

JII 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 14 · ZESZYT 1

WARSZAWA 1976

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

| | |
|--|-----|
| <p>A. SAWICKI, Z zagadnień hydrosprężystości płyt Некоторые вопросы гидроупругости плит Certain problems of hydroelasticity of plates</p> | 3 |
| <p>W. KUFEL, Sterowana dyskretyzacja płyt i powłok Управляемая дискретизация пластин и оболочек Controlled discretization of plates and shells</p> | 19 |
| <p>R. GRYBÓŚ, Wyboczenie uderzeniowe pręta o dużej smukłości Ударное выпучивание стержня с большой гибкостью Impact buckling of a slender rod</p> | 33 |
| <p>M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYŹYŃ, Dynamika płaskiej wiązki przewodów przy prądach zwarciovych Динамика плоской системы электропроводов при токах короткого замыкания Dynamics of a plane group of conductors under short-circuit current</p> | 45 |
| <p>J. MARYNIAK, M. ZŁOCKA, Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł i sprężystości układu sterowania Боковая устойчивость самолета и колебания элеронов при изгибающей деформации крыльев при наличии упругости в системе управления Lateral stability of a plane and aileron vibrations, flexibility of wings of elasticity of control system being taken into consideration</p> | 63 |
| <p>W. MIERZEJEWSKI, Rozwiązywanie problemów dynamiki płyt prostokątnych na podstawie zmodyfikowanej metody sił Nowackiego Решение задач динамики прямоугольных пластин на основе модифицированного метода Новацкого Solution of the vibration problem of rectangular plates based on a modification of Nowacki's method</p> | 83 |
| <p>W. KOSIŃSKI, Analiza jednowymiarowych fal uderzeniowych i przyspieszenia w ośrodku niesprężystym Анализ одномерных ударных волн и волн ускорения в неупругой среде Analysis of one-dimensional shock and acceleration waves in inelastic medium</p> | 95 |
| <p>B. BIENIASZ, Wpływ zastosowania kondensacji kroplowej w pojedynczym termosyfonie dwufazowym na współczynnik przenikania ciepła przez ściankę skraplacza Влияние применения каплевидной конденсации в одинарном двухфазовом термосифоне на коэффициент теплопроводности стенки конденсатора The effect of application of dropwise condensation in a single two-phase thermosiphon on the heat transfer coefficient across the condenser wall</p> | 127 |
| <p>A. PIENIAŻEK, W. PIENIAŻEK, O pewnej nowej metodzie analizy stateczności rozwiązanych układów nieliniowych o jednym stopniu swobody О некотором новом методе анализа устойчивости решений нелинейных систем с одной степенью свободы On a certain new method of analyzing the stability of solutions for nonlinear systems with one degree of freedom</p> | 137 |

cd. na s. III okładki

gł 720



P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 4 · Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1 9 7 6

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY, WŁADYŚŁAW **BOGUSZ**, IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT, JÓZEF WIECKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 680 (570+110) egz. Arkuszy wydawn. 14,5. Arkuszy drukarskich 12+0,25 luź. wkł. Papier druk. sat. III kl. 70 g. 70×100. Oddano do składania 5.XI.1975 r. Druk ukończono w marcu 1976 r. Zam. 1430/75. J-105. Cena zł 30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Z ZAGADNIEŃ HYDROSPRĘŻYSTOŚCI PŁYT

ANDRZEJ S A W I C K I (GDAŃSK)

1. Wstęp

Zagadnienia teorii drgań układów sprężystych kontaktujących się z układami ciekłymi są przedmiotem badań hydrosprężystości. J. WIĘCKOWSKI podaje następujące określenie: „Przez zagadnienia hydrosprężystości rozumiemy problemy pograniczne mechaniki cieczy i mechaniki ciał odkształcalnych. Odróżniamy je zwykle od problemów aerosprężystości obecnością powierzchni swobodnej i założeniem przemiany izotermicznej” [10]. Hydrosprężystość jest dyscypliną stosunkowo młodą, podczas gdy aerosprężystość posiada swoje tradycje i doczekała się szeregu opracowań monograficznych, np. [2]. Metody stosowane w aerosprężystości mogą być przeniesione na teren hydrosprężystości, co szczególnie dotyczy zagadnień falowych w ośrodkach ściśliwych, jednakże występują pewne osobliwe cechy, które powodują konieczność rozgraniczenia tych dwóch dyscyplin. Hydrosprężystość wyróżniają niskie prędkości, wysoka gęstość i mała ściśliwość ośrodka ciekłego. Wobec powyższego duże znaczenie posiadają tutaj zagadnienia wyznaczenia mas towarzyszących cieczy oraz rozwiązanie problemów drgań swobodnych i wymuszonych ciała sprężystego będącego w kontakcie z cieczą. Kryterium klasyfikacji zagadnienia jako zadania hydrosprężystości stanowi występowanie dodatkowych sił hydrodynamicznych spowodowanych przez sprężyste deformacje konstrukcji. Mamy więc do czynienia z trzema rodzajami sił: sprężystości, hydrodynamicznymi i bezwładności.

Z punktu widzenia teorii możemy wyodrębnić dwie grupy zagadnień hydrosprężystości. Stanowią je zagadnienia niesprężone i sprężone. Zagadnienia niesprężone można sprowadzić do zagadnień hydrodynamiki przez założenie na powierzchni zwilżenia określonego rozkładu prędkości tak, że ruch układu sprężystego stanowi warunek brzegowy dla zagadnienia hydrodynamiki. Przykłady zagadnień tego typu przedstawiono w pracy [9]. Zagadnienie sprężone charakteryzuje się wzajemnym oddziaływaniem na siebie obu ośrodków poprzez warunki brzegowe na powierzchni kontaktu. Na uwagę zasługują tutaj zagadnienia drgań płyt i powłok sprężonych z cieczą.

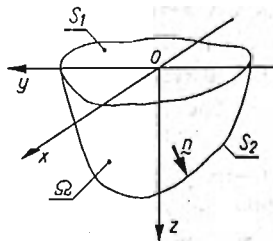
Hydrosprężystość powłok jest przedmiotem stosunkowo dużej ilości publikacji (praca przeglądowa [17]), a nawet monografii [15, 16]. Zagadnienia hydrosprężystości płyt nie posiadają tak bogatej literatury jak hydrosprężystość powłok. Z punktu widzenia zastosowań wyróżnić można prace dotyczące mechaniki kry lodowej [3], dynamiki przekryć zbiorników na cieczy [8, 13], drgań poszycia okrętów [4], drgań przegród hydrotechnicznych i fragmentów konstrukcji portowych [11, 14, 18] itp. Oprócz prac o charakterze stosowanym istnieje niewielka liczba prac podstawowych, przykładowo wymienimy prace

AFANASJEWA [12] i SOLECKIEGO [5, 6], który podał rozwiązanie zagadnienia początkowego rozchodzenia się fal w płycie pływającej na półprzestrzeni wypełnionej cieczą ściśliwą, przy działaniu impulsu punktowego i impulsu rozłożonego na prostej.

W niniejszym opracowaniu zajmiemy się sprzężonymi drganiami układu: płyta-ciecz, w ramach liniowej teorii sprężystości i liniowej teorii falowania cieczy idealnej, zachodzącego pod wpływem sił ciężkości. Płyta spoczywa na swobodnej powierzchni cieczy, która wypełnia pewien obszar przestrzeni ograniczony sztywną powierzchnią. Badany model obejmuje pewną klasę zadań hydrosprężystości płyt, którym w naturze mogą odpowiadać sztuczne lub naturalne zbiorniki wypełnione cieczą, na powierzchni której spoczywa elastyczna płyta. Przedstawiono ogólną metodę rozwiązania zagadnienia przy wykorzystaniu funkcji własnych swobodnego falowania cieczy. Metodę zilustrowano analizą dynamiczną pasma płytowego sprzężonego z cieczą. Otrzymane wyniki nie były dotychczas znane, chociaż przedstawiona metoda znalazła zastosowanie w pracach autora [7, 8], przy rozwiązaniu zagadnienia drgań dachów pływających.

2. Równania zagadnienia i metoda rozwiązania

Niech ciecz idealna wypełnia obszar Ω trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa ograniczony zamkniętą powierzchnią S . Założymy, że ciecz znajduje się w potencjalnym polu sił ciężkości i posiada swobodną powierzchnię, na której spoczywa płyta S_1 , ograniczająca obszar Ω od góry. Dodatkowo przyjmiemy, że powierzchnia kontaktu jest stale zwilżona. Pozostała część obszaru Ω ograniczona jest nieruchomą i nieodkształcalną powierzchnią S_2 . Tak więc $S = S_1 + S_2$. Załóżmy ortokartezjański układ współrzędnych x, y, z taki, że powierzchnia S_1 leży w płaszczyźnie $z = 0$, oś z skierowana jest pionowo w dół (rys. 1). Zbadajmy dynamikę przedstawionego układu.



Rys. 1. Układ współrzędnych

Równanie ciągłości dla płynu nieściśliwego ma postać

$$(2.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

co oznacza niezmiennosc objętości i jest konsekwencją zasady zachowania masy. \mathbf{V} jest wektorem prędkości cząsteczek cieczy. W przypadku ruchu bezwirowego, gdy istnieje potencjał prędkości Φ spełniający zależność

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad} \Phi,$$

równanie ciągłości przybiera postać

$$(2.2) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0.$$

Potencjał prędkości Φ powinien spełniać na powierzchni S warunki brzegowe o postaci:

$$(2.3) \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t},$$

gdzie przez w oznaczono pionowe ugięcie płyty. Pierwszy warunek oznacza, że nie istnieje prędkość normalna do powierzchni S_2 , drugi warunek oznacza zgodność prędkości przemieszczeń przylegających do siebie cząsteczek płyty i cieczy. Ugięcie w powinno spełniać równanie ruchu

$$(2.4) \quad D\nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = -P + Q,$$

z odpowiednimi warunkami brzegowymi dla płyty. P oznacza parcie cieczy na płytę, Q jest wzbudzeniem zewnętrznym. Parcie cieczy na płytę przyjmijmy z całki Cauchy-Lagrange'a będącej jednym z rozwiązań równań ruchu Eulera

$$(2.5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 - gz + \frac{1}{\gamma} p = F(t),$$

gdzie g oznacza przyspieszenie grawitacyjne, γ — gęstość cieczy, p — ciśnienie, $F(t)$ — dowolną funkcję czasu, którą określa się z warunków początkowych zagadnienia (dla drgań ustalonych przyjmijmy $F = 0$). Dla małych prędkości oscylacji cieczy możemy w wyrażeniu (2.5) pominąć wielkość $V^2/2$ i wówczas, podstawiając $z = w$, otrzymamy ciśnienie na powierzchni kontaktu

$$(2.6) \quad P = -\gamma \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} - gw \right].$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie operować, zamiast potencjałem prędkości Φ , potencjałem przemieszczeń χ określonym zależnością

$$(2.7) \quad \Phi = -\frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Funkcja χ jest funkcją harmoniczną

$$(2.8) \quad \nabla^2 \chi = 0$$

oraz powinna spełniać następujące warunki brzegowe:

$$(2.9) \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{z=0} = -w.$$

Drugi z warunków (2.9) jest równaniem sprzężenia drgań. Ostatecznie parcie cieczy na płytę określimy wzorem

$$(2.10) \quad P = \gamma \left[\frac{\partial^2 \chi(x, y, z = 0; t)}{\partial t^2} + gw \right].$$

Równania (2.8), (2.9), (2.10) i (2.4) wraz z warunkami brzegowymi dla płyty opisują badane zagadnienie.

Metoda rozwiązania zagadnienia zakłada znajomość funkcji własnych φ_{mn} opisujących swobodne falowanie cieczy wypełniającej obszar ograniczony powierzchnią S_2 . Dla obszarów geometrycznie prostych, które można opisać znanymi układami współrzędnych, funkcje φ_{mn} dają wyznaczyć się w sposób stosunkowo nieskomplikowany. Funkcje te spełniają równanie (2.2) i pierwszy z warunków brzegowych (2.3). Potencjał χ przedstawimy w postaci szeregu według układu funkcji własnych φ_{mn}

$$(2.11) \quad \chi = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \varphi_{mn},$$

wówczas spełni on równanie (2.8) i pierwszy z warunków brzegowych (2.9). Drugi warunek brzegowy posłuży nam do wyznaczenia współczynników B_{mn} , po wyznaczeniu całek równania (2.4).

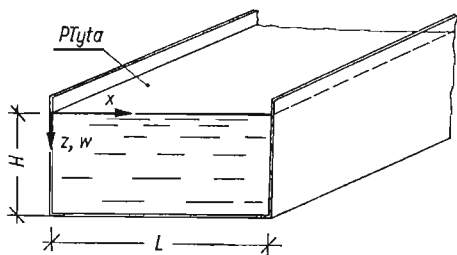
3. Drgania własne pasma płytowego

Rozpatrzmy przypadek drgań własnych pasma płytowego sprzężonego z cieczą idealną wypełniającą zbiornik o przekroju prostokątnym (rys. 2). Jest to zadanie płaskie, opisane równaniem

$$(3.1) \quad D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \ddot{w} = -\gamma \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + g w \right].$$

Dla drgań harmonicznymy przyjmujemy

$$(3.2) \quad w = e^{i\omega t} v(x).$$



Rys. 2. Pasma płytowe sprzężone z cieczą

Równanie (2.8) i pierwszy z warunków brzegowych (2.9) spełnione są przez funkcję o postaci

$$(3.3) \quad \chi = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} (z-H) \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

Drugi z warunków brzegowych (2.9) jest równaniem sprzężenia drgań

$$(3.4) \quad w = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

Wykorzystując zależność (3.2) - (3.4) równanie ruchu (3.1) zapiszemy w postaci

$$(3.5) \quad D \frac{d^4 v}{dx^4} - \rho h \omega^2 v = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\omega^2 \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) - g \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right] \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

Dla płyty nieograniczonej przyjmiemy całkę szczególną w postaci wynikającej z potencjału przemieszczeń. Przyrównując do siebie dwa szeregi Fouriera otrzymujemy

$$(3.6) \quad B_n \left\{ \left[D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \gamma g \right] \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) - \omega^2 \left[\rho h \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) + \gamma \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right] \right\} = 0.$$

Istnieją tutaj dwie możliwości: albo $B_n = 0$, co oznacza, że nie ma drgań tej postaci, lub też wyrażenie w nawiasie jest równe zero, skąd otrzymujemy bezpośrednio wzór na częstotliwość

$$(3.7) \quad \omega^2 = \frac{D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \gamma g}{\rho h + \frac{\gamma L}{n\pi} \operatorname{cth} \left(\frac{n\pi}{L} H \right)}.$$

W liczniku wyrażenia (3.7) występują składniki charakteryzujące sprężystość układu płyta-ciecz: $D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4$ pochodzi od płyty, γg przedstawia sobą ciężar właściwy cieczy, który można porównać do modułu podatności podłoża winklerowskiego (gdyż skłanik $\gamma g w$, występujący po prawej stronie równania ruchu przedstawia wypór cieczy na jednostkę powierzchni płyty). Wyrażenia w mianowniku oznaczają masę: ρh jest masą płyty na jednostkę powierzchni, drugi zaś składnik jest masą towarzyszącą cieczy. Do przypadku płyty nieograniczonej powrócimy przy dyskusji całek równania ruchu.

Dla płyty o skończonej szerokości zadanie komplikuje się. Rozwiązanie równania (3.5) można przedstawić jako sumę całki ogólnej równania jednorodnego oraz całki szczególnej równania niejednorodnego

$$(3.8) \quad v = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x + C_3 \operatorname{sh} \kappa x + C_4 \operatorname{ch} \kappa x + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) - g \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right)}{D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2} B_n \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right),$$

gdzie

$$\kappa^4 = \rho h \omega^2 / D.$$

Założmy, że $D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 \neq 0$. Ponieważ płyta spoczywa na nieściśliwej cieczy, średnie ugięcie musi być równe zero

$$(3.9) \quad \int_0^L v dx = 0.$$

Warunek ten spełnia całka szczególna, również i całka ogólna musi go spełnić co oznacza, że jeżeli rozwiemy ją w szereg cosinusowy to wyraz stały będzie równy zeru. Rozwijając funkcje argumentu κx występujące w zależności (3.8) w szereg, według układu funkcji $\cos \frac{n\pi}{L} x$, otrzymujemy wyrażenie na amplitudę ugięcia v w postaci pojedynczego szeregu Fouriera. Ugięcie to musi być równe wychyleniu powierzchni cieczy, określonego równaniem (3.4). Przyrównując te szeregi do siebie otrzymuje się wyrażenie na współczynniki B_n w postaci:

$$(3.10) \quad B_n = -S_n \left[C_1(2 - \cos \kappa L \cos n\pi) \left(\kappa^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + C_2(\sin \kappa L \cos n\pi) \left(\kappa^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + C_3(\operatorname{ch} \kappa L \cos n\pi - 1) \left(\kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + C_4(\operatorname{sh} \kappa L \cos n\pi) \left(\kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) \right],$$

$$S_n = \frac{2\kappa D}{L \left[\left(D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \gamma g \right) \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) - \omega^2 \left(\rho h \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) + \gamma \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right) \right]}.$$

Podstawiając (3.10) do (3.4) otrzymujemy ostatecznie:

$$(3.11) \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \left[C_1(2 - \cos \kappa L \cos n\pi) \left(\kappa^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + C_2(\sin \kappa L \cos n\pi) \left(\kappa^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + C_3(\operatorname{ch} \kappa L \cos n\pi - 1) \left(\kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + C_4(\operatorname{sh} \kappa L \cos n\pi) \left(\kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) \right] \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

gdzie

$$(3.11a) \quad R_n = \frac{2\kappa D \left(\frac{n\pi}{L} \right) \operatorname{th} \left(\frac{n\pi}{L} H \right)}{L \left[\omega^2 \left(\gamma + \rho h \frac{n\pi}{L} \operatorname{th} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right) - \left(D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \gamma g \right) \frac{n\pi}{L} \operatorname{th} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right]}.$$

Mianownik w powyższym szeregu będzie równy zeru, jeżeli częstość układu będzie się równała częstości płyty nieograniczonej (3.7). Ugięcie płyty dane szeregiem (3.11)

spełnia równanie różniczkowe zagadnienia. Stałe C_i obliczamy z warunków brzegowych. Przykładowo, dla płyty zamocowanej w ściankach jest

$$(3.12) \quad w|_{x=0} = w|_{x=L} = \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0.$$

Zachodzi tutaj pytanie, czy wolno nam różniczkować szeregi. Majoranta szeregu (3.11) posiada wyrazy rzędu wielkości $1/n^2$, czyli szereg jest zbieżny. Po zróżniczkowaniu względem x otrzymujemy szereg o wyrazach rzędu $1/n$. Stąd wniosek, że szeregu (3.11) nie wolno różniczkować, gdyż w ogólności dostajemy szereg rozbieżny. Natomiast szereg występujący we wzorze (3.8) można różniczkować czterokrotnie, w wyniku otrzymując szereg zbieżny, gdyż współczynniki B_n są rzędu $1/n^3$, a wyrazy majoranty szeregu (3.8) są rzędu $1/n^6$. Równanie częstości własnych otrzymamy przyrównując do zera wyznacznik układu równań (3.12):

$$(3.13)$$

| | | |
|------------------|--|---|
| | $\Sigma R_n \left\{ (\operatorname{ch} \kappa L \cos n\pi - 1) \cdot \left(\kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) - (2 - \cos \kappa L) \cdot \cos n\pi \right\} \left(\kappa^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right)$ | $\Sigma R_n \operatorname{sh} \kappa L \cos n\pi \cdot \left(\kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right)$ |
| det | $\Sigma R_n \left\{ (\operatorname{ch} \kappa L \cos n\pi - 1) \cdot \left(\kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) - (2 - \cos \kappa L) \cdot \cos n\pi \right\} \cos n\pi$ | $\Sigma R_n \operatorname{sh} \kappa L \cos^2 n\pi \cdot \left(\kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right)$ |
| $-\sin \kappa L$ | $-\cos \kappa L + \operatorname{ch} \kappa L$ | $\operatorname{sh} \kappa L$ |

= 0.

Równanie (3.13) ma postać bardzo niedogodną do obliczeń, wobec czego w celu wyznaczenia równania częstości pójdziemy inną drogą. Całkę ogólną równania różniczkowego jednorodnego obliczymy bezpośrednio z postaci szeregu cosinusowego. Najprościej można to uczynić za pomocą skończonej transformacji całkowej Fouriera. Wykonajmy transformację cosinusową na równaniu (3.5)

$$(3.14) \quad \left(D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 \right) \frac{L}{2} A_n + D \left[v'''(L) (-1)^n - v'''(0) - v'(L) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 (-1)^n + v'(0) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] = \frac{L}{2} \gamma B_n \left[\omega^2 \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) - g \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right],$$

gdzie

$$A_n = \int_0^L v(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Zgodnie z wyrażeniem (3.4) jest

$$(3.15) \quad A_n = B_n \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right)$$

i współczynniki B_n określone są wzorem

$$(3.16) \quad B_n = \frac{2D \left\{ v'''(O) - v'''(L)(-1)^n - v'(O) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + v'(L) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 (-1)^n \right\}}{L \left\{ \left[D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \gamma g \right] \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) - \omega^2 \left[\rho h \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) + \gamma \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right] \right\}}.$$

Porównajmy powyższą zależność z wyrażeniem (3.10). Rozpisując zależności wewnątrz nawiasu w wyrażeniu (3.10), grupując względem $(-1)^n$, $\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$, $\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 (-1)^n$ i porównując z wyrażeniem (3.16) otrzymujemy:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} v'''(O) &= \kappa^3 [C_3 - 2C_1], \\ v'''(L) &= \kappa^3 [-C_1 \cos \kappa L + C_2 \sin \kappa L + C_3 \operatorname{ch} \kappa L + C_4 \operatorname{sh} \kappa L], \\ v'(O) &= \kappa [C_3 + 2C_1], \\ v'(L) &= \kappa [C_1 \cos \kappa L - C_2 \sin \kappa L + C_3 \operatorname{ch} \kappa L + C_4 \operatorname{sh} \kappa L]. \end{aligned}$$

Tutaj wyrażenia typu $\cos \kappa L$, $\sin \kappa L$, ... są liczbami, C_i są dowolnymi stałymi. Również wyrażenia po lewej stronie znaku równości są liczbami. Tak więc zależności (3.17) opisują przejście od stałych C_i do stałych v''' , v' . Wynika stąd wniosek, że zależności (3.10) i (3.17) są identyczne. Jeżeli chcemy zbadać drgania płyty utwierdzonej w ściankach należy przyjąć

$$v'(O) = v'(L) = 0$$

i z zależności (3.4) i (3.17) otrzymamy funkcję ugięcia w postaci

$$(3.18) \quad v = -v'''(O) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\kappa} \cos \frac{n\pi}{L} x + v'''(L) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\kappa} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

Pozostałe dwa warunki brzegowe

$$v(O) = v(L) = 0$$

dają układ równań

$$(3.19) \quad \begin{aligned} v'''(O) \sum_{n=1}^{\infty} R_n - v'''(L) \sum_{n=1}^{\infty} R_n (-1)^n &= 0, \\ v'''(O) \sum_{n=1}^{\infty} R_n (-1)^n - v'''(L) \sum_{n=1}^{\infty} R_n &= 0, \end{aligned}$$

z którego otrzymujemy równanie częstości własnych

$$(3.20) \quad \sum_{n=1,3,5,\dots} R_n \cdot \sum_{n=2,4,6,\dots} R_n = 0.$$

Amplitudy drgań własnych określone są z dokładnością do stałej przez zależność

$$(3.21) \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} G_n (-1)^n \cos \frac{n\pi}{L} x - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} G_n (-1)^n}{\sum_{n=1}^{\infty} G_n} \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

$$G_n = \frac{1}{\omega^2 \left(\frac{\gamma g}{g \frac{n\pi}{L} \operatorname{th} \left(\frac{n\pi}{L} H \right)} + \rho h \right) - \left(D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \gamma g \right)}.$$

W przypadku płyty swobodnie podpartej o wiele wygodniej jest zastosować skończoną transformację sinusową. Wówczas otrzymujemy nieskończony układ równań na wyznaczenie współczynników B_n . Z wyznacznika tego układu dostaniemy równanie częstości własnych.

4. Drgania wymuszone

Zajmiemy się przypadkiem wymuszonych drgań stacjonarnych, przy założeniu, że wzbudzenie zewnętrzne przedstawić można w przedziale $\langle 0, L \rangle$ szeregiem cosinusowym

$$(4.1) \quad q = e^{i\vartheta t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

W podobnej postaci przedstawimy potencjał przemieszczeń χ oraz funkcję ugięcia w

$$(4.2) \quad \chi = e^{i\vartheta t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{L} (z-H) \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

$$(4.3) \quad w = e^{i\vartheta t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

gdzie ϑ oznacza częstość wzbudzenia. Szeregi (4.1) ÷ (4.3) sumujemy od wyrazu z indeksem $n = 1$, gdyż wyraz $n = 0$ odpowiada równomiernie rozłożonemu ciśnieniu, które jest całkowicie przejmowane przez ciecz, ze względu na jej nieściśliwość [8].

Równanie drgań wymuszonych ma postać

$$(4.4) \quad D \frac{d^4 v}{dx^4} - \rho h \vartheta^2 v = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\vartheta^2 \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) - g \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right] \cos \frac{n\pi}{L} x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

Po wykonaniu na równaniu (4.4) skończonej transformacji Fouriera oraz postępując w sposób podany w rozdziale 3 otrzymujemy, dla przypadku płyty utwardzonej, współczynniki B_n

$$(4.5) \quad B_n = \frac{\frac{2D}{L} [-v'''(L)(-1)^n + v'''(0)] - Q_n}{\left[D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \gamma g \right] \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) - \vartheta^2 \left[\gamma \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) + \varrho h \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right]}$$

oraz ugięcie płyty

$$(4.6) \quad w = e^{i\vartheta t} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2D}{L} [v'''(0) - v'''(L)(-1)^n] \right\} R_n^* \cos \frac{n\pi}{L} x - e^{i\vartheta t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n R_n^* \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

gdzie

$$R_n^* = \frac{1}{\left[D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \gamma g \right] - \vartheta^2 \left[\varrho h + \gamma \frac{L}{n\pi} \operatorname{cth} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \right]}$$

Wykorzystanie warunków brzegowych $v(0) = v(L) = 0$ daje układ równań na wyznaczenie stałych $v'''(0)$ i $v'''(L)$:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} v'''(0) \sum_{n=1}^{\infty} R_n^* - v'''(L) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n R_n^* &= \frac{L}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n R_n^*, \\ v'''(0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n R_n^* - v'''(L) \sum_{n=1}^{\infty} R_n^* &= \frac{L}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n R_n^* (-1)^n, \end{aligned}$$

skąd

$$(4.8) \quad \begin{aligned} v'''(0) &= \frac{L}{2D\bar{W}} \left[\sum_n Q_n R_n^* (-1)^n \sum_n (-1)^n R_n^* - \sum_n R_n^* \sum_n Q_n R_n^* \right], \\ v'''(L) &= \frac{L}{2D\bar{W}} \left[\sum_n R_n^* \sum_n Q_n R_n^* (-1)^n - \sum_n (-1)^n R_n^* \sum_n Q_n R_n^* \right], \\ \bar{W} &= \left[\sum_n (-1)^n R_n^* \right]^2 - \left[\sum_n R_n^* \right]^2. \end{aligned}$$

Mianownik w wyrażeniach (4.8) jest identyczny z lewą stroną równania częstości własnych (3.20), skąd wynika wniosek, że jeżeli częstość wymuszenia ϑ będzie równa jednej z częstości własnych wystąpi zjawisko rezonansu. Można wykazać, że dla tego przypadku amplitudy drgań będą z czasem narastały. W tym celu należy przyjąć

$$(4.9) \quad q = \sin \vartheta t \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

$$(4.10) \quad \chi = t \cos \vartheta t \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) \cos \frac{n\pi}{L} x$$

oraz zastosować znaną już procedurę postępowania. W wyniku otrzymuje się prawo narastania wychyleń w czasie

$$(4.11) \quad w = - \frac{t \cos \vartheta t}{2\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n \frac{n\pi}{L} \operatorname{th} \left(\frac{n\pi}{L} H \right)}{\varrho h \frac{n\pi}{L} \operatorname{th} \left(\frac{n\pi}{L} H \right) + \gamma} \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

5. Przykład

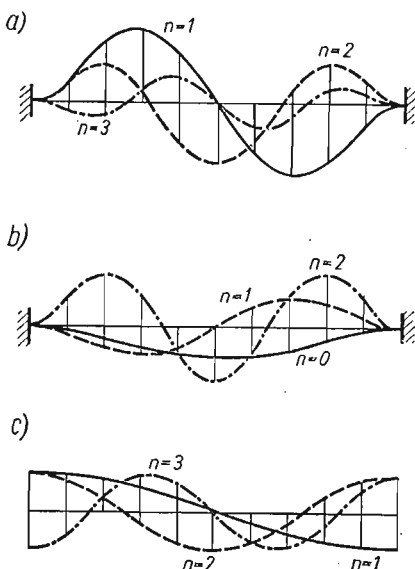
Jako ilustrację przedstawionej metody rozwiązania zagadnienia sprzężonych drgań układu płyta-ciecz podaje się wyniki obliczeń częstości drgań własnych dla następujących danych:

$$L = 2 \text{ m}, \quad h = 0,5 \text{ cm}, \quad H = 1/10 L, \quad 1/4L, \quad 1/2L, \quad L,$$

$$\varrho = 7,8 \text{ t/m}^3, \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \quad \gamma = 1 \text{ t/m}^3.$$

W tabelicy 1 przedstawiono pierwsze częstości drgań własnych pasma sprzężonego z cieczą, przy wykorzystaniu wzoru (3.20). W tabelicy 2 dla porównania przedstawiono częstości drgań własnych samej płyty obliczone według wzorów ścisłych i z równania (3.20), przy założeniu $\gamma = 0$. W tabelicy 3 podano częstości drgań własnych samej cieczy.

Na rys. 3 przedstawiono postacie drgań własnych odpowiednio dla układu sprzężonego, samej płyty i samej cieczy. Przykład służy jako weryfikacja metody rozwiązania zagadnienia



Rys. 3. Postacie drgań własnych: a) układ sprzężony, b) płyta bez cieczy, c) ciecz bez płyty

Tablica 1. Częstości drgań własnych ω_n [s⁻¹] pasma sprzężonego z cieczą. Górne liczby odpowiadają 6 wyrazom równania częstości, dolne 4 wyrazom szeregu

| $H/L \backslash n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|--------|--------|---------|---------|
| $\frac{1}{10}$ | 18,8 | 62,295 | 139,631 | 244,45 |
| | 19,736 | 65,35 | | |
| $\frac{1}{4}$ | 26,925 | 76,418 | 154,874 | 328,951 |
| | 27,532 | 79,235 | | |
| $\frac{1}{2}$ | 30,315 | 78,358 | 157,293 | 157,293 |
| | 31,225 | 81,414 | | |
| 1 | 31,346 | 78,358 | 157,293 | 331,699 |
| | 32,229 | 81,414 | | |

Tablica 2. Częstości drgań własnych płyty [s⁻¹]

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|--------|---------|---------|---------|---------|
| Obliczenie wg wzorów ścisłych | 41,388 | 114,287 | 223,687 | 369,729 | 552,341 |
| Obliczone ze wzoru (3.20) przy założeniu $\gamma = 0$ | | 107,768 | 208,208 | 381,87 | 557,689 |

Tablica 3. Częstości drgań własnych cieczy [s⁻¹]

| $H/L \backslash n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{1}{10}$ | 2,164 | 4,142 | 5,831 | 7,236 |
| $\frac{1}{4}$ | 3,178 | 5,315 | 6,736 | 7,833 |
| $\frac{1}{2}$ | 3,758 | 5,539 | 6,797 | 7,849 |
| 1 | 3,915 | 5,55 | 6,797 | 7,849 |

drgań płyty sprzężonej z cieczą. Na jego podstawie można wyciągnąć kilka ogólnych wniosków, które ponadto wynikają z analizy otrzymanych wyników ogólnych. Częstości drgań własnych układu sprzężonego są niższe od częstości drgań samej płyty, co można wytłumaczyć większą bezwładnością układu. W obliczeniach inżynierskich często stosuje się przybliżony sposób rozwiązania zagadnienia drgań układów sprzężonych przez wyznaczenie masy towarzyszącej cieczy [14, 18].

Postacie drgań własnych charakteryzują się występowaniem punktów węzłowych, których liczba jest równa numerowi kolejnej postaci drgań. Kształt funkcji własnych jest taki sam jak w przypadku samej płyty, przy czym ze względu na nieściśliwość cieczy nie występuje funkcja odpowiadająca $n = 0$. Ponadto, funkcje własne układu sprzężonego (rys. 3a) muszą spełniać warunek (3.9), co powoduje pewną deformację ich kształtu w stosunku do funkcji własnych płyty (rys. 3b). Poprawność otrzymanych wzorów można sprawdzić przez porównanie częstości własnych samej płyty, otrzymanych ze wzorów ścisłych i ze wzoru (3.20). Błąd przybliżenia, spowodowany uwzględnieniem 6 wyrazów szeregu, jest rzędu kilku procent.

6. Zakończenie

W pracy przedstawiono rozważania na temat sprzężonych drgań układu płyta–ciecz. W pierwszej kolejności otrzymano rozwiązanie dla płyty nieskończonej. Jeżeli założymy, że nie ma płyty ($D = \rho h = 0$) wówczas z zależności (3.7) otrzymamy częstość swobodnego falowania cieczy. Przy założeniu, że nie ma cieczy ($\gamma = 0$) otrzymujemy wzór na częstość

$$(6.1) \quad \omega^2 = \frac{D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4}{\rho h},$$

równoznaczny z zależnością $\kappa^4 = (n\pi/L)^4$. Dla tego przypadku rozwiązanie szczególne równania ruchu (3.5) można otrzymać metodą uzmienniania stałych, która jest jednak mało efektywna ze względu na całkowitą postać funkcji ugięcia i uniemożliwia interpretację fizyczną przypadku $\kappa = n\pi/L$. Badając płytę nieograniczoną otrzymujemy tę interpretację natychmiast, mianowicie przypadek $\kappa = n\pi/L$ oznacza, że płyta drga niezależnie od cieczy jedną z jej postaci własnych (nie ma sprzężenia drgań). W przypadku płyty o skończonej szerokości problem ten nie wystąpi ze względu na zaburzenia brzegowe. W przypadku, gdy w równości (3.7) pominiemy masę towarzyszącą cieczy otrzymamy częstość drgań własnych płyty na podłożu typu Winklera o module podatności γg .

W poszukiwaniu rozwiązania dla płyty o skończonej szerokości można pójść dwiema drogami. Sposób pierwszy polega na przedstawieniu rozwiązania w postaci liniowej kombinacji (3.8) niezależnych rozwiązań jednorodnego równania ruchu i całki szczególnej równania niejednorodnego. Po wyznaczeniu współczynników B_n otrzymano wyrażenie na ugięcie w postaci szeregu zbieżnego (3.11), którego jednakże nie wolno było różniczkować, gdyż w wyniku otrzymywano szereg rozbieżny. Tak więc zamiast różniczkować wyrażenie (3.11) różniczkowano zależność (3.8). Otrzymane tym sposobem równanie częstości posiada złożoną postać, niedogodną do obliczeń numerycznych. Drugi sposób rozwiązania równań zagadnienia polegał na zastosowaniu całkowych transformacji Fou-

riera, które w prosty sposób pozwoliły otrzymać wyniki dogodne do obliczeń numerycznych. Poprawność przedstawionej metody rozwiązania zagadnienia potwierdził przykład liczbowy.

W zagadnieniach teorii drgań ważną rolę odgrywają problemy tłumienia. W hydro-sprężystości może wystąpić tłumienie dwojakiego rodzaju: związane ze strukturą wewnętrzną układu sprężystego i lepkością cieczy oraz tłumienie hydrodynamiczne związane z rozpraszaniem energii, która zostaje zamieniona na energię fal powierzchniowych. W analizowanym przypadku badano ciecz idealną i płytę idealnie sprężystą, wobec czego tłumienie wewnętrzne nie wystąpiło. Podobnie z tłumieniem hydrodynamicznym, które ma znaczenie w przypadku nieograniczonych układów ciekłych i fal progresywnych (w badanym zagadnieniu drgania mają charakter fal stojących).

Literatura cytowana w tekście

1. A. H. FLAX, *Aero and hydro-elasticity*, Proc. of the 1st Symposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, 1960.
2. Y. C. FUNG, *An introduction to the theory of aeroelasticity* (przekład rosyjski, Moskwa 1959).
3. A. D. KERR, W. T. PALMER, *The deformation and stresses in floating ice plates*, Acta Mechanica, 15 (1972).
4. W. KURSKI, *Drgania stacjonarne płyt poszycia okrętu* (praca doktorska), Politechnika Gdańska, 1960 (nie publikowana).
5. R. SOLECKI, *Vibrations of a floating plate I*, Bull. Ac. Pol. Sc., Serie Sc. Techn., 11 - 12, XIV, (1966).
6. R. SOLECKI, *Vibration of a floating plate II*, Bull. Ac. Pol. Sc., Serie Sc. Techn., 1, XV (1967).
7. A. SAWICKI, *Osiowosymetryczne drgania swobodne dachu pływającego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Lądowe, XXV, 204 (1974).
8. A. SAWICKI, *Dynamika dachów pływających*, Rozpr. Inż., 2 (1975).
9. J. WIĘSKOWSKI, *Równania drgań giętych kadłuba statku*, Bibl. Mech. Stos., Warszawa 1957.
10. J. WIĘSKOWSKI, *Hydro-sprężystość i mechanika pływania*, referat na II Kongres Nauki Polskiej, 1972.
11. YI-KWEI WEN, MASANOBU SHINOZUKA, *Analysis of floating plate under ocean waves*, Journal of Waterways and Harbors Division, May 1972.
12. Э. Ф. АФАНАСЕВ, Прикл. Мат. Мех., 28, 5 (1964).
13. Л. В. ДОКУЧАЕВ, *О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана*, Строительная механика и расчет сооружений, 1 (1972).
14. П. П. КУЛЬМАЧ, *Гидродинамика гидротехнических сооружений*, АН СССР, Москва 1963.
15. И. М. РАПОПОРТ, *Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью*, Москва 1966.
16. М. А. КИЛЬЧЕВСКИЙ, *Механика систем оболочка—жидкость—нагретый газ*, Наукова Думка, Киев 1970.
17. Э. И. ГРИГОЛЮК, *Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью*, Труды VII Конф. по теории пластинок и оболочек, Москва 1970.
18. С. Г. ШУЛЬМАН, *Некоторые случаи свободных колебаний пластин и цилиндрических оболочек, соприкасающихся с жидкостью*, Труды VI конф. по теории пластинок и оболочек.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОУПРУГОСТИ ПЛИТ

В работе рассматриваются стационарные сопряженные колебания системы плита—жидкость. Пластина покоится на свободной поверхности жидкости заполняющей ограниченную жесткой поверхностью область пространства. Исследуемая модель охватывает некоторый класс задач гидро-

пругости плит, которым в действительности могут соответствовать натуральные или искусственные, наполненные жидкостью емкости, на поверхности которых покоится упругая плита. Представлен общий метод решения с использованием собственных функций свободного волнения идеальной жидкости. Метод иллюстрируется динамическим анализом сопряженной с жидкостью полосы.

Summary

CERTAIN PROBLEMS OF HYDROELASTICITY OF PLATES

The paper deals with considerations of stationary, coupled vibrations of the system: plate-ideal liquid. The plate lies on a free surface of liquid filling the space being bounded by a rigid surface.

The model investigated describes a certain class of hydroelasticity problems of artificial or natural liquid reservoirs with elastic plates resting on their surface.

The general method of solution is based on the application of eigenfunctions of free oscillations of liquid. The method is illustrated by dynamic analysis of a plate strip coupled with liquid.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1975 r.

STEROWANA DYSKRETYZACJA PŁYT I POWŁOK

WIESŁAW KUFEL (WARSZAWA)

Przedmiotem rozważań są płyty i powłoki poddane dyskretyzacji rozumianej jako umowne narzucanie na ich ruch więzów szczególnego typu, niezależnie od sił masowych, powierzchniowych czy od rozkładu masy [1]. Wprowadzając w zbiorze dyskretyzacji płyt i powłok relację równoważności oraz wykorzystując powstające w wyniku działania więzów siły reakcji, uzyskuje się możliwość oceny, która z przeprowadzonych dyskretyzacji jest lepsza, tj. przy której dyskretyzacji otrzymane rozwiązanie zagadnienia brzegowego jest dokładniejsze w stosunku do nieznanego rozwiązania «wzorcowego». Wybieranie lepszych z punktu widzenia tego rozwiązania dyskretyzacji ciała nazywamy *sterowaniem dyskretyzacją*.

W pracy opisuje się sposób sterowania dyskretyzacją płyt i powłok, podaje kryterium szacujące wiarygodność otrzymanego rozwiązania oraz formułuje zagadnienie sterowania optymalnego.

Wykaz oznaczeń

W pierwszej części wykazu umieszczono oznaczenia znanych pojęć matematycznych, ich objaśnienie można znaleźć np. w [7].

- ∂A brzeg zbioru A , np. $\partial \Pi$,
 $A \subset B$ A jest podzbiorem B , A jest zawarte w B ,
 $A \times B$ iloczyn kartezjański zbiorów A i B ,
 \bar{A} domknięcie zbioru A , np. \bar{B}_R ,
 $\{a\}$ zbiór jednopunktowy, np. $\{t_0\}$,
 \emptyset zbiór pusty,
 $\bigcup_{c=1}^I A_c$ suma zbiorów $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_I$, piszemy także $\bigcup_c A_c$, jeżeli wiadomo, jaki zbiór indeksów przebiega c , np. $\bigcup_c \Pi_c$.

- $A = \{y; W(y)\}$ zbiór tych y , które mają własność W , np. $\Omega_0 = \{Z; Z \in \bigcup_u L_u \cup \bigcup_i Z_i\}$
zbiór tych punktów powierzchni środkowej, które należą do sumy linii i punktów podziału,
 h, g homeomorfizmy,

- g^{-1} homeomorfizm odwrotny do g ,
 $\Omega_1 \approx \Omega_2$ relacja równoważności,
 $||\Omega||$ klasa abstrakcji relacji równoważności,
 $||(\mathbf{r}, \mathbf{s})||$ norma w przestrzeni funkcyjnej (\mathbf{r}, \mathbf{s}) ,
 $\mathbf{f}_A = \mathbf{f}|_A$ obcięcie funkcji \mathbf{f} do zbioru A ,
 E^k przestrzeń euklidesowa k -wymiarowa.

W drugiej części znajdują się objaśnienia pojęć mechaniki ośrodków ciągłych z więzami oraz dyskretyzowanych powłok sprężystych:

- B_R obszar w przestrzeni fizycznej z układem współrzędnych (X^k) , $k = 1, 2, 3$, do którego należą punkty X — konfiguracja odniesienia powłoki — powłoka,
 Π rzut ortogonalny B_R na płaszczyznę OX^1X^2 , do którego należą punkty Z — powierzchnia środkowa powłoki B_R ,
 F przedział otwarty $(-h, h)$ w zbiorze liczb rzeczywistych, do którego należą punkty y ,
 I przedział czasu,
 $2h$ grubość powłoki w konfiguracji odniesienia,
 ∇ gradient w B_R ,
 $\overset{*}{\nabla}$ gradient w Π ,
 div dywergencja w B_R ,
 \mathbf{n} wektor zewnętrznie normalny do ∂B_R ,
 $\overset{*}{\mathbf{n}}$ wektor wewnętrznie normalny do $\partial \Pi$,
 χ funkcja deformacji,
 $\mathbf{H}, \mathbf{h}; \mathbf{H}_i, \mathbf{h}_i$ uogólnione siły wewnętrzne zależne odpowiednio od Z, t, ψ oraz t, \mathbf{q} ,
 $\mathbf{f}; \mathbf{f}_i, \mathbf{F}_i$ uogólnione siły zewnętrzne zależne odpowiednio od Z, t, ψ oraz t, \mathbf{q} ,
 \mathbf{b}_R siła masowa zależna od X, t ,
 \mathbf{p}_R obciążenia powierzchniowe zależne od $X \in \partial B_R, t$,
 k energia kinetyczna,
 σ energia sprężysta,
 ε uogólniona energia sprężysta,
 ρ_R gęstość masy odniesienia do konfiguracji początkowej,
 λ mnożniki Lagrange'a określone w zbiorze $\Pi \times I$,
 μ mnożniki Lagrange'a określone w zbiorze $\partial \Pi \times I$,
 ψ współrzędne uogólnione zależne od Z, t ,
 \mathbf{q} współrzędne uogólnione zależne od t ,
 Φ więzy nałożone na deformację — znana funkcja argumentów Z, t, Ψ ,
 Ξ więzy wtórne — znana funkcja t, \mathbf{q} ,
 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 masowe siły reakcji zależne odpowiednio od X, t i Z, t ,
 $\mathbf{s}_R, \mathbf{s}_R$ powierzchniowe siły reakcji zależne odpowiednio od X, t oraz Z, t ,
 \mathbf{u}_R siły reakcji podpór,
 \mathbf{s}_{cd} kontaktowe siły reakcji zależne od Z, t ,
 Π_c płaskie elementy skończone powłoki B_R ,
 B_c elementy skończone,
 L_a linie podziału powierzchni środkowej na płaskie elementy skończone Π_c ,
 $\{Z_i\}$ punkty podziału powierzchni środkowej,
 D podzbiór Ω_0 punktów łączących elementy skończone — zbiór punktów węzłowych,
 Ω_0, Ω siatki podziału powierzchni środkowej,
 Θ dziedzina sterowania — zbiór siatek podziału Ω ,
 $\tilde{\Theta}$ dopuszczalny zbiór sterowań,
 V funkcjonal celu zależny od wektora współrzędnych \mathbf{q} oraz siatek Ω .

1. Wstęp

Teorią płyt i powłok nazywamy zwykle mechanikę cieniwej płytowej lub powłokowej formy konstrukcyjnej, wyrażoną w kategoriach odniesionych do pewnej powierzchni, tzw. powierzchni środkowej. Powierzchniowe teorie płyt i powłok mają długą historię; w literaturze przedmiotu znaleźć można wiele ich sformułowań [2].

Przedmiotem rozważań w tej pracy będzie płyta lub powłoka traktowana jako trójwymiarowe ciało z wewnętrznymi więzami. Przedstawimy pokrótce podstawowe założenia i równania takiej teorii.

Niech będzie dana forma powłokowa, która da się w dany sposób odwzorować w obszar przestrzeni fizycznej zawarty pomiędzy płaszczyznami $X^3 = \pm h$ oraz ograniczony powierzchnią walcową normalną do płaszczyzny OX^1X^2 . Obszar ten oznaczymy przez B_R , jego rzut ortogonalny na płaszczyznę OX^1X^2 oznaczymy przez Π , a dowolny punkt na Π oznaczymy przez $Z = (X^1, X^2)$. Oznaczenia stosowane w pracy wzorowane są na monografii [8]. W dalszym ciągu używać będziemy wyłącznie określenia «powłoka», traktując płytę jako szczególny przypadek powłoki.

Niech dalej ruch powłoki $\chi(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} = (Z, X^3)$, $Z \in \Pi$, $X^3 \in (-h, h)$, $t \in I$ będzie ograniczony w dany z góry sposób. Ograniczenia te nazwiemy więzami. Rozpatrywać będziemy tylko więzy narzucone na ruch ciała (na jego funkcję deformacji). Zgodnie z [3] rozważać będziemy dwa rodzaje więzów:

1. Więzy graniczne (brzegowe) sprowadzające się zwykle do dobrze znanych w teorii sprężystości warunków początkowych oraz do tzw. przemieszczeniowych warunków brzegowych w postaci:

$$(1.1) \quad \alpha_\varrho[Z, t, \psi(Z, t)] = 0, \quad Z \in \partial\Pi, \quad t \in I, \\ \varrho = 1, 2, \dots, s.$$

2. Więzy wewnętrzne, wyrażające pewne przyjęte *a priori* hipotezy kinematyczne, których celem jest uproszczenie kinematyki, a w konsekwencji i całej dynamiki rozważanej powłoki

$$(1.2) \quad \chi(\mathbf{X}, t) = \Phi[Z, X^3, t, \psi(Z, t)], \\ \beta_\nu(Z, t, \psi(Z, t), \dot{\psi}(Z, t)) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, r, \quad Z \in \Pi.$$

Wektor ψ jest wektorem współrzędnych uogólnionych. Funkcje α_ϱ , Φ i β_ν są funkcjami znanymi. Więzy (1.2)₁ sprowadzają kinematykę całej powłoki, jako przestrzennej formy konstrukcyjnej, do pewnego dwuwymiarowego kontinuum punktów $Z \in \Pi$. Warunki (1.2)₂ stanowią dodatkowe ograniczenia dla funkcji wektorowej ψ . W szczególności, gdy współrzędne uogólnione są niezależne, związki te nie wystąpią.

Podstawowy układ równań dla wektora współrzędnych uogólnionych otrzymuje się z zasady prac wirtualnych, którą zapisać można w postaci

$$\int_{B_R} [\varrho_R(\ddot{\chi} - \mathbf{b}_R) - \text{div} \mathbf{T}_R] \delta \chi \, dv_R + \int_{\partial B_R} (\mathbf{p}_R - \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R) \delta \chi \, d\sigma_R = 0.$$

Podstawiając (1.1)₁ do ostatniej równości oraz stosując twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a otrzymujemy następujące równania ruchu i równania konstytucyjne, które powinny być spełnione dla każdego $(Z, t) \in \Pi \times I$, [3]:

$$\text{Div}^* \mathbf{H} + \mathbf{h} + \mathbf{f} = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Psi}} - \frac{\partial k}{\partial \Psi},$$

$$(1.3) \quad \mathbf{H} = \frac{\partial(\varepsilon - \lambda^v \beta_v)}{\partial \nabla^* \Psi}, \quad \mathbf{h} = - \frac{\partial(\varepsilon - \lambda^v \beta_v)}{\partial \Psi},$$

gdzie

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(Z, t, \Psi) = \int_{-h}^h \varrho_R \mathbf{b}_R \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} dX^3 + \left[\mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} \right]_{X^3 = \pm h},$$

$$(1.4) \quad k = k(Z, t, \Psi, \dot{\Psi}) = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \varrho_R |\dot{\Phi}|^2 dX^3,$$

$$\varepsilon = \varepsilon(Z, t, \Psi, \nabla^* \Psi) = \int_{-h}^h \varrho_R \sigma(\nabla \Phi) dX^3.$$

Równania (1.3)₁ nazwiemy równaniami ruchu, a równania (1.3)₂ równaniami konstytutywnymi dla wektora współrzędnych Ψ .

Na $\partial \Pi \times I$ powinny być ponadto spełnione geometryczne warunki brzegowe, które zapiszemy

$$(1.5) \quad \mathbf{H} \mathbf{n}_R^* = \mathbf{t}_R + \mathbf{u}_R,$$

gdzie

$$(1.6) \quad \mathbf{t}_R = \int_{-h}^h \mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} dX^3, \quad \mathbf{u}_R = \mu^e \frac{\partial \alpha_e}{\partial \Psi}.$$

Wielkości μ^e są «brzegowymi» mnożnikami Lagrange'a, tj. określonymi na zbiorze $\partial \Pi \times I$. Występująca w (1.6) funkcja \mathbf{t}_R jest znana, bowiem może być obliczona przez całkowanie funkcji $\mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi}$.

Z kolei na $\Pi \times \{t_0\}$ powinny być spełnione warunki początkowe

$$(1.7) \quad \Psi = \dot{\Psi}(Z), \quad \dot{\Psi} = \Psi^{(c)}(Z).$$

Równania (1.2)₂, (1.3), (1.5), (1.7) opisują każdą dwuwymiarową teorię powłok jako teorię ciała z wewnętrznymi więzami.

2. Powłoki dyskretyzowane

Rozpatrzmy pewien dany rozkład powierzchni środkowej Π na rozłączne obszary Π_c , $c = 1, 2, \dots, l$ takie, by $\bar{\Pi} = \bigcup_{c=1}^l \bar{\Pi}_c$. Rozkład regularnego obszaru Π na regularne podobszary Π_c , tj. płyty ograniczone skończoną liczbą łuków, spowodowany może być róż-

nymi względami, np. własnościami budowy powłoki, ale także potrzebami przyjętej teorii, w ramach której badane jest ciało. Niech każdy płat Π_c ograniczony jest $n = n(c)$ łukami L_c^k , gdzie $k = 1, 2, \dots, k_0$, które nazwiemy liniami podziału powierzchni Π . Oznaczmy przez Z_c^r punkty $\bar{L}_c^k \cap \bar{L}_c^l$, $k < l$ i $r = 1, 2, \dots, r_0$, gdzie $r_0 \leq \frac{k_0(k_0-1)}{2}$ będące punktami podziału Π .

Iloczyny kartezjańskie $B_c = \Pi_c \times F$ oraz Π_c nazwiemy odpowiednio elementami skończonymi i płaskimi elementami skończonymi powłoki B_R .

Wprowadźmy dla wygody rachunkowej (w szczególności obliczeń numerycznych) globalną numerację wszystkich linii i punktów podziału. I tak L_a , $a = 1, 2, \dots, A$ oznaczają wszystkie linie, a Z_i , $i = 1, 2, \dots, I$ wszystkie punkty podziału powierzchni Π . Spełnione są oczywiście związki $L_a \cap L_b = \emptyset$, $a \neq b$ oraz $\{Z_i\} \cap \{Z_j\} = \emptyset$, $i \neq j$. Linie L_a i punkty Z_i podziału charakteryzują element skończony B_c powłoki B_R .

Zbiór Ω_0 określony w następujący sposób

$$(2.1) \quad \Omega_0 = \{Z; Z \in \bigcup_a L_a \cup \bigcup_i Z_i\}$$

nazwiemy siatką podziału powierzchni środkowej Π , a tym samym całą powłoki B_R .

W kontinuum materialnym rzeczywista liczba punktów łączących elementy skończone jest nieograniczona. W wielu teoriach czy metodach obliczeń numerycznych (np. metodzie elementów skończonych) przyjmuje się, że elementy B_c połączone są ze sobą w skończonej liczbie punktów węzłowych, w których zakłada się istnienie sił skupionych reprezentujących naprężenia rzeczywiste działające kontynualnie na granicach elementów. Analityczny opis połączeń elementów skończonych sprowadza się, w przypadku więzów narzuconych na deformację, do żądania ciągłości lub także gładkości funkcji deformacji w odpowiednim zbiorze punktów należących do siatki podziału ciała. W pozostałych punktach siatki może wystąpić nie tylko nieciągłość pierwszych pochodnych funkcji deformacji, lecz także nieciągłość samych deformacji; nie mamy wtedy do czynienia z ośrodkiem ciągłym. Traktujemy więc poszczególne elementy skończone jako oddzielne ciała z więzami (1.2).

W przypadku powłoki wprowadzamy więzy wtórne, nakładające ograniczenia na współrzędne uogólnione $\Psi(Z, t)$ w postaci

$$(2.2) \quad \Psi(Z, t) = \Xi_c(Z, t, \mathbf{q}(t)), \quad Z \in \bar{\Pi}_c, \quad t \in I,$$

gdzie $\mathbf{q}(t)$ jest wektorem nowych współrzędnych uogólnionych (już niezależnych od $Z \in \Pi$). Więzy (2.2) powinny być zgodne z warunkami brzegowymi (1.1) oraz z zależnościami (1.2)₂ między współrzędnymi uogólnionymi $\Psi(Z, t)$.

Podstawiając prawe strony (2.2) do (1.2)₁ otrzymamy

$$(2.3) \quad \chi(\mathbf{X}, t) = \Phi[Z, X^3, t, \Xi_c(Z, t, \mathbf{q}(t))], \quad X^3 \in F, \quad t \in I, \quad Z \in \bar{\Pi}_c.$$

Oznaczając przez $D \subset \Omega_0$ zbiór punktów łączących elementy skończone Π_c założymy, że równania więzów (2.3) powinny ponadto spełniać związki

$$(2.4) \quad \Xi_c[Z, t, \mathbf{q}(t)] = \Xi_d[Z, t, \mathbf{q}(t)], \quad Z \in \bar{\Pi}_c \cap \bar{\Pi}_d \cap D,$$

które uzależnione są od siatki podziału Ω_0 .

Przyjęcie więzów postaci (2.3), (2.4), a tym samym określenie siatki podziału Ω_0 i jej podzbioru D nazywamy dyskretyzacją powłoki, a powłokę z więzami (2.3) i (2.4) nazywamy powłoką dyskretyzowaną. W definicji dyskretyzacji ciała tkwi więc określenie podzbioru D siatki podziału Ω_0 oraz ustalenie więzów (2.3).

W metodzie elementów skończonych przyjmuje się zwykle za funkcje Φ wielomiany ustalonego stopnia, a za D dyskretny zbiór punktów.

Niech h jest homeomorfizmem $h: \bar{\Pi} \rightarrow \bar{\Pi}$. Określmy teraz homeomorfizmy g w następujący sposób:

$$(2.5) \quad g: \Omega_0 \rightarrow \Omega \subset \bar{\Pi} \wedge g(Z) = h(Z), \quad Z \in \Omega_0.$$

Homeomorfizm g jest więc obcięciem homeomorfizmu h do siatki Ω_0 . Zbiór Ω jest także siatką podziału powłoki B_R , która ma tę samą liczbę łuków i punktów podziału co siatka Ω_0 . Wynika to natychmiast z własności homeomorfizmów. Także odwrotnie, każda siatka Ω opisująca dyskretyzację powłoki B_R tą samą liczbą łuków i punktów (a tym samym tą samą liczbą elementów skończonych) jest obrazem siatki Ω_0 , tzn. istnieje homeomorfizm g taki, że $g^{-1}(\Omega) = \Omega_0$. Jest oczywiście, że $\bigcup_g g(\Omega_0) = B_R$.

Dla wielu zagadnień brzegowych zbiór D przyjmuje się jako dyskretny zbiór punktów Z_i , $i = 1, 2, \dots, I$, tym samym powiązanie elementów skończonych w tym zbiorze zapewnia wystarczającą aproksymację ruchu rzeczywistego. W istocie, w takim przypadku (dyskretyzacji określonej na zbiorze punktów — dyskretyzacji punktowej) mamy do czynienia nie z jednym podziałem ciała, ale z całą klasą podziałów, które okazują się klasą abstrakcji następującej relacji równoważności:

$$(2.6) \quad (\Omega_1 \approx \Omega_2) \Leftrightarrow [g_1(Z_i) = g_2(Z_i) \wedge g_1(\Omega_0) = \Omega_1, g_2(\Omega_0) = \Omega_2].$$

Relacja (2.6) jest zwrotna, symetryczna i przechodnia jest więc relacją równoważności.

Dla klasy abstrakcji $\|\Omega\|$ relacji równoważności (2.6) wygodne jest dokonanie wyboru reprezentanta Ω w następujący sposób: niech $\Omega = g(\Omega_0)$ i obrazy łuków L_a są odcinkami. W szczególności, gdy dyskretyzacja $\hat{\Omega}$ jest triangulacją powierzchni środkowej, tj. podziałem na trójkątne płaskie elementy skończone, reprezentantem $\|\Omega\|$ mogą być wprost $\hat{\Omega}$.

W przypadku dyskretyzacji punktowej równania więzów (2.2) przepiszemy w postaci

$$(2.7) \quad \psi(Z, t) = \Xi_c(Z, t, \mathbf{q}(t)), \quad Z \in \bar{\Pi}, \quad t \in I,$$

gdzie za współrzędne uogólnione $\mathbf{q}(t)$ przyjęto wartości funkcji $\psi(Z, t)$ w punktach zbioru $\{Z_i\}$;

$$(2.8) \quad \mathbf{q}(t) = \{\psi(Z_1, t), \dots, \psi(Z_I, t), \overset{\star}{\nabla} \psi(Z_1, t), \dots, \overset{\star}{\nabla} \psi(Z_I, t)\}.$$

Korzystając z (2.8), równania ruchu [równania na funkcje $\mathbf{q}(t)$] napiszemy w postaci:

$$(2.9) \quad \mathbf{h}_i + \mathbf{f}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\chi}_i} - \frac{\partial k}{\partial \chi_i},$$

$$\mathbf{H}_i + \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Gamma}_i} - \frac{\partial k}{\partial \Gamma_i}, \quad i = 1, 2, \dots, I,$$

gdzie oznaczono $\chi_i = \chi(Z_i, X^3, t)$, $\Gamma_i = \overset{\star}{\nabla} \chi_i(Z_i, X^3, t)$.

Równania konstytutywne sprowadzą się teraz do

$$(2.10) \quad \mathbf{h}_i = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\chi}_i}, \quad \mathbf{H}_i = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_i},$$

gdzie funkcja energii odkształcenia jest określona przez (1.4)₃, a współrzędne uogólnione $\mathbf{q}(t)$ są niezależne. Energia kinetyczna k jest zdefiniowana przez (1.4)₂, a obciążenia \mathbf{f}_i i \mathbf{F}_i zgodnie z (1.4)₁ będą

$$(2.11) \quad \mathbf{f}_i = \sum_c \left(\int_{B_c} \varrho_R \mathbf{b}_R \frac{\partial \Phi_c}{\partial \boldsymbol{\chi}_i} dv_R + \int_{\partial B_R \cap \partial B_c} \mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi_c}{\partial \boldsymbol{\chi}_i} d\sigma_R \right),$$

$$\mathbf{F}_i = \sum_c \left(\int_{B_c} \varrho_R \mathbf{b}_R \frac{\partial \Phi_c}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_i} dv_R + \int_{\partial B_R \cap \partial B_c} \mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi_c}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_i} d\sigma_R \right).$$

Funkcje podcałkowe w (2.11) są znanymi funkcjami argumentu $\mathbf{X} \in B_c$, gdyż postać funkcji Φ w równaniach więzów jest znana, tym samym odpowiednie całki po dowolnym elemencie skończonym mogą być obliczone.

Po rozwiązaniu zagadnienia początkowego dla układu równań (2.10), tj. po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}(t)$ możemy otrzymać zarówno funkcję deformacji $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ całego ciała (lub spójnego zbioru ciał, gdy nie zachodzi warunek (2.4)), jak i wektor $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{Z}, t)$. Wynika to od razu z (2.2).

3. Ocena dokładności rozwiązań

Siły reakcji powstałe w wyniku działania założonych *a priori* więzów wewnętrznych (1.2)₁ są pewnymi «fikcyjnymi» obciążeniami, które należałoby dodatkowo przyłożyć do ciała, by odkształcało się zgodnie z więzami. Znaczy to, że po rozwiązaniu zagadnienia początkowego (1.3) dla niewiadomych $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{Z}, t)$, obliczeniu ze związków (1.2)₁ całego ruchu ciała, wyznaczeniu tensora ekstra naprężenia Pioli-Kirchhoffa $\mathbf{T}_R = \boldsymbol{\eta}_R(\mathbf{X}, \nabla \boldsymbol{\chi})$ (gdzie $\boldsymbol{\eta}_R$ jest funkcją konstytutywną materiału powłoki), siły reakcji możemy wyznaczyć z następujących związków [1]:

$$(3.1) \quad \varrho_R \mathbf{r} = \varrho_R \ddot{\boldsymbol{\chi}} - \operatorname{div} \mathbf{T}_R - \varrho_R \mathbf{b}_R, \quad \text{w } B_R \times I,$$

$$\mathbf{s}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R - \mathbf{p}_R, \quad \text{na } \partial B_R \times I.$$

Powierzchniowe siły reakcji wywołane są zarówno więzami wewnętrznymi, jak i podparciem brzegu powłoki. Oznaczając te ostatnie przez \mathbf{u}_R i przyjmując, że potrafimy je niezależnie wyznaczyć (np. w zagadnieniach statycznie wyznaczalnych), otrzymamy siły reakcji \mathbf{r} , $\mathbf{s}_R - \mathbf{u}_R$ wywołane tylko więzami wewnętrznymi. Gdy więzy wewnętrzne wyrażają wyłącznie wprowadzone *a priori* hipotezy kinematyczne upraszczające matematyczny opis problemu (a nie np. własności materiałowe w rodzaju nieściśliwości), to ocenę bliskości otrzymanego rozwiązania «modelowego» i nieznanego rozwiązania ścisłego, tj. rozwiązania jakie uzyskano by w ramach teorii sprężystości, można przeprowadzić korzystając z następującego kryterium szacującego go

$$(3.2) \quad \|(\mathbf{r}, \mathbf{s}_R - \mathbf{u}_R)\| = \varepsilon(\mathbf{b}_R, \mathbf{p}_R + \mathbf{u}_R)\|,$$

gdzie $\|(\cdot, \cdot)\|$ oznacza normę w przestrzeni funkcyjnej, której elementami są pary utworzone z gęstości sił masowych i powierzchniowych działających na ciało oraz ε jest dodatnią liczbą małą wobec jedności. Występująca w (3.2) norma nie jest określona jednoznacznie, lecz sposób jej wprowadzenia zależy często od charakteru problemu brzegowego. Niektóre przykłady norm $\|(\cdot, \cdot)\|$ przedstawiono w [4].

Jeżeli warunek (3.2) nie jest spełniony, tj. gdy układ sił reakcji utrzymujących więzy $(1.2)_1$ nie jest pomijalnie mały wobec układu sił działających na ciało, to rozwiązanie «modelujące» nie stanowi rozwiązania problemu fizycznego.

Analiza tak postawionego problemu prowadzi do oceny, czy przyjęta (przez więzy $(1.2)_1$) teoria powłok może być stosowana do rozwiązywanego problemu fizycznego.

W dalszym ciągu będziemy się zajmować siłami reakcji spowodowanymi więzami (2.2), tj. spowodowanymi dyskretyzacją. Rozwiązaniem modelowym będzie więc tutaj rozwiązanie $q(t)$, a ścisłym albo wzorcowym $\Psi(Z, t)$, (wyżej rozwiązaniem modelowym było rozwiązanie $\Psi(Z, t)$, a ścisłym rozwiązanie jakie uzyskano by w ramach teorii sprężystości). Tak więc interesować nas będą siły reakcji powstałe wskutek dyskretyzacji powłoki (więzy (2.2)), a nie siły reakcji powstałe wskutek przyjęcia takiej czy innej teorii powłok (czyli więzów $(1.2)_1$).

Rozwiązując zagadnienie początkowe (2.9) dla niewiadomych $q(t)$ obliczymy ze związków (2.2) współrzędne uogólnione $\Psi(Z, t)$ i dalej ze związków $(1.2)_1 \div (1.3)_2$ funkcję deformacji $\chi(X, t)$ i uogólnione siły H i h . Siły reakcji spowodowane dyskretyzacją można wtedy obliczyć [por. (3.1)] ze związków

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= -\operatorname{div}^* \mathbf{H} - \mathbf{h} - \mathbf{f} + \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Psi}} - \frac{\partial k}{\partial \Psi}, \\ \dot{\mathbf{s}}_R &= \mathbf{H} \mathbf{n}_R^* - \mathbf{t}_R - \mathbf{u}_R, \end{aligned}$$

w których występujące wielkości są określone wzorami $(1.3)_2 \div (1.6)$. Siły reakcji (3.3) obliczone dla każdego elementu skończonego B_c oznaczymy przez $\dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{s}}_c$, a skok powierzchniowych sił reakcji na $\partial \Pi_c \cap \partial \Pi_d, c \neq d$ oznaczymy przez

$$(3.4) \quad \dot{\mathbf{s}}_{cd} = \mathbf{H}_c \mathbf{n}_c^* + \mathbf{H}_d \mathbf{n}_d^*,$$

gdzie $\mathbf{n}_d^* = -\mathbf{n}_c^*$ i nazwiemy kontaktowymi siłami reakcji.

Wprowadźmy w przestrzenie sił masowych i powierzchniowych [zarówno $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}|_{Z \in \Pi_c}$, $\mathbf{t}_c = \mathbf{t}_R|_{Z \in \Pi_c}$, jak i sił reakcji (3.3) i (3.4)], odpowiednio normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Uzyskané przy dyskretyzacji rozwiązanie możemy uznać za dostatecznie bliskie rozwiązaniu jakie otrzymalibyśmy dla ciała bez więzów (2.2) jeśli dla każdego c spełniony jest warunek

$$(3.5) \quad \|\dot{\mathbf{r}}_c\|_1 + \|\dot{\mathbf{s}}_c - \mathbf{u}_c\|_2 + \left\| \sum_{d=1}^l \dot{\mathbf{s}}_{cd} \right\|_2 = \varepsilon (\|\mathbf{f}_c\|_1 + \|\mathbf{t}_c + \mathbf{u}_c\|_2),$$

gdzie $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_R|_{Z \in \Pi_c}$.

Warunek (3.5) mówi, że siły reakcji masowych i powierzchniowych powinny stanowić układ sił pomijalnie małych w porównaniu z układem uogólnionych sił zewnętrznych działających na ciało.

4. Dyskretyzacja sterowana

Spełnienie warunku (3.5) dla każdego c można otrzymać różnymi drogami. Można mianowicie albo dobierać przy ustalonym podziale powłoki B_R funkcję więzów (2.2) albo ustalając funkcję więzów Ξ zmieniać podział Π siatkami Ω zarówno zwiększając liczbę elementów, jak i zmieniając ich rozmieszczenie, wielkość czy kształt, albo wreszcie stosować te dwie drogi równocześnie,

Postępowanie takie nazywamy sterowaniem dyskretyzacją powłoki. W tym punkcie zajmiemy się sterowaniem dyskretyzacją przez zmianę liczby elementów skończonych przy ustalonych więzach.

Na początek ustalmy, że sterowania dyskretyzacją dokonamy przez \mathcal{A} -krotny podział ciała na elementy skończone punktami $\{Z_i\}$. Liczba \mathcal{A} choć dowolna zwykle uzależniona jest od możliwości numerycznych maszyny cyfrowej zastosowanej do rozwiązania problemu brzegowego.

Pierwszej dyskretyzacji dokonujemy siatką punktów $\{Z_i\}$, $i = 1, 2, \dots, I$ kierując się kształtem ciała i sposobem przyłożenia sił zewnętrznych (może to także być podział zupełnie przypadkowy). Po rozwiązaniu równań (2.9) i wyliczeniu sił reakcji (3.3) przeprowadzamy ocenę dokładności rozwiązań stosując kryterium szacujące (3.5), tj. dla każdego c_I (indeks I wskazuje, iż mamy do czynienia z pierwszą dyskretyzacją) określamy w nierówności (3.5) największą wartość ε_{c_I} .

Niech ε_0 będzie z góry przyjętą w związku (3.5) wartością ε określającą dopuszczalne odchylenie rozwiązania modelowego od rozwiązania ścisłego (można np. przyjąć $\varepsilon_0 = 0,05$, gdyż często z taką dokładnością określa się wielkość sił zewnętrznych). Może się zdarzyć, że po pierwszej dyskretyzacji spełniona jest nierówność $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_{c_I}$ dla wszystkich $c_I = 1, 2, \dots, I_I$. Spełniona jest tym samym nierówność (3.5) i rozwiązanie modelowe uznajemy za wystarczająco dokładnie aproksymujące rozwiązanie ścisłe. Na ogół jednak znajdują się takie elementy skończone Π_{c_I} , dla których warunek (3.5) nie jest spełniony, tzn. będą istnieć indeksy c_I^0 , dla których $\varepsilon_{c_I^0} > \varepsilon_0$. Dokonujemy wtedy dyskretyzacji taką siatką punktów $\{Z_{II}\}$, $i_{II} = 1, 2, \dots, I_{II}$, które podzielą elementy $\Pi_{c_I^0}$ na mniejsze. Pozostawienie elementów skończonych, w których warunek (3.5) jest spełniony w niezmiennym kształcie (choć nie jest to konieczne) jest wygodne, gdyż pozwala obliczone dla tych elementów pewne wielkości (jak np. macierze sztywności) wykorzystać do następnych dyskretyzacji.

Takie postępowanie powinno przy dyskretyzacji punktami $\{Z_{II}\}$ doprowadzić do spełnienia warunku (3.5) we wszystkich elementach skończonych.

Przykład sterowania dyskretyzacją przez zwiększanie liczby elementów skończonych pryzmatycznej powłoki z prostokątnym otworem (traktowanej jednak jako powłoka gruba) rozpatrzono w [4].

5. Sterowanie optymalne

Przedstawiony w rozdziale 4 proces dyskretyzacji można kontynuować aż do spełnienia warunku (3.5) przy założonym z góry ε . Trzeba jednak zaznaczyć, że nie zawsze jest to możliwe. Nie dysponujemy bowiem maszynami matematycznymi, które rozwiązywałyby

układy równań o dostatecznie dużej liczbie niewiadomych. Trudność tę można ominąć na innej drodze. Można mianowicie sterować procesem dyskretyzacji tak, by przy ustalonej liczbie elementów skończonych uzyskać minimum normy sił reakcji.

Zauważmy w tym celu, że współrzędne uogólnione $\mathbf{q}(t)$ przy ustalonym t oraz ustalonej siatce podziału Ω należą zgodnie z (2.8) do przestrzeni euklidesowej E^{4I} . Nazywać je będziemy wektorami stanu a przestrzeń E^{4I} przestrzenią stanu.

Zbiór siatek Ω , gdzie $\Omega = g(\Omega_0)$ i g jest z pewnego zbioru homeomorfizmów (2.5) oznaczymy przez Θ i nazwiemy dziedziną sterowania.

Każdemu rozwiązaniu $\mathbf{q}(t)$ z odpowiednimi warunkami początkowymi $\mathbf{q}(t_0) = \hat{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \hat{\mathbf{q}}^{(1)}$ przypiszemy liczbę V w następujący sposób:

$$(5.1) \quad V = V(\mathbf{q}, \Omega) = \sum_{c=1}^I (\|\hat{\mathbf{r}}_c(\mathbf{q}, \Omega)\|_1 + \|\hat{\mathbf{s}}_c(\mathbf{q}, \Omega) - u_c(\mathbf{q}, \Omega)\|_2 + \|\sum_{d=1}^I \hat{\mathbf{s}}_{cd}(\mathbf{q}, \Omega)\|_2),$$

gdzie $\Omega \in \Theta$.

Powiadamy, że sterowanie lub siatka podziału Ω^* jest optymalna jeśli odpowiadające jej rozwiązanie $\mathbf{q}^*(t)$ równań stanu (2.9) spełnia dla $\Omega \in \Theta$ związek

$$(5.2) \quad V(\mathbf{q}^*, \Omega^*) \leq V(\mathbf{q}, \Omega).$$

Tak więc przez znalezienie optymalnej siatki podziału powłoki B_R będziemy rozumieć znalezienie takiego elementu zbioru Θ , dla którego funkcjonal (5.1), przyjmuje wartość najmniejszą.

W wielu przypadkach szczególnych siatki Ω będą należeć do pewnego podzbioru $\tilde{\Theta} \subset \Theta$ zwanego dopuszczalnym zbiorem sterowań. Specyfikacja tego podzbioru w zbiorze Θ zależy zarówno od warunków na homeomorfizmy g (np. by były przedziałami liniowe), jak i od dziedziny określoności. Nie zawsze bowiem konieczne jest sterowanie całą siatką, wystarczy sterowanie tylko jej częścią.

Niech teraz $\tilde{\Theta} \subset \Theta$, będzie zbiorem reprezentantów relacji równoważności (2.6). Elementy zbioru $\tilde{\Theta}$ można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować pewnym podzbiорom w przestrzeni euklidesowej.

Skoro klasa abstrakcji $\|\Omega\|$ w sposób jednoznaczny wyznacza siatkę punktów $\{Z_i\}$, $i = 1, 2, \dots, I$ i odwrotnie, siatka punktów $\{Z_i\}$ zgodnie z (2.6) jednoznacznie określa $\|\Omega\|$, w takim razie $\|\Omega\|$ przyporządkujemy punkt $\mathbf{z} \in E^{2I}$, gdzie $\mathbf{z} = \{Z_1, \dots, Z_I\}$. Oczywiście dla ustalonego i , $Z_i \in \bar{I}$, tak więc punkt \mathbf{z} przestrzeni E^{2I} , któremu przyporządkowano pewien element Θ należy do I -krotnego iloczynu kartezjańskiego $S = \bar{I} \times \bar{I} \times \dots \times \bar{I}$, z którego usunięto zbiór M punktów $\mathbf{z} = (z^\sigma)$, $\sigma = 1, 2, \dots, 2I$, dla których istnieją σ_1, σ_2 , z $z^{\sigma_1} = z^{\sigma_2}$.

W wielu zagadnieniach brzegowych zakłada się, że homeomorfizmy g na $\partial\bar{I}$ są identycznościami. Niech $Z_t \in \partial\bar{I}$, $t = 1, 2, \dots, I_0$ i $I_0 \leq I$, wtedy wymiar dziedziny $S - M$ równy jest $2(I - I_0)$ oraz S jest zbiorem otwartym.

Niech teraz $\hat{\mathbf{r}}_c, \hat{\mathbf{s}}_c, \hat{\mathbf{s}}_{cd}$ będą siłami reakcji przy ustalonej siatce podziału $\Omega \in \Theta$ i ogólniej $\hat{\mathbf{r}}_c(\mathbf{z}), \hat{\mathbf{s}}_c(\mathbf{z}), \hat{\mathbf{s}}_{cd}(\mathbf{z})$ będą siłami reakcji dla każdej siatki podziału $\Omega \in \Theta$, czyli funkcjami

$z \in S - M$. Zgodnie z (5.1) funkcjonal celu będzie także funkcją $z \in S - M$. Widać stąd, że w przypadku kiedy zbiór dopuszczalnych sterowań jest zbiorem siatek równoważnych względem relacji (2.6), problem sterowania optymalnego może być sprowadzony do znacznie prostszego problemu szukania ekstremum funkcji wielu zmiennych.

6. Uwagi końcowe

Przyjęcie w mechanice odpowiedniego modelu kontinuum ma zasadnicze znaczenie, ponieważ determinuje zarówno stopień dokładności, jak i zakres stosowalności teorii. Najczęściej rozważanym modelem ciała materialnego jest model kontynualny. Jednak duże trudności w rozwiązywaniu podstawowego układu równań mechaniki ośrodków ciągłych sprawiły, że zaczęto wprowadzać do niej dodatkowe założenia upraszczające. Wystarczy wspomnieć teorię powłok KIRCHHOFFA czy teorię prętów BERNOULLIEGO.

Inne podejście pochodzące jeszcze od EULERA, opiera się na założeniu, że pewne skończone podobszary ciała mają skończoną liczbę stopni swobody. Tak podzielone ciało nazywamy ośrodkiem złożonym z elementów skończonych lub ośrodkiem dyskretyzowanym. Obecnie coraz częściej w zagadnieniach techniki wprowadzamy taki właśnie model ciał [5].

Przedmiotem rozważań w tej pracy jest dyskretyzowana płyta lub powłoka B_R poddana więzom wewnętrznym. Ruch takiego ośrodka opisany jest skończonym układem $\mathbf{q}(t) = (q^1(t), q^2(t), \dots, q^N(t))$ niewiadomych funkcji zależnych tylko od czasu, pozwalającym aproksymować rzeczywisty ruch ośrodka ciągłego ruchem układu o skończonej liczbie stopni swobody. Powyższe ograniczenia na ruch stanowią przypadek szczególny więzów wewnętrznych narzuconych tylko na ruch kontinuum, a nie np. na naprężenia.

Ogólne podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych obejmujące także znane dotychczas metody, oparte na mechanice ośrodków ciągłych z więzami, były przedstawione w pracach WOŹNIAKA (np. [1]).

Każde ciało poddać można dyskretyzacji na elementy B_e , jednak otrzymane wyniki opisują badany układ, w rzeczywistości bez więzów, z dokładnością do sił reakcji. O otrzymanym w metodzie elementów skończonych rozwiązaniu mówimy, że wystarczająco dokładnie aproksymuje rozwiązanie ścisłe, tj. rozwiązanie, jakie otrzymalibyśmy dla ośrodka ciągłego wtedy, kiedy zastosowany skończony ciąg dyskretyzacji (na coraz większą liczbę elementów) wykazuje odpowiednią zbieżność. W przypadku ciała dyskretyzowanego, traktowanego jako ośrodek ciągły z więzami, oceny dokładności rozwiązań dla każdej dyskretyzacji dokonać można przez porównanie wielkości sił reakcji (wywołanych więzami) z siłami zewnętrznymi.

Wprowadzając w przestrzeń par sił reakcji wewnętrznych i powierzchniowych normę, dla każdej dyskretyzacji możemy określić wielkość tych sił. Mając więc dwie dyskretyzacje tego samego ciała, możemy powiedzieć, która z nich jest lepsza (w sensie przyjętej normy), tj. która z nich daje rozwiązanie dokładniejsze w stosunku do nieznanego rozwiązania, które uzyskano by dla ciała bez więzów wewnętrznych.

Poszukiwanie w pewnym zbiorze dyskretyzacji takiej dyskretyzacji, dla której odpowiednio skonstruowany funkcjonal (zwany funkcjonalem celu) przyjmuje minimum, nazywamy sterowaniem optymalnym.

W pracy rozpatruje się dwa rodzaje dyskretyzacji. Jeden, pozwalający sterować dyskretyzacją przez zwiększenie liczby elementów skończonych tylko tam, gdzie siły reakcji są duże (w sensie przyjętej normy), oraz drugi, polegający na szukaniu sterowania optymalnego.

W rozdziale 4 formułuje się zagadnienie sterowania dyskretyzacją przez zwiększenie liczby elementów skończonych w tych obszarach, gdzie norma sił reakcji nie spełnia odpowiedniego warunku szacującego. Zagęszczanie bowiem elementów skończonych w całym ciele często nie jest potrzebne, bo prowadzi do powiększenia rzędu układu równań. Zagadnienie optymalnego sterowania formułuje się w rozdziale 5, wykorzystując pojęcie siatki podziału Ω ciała dyskretyzowanego B_R . Siatki Ω stanowią dziedzinę sterowania Θ . W wielu przypadkach szczególnych siatki Ω będą należeć do pewnego podzbioru $\tilde{\Theta} \subset \Theta$, zwanego dopuszczalną dziedziną sterowania. Specyfikacja tego podzbioru przeprowadzona jest także w rozdziale 5.

Opisany wyżej sposób dyskretyzacji płyt i powłok można zastosować także do zagadnień trójwymiarowych. Sterowanie dyskretyzacją trójwymiarowych ciał sprężystych omówione jest w pracy [6].

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Constrained continuous media*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., 21 (1973), 109.
2. P. M. NAGHDI, *The Theory of Shells and Plates*, Handbuch der Physik, VIa/2, 1972.
3. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do elastokinytyki form konstrukcyjnych, Dzwigary powierzchniowe*, Ossolineum, Wrocław 1975.
4. W. KUFEL, *Dyskretyzowane ciała sprężyste jako kontinua ze sterowanymi więzami*, praca doktorska, Wydz. Mat. i Mech., Uniwersytet Warszawski, 1974.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
6. W. KUFEL, *On the optimal control of discretization problem for elastic bodies*, Arch. of Mech. 1(1976) 3-11.
7. H. RASIOVA, *Wstęp do matematyki współczesnej*, wyd. IV, PWN, Warszawa 1972.
8. C. A. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, III/3, 1965.

Резюме

УПРАВЛЯЕМАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Рассматриваются пластины и оболочки подверженные дискретизации, рассматриваемой в качестве условного наложения на их движение связей специального вида, которые не зависят от массовых и поверхностных сил ни от распределения массы. Такие системы являются примерами тел с ограничивающими связями, механика которых была построена Ч. Вольняком.

Определение на множестве дискретизаций плит и оболочек соотношения эквивалентности и использование, возникающих вследствие воздействия связей, сил реакции приводит к возможности оценки: которая из проведенных дискретизаций лучше т. е. при которой из них полученное решение краевой задачи точнее по сравнению с неизвестным «образцовым» решением. Подбор лучших с точки зрения этого решения дискретизаций называем управлением дискретизацией.

В работе описывается метод управления дискретизацией пластин и оболочек, приводится критерий достоверности полученного решения а также формулируется задача оптимального управления.

S u m m a r y

CONTROLLED DISCRETIZATION OF PLATES AND SHELLS

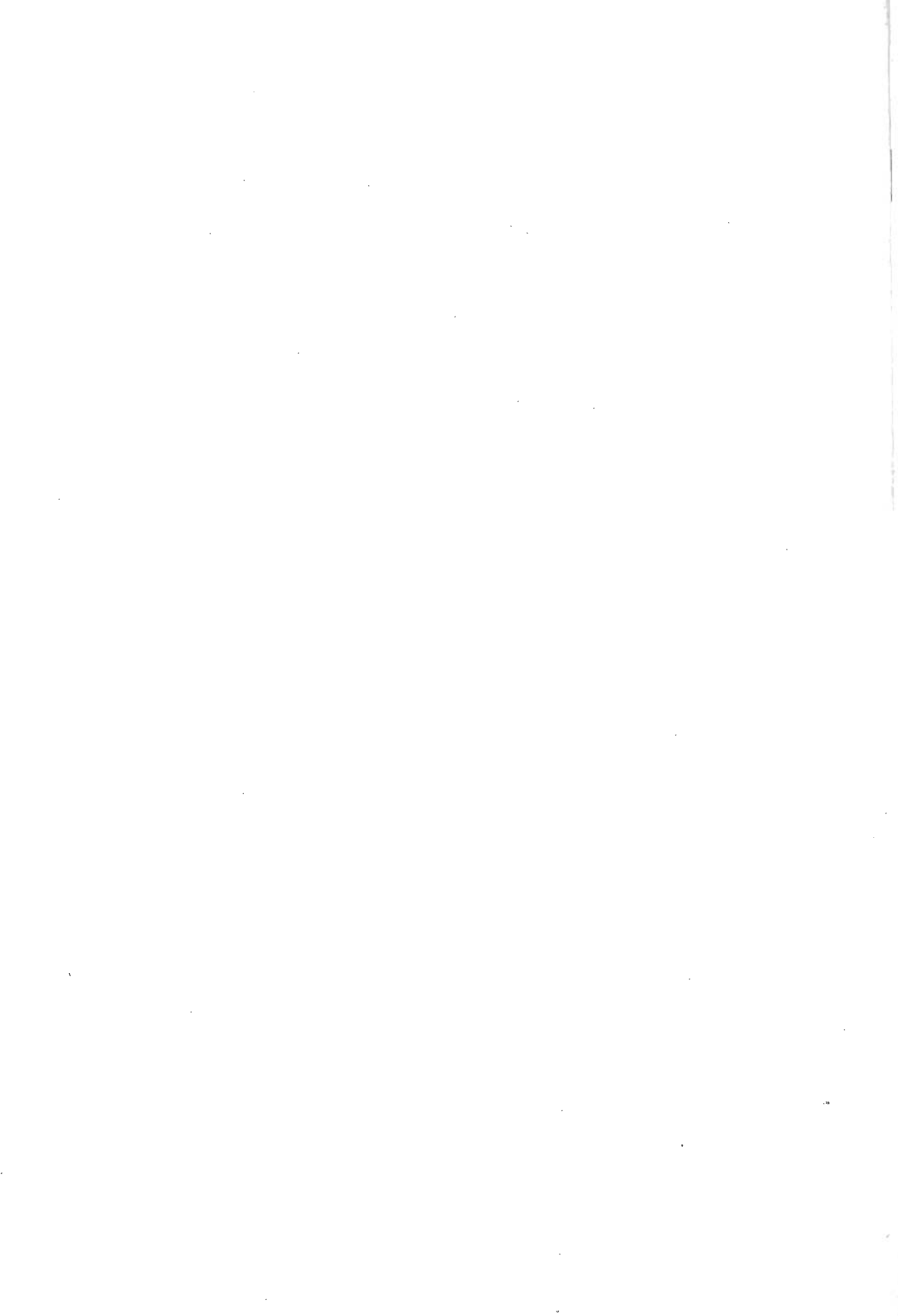
The paper deals with plates and shells subject to discretization which is considered as a set of constraints of special type imposed on the structural motion. They are independent of body forces, surface tractions or mass distribution. The discretized plates and shells are examples of constrained bodies the mechanics of which has been formulated by Cz. Woźniak.

By introducing an equivalence relationship in the set of all discretizations and by evaluating the reactions occurring due to the constraints imposed it turns out to be possible to estimate each discretization. Selecting the better discretization is called the discretization control.

Paper describes the methods of controlling of discretization of plates and shells, presents criterions of estimation of the solution obtained and formulates the problem of optimal discretization control.

INSTYTUT MECHANIKI
UNIwersytetu warszawskiego

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lutego 1975 r.



WYBOCZENIE UDERZENIOWE PRĘTA O DUŻEJ SMUKŁOŚCI

RYSZARD GR Y B O Ś (GLIWICE)

1. Sformułowanie problemu i cel pracy

Utratę stateczności pręta, wywołaną uderzeniem podłużnym, określa się jako stan ruchu, podczas którego ugięcia wykazują tendencję nieograniczonego wzrostu. Wzbudzenie ruchu poprzecznego przez uderzenie podłużne wymaga istnienia pewnych czynników inicjujących, którymi są: odstępstwa osi pręta od idealnej prostoliniowości, mimośrodowość siły uderzenia, niejednorodność materiału, stan naprężeń szczałkowych (walcowniczych, spawalniczych) i inne. Przyczyną bezpośrednią ruchu poprzecznego jest fala ciśnień propagująca się wzdłuż pręta z prędkością $c = \sqrt{E/\rho}$, gdzie E , ρ oznaczają moduł Younga i gęstość materiału pręta.

Stan krytyczny w sensie wyżej określonym wiąże się z pojęciem «krytycznej strefy wzbudzenia». Jest to odcinek pręta objęty falą ciśnienia w chwili utraty stateczności. Koncepcja krytycznej strefy wzbudzenia została wprowadzona przez GERARDA i BECKERA w roku 1952 [1]. Później posługiwało się nią jeszcze kilka innych badaczy [2, 3, 4], próbując określić tzw. krytyczne parametry uderzenia.

Autorzy pracy [1] analizując wyniki własnych doświadczeń doszli do wniosku, że ani wymienione powyżej czynniki inicjujące ruch poprzeczny, ani smukłość pręta, czy też warunki podparcia końca nieuderzonego, nie wpływają na postać wyboczenia o ile długość krytycznej strefy wzbudzenia jest mniejsza od długości pręta. Do analogicznych wniosków prowadzą także wyniki późniejszych doświadczeń MAŁYSZEWA [9].

Jednakże samą długość krytyczną określano dotychczas teoretycznie przez intuicyjne kojarzenie stanu krytycznego w warunkach dynamicznych z podobnym stanem przy ścisłaniu statycznym (tzn. ze smukłością krytyczną w sensie Eulera) pręta jednym końcem podpartego przegubowo, a na drugim sztywno utwierdzonego [1, 7].

W pracy niniejszej do określenia długości krytycznej dochodzi się przez analizę prędkości (fazowej i grupowej) propagacji fal giętnych w pręcie ścisłanym uderzeniowo. Okazało się, iż faktycznie smukłość fal wybozeniowych pozostaje w pewnym przybliżonym związku z eulerowską smukłością krytyczną, jednakże dla pręta o nieco innych warunkach brzegowych. Wyprowadzono wzory na długość fali wybozeniowej zarówno sprężystej, jak i sprężysto-plastycznej. Konfrontacja z wynikami doświadczeń wykazuje zadowalającą zgodność.

Obliczenia poprzedzone zostały wyprowadzeniem równań różniczkowych opisujących sprzężone drgania podłużno-giętne, ponieważ w tym względzie istnieją w literaturze pewne ostateczności (por. np. [2, 5 - 8]).

2. Równania różniczkowe problemu

Na gruncie hipotezy płaskich przekrojów stan przemieszczeń pręta, w którym propaguje się sprzężona fala podłużno-giętna, opisują trzy funkcje: $u(x, t)$, $w(x, t)$, $\psi(x, t)$. Pierwsza jest przemieszczeniem osiowym przekroju o odciętej x w chwili t , druga oznacza przemieszczenie poprzeczne (ugięcie) punktu na osi centralnej y , prostopadłej do płaszczyzny zginania, trzecia oznacza kąt obrotu przekroju względem osi y .

Siły wewnętrzne w pręcie wyrażone są przez przemieszczenia wzorami następującymi:

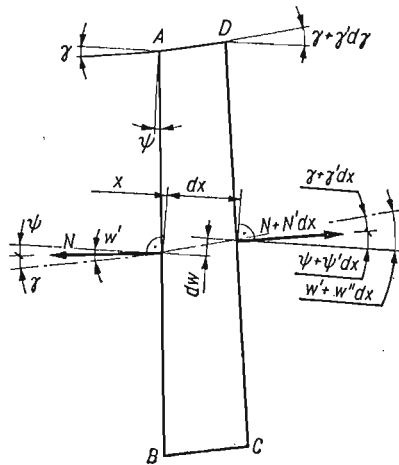
$$(2.1) \quad \text{siła poosiowa (ściskająca)} \quad N(x, t) = EFu'(x, t),$$

$$(2.2) \quad \text{siła poprzeczna (tnąca)} \quad Q(x, t) = k^{-1}GF[w'(x, t) - \psi(x, t)],$$

$$(2.3) \quad \text{moment zginający} \quad M(x, t) = -EI\psi'(x, t).$$

Przecinek u góry oznacza różniczkowanie względem x , kropką oznaczamy różniczkowanie względem t ; k jest współczynnikiem ścinania.

Przechodząc do ustawienia równań ruchu rozpatrzmy najpierw geometrię odkształcenia elementarnego wycinka pręta o długości dx (rys. 1). Dwie płaszczyzny przekroju poprzecz-



Rys. 1

nego AB i CD , pierwotnie równoległe, po odkształceniu obracają się względem siebie o kąt $\psi'dx$. Kąty w narożach A, B, C, D , pierwotnie proste, wskutek odkształceń postaciowych zmieniają się o γ w narożach A, B , zaś o $\gamma + \gamma'dx$ w narożach sąsiednich C i D . Te same kąty tworzą wektory sił normalnych z kierunkiem stycznej do osi ugiętej. Natomiast wektory tych sił nachylone są do osi x pod kątami ψ oraz $\psi + \psi'dx$ odpowiednio.

Uwzględniając te fakty otrzymujemy następujące warunki równowagi dynamicznej elementarnego wycinka pręta:

$$(2.4) \quad \rho F \ddot{u} = N' - (Q\psi)',$$

$$(2.5) \quad \rho F \ddot{w} = Q' + (N\psi)',$$

$$(2.6) \quad \rho I \ddot{\psi} = -M' + Q - N(w' - \psi).$$

Podstawiamy tu wzory (2.1), (2.2), (2.3) oraz wprowadzamy zmienne bezwymiarowe

$$\bar{x} = \frac{x}{l_m}, \quad \bar{t} = \frac{ct}{l_m}, \quad \bar{u} = \frac{u}{l_m}, \quad \bar{w} = \frac{w}{l_m}; \quad l_m \equiv \frac{m}{\rho F}.$$

W dalszym ciągu będziemy jednak pomijać kreski nad \bar{x} , \bar{t} , \bar{u} , \bar{w} , ponadto różniczkowanie względem \bar{x} i \bar{t} nadal będziemy oznaczać przecinkiem i kropką u góry.

Podstawowy układ równań różniczkowych problemu przyjmuje ostatecznie postać

$$(2.7) \quad \ddot{u} - u'' = \gamma[(w' - \psi)\psi]',$$

$$(2.8) \quad \ddot{w} - \gamma w'' = -\gamma\psi' + (u'\psi)',$$

$$(2.9) \quad \ddot{\psi} - \psi'' = \kappa^2(\gamma - u')(w' - \psi),$$

gdzie

$$\gamma \equiv \frac{G}{kE}, \quad \kappa = \frac{l_m}{r} = \frac{m}{\rho Fr}, \quad r = \sqrt{\frac{I}{F}}.$$

Równania powyższe opisują sprzężony ruch podłużno-poprzeczny pręta bez krzywizny wstępnej i pozbawionego cech lepkoplastycznych.

3. Sprężyste fale wyboeczeniowe

Przytoczymy najpierw skrótkowo pewne fakty i wzory dotyczące propagacji fali podłużnej. Jeżeli pominąć wpływ ruchu poprzecznego na ruch podłużny, to zamiast (2.7) otrzymujemy jednorodne równanie falowe $\ddot{u} - u'' = 0$. Problem początkowo-brzegowy, jaki formułuje się dla tego równania przy uderzeniu ciałem o skończonej masie, posiada znane rozwiązanie (np. [5])

$$(3.1) \quad u(x, t) = \frac{v_0}{c} (1 - e^{x-t}) \quad \forall x \in [0, t],$$

$$(3.2) \quad u(x, t) = \frac{v_0}{c} [e^{-(x+t-2t)} - e^{x-t}] \quad \forall x \in [t, 2l-t]$$

itd., gdzie l jest (bezwymiarową) długością pręta, v_0 — prędkością uderzenia. Uderzenie ciałem o nieskończenie dużej masie wywołuje równomierne ściskanie na odcinku $x \in [0, t]$, przy czym skrócenie właściwe $u' = -v_0/c \equiv -\varepsilon_0$.

Mając dalej na uwadze ten przypadek rozpatrzmy warunki propagacji sprzężonej fali podłużno-giętej. Gdy do (2.8), (2.9) podstawić $u' = -\varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$), to otrzymuje się układ równań

$$(3.3) \quad \ddot{w} - \gamma w'' = -(\gamma + \varepsilon_0)\psi',$$

$$(3.4) \quad \ddot{\psi} - \psi'' = \kappa^2(\gamma + \varepsilon_0)(w' - \psi),$$

z którego, po eliminacji kąta ψ , wynika równanie dla funkcji ugięć

$$(3.5) \quad \ddot{\ddot{w}} - (1 + \gamma)\ddot{w}'' + \gamma w'''' + \kappa^2(\gamma + \varepsilon_0)\ddot{w} + \varepsilon_0\kappa^2(\gamma + \varepsilon_0)w'' = 0.$$

Jest to równanie Timoshenki uogólnione na przypadek pręta ściskanego równomiernie ($\varepsilon_0 = \text{const}$).

Jeżeli równanie (3.5) ma opisywać ruch falowy, to jego rozwiązanie powinno mieć postać okresowej funkcji argumentu $(c_f t - x)/\Lambda$, gdzie Λ jest długością fali, zaś c_f oznacza prędkość fazową ($0 \leq c_f < c$). Niech

$$(3.6) \quad w(x, t) = A \exp \left[i \kappa \frac{2\pi r}{\Lambda} (\bar{c}_f t - x) \right], \quad \bar{c}_f \equiv \frac{c_f}{c}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Podstawienie w (3.5) daje następujący związek między długością fali i prędkością fazową

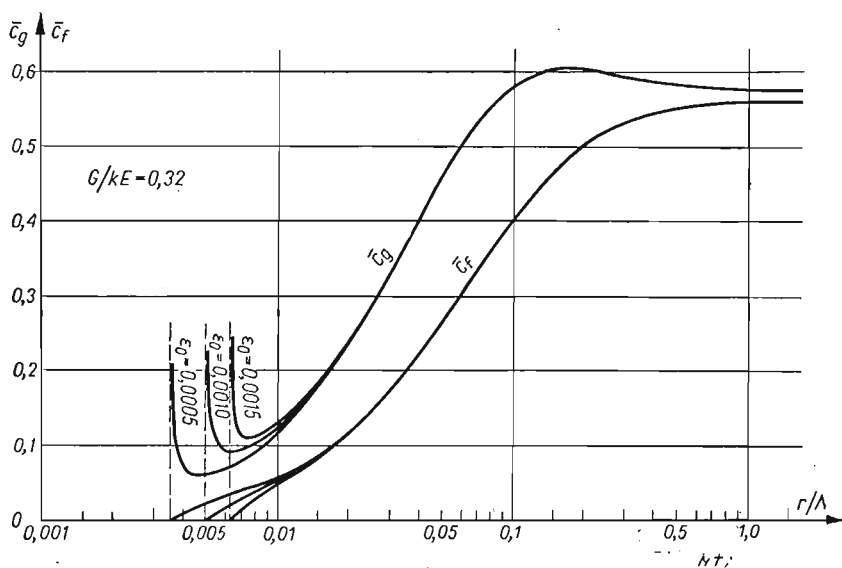
$$(3.7) \quad \frac{\Lambda}{r} = 2\pi \sqrt{\frac{(\gamma - \bar{c}_f^2)(1 - \bar{c}_f^2)}{(\gamma + \varepsilon_0)(\bar{c}_f^2 + \varepsilon_0)}}.$$

Fala o długości Λ propaguje się więc z określoną prędkością fazową, którą można obliczyć jako dodatni pierwiastek równania

$$(3.8) \quad \bar{c}_f^4 - [(\gamma + \varepsilon_0)(\Lambda/2\pi r)^2 + 1 + \gamma]\bar{c}_f^2 - [\varepsilon_0(\gamma + \varepsilon_0)(\Lambda/2\pi r)^2 - \gamma] = 0$$

spełniający warunek $\bar{c}_f < \sqrt{\gamma}$ ($c_f < \sqrt{G/kQ}$).

Na rys. 2 przedstawiony jest wykres zależności $\bar{c}_f = f(r/\Lambda)$, skonstruowany na podstawie równania (3.8); jest to tzw. krzywa dyspersji. Przyjęto $\gamma = G/kE = 0,32$, co odpowiada wartości ułamka Poissona 0,3 oraz współczynnikowi ścinania $k = 1,2$. W zakresie



Rys. 2

fal krótkich i średniej długości ($r/\Lambda > 0,02$) krzywa nie różni się zasadniczo od tej, jaką na podstawie ścisłego rozwiązania otrzymał DAVIES [12] bez uwzględnienia ciśnienia poosiowego. Wpływ tego czynnika uwidacznia się dopiero w zakresie fal długich, gdzie krzywa ulega rozszczepieniu na szereg gałęzi, z których każda odpowiada innej wartości ciśnienia. Ze wzrostem długości fali krzywa dyspersji monotonicznie opada, aż przy długości

$$(3.9) \quad A_k = 2\pi r \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\varepsilon_0(\gamma + \varepsilon_0)}} \approx \frac{2\pi r}{\sqrt{\varepsilon_0}} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \right)$$

przecina oś rzędnych, czemu odpowiada $c_f = 0$. Oznacza to, że wzdłuż belki uderzonej poosiowo (ciałem o nieskończenie dużej masie) nie mogą propagować się fale giętne o długości $\lambda \geq \lambda_k$, bowiem przy tej długości fali następuje wybozczenie dynamiczne. Dlatego falę giętą o długości λ_k będziemy nazywać «falą wybozczeniową».

Ponieważ $\gamma \sim O(1)$, zaś $\varepsilon_0 \sim O(10^{-3})$, więc zamiast (3.9) można z dużą dokładnością przyjąć

$$(3.10) \quad \lambda_k \approx 2\pi r / \sqrt{\varepsilon_0} = 2\pi r \sqrt{c/v_0}.$$

Fakt, iż nie występuje tu współczynnik γ , a tym samym współczynnik kształtu k , świadczy o tym, że smukłość krytyczna λ_k/r nie zależy od kształtu przekroju belki, a jedynie od względnej prędkości uderzenia. Tak np. w belce stalowej przy prędkości uderzenia $v_0 = 10^{-3} c$ wystąpi fala wybozczeniowa o długości $2\pi \sqrt{10^3} r \approx 200 r$. Jak widać z tego przykładu, sprężysta fala wybozczeniowa może wystąpić tylko w prętach o stosunkowo dużej smukłości λ (w danym przypadku, gdy $\lambda > 200$).

Przejdźmy do określenia «prędkości grupowej» c_g , lub jej bezwymiarowego odpowiednika $\bar{c}_g = c_g/c$. W tym względzie skorzystamy ze znanego związku między prędkościami c_f , c_g i długością fali

$$c_g = c_f - \lambda \frac{dc_f}{d\lambda}$$

lub po zastosowaniu wielkości bezwymiarowych

$$c_g = \bar{c}_f + \frac{r}{\lambda} \frac{d\bar{c}_f}{d(r/\lambda)}.$$

Uwzględniając zależność (3.7) otrzymujemy po wykonaniu licznych rachunków

$$(3.11) \quad \bar{c}_g = \bar{c}_f + \frac{(\bar{c}_f^2 + \varepsilon_0)(\gamma - \bar{c}_f^2)(1 - \bar{c}_f^2)}{\bar{c}_f[(1 + \varepsilon_0)(\gamma + \varepsilon_0) - (\bar{c}_f^2 + \varepsilon_0)^2]}.$$

Przebieg krzywych dyspersyjnych dla rozmaitych wartości ε_0 wykazuje, iż w zakresie fal średnich i krótkich ciśnienie nie wpływa na prędkość przenoszenia energii fal giętnych (rys. 2). Dla $r/\lambda \approx 0,2$ występuje maksimum bezwzględne ($\max \bar{c}_g \approx 0,61$), co oznacza, że przy propagacji krótkotrwałego zaburzenia giętnego najszybciej będzie przenoszona energia związana z falą o długości $\sim 5 r$ (dla przyjętej wartości γ).

W pobliżu stanu krytycznego ($\lambda \approx \lambda_k$) słuszne są następujące przybliżone wzory na prędkość fazową i grupową:

$$\bar{c}_f \approx \sqrt{\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - \varepsilon_0}, \quad \bar{c}_g \approx 2\bar{c}_f + \frac{\varepsilon_0}{\bar{c}_f},$$

wyprowadzone z (3.7) i (3.11). Przy $\bar{c}_f = \sqrt{\varepsilon_0/2}$ prędkość grupowa osiąga minimum (które wynosi $2c \sqrt{2\varepsilon_0}$), po czym zaczyna gwałtownie wzrastać aż do nieskończoności przy $\lambda = \lambda_k$. Oznacza to, iż energia ruchu poprzecznego wzrasta wówczas nieograniczenie, chociaż ruch nie ma charakteru falowego ($c_f = 0$); jest to sytuacja charakterystyczna dla stanu krytycznego.

Zauważmy, iż fali wybozczeniowej towarzyszy skrócenie dynamiczne $\partial u/\partial x = \varepsilon_0 \approx (2\pi r/\lambda_k)^2$, które zarazem jest skróceniem krytycznym, jakie występuje przy «statycznym» ściskaniu słupa o smukłości λ_k/r , «obustronnie utwierdzonego». Wiąże się to z fak-

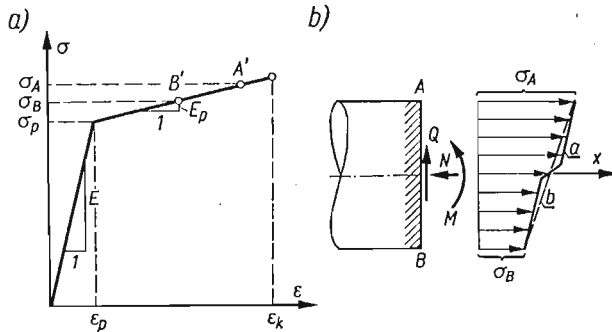
tem, iż warunki brzegowe, jakie występują na czole fali giętej, odpowiadają właśnie sztywnemu utwierdzeniu. To samo powiedzieć można o brzegu uderzonym, jeśli ciało uderzające uniemożliwia swobodę obrotu czołowego przekroju pręta.

4. Plastikne fale wyboczeniowe

Przy uderzeniu z prędkością $> \varepsilon_p c$ (ε_p oznaczają skrócenie właściwe na granicy plastyczności) pojawiają się wyboczeniowe fale plastyczne. Ich amplitudy są stosunkowo duże, tak, że fale wyboczeniowe dają się łatwo obserwować gołym okiem jako trwałe, faliste wygięcia pręta.

Analiza teoretyczna tego przypadku jest znacznie bardziej skomplikowana niż przypadku sprężystego. Zasadniczym powodem jest nieliniowość charakterystyki $\sigma(\varepsilon)$ materiału i związana z tym zmienna prędkość propagacji fali, nieliniowy rozkład naprężeń od zginania w przekroju poprzecznym i inne efekty wtórne.

Poszukując rozwiązania przybliżonego przyjmujemy do rozważań charakterystykę sprężysto-plastyczną ze wzmocnieniem liniowym (rys. 3a). W związku z tym rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym będzie opisany linią łamaną (rys. 3b). Jednakże dalsze rozważania ograniczymy do fazy silnie rozwiniętych odkształceń plastycznych, dzięki



Rys. 3

czemu można: po pierwsze — rozkład naprężeń aproksymować prostą o nachyleniu proporcjonalnym do modułu wzmocnienia E_p , po drugie — założyć, iż naprężenia w warstwach skrajnych (a więc także w warstwie odciążonej przez zginanie) przekraczają granicę plastyczności ($\sigma_p < \sigma_B < \sigma_A$).

Nierównomierny rozkład naprężeń w przekroju implikuje istnienie momentu zginającego: $M_p = -E_p I \psi'$ [por. (2.3)]. Ponadto wystąpi tam siła ściskająca $N = F\sigma$ (ciśnienie osiowe $\sigma > \sigma_p$) oraz siła poprzeczna, określona nadal wzorem (2.2), w którym jedynie moduł sprężystości G zastąpimy odpowiednim modułem wzmocnienia G_p .

Przy tych założeniach równania dynamiczne pręta w fazie aktywnego płynięcia zachowują postać (2.5), (2.6). Gdy siły wewnętrzne wyrazimy przez przemieszczenia i wprowadzimy nowe wielkości bezwymiarowe

$$\bar{w} = \frac{w}{r}, \quad \bar{x} = \sqrt{s} \frac{x}{r}, \quad \bar{t} = \frac{\sigma}{\sqrt{\rho E_p}} \frac{t}{r}, \quad s = \frac{\sigma}{E_p}, \quad \beta = \frac{G_p}{k\sigma},$$

to otrzymamy

$$(4.1) \quad \ddot{w} - \beta w'' + \frac{1 + \beta}{\sqrt{s}} w' = 0,$$

$$(4.2) \quad s\ddot{\psi} - \psi'' - (1 + \beta)(\sqrt{s} w' - \psi) = 0; \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \equiv (\cdot)', \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \equiv (\cdot)' \right),$$

przy czym kreski nad \bar{w} opuszczamy.

Wyeliminowanie kąta ψ daje ostatecznie jedno podstawowe równanie zagadnienia

$$(4.3) \quad s\ddot{\bar{w}} - (1 + \beta s)\ddot{w}'' + \beta w^{IV} + (1 + \beta)\ddot{w} + (1 + \beta)w'' = 0.$$

Rozwiązania falowego poszukujemy w postaci

$$(4.4) \quad w(x, t) = A \exp \left[i \frac{2\pi r}{\Lambda \sqrt{s}} (\bar{c}_f t - x) \right], \quad \left(\bar{c}_f \equiv \frac{c_f}{\sqrt{\sigma/\rho}} \right).$$

Podstawienie w (4.3) daje następujący związek między długością fali i prędkością fazową

$$\frac{\Lambda}{r} = 2\pi \left[\frac{s\bar{c}_f^4 - (1 + \beta s)\bar{c}_f^2 + \beta}{s(1 + \beta)(1 + \bar{c}_f^2)} \right]^{1/2}.$$

Dla $c_f = 0$ otrzymujemy długość plastycznej fali wyboeczeniowej

$$(4.5) \quad \Lambda_k = 2\pi r \sqrt{\frac{\beta}{s(1 + \beta)}} = 2\pi r \sqrt{\frac{E_p/\sigma}{1 + \beta^{-1}}}.$$

Ponieważ na ogół $\sigma \ll G_p$, $k \sim O(1)$, więc $\beta^{-1} \equiv k\sigma/G_p \ll 1$ i można napisać

$$(4.5') \quad \Lambda_k \approx 2\pi r \sqrt{E_p/\sigma}.$$

We wzorach tych prędkość uderzenia nie występuje jawnie, ale długość fali wyboeczenia zależy od v_0 poprzez ciśnienie σ .

Aby wyznaczyć tę zależność weźmy pod uwagę elementarny odcinek pręta o masie $\rho F dx$. Po przejściu fali naprężen pęd odcinka wzrasta o $(\rho F dx) dv$, gdzie $v = \partial u / \partial t$ jest prędkością cząstek w ruchu podłużnym. Przyrost pędu następuje pod działaniem impulsu $d(F\sigma)dt$. Fala ciśnienia poruszając się z prędkością

$$(4.6) \quad \tilde{c} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}}$$

przebiega przez rozważany odcinek w czasie $dt = dx/\tilde{c}$.

Na podstawie zasady pędu i impulsu

$$(\rho F dx) dv = d(F\sigma) \frac{dx}{\tilde{c}}.$$

Stąd $dv = d\sigma/\rho\tilde{c}$ i po scałkowaniu z uwzględnieniem wzoru (4.6)

$$(4.7) \quad v_0 = \int_0^\sigma \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{\sigma_1}} d\sigma_1.$$

Znając charakterystykę $\sigma(\varepsilon)$ można całkę powyższą efektywnie obliczyć, a następnie równanie (4.7) rozwiązać względem σ . W ten sposób otrzymamy poszukiwaną zależność $\sigma(v_0)$.

Obliczenia są szczególnie proste w przypadku charakterystyki dwuliniowej, jak na rys. 3a; wówczas $\partial\sigma/\partial\varepsilon = E$ dla $0 < \sigma_1 < \sigma_p$ oraz $\partial\sigma/\partial\varepsilon = E_p$ dla $\sigma_p < \sigma_1 < \sigma$, wobec czego

$$v_0 = \frac{\sigma_p}{\sqrt{\rho E}} + \frac{\sigma - \sigma_p}{\sqrt{\rho E_p}} \quad \text{dla} \quad v_0 > \frac{\sigma_p c}{E},$$

stąd

$$(4.8) \quad \sigma = E_p \frac{v_0}{c_p} + \left(1 - \sqrt{\frac{E_p}{E}}\right) \sigma_p.$$

Fala podłużna o takiej intensywności propaguje się z prędkością $c_p = \sqrt{E_p/\rho}$.

Wzór (4.5) ma charakter przybliżony z powodu kilku uproszczeń przyjętych podczas jego wyprowadzania. Najpoważniejszym źródłem błędu jest faktyczne pominięcie fazy sprężystej w równaniu falowym (4.3), dzięki czemu we wzorze końcowym wystąpił tylko moduł wzmocnienia E_p . W rzeczywistości fale wyboczeniowe tworzą się w warunkach sprężysto-plastycznego stanu odkształcenia, przy czym $E \gg E_p$. Omawiany wzór pozwala więc tylko na oszacowanie długości fali wyboczeniowej z «niedomiarem».

Badania eksperymentalne nad wyboczeniem dynamicznym pręta wykazują pewien rozrzut wartości Λ_k zmierzonych na jednej próbce, a wyniki pomiarów cytowane w literaturze (np. [11]) dotyczą wartości średnich. Dlatego, chcąc skonfrontować te wyniki z teorią, wydaje się słuszne podstawienie w (4.5') zamiast E_p , średniej wartości modułu w przedziale $[0, \varepsilon_k]$

$$E_k = \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^{\varepsilon_k} \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} d\varepsilon,$$

gdzie ε_k jest maksymalnym skróceniem sprężysto-plastycznym. W przypadku charakterystyki dwuliniowej otrzymujemy

$$E_k = \frac{1}{\varepsilon_k} [E\varepsilon_p + E_p(\varepsilon_k - \varepsilon_p)],$$

przy czym

$$\varepsilon_k = \varepsilon_p + \frac{\sigma - \sigma_p}{E_p}$$

lub po podstawieniu (4.8)

$$(4.9) \quad \varepsilon_k = \frac{v_0}{c_p} - \left(\sqrt{\frac{E}{E_p}} - 1\right) \varepsilon_p.$$

Jeżeli zatem we wzorze (4.5') zamiast E_p podstawimy $E_k = \sigma/\varepsilon_k$, to otrzymamy $\Lambda_k \approx \approx 2\pi r \varepsilon_k^{-1/2}$ lub

$$(4.10) \quad \Lambda_k \approx 2\pi r \left[\frac{v_0}{c_p} - \left(\sqrt{\frac{E}{E_p}} - 1\right) \varepsilon_p \right]^{-1/2}.$$

Jest to przybliżony wzór na średnią długość plastycznych fal wyboczenia, wywołanych uderzeniem z prędkością $v_0 > \sigma_p c/E$.

5. Konfrontacja z doświadczeniem

Spośród licznych eksperymentów, dotyczących uderzeniowego wybozczenia prętów [1, 3, 7, 9, 10, 11] omówimy tu jedynie doświadczenia MALYSZEWA [9] oraz ABRAHAMSONA i GOODIERA [11], w których mierzono długości fal wybozczeniowych, zarówno sprężystych jak i plastycznych.

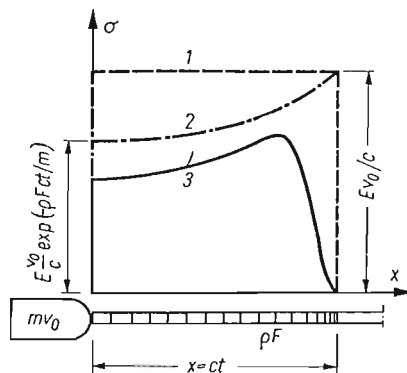
Eksperymenty MALYSZEWA przeprowadzone były na próbkach w postaci kilkumetrowego odcinka drutu stalowego (o średnicy $d = 3$ mm) lub miedzianego ($d = 2,6$ mm), spoczywającego swobodnie na płaskim, poziomym podłożu. Smukłość prętów próbnych przekraczała wielokrotnie smukłość fal sprężystych, dzięki czemu można było rejestrować, za pomocą ultraszybkich fotografii, przebieg procesu wybozczenia nie zakłócony działaniem fali odbitej (która powracała do miejsca uderzenia po upływie $\sim 3,5$ ms).

Uderzenia realizowano przy pomocy młota wahadłowego (dla prędkości ≤ 5 m/s) oraz młota wirującego ($5 < v_0 < 60$ m/s).

Na próbkach miedzianych, przy prędkości uderzenia 5 m/s, tworzyły się sprężyste fale wybozczeniowe o długości od 11 do 22 cm. Ze wzoru (3.10) dla $r = d/4 = 0,065$ cm, $c = 3,7 \cdot 10^5$ cm/s, $v_0 = 5 \cdot 10^2$ cm/s wynika $\lambda_k \approx 11,1$ cm, co się dobrze zgadza z dolną granicą obserwowanych długości fal.

Występowanie fal dłuższych tłumaczy się odmiennym niż przyjęto w obliczeniach rozkładem naprężeń w strefie wzbudzenia. Przyczyny tego stanu rzeczy są dwojakiej natury: po pierwsze — skończona masa ciała uderzającego, po drugie — efekty lokalne.

Zagadnienie to ilustruje rys. 4. W zakresie sprężystym rozkład równomierny (krzywa 1) wystąpiłby tylko przy uderzeniu ciałem nieskończenie wielkim. Uwzględnienie skończonej masy prowadzi do wykładniczego spadku naprężeń od wartości $E v_0 / c$ na czole fali ($x = ct$), do wartości $E(v_0/c) \exp(-\rho F c t / m)$ na brzegu uderzonym (krzywa 2).



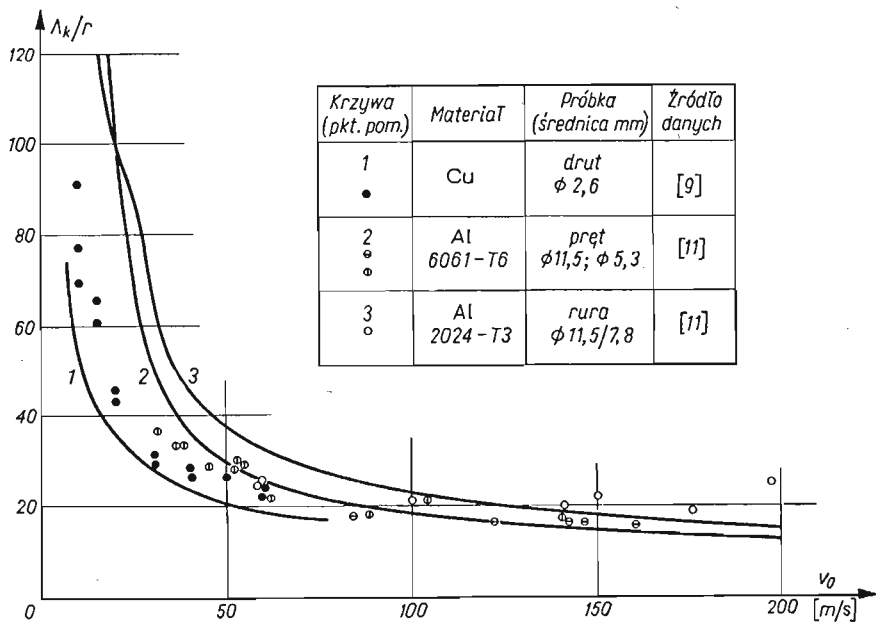
Rys. 4

Wpływ odkształceń lokalnych na rozkład naprężeń w strefie wzbudzenia jest bardzo istotny, ale określenie go na drodze teoretycznej jest problematyczne z uwagi na trudność sprecyzowania rzeczywistych warunków brzegowych, jakie istnieją na powierzchni czołowej podczas zderzenia. Ograniczymy się do przypomnienia najważniejszych wniosków, które wynikają z rozwiązania podobnego lecz nieco uproszczonego zagadnienia kontaktowego

teorii uderzenia (por. np. [13]). Otóż przebieg (w czasie) siły stykowej zależy od geometrii powierzchni w obszarze zetknięcia oraz od charakterystyki sprężysto-plastycznej materiału. Wpływ podatności lokalnej przejawia się przede wszystkim w złagodzeniu ostrości maksimum fali ciśnienia oraz w nieznacznym jego opóźnieniu. Pewną rolę odgrywa tu także lepkość materiału.

W rezultacie rzeczywisty rozkład naprężeń w strefie wzbudzenia jest nie tylko nierównomierny, ale i jego maksimum jest mniejsze od przyjętego w obliczeniach (krzywa 3). Ponieważ zaś mniejszym naprężeniom towarzyszą dłuższe fale wybojeniowe, przeto mamy wyjaśnienie przyczyn powstawania także dłuższych fal sprężystych niż to by wynikało ze wzoru (3.10).

Nieco mniejszej rozbieżności wyników można oczekiwać w przypadku fal plastycznych, bowiem wówczas rozkład naprężeń jest bardziej równomierny. Korzystając ze wzorów rozdziału 4 obliczono długości fal plastycznych w drucie miedzianym dla następujących danych: $E = 10^5 \text{ MN/m}^2$, $E_p = 1,8 \cdot 10^3 \text{ MN/m}^2$, $\rho = 8,95 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_p = 150 \text{ MN/m}^2$, $\varepsilon_p = 0,15\%$, $c_p = 456 \text{ m/s}$. Wyniki obliczeń przedstawia krzywa 1 na rys. 5, obrazująca zależność $\Lambda_k/r = f(v_0)$. Miedź jest materiałem wrażliwym na prędkość odkształcenia, dlatego w obliczeniach dokładniejszych należałoby uwzględnić zależność σ_p od v_0 .



Rys. 5

Doświadczenia opisane w pracy [11] wykonano na prętach aluminiowych (pełnych i rurowych), które rozprędzone do stosunkowo dużych prędkości (30 ÷ 200 m/s) uderzały poosiowo w sztywną, nieruchomą przegrodę. Przy prędkości $\sim 22 \text{ m/s}$ stwierdzano pierwsze objawy wybożenia plastycznego. Do obliczeń przyjęto następujące dane:

dla materiału Al 6061-T6: $E = 0,694 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$, $E_p = 1,24 \cdot 10^3 \text{ MN/m}^2$, $\rho = 2,70 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_p = 310 \text{ MN/m}^2$, $\varepsilon_p = 0,43\%$, $c_p = 678 \text{ m/s}$;

dla materiału 2024-T3:

$E = 0,694 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$, $E_p = 2,76 \cdot 10^3 \text{ MN/m}^2$, $\rho = 2,70 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_p = 360 \text{ MN/m}^2$, $\varepsilon_p = 0,51\%$, $c_p = 1000 \text{ m/s}$.

Wyniki obliczeń oraz pomiarów długości fal (oznaczone \oplus , \ominus , \circ na rys. 5) wykazują dobrą zgodność w dużym przedziale prędkości uderzenia. Rozbieżności należy głównie przypisać ograniczonej masie ciała uderzającego oraz wrażliwości aluminium na prędkość odkształcenia. Pewien wpływ ma tu także rozpęczanie próbek w pobliżu brzegów uderzających.

6. Uwagi końcowe

Jest godne podkreślenia, iż do wzoru na długość fali wyboyczeniowej doszliśmy (w rozdziałach 3 i 4) przez ogólną analizę warunków propagacji fal podłużno-giętnych, a więc bez formułowania problemu brzegowo-początkowego. Konfrontacja teorii z wynikami doświadczeń potwierdza słuszność takiego podejścia, a tym samym niezależność długości krytycznej od warunków brzegowych.

Jeżeli smukłość pręta jest mniejsza od λ_k/r lub prędkość uderzenia jest mniejsza od $c(2\pi r/\lambda_k)^2$, wówczas wyboyczenie sprężyste nie może nastąpić podczas przebiegu pierwszej fali ciśnienia. Stan krytyczny może jednak zaistnieć podczas jednego z następnych przebiegów fali ciśnienia, bowiem kolejne odbicia tej fali (od brzegu utwierdzonego) intensyfikują początkowo stan naprężenia, większym zaś ciśnieniom towarzyszą coraz krótsze fale wyboyczeniowe.

Analizę dynamiki procesu wyboyczenia w późniejszej fazie uderzenia komplikuje nader złożony obraz rozkładu ciśnień, jaki wytwarza się wskutek nałożenia fal wielokrotnie odbitych. Dodatkową komplikację rachunkową stanowi lepkość materiału, której wpływ musi być bezwzględnie brany pod uwagę przy analizie późniejszej fazy procesu. Trudności te można zasadniczo pokonać stosując metodę charakterystyk.

Na zakończenie wypada przypomnieć, iż każdy pręt rzeczywisty posiada pewną krzywiznę wstępną lub inne czynniki warunkujące wzbudzenie drgań giętnych. Dlatego wyboyczenie uderzeniowe, rozumiane jako wzbudzenie ruchu poprzecznego elementów pręta, występuje zasadniczo przy każdej prędkości uderzenia. Jednakże przy prędkościach mniejszych od $c(2\pi r/\lambda_k)^2$ ma ono charakter lepkosprężysty, a więc po upływie pewnego czasu od uderzenia (rzędu kilkunastu okresów drgań poprzecznych) odkształcenia związane z falą giętną zanikają. Jest to więc przypadek asymptotycznej stateczności i jako taki nie stwarza niebezpieczeństwa uszkodzenia konstrukcji. Dopiero pojawienie się plastycznych fal wyboyczeniowych stanowi zagrożenie dla nośności konstrukcji poddanej obciążeniom uderzeniowym.

Literatura cytowana w tekście

1. G. GERARD, H. BECKER, *Column behaviour under conditions of impact*, Journ. Aeronaut. Sci., 1, 19 (1952), 58 - 60.
2. S. KALISKI, *Stateczność udarowa pręta*, Biul. WAT, 14 (1955).
3. O. И. КАЦИТАДЗЕ, *Теоретическое и экспериментальное исследование ударного продольного изгиба*, Труды Кут. с.-х ин-та 1 (1956), 151 - 168.
4. Г. Н. РАЗМАДЗЕ, О. И. КАЦИТАДЗЕ, *О проблеме ударной продольной устойчивости*, Тр. Кут. с.-х. ин-та 2 (1957), 381 - 386.

5. С. Д. Пономарев и др., *Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*, т. II, Москва 1952.
6. N. J. HUFFINGTON, *Response of elastic columns to axial pulse loading*, AIAA Journ., 9, 1 (1963), 2099-2104
7. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
8. Б. А. Гордиенко, *Выпучивание стержней при ударном нагружении*, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1 (1969), 185 - 187.
9. Б. М. Малышев, *Устойчивость стержней при ударном сжатии*, инж. ж., Мех. тверд. тела, 4 (1966), 137 - 142.
10. М. Е. Каган, Н. Д. Геня, *Экспериментальное исследование работы деревянных стержней на продольный удар*, Изв. высш. учебн. зав. Строительство и архитектура, 3 (1961), 33 - 38.
11. G. R. ABRAHAMSON, J. N. GOODIER, *Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compression wave*, Trans. ASME, Journ. of Appl. Mech., E 33, 2 (1966), 214-247.
12. R. M. DAVIES, *Stress waves in solids*, Cambr. Univ. Press, 1956.
13. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.

Резюме

УДАРНОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕРЖНЯ С БОЛЬШОЙ ГИБКОСТЬЮ

Выведены дифференциальные уравнения описывающие сопряженное движение при продольном изгибе стержня из идеально упругого материала или из упруго-пластического материала с линейным упрочнением. Такого рода движение возникает вследствие продольного удара по одному из концов стержня.

На основе упомянутых уравнений, при предположении о равномерности сжатия в зоне возмущения, исследованы условия распространения продольно-изгибных волн. Оказалось, что каждому значению напряжения сжатия, а следовательно и каждой скорости удара, соответствует некоторая длина изгибной волны, при которой фазовая скорость падает до нуля, а групповая скорость неограниченно возрастает, это является признаком динамической неустойчивости стержня.

Сопоставление формул для длины волны выпучивания с приведенными в [9] и [11] экспериментальными результатами приводит, как для упругих, так и для пластических волн, к хорошему совпадению, однако длина пластической волны лучше описывается формулой в которой модуль упрочнения заменен усредненным по диапазону упруго-пластических деформаций касательным модулем.

Summary

IMPACT BUCKLING OF A SLENDER ROD

Differential equations of coupled longitudinal-flexural vibrations of a rod have been developed. Such a motion is excited by the longitudinal impact of a rigid body. The material of the rod may be ideally elastic or exhibit linear strain-hardening.

The conditions of the propagation of longitudinal-flexural waves have been investigated for a homogeneous compression in the excitation zone. It has been shown that to each compression, i.e. to each impact velocity corresponds a certain wavelength of bending, for which the phase velocity decreases to zero and the group velocity increases infinitely. That is characteristic for instability in the dynamic sense.

A confrontation of the formulas for the buckling wavelenegth with the test results described in [9], [11] shows a good agreement in the range of both elastic and plastic waves. In this second case a better agreement with the experiment is obtained by means of formula (4.5), in which instead of the strain-hardening modulus, the average tangent modulus is substituted.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lutego 1975 r.

DYNAMIKA PŁASKIEJ WIĄZKI PRZEWODÓW PRZY PRĄDACH ZWARCIOWYCH

MARIA RADWAŃSKA, ZENON WASZCZYŚCZYŃ (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne, założenia i oznaczenia

Przy projektowaniu konstrukcji wsporczych stacji rozdzielczych wysokich napięć należy uwzględnić dynamiczne oddziaływania powstające pomiędzy przewodami podczas krótkich zwarć. Znaczny wzrost sił elektrodynamicznych powoduje gwałtowne zbliżanie się przewodów, czemu towarzyszy wzrost sił w przewodach, a to z kolei wywołuje dynamiczną «odpowieź» konstrukcji wsporczej.

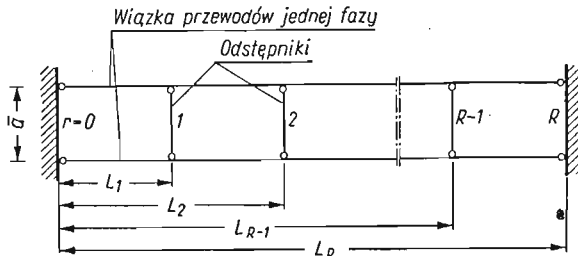
Pełne opisanie zjawiska jest zadaniem bardzo złożonym, gdyż wymaga ujęcia wzajemnego sprzężenia konstrukcji linowo-ramowej, jaką jest najprostszą stacją wysokiego napięcia (rys. 1). Obok oddziaływań elektrodynamicznych w wiązkach przewodów należa-



Rys. 1

łoby również uwzględnić oddziaływania międzyfazowe (międzywiązkowe). Obydwa typy oddziaływań mają charakter nieliniowy, gdyż zależą one nie tylko od zmiennego w czasie natężenia prądu zwarciovego, ale też od wzajemnej konfiguracji (przemieszczeń) przewodów.

W obecnej pracy zajmiemy się kluczowym problemem obliczania lin¹⁾ jednej wiązki dwuprzewodowej z nieregularnie umieszczonymi odstępnikami (rys. 2). Rozwiązywanie



Rys. 2

¹⁾ W dalszym ciągu we wszystkich miejscach, gdzie opisujemy mechaniczną stronę problemu, używamy raczej terminu «lina» niż «przewód», który bardziej kojarzy się ze zjawiskami elektrycznymi.

wiązki oddzielonej od konstrukcji wsporczej będzie stanowiło istotną część ogólnego algorytmu obliczania stacji rozdzielczych.

Dotychczas liczone liny przy prądach zwarciovych na podstawie szeregu upraszczających założeń [8, 10], z których jednym z istotniejszych jest narzucenie kształtu odkształconych lin, co jest równoznaczne z radykalnym zmniejszeniem jej liczby stopni swobody.

W obecnej pracy będziemy traktowali liny jako układy o nieskończonej liczbie stopni swobody. Możliwość powstania dużych kątów obrotu normalnej do osi liny skłania do oparcia się na teorii dużych przemieszczeń. Z kolei niektóre doświadczenia [1] wykazały, że do chwili «sklejenia się» przewodów istotny jest ich ruch poziomy. «Podrzucanie» następuje w dalszej fazie «sklejania». Towarzyszy temu powstanie impulsu przekazywanego na konstrukcję wsporczą.

To spostrzeżenie zezwala na traktowanie lin o małym zwisie jako strun i ograniczenie rozważań do przypadku przemieszczeń w płaszczyźnie poziomej.

Dalszym założeniem jest przyjęcie lin jako wiotkich, idealnie sprężystych cięgien z unieruchomionymi końcami. Będziemy opierali się na teorii dużych ugięć, lecz małych przemieszczeń (pomijamy wpływ zmiany pola przekroju poprzecznego na rozkład naprężeń i stosujemy miarę Cauchy'ego dla odkształceń).

Oddziaływania elektrodynamiczne obliczymy z prawa Biota-Savarta, uwzględniając składową bezokresową prądu zwarciovego [6]. Intensywności tych sił silnie zależą od wzajemnego położenia przewodów, co można uwzględnić przez wykorzystanie pamięci komputera dla zapisu aktualnej konfiguracji lin.

W pracy wyprowadzimy i zbadamy podstawowy układ równań różniczkowych oraz zaproponujemy przybliżony opis przydatny do obliczeń numerycznych.

Wszystkie równania i obliczenia będą prowadzone w wielkościach bezwymiarowych. Ogólnie, wielkości fizyczne będą oznaczone nadkreśleniami bądź dużymi literami. Poniżej zestawiono najistotniejsze oznaczenia; pozostałe wielkości zaznaczono na rysunkach bądź też objaśniono w tekście.

- $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \eta_m$ współczynniki w równaniach różnicowych,
- α, a, b, c współczynniki w podstawowych układach równań,
- \bar{a} osiowy rozstaw lin w wiązce,
- A współczynnik w funkcji prądu $k(\tau)$,
- $d = \bar{d}/\bar{a}$ bezwymiarowa średnica liny,
- E, F moduł sprężystości materiału i powierzchnia pola przekroju poprzecznego liny,
- φ kąt nachylenia stycznej do osi odkształconej liny,
- $G(\mathbf{x})$ funkcja konfiguracji przewodów występująca w oddziaływaniu \bar{p} prądu zwarcia,
- I, I'' skuteczne wartości natężenia prądu roboczego i prądu zwarcia,
- $k(\tau)$ funkcja czasowa występująca w oddziaływaniu elektrodynamicznym \bar{p} prądu zwarcia,
- l, L_r numeracja współrzędnych $\xi = \xi_i$ i położenia odstępników,

- $\rho_0/g, \mu = \rho_0 \bar{a}^2/gN_0 T^2$ jednostkowa, wymiarowa i bezwymiarowa masa ciężka,
- m numeracja czasu $\tau = \tau_m$,
- $N_0, v = N_0/EF$ wymiarowa i bezwymiarowa siła wstępnego naciągu,
- $n = S/N_0$ względny przyrost naciągu podczas ruchu liny,
- $p = P\bar{a}/N_0$ intensywność oddziaływania elektrodynamicznego,
- $r = 0, 1, \dots, R$ numeracja podpór i odstępników,
- $s = \bar{s}/\bar{a}$ współrzędna krzywoliniowa odmierzana wzdłuż odkształconej osi liny,
- $\tau = t/T$ bezwymiarowy czas,
- T, T_a okres prądu i stała czasowa prądu zwarcia,
- $u = \bar{u}/\bar{a}, v = \bar{v}/\bar{a}$ przemieszczenia wzdłuż osi x i y ,
- $\xi = \bar{\xi}/\bar{a}, x = \bar{x}/\bar{a}$ bezwymiarowe współrzędne punktu osi liny: materialna i przestrzenna,
- $(\prime) = \partial/\partial\xi, (\dot{\prime}) = \partial/\partial\tau$ oznaczenia pochodnych,
- $\{w\}_m$ zbiory wartości w_i odpowiadające czasowi τ_m .

2. Oddziaływania elektrodynamiczne przewodów

Zgodnie z założeniami zajmiemy się wzajemnym oddziaływaniem przewodów jednej płaskiej wiązki dwuprzewodowej (rys. 2), w której płynie prąd zgodny w fazie. Wynika stąd «przyciągające» działanie sił elektrodynamicznych.

Przebieg prądu roboczego w obwodzie jednofazowym określa funkcja okresowa

$$(2.1) \quad i = \sqrt{2} I \sin \omega t.$$

Prąd zwarcia można opisać następującym przybliżonym wzorem [6]:

$$(2.2) \quad i \approx \sqrt{2} I'' \left[\exp\left(-\frac{t}{T_a}\right) - \cos \omega t \right].$$

We wzorze (2.2) pominięto wyższe harmoniczne przebiegu prądu oraz zmniejszenie się składowej okresowej I'' prądu zwarciego. Uwzględniono natomiast zanikanie składowej bezokresowej o stałej T_a . Zamiast tej stałej wprowadza się często współczynnik prądu udarowego k_u , odpowiadający maksymalnej wartości natężenia (w przybliżeniu po czasie $t \approx \Pi/\omega$)

$$(2.3) \quad i_u \approx \sqrt{2} I'' [1 + \exp(-t/T_a)] \doteq k_u \sqrt{2} I''.$$

Współczynnik ten na ogół wynosi $k_u \leq 1,8$, co odpowiada $T_a \leq 0,05$ (por. [6]).

Intensywność oddziaływania elektrodynamicznego pola magnetycznego o indukcji \mathbf{B} na przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu i , w kierunku jednostkowego wektora stycznego \mathbf{t} , wynosi według prawa Biota-Savarta

$$(2.4) \quad \mathbf{P} = i(\mathbf{t} \times \mathbf{B}).$$

Indukcja wzdłuż przewodu m , wynika z oddziaływania przewodu n , w środowisku jednorodnym o współczynniku przenikalności magnetycznej $\mu_0 = \text{const}$, wynosi

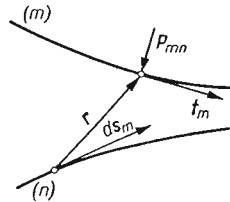
$$(2.5) \quad \mathbf{B}_{mn} = \frac{\mu_0 i_n}{4\pi} \oint_{I_n} \frac{d\mathbf{s}_n \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Tak więc, zgodnie z (2.4), intensywność oddziaływania przewodu n na przewód m (rys. 3) można napisać w postaci

$$(2.6) \quad \mathbf{P}_{mn} = \frac{\mu_0 i_m i_n}{4\pi} \oint_{l_n} \frac{\mathbf{t}_m \times (d\mathbf{s}_n \times \mathbf{r})}{r^3}.$$

Jeśli w ramach jednej wiązki przewody są zakrzywione, to mogą one oddziaływać same na siebie. W wiązce dwuprzewodowej przyjmijmy $m = 1$ oraz $n = 2$, co po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych pozwala napisać wzór na intensywność oddziaływania elektrodynamicznego w postaci

$$(2.7) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12} = k(\tau)\mathbf{G}(\mathbf{x}).$$



Rys. 3

We wzorze tym rozdzielono funkcje zależne od prądu (czasu) i od konfiguracji przewodów:

$$(2.8) \quad k(\tau) = A \left[\exp\left(-\frac{T}{T_a} \tau\right) - \cos 2\pi\tau \right]^2,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^2 \oint_{l_j} \frac{\mathbf{t}_j \times (d\mathbf{s}_j \times \mathbf{r}_j)}{r_j^3}, \quad (j = 1, 2),$$

$$A = \frac{I'^2 \mu_0 a}{2\pi N_0}.$$

Z podwójnego iloczynu wektorowego w funkcji $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ oraz z nieujemności funkcji $k(\tau)$ wynika, że wektor oddziaływania \mathbf{p} będzie leżał z płaszczyźnie wiązki, będzie stale prostopadły do przewodu, dla którego został obliczony i będzie w dodatku miał zwrot zapewniający «przyciąganie» przewodów (rys. 3). Z tego względu możemy się dalej ograniczyć do obliczania jego długości $p = |\mathbf{p}|$ według wzoru

$$(2.9) \quad p = k(\tau)G.$$

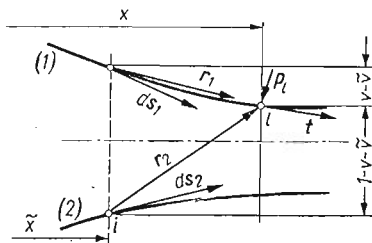
We wzorze (2.9) funkcję $k(\tau)$ należy liczyć według (2.8)₂. Funkcję skalarną G dla symetrycznej dwuprzewodowej płaskiej wiązki można po prostych przekształceniach napisać w postaci

$$(2.10) \quad G = \int_{(v)} \left[\left(\frac{v-\tilde{v}}{r_1^3} + \frac{1-v-\tilde{v}}{r_2^3} \right) d\tilde{x} - \left(\frac{x-\tilde{x}}{r_1^3} + \frac{x-\tilde{x}}{r_2^3} \right) d\tilde{v} \right],$$

gdzie użyto skróconych oznaczeń dla r_j (rys. 4)

$$(2.11) \quad r_1^2 = (x-\tilde{x})^2 + (v-\tilde{v})^2, \quad r_2^2 = (x-\tilde{x})^2 + (1-v-\tilde{v})^2.$$

We wzorze (2.10) całkowania dokonuje się równocześnie wzdłuż przewodów 1 i 2, czemu odpowiadają dla bieżącego punktu współrzędne bezwymiarowe: (x, \tilde{v}) lub $(\tilde{x}, 1 - \tilde{v})$.

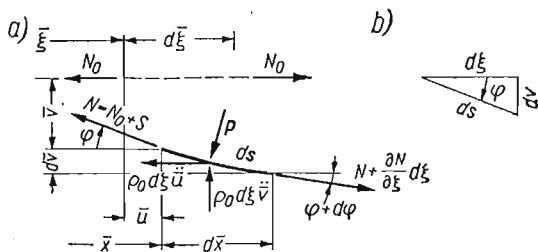


Rys. 4

3. Podstawowy układ równań liny

Pominięcie oddziaływań międzywiązkowych zezwala na rozpatrywanie tylko jednej liny wobec symetrii odkształcenia się wiązki dwuprzewodowej. Dalsze założenie płaskiego stanu przemieszczeń umożliwia pominięcie wpływu ciężaru własnego i ograniczenie rozważań do obciążenia wstępnym naciąganiem N_0 , a przy prądach zwarciovych do obciążenia o intensywności $p(\tau)$, działającego stale w płaszczyźnie wiązki.

Dla opisu dużych przemieszczeń posłużymy się opisem materialnym i jako zmienną niezależną przyjmijmy współrzędną $\xi = \bar{\xi}/\bar{a}$, odmierzaną wzdłuż liny w stanie wstępnego napięcia siłą N_0 (rys. 5).



Rys. 5

Konfigurację aktualną opiszemy współzrędnymi przestrzennymi układu kartezjańskiego x, y lub też składowymi wektora przemieszczeń u, v

$$(3.1) \quad x = \xi + u, \quad y \equiv v,$$

przy czym dla odkształconego elementu cięgna zachodzą związki

$$dx = ds \cos \varphi, \quad dv = ds \sin \varphi,$$

które można napisać w postaci różniczkowej

$$(3.2) \quad x' = s' \cos \varphi, \quad v' = s' \sin \varphi.$$

Równania ruchu wynikają z rzutowania sił na kierunki osi x i y (rys. 5):

$$(3.3) \quad \begin{aligned} -\rho_0 d\ddot{u} - N \cos \varphi + (N + dN) \cos(\varphi + d\varphi) - \bar{p} d\bar{s} \sin \varphi &= 0, \\ -\rho_0 d\ddot{v} - N \sin \varphi + (N + dN) \sin(\varphi + d\varphi) + \bar{p} d\bar{s} \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli uwzględnimy zależności

$$\sin(\varphi + d\varphi) \approx \sin \varphi + d\varphi \cos \varphi, \quad \cos(\varphi + d\varphi) \approx \cos \varphi - d\varphi \sin \varphi,$$

zasadę zachowania masy

$$\rho d\bar{s} = \rho_0 d\bar{\xi}$$

oraz wprowadzimy wielkości bezwymiarowe, to równania ruchu można napisać w następującej postaci:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mu \ddot{u} + (1+n) \sin \varphi \varphi' - n' \cos \varphi &= -ps' \sin \varphi, \\ \mu \ddot{v} + (1+n) \cos \varphi \varphi' - n' \sin \varphi &= ps' \cos \varphi. \end{aligned}$$

Odształcenia będziemy traktowali jako małe, licząc je według miary Cauchy'ego w odniesieniu do wstępnie napiętej liny

$$(3.5) \quad \varepsilon = \frac{d\bar{s} - d\bar{\xi}}{d\bar{\xi}} = s' - 1.$$

Zgodnie z założeniem ograniczymy się do materiału idealnie sprężystego, co daje

$$(3.6) \quad \varepsilon = \frac{S}{EF}.$$

Po podstawieniu (3.6) do (3.5) otrzymujemy zależność pomiędzy względnym wydłużeniem liny s' i siłą osiową n

$$(3.7) \quad s' = 1 + \nu n.$$

Jeśli z kolei po lewej stronie (3.7) podstawimy związek geometryczny wynikający z (3.2)

$$(3.7a) \quad s' = \sqrt{x'^2 + v'^2}$$

i tak otrzymane równanie zróżniczkujemy, to możemy wyznaczyć pochodną siły osiowej

$$(3.8) \quad n' = \frac{s''}{\nu} \equiv \frac{1}{\nu s'} (x'x'' + v'v'').$$

Z równań ruchu (3.4) można wyeliminować kąt φ przez wykorzystanie związków (3.2). Po przekształceniach i dołączeniu (3.8) otrzymujemy następujący podstawowy układ równań:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - ax'' - bx'n' &= -\frac{p}{\mu} v', \\ \ddot{v} - av'' - bv'n' &= \frac{p}{\mu} x', \\ x'x'' + v'v'' - cn' &= 0, \end{aligned}$$

gdzie dla skrócenia zapisu użyto następujących oznaczeń:

$$(3.10) \quad a = \frac{1+n}{\mu(1+\nu n)}, \quad b = \frac{1-\nu}{\mu(1+\nu n)^2}, \quad c = \nu(1+\nu n).$$

Układ (3.9) jest wzajemnie sprzężony poprzez n' (w [5] wykazano, że takie sprzężenia powstają przez uwzględnienie rozciągłości osi cięgna w równaniach ruchu). Po wyeliminowaniu n' dochodzimy do układu

$$(3.11) \quad \begin{aligned} (\ddot{x} - \alpha x'')v' - (\ddot{v} - \alpha v'')x' &= -\frac{p}{\mu}, \\ (\ddot{x} - \alpha x'')x' + (\ddot{v} - \alpha v'')v' &= 0, \end{aligned}$$

gdzie obok współczynnika a wprowadzono nowy

$$(3.12) \quad \alpha = \frac{1}{\nu\mu}.$$

Wyprzedzając dokładniejsze badanie podstawowego układu równań już teraz można stwierdzić, że układ (3.11) ma charakter nieliniowych równań falowych o różnych prędkościach propagacji \sqrt{a} i $\sqrt{\alpha}$.

Pełny opis modelu matematycznego wymaga jeszcze sformułowania warunków granicznych zagadnienia.

Jeśli chodzi o warunki początkowe, to można je przyjąć dla $\tau = 0$ jako warunki typu Cauchy'ego:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} u(\xi, 0) = \dot{u}(\xi, 0) &= 0, \\ v(\xi, 0) = \dot{v}(\xi, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Bardziej skomplikowanie przedstawia się sprawa warunków brzegowych. Pominięcie sztywności giętej lin powoduje ich «załamania» nad odstępnikami, co wymaga rozważania ich przedziałami. W przypadku podpór niepodatnych w kierunku y i nieodkształcalnych odstępników warunki brzegowe i ciągłości dla funkcji v można napisać w postaci

$$(3.14) \quad v(L_r, \tau) = 0, \quad (r = 0, 1, \dots, R),$$

gdzie indeks r numeruje podparcia zgodnie z rys. 2.

Warunki brzegowe dla skrajnych podpór niepodatnych w kierunku x mają dla przemieszczeń u postać

$$(3.15) \quad u(0, \tau) = 0, \quad v(L_R, \tau) = 0.$$

Nie nakłada się natomiast żadnych więzów na odstępniki w kierunku X , a więc

$$(3.16) \quad u(L_{r-}, \tau) = u(L_{r+}, \tau), \quad (r = 1, 2, \dots, R-1).$$

Tak więc będzie można rozpatrywać ruch liny przedziałami, a następnie spełniać warunki ciągłości (3.14) i (3.16).

Jeszcze bardziej kłopotliwe jest sformułowanie warunku brzegowego dla siły osiowej n . Zgodnie ze wzorami (3.7) i (3.7a) można napisać

$$(3.17) \quad n(0, \tau) = \frac{1}{\nu} \left\{ \sqrt{[x'(0, \tau)]^2 + [y'(0, \tau)]^2} - 1 \right\},$$

a więc warunek zależny od bieżącego rozwiązania

$$x_0 = f_1(\tau, n), \quad y_0 = f_2(\tau, n),$$

które będzie można uzyskać np. w drodze kolejnych przybliżeń.

4. Badanie podstawowego układu równań i równania przybliżone

Przed wybraniem właściwej metody rozwiązywania podstawowego układu (3.9) należy dokładniej zbadać jego własności. Podobieństwo do równań falowych pozwala przypuszczać, że będą one miały cechy równań hiperbolicznych, skąd wynika konieczność wyznaczenia obszaru określoności rozwiązania, ograniczonego odpowiednimi rodzinami charakterystyk.

Charakterystyki wyznaczmy według metody MISESA, opracowanej w [7] dla równań hydromechaniki, gdzie można spotkać układy równań podobnych do (3.9).

Metoda została opracowana dla równań pierwszego rzędu. W przypadku układu (3.9) wprowadzimy nowe funkcje

$$(4.1) \quad z_1 = x', \quad z_2 = \dot{x}, \quad z_3 = v', \quad z_4 = \dot{v}, \quad z_5 = n,$$

co daje liczbę poszukiwanych funkcji $M = 5$. Liczba zmiennych niezależnych ξ i τ wynosi $N = 2$, co odpowiada zadaniu płaskiemu [7]. Brakujące równania otrzymamy ze związków Schwarza

$$(4.2) \quad \dot{z}_1 = z'_2, \quad \dot{z}_3 = z'_4.$$

Równanie charakterystyczne dla układu (3.9) i (4.2) otrzymamy z warunku (por. [7]):

$$(4.3) \quad \begin{vmatrix} -a\lambda_\xi & \lambda_\tau & 0 & 0 & -bx'\lambda_\xi \\ 0 & 0 & -a\lambda_\xi & \lambda_\tau & -bv'\lambda_\xi \\ x'\lambda_\xi & 0 & v'\lambda_\xi & 0 & -c\lambda_\xi \\ \lambda_\tau & -\lambda_\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\tau & -\lambda_\xi & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie λ_ξ i λ_τ są współrzędnymi wektora λ , prostopadłego do charakterystyki.

Po rozwinięciu wyznacznika otrzymujemy z (4.3) równanie

$$(4.4) \quad \lambda_\xi [d_1 \eta^2 - (2d_1 + d_2) \eta + (d_1 + d_2)] = 0,$$

gdzie dla skrócenia zapisu użyto oznaczeń

$$(4.5) \quad d_1 = ac = \frac{\nu}{\mu}(1+n), \quad d_2 = bs'^2 = \frac{1-\nu}{\mu}, \quad \eta = \frac{\lambda_\tau^2}{a\lambda_\xi^2}.$$

Pierwiastkami równania (4.4) są

$$(4.6) \quad \lambda_\xi = 0, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = 1 + \frac{d_2}{d_1},$$

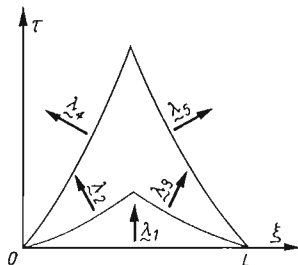
a po powrocie do pierwotnych wielkości, współrzędne wektorów λ wynoszą

$$(4.7) \quad \lambda_\xi^{(1)} = 0, \quad \left. \frac{\lambda_\tau}{\lambda_\xi} \right|_{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{1+n}{\mu(1+m)}}, \quad \left. \frac{\lambda_\tau}{\lambda_\xi} \right|_{(4,5)} = \pm \frac{1}{\sqrt{\nu\mu}}.$$

Rzeczywiste pierwiastki równania charakterystycznego wskazują na hiperboliczny typ równań (3.9). Wystąpienie dwóch rodzin ukośnych charakterystyk (rys. 6) w sposób zasadniczy utrudnia stosowanie metod numerycznych.

Stosowanie całkowania odpowiednich równań ciągłości wzdłuż charakterystyk jest niemożliwe na skutek zależności oddziaływania elektrodynamicznego p od aktualnej konfiguracji liny. Z kolei stosowanie standardowych metod różnic skończonych (por. [4])

jest bardzo utrudnione przez konieczność dostosowywania siatki różnicowej do płaskiej rodziny charakterystyk o wektorach normalnych λ_4 i λ_5 (rys. 6). Występowanie bardzo małej wartości ν w mianowniku (4.7)₃ przybliża tę rodzinę do osi ξ , co wymaga stosowania małych przyrostów $\Delta\tau$, a więc obniży efektywność metody różnicowej.



Rys. 6

Wymienione trudności skłoniły nas do poszukiwania odpowiednich sposobów przybliżonych dla rozwiązania zagadnienia. Jedną z możliwości jest uproszczenie podstawowego układu równań do postaci przydatnej w obliczeniach numerycznych.

Istotnym ułatwieniem jest przyjęcie stałej siły w cięgnię

$$n(\xi, \tau) \equiv c(\tau).$$

Konsekwencją tego założenia są związki wynikłe z równań (3.9):

$$(4.8) \quad x'x'' = -v'v'', \quad x'\ddot{x} = -v'\ddot{v}.$$

Mechaniczną interpretacją związku (4.8)₂ jest ustalenie kierunku działania przyspieszeń, a więc też sił bezwładności, jako prostopadłego do elementu ds , a więc tak samo jako obciążenia elektrodynamicznego \bar{p} (por. rys. 5).

Po wykorzystaniu związków (4.8) dwa pierwsze równania układu (3.9) są liniowo zależne. Do równania (3.9)₂ dołączymy równania wynikające z (3.7) oraz warunek brzegowy (3.15)₂, rozpisany w postaci całki:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \ddot{v} &= \frac{1+n}{\mu(1+\nu n)}v'' + \frac{p}{\mu}x', \\ x' &= \sqrt{(1+\nu n)^2 - v'^2}, \\ \int_0^{L_R} (x' - 1)d\xi &= 0. \end{aligned}$$

Do tak uproszczonego układu równań (4.9) dołączamy warunki początkowe

$$(4.10) \quad v(\xi, 0) = \dot{v}(\xi, 0) = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(4.11) \quad x(0, \tau) = 0, \quad v(L_r, \tau) = 0 \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, \dots, R.$$

Obszar istnienia rozwiązania układu (4.9) jest teraz ograniczony bardziej stromymi charakterystykami (4.7)₂. Umożliwia to stosowanie większych kroków czasowych $\Delta\tau$ w dalej podanym algorytmie rozwiązywania.

Równanie (4.9)₃ będzie służyło do obliczania siły podłużnej w linii n . Ponieważ siła ta jest funkcją aktualnej konfiguracji lin, siłę n będzie można obliczać w drodze kolejnych przybliżeń. W tym celu rozwinieamy funkcję podcałkową w szereg potęgowy i przez zachowanie czterech pierwszych wyrazów dochodzimy do następującego wzoru:

$$(4.12) \quad n^{(r)} = \frac{1}{L_R v} \left[\frac{A_2}{2(1+\nu n)} + \frac{A_4}{8(1+\nu n)^3} + \frac{A_6}{16(1+\nu n)^5} \right]_{(r-1)},$$

gdzie użyto oznaczeń

$$(4.13) \quad A^k = \int_0^{L_R} (v')^k d\xi \quad \text{dla} \quad k = 2, 4, 6.$$

5. Opis algorytmu rozwiązywania przybliżonego układu równań

Do całkowania układu (4.9) zastosujemy metodę różnic skończonych. Celem uzyskania maksymalnej dokładności obliczeń węzły siatki będziemy starali się umieszczać wewnątrz obszaru określoności zadania, jak najbliżej charakterystyk [4]. Z tego względu przy ustalonym kroku zmiennej geometrycznej $\Delta\xi$ użyjemy zmiennego kroku czasowego

$$(5.1) \quad \Delta\tau_{m+1} = \alpha_m \tau_m, \quad \alpha_m = \sqrt{\frac{(1+n_{m-1})(1+\nu n_m)}{(1+n_m)(1+\nu n_{m-1})}},$$

przy czym dla rozpoczęcia całkowania przyjmiemy $\Delta\tau_0$ odpowiadające (4.7)₂

$$(5.1a) \quad \Delta\tau_0 = \sqrt{\mu} \Delta\xi, \quad \alpha_0 = 1.$$

Zmienny krok całkowania $\Delta\tau_m$ uwzględniono we wzorze różnicowym na drugą pochodną czasową

$$(5.2) \quad \ddot{v}_{i,m} \approx \frac{v_{m+1} - (1+\alpha_m)v_m + \alpha_m v_{m-1}}{\alpha_m(1+\alpha_m)\Delta\tau_m^2/2} \Big|_i,$$

gdzie indeks $l = 0, 1, 2, \dots, L_R$ numeruje zmienną przestrzenną ξ , a indeks $m = 0, 1, 2, \dots, M$ czas τ .

Po podstawieniu (5.2), wobec wzoru różnicowego na pochodną wprzód można przekształcić równania (4.9)₁ i (4.9)₂ do postaci

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v_{m+1,l} &= -\alpha_m v_{m-1,l} + \beta_m v_{m,l} + \gamma_m (v_{m,l-1} + v_{m,l+1}) + \eta_m (\Delta\xi + \Delta u_{m,l}) p_{m,l}, \\ u_{m,l+1} &= u_{m,l} + \Delta u_{m,l}, \\ \Delta u_{l,m} &= \sqrt{(1+\nu n)^2 \Delta\xi^2 - (v_{l+1} - v_l)^2} \Big|_m - \Delta\xi, \end{aligned}$$

gdzie obok (5.1)₂ użyto nowych oznaczeń

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \beta_m &= 1 + \alpha_m - 2\gamma_m, \quad \gamma_m = \frac{1+n_m}{1+\nu n_m} \eta_m, \\ \eta_m &= \frac{\Delta\tau_m^2}{2\mu\Delta\xi^2} \alpha_m (1+\alpha_m). \end{aligned}$$

Również całki A_k we wzorze iteracyjnym (4.12) obliczane będą w sposób przybliżony

$$(5.5) \quad A_k \approx \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{l=0}^{L_R-1} (v_{l+1} - v_l)^k, \quad k = 2, 4, 6.$$

Warunki graniczne sformułujemy też w zapisie różnicowym. Korzystając z centralnej różnicy skończonej warunki początkowe (4.10) przedstawimy w postaci

$$(5.6) \quad v_{0,l} = 0, \quad v_{-1,l} = v_{1,l},$$

a po podstawieniu ich do (5.3)₁ i uwzględnieniu $\alpha_0 = 1$ otrzymujemy

$$(5.6a) \quad v_{1,l} = \frac{\Delta\tau_0^2}{2\mu} p_{0,l}.$$

Warunki brzegowe (4.11) napiszemy przy użyciu indeksów l i m

$$(5.7) \quad x_{m,0} = 0, \quad v_{m,L_r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, L_R.$$

Wzory różnicowe (5.3) umożliwiają przedłużanie rozwiązania wzdłuż linii $\xi_l = \text{const}$. Przy znanych wartościach dyskretnych zbiorów $\{v\}_{m-1}$, $\{v\}_m$, $\{u\}_m$, $\{p\}_m$ i n_m można z równania (5.3)₁ obliczyć v_l dla nowego czasu τ_{m+1} , uwzględniając przy tym warunki brzegowe (5.7)₂. Następnie obliczamy iteracyjnie siłę n_{m+1} według (4.12) i $\{u\}_{m+1}$ według (5.3)₂.

Aby rozpocząć obliczenia liczymy $v_{-1,l}$ według (5.6a), natomiast pozostałe wartości przyjmujemy, jak dla lin znajdujących się w spoczynku

$$(5.8) \quad \{v\}_{-1} = \frac{\Delta\xi^2}{2} \{p\}_0, \quad \{v\}_0 = \{u\}_0 = \{0\}, \quad n_0 = 0.$$

Przy korzystaniu ze wzoru iteracyjnego (4.12) jako pierwsze przybliżenie siły n_m przyjmujemy wartość obliczoną ze wzoru ekstrapolacyjnego

$$(5.9) \quad n_{m+1}^0 = 3(n_m - n_{m-1}) + n_{m-2}, \quad n_{-2} = n_{-1} = n_0 = 0.$$

Istotnym punktem algorytmu jest liczenie oddziaływań elektrodynamicznych $p_{m,l}$. Wartości tych oddziaływań można obliczyć przez zastosowanie wzoru kwadraturowego do obliczenia całki (2.10); w ułożonym algorytmie zastosowano wzór trapezowy

$$(5.10) \quad p_l = k(\tau) \left[\sum_{i=1}^{L_R-1} \Delta G_i + \frac{1}{2} (\Delta G_0 + \Delta G_{L_R}) \right],$$

gdzie dla skrócenia zapisu użyto

$$\Delta G_i = \frac{1}{r_1^3} [(v_l - v_i) \Delta x_i - (x_l - x_i) \Delta v_i] + \frac{1}{r_2^3} [(1 - v_l - v_i) \Delta x_i - (x_l - x_i) \Delta v_i],$$

$$(5.11) \quad r_1 = \sqrt{(x_l - x_i)^2 + (v_l - v_i)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_l - x_i)^2 + (1 - v_l - v_i)^2},$$

$$\Delta w_i = \frac{1}{2} (w_{i+1} - w_{i-1}), \quad \Delta w_0 = w_1 - w_0, \quad \Delta w_{L_R} = w_{L_R} - w_{L_R-1}$$

dla $w = x, v$.

Obliczenia intensywności obciążenia p_l należy wykonać dla $l = 0, 1, \dots, L_R$, a więc $L_R + 1$ razy, aby wypełnić cały zbiór $\{p\}_m$. Obliczenie to jest najbardziej czasochłonne. Ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń można je skrócić. Skorzystamy w tym celu z własności funkcji ΔG_i , której wartości szybko maleją w miarę oddalania się od punktu l (występują mnożniki r_j^{-3}). Dlatego sumę występującą w (5.10) rozdzielimy na dwie części, które odpowiadają sumowaniu «na lewo» (wskaźnik i maleje) i «na prawo» od punktu l

$$(5.12) \quad \sum_i \Delta G_i \approx \sum_{i=l}^{i^-} \Delta G_i + \sum_{i=l+1}^{i^+} \Delta G_i.$$

Wartości i^- oraz i^+ są ustalane w trakcie obliczania, tak aby błąd powstały przez odrzucenie pewnej liczby wyrazów sumy w (5.10) nie przekraczał z góry danej wartości $2b_p$. Sumowanie «w lewo» i «na prawo» prowadzimy aż do spełnienia nierówności

$$(5.13) \quad b_p \sum_{i=l}^{i^-} \Delta G_i - i \Delta G_i > 0, \quad i^- \geq 1,$$

$$b_p \sum_{i=l+1}^{i^+} \Delta G_i - (L_R - i) \Delta G_i > 0, \quad i^+ \leq L_R - 1.$$

Podprogram liczenia sił p_l ułożono tak, że najpierw się liczy sumę w (5.10) i jeśli $i^- > 1$, to nie oblicza się ΔG_0 oraz pomija się ΔG_{L_R} w przypadku $i^+ < L_R - 1$. Aby uniknąć osobliwości w (5.11) przyjęto $r_1 = 1$ dla $i = l$, co oznacza, że punkt nie może elektrodynamicznie oddziaływać sam na siebie.

W wyniku ruchu przewody będą zbliżały się do siebie i zachodzi możliwość ich zetknięcia się. W takim przypadku oddziaływania elektrodynamiczne «sklejające» obydwa przewody wzajemnie się równoważą, co należy uwzględnić przez przyjęcie

$$(5.14) \quad p_{iz} = 0 \quad \text{dla} \quad v_{iz} = \frac{1}{2}(1-d)$$

i wpisanie tych wartości we wszystkich punktach l_z , w których $v_{m+1, iz} \geq (1-d)/2$.

Na koniec opiszemy jeszcze jedną poprawkę, która w istotny sposób polepszyła zbieżność i stabilność algorytmu. Podczas obliczeń sprawdza się czy obliczoną wzorem (4.12) wartość $n_{m+1} = n_{m+1}^{\dagger}$ spełnia nierówność

$$(5.15) \quad n_{m+1}^{\dagger} - n_m < 0.$$

Jeśli nierówność nie jest spełniona, to oblicza się nową wartość α_m przyjmując w (5.1)₂ odpowiednio $n_m = n_{m+1}^{\dagger}$ i powtarza się obliczenie $\{v\}_{m+1}$ przy niezmiennych wartościach $\{v\}_m$, $\{x\}_m$, $\{p\}_m$.

Takie postępowanie jest równoznaczne ze skracaniem długości kroku czasowego $\Delta \tau_m$, tak aby nie wyjść z obszaru istnienia rozwiązania.

6. Przykłady liczbowe

Algorytm zaproponowany w rozdziale zaprogramowano w języku ALGOL-1204. Wykonano dwa przykłady obliczeniowe, które pozwoliły nie tylko sprawdzić i ulepszyć algorytm, ale też wyciągnąć pewne wnioski co do dalszej przydatności proponowanej metody.

W obydwu przykładach przyjęto dane odpowiadające wartościom występującym w realnych konstrukcjach wsporczych. Dla prądu zwarcia przyjęto

$$I = 44 \text{ kA}, \quad T_a = 0,03 \text{ s}, \quad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2.$$

Liny scharakteryzowano następującymi parametrami:

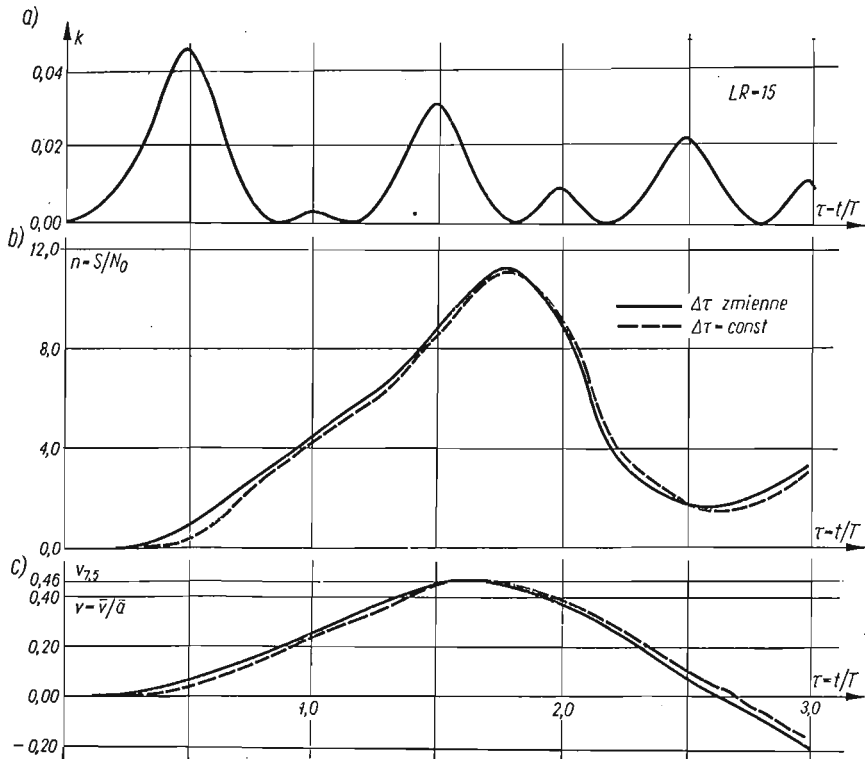
$$\bar{d} = 31,5 \text{ mm}, \quad F = 587 \text{ mm}^2, \quad \rho_0 = 1,97 \text{ kG/m}, \quad E = 7750 \text{ kG/mm}^2.$$

Przyjęto też jednakowy wstępny naciąg i rozstaw odstępników

$$N_0 = 1000 \text{ kG}, \quad \bar{a} = 40 \text{ cm}.$$

Jako pierwszy przykład obliczono jednoprzęsłową wiązkę o stosunku długości lin do długości odstępника jak 15:1, a więc $L_R = L_1 = 15$.

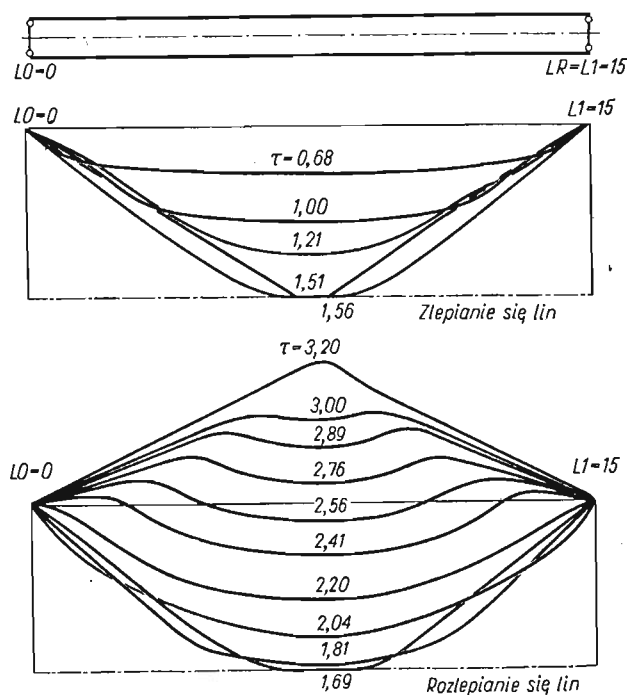
Do obliczeń przyjęto $\Delta\xi = 0,25$ i $\tau_0 = 0,05$. Najpierw wykonano obliczenia przy stałym kroku czasowym $\Delta\tau = 0,02$ i po 160 krokach osiągnięto czas $\tau_M = 3,25$. Obliczenia



Rys. 7

powtórzono według ulepszonego algorytmu, który uwzględniał zmienny krok czasowy $\Delta\tau_m = \alpha_m \cdot \Delta\tau_{m-1}$ i jego poprawianie w zależności od spełniania nierówności (5.15). Obliczenia uległy przyspieszeniu, gdyż po 100 krokach osiągnięto czas $\tau_M = 3,28$. Czas obliczeń w obydwu przypadkach był prawie jednakowy i wynosił około 71 s.

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 7. Na kolejnych wykresach pokazano przebieg współczynnika prądu $k(\tau)$, przewyższenie wstępnego naciągu $n(\tau)$ i przemieszczenie w środku rozpiętości $v_{7,5}(\tau)$. Wyniki uzyskane przy zmiennym kroku praktycznie nie różnią się od wyników dla stałego $\Delta\tau$. Dla czasu $\tau = 1,56$ następuje zetknięcie się lin, a z niewielkim przesunięciem (dla $\tau = 1,81$) występuje ekstremum siły w linii $n = S/N_0 \approx 11$. Dla czasu $\tau \approx 2,7$ występuje lokalne minimum $n = 1,4$, odpowiadające przechodzeniu środka przez położenie wyjściowe $v_{7,6} = 0$.



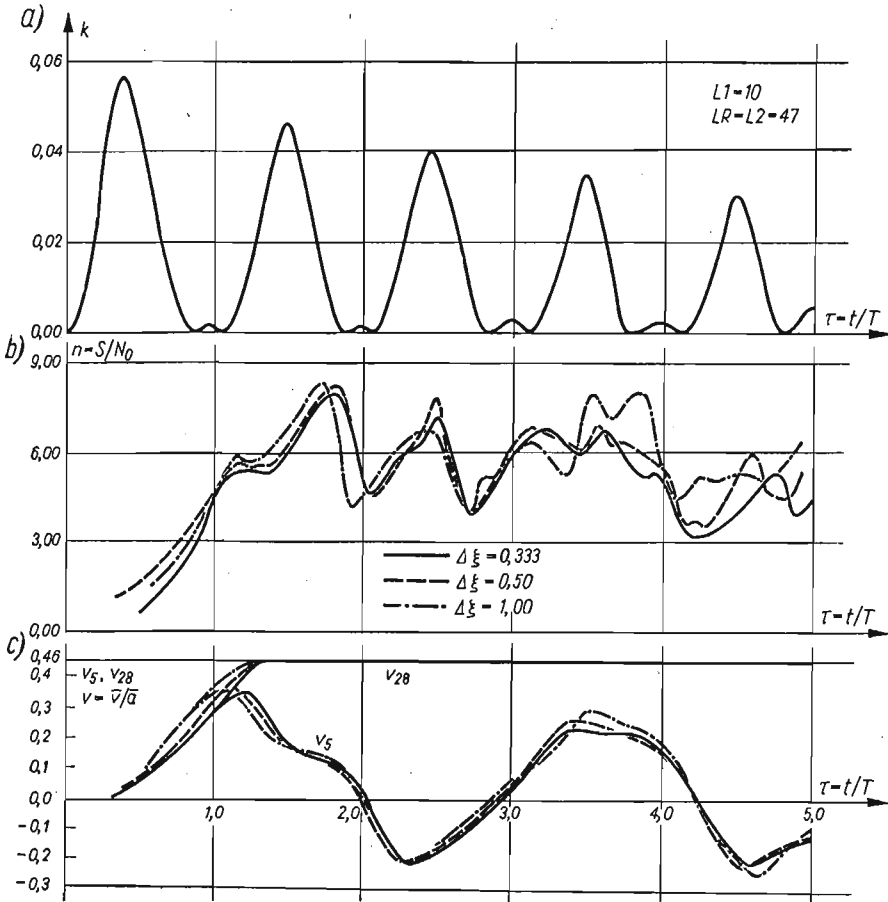
Rys. 8

Na kolejnych wykresach na rys. 8 pokazano konfigurację lin dla rosnącego czasu τ . Po zbliżeniu i «zlepianiu» się lin następuje ich oddalanie się, przy czym pojawiają się formy z większą liczbą przegięć.

Jako drugi przykład obliczono wiązkę o dwóch, znacznie różniących się długościach przęseł. Stosunek długości pierwszego do drugiego przęśla wynosi jak 10:37, tzn. $L_1 = 10$, $L_R = L_2 = 47$. Pozostałe dane przyjęto jak w przykładzie pierwszym za wyjątkiem $T_a = 0,1$ s.

W tym zadaniu skorzystano wyłącznie z programu automatycznie korygującego krok czasowy $\Delta\tau$. Obliczenia wykonano dla różnych kroków przestrzennych $\Delta\xi = 1,0; 0,5; 0,333$, aby zbadać zbieżność metody.

Na rys. 9 naniesiono najbardziej charakterystyczne wykresy. Widać, że wyniki otrzymane dla kroków całkowania $\Delta\xi = 0,5$ i $0,333$ niewiele się różnią. Widać ponadto, że zlepianiu ulegają tylko liny dłuższego przęśla, po czym siła przewyższenia wstępnego naciągu osiąga ekstremalną wartość około $8 N_0$.



Rys. 9

Praktycznym spostrzeżeniem jest dobra zgodność wyników dla niższych τ , przy porównaniu z obliczeniami dla $\Delta\xi = 1,0$; przy większych wartościach τ dłuższy krok $\Delta\xi$ daje raczej wyższe wartości n .

Przemieszczenia punktów leżących w połowie długości obydwu pręseł pokazano na rys. 9c. W szczególności występuje ruch lin krótszego pręśla wokół pierwotnego położenia równowagi. Część środkowa dłuższego pręśla pozostaje stale zlepiona. Efekty te jakościowo zgadzają się ze zjawiskami obserwowanymi podczas próbnych zwarc [3].

7. Uwagi końcowe

Otrzymane wyniki obliczeń świadczą na korzyść proponowanej metody i algorytmu. Jeśli wyniki jakościowo zgadzają się z niektórymi zjawiskami obserwowanymi w rzeczywistych stacjach rozdzielczych, to pod względem ilościowym są one niezadowolające. Na przykład przewyższenia wstępnego naciągu są około 1—1,5-krotnie za wysokie w porównaniu ze średnimi wartościami rejestrowanymi podczas próbnych zwarc [3].

Na wynikach mogła przede wszystkim zaważyć idealizacja badanego modelu. Zarówno wstępny zwis i przestrzenny ruch lin, jak też przede wszystkim podatność podpór [12] mogą mieć istotny wpływ na wyniki.

W tym kierunku, a więc w kierunku osłabienia założeń i wzbogacenia analizowanego modelu, idą dalsze prace.

Podziękowanie

Praca stanowi część opracowania wykonanego w Instytucie Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej pod kierunkiem prof. R. CIESIELSKIEGO na zlecenie Oddziału Krakowskiego «Energoprojekt». Praca była również częściowo subsydiowana przez Oddział Krakowski PAN.

Autorzy pragną podziękować Panu prof. ROMANOWI CIESIELSKIEMU za cenne uwagi i sugestie przy rozwiązywaniu problemu.

Pragniemy również podziękować Panu doc. JANUSZOWI ORKISZOWI za pomoc przy doborze metody rozwiązywania, a mgr inż. S. ŚWIERCZEWSKIEMU z Instytutu Gazownictwa w Krakowie za wykonanie programu w języku ALGOL-1204 i obliczeń testujących.

Literatura cytowana w tekście

1. A. T. ATWOOD, M. H. MILLS, D. J. DOWNS, H. M. STONE, *Dynamic Behavior of a 220 kV Dead-End Bus during Short Circuit*, Trans. AJEE (1962), 153.
2. R. CIESIELSKI, J. KAWECKI, D. MISCHKE, *Przybliżony sposób obliczania dynamicznego konstrukcji wsporczych na impulsowe działanie prądów zwarciovych*, Materiały XX Jubileuszowej Konferencji Naukowej Komisji Inżynierii PAN i Komitetu Nauki PZITB. Referaty T. III — *Konstrukcje stalowe*, Kraków 1974 — Krynica, 63-76.
3. R. CIESIELSKI, M. PIERONEK, J. BOGUSZ, *Badanie wpływów prądów zwarciovych na konstrukcje wsporcze rozdzielni wysokich napięć*. Materiały XX Jubileuszowej Konferencji Naukowej Komisji Inżynierii PAN i Komitetu Nauki PZITB. Referaty T. III — *Konstrukcje stalowe*, Kraków 1974 — Krynica, 77-90.
4. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer-Verlag 1955 (tłum. polskie, PWN, 1960).
5. J. HAJDUK, J. OSIECKI, *Ustroje ciągnowe: teoria i obliczanie*, WNT, Warszawa 1970.
6. R. KURDZIEL, *Działania cieplne i dynamiczne prądów zwarciovych*, PWN, Warszawa 1957.
7. R. V. MISES, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Academic Press-Publishers, New York 1958.
8. B. OLSZOWSKI, J. ORKISZ, *Dyskretny model dynamiczny przestrzennego układu przewodów wysokiego napięcia przy obciążeniach zwarciovych*, Materiały II Sympozjum Dynamiki i Stateczności, Łańcut 1972, 88-100.
9. M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYŚYŃ, *Dynamika przewodów wysokiego napięcia przy prądach zwarciovych w świetle teorii dużych ugięć ciągną*, Materiały II Sympozjum Dynamiki i Stateczności, Łańcut, 1972 44-55.
10. J. REIMER, *Vypočet dynamických sil vznikajících pro skrate vo zvařkovyõch vodičech*, Vedečko-techn. Informaçe «Energovid», Praha 1970.
11. P. REINHARDT, *Discussionsbeitrag zur Berechnung der Kurzschlusskräfte von Zweirbündelleitern in Schaltanlagen*, Elektrik, 1971.
12. W. LINKE, *Modellerung des Schwingverhaltens von Kabelkranen unter Berücksichtigung von Steifigkeit und Masse der Stützen*, Hebezeuge und Fördermittel, 14, 6 (1974), 163-165.

Р е з ю м е

ДИНАМИКА ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОПРОВОДОВ ПРИ ТОКАХ
КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

Выведена основная система дифференциальных уравнений (3.9) для плоской системы двух тросов. Движение тросов происходит под влиянием электромагнитных воздействий, интенсивность которых зависит от актуальной конфигурации тросов. Систему можно свести к двум нелинейным уравнениям (3.11) гиперболического типа. Ввиду значительных сложностей интегрирования исходной системы рассматривалась приближенная задача при которой распределение усилий в тросе предполагалось в виде: $n(\xi, \tau) \equiv c(\tau)$.

Приближенная система уравнений (4.9) была решена с помощью метода конечных разностей с применением соответствующей положением характеристик сетки. Приводится алгоритм решения соответствующий расчетным возможностям ЭЦВМ Одра-1204.

Рассчитаны примеры для однопролетной и двухпролетной системы тросов, приводятся функции изменения во времени усилий в тросах $n(\tau)$ и конфигурации тросов $v(\tau)$.

S u m m a r y

DYNAMICS OF A PLANE GROUP OF CONDUCTORS UNDER SHORT-CIRCUIT
CURRENT

The fundamental system of differential equations (3.9) of a plane pair of linear conductors (cables) is derived. The cables move due to electrodynamical actions, the intensity of which depends on the actual configuration of the cables. The system can be reduced to two non-linear equations (3.11) of hyperbolic type. Since the explicit integration of the system is difficult, an approximate problem is analysed in the paper under the assumption that the distribution of axial force in each rope is equal to $n(\tau) = c(\tau)$.

The approximate set of equations system is solved by means of finite differences by applying a net adapted to the characteristics. An algorithm appropriate for the digital computer ODRA-1204 is presented.

Two numerical examples concern the one-span and two-span cable systems. The results present the distribution of axial forces in the ropes and of their configurations in time.

INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI, OŚRODEK ETO
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1975 r.

STATECZNOŚĆ BOCZNA SAMOŁOTU I DRGANIA LOTEK Z UWZGLĘDNIENIEM
ODKSZTAŁCALNOŚCI GIĘTNEJ SKRZYDEŁ I SPRĘŻYSTOŚCI UKŁADU STEROWANIA

JERZY MARYNIAK, MARIA ZŁOCKA (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracy zbadano wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania lotkami przy uwzględnieniu odkształcalności giętej skrzydeł na stateczność boczna samolotu oraz drgania lotek. Samolot traktowano jako układ mechaniczny sztywny z odkształcalnymi giętnie skrzydłami i ruchomymi lotkami.

Równania ruchu wyprowadzono w quasi-współrzędnych stosując równania Boltzmanna-Hamela [4] dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych w układzie współrzędnych związanych z samolotem.

W pracy przyjęto założenie, że siły i momenty aerodynamiczne nie mają wpływu na postacie i częstości drgań własnych skrzydeł. Założenie to pozwoliło na osobne rozpatrywanie każdej postaci własnej drgań skrzydeł. Skrzydła stanowiące układ ciągły o nieskończonej liczbie stopni swobody zastąpiono ściśle określoną liczbą stopni odpowiadającą ilości przyjętych postaci. Postacie i częstości drgań własnych określono doświadczalnie na drodze badań rezonansowych [6, 8].

Linearyzację równań ruchu przeprowadzono na podstawie teorii małych zaburzeń [1, 2, 3, 7, 20]. Przyjęto, że ruchy antysymetryczne samolotu powodują wyłącznie zmiany antysymetrycznych sił i momentów aerodynamicznych, natomiast symetryczne — zmiany symetrycznych obciążeń aerodynamicznych. Powyższe założenia pozwoliły na rozprzęgnięcie układu równań [1, 2, 3, 20], opisujących dowolny ruch samolotu, na dwa układy: układ równań ruchów symetrycznych [8, 9, 13] stateczności podłużnej i układ równań ruchów antysymetrycznych stateczności bocznej [14].

Uwzględniono pięć stopni swobody, w tym trzy stopnie swobody samolotu sztywnego: przechylenie φ , odchylenie ψ , prędkość przemieszczeń bocznych v oraz antysymetryczne odkształcenia giętne skrzydeł ζ i sprężyste wychylenie lotek β [14].

Po linearyzacji układu równań rozwiązanie sprowadzono do wyznaczenia wektorów własnych i odpowiadających im wartości własnych macierzy stanu. Przykładowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla samolotu klasy «Wilga» według własnych programów w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego.

W dostępnej literaturze, dotyczącej dynamiki obiektów ruchomych, nie spotkano się z wyprowadzeniem równań ruchu przez zastosowanie równań Boltzmanna-Hamela dla układów o więzach holonomicznych. Właśnie zastosowanie równań Boltzmanna-Hamela [4] do wyprowadzenia równań ruchu obiektów ruchomych w układzie współrzęd-

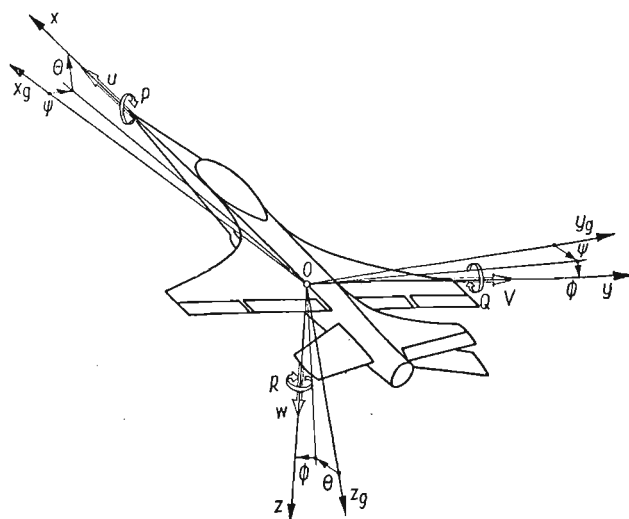
nych związanych z tym obiektem umożliwia w stosunkowo prosty sposób względnie stopni swobody wynikających z odkształcalności ciała, jak i względnych ruchów elementów rozpatrywanego obiektu [9, 13, 14].

Równania Boltzmann-Hamela są uogólnionymi równaniami Lagrange'a II rodzaju wyrażonymi w quasi-współrzędnych i quasi-prędkościach. Quasi-prędkości są liniowymi związkami prędkości uogólnionych, których współczynniki zależne są od współrzędnych uogólnionych [4, 19], przy czym mogą zawierać również wyrazy wolne, jak i jawnie zależne od czasu [19]. W rozważanym przypadku takimi quasi-prędkościami są kinematyczne parametry ruchu określone w układzie centralnych osi odniesienia, sztywno związanych z samolotem. Wspomniane wyżej parametry kinematyczne, to prędkości kątowe samolotu P, Q, R oraz prędkości liniowe jego środka masy U, V, W [1, 2, 3, 4, 9, 13, 14, 19 i 20].

Wyprowadzone w trzecim rozdziale niniejszej pracy równania ruchu są uniwersalne i można je bezpośrednio zastosować do opisu ruchu dowolnych odkształcalnych obiektów ruchomych w przyjętym układzie odniesienia.

2. Przyjęty układ odniesienia

Do opisu dynamiki samolotu niezbędne są trzy układy odniesienia: układ grawitacyjny ściśle związany z Ziemią $Ox_1y_1z_1$, układ prędkościowy związany z przepływem $Ox_a y_a z_a$ oraz związany sztywno z samolotem $Oxyz$.



Rys. 1. Przyjęty układ odniesienia $Oxyz$ związany z samolotem oraz wprowadzone prędkości liniowe i kątowe

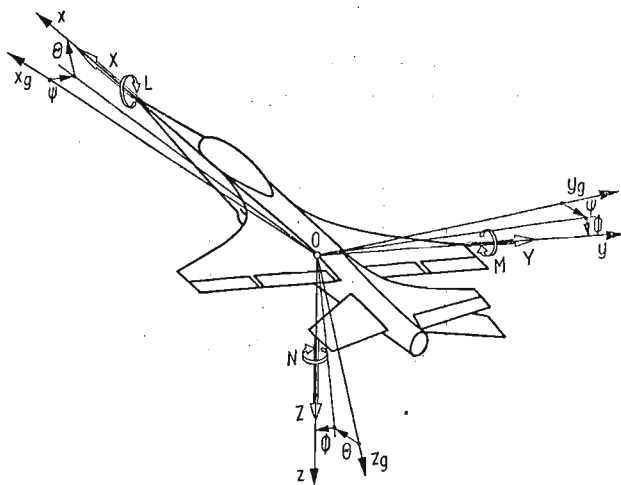
Chwilowe położenie samolotu jako ciała sztywnego określono przez położenie środka masy obiektu $\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, mierzone względem nieruchomego układu współrzędnych $Ox_1y_1z_1$ związanego z Ziemią oraz kątów obrotu samolotu Ψ, Θ, Φ .

Kąty obrotu określają jednoznacznie położenie układu współrzędnych ściśle związanego z samolotem $Oxyz$ względem grawitacyjnego układu współrzędnych $Ox_gy_gz_g$ równoległego do nieruchomego układu $Ox_1y_1z_1$ (rys. 1).

Przyjęte kąty obrotu są kątami quasi-eulerowskimi, zwanymi również samolotowymi [1, 2, 19].

Nazwy tych kątów są następujące: Φ — kąt przechylenia, Θ — kąt pochylenia, Ψ — kąt odchylenia.

Ruch samolotu został opisany w centralnym układzie $Oxyz$ sztywno związanym z samolotem, o osiach skierowanych, jak na rys. 1 i rys. 2.



Rys. 2. Przyjęte składowe siły i momenty w układzie odniesienia $Oxyz$ związanym z samolotem

Składowe wektorów chwilowych prędkości liniowej \bar{V}_c i kątowej $\bar{\Omega}$ w przyjętym układzie współrzędnych (rys. 1) są następujące:

— wektor prędkości liniowej \bar{V}_c

$$(1) \quad \bar{V}_c = U\bar{i} + V\bar{j} + W\bar{k},$$

gdzie U oznacza prędkość podłużną, V — prędkość boczną, W — prędkość przemieszczeń pionowych,

— wektor chwilowej prędkości kątowej $\bar{\Omega}$

$$(2) \quad \bar{\Omega} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k},$$

przy czym P jest kątową prędkością przechylenia, Q — kątową prędkością pochylenia, R — kątową prędkością odchylenia.

Wektory sił zewnętrznych i momenty sił zewnętrznych działających na samolot mają postać (rys. 2):

— wektor sił zewnętrznych \bar{F}

$$(3) \quad \bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

gdzie X oznacza siłę podłużną, Y — siłę boczną, Z — siłę pionową,

— wektor momentu głównego \overline{M}

$$(4) \quad \overline{M} = L\overline{i} + M\overline{j} + N\overline{k},$$

przy czym L jest momentem przechylającym, M — momentem pochylającym, N — momentem odchylającym.

Prędkości kątowe P, Q, R są liniowymi związkami prędkości uogólnionych $\dot{\Phi}, \dot{\Theta}$ i $\dot{\Psi}$ o współczynnikach zależnych od współrzędnych uogólnionych Φ, Θ i Ψ i wyrażają się w następującej postaci:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \cos \Theta \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \Lambda_{\Omega} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}.$$

Związki kinematyczne między prędkościami liniowymi $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ mierzonymi w układzie nieruchomym $Ox_1y_1z_1$ a składowymi prędkościami U, V, W są następujące:

$$(6) \quad \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \Lambda_V \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dz_1}{dt} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dz_1}{dt} \end{bmatrix}.$$

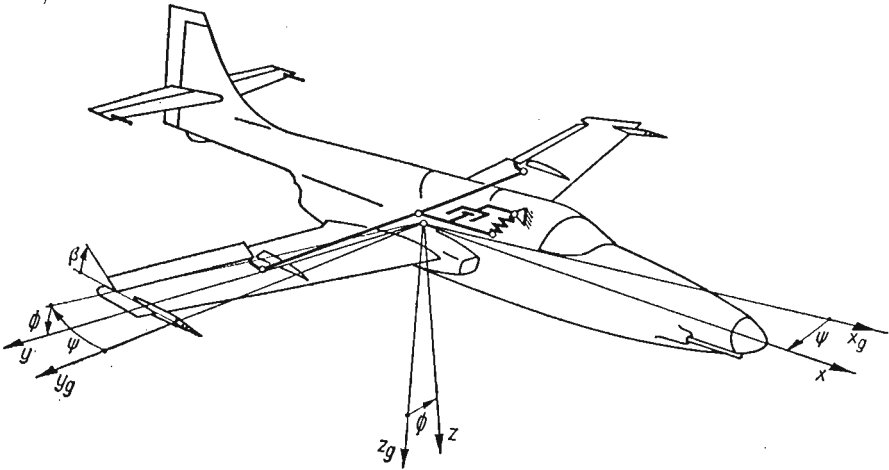
Związki (5) i (6) wyznaczają parametry kinematyczne, które są quasi-prędkościami.

3. Równania ruchu odkształcalnego obiektu swobodnego

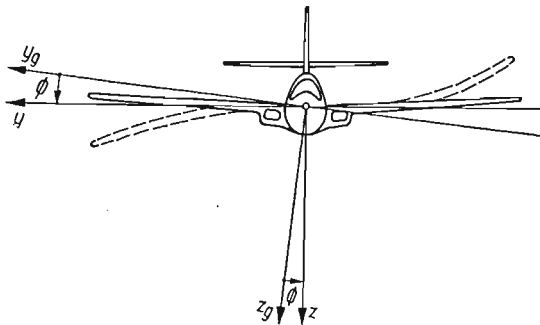
Model samolotu nieodkształcalnego, najczęściej spotykany w literaturze, nie zawsze może być przyjęty w badaniu własności dynamicznych obiektu. Niektóre sztywne i sprężyste ruchy względne mogą mieć istotny wpływ na charakter ruchu samolotu. W przypadku uwzględnienia podatności giętej skrzydeł otrzymuje się układ o nieskończonej liczbie stopni swobody ruchu. Praktyczne wykonanie obliczeń dla takiego układu jest niemożliwe i dlatego też zastosowano metodę przybliżoną. Opiera się ona na założeniu, że siły i momenty aerodynamiczne nie zmieniają postaci niesprężonych drgań własnych skrzydeł.

Ugięcie skrzydła (rys. 4) opisano funkcją

$$\zeta(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(y) \zeta_i(t),$$



Rys. 3. Przyjęty model samolotu i przemieszczeń kątowych obrotów antysymetrycznych samolotu



Rys. 4. Przyjęty model ruchów przechylających i odkształceń giętych skrzydeł samolotu

gdzie $h_i(y)$ jest kolejną postacią drgań własnych. Pozwoliło to na rozpatrywanie wpływu na ruch samolotu każdej postaci drgań osobno. Zgodnie z powyższym, drgania skrzydeł odpowiadające i -tej postaci przedstawiono następująco:

$$(7) \quad \zeta_i(y, t) = h_i(y) \zeta_i(t).$$

Uwzględniono również ruch lotek, który jest możliwy mimo zablokowanego drążka sterowego, dzięki istnieniu sprężystych odkształceń w układzie sterowania lotkami. Przemieszczenie lotek jest określone kątem obrotu lotki β wokół osi zawiasów (rys. 3).

Równanie ruchu samolotu wyprowadzono w quasi-współrzędnych, stosując równania Boltzmanna–Hamela dla układów holonomicznych [4]. Równania Boltzmanna–Hamela są uogólnionymi równaniami Lagrange’a II rodzaju dla układów nieinercjalnych opisanych w quasi-współrzędnych i mają następującą postać:

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \gamma_{r\alpha\mu}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^*,$$

gdzie $\mu, r, \alpha = 1, 2, \dots, k$, k oznaczają ilość stopni swobody, ω_μ — quasi-prędkości, T^* — energię kinetyczną w quasi-prędkościach, π_μ — quasi-współrzędne, Q_μ^* — siły uogólnione.

Związki między quasi-prędkościami i prędkościami uogólnionymi mają postać

$$(9) \quad \omega_\sigma = \sum_{\alpha=1}^k a_{\sigma\alpha} \dot{q}_\alpha,$$

$$(10) \quad \dot{q}_\sigma = \sum_{\mu=1}^k b_{\sigma\mu} \omega_\mu,$$

gdzie \dot{q}_σ oznaczają prędkości uogólnione, $a_{\sigma\alpha} = a_{\sigma\alpha}(q_1, q_2, \dots, q_k)$, q_k — współrzędne uogólnione, $b_{\sigma\mu} = b_{\sigma\mu}(q_1, q_2, \dots, q_k)$, przy czym istnieje następująca zależność macierzowa:

$$(11) \quad [a_{\sigma\mu}] = [b_{\sigma\mu}]^{-1}.$$

Trójwskaźnikowe mnożniki Boltzmanna określone są zależnością

$$(12) \quad \gamma_{\mu\alpha}^r = \sum_{\sigma=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{r\lambda}}{\partial q_\sigma} \right) b_{\lambda\mu} b_{\sigma\alpha}.$$

W przypadku gdy quasi-współrzędne są współrzędnymi uogólnionymi, to trójwskaźnikowe mnożniki Boltzmanna $\gamma_{\mu\alpha}^r$ (12) są równe zeru.

W przyjętym modelu samolotu odkształcalnego wektor quasi-prędkości jest następujący:

$$(13) \quad \omega = \text{col}[U, V, W, P, Q, R, \dot{\beta}, \dot{\zeta}],$$

gdzie U, V, W, P, Q, R określają związki (5) i (6), a odpowiadający mu wektor quasi-współrzędnych ma postać

$$(14) \quad \pi = \text{col}[\pi_U, \pi_V, \pi_W, \pi_P, \pi_Q, \pi_R, \beta, \zeta].$$

Wektor współrzędnych uogólnionych jest następujący:

$$(15) \quad \mathbf{q} = \text{col}[x_1, y_1, z_1, \Phi, \Theta, \Psi, \beta, \zeta].$$

Macierz $[a_{\sigma\mu}]$ w przypadku przyjętego modelu (rys. 3 i rys. 4) w przyjętym układzie współrzędnych (rys. 1) zgodnie ze związkami (5) i (6) ma następującą postać:

$$(16) \quad [a_{\sigma\mu}] = \begin{bmatrix} \Lambda_Y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_\Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

przy czym odpowiadająca jej macierz $[b_{\sigma\mu}]$ określona jest w postaci

$$(17) \quad [b_{\sigma\mu}] = [a_{\sigma\mu}]^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_Y^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_\Omega^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Większość mnożników Boltzmann $\gamma_{\mu\alpha}^r$ w przypadku przyjętego samolotu odkształcalnego jest równa zero. Jednym z niezerowych mnożników Boltzmann jest γ_{54}^6 . Oblicza się go według następującej zależności:

$$(18) \quad \gamma_{54}^6 = \sum_{\alpha=1}^8 \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial a_{6\alpha}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{6l}}{\partial q_\alpha} \right) b_{15} b_{\alpha 4}.$$

Quasi-współrzędne β i ζ są współrzędnymi uogólnionymi. Zgodnie z powyższym

$$\frac{\partial a_{6\alpha}}{\partial \beta} = 0; \quad \frac{\partial a_{6l}}{\partial \zeta} = 0$$

dla $\alpha, l = 1, 2, \dots, 8$ upraszcza się i zależność (18) przyjmuje postać

$$\gamma_{54}^6 = \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{l=1}^6 \left(\frac{\partial a_{6\alpha}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{6l}}{\partial q_\alpha} \right) b_{15} b_{\alpha 4}.$$

Analizując macierze $[a_{\sigma\mu}]$ i $[b_{\sigma\mu}]$ daje się zauważyć, że

$$b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{54} = b_{64} = 0; \quad b_{44} = 1;$$

$$a_{61} = a_{62} = a_{63} = a_{64} = 0; \quad b_{15} = b_{25} = b_{35} = 0;$$

stąd

$$\gamma_{54}^6 = - \frac{\partial a_{65}}{\partial q_4} b_{55} b_{44} - \frac{\partial a_{66}}{\partial q_4} b_{65} b_{44},$$

gdzie

$$\frac{\partial a_{65}}{\partial q_4} = \frac{\partial(-\sin \varphi)}{\partial \varphi} = -\cos \varphi,$$

$$\frac{\partial a_{66}}{\partial q_4} = \frac{\partial(\cos \varphi \cos \Theta)}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \cos \Theta,$$

przy czym

$$b_{55} = \cos \varphi, \quad b_{65} = \frac{\sin \varphi}{\cos \Theta}.$$

W rezultacie otrzymano

$$\gamma_{54}^6 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Pozostałe niezerowe mnożniki Boltzmann obliczono analogicznie; mają one następujące wartości:

$$\begin{aligned} \gamma_{26}^1 &= -1, & \gamma_{62}^1 &= 1, \\ \gamma_{35}^1 &= 1, & \gamma_{53}^1 &= -1, \\ \gamma_{16}^2 &= 1, & \gamma_{61}^2 &= -1, \\ \gamma_{15}^3 &= -1, & \gamma_{51}^3 &= 1, \\ \gamma_{24}^3 &= 1, & \gamma_{42}^3 &= -1, \\ \gamma_{56}^4 &= -1, & \gamma_{65}^4 &= 1, \end{aligned}$$

$$\gamma_{46}^5 = 1, \quad \gamma_{64}^5 = -1,$$

$$\gamma_{45}^6 = -1, \quad \gamma_{54}^6 = 1,$$

$$\gamma_{34}^2 = -1, \quad \gamma_{43}^2 = 1.$$

Po wprowadzeniu tak obliczonych mnożników Boltzmann'a do równania (8) otrzymano równania ruchu dla dowolnego obiektu swobodnego, którego ruch jest opisany w przyjętym układzie odniesienia. Równania ruchu otrzymują następującą postać:

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial U} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_U} - \frac{\partial T^*}{\partial V} R + \frac{\partial T^*}{\partial W} Q = Q_U^*,$$

$$(20) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial V} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_V} + \frac{\partial T^*}{\partial U} R - \frac{\partial T^*}{\partial W} P = Q_V^*,$$

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial W} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_W} - \frac{\partial T^*}{\partial U} Q + \frac{\partial T^*}{\partial V} P = Q_W^*,$$

$$(22) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial P} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_P} - \frac{\partial T^*}{\partial V} W + \frac{\partial T^*}{\partial W} V - \frac{\partial T^*}{\partial Q} R + \frac{\partial T^*}{\partial R} Q = Q_P^*,$$

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial Q} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_Q} + \frac{\partial T^*}{\partial U} W - \frac{\partial T^*}{\partial W} U + \frac{\partial T^*}{\partial P} R - \frac{\partial T^*}{\partial R} P = Q_Q^*,$$

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial R} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_R} - \frac{\partial T^*}{\partial U} V + \frac{\partial T^*}{\partial V} U - \frac{\partial T^*}{\partial P} Q + \frac{\partial T^*}{\partial Q} P = Q_R^*,$$

$$(25) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \beta} = Q_\beta^*,$$

$$(26) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = Q_\zeta^*.$$

Równania (19)÷(24) opisują ruch dowolnego ciała sztywnego w centralnym układzie współrzędnych związanych z obiektem. Pozostałe dwa równania są wynikiem uwzględnienia dodatkowych stopni swobody: ruchów względnych lotek (25) i odkształcalności skrzydeł (26).

W dowolnym ruchu odkształcalnego obiektu ruchomego liczba równań typu (25) i (26) może być dowolna i zależy wyłącznie od ilości dodatkowo uwzględnionych stopni swobody przy nieziennej postaci pierwszych sześciu równań (19)÷(24).

4. Równania ruchów antysymetrycznych samolotu odkształcalnego

W dowolnym ruchu obiektu równania (19)÷(26) na ogół nie rozprzegają się na równania opisujące ruchy symetryczne i antysymetryczne. Są to silnie nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego. Rozprzęgnięcie równań jest jedynie możliwe przy zastosowaniu do badań teorii małych zakłóceń względem ruchu ustalonego i linearyzacji równań.

W niniejszej pracy założono, że samolot wykonuje jedynie antysymetryczne ruchy (rys. 3 i rys. 4), tzn. ruch odchylający Ψ , przechylający Φ , przemieszczenie boczne π_V ,

antysymetryczne wychylenia lotek β i antysymetryczne drgania giętkie skrzydeł ζ . Przy powyższych założeniach otrzymano układ pięciu równań w postaci ogólnej:

$$(27) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial V} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_V} + \frac{\partial T^*}{\partial U} R - \frac{\partial T^*}{\partial W} P = Q_V^*,$$

$$(28) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial P} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_P} - \frac{\partial T^*}{\partial V} W + \frac{\partial T^*}{\partial W} V - \frac{\partial T^*}{\partial Q} R + \frac{\partial T^*}{\partial R} Q = Q_P^*,$$

$$(29) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial R} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_R} - \frac{\partial T^*}{\partial U} V + \frac{\partial T^*}{\partial V} U - \frac{\partial T^*}{\partial P} Q + \frac{\partial T^*}{\partial Q} P = Q_R^*,$$

$$(30) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \beta} = Q_\beta^*,$$

$$(31) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = Q_\zeta^*.$$

Całkowita energia kinetyczna samolotu T^* obliczona w quasi-prędkościach ma następującą postać:

$$(32) \quad T^* = \frac{1}{2} [M_s(U^2 + V^2 + W^2) + I_\eta \dot{\beta}^2 + \beta_2 \dot{\zeta}^2 + I_x P^2 + I_y Q^2 + I_z R^2] - I_{xy} PQ + \\ + S_x(WP - UR) + S_y(VR - WQ) + S_z(UQ - VP) + \{ (A_3 + B_1^P + B_1^L)W + \\ + (A_1 + B_3^P + B_3^L)P - [A_4 + (B_1^P + B_1^L)x_L - B_3^P - B_3^L]Q \} \dot{\zeta} + [(S_\eta^P - S_\eta^L)U + \\ + (I_{\zeta\eta}^P - I_{\zeta\eta}^L)P + (S_\eta^P - S_\eta^L)W] \dot{\beta} + (B_3^P - B_3^L) \dot{\zeta} \dot{\beta},$$

gdzie

$$A_1 = \int_{-b/2}^{b/2} m_s(y)h(y)y dy, \quad A_2 = \int_{-b/2}^{b/2} m_s(y)h^2(y) dy, \\ A_3 = \int_{-b/2}^{b/2} m_s(y)h(y) dy, \quad A_4 = \int_{-b/2}^{b/2} S_y(y)h(y) dy, \\ B_1 = \int_{b/2-b_L}^{b/2} m_L(\eta)h(\eta) d\eta, \quad B_2 = \int_{b/2-b_L}^{b/2} m_L(\eta)h^2(\eta) d\eta, \\ B_3 = \int_{b/2-b_L}^{b/2} S_\eta(\eta)h(\eta) d\eta, \quad B_4 = \int_{b/2-b_L}^{b/2} m_L(\eta)h(\eta)\eta d\eta,$$

przy czym M_s oznacza masę całego samolotu, I_x, I_y, I_z, I_{xy} — momenty bezwładności i moment dewiacyjny samolotu względem układu odniesienia $Oxyz$; S_x, S_y, S_z — momenty statyczne samolotu względem układu odniesienia $Oxyz$; $I_\eta, I_\zeta, I_{\zeta\eta}, S_\eta, S_\zeta$ — momenty bezwładności, dewiacyjne i statyczne lotek względem osi zawiasów η i osi symetrii samolotu ζ , górne indeksy L i P określają odpowiednio lewą i prawą lotkę; $m_s(y), m_L(\eta)$ — rozkłady mas skrzydła i lotki w funkcji rozpiętości; $h(y)$ — funkcją ugięcia skrzydła odpowiadającą rozpatrywanej postaci drgań własnych.

Siły uogólnione występujące w prawych stronach równań (27)÷(31) wyznaczono uwzględniając energię potencjalną odkształceń skrzydeł i układu sterowania [8, 14]; siły grawitacyjne [1, 2, 3, 8, 14] oraz siły i momenty aerodynamiczne [1, 2, 3, 8, 14, 20].

Energia potencjalna odkształceń sprężystych skrzydeł i układu sterowania lotkami ma następującą postać:

$$(33) \quad U_s = \frac{1}{2} k_\zeta \zeta^2 + \frac{1}{2} k_\beta \beta^2,$$

gdzie k_ζ — sztywność giętna skrzydeł, k_β — sztywność układu sterowania lotkami, przy czym

$$(34) \quad k_\zeta = \omega^2 \int_{-b/2}^{b/2} m_s(y) h^2(y) dy$$

jest sztywnością uogólnioną skrzydeł odpowiadającą uwzględnionej postaci drgań własnych opisanej funkcją $h(y)$ o częstotliwości drgań ω .

Wiskotyczne tłumienie w układzie sterowania lotkami uwzględniono przez wprowadzenie dysypacyjnej funkcji Rayleigha U_R .

$$(35) \quad U_R = -\frac{1}{2} k_\beta \dot{\beta}^2.$$

Składowe siły grawitacji w układzie odniesienia $Oxyz$ mają postać

$$(36) \quad m\bar{g} = \Lambda_g mg,$$

gdzie

$$\Lambda_g = \begin{bmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta \sin\Phi \\ \cos\Theta \cos\Phi \end{bmatrix},$$

a w rozważanym przypadku, uwzględniającym wyłącznie ruchy antysymetryczne,

$$(37) \quad Y_g = mg \cos\Theta \sin\Phi.$$

Siły i momenty aerodynamiczne działające na samolot wyprowadzono przy uwzględnieniu stacjonarnej aerodynamiki. Linearyzację sił i momentów aerodynamicznych przeprowadzono według metody Bryana [1, 2, 3, 20]. Metoda ta oparta jest na założeniu, że siły i momenty aerodynamiczne są funkcjami chwilowych wielkości zmian prędkości liniowej i kątowej i ich pochodnych. Funkcje te rozwijane są w szereg Taylora względem wymienionych uprzednio zmiennych. W szeregach tych uwzględnione są jedynie człony pierwszego rzędu [1, 2, 3, 20].

W rozpatrywanym przypadku założono, że samolot porusza się ustalonym, jednostajnym ruchem poziomym. Przyjęto, że ustalony ruch samolotu podlega małym zakłóceniom, tzn., że

$$(38) \quad \begin{array}{lll} \Phi = \varphi, & P = p, & U = U_0 = \text{const}, \\ \Theta = \Theta_0 = \text{const}, & Q = 0, & V = v, \\ \Psi = \psi, & R = r, & W = 0. \end{array}$$

Sily uogólnione w równaniach (27) ÷ (31) przy uwzględnieniu powyższych zakłóceń i wprowadzeniu zależności (37) i (38) mają postać:

$$\begin{aligned}
 Q_{\dot{v}}^* &= Y_v v + Y_p p + Y_r r + mg\varphi \cos\Theta_0, \\
 Q_p^* &= L_v v + L_p p + L_r r + L_{\dot{\beta}} \dot{\beta} + L_{\dot{\zeta}} \dot{\zeta} + L_{\beta} \beta, \\
 Q_r^* &= N_v v + N_p p + N_r r + N_{\dot{\beta}} \dot{\beta} + N_{\dot{\zeta}} \dot{\zeta} + N_{\beta} \beta, \\
 Q_{\dot{\beta}}^* &= R_p p + R_r r + R_{\dot{\beta}} \dot{\beta} + R_{\dot{\zeta}} \dot{\zeta} + R_{\beta} \beta, \\
 Q_{\dot{\zeta}}^* &= E_p p + E_r r + E_{\dot{\beta}} \dot{\beta} + E_{\dot{\zeta}} \dot{\zeta} + E_{\zeta} \zeta,
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

gdzie $Y_v = \frac{\partial Y}{\partial v}$, $Y_p = \frac{\partial Y}{\partial p}$, ..., $E_{\zeta} = \frac{\partial E}{\partial \zeta}$ są, zgodnie z nazwami przyjętymi w lotnictwie, pochodnymi aerodynamicznymi [1, 2, 3, 20].

Pochodne aerodynamiczne występujące w zależnościach (38) zostały wyprowadzone w [1, 2, 3, 6, 8, 14 i 20].

Układ równań (27) ÷ (31) po uwzględnieniu (38) i (39) sprowadzono do postaci bezwymiarowej dzieląc równania sił przez $\rho V_c^2 S$, a równania momentów przez $\rho V_c^2 S b/2$.

Podstawowymi wielkościami występującymi w bezwymiarowych równaniach ruchu są:

$$\begin{aligned}
 \hat{t} &= \frac{M_s}{\rho V_c S} \text{ czas aerodynamiczny,} \\
 \mu &= \frac{M_s}{\rho S b/2} \text{ względna gęstość samolotu,} \\
 j_x &= \frac{I_x}{M_s (b/2)^2} \text{ bezwymiarowy moment bezwładności,} \\
 \bar{t} &= \frac{t}{\hat{t}} \text{ czas bezwymiarowy,} \\
 \bar{v} &= \frac{v}{V} \text{ bezwymiarowa prędkość liniowa,} \\
 \bar{p} &= p \hat{t} \text{ bezwymiarowa prędkość kątowa,} \\
 y_v &= \frac{Y_v}{\rho S V_c} \text{ bezwymiarowa pochodna siły bocznej względem zmiany prędkości liniowej ślizgu,} \\
 y_p &= \frac{Y_p}{\rho S V_c b/2} \text{ bezwymiarowa pochodna siły bocznej względem zmiany prędkości kątowej przechylenia,} \\
 n_v &= \frac{N_v}{\rho S V_c b/2} \text{ bezwymiarowa pochodna momentu odchyłającego względem zmiany prędkości liniowej ślizgu,} \\
 l_r &= \frac{L_r}{\rho S V_c b/2} \text{ bezwymiarowa pochodna momentu przechylającego względem zmiany prędkości kątowej odchylenia.}
 \end{aligned}$$

W analogiczny sposób przedstawiono w postaci bezwymiarowej pozostałe wyrazy równań.

Układ równań ruchu w postaci bezwymiarowej otrzymano w zapisie macierzowym w następującej formie:

$$(40) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \text{col}[\pi_v, \pi_p, \pi_r, \zeta, \beta],$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{col}[\dot{\bar{v}}, \dot{\bar{p}}, \dot{\bar{r}}, \dot{\bar{\zeta}}, \dot{\bar{\beta}}],$$

przy czym:

— \mathbf{A} jest macierzą współczynników bezwładności, mianowicie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j_{xz}/j_x & l_{\zeta}^*/j_x & j_{\xi\eta}/j_x \\ 0 & -j_{xz}/j_z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e_{\bar{\beta}} & 0 & 1 & e_{\bar{\beta}} \\ 0 & j_{\xi\eta}/j_{\eta} & 0 & r_{\zeta}^*/j_{\eta} & 1 \end{bmatrix},$$

— \mathbf{B} jest macierzą współczynników tłumienia, mianowicie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -y_v & -y_p/\mu & (1-y_r/\mu) & 0 & 0 \\ -\mu l_v/j_x & -l_p/j_x & -l_r/j_x & -l_{\zeta}/j_x & -l_{\bar{\beta}}/j_x \\ -\mu n_v/j_z & -n_p/j_z & -n_r/j_z & -n_{\zeta}/j_z & -n_{\bar{\beta}}/j_z \\ 0 & e_p & e_r & e_{\zeta} & e_{\bar{\beta}} \\ 0 & -r_p/j_{\eta} & -r_r/j_{\eta} & -r_{\zeta}/j_{\eta} & \frac{(k_{\bar{\beta}}\mu - r_{\bar{\beta}})}{j_{\eta}} \end{bmatrix},$$

— \mathbf{C} jest macierzą współczynników sztywności, mianowicie

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -y_{\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{\beta}\mu/j_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_{\beta}\mu/j_z \\ 0 & 0 & 0 & e_{\zeta} & e_{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{\beta}\mu - r_{\beta})/j_{\eta} \end{bmatrix}.$$

Równanie macierzowe (40) rzędu drugiego sprowadzono do równania rzędu pierwszego w postaci

$$(41) \quad \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix},$$

przy czym

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Również

$$(42) \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}\mathbf{q},$$

gdzie macierz stanu \mathbf{R} ma postać

$$(43) \quad \mathbf{R} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie sprowadzono do wyznaczenia wektorów własnych \mathbf{q}_{wj} i odpowiadających im wartości własnych $\lambda_{j,j+1} = \xi_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1}$ macierzy stanu \mathbf{R} (43).

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$(44) \quad \mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^8 C_j \mathbf{q}_{wj} \exp(\lambda_j t),$$

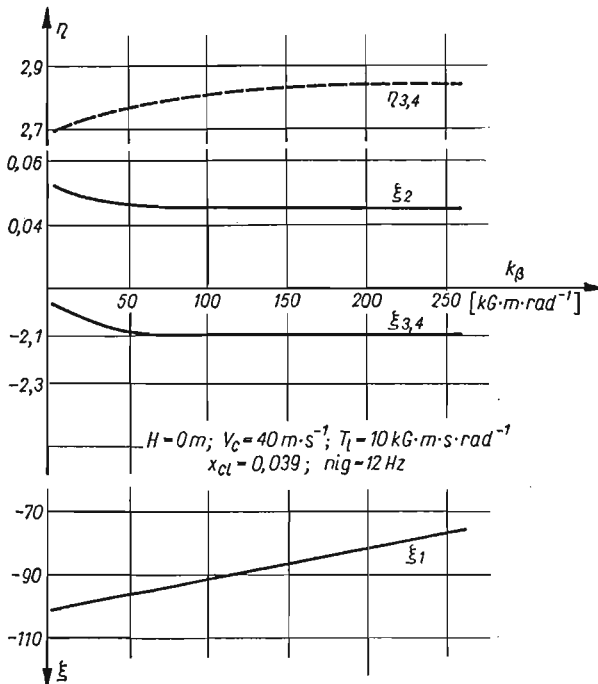
gdzie C_j oznaczają stałe zależne od warunków początkowych będących wartościami zakłóceń od ruchu ustalonego dla chwili $t = 0$, η_j — częstość oscylacji o okresie $T = \frac{2\pi}{\eta} t$,

ξ_j — współczynnik tłumienia, przy czym $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\xi} t$ — czas stłumienia amplitudy do połowy dla $\xi < 0$, a w przypadku $\xi > 0$, czas podwojenia amplitudy.

5. Przykład liczbowy i wnioski

Przykładowe obliczenia wykonano dla lekkiego samolotu turystycznego klasy «Wilga». Rozwiązano układ równań (40) wyznaczając wektory własne \mathbf{q}_{wj} i odpowiadające im wartości własne λ_j macierzy stanu \mathbf{R} (43).

Wszystkie obliczenia wykonano według własnych programów na EMC GIER w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego.

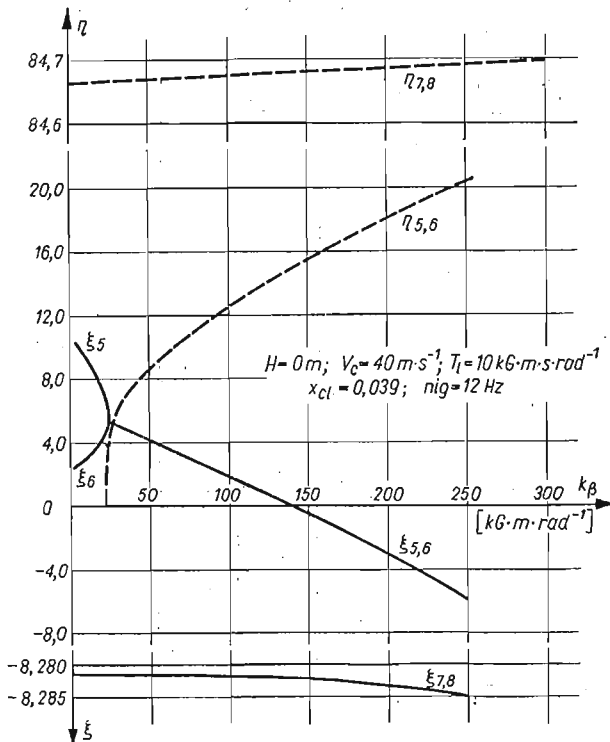


Rys. 5. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η pierwszych czterech wartości własnych $\lambda_1 \div \lambda_4$ w funkcji sztywności układu sterowania lotkami

Wyniki przedstawiono w postaci wykresów (rys. 5—9), na których linią ciągłą nanie-siono zmiany współczynników tłumienia ξ_j , a przerywaną częstości oscylacji η_j . Jednako-wymi indeksami oznaczono na wszystkich wykresach odpowiadające sobie wartości własne λ_j , charakteryzujące te same ruchy samolotu, skrzydeł i lotek:

- $\lambda_1 = \xi_1$ charakteryzuje aperiodyczne wychylenia lotek β zawsze silnie tłumione $\xi_1 < 0$,
- $\lambda_2 = \xi_2$ charakteryzuje aperiodyczne ruchy spiralne wykazujące słabą niestaceczność $\xi_2 > 0$,
- $\lambda_{3,4} = \xi_{3,4} \pm i\eta_{3,4}$ charakteryzuje wahania okresowe odpowiadające halen-drowaniu p i v sprzężonemu z ruchem odchyłającym r , ruchy zawsze tłumione $\xi_{3,4} < 0$,
- $\lambda_{5,6} = \xi_{5,6} \pm i\eta_{5,6}$ charakteryzuje ruchy okresowe lub aperiodyczne lotek β sprzężone z ruchami przechylającymi samolotu p tłumio-nymi $\xi_{5,6} < 0$ lub rozbieżnymi $\xi_{5,6} > 0$,
- lub
- $\lambda_5 = \xi_5$ nymi $\xi_{5,6} < 0$ lub rozbieżnymi $\xi_{5,6} > 0$,
- $\lambda_6 = \xi_6$
- $\lambda_{7,8} = \xi_{7,8} \pm i\eta_{7,8}$ charakteryzuje drgania giętkie skrzydeł zawsze tłumione $\xi_{7,8} < 0$ o częstości $\eta_{7,8}$ bliskiej częstości drgań własnych skrzydeł ω .

a) Wpływ sztywności układu sterowania na stateczność samolotu. Wzrost sztywności w układzie sterowania (rys. 5 i 6) powoduje spadek tłumienia aperiodycznych wychyleń

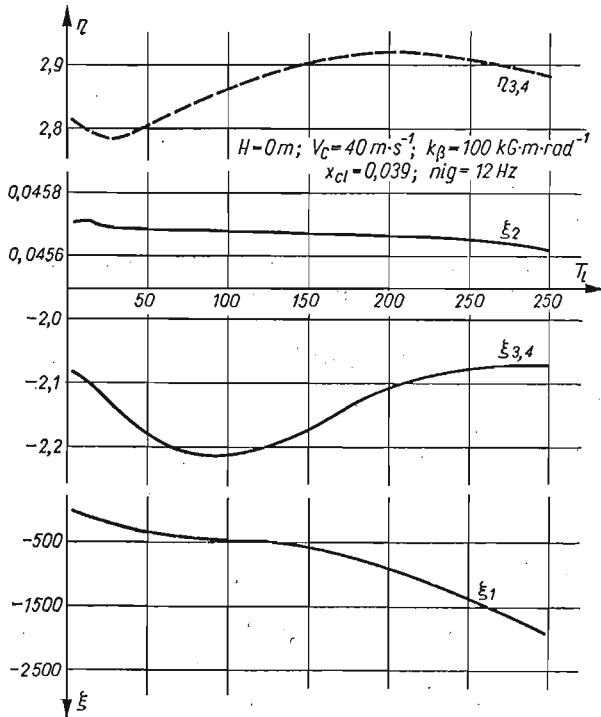


Rys. 6. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η wartości własnych $\lambda_5 \div \lambda_8$ w funkcji sztywności układu sterowania lotkami

lotek (β) ξ_1 przy niezmiennych charakterystykach ruchów spiralnych ξ_2 i holendrowania λ_{34} (rys. 5). Wzrost sztywności również nie ma wpływu na drgania giętkie skrzydeł, zarówno na częstość η_{78} , jak i tłumienie $\xi_{78} < 0$, silnie natomiast wpływa na tłumienie i charakter ruchu lotek sprzężony z przechyłaniem samolotu (rys. 6).

Przy małej sztywności układu sterowania lotkami, wychylenia lotek β i ruchy przechylające samolotu p są aperiodycznymi ruchami rozbieżnymi $\xi_5 > 0$ i $\xi_6 > 0$, które przy wzroście sztywności przechodzą w periodyczne ruchy o częstości η_{56} , początkowo rozbieżne $\xi_{56} > 0$, a następnie tłumione $\xi_{56} < 0$ (rys. 6).

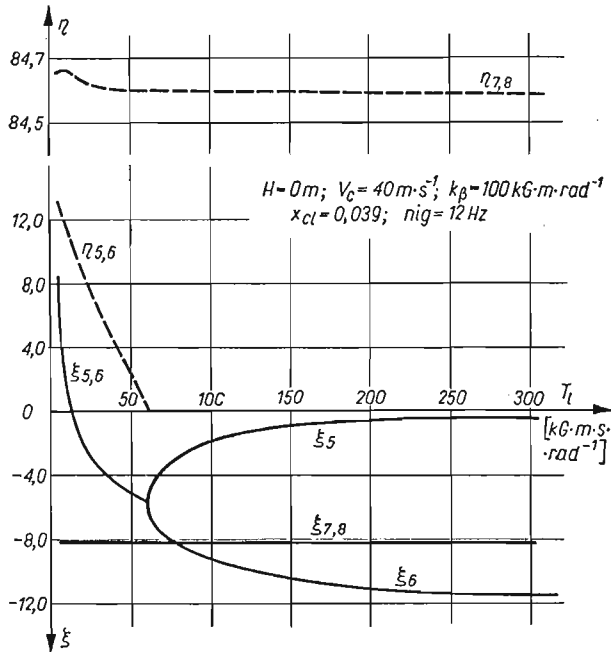
b) *Wpływ tłumienia w układzie sterowania lotkami na stateczność samolotu.* Wzrost tłumienia wiskotycznego w układzie sterowania lotkami (rys. 7 i 8) powoduje zwiększenie silnego tłumienia $\xi_1 \ll 0$ aperiodycznych wychyleń lotek β (rys. 7) przy niezmiennym



Rys. 7. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η pierwszych czterech wartości własnych $\lambda_1 \div \lambda_4$ w funkcji tłumienia układu sterowania lotkami

charakterze ruchów spiralnych samolotu $\xi_2 > 0$ oraz częstości η_{34} i tłumienia $\xi_{34} < 0$ holendrowania samolotu (rys. 7). Tłumienie w układzie sterowania również nie ma wpływu na częstości η_{78} i tłumienie $\xi_{78} < 0$ drgań giętkich skrzydeł (rys. 8).

Zmiana tłumienia w układzie sterowania ma decydujący i najbardziej istotny wpływ na wychylenia lotek β i sprzężone z nimi ruchy przechylające samolotu p (rys. 8). Przy małym tłumieniu występują oscylacje harmoniczne o częstości η_{56} , początkowo silnie rozbieżne $\xi_{56} > 0$, przechodzące w tłumione $\xi_{56} < 0$ z równoczesnym spadkiem częstości oscylacji



Rys. 8. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η wartości własnych $\lambda_5 \div \lambda_8$ w funkcji tłumienia układu sterowania lotkami

η_{56} . Przy pewnym tłumieniu krytycznym drgania okresowe lotek i skrzydeł przechodzą w silnie tłumione ruchy aperiodyczne $\xi_5 < 0$ i $\xi_6 < 0$ (rys. 8).

c) *Wpływ wyważenia lotek na stateczność samolotu.* Przednie wyważenie lotek korzystnie wpływa na własności dynamiczne samolotu, jak również i ruchy samych lotek przez ustacznianie samolotu (rys. 9).

Zmiana wyważenia ma decydujący wpływ na wychylenia lotek β i ruchy przechylające samolotu p . Wyważenie statyczne zerowe, jak i przednie (tzn. środek masy lotki znajduje się w osi obrotu lotki lub przed osią) powoduje ruchy aperiodyczne silnie tłumione $\xi_5 < 0$ i $\xi_6 < 0$, natomiast wyważenie tylne sprzyja występowaniu oscylacji periodycznych o częstości η_{56} i tłumieniu $\xi_{56} < 0$.

6. Wnioski ogólne

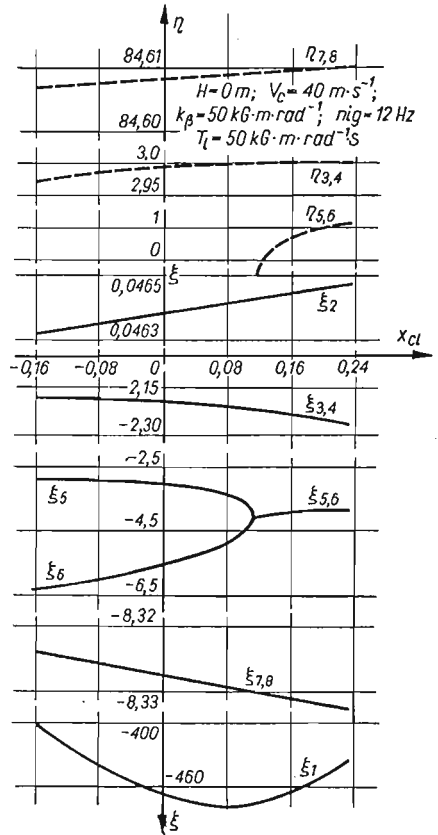
Uwzględnienie dodatkowych stopni swobody, jakimi są odkształcalność giętna skrzydeł i wychylenia sprężyste lotek w stosunku do wyników otrzymanych w przypadku samolotu sztywnego powoduje pojawienie się dodatkowych czterech wartości własnych.

Wartości własne λ_2 i $\lambda_{3,4}$ są ścisłymi odpowiednikami wartości własnych charakteryzujących ruchy samolotu sztywnego, tj. ruchy spiralne i holendrowanie.

W rozważanym przypadku brak odpowiednika charakteryzującego aperiodyczne, silnie tłumione przechylenie samolotu sztywnego. Występuje natomiast silne sprzężenie względnych wychyleń lotek β z ruchami przechylającymi samolotu p .

Silnie tłumione drgania giętne skrzydeł nie wpływają w istotny sposób na pozostałe ruchy samolotu, same natomiast wyłącznie zależą od sztywności skrzydeł.

Otrzymane wyniki i na ich podstawie wyciągnięte wnioski są słuszne dla rozważanego przykładu. Zastosowanie ich do innego typu samolotu lub obiektu latającego wymaga dodatkowych obliczeń numerycznych według opracowanych programów.



Rys. 9. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji stopnia statycznego wyważenia lotek

Literatura cytowana w tekście

1. B. ETKIN, *Dynamics of Flight. Stability and Control*, New York 1959.
2. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York 1972.
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. II., PWN, Łódź — Warszawa 1961.
4. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
6. J. MARYNIAK, *The Influence of Aileron Flexibility and Mass Unbalance on the Fleitter Speed*, Aero Revue, 2 (1967).
7. J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza stateczności bocznej szybowca holowanego na linie*, Mech. Teoret. i Stos., 7, 1 (1969).
8. J. MARYNIAK, M. LOSTAN, *Wpływ odkształcalności giętnej skrzydła na stateczność podłużną szybowca*, Mech. Teoret. i Stos., 8, 2 (1970).

9. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu i oscylacje steru*, Mech. Teoret. i Stos., 13, 2 (1975).
10. *Nowoczesne metody numeryczne*, opracowane przez National Physical Laboratory Teddington Middlesex.
11. K. OGATA, *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa 1974.
12. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.
13. P. RUBELEK, *Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu z uwzględnieniem sztywności giętej usterzenia poziomego*, praca dyplomowa magisterska, IMS PW, Warszawa 1974 (nie publikowana).
14. M. ZŁOCKA, *Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania lotkami na stateczność boczną samolotu z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł*, praca dyplomowa magisterska IMS PW, Warszawa 1974 (nie publikowana).
15. К. А. АБГАРЯН, *Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем*. Изд. Наука, Москва 1973.
16. П. АШЕЛЬ, *Теоретическая механика*, Изд. физ-мат., 1960.
17. Ф. Р. ГАНТМАХЕР, *Теория матриц*, Изд. Наука, Москва 1966.
18. К. С. КОЛЕСНИКОВ, В. Н. СУХОВ, *Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления*, Машиностроение, Москва 1974.
19. А. И. ЛУРЬЕ, *Аналитическая механика*, Гост. Изд. физ-мат., Москва 1961.
20. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, И. В. СТРАЖЕВА, *Динамика полета. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов*, Изд. Машиностроение, Москва 1965.
21. Л. А. ПАРС, *Аналитическая механика*, Изд. физ-мат., Москва 1960.
22. И. В. СТРАЖЕВА, В. С. МЕЛКУМОВ, *Векторно-матричные методы в механике полета*, Машиностроение, Москва 1973.
23. Дж. Х. УИЛКИНСОН, *Алгебраическая проблема собственных значений*, Изд. Наука, Москва 1970.

Резюме

БОКОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ САМОЛЕТА И КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕРОНОВ ПРИ ИЗГИБАЮЩЕЙ ДЕФОРМАЦИИ КРЫЛЬЕВ ПРИ НАЛИЧИИ УПРУГОСТИ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

В работе исследовано влияние жесткости и демпфирования в системе управления, а также влияние расположения центра массы элеронов на боковую устойчивость самолета и колебания элеронов.

Принималось, что самолет является жесткой механической системой с изгибной деформацией крыльев и с отклоняемыми элеронами.

Уравнения движения были выведены в квази-координатах с применением уравнения Больцмана-Гамеля для системы с голономными связями. Учитывалось пять степеней свободы — три степени свободы жесткого самолета: угол крена, угол тангажа и боковое перемещение, а также: антисимметрические изгибные деформации крыльев и упругие отклонения элеронов.

После линеаризации системы уравнений решение было сведено к определению собственных векторов и соответствующих им собственных значений матриц состояния.

Summary

LATERAL STABILITY OF A PLANE AND AILERON VIBRATIONS, FLEXIBILITY OF WINGS AND ELASTICITY OF CONTROL SYSTEM BEING TAKEN INTO CONSIDERATION

The paper deals with the effect of rigidity and damping of control system and the effect of aileron static trim degree on the lateral stability of a plane and aileron vibrations. The plane was considered as an ideally rigid mechanical system with flexibly deformable wings and movable ailerons.

The equations of motion in quasi-coordinates were written using Boltzmann-Hamel equations for the system with holonomic constraints. Five degrees of freedom were considered, i.e. three degrees of freedom of a plane as a rigid body: rolling, yawing and sideslip and anti-symmetrical flexible wing deformation and elastic aileron displacement.

After the equation system linearization the solution was reduced to finding the eigenvectors and the corresponding eigenvalues of the state matrix.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1975 r.



ROZWIĄZYWANIE PROBLEMÓW DYNAMIKI PŁYT PROSTOKĄTNYCH NA PODSTAWIE ZMODYFIKOWANEJ METODY SIŁ NOWACKIEGO

WACŁAW MIERZEJEWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Ścisłe, zamknięte rozwiązania dynamiki płyt prostokątnych dotyczą przypadków podparcia swobodnego na dwu przeciwległych brzegach. Istnieje bardzo obszerna literatura poświęcona przybliżonym metodom obliczania częstości i postaci drgań własnych płyt. Do rozwiązywania problemów dynamiki płyt stosowane są takie metody, jak: Rayleigha-Ritza, Galerkina, szeregów, różnic skończonych oraz elementów skończonych. W wielu pracach ugięcie aproksymuje się funkcjami belkowymi. Wymienić tu można takie prace, jak [2] i [3]. W pracy [4] autorzy stosują, na równi z funkcjami belkowymi, wielomiany. W opublikowanej w 1962 r. pracy [5] uzyskano wyniki przy zastosowaniu metody wykorzystującej szeregi trygonometryczne. Ogólne rozwiązanie dla płyt prostokątnych z dowolnymi warunkami brzegowymi z wykorzystaniem szeregów trygonometrycznych opracował KĄCZKOWSKI [1]. Niezależnie od faktu opublikowania dużej liczby prac trudno uznać problematykę dynamiki płyt za zamkniętą. Istniejące metody, mimo obecnego poziomu techniki obliczeniowej, nie zawsze pozwalają na osiągnięcie efektywnych wyników. Stosowanie funkcji belkowych w metodach wariacyjnych nie wydaje się być z teoretycznego punktu widzenia przekonujące, ze względu na zasadnicze różnice w sformułowaniu problemów płyt i belek. W przypadku płyt z brzegami swobodnymi, funkcje belkowe nie spełniają naturalnych warunków brzegowych, stąd druga pochodna w kierunku normalnym szeregu opisującego ugięcie płyty nie jest jednostajnie zbieżna do odpowiedniej pochodnej funkcji ugięcia. W metodzie opracowanej przez CLASSENA i THORNA [5] spełnia się w sposób przybliżony zarówno równanie różniczkowe, jak i warunki brzegowe.

W przypadku stosowania dotychczasowych metod, wykorzystujących szeregi trygonometryczne, powstają duże trudności przy obliczaniu sił wewnętrznych, spowodowane wolną zbieżnością lub wręcz rozbieżnością szeregów je opisujących.

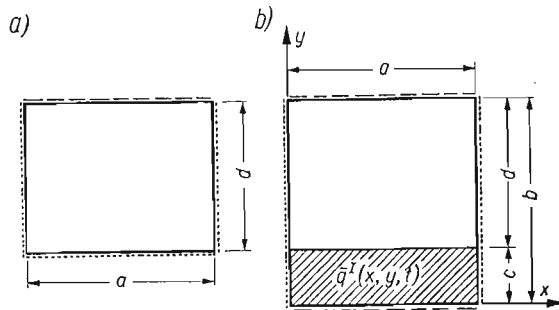
Tematem przedstawionej pracy jest sformułowanie metody, w której rozwiązania zagadnień drgań płyt swobodnych i obciążonych uzyskuje się poprzez rozpatrzenie drgań wymuszonych płyt zastępczych o znanych częstościach i postaciach drgań własnych. Obliczenia oparte są na zmodyfikowanej metodzie sił W. NOWACKIEGO.

2. Opis metody

Równanie różniczkowe drgań swobodnych płyt cienkich ma postać

$$(2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w - k^4 w = 0.$$

W przypadku warunków brzegowych, dla których nie jest znane ściśle rozwiązanie (2.1), można dla znalezienia częstości i postaci drgań własnych rozpatrzeć drgania wymuszone płyty zastępczej o dwu przeciwległych brzegach swobodnie podpartych, o znanych częstościach i postaciach drgań własnych. Ma ona większe wymiary niż płyta właściwa, której postaci są poszukiwane. Dla prostoty wstępnych rozważań zakłada się, że płyta właściwa (rys. 1a) ma z trzech stron te same warunki brzegowe, co płyta zastępcza (rys. 1b), przy



Rys. 1. Schemat realizacji warunków brzegowych przy pomocy obciążenia uzupełniającego

czym jeden brzeg jest swobodnie podparty. Brzegi z dowolnymi warunkami brzegowymi zaznaczone są na rysunkach kropkami. Płyta zastępcza poddana jest działaniu harmonicznie zmiennego w czasie obciążenia $\bar{q}^I(x, y, t) = q^I(x, y) \sin \omega t$, zwanego dalej obciążeniem uzupełniającym. Obciążenie to spełnia następujący warunek:

$$(2.2) \quad q^I(x, y) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad c \leq y \leq b.$$

Szczególnym przypadkiem obciążenia uzupełniającego może być obciążenie rozłożone wzdłuż linii prostej, jakie jest stosowane w metodzie NOWACKIEGO.

Aby wykazać możliwość realizacji warunków brzegu swobodnego zakłada się, że po myślowym rozcięciu płyty zastępczej wzdłuż linii $y = c$, powstałe w wyniku tego brzegi obu płyt pozostają swobodne. Niech obie części płyty zastępczej drgają z częstością własną płyty nieobciążonej. Obciążenie $q^I(x, y)$ należy dobrać tak, aby uzyskać następujące zależności między funkcjami ugięcia płyty swobodnej i obciążonej:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} w_{\text{obc.}}|_{y=c} &= w_{\text{swob.}}|_{y=c}, \\ \frac{\partial w_{\text{obr.}}}{\partial y} \Big|_{y=c} &= \frac{\partial w_{\text{swob.}}}{\partial y} \Big|_{y=c}. \end{aligned}$$

Ze związków (2.3) otrzymać można

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 w_{\text{obc.}}}{\partial x^2} \Big|_{y=c} &= \frac{\partial^2 w_{\text{swob.}}}{\partial x^2} \Big|_{y=c}, \\ \frac{\partial^3 w_{\text{obc.}}}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=c} &= \frac{\partial^3 w_{\text{swob.}}}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=c}. \end{aligned}$$

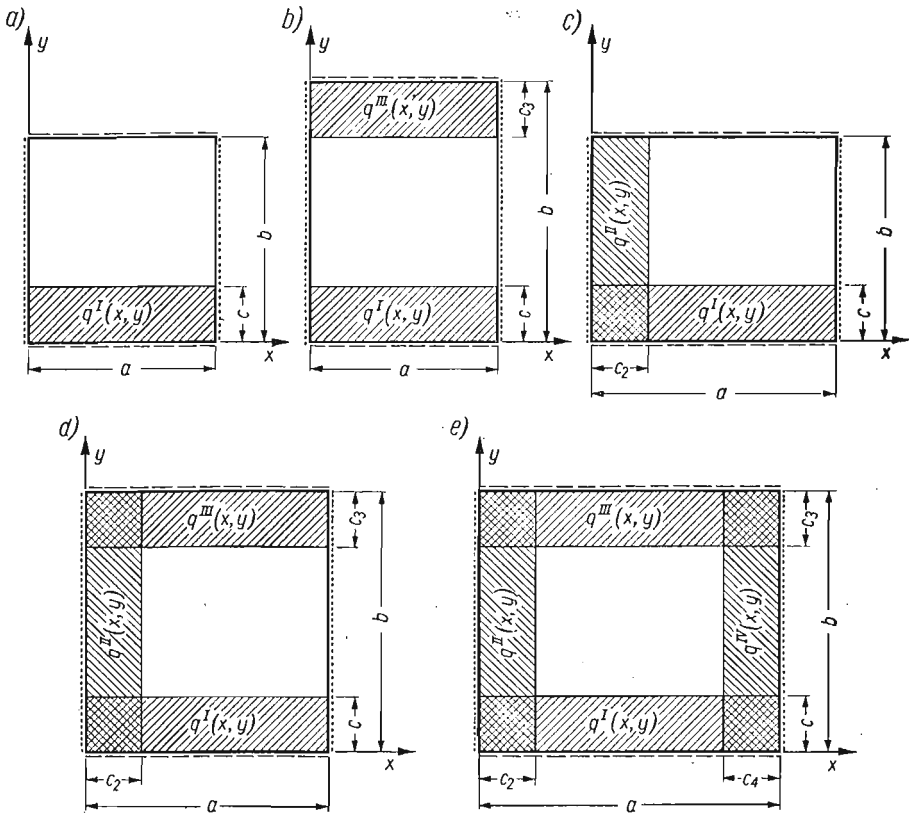
Zgodnie z przyjętym założeniem, obie płyty spełniają dla $y = c$ warunki brzegu swobodnego. Uwzględniając w tych warunkach równania (2.4) otrzymano:

$$(2.5) \quad \left. \frac{\partial^2 w_{\text{obc.}}}{\partial y^2} \right|_{y=c} = \left. \frac{\partial^2 w_{\text{swob.}}}{\partial y^2} \right|_{y=c},$$

$$\left. \frac{\partial^3 w_{\text{obc.}}}{\partial y^3} \right|_{y=c} = \left. \frac{\partial^3 w_{\text{swob.}}}{\partial y^3} \right|_{y=c}.$$

Spełnienie związków (2.3) implikuje zatem zależności (2.5). Oznacza to możliwość «bezsilowego zszycia» obu części płyty zastępczej przy takim doborze obciążenia uzupełniającego, przy którym spełnione są związki (2.3).

Podobnie wykazać można, że przez odpowiedni dobór obciążenia realizuje się stany odpowiadające dowolnym warunkom brzegowym w dwu lub więcej przekrojach płyty zastępczej, zarówno w rozpatrywanym przypadku drgań swobodnych, jak i przy drganiach wymuszonych. Wszystkie możliwe schematy zastępcze pokazano na rys. 2. Jeżeli płyta



Rys. 2. Schematy zastępcze

właściwa ma przynajmniej jeden brzeg swobodnie podparty, można dobrać płytę zastępczą z takimi samymi warunkami na trzech brzegach, jak warunki płyty właściwej (rys. 2a). Zachodzi wówczas konieczność zrealizowania warunków brzegowych w jednym tylko przekroju.

3. Analiza obciążeń uzupełniających

W poniższych rozważaniach ograniczono się do rozpatrywania drgań swobodnych oraz wymuszonych, ustalonych. Dla zrealizowania warunków brzegowych w przekroju równoległym do podpartych swobodnie brzegów płyty zastępczej można przyjąć amplitudę obciążenia w postaci

$$(3.1) \quad q^I(x, y) = q_1^I(x, y) + q_2^I(x, y),$$

przy czym funkcje $q_i^I(x, y)$, gdzie $i = 1, 2$ powinny umożliwiać spełnienie dwóch warunków brzegowych. W dalszych rozważaniach założono taką budowę tych funkcji

$$(3.2) \quad q_i^I(x, y) = f_i^I(x)g_i^I(y),$$

która umożliwi realizację warunku (2.2) przez odpowiednią konstrukcję funkcji $g_i^I(y)$

$$(3.3) \quad g_i^I(y) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad c \leq y \leq b.$$

Funkcje $g_i^I(y)$ można założyć dowolnie, żądając jedynie spełnienia warunku (3.3). Szukanymi funkcjami, które pozwolą zrealizować dwa warunki brzegowe w przekroju $y = c$ są funkcje $f_i^I(x)$. Obciążenie uzupełniające przedstawić można jako następujący szereg postaci drgań własnych $W_{mn}(x, y)$ płyty zastępczej:

$$(3.4) \quad q_i^I(x, y) = \sum_m \sum_n b_{mn}^{II} W_{mn}(x, y),$$

przy czym $W_{mn}(x, y) = X_{mn}(x) \sin \frac{n\pi}{b} y$. Mnożąc obie strony związku (3.4) przez $\sin(r\pi/b)y$, gdzie r dowolna liczba naturalna, następnie całkując w przedziale $0 \leq y \leq b$ przy uwzględnieniu (3.2) można otrzymać

$$(3.5) \quad f_i^I(x) = \sum_m c_{mr}^{II} X_{mr}(x),$$

gdzie

$$c_{mr}^{II} = \frac{b_{mr}^{II}}{a_r^{II}},$$

a_r^{II} jest współczynnikiem rozwinięcia w szereg sinusowy funkcji $g_i^I(y)$. Ponieważ związek (3.5) spełniony jest dla dowolnego r , można napisać następujące zależności:

$$(3.6) \quad \sum_k c_{kn}^{II} X_{kn}(x) = \sum_k c_{kr}^{II} X_{kr}(x).$$

Mnożąc obie strony (3.6) przez $X_{mn}(x)$ oraz całkując w przedziale $(0, a)$ otrzymuje się ostatecznie

$$(3.7) \quad c_{mn}^{II} = \sum_k c_{kr}^{II} f_{mn}^k,$$

gdzie

$$f_{mn}^k = \frac{1}{a} \int_0^a X_{kr}(x) X_{mn}(x) dx.$$

Za pomocą związków (3.7) można wyrazić wszystkie współczynniki c_{mn}^{II} przy $n \neq r$ przez c_{mr}^{II} .

Na szybkość zbieżności szeregu opisującego funkcje $g_i^I(y)$ można wpływać realizując ciągłość tej funkcji i jej k kolejnych pochodnych w przedziale $0 \leq y \leq b$ oraz spełniając związki:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} g_i^I(y)|_{y=0} &= 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, t, \\ \left. \frac{d^{2j} g_i^I(y)}{dy^{2j}} \right|_{y=0} &= 0, \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} g_i^I(y)|_{y=c} &= 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, k, \\ \left. \frac{d^j g_i^I(y)}{dy^j} \right|_{y=0} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym dla k parzystego $t = k/2$, dla k nieparzystego $t = (k-1)/2$.

Powyżej sformułowane warunki dotyczące funkcji $g_i^I(y)$ są warunkami koniecznymi szybkiej zbieżności szeregu obciążenia uzupełniającego (3.4). Wynika to stąd, że ustalając wartość $x = l$, gdzie $l \in (0, a)$ można związek (3.4) zapisać jako pojedynczy szereg trygonometryczny, którego zbieżność będzie wolniejsza od zbieżności szeregu opisującego funkcję $g_i^I(y)$. Zbieżność szeregów obciążeń można zwiększać spełniając warunki (3.8) i (3.9). Szybkość malenia początkowych wyrazów tych szeregów w znacznym stopniu zależy od wartości stosunku c/b . Zbieżność szeregów opisujących funkcje $f_i^I(x)$ związana jest z postacią dobieranych funkcji $g_i^I(y)$, zależy natomiast bezpośrednio od realizowanych warunków brzegowych.

Istnieje oczywisty związek między zbieżnością szeregów opisujących funkcje składowe obciążeń uzupełniających oraz szeregów wyrażających ugięcia, wywołane tymi obciążeniami

$$(3.10) \quad w_i^I(x, y) = \frac{g}{\gamma h} \sum_m \sum_n \frac{a_n^{II} c_{mn}^{II}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} W_{mn}(x, y),$$

gdzie ω_{mn} oznaczają częstotliwości własne płyty zastępczej.

Uwzględniając związki (3.7) można zapisać (3.10) w postaci

$$(3.11) \quad w_i^I(x, y) = \frac{g}{\gamma h} \sum_k c_{kr}^{II} \left[\frac{a_r^{II}}{\omega_{kr}^2 - \omega^2} W_{kr}(x, y) + \sum_{n \neq r} \sum_m \frac{a_n^{II}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} f_{mn}^k W_{mn}(x, y) \right].$$

W przypadku realizowania warunków brzegowych w przekroju prostopadłym do dwu podpartych swobodnie brzegów, obciążenie przyjąć można analogicznie do (3.2)

$$(3.12) \quad q_i^{II}(x, y) = f_i^{II}(y) g_i^{II}(x).$$

Funkcje $g_i^{II}(x)$ należy przyjąć z uwzględnieniem warunku

$$(3.13) \quad g_i^{II}(x) \equiv 0 \quad \text{dla } c_2 \leq x \leq a.$$

Obciążenie (3.12) można przedstawić w postaci szeregu

$$(3.14) \quad q_i^{II}(x, y) = \sum_n \sum_m c_n^{III} a_{mn}^{III} X_{mn}(x) \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

gdzie

$$a_{mn}^{iII} = \frac{1}{\int_0^a X_{mn}^2(x) dx} \int_0^{c_2} g_i^{II}(x) X_{mn}(x) dx.$$

Podobnie, jak w przypadku obciążenia $q_i^I(x, y)$, można wykazać istnienie związków analogicznych do (3.7)

$$(3.15) \quad a_{mn}^{iII} = \sum_k a_{kr}^{iII} f_{mn}^k.$$

Poniżej wykazano, że ciągłość funkcji $g_i^{II}(x)$ oraz jej kolejnych pochodnych jest warunkiem koniecznym szybkiej zbieżności szeregu (3.14). Składowe $X_{mn}(x)$ postaci własnych można zapisać następująco:

$$(3.16) \quad X_{mn}(x) = C_{1mn} \sin \lambda_{1mn} x + C_{2mn} \cos \lambda_{1mn} x + C_{3mn} \operatorname{sh} \lambda_{2mn} x + C_{4mn} \operatorname{ch} \lambda_{2mn} x,$$

gdzie

$$(3.17) \quad \lambda_{1mn} = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma h}{gD} \omega_{mn} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}},$$

$$\lambda_{2mn} = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma h}{gD} \omega_{mn} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}}.$$

Przy założeniu, że funkcja $g_i^{II}(x)$ i k jej kolejnych pochodnych są funkcjami ciągłymi w przedziale $0 \leq x \leq a$, można napisać

$$(3.18) \quad \frac{d^k g_i^{II}(x)}{dx^k} = \sum_m b_m^i X_{mn}(x).$$

Powyższy szereg jest jednostajnie zbieżny w rozpatrywanym przedziale. Pozwala to na jego całkowanie, przy czym powstająca w wyniku tego szeregu część trygonometryczna funkcji $X_{mn}(x)$ jest dzielona przez λ_{1mn} , natomiast część hiperboliczna przez λ_{2mn} . W przypadku płyty podpartej swobodnie na całym obwodzie ω_{mn} rośnie z m^2 . Dla innych warunków brzegowych wzrost ω_{mn} jest porównywalny. Zatem jak wynika z (3.17), otrzymany w wyniku całkowania szereg będzie szybciej zbieżny niż (3.18). K -krotne całkowanie doprowadzi do otrzymania szybkozbieżnego szeregu opisującego $g_i^{II}(x)$.

Obciążenie (3.14) spowoduje następujące ugięcie płyty zastępczej

$$(3.19) \quad w_i^{II}(x, y) = \frac{g}{\gamma h} \sum_n \sum_m \frac{c_n^{iII} a_{mn}^{iII}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} W_{mn}(x, y).$$

Współczynniki c_n^{iII} są wyznaczone przy spełnianiu warunków brzegowych.

4. Drgania płyty wspornikowej

Zastosowanie przedstawionej metody zostanie pokazane na przykładzie drgań płyty wspornikowej. Płyta zastępcza została przyjęta w postaci płyty podpartej swobodnie na dwu przeciwległych brzegach, z jednym brzegiem utwierdzonym i pozostałym swobodnym.

Przy obliczaniu częstości i postaci drgań własnych należy rozpatrzeć drgania wymuszone, harmonicznie zmienne w czasie, płyty zastępczej poddanej działaniu obciążeń $q^I(x, y)$ i $q^{III}(x, y)$. Schemat zastępczy przedstawiony jest na rys. 2b, przy czym przyjmuje się $c_3 = c$. Podstawiając funkcje ugięcia do równań opisujących zerowanie się momentów i sił tnących w przekroju $y = c$, a następnie ortogonalizując lewe strony otrzymanych równań względem funkcji $X_{lr}(x)$ uzyskuje się następujący układ równań:

$$(4.1) \quad \sum_J^{I, III} \sum_{l=1}^2 \left\{ c_{lr}^{II} a_r^{IJ} \frac{-\left(\frac{r\pi}{b}\right)^2}{k_{lr}^2 - k^2} \int_0^a X_{lr}^2(x) dx \sin \frac{r\pi}{b} c + \nu \sum_s c_{sr}^{IJ} \left[\frac{a_r^{IJ}}{k_{sr}^2 - k^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^a X_{sr}''(x) X_{lr}(x) dx \sin \frac{r\pi}{b} c + \frac{1}{\nu} \sum_m \sum_{n \neq r} f_{mn}^s \frac{a_n^{IJ}}{k_{mn}^2 - k^2} u_{mn}^I \right] \right\} = 0,$$

$$\sum_J^{I, III} \sum_{l=1}^2 \left\{ c_{lr}^{IJ} a_r^{IJ} \frac{-r^3 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}{k_{lr}^2 - k^2} \int_0^a X_{lr}^2(x) dx \cos \frac{r\pi}{b} c + (2-\nu) \sum_s c_{sr}^{IJ} \left[\frac{a_r^{IJ}}{k_{sr}^2 - k^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^a X_{sr}''(x) X_{lr}(x) dx r \cos \frac{r\pi}{b} c + (2-\nu) \sum_m \sum_{n \neq r} f_{mn}^s \frac{a_n^{IJ}}{k_{mn}^2 - k^2} z^I \right] \right\} = 0,$$

gdzie:

$$u_{mn}^I = \left[-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \int_0^a X_{mn}(x) X_{lr}(x) dx + \nu \int_0^a X_{mn}''(x) X_{lr}(x) dx \right] \sin \frac{n\pi}{b} c, \\ z_{mn}^I = \left[-n^3 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^a X_{mn}(x) X_{lr}(x) dx + (2-\nu) \int_0^a X_{mn}''(x) X_{lr}(x) dx \right] \cos \frac{n\pi}{b} c,$$

$$s, l, m = 1, 2, 3, \dots, L.$$

Ponieważ szukane postacie własne są symetryczne lub antysymetryczne względem $y = b/2$, przyjąć można w równaniach (4.1) zależności

$$c_{sr}^{II} = c_{sr}^{III}.$$

W przypadku postaci symetrycznych muszą wówczas być spełnione warunki

$$g_l^I(y) = g_l^{III}(b-y).$$

W szeregach opisujących obciążenia i ugięcia wystąpią funkcje W_{mn} z n nieparzystym. W równaniach (4.1) należy przyjąć:

$$r = 1, \quad n = 3, 5, 7, \dots, N.$$

Dla postaci antysymetrycznych:

$$g_l^I(y) = -g_l^{III}(b-y), \quad r = 2, \quad n = 4, 6, 8, \dots, N+1.$$

Układ (4.1) zawiera $2L$ równań. Wielkość N należy dobrać tak, aby zapewnić odpowiednią dokładność aproksymacji funkcji $g_i^f(y)$. Badając wpływ wielkości N na uzyskiwane wyniki można określić jego wartość niezbędną ze względu na żadaną dokładność. Częstość drgań własnych wyznacza się z warunku istnienia nietrywialnego rozwiązania liniowego układu równań (4.1). W przypadku ustalonych drgań wymuszonych należy w rozważaniach, oprócz odkształceń wywołanych obciążeniem uzupełniającym, uwzględnić również ugięcie od obciążenia właściwego, działającego w przedziale $c \leq y \leq b-c$. Amplitudę tego obciążenia przedstawić można w postaci

$$(4.2) \quad p(x, y) = \sum_j \sum_n p_{jn} X_{jn}(x) \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Przy realizacji warunków brzegowych uwzględnić trzeba ugięcie wywołane obciążeniem (4.2). Spowoduje to wystąpienie odpowiednich wyrażeń na prawej stronie układu (4.1).

5. Wyniki obliczeń

Według proponowanej metody opracowano programy na maszynie Odra 1204. Płytę zastępczą przyjęto jako podpartą swobodnie na całym obwodzie. Obliczenia przeprowadzono dla płyt z dwojakiego rodzaju warunkami brzegowymi:

- 1) dwa brzegi wychodzące z jednego naroża utwierdzone, pozostałe podparte swobodnie,
- 2) dwa brzegi wychodzące z jednego naroża swobodne, pozostałe podparte swobodnie.

Tablica 1. Częstość i współczynniki obciążeń uzupełniających pierwszej postaci własnej płyty kwadratowej z brzegami wychodzącymi z jednego naroża utwierdzonymi i pozostałymi podpartymi swobodnie

$$\alpha_1^2 = k_1^2 a^2 = a^2 \sqrt{\frac{\gamma b}{gD}} \omega_1$$

| L | α_1^2 | C_1^{11} | C_2^{11} | $C_3^{11} \cdot 10^1$ | $C_4^{11} \cdot 10^2$ | $C_5^{11} \cdot 10^2$ |
|-----|--------------|------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 8 | 27,054 140 | 1,000 | -0,341 | -0,804 | -0,270 | -1,052 |
| 9 | 27,054 000 | 1,000 | -0,339 | -0,796 | -0,262 | -1,002 |
| 10 | 27,054 130 | 1,000 | -0,341 | -0,803 | -0,270 | -1,075 |

| L | $C_6^{11} \cdot 10^2$ | $C_7^{11} \cdot 10^2$ | $C_8^{11} \cdot 10^2$ | $C_9^{11} \cdot 10^2$ | $C_{10}^{11} \cdot 10^2$ |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|
| 8 | -0,265 | 0,330 | 0,855 | | |
| 9 | -0,265 | 0,255 | 0,681 | 0,975 | |
| 10 | -0,328 | 0,208 | 0,652 | 0,846 | 1,064 |

Dla pierwszego rodzaju warunków brzegowych przeprowadzono obliczenia częstości podstawowej oraz odpowiadającej jej postaci drgań własnych płyty kwadratowej oraz drgań wymuszonych płyt kwadratowych i prostokątnych, obciążonych siłą skupioną przyłożoną w środku. Efektywne wyniki uzyskano dla stosunku $a/c > 6$. Przykładowe wyniki obliczeń częstości podstawowej oraz odpowiadające pierwszej postaci współczynniki obciążenia uzupełniającego podano w tablicy 1. Na ich podstawie można ocenić wpływ liczby L wyrazów szeregu sinusowego aproksymującego funkcje składowe obciążeń uzupełniających $f_i^J(z)$, gdzie $z = \begin{cases} x & \text{dla } J = I \\ y & \text{dla } J = II \end{cases}$ na dokładność obliczeń. Przy zmianie L w granicach 8–10 wartość częstości pozostaje niezmienna z dokładnością do pięciu miejsc znaczących. Wartość tej częstości uzyskana metodą Rayleigha–Ritza w pracy [6] wynosi $\alpha_1^2 = k_1^2 a^2 = 27,25$, metodą szeregów w [7]:

$$\alpha_1^2 = 27,67,$$

$$\alpha_1^2 = 27,1,$$

$$\alpha_1^2 = 28,3.$$

Tablica 2. Wyniki obliczeń częstości podstawowej płyty kwadratowej z dwoma swobodnymi brzegami wychodzącymi z jednego naroża z pozostałymi podpartymi swobodnie

| L | I wariant $g_1^I(y)$ | II wariant $g_1^I(y)$ |
|-----|-----------------------------|----------------------------|
| 7 | $3,7 < \alpha_1^2 < 3,75$ | |
| 8 | | $3,14 < \alpha_1^2 < 3,26$ |
| 9 | $3,47 < \alpha_1^2 < 3,48$ | $\alpha_1^2 = 3,29$ |
| 10 | $\alpha_1^2 = 3,29$ | $3,14 < \alpha_1^2 < 3,2$ |
| 11 | $3,40 < \alpha_1^2 < 3,42$ | $3,26 < \alpha_1^2 < 3,37$ |
| 12 | $\alpha_1^2 = 3,27$ | $\alpha_1^2 = 3,18$ |
| 13 | $3,375 < \alpha_1^2 < 3,38$ | $3,26 < \alpha_1^2 < 3,37$ |
| 14 | $\alpha_1^2 = 3,256$ | $3,14 < \alpha_1^2 < 3,26$ |
| 15 | $3,35 < \alpha_1^2 < 3,37$ | |
| 16 | $\alpha_1^2 = 3,248$ | $3,15 < \alpha_1^2 < 3,2$ |
| 17 | $3,335 < \alpha_1^2 < 3,34$ | $3,3 < \alpha_1^2 < 3,31$ |
| 18 | $\alpha_1^2 = 3,245$ | |

W pracy [6] otrzymano $\alpha^2 = 3,54$ stosując metodę Rayleigha-Ritza.

Równie zadowalające wyniki otrzymano w przypadku drgań wymuszonych płyt kwadratowych i prostokątnych.

Dla drugiego rodzaju warunków brzegowych przeprowadzono obliczenia częstości podstawowej oraz sił wewnętrznych. Efektywne wyniki otrzymano dla a/c w przedziale 1,2-2,5. Ze względu na wolniejszą zbieżność szeregów opisujących pochodne wyższego rzędu występujące w warunkach zerowania się sił tnących i momentów, obliczenia drgań płyty ze swobodnym narożem są bardziej pracochłonne niż w przypadku poprzednim. Zwiększając liczbę L wyrazów szeregów opisujących szukane składowe funkcji obciążenia do 25 nie uzyskano stabilizacji współczynników tych szeregów. Ze względu na to, że wyrazy szeregów ugięć maleją $z/(m^4n^4)$ wspomniany brak stabilizacji współczynników obciążeń nie przesądza możliwości obliczenia sił wewnętrznych, do czego jest nieodzowna trzykrotna różniczkowalność szeregów ugięć. Dla omawianego przypadku warunków brzegowych przeprowadzono analizę numeryczną, z której wynika możliwość obliczenia sił wewnętrznych. Wyniki obliczeń częstości podstawowej dla różnej dokładności aproksymacji obciążeń podano w tablicy 2. Wyniki obliczeń momentów gnących podano w tablicy 3.

Tablica 3. Wyniki obliczeń ugięć i momentów M_y płyty kwadratowej z dwoma swobodnymi brzegami wychodzącymi z jednego naroża, z pozostałymi podpartymi swobodnie, obciążonej siłą $p_0 \sin \omega t$ przyłożoną

$$\text{w środku płyty, } \alpha^2 = 21; \quad P_0 = 0,25 \frac{D}{a^2}$$

| nr | x/a | v/a | $L = 14$ | | $L = 12$ | |
|----|--------|--------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| | | | W | M_y | W | M_y |
| 1 | 0 | 0 | $-4,495 \cdot 10^{-3}$ | $6,513 \cdot 10^{-5}$ | $-4,6 \cdot 10^{-3}$ | $4,31 \cdot 10^{-5}$ |
| 2 | 0,247 | 0 | $-1,971 \cdot 10^{-3}$ | $3,815 \cdot 10^{-5}$ | $-2,033 \cdot 10^{-3}$ | $1,62 \cdot 10^{-5}$ |
| 3 | 0,247 | 0,247 | $-2,420 \cdot 10^{-4}$ | $-9,077 \cdot 10^{-4}$ | $-2,598 \cdot 10^{-4}$ | $-9,177 \cdot 10^{-4}$ |
| 4 | 0,247 | 0,576 | $1,309 \cdot 10^{-3}$ | $-3,008 \cdot 10^{-3}$ | $1,338 \cdot 10^{-3}$ | $-3,094 \cdot 10^{-3}$ |
| 5 | 0,247 | 0,740 | $1,223 \cdot 10^{-3}$ | $-2,792 \cdot 10^{-3}$ | $1,251 \cdot 10^{-3}$ | $-2,861 \cdot 10^{-3}$ |
| 6 | 0,0086 | 0,0086 | $-4,342 \cdot 10^{-3}$ | $2,011 \cdot 10^{-4}$ | $-4,446 \cdot 10^{-3}$ | $1,794 \cdot 10^{-4}$ |

Otrzymane w punktach 1 i 2 brzegu swobodnego wartości M_y , różne od zera, są wynikiem przybliżonego spełniania warunków brzegowych. Na podstawie ich wielkości można sądzić o dokładności otrzymanych wyników.

6. Wnioski końcowe

Przeprowadzona metoda jest bardziej pracochłonna od metody opracowanej przez KĄCZKOWSKIEGO [1]. Wynika to z konieczności spełniania dwóch warunków na każdym brzegu oraz z niemożliwości przedstawienia ugięcia odpowiadającego składowym obcią-

żenia w postaci zamkniętej. Natomiast jej zaletą jest możliwość efektywnego obliczenia sił wewnętrznych, co związane jest z większą zbieżnością szeregów ugięć dzięki zastosowaniu obciążeń uzupełniających opisanych odpowiednio gładkimi funkcjami. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że proponowana metoda pozwala na uzyskiwanie zadowalających rozwiązań problemów dynamiki płyt. Można ją również uogólnić na przypadki drgań nieustalonych. Stosowanie płyt zastępczych z takimi samymi warunkami na dwóch lub więcej brzegach, jak dla płyty właściwej, jest związane z aproksymacją poszukiwanego rozwiązania funkcjami o zbliżonych «właściwościach dynamicznych». Wymaga to znajomości częstości i postaci drgań własnych płyt zastępczych lub ich uprzedniego obliczenia. Osiągane tą drogą zmniejszenie końcowego układu równań może być, zwłaszcza w przypadku drgań nieustalonych, nawet przy stosowaniu nowoczesnych maszyn matematycznych, warunkiem efektywności obliczeń.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. KĄCZKOWSKI, *Orthotropic rectangular plates with arbitrary boundary conditions*, AMS, 2, 8 (1956).
2. M. BARTON, *Vibration of rectangular and skew cantilever plates*, J. Appl. Mech., 1, 18 (1951).
3. D. YOUNG, *Vibration of rectangular plates by the Ritz method*, J. Appl. Mech., 4, 17 (1950).
4. H. J. PLASS, J. H. GAINES, C. D. NEWSON, *Application of Reissner's variational principle to cantilever plate deflection on vibration problem*, J. Appl. Mech., 1, 29 (1962).
5. R. W. CLASSEN, C. J. THORN, *Vibration of a rectangular cantilever plate*, J. Aero. Sci., 11, 29 (1962).
6. В. С. ГОНТКЕВИЧ, *Собственные колебания пластинок и оболочек*, Наукова думка, Киев 1964.
7. T. KANAZAWA, T. KAWAI, *On the lateral vibration of anisotropic rectangular plate*, Proc. Japan Nat. Cong. Appl. Mech., 1952.

Резюме

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА НОВАЦКОГО

В работе представлен метод решения колебаний свободных и нагруженных прямоугольных пластин. Решение строится посредством рассмотрения вынужденных колебаний замещающих пластин с известными частотами и модами собственных колебаний. Расчеты основаны на модифицированном методе сил Новацкого. Благодаря тому, что нагрузки с помощью которых реализовались краевые условия на линии отделяющей пластину от ее продолжения выражались через достаточно гладкие функции, была достигнута достаточно быстрая сходимость рядов позволяющая определить внутренние силы. Предлагаемый метод используется для расчета собственных и вынужденных колебаний пластин с двумя видами краевых условий.

Summary

SOLUTION OF THE VIBRATION PROBLEMS OF RECTANGULAR PLATES BASED ON A MODIFICATION OF NOWACKI'S METHOD

This paper presents the method of solution the vibration problems of rectangular plates, free and loaded, by means of analysis of vibration problems of auxiliary plates, the frequencies and modes of which are known. The calculations are based on a modification of Nowacki's method. The loads necessary for reali-

sation of boundary conditions on the line separating the proper plate from the auxiliary one are described by smooth functions. This causes a fast convergence of the series expressing the deflections of the plate and enables the calculations of the internal forces.

The numerical solution of the problem was performed considering two different boundary conditions.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1975 r.

ANALIZA JEDNOWYMIAROWYCH FAŁ UDERZENIOWYCH I PRZYSPIESZENIA W OŚRODKU NIESPRĘŻYSTYM

WITOLD KOSIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Liczne badania eksperymentalne wykazują, że prawie wszystkie materiały konstrukcyjne przejawiają w mniejszym lub większym stopniu własności lepkie i plastyczne — ogólnie własności niesprężyste. Obok materiałów czysto konstrukcyjnych istnieje szereg materiałów wykorzystywanych do celów technologicznych we współczesnym przemyśle i charakteryzujących się również własnościami niesprężystymi. Uzyskanie danych o zachowaniu się tego typu materiałów pod wpływem obciążeń dynamicznych ma — oprócz charakteru poznawczego i teoretycznego — olbrzymie znaczenie w różnorodnych zastosowaniach praktycznych we współczesnej technice.

Jedną z dróg teoretycznej analizy i weryfikacji proponowanych matematycznych opisów zachowania się realnych materialnych ośrodków odkształcalnych jest badanie fal.

W ośrodkach niesprężystych, podobnie jak i w sprężystych, pod wpływem obciążeń dynamicznych rozprzestrzeniają się ze skończoną prędkością zaburzenia mechaniczne, tj. fale.

Badania eksperymentalne i teoretyczne dotyczące sformułowania i analizy równań konstytutywnych (związków fizycznych) mają najbogatszą literaturę dla zagadnień jednowymiarowych¹⁾.

Teoretyczne studia nad problematyką falową odgrywają tutaj główną rolę dzięki możliwościom otrzymania potrzebnych i użytecznych informacji zarówno dla teoretyków, jak i konstruktorów.

Model jednowymiarowego niesprężystego (dysypatywnego) ośrodka ciągłego przyjęty w pracy jest opisywany odkształceniem i wektorem dodatkowych zmiennych, zwanych parametrami wewnętrznymi (albo wewnętrznymi zmiennymi stanu). Ewolucja tych dodatkowych zmiennych rządzi równanie różniczkowe pierwszego rzędu.

Model ośrodka przedstawiony w pracy może być użyty — po odpowiedniej specyfikacji parametrów wewnętrznych — do opisu szeregu znanych materiałów, poczynając od sprężystych, poprzez lepkosprężyste do sprężysto-lepkoplastycznych.

W teorii jednowymiarowej ośrodka materialnego dla opisu zjawiska rozprzestrzeniania się fal wprowadza się założenie o istnieniu krzywej w płaszczyźnie zmiennych X i t , na której wielkości kinematyczne lub ich pochodne doznają skokowej nieciągłości. Rząd

¹⁾ Por. [13] i literaturę tam cytowaną.

najniższej pochodnej czasowej funkcji ruchu, nieciągłej na takiej krzywej, decyduje o rzędzie i nazwie fali. I tak, jeśli druga pochodna ruchu χ lub przemieszczenia u jest nieciągła, to mówimy, że mamy do czynienia z falą przyspieszenia (falą drugiego rzędu).²⁾ Występowanie fali pierwszego rzędu łączy się z nieciągłością pierwszej pochodnej przemieszczenia. Mówimy wtedy o fali prędkości. Ponieważ w takim przypadku gęstość masy ośrodka, która wyraża się przez pierwsze pochodne ruchu, jest też nieciągła, więc falę pierwszego rzędu nazywa się często falą uderzeniową (udarową).

W pracy zajmiemy się tymi dwoma rodzajami fal w zakresie teorii mechanicznej. W przyszłości rozszerzymy badania na efekty termiczne.

Zastosowana w pracy metoda badawcza opiera się na tzw. koncepcji powierzchni (krzywych) osobliwych. Dzięki niej było możliwe zbadanie zachowania się fal dla szerokiej klasy materiałów i wykazanie, że istotne i konkretne rezultaty mogą być uzyskane bez uciekania się do jakichkolwiek jawnych reprezentacji związków konstytutywnych. Stąd uzyskane wyniki są wspólne dla wszystkich materiałów opisywanych za pomocą przyjętego modelu ośrodka z parametrami wewnętrznymi.

Słuszności rezultatów otrzymanych w niniejszym opracowaniu nie ograniczają żadne założenia «małości» odkształceń czy liniowości związków.

W pracy wykazano ponadto, że choć założenia o ośrodku materialnym mają istotny wpływ na rozprzestrzenianie się w nim fal, to jednak jest możliwe, że fale propagujące się w różnych materiałach mogą zachowywać się w ten sam sposób. W szczególności pokazano, że zachowanie się fal przyspieszenia w nieliniowych ciałach sprężystych, lepkosprężystych, starzejących się sprężystych, a nawet sprężysto-lepkoplastycznych może być w pewnych sytuacjach jakościowo takie samo.

Literatura zagadnień falowych w materiałach opisywanych modelem z parametrami wewnętrznymi jest niewielka. Powodem tego jest fakt, że właściwy rozwój teorii z parametrami wewnętrznymi nastąpił pod koniec lat sześćdziesiątych dzięki jednoczesnym pracom COLEMANA i GURTINA [9] oraz VALANISA [42]. Natomiast pierwsza praca o falach przyspieszenia w cieczy była autorstwa BÜRGERA [6], po nich ukazała się praca COLEMANA i GURTINA [10]. Następne dotyczyły też fal przyspieszenia [2, 14, 16, 20]. Falę uderzeniową w cieczy z parametrami wewnętrznymi rozpatrzyli CHEN i GURTIN [8], BOWEN i CHEN [5].

Analiza fal przyspieszenia i fal uderzeniowych dla ciał stałych została przedstawiona w pracach [2, 14 - 20, 22, 23].

Po raz pierwszy koncepcja parametrów wewnętrznych została wykorzystana do opisu materiałów plastycznych wrażliwych na prędkość odkształcenia w pracy PERZYNY i WOJNY [39]. Dopiero po niej pojawiły się inne teorie ośrodków niesprężystych³⁾ w ramach tej koncepcji⁴⁾.

Układ niniejszej pracy jest następujący: po zaznajomieniu czytelnika z podstawowymi oznaczeniami, opisano koncepcję krzywych osobliwych, tzn. fal przyspieszenia i fal przed-

²⁾ Przyspieszenie jest drugą pochodną czasową przemieszczenia.

³⁾ W mechanice kontinuum koncepcję parametrów wewnętrznych jako jeden z pierwszych zastosował BIOT [3]. VALANIS wprowadził ją do opisu materiałów lepkosprężystych [42].

⁴⁾ Por. [4, 25, 26, 31 - 35, 37, 43].

kości (uderzeniowych). Rozdział 3 wprowadza koncepcję parametrów wewnętrznych jako wielkości niezbędnych do opisu zachowania się ośrodków niesprężystych (z dysypacją). Rozdział 4 poświęcony jest analizie fal przyspieszenia, a rozdział 5 porusza problem propagacji i zachowania się fal uderzeniowych. Opracowanie kończą dwa przykłady: fali przyspieszenia w nieliniowym materiale lepkosprężystym i fali uderzeniowej w ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym.

2. Krzywe osobliwe

2.1. Kinematyka jednowymiarowych ruchów i prawa zachowania. Ograniczenie rozważań niniejszej pracy do jednowymiarowych ruchów ośrodków odkształcalnych powoduje, że wszystkie wielkości fizyczne, występujące w rozważaniach, są funkcjami tylko dwóch zmiennych niezależnych: cząstki X i czasu t . Zarówno X , jak i czas t , przyjmując wartości rzeczywiste, przebiegają pewne odcinki osi liczbowej \mathbf{R} . Przyjmujemy, że zakresem zmienności X jest przedział $\mathcal{B} \subset \mathbf{R}$, natomiast czasu — przedział $[0, L)$, gdzie L może być skończoną liczbą lub nieskończonością.

Jak zwykle w takich przypadkach, ciało (ośrodek materialny) identyfikujemy z przedziałem \mathcal{B} , gdyż tak go dobieramy, aby był obrazem ośrodka materialnego w pewnej ustalonej, jednorodnej konfiguracji odniesienia κ o gęstości masy ρ_0 ⁵⁾.

Ruch ciała opisuje funkcja χ , której wartość $x = \chi(X, t)$ określa miejsce cząstki X w chwili t . Funkcja ruchu χ jednoznacznie wyznacza funkcję przemieszczenia u przepisem

$$(2.1) \quad u(X, t) = \chi(X, t) - X.$$

Pochodne funkcji ruchu χ , o ile istnieją, oznaczamy następująco:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} F(X, t) &= \frac{\partial}{\partial X} \chi(X, t), & v(X, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \chi(X, t), \\ \partial_x F(X, t) &= \frac{\partial^2}{\partial X^2} \chi(X, t), & \dot{F}(X, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial X} \chi(X, t), \\ \dot{v}(X, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi(X, t). \end{aligned}$$

Wartości funkcji $F(X, t)$, $v(X, t)$, $\dot{v}(X, t)$ nazywamy odpowiednio *gradientem deformacji*, *prędkością* i *przyspieszeniem* cząstki X w czasie t . Pochodne funkcji przemieszczenia (2.1) są wyrażone przez pochodne χ , jak następuje:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} E(X, t) &= \frac{\partial}{\partial X} u(X, t) = F(X, t) - 1, & \dot{u}(X, t) &= v(X, t), \\ \partial_x E(X, t) &= \partial_x F(X, t), & \dot{E}(X, t) &= \dot{F}(X, t), \\ \ddot{u}(X, t) &= \dot{v}(X, t). \end{aligned}$$

⁵⁾ Założenie jednorodności konfiguracji odniesienia powoduje, że gęstość masy ρ_0 jest stała.

Funkcję $E(X, t)$ nazwiemy *odkształceniem*. Jest to podstawowa wielkość występująca w opisie efektów mechanicznych dla ciał odkształcalnych⁶⁾.

Obok odkształcenia, jako wielkości kinematycznej, *naprężenie* T reprezentuje wielkość dynamiczną i jest drugą podstawową zmienną w teoriach mechanicznych kontinuum odkształcalnego.

Jeśli siły masowe $b(X, t)$ są dane, to parę $(E(X, t), T(X, t))$ dla $(X, t) \in \mathcal{B} \times [0, L]$ nazwiemy procesem dynamicznym dla ciała \mathcal{B} w ruchu χ , jeśli prawo zachowania masy

$$(2.4) \quad \frac{\rho_0}{\rho(X, t)} = F(X, t) \quad \text{lub} \quad \rho(X, t) = \rho_0[E(X, t) + 1]^{-1}$$

i prawo ruchu

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial X} T(X, t) + \rho_0 b(X, t) = \rho_0 \dot{v}(X, t)$$

dla każdego $(X, t) \in \mathcal{B} \times [0, L]$ są spełnione.

Należy zwrócić uwagę, że lokalna postać prawa ruchu (2.5) jest konsekwencją całkowitego prawa bilansu pędu. Prawo to żąda, by dla każdych dwóch cząstek $X_1, X_2 \in \mathcal{B}$ i każdej chwili czasu $t \in [0, L]$ zachodziła równość⁷⁾

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \int_{X_1}^{X_2} \rho_0 v(X, t) dX = \int_{X_1}^{X_2} \rho_0 b(X, t) dX + T(X_2, t) - T(X_1, t).$$

2.2. Fala przyspieszenia. Możemy teraz wprowadzić pojęcie fali przyspieszenia.

Definicja 1. Powiemy, że w procesie dynamicznym $[E(X, t), T(X, t)]$, dla ciała \mathcal{B} występuje *fala przyspieszenia*, jeśli istnieje ciągle różniczkowalna funkcja czasu $Y: [0, L] \rightarrow \mathcal{B}$ z nigdzie nie znikającą pochodną, taka że ruch χ (albo równoważnie — przemieszczenie u) jest dwukrotnie ciągle różniczkowalnym polem z wyjątkiem krzywej Σ określonej równaniem $X = Y(t)$, na której drugie pochodne χ i u posiadają nieciągłość skokową. Oznacza to, że wszystkie trzy drugie pochodne funkcji χ są ciągle po obu stronach krzywej Σ i posiadają obustronne granice dla każdego (X, t) dążącego do $[Y(t), t]$. Granice te nie muszą być jednak równe, przy czym sama funkcja i jej pierwsze pochodne są ciągle.

Jeśli $G(X, t)$ oznacza którąkolwiek drugą pochodną funkcji χ , to dla każdego $[Y(t), t]$ granice

$$(2.7) \quad \lim_{X \rightarrow Y(t)^-} G(X, t) = G(Y(t)^-, t) \equiv G^-(t), \quad \lim_{X \rightarrow Y(t)^+} G(X, t) = G(Y(t)^+, t) \equiv G^+(t)$$

istnieją, zaś ich różnica

$$(2.8) \quad G^-(t) - G^+(t) \equiv \llbracket G \rrbracket(t)$$

nie musi znikać, tzn. $\llbracket G \rrbracket \neq 0$. Pochodną funkcji $Y(t)$

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt} Y(t) = U(t)$$

⁶⁾ W pracy nie wprowadzamy żadnych ograniczeń odnośnie małości E .

⁷⁾ Z postaci równań (2.5) i (2.6) widać, że naprężenie T w niniejszej teorii odgrywa tę samą rolę, jak pierwszy tensor Pioli-Kirchhoffa w teorii trójwymiarowej.

nazywamy *prędkością wewnętrzną fali*; U mierzy prędkość rozprzestrzeniania się fali względem materiału, tj. w konfiguracji odniesienia κ .

Dla dalszych rozważań potrzebny jest jeszcze jeden związek. Niech $f(X, t)$ będzie ciągłą i ciągle różniczkowalną funkcją swych zmiennych wszędzie z wyjątkiem Σ , gdzie może doznawać skoku. Wtedy $[[f]]$ jest funkcją tylko czasu t . Różniczkując ją względem t , pamiętając o (2.9) otrzymamy⁸⁾ tzw. *kinematyczny warunek zgodności* [7, 11, 41]

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} [[f]] = U \left[\left[\frac{\partial f}{\partial X} \right] \right] + [[\dot{f}]].$$

Pochodna d/dt w (2.10) mierzy szybkość zmian dowolnej wielkości zdefiniowanej na fali⁹⁾

Przez pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial X}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ wyraża się następująco

$$(2.11) \quad \frac{d}{dt} = U \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Zauważmy, że jeśli sama funkcja f jest ciągła, to $[[f]] = 0$ i (2.10) implikuje tzw. twierdzenie Maxwella [41]

$$(2.12) \quad [[\dot{f}]] = -U [[\partial_x f]],$$

gdzie dla skrótu pochodną $\partial/\partial X$ będziemy oznaczać przez ∂_x . Ostatni związek jest bardzo pomocny przy wyprowadzeniu następujących związków między drugimi pochodnymi funkcji ruchu χ w przypadku istnienia fali przyspieszenia (zauważmy, że wtedy pierwsze pochodne są ciągłe)

$$(2.13) \quad [[\dot{\nu}]] = -U [[\dot{E}]] = U^2 [[\partial_x E]].$$

Wielkość skoku przyspieszenia jest często nazywana [7, 11] *amplitudą $a(t)$ fali przyspieszenia*.

Wykorzystajmy (2.10), wstawiając kolejno zamiast f przyspieszenie $\dot{\nu}$ i prędkość odkształcenia \dot{E} ; wówczas amplituda fali przyspieszenia spełnia równanie różniczkowe [7, 11]

$$(2.14) \quad 2\sqrt{U} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\sqrt{U}} \right) = [[\dot{\nu}]] - U^2 [[\partial_x \dot{E}]],$$

które może być zapisane w równoważnej postaci

$$(2.15) \quad 2 \frac{da}{dt} - \frac{a}{U} \frac{dU}{dt} = [[\dot{\nu}]] - U^2 [[\partial_x \dot{E}]].$$

Zauważmy, że równania te są czysto kinematyczne. Do ich wyprowadzenia nie wykorzystano ani równań ruchu, ani równań konstytutywnych (praw fizycznych) ośrodka.

⁸⁾ Pochodna d/dt nazywana jest pochodną Thomasa albo pochodną przemieszczeniową [7, 41],

⁹⁾ W wielu wypadkach ogół zjawisk zachodzących na krzywej osoblwej (nieciągłości) Σ nazywa się falą.

Spełnienie prawa Cauchy'ego w procesie dynamicznym z falą przyspieszenia jest równoważne zachowaniu związku

$$(2.16) \quad \partial_x T + \rho_0 b = \rho_0 \dot{v}$$

po obu stronach krzywej Σ (fali) oraz równości

$$(2.17) \quad \llbracket \partial_x T \rrbracket = \rho_0 \llbracket \dot{v} \rrbracket$$

na fali (na krzywej Σ).

Założmy, że siły b występujące w (2.16) są ciągle różniczkowalne względem czasu. Różniczkując (2.16) otrzymamy odpowiednio

$$(2.18) \quad \partial_x \dot{T} + \rho_0 \dot{b} = \rho_0 \ddot{v} \quad \text{ i } \quad \llbracket \partial_x \dot{T} \rrbracket = \rho_0 \llbracket \ddot{v} \rrbracket.$$

Zastąpmy pochodną \ddot{v} w równaniu amplitudy (2.14) pochodną mieszaną naprężenia $\partial_x \dot{T}$. Otrzymamy wtedy

$$(2.19) \quad 2\sqrt{U} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{U} \right) = \frac{1}{\rho_0} \llbracket \partial_x \dot{T} \rrbracket - U^2 \llbracket \partial_x \dot{E} \rrbracket.$$

Analiza zachowania się fali przyspieszenia przeprowadzona w następnych punktach opiera się na równaniu (2.19).

W procesie dynamicznym żądamy spełnienia dwóch praw zachowania. Prawo zachowania pędu zostało już zanalizowane. Jak wygląda prawo zachowania masy w procesach z falami przyspieszenia?

Ze względu na ciągłość deformacji na krzywej Σ równanie (2.4) implikuje $\llbracket \rho \rrbracket = 0$. Zróżniczkujmy (2.4) względem czasu

$$\frac{-\rho_0 \dot{\rho}}{\rho^2} = \dot{E}.$$

Stąd na fali, po wykorzystaniu związku (2.13), otrzymamy

$$(2.20) \quad \llbracket \dot{\rho} \rrbracket = \frac{\rho^2}{\rho_0 U} a.$$

2.3. Fala uderzenia. Fala drugiego rzędu obejmuje przypadek nieciągłości przyspieszenia w procesie dynamicznym.

Istnieją problemy początkowo-brzegowe, w których nie tylko pochodne rozwiązań doznają skoku, lecz same rozwiązania są nieciągłe wzdłuż pewnych krzywych. Przypadek taki wiąże się z występowaniem i rozprzestrzenianiem się fal prędkości, fal uderzeniowych (pierwszego rzędu). Jeśli w materiale pojawi się taka fala, to nieciągłości doznaje prędkość cząstki i jej deformacja. Omówimy teraz pokrótce ten przypadek.

Definicja 2. Powiemy, że w procesie dynamicznym $(E(X, t), T(X, t))$, gdzie $(X, t) \in \mathcal{B} \times [0, L]$, dla ciała \mathcal{B} występuje *fala uderzeniowa*, jeśli istnieje ciągle różniczkowalna funkcja czasu $Z: [0, L] \rightarrow \mathcal{B}$ z nigdzie nie znikającą pochodną, taka że ruch χ (albo równoważnie — przemieszczenie u) jest ciągle różniczkowalnym polem, z wyjątkiem krzywej Ω określonej równaniem $X = Z(t)$, na której pierwsze pochodne posiadają nieciągłość skokową.

Zazwyczaj zakładamy, w przypadku fal uderzeniowych, dwukrotnie ciąglą różniczkowalność χ poza Ω .

Zdefiniujemy prędkość (wewnętrzna) fali $V(t)^{10)}$ uderzeniowej jako pochodną funkcji Z

$$(2.21) \quad V(t) = \frac{d}{dt} Z(t).$$

Wtedy prędkość falowa $w(t)$, mierzona w konfiguracji aktualnej, będzie pochodną

$$(2.22) \quad w(t) = \frac{d}{dt} \chi(Z(t), t).$$

Zastosujemy prawo różniczkowania złożonego do równania (2.22); wykorzystując (2.21), otrzymamy

$$(2.23) \quad \frac{d}{dt} \chi(Z(t), t) = \frac{\partial}{\partial X} \chi(X, t) \Big|_{X=Z(t)^\pm} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \chi(X, t) \Big|_{X=Z(t)^\pm},$$

stąd

$$(2.24) \quad w = F^+V + v^+ = F^-V + v^-.$$

Ostatnia równość pozwala napisać warunek

$$(2.25) \quad V[[E]] = -[[v]],$$

gdzie oczywiście z definicji skoku mamy $[[E]] = [[F]]$.

Relacja (2.25) jest warunkiem zgodności dla fali uderzeniowej. Może być otrzymana też w inny sposób, przez bezpośrednie wykorzystanie ogólnego kinematycznego warunku zgodności (2.10), słusznego dla każdego rodzaju fali. Jedyną zmianą, jakiej należy dokonać w (2.10), jest zastąpienie symbolu U przez V .

Korzystając dalej z (2.10) i wstawiając kolejno w miejsce f prędkość v i odkształcenie E , otrzymamy

$$(2.26) \quad \frac{[[d[v]]]}{dt} = V[[\dot{E}]] + [[\dot{v}]], \quad \frac{d[[E]]}{dt} = V[[\partial_x E]] + [[\dot{E}]].$$

Nazwijmy wielkość skoku odkształcenia $[[E]]$ *amplitudą fali uderzeniowej*¹¹⁾. Dla niej to związki (2.26) pozwalają wyprowadzić następujące równanie różniczkowe

$$(2.27) \quad 2V \frac{d[[E]]}{dt} + [[E]] \frac{dV}{dt} = V^2 [[\partial_x E]] - [[\dot{v}]],$$

które może być zapisane w bardziej zwartej postaci

$$(2.28) \quad 2V \frac{d}{dt} (V\bar{V}[[E]]) = V^2 [[\partial_x E]] - [[\dot{v}]].$$

Przejdźmy teraz do analizy równania ruchu (2.6). Zapiszmy je w postaci

$$(2.29) \quad T(X_2, t) - T(X_1, t) = \\ = \frac{d}{dt} \left(\int_{X_1}^{Z(t)} \varrho_0 \dot{v}(X, t) dX + \int_{Z(t)}^{X_2} \varrho_0 \dot{v}(X, t) dX \right) - \int_{X_1}^{X_2} \varrho_0 b(X, t) dX$$

¹⁰⁾ Jest to prędkość mierzona w konfiguracji odniesienia.

¹¹⁾ Por. [7, 11].

przy założeniu, że $X_1 < Z(t) < X_2$. Dokonajmy przejścia granicznego $X_1 \rightarrow Z(t)^-$ i $X_2 \rightarrow Z(t)^+$, wykorzystując równanie na prędkość fali (2.21), ciągłość sił masowych $b(X, t)$, a także twierdzenie o wartości średniej dla całek. Otrzymamy wtedy następujące wyrażenie na skok naprężenia $[[T]]$

$$(2.30) \quad [[T]] = -\varrho_0 V [[v]].$$

Po wykorzystaniu (2.25) równanie na prędkość fali uderzeniowej w dowolnym ośrodku materialnym przyjmie postać

$$(2.31) \quad \varrho_0 V^2 = \frac{[[T]]}{[[E]]}.$$

Założmy, że naprężenia, podobnie jak prędkość v , są różniczkalnymi funkcjami po obu stronach krzywej Ω . Wtedy słuszne są lokalne sformułowania prawa ruchu

$$(2.32) \quad \partial_x T + \varrho_0 b = \varrho_0 \dot{v}$$

po obu stronach fali uderzeniowej. Natomiast wzdłuż krzywej Ω zachodzi

$$(2.33) \quad [[\partial_x T]] = \varrho_0 [[\dot{v}]].$$

Ostatni związek zastosowany do (2.28) daje następujący związek:

$$(2.34) \quad 2\sqrt{V} \frac{d}{dt} (\sqrt{V} [[E]]) = V^2 [[\partial_x E]] - \frac{1}{\varrho_0} [[\partial_x T]].$$

Na końcu tego punktu zatrzymajmy się na chwilę przy prawie zachowania masy (2.4). Ze względu na nieciągłość deformacji prawo to na krzywej Ω przyjmie postać

$$\left[\left[\frac{\varrho_0}{\varrho} \right] \right] = [[E]].$$

Po przekształceniach stwierdzamy, że na fali uderzeniowej prawo zachowania masy ma postać

$$(2.35) \quad [[\varrho]] = \frac{-\varrho^- \varrho^+}{\varrho_0} [[E]].$$

Stąd w zastosowaniach jednowymiarowej teorii do ruchów podłużnych, dla których prędkości są dodatnie, $V > 0$, przyjęło się nazywać falę uderzeniową ściskającą (sprężającą), jeśli

$$(2.36) \quad [[E]] < 0,$$

oraz rozciągającą (rozprężającą), jeśli

$$(2.37) \quad [[E]] > 0.$$

Po przejściu fali sprężającej gęstość masy rośnie, tzn. ϱ^- jest większe od ϱ^+ , a tym samym $[[\varrho]] > 0$ oraz $[[E]] < 0$, natomiast po przejściu fali rozprężającej gęstość masy maleje, tzn. $\varrho^- < \varrho^+$ i $[[\varrho]] < 0$ oraz $[[E]] > 0$.

3. Materiał z parametrami wewnętrznymi

Celem niniejszej pracy jest analiza zachowania się fal uderzeniowych i przyspieszenia dla szerokiej klasy materiałów niesprężystych. Przez materiał niesprężysty rozumiemy ośrodek ciągły, który oprócz zachowania sprężystego wykazuje własności reologiczne, niesprężyste, takie jak: lepkość, relaksacja, możliwość podlegania odkształceniom trwałym (nieodwracalnym). Należy zaznaczyć, że ośrodek taki nie musi być koniecznie ciałem stałym.

Istnieje niewątpliwie wiele matematycznych modeli materiałów niesprężystych. Jeden z nich zasługuje na szczególną uwagę, a to dzięki swej jednoczesnej uniwersalności i prostocie. Mamy tu na myśli model z parametrami wewnętrznymi (z wewnętrznymi zmiennymi stanu).

Wymieńmy pokrótce podstawowe zalety tego modelu:

- łatwe przejście do modelu sprężystego czy hipersprężystego,
- możliwość opisu materiałów lepkosprężystych [3, 42],
- równoważność, przy pewnych założeniach, z modelem materiału prostego z pamięcią [24, 27, 42],
- możliwość opisu materiałów sprężysto-lepkoplastycznych [33, 39, 43],
- równoważność, przy pewnych założeniach, z modelem prędkościowym [34],
- możliwość opisu cieczy z reakcjami chemicznymi lub gazów z wibracyjną relaksacją [2, 4–6, 8–10].

Ogólny materiał z parametrami wewnętrznymi jest ponadto dogodnym — co jest niebagatelne dla niniejszych rozważań — modelem do analizy zjawisk falowych. Należy zaznaczyć, że równania rządzące problemem początkowo-brzegowym dla tego modelu tworzą układ quasi-liniowy hiperboliczny pierwszego rzędu względem niewiadomych: prędkości ruchu cząstki, deformacji i wektora parametrów wewnętrznych (w przypadku ciała stałego).

Model z parametrami wewnętrznymi otrzymuje się przez wzbogacenie opisu modelu sprężystego o dodatkowe zmienne stanu, tzw. parametry wewnętrzne (lub wewnętrzne zmienne stanu), dla których postuluje się pewne równania kinetyczne. Te dodatkowe równania są najczęściej zwyczajnymi — przy ustalonej cząstce ciała — równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Noszą one nazwę równań ewolucji.

Potrzebę wprowadzenia parametrów wewnętrznych tłumaczy się koniecznością opisu dodatkowych, poza sprężystymi, własności ośrodka. Często mówi się w takich wypadkach o wzbogaceniu informacji o ośrodku materialnym zawartej w jego stanie odkształcenia przez podanie sposobu (drogi), w jaki ośrodek doszedł do tego stanu. Jest to tzw. metoda przygotowania [21, 33, 34, 38]. Trzeba od razu zaznaczyć, że są różne realizacje metody przygotowania.

Użycie w opisie materiału pełnej przeszłej historii deformacji prowadzi do modelu materiału z pamięcią. Użycie chwilowych prędkości deformacji jako dodatkowej informacji umożliwia opis klasy materiałów lepkosprężystych (np. model Maxwella) z tak zwaną lepkością dyskretną. Ten ostatni przypadek jest modelem różniczkowym.

Bardziej wyszukana zależność reakcji materiału od niepełnej historii deformacji (tj. historii z pewnego skończonego przedziału czasowego) występuje w modelu prędkościowym. Nie ma w nim skończonych związków konstytutywnych między bodźcami a reakcją. Zamiast nich postuluje się równanie różniczkowe na prędkość naprężenia, w którym prawa strona zawiera deformację i jej prędkość¹²⁾.

Przejdźmy teraz do modelu nas interesującego.

Równanie konstytutywne materiału z parametrami wewnętrznymi ma ogólną postać

$$(3.1) \quad T(X, t) = \mathcal{F}(E(X, t), \alpha(X, t)).$$

Układ parametrów wewnętrznych potrzebnych do opisu niesprężystego zachowania się materiału reprezentuje wektor α . Tak jak powiedzieliśmy, zmianą parametrów α w procesie rządzi równanie różniczkowe

$$(3.2) \quad \dot{\alpha}(X, t) = \mathbf{A}(E(X, t), \alpha(X, t))$$

z wartością początkową $\alpha(X, 0) = \alpha_0(X)$.

Wymiar przestrzeni wartości parametrów (ogólnie będzie to pewna przestrzeń liniowa \mathcal{V}^n) zależy od konkretnej interpretacji geometrycznej poszczególnych składowych wektora α .

W przypadku opisu modelu lepkosprężystego parametry α będą miały za zadanie opisać zjawisko tarcia wewnętrznego w materiale. Odpowiednia teoria fizyczna tego zjawiska daje rozstrzygnięcie nie tylko kwestii wielkości liczby n , lecz także postaci funkcji \mathbf{A} (por. np. [31]).

W tym miejscu należy zrobić uwagę natury ogólnej: nie ma i nie może być żadnej uniwersalnej postaci równania ewolucji (3.2) na parametry wewnętrzne (może tylko z wyjątkiem teorii liniowej, w której postuluje się, że związek konstytutywny (3.1) i równanie (3.2) mają być liniowe względem zmiennych E i α).

Konkretna potrzeba użycia modelu z parametrami wewnętrznymi do opisu zachowania się wybranego materiału decyduje o formie związku (3.2). Odwołanie się do fizycznej strony zagadnienia, do fizycznych mechanizmów wywołujących niesprężystą reakcję materiału, jest najczęstszą i najlepszą drogą wyprowadzenia zależności na przyrost parametrów wewnętrznych. Ta właśnie fizyczna interpretacja parametrów z jednoczesną analizą mechanizmów dysypatywnych (które z termodynamicznego punktu widzenia są odpowiedzialne za niesprężyste zachowanie się ośrodka) jest niezbędnym etapem przy budowaniu każdej fizycznej teorii z parametrami wewnętrznymi.

Za przykład takiej fizycznej teorii niech posłużą prace PERZYNY [32 - 35, 37] o lepkoplastyczności. Przyjmowane w nich parametry wewnętrzne $\alpha = (\mathbf{P}, k, \mathbf{\Gamma}^{(i)})$ są następujące: \mathbf{P} — miara deformacji nieodwracalnych, k — parametr wzmocnienia, $\mathbf{\Gamma}^{(i)}$ — układ tensorów rozkładu gęstości dyslokacji. Wyprowadzenie dla tych zmiennych wewnętrznych równań ewolucji oparto na fizycznej teorii dyslokacji, analizie mechanizmów płynięcia w materiałach plastycznych i wynikach eksperymentalnych.

Dla innych materiałów niesprężystych (reologicznych) przykłady odpowiednich teorii mogą dostarczyć pozycje [25, 26, 28, 31, 42, 43] bibliografii.

¹²⁾ Przykładem takiego modelu jest materiał hiposprężysty [29, 34].

4. Fale przyspieszenia

Ten rozdział poświęcamy w całości analizie fal przyspieszenia w ogólnym materiale opisywanym modelem z parametrami wewnętrznymi.

Po wyprowadzeniu równania na prędkość fali przyspieszenia przejdziemy do badania zachowania się amplitudy fali w czasie. Równanie różniczkowe (2.14) rządzi zmianą (ewolucją) amplitudy $a(t)$ wzdłuż krzywej¹³⁾ osobliwej Σ . Jest ono podstawowe przy analizie zachowania się funkcji $a(t)$. Po zastosowaniu związku konstytutywnego do wyznaczenia drugiej pochodnej naprężenia w (2.19) okaże się, że ewolucja amplitudy odbywa się zgodnie z równaniem Bernoulliego.

Analiza samego równania amplitudy, jak i jego rozwiązania, zostanie przeprowadzona w dwóch etapach. Pierwszy będzie dotyczył sformułowania warunków odnośnie lokalnego (w czasie) zachowania się rozwiązania pełnego równania amplitudy. W drugim etapie, przez przyjęcie dodatkowych założeń dotyczących obszaru przed frontem fali, ustalą się współczynniki występujące w równaniu. Umożliwi to sformułowanie ścisłych kryteriów globalnego (w czasie) zachowania się amplitudy fali.

Okaże się, że równanie amplitudy dopuszcza malenie do zera amplitudy $a(t)$ w nieskończenie długim czasie lub też jej nieograniczony wzrost w skończonym czasie i to w zależności od znaku współczynników równania oraz znaku i wielkości początkowej amplitudy $a(0)$. Taki typ zachowania jest konsekwencją nieliniowości związku konstytutywnego.

Analizę fal przyspieszenia zakończy sformułowanie kryteriów formowania się fal uderzeniowych.

4.1. Gładkość parametrów wewnętrznych. Rozpatrywany materiał ciała stałego \mathcal{B} jest opisywany¹⁴⁾ modelem z parametrami wewnętrznymi. Zgodnie z poprzednim rozdziałem 3 jest to ośrodek ciągły charakteryzujący się związkiem konstytutywnym (3.1) i równaniem ewolucji dla parametrów wewnętrznych (3.2).

Postacie funkcji konstytutywnej \mathcal{T} oraz funkcji przygotowania¹⁵⁾ \mathbf{A} zależą ogólnie od wyboru konfiguracji odniesienia, a także — w przypadku materiału niejednorodnego — od cząstki X .

Przyjmujemy następujące założenia gładkości dla \mathcal{T} i \mathbf{A} : funkcja konstytutywna \mathcal{T} jest dwukrotnie ciągle różniczkowalna w E i α , zaś funkcja przygotowania \mathbf{A} jest ciągle i różniczkowalna w E i α oraz spełnia warunek Lipschitza względem α .

Różniczkowalność funkcji \mathcal{T} i \mathbf{A} względem ich argumentów E i α nie pociąga za sobą ich różniczkowalności względem cząstek i czasu. Potrzebna jest jeszcze różniczkowalność odkształcenia i parametrów wewnętrznych jako funkcji dwóch zmiennych X i t .

¹³⁾ W teorii równań hiperbolicznych związki tego typu noszą nazwę równań transportu.

¹⁴⁾ Jeśli \mathcal{B} będzie cieczą lub gazem, to zmienne (E, T) zostaną zastąpione objętością właściwą i ciśnieniem.

¹⁵⁾ Uwzględnienie w równaniu (3.2) zależności od naprężenia nie wyprowadza poza omawiany model. Wystarczy wtedy skorzystać z równania (3.1), by sprowadzić związek do postaci (3.2). Wprowadzenie natomiast do (3.2) jako dodatkowej zmiennej prędkości odkształcenia \dot{E} oznaczałoby wyjście poza klasyczne sformułowanie teorii z parametrami wewnętrznymi. Większość rezultatów niniejszej pracy przestałaby być słuszną dla tak zmienionej postaci równania ewolucji.

Gładkość odkształcenia $E(X, t)$ jest ograniczona warunkami występowania fali przyspieszenia (por. definicję 1).

Odmienne sprawa wygląda z wektorową funkcją parametrów wewnętrznych $\alpha(\cdot, \cdot)$. Skoro w procesie dynamicznym parametry wewnętrzne są określone poprzez rozwiązanie równania ewolucji (3.2), to ich ciągłość i gładkość jest ciągłością i gładkością rozwiązania.

Zauważmy, że przy ustalonej cząstce X równanie ewolucji (3.2) jest zwyczajnym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu. Stosując znane twierdzenie z teorii takich równań oraz fakt, że w procesie dynamicznym z falą przyspieszenia odkształcenie jest ciągłą funkcją czasu (a także i cząstki), możemy sformułować następujące spostrzeżenie¹⁶⁾: w procesach dynamicznych z falami przyspieszenia funkcja parametrów $\alpha(X, t)$ jest ciągle różniczkowalną funkcją X i t .

Używając oznaczeń dla skoków, wynik ten można zapisać w postaci

$$(4.1) \quad \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \dot{\alpha} \rrbracket = 0.$$

Spostrzeżenie powyższe jest dla dyskusji fal przyspieszenia w materiale opisywanym za pomocą parametrów wewnętrznych twierdzeniem podstawowym. Rozwiązuje kwestię ewentualnego skoku pochodnej parametrów wewnętrznych i problem gładkości funkcji parametrów wewnętrznych.

4.2. Równanie amplitudy. Rozpatrzmy związek konstytutywny (3.1). Ciągłość odkształcenia i parametrów wewnętrznych w procesie dynamicznym z falą przyspieszenia wraz z ciągłością funkcji konstytutywnej implikuje¹⁷⁾

$$\llbracket T \rrbracket = 0.$$

Ponadto różniczkowalność E , α i funkcji konstytutywnych daje następujący związek dla pochodnej naprężenia na fali

$$(4.2) \quad \llbracket \partial_X T \rrbracket = \partial_E \mathcal{T}(E, \alpha) \llbracket \partial_X E \rrbracket + \partial_\alpha \mathcal{T}(E, \alpha) \llbracket \partial_X \alpha \rrbracket.$$

Zastosujemy twierdzenie Maxwella (2.12) do funkcji $\alpha(X, t)$. Otrzymamy

$$(4.3) \quad \llbracket \dot{\alpha} \rrbracket = -U \llbracket \partial_X \alpha \rrbracket.$$

Na mocy (4.1) związek (4.3) dowodzi zerowania się skoku gradientu $\partial_X \alpha$, tj.

$$(4.4) \quad \llbracket \partial_X \alpha \rrbracket = 0;$$

co w konsekwencji upraszcza (4.2) do relacji

$$(4.5) \quad \llbracket \partial_X T \rrbracket = \partial_E \mathcal{T}(E, \alpha) \llbracket \partial_X E \rrbracket.$$

Posiadając wyrażenie na skok pochodnej naprężenia oraz równanie ruchu (2.17), jesteśmy w stanie udowodnić następujące spostrzeżenie: prędkość fali przyspieszenia w materiale z parametrami wewnętrznymi¹⁸⁾ dana jest zależnością

$$(4.6) \quad \varrho_0 U^2(t) = \partial_E \mathcal{T}(E(Y(t), t), \alpha(Y(t), t)).$$

Dla większości znanych modeli ośrodków ciągłych równanie na prędkość fali przyspieszenia jest takie samo (por. [7, 11, 13, 40]).

¹⁶⁾ Dla homotermicznych fal przyspieszenia ten sam rezultat otrzymano w [20].

¹⁷⁾ Por. punkt 2.2.

¹⁸⁾ Dla skrótu materiał opisywany modelem z parametrami wewnętrznymi będziemy nazywali materiałem z parametrami wewnętrznymi. Por. rozdział 3.

Jak wspomnieliśmy w rozdziale 3, równanie różniczkowe (2.14), rządzące zmianą amplitudy na czole fali, odgrywa podstawową rolę przy analizie zachowania się fali przyspieszenia. W niniejszym punkcie skorzystamy z postaci (2.19).

Drugą pochodną mieszaną naprężenia $\partial_x \dot{T}$ występującą w (2.19) wyliczamy, wykorzystując równanie konstytutywne (3.1). Ze względu na (4.1) i (4.4) na fali będziemy mieli

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \llbracket \partial_x \dot{T} \rrbracket = & \partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) \llbracket \dot{E} \partial_x E \rrbracket + \partial_E \mathcal{F}(E, \alpha) \llbracket \partial_x \dot{E} \rrbracket + \\ & + \partial_E \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) (\partial_x \alpha \llbracket \dot{E} \rrbracket + \dot{\alpha} \llbracket \partial_x E \rrbracket) + \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) \llbracket \partial_x \dot{\alpha} \rrbracket. \end{aligned}$$

Pochodna czasowa parametrów wewnętrznych spełnia równanie ewolucji (3.2). Jeśli tak, to druga pochodna mieszaną $\partial_x \dot{\alpha}$ dana jest związkami, poza Σ ,

$$\partial_x \dot{\alpha} = \partial_E \mathbf{A}(E, \alpha) \partial_x E + \partial_\alpha \mathbf{A}(E, \alpha) \partial_x \alpha.$$

Stąd na fali mamy

$$(4.8) \quad \llbracket \partial_x \alpha \rrbracket = \partial_E \mathbf{A}(E, \alpha) \llbracket \partial_x E \rrbracket.$$

Skorzystajmy z warunków zgodności, dostaniemy wtedy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \llbracket \partial_x \dot{T} \rrbracket = & \partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) \llbracket \dot{E} \partial_x E \rrbracket + \partial_E \mathcal{F}(E, \alpha) \llbracket \partial_x \dot{E} \rrbracket + \\ & + \frac{1}{U^2} \{ \partial_E \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) (\dot{\alpha} - U \partial_x \alpha) + \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) \partial_E \mathbf{A}(E, \alpha) \} a. \end{aligned}$$

Wstawiając (4.9) do (2.19) i wykorzystując równanie na prędkość fali (4.6), dostajemy

$$(4.10) \quad \begin{aligned} 2\sqrt{U(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{a(t)}{\sqrt{U(t)}} \right) = & \frac{1}{\varrho_0} \partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) \llbracket \dot{E} \partial_x E \rrbracket(t) + \\ & + \frac{a(t)}{\varrho_0 U^2(t)} \{ \partial_E \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) (\dot{\alpha} - U(t) \partial_x \alpha) + \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) \partial_E \mathbf{A}(E, \alpha) \}. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz skorzystać z ogólnie prawdziwej równości dla skoku iloczynu funkcji f i h

$$(4.11) \quad \llbracket fh \rrbracket = \llbracket f \rrbracket \llbracket h \rrbracket + f^+ \llbracket h \rrbracket + h^+ \llbracket f \rrbracket,$$

by posiadając równanie (4.10) stwierdzić, że amplituda $a(t)$ fali spełnia równanie [14 - 16]

$$(4.12) \quad \frac{da(t)}{dt} = -\mu(t)a(t) + \beta(t)a^2(t),$$

gdzie współczynniki $\mu(t)$ i $\beta(t)$ dane są zależnościami

$$(4.13)^{19)} \quad \begin{aligned} \mu(t) = & -\frac{1}{2\varrho_0 U(t)} \left\{ \varrho_0 \frac{dU(t)}{dt} + \frac{1}{U(t)} \partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) \dot{E}^+ - \right. \\ & \left. - \partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) (\partial_x E)^+ + \frac{1}{U(t)} \partial_E \mathbf{A}(E, \alpha) \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{U(t)} \partial_E \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) (\dot{\alpha} - U(t) \partial_x \alpha), \right. \\ \beta(t) = & -\frac{\partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha)}{2U(t) \partial_E \mathcal{F}(E, \alpha)}. \end{aligned}$$

¹⁹⁾ W pracy [14] w równaniu (3.10) na współczynnik $\mu(t)$ zamiast minusa przed pochodną $\frac{dU(t)}{dt}$ powinien być nawias klamrowy.

W równaniu na współczynnik $\mu(t)$ występuje pochodna prędkości dU/dt . Przez dodatkowe obliczenia może być ona wyznaczona związkiem²⁰⁾

$$(4.14) \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2\rho_0 U} (\partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) \dot{E}^+ + \partial_\alpha \partial_E \mathcal{F}(E, \alpha) \dot{\alpha}) + \\ + \frac{1}{2\rho_0} (\partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) (\partial_X E)^+ + \partial_\alpha \partial_E \mathcal{F}(E, \alpha) \partial_X \alpha).$$

Dzięki temu możemy sformułować podstawowy rezultat tego punktu w postaci twierdzenia [14 - 16]:

Twierdzenie 1. Amplituda $a(t)$ fali przyspieszenia w materiale z parametrami spełnia równanie (4.12) z $\mu(t)$ określonym przez

$$(4.15) \quad \mu(t) = -\frac{1}{2\rho_0 U(t)} \left\{ \frac{3}{2U(t)} (\partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) \dot{E}^+ + \partial_\alpha \partial_E \mathcal{F}(E, \alpha) \dot{\alpha}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{U(t)} \partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha) \partial_E A(E, \alpha) - \frac{1}{2} (\partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) (\partial_X E)^+ + \partial_\alpha \partial_E \mathcal{F}(E, \alpha) \partial_X \alpha) \right\}$$

i ze współczynnikiem $\beta(t)$ określonym przez (4.13). Prędkość fali $U(t)$ spełnia natomiast równania (4.6) i (4.14). Pochodne $\partial_E^2 \mathcal{F}$, $\partial_\alpha \mathcal{F}$, $\partial_\alpha \partial_E \mathcal{F}$ i $\partial_E A$ są wzięte w $(E(Y(t), t), \alpha(Y(t), t))$, zaś $\dot{\alpha}$ i $\partial_X \alpha$ w $(Y(t), t)$.

Zauważmy, że w równaniu amplitudy (4.12) współczynnik $\mu(t)$ zależy od reologicznych własności materiału (tzn. sprężystych i niesprężystych), a także od wartości prędkości i gradientów odkształcenia oraz parametrów wewnętrznych przed falą. Natomiast współczynnik $\beta(t)$ zależy tylko od nieliniowych sprężystych własności materiału.

Jest rzeczą interesującą, że ogólne równanie amplitudy fali przyspieszenia (4.12) dla materiału z parametrami wewnętrznymi, będąc równaniem typu Bernoulliego, jest takie samo, jak dla innych znanych modeli materiałów. Równania amplitudy w materiale z zanikającą pamięcią [11] w nieliniowym i niejednorodnym materiale sprężystym [7] też są w postaci (4.12). Różnią się one między sobą wyrażeniami na współczynniki $\mu(t)$ oraz $\beta(t)$.

Nie znając konkretnej postaci związku konstytutywnego (3.1) i równania ewolucji (3.2), jesteśmy w stanie przeprowadzić analizę lokalnego i globalnego w czasie zachowania się amplitudy $a(t)$ na czole fali. Analiza taka opiera się na badaniu rozwiązania równania Bernoulliego. I tak stwierdzamy, że jeśli w danej chwili czasu t albo $\beta(t) > 0$ i $a(t) < \lambda(t)$, albo $\beta(t) < 0$ i $a(t) > \lambda(t)$ to $\frac{d|a(t)|}{dt} < 0$; jeśli w danej chwili czasu t albo $\beta(t) > 0$ i $a(t) > \lambda(t)$ albo $\beta(t) < 0$ i $a(t) < \lambda(t)$, to $\frac{d|a(t)|}{dt} > 0$; natomiast $a(t) = \lambda(t)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{da(t)}{dt} = 0$, gdzie oznaczyliśmy iloraz $\frac{\mu(t)}{\beta(t)}$ przez $\lambda(t)$.

²⁰⁾ Zauważmy, że w powyższym związku wzięcie wartości z obszaru „-” jest tak samo możliwe, ponieważ odkształcenie jest ciągłą funkcją przy przejściu przez krzywą Σ . Ogólnie prawdziwy jest bowiem związek [por. (2.12)]

$$f^+ + U(\partial_X f)^+ = \dot{f}^- + U(\partial_X f)^- \quad \text{o ile } \llbracket f \rrbracket = 0.$$

Zauważmy, że własności wyżej sformułowane są prawdziwe przy założeniu, że współczynnik $\beta(t)$ jest różny od zera dla wszystkich t . Będzie to spełnione, o ile funkcja naprężenia \mathcal{F} pozostanie cały czas na fali nieliniowa względem odkształcenia. Innymi słowy, kiedy sprężyste własności materiału będą nieliniowe.

W ogólnym przypadku współczynniki równania amplitudy (4.12) są funkcjami czasu, tzn. nie są stałe. Sytuacja taka powoduje, że dyskusja zachowania się rozwiązania równania (4.12) jest bardziej złożona od dyskusji w przypadku ustalonych μ_0 i β_0 . Dlatego też przeprowadzona przy ogólnych założeniach [zmiennych $\mu(t)$ i $\beta(t)$] przez BAILEYA i CHENA [1] analiza równania Bernoulliego nie będzie tutaj powtarzana.

Dla przypadku fali w materiale z parametrami wewnętrznymi zaadaptowane wyniki BAILEYA i CHENA wraz z nowymi rezultatami można znaleźć w pracy [15].

Z tego względu pełną dyskusję zachowania się rozwiązania ograniczymy do przypadku ustalonych współczynników μ_0 i β_0 . Sytuacja taka występuje przy rozprzestrzenianiu się fali przyspieszenia w materiale będącym w jednorodnym stanie równowagi. Założmy ponadto, że fala propaguje się w kierunku wzrastających X . Wtedy prędkość fali

(wewnętrzna) $U(t) = \frac{d}{dt} Y(t)$ będzie dodatnia²¹⁾.

Powiemy, że fala rozprzestrzenia się w jednorodnym stanie równowagi, jeśli odkształcenie i wektor parametrów wewnętrznych w obszarze przed falą (tj. w obszarze „+”) mają wartość stałą, tzn.

$$(4.16) \quad \begin{aligned} E(X, t) = E_0, \quad \alpha(X, t) = \alpha_0 \quad \text{dla} \quad X \geq Y(t), t \geq 0, \\ \partial_X E_0 = 0, \quad \partial_X \alpha_0 = 0, \quad \dot{E}_0 = 0, \quad \dot{\alpha}_0 = 0. \end{aligned}$$

Znikanie pochodnej czasowej parametrów wewnętrznych oznacza, że względu na (3.2), zerowanie się prawej strony równania ewolucji w (E_0, α_0) , tzn. $\mathbf{A}(E_0, \alpha_0) = \mathbf{0}$.

Ciągłość odkształcenia i parametrów wewnętrznych na fali pociąga dla obecnego przypadku

$$(4.17) \quad E(Y(t), t) = E_0, \quad \alpha(Y(t), t) = \alpha_0,$$

co oznacza, że prędkość fali przyspieszenia propagującej się w jednorodnym stanie równowagi jest stała.

Związki (4.16) dla pochodnych E i α dają, dzięki (4.15) i ciągłości $\dot{\alpha}$ [por. (4.1) i (4.3)] na fali, następujące wyrażenie na stały w tej sytuacji współczynnik

$$(4.18) \quad \mu_0 = - \frac{\partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0)}{2 \partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)}.$$

Podobnie, zamiast $\beta(t)$ otrzymamy β_0 wyrażone przez

$$(4.19) \quad \beta_0 = - \frac{\partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)}{2U \partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)},$$

²¹⁾ Zauważmy, że wtedy obszar przed falą będzie obszarem „+”, natomiast za falą będzie obszarem „-”.

a to oznacza, że równanie amplitudy fali przyspieszenia propagującej się w jednorodnym stanie równowagi jest typu Bernoulliego

$$(4.20) \quad \frac{da(t)}{dt} = -\mu_0 a(t) + \beta_0 a^2(t)$$

o stałych współczynnikach.

Zwróćmy na chwilę uwagę na równanie na prędkość fali (4.6). Jeśli fala ma istnieć, czyli prędkość ma być rzeczywista i nie znikająca, to koniecznie musi zachodzić nierówność

$$(4.21) \quad \partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) > 0.$$

Dodatniość pochodnej funkcji naprężenia względem odkształcenia w stanie równowagi (E_0, α_0) gwarantuje rozprzestrzenianie się fali w materiale. Jeśli zmienimy wartość przed frontem fali na (E_1, α_1) , to gwarancją nie znikającej i rzeczywistej prędkości fali przyspieszenia będzie dodatniość pochodnej $\partial_E \mathcal{F}(E_1, \alpha_1)$, czyli warunkiem propagacji fali przyspieszenia w dowolnym stanie materiału (niekoniecznie równowagi) jest dodatniość pochodnej cząstkowej $\partial_E \mathcal{F}$ jako funkcji odkształcenia i wektora parametrów wewnętrznych.

4.3. Rozwiązania równania amplitudy. Dyskusję zachowania się rozwiązania równania (4.20) rozdzielimy na przypadki.

Przypadek 1. $\beta_0 = 0$. Sytuacja taka może wystąpić tylko wtedy, gdy druga pochodna funkcji naprężenia względem odkształcenia znika w stanie równowagi (E_0, α_0) , bądź materiał jest liniowy względem odkształcenia. Amplituda fali, spełniając równanie

$$(4.22) \quad \frac{da}{dt} = -\mu_0 a$$

dana jest w takim przypadku następującą zależnością od czasu

$$(4.23) \quad a(t) = a(0) \exp -\mu_0 t \quad \text{lub} \quad a(t) = a(0) \exp \left\{ \frac{\partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0)}{2 \partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)} \right\},$$

gdzie $a(0)$ jest początkową wartością a . Ze względu na różny znak μ_0 może być

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) < 0, \\ \text{sgn } a(0) \infty & \text{jeśli } \partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) > 0. \end{cases}$$

Do powyższego przypadku należy dołączyć znikające μ_0 , tj. $\partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) = 0$. Wtedy amplituda fali jest stała w czasie

$$(4.24) \quad \frac{da}{dt} = 0, \quad \text{tzn.} \quad a(t) = a(0).$$

Przypadek 2. $\mu_0 = 0$. Znikanie współczynnika μ_0 może mieć miejsce wtedy, gdy którakolwiek z pochodnych $\partial_\alpha \mathcal{F}$ albo $\partial_E \mathbf{A}$ znika lub gdy materiał jest czysto sprężysty (nieliniowo, tzn. $\partial_E^2 \mathcal{F} \neq 0$ i $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$), bądź materiał jest sprężysty (nieliniowo) starzejący

się²²⁾, tzn. $\partial_E^2 \mathcal{F} \neq 0$, $A \neq 0$ i $\partial_E A \equiv 0$. Amplituda fali przyspieszenia spełnia wtedy równanie

$$(4.25) \quad \frac{da}{dt} = \beta_0 a^2,$$

którego rozwiązanie dane jest przez

$$(4.26) \quad a(t) = \frac{a(0)}{1 - \beta_0 a(0)t} \quad \text{lub} \quad a(t) = \frac{a(0)}{1 + \frac{\partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)}{2U \partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)} a(0)t}$$

z $a(0)$ jako wartością początkową.

Zauważmy, że w wyrażeniu stojącym po prawej stronie (4.26) może wystąpić osobliwość w postaci znikania mianownika. Ze względu na kryterium propagacji (4.21) może mieć to miejsce wtedy, gdy

$$(4.27) \quad \operatorname{sgn} a(0) = -\operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0).$$

W przeciwnym wypadku, tj. gdy $\operatorname{sgn} a(0) = \operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)$, mianownik jest zawsze dodatni i rosnący, a zatem $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$.

Wróćmy do sytuacji scharakteryzowanej przez (4.27). Proste obliczenia pozwalają wyznaczyć czas t_c , zwany *czasem krytycznym*, w którym mianownik w (4.26) zeruje się. Czas ten jest funkcją początkowej wartości amplitudy i współczynnika β_0

$$(4.28) \quad t_c = \frac{1}{\beta_0 a(0)} \quad \text{lub} \quad t_c = -\frac{2U \partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)}{\partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) a(0)},$$

przy czym $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = +\infty$, jeśli $a(0) > 0$, zaś $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = -\infty$, gdy $a(0) < 0$.

Podsumowując dyskusję powtórzmy, że wyprowadzone równanie amplitudy (4.20) opisuje, w przypadku zerowania się μ_0 , propagację fali przyspieszenia w nieliniowym materiale sprężystym, w przypadku zaś znikania obu współczynników μ_0 i β_0 — falę w liniowym materiale sprężystym. Ostatnia sytuacja została opisana równaniem (4.24).

Przykład 3. Globalna analiza pełnego równania amplitudy. Mamy teraz do czynienia z pełnym równaniem amplitudy

$$(4.29) \quad \frac{da}{dt} = -\mu_0 a + \beta_0 a^2.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli początkowa amplituda $a(0)$ zeruje się, to rozwiązaniem powyższego równania będzie $a(t) \equiv 0$ dla wszystkich t .

Poszukajmy nietrywialnych rozwiązań. Wprowadźmy nową zmienną oraz nowy współczynnik

$$(4.30) \quad h(t) \equiv \frac{1}{a(t)}, \quad \lambda_0 = \frac{\mu_0}{\beta_0}.$$

²²⁾ Ewolucję parametrów wewnętrznych w czasie bez wpływu odkształcenia i naprężenia (tzn. warunek $\partial_E A = 0$ i $A \neq 0$) należy interpretować jako efekt czasowy nie wywołany zmianą odkształcenia czy naprężenia. Może to być tłumaczone zjawiskiem starzenia się materiału.

Wtedy równanie (4.29) w nowej zmiennej przyjmie postać

$$\frac{dh(t)}{dt} = \mu_0 h(t) - \beta_0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$h(t) = e^{\mu_0 t}(h(0) - \lambda_0) + \lambda_0,$$

gdzie $h(0)$ jest początkową wartością h . Ze względu na podstawienie (4.30) rozwiązanie równania (4.29) może być już bezpośrednio podane następującą funkcją czasu

$$(4.31) \quad a(t) = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{\lambda_0}{a(0)} - 1\right)e^{\mu_0 t} + 1} \quad \text{gdzie} \quad \lambda_0 = \frac{\mu_0}{\beta_0};$$

przy czym należy pamiętać, że czas w tym związku jest parametrem krzywej osobiwej Σ , na której przyspieszenie doznaje skoku.

Mając ogólną postać rozwiązania równania amplitudy, możemy przejść do dyskusji jego zachowania w czasie.

Zwróćmy uwagę, że podobnie jak dla przypadku 2, prawa strona w (4.31) dopuszcza przy pewnym układzie wielkości λ_0 , $a(0)$ i czasu t zerowanie się mianownika. Pociągnie to nieskończoną wartość amplitudy $a(t)$. Z drugiej strony, przy odpowiednim doborze $a(0)$, a ściślej, wtedy gdy $a(0)$ pokryje się z λ_0 , mianownik dla każdego czasu t utrzyma stałą jednostkową wartość, co da w efekcie stałe rozwiązanie $a(t) \equiv \lambda_0$.

Uporządkujmy te spostrzeżenia w postaci twierdzenia [16].

Twierdzenie 2. W materiale z parametrami wewnętrznymi fala przyspieszenia propagująca się w jednorodnym stanie równowagi (E_0, α_0) z dodatnią prędkością U podlega ewolucji czasowej rządzonej równaniem amplitudy (4.29). Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $a(t)$ dana zależnością (4.31) przy warunku $a(0)\mu_0\beta_0 \neq 0$. Globalne zachowanie się w czasie amplitudy $a(t)$ jest scharakteryzowane następująco:

1. Jeśli $\partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) < 0$, to istnieją trzy możliwości:

a) jeśli albo $|a(0)| < |\lambda_0|$, albo $\text{sgn } a(0) = \text{sgn } \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ (w sposób monotoniczny);

b) jeśli $a(0) = \lambda_0$, to wtedy $a(t) \equiv a(0)$ dla $t > 0$, tzn. amplituda jest stała w czasie;

c) jeśli $|a(0)| > |\lambda_0|$ i $\text{sgn } a(0) = -\text{sgn } \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)$, to istnieje skończony czas $t_k > 0$,

$$(4.32) \quad t_k = -\frac{1}{\mu_0} \ln \left(1 - \frac{\lambda_0}{a(0)} \right) = \frac{2\partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)}{\partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0)} \ln \left(1 - \frac{U \partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0)}{\partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) a(0)} \right)$$

taki, że $\lim_{t \rightarrow t_k} |a(t)| = \infty$.

2. Jeśli $\partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) > 0$, to istnieją także trzy możliwości:

a) jeśli $a(0) = \lambda_0$, to $a(t) \equiv a(0)$, $t > 0$;

b) jeśli $\text{sgn } a(0) = -\text{sgn } \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)$, to istnieje czas krytyczny t_k dany związkiem (4.32), taki, że $\lim_{t \rightarrow t_k} |a(t)| = \infty$,

c) jeśli $\operatorname{sgn} a(0) = \operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)$ i $a(0) \neq \lambda_0$, to

$$(4.33) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \lambda_0 \equiv \frac{U \partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E A(E_0, \alpha_0)}{\partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)}.$$

Dowód twierdzenia jest prosty i polega na analizie rozwiązania (4.31), ponieważ jest uciążliwy więc nie będziemy go przytaczać.

Jest oczywiste, że twierdzenie 2 wymaga kilku słów komentarza.

Po pierwsze, fakty w nim zawarte (punkt 1) są podobne do wyprowadzonych przez COLEMANA i GURTINA [11, II] dla materiału prostego z zanikającą pamięcią. Bogatszą literaturę na ten temat można znaleźć w artykule CHENA [7].

W znanych materiałach opisywanych modelem z parametrami wewnętrznymi²³⁾ warunek punktu 1 $\partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E A(E_0, \alpha_0) < 0$ jest spełniony. Odpowiada to w teorii COLEMANA i GURTINA [11] dodatniości początkowego nachylenia funkcji relaksacji naprężenia ($G'(0) > 0$).

Ze sformułowań punktu 1 wnioskujemy, że moduł współczynnika λ_0 , tj. $|\lambda_0|$ gra rolę pewnej wielkości granicznej (krytycznej). Przy odpowiednim doborze znaków współczynników równania (4.31) i wielkości początkowej amplitudy fali w stosunku do $|\lambda_0|$ rozwiązanie równania jest ograniczone na całej półosi rzeczywistej bądź rośnie nieograniczenie w skończonym czasie. To spostrzeżenie pozwala nazwać wielkość $|\lambda_0|$ *krytyczną amplitudą początkową*²⁴⁾.

I tak punkt 1 mówi, że jeśli początkowa amplituda fali jest mniejsza w wartości bezwzględnej od amplitudy krytycznej albo jeśli początkowa amplituda ma ten sam znak, co druga pochodna funkcji naprężenia względem odkształcenia, to amplituda fali [czyli rozwiązanie równania (4.31)] stanie się dowolnie mała w odpowiednio długim czasie. Jeśli natomiast początkowa amplituda jest większa, co do wartości bezwzględnej, od amplitudy krytycznej i ma znak przeciwny do znaku drugiej pochodnej funkcji naprężenia, to fala będzie miała też nieskończoną amplitudą w skończonym czasie.

To ostatnie stwierdzenie sugeruje, że w materiale powstanie fala uderzeniowa. W związku z tym czas krytyczny t_k podany zależnością (4.32) można uważać za czas formowania się fali uderzeniowej na czole fali przyspieszenia, albo — inaczej mówiąc — za czas²⁵⁾ przejścia fali przyspieszenia w falę uderzeniową (por. [12, 18]).

Zauważmy, że podobny rezultat, o istnieniu czasu krytycznego, uzyskaliśmy dla przypadku 2, gdzie tylko współczynnik μ_0 zerował się, natomiast β_0 było różne od zera.

Współczynnik β_0 jest — w pewnym sensie — miarą nieliniowości rozpatrywanych związków konstytutywnych. Oznacza to, że warunkiem istnienia (koniecznym, a nie wystarczającym) występowania czasu krytycznego przy propagacji fali przyspieszenia w materiałach, ogólnie, dysypatywnych-niesprężystych jest nieliniowość funkcji naprężenia w odkształceniu.

4.4. Kryteria formowania się fal uderzeniowych. Przejdźmy do warunku wystarczającego dla występowania czasu krytycznego. Podpunkt 1c oprócz żądania przekroczenia amplitudy

²³⁾ Np. materiały lepkoplastyczne, lepkosprężyste czy asprężyste.

²⁴⁾ Por. [1, 6, 7, 10, 11, 14-16].

²⁵⁾ Prace [2, 6] zawierają pierwsze wyliczenia i dyskusję czasów krytycznych przy propagacji fal przyspieszenia w gazach z termodynamiczną relaksacją.

krytycznej przez amplitudę początkową wymagał, by znak początkowej amplitudy był przeciwny do znaku drugiej pochodnej funkcji naprężenia względem odkształcenia.

Założmy na chwilę, że $\text{sgn } \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) = +1$. Oznacza to, że względu na nierówność $\partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) > 0$ w kryterium propagacji (4.21), że przy ustalonym parametrze α_0 , krzywa²⁶⁾ $T = \mathcal{F}(E, \alpha_0)$ jest wypukłością skierowana do dołu. Aby warunek $\text{sgn } a(0) = \text{sgn } \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)$ był spełniony, znak początkowej amplitudy fali musi być dodatni.

Przypomnijmy w tym miejscu postać prawa zachowania masy na fali przyspieszenia. Zgodnie z równaniem (2.20) mieliśmy

$$[\dot{\rho}] = \frac{\rho^2}{\rho_0 U} a.$$

Widać, że jeśli $a < 0$ to i $[\dot{\rho}] < 0$, że względu na dodatniość współczynników prawej strony, a że znak amplitudy fali jest stały, więc jeśli tylko $a(0)$ jest mniejsze od zera, to i skok pochodnej gęstości też będzie mniejszy od zera. Ten ostatni fakt wskazuje, że fala przyspieszenia będzie rozprężająca (rozciągająca).

Na odwrót, jeśli założymy na moment, że $\text{sgn } \partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) = -1$, czyli krzywa $T = \mathcal{F}(E, \alpha_0)$ jest wypukłością skierowana do dołu²⁷⁾, to wtedy warunek podpunktu 1c wymaga, by $\text{sgn } a(0) = +1$, a w konsekwencji $[\dot{\rho}] > 0$. Oznacza to dla tego przypadku, że fala musi być sprężająca (ściskająca).

Powyższe spostrzeżenia można traktować jako kryterium formowania się fal uderzeniowych w materiałach z parametrami wewnętrznymi. Należy tylko podkreślić, że dodatkowo wymaga się dla tych materiałów spełnienia nierówności

$$(4.34) \quad \partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) < 0.$$

Podobnie, choć może mniej wymagająco, wyglądają warunki formowania się fali uderzeniowej, tzn. istnienia czasów krytycznych przy propagacji fali przyspieszenia, w materiałach o przeciwnej nierówności do (4.34).

Punkt 2 twierdzenia 2 dotyczy właśnie takich materiałów. Dla nich żądamy

$$(4.35) \quad \partial_\alpha \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) > 0.$$

Zauważmy, że według podpunktu 2b warunkiem występowania czasu krytycznego jest tylko niezgodność znaków amplitudy i pochodnej naprężenia. Nie nakłada się żadnych ograniczeń na wielkość $a(0)$ (z wyjątkiem jej nieznikania).

Zwróćmy uwagę, że w obu przypadkach, tj. dla materiałów spełniających nierówność (4.34) czy (4.35), wymagamy tylko lokalnej wypukłości lub lokalnej wklęsłości krzywej $T = \mathcal{F}(E, \alpha_0)$. Lokalność ta jest rozumiana ze względu na odkształcenie E_0 .

Kończąc rozważania tego punktu chcemy zwrócić uwagę na możliwość sformułowania warunków formowania się fal uderzeniowych (tj. występowania krytycznych czasów w analizie fal przyspieszenia) dla obu przypadków nierówności (4.34), (4.35) i równości

²⁶⁾ Krzywa ta jest przecięciem powierzchni $T - \mathcal{F}(E, \alpha) = 0$ płaszczyzną $\alpha = \alpha_0$.

²⁷⁾ Tzn. w stanie równowagi (E_0, α_0) przed falą pochodną $\partial_E^2 \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)$ jest ujemna.

$\partial_{\alpha} \mathcal{F}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) = 0$. W tym celu wystarczy określić początkową²⁸⁾ amplitudę krytyczną $|\lambda_0|$ jako

$$(4.36) \quad |\lambda_0| = \frac{\mu_0}{\beta_0} \quad \text{dla} \quad \mu_0 > 0 \quad \text{i} \quad \lambda_0 = 0 \quad \text{dla} \quad \mu_0 \leq 0.$$

5. Fale uderzeniowe

5.1. Ciągłość parametrów wewnętrznych. Nieciągłość odkształcenia w procesie dynamicznym z falą uderzeniową (por. definicję 2) wymaga zajęcia się równaniem ewolucji dla parametrów wewnętrznych (3.2). Aby móc je zanalizować, trzeba rozszerzyć pojęcie rozwiązania do funkcji odcinkami gładkiej.

Zastąpmy równanie ewolucji (3.2) równoważnym równaniem całkowym (wektorowym)

$$(5.1) \quad \alpha(\tau) = \alpha(0) + \int_0^{\tau} \mathbf{A}(E(s), \alpha(s)) ds.$$

Istnienie i jednoznaczność ciągłego rozwiązania równania (5.1) wynikają z twierdzeń teorii równań całkowych. Rozwiązanie $\alpha(\tau)$, jako całka, jest bezwzględnie ciągłe na $[0, L]$. Jego pochodna istnieje prawie wszędzie i ma jednostronne granice w każdej chwili $\tau \in [0, L]$, ponieważ posiada je funkcja $\mathbf{A}(E(s), \alpha(s))$. Punkty nieciągłości funkcji $\dot{\alpha}$ są takie same jak odkształcenia E .

Jeśli $E(\tau)$ ma nieciągłość skokową w $\tau = t$, tzn. $E^-(t) \neq E^+(t)$, wtedy skok w pochodnej $\dot{\alpha}$ jest dany przez

$$(5.2) \quad \dot{\alpha}^-(t) - \dot{\alpha}^+(t) = \mathbf{A}(E^-(t), \alpha(t)) - \mathbf{A}(E^+(t), \alpha(t)).$$

Powyższe rozumowanie pozwala stwierdzić, że w procesach dynamicznych z falami uderzeniowymi wektor parametrów wewnętrznych jest ciągłą funkcją, natomiast jego pochodna czasowa istnieje i jest ciągła wszędzie z wyjątkiem krzywej Ω (tj. fali), na której posiada nieciągłość skokową.

W pracy [18] podano dowód tego faktu opierając się na analizie ogólnego problemu początkowego materiału z parametrami wewnętrznymi. Jest to problem dla układu równań hiperbolicznych²⁹⁾ quasi-liniowych. Układ ten można sprowadzić do postaci uogólnionego prawa zachowania. Dla takich to praw sformułowano teorię słabych rozwiązań. Teoria ta ma szczególne zastosowanie w przypadku występowania fal uderzeniowych. Warunki jakie słabe rozwiązania muszą spełniać na falach uderzeniowych, zwane *uogólnionymi związkami Rankine-Hugoniota* [12], są niczym innym, jak warunkami na nieciągłości skokowe funkcji występujących w układzie równań.

²⁸⁾ Ten fakt jest oczywisty z punktu widzenia analizy ogólnego równania amplitudy (4.12) ze zmiennymi w czasie współczynnikami $\mu(t)$ i $\beta(t)$. Zależność (4.36) będzie odpowiadała związkowi (3.13) w [15]. Por. też [1].

²⁹⁾ Hiperboliczność problemu początkowego dla materiału z parametrami wewnętrznymi zapewnia warunek propagacji fal przyspieszenia (por. punkt 4.2 i [18]).

Związki Rankine–Hugoniota dla problemu początkowego w materiale z parametrami wewnętrznymi przyjmują postać [18]:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \rho_0 V[[v]] &= -[[T]], \\ V[[E]] &= -[[v]], \\ [[\alpha]] &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Równania (5.3)₃ są identyczne z wcześniej wyprowadzonymi warunkami (2.25) i (2.30).

Ze względu na (5.3) warunek zgodności kinematycznej (2.14) pozwala napisać

$$(5.4) \quad V[[\partial_x \alpha]] = -[[\dot{\alpha}]].$$

5.2. Równanie amplitudy. W tym punkcie wyprowadzimy ogólne i jawne wyrażenie na zmianę w czasie amplitudy fali uderzeniowej, rozprzestrzeniającej się w ogólnym, jednorodnym materiale z parametrami wewnętrznymi. Wyprowadzenie to przeprowadzimy przy pewnych założeniach poczynionych o obszarze przed frontem fali.

Przy analizie fali przyspieszenia wprowadziliśmy już pojęcie jednorodnego stanu równowagi [por. (4.16)].

Powiemy, że para funkcji $(E(X, t), \alpha(X, t))$, $(X, t) \in \mathcal{B} \times [0, L)$ formuje jednorodny stan nierównowagi [25], jeśli istnieją takie stałe $E_0 \in (-1, \infty)$, $v_0 \geq 0$, $\alpha_0 \in \mathcal{V}^n$, że

$$(5.5) \quad \begin{aligned} E(X, t) &= E_0 + v_0 t, & \dot{E}(X, t) &= v_0, & \partial_x E(X, t) &= 0, & \partial_x \alpha(X, t) &= \mathbf{0}, \\ \dot{\alpha}(X, t) &= A(E_0 + v_0 t, \alpha(X, t)), & \alpha(X, 0) &= \alpha_0. \end{aligned}$$

W pracy [15] wykazano, że (5.5) jest jednoznacznym rozwiązaniem problemu początkowego dla naszego materiału przy warunkach początkowych³⁰⁾

$$E(X, 0) = E_0, \quad v(X, t) = v_0 X, \quad \alpha(X, 0) = \alpha_0,$$

Spróbujmy teraz, wykorzystując równanie (2.34), wyprowadzić wyrażenie na zmianę amplitudy.

Jesteśmy w stanie policzyć pochodną $\partial_x T$ i wyrazić jej skok na Ω . Wstawiając ją do (2.34) otrzymamy

$$(5.6) \quad 2\sqrt{V} \frac{d}{dt} (\sqrt{V} [[E]]) = V^2 [[\partial_x E]] - \frac{1}{\rho_0} \{ [[\partial_E \mathcal{F}(E, \alpha)] \partial_x E] + [[\partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha)] \partial_x \alpha] \}.$$

Widzimy, że po lewej stronie występuje pochodna przemieszczeniowa prędkości fali, tj. dV/dt . Pewne dodatkowe obliczenia prowadzą do stwierdzenia, że prędkość fali uderzeniowej rozprzestrzeniającej się w jednorodnym stanie nierównowagi spełnia równanie [18]

$$(5.7) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2\rho_0 V [[E]]} \left\{ (\partial_E \mathcal{F}(E^-, \alpha) - \rho_0 V^2) \frac{d[[E]]}{dt} + [[\partial_E \mathcal{F}(E, \alpha)] \dot{E}^+ + [[\partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha)] \dot{\alpha}^+ \right\}.$$

Natomiast jeśli obszar przed falą jest w jednorodnym stanie równowagi (E_0, α_0) , to

$$(5.8) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial_E \mathcal{F}(E^-, \alpha_0) - \rho_0 V^2}{2\rho_0 V [[E]]} \frac{d[[E]]}{dt}.$$

³⁰⁾ Zauważmy, że jeśli w (5.5) założymy, że $v_0 = 0$, to otrzymamy jednorodny stan równowagi, o ile $A(E_0, \alpha_0) = \mathbf{0}$.

Zauważmy, że prędkość fali uderzeniowej propagującej się nawet w jednorodnym stanie równowagi nie jest ogólnie stała, jak to miało miejsce dla fali przyspieszenia. Jedynie tylko przy zanikaniu prawej strony (5.8), tzn., gdy

$$(5.9) \quad \varrho_0 V^2 = \partial_E \mathcal{F}(E^-, \alpha_0) \quad \text{lub} \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

mamy $dV/dt = 0$ i stąd $V = \text{const}$. Ze związku (5.9) widać, że może to mieć miejsce tylko przy stałej wartości pochodnej $\partial_E \mathcal{F}$ w (E^-, α_0) . W dalszych wyprowadzeniach zakładamy, że $\varrho_0 V^2 \neq \partial_E \mathcal{F}(E^-, \alpha_0)$.

Twierdzenie 3. Amplituda $[E]$ fali uderzeniowej propagującej się w jednorodnym stanie ogólnego materiału z parametrami wewnętrznymi spełnia równanie [16 - 18]

$$(5.10) \quad \frac{d}{dt} [[E]] = \frac{2V}{4\varrho_0 V^2/r - 1} ((\partial_x E)^- - \omega),$$

gdzie V jest prędkością fali daną przez (2.31) i (5.7), (5.8), natomiast współczynniki r i ω są funkcjami zdefiniowanymi na Ω następująco:

$$(5.11) \quad \omega \equiv \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{2V} ([[\partial_E \mathcal{F}(E, \alpha)]] \dot{E}^+ + [[\partial_\alpha \mathcal{F}(E, \alpha)]] \dot{\alpha}^+) + \partial_\alpha \mathcal{F}(E^-, \alpha) (\partial_x \alpha)^- \right\}$$

w przypadku stanu nierównowagi oraz

$$(5.12) \quad \omega \equiv -\frac{1}{rV} \partial_\alpha \mathcal{F}(E^-, \alpha_0) A(E^-, \alpha_0)$$

w przypadku stanu równowagi (E_0, α_0) , zaś

$$(5.13) \quad r \equiv \varrho_0 V^2 - \partial_E \mathcal{F}(E^-, \alpha_0)$$

dla obu przypadków.

Otrzymane równanie w porównaniu z równaniem amplitudy fali przyspieszenia (4.12) jest bardzo złożone; jego współczynniki zależą od poszukiwanej funkcji $[[E]]$, a ponadto do równania wchodzi nieznana wartość gradientu odkształcenia $(\partial_x E)^-$ za czołem fali.

Najbliższe dwa punkty poświęcimy dyskusji zachowania się amplitudy na czołe fali. Jako pierwszą rozpatrzmy ściskającą falę uderzeniową.

Na mocy prawa zachowania masy dla takiej fali mamy³¹⁾

$$(5.14) \quad [[E]] < 0 \quad \text{i} \quad E^+ \leq 0.$$

Przyjmijmy dodatkowo, że dla każdej wartości parametru α związek $T = \mathcal{F}(E, \alpha)$ w zakresie naprężeń i odkształceń ściskających jest skierowany wypukłością do góry, tzn.

$$(5.15) \quad \partial_E^2 \mathcal{F}(E, \alpha) < 0 \quad \text{dla} \quad E \leq 0 \quad \text{i} \quad \text{każdego} \quad \alpha.$$

Pamiętajmy, że w dalszym ciągu obowiązuje kryterium propagacji fal przyspieszenia w tym materiale

$$(5.16) \quad \partial_E \mathcal{F}(E, \alpha) > 0 \quad \text{dla} \quad \text{każdego} \quad (E, \alpha),$$

które zabezpiecza hiperboliczność problemu początkowego dla rozpatrywanego materiału.

³¹⁾ Warunek $E^+ < 0$ mówi, że materiał przed frontem fali jest ściśnięty.

Zauważmy, że nierówność (5.16) jest jednocześnie warunkiem koniecznym istnienia rzeczywistej prędkości fali uderzeniowej, a to ze względu na związek

$$(5.17)^{32)} \quad \varrho V^2 = \frac{\mathcal{T}(E^-, \alpha) - \mathcal{T}(E^+, \alpha)}{E^- - E^+},$$

w którym prawa strona musi być dodatnia.

Nierówność (5.15) ma wpływ na znak współczynnika r w równaniu (5.10), albowiem przy tych założeniach otrzymamy

$$(5.18) \quad r = \varrho_0 V^2 - \partial_E \mathcal{T}(E^-, \alpha) < 0.$$

Nierówność (5.18) oznacza, że prędkość fali uderzeniowej jest poddźwiękowa³³⁾ względem obszaru za frontem fali.

Zauważmy, że przy propagacji ściskającej fali uderzeniowej obserwuje się następujące zachowanie amplitudy w każdej chwili czasu [5, 9, 16, 18]:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} (\partial_x E)^- > \omega &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |[E]| > 0, \\ (\partial_x E)^- < \omega &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |[E]| < 0, \\ (\partial_x E)^- = \omega &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |[E]| = 0. \end{aligned}$$

Wróćmy jeszcze raz do nierówności (5.15). Wypukłość (5.15) krzywej odkształcenie-napężenie przy ustalonym α dla fal ściskających odpowiada kryterium występowania czasów krytycznych (i nieograniczonego wzrostu amplitudy ściskającej fali przyspieszenia³⁴⁾).

Podobne spostrzeżenia można sformułować dla fali rozciągającej, dla której żądamy spełnienia warunków

$$(5.20) \quad |[E]| > 0 \quad \text{i} \quad E^+ \geq 0$$

oraz wypukłości od dołu (tzn. wklęsłości) krzywej $T = \mathcal{T}(E, \alpha)$, dla każdego α

$$(5.21) \quad \partial_E^2 \mathcal{T}(E, \alpha) > 0 \quad \text{dla każdego } E \text{ i każdego } \alpha.$$

Z warunków lokalnego zachowania się amplitudy fali wnioskujemy, że dla obu typów fal wielkość ω gra rolę krytycznego gradientu odkształcenia, podobnie jak $|\lambda_0|$ w poprzedniej analizie.

Podane własności fali są prawdziwe przy założeniu, że materiał przed falą jest w jednorodnym stanie równowagi bądź nierównowagi. W przypadku równowagi podobne własności mogą być sformułowane dla prędkości fali [16].

W pracy [16] może czytelnik znaleźć analizę infinitezymalnych fal uderzeniowych.

Ponadto w [16] wykazano, że graniczna wartość krytycznego gradientu odkształcenia ω fali uderzeniowej, przy amplitudzie zmierzającej do zera, równa się podwojonej kry-

³²⁾ Równanie to mówi, że prędkość fali uderzeniowej jest proporcjonalna do kąta nachylenia siecznej łączącej punkty o rzędnych E^+ i E^- leżące na krzywej $T = \mathcal{T}(E, \alpha)$, przy α ustalonym.

³³⁾ Jest to znany fakt z dynamiki gazów [12].

³⁴⁾ Por. rozdział 4.

tycznej początkowej amplitudzie $|\lambda_0|$ fali przyspieszenia. Taką samą własność zaobserwowano dla innych typów materiałów [7, 8, 11, 40].

5.3. Fala prędkości w materiale o liniowej reakcji sprężystej. Wyprowadzając równanie amplitudy (5.10) w ogólnym materiale odrzuciliśmy przypadek zerowania się współczynnika r [por. (5.13)]. W tym punkcie rozpatrzmy ten szczególnie wypadek.

Zaniedbajmy ogólny związek konstytutywny (3.1) na korzyść szczególnego, liniowego względem odkształcenia, prawa fizycznego [17, 19]

$$(5.22) \quad \mathcal{T}(E, \alpha) = b(\alpha)E + c(\alpha).$$

Materiał o takim prawie fizycznym charakteryzuje się liniową reakcją sprężystą. Funkcję $b(\alpha)$ można traktować jako uogólniony moduł Younga, który podlega zmianie w trakcie procesów ze zmieniającymi się parametrami wewnętrznymi³⁵⁾.

Wstawiając (5.22) do równania na prędkość fali uderzeniowej (5.17) otrzymamy spełnienie pierwszej równości (5.9), a tym samym zerowanie się r w (5.13).

Amplituda fali $[[E]]$ uderzeniowej propagującej się w takim materiale będzie spełniać równanie [17, 19]

$$(5.23) \quad \frac{[[dE]]}{dt} = -\frac{1}{2\rho_0 V} \left\{ [[\partial_\alpha \mathcal{T}(E, \alpha) \partial_x \alpha]] + \frac{1}{2V} \partial_\alpha \partial_E \mathcal{T}(E^+, \alpha) \frac{d\alpha^+}{dt} [[E]] \right\},$$

które po wykorzystaniu (5.22) może być zapisane w postaci

$$(5.24) \quad \frac{[[dE]]}{dt} = -\frac{1}{2\rho_0 V} \left\{ (b'(\alpha)E^- + c'(\alpha)) [[\partial_x \alpha]] + [[E]] b'(\alpha) \left(\frac{3}{2} (\partial_x \alpha)^+ + \frac{\dot{\alpha}^+}{2V} \right) \right\}.$$

Prędkość fali jest dźwiękowa

$$V = \sqrt{b(\alpha)/\rho_0}.$$

Założmy, że przed falą materiał znajdował się w jednorodnym stanie równowagi (E_0, α_0) , wtedy mamy

$$(5.25) \quad \frac{dE^-}{dt} = \frac{1}{2\rho_0 V^2} (b'(\alpha_0)E^- + c'(\alpha_0)) A(E^-, \alpha_0),$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$[[E]] = E^- - E_0, \quad \frac{dE_0}{dt} = 0.$$

Widzimy z tego nawet prostego równania, że dyskusja zachowania się amplitudy fali uderzeniowej $[[E]]$ (czy E^-) jest możliwa tylko wtedy, gdy znana jest postać funkcji A , tzn. prawa strona równania ewolucji.

Nawet w przypadku liniowego związku konstytutywnego nie jesteśmy w stanie przewidzieć zachowania się amplitudy fali uderzeniowej. Inaczej ta sprawa wygląda w przypadku fali przyspieszenia, gdzie nawet dla ogólnie nieliniowych związków byliśmy w stanie podać postać rozwiązania równania amplitudy.

³⁵⁾ Jeśli użyjemy (5.22) i parametrów wewnętrznych do opisu materiału lepkoplastycznego i utożsamimy jeden z nich z nieodwracalną deformacją (lepkoplastyczną), to funkcja $b(\alpha)$ reprezentuje zmianę modułu Younga w wyniku nieodwracalnych deformacji ośrodka.

Kończąc ogólną teorię jednowymiarowych fal uderzeniowych chcę zwrócić uwagę czytelnikowi na fakt, że w przypadku istotnie nieliniowych związków konstytutywnych (tzn. gdy $\partial_E^2 \mathcal{T}(E, \alpha) \neq 0$) jest możliwe rozprzestrzenianie się i powstawanie³⁶⁾ fal uderzeniowych nawet przy dowolnie razy ciągle różniczkowalnych warunkach początkowych. Fale uderzeniowe mogą się generować w takich materiałach (nawet dysypatywnych) (por. punkt o formowaniu się fal uderzeniowych).

Inaczej sprawa wygląda dla przypadków związków liniowych (tzn. gdy $\partial_E^2 \mathcal{T} \equiv 0$) postaci (5.22). Tutaj fala uderzeniowa nigdy nie powstanie w ośrodku. Musi być wywołana przez zewnętrzny impuls, przez nieciągłe warunki początkowe. Ponadto w przeciwieństwie do materiałów nieliniowych, gdzie prędkość fali uderzeniowej jest całkiem inna od prędkości fali przyspieszenia (dźwiękowej) [por. (5.18)], w materiale o liniowej reakcji sprężystej prędkości fali uderzeniowej (prędkości) i przyspieszenia pokrywają się³⁷⁾.

6. Przykłady

Przedstawioną dotąd teorię jednowymiarowych fal w ośrodkach niesprężystych zilustrujemy przykładami.

6.1. Fala przyspieszenia w nieliniowym materiale lepkosprężystym. Rozpatrzmy funkcję konstytutywną \mathcal{T} i funkcję przygotowania A [14, 15] taką, że równania konstytutywne i ewolucji będą miały postać

$$(6.1) \quad \dot{T} = b_1 E + b_2 \alpha + b_3 E^2 + b_0, \quad \dot{\alpha} = c_1 E + c_2 \alpha + c_0.$$

Jest to materiał lepkosprężysty, o nieliniowej reakcji sprężystej. Zauważmy, że układ (6.1) jest równoważny następującemu związkowi funkcjonalnemu dla naprężenia

$$(6.2) \quad T(t) = b_1 E(t) + b_3 E^2(t) + b_2 e^{c_2 t} \left\{ \alpha(0) - \frac{c_0}{c_2} (e^{-c_2 t} - 1) + \int_0^t c_1 e^{-c_2 \tau} E(\tau) d\tau \right\}.$$

Policzmy potrzebne pochodne

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \partial_E \mathcal{T}(E, \alpha) &= b_1 + 2b_3 E, & \partial_\alpha \mathcal{T}(E, \alpha) &= b_2, \\ \partial_E^2 \mathcal{T}(E, \alpha) &= 2b_3, & \partial_E A(E, \alpha) &= c_1. \end{aligned}$$

Warunek propagacji wymaga, by (por. (4.21))

$$(6.4) \quad \partial_E \mathcal{T}(E, \alpha) > 0 \quad \text{tzn.} \quad b_1 + 2b_3 E > 0 \quad \text{dla każdego } E.$$

Wiemy, że odkształcenie E może przyjmować wartości z przedziału $(-1, \infty)$. Stąd, aby utrzymać nierówność (6.4) potrzeba i wystarczy, by

$$(6.5) \quad b_1 > 2b_3 \geq 0.$$

Interesuje nas ośrodek nieliniowy, więc nie znikające b_3 : $b_3 > 0$. Stąd mamy $\partial_E^2 \mathcal{T}(E, \alpha) > 0$, czyli przecięcie powierzchni $\mathcal{T}(E, \alpha) - T = 0$ płaszczyzną $\alpha = \text{const}$ przedstawia krzywą wklęsłą.

³⁶⁾ Fakt znany z nieliniowych równań hiperbolicznych [12].

³⁷⁾ Matematycznie oznacza to, że charakterystyki układu liniowego (które są krzywymi Σ , tzn. falami przyspieszenia) są jednocześnie krzywymi nieciągłości rozwiązania (tzn. falami prędkości Ω).

Niech (E_0, α_0) będzie jednorodnym stanem równowagi, tzn. takim, że

$$A(E_0, \alpha_0) = 0 \quad \text{czyli} \quad c_1 E_0 + c_2 \alpha_0 + c_0 = 0.$$

W tym stanie współczynniki μ_0, β_0 i λ_0 [por. (4.18), (4.19) (4.30)₂] przyjmują postać

$$(6.6) \quad \mu_0 = -\frac{b_2 c_1}{2(b_1 + 2b_3 E_0)}, \quad \beta_0 = \frac{-b_3 \sqrt{\varrho_0}}{(b_1 + 2b_3 E_0)^{3/2}}, \quad \lambda_0 = \frac{b_2 c_1}{2b_3} \sqrt{\frac{b_1 + 2b_3 E_0}{\varrho_0}},$$

gdzie prędkość fali przyspieszenia dana jest przez

$$(6.7) \quad U = \sqrt{\frac{\partial_E \mathcal{F}(E_0, \alpha_0)}{\varrho_0}} = \sqrt{\frac{b_1 + 2b_3 E_0}{\varrho_0}}.$$

Sformułujemy warunki ewolucji amplitudy $a(t)$ fali w tym materiale. Zgodnie z ogólnym twierdzeniem 2 mamy [15]:

Przypadek 1. Niech $b_2 c_1 < 0$. Wtedy $\lambda_0 < 0$ i

- jeśli $a(0) = \lambda_0$, to $a(t) \equiv a(0)$;
- jeśli albo $|a(0)| < |\lambda_0|$ albo $a(0) > 0$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$;
- jeśli $|a(0)| > |\lambda_0|$ i $a(0) < 0$, to $\lim_{t \rightarrow t_k} a(t) = -\infty$,

gdzie

$$(6.8) \quad t_k \equiv -\frac{1}{\mu_0} \ln \left(1 - \frac{\lambda_0}{a(0)} \right) = \frac{2(b_1 + 2b_3 E_0)}{b_2 c_1} \ln \left(1 - \frac{b_2 c_1}{2a(0)b_3} \sqrt{\frac{b_1 + 2b_3 E_0}{\varrho_0}} \right).$$

Przypadek 2. Niech $b_2 c_1 > 0$, wtedy $\lambda_0 > 0$ i

- jeśli $a(0) = \lambda_0$, to $a(t) \equiv a(0)$;
- jeśli $a(0) < 0$, to $\lim_{t \rightarrow t_k} a(t) = -\infty$, gdzie t_k dane jest przez (6.8);
- jeśli $a(0) > 0$ i $a(0) \neq \lambda_0$, to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \lambda_0 \equiv \frac{b_2 c_1}{2b_3} \sqrt{\frac{b_1 + 2b_3 E_0}{\varrho_0}}.$$

Widzimy wyraźnie, że ze względu na wklęsłość krzywej naprężenie-odkształcenie występowanie krytycznych czasów propagacji t_k jest możliwe tylko dla rozciągających fal przyspieszenia.

6.2. Fala naprężenia w materiale sprężysto-lepkoplastycznym³⁸⁾, przy dużej prędkości odkształcenia. Rozpatrywany tutaj ośrodek niesprężysty charakteryzuje się następującym zachowaniem: jest liniowo sprężysty do pewnej wartości naprężenia k_1 , powyżej której zachowuje się w sposób nieodwracalny, wykazując mocne własności lepkie. W zakresie trwałych deformacji (tzn. dla $|T| > k_1$) jego własności lepkie są tak zróżnicowane, że można wyróżnić trzy obszary zależności prędkości odkształcenia plastycznego od naprężenia³⁹⁾. Ponie-

³⁸⁾ Fale naprężenia w takich ośrodkach rozpatrywano w [13, 30, 36, 37].

³⁹⁾ Z fizycznego punktu widzenia za istnienie różnych obszarów są odpowiedzialne różne mechanizmy płynięcia lepkoplastycznego, np. termicznie aktywowane procesy, stłumiony ruch dyslokacji na skutek lepkości fononowej czy rozpraszania fononów. Por. [22, 28, 35, 37].

waż naszym celem jest analiza fal, zainteresowanych fizyczną stroną tego zagadnienia odsyłam do prac PERZYNY [35, 37] i cytowanej tam bogatej literatury.

Zanim podamy pełny układ założeń konstytutywnych wprowadzonego materiału, przyjmijmy następujące oznaczenia:

- k_1 granica plastyczności (przy prostym ścinaniu),
- k_2 granica pierwszego obszaru, $k_2 > k_1$,
- k_3 granica drugiego obszaru, $k_3 > k_2$,
- j moduł Younga materiału,
- γ_1 współczynnik lepkości dla pierwszego obszaru,
- γ_2 współczynnik lepkości dla drugiego obszaru,
- γ_3 sprowadzona do ruchu dyslokacji prędkość dźwięku⁴⁰⁾.

Przyjmując jeden parametr wewnętrzny α i utożsamiając go z odkształceniem trwałym (lepkoplastycznym) postulujemy następujący związek konstytutywny i równanie ewolucji (por. [22, 23])

$$(6.9) \quad T = (E - \alpha)j,$$

$$(6.10) \quad \dot{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |T| < k_1, \\ \gamma_1 \left(\frac{|T|}{k_1} - 1 \right)^n \frac{T}{|T|} & \text{dla } k_1 \leq |T| \leq k_2, \\ \gamma_2 \left(\frac{|T|}{k_2} - 1 \right) \frac{T}{|T|} + \gamma_1 \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right)^n \frac{T}{|T|} & \text{dla } k_2 < |T| \leq k_3, \\ \gamma_3 (1 - \exp) \left(- \frac{|T|}{B} \right) \frac{T}{|T|} & \text{dla } |T| > k_3, \end{cases}$$

gdzie

$$B \equiv -k_3 \left\{ \ln \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \right) \left(\frac{k_3}{k_2} - 1 \right) - \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right)^n \right\}^{-1}.$$

Dodajmy, że graniczna wartość k_3 odpowiada prędkości odkształcenia rzędu 10^4 s^{-1} , natomiast γ_3 jest rzędu $10^5 - 10^6 \text{ s}^{-1}$.

Rozpatrzmy falę (prędkości) uderzeniową propagującą się w tym ośrodku w stanie niezaburzonym (równowagi). Liniowość związku (6.9) sprawia, że należy skorzystać z równania amplitudy w postaci (5.23). Równanie na prędkość V daje

$$(6.11) \quad V = \sqrt{\frac{j}{\rho_0}}.$$

Równanie zaś amplitudy, po wykorzystaniu (5.25), przyjmie prostą postać

$$(6.12) \quad \frac{dE^-}{dt} = -\frac{1}{2} A(E^-, \alpha_0).$$

⁴⁰⁾ Zgodnie z [28] $\gamma_3 = \frac{\rho_m b c}{\sqrt{3}}$, gdzie ρ_m — gęstość ruchomych dyslokacji, b — wektor Burgersa, c — prędkość dźwięku w materiale.

Zwróćmy uwagę, że równanie ewolucji (6.10) zostało podane w postaci zależności od naprężenia. Skłania nas to do zastąpienia zmiennej poszukiwanej E^- w (6.12) naprężeniem T^- .

Dzięki (6.9), (6.10) i (6.12) mamy⁴¹⁾

$$(6.13) \quad \frac{d|T^-|}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |T^-| < k_1, \\ \frac{-j\gamma_1}{2} \left(\frac{|T^-|}{k_1} - 1 \right)^n & \text{dla } k_1 \leq |T^-| \leq k_2, \\ \frac{-j\gamma_2}{2} \left(\frac{|T^-|}{k_2} - 1 \right) - \frac{j\gamma_1}{2} \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right)^n & \text{dla } k_2 < |T^-| \leq k_3, \\ \frac{-j\gamma_3}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{|T^-|}{B}\right) \right) & \text{dla } |T^-| > k_3. \end{cases}$$

Jasne jest, że jeśli chcemy znać wpływ wszystkich obszarów na czole fali uderzeniowej, początkowy impuls $|T^-(0)|$ musi być większy od k_3 .

Rozwiązując równanie (6.13) dla obszaru trzeciego otrzymamy

$$(6.14) \quad |T^-(t)| = -B \ln \frac{\exp\left(\frac{j\gamma_3}{2B} t + \bar{w}\right)}{1 + \exp\left(\frac{j\gamma_2}{2B} t + \bar{w}\right)}, \quad \bar{w} = \ln \frac{\exp\left(-\frac{|T^-(0)|}{B}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{|T^-(0)|}{B}\right)}.$$

Naprężenie $|T^-(t)|$ maleje, więc istnieje skończony czas t_0 taki, że zostanie osiągnięta graniczna wartość k_3

$$|T^-(t_0)| = k_3.$$

Można ten czas wyznaczyć

$$(6.15) \quad t_0 = \frac{2B}{j\gamma_3} \ln \frac{\exp\left(-\frac{k_3}{B}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{|T^-(0)|}{B}\right) \right]}{\left[1 - \exp\left(-\frac{k_3}{B}\right) \right] \exp\left(-\frac{|T^-(0)|}{B}\right)}.$$

W drugim obszarze stosujemy tę samą procedurę wyznaczając $|T^-(t)|$ oraz czas przejścia t_1 granicy obszaru k_2 . W efekcie otrzymamy następujące rozwiązanie (6.13) na wartość naprężenia $|T^-|$ na czole fali:

$$(6.16) \quad |T^-(t)| = \begin{cases} B \left[\ln(1 + \exp\left(\frac{j\gamma_3}{2B} t + \bar{w}\right)) - \frac{j\gamma_3}{2B} t - w \right], & 0 \leq t < t_0, \\ k_3 + \left[k_3 - k_2 + \frac{k_2 \gamma_1}{\gamma_2} \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right)^n \right] \left(\exp \frac{j\gamma_2}{2k_2} (t_0 - t) - 1 \right), & t_0 \leq t \leq t_1, \\ k_1 + k_1 \left\{ \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right)^{1-n} + \frac{j\gamma_1}{2k_1} (t - t_1) (n-1) \right\}^{\frac{1}{1-n}}, & t > t_1. \end{cases}$$

⁴¹⁾ Użyliśmy wartości bezwzględnej naprężenia, gdyż chcemy w ten sposób jednocześnie rozpatrzyć rozciągające i ściskające naprężenia.

Zauważmy, że $\lim_{t \rightarrow \infty} |T^-(t)| = k_1$, co oznacza, że w nieskończenie długim czasie osiągniemy statyczną granicę plastyczności k_1 na czole fali.

Interesujące jest podanie szacunkowych wartości czasów przejścia poszczególnych obszarów. W [23] podano obliczenia dla próbki aluminiowej. Przyjmując początkowy impuls o wielkości $|T^-(0)| = 19,62 \cdot 10^8 \text{ dyn/cm}^2$ otrzymano

$$t_0 = 1,03 \times 10^{-7} \text{ s}, \quad t_1 = 3,70 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. P. B. BAILEY, P. J. CHEN, *On local and global behaviour of acceleration waves*, Arch. Rat. Mech. Anal., **41** (1971), 121 - 131.
2. E. BECKER, H. SCHMITT, *Die Entschung von eben, zylinder und kugelsymmetrischen Verdichtungsstößen in relaxierenden Gasen*, Ing. Arch., **36** (1968), 335 - 347.
3. M. A. BIOT, *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. App. Phys., **25** (1954), 1385 - 1391.
4. R. M. BOWEN, *Thermochemistry of reacting materials*, J. Chem. Phys., **49** (1968), 1625 - 1637, Erratum, ibid., **50** (1969), 4601.
5. R. M. BOWEN, P. J. CHEN, *A note on shock waves in fluids with internal state variables*, Arch. Mech., **25** (1973), 702 - 708.
6. W. BÜRGER, *Zur Entschung von Verdichtungsstößen in Gasen mit thermodynamischer Relaxation*, Z. Angew. Math. Mech., **46** (1966), 149 - 151, T 187 - 189.
7. P. J. CHEN, *Growth and decay of waves in solids*, Handbuch der Physik, VI a/3, Springer Verlag, 1973, 303 - 402.
8. P. J. CHEN, M. E. GURTIN, *Growth of one-dimensional shock waves in fluids with internal state variables*, Phys. Fluids, **14** (1971), 1091 - 1094.
9. B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, *Thermodynamisc with internal state variables*, J. Chem. Phys., **47** (1967), 597 - 613.
10. B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, *Growth and decay of discontinuities in fluids with internal state variables*, Phys. Fluids, **10** (1967), 1454 - 1458.
11. B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, I. HERRERA, R. C. TRUESDELL, *Wave propagation in dissipative materials*, Springer Verlag, 1965.
12. A. JEFFREY, T. TANIUTI, *Non-linear wave propagation*, Academic Press, 1964.
13. J. KLEPACZKO, *Doświadczalne badania sprężysto-plastycznych procesów falowych w metalach*, Prace IPPT, 61/1970.
14. W. KOSIŃSKI, *Acceleration waves in a material with internal variables*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., **22** (1974), 423 [655].
15. W. KOSIŃSKI, *On the global behaviour of one-dimensional acceleration waves in a material with internal variables*, Arch. Mech., **27** (1975), 231 - 243.
16. W. KOSIŃSKI, *Behaviour of the acceleration and shock waves in materials with internal state variables*, Int. J. Non-Linear Mech., **9** (1974), 481 - 499.
17. W. KOSIŃSKI, *Shock wave propagation in materials with internal variables. I. Basic theorem and amplitude equation in a material with linear elastic response*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., **22** (1974), 507 [839].
18. W. KOSIŃSKI, *One-dimensional shock waves in solids with internal state variables*, Arch. Mech., **27** (1975), 445 - 458.
19. W. KOSIŃSKI, *On shock wave propagation in a material with internal variables*, Proc. Vibr. Probl., **15** (1974), 206 - 215.
20. W. KOSIŃSKI, P. PERZYNA, *Analysis of acceleration waves in materials with internal parameters*, Arch. Mech., **24** (1972), 629 - 643; także Prace IPPT 59/1971.

21. W. KOSIŃSKI, P. PERZYNA, *The unique material structures*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. **21** (1973), 655 [1025].
22. W. KOSIŃSKI, K. SZMIT, *Stress wave in an elastic viscoplastic body at high strain rates*, J. Tech. Phys. (dawn. Proc. Vibr. Probl.), **16** (1975) 43 - 56.
23. W. KOSIŃSKI, K. SZMIT, *Shock wave propagation in materials with internal variables. II. Stress wave in one dimensional elastic viscoplastic body*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., **23** (1975), 57 [111].
24. W. KOSIŃSKI, W. WOJNO, *Remarks on internal variable and history descriptions of material*, Arch. Mech., **25** (1973), 709 - 715.
25. J. KRATOCHVÍL, D. W. DILLON, *Thermodynamics of elastic-plastic material as a theory with internal state variables*, J. Appl. Phys., **40** (1969), 3207 - 3218.
26. J. KRATOCHVÍL, *Finite-strain theory of inelastic behaviour of crystalline solids, Foundations of Plasticity*, (Warsaw 1972), ed. A. SAWCZUK, Noordhoff International Publishing, Leyden 1973, 401 - 415.
27. P. MAZILU, W. KOSIŃSKI, *On materials with parametrical memory*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. **21** (1973), 379 [561].
28. F. R. N. NABARRO, *Theory of crystal dislocations*, Oxford Univ. Press, London 1967.
29. W. NOLL, *A new mathematical theory of simple materials*, Arch. Rat. Mech. Anal., **48** (1972), 1 - 50.
30. W. K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN 1974.
31. A. S. NOWICK, B. S. BERRY, *Anelastic relaxation in crystalline solids*, Academic Press, 1972.
32. P. PERZYNA, *Thermodynamics of rheological materials with internal changes*, Jour. Méc., **10** (1971), 391 - 408.
33. P. PERZYNA, *Internal variable description of plasticity, Problems of Plasticity*, (Warsaw 1972), ed. A. SAWCZUK, Noordhoff International Publishing, Leyden 1974, 145 - 170.
34. P. PERZYNA, *On material isomorphism in description of dynamic plasticity*, Arch. Mech., **27** (1975), 473 - 484.
35. P. PERZYNA, *The constitutive equations describing thermomechanical behaviour of materials at high rates of strain*, Proc. Conf. Behav. Materials at High Rates of Strain, Oxford, Institute of Physics Conf. Ser. **21**, (1974), 138 - 153.
36. P. PERZYNA, J. BEJDA, *The propagation of stress waves in a rate sensitive and work-hardening plastic medium*, Arch. Mech. Stos., **16** (1964), 1215 - 1244.
37. P. PERZYNA, J. KLEPACZKO, J. BEJDA, W. K. NOWACKI, T. WIERZBICKI, *Zastosowania lepkoplastyczności*, Ossolineum, 1971.
38. P. PERZYNA, W. KOSIŃSKI, *A mathematical theory of materials*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., **21** (1973), 647 [1017].
39. P. PERZYNA, W. WOJNO, *Thermodynamics of rate sensitive plastic material*, Arch. Mech. Stos., **20** (1968) 499 - 511.
40. K. W. SCHULER, J. NUNZIATO, E. K. WALSH, *Recent results in non-linear viscoelastic wave propagation*, Int. J. Solids Struct., **9** (1973), 1237 - 1281.
41. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik III/1, Springer Verlag, 1960, 226 - 793.
42. K. C. VALANIS, *Unified theory of thermomechanical behaviour of viscoelastic materials*, Symp. Mech. Behav. Mater. Dyn. Loads (1967), Springer Verlag, 1968, 343 - 364.
43. K. C. VALANIS, *A theory of viscoplasticity without a yield surface*, Arch. Mech., **23** (1971), 517 - 551.

Р е з ю м е

АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН И ВОЛН УСКОРЕНИЯ
В НЕУПРУГОЙ СРЕДЕ

В работе использована модель неупругой (диссипативной) среды, которая описывается через деформацию и конечное число дополнительных величин, называемых внутренними переменными состояниями (или внутренними параметрами). Путем соответствующего подбора внутренних параметров можно успешно применить эту модель к описанию стареющих вязко-упругих или упруго-

вязко-пластичных материалов. Под волнами в работе подразумеваются некоторые кривые в фазовом пространстве $X-t$, на которых имеют место разрывы величин, описывающих состояние среды (или разрывы производных этих величин). Получены дифференциальные уравнения, описывающие изменение по времени амплитуд ударных волн и волн ускорения. Обнаружено существование «критических» амплитуд. Сформулированы выводы, касающиеся локального и глобального по времени поведения амплитуд. Предлагаемый метод анализа применен к исследованию распространения волн в нелинейном вязко-упругом и упруго-вязко-пластичном материалах.

Summary

ANALYSIS OF ONE-DIMENSIONAL SHOCK AND ACCELERATION WAVES IN INELASTIC MEDIUM

The model of the inelastic (dissipative) continuous media assumed in the paper is described by the strain and by the finite set of additional variables, called the internal state variables or internal parameters. After appropriate specification of internal variables the model may be used to describe viscoelastic, ageing or elastic-viscoplastic materials. In the paper the waves are understood as some special curves in the phase space $X-t$, on which the variables describing the behaviour of the medium, or their derivatives, suffer jump discontinuities. The explicit expressions for the change in the amplitudes of acceleration and shock waves are derived. These expressions established the existence of «critical» amplitudes. The propositions on the local and global (in time) behaviour of the amplitudes are formulated. The above analysis is applied to the wave propagation in non-linear viscoelastic and elastic-viscoplastic materials.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1975 r.

WPLYW ZASTOSOWANIA KONDENSACJI KROPOWEJ W POJEDYNCZYM
DWUFAZOWYM NA WSPÓLCZYNNIK PRZENIKANIA CIEPŁA PRZEZ
ŚCIANKĘ SKRAPLACZA

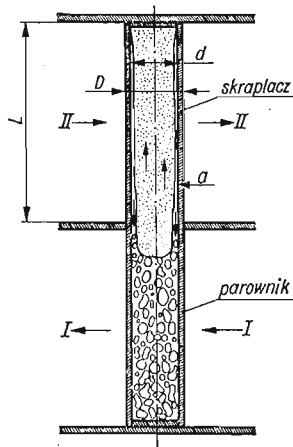
BOGUMIL BIENIASZ (RZESZÓW)

1. Oznaczenia

- a pole wewnętrznej powierzchni skraplacza termosyfonu [m^2];
 d, D średnica rurki termosyfonu wewnętrzna i zewnętrzna [m],
 g przyspieszenie ziemskie [m/s^2],
 Δi_{lg} entalpia parowania [kJ/kg],
 k średni współczynnik przenikania ciepła przez ściankę skraplacza termosyfonu odniesiony do powierzchni zewnętrznej [$W/(m^2deg)$],
 k_F, k_D j.w., odpowiednio dla kondensacji filmowej lub kroplowej [$W/(m^2deg)$],
 L efektywna długość skraplacza termosyfonu [m],
 Ne liczba transportu [kg/s^3],
 P moc cieplna termosyfonu [W],
 P_{gr} moc graniczna termosyfonu, moc zalewania skraplacza [W],
 p_v ciśnienie pary czynnika roboczego [bar],
 (Pr) liczba Prandtla,
 q strumień cieplny [W/m^2],
 R całkowita oporność cieplna przenikania ciepła, $1/k$ [m^2deg/W],
 R_k oporność cieplna konwekcji po stronie ogrzewanego płynu [m^2deg/W],
 R_{ng} oporność cieplna nieskrapających się gazów zawartych wewnątrz termosyfonu [m^2deg/W],
 R_s oporność cieplna kondensacji [m^2deg/W],
 R_{SF}, R_{SD} j.w., odpowiednio filmowej i kroplowej [m^2deg/W],
 R_w oporność cieplna przewodzenia przez ściankę [m^2deg/W],
 R_z oporność cieplna warstewki zanieczyszczeń [m^2deg/W],
 (Re) liczba Reynoldsa,
 $\Delta T_{SF}, \Delta T_{SD}$ różnica temperatury nasycenia czynnika roboczego termosyfonu i temperatury wewnętrznej ścianki przy kondensacji odpowiednio filmowej i kroplowej [deg],
 β parametr płynu [$(kg/(ms^3))^{1/2}$],
 μ_l lepkość dynamiczna kondensatu [$kg/(ms)$],
 ν_v lepkość kinematyczna pary czynnika roboczego termosyfonu [m^2/s],
 ρ_l gęstość cieczy czynnika roboczego termosyfonu [kg/m^3],
 ρ_v gęstość pary czynnika roboczego termosyfonu [kg/m^3],
 σ napięcie powierzchniowe na granicy: ciecz-para czynnika roboczego [kg/s^2].

2. Wstęp

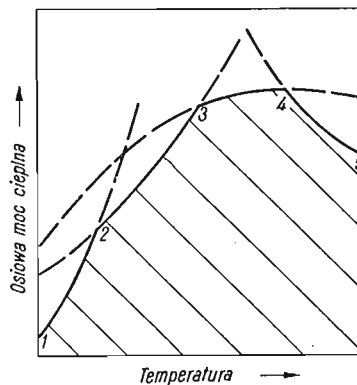
Dwufazowy termosyfon, zwany w dalszym ciągu termosyfonem, jest elementem wymienników ciepła o efektywnej osiowej przewodności cieplnej od 40 do 10 000 razy większej od czystej miedzi o tej samej masie. Rysunek 1 przedstawia zasadę działania ter-



Rys. 1

mosyfonu wykonanego z rury, pracującego w wymienniku ciepła, w którym ciepło jest przekazywane od czynnika *I* do *II*. W układzie zamkniętym termosyfonu znajduje się pewna ilość czynnika roboczego, który jest nośnikiem ciepła. Czynnik otrzymuje energię w czasie wrzenia w parowniku, a oddaje przy skraplaniu w skraplaczu termosyfonu.

Maksymalna moc cieplna termosyfonu przekazywana w kierunku osiowym jest funkcją temperatury pracy. Na rys. 2 przedstawiono schematycznie zakres stosowalności termo-



Rys. 2

syfonu. Ograniczenie mocy wynika z różnych przyczyn, zależnie od temperatury pracy zawartej w obszarze stosowalności cieczy roboczej. I tak, przy temperaturach zbliżonych do dolnej granicy zakresu pracy czynnika (rozruch) ograniczenie mocy wynika z wystąpienia przepływu krytycznego pary (prędkość pary równa prędkości dźwięku) na jej drodze, co zdarza się najczęściej u wejścia do skraplacza, i ustalenia w ten sposób wydatku pary. Ograniczenie to przedstawia krzywa *1-2*.

Ze wzrostem temperatury pracy prędkość krytyczna gwałtownie rośnie i nie limituje już mocy. Ze wzrostem mocy cieplnej przekazywanej w kierunku osiowym wzrasta prę-

kość pary, a zarazem naprężenie styczne na granicy: para-spływający w dół kondensat, występuje falowanie kondensatu i jego porywanie przez strumień pary. W krytycznej sytuacji następuje zalanie skraplacza oznaczające równoczesne osuszenie parownika, co powoduje obniżenie wydatku pary i mocy. Moc cieplną, przy której następuje zalanie skraplacza można obliczyć stosując równanie

$$(1) \quad P_{gr} = 0,261\pi\Delta i_{ig}d^{2,32}(g/\mu_l)^{0,154}\rho_v^{0,845}\rho_l^{0,307}.$$

Powyższe równanie zostało wyprowadzone przez autora na podstawie kryteriów SOŁOWIOWA i in. [1] określania obszaru niestabilnego ruchu kondensatu przy przepływie dwufazowym w pionowych rurach¹⁾. Przy wyższych temperaturach roboczych już nie porywanie kondensatu, ale cyrkulacja czynnika roboczego staje się czynnikiem limitującym osiową moc cieplną termosyfonu według krzywej 3 - 4 na rys. 2. Zdolność czynnika roboczego do cyrkulacji zależy od szeregu jego własności fizycznych. Czynnikiem należy oczywiście dobierać pod tym kątem tak, aby omawiane ograniczenie było jak najmniejsze. Kryterium selekcji czynników jest tu tzw. liczba transportu cieczy, zdefiniowana [2] jako

$$(2) \quad Ne = \frac{\sigma_{ol}\Delta i_{ig}}{\mu_l}$$

w przypadku, gdy głównym oporem cyrkulacji jest opór spływu kondensatu ze skraplacza do parownika. Ze wzrostem tej liczby krzywa 3 - 4 przesuwana jest ku większym wartościom mocy. I tak na przykład, woda ma stosunkowo wysoką liczbę transportu w porównaniu z innymi czynnikami w zakresie od 290 do 550 °C.

Bywa, że głównym oporem cyrkulacji jest opór przepływu pary. W tej sytuacji obowiązuje inne kryterium, mianowicie tzw. parametr płynu wprowadzony przez SILVERSTEINA [3], zdefiniowany jako

$$(3) \quad \beta = \left(\frac{\Delta i_{ig} p_v}{\nu_v} \right)^{1/2}.$$

W przypadku zwykłych termosyfonów decydującą rolę odgrywa opór spływu kondensatu.

Kolejne ograniczenie mocy, przy najwyższych temperaturach, wynika z możliwości wystąpienia w parowniku wrzenia błonowego charakteryzującego się dużym oporem cieplnym. Krzywa 4 - 5 przedstawia to ograniczenie.

Temperatury robocze leżą zazwyczaj w przedziale od temperatury punktu 2 do temperatury punktu 4, dlatego też nominalną moc cieplną termosyfonu dla wybranej temperatury roboczej określa się praktycznie jako o kilkadziesiąt procent mniejszą od wyliczonej z równania (1).

Prócz tego, że termosyfon umożliwia otrzymywanie dużych strumieni ciepłych przy małych gradientach temperatury, ma on dodatkowe zalety:

— może służyć jako transformator strumienia ciepłego, tzn. pobierać ciepło przy małym strumieniu, a oddawać o dużym i odwrotnie oraz zmieniać nierównomierny strumień ciepły na równomierny,

— może służyć do kontroli procesów wymiany ciepła; praca przy stałej temperaturze,

¹⁾ Praca na ten temat została przesłana do druku w «Mechanice Teoretycznej i Stosowanej»

przekazywanie ciepła wtedy, gdy jest to wymagane (jako tzw. przełącznik cieplny), przekazywanie ciepła tylko w jednym kierunku (dioda cieplna).

A oto przykłady konkretnych zastosowań termosyfonów:

- chłodzenie elementów urządzeń elektronowych,
- odparowanie kropelek paliwa za gaźnikiem silnika tłokowego przy pomocy ciepła ze spalin (*vapipe*),
- elementy wymienników ciepła stosowanych w instalacjach energetycznych,
- chłodzenie hamulców,
- nieobmarzające boje i inne urządzenia morskie,
- wykorzystanie energii gleby o zamrożonej powierzchni,
- jako elementy konstrukcyjne ściskane i rozciągane dla zmniejszenia naprężeń i odkształceń termosprężystych w stosunku do jednorodnych elementów.

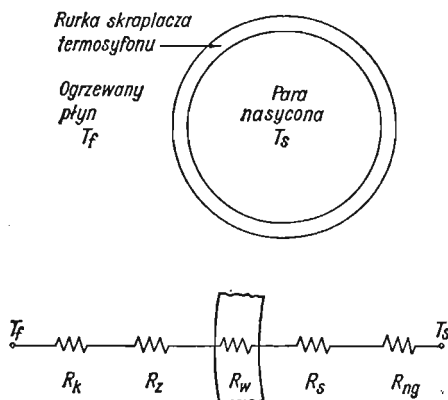
3. Przenikanie ciepła przez ściankę skraplacza termosyfonu

Współczynnik przenikania ciepła przez ściankę skraplacza termosyfonu jest odwrotnie proporcjonalny do sumy oporności cieplnych między skraplającą się parą a ogrzewanym płynem. Oporności zilustrowano na rys. 3. Mamy więc

$$(4) \quad k = 1/R,$$

gdzie

$$(5) \quad R = R_{ng} + R_s + R_w + R_z + R_k.$$



Rys. 3

W równaniu (5) nie ujęto oporności zanieczyszczeń po stronie pary, gdyż wnętrze termosyfonu jest dokładnie czyszczone przed napełnieniem, a w dodatku czynnik roboczy jest zamknięty, co wyklucza osadzanie się zanieczyszczeń w czasie pracy. Do ruchu dopuszczają się wyłącznie termosyfony o bardzo małej zawartości gazów nieskrapających się. Opróżnianie termosyfonu do ciśnienia rzędu 10^{-4} Tr oraz zastosowanie do budowy ścianki materiałów nie reagujących z czynnikiem roboczym umożliwia zmniejszenie wartości R_{ng} praktycznie do zera.

Kondensacja pary czynnika roboczego w termosyfonach stosowanych do tej pory jest kondensacją filmową. Wartość współczynnika przenikania ciepła dla skraplacza termosyfonu przy ogrzewaniu czystych płynów jest limitowana w tym przypadku na ogół przez opór konwekcji po zewnętrznej stronie skraplacza i opór przejmowania ciepła przy skraplaniu, ponieważ opór cieplny przewodzenia przez ściankę jest zwykle bardzo mały. W przypadku użycia termosyfonów do ogrzewania gazów, opór cieplny ścianki i opór kondensacji nie odgrywają istotnej roli. Natomiast w przypadku ogrzewania cieczy, opór cieplny kondensacji filmowej jest rzędu oporu cieplnego konwekcji wymuszonej po zewnętrznej stronie termosyfonu.

W przypadku pojedynczego termosyfonu, jak na rys. 1, opór cieplny konwekcji wymuszonej po stronie ogrzewanej cieczy można obliczyć jak dla opływu walca, na przykład z równań (10 - 7a) w [4], opór przewodzenia ścianki skraplacza z podstawowego wzoru dla przypadku ustalonego przewodzenia przez ściankę rury, średni zaś opór kondensacji czynnika roboczego na podstawie równań (10 - 7a) w [5]. W wyniku kombinacji ostatniego równania z równaniem

$$(6) \quad R_{SF} = \frac{a\Delta T_{SF}}{P} = \frac{\pi d L \Delta T_{SF}}{P}$$

otrzymuje się

$$(7) \quad \Delta T_{SF} = \left(\frac{P}{a}\right)^{4/3} \left(\frac{L\mu_1}{0,943^4 g \rho_1 (\rho_1 - \rho_v) k_f^3 \Delta i_{1g}}\right)^{1/3},$$

co można wykorzystać w równaniu (6) do obliczenia R_{SF} .

W tabelcy 1 podano dla przykładu wartości obliczone przy założeniu, że skraplacz termosyfonu o długości $L = 1,24$ m w kształcie rury miedzianej o średnicy wewnętrznej $d = 26$ mm i zewnętrznej $D = 34$ mm ogrzewa wodę przepływającą w kierunku prostopadłym do osi termosyfonu o $(Pr) = 5$ lub powietrze o średniej temperaturze 30 °C, przy czym czynnikiem roboczym jest woda o temperaturze roboczej 40 °C, a moc termosyfonu wynosi 700 W.

Tablica 1

| (Re) | Woda | | Powietrze | | | Woda | | |
|----------------|-------------------------------------|-------|-----------|----------|---------|-------------------------------------|-----------------------------|------|
| | R_k | R_w | R_{SF} | R_{SD} | k_f | k_D | $\frac{k_D - k_f}{k_f} 100$ | |
| | $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ deg/W}$ | | | | | $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ deg})$ | | $\%$ |
| 10^4 | 0,5 | 25 | 0,0133 | 0,111 | 0,00633 | 1534 | 1922 | 25,7 |
| $5 \cdot 10^4$ | 0,216 | 8,85 | | | | 2722 | 4250 | 56,1 |

Mimo że dotychczas stosowane termosyfony stanowią elementy wymienników o bardzo intensywnej wymianie ciepła, to w niektórych zastosowaniach możliwa jest dalsza intensyfikacja. Mianowicie, po zastąpieniu kondensacji filmowej kondensacją kroplową, co proponuje autor, otrzymuje się znacznie mniejszy opór cieplny skraplania. Nie ma to dużego znaczenia w przypadku wykorzystania termosyfonów do ogrzewania gazów, kiedy w zasadzie tylko opór cieplny konwekcji przy zewnętrznej powierzchni skraplacza

decyduje o wartości współczynnika przenikania ciepła. Natomiast przy ogrzewaniu cieczy opór cieplny przejmowania jest tego samego rzędu co opór cieplny kondensacji filmowej, a zatem zastąpienie kondensacji filmowej kondensacją kroplową musi spowodować zdecydowane obniżenie całkowitego oporu cieplnego.

4. Kondensacja kroplowa w termosyfonach

Kondensacja kroplowa występuje wtedy, gdy powierzchnia wymiany ciepła jest trudno zwilżalna przez kondensat. Kryterium zwilżalności stanowi kąt przylegania. Dobrej jakości kondensację kroplową można otrzymać przy kącie przylegania około $\pi/2$. Duży kąt przylegania mają ciekłe metale, np. rtęć (bardzo duże napięcie powierzchniowe), natomiast dla innych czynników własność tę można praktycznie osiągnąć stosując następujące promotory:

- a) cienkie warstewki powierzchniowe uzyskane na drodze chemicznej,
- b) stanowiące powierzchnią wykładzinę z obcego, niezwilżalnego materiału,
- c) platerowane ze szlachetnych metali,
- d) wstrzykiwane do czynnika roboczego.

Najmniejsze wartości oporów cieplnych otrzymuje się, jak dotąd, przy wykorzystaniu promotorów chemicznych, które jednak okazały się najmniej trwałe, gdyż podlegają zmywającemu działaniu kondensatu. Maksymalna trwałość tych promotorów nie przekracza w przypadku kondensacji pary wodnej stu godzin pracy, po czym pokrycie wymaga renowacji.

Niektóre materiały są z natury rzeczy niezwilżalne przez niektóre ciecze robocze, np. teflon jest niezwilżalny przez wodę. Badania prowadzone pod kątem przydatności teflonu do budowy skraplaczy pary wodnej wykazały [6], że na teflonowych powierzchniach otrzymuje się dobrej jakości kondensację kroplową w czasie kilku tysięcy godzin pracy. Utrata pierwotnych własności następuje wskutek stopniowego osadzania się na teflonie substancji, które niosła ze sobą świeża para. Można przypuszczać, że w przypadku termosyfonu, gdzie czynnik jest ciągle ten sam, trwałość tego rodzaju promotora będzie praktycznie nieograniczona. Przy pokrywaniu wewnętrznych powierzchni rur warstewką niezwilżalną w rodzaju teflonu należy liczyć się z trudnościami technologicznymi i wysokim kosztem. Po drugie, stosunkowo duża grubość i niska przewodność cieplna teflonu [$k = 0,173 \text{ W/(m deg)}$] zmusza do uwzględniania dodatkowego oporu cieplnego. Nie jest on jednak aż tak duży, aby przekreślić celowość stosowania kondensacji kroplowej.

ERB stwierdził doświadczalnie ([7, 8]), że złoto, srebro, a w pewnym stopniu również pallad, rod i platyna mogą być wykorzystane jako powierzchnie niezwilżalne przez wodę. I tak, na złotej powierzchni ERB otrzymywał kondensację kroplową przez 4,7 roku, co tłumaczy tym, że powierzchnie z metali szlachetnych są wolne od tlenków i pozostają czyste. Odmienne zdanie na ten temat mają WILKINS i in. [9], którzy badając kondensację pary wodnej na pionowych rurach między innymi platerowanych złotem stwierdzili, że po tygodniu pracy na 95% powierzchni rur występowała kondensacja filmowa. Autor niniejszej pracy prowadził badania kondensacji pary wodnej z instalacji ciepłowniczej (praca w druku) na pionowej rurze platerowanej złotem i stwierdził występowanie dobrej jakości

kondensacji kroplowej przez ponad 30 godzin pracy, przy czym przy bardzo dużych strumieniach cieplnych można było zauważyć na powierzchni rury niewielkie miejsca, gdzie występowała kondensacja filmowa. Oczywiście wadą używania szlachetnych metali do pokrywania powierzchni skraplania jest duży koszt.

Kondensację kroplową można też spowodować przez pokrycie powierzchni wymiany ciepła cienką warstwąk substancji ciekłej, która czyni powierzchnię niezwilżalną. W odniesieniu do pary wodnej przebadano dziesiątki tego typu promotorów z zastosowaniem do energetycznych skraplaczy pary wodnej. Na przykład, jak wynika z badań BROMLEYA i in. [10] najlepszym promotorem przy skraplaniu pary wodnej z wody morskiej jest $(C_{18}H_{37}S)_4Si$. W zastosowaniach energetycznych promotor jest wstrzykiwany do świeżej pary i wraz z nią dostaje się na powierzchnię skraplania. Zaletą tego sposobu jest możliwość pominięcia specjalnego przygotowywania powierzchni wymiany ciepła, a wadą w zastosowaniu do skraplaczy energetycznych — zanieczyszczanie pary promotorem oraz konieczność ciągłego uzupełniania. Wymienione wady nie występują w zastosowaniu tego typu promotorów do uzyskiwania kondensacji kroplowej w termosyfonach.

W przypadku termosyfonu wystarczy jednorazowe wstrzyknięcie promotora dobrego do warunków pracy tak, aby nie ulegał rozpadowi oraz w takiej ilości, aby zapewniając dobrą jakość kondensacji kroplowej nie zwiększyć oporu cieplnego przy wrzeniu w parowniku termosyfonu. Koszt takiego przedsięwzięcia jest niewielki — praktycznie zerowy, gdyż po pierwsze stosowane ilości promotorów byłyby bardzo małe, a po drugie wstrzyknięcie można by wykonać, w procesie napełniania termosyfonu czynnikiem.

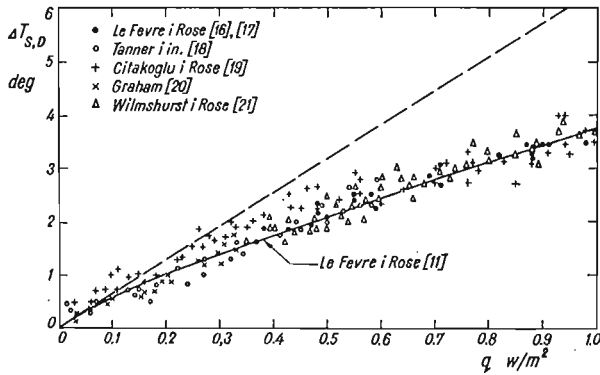
Powyższe przemawia za ostatnim sposobem uzyskiwania kondensacji kroplowej w termosyfonach w przypadku, gdy znany jest rodzaj promotora stosownie do rodzaju czynnika roboczego. Jak dotąd znamy jedynie szereg bardzo dobrych promotorów mających zastosowanie w przypadku wody. Na pytanie, jaki promotor należy zastosować w przypadku innego czynnika można by odpowiedzieć dopiero po przeprowadzeniu odpowiednich badań.

Opór kondensacji kroplowej składa się z oporu przejmowania ciepła od pary do kropelek kondensatu, oporu przewodzenia przez kropelki kondensatu oraz oporu przewodzenia przez warstewkę promotora pokrywającą całą powierzchnię wymiany ciepła. Ten ostatni opór można pominąć, mimo iż przewodności cieplne ciekłych promotorów są stosunkowo małe, a to dlatego, że warstewki mają bardzo małe grubości wskutek przede wszystkim zmywającego działania kondensatu. I tak, jak wynika z oceny LE FEVRE i ROSE w [11], grubość warstewki promotora w przypadku skraplania pary wodnej wynosi prawie zero dla kwasu montanowego oraz waha się w granicach od 0,18 do 0,06 μm dla dodekanu silanu. Odpowiada to wielokrotności od około 90 do 30 grubości warstewki jednocząsteczkowej ostatniego promotora.

Wartości liczbowe dotyczące kondensacji kroplowej zestawia się, podobnie jak dla filmowej, w postaci korelacji: całkowity średni opór cieplny w funkcji strumienia cieplnego lub różnica temperatury nasycenia i ścianki stałej w funkcji strumienia cieplnego. Pogląd na sprawę oporu cieplnego (uwzględniającego przewodzenie przez kropelki kondensatu) przy kondensacji kroplowej w porównaniu z filmową można sobie wyrobić na podstawie dostępnych danych doświadczalnych dla wody oraz opracowań teoretycznych, jak na przykład praca [12] czy też [13]. GRAHAM [14] podaje zależności oporu cieplnego przy

kondensacji kropłowej w funkcji strumienia cieplnego według różnych badaczy, stwierdzając duży rozrzut. Różnice wynikają z warunków badań; w grę wchodzi rodzaj czynnika oraz promotora, rodzaj, geometria i nachylenie powierzchni skraplania i inne. Wyniki badań podsumowuje GRIFFITH [15] stwierdzając, że w przypadku kondensacji kropłowej należy się spodziewać oporów cieplnych od 10 do 80 razy mniejszych niż przy kondensacji filmowej.

Przechodząc do szczegółów dotyczących kondensacji kropłowej, na przykład pary wodnej przy ciśnieniu 1 bar, na powierzchniach miedzianych możemy wykorzystać dane doświadczalne otrzymane, przy użyciu dwusiarczku dwuoktadecylu ($C_{18}H_{37}$) $_2S_2$, przez następujących badaczy: LE FEVRE i ROSE [16, 17], TANNERA i in. [18], CITAKOGLU i ROSE [19], GRAHAM [20] oraz WILMSHURSTA i ROSE [21] zamieszczone na rys. 4. Linia ciągła naniesiono na rysunku krzywą uzyskaną przez LE FEVRE i ROSE [11] na drodze głównie analizy teoretycznej kondensacji kropłowej. Jak widać z rysunku, krzywa ta bardzo dobrze reprezentuje naniesione wyniki badań doświadczalnych i może być użyta do obliczeń oporu cieplnego kondensacji kropłowej w danym przypadku.



Rys. 4

[19], GRAHAMA [20] oraz WILMSHURSTA i ROSE [21] zamieszczone na rys. 4. Linia ciągła naniesiono na rysunku krzywą uzyskaną przez LE FEVRE i ROSE [11] na drodze głównie analizy teoretycznej kondensacji kropłowej. Jak widać z rysunku, krzywa ta bardzo dobrze reprezentuje naniesione wyniki badań doświadczalnych i może być użyta do obliczeń oporu cieplnego kondensacji kropłowej w danym przypadku.

Dla termosyfonu o wymiarach i mocy podanych wyżej, strumień cieplny wynosi około $0,007 \text{ MW/m}^2$. Przebieg linii ciągłej na rys. 4. w zakresie małych strumieni da się przybliżyć linią prostą, z pochylem której można dokładniej określić wartość oporu cieplnego kondensacji kropłowej dla powyższego strumienia. Wynosi on około $6,34 \text{ m}^2 \text{ deg/W}$. W tabelicy 1 zamieszczono przykładowe wartości współczynnika przenikania ciepła obliczone dla powyższego termosyfonu z kondensacją kropłową w zastosowaniu do ogrzewania wody oraz wskazano na wyraźny wzrost tego współczynnika.

5. Wnioski

Kondensacja kropłowa jest korzystnym rodzajem kondensacji w termosyfonach służących do budowy wymienników ciepła do ogrzewania cieczy. O ile przy kondensacji filmowej opór cieplny kondensacji jest rzędu oporu cieplnego konwekcji wymuszonej przy ogrzewaniu cieczy, to przy kondensacji kropłowej jest on zaledwie rzędu oporu cieplnego

ścianki termosyfonu. Pomijając opór cieplny kondensacji kroplowej popełniamy minimalny błąd; w przykładzie liczbowym przytoczonym w tekście — od 1,7 do 3,7%.

Praktyczna realizacja kondensacji kroplowej już obecnie jest łatwa i tania w przypadku niektórych czynników wymagających promotora, np. wody, a to przez jednorazowe wstrzyknięcie promotora w procesie napełniania termosyfonu. Współczesna znajomość promotorów dla większości czynników stosowanych w termosyfonach jest jeszcze niewystarczająca, co powoduje konieczność prowadzenia badań w tym zakresie.

Wzrost współczynnika przenikania ciepła przez ściankę skraplacza termosyfonu uzyskany przez zastąpienie kondensacji filmowej kondensacją kroplową umożliwia poważne zmniejszenie wysokości skraplacza przy tej samej mocy termosyfonu. W każdym przypadku zastosowań praktycznych da to w efekcie zmniejszenie kosztów inwestycyjnych.

Literatura cytowana w tekście

1. А. Ф. СОЛОВЬЕВ, Е. И. ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ, П. А. СЕМЕНОВ, *Гидравлическое сопротивление в двухфазном потоке*, Химическая Промышленность, 8 (1966), 601 - 604.
2. S. KATZOFF, *Heat pipes and vapor chambers for thermal control of spacecraft*, AIAA Thermophysics Specialist Conference, New Orleans, Louisiana, 17 - 20 April 1967. Paper No 67 - 310, New York, N. Y.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1967.
3. C. C. SILVERSTEIN *Heat pipe gas turbine regenerators*, ASME Paper No 68 - WA/GT-7.
4. W. H. McADAMS, *Heat transmission*, McGraw-Hill Book Company, INC., 1954, 268.
5. W. M. ROHSENOW, H. Y. CHOI, *Heat, mass and momentum transfer*, Prentice Hall, INC., 1961, 239.
6. R. M. FOX, *A review of literature on the promotion of dropwise condensation*, U. S. Navy Marine Engineering Lab. Report, 71, (1962), 106.
7. R. A. ERB, E. THELEM, *Promoting permanent dropwise condensation*, Ind. Eng. Chem., 57 (1965), 49.
8. R. A. ÉRB, *The wettability of gold*, The Journal of Physical Chemistry, 72 (1966), 2412.
9. D. G. WILKINS, *Dropwise and filmwise condensation of water vapor on gold*, AIChE Journal, 19, 1 (1973), 119 - 123.
10. L. A. BROMLEY, J. W. PORTER S. M. READ, *Promotion of drop-by-drop condensation of steam from sea-water on a vertical copper tube*, AIChE Journal, 14, 2 (1968), 245 - 250.
11. E. J. LE FEVRE, J. W. ROSE, *A theory of heat transfer by dropwise condensation*, Proc. Third Int. Heat Transfer Conference, Vol. 2, p. 362, Am. Inst. Chem. Engrs., New York 1966.
12. J. L. McCORMICK, J. W. WESTWATER, *Nucleation sites for dropwise condensation*, Chem. Eng. Science, 20 (1965), 1021.
13. H. WENZEL, *Erweitere Theorie des Wärmeübergangs bei Tropfenkondensation*, Wärme-und Stoffübertragung, 2 (1969), 6 - 18.
14. C. GRAHAM, *The limiting heat transfer mechanisms of dropwise condensation*, (doctoral disertation), Mechanical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass. 1969.
15. P. GRIFFITH, *Handbook of heat transfer*, Ed. W. M. ROHSENOW, J. P., HARTNETT, McGraw-Hill Company, 1973, 12 - 34.
16. E. J. LE FEVRE, J. W. ROSE, *Heat transfer measurements during dropwise condensation of steam*, Int. J. Heat Mass Transfer, 7 (1964), 272 - 273.
17. E. J. LE FEVRE, J. W. ROSE, *An experimental study of heat transfer by dropwise condensation*, Int. J. Heat Mass Transfer, 8 (1965), 1117 - 1133.
18. D. W. TANNER, D. POPE, C. J. POTTER, D. WEST, *Heat transfer in dropwise condensation*, Int. J. Heat Mass Transfer, 8 (1965), 427 - 436.
19. E. CITAKOGLU, J. W. ROSE, *Dropwise condensation-some factors influencing the validity of heat transfer measurements*, Int. J. Heat Mass Transfer, 11 (1968), 523 - 537.

20. C. GRAHAM, *Thesis*, Mass. Inst. Tech., 1969.
21. R. WILMSHURST, J. W. ROSE; *Dropwise condensation-further heat-transfer measurements*, Proc. Fourth Int. Heat Transfer Conference, Paris 1970, Vol. 6, paper Cs 1.4.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ КАПЛЕВИДНОЙ КОНДЕНСАЦИИ В ОДИНАРНОМ
ДВУХФАЗОВОМ ТЕРМОСИФОНЕ НА КОЭФФИЦИЕНТ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТЕНКИ КОНДЕНСАТОРА

В работе предложена и обоснована расчетом замена применяемой до сих пор в двухфазовых термосифонах для подогрева жидкости пленочной конденсации на каплевидную. Благодаря очень большому коэффициенту передачи тепла, при каплевидной конденсации имеет место значительный рост усредненного коэффициента теплопроводности стенки конденсатора. Рост этот тем больше, чем турбулентнее подогреваемая жидкость. Это позволяет уменьшить размеры конденсатора в термосифоне.

Summary

THE EFFECT OF APPLICATION OF DROPWISE CONDENSATION IN A SINGLE TWO-PHASE
THERMOSIPHON ON THE HEAT TRANSFER COEFFICIENT ACROSS THE CONDENSER
WALL

The concept of applying the dropwise condensation instead of the filmwise one in thermosiphons used for heating of liquids has been outlined in this paper. A great increase of the overall heat transfer coefficient across the wall of the condenser of the thermosiphon may be obtained due to a very high heat transfer coefficient of the dropwise condensation. The greater is the turbulence of the heated liquid, the greater will be the overall heat transfer coefficient. It enables us to decrease the dimensions of the condenser of the thermosiphon.

INSTYTUT LOTNICTWA
POLITECHNIKA, RZESZÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 października 1975 r.

O PEWNEJ NOWEJ METODZIE ANALIZY STATECZNOŚCI ROZWIĄZAŃ UKŁADÓW NIELINIOWYCH O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

ALICJA PIENIĄŻEK, WIESŁAW PIENIĄŻEK (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy [1] została przedstawiona pewna nowa metoda analizy stateczności nieliniowych układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi drugiego rzędu. Autorzy oparli się na następującym rozumowaniu: każdy układ dynamiczny można uważać jako pewne pole dynamiczne, które działa z pewną siłą na znajdujący się w nim punkt materialny. Stateczność tego pola dynamicznego zależy od tego, czy energia zgromadzona przez punkt materialny rośnie czy też maleje pod wpływem sił pola.

Rozumowanie to doprowadziło do opracowania pewnego, wygodnego w stosowaniu, algorytmu, na podstawie którego można wnioskować o stateczności układu. Algorytm ten umożliwia także badanie stateczności cykli granicznych.

W niniejszej pracy zostanie przedstawiona idea metody, zgodnie z [1], jej porównanie z innymi, istniejącymi metodami, oraz jej zastosowanie do badania stateczności równania typu Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystości.

2. Opis metody [1] i jej sens fizyczny

Niech układ dynamiczny będzie opisany równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego w postaci

$$(2.1) \quad \ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

lub równoważnym mu układem równań pierwszego rzędu

$$(2.2) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y),$$

gdzie $f(x, y)$ jest funkcją nieparzystą, ze względu na x , w ogólnym przypadku nieliniową.

Jeżeli układ ten będziemy uważali za pewne pole dynamiczne, to wówczas siła tego pola wyniesie

$$(2.3) \quad F = m\ddot{x} = m\dot{y} = mf(x, y),$$

gdzie m jest masą punktu materialnego znajdującego się w polu. Wobec tego, równanie (2.1) można zapisać w postaci

$$(2.4) \quad m\ddot{x} = mf(x, y).$$

Przekształcimy powyższe równanie w ten sposób, że dodamy i odejmiemy wyrażenie mx (o wymiarze siły) do prawej strony. Wyrażenie to zinterpretujemy jako siłę zachowawczą. Otrzymujemy

$$(2.5) \quad m\ddot{x} = mf(x, \dot{x}) + mx - mx.$$

Jeżeli w powyższym równaniu wprowadzimy oznaczenie

$$(2.6) \quad F_1 = mf(x, \dot{x}) + mx,$$

to wówczas ruch punktu materialnego będzie się odbywał pod wpływem siły zachowawczej i siły F_1 , co można ująć zależnością

$$(2.7) \quad m\ddot{x} = F_1 - mx.$$

Jeśli obliczymy pracę siły F_1 podczas jednego, pełnego okresu ruchu T , to w przypadku gdy jest ona dodatnia punkt materialny znajdujący się w polu dynamicznym powiększa swoją energię, co oznacza, że układ (pole) jest niestateczny. W przeciwnym przypadku, układ posiada cechy stateczności (gdy praca siły F_1 jest ujemna, to wówczas układ wydaje pracę i energia punktu materialnego maleje). Zrównoważmy siłę F_1 siłą F_0 równą co do wartości, lecz przeciwnie skierowaną, tak aby punkt materialny wykonywał ostatecznie ruch zachowawczy opisany równaniem

$$(2.8) \quad \ddot{x} = -x$$

lub równoważnym mu układem równań pierwszego rzędu

$$(2.8a) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

Znak pracy wykonywanej przez siłę F_0 będzie przeciwny do znaku pracy siły F_1 , a więc gdy praca L_{F_0} siły F_0 będzie ujemna, to układ będzie niestateczny, zaś w przeciwnym przypadku układ będzie stateczny.

Obliczymy obecnie pracę siły F_0 w jednym, pełnym okresie ruchu T . Otrzymujemy

$$(2.9) \quad L_{F_0} = \int_0^T F_0 x dt.$$

Ponieważ jest

$$(2.10) \quad F_0 = -F_1 = -m[f(x, \dot{x}) + x],$$

to praca ta wyniesie

$$(2.9a) \quad L_{F_0} = -m \int_0^T [f(x, \dot{x}) + x] \dot{x} dt.$$

Uwzględniając (2.2) otrzymamy

$$(2.9b) \quad L_{F_0} = -m \int_0^T (\dot{x}X + y\dot{y}) dt.$$

Jak powiedzieliśmy wcześniej, ruch będzie odbywał się po okręgu

$$(2.11) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \Theta, \\ y &= r \sin \Theta, \end{aligned} \quad r = \text{const} > 0.$$

Różniczkując którekolwiek z równań (2.11) względem czasu i wykorzystując odpowiednio zależność (2.8a) otrzymujemy

$$(2.12) \quad \frac{d\Theta}{dt} = -1, \quad d\Theta = -dt.$$

Wprowadzimy obecnie, zgodnie z [1], funkcję

$$(2.13) \quad S'(x, y) = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy + yf(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jak widać, jest to składowa radialna prędkości fazowej: $v_r = \dot{r}$.

Zauważmy teraz, że wyrażenie podcałkowe w (2.9b) można zapisać, wykorzystując (2.13),

$$(2.14) \quad \dot{x}x + y\dot{y} = \sqrt{x^2 + y^2} S'(x, y).$$

Biorąc pod uwagę (2.14), a także (2.11) i (2.12), po zmianie granic całkowania wzór (2.9b) przyjmie postać

$$(2.15) \quad L_{F_0} = -mr \int_0^{2\pi} S(r, \Theta) d\Theta, \quad m > 0, r > 0.$$

Wprowadzimy obecnie funkcję

$$(2.16) \quad g(r) = \int_0^{2\pi} S(r, \Theta) d\Theta.$$

Wobec tego, praca L_{F_0} posiada znak przeciwny do znaku wyrażenia (2.16), które łatwo obliczymy znając funkcję $S(r, \Theta)$.

Funkcję $g(r)$ wykorzystamy zatem do określania charakteru stateczności układu (2.1); mianowicie:

- jeżeli $g(r) = 0, \forall r > 0$ to układ jest zachowawczy,
- (2.17) — jeżeli $g(r) > 0, \forall r > 0$ ($L_{F_0} < 0$), to układ jest niestateczny,
- jeżeli $g(r) < 0, \forall r > 0$ ($L_{F_0} > 0$), to układ jest stateczny.

Przy pomocy tej metody można badać stateczność cykli granicznych. Posługujemy się tutaj także funkcją $g(r)$.

Dla statecznego cyklu granicznego mamy:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} g(r) &> 0 \text{ dla } 0 < r < r_0, \\ g(r_0) &= 0, \\ g(r) &< 0 \text{ dla } r > r_0. \end{aligned}$$

Dla niestatecznego cyklu granicznego jest:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} g(r) &< 0 \text{ dla } 0 < r < r_0 \\ g(r_0) &= 0, \\ g(r) &> 0 \text{ dla } r > r_0. \end{aligned}$$

Wprowadzimy jeszcze funkcję: $R'(x, y)$ określoną wzorem

$$(2.20) \quad R'(x, y) = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xf(x, y) - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jest to składowa transversalna $v_\theta = r\dot{\theta}$ prędkości fazowej. W dalszych rozważaniach będziemy stosować funkcje $R'(x, y)$, $S'(x, y)$ lub $R(r, \theta)$, $S(r, \theta)$ otrzymane po podstawieniu w (2.13) i (2.20): $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

O stateczności układu można sądzić na podstawie analizy funkcji $S(r, \theta)$ i $R(r, \theta)$. Mianowicie, zgodnie z [1], jeżeli w punktach, gdzie $R(r, \theta) = 0$ funkcja $S(r, \theta) < 0$, to wówczas układ jest stateczny. Gdy w punktach, w których $R(r, \theta) = 0$ funkcja $S(r, \theta) > 0$, to układ jest niestateczny. Interpretację fizyczną powyższych warunków można podać opierając się na pracy [2]. Podano w niej metodę dwóch funkcji, pozwalającą na ocenę stateczności układu na podstawie przebiegu trajektorii fazowych, które można przewidzieć na podstawie wykresów tych funkcji na płaszczyźnie fazowej.

W pracy [2] układ (2.2) zinterpretowano jako układ określający prędkość punktu materialnego na płaszczyźnie fazowej. Wspomniane dwie funkcje są określone wzorami¹⁾

$$(2.21) \quad \Phi(x, y) = xy + yf(x, y),$$

$$(2.22) \quad \Psi(x, y) = xf(x, y) - y^2.$$

Przedstawiają one odpowiednio: iloczyn skalarny i współrzędną iloczynu wektorowego odległości $\mathbf{r}(x, y)$ punktu na trajektorii fazowej od początku układu współrzędnych i wektora prędkości fazowej $\mathbf{v}(x, y)$ tego punktu. Jak łatwo stwierdzić, licznik (2.13) jest to funkcja $\Phi(x, y)$, zaś licznik (2.20) jest to funkcja $\Psi(x, y)$. Znając wykresy tych funkcji na płaszczyźnie fazowej możemy sądzić o przebiegu trajektorii fazowych układu (2.2). W cytowanej pracy znajduje się szereg przykładów takiej analizy dla różnych typów układów.

Porównajmy analizę stateczności na podstawie metody dwóch funkcji w [2] z analizą na podstawie funkcji $R'(x, y)$ i $S'(x, y)$ w nowej metodzie.

Warunek $R'(x, y) = 0$ oznacza to samo co $\Psi(x, y) = 0$, czyli że wektory \mathbf{r} i \mathbf{v} pokrywają się, a ich iloczyn wektorowy $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$. Jeżeli równocześnie przy tym $S'(x, y) < 0$, a więc $\Phi(x, y) < 0$, to układ jest stateczny. Istotnie, iloczyn skalarny $\mathbf{r} \times \mathbf{v} < 0$, a to świadczy o tym, że wektor \mathbf{v} posiada zwrot przeciwny do wektora \mathbf{r} i punkt porusza się w kierunku początku układu współrzędnych. Przeciwny znak $S'(x, y)$, przy równoczesnym $R'(x, y) = 0$, wskazuje na zgodne zwroty \mathbf{r} i \mathbf{v} i punkt oddala się wówczas od początku układu współrzędnych, a to świadczy o niestateczności układu dynamicznego.

Dalsze porównania z innymi metodami podamy później, a obecnie przedstawimy wspomniany algorytm z [1] w jego pełnej, usystematyzowanej postaci.

A.1. Tworzymy funkcje $S'(x, y)$, $R'(x, y)$

$$S'(x, y) = \frac{xy + yf(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

¹⁾ W pracy [2] funkcja $f(x, y)$ ma znak przeciwny, ponieważ układ (2.2) jest zapisany w postaci: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -f(x, y)$, co nie ma wpływu na nasze dalsze rozważania.

$$R'(x, y) = \frac{xf(x, y) - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

lub funkcje $R(r, \theta)$, $S(r, \theta)$, po podstawieniu w powyższych wzorach $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

A.2. Badamy powyższe funkcje; jeżeli w punktach, w których:

- a) $R(r, \theta) = 0$ funkcja $S(r, \theta) < 0$, to układ jest stateczny,
- b) $R(r, \theta) = 0$ funkcja $S(r, \theta) > 0$, to układ jest niestateczny.

A.3. Tworzymy funkcję $g(r)$

$$g(r) = \int_0^{2\pi} S(r, \theta) d\theta, \quad r = \text{const.}$$

A.4. Na podstawie charakterystyki funkcji $g(r)$ oceniamy stateczność układu. Jeżeli:

- a) $g(r) < 0 \quad \forall r > 0$ i $g(r) \rightarrow -\infty$ przy $r \rightarrow \infty$, to układ jest stateczny,
- b) $g(r) = 0 \quad \forall r > 0$, to układ jest zachowawczy,
- c) $g(r) > 0 \quad \forall r > 0$, to układ jest niestateczny.

d) układ posiada stateczny cykl graniczny, jeżeli:

$$\begin{aligned} g(r) > 0 \text{ dla } 0 < r < r_0, \quad g(r_0) = 0, \\ g(r) < 0 \text{ dla } r > r_0; \end{aligned}$$

e) układ posiada niestateczny cykl graniczny, jeżeli:

$$\begin{aligned} g(r) < 0 \text{ dla } 0 < r < r_0, \quad g(r_0) = 0, \\ g(r) > 0 \text{ dla } r > r_0. \end{aligned}$$

Jeżeli funkcja $R(r, \theta)$ jest ujemna wszędzie, to wówczas punkt A.4 powyższego algorytmu daje pełną odpowiedź o stateczności układu.

Autorzy niniejszej pracy zbadali przydatność przedstawionej metody do określania stateczności układów o różnych typach punktów osobliwych. Jak się okazało, dla układów o siodłowym punkcie osobliwym metoda ta nie daje odpowiedzi o charakterze stateczności. W pozostałych przypadkach metoda daje wyniki zgodne z otrzymanymi przy zastosowaniu innych metod.

Na zakończenie tego rozdziału podamy dalsze porównania i możliwości zastosowania metody.

Napiszmy równanie trajektorii dla układu (2.2). Po wyrugowaniu czasu otrzymujemy

$$(2.23) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}.$$

W metodzie krzywych stykowych Poincaré'go, (patrz np. [3]), bierze się rodzinę okręgów koncentrycznych, ze środkiem w punkcie osobliwym, o równaniu

$$(2.24) \quad x^2 + y^2 = c, \quad c = \text{const} > 0.$$

Po zróżniczkowaniu powyższego równania otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Wobec powyższego, krzywa stykowa jest opisana równaniem

$$(2.25) \quad \frac{f(x, y)}{y} = -\frac{x}{y}$$

lub po przekształceniu

$$(2.26) \quad xy + yf(x, y) = 0.$$

Jak łatwo stwierdzić warunek ten można otrzymać przyrównując funkcję $S'(x, y)$ do zera.

Utwórzmy jeszcze stosunek [3]

$$(2.27) \quad \frac{r d\theta}{dr} = \frac{R(r, \theta)}{S(r, \theta)} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{const}.$$

Otrzymaliśmy równanie izokliny względem wektora wodzącego. Kąt φ jest kątem, pod jakim krzywa całkowa przecina wektor wodzący. Jest to pewna modyfikacja metody izoklin, stosowana w pewnych przypadkach topologicznej analizy drgań (patrz np. [3]).

3. Analiza stateczności rozwiązań równania Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystości

W pracy [1], przy pomocy opisanej metody, zbadano stateczność rozwiązań równania typu Duffinga i Van der Pola.

Zastosujemy obecnie tę metodę do badania stateczności równania Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystości.

Rozpatrzmy równanie Rayleigha w postaci:

$$(3.1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma_0 x^3 = (\alpha_0 - \beta_0 \dot{x}^2) \dot{x},$$

$$\text{gdzie} \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta_0 > 0, \quad \gamma_0 > 0.$$

Wprowadzimy transformację czasu i oznaczenia według wzorów:

$$(3.2) \quad \tau = \omega_0 t, \quad \frac{\alpha_0}{\omega_0} = \alpha, \quad \beta_0 \omega_0 = \beta, \quad \frac{\gamma_0}{\omega_0^2} = \gamma.$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności otrzymujemy równanie w postaci bezwymiarowej

$$(3.3) \quad \ddot{x} + x + \gamma x^3 = (\alpha - \beta \dot{x}^2) \dot{x}$$

lub równoważny mu układ równań pierwszego rzędu:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - \beta y^2)y - x - \gamma x^3, \end{cases}$$

gdzie obecnie kropka oznacza pochodną względem bezwymiarowego czasu τ .

Jak można się przekonać, układ ten posiada jeden punkt osobliwy w początku układu współrzędnych. W zależności od pierwiastków równania charakterystycznego jest on węzłem lub ogniskiem niestatecznym. Pierwiastki te, dla naszego układu, mają postać:

$$(3.5) \quad \lambda_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - 4}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - 4}.$$

Jeśli $\alpha > 2$, to punkt osobliwy jest węzłem niestatecznym, natomiast dla $\alpha < 2$, punkt ten jest ogniskiem niestatecznym.

Zbadajmy teraz, czy dla układu istnieją trajektorie zamknięte i w jakich obszarach mogą występować. Zastosujemy znane kryterium Bendixona. Prawe strony równań układu (3.4) oznaczmy odpowiednio przez X i Y . Zbadajmy następnie sumę

$$(3.6) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = \alpha - 3\beta y^2.$$

Zgodnie z kryterium, w obszarze w którym suma ta nie zmienia znaku, nie istnieje cykl graniczny. W naszym przypadku obszar ten jest określony zależnościami:

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}} < y < \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}.$$

Napiszmy teraz równanie trajektorii układu. Po wyrugowaniu czasu z (3.4) otrzymujemy

$$(3.7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha - \beta y^2)y - x - \gamma x^3}{y}.$$

Wyznamy równanie krzywej stykowej. Ponieważ początek układu współrzędnych jest punktem osobliwym, bierzemy rodzinę okręgów koncentrycznych ze środkiem w tym punkcie. Równania okręgów są:

$$(3.8) \quad x^2 + y^2 = c, \quad c = \text{const.}$$

Po zróżniczkowaniu powyższego równania otrzymujemy

$$(3.9) \quad \frac{x}{y} = -\frac{dy}{dx}.$$

Krzywą stykową opisuje równanie

$$(3.10) \quad \frac{(\alpha - \beta y^2)y - x - \gamma x^3}{y} = -\frac{x}{y}$$

lub po przekształceniu

$$(3.11) \quad \beta y^4 - \alpha y^2 + \gamma x^3 y = 0.$$

We współrzędnych biegunowych równanie to można napisać w postaci zależności na r dla okręgów stykowych

$$(3.12) \quad r^2 = \frac{\alpha \sin \Theta}{\beta \sin^3 \Theta + \gamma \cos^3 \Theta}.$$

Powyższe równanie można także otrzymać przyrównując $S(r, \theta)$ do zera. Z równania (3.12) można obliczyć r_{\min} i r_{\max} okręgów stykowych. Zastosujemy obecnie algorytm przedstawiony w poprzednim rozdziale.

A.1. Funkcje $S(r, \theta)$ i $R(r, \theta)$ mają następującą postać:

$$\begin{aligned} S(r, \theta) &= r \sin \theta \cos \theta + \sin \theta [(\alpha - \beta r^2 \sin^2 \theta) r \sin \theta - \gamma r^3 \cos^3 \theta - r \cos \theta], \\ R(r, \theta) &= \cos \theta [(\alpha - \beta r^2 \sin^2 \theta) r \sin \theta - r \cos \theta - \gamma r^3 \cos^3 \theta] - r \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

A.2. Znajdziemy r i θ , dla których $R(r, \theta) = 0$ i równocześnie $S(r, \theta) < 0$. Z zależności $R(r, \theta) = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} [(\alpha - \beta r^2 \sin^2 \theta) r \sin \theta - r \cos \theta - \gamma r^3 \cos^3 \theta] &= \frac{r \sin^2 \theta}{\cos \theta}, \\ \cos \theta &\neq 0. \end{aligned}$$

Po podstawieniu powyższego do nierówności $S(r, \theta) < 0$ otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \theta < 0,$$

co oznacza, że kąt θ należy wybierać z przedziałów

$$(3.13) \quad \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi < \theta < n\pi, \quad \text{gdzie} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Z warunku $R(r, \theta) = 0$ otrzymamy związek na r , w postaci

$$(3.14) \quad r^2 = \frac{\alpha \sin 2\theta - 2}{2 \cos \theta (\beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta)}$$

przy założeniu, że mianownik powyższego ułamka jest różny od zera.

Aby otrzymać rzeczywiste r , prawa strona zależności (3.14) musi być dodatnia. Zależność tę rozpatrzmy dla trzech przypadków wartości α : I) $\alpha < 2$, II) $\alpha > 2$, III) $\alpha = 2$.

P r z y p a d e k I: $0 < \alpha < 2$. Prawa strona (3.14) jest dodatnia, gdy:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \alpha \sin 2\theta - 2 &< 0, \\ \cos \theta (\beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta) &< 0. \end{aligned}$$

Pierwsza nierówność zachodzi zawsze, druga nierówność, gdy:

$$(3.16) \quad \cos \theta < 0, \quad \beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta > 0$$

lub

$$(3.17) \quad \cos \theta > 0, \quad \beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta < 0.$$

Rozpatrzmy nierówności (3.16). Pierwsza z nich jest spełniona, gdy kąt θ należy do przedziałów

$$(3.18) \quad \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi < \theta < \left(2n + \frac{3}{2}\right) \pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

²⁾ $\cos \theta$ nie może być równe zero, ponieważ warunek $R(r, \theta) = 0$ byłby spełniony tylko dla $\sin \theta = 0$, co dla tego samego kąta θ nie może równocześnie zachodzić.

Po przekształceniu drugiej nierówności otrzymujemy warunek

$$\operatorname{tg}\theta > -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}},$$

który jest spełniony dla kątów

$$(3.19) \quad \left[\operatorname{arc\,tg} \left(-\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}} \right) \right] + n\pi < \theta < \left(\frac{1}{2} + n \right) \pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Rozpatrując podobnie nierówność (3.17) otrzymujemy warunki na θ w postaci:

$$(3.20) \quad \left(2n - \frac{1}{2} \right) \pi < \theta < \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$(3.21) \quad \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi < \theta < \left[\operatorname{arc\,tg} \left(-\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}} \right) \right] + n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Biorąc pod uwagę (3.13), kąt θ należy wybierać, dla omawianego przypadku, z części wspólnej przedziałów: (3.13), (3.18) i (3.19) lub (3.13), (3.20), (3.21).

Przypadek I1: $\alpha > 2$. Należy tutaj rozpatrzeć dwie pary nierówności:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \alpha \sin 2\theta - 2 &> 0, \\ \cos \theta (\beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta) &> 0; \end{aligned}$$

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \alpha \sin 2\theta - 2 &< 0, \\ \cos \theta (\beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta) &< 0. \end{aligned}$$

Analiza (3.22) wykazała, że nie istnieje wspólny przedział dla kąta θ , w którym zachodziłyby wymagane dla stateczności warunki $R(r, \theta) = 0$ i $S(r, \theta) < 0$.

Analiza (3.23) daje w rezultacie następujące przedziały kąta θ :

$$(3.24) \quad \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{1} \operatorname{arcsin} \frac{2}{\alpha} \right) + n\pi < \theta < \left(\pi + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{2}{\alpha} \right) + n\pi, \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

oraz warunki identyczne, jak (3.18), (3.19) i (3.20), (3.21). W przypadku II, kąt θ , dla którego jest

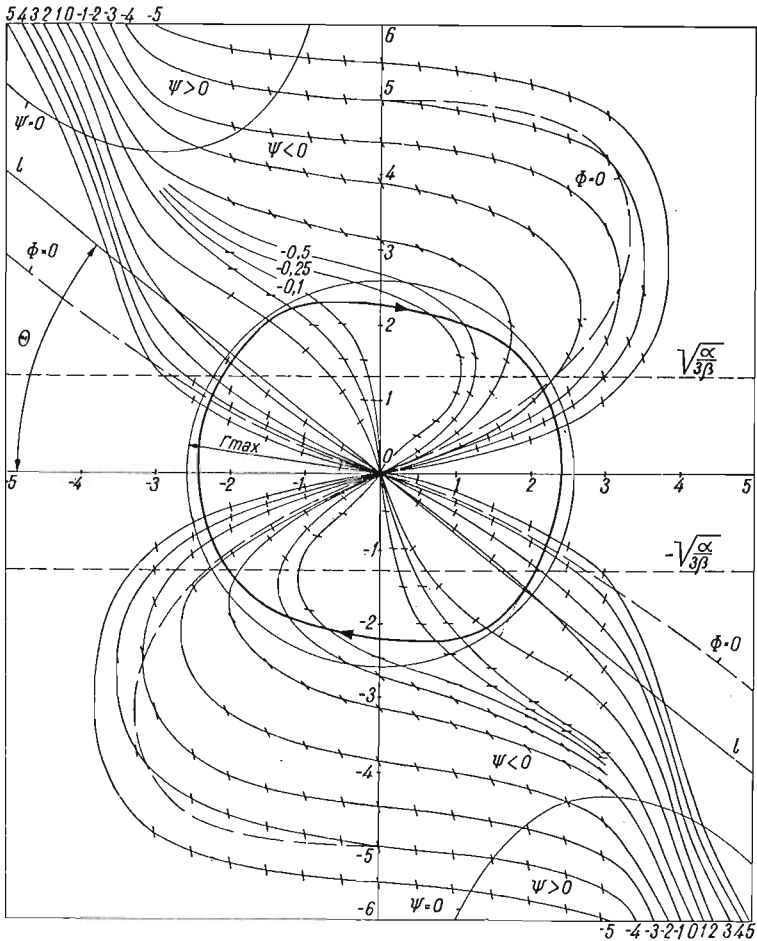
$$R(r, \theta) = 0 \quad \text{i} \quad S(r, \theta) < 0$$

należy ostatecznie wybierać z części wspólnej przedziałów: (3.13), (3.24), (3.18) i (3.19) lub (3.13), (3.24), (3.20) i (3.21).

Dla przypadku III, $\alpha = 2$ wspólny przedział θ , dla którego funkcje $R(r, \theta)$ i $S(r, \theta)$ spełniałyby wspomniane warunki, nie istnieje.

A.3. Obliczmy funkcję $g(r)$:

$$g(r) = \int_0^{2\pi} S(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (r \sin \theta \cos \theta + r \alpha \sin^2 \theta - \beta r^3 \sin^4 \theta - \gamma r^3 \sin \theta \cos^3 \theta - \\ - r \sin \theta \cos \theta) d\theta,$$



Rys. 1. Cykl graniczny równania Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystą

$$(3.25) \quad g(r) = -\pi r \left(\frac{3}{4} \beta r^2 - \alpha \right).$$

A.4. Badamy znak funkcji $g(r)$.

Dla $r > 0$ jest:

$$g(r) > 0, \quad \text{gdy} \quad 0 < r < 2 \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}},$$

$$g(r) = 0, \quad \text{gdy} \quad r = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}},$$

$$g(r) < 0, \quad \text{gdy} \quad r > 2 \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}.$$

Skąd wniosek, że dla rozpatrywanego równania istnieje stateczny cykl graniczny.

Jako przykład liczbowy rozpatrzmy równanie Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystą dla następujących wartości współczynników:

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{5}, \quad \gamma = \frac{1}{10}.$$

Cykl graniczny, dla tego przypadku równania jest przedstawiony na rys. 1. Na rysunku tym znajdują się także krzywe $\Phi(x, y) = 0$ i $\Psi(x, y) = 0$, obszar otrzymany z warunku negatywnego Bendixona, w którym nie istnieją trajektorie zamknięte (ograniczony prostymi równoległymi do osi $x: y = \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}$), oraz prosta ukośna l , przechodząca przez początek układu współrzędnych ograniczająca z jednej strony obszar kąta Θ , otrzymany z części wspólnej przedziałów (3.13), (3.18) i (3.19) po podstawieniu wartości liczbowych. Okrąg o promieniu r_{\max} był otrzymany z warunku (3.12). Cykl graniczny został wyznaczony przy pomocy metody izoklin. Jak widać z rysunku leży on całkowicie w obszarze, w którym funkcja $\Psi(x, y) < 0$, a więc $R'(x, y) < 0$. Zauważmy, że ograniczający go okrąg o promieniu $r_{\max} = 2,58$ leży także w tym obszarze. Jak wspominaliśmy wcześniej, w takim przypadku wystarczyło tylko zbadać znak funkcji $g(r)$, co dałoby pełną odpowiedź o stateczności.

Na zakończenie podajemy równania izoklin i krzywych $\Psi(x, y)$, oraz $\Phi(x, y)$. Są one następujące:

$$(3.26) \quad y^3 - 5(1-c)y + 5x + 0,5x^5 = 0, \quad c = \text{const} > 0,$$

$$(3.27) \quad \Psi(x, y) = -0,2xy^3 - y^2 - xy - 0,1x^4 - x^2,$$

$$(3.28) \quad \Phi(x, y) = -0,2y^4 + y^2 - 0,1x^3y.$$

4. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda zawiera szereg elementów z istniejących już znanych metod, co świadczy o jej słuszności. Podany algorytm jest wygodnym schematem badania stateczności układów. Należy także podkreślić, że podobnie jak bezpośrednia metoda LAPUNOWA, nie wymaga rozwiązywania równań. Trudności mogą wystąpić przy badaniu funkcji $R(r, \Theta)$ i $S(r, \Theta)$, w punkcie A.2 algorytmu, ponieważ może zaistnieć potrzeba rozwiązania układu: równanie–nierówność wysokiego stopnia.

Na podstawie algorytmu można także wyznaczyć krzywe stykowe cykli granicznych.

Nowa jest interpretacja fizyczna: traktowanie układu jako pola dynamicznego oddziaływającego na znajdujący się w nim punkt materialny. Przy pomocy łatwej do obliczenia funkcji $g(r)$ można stwierdzić, czy energia tego punktu pod wpływem sił pola zwiększa się czy też ulega zmniejszeniu, a więc czy układ posiada cechy niestateczności czy też jest stateczny.

Przedstawiona metoda odnosi się do układów o jednym stopniu swobody, które można opisać układem dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu. Wydaje się, że można ją rozszerzyć przynajmniej na układy, które dają się opisać przy pomocy trzech równań różniczkowych rzędu pierwszego.

Literatura cytowana w tekście

1. Y. SUZUKI, S. IMAI, *A new method of analysing the stability of nonlinear systems*, Bull. of the Tokyo Inst. of Technol., 113 (1972), 1.
2. Wł. BOGUSZ, *Stateczność układów nieliniowych*, Warszawa 1966.
3. Ch. HAYASHI, *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*, Warszawa 1968.

Резюме

О НЕКОТОРОМ НОВОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В работе сравнивается новый метод исследования устойчивости нелинейных систем, предложенный в работе [1], с некоторыми существующими методами. При этом подчеркнуты общие свойства и новые элементы. Проведено исследование устойчивости уравнения Релея с нелинейной характеристикой упругости с помощью алгоритма, представленного в работе [1]. На рис. 1 показан предельный цикл для этого уравнения. Доказана устойчивость этого цикла.

Summary

ON A CERTAIN NEW METHOD OF ANALYZING THE STABILITY OF SOLUTIONS FOR
NONLINEAR SYSTEMS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

In this paper, a certain method of investigating the stability of nonlinear systems presented in [1] is compared with some existing methods. Common features and new elements of this method are exposed. The algorithm used in the method is applied for investigation of the stability of Rayleigh's equation with nonlinear elasticity characteristics.

The limit cycle for that equation is presented in Fig. 1. Stability of the limit cycle is proved in the present paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

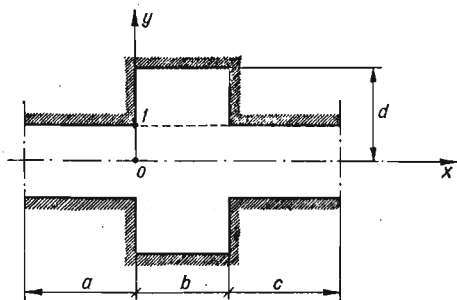
Praca została złożona w Redakcji dnia 12 sierpnia 1974 r.; w wersji ostatecznej — dnia 12 lutego 1975 r.

POWOLNY PRZEPŁYW CIECZY LEPKIEJ W PŁASKIM KANALE O NAGŁYM LOKALNYM
ROZSZERZENIU

EDWARD WALICKI, ANDRZEJ TOPOLIŃSKI (BYDGOSZCZ)

Przepływy cieczy lepkich w kanałach płaskich i okrągłych o lokalnych zmianach przekroju występują w różnych zagadnieniach technicznych i od dawna budziły zainteresowanie wielu autorów. W pracy [2] dokonano przeglądu technicznych zagadnień przepływowych, które można sprowadzić do modelu przepływu w kanale o lokalnej zmianie przekroju. W pracach [13, 14] podano przykłady zastosowań biologicznych takiego modelu przepływu.

Badaniami płaskich przepływów w kanałach o nagłych rozszerzeniach — lub przepływów, które do takiego modelu dały się sprowadzić — zajmowano się w pracach [3, 7–11, 17, 19, 21]. Natomiast prace [3, 13, 20] podają opisy przepływów osiowo-symetrycznych w kanałach okrągłych o nagłych zmianach przekroju.



Rys. 1

Celem tej pracy jest uzyskanie numerycznego rozwiązania zagadnienia powolnego, ustalonego przepływu cieczy lepkiej w płaskim kanale o nagłym lokalnym rozszerzeniu (rys. 1). Przyjęto następujące założenia upraszczające dotyczące właściwości cieczy: $\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Równaniami określającymi stan mechaniczny przepływającej cieczy są, przy tych założeniach, równania Naviera–Stokesa i równanie ciągłości.

Badanie przepływu cieczy ograniczono do przypadku przepływu symetrycznego i do małych liczb Reynoldsa ($Re \leq 50$), dla których przepływ jest stateczny [4, 5, 8, 18]. Wymiary a i c przyjęto na tyle duże, by — przy zmiennych wymiarach b i d — wpływ zaburzeń powstałych w miejscach zmian przekroju kanału na rozkład prędkości na wlocie i wylocie z kanału był pomijalnie mały.

1. Równania ruchu i warunki brzegowe

Dla płaskiego ustalonego przepływu cieczy lepkiej równania Naviera-Stokesa i równanie ciągłości mają postać:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając funkcję prądu określoną zależnościami

$$(1.2) \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

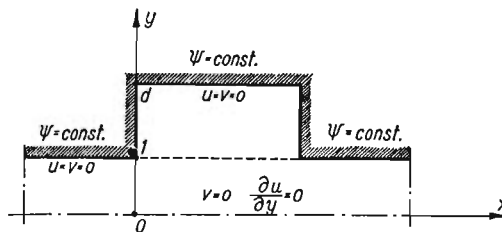
oraz eliminując ciśnienie p z układu równań (1.1) otrzymamy [1]

$$(1.3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu \Delta \zeta.$$

Tutaj ζ jest wirowością związaną z funkcją prądu ψ zależnością

$$(1.4) \quad \Delta \psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta.$$

W wyniku przyjętego wyżej założenia symetrii przepływu można rozważać obszar «półkowy» przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2

Aby uzyskane rozwiązanie układu równań (1.3), (1.4) równoważnego układowi (1.1) było dogodnie w praktycznych zastosowaniach wprowadzimy zmienne bezwymiarowe.

Niech będzie:

U_1 średnią prędkością przepływu cieczy w węższej części kanału,

$2L_1$ szerokością tej części kanału,

U_2 średnią prędkością przepływu cieczy w szerszej części kanału,

$2L_2$ szerokością tej części kanału.

Z warunku ciągłości przepływu cieczy w kanale wynika równość

$$2U_1L_1 = 2U_2L_2,$$

stąd

$$\text{Re} = \text{Re}_1 = \text{Re}_2,$$

gdzie

$$\text{Re}_1 = \frac{2U_1 L_1}{\nu}, \quad \text{Re}_2 = \frac{2U_2 L_2}{\nu}.$$

Oznaczając $L = L_1$, $U = U_1$ oraz kreskując wielkości bezwymiarowe otrzymamy związki:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x &= Lx', & y &= Ly', & u &= Uu', & v &= Uv', \\ p &= \frac{1}{2} \rho U^2 p', & \psi &= UL\psi', & \zeta &= \frac{U}{L} \zeta', & \text{Re} &= \frac{2UL}{\nu}. \end{aligned}$$

Wprowadzając zależności (1.5) do równań (1.1) lub do równań (1.3), (1.4) otrzymamy bezwymiarową postać równań ruchu. Opuszczając w tych równaniach (dla uproszczenia zapisu) kreski przy wielkościach bezwymiarowych otrzymamy

$$(1.6) \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \text{Re} = \Delta \zeta,$$

$$(1.7) \quad \Delta \psi = \zeta.$$

Warunki brzegowe dla równań (1.6), (1.7) i obszaru przepływu ograniczonego, jak na rys. 2, przyjęto w postaci:

a) ciecz na «wejściu» $x = -a$ i na «wyjściu» $x = b+c$ z kanału płynie ruchem laminarnym o parabolicznym rozkładzie prędkości. Oznacza to, że funkcja prądu ma następującą postać na «wejściu» i na «wyjściu» z kanału

$$(1.8) \quad \psi = \left(y - \frac{y^3}{3} \right),$$

natomiast zgodnie z zależnością (1.4), funkcja wirowości określona jest wzorem

$$(1.9) \quad \zeta = -2y;$$

b) składowe prędkości na ściankach kanału spełniają zależności

$$U = v = 0;$$

wynikają stąd warunki:

$$(1.10) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0, \quad \psi = \text{const}$$

na ściankach kanału $\left(\frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial s} \right)$ oznaczają pochodne w kierunku normalnej i stycznej do ścianki);

c) składowe prędkości na osi symetrii spełniają warunki:

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

z warunkami tymi związane są na osi symetrii zależności

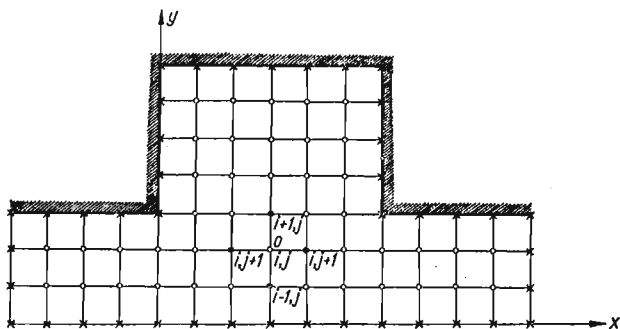
$$(1.11) \quad \zeta = 0, \quad \psi = 0.$$

2. Schemat różnicowy równań ruchu

Pokryjmy obszar przepływu płynu (rys. 3) siatką prostych równoległych odpowiednio do osi współrzędnych:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + ih \quad (i = 1, 2 \dots), \\y &= y_0 + jh \quad (j = 1, 2 \dots).\end{aligned}$$

Punkty przecięcia się prostych nazywać będziemy węzłami, a wielkość h — krokiem siatki.



Rys. 3

Dwa węzły nazywać będziemy sąsiednimi, jeżeli oddalone są od siebie w kierunku osi x lub y o wielkość kroku siatki. Węzły znajdujące się na brzegu obszaru przepływu nazywać będziemy węzłami brzegowymi, pozostałe węzłami wewnętrznymi. Na rys. 3, przedstawiającym obliczeniowy obszar przepływu, węzły brzegowe oznaczone krzyżykiem wyznaczają granicę siatkową obszaru; węzły wewnętrzne oznaczono kółkiem. Węzły siatki numerujemy przyporządkowując każdemu z nich numer wiersza i kolumny, w których się znajduje.

Zastępując pochodne występujące w równaniach (1.6) i (1.7) prostymi wyrażeniami różnicowymi [18, 19] otrzymujemy wzory dla $\psi_{i,j}$ oraz $\zeta_{i,j}$, w punkcie O w zależności od wartości tych funkcji w węzłach sąsiednich (zaczernionych na rys. 3):

$$(2.1) \quad \zeta_{i,j} = \frac{1}{4} (\zeta_{i+1,j} + \zeta_{i,j+1} + \zeta_{i-1,j} + \zeta_{i,j-1}) - \frac{\text{Re}}{32} [(\zeta_{i+1,j} + \zeta_{i-1,j})(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) + (\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1})(\psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j})],$$

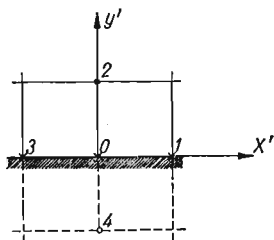
$$(2.2) \quad \psi_{i,j} = \frac{1}{4} (\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1}) - \frac{1}{4} h^2 \zeta_{i,j}.$$

3. Rozwiązywanie równań różnicowych

Przyjęte w poprzednim punkcie pracy przybliżone równania różnicowe rozwiążemy metodą iteracji. Po założeniu wartości początkowych $\psi_{i,j}^0$ oraz $\zeta_{i,j}^0$ we wszystkich węzłach siatki użyjemy zależności (2.1) i (2.2) do wyliczenia nowych wartości ψ i ζ w węzłach siatki.

Z istniejących metod iteracyjnych [6] wprowadzania «poprawionych» wartości ψ i ζ w pracy zastosowano tak zwaną stopniową jawną metodę polegającą na obliczaniu poszukiwanych wartości ψ i ζ z węzła na węzeł przy użyciu wartości dopiero co wyliczonych.

Wartości funkcji prądu i funkcji wirowości na granicach obszaru obliczeniowego rozdzielających obszar ciekły, to znaczy na wlocie i wylocie z kanału, są znane i stałe w ruchu ustalonym. Natomiast na ściankach znane są jedynie wartości funkcji prądu. Wartości funkcji wirowości są początkowo (tak, jak w całym obszarze obliczeń) założone możliwie blisko przewidywanych, a następnie w toku procesu iteracyjnego przybliżane za pomocą przedstawionego dalej postępowania.



Rys. 4

Rozważmy wartości ψ w otoczeniu punktu O leżącego na brzegu obszaru (rys. 4). Linie siatki przedstawionej na rysunku są odpowiednio prostopadłe i równoległe do ścianki ograniczającej przepływ cieczy. Rozwijając ψ w szereg Taylora — względem zmiennej y — w otoczeniu punktu O otrzymamy

$$(3.1) \quad \psi_2 = \psi_0 + h \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right)_0 + \dots$$

Z równania (1.7) otrzymujemy dla punktu O

$$(3.2) \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 = \zeta_0 - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0.$$

Różniczkując (1.7) względem y otrzymamy

$$(3.3) \quad \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right)_0 = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_0 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0,$$

$$\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_0 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right)_0.$$

Uwzględniając (3.2), (3.3) oraz dwie pierwsze zależności warunków (1.10), otrzymamy

$$(3.4) \quad \psi_2 = \psi_0 + \frac{h^2}{2} \zeta_0 + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_0 + \frac{h^4}{24} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right)_0 \right].$$

Rozwijając następnie ζ względem y w szereg Taylora w otoczeniu punktu O

$$\zeta_2 = \zeta_0 + h \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_0 + O(h^3)$$

i wyznaczając stąd $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_0$, znajdziemy

$$(3.5) \quad \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_0 = \frac{h^2}{6} (\zeta_2 - \zeta_0) - \frac{h^4}{12} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)_0 + O(h^5).$$

Uwzględniając (3.5) w (3.4), otrzymamy

$$\psi_2 = \psi_0 + \frac{h^2}{3} \zeta_0 + \frac{h^2}{6} \zeta_2 - \frac{h^4}{24} \left[\nabla^2 \zeta_0 - \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}\right)_0 \right] + O(h^5)$$

lub po przekształceniu

$$\zeta_0 = \frac{3(\psi_2 - \psi_0)}{h^2} - \frac{\zeta_2}{2} + \frac{h_2}{8} \left[\nabla^2 \zeta_0 - \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}\right)_0 \right] + O(h^3).$$

Zauważmy, że na mocy warunków brzegowych (1.10) oraz zależności (1.6) wyrażenie w nawiasie «kwadratowym» znika w punkcie O . Będzie więc

$$(3.6) \quad \zeta_0 = \frac{3(\psi_2 - \psi_0)}{h^2} - \frac{\zeta_2}{2}.$$

Bezpośrednie stosowanie wzoru (3.6) na brzegu obszaru może doprowadzić, przy większych liczbach Reynoldsa, do nieustalonych oscylacji pola wartości funkcji wirowości. Aby więc uniknąć tego, nie stosuje się w nowym cyklu iteracji wartości bezpośrednio wyliczonej z wzoru (3.6), lecz jej kombinację liniową z wartością z poprzedniego cyklu. Najczęściej stosowaną i najprostszą w użyciu jest kombinacja postaci

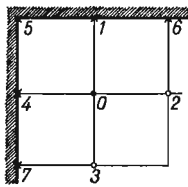
$$(3.7) \quad \zeta_0^{(n)} = \zeta_0^{(n-1)} + k [\zeta_0 - \zeta_0^{(n-1)}],$$

gdzie $\zeta_0^{(n-1)}$ oznaczają poprzednią wartość brzegową, ζ_0 — nową wartość brzegową (liczona według wzoru (3.6)), $\zeta_0^{(n)}$ — wartość brzegową wprowadzoną do nowego cyklu iteracyjnego.

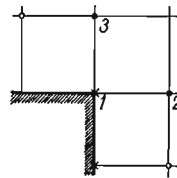
W pracy przyjęto stałą wartość parametru k równą $k = 0,5$; wtedy wzór (3.7) dla poprawiania wartości brzegowych przyjmie postać dla n -tej iteracji

$$(3.8) \quad \zeta_0^{(n)} = \frac{1}{2} \left[\zeta_0^{(n-1)} + \frac{3(\psi_2^{(n)} - \psi_0^{(n)})}{h^2} - \frac{\zeta_2^{(n)}}{2} \right].$$

Również specjalnego traktowania wymagają naroża występujące w obszarze przepływu.



Rys. 5



Rys. 6

Rozważmy najpierw naroże wklęsłe przedstawione na rys. 5. Wartości brzegowe w punktach 1 i 6 poziomej ścianki naroża oraz w punktach 4 i 7 pionowej ścianki naroża wyliczamy posługując się zależnością (3.8) zastosowaną odpowiednio do punktów 0, 2, 3. Wartość ζ w punkcie 5 naroża musi być równa wspólnej wartości w punktach 1 i 4

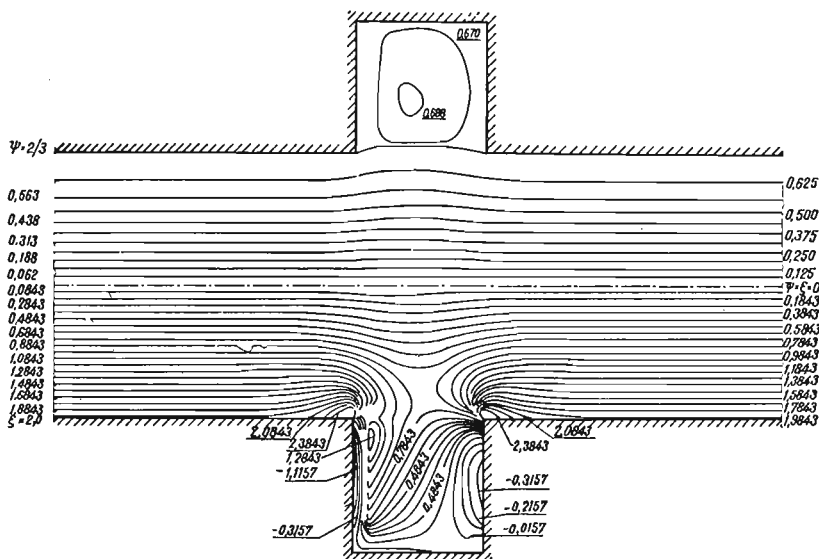
$$\zeta_5 = \zeta_1 = \zeta_4.$$

Dla przypadku naroża wypukłego przedstawionego na rys. 6 postępujemy inaczej. Ponieważ w punkcie brzegowym naroża występuje duży gradient wartości funkcji wirowości — wprowadzamy tutaj dwie różne wartości. Jedną z nich wyliczamy przy użyciu zależności (3.8) i odpowiednich wartości w punktach 1 i 2, drugą zaś przy użyciu odpowiednich wartości z punktów 1 i 3. W pozostałych punktach brzegowych bliskich naroża poprawiamy wartości ζ stosując normalne postępowanie wynikające z zależności (3.8).

4. Wyniki obliczeń — uwagi końcowe

Zastosowany w pracy prosty schemat różnicowy dla równań Naviera-Stokesa charakteryzuje się dla małych liczb Reynoldsa stabilnością i zbieżnością [4, 5, 12, 18], a ponadto wyniki teoretyczne uzyskiwane przy użyciu jego różnych odmian są zgodne z wynikami doświadczeń.

Obliczenia przepływu przeprowadzono dla liczb Reynoldsa $Re = 0, 1, 5, 10, 20, 50$; wymiary rozszerzenia przyjęto $d \times b = 2 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 1, 3 \times 2$.



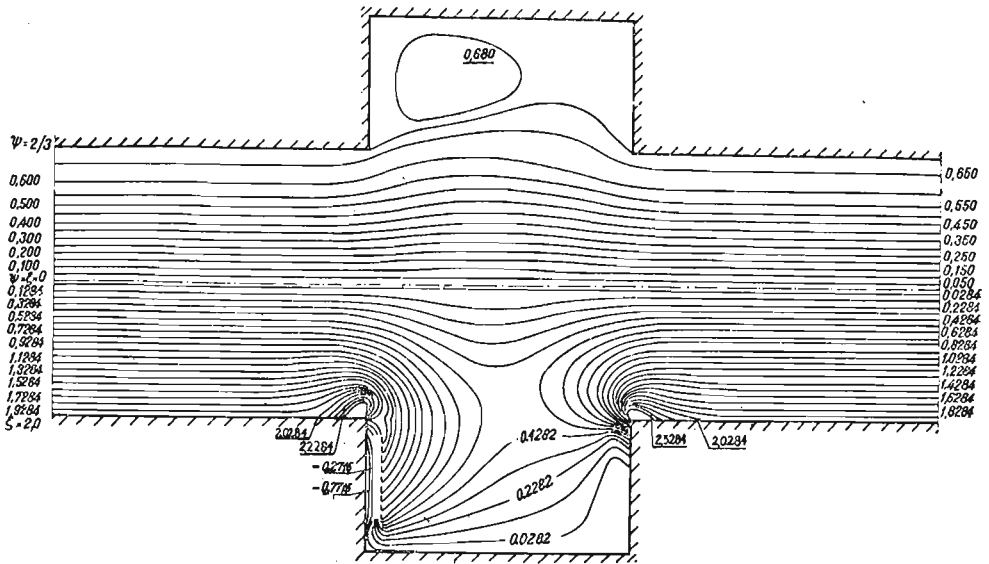
Rys. 7. Kanał o wymiarach rozszerzenia $d \times b = 2 \times 1$; linie prądu $\Psi = \text{const}$ (nad osią symetrii) i wirowości $\zeta = \text{const}$ (pod osią symetrii); liczba Reynoldsa $Re = 5$

Na rys. 7, 8 - 14 przedstawiono, sporządzone na podstawie obliczeń, wykresy linii $\psi = \text{const}$ (nad osią symetrii) $\zeta = \text{const}$ (pod osią symetrii) dla różnych rozszerzeń kanału i liczb Reynoldsa $Re = 5, 50$.

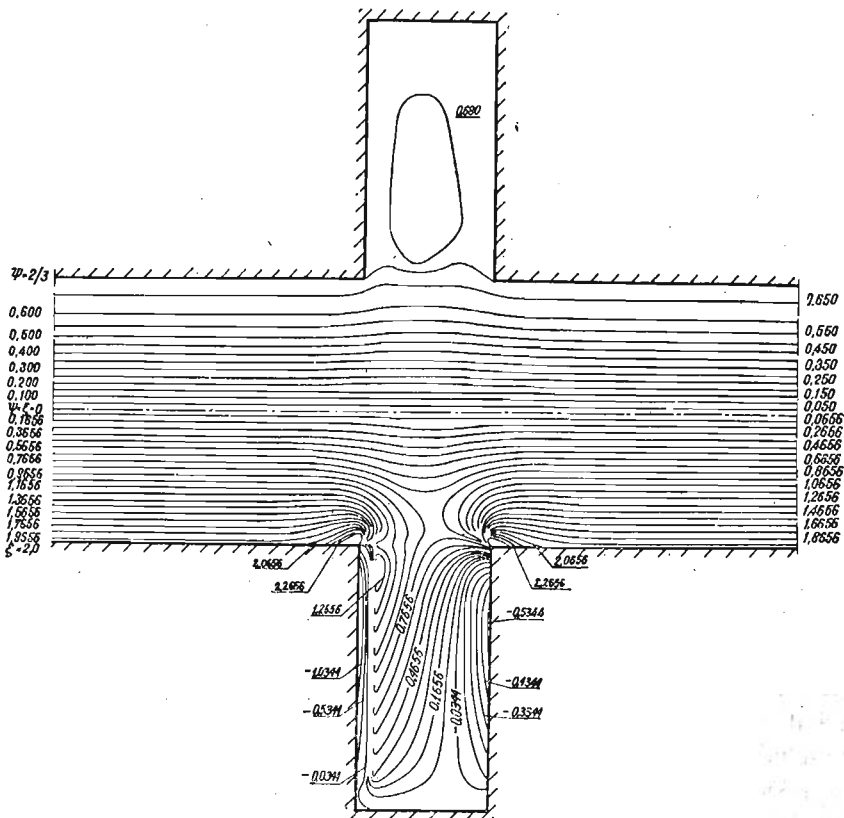
Na podstawie przeprowadzonych obliczeń i badań wykresów funkcji prądu i funkcji wirowości można sformułować następujące wnioski dotyczące omawianego tutaj płaskiego powolnego przepływu w kanale o lokalnym rozszerzeniu:

dla «wąskich» uskoków o wymiarach $d \times b = 2 \times 1, 3 \times 1$:

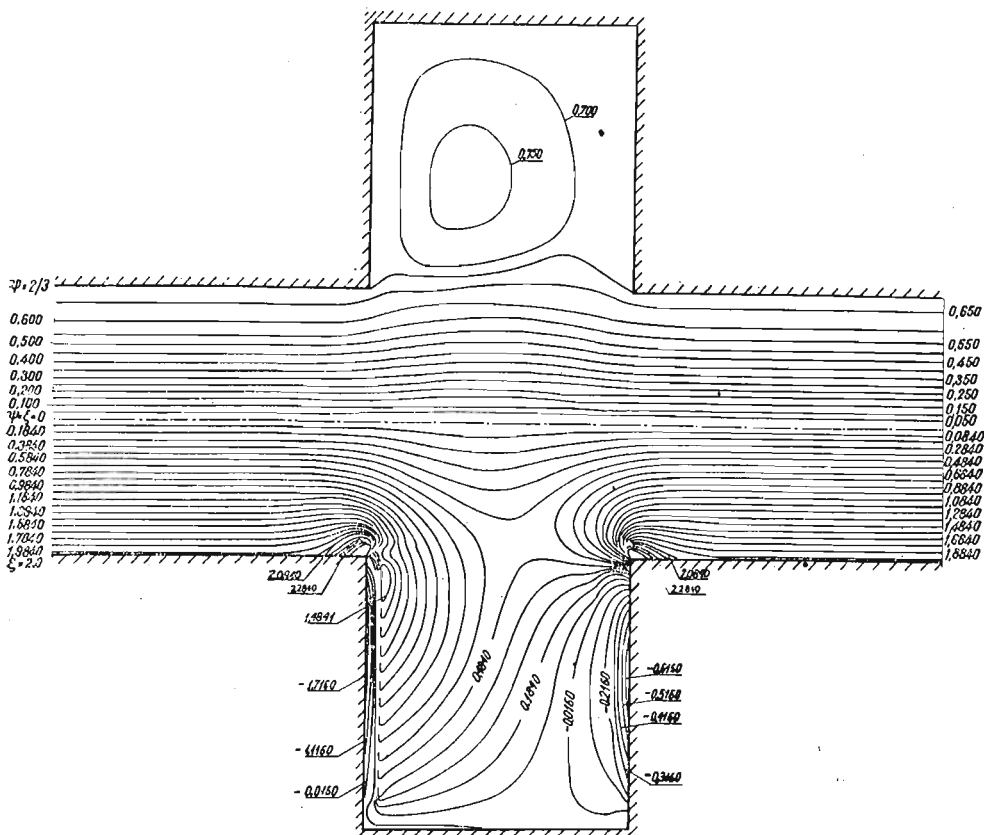
- a) linia oderwania charakteryzuje się dość wyraźną symetrią względem osi uskoku,
- b) obszar zastoju nie ulega większym zmianom ze wzrostem liczby Reynoldsa;



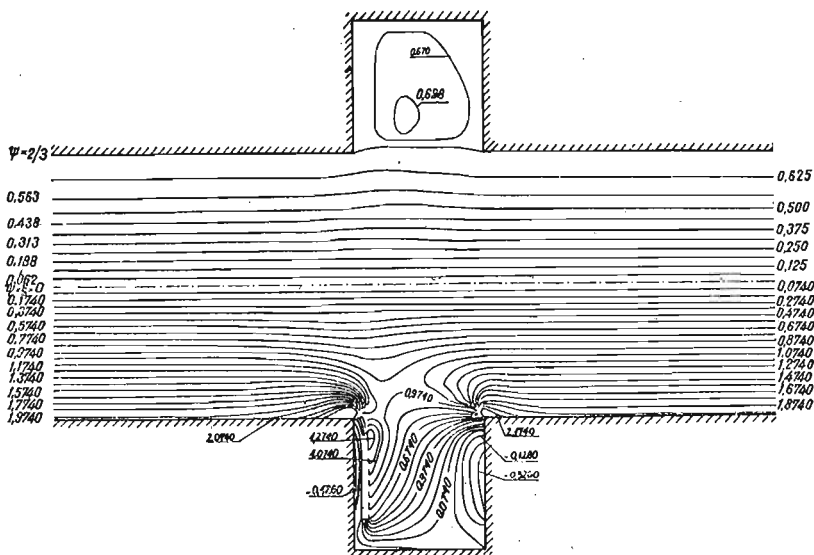
Rys. 8. Kanał o wymiarach rozszerzenia $d \times b = 2 \times 2$; $Re = 5$



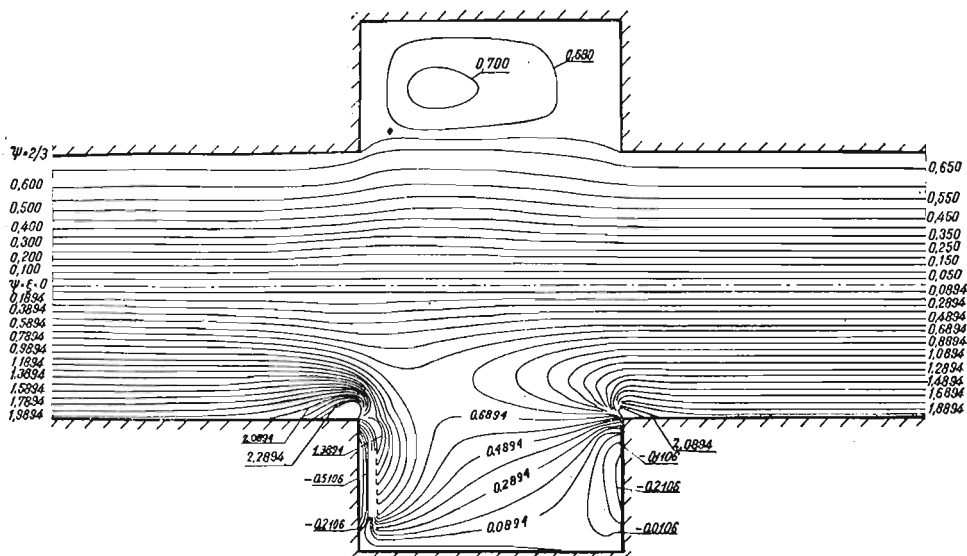
Rys. 9. Kanał o wymiarach rozszerzenia $d \times b = 3 \times 1$; $Re = 5$



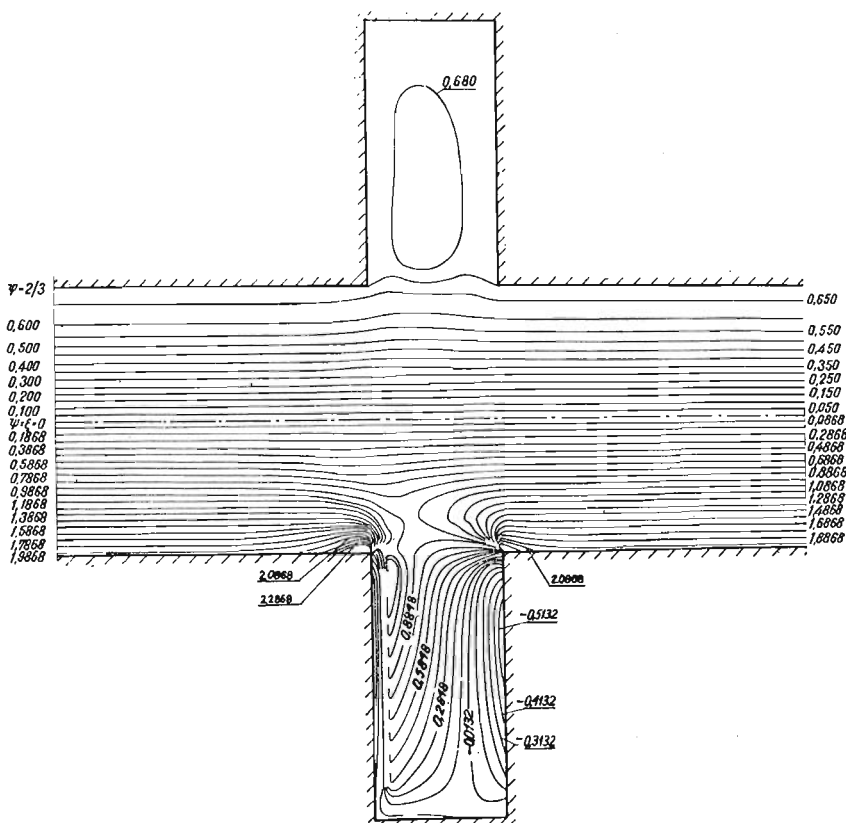
Rys. 10. Kanał o wymiarach rozszerzenia $d \times b = 3 \times 2$; $Re = 5$



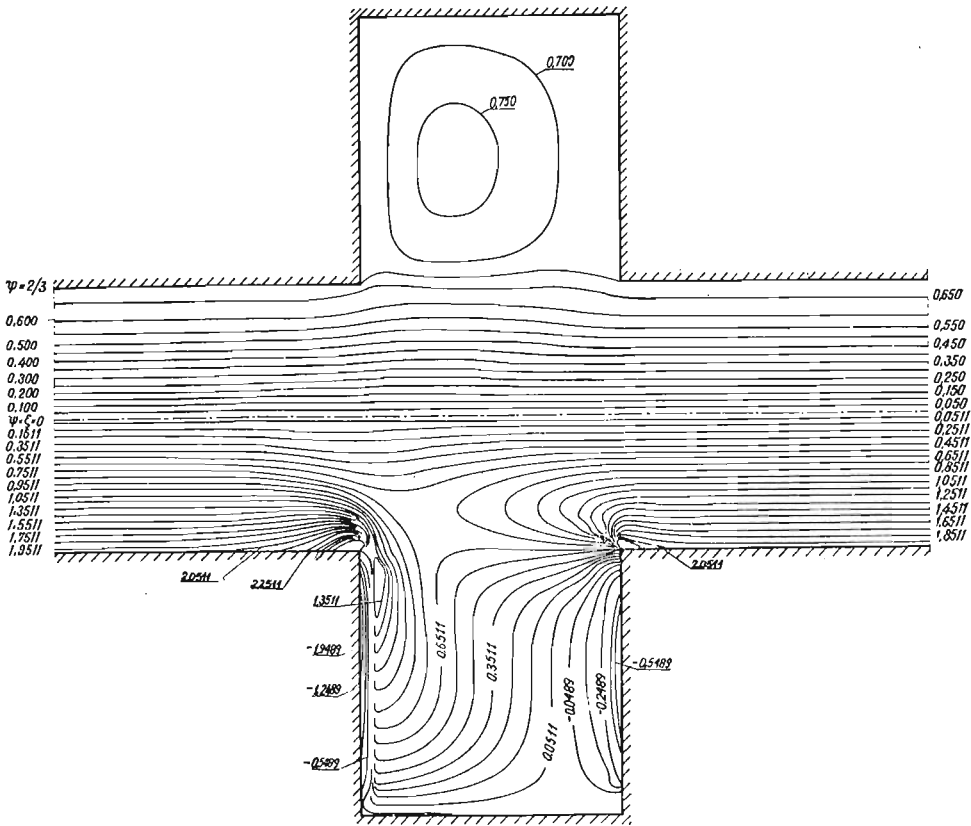
Rys. 11. Kanał o wymiarach rozszerzenia $d \times b = 2 \times 1$; $Re = 50$



Rys. 12. Kanał o wymiarach rozszerzenia $d \times b = 2' \times 2$; $Re = 50$



Rys. 13. Kanał o wymiarach rozszerzenia $d \times b = 3 \times 1$; $Re = 50$



Rys. 14. Kanał o wymiarach rozszerzenia $d \times b = 3 \times 2$; $Re = 50$

dla «kwadratowego» uskoku o wymiarach $d \times b = 3 \times 2$;

c) obszar zastoju ulega nieznacznemu powiększeniu ze wzrostem liczby Reynoldsa;

dla «prostokątnego» uskoku o wymiarach $d \times b = 2 \times 2$;

d) obszar zastoju wyraźnie rośnie ze wzrostem liczby Reynoldsa,

e) ze wzrostem liczby Reynoldsa pojawia się dość wyraźna symetria linii oderwania;

dla wszystkich rodzajów uskoków:

f) środek wiru w obszarze zastoju leży bliżej ścianki będącej po stronie wlotu kanału,

g) ze wzrostem liczby Reynoldsa wzrastają wartości wirowości na ściankach uskoku.

Literatura cytowana w tekście

1. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*, t. I, PWN, Warszawa 1970.
2. P. K. CHANG, *Separation of flow*, Pergamon Press, 1966.
3. A. THOM, C. J. APELT, G. F. J. TEMPLE, *Field computations in engineering and physics*, van Nostrand Inc., New-York 1961.
4. A. THOM, C. J. APELT, *Note on the convergence of numerical solutions of the Navier-Stokes equations*, ARC, RaM, No 3061 (1956).

5. W. G. S. LESTER, *Some convergence problems in the numerical solutions of the Navier-Stokes equations*, ARC, RaM, No 3329 (1950).
6. D. E. RUSSELL, *On obtaining solutions to the Navier-Stokes equations with automatic digital computers*, ARC, RaM, No 3331 (1962).
7. Л. М. Симуни, *Численное решение задачи движения жидкости в прямоугольной яме*, ПМТФ, 6 (1965).
8. C. E. PEARSON, *A computational method for viscous flow problems*, J. Fluid Mech., 4, 21 (1965).
9. O.R. BURGGRAF, *Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows*, J. Fluid Mech. 1, 24 (1966).
10. Х. Э. Калис, А. Б. Цинобер, *Плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости в каналах под влиянием поперечного магнитного поля*, Изв. Сиб. Отд. АН СССР, сер. тех. наук, № 8, вып. 2 (1967).
11. В. Н. Варапаев, *Численное исследование периодического струйного течения вязкой несжимаемой жидкости*, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 3 (1968).
12. К. Б. Джакупов, В. Г. Кузнецов, *О численном расчете стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости*, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1 (1969).
13. M. FRIEDMAN, *Flow in a circular pipe with recessed walls*, J. Appl. Mech., Trans ASME, ser. E, 1, 37 (1970).
14. J.S. LEE, J-Ch. FUNG, *Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, ser. E, 1, 37 (1970).
15. D. DUMITRESCU, M. D. CAZACU, *Theoretische und Experimentelle Betrachtungen über die Strömung zäher Flüssigkeiten um eine Platte bei kleinen und mittleren Reynoldszahlen*, ZAMM, 5, 50 (1970).
16. M. FORTIN, R. PEYRET, R. ТЕМАМ, *Calcul des écoulement d'un fluide visqueux incompressible*, Proc. Sec. Int. Con. Num. Methods Fluid Dyn., Sept. 17 - 19, 1970, Berkeley, Springer-Verlag, Berlin 1971.
17. R. PEYRET, J. LADEVÉZE, *Résolution numerique de l'écoulement dans un canal avec élargissement brusque*, Euromech Coll. 27 on Numerical methods for solving the Navier-Stokes equations, Aug. 16 - 19, 1972, Jablonna, Polska.
18. E. WALICKI, *Stabilność i zbieżność prostego schematu różnicowego dla równań Naviera-Stokes'a*, Zeszyty Naukowe P. Ł., Mechanika, z. 29 (1972).
19. E. WALICKI, *Przepływ płynu lepkiego kanałem o nagłym rozszerzeniu*, Arch. Bud. Masz, 2, 20 (1973).
20. J. F. STEVENSON, *Flow in a tube with a circumferential wall cavity*, J. Appl. Mech. Trans ASME, ser. E, 2, 40 (1973).
21. Т. ИТО, Y. SUEMATSU, Y. SHIMOKAWA, K. TANAKA, *A study on a bistable fluid amplifier load oscillator*, Bull. JSME, 103, 17 (1974).

Р е з ю м е

МЕДЛЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ
С ВНЕЗАПНЫМ МЕСТНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

В работе представлено численное решение задачи о течении вязкой жидкости при малых значениях числа Рейнольдса в канале с внезапным местным расширением. Уравнения Навье-Стокса в форме Гельмгольца для плоского течения решены методом конечных разностей. Рассмотрено течение в каналах с разными размерами расширения. Результаты вычислений для чисел Рейнольдса $Re \leq 50$ представлены в виде графиков, линий тока и линий постоянной завихренности.

S u m m a r y

SLOW VISCOUS FLUID FLOW IN THE CHANNEL WITH A LOCALLY RECESSED WALLS

In this paper the numerical solution of viscous fluid flow with low Reynolds number in the channel with a locally recessed walls is described. The method of finite differences is used to solve the Navier-Stokes

equations in the Helmholtz form for two-dimensional flow. The flow through channels with different dimensions of local enlargement is considered. The results of numerical investigations for Reynolds number $Re \leq 50$ are shown in graphs of the streamlines and lines of constant vorticity.

AKDEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA, BYDGOSZCZ

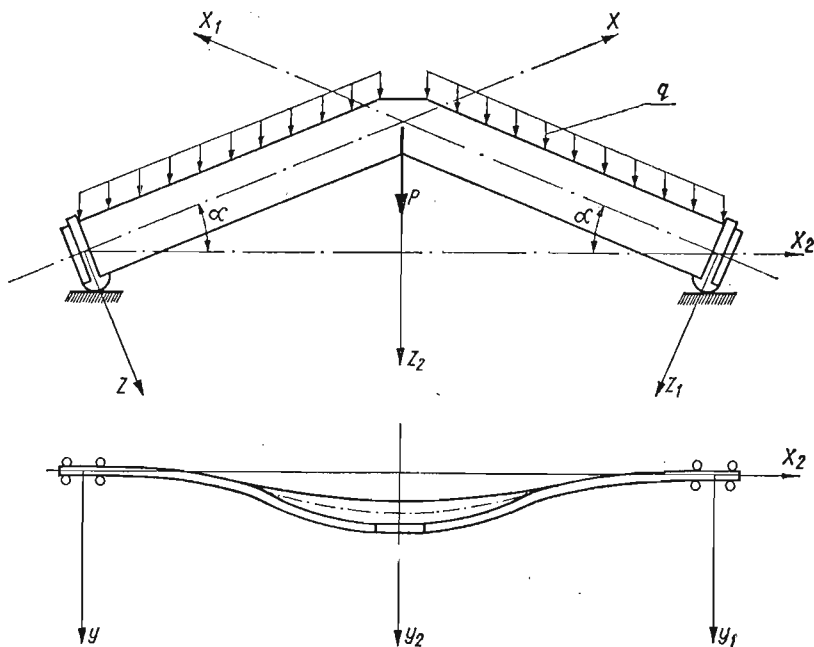
Praca została złożona w Redakcji 2 listopada 1974 r.

STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA BELKI O OSI ZAŁAMANEJ

ARNOLD WILCZYŃSKI (POZNAŃ)

1. Wstęp

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania belki dwupodporowej, której oś tworzy linię łamaną (rys. 1). Przyjęto symetryczny układ ramion belki względem osi pionowej z_2 i ograniczono się do przypadku, w którym sztywność belki na skręcanie nieswobodne jest równa zero.



Rys. 1

Przyjęto, że belka poddana jest działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia pionowego q i pionowej siły skupionej P działającej wzdłuż osi symetrii z_2 .

O podporach założono, że uniemożliwiają obrót końców belki względem jej osi oraz względem osi z i z_1 .

Odnosnie do przekroju poprzecznego belki założono, że osie y i z prostokątnego układu x, y, z są głównymi centralnymi osiami bezwładności oraz że sztywność zginania względem osi y jest duża w porównaniu ze sztywnością względem osi z .

Celem pracy jest wyznaczenie pierwszych krytycznych wartości obciążenia $(P, ql)_k$ w zależności od kąta α nachylenia ramienia belki, stosunku wypadkowej obciążenia ciągłego do wartości siły skupionej i odległości miejsca przyłożenia obciążenia ciągłego od osi sił poprzecznych.

Przyjmując, że po utracie stateczności ramiona belki odkształcą się symetrycznie sprowadzono równania różniczkowe równowagi obojętnej ramienia belki do układu dwóch równań całkowych Volterry drugiego rodzaju, których rozwiązania przybliżone wyznaczono metodą iteracji. Na podstawie warunków brzegowych otrzymano następnie warunek służący do określenia obciążeń krytycznych.

Wyniki obliczeń numerycznych, dotyczące belek stalowych o przekroju w kształcie wydłużonego prostokąta, zestawiono w tablicach. W zakończeniu pracy podano przykład liczbowy.

2. Równania różniczkowe równowagi obojętnej

Konstrukcje tego typu, jak rozpatrywana w pracy belka, wykonuje się na ogół z dwóch symetrycznych ramion połączonych węzłem usztywnionym nakładkami. Przyjęto, że węzeł ten ma kształt trójkąta ABC (rys. 2) oraz że pionowa siła P jest zaczepiona w połowie jego wysokości (punkt E). Należy zaznaczyć, że punkt zaczepienia siły P , będącej wypadkową układu sił zewnętrznych działających na węzeł, może przyjmować w praktyce dowolne położenie na osi symetrii z_2 . Jednakże, w celu zmniejszenia liczby dowolnych parametrów występujących w pracy, przyjęto do dalszych rozważań, że miejscem zaczepienia siły P jest punkt E .

Zakładając idealną sztywność węzła, przy przyjętym jego kształcie i punkcie zaczepienia siły P , otrzymujemy model, który stosunkowo łatwo można opisać matematycznie.

Powyższe założenie o idealnej sztywności węzła nie jest oczywiście w zupełności zgodne z rzeczywistością mimo wzmocnień konstrukcyjnych (nakładek). Z uwagi jednak na proporcje wymiarowe układu jest do przyjęcia, zgodnie z zasadą de Saint-Venanta.

Przystępując do wyprowadzenia równań równowagi obojętnej należy zauważyć, że ze względu na symetrię układu, jak i obciążenia, pierwsza postać utraty stateczności będzie symetryczna względem osi y_2 (rys. 1).

Układ sił działających po utracie stateczności na oswobodzoną z więzów belkę przedstawiono na rys. 2, przy czym oznaczono:

M_x moment oddziaływania utwierdzenia w płaszczyźnie xy ,

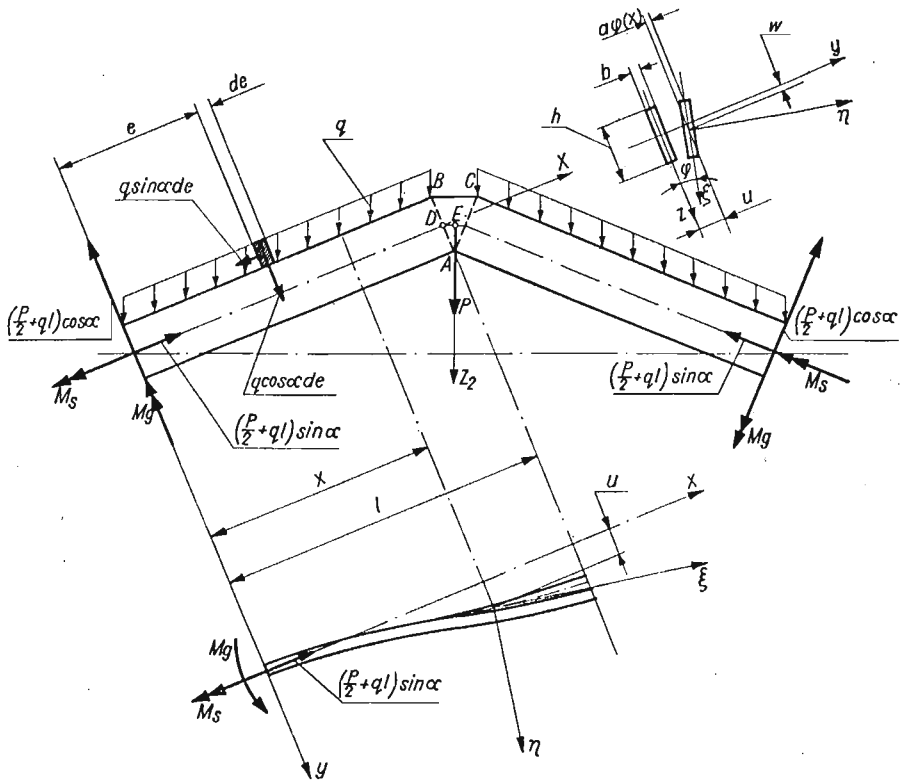
M_y moment oddziaływania utwierdzenia w płaszczyźnie yz ,

a odległość od środka ciężkości przekroju do znajdującego się nad nim punktu przyłożenia obciążenia ciągłego, przy czym $0 \leq a \leq 1/2h$.

Dla $0 \leq x \leq l$ położenie dowolnego przekroju poprzecznego belki po utracie stateczności będzie określone następującymi składowymi:

- przemieszczeniem u środka ciężkości przekroju w kierunku osi y ,
- przemieszczeniem w środka ciężkości przekroju w kierunku osi z ,
- kątem obrotu φ przekroju w płaszczyźnie yz .

Przy tym przemieszczenie w jest pomijalnie małe z uwagi na założenie, że sztywność



Rys. 2

zginania względem osi \$y\$ jest znacznie większa od sztywności względem osi \$z\$. Dlatego w dalszym ciągu pracy składowa \$w\$ oraz jej pochodne nie będą uwzględniane.

Składowe momentów sił zewnętrznych działających na belkę wyrażają się w dowolnym miejscu \$x\$ wzorami:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -M_s + \left(\frac{P}{2} + ql\right) u(x) \cos \alpha - \int_0^x q [u(x) - u(e) - a\varphi(e)] \cos \alpha de, \\
 M_y &= -\left(\frac{P}{2} + ql\right) x \cos \alpha + \int_0^x q (x - e) \cos \alpha de + \int_0^x q a \sin \alpha de, \\
 M_z &= -M_\theta + \left(\frac{P}{2} + ql\right) u(x) \sin \alpha - \int_0^x q [u(x) - u(e) - a\varphi(e)] \sin \alpha de.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Względem osi układu lokalnego \$\xi, \eta, \zeta\$, związanego ze zwichrzonym przekrojem w miejscu \$x\$, składowe momentów wynoszą:

$$\begin{aligned}
 M_\xi &= M_x \cos(x, \xi) + M_y \cos(y, \xi) + M_z \cos(z, \xi), \\
 M_\eta &= M_x \cos(x, \eta) + M_y \cos(y, \eta) + M_z \cos(z, \eta), \\
 M_\zeta &= M_x \cos(x, \zeta) + M_y \cos(y, \zeta) + M_z \cos(z, \zeta).
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Występujące w powyższych równaniach cosinusy kierunkowe z dokładnością do małych pierwszego rzędu mają wartości podane w tablicy 1.

Tablica 1. Cosinusy kątów między osiami x, y, z a osiami ξ, η, ζ

| | x | y | z |
|---------|-------|------------|-----------|
| ξ | 1 | u' | w' |
| η | $-u'$ | 1 | φ |
| ζ | $-w'$ | $-\varphi$ | 1 |

Równania równowagi belki w stanie zwichrzonym, po uwzględnieniu przyjętego we wstępie założenia, że sztywność deplanacji jest równa zero, z dokładnością do małych pierwszego rzędu są następujące:

$$(2.3) \quad EJ_{\zeta} \frac{d^2 u}{dx^2} = -M_{\zeta}, \quad GJ_k \frac{d\varphi}{dx} = -M_{\xi},$$

gdzie EJ_{ζ} oznaczają sztywność zginania belki względem osi ζ ,

GJ_k — sztywność skręcania belki względem osi ξ .

Po podstawieniu zależności (2.1) i (2.2) do równań (2.3) i pominięciu małych wyższego rzędu równania równowagi obojętnej przyjmą postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} EJ_{\zeta} u''(x) &= M_g + \left[q(x-l) - \frac{P}{2} \right] u(x) \sin \alpha + \left[q \left(\frac{x}{2} - l \right) - \frac{P}{2} \right] x \varphi(x) \cos \alpha + \\ &\quad + \left\{ \varphi(x) \int_0^x a de - \int_0^x [u(e) + a\varphi(e)] de \right\} q \sin \alpha, \\ GJ_k \varphi'(x) &= M_s + \left[q(x-l) - \frac{P}{2} \right] u(x) \cos \alpha + \left[\frac{P}{2} - q(x-l) \right] x u'(x) \cos \alpha - \\ &\quad - q \cos \alpha \int_0^x [u(e) + a\varphi(e)] de - q u'(x) \sin \alpha \int_0^x a de. \end{aligned}$$

Otrzymane równania są różniczkowo-całkowe, niedogodne do badań. Dlatego zróżniczkowano je, otrzymując układ równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} EJ_{\zeta} u''' + \left[\frac{P}{2} - q(x-l) \right] u' \sin \alpha + \left\{ \left[\frac{P}{2} - q \left(\frac{x}{2} - l \right) \right] x \cos \alpha - \right. \\ \left. - q a x \sin \alpha \right\} \varphi' + \left[\frac{P}{2} - q(x-l) \right] \varphi \cos \alpha = 0, \\ GJ_k \varphi'' + q a \varphi \cos \alpha - \left\{ \left[\frac{P}{2} - q \left(\frac{x}{2} - l \right) \right] x \cos \alpha - q a x \sin \alpha \right\} u' + q a u' \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\beta = \frac{Pl^2}{\sqrt{EJ_\zeta GJ_k}}, \quad \gamma = \frac{ql^3}{\sqrt{EJ_\zeta GJ_k}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\zeta}}, \quad \lambda = \frac{a}{l}$$

równania (2.5) przyjmą ostatecznie postać:

$$(2.6) \quad u''' + \left[\frac{\beta}{2} + \gamma \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] \frac{\omega}{l^2} u' \sin \alpha + \left[\frac{\beta}{2} + \gamma \left(1 - \frac{x}{2l} \right) \right] \frac{\omega}{l^2} x \varphi' \cos \alpha - \\ - \lambda \gamma \frac{\omega}{l^2} x \varphi' \sin \alpha + \left[\frac{\beta}{2} + \gamma \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] \frac{\omega}{l^2} \varphi \cos \alpha = 0, \\ \varphi'' + \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} \varphi \cos \alpha - \left[\frac{\beta}{2} + \gamma \left(1 - \frac{x}{2l} \right) \right] \frac{x}{\omega l^2} u'' \cos \alpha + \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} x u'' \sin \alpha + \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} u' \sin \alpha = 0.$$

3. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla rozpatrywanej belki po utracie płaskiej postaci zginania wynikają ze sposobu podparcia jej końców, układu geometrycznego jej ramion, rozmieszczenia obciążenia i przemieszczenia sztywnego węzła.

Z założeń dotyczących sposobu podparcia końców belki wynikają trzy warunki brzegowe

$$(3.1) \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Symetria obciążenia oraz kształtu belki powodują symetryczne odkształcenie ramion belki względem osi y_2 (rys. 1). Aby zwichrzony układ pozostawał w równowadze, musi być spełniona, wynikająca z równań statyki, następująca zależność wiążąca momenty podporowe M_s i M_g

$$2M_g \sin \alpha + 2M_s \cos \alpha = Pu(l) + 2q \int_0^l [u(x) + a\varphi(x)] dx.$$

Rozpatrując równania (2.4) w miejscu $x = 0$ otrzymamy po uwzględnieniu warunków (3.1)

$$M_g = EJ_\zeta u''(0), \quad M_s = GJ_k \varphi'(0).$$

Ostatecznie otrzymujemy warunek w postaci

$$(3.2) \quad 2EJ_\zeta u''(0) \sin \alpha + 2GJ_k \varphi'(0) \cos \alpha - Pu(l) - 2q \int_0^l [u(x) + a\varphi(x)] dx = 0.$$

Z symetrii odkształcenia belki wynika, iż wektor kąta obrotu przekroju leżącego na osi symetrii z_2 musi być równoległy do osi x_2 . Stąd otrzymujemy kolejny warunek

$$(3.3) \quad u'(l) \cos \alpha - \varphi(l) \sin \alpha = 0.$$

4. Funkcje $u(x)$ i $\varphi(x)$

Korzystając z faktu, że funkcje $u(x)$ i $\varphi(x)$ wraz ze swymi pochodnymi są ciągłe w przedziale $\langle 0, l \rangle$, możemy napisać

$$(4.1) \quad u(x) = u(0) + xu'(0) + \frac{1}{2}x^2u''(0) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u'''(t) dt,$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi''(t) dt.$$

Uwzględniając warunki brzegowe (3.1) i równania (2.6), oraz dokonując całkowania przez części znajdujemy:

$$(4.2) \quad u(x) = \frac{1}{2}x^2u''(0) - \frac{1}{2} \frac{\omega}{l^2} \sin \alpha \int_0^x \left[\beta(x-t) + \frac{\gamma}{l}(x^2 - 4xt + 3t^2 + 2lx - 2t) \right] u(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\omega}{l^2} \cos \alpha \int_0^x \left[\beta(xt - t^2) + \frac{\gamma}{l}(-xt^2 + t^3 + 2lxt - 2lt^2) \right] \varphi(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\omega}{l^2} \lambda \gamma \sin \alpha \int_0^x (x^2 - 4xt + 3t^2) \varphi(t) dt,$$

$$\varphi(x) = x\varphi'(0) + \frac{1}{\omega l^2} \left[\left(\frac{\beta}{2} + \gamma - \frac{\gamma x}{2l} \right) \cos \alpha - \lambda \gamma \sin \alpha \right] xu(x) -$$

$$- \frac{1}{\omega l^2} \cos \alpha \int_0^x \left[\beta + \frac{\gamma}{l}(x - 3t + 2l) \right] u(t) dt + \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} \sin \alpha \int_0^x u(t) dt - \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} \cos \alpha \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt.$$

Otrzymane równania stanowią układ równań całkowych Voltery drugiego rodzaju. W celu otrzymania ich rozwiązania przybliżonego zastosowano metodę kolejnych przybliżeń zgodnie ze schematem iteracyjnym

$$u_{n+1}(x) = u_0(x) + \int_0^x k_1(x, t, \beta, \gamma, \omega, \alpha) u_n(t) dt + \int_0^x k_2(x, t, \beta, \gamma, \omega, \alpha, \lambda) \varphi_n(t) dt,$$

$$(4.3) \quad \varphi_{n+1}(x) = \varphi_0(x) + f_1(x, \beta, \gamma, \omega, \alpha, \lambda) u_n(x) + \int_0^x k_3(x, t, \beta, \gamma, \omega, \alpha, \lambda) u_n(t) dt +$$

$$+ \int_0^x k_4(x, t, \gamma, \omega, \alpha, \lambda) \varphi_n(t) dt,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, przy czym przyjęto

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x^2u''(0), \quad \varphi_0(x) = x\varphi'(0).$$

Uzyskane rozwiązania mają postać

$$(4.4) \quad \begin{aligned} u(x) &= u''(0)F_1 + \varphi'(0)F_2, \\ \varphi(x) &= u''(0)F_3 + \varphi'(0)F_4, \end{aligned}$$

gdzie F_i są szeregami potęgowymi zmiennej x , o współczynnikach zależnych od parametrów $\beta, \gamma, \omega, \alpha$ i λ .

Ze względu na dużą pracochłonność metody, przy wyznaczaniu funkcji $u(x)$ i $\varphi(x)$ ograniczono się do trzech kroków iteracyjnych.

5. Krytyczne wartości obciążenia belki

Parę krytycznych wartości obciążenia P i q_l wyznaczmy z warunków brzegowych (3.2) i (3.3). Po wprowadzeniu do tych warunków zależności (4.4) otrzymamy układ dwóch równań liniowych jednorodnych względem $u''(0)$ i $\varphi'(0)$

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u''(0)A_{1,1} + \varphi'(0)A_{1,2} &= 0, \\ u''(0)A_{2,1} + \varphi'(0)A_{2,2} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $A_{i,k} = f(\beta, \gamma, \omega, \alpha, \lambda)$.

Tablica 2. Współczynnik stateczności β w zależności od α, λ i γ/β

| $\frac{\gamma}{\beta}$ | $\lambda \backslash \alpha$ | $\sin \alpha$ | | | | | |
|------------------------|-----------------------------|---------------|-------|--------|------|--------|--------|
| | | 0 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 |
| | | 0° | 5°45' | 17°28' | 30° | 44°26' | 64°10' |
| 0 | 0 | 6,32 | 6,07 | 5,64 | 5,24 | 4,80 | 4,29 |
| | 0,05 | — | — | — | — | — | — |
| 0,2 | 0 | 5,18 | 5,00 | 4,71 | 4,44 | 4,15 | 3,78 |
| | 0,05 | 5,15 | 4,98 | 4,69 | 4,43 | 4,14 | 3,78 |
| 0,5 | 0 | 4,07 | 3,95 | 3,76 | 3,60 | 3,43 | 3,20 |
| | 0,05 | 4,03 | 3,91 | 3,74 | 3,59 | 3,42 | 3,19 |
| 1 | 0 | 2,99 | 2,92 | 2,82 | 2,74 | 2,65 | 2,54 |
| | 0,05 | 2,95 | 2,88 | 2,79 | 2,72 | 2,64 | 2,53 |
| 2 | 0 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,85 | 1,82 | 1,79 |
| | 0,05 | 1,92 | 1,88 | 1,85 | 1,83 | 1,81 | 1,79 |
| 5 | 0 | 0,96 | 0,94 | 0,93 | 0,93 | 0,94 | 0,95 |
| | 0,05 | 0,94 | 0,93 | 0,92 | 0,93 | 0,94 | 0,95 |

Aby zachodziła utrata stateczności, wielkości $u''(0)$ i $\varphi'(0)$ muszą być różne od zera, zatem wyznacznik charakterystyczny układu (5.1) musi być równy zeru

$$(5.2) \quad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Parę krytycznych wartości obciążenia P i ql otrzymamy dla danych wielkości ω , α , λ i γ/β obliczając najmniejszy dodatni pierwiastek równania (5.2). Mając zatem pierwiastek β lub γ , obliczony dla danych ω , α , λ i γ/β , możemy napisać

$$(5.3) \quad P_{kr} = \frac{\beta \sqrt{EJ_{\zeta} G J_k}}{l^2}, \quad (ql)_{kr} = \frac{\gamma \sqrt{EJ_{\zeta} G J_k}}{l^2}.$$

Obliczenia wartości obciążeń krytycznych przeprowadzono dla:

$$\omega = 1,245, \quad \lambda = 0 \text{ i } \lambda = 0,05, \quad \sin \alpha = 0 \div 0,9,$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = 0 \div 5 \text{ i } \frac{\beta}{\gamma} = 0 \div 5.$$

Przyjęta wartość $\omega = 1,245$ odpowiada belkom stalowym mającym przekrój poprzeczny w kształcie wydłużonego prostokąta. Uwzględniając bowiem

$$J_{\zeta} = \frac{hb^3}{12}, \quad J_k = \frac{hb^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h}\right) \approx \frac{hb^3}{3}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Tablica 3. Współczynnik stateczności γ w zależności od α , λ i β/γ

| $\frac{\beta}{\gamma}$ | $\lambda \backslash \alpha$ | $\sin \alpha$ | | | | | |
|------------------------|-----------------------------|---------------|-------|--------|------|--------|--------|
| | | 0 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 |
| | | 0° | 5°45' | 17°28' | 30° | 44°26' | 64°10' |
| 0 | 0 | 5,64 | 5,57 | 5,55 | 5,64 | 5,81 | 6,05 |
| | 0,05 | 5,49 | 5,43 | 5,46 | 5,59 | 5,78 | 6,04 |
| 0,2 | 0 | 4,80 | 4,72 | 4,65 | 4,66 | 4,70 | 4,76 |
| | 0,05 | 4,68 | 4,63 | 4,59 | 4,62 | 4,68 | 4,75 |
| 0,5 | 0 | 3,92 | 3,83 | 3,74 | 3,69 | 3,65 | 3,59 |
| | 0,05 | 3,83 | 3,77 | 3,70 | 3,66 | 3,63 | 3,58 |
| 1 | 0 | 2,99 | 2,92 | 2,82 | 2,74 | 2,65 | 2,54 |
| | 0,05 | 2,95 | 2,88 | 2,79 | 2,72 | 2,64 | 2,53 |
| 2 | 0 | 2,03 | 1,97 | 1,88 | 1,80 | 1,71 | 1,60 |
| | 0,05 | 2,01 | 1,96 | 1,87 | 1,79 | 1,71 | 1,60 |
| 5 | 0 | 1,04 | 1,00 | 0,94 | 0,89 | 0,83 | 0,76 |
| | 0,05 | 1,03 | 0,99 | 0,94 | 0,89 | 0,83 | 0,76 |

i przyjmując dla stali $\nu = 0,29$, znajdujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_t}} = \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} = 1,245.$$

Wartość $\lambda = 0$ ($\lambda = a/l$) odpowiada przyłożeniu obciążenia ciągłego wzdłuż osi belki, natomiast wartość $\lambda = 0,05$ odpowiada przyłożeniu obciążenia ciągłego na górnej krawędzi belki ($a = 1/2h$) w przypadku, gdy $h = 0,1l$.

Zestawienie obliczonych współczynników stateczności β i γ podano w tablicach 2 i 3.

6. Ocena dokładności wyników

Uzyskane wyniki wskutek zastosowania skończonej liczby iteracji (stosunkowo małej, $n = 3$) są obarczone pewnym błędem. Chcąc, choć w przybliżeniu, określić dokładność tych wyników porównano niektóre z nich z wartościami ścisłymi. I tak, w przypadku $\gamma = 0$ otrzymana wartość współczynnika β przy $\alpha = 0^\circ$ jest o 4,9% mniejsza od wartości dokładnej, a w przypadku $\beta = 0$, $\lambda = 0$ otrzymana wartość współczynnika γ jest przy $\alpha = 0^\circ$ mniejsza od wartości ścisłej o około 5%. Innych przypadków nie porównywano ze względu na brak odpowiednich danych w literaturze. Można przypuszczać, że błędy pozostałych wyników będą tego samego rzędu. Przy tym dla kątów α różnych od zera wyniki będą obarczone dodatkowym błędem wynikającym z niedoskonałości modelu przyjętego do opisu matematycznego rozpatrywanego zagadnienia. Jednakże, ze względu na proporcje wymiarowe tego typu belek, błąd ten, zgodnie z zasadą de Saint Venanta, będzie niewielki.

Oczywiście, zwiększenie liczby iteracji polepszyłoby dokładność uzyskanych wyników. Przeprowadzenie czterokrotnej iteracji zwiększyłoby jednak znacznie i tak już pracochłonne obliczenia. Jednakże w jednym przypadku ($\gamma = 0$, $\alpha = 0$) wykonano obliczenia przy czterech iteracjach. Wartości współczynnika β dla tego przypadku, wyliczone przy różnych ilościach iteracji, są następujące:

$$\beta = 5,75 \text{ — przy 2 iteracjach,}$$

$$\beta = 6,32 \text{ — przy 3 iteracjach,}$$

$$\beta = 6,62 \text{ — przy 4 iteracjach.}$$

Natomiast wartość ścisła wynosi $\beta = 6,65$. Zatem błędy powyższych wyników będą wynosić

$$\Delta\beta = 13,6\% \text{ — przy 2 iteracjach,}$$

$$\Delta\beta = 4,9\% \text{ — przy 3 iteracjach,}$$

$$\Delta\beta = 0,5\% \text{ — przy 4 iteracjach.}$$

Jak widać, proces iteracji jest szybkozbieżny.

7. Przykład liczbowy

Wyznaczyć krytyczne wartości obciążenia belki o stałym przekroju (rys. 1) przy następujących danych:

$$b = 1,5 \text{ cm}, \quad h = 25 \text{ cm}, \quad l = 250 \text{ cm}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad ql/P = 0,5,$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2, \quad \omega = 1,245.$$

Dla $\gamma/\beta = ql/P = 0,5$, $\alpha = 30^\circ$ oraz $\lambda = 0,5 \cdot h/l = 0,05$ znajdujemy z tablic 2 i 3

$$\beta = 3,59, \quad \gamma = 1,79.$$

Wartości obciążeń krytycznych, obliczone na podstawie (5.3), wyniosą

$$P_{kr} = 10,30 \text{ kN}, \quad (ql)_{kr} = 5,15 \text{ kN}.$$

Gdyby przyjąć $\lambda = 0$, otrzymalibyśmy

$$\beta = 3,60, \quad \gamma = 1,80$$

oraz

$$P_{kr} = 10,33 \text{ kN}, \quad (ql)_{kr} = 5,17 \text{ kN}.$$

Wartości te są większe o 0,3% od obliczonych przy uwzględnieniu λ .

Maksymalne normalne naprężenia krytyczne w belce osiągną wartość

$$\sigma_{kr} = 110 \text{ MN/m}^2.$$

W przypadku stali konstrukcyjnych, dla których $k_\sigma \geq 110 \text{ MN/m}^2$, obliczenie obciążenia belki na podstawie k_σ naraziłoby ją więc na utratę stateczności.

Literatura cytowana w tekście

1. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
2. S. WIŚNIEWSKI, *Stateczność płaskiej postaci zginania belki ściśkanej poosiowo siłami przyłożonymi na jej końcach*, Arch. Bud. Masz., 2, 11 (1964).

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА БАЛКИ
С ПЕРЕЛОМЛЕННОЙ ОСЬЮ

В работе рассмотрена задача об устойчивости плоской формы изгиба балки, ось которой имеет излом в вертикальной плоскости. Наклонные участки балки симметричны, нагрузка состоит из равномерно распределенной вертикальной и сосредоточенной силы приложенной в жестком узле, соединяющем наклонные участки.

Принято, что оба конца балки оперты таким образом, что их вращение возможно лишь вокруг осей, перпендикулярных к плоскости, в которой расположена ось балки. Жесткость балки на несвободное скручивание не учитывается.

После приведения дифференциальных уравнений нейтрального равновесия к интегральным уравнениям Вольтерра найдены приближенные решения. На основании граничных условий рассчитаны критические значения нагрузок в зависимости от следующих параметров: угла наклона оси балки, отношения равнодействующей сплошной нагрузки к величине сосредоточенной силы и параметра, определяющего способ приложения сплошной нагрузки.

S u m m a r y

STABILITY OF PLANE FORM OF BENDING OF A BEAM WITH THE DEFLECTED AXIS

In the paper the problem of stability of plane form of bending of a beam with the vertically deflected axis is considered. Authors' considerations deal with the symmetrical system of the arms of the beam loaded by uniformly distributed vertical loads and by a vertical force applied to the rigid node connecting the two arms.

The both beam ends are supported in such a way that their rotation is possible only around the axis perpendicular to the plane in which the axis of the beam is placed. The problem is limited to beams of negligible rigidity for constrained torsion.

After reducing the differential equations of neutral equilibrium to the Volterra-type integral equations, approximate solutions are obtained. Then, by using the boundary conditions, the critical load values as functions of the following parameters are calculated: inclination angle of the beam arm, the ratio of the resultant of the uniform load to the concentrated force, and the parameter describing the manner the uniform load is applied.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1975 r.

GRANICZNA MOC DWUFAZOWEGO TERMOSYFONU RUROWEGO ZE WZGLĘDU NA
KRYTERIUM ODRYWANIA KONDENSATU

BOGUMIŁ BIENIASZ (RZESZÓW)

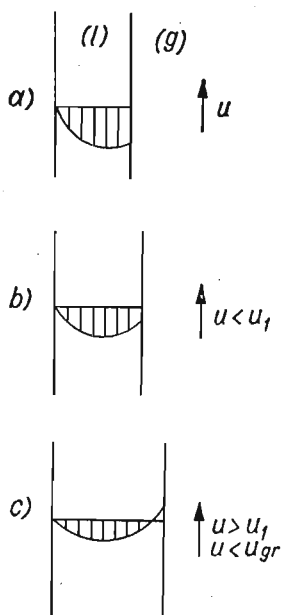
Oznaczenia

- A pole powierzchni poprzecznego przekroju parowego kanału termosyfonu [m^2],
 D wewnętrzna średnica rury termosyfonu [m],
 $(g), (l)$ oznaczenie fazy odpowiednio gazowej i ciekłej,
 Δi_{lg} entalpia parowania [J/kg],
 \dot{m} masowy wydatek czynnika roboczego termosyfonu [kg/s],
 O długość zwilżanego obwodu skraplacza termosyfonu [m],
 P moc cieplna termosyfonu [W],
 P_1 j.w., odpowiadająca przejściu w obszar niestabilnego ruchu kondensatu [W],
 P_{min} moc cieplna termosyfonu odpowiadająca fikcyjnej prędkości pary u_{min} [W],
 q objętościowy wydatek kondensatu przypadający na jednostkę długości zwilżanego obwodu [m^3/s],
 q_{gr} j.w., dla warunków granicznych [m^2/s],
 q_{min} j.w., odpowiadający fikcyjnej prędkości pary u_{min} [m^2/s],
 u prędkość pary czynnika roboczego [m/s],
 u_1 j.w., odpowiadająca dolnej granicy obszaru niestabilnego ruchu kondensatu [m/s],
 u_{gr} graniczna prędkość pary czynnika roboczego [m/s],
 u_{min} prędkość pary przy przepływie dwufazowym w pionowej rurze, odpowiadająca lokalnemu minimum oporów przepływu [m/s],
 \dot{V}_v, \dot{V}_l objętościowy wydatek odpowiednio pary i cieczy czynnika roboczego [m^3/s],
 y współrzędna w kierunku normalnym do powierzchni ścianki skraplacza [m],
 μ_l lepkość dynamiczna kondensatu [$kg/(ms)$],
 ρ_l, ρ_v gęstość odpowiednio cieczy i pary czynnika roboczego [kg/m^3].

1. Wstęp

Najczęstszym ograniczeniem maksymalnej mocy dwufazowego termosyfonu w zakresie temperatur roboczych jest niebezpieczeństwo zalania skraplacza.

Na rys. 1 przedstawiono profile prędkości w warstwie kondensatu przy ścianie skraplacza termosyfonu. Rysunek 1a odpowiada stosunkowo małej mocy cieplnej, a w związku z tym również i małej prędkości pary czynnika roboczego. Ze wzrostem mocy rośnie prędkość pary; ustala się rozkład prędkości, jak na rys. 1b. Przy dalszym wzroście prędkości pary osiąga się obszar niestabilny, kiedy to przy spływie kondensatu przy ścianie termosyfonu wystąpi jednoczesny ruch kondensatu w górę przy powierzchni międzyfazowej ciecz–para. Będzie to możliwe wtedy, gdy naprężenie styczne na powierzchni między-



Rys. 1

fazowej przekroczy wartość naprężenia stycznego przy ściance (rys. 1c). Dalszemu wzrostowi prędkości pary towarzyszy szybki wzrost oporów przepływu przy jednoczesnym falowaniu powierzchni kondensatu, co w granicznym momencie doprowadza do odrywania kropli kondensatu i zalania skraplacza. Stanowi temu odpowiada graniczna prędkość pary czynnika. Praca termosyfonu ulega wtedy poważnemu zakłóceniu, a w przypadku wysokiej temperatury płynu chłodzonego po zewnętrznej stronie parownika może dojść nawet do przetopienia ścianki. Zatem w procesie projektowania wymiennika ciepła z termosyfonami należy zakładać moc mniejszą od mocy granicznej.

2. Moc graniczna dwufazowego termosyfonu rurowego

Moc cieplna dwufazowego termosyfonu wynosi

$$(1) \quad P = \dot{m} \Delta i_{lg},$$

przy czym z bilansu wydatku masowego mamy

$$(2) \quad \dot{m} = \rho_v \dot{V}_v = \rho_l \dot{V}_l.$$

Wprowadźmy wielkość zdefiniowaną jako objętościowy wydatek kondensatu przypadający na jednostkę długości obwodu zwilżanej powierzchni skraplacza, czyli

$$(3) \quad q = \dot{V}_l / O.$$

Uwzględniając (2) mamy

$$(4) \quad q = \frac{\dot{V}_v}{\pi D} \frac{\rho_v}{\rho_l}.$$

Objętościowy wydatek pary osiąga maksimum w warunkach granicznych, gdy $u = u_{gr}$ i wynosi

$$(5) \quad \dot{V}_{v,gr} = u_{gr} \frac{\pi D^2}{4}.$$

Uwzględniając (5) w (4) otrzymujemy dla warunków granicznych

$$(6) \quad q_{gr} = u_{gr} \frac{D}{4} \frac{\rho_v}{\rho_l}.$$

Między dwufazowym przepływem w termosyfonie i w rurze pionowej występuje analogia wyrażająca się podobnym charakterem wzrostu oporów przepływu ze wzrostem prędkości pary. Różnica polega na tym, że termosyfon pracuje jedynie w zakresie prędkości pary od zera do prędkości, będącej dolną granicą obszaru niestabilnego (u_1) lub co najwyżej do prędkości granicznej (u_{gr}) odpowiadającej zalaniu skraplacza. Praca termosyfonu przy $u > u_{gr}$ jest niemożliwa, ponieważ ze względu na odpowiadający tej sytuacji profil prędkości musiałby występować wypadkowy ruch kondensatu w kierunku przepływu pary, co oznaczałoby osuszenie parownika. Prędkość graniczną występującą w (6) można obliczyć dla termosyfonu tak, jak dla przepływu dwufazowego w rurze pionowej. W tym drugim przypadku przy $u > u_{gr}$ następuje spadek oporów przepływu ze wzrostem prędkości przepływu pary aż do osiągnięcia minimum, któremu odpowiada prędkość pary u_{min} . Prędkość ta stanowi górną granicę obszaru niestabilnego, w obrębie którego występuje jednoczesne ściekanie kondensatu w warstwie przyściennej i ruch kondensatu w górę w warstwie przy powierzchni międzyfazowej. W momencie osiągnięcia u_{min} gradient prędkości na ścianie $(du/dy)_w = 0$, gdyż profil prędkości jest styczny do normalnej do powierzchni ścianki. Przy $u > u_{min}$ kondensat porusza się wyłącznie w kierunku ruchu pary, a wzrost prędkości pary powoduje wzrost oporów przepływu.

SOŁOWIOW i in. [1] rozwiązując równanie ruchu w fazie ciekłej przy przepływie dwufazowym w pionowej rurze okrągłej, otrzymali

$$(7) \quad u_{gr} = u_{min} \sqrt{\frac{2}{3}},$$

stwierdzając dużą zgodność swoich obliczeń teoretycznych z dostępnymi wynikami badań doświadczalnych. Zakładając, że powyższe równanie można zastosować w przypadku obliczania prędkości granicznej pary w termosyfonie, otrzymujemy po wstawieniu do (6)

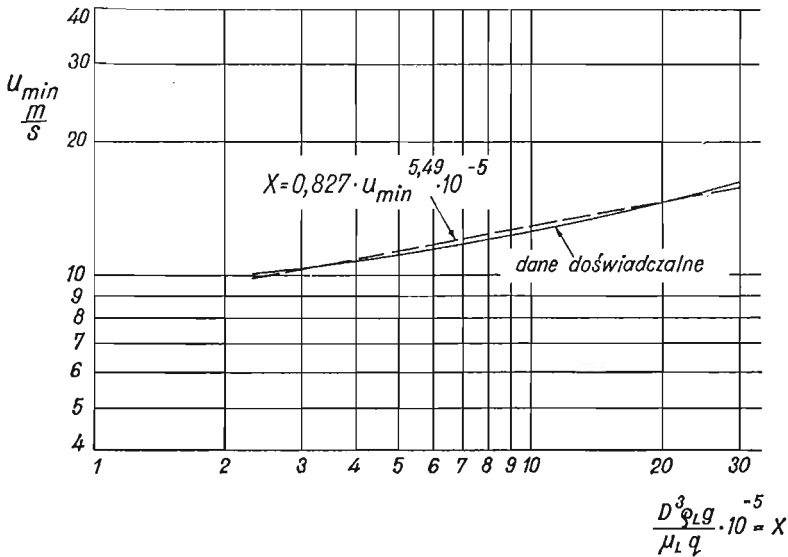
$$(8) \quad q_{gr} = 24^{-1/2} D \frac{\rho_v}{\rho_l} u_{min}$$

oraz

$$(9) \quad P_{gr} = 0,204 \pi D^2 \rho_v \Delta i_g u_{min}$$

przy kombinacji równań (1), (2), (3), (8).

Ze względu na brak teoretycznego rozwiązania na u_{min} , pozostaje obliczenie tej wielkości na podstawie danych doświadczalnych. Autorzy pracy [1] zamieszczają dane empi-



Rys 2

ryczne dwóch badaczy, które w skali podwójnie logarytmicznej przedstawiono na rys. 2 linią ciągłą. Wykres jest zależnością prędkości u_{min} od bezwymiarowej grupy

$$(10) \quad X = \frac{D^3 \rho_l g}{\mu_l q} 10^{-5}.$$

Konieczne jest zwrócenie uwagi na to, że w badaniach doświadczalnych przepływu dwufazowego w rurach wielkość q jest niezależna od prędkości pary, toteż u_{min} nie zależy od q dla tych przepływów. Inaczej ma się rzecz w przypadku termosyfonu, gdzie masowy wydatek pary musi się równać masowemu wydatkowi kondensatu przy pracy ustalonej. W tym przypadku q jest funkcją prędkości pary, chcąc zatem skorzystać z danych na rys. 2, musimy postawić tam q_{min} zamiast q . Zarówno u_{min} , jak i q_{min} będą odpowiadać fikcyjnej mocy termosyfonu P_{min} . Jak wynika z (1)

$$(11) \quad P_{min} = \Delta i_{lg} \rho_v u_{min} A$$

oraz

$$(12) \quad P_{gr} = \Delta i_{lg} \rho_v u_{gr} A$$

przy założeniu niezmienności danych materiałowych i pola powierzchni parowego kanału termosyfonu. Z powyższych równań wynika, że

$$(13) \quad P_{min}/P_{gr} = u_{min}/u_{gr} = 1/\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,225.$$

Przebieg linii ciągłej na rys. 2 da się przybliżyć linią prostą (linia kreskowa) o równaniu

$$(14) \quad \frac{D^3 \rho_l g}{\mu_l q_{min}} = 0,827 u_{min}^{5,49}.$$

Wstawiając (3) do (1) i uwzględniając (13) otrzymujemy

$$(15) \quad q_{\min} = \frac{1,225 P_{gr}}{\Delta i_{ig} \rho_i \pi D}.$$

Wstawiając (15) do (14) i przekształcając otrzymujemy

$$(16) \quad u_{\min} = \left(\frac{\pi D^4 \rho_i^2 g \Delta i_{ig}}{1,011 \mu_i P_{gr}} \right)^{0,182},$$

podstawienie zaś (16) do (9) daje po przekształceniach poszukiwane równanie na moc graniczną termosyfonu

$$(17) \quad P_{gr} = 0,261 \pi \Delta i_{ig} D^{2,32} \left(\frac{g}{\mu_i} \right)^{0,154} \rho_v^{0,845} \rho_i^{0,307},$$

do którego wielkości fizyczne podstawia się w układzie SI.

3. Moc dwufazowego termosyfonu rurowego odpowiadająca przejściu w obszar niestabilnego ruchu kondensatu

Moc termosyfonu odpowiadająca momentowi przejścia w obszar niestabilnego ruchu kondensatu P_1 jest mniejsza od P_{gr} , ponieważ występuje ona przy prędkości pary [1]

$$(18) \quad u_1 = u_{\min} / \sqrt{2} = 0,707 u_{\min}$$

podczas, gdy prędkość graniczna wynosi, jak wynika z (7), $0,817 u_{\min}$. Mamy więc

$$(19) \quad q_1 = 0,707 \frac{D}{4} \frac{\rho_v}{\rho_i} u_{\min}$$

i z tego powodu wzór na P_1 różni się od wzoru na P_{gr} [por. (9)] współczynnikiem

$$(20) \quad P_1 = 0,177 \pi D^2 \rho_v \Delta i_{ig} u_{\min}.$$

W warunkach początku obszaru niestabilnego

$$(21) \quad P_1 = \Delta i_{ig} \rho_v u_1 A,$$

co daje

$$(22) \quad P_{\min} / P_1 = u_{\min} / u_1 = 1 / 0,707 = 1,414,$$

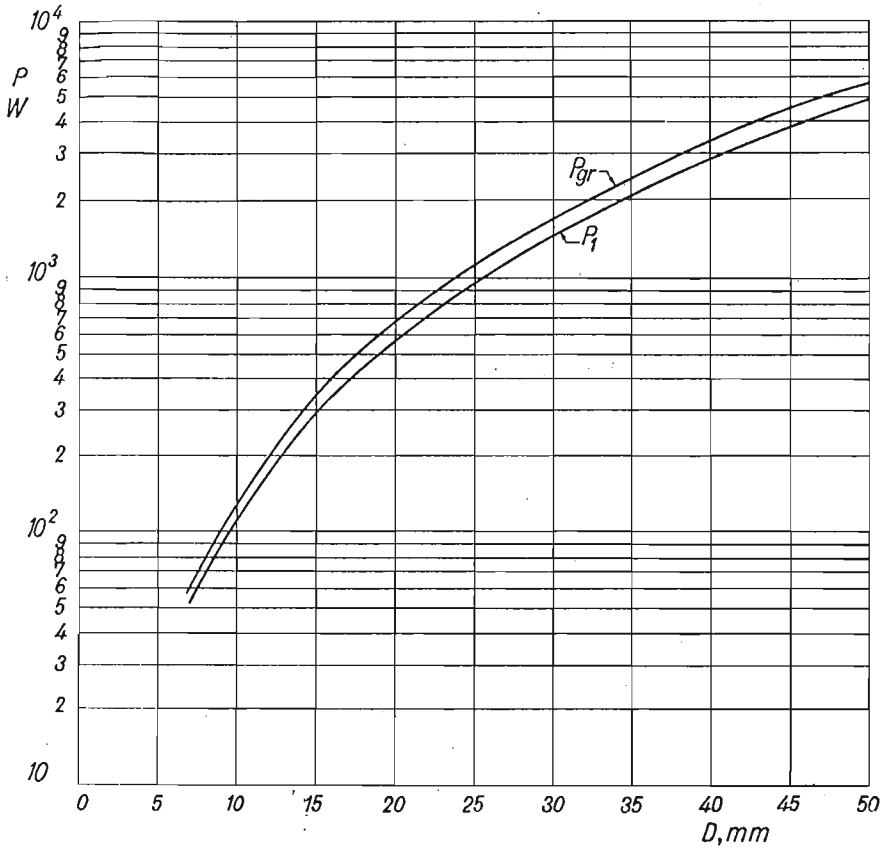
zaś

$$(23) \quad q_{\min} = \frac{1,414 P_1}{\Delta i_{ig} \rho_i \pi D}.$$

Ostatecznie otrzymuje się

$$(24) \quad P_1 = 0,865 P_{gr}.$$

Celem zapewnienia stabilnej pracy termosyfonu należy stosować moce cieplne mniejsze od mocy P_1 .



Rys. 3

Rysunek 3 jest przykładem zastosowania równania (17) i (24) do praktycznych obliczeń termosyfonów. Zawiera on wynik obliczeń dla wody o temperaturze nasycenia 40°C . W obliczeniach wykorzystano następujące dane materiałowe: $\rho_0 = 0,05116 \text{ kg/m}^3$, $\rho_l = 992,2 \text{ kg/m}^3$, $\Delta i_{lg} = 2,406 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$, $\mu_l = 6,51 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(ms)}$.

4. Wnioski

Moc graniczna dwufazowego termosyfonu jest wprost proporcjonalna do wewnętrznej średnicy w potęgze 2,32, a dla danego czynnika roboczego jest funkcją jego temperatury; od niej bowiem zależą wartości danych materiałowych w równaniu (17). Jak wynika z analizy tego równania moc graniczna termosyfonu o danej średnicy rośnie ze wzrostem temperatury czynnika roboczego.

Literatura cytowana w tekście

1. А. Ф. Соловьев, Е. И. Преображенский, П. А. Семенов, *Гидравлическое сопротивление в двухфазном потоке*, Химическая Промышленность, 8 (1966), 601 - 604.

Резюме

ПРЕДЕЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ ДВУХФАЗОВОГО ТРУБЧАТОГО
ТЕРМОСИФОНА ИЗ УСЛОВИЯ ОТРЫВА КОНДЕНСАТА

В работе описано явление изменения профиля скорости, которое наблюдается в слое конденсата, стекающего по стенке конденсатора в двухфазовом термосифоне, при изменении скорости протекания пара. На основании доступных экспериментальных данных получена формула расчета предельной мощности, т. е. мощности, при которой наступает заливание конденсатора. Кроме того, получено выражение на мощность, отвечающую переходу в режим неустойчивого течения конденсата. Область неустойчивого течения жидкой фазы при двухфазовом течении по вертикальным трубам определялась на основании критерия Соловьева и других авторов [1]. Полученные формулы иллюстрируются графиком для воды при температуре насыщения 40°C.

Summary

LIMIT POWER OF A TWO-PHASE PIPE THERMOSIPHON WITH RESPECT TO CONDENSATE
LIQUID INSTABILITY

The phenomenon of the change of the velocity profile occurring in the condensate layer falling down on the condenser wall of the two-phase thermosiphon according to a vapour velocity change has been described in this paper. Using available experimental data, the expression on the power limit and the power of the entering of the condensate liquid to the nonstable motion area has been obtained. Criteria of Solovev et al. [1] concerning determining the nonstable motion area of the liquid phase during the two-phase flow in vertical pipes have been plotted for water at the saturation temperature of 40°C

INSTYTUT LOTNICTWA
POLITECHNIKA, RZESZÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 kwietnia 1975 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

Z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej za II kwartał 1975 r.

I. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyły się 22 zebrania naukowe, na których wygłoszono 30 referatów o następującej tematyce:

| Lp. | Data | Prelegent | T e m a t | Liczba | |
|-------------------------------|---------|---------------------------------|--|------------------|------------------|
| | | | | uczest- ników | dysku- tantów |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Oddział w Bydgoszczy | | | | | |
| 1. | 06.6.75 | E. Walicki | Ogólne równanie teorii smarowania hydrodynamicznego, | 12 | 4 |
| 2. | 06.6.75 | E. Walicki | Magnetohydrodynamiczny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi, | 12 | 5 |
| 3. | 06.6.75 | K. Zawisłak | Ocena wytrzymałości połączeń lutowanych ram rowerowych, | 12 | 5 |
| 4. | 12.6.75 | E. Lubieniecki | Teoria podobieństwa modelowego w zastosowaniu do konstrukcji mostowych, | 10 | 5 |
| 5. | 12.6.75 | A. Matysiak | Kryteria oceny obciążenia słupów skrajnych hal przemysłowych pracujących w układzie przestrzennym, | 10 | 5 |
| Oddział w Częstochowie | | | | | |
| 6. | 22.5.75 | W. Prosnak | Niektóre zagadnienia teorii profili i ich układów, | 38 | 7 |
| 7. | 31.5.75 | W. Romanowski-Piotrowicz (ZSRR) | Wytrzymałość blach na ścinanie w funkcji grubości, | 36 | 3 |
| Oddział w Gliwicach | | | | | |
| 8. | 15.4.75 | J. Kubik | Termodynamika w ośrodku lepko-sprężystym, | 8 | 2 |
| 9. | 07.5.75 | W. Prosnak | Numeryczna mechanika płynów, | 54 | 11 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------------------|---------|---|--|----|---|
| 10. | 03.6.75 | W. Pfefferkorn (NRD) | Niektóre problemy obliczeń wytrzymałościowych belek złożonych z różnych materiałów (Festigkeitberechnung von Verbundträger), | 17 | 3 |
| 11. | 19.6.75 | Cz. Woźniak | O mechanice continuum z więzami zewnętrznymi, | 31 | 5 |
| Oddział w Krakowie | | | | | |
| 12. | 08.5.75 | A. Ziabicki | Molekularne mechanizmy sprężystości i lepkość sprężystości w polimerach, | 13 | 5 |
| 13. | 16.6.75 | J. L. Erickson (Uniw. Baltimore w USA) | Modern Theories of Plates and Shells, | 21 | 5 |
| Oddział w Łodzi | | | | | |
| 14. | 15.5.75 | W. Gundlach | Referaty z zakresu mechaniki teoretycznej i stosowanej przygotowane na uroczyste zebranie naukowe poświęcone osiągnięciom Polit. Łódzkiej w XXX-lecie PRL, Zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień belek, | 12 | 6 |
| 15. | 15.5.75 | W. Walczak | | | |
| 16. | 15.5.75 | J. Gluza | | | |
| 17. | 15.5.75 | M. Suchar | | | |
| 18. | 30.5.75 | Horst Aurich | Manipulators in medical and industrial application, | 19 | 6 |
| 19. | 18.6.75 | F. Crossley | Control algorithms and gait stability of artificial anthropomorphic motion, | 20 | 5 |
| 20. | 18.6.75 | M. Vukobratović | Modal synthesis of linear discrete mechanical systems, | 20 | 5 |
| 21. | 30.6.75 | G. Lallment | | | |
| Oddział w Poznaniu | | | | | |
| 22. | 07.4.75 | K. Wrześniowski, Cz. Cempel | Komputer — narzędzie czy metoda, | 13 | 6 |
| 23. | 26.5.75 | Z. Olesiak | Kryteria uplastycznienia dla ośrodka klasycznego i mikropolarnego, | 18 | 4 |
| 24. | 30.6.75 | Schöpf | Some aspects of effective behaviours of porous media | 23 | 5 |
| Oddział w Szczecinie | | | | | |
| 25. | 10.4.75 | R. Krzywiec | Ciągi wielowskaźnikowe, grafy i systemy wielkie, | 27 | 5 |
| 26. | 15.5.75 | Z. Zarzycki | Tłumienie pulsacji ciśnienia w układach hydraulicznych, | 23 | 4 |
| 27. | 17.6.75 | W. Żmijewski | Model matematyczny zespołów typu stół-sanie-wspornik-korpus frezarki, | 12 | 5 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------------------------|---------|---|---|----|----|
| Oddział w Warszawie | | | | | |
| 28. | 07.4.75 | St. Dubiel | Pojęcia asymptotyczności w sensie Ważewskiego w badaniach układów elektromechanicznych, | 7 | 6 |
| 29. | 26.5.75 | St. Wiśniewski, J. Rutkowski (wprowadzenie do tematu) | Zebranie dyskusyjne na temat „Pojęcia podstawowe w termodynamice i ich interpretacja”. | 25 | 21 |

II. Sympozja

Oddział w Gliwicach zorganizował wspólnie z Instytutem Mechanizacji Górnictwa konferencję na temat «Dynamika Maszyn Górniczych».

Podczas konferencji wygłoszono następujące referaty:

1. W. SIKORA, M. FELS, *Wpływ zmienności warunków geologiczno-górnicznych urabianych pokładów węgla na dynamikę procesu mechanicznego urabiania,*
2. J. RYNIK, *Problemy dynamiki kombajnów bębnowych,*
3. A. TYLIKOWSKI, *O pewnym modelu dynamiki kombajnu,*
4. J. SUCHOŃ, A. TYLIKOWSKI, *Statystyczna analiza stanu obciążeń i odkształceń trójprasmowych cięgien przenośników zgrzeblowych,*
5. J. SUCHOŃ, *Prędkość rozchodzenia się fal sprężystych w ciągach przenośników zgrzeblowych,*
6. J. ANTONIAK, H. KOSTRZEWA, *Badania oporu toczenia krążnika po taśmie przenośnikowej z uwzględnieniem temperatury,*
7. T. ŻUR, Z. ŁUCZEWSKI, *Wpływ wielkości kąta niecki rozstawu podpór lin na wielkości obciążeń dynamicznych w elastycznych urządzeniach przesypowych,*
8. K. FURMANIK, *Badania wstępne sil tarcia tocznego,*
9. A. KUCHARCZYK, *Optymalizacja cech konstrukcyjnych przesiewacza wibracyjnego,*
10. T. BANASZEWSKI, *Analiza drgań przesiewacza rezonansowego trójmasowego,*
11. J. WOJNAROWSKI, M. CHMUROWA, K. GRAJEK, *Badanie kształtu przekroju ruchu zwierciadła wody w osadzarce typu ODM-18,*
12. S. MARKUSIK, A. WILK, *Sprzęgła ośrodkowe śrutowe w napędach maszyn transportowych,*
13. J. WOJNAROWSKI, *Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych w modyfikacji własności dynamicznych maszyn.*

W konferencji uczestniczyło 57 uczestników, w dyskusji wzięło udział 48 osób. Materiały konferencyjne zostały opublikowane w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej — Górnictwo, zeszyt 62, Gliwice 1975 (str. 194).

III. Kursy

Oddział w Poznaniu przeprowadził kurs na temat «Zasady ekstremalne i programowanie matematyczne w teorii ciał sprężystych i plastycznych». Odbyły się 3 wykłady, w których wzięło udział 25 osób.

IV. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje następująca tablica:

| Lp. | Oddział | Stan na koniec I kw. 75 r. | Stan na koniec II kw. 75 r. | Przybyło lub uby- ło w okresie sprawozdawczym |
|-----|------------------|-------------------------------|--------------------------------|---|
| 1. | Bydgoszcz | 21 | 22 | +1 |
| 2. | Częstochowa | 37 | 43 | +6 |
| 3. | Gdańsk | 53 | 53 | — |
| 4. | Gliwice | 129 | 133 | +4 |
| 5. | Kraków | 75 | 76 | +1 |
| 6. | Łódź | 44 | 48 | +4 |
| 7. | Poznań | 58 | 58 | — |
| 8. | Rzeszów | 20 | 20*) | — |
| 9. | Szczecin | 31 | 32 | +1 |
| 10. | Warszawa | 224 | 224 | — |
| 11. | Wrocław | 63 | 63 | — |
| | R a z e m | 755 | 772 | 17 |

*) Stan według poprzedniego okresu sprawozdawczego.

W okresie sprawozdawczym odbyło się plenarne zebranie Zarządu Głównego oraz 17 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

KOŁOKWIUM EUROMECH 66

ZAGADNIENIA PRZEKAZYWANIA OBCIĄŻEŃ W PŁYTACH I POWŁOKACH

Jablonna, 8—12 września 1975 r.

Kołokwium Euromech 66 zostało zorganizowane przez Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej oraz Komitet Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN. Obrady odbywały się w Domu Zjazdów Polskiej Akademii Nauk w Jablonnie od 8 do 12 września 1975 r. Przewodniczącym i organizatorem konferencji był doc. Stanisław ŁUKASIEWICZ, a sekretarzem naukowym dr Walerian SZYSZKOWSKI z Instytutu Mechaniki Stosowanej PW. W kołokwium wzięło udział zarejestrowanych 26 uczestników z następujących krajów: Austria — 1, Czechosłowacja — 1, Węgry — 3, Wielka Brytania — 4, Włochy — 4, Polska — 10, Szwecja — 2, Republika Federalna Niemiec — 1.

Wszyscy uczestnicy konferencji byli zakwaterowani w Domu Zjazdów w Jablonnie. Zapewniło to bardzo dobre warunki do dyskusji i kontaktów osobistych pomiędzy uczestnikami konferencji.

Spotkanie niewielkiej grupy osób będących specjalistami w danej dziedzinie umożliwiło nawiązanie bezpośredniego kontaktu i przyczynia się do efektywności dyskusji. O żywym zainteresowaniu świadczyła prawie stuprocentowa obecność uczestników w obradach. Ponadto wielu pracowników takich instytucji, jak Politechnika Warszawska, Instytut Lotnictwa dojeżdżało codziennie do Jabłony celem wzięcia udziału w obradach.

Tematem kołokwium były następujące grupy zagadnień:

- wprowadzenie obciążeń lokalnych w płyty i powłoki,
- zagadnienia kontaktowe i zagadnienia przekazywania obciążeń,
- zagadnienia racjonalnego projektowania konstrukcji cienkościennych.

W ramach zagadnień grupy a) wygłoszono następujące referaty:

- R. KITCHING, *Stresses near local attachment on cylindrical shell reinforced by welded on pad*;
 A. C. SMITH, *The structural response of a cylindrical shell to a point load applied at a free edge*;
 L. ADAMIEC, *Concentrated load transfer problem in circular plates in postbuckling state*.

W ostatnim referacie tej grupy zwrócono uwagę na bardzo istotne różnice w zachowaniu się płyty obciążonej lokalnie w stanie przed- i zakrytycznym.

Referaty poświęcone zagadnieniom kontaktowym i zagadnieniom przekazywania obciążeń były następujące:

- C. R. CALLADINE, *The role of edge stiffeners or supporting a shell roof*;
 V. KRUPKA, *The load-transfer between a rigid or flexible saddle and thin elastic shell*;
 M. HAASE, *An arbitrary curved stiffener for shell elements*;
 A. PEANO, *Confirming finite element approximations in shells*;
 D. DALMY, *Punching of reinforced concrete slabs*;
 W. MIRSKI, J. STUPNICKI, *The method for determination of the boundary loads on the basis of the isochromatic fringes of contact zone*;
 H. P. ROSSMANITH, *Random fiber wabbliness in composite media*;
 D. FAULKNER, *Compression strength on welded stiffened plate*.

Referaty, które można zaliczyć do trzeciej grupy, poświęconej zagadnieniom racjonalnego projektowania konstrukcji cienkościennych, były następujące:

- I. KRAUS, W. KRZYŚ, St. LACZEK, *Optimisation of combined pull-rod-rib reinforcement of pipe-line branching*;
 J. ZWOLIŃSKI, *Factors effecting stress concentration in shell with elliptical hole*;
 S. ŁUKASIEWICZ, *On the design of elements introducing and transferring loads in plates and shells*;
 Z. MRÓZ, *Generalized variational approach to analysis and optimal synthesis problems*;
 G. M. VÖRÖS, *A modified Lagrangian variational principle for discontinuous elastic stress strain fields*;
 H. FESSLER, *Rib-reinforced cylindrical shells subjected to distributed loads*.

Duży nacisk w obradach położono na zagadnieniach kontaktowych płyt i powłok.

V. KRUPKA z Czechosłowacji przedstawił interesujące wyniki obliczeń dla rozkładów nacisków pomiędzy powłoką a podporami siodłowymi. Wskazał na osobliwości rozkładu nacisków i zwrócił uwagę na to, że często stosowane w obliczeniach wytrzymałościowych założenie o równomierności rozkładu nacisków nie jest słuszne nawet w przybliżeniu.

Zagadnieniem wprowadzenia obliczeń lokalnych w powłokę zajmował się B. KITTING z Wielkiej Brytanii. Określił on rozkład naprężeń w powłoce walcowej w otoczeniu elementu wprowadzającego obciążenie.

A. PERSSON i N. FRIEDRICHEN ze Szwecji przedstawili rozwiązania trudnych problemów kontaktowych dla tarcz, uzyskane metodą elementów skończonych.

W grupie referatów zajmujących się zagadnieniami przekazywania obciążeń kilka dotyczyło zagadnień współpracy elementów belkowych z powłoką lub z płytą. Między innymi C. R. CALLADINE z Wielkiej Brytanii rozważał rolę usztywnień brzegowych podpierających konstrukcje powłokowe. Dyskutowano szczegółowo problem współpracy zeber usztywniających połączenia rurowe. W kilku pracach przedstawiono wyniki uzyskane metodą elementów skończonych. Omówiono również tego typu zagadnienia wynikające z zastosowania materiałów złożonych. Przedstawiono interesującą metodę określania obciążeń brzegowych na podstawie danych doświadczalnych uzyskanych metodą elastooptyczną. W studiach dotyczących optymalnego projektowania zwrócono uwagę na możliwość bardziej ogólnego sformułowania zagadnień wariacyjnych w ten sposób, by optymalizacji podlegało nie tylko pole naprężeń czy odkształceń, lecz również i konfiguracja konstrukcji, co prowadziłoby w rezultacie do właściwego rozmieszczenia podpór i wyboru odpowiednich warunków brzegowych.

Na tle tego referatu wywiązała się żywa dyskusja. Mianowicie rozważano, która z metod projektowania konstrukcji inżynierskich jest bardziej właściwa — metoda projektowania na podstawie nośności granicznej, czy też metoda wyrównywania naprężeń w stanie sprężystym.

Prócz tego, jak wynika ze spisu referatów, kolokwium objęło także wiele innych ważnych i ciekawych zagadnień.

W podsumowaniu obrad stwierdzono, że kolokwium Euromechu poświęcone tematyce przekazywania obciążeń odbyło się po raz pierwszy. Wydaje się, że zagadnienia te nie były dotychczas dostatecznie doceniane, choć w większości przypadków przyczyny zniszczenia współczesnych konstrukcji cienkościennych wiążą się z poruszonymi na kolokwium zagadnieniami.

Nie przewiduje się wydania materiałów konferencji. Niektóre prace będą publikowane w jednym z numerów ARCHIWUM BUDOWY MASZYN.

St. Łukasiewicz (Warszawa)

IV POLSKO—RADZIECKA KONFERENCJA «NIEKLASYCZNE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI»

Kijów, 24—28 listopada 1975 r.

Konferencja ta odbyła się w dniach 24—28 listopada 1975 r. w Instytucie Mechaniki Ukraińskiej Akademii Nauk w Kijowie. W czasie jej trwania wygłoszono 25 referatów, w tym polska delegacja składająca się z 13 osób przedstawiła 12 referatów, 6 referatów wygłosili pracownicy Instytutu Mechaniki Ukr. AN w Kijowie, pozostałe 7 referatów zaprezentowali uczeni z innych ośrodków naukowych w ZSRR (Moskwa, Tbilisi, Charków, Donieck, Rostów, Ryga).

Tradycyjny temat spotkań naukowych, które dotychczas odbywały się na przemian w Warszawie i w Kijowie, «Nieklasyczne zagadnienia teorii sprężystości» został potraktowany szeroko. Przedstawione referaty obejmowały obszerny krąg zagadnień mechaniki ciała stałego odkształcalnego. Zaletą tak zorganizowanej konferencji była możliwość zapoznania się z wieloma różnymi kierunkami badań teoretycznych i doświadczalnych w mechanice, niedostatkim — wynikające stąd czasami małe zainteresowanie audytorium.

Gościnni organizatorzy zapewнили bardzo dobre warunki pobytu i umożliwili zapoznanie się z osiągnięciami Instytutu Sverchtverdych Materialov Ukraińskiej Akademii Nauk, z działalnością kilku laboratoriów Instytutu Mechaniki, oraz z życiem kulturalnym Kijowa i jego zabytkami.

Po otwarciu obrad konferencji zebrani uczcili minutą ciszy zmarłych w okresie od poprzedniej, III Konferencji, wybitnych uczonych radzieckich, członków Akademii Nauk Ukraińskiej SRR, profesorów A. D. KOWALENKĘ, W. O. KONONIENKĘ i G. N. SAWINA, którzy przez długie lata byli promotorami (ze strony radzieckiej) utrzymywania bliskich stosunków naukowych z mechanikami polskimi.

Pierwszy referat wygłosił prof. H. ZORSKI, przedstawiając dowód nieistnienia gładkiego ośrodka ciągłego, który może reprezentować model układu cząstek newtonowskich zamrożonych w ośrodku.

Prof. Z. OLESIAK przedstawił pewne propozycje dotyczące nowych zagadnień w teorii szczelin z uwzględnieniem temperatury i współdziałania z cieczą lub gazem zamkniętym w szczelinie.

Członek Ukr. AN prof. N. A. KILCZEWSKIJ (w pracy wspólnej z D. I. ILCZYŻYNĄ i L. M. SZALDĄ) zajął się teorią zderzenia, stosując aparat transformacji całkowych i pewnego wariantu metody SOMIGLIANO, a wyniki otrzymane w przypadku nieliniowej charakterystyki sprężystej porównał z pracami HERTZA.

Profesor W. NOWACKI w pracy pt. *Zagadnienia termodynamiki w ciałach stałych* omówił metody rozwiązywania równań różniczkowych termodynamiki. Rozpatrzył zjawisko fal termodynamicznych i podał uwagi dotyczące termodynamiki w ośrodku n -składnikowym.

Członek koresp. Ukr. Ak. Nauk prof. W. L. RWACZEW (Charków) przedstawił interesujący referat noszący tytuł *Algebraiczno-logiczne metody w fizyce matematycznej i zagadnienie automatyzacji programowania w zadaniach dotyczących różnych pól*.

Prof. W. GUTKOWSKI (w pracy wspólnej z J. BAUEREM, J. GIERLIŃSKIM i Z. IWANOWEM) przedstawił półanalityczne i numeryczne rozwiązania dotyczące optymalizacji struktur dwuwarstwowych przekryć prętowych.

Z kolei prof. J. M. HRIHORENKO (referat wspólny z A. T. WASILENKO) omówił przeprowadzone badania teoretyczne dotyczące ortotropowych powłok warstwowych w ujęciu nieklasycznym. Wyniki porównał z klasyczną teorią powłok i rozwiązaniami ścisłymi w ramach klasycznej teorii sprężystości.

Członek koresp. AN ZSRR prof. I. I. WOROWICZ (Rostów) rozpatrzył mieszane zagadnienia dynamiczne teorii sprężystości dla obszarów półnieskończonych. Zbadane zostały osobliwości rozwiązań w zależności od częstotliwości drgań dla obszarów typu warstwy lub klina połączonych w gwiazdopodobne ciało sprężyste. Autor sformułował i zbadał zasadę granicznego zanikania i stacjonarnej fazy dla takich obszarów.

Prof. Z. WESOŁOWSKI wygłosił referat pt. *Rozprzestrzenianie się fal silnej nieciągłości w ciałach sprężystych*. Założono występowanie nieciągłości prędkości i gradientu odkształcenia. Wyznaczony został skok entropii i warunek rozprzestrzeniania się fal oraz zbadany rodzaj i charakter otrzymanych fal.

Doc. J. KUBIK (Poznań) podał pewne uwagi odnoszące się do wyznaczania naprężeń cieplnych wywołanych ruchomymi źródłami ciepła.

Doc. E. KOSSECKA przedstawiła referat dotyczący ruchu defektów punktowych w nieskończonym anizotropowym ośrodku sprężystym. Wyprowadzono wyrażenia na pole przemieszczeń ruchomego defektu

i na siłę działającą na defekt. Dokładniejsza analiza została przeprowadzona w przypadku ośrodka izotropowego.

Członek koresp. AN Ukr. SRR A. H. HUŻ (ze współpracownikami F. H. MACHORTEM i I. O. HUSCZEM) przedstawili interesującą metodę doświadczalną i analizę teoretyczną dotyczącą wyznaczania naprężeń w ciałach dwuwymiarowych metodą akustyczną.

Prof. A. L. GOLDENWEIZER (Moskwa) wyprowadził związki między fizyczną sztywnością powłok i matematycznym pojęciem sztywności powierzchni. Autor przeprowadził głęboką analizę teoretyczną, wprowadzając nowe pojęcia i definicje do teorii powłok.

Dr hab. A. BLINOWSKI przedstawił wyniki uzyskane w obszernej pracy dotyczącej gradientowej teorii efektu kapilarnego.

Członek Gruzińskiej AN prof. W. D. KUPRADZE (Tbilisi) przedyskutował nową metodę badania różniczkowych teorii sprężystości dla ciał wielospójnych z pustkami i inkluzjami. Był to fragment nowej książki autora i jego współpracowników, która niebawem ukaże się w druku.

Członek koresp. Ukr. AN W. T. TROSZCZENKO (Kijów, Instytut Problem Pročnosti AN) przedstawił wyniki prac doświadczalnych dotyczących pozasprężystego zachowania się metali (stal, stopy aluminium i tytanu, nikiel i żeliwo) przy obciążeniach cyklicznych 10—15 hertzów.

Prof. Cz. WOŹNIAK mówił o koncepcjach mechaniki ciał wiotkich. Autor wprowadził podstawowe pojęcia teorii, opierając się na mechanice ośrodków ciągłych z więzami, a wyniki przedyskutował na przykładach.

Profesor R. F. GANIEW wygłosił referat pt. *Drgania i stateczność ruchu ciał z cieczą i gazem w słabym i silnym grawitacyjnym polu sil.* Autor przedstawił interesującą analizę zagadnienia oraz wyniki przeprowadzonych doświadczeń dotyczących ciał z cieczą i gazem w słabych polach grawitacyjnych. Rezultaty prac autora znajdują się w książce, która niebawem ukaże się w druku.

Referat członka koresp. Ukr. AN prof. A. S. KOSMODAMIAŃSKIEGO (Donieck) pt. *Naprężenia ciepłe w płytach wielospójnych* został wygłoszony przez jego współpracownika — kand. nauk SZALDERWANĄ.

Dr Zofia MOSSAKOWSKA w referacie o funkcjach cyklicznych i ich zastosowaniach w teorii dyslokacji przedstawiła wyniki obszernej pracy teoretycznej wraz z przykładami.

Prof. G. A. WANIN w swoim wykładzie zajął się nowymi zagadnieniami w teorii układów kompozytowych. Podał rozwiązania dwu- i trójwymiarowych zagadnień z jednorodnymi mieszanymi warunkami brzegowymi pod działaniem pól o różnych charakterystykach fizycznych.

Doc. D. ROGULA przedstawił wyniki pracy (wspólnej z Cz. RYMARZEM i H. ZORSKIM), w której omówił współczesny stan zagadnień i metod mechaniki nielokalnych ośrodków ciągłych.

Prof. E. E. ŁAWENDEL (Ryga) podał algorytmy rozwiązywania zagadnień termosprężystości sprężonej. Przykład dotyczył amortyzatora gumowo-metalowego.

Mgr J. P. NOWACKI zreferował fragmenty pracy pt. *Liniowa teoria dyslokacji i dysklinacji w ośrodku prężystym typu Cosseratów.*

W pracy wspólnej prof. Ju. H. SZEWCZENKI i W. Ju. MARINY, którą przedstawił pierwszy z autorów, omówiony został model strukturalny ośrodka przy niezotermicznym procesie obciążenia. Referat ten zamknął obrady konferencji.

Następnie gospodarze zorganizowali spotkanie polskich uczestników z dyrekcją i kierownikami zakładów Instytutu Mechaniki Ukr. AN. W czasie spotkania przedstawiono główne kierunki działalności i osiągnięcia Instytutu. Na zakończenie pobytu delegacji polskiej odbył się uroczysty bankiet.

Godną podkreślenia była frekwencja w obradach, a duża sala wykładowa Instytutu Mechaniki była często wypełniona po brzegi.

Następna Konferencja Polsko-Radziecka zostanie zorganizowana w Polsce, prawdopodobnie w Krakowie, w maju 1977 roku.

Zbigniew Olesiak (Warszawa)

KOMUNIKAT

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN
organizuje w Wiśle-Jaworniku w terminie

7—14 września 1976 r.

XVIII POLSKĄ KONFERENCJĘ MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO.

Tematyka konferencji obejmuje zagadnienia mechaniki ciała stałego, ogólnej teorii ośrodków ciągłych i teorii konstrukcji. Przedstawione będą zarówno prace teoretyczne jak i doświadczalne.

Adres do korespondencji:

dr Maria ARCISZ

Sekretarz XVIII Polskiej Konferencji Mechaniki

Ciała Stałego IPPT PAN ZMOC

ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa

W następnym zeszycie ukażą się prace:

WŁADYSŁAW BOGUSZ — Wspomnienie pośmiertne

- J. WILK, Skończone odkształcenia wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok przy uwzględnieniu kinematycznego wzmocnienia materiału
Конечные деформации гибких осесимметричных оболочек при учете кинематического упрочнения материала
Finite deformations of slender axi-symmetric shells made of materials obeying the kinematic strain-hardening law
- M. JANOWSKI, H. КОРЕСКИ, Elektryczny układ analogowy dla geometrycznie nieliniowych zagadnień płyt o dowolnej geometrii
Электрическая аналоговая модель для геометрических нелинейных пластинок произвольного контура
The electric analog system for geometrically nonlinear plates of arbitrary contour
- S. BIELAK, Całka równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego powłoki walcowe
Интеграл дифференциального уравнения в частных производных для цилиндрических оболочек
The integral of a partial differential equations of cylindrical shells
- B. KOWALCZYK, T. RATAJCZAK, Iteracyjna metoda wyznaczania częstości drgań własnych i amplitud układu o skończonej liczbie stopni swobody
Итерационный метод вычисления собственных колебаний и амплитуд системы с конечным числом степеней свободы
An iterative method to determine natural frequencies and amplitudes of a multidegree of freedom system
- F. JARZYŃSKI, NGUYEN VAN TINH, Zastosowanie metody macierzy przeniesienia w obliczeniu drgań własnych układu belkowo-linowego
Применение метода матриц переноса для расчета свободных колебаний в балочно-тросовой системе
Application of the transfer matrix method to the calculation of free vibration in a beam-cable system
- A. GAJEWSKI, Optymalne kształtowanie wirującego pręta z uwzględnieniem nieliniowości fizycznej materiału
Оптимальное формирование вращающегося стержня с учетом физической нелинейности материала
Optimal structural design of the rotating rod with physical nonlinearity of material
- Z. ONISZCZUK, Swobodne drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych inercyjnym elementem sprężystym
Свободные поперечные колебания систем двух балок связанных инерционным упругим элементом
Free transverse vibrations of an elastically connected double-beam system
- T. LISZKA, M. ŻYCZKOWSKI, Optymalne kształtowanie nierównomiernie nagranych tarcz wirujących z uwagi na nośność sprężystą i graniczną
Оптимальное формирование неравномерно нагретых вращающихся дисков по упругому и пластическому предельным состояниям
The optimal design of nonuniformly heated rotating discs with respect to their elastic and limit carrying capacity
- A. MUSZYŃSKA, Niektóre problemy modelowania układów mechanicznych
Некоторые вопросы моделирования механических систем
Certain problems of modelling of mechanical systems
- Z. GORAJ, Macierzowy zapis nieliniowych równań ruchu generowanych formalizmem Lagrange'a
Матричная запись нелинейных уравнений движения, порождаемых методом Лагранжа
Matrix representation of a non-linear equations of motion derived by the application of Lagrange's formalism

SPIS TREŚCI

cd. ze s. II okładki

- E. WALICKI, A. TOPOLIŃSKI, Powolny przepływ cieczy lepkiej w płaskim kanale o nagłym lokalnym rozszerzeniu 149
Медленное течение вязкой жидкости в плоском канале с внезапным местным расширением
Slow viscous fluid flow in the channel with a locally recessed walls
- A. WILCZYŃSKI, Stateczność płaskiej postaci zginania belki o osi załamanej 163
Устойчивость плоской формы изгиба балки с переломленной осью
Stability of plane form of bending of a beam with the deflected axis
- B. BIENIASZ, Graniczna moc dwufazowego termosyfonu rurowego ze względu na kryterium odrywania kondensatu 175
Пределная мощность двухфазового трубчатого термосифона на условия отрыва конденсата
Limit power of a two-phase pipe thermosiphon with respect to condensate liquid instability
- BIULETYN INFORMACYJNY 183

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Institucje państwowe społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Prenumeratory indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter), 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
