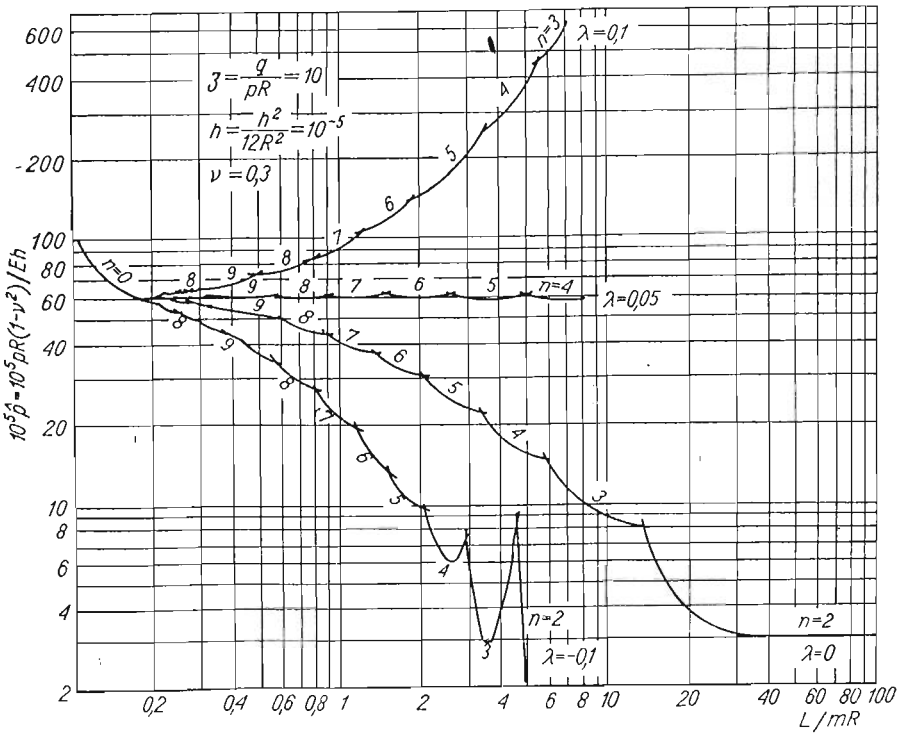
Ponieważ krzywa girlandowa zawsze maleje wraz ze wzrostem L/mR , liczba półfal m w kierunku tworzącej, odpowiadająca najmniejszej wartości obciążenia krytycznego p_k , jest zawsze równa jedności. Obciążenie krytyczne zmniejsza się wraz z L/R , osiągając przy $n = 2$ najmniejszą wartość $\hat{p}_k = 3k$. Okazuje się, że powłoka o dodatniej krzywiznie ($\lambda = 0,1$) ma wyższe obciążenie krytyczne niż powłoka walcowa, zaś powłoka o ujemnej krzywiznie ($\lambda = -0,1$) znacznie niższe (szczególnie przy małych n). Dotyczy to przede wszystkim powłok o większej długości $L/mR > 1$.



Rys. 2



Rys. 3



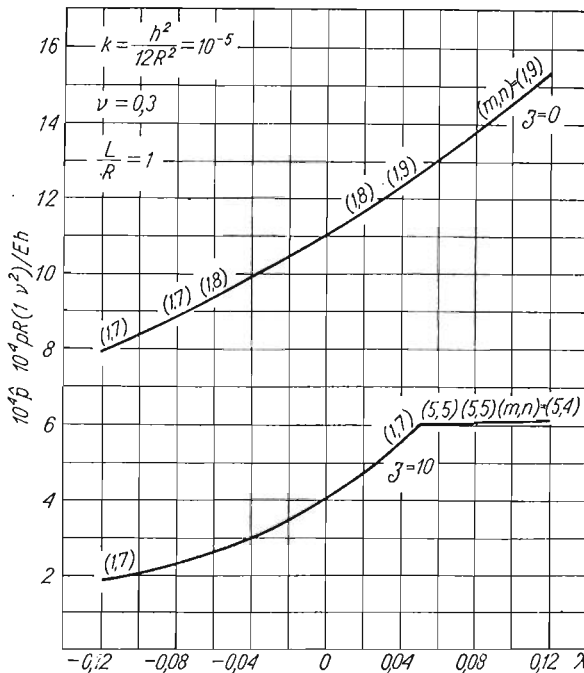
Rys. 4

Rysunek 3 przedstawia wykres \hat{p} w zależności od L/mR dla $\zeta = 0,5$ i trzech wielkości $\lambda = -0,1; 0; 0,1$. Przypadek $\zeta = 0,5$ odpowiada w przybliżeniu przypadkowi zamkniętego naczynia poddanego działaniu ciśnienia zewnętrznego. Krzywe nie odbiegają znacznie od wykresów dla przypadku $\zeta = 0$. A więc obciążenie osiowe o natężeniu $q = 0,5 pR$ ma niewielki wpływ na ciśnienie krytyczne \hat{p}_k . W przypadku powłoki walcowej wpływ takiego ciśnienia osiowego jest znikomy. Dla powłok o dodatniej krzywiznie i $\lambda = 0,1$ obserwujemy nieco większe niż poprzednio obciążenie krytyczne. Dla powłok o ujemnej krzywiznie $\lambda = -0,1$ obciążenie krytyczne jest mniejsze. Związane jest to z faktem, że obciążenie osiowe wywołuje w powłoce o podwójnej krzywiznie naprężenia obwodowe, które w powłoce o dodatniej krzywiznie są naprężeniami rozciągającymi, a dla $\lambda < 0$ stają się ściskającymi.

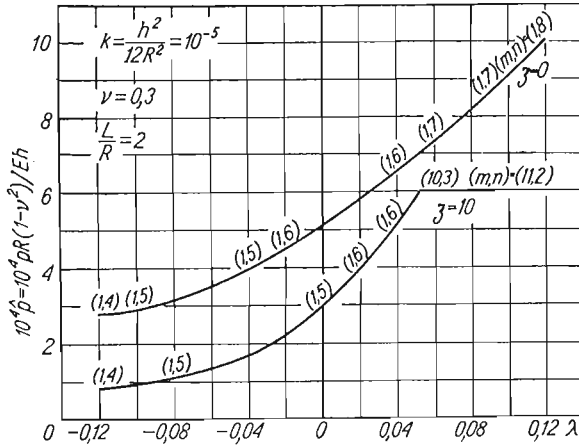
Rysunek 4 przedstawia zależność \hat{p} od L/mR przy znacznym ściskaniu osiowym ($\zeta = 10$) dla czterech wartości współczynnika $\lambda = -0,1; 0,0; 0,05$ i $0,1$.

Dla długich powłok cylindrycznych ($\lambda = 0$) wpływ ten jest znikomy. Dla krótszych obserwujemy jednak pewne obniżenie obciążeń krytycznych. Krzywa girlandowa maleje, a więc zawsze $m = 1$. Krzywa ta zmienia jednak swój charakter, ma punkt przegięcia. Duże zmiany obserwujemy w przypadku $\lambda \neq 0$. Z rys. 4 wynika, że powłoki o dodatniej krzywiznie wykazują dużo większą odporność na wyboczenie niż powłoki o ujemnej krzywiznie. Dla $\lambda = 0,1$ zmienia się sposób wyboczenia powłoki, liczba półfal m jest na ogół większa od jedności. Dla $\lambda = -0,1$ mamy $m = 1$.

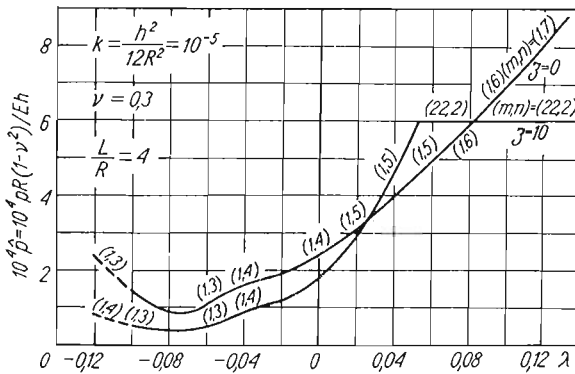
W celu dokładniejszego zbadania wpływu krzywizny południka na obciążenie krytyczne \hat{p}_k wykonano, na podstawie wzoru (13), wykresy (rys. 5, 6, 7) $\hat{p}_k = f(\lambda)$ dla trzech



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

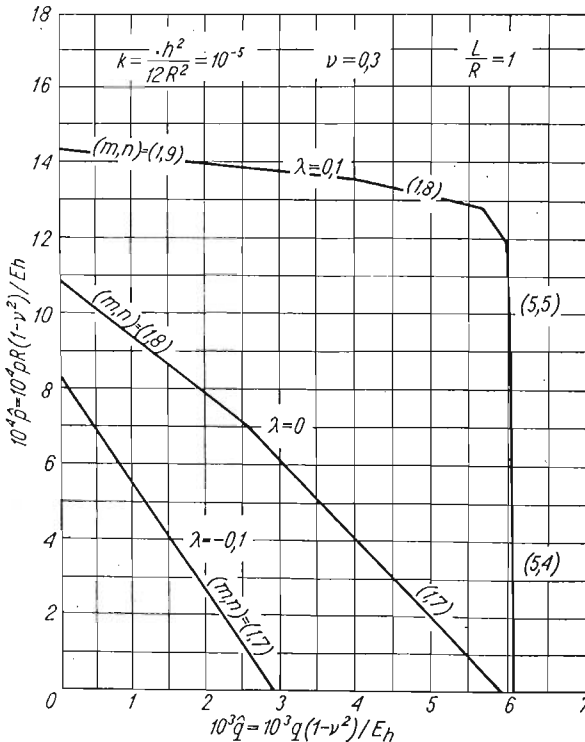
długości powłoki $L/R = 1; 2; 4$ i dla dwu wartości parametru $\zeta = 0$ i 10 przy $\nu = 0,3$ i $k = n^2/12 R^2 = 10^{-5}$. Obserwujemy, że dla powłok krótszych ($L/R = 1$ i 2) i przypadku $\zeta = 0$ obciążenie krytyczne w badanym zakresie rośnie wraz ze współczynnikiem λ . Liczba fal obwodowych zwiększa się, a m pozostaje stałe i równe jest jedności. Obciążenie ściskające o natężeniu $\zeta = 10$, działając na krótsze powłoki $L/R = 1$ i 2 powoduje obniżenie obciążenia krytycznego p_k dla każdego λ . Interesujące jest, że dla $\zeta = 10$ i gdy $\lambda > 0,05$, zależność $p_k = f(\lambda)$ zmienia gwałtownie swój charakter. Powyżej $\lambda = 0,05$ ciśnienie krytyczne staje się praktycznie niezależne od wypukłości południka. Liczba półfal w tym zakresie rośnie gdy n się zmniejsza. Dla powłoki dłuższej $L/R = 4$ istnieje taki przedział wartości λ , w którym obciążenie osiowe ($\zeta = 10$) zwiększa odporność na wyobczenie pod wpływem ciśnienia p .

Aby przeanalizować współzależność obciążeń krytycznych, to jest ciśnienia osiowego i normalnego, wykreślono krzywe we współrzędnych q i p . W tym celu sprowadzono wzór (13) do postaci

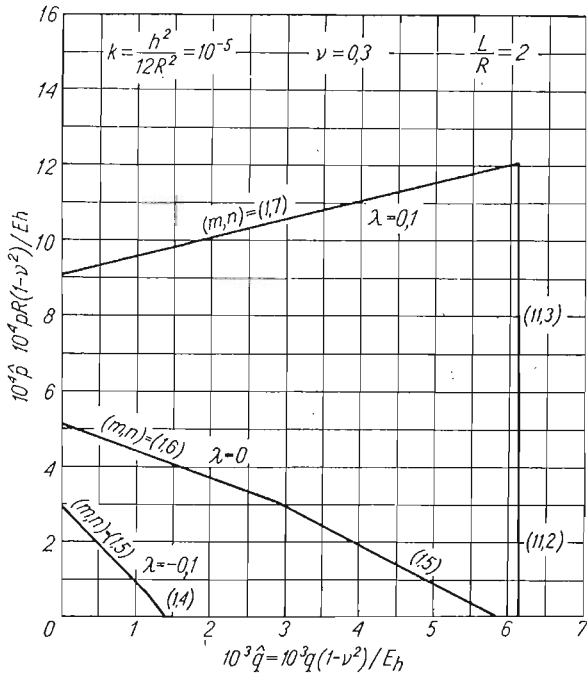
$$(14) \quad \hat{p} \left\{ n^2 - 1 + \frac{1}{2} \lambda \mu^2 [r^2 - \lambda n^2 + \lambda(1 - \lambda)] \right\} + \hat{q} \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \mu^2 \right) [r^2 - \lambda n^2 + \lambda(1 - \lambda)] = \\ = k(r^2 + n^2 - 1 - \lambda^2)^2 + (1 - \nu^2) \frac{[r^2 + n^2 + \lambda(1 + \lambda)]^2}{[r^2 + n^2 - \lambda]^2},$$

$$\text{gdzie } \hat{p} = \frac{pR}{Eh} (1 - \nu^2); \quad \hat{q} = \frac{q}{Eh} (1 - \nu^2).$$

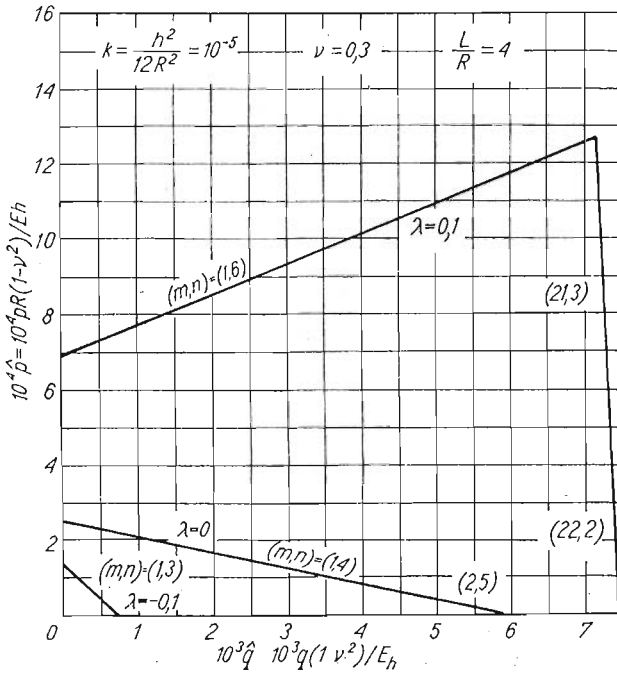
Równanie (14) określa we współrzędnych \hat{q} i \hat{p} , dla każdej pary liczb m i n , linię prostą. Obszar stateczności jest zawarty w najmniejszym z możliwych wieloboków składających się z odcinków linii prostych odpowiadających różnym m i n . Na rys. 8, 9, 10 przedstawiono takie linie dla $k = 10^{-5}$; $L/R = 1, 2, 4$; $\lambda = -0,1; 0; 0,1$. Obserwujemy, że obszary stateczności zmniejszają się ze wzrostem długości powłok. Wzrastają w miarę zwiększania się wypukłości południka. Dla przypadków $\lambda = 0$ i $\lambda = -0,1$ wzrost natężenia \hat{q} ściskania osiowego powoduje spadek obciążenia krytycznego \hat{p} i odwrotnie. W przypadku $\lambda = 0,1$ obserwujemy zachowania przeciwne. Powyższe efekty związane są pojawieniem się w powłoce o dodatniej krzywiznie naprężeń rozciągających wywołanych ściskaniem osiowym.



Rys. 8



Rys. 9



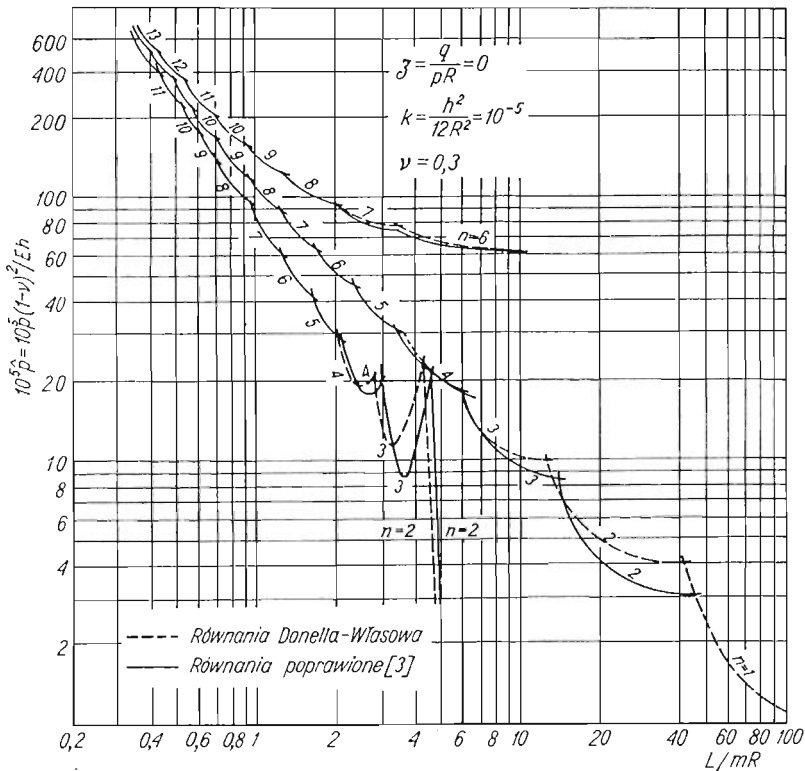
Rys. 10

Wyżej opisane wyniki otrzymano w oparciu o równania (5) udoskonalonej teorii technicznej [3]. Można się łatwo przekonać, że odbiegają one od wyników uzyskiwanych na podstawie teorii DONNELLA-WŁASOWA jedynie dla powłok dłuższych i dla niższych wielkości m i n .

Opierając się na równaniach DONNELLA-WŁASOWA otrzymalibyśmy wyrażenie

$$(15) \quad \hat{p} = k \frac{(r^2 + n^2)^2}{n^2 + \zeta(r^2 - \lambda n^2)} + (1 - \nu^2) \frac{(r^2 + \lambda n^2)^2}{(r^2 + n^2)^2 [n^2 + \zeta(r^2 - \lambda n^2)]}.$$

W przypadku powłok długich $L \rightarrow \infty$ i obciążonych tylko ciśnieniem p ze wzoru (13) otrzymujemy $\hat{p}_k = 3k$, gdy z wzoru (15) mamy $\hat{p}_k = 4k$, co daje błąd 33%.



Rys. 11

W zakończeniu pracy chcielibyśmy podkreślić, że przedstawione tu postępowanie jest jedynie przybliżone. Założenie o stałości sił błonowych w powłoce jest spełnione w przybliżeniu jedynie dla małych wartości parametru λ . Dla większych λ oraz większych długości powłok może prowadzić do dużych błędów. Jednak wydaje się, że przedstawione tu rozwiązanie, dzięki swej prostocie, dostarcza dużo informacji o zachowaniu się badanych powłok o kształcie mało odbiegających od walca.

Literatura cytowana w tekście

1. P. A. COOPER, *Buckling of nearly cylindrical shells under lateral pressure*, AIAA, Journ., **10** (1973).
2. S. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSZKOWSKI, *On the stability and the postbuckling equilibrium of shells of revolution*, ZAMM, **51** (1971) 63 - 639.
3. S. ŁUKASIEWICZ, *Uzupełnienie równań technicznej teorii powłok*, Rozpr. Inżyn., **11** (1963).

Р е з ю м е

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ МАЛОЙ КРИВИЗНЕ
МЕРИДИАНА И КОМБИНИРОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

В работе решена задача об устойчивости оболочек вращения при малой кривизне меридиана под внешней поперечной нагрузкой в сочетании с осевым сжатием. Результаты расчетов представлены на графиках. Определено влияние кривизны меридиана и взаимозависимость критических нагрузок.

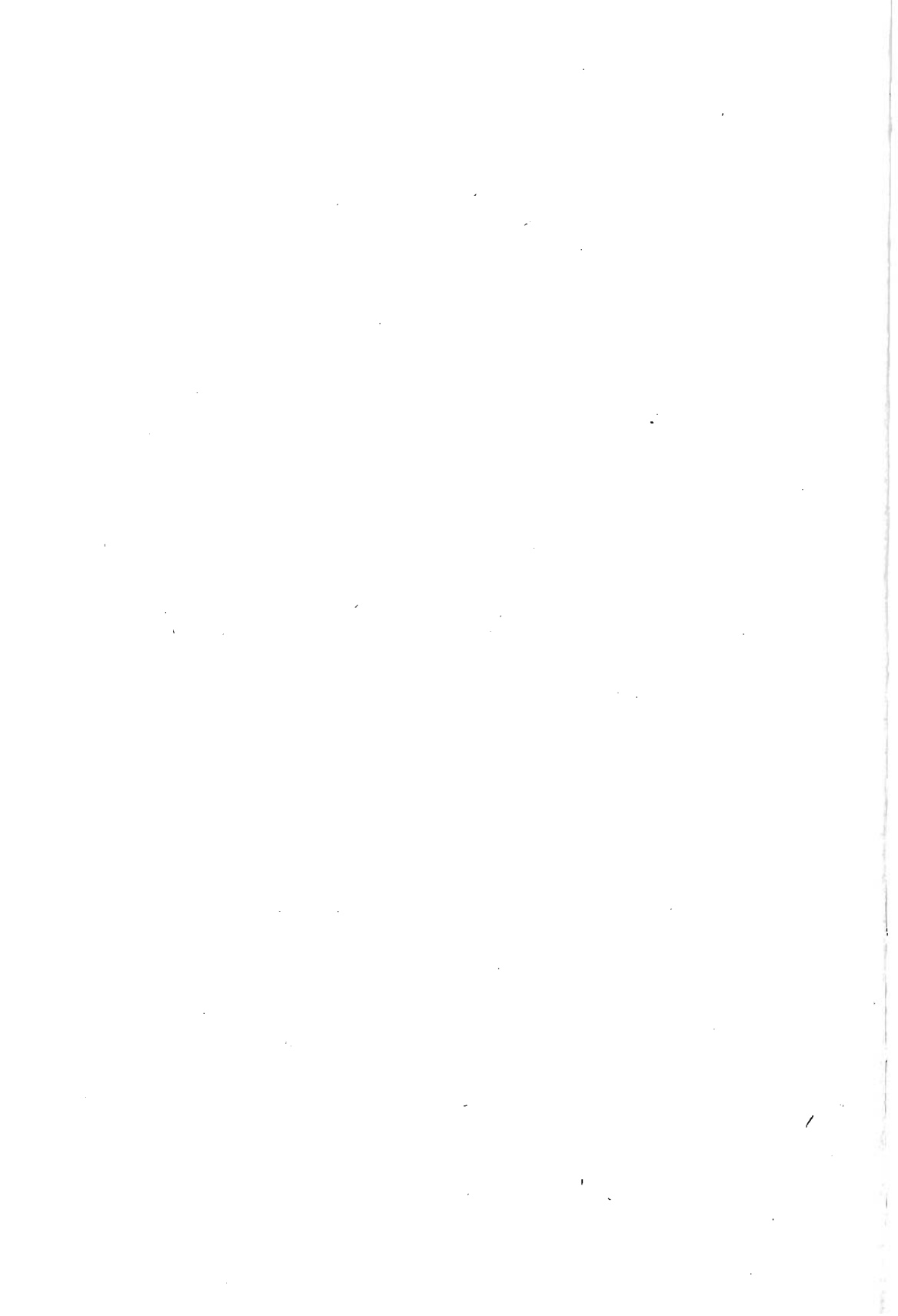
S u m m a r y

STABILITY OF SHELLS OF REVOLUTION WITH A SLIGHTLY CURVED GENERATOR
UNDER COMPLEX LOAD

The stability of nearly cylindrical shells of revolution under action of axial load and external pressure is considered. The effects of the curvature of the generator and influence of simultaneous action of the both loads is examined in particular. The results are presented in numerous diagrams.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ
I MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 grudnia 1975 r.



ANALIZA POZAKRYTYCZNA IDEALNYCH POWŁOK OBROTOWYCH O MAŁEJ KRZYWIŹNIE
POŁUDNIKA, PRZY OBCIĄŻENIACH ZŁOŻONYCH

STANISŁAW ŁUKASIEWICZ, ANDRZEJ WAWRZYŃIAK (WARSZAWA)

Tematem pracy jest analiza zachowania się po utracie stateczności powłoki o kształcie zbliżonym do walca kołowego, poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego i jednocześnie ściskanej osiowo. Zbadano, jaki jest wpływ zakrzywienia południka powłoki na jej pracę po utracie stateczności przy obciążeniu złożonym. Przypadki, gdy podobne powłoki obciążone były niezależnie przez ciśnienie zewnętrzne, czy też obciążenie osiowe, były już analizowane w [1, 2]. Jednakże brak dotychczas rozwiązania, gdy obciążenia działają jednocześnie. Obciążenia krytyczne rozpatrywanych konstrukcji określono w poprzedniej pracy [3]. Przybliżone rozwiązanie postawionego zadania można uzyskać metodą RITZA. W tym przypadku sprowadza się ona do założenia funkcji ugięcia wyobczonej powłoki, określenia funkcji naprężeń z równania ciągłości odkształceń oraz wykorzystania zasady minimum energii potencjalnej do określenia zależności pomiędzy obciążeniem a parametrami funkcji ugięcia. Funkcję ugięcia przyjęto w postaci

$$(1) \quad w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + f_0.$$

Funkcja ta, zawierając pięć swobodnych parametrów f_0, f_1, f_2, m, n , odpowiada powłoce o brzegach swobodnie podpartych i dobrze oddaje kształt wygiętej powłoki walcowej po wyobczeniu. Ponieważ założono, że rozpatrywane powłoki mało różnią się od walca kołowego, współczynnik $\lambda = R_2/R_1$ określający kształt badanych powłok jest wielkością małą, bliską zeru $-0,01 < \lambda < 0,1$. R_1, R_2 oznaczają głównie promienie krzywizny powierzchni środkowej powłoki. Przyjęto, że promienie te są stałe oraz że współczynniki pierwszej formy kwadratowej dla rozpatrywanych powłok są również stałe. Sposób określenia średniego promienia R_2 podano w pracy [3].

Równanie ciągłości odkształceń powłoki może być zapisane w następujący sposób

$$(2) \quad \frac{1}{Eh} \left(\Delta + \frac{\lambda}{R^2} \right) \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \Delta_k w,$$

gdzie

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\Delta_k w = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Po podstawieniu założonego ugięcia (1) do równania (2) i rozwiązaniu go znaleziono następujące wyrażenie dla funkcji Φ :

$$(3) \quad \frac{1}{Eh} \Phi = f_1^2 \frac{r^2 n^2}{2} \left\{ \frac{1}{[2r]} \cos \frac{2rx}{R} + \frac{1}{[2n]} \cos \frac{2ny}{R} \right\} + \\ + f_1 f_2 n^2 r^2 \left\{ \frac{1}{[3r, n]} \sin \frac{3rx}{R} \sin \frac{ny}{R} - \frac{1}{[r, n]} \sin \frac{rx}{R} \sin \frac{ny}{R} \right\} + \\ + f_1 R (r^2 + \lambda n^2) \frac{1}{[r, n]} \sin \frac{rx}{R} \sin \frac{ny}{R} - 2f_2 R r^2 \frac{1}{[2r]} \cos \frac{2rx}{R} + \\ + \frac{1}{Eh} \left[pR(\lambda\zeta - 1) \frac{x^2}{2} - \zeta pR \frac{y^2}{2} \right].$$

We wzorze (3) użyto oznaczeń:

$$(4) \quad [2r] = [(2r)^2 - \lambda]^2; \quad [2n] = [(2n)^2 - \lambda]^2, \\ [ar, bn] = [(ar)^2 + (bn)^2 - \lambda]^2,$$

$$\zeta = \frac{q}{pR} (1 - 0,5\lambda\mu^2) + 0,5\lambda\mu^2, \quad \text{gdzie } \mu = L/2R, [3].$$

Przemieszczenie obwodowe powinno spełniać warunek okresowości. Wymaga to by całka

$$(5) \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

była równa zero.

Warunek ten może być spełniony tylko jako uśredniony na długości L ,

$$(6) \quad \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \\ = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \right] dy dx = 0.$$

Po podstawieniu poprzednio obliczonych wielkości otrzymano po scałkowaniu

$$(7) \quad \frac{f_0}{R} = \frac{pR}{Eh} [1 - \zeta(\lambda + \nu)] + \frac{f_1^2 n^2}{8R^2} - \frac{f_2}{2R}.$$

Pełna energia potencjalna \ni ugiętej powłoki

$$\ni = U_1 + U_2 + W$$

składa się z energii deformacji powierzchni środkowej U_1 , energii zginania U_2 oraz pracy obciążenia zewnętrznego W . Praca obciążenia zewnętrznego składa się z pracy ciśnienia p i obciążenia q

$$(8) \quad W_1 = -p \int_0^L \int_0^{2\pi R} w dx dy = -p\pi L(2f_0 + f_2).$$

Po wyeliminowaniu parametru f_0 otrzymano

$$(9) \quad W_1 = -p\pi RL \left\{ \frac{2pR^2}{Eh} \left[1 - \zeta(\lambda + \nu) + \frac{f_1^2 n^2}{4R} \right] \right\}.$$

Praca obciążenia osiowego q wynosi

$$(10) \quad W_2 = -q \int_0^{2\pi R} (-u_0 \cos \alpha + 2w_0 \sin \alpha) dy,$$

gdzie u_0 , w_0 oznaczają przemieszczenie brzegów powłoki, α — kąt, jaki tworzy styczna do południka w punktach $x = D, L$ z osią powłoki.

Na podstawie (1), $w_0 = f_0$. Wielkość u_0 określono ze wzoru

$$(11) \quad u_0 = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^L \left[\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{w}{R} \right] dx.$$

Ponieważ kąt α jest mały można przyjąć: $\cos \alpha \simeq 1$, $\sin \alpha \simeq \alpha \simeq L/2R_1 = \lambda L/2R$. Po podstawieniu do wzoru (10) otrzymano

$$(12) \quad W_2 = -2\pi(\zeta p R) LR \left\{ \frac{pR}{Eh} [\zeta(1 + \nu\lambda) - \nu] + \frac{f_1^2 r^2}{8R^2} + \frac{f_2^2 r^2}{4R^2} - \lambda \frac{f_2}{2R} \right\}.$$

Całkowita praca obciążenia zewnętrznego wynosi

$$W = W_1 + W_2.$$

Energia deformacji powierzchni środkowej określona jest przez

$$(13) \quad U_1 = \frac{1}{2Eh} \int_0^{2\pi R} \int_0^L [\Delta\Phi]^2 - (1 + \nu)L(\Phi, \Phi) dx dy.$$

Wykorzystując wyrażenie (3) dla funkcji naprężeń Φ otrzymano po scałkowaniu

$$(14) \quad U_1 = \frac{ELh}{4R^3} \left\{ \frac{8r^8 f_1^4 n^4}{[2r]^2} + \frac{8n^8 f_1^4 r^4}{[2n]^2} + f_1^2 f_2^2 r^4 n^4 \left[\frac{(9r^2 + n^2)^2}{[r, n]^2} + \frac{(r^2 + n^2)^2}{[r, n]^2} \right] + \frac{f_1^2 R^2}{[r, n]^2} (r^2 + n^2)^2 (r^2 + \lambda n^2)^2 + \frac{16^2}{2} \frac{r^8 f_2^2 R^2}{[2r]^2} - \frac{R}{4} f_1^2 f_2 n^2 \left[\frac{16^2 r^8}{[2r]^2} + \frac{8r^2 (r^2 + n^2) (r^2 + n^2)^2}{[r, n]^2} \right] \right\} + \frac{LR}{Eh} [(pR)^2 (\lambda\zeta - 1)^2 + \zeta(pR)^2] + \frac{2\pi RL}{Eh} (pR)^2 \zeta (\lambda\zeta - 1).$$

Energię zginania obliczono z wzoru

$$(15) \quad U_2 = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w)] dx dy.$$

Po podstawieniu wyrażenia (1) dla funkcji ugięcia otrzymano po scałkowaniu

$$(16) \quad U_2 = \frac{D\pi L}{4R^3} [f_1^2(r^2+n^2)^2 + 8f_2^2r^4].$$

Równowagę powłoki w obszarze zakrytycznym określono wykorzystując zasadę minimum całkowitej energii potencjalnej. Zasada ta wymaga by pochodne energii Ξ względem parametrów f_1, f_2, m, n były równe zero.

W pierwszym przybliżeniu ograniczono się do warunków

$$(17) \quad \frac{\partial \Xi}{\partial f_1} = 0; \quad \frac{\partial \Xi}{\partial f_2} = 0.$$

Po wprowadzeniu nowych oznaczeń

$$(18) \quad \bar{p} = \frac{pR^2}{Eh^2}, \quad v = \frac{m\pi R}{nL} = \frac{r}{n}, \quad \eta = \frac{n^2h}{R},$$

$$\xi_1 = f_1/h, \quad \xi_2 = f_2/h,$$

otrzymano, na podstawie warunków (17),

$$(19) \quad \bar{p} = \frac{16n^8\eta\vartheta}{1+\zeta\vartheta^2} \left[\frac{\vartheta^4}{[2n]^2} + \frac{1}{[2n]^2} \right] \xi_1^2 + \frac{\eta n^8 \vartheta^4}{1+\zeta\vartheta^2} \left[\frac{(9\vartheta^2+1)^2}{[3n\vartheta, n]^2} + \right. \\ \left. + \frac{(\vartheta+1)^2}{[\vartheta n, n]^2} \right] \xi_2^2 - \frac{n^8}{4(1+\zeta\vartheta^2)} \left[\frac{16^2\vartheta^8}{[2n\vartheta]^2} + \frac{8\vartheta^2(\vartheta^2+\lambda)(1+\vartheta^2)^2}{[\vartheta n, n]^2} \right] \xi_2 + \\ + \frac{n^8}{\eta} \frac{(\vartheta^2+1)^2(\vartheta^2+\lambda)^2}{(1+\zeta\vartheta^2)[\vartheta n, n]^2} + \frac{\eta}{12(1-\nu^2)} \frac{(1+\vartheta^2)^2}{1+\zeta\vartheta^2}$$

oraz

$$\xi_1^2 = A/B, \text{ gdzie}$$

$$A = \frac{64\vartheta^6 n^8}{[2n\vartheta]^2 \eta} + \frac{\vartheta^2 \eta}{3(1-\nu^2)} + \zeta \bar{p} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\xi_2 \vartheta^2 \eta} \right) \right] \xi_2,$$

$$B = \frac{n^8}{\vartheta^2} \left[\frac{16\vartheta^8}{[2n\vartheta]^2} + \frac{\vartheta^2(\vartheta^2+\lambda)(\vartheta^2+1)^2}{2[n\vartheta, n]^2} \right] - \frac{\eta \vartheta^2 n^8}{2} \left[\frac{(9\vartheta^2+1)^2}{[3n\vartheta, n]^2} + \frac{(1+\vartheta^2)^2}{[n\vartheta, n]^2} \right] \xi_2.$$

Z pierwszego równania układu (19) można wyeliminować ξ_1^2 , wykorzystując drugie równanie, otrzymuje się wtedy zależność $\bar{p} = f(\xi_2)$, która może być łatwo przedstawiona na wykresie.

Określmy jeszcze związek między obciążeniem \bar{p} a średnim ugięciem powłoki w stanach równowagi w obszarze zakrytycznym. Średnie ugięcie określone jest wzorem

$$(20) \quad W_{sr} = \frac{2\pi R L}{0} \int_0^{2\pi R} \int_0^L w dx dy,$$

co daje, po podstawieniu ugięcia (1) i scałkowaniu, wielkość

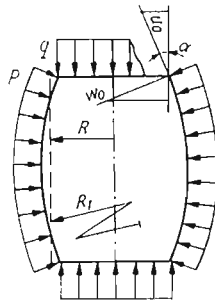
$$W_{sr} = f_0 + 0,5f_2.$$

Korzystając z wzoru (7) na f_0 i dzieląc obie strony zależności (20) przez h otrzymujemy wzór na bezwymiarowe średnie ugięcie powłoki

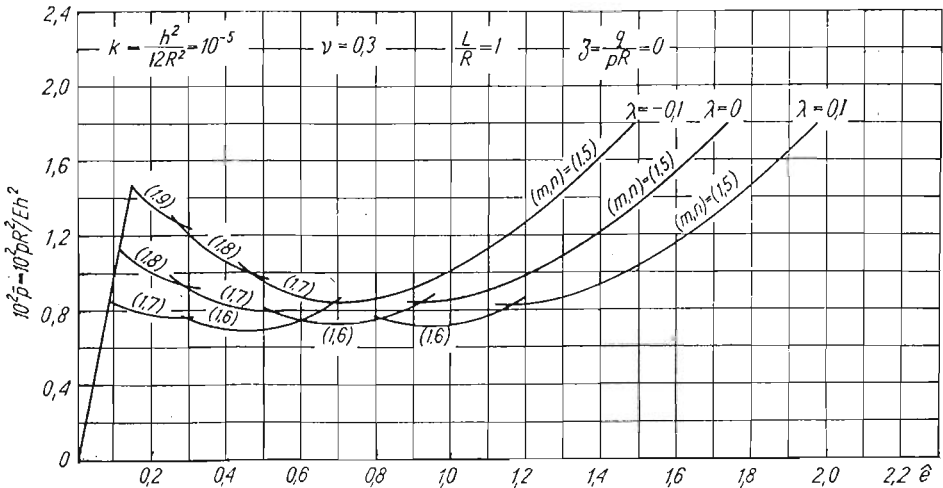
$$(21) \quad \hat{e} = \frac{W_{sr}}{h} = p[1 - \zeta(\lambda + \nu)] + \frac{1}{8} \eta \xi_1^2.$$

Opierając się na założeniach (19) i (21) wykreślono krzywe we współrzędnych p i \hat{e} . Dla danej powłoki, dla każdej pary liczb m i n otrzymamy inną krzywą. Należy przypuszczać, że stany powłoki najbliższe realizującym się w rzeczywistości stanom równowagi będą określone przez linie $m, n = \text{const}$, leżące najniżej na wykresie $p = f(\hat{e})$. Krzywe równowagi przyjmują więc postać linii girlandowych mających najniższe rzędne spośród wszystkich innych krzywych $m, n = \text{const}$.

Na rys. 2—10 przedstawiono wykresy obrazujące zależność $p = f(\hat{e})$ dla $k = h^2/12R^2 = 10^{-5}$, $\nu = 0,3$ dla różnych długości powłok i różnych wartości ζ oraz λ .



Rys. 1



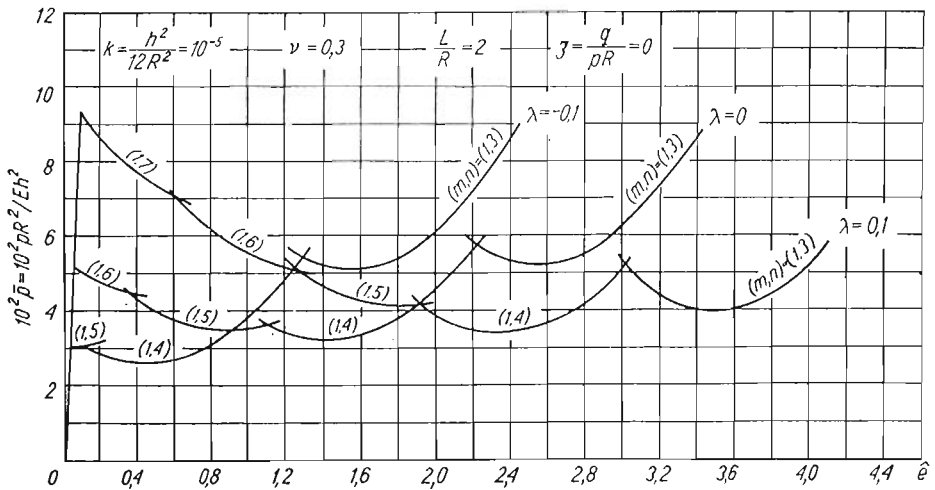
Rys. 2

Wykresy na rys. 2—4 dotyczą przypadków powłok obciążonych tylko ciśnieniem zewnętrznym p ($\zeta = 0$) o długości $L/R = 1, 2, 4$ i wartości współczynnika $\lambda = -0,1; 0; 0,1$.

Proste wychodzące z początku układu współrzędnych $p = \hat{e}$ odpowiadają ścisnaniu powłok bez wybożenia. Linie girlandowe, przecinając się z nimi, określają punkty odpowiadające obciążeniom krytycznym \bar{p} i \bar{q} . Punkty te pokrywają się z wynikami metody liniowej, obliczonymi w poprzedniej pracy [3]¹⁾. Obserwujemy duży, ustaleczający wpływ podwójnej dodatniej krzywizny. Jednakże im mniej wypukły, a bardziej wklęsły jest południk powłoki, tym mniejszą tendencję do opadania wykazują pierwsze gałęzie krzywych girlandowych. Najszybciej, w obszarze zakrytycznym, maleją więc krzywe równowagi powłok wypukłych ($\lambda = 0, 1$). Dla nich stosunek dolnego obciążenia krytycznego do górnego ma najmniejszą wartość. Natomiast dla dłuższych powłok i wklęsłym południku obserwujemy, że krzywe girlandowe na pierwszym odcinku wzrastają.

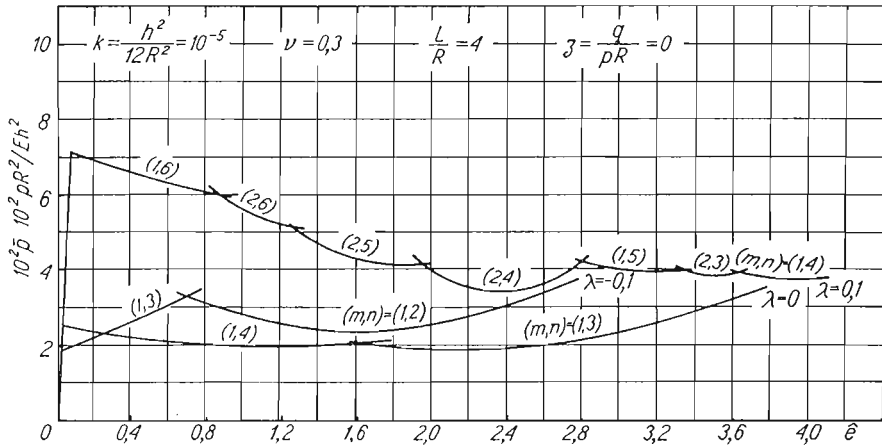
Utrata stateczności idealnej powłoki obciążonej quasi-statycznie związana jest ze zjawiskiem przeskoku. Obserwujemy, że o wiele większemu przeskokowi przy stałym obciążeniu ulegają powłoki o wypukłym południku niż powłoki o południku wklęsłym. Powłoki o dodatniej krzywiznie wykazują większe średnie ugięcie po wybożeniu niż powłoki o krzywiznie ujemnej.

Wybożenie powłoki o ujemnej krzywiznie może początkowo przebiegać bez przeskoku. Po przekroczeniu ciśnienia \bar{p} powłoka wygina się stopniowo zgodnie z przebiegiem pierwszej gałęzi krzywej. Dopiero «przejście na sąsiednią gałąź» ma charakter przeskoku (rys. 3, 4). Jeżeli po wystąpieniu przeskoku obciążenie zwiększa się dalej, mogą wystąpić dalsze przeskoki na następne gałęzie linii girlandowych. W trakcie wybożenia powłok walcowych oraz powłok o ujemnej krzywiznie poddanych działaniu ciśnienia zewnętrznego, liczba półfal powstających wzdłuż tworzącej powłoki jest zawsze równa jedności. Natomiast liczba fal obwodowych n maleje wraz z wzrostem ugięcia \hat{e} . (To samo dotyczy krótkich powłok o wypukłych południkach $L/R = 1, 2$; $\lambda = 0, 1$). Krzywa równowagi dla powłoki o większej długości $L/R = 4$ i współczynniku $\lambda = 0,1$ ma odcinki przy $m = 2$.



Rys. 3

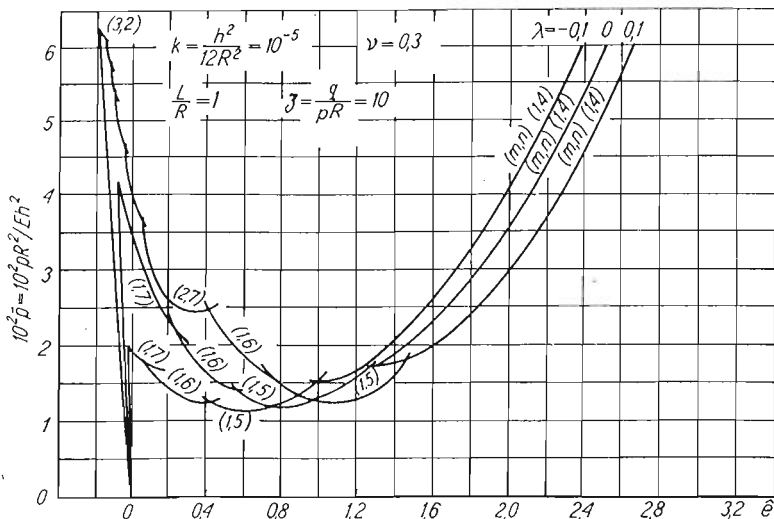
¹⁾ $\bar{p} = pR/h(1-\nu^2)$, gdy $k = h^2/12R^2 = 10^{-5}$ i $\nu = 0,3$ to $\bar{p} \approx 10^2 \hat{p}$.



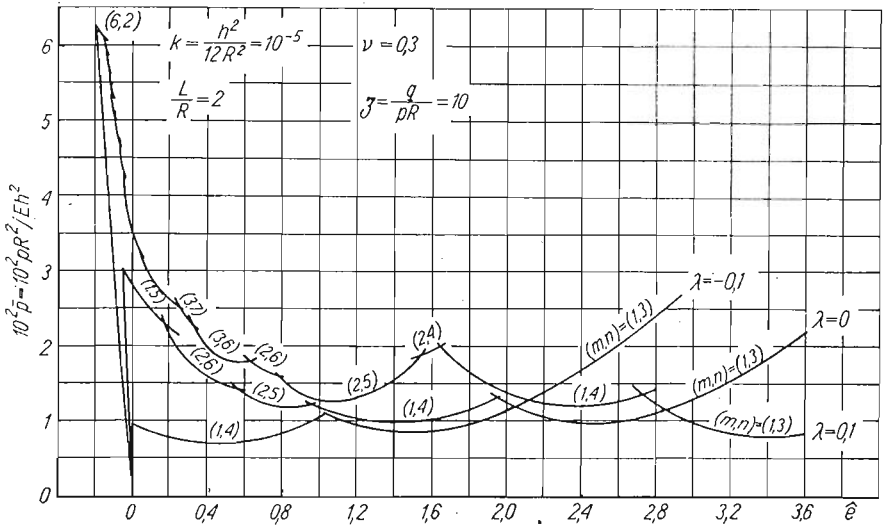
Rys. 4

Na rys. 5—7 przedstawiono wykresy zależności ciśnienia \bar{p} od średniego ugięcia \hat{e} dla powłok poddanych jednoczesnemu działaniu ciśnienia zewnętrznego p i osiowego ściskania q , przy czym $\zeta = 10$. Wykreślono krzywe dla trzech długości powłok $L/R = 1, 2, 4$ oraz dla trzech wartości współczynnika $\lambda = -0,1; 0; 0,1$.

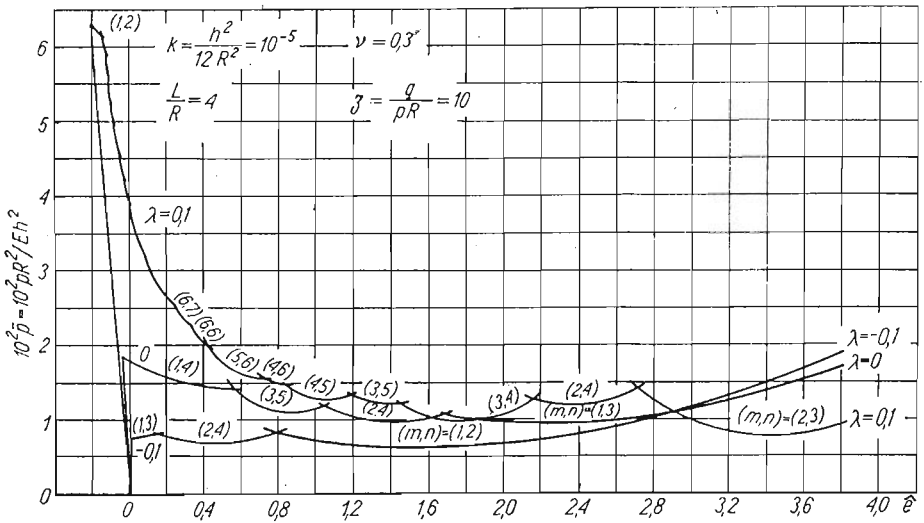
Linie równowagi powłok niewyoboczonych mają postać prostych o równaniu $\hat{e} = \bar{p}[1 - 10(\lambda + \nu)]$. Dodatkowo wartości obciążenia \bar{p} na tych prostych odpowiadają ujemnym wartościom ugięcia \hat{e} . Oznacza to, że w stanie pierwotnej równowagi pod wpływem ściskania osiowego punkty powłoki przemieszczają się na zewnątrz. Punkty przecięcia krzywych girlandowych z prostymi równowagi pierwotnej, wyznaczające wartości górnych obciążeń krytycznych, są zgodne, z dużą dokładnością, z wynikami metody liniowej [3]. Obserwujemy, że górne obciążenia krytyczne są tym większe im bardziej wypukły jest



Rys. 5



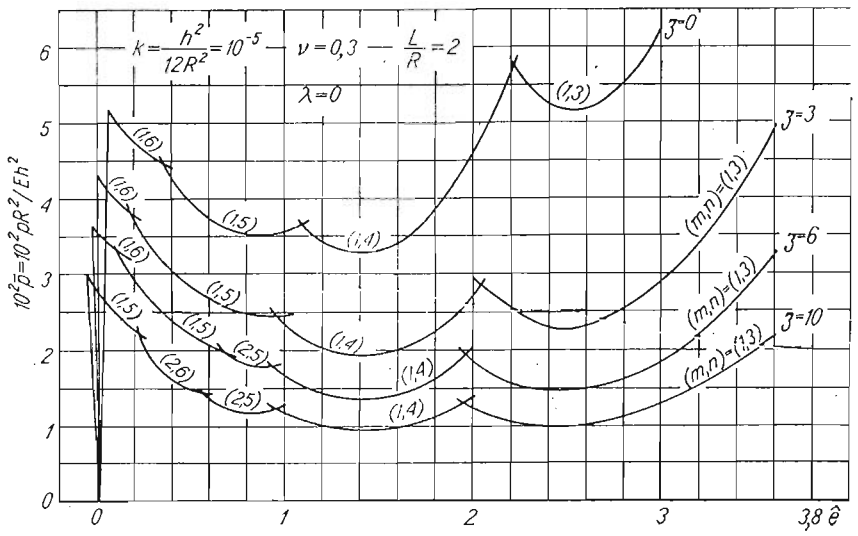
Rys. 6



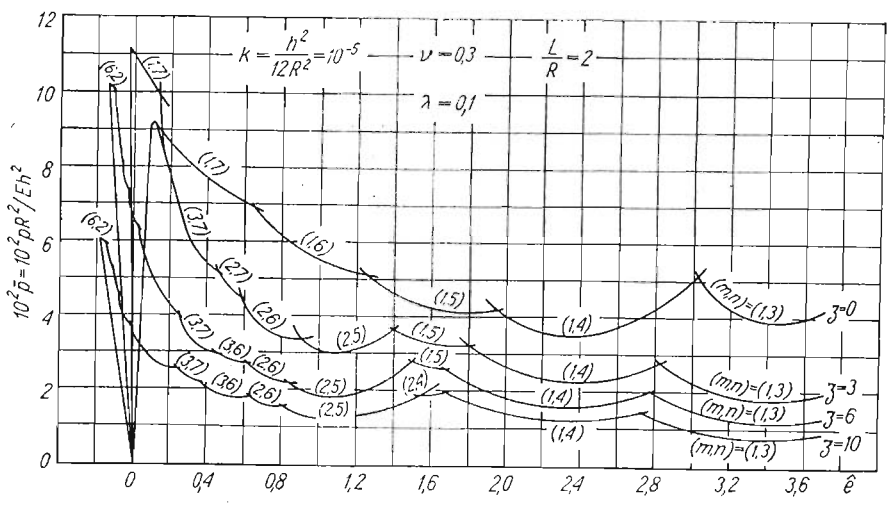
Rys. 7

południk powłoki, lecz podobnie jak w przypadku $\zeta = 0$, im bardziej powłoka jest wypukła tym szybciej opada krzywa girlandowa w pierwszej części. Dla linii o parametrze $\lambda = 0,1$ spadek ten jest gwałtowny, a wartości dolnych obciążeń krytycznych najniższe. Natomiast powłoka o wklęsłym południku $\lambda = -0,1$ i długości $L/R = 4$ opisana jest krzywą równowagi, której pierwsza gałąź rośnie wraz ze średnim ugięciem $\hat{\delta}$. Z wyjątkiem tego przypadku, wyboczenie omawianych powłok odbywa się z przeskokiem (przy stałym obciążeniu), który następuje po osiągnięciu przez obciążenie wartości górnego obciążenia krytycznego.

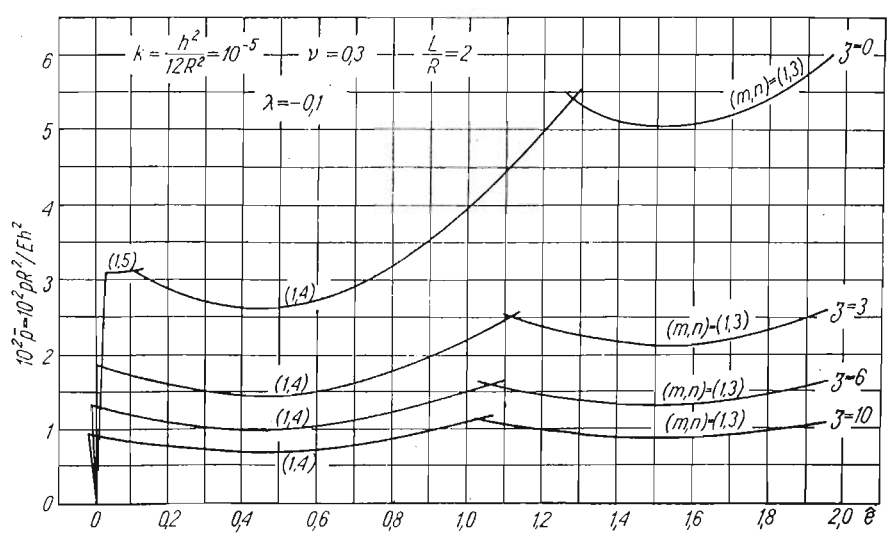
Na rys. 8—10 przedstawiono wykresy obrazujące dokładniej wpływ ściskania osiowego na wartość ciśnienia \bar{p} w stanach równowagi. Wykresy te dotyczą powłok o długości



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

$L/R = 2$ i trzech współczynników $\lambda = -0,1; 0; 0,1$. Dla każdej powłoki wykreślono linie równowagi odpowiadające czterem wartościom parametru $\zeta = 0, 3, 6, 10$.

W przypadku powłoki walcowej ($\lambda = 0$) oraz powłoki o ujemnej krzywiznie Gaussa ($\lambda = -0,1$) wzrost udziału ściskania q w obciążeniu powoduje we wszystkich stanach równowagi zmniejszenie wartości ciśnienia \bar{p} .

Dla powłoki o wypukłym południku istnieje taki przedział wartości $\zeta > 0$, dla którego górne ciśnienie krytyczne jest większe niż wtedy, gdy nie występuje ściskanie osiowe [3]. Jednak, jak wynika z rys. 9, krzywe odpowiadające wartościom ζ z tego przedziału maleją bardzo szybko na pierwszych swoich odcinkach. W pozostałych przypadkach obciążenie \bar{p} jest tym mniejsze im intensywniejsze jest ściskanie osiowe.

Przedstawione powyżej rozważania dotyczyły powłok o idealnym kształcie, przedstawionych na rys. 1. Rzeczywiste powłoki zawsze są wykonane z pewnymi niedokładnościami kształtu. Te niedokładności zwykle powodują obniżenie górnych obciążeń krytycznych. Przypuszczalnie zmniejsza to bardzo korzyści jakie mogą być osiągnięte przez stosowanie powłok o podwójnej krzywiznie. Zagadnienie to wymaga jednak jeszcze dokładnego zbadania.

Literatura cytowana w tekście

1. P. A. COOPER, *Buckling of nearly cylindrical shells under lateral pressure*, AIAA, Journ., **10** (1973) 2.
2. S. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSZKOWSKI, *On the stability and the postbuckling equilibrium of shells of revolution*, ZAMM, **51** (1971) 653 - 639.
3. S. ŁUKASIEWICZ, A. WAWRZYŃIAK, *Stateczność powłok obrotowych o malej krzywiznie południka przy obciążeniach złożonych*, Mech. Teoret. Stos. (w druku).

Резюме

ПОСЛЕКРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИДЕАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ КРИВИЗНАХ МЕРИДИАНА И КОМБИНИРОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

В работе представлено решение задачи закритической деформации оболочек вращения, находящихся под внешним поперечным давлением и осевым сжатием. Изучено влияние кривизны меридиана и взаимозависимость критических нагрузок в нелинейной области. Задача решена методом Ритца.

Summary

POSTCRITICAL ANALYSIS OF IDEAL SHELLS OF REVOLUTION

The analysis of the postbuckling behaviour of nearly cylindrical shells of revolution under simultaneous action of external pressure and axial compressive load is presented. The effects of the curvature of the generator and the correlation of both loads in the nonlinear region are examined. The problem is solved by means of the Ritz method.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ
I MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 grudnia 1975 r.

O OPERATOROWYM PODEJŚCIU DO FORMUŁOWANIA ZASAD WARIACYJNYCH DLA OŚRODKÓW PLASTYCZNYCH

JÓZEF JOACHIM TELEGA (RADOM)

1. Wstęp

W ostatnich latach ukazały się prace, w których konsekwentnie zastosowano operatorowe podejście do zagadnień wariacyjnych mechaniki i fizyki matematycznej [1 - 4]. Sformułowano również dualne zasady ekstremalne, co jest bardzo istotne w zastosowaniach, gdyż pozwala oszacować rozwiązania.

W niniejszej pracy przedstawimy możliwości zastosowania metody zaproponowanej przez SEWELLA [3] do: 1) przyrostowych zagadnień brzegowych dla ośrodka sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem geometrycznej nieliniowości, 2) płaskiego stanu odkształcenia sztywno-idealnie plastycznego ośrodka ściśliwego o niestowarzyszonym prawie płynięcia.

W części drugiej omówimy istotę tzw. swobodnej zasady wariacyjnej, zaproponowanej przez SEWELLA [3]. Podstawowe równania sprężysto-plastycznego ośrodka ze wzmocnieniem, przy uwzględnieniu geometrycznej nieliniowości, podane zostały w części trzeciej. Zasady ekstremalne dla tego ośrodka podane zostały w części czwartej. W części piątej podane zostały podstawowe równania płaskiego stanu odkształcenia ośrodków plastycznych o niestowarzyszonym prawie płynięcia, w części zaś szóstej sformułowano zasadę minimum dla tego typu ośrodków.

2. Swobodna zasada wariacyjna

SEWELL [3] operuje pojęciem *swobodnej zasady wariacyjnej*, która jest wygodnym formalizmem, pozwalającym formułować zasady wariacyjne dla operatorów potencjalnych. Podamy obecnie te elementy teorii SEWELLA, które wykorzystamy w części czwartej i szóstej.

2.1. Niech E, F będą przestrzeniami prehilbertowskimi z iloczynami skalarnymi oznaczonymi odpowiednio przez (\cdot, \cdot) , $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Niech E', F' będą podprzestrzeniami przestrzeni odpowiednio E, F . Na E' działa operator liniowy $T: E' \rightarrow F$. T^* jest operatorem sprzężonym, $T^*: F' \rightarrow E$. Operator sprzężony T^* określa się ze związku (por. [5])

$$(2.1) \quad \forall_{x \in E'} \forall_{u \in F'} (x, T^*u) = \langle u, Tx \rangle.$$

Zakładamy ponadto, że $T^{**} = T$.

Weźmy równania operatorowe

$$(2.2) \quad T^*u = y, \quad Tx = v,$$

gdzie $y \in E$, $v \in F$ są nie określonymi na razie elementami.

Równania (2.2) można zapisać w formalnie macierzowej postaci:

$$(2.3) \quad \begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix} : E' \times F' \rightarrow E \times F.$$

Przestrzeń $E \times F$ jest produktem kartezjańskim przestrzeni E , F . Symbolem $\{, \}$ oznaczamy iloczyn skalarny na $E \times F$. Jeśli

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad A_1, A_2 \in E \times F,$$

to

$$(2.4) \quad \{A_1, A_2\} = (x_1, x_2) + \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Pojęcia te można uogólnić na przypadek dowolnej, skończonej liczby przestrzeni.

Istotnym pojęciem będzie dla nas różniczka Gateaux. Niech $f[x]$ będzie funkcjonałem na E' , $f: E' \rightarrow R$, R — zbiór liczb rzeczywistych. Różniczkę Gateaux określa się następująco:

$$(2.5) \quad \delta f[x, h] = \frac{d}{d\alpha} f[x + \alpha h]_{\alpha=0}, \quad h \in E.$$

W przypadku, gdy $\delta f[x, h]$ jest — dla ustalonego $x \in E'$ i $h \in E$ — operatorem liniowym i ograniczonym, to

$$(2.6) \quad \delta f[x, h] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, h \right), \quad h \in E,$$

gdzie $\partial f / \partial x$ nosi nazwę gradientu funkcjonału f . Łatwo wykazać, że

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \partial Q / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix},$$

gdzie $Q[x, u]$ jest funkcjonałem biliniowym

$$Q[x, u] = \frac{1}{2} [(x, T^*u) + \langle u, Tx \rangle] = (x, T^*u) = \langle u, Tx \rangle.$$

Przedstawienie (2.7) jest możliwe, ponieważ operator liniowy

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix}$$

jest operatorem symetrycznym, [4].

W (2.2) elementy y, v były dowolne. Do dalszych rozważań przyjmujemy, że elementy te są określone przez gradient funkcjonału $H[x, u]$, tzn.

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \partial H / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}.$$

Równania (2.2) mają teraz postać

$$(2.9) \quad T^*u = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad Tx = \frac{\partial H}{\partial u}.$$

Przykładem równań (2.9) są równania Hamiltona mechaniki analitycznej

$$-\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Z (2.7) i (2.8) otrzymujemy swobodną zasadę wariacyjną

$$(2.10) \quad \partial(Q-H) / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = 0.$$

Zależność (2.10) jest równoważna następującym wzorom

$$(2.11) \quad \delta(Q-H) = 0$$

i

$$(2.12) \quad \left(T^*u - \frac{\partial H}{\partial x}, \delta x \right) + \left\langle Tx - \frac{\partial H}{\partial u}, \delta u \right\rangle = 0.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$(2.13) \quad L[x, u] = Q - H.$$

Swobodną zasadę wariacyjną można wówczas zapisać następująco

$$(2.14) \quad \partial L / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \theta \Leftrightarrow \delta L = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \delta x \right) + \left\langle \frac{\partial L}{\partial u}, \delta u \right\rangle = 0,$$

gdzie θ jest elementem zerowym przestrzeni $E \times F$.

Swobodna zasada wariacyjna pozostaje słuszna w przypadku, gdy funkcjonał nie jest dany zależnością (2.13).

Rozpatrzmy sens swobodnej zasady wariacyjnej (w pracy [3] wyjaśnienia takiego nie ma). Załóżmy, że dane zagadnienie opisywane jest równaniem operatorowym $P[x, u] = \theta$. Jeśli dla tego zagadnienia można stosować swobodną zasadę wariacyjną, to fakt ten oznacza, iż operator P jest potencjalny, tzn. istnieje funkcjonał L taki, że (por. [5])

$$P[x, u] = \partial L / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \theta.$$

Zapiszmy swobodną zasadę wariacyjną w postaci równań operatorowych

$$(2.15a) \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \theta_E,$$

$$(2.15b) \quad \frac{\partial L}{\partial u} = \theta_F,$$

gdzie θ_E, θ_F są elementami zerowymi odpowiednio w przestrzeniach, E, F .

2.2. Ciekawy jest przypadek, gdy funkcjonal $L[x, u]$ jest funkcjonalem siodłowym, tzn. wklęsłym ze względu na x , a wypukłym ze względu na u . Ścisła definicja brzmi następująco: *funkcjonal L jest funkcjonalem siodłowym, jeżeli*

$$(2.16) \quad L[x_1, u_1] - L[x_2, u_2] - \left\langle \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_1, x_1 - x_2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial L}{\partial u} \Big|_2, u_1 - u_2 \right\rangle \geq 0,$$

gdzie przez $[x_1, u_1] \in E \times F, [x_2, u_2] \in E \times F$ oznaczono pary różnych elementów. «Siodłowość» jest słabą lub silną w zależności od tego, czy w (2.16) mamy słabą czy silną nierówność.

Jeśli funkcjonal L jest funkcjonalem siodłowym to słuszne są następujące twierdzenia:

T w i e r d z e n i e 2.1. Dowolne rozwiązanie układu równań (2.15) minimalizuje funkcjonal

$$(2.17) \quad J = L - \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}, x \right\rangle$$

w klasie rozwiązań równania (2.15a).

T w i e r d z e n i e 2.2. Dowolne rozwiązanie układu równań (2.15) maksymalizuje funkcjonal

$$(2.18) \quad K = L - \left\langle \frac{\partial L}{\partial u}, u \right\rangle$$

w klasie rozwiązań równania (2.15b).

T w i e r d z e n i e 2.3.

$$\min J = \max K = L[x^*, u^*],$$

gdzie $[x^*, u^*]$ jest rozwiązaniem równań (2.15).

T w i e r d z e n i e 2.4. a) Rozwiązanie ze względu na x jest jednoznaczne, jeśli funkcjonal L jest względem x ściśle wklęsły (w (2.16) mamy silną nierówność, gdy $x_1 \neq x_2$).

b) Rozwiązanie ze względu na u jest jednoznaczne, jeśli funkcjonal L jest ściśle wypukły względem u , czyli w (2.16) dla $u_1 \neq u_2$ nierówność jest silna.

Przedstawione powyżej rozważania łatwo uogólnić na przypadek dowolnej, skończonej liczby przestrzeni z iloczynami skalarnymi. Praktyczne zastosowania podane zostaną w punktach czwartym i szóstym.

U w a g a. Twierdzenia 2.1–2.4 pozostają słuszne i wtedy, gdy równanie (2.15a) zastąpimy trzema warunkami

$$(2.19a) \quad \frac{\partial L}{\partial x} \leq \theta_E,$$

$$(2.19b) \quad x \geq \theta_E,$$

$$(2.19c) \quad \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}, x \right\rangle = 0,$$

zachowując równanie (2.15b); można również postąpić tak: zostawiamy równanie (2.15a), a (2.15b) zastępujemy przez:

$$(2.20a) \quad \frac{\partial L}{\partial u} \geq \theta_F,$$

$$(2.20b) \quad u \geq \theta_F,$$

$$(2.20c) \quad \left\langle \frac{\partial L}{\partial u}, u \right\rangle = 0.$$

Siodłowość funkcjonału pozwala sformułować dwa ekstremalne twierdzenia dualne. Odbywa się to bez badania drugiej wariacji funkcjonału.

3. Związki podstawowe w opisie Eulera

3.1. Niech ξ^A , $A = 1, 2, 3$, oznacza ustalony, krzywoliniowy układ odniesienia. Współrzędne Lagrange'a względem ξ^A oznaczmy przez a^α , współrzędne Eulera przez x^i ; $i, \alpha = 1, 2, 3$. W aktualnej konfiguracji tensory: prędkości odkształceń ε_{ij} i prędkości obrotów ω_{ij} określone są następująco (por. [6]):

$$(3.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = \frac{1}{2} (d_{ji} + d_{ij}),$$

$$(3.2) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}),$$

gdzie $d_{ij} = v_{j,i}$, v_i — współrzędne kowariantne wektora prędkości przemieszczeń, $v_i = v_i(x^k)$; przecinek oznacza różniczkowanie kowariantne względem współrzędnych x^i .

Niech σ^{ij} będzie tensorem naprężenia Eulera, ρ gęstością ośrodka w konfiguracji odkształconej, a f^j jednostkową siłą masową. Równania równowagi mają postać

$$(3.3) \quad \sigma^i{}_i + \rho f^j = 0.$$

Zapiszmy równania te w formie przyrostowej

$$(3.4) \quad \dot{\sigma}^i{}_i + \sigma^i{}_j v^j{}_k - \sigma^j{}_i v^k{}_k + \rho \dot{f}^j = 0,$$

przy czym kropka oznacza pochodną materialną.

Wprowadzając nominalny tensor prędkości naprężenia

$$(3.5) \quad \dot{s}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + \sigma^{ij} v^k{}_k - \sigma^{jk} v^i{}_k$$

i uwzględniając tę zależność w (3.4) mamy

$$(3.6) \quad \dot{s}^i{}_i + \rho \dot{f}^j = 0.$$

Prędkość sił działających na element dS powierzchni ciała odkształconego wynosi wówczas

$$(3.7) \quad d\dot{P}^j = \dot{F}^j dS = n_i \dot{s}^{ij} dS.$$

3.2. Niech τ^{ij} będzie tensorem naprężenia Kirchhoffa odniesionym do konfiguracji aktualnej.

Pochodna Jaumanna tego tensora dana jest wzorem

$$(3.8) \quad \frac{D\tau^{ij}}{Dt} = \frac{D\sigma^{ij}}{Dt} + \sigma^{ij} v_{,k}^k,$$

przy czym pochodna Jaumanna tensora naprężenia Eulera ma postać [7]

$$(3.9) \quad \frac{D\sigma^{ij}}{Dt} = \dot{\sigma}^{ij} - \sigma^{ik} \omega_k^j - \sigma^{kj} \omega_k^i.$$

Przyjmujemy równanie konstytutywne podane przez HILLA [8, 9] dla sprężysto-plastycznych ośrodków ze wzmocnieniem, przy uwzględnieniu geometrycznej nieliniowości

$$(3.10) \quad \frac{D\tau^{ij}}{Dt} = K^{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p),$$

gdzie K^{ijkl} jest tensorem stałych sprężystych, a ε_{ij}^p częścią plastyczną tensora prędkości odkształceń, przy czym

$$(3.11) \quad \varepsilon_{ij}^p = \begin{cases} \frac{1}{h} m_{ij} m_{kl} \frac{D\tau^{kl}}{Dt}, & \text{gdy } m_{ij} \frac{D\tau^{ij}}{Dt} > 0, \\ 0, & \text{gdy } m_{ij} \frac{D\tau^{ij}}{Dt} \leq 0. \end{cases}$$

W ostatniej zależności h jest skalarną funkcją będącą miarą wzmocnienia, zaś m_{ij} oznaczają współrzędne normalnej zewnętrznej do aktualnej powierzchni plastyczności w sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń. Korzystając z (3.11) można przekształcić (3.10) do postaci

$$(3.12) \quad \frac{D\tau^{ij}}{Dt} = K^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \begin{cases} K^{ijkl} m_{kl} \frac{m_{pq} K^{pqrs} \varepsilon_{rs}}{h + m_{pq} K^{pqrs} m_{rs}}, & \text{gdy } m_{ij} \frac{D\tau^{ij}}{Dt} > 0, \\ 0, & \text{gdy } m_{ij} \frac{D\tau^{ij}}{Dt} \leq 0. \end{cases}$$

Powyższy związek fizyczny można przedstawić w postaci [12]

$$(3.13) \quad \dot{s}^{ij} = \frac{\partial E(\mathbf{d})}{\partial d_{ij}},$$

gdzie

$$(3.14) \quad E(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \dot{s}^{ij} d_{ij} = \frac{1}{2} \frac{D\tau^{ij}}{Dt} \varepsilon_{ij} - \sigma^{ij} \varepsilon_i^k \varepsilon_{kj} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} d_i^k d_{jk}.$$

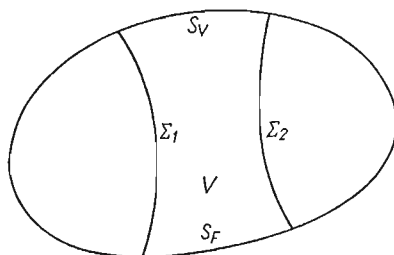
4. Zasada wariacyjna w opisie Eulera

Dla ośrodka, którego równanie konstytutywne podane zostało w punkcie poprzednim, sformułujemy zasadę wariacyjną, będącą analogonem znanej z teorii sprężystości zasady HU-WASHIZU [6, 10]. Zastosujemy aparat przedstawiony w części drugiej.

Niech V będzie obszarem otwartym w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Brzeg tego obszaru składa się z dwóch części: S_v , S_F . Do rozważań wprowadzamy dwie powierzchnie nieciągłości: Σ_1 , Σ_2 (rys. 1). Symbolem \bar{V} oznaczamy domknięcie obszaru V ,

czyli \bar{V} to poprostu obszar domknięty reprezentujący ośrodek w konfiguracji aktualnej. Wprowadzamy przestrzeń prehilbertowską E , złożoną z elementów $\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{d}, \dots$, (tensorów niesymetrycznych). Elementy te mają postać

$$(4.1) \quad \dot{\mathbf{s}} = \begin{cases} \dot{s}^{ij}(x) & x \in V \\ \dot{s}^{ij}(x) & x \in S_v \\ \dot{s}^{ij}(x) & x \in S_F \\ \dot{s}^{ij}(x) & x \in \Sigma_1 \\ \dot{s}^{ij}(x) & x \in \Sigma_2 \end{cases}$$



$$\bar{V} = V \cup S_v \cup S_F \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

Rys. 1

Zakładamy ponadto, że funkcje $\dot{\mathbf{s}}(x), \mathbf{d}(x), \dots, x \in \bar{V}$ są całkowlne. Iloczyn skalarny na E definiujemy następująco

$$(4.2) \quad (\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{d}) \stackrel{\text{df}}{=} \int \dot{s}^{ij} d_{ij} dV + \int \dot{s}^{ij} d_{ij} dS_v + \int \dot{s}^{ij} d_{ij} dS_F + \int \dot{s}^{ij} d_{ij} d\Sigma_1 + \int \dot{s}^{ij} d_{ij} d\Sigma_2.$$

Przestrzeń F budujemy z elementów $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$, postaci

$$(4.3) \quad \mathbf{v} = \begin{cases} v_j(x) & x \in V \\ v_j(x) & x \in S_v \\ v_j(x) & x \in S_F \\ v_j(x) & x \in \Sigma_1 \\ v_j(x) & x \in \Sigma_2 \end{cases}$$

Zakładamy, że funkcje $\mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x), \dots, x \in V$ są całkowlne. Wprowadzamy na F iloczyn skalarny

$$(4.4) \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \int v_j w^j dV + \int v_j w^j dS_v + \int v_j w^j dS_F + \int v_j w^j d\Sigma_1 + \int v_j w^j d\Sigma_2.$$

Podprzestrzeń E' składa się z tych funkcji $\dot{\mathbf{s}}(x), x \in \bar{V}$, które mają następujące własności (oprócz całkowlności):

1) są jednowartościowe i ciągłe w

$$\bar{V} \setminus \Sigma_2 = V \cup S_v \cup S_F \cup \Sigma_1,$$

2) są nieciągłe na Σ_2 , tak że skok na Σ_2 wynosi

$$(4.5) \quad \dot{s}^{ij}(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} \dot{s}^{ij}(y) - \lim_{z \rightarrow x^-} \dot{s}^{ij}(z),$$

gdzie $y, z \in \bar{V} \setminus \Sigma_2$, przy czym y dąży do x od strony Σ_2^+ , zaś z — od strony Σ_2^- ; Σ_2^+, Σ_2^- oznaczają strony powierzchni Σ_2 ,

3) funkcje te posiadają w podobszarach obszaru V ciągłe pochodne \dot{s}^{ij}_k .

Podprzestrzeń F' tworzą te elementy przestrzeni F , które są:

a) jednowartościowe i ciągłe w

$$\bar{V} \setminus \Sigma_1 = V \cup S_v \cup S_F \cup \Sigma_2;$$

b) nieciągłe na powierzchni Σ_1 , przy czym skok na powierzchni Σ_1 wynosi

$$(4.6) \quad v_j(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} v_j(y) - \lim_{z \rightarrow x^-} v_j(z), \quad y \in \bar{V} \setminus \Sigma_1, \quad z \in \bar{V} \setminus \Sigma_1;$$

c) posiadają ciągłe, w podobszarach obszaru V , pochodne $v_{j,k}$.

Wprowadźmy operator $T: E' \rightarrow F$ oraz operator sprzężony $T^*: F' \rightarrow E$

$$(4.7) \quad T^* \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{j,i} \\ -n_i v_j \\ 0 \\ -m_i v_j \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} V \\ S_v \\ S_F \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{matrix}, \quad T \dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} -\dot{s}^{ij}_i \\ 0 \\ n_i \dot{s}^{ij} \\ 0 \\ m_i \dot{s}^{ij} \end{bmatrix} \begin{matrix} V \\ S_v \\ S_F \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{matrix},$$

gdzie $\mathbf{n}(n_i)$ jest wektorem normalnym do $S_v \cup S_F$, zaś $\mathbf{m}(m_i)$ — wektorem normalnym do $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, skierowanym od strony „-” do „+”.

Równanie (2.1) ma teraz postać

$$(4.8) \quad (\dot{\mathbf{s}}, T^* \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, T \dot{\mathbf{s}} \rangle.$$

Po rozpisaniu otrzymujemy

$$(4.9) \quad \int \dot{s}^{ij} v_{j,i} dV - \int \dot{s}^{ij} n_i v_j dS_v - \int \dot{s}^{ij} m_i v_j d\Sigma_1 = - \int v_j \dot{s}^{ij}_i dV + \\ + \int v_j n_i \dot{s}^{ij} dS_F + \int v_j m_i \dot{s}^{ij} d\Sigma_2.$$

Rozpatrzmy operator

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; E' \times F' \times E' \rightarrow E \times F \times E,$$

dany związkami

$$(4.10a) \quad T^* \mathbf{v} = \partial H / \partial \dot{\mathbf{s}},$$

$$(4.10b) \quad T \dot{\mathbf{s}} = \partial H / \partial \mathbf{v},$$

$$(4.10c) \quad 0 = \partial H / \partial \mathbf{d},$$

gdzie

$$(4.11) \quad H[\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}] = \int [\dot{s}^{ij} d_{ij} - E(\mathbf{d}) - \rho \dot{f}^j v_j] dV - \int n_i \dot{s}^{ij} v_j^* dS_v + \\ + \int \hat{F}^{j*} v_j dS_F - \int m_i \dot{s}^{ij} h_j d\Sigma_1 + \int \hat{F}^j v_j d\Sigma_2.$$

W ostatniej zależności $E(\mathbf{d})$ jest funkcją określoną wzorem (3.14); \dot{f}^j , v_j^* , \hat{F}^j , h_j , \hat{F}^j są danymi wektorami.

Równania (4.10), po uwzględnieniu (4.7), (4.11) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad & v_{j,i} = d_{ij} && \text{w } V, \\
 (4.13) \quad & v_j = v_j^* && \text{na } S_v, \\
 (4.14) \quad & v_j = h_j && \text{na } \Sigma_1, \\
 (4.15) \quad & -\dot{s}^i_j = \varrho f^j && \text{w } V, \\
 (4.16) \quad & n_i \dot{s}^{ij} = \hat{F}^{j*} && \text{na } S_F, \\
 (4.17) \quad & m_i \dot{s}^{ij} = \hat{F}^j && \text{na } \Sigma_2, \\
 (4.18) \quad & 0 = \dot{s}^{ij} - \frac{\partial E}{\partial d_{ij}} && \text{w } V.
 \end{aligned}$$

Sens związków (4.12) — (4.18) jest oczywisty i nie wymaga komentarzy.

Zgodnie z zależnościami (2.12) budujemy funkcjonał, [11]

$$\begin{aligned}
 (4.19) \quad L[\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}] &= Q - H = (\dot{\mathbf{s}}, T^* \mathbf{v}) - H[\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}] = \\
 &= \int [\dot{s}^{ij}(v_{j,i} - d_{ij}) + E(\mathbf{d}) - \varrho f^j v_j] dV + \int \dot{s}^{ij} n_i (v_j^* - v_j) dS_v - \\
 &\quad - \int \hat{F}^{j*} v_j dS_F + \int \dot{s}^{ij} m_i (h_j - v_j) d\Sigma_1 - \int \hat{F}^j v_j d\Sigma_2.
 \end{aligned}$$

Ze swobodnej zasady wariacyjnej $\delta L = 0$, czyli ze związku [por. (2.13)]

$$(4.20) \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{s}}}, \delta \dot{\mathbf{s}} \right) + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \delta \mathbf{v} \right\rangle + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}}, \delta \mathbf{d} \right) = 0$$

otrzymujemy równania (4.12) — (4.18); mówiąc inaczej, równania te są równaniami Eulera dla funkcjonału (4.19).

W rozpatrywanej zasadzie wariacyjnej mamy trzy niezależne pola: $\dot{\mathbf{s}}$, \mathbf{d} , \mathbf{v} . Problem można zredukować do dwu niezależnych pól. Zgrupujemy w tym celu w (4.19) wyrazy zawierające tensor \mathbf{d} i zastosujemy transformację Legendre'a

$$(4.21) \quad W(\dot{\mathbf{s}}) = \dot{s}^{ij} d_{ij} - E(\mathbf{d}).$$

Funkcjonał (4.19) przechodzi wówczas w

$$\begin{aligned}
 (4.22) \quad L_1[\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{v}] &= \int [\dot{s}^{ij} v_{j,i} - W(\dot{\mathbf{s}}) - \varrho f^j v_j] dV + \int \dot{s}^{ij} n_i (v_j^* - v_j) dS_v - \\
 &\quad - \int \hat{F}^{j*} v_j dS_F + \int \dot{s}^{ij} m_i (h_j - v_j) d\Sigma_1 - \int \hat{F}^j v_j d\Sigma_2.
 \end{aligned}$$

Funkcjonał typu (4.22) rozpatrywał również NEALE [12], ale bez uwzględnienia nieciągłości.

Powróćmy do funkcjonału (4.19). Załóżmy, że funkcja $E(\mathbf{d})$ jest wypukła. Wówczas funkcjonał L jest funkcjonałem siodłowym, wklęsłym ze względu na $\dot{\mathbf{s}}$ i wypukłym ze względu na \mathbf{v} i \mathbf{d} , przy czym zmienne \mathbf{v} i \mathbf{d} traktujemy łącznie. Ścisłe rzecz traktując, funkcjonał L jest liniowy względem $\dot{\mathbf{s}}$. Funkcjonał liniowy można traktować jako słabo wklęsły. Warunek na siodłowość funkcjonału przyjmuje postać [por. (2.16)]

$$\begin{aligned}
 (4.23) \quad L[\dot{\mathbf{s}}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{d}_1] - L[\dot{\mathbf{s}}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{d}_2] &- \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{s}}} \Big|_1, \dot{\mathbf{s}}_1 - \dot{\mathbf{s}}_2 \right) - \\
 &- \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \Big|_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \right\rangle - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}} \Big|_2, \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 \right) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Z twierdzeń 2.1, 2.2 otrzymujemy parę zadań dualnych, co ujmijemy w postaci wniosków:

Wniosek 4.1. Dowolne rozwiązanie równania (4.10), czyli równań (4.12)—(4.18), minimalizuje funkcjonal

$$(4.24) \quad J = L - \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{s}}}, \dot{\mathbf{s}} \right\rangle = \int [E(\mathbf{d}) - \rho f^j v_j] dV - \int \dot{F}^{j*} v_j dS_F - \int \hat{F}^j v_j d\Sigma_2$$

w klasie rozwiązań równania (4.10a) [równanie to jest równoważne równaniom (4.12)—(4.14)].

Wniosek 4.2. Dowolne rozwiązanie równania (4.10) maksymalizuje funkcjonal

$$(4.25) \quad K = L - \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}}, \mathbf{d} \right\rangle = \\ = \int \left[E(\mathbf{d}) - d_{ij} \frac{\partial E}{\partial d_{ij}} \right] dV + \int n_i \dot{s}^{ij} v_j^* dS_v + \int m_i \dot{s}^{ij} h_j d\Sigma_1$$

w klasie rozwiązań równań (4.10b), (4.10c) [równania (4.10b), (4.10c) są równoważne równaniom (4.15)—(4.18)].

Wiemy, że $\frac{\partial F}{\partial d_{ij}} = \dot{s}^{ij}$, stosując ponadto transformację Legendre'a, przekształcamy

(4.25) do postaci

$$(4.26) \quad K = - \int W(\dot{\mathbf{s}}) dV + \int n_i \dot{s}^{ij} v_j^* dS_v + \int m_i \dot{s}^{ij} h_j d\Sigma_1.$$

Jeśli w opisie materialnym zastosować niesymetryczny tensor naprężenia Lagrange'a, to otrzyma się formalnie takie same zasady, jak w opisie Eulera.

U w a g a. Potencjał $E(\mathbf{d})$ jest wypukły, jeśli

$$E(\mathbf{d}_1) - E(\mathbf{d}_2) - [\text{grad } E(\mathbf{d}_2)](\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \geq 0.$$

5. Związki podstawowe płaskiego stanu odkształcenia ośrodków ściśliwych

W pracy [13] zostały wyprowadzone równania opisujące płaski stan odkształcenia ośrodków ściśliwych. Równania te otrzymano z teorii trójwymiarowej zaproponowanej w [14].

Ogólny związek fizyczny dla izotropowego, idealnie plastycznego ośrodka ma — w przypadku trójwymiarowym — postać

$$(5.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{D}), \text{ przy warunku } \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{D}} \mathbf{D} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{D}} \neq 0,$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ jest tensorem naprężenia, a $\mathbf{D} = (D_{ij})$ tensorem prędkości odkształcenia. Występujący w (5.1) warunek jednorodności implikuje istnienie warunku plastyczności

$$(5.2) \quad F(\boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Występuje powiązanie między warunkiem plastyczności a prawem płynięcia.

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia prawo płynięcia ma postać

$$(5.3) \quad D_{\alpha\beta} = \mu \left[\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \left(\sigma_{\gamma\gamma} - g\varphi - \frac{1}{3} h\varphi^2 \right) \delta_{\alpha\beta} \right], \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2,$$

gdzie: $\mu = \frac{3 \operatorname{tr}^{1/2} \mathbf{E}^2}{3g + h\varphi}$, $\mu \geq 0$; argumentem funkcji g, h, φ jest $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\mathbf{E} = (E_{\alpha\beta}, E_{33})$,

$$E_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{D} \delta_{\alpha\beta}.$$

Naprężenie σ_{33} wyraża się wzorem

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\alpha\alpha} + \frac{1}{3} h\varphi^2 - g\varphi - h \right), \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Warunek plastyczności (5.2) ma postać następującą:

$$(5.4) \quad F(\sigma_{\alpha\beta}) = 2\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\alpha})^2 - \left(g^2 + \frac{2}{3} gh\varphi + \frac{1}{9} h^2\varphi^2 \right) \left(2 - \frac{1}{3} \varphi^2 \right) = 0.$$

Prawo płynięcia (5.3) nie jest stowarzyszone z warunkiem plastyczności (5.4). Łatwo wykazać, że potencjał plastyczny dany jest zależnością

$$(5.5) \quad G(\sigma_{\alpha\beta}) = 2\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\alpha})^2 + 2 \int \left(g\varphi + \frac{1}{3} h\varphi^2 \right) d\sigma_{\alpha\alpha} + G_1 = 0,$$

przy czym G_1 jest stałą całkowania. Przykłady podano w [13].

6. Zasada wariacyjna dla płaskiego płynięcia ośrodków ściśliwych

Sformułujemy zasadę minimum, która charakteryzuje mnożnik plastyczny μ z poprzedniego punktu. Oznaczmy przez Ω rozpatrywany obszar płaski o brzegu $\partial\Omega$. Niech brzeg ten składa się z dwu części: S_1 i S_2 ; przez I_1, I_2 oznaczmy linie nieciągłości, odpowiednio pola prędkości przemieszczeń i pola naprężenia. Przestrzeń E składa się z elementów σ o postaci

$$(6.1) \quad \sigma = \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(x) & x \in \Omega \\ \sigma_{\alpha\beta}(x) & x \in S_1 \\ \sigma_{\alpha\beta}(x) & x \in S_2 \\ \sigma_{\alpha\beta}(x) & x \in I_1 \\ \sigma_{\alpha\beta}(x) & x \in I_2 \end{cases}.$$

Iloczyn skalarny ma postać podobną do (4.2). Będziemy nadal oznaczać go przez (\cdot, \cdot) . Przestrzeń F składa się z elementów \mathbf{V} o postaci

$$(6.2) \quad \mathbf{V} = \begin{cases} V_{\alpha}(x) & x \in \Omega \\ V_{\alpha}(x) & x \in S_1 \\ V_{\alpha}(x) & x \in S_2 \\ V_{\alpha}(x) & x \in I_1 \\ V_{\alpha}(x) & x \in I_2 \end{cases}.$$

Iloczyn skalarny w tej przestrzeni oznaczają będziemy symbolem \langle, \rangle , ma on postać podobną do (4.4). Łatwo jest teraz podać definicje podprzestrzeni E' , F' , więc nie będziemy ich powtarzać.

Wprowadźmy jeszcze trzecią przestrzeń G , składającą się z funkcji skalarnych μ , określonych na Ω . Podprzestrzeń G' składa się z funkcji klasy C^1 . W przestrzeni G wprowadzamy następujący iloczyn skalarny:

$$(6.3) \quad \{\mu, \lambda\} = \int \mu \lambda d\Omega, \quad \mu, \lambda \in G.$$

Ponieważ obecnie tensor naprężenia jest symetryczny, więc operatory T, T^* będą miały nieco inną postać niż w (4.7); mianowicie mamy

$$(6.4) \quad T^* \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \\ -n_{(\alpha} V_{\beta)} \\ 0 \\ -m_{(\alpha} V_{\beta)} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Omega \\ S_1 \\ S_2' \\ l_1 \\ l_2 \end{matrix}, \quad T \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \\ 0 \\ n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \\ 0 \\ m_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Omega \\ S_1 \\ S_2' \\ l_1 \\ l_2 \end{matrix},$$

gdzie $\mathbf{n}(n_\alpha)$ jest wektorem jednostkowym normalnym do $\partial\Omega$, zaś $\mathbf{m}(m_\alpha)$ — wektorem jednostkowym normalnym do $l_1 \cup l_2$.

Weźmy dwa funkcjonały

$$(6.5) \quad H_1[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{V}, \mu] = \int \left[\frac{1}{2} \mu (G(\boldsymbol{\sigma}) + F(\boldsymbol{\sigma})) + X_\alpha V_\alpha \right] d\Omega - \int n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} V_\beta^* dS_1 + \\ + \int P_\alpha V_\alpha dS_2 - \int m_\alpha \sigma_{\alpha\beta} h_\beta dl_1 + \int \hat{P}_\alpha V_\alpha dl_2,$$

$$(6.6) \quad H_2[\boldsymbol{\sigma}, \mu] = \int \frac{1}{2} \mu [G(\boldsymbol{\sigma}) - F(\boldsymbol{\sigma})] d\Omega$$

i rozpatrzmy równanie operatorowe

$$(6.7) \quad \begin{bmatrix} 0 & T^* & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{V} \\ \mu \end{bmatrix} = \partial H_1 / \partial \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{V} \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial H_2 / \partial \boldsymbol{\sigma} \\ 0 \\ -\partial H_2 / \partial \mu \end{bmatrix}.$$

Prawa strona równania (6.7) nie jest gradientem jednego funkcjonału. Wynika to stąd, że mamy do czynienia z niestowarzyszonym prawem płynięcia.

Po rozpisaniu równanie (6.7) przyjmuje postać:

$$T^* \mathbf{V} = \frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial H_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = \mu \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}, \Omega, \\ V_\alpha = V_\alpha^*, S_1, \\ V_\alpha = h_\alpha, l_1, \end{cases}$$

$$T \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{V}} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = X_\beta, \Omega, \\ n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} = P_\beta, S_2, \\ m_\alpha \sigma_{\alpha\beta} = \hat{P}_\beta, l_2, \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial H_1}{\partial \mu} - \frac{\partial H_2}{\partial \mu} \Leftrightarrow F(\sigma_{\alpha\beta}) = 0.$$

Ostatnie równanie oznacza, że ośrodek jest uplastyczniony w każdym punkcie. Pełny układ zależności opisujących początkowe płynięcie plastyczne dla rozpatrywanych ośrodków o niestowarzyszonym prawie płynięcia można zapisać następująco:

$$(6.8) \quad T^* \mathbf{V} = \frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial H_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

$$(6.9) \quad T \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{V}},$$

$$(6.10) \quad 0 \geq \frac{\partial H_1}{\partial \mu} - \frac{\partial H_2}{\partial \mu},$$

$$(6.11) \quad \mu \geq 0,$$

$$(6.12) \quad \left\{ \mu, \frac{\partial H_1}{\partial \mu} - \frac{\partial H_2}{\partial \mu} \right\} = 0.$$

Z przeprowadzonych przez SEWELLA [3] rozważań wynika, że na dowolnym rozwiązaniu układu (6.10)–(6.12) funkcjonał

$$(6.13) \quad \left\{ \mu, \frac{\partial H_1}{\partial \mu} - \frac{\partial H_2}{\partial \mu} \right\} = \int \mu F(\boldsymbol{\sigma}) d\Omega,$$

osiąga minimum, w klasie rozwiązań dopuszczalnych określonych przez (6.10), (6.11). Funkcjonał (6.13) charakteryzuje więc tylko mnożnik plastyczny μ (por. [15]). Powstaje problem budowania ogólniejszych i bardziej praktycznych zasad wariacyjnych dla ośrodków o niestowarzyszonym prawie płynięcia. Zagadnienie to zostanie rozpatrzone w przyszłości, przy zastosowaniu aparatu rozwiniętego w pracach [4, 5].

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. ARTHURS, *Complementary variational principles*, Clarendon Press, Oxford 1970.
2. J. T. ODEN, J. N. REDDY, *On dual-complementary variational principles in mathematical physics*, Int. J. Eng. Sci., **12** (1974), 1 - 29.
3. M. J. SEWELL, *The governing equations and extremum principles of elasticity and plasticity generated from a single functional*, J. Struct. Mech., Part 1: **2** (1973), 1 - 32, Part 2: **2** (1973), 135 - 158.
4. E. TONTI, *On the variational formulation for linear initial value problems*, Ann. Mat. Pura Appl., **95** (1972), 331 - 359.
5. М. М. ВАЙНБЕРГ, *Вариационные методы исследования нелинейных операторов*, Москва 1956.
6. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
7. W. PRAGER, *An elementary discussion of stress-rate*, Quart. Appl. Math., **18** (1963), 403 - 408.
8. R. HILL, *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*, J. Mech. Phys. Solids, **6** (1958), 236 - 249.
9. R. HILL, *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*, J. Mech. Phys. Solids, **7** (1959), 209 - 225.
10. K. WASHIZU, *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, Oxford 1968.
11. J. J. TELEGA, *Variational principles for rate boundary-value problems in finite plasticity*, Euromech 54, «Finite deformations in plasticity», Warszawa 1974.
12. K. W. NEALE, *A general variational theorem for the rate problem in elasto-plasticity*, Int. J. Solids Struct., **8** (1972), 865 - 876.

13. J. J. TELEGA, *On plane plastic motion of compressible solids*, ZAMM, (w druku).
14. A. SAWCZUK, P. STUTZ, *On formulation of stress-strain relations for soils at failure*, ZAMP 19 (1968), 770 - 778.
15. Q. S. NGUYEN, H. D. BUI, *Sur les matériaux elastoplastiques à écrouissage positif ou négatif*, J. Méc., 13 (1974), 321 - 342.

Р е з ю м е

ОБ ОПЕРАТОРНОМ ПОДХОДЕ К ФОРМУЛИРОВАНИЮ ВАРИАЦИОННЫХ
ПРИНЦИПОВ ДЛЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

В работе представлено применение свободного вариационного принципа к: 1) инкрементальной краевой задаче для упруго-пластической среды, с учетом геометрической нелинейности, 2) плоскому деформированному состоянию идеально-пластической среды с учетом объемных деформаций.

S u m m a r y

AN OPERATOR APPROACH TO THE FORMULATION OF VARIATIONAL PRINCIPLES FOR
PLASTIC SOLIDS

In the paper the application of a «free variational principle» is considered with regard to: 1) rate boundary-value problem of elastic-plastic solids; geometrical nonlinearity is taken into account; 2) plane flow of perfectly-plastic, compressible solids.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA
OŚRODEK W RADOMIU

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1976 r.

METODA STEROWANIA MODALNEGO I JEJ ZASTOSOWANIE DO USTATECZNIANIA LOTU
ŚMIGŁOWCA

JÓZEF PIETRUCHA, ZBIGNIEW SZEWCZYK (WARSZAWA)

Oznaczenia

- A** macierz stanu układu niesterowanego o wymiarach $n \times n$,
- B** macierz sterowania o wymiarach $n \times r$ i kolumnach \mathbf{b}_j ,
- H** macierz stanu układu sterowanego,
- J** macierz blokowa Jordana,
- K** macierz współczynników wzmocnienia o elementach k_{ij} ,
- P** macierz sterowalności modalnej o elementach p_{ij} ,
- U** macierz wektorów własnych macierzy **A** o kolumnach \mathbf{u}_j ,
- V** macierz wektorów własnych macierzy **A** o kolumnach \mathbf{v}_j ,
- g** wektor wzmocnienia,
- u** r -wymiarowy wektor sterowania,
- x** n -wymiarowy wektor stanu,
- u* prędkość pozioma,
- w* prędkość pionowa,
- q* prędkość kątowna pochylenia,
- θ kąt pochylenia,
- ΩR prędkość końca łopaty wirnika nośnego,
- δ_{ij} delta Kroneckera,
- λ_j wartości własne układu niesterowanego,
- ρ_j wartości własne układu sterowanego,
- U_c sterowanie skokiem ogólnym łopaty wirnika nośnego,
- U_p sterowanie skokiem cyklicznym łopaty wirnika nośnego w kierunku podłużnym,
- $(\cdot)^T$ transponowanie,
- $(\cdot)^*$ sprzężanie.

1. Wstęp

W ostatnich latach intensywnie rozwija się metoda sterowania modalnego [1—16], której prekursorem był ROSENBROCK [17]. Według określenia [18] sterowanie modalne jest syntezą bezinercyjnego sprzężenia zwrotnego zmieniającego wartości własne liniowego stacjonarnego układu dynamicznego na wartości z góry dane. Syntezę prowadzi się korzystając z pojęcia przestrzeni stanów [19]. Przez odpowiedni dobór położenia wartości własnych układu można dokonać syntezy układów o pożądanym własnościach dynamicznych.

Celem niniejszej pracy nie jest dokonanie przeglądu publikacji na temat sterowania modalnego, chociaż cel taki byłby całkowicie uzasadniony. W chwili obecnej brak jest bowiem kompletnego i aktualnego przedstawienia wiedzy w tej dziedzinie.

Praca nasza poświęcona jest natomiast przedstawieniu sterowania modalnego w ujęciu PORTERA i CROSSLEYA [8]. O ile nam wiadomo, ujęcie to jest w Polsce mało znane, a w pełni zasługuje na szersze upowszechnienie. Dlatego też główny wysiłek został skierowany na wypełnienie tej właśnie luki. Starano się to uzyskać w następujący sposób:

- ujęcie z [8] zostało uzupełnione istotnymi założeniami i najważniejszymi faktami, będącymi podstawą rozważań;
- rozważania te przedstawiono w uporządkowanej i zwartej formie;
- ułożono przejrzyste algorytmy, których możliwości obliczeniowe zilustrowano przykładem ustalczenia lotu śmigłowca;
- uwypuklono przydatność i dogodność omówionej metody do obliczeń na komputerach;
- podano wykaz najnowszej literatury krajowej i zagranicznej z tej dziedziny.

Spodziewamy się zatem, że przedstawiona w ten sposób praca może być przydatna przy projektowaniu układów sterowania stosowanych w różnych dziedzinach techniki.

2. Elementy teorii sterowania modalnego

2.1. Główna idea sterowania modalnego. Rozważmy układ opisany równaniem

$$\dot{x}(t) = ax(t).$$

Rozwiązanie takiego równania ma postać

$$x(t) = x(0)\exp(at).$$

Jest widoczne, że charakterystyka dynamiczna tego układu zależy od parametru a i układ będzie np. niestateczny, jeżeli $a > 0$. Wprowadźmy do tego układu sterowanie liniowe w postaci sprzężenia zwrotnego

$$u(t) = kx(t).$$

Równanie układu zamkniętego będzie miało postać

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) = (a + bk)x(t).$$

Rozwiązanie takiego równania dane jest wzorem

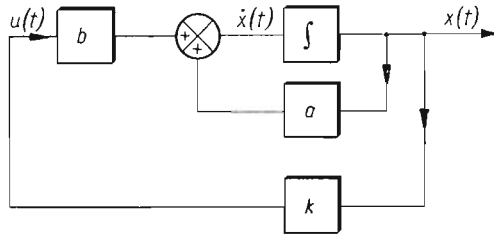
$$x(t) = x(0)\exp(\sigma t),$$

gdzie $\sigma = a + bk$.

Charakterystyka dynamiczna układu zamkniętego zależy od wartości σ . Jeżeli zażądamy, żeby σ przyjęło z góry daną wartość s spełniającą np. warunek stateczności, to współczynnik k musi spełniać zależność

$$k = (s - a)/b.$$

Tak więc dla realizacji układu o danej charakterystyce dynamicznej musimy wprowadzić do układu otwartego gałąź sprzężenia zwrotnego o współczynniku wzmocnienia $k = (s - a)/b$. Przepływ sygnałów dla układu zamkniętego ilustruje rys. 1.



Rys. 1

2.2. Założenia ogólne. Teoria sterowania modalnego może być stosowana do wyznaczenia sygnału sterującego dla układu opisywanego układem liniowych równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych o stałych współczynnikach. W niniejszej pracy rozważania ograniczone będą tylko do przypadków układów o parametrach skupionych.

W rozważaniach nie zakłada się żadnej szczególnej postaci macierzy sterowania (por. [1]). Macierz sterowania obrazująca sposób wprowadzenia sterowania do układu ma więc taką postać, jaka wynika z analizy układu.

Bardzo istotne jest założenie szczególnej postaci wektora sterowania. Zakłada się mianowicie, że jest on kombinacją liniową zmiennych stanu, określoną odpowiednim wektorem własnym transponowanej macierzy stanu. Przyjęcie tego założenia pozwala na sterowanie dowolnie wybraną charakterystyką układu bez oddziaływania na pozostałe. Praktyczna realizacja tego założenia wymaga jednak mierzania, w sensie technicznym, wszystkich zmiennych stanu.

Będziemy rozważać liniowy stacjonarny układ dynamiczny (L) opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

Przytoczymy najpierw podstawowe fakty teorii sterowania modalnego [2].

Określenia: 1. Niech $\Lambda_L = \{\lambda: \lambda \text{ jest wartością własną macierzy } \mathbf{A}\}$. Niech $\Lambda_S \subset \Lambda_L$ będzie zbiorem m ($m \leq n$) wartości własnych zespolonych sprzężonych. Niech $\Gamma = \{\varrho_1, \dots, \varrho_m\}$ będzie zbiorem dowolnych liczb zespolonych sprzężonych. O układzie (L) mówimy, że jest modalnie sterowalny względem Λ_S , jeżeli istnieje stała macierz \mathbf{G} o wymiarach $r \times n$ taka, że wartości własne macierzy $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})$ należą do zbioru $\Gamma \cup (\Lambda_L \sim \Lambda_S)$. Macierz \mathbf{G} jest nazywana macierzą wzmocnienia.

2. Jeżeli $m = n$ i układ (L) jest modalnie sterowalny względem Λ_L to mówimy, że (L) jest całkowicie modalnie sterowalny.

3. Mówimy, że układ (L) jest całkowicie sterowalny (w sensie Kalmana), jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $\mathbf{x}(0)$ istnieje taki wektor sterowania $\mathbf{u}(t)$, który doprowadzi układ do dowolnego stanu końcowego $\mathbf{x}(t_k)$ w skończonym przedziale czasu $(0, t_k)$ (zob. np. [12]).

Twierdzenie: Układ (L) jest całkowicie sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie modalnie sterowalny.

Wniosek: Teoria sterowania modalnego może być stosowana bezpośrednio dla układów całkowicie sterowalnych, natomiast dla pozostałych po uprzednim oddzieleniu części

niesterowalnej. Sposób jednoznacznego rozpoznawania części sterowalnej i niesterowalnej układu zostanie podany dalej, po przeprowadzeniu niezbędnych rozważań.

2.3. Przypadek pojedynczych wartości własnych [8]. Układ jednoweściowy. Przeprowadzimy rozważania dla układu, w którym istnieją zarówno zespolone, jak i rzeczywiste wartości własne. Ułożymy algorytm, który pozwoli zmieniać dowolną liczbę wartości własnych rzeczywistych i dowolną liczbę par sprzężonych wartości własnych zespolonych. Założymy przy tym, że układ jest całkowicie sterowalny. Przy założeniu, że układ jest jednoweściowy ($r = 1$) równanie (L) będzie miało prostszą postać

$$(2.3.1) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),$$

gdzie \mathbf{A} — macierz stanu o wymiarach $n \times n$ mająca rzeczywiste i zespolone pojedyncze wartości własne.

Zakładamy, że będziemy zmieniać m ($m < n$) wartości własnych. W tym celu należy wygenerować m sygnałów sterujących w postaci kombinacji liniowej zmiennych stanu

$$(2.3.2) \quad s_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j = \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Sygnały te wzmacniane są przez m członów proporcjonalnych o wzmocnieniu k_i , w wyniku czego otrzymujemy sterowanie

$$(2.3.3) \quad u(t) = \sum_{i=1}^m k_i s_i = \sum_{i=1}^m k_i \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}(t).$$

Podstawiając (2.3.2) do (2.3.1) otrzymamy równanie dla układu zamkniętego

$$(2.3.4) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^m k_i \boldsymbol{\mu}_i^T \right) \mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t).$$

Z równania (2.3.4) wynika, że efektem przyjęcia sygnału sterującego w postaci (2.3.2) jest zmiana macierzy stanu \mathbf{A} na nową macierz \mathbf{H}

$$(2.3.5) \quad \mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^m k_i \boldsymbol{\mu}_i^T.$$

Jeżeli teraz za wektor $\boldsymbol{\mu}_i$ przyjmiemy wektor własny \mathbf{v}_i (zob. p. 2.2), to macierz układu sterowanego będzie miała postać

$$(2.3.6) \quad \mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^m k_i \mathbf{v}_i^T.$$

Ponieważ \mathbf{u}_r jest wektorem własnym macierzy \mathbf{A} , to

$$(2.3.7) \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_r = \lambda_r \mathbf{u}_r, \quad r = 1, \dots, n.$$

Podobnie

$$(2.3.8) \quad \mathbf{A}^T \mathbf{v}_s = \lambda_s \mathbf{v}_s, \quad s = 1, \dots, n.$$

Uwzględniając, że wektory własne macierzy \mathbf{A} i \mathbf{A}^T są ortonormalne, tzn. spełniają związek

$$(2.3.9) \quad \mathbf{v}_s^T \mathbf{u}_r = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, \dots, n,$$

możemy ze wzoru (2.3.6) otrzymać

$$(2.3.10) \quad \mathbf{H}\mathbf{u}_t = \mathbf{A}\mathbf{u}_t = \lambda_t \mathbf{u}_t \quad \text{dla} \quad m+1 \leq t \leq n,$$

$$(2.3.11) \quad \mathbf{H}\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{u}_i + \mathbf{b}\mathbf{k}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i + \mathbf{b}\mathbf{k}_i \quad \text{dla} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Równanie (2.3.10) wskazuje, że dla $t \geq m+1$, λ_t i \mathbf{u}_t są takie same dla macierzy \mathbf{A} i \mathbf{H} . Z równania (2.3.11) wynika natomiast, że ani λ_i nie jest wartością własną macierzy \mathbf{H} , ani też \mathbf{u}_i — wektorem własnym tej macierzy, oczywiście przy spełnieniu warunku $k_i \neq 0$. Tak więc efektem wprowadzenia do układu sterowania w postaci (2.3.3) jest zmiana wartości własnych $\{\lambda_j\}$ i odpowiadających im wektorów własnych $\{\mathbf{u}_j\}$ na wartości i wektory własne, odpowiednio, $\{\varrho_j\}$ i $\{\mathbf{w}_j\}$, przy zachowaniu pozostałych $(n-m)$ wektorów i wartości własnych niezmienionych. Przy ustalonym zbiorze $\{\varrho_j\}$ realizującym dane własności należy wyznaczyć współczynniki wzmocnienia k_i . W tym celu rozłożymy wektory \mathbf{b} i \mathbf{w}_i na kierunki wektorów własnych macierzy \mathbf{A} (np. [20]):

$$(2.3.12) \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{u}_j;$$

$$(2.3.13) \quad \mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Z (2.3.12) po wykorzystaniu (2.3.9) wynika, że

$$(2.3.14) \quad p_j = \mathbf{v}_j^T \mathbf{b}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ponieważ \mathbf{w}_i jest wektorem własnym macierzy \mathbf{H} , to

$$(2.3.15) \quad \mathbf{H}\mathbf{w}_i = \varrho_i \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Podstawiając (2.3.6) i (2.3.13) do (2.3.15) otrzymamy

$$(2.3.16) \quad \left(\mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{l=1}^m k_l \mathbf{v}_l^T \right) \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j = \varrho_i \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Przekształcając na mocy (2.3.7), (2.3.9) i (2.3.12) lewą stronę wyrażenia (2.3.16) w następujący sposób:

$$\mathbf{A} \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^n q_{ij} \lambda_j \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\mathbf{b} \sum_{l=1}^m k_l \mathbf{v}_l^T \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{b} \sum_{l=1}^m k_l q_{il} = \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{u}_j \sum_{l=1}^m k_l q_{il}, \quad i = 1, \dots, m,$$

otrzymujemy

$$(2.3.17) \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} \lambda_j \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{u}_j \sum_{l=1}^m k_l q_{il} = \varrho_i \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Równanie (2.3.17) jest równaniem wektorowym ze względu na \mathbf{u}_j i jest równoważne następującemu układowi równań skalarnych:

$$(\varrho_i - \lambda_j)q_{ij} - p_j \sum_{i=1}^m k_i q_{ii} = 0, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

Dla danego wskaźnika „ i ” pierwszych m równań, które zmieniają wartości własne układu, można zapisać w formie macierzowej

$$\mathbf{F}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0},$$

gdzie

$$\mathbf{F}_i = [f_{jl}^{(i)}]; \quad \mathbf{q}_i = [q_{il}],$$

przy czym

$$f_{jl}^{(i)} = (\varrho_i - \lambda_j) \delta_{jl} - p_j k_l; \quad i, j, l = 1, \dots, m.$$

Ponieważ $\mathbf{q}_i \neq \mathbf{0}$, to $\det \mathbf{F}_i = 0$.

Warunek ten można zapisać w formie rozwiniętej jako

$$\begin{vmatrix} (\varrho_i - \lambda_1) - p_1 k_1, & -p_1 k_2, \dots, & -p_1 k_m \\ -p_2 k_1, & (\varrho_i - \lambda_2) - p_2 k_2, \dots, & -p_2 k_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_m k_1, & -p_m k_2, \dots, & (\varrho_i - \lambda_m) - p_m k_m \end{vmatrix} = 0$$

lub w formie zwartej

$$(2.3.18) \quad \prod_{j=1}^m (\varrho_i - \lambda_j) = \sum_{l=1}^m k_l p_l \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m (\varrho_i - \lambda_j), \quad i = 1, \dots, m.$$

Z wyrażenia (2.3.18) wynika, że

$$(2.3.19) \quad \sum_{j=1}^m \frac{k_j p_j}{(\varrho_i - \lambda_j)} = 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Przy założeniu, że $(\varrho_i - \lambda_j) \neq 0$ równanie (2.3.19) można rozwiązać ze względu na k_i

$$(2.3.20) \quad k_i = \frac{\prod_{j=1}^m (\varrho_j - \lambda_i)}{p_i \prod_{j=1}^m (\lambda_j - \lambda_i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Tak więc współczynniki wzmocnienia k_i mogą być obliczone, jeżeli $\lambda_j \neq \lambda_i$, co zawsze jest spełnione, gdyż zakładaliśmy, że macierz stanu ma pojedyncze wartości własne oraz jeżeli $p_i \neq 0$, co na mocy (2.3.14) można zapisać jako

$$(2.3.21) \quad \mathbf{p} = \mathbf{V}^T \mathbf{b} \neq \mathbf{0}.$$

Warunek ten jest równoznaczny z żądaniem sterowalności pierwszych m postaci układu. O postaciach niesterowalnych informują współrzędne zerowe wektora \mathbf{p} (zob. zakończenie

p. 2.2). Należy podkreślić, że badanie sterowalności układu metodą modalną jest daleko prostsze od metody klasycznej, polegającej na badaniu rzędu odpowiedniej macierzy.

Sterowanie otrzymamy po podstawieniu (2.3.20) do (2.3.3) i po uwzględnieniu założenia, że $\mu_i = \nu_i$ [por. (2.3.5) i (2.3.6)].

$$(2.3.22) \quad u(t) = \mathbf{g}^T \mathbf{x}(t),$$

gdzie

$$(2.3.23) \quad \mathbf{g} = \sum_{i=1}^m \nu_i k_i.$$

Należy zauważyć, że dla układu fizycznego sterowanie (2.3.22) będzie rzeczywiste nawet w przypadku występowania wartości własnych zespolonych. Wynika to z tego, że jeżeli $\lambda_j = \lambda_i^*$, to $p_j = p_i^*$ i $\nu_j = \nu_i^*$, co jest konsekwencją występowania zespolonych wartości własnych w parach wzajemnie sprzężonych.

W celu wyznaczenia sterowania należy więc wykonać następujące kroki obliczeniowe:

1. na podstawie warunku (2.3.21) wyznaczyć sterowalne i niesterowalne postacie układu;

2. ze wzoru (2.3.20) wyznaczyć współczynniki wzmocnienia k_i ;

3. ze wzoru (2.3.23) wyznaczyć wektor wzmocnienia \mathbf{g} i tym samym sterowanie (2.3.22).

Podany algorytm pozwala na efektywne wyznaczanie sterowania, co zostanie w p. 3 zilustrowane przykładem.

Układ wielowejściowy. Zadanie polega obecnie na wyznaczeniu współczynników wzmocnienia k_{ij} , w których $i = 1, \dots, m$ jest wskaźnikiem liczby zmienianych wartości własnych, a $j = 1, \dots, n$ jest wskaźnikiem liczby wejść.

Ponieważ wszystkie zależności dla układu wielowejściowego ($r > 1$) wyprowadza się analogicznie, jak dla układu jednowejściowego ($r = 1$), przedstawimy więc tylko najważniejsze wyniki. Dla porównania zachowujemy numerację wzorów z poprzedniego punktu dodając prim. Równanie sterowania układu wielowejściowego ma postać

$$(2.3.4)' \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \left(\mathbf{A} + \sum_{j=1}^r \mathbf{b}_j \sum_{i=1}^m k_{ji} \nu_i^T \right) \mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t).$$

Współczynniki wzmocnienia są wyznaczone z warunku

$$\begin{vmatrix} (\varrho_i - \lambda_1) - \sum_{j=1}^r p_{j1} k_{j1}, & - \sum_{j=1}^r p_{j1} k_{j2}, \dots, & - \sum_{j=1}^r p_{j1} k_{jm} \\ - \sum_{j=1}^r p_{j2} k_{j1}, & (\varrho_i - \lambda_2) - \sum_{j=1}^r p_{j2} k_{j2}, \dots, & - \sum_{j=1}^r p_{j2} k_{jm} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - \sum_{j=1}^r p_{jm} k_{j1}, & - \sum_{j=1}^r p_{jm} k_{j2}, \dots, & (\varrho_i - \lambda_m) - \sum_{j=1}^r p_{jm} k_{jm} \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwiązanie tego równania jest niejednoznaczne [2] i otrzymuje się je przy ustalonym j -tym wejściu

$$(2.3.20)' \quad k_{jt} = \frac{\prod_{l=1}^m (\varrho_l - \lambda_i)}{p_{ji} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m (\lambda_l - \lambda_i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sterowanie ma postać

$$(2.3.22)' \quad u_j(t) = \mathbf{g}_j^T \mathbf{x}(t),$$

gdzie

$$(2.3.23)' \quad \mathbf{g}_j = \sum_{i=1}^m v_i k_{ij}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Wzór (2.3.20)' wskazuje, że współczynniki wzmocnienia mogą być obliczone, jeżeli $p_{ji} \neq 0$ i oczywiście przy zachowaniu założenia o różnych wartościach własnych. Oznacza to, że i -ta postać może być sterowana j -tym wejściem. Współczynniki p_{ji} są elementami macierzy sterowalności modalnej \mathbf{P} o postaci

$$(2.3.21)' \quad \mathbf{P} = \mathbf{V}^T \mathbf{B}.$$

W celu wyznaczenia sterowania dla układu wielowejsciowego należy przeprowadzić obliczenia zgodne z algorytmem dla układu jednowejsciowego, kolejno j -razy dla każdego wejścia. Wyznaczenie wektora sterowania składać się będzie zatem z j -etapów iteracyjnych. Na każdym etapie obliczeń zachodzi konieczność wyznaczenia sterowania, macierzy sterowalności modalnej i macierzy stanu. Określone są one następującymi wzorami:

sterowanie

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^m k_i^{(j)} v_i^{(j)T} \mathbf{x}(t);$$

macierz sterowalności modalnej

$$\mathbf{P}^{(j)} = \mathbf{V}^{(j)T} \mathbf{B}^{(j)};$$

macierz stanu

$$\mathbf{H}^{(j+1)} = \mathbf{H}^{(j)} + \mathbf{b}_j \mathbf{g}_j^T, \quad j = 1, \dots, r-1,$$

przy czym $\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{A}$.

W przypadku $r > 1$ sterowanie jest niejednoznaczne. Pozwala to na zastosowanie dodatkowego kryterium przy jego wyznaczaniu. Może nim być np. kryterium minimalizacji sumy modułów wzmocnień w gałęziach sprzężenia zwrotnego.

2.4. Przypadek wartości własnych wielokrotnych [8]. Rozważymy tylko układ jednowejsciowy. Rozważania będą podobne do tych, które przeprowadzono dla przypadku z p. 2.3. Do wyznaczenia sterowania potrzebna jest postać kanoniczna Jordana macierzy stanu, która istnieje (zob. [20]) dla każdej macierzy kwadratowej. Wykorzystując podane na początku pracy oznaczenia można napisać, że

$$\mathbf{UAV} = \mathbf{J},$$

gdzie

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathbf{J}_{n_r}(\lambda_r).$$

Symbol \oplus oznacza sumę prostą macierzy.

Blok Jordana ma postać

$$\mathbf{J}_{n_i}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

przy założeniu, że każdy z nich zawiera inną postać własną, tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j = 1, \dots, v$.

Macierze \mathbf{U} i \mathbf{V} mogą być przedstawione w postaci

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_v],$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_v],$$

co eksponuje ich zależność od v — różnych wartości własnych. Podmacierze \mathbf{U}_i i \mathbf{V}_i o wymiarach $n \times n$ mają postać

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i &= [\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{n_i}^{(i)}], \\ \mathbf{V}_i &= [\mathbf{v}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{v}_{n_i}^{(i)}], \end{aligned} \quad i = 1, \dots, v,$$

z której wynika ich zależność od krotności i -tej wartości własnej. Analogiczne zależności można otrzymać dla macierzy sterowalności modalnej

$$\mathbf{p} = \mathbf{V}^T \mathbf{b} = [\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(v)}],$$

gdzie

$$\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{V}_i^T \mathbf{b} = [p_1^{(i)}, \dots, p_{n_i}^{(i)}], \quad i = 1, \dots, v.$$

Wektor sterowania \mathbf{b} może być przedstawiony w postaci

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^{n_i} p_j^{(i)} \mathbf{u}_{n_j}^{(i)}.$$

Przy założeniu, że $p_{m_i}^{(i)} \neq 0$ i $p_j^{(i)} = 0, j = m_i + 1, \dots, n_i$, co oznacza, że podmacierz sterowalności modalnej ma postać

$$\mathbf{p}^{(i)T} = [p_1^{(i)}, \dots, p_{m_i}^{(i)}, 0, \dots, 0],$$

wektor sterowania można zapisać jako

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^{m_i} p_j^{(i)} \mathbf{u}_j^{(i)}.$$

Po uwzględnieniu tych założeń sterowanie przyjmuje postać

$$(2.4.1) \quad u(t) = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^{m_i} k_j^{(i)} \mathbf{v}_j^{(i)T} \mathbf{x}(t).$$

Układ zamknięty jest opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} k_j^{(i)} \mathbf{v}_j^{(i)T} \right) \mathbf{x}(t),$$

z którego wynika, że macierz układu sterowanego dana jest wzorem

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} k_j^{(i)} \mathbf{v}_j^{(i)T}.$$

Analogicznie jak w p. 2. 3 można wykazać, że wartości i wektory własne macierzy \mathbf{A} i \mathbf{H} są takie same w przypadku, gdy $m_i + 1 \leq j \leq n_i$, $i = 1, \dots, \nu$. Dla $j = 1, \dots, m_i$ wartości i wektory własne ulegają zmianie. Mając dany zbiór nowych wartości własnych, należy wyznaczyć wartości współczynników wzmocnienia k , co sprowadza się do rozwiązania równania

$$F^{(ij)} \mathbf{q}_j^{(i)} = 0.$$

Rozwiązując je ze względu na k , przy ustalonej wartości wskaźników i, j , otrzymamy

$$(2.4.2) \quad R^{(ij)} \mathbf{P} \mathbf{K} = 1, \quad i = 1, \dots, \nu; \quad j = 1, \dots, m_i,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R^{(ij)} &= [R_1^{(ij)}, \dots, R_\nu^{(ij)}], \\ \mathbf{P} &= P_1 \oplus \dots \oplus P_\nu, \\ \mathbf{K} &= [K_1, \dots, K_\nu], \\ R_k^{(ij)} &= \left[\frac{1}{(\rho_j^{(i)} - \lambda_k)^1}, \dots, \frac{1}{(\rho_j^{(i)} - \lambda_k)^{m_k}} \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ macierze \mathbf{P} i \mathbf{K} są niezależne od wskaźników i, j równanie (2.4.2) można zapisać w postaci

$$\mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{K} = \mathbf{e}.$$

Z równania tego wyznacza się współczynniki wzmocnienia

$$(2.4.3) \quad \mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}.$$

Sterowanie otrzymamy podstawiając (2.4.3) do (2.4.2).

3. Przykład

W ostatnich latach coraz częściej prowadzone są prace nad wyposażeniem śmigłowców w układy stabilizacji automatycznej z powodu niewystarczającej stabilizacji własnej.

Wykorzystując wyniki rozważań z p. 2.3 znajdziemy schemat ideowy urządzenia sterującego dla ustateczniania wybranych postaci ruchu śmigłowca. Ze względu na przejrzystość postępowania ograniczymy się przy tym do przypadku lotu w płaszczyźnie pionowej. Dla tego przypadku równanie ruchu śmigłowca ma postać

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

gdzie

$$\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [u/\Omega R, w/\Omega R, q, \Theta]^T,$$

$$\mathbf{u}(t) = [u_1, u_2]^T = [U_c, U_p]^T.$$

W przypadku ogólnym śmigłowiec ma sześć stopni swobody. Ponieważ jednak w locie normalnym ruchy przechylające i pochyłające śmigłowca związane są z jego prędkościami boczną i wzdłużną, to dzięki temu śmigłowiec ma tylko cztery organa sterowania.

Rozpatrując stateczność śmigłowca w locie do przodu można pokazać, że sprzężenie pomiędzy ruchami wzdłużnym i bocznym jest słabe. Daje to podstawę do nieuwzględniania równania ruchu bocznego i dzięki temu ilość równań ruchu zmniejsza się do czterech. W locie w płaszczyźnie pionowej mamy dwie możliwości sterowania, mianowicie U_c — sterowanie skokiem ogólnym łopaty wirnika nośnego, będące bezpośrednim sterowaniem siłą nośną, U_p — sterowanie skokiem cyklicznym łopaty wirnika nośnego, oddziałujące na ruch wzdłużny.

Dla typowego obciążenia i typowych warunków lotu śmigłowca macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są podane w [21]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4556 \\ 0,0482 & -1,01 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & 0,3681 & -0,707 & 1,420 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ 3,5446 & -7,5922 \\ -5,52 & 4,49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy \mathbf{A} są następujące: $\lambda_1 = -1,6886$; $\lambda_2 = -0,9073$; $\lambda_3 = 0,8325$; $\lambda_4 = 0,0098$, a odpowiadające tym wartościom wektory własne macierzy \mathbf{A}^T mają postać:

$$\mathbf{v}_1 = [-0,0603, 0,1341, 0,0758, 1]^T;$$

$$\mathbf{v}_2 = [-0,0529, -0,3261, 0,0141, 0,0426]^T;$$

$$\mathbf{v}_3 = [0,0758, 0,0141, 0,6505, 1]^T;$$

$$\mathbf{v}_4 = [1, 0,0426, 0,4434, 0,299]^T.$$

Zbiór wartości własnych macierzy stanu wskazuje, że przy danych warunkach lotu w układzie występują dwie niestateczne postacie ruchu odpowiadające wartościom λ_3 i λ_4 . Kierując się kryterium stateczności żądamy, aby obie wartości były również ujemne. Tak więc zbiór $\{e\}$ wartości własnych układu zamkniętego ma postać

$$\{e\} = \{-1,6886, -0,9073, -0,11, -0,907\}.$$

Jak wiadomo (por. [7, 22, 23]), śmigłowiec może być sterowany niezależnie wielkościami U_c i U_p . Pozwala to na traktowanie układu jako jednowejściowego. Wyznamy sterowanie realizujące kryterium stateczności dla obu przypadków sterowania. Jest to możliwe, ponieważ wektory sterowalności modalnej równe

$$\text{dla } U_c: \mathbf{p}_c = [-5,8206, 4,4157, -3,5375, -2,2525]^T$$

$$\text{dla } U_p: \mathbf{p}_p = [-7,9827, 6,1932, -4,8742, -3,1577]^T$$

nie zawierają elementów zerowych.

Wykorzystując procedurę dla układu jednowejściowego otrzymujemy prawa sterowania w postaci

$$U_c(t) = -0,0166 u/\Omega R + 0,0054 w/\Omega R + 0,3402 q + 0,5457 \theta,$$

$$U_p(t) = -0,0113 u/\Omega R + 0,0040 w/\Omega R + 0,2472 q + 0,3962 \theta.$$

Wszystkie obliczenia zostały przeprowadzone na EMC Cyber-72 według programów własnych w języku Fortran IV.

Warto podkreślić, że ten sam efekt ustatecznienia osiągnie się wykorzystując jednocześnie oba wektory sterowania przy założeniu, że każdy z nich steruje jedną i nie tą samą wartością własną. W tym przypadku sterowanie może być wyznaczone bez użycia procedury dla układu wielowejściowego.

4. Zakończenie

Z rozwiązania przykładu można się przekonać o dużej prostocie i efektywności zastosowanego algorytmu. Trzeba jednak pamiętać, że przyjęte kryterium ustatecznienia jest jednym z możliwych przy doborze zbioru wartości własnych układu zamkniętego. Istnieją także inne, równie ważne kryteria, np. szybkość tłumienia drgań własnych układu (mierzona czasem zmniejszania amplitudy do połowy).

Warto podkreślić, że stosowalność przedstawionych algorytmów nie jest ograniczona ani liczbą stopni swobody układu, ani liczbą zmienianych postaci własnych, a niejednoznaczność rozwiązania dla układów wielowejściowych można nawet dodatkowo wykorzystać, postulując np. minimalizację wymiaru wektora wzmocnienia.

Na specjalną uwagę zasługuje fakt, że zaproponowane algorytmy złożone są z prostych działań algebraicznych. Jest to szczególnie korzystne dla maszynowej techniki obliczeniowej, ponieważ różnorodność operacji znacznie zwiększa czas realizacji obliczeń. Fakt ten nabiera istotnego znaczenia zwłaszcza przy rozpatrywaniu większej liczby stanów lotu śmigłowca albo przy zmienianiu dużej liczby wartości własnych.

Sterowanie modalne przedstawione w tej pracy jest ogólne, ponieważ nie zakłada się szczególnej postaci macierzy wzmocnienia występującej w równaniu sterowania $\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t)$. Dzięki temu ułożone algorytmy mogą znaleźć szerokie zastosowanie nie tylko w technice lotniczej. Jeśli do ilustracji rozważań wybrano jednak przykład z tej dziedziny, to dlatego, że zagadnienie ustatecznienia lotu śmigłowca nie jest u nas zbadane w stopniu wystarczającym. Rozwiązanie zagadnienia tego typu wskazało na duże możliwości sterowania modalnego w tym zakresie. Oczywiście praktyczna realizacja urządzenia sterującego według wyznaczonego w niniejszej pracy schematu ideowego wymagałaby uwzględnienia

wszystkich niestatecznych stanów lotu śmigłowca. Rozpatrzenie tego przypadku nie stanowi jednak trudności przy zastosowaniu omówionej metody.

Literatura cytowana w tekście

1. J. K. ELLIS, G. T. WHITE, *An introduction to modal analysis and control*, Control, 4, 9 (1965), 193, 262, 317.
2. J. D. SIMON, S. K., MITTER, *A theory of modal control*, Inf. Control, 4, 13 (1968), 316.
3. T. R. CROSSLEY, B. PORTER, *Synthesis of aircraft modal control systems*, Aeronaut. J., 8, 73 (1968), 697.
4. T. R. CROSSLEY, B. PORTER, *Synthesis of aircraft modal control systems having real or complex eigenvalues*, Aeronaut. J., 2, 73 (1969), 138.
5. L. A. GOULD, A. T. MURPHY, E. F. BERKMAN, *On the Simon-Mitter allocation algorithm-explicit gains for repeated eigenvalues*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-15 (1970), 259.
6. A. GOSIEWSKI, J. KORONACKI, *O metodzie syntezy układów sterowania opartej o wartości własne*, AAT, 1, 15 (1970), 17.
7. T. R. CROSSLEY, B. PORTER, *Synthesis of helicopter stabilization systems using modal control theory*, J. Aircraft, 1, 9 (1972), 3.
8. B. PORTER, T. R. CROSSLEY, *Modal Control-Theory and Application*, Taylor and Francis, London 1972.
9. Т. П. ГРИГОРЕВА, Л. У. КОЖИНСКАЯ, *К теории модального управления*, АиТ., 5(1973).
10. W. JAŻDŻYŃSKI, J. KOWAL, *Sterowanie modalne*, Teoria sterowania, cz. IV, Referaty doktorantów wygłoszone na seminarium H. Góreckiego w ramach studium doktoranckiego w zakresie automatyki i elektrotechniki w latach 1971 - 1973, AGH, Kraków 1974.
11. B. PORTER, A. BRADSHAW, *Modal control of class of distributed-parameter systems*, Int. J. Control, 4, 15 (1972), 673.
12. A. NIEDERLIŃSKI, *Układy wielowymiarowe automatyki*, WNT, Warszawa 1974.
13. J. O. FLOWER, *Linear feedback design using matrix traces*, Int. J. Control, 6, 21, (1975), 911.
14. A. BRADSHAW, B. PORTER, *Modal control of a class of distributed-parameter systems multi-eigenvalues assignment*, Int. J. Control, 2, 16 (1972), 277.
15. P. N. PARASKEVOPOULOS, S. G. TZAFESTAS, *New results in feedback modal-controller design*, Int. J. Control, 6, 21 (1975), 911.
16. T. KACZOREK, *Synteza liniowych układów stacjonarnych metodą przestrzeni stanów*, PWN, Warszawa 1975.
17. H. H. ROSENBRÖCK, *Distinctive problems of process control*, Chem. Engng. Prog., 9, 58 (1962), 43.
18. Encyklopedia Techniki, tom *Automatyka*, WNT, Warszawa 1972.
19. K. OGATA, *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa 1974.
20. Ф. Р. ГАНТМАХЕР, *Теория матриц*, Наука, Москва 1966.
21. K. S. NARENDRA, S. TRIPATHI, *Identification and optimization of aircraft dynamics*, J. Aircraft, 10 (1973), 193.
22. P. R. PAYNE, *Helicopter Dynamics and Aerodynamics*, Pitman, London 1959.
23. А. Н. ЗАГОРДАН, *Элементарная теория вертолёта*, Мин. Обр. СССР, Москва 1960.

Резюме

МЕТОД МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛЕТА ВЕРТОЛЕТА

В работе представлена теория модального управления системами с одним или несколькими входами при сосредоточенных параметрах, в постановке Портера и Кроссли. С помощью этого метода решена задача стабилизации полета вертолета.

S u m m a r y

MODAL CONTROL METHOD AND ITS APPLICATION TO THE STABILIZATION
OF HELICOPTER FLIGHT

In this paper a theory of modal control of lumped-parameter systems for single- and multi-input systems derived by Porter and Crossley is presented. The stabilization problem of the flight of helicopter by this method is solved.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1976 r.

ZMODYFIKOWANA METODA SIŁ NOWACKIEGO W DYNAMICE PŁYT Z UWZGLĘDNIENIEM
ODKSZTAŁCEŃ POSTACIOWYCH I BEZWŁADNOŚCI OBROTOWEJ

WAĆLAW MIERZEJEWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracy [1] opisano metodę rozwiązywania problemów dynamiki płyt wykorzystującą znane częstości i postacie drgań własnych płyt podpartych swobodnie na dwu przeciwległych brzegach. Rozwiązanie zagadnień drgań swobodnych i wymuszonych uzyskuje się w niej przez rozpatrzenie drgań wymuszonych płyt zastępczych o bardziej elementarnych warunkach brzegowych, na części powierzchni których przyłożone jest obciążenie uzupełniające służące do realizacji dowolnych warunków brzegowych. Przyjęcie tych obciążeń uzupełniających opisanych odpowiednio gładkimi funkcjami pozwala na efektywne obliczanie sił wewnętrznych w rozpatrywanych płytach. Celem obecnej pracy jest zastosowanie omawianej metody do problemów dynamiki płyt z uwzględnieniem sił tnących i bezwładności obrotowej.

Dotychczas uzyskane wyniki dotyczące problemów płyt z uwzględnieniem sił tnących i bezwładności obrotowej są nieliczne, a rozwiązywanie zagadnień dotyczących dowolnych warunków brzegowych napotyka duże trudności obliczeniowe. Zasadnicze trudności występują również i przy zastosowaniu do takich płyt metody elementów skończonych ze względu na złe uwarunkowanie macierzy sztywności [4].

2. Postacie drgań własnych płyty podpartej swobodnie na dwu przeciwległych brzegach

Stosując oznaczenia przyjęte w [2] można zapisać równania równowagi płyty drgającej swobodnie następująco:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] - k^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= - \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \psi_x, \\ \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] - k^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= - \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \psi_y, \\ k^2 Gh (\nabla^2 w + \Phi) &= - \rho h \omega^2 w, \end{aligned}$$

gdzie $\Phi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$, zaś ψ_x, ψ_y są funkcjami obrotu.

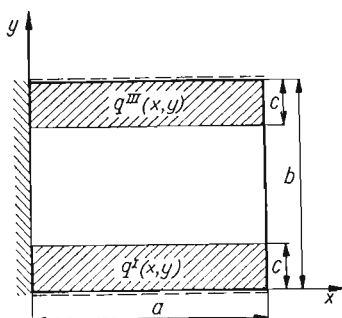
W pracy [3] uzyskano rozprężenie powyższego układu równań oraz wykazano, że w przypadku płyty podpartej swobodnie na dwu przeciwległych brzegach istnieje ściśle,

zamknięte rozwiązanie postaci drgań własnych (przestępne równanie częstości można rozwiązać metodami przybliżonymi):

$$(2.2) \quad \begin{aligned} W_{mn} &= X_{mn}(x) \sin \frac{n\pi}{b} y, \\ \psi_{xmn} &= X_{mn}^I(x) \sin \frac{n\pi}{b} y, \\ \psi_{ymn} &= X_{mn}^{II}(x) \cos \frac{n\pi}{b} y. \end{aligned}$$

3. Drgania płyty wspornikowej

Zastosowanie proponowanej metody pokazane zostanie na przykładzie obliczenia częstości i postaci drgań własnych płyty wspornikowej. Schemat realizacji warunków brzegowych w przekrojach $y = c$, $y = b - c$ płyty zastępczej pokazano na rys. 1.



Rys. 1

Amplitudy obciążeń uzupełniających $q^I(x, y)$ i $q^{III}(x, y)$ zakłada się w następującej postaci:

$$(3.1) \quad q^J(x, y) = \sum_{i=1}^3 (q_i^J(x, y) + m_{xi}^J(x, y) + m_{yi}^J(x, y)),$$

gdzie $q_i^J(x, y)$ oznacza obciążenie normalne do powierzchni płyty, $m_{xi}^J(x, y)$, $m_{yi}^J(x, y)$ — obciążenia momentami.

Należy stwierdzić, że do realizacji warunków brzegowych można przyjąć:

$$q^J(x, y) = \sum_{i=1}^3 q_i^J(x, y),$$

tzn. $m_{xi}^J(x, y) \equiv 0$, $m_{yi}^J(x, y) \equiv 0$.

Taka postać obciążenia, odznaczająca się prostotą, nie jest jednak — jak to zostanie pokazane dalej — korzystna ze względu na zbieżność szeregów opisujących odkształcenia.

Przyjęto następującą budowę składowych obliczeń:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} q_l^J(x, y) &= g_l^J(y) f_l^J(x), \\ m_{xi}^J(x, y) &= g_l^J(y) f_{li}^J(x), \\ m_{yi}^J(x, y) &= G_l^J(y) f_{li}^{II}(x). \end{aligned}$$

Funkcje $g_l^J(x)$ są dobierane tak, aby spełniały konieczne warunki szybkiej zbieżności omówione w pracy [1]. W przypadku funkcji $G_l^J(y)$ należy spełnić następujące warunki:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{d^{2j+1} G_l^J(y)}{dy^{2j+1}} \Big|_{y=0} &= 0 \quad \text{dla } j = 0, 1, 2 \dots t-1, \\ G_l^J(y)|_{y=c} &= 0, \quad \frac{d^j G_l^J(y)}{dy^j} \Big|_{y=c} = 0 \quad \text{dla } j = 1, 2 \dots k. \end{aligned}$$

Obciążenia (3.2) przedstawia się w postaci szeregów:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} q_l^J(x, y) &= \sum_m \sum_n a_n^{IJ} c_{mn}^{IJ} X_{mn}(x) \sin \frac{n\pi}{b} y, \\ m_{xi}^J(x, y) &= \sum_m \sum_n a_n^{IJ} c_{mn}^{IJ} X_{mn}^I(x) \sin \frac{n\pi}{b} y, \\ m_{yi}^J(x, y) &= \sum_m \sum_n b_n^{IJ} c_{mn}^{IJ} X_{mn}^{II}(x) \cos \frac{n\pi}{b} y, \end{aligned}$$

gdzie a_n^{IJ} — oznacza współczynniki sinusowych szeregów opisujących $g_l^J(y)$, b_n^{IJ} — współczynniki cosinusowych szeregów opisujących funkcje $G_l^J(y)$.

Ze względu na szczególną budowę funkcji obciążenia (3.2) można wykazać istnienie związków:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sum_s c_{sn}^{IJ} X_{sn}(x) &= \sum_s c_{sr}^{IJ} X_{sr}(x), \\ \sum_s c_{sn}^{IJ} X_{sn}^I(x) &= \sum_s c_{sr}^{IJ} X_{sr}^I(x), \\ \sum_s c_{sn}^{IJ} X_{sn}^{II}(x) &= \sum_s c_{sr}^{IJ} X_{sr}^{II}(x). \end{aligned}$$

Mnożąc pierwszy ze związków (3.5) przez $h X_{kn} \sin^2 \frac{n\pi}{b} y$, drugi przez $\frac{h^3}{12} X_{kn}^I \sin^2 \frac{n\pi}{b} y$, ostatni przez $\frac{h^3}{12} X_{kn}^{II} \cos^2 \frac{n\pi}{b} y$, sumując je stronami, a następnie całkując obie strony powstałej równości po obszarze płyty zastępczej otrzymuje się zależności:

$$(3.6) \quad c_{kn}^{IJ} = u_{kn} \sum_s c_{sr}^{IJ} b_{kn}^s,$$

gdzie:

$$u_{kn} = \frac{1}{\iint \left[hW_{kn}^2 + \frac{h^3}{12}(\psi_{xkn}^2 + \psi_{ykn}^2) \right] dx dy},$$

$$b_{kn}^s = \iint \left[\left(hX_{sr} X_{kn} + \frac{h^3}{12} X_{sr}^I X_{kn}^I \right) \sin^2 \frac{n\pi}{b} y + \frac{h^3}{12} X_{sr}^{II} X_{kn}^{II} \cos^2 \frac{n\pi}{b} y \right] dx dy.$$

Związki (3.6) pozwalają wyrazić współczynniki c_{kn}^{IJ} przy $n \neq r$ przez c_{kr}^J . Obciążenie (3.2) wywołuje odkształcenie płyty, które zapisać można następująco:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} w_i^J(x, y) &= \sum_m \sum_n h_{mn}^{iJ} W_{mn}(x, y), \\ \psi_{xi}^J(x, y) &= \sum_m \sum_n h_{mn}^{iJ} \psi_{mn}(x, y), \\ \psi_{yi}^J(x, y) &= \sum_m \sum_n h_{mn}^{iJ} \psi_{mn}(x, y). \end{aligned}$$

Podstawiając (3.4) i (3.7) do równań drgań wymuszonych, wykorzystując warunek ortogonalności, otrzymać można związki:

$$(3.8) \quad h_{mn}^{iJ} = \frac{u_{mn}}{\omega^2 - \omega_{mn}^2} \sum_k c_{kn}^{iJ} t_{mn}^{ijk},$$

gdzie

$$t_{mn}^{ijk} = \frac{1}{Q} \iint \left[a_n^{iJ} (W_{kn} W_{mn} + \psi_{xkn} \psi_{xmn}) + b_n^{iJ} \psi_{ykn} \psi_{ymn} \right] dx dy.$$

Podstawiając do równań opisujących warunki brzegu swobodnego dla $y = c$ funkcje odkształceń opisane zależnościami (3.7), (3.8) i ortogonalizując wyrażenia stojące po lewej stronie otrzymanych równań względem $X_{jr}(x)$ otrzymuje się po uwzględnieniu (3.6) równania:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_J^{I,III} \sum_s c_{sr}^{iJ} \left[\sum_m \frac{u_{mr}}{k^2 - k_{mr}^2} t_{mr}^{ijs} q_{mr}^j + \sum_m \sum_{n \neq r} \frac{u_{mn}}{k^2 - k_{mn}^2} \sum_l b_{ln}^s u_{ln} t_{mn}^{iIl} q_{mn}^j \right] &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \sum_J^{I,III} \sum_s c_{sr}^{iJ} \left[\sum_m \frac{u_{mr}}{k^2 - k_{mr}^2} t_{mr}^{ijs} t_{mr}^j + \sum_m \sum_{n \neq r} \frac{u_{mn}}{k^2 - k_{mn}^2} \sum_l b_{ln}^s u_{ln} t_{mn}^{iIl} t_{mn}^j \right] &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \sum_J^{I,III} \sum_s c_{sr}^{iJ} \left[\sum_m \frac{u_{mr}}{k^2 - k_{mr}^2} t_{mr}^{ijs} s_{mr}^j + \sum_m \sum_{n \neq r} \frac{u_{mn}}{k^2 - k_{mn}^2} \sum_l b_{ln}^s u_{ln} t_{mn}^{iIl} s_{mn}^j \right] &= 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$q_{mn}^j = \left[-\frac{n\pi}{b} \int_0^a X_{mn}^{II} X_{jr} dx + \nu \int_0^a (X_{mn}^I)' X_{jr} dx \right] \sin \frac{n\pi}{b} c,$$

$$r_{mn}^j = \left[\frac{n\pi}{b} \int_0^a X_{mn} X_{jr} dx + \int_0^a X_{mn}^{II} X_{jr} dx \right] \cos \frac{n\pi}{b} c,$$

$$s_{mn}^j = \left[\int_0^a (X_{mn}^{II})' X_{jr} dx + \frac{n\pi}{b} \int_0^a X_{mn}^I X_{jr} dx \right] \cos \frac{n\pi}{b} c.$$

Warunkiem, który pozwoli uprościć układ równań (3.9) doprowadzając do równości $c_{sr}^{II} = c_{sr}^{III}$ oraz usunie konieczność spełnienia warunków brzegowych dla $y = b - c$ jest w przypadku postaci symetrycznych doborów obciążeń $q^j(x, y)$, $m_x^j(x, y)$ symetrycznych względem $y = \frac{b}{2}$, co sprowadza się do równości:

$$g_i^I(y) = g_i^{III}(b-y),$$

oraz antysymetrycznych obciążeń $m_{yi}^j(x, y)$:

$$G_i^I(y) = -G_i^{III}(b-y).$$

W przypadku postaci antysymetrycznych należy spełnić:

$$g_i^I(y) = -g_i^{III}(b-y),$$

$$G_i^I(y) = G_i^{III}(b-y).$$

Ograniczając liczbę wyrazów szeregów

$$l = j = s = m \leq L,$$

$$n \leq N,$$

otrzymuje się układ $3L$ równań.

Równanie częstości wynika z warunku istnienia nietrywialnego rozwiązania.

Znaczne uproszczenie obliczeń można osiągnąć przy takiej konstrukcji funkcji $g_i^j(y)$ i $G_i^j(y)$, która doprowadziłaby do równości współczynników $a_n^{ij} = b_n^{ij}$. Przyjęcie obciążenia w postaci:

$$q_i^j(x, y) = h \sum_m \sum_n a_n^{ij} c_{mn}^{ij} W_{mn}(x, y),$$

$$(3.10) \quad m_{xi}^j(x, y) = \frac{h^3}{12} \sum_m \sum_n a_n^{ij} c_{mn}^{ij} \psi_{xmn}(x, y),$$

$$m_{yi}^j(x, y) = \frac{h^3}{12} \sum_m \sum_n a_n^{ij} c_{mn}^{ij} \psi_{ymn}(x, y).$$

upraszcza związki (3.8) do postaci:

$$(3.11) \quad h_{mn}^{ij} = \frac{1}{\rho(\omega^2 - \omega_{mn}^2)} a_n^{ij} c_{mn}^{ij}.$$

Ponieważ w tym przypadku współczynniki h_{mn}^{ij} nie wyrażają się przez wszystkie współczynniki c_{kn}^{ij} $k = 1, 2, 3 \dots$, jak w przypadku związków (3.8), należy sądzić, że oprócz uproszczenia obliczeń, można tą drogą zwiększyć zbieżność szeregów opisujących odkształcenia płyty.

4. Uwagi końcowe

Stosowanie proponowanej metody wymaga znajomości częstości i postaci drgań własnych płyt zastępczych lub ich uprzedniego obliczenia. Natomiast jej zaletą jest możliwość efektywnego zwiększenia zbieżności szeregów opisujących poszukiwane odkształcenia oraz siły wewnętrzne.

Literatura cytowana w tekście

1. W. MIERZEJEWSKI, *Rozwiązywanie problemów dynamiki płyt prostokątnych w oparciu o zmodyfikowaną metodę sił Nowackiego*, Mech. Teor. i Stos., 1, 14 (1976).
2. R. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates*, J. Appl. Mech., 1, 18 (1951).
3. R. MINDLIN, H. DERESIEWICZ, A. SHACKNOW, *Flexural vibrations of rectangular plates*, J. Appl. Mech. 3, 23 (1956).
4. E. BIELEWICZ, L. DZIEMIDOWICZ-ТКАЧ, *Pewna metoda numeryczna w teorii płyt grubych*, II Konferencja «Metody komputerowe w mechanice konstrukcji», Gdańsk 1975.

Резюме

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СИЛ НОВАЦКОГО В ДИНАМИКЕ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ

В работе представлено применение метода сил Новацкого к проблеме собственных колебаний консольной пластины. Этот метод можно применять к решению динамических задач для прямоугольных пластин с различными краевыми условиями. Преимуществом метода является возможность эффективного увеличения сходимости рядов, определяющих искомые усилия.

Summary

THE MODIFIED NOWACKI METHOD IN DYNAMICS OF PLATES, THE INFLUENCE OF SHEARING FORCES AND THE ROTARY INERTIA BEING TAKEN INTO ACCOUNT

This paper presents the application of the modified method of Nowacki to solving the boundary-value problem of a cantilever plate, account being taken of the shearing forces and rotary inertia. This method can be used in dynamic problems of rectangular plates with arbitrary boundary conditions. Advantage of this method consists in the possibility of increasing the convergence of the series for the displacements and internal stresses.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ
I MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 lutego 1976 r.

TWIERDZENIE WZAJEMNE I FUNKCJA GREENA DLA UKŁADÓW DYSKRETYCH
Z LOSOWYM WYMUSZENIEM

HENRYK WALUKIEWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

W pracy [4b] sformułowaliśmy i udowodniliśmy twierdzenie wzajemne (typu twierdzenia Bettiego w teorii sprężystości) w zakresie dwóch pierwszych momentów dla zagadnienia stacjonarnego:

$$(1.1) \quad E\{F(t)\}^{T(1)}E\{Y(t)\}^{(2)} = E\{F(t)\}^{T(2)}E\{Y(t)\}^{(1)},$$

$$(1.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \{K_{kk}^{(F)}(s)\}^{T(1)}\{K_{kk}^{(Y)}(\tau-s)\}^{(2)} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \{K_{kk}^{(F)}(s)\}^{T(2)}\{K_{kk}^{(Y)}(\tau-s)\}^{(1)} ds.$$

Wskaźniki (1) i (2) oznaczają dwa układy przyczyn i skutków.

Twierdzenie (1.2) dotyczy funkcji autokorelacyjnych losowych obciążeń $\{F(t)\}$ i losowych przemieszczeń $\{Y(t)\}$ dla układów o n stopniach swobody. Istotnym założeniem twierdzenia (1.2) było, że obciążenia działające na układ są nieskorelowane, tzn. $K_{kl}^{(F)}(\tau) = 0$ dla $k \neq l$. Następnie wykazaliśmy, że w przypadku obciążeń skorelowanych można zawsze za pomocą transformacji podobieństwa przejść do takich współrzędnych sił i przemieszczeń, że dla przetransformowanych funkcji autokorelacyjnych zachodzi twierdzenie (1.2).

W przypadku obciążeń dowolnie skorelowanych istniała jednak zasadnicza trudność teoretyczna: nie można było wprowadzić pojęcia funkcji Greena dla funkcji autokorelacyjnych reakcji układu.

Obecnie wszystkie trudności zostały pokonane. Sformułujemy twierdzenie wzajemne dla momentów drugiego rzędu i obciążeń dowolnie skorelowanych. Twierdzenie (1.2) wyniknie wówczas jako przypadek szczególny. Wprowadzimy pojęcie funkcji Greena w tym ogólnym przypadku. Wykażemy wreszcie, że dla obciążeń o zdeterminowanej częstości nasze twierdzenie przechodzi ściśle w dobrze znaną postać twierdzenia Mexwella-Betti dla harmonicznnych drgań wymuszonych. Dla wykonania powyższego planu musimy jednak nieco rozszerzyć aparat matematyczny stosowany w [4b].

2. Iloczyn wewnętrzny w przestrzeni macierzy zespolonych

Wiadomo, że zbiór przekształceń liniowych pewnej przestrzeni wektorowej może być sam uważany za przestrzeń wektorową [1, s. 197]. Ponieważ macierze gęstości widmo-

wych są, ogólnie biorąc, zespolone, wprowadzimy iloczyn wewnętrzny w przestrzeni n^2 -wymiarowej zespolonej za pomocą wzoru

$$(2.1) \quad \langle [A], [B] \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}([A]^*[B]),$$

gdzie $[A]$ i $[B]$ są kwadratowymi macierzami o wymiarze $n \times n$, o elementach zespolonych. Nawiasy lamane oznaczają iloczyn wewnętrzny, $\text{tr}(\dots)$ oznacza ślad macierzy, gwiazdka zaś macierz zespoloną sprzężoną, transponowaną, tzn. $[A]^* = [\bar{A}]^T$.

Musimy przede wszystkim sprawdzić, czy (2.1) spełnia znane [1, s.139] aksjomaty iloczynu wewnętrznego. Należy zaznaczyć, że w literaturze spotyka się pewne różnice przy formułowaniu tych aksjomatów. Stąd wynika konieczność podawania obok definicji aksjomatów

$$1) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};$$

$$2) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, z \rangle + \bar{\beta} \langle y, z \rangle;$$

$$3) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ dla każdego } x; \langle x, x \rangle = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0.$$

x, y, z są tutaj dowolnymi elementami zespolonej przestrzeni wektorowej; α i β są dowolnymi liczbami zespolonymi.

Sprawdzimy aksjomat 1):

$$\langle [A], [B] \rangle = \text{tr}([A]^*[B]) = \text{tr}([B]^T[\bar{A}]) = \overline{\text{tr}([B]^*[A])} = \overline{\langle [B], [A] \rangle}; \text{ c.b.d.o.}$$

Dla aksjomatu 2) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \langle \alpha[A] + \beta[B], [C] \rangle &= \text{tr}((\bar{\alpha}[A]^* + \bar{\beta}[B]^*)[C]) = \\ &= \text{tr}(\bar{\alpha}[A]^*[C] + \bar{\beta}[B]^*[C]) = \bar{\alpha} \text{tr}([A]^*[C]) + \\ &+ \bar{\beta} \text{tr}([B]^*[C]) = \bar{\alpha} \langle [A], [C] \rangle + \bar{\beta} \langle [B], [C] \rangle; \text{ c.b.d.o.} \end{aligned}$$

W przypadku aksjomatu 3) otrzymamy:

$$\langle [A], [A] \rangle = \text{tr}([A]^*[A]) = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{n1}|^2 + \dots + |a_{nn}|^2 \geq 0; \text{ c.b.d.o.}$$

W powyższych przekształceniach wykorzystano znane zależności; niektóre z nich będą potrzebne w dalszym ciągu:

$$\begin{aligned} \text{tr}([A]) &= \text{tr}([A]^T); & \text{tr}([\bar{A}]) &= \overline{\text{tr}([A])}; & \text{tr}([A] + [B]) &= \text{tr}([A]) + \text{tr}([B]); \\ & & \text{tr}(\alpha[A]) &= \alpha \text{tr}([A]). \end{aligned}$$

Kreski pionowe oznaczają moduły odpowiednich elementów macierzowych.

3. Twierdzenie wzajemne dla funkcji korelacyjnych

Podstawową zależność pomiędzy macierzami gęstości widmowych na wejściu i wyjściu układu przyjmijmy w postaci [2, s. 158]

$$(3.1) \quad [G^{(Y)}(\omega)] = [H(\omega)] [G^{(F)}(\omega)] [H(\omega)]^*,$$

gdzie deterministyczna macierz funkcji przenoszenia $[H(\omega)]$ opisuje układ

$$(3.2) \quad [H(\omega)] = (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])^{-1},$$

natomiast $[M]$, $[C]$, $[K]$ są, odpowiednio, macierzami bezwładności, tłumienia i sztywności, a ω jest częstotnością kątową.

Funkcje korelacyjne i gęstości widmowe są, jak wiadomo, związane parą transformat Fouriera:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [K^{(F)}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [G^{(F)}(\omega)] \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ [G^{(F)}(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [K^{(F)}(\tau)] \exp(-i\omega\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Twierdzenie. Jeżeli macierz funkcji przenoszenia $[H(\omega)]$ jest symetryczna ze spoloną, to

$$(3.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \langle [K^{(F)}(s)]^{(1)}, [K^{(Y)}(\tau-s)]^{(2)} \rangle ds = \int_{-\infty}^{\infty} \langle [K^{(F)}(s)]^{(2)}, [K^{(Y)}(\tau-s)]^{(1)} \rangle ds.$$

Dowód. Założenie oznacza, że $[H] = [H]^T$ i $[\bar{H}] = [H]^*$. Utworzymy iloczyn wewnętrzny $\langle [\overline{G^{(F)}}]^{(1)}, [G^{(Y)}]^{(2)} \rangle$ i wykorzystamy kolejno definicję (2.1), założenie, własność śladu macierzy transponowanej oraz własność dla dowolnych macierzy $n \times n$:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \langle [\overline{G^{(F)}}]^{(1)}, [G^{(Y)}]^{(2)} \rangle &= \text{tr}([G^{(F)}]^{(1)T} [H] [G^{(F)}]^{(2)} [H]^*) = \\ &= \text{tr}([G^{(F)}]^{(1)T} [H]^T [G^{(F)}]^{(2)} [\bar{H}]) = \text{tr}([H]^* [G^{(F)}]^{(2)T} [H] [G]^{(1)}) = \\ &= \text{tr}([G^{(F)}]^{(2)T} [H] [G^{(F)}]^{(1)} [H]^*) = \langle [\overline{G^{(F)}}]^{(2)}, [G^{(Y)}]^{(1)} \rangle. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zależność (3.5) ma charakter twierdzenia wzajemnego dla macierzy gęstości widmowych. Zapiszemy (3.5) w postaci rozwiniętej

$$(3.6) \quad G_{11}^{(F)(1)} G_{11}^{(Y)(2)} + G_{12}^{(F)(1)} G_{12}^{(Y)(2)} + \dots + G_{n1}^{(F)(1)} G_{n1}^{(Y)(2)} + \dots + G_{nn}^{(F)(1)} G_{nn}^{(Y)(2)} = |(1) \rightleftharpoons (2)|.$$

Symbol po prawej stronie równości w (3.6) oznacza przestawienie indeksów (1) i (2).

Wykonujemy teraz na (3.6) odwrotną zespoloną transformację Fouriera i korzystamy z twierdzenia o splocie. Mamy zatem

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (K_{11}^{(F)(1)}(s) K_{11}^{(Y)(2)}(\tau-s) + K_{12}^{(F)(1)}(s) K_{12}^{(Y)(2)}(\tau-s) + \dots \\ + K_{n1}^{(F)(1)}(s) K_{n1}^{(Y)(2)}(\tau-s) + \dots + K_{nn}^{(F)(1)}(s) K_{nn}^{(Y)(2)}(\tau-s)) ds = |(1) \rightleftharpoons (2)|. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy już tezę twierdzenia (3.4), c.b.d.o.

Jeżeli założymy, że $K_{kl}^{(F)} = 0$ dla $k \neq l$ ($k, l = 1, 2, \dots, n$), to w równaniu (3.7) pozostaną tylko wyrazy o dwóch indeksach identycznych (autokorelacje) i (3.7) przechodzi dokładnie w twierdzenie (1.2).

4. Funkcja Greena

Wprowadzając funkcję Greena uczynimy twierdzenie (3.4) podstawą rozwiązywania problemów dynamicznych w zakresie funkcji korelacyjnych.

Niech obciążenie zewnętrzne działające w i -tym stopniu swobody posiada funkcję korelacyjną w postaci delty Diraca $\delta(\tau)$:

$$K_{ii}^{(F)}(\tau) = 2\pi C \delta(\tau), \quad (C = \text{const}, C > 0);$$

zakładamy przy tym, że pozostałe funkcje korelacyjne obciążeń są równe zeru. Oznaczając ten stan obciążeń wskaźnikiem (1), otrzymamy z (3.4) po zmianie argumentu

$$(4.1) \quad K_{ii}^{(Y)(2)}(\tau) = \frac{1}{2\pi C} \int_{-\infty}^{\infty} \langle [K^{(F)}(s)]^{(2)}, [K^{(Y)}(\tau-s)]^{(1)} \rangle ds \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Macierz $[K^{(Y)}(\tau-s)]^{(1)}$ nazwiemy funkcją Greena dla funkcji autokorelacyjnych reakcji układu.

Możemy więc sformułować ważne stwierdzenie. Znajomość rozwiązania dla białego szumu pozwala wyznaczyć ze wzoru (4.1) funkcję korelacyjną reakcji dla dowolnego obciążenia (o dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa).

Wniosek ten, według posiadanych przez nas informacji, jest nowy¹⁾. Wprowadzona funkcja Greena jest na ogół niesymetryczna, spełnia natomiast warunek

$$(4.2) \quad [K^{(Y)}(\tau-s)] = [K^{(Y)}(s-\tau)]^T.$$

5. Przypadki szczególne

Przyjmijmy obciążenie zewnętrzne w postaci

$$(5.1) \quad \{F(t)\} = \{f\} \cos(\omega_0 t + \Psi),$$

gdzie $\{f\}$ jest deterministycznym (rzeczywistym) wektorem amplitud, ω_0 ustaloną częstotliwością, a Ψ jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym w przedziale $[-\pi, +\pi]$. Taki proces wektorowy jest stacjonarny i ergodyczny względem wartości przeciętnej i funkcji korelacyjnych (por. [3, s. 120]).

Na podstawie realizacji procesu wyznaczmy funkcje korelacyjne (ψ jest wartością zmiennej losowej Ψ):

$$(5.2) \quad K_{ki}^{(F)}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_k \cos(\omega_0 t + \psi) f_i \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \psi) dt = \frac{1}{2} f_k f_i \cos(\omega_0 \tau).$$

Macierz funkcji korelacyjnych przyjmie zatem postać

$$(5.3) \quad [K^{(F)}(\tau)] = \frac{1}{2} \cos(\omega_0 \tau) \begin{bmatrix} f_1^2 & f_1 f_2 & \dots & f_1 f_n \\ f_2 f_1 & f_2^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n f_1 & \dots & \dots & f_n^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{f\} \{f\}^T \cos(\omega_0 \tau).$$

¹⁾ Uwaga dotyczy układów zdeterminowanych z losowymi wymuszeniami. W innych zagadnieniach dynamiki statystycznej (np. w teorii ośrodków statystycznie niejednorodnych) znane są koncepcje stochastycznych funkcji Greena.

Znajdziemy teraz macierz korelacyjną reakcji, na podstawie relacji analogicznej do (3.3)

$$(5.4) \quad [K^{(Y)}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} [G^{(Y)}(\omega)] \exp(i\omega\tau) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega)] [G^{(F)}(\omega)] [H(\omega)]^* \exp(i\omega\tau) d\omega.$$

Ze wzoru (3.3) i (5.3) otrzymamy macierz gęstości widmowych obciążeń

$$(5.5) \quad [G^{(F)}(\omega)] = \frac{1}{4} \{f\} \{f\}^T (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)),$$

gdzie $\delta(\dots)$ oznacza deltę Diraca.

Podstawiając (5.5) do (5.4) otrzymamy

$$(5.6) \quad [K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{4} ([H(-\omega_0)] \{f\} \{f\}^T [H(-\omega_0)]^* \exp(-i\omega_0\tau) + [H(\omega_0)] \{f\} \{f\}^T [H(\omega_0)]^* \exp(i\omega_0\tau)).$$

Zauważmy, że

$$[H(-\omega_0)] = \overline{[H(\omega_0)]} = [H(\omega_0)]^*,$$

oraz

$$[H(-\omega_0)]^* = [H(\omega_0)]^T = [H(\omega_0)].$$

Wynika to ze wzoru (3.2), przy wykorzystaniu założenia o symetrii $[H(\omega)]$.

Rozpatrzmy przede wszystkim przypadek statyczny, tzn. $\omega_0 = 0$. Wówczas $[H(\omega_0)] = [H(\omega_0)]^* = [K]^{-1}$ (wzór 3.2). Pamiętając, że $[K]^{-1} \{f\} = \{y\}$, gdzie $\{y\}$ jest wektorem przemieszczeń (niezależnym od czasu), możemy wyznaczyć macierz korelacyjną (5.6)

$$[K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{2} [K]^{-1} \{f\} \{f\}^T [K]^{-1} = \frac{1}{2} \{y\} \{y\}^T,$$

przy czym wykorzystano symetrię macierzy sztywności $[K]$. Widoczne jest, że macierz korelacyjna nie zależy od τ . Podstawiamy powyższą macierz do związku (3.4):

$$(5.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \langle [K^{(F)}(s)]^{(1)}, [K^{(Y)}(\tau-s)]^{(2)} \rangle ds = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \{f\}^{(1)} \{f\}^{T(1)}, \{y\}^{(2)} \{y\}^{T(2)} \rangle ds =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{bmatrix} f_1^{2(1)}, f_1^{(1)} f_2^{(1)}, & \dots & f_1^{(1)} f_n^{(1)} \\ f_2^{(1)} f_1^{(1)}, f_2^{2(1)}, & & \vdots \\ \vdots & & \\ f_n^{(1)} f_1^{(1)} & \dots & f_n^{2(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1^{2(2)}, y_1^{(2)} y_2^{(2)}, & \dots & y_1^{(2)} y_n^{(2)} \\ y_2^{(2)} y_1^{(2)}, y_2^{2(2)}, & & \vdots \\ \vdots & & \\ y_n^{(2)} y_1^{(2)}, & \dots & y_n^{2(2)} \end{bmatrix} \right\rangle ds =$$

$$= \frac{1}{4} (f_1^{2(1)} y_1^{2(2)} + f_1^{(1)} f_2^{(1)} y_1^{(2)} y_2^{(2)} + \dots + f_n^{(1)} f_1^{(1)} y_n^{(2)} y_1^{(2)} + \dots$$

$$+ f_n^{2(1)} f_n^{2(2)}) \int_{-\infty}^{\infty} ds = \frac{1}{4} (f_1^{(1)} y_1^{(2)} + f_2^{(1)} y_2^{(2)} + \dots + f_n^{(1)} y_n^{(2)})^2 2\pi \delta(0) = |(1) \rightleftharpoons (2)|.$$

W ostatnim przekształceniu powyższego wzoru wykorzystano zależność znaną z kombinatoryki

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_s)^2 = \sum \frac{2}{k_1! k_2! \dots k_s!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_s^{k_s},$$

gdzie $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 2$ oraz $k_i = 0, 1, 2, (i = 1, 2, \dots, s)$.

Całkę $\int_{-\infty}^{\infty} ds$ zastąpiono symbolem $2\pi\delta(0)$. Obie strony (5.7) scałkujemy, uwzględniając, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) dx = 1.$$

Mnożąc z kolei obustronnie (5.7) przez stałą $2/\pi$ i wyciągając pierwiastek, otrzymamy

$$(5.8) \quad \{f\}^{(1)T} \{y\}^{(2)} = \{f\}^{(2)T} \{y\}^{(1)}.$$

Otrzymaliśmy więc znaną ze statyki postać twierdzenia Maxwella-Betti.

Powrócimy teraz do wzoru (5.6), który przepisemy w postaci

$$(5.9) \quad [K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{4} (\overline{[H(\omega_0)]} \{f\} \{f\}^T [H(\omega_0)]^T \exp(-i\omega_0 \tau) + [H(\omega_0)] \{f\} \{f\}^T [H(\omega_0)]^* \exp(i\omega_0 \tau)).$$

Wprowadzimy oznaczenie:

$$(5.10) \quad [N] = \overline{[H(\omega_0)]} \{f\} \{f\}^T [H(\omega_0)]^T.$$

Wówczas (5.9) możemy zapisać w formie skróconej

$$(5.11) \quad [K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{4} ([N] \exp(-i\omega_0 \tau) + \overline{[N]} \exp(i\omega_0 \tau)) = \frac{1}{2} (\operatorname{Re}[N] \cos(\omega_0 \tau) + \operatorname{Im}[N] \sin(\omega_0 \tau)).$$

Jeżeli

$$(5.12) \quad \operatorname{Im}[N] = [0],$$

to

$$(5.13) \quad [K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[N] \cos(\omega_0 \tau).$$

Fakt ten ma dobre uzasadnienie w deterministycznej teorii drgań wymuszonych układów z tłumieniem lepkiem. Wiadomo bowiem, że przy wymuszeniu typu (5.1) reakcje układu opisanego macierzą (3.2) są nie tylko przesunięte w fazie z wymuszeniem, ale również nie są w fazie między sobą, np.

$$(5.14) \quad \{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) \\ y_2 \cos(\omega_0 t + \theta_2) \\ \vdots \\ y_n \cos(\omega_0 t + \theta_n) \end{Bmatrix}.$$

Stąd, jak łatwo sprawdzić, otrzymalibyśmy ze wzoru typu (5.2):

$$(5.15) \quad K_{kl}^{(Y)}(\tau) = \frac{1}{2} y_k y_l' \cos(\omega_0 \tau + \theta_l - \theta_k) \quad (k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Występowanie przesunięcia fazowego w (5.15) jest zgodne ze wzorem (5.11). Otrzymaliśmy zatem interesujący wniosek: aby składowe reakcji były między sobą w fazie musi być spełniony warunek (5.12).

Przejdziemy do wyprowadzenia twierdzenia wzajemnego dla tego przypadku;

$[N]$ jest teraz rzeczywiste, tzn.

$$[N] = [\bar{N}] = [H(\omega_0)]\{f\}\{f\}^T [H(\omega_0)]^*.$$

Oznaczając

$$(5.16) \quad [H(\omega_0)]\{f\} = \{\hat{y}\},$$

gdzie $\{\hat{y}\}$ jest zespolonym wektorem amplitud ($[H(\omega_0)]$ — zespolone, $\{f\}$ — rzeczywiste), otrzymamy

$$(5.17) \quad [K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{2} \{\hat{y}\}\{\hat{y}\}^* \cos(\omega_0 \tau).$$

Przekształcenia analogiczne do wykonywanych we wzorze (5.7) doprowadzą nas do zależności

$$(5.18) \quad \{f\}^{(1)T} \{\hat{y}\}^{(2)} \{f\}^{(1)T} \{\bar{\hat{y}}\}^{(2)} = \{f\}^{(2)T} \{\hat{y}\}^{(1)} \{f\}^{(2)T} \{\bar{\hat{y}}\}^{(1)}.$$

Załóżmy teraz, że macierz tłumienia $[C] \rightarrow [0]$. Wówczas ze wzoru (5.16) wynika, że

$$\{\hat{y}\} = \{y\},$$

gdzie $\{y\}$ jest rzeczywistym wektorem amplitud. Ponieważ teraz $\{\bar{\hat{y}}\} = \{y\}$, zależność (5.18) przechodzi w

$$(5.19) \quad (\{f\}^{(1)T} \{y\}^{(2)})^2 = (\{f\}^{(2)T} \{y\}^{(1)})^2.$$

Wyciągając obustronnie pierwiastek otrzymujemy twierdzenie wzajemne dla amplitud w zagadnieniu drgań harmoniczych. Trzeba jednak zauważyć, że w przypadku $[C] = [0]$ traci sens metoda widmowa, na której opiera się wyprowadzenie twierdzenia (3.4). Układ traci bowiem własność asymptotycznej stabilności [3].

Z rozważań zawartych w p. 5 można wyciągnąć wniosek metodologiczny. Podejście probabilistyczne do zagadnienia relacji wzajemnej w zagadnieniu stacjonarnym dało prosty wynik — wzór (3.4). Próba formułowania podobnych zależności przy podejściu deterministycznym wydaje się beznadziejna. Wskazuje na to relacja (5.18) (uzyskana ponadto przy silnym ograniczeniu (5.12)).

6. Uwagi końcowe

Przedstawione rezultaty mają, naszym zdaniem, nie tylko wartość metodologiczną. Mamy tu do czynienia z pewnym nowym elementem: relacją wzajemną na losowym (makroskopowym) poziomie rzeczywistości. Twierdzenia (3.4) i (1.1) mogą być łatwo sprawdzone eksperymentalnie.

Podziękowanie

Panu prof. dr hab. inż. EUGENIUSZOWI BIELEWICZOWI, mojemu promotorowi, składam serdeczne podziękowanie za cenne uwagi i sugestie.

Literatura cytowana w tekście

1. F. BYRON, R. FULLER, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, tom 1, PWN, Warszawa, 1973, (tłum. z ang.).
2. Y. K. LIN, *Probabilistic theory of structural dynamics*, McGraw-Hill, 1967.
3. K. SOBczyk, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa 1973.
4. H. WALUKIEWICZ, a) *An algebraic solution of wind effects on structures problem and reciprocal theorem for random wind load*, Proc. of 2nd U. S. Conference on Wind Engineering, Colorado State University 1975; b) *Reciprocal theorem for discrete systems with random excitations*, Jour. of Techn. Physics, 3 (1976).

Резюме**ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ И ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ**

В работе сформулированы и доказаны теоремы о взаимности (типа теоремы Бетти) для случайной, стационарной задачи в пределах двух первых моментов. На основании этих соотношений, введено понятие функции Грина для автокорреляционных функций выходного процесса (при случайных процессах на входе). В работе обобщаются результаты, доказанные в [4б].

Summary**RECIPROCAL THEOREM AND GREEN'S FUNCTION FOR DISCRETE SYSTEMS WITH RANDOM EXCITATIONS**

The paper is dealing with the derivation and proofs of reciprocal Betti type theorems for random problems of stationary type, within the scope of the first- and second-order moments. On the basis of these relations, the notion of Green function for autocorrelation with respect to the system response, for the random excitation problem have been introduced. In the paper the author discusses a generalization for the results of the work [4b].

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 lutego 1976 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA I KWARTAŁ 1976 ROKU

1. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyło się 10 zebrań naukowych, na których wygłoszono 11 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba		
				uczestników	dyskutantów	
1	2	3	4	5	6	
		Oddział w Bydgoszczy				
1	22.03.76	K. Wernerowski	Reoelektryczne modelowanie analogowe	18	4	
2	22.03.76	A. Golik	Zastosowanie metody funkcji opisującej do analizy układów sterowania automatycznego	18	3	
		Oddział w Częstochowie				
3	24.01.76	J. Moszyński	Energetyka za 100 lat	38	4	
4	05.03.76	S. Borkowski	Niektóre problemy ośrodków fizykalnie nieliniowych	17	4	
5	24.03.76	W. Krzyś	Zagadnienia przystosowania się połączeń ciernych do obciążeń zmiennych w czasie	47	5	
		Oddział w Gliwicach				
6	08.01.76	Cz. Woźniak	O niestandardowych metodach w mechanice	28	3	
7	20.01.76	Z. Kączkowski	Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych	39	4	
		Oddział w Krakowie				
8	19.03.76	G. Szefer	Kierunki rozwoju metod optymalizacji	19	7	
		Oddział w Łodzi				
9	15.01.76	W. Kufel	Modele warstwowe grubych płyt i powłok	22	2	

1	2	3	4	5	6
		Oddział w Poznaniu			
10	16.02.76	Z. Wesołowski	Propagacja fal w nieliniowych ośrodkach sprężystych	18	6
		Oddział w Szczecinie			
11	04.02.76	E. Bielewicz	Statyka powłoki toroidalnej w ujęciu metody elementów skończonych	26	5

2. Sympozja

Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach 20—26 lutego 1976 r. XV Jubileuszowy Sympozjon pod hasłem «Optymalizacja w Mechanice». W Sympozjonie wzięło udział 160 osób, w tym 24 studentów Studenckiego Koła Naukowego. Wygłoszono 49 referatów.

3. Sesje naukowe

Oddział w Łodzi zorganizował w dniach 8 i 9 kwietnia 1976 r. w Arturówku k. Łodzi Sesję Naukową połączoną ze Zjazdem Delegatów Towarzystwa. Podczas Sesji Naukowej wygłoszono 3 następujące referaty:

1. prof. dr Jan SZMELTER — *Metody komputerowe w mechanice*, 2. prof. dr inż. Umirbek DŻOŁDASBEKOW, rektor Uniwersytetu w Alma-Ata — *Teoria płaskich mechanizmów wyższych klas*, 3. prof. dr Witold NOWACKI — *Pola sprzężone w mechanice ciała stałego*.

W dyskusji nad wygłoszonymi referatami zabrało głos 12 osób.

4. Seminaria

Oddział w Gdańsku zorganizował seminarium na temat «Elementy analizy funkcjonalnej». Wykłady prowadzone przez doc. B. PALCZEWSKIEGO odbywały się raz w tygodniu (1,5 godziny).

Oddział w Gliwicach sprawował patronat nad obradami seminarium Studenckiego Koła Naukowego im. prof. BURZYŃSKIEGO. W czasie obrad seminarium, w którym brali udział również uczestnicy odbywającego się jednocześnie Sympozjonu «Optymalizacja w Mechanice», wygłoszono 22 referaty.

Oddział w Rzeszowie zorganizował 4 seminaria na temat «Metoda elementów skończonych», które prowadził doc. dr M. BOSSAK, oraz 6 seminariów na temat «Metody numeryczne w zastosowaniu w mechanice», które prowadził mgr inż. J. SMYKLA. Średnia liczba uczestników wynosiła 16 osób, średnia liczba dyskutantów 8 osób.

5. Kursy

Oddział w Poznaniu przeprowadził na przełomie lutego i marca 1976 r. kurs na temat «Podstawy termodynamiki ciała stałego». Wygłoszono 4 wykłady, których wysłuchało 29 osób.

6. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje następująca tablica:

Lp.	Oddział	Stan na koniec IV kw. 75	Stan na koniec I kw. 76	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym
1	Bydgoszcz	24	24	—
2	Częstochowa	41	41	—
3	Gdańsk	54	54	—
4	Gliwice	145	135*)	-10
5	Kraków	75	75	—
6	Łódź	50	52	+2
7	Opole	—	18**)	+18
8	Poznań	66	57***)	-9
9	Rzeszów	20	25	+5
10	Szczecin	31	31	—
11	Warszawa	222	222	—
12	Wrocław	64	64	—
13	Zielona Góra	—	18	+18
		792	816	+24

*) Liczba członków zmalała w związku z przejściem niektórych osób do nowo utworzonego Oddziału w Opolu.

***) Z powodu braku sprawozdania dane wzięto według listy obecności podczas zebrania Członków Założycieli.

****) Liczba członków zmalała w związku z przejściem części osób do nowoutworzonego Oddziału w Zielonej Górze.

W okresie sprawozdawczym odbył się Zjazd Delegatów PTMTS. Ponadto odbyły się zebrania Zarządu Głównego i Głównej Komisji Rewizyjnej oraz 40 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

SZKOŁA LETNIA «LINIOWA I NIELINIOWA SPRĘŻYSTOŚĆ I TERMOSPĘŻYSTOŚĆ», Jabłonna, 24-29.05.1976 r.

Już po raz drugi Komitet Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN zorganizował Szkołę Letnią poświęconą wybranym zagadnieniom teorii sprężystości. Pierwsze spotkanie zorganizowane wspólnie z Uniwersytetem Warszawskim odbyło się we wrześniu 1974 r. i było poświęcone dynamicznym problemom układów sprężystych. Obecne zaś obejmowało oprócz nieliniowych zagadnień teorii sprężystości także termosprężystość.

Inicjatorem zorganizowania Szkoły był prof. W. NOWACKI, który opracował także program naukowy tego spotkania.

Wykładowcami byli: prof. P. CHADWICK z Uniwersytetu East Anglia, prof. W. NOWACKI z Uniwersytetu Warszawskiego, prof. Z. WESOŁOWSKI z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, prof. Cz. WOŹNIAK z Uniwersytetu Warszawskiego oraz dr J. WYRWIŃSKI także z UW.

Prof. P. CHADWICK przedstawił wykład na temat: «Termomechanika ciał gumopodobnych», który obejmował konstrukcję modelu matematycznego materiałów gumopodobnych oraz zagadnienia szczegółowe: problemy termosprężyste walca (ściskanie i skręcanie), ruchy symetryczno-sferyczne oraz fale przyspieszenia. Sformułowane wyniki uzupełniono analizą porównawczą z rezultatami empirycznymi. Przedstawiono także dla pewnej klasy ciał twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań.

Wykład prof. W. NOWACKIEGO «Podstawy energetyczne termodyfuzji» miał charakter problemowo-przeglądowy i zawierał wprowadzenie do działu mechaniki ciała stałego leżącego na pograniczu teorii sprężystości i chemii fizycznej. Znalazły się w nim także sformułowania wielu twierdzeń ogólnych oraz problemów otwartych.

W wykładzie prof. Z. WESOŁOWSKIEGO pt. «Fale przyspieszenia i fale silnej nieciągłości» omówiono warunki zgodności dla powierzchni nieciągłości, falę biegnącą, prędkości fazową, grupową oraz prędkość sygnału poruszających się fal silnej nieciągłości.

Prof. Cz. WOŹNIAK w wykładzie «Nieliniowa termosprężystość dyskretnych i ciągłych układów materialnych» skonstruował model układu materialnego w ramach termomechaniki analitycznej, tj. termomechaniki ciał z więzami termomechanicznymi. Omówił pojęcia pierwotne, aksjomaty oraz przedstawił równania podstawowe termomechaniki analitycznej. Wskazał także na związki skonstruowanego modelu z mechaniką niestandardową.

Z kolei wykłady dr. J. WYRWIŃSKIEGO «Fale sprężyste w ośrodkach poddanych więzom» zawierały propagację fal sprężystych przy obecności więzów geometrycznych i kinetycznych oraz warunki propagacji fal w sprężystych ośrodkach wiotkich.

Wykłady cieszyły się dużym zainteresowaniem, o czym świadczyły zarówno frekwencja, jak i żywe dyskusje po wykładach. Teksty wykładów będą wydane przez „Ossolineum” w roku przyszłym.

Uczestnikami Szkoły byli pracownicy politechnik z większości ośrodków akademickich w Polsce oraz pracownicy IPPT PAN, ITB, UW, WAT.

Wydaje się bardzo celowe (wskazywały na to liczne wypowiedzi uczestników) kontynuowanie tego typu kursów, będących bogatym źródłem informacji o najnowszych osiągnięciach w mechanice ciała stałego.

Wiesław Kufel (Warszawa)

UZUPEŁNIENIE WYKAZU KOŁOKWIÓW EUROMECH W 1977 R.*)

Nazwa, termin i miejsce	Przewodniczący
86. The Boltzmann equation — theory and experiment 30 marca — 1 kwietnia 1977 Bologna	Professor C. Cercignani Istituto di Matematica Politecnico de Milano Piazza Leonardo Da Vinci, 32 20133 Milano, Italy
87. Unsteady transonic flow on airfoils and in cascades 11—15 kwietnia 1977 Liblice Castle	
88. Two-phase flow systems with condensation phenomena 30 marca — 1 kwietnia 1977 Karlsruhe	Prof. D. Barschdorff Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe Kaiserstrasse 12 7500 Karlsruhe, RFN, and Prof. R. Puzyrewski, Gdańsk, Polska
89. Vibration control by damping 22—24 czerwca 1977 Lyon	
91. Dynamic crack propagation in solids 18—20 sierpnia 1977 Jablonna	
94. Propagation of sound waves in inhomogeneous media and problems of identification 5—9 września 1977 Marseille	

*) Pozostałe dane o tych i innych KOŁOKWIACH EUROMECH są zamieszczone w Mech. Teoret. i Stos., 14, 3 (1976).

Nazwa, termin i miejsce	Przewodniczący
96. Numerical analysis of dynamic interaction of structures with fluids 12—15 września 1977 Swansea	/
98. Mechanics and physics of gas bubbles in fluids 22—24 listopada 1977 Eindhoven	Prof. G. Vossers Technische Hogeschool Eindhoven Postbus 513 Den Dolech 2 Eindhoven, Netherlands and Prof. L. van Wijngaarden, Enschede, Netherlands

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- K. GRYSA, M. KWIEK, Stan naprężeń w walcu kołowym wywołany przyłożeniem stałej temperatury na pobocznicy
Тепловые напряжения в круглом цилиндре вызванные внезапным изменением температуры на его краю
Dynamical thermal stresses in a circular cylinder due to sudden change of temperature on its surface
- W. ŚWISTERSKI, Badania elastoptyczne modeli płaskich z wykorzystaniem holografii
Исследование плоских моделей методом голографической фотоупругости
Photoelastic investigation of two-dimensional models by means of holography
- K. RUP, J. TALER, Określenie nieustalonego pola temperatury w ścianie płaskiej przy zmiennym współczynniku przewodnictwa cieplnego
Определение нестационарного температурного поля в плоской стенке с переменным коэффициентом теплопроводности
Determination of transient temperature fields in plane walls of variable thermal conductivity
- J. KUBIK, O wyznaczaniu naprężeń cieplnych wywołanych ruchomymi obciążeniami termicznymi
Примечания к определению тепловых напряжений вызванных движущимися термическими нагрузками
On the determination of thermal stresses due to moving heat sources
- A. STRZELCZYK, S. WOJCIECH, Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności ortotropowej płyty pierścieniowej
Численное решение задачи об устойчивости кольцевой пластины с цилиндрической ортотропией
Numerical solution of the problem of stability of an orthotropic annular plate
- J. STELMARCZYK, Obliczanie charakterystyki dynamicznej konstrukcji płytowo-sprężynowej za pomocą metody sztywnych elementów skończonych
Определение динамической характеристики плитно-пружинной конструкции методом жестких конечных элементов
The rigid finite element method of determining the dynamic characteristics of a plate-spring structure
- W. TRĄPCZYŃSKI, Analiza rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych dla zagadnienia naporu ścian o różnych kształtach
Исследование кинематически допустимых решений для задачи напора стенок различного профиля
Analysis of kinematically admissible solutions of earth-moving processes in the cases of various pushing wall forms
- J. KOLENDA, Nieliniowe drgania elastycznie zawieszonych silników tłokowych przy kinematycznych wymuszeniach stochastycznych
Нелинейные колебания упруго подверженных поршневым двигателям при случайных кинематических возбуждениях
Nonlinear vibrations of elastically suspended piston engines at kinematic stochastic excitations
- J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, Badanie teoretyczne własności dynamicznych lotu obiektów zrzucanych z samolotu
Теоретические испытания динамических свойств полета объектов сбрасываемых с самолета
Theoretical research of dynamical flight characteristics of bodies disposes from an aircraft
- J. WŁASNY, Optymalne kształtowanie pręta metodą programowania dynamicznego
Оптимальное проектирование стержня методом динамического программирования
Optimum design of a flexible bar by means of dynamic programming

SPIS TREŚCI

cd. ze s. II okładki

- J. PIETRUCHA, Z. SZEWCZYK, Metoda sterowania modalnego i jej zastosowanie do ustatecznienia lotu śmigłowca 571
Метод модельного управления и его применение к стабилизации полета вертолета
Modal control method and its application to the stabilization of helicopter flight
- W. MIERZEJEWSKI, Zmodyfikowana metoda sił Nowackiego w dynamice płyt z uwzględnieniem odkształceń postaciowych i bezwładności obrotowej 585
Модифицированный метод сил Новацкого в динамике пластин с учетом инерции вращения и перерезывающих сил
The modified Nowacki method in dynamics of plates, the influence of shearing forces and the rotary inertia being taken into account
- H. WALUKIEWICZ, Twierdzenie wzajemne i funkcja Greena dla układów dyskretnych z losowym wymuszeniem 591
Теорема о взаимности и функции Грина для дискретных систем со случайными воздействиями
Reciprocal theorem and Green's function for discrete systems with random excitations
- BIULETYN INFORMACYJNY 599

Warunki prenumeraty

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
