

y 11 720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 16 · ZESZYT 4

WARSZAWA 1978

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

<p>R. GUTOWSKI, Modele matematyczne procesów dynamicznych i stateczność ruchu Математические модели динамических процессов и устойчивость движения Mathematical models of dynamical processes and stability of motion</p>	415
<p>J. J. WĄSOWSKI, Badanie ugięć płyt metodą moiré Исследование изгиба пластин методом муара Examination of the deflection of plates by moiré method</p>	439
<p>J. KARKOWSKI, Analiza sprężysto-plastycznego jarzma połączenia sworzniowego Упруго-пластический анализ проушин стержневого соединения Elastic-plastic analysis of bridge plate of pin joints</p>	457
<p>Z. ORŁOŚ, K. TOMASZEWSKI, Badania odkształceń i naprężeń termosprężystych na modelach epoksydowych metodą tensometrii elektrozestancyjnej Исследования термоупругих деформаций и напряжений эпоксидных моделей методом электрорезистивной тензометрии Investigations of thermoelastic strains and stresses of epoxy models by means of strain gauges</p>	467
<p>F. TWARDOSZ, J. ZIELNICA, O stateczności dynamicznej powłoki stożkowej przy pulsujących siłach podłużnych i poprzecznych z uwzględnieniem nieliniowego tłumienia materiałowego Об динамической устойчивости конической оболочки при пульсирующих продольных и поперечных силах с учетом нелинейного демпфирования материала Dynamical stability of a conical shell loaded by transversal and longitudinal forces with the nonlinear material's damping</p>	483
<p>J. ŁUCZKO, Optymalny dobór bezinercyjnego układu amortyzacji przy wymuszeniu harmonicznym Оптимальный подбор безинерционной системы амортизации при гармоническом вынуждении Optimal choice of non-inertial system of vibroisolation with harmonic forcing</p>	493
<p>M. ALBIŃSKA, A. GAJEWSKI, Optymalne kształtowanie belki wspornikowej obciążonej siłami zewnętrznymi i ciężarem własnym w warunkach pełzania Оптимальное формирование консольной балки нагруженной внешними силами и собственным весом в условиях ползучести Optimal design of the cantilever beam loaded by external forces and by its own weight in creeping conditions</p>	499
<p>J. WOJNAROWSKI, J. ŚWIDER, Metoda niezależnych konturów bezpośredniej transformacji układu mechanicznego w graf przepływu sygnałów Метод независимых контуров непосредственной трансформации механической системы в граф сигналов A method of independent cycles of direct transformation of a mechanical system into a signal flow graph</p>	507
<p>J. KOLENDĄ, Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności dynamicznej fundamentów. Metoda podatności dynamicznej fundamentów linii wałów Вынужденные колебания валопроводов с учётом асимметрии изгибной жесткости и податливости фундаментов. Метод идентификации динамической податливости фундаментов валопроводов Forced vibrations of shaftings with asymetry of a bending rigidity of flexible foundations. Identification method of the dynamical receptances of shafting foundations</p>	517

cd. na s. III okładki

y II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 6 · Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 7 8

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
IGOR KISIEL, JERZY MARYNIAK,
WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT,
JÓZEF WIĘCKOWSKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY,
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR,
ANDRZEJ SZANIAWSKI — REDAKTOR,
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR,
MONIKA WĄGROWSKA — REDAKTOR,
JERZY DAŁEK — SEKRETARZ

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 1724, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 680(585+95). Ark. wydawniczych 15,0. Ark. drukarskich 12,5 + wkł. Papier druk sat.
V kl. 70 g, 70×100. Oddano do składania 15.VIII.1978 r. Druk ukończono w grudniu 1978 r.
Zam. 1160/78. S-86 Cena zł 30,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

MODELE MATEMATYCZNE PROCESÓW DYNAMICZNYCH I STATECZNOŚĆ RUCHU

ROMAN GUTOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Badanie własności dynamicznych ciał rzeczywistych można przeprowadzać doświadczalnie, lub teoretycznie. Badania doświadczalne przeprowadza się na istniejącym ciele rzeczywistym, lub na jego modelu, zachowując spełnione kryteria podobieństwa dynamicznego. Badania teoretyczne wymagają zbudowania odpowiedniego modelu matematycznego.

Skonstruowanie modelu matematycznego procesów zachodzących w ciele rzeczywistym, wymaga uprzedniego zbudowania jego modelu fizycznego. Model fizyczny nie jest odbiciem rzeczywistości, lecz aktualnie posiadanej o niej wiedzy i zawiera koncepcję opisu fizycznego ciał rzeczywistych, z uwzględnieniem strony ilościowej, przedstawionej podstawowymi prawami fizyki, wyrażonymi odpowiednimi formułami. Model fizyczny ciała rzeczywistego powinien uwzględniać przede wszystkim te jego cechy, które mają decydujący wpływ na zasady organizacji i funkcjonowania ciała rzeczywistego, lub zachodzącego w nim procesu. Ograniczając się do ciał stałych można stwierdzić, że w chwili obecnej najbardziej rozpowszechnione i skuteczne w praktyce technicznej są modele fizyczne fenomenologiczne, nazywane modelami ciągłymi i dyskretnymi.

W przypadku modeli fizycznych ciągłych, podstawową rolę odgrywa pojęcie elementu, których ilość jest w modelu ciągłym z założenia nieskończenie wielka. Pojęcie modelu fizycznego ciągłego nie jest jednoznaczne, zależy ono bowiem w istotny sposób od cech przypisywanych samemu elementowi, jak i od charakteru oddziaływania między elementami. Często stosowany schemat przypisuje elementom cechy ciała sztywnego, oddziaływującego z innymi elementami w sposób opisany za pomocą modeli reologicznych, których zachowanie się przedstawiają tak zwane konstytutywne prawa stanu. Powstaje tu od razu możliwość generowania bogatej rodziny modeli fizycznych ciągłych, typu sprężystego Lamégo, lub Cosserat, lepkosprężystych itd. Dalsze wzbogacenie modeli fizycznych można uzyskać odstępując od koncepcji elementu jako ciała sztywnego i dopuszczając procesy nawet dynamiczne zachodzące wewnątrz elementu. Taka sytuacja ma na przykład miejsce w przypadku oddziaływania na ciało stałe obciążeń szybkozmiennych, o częstościach porównywalnych z częstościami drgań atomów w sieci krystalicznej ciała.

W przypadku, gdy jako reprezentację modelu fizycznego przyjmujemy skończoną ilość skończonych elementów, traktowanych jako punkty materialne, lub ciała sztywne, wtedy mamy do czynienia z modelem fizycznym dyskretnym, którego ostateczna postać zależy od charakteru więzów, to znaczy oddziaływań między elementami i otoczeniem.

Dla każdego modelu fizycznego można zbudować szereg modeli matematycznych, w zależności od przyjętego wyboru współrzędnych stanu. Pozostając w ramach mechaniki

newtonowskiej, najczęściej stosowanymi modelami matematycznymi są dla modeli ciągłych równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, bądź równania całkowe, bądź różniczkowo całkowe, otrzymane ze skojarzenia równań otrzymanych metodą bilansu i równania konstytutywnego stanu, zaś dla modeli dyskretnych równania różniczkowe zwyczajne otrzymywane za pomocą metod mechaniki analitycznej.

Pomijając szereg szczegółowych idei związanych z ogólną teorią i praktyką modelowania fizycznego i matematycznego procesów mechanicznych w ciałach stałych, należy stwierdzić, że badania teoretyczne uzyskanego modelu matematycznego może się odbywać bądź metodami ilościowymi w sposób analityczny, lub numeryczny, bądź metodami jakościowymi. W dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na jednej z ważnych, lecz często niedoświadczanych cech jakościowych modelu matematycznego, to znaczy stateczności, która dla modeli matematycznych, w których występuje czas jako parametr wyróżniony, nosi nazwę stateczności ruchu. Dla procesów dynamicznych w ciałach stałych, model matematyczny powinien zapewniać uzyskanie informacji o zachowaniu się ciała w przestrzeni z biegiem czasu. Stateczność rozwiązań jest jedną z podstawowych cech modelu matematycznego, opisującego proces fizyczny, podobnie jak istnienie i jednoznaczność rozwiązania, gdyż decyduje ona o realizowalności procesu rzeczywistego, opisywanego rozważanym modelem matematycznym. Trzeba stwierdzić, że dla stateczności ruchu wprowadzono wiele różnych pojęć i definicji, a ponadto badania prowadzi się za pomocą niejednolitego i różnorodnego aparatu matematycznego. Stan ten często nie ułatwia interpretacji otrzymanych rezultatów, gdyż ze względu na różnice co do metody i sposobu przedstawienia, przeprowadzenie ich porównania okazuje się w wielu przypadkach trudne. Spowodowało to powstanie sytuacji, w której pojęcie stateczności ruchu przestało być jednoznaczne i pod pojęciem tym kryją się różne, często przeciwstawne własności rozwiązań modelu matematycznego. W niniejszych rozważaniach przedstawione zostaną główne istniejące pojęcia stateczności i kierunki ich rozwoju, zarówno dla modeli dyskretnych jak i ciągłych, z uwzględnieniem szeregu ważnych i istotnych różnic między nimi.

2. Podstawowe pojęcia teorii stateczności ruchu. Rodzaje stateczności ruchu układów dyskretnych

Rozważmy układ materialny, będący bądź w stanie równowagi, bądź w stanie pewnego ruchu. Rozwiązanie otrzymane na podstawie modelu matematycznego, opisującego rozważany układ materialny, zapewniające uzyskanie informacji o zachowaniu się układu w przestrzeni z biegiem czasu, będziemy w dalszym ciągu nazywali procesem.

Ogólnie rzecz biorąc, na podstawie intuicji, statecznością procesu będziemy nazywali własność zachowywania przez model matematyczny danego procesu, przy działaniu małych zaburzeń, lub inaczej niepodatność na małe zaburzenia, których nie uwzględnia się przy wyprowadzaniu równań ruchu układu. Spodziewamy się wtedy, że układ materialny będzie miał zdolność do zachowywania wykonywanego ruchu, lub położenia równowagi przy oddziaływaniu małych zaburzeń. Jeżeli rozważany proces ulega unicestwieniu nawet pod wpływem dowolnie małych zaburzeń, wtedy nazywamy go niestatecznym. Proces niestateczny jest nieobserwowalny, to znaczy nie dają się zrealizować w rzeczywistości, czyli inaczej mówiąc nie występuje w przyrodzie.

Przy badaniu teoretycznym dowolnego rzeczywistego zjawiska, pomijamy drugorzędne czynniki i budujemy model fizyczny i matematyczny, będący naszym przybliżonym wyobrażeniem o tym zjawisku. Opierając się o ten model, konstruujemy nowe modele tego zjawiska, lub nawet modele innych zjawisk. Powstaje pytanie, czy utworzone przez nas nowe procesy można zrealizować w rzeczywistości.

Otóż jeśli są one stateczne, to możliwość taka, przynajmniej teoretycznie istnieje. Jeśli zaś ulegają one likwidacji pod wpływem małych zaburzeń odzwierciedlających warunki rzeczywiste, to są one niestateczne i nierealizowalne w rzeczywistości.

Z tego względu, warunkiem koniecznym realizacji idealnych procesów jest, aby odpowiadający im model matematyczny czynił zadość tak zwanej zasadzie stateczności, obejmującej istnienie, jednoznaczność i stateczność jego rozwiązań pod wpływem małych zaburzeń.

Należy rozróżniać stateczność względem dowolnie małych zaburzeń, decydującą o możliwości zrealizowania procesu w rzeczywistości i stateczność względem dowolnych zaburzeń, związaną z oszacowaniem odchylenia procesu, od pewnego procesu idealnego, niezaburzonego. Jednakże badanie zachowania się procesu idealnego przy większych zaburzeniach ma znaczenie tylko wtedy, gdy jest on stateczny względem dowolnie małych zaburzeń, to znaczy, gdy jest on obserwowalny w przyrodzie. Zarówno jedna jak i druga stateczność, mają podstawowe znaczenie przy projektowaniu nowych obiektów, gdyż pozwalają one na prognozowanie, czyli przewidywanie zachowania się obiektu podczas eksploatacji.

Z powyższych rozważań wynika, że pojęciu stateczności został nadany wyraźnie sens matematyczny, dotyczący własności modelu matematycznego, a nie fizyczny, dotyczący zjawiska rzeczywistego. W tym rozumieniu pojęcie stateczności nie stosuje się do zjawisk rzeczywistych. Stwierdzenie, że rzeczywiste zjawisko fizyczne jest stateczne lub nie, jest w powyższym znaczeniu pozbawione sensu. W większości istniejących sformułowań badanie stateczności wymaga bowiem:

- 1) Porównywania jednocześnie występującego zbioru procesów zaburzonych z procesem idealnym, niezaburzonym.
- 2) Ustalenia sposobu mierzenia odległości między jednocześnie występującymi procesami, zarówno w stanie początkowym jak i dowolnym.
- 3) Określenia warunków, którym muszą czynić zadość te odległości.

Realizacja tych wymagań nie jest możliwa w przypadku zjawiska rzeczywistego, które odbywa się w sposób jednorazowy.

Chcąc sprecyzować lepiej pojęcie stateczności, trzeba brać pod uwagę specyficzne cechy zjawiska, które ma opisywać model matematyczny. Może to mieć istotny wpływ na ostateczne ściśle zdefiniowanie pojęcia stateczności. Pojęcie stateczności nie jest bowiem pojęciem właściwym dla fizyki jakiegoś zjawiska, lecz podlega zdefiniowaniu, w zależności od tego, jakich cech żądamy od modelu matematycznego opisującego zjawisko.

Podamy teraz najważniejsze definicje stateczności ruchu zaburzonego, które zostały zdefiniowane dla potrzeb badania różnych własności modeli matematycznych układów dyskretnych.

2.1. **Stateczność w sensie Lapunowa.** Rozważmy równanie ruchu zaburzonego w postaci

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

gdzie $x = \text{col } [x_1, \dots, x_n]$, $f = \text{col } [f_1, \dots, f_n]$. Zakładamy, że funkcja f spełnia dowolne założenia, zapewniające istnienie i jednoznaczność równania (1) w pewnym przedziale (a, ∞) .

Definicja. Rozwiązanie $\xi = \xi(t)$ równania (1) jest stateczne w sensie Lapunowa przy $t \rightarrow \infty$, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $t_0 \in (a, \infty)$ istnieje takie $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$, że

1) Wszystkie rozwiązania $x = x(t)$ równania (1) włącznie z $\xi(t)$ spełniające warunek

$$(2) \quad \|x(t_0) - \xi(t_0)\| \leq \eta,$$

są określone w $[t_0, \infty]$, lub jak niekiedy mówimy, są określone w przyszłości

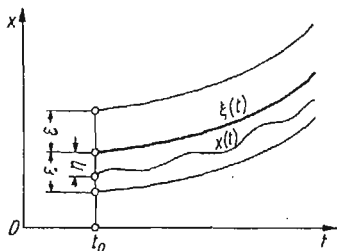
2) Dla rozwiązań tych zachodzi nierówność

$$(3) \quad \|x(t) - \xi(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{dla} \quad t \in [t_0, \infty),$$

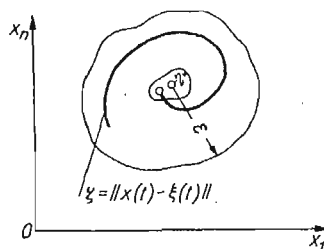
Jeśli ponadto jest

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \xi(t)\| = 0$$

wtedy rozwiązanie $\xi(t)$ jest asymptotycznie stateczne.



Rys. 1



Rys. 2

Inaczej mówiąc, rozwiązanie $\xi(t)$ jest stateczne, jeśli rozwiązanie $x(t)$ dostatecznie bliskie niego dla $t = t_0$, leży całkowicie w dowolnie wąskim ε — otoczeniu, zbudowanym wokół rozwiązania $\xi(t)$.

Gdy $f(t, 0) = 0$ wtedy równanie (1) ma rozwiązanie zerowe $\xi = 0$, zwane położeniem równowagi. Definicję stateczności tego rozwiązania zerowego otrzymujemy, kładąc w (2), (3), (4), $\xi(t_0) = 0$ i $\xi(t) = 0$.

Jeśli η można dobrać niezależnie od t_0 , to znaczy jest $\eta = \eta(\varepsilon)$, to stateczność nazywamy jednostajną.

Należy zaznaczyć, że ze stateczności rozwiązania niezerowego $\xi(t)$ równania (1) nie wynika jego ograniczoność i na odwót.

Przedstawiona definicja stateczności w sensie Lapunowa, obejmuje przypadek klasyczny, podstawowy, stateczności względem zaburzeń tylko wartości początkowych. Można rozważać również stateczność przy małych zaburzeniach samej postaci równania (1), to znaczy przy małych zmianach funkcji $f(t, x)$, występującej po prawej stronie równania

(1). Wtedy mamy do czynienia z tak zwaną statecznością przy stale działających zaburzeniach, które podlega osobnemu zdefiniowaniu (definicję tę w zakresie niniejszych rozważań pomijamy).

Warto zwrócić jeszcze uwagę na niektóre specyficzne cechy zdefiniowanej stateczności w sensie Lapunowa dla układów liniowych. Rozważmy równanie różniczkowe liniowe ruchu zaburzonego w postaci

$$(5) \quad \frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad z(t_0) = z_0,$$

gdzie $A = \{a_{ij}\}$ ($i, j = 1, \dots, n$). Zakładamy, że macierze $A(t)$ i $f(t)$ są ciągłe w $[t_0, \infty)$. Wraz z równaniem (5) rozważmy równanie liniowe jednorodne w postaci

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0 = z_0,$$

Układ (5) nazywamy statecznym (lub niestatecznym) w sensie Lapunowa, jeśli wszystkie jego rozwiązania $z = z(t)$, są stateczne (lub niestateczne) w sensie Lapunowa przy $t \rightarrow \infty$. Pojęcie stateczności odnosimy tu do układu liniowego (5), gdyż jak można wykazać, wszystkie rozwiązania układu liniowego są bądź jednocześnie stateczne, bądź niestateczne. Taka terminologia nie ma uzasadnienia dla równania nieliniowego (1), gdyż niektóre jego rozwiązania mogą być stateczne, a inne nie. Zatem liniowy układ jest stateczny, gdy przynajmniej jedno rozwiązanie tego układu stateczne i niestateczny, gdy niestateczne jest jakiegokolwiek jego rozwiązanie. Ponadto można wykazać, że niejednorodny układ liniowy (5) jest stateczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest stateczny odpowiedni jednorodny układ liniowy (6). Z tego względu, wystarczy badać stateczność tylko układów liniowych jednorodnych.

Inna ważna własność charakterystyczna układów liniowych polega na tym, że liniowy układ jednorodny (6) jest stateczny wtedy i tylko wtedy, gdy każde rozwiązanie $x(t)$ tego układu jest ograniczone dla $t \in [t_0, \infty)$. Własności tej nie ma już układ liniowy niejednorodny (5) oraz oczywiście układ nieliniowy.

Można również wykazać, że układ jednorodny (6) jest asymptotycznie stateczny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego rozwiązania zbiegają do zera przy $t \rightarrow \infty$. Własność ta nie ma miejsca dla równań nieliniowych, dla których wszystkie rozwiązania mogą dążyć do zera, podczas gdy rozwiązanie zerowe tego równania jest niestateczne.

2.2. Stateczność w sensie Lagrange'a. Rozważmy ponownie równanie ruchu zaburzonego w postaci (1). Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać $x = x(t, C)$, gdzie macierz C możemy wyznaczyć z warunku początkowego, to znaczy $x(t_0, C) = x_0$ skąd $C = C(t_0, x_0)$.

Podstawiając tę wartość do rozwiązania ogólnego, mamy

$$(7) \quad x = x(t; t_0, x_0).$$

Wartości t_0, x_0 są tu parametrami, zaś rozwiązanie ogólne, przedstawione wzorem (7), nazywamy rozwiązaniem w postaci Cauchy'ego.

Definicja. Rozwiązania $x(t; t_0, x_0)$ równania (1) są stateczne w sensie Lagrange'a, lub układ (1) jest stateczny w sensie Lagrange'a, gdy mają miejsce następujące własności

- 1) Każde rozwiązanie $x(t; t_0, x_0)$ można nieograniczenie przedłużyć w prawo, to znaczy ma ono sens w $[t_0, \infty)$, czyli jest ono określone w przyszłości
- 2) Norma każdego rozwiązania $x(t; t_0, x_0)$ jest ograniczona w $[t_0, \infty)$

$$(8) \quad \|x(t; t_0, x_0)\| \leq M(t_0, x_0) = \text{const} < \infty, \quad t \in [t_0, \infty).$$

Z definicji tej jest widoczne, że stateczność w sensie Lapunowa i w sensie Lagrange'a różnią się w istotny sposób. Istotnie stateczność w sensie Lapunowa dla równań nieliniowych jest zindywidualizowana, to znaczy jedne rozwiązania mogą być stateczne w sensie Lapunowa, a inne nie. Natomiast stateczność w sensie Lagrange'a, dotyczy własności obejmującej wszystkie rozwiązania równania nieliniowego, a więc dotyczy układu, a nie indywidualnych rozwiązań. Następnie rozwiązania stateczne w sensie Lapunowa dla równania (1) nie muszą być ograniczone, co stanowi drugą podstawową różnicę, między statecznością w sensie Lapunowa i Lagrange'a. Widać więc, że układ stateczny w sensie Lapunowa może być niestateczny w sensie Lagrange'a i na odwrót. Pojęcia obu tych stateczności są równoważne tylko wtedy, gdy układ (1) ma rozwiązania $\xi(t)$ ograniczone, które są globalnie asymptotycznie stateczne w sensie Lapunowa, to znaczy względem dowolnych zaburzeń wartości początkowych. Wtedy układ (1) jest też stateczny w sensie Lagrange'a. Również wszystkie układy liniowe jednorodnie, stateczne w sensie Lapunowa, są stateczne w sensie Lagrange'a i na odwrót.

2.3. Stateczność orbitalna. Rozważmy równanie różniczkowe nieliniowe autonomiczne

$$(9) \quad \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Zakładamy, że funkcja f spełnia warunki, zapewniające istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (9) w rozważanym obszarze współrzędnych stanu x .

Niech $x = x(t)$ będzie rozwiązaniem równania (9). Zbiór punktów L w n wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_x^n , tworzących rozwiązanie równania (9), będziemy nazywali trajektorią rozwiązania.

Odległość punktu $z \in E_x^n$ od zbioru L zawartego w tej przestrzeni określamy następująco

$$(10) \quad \varrho(z, L) = \inf_{x \in L} \|z - x\|.$$

Niekiedy dogodnie jest dla rozwiązania $x = x(t)$ rozważać zbiór punktów L^+ w E_x^n , odpowiadających wartościom parametrów $t_0 \leq t < \infty$. Zbiór ten nazywamy półtrajektorią dodatnią (analogicznie określamy półtrajektorie ujemną L^-).

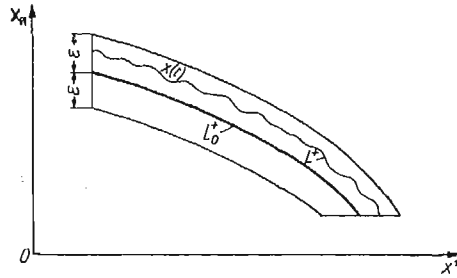
Definicja. Rozwiązanie $\xi = \xi(t)$ równania (9) nazywamy orbitalnie statecznym przy $t \rightarrow \infty$, jeśli dodatnie półtrajektorie L^+ wszystkich rozwiązań, które w chwili t_0 są dostatecznie bliskie rozwiązaniu $\xi(t)$ są przez cały czas $t \in [t_0, \infty)$ zawarte w dowolnie małym ε — otoczeniu dodatniej półtrajektorii L_0^+ rozwiązania $\xi(t)$.

Inaczej mówiąc, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ takie, że jeśli $\|x(t_0) - \xi(t_0)\| \leq \eta$ to $\varrho(x(t), L_0^+) \leq \varepsilon$ dla $t \geq t_0$.

Jeśli ponadto $\varrho(x(t), L_0^+) \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow \infty$ to rozwiązanie $\xi(t)$ nazywamy asymptotycznie orbitalnie statecznym.

Gdy na przykład L_0^+ jest zamkniętą asymptotycznie orbitalnie stateczną trajektorią, to trajektorie L^+ dostatecznie bliskie niej w chwili $t = t_0$, nawijają się na nią przy $t \rightarrow \infty$.

Jeśli rozwiązanie $\xi(t)$ jest stateczne w sensie Lapunowa, to wynika stąd również stateczność orbitalna tego rozwiązania, lecz nie na odwrót.



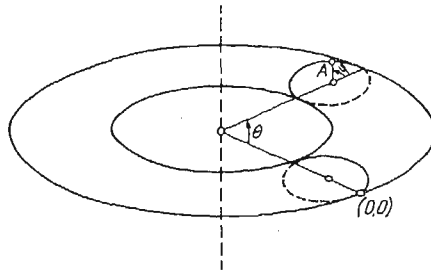
Rys. 3

2.4. Pojęcie o stateczności w sensie Poissona. Rozważmy ruchu punktu na powierzchni torusa. Niech ruch ten opisują równania różniczkowe

$$(11) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Trajektorie punktu A na torusie otrzymujemy z równania różniczkowego

$$(12) \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = \alpha \quad \text{skąd} \quad \varphi = \alpha\theta + C.$$



Rys. 4

Każdą z trajektorii na torusie, otrzymujemy z trajektorii podstawowej $\varphi = \alpha\theta$, przez dodanie stałej C , wystarczy więc zbadać strukturę trajektorii podstawowej. Rozważmy dwa przypadki

- 1) $\alpha = \frac{m}{k}$ jest liczbą wymierną. Wtedy trajektoria $\varphi = \frac{m}{k}\theta$ jest linią zamkniętą na powierzchni torusa i po wykonaniu skończonej ilości zwoitek przechodzi przez punkt $\theta = 2k\pi, \varphi = 2m\pi$ pokrywający punktem $(0, 0)$
- 2) α jest liczbą niewymierną. Aby zbadać strukturę trajektorii w tym przypadku, korzystamy z następującego rezultatu.

Rozważmy liczby w postaci $(n\alpha)$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, zaś $(n\alpha)$ częścią ułamkową liczby $n\alpha$, to znaczy $0 < (n\alpha) < 1$. Dla $n = 1, 2, 3, \dots$, mamy ciąg liczb $(\alpha), (2\alpha), (3\alpha), \dots$, które możemy przedstawić jako punkty w przedziale $[0,1]$. Jeśli $\alpha > 0$

jest liczbą niewymierną, to liczby $(n\alpha)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, tworzą zbiór wszędzie gęsty w przedziale $[0, 1]$.

Trajektoria $\varphi = \alpha\theta$ wychodząca z punktu $(0, 0)$ wykonuje kilka zwoitek i przecina równik $\varphi = 0$ w punkcie $\left(\theta = \frac{2\pi}{\alpha}, \varphi = 2\pi\right)$ różnym od wyjściowego, następnie po wykonaniu kilku zwoitek, przecina równik $\varphi = 0$ w nowym punkcie $\left(\frac{4\pi}{\alpha}, 4\pi\right)$ i tak dalej. Wobec tego trajektoria przecina wielokrotnie równik w punktach $\left(\frac{2k\pi}{\alpha}, 2k\pi\right)$. Pomijając wartości będące wielokrotnościami 2π , mamy następujące współrzędne punktów przecięcia trajektorii $\varphi = \alpha\theta$ z równikiem $\left(2\pi\left(\frac{k}{\alpha}\right), 0\right)$, gdzie $\left(\frac{k}{\alpha}\right)$ jest częścią ułamkową liczby $\left(\frac{k}{\alpha}\right)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Na podstawie przedstawionego wyżej rezultatu liczby $\left(\frac{k}{\alpha}\right)$ tworzą zbiór wszędzie gęsty w przedziale $[0, 2\pi]$, a więc punkty $\left(2\pi\left(\frac{k}{\alpha}\right), 0\right)$ tworzą zbiór wszędzie gęsty na równiku $\varphi = 0$. Rozważania te można bez zmian powtórzyć dla dowolnego równoleżnika $\varphi = c$, zatem trajektoria $\varphi = \alpha\theta$ jest wszędzie gęsta na powierzchni torusa.

Rozważmy jakikolwiek konkretny ruch po trajektorii $\varphi = \alpha\theta$ na przykład

$$(13) \quad \varphi = \alpha t, \quad \theta = t$$

Ponieważ ruch ten odbywa się po trajektorii $\varphi = \alpha\theta$ wszędzie gęstej na powierzchni torusa i prędkość ruchu jest stała $v = \sqrt{1 + \alpha^2} = \text{const} > 0$, więc dla każdego otoczenia punktu $(0, 0)$ istnieje $t > t_0$ takie, że punkt reprezentujący $A(\theta = t, \varphi = \alpha t)$ należy do tego otoczenia. Mówiąc potocznie rozważany ruch ma tę własność, że punkt reprezentujący O powraca nieskończenie wiele razy w każde otoczenie punktu $(0, 0)$, mimo że może w międzyczasie znacznie oddalić się od tego punktu. Własność ta nazywa się statecznością ruchu w sensie Poissona i jest to rodzaj stateczności odmiennej od stateczności w sensie Lapunowa, Lagrange'a i stateczności orbitalnej. Stateczność w sensie Poissona, znajduje zastosowanie między innymi przy badaniu własności ruchów okresowych i prawie okresowych.

2.5. Stateczność techniczna. Rozważmy równanie różniczkowe w postaci

$$(14) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

$$(15) \quad \frac{dz}{dt} = F(t, z) + F(t, z), \quad z(t_0) = z_0 = x_0$$

Zakładamy, że funkcje f i F spełniają warunki, zapewniające istnienie i jednoznaczność rozwiązań rozważanych równań w skończonym obszarze

$$t_0 \leq t \leq T, \quad \|x\| \leq H, \quad \|z\| \leq H$$

Ponadto niech $f(t, 0) = 0$, $F(t_0, z_0) = 0$. Funkcja $F(t, z)$ może być praktycznie nieznaną, lecz zakładamy, że znane jest oszacowanie tej funkcji oraz wartości początkowych z_0

$$(16) \quad \|z_0\| \leq z_0^*, \quad \|F(t, z)\| \leq \Gamma(t) \quad \text{dla} \quad t_0 \leq t \leq T.$$

W szczególnym przypadku może być $\Gamma(t) = \gamma = \text{const}$.

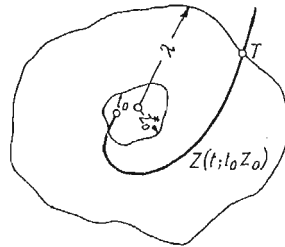
Definicja: Niech $z = z(t; t_0, z_0)$ przedstawia wszystkie ruchy opisane równaniem (15), spełniające warunek początkowy $z(t_0) = z_0$ i ograniczenia (16).

Jeśli

$$(17) \quad \|z(t; t_0, z_0)\| \leq \Lambda(t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

(w szczególnym przypadku może być $\Lambda(t) = \lambda = \text{const}$), to proces $x(t; t_0, x_0)$, czyli rozwiązanie równania (14) nazywamy statecznym technicznie, względem wartości ograniczeń z_0^* , $\Gamma(t)$, $\Lambda(t)$.

Proces $x(t; t_0, x_0)$ nazywamy niestatecznym technicznie względem tych ograniczeń, jeśli dla $t_0 \leq t \leq T$, chociażby jedno z rozwiązań $z(t; t_0, z_0)$ nie spełnia nierówności (17), co najmniej w jednej chwili z przedziału $t_0 \leq t \leq T$.



Rys. 5

Istotną sprawą w tak rozumianym pojęciu stateczności jest to, że wartości z_0^* i $\Lambda(t)$ (lub $\lambda = \text{const.}$) obiera się jeden raz dla danego zagadnienia, niezależnie od siebie oraz, że żądane własności mają mieć miejsce w skończonym przedziale czasu $t_0 \leq t \leq T$, gdzie wartość T obieramy również jeden raz dla danego zagadnienia.

Porównując rozważaną stateczność techniczną na przykład ze statecznością w sensie Lapunowa stwierdzamy, że w tej ostatniej dla każdego obszaru Ω_A musiał istnieć obszar $\Omega_{z_0}^*$ taki, aby startujące z niego rozwiązanie pozostawało stale ($T = \infty$) w obszarze Ω_A . W stosunku do stateczności w sensie Lapunowa, stateczność techniczna ma złagodzone warunki, bardziej przystosowane do potrzeb praktyki.

2.6. Ogólne uwagi o niektórych innych rodzajach stateczności. W powyższych rozważaniach przedstawionych zostało kilka pojęć stateczności ruchu, przy czym pojęcia te są odmienne, zatem przy badaniu stateczności ruchu trzeba wyraźnie sprecyzować, jaka stateczność podlega badaniu. Oprócz wymienionych wyżej rodzajów stateczności ruchu, istnieją liczne ich modyfikacje oraz inne jeszcze pojęcia stateczności ruchu, odmienne od rozważanych wyżej. Dokonanie systematycznego i wyczerpującego przeglądu istniejących obecnie pojęć stateczności, przekroczyłoby ramy niniejszych rozważań.

Omówimy tylko ogólnie jeszcze jedno pojęcie, które często nosi nazwę wrażliwości własności rozwiązań, na zmiany strukturalno-modelowe. Aby objaśnić to pojęcie, posłużymy się przykładem trzech równań różniczkowych w postaci

$$(18) \quad \ddot{x} + \beta \dot{x} + \alpha^2 \sin x = 0,$$

$$(19) \quad \ddot{x} + \beta \dot{x} + \alpha^2 x = 0,$$

$$(20) \quad \ddot{x} + \alpha^2 x = 0.$$

Równania (19) i (20) można uważać za modele zastępcze, uproszczone, powstałe w wyniku zaburzenia modelu wyjściowego (18), czyli zaburzenia struktury układu. Również równania (18) i (19) można uważać za modele zastępcze wzbogacone, powstałe w wyniku zaburzenia modelu wyjściowego (20). Zaburzeniom tego typu towarzyszy modyfikacja równania różniczkowego, czyli modelu matematycznego opisującego dane zjawisko.

Z fizycznego punktu widzenia modyfikacje takie są uzasadnione, jeśli zmiany równania różniczkowego, polegające na dołączaniu lub odłączaniu małych składników równania różniczkowego, pociągają za sobą małe zmiany rozwiązania. Przypuszczamy zwykle, że tak jest, opierając się na intuicji fizycznej, jednakże przypuszczenie takie nie zawsze jest prawdziwe, zwłaszcza dla procesów długotrwałych, gdyż małe zmiany równania różniczkowego, mogą w istotny sposób wpływać na zachowanie się rozwiązania. Jeśli na przykład oscylacyjność rozwiązań jest nadrzędną cechą jakościową, którą chcemy zachować modyfikując model matematyczny, to równania (18), (19) i (20) możemy uznać za równoważne na przykład dla małych $\beta > 0$. Gdy cechą nadrzędną jest okresowość rozwiązania, to model (20) czyni temu zadość, natomiast modele (18) i (19) już nie.

Powstaje więc zagadnienie wyodrębnienia klas równoważnych równań różniczkowych, w sensie zachowania pewnej własności, lub pewnego zespołu własności W . Jest to zagadnienie wrażliwości strukturalno modelowej, nazywanej również statecznością w sensie Belmana, polegające na tym, aby przy zastąpieniu jednego modelu matematycznego innym, wyróżniane własności układu nie zmieniały się w istotny sposób i znajdowały się w zasięgu naszej kontroli. Wrażliwość może dotyczyć nie tylko zespołu W własności jakościowych, lecz również zmian ilościowych pewnych wielkości jak na przykład zmiany wartości rozwiązania, całkowitej energii układu, funkcji celu w procesach optymalnych itp.

Jednym z wariantów zagadnienia wrażliwości nabierających ostatnio coraz większego znaczenia praktycznego, jest zagadnienie wrażliwości ilościowej rozwiązania na zmianę parametrów, które przedstawimy poglądowo w sposób następujący. Niech model matematyczny pewnego zjawiska fizycznego będzie opisywany równaniem różniczkowym w postaci

$$(21) \quad \Phi = \ddot{x} - f(t, x, \dot{x}, c) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0.$$

Rozwiązanie równania (21) będziemy uważali za znane. Zagadnieniem, które chcemy zbadać, jest wrażliwość rozwiązania $x(t, c)$ na zmianę parametru c , to znaczy zmiana tego rozwiązania, gdy parametr c zmieni się o wartość Δc . W tym celu wprowadzamy funkcję wrażliwości w postaci

$$(22) \quad u(t, c) = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{x(t, c + \Delta c) - x(t, c)}{\Delta c} = \frac{\partial u}{\partial c}.$$

Na podstawie związku (22) mamy przybliżoną zależność

$$(23) \quad x(t, c + \Delta c) - x(t, c) \cong u(t, c) \Delta c.$$

Jeśli więc wyznaczymy, lub oszacujemy funkcję $u(t, c)$, wtedy na mocy (23) możemy wyznaczyć w przybliżeniu, lub oszacować zmianę funkcji $x(t, c)$ wynikłą wskutek zmiany parametru c o wartość Δc . Można również sformułować zadanie odwrotne, wyznaczenia takiej zmiany Δc parametru c , aby odchylenie rozwiązania $x(t, c)$ powstałe pod wpływem tej zmiany, nie przekroczyło z góry żądanej wartości.

Równanie różniczkowe dla funkcji $u(t, c)$ otrzymujemy, różniczkując równanie (21) względem parametru c

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial c} = 0.$$

Stąd mamy

$$(24) \quad \ddot{u} - \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \dot{u} - \frac{\partial f}{\partial x} u = \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Ponieważ rozwiązanie $x(t, c)$ uważamy za znane, więc znane są również funkcje

$$\alpha(t, c) = -\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}, \quad \beta(t, c) = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \gamma(t, c) = \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Równanie (24) przybiera więc postać

$$(25) \quad \ddot{u} + \alpha(t, c)\dot{u} + \beta(t, c)u = \gamma(t, c).$$

Zwróćmy uwagę na to, że dla równania nieliniowego (21) równanie różniczkowe wrażliwości (25) okazuje się liniowym równaniem różniczkowym o zmiennych współczynnikach. Ważnym praktycznie przypadkiem rozważanego zagadnienia, jest wrażliwość równania różniczkowego o stałych współczynnikach, na zmiany współczynników równania. Niech równanie (21) ma na przykład postać

$$(26) \quad \ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t).$$

Chcemy zbadać wrażliwość rozwiązań tego równania, na zmianę współczynnika na przykład b , który w rozważanym teraz przypadku odgrywa rolę parametru c . Różniczkując równanie (26) względem parametru b , otrzymujemy na mocy (22) (dla $b = c$)

$$(27) \quad \ddot{u} + au + bu = -x.$$

Równanie różniczkowe wrażliwości ma więc taką samą postać jak równanie (26), lecz po prawej stronie występuje ten składnik równania (ze znakiem minus), który w równaniu wyjściowym (26) występował wraz ze współczynnikiem b .

Rezultaty badania wrażliwości na zmiany współczynników równań liniowych są ostatnio z powodzeniem stosowane przy pewnym rodzaju syntezy układów mechanicznych i elektrycznych, zwanym zagadnieniem modyfikacji układu.

Spośród omówionych rodzajów stateczności układów dyskretnych, dla większości potrzeb występujących w zastosowaniach technicznych, najlepiej przystosowana jest stateczność techniczna. Pojęcie stateczności w sensie Lapunowa, zawiera niejednokrotnie zbyt ostre wymagania w stosunku do potrzeb techniki w chwili obecnej, mimo tego stateczność ta jest w technice szeroko stosowana, ze względu na najlepiej opracowane metody jej badania. Pojęcie stateczności w sensie Lagrange'a jest bez modyfikacji, z punktu widzenia potrzeb technicznych zbyt szerokie, ze względu na dowolność stałej, ograniczającej rozwiązanie modelu matematycznego. Niedogodności powstające przy stosowaniu różnych pojęć stateczności w technice, zostały w znacznej mierze usunięte, przez wprowadzenie pojęcia stateczności technicznej, odpowiadającej najbliższym potrzebom techniki.

Należy zaznaczyć, że metody badania różnego rodzaju stateczności, wywodzą się w dużym zakresie z metod opracowanych dla badania stateczności w sensie Lapunowa. Tak

więc stosowanie metod badania stateczności za pomocą tak zwanych funkcjonałów Lapunowa, nie oznacza zawsze, że badana jest stateczność w sensie Lapunowa. Z tego względu zaznajomienie się z metodami badania stateczności różnego rodzaju, celowe jest rozpocząć od metod, opracowanych dla stateczności w sensie Lapunowa.

3. Podstawowe różnice między statecznością modeli matematycznych układów dyskretnych i ciągłych

Norma stosowana w definicjach o stateczności (na przykład w sensie Lapunowa) modeli matematycznych układów dyskretnych, jest miarą odległości między rozwiązaniami, między innymi rozwiązań $x(t)$ od rozwiązania idealnego, niezaburzonego $\xi = 0$. Istotną sprawą jest fakt, że normy w przestrzeniach o skończonej ilości wymiarów są topologicznie równoważne. Inaczej mówiąc, jeśli dla równania różniczkowego zwyczajnego, opisującego układ o skończonej ilości stopni swobody, stwierdzimy stateczność rozwiązania na przykład $\xi = 0$ względem pewnej normy, to jest ono stateczne również względem dowolnej innej normy. Natomiast własność ta nie ma na ogół miejsca, w przypadku nieskończonej ilości współrzędnych stanu, co odgrywa zasadniczą rolę w sformułowaniu i badaniu stateczności rozwiązań równań o pochodnych cząstkowych, opisujących dynamikę ośrodków ciągłych. Proces opisujący zachowanie się ośrodka ciągłego, może być stateczny względem jednej normy, zaś względem innej niestateczny.

Drugą ważną okolicznością, którą trzeba brać pod uwagę przy badaniu stateczności jest fakt, że w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych opisujących układy dyskretne, wartości początkowe są liczbami, zaś istnienie i jednoznaczność rozwiązania są zależne tylko od regularności prawej strony $f(t, x)$ równania różniczkowego (1). W przypadku równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, opisujących ruch układów ciągłych, wartości początkowe są na ogół funkcjami. Istnienie i jednoznaczność oraz ograniczoność rozwiązań zależą wtedy nie tylko od regularności samego równania, lecz również od regularności funkcji przedstawiających wartości początkowe.

Rozważmy bliżej to zagadnienie na przykładzie równania liniowego typu hiperbolicznego drugiego rzędu, opisującego drgania poprzeczne struny lub podłużne pręta.

$$(28) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Niech warunki brzegowe mają postać

$$(29) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Zakładamy, że warunki początkowe mają postać

$$(30) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x).$$

Stosując formalnie metodę rozdzielania zmiennych, możemy rozwiązanie zagadnienia przedstawić w postaci

$$(31) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Funkcja ta spełnia warunki brzegowe (29). Warunki początkowe przedstawiamy w postaci

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

gdzie

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi.$$

Na mocy (31) otrzymujemy

$$(32) \quad A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n.$$

Formalnie zbudowany szereg (31) przedstawia rozwiązanie zagadnienia (28)-(30), jeśli szereg ten jest jednostajnie zbieżny wraz z szeregami, które otrzymujemy przez dwukrotne różniczkowanie (31) względem x i t .

Ciągłość funkcji $u(x, t)$ wynika z jednostajnej zbieżności szeregu (31), którego ogólny wyraz jest funkcją ciągłą. Biorąc pod uwagę nierówność

$$|u_n(x, t)| \leq |A_n| + |B_n|$$

widzimy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|)$$

jest majorantą szeregu (31), której zbieżność zapewnia jednostajną zbieżność szeregu (31), to znaczy ciągłość $u(x, t)$. Analogicznie zbieżność jednostajna a więc i ciągłość pochodnych

$\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ wynika ze zbieżności majorant

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|).$$

Wobec tego dowód zbieżności szeregu przedstawiającego funkcję (31) i szeregów przedstawiających jej pochodne do rzędu drugiego włącznie, sprowadza się do dowodu zbieżności szeregów

$$(33) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$(34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, \quad k = -1, 0, 1,$$

Można udowodnić, że warunkiem wystarczającym zbieżności szeregów (33) jest, aby funkcja $\varphi(x)$ miała ciągłe pochodne do drugiego rzędu włącznie i trzecią pochodną odcinkami ciągłą oraz aby $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$.

Dla zbieżności szeregów (34) wystarczy, aby funkcja $\psi(x)$ miała ciągłą pierwszą pochodną i drugą pochodną odcinkami ciągłą oraz aby $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Gdy wartości początkowe $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ nie spełniają wskazanych wyżej warunków, na przykład są one tylko ciągłe, wtedy $u(x, t)$ nie jest na ogół rozwiązaniem zagadnienia (28)—(30) w sensie klasycznym. W tym przypadku wprowadza się pojęcie rozwiązania uogólnionego w sensie Sobolewa, które dla pewnych chwil $t = t^*$ może przybrać charakter dystrybucji.

Z powyższych rozważań jest widoczne, że rozwiązanie równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, zależy od regularności wartości początkowych, co nie miało miejsca dla równań różniczkowych zwyczajnych. Ma to istotne znaczenie dla poprawnego sformułowania zagadnienia granicznego, zapewniającego ciągłą zależność rozwiązań od wartości początkowych oraz dla sformułowania stateczności rozwiązań w sensie Lapunowa w przypadku układów ciągłych, gdyż zagadnienia te bada się przy zaburzeniu wartości początkowych. Stąd jest widoczne, że bezpośrednio i bezkrytyczne przenoszenie pojęć, definicji i metod dla stateczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych, na stateczność rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych, może doprowadzić do zasadniczych nieporozumień i niejasności.

Jednym z najważniejszych zagadnień, jest jak wynika to z dotychczasowych rozważań, ustalenie odległości między rozwiązaniami zaburzonymi i rozwiązaniami niezaburzonymi. Warunki nałożone na tę odległość, powinny zapewniać między innymi takie ograniczenie stanu w chwili początkowej, aby proces niezaburzony był stateczny, w sensie przyjętej odległości. Trzeba przy tym liczyć się z faktem, że dowolne zaburzenie nawet bardzo regularnego stanu początkowego, może po zaburzeniu doprowadzić do takich wartości, które generują rozwiązania uogólnione. Sprawa przyjęcia właściwej odległości, ma więc dla badania stateczności procesów ciągłych podstawowe znaczenie.

Rozważmy to zagadnienie bliżej, na przykładzie równania struny (28) z warunkami (29) i (30). Wprowadzamy odległość między procesami zaburzonymi $u(x, t)$ i procesem niezaburzonym $u = 0$ w postaci

$$(35) \quad \varrho = \sup_{x \in [0, l]} |u| + \sup_{x \in [0, l]} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|.$$

Ograniczenie ϱ w chwili $t = 0$, jest więc równoważne ograniczeniu wartości początkowych w tym sensie, że jeśli $\varrho|_{t=0}$ jest małe, to również małe jest wychylenie i prędkość punktów struny w chwili $t = 0$ i na odwrót. Tego rodzaju ograniczenie wartości początkowych, przyjmuje się dla badania stateczności w sensie Lapunowa rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych i dla tych równań, ograniczenie to pociąga za sobą np. dla oscylacyjnego rozwiązania równania liniowego o stałych współczynnikach, ograniczenie wychyleń i prędkości w dowolnej chwili t . Takiej własności spodziewamy się na ogół, badając stateczność ruchu.

Pokażemy, że dla procesów ciągłych, ograniczenie wychyleń i prędkości początkowych, to znaczy odległości ϱ w chwili $t = 0$, nie pociąga za sobą na ogół ograniczoneści wychyleń

i prędkości w dowolnej chwili t . Przykład ten wskazuje wyraźnie, że przenoszenie pojęć i przyzwyczajęń ze stateczności równań różniczkowych zwyczajnych, może doprowadzić do niepowodzenia, w przypadku badania stateczności procesów ciągłych.

Na mocy (31) i (35) mamy

$$\varrho = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} a \left(-A_n \sin \frac{n\pi}{l} at + B_n \cos \frac{n\pi}{l} at \right) \right|.$$

Dla $t = 0$ mamy

$$(36) \quad \varrho|_{t=0} = \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} a B_n \right|.$$

Niech funkcje początkowe $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą takie, że

$$(37) \quad A_n = \frac{\varepsilon}{n^{3/2}}, \quad \frac{n\pi}{l} a B_n = \frac{\varepsilon}{n^{3/2}}.$$

Wtedy szeregi w wyrażeniu (36) są zbieżne, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \leq 1$. Stąd jest widoczne, że $\varrho|_{t=0}$ jest wielkością ograniczoną i zmierza do zera przy $\varepsilon \rightarrow 0$.

Jednakże ϱ nie jest wielkością ograniczoną, gdyż dla wartości $t = t^*$ dla których

$$\sin \frac{n\pi}{l} at^* = 1, \quad \cos \frac{n\pi}{l} at^* = 0$$

mamy

$$(38) \quad \varrho|_{t=t^*} = \left| \sum_{n=1}^{\infty} B_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} a A_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{l}{\pi a} \frac{\varepsilon}{n^{5/2}} + \frac{\pi a}{l} \frac{\varepsilon}{n^{1/2}} \right] = \infty.$$

Ten nieoczekiwany na pozór rezultat można wyjaśnić zarówno z matematycznego jak i fizycznego punktu widzenia.

Z matematycznego punktu widzenia, w równaniu (28), oprócz pochodnej względem t , występuje pochodna względem zmiennej przestrzennej x , co nie ma miejsca w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych. Natomiast odległość (35) nie nakłada żadnych ograniczeń, na pochodne względem zmiennej przestrzennej x . Wobec tego szeregi przedstawiające te pochodne, mogą okazać się rozbieżne przy pewnych wartościach t , jak to ma miejsce w przypadku rozwiązań uogólnionych.

Z fizycznego punktu widzenia ograniczenie wielkości u i $\frac{\partial u}{\partial t}$ dla $t = 0$, to znaczy ograniczenie początkowych wychyleń i prędkości punktów struny, zagwarantowanie ograniczeniem odległości w postaci (35), nie ogranicza jej początkowej energii potencjalnej, zależnej od pochodnej $\frac{\partial u}{\partial x}$. Energia potencjalna przekształca się podczas drgań struny w energię kinetyczną i może spowodować nieograniczony wzrost ϱ dla pewnych

wartości $t = t^*$. Oczywiście nie dotyczy to struny rzeczywistej, lecz jest konsekwencją przyjętego modelu matematycznego mającego powyższe własności, które trzeba brać pod uwagę przy formułowaniu i badaniu stateczności.

W rozważanym przypadku energia potencjalna ma postać

$$(39) \quad E_p = \frac{1}{2} \int_0^l T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Na mocy (31) mamy

$$(40) \quad E_p = c \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right)^2,$$

gdzie c oznacza stałą niezależną od n . Dla $t = 0$ mamy

$$(41) \quad E_p = c \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2.$$

Dla wartości A_n zgodnych z (37) otrzymujemy

$$(42) \quad E_p = \varepsilon^2 c \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$$

Szereg ten jest rozbieżny dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, a więc energia potencjalna struny E_p ma w rozważanym przypadku dla $t = 0$ nieskończenie wielką wartość.

Łatwo sprawdzić, że w przypadku rozwiązania klasycznego, ograniczenia dla wartości początkowych prowadzące do wzorów (37) nie mogą mieć miejsca i mają postać zapewniającą zbieżność szeregu (41). Zatem w przypadku klasycznym, energia potencjalna jest dla $t = 0$ ograniczona i ograniczoność przemieszczeń i prędkość w chwili początkowej, pociąga za sobą ograniczoność tych wielkości w dowolnej chwili t , względem przyjętej odległości.

4. Sformułowanie zagadnienia stateczności dla procesów ciągłych

Założmy, że układ ciągły jest opisywany modelem matematycznym, w którym wyróżniamy parametr t oznaczający czas. Takie założenie obejmuje te praktycznie interesujące przypadki, gdy zmiana stanu układu odbywa się z biegiem czasu. Niech rozważany model matematyczny ma postać równania

$$(43) \quad [F](u(P, t)) = 0,$$

gdzie $[F]$ oznacza dowolny liniowy, lub nieliniowy operator o pochodnych cząstkowych. Niech równanie (43) opisuje pewne zjawisko w obszarze ograniczonym Ω mającym brzeg Γ . Symbol P oznacza zbiór zmiennych przestrzennych.

Do równania (43) dołączamy warunki brzegowe, które przedstawiamy symbolicznie w postaci

$$(44) \quad u(P, t)|_{\Gamma} = 0$$

oraz warunki początkowe, które przedstawiamy symbolicznie w postaci

$$(45) \quad u(P, 0) = \psi(P).$$

Oznaczenia (44) i (45) mają charakter symboliczny dlatego, że mogą one symbolizować większą ilość warunków, w których mogą występować również pochodne.

Zakładamy, że równanie (43) ma przy zerowych wartościach początkowych rozwiązanie zerowe $u(P, t) = 0$, które będziemy rozważać jako proces niezaburzony. Będziemy badali stateczność rozwiązania niezaburzonego, względem zaburzeń wartości początkowych, zakładając, że samo równanie (43), jak i warunki brzegowe (44) nie ulegają zmianie.

Odchylenie procesów zaburzonych od niezaburzonego będziemy mierzyli za pomocą odległości $\varrho = \varrho(u, t)$ spełniającej warunki

$$1) \varrho(u, t) \geq 0$$

$$2) \varrho(0, t) = 0$$

3) dla dowolnego procesu $u(P, t)$ funkcja rzeczywista $\varrho(u(P, t), t)$ zmiennej t , jest ciągła względem t .

Należy zaznaczyć, że odległość $\varrho(u, t)$ nie musi spełniać aksjomatów odległości w przestrzeniach metrycznych.

Wraz z odległością $\varrho(u, t)$ wprowadzamy odległość $\varrho_p(u)$ na ogół różną od $\varrho|_{t=t_0}$, spełniającą warunki (1) i (2) dla $t = t_0$. Odległość ta nie zależy jawnie od czasu t i za pomocą tej odległości, będziemy ograniczali stan początkowy. Spośród wszystkich możliwych stanów początkowych odległość ϱ_p wyodrębnia tylko te, dla których pozostaje ona ograniczona.

Stosowanie różnych odległości ϱ_p oznacza, że proces idealny, niezaburzony $u = 0$, może być poddany zaburzeniom początkowym różnego rodzaju, to znaczy o różnym stopniu regularności. Dla konkretnego obiektu (struna, belka, płyta itp.) rodzaj zaburzeń wynika z charakteru jego pracy i odległości ϱ i ϱ_p dla procesu opisującego matematycznie ten obiekt, powinny być wybierane na podstawie przesłanek fizycznych. Stosowanie odległości ϱ_p ograniczającej stan początkowy, pozwala na rozpatrywanie zaburzeń wartości początkowych o mniejszym stopniu regularności niż klasyczny, dopuszczającym również rozwiązania uogólnione.

Przy rozważaniu dwóch odległości ϱ i ϱ_p wprowadza się jeszcze jeden warunek dla odległości ϱ a mianowicie

4) odległość $\varrho(u, t)$ jest ciągła względem odległości $\varrho_p(u)$ dla $t = t_0$, to znaczy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $t = t_0$ istnieje takie $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$, że nierówność $\varrho_p(u) \leq \eta(\varepsilon, t_0)$ pociąga za sobą nierówność $\varrho(u, t)|_{t=t_0} \leq \varepsilon$. Nie zakładamy natomiast, że jest na odwrót, to znaczy odległość ϱ_p nie musi być ciągła względem odległości ϱ dla $t = t_0$. Weźmy na przykład

$$(46) \quad \varrho = \int_{\Omega} u^2 d\Omega, \quad \varrho_p = \int_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] d\Omega.$$

W tym przypadku, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można zawsze znaleźć takie $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, że jest $\varrho \leq \varepsilon$ jeśli tylko $\varrho_p \leq \eta(\varepsilon)$, na przykład $\eta(\varepsilon) = \varepsilon$. Natomiast z nierówności $\varrho \leq \eta(\varepsilon)$ nie wynika, że $\varrho_p \leq \varepsilon$.

Definicja: Niezaburzony proces ciągły $u = 0$ nazywamy statecznym w sensie Lapunowa względem dwóch odległości ϱ i ϱ_p w przedziale $[t_0, \infty)$ jeśli

- 1) wszystkie procesy $u(P, t)$ są określone w przedziale $[t_0, \infty)$
- 2) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ takie, że dla dowolnego procesu $u(P, t)$ nierówność $\varrho_p \leq \eta(\varepsilon, t_0)$ pociąga za sobą nierówność $\varrho \leq \varepsilon$ dla wszystkich $t \geq t_0$.
Jeśli ponadto $\varrho \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow \infty$, wtedy niezaburzony proces nazywamy asymptotycznie statecznym.

W szczególnym przypadku może być $\varrho_p = \varrho|_{t=t_0}$. Wtedy stan w chwili początkowej i dowolnej charakteryzują się tą samą odległością. Powiadamy wtedy, że stateczność badamy względem jednej odległości.

Definicję stateczności względem dwóch odległości dla procesu ciągłego podał Mowczan i z tego względu stateczność ta bywa nazywana statecznością w sensie Lapunowa-Mowczana.

Badanie stateczności w sensie Lapunowa, zarówno procesów dyskretnych jak i ciągłych można przeprowadzić, opierając się bezpośrednio na definicji, lecz udaje się to rzadko, dla bardzo prostych modeli matematycznych. W bardziej złożonych przypadkach, dogodniejsze jest stosowanie tak zwanej bezpośredniej metody Lapunowa.

Metoda bezpośrednia Lapunowa dla układów dyskretnych jest dobrze znana i opracowana. Z tego względu ograniczymy się do omówienia ogólnych aspektów tej metody dla procesów ciągłych.

Metoda bezpośrednia Lapunowa dla procesów ciągłych polega na wprowadzeniu funkcjonału $V(u, t)$, który dla dowolnej funkcji $u(P, t)$ i danej chwili czasu $t \geq t_0$ jest liczbą rzeczywistą. Odległości ϱ i ϱ_p są też funkcjonałami tego rodzaju. Funkcjonał V różni się od ϱ tym, że zmienia się on monotonicznie z biegiem czasu, zaś własność tę może mieć, lecz nie musi, funkcjonał ϱ . Jeśli do funkcjonału $V(u, t)$ podstawimy funkcję $u(P, t)$ przedstawiającą konkretny proces, to V staje się pewną funkcją czasu, którą oznaczamy przez $V = V(t)$. Analogicznie odległość $\varrho(u, t)$ dla pewnego procesu $u(P, t)$ oznaczamy przez $\varrho = \varrho(t)$.

W celu zbudowania podstaw bezpośredniej metody Lapunowa, trzeba wprowadzić pewne określenia dotyczące funkcjonału V , a mianowicie zdefiniować stałość i określoność co do znaku funkcjonału V względem odległości ϱ i ciągłość funkcjonału względem odległości ϱ_p dla $t = t_0$. Pomijając szczegółowe przedstawienie tych określeń, przejdziemy do twierdzenia, będącego podstawą bezpośredniej metody Lapunowa badania stateczności procesów ciągłych względem dwóch odległości.

Twierdzenie Lapunowa-Mowczana (o stateczności)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby proces niezaburzony $u(P, t) = 0$ był stateczny względem dwóch odległości ϱ i ϱ_p dla $t \geq t_0$ jest, aby istniał funkcjonał V

- 1) dodatnio określony względem odległości ϱ
- 2) ciągły względem odległości ϱ_p dla $t = t_0$
- 3) nie rosnący względem czasu, wzdłuż dowolnego procesu zaburzonego $u(P, t)$ dla $t \geq t_0$.

Jeśli ponadto jest $\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0$, to proces niezaburzony $u(P, t) = 0$ jest asymptotycznie stateczny.

Zwróćmy uwagę, na niektóre zagadnienia związane z badaniem stateczności procesów ciągłych metodą funkcjonałów Lapunowa. Jak już wiemy, do badania stateczności procesu $u = 0$ dogodnie jest stosować dwie odległości ϱ i ϱ_p . Wybór tych odległości w konkretnej postaci, zależy od różnych, często przeciwstawnych względów. Jeśli badamy stateczność w oparciu o twierdzenie Lapunowa-Mowczana, wtedy trzeba sprawdzić ciągłość funkcjonału V względem odległości początkowej ϱ_p dla $t = t_0$. Najprościej jest to uczynić, oszacowując funkcjonal V , przez odległość początkową ϱ_p dla $t = t_0$. Jednakże jeśli funkcjonal V ma złożoną postać, wtedy oszacowanie takie łatwiej otrzymać, gdy ϱ_p ma postać podobną do V , co nie zawsze jest dla nas odpowiednie, z punktu widzenia ograniczenia stanu początkowego. Jeśli można przeprowadzić badanie stateczności względem jednej odległości ϱ i $\varrho_p = \varrho|_{t=t_0}$ i zastosować funkcjonal V w tej samej postaci co odległość ϱ , wtedy sprawdzenie warunków z twierdzenia o stateczności znacznie się upraszcza, gdyż warunki (1) i (2) tego twierdzenia są wtedy automatycznie spełnione i pozostaje tylko sprawdzenie warunku (3). Z drugiej strony informacja zawarta w nierówności $\varrho \leq \varepsilon$ w przypadku gdy ϱ ma złożoną postać, może okazać się mało interesująca i nieczytelna z fizycznego punktu widzenia. Najbardziej interesujący praktycznie jest przypadek, gdy z nierówności $\varrho \leq \varepsilon$ można otrzymać nierówność $|u| \leq M(t, \varepsilon, P_0, t_0)$. Uzyskanie takiego rezultatu jest ułatwione gdy ϱ ma odpowiednią do tego celu postać, która nie koniecznie jest wtedy równie dogodna dla innych celów, wynikających ze stosowania twierdzenia o stateczności. Należy przy tym podkreślić, że rezultat taki można uzyskać tylko wtedy, gdy proces zależy od jednej zmiennej przestrzennej. Jest to związane z faktem, że ciągła zależność samego rozwiązania od wartości początkowych, nawet dla prostego liniowego równania o pochodnych cząstkowych typu hiperbolicznego drugiego rzędu, ma miejsce tylko w przypadku jednej zmiennej przestrzennej. Inaczej mówiąc, w przypadku jednej zmiennej przestrzennej, małe zmiany funkcji początkowych, pociągają za sobą małe zmiany samego rozwiązania, przy określonej regularności wartości początkowych. W przypadku dwóch lub większej ilości zmiennych przestrzennych, małe zmiany funkcji początkowych nawet o dużym stopniu regularności, pociągają za sobą co najwyżej małe zmiany całki z kwadratu rozwiązania, obliczonej w obszarze przestrzennym.

Wszystkie te zagadnienia są w istotny sposób związane z wyborem funkcjonału V i odległości ϱ i ϱ_p , którego dokonujemy dla zbadania stateczności procesu ciągłego niezaburzonego $u = 0$.

Analogicznie do przedstawionych tu rozważań, można sformułować teorię stateczności dla równań typu parabolicznego, opisujących zjawiska przewodnictwa cieplnego i dyfuzji, oraz dla równań typu eliptycznego, opisujących na przykład zjawiska równowagi sprężystej ciał stałych. Można stwierdzić, że najtrudniej poddają się badaniom równania typu hiperbolicznego, opisujące zjawiska dynamiczne w ciałach stałych.

Konstrukcję funkcjonałów Lapunowa dla procesów zachowawczych można na ogół zrealizować obierając całkowitą energię układu jako funkcjonal Lapunowa V . W przypadku procesów tłumionych, staramy się zmodyfikować odpowiednio postać całkowitej energii układu, aby wykazać, że $\dot{V} \leq 0$. Funkcjonały Lapunowa w takiej zmodyfikowanej postaci

nazywamy całkami energetycznymi. Modyfikacja energii całkowitej układu, prowadząca do pewnego wariantu całki energetycznej, odbywa się często na drodze w znacznej mierze intuicyjnej. Dla liniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych i ich układów, opracowano również bardziej systematyczne metody poszukiwania funkcyjonałów Lapunowa, w postaci całkowych form kwadratowych. Istnieją również nieliczne rezultaty, dotyczące zagadnień nieliniowych i poczyniono pierwsze kroki, dotyczące konstrukcji optymalnych funkcyjonałów Lapunowa, zapewniających największy obszar parametrów, dla których rozwiązanie jest stateczne.

Dla równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, można wprowadzać również inne pojęcia stateczności, niż sformułowana poprzednio stateczność w sensie Lapunowa-Mowczana, związana z zaburzeniem wartości początkowych. Przede wszystkim można rozważać zaburzenia warunków brzegowych przy niezmiennych wartościach początkowych, lub też rozważać jednocześnie zaburzenia wartości początkowych i warunków brzegowych. Oprócz tych zaburzeń można rozważać dodatkowo zaburzenia samej postaci równania różniczkowego, co prowadzi do pojęcia stateczności przy stale działających zaburzeniach. Sformułowanie pojęć stateczności przy wymienionych zaburzeniach względem odległości w sensie Lapunowa-Mowczana nie nastęrcza zasadniczych trudności, dlatego ściśle ich zdefiniowanie pomijamy.

Spośród stateczności odmiennych od stateczności w sensie Lapunowa-Mowczana warto zwrócić uwagę na stateczność w sensie Lagrange'a. Model matematyczny przedstawiony równaniem o pochodnych cząstkowych liniowym lub nieliniowym jest stateczny w sensie Lagrange'a, gdy każde jego rozwiązanie jest określone dla $P \in \Omega$ i $t \in [t_0, \infty)$ oraz gdy spełniona jest następująca nierówność

$$(47) \quad \varrho(u(P, t)) \leq \Phi(c, t), \quad \Phi(c, t) > 0, \quad P \in \Omega, \quad t \in [t_0, \infty),$$

gdzie stała $c = \text{const} > 0$ zależy tylko od obszaru zmienności warunków granicznych, zaś ϱ oznacza odległość. W szczególnym przypadku może być $\Phi(c, t) = M(c) = \text{const} > 0$. W sformułowaniu (47) funkcja $\Phi(c, t)$ jest dbwolna, to znaczy wystarczy wykazać, że jakakolwiek funkcja Φ ograniczająca odległość ϱ istnieje, aby model matematyczny był stateczny w sensie Lagrange'a. Jednakże istnieje wiele problemów fizycznych i technicznych dla których trzeba podać warunki dostateczne przy których odległość ϱ jest ograniczona funkcją, lub stałą, na które nałożone są dodatkowe warunki.

Warunki te polegają często na żądaniu efektywnego wyznaczenia funkcji lub stałej ograniczającej i przy tym w taki sposób, aby istniała możliwość wpływania na ich wartości — na przykład poprzez dobór wartości początkowych, współczynników równania itp. Można dopuścić również funkcje $\Phi(c, t)$ rosnące, lecz w tym przypadku chcemy mieć informacje o prędkości jej wzrostu i możliwość wpływania na tę prędkość. W tym ostatnim przypadku, chodzi na przykład o to, aby układ regulacji, który zaczyna działać w chwili, gdy rozwiązanie przekroczy pewien określony poziom wartości, miał czas na sprowadzenie rozwiązania do nowych wartości wyjściowych. Tak sformułowane zagadnienie stateczności w sensie Lagrange'a, dla którego nakłada się dodatkowe ograniczenia i żądania na funkcję $\Phi(t, c)$ wynikające z przesłanek fizycznych, nosi nazwę zmodyfikowanej stateczności w sensie Lagrange'a.

Zagadnienie stateczności technicznej dla procesów ciągłych można sformułować następująco.

Niech będzie dane równanie w postaci

$$(48) \quad [F](u(P, t)) + \alpha(P, t) = 0, \quad P \in \Omega, \quad t \in [t_0, T].$$

Niech warunki brzegowe mają postać

$$(49) \quad u(P, t) + \beta(P, t)|_T = 0,$$

gdzie $\alpha(P, t), \beta(P, t)$ są funkcjami zmiennych P i t . Funkcje $\alpha(P, t)$ i $\beta(P, t)$ przedstawiają stale działające zaburzenia w obszarze Ω i na jego brzegu T .

Zakładamy, że równanie (48) ma dla zerowych wartości początkowych oraz $\alpha = 0$ i $\beta = 0$ rozwiązanie zerowe $u = 0$, które będziemy rozważali jako proces niezaburzony. Pozostałe rozwiązania $u(P, t)$ są generowane przez różne wartości początkowe, które oznaczamy symbolicznie przez $u(P, t_0)$.

Stan początkowy i aktualny procesu będziemy charakteryzować za pomocą dwóch odległości $\varrho_p(u)$ i $\varrho(u, t)$. Stale działające zaburzenia będziemy charakteryzować za pomocą odległości $\varrho_\alpha(\alpha), \varrho_\beta(\beta)$ określanych na zbiorze funkcji $\alpha(P, t), \beta(P, t), P \in \Omega, t \in [t_0, T]$.

Niezaburzony proces $u = 0$ nazywamy statecznym technicznie przy stale działających zaburzeniach α i β i danych ograniczeniach $\bar{\varrho}, \bar{\varrho}_p, \bar{\varrho}_\alpha, \bar{\varrho}_\beta$ gdy dowolne rozwiązanie równania (48) spełnia nierówność

$$(50) \quad \varrho(u, t) \leq \bar{\varrho}, \quad t \in [t_0, T],$$

jeśli tylko

$$(51) \quad \varrho_p(u) \leq \bar{\varrho}_p, \quad \varrho_\alpha(\alpha) \leq \bar{\varrho}_\alpha, \quad \varrho_\beta(\beta) \leq \bar{\varrho}_\beta$$

dla dowolnych zaburzeń $\alpha(P, t), \beta(P, t)$, dla których istnieje rozwiązanie rozważanego równania (48) odpowiadające wartościom początkowym $u(P, t_0)$. Wielkość $\bar{\varrho}_p$ jest stała, zaś $\bar{\varrho}, \bar{\varrho}_\alpha, \bar{\varrho}_\beta$ są na ogół funkcjami czasu. (w szczególnym przypadku mogą to być również stałe).

Dla modeli matematycznych procesów ciągłych formuluje się również zagadnienie wrażliwości strukturalno modelowej mające to samo znaczenie, jak omówione poprzednio dla równań różniczkowych zwyczajnych. Przypominamy, że chodzi tu o wrażliwość wybranej grupy własności jakościowych, lub cech ilościowych, na małe zaburzenia postaci modelu, czyli małe zmiany samego równania. Zilustrujemy to zagadnienie na przypadku szczególnym wrażliwości ilościowej rozwiązań prawie liniowego równania struny, na zmiany współczynników części liniowej równania.

Rozważmy równanie poprzecznych drgań struny w postaci

$$(52) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Niech warunki początkowe mają postać

$$(53) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$$

i niech warunki brzegowe mają postać

$$(54) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Rozwiązanie równania (52) z warunkami (53) i (54) będziemy uważali za znane. Zagadnieniem, które chcemy zbadać, jest wrażliwość rozwiązań równania (52) na zmianę parametru c równego α lub β lub k . W tym celu wprowadzamy funkcję wrażliwości w postaci

$$(55) \quad \omega(x, t, c) = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{u(x, t, c + \Delta c) - u(x, t, c)}{\Delta c} = \frac{\partial u}{\partial c}.$$

Na podstawie (55) mamy przybliżony związek

$$(56) \quad u(x, t, c + \Delta c) - u(x, t, c) \cong \omega(x, t, c)\Delta c.$$

Jeśli więc wyznaczmy lub oszacujemy funkcję $\omega(x, t, c)$, wtedy na podstawie wzoru (56) możemy w przybliżeniu wyznaczyć, lub oszacować zmianę funkcji $u(x, t, c)$ powstałą w wyniku zmiany parametru c o wartość Δc .

Wyprowadzimy równanie różniczkowe dla funkcji $\omega(x, t, c)$. Różniczkując równanie (52) względem $c = \alpha, \beta, k$ otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci

$$(57) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial \omega}{\partial t} + \alpha \omega = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial u} \omega + \frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_t} \frac{\partial \omega}{\partial t} + H,$$

gdzie

$$(58) \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad H = \begin{cases} -u & \text{dla } c = \alpha \\ -2 \frac{\partial u}{\partial t} & \text{dla } c = \beta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{dla } c = k \end{cases}.$$

Warunki początkowe i brzegowe dla funkcji ω mają postać

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega(x, 0, c) = \frac{\partial}{\partial c} u(x, 0, c) = \frac{\partial}{\partial c} \varphi(x) = 0, \\ \frac{\partial \omega(x, 0, c)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial u(x, 0, c)}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial c} \psi(x) = 0 \\ \omega(0, t, c) = \frac{\partial}{\partial c} u(0, t, c) = 0, \\ \omega(l, t, c) = \frac{\partial}{\partial c} u(l, t, c) = 0 \end{array} \right.$$

Zagadnienie polega teraz na ścisłym, lub przybliżonym rozwiązaniu równania (57), lub zbadaniu własności jego rozwiązań, to znaczy na przykład ustalenia warunków dostatecznych ich ograniczoności i zmierzania do zera przy $t \rightarrow \infty$.

Wprowadzamy oznaczenia

$$(60) \quad 2\lambda = \frac{\partial f}{\partial u_t}, \quad \sigma = \frac{\partial f}{\partial u_x}, \quad \nu = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Wtedy równanie wrażliwości możemy napisać w postaci

$$(61) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2(\beta - \lambda) \frac{\partial \omega}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \omega}{\partial x} + (\alpha - \nu) \omega = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H.$$

Ponieważ rozwiązanie $u(x, t, c)$ traktujemy jako znane, więc funkcje (60) są znane. Równanie wrażliwości (61) jest więc równaniem liniowym o zmiennych współczynnikach. W przypadku liniowego równania struny $f = 0$, kładziemy w równaniu (61) $\lambda = \sigma = \nu = 0$ i otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach, wymuszone rozwiązaniem (lub jego pochodnymi), którego wrażliwość badamy.

W przedstawionych wyżej rozważaniach dokonany został przegląd pojęciowy najważniejszych pojęć stateczności ruchu, dla modeli matematycznych dyskretnych i ciągłych, z punktu widzenia potrzeb technicznych. Pominięte zostały mniej istotne warianty pojęć stateczności oraz całkowicie pominięto zagadnienia stateczności procesów losowych, wymagających osobnego opracowania. Dla wszystkich przedstawionych tu rodzajów stateczności istnieją mniej lub bardziej zaawansowane metody ich badania. Metody te są znacznie bardziej zaawansowane dla modeli dyskretnych, niż dla modeli ciągłych. Przedstawienie nawet pobieżnego przeglądu istniejących metod przekracza znacznie ramy niniejszego opracowania. Systematyczne zapoznanie się z metodami badania stateczności ruchu ośrodków dyskretnych i ciągłych, wymaga sięgnięcia do źródłowej literatury.

Literatura cytowana w tekście

1. С. Л. СОВОЛЕВ, *Уравнения математической физики*, Гос. Изд. Тех. Теорет. Лит., Москва-Ленинград 1950.
2. А. И. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ, *Уравнения математической физики*, Гос. Изд. Тех. Теорет. Лит., Москва-Ленинград 1951.
3. А. А. МОВЧАН, *О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем*, Прикл. Мат. Мех., **23**, (1959).
4. А. А. МОВЧАН, *Устойчивость процессов по двум метрикам*, Прикл. Мат. Мех., **24**, (1960).
5. С. Л. СОВОЛЕВ, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Новосибирск 1962.
6. R. TOMOWICZ, *Sensitivity analysis of dynamic systems*, New York 1963, Mac Graw Hill.
7. А. А. МОВЧАН, *Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел*, Arch. Mech. Stos., **5**, **15**, (1963).
8. Т. К. СИРАЗЕТНИКОВ, *К теории устойчивости процессов с распределенными параметрами*, Прикл. Мат. Мех., **31**, (1967).
9. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT 1971.
10. В. Р. ДЕМИДОВИЧ, *Математическая теория устойчивости*, WNT 1972.
11. Р. ТОМОВИЧ, М. ВУКОБРАТОВИЧ, *Общая теория чувствительности*, Изд. Советское Радио, Москва 1972.
12. А. А. МАРТЫНЮК, *Техническая устойчивость в динамике*, Изд. „Техника”, Киев 1973.
13. R. GUTOWSKI, *Некоторые вопросы устойчивости дифференциальных уравнений в частных производных описывающих движение механических систем в теории колебаний*, VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Band I, 1 Abhandlungen der AdW, Akademie Verlag, Berlin 1977.

14. R. GUTOWSKI, *Устойчивость колебаний зидиого шланга с учетом протекающей внутри жидкости*, Inst. of Thermomechanics, Proceedings of the XI-th Conference DYNAMICS OF MACHINES, Prague — Liblice, Czechoslovakia 1977.
15. B. RADZISZEWSKI, *O najlepszej funkcji Lapunowa i jej zastosowaniu do badania stateczności ruchu*, Prace IPPT, Warszawa 1977.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 marca 1968 r.

Referat wygłoszony na zjeździe z okazji XX lecia PTMTiS w Ustroniu.

BADANIE UGIĘĆ PŁYT METODĄ MORY

JERZY J. WĄSOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Technika mory może być użyta skutecznie nie tylko do badania przemieszczeń i naprężeń w praskich zagadnieniach mechaniki technicznej [1], ale również do wyznaczania przemieszczeń i odkształceń powłok poddanych różnym obciążeniom. W tym przypadku znajduje się metodą mory mapę warstwicową powłoki nieobciążonej, następnie mapę powłoki obciążonej, po czym z porównania obydwu map wnioskuje się o zaszytych odkształceniach jej powierzchni [2].

Ta metoda z trudem nadaje się do badania ugięć płyt, gdyż na płaskiej, nieodkształconej płycie nie ma żadnego układu linii warstwicowych, które ulegałyby zmianie w wyniku jej obciążenia. Wprawdzie linie te pojawiają się w chwili odkształcenia płyty (gdy przekształci się ona w pewną powierzchnię), jednak wobec niewielkich zazwyczaj ugięć są one tak szerokie i nieostro zarysowane, że użycie ich do celów obliczeniowych jest połączone z pewnymi trudnościami.

W takiej sytuacji autor proponuje badać ugięcia płyt nie metodą płaskich cięć optycznych, lecz metodą przecięć powierzchniami, które już na płaskiej płycie dają układ linii, mogących zmieniać się w procesie zginania. Jest to swego rodzaju odmiana metody różniczkowej, stosowanej w podobnych okolicznościach w badaniach płaskich stanów odkształceń i naprężeń [3].

2. Metoda cięć optycznych

Otrzymywanie map warstwicowych techniką mory polega na optycznym przecięciu badanej powierzchni Σ układem powierzchni Λ . W wyniku tego przecięcia na powierzchni Σ powstaje układ linii warstwicowych (jeżeli przyjąć terminologię topograficzną), które po rzutowaniu na płaszczyznę dają warstwicę poszukiwanej mapy [4]. Optyczne powierzchnie warstwowe Λ powstają w przestrzeni w rezultacie oświetlenia jej dwoma punktowymi źródłami światła Q_1, Q_2 , zmodulowanego dwiema siatkami liniowymi G_1, G_2 . Dla uproszczenia wykładu można przyjąć, że siatki są nieprzezroczystymi ekranami, w których wycięto w równych odstępach p układ równoległych i nieskończenie wąskich szczelin.

Taka siatka oświetlona przez źródło punktowe wytwarza w przestrzeni (w przybliżeniu optyki geometrycznej) współosiowy pęk płaszczyzn świetlnych o równaniu

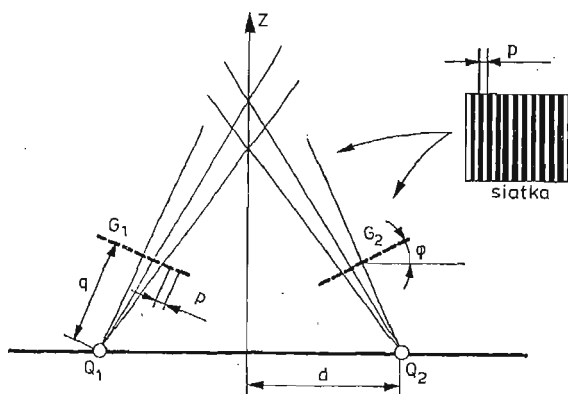
$$(2.1) \quad (q \cos \varphi + mp \sin \varphi)x + (q \sin \varphi - mp \cos \varphi)z - d(q \cos \varphi + mp \sin \varphi) = 0,$$

w którym q oznacza odległość siatki G_2 od źródła światła Q_2 , którego położenie na osi x określone jest odciętą d , φ jest kątem ustawienia siatki, a parametr $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ może być traktowany jako numer linii siatki, a tym samym płaszczyzny świetlnej. Ortokartezjański układ współrzędnych xyz dobieramy przy tym w ten sposób, by linie siatek G_1 , G_2 były równoległe do osi y , co bez zmniejszenia ogólności pozwala na znaczne uproszczenie równań.

Podobnie równanie pęku płaszczyzn świetlnych powstałych z oświetlenia siatki G_1 punktowym źródłem światła Q_1 , położonym na osi x w punkcie o odciętej $x = -d$ jest

$$(2.2) \quad (q \cos \varphi - mp \sin \varphi)x - (q \sin \varphi + mp \cos \varphi)z + d(q \cos \varphi - mp \sin \varphi) = 0,$$

gdzie $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ może być także interpretowane jako numer linii w siatce G_1 lub numer płaszczyzny w pęku. Na rys. 1 pokazana jest schematycznie geometria układu projekcyjnego i jego elementy oraz wyjaśnione zostały wielkości występujące w równaniach (2.1) i (2.2).



Rys. 1. Zasadniczy schemat układu projekcyjnego

Z przecięcia obydwu pęków płaszczyzn powstaje w przestrzeni układ linii prostych l_{mn} . Okazuje się, że proste l_{mn} nie są luźnym zbiorem nie powiązanych ze sobą elementów, lecz układają się na powierzchniach pewnej jednoparametrowej rodziny powierzchni prostokreślnych \mathcal{A} [5]. Jej równanie otrzymamy rugując parametry m, n z równań (2.1) i (2.2) przy pomocy warunku

$$(2.3) \quad m - n = k$$

zwanego warunkiem mory. Równanie to jest postaci

$$(2.4) \quad (\sin 2\varphi - ks \sin^2 \varphi)x^2 + (\sin 2\varphi + ks \cos^2 \varphi)z^2 + d(ks \sin 2\varphi - 2 \cos 2\varphi)z - d^2(\sin 2\varphi - ks \sin^2 \varphi) = 0,$$

przy czym przyjęto w nim oznaczenie

$$(2.5) \quad s = p/q,$$

zaś całkowitoliczbowa wielkość $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ jest parametrem rodziny.

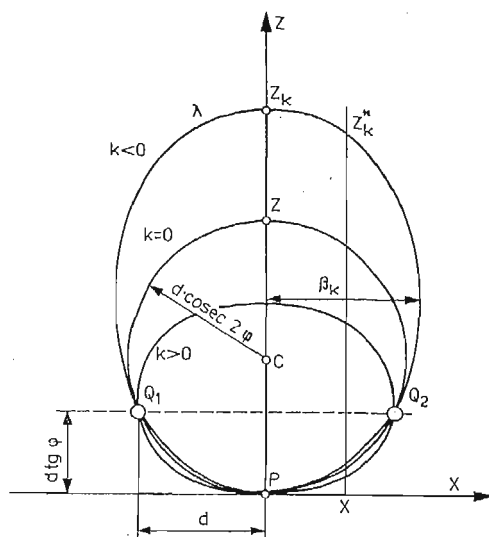
Jak widać, powierzchnie Λ opisane równaniem (2.4) są powierzchniami prostokreślnymi o tworzących l równoległych do osi y . Można wobec tego (2.4) uważać za równanie kierownicy λ_k powierzchni Λ_k .

W szczególności dla $k = 0$ otrzymujemy z (2.4)

$$(2.6) \quad x^2 + z^2 - 2d \operatorname{ctg} 2\varphi \cdot z - d^2 = 0,$$

co jest równaniem okręgu o środku C znajdującym się na osi z w punkcie $z_c = d \cdot \operatorname{ctg} 2\varphi$ i mającego średnicę $2d \cdot \operatorname{cosec} 2\varphi$. Można łatwo się przekonać, że wszystkie linie λ_k rodziny (2.4) przechodzą przez punkty Q_1, Q_2 osi x oraz przez punkt P leżący na osi z i mający współrzędną $z_p = -d \operatorname{tg} \varphi$.

Okoliczność ta pozwala wprowadzić nowy układ współrzędnych XYZ o początku w punkcie P i osiach równoległych do osi układu xyz .



Rys. 2. Kierownice powierzchni Λ

Obydwa układy są w tym przypadku związane zależnościami

$$(2.7) \quad x = X, \quad y = Y, \quad z = Z - d \operatorname{tg} \varphi,$$

W nowym układzie współrzędnych rodzina kierownic (2.4) ma równanie

$$(2.8) \quad (\sin 2\varphi - k s \sin^2 \varphi) X^2 + (\sin 2\varphi + k s \cos^2 \varphi) Z^2 - 2dZ = 0,$$

które po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.9) \quad \alpha^2 = \sin 2\varphi - k s \sin^2 \varphi, \quad \beta^2 = \sin 2\varphi + k s \cos^2 \varphi,$$

da się napisać zwięźle w postaci

$$(2.10) \quad \alpha^2 X^2 + \beta^2 Z^2 - 2dZ = 0.$$

Z teorii krzywych stożkowych wiadomo, że jest to wierzchołkowe równanie elipsy o dużej osi 2α położonej na osi Z i osi małej 2β równoległej do osi X (rys. 2).

Kładąc w (2.10) $X = 0$ otrzymujemy punkty przecięcia rodziny elips z osią Z . Jednym z nich jest początek P układu współrzędnych XYZ , będący wspólnym wierzchołkiem całej rodziny, drugi ma współrzędną

$$(2.11) \quad Z_k = \frac{2d}{\sin 2\varphi + k s \cos^2 \varphi}$$

i jest funkcją parametru k . Przy $k = 0$ otrzymujemy okrąg o średnicy $Z_0 = 2d \cdot \operatorname{cosec} 2\varphi$. Przy $k \neq 0$ równanie (2.10) przedstawia elipsy, przy czym są one wydłużone wzdłuż osi Z , gdy $k < 0$ oraz wydłużone w kierunku osi X , gdy $k > 0$ (patrz rys. 2).

Reasumując otrzymane wnioski możemy stwierdzić, że opisany układ projekcyjny generuje w przestrzeni rodzinę powierzchni optycznych, którymi są walce eliptyczne o tworzących równoległych do linii siatek (tzn. do osi Y). Równanie tej rodziny dane jest wyrażeniem (2.8), w którym parametr k może być interpretowany jako numer powierzchni \mathcal{A}_k , przy czym może on przyjmować wartości dodatnie i ujemne oraz wartość 0, dla której walec eliptyczny staje się walcem kołowym.

3. Wyznaczanie elementów układu projekcyjnego

W równaniu (2.8) rodziny powierzchni tnących \mathcal{A} występują cztery parametry φ , d , q , p , charakteryzujące układ projekcyjny i ukazane na rys. 1 [wielkość S występująca w (2.8) wyraża się przez p , q wzorem (2.5)]. Przygotowanie układu do pracy polega na ustaleniu tych wielkości w sposób umożliwiający rozwiązanie danego zagadnienia. Na przykład kąt φ dobiera się w ten sposób, żeby wiązki światła wychodzące z obydwu projektorów całkowicie oświetliły badany obiekt, odległość $2d$ między projektorami powinna pozwolić na ewentualne wstawienie między nimi aparatu fotograficznego, a operowanie wielkością s umożliwi zmianę stopnia „zagęszczenia” powierzchni \mathcal{A} . W praktyce układ zestawia się tak, by spełniał tego rodzaju warunki, ale wtedy wielkości φ , d , q są nieznane, a ponadto nie zawsze istnieje realna możliwość bezpośredniego ich pomiaru. Na przykład odległość $2d$ między środkami projekcji Q_1 , Q_2 nie może być zmierzona bezpośrednio ze względu na niedostępność tych punktów. To samo dotyczy bezpośredniego pomiaru wielkości q — odległości siatki od środka projekcji. Z tych wielkości najbardziej dostępny jest kąt φ , który daje się zmierzyć bezpośrednio.

W takiej sytuacji potrzebne wielkości można wyznaczyć w sposób pośredni. Jeżeli bowiem w zestawionym ostatecznie układzie w miejsce siatki G wstawimy określoną figurę, np. prostokąt o znanych bokach a , b , zaś w miejsce badanego modelu płaski ekran E równoległy do płaszczyzny XY układu współrzędnych, to przy spełnieniu oczywistych warunków prostokąt odwzorowuje się na ekranie jako równoramienny trapez o podstawach a'_1 i a'_2 i wysokości b' . Po zmierzeniu tych wielkości możemy za ich pomocą znaleźć niewiadome parametry układu projekcyjnego.

Podstawę rachunku stanowią równania przetworzenia optycznego [6, 7]

$$(3.1) \quad x' = \frac{e}{\cos \varphi} \frac{x}{x \sin \varphi + q \cos \varphi}, \quad y' = \frac{ey}{x \sin \varphi + q \cos \varphi}.$$

Układ współrzędnych prostokątnych xy związany jest z płaszczyzną rzucanego przezrocza, układ $x'y'$ — z płaszczyzną ekranu. W tych wzorach q oznacza odległość przezrocza (np. siatki G) od środka rzutowania Q , zaś e jest odległością ekranu E od tegoż środka. Między płaszczyzną przezrocza a płaszczyzną ekranu zawarty jest kąt φ . Znając współrzędne (x, y) punktu A przezrocza, np. wierzchołka wspomnianego prostokąta, można przy pomocy równań (3.1) obliczyć współrzędne (x', y') punktu A' , w który przetworzył się punkt A (a więc odpowiednie wierzchołka trapezu). W szczególności możemy obliczyć elementy a'_1, a'_2, b' trapezu ze znajomości boków a, b rzucanego prostokąta. Jeśli jednak znamy z pomiaru boki a, b rzucanego prostokąta oraz elementy a'_1, a'_2, b' trapezu, w który przetworzył się prostokąt, to z równań wiążących te elementy można wyznaczyć parametry układu przetwarzającego.

Po rozwiązaniu powstałego w ten sposób układu równań względem interesujących nas niewiadomych, otrzymamy zestaw wzorów pozwalających wyliczyć poszukiwane wielkości. W praktyce rachunek ten wygodnie przeprowadzić według następującego schematu. Obliczamy najpierw wielkości

$$(3.2) \quad A = \frac{a^2 b'}{b a'_1 a'_2}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{a f (a'_1 - a'_2)}{b a'_1 a'_2}$$

w oparciu o zmierzone elementy a, b oraz a'_1, a'_2, b' figury przetwarzanej (prostokąt) i przetworzonej (trapez). Wielkość f jest ogniskową obiektywu użytego w układzie przetwarzającym czyli projekcyjnym. Interpretacja kąta φ_1 podana jest niżej. Następnie za pomocą wzoru

$$(3.3) \quad \sin \varphi = \frac{\sin \varphi_1}{A} \left[\cos \varphi_1 + A \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \varphi_1}{A} \right)^2} \right]$$

znajdujemy kąt φ — jeden z podstawowych parametrów układu projekcyjnego. Z kolei obliczamy odległość e ekranu E od środka rzutowania Q wg wzoru

$$(3.4) \quad e = f \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1}$$

oraz odległość q środka rzutowania Q od płaszczyzny siatki G

$$(3.5) \quad q = A e.$$

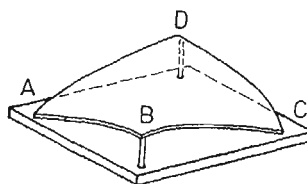
W końcu dla znalezienia odległości $2d$ między środkami rzutowania obliczamy odciętą środka rzutowania Q względem układu $x'y'$, związanego z płaszczyzną ekranu E , przy pomocy wzoru

$$(3.6) \quad x'_Q = e \operatorname{tg} \varphi.$$

W ogólnym przypadku początki układów współrzędnych $x'y'$, sprzężonych z obydwoma projektorami, nie pokrywają się. Jeśli odległość między nimi, mierzona wzdłuż osi x jest równa c , to poszukiwana wielkość

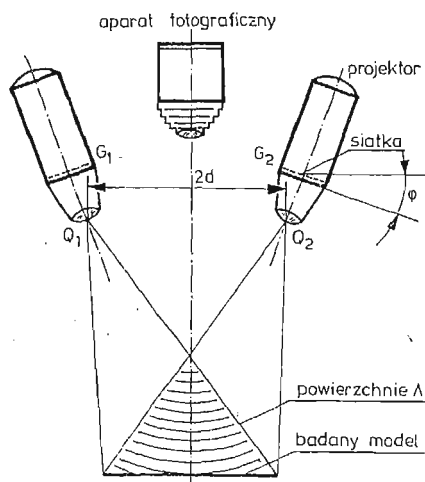
$$(3.7) \quad 2d = c + 2e \operatorname{tg} \varphi.$$

Dla ilustracji rozpatrzmy przykład układu używanego przez autora do badania ugięć kwadratowej płyty, wymuszonych w sposób pokazany na rys. 3. Schemat układu projekcyjno-fotograficznego wykreślony jest na rys. 4, a jego zdjęcie przedstawia rys. 5. Funkcję projektorów spełniały dwa powiększalniki fotograficzne typu „Krokus 3 color” z obiektywami



Rys. 3. Sposób odkształcania badanej płyty kwadratowej

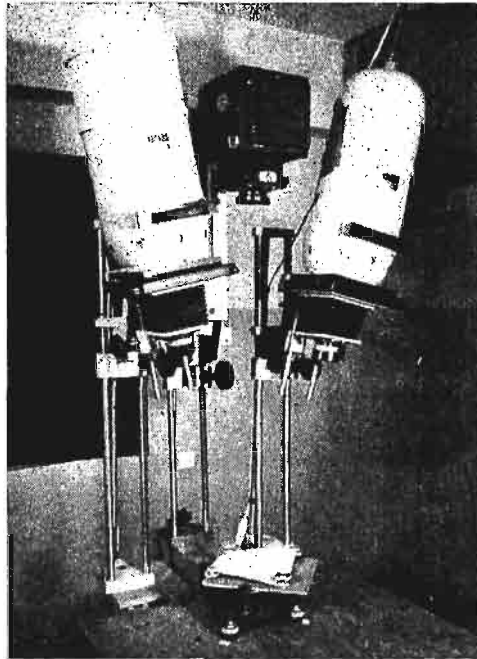
wami Amar/s o ogniskowej $f = 10.5$ cm. W ramki negatywowe zostały włożone siatki liniowe o gęstości 6 linii/mm (tzn. mające odstęp między liniami $p = 0,0167$ cm) w ten sposób, żeby ich linie były prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Między projektorami zarezerwowano miejsce na aparat fotograficzny, pozwalający rejestrować optyczne przecięcia badanej płyty, umieszczonej na jego osi optycznej. W celu oświetlenia badanego obiektu przez obydwa projektory, zostały one obrócone o pewien kąt φ , jak ilustruje to



Rys. 4. Schemat układu projekcyjno-fotograficznego

rys. 4, a następnie drogą regulacji ostrości doprowadzono do powstania ostrego obrazu obydwu siatek na powierzchni obiektu. Należy tu dodać, że ze względu na nierównoległość płaszczyzny przedmiotowej (tzn. płaszczyzny siatki) i płaszczyzny obrazowej (płaszczyzny płyty przed odkształceniem) ostre obrazy otrzymuje się przy spełnieniu warunku Czapskiego-Scheimpfluga wymagającego, by trzy płaszczyzny — płaszczyzna przedmiotowa, obrazowa oraz płaszczyzna główna obiektywu — przecięły się wzdłuż jednej prostej. Występujący we wzorze (3.2) kąt φ_1 jest kątem między płaszczyzną przedmiotową a płaszczyzną główną obiektywu.

Parametry układu projekcyjnego znaleziono w sposób opisany powyżej. W miejsce siatki G wstawiony został dokładny rysunek prostokąta o bokach $a = 4$ cm i $b = 5$ cm w ten sposób, by jego środek leżał na osi optycznej projektora. W płaszczyźnie ekranu E , pokrywającego się z płaszczyzną badanej płyty, prostokąt ten odwzorował się w postaci równobocznego trapezu o podstawach $a'_1 = 20,55$ cm, $a'_2 = 18,75$ cm oraz wysokości $b' = 25,05$ cm. Rachunek elementów układu przeprowadzony został wg przedstawionego schematu. Ze wzorów (3.2) otrzymujemy $A = 0,207665$ oraz $\sin \varphi_1 = 0,0392409$ skąd $\varphi_1 = 2^\circ 14' 56'$ oraz $\cos \varphi_1 = 0,999230$.



Rys. 5. Układ projekcyjno-fotograficzny

Następnie za pomocą (3.3) obliczamy $\sin \varphi = 0,227351$ skąd $\varphi = 13^\circ 8' 28''$. Odległość środka rzutowania Q od płaszczyzny ekranu E jest wg (3.4) równa $e = 60,8341$ cm, a odległość płaszczyzny siatki od Q , wyliczona wzorem (3.5) wynosi $g = 12,6331$ cm. Rzutując prostokąty z obydwu projektorów jednocześnie stwierdzamy, że obrazy ich środków odległe są w płaszczyźnie ekranu $Eoc = 4,6$ cm, co pozwala wzorem (3.7) obliczyć odległość $2d = 33,00$ cm między środkami projekcji Q_1 i Q_2 . Na koniec z (2.5) obliczamy wielkość $s = 1,3219 \cdot 10^{-3}$, zamykając tym samym proces wyznaczania elementów układu projekcyjnego.

Po wstawieniu tak uzyskanych liczb do wyrażenia (2.8) otrzymujemy równanie rodziny powierzchni \mathcal{A}

$$(3.8) \quad (0.44279 - 6.3326 \cdot 10^{-5}k)X^2 + (0.44279 + 1.25357 \cdot 10^{-3}k)Z^2 - 33.00 \cdot Z = 0$$

z jednym parametrem k , który można uznać za numer powierzchni w rodzinie. Podobnie z (2.11) dostajemy wyrażenie

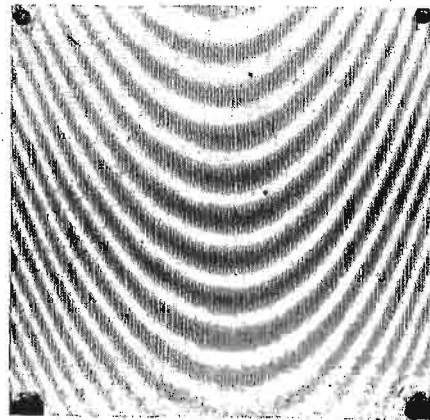
$$(3.9) \quad Z_k = \frac{33.00}{0.44279 + 1.25357 \cdot 10^{-3}k}$$

określające punkty na osi Z , w których przecięta jest ona przez powyższą rodzinę powierzchni. Są to wierzchołki elips λ_k (rys. 2). Dla $k = 0$ otrzymujemy z (3.9) $Z_0 = 74,5274$ cm, co jest średnicą okręgu λ_0 , tzn. średnicą walca kołowego, będącego jedną z powierzchni \mathcal{A} . Dla sąsiednich powierzchni \mathcal{A}_{-1} oraz \mathcal{A}_1 znajdujemy wg (3.9) wartości 74,7390 cm oraz 74,3170 cm, z czego wynika, że odległość między sąsiednimi powierzchniami mierzona wzdłuż osi Z , wynosi 0,2116 cm oraz 0,2104 cm. Stosunek tych liczb jest równy 1,0057, skąd wniosek, że różnią się one (w tym miejscu) o 0,57%.

4. Mapa przecięć optycznych

Jeżeli w przestrzeni powierzchni \mathcal{A} umieścimy materiałną powierzchnię Σ np. badaną powłokę lub płytę, to pojawi się na niej układ linii V , powstałych z optycznego przecięcia powierzchni Σ rodziną powierzchni \mathcal{A} . Jeśli $\mathcal{A}(X, Y, Z, k) = 0$ jest równaniem tej rodziny, a $\Sigma(X, Y, Z) = 0$ równaniem powierzchni Σ , to rodzina linii V na powierzchni Σ ma równania

$$(4.1) \quad \mathcal{A}(X, Y, Z, k) = 0, \quad \Sigma(X, Y, Z) = 0.$$



Rys. 6. Mapa przecięć optycznych pochylej płaszczyzny

Rzutując ten układ linii V na płaszczyznę XY otrzymujemy „mapę” powierzchni Σ . Jej równanie

$$(4.2) \quad W(X, Y, k) = 0$$

uzyskujemy w wyniku rugowania zmiennej Z z równań (4.1). Należy pamiętać, że wprowadzone tu pojęcie „mapy” jest szersze od pojęcia mapy, stosowanego w topografii, gdzie powierzchniami warstwowymi są równoległe i równoodległe płaszczyzny.

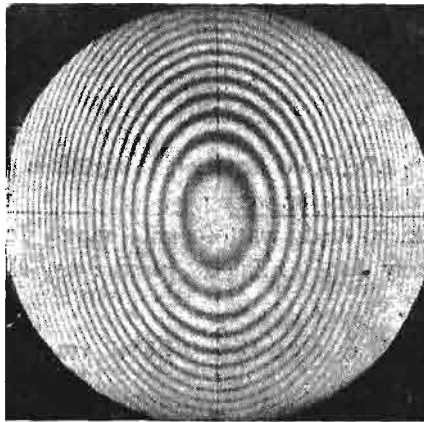
Wzmy dla ilustracji prosty przykład, gdy powierzchnią Σ jest płaszczyzna

$$(4.3) \quad Z = MY + N.$$

Jej mapa ma równanie

$$(4.4) \quad W(X, Y, k) = \alpha^2 X^2 + \beta^2 M^2 Y^2 + 2M(\beta^2 N - d)Y + N(\beta^2 N - d) = 0$$

powstałe z rugowania zmiennej Z z równań (2.10) i (4.3). Mapę tę, otrzymaną za pomocą układu projekcyjno-fotograficznego ukazanego na rys. 5 przedstawia rys. 6. Powstała ona z optycznego przecięcia płaszczyzny Σ (którą w tym przykładzie była płytka metalowa) rodziną powierzchni Λ wygenerowaną przez układ projekcyjny. W drugim przykładzie, ukazanym na rys. 7, widzimy mapę powierzchni kuli, uzyskaną przez autora w tym samym układzie projekcyjnym.



Rys. 7. Mapa przecięć optycznych powierzchni wzorcowej

Jednakże w zagadnieniach praktycznych równanie powierzchni Σ nie jest znane. Stosując przedstawioną metodę otrzymujemy mapę tej powierzchni w postaci obrazu morowego (jak np. na rys. 6 i 7) za pomocą której oraz znajomości rodziny powierzchni tnących Λ można na drodze obliczeniowej określić kształt powierzchni Σ .

5. Wyznaczanie pochodnych cząstkowych

Jeżeli interesującym nas zagadnieniem będzie rozkład momentów zginających i skręcających, działających w badanej płycie, to w tym przypadku poszukiwać będziemy drugich pochodnych cząstkowych powierzchni ugiętej, niezbędnych do tego rachunku.

Przypuśćmy, że płaska płyta sprężysta staje się w wyniku obciążenia pewną powierzchnią $Z = Z(X, Y)$ i załóżmy, że interesuje nas przebieg momentu zginającego wzdłuż przekroju $X = 0$. Pochodną cząstkową w punkcie $Y + \frac{1}{2}\Delta Y$ można przedstawić w postaci

$$(5.1) \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} \right)_{Y + \frac{1}{2}\Delta Y} \approx \frac{\Delta Z}{\Delta Y}.$$

Przyrost ΔZ obliczymy jako różnicę wartości Z_k dla dwu sąsiednich wartości k i $(k+1)$ parametru w wyrażeniu (2.11):

$$(5.2) \quad \Delta Z = \Delta Z_{k/k+1} = Z_k - Z_{k+1} = \frac{Z_k}{(2/s)\operatorname{tg}\varphi + k + 1}.$$

Sąsiednia różnica jest analogicznie

$$(5.3) \quad \Delta Z_{k-1/k} = Z_{k-1} - Z_k = \frac{Z_k}{(2/s)\operatorname{tg}\varphi + k - 1}$$

a ich stosunek jest równy

$$(5.4) \quad R = \frac{\Delta Z_{k/k+1}}{\Delta Z_{k-1/k}} = \frac{(2/s)\operatorname{tg}\varphi + k + 1}{(2/s)\operatorname{tg}\varphi + k - 1}.$$

W przypadku omawianego układu projekcyjnego wielkość ta jest

$$(5.5) \quad R = \frac{354,225 + k}{352,225 + k}.$$

Dla $k = 0$ otrzymujemy $R = 1,0057$, co oznacza, że sąsiednie różnice $\Delta Z_{0/1}$ oraz $\Delta Z_{-1/0}$ różnią się o 0,57%, co stwierdziliśmy już wcześniej.

Aby zorientować się z jakiego rzędu wartościami k mamy do czynienia w naszym układzie projekcyjnym, znajdujemy współrzędną Z_E płaszczyzny ekranu E , z którą pokrywa się płyta nieodkształcona:

$$(5.6) \quad Z_E = d\operatorname{tg}\varphi + e = 64,6862 \text{ cm}.$$

Rozwiązując (2.11) względem k uzyskamy wyrażenie

$$(5.7) \quad k = \frac{2d - Z_k \sin 2\varphi}{Z_k \operatorname{scos}^2 \varphi} = \frac{33,00 - 0,44279 Z_k}{1,25357 \cdot 10^{-3} Z_k}$$

z którego po podstawieniu Z_E w miejsce Z_k obliczymy numer powierzchni A_k znajdujące się w pobliżu ekranu. Otrzymujemy w ten sposób $k = 53,74$ z czego wynika, że płaszczyzna E znajduje się między powierzchniami A o numerach 53 i 54. Po wstawieniu obliczonego k do (5.5) dostajemy $R = 1,0049$ co znaczy, że w otoczeniu badanej płyty sąsiednie wartości ΔZ różnią się o 0,49% czyli ok. 0,5%.

Jeżeli przyjmiemy, że taką zmienność można pominać, wtedy ΔZ we wzorze (5.1) będzie stałe i w naszym przypadku równe $\Delta Z = Z_{53} - Z_{54} = 64,8038 - 64,6447 = 0,1591 \text{ cm} = 1,59 \text{ mm}$. Jeśli tej zmienności zaniedbać nie chcemy, wtedy kolejne wartości ΔZ we wzorze (5.1) otrzymujemy z pomnożenia poprzedniej przez R , które jako wolno zmienne może być nawet w dużym przedziale k przyjęte za stały współczynnik. Znaczący to, że obliczając pochodną cząstkową należy we wzorze (5.1) podstawiać na ΔZ kolejno wartości ΔZ , $R\Delta Z$, $R^2\Delta Z$, $R^3\Delta Z$, ... dla kolejnych punktów wykresu pierwszej pochodnej cząstkowej $\partial Z/\partial Y$.

Przejdźmy teraz do dowolnego przekroju X , wzdłuż którego trzeba znaleźć przebieg pochodnej cząstkowej $\partial Z/\partial Y$. Dla uzyskania potrzebnych przyrostów ΔZ przecinamy rodzinę kierownic λ prostą X' . Rozwiązując równanie kierownic (2.10) względem Z otrzy-

mujemy dwa pierwiastki, z których interesuje nas wyłącznie pierwiastek większy (co wynika z rys. 2) dany wzorem

$$(5.8) \quad Z_k^x = \frac{Z_k}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{X}{\beta_k} \right)^2} \right].$$

w którym β_k jest półosią elipsy λ_k , równoległą do osi X (rys. 2) daną wyrażeniem

$$(5.9) \quad \beta_k = \frac{d}{\sin 2\varphi \sqrt{1 - \left(\frac{kS}{2} \right)^2 + kS \operatorname{ctg} 2\varphi}}$$

a Z_k wyraża się przez (2.11). Poszukiwany przyrost $\Delta Z_{k/k+1}^x$ jest odległością między dwiema sąsiednimi elipsami λ_k i λ_{k+1} , mierzona wzdłuż prostej X , tzn.

$$(5.10) \quad \Delta Z_{k/k+1}^x = Z_k^x - Z_{k+1}^x = \frac{1}{2} \Delta Z_{k/k+1} + \frac{1}{2} \left[Z_k \sqrt{1 - \left(\frac{X}{\beta_k} \right)^2} - Z_{k+1} \sqrt{1 - \left(\frac{X}{\beta_{k+1}} \right)^2} \right]$$

gdzie $\Delta Z_{k/k+1}$ jest znalezionym wcześniej przyrostem liczonym wzdłuż przekroju $X = 0$ i danym przez (5.2). Jeśli dwie wielkości β_k i β_{k+1} zastąpić ich wartością średnią β_s , wtedy wyrażenie (5.10) da się przedstawić w prostszej postaci

$$(5.11) \quad \Delta Z_{k/k+1}^x = \frac{1}{2} Z_{k/k+1} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{X}{\beta_s} \right)^2} \right].$$

W niektórych przypadkach można wprowadzić średnią wartość β_s nie tylko dla dwu sąsiednich elips λ_k i λ_{k+1} , lecz dla wszystkich elips, które biorą udział w tworzeniu mapy badanej powierzchni Σ .

Rozpatrzmy dla ilustracji nasz układ, w którym umieszczona jest badana płyta, będąca kwadratem o boku 15,3 cm. Jej największy rozmiar (przekątna) wynosi 21,6 cm, tzn. przy ustawieniu przekątnych wzdłuż osi X, Y zajmie ona na osi X przedział od $X_E = -10,8$ cm do $X_E = 10,8$ cm. Płyta zostanie optycznie przecięta pewną liczbą Δk powierzchni \mathcal{A} . Dla znalezienia tej wielkości rozwiązujemy równanie (2.10) względem k otrzymując

$$(5.12) \quad k = \frac{Z_0 Z - (X^2 + Z^2)}{\frac{S}{2} (Z^2 \operatorname{ctg} \varphi - X^2 \operatorname{tg} \varphi)}$$

określające numer powierzchni \mathcal{A}_k , przecinającej płaszczyznę Z w punkcie X przekroju $Y = 0$. Kładąc w (5.12) $Z = Z_E = 64,69$ cm oraz $X = X_E = 10,8$ cm otrzymujemy $k = 43,94$, co znaczy, że ostatnia powierzchnia \mathcal{A} , przecinająca naszą płytę przy narożniku ma numer $k = 43$, a następna $k = 44$ przechodzi już poza nim. Poprzednio stwierdziliśmy, że najbliższą środka płyty ($X = 0$) jest powierzchnia $k = 53$, z czego wynika, że płaszczyznę płyty przecina $\Delta k = 10$ powierzchni warstwowych \mathcal{A} .

Wstawiając do wzoru (5.9) wartości $k = 53,74$ oraz $k = 43,94$ obliczamy $\beta(53,74) = 34,863$ cm oraz $\beta(43,94) = 35,263$ cm, skąd wynika, że zmiana β na obszarze badanej płyty wynosi $\Delta\beta = 0,400$ cm = 4 mm, a największa w naszym przykładzie wartość $(X/\beta)^2$ jest równa 0,094 przy końcu przekątnej. Po rozwinięciu w szereg i odrzuceniu potęg X/β_s większych od 2 wyrażenie (5.11) przepiszemy w postaci

$$(5.13) \quad \Delta Z_{k/k+1}^x = \Delta Z_{k/k+1} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{X}{\beta_s} \right)^2 \right]$$

przydatnej do praktycznych obliczeń. Przyjmując wartość średnią $\beta_s = 35,06$ cm, wzór rachunkowy dla rozpatrywanego przykładu przyjmie postać

$$(5.14) \quad \Delta Z_{k/k+1}^x = \Delta Z_{k/k+1} (1 + 2,03 \cdot 10^{-4} X^2).$$

Zestawiając otrzymane wnioski otrzymujemy wyrażenie

$$(5.15) \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} \right)_{Y+\frac{1}{2}\Delta Y} \approx \frac{\Delta Z}{\Delta Y} R^t \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{X}{\beta_s} \right)^2 \right]$$

pozwalające obliczyć pochodną cząstkową $\partial Z/\partial Y$ w punkcie (X, Y) powierzchni $Z(X, Y)$ badanej płyty. Na t kładziemy kolejne wartości 1, 2, 3 ... dla kolejnych punktów przekroju X .

W analogiczny sposób uzyskać można wzór

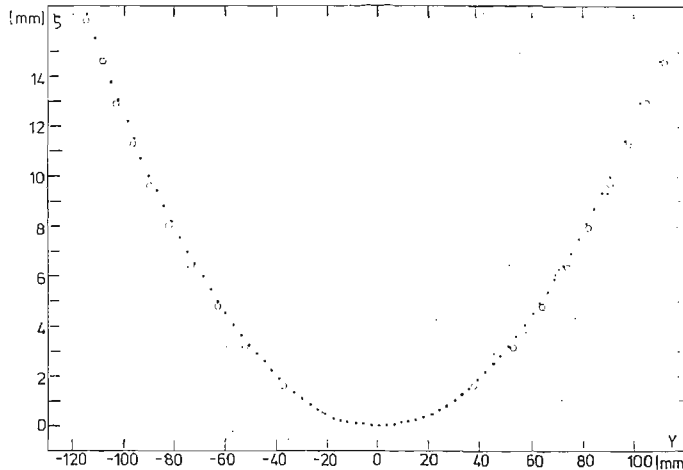
$$(5.16) \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{X+\frac{1}{2}\Delta X} \approx \frac{\Delta Z}{\Delta X} R^t \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{Y}{\beta_s} \right)^2 \right]$$

dla obliczenia pochodnej cząstkowej $\partial Z/\partial X$. Potrzebną do tego celu mapę otrzymujemy w wyniku obrócenia badanego modelu wokół osi Z o 90° w stosunku do ustawienia poprzedniego. Wyznaczywszy w opisany sposób pierwsze pochodne cząstkowe $\partial Z/\partial X$ i $\partial Z/\partial Y$ możemy na ich podstawie obliczyć pochodne drugie $\partial^2 Z/\partial X^2$, $\partial^2 Z/\partial Y^2$ oraz pochodną mieszaną $\partial^2 Z/\partial X \partial Y$ potrzebne do rachunku momentów.

6. Weryfikacja metody

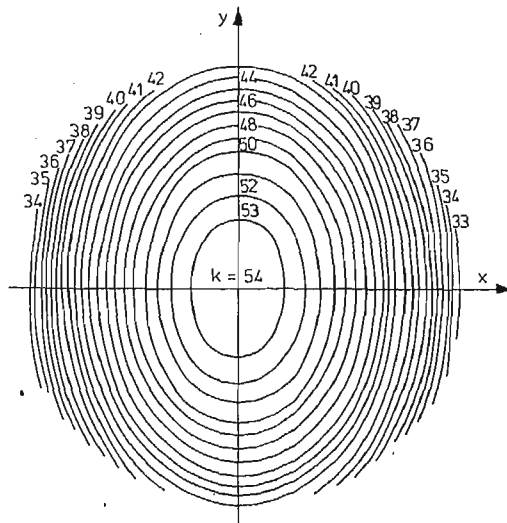
Dla sprawdzenia opisywanej metody, wyniki otrzymane przy jej pomocy zostały porównane z wynikami uzyskanymi w sposób niezależny. W tym celu przygotowano powierzchnię wzorcową, dla której określono kształt obranego przekroju mierząc z dokładnością 0,01 mm współrzędne Y, ζ punktów w odstępach $\Delta Y = 3$ mm. Powstały w ten sposób wykres przekroju ukazany jest na rys. 8. Powierzchnia wzorcową została następnie wstawiona w układ projekcyjno-fotograficzny, który wyprodukował jej mapę morową, przedstawioną na rys. 7, na podstawie której wykreślony został rys. 9, na którym jasne prążki mory zastąpiono liniami geometrycznymi; umożliwiającymi wyznaczenie współrzędnej Y warstwic wzdłuż wybranego przekroju, w naszym przykładzie przekroju $X = 0$. Powierzchnię wzorcową umieszczono w układzie tak, żeby w środku stykała się z powierzchnią warstwową A_{54} . Następnie za pomocą wzoru (3.9) wyliczono wartości Z_k dla kolejnych wartości $k = 54, 53, 52, \dots, 44$ (wzdłuż przekroju $X = 0$ powierzchnię wzorcową prze-

cina 11 powierzchni warstwowych A o tych numerach), z których z kolei można było wyliczyć współrzędne $\xi_k = Z_k - Z_{54}$, mierzone od wierzchołka powierzchni wzorcowej i umożliwiające konfrontację z pomiarami kontrolnymi. Porównanie obydwu pomiarów



Rys. 8. Porównanie pomiaru optycznego metodą mory (kółeczka) z pomiarem mechanicznym (kropki)

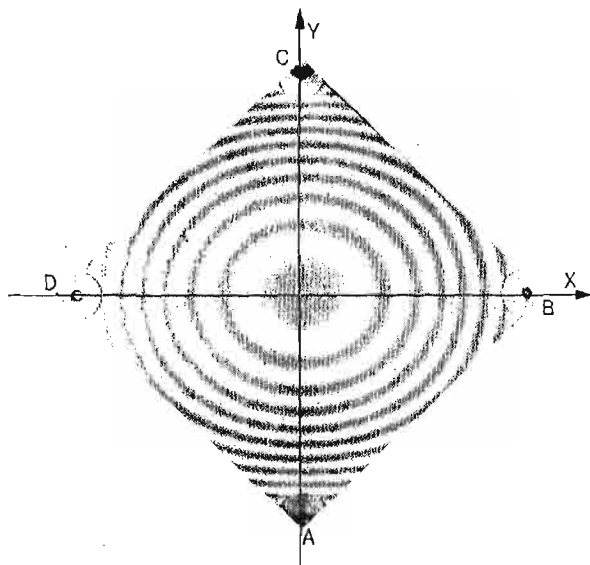
przedstawia rys. 8, na którym kółeczkami zaznaczone zostały wyniki otrzymane metodą mory opisywaną w artykule. Jak widać, zgodność jest zadowalająca. Należy jednak dodać, że dokładność metody może być zwiększona przez użycie doskonalszego sprzętu oraz fotometrycznego wyznaczania linii warstwowych z prążków mory ze zdjęcia przecięć optycznych. Także liczbę warstw można zwiększyć używając gęstszych siatek do projekcji.



Rys. 9. Mapa warstwowa powierzchni wzorcowej (powstała z zastąpienia liniami prążków mory na rys. 7)

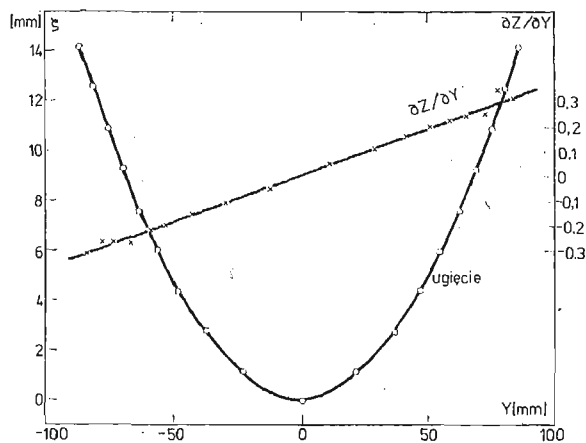
7. Przykład zastosowania metody do badania płyty

Dla ilustracji rozpatrzmy przykład płyty kwadratowej $153 \text{ mm} \times 153 \text{ mm}$, odkształconej w sposób ukazany na rysunkach 3 i 5. Mapę przecięć płyty przedstawia rys. 10. Ograniczając się do przekroju $X = 0$ wyznaczamy z tego zdjęcia współrzędne Y_k punktów przecięcia kolejnych warstwic (jasnych prążków moiry) z linią wybranego przekroju (tu



Rys. 10. Mapa przecięć optycznych badanej płyty kwadratowej. Tworzące wałców eliptycznych, przecinających płytę, są równoległe do osi Y

osią Y), a następnie przy pomocy wzoru (3.9) obliczamy rzędne Z_k tych punktów, kładąc kolejno wartości parametru $k = 53, 52, \dots, 45$. W środku płyty, jak wyliczyliśmy poprzednio, jest $k = 53,74$ czemu odpowiada $Z_0 = 648,04 \text{ mm}$. Ugięcie ζ_k w punktach Y_k naszego przekroju jest wobec tego $\zeta_k = Z_k - Z_0$ i wykresie przedstawione jest na rys. 11.

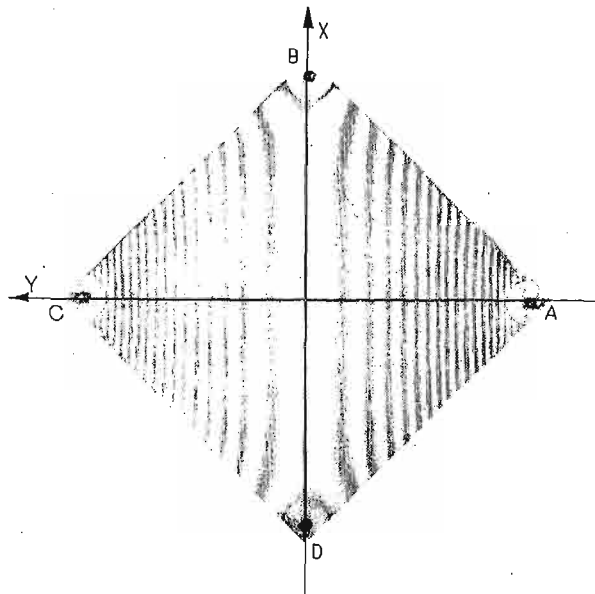


Rys. 11. Wykres ugięcia (kółeczka) oraz wykres pochodnej (krzyżyki) w przekroju $AC (X = 0)$ badanej płyty kwadratowej

Wyniki obliczeń zestawione są w tablicy 1.

Tablica 1. Wyniki obliczeń dla płyty kwadratowej

k	Y_k	Z_k	ζ_k	ΔY	ΔZ	$\partial Z / \partial Y$	$Y + \frac{\Delta Y}{2}$	$R^t \Delta Z$
45	-87.90	661.06	14.20	5.41	-1.66	-0.3068	-85.2	
46	-82.49	659.40	12.54	6.09	-1.65	-0.2709	-79.4	
47	-76.40	657.75	10.89	6.08	-1.64	-0.2697	-73.4	
48	-70.32	656.11	9.25	6.09	-1.63	-0.2676	-67.3	
49	-64.23	654.48	7.62	7.43	-1.62	-0.2207	-60.5	
50	-56.80	652.86	6.00	8.12	-1.62	-0.1995	-52.7	
51	-48.68	651.24	4.38	10.82	-1.60	-0.1479	-43.3	
52	-37.86	649.64	2.78	14.87	-1.60	-0.1076	-30.4	
53	-22.99	648.04	1.18	22.99	-1.18	-0.0513	-11.5	
53.74	0.00	646.86	0.00	21.64	1.18	0.0545	10.8	
53	21.64	648.04	1.18	15.55	1.60	0.1029	29.4	1.60
52	37.19	649.64	2.78	10.14	1.60	0.1578	42.3	1.61
51	47.33	651.24	4.38	8.11	1.62	0.1997	51.4	1.61
50	55.44	652.86	6.00	7.44	1.62	0.2177	59.2	1.62
49	62.88	654.48	7.62	6.76	1.63	0.2411	66.3	1.63
48	69.64	656.11	9.25	6.76	1.64	0.2426	73.0	1.64
47	76.40	657.75	10.89	4.74	1.65	0.3481	78.8	1.65
46	81.14	659.40	12.54	5.41	1.66	0.3068	83.8	1.65
45	86.55	661.06	14.20					



Rys. 12. Mapa przecięć płyty kwadratowej przy drugim ustawieniu płyty (tworzące walców są teraz równoległe do osi X)

Przyrosty ΔZ zostały tu obliczone jako różnice $\Delta Z = Z_k - Z_{k+1}$, ale to samo można było otrzymać wzorem $R^t \Delta Z$, gdzie $\Delta Z = Z_{53} - Z_{54} = 1,591$ mm, $R = 1,0049$ (patrz §5), kładąc na t wartości 1, 2, 3, ... dla kolejnych $k = 53, 52, 51, \dots 45$. Są one podane w ostatniej kolumnie tablicy 1 w celu porównania ich z wartościami ΔZ z kolumny 6-ej. Obliczając przyrosty ΔZ wzorem $R^t \Delta Z$ nie musimy wielokrotnie wyliczać Z_k ze wzoru (3.9), co znacznie skraca proces obliczeniowy.

Po obliczeniu przyrostów ΔZ oraz ΔY znajdujemy za pomocą (5.1) wartości pochodnej cząstkowej $\partial Z / \partial Y$, podane w tablicy 1 w kolumnie pod tym nagłówkiem. Jej wykres nanieiony jest na rys. 11. Jak widać, wyliczone punkty układają się wzdłuż linii prostej, mającej współczynnik kierunkowy 0,366, skąd wniosek, że druga pochodna cząstkowa jest stała i równa $\partial^2 Z / \partial Y^2 = 0,366$.

Dla otrzymania pochodnej cząstkowej $\partial Z / \partial X$ badany obiekt należy obrócić wokół osi Z o kąt 90° i całą procedurę powtórzyć. W rozpatrywanym przykładzie orzymano mapę przecięć, przedstawioną na rys. 12. Jak widać, warstwice są liniami równoległymi, z czego wynika, że zginanie jest walcowe. Jedyne w pewnym otoczeniu punktów B, D podparcia płyty widoczne jest zaburzenie tego przebiegu. Widać następnie, że środek płyty (oraz znaczna część jej przekątnej BD) obniżony jest o ok. $\Delta Z / 2 = 0,8$ mm w stosunku do punktów podparcia B, D .

8. Podsumowanie i streszczenie

W artykule opisano metodę badania ugięć płyt metodą przecięć optycznych powierzchniami walcowymi, wygenerowanymi w przestrzeni przy pomocy układu projekcyjnego, zaprojektowanego i zbudowanego przez autora. Układ jest prosty w budowie i może być wykonany niewielkim kosztem z elementów dostępnych na krajowym rynku fotograficznym. Przy jego pomocy można badać ugięcia płyt i powłok dowolnie obciążanych, przy czym rozmiary badanych obiektów mogą zawierać się w szerokich granicach od kilkunastu centymetrów do kilku metrów, co pozwala wykorzystywać metodę w warunkach naturalnych bez konieczności modelowania. W artykule wyłożono w zarysie teorię powstawania powierzchni optycznych oraz mechanizm optycznych przecięć. Podane zostały wzory umożliwiające zastosowanie opisywanej metody do praktycznych zagadnień mechaniki stosowanej. Dla ilustracji dość szczegółowo opisano przykład zginania płyty, a w celu weryfikacji metody, wyniki otrzymane przy jej pomocy porównano z wynikami niezależnego pomiaru.

Literatura cytowana w tekście

1. A. J. DURELLI, V. J. PARKS: *Moiré Analysis of Strain*, Prentice Hall, 1970.
2. J. J. WĄSOWSKI: *Badanie ugięć powłok techniką warstwicowych map morowych*. *Archiwum Budowy Maszyn*, 23, zeszyt 3 (1976) str. 423—432.
3. P. S. THEOCARIS: *Moiré Patterns in Strain Analysis*. Pergamon Press, 1969.
4. J. J. WĄSOWSKI: *Moiré Topographic Maps*. *Optics Communications*, 2, 7 (1970) str. 321—323.
5. J. J. WĄSOWSKI: *Badanie kształtu powierzchni metodą mory*. Praca doktorska, Instytut Fizyki Politechniki Warszawskiej, 1974.

6. M. B. PIASECKI: *Fotogrametria lotnicza i naziemna*. Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, 1958.
7. R. FINSTERWALDER, W. HOFMAN: *Photogrammetrie*. Walter de Gruyter Co., Berlin, 1968.

Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 1205 — „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Р е з ю м е

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИН МЕТОДОМ МУАРА

В работе представлено использование метода проекционного муара в исследовании изгиба нагруженных пластин. На поверхности исследуемой пластины проецируется две линейные сетки с помощью двух проекторов. Из наложения их образцов получаем муаровую картину, которую можно рассматривать как карту деформированной пластины, а муаровые полосы как линии уровня, которые получаются в результате пересечения исследуемой пластины семейством поверхностей, которыми в рассматриваемом случае были эллиптические цилиндры. Указано, как из полученной карты можно одержать не только кривую прогиба пластины в данном сечении, но также эпюру изгибающего момента. В работе представлено теорию оптических сечений методом проекционного муара, описано проекционно-фотографическую установку и рассмотрено детально пример, что в итоге позволяет применить данный метод к решению ряда практических задач прикладной механики.

Summary

EXAMINATION OF THE DEFLECTION OF PLATES BY MOIRÉ METHOD

The application of projective moiré to the study of the deflection of plates is presented in the paper. By means of two projectors two linear gratings are projected onto the surface of the tested plate, where from their superposition a moiré is produced. The moiré fringes can be interpreted as the contour lines obtained from optical sectioning of the plate by a family of contouring surfaces and hence the moiré can be regarded as the contour map of deflected plate. A special case, in which the contouring surfaces are elliptical cylinders, has been discussed. It was shown, how to obtain not only the shape of deflection of the plate in a chosen cross section, but also the distribution of bending moment. The theory of moiré optical contouring is presented in the paper, the projective-photographic setup is described and an illustrative example is discussed in detail, what permits immediate application of the method to the problems of applied mechanics.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INST. TECHN. LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1978 r.

Praca uzyskała I nagrodę w ogólnopolskim konkursie na prace doświadczalną w mechanice, organizowanym w 1977 r. przez Oddział Częstochowski PTMTiS

ANALIZA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA JARZMA POŁĄCZENIA SWORZNIOWEGO

JACEK KAPKOWSKI (WARSZAWA*)

1. Wstęp

We współczesnym projektowaniu konstrukcji uwzględnia się również plastyczne własności materiału, z którego jest ona wykonana. W pewnych fragmentach ustroju dopuszcza się powstanie odkształceń trwałych jeśli ze względu na lokalny charakter stref uplastycznionych nie prowadzi to do zniszczenia konstrukcji jako całości. Postępując tak, można bardziej realnie ocenić rzeczywistą nośność konstrukcji, czyli zaprojektować ją w sposób bardziej racjonalny. Jako nośność graniczną przyjmuje się takie obciążenia konstrukcji, przy których doznaje ona tak dużych odkształceń, że można traktować ją jak mechanizm.

Dla elementów o złożonym kształcie rachunkowe wyznaczenie nośności granicznej metodami teorii plastyczności jest często utrudnione. Korzysta się wtedy z obliczeń przybliżonych dających dolną ocenę nośności granicznej. Obliczenia te oparte na jednej z zasad ekstremalnych teorii plastyczności polegają na wbudowaniu w kontur elementu zestawu statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Oczywiście kombinacji takich statycznie dopuszczalnych pól naprężeń można dla danego przypadku dobrać wiele i dla każdej z nich otrzymuje się inną dolną ocenę nośności granicznej. Najbliższą rzeczywistości będzie naturalnie największa z tak otrzymanych ocen dolnych. Przy skomplikowanych kształtach elementów dobór statycznie dopuszczalnych pól naprężeń dokładnie odwzorowujących kontur jest bardzo trudny, a często niemożliwy. Dlatego też dokładną wartość nośności granicznej uzyskuje się drogą doświadczalnej analizy sprężysto-plastycznej pracy elementu konstrukcyjnego.

W teorii nośności granicznej, uwzględniając tylko końcowy stan obciążeń konstrukcji, pomija się analizę stanów obciążeń poprzedzających jej zniszczenie. Takie postępowanie może okazać się niewystarczające w przypadku obliczeń konstrukcji poddanych działaniu obciążeń zmiennych, w szczególności powtarzalnych. Proces rozwoju odkształceń plastycznych może przebiegać w różny sposób. Ogólnie mówiąc, konstrukcja, w której wystąpiły odkształcenia plastyczne nie powraca po obciążeniu do stanu wyjściowego. Pozostaje w niej pewien stan odkształceń i związany z nim stan naprężeń resztkowych. Przy ponownych cyklach obciążenia o tej samej wielkości konstrukcja może zachowywać się w dwojaki sposób:

a) podczas kolejnych cykli obciążenia powstawać będą niemalejące przyrosty odkształceń plastycznych, w konstrukcjach po dostatecznie dużej liczbie cykli następuje **zniszczenie przyrostowe**, w wyniku nieograniczonego wzrostu odkształceń konstrukcji;

*) W badaniach doświadczalnych brali również udział Jan Rembisz i Jan Zacharzewski (Rzeszów) w ramach pracy przejściowej wykonywanej w Politechnice Warszawskiej.

b) przy obciążeniach cyklicznych, różnoimiennych, odkształcenia trwałe mogą pozostać ograniczone, ale w wyniku cykli odkształceń plastycznych przeciwnych znaków występuje **zmęczenie plastyczne** (niskocyklowe — po kilku do kilku tysięcy cykliach obciążenia).

Określenie warunków, które zapewniają, że w konstrukcji nie wystąpią opisane mechanizmy zniszczenia jest przedmiotem teorii adaptacji (przystosowania się) konstrukcji do obciążeń zmiennych. Obliczenia według teorii adaptacji istotne są dla konstrukcji wykonanych z materiałów, dla których w stanie plastycznym zależność naprężenie — odkształcenie jest niejednoznaczna.

Można powiedzieć, że konstrukcja przystosuje się do obciążeń cyklicznie zmiennych jeśli zajdzie jedna z dwóch ewentualności:

1. naprężenia resztkowe, powstające w trakcie cykli początkowych, redukują naprężenia wypadkowe w następnych cyklach tak, że reakcja konstrukcji na kolejne cykle obciążeń będzie czysto sprężysta i nie wystąpią w niej nowe odkształcenia trwałe;

2. naprężenia resztkowe, powstałe w poprzednim cyklu obciążeń, spowodują taką redystrybucję naprężeń wypadkowych, że w kolejnych cyklach odkształcenia plastyczne będą coraz mniejsze. W wyniku tego sumaryczne odkształcenia plastyczne będą dążyły do pewnych wartości skończonych.

W niniejszej pracy zawarte są wyniki badań doświadczalnych dla jarzma połączenia sworzniowego o zadanym kształcie. Jest to element konstrukcyjny stosowany wtedy, gdy dwa fragmenty konstrukcji połączone są sworzniem, przy czym na ogół zakłada się, że sworzień umieszczony jest suwliwie w jarzmach. Jako przykład kształtu jarzma wybrano kształt okucia głównego skrzydła samolotu. Do wyznaczenia obszarów plastycznych zastosowano metodę elastooptycznej warstwy powierzchniowej [1], która pozwala na badanie stanu odkształceń w konstrukcji przy obciążeniach powodujących lokalne przekroczenie granicy plastyczności. Doświadczenia przeprowadzono w dwóch etapach:

a) badania przy wzrastających obciążeniach jednokrotnych (na modelu duralowym), mające na celu obserwację propagacji obszarów plastycznych i wyznaczenie nośności granicznej;

b) badania przy obciążeniach powtarzalnych (na modelach stalowych) mające na celu określenie procesu przystosowania się (adaptacji) elementu dla danego poziomu obciążeń.

Ważniejsze oznaczenia

- R_e granica plastyczności dla stali [MN/m²]
- E_s moduł sprężystości dla stali [MN/m²]
- ν_s liczba Poissona dla stali
- R_{02} umowna granica plastyczności dla duralu [MN/m²]
- E_d moduł sprężystości dla duralu [MN/m²]
- ν_d liczba Poissona dla duralu
- m rząd izochromy
- k wartość izochromy wyznaczona przez cechowanie elastooptycznej warstwy powierzchniowej
- m_{gr} rząd izochromy granicznej wyznaczającej granicę obszaru plastycznego
- n liczba cykli obciążenia powtarzalnego
- n_p liczba cykli obciążenia potrzebna do przystosowania
- P siła obciążająca jarzmo [N]

P_0 siła przyjęta jako umowna wartość nośności granicznej jarzma [N]

P_{spr} nośność sprężysta — siła, przy której występują pierwsze odkształcenia trwałe [N]

P_{pl} nośność graniczna jarzma wyznaczona doświadczalnie [N]

P_r teoretycznie określona dolna ocena nośności granicznej jarzma [N]

Poziom obciążenia określa się następującymi współczynnikami:

$$q = \frac{P}{P_0} \text{ współczynnik obciążenia statycznego}$$

$$q_{spr} = \frac{P_{spr}}{P_0}; \quad q_{pl} = \frac{P_{pl}}{P_0}$$

$$f = \frac{P_{pl}}{P_r} \text{ współczynnik zwiększenia nośności granicznej według [2]}$$

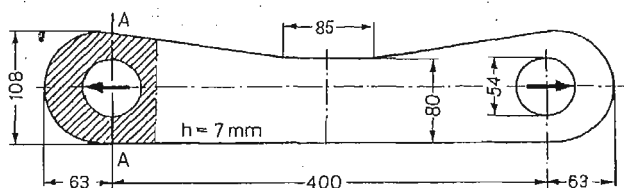
$$p = \frac{P}{P_{spr}} \text{ współczynnik obciążenia powtarzalnego}$$

Jak łatwo stwierdzić, między współczynnikami p i q zachodzi zależność

$$p = \frac{q}{q_{spr}}$$

2. Badanie przy obciążeniach jednokrotnych

2.1. Przygotowanie modelu i badania wstępne. Model jarzma wykonano z duralu PA-6 o grubości 7 mm według rysunku 1. Model ten ze względów technicznych (prostota układu obciążającego) zaprojektowano w kształcie zestawionych razem dwóch symetrycznych części, odpowiadających konturowi jarzma. Kształt jarzma jest więc taki, jak na przykład



Rys. 1

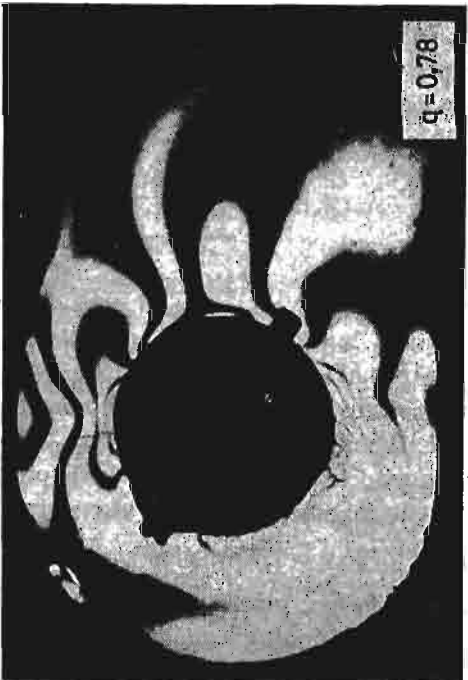
połówka modelu po lewej stronie płaszczyzny symetrii. Oddziaływanie sworznia przedstawiono na rysunku 1 jako siłę skupioną. Model jarzma po wypolerowaniu i wytrawieniu pokryto obustronnie (dla uniknięcia zginania) elastoptyczną warstwą powierzchniową o grubości 2 mm z żywicy epoksydowej. W celu wyznaczenia parametrów charakterystyki materiału modelu przeprowadzono ścisłą próbę rozciągania na znormalizowanych próbkach dziesięciokrotnych. Średnie wartości parametrów fizycznych wynoszą:

$$R_{0.2} = 226 [\text{MN/m}^2]; \quad E_a = 7,1 \cdot 10^4 [\text{MN/m}^2]; \quad \nu_d = 0,33.$$

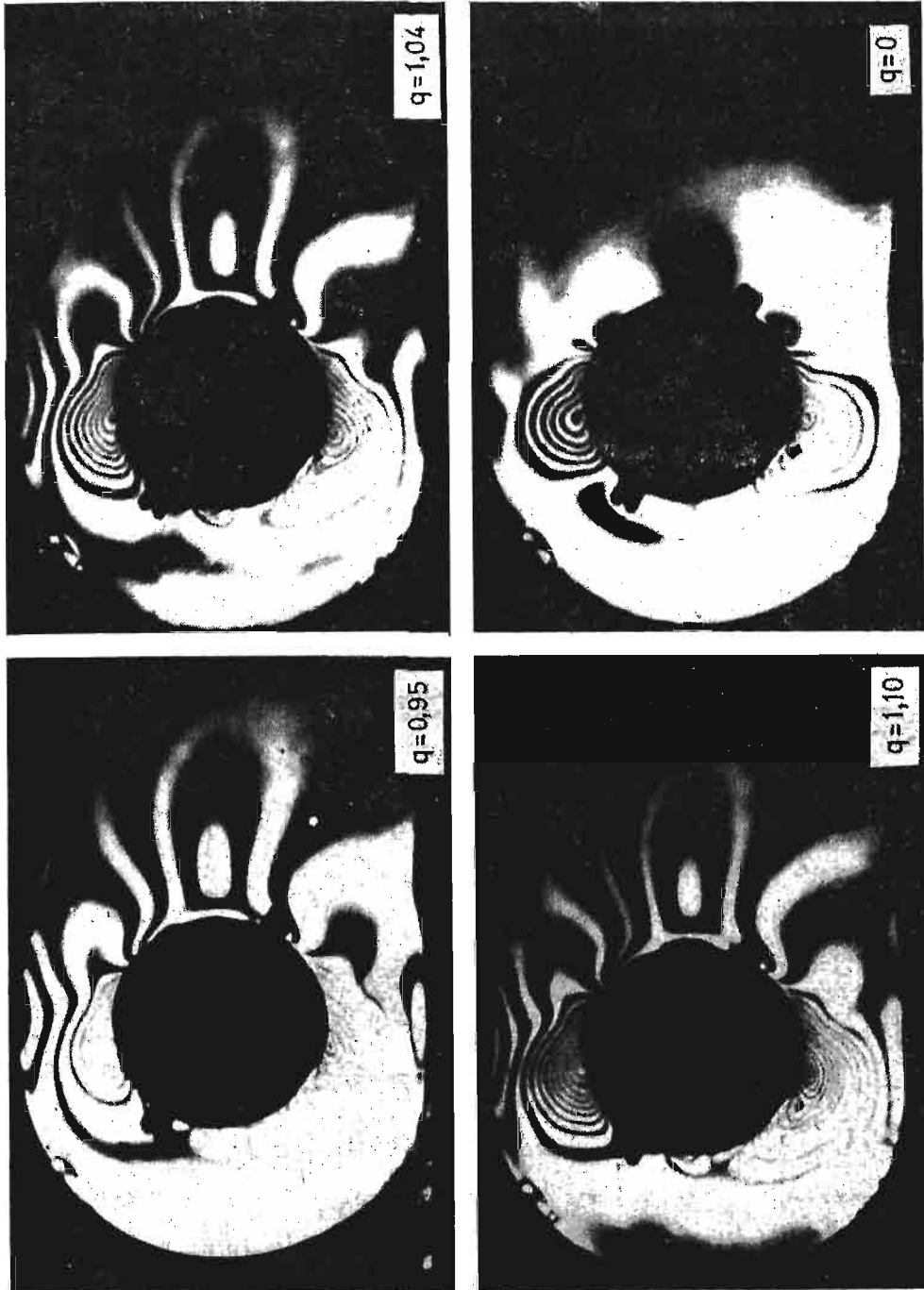
Wykonano również pomiary czułości pokrycia na próbkach rozciąganych, wykonanych z duralu z naklejoną elastoptyczną warstwą powierzchniową. Odkształcenia próbek mierzono tensometrami mechanicznymi. Wyznaczona wartość izochromy wynosiła:

$$k = 1,08 \cdot 10^{-3} [1/\text{rząd izochromy}].$$

dla światła o długości fali $\lambda = 447 \text{ nm}$



Rys. 2



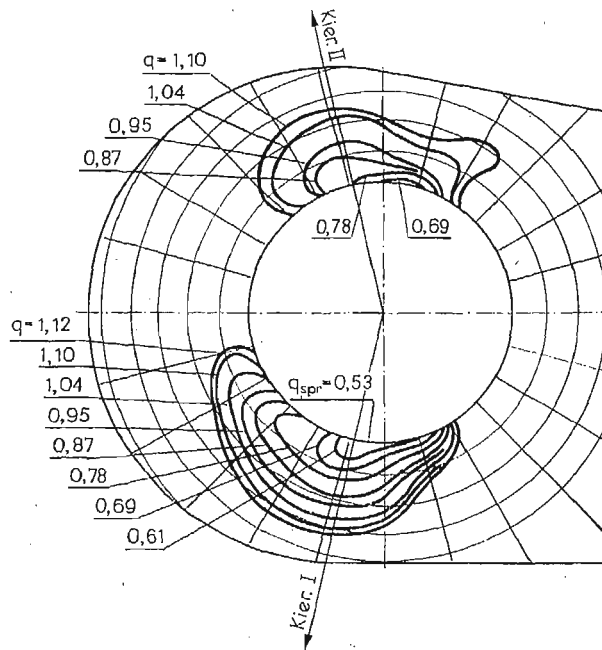
Rys. 2a

2.2. **Przeprowadzenie doświadczenia.** Model jarzma poddawano rozciąganiu (jak na rys. 1) przy niewielkich przyrostach współczynnika q . Jako wartość odniesienia (umowną nośność graniczną jarzma) przyjęto siłę wynikającą z jednoosiowego rozciągania jarzma w przekroju A-A naprężeniami równymi granicy plastyczności (R_{02}). Dla poszczególnych poziomów obciążenia rejestrowano fotograficznie obrazy izochrom w świetle monochromatycznym ($\lambda = 447 \text{ nm}$) spolaryzowanym kołowo. W rezultacie otrzymano pełny obraz rozwoju izochrom w trakcie procesu obciążenia (rys. 2). Po każdym kilku etapach obciążenia, odciążano model, rejestrując także izochromy wynikające z resztkowego stanu odkształceń.

2.3. **Analiza wyników.** Wyznaczenie granic obszarów plastycznych przeprowadzono metodą podaną w pracach [1], [3]. Przy warunku plastyczności Hubera-Mizesa i dla zastosowanego materiału modelu, granica ta jest izochromą o rzędzie

$$m_{gr} = \frac{1+0,33}{7,1 \cdot 10^4 \cdot 1,08 \cdot 10^{-3}} \frac{226}{0,933} = 4,2.$$

Obraz granic obszarów plastycznych pokazano na rysunku 3, dla różnych poziomów obciążenia określonych współczynnikiem q . Należy tu dodać, że wartość tego współczynnika skorygowano, uwzględniając udział elastooptycznej warstwy powierzchniowej w przenosze-



Rys. 3

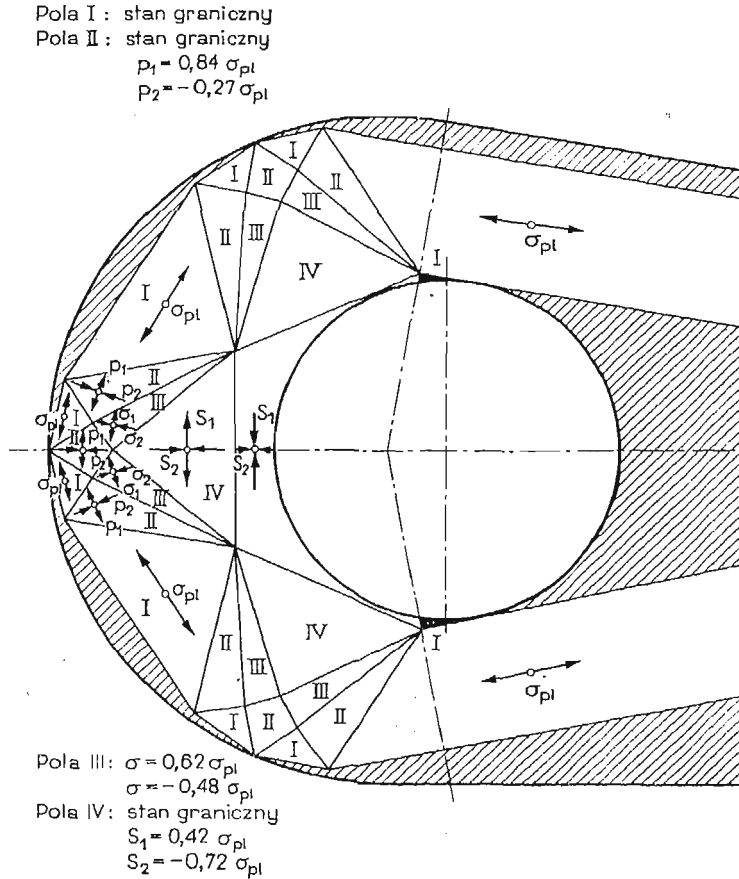
niu obciążenia działającego na model. Wyniki wskazują, że najbardziej intensywny rozwój obszarów plastycznych występuje w kierunkach I i II. Pierwsze odkształcenia trwałe pojawiają się na brzegu otworów w kierunku I przy współczynniku obciążenia

$$q_{spr} = 0,53.$$

Analizując wędrówkę granicy obszaru plastycznego wzdłuż kierunku I otrzymano nośność graniczną określoną współczynnikiem

$$q_{pl} = 1,21,$$

przy której uplastycznienie obejmuje cały przekrój jarzma poniżej otworu (kierunek I).



Rys. 4

Dla porównania przeprowadzono analizę nośności granicznej jarzma metodą statycznie dopuszczalnych pól naprężeń [4]. Na rysunku 4 przedstawiono taki zestaw nieciągłych pól naprężeń, który dał najwyższą ocenę dolną nośności granicznej. Wynosi ona:

$$(q_{pl})_T = 0,75.$$

Na rysunku tym zakreślono obszary zerowe (wolne od naprężeń). Współczynnik zwiększenia nośności granicznej w stosunku do pola z rysunku 4 wynosi zatem

$$f = \frac{1,21}{0,75} = 1,61.$$

3. Obciążenia powtarzalne

Do badania przy obciążeniach cyklicznych powtarzalnych przygotowano modele jarzma ze stali ST-3. Zastosowano ten materiał, ponieważ wykazuje on niejednoznaczność zależności $\sigma - \varepsilon$ przy $\sigma = R_e$. Jak wiadomo [5], [6] proces przystosowania elementu konstrukcyjnego polega na tym, że po określonej liczbie cykli takiego samego obciążenia dla współczynnika $p \geq 1$ następuje stabilizacja obszarów plastycznych. Przy następnych cyklach zasięg obszaru uplastycznionego nie zwiększa się i nie występują nowe odkształcenia trwałe.

3.1. Przygotowanie modelu i badania wstępne. Modele jarzma (wg rys. 1) wykonano z blachy o grubości 5 mm. Blacha poddana została obustronnemu struganiu i szlifowaniu, aby uzyskać gładką powierzchnię o odpowiednich właściwościach odbijających światło. Po wycięciu kształtu, powierzchnie modelu wytrawiono i pokryto elastooptyczną warstwą powierzchniową o grubości 2 mm. Parametry fizyczne materiału modelu wyznaczono na znormalizowanych próbkach dziesięciokrotnych. Wyznaczono wielkości:

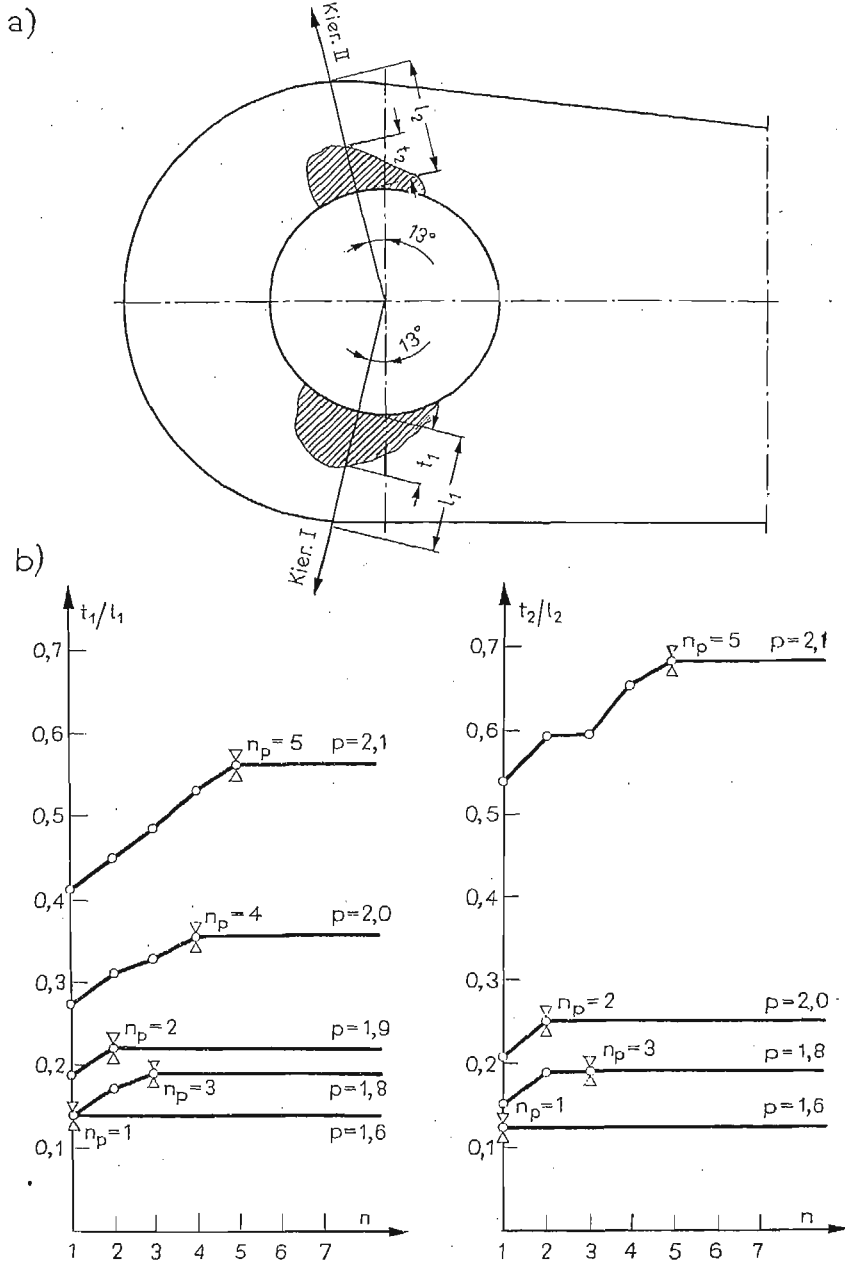
$$R_e = 208 [\text{MN}/\text{m}^2]; \quad E_s = 2,18 \cdot 10^5 [\text{MN}/\text{m}^2]; \quad \nu_s = 0,30.$$

3.2. Przeprowadzenie doświadczenia. Model jarzma poddawano rozciąganiu w tych samych uchwytach, które używane były przy badaniu modelu duralowego (rozdz. 2). Na modelu naniesiono kierunki I i II najbardziej intensywnego rozwoju obszarów plastycznych wyznaczone w poprzednich badaniach. Badania prowadzone były w ten sposób, że przykładano obciążenie o pewnym współczynniku $p \geq 1$, rejestrowano obraz izochrom, następnie model odciążano i powtarzano wielokrotnie taki cykl przy tym samym współczynniku p . Analiza wyników pozwoliła zatem określić liczbę cykli, po których granica obszarów plastycznych przestawała się przesuwać. Jest to liczba cykli (n_p) potrzebna do przystosowania się jarzma przy danym poziomie obciążenia. W dalszym ciągu doświadczenia zwiększano współczynnik p i przeprowadzano całą procedurę jak poprzednio.

3.3. Omówienie wyników. Otrzymane współrzędne granicy obszarów plastycznych w kierunkach I i II pozwoliły na zbudowanie wykresów przystosowania przedstawionych na rysunku 5. Widać z nich, że dla różnych poziomów obciążenia liczba cykli potrzebnych do przystosowania jest różna. Na ogół n_p wzrasta wraz ze wzrostem współczynnika p . Dla współczynnika $p \leq 1,6$ przystosowanie jarzma zachodzi podczas pierwszego cyklu obciążenia.

Porównując rysunek 3 i 5b można stwierdzić pewne różnice w położeniu granic obszarów plastycznych dla modeli duralowych i stalowych. Na ogół obszary plastyczne w modelu duralowym mają większy zasięg niż w stalowym. Wynika to z małej dokładności odczytywania izochromy granicznej w modelach wykonanych z miękkiej stali. W tym bowiem przypadku izochromy są nieregularne, mają kształt „postrzępiony”. Nie ma to jednak wpływu na określenie stabilizacji izochrom, czyli na ustalenie liczby cykli (n_p) potrzebnej do przystosowania.

Należy tu dodać, że próby określające przystosowanie jarzma przeprowadzono w sposób uproszczony. Zasadniczo dla każdego poziomu, obciążenie powtarzalne powinno być realizowane na nowym modelu, aby wyeliminować wpływ „pamięci materiału”. Ze względów technicznych próby wykonywane były na jednym modelu. W celu sprawdzenia pra-



Rys. 5

widłowości wyników wykonano dodatkowe badania na nowych modelach dla kilku wybranych poziomów obciążenia. Te badania potwierdziły poprzednie wyniki (odnośnie liczby cykli n_p), co świadczy o tym, że rezultaty dotyczące innych współczynników p można również uznać za wiarygodne.

Literatura cytowana w tekście

1. J. KAPKOWSKI, J. STUPNICKI, *Badanie sprężysto-plastycznych płaskich stanów naprężeń metodą pokryć optycznie czynnych*, Archiwum Budowy Maszyn, 1, 17 (1971).
2. L. DIETRICH, J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Nośność graniczna elementów konstrukcji*, PWN, Warszawa 1968.
3. A. J. ALEKSANDROW, M. H. ACHMETZIANOW, *Polarizacyjno-optyczne metody mechaniki deformującego ciała*, Izd. „Nauka” Moskwa 1973.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968.
5. J. KAPKOWSKI, *Badania adaptacji rozciąganego pasma z otworem*, Archiwum Budowy Maszyn, 2, 22 (1975).
6. J. A. KÖNIG, *Teoria przystosowania konstrukcji*, Wyd. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Warszawa 1971.

Резюме

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОУШИН СТЕРЖНЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ

В работе представлены результаты экспериментальных исследований проушин стержневого соединения, подвергаемых однократным и циклическим нагрузкам. Анализ распространения пластических областей проводится методом оптически активных покрытий. Определены границы пластических областей для возрастающих уровней нагрузки, а также развитие пластических областей после очередных циклов. Это дало возможность определения числа циклов, после которого исследуемый элемент приспособливается к данному уровню циклической нагрузки.

Summary

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF BRIDGE PLATE OF PIN JOINTS

The subject matter of the paper are the results of experimental analysis of a bridge plate of pin joints subject to a single and a repeated load. The growth of plastic regions was studied by the method of photoelastic coating. The boundaries of the plastic regions were determined for increasing load levels as well as the development of the plastic regions due to successive load cycles. This enables the number of cycles to be determined, after which the structural element tested is adapted for a repeated load of prescribed intensity.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1978 r.

Praca uzyskała II nagrodę w ogólnopolskim konkursie na pracę doświadczalną w mechanice, organizowanym w 1977 r. przez Oddział Częstochowski PTMTiS.

BADANIA ODKSZTAŁCEŃ I NAPRĘŻEŃ TERMOSPŁĘŻYSTYCH NA MODELACH
EPOKSYDOWYCH METODĄ TENSOMETRII ELEKTROREZYSTENCYJNEJ

ZBIGNIEW ORŁOŚ, KAZIMIERZ TOMASZEWSKI (WARSZAWA)

Streszczenie

W pracy opisano badania odkształceń termosprężystych przeprowadzonych metodą tensometrii elektrozestancyjnej na modelach wykonanych z tworzywa epoksydowego. Badania realizowano w dwu etapach. W pierwszym wyznaczono odkształcenia całkowite, w drugim określono odkształcenia pozorne. Różnica wymienionych odkształceń stanowiła poszukiwane odkształcenia termosprężyste. Przeprowadzono analizę obciążeń cieplnych modelu oraz towarzyszących im odkształceń i naprężeń termosprężystych w stanie stacjonarnym i niestacjonarnym przy dwóch prędkościach zmian temperatury ośrodka obciążającego cieplnie model.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- E moduł sprężystości podłużnej
 ν współczynnik Poissona
 α współczynnik rozszerzalności cieplnej liniowej
 T temperatura
 ΔT przyrost temperatury
 t czas
 ε odkształcenie jednostkowe
 ε_c odkształcenie całkowite
 ε' odkształcenie pozorne
 σ naprężenie
 α_1, α_2 współczynniki przyjmowania ciepła
 λ przewodność cieplna
 ρ gęstość
 c_p ciepło właściwe
 $a = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}$ współczynnik wyrównywania temperatury
 $(Bi)_1 = \frac{l \cdot \alpha_1}{\lambda}, (Bi)_2 = \frac{l \cdot \alpha_2}{\lambda}$ liczby Biota
 $Fo = \frac{a \cdot t}{l^2}$ liczba Fouriera
 l charakterystyczny rozmiar modelu
 k stała tensometru
 β współczynnik termicznych zmian rezystancji drucika tensometru
 γ współczynnik odkształceń pozornych

Wykaz indeksów do oznaczeń

- m* model
p prototyp; kierunek podłużny
r kierunek obwodowy
x, y, z współrzędne prostokątne
f plyn
w ścianka
 1 ośrodek czynny obciążeń cieplnych (alkohol etylowy)
 2 ośrodek bierny (powietrze)
cz czujnik tensometryczny

1. Wstęp

Analiza odkształceń i naprężeń termosprężystych prowadzona jest zarówno na drodze teoretycznej jak i doświadczalnej. Prace teoretyczne [1], [2] oraz obliczenia wykonywane coraz częściej przy wykorzystaniu metody elementów skończonych [3], [4] obejmują dotąd przykłady wyznaczania naprężeń w układach o prostej geometrii, a w bardzo małym stopniu rozpatrują zagadnienia przestrzenne termosprężystości. Rozwiązania teoretyczne tych ostatnich są dość skomplikowane, a obliczenia wymagają dużego nakładu pracy.

Wśród prac doświadczalnych mających najszersze znaczenie praktyczne w badaniach odkształceń i naprężeń termosprężystych znajduje się metoda elastooptyczna [5], [6] i metoda tensometrii elektrozestancyjnej. Metoda tensometryczna stosowana jest do badań odkształceń termosprężystych obiektów rzeczywistych (prototypów) [7] i w coraz szerszym stopniu w badaniach modelowych [8], [9], [10]. Jako materiał modelu stosuje się tu żywice epoksydowe charakteryzujące się niską przewodnością cieplną λ i wysokim współczynnikiem rozszerzalności cieplnej α w stosunku do obiektów prototypowych.

2. Założenia badań modelowych

Teoria podobieństwa stawia badaniom modelowym odkształceń i naprężeń termosprężystych szereg warunków, które winny być spełnione by zostało zrealizowane podobieństwo cieplne i podobieństwo pól naprężeń między modelem i prototypem. Rozkłady temperatur w modelu i prototypie przy określonych warunkach brzegowych będą podobne, jeśli odpowiednie liczby bezwymiarowe będą jednakowe dla modelu i prototypu [6]. I tak liczby Biota od strony ośrodka czynnego obciążającego cieplnie model i prototyp

$$(1a) \quad (B_i)_m = \frac{l_m \cdot \alpha_{1m}}{\lambda_m}$$

$$(1b) \quad (B_i)_p = \frac{l_p \cdot \alpha_{1p}}{\lambda_p}$$

winny być równe

$$(1c) \quad (B_i)_m = (B_i)_p$$

i analogicznie od strony ośrodka zwykle biernego, otaczającego model i prototyp.

W warunkach badań zmiennych w czasie obciążeń cieplnych winna być spełniona równość liczb Fouriera (F_0):

$$(2a) \quad (F_0)_m = \frac{\alpha_m \cdot t_m}{l_m^2},$$

$$(2b) \quad (F_0)_p = \frac{\alpha_p \cdot t_p}{l_p^2},$$

$$(2c) \quad (F_0)_m = (F_0)_p.$$

Odpowiednie związki podobieństwa dla przestrzennego stanu odkształceń i naprężeń termosprężystych [11] mają postać: dla odkształceń

$$(3) \quad \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_m} = \frac{(1+\nu_p) \cdot (1-\nu_m) \cdot \alpha_p \cdot (\Delta T_w)_p}{(1-\nu_p) \cdot (1+\nu_m) \cdot \alpha_m \cdot (\Delta T_w)_m}$$

i dla naprężeń

$$(4) \quad \frac{\sigma_p}{\sigma_m} = \frac{E_p(1-\nu_m) \cdot \alpha_p \cdot (\Delta T_w)_p}{E_m(1-\nu_p) \cdot \alpha_m \cdot (\Delta T_w)_m}.$$

3. Założenia badań tensometrycznych

Pomiary tensometryczne przeprowadzane na modelach z tworzyw sztucznych o niskiej przewodności cieplnej wymagają uwzględnienia niepożądanego faktu grzania się siatki rezystancyjnej i lokalnie materiału modelowego. W związku z tym po wstępnych badaniach tego zjawiska ograniczono prąd zasilający czujniki pomiarowe do 0,00125 mA ($U = 0,3$ V). Ponadto zrealizowano automatyczne przełączanie punktów pomiarowych i rejestrację wyników pomiarów.

W badaniach odkształceń termosprężystych metodą tensometryczną istotnym jest problem zapewnienia kompensacji cieplnej dla czujników elektrorezystancyjnych pomiarowych. W pracy zastosowano metodę badań odkształceń, którą realizowano w dwóch etapach. W pierwszym etapie rejestrowano odkształcenie całkowite ε_c w danym miejscu powierzchni modelu. Odkształcenie to w dowolnym kierunku x można określić wzorem:

$$(5) \quad (\varepsilon_c)_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_m \cdot \Delta T_w + \left(\frac{\beta}{k} - \alpha_{cz}\right) \Delta T_w.$$

We wzorze (5) pierwsze dwa człony stanowią algebraiczną sumę odkształcenia wywołanego naprężeniami termosprężystymi σ_x , σ_y i σ_z oraz odkształcenia wynikającego z rozszerzalności cieplnej materiału modelu. Ostatni człon wzoru (5) wyraża wpływ zmiany z temperaturą współczynnika rezystancji siatki przewodzącej czujnika oraz jej rozszerzalności cieplnej liniowej.

W drugim etapie określono odkształcenia pozorne ε' dla czujników, w próbie, w której realizowano równomierne ochładzanie (ogrzanie) modelu z czujnikami tensometrycznymi:

$$(6) \quad \varepsilon' = \left(\frac{\beta}{k} + \alpha_m - \alpha_{cz}\right) \cdot \Delta T_w.$$

Łatwo stwierdzić, że różnica odkształcenia całkowitego i odkształcenia pozornego dla danego czujnika pomiarowego daje poszukiwane odkształcenie termosprężyste:

$$(7) \quad \varepsilon_x = (\varepsilon_c)_x - \varepsilon'_x$$

lub wyrażone w naprężeniach w układzie współrzędnych x, y, z :

$$(8) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

4. Materiał modelowy

W badaniach zastosowano materiał modelowy oparty na żywicy epoksydowej Epidian 5 (E-5) utwardzanej na zimno trójetylenoczeroaminą (Z-1) i plastyfikowanej ftalanem dwubutyłowym (FDB). Skład wagowy kompozycji był następujący:

E-5	100 cz.w.
FDB	20 cz.w.
Z-1	10 cz.w.

Kompozycja ta umożliwiła uzyskanie modeli przestrzennych o stosunkowo dużych rozmiarach. Założono badanie odkształceń termosprężystych na modelach w zakresie temperatur obniżonych od $+20^\circ\text{C}$ do -25°C . Wybór takiego zakresu temperatur miał na celu zmniejszenie podatności na pełzanie mechaniczne materiału modelowego.

Przeprowadzono badania charakterystyk mechanicznych E i ν oraz współczynnika rozszerzalności cieplnej α i współczynnika wyrównywania temperatury a . Stwierdzone dla modułu sprężystości podłużnej i współczynnika rozszerzalności cieplnej zależności od temperatury można wyrazić w postaci liniowej:

$$(9) \quad E = 3500 - 21,6 T \quad [\text{MN/m}^2],$$

$$(10) \quad \alpha = 0,000080 + 0,0000005 T \quad [\text{deg}^{-1}],$$

gdzie: T w $^\circ\text{C}$

W rozpatrywanym przypadku materiału modelowego i przedziału temperatur określono współczynnik Poissona ν oraz współczynnik wyrównywania temperatury a , uzyskując wartości

$$\nu = 0,39,$$

$$a = 0,00088 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

5. Odkształcenia pozorne

Zależność (6) na odkształcenia pozorne można wyrazić w postaci:

$$(11a) \quad \varepsilon' = \gamma \cdot \Delta T_w$$

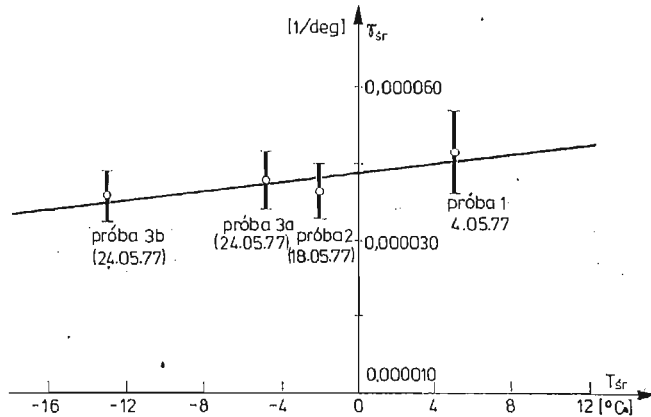
gdzie

$$(11b) \quad \gamma = \frac{\beta}{k} + \alpha_m - \alpha_{cz}$$

Wartość współczynnika odkształceń pozornych γ może być określona w badaniach wzorcowych, na próbkach z materiału modelu bądź bezpośrednio dla czujników tensometrycznych naklejonych na modelu. W pracy zastosowano określenie współczynnika odkształceń pozornych dla czujników naklejonych na badanym modelu.

W badaniach wybranego modelu, połączenia płaszczka walczaka z króćcem, na którym naklejono 48 czujników tensometrycznych RL5/120, w kilku próbach określono odkształcenie pozorne dla wszystkich czujników pomiarowych. Stwierdzono w badaniach rozrzut wartości współczynnika odkształceń pozornych dla poszczególnych czujników oraz zależność współczynnika odkształceń pozornych od temperatury (rys. 1). Zmiennosc współczynnika odkształceń pozornych od temperatury przybliżono zależnością liniową:

$$(12) \quad \gamma_i = (\gamma_0)_i + a_1 \cdot T \text{ [deg}^{-1}\text{]}$$



Rys. 1. Zależność współczynnika odkształceń pozornych od temperatury $\gamma_{sr} = \gamma_{sr}(T_{sr})$ dla czujników naklejonych na modelu połączenia walczaka z króćcem



Rys. 2. Widok modelu walczaka z naklejonymi tensometrami i termoelementami

gdzie: T — temperatura w $^{\circ}\text{C}$,

i — wskaźnik oznaczający pojedynczy czujnik tensometryczny.

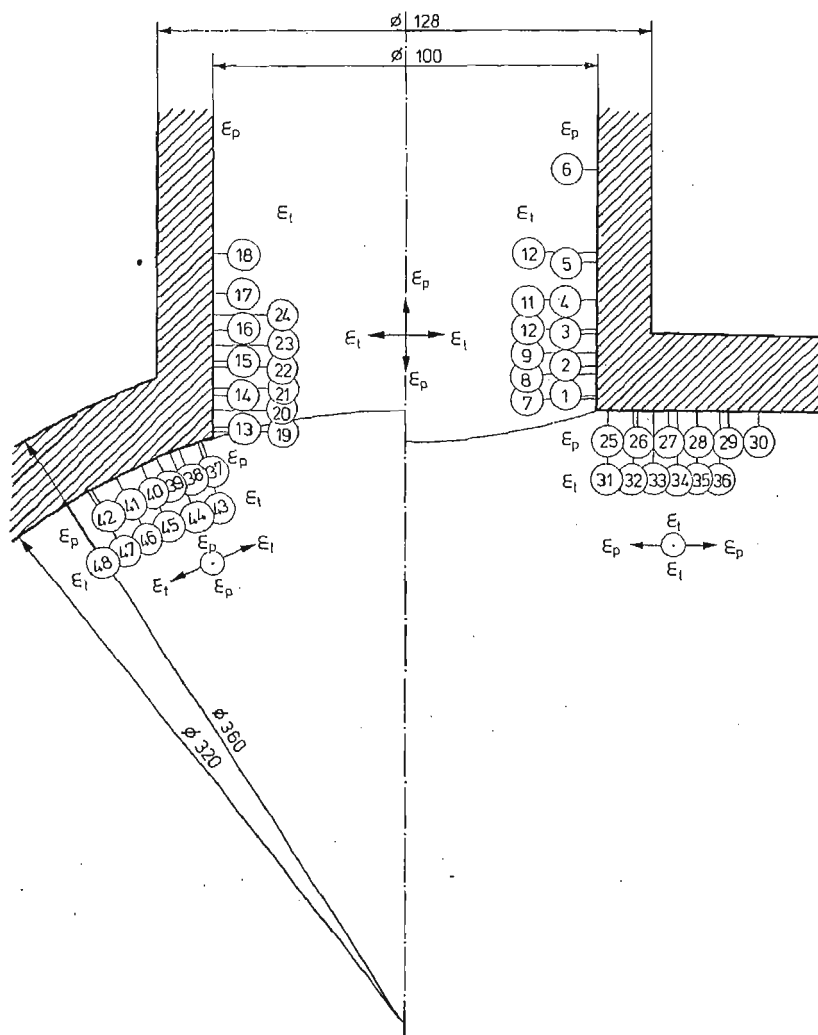
Dla badanego modelu i zbioru czujników uzyskano:

$(\gamma_0)_{sr} = 0,000039$ [deg^{-1}] w temperaturze 0°C ,

a $a_1 = 0,000000296$ [deg^{-2}].

6. Badanie odkształceń termosprężystych w modelu połączenia rury grubościennej z płaszczem walczaka

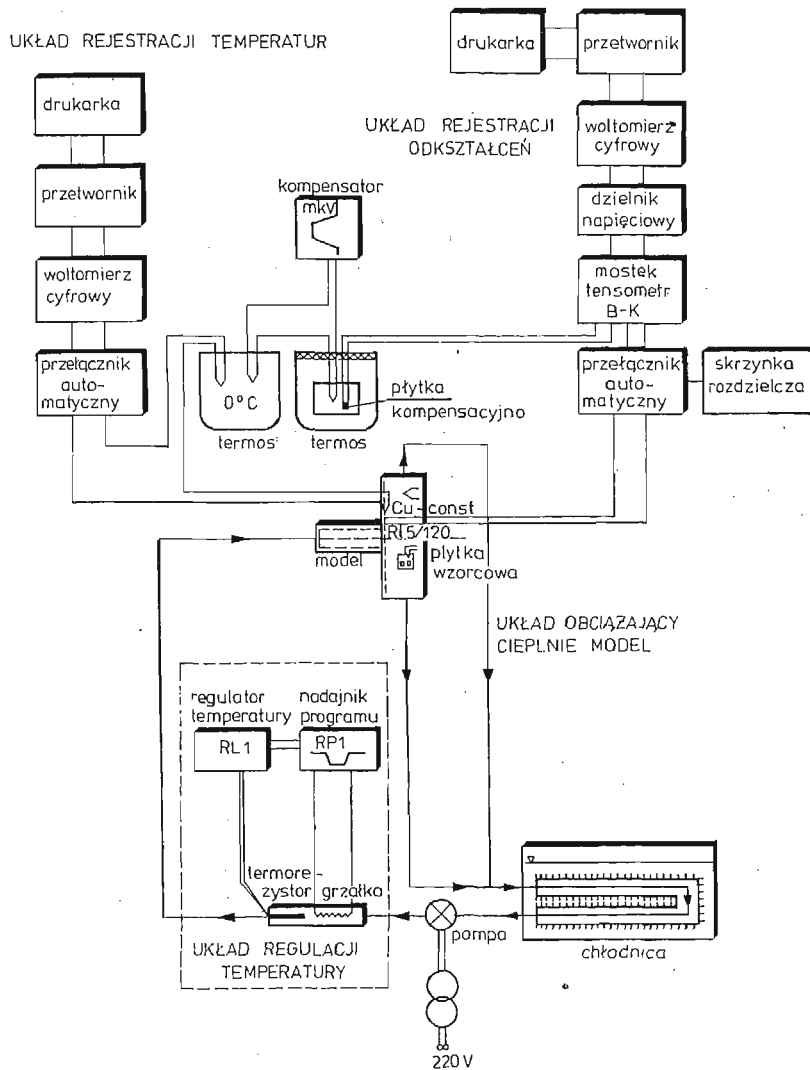
Na modelu połączenia płaszcza walczaka $\text{Ø}360/\text{Ø}320/380$ z króćcem $\text{Ø}128/\text{Ø}100/130$ naklejono 48 tensometrów RL 5/120 po stronie wewnętrznej w głównych płaszczyznach symetrii (rys. 2 i rys. 3). Ponadto naklejono miniaturowe termoelementy Cu-Konst



Rys. 3. Schemat rozmieszczenia tensometrów w połączeniu walczaka z króćcem.

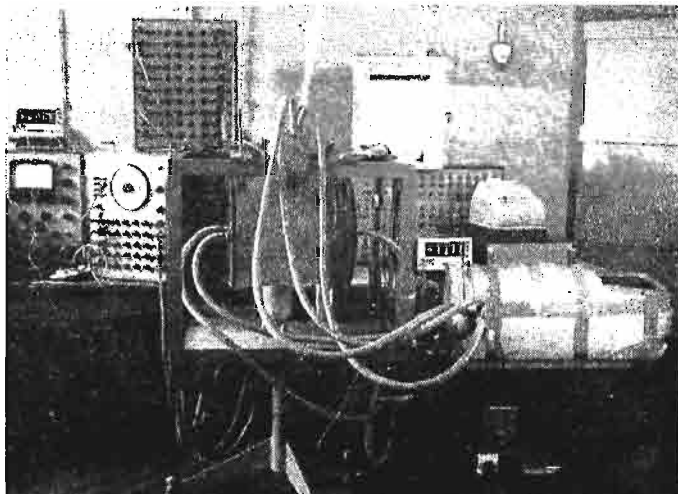
o grubości drucików 0,2 i 0,15 mm po stronie wewnętrznej i zewnętrznej modelu dla rejestracji pola temperatur w pobliżu tensometrów jak i ogólnego rozkładu temperatur.

Do rejestracji odkształceń wykorzystano zestaw tensometryczny Bruel i Kjaer (1516, 1542, 1543), dzielnik napięcia, woltomierz cyfrowy (V530, V533), przetwornik do drukarki (prod. NRD, 3511a) i drukarkę (prod. NRD, 3534b).

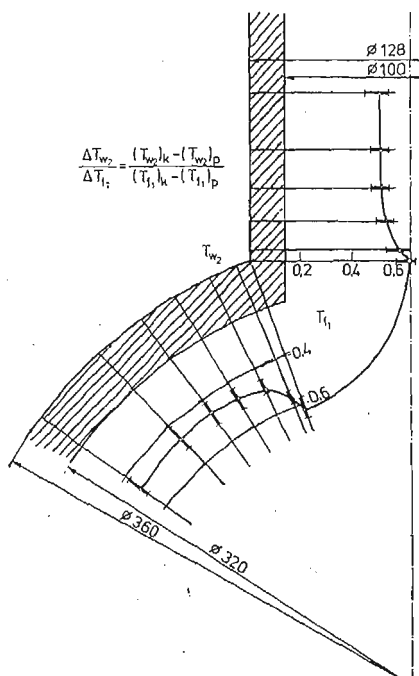


Rys. 4. Schemat stanowiska badawczego

Dla określenia temperatur wykorzystano przełącznik automatyczny 50-punktowy (prod. NRD SG 151 typ 12001), woltomierz cyfrowy (V530, V533), przetwornik do drukarki (3511a) i drukarkę (3534b).



Rys. 5. Widok stanowiska badawczego



Rys. 6. Rozkład temperatur na ścianie zewnętrznej modelu w głównej płaszczyźnie obwodowej walczaka

Model obciążono cieplnie za pomocą alkoholu etylowego specjalnie ochładzanego o regulowanej prędkości zmian temperatury $v_T = \Delta T_{r1} / \Delta t$ ośrodka obciążającego cieplnie model. Schemat i widok stanowiska badawczego pokazano odpowiednio na rys. 4 i 5.

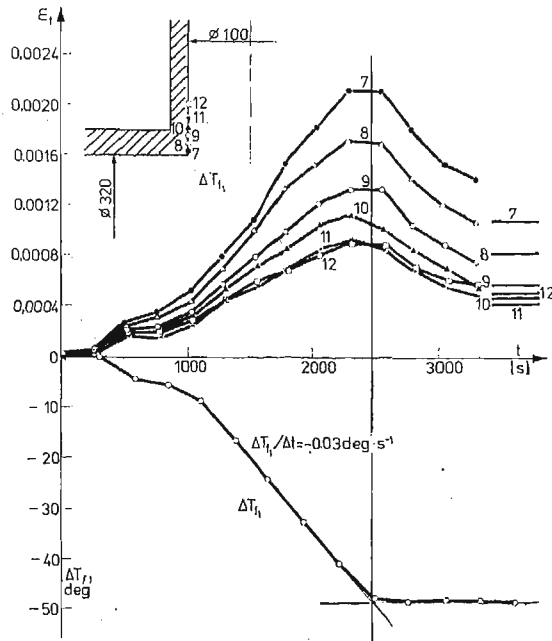
Badania modelu połączenia płaszczka walczaka z króćcem przeprowadzono przy dwóch prędkościach V_{T1} i V_{T11} zmian temperatury ośrodka i $V_{T1} = \Delta T_{r1} / \Delta t = -0,030$ [deg · s⁻¹] i $V_{T11} = -0,050$ [deg · s⁻¹].

Rozkład temperatur na ściance modelu po stronie zewnętrznej w stanie stacjonarnym uzyskany z trzech prób badania odkształceń całkowitych w głównej płaszczyźnie symetrii modelu pokazano przykładowo na rys. 6.

W celu określenia odkształceń termosprężystych wyznaczono wpierw odkształcenia pozorne w stanie stacjonarnym i niestacjonarnym ($V_T \neq 0$) przy zastosowaniu wprowadzonej zależności:

$$(13) \quad \varepsilon'_i = \left[(\gamma_0)_i + a_1 \frac{T_{wp} + T_{wk}}{2} \right] \cdot \Delta T_w$$

gdzie: T_{wp} i T_{wk} początkowa i końcowa temperatura ścianki (T_{wk} dla chwili czasu t). Przebieg poszukiwanych wartości odkształceń termosprężystych przy prędkości $V_{T_1} = -0,030$ [deg · s⁻¹] pokazano przykładowo na rys. 7.



Rys. 7. Przebieg w czasie odkształceń obwodowych ε_t w krótcu w głównej pł. podłużnej przy $\Delta T_{T_1}/\Delta t = -0,030$ [deg · s⁻¹]

Naprężenia termosprężyste σ_p i σ_t odpowiednio w kierunkach wzdłużnym i obwodowym, wyznaczone z badań tensometrycznych określono z zależności:

$$(14) \quad \sigma_p = \frac{1}{E_{w_1}} (\varepsilon_p + \nu \varepsilon_t),$$

$$\sigma_t = \frac{1}{E_{w_1}} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_p)$$

gdzie: E_{w_1} — moduł sprężystości podłużnej dla temperatury ścianki od strony ośrodka 1
 ε_p , ε_t — odkształcenia termosprężyste odpowiednio w kierunkach wzdłużnym i obwodowym.

Wartości naprężeń uzyskanych w badaniach tensometrycznych odniesiono umownie do naprężenia σ_{teoret} wyznaczonego dla wewnętrznej ścianki króćca (k) przy stałych E i α niezależnych od temperatury [1]:

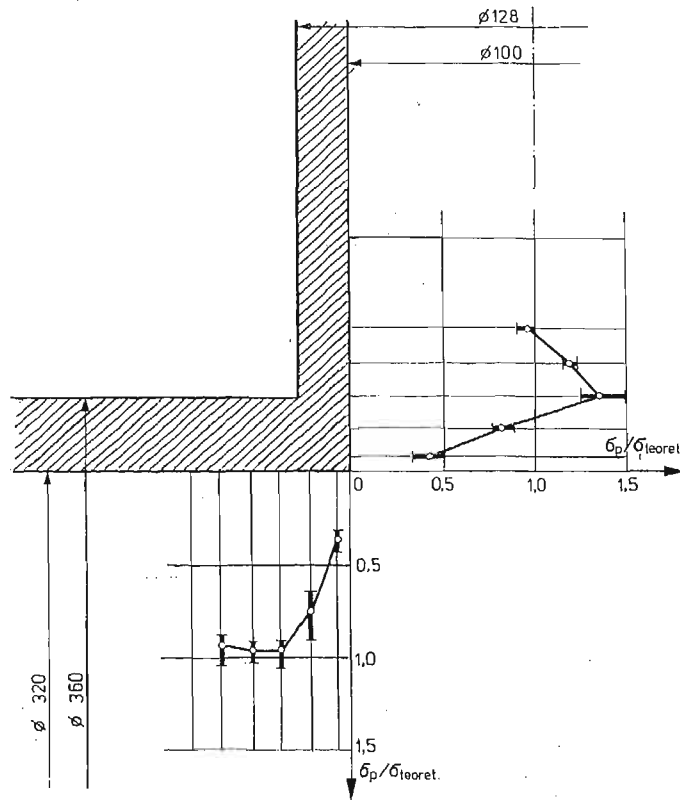
$$(15) \quad \sigma_{teoret} = \frac{E_{sr} \cdot \alpha_{sr} \cdot (\Delta T_w)_k}{2(1-\nu) \cdot \ln b/a} \left(1 - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

gdzie: b i a zewnętrzny i wewnętrzny promień króćca, $b/a = 1,28$,

E_{sr} , α_{sr} — wielkości określone z wyrażień (9) i (10) dla średniej arytmetycznej temperatury

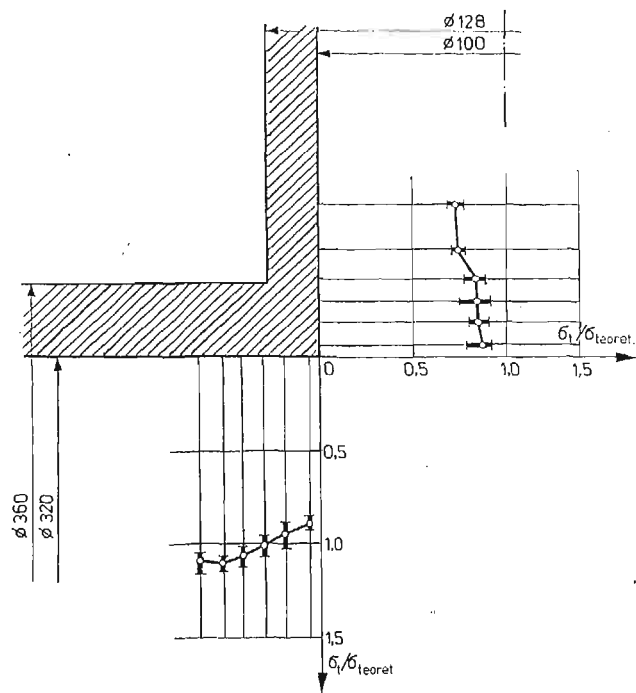
ścianki króćca $T_{w_{sr}} = \frac{1}{2} (T_{w_1} + T_{w_2})$ w oddaleniu od połączenia z powłoką walcową,

$(\Delta T_w)_k$ — przyrost temperatury ścianki króćca w oddaleniu od połączenia z powłoką.

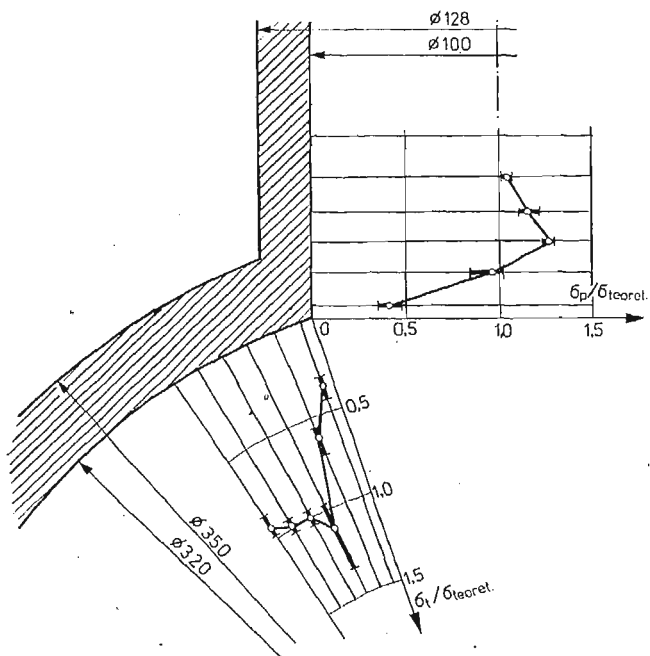


Rys. 8. σ_p/σ_{teoret} w głównej płaszczyźnie podłużnej w stanie stacjonarnym

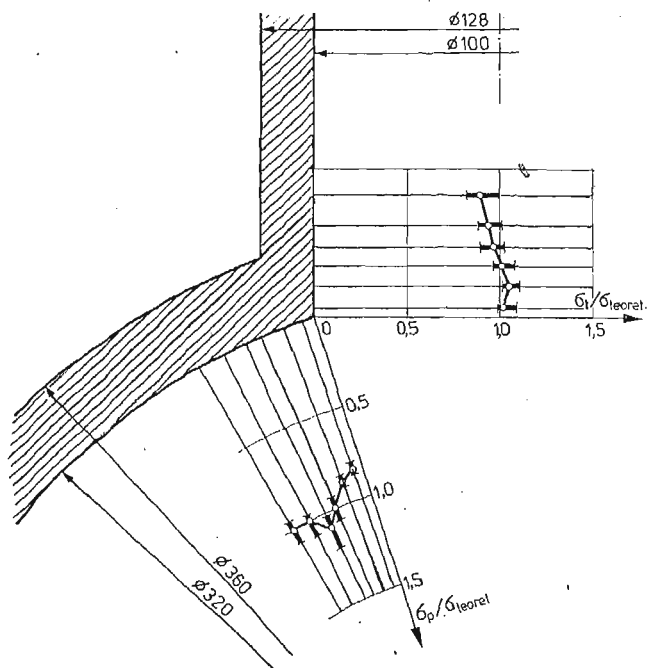
Na rys. 8÷11 przedstawiono rozkład stosunku σ/σ_{teoret} wyznaczonego na podstawie wyników trzech serii badań. Zwracają uwagę podobne rozkłady odpowiadających sobie naprężeń niezależnie od orientacji głównej płaszczyzny walczaka oraz niższe wartości naprężeń w oddaleniu od węzła króćcowego. Zagadnienie ostatnie rozpatrywano za pomocą metody elementów skończonych dla wycinka rury grubościenniej.



Rys. 9. $\sigma_t/\sigma_{t,teoret.}$ w głównej płaszczyźnie podłużnej w stanie stacjonarnym



Rys. 10. $\sigma_p/\sigma_{t,teoret.}$ w króćcu i $\sigma_t/\sigma_{t,teoret.}$ w powłoce walcowej w głównej płaszczyźnie obwodowej w stanie stacjonarnym



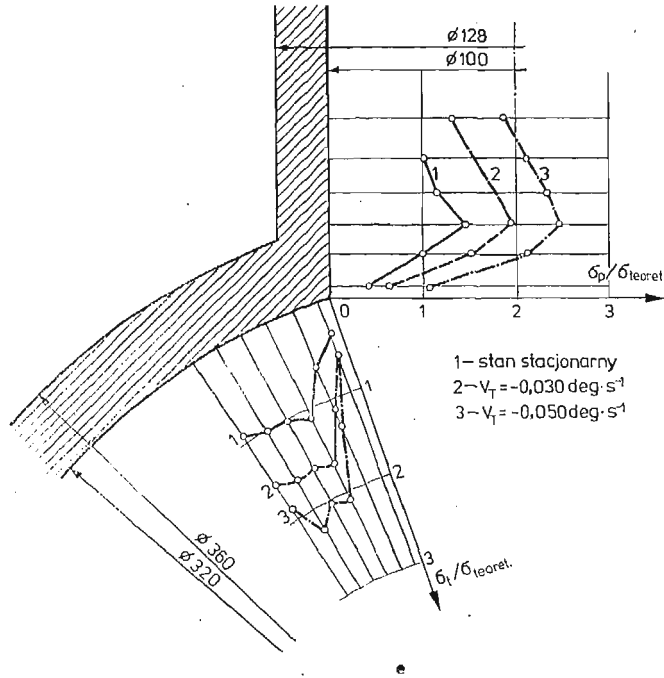
Rys. 11. $\sigma_t/\sigma_{t,teoret.}$ w króćcu i $\sigma_p/\sigma_{p,teoret.}$ w powłoce walcowej w głównej płaszczyźnie obwodowej w stanie stacjonarnym

Analiza rozkładu naprężeń w wycinku rury grubościenniej prowadzona za pomocą metody elementów skończonych przy zmienności $E = E(T)$ i $\alpha = \alpha(T)$ jak w eksperymencie wykazała niższe wartości naprężeń na brzegu wewnętrznym w stosunku do obliczeń przy przyjęciu $E_{sr} = \text{const}$ i $\alpha_{sr} = \text{const}$. Przy $b/a = 1,47$ uzyskano na brzegu wewnętrznym $(\sigma_t)_{E(T), \alpha(T)}/\sigma_{t,teoret.} = 0,87$. Mniejsze wartości naprężeń w powłoce walcowej (pw) wynikają z uzyskania przyrostu temperatury w powłoce $(\Delta T_w)_{pw}$ względnie niższego od wartości oczekiwanej tzn. w przybliżeniu proporcjonalnej do grubości ścianek powłoki walcowej i króćca przy podobnych warunkach wymiany ciepła. Zagadnienie to jest ściśle związane z realizacją przepływów czynnika obciążającego cieplnie model i wynikających stąd warunków przejmowania ciepła między płynem i modelem.

7. Analiza wyników badania naprężeń termosprężystych w stanie niestacjonarnym

Dla przebiegów odkształceń termosprężystych w stanie niestacjonarnym określono maksymalne wartości odkształceń odpowiadające chwili ustalenia się temperatury ośrodka obciążającego cieplnie model. Naprężenia obliczono ze związków (14). Stwierdzono zależność zmian wartości naprężeń przy wzroście prędkości zmian temperatury ośrodka obciążającego cieplnie model. Rozkłady naprężeń uzyskane w stanie stacjonarnym mają podobny charakter jak w stanie niestacjonarnym co przykładowo ilustruje rys. 12. War-

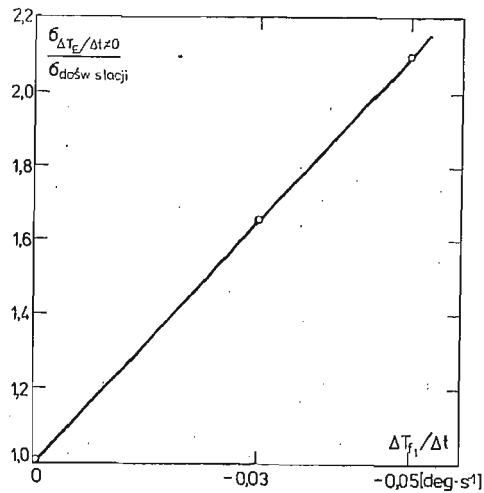
BADANIA ODKSZTAŁCEŃ



Rys. 12. $\sigma_p/\sigma_{t,theoret.}$ w króćcu i $\sigma_t/\sigma_{t,theoret.}$ w powłoce walcowej w głównej płaszczyźnie obwodowej w stanie stacjonarnym i niestacjonarnym

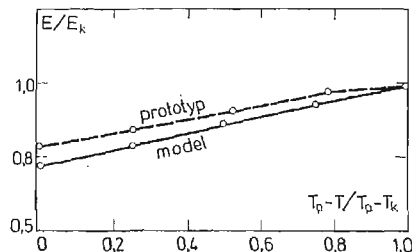
tości naprężeń σ_{v_T} w stanie niestacjonarnym ($\Delta T_{f_1}/\Delta t \neq 0$) odniesiono w danych punktach pomiarowych do wartości uzyskanych w stanie stacjonarnym $\sigma_{dośw. stacj.}$

$$(16) \quad \sigma_{v_T} / \sigma_{dośw. stacj.}$$



Rys. 13. $\sigma_{v_T} / \sigma_{dośw. stacj.} = f(v_T = \Delta T_{f_1} / \Delta t)$

Uśrednione wyniki wartości stosunków określonych z zależności (16) dla dwóch prędkości $V_{T_I} = -0,030$ [deg · s⁻¹], i $V_{T_{II}} = -0,050$ [deg · s⁻¹] pokazano na rys. 13. Z rysunku widać, że współczynnik wzrostu naprężeń w dowolnym punkcie jest proporcjonalny do zmian prędkości ośrodka obciążającego cieplnie model.



Rys. 14. $E/E_k = f[(T_p - T)/(T_p - T_k)]$ w modelu i w prototypie

Przeniesienie wyników badań modelowych na prototyp jest możliwe przy wykorzystaniu równości liczb Fouriera (F_0). Można wykazać, że prędkość zmian temperatury w prototypie wyrazi się zależnością

$$(17) \quad v_{T_p} = v_{T_m} \frac{t_m}{t_p}$$

co przy:

$$a_m = 0,00088 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$a_p = 0,10 \text{ cm}^2, \text{ s}^{-1}$$

$$i(t_m/l_p) = \frac{1}{5}$$

daje $V_{T_p} = V_{T_m} \cdot 4,454$

Wobec stwierdzonych zmian modułu sprężystości podłużnej $E = E(T)$ w funkcji temperatury, jak również znanych zmian modułu sprężystości podłużnej materiału prototypu, istotne jest określenie różnic charakteru zmian modułu E w funkcji temperatury dla modelu i prototypu. W tym celu stosunek E/E_k w funkcji $(T_p - T)/(T_p - T_k)$ (gdzie T_p początkowy parametr, E_k , T_k — końcowe parametry procesu cieplnego), dla prototypu i modelu. Na rys. 14 przedstawiono powyższe zależności, które wykazują duże podobieństwo zmian modułu sprężystości podłużnej w funkcji temperatury.

8. Wnioski

Przedstawiona metoda badań odkształceń i naprężeń termosprężystych pozwala na analizę odkształceń i naprężeń stacjonarnych i niestacjonarnych w modelach epoksydowych, w których łatwo jest zrealizować obciążenie cieplne podobne jak w prototypie.

Należy podkreślić zalety badań modelowych w stosunku do badań obiektów prototypowych gdyż można tu uzyskać wartości odkształceń o rząd wyższe niż w prototypie (por. wzór 3) oraz możliwość rozszerzenia skali czasu (por. wzory 2 i 17).

Metoda tensometryczna może być zastosowana do badania obszarów obiektów przestrzennych trudno dostępnych jak też do badań wewnątrz ścianek modeli.

Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Wyd. „Arkady”, W-wa, 1962.
2. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, W-wa 1960.
3. A. JAWORSKI, K. RACZYŃSKI, *Analiza naprężeń i odkształceń termosprężystych w ciałach obrotowych wywołanych osiowo-symetrycznym polem temperatury przy użyciu metody elementów skończonych*, Archiwum Budowy Maszyn, tom XXIII 1976, z. 4, 529—548.
4. J. SZMELTER, St. DOBROCIŃSKI, M. WIECZÓREK, *Teoretyczna analiza naprężeń w połączeniach kroćcowych*, Sprawozdanie z etapu IV dla O.B.R.K. i U.E. w Tarnowskich Górach, WAT, W-wa, 1976.
5. Z., ORŁOŚ, Z., DYLAĞ, *Badanie metodą elastooptyczną stanów naprężenia wywołanych obciążeniami termicznymi*, Rozprawy Inżynierskie, 2, 11, 1963, 335—349.
6. Ch. P., BURGER, *Thermal modeling*, Experimental Mechanics 1975, 15 (11).
7. K. ANDERKO, D. KEILBACH, E. WACKER, *Wärmespannungsmessungen Dieselmotor mit Hilfe von Dehnmessstreifen*, MTZ, 28 (1967), 93—100.
8. B. LAWTON, *Use of plastic models to evaluate thermal strains in diesel — engine pistons*, Journal of Strain Analysis, 1968, 8 (3), 176—186.
9. A. J. BUSH, *Considerations and solutions in evaluating thermal stresses in a composite cylinder*, Experimental Mechanics, 1971, 11 (2), 87—93.
10. O. B. EPELLE, M. L. MEYER, *Measurement of thermal strains by strain gauges embedded in epoxy models*, Proc. 4-th Int. Confer. Exper. Stress Analysis, Cambridge, 1971.
11. J. D. HOVANESIAN, H. C. KOWALSKI, *Similarity in thermoelasticity*, Experimental Mechanics, 1967, 7 (2), 82—84.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ
ЭПОКСИДНЫХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОРЕЗИСТИВНОЙ
ТЕНЗОМЕТРИИ

В работе представлены исследования термоупругих деформаций моделей из эпоксидной смолы. С помощью проволочных датчиков сопротивления были ведены исследования для двух отдельных рядов измерений деформаций. В первом этапе определено сумму термоупругих и кажущихся деформаций, во втором — только кажущиеся. Разность между ними является искаемыми термоупругими деформациями. Представлено анализ тепловой нагрузки модели и некоторые результаты исследований деформаций и напряжений для двух скоростей перемен температуры тепловой нагрузки.

Summary

INVESTIGATIONS OF THERMOELASTIC STRAINS AND STRESSES OF EPOXY MODELS BY
MEANS OF STRAIN GAUGES

Paper presents investigations of thermal strains measured by strain gauges cemented to the surface of epoxy models. The investigations were performed in two stages. At the first one the sum of thermal and apparent strains was measured, at the second one, the apparent strains were determined. The difference of the above mentioned strains yields the required thermal strains. The analysis of thermal loads of the model as well as the corresponding thermal strains and stresses in the stationary and transient state, was presented for two speeds of temperature changes of the thermal loading.

WAT

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1978 r.

Praca uzyskała III nagrodę w ogólnopolskim konkursie na pracę doświadczalną w mechanice organizowanym w 1977 r. przez Oddział Częstochowski PTMTiS

O STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ PRZY PULSUJĄCYCH SIŁACH
PODŁUŻNYCH I POPRZECZNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM NIELINIOWEGO TŁUMIENIA
MATERIAŁOWEGO

FERDYNAND TWARDOSZ I JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

W pracy niniejszej zajmujemy się zagadnieniem stateczności dynamicznej cienkościennej powłoki w kształcie stożka ściętego, swobodnie podpartej na obu brzegach. Powłoka obciążona jest siłami podłużnymi $N(t)$ i wszechstronnym równomiernym ciśnieniem $p(t)$ zmieniającymi się okresowo w czasie. Uwzględniono przy tym wpływ nieliniowego tłumienia na rezonans parametryczny. Rozważania prowadzone niżej będą oparte na wynikach pracy [3] w której zagadnienie to zostało dość obszernie omówione.

1. Równanie różniczkowe ruchu

Problem stateczności dynamicznej powłoki stożkowej przy uwzględnieniu tłumienia wg hipotezy Dawidenkowa sprowadza się do analizy rozwiązań następującego równania różniczkowego [3]:

$$(1.1) \quad \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \Omega_{mn}^2 f(t)_{mn} = \varepsilon [2\mu_{mn} \Omega_{mn}^2 \cos \Theta t f(t)_{mn} - \vec{J}(t)],$$

w którym

$$(1.2) \quad \vec{J}(f) = \frac{4(1+\nu_1)[(1+\nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^4 \rho h m_1^2 (e^{2(1+\nu_1)\mu} - 1)} \int_0^{\mu} \int_0^{2\pi} \varepsilon \vec{\Phi}_3(z, \varphi_1, t) e^{(2+\nu_1)z} \sin m_1 z \cos n_1 \varphi_1 d\varphi_1 dz$$

oznacza funkcję tłumienia, a parametr ε może przybierać dostatecznie małe dodatnie wartości.

W równaniu (1.1) przyjęto następujące oznaczenia:

$$(1.3) \quad \Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{p_0}{p_{krmn}} \right) \text{ — częstota drgań swobodnych powłoki obciążonej stałymi siłami podłużnymi } N_0 < N_{krmn} \text{ i równomiernym stałym ciśnieniem zewnętrznym } p_0 < p_{krmn},$$

$$(1.4) \quad 2\mu_{mn} = \frac{P_t}{p_{krmn} - p_0} \text{ — współczynnik pulsacji,}$$

$$(1.5) \quad \varkappa = \frac{N(t)}{p(t)} = \frac{N_0}{p_0} \text{ — stosunek obciążeń zewnętrznych,}$$

$$(1.6) \quad \left. \begin{aligned} N(t) &= N_0 + N_t \cos \Theta t \\ \rho(t) &= p_0 + p_t \cos \Theta t \end{aligned} \right\} \text{okresowo zmienne obciążenie zewnętrzne,}$$

$$(1.7) \quad \omega_{mn}^2 = \frac{D(1 - e^{2(\nu_1 - 1)\mu})[m_1^4 + 4(\nu_1 - 1)^2 m_1^2 - m_1^2 K_1 + (1 - \nu_1)(K_2 + K_3)(1 + \nu_1)[(1 + \nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^4 \rho h(1 - \nu_1)[(1 - \nu_1)^2 + m_1^2](e^{2(1 + \nu_1)\mu} - 1)} + \\ + \frac{E \text{ctg}^2 \gamma (1 + \nu_1)[(1 + \nu_1)^2 + m_1^2](e^{2\nu_1 \mu} - 1)[B_1(m_1 \nu_1^2 + m_1^3) + B_2(m_1^2 + \nu_1 m_1^2 + \nu_1^3 + \nu_1^2)]}{s_1^2 \rho m_1 \nu_1 (\nu_1^2 + m_1^2)(e^{2(1 + \nu_1)\mu} - 1)} - \\ - \frac{4E \text{ctg}^2 \gamma (1 + \nu_1)[(1 + \nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^2 \rho m_1 (e^{2(1 + \nu_1)\mu} - 1)} \left[- \frac{(n_1 \Phi_1 + \Phi_2) e^{2\nu_1 \mu}}{(\nu_1 + n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_2 - n_1 \Phi_1}{(\nu_1 - n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{\Phi_1(n_1 + 2) e^{2\nu_1 \mu}}{(\nu_1 + n_1 + 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_1(n_1 - 2)}{(\nu_1 - n_1 + 1)^2 + m_1^2} \right] - \text{częstość drgań własnych} \\ \text{powłoki nieobciążonej siłami zewnętrznymi,}$$

$$(1.8) \quad p_{krmn} = \frac{h(1 - 4\nu_1^2)[(1 + 2\nu_1)^2 + 4m_1^2][(1 - 2\nu_1)^2 + 4m_1^2]}{4s_1 \text{tg} \gamma (e^{2\nu_1 + 1}\mu - 1)(m_1^2 + 2n_1^2 - 3\nu_1 - 3\nu_1^2 - 0,5)(1 - 2\nu_1)[(1 - 2\nu_1)^2 + 4m_1^2] + \dots} \times \\ \times \left\{ \frac{D(1 - e^{2(\nu_1 - 1)\mu})[m_1^4 + 4(\nu_1 - 1)^2 m_1^2 - m_1^2 K_1 + (1 - \nu_1)K_2 + K_3]}{s_1^2 h(1 - \nu_1)[m_1^2 + (1 - \nu_1)^2]} + \right. \\ \left. + \frac{E \text{ctg}^2 \gamma (e^{2\nu_1 \mu} - 1)[B_1(m_1^2 \nu_1^2 + m_1^3) + B_2(m_1^2 + \nu_1 m_1^2 + \nu_1^3 + \nu_1^2)]}{m_1 \nu_1 (m_1^2 + \nu_1^2)} - \right. \\ \left. - \frac{4E \text{ctg}^2 \gamma}{m_1} \left[- \frac{(\Phi_1 n_1 + \Phi_2) e^{2\nu_1 \mu}}{(\nu_1 + n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_2 - n_1 \Phi_1}{(\nu_1 - n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_1(n_1 + 2) e^{2\nu_1 \mu}}{(\nu_1 + n_1 + 1)^2 + m_1^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Phi_1(n_1 - 2)}{(\nu_1 - n_1 + 1)^2 + m_1^2} \right] \right\} - \text{obciążenie krytyczne przy równoczesnym działaniu} \\ \text{sił podłużnych i wszechstronnego obciążenia zewnętrznego,}$$

przy czym

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= 0,25 \{2m_1(1 + \nu_1)B_1 + [(1 + \nu_1)^2 - m_1^2 - n_1^2]B_2\}, \\ \Phi_2 &= 0,5 \{2m_1(1 - 2\nu_1)B_1 + [(1 + 4\nu_1 - \nu_1^2) - n_1^2 + m_1^2]B_2\}, \\ B_1 &= \frac{(m_1^2 + \nu_1 - \nu_1^2)\alpha_{mn} - 4\nu_1(1 - 2\nu_1)m_1^2\beta_{mn}}{\alpha_{mn}^2 + 16m_1^2\nu_1^2\beta_{mn}^2}, \\ B_2 &= \frac{m_1[(1 - 2\nu_1)\alpha_{mn} + 4\nu_1(m_1^2 + \nu_1 - \nu_1^2)\beta_{mn}]}{\alpha_{mn}^2 + 16m_1^2\nu_1^2\beta_{mn}^2}, \\ \alpha_{mn} &= (m_1^2 + n_1^2)^2 - 2(1 + \nu_1^2)n_1^2 + 2(1 - 3\nu_1^2)m_1^2 + (\nu_1^2 - 1)^2, \\ \beta_{mn} &= m_1^2 + n_1^2 + 1 - \nu_1^2, \\ \nu_1 &= \frac{1 - \nu}{2}, \quad n_1 = \frac{n}{\sin \gamma}, \quad m_1 = \frac{\pi m}{4}, \quad u = \ln \frac{s_2}{s_1}, \end{aligned}$$

n — liczba fal po obwodzie,

m — liczba półfal w kierunku tworzącej.

Ponieważ siły tłumienia nie są wielkie w stosunku do sił sprężystych, a amplituda harmonicznego wymuszenia jest mała (zagadnienie geometrycznie liniowe), w związku z tym możemy rozważaną powłokę traktować jako słabonieliniowy układ niezachowawczy i dla wyznaczenia drgań zastosować metodę asymptotycznych rozwinięć względem potęg małego parametru [1], [2].

2. Określenie głównego obszaru rezonansowego

Rozpatrzmy drgania w otoczeniu podstawowego rezonansu, który w przypadku parametrycznego pobudzenia zachodzi dla częstości Θ zawartych w pewnym otoczeniu wartości

$$\Theta = 2\omega_0,$$

Θ — częstość okresowego wymuszenia, ω_0 — częstość drgań własnych.

Zajmiemy się wyznaczeniem podstawowego obszaru rezonansowego. Granice tego obszaru w pierwszym przybliżeniu określono z warunku [3]:

$$(2.1) \quad 1 + \frac{\varepsilon}{\pi\Omega^2 a} \int_0^{2\pi} \bar{J}(a \cos \psi) \cos \psi d\psi - \\ - \varepsilon \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{\pi^2 a^2 \Omega^4} \left[\int_0^{2\pi} \bar{J}(a \cos \psi) \sin \psi d\psi \right]^2} < \left(\frac{\Theta}{2\Omega} \right)^2 < 1 + \\ + \frac{\varepsilon}{\pi\Omega^2 a} \int_0^{2\pi} \bar{J}(a \cos \psi) \cos \psi d\psi + \varepsilon \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{\pi^2 a^2 \Omega^4} \left[\int_0^{2\pi} \bar{J}(a \cos \psi) \sin \psi d\psi \right]^2}.$$

Dla konkretnego określenia obszaru rezonansowego należy obliczyć funkcję tłumienia $\bar{J}(a \cos \psi)$. W tym celu musimy przyjąć wartości współczynników i, l (wzór 3.4 w [3]). Wielkość te zależą od rodzaju materiału z którego wykonana jest powłoka. Na przykład dla stali $i = l = 3$. Wstawiając te wartości do (1.2) otrzymamy po scałkowaniu

$$(2.2) \quad \bar{J}(a \cos \psi) = \frac{4(1+\nu_1)[(1+\nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^4 \rho h m_1^2 (e^{2(1+\nu_1)\mu} - 1)} \left\{ -\frac{3}{16} \left[\mp \frac{Ah^3}{s_1^4} \left(\frac{(1-\nu^2)^2}{E^2 h^2} D_1 - \frac{3h^2}{20} D_2 \right) \right] - \right. \\ - \frac{3}{4} \left[\mp \frac{Ah^3 n}{s_1^4} \left(-2 \left(\frac{1-\nu^2}{Eh} \right)^2 D_3 + \frac{h^3}{16} D_4 \right) \right] + \frac{3}{4} \left[\mp \frac{\text{ctg} \gamma h}{s_1^3} A \times \right. \\ \times \left. \left(\left(\frac{1-\nu^2}{Eh} \right)^3 D_5 + \frac{(1-\nu^2)h^2}{4E} D_6 \right) \right] - \frac{3}{4} \left[\mp \frac{n_1^4 h^3}{s_1^4} B \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2+2\nu}{Eh} \right)^2 D_7 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{5} h^8 D_8 \right) \right] \left. \right\} a^3 = \bar{J}(\psi) a^3,$$

gdzie

$$A = \frac{E\eta[(1 \pm \cos \psi)^3 - 2^2]}{3(1-\nu^2)^3}, \quad B = \frac{Ek[(1 \pm \cos \psi)^3 - 2^2]}{3(1+\nu)^3 \cdot 2^3}.$$

k, η oznaczają tutaj parametry pętli histerezy odpowiednio przy ścinaniu i rozciąganiu.

Współczynniki D_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) występujące w powyższej funkcji są zależne od stałych materiału, wymiarów powłoki i od liczb m i n . Ze względu na bardzo złożoną i rozbudowaną postać, współczynników tych nie podajemy.

Po podstawieniu wyrażenia (2.2) do (2.1) uzyskamy

$$(2.3) \quad 1 + \frac{a^2 \varepsilon}{\pi \Omega^2} \int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \cos \psi d\psi - \varepsilon \sqrt{\mu^2 - \frac{a^4}{\pi^2 \Omega^4} \left(\int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \sin \psi d\psi \right)^2} < \left(\frac{\Theta}{2\Omega} \right)^2 < 1 + \\ + \frac{a^2 \varepsilon}{\pi \Omega^2} \int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \cos \psi d\psi + \varepsilon \sqrt{\mu^2 - \frac{a^4}{\pi^2 \Omega^4} \left(\int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \sin \psi d\psi \right)^2}.$$

Na podstawie (2.3) można sporządzić wykres obszaru rezonansowego dla różnych amplitud a w trójwymiarowym układzie współrzędnych $\frac{\Theta}{2\Omega}$, μ , a .

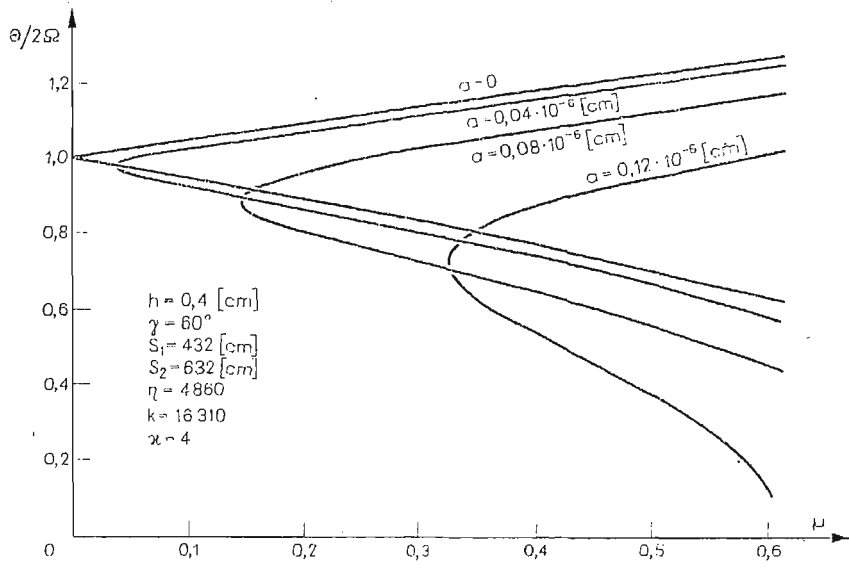
3. Przykład liczbowy i wnioski

Jak wynika z rozwiązania, analizę zagadnienia sprowadzono do wyznaczenia granic pierwszego obszaru niestateczności, tzn. obszaru odpowiadającemu najniższej częstotliwości drgań własnych i najmniejszej sile krytycznej powłoki. Uwzględnienie tłumienia materiałowego znacznie wpływa na zmniejszenie obszarów niestateczności wyższych rzędów, co wobec dużego nakładu pracy przy wyznaczaniu współczynników tłumienia w pełni uzasadnia przyjęte tutaj założenia. Dla zilustrowania otrzymanych wyników i wyciągnięcia wniosków przytoczymy szereg przykładów liczbowych. Zakładając konkretne wymiary powłoki, współczynnik \varkappa (1.5) oraz stałe materiałowe, obliczymy w pierw statyczną siłę krytyczną p_{krmn} (1.8) i częstotliwość drgań własnych układu nieobciążonego ω_{mn} (1.7). Przyjmując p_0 i p_l wyznaczmy współczynnik pulsacji μ_{mn} (1.4) i średnią częstotliwość drgań swobodnych Ω_{mn} (1.3) układu obciążonego stałymi siłami podłużnymi i poprzecznymi N_0 i p_0 .

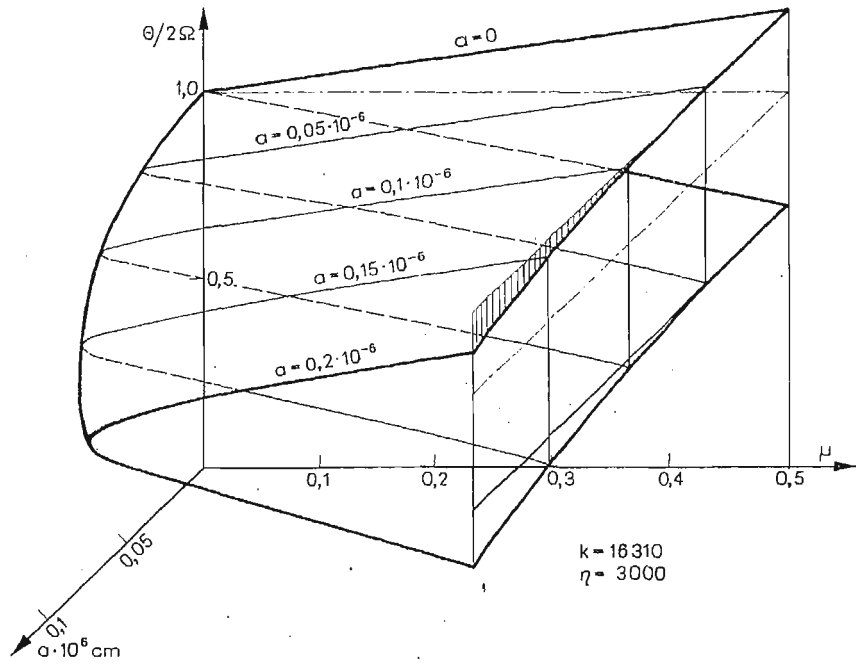
Z kolei obliczamy funkcje: $\int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \sin \psi d\psi$, $\int_0^{2\pi} \overline{\overline{J}}(\psi) \cos \psi d\psi$, wchodzące w skład zależności (2.3), wykorzystując wzór (2.2). Po scałkowaniu otrzymano wyrażenia algebraiczne, posiadające jednak bardzo złożoną i rozbudowaną postać, dlatego też przy ich obliczaniu posłużono się maszyną cyfrową. Do ostatecznego ustalenia granicy dolnej i górnej głównego obszaru rezonansowego wykorzystano zależność (2.3).

Celem podanych przykładów liczbowych jest zbadanie wpływu podstawowych parametrów geometrycznych i materiałowych powłoki na kształt i przebieg granic obszaru niestateczności. Zrealizowanie tego problemu umożliwiają przedstawione wykresy (rys. 1 do 7). Jako wspólne dla wszystkich analizowanych przypadków przyjęto następujące dane: $E = 2 \cdot 10^6$ (kG/cm²), $\nu = 0,3$, $\varrho = 0,000008$ (kGs²/cm⁴), $\varkappa = N_0/p_0 = 4$, natomiast pozostałe parametry zaznaczono na wykresach.

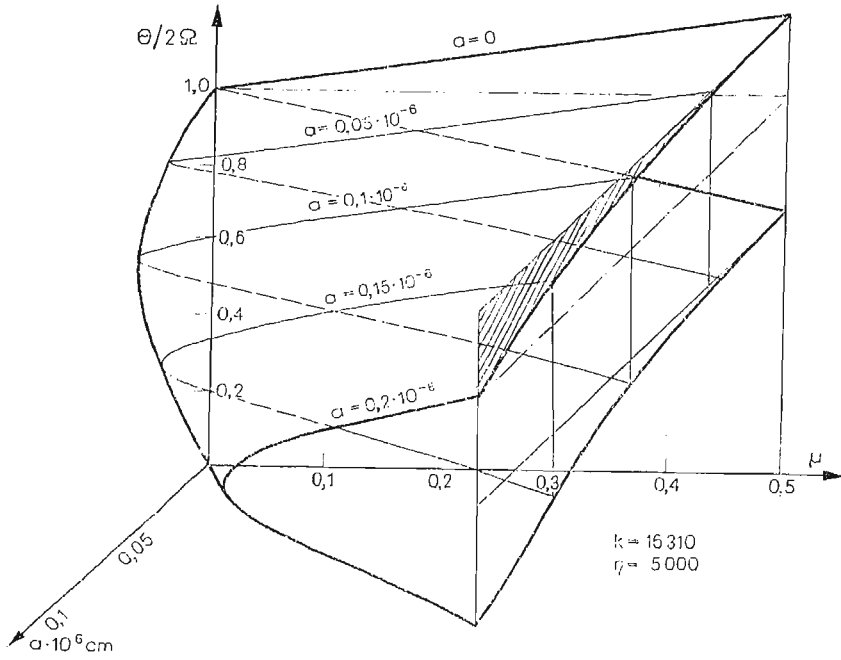
Na rys. 1 przedstawiono krzywe obrazujące obszary rezonansowe we współrzędnych $\frac{\Theta}{2\Omega}$, μ , dla różnych amplitud a . Tutaj oczywiście Θ oznacza częstotliwość drgań obciążenia



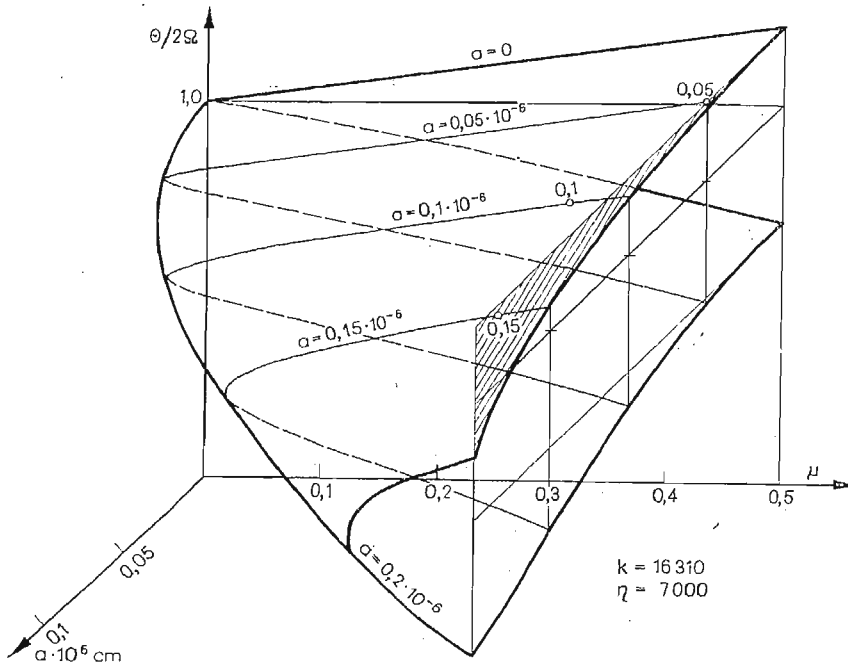
Rys. 1



Rys. 2



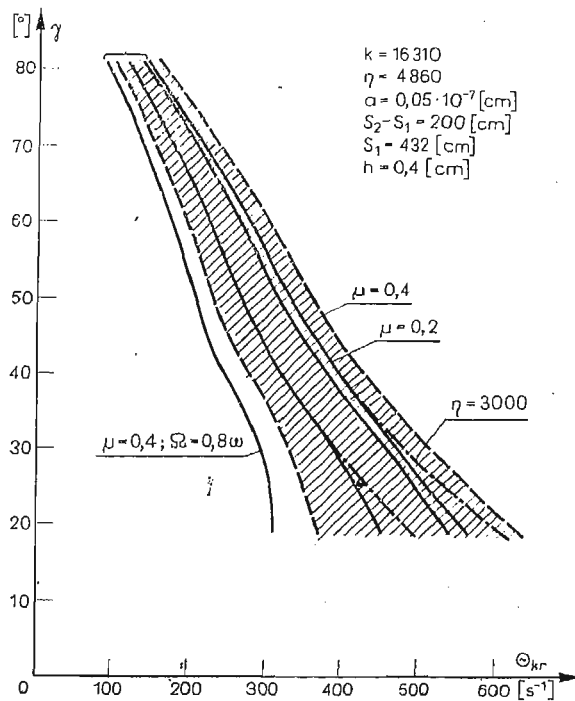
Rys. 3



Rys. 4

wymuszającego, Ω — częstość drgań powłoki pod obciążeniem. Dla analizowanej powłoki uzyskano siłę krytyczną pod obciążeniem statycznym $p_{kr} = 0,0384$ (kG/cm^2) (przy $m = 1$ i $n = 19$) oraz częstość drgań własnych $\omega = 142,2(\text{s}^{-1})$. Przyjęto $\Omega = 0,9 \omega$. Z wykresu widać, że w miarę wzrostu amplitudy obszar rezonansowy zmniejsza się, wraz z przesuwaniami się w kierunku większych wartości współczynnika pulsacji μ i mniejszych wartości $\frac{\Theta}{2\Omega}$. Po przekroczeniu pewnej amplitudy granicznej nie nastąpi dynamiczna utrata stateczności dla tej powłoki.

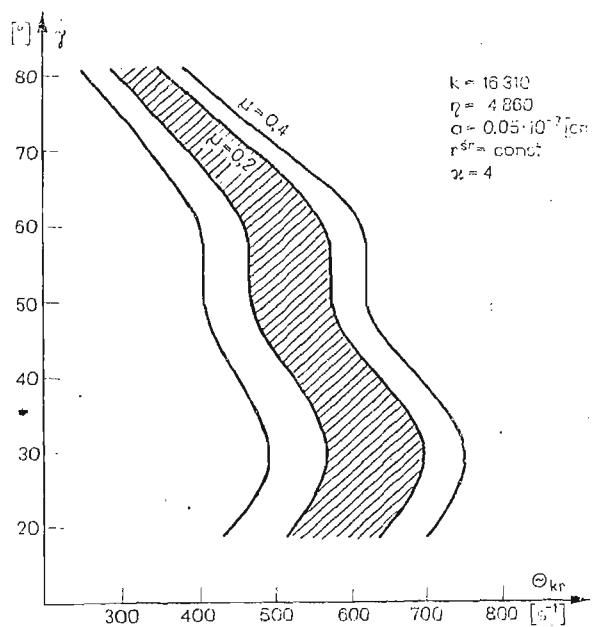
Na rys. 2, 3, 4 sporządzono wykresy w układzie trójwymiarowym $\frac{\Theta}{2\Omega}, \mu, a$. Celem tych wykresów było zbadanie wpływu parametrów tłumienia pętli histerezy k i η , odpowiednio przy ścinaniu i rozciąganiu. Stwierdzono, że współczynnik k nie wpływa w sposób istotny na zmianę kształtu powierzchni ograniczającej obszar rezonansowy. Rys. 2, 3, 4



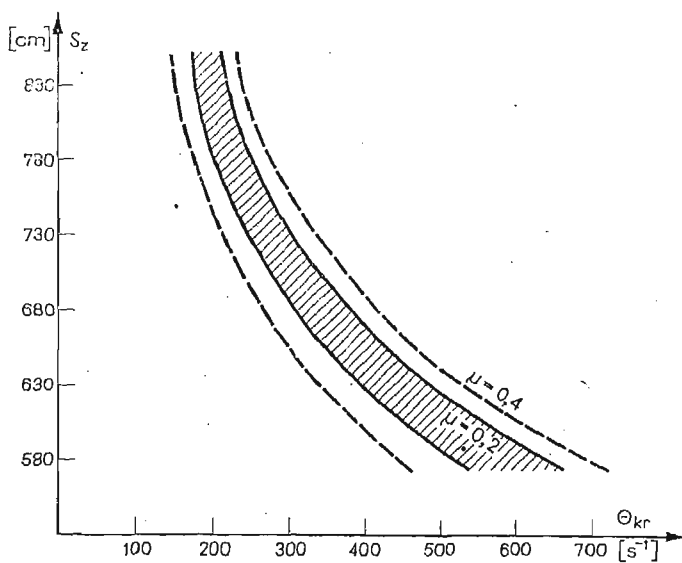
Rys. 5

przedstawiają kolejno powierzchnie obszarów rezonansowych przy wzrastającej wartości współczynnika η , przy innych parametrach stałych. Wzrost η wywołuje zmniejszenie się obszaru dynamicznej niestateczności poprzez jego „skrócenie” w kierunku malejących amplitud i przegięcie ku dołowi, co wyraźnie widać na wykresach.

Kolejnym etapem analizy było zbadanie wpływu zmiany kąta wierzchołkowego 2γ na przebieg granic obszarów dynamicznej niestateczności. W tym celu sporządzono wykresy 5 i 6, gdzie na osi pionowej odniesiono kąt γ , a wzdłuż poziomej — średnią częstość



Rys. 6



Rys. 7

krytyczną siły wymuszającej Θ_{kr} , uzyskaną po przekształceniu zależności (2.3). Analizę przeprowadzono tutaj w dwóch wariantach. W pierwszym zmieniano kąt γ przy stałych pozostałych parametrach (rys. 5), a w drugim zachowano stały średni promień powłoki, $r_{sr} = 0,5(s_1 + s_2)\sin\gamma = const$ (rys. 6) i długość tworzącej $l = s_2 - s_1 = const$. Z wykre-

sów widać, że w miarę wzrostu kąta γ szerokość obszarów rezonansowych maleje. Przy zachowaniu stałego promienia średniego istnieje pewien optymalny kąt wierzchołkowy, przy którym częstość krytyczna jest największa, co wynika z rys. 6. Zwiększenie współczynnika pulsacji μ powoduje rozszerzenie obszaru niestateczności, tak jak i zwiększenie amplitudy siły wymuszającej p_r . W kolejności zbadano wpływ zmiany długości tworzącej (poprzez zmianę s_2) na granice obszarów niestateczności, przy innych parametrach stałych. Analizę tę podaje rys. 7, z którego wynika, że wraz ze wzrostem długości tworzącej nieliniowo maleje częstość krytyczna Θ_{kr} przy nieznacznym zmniejszeniu szerokości obszaru.

Przeprowadzona analiza numeryczna daje możliwości właściwej oceny doboru parametrów geometrycznych i materiałowych przy projektowaniu powłok stożkowych obciążonych dynamicznie wszechstronnym ciśnieniem równomiernym i siłą podłużną. Dokonując porównania z analizą stateczności dynamicznej powłoki stożkowej przy analogicznych założeniach, lecz bez uwzględnienia tłumienia można zauważyć, że tłumienie wpływa wyraźnie na zmniejszenie się obszarów dynamicznej niestateczności np. przy wzroście kąta wierzchołkowego (rys. 5), czyli odwrotnie niż to miało miejsce bez tłumienia (por. [4]). Nasuwa się tutaj również uwaga, że w przypadku uwzględnienia tłumienia materiałowego rezonans zachodzi dla małych wartości amplitud. Przy większych wartościach amplitud tłumienie materiałowe nie odgrywa zasadniczej roli.

Literatura cytowana w tekście

1. А. А. Березовский, А. Й. Митропольский, *Асимптотические методы в теории параметрических колебаний эластичных гибких пластин*, Избранные проблемы прикладной механики, Изд. АН СССР, Москва, 1974.
2. М. М. Боголюбов, А. Й. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Изд. 3, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1963.
3. F. TWARDOSZ, *Zagadnienie stateczności powłoki stożkowej. Wyprowadzenie podstawowych równań*, Rozprawy Inżynierskie, oddana do druku.
4. F. TWARDOSZ, J. ZIELNICA, *Analiza stateczności dynamicznej powłoki stożkowej obciążonej siłami podłużnymi i wszechstronnym ciśnieniem*, Archiwum Budowy Maszyn, w druku.

Резюме

ОБ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛАХ С УЧТЕМ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

В работе представлено анализ динамической устойчивости тонкостенной оболочки в виде усеченного конуса, свободно опертого на краях. Оболочка нагружена продольной силой $N(t)$ и всесторонним давлением $p(t)$ изменяющимся периодически во времени. На основе гипотезы Давиденкова учтено влияние нелинейного демпфирования на параметрический резонанс. Определены резонансные области и исследовано влияние основных физических и геометрических параметров на динамическую неустойчивость.

Summary

DYNAMICAL STABILITY OF A CONICAL SHELL LOADED BY TRANSVERSAL AND LONGITUDINAL FORCES WITH THE NONLINEAR MATERIAL'S DAMPING

The paper deals with the dynamical stability analysis of a thin-walled truncated conical shell, free supported at the edges. The shell is loaded by the longitudinal forces $N(t)$, and the external uniformly distributed hydrostatic pressure $p(t)$, changing periodically with time. Supporting on the Davidenkov's hypothesis the influence of the material damping to the parametric resonance was taken into account. The main resonance areas were derivated, and the influence of the basic physical and geometrical parameters to the dynamical instability was investigated.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1977 r.

OPTYMALNY DOBÓR BEZINERCYJNEGO UKŁADU AMORTYZACJI PRZY WYMUSZENIU HARMONICZNYM

JAN ŁUCZKO (KRAKÓW)

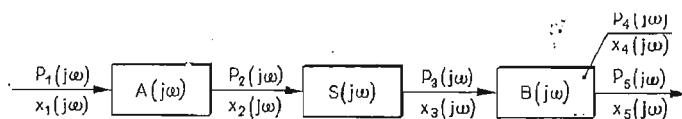
1. Wstęp

W pracy rozważono ustalone drgania układu liniowego wymuszanego harmonicznie, reprezentującego klasę układów mechanicznych typu: obiekt-amortyzator-otoczenie. Założono, że układ amortyzacji jest bezinercyjny i określono jego optymalne parametry przy przyjęciu stosownego kryterium jakości działania układu wibroizolacji. Układ mechaniczny strukturalnie traktowany jest jako zespół czwórników połączonych łańcuchowo [1], [2]. Podobny sposób podejścia do zagadnienia wibroizolacji można znaleźć w pracach Gureckiego i Mazina [3], [4].

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzmy ustalone drgania pasywnego układu liniowego przedstawionego na rys. 1.

Układ **A** przedstawia obiekt (narzędzie wibracyjne) poddany wymuszeniu kinematycznemu lub siłowemu, element **S** układu jest amortyzatorem natomiast układ **B** reprezentuje otoczenie (człowiek — operator, zamocowanie obiektu). Celem dalszych rozważań będzie dobranie układu amortyzacji w taki sposób, aby przekazywanie drgań z obiektu na oto-



Rys. 1

czenie było minimalne. Będziemy uważać, że elementy **A**, **S** i **B** układu mechanicznego są co do struktury, czwórnikami połączonymi łańcuchowo [1]. Założymy ponadto, że są one liniowymi układami pasywnymi o dowolnej liczbie stopni swobody, określonymi przez odpowiednie macierze przejścia [2]. Stan wibracji w dowolnym punkcie „*k*” układu (*k* = 1–5) określimy przez wektor $q_k(j\omega) = [P_k(j\omega), x_k(j\omega)]^T$ przy czym $P_k(j\omega)$ i $x_k(j\omega)$ są transformatami siły i przemieszczenia w rozpatrywanym punkcie układu. Pomiedzy dwoma dowolnymi punktami zachodzą związki:

$$(2.1) \quad q_i(j\omega) = F_{k-1}(j\omega)q_k(j\omega)$$

$$(2.2) \quad F_{k-n}(j\omega) = F_{1-n}(j\omega)F_{k-1}(j\omega)$$

oznaczymy:

$$(2.3) \quad F_{1-2}(j\omega) = \mathbf{A}(j\omega) \quad F_{2-3}(j\omega) = \mathbf{S}(j\omega) \quad F_{3-5}(j\omega) = \mathbf{B}(j\omega)$$

przy czym $\mathbf{A}(j\omega)$, $\mathbf{S}(j\omega)$, $\mathbf{B}(j\omega)$ są kwadratowymi macierzami przejścia układów \mathbf{A} , \mathbf{S} i \mathbf{B} .

Kryterium jakości działania układu amortyzacji zostanie przyjęte jako zależne od przyspieszenia $(j\omega)^2 x_4(j\omega)$ dowolnego punktu układu \mathbf{B} i przemieszczenia względnego amortyzatora $x_3(j\omega) - x_2(j\omega)$. Wprowadzimy wielkości bezwymiarowe odnosząc przyspieszenie punktu „4” do przyspieszenia $(j\omega)^2 x_4^0(j\omega)$ tego samego punktu, obliczonego dla sztywnego połączenia układów \mathbf{A} i \mathbf{B} , zaś amplitudę ruchu względnego amortyzatora do amplitudy $x_2^0(j\omega)$ ruchu swobodnego obiektu \mathbf{A} (układy \mathbf{A} i \mathbf{B} niepołączone). Przyjmijemy funkcjonał w postaci:

$$(2.4) \quad \mathbf{J} = \left| \frac{-\omega^2 x_4(j\omega)}{-\omega^2 x_4^0(j\omega)} \right|^2 + \lambda \left| \frac{x_3(j\omega) - x_2(j\omega)}{x_2^0(j\omega)} \right|^2,$$

gdzie $\lambda \geq 0$ jest współczynnikiem wagi.

Tak wybrany funkcjonał (24) zapewni nam więc z jednej strony minimum przyspieszenia pewnego punktu należącego do otoczenia (np. człowieka-operatora) lub obiektu, jeśli zamienić rolami układy \mathbf{A} i \mathbf{B} , zaś z drugiej strony będzie minimalny ruch względny amortyzatora co jest pożądane ze względu na ograniczenia konstrukcyjne i eksploatacyjne nałożone w praktyce na układ amortyzacji.

3. Synteza układu wibroizolacji

Założymy dalej, że układ amortyzacji jest układem bezinercyjnym; określonym w związku z tym przez macierz przejścia o elementach:

$$(3.1) \quad s_{11}(j\omega) = s_{22}(j\omega) = 1 \quad s_{12}(j\omega) = 0 \quad s_{21}(j\omega) = [C + j\omega b]^{-1},$$

gdzie współczynniki c i b określają odpowiednio własności sprężyste i tłumiące układu amortyzacji. Są one zależne od częstości wymuszenia ω oraz od pewnych parametrów p_i ($i = 1, 2, \dots, r$), których ilość jest zależna od struktury przyjętego amortyzatora

$$(3.2) \quad c = c(\omega, p_1, p_2, \dots, p_r), \\ b = b(\omega, p_1, p_2, \dots, p_r).$$

Przykładowo dla modelu Voigta-Kelvina (rys. 2a) zależności (3.2) przyjmą prostą postać:

$$c = p_1 \quad b = p_2$$

zaś dla modelu standartowego (rys. 2b) otrzymamy:

$$c = p_1 + p_3 \frac{\omega^2 p_2^2}{p_3^2 + \omega^2 p_2^2} \quad b = p_2 \frac{p_3^2}{p_3^2 + \omega^2 p_2^2}.$$

Problem optymalnego doboru układu wibroizolacji sprowadza się więc do znalezienia współczynników p_i ($i = 1, 2, \dots, r$), dających minimum wyrażenia (2.4) przy warunku nieprzekroczenia przez wielkości $|x_4(j\omega)|$ i $|x_3(j\omega) - x_2(j\omega)|$ odpowiednich wartości granicznych $|x_4^0(j\omega)|$ i $|x_2^0(j\omega)|$.

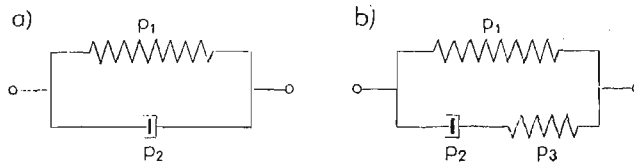
Rozważmy przypadek wymuszenia kinematycznego ($n = 1$) i siłowego ($n = 2$). Układ BSA, przedstawiony na rys. 1, można zawsze sprowadzić do układu nieobciążonego siłą na końcu $P_5(j\omega) = 0$ ($m = 1$) lub sztywno zamocowanego $x_5(j\omega) = 0$ ($m = 2$). Wykorzystując te warunki brzegowe można ze związku:

$$(3.3) \quad q_5(j\omega) = \text{BSA} q_1(j\omega)$$

znaleźć impedancję (sztywność dynamiczną) $Z_1(j\omega)$ lub admitancję (podatność dynamiczną) $Y_1(j\omega)$ w punkcie „1” układu. Otrzymamy następujące zależności dla wymuszenia kinematycznego lub siłowego:

$$(3.4) \quad P_1(j\omega) = Z_1(j\omega)x_1(j\omega),$$

$$(3.5) \quad x_1(j\omega) = Y_1(j\omega)P_1(j\omega).$$



Rys. 2

Korzystając ze wzorów (2.1), (2.2), (2.3) oraz (3.4) lub (3.5) można wyrazić wszystkie wielkości występujące w wyrażeniu (2.4) za pomocą danego wymuszenia kinematycznego lub siłowego. W zależności od zamocowania układu ($m = 1, 2$) i przyjętego rodzaju wymuszenia ($n = 1, 2$) funkcjonal (2.4) przyjmie postać:

$$(3.6) \quad J^{nm} = |K_{\ddot{x}_4}^{nm}(j\omega)|^2 + \lambda |K_{x_3-x_2}^{nm}(j\omega)|^2,$$

przy czym:

$$(3.7) \quad K_{\ddot{x}_4}^{nm}(j\omega) = \frac{a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}}{a_{1n}b_{m1}s_{11} + a_{2n}b_{m1}s_{12} + a_{1n}b_{m2}s_{21} + a_{2n}b_{m2}s_{22}},$$

$$K_{x_3-x_2}^{nm}(j\omega) = \frac{a_{1n}b_{m1}(s_{11}-1) + a_{1n}b_{m2}s_{21}}{a_{1n}b_{m1}s_{11} + a_{2n}b_{m1}s_{12} + a_{1n}b_{m2}s_{21} + a_{2n}b_{m2}s_{22}}.$$

gdzie $a_{ij}(j\omega)$, $b_{ij}(j\omega)$, $s_{ij}(j\omega)$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) są elementami odpowiednich macierzy przejścia $A(j\omega)$, $B(j\omega)$ i $S(j\omega)$.

Jak widać w wyrażeniach (3.7) zawarte są parametry znanych układów A i B oraz szukanę parametry $c(\omega, p_1, \dots, p_r)$ i $b(\omega, p_1, \dots, p_r)$ określające optymalny amortyzator. Jeżeli współczynniki c i b zwiążemy liniowo z nowymi zmiennymi y i z poprzez funkcje częstości:

$$(3.8) \quad c = \frac{\varphi_1^{nm}(\omega)}{[\gamma^{nm}(\omega)]^2} y \quad b = \frac{\varphi_2^{nm}(\omega)}{[\gamma^{nm}(\omega)]^2} z$$

gdzie:

$$(3.9) \quad \varphi_1^{nm}(\omega) = \text{Re}(a_{1n}b_{m2})\text{Re}(a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}) + \text{Im}(a_{1n}b_{m2})\text{Im}(a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}),$$

$$(3.10) \quad \varphi_2^{nm}(\omega) = \text{Im}(a_{1n}b_{m2})\text{Re}(a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}) - \text{Re}(a_{1n}b_{m2})\text{Im}(a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}),$$

$$(3.11) \quad \gamma^{nm}(\omega) = |a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}|,$$

to wielkości występujące we wzorze (3.6) wyrażą się związkami:

$$(3.12) \quad |K_{\ddot{x}_4}^{nm}(j\omega)|^2 = \frac{y^2 + [\mu^{nm}(\omega)]^2 z^2}{(1+y)^2 + [\mu^{nm}(\omega)]^2 (1+z)^2},$$

$$|K_{x_3-x_2}^{nm}(j\omega)|^2 = \frac{1 + [\mu^{nm}(\omega)]^2}{(1+y)^2 + [\mu^{nm}(\omega)]^2 (1+z)^2},$$

przy czym:

$$\mu^{nm}(\omega) = \frac{\varphi_2^{nm}(\omega)}{\varphi_1^{nm}(\omega)}.$$

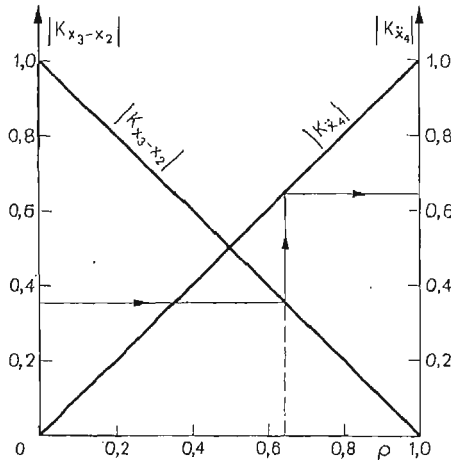
z warunku ekstremum wyrażenia (3.6) wynika, że minimum zostanie osiągnięte dla:

$$(3.13) \quad y = z = \lambda \quad \lambda \geq 0.$$

Wykresy optymalnych wartości $|K_{x_3-x_2}|$ i $|K_{\ddot{x}_4}|$ w funkcji parametru ϱ związanego z λ równością:

$$(3.14) \quad \lambda = \frac{\varrho}{1-\varrho}$$

zostały pokazane na rys. 3.



Rys. 3

Mając zadane ograniczenie na amplitudę względnego przemieszczenia amortyzatora można z rys. 3 odczytać wielkość obniżenia przyspieszenia w zadanym punkcie układu B w stosunku do jego wartości granicznej oraz wartość parametru ϱ . Korzystając ze wzoru (3.14) można obliczyć λ , a następnie wyznaczyć ze związków (3.8) optymalne wartości współczynników $c(\omega)$ i $b(\omega)$. Parametry $p_i (i = 1, 2 \dots r)$ określające układ amortyzacji muszą spełniać związki (3.2) przy obliczonych wartościach $c(\omega)$ i $b(\omega)$. Istnieje tu dla $r > 2$ pewna dowolność doboru współczynników p_i .

Istotną wydaje się być uwaga, że rozwiązanie optymalne w dziedzinie zmiennych y i z jest niezależne od struktury układu BSA, zależy ono tylko od tego w jakiej proporcji chcemy

obniżyć przyspieszenie \ddot{x}_4 i przemieszczenie względne $x_3 - x_2$ w stosunku do odpowiednich wartości granicznych. Należy zauważyć, że na skutek założenia pasywności układu, funkcja $\varphi_2^{nm}(\omega)$ jest stale większa lub równa zero i w związku z tym optymalne rozwiązania są słuszne w obszarze częstości, dla których:

$$(3.15) \quad \varphi_1^{nm}(\omega) \geq 0$$

co uwarunkowane jest żądaniem aby współczynnik sztywności $c(\omega)$ był większy od zera. Obszary wyznaczone nierównością (3.15) w których to możliwe jest obniżenie wartości przyspieszenia jak i przemieszczenia względnego amortyzatora poniżej odpowiednich wartości granicznych można by nazwać obszarami „pozarezonansowymi”.

Wnioski

Z przeprowadzonych rozważań i wyników końcowych nasuwają się następujące wnioski:

- z rys. 3 wynika, że nie można jednocześnie dowolnie obniżyć wartości przyspieszenia rozpatrywanego punktu układu **B** i amplitudy ruchu względnego amortyzatora,
- obniżenie wartości przyspieszenia i przemieszczenia względnego nie zależy od przyjętej struktury układu amortyzacji przy założeniu, że jest on bezinercyjny,
- w przypadku, gdy częstość wymuszenia znajduje się w pewnym zakresie częstości, ale jest ustalona, wskazane jest takie dobranie struktury układu amortyzacji, aby współczynniki $c(\omega)$ i $b(\omega)$ były w tym zakresie funkcjami częstości możliwie bliskimi funkcjom określonym wzorami (3.8),
- w zakresie częstości, dla których nie jest spełniona nierówność (3.15), należy przyjąć $c = b = 0$ (praktycznie sprężyny bardzo miękkie).
- jeżeli układ pracuje w powyższym zakresie częstości to można go sprowadzić do pracy w obszarze (3.15) dwoma sposobami:
 - przez nieznaczną zmianę parametrów układów **A** i **B**, bez naruszenia właściwej pracy układu, tak aby nierówność (3.15) została spełniona,
 - przez wprowadzenie do układu amortyzacji elementów inercyjnych lub przez dołączenie równoległe inercyjnych układów dodatkowych (np. układ wibroizolacji z kompensacją [5]).

Rozważania przeprowadzone były dla układów liniowych, jednak możliwe jest zastosowanie uzyskanych wyników w przypadku występowania w układzie odpowiednio małych nieliniowości po uprzednim ich zlinearyzowaniu. Metoda rozwiązywania zagadnienia wibroizolacji może być analogicznie zastosowana przy przyjęciu innych modeli układów wibroizolacji i innych kryteriów jakości ich działania.

Literatura cytowana w tekście

1. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, 1965
2. J. M. PRENTIS, F. A. LECKIE, *Mechanical Vibrations: An Introduction to Matrix Methods*, London 1963, Longmans, GREEN and Co. Ltd.
3. V. V. GURECKIJ, L. S. MAZIN, *Pribliżennyi sintez vibrozascitnoj sistemy pri ucete dinamiceskich svojstv podderżivajuszej konstrukcji*, Izv. AN SSSR. Mechanika Tverdovo Tela 1971, 2.

4. V. V. GURECKIJ L. S. MAZIN, *Sintez optimalnoj vibrozascitnoj sistemy pri ucete dinamičeskich svojstv amortizirujescevo krepjenja*, Izd. AN SSSR, *Mechanika Tverdogo Tela* 1974, 3
5. Cz. CEMPEL, *Synteza układów wibroizolacji z kompensacją*, *Rozprawy Inżynierskie*, 21, 4, 1973.

Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 — „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОДБОР БЕЗИНЕРЦИОННОЙ СИСТЕМЫ АМОРТИЗАЦИИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВЫНУЖДЕНИИ

В работе приводится метод оптимального подбора безинерционной системы амортизации для некоторого класса механических систем с условием, чтобы ускорение в заданной точке системы было минимальное при одновременно ограниченной амплитуде относительного движения амортизатора. Получены отношения определяющие коэффициенты жесткости и затухания системы амортизации в функции частоты вынуждения и параметров определяющих исследованную систему. Определено области применимости полученных формул.

S u m m a r y

OPTIMAL CHOICE OF NON-INERTIAL SYSTEM OF VIBROISOLATION WITH HARMONIC FORCING

Paper presents the way of optimization of noninertial system of vibroisolation represented by stiffness coefficient $c(\omega)$ and damping coefficient $b(\omega)$. The following criterion of optimization was assumed: when the amplitude of the relative motion of the vibroisolation system is limited, acceleration of chosen point of the vibroisolated system should be the minimum. Coefficients $c(\omega)$ and $b(\omega)$ were carried out as the functions of excitation's frequency and parameters of vibroisolated system. Range of application of the obtained results was determined.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INST. MECH. I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 grudnia 1977 r.

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELKI WSPORNIKOWEJ, OBCIĄŻONEJ SIŁAMI
ZEWNĘTRZNYMI I CIĘŻAREM WŁASNYM, W WARUNKACH PEŁZANIA*

MALGORZATA ALBIŃSKA, ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Elementy konstrukcyjne (np. belki, płyty) obciążone wyłącznie siłami zewnętrznymi lub wyłącznie ciężarem własnym rzadko występują w praktyce; na ogół siły masowe stanowią dodatkowe obciążenie, które jest pewnym ułamkiem obciążenia zewnętrznego. W większości opublikowanych dotychczas prac, dotyczących optymalnego kształtowania belek (z reguły liniowo-sprężystych) siły masowe, zależące od poszukiwanego kształtu elementu, są pomijane. W szeregu nowszych prac ([1], [2]) podjęto próbę znalezienia optymalnego kształtu belki wspornikowej, obciążonej wyłącznie ciężarem własnym. Niestety, przedstawione rozwiązania są błędne. Poprawne rozwiązanie zagadnienia przedstawiono w pracy J. M. CHERNA [3]; otrzymano je w oparciu o zasadę minimum wzajemnej energii potencjalnej R. T. SHIELDA i W. PRAGERA [4], ważnej tylko w przypadkach materiału liniowo-sprężystego. W pracy A. GAJEWSKIEGO [5] rozwiązano analogiczny problem optymalizacji kształtu belki wspornikowej, znajdującej się w niejednorodnym polu sił grawitacyjnych (a więc obciążonej tylko ciężarem własnym). Uwzględniono również nieliniowość fizyczną materiału, opisującą materiały nieliniowo-sprężyste, sprężysto-plastyczne lub pozostające w stanie ustalonego pełzania. W pracy wyznaczono optymalne kształty belki przy warunku wyrównania naprężeń, i warunku ustalającym ugięcie swobodnego końca belki. Wykazano, że we wszystkich badanych przypadkach, optymalny kształt zależy od postaci prawa fizycznego.

Próbę znalezienia optymalnego kształtu belki obciążonej siłami zewnętrznymi i ciężarem własnym podjęto w pracy A. GAJEWSKIEGO [6], w której przedstawiono przybliżone rozwiązania, otrzymane metodą małego parametru. Obliczenia przeprowadzono przy warunku wyrównania naprężeń w skrajnych włóknach belki oraz przy warunku minimalizacji ugięcia swobodnego końca belki. Założono przy tym, że ciężar własny stanowi mały ułamek obciążenia zewnętrznego.

W niniejszej pracy przedstawimy rozwiązanie analogicznego zagadnienia optymalizacji kształtu belki wspornikowej, jednak otrzymany warunek konieczny istnienia ekstremum rozwiążemy numerycznie dla dowolnego udziału ciężaru własnego w obciążeniu całkowitym.

*) Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk.

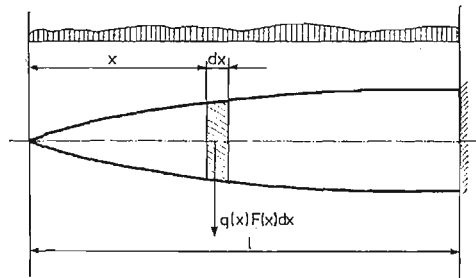
Uwzględnimy również nieliniowość fizyczną materiału, zakładając nieliniową zależność między naprężeniem i odkształceniem. Przyjęte dalej nieliniowe, potęgowe prawo fizyczne pozwoli opisać materiały pozostające w stanie ustalonego pełzania [7], nieliniowe-sprężyste lub sprężysto-plastyczne (bez odciążenia). W przypadku materiałów pełzających, w przyjętym prawie fizycznym symbol „ $\dot{\varepsilon}$ ” oznacza prędkość odkształcenia ($\dot{\varepsilon}$), a ugięcie końca belki $w(0)$ należy zastąpić prędkością ugięcia (\dot{w}).

2. Sformułowanie zagadnienia

W niniejszej pracy ograniczymy się do rozważania belek wspornikowych, o prostokątnym przekroju poprzecznym, wysokości $2h$ i szerokości b , wykonanych z materiału niejednorodnego, opisanego potęgowym prawem fizycznym:

$$(2.1) \quad \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \left| \frac{\sigma}{\sigma_0} \right|^{n-1} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right), \quad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad n - \text{liczba naturalna,}$$

w którym przyjęto, że funkcje: $\varepsilon_0(x)$ i $\sigma_0(x)$ są znane i określają niejednorodność wytrzymałościową materiału. W dalszym ciągu pracy będziemy opuszczali kropkę nad ε .



Rys. 1

Punktem wyjścia do dalszych rozważań będzie podstawowa zależność prędkości krzywizny belki od momentu zginającego (lub zależność odwrotna), która w przypadku prawa (2.1) przyjmuje postać [6]:

$$(2.2) \quad \kappa = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\varepsilon_0(x)}{h(x)} M^{*n} \operatorname{sgn} M,$$

gdzie M^* oznacza bezwymiarowy moment:

$$(2.3) \quad M^* = \frac{|M(x)|}{2bh^2\sigma_0(x)}.$$

Równocześnie założymy, że belka obciążona jest siłami rozłożonymi o intensywności $p(x)$, oraz, że ciężar właściwy belki jest równy $q(x)$ (rys. 1). Wówczas moment zginający składa się z dwóch części: 1). składnika pochodzącego od obciążenia zewnętrznego oraz 2). składnika zależnego od ciężaru własnego, a tym samym od poszukiwanego kształtu:

$$(2.4) \quad M(x) = M_p(x) + \int_0^x q(\zeta)F(\zeta)(x-\zeta)d\zeta,$$

gdzie: $F(x)$ oznacza pole powierzchni przekroju poprzecznego belki ($F = 2bh$).

Celem pracy jest znalezienie takiego sposobu zmiany wysokości belki wzdłuż długości $h(x)$ (przy stałej szerokości b), szerokości $b(x)$ (przy stałej wysokości) lub wysokości i szerokości (gdy są do siebie proporcjonalne: $b(x) = \alpha h(x)$), aby określona funkcja celu przyjmowała wartość minimalną, przy warunku ograniczającym, ustalającym całkowity ciężar belki:

$$(2.5) \quad \int_0^l q(x)F(x)dx = W = \text{const.}$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do minimalizacji prędkości ugięcia swobodnego końca belki. Pewne rozwiązania przy innych funkcjach celu otrzymano metodą małego parametru w pracy [6].

Korzystając ze wzoru (2.2) prędkość ugięcia końca belki możemy wyrazić następującym funkcjonałem:

$$(2.6) \quad w(0) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \int_0^l x \frac{\varepsilon_0(x)}{h(x)} M^{*n} \text{sgn} M dx.$$

W dalszym ciągu założymy, że obciążenie zewnętrzne ma taki sam zwrot jak ciężar własny, tzn. że moment nie zmienia swojego znaku i jest stale dodatni. Wobec tego we wzorach (2.2)—(2.6) opuścimy znak modułu i przyjmujemy: $\text{sgn} M = \pm 1$.

Jako parametr optymalizacji przyjmijmy pole powierzchni przekroju $F(x)$, co pozwoli ujednoczyć tok obliczeń dla wszystkich trzech wymienionych przypadków (zmiany szerokości, zmiany wysokości i przypadku gdy: $b = \alpha h$). Po prostych obliczeniach funkcjonał (2.6) można przedstawić w postaci:

$$(2.7) \quad w(0) = C \int_0^1 \frac{\varepsilon_0 \xi M^n}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} d\xi, \quad \xi = x/l,$$

w której należy przyjąć w poszczególnych przypadkach:

1. $h = \text{const.}$, $b = b(x)$ (zmienna szerokość)

$$\mu = 1, \quad \nu = 0, \quad C = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n l/l^{n+1}.$$

2. $b = \text{const.}$, $h = h(x)$ (zmienna wysokość)

$$\mu = 2, \quad \nu = 1, \quad C = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n l(2b_0)^{n+1}.$$

3. $b(x) = \alpha h(x)$ (przekroje powinowate)

$$\mu = 3/2, \quad \nu = 1/2, \quad C = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n l(2\alpha)^{(n+1)/2}.$$

3. Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonu (2.7)

W celu znalezienia kształtu belki $F(\xi)$, minimalizującego funkcjonal (2.7), przy izoperymetrycznym warunku ograniczającym (2.5), utworzymy pomocniczy funkcjonal:

$$(3.1) \quad J^* = C \int_0^1 \frac{\varepsilon_0(\xi) \xi [M(\xi)]^n}{[\sigma_0(\xi)]^n [F(\xi)]^{\mu n + \nu}} d\xi + \lambda_1 \left[l \int_0^1 q(\xi) F(\xi) d\xi - W \right],$$

(λ_1 — mnożnik Lagrange'a),
i obliczymy jego pierwszą wariację:

$$(3.2) \quad \delta J^* = C \int_0^1 \frac{\varepsilon_0 \xi M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu + 1}} [nF \delta M - (\mu n + \nu) M \delta F] d\xi + \lambda_1 l \int_0^1 q \delta F d\xi,$$

Obliczając wariację δM ze wzoru (2.4):

$$(3.3) \quad \delta M = l^2 \int_0^\xi q(\eta) \delta E(\eta) (\xi - \eta) d\eta,$$

podstawiając ją do (3.2) i wykonując całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \delta J^* = & C \left(nl^2 \int_{\xi_0}^1 \frac{\varepsilon_0 \xi^2 M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} d\xi \right) \left(\int_0^1 q \delta F d\xi \right) - \\ & - C \left(nl^2 \int_{\xi_0}^1 \frac{\varepsilon_0 \xi M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} d\xi \right) \left(\int_0^1 \xi q \delta F d\xi \right) - \\ & - C \int_0^1 \left\{ \left[nl^2 \int_{\xi_0}^\xi \frac{\varepsilon_0 M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} \eta (\eta - \xi) d\eta \right] + (\mu n + \nu) \frac{\varepsilon_0 \xi M^n}{\sigma_0^n q F^{\mu n + \nu + 1}} - \lambda_2 \right\} q \delta F d\xi, \end{aligned}$$

gdzie: ξ_0 i λ_2 są dowolnymi stałymi.

Pierwsza wariacja funkcjonu (3.1) jest zatem równa zero, gdy przyjmujemy, że stała $\xi_0 = 1$ oraz gdy spełnione jest równanie:

$$(3.5) \quad nl^2 \int_1^\xi \frac{\varepsilon_0 M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} \eta (\eta - \xi) d\eta + (\mu n + \nu) \frac{\varepsilon_0 \xi M^n}{\sigma_0^n q F^{\mu n + \nu + 1}} = \lambda_2,$$

które stanowi warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonu (3.1).

W celu uproszczenia zapisu, zmienność ciężaru właściwego belki $q(\xi)$ opiszemy za pomocą pewnej znanej bezwymiarowej funkcji $K(\xi)$, moment zginający, pochodzący od obciążenia zewnętrznego $M_p(\xi)$, za pomocą znanej funkcji $m(\xi)$, pole powierzchni przekroju za pomocą poszukiwanej funkcji $\Phi(\xi)$, oraz wprowadzimy bezwymiarową stałą ε według następujących zależności:

$$(3.6) \quad q = q_0 K(\xi), \quad M_p = M_{p0} m(\xi), \quad F = F_0 \Phi(\xi), \quad \varepsilon = l^2 q_0 F_0 / M_{p0}.$$

Wprowadzając wyrażenia (3.6) do równań (3.5), (2.4), (2.5) otrzymujemy odpowiednio:

$$(3.7) \quad \frac{\varepsilon_0 \xi \left[m(\xi) + \varepsilon \int_0^\xi K(\eta) \Phi(\eta) (\xi - \eta) d\eta \right]^n}{\sigma_0^n K(\xi) [\Phi(\xi)]^{\mu n + \nu + 1}} = \\ = \mathcal{A}_1 + \varepsilon \left(\frac{n}{\mu n + \nu} \right) \int_\xi^1 \frac{\varepsilon_0 \left[m(\eta) + \varepsilon \int_0^\eta K(\zeta) \Phi(\zeta) (\eta - \zeta) d\zeta \right]^{n-1}}{\sigma_0^n [\Phi(\eta)]^{\mu n + \nu}} \eta (\eta - \xi) d\eta,$$

$$(3.8) \quad M(\xi) = M_{p_0} \left[m(\xi) + \varepsilon \int_0^\xi K(\eta) \Phi(\eta) (\xi - \eta) d\eta \right],$$

$$(3.9) \quad \int_0^1 K(\xi) \Phi(\xi) d\xi = \bar{W}, \quad \text{gdzie: } \bar{W} = \frac{W}{q_0 F_0 l},$$

\mathcal{A}_1 — jest mnożnikiem Lagrange'a.

Uwikłane równanie całkowe (3.7) i warunek izoperymetryczny (3.9) pozwalają na wyznaczenie poszukiwanego kształtu belki $\Phi(\xi)$ i stałej \mathcal{A}_1 , przy czym rozwiązanie to może być znalezione tylko na drodze numerycznej.

4. Numeryczne rozwiązanie zagadnienia

W celu rozwiązania zagadnienia posłużono się metodą kolejnych przybliżeń, przedstawiając równanie (3.7) w postaci:

$$(4.1) \quad \Phi(\xi) = \hat{F}[\Phi(\xi)],$$

w której F oznacza pewien znany operator.

Zakładając funkcję $\Phi_0(\xi)$ przybliżenia zerowego i podstawiając ją do prawej strony równania (4.1) otrzymujemy pierwsze przybliżenie; następne przybliżenia obliczamy ze wzoru:

$$(4.2) \quad \Phi_{i+1} = \hat{F}[\Phi_i(\xi)], \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

przy czym jako kryterium zbieżności rozwiązania przyjmujemy nierówność:

$$(4.3) \quad \frac{|\Phi_{i+1} - \Phi_i|}{\Phi_i} \leq \Delta,$$

obowiązującą dla każdej wartości ξ .

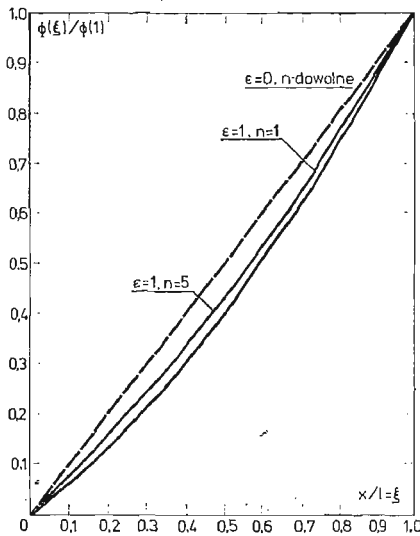
Ostatecznie równanie (3.7) przekształcono do postaci:

$$(4.4) \quad \Phi(\xi) = \left\{ \frac{\xi \left[m(\xi) + \varepsilon \int_0^\xi \Phi(\eta) (\xi - \eta) d\eta \right]^n}{\mathcal{A}_1 + \varepsilon \frac{n}{\mu n + \nu} \int_\xi^1 \frac{\left[m(\eta) + \varepsilon \int_0^\eta \Phi(\zeta) (\eta - \zeta) d\zeta \right]^{n-1}}{[\Phi(\eta)]^{\mu n + \nu}} \eta (\eta - \xi) d\eta} \right\}^{\frac{1}{\mu n + \nu + 1}},$$

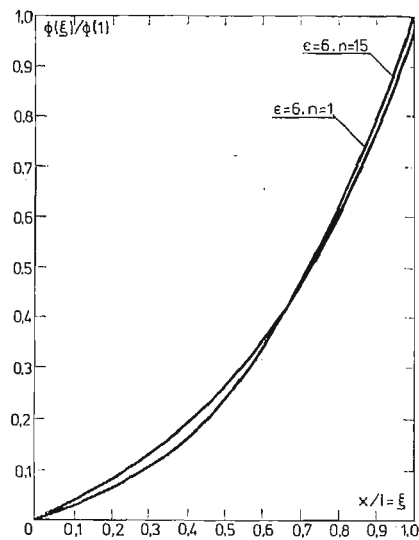
w której przyjęto, że materiał belki jest wytrzymałościowo jednorodny i ma stały ciężar właściwy tzn.: $\varepsilon_0 = \text{const.}$, $\sigma_0 = \text{const.}$, $K(\xi) \equiv 1$. Równanie to w szczególnym przypadku:

$m(\xi) = \xi$, $\mu = 1$, $\nu = 0$, $n = 1$ przyjmuje postać równania zamieszczonego w pracy J. M. Cherna [3].

Obliczenia numeryczne przeprowadzono na maszynie CYBER 72; jako dane wejściowe programu przyjmowano: 1. bezwymiarowy ciężar belki \bar{W} , 2. parametr ϵ charakteryzujący udział ciężaru własnego w obciążeniu całkowitym ($\epsilon = 0$ — belka obciążona tylko siłami zewnętrznymi, $\epsilon \rightarrow \infty$ — belka obciążona tylko ciężarem własnym), 3. parametr n charakteryzujący prawo fizyczne ($n = 1$ — materiał liniowo-sprężysty, $n \rightarrow \infty$ — materiał sztywno-plastyczny), 4. krok całkowania: $\Delta\xi$ (po wykonaniu testów dokładności przyjęto: $\Delta\xi = 0,01$).



Rys. 2

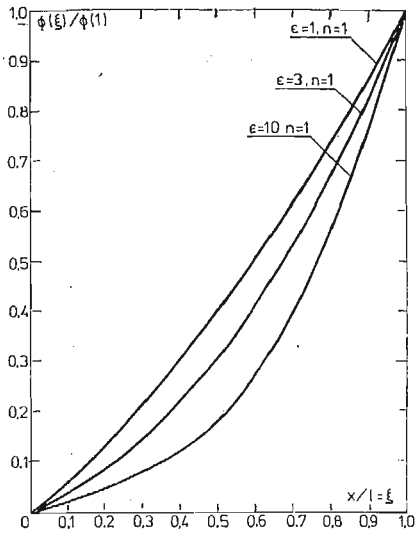


Rys. 3

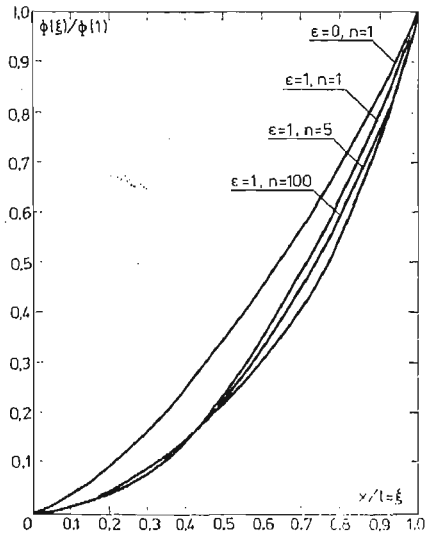
Stosowana metoda obliczeń okazała się wystarczająco szybko zbieżna, co pozwoliło na wyznaczenie poszukiwanego kształtu z dużą dokładnością. Przyjmując np. $\Delta = 10^{-4}$ funkcję $\Phi(\xi)$ otrzymano po ośmiu iteracjach; wówczas czas typowego przebiegu nie przekraczał ośmiu minut pracy procesora centralnego.

Obliczenia wykonano dla belki o stałej wysokości i poszukiwanym sposobie zmiany szerokości $b(x)$, tzn. dla: $\mu = 1$ i $\nu = 0$, obciążonej: 1. siłą skupioną P działającą na swobodnym końcu (rys. 2, 3 i 4) i 2. siłami rozłożonymi o stałej intensywności $p(x) = \text{const}$ (rys. 5 i 6). W obu przypadkach wyznaczono zależności kształtu belki od parametru n przy ustalonej wartości ϵ oraz zależności od parametru ϵ przy ustalonym n .

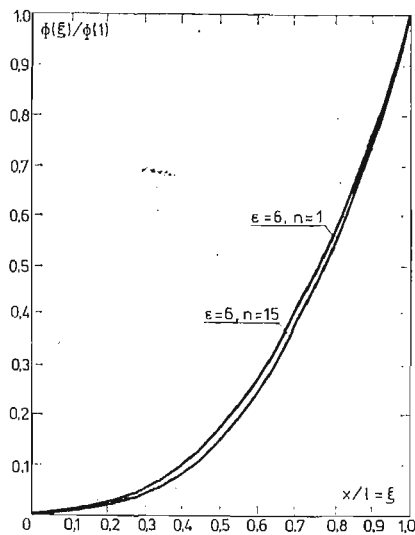
Na rys. 2 zilustrowano wpływ postaci prawa fizycznego (wykładnika n) na optymalny kształt belki zginanej siłą skupioną i ciężarem własnym. Dla porównania na rysunku zamieszczono również kształt belki zginanej wyłącznie obciążeniem zewnętrznym; kształt ten nie zależy od postaci prawa fizycznego ponieważ minimalizacja ugięcia w punkcie działania siły skupionej jest równoważna minimalizacji pracy sił zewnętrznych [6]. Podobny charakter posiadają krzywe przedstawione na rys. 3, przy czym można zauważyć, że przy większym udziale ciężaru własnego w obciążeniu całkowitym wpływ wykładnika n w prawie



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

fizycznym, na optymalny kształt jest znacznie mniejszy. Na rys. 4 zamieszczono wykresy kształtu optymalnych belek liniowo-sprężystych ($n = 1$) dla różnych wartości parametru ϵ . Uwzględnienie ciężaru własnego istotnie wpływa na kształt optymalny, przy czym wykresy otrzymane dla wartości $\epsilon > 10$ praktycznie nie różnią się od wykresu dla $\epsilon = 10$.

Podobny charakter mają rozwiązania przedstawione na rys. 5 i 6, dotyczące belki obciążonej siłami równomiernie rozłożonymi. Dla porównania zamieszczono na rys. 5 kształt belki liniowo-sprężystej bez uwzględnienia ciężaru własnego ($\epsilon = 0$). Kształt ten zależy od wykładnika n [6].

Literatura cytowana w tekście

1. R. L. BARNETT, *Minimum Deflection Design of a Uniformly Accelerating Cantilever Beam*, J. Appl. Mech., 30, (1963), 466—467.
2. L. C. W. DIXON, *Pontryagin's maximum principle applied to the profile of a beam*, J. of the Aeronautical Society, 71, (1967), 513—515.
3. J. M. CHERN, *Optimal structural design for given deflection in presence of body forces*, Int. J. Solids Structures, 7, (1971), 373—382.
4. R. T. SHIELD, W. PRAGER, *Optimal Structural Design for Given Deflection*, ZAMP, 4, 21, (1970), 513—523.
5. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie belki wspornikowej z materiału nieliniowego fizycznie, obciążonej ciężarem własnym*, Rozpr. Inż., 3, 24, (1976), 453—467.
6. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiałów o nieliniowości fizycznej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Nr 5, Kraków, 1975.
4. Ju. N. RABOTNOW, *Polzuczest elementow konstrukcji*, Nauka, Moskwa, 1966.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ НАГРУЖЕННОЙ
ВНЕШНИМИ СИЛАМИ И СОБСТВЕННЫМ ВЕСОМ В УСЛОВИЯХ
ПОЛЗУЧЕСТИ

Основной темой работы является оптимальное формирование консольной балки с прямоугольным поперечным сечением, нагруженной внешними распределёнными силами, а также силами от собственного веса. Обсуждаются балки изготовленные из материала неоднородного по сопротивлению, описанного степенным физическим законом. Этот закон является существенным для материалов в состоянии установившейся ползучести, нелинейно-упругих или упруго-пластичных. В работе обнаружены оптимальные формы балок с переменной шириной, нагруженных сосредоточенной на конце силой а также силами равномерно распределёнными с постоянной интенсивностью.

Исследовано также влияние показателя „ n ” степенного закона на оптимальные формы. Вопрос решён с использованием классических методов вариационного исчисления, а результаты численных расчётов иллюстрированы различными рисунками.

Summary

OPTIMAL DESIGN OF THE CANTILEVER BEAM LOADED BY EXTERNAL FORCES AND BY
ITS OWN WEIGHT IN CREEPING CONDITIONS

There was investigated the optimal design of the cantilever beam with rectangular cross-section, loaded by the uniformly distributed external forces and by its own weight. There were taken into account beams of the inhomogeneous material, described by the power physical law. This law works in the steady state creep and for the materials non-linearly elastic and elastic-plastic. There were found the optimal shapes of beams with varying width, loaded by the force acted on the end of the beam and by the uniformly distributed force with constant intensity. There was also examined the influence of an exponent „ n ” in the power law on the optimal shape of cantilever beam. The problem was solved on the basis of classical variational calculus. The results of numerical calculations are presented on numerous figures.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji 12 grudnia 1977 r.

METODA NIEZALEŻNYCH KONTURÓW BEZPOŚREDNIEJ TRANSFORMACJI UKŁADU MECHANICZNEGO W GRAF PRZEPEŁYWU SYGNAŁÓW

JÓZEF WOJNAROWSKI, JERZY ŚWIDER (GLIWICE)

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm konstruowania grafów przepływu sygnałów złożonych układów mechanicznych. Zaproponowane konwencje o znakach i sposobie przepływu sygnałów zmiennych przepływowych ${}_2s(p)$ i zmiennych biegunowych ${}_1s(p)$ pozwalają na bezpośrednie modelowanie złożonych układów mechanicznych grafami przepływu sygnałów. Metodę transformacji układu w graf przepływu sygnałów zilustrowano na przykładzie modelowania układu mechanicznego o mieszanej strukturze. Praca jest rozwinięciem metod modelowania podanych w [1].

1. Wstęp

Grafi przepływu sygnałów znalazły szerokie zastosowanie w analizie i syntezie układów elektrycznych i elektronicznych [2, 3]. W układach mechanicznych do niedawna grafi przepływu sygnałów nie były wogóle stosowane [4].

Systematyczne studium modelowania złożonych układów mechanicznych za pomocą grafów i liczb strukturalnych można znaleźć w pracy [5]. W innych pracach modelowanie układów mechanicznych grafami przepływu sygnałów potraktowane jest marginesowo. Np. w jednym z rozdziałów książki [3] autorzy podają metodę tworzenia grafów przepływu sygnałów układów mechanicznych przy traktowaniu elementów tych układów w postaci czwórników. Sam sposób łączenia czwórników w przypadku modelowania układów mechanicznych o mieszanej strukturze¹⁾ wymaga jednak dużej uwagi i jest czasochłonny.

W artykule [6] W. N. Fjedorowicz wprowadził sposób modelowania drgających układów mechanicznych za pomocą tzw. „dźwigni sprzężeń”. W metodzie tej konstruuje się doskonale sztywne łączniki, połączone przegubowo z elementami układu w ten sposób, że pod wpływem działających sił mogą one wykonywać jedynie ruch postępowy. Skonstruowane tak modele nie mogą być użyte do bezpośredniej transformacji w graf przepływu sygnałów. Aby dokonać takiej transformacji²⁾ w pracy [1] ten sam autor wprowadza korektę do zaproponowanej metody budowy modeli z „dźwigniami sprzężeń”. Przedstawiona

¹⁾ Por. str. 452 w [7].

²⁾ Rozumianej jako przejście z układu mechanicznego wprost do grafu przepływu sygnałów z pominięciem etapu wypisywania równań różniczkowych ruchu bądź konstruowania pośrednich grafów czwórników elementów.

tam metoda konstruowania grafów przepływu sygnałów układów mechanicznych jest jednak bardzo nieprzejrzysta. Można stwierdzić, że zastosowanie jej do modelowania złożonych układów mechanicznych o mieszanej strukturze staje się wręcz niemożliwe. Jeżeli natomiast zamiast konstruowania modelu z „dźwigniami sprzężeń” — przyjmąc biegunowy, niezorientowany, graf układu [5], to transformacja do grafu przepływu sygnałów znacznie się upraszcza.

W niniejszej pracy przedstawiono algorytm konstruowania grafów przepływu sygnałów, złożonych układów mechanicznych, dla których istnieją grafy biegunowe pierwszej kategorii [5]. Opracowany algorytm stanowi rozwinięcie metody modelowania podanej w pracy [1].

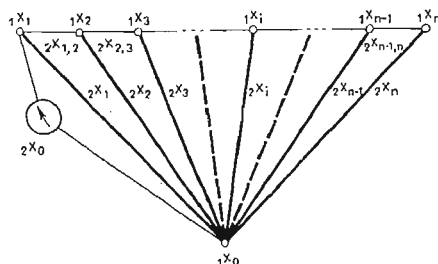
W szczególności, przedstawiony sposób budowy szkieletu grafu przepływu sygnałów oraz zaproponowane konwencje:

- o znakach sygnałów,
- o sposobie rozptywu sygnałów zmiennych przepływowych ${}_2s(p)$,
- o sposobie rozptywu sygnałów zmiennych biegunowych ${}_1s(p)$

umożliwiają konstruowanie grafów przepływu sygnałów złożonych układów mechanicznych. Opracowaną metodę zilustrowano na przykładzie budowy grafu przepływu sygnałów układu mechanicznego o mieszanej strukturze.

2. Sposób budowy szkieletu grafu przepływu sygnałów

W prezentowanej metodzie graf przepływu sygnałów układu mechanicznego tworzy się w dwu etapach. Konstruuje się szkielet grafu, a następnie, zgodnie z przyjętymi konwencjami dokonuje się domknięcia tworzonego grafu przepływu sygnałów. Szkieletem



Rys. 1. Graf biegunowy układu mechanicznego z drzewem tworzącym (o pogrubionych gałęziach)

grafu przepływu sygnałów układu mechanicznego nazwiemy zbiór wszystkich węzłów tego grafu połączonych jedynie gałęziami o transmitancjach $w_i(p) \in \mathcal{W}(p)$ lub ${}_1w_i(p) \in {}_1\mathcal{W}(p)$, gdzie: $w_i(p)$ i ${}_1w_i(p)$ są odpowiednio sztywnością i podatnością dynamiczną i -tego elementu układu, $\mathcal{W}(p)$ i ${}_1\mathcal{W}(p)$ odpowiednio zbiorem sztywności i zbiorem podatności dynamicznych elementów układu, p — argumentem przekształcenia Laplace'a. Dla przedstawienia sposobu uzyskania szkieletu grafu przepływu sygnałów rozważymy układ mechaniczny, którego graf biegunowy \mathcal{X} pokazano na rys. 1 [5].

W celu skonstruowania szkieletu grafu przepływu sygnałów układu mechanicznego należy:

1. Wybrać w grafie biegunowym X_{∞}^I układu drzewo tworzące Lagrange'a³⁾ X_{∞}^I .
2. Przedstawić każdą krawędź $2x_i$ grafu X_{∞}^I w postaci dwójnika d_i , a jego końcom przyporządkować własne zmienne — biegunową $1s_i(p)$ i przepływową $2s_i(p)$, spełniające równania biegunowe elementu:

$$1s_i(p) \cdot w_i(p) = 2s_i(p),$$

lub

$$2s_i(p) \cdot 1w_i(p) = 1s_i(p).$$

3. Przyporządkować linii poziomej, reprezentującej poziom odniesienia, końce $2s_i(p)$ wszystkich biernych dwójników d_i układu oraz węzły odpowiadające zmiennym przepływowym wzbudzenia.
4. Wyznaczyć liczbę cyklomatyczną \mathring{n} grafu X_{∞}^I , która określa liczbę poziomów niezależnych konturów⁴⁾

$$\mathring{n} = n_2 - n_1 + 1,$$

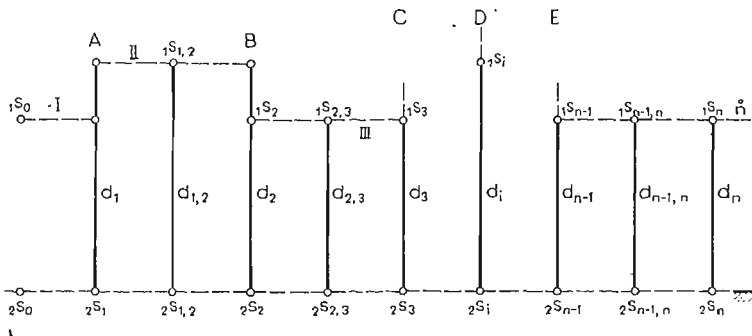
gdzie:

n_2 — liczba krawędzi grafu X_{∞}^I ,

n_1 — liczba wierzchołków grafu X_{∞}^I .

5. Przyporządkować liniom reprezentującym poziomy niezależnych konturów końce reprezentujące zmienne biegunowe $1s_i(p)$ wszystkich biernych dwójników układu i węzły zmiennej biegunowej odpowiadające wzbudzeniu układu.

Każdemu poziomowi przyporządkować węzły $1s_i(p)$ tylko tych dwójników, które w grafie biegunowym X_{∞}^I tworzą jeden niezależny kontur zamknięty.



Rys. 2. Szkielet grafu przepływu sygnałów

I, II, ..., \mathring{n} — poziomy niezależnych konturów,

A, B, C, D, E — wspólne punkty sąsiadujących niezależnych poziomów o tej samej zmiennej biegunowej $1s_i$.

³⁾ Por. str. 34, 35 w [5].

⁴⁾ Odpowiadających „dźwigniom sprzężeń” proponowanym w pracy [1].

Uwaga 1. Zmienne biegunowe ${}_1s_i(p)$ gałęzi wybranego drzewa X_{∞}^i grafu X_{∞} winny stanowić wspólne punkty poziomów niezależnych konturów.

Uwaga 2. Każdy punkt przyporządkowany poziomowi odniesienia oraz każdy punkt przyporządkowany poziomowi niezależnych konturów reprezentuje tylko jeden sygnał zmiennej przepływowej ${}_2s_i(p)$ lub zmiennej biegunowej ${}_1s_i(p)$.

Dla układu mechanicznego, którego graf biegunowy X_{∞} przedstawiono na rys. 1 utworzono, zgodnie z podanym sposobem, szkielet grafu przepływu sygnałów (rys. 2).

W celu umożliwienia domknięcia utworzonego szkieletu grafu przepływu sygnałów należy wprowadzić wspomniane we wstępie trzy konwencje:

- o znakach sygnałów,
- o sposobie rozptywu sygnałów ${}_2s(p)$,
- o sposobie rozptywu sygnałów ${}_1s(p)$.

3. Konwencja o znakach sygnałów

Znaki sygnałów ${}_1s(p)$ i ${}_2s(p)$ szkieletu grafu przepływu sygnałów uwarunkowane są przyporządkowaniem poziomów niezależnych konturów do „przekazujących” lub „przyjmujących” ruch. „Przekazywanie ruchu” odbywa się w układzie we wspólnych punktach (A, B, C, D, E rys. 2) sąsiadujących poziomów. W każdym z tych punktów jeden z poziomów jest przekazującym a pozostałe — przyjmującymi ruch. Poziom ze zmienną ${}_1s(p)$ odpowiadającą wzbudzeniu układu jest zawsze „przekazującym”.

W takim ujęciu konwencje o znakach sygnałów można zapisać następująco:

W szkielecie grafu przepływu sygnałów układu mechanicznego należy przyporządkować:

- znak plus
wszystkim sygnałom ${}_1s(p)$ i ${}_2s(p)$ odpowiadającym wzbudzeniom układu,
wspólnym węzłom należącym do poziomów przyjmujących ruch,
- znak minus
wszystkim pozostałym sygnałom ${}_1s(p)$,
- sygnałom ${}_2s(p)$ dwójników modelu dynamicznego znaki przeciwne do znaków odpowiadających im sygnałom ${}_1s(p)$ ⁵⁾.

4. Konwencja o sposobie rozptywu sygnałów

Wszystkie sygnały reprezentujące stan modelowanego układu mechanicznego rozptywiają się w grafie przepływu sygnałów gałęziami:

- pierwszego rodzaju ${}_2x_j({}_1s, {}_1s)$ (gałęzie rozptywu zmiennych biegunowych),
- drugiego rodzaju ${}_2x_j({}_2s, {}_2s)$ (gałęzie rozptywu zmiennych przepływowych),
- trzeciego rodzaju ${}_2x_j({}_1s, {}_2s)$ lub ${}_2x_j({}_2s, {}_1s)$ (gałęzie sztywności lub podatności dynamicznych elementów układu mechanicznego).

⁵⁾ Dla sygnałów ${}_2s(p)$ odpowiadających wspólnym punktom sąsiadujących poziomów niezależnych konturów należy ustalić tyle znaków ile poziomów łączy dany węzeł.

Transmitancje gałęzi pierwszego i drugiego rodzaju są równe 1 lub -1 w przypadku jednorodnych zmiennych ${}_1s(p)$ i ${}_2s(p)$ opisujący układ lub $\pm R$ w przypadku niejednorodnych zmiennych⁶⁾ ${}_1s(p)$ i ${}_2s(p)$, gdzie $\pm R$ jest współczynnikiem ujednorodniającym zmienne [8].

4.1. Konwencja o sposobie rozplywu sygnałów ${}_2s(p)$. Zmienne ${}_2s(p)$ wchodzące w niezależne relacje rozplywu sygnałów wybiera się zgodnie z następującą zasadą:⁷⁾ „Dla każdego punktu wspólnego poziomów niezależnych konturów szkieletu grafu przepływu sygnałów w realcję rozplywu sygnałów ${}_2s(p)$ wchodzi zmienne węzła wspólnego i wszystkie pojedyncze sygnały połączonych poziomów”.

Konwencję o sposobie rozplywu sygnałów ${}_2s(p)$ można zapisać następująco:

- każdy z węzłów zmiennych ${}_2s(p)$ może mieć tylko wchodzące lub tylko wychodzące gałęzie ${}_2x({}_2s, {}_2s)$,
- węzeł zmiennej ${}_2s(p)$ posiada wychodzące gałęzie ${}_2x({}_2s, {}_2s)$ tylko wtedy, gdy wchodzi do niego gałąź ${}_2x({}_1s, {}_2s)$ transformująca sygnał zmiennej biegunowej ${}_1s$ na sygnał zmiennej przepływowej ${}_2s$.
- węzły sygnałów wzbudzenia stanowią źródła w konstruowanym grafie,
- gałęzie ${}_2x({}_2s, {}_2s)$ mogą mieć znak plus gdy łączą sygnały o tych samych znakach lub znak minus — gdy łączą sygnały o różnych znakach,
- transmitancje gałęzi ${}_2x({}_2s, {}_1s)$ i ${}_2x({}_1s, {}_2s)$ mają zawsze znak plus.

Rozplyw sygnałów w niezależnych zbiorach zmiennych ${}_2s(p)$ dokonuje się zgodnie z podaną konwencją, po uprzednim przyjęciu w każdym ze zbiorów jednego z węzłów jako upustu. Upustami mogą być tylko te węzły, których zmienne przepływowe odpowiadają gałęziom wybranego drzewa Langrange'a X_0^I grafu biegunowego X_0 układu.

4.2. Konwencja o sposobie rozplywu sygnałów ${}_1s(p)$. Konwencje o sposobie rozplywu sygnałów ${}_1s(p)$ można zapisać następująco:

- gałęzie ${}_2x({}_1s, {}_1s)$ łączą sygnały tylko jednego poziomu niezależnych konturów,
- każdy z węzłów ${}_1x_j$ zmiennej biegunowej ${}_1s(p)$ może mieć tylko wchodzące lub tylko wychodzące gałęzie ${}_2x({}_1s, {}_1s)$,
- węzeł zmiennej ${}_1s(p)$ posiada wychodzące gałęzie ${}_2x({}_1s, {}_1s)$ tylko wtedy, gdy wchodzi do niego gałąź ${}_2x({}_2s, {}_1s)$ transformująca sygnał zmiennej przepływowej ${}_2s$ na sygnał zmiennej biegunowej ${}_1s$.
- węzły sygnałów wzbudzenia ${}_1s(p)$ stanowią źródła w tworzonym grafie,
- gałęzie ${}_2x({}_1s, {}_1s)$ mają znak plus gdy łączą sygnały o różnych znakach lub znak minus — gdy łączą sygnały o tych samych znakach.

5. Przykład transformacji układu mechanicznego o mieszanej strukturze w graf przepływu sygnałów

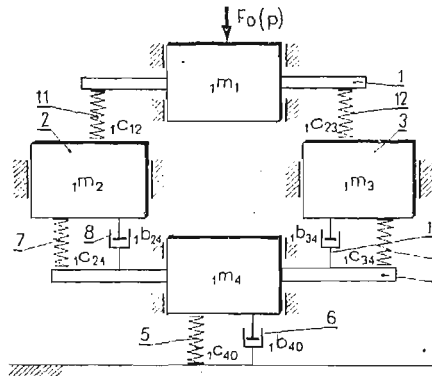
Celem zilustrowania zaprezentowanej metody otrzymywania grafów przepływu sygnałów złożonych układów mechanicznych rozważymy układ pokazany na rys. 3.

⁶⁾ Por. str. 276 w [5].

⁷⁾ Można stwierdzić, że podana w pracy [1] metoda „gry kombinatoryjnej” wyboru łączonych zmiennych ${}_2s(p)$, w przypadku złożonych układów mechanicznych o wielu stopniach swobody, jest bardzo uciążliwa i pracochłonna.

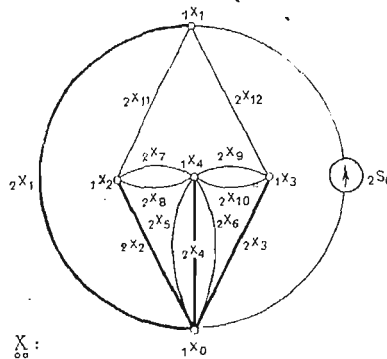
Układ ten przedstawiono w postaci niezorientowanego grafu biegunowego X_{∞} (rys. 4). Postępując zgodnie z algorytmem podanym w punkcie 2 skonstruowano szkielet grafu przepływu sygnałów przyjętego modelu układu mechanicznego. Uzyskany szkielet wraz z przyjętymi znakami zmiennych przedstawiono na rys. 5.

Zgodnie z przyjętą konwencją o sposobie rozplywu sygnałów, dokonano domknięcia konstruowanego grafu przepływu sygnałów gałęziami ${}_2x({}_1s, {}_1s)$ i ${}_2x({}_2s, {}_2s)$. Uzyskany graf



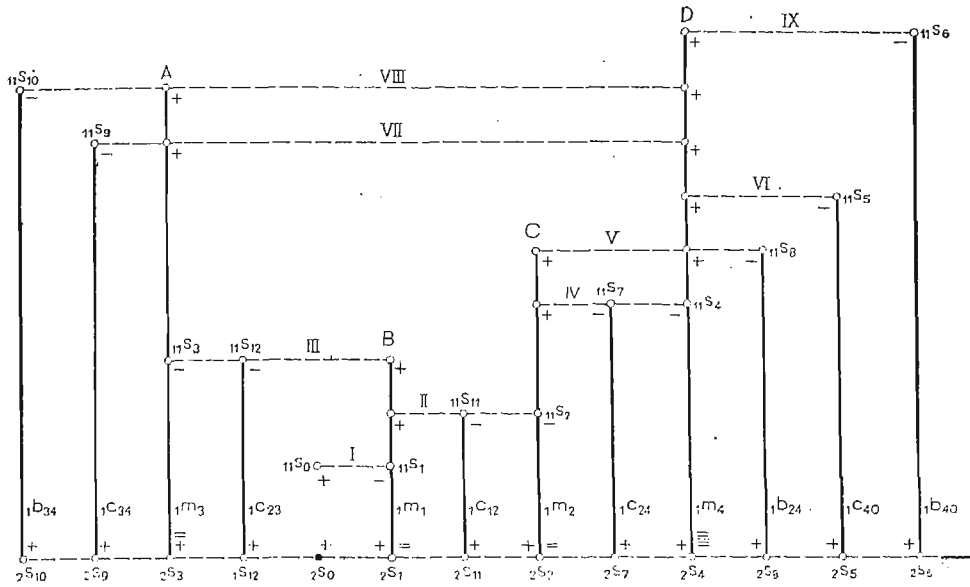
Rys. 3. Układ mechaniczny o mieszanej strukturze

przedstawiono na rys. 6. Po dokonaniu zwarcia wspólnych punktów (A, B, C, D) oraz po odrzuceniu linii reprezentujących poziomy niezależnych konturów (I÷IX), graf przepływów sygnałów modelowanego układu mechanicznego przyjmie postać pokazaną na rys. 7.

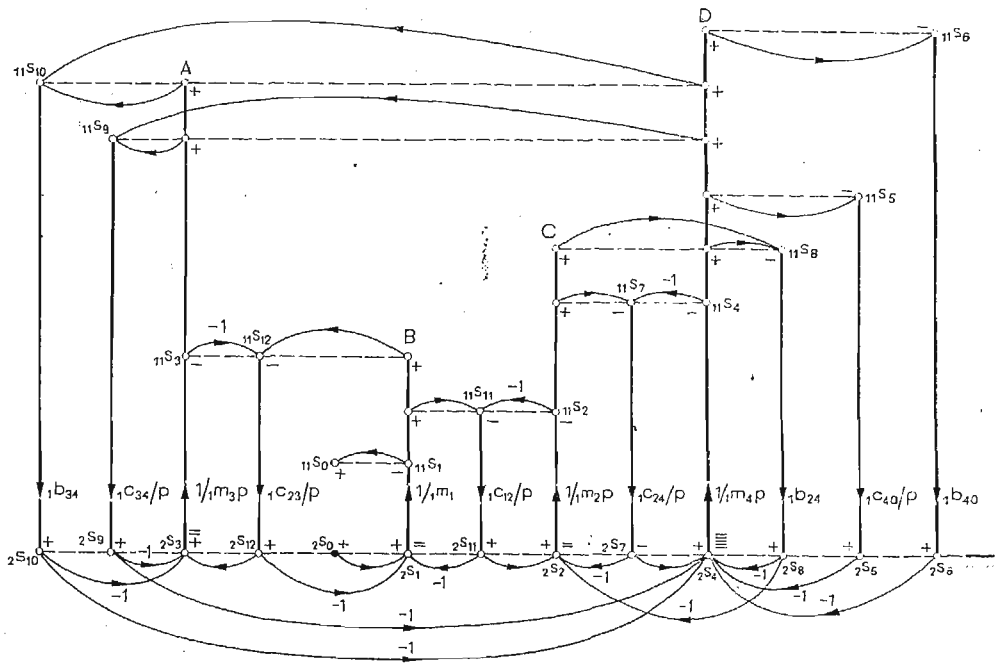


Rys. 4. Graf biegunowy układu mechanicznego pokazanego na rys. 3 (z pogrubionym drzewem Lagrange'a)

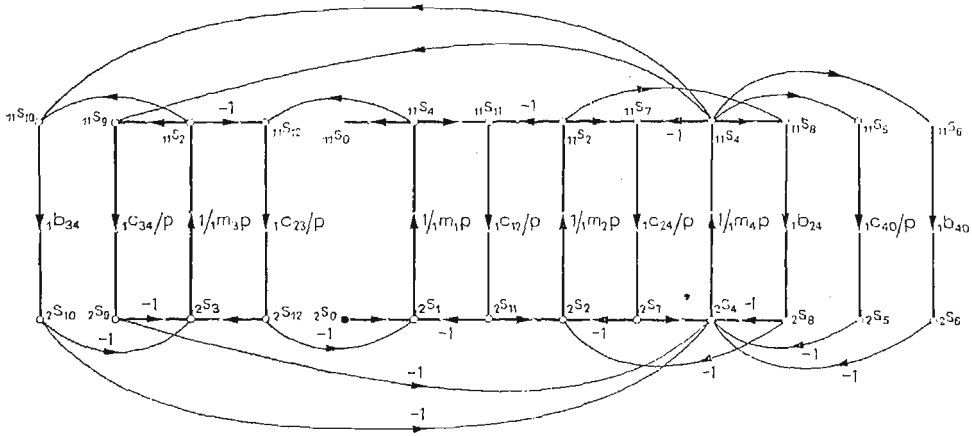
Zauważmy, że wybrane na rys. 4 drzewo X_{∞}^I jest jednym z trzech możliwych drzew Lagrange'a grafu X_{∞} . Zatem, przedstawiony na rys. 7 graf przepływu sygnałów, jest również jednym z trzech grafów możliwych do uzyskania przedstawioną metodą dla modelowanego układu mechanicznego.



Rys. 5. Szkielet grafu przepływu sygnałów układu mechanicznego
 I, II, ..., IX — poziomy niezależnych konturów,
 A, B, C, D — wspólne punkty poziomów niezależnych konturów.



Rys. 6. Graf przepływu sygnałów układu mechanicznego



Rys. 7. Przekształcony graf przepływu sygnałów układu mechanicznego

6. Uwagi końcowe

Rozwój metod modelowania układów mechanicznych za pomocą maszyn analogowych pociąga za sobą konieczność opracowywania bezpośrednich metod sporządzania programów. Jedną z nich jest metoda grafów przepływu sygnałów. Zaprezentowana w niniejszej pracy metoda modelowania złożonych układów mechanicznych ułatwia konstruowanie ich grafów przepływu sygnałów.

Skonstruowany graf przepływu sygnałów można wprost zastosować do opracowania programu dla elektronicznej maszyny analogowej, a wykorzystując ogólną regułę redukcji Masona — wyznaczyć poszukiwane transmitancje operatorowe i charakterystyki częstotliwościowe analizowanego układu mechanicznego. W przeciwieństwie do innych metod opracowany sposób tworzenia grafu przepływu sygnałów nie wymaga znajomości modelowania układów mechanicznych grafami czwórnikowymi.

Zaproponowana metoda niezależnych konturów wyboru niezależnych zbiorów zmiennych $s(p)$ jest przejrzysta i nie wymaga konstruowania modelu układu mechanicznego z dźwigniami sprzężeń. Jest to istotne przy modelowaniu grafami przepływu sygnałów złożonych układów mechanicznych o mieszanej strukturze. Prosty sposób transformowania układów mechanicznych w grafy przepływu sygnałów metodą niezależnych konturów, może zachęcić do szerszego ich stosowania w analizie i syntezy złożonych układów.

Literatura cytowana w tekście

1. В. Н. К. ФЕДОРОВИЧ, М. И. ОРЛОВА, А. И. ИВАНОВ, *Расчёт динамических моделей с „рычагами связи” механических и электромеханических колебательных систем методом графов*, *Вопр. радиоэлектроники*, сер. ТПС, вып. 3, 1971.
2. J. S. MASON, H. J. ZIMMERMANN, *Electronic Circuits, Signal and Systems*, John Wiley & Sons, INC 1960, New York — London.

3. L. ROBICHAUD, M. BOLSVERT, J. ROBERT, *Grafy przepływu sygnałów*, PWN, Warszawa 1968, (tłum. książki L. ROBICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Graphes de fluence. Applications à l'électrotechnique et à l'électronique. Calculateurs analogiques et digitaux*, Presses de l'Univ. Laval (Quebec), 1961).
4. А. Ю. ГЕРЛИХ, И. И. КЛОКИН, *Применение теории графов для анализа эффективности многокаскадных и блочных систем виброизолирующей амортизации механизмов*, Тр. Ленингр. Кораблест. Инст., вып. 91, Ленинград 1974.
5. J. WOJNAROWSKI, *Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych*, Politechnika Śląska — PTMETS Oddz. Gliwice, z. 38, Gliwice 1977.
6. В. Н. К. ФЕДОРОВИЧ, *К теории электромеханических аналогий*, Вопр. радиоэлектроники, сер. ТПС, вып. 3, 1971.
7. J. ŚWIDER, J. WOJNAROWSKI, *Grafy przepływu sygnałów w modelowaniu kaskadowej struktury układu wyciągowego*, Mech. Teoret. i Stos., 2 (1978), s 215÷223.
8. J. ŚWIDER, J. WOJNAROWSKI, *Metoda fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej jako sposób wyznaczania podatności dynamicznej złożonych układów mechanicznych*, Mech. Teoret. i Stos., 2 (1978). s 225÷234.

Резюме

МЕТОД НЕЗАВИСИМЫХ КОНТУРОВ НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ
ТРАНСФОРМАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ГРАФ СИГНАЛОВ

В работе представлен алгоритм конструирования графов сигналов сложных механических систем. Предложенные конвенции о знаках и способе передачи сигналов последовательных переменных ${}_2s(p)$ и параллельных переменных ${}_1s(p)$ дают возможность непосредственно моделировать сложные механические системы графами сигналов. Метод трансформации системы в граф сигналов иллюстрируется на примере моделирования механической системы смешанной структуры. Настоящая работа является развитием методов моделирования приведенных в [1].

Summary

A METHOD OF INDEPENDENT CYCLES OF DIRECT TRANSFORMATION OF A MECHANICAL
SYSTEM INTO A SIGNAL FLOW GRAPH

The paper deals with an algorithm of the construction of flow graphs of signals for complex mechanical systems. The suggested conventions with signs and the division of the signals of the through-variables ${}_2s(p)$ and across-variables ${}_1s(p)$ make it possible to model directly complex mechanical systems by means of signal flow graphs. The transformation method of the system into a signal flow graph has been illustrated on the example of modelling a mechanical system of a mixed structure. The presented paper is a further development of the modelling methods dealt with in publication [1].

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

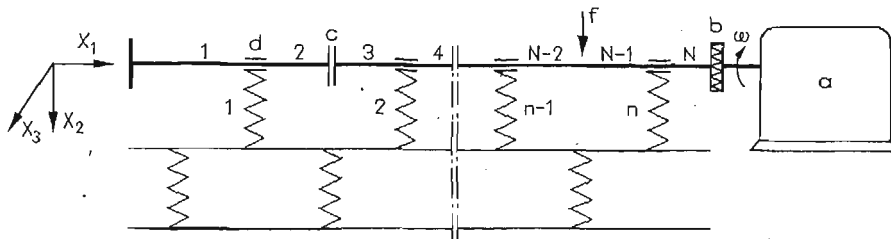
Praca została złożona w Redakcji dnia 21 grudnia 1977 r.

DRGANIA WYMUSZONE LINII WAŁÓW Z UWZGLĘDNIENIEM ASYMETRII SZTYWNOŚĆ
GIĘTNEJ I PODATNOŚCI FUNDAMENTÓW
METODA IDENTYFIKACJI PODATNOŚCI DYNAMICZNEJ FUNDAMENTÓW LINII WAŁÓW

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Analiza drgań linii wałów wymaga z reguły uwzględnienia podatności filmu olejowego w łożyskach i konstrukcji podpierającej linię wałów. Literatura dotycząca tego zagadnienia nie obejmuje przypadku, gdy linia wałów zawiera odcinki o zróżnicowanych głównych centralnych momentach bezwładności przekroju poprzecznego. Przypadek taki występuje np. w liniach wałów zawierających wały korbowe, których analizę drgań prowadzi się po zastąpieniu wału korbowego modelem złożonym z mas dyskretnych i prostych odcinków wału. Założenie o jednakowej sztywności giętej w płaszczyźnie wykorbienia i w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wykorbienia ograniczało dotychczas przydatność tego modelu do obliczeń drgań giętych. Przedstawiony w niniejszej pracy matematyczny opis drgań linii wałów nie wymaga spełnienia takiego założenia.



Rys. 1. Schemat analizowanego układu. *a* — źródło napędu; *b* — sprzęgło elastyczne; *c* — sprzęgło kołnierzowe; *d* — łożysko ślizgowe; *f* — siła wymuszająca; *n* — liczba łożysk; *N* — liczba odcinków obliczeniowych linii wałów; $\omega = \text{const}$ — prędkość kątowa wirowania linii wałów

Zapewnienie należytej dokładności informacji o podatności filmu olejowego i konstrukcji podpierających linię wałów nie jest w praktyce zagadnieniem zamkniętym. Charakterystyki filmu olejowego są nieliniowe. Utrudnia to dokładne obliczenie podatności filmu dla warunków eksploatacyjnych, gdyż zależy ona m.in. od nieznanych a priori reakcji w łożyskach. Wyznaczanie dynamicznej podatności konstrukcji podpierającej przy pomocy wzbudników drgań związane jest z mankamentami [1], a dla niektórych konstrukcji jest trudne bądź niemożliwe do zrealizowania. Dotyczy to zwłaszcza przypadków, gdy łożyska są wbudowane, jak to ma miejsce np. z łożyskiem stewowym wału śrubowego, wbudowanym w sekcję rufową statku. W niniejszej pracy zaproponowano pośrednią metodę wyzna-

czania dynamicznej podatności konstrukcji podpierających linie wałów (łącznie z filmem olejowym) na przykładzie układu przedstawionego schematycznie na rys. 1, której stosowanie może być w pewnych przypadkach bardziej celowe.

Oznaczenia macierzy stosowane w tekście

$$a = \{a_j\} = \{a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n\} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ — macierz kolumnowa,}$$

$$A = \lceil a_j \rceil = \lceil a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n \rceil = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \text{ — macierz diagonalna,}$$

$$A = \lceil A_j \rceil = \lceil A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_n \rceil = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_n \end{bmatrix} \text{ — macierz blokowo diagonalna (kwadratowa),}$$

$A_i = [a_{kl}(i)] = [a_{iki}]$ — macierz dotycząca i -tego odcinka linii wałów,

$A = [a_{kl}]_{m \times n}$ — macierz o wymiarach $m \times n$,

$A = [a_{kl}]_n$ — macierz kwadratowa stopnia n ,

A^x — transponowana macierz A .

2. Opis drgań linii wałów przy wymuszeniach okresowych

Analizowany układ traktowany jest jako liniowy. Zakłada się, że koło zamachowe, sprzęgła kołnierzone itp. elementy stanowią masy dyskretne. Przyjęto, że główna centralna oś bezwładności każdego odcinka linii wałów pokrywa się z osią obrotu. Zakłada się także, że wektory reakcji działających na wał w łożyskach przechodzą przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych wału w połowie długości łożysk (przy czym długość łożyska nie musi być mała w porównaniu z długością danego odcinka wału, gdy podatności dynamiczne wyznacza się jak w p. 3).

Linie wałów podzielono na szereg odcinków obliczeniowych. Podziału dokonano w przekrojach, gdzie występują siły skupione (reakcje łożysk bądź siły wymuszające), w przekrojach przechodzących przez środki ciężkości mas dyskretnych oraz w miejscach łączenia odcinków o różnych stałych materiałowych bądź odcinków różniących się kierunkami głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Przyjęto konwencję znaków jak na rys. 2. Osie x_{i1} , x_{i2} , x_{i3} stanowią lokalny układ współrzędnych i -tego odcinka, wirujący wraz z odcinkiem. Osie x_{i2} , x_{i3} są równoległe do odpowiednich głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego i -tego odcinka. Oś x_{i1} pokrywa się z osią obrotu linii wałów i z głównymi centralnymi osiami bezwładności odcinków. Zakłada się, że wektory uogólnionych sił zewnętrznych, główne centralne osie bezwładności mas dyskretnych i główne osie sprzęgła elastycznego pokrywają się z odpo-

wiednimi osiami lokalnych układów współrzędnych. Wpływ obciążeń rozłożonych nie jest w niniejszej pracy rozpatrywany.

Wielkości odnoszące się do poszczególnych przekrojów odcinków oznaczono następująco:

$$\underline{x}_{i1} = 0 \quad \underline{x}_{i1} = x \quad \underline{x}_{i1} = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, N; \alpha = 1, 2, \dots, 6)$$

$u_{i0} = \{u_{i0\alpha}\}$ $u_{ix} = \{u_{ix\alpha}\}$ $u_{i1} = \{u_{i1\alpha}\}$ — macierze kolumnowe uogólnionych przemieszczeń,

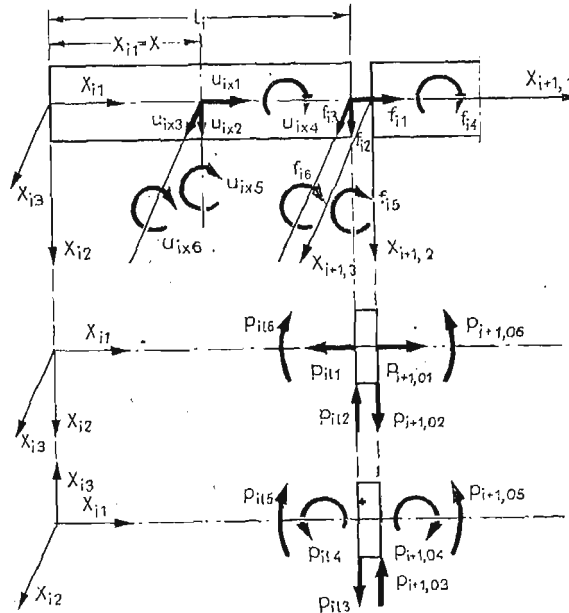
$p_{i0} = \{p_{i0\alpha}\}$ $p_{i1} = \{p_{i1\alpha}\}$ $p_{i1} = \{p_{i1\alpha}\}$ — macierze kolumnowe uogólnionych sił wewnętrznych,

$$\underline{x}_{i1} = l_i$$

$f_i = \{f_{i\alpha}\}$ — macierz kolumnowa uogólnionych sił zewnętrznych,

$M_i = \lceil m_{i\alpha} \rceil$ — diagonalna macierz bezwładności masy dyskretnej,

$C_i^s = \lceil c_{i\alpha}^s \rceil$ — diagonalna macierz sztywności sprzęgła elastycznego.



Rys. 2. Schemat obliczeniowy dla dwóch odcinków wału o odpowiednio równoległych osiach lokalnych układów współrzędnych. $f_{i\alpha}$ — uogólniona siła zewnętrzna, działająca na i -ty odcinek obliczeniowy wału w końcowym jego przekroju w kierunku α ; l_i — długość i -tego odcinka; $p_{i1\alpha}$ — uogólniona siła wewnętrzna w końcowym przekroju i -tego odcinka w kierunku α ; $p_{i+1,\alpha}$ — uogólniona siła wewnętrzna w początkowym przekroju $(i+1)$ -go odcinka w kierunku α ; $u_{ix\alpha}$ — uogólnione przemieszczenie w przekroju x i -tego odcinka w kierunku α

Ograniczając się do technicznej teorii drgań belek [2], równania drgań i -tego odcinka wału napiszemy w postaci:

$$(2.1) \quad \ddot{u}_{ix\alpha} + Q_{i\alpha} \dot{u}_{ix\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 4, \quad (\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t},$$

gdzie $Q_{i\alpha}$ jest liniowym operatorem różniczkowym ze względu na zmienną przestrzenną

$x_{i1} = x$:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} Q_{i1} &= -\left(\frac{E}{\rho}\right)_i \frac{\partial^2}{\partial x^2}, & Q_{i2} &= \left(\frac{EI_2}{A\rho}\right)_i \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \\ Q_{i3} &= \left(\frac{EI_3}{A\rho}\right)_i \frac{\partial^4}{\partial x^4}, & Q_{i4} &= -\left(\frac{C}{I_s}\right)_i \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

E_i — moduł Younga (dla i -tego odcinka), ρ_i — gęstość, A_i — pole przekroju poprzecznego, $(I_2)_i$, $(I_3)_i$ — główne centralne momenty bezwładności przekroju poprzecznego, C_i — sztywność skrętna jednostki długości wału, $(I_s)_i$ — moment bezwładności jednostki długości wału względem osi obrotu.

Warunki brzegowe dla linii wałów przedstawionej na rys. 1 mają postać:

$$(2.3) \quad p_{10\alpha} = \pm m_{0\alpha} \ddot{u}_{10\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$$(2.4) \quad p_{N1\alpha} = \mp m_{N\alpha} \ddot{u}_{N1\alpha} \mp c_{N\alpha}^s u_{N1\alpha}.$$

Przy podwójnych znakach „+” i „-” dolny znak dotyczy $\alpha = 5, 6$. W przekrojach, w których działają skupione siły zewnętrzne i w przekrojach przechodzących przez środki ciężkości mas dyskretnych, spełnione są warunki:

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_{i1\alpha} = u_{i+1,0\alpha}, \\ p_{i1\alpha} = p_{i+1,0\alpha} \pm f_{i\alpha}, \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} u_{i1\alpha} = u_{i+1,0\alpha}, \\ p_{i1\alpha} = p_{i+1,0\alpha} \mp m_{i\alpha} \ddot{u}_{i1\alpha}. \end{cases}$$

Warunki (2.5) i (2.6) dotyczą przypadków, w których osie lokalnych układów współrzędnych i -tego oraz $(i+1)$ -go odcinka wału są do siebie odpowiednio równoległe — tzn. gdy odcinki te wykazują kołową symetrię sztywności giętej lub ich główne centralne osie bezwładności przekroju poprzecznego są do siebie odpowiednio równoległe. W przeciwnym przypadku należy zestawić analogiczne warunki po odniesieniu wielkości dotyczących i -tego odcinka do lokalnego układu współrzędnych $(i+1)$ -go odcinka. Dla uproszczenia pominięto w (2.6) wpływ siły ciężkości i -tej masy dyskretnej; może on być uwzględniony jak $f_{i\alpha}$ w (2.5).

Znane zewnętrzne siły wymuszające oznaczmy w odróżnieniu od reakcji łożysk dodatkowo indeksem górnym „ w ” i zapiszemy je w postaci:

$$(2.7) \quad f_{i\alpha}^w = \sum_{\nu} (f_{i\alpha}^{w1(\nu)} \cos \nu \omega t + f_{i\alpha}^{w2(\nu)} \sin \nu \omega t), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots; \alpha = 1, \dots, 6,$$

gdzie $\omega = \text{const}$ — podstawowa częstość wymuszeń.

Przyjmujemy, że częstość ω jest równa prędkości kątowej wirowania linii wałów (co z reguły zachodzi w praktyce dla układów bezprzekładniowych).

Analogicznie przedstawimy nieznanne wielkości:

$$(2.8) \quad f_{i\alpha} = \sum_{\nu} (f_{i\alpha}^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + f_{i\alpha}^{2(\nu)} \sin \nu \omega t),$$

$$(2.9) \quad u_{i\alpha} = \sum_{\nu} (u_{i\alpha}^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + u_{i\alpha}^{2(\nu)} \sin \nu \omega t),$$

$$(2.10) \quad p_{i\alpha} = \sum_{\nu} (p_{i\alpha}^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + p_{i\alpha}^{2(\nu)} \sin \nu \omega t).$$

Podstawiając (2.9) do równań (2.1) i uwzględniając, że

$$u_{ix5} = -u'_{ix3}, \quad u_{ix6} = u'_{ix2}, \quad (') = \frac{\partial}{\partial x},$$

otrzymuje się znane rozwiązania [2], które wraz z rozwiązaniami dla $\nu = 0$ zapisać można w postaci macierzowej:

$$(2.11) \quad u_{ix} = \sum_{\nu} C_{ix}^{(\nu)} (a_i^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + a_i^{2(\nu)} \sin \nu \omega t), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie:

$$a_i^{1(\nu)} = \{a_{iq}^{1(\nu)}\}, \quad a_i^{2(\nu)} = \{a_{iq}^{2(\nu)}\}, \quad q = 1, 2, \dots, 12$$

— macierze kolumnowe współczynników rozwiązań dla ν -tych harmonicznych,

$$C_{ix}^{(0)} = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2 & -2x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3x^2 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$C_{ix}^{(\nu)} = [(C_{ix}^{(\nu)})_1, (C_{ix}^{(\nu)})_2],$$

$$(C_{ix}^{(\nu)})_1 = \begin{bmatrix} \cos \lambda_r^{(\nu)} x & \sin \lambda_r^{(\nu)} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \lambda_2^{(\nu)} x & \sin \lambda_2^{(\nu)} x & \operatorname{ch} \lambda_2^{(\nu)} x & \operatorname{sh} \lambda_2^{(\nu)} x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2^{(\nu)} \sin \lambda_2^{(\nu)} x & \lambda_2^{(\nu)} \cos \lambda_2^{(\nu)} x & \lambda_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2^{(\nu)} x & \lambda_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2^{(\nu)} x \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$(C_{ix}^{(\nu)})_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \lambda_3^{(\nu)} x & \sin \lambda_3^{(\nu)} x & \operatorname{ch} \lambda_3^{(\nu)} x & \operatorname{sh} \lambda_3^{(\nu)} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \lambda_3^{(\nu)} x & \sin \lambda_3^{(\nu)} x \\ \lambda_3^{(\nu)} \sin \lambda_3^{(\nu)} x & -\lambda_3^{(\nu)} \cos \lambda_3^{(\nu)} x & -\lambda_3^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_3^{(\nu)} x & -\lambda_3^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_3^{(\nu)} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$(\lambda_r^{(\nu)})_i = \nu \omega \left(\frac{\rho}{E} \right)_i^{\frac{1}{2}}, \quad (\lambda_2^{(\nu)})_i = (\nu \omega)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A \rho}{EI_2} \right)_i^{\frac{1}{4}},$$

$$(\lambda_3^{(\nu)})_i = (\nu \omega)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A \rho}{EI_3} \right)_i^{\frac{1}{4}}, \quad (\lambda_s^{(\nu)})_i = \nu \omega \left(\frac{I_s}{C} \right)_i^{\frac{1}{2}}.$$

W dalszej części pracy pominięto indeksy (ν) w wyrażeniach $\lambda_r^{(\nu)}$, $\lambda_2^{(\nu)}$, $\lambda_3^{(\nu)}$, $\lambda_s^{(\nu)}$.

Siły wewnętrzne związane są z przemieszczeniami $u_{ix\alpha}$ relacjami:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} p_{ix1} &= E_i A_i u'_{ix1}, & p_{ix2} &= -E_i (I_2)_i u''_{ix2}, & p_{ix3} &= -E_i (I_3)_i u'''_{ix3}, \\ p_{ix4} &= C_i (I_s)_i u'_{ix4}, & p_{ix5} &= E_i (I_3)_i u'_{ix3}, & p_{ix6} &= -E_i (I_2)_i u'_{ix2}. \end{aligned}$$

W wyniku uwzględnienia postaci rozwiązań (2.11) i relacji (2.12) otrzymuje się:

$$(2.13) \quad p_{ix} = \sum_{\nu} A_{ix}^{(\nu)} (a_i^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + a_i^{2(\nu)} \sin \nu \omega t),$$

gdzie:

$$A_{ix}^{(0)} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & CI_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3 x & 2EI_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_2 x & -2EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$A_{ix}^{(\nu)} = [(A_{ix}^{(\nu)})_1, (A_{ix}^{(\nu)})_2],$$

$$(A_{ix}^{(\nu)})_1 =$$

$$\begin{bmatrix} -EA\lambda_r \sin \lambda_r x & EA\lambda_r \cos \lambda_r x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^3 \operatorname{sh} \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^3 \operatorname{ch} \lambda_2 x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^2 \operatorname{ch} \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^2 \operatorname{sh} \lambda_2 x \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$(A_{ix}^{(\nu)})_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EI_3 \lambda_3^3 \sin \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^3 \cos \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^3 \operatorname{sh} \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^3 \operatorname{ch} \lambda_3 x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -CI_s \lambda_s \sin \lambda_s x & CI_s \lambda_s \cos \lambda_s x \\ -EI_3 \lambda_3^2 \cos \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^2 \sin \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^2 \operatorname{ch} \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^2 \operatorname{sh} \lambda_3 x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

W celu ułatwienia dalszych obliczeń przekształcimy wyrażenia (2.7), (2.8), (2.11) i (2.13) do postaci:

$$(2.14) \quad f_{i\alpha}^w = \sum_{\mu} f_{i\alpha}^{w(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots,$$

$$(2.15) \quad f_{i\alpha} = \sum_{\mu} f_{i\alpha}^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t),$$

$$(2.16) \quad u_{ix} = \sum_{\mu} u_{ix}^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad u_{ix}^{(\mu)} = C_{ix}^{(\nu)} a_i^{(\mu)}, \quad \nu = |\mu|, \quad a_i^{(\mu)} = \{a_{iq}^{(\mu)}\},$$

$$(2.17) \quad p_{ix} = \sum_{\mu} p_{ix}^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad p_{ix}^{(\mu)} = A_{ix}^{(\nu)} a_i^{(\mu)},$$

gdzie:

$$f_{i\alpha}^{w(-\nu)} = \frac{1}{2}(f_{i\alpha}^{w1(\nu)} + jf_{i\alpha}^{w2(\nu)}), \quad f_{i\alpha}^{w(0)} = f_{i\alpha}^{w1(0)}, \quad f_{i\alpha}^{w(\nu)} = \frac{1}{2}(f_{i\alpha}^{w1(\nu)} - jf_{i\alpha}^{w2(\nu)}),$$

$$f_{i\alpha}^{(-\nu)} = \frac{1}{2}(f_{i\alpha}^{1(\nu)} + jf_{i\alpha}^{2(\nu)}), \quad f_{i\alpha}^{(0)} = f_{i\alpha}^{1(0)}, \quad f_{i\alpha}^{(\nu)} = \frac{1}{2}(f_{i\alpha}^{1(\nu)} - jf_{i\alpha}^{2(\nu)}),$$

$$a_{iq}^{(-\nu)} = \frac{1}{2}(a_{iq}^{1(\nu)} + ja_{iq}^{2(\nu)}), \quad a_{iq}^{(0)} = a_{iq}^{1(0)}, \quad a_{iq}^{(\nu)} = \frac{1}{2}(a_{iq}^{1(\nu)} - ja_{iq}^{2(\nu)}),$$

j — jednostka urojona.

Po podstawieniu wyrażeń (2.15)—(2.17) do warunków (2.5) otrzymuje się:

$$(2.18) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_i^{(\nu)} a_i^{(\mu)} + F_i^{(\nu)} f_i^{(\mu)},$$

gdzie:

$$f_i^{(\mu)} = \{f_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$$F_i^{(\nu)} = [h_{rs}^{(\nu)}]_{12 \times 6},$$

$$h_{11}^{(0)} = -\frac{1}{(EA)_{i+1}}, \quad h_{32}^{(0)} = \frac{1}{6(EI_2)_{i+1}}, \quad h_{46}^{(0)} = -\frac{1}{2(EI_2)_{i+1}},$$

$$h_{73}^{(0)} = \frac{1}{6(EI_3)_{i+1}}, \quad h_{85}^{(0)} = \frac{1}{2(EI_3)_{i+1}}, \quad h_{11,4}^{(0)} = -\frac{1}{(CI_s)_{i+1}},$$

$$h_{21}^{(\nu)} = -\frac{1}{(EA\lambda_r)_{i+1}}, \quad h_{36}^{(\nu)} = -h_{56}^{(\nu)} = \frac{1}{2(EI_2\lambda_2^2)_{i+1}}, \quad h_{92}^{(\nu)} = -h_{72}^{(\nu)} = \frac{1}{2(EI_3\lambda_3^2)_{i+1}},$$

$$h_{62}^{(\nu)} = -h_{42}^{(\nu)} = \frac{1}{2(EI_2\lambda_2^2)_{i+1}}, \quad h_{10,3}^{(\nu)} = -h_{83}^{(\nu)} = \frac{1}{2(EI_3\lambda_3^3)_{i+1}}, \quad h_{12,4}^{(\nu)} = -\frac{1}{(CI_s\lambda_s)_{i+1}}.$$

Pozostałe elementy macierzy $F_i^{(\nu)}$ są zerowe.

Macierze $B_i^{(\nu)}$ mogą być traktowane jako macierze przejścia, wiążące współczynniki μ -tych harmonicznym rozwiązań dla dwóch sąsiednich odcinków wału. Mają one blokowo diagonalną postać:

$$(2.19) \quad B_i^{(\nu)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(\nu)} & & \\ & \dots & \\ & & B_{14}^{(\nu)} \end{bmatrix}_{12},$$

$$B_{11}^{(0)} = \begin{bmatrix} (EA)_i & 0 \\ (EA)_{i+1} & \\ l_i & 1 \end{bmatrix},$$

(2.19)
[cd]

$$B_{i2(3)}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{(EI)_i}{(EI)_{i+1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3(EI)_i}{(EI)_{i+1}} & \frac{(EI)_i}{(EI)_{i+1}} & 0 & 0 \\ 3I_i^2 & 2I_i & 1 & 0 \\ I_i^3 & I_i^2 & I_i & 1 \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$B_{i4}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{(CI_s)_i}{(CI_s)_{i+1}} & 0 \\ I_i & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{i1}^{(v)} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_r l & \sin \lambda_r l \\ -e_r^{(v)} \sin \lambda_r l & e_r^{(v)} \cos \lambda_r l \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$B_{i2(3)}^{(v)} = \begin{bmatrix} e_1^{(v)} \cos \lambda l & e_1^{(v)} \sin \lambda l & e_2^{(v)} \operatorname{ch} \lambda l & e_2^{(v)} \operatorname{sh} \lambda l \\ -e_3^{(v)} \sin \lambda l & e_3^{(v)} \cos \lambda l & e_4^{(v)} \operatorname{sh} \lambda l & e_4^{(v)} \operatorname{ch} \lambda l \\ e_2^{(v)} \cos \lambda l & e_2^{(v)} \sin \lambda l & e_1^{(v)} \operatorname{ch} \lambda l & e_1^{(v)} \operatorname{sh} \lambda l \\ -e_4^{(v)} \sin \lambda l & e_4^{(v)} \cos \lambda l & e_3^{(v)} \operatorname{sh} \lambda l & e_3^{(v)} \operatorname{ch} \lambda l \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$B_{i4}^{(v)} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_s l & \sin \lambda_s l \\ -e_s^{(v)} \sin \lambda_s l & e_s^{(v)} \cos \lambda_s l \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$(e_r^{(v)})_i = \frac{(EA \lambda_r)_i}{(EA \lambda_r)_{i+1}}, \quad (e_1^{(v)})_i = \frac{1}{2} + \frac{(EI \lambda^2)_i}{2(EI \lambda^2)_{i+1}},$$

$$(e_2^{(v)})_i = \frac{1}{2} - \frac{(EI \lambda^2)_i}{2(EI \lambda^2)_{i+1}}, \quad (e_3^{(v)})_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda_{i+1}} + \frac{(EI \lambda^3)_i}{2(EI \lambda^3)_{i+1}},$$

$$(e_4^{(v)})_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda_{i+1}} - \frac{(EI \lambda^3)_i}{2(EI \lambda^3)_{i+1}}, \quad (e_s^{(v)})_i = \frac{(CI_s \lambda_s)_i}{(CI_s \lambda_s)_{i+1}},$$

przy czym dla $B_{i2}^{(v)}$ należy podstawić $I = I_2$, $\lambda = \lambda_2$ oraz dla $B_{i3}^{(v)}$: $I = I_3$, $\lambda = \lambda_3$.

Wykorzystując wzór (2.18) dla przypadku, gdy $(s-1)$ dalszych odcinków obliczeniowych obciążonych jest w swych końcowych przekrojach siłami skupionymi, otrzymuje się:

$$(2.20) \quad a_{i+s}^{(\mu)} = B_{i+s-1}^{(v)} B_{i+s-2}^{(v)} \dots B_i^{(v)} a_i^{(\mu)} + B_{i+s-1}^{(v)} B_{i+s-2}^{(v)} \dots B_{i+1}^{(v)} F_{i+1}^{(v)} f_{i+1}^{(\mu)} + \\ + B_{i+s-1}^{(v)} B_{i+s-2}^{(v)} \dots B_{i+2}^{(v)} F_{i+1}^{(v)} f_{i+1}^{(\mu)} + \dots + F_{i+s-1}^{(v)} f_{i+s-1}^{(\mu)}.$$

W obliczeniach drgań linii wałów przypadki takie mogą mieć miejsce wówczas, gdy wpływ niektórych mas dyskretnych (np. sprzęgieł kołnierzowych) jest zaniedbywalny, natomiast reakcje łożysk nie mogą być pominięte. Liczba macierzy $B^{(v)}$, mnożonych przez siebie według zależności (2.20), może być wówczas znaczna. Macierze $B^{(v)}$ mają jednakże tę dogodną własność¹⁾, że dla odcinków wału o jednakowych stałych materiałowych zależność

¹⁾ Przyjęcie liniowego modelu tłumienia wewnętrznego w linii wałów oraz uwzględnienie wpływu na drgania giętne stałych sił poosiowych, odkształceń postaciowych od sił poprzecznych i momentów sił bezwładności obrotu nie eliminuje tej własności.

(2.20) redukuje się do postaci:

$$(2.21) \quad a_{i+s}^{(\mu)} = B_{i+s-1, i}^{(\nu)} a_i^{(\mu)} + B_{i+s-1, i+1}^{(\nu)} F_i^{(\nu)} f_i^{(\mu)} + B_{i+s-1, i+2}^{(\nu)} F_i^{(\nu)} f_{i+1}^{(\mu)} + \dots + F_i^{(\nu)} f_{i+s-1}^{(\mu)}.$$

Macierze $B_{i+s-1, i+k}^{(\nu)}$ powstają z macierzy $B_i^{(\nu)}$ przez podstawienie

$$(e_r^{(\nu)})_i = (e_1^{(\nu)})_i = (e_3^{(\nu)})_i = (e_s^{(\nu)})_i = 1, \quad (e_2^{(\nu)})_i = (e_4^{(\nu)})_i = 0$$

i zastąpienie l_i przez

$$\sum_{p=i+k}^{\rho=i+s-1} l_p.$$

Należy zaznaczyć, że własności tej nie posiadają spotykane w literaturze macierze przejścia dla wektorów stanu utworzonych z elementów o tym samym wymiarze [2].

Przy występowaniu masy dyskretnej równania określające macierze kolumnowe współczynników $a_{i+1}^{(\mu)}$ mają na podstawie warunków (2.6) i wyrażeń (2.16), (2.17) postać:

$$(2.22) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_{mi}^{(\nu)} a_i^{(\mu)},$$

gdzie:

$$B_{mi}^{(0)} = B_i^{(0)}, \\ B_{mi}^{(\nu)} = B_i^{(\nu)} + \hat{B}_i^{(\nu)}, \quad \nu \neq 0.$$

Macierze $B_i^{(0)}$, $B_i^{(\nu)}$ są identyczne jak w (2.19), natomiast

$$(2.23) \quad \hat{B}_i^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{i1}^{(\nu)} & \dots & \hat{B}_{i4}^{(\nu)} \end{bmatrix}, \\ \hat{B}_{i1}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_1^{(\nu)} \cos \lambda_r l & m_1^{(\nu)} \sin \lambda_r l \end{bmatrix}_{(i)}, \\ \hat{B}_{i2}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} -m_2^{(\nu)} \sin \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \cos \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2 l \\ -m_2^{(\nu)} \cos \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \sin \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2 l \\ m_2^{(\nu)} \sin \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \cos \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2 l \\ m_2^{(\nu)} \cos \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \sin \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2 l \end{bmatrix}_{(i)}, \\ \hat{B}_{i4}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_4^{(\nu)} \cos \lambda_s l & m_4^{(\nu)} \sin \lambda_s l \end{bmatrix}_{(i)}.$$

Macierze $\hat{B}_{i3}^{(\nu)}$ otrzymuje się z macierzy $\hat{B}_{i2}^{(\nu)}$ zastąpieniem $m_2^{(\nu)}$ przez $m_3^{(\nu)}$, $m_6^{(\nu)}$ przez $m_5^{(\nu)}$ oraz λ_2 przez λ_3 . Oznaczono tu:

$$m_{i1}^{(\nu)} = \frac{m_{i1}(\nu\omega)^2}{(EA\lambda_r)_{i+1}}, \quad m_{i2}^{(\nu)} = \frac{m_{i2}(\nu\omega)^2}{(EI_2\lambda_2^3)_{i+1}}, \quad m_{i3}^{(\nu)} = \frac{m_{i3}(\nu\omega)^2}{(EI_3\lambda_3^3)_{i+1}}, \\ m_{i4}^{(\nu)} = \frac{m_{i4}(\nu\omega)^2}{(CI_s\lambda_s)_{i+1}}, \quad m_{i5}^{(\nu)} = \frac{m_{i5}(\nu\omega)^2}{(EI_3\lambda_3^3)_{i+1}}, \quad m_{i6}^{(\nu)} = \frac{m_{i6}(\nu\omega)^2}{(EI_2\lambda_2^2)_{i+1}}.$$

Ukazana powyżej własność iloczynów macierzy $B_i^{(\nu)}$ nie dotyczy iloczynów typu $\hat{B}_i^{(\nu)} \cdot \hat{B}_j^{(\nu)}$, $B_i^{(\nu)} \cdot \hat{B}_j^{(\nu)}$, $\hat{B}_i^{(\nu)} \cdot B_j^{(\nu)}$.

Relację pomiędzy macierzami kolumnowymi $a_{i+1}^{(\mu)}$ oraz $a_i^{(\mu)}$ dwóch połączonych ze sobą odcinków wałów o różnych stałych materiałowych opisują macierze przejścia $B_i^{(\nu)}$ (2.19):

$$(2.24) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_i^{(\nu)} a_i^{(\mu)}.$$

Wyprowadzone powyżej zależności odnoszą się do ruchomych układów współrzędnych. W celu uwzględnienia oddziaływania konstrukcji podpierającej linię wałów przyjęto nieruchomy ortogonalny układ współrzędnych X_1, X_2, X_3 (rys. 1), którego oś X_1 pokrywa się z osią obrotu linii wałów. Osie X_2, X_3 są w chwili $t_0 = 2k\pi/\omega, k = 0, 1, 2, \dots$ odpowiednio równoległe do osi x_{i2}, x_{i3} lokalnych układów współrzędnych tych odcinków obliczeniowych, dla których $(I_2)_i = (I_3)_i$. Osie x_{i2}, x_{i3} lokalnych układów współrzędnych tych odcinków, dla których $(I_2)_i \neq (I_3)_i$, mogą w ogólnym przypadku nie być w chwili t_0 odpowiednio równoległe do osi X_2, X_3 . Niech zatem δ_i oznacza kąt obrotu lokalnego układu współrzędnych i -tego odcinka obliczeniowego w stosunku do układu X_1, X_2, X_3 , mierzony w kierunku wirowania wałów w chwili t_0 .

Dla uproszczenia opisu wprowadzono ciąg indeksów $1, 2, \dots, n$ (n — liczba łożysk), odpowiadających kolejnym podporom łożyskowym. Amplitudy μ -tych harmonicznym uogólnionych reakcji łożysk i przemieszczeń wału w miejscach podpór łożyskowych w lokalnych układach współrzędnych oznaczono

$$f_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots, f_{n\alpha}^{(\mu)}; \quad u_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots, u_{n\alpha}^{(\mu)}; \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6.$$

Analogiczne wielkości w układzie X_1, X_2, X_3 oznaczono

$$\tilde{f}_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots, \tilde{f}_{n\alpha}^{(\mu)}; \quad \tilde{u}_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots, \tilde{u}_{n\alpha}^{(\mu)}.$$

Zatem w dowolnej chwili t zachodzą relacje:

$$(2.25) \quad \tilde{u}_i = \Pi_i u_i, \quad \tilde{f}_i = \Pi_i f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= \sum_{\mu} \tilde{u}_i^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), & \tilde{u}_i^{(\mu)} &= \{\tilde{u}_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \\ u_i &= \sum_{\mu} u_i^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), & u_i^{(\mu)} &= \{u_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \\ \tilde{f}_i &= \sum_{\mu} \tilde{f}_i^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), & \tilde{f}_i^{(\mu)} &= \{\tilde{f}_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \\ f_i &= \sum_{\mu} f_i^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), & f_i^{(\mu)} &= \{f_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \end{aligned}$$

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Gamma \Pi'_i & \Pi'_i \Gamma \end{bmatrix}, \quad \Pi'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t + \delta_i) & -\sin(\omega t + \delta_i) \\ 0 & \sin(\omega t + \delta_i) & \cos(\omega t + \delta_i) \end{bmatrix}.$$

Macierze Π_i można przedstawić w postaci:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \Pi_i &= \check{\Pi}_i \exp(-j\omega t) + \hat{\Pi}_i + \check{\Pi}_i \exp(j\omega t), \\ \check{\Pi}_i &= \begin{bmatrix} \check{\Pi}'_i & \check{\Pi}'_i \Gamma \end{bmatrix}, \quad \hat{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}'_i & \hat{\Pi}'_i \Gamma \end{bmatrix}, \\ \check{\Pi}'_i &= \frac{1}{2} \exp(-j\delta_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Pi}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\Pi}'_i &= \frac{1}{2} \exp(j\delta_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

W celu wyprowadzenia zależności obejmującej n łożysk tworzymy macierze:

$$(2.27) \quad \Pi = \check{\Pi} \exp(-j\omega t) + \tilde{\Pi} + \hat{\Pi} \exp(j\omega t), \\ \check{\Pi} = \Gamma \check{\Pi}_i \lfloor_{6n}, \quad \tilde{\Pi} = \Gamma \tilde{\Pi}_i \lfloor_{6n}, \quad \hat{\Pi} = \Gamma \hat{\Pi}_i \lfloor_{6n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dynamiczne własności konstrukcji podpierającej linię wałów można określić przy pomocy macierzy podatności dynamicznej tej konstrukcji:

$$D^{(\mu)} = [D_{ij}^{(\mu)}]_{6n}, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ D_{ij}^{(\mu)} = [d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)}]_6, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6; \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1 \dots \nu \dots,$$

gdzie $d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)}$ jest wartością ilorazu amplitudy μ -tej harmonicznej przemieszczenia w miejscu i -tej podpory łożyskowej w kierunku α i amplitudy μ -tej harmonicznej wywołującej to przemieszczenie siły, przyłożonej w miejscu j -tej podpory łożyskowej w kierunku β :

$$(2.28) \quad d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)} = \tilde{u}_i^{(\mu)} (\tilde{f}_{j\beta}^{(\mu)})^{-1}.$$

Jak łatwo stwierdzić, zachodzi przy tym²⁾

$$(2.29) \quad d_{ij\alpha\beta}^{(-\nu)} = d_{ij\alpha\beta}^{(\nu)} \exp(-j2\varepsilon_{ij\alpha\beta}^{(\nu)}),$$

gdzie $d_{ij\alpha\beta}^{(\nu)}$ może być określone w znany sposób [2]:

$$(2.30) \quad d_{ij\alpha\beta}^{(\nu)} = \tilde{u}_i^{(\nu)} \exp[j(\nu\omega t + \varepsilon_{ij\alpha\beta}^{(\nu)})] [\tilde{f}_{j\beta}^{(\nu)} \exp(j\nu\omega t)]^{-1},$$

$\tilde{u}_i^{(\nu)}, \tilde{f}_{j\beta}^{(\nu)}$ — rzeczywiste amplitudy przemieszczenia i siły (w układzie X_1, X_2, X_3),
 $\varepsilon_{ij\alpha\beta}^{(\nu)}$ — kąt przesunięcia fazowego, wywołanego tłumieniem w konstrukcji.

Tworzymy macierze kolumnowe:

$$\tilde{u}^{(\mu)} = \{\tilde{u}_i^{(\mu)}\}, \quad \tilde{f}^{(\mu)} = \{\tilde{f}_i^{(\mu)}\}, \quad u^{(\mu)} = \{u_i^{(\mu)}\}, \quad f^{(\mu)} = \{f_i^{(\mu)}\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ogólna zależność pomiędzy macierzami kolumnowymi $\tilde{f}^{(\mu)}$ i $\tilde{u}^{(\mu)}$ ma postać:

$$(2.31) \quad \tilde{u}^{(\mu)} = D^{(\mu)} \tilde{f}^{(\mu)}.$$

Zależność ta nie obejmuje wpływu podatności filmu olejowego w łożyskach. W celu uwzględnienia podatności filmu rozpatrzmy wał na dwóch podporach, którego schemat obliczeniowy przedstawiono na rys. 3. Film olejowy traktowany jest jako nieważki, dlatego siła oddziaływania wału na film w danym łożysku jest równa sile działającej na podporę tego łożyska.

Zachodzi zatem oczywista zależność:

$$l_2 - \tilde{u}_2 + \tilde{f}_1 d_{21} + \tilde{f}_2 d_{22} = l_2 - \tilde{u}_{2f},$$

przy czym amplituda ugięcia filmu pod wpływem siły $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t)$ wynosi

$$\tilde{u}_{2f}^{(\mu)} = \tilde{f}_2^{(\mu)} (c_2 + j\mu\omega b_2)^{-1},$$

²⁾ Zastosowane w niniejszej pracy przedstawienie wielkości harmonicznych przy pomocy dwóch wirujących w przeciwnych kierunkach wektorów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej i rozszerzenie pojęcia macierzy podatności dynamicznej na ujemne wartości μ jest związane z postacią macierzy Π (2.27).

gdzie b_2, c_2 — współczynniki zlinearyzowanych charakterystyk tłumienia lepkościowego i sztywności filmu olejowego w łożysku 2. Można więc napisać:

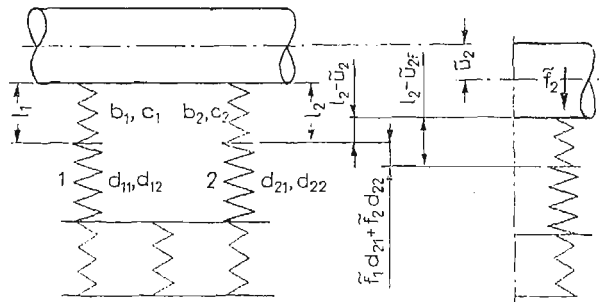
$$\tilde{u}_2^{(\mu)} = \tilde{f}_1^{(\mu)} d_{21}^{(\mu)} + \tilde{f}_2^{(\mu)} d_{22}^{(\mu)} + \tilde{f}_2^{(\mu)} d_{12}^{(\mu)}$$

i analogicznie dla podpory 1

$$\tilde{u}_1^{(\mu)} = \tilde{f}_1^{(\mu)} (d_{11}^{(\mu)} + d_{11}^{(\mu)}) + \tilde{f}_2^{(\mu)} d_{12}^{(\mu)},$$

gdzie $d_1^{(\mu)}$ i $d_2^{(\mu)}$ są zespolonymi podatnościami dynamicznymi filmu olejowego w łożyskach 1 i 2:

$$d_i^{(\mu)} = (c_i + j\mu\omega b_i)^{-1}, \quad i = 1, 2.$$



Rys. 3. Schemat przemieszczenia wału z uwzględnieniem podatności filmu olejowego i konstrukcji podpierającej. b_1, b_2, c_1, c_2 — współczynniki tłumienia lepkościowego i sztywności filmu olejowego w łożyskach 1 i 2; d_{ij} — współczynniki podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej ($i, j = 1, 2$); \tilde{f}_2 — siła dynamicznego oddziaływania wału na film olejowy w łożysku 2; l_1, l_2 — wysokości filmu olejowego w łożyskach 1 i 2, \tilde{u}_2 — przemieszczenie wału w miejscu podpory 2; \tilde{u}_{2f} — ugięcie filmu olejowego w łożysku 2 pod wpływem siły \tilde{f}_2

Uogólniając powyższe rozważania można zamiast (2.31) napisać:

$$(2.32) \quad \tilde{u}^{(\mu)} = \tilde{D}^{(\mu)} \tilde{f}^{(\mu)},$$

gdzie $\tilde{D}^{(\mu)}$ różni się od macierzy $D^{(\mu)}$ tym, że jej elementy na głównej przekątnej są równe³⁾:

$$(2.33) \quad \tilde{d}_{i\alpha\alpha}^{(\mu)} = d_{i\alpha\alpha}^{(\mu)} + (c_{i\alpha} + j\mu\omega b_{i\alpha})^{-1}.$$

Poczynając od zależności (2.28) siły w łożyskach traktowano jako siły działające na podpory łożyskowe i film olejowy, a uprzednio — jako reakcje oddziaływujące na wał. Do dalszych rozważań stosować będziemy zatem zamiast (2.32) zależność:

$$(2.34) \quad \tilde{u}^{(\mu)} = -\tilde{D}^{(\mu)} \tilde{f}^{(\mu)},$$

gdzie $\tilde{f}^{(\mu)}$ jest macierzą kolumnową amplitud μ -tych harmonicznym reakcji działających na wał w łożyskach, w układzie X_1, X_2, X_3 .

³⁾ Lub $\tilde{d}_{i\alpha\alpha}^{(\mu)} = d_{i\alpha\alpha}^{(\mu)} + (c_{i\alpha}^{(\mu)} + j\mu\omega b_{i\alpha}^{(\mu)})^{-1}$, gdy współczynniki sztywności i tłumienia filmu zależą w istotny sposób od częstości wymuszeń.

W wyniku podstawienia (3.4) do warunku (2.40) można wykorzystując warunek (2.39) napisać:

$$(3.5) \quad \underline{a}_1^{(r)} = K^{(r)}(L^{(r)}\underline{\tilde{u}}^{(r)} + M^{(r)}\underline{f}^{w(r)}),$$

gdzie:

$$K^{(r)} = \left[\begin{array}{c} \underline{A}^{(r)} \\ \underline{B}^{(r)} - \underline{\tilde{B}}^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1}\underline{\bar{C}}^{(r)} \end{array} \right]_{12(2r+1)}^{-1}, \quad L^{(r)} = - \left[\begin{array}{c} 0 \\ \underline{\tilde{B}}^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1}(U^{(r)})^{-1} \end{array} \right]_{12(2r+1) \times 6n(2r+1)},$$

$$M^{(r)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \underline{\tilde{B}}^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1}\underline{\bar{C}}^{(r)} - \underline{\bar{B}}^{(r)} \end{array} \right]_{12(2r+1) \times 6l(2r+1)}.$$

Z zależności (3.2), (3.4) i (3.5) wynika:

$$(3.6) \quad \underline{f}^{(r)} = U^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1} \{ [(U^{(r)})^{-1} - \underline{\bar{C}}^{(r)}K^{(r)}L^{(r)}]\underline{\tilde{u}}^{(r)} - (\underline{\bar{C}}^{(r)} + \underline{\bar{C}}^{(r)}K^{(r)}M^{(r)})\underline{f}^{w(r)} \}.$$

Jeśli macierz kolumnową amplitud znanych sił wymuszających w i -tym wariancie pomiarowym oznaczymy przez $(\underline{f}^{w(r)})_i$, a macierz odpowiadających im amplitud przemieszczeń wału w łożyskach przez $(\underline{\tilde{u}}^{(r)})_i$, to macierz zawierająca poszukiwane macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej (łącznie z filmem olejowym) wyznaczyć można z zależności:

$$(3.7) \quad \underline{\tilde{D}}^{(r)} = \underline{\tilde{U}}^{(r)}(\underline{\tilde{F}}^{(r)})^{-1},$$

gdzie:

$$\underline{\tilde{F}}^{(r)} = [(\underline{f}^{(r)})_1, (\underline{f}^{(r)})_2, \dots, (\underline{f}^{(r)})_{6n(2r+1)}],$$

$$\underline{\tilde{U}}^{(r)} = [(\underline{\tilde{u}}^{(r)})_1, (\underline{\tilde{u}}^{(r)})_2, \dots, (\underline{\tilde{u}}^{(r)})_{6n(2r+1)}],$$

$$(\underline{f}^{(r)})_i = U^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1} \{ [(U^{(r)})^{-1} - \underline{\bar{C}}^{(r)}K^{(r)}L^{(r)}](\underline{\tilde{u}}^{(r)})_i - (\underline{\bar{C}}^{(r)} + \underline{\bar{C}}^{(r)}K^{(r)}M^{(r)})(\underline{f}^{w(r)})_i \}.$$

Relacje (2.29) i (2.30) pozwalają zmniejszyć wymiary macierzy w zależności (3.7) i niezbędną liczbę wariantów pomiarowych z $6n(2r+1)$ na $6n(r+1)$ (tj. na podstawie pomiarów wystarczy wyznaczyć macierz $\underline{\tilde{D}}^{(r)} = -\Gamma \underline{\tilde{D}}^{(0)}, \underline{\tilde{D}}^{(1)}, \dots, \underline{\tilde{D}}^{(i_{aa}-1)}_{6n(r+1)}$).

Zakłada się przy tym liniową niezależność macierzy kolumnowych $(\underline{f}^{(r)})_i$ dla $i = 1, 2, \dots, 6n(r+1)$. W szczególności można to uzyskać dysponując jednym źródłem sił wymuszających, przykładając je kolejno w $l = n$ punktach linii wałów⁵⁾, w kierunkach odpowiadających $\alpha = 1, \dots, 6$ i z częstościami $0, \omega, 2\omega, \dots, r\omega$.

W przypadku, gdy przy pomiarach linii wałów nie wiruje, równaniami wyjściowymi do podobnego wyprowadzenia zależności określającej macierz podatności $\underline{\tilde{D}}^{(v)}$ są wyrażenia (2.34), (2.38) i (2.43) dla $\mu = v$, $\underline{\tilde{u}}^{(v)} = \underline{u}^{(v)}$, $\underline{f}^{(v)} = \underline{f}^{(v)}$.

Gdy wszystkie odcinki linii wałów wykazują kołową symetrię sztywności giętej i analiza prowadzona jest przy wirującej linii wałów w nieruchomym układzie współrzędnych, wykorzystać można zależności (2.34), (2.38) i (2.43) dla $\mu = v$ z zamianą $\underline{u}^{(v)}$ na $\underline{\tilde{u}}^{(v)}$ i $\underline{f}^{(v)}$ na $\underline{f}^{(v)}$ oraz odniesieniem znanych sił wymuszających do nieruchomego układu współrzędnych.

⁵⁾ Przy zmianach punktów przyłożenia sił wymuszających macierze $\underline{\tilde{C}}^{(r)}$, $\underline{\bar{C}}^{(r)}$, $\underline{\bar{C}}^{(r)}$, $K^{(r)}$, $L^{(r)}$ i $M^{(r)}$ nie ulegają zmianom, gdy podział linii wałów na odcinki obliczeniowe (p. 2) uwzględni wszystkie te punkty.

4. Uwagi końcowe

W celu zachowania ogólności rozważań nie uwzględniono w niniejszej pracy, że wpływ podatności fundamentów przy drganiach skrętnych linii wałów jest pomijalny i odpowiednie elementy macierzy podatności dynamicznej poza główną przekątną są równe zeru, a na głównej przekątnej — zredukowane do członów dotyczących wpływu filmu olejowego w łożyskach. To samo dotyczy drgań podłużnych linii wałów gdy fundament nie przejmuje sił poosiowych, np. przy braku łożyska oporowego. Elementy macierzy podatności dynamicznej odnoszące się do drgań giętnych mogą być wyznaczone na podstawie $4n(r+1)$ wariantów pomiarowych, a przy ograniczeniu się do drgań poprzecznych — na podstawie $2n(r+1)$ wariantów (przy czym źródłem stałej siły wymuszającej w ruchomym układzie współrzędnych może być osadzona na wale niewyrównoważona masa, wirująca wraz z wałem). Pomiaru przy wirującym wale mają tę zaletę, że własności tworzącego się wówczas w łożyskach klina smarowego są bardziej zbliżone do analogicznych własności w warunkach eksploatacyjnych, niż charakterystyki warstwy oleju smarowego w łożyskach przy nieruchomym wale.

Przedstawiona powyżej metoda identyfikacji podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej łącznie z filmem olejowym wymaga pomiarów przemieszczeń wału w łożyskach względem nieruchomego układu współrzędnych. Jeden ze sposobów realizacji tego zadania może polegać na równoczesnej rejestracji względnych przemieszczeń wału w łożysku (mierzonych np. czujnikiem bezkontaktowym) i drgań obudowy łożyska oraz na zsumowaniu wyników w/w pomiarów, odnoszących się do tego samego kierunku względem nieruchomego układu współrzędnych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. KOLENDA, *Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów maszyn*, Mech. Teor. i Stos., 3, 16 (1978).
2. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.

Резюме

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛОПРОВОДОВ С УЧЁТОМ АСИММЕТРИИ
ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ И ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ. МЕТОД
ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ
ВАЛОПРОВОДОВ

Работа касается колебаний валопроводов при периодических возмущениях, с учётом податливости масляного слоя в подшипниках и фундамента. Выведенные зависимости относятся к несомпряжённым изгибным, крутильным и продольным колебаниям, описанным линейными дифференциальными уравнениями в частных производных. При этом не требуется симметрия изгибной жесткости. Для уменьшения размеров матриц системы применяются матрицы перехода, связывающие коэффициенты решений соседних участков валопровода. Такие матрицы перехода проще матриц перехода связывающих векторы перемещений и усилий, а их умножение может быть в случае участков с одинаковыми физическими параметрами заменено суммированием аргументов

функции, находящихся в этих матрицах. Решение получается из системы сопряжённых матричных уравнений, относящихся к всем рассматриваемым гармоническим составляющим.

Представляется метод определения коэффициентов динамической податливости фундамента вместе с масляным слоем на основе результатов измерений колебаний валопровода при известных возмущениях, прикладываемых в любых точках валопровода.

S u m m a r y

FORCED VIBRATIONS OF SHAFTINGS WITH ASYMMETRY OF A BENDING RIGIDITY ON FLEXIBLE FOUNDATIONS. IDENTIFICATION METHOD OF THE DYNAMICAL RECEPTANCES OF SHAFTING FOUNDATIONS

In this paper the periodically excited vibrations of shaftings are considered with the flexibility of an oil film in bearings and of a foundation taken into account. The derived formulae are concerned with uncoupled bending, torsional and longitudinal vibrations governed by linear partial differential equations, for which the symmetry of a bending rigidity is not assumed. The size of system matrices is reduced by means of the transfer matrices related to solution coefficients for adjacent shaft pieces. Such transfer matrices have simpler form than ones related to state vectors and their multiplication in the case of shaft pieces with equal physical properties can be replaced by adding arguments of functions existing in these matrices. Solutions are obtained from the set of coupled matrix equations relating to all the harmonics considered.

The identification method of dynamical receptances of a foundation together with an oil film is presented which is based on measurements of shafting vibrations caused by known excitations being put in arbitrary shafting points.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT OKRĘTOWY

Praca została złożona w Redakcji 16 stycznia 1978 r.

OKREŚLENIE UGIĘĆ LEPKOPLASTYCZNEJ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ OBCIĄŻONEJ IMPULSEM CIŚNIENIA

WIESŁAW WOJEWÓDZKI, ANNA PERDZYŃSKA (WARSZAWA)

1. Wstęp

Istnieje wiele prac dotyczących dynamicznych problemów cienkich płyt niesprężystych o warunkach kołowej symetrii. Wyczerpująca bibliografia tych opracowań nie jest naszym celem. Wymienione zostaną tylko niektóre prace. Pierwsze rozwiązania w ramach klasycznej teorii plastyczności podali WANG, HOPKINS [1], HOPKINS, PRAGER [2], WANG [3]. Następnie uwzględniono niektóre z dodatkowych czynników jak: własności sprężyste materiału, wzmocnienie, lepkość i zmiany geometrii. Uczynili to: DUFFY, KEY [4], WITMER, CLARK, BALMER [5], FLORENCE [6], JONES [7], WIERZBICKI [8—12], LEPIK [13], PERRONE [14]. Obszerne rozprawy WIERZBICKIEGO [15] poświęcone dynamice powłok i płyt lepkoplastycznych podaje analityczne metody wyznaczania deformacji, metody oszacowania ugięć, omawia wpływ różnych czynników decydujących o przebiegu procesu dynamicznego, oraz przegląd dotychczasowych osiągnięć. Istnieje nieporównanie mniej rozwiązań płyt o dowolnym kształcie. Przyczyna leży w złożoności fizycznej i matematycznej problemu. Dynamiczny warunek plastyczności musi być wyrażony w conajmniej trójwymiarowej przestrzeni sił wewnętrznych. Uniemożliwia to prostą linearyzację prawa płynięcia. Równania różniczkowe rządzące problemem stają się bardziej skomplikowane niż w przypadku kołowej symetrii. Uwzględnienie wymienionych już dodatkowych czynników komplikuje problem jeszcze bardziej. COX i MORLAND [16] jako pierwsi podali rozwiązanie dla płyty kwadratowej. Podobny problem z uwzględnieniem lepkości materiału był rozpatrywany w pracy WIERZBICKIEGO [17]. JONES, URAN, TEKIN [18] badali eksperymentalnie prostokątne płyty utwierdzone na krawędziach wykonane z aluminium i miękkiej stali obciążone impulsem ciśnienia. Stwierdzono istotny wpływ zmian geometrii i lepkości materiału na zmniejszenie przemieszczeń. W pracy [19] JONES uwzględnił efekt zmian geometrii podając uproszczoną teorię idealnie plastycznych płyt dowolnego kształtu. Podane wyżej rozwiązania [16], [19] jak również rozwiązanie BAKA, NIEPOSTYNA [20], bazując na teorii linii załomów, przyjmują ustalone pole prędkości, a tym samym narzucają końcowy kształt odkształconej płyty. Stwierdzono doświadczalnie, że w procesie dynamicznym deformacja płyty charakteryzuje się znaczną zmianą postaci pola prędkości przemieszczeń. W pracy WOJEWÓDZKIEGO, WIERZBICKIEGO [21] uogólniono teorię WIERZBICKIEGO dotyczącą konstrukcji powierzchniowych o osiowej symetrii na przypadek płyt o dowolnym kształcie. Jako przykład rozwiązano prostokątną płytę utwierdzoną na obwodzie, obciążoną idealnym impulsem ciśnienia. Celem niniejszej

pracy jest szczegółowa analiza w ramach założeń [21] procesu deformacji i określenie końcowych ugięć płyty prostokątnej o krawędziach zamocowanych przegubowo, obciążonej dynamicznie. Zbadany będzie wpływ lepkości materiału, kształtu i wielkości impulsu. Końcowe ugięcia będą wyznaczone przy zastosowaniu dwóch sposobów spełnienia kryterium odciążenia. W wyniku przejścia granicznego podane będą wyniki dla plastyczności idealnej.

2. Równanie ruchu lepkoplastycznej płyty

Równanie ruchu płyty ma postać, [21]

$$(2.1) \quad \ddot{w} + \alpha_0 \Delta^4 \dot{w} - (P - P^*)/\mu = 0,$$

gdzie w — oznacza przemieszczenie normalne, $\nabla^4 \dot{w} = \dot{w}_{,\alpha\alpha\beta\beta}$ jest operatorem Laplace'a, $\alpha_0 = 4kh^3/(3\gamma\mu)$, $k = \sigma_0/\sqrt{3}$, $\mu = 2h\rho$, σ_0 — oznacza granicę plastyczności materiału, γ — lepkość, ρ — gęstość materiału, zaś $2h$ jest grubością płyty. Przecinkiem oznaczono różniczkowanie względem współrzędnych kartezjańskiego układu x_α , ($\alpha, \beta = 1, 2$), a kropką względem czasu t . Przez $P(x_\alpha, t)$ oznaczono ciśnienie przyłożone do płyty, a przez P^* jej nośność graniczną.

Równanie powyższe wprowadzone zostało w oparciu o zlinearyzowane prawo lepkoplastyczności, przy pominięciu odkształceń sprężystych i założeniu małych ugięć. Obowiązuje ono tylko w obszarach plastycznego płynięcia. Granicę między sztywnymi obszarami, które mogą występować w płycie, a lepkoplastycznymi określamy z warunku odciążenia, $\dot{w} = 0$. Równanie (2.1) wraz z warunkiem odciążenia opisuje plastyczne i lepkie efekty, propagację stref sztywnych i zmianę postaci pola przemieszczeń. Równanie to można względnie szybko rozwiązać i wyznaczyć trwale ugięcia płyty.

3. Metoda rozwiązania

Płyta prostokątna o krawędziach przegubowo zamocowanych jest obciążona równomiernie rozłożonym na całej powierzchni impulsem ciśnienia dowolnie zmiennym w czasie i działającym w kierunku normalnym do jej powierzchni, rys. 1, 2. Lepkoplastyczna deformacja wystąpi, jeżeli w chwili $t = 0$ będzie $\bar{P} > P^*$. Gdyby przez cały czas $\bar{P} = P^*$ to plastyczna deformacja płyty byłaby nieskończenie powolna i nie pojawiłyby się siły inercji i efekty lepkie. W przypadku przedstawionym na rys. 2 należy rozpatrzyć dwie fazy ruchu płyty.

Faza I. $0 \leq t \leq \tau$.

Równanie ruchu płyty ma postać

$$(3.1) \quad L(\dot{w}) = \dot{w} + \alpha_0 \nabla^4 \dot{w} - (P(t) - P^*)/\mu = 0,$$

gdzie nośność graniczna płyty obciążonej stałym i równomiernie rozłożonym na całej powierzchni ciśnieniem wynosi

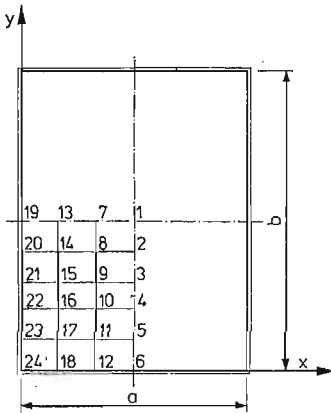
$$(3.2) \quad P^* = \frac{24M_0\lambda^2}{b^2(\sqrt{3+1/\lambda^2} - 1/\lambda)^2}, \quad M_0 = \sigma_0 h, \quad \lambda = \frac{b}{a} \geq 1.$$

Przyjmujemy, że nieodkształcona płyta jest płaska, zatem warunki początkowe są następujące:

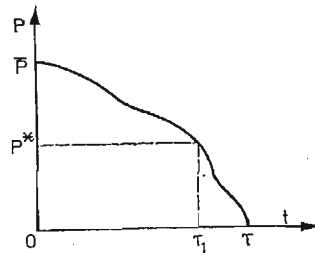
$$(3.3) \quad \dot{w}(x, y, 0) = 0 \quad w(x, y, 0) = 0.$$

Warunki brzegowe są określone przez

$$(3.4) \quad \begin{aligned} w(0, y, t) &= 0, & \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ w(a, y, t) &= 0, & \frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ w(x, 0, t) &= 0, & \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} &= 0, \\ w(x, b, t) &= 0, & \frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 1. Wymiary płyty



Rys. 2. Impuls ciśnienia

Pole prędkości ugięcia spełniające warunki brzegowe (3.4) przyjmujemy w postaci szeregu:

$$(3.5) \quad \dot{w}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Funkcję amplitudy $A_{nm}(t)$ wyznaczamy metodą Galerkina:

$$(3.6) \quad \int_0^a \int_0^b L(\dot{w}) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy = 0, \quad k, l = 1, 2, 3 \dots$$

Otrzymane z (3.6) równanie różniczkowe ma postać

$$(3.7) \quad \dot{A}_{nm}(t) + C_{nm}A_{nm}(t) - G_{nm}(P(t) - P^*) = 0,$$

gdzie

$$(3.8) \quad C_{nm} = (m^2 a^2 + n^2 b^2)^2 \frac{\alpha_0 \pi^4}{a^4 b^4}, \quad G_{nm} = \frac{16}{nm\mu\pi^2},$$

a wskaźniki n i m przyjmują tylko wartości liczb całkowitych nieparzystych. Rozwiązując równanie (3.7) metodą uzmienniania stałych i wykorzystując pierwszy z warunków początkowych (3.3) do wyznaczenia stałej całkowania otrzymujemy funkcję amplitudy

$$(3.9) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} [D_{nm}(t) + P^*(e^{-C_{nm}t} - 1) - D_{nm}(0)e^{-C_{nm}t}],$$

gdzie

$$(3.10) \quad D_{nm}(t) = C_{nm} e^{-C_{nm}t} \int P(t) e^{C_{nm}t} dt.$$

Całkując (3.5) z uwzględnieniem (3.9) i drugiego warunku początkowego (3.3) otrzymujemy następujące pola ugięć:

$$(3.11) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} [(P^* - D_{nm}(0))(1 - e^{-C_{nm}t}) + (Y_{nm}(t) - Y_{nm}(0))C_{nm} - P^* C_{nm}t] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

gdzie

$$(3.12) \quad Y_{nm}(t) = \int D_{nm}(t) dt.$$

Ruch płyty może zakończyć się jeszcze pod działaniem obciążenia w przedziale czasu $\tau_1 - \tau$, gdzie τ_1 jest czasem, w którym funkcja $P(t)$ przyjmuje wartość obciążenia granicznego P^* .

Warunek odciążenia

$$(3.13) \quad \dot{w}(x, y, t_f) = 0$$

można spełnić w dwojaki sposób. Pierwszy sposób dopuszcza ujemne wartości amplitud prędkości ugięcia. Stosując ten sposób należy zbadać czy w poszczególnych punktach płyty warunek (3.13) jest spełniony dla czasów $\tau_1 \leq t \leq \tau$. W tych punktach, w których ten warunek jest spełniony końcowe ugięcia obliczamy według (3.11). W pozostałych punktach płyty ruch zakończy się w fazie II. Drugi sposób uwzględnienia tylko dodatnie wartości funkcji amplitud $A_{nm}(t)$. Zatem stosując ten sposób amplitudy następnym postaci $A_{nm}(t)$, dla ustalonego problemu brzegowego, będą równe zero dla czasu $t > t_{f_{nm}}$, gdzie $t_{f_{nm}}$ jest określone przez równanie $A_{nm}(t_{f_{nm}}) = 0$, które po uwzględnieniu (3.9) ma postać

$$(3.14) \quad D_{nm}(t)_{f_{nm}} + P^*(e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}} - 1) - D_{nm}(0)e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}} = 0.$$

W końcowym okresie deformacji istnieje tylko pierwsza postać $A_{11}(t)$ i w czasie $t_{f_{11}}$ wszystkie punkty płyty zatrzymują się jednocześnie. Jeżeli wyznaczony z (3.14) czas $t_{f_{11}}$ będzie mniejszy od τ , oznacza to, że ruch płyty zakończy się w fazie I. Końcowe ugięcia wyznacza się wtedy z (3.11).

Faza II, $\tau < t$.

W tej fazie ruchu $P(t) = 0$, ale płyta będzie odkształcała się dalej zanim energia kinetyczna wprowadzona uprzednio przez działanie obciążenia nie zostanie rozproszona w lepkoplastycznej pracy. Równanie ruchu płyty w tej fazie jest następujące:

$$(3.15) \quad L(\dot{w}) = \ddot{w} + \alpha_0 \nabla^4 \dot{w} + P^*/\mu = 0.$$

Pole prędkości ugięcia przyjmujemy jak poprzednio, w postaci (3.5). Dalej postępujemy analogicznie jak w fazie I.

Równanie różniczkowe amplitudy ma postać (3.7) z podstawieniem $P(t) = 0$.

Spełniając warunki ciągłości

$$(3.16) \quad \dot{w}_I(x, y, \tau) = \dot{w}_{II}(x, y, \tau), \quad w_I(x, y, \tau) = w_{II}(x, y, \tau),$$

gdzie indeksy I i II odnoszą się odpowiednio do wielkości fazy pierwszej i drugiej, obliczamy stałe całkowania i ostatecznie otrzymujemy

$$(3.17) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} [(D_{nm}(\tau)e^{C_{nm}\tau} + P^* - D_{nm}(0))e^{-C_{nm}t} - P^*],$$

$$(3.18) \quad \dot{w}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$(3.19) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} [(D_{nm}(0) - P^* - D_{nm}(\tau)e^{C_{nm}\tau}) \times \\ \times e^{-C_{nm}t} - P^* C_{nm}t + (Y_{nm}(\tau) - Y_{nm}(0))C_{nm} + D_{nm}(\tau) - D_{nm}(0) + P^*] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Dla tych punktów płyty, które nie zatrzymały się w fazie I stosownie do pierwszego sposobu spełnienia kryterium (3.13) czas zatrzymania i końcowe ugięcia oblicza się korzystając z (3.18) i (3.19). Natomiast stosując drugi sposób spełnienia kryterium odciążenia czas końcowy amplitudy A_{nm} dla tych numerów wskaźników n i m dla których nie został ustalony w fazie I wyznacza się przyrównując (3.17) do zera. Otrzymujemy

$$(3.20) \quad t_{f_{nm}} = \frac{1}{C_{nm}} \ln \frac{D_{nm}(\tau)e^{C_{nm}\tau} + P^* - D_{nm}(0)}{P^*}.$$

Chwila $t_{f_{11}}$ obliczona z tego wzoru jest czasem zakończenia ruchu płyty. Końcowe ugięcia obliczamy korzystając ze związku (3.19).

Dyskusję różnych kryteriów odciążenia dla zlineryzowanych równań lepkoplastyczności i interpretację energetyczną podanych dwóch sposobów spełnienia (3.13) zawiera praca WIERZBICKIEGO [23]. Pierwszy sposób dopuszcza przepływ energii z niższych do wyższych postaci prędkości przemieszczenia, drugi sposób takiej transmisji nie dopuszcza.

Obecnie rozpatrzmy trzy prędkości szczególne, a mianowicie obciążenie płyty prostokątnym, trójkątnym i idealnym impulsem ciśnienia.

4. Obciążenie prostokątnym impulsem ciśnienia

W podanej w poprzednim rozdziale metodzie rozwiązania należy uwzględnić, że $P(t) = \bar{P} = \text{const}$, rys. 3. Otrzymujemy:

Faza I. $0 \leq t \leq \tau$.

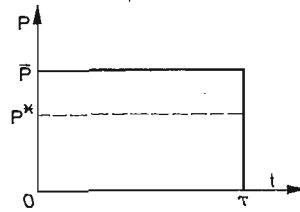
$$(4.1) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} (\bar{P} - P^*) (1 - e^{-C_{nm}t}),$$

$$(4.2) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} (\bar{P} - P^*) (e^{-C_{nm}t} + C_{nm}t - 1) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Faza II. $\tau < t$.

$$(4.3) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} [(\bar{P} e^{C_{nm}\tau} - \bar{P} + P^*) e^{-C_{nm}t} - P^*],$$

$$(4.4) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} [(\bar{P} - P^* - \bar{P} e^{C_{nm}\tau}) e^{-C_{nm}t} - P^* (C_{nm} + \bar{P}\tau C_{nm} + P^*)] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$



Rys. 3. Prostokątny impuls ciśnienia

Czasy zakończenia ruchu punktów płyty według pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia określa się przez przyrównanie do zera prawej strony równania (3.5) z aktualną amplitudą (4.3), a końcowe ugięcia z (4.4). Natomiast według drugiego sposobu spełnienia kryterium przyrównując (4.3) do zera otrzymujemy

$$(4.5) \quad t_{f_{nm}} = \frac{1}{C_{nm}} \ln \frac{\bar{P} e^{C_{nm}\tau} - \bar{P} + P^*}{P^*}.$$

Dla $t > t_{f_{nm}}$ amplitudy wyższych postaci wynoszą zero. Podstawiając (4.5) do (4.4) otrzymujemy wzór na końcowe ugięcia płyty

$$(4.6) \quad w_f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} \left(\bar{P}\tau C_{nm} - P^* \ln \frac{\bar{P} e^{C_{nm}\tau} - \bar{P} + P^*}{P^*} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Na zakończenie tego rozdziału podamy wyrażenia (4.5) i (4.6) w przypadku idealnej plastyczności tzn. gdy $\gamma \rightarrow \infty$, odpowiada to zgodnie z (3.8) $C_{nm} \rightarrow 0$. Otrzymujemy

$$(4.7) \quad t_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} t_{f_{nm}} = \frac{\bar{P}\tau}{P^*} = \frac{I}{P^*}, \quad I = \bar{P}\tau,$$

$$(4.8) \quad w_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\bar{P}(\bar{P} - P^*)\tau^2}{\pi^2 P^* \mu} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

5. Obciążenie trójkątnym impulsem ciśnienia

W tym przypadku, rys. 4

$$(5.1) \quad P(t) = \bar{P} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

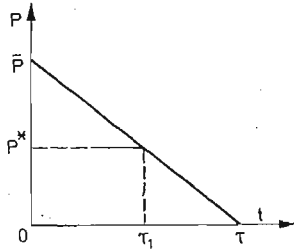
Zgodnie z rozdziałem 3 otrzymujemy:

Faza I. $0 \leq t \leq \tau$.

$$(5.2) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} \left[\left(\bar{P} - P^* - \frac{\bar{P}}{\tau C_{nm}} \right) (1 - e^{-C_{nm}t}) - \frac{\bar{P}}{\tau} t \right],$$

$$(5.3) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} \left[\left(\bar{P} - P^* + \frac{\bar{P}}{\tau C_{nm}} \right) (C_{nm}t + e^{-C_{nm}t} - 1) - \frac{\bar{P}t^2}{2\tau} C_{nm} \right] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Zależnie od wielkości przyłożonego impulsu odciążenia może nastąpić w przedziale czasu $\tau_1 - \tau$, gdzie $\tau_1 = (\bar{P} - P^*) \tau / \bar{P}$ jest czasem, w którym obciążenie osiąga wartość nośności granicznej P^* .



Rys. 4. Trójkątny impuls ciśnienia

Zgodnie z pierwszą możliwością spełnienia kryterium odciążenia badamy, dla których punktów płyty $\dot{w}(x, y, t) = 0$ w przedziale czasu $\tau_1 - \tau$. W tych punktach, w których warunek ten zachodzi ruch ustaje i trwałe ugięcia mogą być obliczone z (5.3). W pozostałych punktach ruch zakończy się w fazie II.

Stosując drugi sposób spełnienia kryterium odciążenia, dla każdej pary n i m szuka się takiego czasu $\tau_1 \leq t_{f_{nm}} \leq \tau$, aby amplituda $A_{nm}(t_{f_{nm}})$ była równa zero. Zadanie to można rozwiązać graficznie. Przyrównując (5.2) do zera otrzymujemy równanie określające $t_{f_{nm}}$ w postaci

$$(5.4) \quad e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}} = 1 - r_{nm}t_{f_{nm}},$$

gdzie

$$(5.5) \quad r_{nm} = \frac{\bar{P}/\tau}{\bar{P} - P^* + \bar{P}/(\tau C_{nm})} > 0.$$

dla każdego n i m . Dla każdej z uwzględnianych wartości n i m , po obliczeniu współczynników C_{nm} i r_{nm} , można znaleźć drugi poza punktem (0,1) punkt przecięcia krzywej $e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}}$

z prostą $1 - r_{nm} t_{f_{nm}}$. Jeżeli odcięta punktu przecięcia będzie zawarta w granicach $\tau_1 \rightarrow \tau$ to $t_{f_{nm}}$ będzie poszukiwanym czasem. W przypadku istnienia w okresie działania obciążenia $t_{f_{nm}} \leq \tau$ dla wszystkich wskaźników n i m , ugięcia końcowe w poszczególnych punktach płyty znajduje się przez podstawienie $t_{f_{nm}}$ do (5.3), a rozpatrywanie fazy ruchu po zdjęciu obciążenia staje się zbędne. Z uwagi na szybką zbieżność szeregu wystarczy w obliczeniach uwzględnić niewielką liczbę wyrazów.

Faza II. $\tau < t$.

$$(5.6) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} \left\{ \left[\frac{\bar{P}}{\tau C_{nm}} (e^{C_{nm}\tau} - 1) - \bar{P} + P^* \right] e^{-C_{nm}t} - P^* \right\},$$

$$(5.7) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} \left\{ \left[\bar{P} - P^* - \frac{\bar{P}}{\tau C_{nm}} (e^{C_{nm}\tau} - 1) \right] e^{-C_{nm}t} - P^* C_{nm} t + \frac{\bar{P}\tau}{2} C_{nm} + P^* \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Postępując według pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia, w punktach, w których trwałe ugięcia nie zostały znalezione w fazie I, bada się dla jakiego czasu $\dot{w}(x, y, t) = 0$. Wykorzystując ten wynik, ze wzoru (5.7) obliczamy końcowe ugięcia.

Korzystając z drugiego sposobu spełnienia warunku odciążenia czas końcowy amplitudy, dla tych n i m , dla których nie został ustalony w fazie I, oblicza się ze wzoru

$$(5.8) \quad t_{f_{nm}} = \frac{1}{C_{nm}} \ln \frac{\bar{P}(e^{C_{nm}\tau} - 1) / (\tau C_{nm}) - \bar{P} + P^*}{P^*}.$$

Czasem zakończenia ruchu płyty będzie czas $t_{f_{11}}$. Końcowe ugięcia stanowią sumę wyrazów wyznaczonych przez podstawienie $t_{f_{nm}} < \tau$ obliczonych z (5.4) do szeregu (5.3) i $t_{f_{nm}} > \tau$ z (5.8) do (5.7).

Przejście graniczne do plastyczności idealnej. Faza I. Jak widać z równania (5.4) nie można uzyskać jawnego wzoru na $t_{f_{nm}}$ aby następnie obliczyć granicę dla $\gamma \rightarrow \infty$ (jest to równoważne $C_{nm} \rightarrow 0$). Postąpimy zatem w sposób następujący:

Wyznaczamy z (5.4) wielkość \bar{P} :

$$(5.9) \quad \bar{P} = \frac{P^*(1 - e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}})}{(1 - 1/(\tau C_{nm}))(1 - e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}}) - t_{f_{nm}}/\tau},$$

a następnie obliczamy prawą stronę tego wyrażenia gdy $\gamma \rightarrow \infty$. Otrzymujemy wzór

$$(5.10) \quad \bar{P} = \frac{2\tau P^*}{2\tau - t_{f_{nm}}},$$

z którego znajdujemy interesującą nas zależność czasu zakończenia ruchu sztywno-plastycznej płyty od wartości przyłożonego obciążenia tzn.

$$(5.11) \quad t_{pf} = \frac{2\tau(\bar{P} - P^*)}{\bar{P}}.$$

Dla $t = t_{pf}$ określonego przez (5.11) w przejściu granicznym z wyrażenia (5.3) otrzymujemy wzór na trwałe ugięcia

$$(5.12) \quad w_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} \frac{3\tau(\bar{P} - P^*)t_{pf}^2 - \bar{P}t_{pf}^3}{6\tau} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{32(\bar{P} - P^*)^3 \tau^2}{3\pi^2 \bar{P}^2 \mu} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Faza II. Wyrażeniom (5.8) i (5.7) określającym czas zakończenia ruchu i trwałe ugięcia w przypadku sztywno-plastycznej płyty, ($\gamma \rightarrow \infty$) nadajemy postać

$$(5.13) \quad t_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} t_{f_{nm}} = \frac{\bar{P}\tau}{2P^*} = \frac{I}{P^*}, \quad I = \frac{\bar{P}\tau}{2},$$

$$(5.14) \quad w_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\bar{P}(3\bar{P} - 4P^*)\tau^2}{3\pi^2 P^* \mu} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Z wzorów (5.11) i (5.13) wynika, że dla obciążenia $\bar{P} = 2P^*$ czas zakończenia deformacji będzie równy okresowi działania obciążenia τ , a przy większym obciążeniu ruch płyty zakończy się w fazie II.

6. Obciążenie idealnym impulsem ciśnienia

Zagadnienie to można rozwiązać obliczając granicę ostatecznych wzorów otrzymanych dla obciążenia prostokątnym impulsem, przy τ dążącym do zera i rosnącej wartości P , przy czym iloczyn τP pozostaje stały i równy wielkości impulsu $I = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} P(t) dt$ lub, jak to zostało pokazane w tym rozdziale, przez uwzględnienie działania idealnego impulsu w warunkach początkowych

$$(6.1) \quad \dot{w}(x, y, 0) = \frac{I}{\mu} = V_0, \quad w(x, y, 0) = 0.$$

Warunki brzegowe pozostają bez zmian i są określone przez (3.4). Równania ruchu i amplitudy są dane przez (3.1) i (3.7) z podstawieniem $P(t) = 0$. Aby rozwiązać równanie różniczkowe amplitudy wykorzystuje się pierwszy warunek początkowy (6.1) tzn.

$$(6.2) \quad \dot{w}(x, y, 0) = V_0 = \frac{I}{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(0) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Współczynnik $A_{nm}(0)$ znajduje się mnożąc stronami (6.2) przez $\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}$ i całkując w obszarze płyty. Wynosi on

$$(6.3) \quad A_{nm}(0) = \frac{16}{nm\pi^2} V_0 = G_{nm} I,$$

a rozwiązanie równania różniczkowego amplitudy ma postać

$$(6.4) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} [(C_{nm}I + P^*)e^{-C_{nm}t} - P^*].$$

Pola prędkości przemieszczenia i pole ugięć określone jak w punkcie 3 mają postać

$$(6.5) \quad \dot{w}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$$(6.6) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} [(IC_{nm} + P^*)(1 - e^{-C_{nm}t}) - P^*tC_{nm}] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Podobnie jak w poprzednich punktach czas trwania deformacji i trwałe ugięcia płyty wyznacza się stosując dwa sposoby spełnienia kryterium odciążenia $\dot{w}(x, y, t_f) = 0$. Według sposobu dopuszczającego ujemne wartości amplitud $A_{nm}(t)$ określa się, zależnie od współrzędnych x i y , czasu t_f dla których związek (6.5) przyjmuje wartość zero. Następnie tak otrzymany czas zatrzymania się poszczególnych punktów płyty podstawia się do (6.6) i ustala końcowe ugięcia $w_f(x, y, t_{fnm})$. Druga możliwość znalezienia poszukiwanych wielkości polega na obliczeniu t_{fnm} , dla których kolejne amplitudy $A_{nm}(t)$ będą miały wartość równą zero i na tej podstawie określenie końcowych ugięć punktów płyty. Przystępując (6.4) do zera otrzymujemy czas

$$(6.7) \quad t_{fnm} = \frac{1}{C_{nm}} \ln \frac{P^* + IC_{nm}}{P^*},$$

a z (6.6) po uwzględnieniu (6.7) pole trwałych ugięć

$$(6.8) \quad w_f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}} \left(I - \frac{P^*}{C_{nm}} \ln \frac{P^* + IC_{nm}}{P^*} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Dla $n = m = 1$, przy uwzględnieniu oznaczeń podanych w poprzednich rozdziałach, otrzymuje się z (6.7) czas zakończenia ruchu całej płyty tzn.

$$(6.9) \quad t_{f11} = \frac{3\sqrt{3}b^4\gamma\varrho}{2\pi^4\sigma_0h^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2} \ln \left[1 + \frac{4\pi^4V_0\sigma_0h^3\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2}{3\sqrt{3}P^*b^4\gamma} \right]$$

oraz z (6.8) pierwszy i zarazem decydujący wyraz szeregu końcowych ugięć płyty

$$(6.10) \quad w_f(x, y) = \frac{24\sqrt{3}b^4\gamma\varrho}{\pi^6\sigma_0h^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2} \left(V_0 - \frac{P^*t_{f11}}{2h\varrho} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Dla plastyczności idealnej tzn. $\gamma \rightarrow \infty$ wzory (6.7) i (6.8) mają postać

$$(6.11) \quad t_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} t_{fnm} = \frac{I}{P^*}, \quad I = \mu V_0,$$

$$(6.12) \quad w_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I^2 G_{nm}}{2P^*} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8V_0^2 \mu}{\pi^2 P^*} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

7. Wyniki numeryczne i ich analiza

Ze względu na symetrię szukane wielkości ugięć i prędkości ugięć liczone są w węzłach ortogonalnej siatki jednej czwartej powierzchni płyty, rys. 1. Do obliczeń numerycznych przyjęto stałe mechaniczne i geometryczne, tabl. 1, takie jak w [18,21].

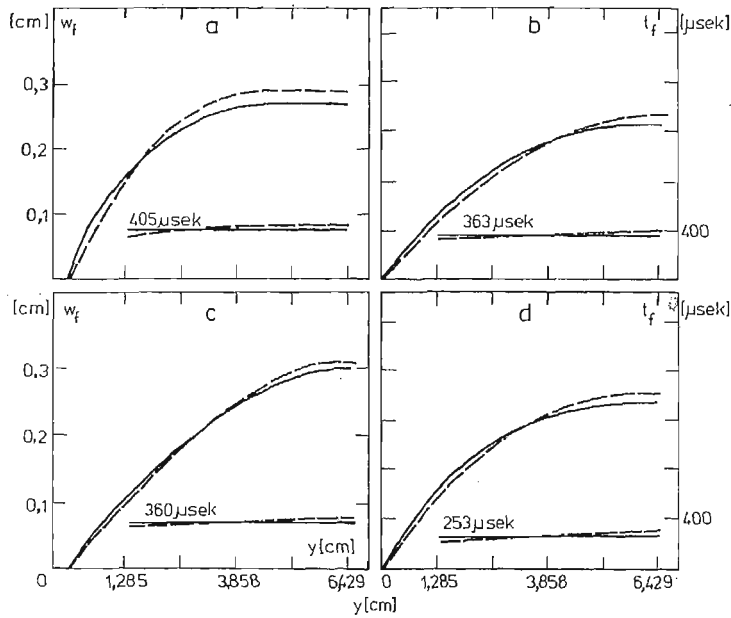
Tablica 1. Stałe materiałowe i geometryczne płyty

σ_0	ϱ	$2h$	a	b	γ
[kG/cm ²]	$\frac{\text{kGs}^2}{\text{cm}^4}$	[cm]	[cm]	[cm]	[s ⁻¹]
2376,38	$8,37 \cdot 10^{-6}$	0,2489	7,62	12,859	50 200 10000

Wpływ sposobu spełnienia kryterium odciążenia. Rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego przy stałych granicach procesu deformacji według pierwszego sposobu spełnienia warunku odciążenia prowadzi w końcowej fazie ruchu do wyznaczania pewnej powierzchni rozdzielającej obszary o dodatnich i ujemnych prędkościach ugięcia. Z uwagi na przyjęty model materiału ujemne prędkości są fizycznie niemożliwe. Zatem ten sposób może być stosowany w przypadkach, jeżeli wszystkie punkty płyty zatrzymują się w wąskim przedziale czasu. Na rysunkach 5 - 8, 18 przedstawiono wykresy ugięć, prędkości ugięć środka płyty i czasy zatrzymania się poszczególnych punktów płyty obliczone według pierwszego i drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia. W tablicy 2 podano końcowe ugięcia i czas deformacji środka płyty prostokątnej i płyty kwadratowej (9,898 × 9,898 cm) o równym jej polu. Widać, że ugięcia prędkości i czasy zatrzymania się poszczególnych punktów płyty różnią się o kilka procent. Powierzchnia końcowych ugięć wyznaczona stosownie do drugiego sposobu spełnienia kryterium ma bardziej wyrównany kształt. Zastosowane szeregi są szybkobieżne. Pierwszy wyraz jest decydujący w określeniu prędkości ugięć i ugięć trwałych. Powoduje to małą różnicę w wynikach uzyskanych przy zastosowaniu obu sposobów spełnienia kryterium.

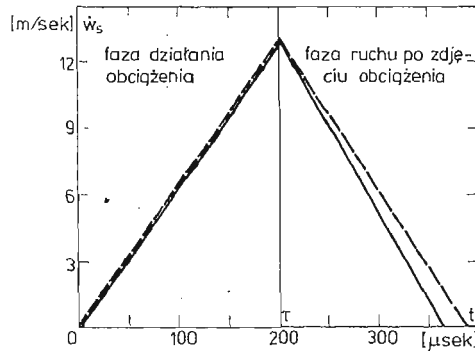
Wpływ kształtu impulsu. Jak wynika z wykresów zmienności amplitud prędkości ugięcia w czasie, rys. (9—11) początkowy kształt funkcji zależy od rodzaju obciążenia, natomiast w fazie ruchu płyty po zdjęciu obciążenia i przy obciążeniu idealnym impulsem krzywe mają ten sam charakter. Przy obciążeniu prostokątnym impulsem ciśnienia wykres amplitud prędkości ugięcia, (rys. 9) i samych prędkości ugięć w czasie (rys. 6) punktów płyty jest rosnący do czasu zdjęcia obciążenia. Punkt $t = \tau$ jest ostrzem na wykresie,

pierwsza pochodna i krzywizna zmieniają znak. Dla obciążenia trójkątnym impulsem ciśnienia funkcje amplitudy prędkości ugięcia rosną w czasie od zera osiągając maksimum przed końcem działania obciążenia, a następnie maleją do momentu osiągnięcia określonej wartości ujemnej, (rys. 10). Moment zdjecia obciążenia, $t = \tau$ jest punktem przegięcia

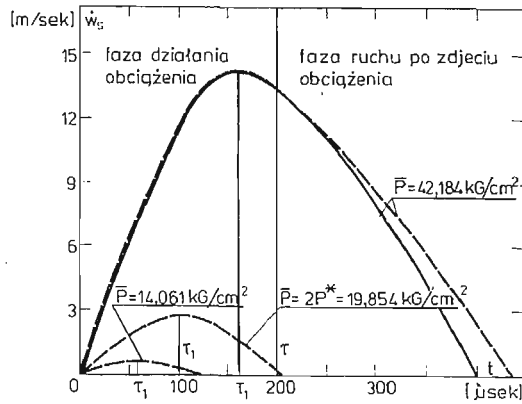


Rys. 5. Końcowe ugięcia i czas zatrzymania punktów płyty położonych na przekroju $x = a/2$. Linia przerywana oznacza wartości obliczone wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia a linia ciągła wg drugiego sposobu

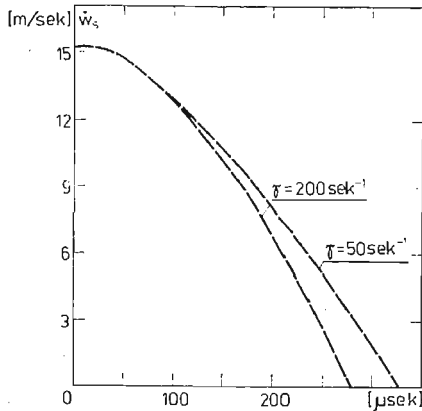
- a) Obciążenie prostokątnym impulsem $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 200 \mu\text{s.}$, $\gamma = 200 \text{ s.}^{-1}$
- b) Obciążenie prostokątnym impulsem $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 200 \mu\text{s.}$, $\gamma = 50 \text{ s.}^{-1}$
- c) Obciążenie trójkątnym impulsem $\bar{P} = 42,184 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 200 \mu\text{s.}$, $\gamma = 50 \text{ s.}^{-1}$
- d) Obciążenie idealnym impulsem $V_0 = 15,24 \text{ m/s.}$, $\gamma = 50 \text{ s.}^{-1}$



Rys. 6. Zmiana prędkości ugięcia środka płyty w czasie. Obciążenie prostokątnym impulsem $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 200 \mu\text{s.}$, $\gamma = 50 \text{ s.}^{-1}$. Linia przerywana oznacza wartości obliczone wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia, a linia ciągła wg drugiego sposobu



Rys. 7. Zmiana prędkości ugięcia środka płyty w czasie. Obciążenie trójkątnymi impulsami $\bar{P} = 42,184; 19,854; 14,061 \text{ kG/cm}^2$. $\tau = 200 \mu\text{s}$, $\gamma = 200 \text{ s}^{-1}$. Znaczenie linii jak na rys. 6

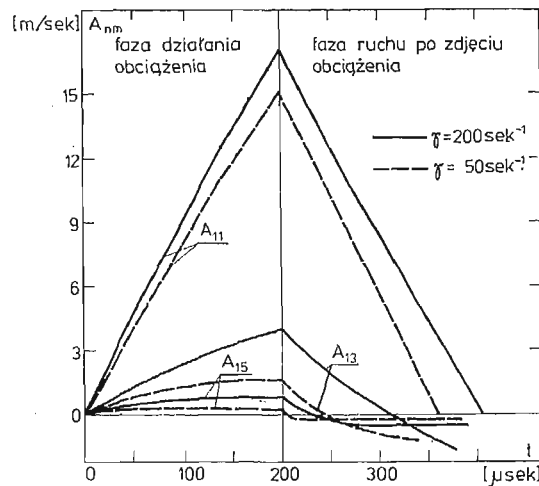


Rys. 8. Zmiana prędkości ugięcia środka płyty w czasie. Obciążenie idealnym impulsem $V_0 = 15,24 \text{ m/s}$. Wartości obliczono wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia

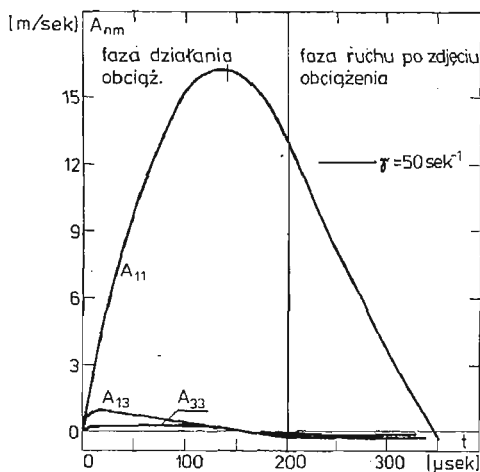
Tablica 2. Końcowe ugięcia i czas deformacji środka płyty prostokątnej i kwadratowej o równych polach

	Obciążenie prostokątnym impulsem $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$		Obciążenie trójkątnym impulsem $\bar{P} = 14,061 \text{ kG/cm}^2$		Obciążenie idealnym impulsem $V_0 = 9,525 \text{ m/s}$	
	Płyta prostokątna	Płyta kwadratowa	Płyta prostokątna	Płyta kwadratowa	Płyta prostokątna	Płyta kwadratowa
Czas deformacji* środku płyty [μs]	443	506	122	151	217	257
	405	448	117	142	191	212
Końcowe ugięcia* środku płyty [cm]	0,2814	0,3604	0,00503	0,00876	0,1143	0,1311
	0,2642	0,3221	0,00496	0,00878	0,10795	0,1191

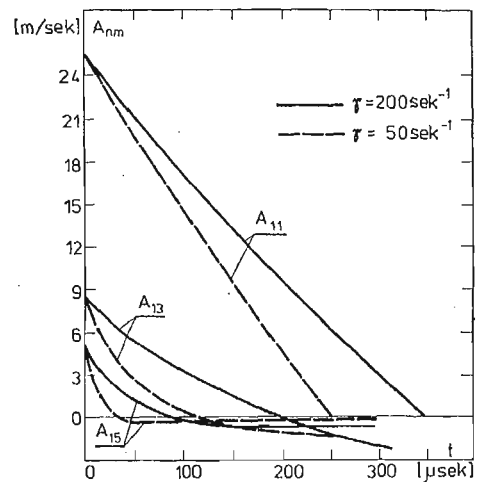
* Wielkości nad linią przerywaną podane są wg. pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia, a wielkości pod linią przerywaną wg. drugiego sposobu.



Rys. 9. Zmiana amplitud A_{nm} w czasie. Obciążenie prostokątnym impulsem ciśnienia $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 200 \mu\text{s}$



Rys. 10. Zmiana amplitud A_{nm} w czasie. Obciążenie trójkątnym impulsem ciśnienia $\bar{P} = 42,184 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 200 \mu\text{s}$

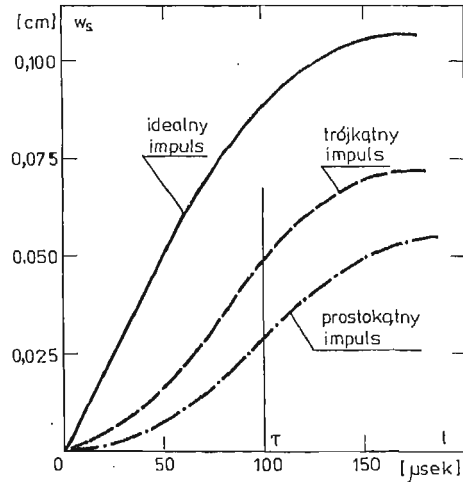


Rys. 11. Zmiana amplitud A_{nm} w czasie. Obciążenie idealnym impulsem ciśnienia $V_0 = 15,24 \text{ m/s}$

wykresu, następuje tu zmiana krzywizny. Charakter wykresu prędkości ugięcia (rys. 7) jest podobny do wykresu amplitud, przy czym maksimum prędkości ugięcia występuje w chwili zrównania się bieżącej wartości obciążenia z obciążeniem granicznym P^* , (przy brzegu płyty mogą pojawić się niewielkie odchylenia od tej zasady).

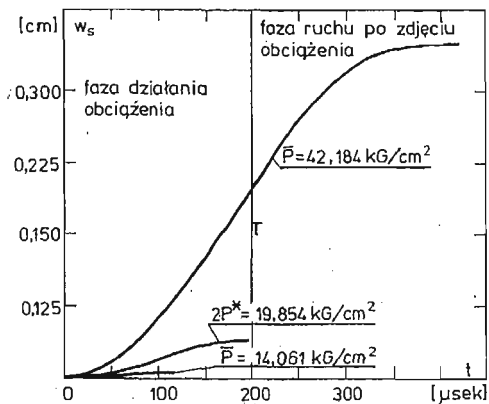
Przy obciążeniu idealnym impulsem wykres amplitud, (rys. 11) i samych prędkości ugięć, (rys. 8) jest w całym przedziale czasu malejący. Dla różnych funkcji obciążenia otrzymuje się podobne wykresy końcowych ugięć punktów lepkoplastycznej płyty. Przy tej samej wartości impulsu większą wartość końcowych ugięć uzyskuje się dla impulsów, które

mają większą początkową wartość obciążenia (większe ugięcia przy obciążaniu idealnym impulsem, mniejsze dla obciążenia trójkątnego w czasie, a najmniejsze dla obciążenia prostokątnym impulsem ciśnienia), (rys. 12). W przypadku kołowych płyt z materiału sztywnoplastycznego wpływ kształtu impulsu na ugięcie końcowe był analizowany przez PERZYŃĘ [24]. Stwierdzono niewielki wpływ, malejący ze wzrostem stosunku P_{\max}/P^* .

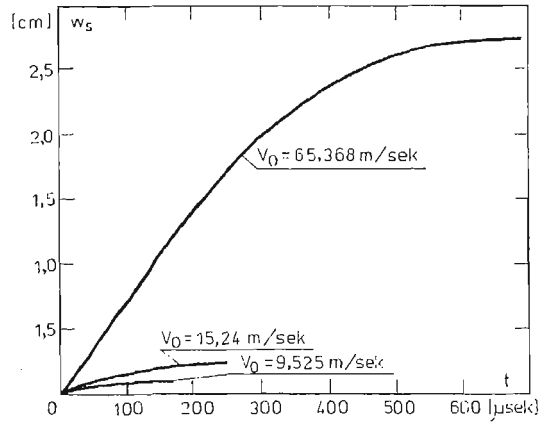


Rys. 12. Ugięcie środka płyty w czasie przy tej samej wielkości impulsów (wg drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia) $\gamma = 50 \text{ s}^{-1}$. Obciążenie idealnym impulsem $V_0 = 9,525 \text{ m/s}$; trójkątnym impulsem $\bar{P} = 39,686 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 100 \text{ } \mu\text{s}$ i prostokątnym impulsem $\bar{P} = 19,843 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 100 \text{ } \mu\text{s}$.

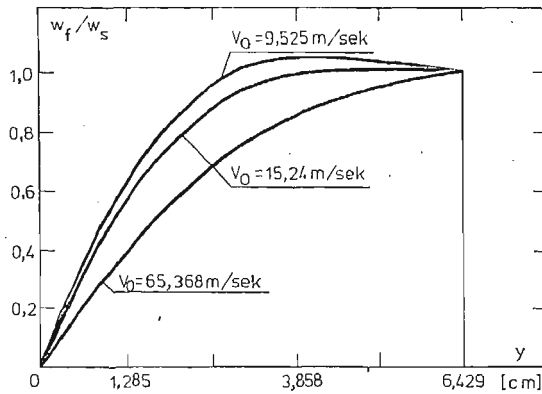
Wpływ wielkości impulsu. Zmiana wartości przyłożonego obciążenia lub czasu działania ma decydujący wpływ na wielkość i kształt powierzchni końcowych ugięć oraz czas zakończenia ruchu płyty. Niewielkie zwiększenie wartości obciążenia lub przedłużenie czasu działania powoduje duży wzrost ugięć i jednocześnie wydłużenie czasu ruchu płyty (rys. 13, 14). Przy większych wartościach impulsu kształt powierzchni końcowych ugięć jest mniej



Rys. 13. Ugięcie środka płyty w czasie (wg drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia). Obciążenie trójkątnymi impulsami $\bar{P} = 42,184; 19,854; 14,061 \text{ kG/cm}^2$, $\tau = 200 \text{ } \mu\text{s}$, $\gamma = 200 \text{ s}^{-1}$.



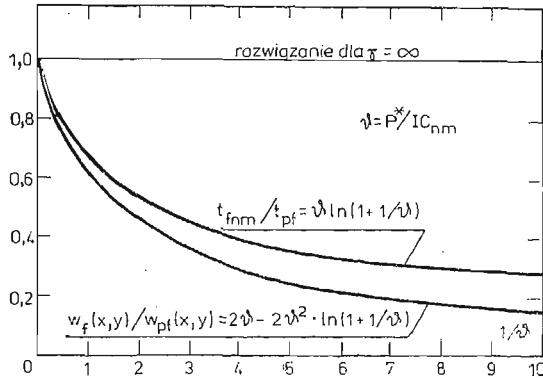
Rys. 14. Ugięcie środka płyty w czasie (wg drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia). Obciążenie idealnymi impulsami ciśnienia $V_0 = 65,368; 15,24; 9,525$ m/s. $\gamma = 50$ s.⁻¹.



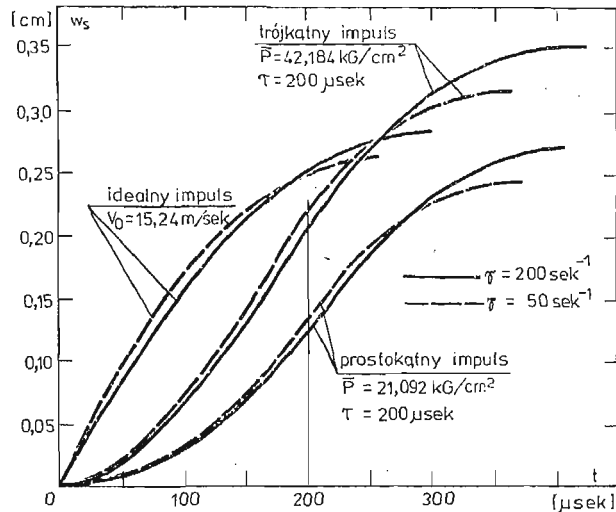
Rys. 15. Kształt powierzchni końcowych ugięć płyty (wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia). Przekrój środkowy $x = 3,81$ cm. Obciążenie idealnymi impulsami ciśnienia $V_0 = 65,368; 15,24; 9,525$ m/s. $\gamma = 200$ s.⁻¹.

łagodny, a w punkcie środkowym krzywizna ma większą wartość, (rys. 15). Występujące, przy małych wielkościach impulsu, lokalne maksima powierzchni końcowych ugięć w okolicach brzegu płyty przy większych jego wartościach znikają wraz z powiększeniem ugięć punktu środkowego. Specjalne znaczenie ma wielkość impulsu w przypadku płyty obciążonej trójkątnym impulsem ciśnienia. Dla płyty sztywnoplastycznej przy przyłożeniu w chwili $t = 0$ początkowego obciążenia $2P^*$, czas zatrzymania płyty będzie równy okresowi działania obciążenia. Przy mniejszych współczynnikach lepkości dla zrównania tych czasów potrzebna jest nieco większa wartość początkowego obciążenia (stosując drugi sposób spełnienia kryterium odciążenia). Stwierdzono, że zwiększenie wartości impulsu nieznacznie pogarsza zbieżność szeregów ugięć i prędkości ugięć.

Wpływ lepkości materiału. Zmniejszenie współczynnika lepkości materiału γ zmniejsza ugięcia płyty i skraca czas jej ruchu. Zilustrowano to na rys. 16 w ogólnym przypadku dla obciążenia idealnym impulsem ciśnienia, a w przypadkach szczególnych na (rys. 5, 17, 18.) Dla większych współczynników lepkości, a szczególnie dla płyty sztywnoplastycznej powierzchnia odkształcona może mieć nieco inny kształt (zamiast jednego maksimum w środku płyty pojawiają się dwa lub cztery maksima lokalne w pobliżu jej brzegów), rys. 18. Wpływ lepkości na wielkość amplitud i prędkość ugięcia punktu środkowego pokazano na (rys. 8, 9, 11). Szeregi ugięć stają się wolniej zbieżne dla większych współczynników lepkości.

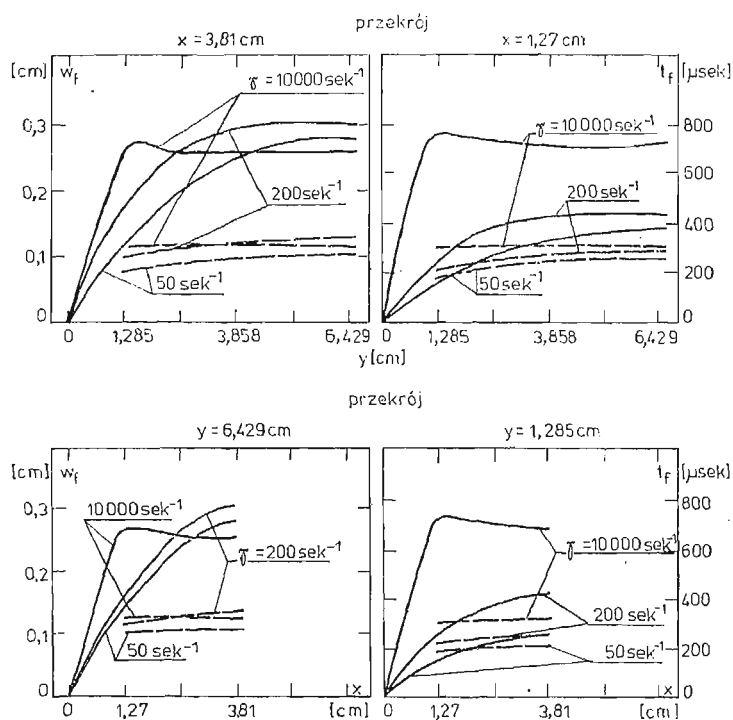


Rys. 16. Wpływ lepkości materiału na zmniejszenie czasu deformacji i końcowych ugięć płyty (wg. drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia). Obciążenie idealnym impulsem ciśnienia.



Rys. 17. Ugięcie środka płyty w czasie (wg drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia) dla $\gamma = 50$ i 200 s^{-1}

Wyniki zamieszczone w tabl. 2 dla płyt o jednakowym polu prostokątnej i kwadratowej wskazują na duży wpływ wzajemnych proporcji wymiarów liniowych płyty na wielkość końcowych ugięć. Również porównanie z płytą utwierdzoną [21], chociaż wykraczające poza małe ugięcia, wskazuje na duży wpływ warunków brzegowych na wielkość przemieszczeń.



Rys. 18. Końcowe ugięcia i czas zatrzymania punktów płyty (wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia dla $\gamma = 50, 200$ i 10000 s^{-1} . Obciążenie idealnym impulsem ciśnienia $V_0 = 15,24 \text{ m/s}$. Linia ciągła oznacza ugięcia a przerywana czas zatrzymania

Literatura cytowana w tekście

1. A. J. WANG, H. G. HOPKINS, *On the plastic deformation on built in circular plate under impulsive loading*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 22—37 (1954).
2. H. G. HOPKINS, W. PRAGER, *On the dynamics of plastic circular plates*, J. Mech. Phys. Solids, 5, 317—330 (1954).
3. A. J. WANG, *The permanent deflection of a plastic plate under blast loading*, J. Appl. Mech., 22, 375—376 (1955).
4. T. A. DUFFY, S. W. KEY, *Experimental-theoretical correlation of impulsively loaded clamped circular plate*, Exp. Mech., 9, 6, 241—249 (1969).
5. E. A. WITMER, E. N. CLARK, H. A. BALMER, *Experimental and theoretical studies of explosively induced large dynamic and permanent deformations of simple structures*, Exp. Mech., 7, 2, 56—66 (1967).

6. A. L. FLORENCE, *Circular plate under a uniformly distributed impulse*, Int. J. Solids Structures, **1**, 2, 37—47, (1966).
7. N. JONES, *Finite deflections of rigid viscoplastic strainhardening annular plate loaded impulsively*, J. Appl. Mech., **35**, 2, 349—356 (1968).
8. T. WIERZBICKI, A. FLORENCE, *A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates*, Int. J. Solids Structures, **6**, 553—558 (1970).
9. T. WIERZBICKI, *Impulsive loading of rigid viscoplastic plates*, Int. J. Solids Structures, **3**, 635—647 (1967).
10. T. WIERZBICKI, *Dynamics of rigid — viscoplastic circular plates*, Arch. Mech. **17**, 851 (1965).
11. T. WIERZBICKI, *Large deflections of a strain sensitive plate loaded impulsively*, Arch. Mech. Stos., **21**, 1, 67—69 (1969).
12. T. WIERZBICKI, J. M. KELLY, *Finite deflection of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact*, Int. J. Solids Structures, **4**, 1081—1092 (1968).
13. Ju. R. LEPIK, *Dynamika kołowych i pierścieniowych płyt z materiału sztywno-plastycznego wrażliwego na prędkość odkształcenia*, Prikladna Miechanika, **5**, 1, 60—66 (1969).
14. N. PERRONE, *Impulsively loaded strain-rate sensitive plates*, J. Appl. Mech., **34**, 2, 380—384 (1967).
15. T. WIERZBICKI, *Dynamika powłok lepkoplastycznych*, Rozpr. Inż. **19**, 4, 667—730 (1971).
16. A. D. COX, L. W. MORLAND, *Dynamic plastic deformation of simply supported square plates*, J. Mech. Phys. Solids, **7**, 229—241 (1959).
17. T. WIERZBICKI, *Response of rigid-viscoplastic circular and square plates to dynamic loading*, Stanford University, Div. Eng. Mech., Report No. 162 (1966).
18. N. JONES, T. O. URAN, S. A. TEKIN, *The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates*, MIT, Dep. Naval Architecture Marine Eng., Report No. 69—13.
19. N. JONES, *A theoretical study of the dynamic plastic behaviour of beams and plates with finite deflections*, MIT, Dep. Naval Architecture Marine, Eng. Report No. 70—14.
20. G. BAK, D. NIEPOSTYN — *Płyty plastyczne obciążone statycznie i dynamicznie*, Biul. WAT, **5** (1972).
21. W. WOJEWÓDZKI, T. WIERZBICKI, *Transient response of viscoplastic rectangular plates*, Arch. Mech. Stos., **24**, 4 (1972).
22. T. WIERZBICKI, *Non — associated constitutive law in viscoplasticity with application to dynamics of plates and shells*, Acta Mechanika, **12**, 1—2 (1971).
23. T. WIERZBICKI, *An approximate linear theory of thin viscoplastic shells*, Arch. Mech. Stos., **24**, 5—6 (1972).
24. P. PERZYNA, *Dynamic load — carrying capacity of circular plates*, Arch. Mech. Stos. **10**, 5 (1958).

Р е з ю м е

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ

В статье приводится решение уравнения движения вязкопластической прямоугольной пластинки с шарнирно опертыми краями и нагруженной равномерно распределенным поперечным импульсом давления. Рассмотрено общий случай нагружения давлением взрывного типа, а также особые случаи как нагружение прямоугольным, треугольным и идеальным импульсом давления. Остаточные прогибы определено применяя два способа исполнения условий разгрузки. Исследовано влияние вязкости материала, влияние формы и величины импульса давления на развитие процесса деформирования и величину остаточных прогибов. Получено также решение для жестко-пластической пластинки, являющееся результатом предельного перехода в решениях вязкопластической пластинки.

S u m m a r y

DETERMINATION OF DEFLECTIONS OF A VISCOPLASTIC RECTANGULAR PLATE UNDER PRESSURE IMPULSE

The solution of the motion equation for a viscoplastic plate is presented. The plate is hinge-supported on all edges and subjected to a uniformly distributed transverse impulse. The general case of the blast type pressure is considered together with such particular cases as the rectangular, triangular and perfect impulse. The final deflections are determined by using two ways of satisfying the unloading criterion. The influence of viscosity of the material as well as of the shape and the magnitude of the applied impulse on the process of deformation and on the permanent deflections is investigated. The solution for a perfectly plastic plate is also obtained as a limiting case of the viscoplastic solution.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INST. MECH. KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

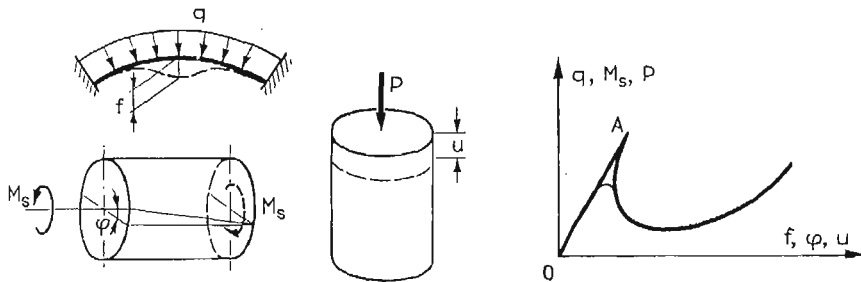
Praca została złożona w Redakcji 17 stycznia 1978 r.

ANALIZA MOŻLIWOŚCI PRZYSTOSOWANIA SIĘ PEWNEGO TYPU OSIOWO-SYMETRYCZNEJ
KONSTRUKCJI POWŁOKOWEJ POPRZEZ LOKALNĄ UTRATĘ STATECZNOŚCI JEJ
POWIERZCHNI

WALERIAN SZYSZKOWSKI (WARSZAWA)

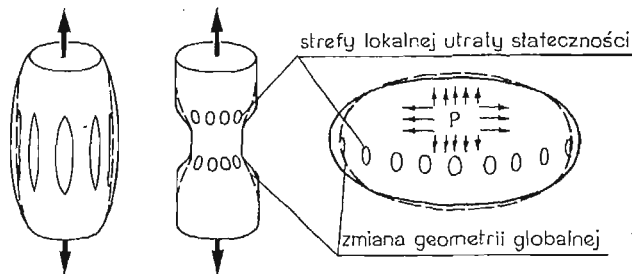
1. Wstęp

Gdy w konstrukcji powłokowej występują naprężenia ściskające, bardzo ważne znaczenie ma analiza stateczności układu. Jego charakterystyka, tj. zależność obciążenia od odkształceń najczęściej cechuje się (rys. 1) istnieniem punktu *A* odpowiadającego stanowi



Rys. 1

utruty stateczności pierwotnego kształtu powłoki. Jest to związane ze spadkiem nośności układu rozumianej jako zdolności do przenoszenia zadanego typu obciążenia. Dlatego, przede wszystkim w praktyce inżynierskiej, parametry układu są tak dobierane, żeby



Rys. 2

powłoka pracowała w pierwszym zakresie charakterystyki (*OA*), tzn. zachowywała swój pierwotny kształt. Istnieją jednak układy (rys. 2), dla których utrata stateczności pierwotnego kształtu nie jest niebezpieczna i nie ma decydującego wpływu na nośność konstrukcji, w tym przypadku zależnej w głównej mierze od własności wytrzymałościowych

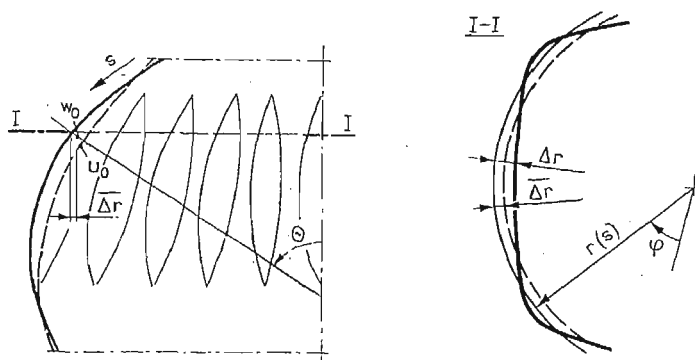
materiału (granica plastyczności, wytrzymałość doraźna). W takich przypadkach obliczenie obciążeń krytycznych (punkt *A*) jest mniej ważne, natomiast bardziej istotna jest analiza zachowania się powłoki po utracie stateczności.

Teoretyczne obliczenia obciążeń krytycznych w zakresie małych odkształceń wiążą się z analizą liniowych równań teorii powłok i są merytorycznie proste, chociaż rachunkowo skomplikowane [1]. Natomiast analiza zachowania się powłoki po utracie stateczności polega najczęściej na rozwiązywaniu równań nieliniowych, nieporównywalnie bardziej skomplikowanych. W wielu przypadkach [2] analiza taka prowadzi do wyników sprzecznych z doświadczeniem, co przypisuje się głównie przybliżonemu charakterowi samych równań i ich rozwiązania. Dlatego też próby innego podejścia do tych zagadnień są ciągle aktualne.

Taką nieklasyczną uproszczoną metodę opartą na analizie tylko pewnego uśrednionego stanu błonowego przedstawiono w prezentowanej pracy. Wykazano, że w powłokach pewnego typu (rys. 2), przy utracie stateczności nie następuje obniżenie nośności konstrukcji. Zjawisko takie nazwano przystosowaniem się konstrukcji poprzez lokalną utratę stateczności. Jego praktyczne wykorzystanie pokazano na przykładzie konstrukcji inżynierskiej.

2. Podstawowe założenia

Zajmiemy się teraz powłoką obrotową, pracującą w znanym osiowo-symetrycznym stanie naprężeń błonowych, dla której utrata stateczności przejawia się w postaci periodycznych pofalowań powierzchni powstających w paśmie równoleżnikowym (rys. 3).



Rys. 3

Przemieszczenie $w(s, \varphi)$ mierzone prostopadłe do powierzchni początkowej powłoki przedstawimy w postaci sumy dwóch składników.

$$(1) \quad w(s, \varphi) = w_1(s) \sin n\varphi + w_0(s).$$

Pierwszy człon jest przemieszczeniem periodycznym „równo rozłożonym” na zewnątrz i wewnątrz powłoki mierzonym od powierzchni przesuniętej względem początkowej na

odległość $w_0(s)$. Składnik $w_1(s)$ będziemy nazywali składową **lokalną** przemieszczenia, natomiast składnik $w_0(s)$ składową **globalną**.

Zakładamy, że ugięcia powłoki są tak duże, iż na zmianę jej kształtu pomijałny jest wpływ odkształceń w jej płaszczyźnie środkowej (jest to tzw. przekształcenie izometryczne powierzchni, często wykorzystywane w teorii powłok [3]). Przy tym założeniu można na podstawie znajomości tylko funkcji $w_1(s)$ i liczby fal w kierunku obwodowym n , wyznaczyć składowe globalne przemieszczenia. Zasadność takiego podziału polega na tym, że w praktycznej, przybliżonej analizie, kształt funkcji $w_1(s)$ jest zwykle dużo łatwiej założyć np. na podstawie obserwacji. Pozwala to wyznaczyć „globalną” zmianę geometrii powłoki (w_0, u_0), związaną z powstaniem nowego „uśrednionego” stanu naprężeń błonowych. Ten nowy stan błonowy jest bardzo istotny jako, że powinien zapewnić równowagę statyczną elementów zdeformowanej powłoki. Śledząc charakter zmian tego stanu można wnioskować o możliwości przystosowania się konstrukcji.

Natomiast periodyczny składnik w_1 powoduje powstanie tylko lokalnych stanów ugięciowych i przy założeniu idealnej sprężystości materiału można przyjąć, że nie ma on wpływu na nośność konstrukcji. W praktyce ugięcia mogą być tak duże, że szczególnie w miejscach maksymalnych zmian krzywizny, może zostać przekroczony zakres odkształceń sprężystych. Wtedy nabierają znaczenia własności plastyczne materiału lub w przypadku zmiennych obciążeń, możliwość lokalnego przystosowania się konstrukcji w klasycznym sensie, tzn. poprzez powstanie w tych miejscach odpowiedniego stanu naprężeń resztkowych hamujących propagację trwałych odkształceń.

3. Rozważania geometryczne

Rozpatrzmy fragment powierzchni powłoki obrotowej, pokazanej na rys. 4. Zależność między odkształceniami liniowymi płaszczyzny środkowej a przemieszczeniami przedstawia się następująco:

$$(2) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{r_1} + \frac{1}{2r_1^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2,$$

$$(3) \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \theta - w \sin \theta + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right].$$

Ponieważ $\Delta r = -u \cos \theta + w \sin \theta$, możemy drugą zależność napisać w postaci

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \Delta r + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right].$$

Z warunku izometrii ($\varepsilon_\varphi = 0$) mamy

$$(4) \quad \Delta r = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Obliczmy teraz „średnią” na obwodzie zmianę wymiaru r (rys. 3)

$$\overline{\Delta r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta r d\varphi = \frac{1}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Drugi człon wobec periodyczności funkcji $v(\varphi)$ jest dokładnie równy zero i ostatecznie

$$(5) \quad \overline{\Delta r} = \frac{1}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi.$$

Dla funkcji „ w ” w postaci (1) mamy

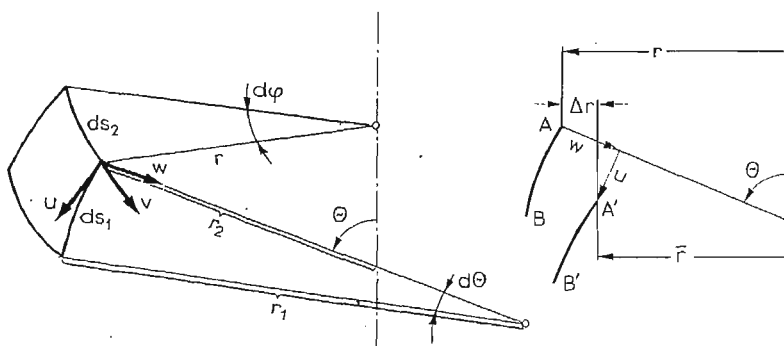
$$(6) \quad \overline{\Delta r} = \frac{n^2 w_1^2}{4r}.$$

Z drugiej strony dla składowych globalnych przemieszczenia mamy związku

$$(7a) \quad \Delta r = w_0 \sin \Theta - u_0 \cos \Theta,$$

$$(7b) \quad \frac{1}{r_1} \frac{dw_0}{d\Theta} - \frac{w}{r_1} + \frac{1}{2r_1^2} \left(\frac{dw_0}{d\Theta} \right)^2 = 0.$$

Druga zależność wynika z warunku izometryczności w kierunku południowym ($\varepsilon_\theta = 0$).



Rys. 4

Układ równań (7) pozwala na wyznaczenie funkcji u_0 i w_0 mianowicie można go sprowadzić do równania

$$(8) \quad \frac{1}{2r_1} \left(\frac{dw_0}{d\Theta} \right)^2 \cos \Theta + \frac{dw_0}{d\Theta} \sin \Theta + w_0 \operatorname{tg} \Theta \sin \Theta = \frac{d}{d\Theta} (\overline{\Delta r}) + \overline{\Delta r} \operatorname{tg} \Theta,$$

lub

$$(9) \quad \frac{dw_0}{d\Theta} = -r_1 \operatorname{tg} \Theta \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{\cos \Theta}{\sin^2 \Theta} \left[\frac{w_0}{r_1} \operatorname{tg} \Theta \sin \Theta - \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\Theta} (\overline{\Delta r}) - \frac{\overline{\Delta r}}{r_1} \operatorname{tg} \Theta \right]} \right).$$

Wyznaczenie funkcji w_0 z tego równania wymaga całkowania numerycznego, np. za pomocą procedury Runge-Kutty.

Łatwo zauważyć, że podkreślony składnik jest znacznie mniejszy od jedności i jeżeli rozwiniemy względem niego wyrażenie pod pierwiastkiem, otrzymamy w miejsce równania (9) zależność uproszczoną

$$(10) \quad \frac{dw_0}{d\Theta} \sin \Theta + w_0 \operatorname{tg} \Theta \sin \Theta = \frac{d}{d\Theta} (\overline{\Delta r}) + \overline{\Delta r} \operatorname{tg} \Theta.$$

Jak widać, jest to zlinearyzowane równanie (8), które można było otrzymać bezpośrednio zaniedbując w równości (7b) człon nieliniowy.

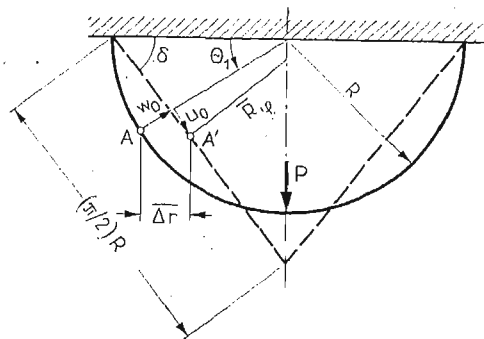
Rozwiązaniem równania (10) jest funkcja

$$(11) \quad w_0 = \frac{\bar{\Delta r}}{\sin \Theta} + \cos \Theta \int \frac{\bar{\Delta r}}{\sin^2 \Theta} d\Theta + C \cos \Theta$$

gdzie: C — stała całkowania.

Dla zorientowania się w charakterze przybliżenia rozwiązano następujący przykład.

Idealnie wiotka czasza półkolistą pod wpływem siły P odkształca się w ten sposób, że jej „średnia” powierzchnia tworzy powierzchnię stożkową (rys. 5).



Rys. 5

Wszystkie parametry tej deformacji można wyznaczyć w sposób ścisły, a mianowicie:

$$(12a) \quad \bar{\Delta r} = R \left[\frac{2}{\pi} \Theta_1 - 1 + \cos \Theta_1 \right],$$

$$(12b) \quad w_0 = R \left[\frac{2}{\pi} \Theta_1 \cos \Theta_1 - \cos \Theta_1 + 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \Theta_1 \sin \Theta_1} \right],$$

$$(12c) \quad u_0 = R \left[\frac{2}{\pi} \Theta_1 \sin \Theta_1 - \sin \Theta_1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \Theta_1 \cos \Theta_1} \right].$$

Sprawdzenie dokładności równań (9) i (10) polegało na porównaniu rozwiązań uzyskanych za ich pomocą (w miejsce $\bar{\Delta r}$ podstawiono wyrażenie (12a)) ze ścisłymi wyrażeniami (12b) i (12c). (Rys. 6).

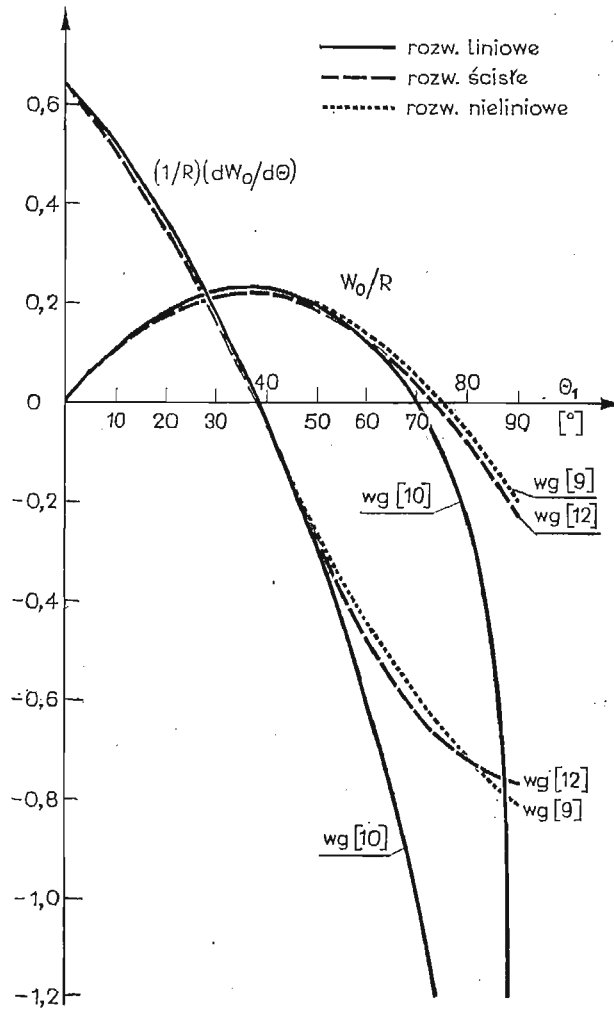
Widać, że równanie liniowe daje duże różnice w okolicach wierzchołka stożka.

Przejdziemy teraz do określenia nowych promieni krzywizn zdeformowanej powłoki (osiowo-symetryczna deformacja globalna).

Krzywizna południka:

Zgodnie z definicją krzywizna południka powierzchni początkowej jest równa

$$\frac{1}{R_\Theta} = \frac{d\Theta}{ds}$$



Rys. 6

dla powierzchni zdeformowanej mamy

$$\frac{1}{R_\Theta} = \frac{d(\Theta + \nu)}{ds} = \frac{1}{R_\Theta} + \frac{d\nu}{ds}$$

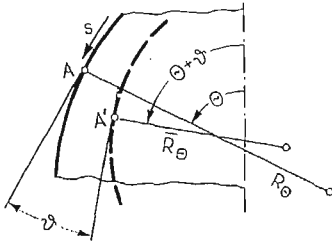
Ponieważ $dS = R_\Theta d\Theta$, ostatecznie

$$(13) \quad \frac{1}{R_\Theta} = \frac{1}{R_\Theta} \left(1 + \frac{d\nu}{d\Theta} \right)$$

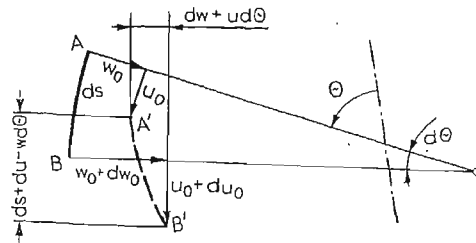
Bardzo istotne jest dokładne określenie kąta ϑ .

Na podstawie rysunku 8 mamy:

$$(14) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\frac{dw_0}{d\Theta} + u_0}{R_\Theta + \frac{du_0}{d\Theta} - w_0}.$$



Rys. 7



Rys. 8

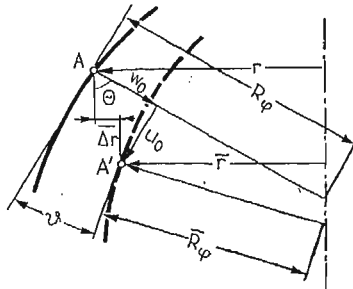
Krzywizna równoleżnika:

Na podstawie rys. 9 mamy

$$\frac{r - \Delta r}{R_\varphi} = \sin(\Theta + \vartheta),$$

stąd

$$(15) \quad \bar{R}_\varphi = (R_\varphi - w_0 + u_0 \operatorname{ctg} \Theta) \frac{\sin \Theta}{\sin(\Theta + \vartheta)}.$$



Rys. 9

Wzory (13), (14) i (15) są słuszne dla **dowolnie dużych** przemieszczeń. Łatwo sprawdzić, że dla przykładu pokazanego na rys. 5 podstawiając w miejsce w_0 i u_0 wyrażenia (12b) i (12c) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta} &= \frac{\pi}{2} - \delta - \Theta_1, \\ \frac{1}{\bar{R}_\varphi} &= \frac{1}{R_\varphi} \left(1 + \frac{d\vartheta}{d\Theta_1} \right) = 0, \\ \bar{R}_\Theta &= \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \Theta_1 \right). \end{aligned}$$

Czyli dokładne wyrażenie na krzywizny powierzchni stożkowej. Przy umiarkowanych przemieszczeniach wyrażenia (14) i (15) można uprościć do postaci:

$$(16) \quad \vartheta \approx \frac{1}{R_\Theta} \frac{dw_0}{d\Theta},$$

$$(17) \quad \bar{R}_\varphi \approx R_\varphi \frac{\sin\Theta}{\sin(\Theta + \vartheta)}.$$

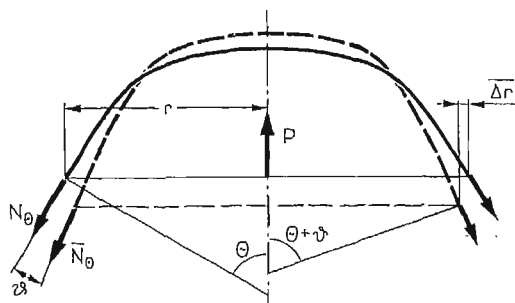
Jeżeli jeszcze założymy, że $\vartheta \ll \Theta$ otrzymujemy jeszcze prostszą zależność

$$(18) \quad \bar{R}_\varphi \approx R_\varphi \frac{1}{1 + \vartheta \operatorname{tg}\Theta}.$$

Wzory powyższe zostaną wykorzystane do określenia nowego stanu błonowego odpowiadającego globalnym przemieszczeniom powłoki.

4. Analiza skorygowanego stanu błonowego

Mając określoną geometrię zdeformowanej powłoki, można przystąpić do wyznaczenia odpowiadającego jej układu statycznego. Na rys. 10 pokazano odciętą część powłoki przed i po deformacji (polegającej na utracie stateczności ścianki).



Rys. 10

Przed deformacją wydatek naprężeń N_Θ wyznaczmy z zależności

$$N_\Theta = \frac{P}{2\pi r \sin\Theta},$$

po deformacji

$$(19) \quad \bar{N}_\Theta = \frac{\bar{P}}{2\pi r \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) \sin(\vartheta + \Theta)}.$$

Jeżeli mamy do czynienia z przypadkiem, gdzie obciążenie P w czasie deformacji nie zmienia się lub zmienia bardzo nieznacznie a poza tym $\Delta r/r \ll 1$, wtedy można napisać

$$(20) \quad \bar{N}_\Theta \approx N_\Theta \frac{\sin\Theta}{\sin(\Theta + \vartheta)}.$$

Jeżeli dodatkowo $|\vartheta| \ll \theta$, to

$$(21) \quad \bar{N}_\theta \approx \frac{N_\theta}{1 + \vartheta \operatorname{ctg} \theta}.$$

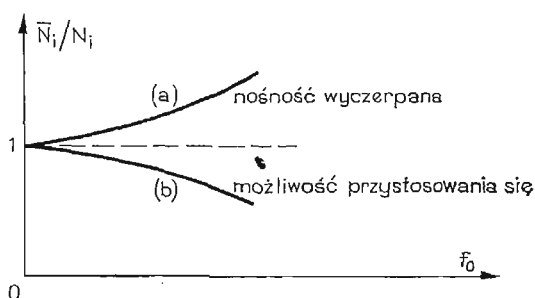
Dla wyznaczenia naprężeń obwodowych wykorzystać można warunek równowagi elementu na oś prostopadłą do powierzchni

$$\frac{\bar{N}_\varphi}{R_\varphi} + \frac{\bar{N}_\theta}{R_\theta} = p(s)$$

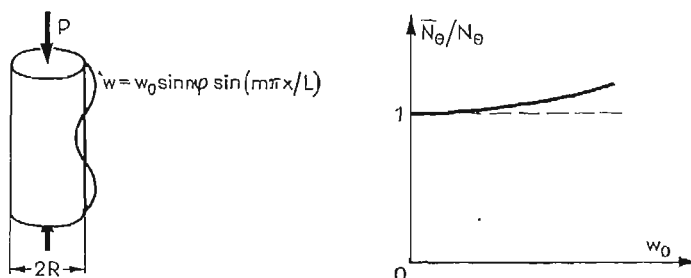
stąd

$$(22) \quad \bar{N}_\varphi = \left(p - \frac{\bar{N}_\theta}{R_\theta} \right) R_\varphi.$$

Analiza zachowania się konstrukcji polega na zbadaniu, jak zachowują się stosunki \bar{N}_θ/N_θ i $\bar{N}_\varphi/N_\varphi$ w funkcji parametrów odkształcenia układu. Z punktu widzenia możliwości pracy konstrukcji po lokalnej utracie stateczności interesują nas głównie zmiany



Rys. 11



Rys. 12

naprężeń ściskających. Jeżeli N_i jest ściskającą składową stanu błonowego, stosunek \bar{N}_i/N_i może być monotoniczną rosnącą lub malejącą funkcją parametru przemieszczenia. (Rys. 11). (\bar{N}_i — ta sama składowa po deformacji).

W przypadku (a) należy uznać, że nośność graniczna została wyczerpana już w momencie utraty stateczności, natomiast w przypadku (b) decyduje o tym druga składowa N_j . Jeżeli $N_j > 0$ obciążenie można zwiększyć, aż do wartości wynikających z wytrzymałości-

wych własności materiału (np. granicy plastyczności). Przykładem charakterystyki (a) może być pokazana na rys. 12 ściskana powłoka walcowa dla której

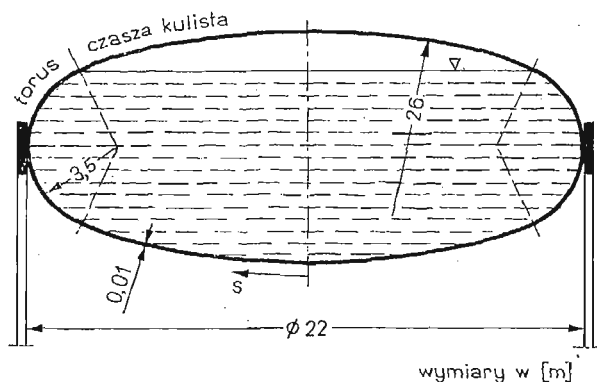
$$\Delta r = \left(\frac{nw_0}{2R} \right)^2 R \sin^2 \frac{m\pi x}{L}$$

$$\bar{N}_\theta^{\max} = \frac{P}{2\pi R \left[1 - \left(\frac{nw_0}{2R} \right)^2 \right]} = \frac{N_\theta}{1 - \left(\frac{nw_0}{2R} \right)^2}$$

Konstrukcja zachowująca się wg charakterystyki (b) zostanie przeanalizowana w przykładzie podanym poniżej.

5. Inżynierski przykład analizy

Przeanalizowano zachowanie się cienkościennego zbiornika na wodę, pokazanego na rys. 13. Wynik klasycznych obliczeń wytrzymałościowych pokazano na rys. 14. Na skutek skokowej zmiany krzywizny południka w okolicy połączenia części sferycznej i to-



Rys. 13

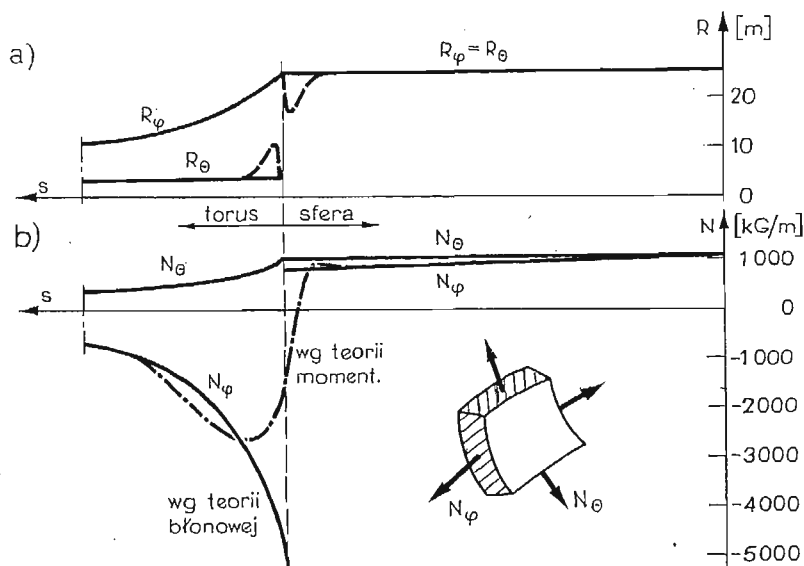
roidalnej jest strefa dużych ściskających naprężeń obwodowych (rys. 14), efektem czego było pojawienie się obwodowych pofalowań (rys. 15) już przy napełnieniu zbiornika do około połowy projektowanej pojemności. Praktycznym celem analizy było wykazanie, czy możliwe jest jego pełne obciążenie i jak będzie zachowywał się zbiornik w dalszej fazie napełniania. Ugięcie powłoki przyjęto w postaci

$$(23) \quad w = f_0 \cos \frac{\pi(s-s_0)}{2L} \cos n\varphi + w_0(s)$$

gdzie: $|s-s_0| \leq L$

$$s_0 = 10 \text{ m}$$

$$L = 1,5 \text{ m}$$



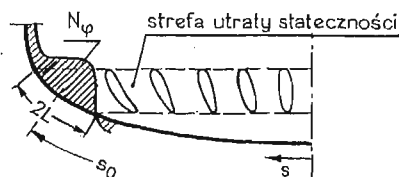
Rys. 14

Wartości s_0 i L zostały założone w oparciu o następujące przesłanki:

- zaobserwowano doświadczalnie, że taką mniej więcej szerokość stałą ($2L$) ma strefa utraty stateczności, natomiast zmiana obciążenia powoduje tylko zmianę głębokości pofalowań,
- obszar pofalowań periodycznych przedstawiony funkcją (23) pokrywa się z obszarem dużych obwodowych naprężeń ściskających (rys. 14).

Wtedy

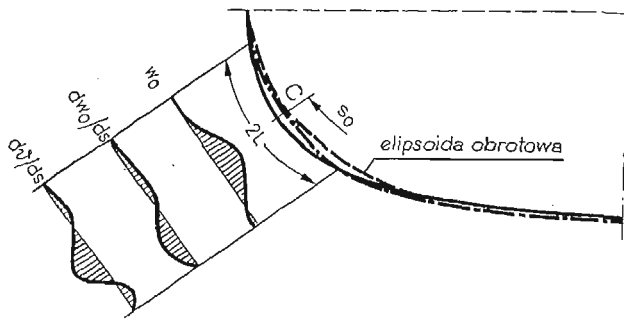
$$\Delta r = \frac{1}{4} \frac{(f_0 \cdot n)^2}{r(s)} \cos^2 \frac{\pi(s-s_0)}{2L}.$$



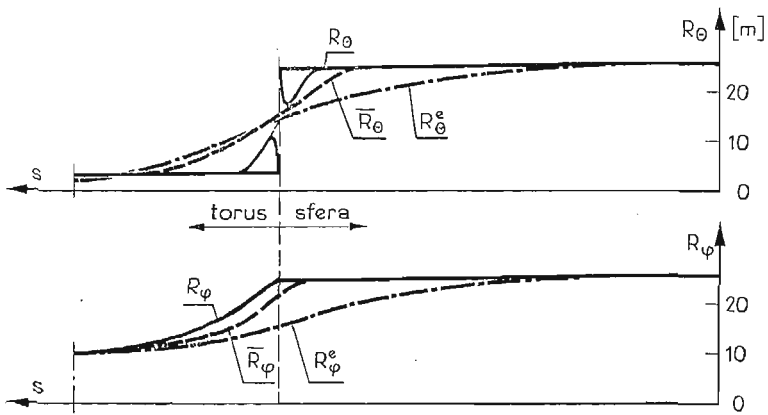
Rys. 15

Posługując się zależnościami (11), (13), (18), (21) i (22) wyznaczono nowe parametry stanu odkształcenia i naprężenia w funkcji wielkości $n \cdot f_0$ (rys. 16—18).

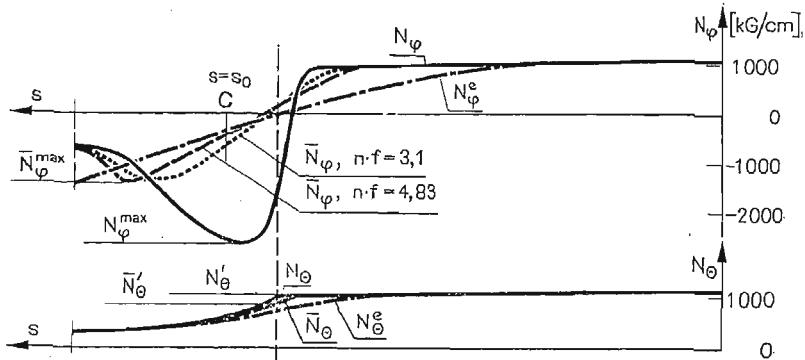
- Widać, że wzrost przemieszczeń związany jest przede wszystkim ze spadkiem obwodowych naprężeń ściskających. Na wykresie 19 pokazano zależność $\bar{N}_\phi^{\max}/N_\phi^{\max}$ w funkcji parametru przemieszczenia. Na razie nieokreślonym pozostaje poziom, na jakim ustalą się ostateczne przemieszczenia. Warto zauważyć, że ze wzrostem wyrażenia $n \cdot f_0$ kształt „globalny” powłoki zbliża się do elipsoidy obrotowej wpisanej w gabaryty powłoki (rys. 20).



Rys. 16

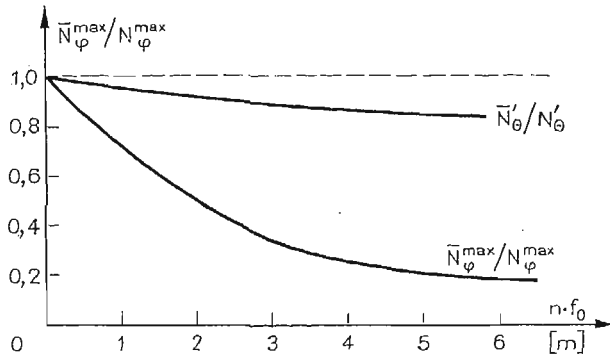


Rys. 17



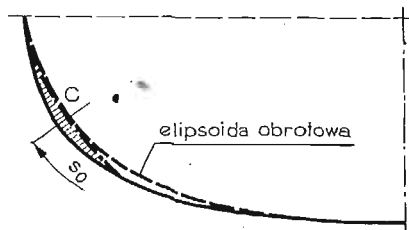
Rys. 18

Naprężenia zredukowane stanu błonowego dla powłoki elipsoidalnej są prawie jednokowe na całej powierzchni a więc ten kształt jest bliski optymalnemu dla tego typu obciążenia. Na rys. 17 i 18 pokazano dodatkowo parametry dla takiej właśnie elipsoidy (oznaczone indeksem „e”). Wartość $n \cdot f_0 = 4,93$ odpowiada przypadkowi, gdy przemieszczona „globalna” powłoki jest styczna do elipsoidy w punkcie C.



Rys. 19

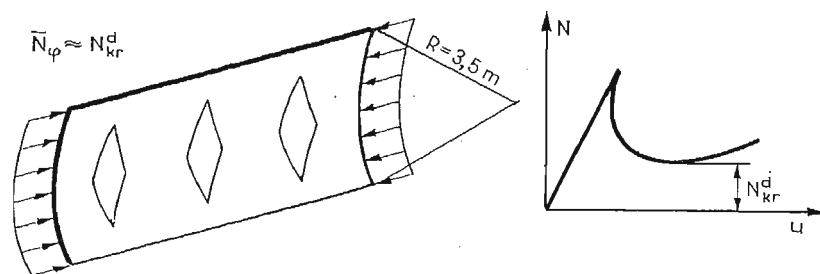
Praktycznie, końcowy stan przemieszczeń i naprężeń można oszacować następująco. Naprężenia obwodowe w strefie wyboczonej nie mogą być większe od naprężeń, które zdolna jest przenieść w tym kierunku pofalowana powierzchnia powłoki. Te ostatnie można oszacować zastępując wycinek rzeczywistej powłoki wycinkiem powłoki walcowej o promieniu $R = 3,5$ m (rys. 21).



Rys. 20

Taka powłoka po utracie stateczności może przenieść obciążenie równe tzw. dolnemu obciążeniu krytycznemu, które na podstawie [1] jest równe $N_{kr}^d = 0,16 E/R = 960$ kG/cm. Wtedy $\bar{N}_\varphi / N_\varphi = 0,343$ co na podstawie wykresu 19 daje $n \cdot f_0 = 3,1$ m. Na podstawie [4] można dla tych parametrów powłoki oszacować ilość fal w kierunku obwodowym, powinno być $n \approx 45$. Stąd końcowa wartość maksymalnej strzałki ugięcia powinna być równa $f_0 = 6,7$ cm a stan naprężeń taki, jak na rys. 18 (linia kropkowana).

Przewidywania przedstawione powyżej zostały sprawdzone doświadczalnie. Po napełnieniu zbiornika do projektowanej objętości zaobserwowano maksymalne ugięcia rzędu $6 \div 8$ cm [5].



Rys. 21

6. Uwagi końcowe

Przedstawione powyżej rozważania pozwoliły w bardzo prosty sposób przeanalizować rozwój przemieszczeń konstrukcji po lokalnej utracie stateczności pierwotnej jej postaci. Mimo osłabienia ścisłości analizy, poprzez przyjęcie na zasadzie tylko intuicji wielu uproszczeń i założeń, uzyskano jednak ważne wnioski (przede wszystkim jakościowe) dotyczące zachowania się powłoki.

Ważnym faktem przemawiającym za słusznością tych założeń były wyniki eksperymentu przeprowadzone na rzeczywistym zbiorniku, który przy obciążeniu zachował się zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi.

Należy podkreślić, że część wyprowadzonych zależności (zmiana promieni krzywizn i nowe siły błonowe) jest słuszna niezależnie od wielkości przemieszczeń i własności materiału i może być z powodzeniem stosowana np. do analizy plastycznego płynięcia osiowo-symetrycznych konstrukcji powłokowych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. S. VOLMIR, *Устойчивость деформируемых систем*, Изд. Наука, Москва 1967.
2. W. SZYSZKOWSKI, *Geometrical analysis of the post-buckling behaviour of thin cylindrical and conical shells under axial compression*, Arch. Bud. Maszyn, **22** (1975).
3. St. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSZKOWSKI, *Metody geometryczne w nieliniowej teorii powłok*, Mat. Sympozjum „Konstrukcje powłokowe”, Kraków, 1974.
4. S. S. GILL, *The stress analysis of pressure vessels and pressure vessel components*, Pergamon Press, 1970.
5. W. SZYSZKOWSKI, J. Zwoliński, *Expertise on the desing of the 5000Q0 imp. gallon tower tank erected in Karbale*, (niepublikowane opracow. wewnętrzne „BIPROMASZ”u).

Резюме

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИСПОСОБЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

В работе представлено анализ поведения осесимметричных оболочек после потери устойчивости. Показано, что для некоторых оболочек их способность для нагрузки не зависит от потери устойчивости. Большие перемещения связанные с потерю устойчивости стабилизируются мимо

увеличения нагрузки. Это возникает из того, что оболочка приспособляется до новых условий работы. Анализ основан на исследовании только некоторого мембранного состояния связанного со сменой геометрии оболочки.

Summary

THE ANALYSIS OF ADAPTATION POSSIBILITIES OF SOME AXISYMMETRICAL SHELLS AFTER LOCAL BUCKLING

The behaviour of axisymmetrical shells after buckling is considered. It is proved that local loss of stability of some structures does not reduce their carrying capacity i.e. shells can adaptate themselves to the new work conditions. It means that the large displacements connected with buckling establish themselves after some time and do not manifest tendency to increase. The analysis is based only on investigations of some average membrane state depending on the change of the shell geometry.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ I TECHNIKI LOTNICZEJ

Praca została złożona w Redakcji 15 lutego 1978 r.

Praca nagrodzona w konkursie Oddziału Łódzkiego PTMTS, grudzień 1977 r.

OPTIMALIZACJA POŁOŻENIA PODPÓR BELKI SZTYWNO-PLASTYCZNEJ OBCIĄŻONEJ
IMPULSEM PRĘDKOŚCI

JAAN LELLEP (WARSZAWA)

1. Wstęp

Optymalizacji położenia podpory dodatkowej dla belek obciążonych statycznie poświęcone są prace (1), (2). W (1) rozważane są belki sprężyste i plastyczne, natomiast w (2) belki sztywno-plastyczne.

W niniejszej pracy będziemy rozważać układ podpór dodatkowych dla belki sztywno-plastycznej obciążonej dynamicznie (impulsem prędkości początkowej). Przedmiotem pracy będzie optymalizacja położenia podpór pośrednich z uwagi na minimum największych przemieszczeń końcowych. Rozważane jest również zagadnienie dualne: znaleźć najmniejszą objętość belki przy zachowaniu warunków, że największe przemieszczenia końcowe nie przekraczają danej wartości. W tym celu w prostokątnym układzie współrzędnych Oxy rozważamy belkę o długości l . Niech w jednym końcu (przy $x = 0$) belka będzie utwierdzona, a w punktach $x = \varphi_k$ ($k = 1, \dots, n$) i $x = l$ swobodnie podparta.

Przy uzyskiwaniu rozwiązań stosowana jest zasada ekstremalna Tamuza (6). Rozważać będziemy belkę wykonaną z materiału sztywno-plastycznego. Zakładamy, że w chwili czasu $t = 0$ każdy punkt belki z wyjątkiem punktów podporowych ma prędkość poprzeczną $v_0 = \text{const}$. Uważamy, że przemieszczenia i odkształcenia są małe w porównaniu ze stałą wysokością h belki. Przy tych założeniach ugięcia belek swobodnie podpartych i utwierdzonych badane były w pracach (3), (4).

2. Sformułowanie problemu

W pracy wygodniej jest korzystać z bezwymiarowych wielkości:

$$(2.1) \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad s_k = \frac{\varphi_k}{l}, \quad m = \frac{4U}{\sigma_0 b h^2},$$
$$\tau = \frac{\sigma_0 b h^2 t}{4\mu v_0^2 l^2}, \quad w = \frac{\sigma_0 b h^2 W}{4\mu v_0^2 l^2},$$

gdzie M oznacza moment zginający, W — przemieszczenie w kierunku osi Oy . Wielkość σ_0 jest granicą plastyczności przy jednoosiowym stanie naprężenia, μ masa na jednostkę długości, natomiast b — szerokość belki. Uwzględniając (2.1) sformułujemy zagadnienie

w następującej postaci. Należy wyznaczyć taki układ s_1, \dots, s_n , który minimalizuje 1) średnie przemieszczenie końcowe, 2) objętość belki $V = lbh$ przy ograniczeniu, że przemieszczenia końcowe nie przekraczają danej wartości W_* , 3) największe przemieszczenie końcowe. Mamy więc trzy typy kryteriów jakości:

$$(2.2) \quad J_1 = \int_0^1 w_f(\xi) d\xi,$$

$$(2.3) \quad J_2 = V \text{ przy ograniczeniu } w_f(\xi) \leq W_*,$$

$$(2.4) \quad J_3 = \max_{0 \leq \xi \leq 1} w_f(\xi),$$

gdzie $w_f(\xi)$ oznacza przemieszczenie końcowe.

Dla określania przemieszczeń stosujemy zasadę Tamuża (6). Zasada ta stwierdza, że w każdej chwili czasu τ przyspieszenia rzeczywiste, wybrane z klasy przyspieszeń kinematycznie dopuszczalnych są punktami stacjonarności pewnego funkcjonału, który w danym przypadku ma postać:

$$(2.5) \quad J = \int_0^1 \frac{1}{2} [\ddot{w}(\xi, \tau)]^2 d\xi - \sum_{j=1}^n m(\xi_j, \tau) [\ddot{w}'(\xi, \tau)]_{\xi=\xi_j}.$$

W (2.5) i w dalszym ciągu pracy

$$(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \xi}(\cdot); \quad (\dot{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\cdot); \quad []_{\xi=\xi_j} = []_{\xi=\xi_j+0} - []_{\xi=\xi_j-0}.$$

W pracy będziemy stosować wskaźniki i, j, k .

Umówmy się, że jeśli nie pokazano jakie wartości one przyjmują, to $i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, n-1; k = 0, \dots, n-1$.

W omawianym zagadnieniu warunki kinematyczne są następujące:

1. warunek początkowy (wygodniej jest oznaczać $s_0 = 0, s_{n+1} = 1$)

$$(2.6) \quad \dot{w}(\xi, 0) = 1 \quad \text{jeśli} \quad \xi \neq s_i, \quad \xi \neq 1,$$

2. warunki brzegowe

$$(2.7) \quad \dot{w}(s_i, \tau) = \dot{w}(1, \tau) = \ddot{w}(s_i, \tau) = \ddot{w}(1, \tau) = 0.$$

3. Określanie przemieszczeń końcowych

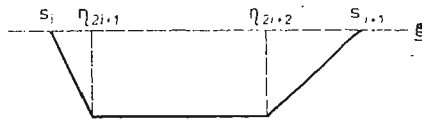
3.1. Faza początkowa. Jak wiadomo (3), (4), przy dynamicznym odkształcaniu belek sztywno-plastycznych prędkość przemieszczenia jest odcinkowo-liniową funkcją ξ . Na rysunku 1 pokazano rozkład prędkości dla części belki w przedziale $s_i \leq \xi \leq s_{i+1}$. Punkty $\eta_{2i+2}(\tau), \eta_{2i+1}(\tau)$ odpowiadają niestacjonarnym przegubom plastycznym. W pun-

ktach tych bezwymiarowy moment zginający $m = 1$. Na podstawie rysunku 1 możemy zapisać:

$$(3.1) \quad \dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\xi - s_i}{\eta_{2i+1} - s_i} & \text{dla } s_i \leq \xi \leq \eta_{2i+1}, \\ 1 & \text{dla } \eta_{2i+1} \leq \xi \leq \eta_{2i+2}, \\ \frac{\xi - s_{i+1}}{\eta_{2i+2} - s_{i+1}} & \text{dla } \eta_{2i+2} \leq \xi \leq s_{i+1}. \end{cases}$$

Wzór (3.1) zapewnia spełnienie warunku początkowego (2.6), jeśli

$$(3.2) \quad \eta_{2i+1}(0) = s_i, \quad \eta_{2i+2}(0) = s_{i+1}.$$



Rys. 1

Z (3.1) otrzymujemy rozkład przyspieszeń

$$(3.3) \quad \ddot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\dot{\eta}_{2i+1}(\tau)(s_i - \xi)}{(\eta_{2i+1} - s_i)^2} & \text{dla } s_i \leq \xi < \eta_{2i+1}, \\ 0 & \text{dla } \eta_{2i+1} < \xi < \eta_{2i+2}, \\ \frac{\dot{\eta}_{2i+2}(\tau)(s_{i+1} - \xi)}{(\eta_{2i+2} - s_{i+1})^2} & \text{dla } \eta_{2i+2} < \xi \leq s_{i+1}. \end{cases}$$

Ponieważ w punktach $\xi = s_i$ muszą istnieć stacjonarne, a w punktach $\xi = \eta_{2i+1}(\tau)$, $\xi = \eta_{2i+2}(\tau)$ — niestacjonarne przeguby plastyczne, mamy

$$(3.4) \quad m(s_i, \tau) = -1, \quad m(\eta_{2i+1}, \tau) = m(\eta_{2i+2}, \tau) = 1, \quad m(1, \tau) = 0.$$

Podstawiając (3.3) do (2.5) i uwzględniając (3.4) otrzymujemy funkcjonal J w postaci

$$(3.5) \quad J = \frac{1}{6} \sum_{l=0}^n \left\{ \frac{\dot{\eta}_{2l+1}}{\eta_{2l+1} - s_l} \left[\dot{\eta}_{2l+1} - \frac{12}{\eta_{2l+1} - s_l} \right] + \frac{\dot{\eta}_{2l+2}}{\eta_{2l+2} - s_{l+1}} \left[\frac{12}{\eta_{2l+2} - s_{l+1}} - \dot{\eta}_{2l+2} \right] \right\} - \frac{\dot{\eta}_{2n+2}}{(\eta_{2n+2} - s_{n+1})^2}.$$

Przy poszukiwaniu wartości stacjonarnej dla (3.5) możemy zauważyć, że $J = J(\dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_{2n+2})$. Rzeczywiście, z (3.1) i (3.3) wynika, że

$$\ddot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} \dot{\eta}_{2i+1} \frac{\dot{w}^2}{(s_i - \xi)} & \text{dla } s_i \leq \xi < \eta_{2i+1}, \\ \dot{\eta}_{2i+2} \frac{\dot{w}^2}{(s_{i+1} - \xi)} & \text{dla } \eta_{2i+2} < \xi \leq s_{i+1}. \end{cases}$$

Mnożniki typu $\dot{w}^2/(s_i - \xi)$, występujące w ostatnim wzorze wykazują, że odpowiednie pole przyspieszeń jest kinematycznie dopuszczalne. Mnożniki te nie podlegają wariacji w (2.5). Poszukiwanie wartości stacjonarnej funkcjonau (3.5) prowadzi więc do układu równań różniczkowych $\frac{\partial J}{\partial \dot{\eta}_n} = 0$ ($n = 1, \dots, 2n+2$). Rozwiązując ten układ i spełniając warunki brzegowe (3.2) otrzymujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \eta_{2k+1}(\tau) &= s_k + \sqrt{12\tau}, & \eta_{2k+2}(\tau) &= s_{k+1} - \sqrt{12\tau}. \\ \eta_{2n+1}(\tau) &= s_n + \sqrt{12\tau}, & \eta_{2n+2}(\tau) &= 1 - \sqrt{6\tau}. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy część belki między podporami s_k i s_{k+1} . W przedziale tym faza początkowa ruchu kończy się w chwili τ_k , którą wyznacza się z równania $\eta_{2k+1}(\tau_k) = \eta_{2k+2}(\tau_k)$. Z układu (3.6) otrzymujemy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \tau_k &= \frac{1}{48}(s_{k+1} - s_k)^2, & \alpha_k &= \frac{1}{2}(s_k + s_{k+1})^2, \\ \tau_n &= \frac{(1 - s_n)^2}{6(3 + 2\sqrt{2})}, & \alpha_n &= \frac{s_n + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_k = \eta_{2k+1}(\tau_k)$.

Dla wyznaczenia przemieszczeń mamy związek (5):

$$(3.8) \quad w(\xi, \tau) = \tau_*(\xi) + \int_{\tau_*(\xi)}^{\tau} \dot{w}(\xi, \tau) d\tau.$$

We wzorze (3.8) $\tau_*(\xi)$ oznacza bezwymiarowy czas w którym w przekroju $x = \xi l$ pojawia się przegub plastyczny. Funkcja ta ma postać

$$(3.9) \quad \tau_*(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{12}(\xi - s_k)^2 & \text{dla } s_k \leq \xi \leq \alpha_k, \\ \frac{1}{12}(\xi - s_{k+1})^2 & \text{dla } \alpha_k \leq \xi \leq s_{k+1}, \\ \frac{1}{12}(\xi - s_n)^2 & \text{dla } s_n \leq \xi \leq \alpha_n, \\ \frac{1}{6}(\xi - 1)^2 & \text{dla } \alpha_n \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Wykonując całkowanie w (3.8) i uwzględniając (3.1), (3.6), (3.7) i (3.9) można wyznaczyć przemieszczenia w dowolnej chwili początkowej fazy ruchu. Przemieszczenia końcowe tej fazy są

$$(3.10) \quad \begin{aligned} w(\xi, \tau_k) &= \frac{1}{12}(s_{k+1} - \xi)(\xi - s_k) \quad \text{dla } s_k \leq \xi \leq s_{k+1}, \\ w(\xi, \tau_n) &= \begin{cases} \frac{1}{12}(\xi - s_n) \left[s_n - \xi + \frac{4(1 - s_n)}{2 + \sqrt{2}} \right] & \text{dla } s_n \leq \xi \leq \alpha_n, \\ \frac{1}{6}(1 - \xi) \left[\xi - 1 + \frac{2(1 - s_n)}{1 + \sqrt{2}} \right] & \text{dla } \alpha_n \leq \xi \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Należy podkreślić, że czas w którym kończy się faza pierwsza może być różny dla różnych części.

3.2. Faza końcowa. W tej fazie ruch belki opisany jest prędkościami

$$(3.11) \quad \dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} \dot{w}_i(\tau) \frac{\xi - s_i}{\alpha_i - s_i} & \text{dla } s_i \leq \xi \leq \alpha_i, \\ \dot{w}_i(\tau) \frac{\xi - s_{i+1}}{\alpha_i - s_{i+1}} & \text{dla } \alpha_i \leq \xi \leq s_{i+1}, \end{cases}$$

gdzie $\dot{w}_i(\tau)$ oznaczają pewne poszukiwane funkcje czasu τ . Zależność (3.11) pozwala określić rozkład przyspieszeń. Funkcjonał (2.5) ma w tym przypadku postać

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{6} [\ddot{w}_k(\tau)]^2 (s_{k+1} - s_k) + \frac{8\dot{w}_k(\tau)}{s_{k+1} - s_k} \right\} + [\ddot{w}_n(\tau)]^2 \frac{(1 - s_n)}{3(3 + 2\sqrt{2})} + \dot{w}_n(\tau) \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 - s_n}.$$

Otrzymujemy stąd układ równań różniczkowych na poszukiwane $w_k(\tau)$:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \ddot{w}_k(\tau) (s_{k+1} - s_k)^2 + 24 &= 0, \\ \ddot{w}_n(\tau) (1 - s_n)^2 + 3(3 + 2\sqrt{2}) &= 0. \end{aligned}$$

Warunki początkowe dla układu (3.12) są następujące:

$$(3.13) \quad w_k(\tau_k) = \tau_k, \quad \dot{w}_k(\tau_k) = 1, \quad K = 0, \dots, n.$$

Zagadnienie (3.12), (3.13) ma następujące rozwiązanie:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} w_k(\tau) &= \frac{1}{2} (3\tau - \tau_k) - \frac{12(\tau^2 - \tau_k^2)}{(s_{k+1} - s_k)^2}, \\ w_n(\tau) &= \frac{1}{2} (3\tau - \tau_n) - \frac{3(3 + 2\sqrt{2})}{2(1 - s_n)^2} (\tau^2 - \tau_n^2). \end{aligned}$$

Czas trwania ruchu $\tau = \theta_i$ w przedziale (s_i, s_{i+1}) należy wyznaczyć z warunku $\dot{w}_i(\theta_i) = 0$.

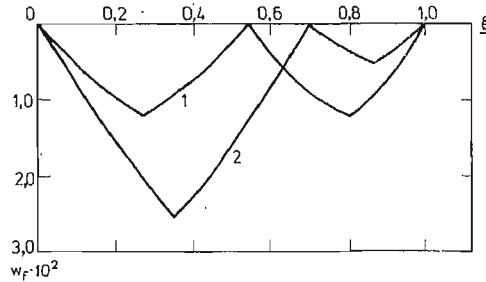
Z (3.14) wynika, że

$$(3.15) \quad \theta_i = 3\tau_i.$$

Po scałkowaniu równania (3.11) z uwzględnieniem (3.7), (3.10), (3.14), (3.15) otrzymujemy przemieszczenia końcowe

$$(3.16) \quad w_f(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{12} (\xi - s_k)^2 + \frac{1}{8} (s_{k+1} - s_k) (\xi - s_k) & \text{dla } s_k \leq \xi \leq \alpha_k, \\ -\frac{1}{12} (s_{k+1} - \xi)^2 + \frac{1}{8} (s_{k+1} - s_k) (s_{k+1} - \xi) & \text{dla } \alpha_k \leq \xi \leq s_{k+1}, \\ -\frac{1}{12} (s_n - \xi)^2 + \frac{(1 - s_n)(\xi - s_n)}{2(2 + \sqrt{2})} & \text{dla } s_n \leq \xi \leq \alpha_n, \\ -\frac{1}{6} (1 - \xi)^2 + \frac{(1 - s_n)(1 - \xi)}{2(1 + \sqrt{2})} & \text{dla } \alpha_n \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Przemieszczenie końcowe dla przypadku jednej podpory dodatkowej pokazano na rys. 2. Krzywa 1 odpowiada położeniu podpory $s = 0,54$, druga $s = 0,7$.



Rys. 2

4. Optymalizacja położenia podpór pośrednich

4.1. Minimalizacja średniego przemieszczenia końcowego. Rozważmy kryterium (2.2), które przy uwzględnieniu (3.16) ma postać

$$(4.1) \quad J_1 = \frac{7}{288} \left[\sum_{j=0}^{n-1} (s_{j+1} - s_j)^3 + \frac{8(1-s_n)^3}{3+2\sqrt{2}} \right].$$

Warunkami koniecznymi na ekstremum funkcji (4.1) są równości

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (s_j - s_{j-1})^2 - (s_{j+1} - s_j)^2 &= 0, \\ (s_n - s_{n-1})^2 - \frac{8(1-s_n)^2}{3+2\sqrt{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Układ (4.2) prowadzi do wyniku

$$(4.3) \quad s_i = \frac{2\sqrt{2} \cdot i}{1 + (2n+1)\sqrt{2}}.$$

W przypadku $n = 1$ mamy $s_1 = 0,54$.

Ekonomię tego projektu wyrażamy ilorazem

$$e_1 = \frac{\int_0^1 w_f(\xi) d\xi}{\int_0^1 w_*(\xi) d\xi}$$

gdzie $w_*(\tau)$ oznacza przemieszczenie końcowe dla belki na dwóch podporach (w tym przypadku w (4.1) można przyjąć $s_i = 0$). Wartość e_1 wynosi

$$e_1 = \frac{3+2\sqrt{2}}{[1+(2n+1)\sqrt{2}]^2}.$$

Z praktycznego punktu widzenia powyższy wskaźnik ekonomii wynikający z porównania belek o różnej liczbie podpór jest o tyle zniekształcony, że nie uwzględnia kosztu budowy dodatkowych podpór. Uwzględnienie tego typu kosztów wykracza poza ramy niniejszej pracy. Można jednak porównywać belkę optymalną z belką o tej samej liczbie podpór ustawionych w różnych odległościach. W tym przypadku koszt budowy podpór jest niejako wyeliminowany, a odpowiedni wskaźnik ekonomii wynosi

$$E_1 = \frac{8(3+2\sqrt{2})(n+1)^3}{[8+n(3+2\sqrt{2})][1+(2n+1)\sqrt{2}]^2}$$

Wielkości e_1 i E_1 odpowiadające kilku wartościom n podano w tabelicy 1. Tablica ta zawiera również współczynniki s i s' , które w następujący sposób określają współrzędne podpór porównywanych projektów

$$s_{k+1} = s(k+1), \quad s'_{i+1} = s'(i+1).$$

Z tabelicy 1 wynika, że wielkość E_1 przyjmuje wartości bliskie jedności. Oznacza to, że średnie przemieszczenie końcowe belki stosunkowo mało zależy od zmiany położenia podpór.

Tabela 1

n	1	2	3	4	5	6
e_1	0,2121	0,0895	0,0491	0,0309	0,0213	0,0155
E_1	0,9814	0,9832	0,9856	0,9877	0,9892	0,9905
e_2	0,4605	0,2991	0,2215	0,1759	0,1458	0,1245
E_2	0,9210	0,8974	0,8860	0,8793	0,8748	0,8715
s	0,5000	0,3334	0,2500	0,2000	0,1667	0,1429
s'	0,5395	0,3504	0,2595	0,2060	0,1708	0,1459

4.2. Minimalizacja objętości belki przy ograniczeniu na przemieszczenia. Wyznaczamy wartość minimalną wysokości belki przy warunku, że przemieszczenia końcowe nie przekraczają danej wartości W_* (kryterium (2.3)). Wariacji poddawać będziemy tylko wysokość przy stałej szerokości.

W tym celu we wzorach (3.7), (3.14) i (3.15) zgodnie z (2.1) zastąpimy $w_i \rightarrow W_i h^2$, $\tau_i \rightarrow t_i h^2$, $\theta_i \rightarrow 3t_i h^2$. Mamy zagadnienie następujące: znaleźć minimum funkcjonału $J_2 = h$ przy warunkach

$$(4.4) \quad \frac{1}{24h^2} \cdot (s_{k+1} - s_k)^2 \leq w_*,$$

$$\frac{1}{3h^2} \cdot \frac{(1-s_n)}{3+2\sqrt{2}} \leq w_*.$$

Dla rozwiązania tego zagadnienia wprowadzamy funkcjonał

$$(4.5) \quad J_* = h + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \left[\frac{1}{24} (s_{j+1} - s_j)^2 - w_* h^2 \right] + \lambda_n \left[\frac{(1-s_n)^2}{3(3+2\sqrt{2})} - w_* h^2 \right],$$

gdzie $\lambda_j \cdot \geq 0$ oznaczają niewiadome mnożniki Lagrange'a, takie, że

$$(4.6) \quad \lambda_j \left[\frac{1}{24} (s_{j+1} - s_j)^2 - w_* h^2 \right] = 0.$$

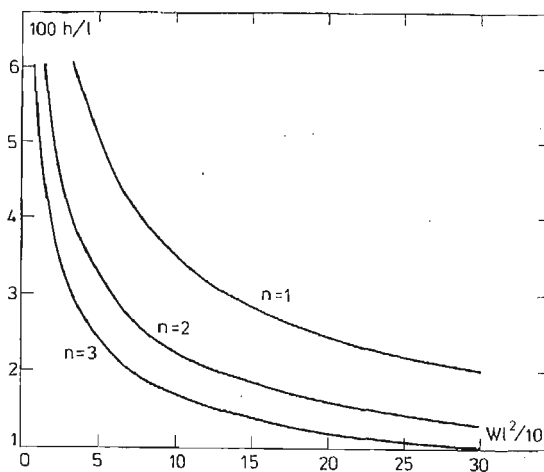
Minimalizacja funkcji (4.5) prowadzi do układu

$$(4.7) \quad \begin{cases} \lambda_{j-1}(s_j - s_{j-1}) - \lambda_j(s_{j+1} - s_j) = 0, \\ \lambda_{-1n}(s_n - s_{n-1}) - \lambda_n \frac{8(1 - s_n)}{3 + 2\sqrt{2}} = 0, \end{cases}$$

$$(4.8) \quad 1 - 2h \sum_{j=0}^n \lambda_j w_* = 0.$$

Z układu (4.7) i (4.8) wynika, że we wszystkich związkach (4.4) zachodzi znak równości. Rzeczywiście, jeśli na przykład pierwsza nierówność (4.4) ma postać

$$\frac{1}{24} s_1^2 < w_* h^2,$$



Rys. 3

to zgodnie z (4.6) $\lambda_0 = 0$ i z (4.7) wynika, że albo $s_j = 0$ albo $\lambda_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$). Przypadek pierwszy jest nieuzasadniony z punktu widzenia fizycznego natomiast drugi powoduje niespełnienie równania (4.8). Mamy więc w (4.4) znaki równości. Teraz (4.4) jest równoważne (4.2) i (4.3). Przy tym optymalna wysokość belki wynosi

$$h = \{ \sqrt[3]{3W_*} [1 + (2h+1)\sqrt{2}] \}^{-1}.$$

Zależność wysokości belki od W_* dla $n = 1, 2, 3$ pokazano na rys. 3.

Ekonomię kształtu określamy wzorami $e_2 = h/h_*$ i $E_2 = h/h'$, gdzie h jest wysokością belki jednoprzęsłowej, a h' — wysokością belki o $n+1$ równych przęsłach. Zarówno

h_* jak i h' są takie, że maksymalne przemieszczenia w obu belkach wynosi W_* . Mamy wówczas

$$e_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + (2h+1)\sqrt{2}}, \quad E_2 = (h+1)e_2.$$

4.3. Minimalizacja maksymalnych przemieszczeń końcowych. Uwzględnienie (3.13)—(3.16) pozwala przekształcić kryterium (2.4) do postaci

$$(4.9) \quad J_3 = \max_k \left\{ \frac{1}{24} (s_{k+1} - s_k)^2, \frac{(1 - s_n)^2}{3(3 + 2\sqrt{2})} \right\}.$$

Można oczekiwać, że funkcjonał (4.9) osiąga minimum, jeśli maksymalne przemieszczenia w przedziałach (s_k, s_{k+1}) są sobie równe. Mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} (s_{j+1} - s_j)^2 &= \frac{1}{24} (s_j - s_{j-1})^2, \\ \frac{1}{24} (s_n - s_{n-1})^2 &= \frac{(1 - s_n)^2}{3(3 + 2\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Ostatni układ jest równoważny (4.2), zatem rozwiązanie optymalne (4.3) odpowiada też kryterium (4.9).

5. Zakończenie

W pracy rozwiązano zagadnienia wyznaczenia optymalnego położenia układu dodatkowych podpór belek sztywno-plastycznych obciążonych impulsem prędkości z uwagi na minimum a) średnich, b) maksymalnych przemieszczeń końcowych, c) objętości belki przy ograniczeniu przemieszczeń końcowych. Wykazano, że we wszystkich przypadkach podpory dodatkowe mają te same optymalne położenia.

Autor pragnie podziękować Prof. A. Sawczukowi i mgr H. Stolarskiemu za okazaną pomoc i rady przy opracowywaniu pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. MRÓZ, G. I. N. ROZVANY, *Optimal design of structures with variable support conditions*, J. Optimiz. Theory and Appl., **15**, 1 (1975), 85—101.
2. W. PRAGER, G. I. N. ROZVANY, *Plastic design of beams: optimal locations of supports and steps in yield moment*, Int. J. Mech. Sci., **17**, 10 (1975), 627—631.
3. P. S. SYMENDS, *Large plastic deformations of beams under blast type loading*, Proc. 2d U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. Ann Arbor, 1954, 505—515.
4. И. Л. ДИКОВИЧ, *Динамика упруго-пластических балок*, Ленинград, 1960.
5. Я. ЛЕЛЛЕП, *О больших прогибах жестко-пластических стержней при динамическом нагружении*, Уч. зап. Таптуского ун-та, **277** (1971), 258 - 269.
6. В. П. ТАМУЖ, *Об одном уникальном принципе в динамике жесткопластического тела*, Прикл. мат. и мех., **26** (1962), 715 - 722.

Резюме

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПОР ПРИ
ИМПУЛЬСНО НАГРУЖЕННОЙ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКЕ

Рассматривается изгиб жестко-пластической балки подверженной действию мгновенного начального импульса. Балка находится на $n+2$ опорах, из которых две закрепляют концы балки. Решена задача определения расположения дополнительных опор, при котором остаточные прогибы принимают минимальные значения. Рассмотрена и обратная задача нахождения минимальной толщины балки при ограничении на остаточные прогибы.

Summary

OPTIMAL LOCATION OF ADDITIONAL SUPPORTS IN THE CASE OF A RIGID-PLASTIC BEAM
LOADED IMPULSIVELY

An impulsively loaded rigid-plastic beam resting on $n+2$ supports is considered. Two supports fix the ends of the beam. Three optimization criteria are formulated. Optimal location of the additional supports is found under condition that permanent deflection of the beam attains the minimal value. The minimum volume problem is studied in the case of constrained deflections. It is found that the additional supports have the same optimal locations in the all considered cases.

IPPT
PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1978 r.

SIŁY TARCIA COULOMBA PODCZAS WIROWANIA*)

ALFRED ZMITROWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

Dwa stykające się ciała mają zbiory punktów leżące jednocześnie na obu powierzchniach ograniczających te ciała. Część wspólną powierzchni ciał tworzącą skończony obszar zastępuje się zazwyczaj wycinkiem płaszczyzny stycznej do ciał. W takim styku możliwy jest względny ruch translacyjny (poślizg) i obrotowy (wirowy) wokół normalnej do powierzchni styku. Względnemu ruchowi ciał przy założeniu wzajemnego docisku siłami skierowanymi wzdłuż normalnej do powierzchni styku towarzyszą opory tarcia suchego. Uwzględnia się je przez wprowadzenie do opisu ruchu, sił tarcia oraz momentu sił tarcia.

Struktura geometryczna powierzchni ciał (t.zw. chropowatość) jest układem elementów geometrycznych powierzchni o określonym kształcie, rozmiarach oraz rozmieszczeniu wzniesień i wgłębień. Najczęściej chropowatość powierzchni jest śladem obróbki mechanicznej lub zużycia i zależy od rodzaju obróbki (struganie, toczenie, szlifowanie itd.), własności narzędzia i obrobionego materiału, jak również od warunków i parametrów obróbki. Chaotycznie rozłożone nierówności mają pewną ogólną kierunkowość, która na ogół pokrywa się z kierunkiem śladów obróbki. Mówimy o anizotropowej strukturze geometrycznej powierzchni gdy ma miejsce wyraźne ukierunkowanie usytuowania wzniesień i wgłębień. Struktura izotropowa powierzchni to układ nierówności nie wykazujący określonego ukierunkowania.

Tarcie suche towarzyszące poślizgowi zależne od kierunku ślizgania na skutek anizotropowej chropowatości jednej ze stykających się powierzchni, nazwano tarcie anizotropowym [1, 2, 3]. Cechą charakterystyczną układów z tarcie anizotropowym jest to, iż kierunek siły tarcia nie pokrywa się z kierunkiem poślizgu, z wyjątkiem kierunków zwanych głównymi. W przypadku tarcia izotropowego kierunek siły tarcia zawsze jest przeciwny kierunkowi ślizgania.

Uwzględnienie kierunkowości tarcia (zwłaszcza gdy anizotropia jest dość wyraźna) jest szczególnie ważne w przypadku ruchu, ponieważ istotnie zmienia przebieg zjawiska. Tarcie anizotropowe należy uwzględnić tak w ruchu translacyjnym, jak i obrotowym dookoła osi prostopadłej do chropowatego styku.

Wpływ tarcia ortotropowego (gdy kierunki główne są wzajemnie ortogonalne) na ruch translacyjny punktu materialnego i bryły sztywnej przedstawiono między innymi

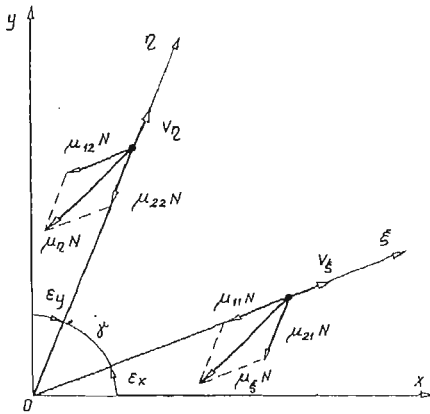
*) Praca wykonana w ramach planu badań MR I/26, temat 09.3

w [1, 2, 3]. Pewne szczególne przypadki ruchu wirowego dla prostych kształtów obszaru styku oraz tarcia izotropowego omówiono w [1, 4, 5].

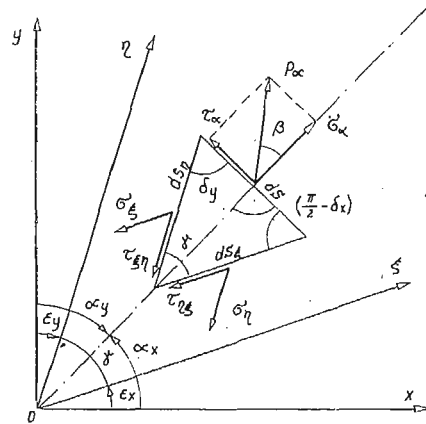
W niniejszej pracy rozszerzono opis tensora tarcia Coulomba [6] przez sformułowanie reprezentacji tensora dla przypadku styku powierzchni o izotropowej i anizotropowej chropowatości, jak również styku dwóch powierzchni o różnych anizotropowych strukturach geometrycznych. Korzystając z tak wprowadzonego opisu tarcia anizotropowego sformułowano wektory siły i momentu tarcia podczas wirowania.

2. Siły tarcia w styku powierzchni o izotropowej i anizotropowej chropowatości

Założmy, że siły tarcia suchego podczas względnego poślizgu ciała o izotropowej chropowatości po powierzchni ciała o dowolnej chropowatości określone są przez zbiór czterech wielkości μ_{ij} ($i, j = 1, 2$) zwanych współczynnikami tarcia, docisk wzajemny ciał N oraz wektor wektora prędkości poślizgu \mathbf{v} . Przyjmijmy model tarcia suchego wg Amontonsa i Coulomba zakładający liniową zależność siły tarcia od wektora prędkości względnej i od wielkości docisku.



Rys. 1. Rozkład sił tarcia $T_{\xi} = \mu_{\xi} N$ i $T_{\eta} = \mu_{\eta} N$ na kierunki pomiarowe



Rys. 2. Analogia sił tarcia z płaskim stanem naprężeń

Podczas poślizgu w dwóch dowolnych kierunkach $O\xi$ i $O\eta$ należy określić wielkość i kierunki działania sił tarcia $T_{\xi} = \mu_{\xi} N$ i $T_{\eta} = \mu_{\eta} N$. Z rozkładu sił tarcia T_{ξ} i T_{η} na kierunki $O\xi$ i $O\eta$ wyznacza się wielkość współczynników tarcia μ_{ij} ($i, j = 1, 2$) dla danego styku rys. 1. Kierunki pomiarowe tarcia $O\xi$ i $O\eta$ należy zorientować względem ortogonalnego układu odniesienia Oxy , związanego z powierzchnią jednego z ciał, poprzez kąty ϵ_x i ϵ_y , rys. 1. W szczególnym przypadku kierunki pomiarowe mogą być wzajemnie ortogonalne i pokrywać się z założonym układem odniesienia Oxy .

Założmy, że siłę tarcia podczas przesuwu odcinka ds w kierunku nachylonym do osi x -ów układu odniesienia pod kątem α_x można przedstawić jako sumę dwóch sił tarcia powstałych przy przesuwaniu rzutów tego odcinka na osie układu $O\xi\eta$ w kierunkach rów-

noległych do $O\xi$ i $O\eta$. Wzory niezbędne do opisanie stanu sił tarcia, przy powyższych założeniach, są analogiczne jak związki między naprężeniami na bokach trójkątnego elementu wydzielonego z napiętej płaszczyzny, o bokach równoległych do osi układu $O\xi\eta$ (rys. 2). Naprężenia całkowite p_α na boku ds równoważą się z naprężeniami na bokach ds_ξ i ds_η rozłożonymi na składowe równoległe do kierunków $O\xi$ i $O\eta$. Ponieważ nie korzystamy z warunku równowagi momentów, dlatego sformułowane związki między naprężeniami dotyczą niesymetrycznego stanu naprężenia. Naprężenia p_α określa relacja

$$(2.1) \quad p_\alpha = \sqrt{(\sigma_\alpha)^2 + (\tau_\alpha)^2},$$

gdzie

$$(2.2) \quad \sigma_\alpha = \frac{1}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} [\sigma_\xi \cos^2(\alpha_x - \varepsilon_x) + \sigma_\eta \cos^2(\alpha_y - \varepsilon_y) + (\tau_{\eta\xi} + \tau_{\xi\eta}) \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y)],$$

$$(2.3) \quad \tau_\alpha = \frac{1}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \left[\frac{1}{2} \sigma_\eta \sin(2\alpha_y - 2\varepsilon_y) - \frac{1}{2} \sigma_\xi \sin(2\alpha_x - 2\varepsilon_x) - \tau_{\xi\eta} \sin(\alpha_y - \varepsilon_y) \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) - \tau_{\eta\xi} \sin(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y) \right].$$

Występujące w (2.2) i (2.3) oznaczenia zilustrowano na rys. 2. Ponadto zachodzą następujące zależności

$$(2.4) \quad \delta_x = \alpha_x - \varepsilon_x, \quad \delta_y = \frac{\pi}{2} - \alpha_y + \varepsilon_y,$$

$$(2.5) \quad ds_\xi = \frac{\sin \delta_y}{\sin \gamma}, \quad ds_\eta = \frac{\cos \delta_x}{\sin \gamma}.$$

Naprężenie całkowite p_α odchylone jest od kierunku normalnego do boku ds o kąt β ,

$$(2.6) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha}.$$

Korzystając z analogii między naprężeniami w płaskim stanie napięcia a siłami tarcia, całkowitą siłę tarcia podczas poślizgu w kierunku α_x określa współczynnik tarcia opisany jak (2.1), gdzie za p_α , σ_ξ , $\tau_{\eta\xi}$, $\tau_{\xi\eta}$, σ_η podstawiono odpowiednio μ_α , μ_{11} , μ_{12} , μ_{21} i μ_{22} ,

$$(2.7) \quad \mu_\alpha = \frac{1}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \left\{ [\mu_{11} \cos^2(\alpha_x - \varepsilon_x) + \mu_{22} \cos^2(\alpha_y - \varepsilon_y) + (\mu_{12} + \mu_{21}) \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y)]^2 + \left[\frac{1}{2} \mu_{11} \sin(2\alpha_x - 2\varepsilon_x) + \mu_{12} \sin(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y) - \mu_{21} \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \sin(\alpha_y - \varepsilon_y) - \frac{1}{2} \mu_{22} \sin(2\alpha_y - 2\varepsilon_y) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Siła tarcia zbacza z kierunku ruchu o kąt β określony podobnie jak (2.6).

$$(2.8) \quad \operatorname{tg} \beta = \left[-\frac{1}{2} \mu_{11} \sin(2\alpha_x - 2\varepsilon_x) - \mu_{12} \sin(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y) + \mu_{21} \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \sin(\alpha_y - \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \mu_{22} \sin(2\alpha_y - 2\varepsilon_y) \right] [\mu_{11} \cos^2(\alpha_x - \varepsilon_x) + (\mu_{12} + \mu_{21}) \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y) + \mu_{22} \cos^2(\alpha_y - \varepsilon_y)]^{-1}.$$

Wielkości μ_α i β umożliwiają wyznaczenie składowych siły tarcia w układzie Oxy podczas poślizgu w kierunku α_x . Zgodnie z opisem zaproponowanym w [6] składowe siły tarcia określają równania

$$(2.9) \quad T^i = -NQ^{ij}v_j, \quad i, j = 1, 2$$

gdzie, Q^{ij} są elementami reprezentacji tensora tarcia Coulomba \mathbf{Q} , v_i składowymi kowariantnymi wersora prędkości poślizgu \mathbf{v} . Jeśli polibazę tensora tarcia \mathbf{Q} tworzą bazy układów odniesienia (Oxy) \mathbf{k}_i ($i = 1, 2$) i układu pomiarowego ($O\xi\eta$) \mathbf{e}_j ($j = 1, 2$) to reprezentacją macierzową tensora tarcia

$$(2.10) \quad \mathbf{Q} = Q^{ij}\mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2$$

jest macierz

$$(2.11) \quad [Q^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\mu_{11}\cos\epsilon_x + \mu_{21}\sin\epsilon_y}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} & \frac{\mu_{12}\cos\epsilon_x + \mu_{22}\sin\epsilon_y}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} \\ \frac{\mu_{21}\cos\epsilon_y + \mu_{11}\sin\epsilon_x}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} & \frac{\mu_{22}\cos\epsilon_y + \mu_{12}\sin\epsilon_x}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} \end{bmatrix},$$

gdzie, $\cos(\epsilon_x + \epsilon_y) \neq 0$. Wektor siły tarcia przy docisku N zgodnie z [6] zdefiniowany jest równaniem

$$(2.12) \quad \mathbf{T} = -NQ\mathbf{v} = T^i\mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2.$$

Składowe kowariantne v_j , wersora prędkości poślizgu w bazie \mathbf{e}_j ($j = 1, 2$) są postaci

$$(2.13) \quad [v_j] = [\cos(\alpha_x - \epsilon_x), \cos(\alpha_y - \epsilon_y)]^T, \quad j = 1, 2.$$

Własności tensora tarcia anizotropowego o reprezentacji (2.11).

1. Tensor tarcia anizotropowego może mieć dwie, jedną lub zero rzeczywistych wartości własnych i tyle samo wektorów własnych.

Dowód: Korzystając z transformacji bazy \mathbf{e}_j ($j = 1, 2$) do układu odniesienia Oxy otrzymujemy reprezentację tensora tarcia w postaci macierzy $[Q^{ik}]$ ($i, k = 1, 2$) o następujących elementach

$$(2.14) \quad \begin{aligned} Q^{11} &= \frac{1}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} [\mu_{11}\cos^2\epsilon_x + (\mu_{12} + \mu_{21})\sin\epsilon_y\cos\epsilon_x + \mu_{22}\sin^2\epsilon_y], \\ Q^{12} &= \frac{1}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} \left[\frac{1}{2}(\mu_{11}\sin 2\epsilon_x + \mu_{22}\sin 2\epsilon_y) + \mu_{12}\cos\epsilon_x\cos\epsilon_y + \mu_{21}\sin\epsilon_x\sin\epsilon_y \right], \\ Q^{21} &= \frac{1}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} \left[\frac{1}{2}(\mu_{11}\sin 2\epsilon_x + \mu_{22}\sin 2\epsilon_y) + \mu_{12}\sin\epsilon_x\sin\epsilon_y + \mu_{21}\cos\epsilon_x\cos\epsilon_y \right], \\ Q^{22} &= \frac{1}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} [\mu_{11}\sin^2\epsilon_x + (\mu_{12} + \mu_{21})\sin\epsilon_x\cos\epsilon_y + \mu_{22}\cos^2\epsilon_y]. \end{aligned}$$

Wartości własne tensora tarcia określa równanie

$$(2.15) \quad \det(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Po rozpisaniu (2.15) otrzymujemy równanie kwadratowe

$$(2.16) \quad \lambda^2 - \lambda(Q^{11} + Q^{22}) + Q^{11}Q^{22} - Q^{12}Q^{21} = 0.$$

O liczbie rzeczywistych wartości własnych tensora tarcia decyduje wyróżnik równania (2.16). Tensor tarcia anizotropowego posiada dwie rzeczywiste wartości własne i dwa wektory własne gdy

$$(2.17) \quad \Delta = (Q^{11} - Q^{22})^2 + 4Q^{12}Q^{21} > 0,$$

jedną rzeczywistą wartość własną i jeden wektor własny gdy $\Delta = 0$ oraz nie ma wartości własnej ani wektora własnego gdy $\Delta < 0$.

Jeśli ponadto elementy Q^{ik} ($i, k = 1, 2$) reprezentacji tensora tarcia spełniają warunki:

$$(2.18) \quad Q^{11} = Q^{22} \text{ i } Q^{12} = Q^{21} = 0,$$

to zgodnie z równaniem

$$(2.19) \quad (\lambda - Q^{11})^2 = 0,$$

tensor ten ma wartość własną podwójną równą Q^{11} a jego wektorem własnym jest dowolny wektor. Taki tensor kulisty opisuje tarcie izotropowe w styku ciał.

2. Tensor tarcia o reprezentacji (2.11) gdy $\mu_{12} = \mu_{21}$ opisuje ogólny przypadek tarcia ortotropowego.

Dowód: Reprezentacją macierzową tensora tarcia typu (2.14) jest w tym przypadku macierz symetryczna. Istnieją dla tego tensora dwie rzeczywiste wartości własne a odpowiadające im wektory własne są wzajemnie ortogonalne.

Na prostych przykładach ruchu punktu materialnego po chropowatej płaszczyźnie zbadano między innymi wpływ na ruch siły odpowiadającej części antysymetrycznej tensora tarcia. Rozpatrzono trzy różne przypadki struktury geometrycznej powierzchni ruchu. Przypadek gdy chropowatość ma charakter izotropii $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,05$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$. Gdy struktura geometryczna powierzchni jest anizotropią bez kierunku głównego $\mu_{11} = 0,04$, $\mu_{12} = -0,09$, $\mu_{21} = 0,05$, $\mu_{22} = 0,10$. Badano również przypadek ortotropii odpowiadającej części symetrycznej tensora tarcia anizotropowego jak w przykładzie poprzednim. Współczynnikami tarcia dla części symetrycznej tensora tarcia są $\mu_{11} = 0,04$, $\mu_{12} = \mu_{21} = -0,02$, $\mu_{22} = 0,10$. Przyjęto, że pomiaru współczynników μ_{ij} ($i, j = 1, 2$) dokonano w kierunkach osi układu odniesienia Oxy założonego na powierzchni ruchu ($\varepsilon_x, \varepsilon_y = 0$). Układ nieliniowych różniczkowych równań ruchu rozwiązano metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu.

Zbadano tor punktu poruszającego się po płaszczyźnie zgodnie z równaniem

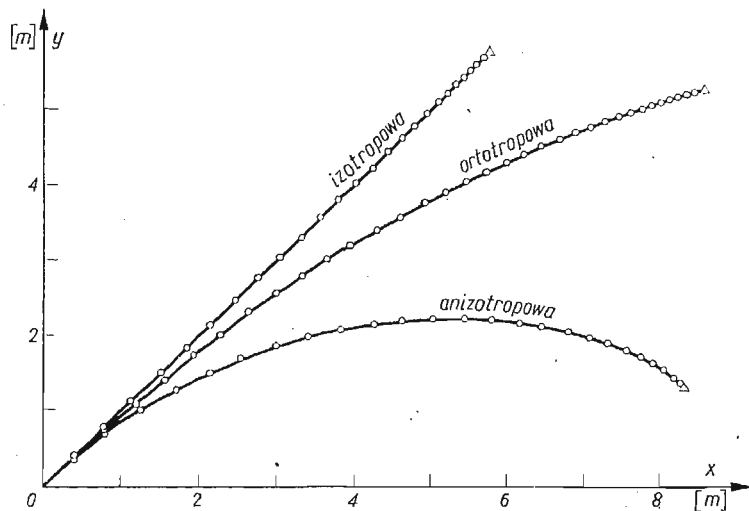
$$(2.20) \quad m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{T},$$

gdzie, m jest masą punktu, $\mathbf{q} = [q^1, q^2]^T$ wektorem położenia, \mathbf{T} wektorem siły tarcia. Równanie (2.20) po rozpisaniu jest postaci

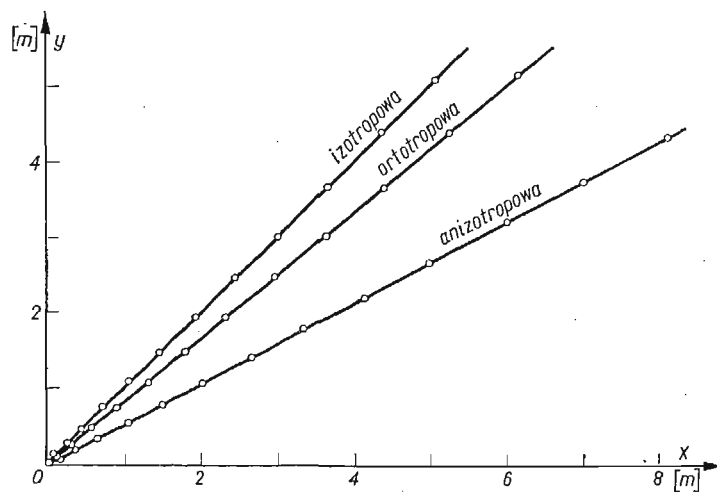
$$(2.21) \quad m \begin{bmatrix} \ddot{q}^1 \\ \ddot{q}^2 \end{bmatrix} = -N \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}^1}{\sqrt{(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2}} \\ \frac{\dot{q}^2}{\sqrt{(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2}} \end{bmatrix}$$

Przyjęto masę punktu 1 [kg] a docisk równy ciężarowi punktu materialnego. Ruch wywołany został warunkami początkowymi $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}}_0 = 2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ [m/s]. Na rys. 3 przedsta-

wiono tory punktu w przypadku izotropii, ortotropii i anizotropii. Odległości między punktami odpowiadają jednakowym przedziałom czasu $\Delta t = 0,2$ [s]. Trójkątami oznaczono miejsca zatrzymania się punktu. W przypadku izotropii punkt porusza się w kierunku zgodnym z kierunkiem prędkości początkowej \dot{q}_0 . W przypadku ortotropii tor punktu



Rys. 3. Tor punktu o danej prędkości początkowej poruszającego się po chropowatej płaszczyźnie



Rys. 4. Tor punktu poruszającego się po chropowatej płaszczyźnie pod działaniem stałej siły

zakrzywia się. Siła tarcia odpowiadająca części antysymetrycznej tensora tarcia anizotropowego powoduje jeszcze większe zakrzywienie toru punktu niż ma to miejsce w przypadku siły tarcia odpowiadającej tylko części symetrycznej tego tensora (czyli w przypadku ortotropii).

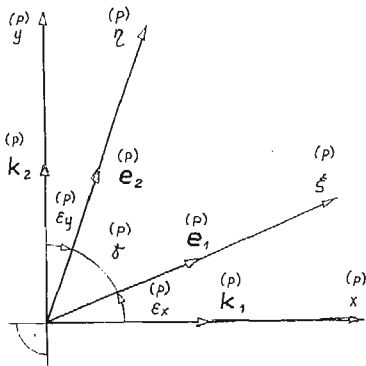
Analizowano również tor punktu podczas ruchu opisanego równaniem

$$(2.22) \quad m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \mathbf{T},$$

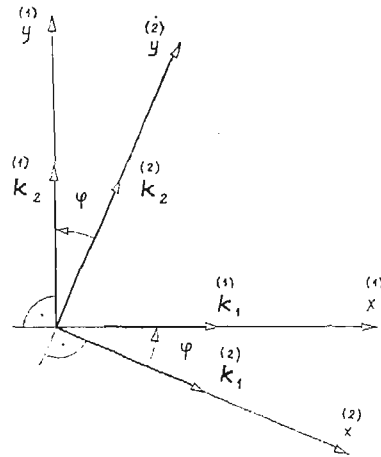
gdzie, $\mathbf{F} = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ [N] jest stałą w czasie siłą czynną, rys. 4. Przyjęto zerowe warunki początkowe oraz masę punktu 0,5 [kg]. W przypadku izotropii tor punktu pokrywa się z kierunkiem działania siły czynnej. Dla ortotropii tor punktu odchyła się od kierunku działania siły \mathbf{F} . Siła tarcia odpowiadająca części antysymetrycznej tensora tarcia anizotropowego powoduje większe odchylenie prostoliniowego toru od kierunku działania siły \mathbf{F} , w porównaniu z przypadkiem siły tarcia odpowiadającej części symetrycznej tego tensora.

3. Siły tarcia w styku powierzchni o różnych anizotropowych chropowatościach

Na obu stykających się powierzchniach wyznacza się ortogonalne układy odniesienia. Przesuwając to samo ciało o izotropowej chropowatości po powierzchni każdego z ciał określa się współczynniki tarcia μ_{ij}^l ($i, j = 1, 2$). Ponadto należy zorientować kierunki



Rys. 5. Wersory baz układów odniesienia i pomiarowego p-tej powierzchni



Rys. 6. Wzajemne usytuowanie układów odniesienia po zetknięciu ze sobą powierzchni (1) i (2)

pomiarowe względem układów odniesienia. Z wyznaczonych wielkości μ_{ij} , ε_x i ε_y w oparciu o (2.11) tworzy się reprezentacje macierzowe tensorów tarcia $\mathbf{Q}^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(2)}$ odpowiednio dla powierzchni (1) i (2).

Wprowadzimy następujące oznaczenia wersorów baz układów odniesienia Oxy i układów pomiarowych $O\xi\eta$ stykających się powierzchni (1) i (2), rys. 5.

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{k}_1^{(1)}, \mathbf{k}_2^{(1)} &\equiv (\mathbf{k}_i), & \mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_2^{(1)} &\equiv (\mathbf{e}_j), & j, l &= 1, 2 \\ \mathbf{k}_1^{(2)}, \mathbf{k}_2^{(2)} &\equiv (\mathbf{k}_J), & \mathbf{e}_1^{(2)}, \mathbf{e}_2^{(2)} &\equiv (\mathbf{e}_J), & J, L &= 1, 2 \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki transformacyjne między wersorami baz układów Oxy i $O\xi\eta$,

$$(3.2) \quad \mathbf{e}_j = C_j^l \mathbf{k}_l, \quad j, l = 1, 2$$

$$(3.3) \quad \mathbf{e}_J = C_J^L \mathbf{k}_L, \quad J, L = 1, 2$$

gdzie współczynniki transformacji tworzą macierze

$$(3.4) \quad [C_j^l] = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x^{(1)} & \sin \varepsilon_x^{(1)} \\ \sin \varepsilon_y^{(1)} & \cos \varepsilon_y^{(1)} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{C}^{(1)}$$

$$(3.5) \quad [C_J^L] = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x^{(2)} & \sin \varepsilon_x^{(2)} \\ \sin \varepsilon_y^{(2)} & \cos \varepsilon_y^{(2)} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{C}^{(2)}$$

Kąt wzajemnego usytuowania układów odniesienia po zetknięciu ze sobą obu powierzchni oznaczamy przez φ , rys. 6. Ma miejsce następujący związek transformacyjny między wersorami baz układów odniesienia

$$(3.6) \quad \mathbf{k}_I = B_I^i \mathbf{k}_i, \quad i, I = 1, 2$$

gdzie macierzą współczynników transformacji jest

$$(3.7) \quad [B_I^i] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}$$

Związek transformacyjny między składowymi kowariantnymi wersora prędkości poślizgu zapisanymi w układach odniesienia powierzchni (1) i (2) ma postać

$$(3.8) \quad v_K = B_K^n v_n, \quad K, n = 1, 2.$$

Założmy, że siła tarcia w styku zetkniętych ze sobą powierzchni podczas ich względnego poślizgu, przy danym docisku równa jest iloczynowi „współczynnika złożenia” i sumy sił tarcia wziętych dla każdej powierzchni z osobna,

$$(3.9) \quad \mathbf{T} = \varkappa(\mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{T}^{(2)}).$$

Siły $\mathbf{T}^{(1)}$ i $\mathbf{T}^{(2)}$ odpowiadają tarcii podczas przesuwania w danym kierunku poślizgu, przy ustalonym docisku, po każdej z powierzchni tej samej próbnej powierzchni o izotropowej chropowatości. Współczynnik \varkappa nazwano *współczynnikiem złożenia*, zapewnia on zgodność z obserwacją wielkości siły tarcia opisanej wzorem (3.9). Wartość współczynnika \varkappa nie ma wpływu na opis, powstałej w wyniku złożenia powierzchni, kierunkowości tarcia. Dla styku dwóch jednakowych izotropowych powierzchni $\varkappa = 0,5$.

Reguła (3.9) jest hipotezą rozkładu sił tarcia w styku ciał i wymaga weryfikacji eksperymentalnej.

Tensory tarcia związane z powierzchniami (1) i (2) przedstawimy w postaci

$$(3.10) \quad \mathbf{Q}^{(1)} = Q^{ij} \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_j = Q^{ij} C_j^k \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{k}_k, \quad i, j, k = 1, 2$$

$$(3.11) \quad \mathbf{Q}^{(2)} = Q^{IJ} \mathbf{k}_I \otimes \mathbf{e}_J = Q^{IJ} C_J^K \mathbf{k}_I \otimes \mathbf{k}_K, \quad I, J, K = 1, 2.$$

Uzyskany w wyniku złożenia powierzchni tensor tarcia niech będzie związany np. z powierzchnią (1),

$$(3.12) \quad \mathbf{Q} = Q^{rs} \mathbf{k}_r \otimes \mathbf{k}_s, \quad r, s = 1, 2.$$

Zgodnie z definicją sił tarcia (2.12) równanie (3.9) można zapisać następująco

$$(3.13) \quad -N\mathbf{Q}\mathbf{v} = -\varkappa(N\mathbf{Q}\mathbf{v}^{(1)} + N\mathbf{Q}\mathbf{v}^{(2)}),$$

gdzie, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{(1)}$ i $\mathbf{v}^{(2)}$ określają ten sam wersor wektora prędkości poślizgu zapisany w bazach powierzchni (1) i (2). W dalszej części korzystamy z opisu tensorów tarcia w polibazach utworzonych z baz układów odniesienia Oxy . Wobec tego równanie wersory prędkości występujące w (3.13) należy przedstawić w bazach układów odniesienia.

$$(3.14) \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{(1)} = v^I \mathbf{k}_I, \quad \mathbf{v}^{(2)} = v^L \mathbf{k}_L, \quad I, L = 1, 2$$

Po podstawieniu (3.10), (3.11) i (3.14) do równania (3.13) otrzymujemy

$$(3.15) \quad Q^{rs} \delta_{sI} v^I \mathbf{k}_r = \varkappa(Q^{ij} C_j^k \delta_{kl} v^I \mathbf{k}_i + Q^{IJ} C_J^K \delta_{KL} v^L \mathbf{k}_I),$$

stąd

$$(3.16) \quad Q^{rs} v_s \mathbf{k}_r = \varkappa(Q^{ij} C_j^k v_k \mathbf{k}_i + Q^{IJ} C_J^K v_K \mathbf{k}_I), \quad i, j, k, l, r, s = 1, 2 \quad I, J, K, L = 1, 2.$$

przy czym δ_{sI} , δ_{kl} i δ_{KL} są symbolami Kroneckera.

Wykorzystując związki (3.6), (3.8) oraz fakt, że $v_s \equiv v_k$, $\mathbf{k}_r \equiv \mathbf{k}_i$, równanie (3.16) otrzymamy w postaci

$$(3.17) \quad Q^{ik} v_k \mathbf{k}_i = \varkappa(Q^{ij} C_j^k v_k \mathbf{k}_i + Q^{IJ} C_J^K B_K^k v_K B_i^j \mathbf{k}_i), \quad i, j, k, I, J, K = 1, 2.$$

Stąd elementy reprezentacji tensora tarcia po złożeniu ze sobą powierzchni (1) i (2) określone są następująco

$$(3.18) \quad Q_{ik}^{ik} = \varkappa(Q^{ij} C_j^k + Q_{IJ}^I C_J^K B_K^k B_i^j), \quad i, j, k, I, J, K = 1, 2.$$

Zgodność wskaźników z założonym opisem (3.12) uzyskamy podstawiając

$$(3.19) \quad Q^{rs} = \delta_i^r \delta_k^s Q^{ik}, \quad i, k, r, s = 1, 2$$

Elementy reprezentacji tensora tarcia (3.12) można również przedstawić w zapisie macierwowym.

$$(3.20) \quad [\mathbf{Q}] = \varkappa[\mathbf{Q}^{(1)} + \mathbf{B}^T \mathbf{Q}^{(2)} \mathbf{C} \mathbf{B}]$$

gdzie, $[\mathbf{Q}^{(1)}]$ i $[\mathbf{Q}^{(2)}]$ są macierzowymi reprezentacjami tensorów tarcia powierzchni (1) i (2),

$$(3.21) \quad [\mathbf{Q}^{(p)}] = \begin{bmatrix} \frac{\mu_{11}^{(p)} \cos \varepsilon_x + \mu_{21}^{(p)} \sin \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_{12}^{(p)} \cos \varepsilon_x + \mu_{22}^{(p)} \sin \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \\ \frac{\mu_{21}^{(p)} \cos \varepsilon_y + \mu_{11}^{(p)} \sin \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_{22}^{(p)} \cos \varepsilon_y + \mu_{12}^{(p)} \sin \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \end{bmatrix}, \quad p = 1, 2$$

oraz

$$(3.22) \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Rozpatrzmy dla przykładu pewne szczególne przypadki tensora tarcia w styku zetkniętych ze sobą powierzchni. Jeśli zostaną złożone ze sobą dwie powierzchnie o różnych izotropowych chropowatościach, przy założeniu $\varepsilon_x^{(1)}, \varepsilon_y^{(1)}, \varepsilon_x^{(2)}, \varepsilon_y^{(2)} = 0$, to reprezentacją macierzową otrzymanego tensora tarcia izotropowego jest

$$(3.23) \quad [\mathbf{Q}] = \varkappa[\mu^{(1)}\mathbf{I} + \mu^{(2)}\mathbf{B}^T\mathbf{I}\mathbf{B}] = \varkappa(\mu^{(1)} + \mu^{(2)})\mathbf{I},$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową. Gdy złożą się ze sobą powierzchnie o różnych anizotropowych chropowatościach to w wyniku otrzymuje się tensor określający tarcie anizotropowe w danym styku. Równania (3.18) i (3.20) umożliwiają przedstawienie reprezentacji takiego tensora tarcia w postaci macierzy $[\mu_{ij}^{(*)}]$ ($i, j = 1, 2$). Elementami macierzy reprezentacji dla przypadku $\varepsilon_x^{(1)}, \varepsilon_y^{(1)}, \varepsilon_x^{(2)}, \varepsilon_y^{(2)} = 0$, są

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \mu_{11}^{(*)} &= \varkappa \left[\mu_{11}^{(1)} + \mu_{11}^{(2)} \cos^2 \varphi + \mu_{22}^{(2)} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (\mu_{12}^{(2)} + \mu_{21}^{(2)}) \sin 2\varphi \right], \\ \mu_{12}^{(*)} &= \varkappa \left[\mu_{12}^{(1)} + \mu_{12}^{(2)} \cos^2 \varphi - \mu_{21}^{(2)} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (\mu_{11}^{(2)} - \mu_{22}^{(2)}) \sin 2\varphi \right], \\ \mu_{21}^{(*)} &= \varkappa \left[\mu_{21}^{(1)} - \mu_{12}^{(2)} \sin^2 \varphi + \mu_{21}^{(2)} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} (\mu_{11}^{(2)} - \mu_{22}^{(2)}) \sin 2\varphi \right], \\ \mu_{22}^{(*)} &= \varkappa \left[\mu_{22}^{(1)} + \mu_{11}^{(2)} \sin^2 \varphi + \mu_{22}^{(2)} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} (\mu_{12}^{(2)} + \mu_{21}^{(2)}) \sin 2\varphi \right]. \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć w przypadku składania powierzchni o różnych ortotropowych strukturach geometrycznych, w (3.24) należy podstawić $\mu_{12}^{(1)} = \mu_{21}^{(1)}$ oraz $\mu_{12}^{(2)} = \mu_{21}^{(2)}$ a otrzymany wówczas tensor tarcia w ogólnym przypadku określa tarcie ortotropowe.

4. Siły tarcia w styku wirujących względem siebie powierzchni

Załóżmy, że styk dwóch ciał jest obszarem płaszczyzny oraz, że ruch względny ciał jest ruchem wirowym z wektorem prędkości wirowania ω , wokół normalnej do styku. Oś wirowania przechodzi przez punkt E styku zwany środkiem wirowania. Niech \mathbf{n} jest wektorem normalnej do styku, tworzącym z bazą \mathbf{k}_i ($i = 1, 2$) układu odniesienia w płaszczyźnie styku, prawoskrętny układ wersorów.

Na skutek ruchu wirowego cząstki ciał kontaktujące się w punkcie P styku S mają względną liniową prędkość przemieszczenia. Wersor tej prędkości wraz z wzajemnym dociskiem i współczynnikiem tarcia określa tarcie suche w punkcie P, opisane wektorami siły tarcia \mathbf{T}_P i momentu tarcia \mathbf{M}_P względem osi wirowania. Tarcie suche towarzyszące wirowaniu nazywa się tarcie wirowania. Używa się również takich nazw jak obrotowe, krętne, wiertne, wiercenia obrotowego [1]. Położenie punktu P styku S względem środka wirowania E, określa wektor $\mathbf{r} = [r^1, r^2]$, rys. 7. Wersor liniowej prędkości dowolnego punktu styku na skutek wirowania z wektorem prędkości kątowej $\omega = \omega \mathbf{n} = \pm 1 \mathbf{n}$, opisuje następujące równanie

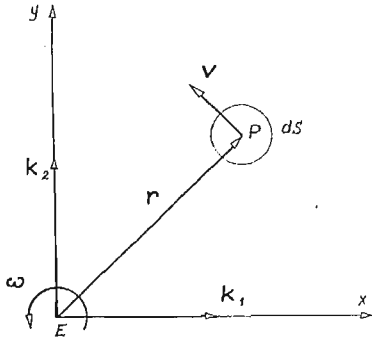
$$(4.1) \quad \mathbf{v} = \frac{\omega \times \mathbf{r}}{|\omega \times \mathbf{r}|} = v^j \mathbf{k}_j, \quad j = 1, 2$$

gdzie składowymi v^j są

$$(4.2) \quad v^1 = -\frac{\omega r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}, \quad v^2 = \frac{\omega r^1}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}.$$

Wektorem siły tarcia Coulomba w punkcie P styku S w którym panuje docisk $N(\mathbf{r})$ jest

$$(4.3) \quad \mathbf{T}_P = -N(\mathbf{r})\mathbf{Q}\mathbf{v} = T_P^i \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2$$



Rys. 7. Pole wektorów prędkości liniowej w styku podczas wirowania z wektorem prędkości kątowej ω .

Niech reprezentacją macierzową tensora tarcia \mathbf{Q} o polibazie utworzonej z baz układu odniesienia, jest macierz $[Q^{ik}]$ ($i, k = 1, 2$) której elementy określa równanie (3.18). Wówczas składowymi siły tarcia \mathbf{T}_P są,

$$(4.4) \quad T_P^i = -N(\mathbf{r})Q^{ik}\delta_{jk}v^j = -N(\mathbf{r})R_P^i\omega, \quad i, j, k = 1, 2$$

gdzie

$$(4.5) \quad R_P^1 = -Q^{11} \frac{r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} + Q^{12} \frac{r^1}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}$$

$$R_P^2 = -Q^{21} \frac{r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} + Q^{22} \frac{r^1}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}$$

Momentem siły tarcia \mathbf{T}_P względem środka wirowania jest

$$(4.6) \quad \mathbf{M}_P = \mathbf{r} \times \mathbf{T}_P = M_P \mathbf{n},$$

gdzie

$$(4.7) \quad M_P = -N(\mathbf{r})R_P^3\omega,$$

$$(4.8) \quad R_P^3 = Q^{11} \frac{(r^2)^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} + Q^{22} \frac{(r^1)^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} - (Q^{12} + Q^{21}) \frac{r^1 r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}.$$

Całkowite tarcie panujące w styku S można opisać wzorami

$$(4.9) \quad \mathbf{T} = \int_S \mathbf{T}_P dS = T^i \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2$$

$$(4.10) \quad \mathbf{M} = \int_S \mathbf{M}_P dS = M \mathbf{n},$$

gdzie składowymi wektorów są

$$(4.11) \quad T^i = \int_S T_p^i dS = -\omega R^i, \quad i = 1, 2$$

$$(4.12) \quad M = \int_S M_p dS = -\omega R^3.$$

Wielkości zdefiniowane wzorem

$$(4.13) \quad R^l = \int_S N(\mathbf{r}) R_p^l dS, \quad l = 1, 2, 3$$

gdzie R_p^l określają równania (4.5) i (4.8) nazywamy charakterystykami tarciovymi styku. Opisują one wpływ wielkości niezależnych od ruchu takich jak rozkład i wielkość docisku, typ tarcia oraz kształt obszaru styku na wielkość siły i momentu tarcia wirowania.

Powyższe ogólne rozważania zilustrujemy rozpatrując przypadki szczególne. Założmy jednakowy docisk na całej powierzchni styku $N(\mathbf{r}) = N = \text{const}$. Wówczas charakterystyki tarciove mają postać

$$(4.14) \quad \begin{aligned} R^1 &= N(-Q^{11}A_1 + Q^{12}A_2), \\ R^2 &= N(-Q^{21}A_1 + Q^{22}A_2), \\ R^3 &= N[Q^{11}A_3 + Q^{22}A_4 - (Q^{12} + Q^{21})A_5], \end{aligned}$$

gdzie

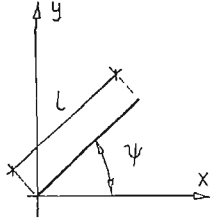
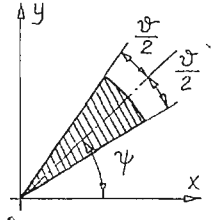
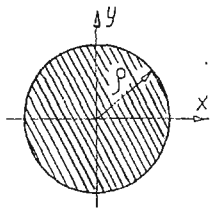
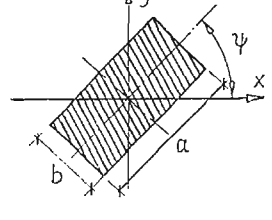
$$(4.15) \quad \begin{aligned} A_1 &= \int_S \frac{r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS, & A_2 &= \int_S \frac{r^1}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS \\ A_3 &= \int_S \frac{(r^2)^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS, & A_4 &= \int_S \frac{(r^1)^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS \\ A_5 &= \int_S \frac{r^1 r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS. \end{aligned}$$

Współrzędne punktów styku (r^1, r^2) należy podać w przyjętym układzie odniesienia Oxy związanym z powierzchnią jednego ze stykających się ciał. Przy tym możliwy jest przypadek gdy (r^1, r^2) są wielkościami stałymi w czasie. Można wówczas, w celu ułatwienia obliczeń, wyznaczyć pomocnicze wielkości A'_i w układzie osi symetrii styku S zgodnie z (4.15) a następnie przetransformować do założonego układu Oxy . Obowiązuje następujące przekształcenie

$$(4.16) \quad \begin{aligned} A_1 &= A'_1 \cos \psi + A'_2 \sin \psi, \\ A_2 &= -A'_1 \sin \psi + A'_2 \cos \psi, \\ A_3 &= A'_3 \cos^2 \psi + A'_4 \sin^2 \psi + A'_5 \sin 2\psi, \\ A_4 &= A'_3 \sin^2 \psi + A'_4 \cos^2 \psi - A'_5 \sin 2\psi, \\ A_5 &= \frac{1}{2}(A'_4 - A'_3) \sin 2\psi + A'_5 \cos 2\psi. \end{aligned}$$

gdzie ψ jest kątem między układem osi symetrii a układem odniesienia Oxy . W tablicy 1 podano wielkości $A_i (i = 1, \dots, 5)$ dla kilku wybranych kształtów obszaru styku. Możliwy

Tabl. 1. Współczynniki charakterystyk tarciovych styku

A_L				
A_1	$l \sin \psi$	$r^2 \sin \frac{\psi}{2} \sin \psi$	0	0
A_2	$l \cos \psi$	$r^2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \psi$	0	0
A_3	$\frac{1}{2} l^2 \sin^2 \psi$	$\frac{1}{6} r^3 (\psi - \sin \psi \cos 2\psi)$	$\frac{1}{3} \pi \rho^3$	$\frac{1}{12} [ab^2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}) + 2a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1})] \sin^2 \psi + [a^2 b \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} - a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}) + 2b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1})] \cos^2 \psi$
A_4	$\frac{1}{2} l^2 \cos^2 \psi$	$\frac{1}{6} r^3 (\psi + \sin \psi \cos 2\psi)$	$\frac{1}{3} \pi \rho^3$	$\frac{1}{12} [ab^2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}) + 2a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1})] \cos^2 \psi + [a^2 b \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} - a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}) + 2b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1})] \sin^2 \psi$
A_5	$\frac{1}{4} l^2 \sin 2\psi$	$\frac{1}{6} r^3 \sin \psi \sin 2\psi$	0	$\frac{1}{24} [ab^2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - a^2 b \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} - 3b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}) + 3a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1})] \sin 2\psi$

jest przypadek w którym współrzędne punktów styku są funkcjami czasu $r^1 = r^1(t)$, $r^2 = r^2(t)$ a jednocześnie styk S zachowuje swój kształt i wymiary w każdej chwili czasu t . Wtedy współrzędne (r^1, r^2) można przedstawić jako funkcje kąta wirowania φ zetkniętych ze sobą powierzchni, $r^1 = r^1(\varphi)$, $r^2 = r^2(\varphi)$. W tym przypadku, wygodnie jest policzyć A'_i w układzie osi symetrii i następnie przetransformować do układu Oxy korzystając z (4.16), gdzie $\psi = \varphi$. W ogólnym przypadku współrzędne punktów styku są funkcjami czasu a styk zmienia podczas ruchu swój kształt i wymiary. Należy wówczas w oparciu o obserwacje określić współrzędne punktów styku jako funkcje czasu.

5. Własności sił tarcia podczas wirowania

1. Całkowita siła tarcia \mathbf{T} w styku S jest zerem gdy ruch względny jest obrotem wokół tzw. bieguna wirowania [7] będącego punktem przecięcia się co najmniej dwóch wzajemnie ortogonalnych osi symetrii danego obszaru styku S . Dowód: W tym przypadku A_1 i A_2 są zerami, stąd również $R^1 = R^2 = 0$.
2. Siła tarcia odpowiadająca części antysymetrycznej tensora tarcia nie ma wpływu na wielkość momentu tarcia wirowania. Dowód: Część symetryczna tensora tarcia anizotropowego \mathbf{Q} o reprezentacji $[Q^{ik}]$ ($i, k = 1, 2$) ma postać

$$(4.17) \quad [\mathbf{Q}^s] = \begin{bmatrix} Q^{11} & \frac{1}{2}(Q^{12} + Q^{21}) \\ \frac{1}{2}(Q^{12} + Q^{21}) & Q^{22} \end{bmatrix}.$$

Wektorem momentu tarcia wirowania w przypadku tarcia anizotropowego przy założeniu $N(\mathbf{r}) = N$, jest

$$(4.18) \quad \mathbf{M} = -N[Q^{11}A_3 + Q^{22}A_4 - (Q^{12} + Q^{21})A_5]\omega,$$

zaś w przypadku tarcia ortotropowego odpowiadającego części symetrycznej tensora tarcia anizotropowego

$$(4.19) \quad \mathbf{M} = -N\left[Q^{11}A_3 + Q^{22}A_4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (Q^{12} + Q^{21})A_5\right]\omega.$$

Identyczność wektorów momentu tarcia (4.18) i (4.19) wskazuje na brak wpływu części antysymetrycznej tensora tarcia na ruch wirowy.

Sformułujemy opisy sił tarcia w prostych przypadkach izotropii i ortotropii, gdy styk S zachowuje podczas ruchu kształt i wymiary a współrzędne punktów styku są wielkościami zależnymi od kąta wirowania φ . Załóżmy, że układ odniesienia Oxy związany jest z nieruchomym podłożem o izotropowej lub ortotropowej chropowatości. Niech wirujące ciało posiada izotropową chropowatość. Współczynniki tarcia μ_{ij} ($i, j = 1, 2$) w styku określono podczas poślizgów w kierunkach osi układu odniesienia. Wobec tego charakterystykami tarciovymi styku są następujące wielkości: dla styku powierzchni izotropowych

$$(4.20) \quad R^1 = -\mu N A_1, \quad R^2 = -\mu N A_2, \quad R^3 = \mu N (A_3 + A_4),$$

dla styku powierzchni izotropowej z ortotropową

$$(4.21) \quad \begin{aligned} R^1 &= (-\mu_{11} A_1 + \mu_{12} A_2)N, \\ R^2 &= (-\mu_{21} A_1 + \mu_{22} A_2)N, \\ R^3 &= (\mu_{11} A_3 + \mu_{22} A_4 - 2\mu_{12} A_5). \end{aligned}$$

Zgodnie z powyższymi założeniami, korzystając z wzorów podanych w tabl. 1, określono wektory siły i momentu tarcia podczas wirowania. Dla wirującego odcinka o długości l w przypadku izotropii

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= \mu N l \omega (\sin \varphi \mathbf{k}_1 - \cos \varphi \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{M} &= -\frac{1}{2} \mu N l^2 \omega, \end{aligned}$$

w przypadku ortotropii

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= N l \omega [(\mu_{11} \sin \varphi - \mu_{12} \cos \varphi) \mathbf{k}_1 + (\mu_{12} \sin \varphi - \mu_{22} \cos \varphi) \mathbf{k}_2], \\ \mathbf{M} &= -\frac{1}{2} N l^2 (\mu_{11} \sin^2 \varphi - \mu_{12} \sin 2\varphi + \mu_{22} \cos^2 \varphi) \omega. \end{aligned}$$

Dla koła o promieniu ϱ w przypadku izotropii

$$(4.24) \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = -\frac{2}{3} \mu N \pi \varrho^3 \omega,$$

(wynik ten jest zgodny z uproszczoną analizą znaną z literatury np. [4, 5]), natomiast w przypadku ortotropii

$$(4.25) \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = -\frac{1}{3} \pi \varrho^3 N (\mu_{11} + \mu_{22}) \omega.$$

Dla kwadratu o boku a w przypadku izotropii

$$(4.26) \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \cong -0,3826 \mu N a^3 \omega,$$

w przypadku ortotropii

$$(4.27) \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \cong -N a^3 [0,2938 (\mu_{11} \sin^2 \varphi + \mu_{22} \cos^2 \varphi) + 0,0888 (\mu_{11} \cos^2 \varphi + \mu_{22} \sin^2 \varphi)] \omega.$$

Wprowadzony opis tarcia wykorzystano do obliczenia ruchu sztywnego ciała stykającego się z chropowatą płaszczyzną i wirującego wokół osi przechodzącej przez środek masy podstawy ciała o kształcie prostokąta. Przyjęto układ odniesienia związany z podstawą wirującego ciała. Wobec tego współrzędne punktów styku oraz wymiary styku nie zależą od czasu. Wielkości współczynników tarcia zgodnie z (3.24) zależą od kąta wzajemnego usytuowania chropowatości stykających się powierzchni, w analizowanym przypadku od współrzędnej wektora kąta wirowania (φ). Założono anizotropową strukturę geometryczną powierzchni podstawy ciała $\mu_{11}^{(1)} = 0,12$, $\mu_{12}^{(1)} = 0,04$, $\mu_{21}^{(1)} = 0,05$, $\mu_{22}^{(1)} = 0,07$ oraz anizotropową strukturę płaszczyzny ruchu $\mu_{11}^{(2)} = 0,04$, $\mu_{12}^{(2)} = -0,09$, $\mu_{21}^{(2)} = 0,05$, $\mu_{22}^{(2)} = 0,10$, po złożeniu powierzchni ze sobą ($\varkappa = 0,5$) otrzymano tarcie anizotropowe. Rozpatrzono również przypadek zetknięcia powierzchni o jednakowych izotropowych strukturach geometrycznych $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,05$ lub $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,07$ i $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$.

Nieliniowe różniczkowe równanie ruchu rozwiązano metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu.

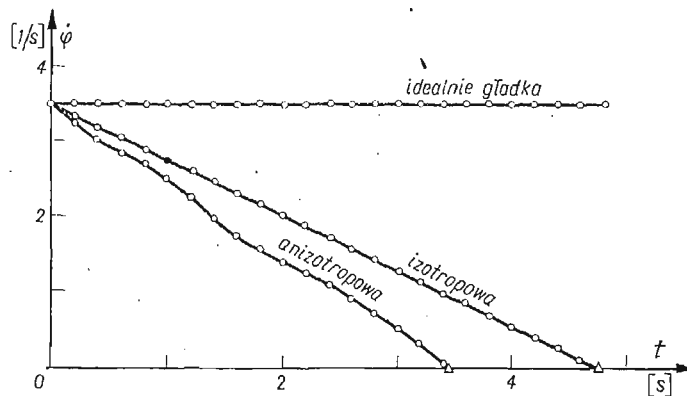
Zbadano przebieg prędkości wirowania ciała poruszającego się zgodnie z równaniem

$$(4.28) \quad I\dot{\varphi} = \mathbf{M},$$

gdzie

$$(4.29) \quad \mathbf{M} = -NR^3\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}{|\dot{\boldsymbol{\varphi}}|}.$$

I jest momentem bezwładności ciała względem osi wirowania, φ wektorem kąta wirowania, \mathbf{M} wektorem momentu sił tarcia, $R^3 = R^3(\varphi)$ charakterystyką tarciovą styku w funkcji kąta wirowania. Postać R^3 wyznaczono korzystając z A_3 , A_4 i A_5 podanych dla prostokąta w tabl. 1 (gdy $\psi = 0$) oraz wzorów (4.14) i (3.24). Rozpatrzono ruch ciała o podstawie $a = 2$ [m], $b = 0,05$ [m], masie $m = 5$ [kg] oraz docisku równym ciężarowi ciała. Ruch wywołany został warunkami początkowymi $\varphi_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\varphi}_0 = 3,5 \mathbf{n}$ [1/s]. Na rys. 8 przedstawiono wykres prędkości wirowania dla przypadku styku idealnie gładkiego



Rys. 8. Prędkość wirowania bryły stykającej się z chropowatą płaszczyzną podczas ruchu wywołanego prędkością początkową

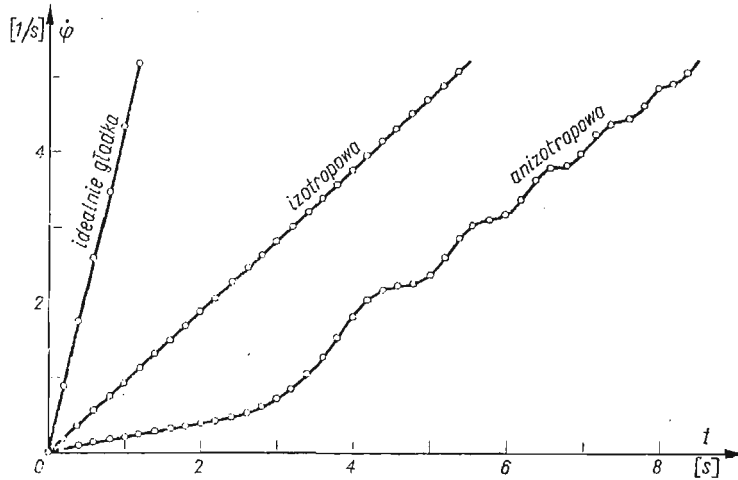
(bez udziału tarcia), styku o izotropowej chropowatości ($\mu = 0,05$) i styku o anizotropowej chropowatości. Trójkątami oznaczono moment zatrzymania się ciała. Krzywoliniowy charakter wykresu prędkości wirowania dla styku anizotropowego wynika z różnic między siłami tarcia na kierunkach ekstremalnego tarcia.

Analizowano również przebieg prędkości wirowania podczas ruchu opisanego równaniem

$$(4.30) \quad I\dot{\varphi} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_c,$$

gdzie $\mathbf{M}_c = 0,725\mathbf{n}$ [Nm] jest stałym w czasie momentem sił czynnych. Ruch rozpoczęto bez warunków początkowych. W tym przypadku przyjęto ciało o podstawie $a = 0,6$ [m], $b = 0,2$ [m] i masie oraz docisku jak poprzednio. Na rys. 9 przedstawiono wykres prędkości wirowania dla styku idealnie gładkiego, o izotropowej chropowatości ($\mu = 0,07$) i anizotropowej chropowatości. Wpływ sił tarcia na charakter zmienności prędkości

wirowania jest znaczny dla małych prędkości, w miarę wzrostu prędkości staje się coraz mniejszy. Zmienność momentu sił tarcia wirowania wynika ze zmieniających się wielkości sił tarcia w miarę zmian kąta wirowania.



Rys. 9. Prędkość wirowania bryły stykającej się z chropowatą płaszczyzną podczas ruchu wywołanego stałym momentem wirowania

Literatura cytowana w tekście

1. M. T. HUBER, *Opory tarcia i ich rola w niektórych zagadnieniach kolejnictwa*, Pisma t. III, PWN Warszawa 1957.
2. W. MOSZYŃSKI, *O zagadnieniu tarcia między ciałami stałymi izotropowymi i anizotropowymi*, Przegląd Mech., z. 1—3, 9 (1950), 3—11.
3. S. ZIEMBA, *O pewnych przypadkach anizotropii tarcia*, Arch. Mech. Stos., 4 (1952), 105—121.
4. Л. А. ГАЛИН, *Контактные задачи теории упругости*, Изд. Технико-Теоретической Литературы, Москва 1953.
5. А. И. ЛУРЬЕ, *Аналитическая механика*, Изд. Физико-Математической Литературы, Москва 1961
6. A. ZMITROWICZ, *Tensor tarcia Coulomba*, Mech. Teor. i Stos., 4, 15 (1977), 517—527.
7. Г. К. ПОЖАРИЦКИЙ, *Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением*, ПММ, 3, 25 (1961), 391 - 406.

Резюме

СИЛЫ ТРЕНИЯ КУЛОМБА ПРИ ВРАЩЕНИИ

В работе представлено обобщение тензора трения Куломба [6] для случая контакта поверхностей о изотропной и анизотропной шероховатости, а также для случая контакта поверхностей о разных анизотропных шероховатостях.

Сделано примерные расчеты траекторий точки движущейся по плоскостях о разных шероховатостях.

В работе дано определение векторов силы и момента трения при вращении как величины зависящих от характеристик трения поверхности контакта и единичного вектора скорости враще-

ния. При этом принято во внимание произвольную форму поверхности контакта и произвольный тип трения. Для выбранных случаев контакта определены векторы сил трения при вращении.

Сделаны примерные расчеты скорости вращения твердого тела контактирующего прямоугольным основанием с плоскостями с идеальной, изотропной, и анизотропной шероховатости.

S u m m a r y

COULOMB FRICTION FORCES DURING ROTATION

In this paper the description of the Coulomb's friction tensor [6] is extended to the case of contact between surfaces, with isotropic and anisotropic roughness and to the case of the contact between surfaces of various anisotropic roughness.

Numerical calculations of trajectories of a point over surfaces of various roughness have been made.

The vectors of force and moment of friction during rotation are defined as quantities depending on the frictional characteristic of the contact surface and the rotation speed versor. The definition is valid for any form of contact and any kind of friction. Vectors of the friction forces during rotation have been calculated for selected cases.

Numerical calculations of the rotation speed of a solid body with a rectangular base being in contact with an ideal surface, and with surface with isotropic and anisotropic roughness have been made.

PAN

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH GDAŃSK

Praca została złożona w Redakcji 13 marca 1978 r.

BIULETYN INFORMACYJNY



XVIII ZJAZD DELEGATÓW I SESJA NAUKOWA Z OKAZJI DWUDZIESTOLECIA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ 1958—1978

Otwarcie zjazdu

Zjazd odbył się w dniach 9—11 marca 1978 r. w Ustroniu Zawodziu. Przewodnictwo Komitetu Honorowego Zjazdu objął Prezes PAN prof. dr Witold NOWACKI.

W skład Komitetu Honorowego weszli:

- | | |
|------------------------------|---|
| prof. dr Jarema MACISZEWSKI | — Kierownik Wydziału Nauki Oświaty KC PZPR, |
| prof. dr Sylwester KALISKI | — Minister Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki, |
| prof. dr Jan KACZMAREK | — Sekretarz Naukowy PAN |
| prof. dr Maciej NAŁĘCZ | — Sekretarz Naukowy IV Wydziału PAN, |
| prof. dr Jerzy NAWROCKI | — Rektor Politechniki Śląskiej, |
| prof. dr Waclaw OLSZAK | — Dyrektor Międzynarodowego Ośrodka Nauk Mechanicznych w Udine, |
| prof. dr Jan RYCHLEWSKI | — Sekretarz Naukowy III Wydziału PAN, |
| prof. dr Waclaw SAKWA | — Sekretarz Naukowy Oddziału PAN w Katowicach, |
| dr Zdzisław GORCZYCA | — I-szy Z-ca Wojewody Katowickiego, |
| prof. dr Zdzisław PARSZEWSKI | — Przewodniczący PTMTS. |

W imieniu gospodarzy — Gliwickiego Oddziału PTMTS otwarcia Zjazdu, powitania gości i delegatów dokonał Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego doc. dr Józef Wojnarowski.

Pierwsze uroczyste posiedzenie

Na pierwszym posiedzeniu, prof. W. Nowacki, zwracając się do zebranych, stwierdził m.in., że „Wśród specjalistycznych Towarzystw Naukowych PTMTS zajmuje miejsce wyjątkowe polegające na tym, że jednoczy przedstawicieli wielu podstawowych dziedzin mechaniki.

Mechanika, kontynuował mówca, przeszła w okresie powojennym poważną drogę rozwojową. Szczyć się może wieloma wybitnymi przedstawicielami, ma duże osiągnięcia badawcze, brała udział w rozwoju przemysłowej kraju. Na jej rozwój składa się wiele czynników i w naszym gronie możemy sobie powiedzieć, że cele, które przed 20 laty wysunęli założyciele PTMTS, a które polegają na rozbudzeniu zainteresowań naukami dziedziny mechaniki w wielu ośrodkach kraju zostały spełnione.

Mam zaszczyt i przyjemność występować przed Szanownym gremium jako Prezes PAN, instytucji popierającej usilnie społeczny tryb pracy naukowej, a jednocześnie występuję jako gorący entuzjasta wszystkich form działalności Towarzystwa, jako jego współzałożyciel, współuczestnik wielu sympozjów i obrad oraz jako członek, który miał zaszczyt otrzymać członkostwo honorowe.

Z tytułu mego urzędu chciałbym przekazać od Prezydium PAN z okazji obchodzonego dzisiaj jubileuszu serdeczne gratulacje Władzom Towarzystwa za piękny rozwój PTMTS, które w okresie 20 lat wkroczyło działalnością do 13 ośrodków regionalnych, podjęło bogatą tematykę badawczą i stało się już bardzo widocznym elementem polskiego krajobrazu naukowego i polskiej techniki.

Wszystkim zasłużonym członkom Towarzystwa serdecznie gratuluję cennych inicjatyw i osiągniętych wyników pomnażających dorobek nauki i zasób wiedzy społecznej.

Towarzystwa naukowe są bliskimi partnerami PAN i naturalnym sojusznikiem w rozbudzaniu twórczości naukowej i rozpowszechnianiu nauki w społeczeństwie. Do działalności Towarzystw, PAN przykłada dużą wagę. Dlatego też żywny szczerą troskę o zapewnienie im dobrych warunków rozwoju, o umocnienie ich pozycji społecznej i włączenie ich do systemu nauki polskiej zgodnie z ich oryginalnym wkładem".

W zakończeniu Prezes PAN życzył Towarzystwu dalszego rozwoju pożytecznego dla nauki, naszej gospodarki i wciąż zwiększającego się udziału w tak pożytecznym społecznym ruchu naukowym.

Referat pt. „*Dwudziestolecie PTMTS*” wygłosił przewodniczący Zarządu Głównego prof. Zdzisław PARSZEWSKI. W swoim wystąpieniu omówił on działalność PTMTS na przestrzeni jego istnienia. Podkreślił dalekowzroczność członków założycieli, których idea powołania Towarzystwa w dniu 13 marca 1958 roku przemieniła się w bogatą działalność naukową w zakresie organizowania zebrań naukowych, sympozjów, konkursów monotematycznych, dyskusji i wydawnictw. Podsumowując na tym zjeździe osiągnięcia ubiegłego dwudziestolecia mówca dodał, że należy się spodziewać, że następne dwudziestolecie będzie również okresem dalszego rozwoju Towarzystwa i wzrostu liczebności członków.

Przemówienia powitalne wygłosili: JM Rektor Politechniki Śląskiej prof. Jerzy Nawrocki, Kierownik Wydziału Nauki i Oświaty KW PZPR w Katowicach mgr inż. Krzysztof Jędrzejewski, Sekretarz Naukowy Oddziału PAN w Katowicach prof. Wacław Sakwa, Członek Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej prof. Władysław Kolek oraz Rektor Międzynarodowego Ośrodka Nauk Mechanicznych (CISM) w Udine prof. Wacław Olszak.

Ponadto zostały odczytane telegramy gratulacyjne, nadesłane przez profesorów J. Dietrycha i M. Janusza — członków honorowych PTMTS, J. Kaczmarka — Sekretarza Naukowego PAN oraz A. Sawczuka — Przewodniczącą Komitetu Mechaniki PAN.

Sesja przedpołudniowa pierwszego dnia zjazdu

Na drugim posiedzeniu referat pt. „*Badania doświadczalne konstrukcji inżynierskich w ujęciu teorii sterowania*” wygłosił prof. Roman CIESIELSKI. Referat dotyczył zastosowania eksperymentu czynnego w zagadnieniu identyfikacji konstrukcji budowlanych. Przedstawiając w nim sposoby realizacji badań doświadczalnych konstrukcji budowli autor opisał również próby identyfikacji stopniowej połączonej z korektą modelu przez stosowanie tzw. eksperymentu cyfrowego. W dyskusji nad referatem głos zabrali: profesorowie A. Olędzki, R. Gutowski, J. Giergiel oraz B. Skalmierski.

Sesja popołudniowa pierwszego dnia zjazdu

Na sesji tej wygłoszono dwa referaty. W pierwszym referacie pt. „*Zagadnienia mikropolarnej termoprężystości*” prof. W. NOWACKI przedstawił zagadnienia teoretyczne mikropolarnej termosprężystości, a także perspektywy dalszego jej rozwoju. Podkreślił on, że o ile termosprężystość w ciele Hooke'a jest doskonale opanowana i istnieje dla niej cała pełna zwarta teoria, to termosprężystość w ciele Cosseratów liczy sobie zaledwie 12 lat i po raz pierwszy została opracowana przez autora. Wychodząc z bilansu energii oraz nierówności Clausiusa-Duhema wyprowadzono związki konstytutywne dla naprężeń siłowych, momentowych oraz entropii. W ostatniej części pracy autor omówił zasady prac wirtualnych, twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań oraz twierdzenie o wzajemności prac. Podał również przypadki szczególne. Konkludując stwierdził, że teoria ośrodków polarnych ogólnie, a ośrodków mikropolarnych w szczególności, wymaga dalszych badań.

Prof. Władysław KOLEK w referacie pt. „*Metody badań poznawczych i problemy technicznych zastosowań elektrotechniki*” przedstawił historyczny rozwój elektromechaniki i wykazał, że formalizacja elektromechaniki jako dyscypliny naukowej następowała w oparciu o sformalizowaną już znacznie wcześniej i dojrzałą syntezę mechaniki teoretycznej. Wskazał również na współczesne problemy elektrotechniki i korzyści wynikające z wzajemnego przenikania się metod dwóch dyscyplin, mechaniki i elektrotechniki. W dyskusji nad referatami zabrali głos profesorowie: S. Borkowski, R. Gutowski, B. Skalmierski, Z. Waszczyszyn i doc. J. Wojnarowski.

Obrady XVIII Zjazdu Delegatów

W drugim dniu Zjazdu odbyły się obrady XVIII Zjazdu Delegatów PTMTS. W Zjeździe wzięło udział 78 delegatów przedstawicieli 13 Oddziałów Towarzystwa. Obrady otworzył przewodniczący Zarządu Głównego prof. Z. Parszewski. Następnie uczczono minutą ciszy pamięć członków Towarzystwa zmarłych w czasie minionej dwuletniej kadencji.

Na przewodniczącego Zjazdu powołano doc. J. Wojnarowskiego, gospodarza Zjazdu i Przewodniczącego Komitetu Organizacyjnego Zjazdu. Na wiceprzewodniczących Zjazdu wybrano profesorów E. Brzuchowskiego (Wrocław) i J. Elsnera (Częstochowa). Na sekretarzy Zjazdu wybrano docentów E. Czogałę z Gliwic oraz A. Tylikowskiego z Warszawy.

Przyjęto następujący porządek obrad:

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarzy Zjazdu.
2. Dokonanie wyboru członków honorowych PTMTS.
3. Przyjęcie protokołu z XVII Zjazdu Delegatów PTMTS.
4. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej.
5. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa.
6. Złożenie sprawozdania finansowego.
7. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
8. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem.
9. Wybory:
 - a) Przewodniczącego,
 - b) Członków Zarządu Głównego,
 - c) Głównej Komisji Rewizyjnej.
10. Dyskusja i uchwalenie generalnych wytycznych działalności PTMTS na następny okres.
11. Sprawy bieżące i wolne wnioski.
12. Zamknięcie obrad Zjazdu.

Ad 1. Pierwszy punkt porządku dziennego wyczerpano na wstępie.

Ad 2. Prof. Z. Parszewski zreferował szczegółowo dwa wnioski Oddziału Warszawskiego o nadanie godności członków honorowych profesorom Zbigniewowi Brzosce i Zbigniewowi Kączkowskiemu. W dyskusji nad wnioskami głos zabrał prof. R. Ciesielski i doc. J. Wojnarowski. Kandydatury przyjęto jednomyślnie. Następnie Przewodniczący — prof. Z. Parszewski, Wiceprzewodniczący — prof. J. Antoniak i Sekretarz Generalny — prof. M. Dietrich dokonali uroczystego wręczenia dyplomów nowo wybranym Członkom Honorowym. Profesorowie Z. Brzoska i Z. Kączkowski w krótkich przemówieniach podziękowali za zaszczytne wyróżnienie.

Ad 3. Protokoł z poprzedniego XVII Zjazdu Delegatów PTMTS, odbytego w dniach 8 i 9 kwietnia 1976 r. w Łodzi, przyjęto po wniesieniu poprawek przez prof. Z. Olesiaka i doc. E. Radwańskiego.

Ad 4. Komisję Matkę i Skrutacyjną powołano w następującym składzie: doc. A. Ajdukiewicz (Gliwice), doc. S. Dubiel (Warszawa), prof. J. Kruszewski (Gdańsk), prof. J. Stefaniak (Poznań) oraz prof. M. Suchar (Łódź).

Ad 5. Sprawozdanie z działalności Towarzystwa za okres kadencji, tzn. za lata 1976 i 1977 złożył Przewodniczący prof. Z. Parszewski. Omówił on działalność Towarzystwa w poszczególnych latach. W roku 1976 liczba członków PTMTS wzrosła o 48 osób (6%). Zebrań organizacyjnych odbyło się 105. W ramach działalności rzeczowej zorganizowano 46 zebrań naukowych z 55 wygłoszonymi z nich referatami, z udziałem 957 osób i 228 dyskutantów. Sympozjónów i sesji naukowych odbyło się 5. Liczba seminariów wyniosła 14, kursów 4, ogólnopolskich konkursów 2. Pozycji wydawniczych wydano ogółem 8, w tym kwartalnik „*Mechanika Teoretyczna i Stosowana*” oraz 5 pozycji materiałów konferencyjnych. Szczególnie ożywną działalność prowadziły Oddziały w Częstochowie, Gliwicach i Poznaniu.

W roku 1977 liczba członków wzrosła o 44 (5,2%). Zebrań organizacyjnych odbyło się 71. Zebrań naukowych odbyło się 62 z 68 wygłoszonymi na nich referatami, 1105 uczestnikami i 290 dyskutantami. Sympozjónów, konferencji i sesji naukowych odbyło się 5. Seminariów — 6, kursów — 5. Ogólnokrajowych konkursów naukowych — 2. Przy tym wydatnie wzrosła liczba zgło-

szonych na nie prac. Pozycji wydawniczych ukazało się 8, w tym kwartalnik „*Mechanika Teoretyczna i Stosowana*” oraz materiały konferencyjne, kursowe i inne.

- Ad 6. Sprawozdanie finansowe za lata 1976 i 1977 złożył Skarbnik dr K. Borsuk.
- Ad 7. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył jej Przewodniczący prof. Z. Kączkowski.
- Ad 8. W dyskusji nad sprawozdaniami zabrali głos: dr W. Pietraszkiewicz, prof. R. Ciesielski, doc. E. Radwański, prof. I. Kisiel, prof. J. Elsner i doc. J. Wojnarowski. Omówiono sprawy dotyczące dalszego rozwoju działalności Towarzystwa, opłacania składek członkowskich oraz wykorzystania funduszu nagród konkursowych. Wymieniono nazwiska aktywistów spośród władz Towarzystwa, dzięki którym PTMTS zawdzięcza swe osiągnięcia. Po dyskusji wniosek Głównej Komisji Rewizyjnej o udzielenie absolutorium ustępującemu Zarządowi Głównemu przyjęto, przy wstrzymaniu od głosowania osób, które wchodziły w skład byłego Zarządu.
- Ad 9. Przewodniczący obrad poprosił Komisję Matkę o przedstawienie kandydatów. W imieniu Komisji Matki i Skrutacyjnej, która ukonstytuowała się następująco: prof. J. Stefaniak — przewodniczący, członkowie — doc. A. Ajdukiewicz, doc. S. Dubiel, prof. J. Kruszewski i prof. M. Suchar, zabrał głos prof. J. Stefaniak, który z kolei poprosił o głos prof. Z. Parszewskiego. Zabierając głos w imieniu ustępującego Zarządu prof. Z. Parszewski stwierdził, że Zarząd Główny na zebraniu w dniu 27 lutego br. wysunął kandydaturę na przewodniczącego PTMTS prof. Z. Olesiaka, który wyraził zgodę. Na dzisiejszym plenarnym zebraniu Zarządu Głównego odbytym przed obradami Zjazdu Delegatów wpłynęła jeszcze kandydatura prof. M. Dietricha. Doc. E. Radwański wniósł formalne zastrzeżenie, że kandydatury do władz Towarzystwa powinna zgłaszać Komisja Matka, a nie ustępujący Zarząd. Przewodniczący Komisji wyjaśnił, że po tych uwagach Komisja Matka zgłasza w/w kandydatury na przewodniczącego Zarządu Głównego. Doc. B. Krajewski zgłosił z sali kandydaturę prof. Z. Kączkowskiego. Prof. Kączkowski dziękując za zaufanie odmówił kandydowania na przewodniczącego. Wyniki głosowania były następujące: na oddanych 78 ważnych głosów przy 1 wstrzymującym się
- prof. Marek DIETRICH otrzymał 43 głosy,
prof. Zbigniew OLESIAK otrzymał 34 głosy.
- Prof. M. Dietrich w serdecznych słowach podziękował za wybranie go przewodniczącym PTMTS. Stwierdził przy tym, że przyjmuje to wyróżnienie jako najwyższy zaszczyt naukowy, który go do tej pory spotkał. Z kolei Komisja Matka zgłosiła następujące kandydatury do Zarządu Głównego: prof. E. Bielewicz, (Gdańsk), dr K. Borsuka (Warszawa), doc. H. Mikołajczaka (Poznań), prof. J. Rutkowskiego (Warszawa), doc. W. Szemplińską-Stupnicką (Warszawa), doc. W. Walczaka (Łódź), prof. Z. Waszczyszyna (Kraków), doc. J. Wojnarowskiego (Gliwice). Prof. M. Dietrich zaproponował do Zarządu Głównego prof. Z. Olesiaka (Warszawa), oraz doc. A. Tylikowskiego (Warszawa). Prof. A. Ołędzki zgłosił kandydaturę doc. E. Radwańskiego (Warszawa). Prof. J. Elsner zgłosił kandydaturę doc. W. Bachmacza (Częstochowa), natomiast doc. S. Kasprzyk zgłosił do Zarządu prof. K. Biernatowskiego (Wrocław). Ponadto Komisja Matka zgłosiła kandydatury do Głównej Komisji Rewizyjnej w osobach: prof. S. Borkowskiego, doc. K. Grudzińskiego, prof. Z. Parszewskiego, prof. Z. Kączkowskiego, prof. G. Szefera. Przed przystąpieniem do głosowania zastępca przewodniczącego obrad wyjaśnił, że zgodnie ze statutem należy wybrać 9 członków Zarządu Głównego i 2 zastępców. Do Głównej Komisji Rewizyjnej należy wybrać 3 członków i 2 zastępców. Komisja Matka i Skrutacyjna przeprowadziła tajne głosowanie, w wyniku którego wybrano następujące osoby: do Zarządu Głównego — prof. E. Bielewicz, prof. Z. Olesiaka, dr K. Borsuka, doc. W. Walczaka, prof. Z. Waszczyszyna, doc. H. Mikołajczaka, doc. J. Wojnarowskiego, prof. K. Biernatowskiego, doc. A. Tylikowskiego oraz na zastępców członków Zarządu Głównego — doc. W. Bachmacza i doc. E. Radwańskiego, do Głównej Komisji Rewizyjnej — prof. G. Szefera, prof. S. Borkowskiego, prof. Z. Kączkowskiego oraz na zastępców Głównej Komisji Rewizyjnej — prof. Z. Parszewskiego i doc. K. Grudzińskiego.
- Ad 10. W dyskusji nad generalnymi wytycznymi działalności PTMTS wzięli udział kolejno: doc. J. Wojnarowski, prof. Z. Olesiak, doc. K. Wernerowski, prof. W. Krzyś, prof. S. Łukasiewicz, prof. Z. Brzoska, doc. W. Bachmacz, prof. Z. Parszewski.

Między innymi mówcy zaproponowali:

- prowadzić ciągłą informację dla członków Towarzystwa o odbywających się konferencjach ogólnokrajowych i zagranicznych,
- rozszerzyć liczbę członków na osoby pracujące naukowo w przemyśle,
- wykorzystać istnienie Towarzystwa do rozwijania kontaktów międzynarodowych,
- wystąpić do Polskiej Akademii Nauk z wnioskiem o ufundowanie stypendium dla młodych doktorantów specjalizujących się w dziedzinie mechaniki,
- wykorzystać dotychczas uzyskiwane możliwości wyjazdów zagranicznych i kształcenia młodej kadry w formie osobistego porozumienia z ośrodkami zagranicznymi, np. przy okazji organizowania międzynarodowych sympozjonów.

Postanowiono, że Zarząd Główny wystosuje podziękowanie do tych Instytucji, które udzieliły pomocy w czasie prac związanych z przygotowaniem Zjazdu.

Podsumowania dyskusji dokonał nowo wybrany Przewodniczący Zarządu Głównego PTMTS— prof. Marek Dietrich. Stwierdził on, że cele działalności Towarzystwa wynikają z jego dotychczasowego dorobku. Mówca podkreślił, że uchwały i głosy w dyskusji przeprowadzonej na Zjeździe będą wytycznymi działalności i Zarząd Główny będzie realizował przyjęty plan pracy. Nie ulega wątpliwości, dodał, że trzeba obecnie rozszerzyć działalność Towarzystwa na zwiększenie kontaktów zagranicznych oraz zwrócić uwagę na zaistniałą zmianę sytuacji w rozwoju mechaniki i specjalnie zająć się jej dziedzinami słabo rozwijającymi się. Zgodnie z propozycją prof. Z. Parszewskiego należałoby się zająć sprawą większego rozwijania mechaniki teoretycznej. Do realizacji wysuniętych zamierzeń, Zarząd Główny będzie chciał wykorzystać siłę moralną jaką ma Towarzystwo przez swą bezinteresowną pracę i dzięki temu będzie się starać sprostać aktualnym potrzebom. Wzmocnić również należy działalność organizacyjną, a w działalności finansowej wychodzić z założenia efektywności, a nie oszczędności. Być może, że próby zidentyfikowania zmian i aktualnych potrzeb przyczynią się do nadania jeszcze większego znaczenia naszemu Towarzystwu, szczególnie ze względu na potrzebę aktywizacji rzetelnych postaw i bezinteresowności jako istotnych warunków zaangażowania społecznego, bez którego właściwie pojęta nauka nie może istnieć.

Ad 11. Przedstawiciele władz Towarzystwa i delegaci złożyli serdeczne podziękowania Oddziałowi Gliwickiemu za nadzwyczaj sprawne i wymagające poniesienia wielu trudów, zorganizowanie Zjazdu Delegatów połączonego ze Zjazdem Dwudziestolecia oraz podkreślali, że opracowany znaczek Towarzystwa i przygotowane materiały uświetniły obrady.

Ad 12. Zamknięcia obrad Zjazdu dokonał jego Przewodniczący doc. J. Wojnarowski. Podziękował on w serdecznych słowach wszystkim referującym, którzy składali sprawozdania, dyskutantom, członkom Komisji Matki i Skrutacyjnej oraz wszystkim uczestnikom za przybycie i żywy udział w obradach Zjazdu. Na tym obrady XVIII Zjazdu Delegatów zakończono.

Sesje przedpołudniowe trzeciego dnia zjazdu

Na czwartym posiedzeniu wygłoszono trzy referaty:

Prof. Wacław OLSZAK w referacie pt. „*O ewolucji formułowania kryteriów plastyczności*” przedstawił historyczny rozwój kryteriów plastyczności począwszy od ujęcia klasycznego, w którym formuluje się je przy założeniu struktury izotropowej i jednorodnej danego materiału, aż do ogólniejszego, uwzględniającego efekty reologiczne występujące już od samego początku procesu odkształcenia. Wskazał również, że następny krok polegać będzie na uwzględnieniu zmienności w czasie i przestrzeni pól naprężenia i odkształcenia. Prof. Marek DIETRICH w referacie pt. „*Metody stochastyczne w mechanice maszyn*” przedstawił aktualne metody stochastyczne rozwijane we wszystkich podstawowych dziedzinach nauki, stosowanych w budowie maszyn. Wskazał także, że należy spodziewać się również sformułowania zasad racjonalnej syntezy maszyn na gruncie dynamiki stochastycznej. Prof. Czesław WOŹNIAK w referacie pt. „*Ośrodki ciągłe z więzani i ich uogólnienia, podstawy teorii i przypadki szczególne*” przedstawił próbę sformułowania mechaniki ośrodków ciągłych z więzani wewnętrznymi. W swoim wystąpieniu pokazał, że choć teoria może wydawać się dość abstrakcyjna, to w swoich aspektach praktycznych obejmuje szereg problemów już znanych, ale skonstruowanych w sposób nie sprzeczny wewnętrznie i może prowadzić do nowych teorii w zakresie tworzenia modeli różnych konstrukcji. W zakończeniu autor rozważył różne przypadki więzów prostych i nieprostych.

W piątym, ostatnim posiedzeniu, referaty wygłosili:

Prof. Roman GUTOWSKI pt. „*Modele matematyczne procesów dynamicznych i stateczność ruchu*”. W swym wystąpieniu autor omówił zagadnienie modelowania matematycznego procesów dynamicznych i stateczności ruchu oraz związki między tymi pojęciami. W dalszych rozważaniach prelegent przedstawił główne istniejące pojęcia stateczności i kierunki ich rozwoju, zarówno dla modeli dyskretnych jak i ciągłych, z uwzględnieniem szeregu ważnych i istotnych różnic między nimi. Szczególną uwagę poświęcił analizie stateczności, jako ważnej charakterystyki jakościowej modelu matematycznego. Prof. Stefan WIŚNIEWSKI w referacie pt. „*Problematyka naukowa termodynamiki i niektórych dziedzin techniki cieplnej w Polsce w latach 1968—1978*” omówił dorobek wyższych uczelni z termodynamiki technicznej wraz z teorią wymiany ciepła, teorią spalania i teorią silników cieplnych i chłodnictwa.

Doc. Józef WOJNAROWSKI w referacie pt. „*Grafy i hipergrafy w systemowym modelowaniu układów mechanicznych*” przedstawił próbę systemowego ujęcia metodą modelowania układów mechanicznych za pomocą grafów i hipergrafów oraz liczb strukturalnych. Pokazał oraz uzasadnił metodę prowadzenia eksperymentu numerycznego i dynamiki liniowych i ciągłych układów mechanicznych za pomocą grafów i liczb strukturalnych. Sformułowane w referacie problemy oraz przedstawione przykłady mogą przyczynić się do dalszych uogólnień i zastosowań grafów i hipergrafów w modelowaniu układów fizycznych.

W dyskusji nad referatami głos zabrali: prof. W. Olszak, prof. R. Ciesielski i prof. J. Szmelter.

Zakończenie obrad sesji 20-lecia

Po zakończeniu ostatniej sesji przewodnictwo objął Przewodniczący Zarządu Głównego prof. M. Dietrich. Stwierdzając, że Zjazd 20-lecia dobiega końca, zwrócił się do delegatów zapytaniem o ewentualne uwagi i głosy dyskusji.

Pochlebne opinie o rozwoju mechaniki wygłosili profesorowie R. Ciesielski i W. Olszak.

Prof. R. Ciesielski zabierając głos stwierdził: „Moje wrażenia ze zjazdu i sesji są nad wyraz optymistyczne. Dowiedzieliśmy się tutaj o wielu nowych i interesujących problemach z dziedziny mechaniki. Wydawałoby się, że po pewnym upływie lat nowe informacje powinny być bardzo ograniczone, a tutaj w czasie obrad przekazano cały szereg pięknie ujętych nowych zagadnień i kto był świadkiem tej sesji, niewątpliwie wychodzi podbudowany, zarówno w postępach polskiej mechaniki, jak i tym, że pięknie one tutaj mogły być referowane. Żeby to wszystko mogło nastąpić, ktoś musiał nadać zjazdowi pewną oprawę i o tym teraz chciałbym powiedzieć. Wiemy z jakimi różnymi trudnościami i kłopotami wiąże się organizowanie tego typu zjazdów i sądzę, że będę wyrazicielem opinii wszystkich Państwa — tutaj konkretnie myśmy w delegacji krakowskiej to sobie uchwalili i zostałem upoważniony do tego, żeby podziękować organizatorom już nie tylko stereotypowo za to, że podjęli i zorganizowali Zjazd, ale że zrobili to z takim wyczuciem, z taką delikatnością i tak dyskretnie. Chciałbym nawet zaproponować formę podziękowania. Proszę więc Zarząd Główny, aby pisemnie i w imieniu XVIII Zjazdu Delegatów przekazał pisemne podziękowanie na ręce przewodniczącego Komitetu Organizacyjnego i wszystkich jego członków, dlatego że każda dobra robota powinna być w moim rozumieniu skwitowana i wpisana do kronik Towarzystwa i w ogóle do kronik tego ruchu, wielkiego ruchu, jakim jest mechanika w Polsce”.

Zabierając z kolei głos prof. W. Olszak całkowicie przytęczył się do wypowiedzi swojego przedmówcy. Dodał przy tym — „Nie tylko Kraków, ale sądzę, że wszyscy uczestnicy wysoko oceniają organizację i gościnność gospodarzy. Chciałbym jeszcze w szczególności podkreślić — stwierdził — że mechanika jest nauką, bo czasem słyzy się głosy przeciwne. I właśnie tutaj — dzięki Zjazdowi mieliśmy okazję nie tylko przekonać się na ilu frontach, nowych frontach ona postępuje naprzód, ale także zaobserwować, że nie tylko w mechanice pogłębiają się dziedziny otwarte, ale również pojawiają się nowe pola, nowe dziedziny, nowe wartości poznawcze, które prawie wszystkie trafiają później do zastosowań”.

Na zakończenie Przewodniczący Zarządu Głównego prof. M. Dietrich całkowicie przytęczył się do słów swoich znakomych przedmówców. Przewodniczący ZG wysoko ocenił zarówno pracę Komitetu Organizacyjnego, jak i przemilą atmosferę Sesji 20-lecia PTMTS. Wyrażając podziękowanie wszystkim uczestnikom Zjazdu, szczególnie podziękował prof. W. Olszakowi, że nie bacząc na trudy podróży przybył wprost z Udine i włożył tyle trudu, aby być tutaj z nami. Na jego też ręce złożył podziękowanie dla całego Komitetu Honorowego z Prezesem PAN prof. W. Nowackim na czele — m.in. za to, że swoją obecnością i udziałem

w sesji naukowej Zjazdu 20-lecia PTMTS uświetnił jego obrady. Wyrażając przekonanie, że za dwa lata spotkamy się na kolejnym zjeździe delegatów Towarzystwa, Przewodniczący Zarządu Głównego zamknął obrady.

Uwagi końcowe

Na Zjazd Delegatów i Sesję Naukową z okazji 20-lecia PTMTS wydano drukiem program i streszczenia referatów, biuletyn o 20-letniej działalności Gliwickiego Oddziału PTMTS, wykonano znaczek Towarzystwa oraz talerz okolicznościowy, który symbolicznie obrazuje dwudziestolecie i 13 Oddziałów Towarzystwa. Wykonano także dekoracje dla nadania właściwej oprawy Zjazdu. Teksty referatów będą drukowane w *Mechanice Teoretycznej i Stosowanej*. W pracach nad przygotowaniem Zjazdu i Sesji Naukowej działał Komitet Organizacyjny w następującym składzie: Przewodniczący — doc. J. Wojnarowski — Przewodniczący Zarządu Oddziału Gliwickiego PTMTS, członkowie — prof. J. Antoniak, — V-ce Przewodniczący ZG PTMTS, inż. Stanisław Marniok — Dyrektor Fabryki Sprzętu Ratunkowego i Lamp Górniczych „Faser”, prof. S. Borkowski, doc. E. Czogała, dr inż. R. Ćwik, doc. B. Mochnacki, dr inż. J. Składzień, doc. Z. Sulimowski, doc. W. Szuścik, doc. J. Tomeczek — członkowie Zarządu Oddziału Gliwickiego PTMTS.

Ukonstytuowanie się zarządu głównego PTMTS

Na pierwszym zebraniu odbytym w dniu 10.III.1978 r. nowo wybrany Zarząd ukonstytuował się następująco:

Prof. Marek DIETRICH	— Przewodniczący (z wyboru)
Prof. Eugeniusz BIELEWICZ	— Z-ca Przewodniczącego
Prof. Zbigniew OLESIAK	— Z-ca Przewodniczącego
Doc. Józef WOJNAROWSKI	— Sekretarz Generalny
Doc. Andrzej TYLIKOWSKI	— Z-ca Sekretarza Generalnego
Dr Kazimierz BORSUK	— Skarbnik
Prof. Zenon WASZCZYŻYŃ	— Z-ca Skarbnika
Prof. Kazimierz BIERNATOWSKI,	
Doc. Henryk MIKOŁAJCZAK,	
Doc. Władysław WALCZAK	— Członkowie Zarządu
Doc. Edward RADWAŃSKI,	
Doc. Waldemar BACHMACZ	— Z-cy Członków Zarządu.

Józef Wojnarowski (Gliwice)

MIĘDZYNARODOWE TOWARZYSTWO MECHANIKA — MATEMATYKA

W dniach 12—17 września 1977 r. odbyło się w Kozubniku drugie Sympozjum poświęcone kierunkom rozwoju zastosowań matematyki czystej w mechanice (trends of application of pure mathematics to mechanics). Pierwsze sympozjum o tej tematyce odbyło się w roku 1975 w Lecce (Włochy), a następne odbędzie się w Edynburgu, we wrześniu 1979 r.; kolejne regularnie, co dwa lata, w różnych krajach.

Na Sympozjum tym wygłoszono 26 jednogodzinnych referatów, a uczestniczyli w nim matematycy i mechanicy z 15 krajów, wśród nich uczeni zagraniczni tej miary co P. GERMAIN, J. L. LIONS i A. LICHTNEROWICZ z Francji, W. T. KOITER z Holandii, K. WASHIZU z Japonii, E. KRÖNER i I. MÜLLER z RFN, K. B. BROBERG ze Szwecji, M. KAC ze Stanów Zjednoczonych A. P., T. B. BENJAMIN i I. N. SNEDDON z Wielkiej Brytanii, D. GRAFII i G. FICHERA z Włoch oraz G. I. BARENBLATT, I. A. KUNIN, W. D. KUPRADZE i O. A. ŁADYŻENSKAJA z ZSRR.

Na zebraniu w dniu 14 września 1977 r. zostało założone Międzynarodowe Towarzystwo Mechanika — Matematyka (The International Society for Interaction of Mechanics and Mathematics). Lista członków założycieli Towarzystwa zawiera 109 nazwisk uczonych z 17 krajów (Belgia, Czechosłowacja, Francja,

Holandia, Irlandia, Japonia, Kanada, Meksyk, NRD, Polska, RFN, Rumunia, Stany Zjednoczone A. P., Szwecja, Wielka Brytania, Włochy oraz ZSRR).

W wyniku wyborów pierwszym prezesem Towarzystwa został profesor WITOLD NOWACKI. Przez okres pierwszej 4-letniej kadencji siedzibą Towarzystwa będzie Polska. Do władz Towarzystwa zostali wybrani następujący profesorowie:

T. B. BENJAMIN (W. Brytania) — Wiceprezes,

H. ZORSKI — Sekretarz i Skarbnik,

J. BRILLA (Czechosłowacja), G. FICHERA (Włochy), P. GERMAIN (Francja), W. T. KOITER (Holandia),

E. KRÖNER (RFN), W. D. KUPRADZE (ZSRR), A. LICHTNEROWICZ (Francja), O. A. OLEJNIK (ZSRR),

R. S. RIVLIN (St. Zjedn.), H. J. WEINITSCHKE (RFN) — członkowie Prezydium.

Do Towarzystwa mogą należeć pracownicy nauki z dziedziny matematyki i mechaniki oraz instytucje lub towarzystwa naukowe, przy czym dla członków indywidualnych wymagana jest rekomendacja uczonych, członków Towarzystwa, przynajmniej z dwóch krajów.

Towarzystwo w początkowym okresie swej działalności podjęło szereg inicjatyw na polu organizacji konferencji, publikacji i wymiany międzynarodowej. M.in. publikowany będzie regularnie Biuletyn Towarzystwa.

Podstawowym celem Towarzystwa będzie uaktywnienie działalności w dziedzinie podstaw mechaniki i metod matematycznych (nowoczesnych), na styku matematyki czystej i mechaniki.

Zbigniew Olesiak

NOWE CZASOPISMO Z DZIEDZINY MECHANIKI

W czerwcu 1976 r. przedstawiciele Akademii Nauk Bułgarii, Czechosłowacji, Niemieckiej Republiki Demokratycznej, Polski, Węgier i Z.S.R.R. postanowili powołać do życia nowe czasopismo naukowe p.t. „*Advances in Mechanics*” (Uspiechy Miechaniki).

Głównym celem wydawnictwa będzie rozwijanie międzynarodowej współpracy w dziedzinie mechaniki teoretycznej i stosowanej. Prace ukazujące się w kwartalniku będą drukowane w języku angielskim lub rosyjskim.

Redaktorem Naczelnym „*Advances in Mechanics*” został prof. JAN RYCHLEWSKI, Przewodniczącym Komitetu Redakcyjnego profesor Ju. A. ISZLIŃSKI (ZSRR). W skład Komitetu Redakcyjnego wchodzi przedstawiciele wszystkich wymienionych powyżej Akademii Nauk. Z ramienia Polskiej Akademii Nauk są to profesorowie Witold NOWACKI i Witold GUTKOWSKI.

KOŁOKWIA EUROMECHU W ROKU 1979

Podajemy dalszy ciąg listy kołokwiów Euromechu, tytuły zamieszczamy w języku angielskim.

- 112 *Bracketing of eigenfrequencies of continuous structures*, 21—23 lutego 1979, Mátrafüred, Węgry, przewodniczący prof. A. BOSZNAY, Department of Technical Mechanics Faculty of Electrical Engineering, Technical University, Budapest, Goldmann György tér 3, H-1111 Budapest XI, Węgry.
- 113 *Air flow over hills and mountains*, 2—5 kwietnia 1979, Monachium, RFN, przewodniczący prof. J. EGGER, Meteorologisches Institut, Arbeitsgruppe Theoretische Meteorologie, Universität München, Theresienstr. 37, 8000 München 2, RFN.
- 115 *Mechanical behaviour of anisotropic solids*, 19—22 czerwca 1979, Grenoble, Francja, przewodniczący dr J. P. BOEHLER, Institute de Mécanique, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, B.P. 53 Centre de tri, 38041 Grenoble-Cédex, Francja oraz prof. A. SAWCZUK, Warszawa.
- 116 *Laminar separation and transition and their possible connection with cavitation*, 28—31 maja 1979, Wageningen, Holandia, przewodniczący dr ir J. H. J. VAN DER MEULEN, Nederlands Scheepsbouwkundig Proefstation, Postbus 28 6700 AA Wageningen, Holandia oraz prof. dr it J. L. VAN INGEN, Delft.

- 117 *Flow and fracture of inelastic materials*, 4—7 czerwca 1979, Jabłonna, Polska, przewodniczący prof. P. PERZYNA, IPPT PAN, Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa.
- 118 *Cardiovascular and pulmonary dynamics*, 20—24 sierpnia 1979, Zuoz (Engadin), Szwajcaria, prof. M. ANLIKER, Institute for Biomedical Engineering, University Zurich, Moussonstr. 18, CH-8044 Zurich, Szwajcaria oraz dr P. NIEDERER, Zurich.
- 119 *Vortex shedding from bluff bodies in oscillatory flow*, 16—18 lipca 1979, London, Anglia, przewodniczący dr P. W. BEARMAN, Department of Aeronautics Imperial College, Prince Consort Road, London SW7 2BY, Anglia oraz dr J. M. R. GRAHAM, London.
- 120 *Techniques of sizing and tracking particles in fluids*, 20—22 sierpnia 1979, Lyngby (Copenhagen), Dania, przewodniczący dr P. S. LARSEN, Fluid Mechanics Department Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Dania.
- 121 *Dynamics and crushing analysis of plastic structures*, 27—31 sierpnia 1979, Warszawa, przewodniczący dr T. WIERZBICKI, IPPT PAN, Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa.
- 122 *Numerical analysis of the dynamics of ship structures*, 3—5 września 1979, Avignon, Francja, przewodniczący dr J. L. ARMAND, Institut de Recherches de la Construction Navale, 75008 Paris, Francja.
- 123 *Stochastic solids — models and mechanical behaviour*, 12—16 września 1979, Jabłonna, Polska, przewodniczący dr K. SOBCZYK, IPPT PAN, Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa.
- 124 *Hydrodynamic lubrication of bearings*, 2—4 października 1979, Orbassano, Włochy, przewodniczący prof. U. L. BUSINARO, Centro Ricerche FIAT, Strada Torino 50, 10043 Orbassano, Włochy oraz prof. R. CIUFFI i prof. G. JACAZIO, Torino.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- W. KOŁEK, Metody badań poznawczych i techniczne problemy elektromechaniki
 Методы исследований и технические проблемы электромеханики
 Methods of investigation and technical problems of electromechanics
- J. KASPERKIEWICZ, Wytrzymałość i odkształcalność graniczna przy rozciąganiu fibrobetonu z włóknem stalowym
 Прочность и предельные удлинения при растяжении бетона армированного короткими стальными волокнами
 Tensile strength and ultimate strain in steel fibre reinforced concrete
- G. SZEFER, L. MIKULSKI, Optymalne kształtowanie dysków wirujących z zastosowaniem zasady maksimum Pontriagina
 Применение принципа максимума Понтрягина к оптимализации вращающихся дисков
 Optimal design of rotating discs by using Pontriagin's principle
- W. OSTASNOWICZ, J. TARNOWSKI, Analiza drgań wałów wirujących obciążonych siłami osiowymi
 Анализ колебаний вращающихся валов нагруженных осевыми силами
 Analysis of vibrations of rotating shafts loaded by axial forces
- A. GAWĘDZKI, A. GARSTECKI, Optymalizacja pierścieni sztywno-plastycznych z więzami geometrycznymi
 Оптимальное проектирование пластических колец при геометрических ограничениях
 Optimal plastic design of rings with geometric constraints
- J. KRUŻELECKI, Pewne problemy kształtowania powłok osiowo-symetrycznych w stanie błonowym
 Некоторые проблемы оптимального формирования осево-симметрических безмоментных оболочек
 Some problems of optical design of the axially symmetrical shells in membrane state
- T. KUŹMICEWICZ, J. MARYNIAK, Stateczność dynamiczna obiektu latającego odwijającego z układu linę
 Динамическая устойчивость летающего объекта развивающего из борта канат
 Dynamical stability of a flying object with a cable's uncoiling system
- J. KOLENDĄ, Uściślony opis drgań wymuszonych linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów
 Уточненные формулы расчета вынужденных колебаний валопроводов с учетом асимметрии изгибной жесткости и податливости фундаментов
 A more precise description of forced vibrations of shaftings with flexural rigidity asymmetry on flexible foundations
- E. WŁODARCZYK, O przestrzennych frontach fal naprężenia w izotropowym ośrodku sprężystym
 О пространственных фронтах волн напряжения в изотропной упругой среде
 On spatial fronts of stress waves in isotropic elastic medium
- J. KOLENDĄ, Losowe drgania linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów
 Случайные колебания валопроводов с учетом асимметрии изгибной жесткости и податливости фундаментов
 Random vibrations of shaftings with flexural rigidity asymmetry on flexible foundations

W numerach 2/78 i 3/78 wydrukowany został nieaktualny skład Komitetu Redakcyjnego MTiS. Prawidłowy skład Komitetu Redakcyjnego powinien być następujący:

JERZY ANTONIAK — PRZEWODNICZĄCY
IGOR KISIEL, WITOLD NOWĄCKI
JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
ANDRZEJ DRESZER — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

cd. ze s. II okładki

- W. WOJEWÓDZKI, A. PERDZYŃSKA, Określenie ugięć lepkoplastycznej płyty prostokątnej obciążonej impulsem ciśnienia 537
Определение прогибов вязкопластической прямоугольной пластинки нагруженной действием импульса давления
Determination of a viscoplastic rectangular plate under pressure impulse
- W. SZYSZKOWSKI, Analiza możliwości przystosowania się pewnego typu osiowo-symetrycznej konstrukcji powłokowej poprzez lokalną utratę stateczności jej powierzchni 557
Анализ возможности приспособления некоторых осесимметричных оболочек после потери устойчивости
The analysis of adaptation possibilities of some axisymmetrical shells after local buckling
- J. LELLEP, Optymalizacja położenia podpór belki sztywno-plastycznej obciążonej impulsem prędkości 573
Оптимализация расположения дополнительных опор при импульсно нагруженной жестко-пластической балке
Optimal location of additional supports in the case of a rigid-plastic beam loaded impulsively
- A. ZMITROWICZ, Siły tarcia Coulomba podczas wirowania 583
Силы трения Куломба при вращении
Coulomb friction forces during rotation
- BIULETYN INFORMACYJNY 601

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i cały rok następny,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
