

711 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 14 · ZESZYT 2



WARSZAWA 1976

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

Władysław BOGUSZ — Wspomnienie pośmiertne	195
J. WILK, Skończone odkształcenia wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok przy uwzględnieniu kinematycznego wzmocnienia materiału Конечные деформации гибких осесимметричных оболочек при учете кинематического упрочнения материала Finite deformations of slender axi-symmetric shells made of materials obeying the kinematic strain-hardening law	199
M. JANOWSKI, H. КОРЕСКИ, Elektryczny układ analogowy dla geometrycznie nieliniowych zagadnień płyt o dowolnej geometrii Электрическая аналоговая модель для геометрических нелинейных пластинок произвольного контура The electric analog system for geometrically nonlinear plates of arbitrary contour	215
S. BIELAK, Całka równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego powłoki walcowe Интеграл дифференциального уравнения в частных производных для цилиндрических оболочек The integral of a partial differential equations of cylindrical shells	229
B. KOWALCZYK, T. RATAJCZAK, Iteracyjna metoda wyznaczania częstości drgań własnych i amplitud układu o skończonej liczbie stopni swobody Итерационный метод вычисления собственных колебаний и амплитуд системы с конечным числом степеней свободы An iterative method to determine natural frequencies and modes of a multidegree-of-freedom system	237
F. JARZYŃSKI, NGUYEN VAN TINH, Zastosowanie metody macierzy przeniesienia w obliczeniu drgań własnych układu belkowo-linowego Применение метода матриц переноса для расчета свободных колебаний в балочно-тросовой системе Application of the transfer matrix method to the calculation of free vibration in a beam-cable system	253
A. GAJEWSKI, Optymalne kształtowanie wirującego pręta z uwzględnieniem nieliniowości fizycznej materiału Оптимальное формирование вращающегося стержня с учетом физической нелинейности материала Optimal structural design of the rotating rod with physical nonlinearity of material	261
Z. ONISZCZUK, Swobodne drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych inercyjnym elementem sprężystym Свободные поперечные колебания систем двух балок связанных инерционным упругим элементом Free transverse vibrations of an elastically connected double-beam system	273

cd. na s. III okładki

711720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

TOM 14 · ZESZYT 2

WARSZAWA 1976

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY, WŁADYSŁAW **BOGUSZ**, IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI  
LECH DIETRICH — REDAKTOR  
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR  
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ  
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR  
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 690 (580+110) egz. Arkuszy wydawn. 10,5. Arkuszy drukarskich 8,75. Papier druk. sat. imp. III kl. 80 g. 70×100. Oddano do składania 3.II.1976 r. Druk ukończono w czerwcu 1976 r. Zam. 181/76. J-101. Cena zł 30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## WŁADYSŁAW BOGUSZ

### WSPOMNIENIE POŚMIERTNE

Dnia 4 listopada 1975 r. zmarł nagle w Krakowie prof. dr hab. inż. WŁADYSŁAW BOGUSZ, wybitny uczony, profesor zwyczajny Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie.

Prof. Władysław BOGUSZ urodził się dnia 11 kwietnia 1916 r. w Krakowie. Po ukończeniu gimnazjum im. B. Nowodworskiego w Krakowie studiuje na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego i w 1938 r. uzyskuje dyplom magistra filozofii w zakresie matematyki.

Zaraz po ukończeniu studiów powołany został do Szkoły Podchorążych w Zambrowie. Następnie jako podchorąży brał udział w kampanii wrześniowej. Ucieka z niewoli niemieckiej. Poprzez Słowację, Węgry, Rumunię, Turcję przedostaje się na Bliski Wschód. Wraz z Brygadą Karpacką, a następnie Dywizją Karpacką przechodzi cały szlak bojowy — Libia, Egipt, Włochy. Walczy pod Tobrukiem, walczy pod Monte Cassino. Wojnę kończy w stopniu porucznika. Za swoje zasługi bojowe odznaczony został czterokrotnie Krzyżem Walecznych, Srebrnym Krzyżem Zasługi z Mieczami, Krzyżem Pamiątkowym Monte Cassino, odznaczeniami brytyjskimi The Military Medal, Gwiazdą za Wojnę, Gwiazdą Afryki, Gwiazdą Italii, Brytyjskim Medalem Wojny 1939—45.



Po powrocie do kraju rozpoczyna pracę w Zjednoczeniu Przemysłu Odlewniczego w Krakowie, a następnie pracuje jako nauczyciel matematyki i fizyki w VIII Gimnazjum i Liceum w Krakowie. Równocześnie studiuje na drugim fakultecie — Wydziale Elektromechanicznym Akademii Górniczo-Hutniczej, uzyskując w 1952 r. dyplom inżyniera mechanika hutniczego. Od stycznia 1950 r. pracuje aż do śmierci w Akademii Górniczo-Hutniczej, przechodząc wszystkie stopnie od asystenta do profesora zwyczajnego.

W 1955 roku Rada Wydziału Mechanizacji Górnictwa i Hutnictwa AGH nadała Mu stopień naukowy kandydata nauk technicznych na podstawie rozprawy pt. *Wyznaczanie sił wewnętrznych powodujących tłumienie drgań metodą drgań swobodnych zanikających dla materiałów konstrukcyjnych*. Natomiast stopień naukowy docenta (doktora habilitowanego) uzyskał w 1960 r. uchwałą Rady Wydziału Górnictwa AGH na podstawie pracy habilitacyjnej pt. *Wyznaczanie obszarów stateczności nieliniowych układów dynamicznych*.

W latach 1960—1969 pełnił funkcję kierownika Katedry Mechaniki Technicznej, a następnie po reorganizacji uczelni — kierownika Zakładu Teorii Maszyn i Automatycznej Regulacji. W latach 1960—62 jest prodziekanem Wydziału Maszyn Górniczych i Hutniczych, dyrektorem Instytutu Podstaw Budowy Maszyn, dyrektorem naukowym nowo utworzonego Instytutu Mechaniki i Wibroakustyki. Przez trzyletni okres (1972—75) był prorektorem Akademii Górniczo-Hutniczej.

Na podkreślenie zasługuje Jego wszechstronna działalność. Zarówno w pracy naukowej, jak i dydaktycznej, organizacyjnej oraz w pracach dla przemysłu uzyskiwał doskonałe wyniki. Można śmiało powiedzieć, że stworzył w nauce «Szkołę Bogusza». Wychował i zgromadził wokół siebie w katedrze zespół młodych naukowców, których zainteresował uprawianą przez siebie dziedziną mechaniki stosowanej. Wielu z nich jest profesorami i docentami. Był promotorem 15 prac doktorskich.

Sz szczególnie wybitne osiągnięcia posiada w działalności naukowo-badawczej. Jest autorem ponad 100 publikacji, w tym wielu w naukowych czasopismach zagranicznych. Publikacje dotyczą głównie zagadnień drgań układów liniowych i nieliniowych, dynamiki maszyn, a także wibroakustyki. Zajmował się zagadnieniami jakościowego badania przebiegów niestabilnych w układach nieliniowych, stateczności układów mechanicznych i automatyki, syntezy optymalnej oraz zastosowań drgań w różnych dziedzinach techniki. Posługując się własną oryginalną metodą topologiczną do badania jakościowego układów dyskretnych nieliniowych rozwiązał szereg zagadnień z drgań prętów, maszyn wirnikowych i układów o wielu stopniach swobody.

Do Jego prac podstawowych należą publikacje z badania stateczności w sensie Lapunowa i stateczności technicznej. Na podkreślenie zasługuje tutaj wykazanie, że powszechnie stosowane kryterium stateczności w sensie Lapunowa nie jest wystarczające do rozwiązywania wielu zagadnień technicznych. Problemy stateczności technicznej rozpracowane zostały przez prof. WŁ. BOGUSZA zarówno dla układów zdeterminowanych, jak i stochastycznych.

Wyniki prac naukowo-badawczych prof. BOGUSZA wykorzystywane były w przemyśle. W 1964 r. prof. BOGUSZ był współautorem realizacji projektu przesunięcia wielkiego pieca w Hucie «Pokój». Inne Jego prace wdrożone były w wyniku badań prowadzonych pod Jego kierownictwem dla gospodarki narodowej.

Przez okres 20 lat był konsultantem naukowym Hutniczego Przedsiębiorstwa Remontowego.

Prof. dr Władysław BOGUSZ był znanym pracownikiem naukowym na całym świecie. Brał czynny udział w dużej liczbie międzynarodowych konferencji naukowych organizowanych w Związku Radzieckim, Czechosłowacji, Rumunii, Jugosławii, Niemieckiej Republice Demokratycznej, Szwajcarii. Współpracując ściśle z Czechosłowacką Akademią Nauk i Słowacką Akademią Nauk, był współorganizatorem międzynarodowych konferencji dynamiki maszyn, które odbywały się na przemian w Czechosłowacji i w Polsce. Również był współorganizatorem wielu konferencji Drgań Nieliniowych organizowanych przez Akademię Nauk Polski, Ukrainy, NRD i Czechosłowacji.

Prof. Wł. BOGUSZ współpracował ściśle na polu naukowym z wieloma placówkami naukowymi za granicą. M.in. wymienić tutaj należy Instytut Mechaniki Maszyn Słowackiej Akademii Nauk, Instytut Matematyki i Mechaniki Stosowanej w Berlinie, Instytut Me-

chaniki Akademii Nauk Ukrainy, EMPA w Szwajcarii, Instytut Wibracji i Dźwięku w Wielkiej Brytanii.

W pracy dydaktycznej uzyskiwał bardzo dobre wyniki prowadząc wykłady z mechaniki ogólnej, teorii drgań oraz teorii maszyn i automatycznej regulacji. Był niezmiernie lubiany i szanowany przez studentów. Z ich życiem był nieprzerwanie związany, pełniąc funkcje opiekuna grupy studenckiej, opiekuna roku, opiekuna koła naukowego, przewodniczącego senackiej komisji ds. młodzieży.

Wszeczhronna działalność prof. Władysława BOGUSZA nie ograniczała się tylko do prac naukowych i dydaktycznych w AGH. Prócz pełnienia wielu funkcji dydaktycznych i naukowych w uczelni przez wiele lat był członkiem Zarządu Krakowskiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, przewodniczącym Zarządu Krakowskiego, członkiem Zarządu Głównego PTMTiS. Był przewodniczącym Sekcji Układów Dyskretnych Komitetu Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN oraz przewodniczącym Zespołu Dynamiki Maszyn Komitetu Podstaw Konstrukcji i Technologii Maszyn PAN. Był również członkiem wielu Rad Naukowych.

Aktywnie współpracował z redakcjami wielu czasopism naukowych w kraju i za granicą. Był stałym recenzentem prac naukowych dla «Zentralblatt für Mathematik». Był członkiem Komitetów Redakcyjnych — Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Zagadnień Drgań Nieliniowych oraz Zeszytów Naukowych AGH.

Prof. Władysław BOGUSZ był współorganizatorem Instytutu Mechaniki i Wibroakustyki AGH oraz współtwórcą laboratorium wibroakustycznego.

Przez wiele lat prof. Władysław BOGUSZ był członkiem Rady Zakładowej Związku Nauczycielstwa Polskiego, a także przez okres 5-letni był wiceprzewodniczącym Rady Zakładowej ZNP przy AGH. Był także aktywnym działaczem Koła ZBoWiD przy AGH oraz członkiem Zarządu Wojewódzkiego TPP-R w Krakowie.

Za swoją działalność naukową, dydaktyczną, organizacyjną i społeczną odznaczony został wysokimi odznaczeniami państwowymi. Posiadał Krzyż Oficerski Orderu Odrodzenia Polski, Krzyż Kawalerski Orderu Odrodzenia Polski, Odznakę Tysiąclecia, Medal XXX-lecia PRL, Medal Komisji Edukacji Narodowej, Złotą Odznakę m. Krakowa, Złotą Odznakę Zasłużony dla woj. katowickiego. Prezydium Słowackiej Akademii Nauk nadało Mu Medal im. A. Stodoli.

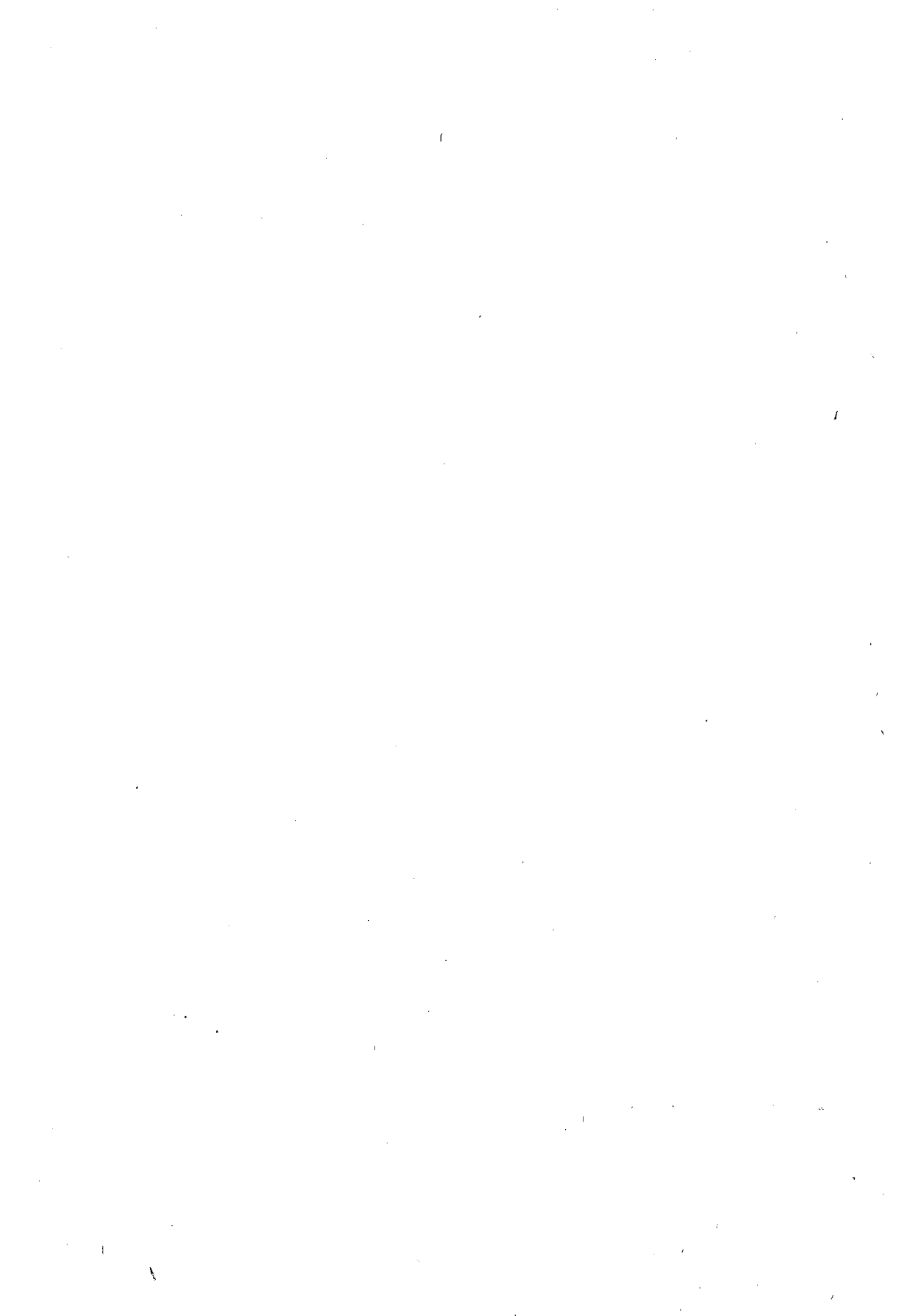
Wielokrotnie prof. Władysław BOGUSZ nagrodzony był nagrodami ministrów. Był laureatem zespołowej nagrody I stopnia ministra budownictwa i przemysłu materiałów budowlanych, laureatem nagrody indywidualnej II i I stopnia ministra nauki, szkolnictwa wyższego i techniki.

Odszedł od nas wybitny, światowej sławy uczyony i specjalista. Odszedł od nas Człowiek pełen zapału i inicjatywy, Człowiek szlachetnego serca, wielki nasz nauczyciel i przyjaciel.

Straciliśmy nauczyciela, przyjaciela, opiekuna i wychowawcę kilku pokoleń kadry naukowej, inżynierów i młodzieży studenckiej.

W naszej pamięci pozostanie na zawsze Jego szlachetność, prostolinijność oraz życzliwość dla wszystkich.

*Zbigniew Engel*





SKOŃCZONE ODKSZTAŁCENIA WIOTKICH OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK  
PRZY UWZGLĘDNIENIU KINEMATYCZNEGO WZMOCNIENIA MATERIAŁU

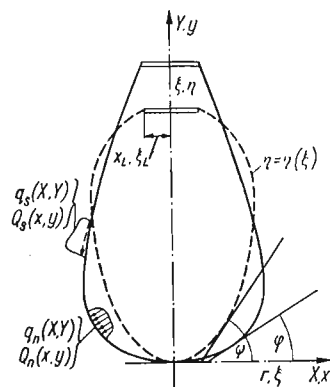
JÓZEF WILK (KRAKÓW)

1. Założenia wstępne

W pracy [1] przedstawiono rozwiązanie układu równań różniczkowych, opisujących stan równowagi wiotkiej obrotowo-symetrycznej powłoki (rys. 1), sformułowanego w oparciu o związki fizyczne

$$(1.1) \quad d\varepsilon_1 = \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] d\Phi, \quad d\varepsilon_2 = \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] d\Phi, \\ d\varepsilon_3 = \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] d\Phi,$$

stanowiącej ekstrapolację równań de Saint-Venanta płynięcia plastycznego na zakres skończonych odkształceń. W równaniach tych  $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$  oznaczają przyrosty logarytmicznych deformacji spowodowane przyrostem obciążenia,  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  są rzeczywistymi naprężeniami



Rys. 1. Powłoka przed odkształceniem — — — i po odkształceniu —

głównymi, zaś  $\Phi$  jest znaną funkcją odkształceń zależną od przyjętego warunku plastyczności. Przyjęto, że materiał jest plastyczny, nieściśliwy i izotropowy, obciążenie dowolne osiowo-symetryczne, zaś powłoka może znajdować się jedynie w stanie błonowym i przenosić tylko naprężenia rozciągające. Ze związków geometrycznych oraz warunków równowagi otrzymano układ

$$(1.2) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\xi \cos \varphi}{u x \cos \varphi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi \sin \varphi}{u x \cos \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\xi}{p_1 u x \cos \varphi} \left( \frac{Qn}{fu} - p_2 \frac{\sin \varphi}{x} \right), \\ \frac{dp_1}{d\xi} = -\frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi \cos \varphi}{u x^2 \cos \varphi} \left( p_2 - p_1 + \frac{x Qs}{f u \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi},$$

zaś związki fizyczne (1.1) doprowadzono do postaci

$$(1.3) \quad u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial \tau} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0.$$

W równaniach tych niewiadomymi są współrzędne Eulera związane z nieruchomymi punktami w przestrzeni  $x(\xi, \tau)$  i  $y(\xi, \tau)$ , rzeczywiste naprężenia główne  $p_1(\xi, \tau)$  i  $p_2(\xi, \tau)$ , kąt  $\varphi(\xi, \tau)$  zawarty pomiędzy styczną do południka (po odkształceniu) a osią  $x$  (rys. 1) oraz grubość powłoki  $u(\xi, \tau)$ . Zmiennymi niezależnymi są osiowa współrzędna  $\xi$  (typu Lagrange'a) sztywno związana z cząstkami powłoki oraz  $\tau$  — parametr wzrostu obciążenia. Wszystkie funkcje sprowadzono do wielkości bezwymiarowych, jak na przykład

$$(1.4) \quad p_j = \frac{\sigma_j}{M}, \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie  $M$  jest założoną stałą o wymiarze naprężenia.

Szóste równanie, które należy rozpatrywać łącznie z układem (1.2) i (1.3) ma charakter algebraiczny, a jego postać zależy od założonej charakterystyki  $F(p_1, p_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$  materiału powłoki. W pracy [1] przyjęto ją jako zależność potęgową ( $\mu$  — stała materiałowa)

$$(1.5) \quad p_i = \varepsilon_i^\mu$$

między intensywnościami rzeczywistych naprężeń i odkształceń liczonych w mierze logarytmicznej Hencky'ego. W rozpatrywanym płaskim stanie naprężenia ( $p_3 = 0$ )

$$(1.6) \quad p_i = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3},$$

przy czym indeks 1 oznacza kierunek południkowy, 2 — równoleżnikowy, 3 — normalny do powłoki. Odkształcenia główne wyrażają się poprzez pozostałe funkcje następująco:

$$(1.7) \quad \varepsilon_1 = \ln \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln u,$$

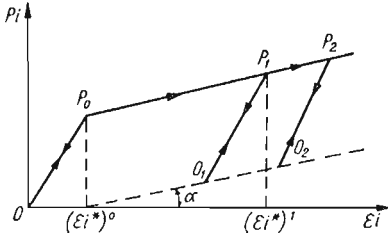
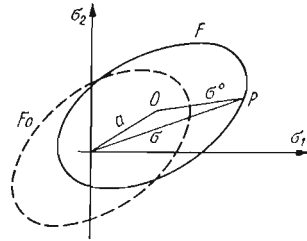
gdzie  $\psi = \psi(\xi)$  oznacza kąt zawarty pomiędzy styczną do południka (przed odkształceniem) a osią  $x$ . Pozostałe wielkości, które traktujemy jako znane, oznaczają:  $Q_n(x, y, \tau)$  i  $Q_s(x, y, \tau)$  — obciążenia liczone na jednostkę powierzchni odkształconej powłoki odpowiednio w kierunku normalnym i południkowym,  $f = f(\xi)$  — funkcję opisującą zmienną grubość ścianki powłoki w stanie nieodkształconym. Dla równań (1.2) i (1.3) podane zostały warunki początkowe

$$(1.8) \quad \begin{aligned} x(\xi, 0) &= x_*(\xi), \quad y(\xi, 0) = y_*(\xi), \quad u(\xi, 0) = u_*(\xi), \\ \varphi(\xi, 0) &= \varphi_*(\xi), \quad p_1(\xi, 0) = p_{1*}(\xi), \quad p_2(\xi, 0) = p_{2*}(\xi), \end{aligned}$$

zdeteminowane przez stan wyjściowy (oznaczony gwiazdką) w powłoce, w którym intensywność naprężeń osiąga co najmniej granicę plastyczności. Sformułowano również pewne typy warunków brzegowych, dla których uzyskano konkretne rozwiązania liczbowe.

## 2. Nowy układ równań różniczkowych powłoki

**2.1. Sformułowanie problemu.** Stosowanie związków fizycznych (1.1) i w ich konsekwencji wyprowadzonego układu równań (1.2) i (1.3) podlega znacznym ograniczeniom. Brak zakresu sprężystego utrudnia realizację odciażania, uniemożliwia uwzględnianie efektu Bauschingera, jak również wyznaczanie ewentualnych procesów biernych mogących zachodzić w powłoce podczas jej obciążania. W niniejszej pracy proponuje się, aby w miejsce związków (1.1) przyjąć inne, nowe równania, które będą uwzględniać sprężysto-plastyczną charakterystykę materiału (por. rys. 2), przy czym przewiduje się, że zakres liniowego

Rys. 2. Charakterystyka fizyczna.  $p_i = f(\varepsilon_i)$ 

Rys. 3. Powierzchnia płynięcia plastycznego

wzmocnienia można również przedstawiać w postaci aproksymacji wieloodcinkowej bliższej rzeczywistym własnościom fizycznym materiału. Tak przyjęta charakterystyka pozwala obecnie traktować materiał, tak jak przyjmuje się to dla modelu z ogólnym wzmocnieniem liniowym tj. wywołanym zarówno przesuwaniem się, jak i rozszerzaniem się powierzchni plastyczności (rys. 3) materiału pierwotnie izotropowego. Zakładamy tylko, dla uproszczenia, że ulegająca przesunięciu i rozszerzeniu powierzchnia zachowuje swój pierwotny kształt. Powyższe założenia spełniają proponowane nowe związki fizyczne:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= 1/E \left[ d\sigma_1 - \frac{1}{2} (d\sigma_2 + d\sigma_3) \right] + \left[ \sigma_1^0 - \frac{1}{2} (\sigma_2^0 + \sigma_3^0) \right] d\Phi, \\ d\varepsilon_2 &= 1/E \left[ d\sigma_2 - \frac{1}{2} (d\sigma_1 + d\sigma_3) \right] + \left[ \sigma_2^0 - \frac{1}{2} (\sigma_1^0 + \sigma_3^0) \right] d\Phi, \\ d\varepsilon_3 &= 1/E \left[ d\sigma_3 - \frac{1}{2} (d\sigma_1 + d\sigma_2) \right] + \left[ \sigma_3^0 - \frac{1}{2} (\sigma_1^0 + \sigma_2^0) \right] d\Phi, \end{aligned}$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga, zaś bezwymiarowe naprężenia, które odmierzamy względem środka krzywej  $F$  zapisujemy w postaci

$$(2.2) \quad p_j^0 = p_j - a_j, \quad j = 1, 2, 3$$

gdzie  $a_j$  oznaczają bezwymiarowe współrzędne środka tej krzywej.

**2.2. Wyprowadzenie układu równań.** Dla płaskiego stanu naprężeń ( $\sigma_3 = 0$ ) oraz przy przyjęciu warunku nieściśliwości

$$(2.3) \quad d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0,$$

równania (2.1) możemy obecnie zapisać w postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} dp_1 &= -\frac{2}{3} m(d\varepsilon_2 + 2d\varepsilon_3) - p_1^0 md\Phi, \\ dp_2 &= \frac{2}{3} m(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3) - p_2^0 md\Phi, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.5) \quad m = \frac{E}{M}.$$

Równanie krzywej  $F$  jest równoznaczne z warunkiem plastyczności dla naprężeń głównych i przyjmuje postać

$$(2.6) \quad F = p_1^{02} - p_2^{02} - p_1^0 p_2^0 - 3k^2 = 0,$$

gdzie

$$(2.7) \quad k = \frac{P_i}{\sqrt{3}}.$$

Dla określenia ruchu środka powierzchni plastyczności korzystamy z niezmienniczości  $F$  przy przechodzeniu z przestrzeni trzech naprężeń głównych do podprzestrzeni płaskiego stanu naprężenia. W szczególności zastosujemy metodę SHIELDA i ZIEGLERA [2] opartą na niezmienniczości warunku plastyczności względem nałożonego ciśnienia hydrostatycznego, co przy pomocy zapisu sumacyjnego można zapisać wzorem

$$(2.8) \quad F(\sigma_{ij} + \beta \delta_{ij}) = F(\sigma_{ij}).$$

W naszym konkretnym przypadku, gdy  $\sigma_3 = 0$  mamy

$$(2.9) \quad \begin{aligned} F^{(3)}(\sigma_1 - \alpha_1, \sigma_2 - \alpha_2, -\alpha_3) &= F^{(3)}(\sigma_1 - \alpha_1 + \alpha_3, \sigma_2 - \alpha_2 + \alpha_3, 0) = \\ &= F^{(2)}(\sigma_1 - \alpha'_1, \sigma_2 - \alpha'_2) = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.10) \quad \alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_3 \quad \text{i} \quad \alpha'_2 = \alpha_2 - \alpha_3.$$

W wyniku przekształceń (2.9) pozostały nam obecnie tylko dwie składowe

$$(2.11) \quad a_j = \frac{\alpha'_j}{\sigma_p}, \quad j = 1, 2,$$

które dalej przyjmują postać

$$(2.12) \quad a_j = c(\varepsilon_j^p - \varepsilon_3^p), \quad c = 2/3 c_0.$$

Jest to pewien szczególny przypadek ogólnego związku sformułowanego przez NOWOŻYŁOWA [3]. Symbol  $\varepsilon_j^p$  dotyczy odkształceń plastycznych, zaś parametr wzmocnienia  $c_0 = \tan \alpha$  (por. rys. 2) możemy określić z próby jednoosiowego rozciągania.

Zgodnie z założonym typem wzmocnienia bazujemy na doświadczalnie ustalonej charakterystyce materiału

$$(2.13) \quad k = k(\bar{\varepsilon}^p),$$

gdzie

$$(2.14) \quad \bar{\varepsilon}_i^p = \int d\varepsilon_i^p, \quad d\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d\varepsilon_1^{p^2} + d\varepsilon_1^p d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_2^{p^2}},$$

(tzw. parametr Odqvista) jest nie malejącą funkcją uplastycznienia materiału, która w przypadku prostego obciążenia odpowiada intensywności odkształceń plastycznych  $\varepsilon_i^p$ . W dalszych rozważaniach, z uwagi na konieczność zastosowania pewnych uproszczeń obliczeniowych, będziemy przyjmować w miejsce (2.13)

$$(2.13a) \quad k = k(\varepsilon_i^p).$$

Celem wyznaczenia funkcji plastyczności  $d\Phi$  wykorzystujemy warunek zgodności Pragera

$$(2.15) \quad dF = d(p_1^0 + p_2^0 - p_1^0 p_2^0 - 3k^2) = 0,$$

z którego wynika, że koniec wektora  $\sigma$  (por. rys. 3) powinien zawsze znajdować się na powierzchni plastyczności.

Dla przyjętej charakterystyki materiału  $k = k(\varepsilon_i^p)$  możemy na podstawie (2.1) i (2.14) otrzymać zależność

$$(2.16) \quad d\varepsilon_i^p = \sqrt{3} k m d\Phi,$$

po czym wykorzystując związki (2.3), (2.5), (2.15) i (2.16) dochodzimy po szeregu przekształceń do związku

$$(2.17) \quad d\Phi = \frac{(p_2^0 - p_1^0) d\varepsilon_2 - p_1^0 d\varepsilon_3}{mN},$$

gdzie

$$(2.18) \quad N = 3k^2 \left( 1 + 3/2c + \sqrt{3} \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_i^p} \right).$$

Obecnie, na podstawie (2.3) i (2.18) możemy równania fizyczne zapisać następująco:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} &= \left[ -\frac{2}{3} - \frac{p_1^0}{N} (p_2^0 - p_1^0) \right] \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \left[ -\frac{4}{3} + \frac{p_1^0}{N} \right] \frac{m}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= \left[ \frac{2}{3} - \frac{p_2^0}{N} (p_2^0 - p_1^0) \right] \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \left[ -\frac{2}{3} + \frac{p_1^0 p_2^0}{N} \right] \frac{m}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc nowe równania fizyczne (2.19), przy czym związki geometryczne (1.2) i warunki równowagi (1.3) pozostają nadal słuszne. W szczególnym przypadku, biorąc pod uwagę tylko zakres sprężysty, równania (2.19) możemy sprowadzić do prostszej postaci

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} &= \frac{2}{3} \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{4}{3} \frac{m}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= \frac{2}{3} \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{2}{3} \frac{m}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Ostatecznie, pełny układ równań różniczkowych, opisujący stan naprężeń i skończonych odkształceń wiotkiej obrotowo-symetrycznej powłoki poddanej plastycznemu płynięciu —

przy przyjęciu najprostszej hipotezy kinematyczno-izotropowego wzmocnienia, przybierze następującą postać:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, & \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{\xi}{p_1 ux \cos \psi} \left( \frac{Qn}{fu} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right), \\ \frac{\partial p_1}{d\xi} &= -\frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi}{ux^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left( p_2 - p_1 + \frac{xQs}{fu \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{u}{bm} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} + \frac{au}{bx} \frac{\partial x}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= \frac{em}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{gm}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.22) \quad \begin{aligned} a &= \frac{rp_1^0}{N} (p_2^0 - p_1^0) + \frac{2}{3}, & b &= \frac{rp_1^{02}}{N} - \frac{4}{3}, \\ c &= \frac{2}{3} - \frac{rp_2^{02}}{N} (p_2^0 - p_1^0), & g &= \frac{rp_1^0 p_2^0}{N} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Wprowadzenie wielkości  $r$  we wzorach (2.22) pozwala na zwartą formę zapisu układu (2.21). Przy rozwiązywaniu powłoki możemy, w poszczególnych jej punktach, rozróżnić obszary uplastycznione ( $r = 1$ ) oraz sprężyste i poddane procesom plastycznym biernym ( $r = 0$ ). Natomiast proces bierny odróżnimy od obszaru sprężystego poprzez analizę obliczanej wielkości  $p_i$  (por. rys. 2). W tym celu drugie równanie spośród układu (2.20) zastąpimy związkiem algebraicznym o postaci zależnej od przyjętej charakterystyki fizycznej  $p_i = f(\varepsilon_i)$ , przy czym

$$(2.23) \quad p_i = \begin{cases} E\varepsilon_i & \text{— obszar sprężysty } [\varepsilon_i < (\varepsilon_i^*)^0], \\ p_i^* - E(\varepsilon_i^* - \varepsilon_i) & \text{— proces bierny } [\varepsilon_i > (\varepsilon_i^*)^0]. \end{cases}$$

Tak więc, oparcie się na ogólniejszych związkach (2.1) wpłynęło wprawdzie na bardziej skomplikowaną postać równań fizycznych w układzie (2.21), nie ma to jednak zasadniczego znaczenia wobec faktu zastosowania do obliczeń elektronicznej maszyny cyfrowej.

**2.3. Zagadnienie odciążania oraz opis fizycznej charakterystyki materiału powłoki.** W dalszym ciągu będziemy stosować, dla poszczególnych punktów powłoki, określenia — proces czynny i bierny, natomiast w odniesieniu do obciążenia  $Q$  — terminów: obciążanie i odciążanie [4]. Procesy bierne mogą występować w poszczególnych punktach powłoki (lokalne odciążanie) jako wynik redystrybucji sił wewnętrznych w procesie obciążania powłoki. Typ procesu będziemy określać na podstawie przyrostu intensywności naprężeń (por. rys. 2)

$$(2.24) \quad \Delta p_i = p_i^* - p_i,$$

gdzie  $p_i^*$  oznacza wartość intensywności naprężeń (na powierzchni plastyczności) odpowiadającą poprzedniej wartości obciążenia  $Q$ , zaś  $p_i$  jest wartością dla aktualnego obciążenia. Tak więc, w poszczególnych punktach powłoki rozwiązywanej na podstawie układu (2.21) mogą występować równocześnie obszary sprężyste, uplastycznione, lokalnie odciążane

i wtórnice uplastycznione. Ze względu na przyjętą charakterystykę fizyczną materiału układ równań (2.21) pozwala nam wyróżnić trzy następujące przypadki:

a) *Wzmocnienie izotropowe*. Występuje ono, jeżeli we wzorach (2.1) i (2.18) położymy  $c_0 = 0$ , a charakterystykę materiału  $k$  przyjmijemy wprost z próby jednoosiowego rozciągania. Dla założonego liniowego wzmocnienia mamy

$$(2.25) \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}} ((p_1)_0^* + A \varepsilon_1^p)$$

i wtedy przy pomocy układu (2.21) możemy rozwiązywać w zasadzie te same problemy, co przy pomocy układu (1.2) i (1.3), z tym zastrzeżeniem, że wzmocnienie potęgowe jest obecnie aproksymowane przez liniowe lub wielokrotnie odcinkowo-liniowe.

b) *Idealny efekt Bauschingera*. W tym przypadku translacja powierzchni będzie opisana wzorem (2.11), zaś parametr wzmocnienia  $c_0 = \tan \alpha$  określimy z próby jednoosiowego rozciągania. Obecnie nie wystąpi rozszerzanie się powierzchni plastyczności  $F$ , a więc

$$(2.26) \quad \frac{dk}{d\varepsilon_1^p} = 0,$$

co w praktyce oznacza, że  $A = 0$ .

c) *Wzmocnienie kinematyczne materiału pierwotnie izotropowego*. Ten najbardziej ogólny przypadek możemy uzyskać zakładając równoczesne rozszerzanie się i translację powierzchni  $F$ . Wówczas przyjmujemy zarówno  $c = \text{const}$ , jak i  $A = \text{const}$ .

### 3. Zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej

3.1. *Algorytm numerycznego rozwiązania*. Przed przystąpieniem do numerycznego całkowania układu równań (2.21) określimy jego typ oraz ustalimy rozkład charakterystyk. Kierunki charakterystyczne znajdziemy z warunku zerowania się wyznacznika

$$(3.1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 & 0 & \frac{au}{bx} \lambda_\tau & \frac{em}{x} \lambda_\tau \\ 0 & \lambda_\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_1}{u} \lambda_\xi & 0 & \lambda_\tau & \frac{gm}{u} \lambda_\tau \\ 0 & 0 & \lambda_\xi & 0 & \frac{u}{bm} \lambda_\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\tau \end{vmatrix} = \lambda_\xi^4 \lambda_\tau^2 c' = 0$$

układu równań (2.21). Jest to układ hiperboliczny o charakterystykach  $\xi = \text{const}$  (dwukrotna) i  $\tau = \text{const}$  (czterokrotna). Warunki zgodności na liniach  $\xi = \text{const}$  są następujące

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{u}{bm} \frac{dp_1}{d\tau} + \frac{au}{bx} \frac{dx}{d\tau}, \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{em}{x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{gm}{u} \frac{du}{d\tau}, \end{aligned}$$

zaś na liniach  $\tau = \text{const}$  przyjmują postać (1.2). Tak więc, układ równań cząstkowych (2.21) rozpadł się na dwie grupy równań różniczkowych zwyczajnych, które muszą być całkowane wzdłuż odpowiednich charakterystyk. Równania te będziemy rozwiązywać numerycznie. Z postaci warunków zgodności wynika, że funkcje  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $p_1$  możemy wyznaczyć z równań (1.2), zaś funkcje  $u$  i  $p_2$  z równań (3.2). Warunki brzegowe możemy postawić w identyczny sposób, jak w pracy [1], natomiast dość zasadnicza różnica wystąpi w sposobie określania warunków początkowych. Wartość początkowego obciążenia musi być tak dobrana, aby wszystkie punkty powłoki znalazły się w obszarze sprężystym. Mogą one też przyjmować wartości zerowe. Uplastycznienie poszczególnych punktów powłoki powinno nastąpić dopiero wtedy, gdy intensywność naprężeń osiągnie w nich wartość  $(p_1^*)_0$  (por. rys. 2), a więc gdy przybierze wielkość odpowiadającą powierzchni elipsy  $F$ .

Całkowanie równań cząstkowych (2.21) sprowadziliśmy do rozwiązywania dwóch układów zwyczajnych równań różniczkowych wzdłuż kolejnych linii  $\tau = \tau_j = \text{const}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  w całym obszarze  $D(\xi, \tau)$ . Obszar ten, z uwagi na zmienną geometryczną, dzielimy na  $2m$  części za pomocą linii  $\xi = \xi_i = \text{const}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 2m$  przeprowadzonych w jednakowych odstępach  $1/2 \Delta \xi = 1/2(\xi_i - \xi_{i-2})$ . Niech  $w(\xi_i, \tau_j)$  przedstawia dowolną z rozpatrywanych funkcji; aby uprościć zapis oznaczamy krótko  $w(\xi_i, \tau_j) = w_{ij}$ . W niektórych przypadkach dla lepszego rozróżnienia wskaźników rozdzielać je będziemy przecinkiem. Obecnie przedstawimy przebieg numerycznego rozwiązywania układu (2.21) opartego o metodę RUNGEGO-KUTTY (por. [1]). Całkowanie zwyczajnych równań różniczkowych przeprowadzimy przy wprowadzeniu następujących oznaczeń upraszczających zapis:

$$(3.3) \quad B = \frac{\xi \cos \varphi}{u x \cos \varphi} = \frac{dx}{d\xi}, \quad C = \frac{B}{p_1 \cos \varphi} \left( \frac{Qn}{fu} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right) = \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad E = B \operatorname{tg} \varphi,$$

$$D = \frac{B}{u} \left( p_2 - p_1 + \frac{xQ}{fu \cos \varphi} \right) - p_1 \left( \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{u} \frac{du}{d\xi} \right),$$

$$(3.4) \quad L_{i-2,j} = \frac{2}{\Delta \xi} \sum_{s=0}^K \beta_{ks} u_{i-s-1,j} \simeq \left( \frac{du}{d\xi} \right)_{i-2,j},$$

$$(3.5) \quad M_\nu(w)_{ij} = \gamma K_\nu(w)_{ij},$$

gdzie

$$(3.6) \quad K_\nu(w) = \frac{dw}{d\xi} \Delta \xi, \quad \nu = 1, 2, 3, 4.$$

$$H_{i-2,j}(w) = 1/6 \sum_{r=1}^4 \omega K_\nu(w)_{i-a,j}.$$

Wielkości  $\gamma = \gamma(\nu)$  i  $\omega = \omega(\nu)$  będące współczynnikami we wzorach Rungego-Kutta przybierają wartości dyskretne  $1/2, 1/2, 1, 1$  oraz  $1, 2, 2, 1$ , podobnie jak wyrażenie



$\alpha = \alpha(\nu) = 2, 1, 1, 0$ . Przy przyjętych wyżej oznaczeniach proces obliczeń będzie przebiegać następująco:

$$\begin{aligned}
 K_\nu(x)_{i-\alpha, j} &= B_{i-\alpha, j} \Delta \xi, \\
 K_\nu(y)_{i-\alpha, j} &= E_{i-\alpha, j} \Delta \zeta, \\
 K_\nu(\varphi)_{i-\alpha, j} &= C_{i-\alpha, j} \Delta \xi, \\
 x_{i+2\gamma-2, j} &= x_{i-2, j} + M_\nu(x)_{i-\alpha, j}, \\
 y_{i+2\gamma-2, j} &= y_{i-2, j} + M_\nu(y)_{i-\alpha, j}, \\
 \varphi_{i+2\gamma-2, j} &= \varphi_{i-2, j} + M_\nu(\varphi)_{i-\alpha, j}, \\
 \left( \frac{du}{d\xi} \right)_{i-\alpha, j} &= L_{i-\alpha, j}, \\
 K_\nu(p_1)_{i-\alpha, j} &= D_{i-\alpha, j} \Delta \xi, \\
 (p_1)_{i+2\gamma-2, j} &= (p_1)_{i-2, j} + M_\nu(p_1)_{i-\alpha, j}
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Dla  $\nu = 4$  wartości poszukiwanych funkcji w punkcie  $(\xi_i, \tau_j)$  wyznaczamy ze wzorów

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &= x_{i-2, j} + H(x)_{i-2, j}, \\
 y_{ij} &= y_{i-2, j} + H(y)_{i-2, j}, \\
 \varphi_{ij} &= \varphi_{i-2, j} + H(\varphi)_{i-2, j}, \\
 (p_1)_{ij} &= (p_1)_{i-2, j} + H(p_1)_{i-2, j}.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

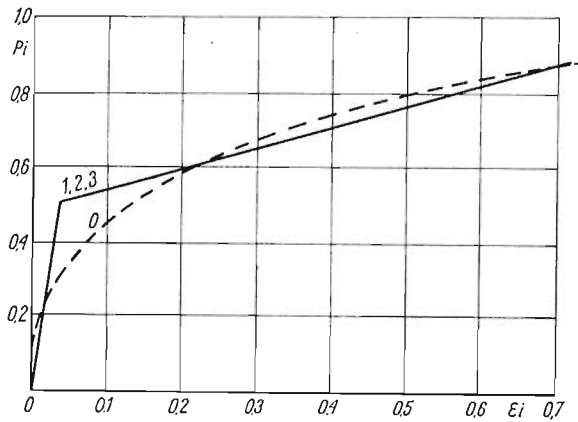
Pozostałe funkcje wyznaczamy w oparciu o ulepszoną metodę Eulera (dla współrzędnej  $\tau$ ):

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial p_1}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j} &= L'(p_1)_{i+2\gamma-2, j}, \\
 \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j} &= L'(x)_{i+2\gamma-2, j}, \\
 \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-2} &= \left( \frac{u}{bm} L'(p_1) + \frac{au}{bx} L'(x) \right)_{i+2\gamma-2, j-1}, \\
 \left( \frac{\partial p_2}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-1} &= \left( \frac{em}{x} L'(x) + \frac{dm}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-1}, \\
 u'_{i+2\gamma-2, j} &= u_{i+2\gamma-2, j-2} + 2\Delta\tau \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-1}, \\
 (p_2)_{i+2\gamma-2, j} &= (p_2)_{i+2\gamma-2, j-2} + 2\Delta\tau \left( \frac{\partial p_2}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-1},
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

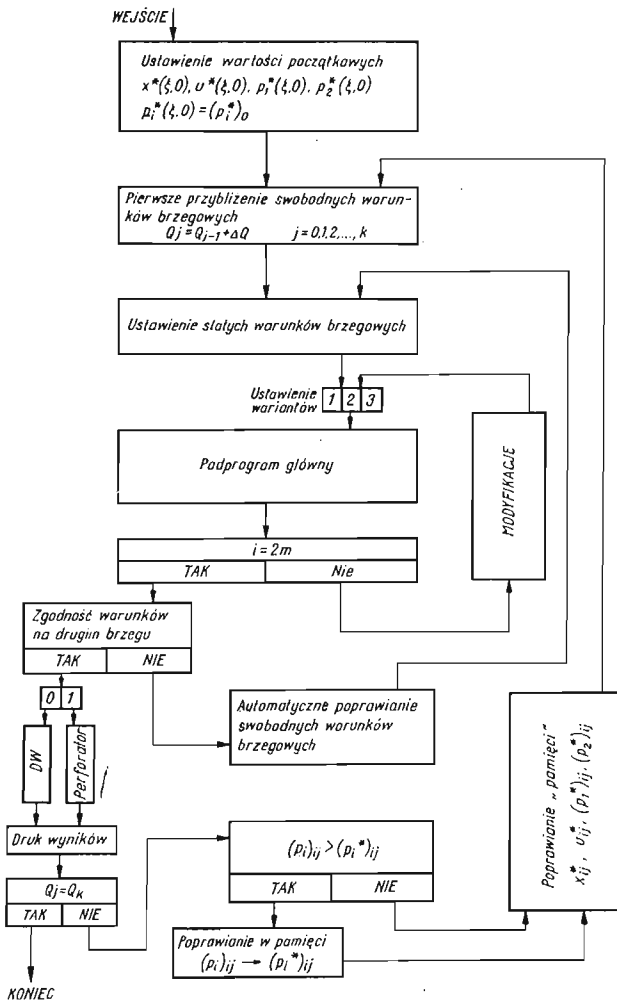
gdzie pochodna

$$L'(w) = \frac{dw_j}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} w_{j-r}.
 \tag{3.10}$$

We wzorach (3.4) i (3.10)  $\beta_{ks}$  i  $\beta_{kr}$  są współczynnikami, których wielkość zależy od przyjętej liczby  $k$  (por. [5]). Następnie przechodzimy do wyznaczania wartości poszukiwanych funkcji w punktach  $(\xi_{i+2}, \tau_j)$ ,  $(\xi_{i+4}, \tau_j)$ , ...,  $(\xi_{2m}, \tau_j)$ , a potem na linii  $\tau_{j+1} = \text{const}, \dots, \tau_n = \text{const}$ , aż skonstruujemy rozwiązanie w całym obszarze  $D(\xi, \tau)$ .

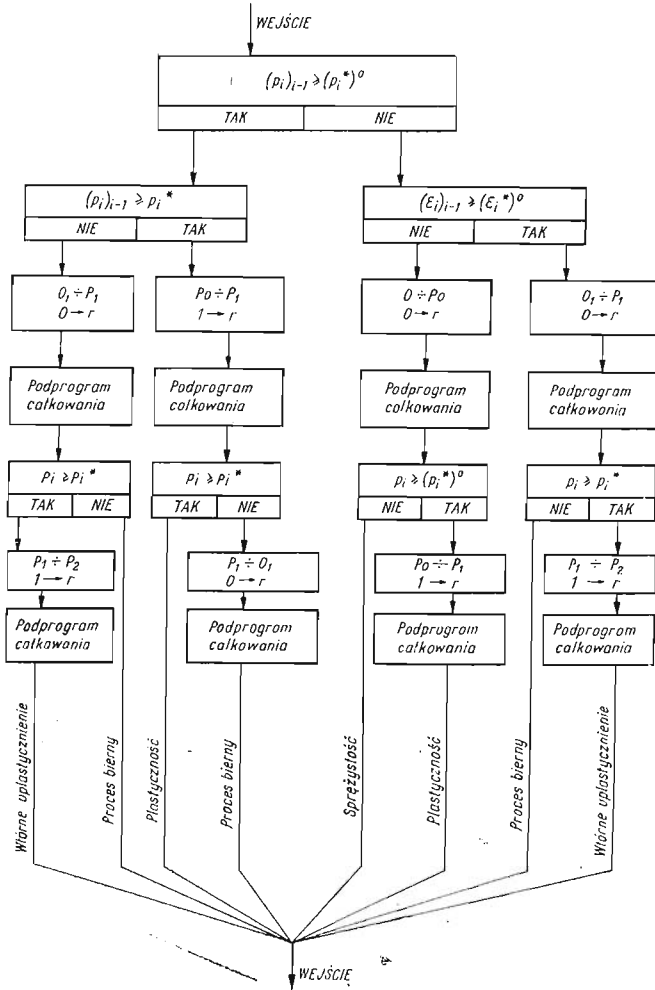


Rys. 4. Charakterystyki fizyczne materiału powłoki: — dla układu równań (2.21), — — — dla układu (1.2) i (1.3)



Rys. 5. Schemat blokowy rozwiązywania układu równań (2.21)

3.2. Program dla komputera. Schemat blokowy programu dla elektronicznej maszyny cyfrowej przedstawiono na rys. 5. Zakładamy, że dla konkretnych przypadków rozwiązywanych powłok, warunki brzegowe nie pozwalają na bezpośrednie obliczanie na brzegu  $\xi = \xi_0$  wszystkich wartości poszukiwanych funkcji. Problem brzegowy sprowadzono więc do zagadnień początkowych (ponieważ z uwagi na znaczną nieliniowość prawych stron równań różniczkowych korzystamy z metod numerycznych sukcesywnego całkowania), za-

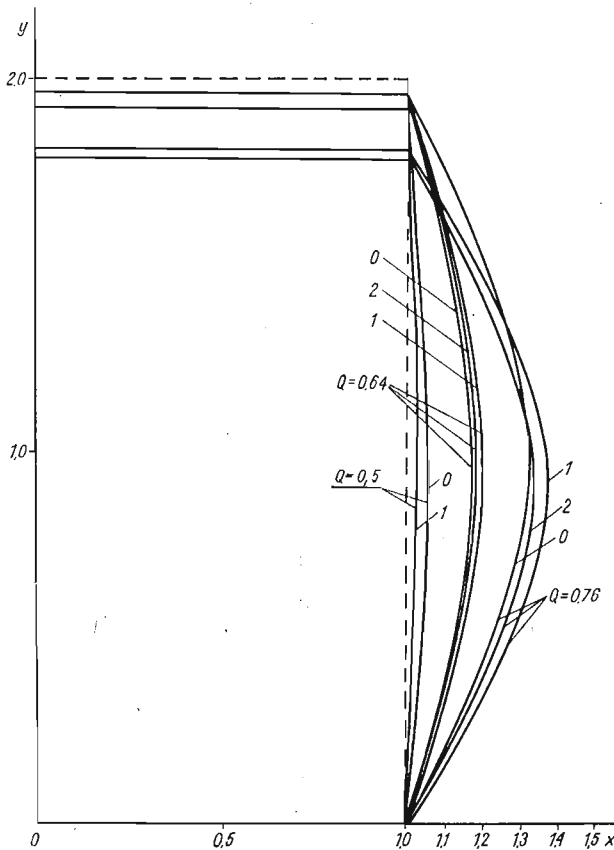


Rys. 6. Schemat blokowy podprogramu głównego przy rozwiązywaniu układu równań (2.21)

kładając a priori na brzegu wyjściowym wszystkie brakujące warunki i rozwiązując dalej zadanie metodą półdrotną. Wielkości, które dodatkowo zakładamy dla  $\xi = \xi_0$  kolejno na każdej linii  $\tau = \tau_j = \text{const}$ , muszą być tak dobierane, aby każdorazowo spełniane były wszystkie warunki zadane na obu brzegach. Wymaga to zwykle przeprowadzenia wielu prób. Iteracje te są w pełni zautomatyzowane w programie. Przytoczone poniżej wyniki liczbowe uzyskano przy zastosowaniu EMC Odra-1013 zainstalowanej w Ośrodku

ETO Politechniki Krakowskiej. Program wykonano w języku wewnętrznym maszyny i przy maksymalnym wykorzystaniu pamięci ferrytowej. Pomimo to czasy iteracji, przy  $\tau = \tau_j = \text{const}$ , dla spełnienia warunków brzegowych wzdłuż współrzędnej  $\xi (m = 50)$  były stosunkowo długie i średnio trwały około jednej godziny. Obecnie, w ośrodku obliczeniowym Uniwersytetu Gdańskiego opracowano (por. [8]) nową wersję tego programu przy zastosowaniu EMC Odra-1204. Uzyskano tym sposobem około 30-krotne skrócenie czasu obliczeń. Program ten wchodzi w skład pakietu programowego dla wiotkich powłok, w którym, oprócz omawianego w niniejszej pracy układu równań, można rozwiązywać powłoki przy uwzględnieniu efektów reologicznych według trzech różnych teorii pełzania (por. [7]).

3.3. Przykłady liczbowe. Celem uzyskania rezultatów liczbowych przyjęto powłokę walcową o skończonej długości z dwoma sztywnymi swobodnymi denkami i obciążoną



Rys. 7. Forma powłoki odkształconej

równomiernym parciem wewnętrznym. Przy przyjęciu pierwotnej długości powłoki  $L_0 = 2$ , układ (2.21) powinien spełnić następujące warunki brzegowe:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} x(0, \tau) = 1, \quad y(0, \tau) = 0, \quad x(2, \tau) = 1, \\ p_1(0, \tau) = 2p_2(0, \tau) = 2 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\mu+1} [-\ln u(1, \tau)]^\mu. \end{aligned}$$

W obliczeniach zamiast trzeciego z warunków (3.11) z uwagi na symetrię korzystamy z zależności  $\varphi(1, \tau) = \pi/2$ . Rezultaty obliczeń przedstawione są na rysunkach 7÷16. Wszędzie cyfrą 1 oznaczono wykresy uzyskane z rozwiązania układu (2.21) dla przypadku «a», gdzie

$$A = 0,6, \quad m = 13 \quad \text{ i } \quad c_0 = 0;$$

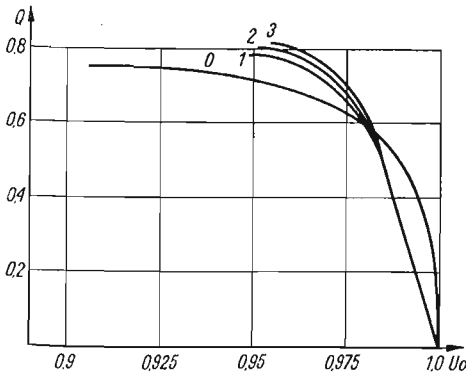
cyfrą 2 oznaczono wyniki dla przypadku «b», gdzie

$$A = 0, \quad m = 13 \quad \text{ i } \quad c_0 = 0,4;$$

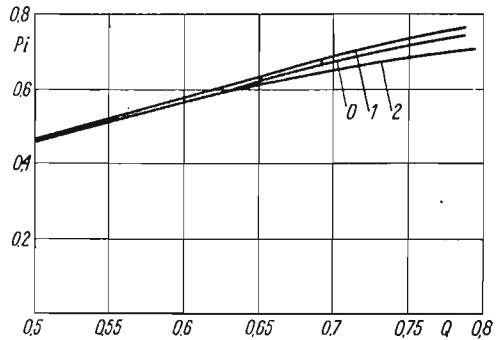
cyfrą 3 oznaczono wyniki dla przypadku «c», gdzie

$$A = 0,6, \quad m = 13 \quad \text{ i } \quad c_0 = 0,4;$$

zaś cyfrą 3 oznaczono rezultaty obliczeń uzyskane z rozwiązania układu (1.2) ÷ (1.3).

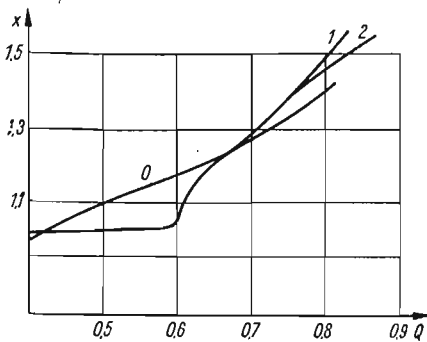


Rys. 8. Wykresy funkcji  $Q = f(u_0)$

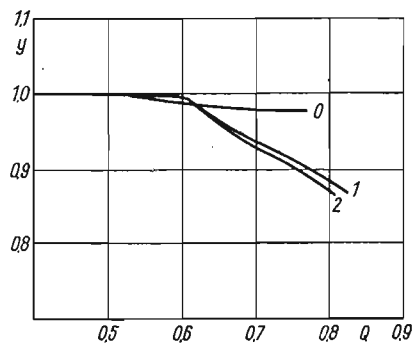


Rys. 9. Wykresy funkcji  $p_i = f_i(Q)$  dla punktu w środku długości powłoki

Wartości  $A$ ,  $m$ ,  $c$  zostały tak dobrane (por. [6]), aby przyjęta na ich podstawie charakterystyka sprężysto-plastyczna była możliwie dobrym przybliżeniem charakterystyki potęgowej zastosowanej w [1]. Rysunek 8 rzuca światło na zagadnienie stateczności

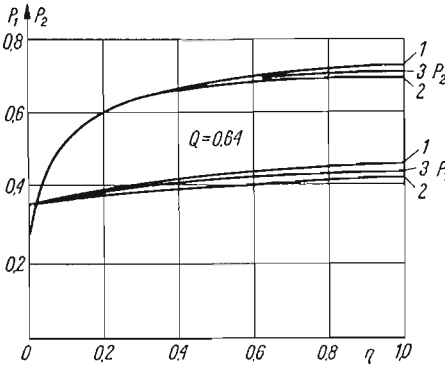


Rys. 10. Wykres  $x = x(Q)$  dla punktu w środku powłoki

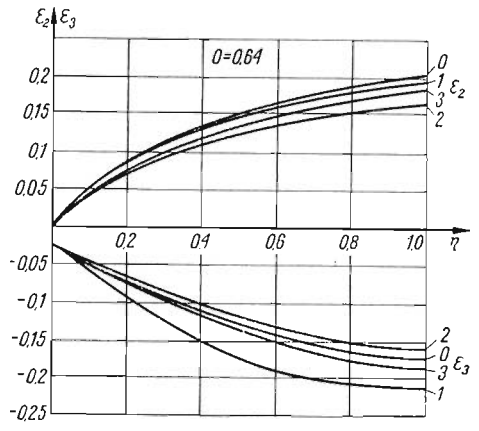


Rys. 11. Wykres  $y = y(Q)$  dla punktu w środku powłoki

powłok i przedstawia zależność  $u$  (przyjmowany na brzegu swobodny warunek) od obciążenia  $Q$ . Rysunek 7 ilustruje zmianę kształtu powłoki w procesie obciążania, rysunek 11 przedstawia, w zależności od  $Q$ , przesuwanie wzdłuż osi  $y$  swobodnego denka powłoki zaś na rys. 10 obserwujemy przesuwanie punktu w środku długości powłoki wzdłuż osi  $x$ .

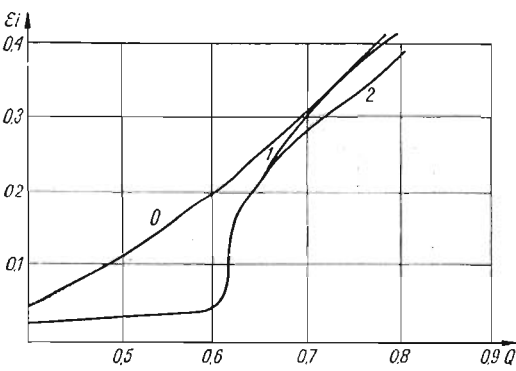


Rys. 12. Rozkład naprężeń głównych wzdłuż osi powłoki  $\eta$

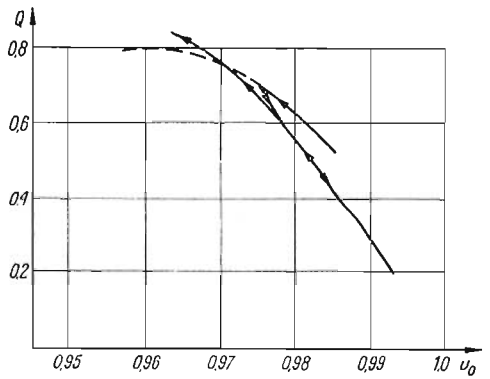


Rys. 13. Rozkład odkształceń głównych wzdłuż osi powłoki  $\eta$

Rysunki 12 i 13 pokazują rozkład odkształceń głównych i intensywności naprężeń wzdłuż współrzędnej  $\eta$ . Na rysunkach 9 i 14 przedstawiony jest wzrost intensywności naprężeń i odkształceń, wybranego punktu w środku powłoki obliczonej dla przypadków 0, 1 i 2, dla przypadku 2 pokazany jest na rys. 15 i 16 przebieg odciążania powłoki (od wartości obciążenia  $Q = 0,7$ ), a następnie ponownego obciążenia.



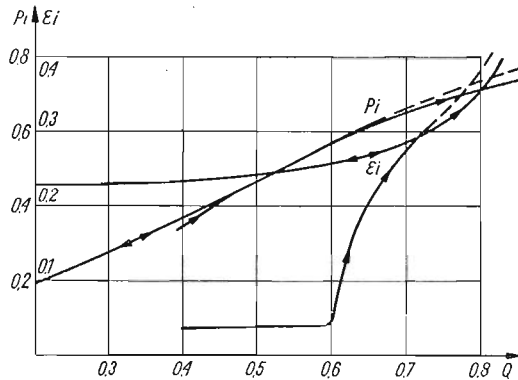
Rys. 14. Wykres funkcji  $\epsilon_1 = \epsilon_1(Q)$  dla punktu w środku powłoki



Rys. 15. Wykres funkcji  $Q = f(u_0)$  przy odciążaniu

Na podstawie przytoczonych tu wyników można przeprowadzić szereg ważnych porównań. I tak porównując wyniki uzyskane z rozwiązania układu (2.21) z analogicznymi wynikami dla układu (1.2 i 1.3) widać, że największe różnice występują dla stosunkowo

małych obciążeń, a więc tam gdzie odchylenie w przebiegu charakterystyk fizycznych jest najgłębsze. Różnice te można zniwelować przez odpowiedni dobór charakterystyki sprężysto-plastycznej, a w szczególności przez zastosowanie aproksymacji wieloodcinkowej. Przede wszystkim jednak porównanie wyników uzyskanych dla przypadków 1, 2, 3 pozwala na zaobserwowanie wpływu przyjętej hipotezy wzmocnienia na rozwiązania rozważanej



Rys. 16. Wykres funkcji  $\epsilon_i, P_i = f(Q)$  przy odciążaniu i powtórnym obciążeniu

powłoki. Uwzględnienie translacji powierzchni plastyczności wpłynęło na zwiększenie stateczności tej powłoki (rys. 8), a dla tych samych obciążeń dało, dla odkształceń i naprężeń, wartości niższe niż przy wzmocnieniu izotropowym. Podczas prób odciążania i ponownego obciążania zaznaczył się dość wyraźnie wpływ «historii obciążania».

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. ORKISZ, J. WILK, *Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 7 (1969).
2. R. SHIELD, H. ZIEGLER, *On Prager's hardening rule*, ZAMP, 9a (1958).
3. В. В. Новожилов, *О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений*, Прикл. Мат. и Мех., 3, 28 (1964).
4. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, 1971.
5. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materialu*, Zesz. Nauk. Pol. Krakowskiej, 11 (1967).
6. Г. Б. Талыпов, *К теории пластичности учитывающей эффект Баушингера*, Инж. Журн. МТТ, 6 (1966).
7. J. WILK, *Pelzanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok niesprężystych w zakresie skończonych odkształceń*, Rozpr. Inż., 2, 18 (1970).
8. J. WILK, *Systemowe rozwiązywanie wiotkich osiowo-symetrycznych powłok przy zastosowaniu EMC Odra-1204*, (praca przygotowywana do druku).

#### Резюме

#### КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИБКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УЧЕТЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

В работе дана новая система дифференциальных уравнений для осесимметрических оболочек, которые под влиянием нагрузки могут существенным образом изменять свою первоначальную форму, испытывая при этом большие деформации. Уравнения пластического течения основаны

на физических соотношениях, выведенных для общего случая упрочнения с учетом смещения и расширения поверхности текучести. Численные примеры иллюстрируют метод и показывают правильность разработанных алгоритмов решения.

#### Summary

### FINITE DEFORMATIONS OF SLENDER AXI-SYMMETRIC SHELLS MADE OF MATERIALS OBEYING THE KINEMATIC STRAIN-HARDENING LAW

In this paper is derived a new system of differential equations for axially-symmetric shells capable of changing their initial form essentially under the loading. Equations based on the theory of plastic flow are derived at a general type of hardening with translation and extension of a yield locus. Numerical examples are computed as an illustration and verification of the algorithms proposed.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 października 1974 r.; w wersji ostatecznej — dnia 25 września 1975 r.*

---



ELEKTRYCZNY UKŁAD ANALOGOWY  
DLA GEOMETRYCZNIE NIELINIOWYCH ZAGADNIEŃ PŁYT O DOWOLNEJ GEOMETRII

MIECZYŚLAW JANOWSKI, HENRYK KOPECKI (RZESZÓW)

Modelowanie elektryczne znalazło szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu wielu problemów współczesnej techniki w takich dyscyplinach, jak lotnictwo, okrętownictwo, budowa maszyn, mechanika budowli itp.

Zastosowanie metod analogowych uzasadnione jest szybkością modelowania obiektu fizycznego oraz wystarczającą w obliczeniach inżynierskich dokładnością otrzymanych wyników.

Znane są szerokie zastosowania elektrycznych analizatorów połowych do statycznych obliczeń takich elementów konstrukcji, jak belki, ramy, płyty i powłoki, rozważanych jako zagadnienia liniowe w sensie fizycznym i geometrycznym [1, 2].

Celem obecnej pracy jest przedstawienie koncepcji rozwiązywania geometrycznie nieliniowych zagadnień płyt cienkich o dowolnym kształcie, dowolnie zmiennej grubości i dowolnym obciążeniu, za pomocą elektrycznych analizatorów połowych.

1. Równania podstawowe

Analiza ogólnego przypadku dużych ugięć cienkich płyt o zmiennej grubości z materiału o sprężystości liniowej charakterystyce fizycznej prowadzi do układu dwóch równań podstawowych [3]

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + \nu \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = \\ = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q,$$

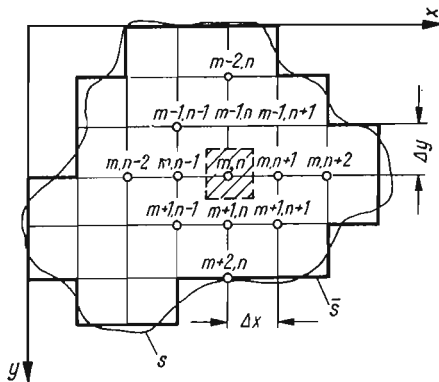
$$(1.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \\ - \nu \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \right] = \\ = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right];$$

gdzie oznaczono:  $w = w(x, y)$  — przemieszczenie prostopadłe do płaszczyzny środkowej płyty,  $h = h(x, y)$  — grubość płyty,  $D = D(x, y) = \frac{Eh^3(x, y)}{12(1-\nu^2)}$  — sztywność giętną płyty,  $E$  — moduł sprężystości podłużnej materiału płyty,  $\nu$  — współczynnik Poissona dla tego materiału,  $q = q(x, y)$  — obciążenie zewnętrzne prostopadłe do elementu płyty,  $\Phi = \Phi(x, y)$  — funkcja naprężeń, przez którą wyrażają się składowe stanu naprężenia płaszczyzny środkowej płyty

$$(1.3) \quad \sigma_x = \frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Rozwiązania powyższego układu nieliniowych równań różniczkowych w ogólnym przypadku nie są znane. Przybliżone rozwiązania tych problemów uzyskano jedynie dla niektórych przypadków szczególnych [4, 5].



Rys. 1

Rozwiązanie układu równań (1.1), (1.2) będziemy tutaj opierali na metodzie pełnego dyskretnego podziału obszaru płyty. Rzeczywisty kontur płyty  $S$  zastępujemy konturem łamanym  $\bar{S}$  (rys. 1). Wartość pochodnych w danym punkcie wyrazimy przez wartość odpowiednich ilorazów różnicowych.

Przyjmując dla funkcji dwóch zmiennych  $\Psi(x, y)$  identyczny krok  $\Delta x = \Delta y = \delta$  otrzymujemy przykładowo następujące zależności różnicowe:

$$(1.4) \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m, n+1} - \Psi_{m, n-1}}{2\delta},$$

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m+1, n} - \Psi_{m-1, n}}{2\delta},$$

$$\left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m, n+1} - 2\Psi_{m, n} + \Psi_{m, n-1}}{\delta^2},$$

$$\left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m-1, n-1} - \Psi_{m-1, n+1} - \Psi_{m+1, n-1} + \Psi_{m+1, n+1}}{4\delta^2},$$

$$\left( \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m, n+2} - 2\Psi_{m, n+1} + 2\Psi_{m, n-1} - \Psi_{m, n-2}}{2\delta^3} \text{ itd.}$$

Operatory różniczkowe  $\nabla^2\mathcal{Y}$  i  $\nabla^4\mathcal{Y}$  po uwzględnieniu zależności (1.4) przyjmują znane postacie:

$$(1.5) \quad (\nabla^2\mathcal{Y})_{m,n} = \frac{1}{\delta^2} (\mathcal{Y}_{m+1,n} + \mathcal{Y}_{m-1,n} + \mathcal{Y}_{m,n+1} + \mathcal{Y}_{m,n-1} - 4\mathcal{Y}_{m,n}),$$

$$(1.6) \quad (\nabla^4\mathcal{Y})_{m,n} = \frac{1}{\delta^4} [20\mathcal{Y}_{m,n} - 8(\mathcal{Y}_{m+1,n} + \mathcal{Y}_{m-1,n} + \mathcal{Y}_{m,n+1} + \mathcal{Y}_{m,n-1}) + \\ + 2(\mathcal{Y}_{m+1,n+1} + \mathcal{Y}_{m+1,n-1} + \mathcal{Y}_{m-1,n+1} + \mathcal{Y}_{m-1,n-1}) + \\ + \mathcal{Y}_{m+2,n} + \mathcal{Y}_{m-2,n} + \mathcal{Y}_{m,n+2} + \mathcal{Y}_{m,n-2}].$$

Wskaźniki  $m, n$  oznaczają tutaj współrzędne punktu należącego do obszaru płyty (rys. 1). Uwzględniając związki (1.4), (1.5), (1.6) sprowadzamy układ równań różniczkowych (1.1), (1.2) do układu równań różnicowych:

$$(1.7) \quad 20a_{m,n}w_{m,n} - 8(b_{m,n}w_{m+1,n} + c_{m,n}w_{m-1,n} + d_{m,n}w_{m,n+1} + e_{m,n}w_{m,n-1}) + \\ + 2(f_{m,n}w_{m+1,n+1} + g_{m,n}w_{m+1,n-1} + j_{m,n}w_{m-1,n+1} + k_{m,n}w_{m-1,n-1}) + \\ + l_{m,n}w_{m+2,n} + p_{m,n}w_{m-2,n} + r_{m,n}w_{m,n+2} + s_{m,n}w_{m,n-2} = \\ = \frac{1}{D} [(\Phi_{m+1,n} - 2\Phi_{m,n} + \Phi_{m-1,n})(w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}) - \\ - \frac{1}{8}(\Phi_{m-1,n-1} - \Phi_{m-1,n+1} - \Phi_{m+1,n-1} + \Phi_{m+1,n+1})(w_{m-1,n-1} - \\ - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}) + (\Phi_{m,n+1} - 2\Phi_{m,n} + \Phi_{m,n-1}) \times \\ \times (w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n})] + \frac{q_{m,n}\delta^4}{D},$$

$$(1.8) \quad 20\bar{a}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n} - 8(\bar{b}_{m,n}\bar{\Phi}_{m+1,n} + \bar{c}_{m,n}\bar{\Phi}_{m-1,n} + \bar{d}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n+1} + \\ + \bar{e}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n-1}) + 2(\bar{f}_{m,n}\bar{\Phi}_{m+1,n+1} + \bar{g}_{m,n}\bar{\Phi}_{m+1,n-1} + \bar{j}_{m,n}\bar{\Phi}_{m-1,n+1} + \\ + \bar{k}_{m,n}\bar{\Phi}_{m-1,n-1}) + \bar{l}_{m,n}\bar{\Phi}_{m+2,n} + \bar{p}_{m,n}\bar{\Phi}_{m-2,n} + \bar{r}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n+2} + \\ + \bar{s}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n-2} = Eh \left[ \frac{1}{16} (w_{m-1,n-1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + \\ + w_{m+1,n+1})^2 - (w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1})(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}) \right];$$

gdzie  $q_{m,n}$  oznacza obciążenie zewnętrzne prostopadłe do elementu płyty działające na pole o wymiarach  $\Delta x \cdot \Delta y = \delta^2$  należące do węzła  $m, n$ ,

$$(1.9) \quad a_{m,n} = 1 - \frac{1+\nu}{10} \frac{D_{xx} + D_{yy}}{D} \delta^2, \quad \bar{a}_{m,n} = 1 - \frac{1+\nu}{10} \frac{H_{xx} + H_{yy}}{H} \delta^2, \\ b_{m,n} = 1 + \frac{D_y}{D} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2, \quad \bar{b}_{m,n} = 1 + \frac{H_y}{H} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2, \\ c_{m,n} = 1 - \frac{D_y}{D} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2, \quad \bar{c}_{m,n} = 1 - \frac{H_y}{H} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2, \\ d_{m,n} = 1 + \frac{D_x}{D} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{D_{xx} + \nu D_{yy}}{D} \delta^2, \quad \bar{d}_{m,n} = 1 + \frac{H_x}{H} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{H_{xx} + \nu H_{yy}}{H} \delta^2,$$

$$\begin{aligned}
 e_{m,n} &= 1 - \frac{D_x}{D} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{D_x + \nu D_{yy}}{D} \delta^2, & \bar{e}_{m,n} &= 1 - \frac{H_x}{H} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{H_{xx} + \nu H_{yy}}{H} \delta^2, \\
 f_{m,n} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2, & \bar{f}_{m,n} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2, \\
 g_{m,n} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{D_x - D_y}{D} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2, & \bar{g}_{m,n} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{H_x - H_y}{H} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2, \\
 j_{m,n} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{D_x - D_y}{D} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2, & \bar{j}_{m,n} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{H_x - H_y}{H} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2, \\
 (1.9) \text{ [c.d.]} \quad k_{m,n} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2, & \bar{k}_{m,n} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2, \\
 l_{m,n} &= 1 + \frac{D_y}{D} \delta, & \bar{l}_{m,n} &= 1 + \frac{H_y}{H} \delta, \\
 p_{m,n} &= 1 - \frac{D_y}{D} \delta, & \bar{p}_{m,n} &= 1 - \frac{H_y}{H} \delta, \\
 r_{m,n} &= 1 + \frac{D_x}{D} \delta, & \bar{r}_{m,n} &= 1 + \frac{H_x}{H} \delta, \\
 s_{m,n} &= 1 - \frac{D_x}{D} \delta, & \bar{s}_{m,n} &= 1 - \frac{H_x}{H} \delta;
 \end{aligned}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{\partial D(x, y)}{\partial x}, & D_y &= \frac{\partial D(x, y)}{\partial y}, & D_{xy} &= \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x \partial y}, \\
 D_{xx} &= \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x^2}, & D_{yy} &= \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial y^2}, \\
 (1.10) \quad H &= H(x, y) = \frac{1}{h}(x, y), \\
 H_x &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}, & H_y &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, & H_{xy} &= \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y}, \\
 H_{xx} &= \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2}, & H_{yy} &= \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

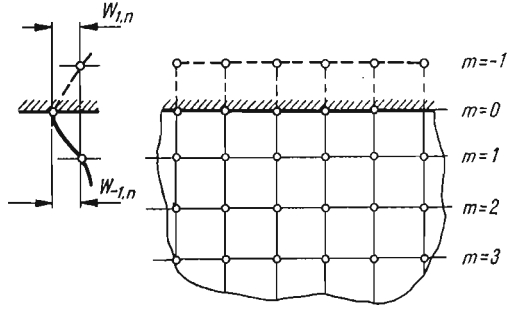
oznaczają odpowiednie pochodne określone dla punktu  $m, n$ .

Powyższy układ równań różnicowych (1.7), (1.8) wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi formułuje w zapisie różnicowym problem geometrycznie nieliniowej cienkiej płyty o dowolnej geometrii (dowolny kontur i dowolnie zmienna grubość) oraz dowolnym rozkładzie obciążenia zewnętrznego.

Rozważymy kilka typów warunków brzegowych [4] przyjmując, że krawędź płyty jest równoległa do jednej z osi współrzędnych  $x$  albo  $y$  oraz punkty węzłowe znajdują się na krawędzi.

a) *Krawędź płyty*  $y = 0$  utwierdzona na podporze nieodkształcalnej (rys. 2).  
Warunki geometryczne:

$$(1.11) \quad w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) = 0$$



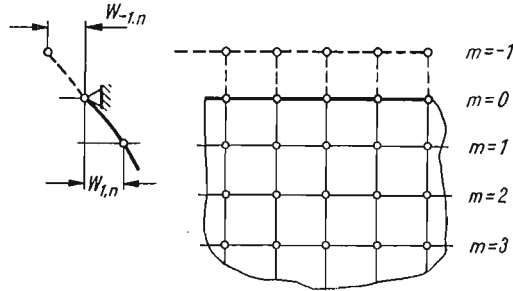
Rys. 2

w zapisie dyskretnym wyrażają się następująco:

$$(1.12) \quad w_{0,n} = 0, \quad w_{1,n} = w_{-1,n}$$

b) *Krawędź płyty*  $y = 0$  przegubowo podparta (rys. 3).  
Warunek geometryczny oraz statyczny:

$$(1.13) \quad w(x, 0) = 0, \quad M_y(x, 0) = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0) \right] = 0$$



Rys. 3

w zapisie dyskretnym wyrażają się następująco:

$$(1.14) \quad w_{0,n} = 0, \quad w_{1,n} = -w_{-1,n}$$

c) *Krawędź swobodna*.  
Warunki statyczne:

$$(1.15) \quad R_y(x, 0) = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, 0) + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, 0) \right] = 0,$$

$$M_y(x, 0) = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0) \right] = 0$$

w zapisie dyskretnym wyrażają się następująco:

$$(1.16) \quad w_{2,n} - w_{0,n-2} + 2(3-\nu)(w_{-1,n} - w_{1,n}) + (2-\nu)(w_{1,n+1} - w_{-1,n+1} + w_{1,n-1} - w_{-1,n-1}) = 0,$$

$$w_{1,n} + w_{-1,n} - 2(1+\nu)w_{0,n} + \nu(w_{0,n+1} + w_{0,n-1}) = 0.$$

d) Punkty krawędzi nieobciążonej  $y = 0$  mają swobodę przemieszczenia wzdłuż osi  $y$ .  
Warunek

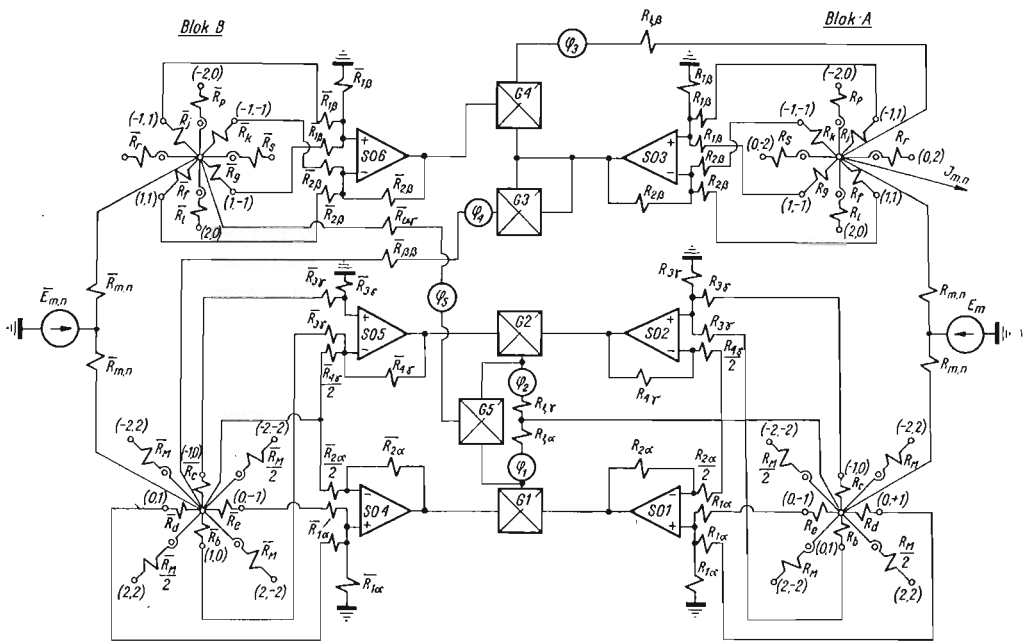
$$(1.17) \quad \sigma_y(x, 0) = \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} = 0$$

prowadzi do zależności różnicowej

$$(1.18) \quad \Phi_{0,n+1} - 2\Phi_{0,n} + \Phi_{0,n-1} = 0.$$

## 2. Model elektryczny układu równań różnicowych

Opierając się na podstawowych prawach elektrotechniki przedstawimy schemat elektryczny modelujący układ równań różnicowych (1.7), (1.8).



Rys. 4

Układ analogowy (połączenia dla jednego węzła wewnętrznego pokazane są na rys. 4) budujemy za pomocą czterech siatek elektrycznych. Prócz typowych elementów, jakimi są oporniki, wykorzystamy tutaj również sumująco-odejmujące wzmacniacze operacyjne (SO1 ÷ SO6) oraz generatory funkcji mnożących dwa sygnały napięciowe (G1 ÷ G5).

Na schemacie połączeń elektrycznych wyróżnić możemy dwa zasadnicze bloki. Blok A modeluje człony układu równań różnicowych (1.7), (1.8) zawierające ugięcie  $w$ . Wartość ugięcia w węzłach o współrzędnych  $m, n$  jest proporcjonalna do potencjału elektrycznego

w odpowiednich węzłach siatek bloku  $A$  (potencjały w węzłach obu siatek tego bloku są sobie równe). Blok  $B$  modeluje z kolei te człony układu równań różnicowych (1.7) (1.8), w których występuje funkcja naprężeń  $\Phi$ . Wartości potencjałów w poszczególnych węzłach siatek bloku  $B$  określają wartości funkcji naprężeń w odpowiednich węzłach płyty (tutaj również potencjały w odpowiadających sobie węzłach obu siatek są identyczne).

Aby przedstawiony układ elektryczny określał faktycznie szukane wielkości mechaniczne wartości poszczególnych oporności muszą być równe niżej podanym. Wartości te określimy używając oporności modułowych  $R_M$  i  $\bar{R}_M$  stanowiących rezystancje odniesienia:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} R_b &= \frac{R_M}{8 \left( \frac{23}{24} + \frac{D_y}{2D} \delta - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_b &= \frac{\bar{R}_M}{8 \left( \frac{23}{24} + \frac{H_y}{2H} \delta - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_c &= \frac{R_M}{8 \left( \frac{23}{24} - \frac{D_y}{2D} \delta - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_c &= \frac{\bar{R}_M}{8 \left( \frac{23}{24} - \frac{H_y}{2H} \delta - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_d &= \frac{R_M}{8 \left( \frac{23}{24} + \frac{D_x}{2D} \delta - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_d &= \frac{\bar{R}_M}{8 \left( \frac{23}{24} + \frac{H_x}{2H} \delta - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_e &= \frac{R_M}{8 \left( \frac{23}{24} - \frac{D_x}{2D} \delta - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_e &= \frac{\bar{R}_M}{8 \left( \frac{23}{24} - \frac{H_x}{2H} \delta - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_f &= \frac{R_M}{2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_f &= \frac{\bar{R}_M}{2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_g &= \frac{R_M}{2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{D_x - D_y}{D} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_g &= \frac{\bar{R}_M}{2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{H_x - H_y}{H} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_j &= \frac{R_M}{2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_j &= \frac{R_M}{2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_k &= \frac{R_M}{2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_k &= \frac{\bar{R}_M}{2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_l &= \frac{R_M}{2,5 + \frac{D_y}{D} \delta}, & \bar{R}_l &= \frac{\bar{R}_M}{2,5 + \frac{H_y}{H} \delta}, \\ R_p &= \frac{R_M}{2,5 - \frac{D_y}{D} \delta}, & \bar{R}_p &= \frac{\bar{R}_M}{2,5 - \frac{H_y}{H} \delta}, \end{aligned}$$

$$R_r = \frac{R_M}{2,5 + \frac{D_x}{D} \delta},$$

$$R_s = \frac{R_M}{2,5 - \frac{D_x}{D} \delta},$$

$$R_{\xi\alpha} = R_{\xi\gamma} = R_M, \quad R_{\xi\beta} = \frac{R_M}{8},$$

$$\bar{R}_r = \frac{\bar{R}_M}{2,5 + \frac{H_x}{H} \delta},$$

$$\bar{R}_s = \frac{\bar{R}_M}{2,5 - \frac{H_x}{H} \delta},$$

$$\bar{R}_{\beta\beta} = \bar{R}_M, \quad \bar{R}_{\alpha\gamma} = \frac{\bar{R}_M}{7},$$

$$(2.1) \quad R_{1\alpha(m, n+1)} = R_{1\alpha(m, n-1)} = R_{3\gamma(m+1, n)} =$$

$$(cd) \quad = R_{3\gamma(m-1, n)} = \frac{2}{3} R_M,$$

$$R_{2\alpha} = R_{4\gamma} = R_M,$$

$$\bar{R}_{2\alpha} = \bar{R}_{4\gamma} = \bar{R}_M,$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{1\alpha(m, n+1)} &= \bar{R}_{1\alpha(m, n-1)} = \bar{R}_{3\gamma(m+1, n)} = \\ &= \bar{R}_{3\gamma(m-1, n)} = \frac{2}{3} \bar{R}_M, \end{aligned}$$

$$R_{m+2, n+2} = R_{m-2, n-2} = \frac{1}{2} R_M,$$

$$R_{m+2, n-2} = R_{m-2, n+2} = R_M,$$

$$\bar{R}_{m+2, n+2} = \bar{R}_{m-2, n-2} = \frac{1}{2} \bar{R}_M,$$

$$\bar{R}_{m+2, n-2} = \bar{R}_{m-2, n+2} = \bar{R}_M.$$

Wartość oporów  $R_{m,n}$  i  $\bar{R}_{m,n}$  oraz sił elektromotorycznych  $E_{m,n}$  i  $\bar{E}_{m,n}$  muszą być tak dobrane, aby zapewnić zrównanie potencjałów w odpowiadających sobie węzłach każdej z siatek obu bloków. Symbolami  $\varphi_i$  oznaczono potencjometry liniowe realizujące mnożenie przez stałe współczynniki, które odpowiednio wynoszą

$$(2.2) \quad \varphi_1 = \frac{1}{D}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{D}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{64D}, \quad \varphi_4 = \frac{Eh}{16}, \quad \varphi_5 = \frac{Eh}{7}.$$

Na schemacie przyjęto oznaczenie węzłów w formie uproszczonej; tak np. zamiast oznaczenia:  $m-2, n+2$  przyjęto oznaczenie:  $-2, +2$ . Aby zachować przejrzystość rysunku w siatkach obu bloków  $A$  i  $B$  nie podajemy połączeń ze wzmacniaczami operacyjnymi należącymi do sąsiednich węzłów.

Prąd zasilający siatkę górną bloku  $A$  modeluje obciążenie w danym węzle, przy czym jego wartość jest równa

$$(2.3) \quad I_{m,n} = \frac{q_{m,n} \delta^4}{D} \frac{k_u}{R_M},$$

gdzie  $k_u$  jest współczynnikiem przeniesienia modelowego potencjału w bloku  $A$ .

Ugięcia w poszczególnych węzłach są równe

$$(2.4) \quad w_{m,n} = \frac{U_{m,n}}{k_u},$$

zaś funkcja naprężeń wynosi

$$(2.5) \quad \Phi_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{k_v},$$



gdzie  $U_{m,n}$  potencjał w węźle  $m, n$  siatek bloku  $A$ ,

$V_{m,n}$  potencjał w węźle  $m, n$  siatek bloku  $B$ ,

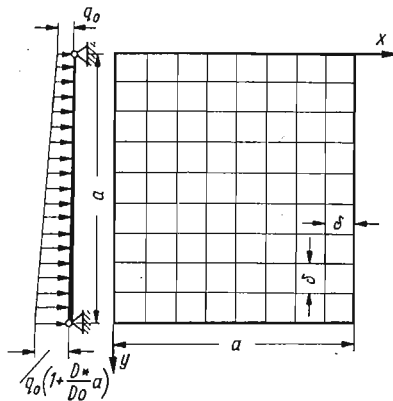
$k_v$  współczynnik przeniesienia modelowego potencjału w bloku  $B$ .

Przechodząc do modelowania warunków brzegowych musimy mieć na uwadze fakt, że dla węzłów położonych na krawędzi płyty i w jej pobliżu układ elektryczny będzie inny nieco niż dla węzłów wewnętrznych. Wynika to z konieczności spełnienia przez przemieszczenia w określone potencjałami  $U$  oraz funkcję naprężeń  $\Phi$  określoną potencjałem  $V$ , nie tylko zależności (1.7) i (1.8), ale także odpowiednich warunków brzegowych np. (1.12), (1.14), (1.16), (1.18).

Zasada określania wartości oporów w węzłach brzegowych z uwzględnieniem między innymi załamań konturu przedstawiona jest szczegółowo dla płyt o stałej sztywności geometrycznie i fizycznie liniowych w pracy [6]. Można ją uogólnić na rozważaną przez nas płytę geometrycznie nieliniową.<sup>1)</sup>

### 3. Model układu elektrycznego dla płyty geometrycznie liniowej

W szczególnym przypadku, gdy rozważania teoretyczne ograniczymy do problemu geometrycznie liniowego, przedstawiony schemat elektryczny upraszcza się w sposób zasadniczy. Ze względu na to, że układ podstawowych równań różniczkowych, a zatem i różnicowych redukuje się do jednego równania liniowego, w schemacie elektrycznym nie pojawiają się wzmacniacze operacyjne oraz cały blok  $B$  modelujące człony nieliniowe.



Rys. 5

Dla ilustracji przedstawimy przykład modelowania płyty prostokątnej o sztywności liniowo zmiennej w kierunku równoległym do jednego z jej boków, obciążonej proporcjonalnie do sztywności i przegubowo podpartej na brzegach (rys. 5).

<sup>1)</sup> Traktując model analogowy warunków brzegowych jako przypadek szczególny ogólnego schematu elektrycznego, ograniczamy się tutaj jedynie do omówienia sposobu podejścia do modelowania warunków brzegowych dla płyt geometrycznie nieliniowych.

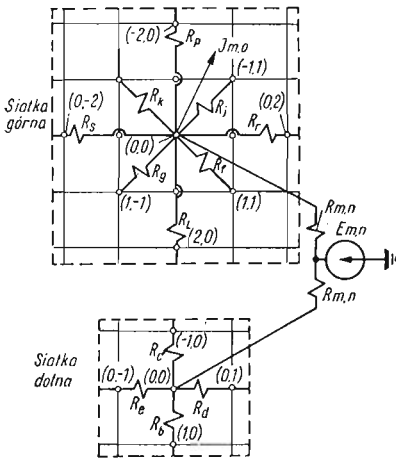
Ograniczając się jedynie do małych ugięć takiej płyty możemy układ równań (1.1), (1.2) sprowadzić do postaci

$$(3.1) \quad (D_0 + D_{*y})\nabla^4 w + 2D_{*y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = q_0 \left(1 + \frac{D_{*y}}{D_0} y\right).$$

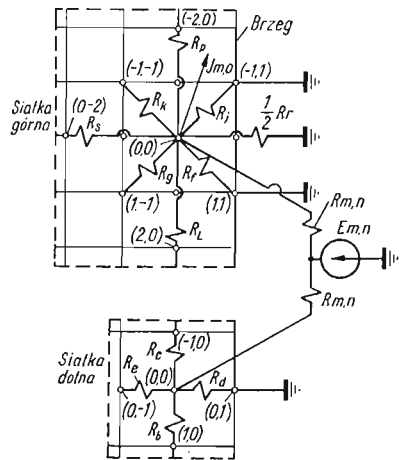
Przy czym oznaczono:

$$D = D_0 \left(1 + \frac{D_{*y}}{D_0} y\right) \text{ sztywność giętna płyty,}$$

$$q = q_0 \left(1 + \frac{D_{*y}}{D_0} y\right) \text{ obciążenie zewnętrzne, normalne do elementu płyty.}$$



Rys. 6



Rys. 7

Równanie różnicowe (1.7) sprowadza się w tym przypadku do zależności:

$$(3.2) \quad 20w_{m,n} - (8w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) - 4\left(2 - \frac{D_*\delta}{D_m}\right)w_{m-1,n} - 4\left(2 + \frac{D_*\delta}{D_m}\right)w_{m+1,n} + \\ + \left(2 - \frac{D_*\delta}{D_m}\right)(w_{m-1,n-1} + w_{m-1,n+1}) + \left(2 + \frac{D_*\delta}{D_m}\right)(w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}) + \\ + w_{m,n-2} + w_{m,n+2} + \left(1 - \frac{D_*\delta}{D_m}\right)w_{m-2,n} + \left(1 + \frac{D_*\delta}{D_m}\right)w_{m+2,n} = \frac{q_0}{D_0} \delta^4,$$

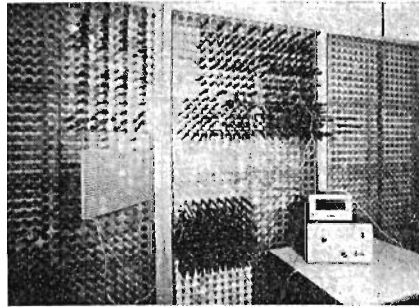
przy czym  $D_m$  oznacza tu sztywność giętną płyty w węzłach wiersza  $m$ .

Układ połączeń elektrycznych dla jednego węzła wewnętrznego utworzony jest przez dwie siatki (rys. 6).

Warunki brzegowe, które dla podanego przykładu opisane są zależnościami (1.13) i (1.14), modelują się przez układ połączeń przedstawiony na rys. 7. Wartości oporów spełniać muszą teraz następujące związki:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} R_b &= \frac{R_M}{4 \left( 2 + \frac{D_* \delta}{D_m} \right)}, & R_c &= \frac{R_M}{4 \left( 2 - \frac{D_* \delta}{D_m} \right)}, & R_d &= R_e = \frac{R_M}{8}, \\ R_f = R_g &= \frac{R_M}{2 + \frac{D_* \delta}{D_m}}, & R_j = R_k &= \frac{R_M}{2 - \frac{D_* \delta}{D_m}}, \\ R_l &= \frac{R_M}{1 + \frac{D_* \delta}{D_m}}, & R_p &= \frac{R_M}{1 - \frac{D_* \delta}{D_m}}, & R_r &= R_s = R_M. \end{aligned}$$

Opór  $R_{m,n}$  oraz siła elektromotoryczna  $E_{m,n}$  zapewniają równość potencjałów w odpowiadających sobie węzłach obu siatek. Wykorzystując wyżej przytoczone rozważania zbudowano



Rys. 8

wano na analizatorze polowym układ elektryczny (rys. 8), modelujący płytę kwadratową dla następujących danych liczbowych:

$a = 0,9$  m długość boku płyty,

$h_0 = 0,01$  m grubość płyty na krawędzi  $y = 0$ ,

$q_0 = 0,25$  MN/m<sup>2</sup> obciążenie zewnętrzne na krawędzi  $y = 0$ ,

$$\frac{D_* a}{D_0} = 4,2,$$

$E = 2 \cdot 10^5$  MN/m<sup>2</sup> moduł spr. podł. mat. płyty,

$\nu = 0,3$  liczba Poissona mat. płyty,

$\delta = 0,1$  m krok siatki.

Sztywność  $D_0$  na krawędzi  $y = 0$  wynosi

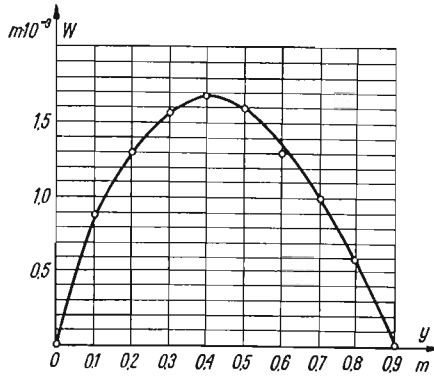
$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1 - \nu^2)} = 0,0183 \text{ MN/m.}$$

Tablica 1

Wiersz „m”	Przewodność oporników										Prąd zasil. $I_m$ mA	Wartości potencjałów w poszczególnych wężłach kolumna „n”							
	$\frac{1}{R_b}$	$\frac{1}{R_c}$	$\frac{1}{R_d} = \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_f}$	$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_h} = \frac{1}{R_j} = \frac{1}{R_k}$	$\frac{1}{R_l}$	$\frac{1}{R_p}$	$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{R_s}$	$\mu S$		$\mu S$		$\mu S$		$\mu S$		$\mu S$			
	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$		$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$	$\mu S$
1	9270	6730	8000	2320	1680	1320	680	1000	1,50	0,483	0,768	0,902	0,975	0,976	0,905	0,769	0,483		
2	11820	9270	10560	2960	2320	1640	1000	1320	1,98	0,791	1,150	1,383	1,438	1,440	1,385	1,150	0,792		
3	14370	11820	13120	3590	2960	1960	1320	1640	2,46	0,823	1,262	1,523	1,698	1,700	1,528	1,264	0,830		
4	16950	14370	15680	4240	3590	2240	1640	1960	2,94	0,867	1,315	1,628	1,854	1,856	1,630	1,317	0,870		
5	19520	16950	18240	4880	4240	2600	1960	2280	3,42	0,805	1,247	1,530	1,758	1,757	1,249	1,250	0,809		
6	22050	19520	20800	5510	4880	2920	2280	2600	3,90	0,702	1,070	1,320	1,404	1,404	1,318	1,064	0,704		
7	24600	22050	23360	6150	5510	3240	2600	2920	4,38	0,529	0,856	1,972	1,112	1,110	0,972	0,858	0,528		
8	27160	24600	25920	6770	6150	3560	2920	3240	4,68	0,353	0,473	0,581	0,640	0,638	0,586	0,470	0,352		

Wartości rezystorów (określone przez przewodności), prądów zasilających oraz potencjały (odniesione do masy) w poszczególnych węzłach podane są w tablicy I.

Obliczony dla naszego przykładu współczynnik przeniesienia modelowego (2.3) wynosi  $k_u = 1100 \text{ V/m}$ .



Rys. 9

Ugięcie płyty  $w_{m,n}$  (2.4) wzdłuż prostej  $x = a/2$  przedstawiono na rys. 9.

#### 4. Wnioski

W pracy wykazano skuteczność metody elektrycznego modelowania analogowego w rozwiązywaniu zagadnień dużych ugięć płyt cienkich. Przedstawiony sposób rozwiązania pozwala na szybką identyfikację pola naprężeń oraz przemieszczeń dla płyt o dowolnej geometrii (np. płyty z otworami, zmiennej grubości itp.).

Porównanie ilościowych i jakościowych rezultatów otrzymanych w rozwiązanych przykładzie z' wynikami rozwiązań analitycznych [7] potwierdza zalety przyjętej metody w zastosowaniu do podobnych problemów.

Praktyczna realizacja układu elektrycznego dla zagadnienia nieliniowego będzie celem dalszych prac.

#### Literatura cytowana w tekście

1. A. LISOWSKI, *Technika analogii elektrycznych w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1969.
2. Математическое моделирование и электрические цепи, Изд. АН УССР, Киев 1964.
3. Y. FUNG, W. WITTRICK, *The anticlastic curvature of a strip*, Jour. Appl. Mech., 4 (1954).
4. А. С. ВОЛЬМИР, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат, Москва 1956.
5. М. С. КОРНИШИН, *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*, Наука, Москва 1964.
6. Г. Е. ПУХОВ, В. В. ВАСИЛЬЕВ, А. Е. СТЕПАНОВ, О. Н. ТОКАРЕВА, *Электрическое моделирование задач строительной механики*, Изд. АН УССР, Киев 1963.
7. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, 1962.

## Резюме

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИНОК ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНТУРА

В работе рассматриваются задачи геометрически нелинейных тонких пластинок произвольного контура, для которых дано решение, основанное на электрическом моделировании.

Система разрешающих уравнений представлена в конечно-разностном виде и разработана для нее электрическая модель. Как частный случай, представлена система уравнений и соответствующая ей электрическая схема для линейной задачи. Для такого случая построена аналоговая электрическая модель, при учете линейно изменяющейся жесткости и линейно переменной нагрузки (нормальное давление). Решен численный пример на полевом аналоговом анализаторе типа «Р».

## Summary

THE ELECTRIC ANALOG SYSTEM FOR GEOMETRICALLY NONLINEAR PLATES OF  
ARBITRARY CONTOUR

In the paper is considered a problem of geometrically nonlinear thin plates of arbitrary contour line. The problem is solved by the electric model method by using the system of difference equations.

A particular case is considered as this system and the appropriate electric diagram is applied to the geometrically linear problem. The electric analog is prepared for this case by assuming linearly variables force (normal pressure) and rigidity. The numerical example is solved by the field analyzer of the type «R». The results of the analysis are discussed.

INSTYTUT LOTNICTWA  
POLITECHNIKA RZESZOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 kwietnia 1975 r.*

## CAŁKA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO CZĄSTKOWEGO ROZWIĄDUJĄCEGO POWŁOKI WALCOWE

STANISŁAW BIELAK (GLIWICE)

### 1. Wstęp

W pracach autora [1, 2, 3, 4] rozwiązanie powłok prostokreślnych rozwijalnych zostało sprowadzone do jednego równania różniczkowego cząstkowego rzędu ósmego, ze względu na niewiadomą funkcję przemieszczeń promieniowych  $w^3$ . Przedstawione w tych pracach równanie różniczkowe rozwiązujące obejmuje dowolny sposób obciążenia i podparcia powłoki.

Przyjęty matematyczny model, opisujący pracę zgięciową powłoki, oparty został na liniowej teorii powłok odniesionej do ośrodka HOOKE'A.

Poszukiwane rozwiązanie będzie przedstawione w postaci sumy złożonej z całki ogólnej, rozwiązującej równanie różniczkowe jednorodne i całki szczególnej spełniającej równanie niejednorodne.

Całka szczególna może być w prosty sposób wyznaczona, gdyż jest ona rozwiązaniem stanu bezmomentowego, (por. pracę [1]).

Istotnym problemem przedstawionym w tej pracy będzie podanie rozwiązania części jednorodnej równania różniczkowego cząstkowego ósmego rzędu.

Równanie różniczkowe jednorodne opisuje pracę powłoki w stanie zgięciowym z dokładnością do wielkości małych wyższego rzędu — taką interpretację fizyczną można mu przypisać.

Wprowadzając pewne wielkości mające charakter tensorowy ze względu na sumowanie, mianowicie funkcje trygonometryczne, hiperboliczno-kołowe z odpowiednio dobranymi argumentami, całe ogólne równanie jednorodnego można nadać kształt szeregu hipertrygonometrycznego.

### 2. Ogólny układ równań

Opis geometryczny powłoki walcowej oraz związki geometryczne i fizyczne, podane są dla parametryzacji naturalnej w oparciu o pracę [1].

2.1. Opis geometryczny. Równanie wektorowe powierzchni środkowej powłoki walcowej

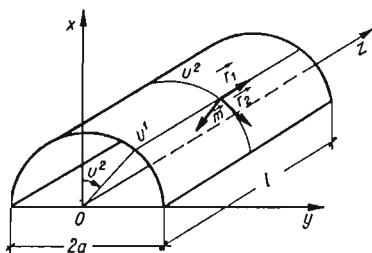
$$(2.1) \quad \vec{r} = a(\vec{i}\cos u^2 + \vec{j}\sin u^2) + u^1\vec{k},$$

gdzie  $u^1$ ,  $u^2$  oznaczają współrzędne krzywoliniowe na powierzchni, (rys. 1), przy czym  $u^1$  określa położenie punktu na tworzącej,  $u^2$  wskazuje tworzącą, na której leży punkt.

Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej, ich wyróżniki oraz ich krzywizny — gaussowska i średnia są następujące:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} g_{11} &= 1, & b_{11} &= 0, \\ g_{12} &= g_{21} = 0, & b_{12} &= b_{21} = 0, \\ g_{22} &= g = a^2, & b_{22} &= a, \\ & & b &= 0, \\ & & K &= 0, \\ & & H &= \frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju dla powierzchni walcowej są równe zeru.



Rys. 1

**2.2. Związki geometryczne powłoki.** Związek składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia błonowego przyjmuje postać

$$(2.3) \quad \begin{aligned} w_{,1}^1 &= \gamma_{11}, \\ a^2 w_{,1}^2 + w_{,2}^1 &= 2\gamma_{12}, \\ a^2 w_{,2}^2 - a w^3 &= \gamma_{22}. \end{aligned}$$

Przecinek użyty w wyrażeniach (2.3) oznacza odpowiednią pochodną względem zmiennej  $u^1$  lub  $u^2$ .

**2.3. Związki fizyczne.** Związki fizyczne wiążące naprężenia z odkształceniami, dla wersji uproszczonej mają postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} N^{ij} &= \bar{N}^{ij} + 6HM\hat{M}^{ij}, \\ M^{ij} &= \hat{M}^{ij} + \xi h^2 H \bar{N}^{ij}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{ij} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\gamma^{ij} + \nu g^{ij}A], \\ \hat{M}^{ij} &= -\frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)q^{ij} + \nu g^{ij}B], \end{aligned}$$

gdzie  $\xi$  oznacza parametr stały.

Niezmienniki  $A$  i  $B$  występujące w (2.5) są sumami

$$\begin{aligned} A &= g^{ij}\gamma_{ij}, \\ B &= g^{ij}q_{ij}, \end{aligned}$$



przy czym tensor odkształcenia błonowo-zgięciowego  $q_{ij}$  można zastąpić zależnością

$$(2.6) \quad q_{ij} = \frac{1}{2} w_{,ij}^3.$$

Dla powłoki walcowej związki (2.5) napiszemy w ujęciu dostosowanym do dalszego wykorzystania. Z pierwszego wyrażenia (2.5) wyznaczmy składowe tensora błonowego  $\gamma_{ij}$  w postaci następującej:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{2Eh} [\bar{N}^{11} - \nu a^2 \bar{N}^{22}], \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = \frac{1+\nu}{2Eh} a^2 \bar{N}^{12}, \\ \gamma_{22} &= \frac{a^2}{2Eh} [a^2 \bar{N}^{22} - \nu \bar{N}^{11}]. \end{aligned}$$

Wielkości  $\hat{M}^{ij}$  opisane drugim wyrażeniem (2.5), po podstawieniu (2.6), przyjmą postać

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \hat{M}^{11} &= -\frac{Eha^2}{2\alpha^4} \left[ w_{,11}^3 + \frac{\nu}{a^2} w_{,22}^3 \right], \\ \hat{M}^{12} &= \hat{M}^{21} = -\frac{Eh(1-\nu)}{2\alpha^4} w_{,12}^3, \\ \hat{M}^{22} &= -\frac{Eh}{2\alpha^4} \left[ \nu w_{,11}^3 + \frac{1}{a^2} w_{,22}^3 \right]. \end{aligned}$$

Wprowadzony w (2.8) parametr  $\alpha$  jest równy

$$(2.9) \quad \alpha = \sqrt{\frac{a}{2h}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}.$$

Tensory sił tnących  $Q^i$  napiszemy w oparciu o pracę [3] w postaci

$$(2.10) \quad \begin{aligned} Q^1 &= -\frac{Eha^2}{2\alpha^4} W_{,1} + \xi h^2 (H\bar{N}^{11})_{,i}, \\ Q^2 &= -\frac{Eh}{2\alpha^4} W_{,2} + \xi h^2 (H\bar{N}^{i2})_{,i}. \end{aligned}$$

Niezmiennik  $W$  występujący w (2.10) jest sumą

$$(2.11) \quad W = g^{ij} w_{,ij}^3.$$

Przejścia do współrzędnych fizycznych, to znaczy odniesionych do bazy jednostkowej dokonujemy za pomocą wzorów:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} N_{ij}^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} N^{ij}, & Q_i^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{1}{g^{ii}}} Q^i, \\ M_{i1}^{\bar{}} &= -\sqrt{\frac{gg^{11}}{g^{ii}}} M^{i2}, & M_{i2}^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{gg^{22}}{g^{ii}}} M^{i1}, \\ w_i^{\bar{}} &= \sqrt{g_{ii}} w^i, & w_3^{\bar{}} &= w^3, \\ P_i^{\bar{}} &= \sqrt{g_{ii}} P^i, & P_3^{\bar{}} &= P^3, \end{aligned}$$

(po  $ij$  nie sumować). Symbol « $\bar{\quad}$ » oznacza współrzędną fizyczną.

## 3. Rozwiązanie równania różniczkowego powłok walcowych

Równanie różniczkowe, rozwiązujące powłoki walcowe dowolnie obciążone i podparte posiada kształt (por. [4]).

$$(3.1) \quad g^{ii}g^{jj}g^{kk}W_{,kkjji} + 4\left(\frac{\alpha}{a}\right)^4 w^3_{,1111} = \frac{2a}{Eh} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^4 P.$$

Wielkości  $\alpha$  i  $W$  są opisane wyrażeniami (2.9), (2.11), a daną funkcję obciążeń  $P$  opisuje zależność

$$(3.2) \quad P = ag^{ii}g^{jj}P^3_{,jjii} + g^{ii}(P^1_{,1} - P^2_{,2})_{,ii} - (1+\nu)P^k_{,k11}.$$

Rozwiązanie równania (3.1) możemy przedstawić jako sumę złożoną z całki ogólnej  $\hat{w}^3$  równania jednorodnego i całki szczególnej  $\bar{w}^3$  równania niejednorodnego,

$$(3.3) \quad w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3.$$

Całka szczególna  $\bar{w}^3$  jest rozwiązaniem stanu bezmomentowego i może być w prosty sposób wyznaczona w oparciu o pracę [1]. Całkę ogólną równania (3.1) można przedstawić jako sumę odpowiednio dobranej szeregu złożonego z iloczynów utworzonych z funkcji hiperbolicznych i kołowych.

Sumę takiego szeregu trygonometrycznego, hiperboliczno-kołowego, można zapisać w ujęciu tensorowym, co będzie szczególnie korzystne dla przeprowadzenia potrzebnych obliczeń.

Wprowadźmy następujące wielkości mające charakter tensorowy ze względu na sumowanie.

Argumenty funkcji trygonometrycznych:

hiperbolicznej

$$(3.4) \quad z^k_H = \alpha \left[ \alpha^k \frac{u^1}{a} + \beta^k u^2 \right],$$

kołowej

$$(3.5) \quad z^l_K = \alpha \left[ m^l \frac{u^1}{a} + n^l u^2 \right].$$

Funkcje trygonometryczne:

hiperboliczne

$$(3.6) \quad H^i = \begin{cases} \text{sh} & \text{dla } i = 1 \\ \text{ch} & \text{dla } i = 2; \end{cases}$$

pochodna funkcji  $H^i$

$$(3.6') \quad \bar{H}^i = \begin{cases} \text{ch} & \text{dla } i = 1 \\ \text{sh} & \text{dla } i = 2; \end{cases}$$

kołowe

$$(3.7) \quad K^j = \begin{cases} \sin & \text{dla } j = 1 \\ \cos & \text{dla } j = 2; \end{cases}$$

pochodna funkcji  $K^j$

$$(3.7') \quad \bar{K}^j = \begin{cases} \cos & \text{dla } j = 1 \\ -\sin & \text{dla } j = 2. \end{cases}$$

Tensory trygonometryczne:

hiperboliczne

$$(3.8) \quad \begin{aligned} A_{mn}^{ik} &= H^i z_{H,1}^k, \\ \bar{A}_{mn}^{ik} &= \bar{H}^i z_{H,1}^k; \end{aligned}$$

kołowe

$$(3.9) \quad \begin{aligned} B_{mn}^{jl} &= K^j z_K^l, \\ \bar{B}_{mn}^{jl} &= \bar{K}^j z_K^l. \end{aligned}$$

Całce ogólnej równania (3.1) można nadać kształt

$$(3.10) \quad \hat{w}^3 = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{kl ij}^{mn} A_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl}.$$

Wskaźniki  $k, l, i, j$  mają znaczenie tensorowe i przyjmują wartości 1, 2, natomiast  $m, n$  są liczbami naturalnymi i oznaczają sumowanie nieskończone. Wielkości  $C_{kl ij}^{mn}$  są stałymi, które mogą być wyznaczone z warunków brzegowych.

W wyrażeniu (3.10) nie znamy wielkości  $\alpha^k$  i  $\beta_k$ , wiemy natomiast, że są one związane z  $m^l, n^l$ , lub odwrotnie. Możemy je obliczyć w dwojaki sposób: albo rozwiązując odpowiednie równanie algebraiczne ósmego stopnia uzyskane ze spełnienia tożsamościowego równania (3.1) po podstawieniu (3.10), albo też prościej wykorzystując związek siły  $\bar{N}^{22}$  z przemieszczeniem  $w^3$ . Okazuje się bowiem, że całka ogólna  $\hat{N}^{22}$  może być obliczona z części jednorodnej równania (3.1), jeśli w miejsce  $\hat{w}^3$  podstawimy  $\hat{N}^{22}$ . Możliwość taką uzyskamy, jeśli część jednorodną równania (3.1) odpowiednio zróżniczkujemy i utworzymy sumę, w której wykorzystamy związek (por. [3])

$$(3.11) \quad \hat{N}^{22} = \frac{aEh}{2\alpha^4} g^{ij} W_{,ij}.$$

Całka ogólna  $\hat{N}^{22}$  przyjmie więc postać wyrażenia (3.10) z dokładnością do stałej wyniesionej przed znak sumy.

Suma (2.11) po wykorzystaniu (3.10) przyjmie postać

$$(3.12) \quad W = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{kl ij}^{mn} [D^{kl} A_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl} + E^{kl} \bar{A}_{mn}^{ik} \bar{B}_{mn}^{jl}].$$

Wielkości  $D^{kl}$  i  $E^{kl}$  są równe

$$(3.13) \quad \begin{aligned} D^{kl} &= (z_{H,1}^k)^2 - (z_{K,1}^l)^2 + \frac{1}{a^2} [(z_{H,2}^k)^2 - (z_{K,2}^l)^2], \\ E^{kl} &= 2 \left[ z_{H,1}^k z_{K,1}^l + \frac{1}{a^2} z_{H,2}^k z_{K,2}^l \right]. \end{aligned}$$

Obliczając odpowiednie pochodne z wyrażeń (3.4) i (3.5) możemy napisać

$$(3.14) \quad \begin{aligned} D^{kl} &= \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 [(\alpha^k)^2 + (\beta^k)^2 - (m^l)^2 - (n^l)^2], \\ E^{kl} &= 2\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 [\alpha^k m^l + \beta^k n^l]. \end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do obliczenia sumy

$$(3.15) \quad \bar{W} = g^{lj} W_{,ij}.$$

Różniczkując wyrażenie (3.12) względem odpowiednich zmiennych i wykorzystując wielkości (3.13), otrzymamy

$$(3.16) \quad \bar{W} = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{kl ij}^{mn} [(D^{kl})^2 - (E^{kl})^2] A_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl} + 2D^{kl} E^{kl} \bar{A}_{mn}^{ik} \bar{B}_{mn}^{jl}.$$

Podstawiając (3.16) do (3.11) oraz doprowadzając do tożsamości z rozwiązaniem w kształcie (3.10) otrzymamy

$$(3.17) \quad \begin{aligned} D^{kl} &= 0, \\ \Delta N^{22} &= -\frac{aEh}{2\alpha^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} (E^{kl})^2 C_{kl ij}^{mn} A_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl}, \end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu (3.14) dojdziemy do wyrażenia na siłę  $\Delta N^{22}$ :

$$(3.18) \quad \Delta N^{22} = -\frac{2Eh}{a^3} \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{kl ij}^{mn} A_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl}$$

oraz uzyskamy układ równań, z którego wyznaczmy wielkości  $\alpha^k$  i  $\beta^k$ , mianowicie

$$(3.19) \quad \begin{aligned} (\alpha^k)^2 + (\beta^k)^2 - (m^l)^2 - (n^l)^2 &= 0, \\ \alpha^k m^l + \beta^k n^l &= \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie  $\varepsilon$  może przybierać wartości  $\pm 1$ .

Przyjmując, dla uproszczenia zapisu w dalszych rozważaniach,  $m^l = m$  i  $n^l = n$ , będziemy mogli rozwiązanie układu równań (3.19) podać w postaci

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \alpha^{kl} &= \varepsilon_k \frac{m}{m^2 + n^2} - \delta_l n \sqrt{1 + \frac{n^2 - 1}{m^2(m^2 + n^2)}}, \\ \beta^{kl} &= \varepsilon_k \frac{n}{m^2 + n^2} + \delta_l m \sqrt{1 + \frac{n^2 - 1}{m^2(m^2 + n^2)}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.21) \quad \varepsilon_k = \begin{cases} +1 & \text{dla } k = 1 \\ -1 & \text{dla } k = 2, \end{cases} \quad \delta_l = \begin{cases} +1 & \text{dla } l = 1 \\ -1 & \text{dla } l = 2. \end{cases}$$

Jak więc widzimy, wielkości tensorowe  $\alpha^k$ ,  $\beta^k$  dla rozwiązania ogólnego muszą przyjąć wartości tensorów o walencji 2, aby wyczerpać wszystkie możliwe rozwiązania, czyli  $\alpha^k$  przejdzie w  $\alpha^{kl}$ , a  $\beta^k$  przejdzie w  $\beta^{kl}$ .

W niektórych szczególnych przypadkach, na przykład dla powłoki zamkniętej, uzyskamy prostsze rozwiązanie, jeśli przyjmiemy  $\beta^k = 0$ . Przyjęcie takie prowadzi do związku między wielkościami  $m^l$  i  $n$ . Przy tym założeniu rozwiązanie układu równań (3.19) daje

$$(3.22) \quad \alpha^k = \varepsilon_k n \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} + 1 \right]},$$

$$m^l = \delta_l n \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} - 1 \right]}.$$

Przyjmując w wyrażeniach (3.22)  $n = 0$ , otrzymamy rozwiązanie dla powłoki walcowej obciążonej osiowo-symetrycznie

$$(3.23) \quad \alpha^k = \varepsilon_k, \quad m^l = \delta_l.$$

#### 4. Zestawienie wyników

4.1. Rozwiązanie ogólne. Argumenty funkcji trygonometrycznych:

$$z_H^{kl} = \alpha \left[ \alpha^{kl} \frac{u^1}{a} + \beta^{kl} u^2 \right], \quad z_K^l = \alpha \left[ m \frac{u^1}{a} + n u^2 \right].$$

Tensory trygonometryczne:

$$A_{mn}^{ikl} = H^i z_H^{kl}, \quad B_{mn}^j = K^j z_K^l,$$

$$\bar{A}_{mn}^{ikl} = \bar{H}^i z_H^{kl}, \quad \bar{B}_{mn}^j = \bar{K}^j z_K^l.$$

Całka ogólna

$$\hat{w}^3 = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{kl ij}^{mn} A_{mn}^{ikl} B_{mn}^j.$$

Całka poszukiwana

$$w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3.$$

4.2. Rozwiązanie szczególne — powłoka zamknięta. Argumenty funkcji trygonometrycznych:

$$z_H^k = \alpha \alpha^k \frac{u^1}{a},$$

$$z_K^l = \alpha \left[ m^l \frac{u^1}{a} + n u^2 \right].$$

Tensory trygonometryczne:

$$A_n^{ik} = H^i z_H^k, \quad B_n^{jl} = K^j z_K^l,$$

$$\bar{A}_n^{ik} = \bar{H}^i z_H^k, \quad \bar{B}_n^{jl} = \bar{K}^j z_K^l.$$

Całka ogólna

$$\hat{w}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} C_{kl ij}^n A_n^{ik} B_n^{jl}.$$

Całka poszukiwana

$$w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3.$$

## Literatura cytowana w tekście

1. St. BIELAK, *Ogólna teoria powłok prostokreślnych pracujących w stanie zgięciowym*, Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, Budownictwo, 33 (1973).
2. St. BIELAK, *A general scheme of equations covering rectilinearly drawn shell structures*, Zastosowania Matematyki, 14, 2 (1974).
3. St. BIELAK, *Solution of a general system of equations of rectilinear evolvable shells in the bending state*, Bull. de l'Acad. Polon. des Sci. Sér. des sci. techn., 22, 2 (1974).
4. St. BIELAK, *Kształt równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powłok prostokreślnych rozwijalnych*, Mech. Teor. i Stos., 12, 3 (1974).

## Р е з ю м е

ИНТЕГРАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ  
ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе представлен интеграл дифференциального уравнения восьмого порядка, которое является разрешающим уравнением для цилиндрических оболочек.

Решение получено в виде двух интегралов: частного, отвечающего безмоментному состоянию, и общего, отвечающего моментному состоянию. Найденный интеграл дает возможность решать аналитически цилиндрические оболочки, работающие на изгиб, при любой нагрузке и любых условиях опирания. Частным случаем приведенного решения является расчет цилиндрических оболочек, замкнутых по всему периметру.

## S u m m a r y

## THE INTEGRAL OF A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS

The paper shows the integral of the eighth-order partial differential equation solving the problem of cylindrical shells. The solution obtained is composed of two integrals: the particular integral, equivalent to the momentless work, and the general integral describing the moment work.

The integral derived solves the general equation of cylindrical shells working in moment state under arbitrary loads and clamped at the edges.

The problem of closed cylindrical shells represents a particular case of the solution given above.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1975 r.*

## ITERACYJNA METODA WYZNACZANIA CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH I AMPLITUD UKŁADU O SKOŃCZONEJ LICZBIE STOPNI SWOBODY

BOHDAN KOWALCZYK, TADEUSZ RATAJCZAK (GDAŃSK)

### 1. Uwagi ogólne

Jednym z najbardziej istotnych, a jednocześnie pracochłonnych, zagadnień numerycznej analizy drgań układów liniowych o dużej liczbie stopni swobody jest wyznaczenie częstości drgań własnych i amplitud układu drgającego.

Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie to sprowadza się do wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych macierzy układu.

Metody wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych macierzy można w zasadzie podzielić na dwie grupy [5]: a) metody bezpośrednie, b) metody iteracyjne.

Metody bezpośrednie (dokładne) pozwalają na znalezienie dokładnego rozwiązania po wykonaniu skończonej liczby działań, przy czym liczba tych działań zależy od rodzaju metody obliczeniowej, a nie od żądanej dokładności rozwiązania.

Przy stosowaniu metod bezpośrednich wyznaczamy współczynniki tzw. wielomianu charakterystycznego macierzy, a następnie znajdujemy pierwiastki tego wielomianu. Wektory własne wyznaczamy rozwiązując układy jednorodnych równań liniowych, wyznaczone przez macierz współczynników i każdą wartość własną [4].

Metody bezpośrednie, praktycznie biorąc, nadają się do rozpatrywania układów o małej liczbie stopni swobody.

Przy badaniu układów o dużej liczbie stopni swobody stosujemy z reguły metody iteracyjne [5].

W iteracyjnych metodach wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych za początkowe przybliżenie rozwiązania przyjmujemy pewien parametr  $p^{(0)}$  (wektor własny lub wartość własną) i według określonego schematu tworzymy ciąg  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}, \dots$  tak, aby wielkość  $p^{(n+1)}$  lepiej aproksymowała szukane rozwiązanie od wielkości  $p^{(n)}$ .

Wynika stąd, że w metodach iteracyjnych liczba wykonywanych działań zależy od wymaganej dokładności rozwiązania.

Przedstawiona w niniejszym opracowaniu metoda iteracyjnego wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych może znaleźć zastosowanie np. w metodzie odkształcalnych elementów skończonych, metodzie hybrydowej (jednoczesnego zastosowania sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych) oraz w metodzie sztywnych elementów skończonych w przypadku, gdy osie układu odniesienia, w kierunku których odmierzane są współrzędne uogólnione, nie pokrywają się z głównymi osiami bezwładności SES [2, 3, 6, 7, 8].

Omawiana metoda jest metodą ogólną w tym sensie, że nie stawiamy innych założeń odnośnie macierzy sztywności  $\tilde{\mathbf{K}}$  i macierzy bezwładności  $\tilde{\mathbf{M}}$  jak tylko takich, aby macierze te były symetryczne i dodatnio określone (co wynika z założeń fizycznych).

Jak wiadomo [1], drgania swobodne zachowawczego układu holonomicznego i skleronomicznego o  $n$  stopniach swobody można opisać za pomocą równań Lagrange'a drugiego rodzaju

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

W równaniach tych oznaczono:

$\tilde{q}_i$  uogólniona współrzędna,

$\dot{\tilde{q}}_i$  pochodna względem czasu uogólnionej współrzędnej,

$T$  energia kinetyczna układu dana wzorem

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{m}_{ij} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j$$

lub

$$(3) \quad T = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}},$$

gdzie

$$(4) \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \text{col}(\dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2, \dots, \dot{\tilde{q}}_n),$$

$$(5) \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & \dots & \tilde{m}_{1n} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} & \dots & \tilde{m}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{m}_{n1} & \tilde{m}_{n2} & \dots & \tilde{m}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz symetryczną  $\tilde{\mathbf{M}}$  nazywamy macierzą bezwładności układu.  $V$  — energia potencjalna układu dana wzorem

$$(6) \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{k}_{ij} \tilde{q}_i \tilde{q}_j$$

lub

$$(7) \quad V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}},$$

gdzie

$$(8) \quad \tilde{\mathbf{q}} = \text{col}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n),$$

$$(9) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \dots & \tilde{k}_{1n} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \dots & \tilde{k}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{k}_{n1} & \tilde{k}_{n2} & \dots & \tilde{k}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz symetryczną  $\tilde{\mathbf{K}}$  nazywamy macierzą sztywności układu.



Można wykazać [1], że obie macierze  $\tilde{\mathbf{M}}$  i  $\tilde{\mathbf{K}}$  są macierzami określonymi dodatnio. Ponieważ

$$(10) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} = \tilde{\mathbf{M}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} \right) = \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad \frac{\partial V}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}},$$

więc podstawiając związki (10) do (1) otrzymujemy

$$(11) \quad \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Rozwiązań szczególnych układu (11) szukać będziemy w postaci

$$(12) \quad \tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{q} \sin(\omega t + \varphi).$$

Po zróżniczkowaniu (12)

$$(13) \quad \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \mathbf{q} \sin(\omega t + \varphi)$$

i podstawieniu (13) do (11) otrzymujemy:

$$(14) \quad \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}})\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

lub, ponieważ ostatnia równość powinna zachodzić dla każdego  $t$ , to związek (14) możemy napisać w postaci

$$(15) \quad (\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}})\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

lub

$$(16) \quad \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{q}.$$

## 2. Sprowadzenie równania (16) do postaci standardowej

Zgodnie z twierdzeniem BANACHIEWICZA symetryczne macierze  $\tilde{\mathbf{K}}$  oraz  $\tilde{\mathbf{M}}$  można przedstawić w postaci

$$(17) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1,$$

$$(18) \quad \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1,$$

gdzie macierze  $\mathbf{H}_1$  i  $\mathbf{G}_1$  są górnymi macierzami trójkątnymi.

Podstawiając (17) i (18) do związku (16) mamy

$$(19) \quad \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{q}$$

lub

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{q} = \omega^2 (\mathbf{H}_1^T)^{-1} \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{q},$$

względnie

$$(20) \quad \mathbf{H}_1 \mathbf{q} = \omega^2 (\mathbf{H}_1^{-1})^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{q}.$$

Oznaczmy

$$(21) \quad \mathbf{x} = \mathbf{H}_1 \mathbf{q},$$

stąd

$$(22) \quad \mathbf{q} = \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{x}.$$

Podstawiając (21) i (22) do związku (20) otrzymujemy

$$(23) \quad \mathbf{x} = \omega^2 (\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1})^T (\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1}) \mathbf{x}.$$

Oznaczmy

$$(24) \quad \mathbf{A} = (\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1})^T (\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1}).$$

Ze związków (23) i (24) mamy

$$(25) \quad \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{A} \mathbf{x}$$

lub

$$(26) \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

gdzie

$$(27) \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}.$$

### 3. Algorytm metody iteracyjnej

W zagadnieniu (26) szukamy  $\mathbf{x}$  oraz  $\lambda$ . Ponieważ: macierz  $\mathbf{A}$  jest kwadratową macierzą rzeczywistą stopnia  $n$ ;  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ; macierz  $\mathbf{A}$  jest macierzą dodatnio określoną, to wynika stąd, że wszystkie wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  są rzeczywiste i dodatnie.

Oznaczmy te wartości własne przez  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  i niech

$$(28) \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0.$$

Oznaczmy

$$(29) \quad \mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1} = \mathbf{B}.$$

Macierz  $\mathbf{A}$  na podstawie (24) i (29) możemy przedstawić w postaci

$$(30) \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B},$$

gdzie  $\mathbf{B}$  jest górną macierzą trójkątną.

Macierze  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  mają te same wartości własne. Ze względu na symetrię macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  i  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  te wartości własne są rzeczywiste, zaś ze względu na dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{A}$  są one dodatnie.

Oznaczmy wartości własne macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  (lub  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ ) przez

$$(31) \quad k_1^2, k_2^2, k_3^2, \dots, k_n^2.$$

Mamy więc

$$(32) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_i = k_i^2 \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Określmy dla wszystkich  $k_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) i odpowiadającym tym wartościom własnym ortonormalnym wektorom  $\mathbf{u}_i$  nowe wektory  $\mathbf{q}_i$  przy pomocy zależności

$$(33) \quad \mathbf{B} \mathbf{u}_i = k_i \mathbf{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mnożąc lewostronnie związek (33) przez  $\mathbf{B}^T$  mamy

$$(34) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_i = k_i \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

lub na podstawie (32)

$$k_i \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i = k_i^2 \mathbf{u}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

stąd

$$(35) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i = k_i \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mnożąc lewostronnie związek (35) przez macierz  $\mathbf{B}$  mamy

$$(36) \quad \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i = k_i \mathbf{B} \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Podstawiając (33) do (36) otrzymujemy

$$(37) \quad \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i = k_i^2 \mathbf{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ostatni związek świadczy, że zdefiniowane związkami (33) wektory  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) są wektorami własnymi macierzy  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ .

Wektory  $\mathbf{q}_i$  tworzą układ ortonormalny wektorów.

Istotnie, dla dwóch liczb  $k_i \neq k_j$  mamy na podstawie (32) i (33)

$$(38) \quad \begin{aligned} k_i k_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j &= \mathbf{u}_i^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_j, \\ k_i k_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j &= \mathbf{u}_i^T k_j^2 \mathbf{u}_j, \\ k_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j &= k_j \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j. \end{aligned}$$

Stąd, ze względu na ortonormalność wektorów  $\mathbf{u}_i$ , mamy:

$$(39) \quad \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j, \\ 1 & \text{dla } i = j. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy więc dwa układy wektorów, z których każdy składa się z  $n$  ortonormalnych wektorów  $\mathbf{u}_i$  oraz  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Utwórzmy dwie macierze  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{Q}$ , których kolumnami są odpowiednio wektory  $\mathbf{u}_i$  oraz  $\mathbf{q}_i$ :

$$(40) \quad \begin{aligned} \mathbf{U} &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n], \\ \mathbf{Q} &= [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]. \end{aligned}$$

Za pomocą macierzy  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{Q}$  oraz macierzy diagonalnej

$$(41) \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

możemy związki (33) i (35) przedstawić w notacji macierzowej:

$$(42) \quad \mathbf{B} \mathbf{U} = \mathbf{Q} \mathbf{K},$$

$$(43) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{Q} = \mathbf{U} \mathbf{K}.$$

Utwórzmy następujący ciąg macierzy:

$$\begin{aligned}
 (44) \quad & \mathbf{B} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_1, \\
 & \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{R}_1, \\
 & \mathbf{B} \mathbf{U}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{T}_2, \\
 (45) \quad & \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \\
 (46) \quad & \mathbf{B} \mathbf{U}_{p-1} = \mathbf{Q}_p \mathbf{T}_p, \\
 & \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_p = \mathbf{U}_p \mathbf{R}_p,
 \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{Q}_i$  oraz  $\mathbf{U}_i$  są macierzami ortogonalnymi, zaś  $\mathbf{T}_i$  oraz  $\mathbf{R}_i$  są górnymi macierzami trójkątnymi o dodatnich elementach diagonalnych.

Rozkład podany w związkach (44)—(46) jest zawsze możliwy, gdyż lewe strony tych związków są (na każdym kroku iteracyjnym) znanymi macierzami, zaś wiadomo, że każda rzeczywista, dodatnio określona macierz może być przedstawiona jednoznacznie w postaci iloczynu macierzy ortogonalnej i górnej macierzy trójkątnej o dodatnich elementach diagonalnych.

W dalszej części pracy wykażemy, że jeżeli  $p \rightarrow \infty$ , to  $\mathbf{U}_p \rightarrow \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{T}_p$ ,  $\mathbf{R}_p \rightarrow \mathbf{K}$  oraz

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \mathbf{U} &= \mathbf{Q} \mathbf{K}, \\
 \mathbf{B}^T \mathbf{Q} &= \mathbf{U} \mathbf{K},
 \end{aligned}$$

gdzie elementy diagonalne  $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$  macierzy  $\mathbf{K} = \text{diag} \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  są pierwiastkami kwadratowymi wartości własnych  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  lub macierzy  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ , zaś kolumny macierzy  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{Q}$  są wektorami własnymi macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  i macierzy  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ .

#### 4. Metodyka obliczeń w przypadku kolejnego wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych

##### 4.1. Oznaczenia.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q}_i^{(ph)} \\ \mathbf{u}_i^{(ph)} \end{array} \right\} i\text{-ta kolumna (wektor) macierzy} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_p \text{ otrzymana przy } p\text{-tej} \\ \text{iteracji } h\text{-tej wartości} \\ \text{własnej macierzy } \mathbf{A}, \\ \mathbf{Q}_p \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c}_i^{(ph)} \\ \mathbf{f}_i^{(ph)} \end{array} \right\} i\text{-ta kolumna (wektor) macierzy} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_p \text{ otrzymana przy } p\text{-tej} \\ \text{iteracji } h\text{-tej wartości} \\ \text{własnej } \lambda_h, \\ \mathbf{F}_p \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{s}_i^{(ph)} \\ \mathbf{g}_i^{(ph)} \end{array} \right\} \text{wektory pomocnicze dla wyzna-} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_i^{(ph)} \\ \mathbf{u}_i^{(ph)} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} t_{ij}^{(ph)} \\ r_{ij}^{(ph)} \end{array} \right\} \text{elementy górnych macierzy} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_p, \\ \mathbf{R}_p, \end{array} \right.$$

$\mathbf{e}^{(h)} = \text{col} \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$  wektor kolumnowy, w którym jedynka występuje na miejscu  $h$  — tym.

## 4.2. Wzory.

$$4.2.1. \quad \mathbf{c}_i^{(p-1, h)} = \mathbf{B}\mathbf{u}_i^{(p-1, h)}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.2. \quad \mathbf{s}_j^{(ph)} = \mathbf{c}_j^{(p-1, h)} - \sum_{l=1}^{j-1} v_{lj}^{(ph)} \mathbf{s}_l^{(ph)}, \quad (1 \leq j \leq h \leq n).$$

$$4.2.3. \quad d_i^{(ph)} = \sqrt{(\mathbf{s}_i^{(ph)}, \mathbf{s}_i^{(ph)})}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.4. \quad \mathbf{q}_i^{(ph)} = \frac{\mathbf{s}_i^{(ph)}}{d_i^{(ph)}}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.5. \quad v_{lj}^{(ph)} = \frac{(\mathbf{c}_j^{(p-1, h)}, \mathbf{s}_l^{(ph)})}{(\mathbf{s}_l^{(ph)}, \mathbf{s}_l^{(ph)})}, \quad (1 \leq j \leq h \leq n, l < j),$$

$$v_{jj}^{(ph)} = 1, \quad v_{lj}^{(ph)} = 0, \quad \text{gd}y \ l > j.$$

$$4.2.6. \quad t_{ii}^{(ph)} = d_i^{(ph)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$4.2.7. \quad t_{ij}^{(ph)} = v_{ij}^{(ph)} d_i^{(ph)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n, \quad i < j).$$

$$4.2.8. \quad \mathbf{f}_i^{(p-1, h)} = \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i^{(ph)}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.9. \quad \tilde{\mathbf{g}}_j^{(ph)} = \mathbf{f}_j^{(p-1, h)} - \sum_{l=1}^{j-1} w_{lj}^{(ph)} \tilde{\mathbf{g}}_l^{(ph)}, \quad (1 \leq j \leq h \leq n).$$

$$4.2.10. \quad \tilde{d}_i^{(ph)} = \sqrt{(\tilde{\mathbf{g}}_i^{(ph)}, \tilde{\mathbf{g}}_i^{(ph)})}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.11. \quad \mathbf{u}_i^{(ph)} = \frac{\tilde{\mathbf{g}}_i^{(ph)}}{\tilde{d}_i^{(ph)}}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.12. \quad w_{lj}^{(ph)} = \frac{(\mathbf{f}_j^{(p-1, h)}, \tilde{\mathbf{g}}_l^{(ph)})}{(\tilde{\mathbf{g}}_l^{(ph)}, \tilde{\mathbf{g}}_l^{(ph)})}, \quad (1 \leq j \leq h \leq n, \quad l < j),$$

$$w_{jj}^{(ph)} = 1, \quad w_{lj}^{(ph)} = 0, \quad \text{gd}y \ l > j.$$

$$4.2.13. \quad r_{ii}^{(ph)} = \tilde{d}_i^{(ph)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$4.2.14. \quad r_{ij}^{(ph)} = w_{ij}^{(ph)} \tilde{d}_i^{(ph)}, \quad (j = 1, 2, \dots; i < j).$$

## 4.3. Przypadki szczególne.

4.3.1. Przy wyznaczaniu wartości własnej  $\lambda_h$  jako wektor początkowy wybieramy  $\mathbf{e}^{(h)}$  tzn.  $\mathbf{u}_h^{(ph)} = \mathbf{e}^{(h)}$ .

4.3.2. Jeżeli  $p \rightarrow \infty$ , to  $\mathbf{u}_h^{(ph)} \rightarrow \mathbf{u}_h$ ,  $\mathbf{q}_h^{(ph)} \rightarrow \mathbf{q}_h$ ,  $t_{hh}^{(ph)} \rightarrow k_h$ ,  $t_{ij}^{(ph)} \rightarrow 0$  ( $i < j$ ),  $r_{hh}^{(ph)} \rightarrow k_h$ ,  $r_{ij}^{(ph)} \rightarrow 0$  ( $i < j$ ), gdzie  $k_h$  jest pierwiastkiem kwadratowym z  $\lambda_h$  — wartości własnej macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  i  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ , zaś  $\mathbf{u}_h$  jest wektorem własnym macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{q}_h$  — wektorem własnym macierzy  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda_h$ .

4.3.3. Przy iteracji  $h$ -tej wartości własnej przyjmujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{(p1)} &= \mathbf{u}_i^{(p2)} = \dots = \mathbf{u}_i^{(p, h-1)} = \mathbf{u}_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ \mathbf{s}_i^{(p1)} &= \mathbf{s}_i^{(p2)} = \dots = \mathbf{s}_i^{(p, h-1)} = \mathbf{s}_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1). \\ t_{ii}^{(p1)} &= t_{ii}^{(p2)} = \dots = t_{ii}^{(p, h-1)} = t_{ii}^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ t_{ij}^{(p1)} &= t_{ij}^{(p2)} = \dots = t_{ij}^{(p, h-1)} = t_{ij}^{(ph)}, & (i < j, \quad j = 1, 2, \dots, h-1), \\ d_i^{(p1)} &= d_i^{(p2)} = \dots = d_i^{(p, h-1)} = d_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ \mathbf{q}_i^{(p1)} &= \mathbf{q}_i^{(p2)} = \dots = \mathbf{q}_i^{(p, h-1)} = \mathbf{q}_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ \tilde{\mathbf{g}}_i^{(p1)} &= \tilde{\mathbf{g}}_i^{(p2)} = \dots = \tilde{\mathbf{g}}_i^{(p, h-1)} = \tilde{\mathbf{g}}_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ r_i^{(p1)} &= r_i^{(p2)} = \dots = r_i^{(p, h-1)} = r_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ d_i^{(ph)} &= d_i^{(p2)} = \dots = d_i^{(p, h-1)} = d_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1). \end{aligned}$$

### 5. Dowód zbieżności metody iteracyjnej

Z pierwszego równania w związku (46) mamy

$$(47) \quad \mathbf{T}_p = \mathbf{Q}_p^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_{p-1}, \quad (\mathbf{U}_0 \equiv \mathbf{E}),$$

z drugiego równania w związku (46)

$$(48) \quad \mathbf{R}_p = \mathbf{U}_p^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_p.$$

5.1 Wykażemy indukcyjnie, że słuszny jest wzór

$$(49) \quad (\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p)(\mathbf{R}_{p-1} \mathbf{T}_{p-1}) \dots (\mathbf{R}_2 \mathbf{T}_2)(\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1) = \mathbf{U}_p^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^p.$$

S p r a w d z a m y słuszność wzoru (49) dla  $p = 1$ .

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1 = \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{B}.$$

Z a k ł a d a m y, że wzór (49) jest słuszny dla liczby naturalnej  $r > 1$ , tzn.

$$(50) \quad (\mathbf{R}_r \mathbf{T}_r)(\mathbf{R}_{r-1} \mathbf{T}_{r-1}) \dots (\mathbf{R}_2 \mathbf{T}_2)(\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1) = \mathbf{U}_r^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^r.$$

**Teza.** Wzór (49) jest słuszny dla liczby naturalnej  $r+1$ , tzn.

$$(51) \quad (\mathbf{R}_{r+1} \mathbf{T}_{r+1})(\mathbf{R}_r \mathbf{T}_r) \dots (\mathbf{R}_2 \mathbf{T}_2)(\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1) = \mathbf{U}_{r+1}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{r+1}.$$

**Dowód.** Z (47), (48) i (50) mamy:

$$(52) \quad (\mathbf{R}_{r+1} \mathbf{T}_{r+1}) \mathbf{U}_r^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^r = \mathbf{U}_{r+1}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{r+1} \mathbf{Q}_{r+1}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_r \mathbf{U}_r^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^r = \\ = \mathbf{U}_{r+1}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^r = \mathbf{U}_{r+1}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{r+1}.$$

A więc na podstawie zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że wzór jest słuszny dla każdej liczby naturalnej  $p \geq 1$ .

5.2. Oznaczmy

$$(53) \quad \mathbf{S}^{(p)} = \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p, \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Ponieważ  $\mathbf{R}_p$  i  $\mathbf{T}_p$  są górnymi macierzami trójkątnymi, więc i macierz  $\mathbf{S}^{(p)}$  jest górną macierzą trójkątną.

Używając oznaczeń (53) możemy zapisać związek (49) w postaci

$$(54) \quad \mathbf{S}^{(p)}\mathbf{S}^{(p-1)} \dots \mathbf{S}^{(2)}\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{U}_p^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^p$$

lub oznaczając

$$(55) \quad \begin{aligned} \mathbf{S}^{(p)}\mathbf{S}^{(p-1)} \dots \mathbf{S}^{(2)}\mathbf{S}^{(1)} &= \boldsymbol{\sigma}_p, \\ \mathbf{U}_p^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^p &= \boldsymbol{\sigma}_p, \end{aligned}$$

to znaczy

$$(56) \quad (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^p = \mathbf{U}_p \boldsymbol{\sigma}_p.$$

W związku (56) macierz  $\mathbf{U}_p$  jest macierzą ortogonalną zaś macierz  $\boldsymbol{\sigma}_p$  górną macierzą trójkątną.

Związek (56), na podstawie (30), możemy zapisać w postaci

$$(57) \quad \mathbf{A}^p = \mathbf{U}_p \boldsymbol{\sigma}_p.$$

Ze względu na fakt, iż wszystkie wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  są różne — macierz ta ma tylko liniowe dzielniki elementarne — a więc istnieje takie przekształcenie przez podobieństwo, że

$$(58) \quad \mathbf{A}^p = \mathbf{X} \text{diag} \{ \lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p \} \mathbf{X}^{-1}.$$

Oznaczmy

$$(59) \quad \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \} = \mathbf{D},$$

$$(60) \quad \mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{H},$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą ortogonalną, zaś  $\mathbf{H}$  — górną trójkątną,

$$(61) \quad \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{W},$$

gdzie  $\mathbf{L}$  jest macierzą dolną trójkątną o elementach  $l_{ii} = 1$ , zaś  $\mathbf{W}$  — macierzą górną trójkątną.

Ze związku (58), na podstawie (59), (60) i (61), mamy

$$\mathbf{A}^p = \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{D}^p\mathbf{L}\mathbf{W}$$

lub

$$(62) \quad \mathbf{A}^p = \mathbf{C}\mathbf{H}(\mathbf{D}^p\mathbf{L}\mathbf{D}^{-p})\mathbf{D}^p\mathbf{W}.$$

Jest jasne, że macierz

$$(63) \quad \mathbf{G} = \mathbf{D}^p\mathbf{L}\mathbf{D}^{-p}$$

jest macierzą dolną trójkątną o elementach:

$$(64) \quad \begin{aligned} g_{ii} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ g_{ij} &= l_{ij} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right), \quad \text{dla } i > j, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Macierz  $\mathbf{G}$  możemy więc zapisać w postaci

$$(65) \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} + \mathbf{F}_p,$$

gdzie macierz  $F_p$  jest macierzą istotnie dolną trójkątną i taką, że

$$(66) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} F_p = 0,$$

gdyż na podstawie (43)

$$(67) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^p = 0 \text{ dla } i > j, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Ze związku (62) mamy na podstawie (63) i (65)

$$A^p = CH(E + F_p)D^pW = C(H + HF_p)D^pW = C(E + HF_pH^{-1})HD^pW$$

lub

$$(68) \quad A^p = C(E + Z_p)HD^pW,$$

gdzie

$$(69) \quad Z_p = HF_pH^{-1};$$

oraz na podstawie (66)

$$(70) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} Z_p = 0.$$

Macierz  $E + Z_p$  przedstawmy w postaci

$$(71) \quad E + Z_p = \tilde{C}_p \tilde{H}_p,$$

gdzie  $\tilde{C}_p$  jest macierzą ortogonalną, zaś  $\tilde{H}_p$  — macierzą górną trójkątną.

Na podstawie (70) i (71) mamy:

$$(72) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{C}_p = E,$$

$$(73) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{H}_p = E.$$

Ze związków (68) i (71) mamy:

$$(74) \quad A^p = (C\tilde{C}_p)(\tilde{H}_pHD^pW).$$

Macierz  $C\tilde{C}_p$  jest macierzą ortogonalną, macierz  $\tilde{H}_pHD^pW$  jest macierzą górną trójkątną.

Ponieważ rozkład macierzy  $A^p$  na iloczyn macierzy ortogonalnej i macierzy górnej trójkątnej jest jednoznaczny, więc na podstawie (57) mamy:

$$(75) \quad C\tilde{C}_p = \tilde{U}_p,$$

$$(76) \quad \tilde{H}_pHD^pW = \sigma_p.$$

Ze związków (75) i (72) mamy

$$(77) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} U_p = C.$$

**Wniosek 1.** Przy  $p \rightarrow \infty$  istnieje skończona granica ciągu macierzy  $\{U_p\}$ .

Ze związku (49) mamy

$$(78) \quad (R_p T_p)(R_{p-1} T_{p-1}) \dots (R_2 T_2)(R_1 T_1) = U_p^{-1} A^p$$

oraz

$$(79) \quad (R_{p-1} T_{p-1}) \dots (R_2 T_2)(R_1 T_1) = U_{p-1}^{-1} A^{p-1}.$$



Stąd z (78) i (79) wynika, że

$$(\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p) \mathbf{U}_{p-1}^{-1} \mathbf{A}^{p-1} = \mathbf{U}_p^{-1} \mathbf{A}^p$$

lub

$$(\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p) \mathbf{U}_{p-1}^{-1} = \mathbf{U}_p^{-1} \mathbf{A},$$

to znaczy

$$(80) \quad \mathbf{U}_p^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}_{p-1} = \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p.$$

**Wniosek 2.** W granicy, przy  $p \rightarrow \infty$  macierz  $\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p$  jest ortogonalnie podobna do macierzy  $\mathbf{A}$ .

Ze wzorów (47) i (48) mamy

$$\mathbf{T}_p^T \mathbf{R}_p^T = \mathbf{U}_{p-1}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_p \mathbf{Q}_p^T \mathbf{B} \mathbf{U}_p,$$

a więc

$$(81) \quad \mathbf{T}_p^T \mathbf{R}_p^T = \mathbf{U}_{p-1}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{U}_p,$$

to znaczy

$$(82) \quad \mathbf{T}_p^T \mathbf{R}_p^T = \mathbf{U}_{p-1}^T \mathbf{A} \mathbf{U}_p$$

lub

$$(83) \quad (\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p)^T = \mathbf{U}_{p-1}^T \mathbf{A} \mathbf{U}_p.$$

Gdy  $p \rightarrow \infty$

$$(84) \quad (\mathbf{R} \mathbf{T})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}.$$

**Wniosek 3.** W granicy, przy  $p \rightarrow \infty$  macierz  $(\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p)^T$  jest ortogonalnie podobna do macierzy  $\mathbf{A}$ .

Ze związku (53) mamy, że

$$(85) \quad \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p = \mathbf{S}^{(p)},$$

gdzie

$$(86) \quad \mathbf{S}^{(p)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(p)} & s_{12}^{(p)} & s_{13}^{(p)} & s_{14}^{(p)} & \dots & s_{1n}^{(p)} \\ 0 & s_{22}^{(p)} & s_{23}^{(p)} & s_{24}^{(p)} & \dots & s_{2n}^{(p)} \\ 0 & 0 & s_{33}^{(p)} & s_{34}^{(p)} & \dots & s_{3n}^{(p)} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^{(p)} & \dots & s_{4n}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{nn}^{(p)} \end{bmatrix}.$$

Na podstawie wniosków 2 i 3 mamy:

$$(87) \quad Sp[(\mathbf{R} \mathbf{T})^T \mathbf{R} \mathbf{T}] = Sp \mathbf{A}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Z drugiej strony

$$(88) \quad Sp[(\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p)^T \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p] = \sum_{i < j} [s_{ij}^{(p)}]^2 = \sum_{i=1}^n [s_{ii}^{(p)}]^2 + \sum_{i < j} [s_{ij}^{(p)}]^2.$$

**Wniosek 4.** Ponieważ przy  $p \rightarrow \infty$

$$(89) \quad \sum_{l=1}^n [s_{ll}^{(p)}]^2 \rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2,$$

to wszystkie naddiagonalne elementy macierzy  $S^{(p)}$ , a tym samym i macierzy  $R_p$  oraz  $T_p$  dążą do zera.

Ze związków (47) i (48) mamy:

$$T_p R_p = Q_p^{-1} B U_{p-1} U_p^{-1} B^T Q_p$$

lub

$$(90) \quad T_p R_p = Q_p^{-1} B B^T Q_p.$$

Na podstawie wniosku 4 macierz  $R_p$  i  $T_p$  przy  $p \rightarrow \infty$  są macierzami diagonalnymi. Ponieważ na podstawie (84) istnieje  $\lim_{p \rightarrow \infty} (R_p T_p)^T$ , więc przy  $p \rightarrow \infty$  istnieje również

skończona granica iloczynu  $T_p R_p$ .

**Wniosek 5.** Przy  $p \rightarrow \infty$  istnieje skończona granica ciągu  $\{Q_p\}$  [wynika to z (90)].

**Wniosek 6.** Na podstawie wniosku 1 i wniosku 5 oraz związków (47) i (48) wynika, że przy  $p \rightarrow \infty$  istnieją granice ciągów macierzy  $\{T_p\}$  oraz  $\{R_p\}$ .

Ze związków (46) i (47) oraz (42) i (43) wynika, że

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_p = \lim_{p \rightarrow \infty} R_p = K,$$

gdzie macierz  $K$  dana jest wzorem (41).

Algorytm obliczania częstości drgań własnych i amplitud układu, opisany w rozdziałach 2 i 3, został zaprogramowany w języku FORTRAN IV (patrz rozdział 7) i wytestowany na elektronicznej maszynie cyfrowej ICL-System 4.

Dla umieszczenia wszystkich tablic (macierze i wektory) niezbędnych dla realizacji algorytmu program wymaga  $2n^2 + n + 1150$  komórek pamięci operacyjnej i  $0,5 n(n+1)$  komórek na dysku roboczym. Instrukcje programowe w EMC ICL-System 4 zajmują około 90 000 komórek pamięci operacyjnej.

Podaną w pracy metodą numeryczną obliczamy jednocześnie pierwiastki kwadratowe wartości własnych i wektory własne (częstości drgań własnych i amplitudy układu) zagadnienia (16). Z tego względu jest ona bardziej ogólną i znacznie szybszą od najczęściej stosowanych w praktyce metod QR i LR, przy pomocy których wyznaczamy tylko wartości własne (kwadraty częstości własnych).

## 6. Nowa metoda odwracania macierzy trójkątnych

Z rozdziału 2 niniejszego opracowania wynika, że aby związek (16) doprowadzić do postaci standardowej  $Ax = \lambda x$  należy macierze  $\tilde{K}$  oraz  $\tilde{M}$  przedstawić w postaci (17), a następnie (związek (24)) znaleźć macierz odwrotną do górnej macierzy trójkątnej.

Poniżej przedstawimy nową metodę wyznaczania macierzy odwrotnej do górnej macierzy trójkątnej, metodę opartą na pojęciu macierzy istotnie górnej trójkątnej.

Macierz  $\mathbf{M}$  nazywamy macierzą istotnie górną trójkątną, jeżeli jest ona postaci:

$$(91) \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \dots & m_{1,n-1} & m_1 \\ 0 & 0 & m_{23} & m_{24} & \dots & m_{2,n-1} & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & m_{34} & \dots & m_{3,n-1} & m_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Można wykazać, że macierz  $\mathbf{M}$  jest macierzą nilpotentną, to znaczy

$$(92) \quad \mathbf{M}^r = \mathbf{0}, \quad \text{gdy } r \geq n.$$

Wykażemy następujące twierdzenie:  
jeżeli  $\mathbf{M}$  jest macierzą istotnie górną trójkątną to

$$(93) \quad [\mathbf{D} + \mathbf{M}]^{-1} = [\mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}^{n-1}] \mathbf{D}^{-1},$$

gdzie

$$(94) \quad \mathbf{D} = \text{diag} \{d_1, d_2, \dots, d_n\}, \quad d_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$(95) \quad \mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}.$$

**D o w ó d.** Oznaczamy przez  $\mathbf{G}$  następującą macierz

$$(96) \quad \mathbf{G} = [\mathbf{D} + \mathbf{M}^{-1}] \mathbf{D}.$$

Prawą stronę związku (96) można przedstawić w postaci

$$(97) \quad \mathbf{G} = [\mathbf{D} + \mathbf{M}^{-1}] [\mathbf{D}^{-1}]^{-1} = \{\mathbf{D}^{-1} [\mathbf{D} + \mathbf{M}]\}^{-1} = [\mathbf{E} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}]^{-1}$$

lub na podstawie związku (95)

$$(98) \quad \mathbf{G} = [\mathbf{E} + \mathbf{P}]^{-1}.$$

Ze związku (95) jest oczywiste, iż macierz  $\mathbf{P}$  jest również macierzą istotnie górną trójkątną, a więc

$$(99) \quad \mathbf{P}^r = \mathbf{0}, \quad \text{gdy } r \geq n.$$

Z łatwością można się przekonać, iż zachodzi następująca tożsamość:

$$(100) \quad (\mathbf{E} + \mathbf{P}) [\mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}^{n-1}] = \mathbf{E} + (-1)^n \mathbf{P}^n = \mathbf{E},$$

gdyż  $\mathbf{P}^n = \mathbf{0}$ .

Ze związku (100) mamy więc:

$$(101) \quad (\mathbf{E} + \mathbf{P})^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}^{n-1}$$

lub na podstawie (97)

$$(102) \quad [\mathbf{E} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}^{n-1}.$$

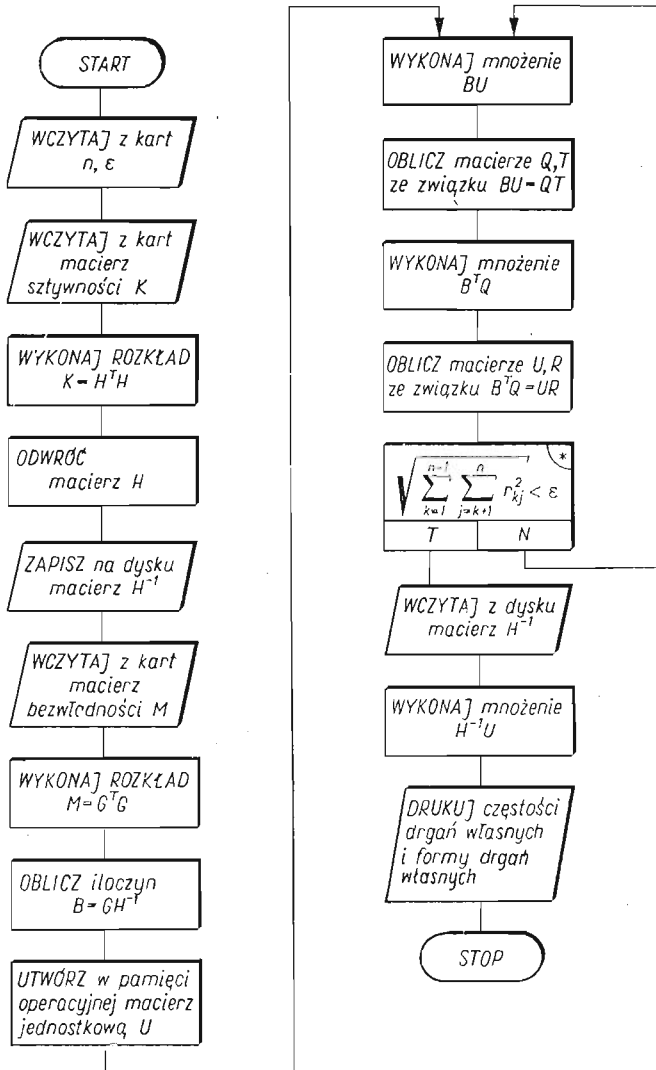
Mnożąc związek (102) prawostronnie przez macierz  $\mathbf{D}^{-1}$  otrzymujemy wzór (93).

## 7. Schemat blokowy programu UZOWW

Niżej zamieszczamy ogólny schemat blokowy programu UZOWW, który realizuje algorytm opisanej metody.

W schemacie blokowym użyto następujących dodatkowych oznaczeń.

- $n$  stopień macierzy sztywności  $K$  i bezwładności  $M$ ,
- $\varepsilon$  dana liczba rzeczywista, występująca w nierówności (\*) — patrz schemat blokowy programu UZOWW — stanowiąca kryterium zakończenia cyklu iteracyjnego,
- $H, G$  macierze górne trójkątne,
- $U, Q$  macierze  $B$ -ortonormalne,
- $T, R$  macierze górne trójkątne,
- $r_{kj}$  elementy macierzy  $T$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1; j = k+1, \dots, n$ ).



Rys. 1

## Literatura cytowana w tekście

1. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
2. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych liniowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Mechanika, 12 (1971).
3. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITTBRODT, *Metoda sztywnych elementów skończonych w obliczeniach konstrukcji okrętowych*, Rozpr. Inż., 22, 3 (1974).
4. A. P. MISZINA, I. W. PROSKURIAKOW, *Algebra wyższa*, PWN, Warszawa 1966.
5. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971.
6. J. TELEGA, *Metoda elementów skończonych w mechanice ciał odkształcalnych*, Prace IPPT, 46/1973, Warszawa 1973.
7. E. WITTBRODT, *Hybrydowa metoda elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń drgań urządzeń okrętowych*, Rozpr. Inż., 22, 3 (1974).
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, 1972.
9. R. ZURMÜHL, *Matrizen*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

## Резюме

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И АМПЛИТУД СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В работе представлен новый итерационный метод расчета частот и амплитуд собственных колебаний для систем с конечным числом степеней свободы.

Матричное уравнение  $\tilde{K}q = \omega^2 \tilde{M}q$  (полученное из уравнения Лагранжа второго рода) преобразуется к стандартному виду  $Ax = \lambda x$ . Исходя из распределения Банаховича для матрицы  $A$  строится последовательность матриц, элементами которой являются произведения ортогональных и верхнетреугольных матриц. Доказано, что пределом такой последовательности является произведение ортогональной и диагональной матриц. Столбцы ортогональной матрицы являются искомыми амплитудами, а элементы диагональной — частотами собственных колебаний системы.

Предлагаемый метод можно применить для расчета реальных конструкций в сочетании с методами деформируемых, жестких или гибридных конечных элементов. Решение таких задач возможно лишь с помощью электронных вычислительных машин. В работе приведен также новый метод обращения треугольных матриц, который облегчает приведение исходной задачи к стандартному виду.

## Summary

## AN ITERATIVE METHOD TO DETERMINE NATURAL FREQUENCIES AND MODES OF A MULTIDEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM

The paper presents a new iterative method to determine the natural frequencies and modes of a multidegree-of-freedom system. The matrix equation  $\tilde{K}q = \omega^2 \tilde{M}q$  (obtained from the second form Lagrange equation) is transformed to the standard form  $Ax = \lambda x$ . Applying the Banachiewicz decomposition to the  $A$ -matrix, a series of matrices is generated. Every element of this series is represented as a product of two matrices: an orthogonal matrix and an upper triangular matrix. It is proved in the paper that the limit of the series is a product of orthogonal and diagonal matrices. The columns of the orthogonal matrix are

the natural modes, and the non-zero elements of the diagonal matrix are the natural frequencies of the system. This method can be applied to calculate vibrations of structures by means of the finite element method, the rigid finite element method or the hybrid method. The method presented is a computer — oriented one. A new method of inverting triangular matrices is also presented; this method makes the transformation of equations to the standard form easy.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1975 r.*

---

ZASTOSOWANIE METODY MACIERZY PRZENIESIENIA W OBLICZENIU DRGAŃ WŁASNYCH  
UKŁADU BELKOWO-LINOWEGO

FRANCISZEK JARZYŃSKI, NGUYEN VAN TINH (POZNAŃ)

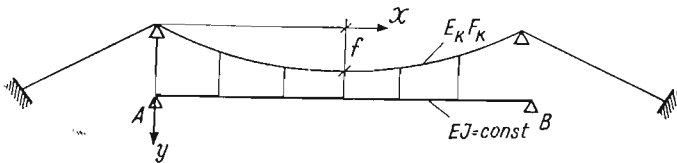
Wstęp

Metoda macierzy przeniesienia jest znana i była dotychczas stosowana w zagadnieniach statycznych i dynamicznych obliczenia belek, ram i kratownic [1, 2, 3]. W artykule niniejszym omówiono obliczenie drgań własnych układu belkowo-linowego przy założeniu stałej sztywności belki na zginanie.

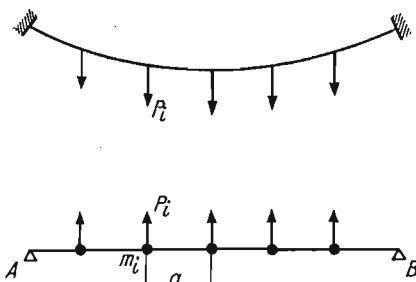
W zakończeniu podano przykład liczbowy. Wyniki otrzymane są zbieżne z wynikami uzyskanymi z wzorów podanych w [4].

1. Przypadek belki

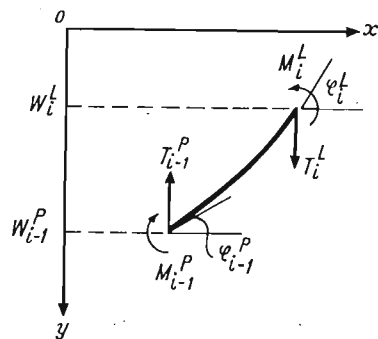
Rozpatrzmy układ belkowo-linowy (rys. 1). Dzielic belkę na przęsła i węzły oraz zakładając, że masy układu są zaczepione tylko w węzłach 1, 2, ..., n (rys. 2), na mocy [1] dla przęsła  $i-1, i$  mamy (rys. 3):



Rys. 1



Rys. 2

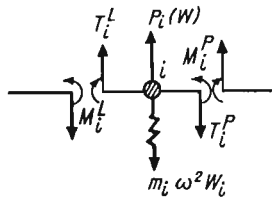


Rys. 3

$$(1) \quad \begin{cases} -W_i^L = -W_{i-1}^P + a\varphi_{i-1}^P + \frac{a^2}{2EJ} M_{i-1}^P + \frac{a^3}{6EJ} T_{i-1}^P, \\ \varphi_i^L = \varphi_{i-1}^P + \frac{a}{EJ} M_{i-1}^P + \frac{a^2}{2EJ} T_{i-1}^P, \\ M_i^L = M_{i-1}^P + a T_{i-1}^P, \\ T_i^L = T_{i-1}^P \end{cases}$$

oraz dla węzła  $i$  (rys. 4)

$$(2) \quad \begin{cases} W_i^P = W_i^L, \\ \varphi_i^P = \varphi_i^L, \\ M_i^P = M_i^L, \\ T_i^P = T_i^L - m_i \omega^2 W_i + P_i(W). \end{cases}$$



Rys. 4

Równania (1) i (2) możemy zapisać w postaci

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{-W_i^L}{a} = \frac{-W_{i-1}^P}{a} + \varphi_{i-1}^P + \frac{aM_{i-1}^P}{2EJ} + \frac{a^2T_{i-1}^P}{6EJ} \\ \varphi_i^L = \varphi_{i-1}^P + \frac{aM_{i-1}^P}{EJ} + \frac{a^2T_{i-1}^P}{2EJ} \\ \frac{aM_i^L}{EJ} = \frac{aM_{i-1}^P}{EJ} + \frac{a^2T_{i-1}^P}{EJ} \\ \frac{aT_i^L}{EJ} = \frac{aT_{i-1}^P}{EJ} \end{cases}$$

oraz

$$(4) \quad \frac{a^2}{EJ} T_i^P = -m_i \omega^2 \frac{a^3}{EJ} \frac{W_i}{a} + P_i(W) \frac{a^2}{EJ} + \frac{a^2}{EJ} T_i^L.$$

Na podstawie równań (3) i (4) napiszemy równania równowagi przęśła i węzła w sposób następujący:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{0} \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_{i-1}^P \quad \text{albo } \bar{Z}_i^L = \bar{F}_i Z_{i-1}^P,$$



$$(6) \quad \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{q}_i & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_l \quad \text{albo } \bar{Z}_i^p = \bar{K}_i \bar{Z}_i^l,$$

w których:

$$\bar{W} = \frac{W}{a}, \quad \bar{\varphi} = \varphi, \quad \bar{M} = M \frac{a}{EJ}, \quad \bar{T} = \frac{a^2}{EJ} T, \quad \bar{P}_i = \frac{a^2}{EJ} P_i, \quad \bar{q}_i = m_i \omega^2 \frac{a^3}{EJ},$$

$\bar{F}_i$  jest macierzą przęsła,  $\bar{K}_i$  — macierzą węzła,  $\omega$  — częstością drgań własnych układu,  $m_i = \mu a$ ;  $\mu$  — masą jednostki długości układu,  $P_i$  — siłą, pochodzącą od kabla, działającą na węzeł  $i$  belki.

Analogicznie możemy napisać równania dla innych węzłów i przęseł. W taki sposób otrzymamy zależność między  $\bar{Z}_0^*$  (dla punktu  $A$ ) i  $\bar{Z}_{n+1}^*$  (dla punktu  $B$ )

$$(8) \quad \bar{Z}_{n-1}^* = \bar{U} \bar{Z}_0^*$$

gdzie

$$(9) \quad \bar{U} = \bar{F}_{n+1} \bar{K}_n \bar{F}_n \dots \bar{F}_2 \bar{K}_1 \bar{F}_1.$$

Obliczając iloczyn macierzy (9) możemy pominąć kolumny 1 i 3 macierzy  $\bar{F}_1$  ponieważ  $\bar{W}_A = \bar{M}_A = 0$ . Otrzymamy wówczas

$$(10) \quad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{11}^* \bar{p}_1 + u_{12}^* \bar{p}_2 + \dots + u_{1n}^* \bar{p}_n \\ u_{21} & u_{22} & u_{21}^* \bar{p}_1 + u_{22}^* \bar{p}_2 + \dots + u_{2n}^* \bar{p}_n \\ u_{31} & u_{32} & u_{31}^* \bar{p}_1 + u_{32}^* \bar{p}_2 + \dots + u_{3n}^* \bar{p}_n \\ u_{41} & u_{42} & u_{41}^* \bar{p}_1 + u_{42}^* \bar{p}_2 + \dots + u_{4n}^* \bar{p}_n \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_{n+1} \quad u_{ij} \neq u_{ji}; \quad u_{ij}^* \neq u_{ji}^*$$

albo

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \bar{U} & \bar{U}^* \bar{P} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Z}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{P} &= \text{Col} \{ \bar{P}_1(w), \bar{P}_2(w), \dots, \bar{P}_n(w) \}, \\ \bar{U} &= \bar{U}(4, 2), \\ \bar{U}^* &= \bar{U}^*(4, n). \end{aligned}$$

Macierze  $\bar{U}$  i  $\bar{U}^*$  są funkcjami częstości i zależą od parametrów geometrycznych belki. Ponieważ  $\bar{M}_B = \bar{W}_B = 0$ , ze wzoru (11) otrzymujemy

$$(13) \quad \bar{U}_{13} \bar{Z}_0 + \bar{U}_{13}^* \bar{P} = \mathbf{0},$$

gdzie

$$\bar{U}_{13} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{31} & u_{32} \end{bmatrix} \quad \bar{U}_{13}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & \dots & u_{1,n-1}^* & u_{1n}^* \\ u_{31}^* & \dots & u_{3,n-1}^* & u_{3n}^* \end{bmatrix}.$$

## 2. Przypadek liny

Stosując ten sam tok postępowania, co w pracy [5], znajdujemy

$$(14) \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{W},$$

gdzie  $\mathbf{W} = \text{Col}\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$  jest wektorem ugięć węzłów liny i równocześnie węzłów belki. Macierz  $\mathbf{A}$  jest macierzą kwadratową, symetryczną i określoną równaniem

$$\mathbf{A} = \frac{H_g}{a} \bar{\boldsymbol{\beta}} + \frac{64f^2 E_k F_k}{(n+1)^5 a^3 \varepsilon} \bar{\boldsymbol{\sigma}},$$

w którym

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \dots & & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$E_k F_k$  — sztywność liny,

$$\varepsilon = 1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2},$$

$H_g = \frac{gl^2}{8f}$  — pozioma składowa naciągu statycznego liny,

$g$  — ciężar jednostki długości układu.

Te same równanie (14) można zapisać w postaci

$$(16) \quad \frac{a^2}{EJ} \mathbf{P} = \frac{a^3}{EJ} \mathbf{A} \frac{\mathbf{W}}{a}.$$

Z równania (7) i (16) mamy

$$(17) \quad \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{W}},$$

gdzie

$$(18) \quad \bar{\mathbf{A}} = \frac{a^3}{EJ} \mathbf{A}.$$

## 3. Macierz współczynników wpływowych

Wyznaczamy  $\mathbf{Z}_0$  jako funkcję wektora sił następująco:

$$(19) \quad \mathbf{Z}_0 = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{Q} - \mathbf{P}),$$

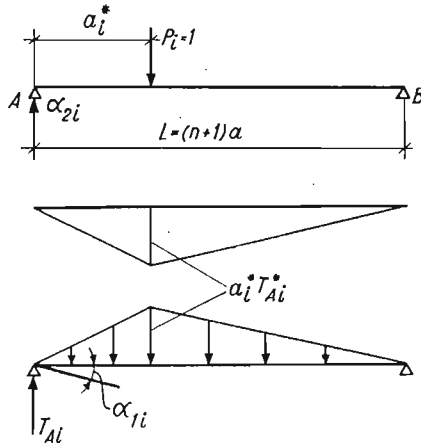
gdzie  $\mathbf{Q}$  jest wektorem sił bezwładności określonym wzorem

(20)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{W},$$

$$\mathbf{M} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & \dots & \dots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

$\alpha = \alpha(2, n)$  jest macierzą wpływową między  $\mathbf{Z}_0$  i siłami  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ,  $\alpha_{1i}$  oznacza kąt nachylenia przekroju w punkcie  $A$  pod działaniem siły jednostkowej w punkcie  $i$  belki,  $\alpha_{2i}$  oznacza reakcję w punkcie  $A$ , gdy siła jednostkowa działa na punkt  $i$  belki.



Rys. 5

Rozpatrzmy belkę  $AB$  o stałym przekroju (rys. 5). Korzystając ze statycznych równań łatwo znajdujemy

$$(21) \quad \begin{cases} \alpha_{1i} = -\frac{a_i^* (2L - a_i^*) (L - a_i^*)}{6LEJ} \\ \alpha_{2i} = \frac{L - a_i^*}{L}, \end{cases}$$

Podstawiając

$$L = a(n+1), \quad a_i^* = i \cdot a$$

do (21) otrzymamy

$$(22) \quad \begin{cases} \alpha_{1i} = -\frac{a^2}{EJ} \frac{i[(2n+2-i)(n+1-i)]}{6(n+1)}, \\ \alpha_{2i} = \frac{n+1-i}{n+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Na podstawie (17), (18), (19), (20) oraz (22) łatwo zauważyć, że

(23)

$$\mathbf{Z}_0 = \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{P}}) = \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{W}})$$

gdzie

$$(24) \quad \begin{cases} \bar{q} = \frac{a^3}{EJ} M, \\ \bar{\alpha}_{1i} = -\frac{i[(2n+2-i)(n+1-i)]}{6(n+1)}, \\ \bar{\alpha}_{2i} = \alpha_{2i} = \frac{n+1-i}{n+1}. \end{cases}$$

Po podstawieniu (17), (23) do (13) znajdujemy

$$(25) \quad \bar{U}_{13}[\bar{\alpha}(\bar{q}\bar{W} - \bar{A}\bar{W})] + \bar{U}_{13}^* \bar{A}\bar{W} = \mathbf{0}.$$

Po pomnożeniu lewostronnie (25) przez  $\bar{\alpha}^T$  otrzymujemy

$$(26) \quad (\mathbf{C} - \mathbf{B} + \mathbf{D})\bar{W} = \mathbf{0},$$

gdzie  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  są to macierze kwadratowe określone wzorami:

$$(27) \quad \begin{cases} \mathbf{B} = \bar{\alpha}^T \bar{U}_{13} \bar{\alpha}, \\ \mathbf{C} = \bar{\alpha}^T \bar{U}_{13} \bar{\alpha} \bar{q}, \\ \mathbf{D} = \bar{\alpha}^T \bar{U}_{13}^* \bar{A}. \end{cases}$$

Dzięki równaniu (26) wyznacznik częstości jest określony

$$(28) \quad \det(\mathbf{C} - \mathbf{B} + \mathbf{D}) = 0.$$

Stosując zależność (26) możemy określić wektory drgań własnych układu.

**Przykład.** Wyznaczyć częstość podstawową drgań giętnych belki układu podanego na rys. 1, z umieszczonymi na niej symetrycznie dwiema masami skupionymi  $m_1 = m_2 = m = \mu a$ .

Dane:  $L = 1,5$  m;  $E = 2,1 \times 10^6$  kGcm<sup>-2</sup>;  $J = 20,8$  cm<sup>4</sup>,  $E_k = \frac{E}{1,2}$ ,  $F_k = 0,1$  cm<sup>2</sup>,  $g = 2$  kGm<sup>-1</sup>.

Proces eliminacji (8) jest określony wzorem

$$\bar{Z}_3 = \bar{F}_3 \bar{K}_2 \bar{F}_2 \bar{K}_1 \bar{F}_1 \bar{Z}_0,$$

skąd:

$$\bar{U}_{13} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{5}{3} \bar{q} + \frac{\bar{q}^2}{36} & \frac{9}{2} + \frac{4}{9} \bar{q} + \frac{1}{216} \bar{q}^2 \\ 4\bar{q} + \frac{1}{6} \bar{q}^2 & 3 + \frac{5}{3} \bar{q} + \frac{1}{36} \bar{q}^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{1}{36} \bar{q} & \frac{1}{6} \\ 2 + \frac{1}{6} \bar{q} & 1 \end{bmatrix} = \bar{U}_{13}^*$$

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{a^3}{EJ} \left( \frac{2H_g}{a} + \frac{64f^2 E_k F_k}{3^5 a^3 \varepsilon} \right)$$

$$a_2 = \frac{a^3}{EJ} \left( \frac{64f^2 E_k F_k}{3^5 a^3 \varepsilon} - \frac{Hg}{a} \right),$$

Wykonując obliczenia (27), (28), oraz po obliczeniu  $a_1$ ,  $a_2$  otrzymamy

$$427\,804,11\bar{q}^2 - 8\,247\,115,69\bar{q} + 16\,548\,537,18 = 0,$$

skąd mamy dwa pierwiastki  $\bar{q}_1 = 2,27$ ,  $\bar{q}_2 = 17$ .

Wobec tego częstości podstawowe układu będą

$$\omega_1 = 1,508 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}, \quad \omega_2 = 4,120 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}.$$

Metodą zastosowaną w pracy [4] otrzymano

$$\omega_1 = 1,470 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}, \quad \omega_2 = 4,36 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}.$$

W układzie bez liny  $a_1 = a_2 = 0$ , mamy równanie

$$q^2 + 18 - 16q = 0,$$

skąd

$$\omega_1 = 1,095 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}, \quad \omega_2 = 3,84 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}.$$

Wyniki te są zgodne z rezultatem podanym w [6].

#### 4. Wnioski

Metoda macierzy przeniesienia w zastosowaniu do układu belkowo-linowego o małej rozpiętości jest bardziej efektywna w porównaniu z innymi metodami, ponieważ pozwala na pełne wykorzystanie elektronicznej techniki obliczeniowej. Główną jej zaletą jest to, że obliczenie ogranicza się w zasadzie do mnożenia macierzy.

Metoda ta może również służyć do obliczenia drgań własnych układu belkowo-linowego o dużej rozpiętości. Wówczas jednak macierze występujące w równaniu (28) będą bardziej skomplikowane i należałoby je rozwiązywać drogą prób za pomocą EMC.

#### Literatura cytowana w tekście

1. E. C. PESTEL, F. A. LECKIE, *Matrix methods in elastomechanics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, San Francisco 1963.
2. G. RAKOWSKI, *Zastosowanie macierzy do analizy statycznej i dynamicznej prętów prostych*, Warszawa 1968.
3. E. ŚWITOŃSKI, *Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych*, Mech. Teoret. Stos. 4, 12 (1974).
4. И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, *К расчёту висячих мостов и газопроводов на ветровые и сейсмические нагрузки*, Москва 1962.
5. A. F. SMIRNOW, *Obliczenie konstrukcji za pomocą maszyn cyfrowych*, Arkady, Warszawa 1970.
6. K. PISZCZEK, J. WALCZAK, *Drgania w budowie maszyn*, Warszawa 1972.

## Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ В ВАЛОЧНО-ТРОСОВОЙ СИСТЕМЕ

Задача свободных колебаний в балочно-тросовой системе решается с помощью метода матриц переноса. Приводится численный пример, показывающий хорошую сходимость принятых функций.

## Summary

APPLICATION OF THE TRANSFER MATRIX METHOD TO THE CALCULATION OF FREE  
VIBRATION IN A BEAM — CABLE SYSTEM

Problem of free vibration in a beam — cable system is solved by using the transfer matrix method. Numerical example is given and the results show a good convergence of the functions assumed.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1975 r.*

---

## OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE WIRUJĄCEGO PRĘTA Z UWZGLĘDNIENIEM NIELINIOWOŚCI FIZYCZNEJ MATERIAŁU

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Sformułowane w tytule pracy zagadnienie należy do szerszej klasy problemów optymalizacji kształtu ściskanych lub rozciąganych słupów nie ulegających wyboczeniu. W problemach tych istotna jest konieczność uwzględnienia sił masowych (grawitacyjnych lub bezwładności), które zależą od nie znanego jeszcze, poszukiwanego kształtu.

W większości opublikowanych prac, dotyczących optymalizacji elementów konstrukcji, siły masowe były pomijane. Jako jedną z pierwszych, uwzględniających ciężar własny zginanych belek, należy wymienić pracę BARNETTA [1], w której autor poszukiwał optymalnego kształtu wspornikowej belki obciążonej wyłącznie ciężarem własnym. Znalezione rozwiązanie, opierające się na warunku optymalizacji otrzymanym wcześniej w pracy [2], jest jednak błędne. Rozwiązanie poprawne dla belki liniowo-sprężystej przedstawiono w pracy CHERNA [3], a dla belek nieliniowo-sprężystych, sprężysto-plastycznych lub wykazujących ustalone pełzanie, w pracy GAJEWSKIEGO [5]. Optymalne kształty belek wspornikowych, poddanych równoczesnemu działaniu obciążeń zewnętrznych i sił masowych, przy wymienionej wyżej nieliniowości fizycznej materiału znaleziono w pracy GAJEWSKIEGO [4].

W zagadnieniach kształtowania ściskanych słupów siły masowe odgrywają jeszcze większą rolę. Optymalizacja kształtu słupów ściskanych, nie ulegających wyboczeniu, wykonanych z jednorodnego, liniowo-sprężystego materiału była przedmiotem pracy GRYCZA [7]. Optymalny kształt wyznaczono w niej na podstawie kryterium największej sztywności. W pracy GAJEWSKIEGO [4] rozwiązano podobny problem przy pewnych typach nieliniowości fizycznej i niejednorodnym (pod względem ciężaru właściwego oraz własności mechanicznych) materiale słupa. Wykazano, że w przypadku jednorodnego słupa ściskanego, charakteryzującego się minimalnym przemieszczeniem swobodnego końca (przy ustalonym ciężarze), jego kształt nie zależy od postaci prawa fizycznego i jest taki sam, jak w zakresie liniowo-sprężystym (jest on równocześnie słupem o wyrównanych naprężeniach).

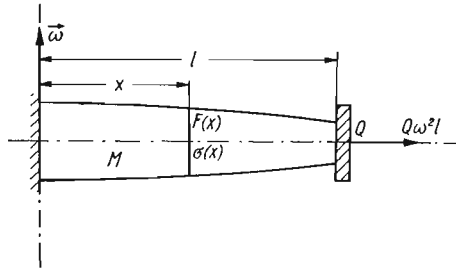
### 2. Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem niniejszej pracy jest problem optymalnego kształtowania pręta o długości  $l$  z umieszczoną na jego końcu  $x = l$  masą skupioną  $Q$  i obracającego się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  dokoła osi prostopadłej do pręta, przechodzącej przez jego drugi koniec:

$x = 0$  (rys. 1). Przyjmiemy, że materiał pręta jest niejednorodny. Wówczas siła działająca na jednostkę objętości  $q(x)$  może opisywać zarówno zmienność gęstości materiału  $\varrho(x)$ , jak i niejednorodność zewnętrznego pola sił grawitacyjnych lub bezwładności  $g(x)$

$$(2.1) \quad q(x) = \varrho(x)g(x).$$

W pewnych zagadnieniach [4], wielkość  $q(x)$  może być rozumiana również jako ciężar właściwy.



Rys. 1

W niniejszej pracy założymy ponadto, że materiał pręta wykazuje nieliniowość fizyczną oraz podłużną niejednorodność własności mechanicznych. Związek między naprężeniem i odkształceniem wyrazimy wobec tego wzorem

$$(2.2) \quad \varepsilon^* = \mathcal{F}(\sigma^*),$$

w którym  $\mathcal{F}$  jest daną funkcją klasy  $C_1$ ,

$$(2.3) \quad \varepsilon^* = \varepsilon/\varepsilon_0, \quad \sigma^* = \sigma/\sigma_0,$$

oraz parametry  $\sigma_0$  i  $\varepsilon_0$  są znanymi funkcjami zmiennej  $x$  i można je zapisać jako iloczyny pewnych stałych materiałowych i danych funkcji

$$(2.4) \quad \varepsilon_0 = \varepsilon^{(0)}e(x), \quad \sigma_0 = \sigma^{(0)}s(x),$$

$\varepsilon^{(0)}$ ,  $\sigma^{(0)}$  — pewne stałe.

Nieliniowe prawo fizyczne (2.2) może opisywać materiały nieliniowo-sprężyste, sprężysto-plastyczne (bez odciążenia) oraz znajdujące się w stanie ustalonego pełzania. W tym ostatnim przypadku wielkość  $\varepsilon$  należy rozumieć jako prędkość odkształcenia, chociaż w dalszym ciągu będziemy opuszczali kropkę nad  $\varepsilon$ . W związku z tym, pewne wielkości fizyczne zdefiniowane w zakresie sprężystym lub sprężysto-plastycznym, będą musiały być zastąpione przez analogiczne, lecz inne wielkości w teorii ustalonego pełzania. Tak więc, przemieszczenie zastąpimy prędkością, energię — mocą itp. Ponadto pominiemy wpływ odkształceń sprężystych towarzyszących pełzaniu oraz nie będziemy rozważali zagadnień związanych ze zjawiskiem relaksacji.

Spośród licznych schematyzacji wykresów doświadczalnych zależności (2.2) [80], w przykładach liczbowych będziemy przyjmowali prawo potęgowe

$$(2.5) \quad \varepsilon^* = \sigma^{*n} \quad \text{lub} \quad \sigma^* = \varepsilon^{*\mu},$$

w którym  $n$  oznacza całkowitą liczbę dodatnią (na ogół nieparzystą), a  $\mu = 1/n$ . Gdy  $n = 1$  otrzymujemy liniowo-sprężyste zachowanie się materiału, gdy natomiast  $n \rightarrow \infty$  opisany jest zakres sztywno-plastyczny.



Jako funkcję celu (koszt) można rozważać tu ogólny funkcjonal [4]

$$(2.6) \quad I = \int_0^l \psi_1(x, \sigma, \sigma', \sigma'', \dots, \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots, F, F', \dots) dx$$

zależny od zmiennej  $x$ , naprężeń i ich pochodnych, odkształceń i ich pochodnych oraz pola powierzchni przekroju i jego pochodnych.

Jako dodatkowe warunki ograniczające musimy przyjąć równanie różniczkowe równowagi

$$(2.7) \quad (\sigma F)' + qF = 0$$

oraz warunek ustalający całkowitą objętość słupa

$$(2.8) \quad \int_0^l F dx = V = \text{const.}$$

Równanie (2.8) może być zastąpione przez warunek ustalający całkowitą masę słupa tylko w przypadku, gdy masa właściwa materiału jest stała

$$(2.9) \quad \varrho \int_0^l F dx = M, \quad \varrho(x) = \text{const.}$$

Zagadnienie optymalizacji polega tu na znalezieniu takiej funkcji  $F(x)$ , która minimalizuje funkcjonal (2.6), przy warunku w postaci równania różniczkowego (2.7) oraz warunku izoperymetrycznym (2.8) albo (2.9).

### 3. Rozwiązanie ogólne

Postępując zgodnie ze znanymi regułami rachunku wariacyjnego [6], [4], dochodzimy do skomplikowanego układu równań różniczkowych z nieznanym funkcyjnym mnożnikiem Lagrange'a.

W niniejszej pracy przyjmiemy nieco inny sposób rozwiązania zagadnienia, polegający na otrzymaniu równania Eulera-Lagrange'a w postaci jednego równania różniczkowo-całkowego i przybliżonym jego rozwiązaniu. Sposób ten prowadzi szybko do wystarczająco dokładnych wyników.

Ponieważ odkształcenie  $\varepsilon$  i jego pochodna mogą być wyrażone zawsze za pomocą naprężenia  $\sigma$  i jego pochodnej z przyjętego prawa fizycznego (2.2), zatem do dalszych rozważań przyjmiemy funkcjonal (2.6) w nieco mniej ogólnej postaci

$$(3.1) \quad I = \int_0^l \psi(x, \sigma, F, F') dx.$$

Również równanie różniczkowe równowagi (2.7) zapiszemy w postaci ważnej dla wirującego słupa o stałej gęstości  $\varrho$ , przedstawionego na rys. 1. (w tym przypadku  $q(x) = \varrho \omega^2 x$ )

$$(3.2) \quad \sigma(x) = \frac{1}{F} \left[ Q\omega^2 l + \int_x^l q(\zeta) F(\zeta) d\zeta \right].$$

Przedstawiony problem minimalizacji funkcjonału (3.1) z warunkiem (3.2) należy do szerszej klasy problemów minimalizacji funkcjonałów typu (3.1) z warunkiem

$$(3.3) \quad \sigma(x) = \varphi_1(F) + \varphi_2(F) \int_x^l \varphi_3(\zeta, F, F') d\zeta,$$

w którym  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$  są danymi funkcjami ciągłymi swoich argumentów. Poszukiwana funkcja  $F(x)$  znajduje się tu również pod znakiem całki. Po prostych obliczeniach otrzymujemy równanie Eulera-Lagrange'a w postaci

$$(3.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial F} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \psi}{\partial F'} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{d\varphi_1}{dF} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{d\varphi_2}{dF} \left( \int_x^l \varphi_3 d\zeta \right) + \\ + \frac{\partial \varphi_3}{\partial F} \left( \int_0^x \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \varphi_2 d\zeta \right) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \varphi_3}{\partial F'} \left( \int_0^x \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \varphi_2 d\zeta \right) \right] = 0.$$

Dalszy ciąg obliczeń zależy od przyjętej funkcji celu (kilka możliwości przedstawiono w pracy [4]); ograniczymy się tu do minimalizacji przemieszczenia końca słupa

#### 4. Minimalizacja przemieszczenia końca słupa

Będziemy zatem poszukiwali takiego kształtu pręta, wśród prętów o stałej masie (2.9), który charakteryzuje się minimalnym przemieszczeniem końca  $x = l$ , równym

$$(4.1) \quad u_l = \int_0^l \varepsilon(x) dx = \int_0^l \varepsilon_0(x) \mathcal{F}(\sigma^*) dx = \int_0^l \psi[x, \mathcal{F}(\sigma^*)] dx$$

lub takiego kształtu wśród prętów o stałym przemieszczeniu końca  $x = l$ , równym  $u_l$ , który charakteryzuje się minimalną masą (objętością).

Optymalny kształt jest tu wyznaczony przez układ trzech równań: (3.4), (3.2), i (2.9) albo (4.1), które przyjmują postać:

$$(4.2) \quad \left[ Q\omega^2 l + \varrho\omega^2 \int_x^l \zeta F(\zeta) d\zeta \right] \mathcal{F}'(\sigma^*) - F^2 \left[ \lambda + \varrho\omega^2 x \int_0^x \frac{\mathcal{F}'(\sigma^*)}{F} d\zeta \right] = 0,$$

$$(4.3) \quad \sigma^* = \frac{1}{\sigma_0 F} \left[ Q\omega^2 l^2 + \varrho\omega^2 \int_x^l \zeta F(\zeta) d\zeta \right],$$

$$(4.4) \quad \varrho \int_0^l F dx = M \quad \text{albo}$$

$$(4.5) \quad \int_0^l \varepsilon(x) dx = u_l,$$

gdzie  $M$  jest daną masą pręta, a  $u_l$  jest danym przemieszczeniem końca pręta,  $\mathcal{F}'(\sigma^*) = d\mathcal{F}/d\sigma^*$ ,  $\lambda$  jest stałym mnożnikiem Lagrange'a.

W celu uproszczenia obliczeń przyjmujemy, że pole powierzchni przekroju pręta jest iloczynem pewnego przekroju podstawowego  $F_0$  i bezwymiarowej funkcji  $\Phi(x)$

$$(4.6) \quad F(x) = F_0 \Phi(x)$$

oraz wprowadzimy następujące bezwymiarowe wielkości:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \xi &= x/l, & \sigma_0^* &= \frac{Q\omega^2 l}{\sigma_0 F_0}, & \mu &= \frac{\rho F_0 l}{Q}, \\ \bar{M} &= \frac{M}{\rho F_0 l}, & \bar{u}_l &= \frac{u_l}{\varepsilon_0 l}, & \varepsilon_0 &= \text{const}, \sigma_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

Podstawiając (4.6) i (4.7) do równań (4.2)—(4.5) otrzymujemy:

$$(4.8) \quad \mathcal{F}'(\sigma^*) \left[ 1 + \mu \int_{\xi}^1 \zeta \Phi(\zeta) d\zeta \right] - \Phi^2 \left[ \Lambda + \mu \xi \int_0^{\xi} \frac{\mathcal{F}'(\sigma^*)}{\Phi} d\zeta \right] = 0$$

$$(4.9) \quad \Phi \sigma^* = \sigma_0^* \left[ 1 + \mu \int_{\xi}^1 \zeta \Phi(\zeta) d\zeta \right],$$

$$(4.10) \quad \int_0^1 \Phi(\xi) d\xi = \bar{M}$$

albo

$$(4.11) \quad \int_0^1 \mathcal{F}(\sigma^*) d\xi = \bar{u}_l.$$

W równaniach powyższych stała  $\mu$  charakteryzuje stosunek masy pręta do masy umieszczonej na jego końcu; w przypadku niewielkiej masy pręta w porównaniu z masą skupioną  $Q$  może być przyjęta jako mały parametr.

Rozwiążemy teraz układ równań (4.8)—(4.11) rozwijając niewiadome funkcje  $\sigma^*$  i  $\Phi$  oraz stałą  $\Lambda$  na szeregi potęgowe ze względu na  $\mu$ , opuszczając jednak wyższe od drugiej potęgi  $\mu$ :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \sigma^*(\xi) &= \sigma_0^*(\xi) + \mu \sigma_1^*(\xi) + \mu^2 \sigma_2^*(\xi) + \dots \\ \Phi(\xi) &= \Phi_0(\xi) + \mu \Phi_1(\xi) + \mu^2 \Phi_2(\xi) + \dots \\ \Lambda &= \Lambda_0 + \mu \Lambda_1 + \mu^2 \Lambda_2 + \dots \end{aligned}$$

Funkcję  $\mathcal{F}$  charakteryzującą dowolne prawo fizyczne przedstawimy również w postaci szeregu potęgowego małego parametru

$$(4.13) \quad \mathcal{F}(\sigma^*) = \mathcal{F}(\sigma_0^*) + \mu \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \sigma_1^* + \mu^2 \left[ \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_2^* + \frac{1}{2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^{*2} \right] + \dots$$

i analogicznie

$$(4.14) \quad \mathcal{F}'(\sigma^*) = \mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \mu \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_1^* + \mu^2 \left[ \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_2^* + \frac{1}{2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^{*2} \right] + \dots$$

Podstawiając (4.12) i (4.14) do układu równań (4.8)—(4.11) i przyrównując do zera wyrażenia przy kolejnych potęgach małego parametru  $\mu$  otrzymujemy następujące układy równań algebraicznych na kolejne współczynniki:  $\sigma_i^*(\xi)$ ,  $\Phi_i(\xi)$ ,  $\Lambda_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\mathcal{F}'(\sigma_0^*) - \Phi_0^2 \Lambda_0 = 0, \quad \Phi_0 - 1 = 0,$$

$$(4.15) \quad \int_0^1 \Phi_0 d\xi = \bar{M} \quad \text{albo} \quad \int_0^1 \mathcal{F}(\sigma_0^*) d\xi = \bar{u}_1,$$

$$\mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_1^* - 2\Phi_0 \Lambda_0 \Phi_1 = \Phi_0^2 \Lambda_1 + \Phi_0^2 \xi \int_0^\xi \frac{\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{\Phi_0} d\zeta - \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \int_\xi^1 \Phi_0 \zeta d\zeta,$$

$$(4.16) \quad \Phi_0 \sigma_1^* + \sigma_0^* \Phi_1 = \sigma_0^* \int_\xi^1 \Phi_0 \zeta d\zeta,$$

$$\int_0^1 \Phi_1 d\xi = 0 \quad \text{albo} \quad \int_0^1 \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \sigma_1^* d\xi = 0,$$

$$\mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_2^* - 2\Phi_0 \Lambda_0 \Phi_2 = \Phi_1^2 \Lambda_0 + 2\Phi_0 \Phi_1 \Lambda_1 + \Phi_0^2 \Lambda_2 +$$

$$+ 2\Phi_0 \Phi_1 \xi \int_0^\xi \frac{\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{\Phi_0} d\zeta + \Phi_0^2 \xi \int_0^\xi \frac{\Phi_0 \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^* - \Phi_1 \mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{\Phi_0^2} d\zeta -$$

$$(4.17) \quad - \frac{1}{2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^{*2} - \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_1^* \int_\xi^1 \Phi_0 \zeta d\zeta - \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \int_\xi^1 \Phi_1 \zeta d\zeta,$$

$$\Phi_0 \sigma_2^* + \sigma_0^* \Phi_2 = -\Phi_1 \sigma_1^* + \sigma_0^* \int_\xi^1 \Phi_1 \zeta d\zeta,$$

$$\int_0^1 \Phi_2 d\xi = 0 \quad \text{albo} \quad \int_0^1 \left[ \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \sigma_2^* + \frac{1}{2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^{*2} \right] d\xi = 0.$$

Całkowe warunki (4.15)<sub>3</sub>, (4.16)<sub>3</sub>, (4.17)<sub>3</sub> określają stałe  $\Lambda_i$ ; zależnie od tego czy przyjmimy warunek ustalający masę pręta czy też przemieszczenie otrzymujemy różne postacie rozwiązania.

4.1. Warunek stałej masy pręta (4.10). W tym przypadku mamy:

$$(4.18) \quad \Phi_0 = 1, \quad \sigma_0^* = \frac{Q\omega^2 \rho l^2}{\sigma_0 M}, \quad F_0 = \frac{M}{\rho l}, \quad \mu = \frac{M}{Q},$$

$$(4.19) \quad \Phi_1 = a + b\xi^2, \quad \sigma_1^* = \sigma_0^*(c + d\xi^2), \quad \Lambda_1 = \frac{1}{3} \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*),$$

gdzie

$$a = \frac{3\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)]}, \quad b = -\frac{9\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + 3\sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)]},$$

$$c = \frac{3\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + 2\sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)]}, \quad d = \frac{3\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)]};$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 = & \frac{1}{[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]} \left\{ -A_2 + \left[ \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left( \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - a^2 \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left( -\frac{1}{6}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c - ac \right) + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left( \frac{1}{2}c^2 \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left( -\frac{3}{2}a - 2ab \right) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left( -\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b - \frac{3}{2}c + \frac{1}{2}d - ad - bc \right) + \right. \right. \\
 (4.20) \quad & \left. \left. + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) cd \right] \xi^2 + \right. \\
 & \left. + \left[ \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left( -\frac{23}{12}b - b^2 \right) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left( -\frac{1}{4}b - \frac{5}{6}d - bd \right) + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left( \frac{1}{2}d^2 \right) \right] \xi^4 \right\}, \\
 \sigma_2^* = & \sigma_0^* \left[ -\Phi_2 + \left( \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - ac \right) + \left( -\frac{1}{2}a - ad - bc \right) \xi^2 + \left( -\frac{1}{4}b - bd \right) \xi^4 \right], \\
 A_2 = & \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left( -a^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{5}b^2 - \frac{2}{15}b \right) + \\
 & + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left( -\frac{1}{3}a - \frac{1}{45}b - ac - \frac{1}{3}ad - \frac{1}{3}bc - \frac{1}{5}bd \right) + \\
 & + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left( \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{3}cd + \frac{1}{10}d^2 \right).
 \end{aligned}$$

Dla prawa potęgowego (2.5) otrzymujemy następujące rozwiązania (tylko z pierwszymi poprawkami):

$$\begin{aligned}
 \Phi(\xi) &= 1 + \mu \frac{n+2}{2(n+1)} \left( \frac{1}{3} - \xi^2 \right) + \dots, \\
 \sigma^* &= \sigma_0^* \left\{ 1 + \mu \left[ \frac{2n+1}{6(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} \xi^2 \right] + \dots \right\}, \\
 (4.21) \quad A &= n\sigma_0^{*(n-1)} \left[ 1 + \frac{1}{3}(n-1)\mu + \dots \right], \\
 \sigma_0^* &= \frac{Q\omega^2 \rho l^2}{\sigma_0 M}.
 \end{aligned}$$

Dokładniejsze rozwiązanie przedstawiamy w drugim przypadku.

**4.2. Warunek stałego przemieszczenia (4.11).** Otrzymujemy tu:

$$(4.22) \quad \Phi_0 = 1, \quad \sigma_0^* = \mathcal{F}_{-1}(\bar{u}_1), \quad A_0 = \mathcal{F}'(\sigma_0^*), \quad F_0 = \frac{Q\omega^2 l}{\sigma_0 \mathcal{F}_{-1}(\bar{u}_1)},$$

gdzie  $\mathcal{F}_{-1}$  oznacza funkcję odwrotną do  $\mathcal{F}$ .

$$(4.23) \quad \Phi_1 = a + b\xi^2, \quad \sigma_1^* = \sigma_0^*(c + d\xi^2), \quad A_1 = -\frac{2}{3} \mathcal{F}'(\sigma_0^*),$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{7\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + 3\sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]}, & b &= -\frac{9\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + 3\sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]}, \\
 c &= \frac{-\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]}, & d &= \frac{3\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]}; \\
 \Phi_2 &= \frac{1}{[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]} \left\{ -A_2 + \left[ \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left( \frac{11}{6}a + \frac{1}{4}b - a^2 \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left( \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c - ac \right) + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left( \frac{1}{2}c^2 \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left( -\frac{3}{2}a + \frac{4}{3}b - 2ab \right) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left( -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}c + \frac{1}{2}d - ad - bc \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) cd \right] \xi^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left( -\frac{23}{12}b - b^2 \right) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left( -\frac{1}{4}b - \frac{5}{6}d - bd \right) + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left( \frac{1}{2}d^2 \right) \right] \xi^4 \right\}, \\
 \sigma_2^* &= \sigma_0^* \left[ -\Phi_2 + \left( \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - ac \right) + \left( -\frac{1}{2}a - ad - bc \right) \xi^2 + \left( -\frac{1}{4}b - bd \right) \xi^4 \right], \\
 A_2 &= \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left\{ \left( \frac{2}{3}a - \frac{4}{45}b - a^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{5}b^2 + 2ac + \frac{2}{3}ad + \frac{2}{3}bc + \frac{2}{5}bd \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sigma_0^{*2} \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) - 2\sigma_0^* \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \mathcal{F}''(\sigma_0^*) - \sigma_0^{*2} [\mathcal{F}''(\sigma_0^*)]^2}{[\mathcal{F}'(\sigma_0^*)]^2} \left( \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{3}cd + \frac{1}{10}d^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Dla prawa potęgowego (2.5) wzory (4.22) i (4.23) dają przybliżone rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\xi) &= 1 + \mu \left[ \frac{3n+4}{6(n+1)} - \frac{n+2}{2(n+1)} \xi^2 \right] + \dots, \\
 \sigma^*(\xi) &= \sigma_0^* \left[ 1 + \mu \frac{1}{2(n+1)} \left( -\frac{1}{3} + \xi^2 \right) + \dots \right], \\
 A &= n\bar{u}_1^{\frac{n-1}{n}} \left( 1 - \frac{2}{3}\mu + \dots \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

Dokładniejsze wyniki przedstawimy w szczególnych przypadkach: a) materiału liniowo-sprężystego dla  $n = 1$  i b) materiału sztywno-plastycznego dla  $n \rightarrow \infty$ .

a) *Materiał liniowo-sprężysty*  $n = 1$ . Po prostych obliczeniach znajdujemy stałe:

$$a = 7/12, \quad b = -3/4, \quad c = -1/12, \quad d = 1/4, \quad A_2 = 47/180,$$

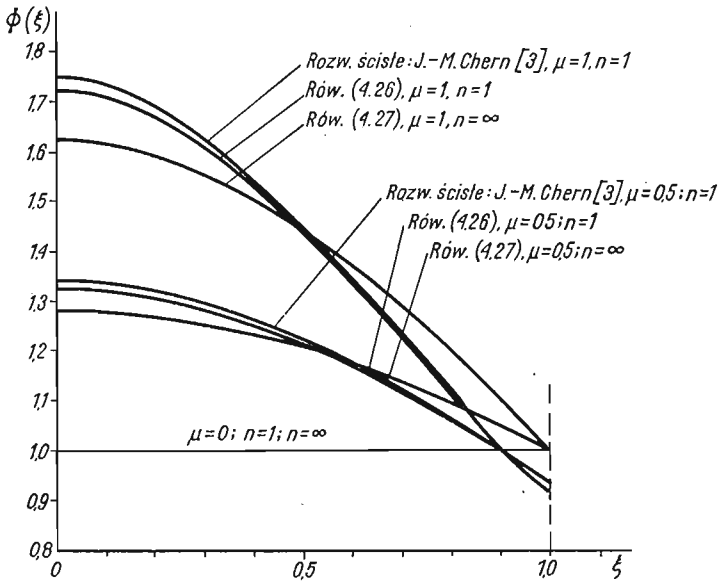
następnie drugie poprawki:

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 &= \frac{101}{720} - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{21}{48} \xi^4, \\
 \sigma_0^* &= \frac{1}{80} \sigma_0^* (1 - 5\xi^4)
 \end{aligned}$$

oraz ostateczny wynik:

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \Phi(\xi) &= 1 + \mu \left( \frac{7}{12} - \frac{3}{4} \xi^2 \right) + \mu^2 \left( \frac{101}{720} - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{21}{48} \xi^4 \right) + \dots, \\ \sigma^*(\xi) &= \sigma_0^* \left[ 1 + \mu \left( -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \xi^2 \right) + \mu^2 \left( \frac{1}{80} - \frac{1}{16} \xi^4 \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Istnieje możliwość porównania wyników (4.26) z obliczeniami ścisłymi dla tego samego problemu, przedstawionymi w pracy CHERNA [3], otrzymanymi tylko w zakresie linio-sprężystym. Okazuje się, że maksymalny błąd rozwiązań (4.26) dla wartości małego



Rys. 2

parametru  $\mu = 1$  (dla  $\xi = 0$ ) nie przekracza 1,8%. Należy przypuszczać, że również dla innych wartości wykładnika  $n$  oraz innych praw fizycznych błąd rozwiązania przybliżonego jest bardzo mały (dla dość małych  $\mu$  np.  $\mu \leq 1$ ).

b) *Material sztywno-plastyczny*  $n \rightarrow \infty$ . Przechodząc z  $n$  do nieskończoności obliczamy stałe:

$$a = 1/2, \quad b = -1/2, \quad c \sim -1/6n, \quad d \sim 1/2n, \quad A_2 \sim \sigma_0^{*(n-1)} \frac{11}{45} n,$$

następnie drugie poprawki do funkcji  $\Phi$  i  $\sigma^*$ :

$$\Phi_2 = \frac{1}{8}(1 - \xi^2)^2, \quad \sigma_2^* = 0$$

oraz ostateczny wynik:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \Phi(\xi) &= 1 + \frac{1}{2}\mu(1-\xi^2) + \frac{1}{8}\mu^2(1-\xi^2)^2 + \dots, \\ \sigma^*(\xi) &= \sigma_0^* + \dots \end{aligned}$$

W tym przypadku (w stanie granicznym) możemy otrzymać rozwiązanie ściśle przyjmując  $\sigma^* = \sigma_0^* = \text{const}$  i rozwiązując równanie (4.9). Poszukiwany optymalny kształt jest określony funkcją

$$(4.28) \quad \Phi = e^{\frac{1}{2}\mu(1-\xi^2)},$$

która dla niewielkich wartości  $\mu$  może być rozwinięta w szereg (4.27). Optymalny kształt pręta przedstawiono na rys. 2 dla  $\mu = 0$ ;  $\mu = 0,5$ ;  $\mu = 1,0$  oraz dla  $n = 1$  i  $n = \infty$ ; zależy on w sposób istotny od postaci prawa fizycznego.

#### Literatura cytowana w tekście

1. R. L. BARNETT, *Minimum weight design of beams for deflection*, J. of Eng. Mech., Proc. ASCE, EM 1, 87, (1961), 75-109.
2. R. L. BARNETT, *Minimum deflection design of uniformly accelerating cantilever beam*, J. Appl. Mech. 30, (1963) 466-467.
3. J. M. CHERN, *Optimal structural design for given deflection in presence of body forces*, Int. J. Solids Struct., 7 (1971) 373-382.
4. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiałów o nieliniowości fizycznej*, Zesz. Nauk. Pol. Krakowskiej, 5 (1975).
5. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie belki wspornikowej obciążonej ciężarem własnym przy nieliniowości fizycznej materiału*, Rozpr. Inż., 3, 24 (1976).
6. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1972.
7. J. GRZYCZ, *Kształtowanie na największą sztywność słupów ścisłanych osiowo*, *Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych*, Część I, 132-139, PAN, Wrocław-Warszawa-Kraków 1968.
8. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, Москва 1966.

#### Резюме

#### ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА

Предметом является оптимальное формирование стержня длины  $l$  с расположенной на его конце  $x = L$  массой, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его другой конец  $x = 0$ .

Принято, что материал стержня проявляет нелинейную зависимость между напряжением и деформацией согласно физическому закону, который может описывать нелинейно-упругие, упруго-пластические или находящиеся в состоянии установившейся ползучести материалы. После общей постановки задачи принята функция цели в виде функционала, выражающего перемещение конца стержня, а ограничение — в виде заданного объема (в двойственной постановке).

Оптимальные формы стержня, полученные для степенного физического закона при разных значениях показателя  $n$ , показаны на рисунке. Они существенно зависят от вида физического закона.



## Summary

## OPTIMAL STRUCTURAL DESIGN OF THE ROTATING ROD WITH PHYSICAL NONLINEARITY OF MATERIAL

The subject of the paper is minimal weight design of a rod of length  $l$  that carries a concentrated mass  $Q$  at  $x = l$  and rotates at constant velocity  $\omega$  about an axis through  $x = 0$  that is perpendicular to the rod.

It has been assumed that material of the rod is characterized by nonlinear dependence between stress and strain. Physical law can describe nonlinearly-elastic, elastic-plastic as well as rheological behaviour of materials.

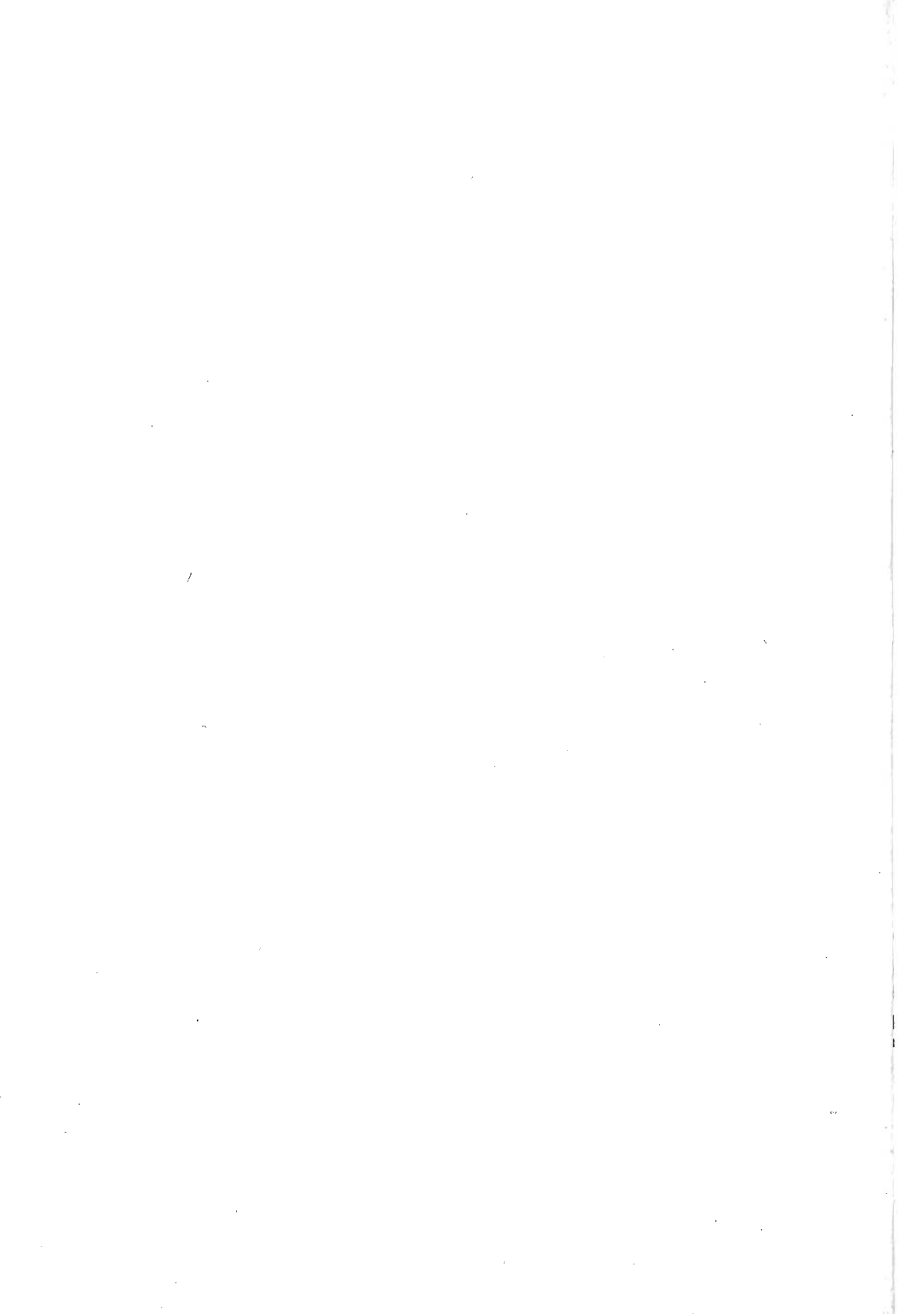
On the basis of the general formulation of the problem, optimal design of the rod for minimum axial displacement at  $x = l$  has been done under the constraint that the volume is equal to the given value (in dual formulation).

The optimal shapes of the rod obtained for different values of exponent  $n$  in the case of power physical law, presented graphically, essentially depend on the form of the physical law.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1975 r.*

---



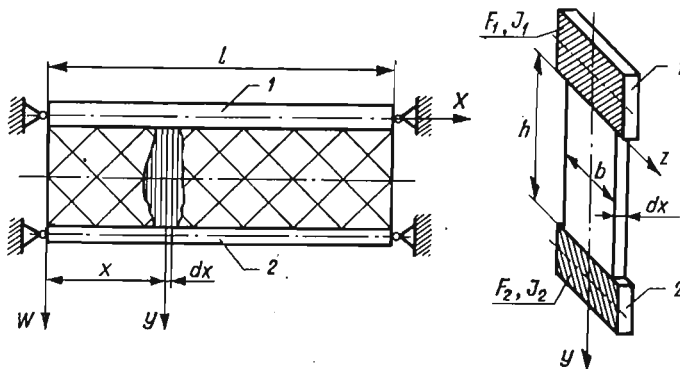
SWOBODNE DRGANIA POPRZECZNE UKŁADU DWÓCH BELEK POŁĄCZONYCH  
INERCYJNYM ELEMENTEM SPRĘŻYSTYM

ZBIGNIEW ONISZCZUK (RZESZÓW)

1. Wstęp

W pracy [2] rozpatrzono poprzeczne drgania układu złożonego z dwóch równoległych belek pryzmatycznych połączonych nieważkim liniowym elementem sprężystym. W przypadku, gdy masa elementu nie jest pomijalnie mała w porównaniu z masami belek nie można zaniedbać wpływu bezwładności elementu sprężystego na drgania układu.

SAITO i CHONAN [3] jako pierwsi rozważyli problem drgań belek z uwzględnieniem masy elementu sprężystego, przy czym element ten został zastąpiony zespołem niezależnych sprężyn (prętów sprężystych). W swoim opracowaniu ograniczyli się jednak tylko do analizy drgań dwóch jednakowych belek.



Rys. 1

W niniejszej pracy rozpatrzone będą drgania poprzeczne układu dwóch równoległych belek pryzmatycznych (rys. 1) różniących się geometrią i własnościami fizycznymi. Uwzględniony też zostanie wpływ bezwładności elementu sprężystego na drgania belek.

2. Różniczkowe równania ruchu układu. Drgania swobodne

Przyjmujemy następujące założenia:

- a) układ nie jest tłumiony,
- b) belki i element sprężysty są ciałami jednorodnymi,
- c) element sprężysty zastępuje się zespołem niezależnych prętów sprężystych rozłożonych wzdłuż belek.

Oznaczenia dotyczące belek:

- $w_1 = w_1(x, t)$  przemieszczenie przekrojów górnej belki,  
 $w_2 = w_2(x, t)$  przemieszczenie przekrojów dolnej belki,  
 $x$  współrzędna określająca położenie danego przekroju,  
 $t$  czas,  
 $l$  długość belki,  
 $F_1, F_2, J_1, J_2$  przekroje poprzeczne i momenty bezwładności,  
 $\varrho_1, \varrho_2$  masy właściwe,  
 $E_1, E_2$  moduły Younga.

Oznaczenia dotyczące elementu sprężystego:

- $u = u(x, y, t)$  przemieszczenie przekrojów pręta,  
 $y$  współrzędna określająca położenie danego przekroju pręta,  
 $h$  wysokość,  
 $b$  szerokość,  
 $\varrho$  masa właściwa,  
 $E$  moduł Younga,

$$c = \frac{E}{h} \text{ moduł podatności,}$$

$$k = bc = \frac{E}{h} b \text{ współczynnik sprężystości.}$$

Model układu drgającego przedstawiony na rys. 1 składa się z dwóch belek połączonych zespołem prętów sprężystych rozłożonych w sposób ciągły wzdłuż belek. Pręty sprężyste wykonują drgania podłużne wywołane drganiami poprzecznymi belek, przy czym pomijamy wzajemne oddziaływanie prętów na siebie.

Różniczkowe równania ruchu układu (rys. 1) mają następującą postać:

$$(1) \quad E_1 J_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \varrho_1 F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + p_1 = 0,$$

$$(2) \quad E_2 J_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \varrho_2 F_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - p_2 = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

gdzie

$$(4) \quad p_1(x, t) = -kh \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,0,t)}, \quad p_2(x, t) = -kh \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,h,t)}$$

określają reakcje jednostkowe pręta działające w danym przekroju  $x$  odpowiednio na górną i dolną belkę.

Geometryczne warunki brzegowe dla równania (3):

$$(5) \quad u(x, y, t) \Big|_{(y=0)} = w_1(x, t), \quad u(x, y, t) \Big|_{(y=h)} = w_2(x, t).$$

Równania (1), (2) opisują poprzeczne drgania belek, natomiast równanie (3) — drgania podłużne pręta sprężystego. Aby rozwiązania tego układu równań miały charakter ogólny, nie precyzujemy warunków brzegowych dla równań (1), (2).

Drgania harmoniczne układu przewidujemy w postaci:

$$(6) \quad w_1(x, t) = X_1(x)T(t), \quad w_2(x, t) = X_2(x)T(t),$$

$$(7) \quad u(x, y, t) = Y(x, y)T(t),$$

gdzie

$$(8) \quad T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t.$$

Podstawiając (7) i (8) do równania (3) otrzymujemy

$$(9) \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + a^2 Y = 0, \quad \text{gdzie} \quad a^2 = \frac{\omega^2 \rho}{E}.$$

Rozwiązanie równania (9) ma postać

$$(10) \quad Y(x, y) = A(x) \sin(ay) + B(x) \cos(ay).$$

Z uwagi na (7) warunki brzegowe (5) przyjmują formę:

$$(11) \quad Y(x, y)|_{(y=0)} = X_1(x), \quad Y(x, y)|_{(y=h)} = X_2(x).$$

W oparciu o (11) wyznaczamy funkcje  $A(x)$  i  $B(x)$ :

$$(12) \quad A(x) = X_2(x) \operatorname{cosec}(ah) - X_1(x) \operatorname{ctg}(ah),$$

$$B(x) = X_1(x).$$

Wobec tego

$$(13) \quad Y(x, y) = [X_2(x) \operatorname{cosec}(ah) - X_1(x) \operatorname{ctg}(ah)] \sin(ay) + X_1(x) \cos(ay),$$

zaś

$$(14) \quad u(x, y, t) = Y(x, y)T(t) = \{[X_2(x) \operatorname{cosec}(ah) - X_1(x) \operatorname{ctg}(ah)] \sin(ay) + X_1(x) \cos(ay)\} (C \cos \omega t + D \sin \omega t).$$

Ponieważ

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a \{[X_2 \operatorname{cosec}(ah) - X_1 \operatorname{ctg}(ah)] \cos(ay) - X_1 \sin(ay)\} T(t),$$

więc na podstawie wzorów (4) reakcje jednostkowe pręta na belki:

$$(16) \quad \begin{aligned} p_1(x, t) &= -kah[X_2(x) \operatorname{cosec}(ah) - X_1(x) \operatorname{ctg}(ah)]T(t), \\ p_2(x, t) &= -kah[X_2(x) \operatorname{ctg}(ah) - X_1(x) \operatorname{cosec}(ah)]T(t). \end{aligned}$$

Podstawiając (6) i (16) do równań (1), (2) otrzymujemy

$$(17) \quad \begin{aligned} E_1 J_1 X_1^{(IV)} + [kah \operatorname{ctg}(ah) - \omega^2 \rho_1 F_1] X_1 - kah \operatorname{cosec}(ah) X_2 &= 0, \\ E_2 J_2 X_2^{(IV)} + [kah \operatorname{ctg}(ah) - \omega^2 \rho_2 F_2] X_2 - kah \operatorname{cosec}(ah) X_1 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązań układu równań (17) poszukujemy w postaci

$$(18) \quad X_1 = A_1 e^{rx}, \quad X_2 = A_2 e^{rx}.$$

Wprowadzając (18) do równań (17) mamy

$$(19) \quad \begin{aligned} A_1 [E_1 J_1 r^4 + (kah) \operatorname{ctg}(ah) - \omega^2 \rho_1 F_1] - A_2 (kah) \operatorname{cosec}(ah) &= 0, \\ -A_1 (kah) \operatorname{cosec}(ah) + A_2 [E_2 J_2 r^4 + (kah) \operatorname{ctg}(ah) - \omega^2 \rho_2 F_2] &= 0. \end{aligned}$$

Na podstawie (19) otrzymujemy następujące równanie charakterystyczne:

$$(20) \quad E_1 J_1 E_2 J_2 r^8 + \{E_1 J_1 [(k a h) \operatorname{ctg}(a h) - \omega^2 \varrho_2 F_2] + E_2 J_2 [(k a h) \operatorname{ctg}(a h) - \omega^2 \varrho_1 F_1]\} r^4 + [(k a h) \operatorname{ctg}(a h) - \omega^2 \varrho_1 F_1] [(k a h) \operatorname{ctg}(a h) - \omega^2 \varrho_2 F_2] - (k a h) f^2 \operatorname{cosec}^2(a h) = 0,$$

gdzie

$$a^2 = \frac{\omega^2 \varrho}{E}.$$

Równanie (20) jest równaniem kwadratowym względem  $r^4$

$$(21) \quad r_{1,2}^4 = \frac{1}{2} (m \pm \sqrt{m^2 - 4n}),$$

gdzie

$$m = \omega^2 \left( \frac{\varrho_1 F_1}{E_1 J_1} + \frac{\varrho_2 F_2}{E_2 J_2} \right) - \omega k h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \left( \frac{1}{E_1 J_1} + \frac{1}{E_2 J_2} \right) \operatorname{ctg} \left( \omega h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \right),$$

$$n = \frac{\omega^2}{E_1 J_1 E_2 J_2} \left[ \omega^2 \varrho_1 F_1 \varrho_2 F_2 - \omega k h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} (\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2) \operatorname{ctg} \left( \omega h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \right) - k^2 h^2 \frac{\varrho}{E} \right].$$

Jeżeli

$$(22) \quad n > 0,$$

to

$$r_1^4 > r_2^4 > 0.$$

Równanie (20) ma w tym przypadku osiem następujących pierwiastków:

$$(23) \quad r_i = +k_1; -k_1; +ik_1; -ik_1; +k_2; -k_2; +ik_2; -ik_2,$$

$$\text{gdzie } i = \sqrt{-1},$$

$$(24) \quad k_{1,2} = \sqrt[4]{\frac{1}{2} [m \pm \sqrt{m^2 - 4n}]}.$$

A zatem całkami równań (17) są funkcje:

$$(25) \quad \begin{aligned} X_1 &= C_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + C_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + C_3 \sin(k_1 x) + C_4 \cos(k_1 x) + \\ &\quad + C_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + C_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + C_7 \sin(k_2 x) + C_8 \cos(k_2 x), \\ X_2 &= D_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + D_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + D_3 \sin(k_1 x) + D_4 \cos(k_1 x) + \\ &\quad + D_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + D_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + D_7 \sin(k_2 x) + D_8 \cos(k_2 x), \end{aligned}$$

przy czym stałe  $C_i, D_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  są związane zależnościami wynikającymi z równań (19):

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{D_i}{C_i} &= \frac{E_1 J_1}{q} \left( p + \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{E_1 J_1 E_2 J_2}} \right) = \alpha_1 > 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \frac{D_j}{C_j} &= \frac{E_1 J_1}{q} \left( p - \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{E_1 J_1 E_2 J_2}} \right) = -\alpha_2 < 0, \quad j = 5, \dots, 8, \end{aligned}$$

gdzie

$$p = k\omega h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \left( \frac{1}{E_1 J_1} - \frac{1}{E_2 J_2} \right) \operatorname{ctg} \left( \omega h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \right) - \omega^2 \left( \frac{\varrho_1 F_1}{E_1 J_1} - \frac{\varrho_2 F_2}{E_2 J_2} \right),$$

$$q = 2k\omega h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \operatorname{cosec} \left( \omega h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \right),$$

przy czym  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

Ponieważ  $D_i = \alpha_1 C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ),  $D_j = -\alpha_2 C_j$  ( $j = 5, \dots, 8$ ), więc w wyrażeniach (25) mamy tylko osiem dowolnych stałych rzeczywistych  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ )

$$(27) \quad \begin{aligned} X_1 &= C_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + C_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + C_3 \sin(k_1 x) + C_4 \cos(k_1 x) + \\ &\quad + C_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + C_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + C_7 \sin(k_2 x) + C_8 \cos(k_2 x), \\ X_2 &= [C_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + C_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + C_3 \sin(k_1 x) + C_4 \cos(k_1 x)] \alpha_1 + \\ &\quad - [C_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + C_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + C_7 \sin(k_2 x) + C_8 \cos(k_2 x)] \alpha_2. \end{aligned}$$

Stałe  $C_i$  wyznaczamy wprowadzając wyrażenia (27) do przyjętych warunków brzegowych wynikających ze sposobów podparcia końców belek. Na podstawie ośmiu warunków brzegowych otrzymamy jednorodny układ ośmiu równań algebraicznych na poszukiwane stałe. Przyrównując do zera wyznacznik utworzony ze współczynników stojących przy niewiadomych (warunek istnienia niezerowych rozwiązań układu równań jednorodnych) dochodzimy do równania częstości, z którego uzyskamy nieskończony przeliczalny ciąg rozwiązań na częstości drgań własnych układu  $\omega_n$ . Dla każdej częstości znajdujemy odpowiednie stałe  $C_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) w funkcji jednej ze stałych. Z (24) obliczamy ciągi wartości własnych  $k_{1n}$  i  $k_{2n}$  oraz z (26) współczynniki  $\alpha_{1n}$  (przy  $k_1 = k_{1n}$ ) i  $\alpha_{2n}$  (przy  $k_2 = k_{2n}$ ). Tym samym z (27) określimy postacie drgań własnych (głównych) belek  $X_{1n}$  i  $X_{2n}$ , zaś z (8) funkcje czasu  $T_n$ .

Ostatecznie rozwiązania (6), (7) rozpatrywanego problemu można przedstawić w następującej postaci:

$$(28) \quad \begin{aligned} w_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n}(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [Z_{1n}(x) + Z_{2n}(x)] [C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)], \\ w_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{1n} Z_{1n}(x) - \alpha_{2n} Z_{2n}(x)] [C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)], \\ (29) \quad u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x, y) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ [Z_{1n}(x) + Z_{2n}(x)] \cos(a_n y) + \\ &\quad + ([\alpha_{1n} Z_{1n}(x) - \alpha_{2n} Z_{2n}(x)] \operatorname{cosec}(a_n h) - \\ &\quad - [Z_{1n}(x) + Z_{2n}(x)] \operatorname{ctg}(a_n h)) \sin(a_n y) \} [C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} Z_{1n}(x) &= \operatorname{sh}(k_{1n} x) + A_{1n} \operatorname{ch}(k_{1n} x) + A_{2n} \sin(k_{1n} x) + A_{3n} \cos(k_{1n} x), \\ Z_{2n}(x) &= A_{4n} \operatorname{sh}(k_{2n} x) + A_{5n} \operatorname{ch}(k_{2n} x) + A_{6n} \sin(k_{2n} x) + A_{7n} \cos(k_{2n} x), \\ a_n &= \omega_n \sqrt{\frac{\varrho}{E}}, \end{aligned}$$

$A_{in}$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) stałe otrzymane w wyniku przekształceń stałych  $C_{in}$ .

Stałe  $C_n$ ,  $D_n$  określiśmy na podstawie warunków początkowych wykorzystując własność ortogonalności postaci drgań głównych. Warunek ortogonalności tworzymy w oparciu o równania (9) i (17).

Funkcje własne  $X_{1i}$ ,  $X_{2i}$ ,  $X_{1j}$ ,  $X_{2j}$  spełniają odpowiednio układy równań

$$(30) \quad \begin{aligned} E_1 J_1 X_{1i}^{(IV)} + (g_i - \omega_i^2 \varrho_1 F_1) X_{1i} - f_i X_{2i} &= 0, \\ E_2 J_2 X_{2i}^{(IV)} + (g_i - \omega_i^2 \varrho_2 F_2) X_{2i} - f_i X_{1i} &= 0, \end{aligned}$$

$$(31) \quad \begin{aligned} E_1 J_1 X_{1j}^{(IV)} &= -(g_j - \omega_j^2 \varrho_1 F_1) X_{1j} + f_j X_{2j}, \\ E_2 J_2 X_{2j}^{(IV)} &= -(g_j - \omega_j^2 \varrho_2 F_2) X_{2j} + f_j X_{1j}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(32) \quad \begin{aligned} g_i &= k\omega_i h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \operatorname{ctg} \left( \omega_i h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \right), \\ g_j &= k\omega_j h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \operatorname{ctg} \left( \omega_j h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \right), \\ f_i &= k\omega_i h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \operatorname{cosec} \left( \omega_i h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \right), \\ f_j &= k\omega_j h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \operatorname{cosec} \left( \omega_j h \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \right). \end{aligned}$$

Pierwsze z równań (30) mnożymy przez  $X_{1j}$ , drugie zaś odpowiednio przez  $X_{2j}$  i całkujemy po długości belek

$$(g_i - \omega_i^2 \varrho_1 F_1) \int_0^l X_{1i} X_{1j} dx - f_i \int_0^l X_{1i} X_{2i} dx = -E_1 J_1 \int_0^l X_{1i}^{(IV)} X_{1j} dx = -E_1 J_1 \int_0^l X_{1j} X_{1j}^{(IV)} dx,$$

$$(g_i - \omega_i^2 \varrho_2 F_2) \int_0^l X_{2i} X_{2j} dx - f_i \int_0^l X_{1i} X_{2j} dx = -E_2 J_2 \int_0^l X_{2i}^{(IV)} X_{2j} dx = -E_2 J_2 \int_0^l X_{2i} X_{2j}^{(IV)} dx.$$

Po wprowadzeniu (31) do powyższych wyrażeń, a następnie ich zsumowaniu otrzymujemy

$$(33) \quad \begin{aligned} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^l (\varrho_1 F_1 X_{1i} X_{1j} + \varrho_2 F_2 X_{2i} X_{2j}) dx - \\ - (g_i - g_j) \int_0^l (X_{1i} X_{1j} + X_{2i} X_{2j}) dx - (f_i - f_j) \int_0^l (X_{1i} X_{2j} + X_{1j} X_{2i}) dx = 0. \end{aligned}$$

Postacie drgań  $Y_i$ ,  $Y_j$  spełniają następujące równania:

$$(34) \quad Y_i^{(II)} + a_i^2 Y_i = 0, \quad \text{gdzie} \quad a_i^2 = \omega_i^2 \frac{\varrho}{E},$$

$$(35) \quad Y_j^{(II)} = -a_j^2 Y_j, \quad \text{gdzie} \quad a_j^2 = \omega_j^2 \frac{\varrho}{E}.$$



Mnożąc równanie (34) przez  $Y_j$  i całkując po wysokości pręta sprężystego mamy

$$a_i^2 \int_0^h Y_i Y_j dy = - \int_0^h Y_i^{(IV)} Y_j dy = -(Y_i^{(IV)} Y_j - Y_i Y_j^{(IV)}) \Big|_0^h - \int_0^h Y_i Y_j^{(IV)} dy.$$

Podstawiając teraz  $Y_j^{(IV)}$  z (35) otrzymujemy

$$(36) \quad (a_i^2 - a_j^2) \int_0^h Y_i Y_j dy = -(Y_i^{(IV)} Y_j - Y_i Y_j^{(IV)}) \Big|_0^h.$$

Prawą stronę wyrażenia (36) obliczamy na podstawie (13)

$$(Y_i^{(IV)} Y_j - Y_i Y_j^{(IV)}) \Big|_0^h = \frac{1}{bE} [(g_i - g_j)(X_{1i} X_{1j} + X_{2i} X_{2j}) + (f_i - f_j)(X_{1i} X_{2j} + X_{1j} X_{2i})],$$

więc

$$(37) \quad (\omega_i^2 - \omega_j^2) \rho b \int_0^h Y_i Y_j dy = -(g_i - g_j)(X_{1i} X_{1j} + X_{2i} X_{2j}) - (f_i - f_j)(X_{1i} X_{2j} + X_{1j} X_{2i}).$$

Z uwagi na (37) zależność (33) przyjmuje postać

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^l [(\rho_1 F_1 X_{1i} X_{1j} + \rho_2 F_2 X_{2i} X_{2j}) + \rho b \int_0^h Y_i Y_j dy] dx = 0.$$

Ostatecznie otrzymujemy następujący warunek ortogonalności:

$$(38) \quad \int_0^l [(\rho_1 F_1 X_{1i} X_{1j} + \rho_2 F_2 X_{2i} X_{2j}) + \rho b \int_0^h Y_i Y_j dy] dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ \gamma_j^2 & \text{dla } i = j, \end{cases}$$

gdzie

$$(39) \quad \gamma_j^2 = \int_0^l [(\rho_1 F_1 X_{1j}^2 + \rho_2 F_2 X_{2j}^2) + \rho b \int_0^h Y_j^2 dy] dx,$$

przy czym

$$(40) \quad \int_0^h Y_j^2 dy = \frac{h}{\beta_j} \left[ \frac{1}{2} (\beta_j \operatorname{cosec}^2 \beta_j - \operatorname{ctg} \beta_j) (X_{1j}^2 + X_{2j}^2) - (\beta_j \operatorname{ctg} \beta_j - 1) \operatorname{cosec} \beta_j \cdot X_{1j} \cdot X_{2j} \right],$$

$$\beta_j = \omega_j \sqrt{\frac{\rho}{E}} h.$$

Warunki początkowe przyjmujemy w postaci

$$(41) \quad \begin{aligned} w_1(x, 0) &= w_{10}(x), & w_2(x, 0) &= w_{20}(x), \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} \Big|_{(x,0)} &= v_{10}(x), & \frac{\partial w_2}{\partial t} \Big|_{(x,0)} &= v_{20}(x), \end{aligned}$$

$$(42) \quad \begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y) = w_{10}(x) + \frac{1}{h} [w_{20}(x) - w_{10}(x)] y, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x,y,0)} &= v_0(x, y) = v_{10}(x) + \frac{1}{h} [v_{20}(x) - v_{10}(x)] y. \end{aligned}$$

Podstawiając (28), (29) do (41), (42) mamy

$$(43) \quad \begin{aligned} w_{10}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{1n}(x), & v_{10}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n D_n X_{1n}(x), \\ w_{20}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{2n}(x), & v_{20}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n D_n X_{2n}(x), \\ u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(x, y), & v_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n D_n Y_n(x, y). \end{aligned}$$

Wykonując odpowiednie transformacje całkowe doprowadzamy wyrażenia (43) do postaci:

$$(44) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^l \left( \varrho_1 F_1 X_{1n} X_{1k} + \varrho_2 F_2 X_{2n} X_{2k} + \varrho b \int_0^h Y_n Y_k dy \right) dx &= \\ &= \int_0^l \left( \varrho_1 F_1 w_{10} X_{1k} + \varrho_2 F_2 w_{20} X_{2k} + \varrho b \int_0^h u_0 Y_k dy \right) dx, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n D_n \int_0^l \left( \varrho_1 F_1 X_{1n} X_{1k} + \varrho_2 F_2 X_{2n} X_{2k} + \varrho b \int_0^h Y_n Y_k dy \right) dx &= \\ &= \int_0^l \left( \varrho_1 F_1 v_{10} X_{1k} + \varrho_2 F_2 v_{20} X_{2k} + \varrho b \int_0^h v_0 Y_k dy \right) dx. \end{aligned}$$

Uwzględniając warunek ortogonalności (38) otrzymujemy z (44) wyrażenia na poszukiwane stałe:

$$(45) \quad \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\gamma_n^2} \int_0^l \left( \varrho_1 F_1 w_{10} X_{1n} + \varrho_2 F_2 w_{20} X_{2n} + \varrho b \int_0^h u_0 Y_n dy \right) dx, \\ D_n &= \frac{1}{\omega_n \gamma_n^2} \int_0^l \left( \varrho_1 F_1 v_{10} X_{1n} + \varrho_2 F_2 v_{20} X_{2n} + \varrho b \int_0^h v_0 Y_n dy \right) dx. \end{aligned}$$

Po obliczeniu całek:  $\int_0^h u_0(x, y) Y_n(x, y) dy$ ,  $\int_0^h v_0(x, y) Y_n(x, y) dy$  można wzory (45) przedstawić w następującej formie:

$$(46) \quad \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\gamma_n^2} \int_0^l \left\{ (\varrho_1 F_1 w_{10} + \varrho b h [w_{10}(\delta_n^2 - \delta_n \operatorname{ctg} \beta_n) - w_{20}(\delta_n^2 - \delta_n \operatorname{cosec} \beta_n)]) X_{1n} + \right. \\ &\quad \left. + (\varrho_2 F_2 w_{20} + \varrho b h [w_{20}(\delta_n^2 - \delta_n \operatorname{ctg} \beta_n) - w_{10}(\delta_n^2 - \delta_n \operatorname{cosec} \beta_n)]) X_{2n} \right\} dx, \\ D_n &= \frac{1}{\omega_n \gamma_n^2} \int_0^l \left\{ (\varrho_1 F_1 v_{10} + \varrho b h [v_{10}(\delta_n^2 - \delta_n \operatorname{ctg} \beta_n) - v_{20}(\delta_n^2 - \delta_n \operatorname{cosec} \beta_n)]) X_{1n} + \right. \\ &\quad \left. + (\varrho_2 F_2 v_{20} + \varrho b h [v_{20}(\delta_n^2 - \delta_n \operatorname{ctg} \beta_n) - v_{10}(\delta_n^2 - \delta_n \operatorname{cosec} \beta_n)]) X_{2n} \right\} dx, \end{aligned}$$

gdzie z (39), (40)

$$(47) \quad \gamma_n^2 = \int_0^l \{ [\varrho_1 F_1 + \varrho bh(\operatorname{cosec}^2 \beta_n - \delta_n \operatorname{ctg} \beta_n)] X_{1n}^2 - \varrho bh(\operatorname{ctg} \beta_n - \delta_n) \operatorname{cosec} \beta_n X_{1n} X_{2n} + \\ + [\varrho_2 F_2 + \varrho bh(\operatorname{cosec}^2 \beta_n - \delta_n \operatorname{ctg} \beta_n)] X_{2n}^2 \} dx,$$

przy czym

$$\beta_n = \omega_n \sqrt{\frac{\varrho}{E}} h, \quad \beta_n \delta_n = 1.$$

### 3. Podsumowanie

A. Określone w pracy rozwiązania drgań swobodnych układu mają charakter uniwersalny, ponieważ zostały otrzymane bez wprowadzenia warunków brzegowych dla belek. Uzyskanie rozwiązań szczególnych (dla przyjętych warunków brzegowych) nie sprawia trudności metodycznych. Oczywiście pomoc maszyny cyfrowej jest niezbędna.

B. Warunek (22) ogranicza rozważania wyłącznie do drgań harmoniczných całego układu.

C. Przedstawiona praca jest w pewnym sensie uogólnieniem zagadnienia analizowanego w pracy [2]. Przy założeniu, że masa elementu sprężystego jest pomijalnie mała mamy

$$p_1(x, t) = -\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ (a \rightarrow 0)}} \left\{ k \left[ X_2(x) \frac{ah}{\sin(ah)} - X_1(x) \frac{ah}{\sin(ah)} \cos(ah) \right] T(t) \right\} = -k [X_2(x) - \\ - X_1(x)] T(t) = -k(w_2 - w_1), \\ p_2(x, t) = +k(w_2 - w_1).$$

wtedy różniczkowe równania ruchu opisujące drgania belek przyjmują postać

$$E_1 J_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \varrho_1 F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - k(w_2 - w_1) = 0, \\ E_2 J_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \varrho_2 F_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k(w_2 - w_1) = 0$$

i otrzymujemy przypadek rozpatrzony we wspomnianym artykule.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że jakkolwiek uwzględnienie masy elementu sprężystego wpływa na obniżenie częstości i amplitud drgań belek, to jednak sama forma postaci drgań własnych (głównych) nie ulega zmianie.

D. Szczególnym przypadkiem rozważonego zagadnienia jest belka drgająca na inercyjnym podłożu sprężystym. Traktując dolną belkę jako ciało sztywne (unieruchomione) otrzymujemy następujące równanie ruchu belki górnej

$$E_1 J_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \varrho_1 F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + k ah \operatorname{ctg}(ah) w_1 = 0.$$

Drgania poprzeczne belki na sprężystym podłożu można określić na podstawie  $w_1(x, t)$  z (28) przy  $E_2 J_2 \rightarrow \infty$ .

E. Wydaje się, że przedstawiony w pracy sposób postępowania można z powodzeniem zastosować do określenia drgań poprzecznych układów trójwarstwowych (wielowarstwowych), w których warstwa środkowa charakteryzuje się małą sztywnością na zginanie.

## Literatura cytowana w tekście

1. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
2. Z. ONISZCZUK, *Drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych elementem sprężystym*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 12 (1974).
3. H. SAITO, S. CHONAN, *Vibrations of elastically connected double-beam systems*, Technology Reports Tohoku University, 1, 34 (1969).
4. J. M. SEELIG, W. H. HOPPMANN, II, *Impact on an elastically connected double-beam system*, Trans. ASME, Ser. E, 31-4, 12 (1964).
5. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1959.

## Резюме

СВОБОДНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ БАЛОК  
СВЯЗАННЫХ ИНЕРЦИОННЫМ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

В работе рассматриваются поперечные колебания системы, состоящей из двух параллельных призматических балок, соединенных упругим элементом. Упругий элемент моделируется системой независимых стержней. Применение такой модели делает возможным учёт влияния массы элемента на колебания балок.

В статье приведены дифференциальные уравнения движения системы, а также найдены решения свободных колебаний.

## Summary

## FREE TRANSVERSE VIBRATIONS OF AN ELASTICALLY CONNECTED DOUBLE-BEAM SYSTEM

This paper deals with an analysis of free transverse vibrations of two parallel prismatic beams which are coupled by means of an inertial elastic element. The elastic element is represented by a system of independent bars. Application of such a model makes it possible to take into consideration the effect of the mass of the element on the vibration of beams.

In this report differential equations of motion of the system are derived and the solution of free vibrations is given.

INSTYTUT LOTNICTWA  
POLITECHNIKA RZESZOWSKA, RZESZÓW

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lipca 1975 r.*

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE NIERÓWNOMIERNIE NAGRZANYCH TARCZ WIRUJĄCYCH  
Z UWAGI NA NOŚNOŚĆ SPRĘŻYSTĄ I GRANICZNĄ

TADEUSZ LISZKA, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Przy doborze optymalnego profilu tarczy kołowo-symetrycznej założymy bądź spełnienie warunków równomiernej wytrzymałości w całej tarczy (zakres sprężysty), bądź też całkowite uplastycznienie tarczy (zakres plastyczny). Warunki te — przy przyjęciu w obu wariantach tej samej hipotezy wytrzymałościowej — są określone równaniami identycznymi, ewentualnie z dokładnością do stałej, uwzględniającej współczynnik bezpieczeństwa oraz możliwe rozróżnienie granicy sprężystości i granicy plastyczności. Istotna różnica polega tu natomiast na konieczności spełnienia w zakresie sprężystym równania nierozdzielności wyrażonego poprzez naprężenia w oparciu o prawo Hooke'a, podczas gdy, przy założeniu idealnej plastyczności może być ono zawsze spełnione, niezależnie od rozkładu naprężeń (wobec zmienności modułu w równaniach fizycznych).

Kształtowanie z uwagi na nośność graniczną wykazuje więc w tym przypadku w sensie rachunku wariacyjnego o jeden «stopień swobody» więcej, jednak dla sprawdzenia poprawności rozwiązania należy wykazać, że w każdym punkcie ciała moc rozpraszana w stanie granicznym jest nieujemna. W większości przypadków wirujących tarcz kołowo-symetrycznych ten ostatni warunek nie budzi wątpliwości.

Ponadto zakładamy, że schemat plastycznego zniszczenia nie jest poprzedzony dekohezją (por. [18]).

Przy założeniu izotropii materiału sam warunek równomiernej wytrzymałości, względnie warunek plastyczności, można tu sformułować dwojako [20]. W sensie węższym można przez ten warunek rozumieć podwójną równość

$$(1.1) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \begin{cases} \sigma_{0+} \\ -\sigma_{0-} \end{cases}$$

gdzie  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  są naprężeniami promieniowymi i obwodowymi w tarczy, a  $\sigma_{0+}$  i  $\sigma_{0-}$  są wartościami granicy sprężystości lub plastyczności dla czystego rozciągania i ściskania.

W sensie szerszym zapisujemy go w ogólniejszej postaci

$$(1.2) \quad \sigma_{\text{red}} = \sigma_0,$$

gdzie  $\sigma_{\text{red}}$  jest naprężeniem zastępczym według przyjętej hipotezy wytrzymałościowej.

Równanie (1.1) pozostaje słuszne dla każdej hipotezy wyteżeniowej, natomiast warunek (1.2), będąc ogólniejszym, wymaga jednak jej sprecyzowania, a zatem ograniczenia się do pewnej klasy materiałów.

Klasyczne kształtowanie w oparciu o (1.1) (np. podane przez KACZANOWA [14] rozwiązanie dla tarczy niejednorodnej) kryje w sobie jednak niebezpieczeństwo dwojakiego rodzaju:

— przy kształtowaniu na nośność sprężystą rozwiązanie może być błędne, ponieważ może nie spełnić równania nierozdzielności,

— przy kształtowaniu na nośność graniczną, gdzie warunek nierozdzielności może być spełniony niezależnie, rozwiązanie może nie być optymalne, ponieważ wykorzystując warunek (1.2) można otrzymać rozwiązanie lepsze w sensie przyjętego kryterium.

Optymalne rozwiązanie mogłoby być również uzyskane przy założeniu

$$(1.3) \quad \sigma_{red} \leq \sigma_0,$$

jednak rozwiązania takie nie są autorom znane dla profili opisanych funkcjami klasy  $C^1$  i nie będą przedmiotem niniejszej pracy.

Rozwiązania z wykorzystaniem warunku (1.2) pozwalają również na swobodniejszy wybór warunków brzegowych (np. obciążeń brzegów tarczy pierścieniowej), które przy wykorzystaniu warunku (1.1) praktycznie wynikają z optymalnego rozwiązania.

Kształtując w oparciu o (1.1) (warunek w sensie węższym) tarczę jednorodną bez wpływu temperatury [HUBER [3], KRZYŚ i ŻYCZKOWSKI [9], RANTA MATTI [13] — rozwiązanie podane później, wzór (6.2)] otrzymuje się rozwiązanie optymalne z uwagi na nośność sprężystą, gdyż łatwo stwierdzić, że równanie nierozdzielności pozostaje wtedy spełnione. Wykorzystując szerszy warunek (1.2) otrzymuje się rozwiązanie ogólniejsze, które jednak w szczególnych przypadkach (np. dla tarczy pełnej) pokrywa się z powyższym.

Rozwiązania takie dla tarcz niejednorodnych z uwzględnieniem wpływu temperatury, przy zastosowaniu hipotez wyteżeniowych HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO i TRESKI-GUESTA, rozpatrywali GONTAROWSKIJ i CZEBAJEWSKIJ [4], IGNATIENKO [5], KAPKOWSKI [8] oraz KAPKOWSKI i ŁUKASIEWICZ [6, 7]. RANTA MATTI [13] podał pewne oszacowanie błędu wynikającego z przybliżonego założenia płaskiego stanu naprężenia.

Zbliżone rozwiązania można otrzymać zakładając schodkowy profil tarczy [16] lub będący funkcją odcinkowo liniową [1].

Cele obecnej pracy można streścić następująco:

1. Uzyskanie rozwiązań dla parabolicznego warunku plastyczności typu BURZYŃSKIEGO — STASSI D'ALIA,<sup>1)</sup> uogólniającego warunek HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO oraz ocena zakresu stosowalności uzyskanych rozwiązań.

2. Zbadanie problemu tożsamości rozwiązań uzyskanych w zakresie sprężystym i plastycznym oraz ocena dodatkowego zysku na materiale przy kształtowaniu na nośność graniczną, w przypadku braku takiej tożsamości.

<sup>1)</sup> Hipotezę paraboliczną, stanowiącą szczególnie przypadek trójparametrowej hipotezy Burzyńskiego formułowało później niezależnie wielu innych autorów (por. Życzkowski [19]); wiązanie jej przez nas z nazwiskami Burzyńskiego i Stassi d'Alia jest czysto umowne.

2. Przyjęte założenia

2.1. Płaski, kołowo-symetryczny stan naprężenia.

2.2. Małe przemieszczenia promieniowe.

2.3. Materiał izotropowy

a) idealnie sprężysty lub

b) idealnie plastyczny,

co odpowiada badaniu nośności sprężystej lub granicznej.

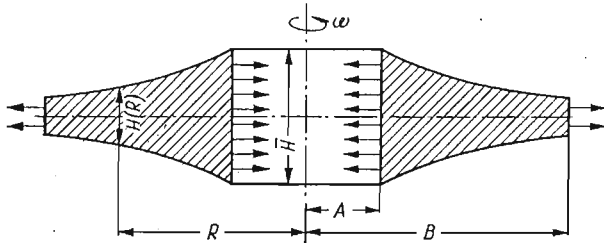
2.4. Równanie hipotezy wyężeniowej

$$(2.1) \quad -\sigma_0^2 \kappa - \sigma_0 (\kappa - 1) (\sigma_r + \sigma_\varphi) + (\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi) \leq 0, \quad \kappa = \sigma_{0-} / \sigma_{0+},$$

przechodzącej w przypadku  $\kappa = 1$  w hipotezę HMH

$$(2.2) \quad -\sigma_0^2 + (\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi) \leq 0$$

jest spełnione w formie równości w całej objętości tarczy.



Rys. 1

2.5. Granica sprężystości (lub plastyczności)  $\sigma_0$ , moduł sprężystości  $E$  i gęstość materiału  $\gamma/g$  są znanymi funkcjami temperatury  $T$  i promienia tarczy  $R$ .

2.6. Kołowo symetryczny, płaski rozkład temperatury.

2.7. Współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej  $\alpha$ , moduł Poissona  $\nu$  oraz stała  $\kappa$  nie zależą od temperatury i promienia.

3. Stosowane wielkości bezwymiarowe

$r = R/B$  bezwymiarowy promień,

$\beta = A/B$  wewnętrzny promień tarczy,

$0 \leq \beta \leq r \leq 1$ ,

$h(r) = H(R)/\bar{H}$  bezwymiarowy profil tarczy,

$s_0(r) = \sigma_0(r)/\bar{\sigma}_0$  bezwymiarowa granica plastyczności,

$s_r = \sigma_r/\bar{\sigma}_0$   
 $s_\varphi = \sigma_\varphi/\bar{\sigma}_0$  } bezwymiarowe naprężenia,

$w = \frac{\gamma \omega^2 B^2}{g \bar{\sigma}_0}$  «wirowanie tarczy» (bezwymiarowa siła odśrodkowa),

$v = \int_{\beta}^1 h r dr = \frac{V}{2\pi B^2 \bar{H}}$  bezwymiarowa objętość tarczy, ( $V$  objętość tarczy),

$Bi$  liczba Biota,

$a = \frac{3\alpha}{\bar{E}\bar{\sigma}_0\bar{T}(1+\nu)}$  bezwymiarowy współczynnik rozszerzalności liniowej materiału

tarczy,

$e = E/\bar{E}$  bezwymiarowy moduł sprężystości,

$t = T/\bar{T}$  bezwymiarowa temperatura,

$C_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  stałe całkowania,

$(\cdot)' = \partial/\partial r(\cdot)$ ,  $(\cdot)^{\cdot} = \partial/\partial t(\cdot)$ ,

(-) oznacza pewną ustaloną wartość danej wielkości, np. maksymalną. Jej przyjęcie nie wpływa w sposób istotny na wyniki rozważań. Zadowolności przyjęcia tych wartości wynika niemożność uwzględnienia ograniczeń technologicznych (typu  $H_1 \leq H \leq H_2$ ) za pomocą takich wielkości bezwymiarowych. W szczególności dla tarczy jednorodnej o stałej temperaturze wygodnie jest przyjąć  $t \equiv e \equiv s_0 \equiv 1$ .

#### 4. Podstawowe równania

Równanie równowagi dla tarczy wirującej o zmiennej grubości można więc zapisać w postaci bezwymiarowej następująco:

$$(4.1) \quad h'rs_r - hs_r - hrs_r' + hs_\varphi + hwr^2 = 0.$$

Dla zastosowanej hipotezy wyężeniowej łatwo wykazać słuszność następującej parametryzacji

$$(4.2) \quad \begin{aligned} s_r &= \left[ \kappa_1 \left( \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) - (1 - \kappa) \right] s_0, \\ s_\varphi &= \left[ \kappa_1 \left( \cos \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) - (1 - \kappa) \right] s_0, \end{aligned}$$

gdzie  $\kappa_1 = \sqrt{\kappa^2 - \kappa + 1}$ .

Jest to pewne uogólnienie parametryzacji NADAI'A-SOKOŁOWSKIEGO dla  $\kappa \neq 1$ . Po jej wykorzystaniu równanie (4.1) można zapisać w postaci:

$$(4.3) \quad h' = h \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \xi - r \left( \sin \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \xi \right) \left( \xi' + \frac{s_0'}{s_0} + t' \frac{s_0'}{s_0} \right) - w_1 r^2}{r \left[ \left( \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) - \kappa_2 \right]}$$

gdzie  $w_1 = w/\kappa_1$ ,  $\kappa_2 = (1 - \kappa)/\kappa_1$ .

Przy kształtowaniu ze względu na nośność sprężystą do wyznaczenia funkcji  $\xi(r)$  służy równanie nierozdzielności

$$(4.4) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\varphi + r\varepsilon_\varphi'$$

wiążące ze sobą odkształcenia promieniowe i obwodowe ( $\varepsilon_r$  i  $\varepsilon_\varphi$ ).



Po podstawieniu do (4.4) prawa Hooke'a

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\bar{\sigma}_0}{E} (s_r - \nu s_\varphi) + \alpha t, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{\bar{\sigma}_0}{E} (s_\varphi - \nu s_r) + \alpha t \end{aligned}$$

i wykorzystaniu (4.2) otrzymuje się ostatecznie

$$(4.6) \quad \xi' = \frac{2}{r} \frac{\sin \xi}{\mu \sin \xi - \cos \xi} + \left[ \frac{s'_0}{s_0} - \frac{e'}{e} + t' \left( \frac{\dot{s}_0}{s_0} - \frac{\dot{e}}{e} \right) \right] + \frac{\mu(\cos \xi - \kappa_2) + \sin \xi}{\mu \sin \xi - \cos \xi} + \frac{at'}{s_0 e} \cdot \frac{1}{\mu \sin \xi - \cos \xi},$$

$$\text{gdzie } \mu = \sqrt{3} \frac{1-\nu}{1+\nu}.$$

Dla prostego przypadku nienagrzonej tarczy jednorodnej ( $t = s_0 = e = 1$ ) równanie to redukuje się do

$$(4.7) \quad \xi' = \frac{2}{r} \frac{\sin \xi}{\mu \sin \xi - \cos \xi}.$$

Przy kształtowaniu ze względu na nośność graniczną spełnienie równania (4.6) nie jest wymagane. Swobodną dotychczas funkcję  $\xi(r)$  należy wtedy przyjąć tak, aby spełnić warunek

$$(4.8) \quad v = \int_{\beta}^1 h r dr = \min,$$

czyli zminimalizować objętość tarczy.

Równanie (4.8) z warunkiem (4.3) prowadzi do równania Eulera-Lagrange'a<sup>2)</sup>

$$(4.9) \quad \begin{aligned} -2\sqrt{3} \sin \xi [\kappa_2(\cos \xi + \kappa_3)] - w r^2 (\cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi) \cos \xi + \\ + [\kappa_2(\cos \xi + \kappa_2) + \kappa_3] (\cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi) r \cdot s'_0 / s_0 - \\ - \frac{1}{2} w r^3 (\cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi)^2 \left( \frac{w'}{w} + \frac{s'_0}{s_0} \right) = \\ = \xi' r [\sqrt{3} \kappa_2 (1 + \kappa_2 \cos \xi) - \kappa_2^2 \sin \xi + \kappa_3 (\sqrt{3} \cos \xi - \sin \xi)], \end{aligned}$$

gdzie  $s_0 = s_0(r)$ ,  $w = w(r)$ ,  $\kappa_3 = \kappa/\kappa_1$ .

Równanie to dla tarczy jednorodnej ( $s'_0 = w' = 0$ ), przy  $\kappa = 1$  upraszcza się do postaci:

$$(4.10) \quad \xi' = \frac{2\sqrt{3} \sin \xi + w r^2 (\cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi) \cos \xi}{r (\sin \xi - \sqrt{3} \cos \xi)}.$$

Warto zauważyć, że dla nienagrzonej tarczy jednorodnej, bez wirowania, wykonanej z materiału nieściśliwego, prawa fizyczne (prawo Hooke'a i prawo płynięcia plastycznego) są stowarzyszone z warunkiem HMH. Obowiązują wtedy twierdzenia podane przez

<sup>2</sup> Patrz Dodatek A.

SAVE'A [15], na mocy których kształtowanie na nośność sprężystą i na nośność graniczną dają identyczne wyniki, zatem równania (4.7) i (4.10) stają się (jak łatwo sprawdzić) identyczne.

Ogólne równania (4.6) i (4.10) wprawdzie nie są identyczne, ale w praktyce zbliżone, co wykorzystano później w rozwiązaniu numerycznym.

### 5. Ustalenie warunków brzegowych

Kształtowanie tarczy w oparciu o równania (4.3) oraz (4.6) lub (4.9) polega więc na wyznaczeniu funkcji  $\xi(r)$  i  $h(r)$  przy danych pozostałych wielkościach oraz danych obciążeniach (siłach promieniowych) na brzegach zewnętrznym i wewnętrznym:

$$(5.1) \quad p(r) = h(r) s_r(r) \Big|_{r=1}^{r=\beta}$$

Siła promieniowa na brzegu zewnętrznym  $p(1)$  wynika np. z obciążenia wieńcem łopatek i jest przy projektowaniu wielkością zadaną. Obciążenie  $p(\beta)$  jest jednak zwykle związane z przemieszczeniem ze względu np. na konieczność zapewnienia zgodności odkształceń wału i osadzonej na nim tarczy. Postać odpowiedniego warunku brzegowego zależy zwykle od wielu czynników technologicznych (np. luzy lub wcisk) nie rozpatrywanych tutaj, toteż obciążenie  $p(\beta)$  traktować będziemy również jako wielkość daną. Często przyjmuje się  $p(\beta) = 0$ , [4, 5, 8], jednak prowadzi to zazwyczaj do nieograniczonej wartości  $h(\beta)$ <sup>3)</sup>.

W przypadku tarczy pełnej warunek dla  $r = 0$  ma inny charakter:

$$(5.2) \quad \xi(0) = 0, \quad \pm\pi, \dots$$

Równanie to wynika z zachodzącej tu równości naprężeń obwodowych i promieniowych

$$(5.3) \quad s_\varphi(0) = s_r(0).$$

Kształt tarczy i wyniki projektowania zależą od przyjętych funkcji  $s_0(r, t)$ ,  $e(r, t)$ ,  $t(r)$ . W celu przeprowadzenia szczegółowych rozważań założymy

$$(5.4) \quad s_0 \equiv e \equiv t \equiv \kappa = 1.$$

Założenia te będą obowiązywać w dalszej części pracy, o ile nie będzie wyraźnie zaznaczone inaczej.

### 6. Tarcza pełna

6.1. Nośność sprężysta tarczy. Równanie (4.7) ma rozwiązanie zamknięte

$$(6.1) \quad r = \frac{C_1 \exp\left(\frac{\mu}{2} \xi\right)}{|\sin \xi|^{1/2}} \text{ lub}$$

$$(6.2) \quad \xi = 0, \quad \pm\pi, \dots$$

<sup>3</sup> Patrz Dodatek B.

Warunki brzegowe dla tarczy pełnej (5.2) spełnia jedynie równanie (6.2), co odpowiada klasycznemu kształtowi tarczy o równomiernej wytrzymałości w sensie węższym (tu sens szerszy sprowadza się do tego jedyne rozwiązanie)

$$(6.3) \quad h(r) = \exp(\mp wr^2/2),$$

$$(6.4) \quad p(1) = \pm \exp(\mp w/2) \neq 0.$$

(Dolne znaki w równaniach odnoszą się do przypadku obwodowego ściskania tarczy — nieistotnego w praktyce).

6.2. Nośność graniczna tarczy. Warunek (5.2) dla równania (4.10) prowadzi do symbolu nieoznaczonego 0/0. Dla umożliwienia rozwiązania numerycznego funkcje  $h(r)$  i  $\xi(r)$  rozwinięto w okolicy  $r = 0$  w szeregi

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \xi(r) &= A_1 r^2 + A_2 r^4 + A_3 r^6 + \dots, \\ \ln[h(r)] &= a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + \dots, \end{aligned}$$

Po podstawieniu tych szeregów do równań i porównaniu odpowiednich współczynników otrzymano

$$(6.6) \quad \begin{aligned} a_1 &= -\frac{w}{3\sqrt{3}}, & a_2 &= -\frac{w^2}{48\sqrt{3}}, & a_3 &= -\frac{127w^3}{2^7 3^5 \sqrt{3}}, \\ A_1 &= -\frac{w}{4\sqrt{3}}, & A_2 &= \frac{7w^2}{144\sqrt{3}}, & A_3 &= \frac{131w^3}{2^9 3^3 \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Powyższe rozwiązanie posłużyło do wyznaczenia punktu startu dla numerycznego całkowania równań metodą RUNGEGO KUTTY 4 rzędu na komputerze Odra 1204. Wyniki przedstawiono w tabelicy 1 i na rys. 2, gdzie umieszczono dla porównania również tarczę sprężystą [równanie (6.3)].

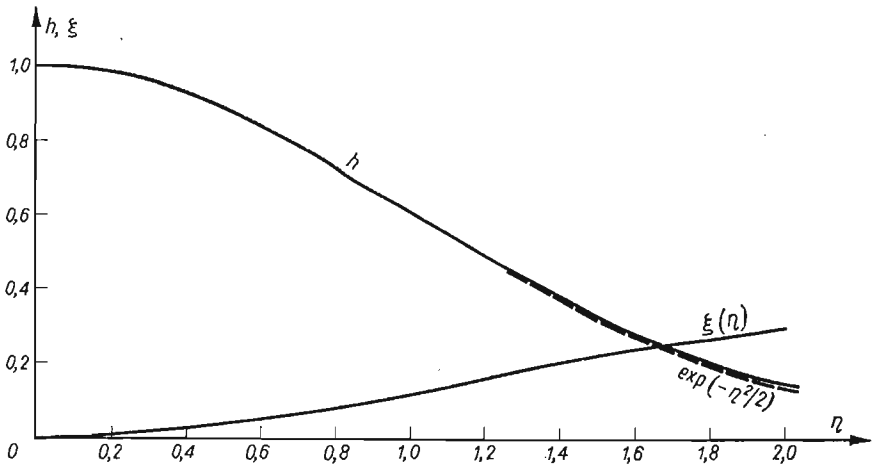
Tabela 1. Tarcza pełna. Rozwiązanie plastyczne i sprężyste

$\eta = r\sqrt{w}$	$\xi(\eta)$	$h(\eta)$ (plast.)	$\exp(\eta^2/2)$ (spręż.)
0	0	1,0000	1,0000
0,2	0,00576	0,9804	0,9802
0,4	0,02242	0,9233	0,9231
0,6	0,04854	0,8357	0,8353
0,8	0,08193	0,7271	0,7261
1,0	0,1201	0,6084	0,6065
1,2	0,1604	0,4900	0,4868
1,4	0,2008	0,3801	0,3753
1,6	0,2394	0,2843	0,2780
1,8	0,2751	0,2051	0,1979
2,0	0,3072	0,1429	0,1353

Tabela 2 zawiera porównanie objętości obu tarcz przy założeniu, że obciążenia na brzegu obu tarcz są takie same i wynoszą  $p(1) = 1$ . Zysk na kształtowaniu tarczy pełnej w oparciu o nośność graniczną jest tu stosunkowo znaczny i dla  $w = 4$  (co odpowiada jeszcze realnym fizycznie wielkościom) wynosi około 19%.

Tablica 2. Porównanie tarczy pełnej plastycznej i sprężystej

$w$	Tarcza plastyczna		Tarcza sprężysta	
	$h_{max}$	$v$	$h_{max}$	$v$
0,0	1,00	0,500	1,00	0,500
1,0	1,54	0,606	1,65	0,650
2,0	2,44	0,771	2,72	0,859
3,0	3,88	1,005	4,46	1,145
4,0	6,20	1,345	7,40	1,595



Rys. 2

## 7. Tarcza pierścieniowa

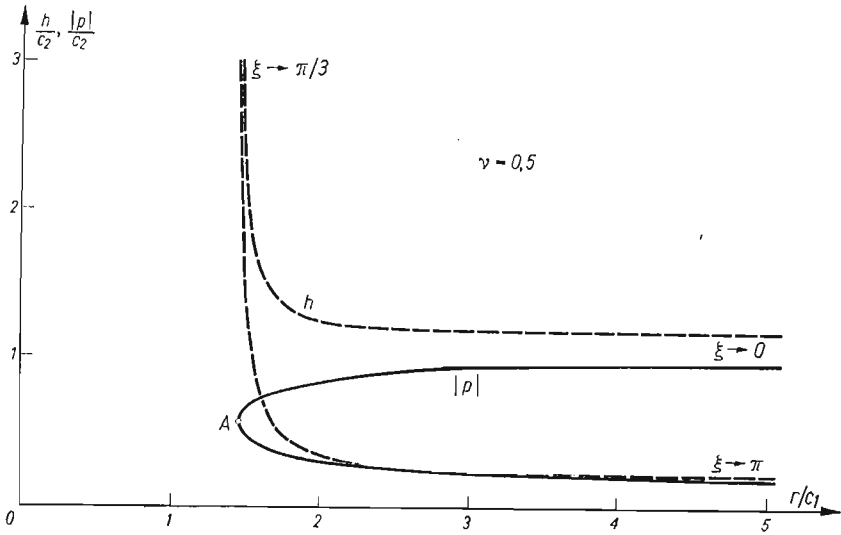
W przypadku tarczy pierścieniowej pozostają słuszne rozwiązania podane poprzednio, lecz są one jedynie szczególnymi przypadkami rozwiązania ogólnego.

Dla tarczy sprężystej, wykorzystując rozwiązanie (6.1), można dla  $w = 0$  podać funkcję  $h(r)$  w postaci parametrycznej rozwiązując równanie (4.3)

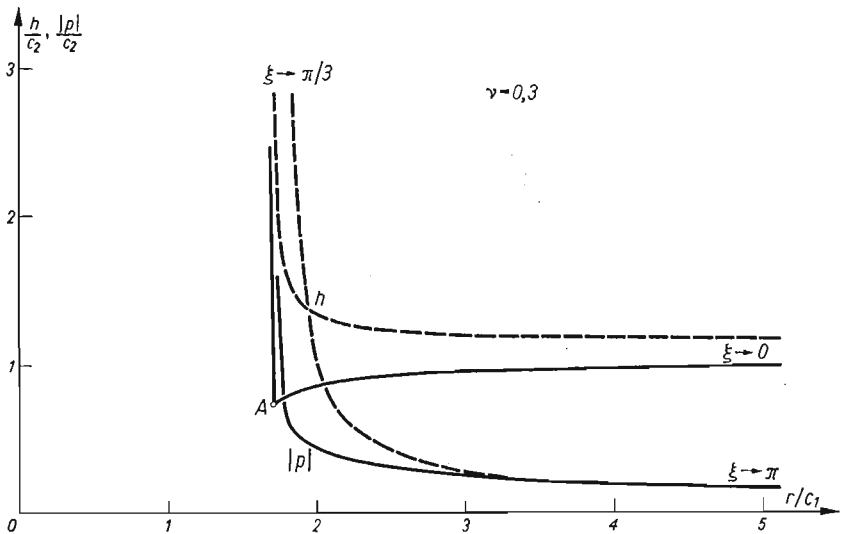
$$(7.1) \quad h = C_2 \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2(1+\nu)} \xi\right)}{\left|\cos\left(\xi + \frac{\pi}{6}\right)\right|^{\frac{3}{2(1+\nu)}}}.$$

Wykresy rozwiązań dla  $\nu = 0,5$  oraz  $\nu = 0,3$  przedstawiają rys. 3 i 4. Na rysunkach przedstawiono również siłę osiową  $p(r)$ . Nieograniczony wzrost wartości  $h$  i  $p$  wynika z osobliwości pojawiającej się w równaniu (4.3) dla  $\xi = \pi/3$ .

Zamieszczone wykresy służyć mogą do dobierania wartości stałych  $C_1$  i  $C_2$  z warunków brzegowych (5.1). Rysunki zawierają wykresy dwu alternatywnych rozwiązań, toteż należy wybierać odcinki krzywych nie zawierające punktu  $A$ . Otrzymane rozwiązanie jest okresowe ze względu na  $\xi$  o okresie  $2\pi$  [rozwiązanie dla  $\pi \leq \xi \leq 2\pi$  jest analogiczne do zamieszczonego — różni się jedynie znakiem funkcji  $p(r)$ ].



Rys. 3



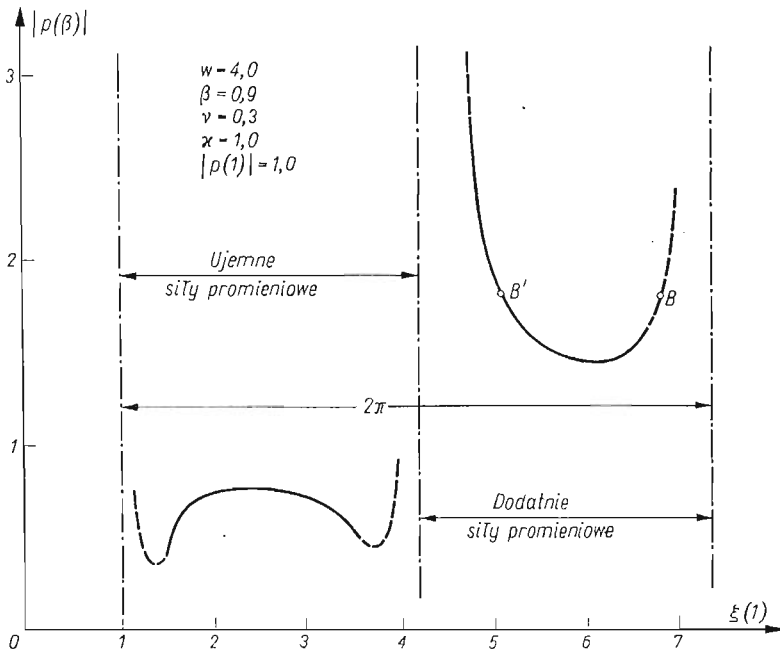
Rys. 4

Na podstawie rys. 3 można stwierdzić, że dla  $\nu = 0,5$  stosunek  $p(\beta)/p(1)$  musi mieścić się w przedziale  $(0,5 \div 3,0)$ . Dla  $\nu \neq 0,5$  brak jest takich ograniczeń, lecz przekroczenie powyższego zakresu spowoduje znaczne odstępstwa od założonego płaskiego stanu na-

prężenia w wyniku dużych wartości  $h'(r)$ . Nie można przyjmować obciążeń o przeciwnych znakach ani swobodnego brzegu tarczy, gdyż prowadzi to do nieograniczonego wzrostu  $h(r)$  w pewnym punkcie tarczy.<sup>4)</sup>

Ze względu na podobieństwo równań rozwiązanie numeryczne, któremu poświęcona będzie następna część pracy, przeprowadzono nie różnicując programów dla nośności sprężystej i nośności granicznej. Całkowanie podstawowego układu równań przeprowadzono za pomocą standardowej procedury «Runge Kutta 4» z biblioteki programów maszyny cyfrowej Odra 1204. Ze względu na występujący tu typ warunków brzegowych («1 + 1») całkowanie przeprowadzono w dwu kolejnych etapach:

1. Przyjmując  $p(1) = 1$  i kolejne wartości  $\xi(1)$  z przedziału  $(0, \pi)$  obliczano  $p(\beta)$  dla 6 wartości  $\beta$ . Czas obliczeń dla 30 wartości  $\xi(1)$  przy dokładności obliczeń rzędu  $10^{-3}$  (wartości parametrów «eps» i «eta» procedury) wynosił 25–30 min.



Rys. 5

2. Wyznaczenie funkcji  $h(r)$  i  $\xi(r)$  dla zadanych  $p(1)$  i  $p(\beta)$  wykorzystując znalezione uprzednio przybliżone punkty startowe dla procedury «regfalsi» służącej do wstrzelania się w dokładną wartość  $p(\beta)$ . Czas obliczeń przy dokładności  $10^{-6}$  wynosił 4–6 min.

W wyniku działania programu pierwszego otrzymywano wykresy  $p(\beta) = f[\xi(1)]$ , będące oczywistą informacją o możliwościach dobierania wartości  $p(\beta)/p(1)$ . Typowy wykres przedstawia rys. 5. Zmiana współczynnika  $\nu$  lub przyjęcie równań nośności granicznej

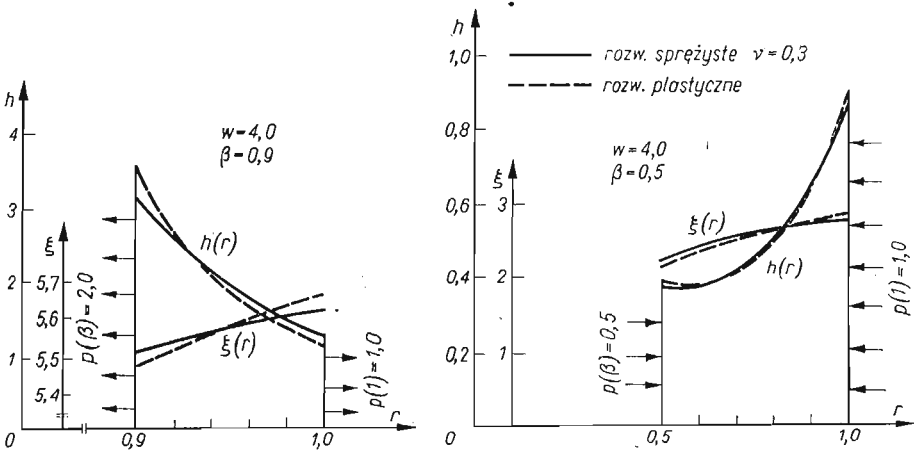
<sup>4</sup> Szczegółową dyskusję zawiera Dodatek B.

nej powodowało jedynie nieznaczne różnice ilościowe (rzędu kilku %). Z dwu możliwych równoważnych rozwiązań (np. odpowiadających punktom  $B$  i  $B'$ ) gałąź odpowiadająca punktowi  $B'$  daje rozwiązania o mniejszej objętości tarczy, lecz o większych nachyleniach funkcji  $h(r)$  i większej grubości na wewnętrznym brzegu  $[h(\beta)]$ . W porównaniu z wartościami  $p(\beta)/p(1)$  otrzymywanymi z rozwiązania klasycznego (6.3) zakres dopuszczalnych wartości został powiększony, jednak przede wszystkim w górę, co jest zjawiskiem niekorzystnym.

Tablica 3. Objętość tarcz pierścieniowych przy różnych warunkach brzegowych

Lp.	$p(\beta)/p(1)$	$\beta$	$w$	Tarcza sprężysta			Tarcza plastyczna
				$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.5$	
1	1,5	0,9	1,0	0,218066	0,217832	0,217717	0,217716
2	1,5	0,9	4,0	—	0,103135	—	0,103121
3	1,5	0,75	1,0	0,238141	0,237927	0,237848	0,237837
4	2,0	0,9	4,0	—	0,189136	—	0,189080
5	0,4	0,5	4,0	—	0,201452	—	0,201358
6	0,5	0,75	4,0	—	0,139573	—	0.139417

Teoretycznie wartość  $p(\beta)$  można przyjmować dowolnie wielką, jednak obliczenia numeryczne stają się wtedy niedokładne, a w rzeczywistej tarczy zachodzi znaczne odstępstwo od płaskiego stanu naprężenia; toteż linie przerywane na wykresie (rys. 5) przedstawiają przewidywany przebieg krzywych nie mający praktycznego znaczenia. Przeliczone przy-



Rys. 6

kłady kształtowania tarcz zestawione są w tablicy 3, a wykresy  $h(r)$  dla przypadków 2 i 5 z tej tablicy przedstawia rys. 6. Zwraca uwagę bardzo niewielki zysk na objętości tarczy dla nośności granicznej — nieporównywalnie mniejszy niż dla tarczy pełnej (tablica 2). Jest to wynikiem innego charakteru warunków brzegowych [równania (5.1) i (5.2)].

## 8. Porównanie równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym i węższym

Kształtowanie w oparciu o równanie (1.1) (warunek w sensie węższym) odpowiada przyjęciu

$$(8.1) \quad \xi(r) \equiv 0, \quad \pm\pi, \dots$$

zamiast równań (4.6) lub (4.9), które zostają wtedy milcząco pominięte. Wykorzystując równanie (8.1) można scałkować równanie równowagi (4.3)

$$(8.2) \quad h(r) = C_3 s_0 \exp\left(-\int w r s_0^{-1} dr\right).$$

Równanie to, podane przez KACZANOWA [14], może więc dawać nieoptymalne profile tarcz. W pewnych, szczególnych przypadkach kształtowanie w sensie szerszym może jednak dawać identyczne rozwiązanie. Jedynie wtedy rozwiązanie (8.2) jest poprawne.

Warunkiem koniecznym, aby rozwiązanie (8.2) było poprawne w zakresie sprężystym jest spełnienie równania

$$(8.3) \quad \frac{d}{dr} \left( \ln \frac{e}{s_0} \right) = \frac{at'}{\mu s_0 e},$$

gdzie  $s_0 = s_0(r, t)$ ,  $e = e(r, t)$ , wynikającego z równania nierozdzielności po podstawieniu (8.1). Z (8.3) wynika więc m.in., że tarcza jednorodna bez wpływu temperatury kształtowana w oparciu o równanie (8.2) będzie przy odpowiednio dobranych warunkach brzegowych optymalna ze względu na nośność sprężystą.

W zakresie plastycznym podstawiając (8.1) do (4.9) otrzymuje się przy  $w = \text{const}$ ,  $\kappa = 1$

$$(8.4) \quad -wr + \frac{s'_0}{s_0} - \frac{1}{2} wr^2 \frac{s'_0}{s_0} = 0.$$

Równanie to po możliwym scałkowaniu

$$(8.5) \quad s_0(r) = \frac{c_4}{2 + wr^2}$$

jest warunkiem koniecznym, aby rozwiązanie (8.2) było poprawne przy kształtowaniu na nośność graniczną.

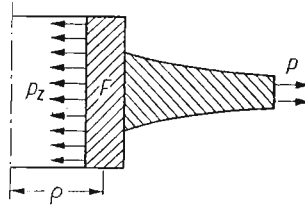
Ze spełnienia jednego z tych równań nie musi jednak wynikać poprawność rozwiązania (8.2), gdyż w rozwiązaniu tym stosunek obciążeń  $p(\beta)/p(1)$  jest jednoznacznie wyznaczony i, co za tym idzie, dowolnie wybrane warunki brzegowe dla tarczy pierścieniowej nie muszą być spełnione. Jedynie w przypadku tarczy pełnej, ponieważ warunki brzegowe są inaczej formułowane [równanie (5.2)] spełnienie równań (8.3) lub (8.5) wystarcza dla poprawności rozwiązania (8.2).

## 9. Połączenie tarczy z pierścieniem

Ze względu na istniejące ograniczenia często zachodzi konieczność projektowania tarczy tylko w części swej objętości spełniającej wyprowadzone powyżej równania. Pozwala to na uniknięcie nieograniczonej wysokości tarczy otrzymanej z powyższych równań



drogą wprowadzenia dodatkowych ograniczeń. Projektując tarczę ze swobodnym brzegiem (co jest przypadkiem często spotykanym) korzystne jest zastosowanie pierścienia o «skupionej» powierzchni przekroju  $F$  i pomijalnie małym wymiarze promieniowym przenoszącego siłę promieniową pochodzącą od tarczy i obciążenia zewnętrznego ( $p_z$  — równego

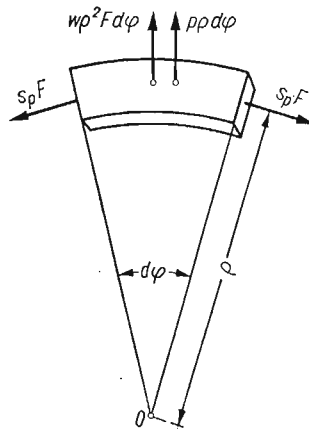


Rys. 7

w tym przypadku 0). Z punktu widzenia matematyki oznacza to dopuszczenie rozwiązań dystrybucyjnych, gdyż pierścień taki można traktować jak dystrybucję  $\delta(r-\rho)$ , gdzie  $\rho$  jest średnim promieniem pierścienia (rys. 7).

Profil tarczy można więc opisać dystrybucją

$$(9.1) \quad h^* = h(r) + F\delta(r-\rho).$$



Rys. 8

Z przyjętych założeń wynika, że w pierścieniu działa jedynie naprężenie obwodowe  $s_p$  (definiowane analogicznie do  $s_r$  i  $s_\varphi$ ), toteż równanie równowagi elementu takiego pierścienia (rys. 8) obciążonego siłą promieniową  $p$

$$(9.2) \quad F d\varphi w \rho^2 + p \rho d\varphi - s_p F d\varphi = 0$$

może służyć do wyznaczania przekroju  $F$

$$(9.3) \quad F = \frac{p \rho}{w \rho^2 - s_p}.$$

W zakresie sprężystym naprężenie  $s_p$  można wyznaczyć z warunku zgodności odkształceń tarczy i pierścienia. Przy założeniu, że są one wykonane jako jedna całość otrzymuje się

$$(9.4) \quad F = \frac{h(\varrho) \left( \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) + p_z}{(1-\nu) \cos \xi + \frac{1+\nu}{\sqrt{3}} \sin \xi - w\varrho^2} \varrho.$$

Jak wykazano w [9] w pierścieniu takim wytężenie jest inne niż w tarczy, co jest zjawiskiem niekorzystnym, a nawet niedopuszczalnym, o ile wytężenie jest wyższe niż w tarczy.

Lepsze wykorzystanie materiału można osiągnąć zakładając pełne uplastycznienie pierścienia (kształtowanie na nośność graniczną). Równanie zgodności odkształceń przy założeniu idealnej plastyczności przestanie wtedy ingerować, zatem

$$(9.5) \quad s_p = \pm 1 \quad i \\ F = \frac{\mp h(\varrho) \left( \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) + p_z}{w\varrho^2 \pm 1} \varrho$$

(znaki dolne przyjmuje się dla pierścienia na zewnętrznym brzegu tarczy).

W przypadku tarczy swobodnej obciążenie pierścienia pochodzi jedynie od siły promieniowej w tarczy, a zatem obciążenie  $p_z = 0$  i powierzchnia  $F$  we wzorach (9.4), (9.5) jest proporcjonalna do  $h(\varrho)$ . Warunek brzegowy (5.1) na przeciwnym brzegu można zawsze spełnić zmieniając  $h$ . Problem optymalnego kształtowania tarczy z dystrybucją staje się dodatkowo problemem optymalizacji parametrycznej, gdzie jako parametr można przyjąć np.  $\xi(\varrho)$  w równaniach (9.4), (9.5). Funkcją celu jest wtedy sumaryczna objętość tarczy i pierścienia

$$(9.6) \quad v = \int_{\beta}^1 h^* r dr = \int_{\beta}^1 h r dr + F\varrho = \min, \quad \varrho = \begin{cases} \beta \\ 1 \end{cases}.$$

Próba takiej optymalizacji (przy użyciu nieznacznie zmodyfikowanego programu nr 1) nie dała jednak rezultatu, gdyż otrzymuje się jako wielkość optymalną

$$(9.7) \quad \xi(\varrho)_{opt} = \pi/3,$$

co odpowiada tarczy bez pierścienia, lecz o nieograniczonej grubości na swobodnym brzegu. Przy kształtowaniu w realnych warunkach należy przyjąć  $\xi(\varrho) < \pi/3$ , tak aby spełnić nie rozważane tutaj ograniczenia technologiczne (np. maksymalna wysokość pierścienia, zgodność wysokości pierścienia i tarczy itp.). Często połączenia tarczy z pierścieniem nie uda się przy tych założeniach zrealizować, gdyż nie zmieści się on wewnątrz tarczy, wyjdzie ze wzoru ujemna jego powierzchnia lub zbyt duże naprężenie  $s_p$ .

#### 10. Uwzględnienie zmiennej temperatury

Najistotniejszy wpływ z upraszczających rozważania założeń (5.4) ma nierównomierny rozkład temperatury w tarczy wywołujący naprężenia termiczne (tylko w zakresie sprężystym) oraz wywołujący zmienność stałych materiałowych.

W przypadku kształtowania na nośność sprężystą możliwe jest dwojaki postawienie zagadnienia:

1. Przyjęcie rozkładu temperatury jako funkcji znanej — wyznaczonej doświadczalnie dla tarczy już istniejącej. Konieczne jest wtedy założenie, że różnica pomiędzy tą tarczą a tarczą dopiero projektowaną będzie niewielka — nie zmieniająca praktycznie rozkładu temperatury.

2. Przyjęcie równań przepływu ciepła dla płaskiej tarczy i całkowanie ich razem z podanymi wyżej równaniami. Podejście takie, choć teoretycznie dokładniejsze, wymaga jednak znacznie większej liczby danych doświadczalnych (często niemożliwych do wyznaczenia) lub też pewnych uproszczeń. Np. ogólne równanie przepływu ciepła dla tarczy (według [17])

$$(10.1) \quad t'' = \frac{-rh't' - ht' + r \text{Bi}(t - t_0)}{rh}$$

wymaga znajomości rozkładu temperatury otoczenia  $t_0(r)$  oraz współczynnika wnikania ciepła do tarczy, których w sposób ścisły wyznaczyć się nie da.

Przy kształtowaniu na nośność graniczną możliwe jest jedynie podejście pierwsze, gdyż przy wyprowadzaniu równania (4.9) funkcja  $s_0(r)$ , a zatem i temperatura traktowane były jako dane. Oczywiście możliwe jest wyprowadzenie równania Eulera — Lagrange'a z równaniem typu (10.1) jako dodatkowym warunkiem pobocznym, choć przy ogólnej zależności  $s_0(r, t)$  nie będzie ono miało rozwiązania. Wynika to z faktu, że problem doboru optymalnego profilu i rozkładu granicy plastyczności  $s_0$  sformułowany jak powyżej nie ma rozwiązania dla skończonych wartości  $s_0(r)$ .

Wyznaczenie rozkładu temperatury i profilu odpowiadających minimalnej objętości tarczy jest zagadnieniem znanym pod nazwą termofrezażu (OGIBAŁOW [11], który sformułował ten problem dla cylindra, mógł dobierać jedynie rozkład temperatury). Uwzględnienie zmiennej temperatury w równaniach nośności sprężystej zmieni objętość tarczy, a w szczególności może ją zmniejszyć, jednak wynik rozwiązania na nośność graniczną jest kresem dolnym możliwych rozwiązań. Wynika z tego, że rozwiązanie powyższego problemu przy pominięciu wpływu temperatury na stałe materiałowe daje się rozwiązać w oparciu o wyprowadzone równania. Należy ukształtować tarczę w oparciu o równania (4.3) i (4.9), a następnie z równania (4.6) wyznaczyć poszukiwaną temperaturę. Przy rozwiązaniu kompletu równań (4.3), (4.6), i (4.9) niewiadomymi będą  $h(r)$ ,  $\xi(r)$  i  $t(r)$ .

Przy uwzględnieniu zmienności stałych materiałowych z temperaturą [przede wszystkim  $s_0(r, t)$ ] problem termofrezażu (zgodnie z dotychczasowymi rozważaniami) nie daje się tak rozwiązać.

Możliwe jest także postawienie zagadnienia termofrezażu jako problemu wyznaczania optymalnego rozkładu temperatury przy zadanym profilu tarczy. Odpowiada to dokładnie sformułowaniu podanemu przez OGIBAŁOWA — wyznaczenia rozkładu temperatury zapewniającego równomierne wyteżenie materiału w całej objętości tarczy. Dla rozwiązania tego problemu należy rozwiązać układ równań (4.3) (4.6) o niewiadomych  $\xi(r)$  i  $t(r)$ .

## 11. Wnioski końcowe

W pracy przedstawiono problem kształtowania tarczy wirującej w oparciu o jej nośność sprężystą i graniczną. Kształtowanie na nośność graniczną pozwala w przypadku tarczy pełnej osiągnąć znaczny zysk na objętość (do 19%). W przypadku tarczy pierścieniowej objętość jest jednak niemal niezależna od kryterium kształtowania (podobne wnioski otrzymał również DISTEFANO [2]). Przedstawiono i przedyskutowano pewne ograniczenia na dobór obciążeń przy kształtowaniu tarczy. Ograniczenia te wynikają prawdopodobnie z przyjęcia pełnego uplastycznienia jako jedynego możliwego schematu zniszczenia. Przedyskutowano również możliwości kształtowania tarczy ze swobodnym wewnętrznym brzegiem (Dodatek B) oraz problem połączenia tarczy z pierścieniem usztywniającym. Omówiono zagadnienie doboru optymalnego rozkładu temperatury (termofretażu).

Ze względu na stosowanie numerycznych metod obliczeniowych nie podano rozwiązań w zamkniętej postaci, a jedynie pewne otrzymane rozwiązania numeryczne.

**Dodatek A.** Wyprowadzenie równań Eulera-Lagrange'a dla kształtowania w oparciu o nośność graniczną.

Do wyznaczenia równania (4.9) posłużymy się ogólną metodą Eulera-Lagrange'a. Uogólniony funkcjonał, po uwzględnieniu ograniczeń (2.1) i (4.1), przyjmie postać

$$(A.1) \quad \int_{\beta}^1 \left\{ \lambda_1 (h' r q_r - q_\varphi h + q_r h + \frac{(q_r \sigma_0)}{\sigma_0} r h + w_1 r^2 h) + \right. \\ \left. + \lambda_2 [\kappa_3 + \kappa_2 (q_r + q_\varphi) - (q_r^2 + q_\varphi^2 - q_r q_\varphi)] + h r \right\} dr = \min,$$

skąd, pisząc równania Eulera-Lagrange'a kolejno względem funkcji  $h(r)$ ,  $q_r(r)$ ,  $q_\varphi(r)$  otrzymuje się układ trzech równań

$$(A.2) \quad \lambda_1 \left( r q_r \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} - q_\varphi + w_1 r^2 \right) - \lambda_1' r q_r = 0, \\ \lambda_1 r h \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} + \lambda_2 (\kappa_2 - 2q_r + q_\varphi) - \lambda_1' r h = 0, \\ \lambda_1 h - \lambda_2 (\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) = 0,$$

gdzie

$$(A.3) \quad q_r = \frac{\sigma_r(r)}{\sigma_0(r) \kappa_1} = \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi - \kappa_2, \\ q_\varphi = \frac{\sigma_\varphi(r)}{\sigma_0(r) \kappa_1} = \cos \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi - \kappa_2$$

a  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są mnożnikami Lagrange'a.

Powyższą parametryzację zastosować można na dowolnym etapie wyprowadzania równania (4.9), a w szczególności już w równaniu (A.1) — wówczas otrzymałoby się jeden mnożnik Lagrange'a. Jednak ze względu na konieczność pracochłonnych przekształceń trygonometrycznych najkorzystniej jest zastosować ją jak najpóźniej tzn. po wyrugowaniu z równań (A.2) niewiadomych pomocniczych  $\lambda_1(r)$  i  $\lambda_2(r)$ .

Z równania (A.2<sub>3</sub>) wyznacza się  $\lambda_2(r)$  i podstawia do (A.2<sub>2</sub>). Otrzymuje się wtedy układ dwu równań

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \lambda_1 \left( r q_r \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} - q_\varphi + w_1 r^2 \right) - \lambda_1 r q_r &= 0, \\ \lambda_1 \left( r \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{\kappa_2 - 2q_r + q_\varphi}{\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r} \right) - \lambda'_1 r &= 0 \end{aligned}$$

liniowy względem niewiadomych  $\lambda_1$  i  $\lambda'_1$ . Wyznaczając  $\lambda_1$  i  $\lambda'_1$

$$(A.5) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{r(\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r)}{w_1 r^2(\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) + \kappa_2(q_r + q_\varphi) + 2\kappa_3}, \\ \lambda'_1 &= \frac{(\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r)r\sigma'_0/\sigma_0 + \kappa_2 - 2q_r + q_\varphi}{w_1 r^2(\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) + \kappa_2(q_r + q_\varphi) + 2\kappa_3}, \end{aligned}$$

a następnie różniczkując pierwsze z nich i odejmując stronami otrzymujemy po przekształceniach równanie

$$\begin{aligned} w_1 r^2(\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r)(q_r + q_\varphi - 2\kappa_2) + 3(q_r - q_\varphi)[(q_r + q_\varphi)\kappa_2 + 2\kappa_3] - \\ - [\kappa_2(q_r + q_\varphi) + 2\kappa_3](\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r)r\sigma'_0/\sigma_0 - (\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r)^2 w_1 r^3 \left( \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{w'}{w} \right) = \\ = -3\kappa_2 r(q_\varphi q'_r - q'_\varphi q_r) + \kappa_2^2 r(q'_r + q'_\varphi) - 2\kappa_3 r(q'_r - 2q'_\varphi), \end{aligned}$$

z którego po zastosowaniu parametryzacji (A.3) otrzymujemy (4.9).

**Dodatek B.** Dyskusja rozwiązań prowadzących do nieograniczonej grubości tarczy.

Przy kształtowaniu tarczy o swobodnym brzegu lub obciążonej na obu brzegach w jednym kierunku (do osi lub części od osi) zachodzi konieczność spełnienia w pewnym punkcie tarczy równości (dla  $r = \varrho$ )

$$(B.1) \quad p(\varrho) = s_r(\varrho)h(\varrho) = 0, \quad \beta \leq \varrho \leq 1.$$

Przy tym założeniu równanie równowagi tarczy (4.3) posiada osobliwość i nie daje się wykorzystać do kształtowania tarczy. Ze względu na duże znaczenie praktyczne przypadek ten wymaga głębszego zbadania i zostanie przeanalizowany dla poszczególnych możliwości wynikających z równania (B.1).

Wszystkie występujące poniżej wielkości będą wartościami odpowiednich funkcji w punkcie  $r = \varrho$ , toteż otrzymane równania będą równaniami algebraicznymi. Jedyne w punkcie B.2 wykorzystane zostanie rozwinięcie tych funkcji w szereg zmiennej  $\eta$  w najbliższym otoczeniu punktu  $r = \varrho$  ( $\eta = r - \varrho$ ).

$$B.1. \quad s_r = 0 \quad (h = 0, \quad h \neq \pm\infty, \quad h' \neq \pm\infty).$$

Przy tych założeniach równanie (4.3) mogłoby być ewentualnie wykorzystane do kształtowania, gdyby można je było doprowadzić do postaci symbolu nieoznaczonego 0/0. W tym celu musi zachodzić:

$$(B.2) \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \xi - \varrho \left( \sin \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \xi \right) \xi' - w_1 \varrho^2 = 0.$$

Jedyną wielkością niewiadomą (wartość  $\xi$  wynika z warunku  $s_r = 0$ ) jest tu  $\xi'$ . Wyliczoną z (B.2) wartość  $\xi'$  można podstawić do (4.6) lub (4.9) (a właściwie otrzymanych z nich

równań algebraicznych) i otrzymać równanie wiążące wielkości przyjęte jako znane, np. przy założeniach (5.4) otrzymuje się z (4.7) dla zakresu sprężystego

$$(B.3) \quad w\varrho^2 = \frac{3}{1-2\nu} \quad \text{lub} \quad w\varrho^2 = \frac{1+4\nu}{1-2\nu},$$

albo z (4.10) dla zakresu plastycznego

$$(B.4) \quad w\varrho^2 = \pm 3.$$

Nawet, jeśli dobierzemy z nich prędkość kątową lub promień (co nie zawsze jest możliwe), to i tak nie uda się uniknąć osobliwości równania (4.3) gdyż po zróżniczkowaniu (4.6) lub (4.9) można otrzymać następne równanie algebraiczne, które przy przyjętych wartościach nie będzie spełnione.

$$B.2. \quad s_r = 0 \quad (h = 0, \quad h \neq \pm \infty).$$

Jeżeli dopuści się możliwość  $h' = \pm \infty$  tak, aby w równaniu (4.1) pierwszy człon miał wartość skończoną  $C \neq 0$  otrzymuje się wtedy, rozwijając odpowiednie funkcje w szeregi i ograniczając się do pierwszych przybliżeń, następujące wyrażenia:

$$(B.5) \quad \begin{aligned} h's_r &= C/\varrho + a_1\eta + a_2\eta^2 + \dots \\ s_r &= A_1\eta + A_2\eta^2 + \dots \\ h' &= \frac{C/\varrho + a_1\eta + \dots}{A_1\eta + \dots} = \frac{C}{A_1\varrho} \frac{1}{\eta} + \frac{a_1}{A_1} + \dots = \left. \frac{dh}{d\eta} \right|_{\eta=0}. \end{aligned}$$

Po scałkowaniu

$$(B.6) \quad h = C_5 + \frac{C}{A_1\varrho} \ln \eta + \frac{a_1}{A_1} \eta + \dots,$$

skąd otrzymuje się, wbrew założeniom,  $h(\varrho) = \infty$ .

$$B.3. \quad h = 0, \quad s_r \neq 0.$$

Przy powyższych założeniach z równania równowagi otrzymuje się  $h' = 0$ , a po  $n$ -krotnym zróżniczkowaniu (4.1) względem  $r$

$$(B.7) \quad h^{(n)}(\varrho)s_r = f(h, h', h'', \dots),$$

gdzie  $f$  jest liniową kombinacją pochodnych funkcji  $h$  aż do  $(n-1)$ -szej. Metodą indukcji matematycznej można stąd udowodnić, że wszystkie pochodne funkcji  $h(r)$  są w tym punkcie równe zero. Nie wydaje się możliwe opisanie taką funkcją rzeczywistego profilu tarczy.

**B.4.** Jeżeli równocześnie  $h = 0$  i  $s_r = 0$ , to różniczkując równanie równowagi (4.1) otrzymuje się

$$(B.8) \quad h'(2rs_r - s_\varphi w_1 \varrho^2) = 0,$$

skąd, jeżeli wyrażenie w nawiasie jest różne od zera, otrzymuje się wynik jak poprzednio, w przeciwnym przypadku dochodzi się do związków takich, jak w B.1.

Reasumując: Warunek (B.1) pociąga za sobą nieograniczoną wartość  $h(\varrho)$ , a zatem prowadzi do tarcz nierealizowalnych technicznie. Wyniki niniejszej pracy, poza rozdziałem 9, nie dają więc podstaw do projektowania tarczy ze swobodnym brzegiem lub z obciążeniami w jednym kierunku. Dla rozwiązania tego problemu konieczne jest przyjęcie innych ograniczeń niż w niniejszej pracy.

## Literatura cytowana w tekście

1. В. И. Цейтлин, *Приближенный метод профилирования сплошных турбинных дисков с учётом несущей способности*, Тр. Куйбышевск. авиац. ин-т., 19 (1965) 273—285.
2. N. DISTEFANO, *Dynamic programming and the optimum design of rotating disks*, JOTA, 10, 2 (1972) 109—128.
3. M. T. HUBER, *Stereomechanika techniczna*, PZWS, Warszawa 1951,
4. В. П. ГОНТАРОВСКИЙ, Б. П. ЧЕБАЛЕВСКИЙ, *Профилирование равнопрочного диска по условию прочности Мизеса*, Проблемы прочности, 1973, 93—95.
5. В. В. ИГНАТЕНКО, *О рациональном профилировании покрывающего диска колеса центробежного компрессора*, Расчёты на прочность, 13 (1968) 87—98.
6. J. KARKOWSKI, S. ŁUKASIEWICZ, *The influence of temperature on the shape of rotating discs of uniform strength*, Bull. Acad. Pol. Sci. techn., 9, 1 (1961) 7—16.
7. J. KARKOWSKI, S. ŁUKASIEWICZ, *Wpływ temperatury na równomierną wytrzymałość krążków wirujących*, Arch. Bud. Masz., 8 (1961) 201—222.
8. J. KARKOWSKI, *Przybliżona metoda kształtowania płaskich tarcz o równomiernej wytrzymałości*, Arch. Bud. Masz., 13 (1966) 377—391
9. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność — wybór zadań i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
10. Е. И. Молганов, В. П. Трушечкин, *Напряжённое состояние дисков газовых турбин*, Термопрочность материалов и констр. элем., Киев, вып. 4, 466—469.
11. П. М. Огибалов, *Деформация трубы под действием внутреннего давления при переменной температуре*, Инж. сборник, 20 (1954), 55—58.
12. W. PRAGER, D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, *Extended limit design theorems for continuous media*, Quart. Appl. Math., 9 (1951) 381—389.
13. A. RANTA MATTI, *On the optimum shape of a rotating disk of any isotropic material*, J. of Solids and Struct., 5, 11 (1969) 1247—1257.
14. *Расчёты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*, Машиностроение, Москва 1965.
15. M. A. SAVE, *Some aspects of minimum-weight design*, Engineering Plasticity, Cambr. Univ. Press., 1968, pp. 611—625.
16. A. SEIREG, K. S. SURANA, *Optimum design of rotating discs*, Trans. ASME, Ser. B, 1970, 1—10.
17. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła — podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1963.
18. K. SZUWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity*, J. of Solids and Struct., 9 (1973) 85—98.
19. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, IPPT PAN-PWN, Warszawa 1973.
20. M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalizacja konstrukcji powłokowej*, Materiały sympozjum «Konstrukcje powłokowe», Kraków 1974.

## Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ  
ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ ПО УПРУГОМУ И ПЛАСТИЧЕСКОМУ  
ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Авторами разработано формирование вращающегося диска из условия равнопрочности (упругое решение) или из условия минимума объема в пластическом состоянии. Принято плоское напряженное состояние и распределение температуры, условие текучести Бужинского-Стасси д'Алиа, физическая неоднородность диска и зависимость физических констант от нагрева. При оптимизации на несущую способность для определения добавочной свободной функции применено классическое вариационное исчисление.

Численные расчеты, выполненные на ЭВМ „Одра 1204”, показали, что хотя формирование на несущую способность дает лучшие результаты, то истинная разница по объему получается лишь для полного диска.

Поставлено условие равнопрочности в широком смысле и рассмотрена корректность условия равнопрочности в узком смысле. Показано, что допущение свободного края диска ведет к неограниченной его толщине. Этого можно избежать, вводя соединение диска с кольцом, несущим радиальную силу. Рассмотрена также проблема термофреттажа, т.е. оптимального распределения температуры в диске.

#### Summary

### THE OPTIMAL DESIGN OF NONUNIFORMLY HEATED ROTATING DISCS WITH RESPECT TO THEIR ELASTIC AND LIMIT CARRYING CAPACITY

Paper describes the design of rotating discs using the condition of uniform strength (in elastic range) or condition of full yielding (in plastic range). Plane, axially symmetric stress and temperature distribution, Burzyński—Stassi d'Alia parabolic yield condition were assumed; the material constants may depend on the coordinate and temperature (natural and forced non-homogeneity). Design in plastic range had one more free design variable and was based on classical variational calculus.

It was shown, by using an „Odra 1204” computer, that plastic range design produces more optimal discs (of less volume) but there is a very small gain with respect to the elastic design except in the case of a full disc.

Uniform strength condition in the broader sense was assumed and the correctness of the narrower sense condition was discussed. It was proved that free end assumption produces an infinitely large thickness of disc. To get rid of this phenomenon the reinforcement of the disc with the ring (carrying the radial force) was discussed.

The thermofretage problem i.e. the problem of the optimum design of temperature distribution was described and discussed as well.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 września 1975 r.*

---



## NIKTÓRE PROBLEMY MODELOWANIA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

AGNIESZKA MUSZYŃSKA (WARSZAWA)

W dobie dokonującej się rewolucji naukowo-technicznej niezwykle ważne zadania spełniają maszyny i mechanizmy; one realizują nowe, coraz bardziej złożone procesy wytwórcze, przetwórcze, usługowe. Rola maszyn i mechanizmów z roku na rok jest coraz większa, zarówno ze względu na ogromny ilościowy wzrost produkcji we wszystkich dziedzinach gospodarki, jak i jakościowe przekształcenia produkcji, dyktowane przez wymagania nowych procesów technologicznych i nowych zadań, jak też wprowadzanie coraz to nowych tworzyw konstrukcyjnych oraz materiałów przerabianych przez maszyny. Maszyny realizują różnorodne procesy technologiczne w złożonych warunkach dużych prędkości i wielkich mocy, w rozmaitych stanach cieplnych, w warunkach dużych ciśnień i w próżni, w środowiskach szkodliwych dla człowieka. Nieustannie wzrasta intensywność i wielkość obciążeń, prędkości bezwzględnych ruchów poszczególnych ogniw i prędkości względne w węzłach łańcuchów kinematycznych. Jednocześnie rosną stawiane maszynom wymagania dotyczące wydajności, przy zagwarantowaniu wysokiej precyzji działania, trwałości i niezawodności. Obecne tendencje w tej dziedzinie można krótko scharakteryzować ogólnym dążeniem do wykorzystania granicznych parametrów odnoszących się zarówno do konstrukcji urządzeń, warunków ich pracy, dokładności funkcjonowania, prostoty obsługi, możliwie łatwego, a co za tym idzie — taniego wytwarzania, własności materiałów wykorzystywanych do ich wytworzenia, jak i samych metod wytwarzania poszczególnych części i zespołów maszyn.

Skomplikowanie struktury maszyn, przy jednoczesnym podwyższeniu wymagań dotyczących ich kinematycznych, a w szczególności dynamicznych charakterystyk postawiło szereg istotnych zadań przed konstruktorami, technologami i użytkownikami maszyn. Jedne z ważniejszych — związane są z zadaniami dynamicznych badań maszyn. Agregaty maszynowe przedstawiają złożone układy drgające o wielu stopniach swobody, kinematycznie zamknięte, otwarte lub rozgałęzione, z więzami holonomicznymi i nieholonomicznymi, z elementami sprężystymi i elementami o zmiennej masie i zmiennej bezwładności, z luzami w parach kinematycznych. Elementy maszyn poddane są wymuszeniom okresowym, prawie okresowym, impulsowym, wymuszeniom o charakterze losowym. Wymuszenia działają najczęściej w połączeniu z innymi czynnikami (przy obciążeniu statycznym, w złożonym stanie naprężeń, w zmiennym polu temperatur itp). W takich warunkach dużym niebezpieczeństwem są stany rezonansowe i dynamiczne stany krytyczne oraz stany niestatecznych ruchów drgających, przy których możliwe jest narastanie przemieszczeń, odkształceń i naprężeń. Często duże zmienne naprężenia związane ze zjawiskami drganiowymi i z utratą stateczności, prowadzą do zmęczeniowych

pęknięć części maszyn. Oprócz tego, niezależnie od wpływu na wytrzymałość, drgania wywołują zaburzenia w programowym ruchu elementów maszyn, zmieniają własności kinematyczne układów, stanowią źródło hałasu, powodują zakleszczanie, wywołują udary, zwiększone tarcie, powodują wydzielanie się ciepła, stanowią przyczynę nadmiernego rozproszenia energii mechanicznej, a więc obniżają sprawność, wydajność i trwałość całej maszyny. Ponadto drgania elementów maszyn wywierają szkodliwy wpływ na ludzi obsługujących maszyny.

W większości agregatów maszynowych proces roboczy związany jest z ruchem, który powinien być realizowany w wyznaczony, przewidziany sposób.

Drgania elementów maszyn i wszystkie zjawiska dynamiczne, związane z roboczym procesem maszyny są bardzo niekorzystne. Dlatego też, już na etapie projektowania maszyny, niezbędna jest możliwie dokładna znajomość wszystkich procesów dynamicznych, aby uniknąć lub zminimalizować zjawiska niekorzystne.

Agregaty maszynowe przedstawiają skomplikowane struktury zbudowane m.in. z obwodów napędowych, transmisyjnych, roboczych i regulacyjnych, które z kolei składają się z ogniw sprężystych, inercyjnych, hydraulicznych, pneumatycznych i wielu ogniw o bardziej złożonym charakterze. Z tego względu, przy badaniach takich skomplikowanych struktur, właściwe jest przyjęcie dwojakiego podejścia: z jednej strony, konieczne jest szczegółowe badanie poszczególnych elementów struktury, z drugiej zaś ujęcie analityczne całej struktury w postaci modelu wielkiego systemu, rozpatrywanie kompleksowe zarówno rozmieszczeń części składowych, jak i wzajemnych sprzężeń elementów, ogniw i obwodów, relacji między nimi, przepływów energii, przekazywania informacji itd., przy uwzględnieniu dynamiki (zmienności w czasie) wszystkich przebiegających w systemie procesów.

Badania prowadzone według pierwszego schematu mają o wiele dłuższą tradycję i legitymują się już ogromnym dorobkiem. W obecnych czasach, charakteryzujących się jakościowym skokiem w rozwoju nauki i technologii, wywierającym rozległy wpływ na różne dziedziny życia gospodarczego, społecznego, kulturalnego, badania prowadzone według drugiego schematu stają się bezwzględnie koniecznością. W badaniach systemowych tego typu możliwe staje się uwzględnienie nie tylko mechanicznych czy elektrycznych ogniw systemu, ale również układów biologicznych, ekonomicznych i socjologicznych, a więc i ich wzajemnego oddziaływania. Ta dziedzina nauki stawia dziś pierwsze kroki.

Przedmiotem badań prowadzonych według pierwszego schematu są wyizolowane elementy struktury. Elementem struktury może być zarówno jedno proste ogniwo (mechaniczne lub inne), jak i układ składający się z wielu połączonych, współpracujących ze sobą ogniw różnego charakteru. Cała pozostała struktura traktowana jest jako otaczające środowisko zewnętrzne, w określony sposób oddziałujące na ten wyizolowany układ.

Formalne ujęcie zagadnień związanych z analizą działania oraz syntezą, zarówno elementów danej struktury, jak też i większych systemów, rozpoczyna się etapem modelowania [1-16]. Ze względu na złożoność i różnorodność zjawisk i procesów występujących w układach rzeczywistych, trzeba zaniedbać pewne własności tych układów i rozpatrywać układy uproszczone, wyidealizowane. W ogólności modelowanie oznacza imitowanie rzeczywistości istniejącego obiektu za pomocą specjalnego konstruowania analogonów (modeli), w których z określonym przybliżeniem odtwarza się zasady orga-

nizacji i funkcjonowania tego obiektu, co następnie umożliwi uzyskanie informacji o samym modelowanym obiekcie. **M o d e l e m** danego rzeczywistego obiektu (fragmentu rzeczywistości) jest dający się pomyśleć lub materialnie zrealizować układ, który odzwierciedlając lub odtwarzając obiekt, zdolny jest zastępować go tak, że jego badanie dostarcza nowych, nadających się do doświadczalnego sprawdzenia informacji o tym obiekcie. Na podstawie ujawnienia podobieństwa między dwoma układami (modelem i obiektem rzeczywistym), z których jeden traktuje się jako obraz drugiego, w procesie modelowania, z obserwacji poczynionych w jednym układzie uzyskuje się charakterystyki drugiego<sup>1)</sup>.

W przypadku układów fizycznych, modelowanie obejmuje na ogół dwa etapy: budowanie modelu nominalnego i budowanie modelu matematycznego, oba etapy są ze sobą jednak ściśle powiązane. Dla układów mechanicznych, model nominalny<sup>2)</sup> przedstawia w uproszczony sposób strukturę układu (przestrzenne rozmieszczenie wyidealizowanych elementów). Model matematyczny stanowi zbiór relacji (wzory, równania, nierówności, warunki logiczne itp.), wiążących wybrane zmienne, opisujące stan układu<sup>3)</sup>.

Niżej omówione zostaną nieco szerzej poszczególne etapy modelowania oraz specyfika modelowania układów mechanicznych.

Zbudowanie adekwatnego modelu nominalnego i matematycznego wymaga zgromadzenia szeregu informacji o modelowanym obiekcie rzeczywistym. Informacje te powinny dotyczyć zarówno jego cech wewnętrznych i sposobu oddziaływania czynników zewnętrznych, jak i celu samych badań. Informacje takie uzyskuje się z eksperymentów, z wyników badań modeli pośrednich (układów cząstkowych, uproszczonych, bez sprzężeń), wreszcie na podstawie doświadczenia zgromadzonego przy badaniu układów podobnych. Zbiór takich informacji o układzie rzeczywistym zawierać powinien pojęcia i relacje bezpośrednio związane z daną dziedziną rzeczywistości. Przy gromadzeniu informacji niezbędne jest przyjęcie od razu określonego, formalnego systemu opisowego (na ogół zaczerpniętego z matematyki — reguły tworzenia zdań, aksjomatów, zasady prowadzenia dowodów, zapis analityczny, tabelaryczny, graficzny itd.), który umożliwi zestawienie i porównywanie zbieranych informacji.

Tak więc, pierwszym krokiem przy modelowaniu jest zgromadzenie informacji o obiekcie rzeczywistym. Im więcej wiemy o tym obiekcie, tym dokładniej, trafniej i logiczniej możemy wyznaczyć bezpośredni cel badań, tym lepiej i stosowniej dobrać model, za pomocą którego chcemy osiągnąć cel badań, tym dokładniej potrafimy wyznaczyć obszar niewiedzy o obiekcie rzeczywistym.

Następnym krokiem procedury modelowania jest podjęcie decyzji dotyczących rozgraniczenia zgromadzonych informacji na «ważne» oraz «nieistotne» dla danego celu lub w danym etapie badań. Jedną z najistotniejszych jest tu decyzja o wydzieleniu, wyizolowaniu interesującego nas układu (obektu) z otaczającego go środowiska. Oddziaływanie środowiska traktuje się następnie jako zewnętrzne zaburzenie działające na układ, skiero-

<sup>1)</sup> Model nie jest odbiciem rzeczywistości, lecz tylko odbiciem aktualnie posiadanej o niej wiedzy — stąd nigdy nie może być traktowany jako coś trwałego i nie podlegającego zmianom.

<sup>2)</sup> zwykle nazywany modelem fizycznym.

<sup>3)</sup> Często model nominalny przedstawia jedynie ilustrację modelu matematycznego, w sposób obrazowy pomaga przy interpretacji fizycznej zmiennych stanu.

wane tylko w jedną stronę. Sprzężenie zwrotne uważa się za nieistotne i przyjmuje się, że oddziaływanie badanego układu na środowisko nie zmienia stanu tego środowiska. W ten sposób uzyskuje się wyizolowany ze środowiska obiekt — w postaci układu względnie odosobnionego, który stanowić będzie przedmiot dalszych badań. Operacja wyizolowania obiektu z otaczającego środowiska powinna być poprzedzona gruntowną analizą, opartą na przesłankach wynikających głównie z przeznaczenia modelu. Na tym etapie rezygnuje się bowiem z uwzględniania niektórych sprzężeń między elementami lub podukładami. Sprzężenia takie mogą mieć niekiedy znaczny wpływ na zachowanie się układu rzeczywistego — zatem model bez sprzężeń będzie modelem nieadekwatnym<sup>43</sup>).

Pośród informacji gromadzonych na wstępnym etapie powinny znaleźć się informacje dotyczące zjawisk oraz sytuacji problemowych, które mogą mieć miejsce przy funkcjonowaniu danego układu rzeczywistego. Zjawiska interesują nas już w fazie projektowania układu. Należy przewidzieć sposób, w jaki zachodzą procesy, charakterystyczne dla danego zjawiska i na tej podstawie tak skonstruować i wykonać układ, aby podczas jego eksploatacji procesy uznane za ważne przebiegały w sposób możliwie bliski do założonego. W tym celu należy dysponować zarówno modelami zjawisk, które w zakresie interesujących nas procesów, w powiązaniu ze strukturą układu odzwierciedlają rzeczywistość z dopuszczalnym błędem, jak i dysponować modelami warunków pracy, wynikających z powiązania badanego układu ze środowiskiem. W realizacji tych postulatów, oprócz wiedzy podstawowej, dużą rolę odgrywa «bank informacji» o sposobach funkcjonowania danej klasy układów w charakterystycznych dla nich warunkach eksploatacyjnych. Ten bank informacji jest tworzony na podstawie wyników badań diagnostycznych oraz drogą identyfikacji istniejących i działających układów.

Diagnostyczne badania eksperymentalne dostarczają informacji o procesach mechanicznych, akustycznych, cieplnych, o procesach zużycia itp., przebiegających w czasie funkcjonowania urządzeń mechanicznych oraz informacji o własnościach dynamicznych tych urządzeń, z uwzględnieniem przebiegających w nich procesów. Są to więc informacje dotyczące stanu urządzeń oraz zmienności tego stanu w czasie. Dają one podstawę do prognozowania przebiegu dalszych procesów i wskazówki na temat ewentualnego wprowadzenia modyfikacji i zmian w urządzeniach, w celu doskonalenia tych procesów.

Niestety diagnostyczne badania eksperymentalne nie zawsze mogą być w pełni przeprowadzone, nie zawsze można tą drogą uzyskać wszystkie poszukiwane informacje. Niekiedy zbadanie już tylko statycznych własności obiektów jest zadaniem skomplikowanym. Złożoność tego zadania jest konsekwencją faktu, że własności obiektów zależą zazwyczaj od bardzo wielu zarówno znanych, jak i nieznanymi czynników. Dodatkową trudnością jest jeszcze fakt, że wartości tych czynników, własności samego obiektu i dostępne dla eksperymentatora wielkości wyjściowe, zależne od wspomnianych czynników, mogą podlegać wpływom szumów i zakłóceń. Ponadto, ze względu na niewielki na ogół,

<sup>43</sup> Dla przykładu, rezygnując z niektórych sprzężeń zmienia się wartości i liczbę częstości własnych układu drgającego; jeżeli celem jest zbadanie drgań rezonansowych przy wymuszeniu okresowym, należy skonfrontować ze sobą częstości wymuszeń z widmem częstości własnych układu ze sprzężeniami i układu uproszczonego. Ten ostatni może być przyjęty do dalszej analizy wtedy, gdy wartości częstości wymuszeń nie są bliskie wartościom „odrzuconych” częstości własnych, a zmiany wartości częstości własnych, najbliższych wartościom częstości wymuszeń są nieznaczne.

możliwy zakres zmienności wartości parametrów przy przeprowadzaniu konkretnych badań, zebrane informacje są jedynie fragmentaryczne. Zachodzi również obawa pominięcia istnienia współzależności czynników wpływających na badaną własność obiektu i na zaburzenia wejściowe od jakiegoś nieznanego przez eksperymentatora zakłócenia. W «banku informacji» powinny się więc znaleźć informacje z możliwie pełnym opisem okoliczności, w jakich zostały uzyskane.

**I d e n t y f i k a c j a** jest dziedziną szerszą i znacznie lepiej, w sposób kompleksowy rozpracowaną. Ujmując w sposób ogólny, domeną jej jest poszukiwanie właściwego, najbardziej adekwatnego modelu matematycznego obiektu rzeczywistego, na podstawie wyników eksperymentu dokonywanego bezpośrednio na obiekcie rzeczywistym. Wyniki badań eksperymentalnych są zestawiane z wynikami analizy teoretycznej modelu matematycznego, z uwzględnieniem określonego kryterium porównawczego (funkcja jakości wybierana zgodnie z przeznaczeniem modelu). Model powinien z żadaną dokładnością opisywać zachowanie się obiektu pod działaniem określonych zaburzeń zewnętrznych. Przy identyfikacji, etap budowania modelu nominalnego jest na ogół ograniczony. Proces poszukiwania adekwatnego modelu matematycznego prowadzi się często metodą iteracyjną, z góry zakładając postać struktury modelu i wprowadzając do modelu matematycznego przybliżone charakterystyki układu rzeczywistego, wyznaczone na podstawie znajomości własności elementów i sprzężeń, a następnie modyfikując model drogą pominięcia elementów i sprzężeń mniej ważnych, ze względu na oczekiwane działanie układu (lub też uzupełnienia modelu). Przy zadanej dokładności (kryterium jakości), zgodność modelu i układu rzeczywistego osiąga się drogą szeregu udoskonaleń (zmieniając strukturę i wartości parametrów charakterystyk), które zakończone zostają w momencie, gdy błąd nie przekracza założonej wartości. Taka procedura prowadzi do uzyskania modelu uwzględniającego minimalną liczbę własności niezbędnych, aby reprezentować zachowanie się układu rzeczywistego.

Oczywiście model taki jest adekwatny do układu rzeczywistego tylko w sensie przyjętego kryterium jakości i przy określonym, założonym rodzaju zaburzeń zewnętrznych. Identyfikacja jest ważnym elementem modyfikacji parametrycznej i strukturalnej układów i stanowi jeden z etapów syntezy układów oraz ich optymalizacji pod kątem wybranego kryterium.

Diagnostyczne badania eksperymentalne i identyfikacja stanowią podstawowe źródło informacji dotyczących przedmiotów, stanów, zjawisk i sytuacji problemowych potrzebnych przy modelowaniu układów mechanicznych.

Wybór modeli zjawisk powinien być uzależniony od postawionego celu badań. W modelach zjawisk winny być uwzględnione czynniki wywierające istotny wpływ na badane zjawiska. Rola tych czynników w modelu powinna w zadowalający sposób odzwierciedlać ich rolę w rzeczywistości. Model musi być przy tym zbudowany w taki sposób, aby można było sformułować, a następnie rozwiązać zadania, opisane w przyjętym, sformalizowanym języku matematycznym.

Modele zjawisk imitują (symulują) prawa przyrody, których nie znamy, natomiast obserwujemy skutki ich działania. Przy budowaniu modeli zjawisk tworzy się okoliczności, w których sprawdza się te prawa. Biorąc pod uwagę pewne elementy wiedzy, na podstawie obserwacji i prób, dochodzi się do określonych wniosków, które następnie, w sformalizo-

wany sposób ujmuje się w postaci hipotez. Zależność hipotetyczna skutków i przyczyn umożliwiająca przewidywania nowych zjawisk stanowi model przyczynowy danej klasy zjawisk.

Sytuacje problemowe interesują nas głównie w odniesieniu do szeroko pojętego sterowania. W tej dziedzinie modelowanie jest znacznie trudniejsze. Po pierwsze dlatego, że na ogół nie wszystkie możliwe decyzje sterujące znane są z góry, gdyż w miarę przebiegania procesów w układzie sytuacja może się zmieniać. Po drugie dlatego, iż w tej dziedzinie mamy najczęściej do czynienia z działalnością człowieka, której rezultatem są decyzje, zależne od wielu czynników, istniejących obiektywnie i wywierających wpływ na daną sytuację.

Budowanie nominalnego modelu układu polega na abstrahowaniu, dealizacji i upraszczaniu rzeczywistości (stanów, przedmiotów, zdarzeń), opartym na informacjach o układzie rzeczywistym, przy uwzględnieniu określonego celu. Model nominalny danego układu rzeczywistego jest układem wyidealizowanym, o dobrze zdefiniowanej (w przyjętym systemie opisu) strukturze i charakterystykach elementów składowych, a także o ściśle określonych warunkach granicznych oddzielających go od środowiska zewnętrznego, które również w ściśle zdefiniowany sposób może nań oddziaływać.

Dla układów mechanicznych, jedną z najważniejszych na etapie budowania modelu fizycznego, jest decyzja dotycząca wyboru liczby stopni swobody układu. Pod wpływem sił, rzeczywiste ciała podlegają odkształceniom i — mimo swej dyskretnej atomowo-cząsteczkowej struktury w skali mikro, w skali makro odkształcenia te rozkładają się w sposób ciągły. Mechanika ciała stałego operuje modelami ciągłymi. Przyjmuje się że elementy układu mechanicznego przedstawiają wyznaczone geometrycznymi wymiarami obszary, wypełnione ośrodkiem, mającym określone cechy. Przy założeniu modeli ciągłych układ mechaniczny ma nieskończoną liczbę stopni swobody. W przypadku złożonego układu, przyjęcie modelu ciągłego prowadzi do ogromnych trudności nie tylko natury matematycznej na etapie rozwiązywania równań, lecz już na etapie wstępnym, przy określaniu i wyznaczaniu stałych fizycznych w równaniach konstytutywnych oraz warunkach brzegowych. Pewne ułatwienia wprowadza się zakładając, że ośrodek jest jednorodny i izotropowy oraz że odkształcenia są małe.

Jednak w przypadku złożonych układów zwykle stosuje się całkowitą lub częściową dyskretyzację<sup>5</sup>.

Istnieje szereg metod dyskretyzacji układów ciągłych. Ogólnie jednak wyodrębnić można dwie grupy: metody, w których korzysta się z postulatu o bryłach nieodkształcalnych i elementach bezinercyjnych oraz metody oparte na założeniu postaci drgań. W pierwszej grupie metod przyjmuje się hipotezę, że układ mechaniczny składa się z nieodkształcalnych brył sztywnych, charakteryzowanych przez masę i momenty bezwładności i z odkształcalnych, bezinercyjnych elementów sprężystych i dysypacyjnych, przynoszących tylko siły wzdłużne, reprezentujące siły wewnętrzne między poszczególnymi bryłami. Podział elementów układu na bryły sztywne i sprężyste elementy bezinercyjne jest podziałem

<sup>5</sup> W szczególnych przypadkach postępuje się odwrotnie: układy łańcuchowe dyskretne wygodniej dla pewnych celów opisać modelami ciągłymi.

umownym i jednocześnie niejednoznaczny. Jako sztywne traktuje się często całe fragmenty konstrukcyjne, jak np. zespoły prądowców, sprężarki, sztywne platformy itp. Jako elementy bezinercyjne — sprężyny, podkładki gumowe, amortyzatory itp. Bryły sztywne i elementy bezinercyjne można również uzyskać na drodze umownego podziału elementów ciągłych.

W drugiej grupie metod dyskretyzacji korzysta się z podstawowych zasad mechaniki (zasady prac przygotowanych, zasady D'Alemberta, zasady Gaussa, Hamiltona itd.). Układy ciągłe charakteryzowane są nieskończoną liczbą stopni swobody, nieskończoną liczbą częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci tych drgań. Układy dyskretne mają skończoną liczbę stopni swobody, częstości drgań własnych i postaci drgań<sup>6)</sup>. Przy dyskretyzacji metodami drugiej grupy wybiera się pewną określoną liczbę postaci drgań i odpowiadających im częstości własnych, pozostałe zaś zaniedbuje się, ustalając w ten sposób liczbę stopni swobody układu. Obie grupy metod prowadzą więc do podobnych wyników: liczba stopni swobody zostaje ustalona, a co za tym idzie, ustalona zostaje liczba postaci drgań i częstości własnych. Wprowadzenie idealizacji tego typu powinno być poprzedzone analizą, wyjaśniającą jakie wartości częstości będą miały okresowe oddziaływania zewnętrzne, gdyż widmo częstości zewnętrznych wymuszeń nie powinno pokrywać się z widmem odrzuconych częstości własnych.

Przy idealizacji prowadzonej metodami pierwszej grupy, podział elementów na bryły nieodkształcalne i bezinercyjne elementy sprężyste jest tym dokładniejszy, im większe są różnice wartości sztywności elementów «bezinercyjnych» i elementów «nieodkształcalnych» oraz im większa jest różnica wartości masy tych elementów. Całkowite pominięcie masy elementów sprężystych w praktyce jest uzasadnione<sup>7)</sup> w przypadkach, gdy ich masy są ponad trzykrotnie mniejsze od masy brył. Gdy taka nierówność nie jest spełniona, stosuje się na ogół następną przybliżenie: do masy brył dodaje się pewną część masy elementów sprężystych i w dalszych rozważaniach traktuje się je jako elementy pozbawione masy. W celu obliczenia wartości tej części, można zastosować jedną z metod przybliżonych (metody energetyczne, metody oparte na porównywaniu częstości drgań własnych i inne)

Idealizacja polegająca na podziale układu na bryły nieodkształcalne i bezinercyjne elementy sprężyste jest tym dokładniejsza, im mniejsze są wymiary bryły w stosunku do długości stojącej fali sprężystej, która zawiera najmniejszą liczbę węzłów. Te ostatnie zależą od częstości drgań oraz od prędkości rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w danym ośrodku.

Niekiedy bryły nieodkształcalne w modelu dyskretnym traktuje się jako masy skupione (punkty materialne).

Dyskretyzacją można obejmować cały rozpatrywany układ mechaniczny lub jego części, pozostałe zaś części (składające się na ogół z prostych elementów, jak struny, belki, płyty, membrany) rozpatrywać jako układy ciągłe, połączone w określony sposób z innymi, dyskretnymi elementami układu.

W praktyce decyzja, czy dany układ potraktować jako ciągły czy też jako dyskretny o wybranej liczbie stopni swobody, zależy od argumentów uzasadniających z jednej strony

<sup>6)</sup> Dotyczy to układów liniowych i quasi-liniowych.

<sup>7)</sup> Błąd wartości najniższych częstości własnych rzędu kilku procent.

dokładność, a z drugiej zaś korzyść. Przyjęta liczba stopni swobody zdyskretyzowanego układu i sposób rozmieszczenia zdyskretyzowanych brył, powinny być uzasadnione nie tylko geometrycznymi własnościami układu, lecz głównie wynikami wstępnej analizy dynamicznej. (Dla układów liniowych i quasi-liniowych — zestawienie widm częstości własnych i częstości wymuszeń zewnętrznych).

Przy przeprowadzaniu procedury dyskretyzacji układu należy również pamiętać, że dyskretyzuje się jednocześnie obciążenia (wymuszenia) zewnętrzne, zamieniając obciążenia rozłożone — skupionymi siłami i momentami par sił. Przy wyborze liczby stopni swobody należy zatem kierować się również charakterem obciążeń zewnętrznych przyłożonych do układu.

Opisany wyżej formalizm dyskretyzacji stanowi podstawę powszechnie obecnie stosowanej metody elementów skończonych. Wraz z postępem elektronicznej techniki obliczeniowej metoda ta zyskuje coraz większą popularność i coraz szersze zastosowania.

Następnym etapem modelowania jest formalizacja procesów przebiegających w układzie, która prowadzi do otrzymania *m o d e l u m a t e m a t y c z n e g o*.

Na ogół oba etapy modelowania są ze sobą ściśle powiązane. Przy budowaniu modelu nominalnego dysponujemy dowolnością w podejmowaniu decyzji co do jego struktury. Model nominalny nie jest pojęciem jednoznacznym w stosunku do danego obiektu rzeczywistego. Natomiast wybór modelu nominalnego, związany z wyborem zmiennych opisujących stan układu, już w znacznym stopniu determinuje postać modelu matematycznego. Oczywiście adekwatność wybranego modelu do układu rzeczywistego, a więc i prawidłowość uzyskiwanych wyników teoretycznych można zweryfikować jedynie doświadczalnie — na obiekcie rzeczywistym lub, na symulującym obiekcie rzeczywisty modelu laboratoryjnym.

Postać modelu matematycznego powinna być taka, aby istniała możliwość uzyskania rozwiązania<sup>8)</sup> o żądanej dokładności. Niezbędność idealizacji na etapie budowania modelu nominalnego wywołana jest nie tylko koniecznością uzgodnienia postawionego celu badań z możliwościami obliczeniowymi, lecz i niezbędną otrzymania dostatecznie prostych i łatwych do zanalizowania zależności, zabezpieczających żadaną dokładność. Przedstawienie rzeczywistości «prawie dokładnie» wymaga olbrzymiej, z reguły nieosiągalnej wiedzy o rzeczywistości na etapie idealizacji i prowadzi następnie do ogromnych komplikacji matematycznych na etapie formalizacji. Trzeba zatem szukać kompromisu między dokładnością modelu a nakładami pracy przy jego budowie i rozwiązywaniu.

Przy budowaniu modelu matematycznego korzystamy głównie z praw i aksjomatów fizyki, zapisanych w przyjęty, sformalizowany sposób. Korzystamy m.in. z zależności wyrażających równowagę, opisujących bilans sił, wydatków, przepływów, z równań ciągłości, z zależności geometrycznych.

Wybór zmiennych (poszukiwanych zmiennych stanu) zależy zarówno od struktury modelu, jak i od postawionego celu badań. Wybrane zmienne powinny — z jednej strony zabezpieczać wystarczająco wierny opis interesujących nas zjawisk i procesów przebiegających w układzie, z drugiej strony zaś, powinny umożliwiać otrzymanie możliwie prostych zależności matematycznych. «Prostota» tych ostatnich jest oczywiście pojęciem względnym,

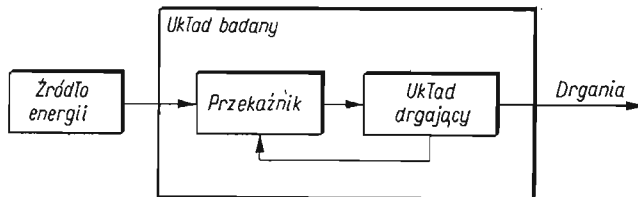
<sup>8)</sup> «Rozwiązaniem» nazywamy tu osiągnięcie celu, któremu służyło modelowanie; w przypadku układów mechanicznych najczęściej chodzi o znalezienie charakterystyk ruchu.



gdyż możliwości ich rozwiązywania, uzależnione są od aparatu matematycznego i środków liczących, będących aktualnie w dyspozycji.

W przypadku układów fizycznych (mechanicznych, elektrycznych itd.) model układu charakteryzowany jest przez swą strukturę: składa się z elementów będących ze sobą w określonych relacjach. W sposób formalny stan układu (modelu) opisywany jest przez zbiór wybranych zmiennych stanu, które na ogół są funkcjami czasu. Proces funkcjonowania tego układu opisywany jest przez zmiany wartości zmiennych z biegiem czasu.

W zależności od celu badań, przy uwzględnieniu budowy i sposobu funkcjonowania układu, po przeprowadzeniu operacji wyizolowania układu z otaczającego go środowiska, wyodrębnia się wejście i wyjście układu (modelu). Sygnały wejściowe przedstawiają zbiór czynników zewnętrznych, które wymuszają, ogólnie biorąc, funkcjonowanie układu. Jako sygnały wyjściowe, przyjmuje się pewne procesy lub zmiany sytuacji, z reguły te, poprzez które układ oddziałuje na otoczenie. Na taki układ reprezentujący rzeczywistość działają



Rys. 1

ponadto zakłócenia, będące odzwierciedleniem zakłóceń, występujących w idealizowanej rzeczywistości. Jako przyczyny zakłóceń traktuje się również wszystkie uproszczenia dokonywane świadomie lub nieświadomie podczas idealizacji. Model matematyczny układu przedstawia zbiór relacji wiążących zmienne stanu, wyznaczających charakterystyki stanu układu (a poprzez nie — sygnałów na wyjściu), w zależności od parametrów układu, sygnałów wejściowych, warunków początkowych i czasu. Proces funkcjonowania układu (modelu) opisywany jest przez zmiany z biegiem czasu zmiennych stanu pod wpływem, w ogólności zmiennych, sygnałów wejściowych.

Warto w tym miejscu powiedzieć nieco o strukturze modeli układów, z którymi najczęściej mamy do czynienia.

Jedynymi z najczęściej spotykanych układów mechanicznych (również układów elektrycznych i innych) są układy samowzbudne [17]. Schemat takiego układu przedstawiony został na rys. 1. Dostarczana do układu energia (na ogół w sposób ciągły, ze stałą mocą) zostaje przekształcona przez element układu nazywany tu umownie przekładnikiem. Przekładnik sprzężony jest z pozostałymi elementami układu poprzez pętlę sprzężenia zwrotnego, którym regulowane jest jego działanie. Przy odpowiednim zbilansowaniu energii, w układzie takim wzbudzone są niegasnące drgania. Przekładnikami energii mogą być np. zawory dozujące okresowe dostarczanie energii do układów (np. wahadło z kotwicą, współpracujące z obciążonym kółkiem wychwytywym w mechanizmach zegarowych), tarcie suche (np. w wahadle Frouda), tłumienie materiałowe (np. w wirnikach — przekształcające energię ruchu obrotowego w energię drgań giętnych wału) i szereg innych. Jeżeli energia dostarczana jest do określonych elementów układu w sposób bezpośredni —

mówimy o układzie samowzbudnym ze wzbudzeniem bezpośrednim. Może mieć miejsce również przypadek, w którym energia jest dostarczana drogą okresowych zmian wartości parametrów układu (np. współczynnik sprężystości w okresowo rozciąganej strunie lub zmienna długość wahadła-huśtawka), przy założeniu, że przy dokonywaniu tych zmian zostaje wykonana praca<sup>9)</sup>. W rezultacie takiego oddziaływania układ pobudzany jest do drgań. W odróżnieniu od poprzednich, tego typu układy samowzbudne nazywa się układami ze wzbudzeniem parametrycznym.<sup>10)</sup> W układach nie wykazujących cech samowzbudności, drgania okresowe mogą być wzbudzane jedynie oddziaływaniem okresowych wymuszeń zewnętrznych (układy pasywne).

Jak już wspomniano wyżej, dla obiektów mechanicznych głównym zjawiskiem, które zwykle stanowi cel badań jest ruch i wszystkie związane z ruchem charakterystyki. Inne zjawiska fizyczne — elektryczne, magnetyczne, ciepłe czy chemiczne, zachodzące w układzie, czy też w otaczającym go środowisku, interesują nas tylko pod kątem wywieranego przez nie wpływu na zmiany ruchu.

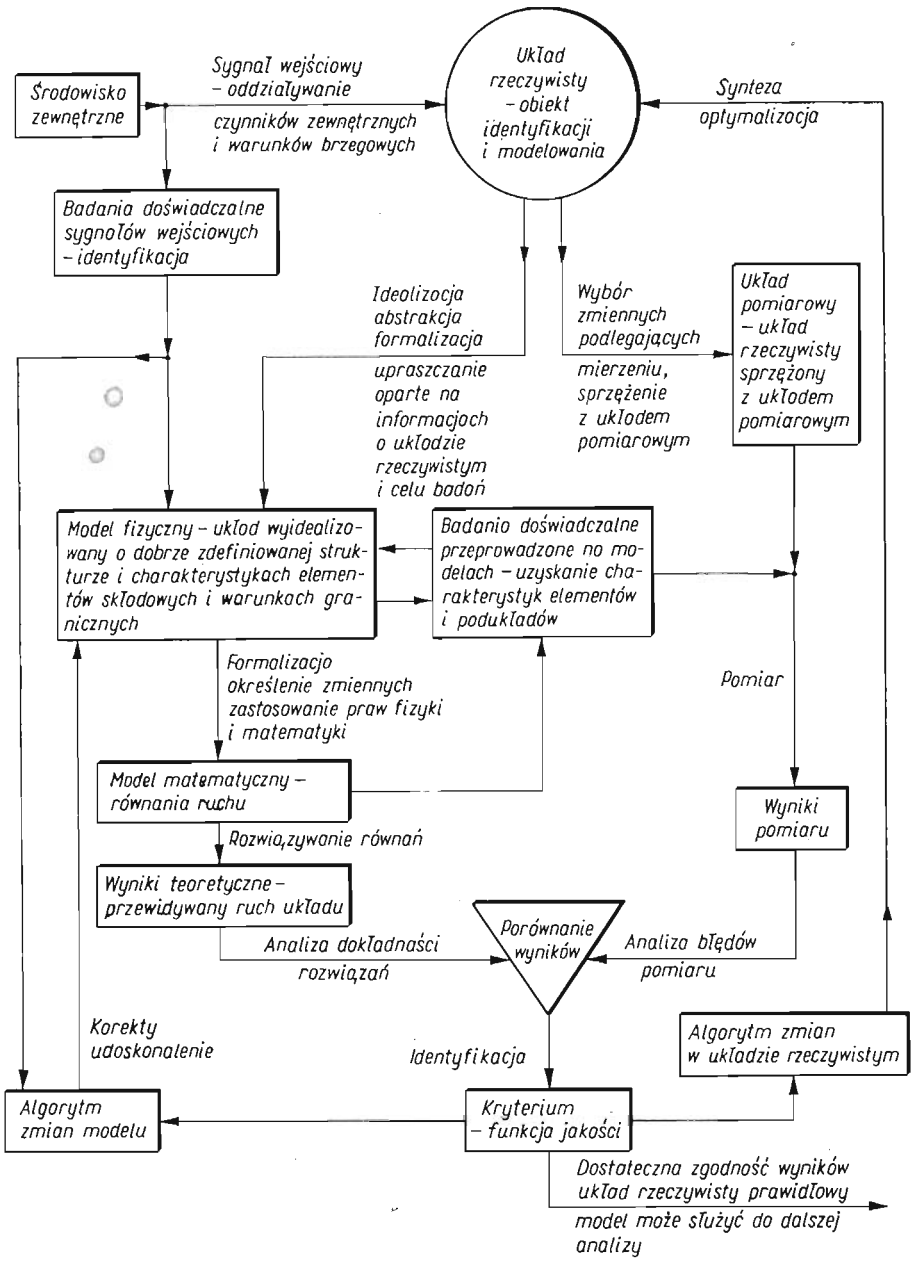
Schemat logiczny zadania, którego rozwiązanie stanowi cel budowania modelu, jest następujący: znane są sygnały wejściowe układu (zaburzenie zewnętrzne) i jedna z dwóch wielkości: struktura lub sygnały wyjściowe. Poszukuje się tej drugiej wielkości. Gdy znana jest struktura — zadanie jest zadaniem analizy, gdy znane są sygnały wyjściowe — mamy zadanie syntezy, na ogół dużo trudniejsze do rozwiązania.

Problematykę modelowania, przedstawioną wyżej, można rozpatrywać z punktu widzenia badań o p t y m a l n y c h. Zagadnienie podstawowe można sformułować następująco: poszukuje się rozwiązania optymalnego ze względu na dane kryterium i operując w danym, ograniczonym zakresie zmienności funkcji i parametrów, które zostały ujęte w modelu matematycznym układu. Zadania optymalizacyjne na ogół stawiane są łącznie z zadaniami syntezy, przy projektowaniu lub modyfikacji urządzeń. W przypadku układów mechanicznych, kryteria optymalizacyjne lub wskaźniki jakości układu mogą być natury technicznej (kombinacje funkcji wymiarów, ciężaru, dokładności, stabilności działania, nieczułości na zaburzenia, bezpieczeństwa, niezawodności, wydajności itp.) lub natury ekonomicznej (kombinacje funkcji ceny, zysku, poziomu inwestycji, spożycia, komfortu, funkcjonalności itp.). Sam proces modelowania również może być potraktowany jako zadanie optymalizacyjne: zbudować model obiektu, który w «najlepszy» sposób będzie opisywać jego zachowanie się, przy uwzględnieniu ograniczeń stawianych przez możliwości obliczeniowe.

Ogólny kompleksowy schemat modelowania, identyfikacji oraz syntezy układu mechanicznego można przedstawić w postaci pokazanej na rys. 2. Układ rzeczywisty, będący obiektem modelowania czy identyfikacji, może przedstawiać jeden wybrany element lub też układ sprzężanych elementów — mechanicznych, elektrycznych, hydraulicznych i innych. W terminach funkcjonalności, układ taki składać się może z obwodów napędowych roboczych transmisyjnych czy regulacyjnych.

<sup>9)</sup> Warunek ten spełniony jest tylko wtedy, gdy zmiany parametrów przebiegają z odpowiednią częstością, przy zachowaniu odpowiedniej fazy względem ruchu układu.

<sup>10)</sup> Modelami matematycznymi układów samowzbudnych o bezpośrednim wzbudzeniu są nieliniowe równania różniczkowe (często automatyczne); modelami układów ze wzbudzeniem parametrycznym są równania liniowe lub nieliniowe o zmiennych współczynnikach.



Rys. 2

W zakończeniu należy podkreślić wagę konieczności przeprowadzania gruntowych kompleksowych badań procesów dynamicznych, przebiegających w agregatach maszynowych. Badania takie mogą być dokonywane jedynie w oparciu o właściwie zbudowane modele przy uwzględnieniu specyfiki systemowego ujęcia zagadnienia.

## Literatura cytowana w tekście

1. R. BIGRET, *Modélisation et caractérisation*, B 575, Société Rateau-Schneider, Seine 1973.
2. В. А. ВЕНКОВ, *Избранные методологические вопросы моделирования*, Вопросы Философии, II, 1964.
3. W. SZTOF, *Modelowanie i filozofia*, PWN, Warszawa 1971.
4. Н. П. БУСЛЕНКО, *Моделирование сложных систем*, Наука, 1968.
5. O. LANGE, *Calość i rozwój w świetle cybernetyki*, PWN, Warszawa 1962
6. J. M. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *Certain properties of mechanical models of structures*, Arch. Mech. Stos., 11, 2 (1959).
7. J. M. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *Pewne uwagi na marginesie jakościowej teorii drgań nieliniowych*, Arch. Autom. Telemek., 8, 1 (1963).
8. J. M. SKOWROŃSKI, *Nonlinear mechanical lumped systems*, Zagadn. Drgań Nielin., 7 (1966).
9. A. MUSZYŃSKA, *O pewnych zagadnieniach związanych z modelowaniem układów mechanicznych*, Zagadn. Drgań Nielin., 9 (1968).
10. W. KUROWSKI, *An introduction to the dynamic diagnostics of mechanisms*, Zagad. Drgań Nielin., 17 (1976).
11. G. LALLEMENT, *Modyfikacje własności dynamicznych układów liniowych*, Dynamika Maszyn, Ossolineum, 1974.
12. *System Identification of Vibrating Structures*, ed. by W. D. PILKEY, R. COHEN, N. York 1972.
13. *Modele matematyczne i identyfikacja procesów*, Wyd. PAN, Ossolineum, 1972.
14. D. GRAUPE, *System Identification*, VRN, 1972
15. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
16. R. H. CANNON, Jr., *Dynamics of Physical Systems*, McGraw-Hill Book Comp., N. Y. 1967.
17. А. А. ХАРКЕВИЧ, *Автоколебания*, Москва 1953.

## Резюме

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Работа посвящена проблеме моделирования механических систем. Рассматриваются такие вопросы: построение номинальной и математической модели, способы дискретизации, роль диагностических экспериментальных исследований и идентификации, проблемы анализа, синтеза и оптимизации. Подчеркивается необходимость проведения тщательного комплексного исследования динамических процессов, протекающих в системах.

## Summary

## CERTAIN PROBLEMS OF MODELLING OF MECHANICAL SYSTEMS

In the paper discussed are several problems of modelling of mechanical systems such as: construction of nominal and mathematical models, discretization problems, the role of experimental diagnostic and identification tests, the problems of analysis, synthesis and optimization. The role of basic investigations of dynamic processes occurring in mechanical systems is stressed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 września 1975 r.*

## MACIERZOWY ZAPIS NIELINIOWYCH RÓWNAŃ RUCHU GENEROWANYCH FORMALIZMEM LAGRANGE'A

ZDOBYSŁAW G O R A J (WARSZAWA)

### 1. Wprowadzenie

W wielu zagadnieniach mechaniki stoimy przed koniecznością konstrukcji pełnych nieliniowych równań ruchu [1], czy też linearyzacji układu równań nieliniowych i zagadnieniem na wartości własne macierzy stanu. Problemy te są stosunkowo proste w przypadku, jeżeli rozpatrywany układ mechaniczny lub elektromechaniczny można opisać za pomocą niewielkiej ilości stopni swobody, oraz gdy geometria i kinematyka takiego układu nie jest zbyt skomplikowana. Inaczej sprawa przedstawia się dla układów o większej ilości stopni swobody i skomplikowanej geometrii ruchu. Typowym przykładem może być pojazd jednośladowy. Opisanie pojazdu jednośladowego bez uwzględnienia podatności pneumatyków za pomocą tylko 4 współrzędnych uogólnionych prowadzi do bardzo skomplikowanych, nieliniowych równań ruchu. Tak np. równanie ruchów przechylających zawiera przed uporządkowaniem równania około 300 składników typu  $A\dot{q}_i \dot{q}_k \cos q_l \sin q_k$  [4, 7]. Podobnie, chociaż w mniejszym stopniu, złożone są pełne równania nieliniowe obiektów latających z uwzględnieniem wychyleń powierzchni sterowych, czy też elastyczności konstrukcji. W znanych pracach problem ten był częściowo omijany poprzez linearyzację energii kinetycznej złożonego układu mechanicznego, a następnie budowę liniowych równań ruchu. Trzeba podkreślić, że postępowanie takie nie zawsze upraszcza pracę nad konstrukcją równań ruchu w sposób dostateczny. Ponadto nie można wykluczyć błędu przy takim postępowaniu, gdyż może się zdarzyć, że linearyzacja energii i następnie budowa liniowych równań ruchu oraz linearyzacja równań nieliniowych dadzą inne wyniki.

Celem przedstawionej pracy jest budowa całej rodziny macierzy o nieskomplikowanych wyrazach, a następnie pokazanie, jak za pomocą przekształceń algebraicznych można doprowadzić układ nieliniowych równań różniczkowych do postaci normalnej, nadającej się do numerycznego scałkowania za pomocą znanych procedur.

### 2. Oznaczenia stosowane w pracy

- $i, r, \alpha, \lambda, \sigma, \mu$  indeksy zmienne od 1 do  $n$ ,
- $j, j'$  indeksy zmienne od 1 do 3,
- $k$  indeks zmienny od 1 do  $l$ ,
- $\beta$  indeks zmienny od 1 do  $b$ ,
- $b$  liczba równań więzów nieholonomicznych,

- $l$  liczba stopni swobody układów,  
 $n$  liczba współrzędnych uogólnionych,  
 $a_{k\sigma}, b_{\sigma\alpha}$  współczynniki transformacji prostej i odwrotnej przy przejściu z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości,  
 $q_k, \dot{q}_k$  współrzędne i prędkości uogólnione,  
 $\pi_k, \omega_k$  quasi-współrzędne i quasi-prędkości,  
 $J_j$  główny, centralny moment bezwładności bryły względem osi  $j'$ ,  
 $M$  masa bryły,  
 $Q_k^*$  siła uogólniona odpowiadająca quasi-współrzędnej  $k$ ,  
 $T, T^*$  energia kinetyczna bryły wyrażona odpowiednio w prędkościach uogólnionych i w quasi-prędkościach,  
 $V_{cj}$  składowa prędkości środka masy bryły w kierunku osi  $j$ ,  
 $\Omega_j$  składowa prędkości kątowej bryły w kierunku osi  $j'$ ,  
 $\gamma_{ka}^r$  trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna,  
 $V, \Omega$  macierze kolumnowe odpowiednio prędkości liniowej i kątowej bryły,  
 $V_Q, \Omega_Q$  macierze pochodnych cząstkowych odpowiednio prędkości liniowej i kątowej bryły względem kolejnych quasi-prędkości, pomnożone odpowiednio przez masę i momenty bezwładności [wzory (9)],  
 $V_\pi, \Omega_\pi$  macierze pochodnych cząstkowych odpowiednio prędkości liniowej i kątowej bryły względem kolejnych quasi-współrzędnych pomnożone odpowiednio przez masę i momenty bezwładności [wzory (9)],  
 $T_Q, T_\pi$  macierze pochodnych cząstkowych energii kinetycznej względem quasi-prędkości i quasi-współrzędnych odpowiednio [wzory (10) i (11)],  
 $T_{Q\omega}$  macierz określona wzorem (35),  
 $T_R$  macierz «reszt» przy różniczkowaniu energii kinetycznej względem quasi-prędkości,  
 $V_P, \Omega_P$  macierze współczynników rozkładu prędkości odpowiednio liniowej i kątowej względem quasi-prędkości [wzory (12) i (13)],  
 $\omega$  wektor quasi-prędkości,  
 $V_R, \Omega_R$  macierze «reszt» (nie zawierające quasi-prędkości) odpowiednio prędkości liniowej i kątowej [wzory (13)],  
 $A$  macierz zdefiniowana wzorem (15),  
 $C$  macierz zdefiniowana wzorem (16),  
 $V_{QP}, \Omega_{QP}$  macierze pochodne odpowiednio macierzy  $V_Q$  i  $\Omega_P$ ,  
 $V_{RP}, \Omega_{RP}$  macierze pochodne odpowiednio macierzy  $V_R$  i  $\Omega_R$ ,  
 $V_{PP}, \Omega_{PP}$  macierze pochodne odpowiednio macierzy  $V_P$  i  $Q_P$ ,  
 $\Gamma$  macierz współczynników Boltzmanna-Hamela,  
 $Q$  macierz sił uogólnionych,  
 $z, R$  macierze określone wzorami (22),  
 $A_i, B_i$  macierze  $A$  i  $B$  dla  $i$ -tej bryły wchodzącej w skład układu mechanicznego.

### 3. Równania Boltzmanna — Hamela dla układu nieholonomicznego w zapisie macierzowym

Równania Boltzmanna-Hamela dla układu nieholonomicznego opisują bardzo szeroki krąg problemów spotykanych w mechanice analitycznej [2]. Można pokazać, jak z równań Boltzmanna-Hamela wynikają równania Maggi oraz Woronca dla układów nieholonomicznych, zarówno w quasi-współrzędnych, jak i we współrzędnych uogólnionych. W przypadku gdy nie istnieją równania więzów nieholonomicznych, równania Boltzmanna-Hamela opisują układ holonomiczny w quasi-współrzędnych. Jeżeli związki transformacyjne z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości są

całkowane, to wtedy równania Boltzmanna-Hamela przechodzą w znane równania Lagrange'a II rodzaju. Jednak zasadniczym powodem rozważań właśnie nad równaniami Boltzmanna-Hamela jest fakt następujący: największe trudności w konstrukcji nieliniowych równań ruchu stwarzają pojazdy kołowe i obiekty latające. Równania ruchu dla tych obiektów najwygodniej jest budować w układzie współrzędnych związanych z obiektem, a więc w pewnym układzie quasi-współrzędnych. Najlepiej do tego nadają się więc równania Boltzmanna-Hamela [6].

Równania Boltzmanna-Hamela, na podstawie [2], zapisano następująco:

— równania ruchu

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{r=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \gamma_{\alpha k}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_k^*,$$

— równania więzów

$$(2) \quad \omega_{l+\beta} = \sum_{\lambda=1}^n a_{l+\beta, \lambda} \dot{q}_\lambda = 0,$$

— równania transformacji z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości

$$(3) \quad \omega_k = \sum_{\lambda=1}^n a_{k, \lambda} \dot{q}_\lambda,$$

gdzie  $r, \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, n$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, b$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$ , przy czym  $b+l = n$ . Gdy  $b = 0$ , to  $l = n$  (układ jest holonomiczny).

Trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna można obliczyć z definicji

$$(4) \quad \gamma_{\alpha k}^r = \sum_{\sigma=1}^n \sum_{\mu=1}^n \left( \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial a_{r\mu}}{\partial q_\sigma} \right) b_{\mu k} b_{\sigma \alpha},$$

gdzie

$$[b_{\sigma, \alpha}] = \left[ \begin{array}{c} [a_{k, \sigma}] \\ [a_{l+\beta, \sigma}] \end{array} \right]^{-1},$$

lub też ze związków przestawialności mechaniki analitycznej [2], w postaci

$$(5) \quad d\delta\pi_r - \delta d\pi_r = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\sigma=1}^n \gamma_{\mu\sigma}^r d\pi_\mu \delta\pi_\sigma.$$

Założono, że układy mechaniczne, do których można stosować równania Boltzmanna-Hamela dadzą się przedstawić w postaci zbioru brył sztywnych lub elastycznych, połączonych wzajemnie przegubami, i że układy takie można opisać za pomocą skończonej liczby stopni swobody. Aby nie komplikować zapisu, rozważono zagadnienie dla jednej tylko bryły sztywnej całego układu. Pokazano dalej, jak zagadnienie można uogólnić w przypadku  $n$  brył.

Korzystając z twierdzenia Kőeniga, energię kinetyczną bryły sztywnej wyrażono w quasi-prędkościach

$$(6) \quad T^* = \frac{1}{2} M \sum_{j=1}^3 V_{cj}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j'=1}^3 J_{j'} \Omega_{j'}^2.$$

Okazuje się, że ze względu na prostotę zapisu warto niekiedy składowe prędkości środka masy  $V_{cj}$  wyrazić w innym układzie współrzędnych niż składowe prędkości kątowej  $\Omega_{j'}$ .

Następnie wykonano operacje określone w równaniach Boltzmanna-Hamela (1)

$$(7) \quad \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} = \sum_{j=1}^3 V_{ij} M \frac{\partial V_{cj}}{\partial \omega_k} + \sum_{j'=1}^3 \Omega_{j'} J_{j'} \frac{\partial \Omega_{j'}}{\partial \omega_k},$$

$$(8) \quad \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} = \sum_{j=1}^3 V_{cj} M \frac{\partial V_{cj}}{\partial \pi_k} + \sum_{j'=1}^3 \Omega_{j'} J_{j'} \frac{\partial \Omega_{j'}}{\partial \pi_k}.$$

Wprowadzono oznaczenia:

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathbf{V}(j) &= [V_{cj}], & \mathbf{\Omega}(j') &= [\Omega_{j'}], \\ \mathbf{V}_Q(k, j) &= \left[ M \frac{\partial V_{cj}}{\partial \omega_k} \right], & \mathbf{\Omega}_Q(k, j') &= \left[ J_{j'} \frac{\partial \Omega_{j'}}{\partial \omega_k} \right], \\ \mathbf{V}_\pi(k, j) &= \left[ M \frac{\partial V_{cj}}{\partial \pi_k} \right], & \mathbf{\Omega}_\pi(k, j') &= \left[ J_{j'} \frac{\partial \Omega_{j'}}{\partial \pi_k} \right]. \end{aligned}$$

W symbolice macierzowej wzory (7) i (8) przyjmują postać

$$(10) \quad \mathbf{T}_Q(k) = \left[ \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \right] = \mathbf{V}_Q(r, j) \mathbf{V}(j) + \mathbf{\Omega}_Q(r, j') \mathbf{\Omega}(j'),$$

$$(11) \quad \mathbf{T}_\pi(k) = \left[ \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} \right] = \mathbf{V}_\pi(k, j) \mathbf{V}(j) + \mathbf{\Omega}_\pi(k, j') \mathbf{\Omega}(j').$$

Określono następnie współczynniki rozkładu prędkości liniowej i kątowej względem quasi-prędkości

$$(12) \quad \mathbf{V}_P(j, i) = \frac{\partial \mathbf{V}(j)}{\partial \omega_i}, \quad \mathbf{\Omega}_P(j', i) = \frac{\partial \mathbf{\Omega}(j')}{\partial \omega_i}.$$

Wzory (12) pozwalają na następujące rozkłady prędkości:

— prędkości liniowej

$$\mathbf{V}(j) = \mathbf{V}_P(j, i) \boldsymbol{\omega}(i) + \mathbf{V}_R(j),$$

— prędkości kątowej

$$(13) \quad \mathbf{\Omega}(j') = \mathbf{\Omega}_P(j', i) \boldsymbol{\omega}(i) + \mathbf{\Omega}_R(j').$$



Na podstawie (10) i (13) określono operacje  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \right)$ ,

$$(14) \quad \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \right) \right] = \dot{\mathbf{V}}_Q \mathbf{V} + \mathbf{V}_Q \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{\Omega}}_Q \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}_Q \dot{\mathbf{\Omega}} = \\ = \dot{\mathbf{V}}_Q \mathbf{V} + \mathbf{V}_Q (\dot{\mathbf{V}}_P \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V}_P \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{V}}_R) + \dot{\mathbf{\Omega}}_Q \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}_Q (\dot{\mathbf{\Omega}}_P \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Omega}_P \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{\Omega}}_R) = \\ = (\mathbf{V}_Q \mathbf{V}_P + \mathbf{\Omega}_Q \mathbf{\Omega}_P) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{C} = \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{C},$$

gdzie

$$(15) \quad \mathbf{A}(k, i) = \mathbf{V}_Q(k, j) \mathbf{V}_P(j, i) + \mathbf{\Omega}_Q(k, j) \mathbf{\Omega}_P(j),$$

$$(16) \quad \mathbf{C}(k) = \mathbf{V}_{QP}(k, j) \mathbf{V}(j) + \mathbf{\Omega}_{QP}(k, j) \mathbf{\Omega}(j) + \\ + \mathbf{V}_Q(k, j) [\mathbf{V}_{PP}(j, i) \boldsymbol{\omega}(i) + \mathbf{V}_{RP}(j)] + \mathbf{\Omega}_Q(k, j) [\mathbf{\Omega}_{PP}(j, i) \boldsymbol{\omega}(i) + \mathbf{\Omega}_{RP}(j)],$$

przy czym

$$\mathbf{V}_{QP}(k, j) = \dot{\mathbf{V}}_Q(k, j), \quad \mathbf{\Omega}_{QP}(k, j) = \dot{\mathbf{\Omega}}_Q(k, j), \\ \mathbf{V}_{RP}(j) = \mathbf{V}_R(j), \quad \mathbf{\Omega}_{RP}(j) = \dot{\mathbf{\Omega}}_R(j), \\ \mathbf{V}_{PP}(j, i) = \dot{\mathbf{V}}_P(j, i), \quad \mathbf{\Omega}_{PP}(j, i) = \dot{\mathbf{\Omega}}_P(j, i).$$

Oznaczono macierz trójwskaznikowych symboli Boltzmana przez  $\mathbf{\Gamma}$

$$(17) \quad \mathbf{\Gamma}(r, k, \alpha) = [\gamma_{\alpha k}^r]$$

oraz macierz sił uogólnionych odpowiadających przyjętem quasi-współrzędnym przez  $\mathbf{Q}$

$$(18) \quad \mathbf{Q}(k) = [Q_k^*].$$

Korzystając z oznaczeń (9)–(11) oraz (14)–(18) równanie (1) zapisano w postaci jednego równania macierzowego

$$(19) \quad \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{C} - \mathbf{T}_\pi + \mathbf{T}_Q^T \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}.$$

Wprowadzono oznaczenia

$$(20) \quad \mathbf{B}(k) = -\mathbf{C}(k) + \mathbf{T}_\pi(k) - \mathbf{T}_Q^T(r) \mathbf{\Gamma}(r, k, \alpha) \boldsymbol{\omega}(\alpha) + \mathbf{Q}(k).$$

Z (20) wynika, że macierz kolumnowa  $\mathbf{B}$  jest sumą iloczynów macierzy, które zawierają kombinacje współrzędnych uogólnionych i quasi-prędkości, nie zawierają natomiast pochodnych quasi-prędkości, tzn.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}).$$

Fakt ten ma w dalszych rozważaniach znaczenie zasadnicze, gdyż pozwala na zapis układu równań różniczkowych w postaci normalnej.

Równanie (19) po wprowadzeniu oznaczenia (20) przyjmie postać następującą:

$$(21) \quad \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}.$$

Równanie (21) może być rozwiązane wspólnie z równaniami więzów (2) i równaniami transformacji (3). Jeżeli przy próbie rozwikłania równań (2) i (3) względem  $\dot{q}_\lambda$  napotykamy

trudności rachunkowe, to można to zrobić na maszynie cyfrowej, zapisując równania (2) i (3) w postaci macierzowej. W tym celu wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(22) \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} [a_{k,\lambda}] \\ [a_{l+\beta,\lambda}] \end{bmatrix}.$$

Korzystając z (22), równania (2) i (3) przedstawiono za pomocą jednego równania macierzowego

$$(23) \quad \mathbf{z} = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{q}}.$$

Z powyższego wynika, jak zmieni się postępowanie, gdy będzie  $m$  brył sztywnych lub elastycznych. Wtedy należy dla każdej bryły oddzielnie zbudować macierz  $\mathbf{A}_i$  i  $\mathbf{B}_i$ , a następnie utworzyć sumy

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i.$$

Tak więc układ mechaniczny składający się z  $m$  brył sztywnych lub elastycznych może być opisany za pomocą dwóch równań macierzowych

$$(24) \quad \mathbf{A} \cdot \dot{\omega} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{z}.$$

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na metody rozwiązania układu nieliniowego równań różniczkowych (24). Standardowe procedury w dostępnych maszynach matematycznych pozwalają na rozwiązanie układu równań różniczkowych nieliniowych w postaci normalnej, tzn.  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Doprowadzenie układu (24) do postaci normalnej można «pozostawić» samej maszynie cyfrowej, stosując przed każdym krokiem całkowania znane procedury na odwracanie i mnożenie macierzy. W efekcie otrzyma się układ równań różniczkowych

$$(25) \quad \dot{\omega} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}.$$

Układ równań (25) jest najbardziej ogólnym opisem matematycznym własności dynamicznych badanego modelu fizycznego.

#### 4. Równania Boltzmana-Hamela dla układu holonomicznego w zapisie macierzowym

Jeżeli układ mechaniczny nie jest skrępowany więzami nieholonomicznymi, to wtedy odpadają równania więzów (2). Słuszne są w związku z tym następujące zależności:

$$b = 0, \quad l = n.$$

Równania transformacyjne (3) przyjmą postać

$$(26) \quad \omega_k = \sum_{\lambda=1}^n a_{k,\lambda} \cdot \dot{q}_\lambda,$$

gdzie  $k = 1, 2, \dots, n$  przy czym

$$(27) \quad [b_{\sigma,\alpha}] = [a_{k,\sigma}]^{-1}.$$

Wszystkie następne operacje podane w rozdziale 3, określone wzorami (5)–(21), pozostaną bez zmian. Wzory (22) przyjmą postać

$$(28) \quad \omega = \omega, \quad R = [a_{k, \lambda}].$$

Tak więc matematyczny opis układu holonomicznego w quasi-współrzędnych sprowadza się do następującego układu równań różniczkowych:

$$(29) \quad A\dot{\omega} = B, \quad R\dot{q} = \omega.$$

Jest to układ  $n+n = 2n$  równań różniczkowych nieliniowych I rzędu.

### 5. Równania Lagrange'a w zapisie macierzowym

Założono, że macierz  $\Gamma(r, k, \alpha)$  określona wzorem (17) jest tożsamościowo równa zeru. Oznacza to, że wszystkie trójwskaźnikowe symbole Boltzmann'a są równe zeru. Wtedy transformację określoną wzorami (3) oraz (26) można interpretować jako przejście od jednego układu współrzędnych uogólnionych do innego układu współrzędnych uogólnionych. Układ mechaniczny może być wówczas opisany równaniami Lagrange'a II rodzaju. Energia kinetyczna (6) jest funkcją współrzędnych i prędkości uogólnionych i będziemy ją oznaczać przez  $T$ . Ponadto spełnione są związki

$$(30) \quad q_k = \pi_k; \quad \dot{q}_k = \dot{\pi}_k = \omega_k.$$

Wszystkie operacje określone wzorami (6)–(21), pozostają bez zmian. Aby jednak układ równań (21), który jest układem równań różniczkowych II rzędu, można było rozwiązać na maszynie cyfrowej, należy go sprowadzić do układu rzędu I stosując podstawienie, które stanowi analogię do związków (23), w postaci

$$(31) \quad \omega = \dot{q}.$$

Ostatecznie otrzymano, że gdy holonomiczny układ opisujemy za pomocą współrzędnych i prędkości uogólnionych, to matematyczny zapis ruchu stanowią następujące równania różniczkowe I rzędu

$$(32) \quad A(q, \omega)\dot{\omega} = B(q, \omega), \quad \dot{q} = \omega.$$

Zaznaczmy ponownie, że sprowadzenie układu (32) do postaci normalnej może dokonać maszyna cyfrowa wykonując operacje odwracania i mnożenia macierzy

$$(33) \quad \dot{\omega} = A^{-1}(q, \omega)B(q, \omega), \quad \dot{q} = \omega.$$

### 6. Linearyzacja nieliniowych równań ruchu

Z rozdziałów 3, 4 i 5 wynika, że aby zapisać i rozwiązać nieliniowy układ równań ruchu układu mechanicznego, należy określić całą rodzinę macierzy na podstawie znajomości:

- a) rozkładu prędkości liniowej środka masy i prędkości kątowej bryły,
- b) równań więzów nieholonomicznych (jeżeli istnieją),

c) równań transformacyjnych z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości,

d) sił uogólnionych działających na układ.

Są to następujące macierze:

$$(34) \quad \begin{array}{ll} \mathbf{V}(j), & \mathbf{\Omega}(j), \\ \mathbf{V}_Q(k, j), & \mathbf{\Omega}_Q(k, j), \\ \mathbf{V}_\Pi(k, j), & \mathbf{\Omega}_\Pi(k, j), \\ \mathbf{V}_P(j, i), & \mathbf{\Omega}_P(j, i), \\ \mathbf{V}_R(j), & \mathbf{\Omega}_R(j), \\ \mathbf{V}_{QP}(k, j), & \mathbf{\Omega}_{QP}(k, j), \\ \mathbf{V}_{RP}(j), & \mathbf{\Omega}_{RP}(j), \\ \mathbf{V}_{PP}(j, i), & \mathbf{\Omega}_{PP}(j, i), \\ \mathbf{\Gamma}(r, k, \alpha), & \mathbf{Q}(k), \quad \mathbf{R}(i, r). \end{array}$$

W ogólnym przypadku należy zbudować 19 macierzy wyjściowych na podstawie znajomości układu mechanicznego. Ponadto w celu ułatwienia zapisu programu dla maszyny cyfrowej należy zadeklarować dalsze 5 macierzy:  $\mathbf{T}_Q(r)$ ,  $\mathbf{T}_\Pi(k)$ ,  $\mathbf{C}(k)$ ,  $\mathbf{A}(k, i)$ ,  $\mathbf{B}(k)$  i «zlecić» maszynie ich obliczenie na podstawie znajomości 19 macierzy wyjściowych.

W najbardziej ogólnej postaci układ równań (25) posiada nieliniowe prawe strony, tzn.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}, t)\mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}, t), \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{q}, t)\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Liniowym układem równań różniczkowych będziemy nazywać układ równań wynikający z (25), zapisany w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{B}}(t, \mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{D}}(t)\mathbf{z}, \\ \dot{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)\mathbf{z}. \end{aligned}$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{A}}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  są macierzami stałymi względem  $\boldsymbol{\omega}$  i  $\mathbf{q}$  (tzn. nie zawierającymi  $\boldsymbol{\omega}$  i  $\mathbf{q}$ ). Macierze te mogą być jednak nadal dowolnymi funkcjami czasu. Używając dalej terminów macierze liniowe i stałe, będziemy pod tymi określeniami rozumieli liniowość lub stałość względem  $\boldsymbol{\omega}$  i  $\mathbf{q}$  bez względu na zależność tych macierzy od czasu. Ponadto nie będziemy zajmować się określeniem warunków, przy których linearyzacja układu równań jest dopuszczalna ze względu na jakościowe zachowanie się rozwiązań tych równań.

Aby zlinearyzować układ równań różniczkowych (24) lub (25) należy z macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{R}$  wyodrębnić części stałe, a z macierzy  $\mathbf{B}$  część liniową i stałą. Z (15) wynika, że aby macierz  $\mathbf{A}$  była macierzą stałą, to macierze  $\mathbf{V}_Q$ ,  $\mathbf{\Omega}_Q$ ,  $\mathbf{V}_P$ ,  $\mathbf{\Omega}_P$  muszą być stałe. Podobnie z (22) wynika, że aby macierz  $\mathbf{R}$  była stała, to muszą być stałe macierze:

— macierz określająca transformację z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości [wzór (3)]

$$[a_{k,\lambda}],$$

— macierz określająca równania więzów nieholonomicznych [wzór (2)]

$$[a_{l+\beta,\lambda}].$$

Macierz  $\mathbf{B}$  jest następującą kombinacją macierzy wyjściowych:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{V}_{QP}\mathbf{V} - \mathbf{\Omega}_{QP}\mathbf{\Omega} - \mathbf{V}_Q[\mathbf{V}_{PP}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{V}_{RP}] - \mathbf{\Omega}_Q[\mathbf{\Omega}_{PP}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Omega}_{RP}] + \mathbf{V}_\Pi\mathbf{V} + \mathbf{\Omega}_\Pi\mathbf{\Omega} - [\mathbf{V}_Q\mathbf{V} + \mathbf{\Omega}_Q\mathbf{\Omega}]^T \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}.$$

Ażeby macierz  $\mathbf{B}$  była macierzą co najwyżej liniową (tzn. aby nie zawierała elementów kwadratowych i wyższego rzędu) kolejne macierze muszą spełniać następujące warunki:

$\mathbf{V}_{QP}$ ,  $\mathbf{\Omega}_{QP}$  muszą być liniowe. Macierze te nie zawierają elementów stałych, gdyż  $\mathbf{V}_{QP} = \dot{\mathbf{V}}_Q$  oraz  $\mathbf{\Omega}_{QP} = \dot{\mathbf{\Omega}}_Q$ . Należy podkreślić, że żądanie, aby macierze  $\mathbf{V}_{QP}$ ,  $\mathbf{\Omega}_{QP}$  były liniowe nie jest sprzeczne z poprzednim warunkiem, aby macierze  $\mathbf{V}_Q$ ,  $\mathbf{\Omega}_Q$  były stałe, pomimo że  $\mathbf{V}_{QP} = \dot{\mathbf{V}}_Q$  oraz  $\mathbf{\Omega}_{QP} = \dot{\mathbf{\Omega}}_Q$ . Wynika to z faktu, iż warunki narzucone na macierze wyjściowe tworzące macierze  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  są od siebie niezależne, gdyż są spowodowane różnymi żądaniami (stałość macierzy  $\mathbf{A}$  oraz liniowość macierzy  $\mathbf{B}$ );

$\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  muszą być stałe, gdyż będą mnożone przez macierze liniowe;

$\mathbf{V}_{PP}$ ,  $\mathbf{\Omega}_{PP}$  muszą być stałe, gdyż będą mnożone przez macierze liniowe;

$\boldsymbol{\omega}$  jest liniowa;

$\mathbf{V}_{RP}$ ,  $\mathbf{\Omega}_{RP}$  muszą być liniowe. Macierze te nie zawierają elementów stałych, gdyż  $\mathbf{V}_{RP} = \dot{\mathbf{V}}_R$  oraz  $\mathbf{\Omega}_{RP} = \dot{\mathbf{\Omega}}_R$ ;

$\mathbf{V}_Q$ ,  $\mathbf{\Omega}_Q$  muszą być stałe, gdyż będą mnożone przez macierze liniowe;

$\mathbf{V}_\Pi$ ,  $\mathbf{\Omega}_\Pi$  w zależności od badanego obiektu fizycznego i jego modelu, macierze te w postaci wyjściowej, nieliniaryzowanej mogą zawierać elementy stałe, lub też mogą zawierać tylko elementy liniowe i wyższego rzędu. Tak np. dla przedniego zestawu kołowego pojazdu ogumionego i tylko dla rozważanych ruchów antysymetrycznych macierze te zawierają tylko elementy liniowe i wyższego rzędu. Natomiast dla ruchów symetrycznych obiektu latającego macierze te zawierają również elementy stałe. Wobec powyższego macierze  $\mathbf{V}_\Pi$  i  $\mathbf{\Omega}_\Pi$  po linearyzacji, w pewnych przypadkach mogą zawierać elementy stałe oraz liniowe. Jeżeli macierze  $\mathbf{V}_\Pi$  i  $\mathbf{\Omega}_\Pi$  nie zawierają elementów stałych, to macierze  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{\Omega}$  mnożone lewostronnie przez  $\mathbf{V}_\Pi$  i  $\mathbf{\Omega}_\Pi$  muszą być stałe. Gdy jednak macierze  $\mathbf{V}_\Pi$  i  $\mathbf{\Omega}_\Pi$  zawierają elementy stałe, to należy pomnożyć te macierze prawostronnie odpowiednio przez liniowe macierze  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{\Omega}$ , a następnie wyodrębnić części stałe i liniowe z macierzy wynikowych;

$\boldsymbol{\Gamma}$ ,  $\mathbf{V}_Q$ ,  $\mathbf{\Omega}_Q$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  muszą być stałe, gdyż ich kombinacje będą mnożone przez liniową macierz  $\boldsymbol{\omega}$ ;

$\mathbf{Q}$  po linearyzacji może zawierać tylko elementy liniowe i stałe.

## 7. Macierzowy zapis operatora Lagrange'a dla układów o prostszej geometrii ruchu

Pod określeniem «bryła o prostszej geometrii ruchu» będziemy rozumieli bryłę znajdującą się w takim ruchu, w którym zdefiniowana poniżej macierz  $\mathbf{T}_{Q\boldsymbol{\omega}}$  dla wybranych współrzędnych, uogólnionych i quasi-prędkości nie jest zbyt skomplikowana, tzn. nie zawiera zbyt długich wyrazów. Podział na bryły o prostszej i bardziej skomplikowanej geometrii ruchu nie jest oczywiście jednoznaczny i zależy od oceny komplikacji dalszych operacji różniczkowania macierzy  $\mathbf{T}_{Q\boldsymbol{\omega}}$ .

Dla brył o prostszej kinematyce nie warto rozpoczynać budowy równań ruchu od zbudowania macierzy prędkości liniowej środka masy i prędkości kątowej. W takim przypadku

wystarczy operator Lagrange'a  $L = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \tau_k}$  zapisać (za pomocą macierzy) następująco:

$$(35) \quad L = \frac{d}{dt} \mathbf{T}_Q - \mathbf{T}_H = \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{Q\omega} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}_R) - \mathbf{T}_H = \dot{\mathbf{T}}_{Q\omega} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}_{Q\omega} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{T}}_R - \mathbf{T}_H,$$

gdzie

$$\mathbf{T}_Q(k) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \omega_k} \right],$$

$$\mathbf{T}_{Q\omega} = (k, i) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}_Q(k)}{\partial \omega_i} \right],$$

gdzie  $\mathbf{T}_R$  oznacza macierz «reszt» przy różniczkowaniu energii kinetycznej względem quasi-prędkości.

Dobrym przykładem ilustrującym zastosowanie powyższych metod jest konstrukcja równań ruchu pojazdu jednośladowego. Aby zbudować pełne nieliniowe równania ruchu pojazdu jednośladowego, należy podzielić go na trzy umowne bryły sztywne: (1) przedni zestaw kierowniczy wraz z przednim kołem bez uwzględnienia ruchu obrotowego przedniego koła, (2) tylna rama wraz z tylnym kołem bez uwzględnienia ruchu obrotowego tylnego koła, (3) koło tylne i przednie przy uwzględnieniu rzeczywistych ruchów tych kół wraz z obrotami własnymi kół (w celu uwzględnienia efektów giroskopowych). W celu otrzymania członów równań wynikłych z ruchu bryły (1) należy zastosować pełną metodę podaną w rozdziale 3; w celu otrzymania członów wynikłych z ruchu brył (2) i sprzężeń pochodzących od umownie wyróżnionej bryły (3) należy zastosować uproszczoną wersję metody macierzowej, podanej w rozdziale 7.

## 8. Osiągnięte rezultaty

Przedstawiona w pracy metoda pozwala na zapisanie układu równań różniczkowych, opisujących własności dynamiczne układów mechanicznych dyskretnych poprzez zbudowanie 19 macierzy wyjściowych. Metoda posiada dwie zasadnicze zalety w stosunku do metody tradycyjnej.

1. Niektóre macierze, np.  $\mathbf{V}_Q$ , są wykorzystywane wielokrotnie w konstrukcji równań (24). Ponadto mnożąc macierze przez siebie operuje się wielokrotnie na elementach tych macierzy. Maszyna cyfrowa przed wykonaniem każdego kroku w procesie całkowania musi wcześniej policzyć elementy macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$ . Ale dla przedstawionej metody maszyna zrobi to tylko jeden raz. Natomiast dla układu równań różniczkowych wyprowadzonych tradycyjnie i rozpisanych w jawnej postaci, maszyna będzie niektóre z elementów liczyła wielokrotnie ze względu na powtarzanie się tych elementów. Przedstawiona metoda skróci czas liczenia maszyny cyfrowej.

2. Wypisanie macierzy wyjściowych bez wykonywania bardzo czasochłonnnych mnożeń macierzy przez siebie daje olbrzymią oszczędność czasu przy konstrukcji równań różnicz-

kowych. Ponadto metoda stwarza możliwość łatwej kontroli w celu uniknięcia błędu przy wypisywaniu równań. Łatwo przecież skontrolować nawet kilkanaście macierzy o prostych wyrazach, natomiast prawie niemożliwe jest, by znaleźć błąd w równaniu, które ma kilkaset członów.

#### Literatura cytowana w tekście

1. R. GUTOWSKI, *The asymptotic behaviour and properties of nonlinear system of the ordinary differential equations of a first order describing the motion of a mechanical system*, Arch. Mech. Stos., **23**, 1 (1971).
2. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
3. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, Mech. Teoret. Stos., **5**, 3 (1967).
4. J. MARYNIAK, M. LECH, A. NAŁĘCZ, *Identyfikacja dynamiczna pojazdów na pneumatykach*, Proceedings of the VIII-th Conference on Dynamics of Machines, Praha, Liblice 1973.
5. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Stateczność pojazdów jednośladowych na kołach pneumatycznych*, Mech. Teoret. Stos., **12**, 4 (1974).
6. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu i oscylacje steru*, Mech. Teoret. Stos., **13**, 2 (1975).
7. R. S. SHARP, *Stability and control of motorcycles*, Mech. Engin. Sci., **13**, 5 (1971).

#### Резюме

#### МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫХ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

В работе рассматривается степень осложнений, выступающих во время конструирования нелинейных уравнений движения механической системы, имеющей большое количество степеней свободы и сложную геометрию движения.

Исследована группа жестких или упругих тел с конечным числом степеней свободы, соединенных при помощи шарниров. Для такой совокупности тел введена матричная форма неголономных уравнений Больцмана-Гамеля. Доказано, что систему дифференциальных уравнений в матричной записи можно привести к нормальному виду. Как частные случаи рассмотрены голономическая система в квазискоростях и голономическая система, для которой возможна запись при помощи уравнения Лагранжа.

Описан метод линеаризации матричной системы уравнений. Показана возможность применения матричной системы дифференциальных уравнений для численного интегрирования.

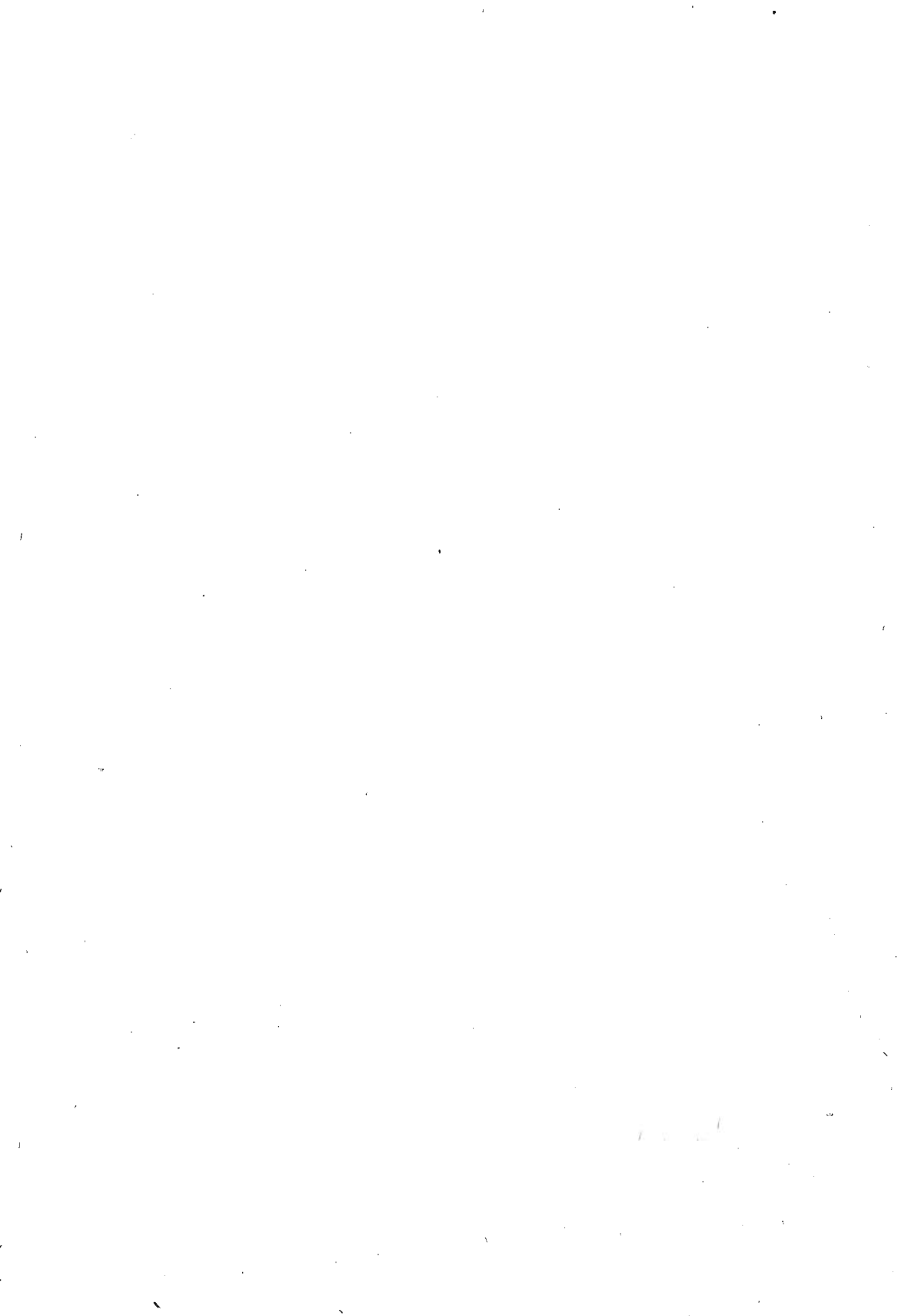
#### Summary

#### MATRIX REPRESENTATION OF A NON-LINEAR EQUATIONS OF MOTION DERIVED BY THE APPLICATION OF LAGRANGE'S FORMALISM

The matrix form useful for the numerical calculations of the nonlinear equations of motion for a non-holonomic system of finite number of degrees of freedom is derived by the application of the Boltzmann-Hamel method and written in quasi-velocities and generalized co-ordinates. Advantages of the matrix description and of the method of linearization of the equation in the matrix form are shown. In particular, the case of a holonomic system is discussed in detail.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 listopada 1975 r.





# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE

### Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA III I IV KWARTAŁ 1975 R.

#### 1. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyło się 20 zebrań naukowych, na których wygłoszono 35 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
1	2	3	4	5	6
<b>Oddział w Bydgoszczy</b>					
1.	09.12.75	E. Lubieniecki	Wstępnie sprzężone dźwigary skrzynkowe ze stopu aluminium	18	4
2.	09.12.75	A. Pęk	Analiza matematyczna pracy statycznej	18	4
3.	09.12.75	A. Matysiak	Współpraca ciągłych belek podsuwnicowych ze szkieletem wybranych typów jednotarczowych hal przemysłowych	18	7
<b>Oddział w Częstochowie</b>					
4.	27.09.75	J. Szafran	Podstawy i zastosowanie holografii	15	5
5.	05.12.75	J. Kramer	Plany rozwojowe sieci komunikacyjnej miasta Częstochowy w najbliższym 10-leciu	35	10
6.	11.12.75	E. Żmichorski	Ścieralność nowoczesnych stali szybkołnących w stanie ich optymalnego ulepszenia cieplnego	20	5
<b>Oddział w Gliwicach</b>					
7.	05.09.75	A. A. Iljuszyn (ZSRR)	Metody aproksymacyjne lepko-sprężystości		
8.	05.09.75	G. S. Szapiro (ZSRR)	Dynamiczne problemy plastyczności		
9.	05.09.75	W. A. Łomakin (ZSRR)	Problemy niezawodności konstrukcji		

1	2	3	4	5	6
10.	05.09.75	J. W. Niemirowski (ZSRR)	Zagadnienie realizacji stanów błonowych w powłokach jako problem optymalnego projektowania	33	7
11.	08.09.75	G. S. Sih (USA)	Zastosowanie mechaniki pęknięcia w problemach inżynierskich		
12.	08.09.75	S. Hjalmar (Szwecja)	Analiza teoretyczna oddziaływań w stawach kolanowych pod wpływem uderzenia		
13.	08.09.75	J. Miklowitz (USA)	Propagacja fal w ośrodku sprężystym		
14.	08.09.75	J. Carlsson (Szwecja)	Nowe kierunki w mechanice pęknięcia	20	3
15.	13.12.75	J. Adamczyk	Badanie liczb tarcia rozdrobnionego drewna po laminacie epoksydowo-szklanym		
16.	13.12.75	W. Cholewa	Metody częstotliwościowej analizy efektu akustycznego i drgań dla oceny stanu maszyn		
17.	13.12.75	H. Knapczyk	Wpływ cech konstrukcyjnych zderzaków suwnicowych na stan wyężenia tworzywa ustrojów mostów suwnic przy zderzeniu		
18.	13.12.75	K. Oskędra	Powierzchnia odkształconej blony jako podstawa projektowania narzędzi do przeróbki plastycznej		
19.	13.12.75	K. Wyleżych	Lepkosprężyste charakterystyki gumy jako tworzywa i gumowo-metalowego łącznika sprężystego typu silentblock jako postaci konstrukcyjnej przy odkształceniach ścinających		
20.	13.12.75	A. Dragon i A. Różycki	Analiza podobieństwa dynamicznego i modelowanie własności mechanizmu wibroizolacyjnego		
21.	13.12.75	St. Ochelski	Metoda opisu pełzania materiałów anizotropowych w płaskim stanie naprężenia przy obciążeniach wielostopniowych		
22.	13.12.75	A. Tarnogrodzki	Poddźwiękowy i naddźwiękowy przepływ powietrza w przewodzie	35	11
<b>Oddział w Krakowie</b>					
23.	15.09.75	C. R. Calladine (Cambridge-Univ., W. Bryt.)	Plastic analysis of shell structures	13	4
24.	29.10.75	Ülo Lepik (Tartu, Estońska SRR)	Zastosowanie metod sterowania optymalnego do rozwiązywania problemów mechaniki ciał odkształcalnych	14	5

1	2	3	4	5	6
25.	02.12.75	Tatsuo Inone (Kyoto Univers. — Japonia)	O dużych odkształceniach płyt sprężysto-plastycznych	38	4
<b>Oddział w Łodzi</b>					
26.	03.10.75	R. Gasch	Problems in rotordynamics	28	5
27.	30.10.75	W. Barański	O prawach bilansu mechaniki ośrodka ciągłego	11	10
<b>Oddział w Poznaniu</b>					
28.	01.07.75	G. Lallement	Model synthesis of linear mechanical systems	19	6
29.	15.09.75	I. N. Sneddon	Melín transforms and its applications	37	5
30.	08.12.75	Z. Kączkowski	O czasoprzestrzennych elementach skończonych	31	7
<b>Oddział w Szczecinie</b>					
31.	23.10.75	Helmut Pfau (WSI w Wismarze)	Zastosowanie metody różnic skończonych do rozwiązywania problemów dynamicznych płyt i powłok	16	5
32.	13.11.75	Z. Kączkowski	Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych	37	7
33.	12.12.75	J. Filipkowski (WSI w Koszalinie)	Analiza statyczna konstrukcji wiszącej przy użyciu maszyny cyfrowej	17	4
<b>Oddział w Warszawie</b>					
34.	01.12.75	J. Dowkontt	O istocie ciepła	17	1
<b>Oddział we Wrocławiu</b>					
35.	18.12.75	M. Kulisiewicz	Identyfikacja własności dynamicznych konstrukcji	8	8

## 2. Sympozja

Oddział w Gdańsku zorganizował wspólnie z Komitetem Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN Zespołem Mechaniki Komputerowej Komitetu Mechaniki i Fizyki Ciała Stałego PAN oraz Politechniką Gdańską II Konferencję na temat «Metody komputerowe w mechanice konstrukcji». Konferencja odbyła się w dniach 24—26 listopada 1975 r. W obradach wzięło udział ponad 170 przedstawicieli wyższych uczelni technicznych, placówek PAN oraz biur projektowych z całego kraju. Podczas obrad wygłoszono ogółem 82 referaty.

Oddział we Wrocławiu zorganizował IV Sympozjon poświęcony reologii. Sympozjon odbył się w dniach 21 i 22 listopada 1975 r. z udziałem 70 osób. Podczas obrad wygłoszono 32 referaty, w dyskusji uczestniczyło 11 osób.

## 3. Konkursy

Oddział w Gliwicach przeprowadził ogólnokrajowy konkurs naukowy na prace doświadczalne z mechaniki. Zgłoszono ogółem 11 prac, z których 5 nagrodzono i 2 wyróżniono.

Oddział w Łodzi przeprowadził konkurs na prace teoretyczne z dziedziny mechaniki teoretycznej i stosowanej. Nagrodzono 5 prac.

#### 4. Kursy

Oddział w Częstochowie przeprowadził w okresie od października do grudnia 1975 r. 20-godzinny cykl wykładów prof. dr Zbigniewa WESOŁOWSKIEGO (z IPPT PAN) na temat «Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych». Wykłady poprzedzone zostały wstępem do rachunku tensorowego prowadzonym przez dra inż. R. PARKITNEGO i dra inż. L. TOMSKIEGO. Liczba uczestników wyniosła 18 osób, przeciętna liczba dyskutantów — 5.

#### 5. Działalność wydawnicza

W okresie sprawozdawczym ukazał się zeszyt 3 o objętości 15,5 arkusza wydawniczego i zeszyt 4 o objętości 5,5 arkusza wydawniczego tomu 13 MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ.

Oddział w Częstochowie wydał sprawozdanie z działalności Oddziału za lata 1969—1975. Ponadto Oddział w Częstochowie oddał do druku skrypt opracowany przez dra KRZYWCA nt. «O wielociągowym opisie systemów wielkich».

Oddział w Gdańsku wydał streszczenia referatów II Konferencji nt. «Metody komputerowe w mechanice konstrukcji».

Oddział we Wrocławiu wydał pełne teksty referatów oraz ich streszczenia w językach obcych na VI Sympozjon poświęcony reologii.

#### 6. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje następująca tablica:

Lp.	Oddział	Stan na koniec II kw. 1975	Stan na koniec IV kw. 1975	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym
1.	Bydgoszcz	22	24	+2
2.	Częstochowa	43	41	-2
3.	Gdańsk	53	54	+1
4.	Gliwice	133	145	+12
5.	Kraków	76	75	-1
6.	Łódź	48	50	+2
7.	Poznań	58	66	+8
8.	Rzeszów	20	20	—
9.	Szczecin	32	31	-1
10.	Warszawa	224	222	-2
11.	Wrocław	63	64	+1
	Razem	772	792	+20

W okresie sprawozdawczym odbyło się plenarne zebranie Zarządu Głównego oraz 30 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

**W Y N I K I**  
**OGÓLNOKRAJOWYCH KONKURSÓW NAUKOWYCH**  
**NA PRACĘ Z DZIEDZINY MECHANIKI**

1. Oddział w Gliwicach przeprowadził ogólnokrajowy konkurs naukowy na prace doświadczalne z mechaniki. Zgłoszono ogółem 11 prac, do konkursu dopuszczono — 9. Wyniki konkursu były następujące:

Pierwszą nagrodę w wysokości zł 10 000 otrzymał dr inż. Kazimierz OSKĘDRA (z Gliwic) za pracę pt. *Powierzchnia odkształconej blony jako podstawa projektowania narzędzi do przeróbki plastycznej.*

Dwie równorzędne drugie nagrody po zł 6 000 każda otrzymali: dr inż. Wojciech CHOLEWA (z Gliwic) za pracę pt. *Metody częstotliwościowej analizy efektu akustycznego i drgań dla oceny stanu maszyn* oraz dr inż. Stanisław OCHELSKI (z Warszawy) za pracę pt. *Metoda opisu pelzania materiałów anizotropowych w płaskim stanie naprężenia przy obciążeniach wielostopniowych.*

Dwie równorzędne trzecie nagrody po zł 4 000 każda otrzymali: dr inż. Karol WYLEŻYCH (z Gliwic) za pracę pt. *Lepkosprężyste charakterystyki gumy jako tworzywa z gumowo-metalowego łącznika sprężystego typu silentblock jako postaci konstrukcyjnej przy odkształceniach ścinających* oraz dr inż. Antoni TARNOGRODZKI za pracę pt. *Poddźwiękowy i naddźwiękowy przepływ powietrza w przewodzie.*

Ponadto wyróżniono dwie prace bez uhonorowania finansowego: dr inż. Jana ADAMCZYKA (z Gliwic) pt. *Badanie liczb tarcia rozdrobnionego drewna po laminacie epoksydowo-szklanym* oraz mgr inż. Andrzeja DRAGONA i mgr inż. Andrzeja RÓŻYCKIEGO (z Warszawy) pt. *Analiza podobieństwa dynamicznego i modelowanie własności mechanizmu wibroizolacyjnego.*

2. Oddział w Łodzi przeprowadził ogólnokrajowy konkurs naukowy na najlepszą pracę z dziedziny mechaniki teoretycznej i stosowanej z wyłączeniem prac natury czysto doświadczalnej.

Postanowiono nie przyznawać nagrody pierwszej.

Drugą nagrodę w wysokości zł 8 000 otrzymał dr Wiesław KUFEL za pracę pt. *Modele warstwowe grubych płyt i powłok.*

Trzy równorzędne nagrody trzecie w wysokości zł 6 000 każda otrzymali: dr inż. Maciej KULISIEWICZ za pracę pt. *Metody identyfikacji własności dynamicznych konstrukcji mechanicznych w oparciu o niesymetryczny model Duffinga*, dr inż. Jerzy STELMARCZYK za pracę pt. *Obliczenie charakterystyki dynamicznej konstrukcji płytowo-sprężynowej za pomocą sztywnych elementów skończonych* oraz mgr inż. Andrzej STRZELCZYK i mgr Stanisław WOJCIECH za pracę pt. *Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności ortotropowej płyty pierścieniowej.*

Czwartą nagrodę w wysokości zł 4 000 otrzymał dr Joachim OTTE za pracę pt. *Zagadnienie analizy przepływu płynu nieściśliwego w układach łopatkowych i osiowych maszyn wirnikowych.*

**K O M U N I K A T**

**O KONKURSACH NAUKOWYCH PTMTS W ROKU 1976**

1. Poznański Oddział PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS ogłasza ogólnokrajowy konkurs na prace teoretyczne z mechaniki.

Prace konkursowe należy przysyłać do sekretariatu Oddziału Poznańskiego PTMTS, ul. Piotrowo 3, pok. 509 (Instytut Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej), 61-138 Poznań, w terminie do dnia 15 października 1976 r.

2. Częstochowski Oddział PTMTS ogłasza ogólnokrajowy konkurs na prace z zakresu badań doświadczalnych z mechaniki technicznej.

Prace konkursowe należy przysyłać do sekretariatu Oddziału, Aleja Zawadzkiego 21 (Instytut Obróbki Plastycznej i Spawalnictwa), 42-200 Częstochowa, w terminie do dnia 31 października 1976 r.

Bliższych informacji udzielają organizatorzy.

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- T. HUESKEL, O opisie fizycznie nieliniowej sprężystości materiałów sypkich  
К вопросу об описании физически нелинейной упругости сыпучих материалов  
On the description of non-linear elasticity of granular media
- Z. MALINOWSKI, O pewnej metodzie analizy wpływu tarcia w procesie plastycznego ściskania próbki walcowej  
О некотором методе анализа влияния трения в процессе пластического сжатия цилиндрического образца  
On a method of friction analysis in plastically compressed cylindrical specimen
- J. NIZIOŁ, N. KONDRACIUK, Przykład badania dokładności liniowego układu dynamicznego w przypadku niestacjonarnym  
Исследование точности линейной динамической системы в нестационарном случае  
Example of investigating the accuracy of a linear dynamic system in a nonstationary case
- J. KOLENDA, Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych  
Нелинейные колебания амортизированных поршневых двигателей при широкополосных стохастических возмущениях  
Nonlinear vibrations of elastically mounted piston engines at wide-band stochastic excitations
- S. BIELAK, Statyka powłoki walcowej zamkniętej pracującej w stanie zgięciowym  
Статический расчет замкнутой цилиндрической оболочки при работе на изгиб  
Statics of a closed cylindrical shell in the moment state
- J. NIZIOŁ, A. PIENIAŻEK, Drgania ciężna o dużym zwisie, w płaszczyźnie zwisu  
Колебания провода в плоскости свиса с учетом его жесткости на изгиб  
Vibrations of a large-sag cable in the sag-span plane
- E. WALICKI, Hydromagnetyczny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi  
Гидромагнитное течение вязкой жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения  
Hydromagnetic flow of viscous fluid between rotating surfaces of revolution
- A. TRZĘSOWSKI, Średnie naprężenie w stochastycznym ośrodku wieloskładnikowym  
Среднее напряжение в стохастически неоднородной среде  
Mean stress in a multi-component stochastic medium
- J. WRANIK, List do Redakcji  
Письмо в Редакцию  
Letter to the Editor

BIULETYN INFORMACYJNY

## SPIS TREŚCI

cd. ze s. II okładki

T. LISZKA, M. ŻYCZKOWSKI, Optymalne kształtowanie nierównomiernie nagranych tarcz wirujących z uwagi na poślisko sprężystą i graniczną Оптимальное формирование неравномерно нагретых вращающихся дисков по упругому и пластическому предельным состоянием The optimal design of nonuniformly heated rotating discs with respect to their elastic and limit carrying capacity	283
A. MUSZYŃSKA, Niektóre problemy modelowania układów mechanicznych Некоторые вопросы моделирования механических систем Certain problems of modelling of mechanical systems	303
Z. GORAJ, Macierzowy zapis nieliniowych równań ruchu generowanych formalizmem Lagrange'a Матричная запись нелинейных уравнений движения, порождаемых методом Лагранжа Matrix representation of non-linear equations of motion derived by the application of Lagrange's formalism	315
BIULETYN INFORMACYJNY	327

Warunki prenumeraty

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

— do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i na cały rok następny,

— do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

Indeks 36523

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)*

---