

Ji 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 14 · ZESZYT 3

WARSZAWA 1976

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

T. HUECKEL, O opisie fizycznie nieliniowej sprężystości materiałów sypkich К вопросу об описании физически нелинейной упругости сыпучих материалов On the description of non-linear elasticity of granular media	335
Z. MALINOWSKI, O pewnej metodzie analizy wpływu tarcia w procesie plastycznego ściskania próbki walcowej О некотором методе анализа влияния трения в процессе пластического сжатия цилиндрического образца On a method of friction analysis in plastically compressed cylindrical specimen	347
J. NIZIOŁ, N. KONDRACIUK, Przykład badania dokładności liniowego układu dynamicznego w przypadku niestacjonarym Исследование точности линейной динамической системы в нестационарном случае Example of investigating the accuracy of a linear dynamic system in a nonstationary case	361
J. KOLENDA, Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych Нелинейные колебания амортизированных поршневых двигателей при широкополосных стохастических возмущениях Nonlinear vibrations of elastically mounted piston engines at wide-band stochastic excitations	371
S. BIELAK, Statyka powłoki walcowej zamkniętej pracującej w stanie zgięciowym Статический расчет замкнутой цилиндрической оболочки при работе на изгиб Statics of a closed cylindrical shell in the moment state	383
J. NIZIOŁ, A. PIENIAŻEK, Drgania ciężna w płaszczyźnie zwisu z uwzględnieniem jego sztywności na zginanie Колебания провода в плоскости свиса с учетом его жесткости на изгиб Vibrations of cable in the sag-span plane with regard its bending stiffness	393
E. WALICKI, Hydromagnetyczny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi Гидромагнитное течение вязкой жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения Hydromagnetic flow of viscous fluid between rotating surfaces of revolution	417
A. TRZĘSOWSKI, Średnie naprężenia w stochastycznym ośrodku wieloskładnikowym Среднее напряжение в стохастически неоднородной среде Mean stress in a multi-component stochastic medium	427
J. WRANIK, List do Redakcji Письмо в Редакцию Letter to the Editor	439
BIULETYN INFORMACYJNY	441

JA 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 14 · ZESZYT 3

WARSZAWA 1976

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY, WŁADYSŁAW **BOGUSZ**, IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

РЕДАКЦИЯ

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

O OPISIE FIZYCZNIE NIELINIOWEJ SPRĘŻYSTOŚCI MATERIAŁÓW SYPKICH

TOMASZ H U E C K E L (WARSZAWA)

1. Wstęp

Materiały sypkie wykazują cechy sprężyste i plastyczne. Sprężystość zachowują się w początkowej fazie obciążenia oraz w czasie odciążania i dociążania, kiedy stan naprężenia leży wewnątrz powierzchni plastyczności. Są to procesy silnie nieliniowe nawet w zakresie małych deformacji. Ponadto mają one inny charakter przy pierwszym cyklu odciążenia niż przy wielokrotnym odciążaniu i dociążaniu (por. [3]). W czasie pierwszego odciążania z danego stanu naprężenia zachodzą w materiale efekty mikroślnięcia plastycznego i dopiero po pewnej liczbie cykli odciążania i dociążania zachowanie się materiału jest czysto sprężyste (całkowita odwracalność odkształceń przy zamkniętych cyklach odciążania i dociążania). Pomijając mechanizmy stanów przejściowych, celowe jest w pewnych przypadkach oddzielne traktowanie pierwszego odciążenia oraz ustalonego odciążenia idealnie sprężystego.

Za przyczynę tak silnie nieliniowych efektów w materiałach rozdrobnionych uważa się na ogół znaczne zmiany gęstości związane z deformacją materiału. Model matematyczny plastycznego zachowania się ciał o zmiennej gęstości sformułowano w pracy [1]. Wpływ zmian gęstości na sprężyste i plastyczne cechy materiałów zanalizowano w pracy [2] zakładając, na podstawie przeprowadzonych eksperymentów w zakresie sprężystym, zależności stycznych modułów sprężystości od odwracalnej zmiany gęstości. Założenie takie dopuszcza wspomniane mikroefekty plastyczne przy odciążeniu oraz pozwala na znaczne uproszczenie opisu materiału [11].

W pracy pokażemy własności prostych (tj. liniowych tensorowo) nieliniowych fizycznych związków opisujących cechy sprężyste materiałów rozdrobnionych. Na podstawie znanych warunków całkowalności i potencjalności takich związków zbadamy różnice występujące przy różnych sposobach ich formułowania. Okazuje się, że na ogół znane związki dla materiałów sypkich nie opisują efektów czysto sprężystych; można je więc odnosić wyłącznie do pierwszego odciążenia. Z drugiej strony wielu efektów nieliniowych o charakterze sprężystym nie można opisać w zakresie małych deformacji przez związki tensorowo liniowe.

Rozważać będziemy odwracalną część przyrostowego związku sprężysto-plastycznego, którą zapiszemy w postaci

$$(1.1) \quad d\epsilon'_{ij} = A_{ijkl} d\sigma_{kl}$$

lub też

$$(1.2) \quad d\sigma_{ij} = B_{ijkl} d\epsilon'_{kl},$$

gdzie $d\epsilon'_{ij}$ jest odwracalnym przyrostem odkształceń, $d\sigma_{kl}$ — przyrostem naprężeń, a A_{ijkl} stanowi macierz funkcji materiałowych, którą wyznacza się doświadczalnie, przy czym

jest ona, z uwagi na nieliniowość omawianych procesów, funkcją stanów naprężenia lub odkształcenia.

Z charakteru hipotez, opartych na wynikach doświadczeń dotyczących postaci tej funkcji, wynikają odmienne konsekwencje, które ograniczają zakres stosowania postulowanych związków. Formułowanie tych hipotez odbywa się w dwojaki sposób. Po pierwsze, można przyjąć, że na podstawie danych doświadczalnych da się wyznaczyć jednoznaczną zależność (moduły sieczne) między tensorem naprężenia σ_{ij} i tensorem odkształcenia sprężystego ϵ'_{ij} . Zróżniczkowanie takiej zależności daje związek (1.1) lub (1.2). Po drugie, powyższe założenie może być niesprawdzalne doświadczalnie, natomiast udaje się z danych doświadczalnych znaleźć związki między przyrostami $d\sigma_{ij}$ oraz $d\epsilon'_{ij}$ (moduły styczne). Oznacza to, że takim samym przyrostom naprężenia w różnych stanach naprężenia (czy odkształcenia) odpowiadają różne przyrosty odkształcenia. Tym samym, kolejnych stanów naprężenia i odkształcenia nie można ze sobą w ogólności powiązać jednoznacznie.

Poniżej omówimy, w świetle wyników uzyskanych dla związków ogólnych, [7, 12], własności szczególnych postaci równań konstytutywnych mających zastosowanie do opisu ośrodków rozdrobionych (por. [8, 9, 5, 6]).

2. Własności modułów siecznych

W ogólnej formie związek $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon'_{ki})$ dla ciała izotropowego można zapisać jako [4]

$$(2.1) \quad \sigma_{ij} = \Phi_0 \delta_{ij} + \Phi_1 \epsilon'_{ij} + \Phi_2 \epsilon'_{ik} \epsilon'_{kj}$$

lub

$$(2.2) \quad \epsilon'_{ij} = \Psi_0 \delta_{ij} + \Psi_1 \sigma_{ij} + \Psi_2 \sigma_{ik} \sigma_{kj},$$

gdzie Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 oraz Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_2 są dowolnymi funkcjami niezmienników tensora odpowiednio ϵ'_{ij} oraz σ_{ij} . Zachowanie się materiału opisane przez powyższe związki znane jest jako sprężystość w sensie Cauchy. Procesy deformacji mogą być w tym przypadku dysypatywne, tzn. przy pewnych zamkniętych cyklach w przestrzeni naprężeń (albo odkształceń ϵ'_{ij}) materiał może dysypować energię mechaniczną (albo pobierać ją z otoczenia, czy źródeł pozamechanicznych, przy cyklach odwrotnych). Opis przez równania (2.1) lub (2.2) może być stosowany do pierwszego odciążenia z danego stanu naprężeń, a funkcje inwariantów Φ_i czy Ψ_i są dowolne.

Szczególną postacią związków (2.1) lub (2.2) są związki potencjalnej sprężystości (w sensie Greena) lub hipersprężystości, kiedy zachodzi

$$(2.3) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon'_{ij}} \quad \text{dla} \quad (2.1)$$

lub

$$\epsilon'_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{dla} \quad (2.2),$$

a funkcje inwariantów U i V są potencjałami odkształceń ϵ'_{ij} i naprężeń σ_{ij} . Rozpatrzmy konsekwencje wynikające z założenia (2.3) dla nieliniowych związków tensorowo liniowych

(tj., dla których $\Phi_2 = 0$, $\Psi_2 = 0$), stosowanych w mechanice ośrodków sypkich. To ostatnie założenie pozwala rozprząc równania (2.1) i (2.2) na części dewiatorową i kulistą. Zapisując np. (2.1) w formie powszechnie stosowanej, mamy (Φ_0 jest tu jednorodną funkcją ϵ'_{kk})

$$(2.4) \quad \sigma_{kk} = K(\epsilon'_{kk}, e_{mn}) \epsilon'_{kk}; \quad s_{ij} = G(\epsilon'_{kk}, e'_{mn}) e'_{ij}.$$

Znajdźmy pracę elementarną

$$(2.5) \quad dU = \sigma_{kk} d\epsilon'_{kk} + s_{ij} de'_{ij},$$

będącą w ogólności formą Pfaffa. Wielkość U jest tylko wtedy niezależna od drogi całkowania, gdy wyrażenie Pfaffa dU jest różniczką zupełną ($dU = dU$), tzn., gdy zachodzi (2.3)₁, czyli $\sigma_{kk} = \partial U / \partial \epsilon'_{kk}$ i $s_{ij} = \partial U / \partial e'_{ij}$, przy czym spełnione są związki

$$(2.6) \quad \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial e'_{ij}} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial \epsilon'_{kk}}; \quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial s_{kl}}{\partial e_{ij}}.$$

Podstawiając do tego ostatniego warunku związki fizyczne (2.4), widzimy, że aby dla materiału opisanego przez nie istniał potencjał U , moduły K i G muszą spełniać warunki

$$(2.7) \quad \frac{\partial [K(\epsilon'_{kk}, e'_{kl}) \epsilon'_{kk}]}{\partial e'_{ij}} = \frac{\partial [G(\epsilon'_{kk}, e'_{kl}) e'_{ij}]}{\partial \epsilon'_{kk}}.$$

Podobnie, dla tensorowo liniowego związku typu (2.2)

$$(2.8) \quad \epsilon'_{kk} = \kappa(\sigma_{kk}, s_{ij}) \sigma_{kk}; \quad e'_{kl} = \omega(\sigma_{kk}, s_{ij}) s_{kl}$$

można sformułować warunki potencjalności

$$(2.9) \quad \frac{\partial [\kappa(\sigma_{kk}, s_{ij}) \sigma_{kk}]}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial [\omega(\sigma_{kk}, s_{ij}) s_{ij}]}{\partial \sigma_{kk}}.$$

Spełnienie warunków (2.8) lub (2.9) nałożonych na moduły sieczne materiału zapewnia, że zachowanie się materiału jest hipersprężyste, tzn. energia sprężysta nie zależy od kolejności poprzednich stanów deformowania materiału, lecz od aktualnej deformacji czy naprężenia. Można zatem w ten sposób opisywać odciążanie w stanie ustalonych własności.

Przy wyznaczaniu funkcji materiałowych dla opisu idealnie sprężystego zachowania się materiału wymagane jest więc spełnienie przez te funkcje dodatkowych więzów poza ich niezmienniczością. Spełnienie tych więzów określa efekty fizyczne, które model może opisać wykluczając inne. Takie efekty wskażemy na przykładzie dwóch związków konstytutywnych typu (2.4) i (2.8) stosowanych w mechanice gruntów [5, 6]. Niech zachodzi odpowiednio

$$(2.10) \quad K = K(\rho'), \quad G = G(\rho') \quad \text{dla} \quad (2.4),$$

$$d\rho' / (\rho' + \rho_0) = d\epsilon'_{kk}$$

i

$$(2.11) \quad \kappa = \kappa(\sigma_{kk}), \quad \omega = \omega(\sigma_{kk}) \quad \text{dla} \quad (2.5).$$

Fizyczny sens przyjęcia modułów jako funkcji gęstości czy ciśnienia średniego jest związany z interpretacją zmiennej porowatości w pierwszym, a sił kontaktowych między ziarnami w drugim przypadku, jako przyczyny zmian własności materiału przy deforma-

cji. Materiały te, jak łatwo sprawdzić podstawiając (2.10) lub (2.11) do związków (2.7) czy (2.9), nie są sprężyste w sensie Greena. Na przykład dla (2.10) zachodzi

$$(2.12) \quad \frac{\partial [K(\varepsilon'_{kk}) \varepsilon'_{kk}]}{\partial e'_{ij}} = 0 \neq \frac{\partial [G(\varepsilon'_{kk}) e'_{ij}]}{\partial \varepsilon_{kk}}.$$

Warunek (2.12) jest natomiast spełniony dla równań (2.10), (2.11), gdy moduły $G(\varepsilon'_{kk}) = \text{const}$, czy $\omega(\sigma_{kk}) = \text{const}$, a zatem gdy odciążenie jest liniowe. Oba związki, (2.10) i (2.11), można więc stosować do opisu pierwszego odciążenia, jeżeli założy się, że obok odkształceń sprężystych zachodzą procesy mikropląnięcia¹⁾.

Takie opracowanie wyników doświadczeń przy nieliniowych krzywych odciążenia, gdy tensor materiałowy A_{ijkl} spełnia warunki potencjalności, a więc istnieją pewne więzy na stałe materiałowe, wymaga albo sprawdzenia tego *a posteriori* lub zgadnięcia postaci potencjału sprężystego, a następnie określenia związku konstytutywnego i wyznaczenia jego stałych z doświadczeń.

Przyrostowe związki dla materiałów nieliniowych można otrzymać przez różniczkowanie równań (2.1) i (2.2).

W szczególności dla związków (2.4) i (2.8) mamy

$$(2.13) \quad \begin{aligned} d\sigma_{kk} &= A d\varepsilon'_{kk} + E_{ij} de'_{ij} \\ ds_{ij} &= C_{ijkl} de'_{kl} + D_{ij} d\varepsilon'_{mm}, \end{aligned} \quad \text{dla (2.4),}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial K}{\partial \varepsilon'_{kk}} \varepsilon'_{mm} + K, \\ E_{ij} &= \varepsilon'_{kk} \frac{\partial K}{\partial e'_{ij}}, \\ C_{ijkl} &= \left(\frac{\partial G}{\partial e'_{kl}} e'_{ij} + G \delta_{ik} \delta_{lj} \right), \\ D_{ij} &= \frac{\partial G}{\partial \varepsilon'_{kk}} e'_{ij} \end{aligned}$$

oraz

$$(2.14) \quad \begin{aligned} d\varepsilon'_{kk} &= \bar{A} d\sigma_{kk} + \bar{E}_{ij} ds_{ij} \\ de'_{ij} &= \bar{C}_{ijkl} ds_{kl} + \bar{D}_{ij} d\sigma_{kk}, \end{aligned} \quad \text{dla (2.8),}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_{nn}} \sigma_{kk} + \kappa, & \bar{E}_{ij} &= \sigma_{kk} \frac{\partial \kappa}{\partial s_{ij}}, \\ \bar{C}_{ijkl} &= \frac{\partial \omega}{\partial s_{kl}} s_{ij} + \omega \delta_{ik} \delta_{lj}, & \bar{D}_{ij} &= \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_{kk}} s_{ij}. \end{aligned}$$

¹⁾ Zauważmy, że często tego rodzaju związki są stosowane do opisu całkowitej deformacji ośrodka, z nieuzasadnionym, jak widać z (2.12), założeniem pełnej odwracalności odkształceń (np. [9, 10]).

Z powyższych związków widać, że zachodzi sprzężenie izotropowych i dewiatorowych części przyrostów, tzn. przyrost ciśnienia średniego powoduje przyrost odkształceń dewiatorowych, a wzrost naprężeń dewiatorowych wywołuje przyrost objętości. Ponadto z uwagi na nieliniowość związków (2.4) i (2.8), mimo iż tensory σ_{ij} oraz ε'_{ij} mają wspólne kierunki główne, tensory ich przyrostów mogą w ogólności nie być współosiowe. Sprzężenie to zależy od wielkości odkształceń (czy naprężeń), od których liczymy przyrosty, a w stanie naturalnym znika.

Dla pewnych materiałów rozdrobionych sprzężenie przyrostów izotropowych i dewiatorowych jest uważane za efekt niższego rzędu. Należy wówczas założyć, że dla wszystkich σ_{ij} i ε'_{ij} współczynniki $E_{ij} = D_{ij} = 0$ oraz $\bar{E}_{ij} = \bar{D}_{ij} = 0$. Ze wzorów (2.12) i (2.14) wynika wówczas, że

$$(2.15) \quad K = K(\varepsilon'_{kk}), \quad G = G(\varepsilon'_{ij}) \quad \text{i} \quad \kappa = \kappa(\sigma_{kk}), \quad \omega = \omega(s_{ij}).$$

Zauważmy wreszcie, że materiały, dla których przyjmujemy współosiowość przyrostów tensorów naprężenia i odkształcenia ε'_{ij} , wyrażającą się związkami

$$(2.16) \quad d\sigma_{kk} = A d\varepsilon'_{kk}, \quad ds_{ij} = G d\varepsilon'_{ij}$$

muszą spełniać warunek $G = \text{const}$.

Jeżeli zatem zakładamy izotropię materiału hipersprężystego i współosiowość tensorów przyrostów, to nie możemy opisać nieliniowego zachowania się materiału przy ściananiu. Podobny wniosek można otrzymać z (2.14). Dodajmy, że założenie współosiowości w sprężystym prawie przyrostowym jest bardzo konsekwentne dla związków sprężysto-plastycznych, dla których nie zakłada się wzmocnienia anizotropowego. Równoznaczne jest to z przyjęciem, że proces sprężysto-plastyczny nie wywołuje w materiale żadnej zorientowanej struktury.

3. Własności modułów stycznych

Przyrostowe związki (2.13) i (2.14) mają tę własność, że zachowanie się materiału wokół pewnego stanu naprężeń czy odkształceń wyznacza jednoznacznie zachowanie się tego materiału dla wszystkich innych stanów, na różnych drogach obciążenia czy deformacji, a więc związki $\sigma_{ij} - \varepsilon'_{ij}$.

Dla niektórych materiałów rozdrobionych takie stwierdzenie może być niesprawdzałne. Obserwowalny jest natomiast związek pomiędzy przyrostami $d\sigma_{ij}$ i $d\varepsilon'_{ij}$. Prawo fizyczne wówczas wyraża jednoznaczną zależność między przyrostami dla danego stanu ciała.

Taki jednoznaczny obiektywny związek pomiędzy wymienionymi tensorami przyrostów oraz samym tensorem odkształceń [4] można zapisać przy pominięciu nieliniowych członów względem $d\varepsilon_{ij}$ w postaci

$$(3.1) \quad d\sigma = \alpha_0 \delta + \alpha_1 \varepsilon' + \alpha_2 d\varepsilon' + \alpha_3 \varepsilon'^2 + \alpha_4 (\varepsilon' d\varepsilon' + d\varepsilon' \varepsilon') + \alpha_5 (\varepsilon'^2 d\varepsilon' + d\varepsilon' \varepsilon'^2),$$

gdzie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3$ są funkcjami niezmienników

$$\begin{aligned} J'_1 &= \varepsilon'_{kk}, & J'_2 &= \varepsilon'_{kl} \varepsilon'_{kl}, & J'_3 &= \varepsilon'_{km} \varepsilon'_{ml} \varepsilon'_{lk}, \\ Y'_0 &= d\varepsilon'_{kk}, & Y'_1 &= \varepsilon'_{kl} d\varepsilon'_{kl}, & Y'_2 &= \varepsilon'_{kl} \varepsilon'_{lm} d\varepsilon'_{mk}, \end{aligned}$$

a $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ są funkcjami jedynie niezmienników J'_1, J'_2, J'_3 . Załóżmy dla dalszych celów, że związki (3.1) mają postać związków proporcjonalnych (1.2), tzn. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3$ pozostaną

zależne jedynie od niezmienników mieszanych Y_i . Wówczas rozbijając (3.1) na część dewiatorową oraz izotropową otrzymamy układ równań

$$(3.2) \quad \begin{aligned} d\sigma_{kk} &= Fd\epsilon'_{kk} + H_{ij}de'_{ij}, \\ ds_{ij} &= M_{ijkl}de'_{kl} + N_{ij}d\epsilon'_{kk}, \end{aligned}$$

gdzie F , H_{ij} , M_{ijkl} , N_{ij} są funkcjami tensora odkształceń ϵ'_{ij} oraz jego niezmienników. Przyrostowy związek typu (3.2), w którym wielkości te zależą od tensora naprężeń oraz jego niezmienników, jest równoważny związkowi hiposprężystemu.

Rozpatrzmy obecnie na przykładzie związków (3.2) warunki, jakie muszą spełniać związki przyrostowe, aby opisywały one prawo nieliniowej sprężystości. (Są to warunki analogiczne do warunków dla hiposprężystości — por. [7]). Określenie jednoznacznej zależności $\sigma_{ij} - \epsilon'_{ij}$ ze związków przyrostowych (3.2) wymaga założenia ich całkowalności. Ponadto, jeśli otrzymany związek $\sigma_{ij} - \epsilon'_{ij}$ ma opisywać sprężystość, musi spełniać warunki potencjalności. Równania (3.2) stanowią, z uwagi na niezależność ich prawych stron od naprężeń, dwie formy Pfaffa. Są one zatem całkowalne w sposób zupełny wtedy, gdy tożsamościowo zachodzi

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \epsilon'_{ij}} &= \frac{\partial H_{ij}}{\partial \epsilon'_{kk}}, & \frac{\partial H_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}} &= \frac{\partial H_{kl}}{\partial \epsilon'_{ij}}, \\ \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial \epsilon'_{rr}} &= \frac{\partial N_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}}, & \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial \epsilon'_{mn}} &= \frac{\partial M_{ijmn}}{\partial \epsilon'_{kl}}, \end{aligned}$$

natomiast współczynniki F , H_{ij} , M_{ijkl} oraz N_{ij} są odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi

$$(3.4) \quad F = \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial \epsilon'_{kk}}, \quad H_{ij} = \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial \epsilon'_{ij}}, \quad M_{ijkl} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}}, \quad N_{ij} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial \epsilon'_{kk}}.$$

Zatem dla określonych doświadczalnie związków (3.2), spełniających warunki (3.3), możemy określić jednoznaczne związki $\sigma_{kk} = \sigma_{kk}(\epsilon'_{kk}, \epsilon'_{ij})$ oraz $s_{ij} = s_{ij}(\epsilon'_{kk}, \epsilon'_{ij})$. Związki te stanowią potencjalne prawo sprężystości, o ile elementarna praca wyrażona przez równanie (2.5) stanowi różniczkę zupełną, tzn. kiedy będą spełnione warunki (2.7). Ponieważ z założenia całkowalności wynikają związki (3.4), warunki potencjalności (2.7) można wyrazić w postaci dalszych więzów na współczynniki w związku (3.2)

$$(3.5) \quad H_{ij} = N_{ij}, \quad M_{ijkl} = M_{klij}.$$

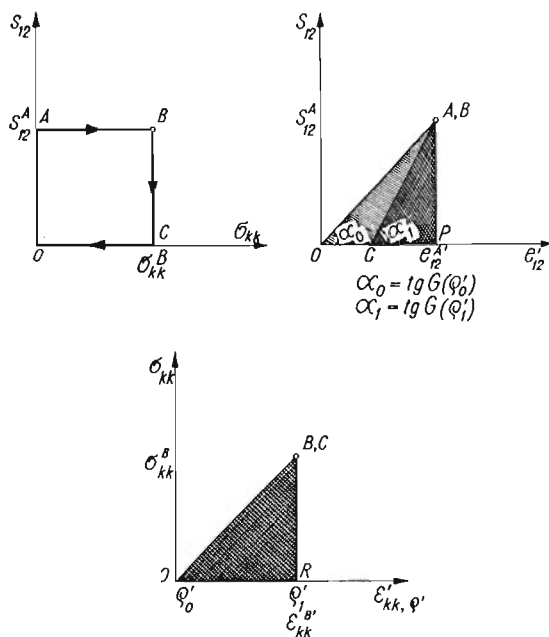
Łatwo sprawdzić, że równania (2.13) spełniają warunki (3.3) i (3.4) tożsamościowo. Podobne warunki można uzyskać dla materiałów hiposprężystych.

W świetle powyższego widzimy, że materiał przyrostowy o stycznych modułach zależnych od bieżącej zmiany gęstości, będący szczególną postacią materiału (3.2) o równaniach

$$(3.6) \quad \begin{aligned} d\sigma_{kk} &= Kd\epsilon'_{kk}, & ds_{kl} &= Gd\epsilon'_{kl}, \\ K &= K(\varrho'), & G &= G(\varrho'), & d\varrho'/(\varrho_0 + \varrho') &= d\epsilon'_{kk}, \end{aligned}$$

spełnia warunki (3.3) jedynie dla przypadku, gdy $G = \text{const}$. Podobnie dla materiału o modułach zależnych od ciśnienia średniego σ_{kk} jest on hiposprężysty tylko wtedy, gdy

jego moduł styczny jest stały, $\omega = \text{const}$ [8]. Jako przykład można tu podać zamknięty program (cykl) obciążeń dla materiału (3.6), po dokonaniu którego w materiale pozostają odkształcenia trwałe.



Rys. 1

Rozważany przyrostowy cykl naprężeń $OABCO$ (rys. 1), zawarty całkowicie wewnątrz powierzchni plastyczności, składa się ze ścinania z nałożonym ściskaniem hydrostatycznym powodującym zagęszczenie materiału; cykl zamyka się zdjęciem obciążenia ścinającego, a następnie ciśnienia hydrostatycznego. Na odcinku AB wielkość φ' wzrasta, zatem wzrasta także moduł G , a przez to odciążenie BC zachodzi już przy innej wartości modułu, odpowiadającej większemu φ' niż w punkcie A . Po zamknięciu pętli $OABCO$ pozostaje więc pewne odkształcenie postaciowe, a ponadto magazynuje się w materiale pewna energia, odpowiadająca zakreskowanemu polu na rys. 1. Przy cyklu odwrotnym, $OCBAO$, energia ta przybiera wartość ujemną.

Równania (3.2) mogą być całkowalne również w sposób niezupełny. Zachodzić to może wzdłuż dróg, w pewien sposób sparametryzowanych, w przestrzeni odkształceń. Na przykład w przypadku dróg radialnych, gdy przy stałym ε_{kl}^0

$$(3.7) \quad \varepsilon'_{kl} = \varepsilon_{kl}^0 r, \quad d\varepsilon'_{kl} = \varepsilon_{kl}^0 dr$$

równania (3.2) są równaniami zwyczajnymi o rozdzielonych zmiennych. W podobny sposób można stwierdzić, że praca wzdłuż tych dróg jest jednoznacznie określona przez zmienną r . Wynika stąd istotny wniosek, że prowadząc doświadczenie mające wykryć odwracalność odkształceń na zamkniętych cyklach musimy z tych eksperymentów wykluczyć cykle po drogach radialnych jako nieczułe na efekty niepotencjalności.

4. Własności pewnych nieliniowych potencjałów sprężystych

Dobór funkcji materiałowych K , G czy κ i ω z danych doświadczalnych w taki sposób, aby spełniały one warunki ustalonej sprężystości jest praktycznie bardzo trudny. Znacznie łatwiej jest postulować istnienie potencjału sprężystego o przepisanej formie, a następnie dobierać jego stałe. Konieczna jest w tym celu znajomość własności równań konstytutywnych wynikających z danej postaci potencjału.

Rozpatrzmy tensorowo liniową postać równania (2.1) wyprowadzonego z potencjału $U = U(J'_1, J'_2)$ (przez $U_{,i}$ oznaczono $\partial U/\partial J'_i$)

$$(4.1) \quad \begin{cases} \sigma_{ii} = 3U_{,1}(J'_1, J'_2) + 2U_{,2}(J'_1, J'_2)J'_1, \\ s_{ij} = 2U_{,2}(J'_1, J'_2)e'_{ij}. \end{cases}$$

Widzimy, że niezależnie od szczególnej postaci potencjału U , dewiatory s_{ij} i e'_{ij} są współosiowe i proporcjonalne, natomiast wielkości σ_{kk} i e'_{kk} nie są proporcjonalne, dopóki $U_{,1}$ nie jest jednorodną funkcją J_1 . W zależności od postaci funkcji U , a w szczególności $U_{,1}$ w przypadku czysto postaciowych deformacji, $J'_1 = 0$, stan naprężeń może mieć zarówno składową dewiatorową, jak i izotropową. Ten ostatni efekt (odpowiadający dylatacji) jest typowy dla ośrodków sypkich.

Przyrostowa forma związków (4.1) jest następująca:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} d\sigma_{ii} &= 3[U_{,11} + 2U_{,12}J'_1 + 2U_{,2} + 2(3U_{,12} + 2U_{,22}J'_1)J'_1]de'_{ii} + 2(3U_{,12} + \\ &\quad + 2U_{,22}J'_1)e'_{ki}de'_{ki}, \\ ds_{ij} &= 2\left(U_{,12} + \frac{2}{3}U_{,22}J'_1\right)e'_{ij}de'_{kk} + 2(U_{,22}e'_{ij}e'_{kl} + U_{,2}\delta_{kl}\delta_{ij}). \end{aligned}$$

Omówimy własności kilku form potencjałów U .

a) *Potencjał bi-eliptyczny:*

$$(4.3) \quad U = \alpha_1 J_1^4 + \alpha_2 J_2^2, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0.$$

Równanie konstytutywne ma postać

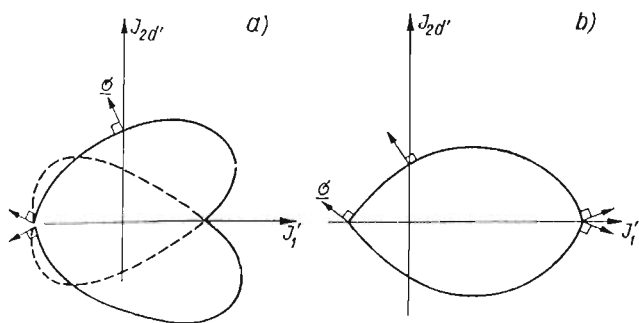
$$(4.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{ii} &= 4J'_1 \left[\left(\alpha_1 + \frac{1}{9}\alpha_2 \right) J_1'^2 + \frac{1}{3}\alpha_2 J_{2d}' \right], \\ s_{ij} &= 2 \left[\frac{1}{3}J_1'^2 + J_{2d}' \right] e'_{ij}. \end{aligned}$$

Zatem dla czystego odkształcenia postaciowego ($J'_1 = 0$) nie występują naprężenia hydrostatyczne. Niemniej, nieliniowe moduły sprężystości zależą zarówno od odkształceń postaciowych, jak i objętościowych. Z tej przyczyny występuje sprzężenie przyrostowych efektów izotropowych i dewiatorowych

$$(4.5) \quad \begin{aligned} d\sigma_{ii} &= 3 \left[\left(12\alpha_1 + \frac{64}{3}\alpha_2 \right) J_1'^2 + \frac{16}{3}\alpha_2 J_{2d}' \right] de'_{ii} + 16\alpha_2 J'_1 e'_{ki} de'_{ki}, \\ ds_{ij} &= \frac{16}{3}\alpha_2 J'_1 e'_{ij} de'_{kk} + 4\alpha_2 \left[e'_{ij} e'_{kl} \left(\frac{1}{3}J_1'^2 + J_{2d}' \right) \delta_{kl} \delta_{ij} \right] de'_{kl}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że sprzężenie to dla szczególnych stanów $J'_1 = 0$ lub $J_{2d}' = 0$ znika. Potencjał (4.3) jest wypukły z uwagi na dodatnią, określoną w przestrzeni J'_1, J_{2d}' .

b) *Potencjał złożony z parabol i kola.* Istotną trudność stanowi opisanie materiału wykazującego sprzężenie dewiatorowych i izotropowych części samych tensorów σ_{ij} , ϵ'_{ij} . Wymaga to założenia niesymetrycznych względem J'_{2d} postaci potencjału w przestrzeni J'_1 i J'_{2d} . Przyjęcie w tym celu powierzchni ekwipotencjalnej, np. w formie obróconej elipsy spełniającej powyższy wymóg, prowadzi do lokalnej wklęsłości potencjału²⁾, a także do osobliwości w stanie czysto hydrostatycznym, wynikającej z niegładkości potencjału dla $J'_{2d} = 0$. To samo zachodzi dla potencjałów typu cosinusoidy itp. (rys. 2a, b). Trudności



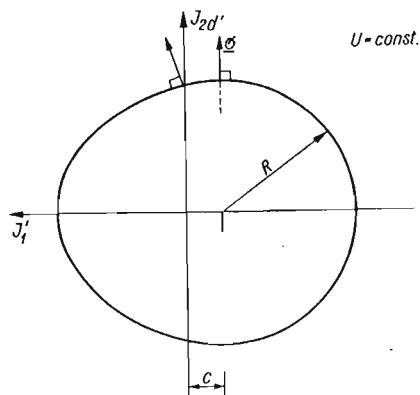
Rys. 2

te można ominąć postulując potencjał złożony z parabol w części odpowiadającej rozciąganiu oraz stycznego do niej okręgu dla strefy ściskania. Równanie potencjału ma postać (rys. 3)

(4.6)

$$\sqrt{U} = \frac{-\alpha J'_1 \pm J'_4}{1 - \alpha^2} \beta,$$

$$J'_4 = \sqrt{\alpha^2 J'^2_1 + (1 - \alpha^2)(J'_{2d} + m J'^2_1)},$$



Rys. 3

α , β — stałe materiałowe; $m = 1$ dla $J'_1 \leq 0$, $m = 0$ dla $J'_1 \geq 0$, część kołowa linii ekwipotencjalnej (dla rozciągania) wyrażająca się dla $U = U_0$ przez równanie $U_0 = \beta[(J'_1 - c)^2 + J'_{2d}] = 0$ o promieniu $\sqrt{U_0/\beta}$ i środku okręgu w punkcie $J'_x = c = \alpha \sqrt{U_0/\beta}$,

²⁾ Zachodzi wówczas niejednoznaczność rozwiązania problemu brzegowego. Prowadzić do tego może między innymi pełne rozwinięcie wielomianowe funkcji potencjału $U = U(J'_1, J'_{2d})$ por. np. [12], a także [9].

przecina oś odciętych J'_1 w punkcie $J'_1 = -\sqrt{U_0/\beta} (1 + \alpha)$; natomiast część paraboliczna (dla ściskania) o równaniu $U_0 = \beta[J'_{2d} - 2cJ'_1 + c^2]$, styczna do okręgu w punkcie $J'_1 = 0$ przecina oś J'_1 w punkcie $J'_1 = \frac{1}{2} \sqrt{U_0/\beta} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$.

Równanie konstytutywne odpowiadające potencjałowi (4.6) daje

$$(4.7) \quad \sigma_{ii} = \frac{\alpha J'_1 \mp 2J'_1 [m + \alpha^2(1 - m)]}{\alpha J'_1 J'_4 \pm J_4'^2} \frac{\beta}{1 - \alpha^2},$$

$$s_{ij} = \mp \frac{2[(1 - \alpha^2)J'_{2d}]}{-\alpha J'_1 J'_4 \pm J_4'^2} \frac{\beta}{1 - \alpha^2} e'_{ij}.$$

Zgodnie z założeniem, proces czystych deformacji postaciowych wywołuje naprężenie hydrostatyczne o wielkości

$$\sigma_{ii}^0 = \frac{\beta}{1 - \alpha^2} \frac{1}{\sqrt{J'_{2d}(1 - \alpha^2)}}$$

oraz odwrotnie, stan czystego ścinania wywołuje odkształcenia objętościowe (rozluźnianie). Ponadto materiał inaczej zachowuje się w stanie czystego ściskania niż rozciągania.

Równania konstytutywne (4.7), mimo że stowarzyszone z dosyć prostym potencjałem (4.6) (rys. 3), mają bardzo złożoną postać; analityczne odwrócenie tych związków jest skomplikowane.

5. Wnioski

Wnioski z powyższych rozważań są następujące. Przystępując do matematycznej aproksymacji wyników doświadczalnych ustalonego odciążenia sprężystego wykazującego sprzężenie efektów dewiatorowych i izotropowych należy postulować niesymetryczną formę potencjału sprężystego i wynikające z niego równania konstytutywne dopasować do krzywych eksperymentalnych. Potencjały dopuszczające sprzężenie prowadzą do złożonych i trudnych w interpretacji i zastosowaniu równań konstytutywnych. Prostsza forma równań można uzyskać wprowadzając symetryczne potencjały, dopuszczające sprzężenie przyrostów, poza drogami $J'_1 = 0$ i $J'_{2d} = 0$. Najprostsze postaci równań konstytutywnych spełniające warunki potencjalności, nieuwzględniające sprzężenia, nie opisują niektórych istotnych efektów nieliniowych. Wydaje się więc celowe dla obliczeń inżynierskich stosowanie prostych w budowie związków fizycznych o łatwej interpretacji doświadczalnej niespełniających warunków potencjalności. Zastrzec należy przy tym dopuszczalny zakres ich ważności (drogi radialne i do nich zbliżone). W pracy [2] podano konkretną postać takiego rodzaju związków opierając się na wynikach przeprowadzonych doświadczeń oraz przedyskutowano procedurę wyznaczania funkcji materiałowych.

Zauważmy, że uwagi odnośnie całkowalności oraz potencjalności związków dyskutowanych w p. 2 i p. 3 odnoszą się także do związków, w których wprowadza się rozmaitego rodzaju uogólnione nieliniowe moduły Younga i zmienne współczynniki Poissona [8 - 10].

Autor wyraża swoją wdzięczność Panu profesorowi Z. MROZOWI za liczne uwagi i pomoc przy opracowaniu tego artykułu.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. MRÓZ, K. KWASZCZYŃSKA, *Pewne problemy brzegowe dla ciał rozdrobnionych o wzmocnieniu gęstościowym*, Rozp. Inż., **19**, 1, (1971) 15 - 42.
2. T. HUECKEL, A. DRESCHER, *On dilatational effects of inelastic granular media*, Arch. Mech. Stos., **27**, 1, (1975) 157 - 172.
3. B. O. HARDIN, V. P. DRNEVICH, *Shear modulus and damping in soils*, Proc. ASCE, SM6, **98**, (1972) 603 - 624.
4. R. S. RIVLIN, *Further remarks on stress deformation relation for isotropic materials*, J. Rat. Mech. Anal., **4**, (1955) 681 - 702.
5. J. P. WEIDLER, P. R. PASLAY, *Constitutive relations for inelastic granular medium*, Proc. ASCE, EM 4, (1970) 395 - 406.
6. G. Y. BALADI, *The latest development in the non-linear elastic-nonideally plastic work hardening cap model*, Proc. Symp. Plasticity Soil Mechanics, Ed. A. Palmer, Cambridge 1973, 51 - 55.
7. B. BERNSTEIN, *Hypoelasticity and elasticity*, Arch. Rat. Mech. An., **6**, 89 (1960).
8. A. VERRUIJT, *Non-linear analysis of stresses and strains on soils*, Prog. Rep., **1**, (1972), Univ. Delft.
9. J. M. DUNCAN, Ch. Y. CHANG, *Nonlinear analysis of stress and strain in soils*, Proc. ASCE, SM5, (1970) 1629 - 1653.
10. L. DOMASCHUK, N. H. WADE, *A study of bulk and shear moduli of a sand*, Proc. ASCE, SM2, **95**, (1969) 561 - 581.
11. T. HUECKEL, *Plastic flow of granular and rocklike materials with variable elasticity moduli*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **23**, (1975).
12. M. D. EVANS and R. I. COON, *Recoverable deformation of cohesionless soils*, Proc. ASCE, SM2, **97**, (1971) 375 - 391.

Резюме

К ВОПРОСУ ОБ ОПИСАНИИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ
СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

В работе приведены различные варианты физических уравнений, которые могут быть использованы для описания свойств сыпучих материалов.

Summary

ON THE DESCRIPTION OF NON-LINEAR ELASTICITY OF GRANULAR MEDIA

Various physical laws are proposed in the paper aimed at the application to the description of granular materials.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 czerwca 1975 r.

O PEWNEJ METODZIE ANALIZY WPŁYWU TARCIA W PROCESIE PLASTYCZNEGO
ŚCISKANIA PRÓBKII WALCOWEJ

ZDZISŁAW MALINOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jednym z ważniejszych czynników występujących w procesie plastycznego ściskania próbki walcowej jest tarcie na powierzchniach pomiędzy próbką i stemplami. Analizie wpływu tarcia na przebieg i wyniki próby ściskania zostało poświęconych szereg prac. Klasyczną pozycją w tej dziedzinie jest praca [5], w której zakładając pewne uproszczenia otrzymuje się, poprzez całkowanie równania równowagi, następującą zależność na średnie naprężenie osiowe $\bar{\sigma}_z$:

$$(1) \quad \bar{\sigma}_z = \sigma_0 \frac{2}{\alpha^2} (e^\alpha - \alpha - 1), \quad \alpha = \frac{2\mu a}{h},$$

gdzie σ_0 jest aktualnym naprężeniem plastycznego płynięcia przy ściskaniu, μ oznacza współczynnik tarcia, h stanowi bieżącą wysokość krążka, a jest bieżącym maksymalnym promieniem. Równanie (1) przekształcone do postaci

$$(2) \quad \mu = s_0(1-\varepsilon)^{3/2} \left(e^\alpha - \frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_0} \frac{\alpha^2}{2} - 1 \right), \quad \alpha = \frac{\mu}{s_0(1-\varepsilon)^{3/2}},$$

gdzie h_0 i d_0 oznaczają początkową wysokość i średnicę próbki, $s_0 = \frac{h_0}{d_0}$, $\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}$ jest aktualnym odkształceniem próbki — może zostać wykorzystane do określenia współczynnika tarcia μ na podstawie doświadczalnie wyznaczonej zależności $\bar{\sigma}_z(s_0, \varepsilon)$. Tą metodą obliczono numerycznie μ dla próbek aluminiowych i miedzianych w pracy [2]. Wartości $\sigma_0(\varepsilon)$ można w tym przypadku wyznaczyć poprzez ekstrapolację przyjmując, że $\sigma_0 = \bar{\sigma}_z(s_0, \varepsilon)_{s_0 \rightarrow \infty}$, sposób ten został pierwotnie zaproponowany w pracy [1].

W pracach [4] i [6] przeprowadzono bardziej szczegółową dyskusję problemu wykazując, że zależność (1) jest słuszna jedynie wówczas, gdy współczynnik tarcia μ , przy danej wartości a/h nie przekracza pewnej wartości krytycznej μ_k , którą wyznacza się z warunku

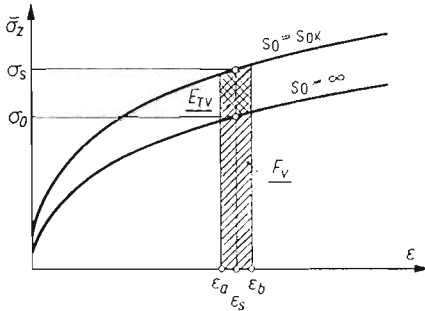
$$(3) \quad \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2\mu_k} \ln \left(\frac{1}{2\mu_k} \right).$$

Gdy warunek (3) nie jest spełniony, wówczas w pewnej strefie na powierzchni próbki obserwuje się tarcie szepne i wzajemny poślizg materiału próbki względem ściskającej płyty nie zachodzi.

W dotychczasowej teoretycznej analizie zagadnienia opierano się głównie na zależnościach otrzymanych poprzez całkowanie równania równowagi. W obecnej pracy przedstawiono odmienną metodę pozwalającą uwzględnić tarcie w procesie plastycznego ściskania próbki walcowej.

2. Ogólne sformułowanie metody

Okazuje się, że korzystając z równania bilansu pracy można również otrzymać odpowiednie zależności opisujące proces ściskania próbki z uwzględnieniem tarcia. Pole podwójnie zakreskowane na rys. 1 przedstawia dodatkową pracę na jednostkę objętości próbki,



Rys. 1. Wpływ tarcia na powierzchniach kontaktu na krzywą umocnienia odpowiadającą procesowi ściskania próbki walcowej

wykonaną dla pokonania oporów spowodowanych tarcie podczas ściskania próbki od odkształcenia ϵ_a do ϵ_b . Praca tarcia E_T dla całej próbki wynosi:

$$E_T = E_{TV} V,$$

gdzie E_{TV} oznacza średnią pracę tarcia na jednostkę objętości próbki, V jest objętością próbki.

Ogólnie biorąc E_T można podzielić na dwie części

$$(4) \quad E_T = E_{TP} + W.$$

W równaniu (4) E_{TP} oznacza pracę tarcia na powierzchniach pomiędzy próbką i stemplami, natomiast W jest pracą związaną z powodowaniem przez tarcie niejednorodnego stanu odkształcenia i naprężenia w próbce. Dzieliąc równanie (4) stronami przez $V(\epsilon_b - \epsilon_a)$ przy założeniu, że wielkość $\Delta\epsilon = \epsilon_b - \epsilon_a$ nie jest duża, można je wyrazić poprzez naprężenia w formie

$$(5) \quad \sigma_T = \sigma_{TP} + \sigma(W).$$

Równanie (5) może być zilustrowane w sposób pokazany na rys. 2, gdzie

$$\sigma_T = AC, \quad \sigma_{TP} = AB, \quad \sigma(W) = BC.$$

Ponieważ oddziaływanie sił tarcia powierzchniowego na rozkłady naprężeń i odkształceń wewnątrz próbki zależy od jej smukłości s_0 , zatem również wartość naprężeń $\sigma(W)$ będzie zależeć od s_0 . Przy założeniu jednorodnego stanu odkształcenia w próbce podczas procesu ściskania można przyjąć, że $W = 0$ i cała dodatkowa praca spowodowana tarcie jest dysypowana na powierzchni próbki, a więc

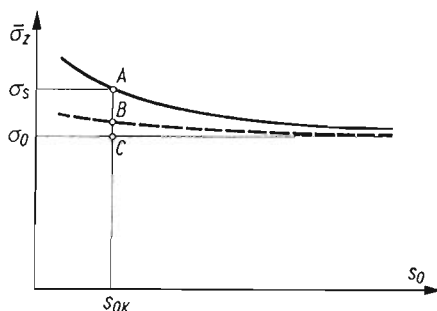
$$E_T = E_{TP}.$$

Uwzględniając powyższe założenie można dla próbki ściskanej w przedziale odkształcenia od ϵ_a do ϵ_b napisać następujące równanie bilansu pracy:

$$(6) \quad P - E_T = F,$$

gdzie $F = F_V V$ (rys. 1) jest pracą potrzebną do odkształcenia próbki, jeśli nie występuje tarcie. Równanie to wyraża równość pracy wykonanej przez siły zewnętrzne i wewnętrzne. Zgodnie z rys. 1 wielkości P i F można wyrazić następująco:

$$(7) \quad \begin{aligned} P &= \sigma_s V(\varepsilon_b - \varepsilon_a), \\ F &= \sigma_0 V(\varepsilon_b - \varepsilon_a). \end{aligned}$$



Rys. 2. Zależność $\bar{\sigma}_z(s_0)$ dla $\varepsilon = \text{const}$. Linia przerywana ilustruje dyskutowany w pracy przypadek z niejednorodnym stanem odkształcenia wewnątrz próbki

Podstawiając zależności (7) do równania (6) oraz dzieląc stronami przez $V(\varepsilon_b - \varepsilon_a)$ otrzymuje się

$$(8) \quad \sigma_s = \sigma_0 + \frac{E_T}{V(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}.$$

Za pomocą układu równań typu (8) można określać wartość σ_0 . Również po wyprowadzeniu odpowiedniej zależności na E_T równanie to może zostać wykorzystane do analizy wpływu tarcia na powierzchniach kontaktu w procesie ściskania próbki walcowej.

3. Wyznaczanie wartości σ_0

Dysponując doświadczalnie wyznaczoną krzywą $\sigma(s_0)_{\varepsilon = \text{const}}$ możemy napisać n równań typu (8) dla n wybranych wartości s_0 . Ogólna postać takiego układu będzie następująca:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 + \frac{E_{T1}}{V_1(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}, \\ &\vdots \\ \sigma_{n-1} &= \sigma_0 + \frac{E_{Tn-1}}{V_{n-1}(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}, \\ \sigma_n &= \sigma_0 + \frac{1}{V_n(\varepsilon_b - \varepsilon_a)(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_n}{\sigma_i} \left(\frac{a_{an}}{a_{ai}} \right)^3 E_{Ti}; \end{aligned}$$

a_a w ostatnim równaniu oznacza maksymalny promień próbki przy odkształceniu ε_a . Niewiadomymi wielkościami są σ_0 , $E_{T1} \dots E_{Tn-1}$. W celu umożliwienia jednoznacznego rozwiązania układu ostatnie równanie posiada inną konstrukcję niż pozostałe równania. Wartość E_{Tn} jest wyrażona przez znane wielkości $\sigma_1 \dots \sigma_n$ oraz niewiadome $E_{T1} \dots E_{Tn-1}$. Na podstawie wyprowadzonej w dalszej części pracy zależności na E_T można stwierdzić,

że taki sposób obliczania E_{Tn} jest poprawny przy założeniu, że wartość współczynnika tarcia μ nie zależy od s_0 .

Rozwiązanie względem σ_0 układu (9) zawierającego n równań posiada następującą postać:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} s_{ai} - (n-1)s_{an}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_{ai}}{\sigma_i} - (n-1) \frac{s_{an}}{\sigma_n}}$$

Zdefiniowanie odkształcenia próbki jako $\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}$ oraz założenie nieściśliwości materiału umożliwia napisanie zależności

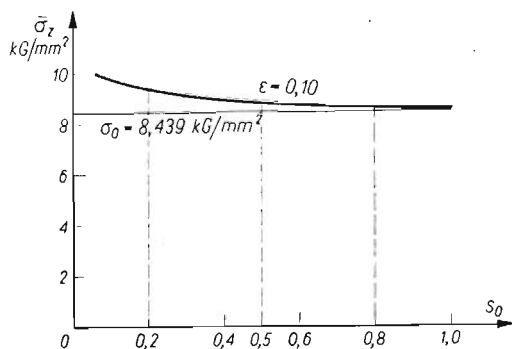
$$(10) \quad s_a = s_0(1 - \varepsilon_a)^{3/2}.$$

Uwzględniając tę zależność otrzymuje się następującą postać wyrażenia na σ_0 :

$$(11) \quad \sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} s_{0i} - (n-1)s_{0n}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_{0i}}{\sigma_i} - (n-1) \frac{s_{0n}}{\sigma_n}}$$

Z postaci tego wyrażenia wynika, że σ_0 nie zależy od objętości próbek. Korzystając z wyrażenia (11) oraz dysponując wyznaczoną doświadczalnie w odpowiednio szerokim przedziale smukłości s_0 , zależnością $\sigma(s_0)_{\varepsilon=\text{const}}$ można z wystarczającą dokładnością obliczyć wartość σ_0 .

W pracy [2] na podstawie doświadczalnie wyznaczonych zależności $\bar{\sigma}_z(\varepsilon, s_0)$ dla próbek aluminiowych obliczono z równania (2) wartości współczynnika tarcia $\mu(\varepsilon, s_0)$ postu-



Rys. 3. Rozkład wartości s_0 wybranych w celu obliczenia σ_0 z układu równań (9)

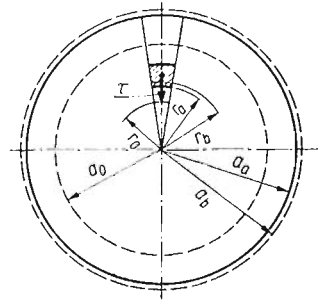
gując się przy wyznaczaniu σ_0 metodą ekstrapolacji dla $s_0 = \infty$. W obecnej pracy obliczono σ_0 z wyrażenia (11) korzystając z tych samych doświadczalnych zależności. Wybierając na krzywej $\bar{\sigma}_z(s_0)$ (rys. 3) dla $\varepsilon = 0,10$ trzy punkty o wartościach s_0 równych $s_{01} = 0,2$, $s_{02} = 0,5$, $s_{03} = 0,8$ otrzymano $\sigma_0 = 8,439 \text{ KG/mm}^2$. Zawężając przedział s_0

i przeprowadzając obliczenia dla próbek o wartościach s_0 równych $s_{01} = 0,2$, $s_{02} = 0,4$, $s_{03} = 0,6$ otrzymano $\sigma_0 = 8,397 \text{ KG/mm}^2$.

Porównanie wartości σ_0 obliczonych z wyrażenia (11) oraz określonych przez ekstrakcję wykazuje dobrą zgodność wyników. Wartości te różnią się mniej niż pół procent. Efektywność obliczania σ_0 wskazuje, że w tym przypadku przyjęte założenia oraz metoda postępowania są prawidłowe.

4. Wyprowadzenie zależności na E_T , $\bar{\sigma}_z$, μ

Zależności na pracę tarcia E_T , średnie naprężenie osiowe $\bar{\sigma}_z$ oraz współczynnik tarcia μ zostaną wyprowadzone przy założeniu jednorodnego stanu odkształcenia w próbce i przyjęciu warunku nieściśliwości materiału.



Rys. 4. Charakterystyczne wymiary powierzchni czołowej próbki: a_0 , r_0 — początkowe; a_a , r_a dla odkształcenia $\epsilon_a = \epsilon_s - \Delta\epsilon/2$; a_b , r_b dla odkształcenia $\epsilon_b = \epsilon_s + \Delta\epsilon/2$

Ponieważ naprężenia $\bar{\sigma}_z$ są odniesione do aktualnej powierzchni czołowej próbki, również miara odkształceń powinna być określona w stosunku do aktualnej geometrii próbki. Definiując odkształcenie jako

$$(12) \quad \varphi = \ln \frac{h_0}{h},$$

gdzie h_0 i h oznaczają początkową i bieżącą wysokość, otrzymuje się zależność pomiędzy początkowym i bieżącym maksymalnym promieniem krążka w postaci

$$(13) \quad a = a_0 e^{\varphi/2}.$$

Z założenia o jednorodności odkształceń wynika geometryczny związek pomiędzy promieniami dla odkształceń φ_a i φ_b

$$(14) \quad r_b - r_a = \frac{r_a}{a_a} (a_b - a_a).$$

Na rys. 4 zilustrowano charakterystyczne wymiary powierzchni czołowej próbki w stanie początkowym oraz dla odkształceń φ_a i φ_b . Podstawiając (13) do związku (14) otrzymuje się

$$(15) \quad r_b - r_a = r_a \left(e^{\frac{\varphi_b - \varphi_a}{2}} - 1 \right).$$

Wyrażenie na pracę tarcia dysypowaną na elemencie powierzchni próbki w trakcie procesu odkształcenia od φ_a do φ_b można przedstawić w postaci

$$(16) \quad dE'_T = (r_b - r_a) \tau r_a d\theta dr_a,$$

gdzie τ oznacza średnie naprężenie styczne występujące na powierzchni próbki. Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(17) \quad A = e^{\frac{\varphi_b - \varphi_a}{2}} - 1$$

oraz po podstawieniu zależności (14) do wyrażenia na dE'_T otrzymuje się

$$(18) \quad dE'_T = A \tau r_a^2 d\theta dr_a.$$

Stąd po scałkowaniu po powierzchni próbki wyrażenie na E'_T przyjmuje postać

$$(19) \quad E'_T = \frac{2}{3} \pi A \mu \sigma_s a^3.$$

Przy całkowaniu przyjęto, że naprężenia styczne τ na powierzchni próbki są stałe i równe $\mu \sigma_s$. Wyniki obliczeń σ_0 i $\mu(\varepsilon)$, uzyskane na podstawie zależności będących rezultatem przeprowadzonej w pracy analizy świadczą o tym, że przyjęcie równości $\tau = \mu \sigma_s$ nie powoduje większego błędu. W rzeczywistości, jak wynika z pracy [7], wartości współczynnika tarcia μ , naprężenia ściskającego σ_z i naprężenia stycznego τ zmieniają się wzdłuż promienia próbki. Wyrażenie (19) zostało wyprowadzone tylko dla jednej z dwóch powierzchni kontaktu próbki. W związku z tym praca dysypowana na tarcie dla całej próbki jest dwukrotnie większa

$$(20) \quad E_T = \frac{4}{3} \pi A \mu \sigma_s a^3.$$

Z kolei z równania (8) wynika następująca zależność na pracę tarcia E_T

$$(21) \quad E_T = V(\varphi_b - \varphi_a) (\sigma_s - \sigma_0).$$

Podstawiając (21) do (20) oraz uwzględniając zależność $s_a = s_0 e^{-(3/2)\varphi_a}$ otrzymuje się po przekształceniach

$$(22) \quad \sigma_s = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{2\mu}{3s_0 K}},$$

gdzie

$$(23) \quad K = \frac{1}{A} (\varphi_b - \varphi_a) e^{-(3/2)\varphi_a}.$$

Z wyrażenia (22) wynika bezpośrednio zależność na współczynnik tarcia μ

$$(24) \quad \mu = \frac{3}{2} s_0 K \frac{\sigma_s - \sigma_0}{\sigma_s}.$$

Ponieważ otrzymane z zależności (22) i (24) wartości σ_s i μ są średnimi w rozpatrywanym przedziale odkształceń $\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a$, ze względu na dokładność wyników przedział ten nie powinien być zbyt duży.

Okazuje się jednak, że można znaleźć graniczną wartość K w przypadku, gdy przedział odkształceń $\Delta\varphi$ dąży do zera otrzymując w ten sposób ścisłą postać zależności (22) i (23). Po podstawieniu do wyrażenia (23)

$$\varphi_a = \varphi_s - \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \varphi_b = \varphi_s + \frac{\Delta\varphi}{2}$$

oraz uwzględniając oznaczenie (17) można K przedstawić w postaci

$$K = \frac{\Delta\varphi e^{(\Delta\varphi/2 - \varphi_s)}}{e^{1/2(\varphi_s + \Delta\varphi/2)} - e^{1/2(\varphi_s - \Delta\varphi/2)}}.$$

Stosując w celu znalezienia granicznej formy K dla $\Delta\varphi \rightarrow 0$ regułę de l'Hospitala otrzymuje się

$$(25) \quad \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} K_{\Delta\varphi \rightarrow 0} = 2e^{-3/2\varphi_s}.$$

Stąd dla $\sigma_s \equiv \bar{\sigma}_z$ oraz $\varphi_s \equiv \varphi$ wyrażenia (22) i (24) przyjmują postać

$$(26) \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{\mu}{3s_0} e^{3/2\varphi}},$$

$$(27) \quad \mu = 3s_0 e^{-3/2\varphi} \frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_0}{\bar{\sigma}_z}.$$

Wyrażenia te mają inną postać niż odpowiadające im zależności (1) i (2) uzyskane metodą całkowania równania równowagi. Różnica ta wynika stąd, że przy wyprowadzaniu zależności (20) na pracę tarcia E_T przyjęto uśrednioną stałą wartość σ_z oraz τ na powierzchni czołowej próbki, podczas gdy z całkowania równania równowagi otrzymuje się

$$(28) \quad \tau(r) = \mu\sigma_z(r) = \mu\sigma_0 \exp\alpha \left(1 - \frac{r}{a_a}\right),$$

gdzie α , podobnie jak we wzorze (1), jest równe $2\mu a/h$. Podstawiając (28) do wyrażenia (18) na dE'_r oraz całkując otrzymuje się zależność na pracę tarcia w postaci

$$(29) \quad E_T = 8\pi A \mu \sigma_0 \frac{a_a^3}{\alpha^3} \left(e^\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha - 1 \right).$$

Na podstawie równań (21) oraz (29) można określić stosunek $\bar{\beta}_E = \bar{\sigma}_z/\sigma_0$ w formie

$$(30) \quad \bar{\beta}_E = \frac{2A}{\varphi_b - \varphi_a} (\bar{\beta}_R - 1) + 1,$$

gdzie

$$\bar{\beta}_R = \frac{2}{\alpha^2} (e^\alpha - \alpha - 1)$$

oznacza stosunek $\bar{\sigma}_z/\sigma_0$ wynikający z równania (1). W granicy, gdy $\Delta\varphi \rightarrow 0$ wyrażenie $2A/(\varphi_b - \varphi_a)$ osiąga wartość

$$(31) \quad \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{2A}{\Delta\varphi} = 1.$$

Stąd z wyrażeń (31) oraz (30) wynika, że przy założeniu niejednorodnego rozkładu naprężeń τ na powierzchni czołowej próbki, określonego zależnością (28), wielkości $\bar{\beta}_E$ i $\bar{\beta}_R$ są sobie równe, co oznacza, że w takim przypadku metoda energetyczna daje tę samą średnią wartość $\bar{\sigma}_z$, którą w metodzie całkowania równania równowagi otrzymuje się z bezpośredniego uśrednienia rozkładu $\bar{\sigma}_z(r)$ po powierzchni próbki.

Z zależności (26) wynika, że gdy μ będzie dążyć do wartości $3s_0 e^{-3/2\varphi}$ naprężenia $\bar{\sigma}_z$ będą nieskończenie wzrastać. W rzeczywistości przy pewnej wartości $\mu_k < 3s_0 e^{-3/2\varphi}$ na powierzchni pomiędzy próbką i stemplem pojawi się tarcie szcpe oraz nastąpi ścięcie materiału wewnątrz próbki. Korzystając ze wzoru (26) można znaleźć zależność na krytyczną wartość μ jako funkcję $\mu_k = f(s_0, \varphi)$. Przy przyjęciu warunku plastyczności Treski

$$(32) \quad \mu_k \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_0}{2}$$

wyrażenie określające μ_k posiada następującą postać:

$$(33) \quad \mu_k = \frac{1}{2 + \frac{1}{3s_0} e^{3/2\varphi}}.$$

W przypadku gdy wartość $\mu > \mu_k$ zależność (26) przestaje być słuszna.

Przedstawiona w pracy metoda analizy rozważanego problemu wynika z równania bilansu pracy dla pewnego przedziału odkształcenia $\Delta\varepsilon = \varepsilon_b - \varepsilon_a$. W związku z tym dokładność metody zależy od poprawnego wyboru miar naprężenia i odkształcenia. Przy prawidłowym ich doborze oraz przy założeniu $\mu = 0$ w rozpatrywanym przedziale odkształceń $d\varepsilon$ jest spełniona zasada zachowania energii, którą można wyrazić w następującej formie:

$$(34) \quad Pdh = V\bar{\sigma}_z d\varepsilon,$$

gdzie P oznacza siłę nacisku działającą na powierzchnię kontaktu próbki ze stemplem. Najczęściej używaną miarą naprężenia $\bar{\sigma}_z$ w analizie próby ściskania jest miara w sensie Cauchy'ego, tzn.

$$(35) \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta S},$$

gdzie siła nacisku P oraz powierzchnia ΔS są odniesione do stanu aktualnego istniejącego w procesie ściskania. Równanie (34) będzie spełnione jeśli jednocześnie z miarą naprężenia (35) zostanie przyjęta logarytmiczna miara odkształcenia $\varphi = \ln(h_0/h)$.

Do analizy procesu ściskania można również stosować miary naprężenia i odkształcenia odniesione do początkowej geometrii próbki. Miary te można określić następująco:

$$(36) \quad \sigma = \lim_{\Delta S_0 \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta S_0},$$

$$(37) \quad \varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}.$$

Nieprawidłowe jest natomiast stosowanie miary naprężenia (35) odniesionej do aktualnej geometrii próbki jednocześnie z miarą odkształcenia (37) odniesioną do początkowej geometrii próbki. W celu pokazania wielkości błędów spowodowanych nieprawidłowym doбором miar naprężenia i odkształcenia poniżej wyprowadzone zostaną, w taki sam sposób jak poprzednio, zależności określające $\bar{\sigma}_z$ oraz μ . Dla naprężeń odniesionych do aktualnej powierzchni czołowej próbki, tzn. dla zależności (35), oraz dla przyjętej miary odkształcenia $\varepsilon = (h_0 - h)/h_0$ związki te przyjmują postać

$$(38) \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{\mu}{3s_0} (1 - \varepsilon)^{-5/2}},$$

$$(39) \quad \mu = 3s_0(1 - \varepsilon)^{5/2} \frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_0}{\bar{\sigma}_z}.$$

Wyrażenia na $\bar{\sigma}_z$ oraz μ dla stosowanych powyżej miar naprężenia i odkształcenia możemy otrzymać również przez podstawienie do wzorów (26) oraz (27) związku pomiędzy logarytmiczną i aktualnie przyjętą miarą odkształcenia

$$(40) \quad \varphi = -\ln(1 - \varepsilon),$$

w tym przypadku otrzymuje się:

$$(41) \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{\mu}{3s_0} (1 - \varepsilon)^{-3/2}},$$

$$(42) \quad \mu = 3s_0(1 - \varepsilon)^{3/2} \frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_0}{\bar{\sigma}_z}.$$

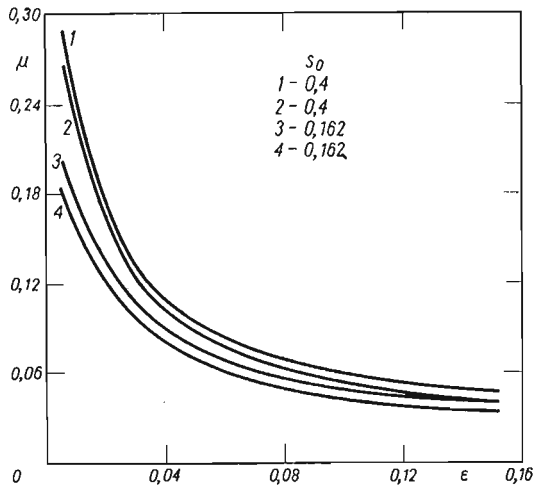
Zależności (41) i (38) oraz (42) i (39) różnią się wykładnikiem potęgi wyrażenia $1 - \varepsilon$, przy czym z powodu nieprawidłowego doboru miar naprężenia i odkształcenia zależności (38) i (39) są mniej dokładne.

5. Wyniki obliczeń przeprowadzonych na podstawie badań doświadczalnych

Poniżej podane zostaną wyniki obliczeń współczynnika tarcia μ , otrzymane z różnych zależności na podstawie tych samych danych doświadczalnych. Obliczenia wykonano wykorzystując dane doświadczalne zamieszczone w pracach [1] i [2]. W celu porównania na rysunkach przedstawiono niektóre wyniki obliczeń przeprowadzonych w pracach [2] oraz [3]. Ponieważ w pracach [1, 2] oraz [3] naprężenia odniesione są do aktualnej powierzchni czołowej próbki, natomiast odkształcenia do początkowej wysokości h_0 , dla uzyskania możliwości bezpośredniego porównania w obliczeniach przeprowadzonych w obecnej pracy przyjęto podobne miary naprężenia i odkształcenia.

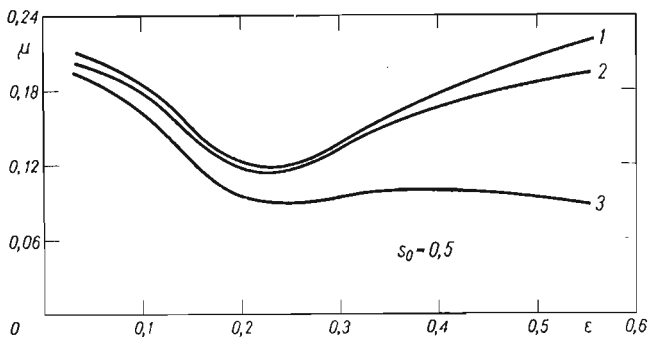
Rysunek 5 przedstawia wartości μ obliczone w zakresie odkształceń $0,01 \div 0,15$ dla próbek aluminiowych smarowanych sproszkowanym MoS_2 . Porównanie uzyskanych rezultatów wskazuje, że różnice pomiędzy wynikami otrzymanymi z zależności (2) oraz

(39) dla tego zakresu odkształceń nie są zbyt duże. Wartości μ obliczone na podstawie zależności (42) będą zawarte wewnątrz przedziału wyznaczonego ze wzorów (2) oraz (39).



Rys. 5. Wartości współczynnika tarcia μ w funkcji odkształcenia obliczone dla próbek aluminiowych z zależności (2) — linie 1 i 3 oraz z zależności (39) — linie 2 i 4, na podstawie tych samych danych doświadczalnych

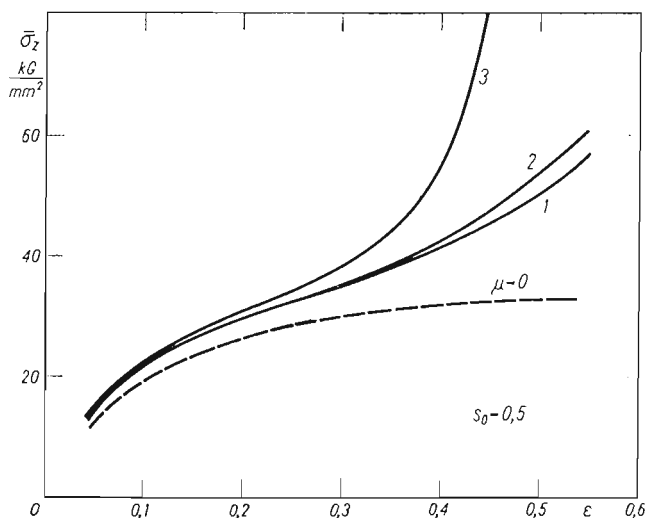
Na rys. 6 przedstawiono wartości μ w zależności od odkształcenia dla próbek miedzianych w zakresie odkształceń od 0,05 do 0,55. Z przedstawionych rezultatów wynika, że różnica w wartościach μ obliczonych ze wzorów (2), (39) oraz (42) wzrasta wraz z od-



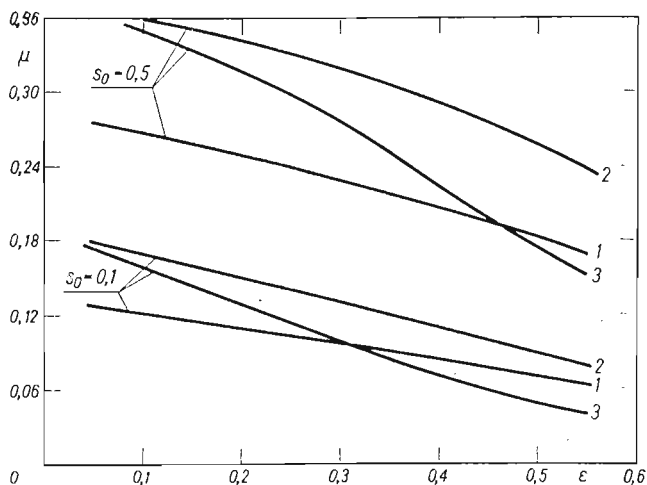
Rys. 6. Wartości współczynnika tarcia μ w zależności od odkształcenia dla próbek miedzianych. Linie 1, 2, 3 wyznaczone odpowiednio ze wzorów (2), (42) oraz (39)

kształceniem. Duża różnica w wartościach μ uzyskanych z zależności (2) oraz (39) jest spowodowana nieprawidłowym doбором miar naprężenia i odkształcenia przy wyrowadzaniu zależności (39).

Z kolei niewielka różnica w wartościach μ przedstawionych liniami 1 i 2 świadczy, że obie metody dają zbliżone rezultaty. W zakresie odkształceń od $0 \div 0,5$ różnica ta wynosi średnio 5%.



Rys. 7. Zależności średnich naprężeń $\bar{\sigma}_z$ od odkształcenia obliczone z różnych wzorów dla tych samych wartości $\mu(\epsilon)$. Linie 1, 2, 3 wyznaczono odpowiednio ze wzorów (1), (41) oraz (38)



Rys. 8. Graficzne przedstawienie warunku powstawania tarcia szczepczego. Linie 1, 2, 3 wyznaczono na podstawie zależności (32) podstawiając zamiast $\bar{\sigma}_z$ odpowiednio wzory (1), (41) oraz (38)

Wpływ tarcia na kształt krzywej umocnienia został pokazany na rys. 7. Przedstawione krzywe umocnienia obliczono ze wzorów (1), (38) oraz (41) dla tej samej zależności $\mu(\epsilon)$.

Na rys. 8 przedstawiono wyniki obliczeń μ_k otrzymane na podstawie zależności (32) dla wartości $\bar{\sigma}_z$ obliczonych ze wzorów (1), (38) oraz (41).

6. Uwagi i wnioski

Jak wynika z przeprowadzonych rozważań, korzystając z równania bilansu pracy (6) oraz wyrażenia na pracę tarcia (20), można dokonać analizy procesu ściskania próbki walcowej z uwzględnieniem tarcia na powierzchniach kontaktu.

Równanie (6) sprowadzone do postaci (8) wyjaśnia ponadto w prosty sposób charakter zależności $\bar{\sigma}_z(s_0)_{\varepsilon=\text{const}}$, rys. 2. Przy założeniu stałej średnicy próbek praca tarcia zmienia się w niewielkim stopniu wraz ze wzrostem s_0 , natomiast objętość V zwiększa się proporcjonalnie do s_0 . Stąd drugi człon po prawej stronie w równaniu (8) zmniejsza się ze wzrostem s_0 , co przy stałej wartości σ_0 nadaje krzywej $\bar{\sigma}_z(s_0)_{\varepsilon=\text{const}}$ obserwowany doświadczalnie kształt.

Zaproponowana w pracy metoda analizy pozwala obliczać wartość aktualnego naprężenia plastycznego płynięcia σ_0 , co nie jest możliwe przy korzystaniu z metody całkowania równania równowagi. Dość duża dokładność wyznaczania σ_0 z układu równań (9) świadczy ponadto, że postać zależności (8) jest w tym przypadku prawidłowa.

W dalszej analizie problemu, w celu wyprowadzenia zależności $\bar{\sigma}_z(\sigma_0, \varepsilon, s_0, \mu)$ przyjęto, że praca tarcia na powierzchniach kontaktu określona zależnością

$$(i) \quad E_T = \frac{4}{3} \pi A \mu \sigma_s a^3$$

jest równa całkowitej dodatkowej pracy wykonanej w procesie ściskania, określonej zależnością

$$(ii) \quad E_T = V(\varepsilon_b - \varepsilon_a)(\sigma_s - \sigma_0).$$

W odniesieniu do rzeczywistej próby ściskania założenie to może nie być całkowicie ściśle ze względu na niejednorodność odkształcenia wewnątrz próbki oraz zmienne rozkłady $\mu(r)$, $\sigma_z(r)$ i $\tau(r)$ na powierzchniach kontaktu. Dodatkowym warunkiem równości pracy obliczonej z zależności (i) oraz (ii) jest prawidłowy dobór miar naprężenia i odkształcenia. Jak wynika z przeprowadzonej w pracy dyskusji, niespełnienie tego warunku może powodować dość duże błędy.

Zarówno w metodzie całkowania równania równowagi, jak i w metodzie zaproponowanej w pracy zakłada się stały rozkład współczynnika tarcia μ na powierzchniach czołowych próbki. W obecnej pracy zakłada się również stałą wartość naprężeń stycznych τ na powierzchniach kontaktu, natomiast z metody całkowania równania równowagi otrzymuje się, że dla $\mu(r) = \text{const}$ τ wzrasta w kierunku środka powierzchni czołowej. W rzeczywistości, jak wynika z pracy [7], wartości μ oraz τ zmniejszają się w kierunku środka powierzchni czołowej próbki.

Ponieważ związki (1) i (2) zostały wyprowadzone metodą całkowania równania równowagi wartości σ_z i μ obliczone z tych związków będą stanowiły dolną ocenę naprężeń ściskających $\bar{\sigma}_z$ oraz górną ocenę współczynnika tarcia μ . Natomiast wartości $\bar{\sigma}_z$ i μ obliczone ze związków wyprowadzonych w pracy będą stanowiły górną ocenę naprężenia ściskającego $\bar{\sigma}_z$ oraz dolną ocenę współczynnika tarcia μ dla stałego rozkładu $\mu(r)$ na powierzchni czołowej próbki.

Ze względu na przyjęte założenia upraszczające rezultaty obu metod będą obarczone błędem. Opierając się na danych doświadczalnych zamieszczonych w pracach [2] oraz [7]

można wnioskować, że wartości μ uzyskane zarówno na podstawie zależności (2) — odpowiadającej metodzie całkowania równania równowagi — jak i zależności (42) — odpowiadającej metodzie zaproponowanej w pracy — będą wyższe od rzeczywistych. Ze względu na brak bezpośredniej metody wyznaczania współczynnika tarcia oraz złożoność innych eksperymentalnych metod trudno jest ocenić błąd wartości μ otrzymywanych na podstawie zależności (2) oraz (42).

Należy dodać, że obliczanie współczynnika tarcia z zależności (27) oraz (42) nie wymaga stosowania techniki numerycznej, co jest konieczne w przypadku korzystania z zależności (2).

Literatura cytowana w tekście

1. M. COOK, E. C. LARKE, *Resistance of copper and copper alloys to homogeneous deformation in compression*, I. Inst. Metals, **71**, (1945) 371.
2. Z. MALINOWSKI, J. KLEPACZKO, *Szacowanie współczynnika tarcia na czołach ściskanej plastycznie próbki walcowej*, Mech. Teoret. i Stos., **10**, 4, (1972) 561.
3. Z. MALINOWSKI, *Energetyczna metoda analizy wpływu tarcia w procesie plastycznego ściskania próbki walcowej*, Prace IPPT, 48/1974.
4. W. SCHROEDER, D. A. WEBSTER, *Press-forging thin sections: effect of friction, area, and thickness on pressures required*, J. Appl. Mech., **16**, (1949) 289.
5. E. SIEBEL, *Grundlagen zur Berechnung des Kraft und Arbeitbedarf bei Schmieden und Walzen*, Stahl u. Eisen. Düsseldorf, **43**, 41, (1923) 1295.
6. E. G. THOMSEN, C. H. YANG, S. KOBAYASHI, *Plastic Deformation in Metal Processing*, Mac Millan, 1965.
7. G. T. VAN ROOYEN, W. A. BACKOFEN, *A study of interface friction in plastic compression*, Int. J. Mech. Sciences, **1**, 1, (1960) 1.

Резюме

О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА ВЛИЯНИЯ ТРЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

В работе представлен способ учета трения на поверхностях контакта в процессе сжатия цилиндрического образца. Анализ проведен при предположении, что вся дополнительная работа, обусловленная трением во время деформирования образца, затрачивается на поверхностях контакта между образцом и сжимающими его штампами. В предположении однородного деформирования выводятся зависимости, определяющие актуальное напряжение текучести σ_0 , среднее осевое напряжение $\bar{\sigma}_z$ и коэффициент трения μ .

С помощью полученных зависимостей вычислены, на основе опытных данных из работ [1] и [2], значения $\mu(\epsilon)_{\sigma_0=\text{const}}$. Эти значения сравнены со значениями μ , полученными в работе [2] путем интегрирования уравнения равновесия.

Summary

ON A METHOD OF FRICTION ANALYSIS IN PLASTICALLY COMPRESSED CYLINDRICAL SPECIMEN

In this paper a method is presented which makes it possible to take into consideration the effect of friction at the interfaces during compression of a cylindrical specimen. In the analysis performed it is assumed that the additional work developed by the frictional effects is dissipated over the interfaces between

the specimen and loading platens. Assuming the uniform state of strain, the relations are obtained yielding the actual flow stress σ_0 , the axial stress $\bar{\sigma}_z$ and the coefficient of friction μ . Making use of the relations derived the values of $\mu(\dot{\epsilon})_{\dot{\sigma}_0 = \text{const}}$ are computed on the basis of experimental data taken from the paper [1] and [2]. These values are compared with the values μ which were obtained in the paper [2] as the result of integrating the equilibrium equation.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lipca 1975 r.

PRZYKŁAD BADANIA DOKŁADNOŚCI LINIOWEGO UKŁADU DYNAMICZNEGO
W PRZYPADKU NIESTACJONARNYM

JÓZEF NIZIOŁ, NARCYZ KONDRACIUK (KRAKÓW)

Wstęp

Dużą rolę w rozwoju techniki odegrały układy automatycznego sterowania. W układach tych można wyróżnić obiekt regulacji oraz regulator, który może działać na obiekt poprzez wejścia x_1, x_2, \dots, x_n . Wyjścia obiektu $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ będą mniej lub więcej różnić się od założonego przebiegu procesu $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \dots, \tilde{y}_m$. Problem optymalnego sterowania polega na tym, by wyjścia obiektu $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ różniły się minimalnie (w określonym sensie) od żądanych przebiegów $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \dots, \tilde{y}_m$. Do tego celu można dążyć w różny sposób:

- 1) poprzez odpowiedni dobór funkcji $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$,
- 2) przy znanej strukturze układu poprzez dobór jego parametrów (niepełna synteza),
- 3) poprzez dobór struktury układu, czyli dokonanie pełnej syntezy.

Wymuszenia, które działają na dany układ możemy podzielić na użyteczne, czyli sterujące, nazywane sygnałami, i zakłócające, zwane szumami. Zakłócenia nie mogą być określone w sposób jednoznaczny w sensie deterministycznym i należy je traktować jako procesy stochastyczne.

W niniejszej pracy zajmiemy się jedynie szczególnym przypadkiem pełnej syntezy. Rozważać będziemy układ jednokanałowy, tzn. układ dynamiczny z jednym wejściem i jednym wyjściem.

Dokładność dynamiczną takiego układu można zdefiniować następująco: niech wejście ma postać $X(t) = U(t) + V(t)$, gdzie $U(t)$ jest sygnałem, $V(t)$ szumem; $Z(t)$ niech będzie żądanym wyjściem. Wprowadźmy pewną funkcję zwaną funkcją strat.

Funkcją wagi nazywać będziemy pewną nieujemną funkcję dwóch zmiennych $Y(t)$ i $Z(t)$, gdzie

$$Y(t) = L[U(t) + V(t)],$$

zaś L jest pewnym operatorem liniowym.

Funkcja wagi przyjmuje postać

$$W = W\{Z(t), L[U(t) + V(t)]\}.$$

Wartość oczekiwana funkcji wagi nosi nazwę funkcji strat.

Jako kryterium dokładności dynamicznej układu przyjmujemy minimum funkcji strat. Przy przyjęciu funkcji wagi w postaci

$$W = k \{Z(t) - L[U(t) + V(t)]\}^2 = k\varepsilon^2$$

funkcja strat przyjmuje postać

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 p(\varepsilon, t) d\varepsilon.$$

Symbolem $\langle \cdot \rangle$ oznaczają będziemy wartość średnią procesu stochastycznego po zbiorze realizacji.

Jako kryterium dokładności dynamicznej układu przyjmiemy warunek $\bigwedge_{t \in \tau} \langle \varepsilon^2(t) \rangle = \min$, gdzie τ jest czasem obserwacji układu dynamicznego. Dodatkowo żądamy, by funkcja oczekiwana różnicy $Y(t) - Z(t)$ była tożsamościowo równa zeru.

Żądany proces na wyjściu ma postać

$$Z(t) = N[U(t)],$$

gdzie N jest znanym, narzuconym przez nas operatorem.

1. Dokładność dynamiczna układu jednokanałowego w przypadku niestacjonarnym

Zakładamy, że:

- 1) operatory N i L są operatorami liniowymi,
- 2) funkcje $U(t)$ i $V(t)$ są funkcjami przypadkowymi, których nadzieje matematyczne są równe zeru,
- 3) istnieją momenty drugiego rzędu procesów $U(t)$, $V(t)$ i znane są funkcje korelacyjne $K_u(t_1, t_2)$, $K_v(t_1, t_2)$ i $K_{uv}(t_1, t_2)$, gdzie symbolami $K_u(t_1, t_2)$, $K_v(t_1, t_2)$ odpowiednio oznaczono funkcje autokorelacyjne procesów $U(t)$ i $V(t)$, zaś symbolem $K_{uv}(t_1, t_2)$ oznaczono funkcję korelacji wzajemnej procesów $U(t)$, $V(t)$,
- 4) czas obserwacji rozpatrywanego układu jest skończony i równy T ,
- 5) proces $X(t)$ jest całkwalny w sensie średniokwadratowym.

Przy przyjętym kryterium dokładności dynamicznej dostajemy warunek

$$(1.1) \quad \left\langle \left[\int_0^T l(t, t_1) X(t_1) dt_1 - Z(t) \right]^2 \right\rangle = \min.$$

Wprowadzona funkcja przejścia $l(t, t_1)$ związana jest z operatorem L związkiem

$$\int_0^T l(t, t_1) X(t_1) dt_1 = L[X(t)].$$

Znalezienie optymalnej funkcji przejścia $l(t, t_1)$ sprowadza się do rozwiązania zagadnienia z rachunku wariacyjnego. W końcowym rezultacie $l(t, t_1)$ powinna spełniać równanie całkowe postaci [1]

$$(1.2) \quad \int_0^t l(t, t_2) K_x(t_1, t_2) dt_2 - R_{xz}(t_1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq t_1 \leq t,$$

gdzie $K_x(t_1, t_2)$ jest funkcją autokorelacyjną procesu na wejściu, zaś $R_{xz}(t_1, t_2)$ — funkcją korelacji wzajemnej wymuszenia $X(t)$ i żądanego wyjścia $Z(t)$.

Znalezienie optymalnej funkcji $l(t, t_1)$ w ogólnym przypadku jest zagadnieniem bardzo trudnym. Prekursorem w tej dziedzinie można nazwać KOLMOGOROWA [2]. Problem rozwiązany przez niego dotyczył ciągu przypadkowego, stacjonarnego. Zagadnienie syntezy w ujęciu probabilistycznym znacznie ogólniej postawił WIENER [4]. Podał on metodę rozwiązywania równania całkowego (1.2) przy następujących założeniach:

- 1) procesy $X(t)$ i $Z(t)$ są stacjonarne,
- 2) ich nadzieje matematyczne są równe zeru,
- 3) czas obserwacji układu dynamicznego $T \rightarrow \infty$.

Ogólniejszy przypadek rozwiązali ZADEH i RAGAZZINI [5] zakładając nadzieje matematyczne w postaci wielomianów potęgowych zmiennej t oraz zakładając skończony czas obserwacji T .

SHINBROT [6] podał dość prosty sposób uzyskania rozwiązania równania (1.2) w pewnym szczególnym przypadku, mianowicie wtedy, kiedy funkcje $K_x(t_1, t_2)$ i $R_{xz}(t_1, t_2)$ można przedstawić w postaci skończonych sum iloczynów funkcji każdej ze zmiennych t_1 i t_2 , tzn. kiedy prawdziwe są równości:

$$(1.3) \quad K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(t_1) \cdot \psi_j(t_2), \quad t_1 \geq t_2,$$

$$(1.4) \quad R_{xz}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^m \chi_j(t_1) \cdot \psi_j(t_2), \quad t_1 \geq t_2;$$

gdzie $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$ i $\chi_j(t)$ są deterministycznymi funkcjami czasu; oraz kiedy ponadto spełniony jest warunek

$$(1.5) \quad \sum_{j=1}^m \varphi_j(t_1) \cdot \psi_j(t_2) - \varphi_j(t_2) \cdot \psi_j(t_1) = w(t_1 - t_2),$$

tzn. funkcje $\varphi_j(t)$ i $\psi_j(t)$ są takie, że suma różnic stojąca po lewej stronie równości (1.5) jest funkcją różnicy $(t_1 - t_2)$.

Ponieważ funkcja korelacyjna $K_x(t_1, t_2)$ jest symetryczna, z równości (1.3) wynika, że

$$(1.6) \quad K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(t_2) \cdot \psi_j(t_1), \quad t_1 \leq t_2:$$

Celowe jest rozpatrywanie problemów z ograniczeniami (1.3), (1.4) i (1.5), ponieważ szeroka klasa zadań z zakresu sterowania automatycznego spełnia te warunki.

2. Wyznaczenie optymalnej funkcji przejścia dla układu całkującego

W zagadnieniach praktycznych, przy badaniu dokładności układów dynamicznych, najczęściej spotykamy się z problemami ekstrapolacji, filtracji, różniczkowania czy też ich kombinacji. W literaturze nie spotyka się problemów związanych z przypadkami, gdy operator N jest operatorem całkowania. Wiadomo, że jeżeli na dowolny całkowny proces stochastyczny podziałamy operatorem całkowania, uzyskamy proces niestacjonarny. W tym przypadku będziemy więc zawsze mieć do czynienia z problemem doboru opty-

malnej funkcji przejścia w ujęciu niestacjonarnym. W praktyce, z takimi zagadnieniami, gdzie operator N jest operatorem całkowania, spotykamy się w przypadku żyroskopu całkującego przyspieszenie liniowe obiektu, na którym jest on umieszczony [3].

Żyroskop taki spełnia funkcję przyrządu mierzącego prędkości liniowe samolotów czy raket poprzez całkowanie ich przyspieszeń. Ze względu na losowy charakter sił działających na poruszający się samolot czy raketę, przyspieszenia tych ostatnich są typowo procesami stochastycznymi. Na podstawie badań eksperymentalnych [1] wiadomo, że są to procesy na ogół stacjonarne, których funkcje korelacyjne najczęściej są aproksymowane funkcjami postaci:

$$a) \quad K_x(t_1, t_2) = \sigma_1^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|},$$

$$b) \quad K_x(t_1, t_2) = \sigma_2^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|} \cos \beta(t_2-t_1),$$

$$c) \quad K_x(t_1, t_2) = \sigma_3^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|} \cos \beta(t_2-t_1) + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|t_2-t_1|,$$

gdzie σ_i^2 , α , β pewne stałe.

Dla wszystkich tych funkcji oraz całej szerokiej klasy innych, jak i dla operatora całkowania spełnione będą warunki (1.3) i (1.4) dla funkcji korelacyjnych $K_x(t_1, t_2)$, $R_{xz}(t_1, t_2)$, jak i warunek (1.5).

Zajmiemy się znalezieniem optymalnej funkcji przejścia w przypadku ogólnym, jednak przy ograniczeniach (1.3) - (1.5).

Dla uproszczenia zapisu posłużymy się symboliką rachunku wektorowego i zbioru funkcji $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$ i $\chi_j(t)$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$ oznaczymy odpowiednio jako wektory

$\bar{\varphi}(t)$, $\bar{\psi}(t)$ i $\bar{\chi}(t)$. W tym przypadku sumy postaci $\sum_{j=1}^m \varphi_j \psi_j$ można traktować jako iloczyn skalarny wektorów $\bar{\varphi}$ i $\bar{\psi}$. Wtedy (1.3), (1.4) i (1.5) można zapisać w postaci:

$$(2.1) \quad K_x(t_1, t_2) = \bar{\varphi}(t_1) \cdot \bar{\psi}(t_2), \quad t_1 \geq t_2,$$

$$(2.2) \quad R_{xz}(t_1, t_2) = \bar{\psi}(t_1) \cdot \bar{\chi}(t_2), \quad t_1 \leq t_2,$$

$$(2.3) \quad \bar{\varphi}(t_1) \cdot \bar{\psi}(t_2) - \bar{\varphi}(t_2) \cdot \bar{\psi}(t_1) = w(t_1 - t_2).$$

Przyjmujemy, że szukane rozwiązanie równania (1.2) można przedstawić w postaci

$$(2.4) \quad I(t, t_2) = [\bar{I}(t) \cdot \bar{\gamma}(t_2)] I(t - t_2),$$

gdzie $\bar{I}(t)$ i $\bar{\gamma}(t)$ są wektorami o współrzędnych $l_1(t)$, $l_2(t)$, \dots , $l_m(t)$ i $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, \dots , $\gamma_m(t)$, a funkcja $I(t)$ jest funkcją skoku jednostkowego, tzn.

$$(2.5) \quad I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

i zapewnia zerowanie się funkcji $I(t, t_2)$ dla $t < t_2$, czyli realizowalność fizyczną układu.

Można tak określić wektory $\bar{I}(t)$ i $\bar{\gamma}(t)$, że wyrażenie (2.4) spełnia równanie (1.2). W tym celu przepisujemy równanie (1.2) uwzględniając warunki (2.1), (2.2) i (1.6). Otrzymamy

$$(2.6) \quad \bar{\varphi}(t_1) \cdot \bar{\chi}(t) = \int_0^{t_1} I(t, t_2) [\bar{\varphi}(t_1) \cdot \bar{\psi}(t_2)] dt_2 + \int_{t_1}^t I(t, t_2) [\bar{\varphi}(t_2) \cdot \psi(t_1)] dt_2.$$

Ostatnią całkę przedstawiamy jako różnicę dwóch całek w przedziałach od 0 do t i od 0 do t_1 . Więc

$$(2.7) \quad \bar{\psi}(t_1) \cdot \bar{\chi}(t) = \int_0^{t_1} l(t, t_2) [\bar{\varphi}(t_1) \cdot \bar{\psi}(t_2)] dt_2 + \int_0^t l(t, t_2) [\bar{\varphi}(t_2) \cdot \bar{\psi}(t_1)] dt_2 - \\ - \int_0^{t_1} l(t, t_2) [\bar{\varphi}(t_2) \cdot \bar{\psi}(t_1)] dt_2.$$

Następnie przenosimy drugą całkę z prawej strony na lewą i wyciągamy przed nawias wspólny czynnik

$$(2.8) \quad \bar{\psi}(t_1) \left[\bar{\chi}(t) - \int_0^t l(t, t_2) \cdot \bar{\varphi}(t_2) dt_2 \right] = \int_0^{t_1} l(t, t_2) [\bar{\varphi}(t_1) \cdot \bar{\psi}(t_2) - \bar{\varphi}(t_2) \cdot \bar{\psi}(t_1)] dt_2.$$

Wstawiając (1.3) i (2.4) otrzymamy:

$$(2.9) \quad \bar{\psi}(t_1) \left\{ \bar{\chi}(t) - \int_0^t [\bar{l}(t) \cdot \bar{\gamma}(t_2)] \cdot \bar{\varphi}(t_2) dt_2 \right\} = \bar{l}(t) \int_0^{t_1} \bar{\gamma}(t_2) w(t_1 - t_2) dt_2.$$

Po obu stronach ostatniej równości są iloczyny funkcji zmiennej t_1 i funkcji zmiennej t . Równanie to będzie spełnione jeżeli porównamy te funkcje parami, tzn.:

$$(2.10) \quad \bar{\psi}(t_1) = \int_0^{t_1} \bar{\gamma}(t_2) w(t_1 - t_2) dt_2,$$

$$(2.11) \quad \bar{l}(t) + \int_0^t [\bar{l}(t) \cdot \bar{\gamma}(t_2)] \cdot \bar{\varphi}(t_2) dt_2 = \bar{\chi}(t).$$

Funkcja wektorowa $\bar{\psi}(t_1)$ podana wzorem (2.10) wyraża się poprzez splot funkcji $\bar{\gamma}(t)$ i $w(t)$. Zakładamy istnienie transformat Laplace'a $\bar{\Psi}(s)$, $\bar{l}(s)$ i $W(s)$, funkcji $\bar{\psi}(t)$, $\bar{\gamma}(t)$ i $w(t)$; ponadto zakładamy, że $W(s) \neq 0$. Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (2.10) otrzymamy

$$(2.12) \quad \bar{l}(s) = \frac{\bar{\Psi}(s)}{W(s)}.$$

Równość ta, jako równość dwóch wektorów, będzie spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie współrzędne tych wektorów będą sobie równe. W ten sposób znajdziemy transformaty Laplace'a wszystkich m współrzędnych $\gamma_j(t)$ wektora $\bar{\gamma}(t)$ i stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a, określimy wszystkie nieznanne funkcje $\gamma_j(t)$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

Aby obliczyć współrzędne wektora $\bar{l}(t)$, przepiszemy równanie (2.11) w postaci układu m skalarnych równań

$$(2.13) \quad \sum_{j=1}^m [a_{ji}(t) + \delta_{ji}] l_j(t) = \chi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie

$$(2.14) \quad a_{ji}(t) = \int_0^t \gamma_j(t_2) \varphi_i(t_2) dt_2,$$

a δ_{ji} , jak wiadomo, równa jest zero, gdy $j \neq i$, i jest równa jedności, gdy $j = i$.

W przypadku gdy układ (2.9) jest układem niesprzecznym, z (2.13) wyliczamy funkcje $l_j(t)$ i podstawiając je do (2.4) otrzymamy funkcję wagi optymalnego układu dynamicznego określonego równaniem całkowym (1.2).

Jeżeli układ (2.9) jest spreczny, oznacza to, że funkcja $l(t, t_2)$ została założona niewłaściwie. W tej sytuacji należy przyjąć ją w innej postaci, mianowicie:

$$(2.15) \quad l(t, t_2) = \bar{l}(t) \cdot \bar{\gamma}(t_2) l(t-t_2) + \sum_k h_k(t) \delta^{(k)}(t-t_2),$$

gdzie $h_k(t)$ są dowolnymi funkcjami wybranymi tak, aby wyrażenie $l(t)$ uczynić możliwie najprostszym; $\delta^{(k)}(t-t_2)$ jest k -tą pochodną funkcji δ -Diraca.

Jeśli funkcja wagi jest postaci (2.15), to równanie (2.9) przyjmie postać:

$$(2.16) \quad \bar{\psi}(t_1) \left\{ \bar{\chi}(t) - \int_0^t [\bar{l}(t) \cdot \bar{\gamma}(t_2)] \bar{\varphi}(t_2) dt_2 - \sum_k h_k(t) \int_0^t \delta^{(k)}(t-t_2) \cdot \bar{\varphi}(t_2) dt_2 \right\} = \\ = \int_0^{t_1} \bar{l}(t) \cdot \bar{\gamma}(t_2) w(t_1-t_2) dt_2 + \sum_k h_k(t) \int_0^{t_1} \delta^{(k)}(t-t_2) w(t_1-t_2) dt_2.$$

Ostatnia całka jest równa zero, ponieważ $t_1 < t$. Natomiast drugą całkę można łatwo obliczyć korzystając z własności funkcji δ -Diraca. Zakładając, że $\bar{\varphi}(t)$ jest klasy C^k otrzymujemy

$$(2.17) \quad \int_0^t \delta^{(k)}(t-t_2) \bar{\varphi}(t_2) dt_2 = \bar{\varphi}^{(k)}(t).$$

Uwzględniając poczynione wyżej uwagi równanie (2.16) napiszemy w postaci

$$(2.18) \quad \bar{\psi}(t_1) \left\{ \bar{\chi}(t) - \int_0^t [l(t) \cdot \bar{\gamma}(t_2)] \cdot \bar{\varphi}(t_2) dt_2 - \sum_k h_k(t) \cdot \bar{\varphi}^{(k)}(t) \right\} = \\ = l(t) \int_0^{t_1} \bar{\gamma}(t_2) w(t_1-t_2) dt_2.$$

Stąd łatwo widać, że równości (2.10) i (2.11) przyjmą odpowiednio postać:

$$(2.19) \quad \bar{\psi}(t_1) = \int_0^{t_1} \bar{\gamma}(t_2) w(t_1-t_2) dt_2, \quad w \neq 0,$$

$$(2.20) \quad \bar{l}(t) + \int_0^t [\bar{l}(t) \cdot \bar{\gamma}(t_2)] \cdot \bar{\varphi}(t_2) dt_2 + \sum_k h_k(t) \bar{\varphi}^{(k)}(t) = \bar{\chi}(t).$$

Macierzowa forma układu równań (2.20) będzie identyczna z (2.13), jeżeli wektor z elementami $\chi_j(t)$ zastąpić wektorem o wyrazach $d_j(t)$, gdzie

$$(2.21) \quad d_j(t) = \chi_j(t) - \sum_k h_k(t) \bar{\varphi}_j^{(k)}(t).$$

Dobierając odpowiednio funkcje $h_k(t)$, z układu (2.20) obliczymy szukane funkcje $l_j(t)$.

3. Przykład

Jako przykład znajdziemy optymalną funkcję przejścia układu dynamicznego, całkującą funkcję przypadkową $X(t)$. Układ jest obserwowany przez skończony okres czasu od 0 do T . Funkcja korelacyjna $K_x(\tau)$ jest określona wzorem

$$(3.1) \quad K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \langle X(t) \rangle = 0.$$

W tym przypadku niestacjonarność zagadnienia, jak zostało nadmienione w rozdz. 2, jest związana z operacją całkowania. Szukana funkcja wagi jest określona równaniem (1.2), gdzie

$$(3.2) \quad R_{xz}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \sigma^2 e^{-\alpha(t_1-\xi)} d\xi = -\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha t_1} + \frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha(t_1-t_2)}, \quad t_2 \leq t_1.$$

Widać stąd, że jeżeli założymy:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= 0, & \varphi_2(t) &= \sigma e^{-\alpha t}, \\ \psi_1(t) &= 1, & \psi_2(t) &= \sigma e^{\alpha t}, \\ \chi_1(t) &= -\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha t}, & \chi_2(t) &= \frac{\sigma}{\alpha} e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

to spełnione są warunki (1.3) i (1.4) dla $m = 2$. Mianowicie:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= 0 \cdot 1 + \sigma e^{-\alpha t_1} \cdot \sigma e^{\alpha t_2}, \quad t_1 \geq t_2, \\ R_{xz}(t_1, t_2) &= -\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha t_2} \cdot 1 + \frac{\sigma}{\alpha} e^{-\alpha t_2} \cdot \sigma e^{t_1 \alpha}, \quad t_1 \leq t_2, \end{aligned}$$

równość (1.5) zaś ma postać

$$(3.4) \quad \sigma e^{-\alpha t_1} \cdot \sigma e^{\alpha t_2} - \sigma e^{-\alpha t_2} \cdot \sigma e^{\alpha t_1} = \sigma^2 [e^{-\alpha(t_1-t_2)} - e^{\alpha(t_1-t_2)}] = w(t_1 - t_2).$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do funkcji $\psi_j(t)$, $j = 1, 2$ i $w(t)$ otrzymamy

$$\Psi_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \Psi_2(s) = \frac{\sigma}{s-\alpha}, \quad W(s) = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 - s^2}.$$

Zgodnie z (2.12) transformaty Laplace'a funkcji $\gamma_1(t)$ i $\gamma_2(t)$ mają postać

$$\Gamma_1(s) = \frac{\alpha^2 - s^2}{2\alpha\sigma^2 s}, \quad \Gamma_2(s) = -\frac{\alpha + s}{2\alpha\sigma}.$$

Obliczając oryginały, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \frac{\alpha}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\alpha\sigma^2} \delta^{(1)}(t), \\ \gamma_2(t) &= -\frac{1}{2\sigma} \delta(t) - \frac{1}{2\alpha\sigma} \delta^{(1)}(t), \end{aligned}$$

gdzie $t > 0$ i $\delta(t)$ jest funkcją δ -Diraca.

Aby obliczyć funkcje $l_1(t)$ i $l_2(t)$, należy rozwiązać układ równań (2.13). W tym celu obliczamy współczynniki $a_{ji}(t)$, $i, j = 1, 2$, według wzoru (2.14)

$$a_{11}(t) = \int_{0^-}^t 0 dt_2 = 0,$$

$$a_{21}(t) = \int_{0^-}^t 0 dt_2 = 0,$$

$$a_{22}(t) = \int_{0^-}^t \left[-\frac{1}{2\sigma} \delta(t_2) - \frac{1}{2\alpha\sigma} \delta^{(1)}(t_2) \right] \sigma e^{-\alpha t_2} dt_2 = -1,$$

$$a_{12}(t) = \int_{0^-}^t \left[\frac{\alpha}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\alpha\sigma^2} \delta^{(1)}(t_2) \right] \sigma e^{-\alpha t_2} dt_2 = -\frac{1}{2\sigma} e^{-\alpha t}.$$

Układ (2.13) ma postać:

$$(3.5) \quad \begin{cases} l_1(t) = -\frac{\sigma^2 e^{-\alpha t}}{\alpha}, \\ -\frac{1}{2\sigma} e^{-\alpha t} \cdot l_1(t) = \frac{\sigma}{\alpha} e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że układ równań (3.5) jest sprzeczny.

Zagadnienie to można rozwiązać, jeżeli założymy, że $l_2(t) = 0$ i jeżeli będziemy poszukiwać funkcji przejścia w postaci (2.15).

Obliczamy $d_j(t)$, $j = 1, 2$

$$d_1(t) = \frac{-\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha t},$$

$$d_2(t) = \frac{\sigma}{\alpha} e^{-\alpha t} - h_0(t) \sigma e^{-\alpha t} + h_1(t) \sigma \alpha e^{-\alpha t} - h_2(t) \sigma \alpha^2 e^{-\alpha t} + h_3(t) \sigma \alpha^3 e^{-\alpha t} - \dots$$

Aby rozwiązanie uczynić prostszym założymy, że $h_k(t) = 0$, $k \geq 1$. Wtedy układ równań (2.20) przyjmie postać:

$$\begin{cases} l_1(t) = -\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha t}, \\ -\frac{1}{2\sigma} e^{-\alpha t} \cdot l_1(t) = \frac{\sigma}{\alpha} e^{-\alpha t} - h_0(t) \sigma e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań znajdziemy

$$h_0(t) = \frac{2 - e^{-\alpha t}}{2\alpha}$$

i

$$l_1(t) = -\frac{\sigma^2 e^{-\alpha t}}{\alpha}.$$

Wstawiając obliczone niewiadome do (2.15) otrzymamy impulsową funkcję przejścia rozpatrywanego układu

$$l(t, t_2) = -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha} \delta^{(1)}(t_2) \right] + \frac{2 - e^{-\alpha t}}{2\alpha} \delta(t - t_2).$$

Minimalną wartość średnią błędu kwadratowego można obliczyć według wzoru

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle_{\min} = K_z(t, t) - \int_0^T l(t, t_1) R_{xz}(t_1, t) dt_1.$$

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle_{\min} &= \frac{2\sigma^2}{\alpha^2} [\alpha t + e^{-\alpha t} + 1] - \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} e^{-2\alpha t} \int_0^t [\alpha - \delta^{(1)}(t_1) - \\ &\quad - 2\alpha e^{\alpha t} \delta(t - t_1) + \alpha \delta(t - t_1)] (1 - e^{\alpha t_1}) dt_1 - \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (1 - e^{\alpha t}) e^{-\alpha t} \int_{t^-}^T [\alpha - \delta^{(1)}(t_1) - \\ &\quad - 2\alpha e^{\alpha t} \delta(t - t_1) + \alpha \delta(t - t_1)] e^{-\alpha t_1} dt_1 = \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} [4\alpha t + e^{-\alpha t} (9 + e^{-\alpha T}) - e^{-2\alpha t} (2 + \alpha t) - e^{-\alpha T} + 2]. \end{aligned}$$

Literatura cytowana w tekście

1. И. Б. ЧЕЛПАНОВ, *Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах*, Наука, Москва 1967.
2. А. Н. КОЛМОГОРОВ, *Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей*, Изв. АН СССР, Матем., 1 (1949).
3. J. NIZIOŁ, *Dynamika żyroskopów ze szczególnym uwzględnieniem żyroskopu kalkującego w nieliniowym ujęciu deterministycznym i probabilistycznym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, 1 (1975).
4. N. WIENER, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time*, Series John Wiley, 4 (1949).
5. L. ZADEH, I. R. RAGGAZZINI, *An extension of Wiener's theory of prediction*, J. Appl. Physics, 21 (1950).
6. M. SHINBROT, *On the integral equation occurring in optimisation theory with nonstationary inputs*, J. Mathem. and Physics, 1, 36 (1957).

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
В НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Целью работы является определение оптимальной весовой функции для динамической системы в нестационарном случае, когда автокорреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ сигнала на входе $X(t)$ а также корреляционная функция $R_{xz}(t_1, t_2)$ входа $X(t)$ и заданного выхода $Z(t)$ имеют вид

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(t_1) \psi_j(t_2), \quad t_1 \geq t_2,$$

$$R_{xz}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^m \chi_j(t_1) \psi_j(t_2), \quad t_1 \geq t_2,$$

где $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$, $\chi_j(t)$ некоторые заданные функции. Предполагается, что выполняется условие

$$\sum_{j=1}^m [\varphi_j(t_1) \psi_j(t_2) - \varphi_j(t_2) \psi_j(t_1)] = w(t_1 - t_2).$$

Решен пример, в котором найдена оптимальная весовая функция динамической системы, интегрирующая случайную функцию $X(t)$ (вид корреляционной функции $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha(\tau)}$, математическое ожидание равно нулю), когда время наблюдения системы является конечным промежутком $t \in (0, T)$.

Summary

EXAMPLE OF INVESTIGATING THE ACCURACY OF A LINEAR DYNAMIC SYSTEM IN
A NONSTATIONARY CASE

In the present paper is discussed a method of calculating the optimal transfer impulse function for dynamic system in a nonstationary case, if the signal's autocorrelation function $K_x(t_1, t_2)$ at the input $X(t)$ and the intercorrelation $R_{xz}(t_1, t_2)$ between the input $X(t)$ and the required output $Z(t)$ have the following special form

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(t_1) \psi_j(t_2), \quad t_1 \geq t_2,$$

$$R_{xz}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^m \chi_j(t_1) \psi_j(t_2), \quad t_1 \geq t_2,$$

where $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$ and $\chi_j(t)$ stand for certain scalar functions. Moreover we presume the following condition to be satisfied

$$\sum_{j=1}^m [\varphi_j(t_1) \psi_j(t_2) - \varphi_j(t_2) \psi_j(t_1)] = w(t_1 - t_2).$$

An example is given of calculating the optimal transfer function for a dynamic system, which integrates the stochastic function $X(t)$ (the autocorrelation function $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha(\tau)}$ and its mathematical expectation are zero), in the case when the system is observed for a finite interval of time $t \in (0, T)$.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 sierpnia 1975 r.

NIELINIOWE DRGANIA ELASTYCZNIE POSADOWIONYCH SILNIKÓW TŁOKOWYCH PRZY SZEROKOPASMOWYCH WYMUSZENIACH STOCHASTYCZNYCH

JANUSZ KOLEND A (GDAŃSK)

1. Wstęp

Rozpatrywane w pracy [1] równania ruchu, opisujące nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych z uwzględnieniem zmienności prędkości kątowej, oparte są na zdeterminowanym modelu mechanicznym, stanowiącym pewną idealizację realnego układu drgającego. W rzeczywistych warunkach eksploatacyjnych mogą występować zewnętrzne wymuszenia stochastyczne, jak również parametry układu mogą mieć charakter losowy. W szczególności probabilistycznego ujęcia wymagają geometryczne i fizyczne parametry układu oraz wymuszenia, zakłócenia, obciążenia, uszkodzenia i procesy zużycia [2]. W odniesieniu do elastycznie posadowionych silników tłokowych istotne mogą okazać się m.in. losowe zmiany warunków spalania w cylindrach, tarcia, smarowania, chłodzenia i zużycia, momentu oporowego odbiornika mocy, charakterystyk podkładek elastycznych, a także przypadkowe ruchy fundamentów silników zainstalowanych na środkach transportu.

Uwzględnienie procesów stochastycznych wymaga traktowania drgań silników jako losowej funkcji czasu, której charakterystyki należy wyznaczyć na podstawie znanych charakterystyk statystycznych procesów wejściowych. Należałoby przy tym brać pod uwagę łączny probabilistyczny opis warunków zewnętrznych, procesu eksploatacji, parametrów konstrukcyjnych i wytrzymałościowych, warunków spalania, tarcia etc., gdyż w ogólnym przypadku nie są one niezależne. Na obecnym etapie badań i rozwoju teorii tłokowych silników spalinowych nie dysponuje się takim opisem. Poniżej ograniczono się do rozpatrzenia drgań elastycznie posadowionych silników tłokowych przy losowych wymuszeniach, stanowiących szerokopasmowe procesy stochastyczne.

2. Równania ruchu

Wykorzystując równania (4.1) wyprowadzone w pracy [1], opisujące drgania wielocylindrowych silników rzędowych o sześciu stopniach swobody w stanach ustalonych i bliskich ustalonym, można przy wymuszeniach stochastycznych napisać równania ruchu w ogólnej postaci

$$\begin{aligned}
 m\ddot{u} + c_x u - U_y \gamma + U_z \beta &= \varepsilon [P_1 + \delta_1(t)], \\
 m\ddot{v} + c_y v - V_z \alpha + V_x \gamma &= \varepsilon [P_2 + \delta_3(t)], \\
 m\ddot{w} + c_z w - W_x \beta + W_y \alpha &= \varepsilon [P_3 + \delta_3(t)], \\
 (2.1) \quad I_x \ddot{\alpha} + c_{xx} \alpha - V_z v + W_y w - c_{zx} \gamma - c_{xy} \beta - crT(\omega_0) &= \varepsilon [P_4 + \delta_4(t)], \\
 I_y \ddot{\beta} + c_{yy} \beta - W_x w + U_z u - c_{xy} \alpha - c_{yz} \gamma &= \varepsilon [P_5 + \delta_5(t)], \\
 I_z \ddot{\gamma} + c_{zz} \gamma - U_y u + V_x v - c_{yz} \beta - c_{zx} \alpha &= \varepsilon [P_6 + \delta_6(t)], \\
 I\ddot{\varphi} &= \varepsilon [P_7 + \delta_7(t)],
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$P_j = R_j + m_{p1}(F_j)_1 + m_{p2}(F_j)_2 + m_0 Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, 7, \quad R_7 = R_0^{(e)}.$$

Przyjęto, że $\delta_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, 7$) stanowią szerokopasmowe procesy stochastyczne o znanych charakterystykach statystycznych, których realizacje przyjmują małe wartości, a czasy korelacji $(\tau_j)_{kor}$ są krótsze od czasu relaksacji procesu wyjściowego, tj. spełniają warunek

$$(2.2) \quad (\tau_j)_{kor} \ll \frac{1}{\varepsilon\omega}.$$

Pozostałe oznaczenia są takie same, jak w pracy [1].

Z wystarczającą w praktycznych zastosowaniach dokładnością przekształcić można równania (2.1) do równań opisujących drgania określone przez częstości wymuszeń i tę spośród częstości drgań własnych λ_k analizowanego układu, dla której różnica $|\lambda_k - \dot{\varphi}|$ jest najmniejsza, gdyż drgania z innymi częstościami własnymi na skutek tłumienia bądź wygasną, bądź mogą nie być rozpatrywane w pierwszym przybliżeniu [3]. Jeśli taką częstością jest λ_m , podobnie jak w pracy [1] przekształca się równania (2.1) do postaci

$$(2.3) \quad \ddot{q}_m + \lambda_m^2 q_m = \frac{\varepsilon}{M_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} [P_j + \delta_j(t)],$$

$$(2.4) \quad \ddot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{I} [P_7 + \delta_7(t)],$$

gdzie wielkości M_m i $\Phi_j^{(m)}$ określone zostały w pracy [1].

Przy braku wymuszeń stochastycznych drgania układu opisane są zależnościami

$$(7.5) \quad u = u_0 + \varrho_1, \quad v = v_0 + \varrho_2, \dots, \quad \gamma = \gamma_0 + \varrho_6,$$

gdzie $\varrho_j(t) = \Phi_j^{(m)} q_m(t)$, $u_0, v_0, \dots, \gamma_0$ oznaczają stałe składniki wywołane stałą składową momentu reakcyjnego $crT(\omega_0)$ w równaniach (2.1), a $q_m(t)$ jest rozwiązaniem równań (2.3) i (2.4) przy $\delta_j(t) \equiv 0$.

Rozwiązanie równań (2.3) i (2.4) przy braku wymuszeń stochastycznych przedstawiono w pracy [1]. Poniżej rozpatrzono zagadnienie wyznaczenia $q_m(t)$ przy występowaniu w równaniach (2.3) i (2.4) wymuszeń $\delta_j(t)$.

3. Rozwiązanie równań ruchu

Do rozwiązania równań (2.3) i (2.4) przy spełnionych warunkach (2.2) można zastosować matematyczny aparat procesów Markowa i równań kinetycznych Fokkera-Plancka-Kołmogorowa (F-P-K) [4, 5]. W tym celu stosuje się zamianę zmiennych określoną wzorami

$$(3.1) \quad \begin{aligned} q_m &= A \cos(\varphi + \psi), \\ \dot{q}_m &= -A \lambda_m \sin(\varphi + \psi), \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{aligned}$$

i przekształca równania (2.3), (2.4) do postaci

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{A} &= \varepsilon X_R + \varepsilon X_F, \\ \dot{\psi} &= \varepsilon Y_R + \varepsilon Y_F, \\ \dot{\omega} &= \varepsilon Z_R + \varepsilon Z_F, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} X_R &= -\frac{1}{M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \sin(\varphi + \psi), \\ Y_R &= \lambda_m - \omega - \frac{1}{A M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \cos(\varphi + \psi), \\ Z_R &= \frac{1}{I} P_7, \\ X_F &= -\frac{1}{M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} \delta_j(t) \sin(\varphi + \psi), \\ Y_F &= -\frac{1}{M_m A \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} \delta_j(t) \cos(\varphi + \psi), \\ Z_F &= \frac{1}{I} \delta_7(t), \\ P_j &= P_j(A, \psi, \varphi, \omega), \end{aligned}$$

A , ψ , ω oznaczają zmieniające się w czasie wielkości. Człony X_R , Y_R , Z_R stanowią części regularne równań (3.2), natomiast X_F , Y_F , Z_F są częściami fluktuacyjnymi, zawierającymi procesy stochastyczne. W równaniach tych należy wydzielić składniki opisujące płynne zmiany wielkości A , ψ i ω . W celu usunięcia wibracyjnych składników z członów X_R , Y_R , Z_R przedstawić można wielkości A , ψ i ω w postaci

$$(3.3) \quad \begin{aligned} A &= A^X + \varepsilon U(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \\ \psi &= \psi^X + \varepsilon V(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \\ \omega &= \omega^X + \varepsilon W(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \end{aligned}$$

gdzie A^X , ψ^X , ω^X oznaczają wolnozmiennie składowe, $\varphi^X = \omega^X t$, U , V , W — wibracyjne składniki.

Funkcje U , V , W należy tak dobrać, aby zachodziły związki

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{A}^X &= \varepsilon X_R^X(A^X, \psi^X, \omega^X), \\ \dot{\psi}^X &= \varepsilon Y_R^X(A^X, \psi^X, \omega^X), \\ \dot{\omega}^X &= \varepsilon Z_R^X(A^X, \psi^X, \omega^X). \end{aligned}$$

Dla uzyskania rozwiązań z uwzględnieniem członów drugiego rzędu małości należy wydzielić w funkcjach U , V , W i X_R^X , Y_R^X , Z_R^X człony pierwszego i drugiego rzędu małości:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} U &= U_1(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + \varepsilon U_2(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \\ V &= V_1(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + \varepsilon V_2(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \\ W &= W_1(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + \varepsilon W_2(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \\ X_R^X &= X_{R1}^X(A^X, \psi^X, \omega^X) + \varepsilon X_{R2}^X(A^X, \psi^X, \omega^X), \\ Y_R^X &= Y_{R1}^X(A^X, \psi^X, \omega^X) + \varepsilon Y_{R2}^X(A^X, \psi^X, \omega^X), \\ Z_R^X &= Z_{R1}^X(A^X, \psi^X, \omega^X) + \varepsilon Z_{R2}^X(A^X, \psi^X, \omega^X). \end{aligned}$$

Dla analizowanego układu otrzymuje się

$$(3.6) \quad \begin{aligned} X_{R1}^X &= -\frac{1}{2\pi M_m \lambda_m} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \sin(\varphi^X + \psi^X) d\varphi^X, \\ Y_{R1}^X &= \lambda_m - \omega^X - \frac{1}{2\pi A^X M_m \lambda_m} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \cos(\varphi^X + \psi^X) d\varphi^X, \\ Z_{R1}^X &= \frac{1}{2\pi I} \int_0^{2\pi} P_7 d\varphi^X, \\ U_1 &= \frac{1}{\omega^X} \sum_p \frac{1}{p} (c_{1p} \sin p\varphi^X - b_{1p} \cos p\varphi^X), \\ V_1 &= \frac{1}{\omega^X} \sum_p \frac{1}{p} (c_{2p} \sin p\varphi^X - b_{2p} \cos p\varphi^X), \\ W_1 &= \frac{1}{\omega^X} \sum_p \frac{1}{p} (c_{3p} \sin p\varphi^X - b_{3p} \cos p\varphi^X), \\ X_{R2}^X &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[U_1 \frac{\partial X_R}{\partial A} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + V_1 \frac{\partial X_R}{\partial \psi} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + \right. \\ &\quad \left. + W_1 \frac{\partial X_R}{\partial \omega} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + W_{c1} \frac{\partial X^X}{\partial \varphi} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) \right] d\varphi^X, \\ Y_{R2}^X &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[U_1 \frac{\partial Y_R}{\partial A} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + V_1 \frac{\partial Y_R}{\partial \psi} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + \right. \\ &\quad \left. + W_1 \frac{\partial Y_R}{\partial \omega} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + W_{c1} \frac{\partial Y_R}{\partial \varphi} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) \right] d\varphi^X, \\ Z_{R2}^X &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[U_1 \frac{\partial Z_R}{\partial A} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + V_1 \frac{\partial Z_R}{\partial \psi} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + \right. \\ &\quad \left. + W_1 \frac{\partial Z_R}{\partial \omega} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) + W_{c1} \frac{\partial Z_R}{\partial \varphi} (A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) \right] d\varphi^X, \end{aligned}$$

gdzie

$$b_{1p} = -\frac{1}{\pi M_m \lambda_m} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \sin(\varphi^x + \psi^x) \sin p\varphi^x d\varphi^x,$$

$$c_{1p} = -\frac{1}{\pi M_m \lambda_m} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \sin(\varphi^x + \psi^x) \cos p\varphi^x d\varphi^x,$$

$$b_{2p} = -\frac{1}{\pi A^x M_m \lambda_m} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \cos(\varphi^x + \psi^x) \sin p\varphi^x d\varphi^x,$$

$$c_{2p} = -\frac{1}{\pi A^x M_m \lambda_m} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \cos(\varphi^x + \psi^x) \cos p\varphi^x d\varphi^x,$$

$$b_{3p} = \frac{1}{\pi I} \int_0^{2\pi} P_7 \sin p\varphi^x d\varphi^x,$$

$$c_{3p} = \frac{1}{\pi I} \int_0^{2\pi} P_7 \cos p\varphi^x d\varphi^x,$$

$$W_{c_1}(A^x, \psi^x, \omega^x, \varphi^x) = -\frac{1}{(\omega^x)^2} \sum_p \frac{1}{p^2} (b_{3p} \sin p\varphi^x + c_{3p} \cos p\varphi^x),$$

$$P_j = P_j(A^x, \psi^x, \omega^x, \varphi^x), \quad j = 1, 2, \dots, 7.$$

W częściach fluktuacyjnych równań (3.2) można zamiast A , ψ , φ podstawić A^x , ψ^x , φ^x i nie uwzględniać składników wyższych rzędów małości, gdyż są one w równaniu F-P-K pomijalne [5]. Po odrzuceniu składników wibracyjnych z części regularnych równania (3.2) przyjmują postać

$$\dot{A}^x = \varepsilon X_{R1}^x + \varepsilon^2 X_{R2}^x - \frac{\varepsilon}{M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} \delta_j(t) \sin(\varphi^x + \psi^x),$$

$$(3.7) \quad \dot{\psi}^x = \varepsilon Y_{R1}^x + \varepsilon^2 Y_{R2}^x - \frac{\varepsilon}{A^x M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} \delta_j(t) \cos(\varphi^x + \psi^x),$$

$$\dot{\omega}^x = \varepsilon Z_{R1}^x + \varepsilon^2 Z_{R2}^x + \frac{\varepsilon}{I} \delta_7(t).$$

W równaniach (3.7) pominiemy „znaczkę X ” i napiszemy je w postaci

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \dot{A} &= \varepsilon F(A, \psi, \omega, \varphi, \delta_j, \varepsilon), & j &= 1, 2, \dots, 6, \\ \dot{\psi} &= \varepsilon G(A, \psi, \omega, \varphi, \delta_j, \varepsilon), & j &= 1, 2, \dots, 6, \\ \dot{\omega} &= \varepsilon H(A, \psi, \omega, \delta_7, \varepsilon). \end{aligned}$$

Dla takiego układu równań można napisać równanie F-P-K dla trójwymiarowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $w(A, \psi, \omega)$ [5], mianowicie

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \dot{w}(A, \psi, \omega) = & -\frac{\partial}{\partial A} \left\{ \left[\varepsilon \langle F \rangle + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial F}{\partial A}, F_\tau \right\} d\tau + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial F}{\partial \psi}, G_\tau \right\} d\tau + \right. \right. \\
 & + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial F}{\partial \omega}, H_\tau \right\} d\tau \left. \right] w \Big\} - \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \left[\varepsilon \langle G \rangle + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial G}{\partial A}, F_\tau \right\} d\tau + \right. \right. \\
 & + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial G}{\partial \psi}, G_\tau \right\} d\tau + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial G}{\partial \omega}, H_\tau \right\} d\tau \left. \right] w \Big\} - \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \left[\varepsilon \langle H \rangle + \right. \right. \\
 & + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial H}{\partial A}, F_\tau \right\} d\tau + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial H}{\partial \psi}, G_\tau \right\} d\tau + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^0 K \left\{ \frac{\partial H}{\partial \omega}, H_\tau \right\} d\tau \left. \right] w \Big\} + \\
 & + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial A^2} \left[\int_{-\infty}^0 K \{ F, F_\tau \} d\tau w \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left[\int_{-\infty}^0 K \{ G, G_\tau \} d\tau w \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left[\int_{-\infty}^0 K \{ H, H_\tau \} d\tau w \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial A \partial \psi} \left[\int_{-\infty}^0 (K \{ F, G_\tau \} + K \{ G, F_\tau \}) d\tau w \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial A \partial \omega} \left[(K \{ F, H_\tau \} + K \{ H, F_\tau \}) d\tau w \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \omega} \left[\int_{-\infty}^0 (K \{ G, H_\tau \} + \right. \\
 & \left. + K \{ H, G_\tau \}) d\tau w \right],
 \end{aligned}$$

gdzie $\langle \rangle$ oznacza wartość oczekiwaną, a $K\{ \}$ — funkcję korelacyjną (bądź funkcję korelacji wzajemnej).

Przy wyliczaniu poszczególnych składników równania (3.9) przyjęto, że $\delta_j(t)$ są nieskorelowanymi procesami o wartościach oczekiwanych równych zeru. Przy wyznaczaniu wartości oczekiwanych $\langle F \rangle$, $\langle G \rangle$, $\langle H \rangle$ odrzucono składniki wibracyjne z części fluktuacyjnych. W wyniku otrzymano

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad \dot{w}(A, \psi, \omega) = & -\frac{\partial}{\partial A} \left\{ \left[\varepsilon X_{R1} + \varepsilon^2 X_{R2} + \frac{\varepsilon^2 \pi}{AM_m^2 \lambda_m^2} \sum_{j=1}^6 [\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j, \omega) \right] w \right\} - \\
 & - \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \left[\varepsilon Y_{R1} + \varepsilon^2 Y_{R2} + \frac{\varepsilon^2}{2A^2 M_m^2 \lambda_m^2} \sum_{j=1}^6 [\Phi_j^{(m)}]^2 R_j(\delta_j, \omega) \right] w \right\} - \\
 & - \frac{\partial}{\partial \omega} [w(\varepsilon Z_{R1} + \varepsilon^2 Z_{R2})] + \frac{\varepsilon^2 \pi}{2M_m^2 \lambda_m^2} \sum_{j=1}^6 [\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j, \omega) \frac{\partial^2 w}{\partial A^2} + \\
 & + \frac{\varepsilon^2 \pi}{2A^2 M_m^2 \lambda_m^2} \sum_{j=1}^6 [\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j, \omega) \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + \frac{\varepsilon^2 \pi}{I^2} S_7(\delta_7, 0) \frac{\partial^2 w}{\partial \omega^2},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$S_j(\delta_j, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta_j, \delta_{j\tau} \rangle \cos \omega \tau d\tau \text{ — widmowa gęstość procesu } \delta_j(t),$$

$$S_7(\delta_7, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta_7, \delta_{7\tau} \rangle d\tau, \quad R_j(\delta_j, \omega) = \int_{-\infty}^0 \langle \delta_j, \delta_{j\tau} \rangle \sin \omega \tau d\tau.$$

Rozwiązanie równania (3.10) wymaga zastosowania maszyn cyfrowych.

Dla stanu ustalonego przy $\delta_7(t) \equiv 0$ celowe może być wyznaczenie stacjonarnej funkcji gęstości $w(A, \psi)$, która spełnia równanie

$$(3.11) \quad 0 = -\frac{\partial}{\partial A} \left\{ \left[\varepsilon X_{R1} + \varepsilon^2 X_{R2} + \frac{\varepsilon^2 \pi}{A M_m^2 \lambda_m^2} \sum_{j=1}^6 [\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j, \omega) \right] w \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \left[\varepsilon Y_{R1} + \varepsilon^2 Y_{R2} + \frac{\varepsilon^2}{2A^2 M_m^2 \lambda_m^2} \sum_{j=1}^6 [\Phi_j^{(m)}]^2 R_j(\delta_j, \omega) \right] w \right\} + \\ + \frac{\varepsilon^2 \pi}{2M_m^2 \lambda_m^2} \sum_{j=1}^6 [\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j, \omega) \left(\frac{\partial^2}{\partial A^2} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) w.$$

Funkcja $w(A, \psi)$ powinna spełniać warunki

$$(3.12) \quad w(A, -\pi) = w(A, \pi) = 0, \\ w(-\infty, \psi) = w(\infty, \psi) = 0.$$

Rozwiązań równania (3.11) spełniających warunki (3.12) poszukiwać można w postaci

$$(3.13) \quad w(A, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(A) \cos \left(l + \frac{1}{2} \right) \psi, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Po podstawieniu (3.13) do równania (3.11), pomnożeniu obu jego stron przez $\cos \left(s + \frac{1}{2} \right) \psi$, $s = 0, 1, 2, \dots$, i scałkowaniu po ψ w przedziale $[-\pi, \pi]$, otrzymuje się układ złożony z nieskończonej liczby równań różniczkowych zwyczajnych o postaci

$$(3.14) \quad \frac{d^2 w_s}{dA^2} + R_{1s}(A) \frac{dw_s}{dA} + R_{2s}(A) w_s = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Dla takich równań i funkcji gęstości (3.13) podano w pracy [6] następujące rozwiązanie:

$$(3.15) \quad w(A, \psi) = \exp(-A^2) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 + 2A_s(2A^2 - 1)}{\pi \sqrt{2\pi} (1 + 2A_s)} \cos \left(s + \frac{1}{2} \right) \psi,$$

gdzie

$$A_s = \frac{-2B_{12s} + B_{20s} + 6B_{22s} + 48B_{24s} + 1}{2(6B_{11s} - 4B_{12s} + 72B_{13s} + 5B_{20s} + 12B_{22s} - 144B_{24s})},$$

$$B_{1ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A^2) R_{1s}(A) H_n(A) dA,$$

$$B_{2ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A^2) R_{2s}(A) H_n(A) dA,$$

a $H_n(A)$ są wielomianami Hermite'a

$$H_n(A) = (-1)^n \exp(A^2) \frac{d^n}{dA^n} [\exp(-A^2)].$$

Znajomość funkcji gęstości $w(A, \psi)$ pozwala wyznaczyć wartości oczekiwane $\langle A \rangle$ i $\langle \psi \rangle$. Wartość prędkości kątowej silnika ω w stanie ustalonym przy $\delta_7(t) \equiv 0$ określona jest równaniem

$$(3.16) \quad \varepsilon H(\langle A \rangle, \langle \psi \rangle, \omega, \varepsilon) = \varepsilon Z_{R1}^X(\langle A \rangle, \langle \psi \rangle, \omega) + \varepsilon^2 Z_{R2}^X(\langle A \rangle, \langle \psi \rangle, \omega) = 0.$$

Funkcje Z_{R1} i Z_{R2} nie zawierają składników wibracyjnych, stąd zgodnie z postacią funkcji P_7 [1] stały składnik dodatkowego momentu oporowego na wałe silnika (wywołanego drganiami silnika przy $\delta_7(t) \equiv 0$) wynosi

$$(3.17) \quad (\Delta M)_0 = cT(\omega) - B(\omega) - h\omega - \varepsilon IZ_{R1}^X(\langle A \rangle, \langle \psi \rangle, \omega) - \varepsilon^2 IZ_{R2}^X(\langle A \rangle, \langle \psi \rangle, \omega),$$

gdzie c oznacza liczbę wykorbień wału korbowego, r — długość ramienia korby, $T(\omega)$ — średnią wartość siły gazowej działającej prostopadle do jednego wykorwienia na promieniu r , $B(\omega)$ — średnią wartość momentu oporowego odbiornika mocy, h — współczynnik wiskotycznego tłumienia przy obracaniu wału silnika. Wynikająca stąd strata mocy jest równa

$$(3.18) \quad (\Delta N)_0 = (\Delta M)_0 \omega.$$

Wartość ta może różnić się od wartości straty mocy w przypadku braku wymuszeń stochastycznych, odpowiadającej rozwiązaniom równań (3.4) z uwzględnieniem zależności (3.5) i (3.6). Przykładowo, dla dwucylindrowego silnika w układzie V , wykonującego drgania pionowe, równania (3.4) mają, z pominięciem członów drugiego rzędu małości, postać

$$\dot{A}^x = -\frac{\varepsilon}{2mb} [A^x b l_y + (2m_p \cos^2 \delta + m_0) r (\omega^x)^2 \sin \psi^x],$$

$$\dot{\psi}^x = \varepsilon \left[b - \omega^x - \frac{2m_p \cos^2 \delta + m_0}{2A^x m b} r (\omega^x)^2 \cos \psi^x \right],$$

$$\dot{\omega}^x = \frac{\varepsilon}{I} \left[r T(\omega^x) - B(\omega^x) - h \omega^x + \frac{1}{2} (2m_p \cos^2 \delta + m_0) A^x b r \omega^x \sin \psi^x \right],$$

gdzie m oznacza masę układu drgającego, $m_p = m_{p1} = m_{p2}$ — niewyrównoważoną masę w ruchu postępowo-zwrotnym, odpowiadającą jednemu cylindrowi i skupioną na osi sworzniia tłokowego, m_0 — wirującą masę niewyrównoważoną, odpowiadającą jednemu

wykorbieniu i skupioną na osi czopa korbowego, b — częstość drgań własnych układu w kierunku pionowym, l_y — współczynnik wiskotycznego tłumienia układu amortyzacji przy pionowych drganiach silnika, δ — połowę kąta pomiędzy osiami dwóch cylindrów.

Dla stanów ustalonych równania te mają rozwiązania pokrywające się z rozwiązaniami, jakie uzyskuje się metodą uśredniania [7] w pierwszym przybliżeniu

$$A^x = \frac{(2m_p \cos^2 \delta + m_0) r (\omega^x)^2}{2mb \sqrt{(b - \omega^x)^2 + \left(\frac{1}{2m} l_y\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi^x = \frac{l}{2m(\omega^x - b)},$$

gdzie prędkość kątowna silnika ω^x określona jest równaniem

$$rT(\omega^x) - B(\omega^x) - h\omega^x + \frac{1}{2} (2m_p \cos^2 \delta + m_0) A^x b r \omega^x \sin \psi^x = 0,$$

tzn. stały składnik dodatkowego momentu oporowego wyraża się zależnością

$$(\Delta M)_0 = -\frac{1}{2} (2m_p \cos^2 \delta + m_0) A^x b r \omega^x \sin \psi^x.$$

Równanie (3.17) ma w przypadku pionowych drgań dwucylindrowego silnika w układzie V postać

$$(\Delta M)_0 = -\frac{1}{2} (2m_p \cos^2 \delta + m_0) \langle A \rangle b r \omega \sin \langle \psi \rangle,$$

co oznacza, że strata mocy $(\Delta N)_0$ przy wymuszeniach stochastycznych będzie różnić się od straty mocy przy braku wymuszeń stochastycznych, gdy

$$\langle A \rangle \sin \langle \psi \rangle \neq A^x \sin \psi^x.$$

Równania (2.3) nie posiadają rozwiązania zerowego i stateczność ruchu można badać w tym sensie, czy trajektorie rozwiązań przebiegają w pewnych obszarach ograniczonych. W tym przypadku celowe jest zbadanie stateczności technicznej [8]. Zależność (3.15) pozwala wyznaczyć warunek, aby rozwiązania A i ψ dla $\delta_j(t) \equiv 0$ pozostawały wewnątrz domkniętego ograniczonego obszaru $E\{A \leq \Delta_1, |\psi| \leq \Delta_2\}$, gdy wartości początkowe A i ψ należą do otwartego ograniczonego obszaru $e \subset E$, a $\delta_j(t)$ są procesami ograniczonymi, tj. $\|\delta_j(t)\| < \Delta$, $\Delta > 0$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Techniczna stateczność względem obszarów E , e i procesów $\delta_j(t)$ dla ustalonego ε_0 ($1 > \varepsilon_0 > 0$) jest zapewniona, gdy prawdopodobieństwo $p[(A, \psi) \in E]$ spełnia nierówność

$$p[(A, \psi) \in E] \geq 1 - \varepsilon_0,$$

czyli

$$(3.19) \quad \int_0^{\Delta_1} \int_{-\Delta_2}^{\Delta_2} w(A, \psi) dA d\psi \geq 1 - \varepsilon_0.$$

4. Uwagi końcowe

Funkcje $(F_j)_{1,2}$ ($j = 1, 2, \dots, 7$) w równaniach (2.1) dotyczą silników z cylindrami w układzie V i łatwo można z nich uzyskać odpowiednie funkcje dla silników o pionowym układzie cylindrów lub dla silników typu bokser [1]. Równania ruchu silników innych typów przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych mogą być rozpatrywane analogicznie, przy czym zastosowana w niniejszej pracy metoda nie nakłada ograniczeń na intensywność fluktuacji [5].

Literatura cytowana w tekście

1. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych z cylindrami w układzie V*, Mech. Teoret. i Stos., 4, 13 (1975).
2. S. ZIEMBA, *Problemy teorii konstrukcji maszyn*, Zag. Drgań Nieliniowych, 9 (1968).
3. Ю. А. Митропольский, *Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах*. Изд. АН УССР, Киев 1955.
4. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Metody stochastyczne w mechanice*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1971.
5. Р. Л. СТРАТОНОВИЧ, *Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике*, Изд. Сов. Радио, Москва 1961.
6. Т. А. ТИВНЛОВ, *Асимптотические методы исследования колебаний подвижного состава*, Труды Ростовского-на-Дону Института Жел. Транспорта, вып. 78, Изд. Транспорт, Москва 1970.
7. Ю. А. Митропольский, *Метод усреднения в нелинейной механике*, Труды V Междунар. Конф. по Нелинейным Колебаниям, т. I, Изд. Инст. Мат. АН УССР, Киев 1970.
8. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna*, PWN, Warszawa 1972.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АМОТИЗИРОВАННЫХ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПРИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В работе рассматриваются одночастотные колебания амортизированных поршневых двигателей с шестью степенями свободы при случайных возмущениях, являющихся широкополосными, некоррелированными стохастическими процессами, которых математическое ожидание равно нулю. Угловая скорость двигателя считается переменной величиной. Формулируется уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для трехмерной плотности вероятности амплитуды колебаний, фазового угла и угловой скорости двигателя. Приводится решение для двухмерной, стационарной плотности амплитуды и фазового угла колебаний а также условие технической устойчивости рассматриваемой системы.

Summa ry

NONLINEAR VIBRATIONS OF ELASTICALLY MOUNTED PISTON ENGINES AT WIDE-BAND STOCHASTIC EXCITATIONS

The paper deals with one-frequency vibrations of elastically mounted multi-cylinder piston engines of six degrees of freedom subjected to random excitations being wide-band non-corelated stochastic processes with expected values equal to zero. Rotating speed of an engine is treated as a variable. The Fokker-Planck-

Kolmogorov equation for the three-dimensional probability density of a vibration amplitude, phase angle and rotating speed is formulated. The solution for the two-dimensional stationary probability density of a vibration amplitude and phase angle as well as the condition of technical stability of the analysed system are given.

INSTYTUT OKRĘTOWY POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 września 1975 r.



STATYKA POWŁOKI WALCOWEJ ZAMKNIĘTEJ PRACUJĄCEJ W STANIE ZGIĘCIOWYM

STANISŁAW BIELAK (OPOLE)

1. Wstęp

Przedstawione w tym opracowaniu rozwiązanie, ilustrowane przykładem liczbowym, bazuje na pracy autora [5], podającej całkę równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego powłoki walcowe. Materiał zawarty w tym artykule nawiązuje do pracy [5] od strony zastosowań do pewnych przykładów obliczeń inżynierskich.

Rozpatrzone powłokę walcową zamkniętą, obciążoną powierzchniowo, dla której siły wewnętrzne i przemieszczenia opisano wyrażeniami ogólnymi zależnymi od sposobu obciążenia i warunków podparcia. Wyrażenia opisujące pracę powłoki są sumami złożonymi z całek szczególnych, odpowiadających pracy błonowej, i całek ogólnych dających pracę zgięciową.

Całki szczególne uzyskuje się w bezpośrednim procesie całkowania funkcji obciążeń powierzchniowych, natomiast całki ogólne posiadają kształt szeregów hipertrygonometrycznych.

2. Ogólny układ równań powłok walcowych

Wszystkie wzory i zależności podane w tym rozdziale będą napisane na podstawie prac autora [1, 2, 3, 4]. Również całka równania różniczkowego rozwiązującego będzie podana w gotowej postaci wziętej z pracy [5].

2.1. Opis i związki geometryczne powłoki. Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej, ich wyróżniki oraz krzywizny — gaussowska i średnia wynoszą:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{12} &= g_{21} = 0, & g_{22} &= g = a^2, \\ b_{11} &= 0, & b_{12} &= b_{21} = 0, & b_{22} &= a, & b &= 0, \\ K &= 0, & H &= \frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju Γ_{ij}^k dla powierzchni walcowej są równe zeru.

Związki składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia błonowego mają postać:

$$(2.2) \quad w_{,1}^1 = \gamma_{11}, \quad a^2 w_{,1}^2 + w_{,2}^1 = 2\gamma_{12}, \quad a^2 w_{,2}^2 - a w^3 = \gamma_{22}.$$

Przecinek użyty w wyrażeniach (2.2) oznacza odpowiednią pochodną wziętą względem zmiennej u^1 lub u^2 .

2.2. Związki fizyczne. Siły i momenty

$$\begin{aligned}
 N^{ij} &= \bar{N}^{ij} + 6H\hat{M}^{ij}, \\
 M^{ij} &= \hat{M}^{ij} + \xi h^2 H \bar{N}^{ij}, \\
 Q^j &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} g^{ij} W_{,i} + \xi h^2 (H \bar{N}^{ij})_{,i},
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

gdzie ξ jest parametrem stałym oraz W jest sumą

$$W = g^{ij} w_{,ij}^3.
 \tag{2.4}$$

Związki odkształceń z siłami dla parametryzacji naturalnej

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= \frac{1}{2Eh} [\bar{N}^{11} - \nu a^2 \bar{N}^{22}], \\
 \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{1+\nu}{2Eh} a^2 \bar{N}^{12}, \\
 \gamma_{22} &= \frac{a^2}{2E2} [a^2 \bar{N}^{22} - \nu N^{11}].
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Związki momentów z przemieszczeniami dla parametryzacji naturalnej

$$\begin{aligned}
 \hat{M}^{11} &= -\frac{Eha^2}{2\alpha^4} \left[w_{,11}^3 + \frac{\nu}{a^2} w_{,22}^3 \right], \\
 \hat{M}^{12} = \hat{M}^{21} &= -\frac{(1-\nu)Eh}{2\alpha^4} w_{,12}^3, \\
 \hat{M}^{22} &= -\frac{Eh}{2\alpha^4} \left[\nu w_{,11}^3 + \frac{1}{a^2} w_{,22}^3 \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Występujący w (2.6) parametr α jest równy

$$\alpha = \sqrt{\frac{a}{2h}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}.
 \tag{2.7}$$

2.3. Całka równania rozwiązującego. Całka równania rozwiązującego jest sumą złożoną z całki ogólnej \hat{w}^3 i całki szczególnej \bar{w}^3 , (patrz praca [5])

$$w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3.
 \tag{2.8}$$

Całka szczególna \bar{w}^3 będzie rozwiązaniem stanu bezmomentowego, a całka ogólna może być przedstawiona jako suma szeregu hipertrygonometrycznego.

Wielkości pomocnicze

Argumenty funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}
 Z_H^k &= \alpha \alpha^k \frac{u^1}{a}, \\
 Z_K^l &= \alpha \left[m^l \frac{u^1}{a} + nu^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Parametr α jest określony przez (2.7), natomiast wielkości α^k i m^l są równe

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \alpha^k &= \varepsilon_k n \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} + 1 \right]}, \\ m^l &= \delta_l n \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} - 1 \right]}. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} + 1}, \\ \beta_n &= n \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} - 1}, \end{aligned}$$

napijemy

$$(2.10') \quad \begin{aligned} \alpha^k &= \varepsilon_k \alpha_n \\ m^l &= \delta_l \beta_n. \end{aligned}$$

Tensory trygonometryczne

$$(2.11) \quad \begin{aligned} A_n^{ik} &= H^i Z_H^k, & \bar{A}_n^{ik} &= \bar{H}^i Z_H^k, \\ B_n^{jl} &= K^j Z_K^l, & \bar{B}_n^{jl} &= \bar{K}^j Z_K^l. \end{aligned}$$

Wielkości H^i i K^j są symbolami funkcji trygonometrycznych, hiperbolicznych i kołowych, a \bar{H}^i oraz \bar{K}^j symbolami odpowiednich pochodnych,

$$(2.12) \quad \begin{aligned} H^i &= \begin{cases} \text{sh} & \text{dla } i = 1, \\ \text{ch} & \text{dla } i = 2, \end{cases} & \bar{H}^i &= \begin{cases} \text{ch} & \text{dla } i = 1, \\ \text{sh} & \text{dla } i = 2, \end{cases} \\ K^j &= \begin{cases} \sin & \text{dla } j = 1, \\ \cos & \text{dla } j = 2, \end{cases} & \bar{K}^j &= \begin{cases} \cos & \text{dla } j = 1, \\ -\sin & \text{dla } j = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Całka ogólna (rozwiązanie podano w pracy [5])

$$(2.13) \quad \hat{w}^3 = \sum_n C_{klij}^n A_n^{ik} B_n^{jl}.$$

Przejdźcie do współrzędnych fizycznych, sprowadzonych do bazy jednostkowej, umożliwiając wzory:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} N_{ij}^{\bar{1}} &= \sqrt{\frac{g_{ij}}{g^{ii}}} N^{ij}, & Q_i^{\bar{1}} &= \sqrt{\frac{1}{g^{ii}}} Q^i, \\ M_{i1}^{\bar{1}} &= -\sqrt{\frac{g g^{11}}{g^{ii}}} M^{i2}, & M_{i2}^{\bar{1}} &= \sqrt{\frac{g g^{22}}{g^{ii}}} M^{i1}, \\ w_i^{\bar{1}} &= \sqrt{g^{ii}} w^i, & w_3^{\bar{1}} &= w^3, \\ P_i^{\bar{1}} &= \sqrt{g^{ii}} P^i, & P_3^{\bar{1}} &= P^3. \end{aligned}$$

Uwaga: po ij nie sumować.

Symbol „ $\bar{1}$ ” oznacza współrzędną fizyczną.

3. Wyrażenia opisujące pracę powłoki

3.1. Stan błonowy. Stan ten jest całą szczególną rozwiązaniem ogólnego powłok pracujących w stanie zgięciowym. Wyrażenia opisujące wielkości sił, momentów i przemieszczeń będą napisane na podstawie pracy [1].

Siły błonowe

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{22} &= -\frac{1}{a} P^3, \\ \bar{N}^{12} &= \int \left[\frac{1}{a} P_{,2}^3 - P^2 \right] du^1 + C_1(u^2), \\ \bar{N}^{11} &= - \int \left[\int \left(\frac{1}{a} P_{,22}^3 - P_{,2}^2 \right) du^1 + P^1 \right] du^1 - u^1 C_{1,2} + C_2(u^2). \end{aligned}$$

Występujące w (3.1) funkcje C_1 i C_2 zależą tylko od zmiennej u^2 i będą wyznaczone z warunków brzegowych, a wielkości P^1 , P^2 , P^3 są danymi funkcjami obciążeń.

Składowe przemieszczenia wyznaczmy z wyrażeń (2.2) po podstawieniu składowych odkształcenia ze związków (2.5) przy równoczesnym wykorzystaniu sił błonowych opisanych w (3.1):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{w}^1 &= \int \gamma_{11} du^1 + C_3(u^2), \\ \bar{w}^2 &= \frac{1}{a^2} \int \left[2\gamma_{12} - \bar{w}_{,2}^1 \right] du^1 + C_4(u^2), \\ \bar{w}^3 &= -\frac{1}{a} [\gamma_{22} - a^2 \bar{w}_{,2}^2]. \end{aligned}$$

Użyte w (3.2) kreski \bar{w}^i deklarują przynależność do stanu błonowego, a funkcje C_3 , C_4 zmiennej u^2 zależą tylko od warunków brzegowych.

3.2. Stan zgięciowy. Całka równania rozwiązującego jednorodnego podana w pracy [5] umożliwi rozwiązanie ogólnego układu równań powłok walcowych opisujących wszystkie wielkości charakteryzujące pracę zgięciową powłoki. Przeprowadzając odpowiednie operacje matematyczne związane z całkowaniem i różniczkowaniem wyrażeń szeregu hipertrygonometrycznego znajdziemy poszukiwane wielkości sił, momentów i przemieszczeń.

Siły

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \hat{N}^{22} &= -\frac{2Eh}{a^3} \sum_n C_{klij}^n A_n^{ik} B_n^{jl}, \\ \hat{N}^{12} &= \frac{2Eh}{a^2} \sum_n \frac{n}{\sqrt{4+n^4}} C_{klij}^n [\delta_l \beta_n A_n^{ik} B_n^{jl} + \varepsilon_k \alpha_n \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\ \hat{N}^{11} &= \frac{2Eh}{a} \sum_n \frac{n^4}{4+n^4} C_{klij}^n \left[A_n^{ik} B_n^{jl} - 2 \frac{\varepsilon_k \delta_l}{n^2} \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl} \right], \\ \hat{Q}^1 &= + \frac{Eh}{\alpha a} \sum_n C_{klij}^n [\varepsilon_k \beta_n \bar{A}_n^{ik} B_n^{jl} - \delta_l \alpha_n A_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\ \hat{Q}^2 &= \frac{Eh}{\alpha a^2} \sum_n n \varepsilon_k \delta_l C_{klij}^n \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}. \end{aligned}$$

Momenty

$$\begin{aligned}
 \hat{M}^{11} &= -\frac{Eh}{2\alpha^2} \sum_n C_{klij}^n [(1-\nu)n^2 A_n^{ik} B_n^{jl} + 2\varepsilon_k \delta_l \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\
 \hat{M}^{12} &= \frac{(1-\nu)Eh}{2\alpha^2} \sum_n n C_{klij}^n [\delta_l \beta_n A_n^{ik} B_n^{jl} - \varepsilon_k \alpha_n \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\
 \hat{M}^{22} &= \frac{Eh}{2\alpha^2 a^2} \sum_n C_{klij}^n [(1-\nu)n^2 A_n^{ik} B_n^{jl} - 2\nu\varepsilon_k \delta_l \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}].
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Przemieszczenia

$$\begin{aligned}
 \hat{w}^1 &= \frac{\nu}{\alpha} \sum_n \frac{1}{\sqrt{4+n^4}} C_{klij}^n [\varepsilon_k \alpha_n \bar{A}_n^{ik} B_n^{jl} - \delta_l \beta_n A_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\
 \hat{w}^2 &= \frac{(2+\nu)}{\alpha a} \sum_n \frac{n^3}{4+n^4} C_{klij}^n \left[A_n^{ik} \bar{B}_n^{jl} + 2 \frac{\varepsilon_k \delta_l}{n^2} \bar{A}_n^{ik} B_n^{jl} \right], \\
 \hat{w}^3 &= \sum_n C_{klij}^n A_n^{ik} B_n^{jl}.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

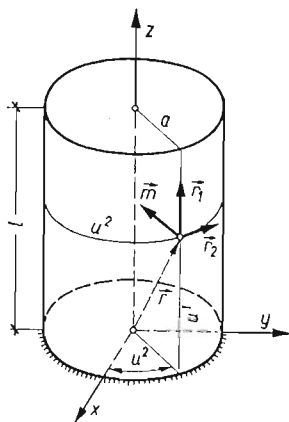
Dla wersji uproszczonej można przyjąć

$$\hat{w}^2 = 0, \quad \hat{N}^{11} = 0,
 \tag{3.6}$$

ponieważ wielkości te są małymi wyższego rzędu w porównaniu z wielkościami wywołanymi stanem błonowym.

4. Przykład

Dana jest powłoka walcowa zamknięta o promieniu a i wysokości l , rys. 1, zamocowana tylko u swej podstawy i obciążona parciem wiatru W .



Rys. 1

Obciążenie przyjęto następujące:

$$P^1 = 0, \quad P^2 = 0, \quad P^3 = W \sin u^2.
 \tag{4.1}$$

4.1. Stan błonowy. Wyrażenia (3.1) i (3.2) po podstawieniu (4.1) i uwzględnieniu warunków podparcia (zamocowany dolny brzeg), dadzą:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}^{11} &= \frac{Wl^2}{2a} \left(1 - \frac{u^1}{l}\right)^2 \sin u^2, \\
 \bar{N}^{12} &= -\frac{Wl}{a} \left(1 - \frac{u^1}{l}\right) \cos u^2, \\
 \bar{N}^{22} &= -\frac{W}{a} \sin u^2, \\
 \bar{w}^1 &= \frac{Wau^1}{3Eh} \left(\frac{l}{2a}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{u^1}{l}\right) \left(2 - \frac{u^1}{l}\right) + \frac{3\nu}{2} \left(\frac{2a}{l}\right)^2 + 1 \right] \sin u^2, \\
 \bar{w}^2 &= \frac{Wa}{Eh} \left(\frac{l}{2a}\right)^2 \left[\nu \left(1 - \frac{u^1}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{l}\right)^2 - F \right] \cos u^2, \\
 \bar{w}^3 &= \frac{Wa^2}{Eh} \left(\frac{l}{2a}\right)^2 F \sin u^2,
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

gdzie

$$F = \frac{1}{3} \left\{ \left[\left(2 + \left(2 - \frac{u^1}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{l}{2a} \right)^2 + 3\nu \right] \frac{u^1}{l} + 3(2+\nu) \left(2 - \frac{u^1}{l} \right) \right\} \frac{u^1}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{l} \right)^2 + \nu.$$

4.2. Stan zgięciowy. Wyrażenia (3.3)-(3.5) dla rozpatrywanego przykładu znacznie się uproszczą, a sumowanie tensorowo-nieskończone przejdzie w sumowanie tensorowe i to tylko ze względu na wskaźniki j, l

$$\begin{aligned}
 \hat{N}^{11} &= \frac{4Eh}{\alpha^2 a} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} \delta_l \bar{B}^{jl}, \\
 \hat{N}^{12} &= \frac{Eh}{\alpha a^2} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} [\delta_l B^{jl} - \bar{B}^{jl}], \\
 \hat{N}^{22} &= -\frac{2Eh}{a^3} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} B^{jl}, \\
 \hat{Q}^1 &= -\frac{Eh}{\alpha a} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} [B^{jl} + \delta_l \bar{B}^{jl}], \\
 \hat{Q}^2 &= -\frac{Eh}{(\alpha a)^2} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} \delta_l B^{jl}, \\
 \hat{M}^{11} &= \frac{Eh}{\alpha^2} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} \delta_l \bar{B}^{jl}, \\
 \hat{M}^{12} &= \frac{(1-\nu)Eh}{2\alpha a^3} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} [\delta_l B^{jl} + \bar{B}^{jl}], \\
 \hat{M}^{22} &= \frac{\nu}{\alpha^2} \hat{M}^{11}, \\
 \hat{w}^1 &= -\frac{\nu}{2\alpha} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} [B^{jl} + \delta_l \bar{B}^{jl}], \\
 \hat{w}^2 &= -\frac{2+\nu}{2\alpha^2 a} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} \delta_l B^{jl}, \\
 \hat{w}^3 &= (A^{11} - A^{21}) C_{111j} B^{jl}.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Występujące w wyrażeniach (4.3) stałe C_{11ij} wyznaczmy z odpowiednich warunków brzegowych, np. dla $u^1 = 0$ jest

$$w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3 = 0.$$

4.3. Zestawienie wyników.

4.3.1. Wielkości tensorowe

$$(4.4) \quad \begin{aligned} N^{ij} &= \bar{N}^{ij} + \hat{N}^{ij} + \frac{3}{a} \hat{M}^{ij}, \\ Q^i &= \hat{Q}^i, \\ M^{ij} &= \hat{M}^{ij} + \frac{\xi h^2}{2a} \bar{N}^{ij}, \\ w^i &= \bar{w}^i + \hat{w}^i. \end{aligned}$$

4.3.2. Wielkości fizyczne. Znając wielkości tensorowe (4.4) możemy wzorami (2.14) przetransformować je do współrzędnych fizycznych związanych z bazą jednostkową

$$(4.5) \quad \begin{aligned} N_{11}^{\bar{}} &= N^{11}, & N_{12}^{\bar{}} &= aN^{12}, & N_{22}^{\bar{}} &= a^2N^{22}, \\ Q_1^{\bar{}} &= Q^1, & Q_2^{\bar{}} &= aQ^2, \\ M_{11}^{\bar{}} &= -aM^{12}, & M_{21}^{\bar{}} &= -a^2M^{22}, \\ M_{12}^{\bar{}} &= M^{11}, & M_{22}^{\bar{}} &= aM^{21}, \\ w_1^{\bar{}} &= w^1, & w_2^{\bar{}} &= aw^2, & w_3^{\bar{}} &= w^3. \end{aligned}$$

5. Przykład liczbowy

W przykładach szczegółowych przyjęto następujące dane wyjściowe dla stali i żelbetu:

Stal:

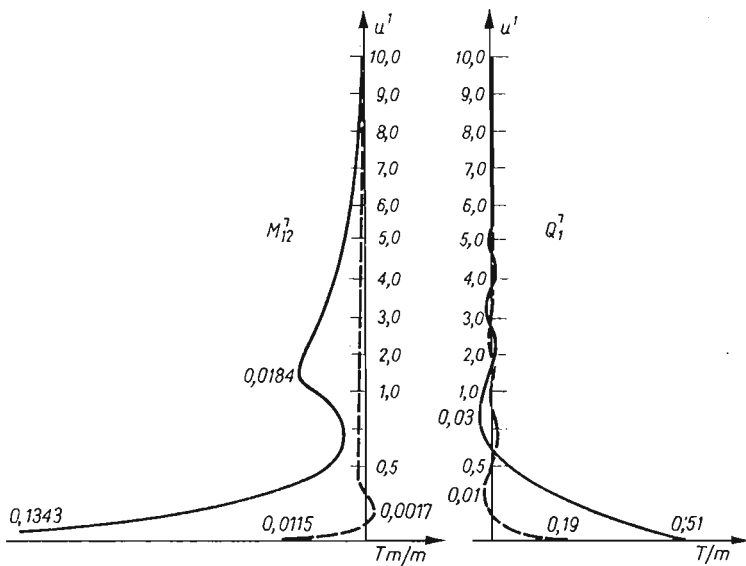
$$\begin{aligned} h &= 1,0 \text{ cm}, \\ a &= 1,0 \text{ m}, \\ l &= 10,0 \text{ m}, \\ \nu &= 0,3, \\ E &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \\ W &= 100 \text{ kG/m}^2. \end{aligned}$$

Żelbet:

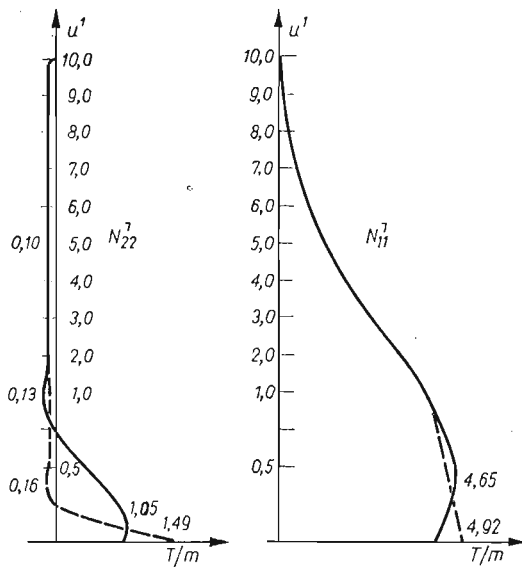
$$\begin{aligned} h &= 10,0 \text{ cm}, \\ a &= 1,0 \text{ m}, \\ l &= 10,0 \text{ m}, \\ \nu &= 0,2, \\ E &= 2,0 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2, \\ W &= 100 \text{ kG/m}^2. \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń niektórych wielkości charakterystycznych przedstawiono na rys. 2a, b, c, d, przy czym linie przerywane obrazują powłokę stalową, a linie ciągłe odpowiadają powłoce żelbetowej.

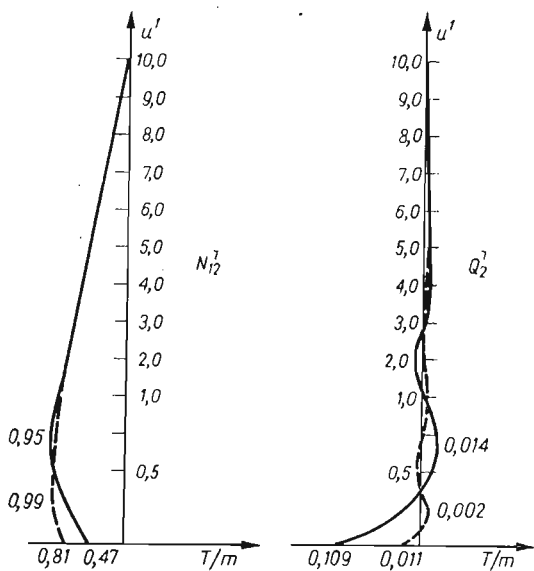
Wykresy $M_{12}^{\bar{}}$, $Q_1^{\bar{}}$, $N_{11}^{\bar{}}$, $N_{22}^{\bar{}}$, $w_1^{\bar{}}$, $w_3^{\bar{}}$ sporządzono dla $u^2 = \pi/2$, natomiast $N_{12}^{\bar{}}$ i $Q_2^{\bar{}}$ dla $u^2 = 0$.



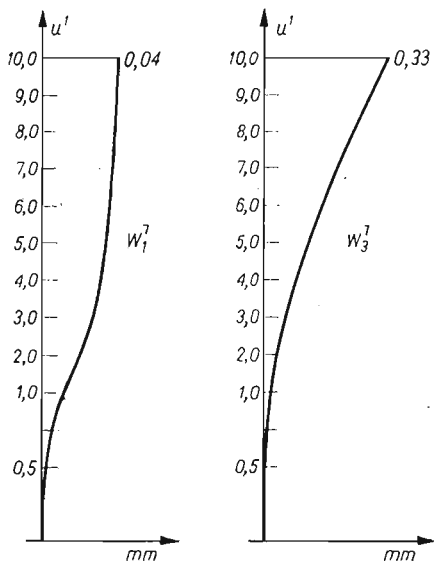
Rys. 2a



Rys. 2b



Rys. 2c



Rys. 2d

Literatura cytowana w tekście

1. St. BIELAK, *Ogólna teoria powłok prostokreślnych pracujących w stanie zgięciowym*, Politechnika Śląska, Budownictwo, 33, (1973) 1 - 109.
2. St. BIELAK, *A general scheme of equations covering rectilinearly drawn shell structures*, Zastosowania Matematyki 2, 14, (1974) 313 - 326.
3. St. BIELAK, *Solution of a general system of equations of rectilinear evolvable shells in the bending state*, Bull. Ac. Pol. Sci., Sér., Sci. techn., 2, 22, (1974) 63 - 69.
4. St. BIELAK, *Kształt równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powłok prostokreślnych rozwijalnych*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 12, (1974), 265 - 278.
5. St. BIELAK, *Calka równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego powłoki walcowe*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 14, (1976) (w druku).

Резюме

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПРИ РАБОТЕ НА ИЗГИБ

В работе представлен расчет замкнутой цилиндрической оболочки, работающей на изгиб. Внутренние силы и перемещения описаны общими выражениями, которые представляют собой суммы частных интегралов, отвечающих безмоментному состоянию, и общих интегралов, определяющих работу оболочки при изгибе. Общие интегралы представляют собой гипертригонометрические ряды.

В конце работы приведен численный пример, поясняемый графиками некоторых характерных величин.

Summary

STATICS OF A CLOSED CYLINDRICAL SHELL IN THE MOMENT STATE

The paper presents the solution of closed cylindrical shell structures working in the moment state. Internal forces and deformations were described by general expressions which are sums composed of particular integrals representing the momentless state and of a general integral representing the moment state. The general integrals have a form of hypertrigonometric series. An example given in the latter part of the paper is illustrated by diagrams of some characteristic quantities.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA W OPOLU

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 października 1975 r.

DRGANIA CIĘGNA W PŁASZCZYŹNIE ZWISU Z UWZGLĘDNIENIEM JEGO SZTYWNOŚCI NA ZGINANIE

JÓZEF NIZIOŁ, ALICJA PIENIĄŻEK (KRAKÓW)

1. Wstęp

Zagadnienia dynamiki ciężna niewątpliwie należą do ważnych zarówno pod względem zastosowań inżynierskich, jak i pod względem poznawczym. Równania ruchu ciężen są układami równań różniczkowych nieliniowych o pochodnych cząstkowych. Dodatkowo są to układy równań o zmiennych współczynnikach. Wszystko to stwarza poważne trudności w uzyskaniu nawet przybliżonych, dostatecznie dokładnych, rozwiązań wymienionego układu równań i przeanalizowaniu ruchu ciężna, a tym samym określeniu interesujących nas wielkości dynamicznych, jak przyspieszenia, naprężenia dynamiczne itp.

Do znanych, najistotniejszych z tego zakresu zagadnień można zaliczyć rozwiązania przy różnych stopniach uproszczenia, mianowicie:

1. W stanie równowagi oś ciężna pokrywa się z odcinkami linii prostej. Rozważa się nieliniowe drgania poprzeczne ciężna.

2. Rozważa się drgania nieliniowe ciężna o małym zwisie przy zastosowaniu hipotezy KIRCHHOFFA [5] zakładającej możliwość pominięcia podłużnych sił bezwładności i ich wpływu na drgania poprzeczne ciężna.

3. Małe drgania ciężna wokół jego położenia równowagi statycznej rozpracowane przez ANANIEWA [1].

4. Szczególny przypadek poprzedniego, gdzie dodatkowo pomija się wpływ podłużnych sił bezwładności na drgania poprzeczne.

Znane są różne przypadki rozwiązań powyższych zagadnień, w zależności od warunków brzegowych, obciążeń ciężna dodatkowymi masami itp.

Omówione, częściowo rozwiązane problemy, dotyczą ciężen idealnie wiotkich, bez uwzględnienia sztywności na zginanie. Wiadomo, że wartość sztywności wzdłużnej EA ma istotny wpływ na formy drgań ciężna [3]. W odróżnieniu od struny przy odpowiednio dużej sztywności EA pierwsza forma drgań może być antysymetryczna. Celowe jest więc przeanalizowanie wpływu sztywności giętej EI na formy i częstości drgań ciężna, gdyż do tej pory nie zostało to zrobione.

Przedstawiona poniżej praca stanowi wstęp do znacznie ogólniejszego zagadnienia tłumienia drgań w liniach elektroenergetycznych. W kraju, badania eksperymentalne z tego zakresu prowadzi Biuro Projektów Energetycznych w Krakowie. Zarówno w literaturze krajowej, jak i zagranicznej brak jest opracowań teoretycznych z tego zakresu. Stosowane jako tłumiki drgań pętle stanowią ciężno. Odległość między punktami zamocowania takiego ciężna wynosi 4,4 [m] przy strzałce zwisu 0,4 [m]. Z literatury wiadomo

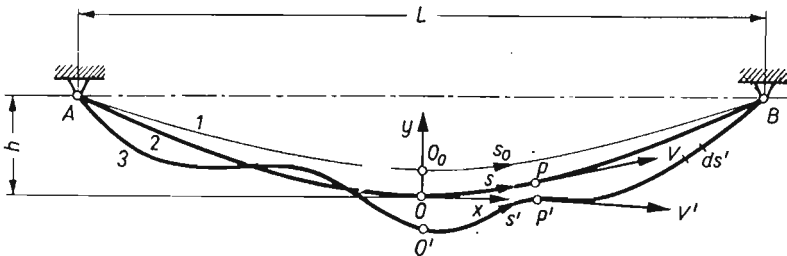
[3], że przy stosunku strzałki zwisu do rozpiętości podpór mniejszym od $\frac{1}{8} \left(\frac{f_0}{L} < \frac{1}{8} \right)$ można traktować ciężno jako ciężno o małym zwisie i stosować odpowiednie uproszczenia przy analizie drgań wokół jego położenia równowagi statycznej.

W niniejszej pracy zajmiemy się analizą drgań własnych i wymuszonych ciężna w płaszczyźnie zwisu. Weźmiemy pod uwagę ciężno zamocowane na dwóch sztywnych podporach przegubowych, którego długość jest większa od rozpiętości podpór. Dodatkowo uwzględnimy sztywność giętą ciężna EI .

W wielu zagadnieniach praktycznych, a dotyczy to głównie przewodów elektroenergetycznych, drgania wymuszone są drganiami eolnymi. Tego typu drgania wywołane wirami Kármána były przeanalizowane przez BOLOTINA [2], jednak przy traktowaniu przewodu jako struny.

2. Równania ruchu

Na rys. 1 jest przedstawione ciężno, gdzie zaznaczono trzy jego konfiguracje: naturalną, statyczną (w położeniu równowagi) i dynamiczną. Będziemy uwzględniać tylko nieliniowość geometryczną. Oprócz założenia o liniowości fizycznej pominiemy tłumienie ciężna.



Rys. 1. Ciężno i jego konfiguracje
1 — naturalna, 2 — statyczna, 3 — dynamiczna

Weźmy pod uwagę element ds_0 ciężna odpowiadający konfiguracji naturalnej. W konfiguracji dynamicznej przyjmie on wielkość ds' , którą można znaleźć ze związku

$$(2.1) \quad ds' = \left(1 + \frac{\bar{T}}{AE} \right) ds_0,$$

w którym \bar{T} jest napięciem ciężna, A przekrojem poprzecznym, E zaś modułem sprężystości Younga.

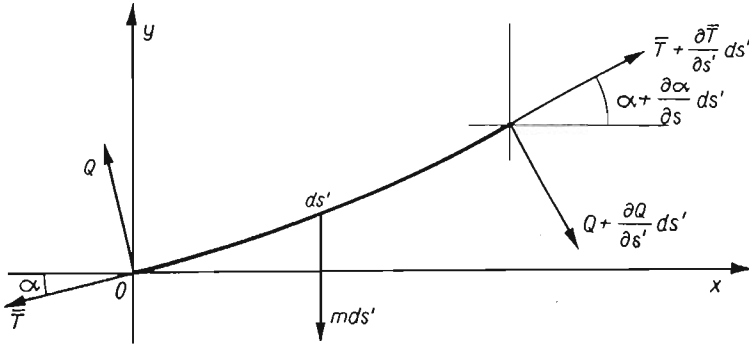
Ruch ciężna będziemy rozważać w układzie kartezjańskim, Oxy , związanym z położeniem równowagi statycznej (położenie 2 na rys. 1).

Na rys. 2 przedstawiono element ciężna ds' oraz siły na niego działające. Składowe napięcia \bar{T} , we współrzędnych kartezjańskich Oxy , są następujące

$$(2.2) \quad \bar{T} \frac{\partial x}{\partial s'}, \quad \bar{T} \frac{\partial y}{\partial s'}.$$

Przyrosty napięcia w kierunkach x, y wzdłuż elementu ds' będą następujące

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial s'} \left(\bar{T} \frac{\partial x}{\partial s'} \right) ds', \quad \frac{\partial}{\partial s'} \left(\bar{T} \frac{\partial y}{\partial s'} \right) ds'.$$



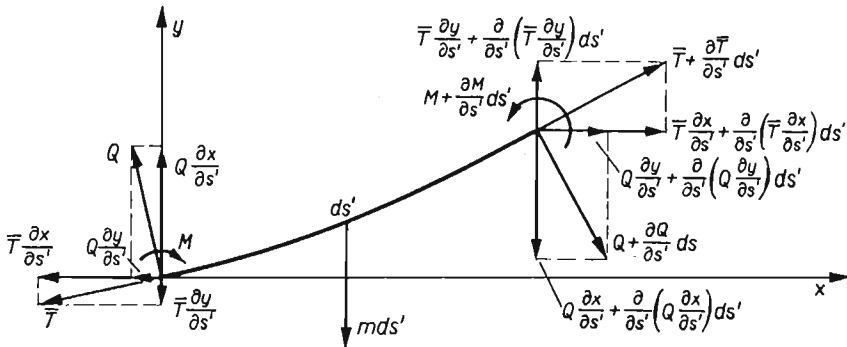
Rys. 2. Siły działające na element cięgna

Przy wyprowadzeniu równań uwzględnimy także siłę poprzeczną Q . Jej składowe i odpowiednie przyrosty wzdłuż ds' są, odpowiednio:

$$(2.4) \quad Q \frac{\partial x}{\partial s'}, \quad Q \frac{\partial y}{\partial s'},$$

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial s'} \left(Q \frac{\partial x}{\partial s'} \right) ds', \quad \frac{\partial}{\partial s'} \left(Q \frac{\partial y}{\partial s'} \right) ds'.$$

Rozkład sił wzdłużnych i poprzecznych na osie przyjętego układu współrzędnych przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Rozkład sił działających na element cięgna

Podobnie jak w pracy [7], przyjmujemy założenie, że składowa prędkości dowolnego punktu cięgna na kierunek styczny do jego konfiguracji ma wartość stałą. Założenie to jest uzasadnione i ogólniejsze od omówionych wcześniej przypadków 1 - 4, gdzie pomijano wpływ bezwładności w kierunku wzdłużnym.

W celu określenia siły bezwładności obliczymy przyspieszenie. Weźmy składowe prędkości w punkcie P'

$$(2.6) \quad \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + V' \frac{\partial x}{\partial s'}, \quad \frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + V' \frac{\partial y}{\partial s'},$$

gdzie V' jest prędkością styczną do konfiguracji dynamicznej cięgna.

Obliczając dalej pochodną Eulera z wyrażen (2.6) otrzymujemy składowe przyspieszenia

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{D^2x}{Dt^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2V' \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s'} + V' \frac{\partial}{\partial s'} \left(V' \frac{\partial x}{\partial s'} \right), \\ \frac{D^2y}{Dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V' \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s'} + V' \frac{\partial}{\partial s'} \left(V' \frac{\partial y}{\partial s'} \right). \end{aligned}$$

Na podstawie (2.1) otrzymujemy

$$V' = \frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{\partial s'}{\partial s_0} \frac{\partial s_0}{\partial t} = \left(1 + \frac{\bar{T}}{AE} \right) V_0,$$

gdzie obecnie V_0 jest prędkością styczną do konfiguracji naturalnej.

W związku z powyższym układ zależności (2.7) można zapisać następująco:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{D^2x}{Dt^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left(V_0 \frac{\partial x}{\partial s_0} \right), \\ \frac{D^2y}{Dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left(V_0 \frac{\partial y}{\partial s_0} \right). \end{aligned}$$

W zależnościach (2.8) składowe $2V_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s_0}$ i $2V_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s_0}$, to składowe przyspieszenia Coriolisa, ostatnie zaś człony są składowymi przyspieszenia dośrodkowego.

Sztywność giętną EI wprowadzimy do równań ruchu wychodząc z równania linii ugięcia zapisanego w postaci

$$(2.9) \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial s'} \frac{\partial^2 y}{\partial s'^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial s'^2} \frac{\partial y}{\partial s'}}{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s'} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s'} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{M(s')}{EI}.$$

Powyższe równanie zróżniczkujemy jednokrotnie względem s' i w ten sposób otrzymamy zależność na siłę poprzeczną Q . Zależność tę napiszemy od razu w zmiennej s_0 wykorzystując w tym celu związek (2.1). Ostatecznie mamy

$$(2.10) \quad Q = \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE} \right)^3} \left(\frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right).$$

Możemy obecnie przystąpić do napisania równań ruchu. Oznaczmy przez m masę przypadającą na jednostkę długości ciężna. Z warunku rzutów na kierunki x i y po uwzględnieniu sił bezwładności oraz zależności (2.10) otrzymamy następujący układ równań:

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) + \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left(\frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \frac{\partial y}{\partial s_0} \right] = m \left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left(V_0 \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) - \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left(\frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \frac{\partial x}{\partial s_0} \right] = m \left[g + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left(V_0 \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \right].$$

Stowarzyszone równania równowagi mają postać:

$$(2.12) \quad \frac{d}{ds_0} \left(\frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{dx}{ds_0} \right) + \frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left[\frac{dx}{ds_0} \frac{d^3 y}{ds_0^3} \frac{dy}{ds_0} - \frac{d^3 x}{ds_0^3} \left(\frac{dy}{ds_0} \right)^2 \right] \right\} = mV_0^2 \frac{d^2 x}{ds_0^2},$$

$$\frac{d}{ds_0} \left(\frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{dy}{ds_0} \right) - \frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left[\left(\frac{dx}{ds_0} \right)^2 \frac{d^3 x}{ds_0^3} - \frac{d^3 x}{ds_0^3} \frac{dy}{ds_0} \frac{dx}{ds_0} \right] \right\} = m \left(g + V_0^2 \frac{d^2 y}{ds_0^2} \right).$$

Równania drgań wymuszonych otrzymamy przez dodanie do prawych stron równań (2.11) funkcji wymuszających $\bar{f}_1(s_0, t)$, $\bar{f}_2(s_0, t)$. Otrzymamy wówczas następujący układ równań:

$$(2.13) \quad \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) + \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left(\frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \frac{\partial y}{\partial s_0} \right] = m \left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left(V_0 \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) \right] + \bar{f}_1(s_0, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) - \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left(\frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \frac{\partial x}{\partial s_0} \right] = m \left[g + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left(V_0 \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \right] + \bar{f}_2(s_0, t).$$

Dla liny zamocowanej, jak na rys. 1, zarówno przemieszczenia, jak i momenty zginające w punktach $s_0 = -\frac{l}{2}$ i $s_0 = \frac{l}{2}$ są równe zero (gdzie l jest długością cięgna w stanie nieodkształconym), a więc:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} x\left(-\frac{l}{2}, t\right) &= 0, & y\left(-\frac{l}{2}, t\right) &= 0, \\ x\left(\frac{l}{2}, t\right) &= 0, & y\left(\frac{l}{2}, t\right) &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} \frac{\partial y}{\partial s_0} \Big|_{s_0 = -\frac{l}{2}} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} \frac{\partial y}{\partial s_0} \Big|_{s_0 = \frac{l}{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Warunki początkowe przyjmujemy w następującej postaci:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} x(s_0, 0) &= \varphi_1(s_0), & y(s_0, 0) &= \varphi_2(s_0), \\ \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \varphi_3(s_0), & \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \varphi_4(s_0). \end{aligned}$$

3. Drgania swobodne

Przeanalizujemy obecnie drgania swobodne cięgna. Weźmiemy zatem do dalszych rozważań układ (2.12).

Przyjmujemy, że współrzędne x, y oraz napięcie \bar{T} doznają małych przyrostów u, v, τ , co wyrazimy następująco:

$$(3.1) \quad x = x_1 + u, \quad y = y_1 + v, \quad \bar{T} = T + \tau.$$

Współrzędne x_1 i y_1 odpowiadają położeniu równowagi cięgna. Będziemy je uważali za stałe. Rozważymy dalej małe drgania cięgna wokół położenia równowagi. Podczas tych drgań napięcie w cięgnie będzie się zmieniać nieznacznie. Wyraża to trzeci wzór w (3.1).

W dalszej analizie wygodniej będzie przejść ze zmiennej s_0 na s przy pomocy oczywistej zależności

$$ds = ds_0 \left(1 + \frac{T}{AE}\right).$$

Po podstawieniu (3.1) do (2.12), odpowiednim przekształceniu i uporządkowaniu otrzymujemy następujący układ równań (już w zmiennej s):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \left(1 + \frac{T}{AE}\right) \frac{\partial}{\partial s} \left[T \frac{dx_1}{ds} + \tau \frac{dx_1}{ds} + \tau \frac{\partial u}{\partial s} + T \frac{\partial u}{\partial s} \right] + \left(1 + \frac{T}{AE}\right)^2 EI \frac{\partial}{\partial s} \times \\ \times \left[\frac{dx_1}{ds} \frac{d^3 y_1}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} + \frac{dx_1}{ds} \frac{\partial^3 v}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d^3 y_1}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{dy_1}{ds} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & -\frac{d^3x_1}{ds^3} \left(\frac{dy_1}{ds} \right)^2 - 2 \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{dy_1}{ds} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \left(\frac{dy_1}{ds} \right)^2 - 2 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{dy_1}{ds} + \\
 \text{[c.d.]} \quad & + \frac{dx_1}{ds} \frac{d^3y_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{dx_1}{ds} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d^3y_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} - \\
 & - \frac{d^3x_1}{ds^3} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \Big] = m \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + V^2 \frac{d^2x_1}{ds^2} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right], \\
 & \left(1 + \frac{T}{AE} \right) \frac{\partial}{\partial s} \left[T \frac{dy_1}{ds} + \tau \frac{dy_1}{ds} + T \frac{\partial v}{\partial s} + \tau \frac{\partial v}{\partial s} \right] - \\
 & - \left(1 + \frac{T}{AE} \right)^2 EI \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 \frac{d^3y_1}{ds^3} + \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} + 2 \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d^3y_1}{ds^3} \frac{dx_1}{ds} + \right. \\
 & + 2 \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{dx_1}{ds} - \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} \frac{dx_1}{ds} - \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{dx_1}{ds} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{dy_1}{ds} \frac{dx_1}{ds} - \\
 & - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{dx_1}{ds} + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{d^3y_1}{ds^3} + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} - \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} \frac{\partial u}{\partial s} - \\
 & \left. - \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{dy_1}{ds} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} \right] = \\
 & = m \left[g + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + V^2 \frac{d^2y_1}{ds^2} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right].
 \end{aligned}$$

Podobnie, jak w [7] przyjmujemy, że:

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \frac{dx_1}{ds} = 1, \quad \frac{dy_1}{ds} = \psi s, \\
 & \tau = AE \left(1 + \frac{T}{AE} \right) \left[\frac{dx_1}{ds} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{dy_1}{ds} \frac{\partial v}{\partial s} \right],
 \end{aligned}$$

gdzie ψ , ze względu na przyjęte założenie $\frac{f_0}{l} < \frac{1}{8}$, jest wielkością małą.

Po pominięciu małych wyższego rzędu (ψ w potęgze wyższej niż pierwsza), wykorzystaniu równań równowagi oraz zależności (3.3) otrzymamy układ:

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \left(1 + \frac{T}{AE} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{T}{1 + \frac{T}{AE}} \frac{\partial u}{\partial s} + AE \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \psi s \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] + \\
 & + \left(1 + \frac{T}{AE} \right)^2 EI \frac{\partial}{\partial s} \left[\psi s \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \right] = m \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right], \\
 & \left(1 + \frac{T}{AE} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{T}{1 + \frac{T}{AE}} \frac{\partial v}{\partial s} + AE \left(\psi s \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] + \\
 & + \left(1 + \frac{T}{AE} \right)^2 EI \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \psi s - \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \right] = m \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right].
 \end{aligned}$$

Wprowadźmy jeszcze następujące oznaczenia:

$$(3.5) \quad \frac{m}{\left(1 + \frac{T}{AE}\right)^2} = M, \quad \frac{T}{1 + \frac{T}{AE}} - MV^2 = W, \quad \frac{d}{ds} = D,$$

$$(3.5a) \quad \alpha^2 = \frac{W}{M}, \quad \bar{V} = \frac{V}{\alpha}, \quad \mu = \frac{W}{AE}.$$

Ponadto przekształcimy pochodne mieszane, występujące po prawych stronach układu (3.4), w następujący sposób:

$$2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} = 2V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) = 2V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial s}} \right) = 2V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{V} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

i analogicznie

$$2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Rozwiązania układu (3.4) przyjmijmy w postaci:

$$(3.6) \quad u(s, t) = u(s)e^{i\alpha t}, \quad v(s, t) = v(s)e^{i\alpha t}.$$

Po podstawieniu (3.6) do układu (3.4), z uwzględnieniem oznaczeń (3.5), otrzymujemy:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} -2EI\psi^2 s D^3 u + WD^2 u + AED^2 u + 3Mq^2 \alpha^2 u + AE\psi Dv + \\ + AE\psi s D^2 v + EI\psi D^3 v + EI\psi s D^4 v = 0, \\ EI\psi s D^4 u + EI\psi D^3 u + AE\psi Du + AE\psi s D^2 u - EID^4 v + WD^2 v + 3M\alpha^2 q^2 v = 0. \end{aligned}$$

Następnie dzielimy równania układu (3.7) stronami przez AE i w ten sposób otrzymujemy układ:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} (\mu + 1)D^2 u + 3\mu q^2 u + \frac{I}{A} \psi s D^4 v + \frac{I}{A} \psi D^3 v + \psi s D^2 v + \psi Dv = 0, \\ \frac{I}{A} \psi s D^4 u + \frac{I}{A} \psi D^3 u + \psi s D^2 u + \psi Du - \frac{I}{A} D^4 v + \mu D^2 v + 3\mu q^2 v = 0. \end{aligned}$$

Uzyskanie rozwiązania układu równań różniczkowych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach (3.8) nastręcza duże kłopoty. W celu uzyskania rozwiązania dokonamy przekształcenia wprowadzając zmienne ξ i η według wzorów:

$$(3.9) \quad u = \xi - \psi \left(s - \frac{1}{D} \right) \eta, \quad v = \psi \left(s - \frac{1}{D} \right) \xi + \eta.$$

Podstawimy (3.9) do układu (3.8). Po odpowiednim przekształceniu i pominięciu, jako bardzo małych, członów zawierających iloczyny $\mu\psi$ otrzymamy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} (\mu + 1)D^2 \xi + 3\mu q^2 \xi + 2 \frac{I}{A} \psi D^3 \eta = 0, \\ 2 \frac{I}{A} \psi D^3 \xi + 2\psi D\xi - \frac{I}{A} D^4 \eta + \mu D^2 \eta + 3\mu q^2 \eta = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązania układu (3.10) będziemy poszukiwali w następującej postaci:

$$\xi = Ae^{rs}, \quad \eta = Be^{rs}.$$

Po podstawieniu powyższych postaci rozwiązań do układu (3.10), wykonaniu odpowiednich działań i uporządkowaniu otrzymujemy:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} A[(\mu+1)r^2 + 3\mu q^2] + B \left[2 \frac{I}{A} \psi r^3 \right] &= 0, \\ A \left[2 \frac{I}{A} \psi r^3 + 2\psi r \right] + B \left[-\frac{I}{A} r^4 + \mu r^2 + 3\mu q^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne układu (3.11) ma postać

$$(3.12) \quad - \left[(\mu+1) \frac{I}{A} + 4 \left(\frac{I}{A} \right)^2 \psi^2 \right] r^6 + \left[(\mu+1)\mu - 3 \frac{I}{A} \mu q^2 - 4\psi^2 \frac{I}{A} \right] r^4 + \\ + [3(\mu+1)\mu q^2 + 9\mu^2 q^2] r^2 + 9\mu^2 q^4 = 0.$$

Po pominięciu składników zawierających ψ^2 otrzymujemy

$$(3.13) \quad - \frac{I}{A} r^6 + \left[1 - 3 \frac{I}{A} q^2 \right] \mu r^4 + 3\mu q^2 r^2 + 9\mu^2 q^4 = 0.$$

Jest to równanie trzeciego stopnia ze względu na r^2 . Zbadamy znak wyróżnika \mathcal{D} , który w końcowej formie można przedstawić następująco:

$$(3.14) \quad \mathcal{D} = \frac{q^4 \mu^3}{3 \left(\frac{I}{A} \right)^4} \left[-27 \left(\frac{I}{A} \right)^3 \mu^2 q^6 + 9 \left(\frac{I}{A} \right)^2 (2 + 3\mu) \mu q^4 + \right. \\ \left. + 3 \frac{I}{A} (5\mu - 1 - 3\mu^2) q^2 + \mu \left(\mu - \frac{1}{4} \right) \right].$$

Jak widać, wyróżnik \mathcal{D} zależy od q . Ścisłe określenie znaku \mathcal{D} w zależności od parametru q jest możliwe tylko dla konkretnych wartości, przy czym i tak należy się liczyć z koniecznością rozwiązania nierówności szóstego stopnia. Biorąc pod uwagę powyższe rozpatrzymy ogólnie przypadki różnych, możliwych znaków \mathcal{D} .

Przypadek I — $\mathcal{D} > 0$. W tym przypadku, ze wzorów Cardano, otrzymujemy jeden pierwiastek rzeczywisty oraz dwa pierwiastki zespolone sprzężone. Ponieważ pierwiastek rzeczywisty może być dodatni lub ujemny istnieją dwie dalsze możliwości:

- jeden pierwiastek rzeczywisty ujemny, dwa zespolone sprzężone,
- jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni, dwa zespolone sprzężone.

Powracając do równania charakterystycznego (3.13), które jest szóstego stopnia możemy otrzymać:

- a) sześć pierwiastków zespolonych sprzężonych,
- b) dwa pierwiastki rzeczywiste, różnych znaków i cztery zespolone sprzężone.

Przypadek II — $\mathcal{D} < 0$. Otrzymamy wtedy trzy pierwiastki rzeczywiste, przy czym dwa z nich mogą być dodatnie i jeden ujemny, względnie dwa ujemne jeden dodatni. Zatem równanie charakterystyczne (3.13) będzie miało:

- a) cztery pierwiastki rzeczywiste i dwa zespolone sprzężone,
- b) cztery pierwiastki zespolone sprzężone i dwa rzeczywiste.

Przypadek $\mathcal{D} = 0$ jest szczególnym przypadkiem $\mathcal{D} < 0$ i nie będziemy go tutaj rozpatrywać.

W związku z przedstawionymi wyżej przypadkami pierwiastków równania charakterystycznego, rozwiązania układu równań (3.10) będą miały odpowiednio różną postać. Przedstawimy je obecnie, dla każdego przypadku oddzielnie.

Przypadek I. Zapišmy pierwiastki równania charakterystycznego w następującej postaci:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} r_1 &= a_1 + ib_1, & r_2 &= a_1 - ib_1, \\ r_3 &= a_2 + ib_2, & r_4 &= a_2 - ib_2, \\ r_5 &= a_3 + ib_3, & r_6 &= a_3 - ib_3. \end{aligned}$$

Całki ogólne układu (3.10) będą miały postać:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \xi &= \sum_{j=1}^6 A_j e^{r_j s}, \\ \eta &= \sum_{j=1}^6 B_j e^{r_j s}. \end{aligned}$$

Stałe A_j i B_j , ($j = 1, \dots, 6$) są stałymi zespolonymi związanymi następującą zależnością wynikającą z układu (3.11):

$$(3.17) \quad \frac{B_j}{A_j} = - \frac{(\mu+1)r_j^2 + 3\mu q^2}{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3} = - \frac{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3 + 2\psi r_j}{-\frac{I}{A} r_j^4 + \mu r_j^2 + 3\mu q^2} = \beta_j + \gamma_j i,$$

$$(j = 1, \dots, 6).$$

Rozwiązania (3.16) można zapisać w postaci rzeczywistej, wprowadzając nowe stałe A_{1j} , A_{2j} , A_{3j} za pomocą zależności:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} (A_{11} - iA_{12}), & A_2 &= \frac{1}{2} (A_{11} + iA_{12}), \\ A_3 &= \frac{1}{2} (A_{21} - iA_{22}), & A_4 &= \frac{1}{2} (A_{21} + iA_{22}), \\ A_5 &= \frac{1}{2} (A_{31} - iA_{32}), & A_6 &= \frac{1}{2} (A_{31} + iA_{32}), \end{aligned}$$

na podstawie (3.17) i (3.15) słuszne są związki:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} B_1 &= A_1(\beta_1 + i\gamma_1), & B_2 &= A_2(\beta_2 + i\gamma_2) = A_2(\beta_1 - i\gamma_1), \\ B_3 &= A_3(\beta_3 + i\gamma_3), & B_4 &= A_4(\beta_4 + i\gamma_4) = A_4(\beta_3 - i\gamma_3), \\ B_5 &= A_5(\beta_5 + i\gamma_5), & B_6 &= A_6(\beta_5 + i\gamma_6) = A_6(\beta_5 - i\gamma_5). \end{aligned}$$

Po podstawieniu (3.18) i (3.19) odpowiednio do (3.16), z uwzględnieniem (3.15), otrzymujemy:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \xi &= A_{11} e^{a_1 s} \cos b_1 s + A_{12} e^{a_1 s} \sin b_1 s + A_{21} e^{a_2 s} \cos b_2 s + A_{22} e^{a_2 s} \sin b_2 s + \\ &\quad + A_{31} e^{a_3 s} \cos b_3 s + A_{32} e^{a_3 s} \sin b_3 s, \\ \eta &= (A_{11} \beta_1 + A_{12} \gamma_1) e^{a_1 s} \cos b_1 s + (A_{11} \gamma_1 - A_{12} \beta_1) e^{a_1 s} \sin b_1 s + \\ &\quad + (A_{21} \beta_3 + A_{22} \gamma_3) e^{a_2 s} \cos b_2 s - (A_{21} \gamma_3 - A_{22} \beta_3) e^{a_2 s} \sin b_2 s + \\ &\quad + (A_{31} \beta_5 + A_{32} \gamma_5) e^{a_3 s} \cos b_3 s - (A_{31} \gamma_5 - A_{32} \beta_5) e^{a_3 s} \sin b_3 s. \end{aligned}$$

Stałe A_{1j} , A_{2j} , A_{3j} wyznaczmy z warunków brzegowych, które po zastosowaniu transformacji (3.9) przyjmą postać

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \xi \left(-\frac{l}{2} \right) = \xi \left(\frac{l}{2} \right) = 0, \quad \eta \left(-\frac{l}{2} \right) = \eta \left(\frac{l}{2} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + 2\psi \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) \Big|_{s=-\frac{l}{2}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + 2\psi \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) \Big|_{s=\frac{l}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Przystąpimy obecnie do wyznaczenia stałych. Wykorzystując warunki brzegowe (3.21) otrzymamy układ sześciu jednorodnych równań algebraicznych na poszukiwane stałe. Ma on postać:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} &A_{11} e^{-\frac{1}{2} a_1 l} \cos b_1 \left(-\frac{l}{2} \right) + A_{12} e^{-\frac{1}{2} a_1 l} \sin b_1 \left(-\frac{l}{2} \right) + A_{21} e^{-\frac{1}{2} a_2 l} \cos b_2 \left(-\frac{l}{2} \right) + \\ &\quad + A_{22} e^{-\frac{1}{2} a_2 l} \sin b_2 \left(-\frac{l}{2} \right) + A_{31} e^{-\frac{1}{2} a_3 l} \cos b_3 \left(-\frac{l}{2} \right) + \\ &\quad + A_{32} e^{-\frac{1}{2} a_3 l} \sin b_3 \left(-\frac{l}{2} \right) = 0, \\ &A_{11} e^{\frac{1}{2} a_1 l} \cos \frac{1}{2} b_1 l + A_{12} e^{\frac{1}{2} a_1 l} \sin \frac{1}{2} b_1 l + A_{21} e^{\frac{1}{2} a_2 l} \cos \frac{1}{2} b_2 l + \\ &\quad + A_{22} e^{\frac{1}{2} a_2 l} \sin \frac{1}{2} b_2 l + A_{31} e^{\frac{1}{2} a_3 l} \cos \frac{1}{2} b_3 l + A_{32} e^{\frac{1}{2} a_3 l} \sin \frac{1}{2} b_3 l = 0, \\ &A_{11} \left[\beta_1 \cos \left(-\frac{1}{2} b_1 l \right) - \gamma_1 \sin \left(-\frac{1}{2} b_1 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_1 l} + \\ &\quad + A_{12} \left[\gamma_1 \cos \left(-\frac{1}{2} b_1 l \right) + \beta_1 \sin \left(-\frac{1}{2} b_1 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_1 l} + \\ &\quad + A_{21} \left[\beta_3 \cos \left(-\frac{1}{2} b_2 l \right) - \gamma_3 \sin \left(-\frac{1}{2} b_2 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_2 l} + \\ &\quad + A_{22} \left[\gamma_3 \cos \left(-\frac{1}{2} b_2 l \right) + \beta_3 \sin \left(-\frac{1}{2} b_2 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_2 l} + \\ &\quad + A_{31} \left[\beta_5 \cos \left(-\frac{1}{2} b_3 l \right) + \gamma_5 \sin \left(-\frac{1}{2} b_3 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_3 l} + \\ &\quad + A_{32} \left[\gamma_5 \cos \left(-\frac{1}{2} b_3 l \right) + \beta_5 \sin \left(-\frac{1}{2} b_3 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_3 l} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad & A_{11} \left(\beta_1 \cos \frac{1}{2} b_1 l - \gamma_1 \sin \frac{1}{2} b_1 l \right) e^{\frac{1}{2} a_1 l} + A_{12} \left(\gamma_1 \cos \frac{1}{2} b_1 l + \beta_1 \sin \frac{1}{2} b_1 l \right) e^{\frac{1}{2} a_1 l} + \\
 [c.d.] \quad & + A_{21} \left(\beta_3 \cos \frac{1}{2} b_2 l - \gamma_3 \sin \frac{1}{2} b_2 l \right) e^{\frac{1}{2} a_2 l} + A_{22} \left(\gamma_3 \cos \frac{1}{2} b_2 l + \right. \\
 & \left. + \beta_3 \sin \frac{1}{2} b_2 l \right) e^{\frac{1}{2} a_2 l} + A_{31} \left(\beta_5 \cos \frac{1}{2} b_3 l - \gamma_5 \sin \frac{1}{2} b_3 l \right) e^{\frac{1}{2} a_3 l} + \\
 & + A_{32} \left(\gamma_5 \cos \frac{1}{2} b_3 l + \beta_5 \sin \frac{1}{2} b_3 l \right) e^{\frac{1}{2} a_3 l} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \{ [-2\psi b_1 - 2\beta_1 a_1 b_1 - \gamma_1 (a_1^2 + b_1^2)] \sin \left(-\frac{1}{2} b_1 l \right) + \\
 & + [2\psi a_1 - 2\gamma_1 a_1 b_1 - \beta_1 (a_1^2 + b_1^2)] \cos \left(-\frac{1}{2} b_1 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_1 l} + \\
 & + A_{12} \{ [2\psi a_1 - 2\gamma_1 a_1 b_1 + \beta_1 (a_1^2 - b_1^2)] \sin \left(-\frac{1}{2} b_1 l \right) + \\
 & + [2\psi b_1 + 2\beta_1 a_1 b_1 + \gamma_1 (a_1^2 - b_1^2)] \cos \left(-\frac{1}{2} b_1 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_1 l} + \\
 & + A_{21} \{ [-2\psi b_2 - 2\beta_3 a_2 b_2 - \gamma_3 (a_2^2 + b_2^2)] \sin \left(-\frac{1}{2} b_2 l \right) + \\
 & + [2\psi a_2 - 2\gamma_3 a_2 b_2 + \beta_3 (a_2^2 - b_2^2)] \cos \left(-\frac{1}{2} b_2 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_2 l} + \\
 & + A_{22} \{ [2\psi a_2 - 2\gamma_3 a_2 b_2 + \beta_3 (a_2^2 - b_2^2)] \sin \left(-\frac{1}{2} b_2 l \right) + \\
 & + [2\psi b_2 + 2\beta_3 a_2 b_2 + \gamma_3 (a_2^2 - b_2^2)] \cos \left(-\frac{1}{2} b_2 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_2 l} + \\
 & + A_{31} \{ [-2\psi b_3 - 2\beta_5 a_3 b_3 - \gamma_5 (a_3^2 + b_3^2)] \sin \left(-\frac{1}{2} b_3 l \right) + \\
 & + [2\psi a_3 - 2\gamma_5 a_3 b_3 + \beta_5 (a_3^2 - b_3^2)] \cos \left(-\frac{1}{2} b_3 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_3 l} + \\
 & + A_{32} \{ [2\psi a_3 - 2\gamma_5 a_3 b_3 - \beta_5 (a_3^2 + b_3^2)] \sin \left(-\frac{1}{2} b_3 l \right) + \\
 & + [2\psi b_3 + 2\beta_5 a_3 b_3 + \gamma_5 (a_3^2 - b_3^2)] \cos \left(-\frac{1}{2} b_3 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_3 l} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \left[(-2\psi b_1 - 2\beta_1 a_1 b_1 - \gamma_1 a_1^2 + \gamma_1 b_1^2) \sin \frac{1}{2} b_1 l + \right. \\
 & \left. + (2\psi a_1 + \beta_1 a_1^2 - \beta_1 b_1^2 - 2\gamma_1 a_1 b_1) \cos \frac{1}{2} b_1 l \right] e^{\frac{1}{2} a_1 l} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.22) \quad & + A_{12} \left[(2\psi a_1 - 2\gamma_1 a_1 b_1 + \beta_1 a_1^2 - \beta_1 b_1^2) \sin \frac{1}{2} b_1 l + \right. \\
\text{[c.d.]} \quad & \left. + (2\psi b_1 + \gamma_1 a_1^2 - \gamma_1 b_1^2 + 2\beta_1 a_1 b_1) \cos \frac{1}{2} b_1 l \right] e^{\frac{1}{2} a_1 l} + \\
& + A_{21} \left[(-2\psi b_2 - 2\beta_3 a_2 b_2 - \gamma_3 a_2^2 + \gamma_3 b_2^2) \sin \frac{1}{2} b_2 l + \right. \\
& \left. + (2\psi a_2 + \beta_3 a_2^2 - \beta_3 b_2^2 - 2\gamma_3 a_2 b_2) \cos \frac{1}{2} b_2 l \right] e^{\frac{1}{2} a_2 l} + \\
& + A_{22} \left[(2\psi a_2 - 2\gamma_3 a_2 b_2 + \beta_3 a_2^2 - \beta_3 b_2^2) \sin \frac{1}{2} b_2 l + \right. \\
& \left. + (2\psi b_2 + \gamma_3 a_2^2 - \gamma_3 b_2^2 + 2\beta_3 a_2 b_2) \cos \frac{1}{2} b_2 l \right] e^{\frac{1}{2} a_2 l} + \\
& + A_{31} \left[(-2\psi b_3 - 2\beta_5 a_3 b_3 - \gamma_5 a_3^2 + \gamma_5 b_3^2) \sin \frac{1}{2} b_3 l + \right. \\
& \left. + (2\psi a_3 + \beta_5 a_3^2 - \beta_5 b_3^2 - 2\gamma_5 a_3 b_3) \cos \frac{1}{2} b_3 l \right] e^{\frac{1}{2} a_3 l} + \\
& + A_{32} \left[(-2\gamma_5 a_3 b_3 - \beta_5 a_3^2 - \beta_5 b_3^2 + 2\psi a_3) \sin \frac{1}{2} b_3 l + \right. \\
& \left. + (2\psi b_3 + \gamma_5 a_3^2 - \gamma_5 b_3^2 + 2\beta_5 a_3 b_3) \cos \frac{1}{2} b_3 l \right] e^{\frac{1}{2} a_3 l} = 0.
\end{aligned}$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań tego układu jest zerowanie się wyznacznika utworzonego ze współczynników występujących przy poszukiwanych stałych. Jeżeli współczynniki te oznaczmy kolejno przez c_{ij} ($i = 1, \dots, 6$). ($j = 1, \dots, 6$), to z równania

$$(3.23) \quad \sum_{k_1, k_2, \dots, k_6} \varepsilon c_{1k_1} c_{2k_2} \dots c_{6k_6} = 0,$$

gdzie sumowanie jest po wszystkich możliwych permutacjach drugich wskaźników k_1, k_2, \dots, k_6 liczb $1, 2, \dots, 6$, zaś ε jest równe $+1$ lub -1 w zależności od tego, czy permutacja k_1, k_2, \dots, k_6 jest parzysta, czy też jest nieparzystą, otrzymujemy ciąg rozwiązań na częstości drgań własnych ω_n , ($\omega_n = \alpha_n q_n$). Oczywiście $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ są funkcjami ω .

Z zależności (3.18) możemy obliczyć ciągi wartości dla $a_{1n}, b_{1n}, a_{2n}, b_{2n}, a_{3n}, b_{3n}$. Następnie z układu równań na stałe (3.22), dla określonej częstości ω wyznaczamy ciągi tych stałych: $A_{11}^n, A_{12}^n, A_{21}^n, A_{22}^n, A_{31}^n, A_{32}^n$ (n jest indeksem górnym).

Po przeprowadzeniu powyższych obliczeń możemy obecnie określić postacie drgań własnych, dla określonej częstości ω .

We współrzędnych u i v są one następujące:

$$\begin{aligned}
 u_n(s) = & A_{11}^n [(\psi\gamma_1 s + \psi\beta_1 w_{1b} + \psi\gamma_1 w_{1a}) \sin b_1 s + \\
 & + (1 - \psi\beta_1 s + \psi\beta_1 w_{1a} + \psi\gamma_1 w_{1b}) \cos b_1 s] e^{a_1 s} + \\
 & + A_{12}^n [(1 - \psi\beta_1 s + \psi\beta_1 w_{1a} + \psi\gamma_1 w_{1b}) \sin b_1 s + \\
 & + (-\psi\gamma_1 s + \psi\gamma_1 w_{1a} + \psi\beta_1 w_{1b}) \cos b_1 s] e^{a_1 s} + \\
 & + A_{21}^n [(\psi\gamma_3 s - \psi\gamma_3 w_{2a} + \psi\beta_3 w_{2b}) \sin b_2 s + \\
 & + (1 - \psi\beta_3 s + \psi\beta_3 w_{2a} + \psi\gamma_3 w_{2b}) \cos b_2 s] e^{a_2 s} + \\
 & + A_{22}^n [(1 - \psi\beta_3 s + \psi\beta_3 w_{2a} + \psi\gamma_3 w_{2b}) \sin b_2 s + \\
 & + (-\psi\gamma_3 s + \psi\gamma_3 w_{2a} - \psi\beta_3 w_{2b}) \cos b_2 s] e^{a_2 s} + \\
 & + A_{31}^n [(\psi\gamma_5 s + \psi\gamma_5 w_{3a} + \psi\beta_5 w_{3b}) \sin b_3 s + \\
 & + (1 - \psi\beta_5 s + \psi\beta_5 w_{3a} + \psi\gamma_5 w_{3b}) \cos b_3 s] e^{a_3 s} + \\
 & + A_{32}^n [(1 - \psi\beta_5 s + \psi\beta_5 w_{3a} + \psi\gamma_5 w_{3b}) \sin b_3 s + \\
 & + (-\psi\gamma_5 s + \psi\gamma_5 w_{3a} - \psi\beta_5 w_{3b}) \cos b_3 s] e^{a_3 s}, \\
 v_n(s) = & A_{11}^n [(-\gamma_1 - \psi w_{1b}) \sin b_1 s + (\psi s + \beta_1 - \psi w_{1a}) \cos b_1 s] e^{a_1 s} + \\
 & + A_{12}^n [(\psi s + \beta_1 - w_{1a} \psi) \sin b_1 s + (\gamma_1 + \psi w_{1b}) \cos b_1 s] e^{a_1 s} + \\
 & + A_{21}^n [(-\gamma_3 - \psi w_{2b}) \sin b_2 s + (\psi s + \beta_3 - \psi w_{2a}) \cos b_2 s] e^{a_2 s} + \\
 & + A_{22}^n [(\psi s + \beta_3 - \psi w_{2a}) \sin b_2 s + (\gamma_3 + \psi w_{2b}) \cos b_2 s] e^{a_2 s} + \\
 & + A_{31}^n [(-\gamma_5 - \psi w_{3b}) \sin b_3 s + (\psi s + \beta_5 - \psi w_{3a}) \cos b_3 s] e^{a_3 s} + \\
 & + A_{32}^n [(\psi s + \beta_5 - \psi w_{3a}) \sin b_3 s + (\gamma_5 + \psi w_{3b}) \cos b_3 s] e^{a_3 s},
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

gdzie

$$w_{ia} = \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2}, \quad w_{ib} = \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2}, \quad i = (1, 2, 3).$$

Rozwiązania układu (3.6) wyrażą się zatem w postaci następujących szeregów:

$$\begin{aligned}
 u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t), \\
 v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t).
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

W układzie (3.26) występują stałe C_n i D_n , które wyznaczymy z warunków początkowych, wykorzystując w tym celu warunek ortogonalności drgań własnych. Przeprowadzając w znany sposób proces ortogonalizacji [4] dla układu (3.7) otrzymujemy następujący warunek ortogonalności

$$\int_0^l (u_n u_k + v_n v_k) ds = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq k, \\ \int_0^l (u_n^2 + v_n^2) ds, & \text{dla } n = k. \end{cases}
 \tag{3.27}$$

Warunki początkowe potrzebne do wyznaczenia stałych są:

$$\begin{aligned}
 u(s, 0) &= g_1(s), & v(s, 0) &= g_2(s), \\
 \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(s,0)} &= g_3(s), & \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{(s,0)} &= g_4(s).
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymamy następujące zależności na stałe C_n i D_n :

$$(3.29) \quad C_n = \frac{\int_0^l (g_1 u_n + g_2 v_n) ds}{\int_0^l (u_n^2 + v_n^2) ds},$$

$$D_n = \frac{\int_0^l (g_3 u_n + g_4 v_n) ds}{\omega_n \int_0^l (u_n^2 + v_n^2) ds}.$$

Rozpatrzmy obecnie drugą możliwość występującą w przypadku I, tzn.: kiedy równanie charakterystyczne będzie posiadało cztery pierwiastki zespolone sprzężone i dwa pierwiastki rzeczywiste równe lecz przeciwnych znaków. Zapišemy to w postaci ogólnej:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} r_1 &= c_1 + id_1, & r_2 &= c_1 - id_1, \\ r_3 &= c_2 + id_2, & r_4 &= c_2 - id_2, \\ r_5 &= c_3, & r_6 &= -c_3. \end{aligned}$$

Całki ogólne układu (3.10) zapišemy w postaci:

$$(3.31) \quad \xi = \sum_{j=1}^6 E_j e^{r_j s}, \quad \eta = \sum_{j=1}^6 H_j e^{r_j s},$$

gdzie E_j, H_j dla $(j = 1, 2, 3, 4)$ są stałymi zespolonymi, zaś dla $(j = 5, 6)$ stałymi rzeczywistymi. Wymienione stałe są między sobą związane następującą zależnością wynikającą z (3.11):

$$(3.32) \quad \frac{H_j}{E_j} = - \frac{(\mu+1)r_j^2 + 3\mu q^2}{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3} = - \frac{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3 + 2\psi r_j}{-\frac{I}{A} r_j^4 + \mu r_j^2 + 3\mu q^2} = \zeta_j + \sigma_j i,$$

dla $j = 1, 2, 3, 4,$

$$\frac{H_j}{E_j} = \zeta_j \quad \text{dla } j = 5, 6.$$

Postępując podobnie, jak poprzednio, rozwiązanie (3.31) można przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \xi &= E_{11} e^{c_1 s} \cos d_1 s + E_{12} e^{c_1 s} \sin d_1 s + E_{21} e^{c_2 s} \cos d_2 s + \\ &\quad + E_{22} e^{c_2 s} \sin d_2 s + E_{31} \operatorname{ch} c_3 s + E_{32} \operatorname{sh} c_3 s, \\ \eta &= (E_{11} \zeta_1 + E_{12} \sigma_1) e^{c_1 s} \cos d_1 s - (E_{11} \sigma_1 - E_{12} \zeta_1) e^{c_1 s} \sin d_1 s + \\ &\quad + (E_{21} \zeta_3 + E_{22} \sigma_3) e^{c_2 s} \cos d_2 s - (E_{21} \sigma_3 - E_{22} \zeta_3) e^{c_2 s} \sin d_2 s + \\ &\quad + E_{31} \zeta_5 \operatorname{ch} c_3 s - E_{32} \zeta_5 \operatorname{sh} c_3 s, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(E_{11} - iE_{12}) &= E_1, & \frac{1}{2}(E_{11} + iE_{12}) &= E_2, \\ \frac{1}{2}(E_{21} - iE_{22}) &= E_3, & \frac{1}{2}(E_{21} + iE_{22}) &= E_4,\end{aligned}$$

stałe E_{31} i E_{32} są rzeczywiste.

Przystąpimy do wyznaczenia stałych z układu równań w postaci:

$$\begin{aligned}(3.34) \quad & E_{11} \left[\cos\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) + E_{12} \sin\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_1l\right) + \\ & + E_{21} \left[\cos\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) + E_{22} \sin\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_2l\right) + \\ & + E_{31} \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2}c_3l\right) + E_{32} \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}c_3l\right) = 0, \\ & E_{11} \left(\cos\frac{1}{2}d_1l + E_{12} \sin\frac{1}{2}d_1l \right) \exp\left(\frac{1}{2}c_1l\right) + E_{21} \left(\cos\frac{1}{2}d_2l + E_{22} \sin\frac{1}{2}d_2l \right) \times \\ & \times \exp\frac{1}{2}c_2l + E_{31} \operatorname{ch}\frac{1}{2}c_3l + E_{32} \operatorname{sh}\frac{1}{2}c_3l = 0, \\ & E_{11} \left[\zeta_1 \cos\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) - \sigma_1 \sin\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_1l\right) + \\ & + E_{12} \left[\sigma_1 \cos\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) + \zeta_1 \sin\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_1l\right) + \\ & + E_{21} \left[\zeta_3 \cos\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) - \sigma_3 \sin\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_2l\right) + \\ & + E_{22} \left[\sigma_3 \cos\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) + \zeta_3 \sin\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_2l\right) + \\ & + E_{31} \zeta_5 \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2}c_3l\right) - E_{32} \zeta_5 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}c_3l\right) = 0, \\ & \left[E_{11} \left(\zeta_1 \cos\frac{1}{2}d_1l - \sigma_1 \sin\frac{1}{2}d_1l \right) + E_{12} \left(\sigma_1 \cos\frac{1}{2}d_1l + \zeta_1 \sin\frac{1}{2}d_1l \right) \right] \exp\frac{1}{2}c_1l + \\ & + \left[E_{21} \left(\zeta_3 \cos\frac{1}{2}d_2l - \sigma_3 \sin\frac{1}{2}d_2l \right) + E_{22} \left(\sigma_3 \cos\frac{1}{2}d_2l + \zeta_3 \sin\frac{1}{2}d_2l \right) \right] \times \\ & \times \exp\frac{1}{2}c_2l + E_{31} \zeta_5 \operatorname{ch}\frac{1}{2}c_3l - E_{32} \zeta_5 \operatorname{sh}\frac{1}{2}c_3l = 0, \\ & E_{11} \left\{ [-2\psi d_1 - \sigma_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\zeta_1 c_1 d_1] \sin\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) + \right.\end{aligned}$$

(3.34)
[c.d.]

$$\begin{aligned}
& + [2\psi c_1 + \zeta_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\sigma_1 c_1 d_1] \cos\left(-\frac{1}{2} d_1 l\right) \left\} \exp\left(-\frac{1}{2} c_1 l\right) + \right. \\
& \quad + E_{12} \left\{ [2\psi c_1 + \zeta_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\sigma_1 c_1 d_1] \sin\left(-\frac{1}{2} d_1 l\right) + \right. \\
& + [2\psi d_1 + \sigma_1(c_1^2 - d_1^2) + 2\zeta_1 c_1 d_1] \cos\left(-\frac{1}{2} d_1 l\right) \left\} \exp\left(-\frac{1}{2} c_1 l\right) + \\
& \quad + E_{21} \left\{ [-2\psi d_2 - \sigma_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\zeta_3 c_2 d_2] \sin\left(-\frac{1}{2} d_2 l\right) + \right. \\
& + [2\psi c_2 + \zeta_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\sigma_3 c_2 d_2] \cos\left(-\frac{1}{2} d_2 l\right) \left\} \exp\left(-\frac{1}{2} c_2 l\right) + \\
& \quad + E_{22} \left\{ [2\psi c_2 + \zeta_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\sigma_3 c_2 d_2] \sin\left(-\frac{1}{2} d_2 l\right) + \right. \\
& + [2\psi d_2 + \sigma_3(c_2^2 - d_2^2) + 2\zeta_3 c_2 d_2] \cos\left(-\frac{1}{2} d_2 l\right) \left\} \exp\left(-\frac{1}{2} c_2 l\right) + \\
& \quad + E_{31} \left[2\psi c_3 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2} c_3 l\right) + \zeta_5 c_3^2 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2} c_3 l\right) \right] + \\
& \quad + E_{32} \left[2\psi c_3 \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2} c_3 l\right) - \zeta_5 c_3^2 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2} c_3 l\right) \right] = 0, \\
E_{11} & \left\{ [-2\psi d_1 - \sigma_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\zeta_1 c_1 d_1] \sin \frac{1}{2} d_1 l + \right. \\
& \quad + [(2\psi c_1 + \zeta_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\sigma_1 c_1 d_1) \cos \frac{1}{2} d_1 l] \left. \right\} e^{\frac{1}{2} c_1 l} + \\
& \quad + E_{12} \left\{ [2\psi c_1 + \zeta_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\sigma_1 c_1 d_1] \sin \frac{1}{2} d_1 l + \right. \\
& \quad + [2\psi d_1 + \sigma_1(c_1^2 - d_1^2) + 2\zeta_1 c_1 d_1] \cos \frac{1}{2} d_1 l \left. \right\} e^{\frac{1}{2} c_1 l} + \\
& \quad + E_{21} \left\{ [-2\psi d_2 - \sigma_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\zeta_3 c_2 d_2] \sin \frac{1}{2} d_2 l + \right. \\
& \quad + [2\psi c_2 + \zeta_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\sigma_3 c_2 d_2] \cos \frac{1}{2} d_2 l \left. \right\} e^{\frac{1}{2} c_2 l} + \\
& \quad + E_{22} \left\{ [2\psi c_2 + \zeta_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\sigma_3 c_2 d_2] \sin \frac{1}{2} d_2 l + \right. \\
& \quad + [2\psi d_2 + \sigma_3(c_2^2 - d_2^2) + 2\zeta_3 c_2 d_2] \cos \frac{1}{2} d_2 l \left. \right\} e^{\frac{1}{2} c_2 l} + \\
& \quad + E_{31} \left[2\psi c_3 \operatorname{sh} \frac{1}{2} c_3 l + \zeta_5 c_3^2 \operatorname{ch} \frac{1}{2} c_3 l \right] + \\
& \quad + E_{32} \left[2\psi c_3 \operatorname{ch} \frac{1}{2} c_3 l - \zeta_5 c_3^2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} c_3 l \right] = 0.
\end{aligned}$$

Wielkości ω_n wyznaczamy podobnie, jak poprzednio. Mając ω_n możemy wyznaczyć stałe E_{ij}^n .

Dla określonej częstości ω_n postacie drgań głównych we współrzędnych u i v są następujące:

$$\begin{aligned}
 u_n(s) = & E_{11}^n [(\psi\sigma_1 s - \psi\sigma_1 w_{1c} + \zeta_1 \psi w_{1d}) \sin d_1 s + \\
 & + (1 - \psi\zeta_1 s + \psi\zeta_1 w_{1c} + \psi\sigma_1 w_{1d}) \cos d_1 s] e^{c_1 s} + \\
 & + E_{12}^n [(1 - \psi\zeta_1 s + \psi\zeta_1 w_{1c} + \psi\sigma_1 w_{1d}) \sin d_1 s + \\
 & + (-\psi\sigma_1 s + \psi\sigma_1 w_{1c} - \psi\zeta_1 w_{1d}) \cos d_1 s] e^{c_1 s} + \\
 & + E_{21}^n [(\psi\sigma_3 s - \psi\sigma_3 w_{2c} + \psi\zeta_3 w_{2d}) \sin d_2 s + \\
 & + (1 - \psi\zeta_3 s + \psi\zeta_3 w_{2c} + \psi\sigma_3 w_{2d}) \cos d_2 s] e^{c_2 s} + \\
 & + E_{22}^n [(1 - \psi\zeta_3 s + \psi\zeta_3 w_{2c} + \psi\sigma_3 w_{2d}) \sin d_2 s + \\
 & + (-\psi\sigma_3 s + \psi\sigma_3 w_{2c} - \psi\zeta_3 w_{2d}) \cos d_2 s] e^{c_2 s} + \\
 & + E_{31}^n \left[(1 - \psi\zeta_5 s) \operatorname{ch} c_3 s + \left(\psi\zeta_5 \frac{1}{c_3} \right) \operatorname{sh} c_3 s \right] + \\
 & + E_{32}^n \left[\left(\psi\zeta_5 \frac{1}{c_3} \right) \operatorname{ch} c_3 s + (1 + \zeta_5 \psi s) \operatorname{sh} c_3 s \right],
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 v_n(s) = & E_{11}^n [(-\sigma_1 - \psi w_{1d}) \sin d_1 s + (\psi s + \zeta_1 - \psi w_{1c}) \cos d_1 s] e^{c_1 s} + \\
 & + E_{12}^n [(\psi s + \zeta_1 - \psi w_{1c}) \sin d_1 s + (\sigma_1 + \psi w_{1d}) \cos d_1 s] e^{c_1 s} + \\
 & + E_{21}^n [(-\sigma_3 - \psi w_{2d}) \sin d_2 s + (\psi s + \zeta_3 - \psi w_{2c}) \cos d_2 s] e^{c_2 s} + \\
 & + E_{22}^n [(\psi s + \zeta_3 - \psi w_{2c}) \sin d_2 s + (\sigma_3 + \psi w_{2d}) \cos d_2 s] e^{c_2 s} + \\
 & + E_{31}^n \left[\left(-\psi \frac{1}{c_3} \right) \operatorname{sh} c_3 s + (\psi s + \zeta_5) \operatorname{ch} c_3 s \right] + \\
 & + E_{32}^n \left[(\psi s - \zeta_5) \operatorname{sh} c_3 s - \psi \frac{1}{c_3} \operatorname{ch} c_3 s \right].
 \end{aligned}$$

W powyższych wzorach, dla skrócenia zapisu, oznaczyliśmy przez w_{ic} , w_{id} wyrażenia:

$$w_{ic} = \frac{c_i}{c_i^2 + d_i^2}, \quad w_{id} = \frac{d_i}{c_i^2 + d_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Po podstawieniu znalezionych postaci drgań własnych do (3.26) otrzymamy poszukiwane rozwiązania.

Przypadek II. Rozpatrzmy pierwszą możliwość: gdy dwa pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone, sprzężone, a cztery rzeczywiste, co ogólnie zapiszemy:

$$\begin{aligned}
 r_1 = e_1 + if_1, & \quad r_2 = e_1 - if_1, \\
 r_3 = e_2, & \quad r_4 = -e_2, \\
 r_5 = e_3, & \quad r_0 = -e_3.
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

Całki ogólne układu równań (3.10) napiszemy od razu w postaci trygonometrycznej:

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \xi &= G_{11} e^{e_1 s} \cos f_1 s + G_{12} e^{e_1 s} \sin f_1 s + G_3 \operatorname{sh} e_2 s + G_4 \operatorname{ch} e_2 s + G_5 \operatorname{sh} e_3 s + G_6 \operatorname{ch} e_3 s, \\ \eta &= (G_{11} \vartheta_1 + G_{12} \delta_1) e^{e_1 s} \cos f_1 s - (G_{11} \delta_1 - G_{12} \vartheta_1) e^{e_1 s} \sin f_1 s + \\ &\quad + G_3 \kappa_3 \operatorname{sh} e_2 s - G_4 \kappa_3 \operatorname{ch} e_2 s + G_5 \kappa_5 \operatorname{sh} e_3 s - G_6 \kappa_5 \operatorname{ch} e_3 s, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.39) \quad \kappa_j = \frac{P_j}{G_j} = - \frac{(\mu+1)r_j^2 + 3\mu q^2}{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3} = - \frac{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3 + 2\psi r_j}{-\frac{I}{A} r_j^4 + \mu r_j^2 + 3\mu q^2} = \kappa_j = \vartheta_j + i\delta_j, \\ j = 1, 2,$$

$$\kappa_j = \vartheta_j, \quad j = 3, 4, 5, 6,$$

$$G_1 = \frac{1}{2} (G_{11} + iG_{12}), \quad G_2 = \frac{1}{2} (G_{11} - iG_{22}),$$

P_j, G_j dla $j = 3, 4, 5, 6$ są stałymi rzeczywistymi.

Po analogicznych obliczeniach, jak w poprzednich przypadkach, otrzymamy następujące postacie drgań własnych:

$$(3.40) \quad \begin{aligned} u_n(s) &= G_{11}^n [(\psi \delta_1 s - \psi \delta_1 w_{1e} + \psi \vartheta_1 w_{1f}) \sin f_1 s + \\ &\quad + (1 - \psi \vartheta_1 s + \psi \vartheta_1 w_{1e} + \psi \delta_1 w_{1f}) \cos f_1 s] e^{e_1 s} + \\ &\quad + G_{12}^n [(1 - \psi \vartheta_1 s + \psi \vartheta_1 w_{1e} + \psi \delta_1 w_{1f}) \sin f_1 s + \\ &\quad + (-\psi \delta_1 s + \psi \delta_1 w_{1e} - \psi \vartheta_1 w_{1f}) \cos f_1 s] e^{e_1 s} + \\ &\quad + G_3^n \left[(1 - \psi \kappa_3 s) \operatorname{sh} e_2 s + \psi \frac{\kappa_3}{e_2} \operatorname{ch} e_2 s \right] + \\ &\quad + G_4^n \left[-\psi \frac{\kappa_3}{e_2} \operatorname{sh} e_2 s + (1 + \psi \kappa_3 s) \operatorname{ch} e_2 s \right] + \\ &\quad + G_5^n \left[(1 - \psi \kappa_5 s) \operatorname{sh} e_3 s + \psi \frac{\kappa_5}{e_3} \operatorname{ch} e_3 s \right] + \\ &\quad + G_6^n \left[\left(-\psi \frac{\kappa_5}{e_3} \right) \operatorname{sh} e_3 s + (1 + \psi \kappa_5 s) \operatorname{ch} e_3 s \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_n(s) &= G_{11}^n [(-\psi w_{1f} - \delta_1) \sin f_1 s + (\psi s + \vartheta_1 - \psi w_{1e}) \cos f_1 s] e^{e_1 s} + \\ &\quad + G_{12}^n [(\psi s + \vartheta_1 - \psi w_{1e}) \sin f_1 s + (\delta_1 + \psi w_{1f}) \cos f_1 s] e^{e_1 s} + \\ &\quad + G_3^n \left[(\psi s + \kappa_3) \operatorname{sh} e_2 s - \psi \frac{1}{e_2} \operatorname{ch} e_2 s \right] + \\ &\quad + G_4^n \left[-\psi \frac{1}{e_2} \operatorname{sh} e_2 s + (\psi s - \kappa_3) \operatorname{ch} e_2 s \right] + \\ &\quad + G_5^n \left[(\psi s + \kappa_5) \operatorname{sh} e_3 s - \psi s \frac{1}{e_3} \operatorname{ch} e_3 s \right] + \\ &\quad + G_6^n \left[-\psi \frac{1}{e_3} \operatorname{sh} e_3 s + (\psi s - \kappa_5) \operatorname{ch} e_3 s \right]. \end{aligned}$$

W celu uzyskania rozwiązań należy powyższe postacie u_n i v_n podstawić do wzorów (3.26).

We wzorach (3.40) oznaczono:

$$w_{1e} = \frac{e_1}{e_1^2 + f_1^2}, \quad w_{1f} = \frac{f_1}{e_1^2 + f_1^2}.$$

4. Drgania wymuszone

W celu rozpatrzenia drgań wymuszonych weźmiemy pod uwagę układ (2.13). Postępując tak samo, jak przy analizie drgań swobodnych, układ ten przekształcimy do następującej postaci, wygodnej w dalszych rozważaniach:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (\mu+1) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \psi s \frac{I}{A} \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \frac{I}{A} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} + \psi s \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \psi \frac{\partial v}{\partial s} - 3 \frac{M}{AE} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f_1(s, t), \\ \frac{I}{A} \psi s \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \frac{I}{A} \psi \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \psi s \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \psi \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{I}{A} \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 3 \frac{M}{AE} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= f_2(s, t). \end{aligned}$$

Całki ogólne układu równań jednorodnych zostały wyznaczone w poprzednim rozdziale. Całek szczególnych będziemy poszukiwać metodą rozkładu według postaci drgań własnych (np. [4]), w następującej formie:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) S_n(t), \\ v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) S_n(t). \end{aligned}$$

Po podstawieniu (4.2) do (4.1) otrzymamy:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(\mu+1) u_n'' + \psi v_n' + \psi s v_n'' + \frac{I}{A} \psi v_n''' + \frac{I}{A} \psi s v_n^{IV} \right] S_n - 3 \frac{M}{AE} u_n \ddot{S}_n \right\} &= f_1(s, t), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{I}{A} \psi s u_n^{IV} + \frac{I}{A} \psi u_n''' - \frac{I}{A} v_n^{IV} + \psi s u_n'' + \psi u_n' + \mu v_n'' \right] S_n - 3 \frac{M}{AE} v_n \ddot{S}_n \right\} &= f_2(s, t), \end{aligned}$$

gdzie apostrofami oznaczono różniczkowanie cząstkowe po s , kropkami zaś różniczkowanie po t .

W celu wyznaczenia niewiadomych funkcji $S_n(t)$, pierwsze równanie układu (4.3) pomnożymy stronami przez u_k , drugie przez v_k , a następnie dodamy je stronami. W ten sposób otrzymujemy:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(\mu+1) u_n'' u_k + \psi v_n' u_k + \psi s v_n'' u_k + \frac{I}{A} \psi v_n''' u_k + \frac{I}{A} \psi s v_n^{IV} u_k + \psi s u_n'' v_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{I}{A} \psi s u_n^{IV} v_k + \frac{I}{A} \psi u_n''' v_k - \frac{I}{A} v_n^{IV} v_k + \psi u_n' v_k + \mu v_n'' v_k \right] S_n - \right. \\ \left. - \left[3 \frac{M}{AE} u_n u_k + 3 \frac{M}{AE} v_n v_k \right] \ddot{S}_n \right\} = f_1 u_k + f_2 v_k. \end{aligned}$$

Funkcje u_n , v_n spełniają układ równań jednorodnych (3.8). Mnożąc jak poprzednio pierwsze równanie tego układu przez u_k , drugie przez v_k otrzymamy:

$$(4.5) \quad (\mu+1)u_n''u_k + \frac{I}{A}\psi sv_n^{IV}u_k + \frac{I}{A}\psi v_n''u_k + \psi sv_n''u_k + \psi v_n'u_k + \frac{I}{A}\psi su_n^{IV}v_k + \\ + \frac{I}{A}\psi u_n''v_k - \frac{I}{A}v_n^{IV}v_k + \psi su_n''v_k + \psi u_n'v_k + \mu v_n''v_k = -3\mu q^2(u_nu_k + v_nv_k).$$

Jak widać, pierwsze wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (4.4) jest równe prawej stronie równania (4.5). Uwzględniając to i wyłączając wspólny czynnik przed nawias otrzymamy:

$$(4.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_nu_k + v_nv_k) \left(-3\mu q^2 S_n - \frac{3M}{AE} \ddot{S}_n \right) = f_1 u_k + f_2 v_k.$$

Po obustronnym przecałkowaniu po długości l i wykorzystaniu warunku ortogonalności (3.27) otrzymamy

$$(4.7) \quad -3\mu q^2 S_n - \frac{3M}{AE} \ddot{S}_n = K_n(t),$$

gdzie

$$K_n(t) = \frac{\int_0^l (f_1 u_n + f_2 v_n) ds}{\int_0^l (u_n^2 + v_n^2) ds}.$$

Równanie (4.7) przekształcimy do postaci

$$(4.7a) \quad \ddot{S}_n + \frac{\mu q^2 AE}{M} S_n = -\frac{AE}{3M} K_n(t).$$

Rozwiązanie równania (4.7a) przy identycznych warunkach brzegowych, jak dla drgań swobodnych i warunkach początkowych

$$(4.8) \quad S_n(0) = 0, \quad \dot{S}_n(0) = 0$$

ma następującą postać:

$$(4.9) \quad S_n(t) = -\frac{AE}{3Mq} \sqrt{\frac{M}{\mu AE}} \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau = \\ = -\frac{AE}{3M\omega_n} \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau.$$

Zatem całki szczególne układu (4.1) (drżania wymuszone ciągła) wyrażają się następująco:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) S_n(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AE}{3M\omega_n} u_n \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau, \\ v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) S_n(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AE}{3M\omega_n} v_n \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Całki ogólne układu (4.1) (drżania całkowite ciągła) mają następującą postać:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) \left\{ C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t - \frac{AE}{3M\omega_n} \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \right\}, \\ v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) \left\{ C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t - \frac{AE}{3M\omega_n} \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \right\}, \end{aligned}$$

gdzie za u_n i v_n bierzemy ciągi funkcji, uwzględniając przy tym odpowiedni przypadek rozwiązania równania charakterystycznego.

5. Zakończenie

Zaproponowana w pracy metoda znajdowania drgań wymuszonych liny z uwzględnieniem jej sztywności na zginanie jest metodą ogólną. Ze względu na duże trudności rachunkowe uzyskanie efektywnych rozwiązań jest możliwe jedynie przy użyciu maszyn cyfrowych. Dotyczy to wyznaczania pierwiastków równania charakterystycznego.

W pracy przedstawiono ogólną analizę ze względu na uzyskanie rozwiązań w zależności od parametrów liny. Uwzględniona sztywność giętna utrudnia wprawdzie tę analizę i nie pozwala na znalezienie rozwiązań analitycznych w formie zamkniętej, ale daje możliwości zbadania jej wpływu zarówno na częstotliwości drgań własnych, jak i na kształt funkcji własnych. Przy znajomości funkcji własnych, przez zastosowanie uogólnionej ortogonalizacji, problem znalezienia amplitud drgań wymuszonych nie przedstawia trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. A. A. АНАНЕВ, *К расчету канатов предохранительных сетей подвесных канатных дорог*, ЛПИ, 1949.
2. В. В. БОЛОТИН, *О вибрациях проводов воздушных линий электропередачи и борьбе с ними*, Издат. МЭИ, Москва 1959 (вып. 32).
3. J. HAJDUK, J. OSIECKI, *Ustroje ciągłowne — teoria i obliczanie*, WNT, Warszawa 1970.
4. S. KALISKI i współautorzy, *Drżania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
5. G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mechanik*, Leipzig 1897.
6. Z. ONISZCZUK, *Drżania poprzeczne układu dwóch belek połączonych elementem sprężystym*, Mech. Teoret. i Stos. 1, 12 (1974).
7. A. SIMPSON, *On the oscillatory motions of translating elastic cables*, J. Sound Vibr., 20, 2 (1972).

Резюме

КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДА В ПЛОСКОСТИ СВИСА С УЧЕТОМ ЕГО ЖЕСТКОСТИ
НА ИЗГИБ

В работе рассмотрены свободные и вынужденные колебания провода. При этом учтены: жесткость на изгиб, составляющая силы Кориолиса и центробежная инерционная сила. Колебания порождаются переменной во времени распределенной нагрузкой.

Задача сведена к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Для решения этих уравнений использованы следующие методы: линеаризация, разделение переменных и разложение по главным формам колебаний.

Анализ проведен с точки зрения подбора геометрических параметров провода. Такой подход будет полезен при решении следующей проблемы: динамического демпфирования колебаний кабельных энергетических систем.

Summary

VIBRATIONS OF CABLE IN THE SAG-SPAN PLANE WITH REGARD
ITS BENDING STIFFNESS

In this paper the free and forced vibrations of cables are analysed. Bending stiffness of the cable, the Coriolis and centripetal components of the force of inertia, are taken into consideration. Vibrations are excited by continuous time-dependent loads. The problem is described by a set of the two partial differential equations of fourth order. The following methods of solution are applied: linearization, separation of variables and expansion into the series of free vibration forms. The analysis was performed from point of view of the proper choice geometrical parameters of cables. This approach will be useful in considering other problems like that of dynamical damping the cables sets.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 października 1975 r.

HYDROMAGNETYCZNY PRZEPŁYW CIECZY LEPKIEJ W SZCZELINIE MIĘDZY WIRUJĄCYMI POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI

EDWARD WALICKI (BYDGOSZCZ)

Wstęp

Laminarny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi [1 - 3] od dawna zwracał uwagę ze względu na możliwości szerokich zastosowań praktycznych zarówno w badaniach przepływowych maszyn wirnikowych, jak i w teorii ślizgowych łożysk wzdłużnych.

Ostatnio coraz większe zainteresowanie budzą tego rodzaju przepływy cieczy lepkiej i przewodzącej, zachodzące w obecności pola elektrycznego i magnetycznego.

W pracy [4] zbadano hydromagnetyczny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między drgającymi skrętnie tarczami. Podobne zagadnienie — przy założeniu porowatości jednej z tarcz — rozważono w pracy [10]. W pracach [5 - 9, 11 - 13] rozważano ustalone przepływy między płaskimi tarczami stanowiącymi modele wzdłużnych łożysk ślizgowych.

Prace [14, 15] zawierają opisy przepływów pełzających (w przybliżeniu Reynoldsa) cieczy lepkich w kanałach pierścieniowych w obecności silnych pól magnetycznych.

Celem tej pracy jest podanie w postaci ogólnej rozwiązania zlinearyzowanych równań ruchu ustalonego lepkiej cieczy przewodzącej o stałej lepkości i przewodności w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi o dowolnym kształcie, poddanej działaniu pola magnetycznego o stałym natężeniu. Zagadnienie rozwiązano zakładając, że magnetyczna liczba Reynoldsa jest mała, co pozwala pominąć indukowane pole magnetyczne.

1. Równania ruchu

Równaniami ruchu ustalonego hydromagnetycznego przepływu cieczy lepkiej są następujące [16, 17]:

równanie ciągłości

$$(1.1) \quad \nabla \cdot \bar{v} = 0;$$

równanie pędu

$$(1.2) \quad \rho(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} + \bar{J} \times \bar{B};$$

równania Maxwella

$$(1.3) \quad \nabla \times \bar{E} = 0,$$

$$(1.4) \quad \nabla \times \bar{B} = \mu_e \bar{J},$$

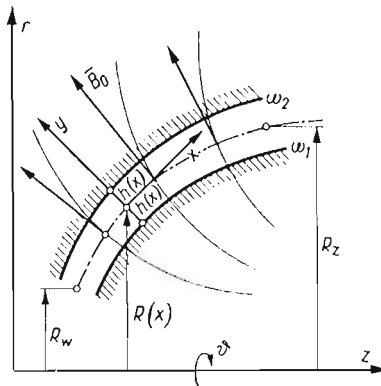
$$(1.5) \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0$$

oraz prawo Ohma

$$(1.6) \quad \bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}).$$

Równań tych użyjemy do zbadania przepływu cieczy w wąskiej szczelinie między powierzchniami obrotowymi o wspólnej osi symetrii (rys. 1), z których wewnętrzna wiruje z prędkością kątową ω_1 , a zewnętrzna — z prędkością kątową ω_2 . Dodatkowo założymy, że wektor pola magnetycznego $\vec{B}(0, 0, B_0)$ jest prostopadły do linii symetrii szczeliny.

Wprowadźmy krzywoliniowy układ współrzędnych x, θ, y , przy czym oś x niech będzie skierowana wzdłuż linii symetrii południkowego przekroju szczeliny, oś y prostopadle do linii symetrii szczeliny.



Rys. 1

Dokonując w równaniach ruchu (1.1) - (1.6) odpowiednich przejść asymptotycznych charakterystycznych dla przepływów w cienkich warstwach cieczy ($h \ll R$) zachodzących przy małych magnetycznych liczbach Reynoldsa [3, 4, 10] można sprowadzić te równania do układu

$$(1.7) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$(1.8) \quad -\rho \frac{R'}{R} v_0^2 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 v_x,$$

$$(1.9) \quad 0 = \mu \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 v_0,$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

gdzie primem oznaczono pochodną względem zmiennej x . Równań tych użyjemy do zbadania przepływu cieczy w szczelinie.

2. Całki równań ruchu

Rozwiązania równań ruchu powinny spełniać warunki brzegowe:

$$(2.1) \quad v_x(x, \pm h) = 0,$$

$$(2.2) \quad v_0(x, -h) = R(x)\omega_1, \quad v_0(x, +h) = R(x)\omega_2,$$

$$(2.3) \quad v_y(x, \pm h) = 0.$$

Ponadto na wlocie i wylocie ze szczeliny powinny być spełnione warunki brzegowe dotyczące ciśnienia:

$$(2.4) \quad p = p_w \quad \text{dla} \quad x = x_w,$$

$$(2.5) \quad p = p_z \quad \text{dla} \quad x = x_z,$$

gdzie przez x_w oznaczono współrzędną wlotu na linii symetrii przekroju południkowego szczeliny, a przez x_z — współrzędną wylotu na tej linii.

Całkując równanie (1.9) względem zmiennej y i wyznaczając stałe całkowania z warunków brzegowych (2.2), otrzymamy

$$(2.6) \quad v_\theta = \frac{R}{2} \left[(\omega_1 + \omega_2) \frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} - (\omega_1 - \omega_2) \frac{\text{sh}ky}{\text{sh}kh} \right],$$

tutaj oznaczono dla uproszczenia

$$(2.7) \quad k = B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}.$$

Z równania (1.10) wynika, że

$$(2.8) \quad p = p(x).$$

Następnie całkując równanie ciągłości (1.7) w poprzek szczeliny i uwzględniając warunki brzegowe dostaniemy

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} R \int_{-h}^{+h} v_x dy + v_y \Big|_{-h}^{+h} = 0,$$

a stąd wynika

$$(2.9) \quad \int_{-h}^{+h} v_x dy = \frac{C_1}{R(x)}.$$

Podstawiając wartość składowej prędkości v_θ ze wzoru (2.6) do równania (1.8) otrzymamy po scałkowaniu i uwzględnieniu warunku brzegowego (2.1) oraz zależności (2.8):

$$(2.10) \quad v_x = \frac{1}{\mu k^2} \left(\frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} - 1 \right) \frac{dp}{dx} - \frac{RR'}{12\nu k^2} \left\{ \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\text{ch}^2 kh} \left[(\text{sh}^2 ky - 1) - (\text{sh}^2 kh - 1) \frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} \right] - \frac{4(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\text{sh} 2kh} (\text{ch}ky - \text{ch}kh) \text{sh}ky + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\text{sh}^2 kh} \left[(\text{ch}^2 ky + 1) - (\text{ch}^2 kh + 1) \frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} \right] \right\}.$$

Po uwzględnieniu (2.10) w (2.9) i po wykonaniu całkowania znajdziemy

$$(2.11) \quad p = B(x) + \frac{[A(x) - A_z](p_w - B_w) - [A(x) - A_w](p_z - B_z)}{A_w - A_z},$$

gdzie oznaczono

$$A(x) = \int \frac{dx}{(\text{th}kh - kh)R}, \quad A_w = A(x_w), \quad A_z = A(x_z),$$

$$(2.12) \quad B(x) = \frac{\rho}{48} \int \frac{RR'}{\text{th}kh - kh} \left\{ \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\text{ch}^2kh} [\text{sh}2kh - 6kh - \right.$$

$$\left. - 4(\text{sh}^2kh - 1)\text{th}kh] + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\text{sh}^2kh} [\text{sh}2kh + 6kh - 4(\text{ch}^2kh + 1)\text{th}kh] \right\} dx,$$

$$B_w = B(x_w), \quad B_z = B(x_z).$$

Wprowadzając (2.11) do (2.10) wyznaczymy

$$(2.13) \quad v_x = \frac{1}{\mu Rk^2} \frac{p_w - B_w - (p_z - B_z)}{(A_w - A_z)(\text{th}kh - kh)} \left(\frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} - 1 \right) -$$

$$- \frac{RR'}{12\nu k^2} \left\{ \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\text{ch}^2kh} \left[\text{sh}^2ky - 1 - (\text{sh}^2kh - 1) \frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{4(\text{sh}^2kh - 1)\text{th}kh - (\text{sh}2kh - 6kh)}{4(\text{th}kh - kh)} \left(\frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} - 1 \right) \right] -$$

$$- \frac{4(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\text{sh}2kh} (\text{ch}ky - \text{ch}kh)\text{sh}ky + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\text{sh}^2kh} \left[\text{ch}^2ky + 1 - \right.$$

$$\left. - (\text{ch}^2kh + 1) \frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} + \frac{4(\text{ch}^2kh + 1)\text{th}kh - (\text{sh}2kh + 6kh)}{4(\text{th}kh - kh)} \left(\frac{\text{ch}ky}{\text{ch}kh} - 1 \right) \right] \right\}.$$

Składową prędkości v_y wyznaczymy podstawiając (2.13) do (1.7) i całkując otrzymane wyrażenie względem zmiennej y :

$$(2.14) \quad v_y = - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\mu k^3} \frac{p_w - B_w - (p_z - B_z)}{(A_w - A_z)(\text{th}kh - kh)} \left(\frac{\text{sh}ky}{\text{ch}kh} - ky \right) - \right.$$

$$- \frac{R^2 R'}{12\nu k^3} \left\{ \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{4\text{ch}^2kh} \left[\text{sh}2ky - 6ky - 4(\text{sh}^2kh - 1) \frac{\text{sh}ky}{\text{ch}kh} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{4(\text{sh}^2kh - 1)\text{th}kh - (\text{sh}2kh - 6kh)}{\text{th}kh - kh} \left(\frac{\text{sh}ky}{\text{ch}kh} - ky \right) \right] -$$

$$- \frac{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\text{sh}2kh} (\text{ch}ky - \text{ch}kh)^2 + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4\text{sh}^2kh} \left[\text{sh}2ky + 6ky - \right.$$

$$\left. - 4(\text{ch}^2kh + 1) \frac{\text{sh}ky}{\text{ch}kh} + \frac{4(\text{ch}^2kh + 1)\text{th}kh - (\text{sh}2kh + 6kh)}{\text{th}kh - kh} \left(\frac{\text{sh}ky}{\text{ch}kh} - ky \right) \right] \right\}.$$

Równania (2.6), (2.11), (2.13) oraz (2.14) pozwalają określić składowe prędkości i rozkład ciśnienia w przewodzącej cieczy lepkiej przepływającej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi w obecności pola magnetycznego prostopadłego do linii symetrii przekroju szczeliny.

3. Dyskusja otrzymanych wyników

Aby przeprowadzić analizę otrzymanych wyników założymy dla uproszczenia, że wiruje tylko powierzchnia wewnętrzna, co wyrazi się zależnościami

$$(3.1) \quad \omega_1 = \omega \neq 0, \quad \omega_2 = 0.$$

Wprowadzając bezwymiarową współrzędną η w kierunku prostopadłym do osi symetrii szczeliny oraz oznaczając

$$(3.2) \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad H = kh,$$

można wzory (2.6), (2.13) oraz (2.14) określające rozkład prędkości w szczelinie przedstawić w postaci

$$(3.3) \quad v_0 = D_1 f_1(H; \eta),$$

$$(3.4) \quad v_x = D_2 f_2(H; \eta) + D_3 f_3(H; \eta),$$

$$(3.5) \quad v_y = D_4 f_4(H; \eta) + D_5 f_5(H; \eta) + D_6 f_6(H; \eta),$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono

$$(3.6) \quad f_1(H; \eta) = \frac{\text{ch } H\eta}{\text{ch } H} - \frac{\text{sh } H\eta}{\text{sh } H},$$

$$(3.7) \quad f_2(H; \eta) = -\frac{2}{H^2} \left(\frac{\text{ch } H\eta}{\text{ch } H} - 1 \right),$$

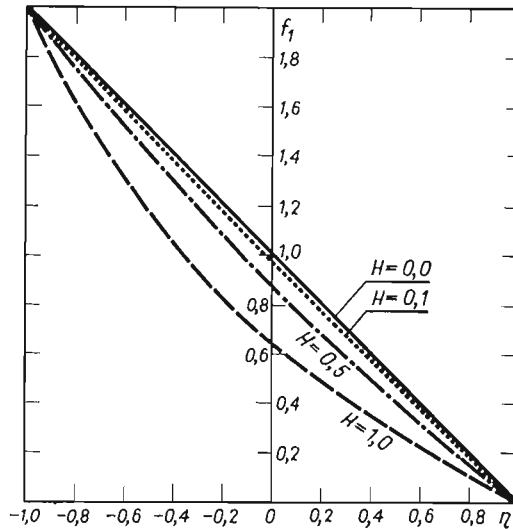
$$(3.8) \quad f_3(H; \eta) = \frac{1}{H^2} \left\{ \frac{1}{\text{ch}^2 H} \left[\text{sh}^2 H\eta - 1 - (\text{sh}^2 H - 1) \frac{\text{ch } H\eta}{\text{ch } H} + \frac{4(\text{sh}^2 H - 1)\text{th } H - \text{sh } 2H + 6H}{4(\text{th } H - H)} \left(\frac{\text{ch } H\eta}{\text{ch } H} - 1 \right) \right] - \frac{4}{\text{sh } 2H} (\text{ch } H\eta - \text{ch } H) \text{sh } H\eta + \frac{1}{\text{sh}^2 H} \left[\text{ch}^2 H\eta + 1 - (\text{ch}^2 H + 1) \frac{\text{ch } H\eta}{\text{ch } H} + \frac{4(\text{ch}^2 H + 1)\text{th } H - \text{sh } 2H - 6H}{4(\text{th } H - H)} \left(\frac{\text{ch } H\eta}{\text{ch } H} - 1 \right) \right] \right\},$$

$$(3.9) \quad f_4(H; \eta) = \frac{1}{H^3} \left\{ \frac{1}{4\text{ch}^2 H} \left[\text{sh } 2H\eta - 6H\eta - 4(\text{sh}^2 H - 1) \frac{\text{sh } H\eta}{\text{ch } H} + \frac{4(\text{sh}^2 H - 1)\text{th } H - \text{sh } 2H + 6H}{\text{th } H - H} \left(\frac{\text{sh } H\eta}{\text{ch } H} - H\eta \right) \right] - \frac{2}{\text{sh } 2H} (\text{ch } H\eta - \text{ch } H)^2 + \frac{1}{4\text{sh}^2 H} \left[\text{sh } 2H\eta + 6H\eta - 4(\text{ch}^2 H + 1) \frac{\text{sh } H\eta}{\text{ch } H} + \frac{4(\text{ch}^2 H + 1)\text{th } H - \text{sh } 2H - 6H}{\text{th } H - H} \left(\frac{\text{sh } H\eta}{\text{ch } H} - H\eta \right) \right] \right\},$$

$$(3.10) \quad f_5(H; \eta) = \frac{6}{H^4} (H \text{sh } H\eta - H\eta \text{sh } H),$$

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad f_6(H; \eta) = & \frac{1}{H^2} \left\{ \frac{\operatorname{ch} 2H}{(\operatorname{th} H - H) \operatorname{sh}^2 2H} \left[\frac{6H + 4H \operatorname{sh}^2 H - 3 \operatorname{sh} 2H}{\operatorname{ch}^2 H} \operatorname{sh} H \operatorname{sh} H \eta + \right. \right. \\
 & + \frac{6 \operatorname{sh}^2 H \operatorname{th} H - 2H \operatorname{th}^2 H - 4H \operatorname{sh}^2 H}{\operatorname{th} H - H} \left(\frac{\operatorname{sh} H \eta}{\operatorname{ch} H} - H \eta \right) \left. \right] + \\
 & + 4 \frac{\operatorname{ch} 2H \operatorname{ch} H \eta - \operatorname{ch} H}{\operatorname{sh}^2 2H} (\operatorname{ch} H \eta - \operatorname{ch} H) - \frac{\operatorname{sh} H}{2 \operatorname{ch}^3 H} \left[\operatorname{sh} 2H \eta - \right. \\
 & - 6H \eta - 4(\operatorname{sh}^2 H - 1) \frac{\operatorname{sh} H \eta}{\operatorname{ch} H} + \frac{4(\operatorname{sh}^2 H - 1) \operatorname{th} H - \operatorname{sh} 2H + 6H}{\operatorname{th} H - H} \left(\frac{\operatorname{sh} H \eta}{\operatorname{ch} H} - \right. \\
 & \left. \left. - H \eta \right) \right] - \frac{\operatorname{ch} H}{2 \operatorname{sh}^3 H} \left[\operatorname{sh} 2H \eta + 6H \eta - 4(\operatorname{ch}^2 H + 1) \frac{\operatorname{sh} H \eta}{\operatorname{ch} H} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4(\operatorname{ch}^2 H + 1) \operatorname{th} H - \operatorname{sh} 2H - 6H}{\operatorname{th} H - H} \left(\frac{\operatorname{sh} H \eta}{\operatorname{ch} H} - H \eta \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Tutaj D_i oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju poprzecznego szczeliny.



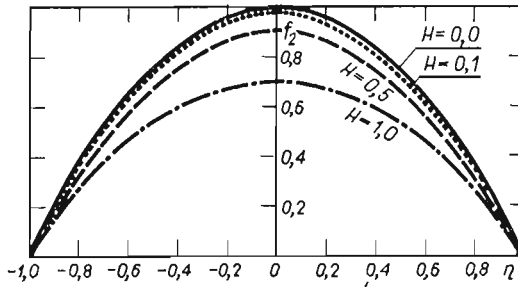
Rys. 2

Z analizy otrzymanych wzorów wynika, że przepływ w szczelinie jest wywołany przez dwa czynniki: ruch wirowy powierzchni ograniczających szczelinę (w analizowanym przypadku przez ruch wirowy powierzchni wewnętrznej) oraz przez różnicę ciśnień między wlotem i wylotem szczeliny.

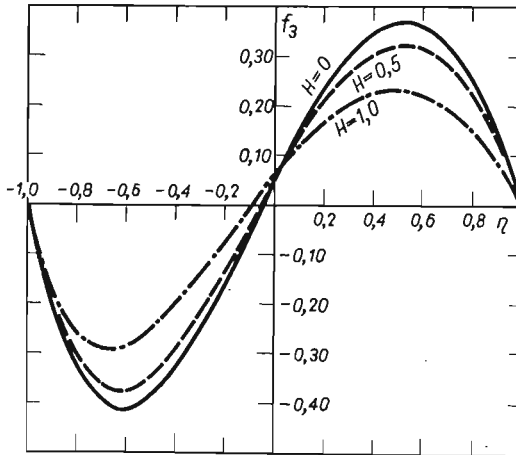
Wzór charakteryzujący składową obwodową prędkości v_0 pozwala stwierdzić, że profil tej prędkości dla ustalonego położenia przekroju szczeliny (funkcja $f_1(H; \eta)$ na rys. 2)

zmienia się od prostoliniowego dla $H = 0$ do krzywoliniowego dla $H > 0$, charakterystycznego dla hydromagnetycznego przepływu Couette'a między dwiema płaszczyznami, umieszczonymi w prostopadłym polu magnetycznym, z których jedna jest nieruchoma, a druga posiada lokalną prędkość równą $\omega R(x)$.

Z postaci wzorów opisujących składową wzdłużną prędkości v_x wynika, że główną jej częścią jest profil hydromagnetycznego płaskiego przepływu Poiseuille'a (funkcja $f_2(H; \eta)$ na rys. 3) uwarunkowany istnieniem wspomnianej uprzednio różnicy ciśnień i ruchem wirowym powierzchni wewnętrznej.

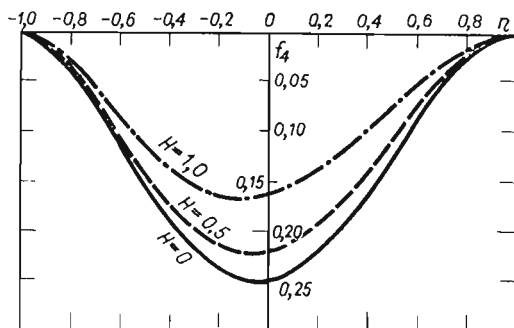


Rys. 3

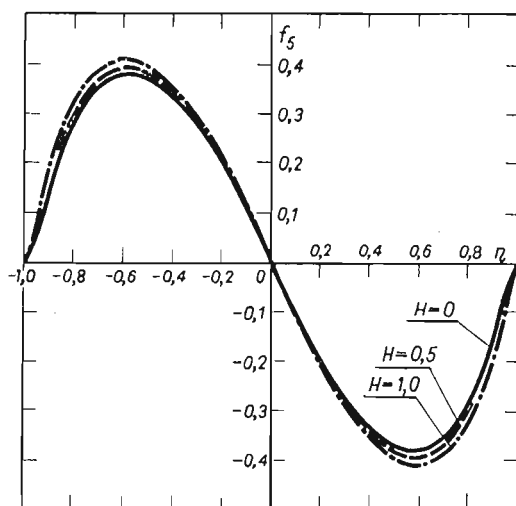


Rys. 4

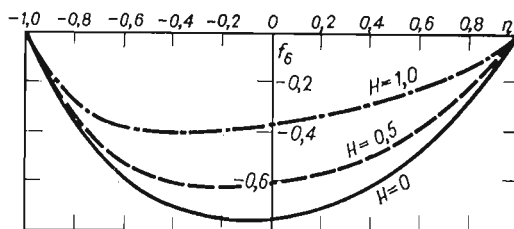
Na główną część składowej wzdłużnej prędkości nakłada się przepływ wtórny, wywołany ssącym działaniem wirującej powierzchni wewnętrznej. Powierzchnia wewnętrzna zasysa w swoim sąsiedztwie ciecz wywołując jej ruch wzdłużny odśrodkowy. Ruch ten musi być równoważony ruchem wzdłużnym dośrodkowym przy powierzchni zewnętrznej i ruchem poprzecznym określonym składową v_y prędkości. Przepływ wtórny opisany jest funkcjami $f_3(H; \eta) \div f_6(H; \eta)$ pokazanymi na rys. 4 ÷ 7.



Ry. 5s



Rys. 6



Rys. 7

Z przytoczonych wykresów funkcji f_i wynika, że wzrost natężenia pola magnetycznego, wyrażający się wzrostem wartości H , wywiera hamujący wpływ na wartości prędkości.

Rozkład ciśnień wzdłuż tworzącej powierzchni symetrii daje się przedstawić w postaci sumy dwóch składowych: pierwszej — wywołanej ssącym działaniem wirującej powierzchni i drugiej — będącej skutkiem istnienia przepływu wzdłużnego.

Literatura cytowana w tekście

1. K. W. MCALISTER, W. RICE, *Throughflows between rotating surfaces of revolution, having similarity solutions*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, E, 4, 37 (1970) 924 - 930.
2. K. W. MCALISTER, W. RICE, *Flows between stationary surfaces of revolution, having similarity solutions*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, E, 2, 39 (1972) 345 - 350.
3. E. WALICKI, *Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 12 (1974) 7 - 16.
4. S. DATTA, *Hydromagnetic flow between torsionally oscillating discs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. techn., 11 - 12, 13 (1965) 979 - 986.
5. S. KAMIYAMA, *Inertia effects in MHD hydrostatic thrust bearing*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, F, 4, 91 (1969) 589 - 596.
6. V. K. AGRAWAL, *Magneto-gasdynamic externally pressurized bearing with an axial magnetic field*, Wear, 15 (1970) 79 - 82.
7. S. KAMIYAMA, *The influence of wall conductance on performance of the MHD hydrostatic thrust bearing*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, F, 1, 93 (1971) 113 - 120.
8. V. K. AGRAWAL, K. L. GANJU, *Effect of lubricant inertia in a magneto-gasdynamic externally pressurized bearing*, Wear, 20 (1972) 123 - 128.
9. V. K. AGRAWAL, K. L. GANJU, S. C. JETHI, *Effect of angular inertia in magnetogasdynamic externally pressurized bearing by numerical method*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, F, 2, 94 (1972) 193 - 194.
10. A. A. K. MOHD, *Hydromagnetic flow of an electrically conducting fluid due to unsteady rotation of a porous disk over a fixed disk*, Indian J. Appl. Math., 4, 3 (1972) 556 - 567.
11. V. K. KAPUR, K. VERMA, *Energy integral approach for hydrostatic thrust bearing*, Japanese J. Appl. Phys., 7, 12 (1973) 1070 - 1074.
12. S. KAMIYAMA, A. SATO, *The effects of wall conductance on torque of the MHD viscous coupler and hydrostatic thrust bearing*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, F, 2, 95 (1973) 181 - 186.
13. И. Е. ТАРАПОВ, *Об эффективности магнитогидродинамических опор*, Магнитная гидромеханика, 4 (1971), 63—74.
14. А. И. БЕРТИНОВ, Л. К. КОВАЛЕВ, С. М.—А. КОНЕЕВ, В. И. ПОЛТАВЕЦ, *Ламинарное слоистое течение проводящей среды в кольцевых каналах при больших параметрах МГД — взаимодействия*, Магнитная гидродинамика, 1 (1973), 79—84.
15. Л. К. КОВАЛЕВ, С. М.—А. КОНЕЕВ, *Трёхмерные течения жидкости и газа в кольцевых каналах при больших параметрах МГД — взаимодействия*, Магнитная гидродинамика, 4 (1973), 84—93.
16. Э. В. ЩЕРБИННИН, *Струйные течения вязкой жидкости в магнитном поле*, Изд. Зинатне, Рига 1973.
17. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ, *Механика жидкости и газа*, Изд. Наука, Москва 1973.

Резюме

ГИДРОМАГНИТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ
ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

В работе выведены формулы, определяющие составляющие скорости v_x , v_0 , v_y и давление p для ламинарного стационарного гидромагнитного течения вязкой проводящей жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения. Применены линеаризованные уравнения движения вязкой жидкости для осесимметричного течения в системе криволинейных координат x , θ , y .

Решения уравнений движения проиллюстрированы графиками составляющих скорости v_x , v_0 , v_y для течения в зазоре переменной толщины.

Summary

HYDROMAGNETIC FLOW OF VISCOUS FLUID BETWEEN ROTATING SURFACES OF REVOLUTION

This paper contains formulae which define such parameters of the steady laminar hydromagnetic flow of viscous conducting fluid between rotating surfaces of revolution as the velocity components v_x , v_θ , v_y and pressure p .

The linearized equations of motion of the viscous fluid flow for axial symmetry in the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system x , θ , y are used.

The solutions of the equations of motion have been illustrated by plots of velocities v_x , v_θ , v_y for the flow through the slot of variable thickness.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 grudnia 1975 r.

SREDNIE NAPRĘŻENIA W STOCHASTYCZNYM OŚRODKU WIELOSKŁADNIKOWYM

ANDRZEJ TRZĘSOWSKI (WARSZAWA)

1 Wstęp

Tematem pracy jest problem istnienia funkcjonalnego związku między średnim naprężeniem a średnim odkształceniem w stochastycznym ośrodku wieloskładnikowym (nazywanym też ośrodkiem wielofazowym).¹⁾

W teorii stochastycznych ośrodków z gładkim rozkładem niejednorodności dawno znany jest formalny algorytm poszukiwania postaci funkcjonalnego związku między średnim naprężeniem a średnim odkształceniem (np. [4, 5]). Nie znano jednak dotychczas matematycznych warunków poprawności tego algorytmu, a o wzorach uzyskanych tą drogą zakładano, że obowiązują również w przypadku stochastycznych ośrodków wieloskładnikowych. W pracy podano warunki dostateczne stosowalności wyżej wymienionego algorytmu w przypadku ośrodków wieloskładnikowych; uzyskane wyniki obowiązują również dla ośrodków z gładkim rozkładem niejednorodności. Zaadaptowanie wspomnianego algorytmu do przypadku skokowej niejednorodności wymagało uprzedniego sformułowania deterministycznych warunków dla rozważanych losowych pól opisujących ośrodek wieloskładnikowy. W rozdz. 2 pracy podano szkic rozumowania prowadzący do sformułowania tych warunków (ściśle ich sformułowanie podane jest w pracy [1]).

Do pracy dołączono «Dodatek», w którym skonstruowano podstawową w rozważaniach funkcyjną przestrzeń $L_2(\Omega \times G; \nu)$ oraz podano oznaczenia stosowane w pracy.

2. Diasprężysty opis ciała skokowo-niejednorodnego

Rozważmy ciało niejednorodne, nieograniczone o rozkładzie współczynników sprężystości danym gładką funkcją $\mathbf{c}(x)$, $x \in R^3$ i znajdujące się w stanie równowagi:

$$(1) \quad L \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{k}(x), \quad x \in R^3,$$

gdzie oznaczono²⁾

$$L \boldsymbol{\varepsilon}(x) = -\operatorname{div}[\mathbf{c}(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(x)], \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}') (x).$$

W teorii ośrodków wielofazowych interesuje nas porównanie naprężenia $\mathbf{T}(x) = \mathbf{c}(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(x)$ w ciele niejednorodnym, z naprężeniem $\mathbf{T}_0(x) = \mathbf{c}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(x)$ w pewnym ciele jedno-

¹⁾ «Ośrodkiem wieloskładnikowym» nazywamy klasę ciał skokowo niejednorodnych o takim samym typie niejednorodności.

²⁾ Symbol „ \cdot ” oznacza pełne nasunięcie tensora.

rodnym o współczynnikach sprężystości \mathbf{c}_0 . Np. możemy mieć do czynienia z sytuacją, kiedy dla tensora fluktuacji współczynników sprężystości wokół poziomu \mathbf{c}_0

$$\mathbf{c}''(x) = \mathbf{c}(x) - \mathbf{c}_0$$

istnieje pewna miara ϕ małości odchyłek taka, że

$$\phi(\mathbf{c}'') < 1.$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \mathbf{c}''(x) \cdot \varepsilon(x), \\ \mathbf{X}(x) &= \operatorname{div} \tau(x), \\ L \varepsilon(x) &= -\operatorname{div}[\mathbf{c}_0 \cdot \varepsilon(x)].\end{aligned}$$

W tych oznaczeniach równanie (1) jest równoważne równaniu

$$(2) \quad L \varepsilon(x) = \mathbf{X}(x) + \mathbf{k}(x), \quad x \in R^3.$$

W ten sposób przedstawiliśmy niejednorodność przez wprowadzenie dodatkowych sił objętościowych $\mathbf{X}(x)$ w pewnym ośrodku jednorodnym. To formalne postępowanie można zinterpretować w ramach teorii defektów. Załóżmy mianowicie, że nośnik tensora fluktuacji \mathbf{c}''

$$\operatorname{supp} \mathbf{c}'' = \overline{\{x \in R^3 : \mathbf{c}''(x) = \mathbf{0}\}} \quad 3)$$

jest zbiorem zwartym (tj. domkniętym i ograniczonym). Wtedy możemy $\mathbf{X}(x)$ reprezentować przez funkcjonal (dystrybucję)

$$(3) \quad \mathbf{X}(x) = \int_{\operatorname{supp} \mathbf{c}''} \tau(y) \cdot \nabla_x \delta_{x-y} dy,$$

gdzie δ_x — delta Diraca. ∇_x — gradient przy różniczkowaniu po zmiennych $x = (x_1, x_2, x_3)$. Całki typu $\mathbf{X}(x)$ rozważane są w teorii defektów.⁴⁾ Z uwagi na symetrię tensora τ : $\tau(x) = \tau(x)'$ — pole $\mathbf{X}(x)$, $x \in R^3$ może być, w języku teorii defektów, interpretowane jako objętościowy rozkład (o gęstości τ i skoncentrowany w zbiorze $\operatorname{supp} \mathbf{c}''$) podwójnych sił bez momentu. W ten sposób możemy więc interpretować niejednorodność jako defekt jednorodności. Sprężyste ciało niejednorodne z tak reprezentowaną niejednorodnością nazywane jest *ciałem diasprężystym* [9]; tensorowa funkcja τ bywa nazywana tensorem polaryzacji [4].

Równanie (2) z $\mathbf{X}(x)$ określonym formułą (3) ma rozwiązanie postaci:

$$(4) \quad \varepsilon(x) = \mathbf{L} \cdot \tau(x) + \int_{R^3} \mathbf{U}(x, x') \cdot \tau(x') dx' + \varepsilon_0(x),$$

gdzie oznaczono $\mathbf{L} = \int_{S(\mathbf{0}, 1)} \nabla \mathbf{e}(z) \otimes \mathbf{n}(z) dS(z)$, $S(\mathbf{0}, 1)$ — sfera o środku $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ i promieniu $R = 1$, $\mathbf{e}(z)$ — rozwiązanie podstawowe dla operatora Lamé'go materiału o stałych sprężystości \mathbf{c}_0 , $\mathbf{n}(z)$ — wersor normalni.

$$\mathbf{U}(x, x') = \nabla \nabla \mathbf{e}(x - x'), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u}_0'), \quad \mathbf{u}_0(x) = \int_{R^3} \mathbf{e}(x - x') \cdot \mathbf{k}(x') dx',$$

³⁾ Symbol \bar{A} oznacza, że bierzemy domknięcie zbioru A .

⁴⁾ O ich matematycznym sensie — patrz [1, 2].

gdzie \int_{R^3} jest symbolem całki w sensie wartości głównej Cauchy'ego. A więc tensor polaryzacji spełnia równanie całkowe

$$(5) \quad \tau(x) = \mathbf{L}(x) \cdot \tau(x) + \int_{R^3} \mathbf{G}(x, x') \cdot \tau(x') dx' + \sigma_0(x),$$

gdzie oznaczono: $\mathbf{L}(x) = \mathbf{c}''(x) : \mathbf{L}$, $\mathbf{G}(x, x') = \mathbf{c}''(x) : \mathbf{U}(x, x')$, $\sigma_0(x) = \mathbf{c}''(x) \cdot \varepsilon_0(x)$.⁵⁾ Zauważmy, że o ile dla $\varepsilon(x)$ będącego rozwiązaniem (1) funkcja τ powinna być klasy C^1 , to równania całkowe (4) i (5) dopuszczają nawet nieciągłe tensory polaryzacji (np. klasy $L_2(G)$, $G \subset R^3$ obszar, którego domknięcie \bar{G} jest zwarte). Można więc spodziewać się, że równania (4) i (5) będą obowiązywać również w przypadku liniowo-sprężystego ciała ze skokowym rozkładem niejednorodności, tj. opisywanym przez funkcję prostą

$$\mathbf{c}(x) = \sum_{\alpha=0}^N \chi_\alpha \mathbf{c}_\alpha,$$

gdzie \mathbf{c}_0 jest tensorem współczynników sprężystości, w nieskończonym ośrodku, w którym w obszarach G_α ($\alpha = 1 \dots N$) znajdują się inkluzje o stałych sprężystości \mathbf{c}_α ; χ_α jest funkcją charakterystyczną obszaru G_α oraz $G_0 = R^3 / \bigcup_{\alpha=1}^N \bar{G}_\alpha$.

Nazwijmy «odkształceniem ośrodka skokowo-niejednorodnego» symetryczną tensorową funkcję $\varepsilon(x)$ walencji 2 i klasy $L_2(R^3)$ taką, że spełniona jest «zasada prac wirtualnych» dla dowolnej wektorowej funkcji $\mathbf{v} \in C_0(R^3)$ ⁶⁾

$$(6) \quad \int_{R^3} \varepsilon(x) \cdot \mathbf{c}(x) \cdot \varepsilon(\mathbf{v})(x) dx = \int_{R^3} \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx,$$

gdzie oznaczono $\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t)$. Definicja ta dopuszcza możliwość, że pole odkształceń ε spełniające (6) jest postaci

$$(7) \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t),$$

gdzie $\mathbf{u}: R^3 \rightarrow R^3$ jest funkcją klasy $L_2(R^3)$, ciągłą, dla której jest określony gradient w sensie SOBOLEWA $\nabla \mathbf{u} \in L_2(R^3)$.

Pytamy się, czy tak zdefiniowane odkształcenie ośrodka skokowo-niejednorodnego spełnia równanie (4) [a zatem i (5)].

W pracy [1] rozważano ten problem w przypadku, gdy ciało zajmuje nie całą przestrzeń R^3 , ale ograniczony podobszar $G \subset R^3$ ($0 < \text{vol} G < \infty$), którego domknięcie \bar{G} jest postaci $\bar{G} = \bigcup_{\alpha=0}^N \bar{G}_\alpha$, przy czym $G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset$ dla $\alpha \neq \beta$ oraz jeżeli Γ jest brzegiem obszaru G , to $\Gamma \cap \bar{G}_\alpha = \emptyset$ dla $\alpha = 1 \dots N$. Rozkład niejednorodności w tym obszarze opisywany jest przez ograniczoną funkcję tensorową $\mathbf{c}(x)$ ($x \in G$) taką, że $\mathbf{c}(x) = \mathbf{c}_\alpha$ dla $x \in G_\alpha$. Z założeń o podziale obszaru G na podobszary G_α wynika więc, że rozważane są ciała skokowo-niejednorodne, jednorodne przy brzegu Γ obszaru G .

⁵⁾ Symbol „:” oznacza nasuwanie tensorowe po dwu sąsiednich wskaźnikach.

⁶⁾ $C_0(R^3)$ jest zbiorem funkcji klasy C^∞ o zwartych nośnikach.

Przy dodatkowych założeniach o gładkości brzegów inkluzji G_α , $\alpha = 1, \dots, N$, oraz brzegu Γ , pole odkształceń $\varepsilon(x)$ ($x \in G$) klasy $L^2(G)$, postaci (7) i spełniające odpowiednią zasadę prac wirtualnych (uogólnioną na funkcje różniczkowalne w sensie Sobolewa⁷⁾, spełnia także równanie całkowe [1]:

$$(8) \quad \begin{aligned} \varepsilon(x) &= \mathbf{L} \cdot \tau(x) + \int_G \mathbf{U}(x, x') \cdot \tau(x') dx' + \varepsilon_0(x), \\ \tau(x) &= \mathbf{c}''(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot \mathbf{c}''(x) \mathbf{c}''(z) = \mathbf{c}(x) - \mathbf{c}_0. \end{aligned}$$

Tensor \mathbf{L} został podany w omówieniu wzoru (4); $\mathbf{U}(x, x')$ jest tensorową funkcją walencji 4 o osobliwości rzędu r^{-3} , $r = \|x - x'\|$; $\varepsilon_0(x)$ jest odkształceniem ciała jednorodnego o stałych sprężystości \mathbf{c}_0 , zajmującego obszar G i obciążonego tymi samymi siłami zewnętrznymi, co rozważane ciało niejednorodne.

Siły powierzchniowe w ciele skokowo-niejednorodnym opisywane są symetryczną funkcją tensorową walencji 2, klasy $L_2(G)$ i postaci

$$(9) \quad \mathbf{T}(x) = \mathbf{c}(x) \cdot \varepsilon(x),$$

gdzie $\mathbf{c}(x)$ jest funkcją rozkładu niejednorodności, a $\varepsilon(x)$ dane jest równaniem (8).

3. Stochastyczny opis ośrodka wieloskładnikowego

W pracy rozważany jest ośrodek wieloskładnikowy składający się z ciał skokowo-niejednorodnych [por. 1, odnośnik 1)], których stan opisywany jest równaniami (8) i (9). Ośrodek wieloskładnikowy posiada stochastyczną strukturę spełniającą następujące założenia:

A. Każde ciało niejednorodne zajmuje taki sam obszar $G \subset R^3$ oraz składa się z tych samych liniowo-sprężystych materiałów o stałych sprężystości \mathbf{c}_α , $\alpha = 0, 1, \dots, N$. Materiał o stałych sprężystości \mathbf{c}_α zajmuje podobzdar $G_\alpha \subset G$, ale rozmieszczenie, kształt i wielkości obszarów G_α są zmiennymi losowymi. Przy brzegu obszaru G zawsze występuje materiał o stałych \mathbf{c}_0 .

B. Jediną przyczyną losowości funkcji tensorowych opisujących ciało lub jego stan jest wymieniona wyżej losowość geometrii rozkładu niejednorodności w obszarze G . Oznacza to, że wszystkie losowe funkcje tensorowe rozpatrywać będziemy jako odwzorowania

$$\mathbf{A}: \Omega \times G \rightarrow T_p,$$

gdzie (Ω, \mathcal{B}, P) jest pewną ustaloną przestrzenią probabilistyczną, a T_p — przestrzenią euklidesowych tensorów walencji p nad R^3 . W ten sposób eliminujemy z rozważań np. przypadek losowych warunków na brzegu obszaru G .

C. Funkcja opisująca rozkład sił objętościowych w ośrodku jest deterministyczna. Założenie to jest idealizacją pominięcia wpływu fluktuacji sił objętościowych na odkształcenie i jest dokładnie spełnione, gdy ośrodki składowe mają taki sam ciężar objętościowy.

⁷⁾ W przypadku ograniczonego obszaru G zamiast wzoru (6) należy rozważyć zasadę prac wirtualnych dla odpowiedniego problemu brzegowego [1].

D. Rozważany ośrodek wielofazowy jest jednorodny statystycznie, tj. jeśli

$$c: \Omega \times G \rightarrow T_4$$

jest losową funkcją rozkładu niejednorodności, to istnieje taki tensor $C \in T_4$, że w dowolnym punkcie $x \in G$ wartością oczekiwaną c jest

$$(Ec)(x) = C.$$

E. Wszystkie rozważane losowe funkcje tensorowe są klasy $L_2(\Omega \times G; \nu)$ (por. Dodatek, 2).

Jeżeli $\omega \in \Omega$ jest ustalonym zdarzeniem losowym oraz $c = c(\omega, x)$ funkcją rozkładu niejednorodności odpowiadającą temu zdarzeniu (por. założenia A i B), to przez $\varepsilon = \varepsilon(\omega, x)$ i $T = T(\omega, x)$ oznaczamy odkształcenie i naprężenie zdefiniowane wzorami (8) i (9) i odpowiadające funkcji $c(\omega, x)$, $x \in G$. Przy dowolnych $\omega \in \Omega$ i $x \in G$ otrzymujemy losowe funkcje tensorowe zwane «odkształceniem» oraz «naprężeniem» w ośrodku wielofazowym

$$\varepsilon, T: \Omega \times G \rightarrow T_2.$$

Dla uproszczenia oznaczeń będziemy losowe funkcje tensorowe $A = A(\omega, x)$, $(\omega, x) \in \Omega \times G$ oznaczali również symbolem $A = A(x)$, $x \in G$.

4. Losowe odkształcenia

Równanie (8) zapisać możemy w postaci

$$(10) \quad \varepsilon(x) = Z(x, x') * \tau(x') + \varepsilon_0(x),$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$(11) \quad Z(x, x') * \tau(x') = \int_G \overline{Z(x, x')} \cdot \tau(x') dx' = L \cdot \tau(x) + \int_G \overline{U(x, x')} \cdot \tau(x') dx'.$$

$$Z(x, x') = L\delta(x-x') + U(x, x')$$

oraz $\delta(x-x')$ jest deltą Diraca interpretowaną jako jądro tożsamościowego operatora całkowego [2].

Rozważmy liniowe operacje:

$$Z: L_2(G) \rightarrow L_2(G),$$

$$Z(\tau)(x) = Z(x, x') * \tau(x'),$$

$$(12) \quad S, A: L_2(\Omega \times G, \nu) \rightarrow L_2(\Omega \times G; \nu),$$

$$S(\varepsilon) = c'' \cdot \varepsilon,$$

$$A = (I - E) \circ Z \circ S,$$

gdzie E — operator wartości oczekiwanej (Dodatek, 2), I — operator tożsamościowy.

Wiadomo, że: $\|Z\| = M < \infty$ (np. [3]), $\|E\| \leq 1$ (Dodatek, 2). Zbadajmy, przy jakich założeniach operacja S będzie ograniczona. Przeprowadźmy formalny rachunek:

$$\begin{aligned} \|S(\varepsilon)\|^2 &= E\|S(\varepsilon)\|^2 = E \int_G (\mathbf{c}''(x) : (\mathbf{c}''(x)) \cdot (\varepsilon(x) \otimes \varepsilon(x))) dx \leq \\ &\leq E \int_G \|\mathbf{c}''(x) : \mathbf{c}''(x)\|_4 \|\varepsilon(x) \otimes \varepsilon(x)\|_4 dx \leq \beta^2 \|\varepsilon\|^2 \end{aligned}$$

W powyższych przekształceniach skorzystano z oszacowania przeprowadzonego w Dodatku, p. 4 oraz założono istnienie liczby β zdefiniowanej w (13):

$$\begin{aligned} \beta &= \sup_{x \in G} \alpha(x) > 0, \\ (13) \quad \alpha(x) &= \sup_{a \in R} \{a : P(m(x) > a) > 0\}, \\ m(x) &= \|\mathbf{c}''(x) : \mathbf{c}''(x)\|_4^{1/2}. \end{aligned}$$

Jeżeli więc istnieje liczba $\beta > 0$, to powyższe rachunki są poprawne oraz S jest liniowym ograniczonym operatorem z $\|S\| \leq \beta$; wtedy liniowym ograniczonym operatorem jest też A oraz [por. (12)]

$$(14) \quad \|A\| \leq M\beta\|I-E\| \leq 2M\beta.$$

U w a g a. Rozważmy losową funkcję tensorową $\mathbf{m}(x) = \bigotimes_{i=1}^4 \mathbf{c}''(x)$.

Ponieważ

$$m^4(x) = \mathbf{m}(x) |_{ijklmnpqqlj},$$

więc (13) można interpretować jako warunek nakładany na losową funkcję $\mathbf{m}(x)$.

Równanie (10) może być, w przestrzeni $L_2(\Omega \times G; \nu)$, napisane w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, x) &= \mathbf{Z}(x, x') : \mathbf{c}''(\omega, x) * \varepsilon(\omega, x) + \varepsilon_0(x), \\ \varepsilon(\omega, x) &= (\mathbf{Z} \circ S)(\varepsilon)(\omega, x) + \varepsilon_0(x). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$(15) \quad \bar{\varepsilon}(x) = \varepsilon(\omega, x) - A(\varepsilon)(\omega, x),$$

gdzie A jest operatorem zdefiniowanym w (12) oraz oznaczono $\bar{\varepsilon} = E\varepsilon$. Jeżeli spełniony jest warunek (13) oraz dodatkowo

$$(16) \quad 2M\beta < 1,$$

to ze wzoru (14) wynika, że równanie (15) ma rozwiązanie w postaci szeregu Neumanna

$$(17) \quad \varepsilon = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A^n \right) (\bar{\varepsilon}).^{8)}$$

U w a g a. Jeżeli spełnione są warunki (13) i (15) oraz przez $\varepsilon' = (I-E)\varepsilon$ oznaczymy fluktuację losowego odkształcenia, to z wzoru (14)

$$E\|\varepsilon'\|^2 \leq 4M^2\beta^2 E\|\varepsilon\|^2.$$

⁸⁾ Porównaj np. [4], [5]. Dotychczas nie znano jednak warunków poprawności tego rodzaju przedstawienia losowych odkształceń.

Ponieważ

$$E\|\mathbf{A}\|^2 = \sum_{i,j=1}^3 \int_G E(A_{ij})^2(x) dx,$$

to warunek (14) narzuca związek między momentami rzędu 2 ($E(\varepsilon_{ij}^2)$), a momentami centralnymi rzędu 2 ($E(\varepsilon'_{ij})^2$) — losowego odkształcenia ε .

5. Średnie naprężenia

Jeżeli losowe odkształcenie można przedstawić wzorem (17), to

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}'' \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{c}'' \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}'' \cdot A^n(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}).$$

Ponieważ $\|S \circ A^n\| \leq \|S\| \|A\|^n \leq \beta \|A\|^n$ i $\|A\| < 1$, więc ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \|S \circ A^n\|$ i

$$E \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}'' \cdot A^n(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\mathbf{c}'' \cdot A^n(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})),$$

skąd

$$(18) \quad \bar{\boldsymbol{T}} = E\boldsymbol{T} = \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{n=1}^{\infty} E(\mathbf{c}'' \cdot A^n(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})).$$

Zbadajmy postać wyrazów szeregu we wzorze (18); oznaczmy $I' = I - E$,

$$A(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})(\omega, x) = \mathbf{Z}(x, x_1) \underset{*}{I}'[\mathbf{c}''(\omega, x_1) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x_1)] = \mathbf{Z}(x, x_1) : I' \mathbf{c}''(\omega, x_1) \underset{*}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(x_1) = \mathbf{A}_1(\omega)(x, x_1) \underset{*}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(x_1),$$

$$A^2(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})(\omega, x) = \mathbf{Z}(x, x_1) \underset{*}{I}'[\mathbf{c}''(\omega, x_1) : \mathbf{Z}(x_1, x_2) \underset{*}{\mathbf{c}''}(\omega, x_2) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x_2)] = \mathbf{Z}(x, x_1) : I'[\mathbf{c}''(\omega, x_1) : \mathbf{Z}(x_1, x_2) : \mathbf{c}''(\omega, x_2)] \underset{*}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(x_2) = \mathbf{A}_2(\omega)(x, x_1, x_2) \underset{*}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(x_2),$$

$$A^3(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})(\omega, x) = \mathbf{Z}(x, x_1) : I'[\mathbf{c}''(\omega, x_1) : \mathbf{Z}(x_1, x_2) : I'(\mathbf{c}''(\omega, x_2) : \mathbf{Z}(x_2, x_3) : I' \mathbf{c}''(\omega, x_3))] \underset{*}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(x_3) = A_3(\omega)(x, x_1, x_2, x_3) \underset{*}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(x_3)$$

etc.

$$A^n(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})(\omega, x) = A_n(\omega)(x, x_2, \dots, x_n) \underset{*}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(x_n) = \int_{\underset{1}{XG}}^n \mathbf{A}_n(\omega)(x, x_1, \dots, x_n) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x_n) dx_1, \dots, dx_n.$$

Oznaczmy

$$(19) \quad \mathbf{Z}_n(x, x_1, \dots, x_n) = \underset{i=1}{\otimes}^n \mathbf{Z}(x_{i-1}, x_i), \quad x_0 = x,$$

$$\mathbf{C}_n(\omega, x_1, \dots, x_n) = I' \left(\mathbf{c}''(\omega, x_1) \otimes I' \left(\mathbf{c}''(\omega, x_2) \otimes I' \left(\dots \otimes I' \left(\mathbf{c}''(\omega, x_{n-1}) \otimes I' \mathbf{c}'' \times \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \times (\omega, x_n) \dots \right) \right) \right) \right).$$

Wprowadźmy działanie tensorowe

$$\circ: T_{4n} \otimes T_{4(n+1)} \rightarrow T_4,$$

zdefiniowane przepisem

$$(20) \quad \mathbf{A} \in T_{4n}, \quad \mathbf{B} \in T_{4(n+1)} \Rightarrow \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \sigma \times (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}),$$

gdzie znak „ \times ” oznacza operację kolejnego zwięzania iloczynu tensorowego $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ po układzie σ wskaźników:

$$\sigma = \{(1, 4n+3); (2, 4n+4); \dots; (4n-3, 8n-1); (4n-2, 8n); (4n-1, 8n+1); (4n, 8n+2)\}.$$

Wtedy

$$E[\mathbf{c}''(\omega, x): \mathbf{A}_n(\omega)(x, x_1, \dots, x_n)] = E[\mathbf{Z}_n(x, x_1, \dots, x_n) \circ (\mathbf{c}''(\omega, x) \otimes \mathbf{C}_n(\omega, x_1, \dots, x_n))] = \\ = \mathbf{Z}_n(x, x_1, \dots, x_n) \circ \mathbf{K}_n(x, x_1, \dots, x_n),$$

gdzie oznaczono

$$(21) \quad \mathbf{K}_n(x, x_1, \dots, x_n) = E[\mathbf{c}''(\omega, x) \otimes \mathbf{C}_n(\omega, x_1, \dots, x_n)].$$

Funkcja \mathbf{K}_n jest tensorową funkcją

$$\mathbf{K}_n: \underset{1}{XG}^{n+1} \rightarrow T_{4(n+1)}$$

będącą kombinacją liniową funkcji korelacyjnych rzędu $\leq n$ losowej funkcji rozkładu niejednorodności $\mathbf{c}(\omega, x)$, $(\omega, x) \in \Omega \times G$.

Ostatecznie możemy wypowiedzieć następujące **Twierdzenie**:⁹⁾

Jeżeli ośrodek wielofazowy posiada własności A-E (rozdz. 3) oraz spełnione są warunki (13) i (16) (rozdz. 4), to istnieje funkcjonalny związek między średnim naprężeniem $\bar{\mathbf{T}}$ a średnim odkształceniem $\bar{\mathbf{e}}$:

$$\bar{\mathbf{T}}(x) = F\bar{\mathbf{e}}(x),$$

gdzie F jest liniowym ograniczonym operatorem w $L_2(G)$ zdefiniowanym w następujący sposób:

$$F\bar{\mathbf{e}}(x) = \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{e}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n(x, x_n) * \bar{\mathbf{e}}(x_n), \\ \mathbf{F}_n(x, x_n) * \bar{\mathbf{e}}(x_n) = \int_G \mathbf{F}_n(x, x_n) \cdot \bar{\mathbf{e}}(x_n) dx_n,$$

$$\mathbf{F}_n(x, x_n) = \int_{\underset{1}{XG}^{n-1}} \mathbf{Z}_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \circ \mathbf{K}_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1},$$

$$\mathbf{C} = E\mathbf{e}(x).$$

Pozostałe oznaczenia podane są we wzorach (11), (19) - (21); \int_H jest symbolem całki w sensie wartości głównej.

⁹⁾ Twierdzenie to obowiązuje oczywiście również w przypadku gładkiego rozkładu niejednorodności.

Dodatek

1.

R^3 — euklidesowa przestrzeń wektorowa trójek liczb. Przestrzeń ta rozważana jest wraz z ustaloną bazą $\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$; $i = 1, 2, 3$ (δ_{ij} — symbol Kroneckera).

$T_p = \bigotimes_1^p R^3$ — euklidesowa przestrzeń tensorów walencji p nad R^3 . Przestrzeń ta rozwa-

żana jest wraz z ustaloną bazą $\bigotimes_{\alpha=1}^p \mathbf{e}_{i_\alpha}$, $i_\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Dla $\mathbf{A} \in T_p$, $\mathbf{A} = A_{ij\dots kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ (zapis w konwencji sumacyjnej Einsteina) oznaczmy $\mathbf{A}|_{ij\dots kl} = A_{ij\dots kl}$. Dla $\mathbf{A} \in T_p$, $\mathbf{B} \in T_q$ przez $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in T_{|p-q|}$ oznaczamy pełne nasunięcie tensorowe; np. dla $p = 4$, $q = 2$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|_{ij} = \mathbf{A}|_{ijkl} \mathbf{B}|_{kl}$; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}|_{kl} = \mathbf{B}|_{ij} \mathbf{A}|_{ijkl}$. W przestrzeni T_p rozważamy iloczyn skalarny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}|_{ij\dots kl} \mathbf{B}|_{ij\dots kl}$ i normę $\|\mathbf{A}\|_p = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$.

Funkcje $\mathbf{A}: G \rightarrow T_p$, $G \subset R^3$ rozważane będą jako odwzorowania postaci $\mathbf{A}(x) = A_{ij\dots kl}(x) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, $\mathbf{A}_{ij\dots kl}: G \rightarrow R$. Jeżeli M jest pewną przestrzenią funkcji skalarnych określonych na zbiorze G i $A_{ij\dots kl} \in M$, to pisać będziemy też $\mathbf{A} \in M$. W przestrzeni tensorowych funkcji klasy $L_2(G)$ przyjmować będziemy normę

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\int_G \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{A}(x) dx \right)^{1/2}.$$

2.

Niech (Ω, \mathcal{B}, P) będzie pewną przestrzenią probabilistyczną oraz $G \subset R^3$ ograniczonym obszarem. Oznaczmy przez l_3 miarę Lebesgue'a w R^3 , a przez $\nu = P \times l_3$ miarę na $\Omega \times G$ będącą iloczynem kartezjańskim miar P i l_3 (np. [6]).

Rozważmy przestrzeń tensorowych funkcji

$$\mathbf{A}: \Omega \times G \rightarrow T_p,$$

klasy $L_2(\Omega \times G; \nu)$. Za normę $\mathbf{A} \in L_2(\Omega \times G; \nu)$ przyjmijmy liczbę

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\int_{\Omega \times G} \mathbf{A}(\omega, x) \cdot \mathbf{A}(\omega, x) d\nu(\omega, x) \right)^{1/2}.$$

Z twierdzenia FUBINIEGO [6]

$$\|\mathbf{A}\|^2 = E\|\mathbf{A}\|^2 = \int_{\Omega} \|\mathbf{A}\|^2(\omega) dP(\omega),$$

gdzie oznaczono

$$\|\mathbf{A}\|^2(\omega) = \int_G \mathbf{A}(\omega, x) \cdot \mathbf{A}(\omega, x) dl_3(x).$$

Ogólnie biorąc funkcja $\omega \rightarrow \|\mathbf{A}\|^2(\omega)$ jest określona prawie wszędzie dla $\omega \in \Omega$; w pracy rozważane będą funkcje $\mathbf{A} \in L_2(\Omega \times G; \nu)$ takie, że dla dowolnego $\omega \in \Omega$ liczba $\|\mathbf{A}\|^2(\omega)$ jest określona, tj. takie losowe funkcje tensorowe, że ich realizacje $\mathbf{A}_\omega(x) = \mathbf{A}(\omega, x)$ ($x \in G$) są funkcjami klasy $L_2(G)$.

Dla $\mathbf{A} \in L_2(\Omega \times G; \nu)$ oznaczmy

$$E\mathbf{A}(x) = \int_{\Omega} \mathbf{A}(\omega, x) dP(\omega).$$

Funkcja $x \rightarrow EA(x)$ nazywana jest wartością oczekiwaną losowej funkcji A . Operacja

$$E: A \rightarrow EA$$

ma własności:

a) $EA \in L_2(G)$ istnieje dla dowolnego $A \in L_2(\Omega \times G; \nu)$,

b) E jest liniowym ograniczonym operatorem i $\|E\| \leq 1$.

Zauważmy, że ponieważ dla $A_0 \in L_2(G)$, $A(\omega, x) \equiv A_0(x)$ mamy $\|A\| = \|A_0\|$, więc przestrzeń $L_2(G)$ można izometrycznie zanurzyć w przestrzeni $L_2(\Omega \times G; \nu)$. Odpowiednio do tego zanurzenia możemy operator E rozpatrywać jako działający w przestrzeni $L_2(\Omega \times G; \nu)$. Operator E zdefiniowany wyżej i traktowany jako działający w $L_2(\Omega \times G; \nu)$ nazywać będziemy operatorem wartości oczekiwanej.

3.

Niech (Ω, \mathcal{B}, P) będzie probabilistyczną przestrzenią. Dla skalarnej (rzeczywistej) zmiennej losowej $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ oznaczamy:

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega),$$

$$\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|X\|_{\infty} = \sup_{a \in R} \{a: P(|X| > a) > 0\}.$$

Liczba $\|X\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ ma (między innymi) własność [7]

$$\|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q,$$

dla dowolnych liczb naturalnych $1 \leq p, q, r \leq \infty$ takich, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \left(\frac{1}{\infty} \equiv 0 \right).$$

W szczególności, jeżeli $r = q = 2$, to liczba $\|XY\|_2$ może być oszacowana przez

$$\|XY\|_2 \leq \|X\|_{\infty} \|Y\|_2.$$

4.

Rozważmy całkę

$$I = E \int_G X(\omega, x) Y^2(\omega, x) dx, \quad G \subset R^3,$$

$$X(\omega, x) = \|c''(\omega, x): c''(\omega, x)\|_4,$$

$$Y(\omega, x) = \|\varepsilon(\omega, x) \otimes \varepsilon(\omega, x)\|_4^{1/2} = \|\varepsilon(\omega, x)\|_2,$$

gdzie $\|\cdot\|_p$ jest normą w euklidesowej przestrzeni wektorowej tensorów walencji p . Oznaczmy dla $x \in G$ ustalonego oraz $\omega \in \Omega$ dowolnego:

$$X_x \equiv X_x(\omega) = X(\omega, x),$$

$$Y_x \equiv Y_x(\omega) = Y(\omega, x).$$

W tych oznaczeniach i w oznaczeniach z Dodatku 3:

$$E(X_x Y_x^2) = E(|\sqrt{X_x} Y_x|^2) = \|\sqrt{X_x} Y_x\|_2^2 \leq \alpha^2(x) \|Y_x\|_2^2,$$

gdzie

$$\alpha(x) = \|\sqrt{X_x}\|_{\omega}.$$

A więc:

$$\begin{aligned} I &= \int_G E(X_x Y_x^2) dx \leq \int_G \alpha^2(x) E(Y_x^2) dx = E \int_G \alpha^2(x) Y^2(\omega, x) dx = \\ &= E \int_G |\alpha(x) Y(\omega, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Oznaczając przez β istotny kres górnej funkcji $\alpha(x)$, $x \in G$ ([8]):

$$\beta = \sup_{x \in G} \alpha(x)$$

oraz oznaczając dla $\omega \in \Omega$ ustalonego, a $x \in G$ dowolnego:

$$Y_{\omega} \equiv Y_{\omega}(x) = Y(\omega, x)$$

mamy

$$\int_G |\alpha(x) Y(\omega, x)|^2 dx = \|\alpha Y_{\omega}\|^2 \leq \beta^2 \|Y_{\omega}\|^2 = \beta^2 \int_G Y^2(\omega, x) dx,$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą w przestrzeni $L_2(G)$, przy czym skorzystano z oszacowania ([8])

$$\|\alpha Y_{\omega}\| \leq \beta \|Y_{\omega}\|.$$

Ostatecznie

$$I \leq \beta^2 E \int_G Y^2(\omega, x) dx = \beta^2 \|\varepsilon\|^2.$$

Literatura cytowana w tekście

1. A. TRZĘSOWSKI, *Dia-elastic description of a jump-nonhomogeneous body*; Teoria ośrodków wielofazowych, część II; Wrocław 1975.
2. A. TRZĘSOWSKI, *Rozwiązania w przestrzeniach Sobolewa równań teorii sprężystości*; Prace IPPT, 24/1973.
3. С. Г. МИХЛИН, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Москва 1965.
4. CZ. EIMER, *Stress in multiphase media*; Arch. Mech. Stos., 4, 19 (1967).
5. M. I. BERAN and MCCOY, *Mean field variation in Random media*, Quarterly of Applied Mathematics, 2, 28 (1970).
6. S. ŁOJASIEWICZ, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Warszawa 1973.
7. I. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Paris 1964.
8. R. SIKORSKI, *Funkcje rzeczywiste*, t. II, Warszawa 1959.
9. E. KRÖNER, *Allgemeine Kontinuumsmechanik der Versetzungen und Eigenspannungen*, ARMA, 4 (1960).

Резюме

СРЕДНЕЕ НАПРЯЖЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В работе рассмотрены среды содержащие случайно распределенные скачкообразные неоднородности. Найдены достаточные условия существования функционального соотношения между средними напряжениями и средней деформацией; определен вид этого соотношения.

S u m m a r y

MEAN STRESS IN A MULTI-COMPONENT STOCHASTIC MEDIUM

Media with random distribution of jump-inhomogeneities are considered. The sufficient conditions for the existence of the functional relation between the mean stress and the mean strain are found; the form of this relation is presented.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1976 r.

LIST DO REDAKCJI*

JÓZEF WRANIK (BIELSKO-BIAŁA)

W zeszycie 2/1975 MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ukazała się publikacja Bogdana WOSIEWICZA [1], będąca wypowiedzią na temat mojej pracy [2]. W wypowiedzi tej zamieszczono pewne sformułowania fałszywie naświetlające treść mojej pracy [2]; proszę więc uprzejmie o zamieszczenie w Waszym wydawnictwie niniejszego listu.

1. Odpowiadając na p. 1 pracy [1], pozwolę sobie zauważyć, że ZIENKIEWICZ [3], na s. 117, za pomocą minimalizacji całkowitej energii potencjalnej χ^e elementu skończonego z dużą liczbą węzłów w y k a z u j e, że uzyskana macierz $[k^*]^e$ i wektor $\{F^*\}^e$ (według oznaczeń pracy [2] odpowiednio \mathbf{K} i \vec{k}_p), w wyniku formalnych przekształceń matematycznych stanowią odpowiednio macierz sztywności i wektor obciążeń elementu po eliminacji jego węzłów wewnętrznych, czyli superelementu. Wynika to wprost z analogii dwu relacji (7 - 22) i (7 - 18) pracy [3].

W pracy [2] natomiast wykazano to samo przez zastosowanie wprost metody przemieszczeń.

2. Autor pracy [1] w p. 2 stwierdza, że określenie macierzy sztywności \mathbf{K} i wektora obciążeń \vec{k}_p superelementu jest niewystarczające, a stwierdzenie to opiera na fakcie, że brak w pracy [2] sformułowania pewnych podstaw metody przemieszczeń.

Uważam, że:

a) zamieszczanie w artykułach naukowych podstaw metod od dawna znanych czytelnikom, zajmującym się przedstawionymi zagadnieniami, jest niepotrzebne. Na przykład, ZIENKIEWICZ w pracy [3] ani razu nie wspomina o zamocowywaniu węzłów, mimo że *«książka ta została napisana zarówno dla studentów, jak i dla praktykujących inżynierów»* ([3], s. 14);

b) metodę przemieszczeń można sformułować bez konieczności wprowadzania węzłów fikcyjnych w węzłach, wyobrażając sobie, że kolejne przemieszczenia jednostkowe wywołane są pewną określoną grupą sił działających, ogólnie rzecz biorąc, we wszystkich węzłach superelementu.

3) W p. 3 pracy [1] autor błędnie interpretuje macierz \mathbf{A}_{aa} i wektor \vec{b}_a . Na s. 403 pracy [2] można znaleźć dokładne określenia m.in. macierzy \mathbf{A}_{aa} i wektora \vec{b}_a . Całe następujące po tym rozumowanie autora pracy [1] i zawarte tam jego wnioski oparte na wyżej wymienionej błędnej interpretacji są zatem nieprawdziwe.

W trakcie analizowania treści pracy [1] nasunęły się dwa pytania:

a) dlaczego autor pracy [1], jeżeli nie zrozumiał treści pracy [2], nie skontaktował się z jej autorem przed opublikowaniem swoich «wniosków»?

b) jak autor pracy [1] wyjaśnił sobie przyczynę uzyskania w pracy [2] wyników identycznych z wynikami w pracach [1] i [3]?

*) Zamieszczając niniejszą wypowiedź, Redakcja zamyka polemikę na poruszony temat.

Literatura cytowana w tekście

1. B. WOSIEWICZ, *W sprawie macierzy sztywności i wektora obciążeń superelementu*, Mech. Teor. i Stos. 2, 13 (1975) 283 - 286.
2. J. WRANIK, *Macierz sztywności i wektor obciążeń superelementu*, Mech. Teor. i Stos. 3, 12 (1974) 401 - 402.
3. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Warszawa 1972.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA FILIA W BIELSKU BIAŁYM

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1976 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

II KONFERENCJA «METODY KOMPUTEROWE W MECHANICE KONSTRUKCJI»

II Konferencja «Metody komputerowe w mechanice konstrukcji» odbyła się w Gdańsku w dniach 24—26 listopada 1975 r. Jej tematyka była kontynuacją tematyki sympozjum «Metody numeryczne w mechanice» (Gdańsk, 1972 r.) i konferencji «Metody komputerowe w mechanice konstrukcji» (Poznań, 1973 r.). Organizatorami konferencji były: Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (Oddział w Gdańsku), Sekcja Mechaniki Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Zespół Mechaniki Komputerowej Komitetu Fizyki i Mechaniki Ciała Stałego PAN, Politechnika Gdańska.

W obradach wzięło udział ponad 170 przedstawicieli wyższych uczelni technicznych, placówek PAN oraz biur projektowych z całego kraju. Wygłoszono 90 referatów, w tym 3 problemowe i 2 informacyjne. Referaty te wydrukowane zostały w materiałach konferencyjnych, przy czym referaty problemowe i informacyjne — w pełnych tekstach, natomiast pozostałe — w formie streszczeń.

Tematyka referatów dotyczyła:

- ogólnych zagadnień metod komputerowych (18 referatów),
- problemów statyki układów prętowych i powierzchniowych (30),
- problemów dynamiki układów prętowych i powierzchniowych (18),
- zagadnień stateczności (5),
- problemów nieliniowych teorii konstrukcji (8),
- specjalistycznych zagadnień inżynierskich (19),
- programów dydaktycznych, z uwzględnieniem w nich metod komputerowych (4).

Referaty wygłoszone na konferencji wywołały duże zainteresowanie i wymianę poglądów. W dyskusjach padło łącznie ponad 300 wypowiedzi.

Podsumowania obrad dokonał prof. J. SZMELTER.

Dyskusja i podsumowanie są podstawą do następujących stwierdzeń.

W stosunku do okresu sympozjum w Gdańsku (1972 r.) i w stosunku do okresu konferencji w Poznaniu (1973 r.) nastąpiło upowszechnienie metod komputerowych również w przemyśle. Uległ poprawie stan informacji o programach, w czym istotną rolę spełniła publikacja spisu istniejących programów. Nastąpił wyraźny postęp w zakresie operowania systemami programów. Wiele ośrodków opracowało własne systemy programów.

Słabym punktem rozwoju metod komputerowych jest nadal dydaktyka w szkolnictwie wyższym.

W zakresie wytycznych i planów na najbliższy okres zostały zgłoszone następujące postulaty:

— należy nadal upowszechniać metody komputerowe w mechanice; niecelowe wydaje się dążenie do tworzenia nowych oryginalnych systemów; należy dążyć do rozszerzenia istniejących systemów drogą tworzenia programów specjalistycznych;

- informacji o programach na EMC należy nadal poświęcać dużo uwagi;
- celowe jest okresowe weryfikowanie spisu programów i tworzenie listy programów pewnych, praktycznie przydatnych, dobrze pracujących i z dobrymi opisami;
- należy wyraźnie podnieść poziom dydaktyki w zakresie metod komputerowych;
- w zakresie zastosowań praktycznych należy przejść od poziomu analizy do poziomu syntezy wyników i optymalizacji projektowania;
- w programie najbliższej konferencji należy wprowadzić referat problemowy na temat metod sieciowych i zastosowań struktur algebraicznych; należy położyć nacisk na rozwiązywanie problemów nieliniowych oraz zapewnić większy udział matematyków;
- celowe jest również rozwinięcie zastosowań minikomputerów.

*Opracowano na podstawie sprawozdania
sporządzonego przez wiceprzewodniczącego Komitetu Organizacyjnego
— prof. E. Bielewicza*

**WYKAZ ODDZIAŁÓW
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ**

1. Bydgoszcz — 85-225 Bydgoszcz, ul. Jana Olszewskiego 20,
Wyższa Szkoła Inżynierska — Zespół Mechaniki Technicznej, tel. 394-28, w. 73.
2. Częstochowa — 42-200 Częstochowa, ul. Zawadzkiego 60,
Politechnika Częstochowska, Wydział Budowy Maszyn, Zakład Maszyn i Przeróbki
Plastycznej.
3. Gdańsk — 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Majakowskiego 11/12,
Politechnika Gdańska, pokój 166, tel. 41-40-51, w. 879.
4. Gliwice — 44-100 Gliwice, ul. Powstańców 12,
Politechnika Śląska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, pokój 24,
tel. 91-10-01, w. 3.
5. Kraków — 31-155 Kraków, ul. Warszawska 24,
Politechnika Krakowska, Wydział Budownictwa Lądowego, Instytut Mechaniki
Budowli (prof. G. Szefer).
6. Łódź — 90-924 Łódź, ul. Żeromskiego 116,
Politechnika Łódzka, Instytut Maszyn i Urządzeń Włókienniczych (dr inż. Krzysztof
Dems), tel. 655-22, w. 365.
7. Opole — 45-061 Opole, ul. Katowicka 48.
8. Poznań — 61-138 Poznań, ul. Piotrowo 3,
Politechnika Poznańska, Instytut Mechaniki Technicznej, pokój 509.
9. Rzeszów — 35-021 Rzeszów, ul. W. Pola 2,
Instytut Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska im. J. Łukasiewicza.
10. Szczecin — 70-311 Szczecin, Al. Piastów 50,
Politechnika Szczecińska (doc. dr Czesław Mickiewicz).
11. Warszawa — 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, pokój 1724.
12. Wrocław — 50-370 Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27,
Politechnika Wroclawska.
13. Zielona Góra — 60-349 Poznań, ul. Ostroga 35,
(doc. dr Jerzy Kowalski), tel. 67-13-92.

K O M U N I K A T

**O III SYMPOZJUM FRANCUSKO-POLSKIM „NIELINIOWE ZAGADNIENIA W MECHANICE
OŚRODKÓW CIĄGŁYCH”**

Komitet Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych Polskiej Akademii Nauk organizuje w czerwcu 1977 w Polsce III Sympozjum Francusko-Polskie na temat Nieliniowych zagadnień w mechanice ośrodków ciągłych. Poprzednie spotkania odbyły się w Jabłoncej w 1971 i w Nicei w 1974. Celem organizowanej konferencji jest przegląd i krytyczna ocena wyników badań w dziedzinie mechaniki przeprowadzonych w ostatnich latach we współpracujących ośrodkach Polski i Francji. Tematyka planowego Sympozjum obejmować będzie w szczególności zagadnienia mechaniki nieliniowej, takie jak problemy plastyczności, reologii, ośrodków sypkich, pól sprzężonych, geomechaniki, problematykę metod numerycznych w rozwiązywaniu zagadnień nieliniowych i doświadczalne badania podstawowe. Liczba referatów, które mogą być przedstawione na Sympozjum jest ograniczona (15 ze strony francuskiej i 30 ze strony polskiej). Osoby, które chciałyby wziąć udział w Sympozjum, proszone są o nadesłanie karty informacyjnej do dnia 15 października 1976 r.

Karty informacyjne uprzejmie prosimy kierować pod adresem:
Dr inż. Tomasz HUECKEL, IPPT, PAN, ul. Świętokrzyska 21, 00-049
W a r s z a w a.

XVII ZJAZD DELEGATÓW POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

XVII Zjazd PTMTS odbył się w dniach 8 i 9 kwietnia 1976 r. w Łodzi. W Zjeździe uczestniczyło 80 osób, w tym 69 osób z mandatami delegatów, reprezentujących 12 Oddziałów Towarzystwa. Otwarcia obrad dokonał przewodniczący Zarządu Głównego prof. dr Z. KĄCZKOWSKI. Zauważył on, że Zjazd ten różni się od poprzednich, gdyż pierwszy raz odbywa się według nowego statutu, tzn. co dwa lata, oraz połączony jest z Sesją Naukową. Następny Zjazd, za dwa lata, będzie już Zjazdem XX-lecia istnienia PTMTS.

Minutą ciszy uczczono pamięć zmarłych w okresie kadencji cenionych uczonych, członków PTMTS: prof. prof. WŁADYSŁAWA BOGUSZA (z Krakowa), JULIANA BONDERA (z Warszawy), ADAMA MITZLA (z Wrocławia), FRANCISZKA JANIKA (z Warszawy), BOHDANA STEFANOWSKIEGO (z Warszawy), doc. dr. ZBIGNIEWA PACZKOWSKIEGO (ze Szczecina), doc. dr. hab. ANDRZEJA WSZELACZYŃSKIEGO (z Gliwic), doc. dr. JERZEGO CZECHOWICZA (z Warszawy).

Na przewodniczącego obraz Zjazdu Delegatów wybrano doc. dr. Władysława WALCZAKA (z Łodzi), na zastępców przewodniczącego — prof. dr. Janusza DIETRZYCHA (z Gliwic) i prof. dr. hab. Gwidona SZEFERA (z Krakowa), na sekretarzy — doc. dr. hab. Wandę SZEMPLIŃSKĄ-STUPNICĄ (z Warszawy) oraz doc. dr. hab. Piotra KLEMMĄ (z Łodzi).

Przyjęto następujący porządek obrad Zjazdu i Sesji Naukowej:

Czwartek — 8 kwietnia 1976 r.

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarzy Zjazdu.
2. Przyjęcie protokołu XVI Zjazdu Delegatów PTMTS.
3. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej.
4. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa.
5. Złożenie sprawozdania finansowego.
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich, postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem.
8. Wybory: a) przewodniczącego; b) członków Zarządu Głównego; c) Głównej Komisji Rewizyjnej.
 - Referat prof. dr. inż. Jana SZMELTERA pt. «Metody komputerowe w mechanice».
 - Referat prof. dr. inż. Umirbeka DŻOŁDASBEKOWA, rektora Uniwersytetu w Alma-Ata, pt. «Teoria płaskich mechanizmów wyższych klas».

Piątek — 9 kwietnia 1976 r.

— Referat wiceprezesa PAN prof. dr. inż. Witolda NOWACKIEGO pt. «Pola sprzężone w mechanicznej ciałach stałych».

9. Dyskusja i uchwalenie generalnych wytycznych działalności PTMTS na następny okres.
 10. Sprawy bieżące i wolne wnioski.
 11. Zamknięcie Zjazdu.
- Ad 1. Wyczerpano na wstępie.
- Ad 2. Protokół poprzedniego Zjazdu Delegatów PTMTS odybytego w dniu 1 czerwca 1974 r. przyjęto bez zmian.
- Ad 3. Komisję Matkę i Skrutacyjną powołano w następującym składzie: doc. dr. Andrzej AJDUKIEWICZ z Gliwic, prof. dr. Zbigniew OLESIAK z Warszawy, prof. dr. Kazimierz PISZCZEK z Krakowa.
- Ad 4. Sprawozdanie z działalności Towarzystwa w okresie kadencji złożył prof. dr Z. KĄCZKOWSKI.
- Ad 5. Sprawozdanie finansowe złożył skarbnik — prof. dr. Zbigniew WESOŁOWSKI.
- Ad 6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył jej przewodniczący prof. dr. St. KOCANDA.
- Ad 7. Po obszernej dyskusji dotyczącej zarówno działalności naukowej Towarzystwa, jak i zagadnień finansowych, Zjazd przyjął sprawozdania: z działalności Towarzystwa, finansowe oraz Głównej Komisji Rewizyjnej. Wniosek o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium przyjęto jednomyślnie. Następnie doc. dr. W. WALCZAK złożył ustępującemu Przewodniczącemu i Zarządowi Głównemu serdeczne podziękowanie za owocną pracę.

Ad 8. Kandydatury na przewodniczącego Zarządu Głównego, członków Zarządu Głównego i członków Głównej Komisji Rewizyjnej zgłosił w imieniu Komisji Matki doc. dr. Andrzej AJDUKIEWICZ (z Gliwic).

W wyniku tajnego głosowania na przewodniczącego Zarządu Głównego PTMTS został wybrany prof. dr Zbigniew PARSZEWSKI, który uzyskał 53 głosy. Prof. dr Zbigniew OSIŃSKI uzyskał 15 głosów.

W wyniku tajnego głosowania, w którym oddano 69 ważnych głosów wybrano na członków Zarządu Głównego PTMTS 6 osób:

- | | |
|---|--------------|
| 1. prof. dr hab. Stanisław KOCANDA (Warszawa) | — 56 głosów, |
| 2. prof. dr Eugeniusz BIELEWICZ (Gdańsk) | — 55 „ „ |
| 3. doc. dr hab. Zenon WASZCZYŹYŃ (Kraków) | — 55 „ „ |
| 4. doc. dr Henryk MIKOŁAJCZAK (Poznań) | — 49 „ „ |
| 5. prof. dr hab. Jerzy ANTONIAK (Gliwice) | — 43 głosy, |
| 6. prof. dr hab. Marek DIETRICH (Warszawa) | — 43 „ „ |

Na zastępców członków Zarządu Głównego wybrani zostali:

- | | |
|--|--------------|
| 7. prof. dr Jerzy KOŁAKOWSKI (Częstochowa) | — 42 głosy, |
| 8. dr Kazimierz BORSUK (Warszawa) | — 39 głosów, |

Na członków Głównej Komisji Rewizyjnej zostali wybrani:

- | | |
|--|--------------|
| 1. prof. dr Z. KĄCZKOWSKI | — 54 głosy, |
| 2. prof. dr M. ŻYCZKOWSKI | — 53 „ „ |
| 3. doc. dr hab. Wanda SZEMLIŃSKA-STUPNICKA | — 48 głosów, |

a na zastępców członków Głównej Komisji Rewizyjnej:

- | | |
|-------------------------------|--------------|
| 4. doc. dr K. GRUDZIŃSKI | — 47 głosów, |
| 5. prof. dr hab. S. BORKOWSKI | — 42 głosy. |

W części naukowej Zjazdu prof. dr Jan SZMELTER wygłosił referat pt. «Metody komputerowe w mechanice». Referat ten, ujmujący i porównujący w ogólny i przejrzysty sposób cechy metod analitycznych i numerycznych, wywołał ożywioną dyskusję, w której zabierali głos m.in. prof. dr W. NOWACKI, prof. dr J. DIETRICH i prof. dr G. RAKOWSKI. Następnie prof. dr inż. Umirbek DŻOŁDASBEKOW, rektor Uniwersytetu w Alma-Ata, wygłosił referat pt. «Teoria płaskich mechanizmów wyższych klas».

W drugim dniu Zjazdu prof. dr Witold NOWACKI wygłosił referat pt. «Pola sprzężone w mechanice ciała stałego». W dyskusji zabierali głos m.in. prof. prof. Z. KĄCZKOWSKI, Z. PARSZEWSKI oraz doc. dr hab. J. STUPNICKI.

Dyskusja nawiązująca do postawionego zagadnienia «metody analityczne a komputerowe» była poważnym przyczynkiem do oceny efektywności, obszarów zastosowań, roli i wzajemnego uzupełniania się obu metod przy pracach naukowo-poznawczych i stosowanych.

Powracając do obrad Zjazdu, prof. dr Z. PARSZEWSKI wysunął wniosek o wniesienie do porządku obrad punktu dotyczącego nadania godności Członka Honorowego PTMTS prof. dr Januszowi DIETRICHOWI. Wniosek przyjęto jednogłośnie, włączając go jako 9. punkt porządku obrad.

Ad. 9. Wniosek o nadanie godności Członka Honorowego PTMTS prof. dr Januszowi DIETRICHOWI, wraz ze szczegółowym uzasadnieniem, zreferował przewodniczący Oddziału w Gliwicach doc. dr J. WOJNAROWSKI. Po dyskusji wniosek przyjęto jednogłośnie.

Ad 10. Wytyczne kierunkowe działalności PTMTS na najbliższy okres zreferował przewodniczący Zarządu Głównego — prof. dr Z. PARSZEWSKI. Przedstawił plany zorganizowania sympozjów naukowych oraz zebrań naukowych, a w szczególności zebrań wolnodyskusyjnych — nowej formy działalności, która zdobyła sobie duże uznanie. Omówił również plany organizowania tradycyjnych konkursów ogólnokrajowych na najlepsze prace z zakresu mechaniki doświadczalnej i z dziedziny mechaniki teoretycznej i stosowanej, oraz seminariów naukowych organizowanych przez poszczególne oddziały. Jako naczelną hasło na najbliższe lata zaproponował słowa podsunęte przez prof. dr Witolda NOWACKIEGO — wytrwalej realizacji podjętych kierunków badań.

W wyniku dyskusji, w której znaczną część poświęcono trudnościom finansowym Towarzystwa, wysunął wniosek o podwyższenie składek członkowskich do 100 zł rocznie. Wniosek przyjęto jednogłośnie.

Na zakończenie prof. dr Z. PARSZEWSKI podziękował Przewodniczącemu i Prezydium Zjazdu za sprawne przeprowadzenie obrad, wszystkim obecnym za wkład i żywą dyskusję, oraz wybitnym uczonym, którzy zechcieli przygotować referaty stanowiące istotne naświetlenie ważnych i obszernych dziedzin mechaniki. Podziękował również p. p. H. ROSIŃSKIEJ i K. CHMIELEWSKIEJ za kierowanie administracją Towarzystwa i przygotowanie organizacyjnej strony Zjazdu. Na tym obrady zakończono.

W. Szemplińska-Stupnicka (Warszawa)

**SKŁAD ZARZĄDU GŁÓWNEGO I ZARZADÓW ODDZIAŁÓW PTMTS
W KADENCJI 1976/1977/1978**

Zarząd Główny

Prof. dr Zdzisław PARSZEWSKI (Łódź) — przewodniczący, prof. dr hab. Stanisław KOCANDA (Warszawa) — wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Jerzy ANTONIAK (Gliwice) — wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Marek DIETRICH (Warszawa) — sekretarz generalny, dr Kazimierz BORSUK (Warszawa) — skarbnik, prof. dr Jerzy KOŁAKOWSKI (Częstochowa) — zast. sekr. generalnego, prof. dr Eugeniusz BIELEWICZ (Gdańsk) — zast. skarbnika, doc. dr Henryk MIKOŁAJCZAK (Poznań) i doc. dr hab. Zenon WASZCZYŚYŃ (Kraków) — członkowie ZG.

Oddział w Bydgoszczy

Doc. dr Krzysztof WERNEROWSKI — przewodniczący, dr Bronisław STOŁKOWSKI — zast. przewodniczącego, mgr inż. Andrzej GOLIK — sekretarz, mgr inż. Andrzej TOPOLIŃSKI — skarbnik, mgr inż. Jan LORKOWSKI — członek zarządu.

Oddział w Częstochowie

Doc. dr hab. Janusz ELSNER — przewodniczący, doc. dr Waldemar BACHMACZ — zast. przewodniczącego, dr Ryszard PARKITNY — sekretarz, dr Józef ZAJDEL — skarbnik, dr Lech TOMSKI i dr Janusz WILCZYŃSKI — członkowie zarządu, doc. dr Ryszard CZARNECKI, dr Zbigniew SMARZYŃSKI i dr Jerzy WŁODARSKI — zast. czł. zarządu.

Oddział w Gdańsku

Prof. Roman KAZIMIERCZAK — przewodniczący, doc. dr Wojciech PIETRASZKIEWICZ — zast. przewodniczącego, doc. dr hab. Mieczysław WIZMUR — sekretarz, doc. dr Jan KRUSZEWSKI — skarbnik, dr Edmund WITTBRODT — członek zarządu.

Oddział w Gliwicach

Doc. dr hab. Józef WOJNAROWSKI — przewodniczący, doc. dr hab. Ernest CZOGAŁA i doc. dr Walery SZUŚCIK — zast. przewodniczącego, doc. dr hab. Bohdan MOCHNACKI — sekretarz, dr Remigiusz ĆWIK — skarbnik, doc. dr hab. Jerzy TOMECZEK — członek, doc. dr Zdzisław SULIMOWSKI, dr Jan SKŁADZIEN i doc. dr Tadeusz TYRLIK — zast. czł. zarządu.

Oddział w Krakowie

Prof. dr hab. Gwidon SZEFER — przewodniczący, doc. dr hab. Stanisław KASPRZYK — zast. przewodniczącego, doc. dr Bogdan OLSZOWSKI — sekretarz, doc. dr hab. Wiesław KRZYŚ — skarbnik, doc. dr hab. Zenon WASZCZYŚYŃ, doc. dr hab. Mieczysław ZABAWA, dr J. WAPIENNIK, doc. dr Józef NIZIOŁ i dr J. GRABECKI — czł. zarządu.

Oddział w Łodzi

Doc. dr Władysław WALCZAK — przewodniczący, doc. dr hab. Piotr KLEMM — zast. przewodniczącego, dr Krzysztof DEMS — sekretarz, dr hab. Waldemar KOBZA — skarbnik.

Oddział w Opolu

Doc. dr hab. Oswald MATEJA — przewodniczący, doc. dr Jan KUBIK — zast. przewodniczącego, dr Rainhold KAŁUŻA — sekretarz, dr Tomasz DZIADEK — skarbnik.]

Oddział w Poznaniu

Doc. dr hab. Jarosław STEFANIAK — przewodniczący, doc. dr hab. Henryk MIKOŁAJCZAK — zast. przewodniczącego, dr Zbigniew MAGIERA-ULLRICH — sekretarz, dr Ryszard DZIĘCIELAK — skarbnik, doc. dr hab. Stanisław STANISŁAWSKI — członek, doc. dr hab. Czesław CEMPEL — zast. członka.

Oddział w Rzeszowie

Prof. dr hab. Zbigniew BYCHAWSKI — przewodniczący, dr Wiesław ZYLSKI — sekretarz, mgr inż. Jerzy LEDZIŃSKI — skarbnik, prof. dr Jan MADEJSKI — członek.

Oddział w Szczecinie

Doc. dr Czesław MICKIEWICZ — przewodniczący, mgr inż. Mieczysław KOSECKI — zast. przewodniczącego, dr Bożena TĘCZYŃSKA — sekretarz, dr Jerzy HONCZARENKO — skarbnik, doc. dr Leon WAŚKO — członek.

Oddział w Warszawie

Prof. dr hab. Jerzy RUTKOWSKI — przewodniczący, prof. dr Stanisław ŁUKASIEWICZ — zast. przewodniczącego, dr hab. płk. Stanisław DUBIEL — sekretarz, doc. dr hab. Przemysław JASTRZĘBSKI — skarbnik, doc. dr hab. Andrzej OLĘDZKI — zast. sekretarza, doc. dr Andrzej TYLIKOWSKI — zast. skarbnika, doc. dr Jerzy MARYNIAK — zast. członka zarządu.

Oddział we Wrocławiu

Doc. dr hab. Eugeniusz BRZUCHOWSKI — przewodniczący, doc. dr hab. Jacek WOJCIECHOWSKI — zast. przewodniczącego, dr Jerzy BAUER — sekretarz, doc. dr hab. Jeremi SIECZKOWSKI — skarbnik, doc. dr Barbara GABRYSZEWSKA, prof. dr Marek ZAKRZEWSKI i dr Włodzimierz PARZONKA — członkowie.

Oddział w Zielonej Górze

Doc. dr Jerzy KOWALSKI — przewodniczący, doc. dr W. DZIK — zast. przewodniczącego, doc. dr St. LABER — sekretarz, mgr A. GABRYSZEWSKI — skarbnik.

KOŁOKWIA EUROMECH W 1977 R.

Nazwa, termin i miejsce	Przewodniczący
69. Large elastic deformations of discrete systems 13 — 15 kwietnia 1977 Balatonszemes	Professor J. SZABÓ Technical University Budapest Műegyetem rkp. 3. Kmf. 35. 1521 Budapest, Hungary
85. Processes in high temperature gases 21 — 23 marca 1977 Aachen	Professor H.-Gg. WAGNER Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Böttlingerstr. 6/8 3400 Göttingen, and Prof. Oertel, St. Louis and Prof. Adomeit, Aachen
87. Transonic flow in cascades Kwiecień 1977 Liblice Castle	Dr. M. PICHAL Institute of Thermomechanics Czechoslovak Academy of Sciences Puskinovo nam. 9 160 00 Prague 6, Czechoslovakia and Ing. R. DVORAK, CSc., Prague and Dr. D. RUES, Göttingen
88. Two phase flow systems with condensation phenomena kwiecień/maj 1977 Karlsruhe	Professor D. BARSCHDORFF Universität Karlsruhe Kaiserstraße 12 7500 Karlsruhe, and Prof. R. PUZYREWSKI, Gdańsk
89. Vibration control by damping 15 — 30 czerwca 1977 Lyon	Professor M. LALANNE Laboratoire de Mécanique des Structures, Bât. 113 INSA — 20, avenue Einstein 69621 Villeurbanne, Cedex, France

90. Techniques of wall measurements in fluid mechanics
4 — 8 lipca 1977
Nancy
Dr. G. COGNET
Laboratoire d'Energétique et de Mécanique
Theorique et Appliquée
B.P.no. 850
54011 Nancy Cedex, France
91. Dynamic crack propagation in solids
sierpień 1977
Warszawa
Prof. M. SOKOŁOWSKI
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Świętokrzyska 21
00-049 Warszawa, Polska
and Prof. J. CARLSSON, Stockholm
92. Cardiovascular and pulmonary dynamics
5 — 8 września 1977
Compiègne
Prof. M. Y. JAFFRIN
Génie Biologique-Université de Technologie de
Compiègne B. P. 233
60206 Compiègne Cedex, France
and Dr. BARGETON, Paris
93. Non-local theories of material media
6 — 8 września 1977
Jabłonna
Prof. D. ROGULA
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Świętokrzyska 21
00-049 Warszawa, Polska
and Dr K. WILMAŃSKI, Warszawa
94. Wave propagation in inhomogeneous media
and identification problems
Wrzesień 1977
Marseille
P. FILIPPI
C. N. R. S., Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
31 chemin Joseph Aiguier 13274 Marseille
Cedex 2, France
95. The dynamics of cohesive sediment transport
13 — 15 września 1977
Swansea
Dr. K. R. DYER
Institute of Oceanographic Sciences Crossway,
Taunton, Somerset,
England
96. Numerical analysis of dynamic interaction of
structures with fluids
Wrzesień 1977
Swansea
Prof. O. C. ZIENKIEWICZ
Civil Engineering Department University College
of Swansea; Swansea, England
and R. W. LEWIS, Swansea
and D. R. J. OWEN, Swansea
97. The constitutive equations and methods of so-
lution in viscoelasticity
20—23 września 1977
Stará Lesná
Prof. J. BRILLA
Institute of Applied Mathematics and Computing
Techniques Comenius University
Mlynská dolina
81631 Bratislava, Czechoslovakia
98. Mechanics and physics of gas bubbles in fluids
październik/listopad 1977
Eindhoven
Prof. dr. G. VOSSERS
Eindhoven University of Technology
Eindhoven, Netherlands
and Prof. L. van WIJNGAARDEN, Enschede

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- Cz. RYMARZ, Modele fenomenologiczne ośrodka ciekłokrystalicznego
Феноменологические модели жидких кристаллов
Phenomenological models of a liquid crystalline medium
- S. ZANORSKI, Kinematyczna analiza przepływów cieczy nieliniowo lepko-sprężystych
Кинематический анализ течения нелинейно-вязко-упругой жидкости
Kinematical flow analysis of non-linear viscoelastic fluids
- B. MICHAŁSKI, Badania mechanicznych i optycznych własności polimetakrylanu metylu modyfikowanego ftalanem dwubutyłu
Исследование механических и оптических свойств полиметакрилана метила модифицированного фталаном двубутила
Investigation of mechanical and optical properties of polymethyl metacrylate modified with di-butyle phtalate
- Z. OLESIAK, M. WĄGROWSKA, Zagadnienie mikropolarnie sprężystej rury grubościennej
Решение толстостенной трубы в постановке микрополярной теории упругости
The problem of a micropolar elastic thick-walled tube
- L. JARECKI, Termodynamika deformacji krystalitów polimeru zanurzonych w naprężonym ośrodku amorficznym
Термодинамика деформирования кристаллов полимера окруженных напряженной аморфной средой
Thermodynamics of crystallite deformation in a stressed amorphous polymer matrix
- R. BOGACZ, O stateczności wzajemnego oddziaływania oscylatora i ciągu w ruchu względnym
Об устойчивости взаимодействия осцилятора с напряженной струной в относительном движении
On stability of interaction between an oscillator and a tie in relative motion
- S. ŁUKASIEWICZ, A. WAWRZYŃIAK, Analiza pozakrytyczna idealnych powłok obrotowych o małej krzywiznie południka przy obciążeniach złożonych
Послекритический анализ идеальных оболочек вращения при малых кривизнах меридиана и комбинированной нагрузке
Postcritical analysis of ideal shells of revolution
- S. ŁUKASIEWICZ, A. WAWRZYŃIAK, Stateczność powłok obrotowych o małej krzywiznie południka przy obciążeniach złożonych
Устойчивость оболочек вращения при малой кривизне меридиана и комбинированной нагрузке
Stability of shells of revolution with a slightly curved generator under complex load
- J. J. TELEGA, O operatorowym podejściu do formułowania zasad wariacyjnych dla ośrodków plastycznych
Об операторном подходе к формулированию вариационных принципов для пластических сред
An operator approach to the formulation of variational principles for plastic solids
- J. PIETRUCHA, Z. SZEWCZYK, Metoda sterowania modalnego i jej zastosowanie do ustalenia lotu śmigłowca
Метод модального управления и его применение к стабилизации полета вертолета
Modal control method and its application to the stabilization of helicopter flight

- W. MIERZEJEWSKI, Zmodyfikowana metoda sił Nowackiego w dynamice płyt z uwzględnieniem odkształceń postaciowych i bezwładności obrotowej
Модифицированный метод сил Новацкого в динамике пластин с учетом инерции вращения и перерезывающих сил
The modified Nowacki method in dynamics of plates, the influence of shearing forces and the rotary inertia being taken into account
- H. WALUKIEWICZ, Twierdzenie wzajemne i funkcja Greena dla układów dyskretnych z losowym wymuszeniem
Теорема о взаимности и функции Грина для дискретных систем со случайными воздействиями
Reciprocal theorem and Green's function for discrete systems with random excitations

BIULETYN INFORMACYJNY

Warunki prenumeraty

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka.Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

— do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i na cały rok następny,

— do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)