

11 720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 16 · ZESZYT 3

WARSZAWA 1978

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

S. BERCZYŃSKI, H. MAĆKOWIAK, K. MARCHELEK, Modelowanie wielostopniowych przekładni zębatych metodą sztywnych elementów skończonych Моделирование многоступенчатых зубчатых передач по методу жестких конечных элементов Modelling of multiple toothed gears by rigid finite elements	279
A. TRZĘSOWSKI, O makroskopowych naprężeniach w ośrodkach wielofazowych О макроскопических напряжениях в неоднородной среде On macroscopic stresses in a multi-component medium	289
K. GRYSA, J. JANKOWSKI, O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych pojawiających się w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych О суммировании некоторых рядов Дини и тригонометрических существующих в задачах механики сплошных сред Summation of certain Dini and trigonometric series occurring in problems of the theory of continuous media	299
S. MATYSIAK, A. WACHNECKA-SKOWRON, O jednoznaczności rozwiązania pewnych mieszanych zagadnień brzegowych dla półprzestrzeni mikropolarnej Об однозначности решений смешанных краевых задач для микрополярного полупространства On uniqueness of solution of mixed boundary value problems for micropolar half-space	321
A. SZANIAWSKI, A. ZACHARA, Przepływ laminarny w kanale o zmiennym przekroju z ruchomymi i porowatymi ściankami Ламинарное течение в канале с переменным поперечным сечением и с подвижными и пористыми стенками Laminar flow in a channel of a variable cross-section with movable and porous walls	329
J. WŁASNY, Optymalizacja kształtu pręta ściskanego z uwzględnieniem ciężaru własnego metodą programowania dynamicznego Оптимальное проектирование по методу динамического программирования сжатого стержня с учетом собственного веса Optimal design of a bar under axial force and own weight by means of dynamic programming	343
J. KOLENDA, Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów maszyn Метод идентификации динамической податливости фундаментов машин Identification method of the dynamical receptance of machine foundations	353
K. GRUDZIŃSKI, L. ŁABUĆ, T. BURDA, Osiowo-symetryczne połączenie klejone o optymalnym rozkładzie naprężeń stycznych w warstwie kleju Осесимметричные клеяые соединения с оптимальным распределением касательных напряжений в клеющем слое Axi-symmetric glue joints with optimal shearing stress distribution within the glue layer	361
E. WŁODARCZYK, O pewnym zjawisku w procesie detonacji zawieszinowych materiałów wybuchowych zanurzonych w hydrostatycznym polu ciśnienia О некотором явлении в процессе детонации взвешенных взрывчатых смесей погруженных в гидростатическом поле давления On a phenomenon occurring in the process of detonation of suspension explosives immersed in a hydrostatic pressure field	377
J. WALKOWSKI, Generowanie rezonansów pobocznych przez impulsy sił w nieliniowych układach drgających Генерирование силовыми импульсами побочных резонансов в нелинейных колебательных системах Secondary resonances generation by force impulses in nonlinear vibrating systems	389
BIULETYN INFORMACYJNY	405

y II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 6 · Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 7 8

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

KOMITET REDAKCYJNY

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, IGOR KISIEL, WITOLD
NOWACKI, JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
ANDRZEJ DRESCHER — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

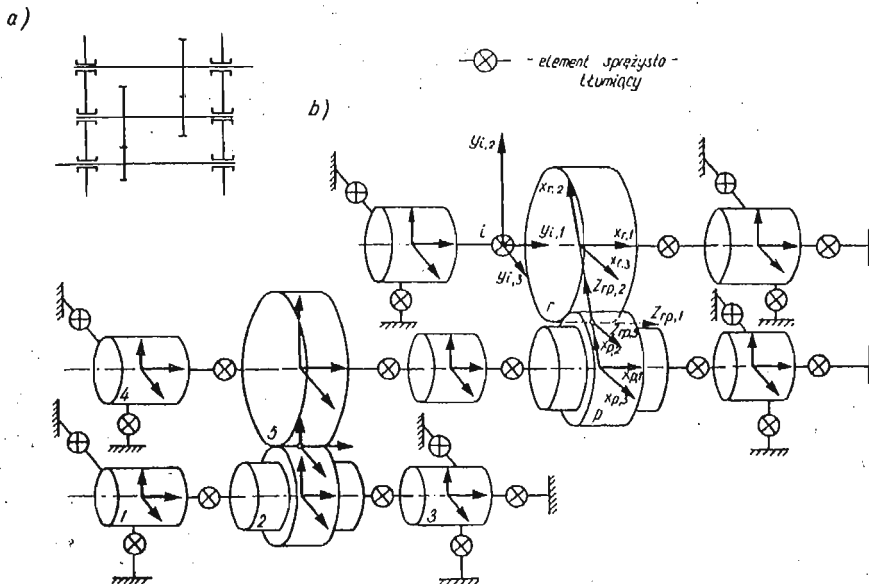
Nakład 680 (585+95) egz. Arkuszy wydawn. 10,25. Arkuszy drukarskich 8,5. Papier druk. sat. IV kl.
71 g. 70×100. Oddano do składania 6.V.1978 r. Druk ukończono we wrześniu 1978 r. Zam. 705/78.
B-56 S-103 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

MODELOWANIE WIELOSTOPNIOWYCH PRZEKŁADNI ZĘBATYCH METODĄ SZTYWNYCH
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

STEFAN BERCZYŃSKI, HENRYK MAĆKOWIAK,
KRZYSZTOF MARCHELEK (SZCZECIN)

Metoda sztywnych elementów skończonych (SES) może być efektywnie wykorzystana do obliczeń giętno-skrętnych drgań swobodnych i wymuszonych napędów wielostopniowych z przekładniami zębatymi. W monografii [1], która jest najpełniejszym opracowaniem metody SES, problem ten nie został poruszony. W niniejszej pracy przedstawiony jest algorytm obliczeń, który stanowi rozwinięcie metody SES w jej zastosowaniu do obliczeń napędów z przekładniami zębatymi. Algorytm opracowano dla modelu przekładni zębatej przenoszącej średnie moce (np. napędy obrabiarek), w której nie występuje luz obwodowy.



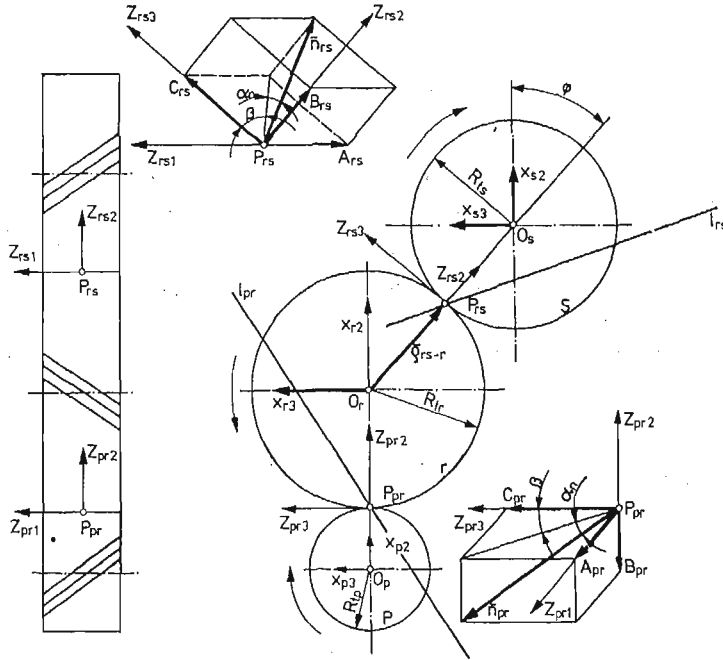
Rys. 1

Przy tworzeniu przedstawionego modelu pominięto takie zjawiska, jak zmiana kąta przyporu¹⁾ na skutek odkształceń zębów, wpływ nierównomierności rozkładu obciążenia wzdłuż linii styku zębów oraz zazębienia krawędziowego powstającego wskutek zwichrowania kół pod obciążeniem, błędów wykonawczych i montażowych oraz zjawiska giros-

¹⁾ Definicje pojęć związanych z geometrią zazębienia znaleźć można np. w [4].

kopowe. Wpływ tych czynników na procesy dynamiczne zachodzące w napędzie jest z reguły lokalny i można go w pierwszym przybliżeniu przy analizie całości napędu pominąć.

Na rys. 1. pokazano model przykładowej dwustopniowej przekładni zębatej zbudowany ze sztywnych elementów skończonych, połączonych między sobą elementami sprężysto-tłumiącymi o liniowych charakterystykach. Koła zębate są przedstawione za pomocą SES nr 2, 5, p i r .



Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiono sposób modelowania zazębienia dla przypadku trzech współpracujących kół p , r , s . Przyjęto założenie, że koła współpracują ze sobą na linii przyporu.

Punkty styku P_{pr-p} , P_{pr-r} oraz P_{rs-r} i P_{rs-s} tylko w stanie równowagi pokrywają się tworząc odpowiednio punkty P_{pr} i P_{rs} (rys. 2). W czasie ruchu punkty P_{pr-p} , P_{pr-r} oraz P_{rs-r} i P_{rs-s} muszą ciągle znajdować się na odpowiednich płaszczyznach zazębienia, których ślady przecięcia z płaszczyzną rysunku oznaczono przez l_{rs} i l_{pr} . Jest to równoznaczne z nałożeniem na układ więzów geometrycznych. W punktach styku P_{pr} i P_{rs} zaczepiono układy współrzędnych $P_{pr}, Z_{pr1}, Z_{pr2}, Z_{pr3}$ oraz $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$. Macierze współrzędnych punktów P_{pr-p} , P_{pr-r} i P_{rs-r} , P_{rs-s} w tych układach mają postać:

$$Z_{pr-p} = \text{col}\{Z_{pr-p1}, Z_{pr-p2}, Z_{pr-p3}\},$$

$$Z_{pr-r} = \text{col}\{Z_{pr-r1}, Z_{pr-r2}, Z_{pr-r3}\},$$

$$Z_{pr-r} = \text{col}\{Z_{rs-r1}, Z_{rs-r2}, Z_{rs-r3}\},$$

$$Z_{rs-s} = \text{col}\{Z_{rs-s1}, Z_{rs-s2}, Z_{rs-s3}\},$$

gdzie Z_{pr-p} — macierz kolumnową współrzędnych punktu P_{pr-p} w układzie $P_{pr}, Z_{pr1}, Z_{pr2}, Z_{pr3}$, Z_{pr-pi} — współrzędna punktu P_{pr-p} na osi Z_{pr-i} , ($i = 1, 2, 3$).

Macierze wektorów kierunkowych płaszczyzn ząbienia mają postać:

$$\mathbf{n}_{pr} = \text{col}\{A_{pr}, B_{pr}, C_{pr}\}; \quad \mathbf{n}_{rs} = \text{col}\{A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}\}.$$

Równania więzów geometrycznych (płaszczyzn ząbienia) wyrażone są wzorami:

$$(1) \quad f_{pr} = A_{pr}(Z_{pr-p1} - Z_{pr-r1}) + B_{pr}(Z_{pr-p2} - Z_{pr-r2}) + C_{pr}(Z_{pr-p3} - Z_{pr-r3}) = 0,$$

$$(2) \quad f_{rs} = A_{rs}(Z_{rs-r1} - Z_{rs-s1}) + B_{rs}(Z_{rs-r2} - Z_{rs-s2}) + C_{rs}(Z_{rs-r3} - Z_{rs-s3}) = 0.$$

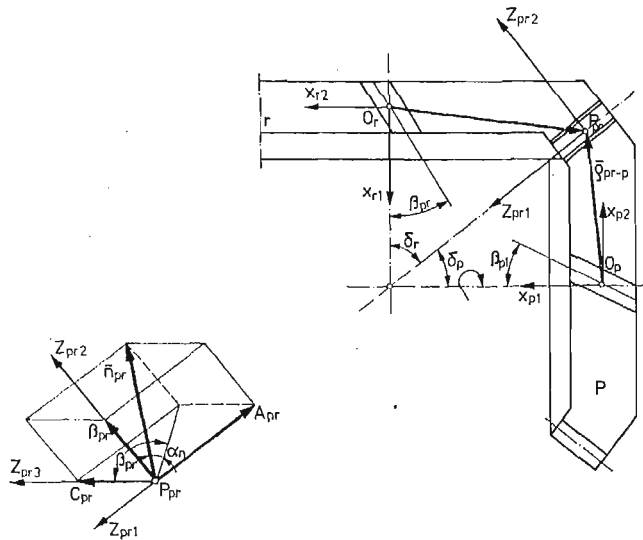
Układy współrzędnych są układami prawoskrętnymi, przy czym osie Z_{pr2} i Z_{rs2} są zwrócone do osi obrotu kół napędzanych w danej współpracującej parze.

Przy wyprowadzaniu wzorów ustalono następujące reguły:

— litera stojąca na pierwszym miejscu w indeksie oznacza koło napędzające, litera stojąca na drugim miejscu — koło napędzane, np. indeks pr oznacza, że koło napędzające ma numer p zaś koło napędzane ma numer r ,

— kierunek obrotów koła napędzającego (np. p) jest prawy, gdy układ z nim związany obraca się zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej wokół osi x_{p1} ,

— kierunek pochylenia linii zębów koła napędzającego (np. p) jest prawy, gdy rzut linii zębów na płaszczyznę osi x_{p1} , x_{p3} tworzy z osią x_{p1} kąt od 0° do 90° .



Rys. 3

Współrzędne A_{pr} , B_{pr} , C_{pr} wektora kierunkowego płaszczyzny ząbienia kół p i r opisują zależności

$$(3) \quad A_{pr} = (-1)^{j+1} \cos \alpha_n \sin \beta_{pr}, \quad B_{pr} = (-1)^i \sin \alpha_n,$$

$$C_{pr} = \cos \alpha_n \cos \beta_{pr},$$

przy czym

$$i = \begin{cases} 0 & \text{— gdy kierunek obrotów koła } p \text{ jest prawy,} \\ 1 & \text{— gdy kierunek obrotów koła } p \text{ jest lewy.} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 0 & \text{— gdy kierunek pochylenia linii zębów koła } p \text{ jest prawy,} \\ 1 & \text{— gdy kierunek pochylenia linii zębów koła } p \text{ jest lewy,} \end{cases}$$

gdzie α_n oznacza nominalny kąt przyporu koła zębatego, zaś β_{pr} kąt pochylenia linii zęba koła p .

Zależności (1) i (3) są także słuszne dla przekładni utworzonej z kół stożkowych (rys. 3). Układ współrzędnych P_{pr} , Z_{pr1} , Z_{pr2} , Z_{pr3} powinien być tak zorientowany, aby oś Z_{pr1} pokrywała się ze wspólną tworzącą stożków podziałowych obu kół p i r , zaś oś Z_{pr2} zwrócona była w kierunku osi obrotu koła napędowego r .

Równania więzów (1) i (2) należy wyrazić w tych samych współrzędnych, w których opisany jest ruch sztywnych elementów skończonych.

Jako współrzędne uogólnione opisujące ruch sztywnych elementów skończonych przyjęto trzy wzajemnie prostopadłe przemieszczenia translacyjne δ wzdłuż osi x_i oraz trzy kąty obrotów ψ wokół tych osi. Na przykład przemieszczenia uogólnione SES r i s wyrażone są zależnościami:

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_r &= \text{col}\{q_{r1}, q_{r2}, \dots, q_{r5}, q_{r6}\} = \text{col}\{\delta_r, \psi_r\}, \\ \mathbf{q}_s &= \text{col}\{q_{s1}, q_{s2}, \dots, q_{s5}, q_{s6}\} = \text{col}\{\delta_s, \psi_s\}, \end{aligned}$$

gdzie q_{ri} , q_{si} oznaczają przemieszczenia uogólnione kół r i s w układach $O_r, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}$ i $O_s, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}$.

Przemieszczenia punktów P_{rs} kół r i s w układzie $Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$ wyrazić można za pomocą współrzędnych uogólnionych, korzystając z wzorów:

$$(4a) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_{rs-r} &= \mathbf{U}_{rs-r} \mathbf{V}_{rs-r} \mathbf{q}_r, \\ \mathbf{q}_{rs-s} &= \mathbf{U}_{rs-s} \mathbf{V}_{rs-s} \mathbf{q}_s, \end{aligned}$$

przy czym

$$(4b) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_{rs-r} &= \text{col}\{q_{rs-r1}, q_{rs-r2}, \dots, q_{rs-r5}, q_{rs-r6}\} = \text{col}\{\delta_{rs-r}, \psi_{rs-r}\}, \\ \mathbf{q}_{rs-s} &= \text{col}\{q_{rs-s1}, q_{rs-s2}, \dots, q_{rs-s5}, q_{rs-s6}\} = \text{col}\{\delta_{rs-s}, \psi_{rs-s}\}, \end{aligned}$$

gdzie $q_{rs-ri} - q_{rs-si}$ oznaczają przemieszczenia kół r i s w układzie $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$.

Występujące w równaniach (4a) macierze \mathbf{U}_{rs-r} i \mathbf{U}_{rs-s} transformacji przemieszczeń z układów $O_r, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}$ i $O_s, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}$ do układu $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$ wyrażone są następująco:

$$(5) \quad \mathbf{U}_{rs-r} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rs-r}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{rs-r}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{rs-s} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rs-s}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{rs-s}^T \end{bmatrix},$$

przy czym

$$(6) \quad \mathbf{C}_{rs-r} = \mathbf{j}_r \mathbf{j}_{rs}^T, \quad \mathbf{C}_{rs-s} = \mathbf{j}_s \mathbf{j}_{rs}^T$$

oraz macierze wersorów osi układów

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_r &= \text{col}\{\bar{\mathbf{j}}_{r1}, \bar{\mathbf{j}}_{r2}, \bar{\mathbf{j}}_{r3}\}, \quad \mathbf{j}_s = \text{col}\{\bar{\mathbf{j}}_{s1}, \bar{\mathbf{j}}_{s2}, \bar{\mathbf{j}}_{s3}\}, \\ \mathbf{j}_{rs} &= \text{col}\{\bar{\mathbf{j}}_{rs1}, \bar{\mathbf{j}}_{rs2}, \bar{\mathbf{j}}_{rs3}\}. \end{aligned}$$

Wyraz $C_{rs-r(lk)}$ macierzy \mathbf{C}_{rs-r} zdefiniowany jest następująco:

$$C_{rs-r(lk)} = \cos(X_{rl}, Z_{rsk}), \quad l, k = 1, 2, 3,$$

gdzie (X_{rl}, Z_{rsk}) — oznaczają kąt zawarty między l -tą osią układu związanego z kołem r a k -tą osią układu $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$, do którego transformuje się przemieszczenia.

Macierze \mathbf{v}_{rs-r} , \mathbf{v}_{rs-s} przenoszenia przemieszczeń z układów $O_r, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}$ i $O_s, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}$ do układu $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$ są wyrażone w postaci

$$(7) \quad \mathbf{v}_{rs-r} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{v}_{rs-r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{rs-s} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{v}_{rs-s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

przy czym

$$(8) \quad \mathbf{v}_{rs-r} = \begin{bmatrix} 0 & \varrho_{rs-r3} & -\varrho_{rs-r2} \\ -\varrho_{rs-r3} & 0 & \varrho_{rs-r1} \\ \varrho_{rs-r2} & -\varrho_{rs-r1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{rs-s} = \begin{bmatrix} 0 & \varrho_{rs-s3} & -\varrho_{rs-s2} \\ -\varrho_{rs-s3} & 0 & \varrho_{rs-s1} \\ \varrho_{rs-s2} & -\varrho_{rs-s1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierze (8) utworzone są ze współrzędnych wektorów $\bar{\varrho}_{rs-r} = [\varrho_{rs-r1}, \varrho_{rs-r2}, \varrho_{rs-r3}]$ i $\bar{\varrho}_{rs-s} = [\varrho_{rs-s1}, \varrho_{rs-s2}, \varrho_{rs-s3}]$ łączących środki 0_r i 0_s kół z punktem P_{rs} (rys. 2).

Podstawiając zależności (5), (6), (7), i (8) do wzorów (4) otrzyma się dla \mathbf{q}_{rs-r} :

$$\mathbf{q}_{rs-r} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{rs-r} \\ \boldsymbol{\psi}_{rs-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rs-r}^T & \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{v}_{rs-r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{rs-r}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_r \\ \boldsymbol{\psi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rs-r}^T \boldsymbol{\delta}_r + \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{v}_{rs-r} \boldsymbol{\psi}_s \\ \mathbf{C}_{rs-r}^T \boldsymbol{\psi}_s \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$(9) \quad \mathbf{Z}_{rs-r} = \text{col}\{\mathbf{Z}_{rs-r1}, \mathbf{Z}_{rs-r2}, \mathbf{Z}_{rs-r3}\} = \mathbf{C}_{rs-r}^T \boldsymbol{\delta}_r + \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{v}_{rs-r} \boldsymbol{\psi}_s = \mathbf{C}_{rs-r}^T [\mathbf{I} \mathbf{v}_{rs-r}] \mathbf{q}_r.$$

Postępując analogicznie uzyska się macierz \mathbf{Z}_{rs-s} :

$$(10) \quad \mathbf{Z}_{rs-s} = \mathbf{C}_{rs-s}^T [\mathbf{I} \mathbf{v}_{rs-s}] \mathbf{q}_s.$$

Definiując prostokątne macierze przenoszenia przemieszczeń jako

$$(11) \quad \mathbf{V}_{rs-r}^* = [\mathbf{I} \mathbf{v}_{rs-r}], \quad \mathbf{V}_{rs-s}^* = [\mathbf{I} \mathbf{v}_{rs-s}],$$

wzory na postępowe przemieszczenia punktów P_{rs-r} i P_{rs-s} w układzie $P_{rs}, \mathbf{Z}_{rs1}, \mathbf{Z}_{rs2}, \mathbf{Z}_{rs3}$ wyrażone za pomocą współrzędnych przemieszczeń uogólnionych kół r i s przyjmują postać

$$(12) \quad \mathbf{Z}_{rs-r} = \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{V}_{rs-r}^* \mathbf{q}_r,$$

$$\mathbf{Z}_{rs-s} = \mathbf{C}_{rs-s}^T \mathbf{V}_{rs-s}^* \mathbf{q}_s.$$

Wzory (12) słuszne są dla dowolnej pary kół, wystarczy tylko zmienić odpowiednio indeksy.

Korzystając z wyprowadzonych zależności można równania więzów (1) i (2) przedstawić w notacji macierzowej. W tym celu definiuje się macierze:

$$(13) \quad \mathbf{n}_{pr} = \text{col}\{A_{pr}, B_{pr}, C_{pr}\}, \quad \mathbf{n}_{rs} = \text{col}\{A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}\},$$

$$(14) \quad \mathbf{Z}_{pr}^* = \text{col}\{\mathbf{Z}_{pr-p1} - \mathbf{Z}_{pr-r1}, \mathbf{Z}_{pr-p2} - \mathbf{Z}_{pr-r2}, \mathbf{Z}_{pr-p3} - \mathbf{Z}_{pr-r3}\},$$

$$\mathbf{Z}_{rs}^* = \text{col}\{\mathbf{Z}_{rs-r1} - \mathbf{Z}_{rs-s1}, \mathbf{Z}_{rs-r2} - \mathbf{Z}_{rs-s2}, \mathbf{Z}_{rs-r3} - \mathbf{Z}_{rs-s3}\}.$$

Podstawiając zależności (13) i (14) do (1) i (2) otrzyma się równania więzów:

$$(15) \quad f_{pr} = \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{Z}_{pr}^* = 0,$$

$$(16) \quad f_{rs} = \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{Z}_{rs}^* = 0.$$

Uwzględniając, że $\mathbf{Z}_{pr}^* = \mathbf{Z}_{pr-p} - \mathbf{Z}_{pr-r}$ oraz $\mathbf{Z}_{rs}^* = \mathbf{Z}_{rs-r} - \mathbf{Z}_{rs-s}$ równania (15) i (16)

przedstawić można w postaci:

$$(15a) \quad f_{pr} = \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{Z}_{pr-p} - \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{Z}_{pr-r} = 0,$$

$$(16a) \quad f_{rs} = \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{Z}_{rs-r} - \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{Z}_{rs-s} = 0.$$

Podstawiając do równań (15a) i (16a) zależności (12) uzyska się:

$$(17) \quad \begin{aligned} f_{pr} &= \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{C}_{pr-p}^T \mathbf{V}_{pr-p}^* \mathbf{q}_p - \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{C}_{pr-r}^T \mathbf{V}_{pr-r}^* \mathbf{q}_r = 0, \\ f_{rs} &= \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{V}_{rs-r}^* \mathbf{q}_r - \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{C}_{rs-s}^T \mathbf{V}_{rs-s}^* \mathbf{q}_s = 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}_{pr-p} &= \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{C}_{pr-p}^T \mathbf{V}_{pr-p}^*, & \mathbf{T}_{pr-r} &= \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{C}_{pr-r}^T \mathbf{V}_{pr-r}^*, \\ \mathbf{T}_{rs-r} &= \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{V}_{rs-r}^*, & \mathbf{T}_{rs-s} &= \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{C}_{rs-s}^T \mathbf{V}_{rs-s}^*, \end{aligned}$$

równania (17) przyjmują postać

$$(19) \quad \begin{aligned} f_{pr} &= \mathbf{T}_{pr-p} \mathbf{q}_p - \mathbf{T}_{pr-r} \mathbf{q}_r = 0, \\ f_{rs} &= \mathbf{T}_{rs-r} \mathbf{q}_r - \mathbf{T}_{rs-s} \mathbf{q}_s = 0. \end{aligned}$$

Wyrażenia (19) są liniowymi formami współrzędnych uogólnionych. Wyrazy macierzy \mathbf{T}_{pr-p} , \mathbf{T}_{pr-r} , \mathbf{T}_{rs-r} , \mathbf{T}_{rs-s} są pochodnymi równań więzów względem odpowiednich współrzędnych uogólnionych, czyli

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}_{pr-p} &= \left[\frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{p1}}, \frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{p2}}, \dots, \frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{p6}} \right], \\ -\mathbf{T}_{pr-r} &= \left[\frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{r1}}, \frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{r2}}, \dots, \frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{r6}} \right], \\ \mathbf{T}_{rs-r} &= \left[\frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{r1}}, \frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{r2}}, \dots, \frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{r6}} \right], \\ -\mathbf{T}_{rs-s} &= \left[\frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{s1}}, \frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{s2}}, \dots, \frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{s6}} \right]. \end{aligned}$$

Przy założeniu, że więzy są idealne, równania ruchu modelu napędu składającego się z SES i uwzględniającego więzy geometryczne nałożone na zazębienia można zapisać w postaci

$$(21) \quad \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P} + \mathbf{g}\lambda,$$

gdzie \mathbf{M} oznacza diagonalną macierz współczynników bezwładności sztywnych elementów skończonych modelu, \mathbf{L} kwadratową macierz tłumienia, \mathbf{K} kwadratową macierz sztywności, \mathbf{q} kolumnową macierz współrzędnych uogólnionych, λ kolumnową macierz nieoznaczonych mnożników Lagrange'a, zaś \mathbf{g} prostokątną macierz pochodnych równań więzów względem współrzędnych uogólnionych.

Sposób budowania macierzy \mathbf{g} (wzór (22)) przedstawiono dla następujących założeń: jeśli w kolejności SES w modelu para kół o numerach p i r jest pierwszą parą współpracującą, para kół r i s — drugą parą współpracującą (koło r jest kołem pośredniczącym — patrz rys. 2) — zaś para kół o numerach t i w jest k -tą parą współpracującą oraz l oznacza

liczbę współpracujących par kół, a n -liczbę stopni swobody całego modelu, wówczas:

$$(22) \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & k-1 & k & k+1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p & \mathbf{T}_{pr-p}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & -\mathbf{T}_{pr-r}^T & \mathbf{T}_{rs-r}^T & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g = s & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{rs-s}^T & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{T}_{tw-t}^T & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{tw-w}^T & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{n \times l}$$

Kolumnową macierz nieoznaczonych mnożników Lagrange'a przedstawia wzór

$$(23) \quad \lambda = \text{col}\{\lambda_{pr}, \lambda_{rs}, \dots, \lambda_{tw}, \dots, \lambda_{uz}\},$$

gdzie λ_{pr} jest nieoznaczonym mnożnikiem Lagrange'a przyporządkowanym więzom geometrycznym nr 1 (pierwszej parze współpracujących kół, tj. p i r), λ_{tw} — nieoznaczonym mnożnikiem Lagrange'a przyporządkowanym więzom geometrycznym nr k (k -tej parze współpracujących kół, tj. t i w).

Równania (21) można rozwiązać przy użyciu ETO, jednakże konieczne jest wyrugowanie nieoznaczonych mnożników Lagrange'a.

W tym celu wykorzystano metodę podaną w pracy [2]. Różniczkując dwukrotnie względem czasu t równania więzów geometrycznych uzyska się równania warunkowe o postaci

$$(24) \quad \begin{aligned} f_{pr}'' &= \mathbf{T}_{pr-p} \ddot{\mathbf{q}}_p - \mathbf{T}_{pr-r} \ddot{\mathbf{q}}_r = 0, \\ f_{rs}'' &= \mathbf{T}_{rs-r} \ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{T}_{rs-s} \ddot{\mathbf{q}}_s = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{tw}'' &= \mathbf{T}_{tw-t} \ddot{\mathbf{q}}_t - \mathbf{T}_{tw-w} \ddot{\mathbf{q}}_w = 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Równania (24) w notacji macierzowej przyjmują postać

$$(25) \quad \mathbf{g}^T \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Kolumnowy wektor przyspieszeń wyznaczony z równań (21) wyrażony jest wzorem

$$(26) \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P} + \mathbf{g}\lambda - \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q}).$$

Podstawiając (26) do (25) i dokonując prostych przekształceń, otrzyma się macierz nieoznaczonych mnożników Lagrange'a:

$$(27) \quad \lambda = (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P}).$$

Aby macierz $(\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})$ była odwracalna spełniony musi być warunek jej nieosobliwości. Analizując budowę macierzy \mathbf{g} łatwo stwierdzić, że rząd macierzy $(\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})$ jest równy l co implikuje jej nieosobliwość.

Macierz λ wyrażoną wzorem (27) podstawia się do równań (21)

$$(28) \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{L} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P} + \mathbf{g} (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P}).$$

Oznaczając w równaniu (28):

$$(29) \quad \mathbf{L}_f = -\mathbf{g} (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L},$$

$$(30) \quad \mathbf{K}_f = -\mathbf{g} (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K},$$

$$(31) \quad \mathbf{P}_f = -\mathbf{g} (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P},$$

uzyska się równanie ruchu w postaci

$$(32) \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{L} + \mathbf{L}_f) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_f) \mathbf{q} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_f.$$

Podstawiając

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_f; \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_f; \quad \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_f$$

do równania (32) uzyska się

$$(33) \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \hat{\mathbf{P}}.$$

Macierze \mathbf{L} , \mathbf{K} i \mathbf{P} tworzy się zgodnie z zasadami ujętymi w pracy [1].

Równania (33) opisują ruch liniowego modelu wielostopniowej przekładni zębatej i mogą być rozwiązane przy użyciu metod i programów zamieszczonych w pracy [1].

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda modelowania wielostopniowych przekładni zębatych przy użyciu metody sztywnych elementów skończonych może być stosowana w tych przypadkach, gdy w układzie występuje wstępne napięcie o wartości gwarantującej, że w trakcie jego pracy nie będzie zachodzić odkrywanie luzów. W porównaniu z dotychczas stosowanymi w praktyce obliczeniowej matematycznymi modelami drgań skrętnych [5, 6, 7, 9], model zbudowany z SES umożliwi wyznaczenie charakterystyk dynamicznych zarówno drgań skrętnych jak i giętnych poszczególnych wałków napędu. Wprawdzie w metodach przedstawionych w pracach [5, 7] uwzględnia się wpływ ugięć wałków i promieniowych odkształceń, łożysk na charakterystyki drgań skrętnych, lecz tylko statycznie, przez wprowadzenie tzw. skrętnej podatności równoważnej. Model matematyczny drgań giętno-skrętnych powinien zatem dać dokładniejsze wyniki. Dodatkową zaletą modelu wielostopniowej przekładni zębatej zbudowanego z SES jest możliwość wykorzystania programów metody SES [1].

Literatura cytowana w tekście

1. J. KRUSZEWSKI i in., *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Warszawa, 1975.
2. G. K. SUSŁOW, *Mechanika teoretyczna*, Warszawa 1960.
3. W. L. WEJC, A. E. KOCZURA, A. M. MARTYNIENKO, *Obliczanie dynamiki napędów maszyn*, Warszawa 1975.

4. K. OCHĘDUSZKO, *Kola zębate*, tom. I, *Konstrukcja*, Warszawa 1966.
5. Wilson W. KER, *Precical Solution of Torsional Vibration Problems*, Volume II, London 1963.
6. K. MARCHELEK, *Dynamika obrabiarek*, Warszawa 1974.
7. W. NADOLSKI, *Modelowanie dynamiczne przekładni zębatych jednostopniowych*, Prace IPPT, Warszawa 1972.
8. M. MIELCZAREK, *Możliwości wykorzystania systemowego modelu matematycznego do badania charakterystyk dynamicznych wielostopniowej przekładni zębatej*, Arch. Bud. Masz., 3, 22 (1975).

Р е з ю м е

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ
ПО МЕТОДУ ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Изложен метод определения изгибно-крутильных колебаний главных приводов металлорежущих станков. Физическая модель построена из жестких конечных элементов, соединённых с помощью упруго-демпфирующих элементов с линейными характеристиками. Каждый элемент, упругий или демпфирующий, определен шестью коэффициентами упругости и демпфирования. Жёсткие конечные элементы, моделирующие зубчатые передачи, находятся под действием геометрических связей, определяющих условия постоянства зацепления. Разработанная математическая модель и алгоритм её решения представлены в простом виде, пригодном для ЭЦВМ.

S u m m a r y

MODELLING OF MULTIPLE TOOTHED GEARS BY RIGID FINITE ELEMENTS

A method of calculating the flexural and torsional vibrations of the machine tool main drives is presented. The physical model was constructed of rigid finite elements connected with elasticdamping elements of linear characteristics. Each elastic or damping element is defined by six rigidity or damping coefficients. The rigid finite elements modelling the gear are subjected to geometrical constraints resulting from the conditions of constant gearing. Both the mathematical model and the corresponding solution algorithm are presented in the form suitable for computations.

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 stycznia 1977 r. ponownie dnia 10 marca 1978 r

O MAKROSKOPOWYCH NAPRĘŻENIACH W OŚRODKACH WIELOFAZOWYCH

ANDRZEJ TRZĘSOWSKI (WARSZAWA)

I. Wstęp

W teorii ośrodków wielofazowych, przy przejściu od mikrowielkości do makrowielkości, często stosuje się następujące rozumowanie (np. [1]):

1. Wybieramy skończony podobszar niejednorodnego ciała (zwany charakterystycznym obszarem) tak duży, że zawiera dostatecznie dużo niejednorodności na to, aby można było przeprowadzić w nim reprezentatywną operację objętościowego uśredniania.

2. Zarazem uważamy, że podobszar jest dostatecznie mały (w porównaniu z wymiarami ciała) na to, aby można było go interpretować — w makroskopowym przybliżeniu — jako punkt materialny i pomijać zmienność w nim makroskopowych wielkości.

Oczywiście takie rozumowanie może mieć zastosowanie tylko do niejednorodnych ośrodków¹⁾, w których niejednorodności są bardzo małych rozmiarów. Przykładem takich ośrodków są polikryształy lub stopy metali z niejednorodnościami w postaci małych inkluzji.

W pracy rozważane będą stopy metali typu matryca z inkluzjami tworzące ośrodek makroskopowo jednorodny, mikroskopowo niejednorodny, o rozproszonym charakterze mikrostruktury (por. [2]).

W monografii [3] podane są przykłady takich stopów. Z przykładów tych wynika, że w wielu wypadkach można pojedyncze inkluzje uważać za zawarte (wraz z otoczeniem w postaci materiału matrycy) w sześcianie o boku $5 \cdot 10^{-4}$ cm. Wtedy w sześcianie o boku $d^* = 5 \cdot 10^{-2}$ cm (a więc w sześcianie o wielkości uznawanej za makroskopową — np. [2], [4]) znajdzie się $n = 10^6$ inkluzji; dla sześcianu o boku d^* można mówić o reprezentatywnym uśrednianiu objętościowym. Z drugiej strony w sześcianie o boku $d = 10$ cm (rzęd wymiarów próbki do badań) znajdzie się $N = 2 \cdot 10^6$ sześcianów o boku d^* ; sześciany o boku d^* są dostatecznie małe w porównaniu z wymiarami próbki ($d^* \ll d$).

Rozważmy pewien podział ciała niejednorodnego na obszary charakterystyczne. Jeżeli każdy z tych obszarów zdeformujemy jednorodnie, to w ciele powstanie pole naprężeń spowodowane nierównomiernością odkształcenia poszczególnych obszarów charakterystycznych i wynikającym stąd ich wzajemnym oddziaływaniem. Makroskopowe przybliżenie tego pola naprężeń nazywane jest naprężeniem I rodzaju. Z określenia naprężeń I rodzaju (i z określenia obszaru charakterystycznego) wynika, że naprężenia te powinno się uważać za stałe w obszarach charakterystycznych.

¹⁾ Ośrodkiem niejednorodnym nazywamy klasę ciał niejednorodnych o takim samym typie niejednorodności.

Celem pracy jest analiza pojęcia makroskopowości naprężeń oraz sformułowanie makroskopowego prawa konstytutywnego (dla naprężeń I rodzaju i makroskopowych odkształceń określonych dla liniowo-sprężystego ośrodka niejednorodnego), w którym wymiary obszaru charakterystycznego wystąpią jako parametry opisujące makroskopową reakcję materiałów zawartych w ciele niejednorodnym.

2. Rozkład niejednorodności

W stopach metali kształt, wielkość i rozmieszczenie inkluzji są losowymi parametrami rozkładu niejednorodności. Losowy rozkład niejednorodności można opisać funkcją:

$$(2.1) \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(\omega, x) = \sum_{\alpha=0}^m \chi_{\alpha}(\omega, x) \mathbf{c}_{\alpha}.$$

gdzie oznaczono:

$x \in G$; G — obszar ciała niejednorodnego (próbki do badań),

$\omega \in \Omega$; Ω — probabilistyczna przestrzeń zdarzeń opisująca losowość wewnętrznej geometrii niejednorodnych ciał ośrodka,

\mathbf{c}_0 — tensor współczynników sprężystości matrycy zajmującej obszar G_0 ,

\mathbf{c}_{α} — tensor współczynników sprężystości inkluzji zajmujących obszar $G - G_0$

$\alpha = 1, \dots, m$

$\chi_{\alpha}(\omega, \cdot)$ — funkcja charakterystyczna obszaru G_{α} (przy zdarzeniu losowym $\omega \in \Omega$):

$$\chi_{\alpha}(\omega, x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in G_{\alpha} \\ 0 & \text{dla } x \notin G_{\alpha} \end{cases}$$

Założenie rozproszonego charakteru niejednorodności i makroskopowej jednorodności ośrodka wyrazimy przyjmując statystyczną jednorodność losowej funkcji rozkładu niejednorodności

$$(2.2) \quad \bigwedge_{x \in G} (E\mathbf{c})(x) = \mathbf{C}_0 = \text{const},$$

gdzie E oznacza operację probabilistycznego uśredniania a \mathbf{C}_0 jest tensorem walencji 4.

Dla ośrodka dwufazowego funkcję rozkładu niejednorodności możemy napisać w postaci:

$$(2.3) \quad \mathbf{c}(\omega, x) = \mathbf{c}_0 + \chi(\omega, x)(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0),$$

gdzie oznaczono $\chi(\omega, x) = \chi_1(\omega, x)$.

Jeżeli rozkład niejednorodności (dany wzorem (2.3)) spełnia warunek tzw. izotropii statystycznej, to losowa funkcja $\chi(x)(\omega) = \chi(\omega, x)$ ($\omega \in \Omega$) ma między innymi własności ([5]):

$$(2.4) \quad \begin{aligned} P(\chi(x) = 1) &= E\chi(x) = \phi, \\ P(\chi(x) = 0) &= 1 - \phi, \\ P(\chi(x) = 1 \wedge \chi(x_1) = 1) &= E[\chi(x)\chi(x_1)] = \gamma(r), \end{aligned}$$

gdzie ϕ jest koncentracją objętościową inkluzji:

$$(2.5) \quad \phi = \frac{|G_1|}{|G|}, \quad 1 - \phi = \frac{|G_0|}{|G|}.$$

oraz oznaczono $r = \|x - x_1\|$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$, $x = (x^1, x^2, x^3)$.

Przy powyższych założeniach

$$(2.6) \quad C_0 = Ec(x) = c_0 + \phi(c_1 - c_0) = (1 - \phi)c_0 + \phi c_1.$$

Funkcja korelacyjna:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} K(x, x_1) &= E[c'(x) \otimes c'(x_1)], \\ c'(x) &= c(x) - C_0 \end{aligned}$$

ma w rozważanym przypadku postać:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} K(x, x_1) &= [\gamma(r) - \phi^2]K, \\ K &= (c_1 - c_0) \otimes (c_1 - c_0). \end{aligned}$$

Mikroskopowość rzędów długości charakteryzujących wymiary inkluzji i odległości między nimi pozwala — w ramach modelu *matryca z inkluzjami* — potraktować stop jako mechaniczną mieszaninę składników. Oznaczmy:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} P_i(x) &= P(x \in G_i), \quad (i = 0, 1), \\ P_{ij}(x, x_1) &= P(x \in G_i \wedge x_1 \in G_j), \quad (i, j = 0, 1). \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwa P_{ij} są postaci ([6]):

$$(2.10) \quad \begin{aligned} P_{ij} &= P_{ij}(r) = \alpha_{ij} + \beta_{ij}p(r), \\ \alpha_{ij} &= P_i P_j, \quad P_i(x) = P_i = \text{const}, \\ \beta_{ij} &= P_i \delta_{ij} - P_i P_j \quad (\text{po } i \text{ nie sumować}), \\ p(r) &= \exp(-r/l). \end{aligned}$$

Stąd (i z (2.4)).

$$(2.11) \quad \gamma(r) = \phi^2 + \phi(1 - \phi)\exp(-r/l),$$

gdzie l — moduł korelacji ($[l] = \text{cm}$).

Wzór (2.11) jest przybliżeniem, w którym ignoruje się różnice geometryczne między matrycą a obszarem zajęтым przez inkluzje; wzór ten nie uwzględnia np. różnic w typie spójności tych obszarów a także nie uwzględnia różnic w kształcie i orientacji inkluzji. Tego rodzaju przybliżenie winno dawać najlepsze rezultaty dla zbliżonych koncentracji ϕ i $1 - \phi$ oraz quasi-sferycznych inkluzji tj. takich, że $E[(R - ER)^2] \ll (ER)^2$, gdzie $R = \|x - x_0\|$, x_0 — środek masy inkluzji, x — punkt na powierzchni inkluzji.

Rozproszony charakter mikrostruktury będziemy uwzględniać przyjmując, że uśrednienie probabilistyczne losowych funkcji, odniesione do obszaru charakterystycznego i do obszaru całej próbki, daje taki sam wynik. W szczególności jeśli przez G i G^* oznaczymy obszary próbki i dowolnego obszaru charakterystycznego a przez $G_1 \subset G$, $G_1^* \subset G^*$ — podobzdar zajęty przez inkluzje, to

$$(2.12) \quad \phi = \frac{|G_1|}{|G|} = \frac{|G_1^*|}{|G^*|}.$$

3. Odkształcenia

W pracy rozważane będą, jak to zwykle robi się w teorii ośrodków wielofazowych, losowe pola odkształceń jednorodnie statystycznie. Założmy więc ośrodek i obciążenia ciał takie, że:

A. Losową deformację obszaru charakterystycznego G^* , obserwowaną na jego granicy ∂G^* , można uważać za jednorodną (por. [1]). Przyjmujemy więc, że losowe przemieszczenia

$$(3.1) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\omega, \mathbf{x}) (\omega \in \Omega, \mathbf{x} \in G^*)$$

spełniają (dla $\omega \in \Omega$ ustalonego) równanie:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} L_0(D)\mathbf{u}(\omega, \mathbf{x}) &= X(\omega, \mathbf{x}) + \mathbf{k}(\omega, \mathbf{x}), & \text{w } G^*, \\ \mathbf{u}(\omega, \mathbf{x}) &= \boldsymbol{\epsilon}_* \mathbf{x}, & \text{na } \partial G^*, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono (por. [7]):

$L_0(D)$ — operator Lamégo dla jednorodnego ciała o tensorze współczynników sprężystości (matrycy) $t_j L_0(D)\mathbf{u} = -\text{div}(\mathbf{c}_0 \cdot \nabla \mathbf{u})$,

$\boldsymbol{\epsilon}_*$ — symetryczny tensor walencji 2,

$\mathbf{x} = \bar{x}_0 \bar{\mathbf{x}}$ — wektor wodzący punktu $x \in \partial G^*$ o początku w $x_0 \in G^*$;
 x_0 — środek masy w obszarze G^* ,

$\boldsymbol{\tau}(\omega, \mathbf{x}) = \int_{G^*} \boldsymbol{\tau}(\omega, \mathbf{y}) \cdot \nabla \delta \mathbf{x} - \mathbf{y} d\mathbf{y}$ — polaryzacja ośrodka²⁾,

$\boldsymbol{\tau}(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{c}''(\omega, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{x})$ — tensor (gęstości) polaryzacji,

$\mathbf{c}''(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{c}(\omega, \mathbf{x}) - \mathbf{c}_0$ — tensor fluktuacji stałych sprężystych,

$\boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}')(\omega, \mathbf{x})$ — tensor (losowych) odkształceń,

$\delta \mathbf{x}$ — delta Diraca,

∇ — gradient względem zmiennych \mathbf{x} ,

„ \cdot ” — operacja pełnego nasuwania tensorów,

$\mathbf{k}(\omega, \mathbf{x})$ — losowa funkcja rozkładu sił objętościowych.

Z uwagi na małość obszaru G^* będziemy przyjmować, że można w nim pominąć wpływ sił objętościowych na odkształcenia:

$$(3.3) \quad \mathbf{k}(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

B. Probabilistyczne średnie odkształceń są wielkościami makroskopowymi określonymi z makroskopowego doświadczenia mechanicznego. Założenie to sformułujemy w postaci hipotezy ergodycznej:

$$(3.4) \quad \bigvee_{\boldsymbol{\epsilon}_0} \bigwedge_{\mathbf{x} \in G^*} \bigwedge_{\omega \in \Omega} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = E\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|G^*|} \int_{G^*} \boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \boldsymbol{\epsilon}_0,$$

gdzie $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_0$ jest symetrycznym tensorem walencji 2.

²⁾ Sens całki Lebesgue'a $\mathbf{X}(\omega, \mathbf{x})$ jest omówiony w pracach [7] i [10]; dla $\boldsymbol{\tau}$ różniczkowalnego względem zmiennej \mathbf{x} : $\mathbf{X}(\omega, \mathbf{x}) = \text{div} \boldsymbol{\tau}(\omega, \mathbf{x})$. Matematyczne problemy związane z poprawnością sformułowania równania (3.2) w sytuacji, kiedy nieciągłość funkcji rozkładu niejednorodności powoduje nie istnienie w obszarze G^* klasycznych pochodnych funkcji \mathbf{u} i $\boldsymbol{\tau}$ — zostały omówione w pracy [7]. Operacje różniczkowania występujące w równaniu (3.2) należy rozumieć jako operacje uogólnionego różniczkowania w sensie Sobolewa.

Przypisując (jak zwykle się robi w makroskopowych doświadczeniach) stałą w G^* wielkość średnią ϵ_0 — środkowi masy $x_0 \in G^*$, przyjmiemy, że

$$(3.5) \quad \epsilon_0 = \bar{\epsilon}(x_0) = E\epsilon(x_0)$$

dla dowolnego punktu $x_0 \in G$ takiego, że:

$$(3.6) \quad \inf_{y \in \partial G} \|x_0 - y\| \geq r^*,$$

$$r^* = \sup_{y \in \partial G^*} \|x_0 - y\|.$$

Z założenia (3.2) wynika przedstawienie pola losowych przemieszczeń:

$$(3.7) \quad \mathbf{u}(\omega, \mathbf{x}) = \epsilon_* \mathbf{x} + \xi(\omega, \mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

$$\xi(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{na } \partial G^*.$$

Stąd kolejno:

$$(3.8) \quad \frac{1}{|G^*|} \int_{G^*} \nabla_x \xi(\omega, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(3.9) \quad \epsilon_* = \epsilon_0.$$

Uśredniając stronami równanie (3.2) (przy uwzględnieniu (3.5) — (3.9)) otrzymujemy następujący wniosek:

Jeżeli ciało zajmujące obszar G jest jednorodne przy brzegu oraz możemy pominąć wpływ sił objętościowych na odkształcenia, to rozkład średnich odkształceń w obszarze G (być może za wyjątkiem warstwy przybrzeżnej szerokości $b < r^*$) jest postaci:

$$(3.10) \quad \bar{\epsilon}(x) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u}_0^t)(x),$$

$$\inf_{y \in \partial G} \|x - y\| \geq r^* \quad (r^* - (3.6)),$$

gdzie \mathbf{u}_0 jest przemieszczeniem w matrycy bez inkluzji zajmującej obszar G :

$$(3.11) \quad \mathbb{L}(D)\mathbf{u}_0(x) = \mathbf{0} \quad \text{w } G,$$

$$b(x, D)\mathbf{u}_0(x) = \phi(x) \quad \text{na } \partial G.$$

Przez $b(x, D)$ oznaczono w równaniu (3.11) operator warunku brzegowego (por. [7]). Jeżeli $b(x, D)\mathbf{u}_0(x) = \mathbf{u}_0(x)$ to założenie jednorodności przy brzegu można pominąć.

Wniosek powyższy oznacza, że rozważamy ośrodki, w których znika średnia polaryzacja ośrodka

$$(3.12) \quad (EX)(x) = \int_G (E\tau)(x) \cdot \nabla_x \delta_{x-y} dy = \mathbf{0}.$$

4. Średnie naprężenia

Jeżeli inkluzje oraz obszar charakterystyczny są ograniczone dostatecznie gładkimi powierzchniami oraz spełnione są pewne warunki ograniczające składowe losowej funkcji:

$$(4.1) \quad \mathbf{c}''(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{c}(\omega, \mathbf{x}) - \mathbf{c}_0,$$

to istnieje w obszarze charakterystycznym G^* funkcyjny związek (por. [10]) między średnimi naprężeniami:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}(x) &= (E\mathbf{T})(x), \quad x \in G^*, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}(\omega, x) = \mathbf{c}(\omega, x) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\omega, x), \end{aligned}$$

a średnim odkształceniem

$$(4.3) \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x) = \boldsymbol{\epsilon}_0, \quad x \in G^*.$$

Związek ten ma postać

$$(4.4) \quad \bar{\mathbf{T}}(x) = \mathbf{C}(x) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0,$$

gdzie oznaczono:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{C}(x) &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}'(x), \\ \mathbf{C}'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}_n(x), \quad \mathbf{C}_0 = E\mathbf{c}, \\ \mathbf{C}_n(x) &= \int_{G^*} \mathbf{F}_n(x, x_n) dx_n, \end{aligned}$$

\mathbf{F}_n jest tensorową funkcją walencji 4 zależną od (por. [10]):

— tensorowej funkcji walencji $4(n+1)$, $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(x, x_1, \dots, x_n)$ będącej liniową kombinacją funkcji korelacyjnej rzędu $k \leq n$, losowej funkcji $\mathbf{c}'(\omega, x)$, tj. funkcji postaci $E(\otimes_{i=1}^k \mathbf{c}'(x_i))$.

— funkcji Greena dla operatora $L_\circ(D)$, obszaru G^* i problemu Dirichleta (por. rozdz. 3(3.2)).

We wzorach (4.5) tylko kształt obszaru G^* nie jest określony przez rozważany ośrodek i w ogólnym przypadku nie można o tym kształcie nic powiedzieć *a priori*. Jeżeli jednak mamy ośrodek *izotropowy statystycznie* to naturalnym wydaje się wybór G^* w postaci kuli

$$(4.6) \quad G^* = K(x_0, r^*).$$

Dalej będziemy uważać, że obszar charakterystyczny jest kulą o promieniu r^* .

Do dalszych rozważań potrzebne nam będzie wydzielenie części stałej z funkcyjnego szeregu $\mathbf{C}'(x)$. Jeżeli przedstawimy funkcję Greena $\mathbf{U}(x, x')$ w postaci

$$(4.7) \quad \mathbf{U}(x, x') = \mathbf{e}(x-x') + \mathbf{r}(x, x'),$$

gdzie $\mathbf{e}(x-x')$ — rozwiązanie podstawowe dla operatora $L_\circ(D)$ a $\mathbf{r}(x, x')$ — funkcja klasy C^∞ w obszarze G^* , to z postaci funkcji $\mathbf{F}_n(x, x')$ (por. [10]) wynika, że poszukiwaną część stałą \mathbf{C} możemy otrzymać wstawiając we wzorach (4.5) $\mathbf{e}(x-x')$ w miejsce $\mathbf{U}(x, x')$, tj.:

$$(4.8)^3) \quad \begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{C}_0 + \tilde{\mathbf{C}}, \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}_n, \\ \tilde{\mathbf{C}}_n &= \int_0^{r^*} \mathbf{d}_n(r_n) dr_n, \quad r_n = \|x - x_n\|, \end{aligned}$$

³⁾ Dopuszczalność zmiany kolejności sumowania w szeregu zawsze można osiągnąć zakładając bezwzględną zbieżność tego szeregu tj. narzucając warunki ograniczenia na funkcje korelacyjne \mathbf{K}_n .

gdzie pojawienie się funkcji $d_n(r)$ wynika z założenia statystycznej jednorodności i izotropii (4.9)

$$\mathbf{K}_n(x, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{K}_n(\|x - x_1\|, \dots, \|x - x_n\|)$$

oraz z przejścia od współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych sferycznych:

$$(4.10) \quad \mathbf{e}(x - x_1) = \frac{1}{r} \mathbf{E}(\vartheta, \theta), \quad r = \|x - x_1\|,$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Możemy więc przedstawić szereg $\mathbf{C}(x)$ w postaci:

$$(4.11) \quad \mathbf{C}(x) = \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}}(x),$$

a średnie naprężenia — w postaci:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}(x) &= \mathbf{T}_I(x_0) + \mathbf{T}_{II}(x), \\ \mathbf{T}_I(x_0) &= \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{e}}(x_0), \\ \mathbf{T}_{II}(x) &= \tilde{\mathbf{C}}(x) \cdot \bar{\mathbf{e}}(x_0). \end{aligned}$$

5. Makroskopowe naprężenia

Rozważmy wzory (4.4) i (4.12). Zmiennosc tensorów $\bar{\mathbf{T}}(x)$ i $\mathbf{C}(x)$ w obszarze charakterystycznym wskazuje, że $\mathbf{C}(x)$ nie może być uznane za tensor makroskopowych współczynników sprężystości ciała makroskopowo jednorodnego, a $\bar{\mathbf{T}}(x)$ — za makroskopowe naprężenia I rodzaju. Oczywiście gdyby zachodziła własność

$$(5.1) \quad \bigwedge_{\omega \in \Omega} \mathbf{T}_I(x_0) = \frac{1}{|G^*|} \int_{G^*} \mathbf{T}(\omega, x) dx,$$

to można by uważać, że część stała średnich naprężeń ($\mathbf{T}_I(x_0)$) jest makroskopowym naprężeniem I rodzaju, a tensor \mathbf{C} (zdefiniowany wzorem 4.8) — tensorem makroskopowych współczynników sprężystości.

Warunek (5.1) można nazwać *hipotezą quasi-ergodyczną* i potraktować jako dodatkowy warunek definiujący makroskopową jednorodność ośrodka wielofazowego.

Warunki (3.4) i (5.1) nakładają ograniczenia na statystykę rozkładu niejednorodności ośrodka wielofazowego. Podanie twierdzeń mówiących o tym kiedy zachodzą te warunki jest problemem w sobie, znacznie wykraczającym poza ramy pracy. Dla zorientowania się (przynajmniej w pierwszym przybliżeniu) w informacjach o makroskopowych własnościach ośrodka wielofazowego zawartych we wzorze (4.8), rozważmy przykład dwufazowego stopu metali statystycznie jednorodnego i izotropowego o rozproszonym charakterze mikrostruktury i ze sferycznymi inkluzjami (np. stop Ni-Au, w którym inkluzje z niklu są sferycznymi cząstkami o średnicy 10^{-5} cm — [3]). Dla tego rodzaju stopów zadowalającą dla celów praktycznych, jest informacja o wkładzie w naprężenia I rodzaju funkcji $\mathbf{K}_1(x, x_1)$: funkcja ta wyraża się przez liniowe charakterystyki mikrostruktury. Jeżeli więc przyjmiemy warunek

$$(5.2)^4) \quad \mathbf{K}(x, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad n \geq 2,$$

⁴⁾ Warunek (5.2) jest równoważny nieskończonemu układowi równań liniowych ze względu na funkcje korelacyjne $E(\prod_{i=1}^n \chi(x_i))$ $n = 2, 3, \dots$ (por. rozdz. 2), tj. narzuca ograniczenia na losową geometrię ośrodka (por. [8]).

to, w przybliżeniu danym wzorem (2.11), tensor makroskopowych współczynników sprężystości jest postaci (por. rozdz. 2, (4.8) oraz [10]):

$$(5.3) \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \phi(1-\phi)\mathbf{C}_1 + \int_0^{r^*} \frac{\gamma(r)-\phi}{r} dr \mathbf{C}_2,$$

gdzie oznaczono:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{K}, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{K}, \\ \mathbf{L}_1 &= \int_{S(0,1)} \nabla \mathbf{e}(z) \otimes \mathbf{n}(z) dS(z), \\ \mathbf{L}_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{F}(\vartheta, \theta) \sin \theta d\theta d\vartheta, \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0) \otimes (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0), \\ \nabla \mathbf{e}(x-x_1) &= \frac{1}{r^3} \mathbf{F}(\vartheta, \theta) \quad (\text{por. (4.10)}). \end{aligned}$$

\mathbf{C}_0 i $\gamma(r)$ zdefiniowane są odpowiednio wzorami (2.6) i (2.11); $\mathbf{n}(z)$ [$z \in S(0, 1)$] jest polem wektorów normalnych skierowanych na zewnątrz sfery o środku $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ i promieniu $R = 1$; symbol „ \circ ” oznacza działanie tensorowe zdefiniowane dla tensorów \mathbf{A} walencji 4 i \mathbf{B} — walencji 8, przepisem:

$$(5.5) \quad (\mathbf{A} \circ \mathbf{B})_{mnpq} = A_{ijkl} B_{mnljklpq}$$

$\mathbf{e}(z)$ jest rozwiązaniem podstawowym dla operatora $L_0(D)$; np. jeżeli $\mathbf{c}_0 = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ ($\mathbf{1}|_{ij} = \delta_{ij}$, $\mathbf{I}|_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$), to

$$\boldsymbol{\epsilon}(x-y) = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\Delta r \mathbf{1} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \nabla \nabla r \right), \quad r = \|x-y\|.$$

Współczynniki λ , μ winny spełniać warunki (por. np. [9]):

$$(5.7) \quad 3\lambda + \mu > 0, \quad \mu > 0.$$

Naprężenia I rodzaju w punktach $x_0 \in G$ takich, że

$$(5.8) \quad \inf_{y \in \partial G} \|x_0 - y\| \geq r^*$$

można więc obliczyć za pomocą związku

$$(5.9) \quad \mathbf{T}_I(x_0) = \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x_0),$$

gdzie \mathbf{C} jest dane wzorem (5.3), a $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x)$ ($x \in G$) jest polem makroskopowych odkształceń omówionych w rozdz. 2.

Związek (5.9) uwzględnia wpływ na naprężenia I rodzaju, następujących charakterystyk mikrostruktury:

- koncentracji objętościowej inkluzji ϕ ,
- liniowego parametru r^* charakteryzującego łącznie rzędy wymiarów inkluzji i odległości między nimi. Parametr ten ma sens makroskopowej charakterystyki niejednorodności jako mikrostruktury,

— liniowego parametru l skorelowania własności stopu w różnych punktach objętości. Związek (5.9) obowiązuje wszędzie w G za wyjątkiem być może przybrzeżnego pasa o szerokości r^* .

Zauważmy, że makroskopowe współczynniki sprężystości dane wzorem (4.8) (a w szczególności współczynniki dane wzorem (5.3)) są — w przeciwieństwie do wzoru (4.5) — niezależne od wyboru problemu brzegowego dla obszaru charakterystycznego. Uwolnienie się od tej нефизycznej zależności jest konsekwencją przyjęcia hipotezy quasi-ergodycznej (5.1).

Literatura cytowana w tekście

1. И. М. Лившиц, Л. Н. Розенцвайг, *К теории упругих свойств поликристаллов*, Журн. exper. и теорет. физ., 2 (1946).
2. E. BRANDERBER, *Chemia ogólna dla inżynierów*, Warszawa 1966.
3. И. Н. Францевич, Д. Н. Карпино, *Композиционные материалы волокнистого строения*, Киев 1970.
4. I. CHOJNACKI, *Metalografia strukturalna*, Katowice 1960.
5. H. L. FRISCH, *Statistics of Random Media: Transactions of the Society Rheology*, 9, 1 (1965).
6. А. Г. Фокин, Т. Д. Шермергер, *К вычислению упругих модулей хетерогенных сред*, ПМТФ (МТО), 3 (1968).
7. A. TRZĘSOWSKI, *Dia-elastic Description of a Jump-Non-Homogeneous Body*, Teoria ośrodków wielofazowych cz. II, 1976.
8. Cz. EIMER, *Stress in Multiphase Media*; Arch. Mech. Stos., 4, 19 (1967).
9. A. TRZĘSOWSKI, *Rozwiązania w przestrzeniach Sobolewa równań teorii sprężystości*, Prace IPPT 24/1973.
10. A. TRZĘSOWSKI, *Średnie naprężenia w stochastycznym ośrodku wieloskładnikowym*, Mech. Teoret. Stos., 3, 14 (1976).

Резюме

О МАКРОСКОПИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В работе рассматривается связь между макроскопическими и средними напряжениями в средах, содержащих случайно распределенные скачкообразные неоднородности. Найден вид определяющего соотношения для макроскопических напряжений.

Summary

ON MACROSCOPIC STRESSES IN A MULTI-COMPONENT MEDIUM

Relations between macroscopic stresses and mean stresses in a medium with random distribution of jump-inhomogeneities is considered. The form of constitutive-equation for macroscopic stresses is presented.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca złożona w Redakcji dnia 27 lipca 1977 r.

O SUMOWANIU PEWNYCH SZEREGÓW DINIEGO I TRYGNOMETRYCZNYCH POJAWIAJĄCYCH SIĘ W ZAGADNIENIACH MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

KRZYSZTOF GRYSA, JANUSZ JANKOWSKI (POZNAŃ)

1. Wstęp

Jednym z podstawowych problemów, pojawiających się przy rozważaniu zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych (a także i innych dziedzin nauki), jest interpretacja fizyczna wyników mających postać wielokrotnych całek lub szeregów. W szczególności przy rozważaniach dotyczących termosprężystości czy termodyfuzji otrzymuje się często rozwiązania w postaci szeregów typu Fouriera-Bessela, Diniego [1], lub trygonometrycznych (por. np. [5, 7, 8] i in.).

Wydaje się, że najogólniejsze, z przedstawionych dotychczas w literaturze, podejście do problemów sumowalności szeregów Fouriera-Bessela i Diniego przedstawiono w pracy [2]. W pracy tej wyznaczono sumy szeregów Fouriera-Bessela

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}^s J_{n+k}(\mu_{ni}x) J_{n+l}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{nj}^2 \pm a^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})}$$

oraz Diniego

$$(1.2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^{2+s} J_{n+k}(\lambda_{nj}x) J_{n+l}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 \pm a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})}$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots; s, k, l = 0, 1; \mu_{ni}$ — i -te miejsce zerowe funkcji Bessela $J_n(z)$; λ_{nj} — j -te miejsce zerowe funkcji $f_n(\lambda) = \lambda J_n'(\lambda) + H J_n(\lambda)$; $i, j = 1, 2, \dots; H, a$ — dowolne stałe ($a \neq 0$); $x, y \in (0, 1)$.

Wzory przedstawione w cytowanej pracy są prawdziwe również dla każdego n rzeczywistego większego od $-0,5$ (porównaj tok rozumowania w pracy [2] z odpowiednimi związkami zawartymi w monografiach [1, 6]). Pewne szczególne przypadki tych wzorów można znaleźć w innych pracach. Należy tu wymienić szczególnie dwie publikacje, których uogólnienie stanowi praca [2]. Są to prace WOELKEGO [3] i GRYSY [4]. W pierwszej podano sumy szeregów typu (1.1) dla $n = 0$; w drugiej uogólniono wyniki pierwszej pracy na dowolne n naturalne.

W obecnej pracy wyznaczono wzory sumacyjne dla szeregów Diniego w przypadku, gdy $H > 0$. Ponadto wykorzystano wyniki prac [2] i [4] w celu wyznaczenia sum pewnych szeregów trygonometrycznych. Oba typy szeregów są szczególnie często spotykane w rozwiązaniach równań transportu ciepła lub masy oraz w teorii drgań. Użyteczność wyprowadzonych wzorów zilustrowano w końcowej części pracy przedstawiając w prostych postaciach pewne znane rozwiązania problemów termosprężystości, teorii drgań i innych.

W przedstawionych w dalszych częściach pracy związkach używać będziemy następujących oznaczeń skracających:

$$(1.3) \quad F_{n1}^H(p, z) = \frac{1}{4p^2} \left[K_n(pz) - I_n(pz) \frac{(H+n)K_n(p) - pK_{n+1}(p)}{(H+n)I_n(p) + pI_{n+1}(p)} \right],$$

$$(1.4) \quad F_{n2}^H(p, z) = \frac{1}{4p^2} \left[K_{n+1}(pz) + I_{n+1}(pz) \frac{(H+n)K_n(p) - pK_{n+1}(p)}{(H+n)I_n(p) + pI_{n+1}(p)} \right].$$

Tutaj $I_n(z)$ i $K_n(z)$ — zmodyfikowane funkcje Bessela, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju n -tego rzędu [1]; H — parametr występujący w szeregach Diniego. Nietrudno zauważyć, że

$$(1.5) \quad F_{n1}^H(p, 1) = \frac{1}{4p^2 [(H+n)I_n(p) + pI_{n+1}(p)]}.$$

$$(1.6) \quad F_{n2}^H(p, 1) = \frac{H+n}{4p^3 [(H+n)I_n(p) + pI_{n+1}(p)]}.$$

Podstawowym wzorem, z którego otrzymuje się wszystkie następne cytowane w tej pracy wzory sumacyjne dla szeregów Diniego, jest związek

$$(1.7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \\ = 2a^2 \{ \eta(x-y) F_{n1}^H(a, x) I_n(ay) + \eta(y-x) F_{n1}^H(a, y) I_n(ax) \},$$

który uzyskuje się z odpowiedniego podstawowego wzoru z pracy [2] dla przypadku, gdy $H > 0$ i $n \geq 0$. Tutaj $\eta(z)$ — funkcja Heaviside'a.

Znajomość wzorów sumacyjnych dla szeregów Diniego i Fouriera-Bessela (te ostatnie omówiono w pracy [4]) pozwala w łatwy sposób otrzymać wzory sumacyjne dla pewnych szeregów trygonometrycznych. Wykorzystując mianowicie związki [6]:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, & I_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \\ Y_{1/2}(z) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, & K_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \\ J_{3/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right], & I_{3/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cosh z - \frac{\sinh z}{z} \right], \\ Y_{3/2}(z) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin z + \frac{\cos z}{z} \right], & K_{3/2}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{z} \right), \end{aligned}$$

związek (1.7) oraz związek (11) z pracy [4], otrzymuje się następujące wzory, będące podstawowymi dla wyznaczania sum odpowiednich szeregów trygonometrycznych:

$$(1.9) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \sin \lambda_j x \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \eta(x-y) \frac{\sinh ay}{2a} \times \\ \times \left[e^{-ax} - \frac{2e^{-a} \sinh ax}{A(H, a)e^a - e^a} \right] + \eta(y-x) \frac{\sinh ax}{2a} \left[e^{-ay} - \frac{2e^{-a} \sinh ay}{A(H, a)e^a - e^a} \right],$$

(1.10)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k x \sin \alpha_k y}{\alpha_k^2 + a^2} = \eta(x-y) \frac{\sinh(ay) \sinh[a(1-x)]}{2a \sinh(a)} + \eta(y-x) \frac{\sinh(ax) \sinh[a(1-y)]}{2a \sinh(a)}$$

gdzie λ_j — dodatnie pierwiastki równania $(0,5-H)\operatorname{tg} \lambda = \lambda$ gdy $H \neq 0,5$, lub równania $\cos \lambda = 0$ gdy $H = 0,5$; (dla $H = 0,5$ mamy zatem $\lambda_j = \pi(j-0,5)$), $A(H, a) = \frac{H+a-0,5}{H-a-0,5}$, $\alpha_k = \pi k$.

Wszystkie wzory sumacyjne dotyczące szeregów trygonometrycznych, przedstawione w niniejszej pracy, można otrzymać bądź przez wykonanie na związkach (1.9) i (1.10) odpowiednich operacji, omówionych przy wyprowadzaniu wzorów sumacyjnych w pracach [2] i [4], bądź przez położenie $n = 1/2$ w odpowiednich zależnościach dotyczących sumowania szeregów Fouriera-Bessela i Diniego.

2. Sumy szeregów typu (1.2)

Zgodnie z ustaleniami pracy [2] wszystkie szeregi funkcyjne, dla których poniżej wyznaczono sumy, są zbieżne niemal jednostajnie dla $x, y \in (0, 1)$. Sumy szeregów liczbowych wyznaczono, dokonując odpowiednich przejść granicznych, przy czym za kryterium dopuszczalności takich przejść przyjęto ustalenia zawarte w §§ 18.34 i 18.35 monografii [1]. Parametr H we wszystkich związkach jest dodatni. Przejścia graniczne z parametrem a do zera wyznaczają pewne wzory sumacyjne, których jednakże nie wolno różniczkować w celu otrzymania innych związków (por. przejście od wzoru (2.10) do (2.11) w pracy [2]). Wszystkie zależności otrzymane przez różniczkowanie wzorów sumacyjnych uzyskano przy uwzględnieniu warunków podanych w odpowiednim twierdzeniu (por. § 10, rozdz. 5 monografii [9]); różniczkowania dokonuje się osobno dla $x < y$ i $y < x$ ($x, y \in (0, 1)$). Wielkości λ_{nj} , występujące we wszystkich szeregach przedstawionych w drugim i trzecim rozdziale pracy, są pierwiastkami równania

$$\lambda J'_n(\lambda) + H J_n(\lambda) = 0.$$

Wykonanie zawartego w powyższym równaniu różniczkowania i wstawienie w miejsce λ pierwiastka λ_{nj} ($j = 1, 2, \dots$) prowadzi do następującej, wygodnej do dalszych rozważań, tożsamości:

$$(2.1) \quad \lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}) = (H+n) J_n(\lambda_{nj}).$$

Dokonując przejścia granicznego z a do zera we wzorze (1.7) otrzymuje się związek

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\eta(x-y)}{4n} \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^n - x^n y^n \frac{H-n}{H+n} \right\} + \frac{\eta(y-x)}{4n} \left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^n - x^n y^n \frac{H-n}{H+n} \right\} & \text{gdy } n > 0, \\ \frac{1}{2H} \{ \eta(x-y)(1-H \ln x) + \eta(y-x)(1-H \ln y) \} & \text{gdy } n = 0. \end{cases}$$

Przechodząc we wzorze (1.7) — kolejno — najpierw z x do 1, a potem z y do 1, otrzymuje się

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj} x)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{I_n(ax)}{2[(H+n)I_n(a) + aI_{n+1}(a)]},$$

$$(2.4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2)} = \frac{I_n(a)}{2[(H+n)I_n(a) + aI_{n+1}(a)]},$$

Różniczkując związek (1.7) względem x dostajemy

$$(2.5) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj} x) J_n(\lambda_{nj} y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \\ = 2a^3 \{ \eta(x-y) F_{n2}^H(a, x) I_n(ay) - \eta(y-x) F_{n1}^H(a, y) I_{n+1}(ax) \};$$

funkcja $F_{n2}^H(p, z)$ określona jest związkiem (1.4).

Dokonując we wzorze (2.5) przejścia granicznego z y do 1, otrzymujemy

$$(2.6) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj} x)}{(\lambda_{nj}^2 + a^3)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = - \frac{aI_{n+1}(ax)}{2[(H+n)I_n(a) + aI_{n+1}(a)]},$$

Przejście we wzorze (2.5) z a do zera daje wynik następujący:

$$(2.7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj} x) J_n(\lambda_{nj} y)}{(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \frac{\eta(x-y)}{2x} \left(\frac{y}{x} \right)^n.$$

Mnożąc obustronnie związek (2.5) przez $-a^{-2}$, związek (2.7) przez a^{-2} oraz dodając stronami, otrzymuje się

$$(2.8) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj} x) J_n(\lambda_{nj} y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \eta(y-x) 2a F_{n1}^H(a, y) I_{n+1}(ax) + \\ + \eta(x-y) \left\{ \frac{1}{2a^2 x} \left(\frac{y}{x} \right)^n - 2a F_{n2}^H(a, x) I_n(ay) \right\}.$$

Przechodząc w (2.8) z a do zera dostajemy

$$(2.9) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\lambda_{nj} x) J_n(\lambda_{nj} y)}{\lambda_{nj} (\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \begin{cases} \frac{x\eta(y-x)}{8n(n+1)} \left[\left(\frac{x}{y} \right)^n - x^n y^n \frac{H-n}{H+n} \right] & \text{gdyn} > 0, \\ \frac{x\eta(y-x)}{4H} (1 - H \ln y) & \text{gdyn} = 0. \end{cases}$$

Kładąc w (2.8) $x = 1$ otrzymujemy

$$(2.10) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj} y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{1}{2a^2} \left\{ \frac{y^n}{H+n} - \frac{I_n(ay)}{(H+n)I_n(a) + aI_{n+1}(a)} \right\},$$

zaś kładąc w (2.8) $y = 1$ otrzymuje się związek

$$(2.11) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj} x)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{I_{n+1}(ax)}{2a[(H+n)I_n(a) + aI_{n+1}(a)]}.$$

Przejdźcie w (2.5) z x do 1 i wykorzystanie tożsamości (2.1), a następnie przejście z a do zera, daje w wyniku znany związek (por. [1], § 18.12):

$$(2.12) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(H+n)J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2)J_n(\lambda_{nj})} = y^n.$$

Ten sam rezultat otrzymuje się, przechodząc z a do zera we wzorze (2.3).

Przechodząc w (2.11) z x do 1 lub w (2.10) z y do 1 otrzymuje się

$$(2.13) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2)} = \frac{I_{n+1}(a)}{2a(H+n)[(H+n)I_n(a) + aI_{n+1}(a)]}.$$

Przejdźcie z a do zera w (2.4) lub z y do 1 we wzorze (2.12) daje sumę szeregu liczbowego

$$(2.14) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2} = \frac{1}{2(H+n)}.$$

Zróżniczkowanie zależności (2.5) względem y daje w wyniku związek

$$(2.15) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \\ = 2a^2 \{ \eta(x-y) F_{n2}^H(a, x) I_{n+1}(ay) + \eta(y-x) F_{n2}^H(a, y) I_{n+1}(ax) \}.$$

Przechodząc w (2.15) z a do zera otrzymujemy

$$(2.16) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \frac{\eta(x-y)}{4(n+1)} \left(\frac{y}{x} \right)^{n+1} + \frac{\eta(y-x)}{4(n+1)} \left(\frac{x}{y} \right)^{n+1}.$$

Kładąc w (2.16) lub w (2.9) $y = 1$ dostajemy

$$(2.17) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{\lambda_{nj}(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{x^{n+1}}{4(n+1)(H+n)}.$$

Dokonując w (2.17) przejścia z x do 1, lub w (2.13) z a do zera, otrzymuje się zależność

$$(2.18) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^2(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2)} = \frac{1}{4(n+1)(H+n)^2}.$$

Mnożąc obustronnie (2.17) przez x^{-n} i całkując w granicach od x do 1 łatwo uzyskuje się związek

$$(2.19) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}x)}{\lambda_{nj}^2(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{[(1-x^2)(H+n) + 2]x^n}{8(n+1)(H+n)^2}.$$

Wykorzystanie związków (2.14) i (2.18) pozwala wyznaczyć sumę następującego szeregu liczbowego

$$(2.20) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^2} = \frac{2+H+n}{4(n+1)(H+n)}.$$

W celu wyprowadzenia dalszych związków wykorzystamy wzory [1]

$$(2.21) \quad K_n(ip) = -\frac{\pi}{2} i^{-n} \{Y_n(p) + iJ_n(p)\},$$

$$I_n(ip) = i^n J_n(p), \quad i = \sqrt{-1},$$

gdzie $Y_n(p)$ — funkcja Bessela II rodzaju n -tego rzędu. Wzory (2.21) pozwalają określić następujące związki:

$$(2.22) \quad F_{n1}^H(ip, z) = -i^{-n} G_{n1}^H(p, z), \quad F_{n2}^H(ip, z) = i^{-n+1} G_{n2}^H(p, z),$$

gdzie

$$(2.23) \quad G_{n1}^H(p, z) = \frac{\pi}{8p^2} \left\{ J_n(pz) \frac{(H+n)Y_n(p) - pY_{n+1}(p)}{(H+n)J_n(p) - pJ_{n+1}(p)} - Y_n(pz) \right\},$$

$$G_{n2}^H(p, z) = \frac{\pi}{8p^2} \left\{ J_{n+1}(pz) \frac{(H+n)Y_n(p) - pY_{n+1}(p)}{(H+n)J_n(p) - pJ_{n+1}(p)} - Y_{n+1}(pz) \right\}.$$

Korzystając z zależności (2.21) i (2.22) oraz ze związków (1.7), (2.3) - (2.6), (2.8), (2.10), (2.11), (2.13) i (2.15) łatwo jest wyprowadzić następujące wzory:

$$(2.24) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = 2a^2 \{ \eta(x-y) G_{n1}^H(a, x) J_n(ay) + \eta(y-x) G_{n1}^H(a, y) J_n(ax) \},$$

$$(2.25) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{J_n(ax)}{2[(H+n)J_n(a) - aJ_{n+1}(a)]}.$$

$$(2.26) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2)} = \frac{J_n(a)}{2[(H+n)J_n(a) - aJ_{n+1}(a)]},$$

$$(2.27) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = 2a^3 \{ \eta(x-y) G_{n2}^H(a, x) J_n(ay) + \eta(y-x) G_{n1}^H(a, y) J_{n+1}(ax) \},$$

$$(2.28) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{aJ_{n+1}(ax)}{2[(H+n)J_n(a) - aJ_{n+1}(a)]},$$

$$(2.29) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \eta(x-y) \left\{ -\frac{1}{2a^2 x} \left(\frac{y}{x} \right)^n + \right. \\ \left. + 2a G_{n2}^H(a, x) J_n(ay) \right\} + \eta(y-x) 2a G_{n1}^H(a, y) J_{n+1}(ax),$$

$$(2.30) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{1}{2a^2} \left\{ \frac{x^n}{H+n} - \frac{J_n(ax)}{(H+n)J_n(a) - aJ_{n+1}(a)} \right\},$$

$$(2.31) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{J_{n+1}(ax)}{2a[(H+n)J_n(a) - aJ_{n+1}(a)]},$$

$$(2.32) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2)} = \frac{J_{n+1}(a)}{2a(H+n)[(H+n)J_n(a) - aJ_{n+1}(a)]},$$

$$(2.33) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \\ = 2a^2 \{ \eta(x-y) G_{n2}^H(a, x) J_{n+1}(ay) + \eta(y-x) G_{n2}^H(a, y) J_{n+1}(ax) \}.$$

Cały szereg interesujących zależności można otrzymać, różniczkując podane wyżej związki względem parametru a . Np. na podstawie wzoru (2.28) uzyskuje się

$$(2.34) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj}x)}{(\lambda_{nj}^2 - a^2)^2 (\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{x J_n(ax)}{4[(H+n)J_n(a) - aJ_{n+1}(a)]} + \\ + \frac{(an + aH - a + 1)J_{n+1}(a) + (a^2 - 2nH - 2n^2)J_n(a)}{4a[(H+n)J_n(a) - aJ_{n+1}(a)]^2} J_{n+1}(ax).$$

3. Sumy szeregów Diniego, zawierających w mianowniku iloczynny typu $(\lambda_{nj}^2 \pm a^2)(\lambda_{nj}^2 \pm b^2)$

Wykorzystując wzór (1.7) oraz związki wyprowadzone w drugim rozdziale pracy, a także wykonując odpowiednie przejścia graniczne, można — dla $a \neq b$ — otrzymać następujące zależności:

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 + b^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \\ = \frac{2}{b^2 - a^2} \{ \eta(x-y) [a^2 F_{n1}^H(a, x) I_n(ay) - b^2 F_{n1}^H(b, x) I_n(by)] + \\ + \eta(y-x) [a^2 F_{n1}^H(a, y) I_n(ax) - b^2 F_{n1}^H(b, y) I_n(bx)] \},$$

$$(3.2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \\ = \eta(x-y) \left\{ \frac{1}{4a^2 n} \left[\left(\frac{y}{x} \right)^n - x^n y^n \frac{H-n}{H+n} \right] - 2F_{n1}^H(a, x) I_n(ay) \right\} + \\ + \eta(y-x) \left\{ \frac{1}{4a^2 n} \left[\left(\frac{x}{y} \right)^n - x^n y^n \frac{H-n}{H+n} \right] - 2F_{n1}^H(a, y) I_n(ax) \right\}, \quad n > 0;$$

dla $n = 0$ otrzymuje się prawą stronę związku (3.2) wykorzystując zależności (1.3) i (2.2);

$$(3.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^3 J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 + b^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \\ = \frac{2}{b^2 - a^2} \{ \eta(x-y) [a^3 F_{n2}^H(a, x) I_n(ay) - b^3 F_{n2}^H(b, x) I_n(by)] - \\ - \eta(y-x) [a^3 F_{n1}^H(a, y) I_{n+1}(ax) - b^3 F_{n1}^H(b, y) I_{n+1}(bx)] \},$$

$$(3.4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 + b^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \frac{\eta(x-y)}{2a^2 b^2 x} \left(\frac{y}{x}\right)^n + \\ + \frac{2}{b^2 - a^2} \{ \eta(x-y) [b F_{n2}^H(b, x) I_n(by) - a F_{n2}^H(a, x) I_n(ay)] + \\ + \eta(y-x) [a F_{n1}^H(a, y) I_{n+1}(ax) - b F_{n1}^H(b, y) I_{n+1}(bx)] \},$$

$$(3.5) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 + b^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \\ = -\frac{1}{2(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{I_n(by)}{(H+n)I_n(b) + bI_{n+1}(b)} - \frac{I_n(ay)}{(H+n)I_n(a) + aI_{n+1}(a)} \right\},$$

$$(3.6) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 + b^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n(\lambda_{nj})} = \frac{y^n}{2a^2 b^2} + \\ + \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{I_n(by)}{b^2 [(H+n)I_n(b) + bI_{n+1}(b)]} - \frac{I_n(ay)}{a^2 [(H+n)I_n(a) + aI_{n+1}(a)]} \right\},$$

$$(3.7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 + b^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \\ = \frac{2}{b^2 - a^2} \{ \eta(x-y) [a^2 F_{n2}^H(a, x) I_{n+1}(ay) - b^2 F_{n2}^H(b, x) I_{n+1}(by)] + \\ + \eta(y-x) [a^2 F_{n2}^H(a, y) I_{n+1}(ax) - b^2 F_{n2}^H(b, y) I_{n+1}(bx)] \},$$

$$(3.8) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\lambda_{nj}x) J_{n+1}(\lambda_{nj}y)}{(\lambda_{nj}^2 + b^2)(\lambda_{nj}^2 - n^2 + H^2) J_n^2(\lambda_{nj})} = \eta(x-y) \left\{ \frac{1}{4b^2(n+1)} \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1} - \right. \\ \left. - 2F_{n2}^H(b, x) I_{n+1}(by) \right\} + \eta(y-x) \left\{ \frac{1}{4b^2(n+1)} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} - 2F_{n2}^H(b, y) I_{n+1}(bx) \right\}.$$

Sumy szeregów zawierających w mianownikach różnice kwadratów uzyskuje się przez podstawienie w miejsce parametru a czy b wielkości ia ewentualnie ib . Wykorzystanie następnie zależności (2.21)-(2.23) pozwala na wyznaczenie odpowiedniej sumy. Niektóre tego typu sumy (dla dowolnego H rzeczywistego) wyznaczono w pracy [2]; przejście do najczęściej spotykanego w zastosowaniach przypadku $H > 0$ jest nieskomplikowane. Z uwagi na prostotę przejścia od wzorów (3.1)-(3.8) do odpowiednich wzorów sumacyjnych dla szeregów, zawierających w mianownikach iloczyny typu $(\lambda_{nj}^2 + a^2)(\lambda_{nj}^2 - b^2)$ czy $(\lambda_{nj}^2 - a^2)(\lambda_{nj}^2 - b^2)$, zależności tych nie będziemy wypisywać.

4. Sumy szeregów typu (1.9)

Wielkości λ_j , występujące we wszystkich szeregach przedstawionych w tej części pracy, są pierwiastkami równania

$$(4.1) \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\lambda}{0,5 - H}.$$

Gdy $H = 0,5$, wówczas $\lambda_j = \frac{\pi}{2}(2j-1)$ ($j = 1, 2, \dots$).

Odpowiednie wzory sumacyjne uzyskuje się na drodze analogicznej do przedstawionej w rozdziale 2 pracy. Niektóre z przedstawionych niżej zależności można łatwo otrzymać wykorzystując związki podane w rozdziałach 2 lub 3 pracy oraz wzory (1.8). Wyprowadzone związki są prawdziwe dla $x, y \in (0, 1)$; w niektórych przypadkach zakres ich słuszności można rozszerzyć do przedziału $(-1, 1)$, kładąc po prawej stronie $|x|$ w miejsce x , czy $|y|$ w miejsce y .

I tak — przechodząc z a do zera w (1.9), lub kładąc $n = 0,5$ we wzorze (2.2) otrzymujemy

$$(4.2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j x \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \eta(x-y) \frac{y}{2} \left[1 - x \frac{H-0,5}{H+0,5} \right] + \\ + \eta(y-x) \frac{x}{2} \left[1 - y \frac{H-0,5}{H+0,5} \right].$$

Przechodząc w (1.9) kolejno najpierw z x , a potem z y do 1, dostaje się związki

$$(4.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin \lambda_j} = \frac{\sinh(ay)}{(H-a-0,5)[A(H, a)e^a - e^{-a}]},$$

$$(4.4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25)} + \frac{0,5}{H-0,5 + \operatorname{actgh} a},$$

$$\text{Tutaj } A(H, a) = \frac{H+a-0,5}{H-a-0,5}.$$

Związki (4.3) i (4.4) można również łatwo uzyskać z zależności (2.3) i (2.4), kładąc w nich $n = 0,5$ i wykorzystując (1.8).

Dokonując w (4.2) przejść granicznych z y do 1, a następnie z x do 1, otrzymuje się

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2H+1) \sin \lambda_j x}{(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin \lambda_j} = x,$$

$$(4.6) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2H+1}{\lambda_j^2 + H^2 - 0,25} = 1.$$

Kładąc w (4.6) $H = 0,5$ otrzymujemy znany wzór ([10], 0.234):

$$(4.7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Różniczkując (1.9) względem x uzyskuje się związek

$$(4.8) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 \cos \lambda_j x \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \eta(y-x) \frac{\cosh(ax)}{2} \left[e^{-ay} - \right. \\ \left. - \frac{2e^{-a} \sinh(ay)}{A(H, a)e^a - e^{-a}} \right] - \eta(x-y) \frac{\sinh(ay)}{2} \left[e^{-ax} + \frac{2e^{-a} \cosh(ax)}{A(H, a)e^a - e^{-a}} \right].$$

Przejście graniczne w (4.8) z a do zera daje w wyniku

$$(4.9) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos \lambda_j x \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \frac{1}{2} \eta(y-x) \left[1 - y \frac{H-0,5}{H+0,5} \right] - \frac{1}{2} \eta(x-y) y \frac{H-0,5}{H+0,5}.$$

Przechodząc w (4.8) z y do 1 dostajemy zależność

$$(4.10) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin \lambda_j} = \frac{a \cosh(ax)}{(H+a-0,5)e^a - (H-a-0,5)e^{-a}}.$$

Gdy $a \rightarrow 0$, związek (4.10) przyjmuje postać

$$(4.11) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin \lambda_j} = \frac{1}{2H+1}.$$

W szczególności gdy $H = 0,5$, wzór ten pokrywa się ze związkiem (4), 1.442, podanym w [10].

Mnożąc (4.8) przez $-a^{-2}$, (4.9) przez a^{-2} i dodając stronami, otrzymuje się

$$(4.12) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \sin \lambda_j y \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \\ = \frac{1}{2a^2} \left\{ \eta(x-y) \left[\sinh(ay) \left(e^{-ax} + \frac{2e^{-a} \cosh(ax)}{A(H,a)e^a - e^{-a}} \right) - y \frac{H-0,5}{H+0,5} \right] + \right. \\ \left. + \eta(y-x) \left[\cosh(ax) \left(\frac{2e^{-a} \sinh(ay)}{A(H,a)e^a - e^{-a}} - e^{-ay} \right) + 1 - y \frac{H-0,5}{H+0,5} \right] \right\}.$$

Kładąc w (4.12) $y = 1$, dostajemy związek

$$(4.13) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin \lambda_j} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{2H+1} - \frac{a \cosh(ax)}{(H+a-0,5)e^a - (H-a-0,5)e^{-a}} \right\}.$$

Zróżniczkowanie (4.12) względem y daje w wyniku zależność

$$(4.14) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \cos \lambda_j x \cos \lambda_j y}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \\ = \frac{1}{2a^2} \left\{ \eta(x-y) \left[a \cosh(ay) \left(e^{-ax} + \frac{2e^{-a} \cosh(ax)}{A(H,a)e^a - e^{-a}} \right) - \frac{H-0,5}{H+0,5} \right] + \right. \\ \left. + \eta(y-x) \left[a \cosh(ax) \left(e^{-ay} + \frac{2e^{-a} \cosh(ay)}{A(H,a)e^a - e^{-a}} \right) - \frac{H-0,5}{H+0,5} \right] \right\}.$$

Przechodząc w (4.14) z a do zera, otrzymujemy

$$(4.15) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_j x \cos \lambda_j y}{(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \frac{1}{4(H+0,5)} \left\{ \eta(x-y) [(x^2 + y^2)(H-0,5) + \right. \\ \left. + 2(1-x)(H+0,5)] + \eta(y-x) [(x^2 + y^2)(H-0,5) + 2(1-y)(H+0,5)] \right\}.$$

Kładąc w (4.12) $x = 0$ dostajemy

$$(4.16) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \\ = \frac{1}{2a^2} \left\{ \frac{2e^{-a} \sinh(ay)}{A(H, a)e^a - e^{-a}} - e^{-ay} + 1 - y \frac{H-0,5}{H+0,5} \right\},$$

wykonując zaś w (4.16) przejście graniczne dla $a \rightarrow 0$, uzyskuje się zależność

$$(4.17) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_j y}{\lambda_j (\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \frac{(1,5 + H)y - (H + 0,5)y^2 + \frac{1}{3}(H - 0,5)y^3}{2(2H + 1)}.$$

Kładąc w (4.17) $y = 1$ oraz $H = 0,5$ otrzymuje się znany związek ([10], (4), 0.234)

$$(4.18) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Przechodząc w (4.14) z y do zera mamy

$$(4.19) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \\ = \frac{1}{2a^2} \left\{ a \left[e^{-ax} + \frac{2e^{-a} \cosh(ax)}{A(H, a)e^a - e^{-a}} \right] - \frac{H-0,5}{H+0,5} \right\}.$$

Gdy $a \rightarrow 0$, związek (4.19) przechodzi w następujący:

$$(4.20) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2H+1} + \frac{x^2}{4} \frac{H-0,5}{H+0,5}.$$

Jeśli położymy $H = 0,5$, wzór (4.20) przechodzi w znaną zależność ([10], (6), 1.444):

$$(4.21) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(2j-1)x}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}(1-x).$$

Można łatwo pokazać, że związek (4.21) obowiązuje również dla $x \in (-2, 2)$; w miejsce x po prawej stronie należy wówczas wstawić $|x|$.

Kładąc w miejsce a we wzorach (1.9), (4.3), (4.4), (4.8), (4.10), (4.12)-(4.14), (4.16) i (4.19) wielkość ia ($i = \sqrt{-1}$) łatwo uzyskuje się następujące wzory sumacyjne

$$(4.22) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \sin \lambda_j x \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \\ = \eta(x-y) \frac{\sin(ay)}{2a} \frac{(H-0,5) \sin[a(1-x)] + a \cos[a(1-x)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} + \\ + \eta(y-x) \frac{\sin(ax)}{2a} \frac{(H-0,5) \sin[a(1-y)] + a \cos[a(1-y)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a},$$

$$(4.23) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \sin \lambda_j x}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin \lambda_j} = \frac{0,5 \sin(ax)}{(H-0,5) \sin a + a \cos a},$$

$$(4.24) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25)} = \frac{0,5 \sin a}{(H-0,25) \sin a + a \cos a},$$

$$(4.25) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 \cos \lambda_j x \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} =$$

$$= 0,5 \eta(y-x) \cos(ax) \frac{(H-0,5) \sin[a(1-y)] + a \cos[a(1-y)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} -$$

$$- 0,5 \eta(x-y) \sin(ay) \frac{(H-0,5) \cos[a(1-x)] - a \sin[a(1-x)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a},$$

$$(4.26) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin \lambda_j} = \frac{0,5 a \cos(ax)}{(H-0,5) \sin a + a \cos a},$$

$$(4.27) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos \lambda_j x \sin \lambda_j y}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left\{ \eta(y-x) \left[\cos(ax) \frac{(H-0,5) \sin[a(1-y)] + a \cos[a(1-y)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} - 1 + y \frac{H-0,5}{H+0,5} \right] - \right.$$

$$\left. - \eta(x-y) \left[\sin(ay) \frac{(H-0,5) \cos[a(1-x)] - a \sin[a(1-x)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} - y \frac{H-0,5}{H+0,5} \right] \right\},$$

$$(4.28) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin \lambda_j} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{0,5 a \cos(ax)}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} - \frac{1}{2H+1} \right\},$$

$$(4.29) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \cos \lambda_j x \cos \lambda_j y}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left\{ \eta(x-y) \left[\frac{H-0,5}{H+0,5} - a \cos(ay) \frac{(H-0,5) \cos[a(1-x)] - a \sin[a(1-x)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} \right] + \right.$$

$$\left. + \eta(y-x) \left[\frac{H-0,5}{H+0,5} - a \cos(ax) \frac{(H-0,5) \cos[a(1-y)] - a \sin[a(1-y)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} \right] \right\},$$

$$(4.30) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \sin \lambda_j x}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \frac{1}{2a^2} \left\{ x \frac{H-0,5}{H+0,5} - 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{(H-0,5) \sin[a(1-x)] + a \cos[a(1-x)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} \right\},$$

$$(4.31) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 \cos \lambda_j x}{(\lambda_j^2 - a^2)(\lambda_j^2 + H^2 - 0,25) \sin^2 \lambda_j} = \\ = \frac{1}{2a^2} \left\{ \frac{H-0,5}{H+0,5} - a \frac{(H-0,5) \cos[a(1-x)] - a \sin[a(1-x)]}{(H-0,5) \sin a + a \cos a} \right\}.$$

Wykorzystując tożsamość

$$(4.32) \quad \frac{1}{\lambda_j^2 \pm a^2} - \frac{1}{\lambda_j^2 + b^2} = \frac{b^2 \mp a^2}{(\lambda_j^2 \pm a^2)(\lambda_j^2 + b^2)},$$

można wyprowadzić cały szereg wzorów sumacyjnych dla szeregów, zawierających w mianownikach iloczyny typu $(\lambda_j^2 \pm a^2)(\lambda_j^2 \pm b^2)$, podobnie jak to zrobiono w rozdziale trzecim pracy dla szeregów Diniego. Wzorów tych — z uwagi na prostotę ich otrzymania na podstawie znajomości zależności (4.2)-(4.31) — nie będziemy wypisywać.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, iż znajomość wzorów sumacyjnych dla szeregów, zawierających w mianownikach iloczyny typu $(\lambda_j^2 + a^2)(\lambda_j^2 - b^2)$ pozwala łatwo uzyskać odpowiednie zależności dla szeregów, których składniki zawierają w mianownikach wyrażenia $\lambda_j^4 + a^4$. Wystarczy w tym celu położyć w wypisanym wyżej iloczynie w miejsce stałych a oraz b wielkość $a\sqrt{i}$. Sumy szeregów, zawierających w mianownikach swoich składników wyrażenia $\lambda_j^4 + a^4$ można przedstawić jako kombinacje funkcji trygonometrycznych i wykładniczych od argumentów typu $\pm z \frac{\sqrt{2}}{2}$, gdzie $z = ax, ay$ lub a .

5. Sumy szeregów typu (1.10)

Wielkości α_k , występujące we wszystkich szeregach przedstawionych w tej części pracy, są dodatnimi pierwiastkami równania $\sin \alpha = 0$, tzn. $\alpha_k = \pi k$ ($k = 1, 2, \dots$). Odpowiednie wzory sumacyjne uzyskuje się na drodze analogicznej do przedstawionej w rozdziałach 2 i 4 pracy. Również i tutaj — podobnie jak w rozdziale 4 — zakres ważności wielu wzorów można rozszerzyć do przedziału $(-1, 1)$, kładąc po prawej stronie odpowiednich związków $|x|$ czy $|y|$ w miejsce x czy y .

I tak — przejście z a do zera w (1.10) daje zależność

$$(5.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k x \sin \alpha_k y}{\alpha_k^2} = \eta(x-y) \frac{y(1-x)}{2} + \eta(y-x) \frac{x(1-y)}{2}.$$

Zróżniczkowanie (1.10) względem zmiennej x pozwala otrzymać związek

$$(5.2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos \alpha_k x \sin \alpha_k y}{\alpha_k^2 + a^2} = \eta(y-x) \frac{\cosh(ax) \sinh[a(1-y)]}{2 \sinh a} - \\ - \eta(x-y) \frac{\sinh(ay) \cosh[a(1-x)]}{2 \sinh a}.$$

Przechodząc w (5.2) z a do zera uzyskujemy wzór

$$(5.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x \sin \alpha_k y}{\alpha_k} = \frac{1}{2} [(1-y)\eta(y-x) - y\eta(x-y)].$$

Jeśli położyć w (5.3) $x = 0$, otrzymuje się wzór (1), 1.441 z tablic [10], zaś kładąc $x = 1$ — wzór (4), 1.445.

Kładąc w (5.2) $x = 1/\pi$ otrzymujemy

$$(5.4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos(k) \sin(kx)}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \left\{ \eta(x-1) \frac{\cosh(a) \sinh[a(\pi-x)]}{\sinh \pi a} - \right. \\ \left. - \eta(1-x) \frac{\sinh(ax) \cosh[a(\pi-1)]}{\sinh \pi a} \right\}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Przechodząc w (5.2) do przypadku $x = y$ dostajemy związek

$$(5.5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2k\pi x)}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh[a\pi(1-2x)]}{\sinh(a\pi)}.$$

Dokonując w (5.5) przejścia z a do zera otrzymuje się wielomian Bernoulliego $B_1^*(x)$ [16]. Dalsze wielomiany $B_{2k+1}^*(x)$ można otrzymać, różniczkując (5.5) k -krotnie względem parametru a , a następnie dokonując przejścia granicznego z a do zera.

Mnożąc (5.2) obustronnie przez $-a^{-2}$, (5.3) przez a^{-2} i dodając je stronami, otrzymuje się

$$(5.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x \sin \alpha_k y}{\alpha_k (\alpha_k^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2} \left\{ \eta(y-x) \left[1-y - \frac{\cosh(ax) \sinh[a(1-y)]}{\sinh a} \right] - \right. \\ \left. - \eta(x-y) \left[y - \frac{\sinh(ay) \cosh[a(1-x)]}{\sinh a} \right] \right\}.$$

Przechodząc w (5.6) z a do zera dostaje się w wyniku

$$(5.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x \sin \alpha_k y}{\alpha_k^3} = \frac{y\eta(x-y)}{12} (3x^2 + y^2 + 2 - 6x) - \\ - \frac{(1-y)\eta(y-x)}{12} (y^2 + 3x^2 - 2y).$$

Kładąc w (5.7) $x = 0$ otrzymuje się wzór (5), 1.443 z tablic [10], kładąc zaś $x = 1$

$$(5.8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k\pi y)}{k^3} = \frac{\pi^3}{12} y(y^2 - 1).$$

Przyjmując w (5.6) $x = 1$, otrzymujemy zależność

$$(5.9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\pi x)}{k(k^2 + a^2)} = \frac{\pi}{2a^2} \left[x - \frac{\sinh(\pi a x)}{\sinh(\pi a)} \right].$$

Kładąc w (5.8) $y = \frac{1}{\pi}$, uzyskuje się sumę szeregu liczbowego

$$(5.10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin k}{k^3} = \frac{\pi^2 - 1}{12}.$$

Podobnie — wstawiając w (5.9) $x = 1/2$, otrzymujemy

$$(5.11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)[(2k-1)^2 + a^2]} = \frac{\pi}{4a^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{a\pi}{2}\right)} \right).$$

Szczególnym przypadkiem tego związku jest wzór (4), 0.234 z tablic [10].

Łatwo jest — na podstawie zależności (5.6) — wyprowadzić następujące dwa związki:

$$(5.12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{k(k^2 + a^2)} = \frac{\pi}{a^2} \left[\frac{\sinh(a) \cosh[a(\pi-1)]}{\sinh(a\pi)} - \frac{1}{\pi} \right],$$

$$(5.13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{k^3} = \frac{1}{3} (\pi^2 - 3\pi + 2).$$

Przez zróżniczkowanie zależności (5.6) względem zmiennej y uzyskuje się następujący wzór:

$$(5.14) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x \cos \alpha_k y}{\alpha_k^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} \left\{ \eta(y-x) \left[\frac{a \cosh(ax) \cosh[a(1-y)]}{\sinh a} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \eta(x-y) \left[\frac{a \cosh(ay) \cosh[a(1-x)]}{\sinh a} - 1 \right] \right\}.$$

Kładąc w (5.14) $y = 0$ otrzymuje się przejście do wzoru (2), 1.445 z tablic [10], kładąc zaś $y = 1$ — przejście do wzoru (3), 1.445.

Przechodząc w (5.14) z x i y do $1/\pi$, otrzymujemy

$$(5.15) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{\pi a \cosh(a) \cosh[a(\pi-1)]}{\sinh(a\pi)} - 1 \right].$$

Kładąc w (1.10) $x = y = 1/\pi$ łatwo uzyskuje się związek

$$(5.16) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\sinh(a) \sinh[a(\pi-1)]}{\sinh(a\pi)}.$$

Dodając (5.15) i (5.16) stronami, a następnie przechodząc z a do zera, otrzymuje się wzór (3), 0.233 z tablic [10].

Przechodząc w (5.14) z a do zera znajdujemy, że

$$(5.17) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x \cos \alpha_k y}{\alpha_k^2} = \frac{\eta(y-x)}{12} (2 + 3x^2 - 6y + 3y^2) + \\ + \frac{\eta(x-y)}{12} (2 + 3y^2 - 6x + 3x^2).$$

Jeśli w (5.17) położyć $y = 0$, otrzymuje się przejście do wzoru (3), 1.443 z tablic [10], zaś kładąc $y = 1$ — przejście do wzoru (4), 1.443.

Wiele interesujących zależności można otrzymać, różniczkując otrzymane związki względem parametru a . I tak — wykonując tę operację na wzorze (5.9) — dostajemy

$$(5.18) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\pi x)}{k(k^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3} \left\{ \frac{x}{a^2} - \frac{\sinh(\pi ax)}{a^2 \sinh(\pi a)} + \right. \\ \left. + \frac{\pi \cosh(\pi a) \sinh(\pi ax)}{2 \sinh^2(\pi a)} - \frac{\pi x \cosh(\pi ax)}{2 \sinh(\pi a)} \right\}.$$

Podobnie — kładąc w (5.6) $x = 0$ i różniczkując otrzymany wynik względem a — otrzymamy

$$(5.19) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x)}{k(k^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^4 \sinh(\pi a)} \left\{ (1-x)[2 \sinh(\pi a) + \pi a \cosh[\pi a(1-y)]] - \right. \\ \left. - \frac{\sinh[\pi a(1-x)]}{\sinh(\pi a)} [2 \sinh(\pi a) + \pi a \cosh(\pi a)] \right\},$$

wykonując natomiast tę samą operację w odniesieniu do (5.2), uzyskujemy

$$(5.20) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos \alpha_k x \sin \alpha_k y}{(\alpha_k^2 + a^2)^2} = \frac{1}{4a \sinh^2 a} \{ \eta(x-y) [\sinh(a)(y \cosh(ay) \times \\ \times \cosh[a(1-x)] + (1-x) \sinh(ay) \sinh[a(1-x)]) - \cosh(a) \sinh(ay) \times \\ \times \cosh[a(1-x)]] - \eta(y-x) [\sinh(a)(x \sinh(ax) \sinh[a(1-y)] + \\ + (1-y) \cosh(ax) \cosh[a(1-y)]) - \cosh(ax) \sinh[a(1-y)] \cosh(a)] \}.$$

Podobne zróżniczkowanie związku (1.10) daje w wyniku

$$(5.21) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k x \sin \alpha_k y}{(\alpha_k^2 + a^2)^2} = \frac{1}{4a^3 \sinh^2 a} \{ \eta(x-y) [(\sinh(a) + \cosh(a)) \times \\ \times \sinh(ay) \sinh[a(1-x)] - a \sinh(a)(y \cosh(ay) \sinh[a(1-x)] + \\ + (1-x) \sinh(ay) \cosh[a(1-x)]) + \eta(y-x) [(\sinh(a) + a \cosh(a)) \times \\ \times \sinh(ax) \sinh[a(1-y)] - a \sinh(a)(x \cosh(ax) \sinh[a(1-y)] + \\ + (1-y) \sinh(ax) \cosh[a(1-y)])] \}.$$

Przejście w (5.21) z a do zera pozwala znaleźć następującą zależność

$$(5.22) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k x \sin \alpha_k y}{\alpha_k^4} = \eta(x-y) \frac{y(1-x)}{12} [1-y^2 - (1-x)^2] + \\ + \eta(y-x) \frac{x(1-y)}{12} [1-x^2 - (1-y)^2].$$

Kładąc w miejsce a we wzorach (1.10), (5.2), (5.4)-(5.6), (5.9), (5.11), (5.12), (5.14)-(5.16), (5.18)-(5.21) wielkość ia oraz wykorzystując znane związki $\sinh(iz) = i \sin(z)$, $\cosh(iz) = \cos(z)$; łatwo uzyskuje się sumy szeregów, zawierających w mianownikach

swoich składników wyrażenia $\alpha_k^2 - a^2$. Z uwagi na prostotę otrzymania tych sum nie będziemy ich osobno wypisywać. Wykorzystując następnie tożsamość (4.32) można wyprowadzić wzory sumacyjne, dla szeregów, zawierających w mianownikach iloczyny typu $(\alpha_k^2 \pm a^2)(\alpha_k^2 \pm b^2)$, podobnie jak to zrobiono w rozdziale trzecim pracy. Odnosnie rozważanych szeregów pozostają również w mocy wszystkie uwagi zawarte w zakończeniu rozdziału czwartego.

6. Przykłady zastosowań wyprowadzonych związków

W tej części pracy wykorzystamy wyprowadzone wyżej wzory sumacyjne w celu sprowadzenia niektórych znanych w literaturze rozwiązań do postaci bardziej zwartej. Dla zagadnień dynamicznych zależności te pozwalają wyznaczyć w niektórych przypadkach rozwiązania ściśle w postaci zwartej, lub rozwiązania przybliżone.

Rozważmy związek (6.32), podany na s. 58 monografii NOWACKIEGO [7], opisujący pole temperatury T . Wyrażenie to ma postać podwójnego szeregu

$$(6.1) \quad T(r, z') = \frac{2W}{\lambda\pi hc^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m r) \sin \alpha_n \xi' \sin \alpha_n z'}{J_1^2(\beta_m c) (\alpha_n^2 + \beta_m^2)},$$

gdzie $\alpha_n = \frac{\pi n}{h}$, $J_0(\beta_m c) = 0$; W , λ , h i c — stałe.

Stosując związek (1.10), otrzymujemy następującą postać funkcji $T(r, z')$:

$$(6.2) \quad T(r, z') = \frac{W}{\lambda\pi c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m r)}{\beta_m \sinh(h\beta_m) J_1^2(\beta_m c)} [\eta(\xi' - z') \sinh(\beta_m z') \times \\ \times \sinh[\beta_m(h - \xi')] + \eta(z' - \xi') \sinh(\beta_m \xi') \sinh[\beta_m(h - z')]].$$

Rozważmy teraz związek (6.34) z monografii [7]. Opisuje on potencjał termosprężystego przemieszczenia:

$$(6.3) \quad \Phi = -\frac{2W\theta_0}{h\lambda\pi c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m r) \sin \alpha_n \xi' \sin \alpha_n z'}{J_1^2(\beta_m c) (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}.$$

Wykorzystując związek (5.21), otrzymujemy

$$(6.4) \quad \Phi = -\frac{W\theta_0}{2\lambda\pi c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[S_m(\xi', z') + S_m(z', \xi')] J_0(\beta_m r)}{\beta_m^3 \sinh^2(h\beta_m) J_1^2(\beta_m c)},$$

gdzie

$$S_m(x, y) = \eta(x - y) [(\sinh(h\beta_m) + h\beta_m \cosh(h\beta_m)) \sinh(\beta_m y) \sinh[\beta_m(h - x)] - \\ - \beta_m \sinh(h\beta_m) (y \cosh(\beta_m y) \sinh[\beta_m(h - x)] + (h - x) \sinh(\beta_m y) \cosh[\beta_m(h - x)])].$$

Rozważmy związek (13.4) ze s. 139 monografii [7], opisujący pole temperatury :

$$(6.5) \quad T(r, z') = \frac{W}{\pi h k'} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n \xi') \sin(\alpha_n z') \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha r) d\alpha}{\alpha^2 + \mu_s^2 \alpha^2}$$

gdzie $\alpha_n = \frac{\pi n}{h}$; W, h, k', μ_s — stałe. Stosując zależność (1.10) dostajemy stąd związek

$$(6.6) \quad T(r, z') = \frac{W}{2\pi k' \mu^s} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha r)}{\sinh(h\alpha\mu_s)} \{ \eta(\xi' - z') \sinh(\alpha\mu_s z') \sinh[\alpha\mu_s(h - \xi')] + \\ + \eta(z' - \xi') \sinh(\alpha\mu_s \xi') \sinh[\alpha\mu_s(h - z')] \} d\alpha.$$

Jest to przedstawienie całkowite temperatury $T(r, z')$; warto nadmienić, że w monografii [7] wykorzystano znajomość całki występującej we wzorze (6.5) i przedstawiono $T(r, z')$ w postaci szeregu zawierającego funkcję $K_0(z)$.

Przy pomocy zależności podanych w tej pracy można ponadto zapisać w prostszej postaci np. związki (6.47) i (6.48) ze s. 61, (13.25) ze s. 144; można również w stosunkowo prosty sposób wysumować szeregi znajdujące się we wzorach (31.49) na s. 304 cytowanej monografii.

Jako dalsze zastosowanie uzyskanych zależności przedstawimy w prostszej postaci wzór [o] na krzywą ugięcia, podany na s. 148 monografii [11]:

$$(6.7) \quad y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\eta\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4}.$$

Wykorzystanie związku (5.22) pozwala uzyskać następującą postać funkcji $y(x)$:

$$(6.8) \quad y = \frac{P}{6EJ} \{ \eta(c-x)x(l-c)(2lc-x^2-c^2) + \eta(x-c)c(l-x)(2lx-x^2-c^2) \}.$$

Pokażemy teraz zastosowania wzorów, wyprowadzonych w rozdziale czwartym pracy. Rozważmy zagadnienie drgań pręta, którego jeden koniec $x = 0$ jest zamocowany sztywno, a drugi $x = l$ jest swobodny, przy warunkach początkowych $u(x, 0) = kx$, $u_t(x, 0) = 0$ (przecinek oznacza różniczkowanie po argumentie znajdującym się za przecinkiem). Postać tych drgań dana jest wzorem ([12], s. 221, problem 103):

$$(6.9) \quad u(x, t) = \frac{8kl}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi x}{2l} \right] \cos \left[(2n-1) \frac{\pi at}{2l} \right].$$

Wykorzystując związek

$$\sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} z \right] (-1)^{n+1} = \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} (z-1) \right],$$

oraz wzory (4.2) i (4.5) dla przypadku $H = 0,5$, otrzymuje się

$$(6.10) \quad u(x, t) = \begin{cases} x\eta(l-x-ls) + (1-s)l\eta(ls-l+x) & \text{gdy } s \in <0,1), \\ -x\eta(ls-x-l) + (1-s)l\eta(l-ls+x) & \text{gdy } s \in <1,2), \\ -x\eta(3l-ls-x) + (s-3)l\eta(sl-3l+x) & \text{gdy } s \in <2,3), \\ x\eta(ls-3l-x) + (s-3)l\eta(3l-ls+x) & \text{gdy } s \in <3,4), \end{cases}$$

gdzie $s = \frac{at}{l} \text{ mod. } 4^*$, $t \in (0, \infty)$.

W podobny sposób można zapisać szereg będący rozwiązaniem zagadnienia drgań podłużnych wymuszonych pręta o skończonej długości (por. wzory na s. 240 w [12] i np. związki (4.12) dla $H = 0,5$ i $a = 0$).

Sumy szeregów Diniego, przedstawione w rozdziałach 2 i 3 pracy, są szczególnie przydatne, gdy rozważa się zagadnienie np. ustalonego przepływu ciepła z warunkami brzegowymi trzeciego rodzaju. Natomiast przy zagadnieniach dynamicznych przedstawione sumy pozwalają łatwo otrzymać prostą postać rozwiązania dla małych czasów, lub rozwiązania przybliżone dla $t \in (0, \infty)$.

Rozważmy np. związek (7), podany na stronie 369 monografii [5], opisujący pole temperatury:

$$(6.11) \quad v(r, t) = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(r\alpha_j)J_0(r'\alpha_j)}{J_j^2(a\alpha_j) + J_1^2(a\alpha_j)} e^{-\kappa\alpha_j^2 t},$$

gdzie a, r', κ — stałe, zaś α_j — pierwiastki równania $\kappa\alpha J_1(a\alpha) - hJ_0(a\alpha) = 0$. Kładąc $a\alpha_j = \lambda_{0j}$, $\frac{ha}{k} = H$, $\frac{r'}{a} = \varrho$, wykorzystując związek (2.1) oraz przybliżoną równość

$$e^{-\kappa\alpha_j^2 t} = \frac{1}{1 + \kappa\alpha_j^2 t} \quad \text{dla } t \ll \frac{1}{\kappa\alpha_j^2}$$

możemy dla małych czasów przedstawić związek (6.11) w postaci

$$(6.12) \quad v(\varrho, t) = \frac{1}{\pi\kappa t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{0j}^2 J_0(\varrho\lambda_{0j}) J_0(\varrho'\lambda_{0j})}{\left[\lambda_{0j}^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{\kappa t}}\right)^2\right] [\lambda_{0j}^2 + H^2] J_0^2(\lambda_{0j})}.$$

Wykorzystując związek (1.7) dostajemy

$$(6.13) \quad v(\varrho, t) = \frac{2a^2}{\pi\kappa^2 t^2} \left\{ \eta(\varrho - \varrho') F_{01}^H \left(\frac{a}{\sqrt{\kappa t}}, \varrho \right) I_0 \left(\frac{\varrho' a}{\sqrt{\kappa t}} \right) + \right. \\ \left. + \eta(\varrho' - \varrho) F_{01}^H \left(\frac{a}{\sqrt{\kappa t}}, \varrho' \right) I_0 \left(\frac{\varrho a}{\sqrt{\kappa t}} \right) \right\}.$$

Na zakończenie pokażemy, jak można wykorzystać przedstawione w rozdziale 2 związki do przybliżonego obliczania sum szeregów typu (6.11). Dla jasności wyводу posłużymy

* Mówimy, że $a = b \text{ mod. } c$, gdy istnieje taka liczba naturalna n , że $b = cn + a$ i $0 \leq a < c$.

się związkiem nieco prostszym niż (6.11), a mianowicie rozważymy wzór (4), podany na stronie 202 monografii [5], dotyczący również pola temperatury:

$$(6.14) \quad v(r, t) = \frac{2hV}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(r\alpha_j)}{(h^2 + \alpha_j^2)J_0(a\alpha_j)} e^{-k\alpha_j^2 t},$$

gdzie h, V, a, k — stałe, zaś α_j — pierwiastki równania $\alpha J_0'(a\alpha) + hJ_0(a\alpha) = 0$. Kładąc $a\alpha_j = \lambda_{0j}$, $ah = H$, $\frac{r}{a} = \varrho$, oraz wykonując na obu stronach związku (6.14) transformację Laplace'a [15] (przy wykorzystaniu znanego twierdzenia dotyczącego zamiany operacji całkowania i sumowania [9]), otrzymujemy

$$(6.15) \quad v_L(\varrho, p) = \frac{2HV}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\lambda_{0j})}{\left[\lambda_{0j}^2 + \left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)^2\right] [H^2 + \lambda_{0j}^2] J_0(\lambda_{0j})}$$

gdzie $v_L(\varrho, p) = \int_0^{\infty} v(\varrho, t) e^{-pt} dt$, p — parametr transformacji Laplace'a (liczba zespolona).

Na podstawie wzoru (2.10) możemy napisać

$$(6.16) \quad v_L(\varrho, p) = \frac{HV}{a^2 p} \left(\frac{1}{H} - \frac{I_0\left(a\varrho\sqrt{\frac{p}{k}}\right)}{HI_0\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right) + a\sqrt{\frac{p}{k}} I_1\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)} \right) = \\ = \frac{V}{a^2 p} - \frac{HV}{a^2} \frac{1}{p^{3/2}} \phi(p),$$

gdzie

$$(6.17) \quad \phi(p) = \frac{\sqrt{p} I_0\left(\varrho a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)}{HI_0\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right) + a\sqrt{\frac{p}{k}} I_1\left(a\sqrt{\frac{p}{k}}\right)}$$

Wykorzystując znane wzory asymptotyczne łatwo można zauważyć, że

$$(6.18) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \phi(p) = \frac{\sqrt{k}}{a}.$$

Związek (6.18) jest warunkiem koniecznym stosowalności metody przybliżonego odwracania transformacji Laplace'a, podanej w rozdziale 5 monografii [13]. Wykorzystując tę metodę otrzymuje się

$$(6.19) \quad v(\varrho, t) = \frac{V}{a^2} \left\{ 1 - H \sum_{k=1}^n A_k \bar{\phi}(p_k) \right\},$$

gdzie

$$(6.20) \quad \bar{\phi}(p) = \frac{\sqrt{p} I_0\left(\varrho a\sqrt{\frac{p}{tk}}\right)}{HI_0\left(a\sqrt{\frac{p}{tk}}\right) + a\sqrt{\frac{p}{tk}} I_1\left(a\sqrt{\frac{p}{tk}}\right)}$$

Wartości A_k i p_k można znaleźć w tablicach [14] lub wyliczyć jedną z metod podanych w [13].

Szereg, występujący we wzorze (6.19), jest szybkozbieżny w całym obszarze zmiennej t ; warto nadmienić, że uwzględnienie niewielkiej liczby wyrazów tego szeregu pozwala otrzymać stosunkowo dokładne wyniki [13, 14].

Literatura cytowana w tekście

1. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1962.
2. K. GRYSA, J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela i Dini*, Zastosowania Matematyki (w druku).
3. S. WOELKE, *Summation of certain Bessel series occurring in elasticity problems*, Arch. Méch. Stos., 3, 22 (1970).
4. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos, 2, 15 (1977).
5. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of the heat in solids*, Oxford Clarendon Press, 1959.
6. N. W. MCLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
7. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
8. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag, Wien 1958.
9. Н. Н. ВОРОБЬЕВ, *Теория рядов*, Изд. Наука, Москва 1975.
10. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных*, Изд. Наука, Москва 1971.
11. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, ARKADY, 1962.
12. B. M. BUDAK, A. A. SAMARSKI, A. N. TICHONOW, *Zadania i problemy fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1965.
13. В. И. КРЫЛОВ, Н. С. СКОБЛЯ, *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*, Изд. Наука, Москва 1974.
14. В. И. КРЫЛОВ, Л. Т. ШУЛЬГИНА, *Справочная книга по численному интегрированию*, Москва 1966.
15. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
16. В. И. КРЫЛОВ, *Приближенное вычисление интегралов*, Изд. Наука, Москва 1967.

Резюме

О СУММИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ ДИНИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУЩЕСТВУЮЩИХ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

В работе определены суммы нескольких рядов Дини и тригонометрических рядов зависящих от двух переменных $x, y \in (0, 1)$. Показано, что пользуясь полученными результатами можно в виде очень простых выражений представить решения некоторых статических и динамических задач механики сплошных сред, данные в литературе бесконечными суммами.

Summary

SUMMATION OF CERTAIN DINI AND TRIGONOMETRIC SERIES OCCURRING IN PROBLEMS OF THE THEORY OF CONTINUOUS MEDIA

In the paper the sums of Dini and trigonometric series, which are functions of two variables $x, y \in (0, 1)$, are given. By using the relationships obtained here, some known results of static and dynamic problems of the theory of continuous media are shown in a very simple form.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 sierpnia 1977 r.

O JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZANIA PEWNYCH MIESZANYCH ZAGADNIENÍ BRZEGO-
WYCH DLA PÓŁPRZESTRZENI MIKROPOLARNEJ

STANISŁAW MATYSIAK, ANNA WACHECKA-SKOWRON (WARSZAWA)

Oznaczenia

$x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ kartezjański układ współrzędnych prostokątnych,

$$D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 > 0, x_2 \in R\},$$

∂D brzeg zbioru D , $\bar{D} = D \cup \partial D$,

u wektor przemieszczenia,

φ wektor obrotu,

σ_{ij} składowe tensora naprężeń siłowych,

μ_{ij} składowe tensora naprężeń momentowych,

$X = (0, 0, X_3)$ wektor sił masowych,

$Y = (Y_1, Y_2, 0)$ wektor momentów masowych,

$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mu$ stałe materiałowe,

$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ pochodna cząstkowa względem x_i ,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad K = \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2},$$

$$K(0, \delta) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \delta^2\},$$

$C^k(B)$ klasa funkcji ciągłych wraz z pochodnymi do rzędu k na B ,

γ_{ij} niesymetryczny tensor odkształcenia,

\varkappa_{ij} niesymetryczny tensor skrętno-giętny.

1. Wstęp

Przedmiotem rozważań będą mieszane zagadnienia brzegowe dla półprzestrzeni sprężystej (opisujące zagadnienia szczelin w nieograniczonym ośrodku Cosseratów lub zagadnienia kontaktowe) rozpatrzone w ramach liniowej niesymetrycznej teorii sprężystości [1]. Założymy, że ośrodek znajduje się w drugim płaskim stanie odkształcenia opisanym przez wektory przemieszczenia u i obrotu φ w postaci [2]

$$(1.1) \quad u(x_1, x_2) = (0, 0, u_3), \quad \varphi(x_1, x_2) = (\varphi_1, \varphi_2, 0).$$

Równania równowagi w tym przypadku są następujące:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} [(\gamma + \varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\varphi_1 + (\beta + \gamma - \varepsilon)k_{,1} + 2\alpha u_{3,2} + Y_1 &= 0, \\ [(\gamma + \varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\varphi_2 + (\beta + \gamma - \varepsilon)k_{,2} - 2\alpha u_{3,1} + Y_2 &= 0, \\ (\mu + \alpha)\nabla^2 u_3 + 2\alpha(\varphi_{2,1} - \varphi_{1,2}) + X_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ze stanem odkształcenia (1.1) związany jest stan naprężenia o składowych niezerowych:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13} &= (\mu + \alpha)u_{3,1} + 2\alpha\varphi_2, \\
 \sigma_{23} &= (\mu + \alpha)u_{3,2} - 2\alpha\varphi_1, \\
 \sigma_{31} &= (\mu - \alpha)u_{3,1} - 2\alpha\varphi_2, \\
 \sigma_{32} &= (\mu - \alpha)u_{3,2} + 2\alpha\varphi_1, \\
 \mu_{11} &= (2\gamma + \beta)\varphi_{1,1} + \beta\varphi_{2,2}, \\
 \mu_{12} &= (\gamma + \varepsilon)\varphi_{2,1} + (\gamma - \varepsilon)\varphi_{1,2}, \\
 \mu_{22} &= (2\gamma + \beta)\varphi_{2,2} + \beta\varphi_{1,1}, \\
 \mu_{21} &= (\gamma + \varepsilon)\varphi_{1,2} + (\gamma - \varepsilon)\varphi_{2,1}, \\
 \mu_{33} &= \frac{\beta}{2(\gamma + \beta)}(\mu_{11} + \mu_{22}),
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

2. Twierdzenie o jednoznaczności

Rozpatrzmy mieszane zagadnienia brzegowe dla obszaru \bar{D} opisane przez:

a) układ równań równowagi (1.2),

b) warunki brzegowe w postaci

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}(0, x_2) &= f_1(x_2) & \text{dla } |x_2| < a, \\
 u_3(0, x_2) &= f_2(x_2) & \text{dla } |x_2| > a, \\
 \mu_{11}(0, x_2) &= f_3(x_2) & \text{dla } x_2 \in R, \\
 \mu_{12}(0, x_2) &= f_4(x_2) & \text{dla } x_2 \in R,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

lub

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}(0, x_2) &= f_1(x_2) & \text{dla } |x_2| < a, \\
 u_3(0, x_2) &= f_2(x_2) & \text{dla } |x_2| > a, \\
 \mu_{11}(0, x_2) &= f_3(x_2) & \text{dla } |x_2| < a, \\
 \varphi_1(0, x_2) &= f_4(x_2) & \text{dla } |x_2| > a, \\
 \mu_{12}(0, x_2) &= f_5(x_2) & \text{dla } x_2 \in R,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

lub

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}(0, x_2) &= f_1(x_2) & \text{dla } |x_2| < a, \\
 u_3(0, x_2) &= f_2(x_2) & \text{dla } |x_2| > a, \\
 \mu_{11}(0, x_2) &= f_3(x_2) & \text{dla } x_2 \in R, \\
 \mu_{12}(0, x_2) &= f_4(x_2) & \text{dla } |x_2| < a, \\
 \varphi_2(0, x_2) &= f_5(x_2) & \text{dla } |x_2| > a,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

lub

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}(0, x_2) &= f_1(x_2) & \text{dla } |x_2| < a, \\
 u_3(0, x_2) &= f_2(x_2) & \text{dla } |x_2| > a, \\
 \mu_{11}(0, x_2) &= f_3(x_2) & \text{dla } |x_2| < a, \\
 \varphi_1(0, x_2) &= f_4(x_2) & \text{dla } |x_2| > a, \\
 \mu_{12}(0, x_2) &= f_5(x_2) & \text{dla } |x_2| < a, \\
 \varphi_2(0, x_2) &= f_6(x_2) & \text{dla } |x_2| > a,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

c) warunki wypromieniowania w nieskończoności

$$(2.5) \quad \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \int_{\partial \bar{K}(0, \delta) \cap D} (\sigma_{j3} u_3 + \mu_{ji} \varphi_i) d\sigma = 0,$$

lub

$$(2.6) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_3(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \sigma_{j3}(x) = 0,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \mu_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Można zauważyć, że warunki lokalne (2.6) implikują warunki całkowe (2.5) (w obecnej pracy nie będziemy się zajmować szerszą dyskusją relacji pomiędzy lokalnymi i całkowymi warunkami wypromieniowania w nieskończoności). Rozpatrujemy również

d) warunki w punktach $(0, a)$ i $(0, -a)$ w postaci

(2.7) istnieje taka stała rzeczywista $M > 0$, że $|u_3| < M$, $|\varphi_i| < M$, ($i = 1, 2$) w D , [3] lub [3]

$$(2.8) \quad \lim_{r_1 \rightarrow 0^+} \int_{\partial \bar{K}((0, a), r_2) \cap D} (\sigma_{j3} u_3 + \mu_{ji} \varphi_i) d\sigma = 0,$$

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0^+} \int_{\partial \bar{K}((0, a), r_1) \cap D} (\sigma_{j3} u_3 + \mu_{ji} \varphi_i) d\sigma = 0.$$

O funkcjach X_3, Y_1, Y_2, f_i , ($i = 1, 2, \dots, 6$) przyjmujemy, że istnieje dla nich rozwiązanie wyżej określonych zagadnień brzegowych w półpłaszczyźnie \bar{D} , które spełnia warunek

$$u_3, \varphi_1, \varphi_2 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D} - \{(0, a), (0, -a)\}).$$

Niech $\{u'_3, \varphi'_1, \varphi'_2\}$ oraz $\{u''_3, \varphi''_1, \varphi''_2\}$ spełniają równania równowagi (1.2), takie same warunki brzegowe (jeden z układów (2.1), (2.2), (2.3), (2.4)), identyczne warunki wypromieniowania w nieskończoności oraz taki sam z warunków (2.7) lub (2.8).

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(2.9) \quad \bar{u}_3 = u'_3 - u''_3, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi'_i - \varphi''_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{\gamma}_{ji} = \gamma'_{ji} - \gamma''_{ji}, \quad \bar{\kappa}_{ji} = \kappa'_{ji} - \kappa''_{ji},$$

$$\bar{\sigma}_{ji} = \sigma'_{ji} - \sigma''_{ji}, \quad \bar{\mu}_{ji} = \mu'_{ji} - \mu''_{ji},$$

gdzie (na podstawie związków geometrycznych i równań konstytutywnych dla drugiego płaskiego stanu odkształcenia [2]) oznaczono

$$(2.10) \quad \bar{\gamma}_{j3} = \bar{u}_{3,j} - \varepsilon_{kj3} \bar{\varphi}_k,$$

$$\bar{\kappa}_{ji} = \bar{\varphi}_{i,j},$$

$$\bar{\sigma}_{j,3} = (\mu + \alpha) \bar{\gamma}_{j3} + (\mu - \alpha) \bar{\gamma}_{3j}, \quad j = 1, 2,$$

$$\bar{\mu}_{ji} = (\gamma + \varepsilon) \bar{\kappa}_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \bar{\kappa}_{ij} + \beta \bar{\kappa}_{kk} \delta_{ij}.$$

Równania równowagi w naprężeniach dla wielkości z kreskami mają postać

$$(2.11) \quad \bar{\sigma}_{23} - \bar{\sigma}_{32} + \bar{\mu}_{11,1} + \bar{\mu}_{21,2} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{31} - \bar{\sigma}_{13} + \bar{\mu}_{12,1} + \bar{\mu}_{22,2} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{13,1} + \bar{\sigma}_{23,2} = 0.$$

Rozpatrzmy teraz następującą całkę

$$(2.12) \quad F = \int_A [2\mu\bar{\gamma}_{\langle i3\rangle}\bar{\gamma}_{\langle i3\rangle} + 2\alpha\bar{\gamma}_{\langle i3\rangle}\bar{\gamma}_{\langle i3\rangle} + 2\gamma\bar{\kappa}_{\langle ij\rangle}\bar{\kappa}_{\langle ij\rangle} + 2\varepsilon\bar{\kappa}_{\langle ij\rangle}\bar{\kappa}_{\langle ij\rangle} + \beta\bar{\kappa}_{kk}\bar{\kappa}_{nn}]dA,$$

gdzie A oznacza obszar

$$A = [D \cap \bar{K}(0, \delta)] - [D \cap \bar{K}((0, a), r_1)] - [D \cap \bar{K}((0, -a), r_2)].$$

Wykorzystując związki (2.10), (2.11), (2.12) możemy napisać

$$(2.13) \quad F = \int_A [(\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3)_{,j} + (\bar{\mu}_{ji}\bar{\varphi}_i)_{,j}]dA - \int_A [\varepsilon_{kjl}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varphi}_k - \bar{\mu}_{jl,i}\bar{\varphi}_i - \bar{\sigma}_{j3,j}\bar{u}_3]dA.$$

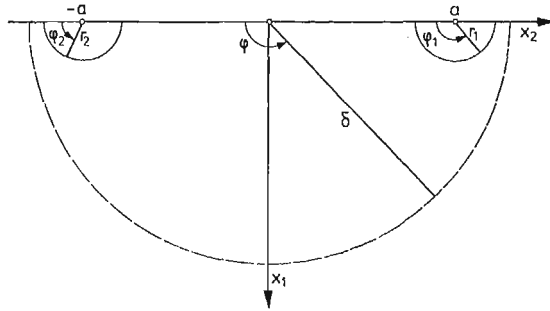
Druga z całek w (2.13) jest równa zeru, co widać na podstawie równań równowagi (2.11). Pierwszą całkę możemy przedstawić w postaci

$$(2.14) \quad F = \int_{\partial A} [\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varphi}_i]n_j d\sigma = - \int_L [\bar{\sigma}_{13}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{11}\bar{\varphi}_1 + \bar{\mu}_{12}\bar{\varphi}_2]dx_2 + \\ + \delta \int_0^\pi [\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varphi}_i]n_j d\varphi + r_1 \int_0^\pi [\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varphi}_i]n_j d\varphi_1 + r_2 \int_0^\pi [\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varphi}_i]n_j d\varphi_2,$$

gdzie

$$L = [-\delta, -a-r_2] \cup [-a+r_2, a-r_1] \cup [a+r_1, \delta],$$

a pozostałe oznaczenia są podane na rys. 1.



Rys. 1

Założmy, że spełnione są warunki (2.8) i niech $\delta \rightarrow \infty$ oraz $r_1 \rightarrow 0^+$, $r_2 \rightarrow 0^+$. Wtedy pierwsza całka we wzorze (2.14) (po L) równa się zeru (gdyż wielkości \bar{u}_3 , $\bar{\varphi}_i$, $\bar{\sigma}_{j3}$, $\bar{\mu}_j$ spełniają warunki brzegowe (2.1) lub (2.2) lub (2.3) lub (2.4) — gdzie $f_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$). Z przyjęcia warunków wypromieniowania (2.5) lub (2.6) wynika, że druga z całek w (2.14) znika. Trzecia i czwarta całka w (2.14) są równe zeru na podstawie (2.8). Otrzymaliśmy więc, że

$$(2.15) \quad F = 0.$$

Założmy teraz, że spełnione są warunki (2.7). Oznaczmy przez

$$(2.16) \quad f(r) = r \int_0^\pi (\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varphi}_i)n_j d\varphi + r \int_0^\pi (\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varphi}_i)n_j d\varphi = \\ = \int_{C_r} (\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{ji}\bar{\varphi}_i)n_j d\varphi.$$

gdzie $C_r = (\partial\bar{K}((0, a), r) \cap D) \cup (\partial\bar{K}((0, -a), r) \cap D)$.

Można zauważyć, że

$$(2.17) \quad f(r) = \int_{C_r} (\bar{p}_3 \bar{u}_3 + \bar{s}_i \bar{\varphi}_i) d\sigma, \quad \text{gdzie} \quad \bar{p}_3 = \bar{\sigma}_{j3} n_j, \quad \bar{s}_i = \bar{\mu}_{ji} n_j.$$

Dla skrócenia zapisu wprowadzimy oznaczenie

$$(2.18) \quad W = \frac{1}{2} [2\mu \bar{\gamma}_{(i3)} \bar{\gamma}_{(i3)} + 2\alpha \bar{\gamma}_{(i3)} \bar{\gamma}_{(i3)} + 2\gamma \bar{\kappa}_{(ij)} \bar{\kappa}_{(ij)} + 2\varepsilon \bar{\kappa}_{(ij)} \bar{\kappa}_{(ij)} + \beta \bar{\kappa}_{i1} \bar{\kappa}_{j1}].$$

Możemy wtedy napisać, że (podobnie jak w [4])

$$(2.19) \quad f(r) = 2 \int_A W dA - \int_{\partial \bar{K}(0, \delta) \cap \bar{D}} (\bar{\sigma}_{j3} \bar{u}_3 + \bar{\mu}_{ji} \bar{\varphi}_i) n_j d\sigma.$$

Obliczając pochodną funkcji f otrzymujemy

$$(2.20) \quad f'(r) = -2 \int_{C_r} W d\sigma \leq 0,$$

co oznacza, że funkcja f jest monotonicznie malejąca.

Wykażemy teraz, że istnieje taka stała $c \geq 0$, dla której spełniona jest nierówność:

$$(2.21) \quad |f(r)| \leq c \sqrt{-rf'(r)}.$$

Widzimy, że

$$(2.22) \quad |f(r)| = \left| \int_{C_r} (\bar{p}_3 \bar{u}_3 + \bar{s}_i \bar{\varphi}_i) d\sigma \right| \leq \int_{C_r} |\bar{p}_3 \bar{u}_3 + \bar{s}_i \bar{\varphi}_i| d\sigma \leq \int_{C_r} |\bar{p}_3 \bar{u}_3| d\sigma + \\ + \int_{C_r} |\bar{s}_i \bar{\varphi}_i| d\sigma \leq \int_{C_r} \sqrt{\bar{p}_3 \bar{p}_3} \sqrt{\bar{u}_3 \bar{u}_3} d\sigma + \int_{C_r} \sqrt{\bar{s}_i \bar{s}_i} \sqrt{\bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_j} d\sigma \leq \\ \left(\int_{C_r} \bar{p}_3 \bar{p}_3 d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{C_r} \bar{u}_3 \bar{u}_3 d\sigma \right)^{1/2} + \left(\int_{C_r} \bar{s}_i \bar{s}_i d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{C_r} \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_j d\sigma \right)^{1/2} \leq \\ \leq 8M \sqrt{\pi r} \left[\left(\int_{C_r} \bar{p}_3 \bar{p}_3 d\sigma \right)^{1/2} + \left(\int_{C_r} \bar{s}_i \bar{s}_i d\sigma \right)^{1/2} \right],$$

bo $|\bar{u}_3| = |u'_3 - u''_3| \leq |u'_3| + |u''_3| \leq 2M$, analogicznie $|\bar{\varphi}_1| \leq 2M$, $|\bar{\varphi}_2| \leq 2M$, a $\int_{C_r} d\sigma = 2\pi r$.

Dalej mamy

$$(2.23) \quad \int_{C_r} \bar{p}_3 \bar{p}_3 d\sigma = \int_{C_r} \bar{\sigma}_{j3} n_j \bar{\sigma}_{k3} n_k d\sigma \leq \int_{C_r} \bar{\sigma}_{j3} \bar{\sigma}_{j3} d\sigma, \\ \int_{C_r} \bar{s}_i \bar{s}_i d\sigma = \int_{C_r} \bar{\mu}_{ji} n_j \bar{\mu}_{ki} n_k d\sigma \leq \int_{C_r} \bar{\mu}_{ji} \bar{\mu}_{ji} d\sigma,$$

a więc

$$(2.24) \quad \int_{C_r} (\bar{p}_3 \bar{p}_3 + \bar{s}_i \bar{s}_i) d\sigma \leq \int_{C_r} (\bar{\sigma}_{j3} \bar{\sigma}_{j3} + \bar{\mu}_{ji} \bar{\mu}_{ji}) d\sigma \leq \frac{1}{k^2} \int_{C_r} W d\sigma = -\frac{1}{2k^2} f'(r),$$

gdzie wykorzystano dodatnią określoność W , tzn. istnienie takiej stałej $k > 0$, że $W(\bar{\sigma}_{j3}, \bar{\mu}_{ji}) \geq k^2(\bar{\sigma}_{j3} \bar{\sigma}_{j3} + \bar{\mu}_{ji} \bar{\mu}_{ji})$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in D$.

Z powyższych nierówności wynika, że

$$(2.25) \quad \left(\int_{C_r} \bar{p}_3 \bar{p}_3 d\sigma \right)^{1/2} \leq \sqrt{\int_{C_r} (\bar{p}_3 \bar{p}_3 + \bar{s}_i \bar{s}_i) d\sigma} \leq \sqrt{-\frac{1}{2k^2} f'(r)},$$

$$\left(\int_{C_r} \bar{s}_i \bar{s}_i d\sigma \right)^{1/2} \leq \sqrt{\int_{C_r} (\bar{p}_3 \bar{p}_3 + \bar{s}_i \bar{s}_i) d\sigma} \leq \sqrt{-\frac{1}{2k^2} f'(r)},$$

czyli

$$(2.26) \quad \left(\int_{C_r} \bar{p}_3 \bar{p}_3 d\sigma \right)^{1/2} + \left(\int_{C_r} \bar{s}_i \bar{s}_i d\sigma \right)^{1/2} \leq 2 \sqrt{-\frac{1}{2k^2} f'(r)}.$$

Funkcję f możemy więc oszacować w następujący sposób

$$(2.27) \quad |f(r)| \leq 8M \sqrt{\pi r} \cdot 2 \sqrt{-\frac{1}{2k^2} f'(r)} = \frac{8M}{k} \sqrt{-2\pi r f'(r)},$$

istnieje więc stała $c \left(c = \frac{8M}{k} \sqrt{2\pi} \right)$, że $|f(r)| \leq c \sqrt{-r f'(r)}$.

Można pokazać, że ponieważ funkcja $f(r)$ jest monotonicznie malejąca oraz spełniony jest warunek (2.21), to $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = 0$ (dowód w [4]). Oznacza to, że we wzorze (2.14) przy założeniu (2.7) całki trzecia i czwarta są równe zero. Ponieważ wielkości $\bar{u}_3, \bar{\varphi}_i, \bar{\sigma}_{j3}, \bar{\mu}_{ji}$ spełniają warunki brzegowe (2.1) lub (2.2) lub (2.3) lub (2.4) — gdzie $f_i = 0$, to pierwsza całka w (2.14) znika. Przy założeniu, że $\delta \rightarrow \infty$ zarówno z warunków (2.5) jak i (2.6) wynika, że druga całka w (2.14) jest równa zero, czyli $F = 0$.

Ponieważ F jest formą kwadratową dodatnio określoną (wzór (2.12)), to (2.15) jest równoważne warunkom:

$$(2.28) \quad \bar{\gamma}_{i3} = 0, \quad \bar{\kappa}_{ij} = 0 \quad \text{dla } x \in D.$$

Z (2.28) i (2.10) wynika, że

$$(2.29) \quad \bar{\sigma}_{i3} = 0, \quad \bar{\mu}_{ij} = 0.$$

Na podstawie (2.28), (2.29) i (1.3) można sformułować następujące twierdzenie:

Zagadnienie brzegowe dla obszaru \bar{D} sformułowane przez równania równowagi (1.2), warunki brzegowe (2.1) lub (2.2) lub (2.3) lub (2.4), warunki wypromieniowania w nieskończoności (2.5) lub (2.6) oraz warunki (2.7) lub (2.8) jest jednoznaczne względem naprężeń i odkształceń $\sigma_{j3}, \mu_{ij}, \gamma_{i3}, \kappa_{ij} \in C^1(D) \cap C(\bar{D} - \{(0, a), (0, -a)\})$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. W. NOWACKI, *The «Second» Plane Problem of Micropolar Elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **18** (1970).
3. Praca zbiorowa red. W. D. KUPRADZE, *Wybrane zagadnienia teorii sprężystości i termosprężystości*, Wyd. PAN, 1970.
4. J. K. KNOWLES, T. A. PUCIK, *J. of Elasticity*, **3**, 3 (1973).

Резюме

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ МИКРОПОЛЯРНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе рассмотрена однозначность решений в области $\bar{D} = \{(x_1, x_2) \in R^2; x_1 \geq 0, x_2 \in R\}$ для системы уравнений равновесия «второго» плоского деформированного состояния линейной несимметричной теории упругости со смешанными краевыми условиями в классе функций $C^2(D) \cap C^1(D - \{(0, a), (0, a)\})$.

Summary

ON UNIQUENESS OF SOLUTION OF MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR
A MICROPOLAR HALF-SPACE

In the present paper the problem of uniqueness of solutions is considered for a system of equilibrium equations of the second plane state of strain of the linear micropolar elasticity in the case of a mixed boundary value problem defined in the region $\bar{D} = \{(x_1, x_2) \in R^2; x_1 \geq 0, x_2 \in R\}$.

INSTYTUT MECHANIKI
UNIwersytetu Warszawskiego

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 sierpnia 1977 r.
Ponownie 13 marca 1978 r.*

PRZEPŁYW LAMINARNY W KANAŁE O ZMIENNYM PRZEKROJU Z RUCHOMYMI I POROWATYMI ŚCIANKAMI

ANDRZEJ SZANIAWSKI, ANDRZEJ ZACHARA (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Przedmiotem pracy jest laminarny ustalony dwuwymiarowy przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w płaskim lub osiowo-symetrycznym kanale o zmiennym przekroju oraz o przepuszczalnych i rozciągalnych ściankach. Przepuszczalność ścianki opisana jest prawem określającym liniowy związek między prędkością filtracji a różnicą ciśnień po obu stronach ścianki. Rozciągalność ścianki powoduje, że jej prędkość może zmieniać się wzdłuż kanału w zadany sposób. Zmienność przekroju oraz przepuszczalność i rozciągalność ścianek są trzema efektami, których oddziaływanie na przepływ jest badane w niniejszej pracy. Ograniczymy się przy tym do przypadków, gdy przepuszczalność ścianki jest nieduża, zaś prędkość ścianki i szerokość symetrycznego kanału zmieniają się powoli. Ponadto w niniejszej pracy będziemy zakładać, że ciśnienie na zewnątrz kanału jest stałe i pole przepływu jest symetryczne względem osi kanału.

Określony w ten sposób problem nawiązuje do niektórych zagadnień dotyczących przepływów w kanałach o ściankach nieprzepuszczalnych [1—5] i porowatych [6—13], a także pompowania perystaltycznego [14] i teorii smarowania [1—4]. W większości prac na temat przepływów w kanałach o ściankach porowatych autorzy przyjmują jednorodny, z góry zadany, rozkład prędkości poprzecznej na ściance. Jedynie w artykule [12] i [13] prędkość ta została uzależniona od różnicy ciśnień po obu stronach ścianki, co jest zbieżne z założeniem przyjętym w niniejszej pracy.

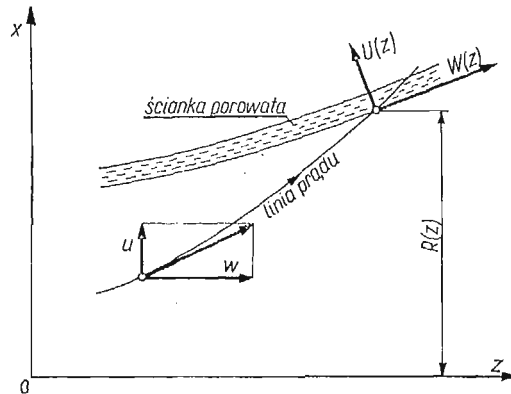
Nowym elementem wprowadzonym przez nas jest założenie rozciągalności ścianek, które ponadto mogą być porowate i które mogą ograniczać kanał o zmiennym przekroju. Takie sformułowanie problemu wynikło przy okazji badań nad zjawiskami hydromechanicznymi towarzyszącymi przedzeniu włókien chemicznych, gdzie wszystkie trzy wymieniane efekty stają się istotne.

Do wyznaczenia przepływu wewnątrz kanału wykorzystane zostanie założenie, że wielkościami niewielkimi, ale danymi są przepuszczalność oraz zmiany prędkości ścianki i szerokości kanału. Na tej zasadzie będziemy przyjmować, że przepływ wewnątrz kanału winien niewiele odbiegać od przepływu określonego lokalnie rozwiązaniem Poiseuille'a, w odniesieniu do którego zastosujemy metodę małych zaburzeń. Należy jednak zauważyć, że w przyjętym tu rozwiązaniu Poiseuille'a występuje nieznanymi zmienny gradient ciśnienia, a znajomość rozkładu ciśnienia wzdłuż kanału jest niezbędna do wyznaczenia pozostałych parametrów przepływu. Podstawowym zadaniem będzie więc znalezienie rozkładu ciś-

nienia wzdłuż ścianki, następnie wyznaczmy główne człony dla pola prędkości, po znalezieniu których zajmiemy się również wyznaczeniem w liniowym przybliżeniu członów zaburzających wzdłużną składową prędkości i rozkład ciśnienia.

2. Równania i warunki brzegowe

Wprowadzamy prostokątny lub cylindryczny układ współrzędnych, którego oś z pokrywa się z osią symetrii kanału, a oś x jest do niej prostopadła (rys. 1). Składowe prędkości wzdłuż osi z i x oznaczmy symbolami w i u , a ciśnienie przez p . Połowa szerokości (lub promień) kanału określana jest jako $R(z)$, zaś symbole $W(z)$ i $U(z)$ oznaczają odpowiednio prędkość ścianki i prędkość przepływu filtracyjnego skierowanego prostopadle do ścianki.



Rys. 1. Schemat kanału o zmiennym przekroju, ze ściankami porowatymi i rozciągalnymi

Równania ruchu lepkiej cieczy nieściśliwej, o stałej gęstości ρ i o stałym kinematycznym współczynniku lepkości ν , napiszemy w postaci następującej:

$$(2.1) \quad \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (ux^k) = 0,$$

$$(2.2) \quad w \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot x^k \right) \right\},$$

$$(2.3) \quad w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot x^k) \right] \right\},$$

gdzie

$$(2.4) \quad k = \begin{cases} 0 & \text{dla układu prostokątnego,} \\ 1 & \text{dla układu cylindrycznego.} \end{cases}$$

Warunki brzegowe, które wynikają z symetrii przepływu oraz z ciągłości prędkości na ściance mają formę

$$(2.5a-d) \quad \begin{cases} u(0, z) = 0, \quad \frac{\partial w(0, z)}{\partial x} = 0, \\ u(R, z) = \frac{W(z)R'(z) + U(z)}{\sqrt{1 + [R'(z)]^2}}, \\ w(R, z) = \frac{W(z) - U(z)R'(z)}{\sqrt{1 + [R'(z)]^2}}. \end{cases}$$

Prędkość filtracji $U(z)$ przez ściankę kanału jest określona relacją wynikającą z warunku przepuszczalności

$$(2.6) \quad U(z) = K(z)P(z),$$

gdzie $K(z)$ jest współczynnikiem przepuszczalności, a

$$(2.7) \quad P(z) = \frac{1}{\mu} [p(R, z) - p_A],$$

jest wielkością związaną z różnicą ciśnień występującą po obu stronach ścianki ($\mu = \text{const}$ jest dynamicznym współczynnikiem lepkości, a $p_A = \text{const}$ jest zewnętrznym ciśnieniem atmosferycznym). W przypadku przepływu w kanałach nieprzepuszczalnych, za p_A podstawiać będziemy wybrane ciśnienie odniesienia. Zależność (2.6) wynika z liniowego prawa Darcy, w którym pochodną ciśnienia zastąpiono odpowiednim ilorazem różnicowym, przy czym współczynnik K uwzględnia zarówno własności filtracyjne ścianki jak i jej grubość.

Funkcje $R(z)$, $W(z)$ i $K(z)$, które określają geometrię, kinematykę i przepuszczalność ścianki są traktowane jako dane.

3. Linearyzacja i rozwiązanie równań ruchu

Ponieważ połowa szerokości (lub promień) kanału $R(z)$ i prędkość ścianki $W(z)$ winny się zmieniać powoli, a przepuszczalność ścianki winna być nieduża, będziemy poszukiwać rozwiązania naszego problemu w formie małego zaburzenia lokalnego przepływu Poiseuille'a

$$(3.1 \text{ a-c}) \quad w = w_p + \tilde{w}, \quad u = \tilde{u}, \quad p - p_A = \mu[P(z) + \tilde{p}],$$

gdzie

$$(3.2) \quad w_p = W(z) - R^2(z) P'(z) W_0(\xi)$$

jest rozwiązaniem Poiseuille'a o parabolicznym rozkładzie prędkości opisanym bezwymiarową funkcją (rys. 2)

$$(3.2a) \quad W_0 = \frac{1}{2^{k+1}} (1 - \xi^2), \quad \xi = x/R(z),$$

a symbolem (\sim) oznaczono małe zaburzenia przepływu głównego.

Zależność (3.2) jest formalnie identyczna z funkcją opisującą rozkład prędkości w kanale o stałej szerokości $2R$, ze ściankami nieprzepuszczalnymi poruszającymi się ze stałą prędkością W , przy stałym gradiencie ciśnienia $P'(z) = \text{const}$. W niniejszej pracy dopuszczamy zmienność wielkości R , W , P' z odległością z , ale zmienność na tyle słabą, aby $\tilde{w}(x, z)$, $\tilde{u}(x, z)$, $\tilde{p}(x, z)$ i ich pochodne były małe w porównaniu z odpowiednimi wielkościami w_p , p i ich pochodnymi z przepływu głównego. Zwiększenie rzędu małości daje również różniczkowanie względem z . Zajmiemy się jedynie wyznaczeniem najniższego, liniowego przybliżenia ze względu na tak określone małe zaburzenia lokalnego przepływu Poiseuille'a. Trzy czynniki zaburzające przepływ Poiseuille'a podane zostały w poniższym zestawieniu:

$$(3.3a) \quad K(z) \neq 0, \quad \text{przepuszczalność ścianek,}$$

$$(3.3b) \quad R'(z) \neq 0, \quad \text{zmiennosc\c{e} przekroju kana\u0142u,}$$

$$(3.3c) \quad W'(z) \neq 0, \quad \text{rozci\u0105galno\u015b\u0107 \u015bcianek.}$$

Wielko\u015b\u0107 $P(z)$ jest tymczasem nieznan\u0105.

Wprowadzaj\u0105c za\u0142o\u017con\u0105 post\u0105c rozwini\u0119\u0107 (3.1a - c) do r\u00f3wna\u0144 (2.1—3) i do warunk\u00f3w (2.5a - d), (2.7), oraz pozostawiaj\u0105c jedynie wyrazy najni\u017cszego rz\u0119du ze wzgl\u0119du na ma\u0142e zaburzenia, otrzymujemy nast\u0119puj\u0105cy uproszczony uk\u0142ad r\u00f3wna\u0144:

$$(3.4) \quad \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} x^k) = - \frac{\partial w_p}{\partial z},$$

$$(3.5) \quad \frac{\nu}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} x^k \right) = w_p \frac{\partial w_p}{\partial z} + \tilde{u} \frac{\partial w_p}{\partial x},$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} x^k) \right],$$

z jednym niejednorodnym

$$(3.7) \quad \tilde{u}(R, z) = W(z) \cdot R'(z) + KP,$$

i z czterema jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$(3.8a, b) \quad \tilde{u}(0, z) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}(0, z)}{\partial x} = 0,$$

$$(3.8c, d) \quad \tilde{w}(R, z) = 0, \quad \tilde{p}(R, z) = 0.$$

Rozwi\u0105zanie r\u00f3wnania ci\u0105g\u0142o\u015bci (3.4) spe\u0142niaj\u0105ce warunek symetrii (3.8a) kt\u00f3re ma post\u0105c nast\u0119puj\u0105c\u0105:

$$(3.9) \quad \tilde{u} = - \frac{1}{2^k} \left\{ \left[W' - \frac{(P'R^2)'}{2^{k+1}} \right] \cdot x - \frac{P''}{2(k+3)} x^3 \right\},$$

mo\u017cna by\u0142o znale\u017c\u0107 niezale\u017anie od pozosta\u0142ych r\u00f3wna\u0144 i warunk\u00f3w.

Ze wzoru (3.9) w kombinacji z warunkiem brzegowym (3.7) uzyskujemy r\u00f3wnanie r\u00f3\u017cniczkowe zwyczajne, kt\u00f3re zawiera $P(z)$ jako funkcj\u0119 niewiadom\u0105

$$(3.10) \quad [P' R^{k+3}]' - (k+3) \cdot (4R)^k \cdot KP = 2^k \cdot (k+3)(W \cdot R^{k+1})'.$$

Za pomoc\u0105 r\u00f3wnania (3.10) mo\u017cna wz\u00f3r (3.9) sprowadzi\u0107 do postaci

$$(3.11) \quad \tilde{u} = \left(RW' - \frac{R^2 R' P'}{2^k} \right) \cdot U_1(\xi) + (WR' + KP) U_2(\xi),$$

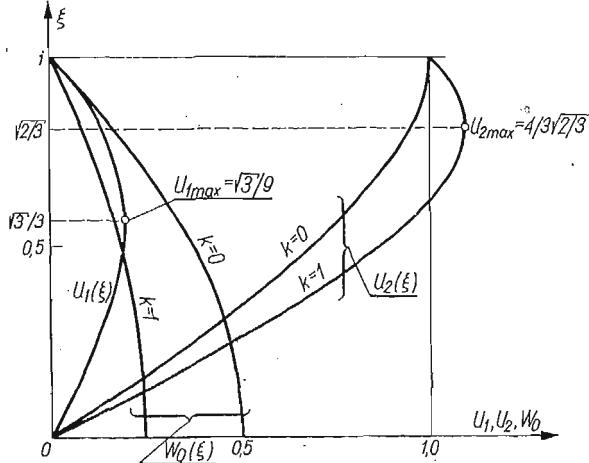
gdzie bezwymiarowe funkcje

$$(3.11a) \quad U_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi(1-\xi^2),$$

$$(3.11b) \quad U_2(\xi) = \frac{1}{2} \xi[(k+3) - (k+1)\xi^2],$$

okre\u015blaj\u0105 wzgl\u0119dny rozk\u0142ad sk\u0142adowej poprzecznej pr\u0119dko\u015bci $u = \tilde{u}$ w poprzek kana\u0142u pod wp\u0142ywem zmiany pr\u0119dko\u015bci ($W' \neq 0, R' = 0, K = 0$), b\u0105d\u017c te\u017c przepuszczalno\u015bci ($K \neq 0, W' = 0, R' = 0$) \u015bcianki (rys. 2). Zmiana przekroju ($R' \neq 0$) nieruchomego ka-

nału ($W = 0$) o nieprzepuszczalnej ścianie ($K = 0$) daje również rozkład opisany przez $U_1(\xi)$. Natomiast przy łącznym wpływie kilku czynników poprzeczne rozkłady prędkości \tilde{u} w różnych przekrojach nie muszą być do siebie podobne.



Rys. 2. Funkcje $W_0(\xi)$, $U_1(\xi)$, $U_2(\xi)$ występujące we wzorach (3.2) i (3.11)

Równanie (3.10) wymaga określenia dwóch warunków brzegowych, które należy dobrać w zależności od konkretnego rozpatrywanego przypadku. Rozwiązując równanie (3.10) uzyskujemy funkcję $P(z)$ opisującą w pierwszym przybliżeniu rozkład ciśnienia w kanale, pozwalający na podstawie wzorów (3.2) i (3.11) wyznaczyć główne składowe rozkładu prędkości $w_p(x, z)$ i $\tilde{u}(x, z)$.

Otrzymane w ten sposób rozkłady ciśnienia i prędkości można traktować jako podstawowe przybliżone rozwiązanie naszego problemu. Rozwiązanie to nie zależy w sposób jawny od liczby Reynoldsa. Będziemy je wykorzystywać do uproszczonego opisu przepływu, w szczególności do wyznaczania linii prądu.

Wydatek Q płynu przez pole $(\pi x)^k$ przekroju poprzecznego jest określony całką

$$(3.12) \quad Q = (2\pi)^k \int_0^x w(\bar{x}, z) \bar{x}^k d\bar{x} = \text{const.}$$

Podstawiając $w \approx w_p$ ze wzoru (3.2) i wykonując całkowanie otrzymujemy równanie linii prądu rozgraniczającej obszar stałego wydatku:

$$(3.13) \quad \frac{Q}{(\pi R)^k R} = W(z) \xi^{k+1} - R^2(z) P'(z) \frac{\xi^k U_2(\xi)}{(k+1)(k+3)}.$$

Po znalezieniu głównych członów opisujących w przybliżeniu rozkład wzdłużny ciśnienia $p - p_A \approx \mu P(z)$ oraz pole prędkości $w \approx w_p$, $u \approx \tilde{u}$ przystąpimy do wyznaczenia pozostałych członów zaburzających przepływ typu Poiseuille'a, mianowicie do wyznaczenia \tilde{w} i \tilde{p} .

Podstawiając prędkość w_p (3.2) i \tilde{u} (3.11) do równań (3.5) i (3.6) oraz całkując te rów-

nania z uwzględnieniem warunków brzegowych (3.8b - d) znajdujemy poszukiwane człony zaburzące:

$$(3.14) \quad \tilde{w} = \frac{R}{\nu} \left\{ \left(RW' - \frac{R^2 R' P'}{2^k} \right) \left[W W_1(\xi) - \frac{R^2 P'}{2^{k+1}} W_2(\xi) \right] + \right. \\ \left. + (WR' + KP) \left[W \cdot W_3(\xi) - \frac{R^2 P'}{2^{k+1}} \cdot W(\xi) \right] \right\},$$

gdzie

$$(3.14a) \quad W_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi^2)^2,$$

$$(3.14b) \quad W_2 = \frac{1 - \xi^2}{36(3k+5)} \{ 11(k+3) - \xi^2 [4(4k+3) - (5k+3)\xi^2] \},$$

$$(3.14c) \quad W_3 = \frac{1}{8} (1 - \xi^2) [(k+5) - (k+1)\xi^2],$$

$$(3.14d) \quad W_4 = \frac{1 - \xi^2}{12(k+5)} [2(6k+23) - \xi^2 [(15k-1) - (3k+1)\xi^2]],$$

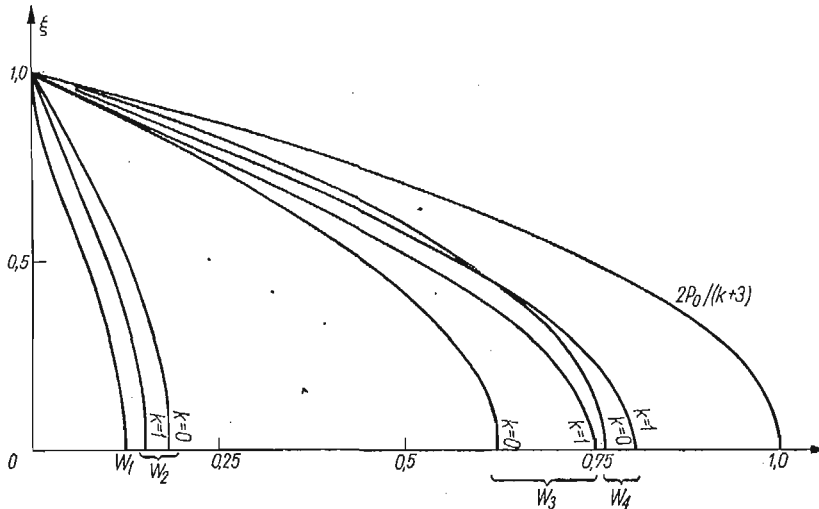
oraz

$$(3.15) \quad \tilde{p} = \frac{1}{R} \left[\left(RW' - \frac{R^2 R' P'}{2^k} \right) + 2^k (WR' + KP) \right] P_0(\xi),$$

gdzie

$$(3.15a) \quad P_0(\xi) = \frac{k+3}{2} (1 - \xi^2).$$

Wykresy funkcji $W_1(\xi)$, $W_2(\xi)$, $W_3(\xi)$, $W_4(\xi)$ oraz $P_0(\xi)$ przedstawione zostały na rys. 3.



Rys. 3. Funkcje $W_1(\xi)$, $W_2(\xi)$, $W_3(\xi)$, $W_4(\xi)$, i $P_0(\xi)$ występujące we wzorach (3.14) i (3.15)

4. Przykłady

Uzyskane wyniki zilustrujemy kilkoma przykładami, w każdym z których uwzględniony będzie wpływ tylko jednego z trzech czynników (3.3) zaburzających przepływ Poiseuille'a. Wszystkie przykłady odnosić się będą do przypadku osiowo-symetrycznego ($k = 1$), o dodatkowej symetrii względem płaszczyzny $z = 0$.

W przykładach tych, dla równania (3.10) przybierającego postać

$$(4.0.1) \quad (P'R^4)' - 16RKP = 8 \cdot (WR^2)',$$

dwa warunki brzegowe dla funkcji $P(z)$ dane będą w punkcie $z = 0$.

Definiujemy bezwymiarową funkcję $\Pi(\zeta)$ jako

$$(4.0.2) \quad \Pi(\zeta) = \frac{P(z)}{\bar{P}}, \quad \zeta = \alpha \frac{z}{R}, \quad \alpha \ll 1,$$

za pomocą ciśnienia odniesienia \bar{P} i małego parametru α , które zostaną określone dalej, oddzielnie dla każdego przykładu. Mały parametr α pojawił się w definicji bezwymiarowej współrzędnej ζ , ze względu na dowolną zmienność parametrów przepływu w kierunku z . Wprowadzając ponadto wielkości odniesienia:

$$(4.0.3a - c) \quad \bar{R} = R(0), \quad \bar{K} = \frac{\bar{R}\alpha^2}{16}, \quad \bar{W} = \frac{\bar{P}\bar{R}\alpha}{8}$$

oraz bezwymiarowe funkcje

$$(4.0.4a - c) \quad \hat{R}(\zeta) = \frac{R}{\bar{R}}, \quad \hat{K}(\zeta) = \frac{K}{\bar{K}}, \quad \hat{W}(\zeta) = \frac{W}{\bar{W}},$$

przekształcamy równanie (4.0.1) do następującej postaci

$$(4.0.5) \quad (\Pi' \hat{R}^4)' - \hat{K} \hat{R} \Pi = (\hat{W} \hat{R}^2)'$$

Linie prądu będziemy opisywać stosując bezwymiarowy wydatek

$$(4.0.6) \quad \hat{Q}(\xi, \zeta) = \frac{Q}{\bar{W} \cdot \pi \bar{R}^2}.$$

Dla każdego z przykładów przedstawimy kolejno składowe prędkości w_p i \tilde{u} , równanie linii prądu $\hat{Q}(\xi, \zeta) = \text{const}$ oraz perturbacje składowej podłużnej prędkości i ciśnienia \tilde{w} i \tilde{p} , obliczane odpowiednio ze wzorów (3.2), (3.11), (3.13), (3.14) i (3.15).

4.1. Przepływ przez nieruchomą, cylindryczną rurę porowatą o stałym współczynniku przepuszczalności. Wprowadzając

$$(4.1.1) \quad \alpha = 4 \cdot \sqrt{\frac{\bar{K}}{\bar{R}}},$$

otrzymujemy $\hat{K} = 1$, a ponieważ z założenia $\hat{R} = 1$ oraz $\hat{W} = 0$, równanie (4.0.5) przyjmuje postać

$$(4.1.2) \quad \Pi'' - \Pi = 0.$$

Równanie to rozwiążemy dla dwóch szczególnych przypadków:

a) W przekroju $z = 0$ ciśnienia po obu stronach ścianki rury są jednakowe $P(0) = 0$, a główny przepływ odbywa się w kierunku osi z pod wpływem gradientu ciśnienia o stałym znaku. Wartość gradientu $P'(0)$ w płaszczyźnie $z = 0$, jest dana.

Definiując ciśnienie odniesienia jako

$$(4.1.3a) \quad \bar{P} = P'(0) \frac{R}{\alpha}$$

przedstawimy warunki brzegowe w postaci

$$(4.1.4a) \quad II(0) = 0, II'(0) = 1,$$

a spełniające je rozwiązanie równania (4.1.2) wyraża się wzorem

$$(4.1.5a) \quad II(\zeta) = \text{sh} \zeta.$$

b) W przekroju $z = 0$ rury porowatej panuje dane ciśnienie różne od zewnętrznego ($P(0) \neq 0$), a rozkład ciśnień jest symetryczny względem tego przekroju ($P'(0) = 0$).

Przyjmując wielkość odniesienia:

$$(4.1.3b) \quad \bar{P} = P(0)$$

i formułując warunki brzegowe,

$$(4.1.4b) \quad II(0) = 1, \quad II'(0) = 0,$$

otrzymujemy następujące rozwiązanie równania (4.1.2):

$$(4.1.5b) \quad II(\zeta) = \text{ch} \zeta.$$

A oto pozostałe parametry przepływu, łącznie dla obu przypadków, z tym że funkcje ζ podane w górnej frakcji nawiasu klamrowego odnoszą się do przypadku (a), zaś w dolnej do przypadku (b).

$$(4.1.6) \quad \frac{w_p}{W} = -8W_0(\xi) \begin{cases} \text{ch} \zeta \\ \text{sh} \zeta \end{cases},$$

$$(4.1.7) \quad \frac{\tilde{u}}{W} = \frac{1}{2} \alpha U_2(\xi) \begin{cases} \text{sh} \zeta \\ \text{ch} \zeta \end{cases},$$

$$(4.1.8) \quad \hat{Q} = \xi^2(2 - \xi^2) \begin{cases} \text{ch} \zeta \\ \text{sh} \zeta \end{cases} = \text{const},$$

$$(4.1.9) \quad \frac{\tilde{p}}{P} = \frac{\alpha^2}{8} P_0(\xi) \begin{cases} \text{sh} \zeta \\ \text{ch} \zeta \end{cases},$$

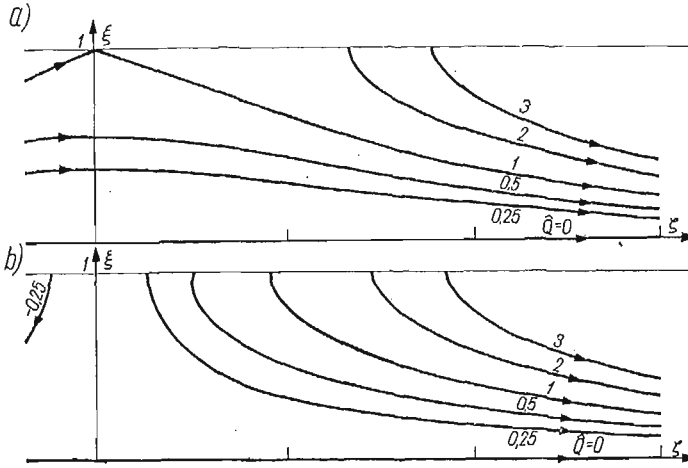
$$(4.1.10) \quad \frac{\tilde{w}}{W} = -\frac{1}{2} \alpha \text{Re} W_4(\xi) \text{sh} 2\zeta,$$

gdzie Re jest charakterystyczną liczbą Reynoldsa

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}R}{\nu} = \frac{R^2}{8\nu} \begin{cases} P'(0)R \\ \alpha P(0) \end{cases}.$$

Obraz linii prądu, opisany równaniem (4.1.8), przedstawiony został dla obu przypadków odpowiednio na rys. 4.1a i b. W przypadku (a), panujące po lewej stronie od przekroju $z = 0$ nadciśnienie powoduje wytłaczanie płynu z rury przez ściankę na zewnątrz, natomiast podciśnienie występujące przy $\xi > 0$, wywołuje zasysanie płynu z otoczenia do wnętrza rury.

W przypadku (b), wydatek płynu przez płaszczyznę symetrii $z = 0$, znika. Jeśli $P(0) < 0$, to różnica ciśnień po obu stronach porowatej ścianki jest na całej długości rury ujemna, co powoduje zasysanie płynu z otoczenia do wnętrza rury. Gdy $P(0) > 0$ to obraz przepływu jest podobny, z tą różnicą, że zwroty prędkości zmieniają się na przeciwne.



Rys. 4.1. Przepływ przez nieruchomą porowatą rurę o stałej średnicy, $\hat{K} = 1$, $\hat{R} = 1$, $\hat{W} = 0$

4.2. Przepływ przez kanał zbieżno-rozbieżny o zadanym kształcie, ze ściankami nieprzepuszczalnymi i nieruchomymi. Rozpatrzmy przepływ z danym wydatkiem Q_0 przez kanał o kształcie określonym wzorem

$$(4.2.1) \quad \hat{R} = (1 + \xi^2)^{1/4}.$$

W przypadku tym mały parametr α (4.0.2) charakteryzuje powolność zmian przekroju poprzecznego. Wprowadzając promień krzywizny ϱ_k konturu kanału w punkcie $z = 0$, możemy określić

$$\alpha^2 = 2\bar{R}/\varrho_k.$$

Równanie (4.0.5) przybiera wówczas postać

$$(4.2.2) \quad [II'(1 + \xi^2)]' = 0.$$

Przyjmując za p_A wartość ciśnienia w gardzieli kanału $p_A = p(0)$, oraz wprowadzając ciśnienie odniesienia

$$(4.2.3) \quad \bar{P} = \frac{8Q_0}{\pi\bar{R}^3\alpha},$$

przedstawimy warunki brzegowe w postaci

$$(4.2.4) \quad II(0) = 0, \quad II'(0) = -1.$$

Spełniające je rozwiązanie równania (4.2.2) ma postać

$$(4.2.5) \quad II = -\operatorname{arctg} \xi,$$

a pozostałe parametry przepływu przedstawiają się następująco:

$$(4.2.6) \quad \frac{w_p}{\bar{W}} = 8 \frac{W_0(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}},$$

$$(4.2.7) \quad \frac{\tilde{u}}{\bar{W}} = 2U_1(\xi) \frac{\xi}{(1+\xi^2)^{5/4}},$$

$$(4.2.8) \quad \hat{Q} = \xi^2(2-\xi^2) = \text{const},$$

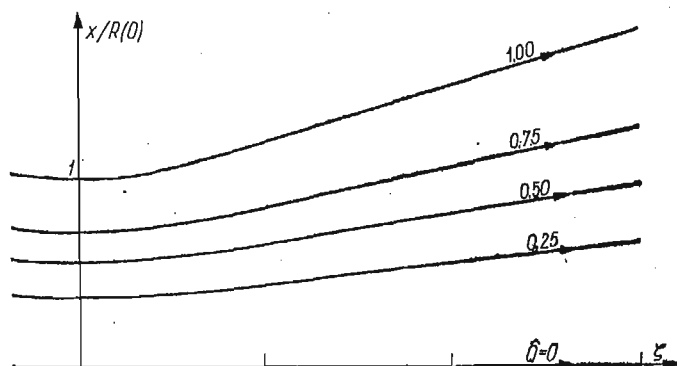
$$(4.2.9) \quad \frac{\tilde{p}}{\bar{P}} = \frac{1}{4} \alpha^2 P_0(\xi) \frac{\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}},$$

$$(4.2.10) \quad \frac{\tilde{w}}{\bar{W}} = 4\alpha \text{Re} W_2(\xi) \frac{\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}},$$

gdzie Re jest liczbą Reynoldsa

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}R}{\nu} = \frac{Q_0}{\pi\nu R}.$$

Rozkład linii prądu, określony przez (4.2.8) przedstawiony został na rys. 4.2. Należy zwrócić uwagę na monotoniczny rozkład ciśnienia (4.2.5), który realizuje się mimo zbieżno-rozbieżnego kształtu kanału. Taki charakter rozkładu ciśnienia możliwy jest w warunkach przyjętego w niniejszej pracy przybliżenia, przy założeniu szczególnego kształtu kanału opisanego wzorem (4.2.1).



Rys. 4.2. Przepływ przez kanał zbieżno-rozbieżny o ścianie nieruchomej i nieprzepuszczalnej $R = (1+\xi^2)^{1/4}$, $\hat{K} = \hat{W} = 0$.

4.3. Przepływ przez cylindryczną rurę nieprzepuszczalną o rozciąganej ścianie. Rozważmy cylindryczną rurę, unieruchomioną w przekroju $z = 0$ i rozciąganą symetrycznie w obu kierunkach. Ograniczymy się do rozpatrywania dodatniej strony osi z przyjmując, że dla $z \geq 0$ prędkość ścianki zmienia się według wzoru

$$(4.3.1) \quad W = \bar{W}(1 - e^{-\xi}).$$

Mały parametr α charakteryzuje tu powolność narastania prędkości. Wprowadzając $\hat{K} = 0$, $\hat{R} = 1$, sprowadzamy równanie (4.0.5) do postaci

$$(4.3.2) \quad \Pi'' = e^{-\xi},$$

przy czym ciśnienie odniesienia, na podstawie wzoru (4.0.3c) wynosi

$$(4.3.3) \quad \bar{P} = \frac{8\bar{W}}{\alpha \cdot R}.$$

Rozwiązanie równania (4.3.2) przy wynikających z symetrii przepływu warunkach brzegowych:

$$(4.3.4) \quad \Pi(0) = 0, \quad \Pi'(0) = 0,$$

wyraża się wzorem

$$(4.3.5) \quad \Pi = e^{-\xi} + \xi - 1,$$

a pozostałe parametry przepływu mają postać

$$(4.3.6) \quad \frac{w_p}{\bar{W}} = (2\xi^2 - 1)(1 - e^{-\xi}),$$

$$(4.3.7) \quad \frac{\tilde{u}}{\bar{W}} = \alpha U_1(\xi)e^{-\xi},$$

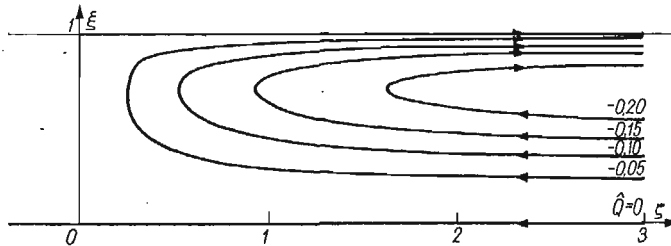
$$(4.3.8) \quad \hat{Q} = -\xi^2(1 - \xi^2)(1 - e^{-\xi}) = \text{const},$$

$$(4.3.9) \quad \frac{\tilde{p}}{\bar{P}} = \frac{\alpha^2}{8} P_0(\xi)e^{-\xi},$$

$$(4.3.10) \quad \frac{\tilde{w}}{\bar{W}} = \alpha \text{Re}[W_1(\xi) - 2W_2(\xi)](1 - e^{-\xi})e^{-\xi},$$

gdzie

$$\text{Re} = \frac{\bar{W}R}{\nu}.$$



Rys. 4.3. Przepływ przez rurę o nieprzepuszczalnej, rozciąganej ścianie, $\hat{K} = 0$, $\hat{R} = 1$, $\hat{W} = 1 - e^{-\xi}$

Obraz linii prądu wyznaczony na podstawie (4.3.8) przedstawiony został na rys. 4.3. Płyn znajdujący się w okolicy ścianki porusza się w kierunku zgodnym z jej ruchem, a płyn w okolicy osi rury w kierunku przeciwnym, co powoduje przepływ cyrkulacyjny. Obszar cyrkulacji kurczy się w miarę oddalania od płaszczyzny $z = 0$ i w granicy istnieje wyłącznie przepływ równoległy, z linią prądu $\hat{Q} = -0,25$, oddzielającą dodatnie i ujemne kierunki prędkości.

5. Uwagi końcowe

Wskutek poczynionych założeń upraszczających zakres stosowalności podanej metody jest ograniczony do przypadków, w których zdefiniowane w rozdz. 3 zaburzenia \tilde{u} , \tilde{w} , \tilde{p} są małe w stosunku do odpowiednich wielkości z przepływu Poiseuille'a przyjętego jako przepływ główny. Opis przepływu przy pomocy składowych prędkości w_p (3.2) i \tilde{u} (3.11)

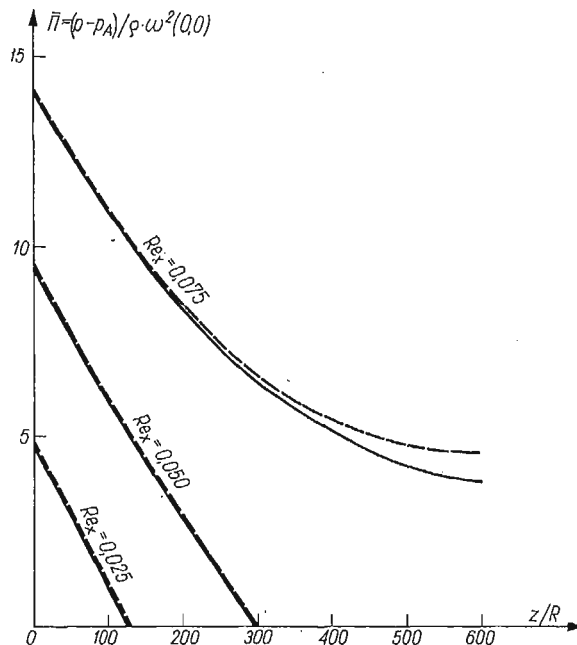
z wykorzystaniem funkcji $P(z)$ wraz z poprawką \tilde{p} (3.15) mieści się w ramach przybliżenia Stokesa, odpowiadającego pominięciu członu bezwładnościowego w równaniu pędu. Uwzględnienie w uproszczony sposób pominiętego członu obejmuje jedynie poprawka \tilde{w} (3.14).

We wzorach (4.1—3.7), (4.1—3.9), (4.1—3.10) przedstawiających \tilde{u} , \tilde{p} , \tilde{w} występuje bezwymiarowy parametr α wyrażający, odpowiedni dla konkretnego przypadku, czynnik zaburzający, którym może być przepuszczalność bądź rozciągalność ścianek oraz zmienność przekroju kanału. We wszystkich rozpatrywanych przypadkach struktura wzorów jest podobna, zgodnie z którą mamy

$$(5.1a - c) \quad \tilde{u} \sim \alpha, \quad \tilde{p} \sim \alpha^2, \quad \tilde{w} \sim \alpha \cdot \text{Re}.$$

Wynika stąd nie tylko ograniczenie dla parametru α , lecz także dla iloczynu $\alpha \cdot \text{Re}$, gdzie $\text{Re} = \bar{W}R/\nu$ jest charakterystyczną liczbą Reynoldsa przepływu podłużnego, przy czym ze względu na (5.1a) możemy iloczyn ten interpretować jako liczbę Reynoldsa przepływu poprzecznego $\text{Re}_x = \alpha \cdot \text{Re}$. Należy zwrócić uwagę, że małość iloczynu $\alpha \cdot \text{Re}$ nie ogranicza stosowalności modelu do małych liczb Reynoldsa, o ile nie zostanie przekroczony zakres stabilności przepływu laminarnego, nie rozpatrywany w niniejszej pracy. Widzimy też, że zaburzenie ciśnienia \tilde{p} jest małą wyższego rzędu w stosunku do pozostałych zaburzeń i w obecnym przybliżeniu może być pominięte. W przedstawionych w rozdz. 4 przykładach wymienione ograniczenia były na ogół spełnione, poza niektórymi obszarami o charakterze lokalnym.

Określenie zakresu stosowalności przedstawionych wyników nie było celem niniejszej pracy, dlatego nie podajemy tu szczegółowych szacowań, które z konieczności musiałyby



Rys. 5. Porównanie obecnego modelu z modelem [12]. — obecny model, - - - model Galowina i De Santisa [12], $R/K = 1.9 \cdot 10^6$

być zawężone do rozpatrywanych przykładów. Podamy natomiast porównanie naszych wyników, z wynikami modelu Galowina i De Santisa [12], o wyższej dokładności niż obecna metoda, gdyż uwzględniony był w nim człon bezwładnościowy równania pędu. Porównanie dotyczy przepływu przez rurę porowatą o danym stałym współczynniku przepuszczalności $R/K = 1.9 \cdot 10^6$. W przekroju początkowym $z = 0$ dane były dla bezwymiarowego ciśnienia zdefiniowanego w [12] jako $\bar{P} = (p - p_A)/\rho \cdot w_p^2(0, 0)$ dwa warunki brzegowe: wartość ciśnienia $\bar{P}(0) > 0$ oraz gradient ciśnienia $\bar{P}'(0) = -4 \cdot 10^{-2}$. Obliczenia obejmowały trzy przypadki odpowiadające różnym wartościom ciśnienia początkowego, z czym wiązały się różne liczby Reynoldsa $Re_x = \tilde{u}(R, 0)R/\nu$. Wyniki tych obliczeń przedstawione zostały na rys. 5, wraz z wynikami uzyskanymi na podstawie obecnego modelu, przy czym wykorzystano tu rozwiązanie (4.1.5a i b), w których dokonano jedynie odpowiedniej transformacji zmiennych.

Można stwierdzić dobrą zgodność między wynikami obu modeli, a drobne rozbieżności występują jedynie przy największej liczbie Reynoldsa $Re_x = 0.075$. W zakresie liczb Reynoldsa rozpatrywanych w powyższym przykładzie nasz model daje większe korzyści, gdyż pozwala na otrzymanie wyników przy pomocy prostych kwadratur, bez całkowania numerycznego, niezbędnego w przypadku modelu [12]. Natomiast w podobnych przypadkach przepływów przez rury porowate, lecz z większymi liczbami Reynoldsa, rozpatrywanych np. w [13], gdy skutek efektów dynamicznych ciśnienie statyczne rośnie w kierunku przepływu, model ten dałby wyniki niepoprawne nawet jakościowo. To samo dotyczy przepływów w kanałach rozbieżnych przy większych liczbach Reynoldsa i wszelkich innych przypadków, gdy nie są spełniane warunki małości α i αRe . W takich przypadkach należy stosować metody o wyższym rzędzie dokładności, jak np. [5], [13] lub jeszcze dokładniejsze.

Literatura cytowana w tekście

1. G. K. BATCHELOR, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge 1970.
2. W. E. LANGLOIS, *Slow Viscous Flow*, Macmillan C., New York 1964.
3. J. HAPPEL, H. BRENNER, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall 1965.
4. Н. А. СЛЁЗКИН, *Динамика вязкой несжимаемой жидкости*, Москва 1955.
5. M. J. MANTON, *Low Reynolds Number Flow in Slowly Varying. Axisymmetric Tubes*, J. Fl. Mech, 3, 49, (1971).
6. A. BERMAN, *Laminar Flow in Channels with Porous Walls*, J. Appl. Phys. 9, 24 (1953).
7. R. M. TERRIL, *Laminar Flow in a Uniformly Porous Channel*, Aeron. Quart., 3, 15, (1964).
8. R. W. HORNBECK, W. T. ROULEAU, F. OSTERLE, *Laminar Entry Problem in Porous Tubes*, Phys. Fluids, 11, 6 (1963).
9. H. L. WEISSBERG, *Laminar Flow in The Entrance Region of a Porous Pipe*, Phys. Fluids, 5, 2 (1959).
10. J. P. HUANG, H. S. YU., *Pressure Distributions in Porous Ducts of Arbitrary Cross Section*, J. Fluid Eng. (Trans. ASME), 3, 95, I (1973).
11. B. K. GUPTA, E. K. LEVY, *Symmetrical Laminar Channel Flow with Wall Suction*, J. Fluid Eng. (Trans. ASME), 3, 98, I (1976).
12. L. S. GALOWIN, M. J. De SANTIS, *Theoretical Analysis of Laminar Pipe Flow in a Porous Wall Cylinder*, Journal of Dynamics Syst. Measur. and Control (Trans. ASME), 2, 93, G (1971).
13. L. S. GALOWIN, L. S. FLETCHER, M. J. De SANTIS, *Investigation of Laminar Flow in a Porous Pipe with Variable Wall Suction*, AIAA J., 11, 12 (1974).
14. M. Y. JAFFRIN, A. H. SHAPIRO, *Peristaltic Pumping*, An. Rev. Fl. Mech., 3 (1971).

Резюме

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ И С ПОДВИЖНЫМИ И ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

Течение в канале предположено в виде мало возмущенного течения Пуазейла, так что уравнения Навье-Стокса можно линеаризовать относительно малых возмущений. Решения для параметров течения получены в аналитическом виде, содержащем неизвестную функцию давления, которая является решением некоторого линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Это уравнение было решено для некоторых простейших случаев граничных условий, причём в каждом из них учитывался только один из трёх возмущающих эффектов, названных в заглавии этой работы. Таким образом можно было найти распределения давления и скоростей для главного течения и его возмущений. Обращается внимание на некоторые ограничения представленной модели, возникающие из её приблизительного характера.

Summary

LAMINAR FLOW IN A CHANNEL OF A VARIABLE CROSS-SECTION WITH MOVABLE AND POROUS WALLS

The problem is considered as a slightly disturbed Poiseuille flow, so the Navier-Stokes equations can be linearized with respect to small perturbations. The solution is obtained in an analytical form, containing an unknown pressure function which can be found from the ordinary linear differential equation derived here. The equation has been solved for some simple axisymmetric flows, each of them being influenced by only one of the three disturbance effects mentioned in the head of this paper. In this way pressure and velocity disturbance for the main flow and its perturbations has been obtained. Some remarks on the limitations of the method presented have also been included.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 listopada 1977 r.

OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU PRĘTA ŚCISKANEGO Z UWZGLĘDNIENIEM CIĘŻARU WŁASNEGO METODĄ PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO*

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

1. Wstęp

Niniejsza praca poświęcona jest optymalnemu kształtowaniu pręta sprężystego poddanego ścisłaniu siłą skupioną oraz siłami rozłożonymi wzdłuż długości pręta, a pochodzącymi od ciężaru własnego. Poszukiwać będziemy maksymalnej siły krytycznej przy stałej objętości pręta i ograniczeniach nałożonych na przekrój poprzeczny. Rozpatrywać będziemy pełne nieliniowe równanie linii ugięcia. Otrzymane wyniki porównamy ze znanymi rozwiązaniami analitycznymi dla przypadku optymalnego kształtowania pręta sprężystego, ściskanego siłą o stałej wartości, ustalonym kierunku działania i punkcie przyłożenia (tak zwana siła eulerowska). Porównanie to dotyczyć będzie tych zagadnień w których pominięto wpływ ciężaru własnego.

Optimalizacji konserwatywnych zagadnień stateczności poświęcona jest znaczna liczba prac. Obszerny spis literatury zawierają między innymi publikacje [1—6]. Rozwiązanie ściśle zagadnienia optymalizacji pręta ściskanego siłą eulerowską przedstawiono w pracy [6], gdzie poszukiwano minimum objętości pręta przy danej sile krytycznej, powodującej utratę stateczności przez wyboczenie. W przypadku pręta płasko-zbieżnego o stałej wysokości otrzymano rozwiązanie w którym przekrój zmierzał do zera w punkcie przyłożenia siły krytycznej. Stosując bezpośrednie metody numeryczne optymalizacji w pracy [7] rozwiązano pewien problem optymalnego kształtowania pręta w stanie zakrytycznym przy dużych sprężystych ugięciach. Poszukiwano optymalnego stosunku giętej sztywności dwóch odcinków pręta o stałych przekrojach. Pręt ściskano daną siłą osiową, przy ustalonej jego objętości, a kryterium optymalności stanowiło w jednym przypadku minimum wychylenia końca pręta x_k , zaś w drugim — minimum kąta odchylenia tego końca od pionu.

W niniejszej pracy, w oparciu o zasadę optymalności Bellmana oraz metodę gradientową zaproponowaną przez CLAUDONA [8], przedstawione zostanie podejście numeryczne umożliwiające optymalizację pręta przy utracie stateczności (w oparciu o statyczne kryterium stateczności).

2. Sformułowanie zagadnienia

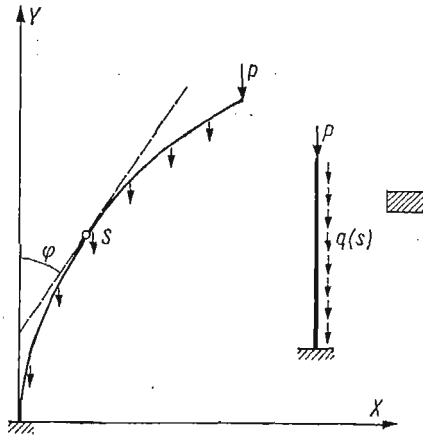
Rozpatrywać będziemy płaskozbieżny, sprężysty pręt jednostronnie sztywno utwierdzony obciążony siłą eulerowską P i ciężarem własnym (rys. 1).

* Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. «Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych», koordynowanego przez IPPT PAN.

Objętość takiego pręta wynosi

$$(1) \quad V = c \int_0^1 \alpha(s) ds,$$

gdzie $\alpha = EJ$; c — stała.



Rys. 1

Należy znaleźć:

$$(2) \quad \max P$$

przy

— stałej objętości

$$(3) \quad V_0 = \text{const}$$

gdzie $V_0 = V/c$;

— ograniczeniu nałożonym na poszukiwany przekrój $\alpha(s)$

$$(4) \quad \alpha_1 \leq \alpha(s) \leq \alpha_2,$$

gdzie $\alpha_1 \leq V_0 \leq \alpha_2$.

3. Równanie funkcyjne Bellmana

Rozwiązanie wariacyjnych zadań stateczności można sprowadzić do wyznaczenia minimum następującego funkcjonału [9]

$$(5) \quad k = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} F^{(i)}(x, y, y') dx}{\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi^{(i)}(x, y, y') dx}$$

gdzie $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ są to dostatecznie gładkie funkcje zmiennych x, y, y' . Krzywa realizująca ekstremum wyrażenia (5), powinna spełniać następujący układ równań różniczkowych [9]:

$$(6) \quad (F^{(i)} - t\Phi^{(i)})_{,y} - \frac{d}{dx} (F^{(i)} - t\Phi^{(i)})_{,y'} = 0$$

oraz równanie całkowe postaci

$$(7) \quad \sum_{l=1}^n \int_{x_{l-1}}^{x_l} (F^{(l)} - t\Phi^{(l)}) dx = 0,$$

gdzie t — parametr liczbowy.

Poniżej pokażemy, jak rozwiązać powyższe zadanie metodą programowania dynamicznego. W szczególności zamienimy funkcjonal (5) na funkcjonal addytywny oraz posłużymy się równaniem funkcyjnym Bellmana do wyznaczenia jego minimum.

Funkcjonal (5) ma w naszym przypadku postać:

$$(8) \quad P = \frac{\int_0^1 \left[\frac{\alpha}{2} (\varphi')^2 - c_1 \left(\int_s^1 \alpha(s') ds' \right) (1 - \cos \varphi) \right] ds}{\int_0^1 (1 - \cos \varphi) ds},$$

gdzie $\varphi' = \frac{d\varphi}{ds}$; $c_1 = \frac{12l^3}{Eb^2} \gamma$; γ — ciężar właściwy; b — wysokość przekroju; l — długość.

Programowanie dynamiczne pozwala wykluczyć z rozważań równanie (6). Szukaną krzywą $\varphi(s)$ i P poszukujemy w procesie minimalizacji funkcjonału (7), który w naszym przypadku można zapisać następująco:

$$(9) \quad R = \int_0^1 \left\{ \frac{\alpha}{2} (\varphi')^2 - \left[P + c_1 \left(\int_s^1 \alpha(s') ds' \right) \right] (1 - \cos \varphi) \right\} ds.$$

Zadanie polegające na wyznaczeniu obciążenia krytycznego P_{kr} dla danego rozkładu $\alpha(s)$ sprowadza się do minimalizacji funkcjonału (9) z uwzględnieniem warunku $\varphi(0) = 0$, przy czym P powinno przyjąć wartość najmniejszą.

Minimum funkcjonału (9) wyznaczać będziemy w procesie wieloetapowym dzieląc przedział całkowania $[0, 1]$ na N etapów o długości Δ każdy, tak, że $N \cdot \Delta = 1$. Etapy będziemy numerować od swobodnego końca posuwając się ku sztywnemu utwierdzeniu. To znaczy $N = H$ odpowiadać będzie początkowi procesu N -etapowego, zaś $N = 1$ ostatniemu krokowi w tym procesie. W dowolnym punkcie k wprowadzimy oznaczenia

$$(10) \quad \varphi_k = \varphi(\Delta); \quad \varphi'_k = \varphi'(k\Delta); \quad k = 1, \dots, N.$$

Pochodną $\varphi'(s)$ zastąpimy ilorazem różnicowym:

$$(11) \quad \varphi'_k(s) = \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\Delta}.$$

Warunek początkowy $\varphi(0) = 0$, (sztywne utwierdzenie), weźmiemy w postaci $\varphi_N = c$. Zastępując (9) sumą otrzymujemy

$$(12) \quad R \approx \sum_{k=1}^N \left[\frac{\alpha_k}{2} (\varphi'_k)^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_k) \right] \Delta.$$

Zapiszmy minimalną wartość sumy (12) dla N ostatnich kroków

$$(13) \quad f_N(c) = \min_{\varphi'_k} \sum_{k=1}^N \left[\frac{\alpha_k}{2} (\varphi'_k)^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=k}^N \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_k) \right] \Delta.$$

Wielkość $f_N(c)$ nazywać będziemy dalej funkcją celu. Z zasady optymalności otrzymujemy następujące równanie funkcyjne

$$(14) \quad f_N(c) = \min_{\varphi'_N} \left\{ \left[\frac{\alpha_N}{2} (\varphi'_N)^2 - (P + c_1 \alpha_N \Delta)(1 - \cos \varphi_A) \right] \Delta + f_{N-1}(\varphi_{N-1}) \right\},$$

gdzie $\varphi_{N-1} = \varphi_N + \Delta \varphi'_N$.

Analogicznie otrzymujemy dla następnych etapów:

(15)

$$f_{N-1}(\varphi_{N-1}) = \min_{\varphi'_{N-1}} \left\{ \left[\frac{\alpha_{N-1}}{2} (\varphi'_{N-1})^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=N-1}^N \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_{N-1}) \right] \Delta + f_{N-2}(\varphi_{N-2}) \right\},$$

.....

$$(16) \quad f_2(\varphi_2) = \min_{\varphi'_2} \left\{ \left[\frac{\alpha_2}{2} (\varphi'_2)^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=2}^N \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_2) \right] \Delta + f_1(\varphi_2) \right\},$$

$$(17) \quad f_1(\varphi_1) = \min_{\varphi'_1} \left\{ \left[\frac{\alpha_1}{2} (\varphi'_1)^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=1}^N \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_1) \right] \Delta \right\},$$

gdzie

$$\varphi_{N-2} = \varphi_{N-1} + \Delta \varphi'_{N-1}$$

.....

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \Delta \varphi'_2$$

Rozwiązywanie równań funkcyjnych (14)–(17) prowadzimy posuwając się etapami od swobodnego końca ku utwierdzeniu, rozpoczynając od $f_1(\varphi_1)$ gdzie $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ są to dopuszczalne wartości zmiennej sterowania $\varphi(s)$.

4. Obliczanie siły krytycznej

Po jednorazowym wykonaniu procedury równania funkcyjnego Bellmana (14)–(19) otrzymujemy wartości $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$, które realizują minimum wyjściowego problemu (14). Minimum to obliczamy dla dowolnej wartości P , przy ustalonym rozkładzie $\alpha(s)$. Siłę krytyczną otrzymamy dla $R = 0$. Wykorzystując fakt, iż R jest liniową funkcją P przeprowadzamy na wstępie jeden raz obliczenia dla dowolnej wartości P_1 . Otrzymane minimum wyrażenia (13) oznaczymy f_{N1} . Następnie powtarzamy te same obliczenia dla P_2 , a otrzymane minimum oznaczymy f_{N2} . Wtedy siłę krytyczną P_{kr} obliczamy z wyrażenia

$$(15) \quad P_{kr} = \frac{(P_2 - P_1)(0 - f_{N1})}{f_{N2} - f_{N1}} + P_1.$$

5. Metoda gradientowa — procedura obliczania przekroju optymalnego

Obliczenia (9)–(15) rozpoczynamy przyjmując stały przekrój $\alpha_0 = \text{const}$ tak, by

$$(16) \quad \int_0^1 \alpha_0 ds = 1.$$

Równocześnie siłę krytyczną wyznaczyć można z relacji

$$(17) \quad P_{kr} = \min \frac{\int_0^1 \left[\frac{\alpha}{2} (\varphi')^2 - c_1 \left(\int_{s'}^1 \alpha(s') ds' \right) (1 - \cos \varphi) \right] ds}{\int_0^1 (1 - \cos \varphi) ds}$$

Natomiast zgodnie z [8] będziemy poszukiwać «polepszonych» rozkładu masy w następującej postaci

$$(18) \quad \bar{\alpha}_1 = A \left[\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} \right) \right],$$

gdzie ε — mały parametr, A — stała normująca taka, że

$$(19) \quad \int_0^1 A \alpha_1 ds = 1,$$

zaś $\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha}$ należy rozumieć następująco:

$$(20) \quad \frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} = \frac{\frac{1}{2} (\varphi')^2 - \left(c_1 \int_{s'}^1 ds' \right) (1 - \cos \varphi)}{\int_0^1 (1 - \cos \varphi) ds}$$

Z (19) otrzymujemy następującą postać stałej normującej

$$(21) \quad A = \frac{1}{\int_0^1 \left[\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} \right) \right] ds}$$

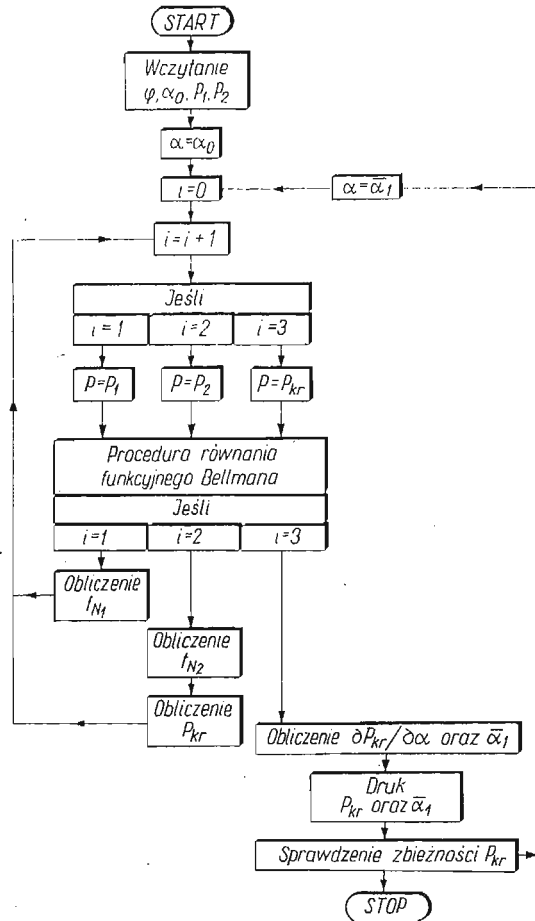
Wzory (18) i (21) dają w końcu następującą formułę na «przekrój polepszony»

$$(22) \quad \bar{\alpha}_1(s) = \frac{\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} \right)}{\int_0^1 \left[\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} \right) \right] ds}$$

Cały cykl obliczeń przebiega następująco:

Na wstępie startujemy z $\alpha_0 = 1$. W oparciu o wzory (9) - (15) wyznaczamy siłę krytyczną dla danego przekroju $\alpha_0(s)$, powtarzając dwukrotnie procedurę równania funkcyjnego. Przy trzecim powtórzeniu wyznaczamy $\varphi(s)$ dla obciążenia krytycznego. Dalej posługując się wzorami (16) - (22) wyznaczamy polepszony przekrój, który wstawiamy w miejsce $\alpha_0(s)$ rozpoczynając poprzez dwukrotne powtórzenie procedury równania funkcyjnego określenie nowej siły krytycznej, a przy trzecim powtórzeniu obliczamy kolejny «polepszony» rozkład masy. Na każdą iterację składa się zatem trzykrotne powtórzenie równania funkcyjnego Bellmana, a na końcu według schematu (16) - (22) znajdujemy każdorazowo nowy rozkład masy.

Algorytm ten jest szybko zbieżny. Na rys. 2 przedstawiono schemat blokowy tego algorytmu.



Rys. 2

Tablica 1

Iteracja	Siła krytyczna
1	2,471*
2	2,732
3	2,859
4	2,961
5	3,024
6	3,058
7	3,092
8	3,108
9	3,121
10	3,138
11	3,139
12	3,139

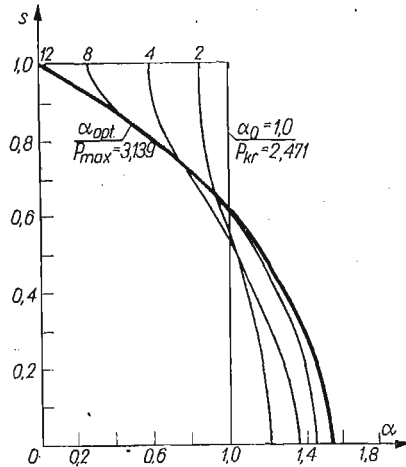
Tablica 2

Iteracja	Siła krytyczna
1	2,321
2	2,609
3	2,761
4	2,867
5	2,940
6	2,981
7	3,014
8	3,021
9	3,055
10	3,074
11	3,087
12	3,087

*) wartość dokładna 2,467 [11]

6. Wyniki obliczeń

a) *Optymalne kształtowanie przy obciążeniu siłą skupioną P*. W celu sprawdzenia powyższej metody położono najpierw w (8) $c_1 = 0$ oraz nie brano pod uwagę ograniczeń (4). W tabelcy 1 przedstawiono wartości siły krytycznej dla różnych iteracji. Widać, że osiągnięto dobrą dokładność rozwiązywanego zadania wariacyjnego, przy obliczaniu P_{kr} dla stałego przekroju $\alpha_0(s)$, [11]. Na rys. 3 przedstawiono zmianę $\alpha(s)$ dla różnych iteracji oraz przekrój optymalny.

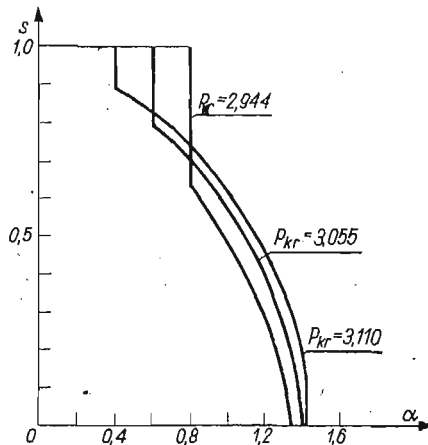


Rys. 3

Z pracy [6] wynika, że stosunek optymalnej siły krytycznej do przekroju α w punkcie sztywnego utwierdzenia jest równy 2. Również wyniki naszych obliczeń dają tę samą wartość.

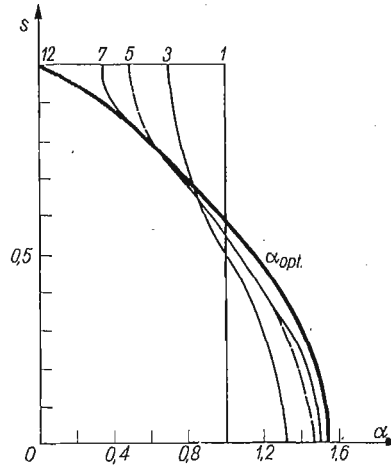
b) *Optymalne kształtowanie przy obciążeniu siłą skupioną P i ograniczeniu przekroju*. Dalsze obliczenia uwzględniały warunek (4) w postaci:

$$(23) \quad \alpha(s) \geq \alpha_1.$$



Rys. 4

Procedura wyznaczania siły krytycznej pozostaje nadal taka sama. Modyfikacji ulega jedynie ostatnia część opisana wzorami (16) - (19). W miejsce tych przekroji $\alpha(k\Delta)$, gdzie $k = 1, \dots, N$, które nie spełniają warunku (23) podstawia się $\alpha(k\Delta) = \alpha_1$. Uzyskane przekroje pokazuje rys. 4, dla $\alpha_1 = 0,4; 0,6$ oraz $0,8$.



Rys. 5

c) *Optymalne kształtowanie przy obciążeniu siłą skupioną P i ciężarem własnym.* Obliczenia przeprowadzono przy pominięciu warunku (4). Wartości siły krytycznej dla różnych iteracji zestawiono w tabelicy 2, zaś otrzymane kształty oraz kształt optymalny pokazano na rys. 5.

7. Uwagi końcowe

Cechą charakterystyczną przedstawionej metody jest wariacyjne sformułowanie równania statyki pręta i rozwiązanie go bezpośrednią metodą teorii sterowania optymalnego — jaką jest procedura równania funkcyjnego Bellmana.

Omawiany sposób rozwiązania zagadnienia stateczności posłużyć może jako jedna z metod do obliczania obciążeń krytycznych elementów konstrukcyjnych o dowolnym kształcie (niekoniecznie ciągłym na przykład skokowym), przy uwzględnieniu dowolnego obciążenia ciągłego np. ciężaru własnego.

Przedstawiony sposób rozwiązania zadania optymalizacji polegający na skojarzeniu metody gradientowej [8] z programowaniem dynamicznym [10] może być przystosowany do optymalizacji niektórych zagadnień związanych z utratą stateczności płyt osiowo symetrycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. BRANDT, *Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji*, Warszawa.
2. Ф. И. Ниордсон, П. Педерсен, *Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций*, Механика, Сборник Переводов, 2 (1973), 136 - 157.
3. A. GAJEWSKI, *Wybrane zagadnienia optymalizacji kształtu prętów*, Czas. Techn., Z-4M (1972).

4. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal design of elastic columns subjected to the general conservative behaviour of loading*, J. of Appl. Math. and Phys., ZAMP, **21** (1970), 806—818.
5. A. GAJEWSKI, *Оптымалне кшталтаванне вытрымаласціове в прыпадку матэрыялаў о нелінійнасці фізycznej*, Zesz. Nauk. Polit. Krak., **5** (1975).
6. Н. Г. Ченцов, *Стойкі найменшого веса*, Труды ЦАГИ, 1936, 265.
7. J. WŁACHUT, *Оптымалне кшталтаванне прѣта ściskanego пры ду́жых угієціах метода́ програмаванія дынамічнаго*, Mech. Teor. Stos., **3**, **15** (1977), 375—385.
8. J. L. CLAUDON, *Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads*, Journal de Mécanique, **14** (1975), 531—543.
9. Ю. М. Почтман, А. Л. Колесниченко, *Численне рещенне адного класса задач механікі сплюшонай среды методом дынамічнаго праграміраванія*, Изв. Акад. Наук Армянской ССР, Механика, **2** (1972), 90 - 95.
10. R. BELLMAN, *Programowanie dynamiczne*, Warszawa 1969.
11. N. BIELAJEW, *Wytrzymałość materiałów*, Warszawa 1954.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ ДИНАМИЧЕСКОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ
СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Дано рещенне задачи о нахождении максимальной критической силы, при установленной объеме стержня. Задача рещается на основе статического критерия устойчивости. Критические силы находятся из условия минимума интеграла потенциальной энергии с использованием функционального уравнения Бельмана. Форма стержня определена по градиентному методу Клодона [8]. Рассмотрено влияние ограничения поперечного сечения стержня. Исследованы стержни лишь прямоугольного сечения.

Summary

OPTIMAL DESIGN OF A BAR UNDER AXIAL FORCE AND OWN WEIGHT BY MEANS OF
DYNAMIC PROGRAMMING

The subject of this paper is to maximize the critical force under a constant volume of a bar. The problem of stability is based on the static stability criterion. The critical forces were calculated numerically by minimizing the potential energy, Bellman's functional equation being used. The problem of shape optimization was also solved numerically on the basis of CLAUDON [8] gradient method. The influence of constrained cross-section is shown. Only the rectangular cross-section of a bar was discussed.

INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1977 r.

METODA IDENTYFIKACJI PODATNOŚCI DYNAMICZNEJ FUNDAMENTÓW MASZYN

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Obserwowany w ostatnich latach wzrost mocy jednostkowych i obciążeń nowo instalowanych maszyn pociąga za sobą zwiększenie poziomu ich drgań i sił przenoszonych na fundamenty. Zapewnienie należytej dokładności obliczeń drgań maszyn i sił w miejscach podparcia maszyny wymaga znajomości podatności dynamicznej fundamentów i korpusów maszyn oraz przy elastycznym posadowieniu maszyn — charakterystyk amortyzatorów (podkładek elastycznych). Metodykę wyznaczania podatności korpusów maszyn oraz sposób obliczeń układów z uwzględnieniem podatności korpusów maszyn i fundamentów przedstawiono w pracy [1]. Obliczenia mogą być znacznie uproszczone, gdy podatności korpusów maszyn są zanedbywalnie małe w stosunku do podatności amortyzatorów i fundamentów, co często zachodzi w praktyce. W szczególności przypadki takie mają miejsce na statkach i innych środkach transportu, gdzie fundamenty lub konstrukcje podpierające silniki i inne urządzenia nie stanowią masywnych bloków. Przykładowo, okrętowe fundamenty są z reguły spawane z blach i kształtowników, w związku z czym nie powinny być one traktowane jako nieskończenie sztywne. Układy tego typu rozpatrywane są w niniejszej pracy.

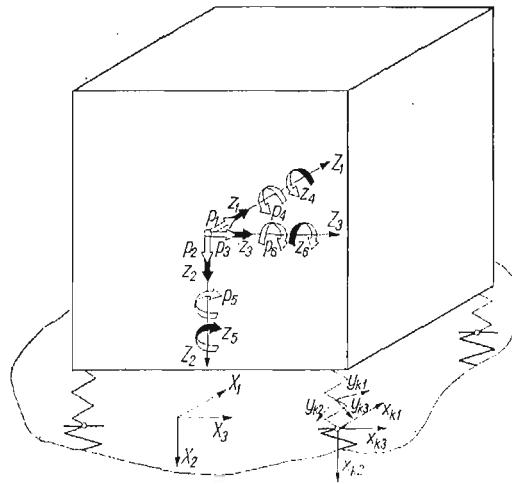
Stosowane w praktyce metody wyznaczania współczynników podatności dynamicznej fundamentów opierają się na bezpośrednich pomiarach przemieszczeń odpowiednich punktów fundamentu, wywołanych znanymi wymuszeniami. Wyznaczenie wszystkich elementów macierzy podatności dynamicznej fundamentu wymaga wymuszeń w postaci sił w trzech wzajemnie do siebie prostopadłych kierunkach i odpowiadających tym kierunkom momentów.

Ze względu na nieliniową z reguły zależność amplitud przemieszczeń fundamentu od amplitud wymuszeń, wartości tych ostatnich winny być zbliżone do amplitud sił i momentów, występujących w odpowiednich punktach rzeczywistego układu drgającego w warunkach eksploatacyjnych. Wartości współczynników podatności dynamicznej fundamentów mogą zależeć również od obciążeń statycznych, co wymagałoby prowadzenia pomiarów podatności na fundamencie odkształconym tak, jak pod wpływem masy maszyny. Stosowane aktualnie w praktyce urządzenia wymuszające (wzbudniki drgań) nie spełniają powyższych wymogów. Wytwarzają one jednokierunkowe siły o amplitudach i częstościach nastawialnych w ograniczonych zakresach, które przykładane są do nieobciążonego statycznie fundamentu w miejscach przewidywanych podparć maszyny.

W niniejszej pracy zaproponowano pośrednią metodę wyznaczania współczynników podatności dynamicznej fundamentów, która umożliwiła spełnienie ww. wymogów. Zakłada się jedynie możliwość wymiany podkładek elastycznych w trakcie pomiarów lub zmian charakterystyk amortyzatorów, co jest szczególnie łatwe do zrealizowania w przypadku zastosowania np. amortyzatorów pneumatycznych lub hydraulicznych.

2. Drgania maszyn na podatnych fundamentach

Obliczeniowy schemat analizowanego układu przedstawiono na rys. 1. Zakłada się, że korpus maszyny jest sztywny i że maszyna jest posadowiona na n amortyzatorach (n — dowolna liczba naturalna) spoczywających na podatnym fundamencie.



Rys. 1. Obliczeniowy schemat układu

P_α — uogólniona siła wymuszająca, działająca na korpus maszyny w kierunku α ; X_{k1}, X_{k2}, X_{k3} — nieruchomy ortogonalny układ współrzędnych o początku w punkcie zamocowania k -tego amortyzatora do fundamentu i osiach odpowiednio równoległych do osi układu odniesienia fundamentu X_1, X_2, X_3 ; Y_{k1}, Y_{k2}, Y_{k3} — nieruchomy ortogonalny układ współrzędnych k -tego amortyzatora, pokrywający się w stanie spoczynku z układem głównych osi tego amortyzatora; Z_1, Z_2, Z_3 — nieruchomy układ współrzędnych, pokrywający się w stanie spoczynku z układem głównych centralnych osi bezwładności maszyny; z_α — uogólnione przemieszczenie maszyny w kierunku α

Oznaczenia

- X_1, X_2, X_3 — nieruchomy ortogonalny układ współrzędnych fundamentu;
- X_{k1}, X_{k2}, X_{k3} — nieruchomy układ współrzędnych o początku w punkcie zamocowania k -tego amortyzatora do fundamentu i osiach odpowiednio równoległych do osi X_1, X_2, X_3 ;
- Y_{k1}, Y_{k2}, Y_{k3} — nieruchomy ortogonalny układ współrzędnych k -tego amortyzatora, pokrywający się w stanie spoczynku z układem głównych osi¹⁾ tego amortyzatora;
- Z_1, Z_2, Z_3 — nieruchomy układ współrzędnych, pokrywający się w stanie spoczynku z układem głównych centralnych osi bezwładności maszyny;

¹⁾ Główna oś amortyzatora charakteryzuje się tym, że uogólniona siła działająca w kierunku tej osi wywołuje uogólnione odkształcenie amortyzatora tylko w tym kierunku.

$$\begin{aligned}
 p_\alpha &= \sum_\nu \bar{p}_\alpha^{(\nu)} \exp[j(\nu\omega t + \varepsilon_\alpha^{(\nu)})] = \\
 &= \sum_\nu p_\alpha^{(\nu)} \exp(j\nu\omega t), \alpha = 1, \dots, 6 \quad \text{uogólnione siły działające na korpus maszyny, odniesione do układu} \\
 & \qquad \qquad \qquad Z_1, Z_2, Z_3; \\
 & \qquad \qquad \qquad \omega \quad \text{podstawowa częstość wymuszeń,} \\
 & \qquad \qquad \qquad \varepsilon_{\rho\alpha}^{(\nu)} \quad \text{kąt przesunięcia fazowego,} \\
 & \qquad \qquad \qquad p_\alpha^{(\nu)} \quad \text{zespolona amplituda } \nu\text{-tej harmonicznej, } \nu = 1, 2, \dots; \\
 z_\alpha &= \sum_\nu z_\alpha^{(\nu)} \exp(j\nu\omega t), \alpha = \\
 &= 1, \dots, 6 \quad \text{uogólnione przemieszczenia maszyny względem układu } Z_1, Z_2, Z_3; \\
 f_{k\alpha} &= \sum_\nu f_{k\alpha}^{(\nu)} \exp(j\nu\omega t), \alpha = \\
 &= 1, \dots, 6 \quad \text{uogólnione siły działające na fundament w punkcie zamocowania} \\
 & \qquad \qquad \qquad k\text{-tego amortyzatora do fundamentu, odniesione do układu } x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}; \\
 U_{k\alpha} &= \sum_\nu u_{k\alpha}^{(\nu)} \exp(j\nu\omega t), \alpha = \\
 &= 1, \dots, 6 \quad \text{uogólnione przemieszczenia punktu zamocowania } k\text{-tego amortyzatora} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{do fundamentu, mierzone w układzie } x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}; \\
 & \qquad \qquad \qquad a_{k1}, a_{k2}, a_{k3} \quad \text{współrzędne punktu zamocowania } k\text{-tego amortyzatora do maszyny} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{mierzone w stanie spoczynku w układzie } Z_1, Z_2, Z_3; \\
 M &= \text{diag}[m_\alpha], \alpha = 1, \dots, 6 \quad \text{macierz bezwładności maszyny.}
 \end{aligned}$$

Dodatknie zwroty dla sił $f_{k\alpha}$ i przemieszczeń $u_{k\alpha}$ przyjęto jak dla sił p_α i przemieszczeń z_α na rys. 1. Masa amortyzatorów nie jest uwzględniana, a ich charakterystyki traktowane są jako liniowe (lub zlinearyzowane). Każdy amortyzator określony jest zatem macierzą współczynników sztywności

$$C_k = \text{diag}[c_{k\alpha}], \alpha = 1, \dots, 6$$

oraz macierzą współczynników lepkościowego tłumienia

$$B_k = \text{diag}[b_{k\alpha}], \alpha = 1, \dots, 6.$$

Do opisu ruchu analizowanego układu wykorzystać można zależności wprowadzone w pracy [2], traktując punkty zamocowania amortyzatorów do fundamentu jako sztywne elementy skończone o zerowych masach, na które działają nieznanne siły $f_{k\alpha}$.

Tworząc macierze kolumnowe:

$$\begin{aligned}
 p &= \{p_\alpha\}, & z &= \{z_\alpha\}, & \alpha &= 1, \dots, 6; \\
 f &= \{f_k\}, & u &= \{u_k\}, & k &= 1, \dots, n; \\
 f_k &= \{f_{k\alpha}\}, & u_k &= \{u_{k\alpha}\}, & \alpha &= 1, \dots, 6
 \end{aligned}$$

można zgodnie z [2] i przyjętą w niniejszej pracy konwencją znaków napisać równania ruchu układu:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & M\ddot{z} + L\dot{z} + Kz + L''\dot{u} + K''u = p, \\
 & -(L'')^T \dot{z} - (K'')^T z + L'\dot{u} + K'u = f
 \end{aligned}$$

oraz wynikające stąd relacje pomiędzy amplitudami ν -tych harmonicznych uogólnionych przemieszczeń i sił w układzie:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & M^{(\nu)} z^{(\nu)} + L_1^{(\nu)} u^{(\nu)} = p^{(\nu)}, \\
 & -(L_1^{(\nu)})^T z^{(\nu)} + L_2^{(\nu)} u^{(\nu)} = f^{(\nu)}.
 \end{aligned}$$

W powyższych zależnościach oznaczono:

$$\begin{aligned} M^{(v)} &= K + jv\omega L - (v\omega)^2 M, \\ L_1^{(v)} &= jv\omega L'' + K'', \quad L_2^{(v)} = jv\omega L' + K', \\ p^{(v)} &= \{p_\alpha^{(v)}\}, \quad z^{(v)} = \{z_\alpha^{(v)}\}, \\ f^{(v)} &= \{f_k^{(v)}\}, \quad f_k^{(v)} = \{f_{k\alpha}^{(v)}\}, \\ u^{(v)} &= \{u_k^{(v)}\}, \quad u_k^{(v)} = \{u_{k\alpha}^{(v)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Indeksem T oznacza się macierze transponowane.

Macierze K, K' i K'' są podmacierzami macierzy \tilde{K} stopnia $6(n+1)$:

$$\tilde{K} = \sum_{k=1}^n \tilde{K}_k = \left[\begin{array}{c|c} K & K'' \\ \hline -(K'')^T & K' \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \text{ pasmo poziome} \\ 6(n+1) \\ 1 \text{ pasmo pionowe} \end{array}$$

Macierze \tilde{K}_k tworzy się jak poniżej²⁾:

$$\tilde{K}_k = \left[\begin{array}{cccccc|cccc} K_{ssk} & 0 & \dots & 0 & K_{skk} & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ -K_{ksk} & 0 & \dots & 0 & K_{kkk} & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ 1 & & & & (k+1) & & & & & & & \\ \text{pasmo} & & & & \text{pasmo} & & & & & & & \\ \text{pionowe} & & & & \text{pionowe} & & & & & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \text{ pasmo poziome} \\ (k+1) \text{ pasmo poziome} \\ 6(n+1) \end{array}$$

gdzie niezerowe bloki określone są zależnościami:

$$\begin{aligned} K_{ssk} &= A_k^T P_{sk}^T C_k P_{sk} A_k, & K_{kkk} &= -P_{kk}^T C_k P_{kk}, \\ K_{skk} &= -A_k^T P_{sk}^T C_k P_{kk}, & K_{kss} &= K_{skk}^T. \end{aligned}$$

W zależnościach tych A_k jest tzw. macierzą współrzędnych zamocowania k -tego amortyzatora do maszyny, natomiast P_{kk} oraz P_{sk} są utworzone z macierzy współczynników kierunkowych między osiami układów x_{k1}, x_{k2}, x_{k3} i y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} oraz układów Z_1, Z_2, Z_3 i y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} :

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_{k3} & -a_{k2} \\ 0 & 1 & 0 & -a_{k3} & 0 & a_{k1} \\ 0 & 0 & 1 & a_{k2} & -a_{k1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

²⁾ Wiele przykładów tworzenia podobnych macierzy podano w [2].

$$P_{sk} = \begin{bmatrix} P'_{sk} & 0 \\ 0 & P'_{sk} \end{bmatrix}, \quad P'_{sk} = [\cos \varphi_{sk\alpha\beta}], \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

$$P_{kk} = \begin{bmatrix} P'_{kk} & 0 \\ 0 & P'_{kk} \end{bmatrix}, \quad P'_{kk} = [\cos \varphi_{kk\alpha\beta}], \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

$\varphi_{sk\alpha\beta}$ — kąt między osią $y_{k\alpha}$ i osią Z'_β układu współrzędnych Z'_1, Z'_2, Z'_3 równoległego do układu Z_1, Z_2, Z_3 i o początku wspólnym z układem y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} ; $\varphi_{kk\alpha\beta}$ — kąt między osią $y_{k\alpha}$ i osią $x'_{k\beta}$ układu współrzędnych $x'_{k1}, x'_{k2}, x'_{k3}$ równoległego do układu x_{k1}, x_{k2}, x_{k3} i o początku wspólnym z układem y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} .

Identycznie tworzy się macierze L, L' i L'' (zastępując jedynie macierze C_k przez macierze B_k).

Macierze kolumnowe $u^{(\nu)}$ i $f^{(\nu)}$ związane są z macierzą podatności dynamicznej fundamentu relacją:

$$(2.3) \quad u^{(\nu)} = D^{(\nu)} f^{(\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

gdzie $D^{(\nu)}$ są macierzami podatności o postaci:

$$D^{(\nu)} = [D^{(\nu)}_{kl}]_{6n}, \quad D^{(\nu)}_{kl} = [d^{(\nu)}_{kl\alpha\beta}]_6, \quad k, l = 1, \dots, n; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6.$$

Współczynnik podatności dynamicznej $d^{(\nu)}_{kl\alpha\beta}$ jest określony ilorazem zespolonej amplitudy uogólnionego przemieszczenia w kierunku α w punkcie mocowania k -tego amortyzatora do fundamentu i zespolonej amplitudy wywołującej to przemieszczenie siły o częstotliwości $\nu\omega$, przyłożonej w kierunku β w punkcie mocowania l -tego amortyzatora do fundamentu:

$$(2.4) \quad d^{(\nu)}_{kl\alpha\beta} = \frac{u^{(\nu)}_{k\alpha}}{f^{(\nu)}_{l\beta}}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Gdy znane są współczynniki (2.4), z równań (2.2) i (2.3) wyznaczyć można macierze kolumnowe zespolonych amplitud ν -tych harmonicznym przemieszczeń maszyny, przemieszczeń fundamentu w punktach zamocowania amortyzatorów i sił przenoszonych na fundament w tych punktach:

$$(2.5) \quad z^{(\nu)} = [M^{(\nu)} - L_1^{(\nu)} [(D^{(\nu)})^{-1} - L_2^{(\nu)}]^{-1} (L_1^{(\nu)})^T]^{-1} p^{(\nu)},$$

$$(2.6) \quad u^{(\nu)} = [L_2^{(\nu)} - (D^{(\nu)})^{-1}]^{-1} (L_1^{(\nu)})^T [M^{(\nu)} - L_1^{(\nu)} [(D^{(\nu)})^{-1} - L_2^{(\nu)}]^{-1} (L_1^{(\nu)})^T]^{-1} p^{(\nu)},$$

$$(2.7) \quad f^{(\nu)} = (D^{(\nu)})^{-1} [L_2^{(\nu)} - (D^{(\nu)})^{-1}]^{-1} (L_1^{(\nu)})^T [M^{(\nu)} - L_1^{(\nu)} [(D^{(\nu)})^{-1} - L_2^{(\nu)}]^{-1} (L_1^{(\nu)})^T]^{-1} p^{(\nu)}.$$

Poniżej rozpatrzone zagadnienie wyznaczania współczynników (2.4) na podstawie pomiarów w układzie rzeczywistym.

3. Wyznaczenie współczynników podatności dynamicznej fundamentu

Dla wyznaczenia wszystkich elementów macierzy $D^{(\nu)}$ należy dysponować układem $36n^2$ liniowo niezależnych równań, w których niewiadomymi będą jedynie współczynniki (2.4). Równania (2.2) i (2.3) pozwalają napisać układ $6n$ równań

$$(3.1) \quad u^{(\nu)} = D^{(\nu)} [(L_1^{(\nu)})^T (M^{(\nu)})^{-1} (L_1^{(\nu)} u^{(\nu)} - p^{(\nu)}) + L_2^{(\nu)} u^{(\nu)}],$$

lub

$$(3.2) \quad (L_2^{(\nu)})^{-1} [f^{(\nu)} + (L_1^{(\nu)})^T [E + (M^{(\nu)})^{-1} L_1^{(\nu)} (L_2^{(\nu)})^{-1} (L_1^{(\nu)})^T]^{-1} (M^{(\nu)})^{-1} [p^{(\nu)} - L_1^{(\nu)} (L_2^{(\nu)})^{-1} f^{(\nu)}]] = D^{(\nu)} f^{(\nu)},$$

gdzie E -macierz jednostkowa.

Dodatkowe $6n(6n-1)$ równania uzyskać można na podstawie równań (3.1), zmieniając wartości $p^{(v)}$ lub wartości elementów macierzy $L_1^{(v)}$ i $L_2^{(v)}$ oraz mierząc po każdej zmianie wartości $u^{(v)}$ bądź na podstawie równań (3.2), zmieniając wartości $p^{(v)}$ lub wartości elementów macierzy $L_1^{(v)}$ i $L_2^{(v)}$ oraz mierząc wartości $f^{(v)}$. Identyfikacja oparta na zmianie wartości elementów macierzy $L_1^{(v)}$ i $L_2^{(v)}$ jest w ogólnym przypadku korzystniejsza od wyznaczania elementów macierzy $D^{(v)}$ na podstawie (3.1) lub (3.2) przy zmianach wartości $p^{(v)}$, gdyż fundament może być wówczas obciążany siłami o amplitudach zbliżonych do wartości występujących w warunkach eksploatacyjnych. Wynika to z możliwości prowadzenia pomiarów $u^{(v)}$ lub $f^{(v)}$ w trakcie pracy maszyny, t.j. przy fundamencie obciążonym masą maszyny i przy wartościach $p^{(v)}$ odpowiadających normalnej eksploatacji.

Dla i -tego wariantu pomiarowego napisać można zależność (3.2) w postaci:

$$(3.3) \quad v_i^{(v)} = D^{(v)} f_i^{(v)},$$

gdzie:

$$v_i^{(v)} = (L_2^{(v)})_i^{-1} [f_i^{(v)} + (L_1^{(v)})_i^T [E + (M^{(v)})^{-1} (L_1^{(v)})_i (L_2^{(v)})_i]^{-1} (L_1^{(v)})_i^T]^{-1} (M^{(v)})^{-1} [p^{(v)} - (L_1^{(v)})_i (L_2^{(v)})_i^{-1} f_i^{(v)}].$$

Wymaganą liczbę $N = 6n$ wariantów pomiarowych celowe jest realizować tak, aby liczba zmian współczynnika sztywności i /lub współczynnika tłumienia każdego amortyzatora (podkładki elastycznej) wynosiła 6. Współczynniki te mogą być wówczas zmieniane w rozsądnych granicach, a w przypadku stosowania wymiany podkładek elastycznych wystarczyć może jeden komplet sześciu różnych podkładek.

Układ N równań (3.3) dla $i = 1 \dots N$ napisać można w postaci:

$$(3.4) \quad V^{(v)} = D^{(v)} W^{(v)},$$

gdzie oznaczono:

$$V^{(v)} = [v_1^{(v)} v_2^{(v)} \dots v_N^{(v)}]$$

$$W^{(v)} = [f_1^{(v)} f_2^{(v)} \dots f_N^{(v)}].$$

Macierz $W^{(v)}$ nie jest przy opisanym sposobie realizacji pomiarów osobliwa, zatem poszukiwana macierz współczynników podatności dynamicznej fundamentu określona jest relacją:

$$(3.5) \quad D^{(v)} = V^{(v)} (W^{(v)})^{-1}.$$

Analogicznie można wyznaczyć macierz $D^{(v)}$ na podstawie zależności (3.1) i pomiarów wartości $u^{(v)}$.

4. Uwagi końcowe

W odróżnieniu od bezpośredniej metody wyznaczania współczynników podatności dynamicznej fundamentów, dokładność opisaną powyżej metody zależy m.in. od błędów, z jakimi określone są współczynniki sztywności i tłumienia amortyzatorów. Metoda ta umożliwia jednakże identyfikację na podstawie pomiarów sił przenoszonych na fundament, które częstokroć mogą być wyznaczane z większą dokładnością niż przemieszczenia fundamentu, mierzone w metodzie bezpośredniej.

Dysponując wartościami współczynników podatności dynamicznej fundamentu można, przy danych ograniczeniach technicznych i ekonomicznych, dokonać na podstawie zależności (2.5) - (2.7) optymalnej syntezy układu amortyzacji, rozszerzając ją w uzasadnionych przypadkach na konstrukcję fundamentu.

Wyznaczone zgodnie z p. 3 współczynniki podatności uwzględniają tłumienie w amortyzatorach i w konstrukcji fundamentowej, zatem obliczone z zależności (2.5) drgania maszyny będą przesunięte w fazie w stosunku do sił wymuszających. W przypadku silników tłokowych (i innych maszyn o napędzanych niewyrównoważonych masach i ograniczonym źródle energii) wiąże się to z pewnym spadkiem średniej prędkości kątowej silnika w stosunku do jej wartości przy sztywnym posadowieniu. Spadek ten może być określony na podstawie zależności podanych w [3], które opisują dodatkowy moment oporowy na walc silnika tłokowego w funkcji parametrów drgań wykonywanych przez ten silnik.

Literatura cytowana w tekście

1. W. WODZICKI, *Drgania maszyn o korpusach odkształcalnych podpartych elastycznie na podatnej konstrukcji*. Mech. Teor. i Stos., 2, 13 (1975).
2. J. I. RUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI i in., *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1975.
3. J. KOLENDA, *O przybliżonych metodach rozwiązania nieliniowych równań ruchu elastycznie posadowionych silników tłokowych*, Mech. Teor. i Stos., 4, 15 (1977).

Резюме

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ МАШИН

В работе представлен метод определения коэффициентов динамической податливости фундаментов машин на основе результатов измерений сил передаваемых на фундамент или перемещении фундамента при разных характеристиках амортизаторов. Решаются уравнения движения рассматриваемой системы и приводятся зависимости, позволяющие при известных коэффициентах податливости фундамента вычислить колебания машины, силы передаваемые на фундамент и перемещения фундамента в точках воздействия этих сил.

Summary

IDENTIFICATION METHOD OF THE DYNAMICAL RECEPTANCES OF MACHINE FOUNDATIONS

In this paper the identification method of machine foundation dynamical receptances is presented on the basis of measurements of forces transmitted onto a foundation or displacements of a foundation at various properties of mountings. The motion equations of the system considered are solved and the formulae are given which enable us to calculate machine vibrations, forces transmitted onto a foundation and displacements of the loaded points of a foundation when the foundation receptances are known.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT OKRĘTOWY

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 grudnia 1977 r.

OSIOWO-SYMETRYCZNE POŁĄCZENIE KLEJONE O OPTYMALNYM ROZKŁADZE
NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH W WARSTWIE KLEJU

KAROL GRUDZIŃSKI, LEON ŁABUĆ,
TADEUSZ BURDA (SZCZECIN)

1. Wstęp

Klejenie metali jest coraz szerzej stosowane w różnych gałęziach przemysłu, nie tylko do łączenia elementów cienkościennych ale również odpowiedzialnych złączy konstrukcyjnych, przenoszących znaczne obciążenia. Liczne publikacje (omówione w pracy [1]) oraz wieloletnie doświadczenia własne wskazują na szerokie możliwości zastosowania klejenia do łączenia elementów osiowo symetrycznych. Przeprowadzone badania doświadczalne wykazały [2, 3], że stosunkowo łatwo można otrzymać walcowe i stożkowe połączenia klejone o wytrzymałości równej lub nawet przewyższającej wytrzymałość łączonych elementów stalowych.

Zastosowanie klejenia do łączenia elementów osiowo symetrycznych ma szereg zalet [1] i stwarza szerokie możliwości wprowadzania nowych rozwiązań konstrukcyjnych. Niezbędnym warunkiem dla szerszego wykorzystania ich w praktyce jest jednakże opracowanie racjonalnych zasad kształtowania tego typu połączeń w oparciu o szczegółową analizę naprężeń i odpowiednio przyjęte kryteria oceny wytrzymałości.

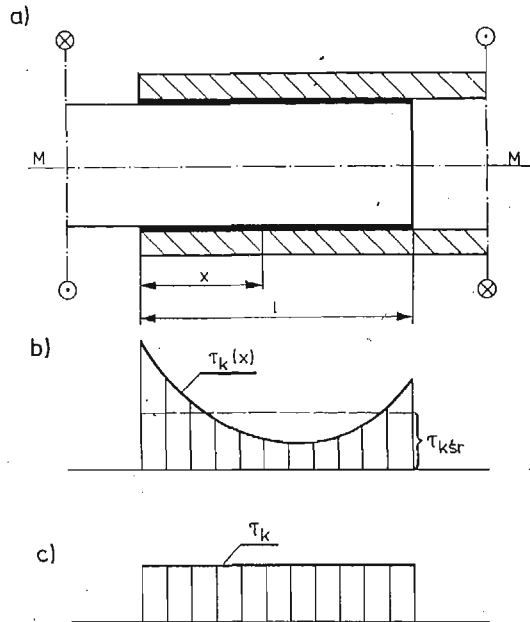
Z wcześniejszych prac [4, 5] wynika, że w walcowych połączeniach klejonych elementów o stałym przekroju poprzecznym i jednakowej grubości warstwy kleju (rys. 1a), obciążonym momentem skręcającym, występuje nierównomierny rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju na długości l połączenia (rys. 1b). W skrajnych przekrojach połączenia występują znaczne spiętrzenia naprężeń, podczas gdy w części środkowej są one bardzo małe. Taki rozkład naprężeń jest niekorzystny dla pracy połączenia i obniża w konsekwencji jego wytrzymałość.

Jeżeli za podstawę oceny przyjmie się kryterium maksymalnych naprężeń stycznych, występujących w warstwie kleju, to wzrost wytrzymałości połączenia uzyskać można przez obniżenie szczytowych wartości tych naprężeń i zapewnienie im bardziej równomiernego rozkładu. Najlepszą pracę połączenia i najbardziej racjonalne wykorzystanie własności wytrzymałościowych kleju uzyskuje się wtedy, gdy rozkład naprężeń stycznych na całej długości l połączenia jest równomierny (rys. 1c). Połączenie klejne, które spełnia ten warunek przyjmuje się w niniejszej pracy jako optymalne ze względu na wytrzymałość.

Z rozważań teoretycznych wynika, że równomierny rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju w połączeniu walcowym uzyskuje się przy założeniu doskonałej sztywności elementów łączonych. W pracach [4, 5] wykazano, że takiego założenia w odniesieniu do

połączeń osiowo-symetrycznych elementów wykonanych z metalu przyjmować nie można, pomimo że różnica wartości współczynników sprężystości metalu i kleju jest bardzo duża i sięga dwóch rzędów. Nasuwa się więc pytanie, czy istnieje możliwość zaprojektowania takiego połączenia klejonego elementów wykonanych z materiałów rzeczywistych, a w szczególności metali, w którym rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju będzie równo, mierny na całej długości.

Przedstawione poniżej rozważania teoretyczne dają twierdzącą odpowiedź na to pytanie. Podano trzy sposoby rozwiązania tego zadania.



Rys. 1. Walcowe połączenie klejone o stałym przekroju elementów łączonych i warstwy kleju: a) schemat połączenia, b) wykres naprężeń stycznych w warstwie kleju przy uwzględnieniu rzeczywistej sztywności elementów, c) wykres naprężeń stycznych w kleju przy założeniu doskonałej sztywności elementów łączonych

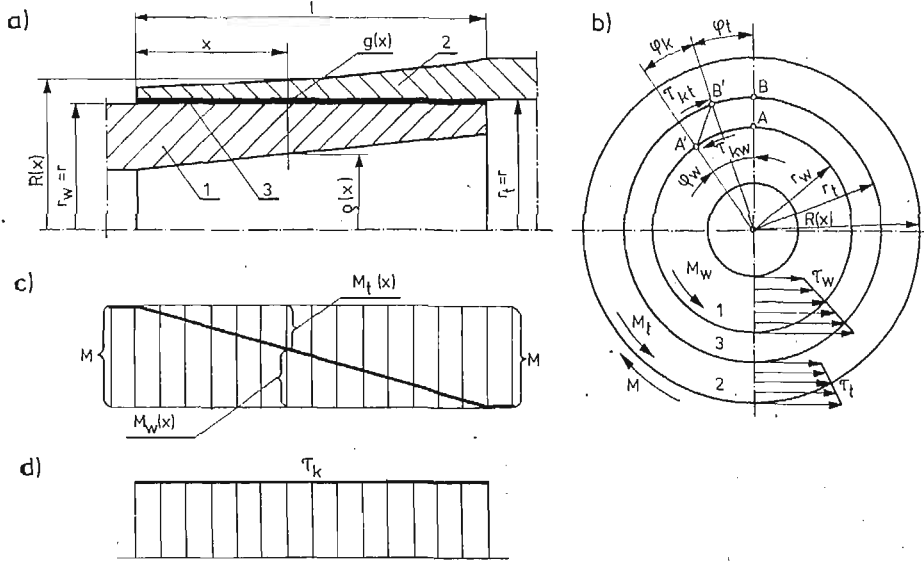
2. Model połączenia

Punktem wyjścia do rozważań nad optymalizacją wytrzymałości osiowo-symetrycznego połączenia klejonego jest jego model przedstawiony schematycznie na rys. 2, spełniający następujące założenia:

- 1) elementy łączone (wałek i tulejka) są ciałami sprężystymi osiowo-symetrycznymi o przekroju poprzecznym zmieniającym się w sposób łagodny na długości połączenia;
- 2) adhezja kleju do metalu wyklucza poślizg na powierzchniach granicznych;
- 3) przekroje poprzeczne po obciążeniu połączenia momentem skręcającym pozostają płaskie (hipoteza płaskich przekrojów), a do wyznaczenia naprężeń i odkształceń w łączonych elementach przyjmuje się wzory znane z teorii wytrzymałości materiałów;
- 4) grubość warstwy kleju jest stała w przekroju poprzecznym, natomiast może zmieniać się na długości połączenia;

5) naprężenia styczne w przekrojach poprzecznych warstwy kleju pomija się przyjmując, że moment skręcający w całości jest przenoszony przez przekroje poprzeczne wałka i tulejki (rys. 2b, c);

6) przy dostatecznie małych odkształceniach klej spełnia prawo Hooke'a dla czystego ścinania [6].



Rys. 2. Model osiowo symetrycznego połączenia klejonego o optymalnym rozkładzie naprężeń stycznych w warstwie kleju: a) i b) schemat połączenia (1 — wałek, 2 — tulejka, 3 — warstwa kleju), c) optymalny rozkład momentów skręcających wałek i tulejkę, d) optymalny rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju

Z rys. 2 oraz przyjętych założeń wynikają następujące zależności geometryczne i statyczne:

$$(1) \quad \varphi_t(x) + \varphi_k(x) = \varphi_w(x),$$

$$(2) \quad \frac{d\varphi_t}{dx} + \frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{d\varphi_w}{dx},$$

$$(3) \quad M_w(x) + M_t(x) = M,$$

$$(4) \quad \frac{dM_w}{dx} + \frac{dM_t}{dx} = 0,$$

gdzie $\varphi_w(x)$, $\varphi_t(x)$, $\varphi_k(x)$ oznaczają przemieszczenia kątowe mierzone w przekroju x (rys. 2b), $M_w(x)$, $M_t(x)$ — momenty skręcające wałek i tulejkę w przekroju x , zaś M oznacza moment skręcający przenoszony przez połączenie.

Znane z wytrzymałości materiałów wzory na kąt skręcenia mają postać

$$(5) \quad \frac{d\varphi_w}{dx} = \frac{M_w(x)}{G_w I_{ow}(x)}$$

$$(6) \quad \frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{M_i(x)}{G_i I_{oi}(x)},$$

gdzie G_w, G_i oznaczają współczynniki sprężystości poprzecznej materiałów wałka i tulejki, zaś $I_{ow}(x), I_{oi}(x)$ — biegunowe momenty bezwładności przekroju wałka i tulejki.

Zmianę momentów na długości dx wyrażają wzory

$$(7) \quad \frac{dM_w}{dx} = -2\pi r_w^2 \tau_{kw}(x),$$

$$(8) \quad \frac{dM_i}{dx} = 2\pi r_i^2 \tau_{ki}(x),$$

gdzie $\tau_{kw}(x), \tau_{ki}(x)$ oznaczają naprężenia styczne obwodowe na powierzchniach granicznych kleju z wałkiem i tulejką.

Po podstawieniu (7) i (8) do równania (4) otrzymuje się po przekształceniu i pominięciu znaku

$$(9) \quad \tau_{ki}(x) = \frac{r_w^2}{r_i^2} \tau_{kw}(x).$$

Ponieważ $r_w < r_i = r + g$ (gdzie g — grubość warstwy kleju), to $\tau_{ki} < \tau_{kw}$. Dla małych grubości warstwy kleju różnice będą nieistotne i można je pominąć przyjmując, że naprężenia styczne na grubości warstwy kleju i na powierzchniach granicznych są jednakowe

$$(10) \quad \tau_{ki} \approx \tau_{kw} \approx \tau_k.$$

Dla naprężeń stycznych w warstwie kleju na podstawie (7) otrzymuje się równanie

$$(11) \quad \tau_k(x) = -\frac{1}{2\pi r^2} \frac{dM_w}{dx}.$$

Chcąc otrzymać maksymalną wytrzymałość połączenia na skręcanie, zgodnie z przyjętym wcześniej kryterium, należy zapewnić równomierny rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju. To będzie spełnione jeżeli momenty skręcające wałek i tulejkę będą się zmieniać według następujących funkcji liniowych (rys. 2c):

$$(12) \quad M_w(x) = M \left(1 - \frac{x}{l} \right),$$

$$(13) \quad M_i(x) = M \frac{x}{l}.$$

Po uwzględnieniu (12), wzór (11) przyjmie postać

$$(14) \quad \tau_k(x) = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{M}{l} = \text{const.}$$

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że zależności (12), (13) i (14) są spełnione z założenia. Z analizy zagadnienia wynika, że warunek optymalnego rozkładu naprężeń stycznych (14) może być osiągnięty poprzez odpowiednią zmianę:

- 1) przekroju poprzecznego elementów łączonych,
- 2) grubości warstwy kleju,
- 3) własności sprężystych kleju.

Przypadki te zostaną omówione po kolei.

3. Optymalna zmiana przekroju łączonych elementów

Oprócz założeń ogólnych podanych w punkcie 2 przyjmuje się obecnie dodatkowo założenie, że grubość g warstwy oraz współczynnik sprężystości G_k kleju są stałe na długości połączenia. Jako wielkości zmienne, zależne od x przyjmuje się biegunowe momenty bezwładności $I_{ow}(x)$ i $I_{ot}(x)$ przekroju łączonych elementów.

Przy założeniu równomiernego rozkładu naprężeń stycznych w warstwie kleju na długości l połączenia, kąt $\varphi_k = \text{const}$ (rys. 2b). Uwzględniając to, otrzymuje się na podstawie (2) związek geometryczny

$$(15) \quad \frac{d\varphi_w}{dx} = \frac{d\varphi_t}{dx}.$$

Po uwzględnieniu zależności (5), (6), (12) i (13), związek geometryczny (15) przyjmuje postać

$$(16) \quad \frac{I_{ot}(x)}{I_{ow}(x)} = \frac{G_w}{G_t} \frac{x}{l-x}.$$

Jeżeli założymy, że elementy łączone wykonane są z jednego materiału ($G_w = G_t$) oraz że wałek ma stały przekrój, tzn. $I_{ow} = \text{const}$, wówczas na podstawie (16) otrzymuje się

$$(17) \quad I_{ot}(x) = I_{ow} \frac{x}{l-x}.$$

Przyjmując, że przekrój wałka jest pełny, otrzymuje się wzory dla biegunowych momentów bezwładności o postaci:

$$(18) \quad I_{ow} = \frac{\pi r_w^4}{2}; \quad I_{ot}(x) = \frac{\pi R^4(x)}{2} - \frac{\pi r_t^4}{2}.$$

Dla dostatecznie cienkiej warstwy kleju można przyjąć $r_t \approx r_w = r$. Otrzymuje się wtedy na podstawie (17) funkcję określającą przebieg zmienności promienia zewnętrznego tulejki

$$(19) \quad R(\xi) = r \sqrt[4]{\frac{1}{1-\xi}},$$

gdzie: $\xi = x/l$ jest współrzędną bezwymiarową długości połączenia.

We wzorze (19) nie występuje współczynnik sprężystości G_k kleju. Wynika z tego, że wzór ten jest słuszny zarówno w zakresie odkształceń sprężystych jak i plastycznych kleju, tzn. przy małych i dużych obciążeniach momentem M , aż do zniszczenia połączenia.

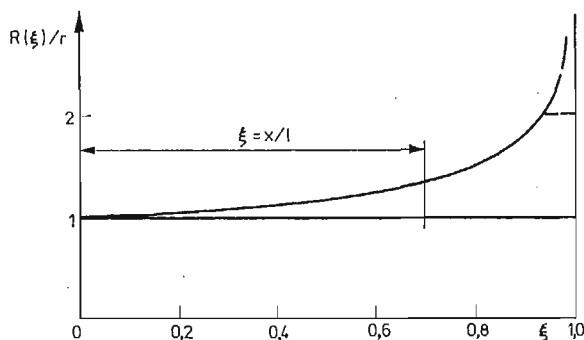
Należy dodać, że funkcja $R(\xi)$ nie zależy od konkretnej długości l połączenia. Przebieg zmienności bezwymiarowej funkcji $R(\xi)/r$ ilustrują tablica 1 i rys. 3.

Tablica 1

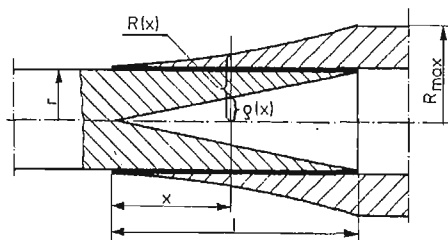
$\xi = \frac{x}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{R(\xi)}{r}$	1	1,027	1,057	1,093	1,137	1,189	1,257	1,351	1,495	1,778	∞

Niedogodnością jest tutaj występowanie nieskończoności dla $\xi = 1$. W praktycznych przypadkach nieskończoność tę można zastąpić dostatecznie dużą wartością skończoną.

Powyższą niedogodność można usunąć w łatwy sposób przez zastosowanie wałka o zmiennej sztywności na długości połączenia. Jedną z praktycznych możliwości jest wykonanie otworu stożkowego, jak na rys. 4.



Rys. 3. Optymalna zmiana promienia zewnętrznego tulejki walcowego połączenia klejonego dla przypadku, gdy wałek ma przekrój stały pełny



Rys. 4. Schemat walcowego połączenia klejonego wałka i tulejki o zmiennym przekroju

Z zależności (16) wynika, że dla uzyskania równomiernego rozkładu naprężeń w warstwie kleju przy $G_t = G_w$, musi być spełniony warunek

$$(20) \quad \frac{I_{or}(x)}{I_{ow}(x)} = \frac{x}{l-x}.$$

Zgodnie z rys. 4

$$(21) \quad I_{ow}(x) = \frac{\pi}{2}(r^4 - \varrho^4), \quad \text{gdzie} \quad \varrho = r \frac{x}{l},$$

stąd

$$(22) \quad I_{ow}(\xi) = I_{ow}(1 - \xi^4)$$

gdzie $I_{ow} = \pi r^4/2$ oznacza moment biegunowy przekroju wałka pełnego, zaś $\xi = x/l$ — bezwymiarową współrzędną.

Dla tulejki biegunowy moment bezwładności przekroju jest równy

$$(23) \quad I_{oi}(\xi) = \frac{\pi}{2} [R^4(\xi) - r^4].$$

Po podstawieniu (23) i (24) do (20) oraz odpowiednich przekształceniach otrzymuje się

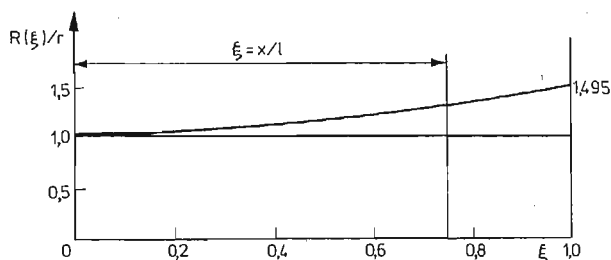
$$(24) \quad R = r \sqrt[4]{1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4}.$$

Przebieg zmienności stosunku $R(\xi)/r$ ilustruje tablica 2 i rys. 5.

Z tablicy 2 widać, że promień zewnętrzny tulejki dla $\xi = 1$ ma skończoną wartość, wynoszącą $R_{\max} = 1,495 r$.

Tablica 2

$\xi = \frac{x}{l}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{R(\xi)}{r}$	1	1,058	1,131	1,233	1,353	1,495



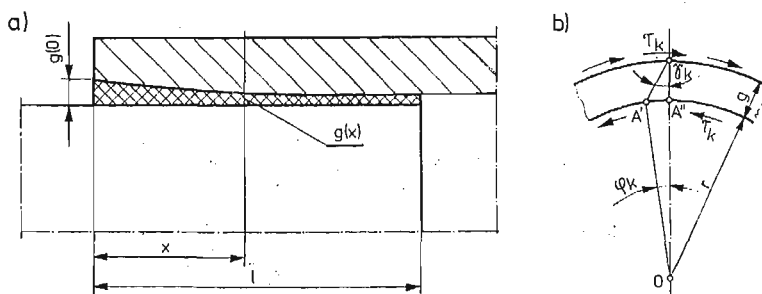
Rys. 5. Optymalna zmiana promienia zewnętrznego tulejki walcowego połączenia klejonego dla przypadku, gdy wałek ma otwór stożkowy

4. Optymalna zmiana grubości warstwy kleju

Rozważony zostanie teraz przypadek połączenia walcowego o zmiennej grubości warstwy kleju na długości l (rys. 6). Zakłada się przy tym, że stosunek sztywności na skręcanie przekrojów wałka i tulejki jest stały i występuje jako parametr B niezależny od x .

$$(25) \quad B = \frac{G_w I_{ow}}{G_t I_{ot}}.$$

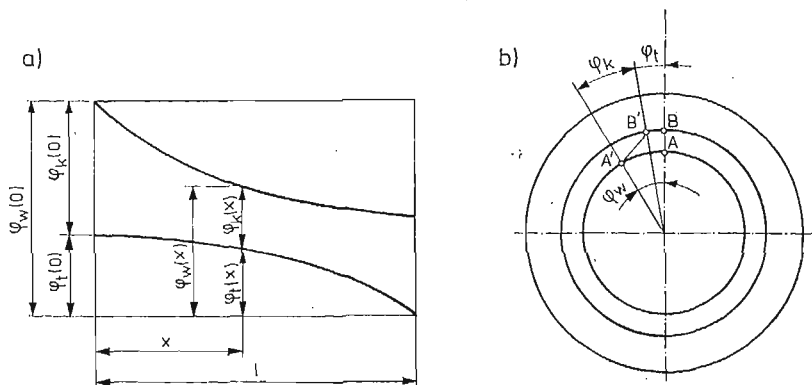
Zadanie polega obecnie na wyznaczeniu funkcji $g(x)$, opisującej zmianę grubości warstwy kleju na długości l połączenia, przy której naprężenia styczne w kleju będą miały równomierny rozkład określony zależnością (14).



Rys. 6. Walcowe połączenie klejone z warstwą kleju o zmiennej grubości: a) przekrój podłużny, b) fragment przekroju poprzecznego

Przesunięcie φ_k przekrojów poprzecznych wałka i tulejki jest wynikiem odkształcenia się warstwy kleju o kąt γ_k (rys. 6b). Przy małej grubości g w stosunku do promienia r można przyjąć zależność

$$(26) \quad \varphi_k = \frac{g}{r} \gamma_k.$$



Rys. 7. Przebiegi zmian przemieszczeń kątowych $\varphi_w(x)$, $\varphi_t(x)$ i $\varphi_k(x)$ na długości połączenia

Po uwzględnieniu prawa Hooke'a dla czystego ścinania w odniesieniu do kleju oraz zależności (14) otrzymuje się

$$(27) \quad \varphi_k(x) = \frac{g(x)\tau_k}{rG_k} = \frac{g(x)}{2\pi r^3 G_k} \frac{M}{l},$$

gdzie G_k oznacza współczynnik sprężystości poprzecznej kleju.

Warunek geometrycznej zgodności odkształceń, zgodnie z (1) ma postać (rys. 7)

$$(28) \quad \varphi_k(x) = \varphi_w(x) - \varphi_t(x).$$

Po uwzględnieniu zależności (5), (6), (12), (13) i (27) oraz warunku brzegowego dla (27), zależność geometryczną (28) można przedstawić w postaci

$$(29) \quad \frac{g(x)}{2\pi r^3 G_k} \frac{M}{l} = \frac{g(0)}{2\pi r^3 G_k} \frac{M}{l} - \frac{M \left(x - \frac{x^2}{2l} \right)}{G_w I_{ow}} + \frac{M \frac{x^2}{2l}}{G_t I_{ot}},$$

gdzie $g(0)$ oznacza grubość warstwy kleju w przekroju $x = 0$ (rys. 6a).

Z zależności (29) po dokonaniu pewnych przekształceń otrzymuje się

$$(30) \quad g(x) = g(0) - \frac{\pi r^3 G_k}{G_t I_{ot}} \left[\frac{x(2l-x)}{B} - x^2 \right],$$

gdzie B zgodnie z zależnością (25) oznacza stosunek sztywności na skręcanie przekrojów wałka i tulejki.

Dla przypadku, gdy elementy łączone wykonane są z jednakowego materiału ($G_w = G_t = G$) i mają równe co do wartości biegunowe momenty bezwładności

$$(31) \quad I_{ot} = I_{ow} = \frac{\pi r^4}{2}$$

otrzymuje się na podstawie (30)

$$(32) \quad g(x) = g(0) - \frac{4G_k l}{Gr} x \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Fizyczny sens rozwiązania zagadnienia wymaga, aby funkcja $g(x)$ miała wartości nieujemne na całej długości l połączenia. Z (32) wynika, że minimalna grubość warstwy kleju (przy $B = 1$) występuje w przekroju $x = l/2$ i wynosi

$$(33) \quad g_{\min} = g(0) - \frac{G_k l^2}{Gr}.$$

Stąd

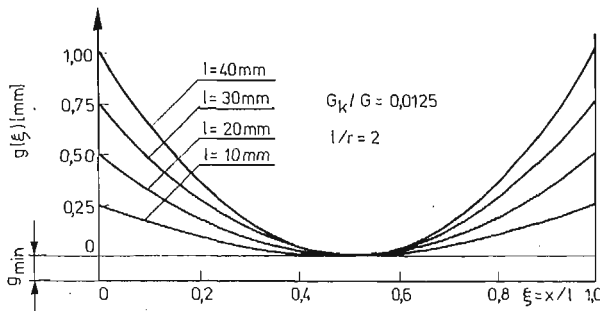
$$(34) \quad g(0) = g_{\min} + \frac{G_k l^2}{Gr}.$$

Podstawiając (34) do (32) otrzymuje się po przekształceniach

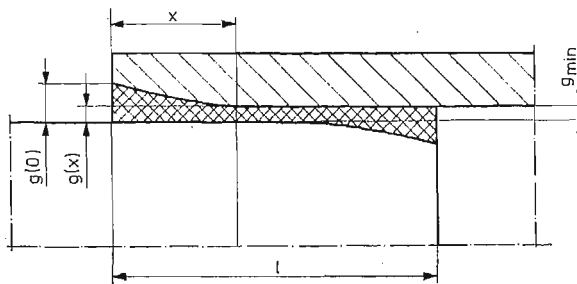
$$(35) \quad g(\xi) = g_{\min} + \frac{G_k l^2}{Gr} (1 - 2\xi)^2,$$

gdzie $\xi = x/l$, ($0 \leq \xi \leq 1$).

Funkcja (35) określa zmianę grubości warstwy kleju na długości l połączenia, przy której otrzymuje się równomierny rozkład naprężeń stycznych w kleju. Przebiegi zmian grubości warstwy kleju w zależności od długości l połączenia przy założonych stosunkach $l:r = 2$ oraz $G_k:G = 0,0125$ (dla połączenia elementów stalowych) ilustrują krzywe na rys. 8. We wzorze (35), g_{\min} jest pewną stałą i określa minimalną grubość warstwy kleju jaką należy przyjąć z warunków montażowych. Maksymalne grubości warstwy kleju występują w skraj-



Rys. 8. Optymalna zmiana grubości warstwy kleju na długości połączenia walcowego



Rys. 9. Schemat walcowego połączenia klejonego o optymalnej zmianie grubości warstwy kleju na długości l

nych przekrojach. Nie mogą one przyjmować dowolnie dużych wartości i ograniczają w sposób istotny długości l połączenia.

Praktycznie możliwą realizację połączenia o zmiennej grubości warstwy kleju pokazano na rys. 9. Przyjęcie takiego ukształtowania wałka i otworu tulejki ułatwia montaż elementów i zapewnia dobre wypełnienie szczeliny klejem oraz dobre centrowanie elementów przy dostatecznie małej grubości g_{\min} .

5. Optymalna zmiana własności sprężystych kleju

Rozważony zostanie teraz jeszcze jeden teoretycznie możliwy przypadek optymalizacji połączenia walcowego, poprzez zastosowanie kleju o zmiennych własnościach sprężystości na długości połączenia.

Zakłada się, że grubość warstwy kleju oraz stosunek sztywności na skręcanie elementów łączonych są stałe i nie zależą od współrzędnej x . Celem rozważań jest wyznaczenie i zbadanie funkcji, według jakiej musi zmieniać się współczynnik sprężystości kleju $G_k = G_k(x)$, przy żądaniu spełnienia warunków (12), (13) i (14), dotyczących liniowego rozkładu momentów skręcających i równomiernego rozkładu naprężeń stycznych w warstwie kleju.

Dla rozważanego przypadku otrzymuje się zależność analogiczną do (29), z tą różnicą, że grubość g jest teraz wielkością stałą, a współczynnik sprężystości kleju zmienną ($G_k = G_k(x)$).

$$(36) \quad \frac{gM}{2\pi r^3 l} \frac{1}{G_k(x)} = \frac{gM}{2\pi r^3 l} \frac{1}{G_k(0)} - \frac{M \left(x - \frac{x^2}{2l} \right)}{G_w I_{ow}} + \frac{M \frac{x^2}{2l}}{G_t I_{ot}},$$

gdzie $G_k(0)$ oznacza wartość współczynnika sprężystości kleju w przekroju $x = 0$.

Po przekształceniu (36) otrzymuje się

$$(37) \quad G_k(x) = \frac{G_k(0)}{1 - \frac{\pi r^3 G_k(0)}{G_t I_{ot} g} \left[\frac{2lx - x^2}{B} - x^2 \right]}.$$

Dla przypadku, gdy $G_w = G_t = G$ oraz $I_{ot} = I_{ow} = \frac{\pi r^4}{2}$ zależność (37) przyjmuje prostszą postać

$$(38) \quad G_k(x) = \frac{G_k(0)}{1 - \frac{4G_k(0)}{grG} (lx - x^2)}.$$

Z (38) wynika, że funkcja $G_k(x)$ jest symetryczna względem przekroju $x = l/2$ i osiąga maksimum w tym przekroju.

$$(39) \quad G_k \left(\frac{l}{2} \right) = G_{k \max} = \frac{G_k(0)}{1 - \frac{G_k(0)l^2}{grG}}.$$

Fizyczny sens rozwiązania zagadnienia wymaga, ażeby $G_k(x)$ było tylko dodatnie. Stąd otrzymuje się warunek

$$(40) \quad G_k(0) < \frac{grG}{l^2}.$$

Przekształcając zależność (39) otrzymuje się

$$(41) \quad G_k(0) = \frac{G_{k \max}}{1 + \frac{l^2 G_{k \max}}{grG}}$$

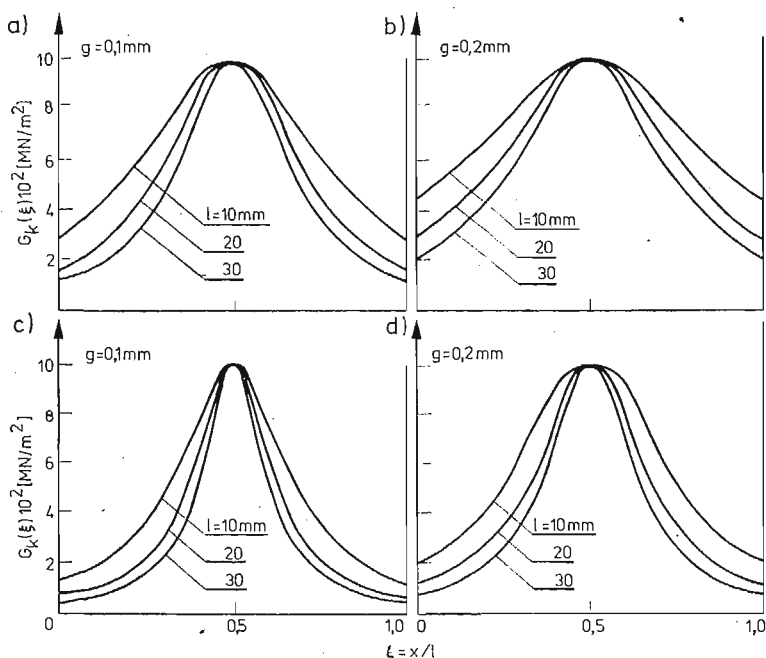
Po podstawieniu (41) do (38) i dokonaniu przekształceń, poszukiwana funkcja określająca optymalną zmianę własności sprężystych kleju na długości l połączenia przyjmuje postać

$$(42) \quad G_k(\xi) = \frac{G_{k \max}}{1 + \frac{l^2 G_{k \max}}{grG} (1 + 2\xi)^2},$$

gdzie $\xi = x/l$ — współrzędna bezwymiarowa.

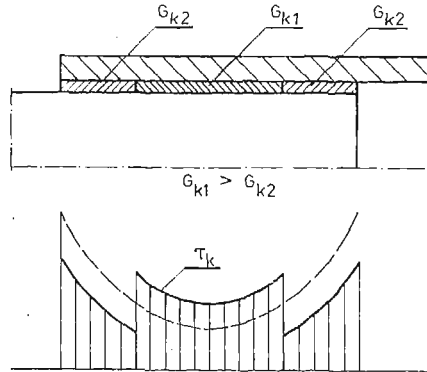
Z otrzymanej zależności (42) łatwo można odczytać wpływ każdego z występujących w niej parametrów charakteryzujących połączenie. Założenie np. doskonałej sztywności dla materiałów łączonych elementów (przyjęcie $G = \infty$) daje funkcję $G_k(\xi) = G_{k \max} = \text{const}$. Przykładowe przebiegi funkcji $G_k(\xi)$ dla połączeń walcowych elementów stalowych i duralowych, przy uwzględnieniu dwóch różnych grubości g warstwy kleju oraz trzech różnych długości l połączenia (przy stałym stosunku $l:r = 2$) przedstawiono na rys. 10. Wskazują one na ilościowy wpływ parametrów materiałowych i konstrukcyjnych. Łatwo zauważyć, że wpływ ten jest istotny.

Praktyczne wykonanie połączenia walcowego z warstwą kleju o współczynniku sprężystości poprzecznej zmieniającym się według wyznaczonej funkcji (42) jest oczywiście



Rys. 10. Optymalna zmiana współczynnika sprężystości poprzecznej kleju na długości połączenia walcowego: a) i b) — dla elementów stalowych, c) i d) — dla elementów z duraluminium

niemożliwe. Pewne korzystne efekty praktyczne, w postaci obniżenia naprężeń szczytowych w skrajnych przekrojach połączenia, można osiągnąć przez zastosowanie klejów o dwóch różnych wartościach G_k , przy czym klej o większej sztywności (G_{k1}) należy dać w części środkowej, a o mniejszej sztywności (G_{k2}) — w częściach skrajnych połączenia (rys. 11).



Rys. 11. Walcove połączenie klejone z zastosowaniem klejów o dwóch różnych współczynnikach sprężystości poprzecznej: a) schemat połączenia, b) rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju

6. Optymalna długość połączenia

Długość l połączenia występująca jako parametr w funkcjach (35) i (42) określających optymalną zmianę grubości $g(\xi)$ warstwy oraz współczynnika sprężystości poprzecznej $G(\xi)$ kleju, ma istotny wpływ na wartość tych funkcji w skrajnych przekrojach połączenia. Im mniejsza jest długość, tym łatwiejsza jest realizacja połączenia optymalnego w podanym wyżej sensie.

Wytrzymałość połączenia klejonego powinna być co najmniej równa wytrzymałości łączonych elementów. Maksymalny moment skręcający wałek musi spełniać warunek

$$(43) \quad M_s \leq k_s W_o = k_s \frac{\pi r^3}{2},$$

gdzie k_s oznacza dopuszczalne naprężenie na skręcanie dla materiału wałka.

Przy założeniu równomiernego rozkładu naprężeń stycznych w warstwie kleju, maksymalny moment skręcający walcowe połączenie

$$(44) \quad M_k = k_t \cdot 2\pi r^2 l,$$

gdzie k_t oznacza dopuszczalne naprężenie na ścinanie dla kleju.

Wytrzymałość połączenia będzie równa wytrzymałości wałka jeżeli

$$(45) \quad k_t 2\pi r^2 l = k_s \frac{\pi r^3}{2}.$$

Stąd optymalna długość połączenia będzie równa

$$(46) \quad l_{opt} = \frac{r}{4} \frac{k_s}{k_t},$$

a optymalny stosunek długości do promienia połączenia

$$(47) \quad \left(\frac{l}{r}\right)_{\text{opt}} = \frac{k_s}{4k_t}$$

Przyjmując dla klejów epoksydowych na podstawie badań własnych [6] $k_t = (1 \div 2)10^7$ [N/m²] oraz dla stali konstrukcyjnej $k_s = (8 \div 12)10^7$ [N/m²] otrzymuje się na podstawie (47)

$$(48) \quad \left(\frac{l}{r}\right)_{\text{opt}} = 1 \div 3.$$

Jeżeli

$$(49) \quad \frac{l}{r} > \frac{\tau_{pt}}{4k_t} = \frac{0,58R_e}{4k_t},$$

gdzie τ_{pt} — granica plastyczności przy czystym ścinaniu (według hipotezy Hubera $\tau_{pt} = 0,58 R_e$), wałek zacznie się odkształcać plastycznie. Oczywiście w takim przypadku przedstawiona teoria traci ważność.

7. Badania doświadczalne

Przedstawione powyżej rozważania i uzyskane wyniki stanowią teoretyczną podstawę do optymalnego kształtowania osiowo symetrycznych połączeń klejonych obciążonych momentem skręcającym. Należy jednak zaznaczyć, że przedstawiona teoria odnosi się do modelu połączenia, dla którego przyjęto szereg założeń upraszczających, przyjmowanych powszechnie w teorii wytrzymałości materiałów.

Dla dokonania pełnej miarodajnej oceny uzyskanych wyników rozważań teoretycznych, konieczne jest poddanie ich doświadczalnej weryfikacji. Przeprowadzenie jednakże odpowiedniego doświadczenia nastrocza zasadnicze trudności techniczne, gdyż nie są znane metody pomiaru naprężeń i odkształceń w cienkiej spoinie klejowej połączenia walcowego.

Dla uzyskania pewnych informacji o wytrzymałości osiowo-symetrycznych połączeń klejonych przeprowadzono niszczącą próbę skręcania dla 5 serii różnie ukształtowanych próbek, jak w tablicy 3. Średnica czopa, długość połączenia i grubość warstwy były dla wszystkich serii próbek jednakowe i wynosiły odpowiednio: $d = 14$ mm, $l = 10$ mm, $g = 0,05$ mm. Próbki w poszczególnych seriach różniły się średnicą zewnętrzną tulejki lub przebiegiem jej zmienności na długości połączenia. Próbki skręcano w specjalnym przyrządzie [6] na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej. Wyznaczono doraźną wartość momentu skręcającego $M_{s \max}$ niszczącego połączenie, a na jego podstawie obliczono średnią wytrzymałość na ścianie R_{tk} kleju oraz maksymalne naprężenie skręcające $\tau_{s \max}$ w przekroju wałka. Posłużono się przy tym następującymi wzorami:

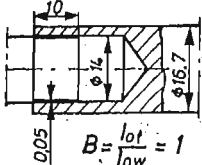
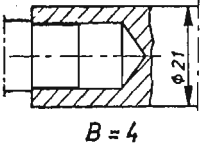
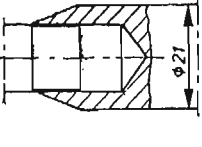
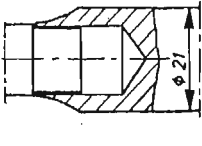
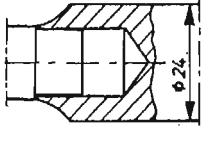
$$(50) \quad R_{tk} = \frac{2M_{s \max}}{\pi l d^2}, \quad \tau_{s \max} = \frac{M_{s \max}}{W_0} = \frac{16M_{s \max}}{\pi d^3}.$$

Badania przeprowadzono dla dwóch klejów: Epidian 57+Z1 (100:10 cz. wag) oraz Epidian 100. Wyniki próby podano w tablicy 3.

Uzyskane wyniki próby nie mogą stanowić podstawy do uogólnień, pozwalają jednak na odnotowanie pewnych uwag i wniosków o znaczeniu praktycznym.

Tablica 3

Wyniki próby skręcania osiowo symetrycznych
połączeń klejonych

Nr serii	Rysunek połączenia	Nr próbki	Epidian 57+Z1			Epidian 100		
			M_{smax}	R_{tkl}	T_{smax}	M_{smax}	R_{tkl}	T_{smax}
			N·m	N/mm ²	N/mm ²	N·m	N/mm ²	N/mm ²
I		1	113,7	36,9	212	178,0	58,0	331
		2	112,5	36,5	209	180,0	58,1	334
		3	111,3	36,2	206	173,2	56,3	321
		średn.	112,5	36,5	209	177,0	57,6	329
II		1	106,2	34,5	197	173,7	56,5	322
		2	115,0	37,4	214	172,5	56,2	320
		3	110,0	35,7	204	179,3	58,3	333
		średn.	110,4	35,9	205	175,5	57,0	325
III		1	115,5	37,5	215	176,2	57,2	327
		2	112,0	36,3	208	182,5	59,4	339
		3	113,7	37,0	211	177,0	57,5	328
		średn.	113,7	36,9	211	178,6	58,1	331
IV		1	120,0	39,0	221	189,2	61,5	351
		2	131,2	42,6	246	180,5	58,7	335
		3	118,7	38,5	221	185,8	60,4	344
		średn.	113,3	40,0	229	185,2	60,2	343
V		1	121,2	39,2	225	184,0	59,7	341
		2	116,2	37,7	216	188,0	61,0	348
		3	130,0	42,2	241	185,0	60,2	343
		średn.	122,5	39,8	227	185,7	60,3	344

1. Badane połączenia klejone o nieznaczącej długości ($l = 0,71d$) wykazały dużą wytrzymałość na obciążenia doraźne momentem skręcającym, w stosunku do wytrzymałości łączonych elementów stalowych. Zniszczenie spoiny klejonej występowało przy maksymalnych naprężeniach skręcających wałek wynoszących:

$$\text{dla Epidianu 57+Z1} \quad \tau_{smax} = 197 \div 246 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \left(\sigma_{red} = 341 \div 425 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right),$$

$$\text{dla Epidianu 100} \quad \tau_{smax} = 320 \div 351 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \left(\sigma_{red} = 553 \div 607 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right).$$

Badania przeprowadzono na próbkach ze stali o stosunkowo wysokiej granicy plastyczności $R_e = 650 \text{ N/mm}^2$.

2. Wytrzymałość doraźna połączeń uzyskanych przy użyciu kleju Epidian 100 była około 50% wyższa od takich samych połączeń uzyskanych przy użyciu Epidianu 57+Z1.

3. Wartości momentów $M_{s, \max}$ (tabl. 3) niszczących połączenie dla wszystkich 5 serii próbek klejonych tym samym klejem różnią się nieznacznie. Połączenia z tulejką o zmiennym przekroju (serie III, IV i V) wykazały tylko nieznacznie wyższą wytrzymałość od połączeń z tulejką o stałym przekroju (serie I i II). Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że doświadczenie nie potwierdza uzyskanych wyników rozważań teoretycznych. Głębsza analiza zagadnienia, oparta na znajomości charakterystyk ścinania ($\gamma_k = f(\tau_k)$) użytych klejów, pozwala na pełne wyjaśnienie tej pozornej niezgodności i prowadzi do wniosku, że wynik doraźnej niszczącej próby skręcania połączenia nie może być w tym przypadku użyty jako kryterium rozstrzygające o słuszności podanej teorii.

Z wykonanych obliczeń według [5] wynika, że współczynnik spiętrzenia naprężeń

$\left(\alpha_k = \frac{\tau_{k \max}}{\tau_{k \text{śr}}} \right)$ w spoinie klejowej w zakresie odkształceń sprężystych wynosi:

dla próbek serii I — $\alpha_k = 2,0$,

dla próbek serii II — $\alpha_k = 2,4$.

Badania doświadczalne wykazały [6], że ostateczne zniszczenie przy czystym ścinaniu spoin klejowych z Epidianu 57+Z1 oraz Epidianu 100, zachodzi przy znacznych odkształceniach plastycznych tych klejów. Pomimo więc początkowo nierównomiernego rozkładu naprężeń stycznych w kleju na długości połączenia w próbkach serii I i II, w miarę wzrostu maksymalnych naprężeń i osiągnięcia przez nie granicy plastyczności, następuje znaczne wyrównanie rozkładu naprężeń przed ostatecznym zniszczeniem. Ten fakt wyjaśnia całkowicie uzyskane podczas próby w przybliżeniu jednakowe wartości momentów niszczących dla wszystkich serii przebadanych próbek.

Istotną zaletą zaproponowanych w pracy połączeń optymalnych jest to, że równomierny rozkład naprężeń stycznych w warstwie kleju występuje w zakresie odkształceń sprężystych. Ma to podstawowe znaczenie praktyczne podczas pracy tego typu połączeń, zwłaszcza przy obciążeniach zmiennych, zmęczeniowych.

Literatura cytowana w tekście

1. K. GRUDZIŃSKI, T. BURDA, L. ŁABUĆ, *Wyznaczenie stanu naprężenia w osiowo-symetrycznym połączeniu klejonym obciążonym momentem skręcającym*, Mech. Teoret. Stos., 4, 15 (1977).
2. K. GRUDZIŃSKI, J. LORKIEWICZ, *Doświadczenia własne w stosowaniu klejenia metali*, Krajowa Konf. Nauk.-Techn., nt.: Problemy Wytrzymałości Konstrukcji Klejonych, Szczecin 1972.
3. K. GRUDZIŃSKI, *Optymalizacja walcowego połączenia klejonego obciążonego momentem skręcającym*, ibid.
4. K. GRUDZIŃSKI, J. LORKIEWICZ, *Wytrzymałość na skręcanie klejonych połączeń walcowych*, Przegląd Mechaniczny, 8, 29 (1970).
5. K. GRUDZIŃSKI, J. LORKIEWICZ, *Analiza naprężeń w walcowej spoinie klejowej*, Krajowa Konf. Nauk.-Techn., nt. Problemy Wytrzymałości Konstrukcji Klejonych, Szczecin 1972.
6. K. GRUDZIŃSKI, *Badanie własności mechanicznych klejów i połączeń klejonych przy czystym ścinaniu*, ibid.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КЛЕЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ С ОПТИМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КЛЕЮЩЕМ СЛОЕ

Рассмотрена задача об оптимальном проектировании осесимметричного клеевого соединения, нагруженного крутящим моментом. В принятой модели соединяемые элементы и слой клея рассматриваются как упруго деформируемые тела. Определены условия, при которых максимальное касательное напряжение в клеевом слое принимает минимальное значение, равное средней величине. Даны три способа осуществления такого типа соединений, путем:

1. изменения поперечного сечения соединяемых элементов,
 2. изменения толщины слоя клея,
 3. применения клеев с различными упругими свойствами.
- В заключение обсуждены результаты экспериментальных исследований.

Summary

AXI-SYMMETRIC GLUE JOINTS WITH OPTIMAL SHEARING STRESS DISTRIBUTION WITHIN THE GLUE LAYER

The paper presents the problem of optimum design of an axi-symmetric glue joint loaded by a torque. In the model assumed the elements of the joint and the glue layer are treated as elastic deformable bodies. The conditions are determined under which the maximum shearing stresses in the glue layer attain the minimum value equal to the mean value. Three methods of construction of such joints are proposed, based on:

- (1) variable cross-section of the elements of the joints;
- (2) variable thickness of the glue layer;
- (3) application of glues with various elastic properties. In conclusion, experimental results are discussed.

INSTYTUT INŻYNIERII MATERIAŁOWEJ
POLITECHNIKI SZCZECIŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 stycznia 1978 r.

O PEWNYM ZJAWISKU W PROCESIE DETONACJI ZAWIESINOWYCH MATERIAŁÓW WYBUCHOWYCH ZANURZONYCH W HYDROSTATYCZNYM POLU CIŚNIENIA

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W ostatnich latach w światowym górnictwie odkrywkowym i podziemnym dość szeroko stosuje się do urabiania kopalin zawiesinowe materiały wybuchowe (ZMW) [1-3]. Technologię tego rodzaju materiału wybuchowego opracowano również w Polsce (Watex) [4, 5]. Aktualnie trwają próby nad wdrożeniem odpowiednich odmian Watexu w górnictwie węglowym i miedziowym. Z powodzeniem można go również stosować w badaniach geosejsmicznych.

Cechą zmienną zawiesinowych materiałów wybuchowych jest to, że zawierają one w swoim składzie dość dużą ilość wody (10 - 30%) i odpowiednią ilość pęcherzyków powietrza. Składnik gazowy spełnia tutaj, w normalnych warunkach atmosferycznych, rolę uczulacza. Pęcherzyki powietrza są obejmowane przez front fali detonacyjnej (pik chemiczny) i koncentrycznie ściskane w sposób uderzeniowy. Powoduje to szybki (skokowy) wzrost temperatury składnika gazowego [6]. W ten sposób tworzą się w materiale wybuchowym «gorące punkty — ogniska», które podtrzymują proces detonacji. W przypadku, gdy pęcherzyki graniczą z fazą stałą ZMW, wówczas następuje wzrost temperatury przy odbiciu się fali uderzeniowej od granicy faz [7].

Okazuje się jednak, że w pewnych warunkach zawartość powietrza w ZMW utrudnia zainicjowanie procesu detonacji. Zjawisko to zaobserwowano w czasie przeprowadzonych na terenie kraju eksperymentów geosejsmicznych detonując zapowietrzony ZMW w głębokich (kilkudziesięciometrowych) otworach zawodnionych.

W tych warunkach słup wody wytwarza w ładunku ZMW wstępne ciśnienie hydrostatyczne, które komprymuje zawarte w nim powietrze, zmieniając tym samym warunki inicjacji detonacji. Do pobudzenia ZMW w tych warunkach jest potrzebny odpowiednio silny impuls zewnętrzny (silny detonator).

Dla poznania fizyki tego ciekawego zjawiska potrzebna jest, między innymi, analiza procesu wnikania impulsu ciśnienia w ośrodek gazowy w funkcji początkowego ciśnienia panującego w tym ośrodku. Wstępną analizę tego problemu przy założeniu adiabatycznego sprężania i rozprężania ośrodka w stanie początkowym, rozpatrzono w [8]. W niniejszej pracy rozpatrzmy ten problem wszechstronnie, uwzględniając wszystkie warunki graniczne, jakie w praktyce inżynierskiej mogą wystąpić.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale drugim formułujemy problem, a w trzecim podajemy ogólne zamknięte jego rozwiązanie. W rozdziale czwartym analizujemy otrzymane wzory i badamy problem w sposób ilościowy.

2. Sformułowanie problemu

W niniejszej pracy zbadamy głębokość wnikania stacjonarnej płaskiej fali uderzeniowej w politropowy ośrodek gazowy, wygenerowanej prostokątnym zewnętrznym impulsem ciśnienia lub jednostajnym ruchem brzegu (tłoka). Ciśnienie początkowe w gazie p_0 traktujemy jako zmienny parametr stanu. Gęstość początkową ϱ_0 wyrażamy za pomocą następujących wzorów:

$$(2.1) \quad \frac{\varrho_0}{\varrho_0^*} = \left(\frac{p_0}{p_0^*} \right)^{1/\gamma}$$

dla procesu adiabatycznego oraz

$$(2.2) \quad \frac{\varrho_0}{\varrho_0^*} = \frac{p_0}{p_0^*}$$

dla procesu izotermicznego, gdzie p_0^* i ϱ_0^* są parametrami stanu gazu w warunkach normalnych ($p_0^* = 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$, $T_0^* = 300 \text{ K}$).

Ruchem ośrodka w przedstawionym ujęciu rządzą następujące równania wynikające z praw zachowania:

— prawo zachowania impulsu

$$(2.3) \quad v_{,t} = - \frac{1}{\varrho_0} p_{,x},$$

— prawo zachowania masy

$$(2.4) \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} = 1 + u_{,x},$$

oraz równanie stanu dla gazu doskonałego

$$(2.5) \quad \frac{p}{p_{01}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{01}} \right)^\gamma.$$

Z równań (2.3) - (2.5), po wyeliminowaniu funkcji p , ϱ i v oraz uwzględnieniu, że $v = u_{,t}$, otrzymujemy

$$(2.6) \quad u_{,tt} = a^2 u_{,xx} - \frac{\varrho_0^{\gamma-1}}{(1+u_{,x})^\gamma} \left(\frac{p_{01}}{\varrho_{01}^\gamma} \right)_{,x},$$

gdzie a oznacza prędkość rozprzestrzeniania się zaburzeń za frontem fali uderzeniowej. Określamy ją z wzoru

$$(2.7) \quad a = \left[\frac{\gamma p_{01} \varrho_0^{\gamma-1}}{\varrho_{01}^\gamma (1+u_{,x})^{\gamma+1}} \right]^{1/2}$$

gdzie p_{01} i ϱ_{01} oznaczają parametry na froncie fali uderzeniowej, x i t są współrzędnymi Lagrange'a. Poza tym na froncie fali uderzeniowej zgodnie z prawami zachowania mamy:

— prawo zachowania masy

$$(2.8) \quad \varrho_0 d = \varrho_{01} (d - v_{01}),$$

— prawo zachowania impulsu

$$(2.9) \quad \varrho_0 d v_{01} = p_{01} - p_0,$$

gdzie d oznacza prędkość propagacji frontu fali uderzeniowej.

Dla domknięcia problemu należy dołączyć jeszcze równanie adiabaty uderzeniowej dla gazu doskonałego:

$$(2.10) \quad \frac{p_{01}}{p_0} = \frac{\rho_{01}(\gamma+1) - \rho_0(\gamma-1)}{\rho_0(\gamma+1) - \rho_{01}(\gamma-1)}$$

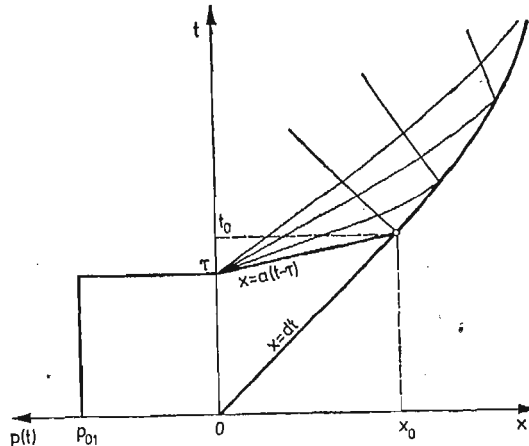
lub

$$(2.11) \quad \frac{\rho_{01}}{\rho_0} = \frac{(\gamma+1)p_{01} + (\gamma-1)p_0}{(\gamma-1)p_{01} + (\gamma+1)p_0}$$

Tym samym problem został jednoznacznie sformułowany.

3. Rozwiązanie problemu

Falowy obraz rozwiązania sformułowanego w poprzednim rozdziale problemu ma postać pokazaną na rys. 1. Przyłożony do brzegu w sposób nagły prostokątny impuls ciśnienia generuje w gazie stacjonarną falę uderzeniową, która rozprzestrzenia się ze stałą prędkością $d(x = dt)$. Po zakończeniu działania impulsu, w chwili $t = \tau$ od brzegu zaczyna się propagować pęk prostych fal rozrzedzenia. Pierwsza z nich, o równaniu $x = a(t - \tau)$, dopędza front stacjonarnej fali uderzeniowej $x = dt$ w chwili $t = t_0$. Od tego momentu poczynając następuje stopniowe zanikanie frontu fali uderzeniowej, powodowane kolejnymi falami rozrzedzenia.



Rys. 1

Z przedstawionego obrazu falowego badanego procesu wnioskujemy, że wytworzona na brzegu wartość ciśnienia p_{01} wnika w gaz tylko na głębokość x_0 (rys. 1), przy czym czas trwania impulsu prostokątnego maleje proporcjonalnie do głębokości

$$\Delta t = \tau - \frac{a-d}{ad}x$$

i dla $x = x_0$ wynosi 0 (rys. 1).

Zgodnie z tym, co powiedziano we wstępie, przedmiotem rozważań jest problem wnikańia stałego impulsu ciśnienia do wnętrza politropowego ośrodka gazowego. Dlatego też

w konstrukcji rozwiązania ograniczymy się do określenia parametru (głębokości) x_0 dla dwóch rodzajów wymuszeń oraz dwóch stanów początkowych (2.1) i (2.2).

Z obrazu falowego przedstawionego na rys. 1 wynika, że

$$(3.1) \quad x_0 = a(t_0 - \tau), \quad t_0 = x_0/d,$$

a stąd

$$(3.2) \quad x_0 = \frac{a\tau}{\frac{a}{d} - 1},$$

lub w formie bezwymiarowej

$$(3.3) \quad X_0 = \frac{A}{\frac{A}{D} - 1},$$

gdzie

$$(3.4) \quad X_0 = \frac{x_0}{c_0^* \tau}, \quad A = \frac{a}{c_0^*}, \quad D = \frac{d}{c_0^*},$$

$$(3.5) \quad c_0^* = \sqrt{\gamma \frac{p_0^*}{\rho_0^*}}.$$

3.1. Wymuszenie za pomocą prostokątnego impulsu ciśnienia. Indekssem dolnym Q , będziemy oznaczać wielkości dla procesu adiabatycznego (2.1), a indeksem T — dla procesu izotermicznego (2.2).

Zgodnie z wzorami (2.1) - (2.11) oraz (3.3) mamy:

$$(3.6) \quad D_Q = \left[\frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1)P/P_0}{2\gamma} P_0^{1-1/\gamma} \right]^{1/2},$$

$$D_T = \left[\frac{(\gamma - 1)P_0 + (\gamma + 1)P}{2\gamma} P_0^{-1} \right]^{1/2},$$

$$(3.7) \quad A_Q = \left[\frac{P}{P_0^{1/\gamma}} \frac{(\gamma + 1)P/P_0 + \gamma - 1}{(\gamma - 1)P/P_0 + \gamma + 1} \right]^{1/2},$$

$$A_T = \left[\frac{P}{P_0} \frac{(\gamma + 1)P/P_0 + \gamma - 1}{(\gamma - 1)P/P_0 + \gamma + 1} \right]^{1/2},$$

$$X_{0Q} = \left(\sqrt{\frac{P}{P_0^{1/\gamma}} \left[(\gamma + 1) \frac{P}{P_0} + \gamma - 1 \right]} \right) / \left(\sqrt{2\gamma \frac{P}{P_0}} - \sqrt{(\gamma - 1) \frac{P}{P_0} + \gamma + 1} \right),$$

(3.8)

$$X_{0T} = \left(\sqrt{\frac{P}{P_0} \left[(\gamma + 1) \frac{P}{P_0} + \gamma - 1 \right]} \right) / \left(\sqrt{2\gamma \frac{P}{P_0}} - \sqrt{(\gamma - 1) \frac{P}{P_0} + \gamma + 1} \right) = \sqrt{P_0^{1/\gamma - 1} X_{0Q}},$$

gdzie

$$(3.9) \quad P = \frac{p_{01}}{p_0^*}, \quad P_0 = \frac{p_0}{p_0^*}.$$

Parametr P charakteryzuje intensywność fali uderzeniowej. Dla fal intensywnych, tj. dla

$$(3.10) \quad \frac{P}{P_0} \gg \frac{\gamma+1}{\gamma-1},$$

wzory (3.6) - (3.8) można zapisać w uproszczonej postaci, mianowicie:

$$(3.11) \quad D_Q = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P}{P_0^{1/\gamma}}}, \quad D_T = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P}{P_0}}$$

$$(3.12) \quad A_Q = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P}{P_0^{1/\gamma}}}, \quad A_T = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P}{P_0}}$$

$$(3.13) \quad X_{0Q} = \frac{\sqrt{(\gamma+1) \frac{P}{P_0^{1/\gamma}}}}{\sqrt{2\gamma} - \sqrt{\gamma-1}}, \quad X_{0T} = \frac{\sqrt{(\gamma+1) \frac{P}{P_0}}}{\sqrt{2\gamma} - \sqrt{\gamma-1}}$$

Analizę wyprowadzonych wzorów zajmiemy się w następnym rozdziale.

3.2. Wymuszenie za pomocą jednostajnego ruchu brzegu (tłoka). W pierwszej kolejności określmy ciśnienie na froncie fali wywołane jednostajnym ruchem brzegu (tłoka). Zakładamy, że brzeg porusza się ze stałą prędkością $v_0 = \text{const}$. Wówczas z wzorów (2.8) - (2.11) otrzymujemy

$$(3.14) \quad p_{01}^2 - \frac{(\gamma+1)v_{01}^2 \rho_0 + 4p_0}{2} p_{01} - \frac{(\gamma-1)v_{01}^2 p_0 \rho_0 - 2p_0^2}{2} = 0,$$

lub

$$(3.15) \quad p_{01} = \frac{(\gamma+1)\rho_0 v_{01}^2 + 4p_0}{4} \pm \frac{(\gamma+1)\rho_0 v_{01}^2}{4} \sqrt{1 + \frac{16\gamma p_0}{(\gamma+1)^2 \rho_0 v_{01}^2}},$$

W badanym przypadku fizyczny sens posiada rozwiązanie tylko ze znakiem „+”. Biorąc w rozwiązaniu (3.15) znak „-” i zmierzając z $v_{01} \rightarrow \infty$ otrzymujemy, że $p_{01} \rightarrow p_0$, co jest niezgodne z fizyką badanego zjawiska. Ostatecznie, po uwzględnieniu, że $v_{01} = v_0$ i wykorzystaniu wielkości bezwymiarowych (3.9), otrzymujemy

$$(3.16) \quad \left(\frac{P}{P_0}\right)_Q = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)V_0^2}{4} P^{1/\gamma-1} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(\gamma+1)^2 V_0^2} P^{1-1/\gamma}}\right),$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_T = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)V_0^2}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(\gamma+1)^2 V_0^2}}\right),$$

gdzie

$$(3.17) \quad V_0 = \frac{v_0}{c_0^*}.$$

Dalej na podstawie wzorów (2.8) - (2.11) oraz (2.1) i (2.2) mamy

$$(3.18) \quad D_Q = D_T = \frac{(\gamma+1) \frac{P}{P_0} + \gamma - 1}{2 \left(\frac{P}{P_0} - 1\right)} V_0;$$

$$(3.19) \quad A_Q = \left[\frac{P}{P_0^{1/\gamma}} \frac{(\gamma+1) \frac{P}{P_0} + \gamma - 1}{(\gamma-1) \frac{P}{P_0} + \gamma + 1} \right]^{1/2},$$

$$(3.20) \quad A_T = \left[\frac{P}{P_0} \frac{(\gamma+1) \frac{P}{P_0} + \gamma - 1}{(\gamma-1) \frac{P}{P_0} + \gamma + 1} \right]^{1/2},$$

$$(3.20) \quad X_{0Q} = \frac{A_Q}{\frac{A_Q}{D_Q} - 1}, \quad X_{0T} = \frac{A_T}{\frac{A_T}{D_T} - 1}.$$

Dla fali intensywnej otrzymujemy

$$(3.21) \quad D_Q = D_T = \frac{\gamma+1}{2} V_0,$$

$$(3.22) \quad A_Q = A_T = (\gamma+1) \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} V_0,$$

$$(3.23) \quad X_{0Q} = X_{0T} = \frac{(\gamma+1) \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} V_0}{2 \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)} - 1}}$$

Przejdziemy obecnie do analizy wyprowadzonych wzorów i omówienia wyników liczbowych.

4. Analiza zmiany parametrów X_{0Q} i X_{0T}

W pierwszej kolejności omówimy przypadek wymuszenia dynamicznego (prostokątnym impulsem ciśnienia). Z postaci wzorów (3.8) wynika, że funkcje $X_{0Q}(P_0)$ i $X_{0T}(P_0)$ w przedziale $0 < P_0 < P$ posiadają pojedyncze minimum. Na przykład funkcja X_{0Q} posiada minimum przy

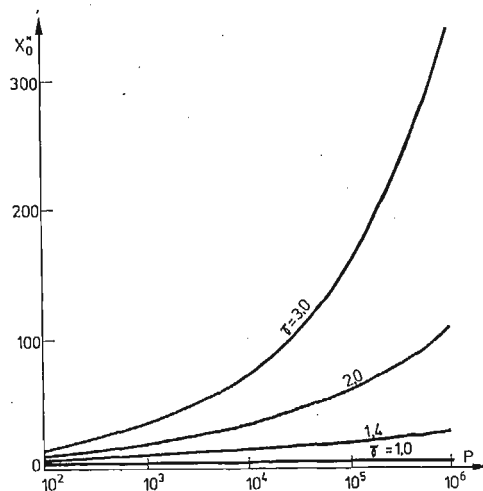
$$(4.1) \quad P_0 = \left[\sqrt{3\gamma^2(\gamma^2-1)+1} - (\gamma^2-\gamma-1) \right] \frac{P}{(\gamma+1)^3} \equiv P_0^*.$$

Dla konkretnych wartości wykładnika politropy odpowiednio mamy:

$$(4.2) \quad \begin{array}{lll} \gamma = 1, & P_0^* = 0,25P, & X_{0Q}(P_0^*) \equiv X_0^* = 4, \\ \gamma = 1,4, & P_0^* = 0,21830P, & X_0^* = 3,81373P^{1/7}, \\ \gamma = 2, & P_0^* = 0,18825P, & X_0^* = 3,38026P^{1/4}, \\ \gamma = 3, & P_0^* = 0,15205P, & X_0^* = 3,40271P^{1/3}. \end{array}$$

Zmianę minimalnej głębokości wnikania impulsu ciśnienia X_0^* w funkcji intensywności fali uderzeniowej P pokazujemy na rys. 2. Widać tutaj bardzo intensywny wpływ na minimalną głębokość wnikania stacjonarnej fali uderzeniowej wykładnika politropy gazu γ .

Im bardziej jest gaz ściśliwy (małe γ), tym mniejsza jest głębokość wnikania. Dla gazu izotermicznego ($\gamma = 1$) minimalna głębokość wnikania nie zależy od intensywności fali P i wynosi $X_0^* = 4$.



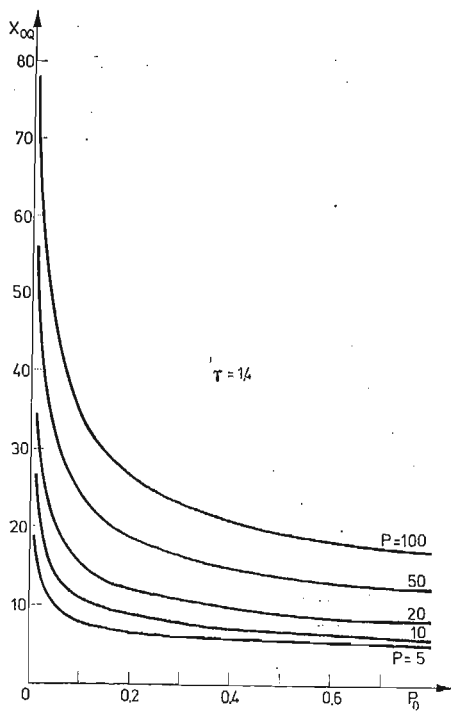
Rys. 2

Zgodnie z przepisem funkcyjnym (3.8), wielkości X_{0Q} i X_{0T} posiadają dwie asymptoty (4.4)

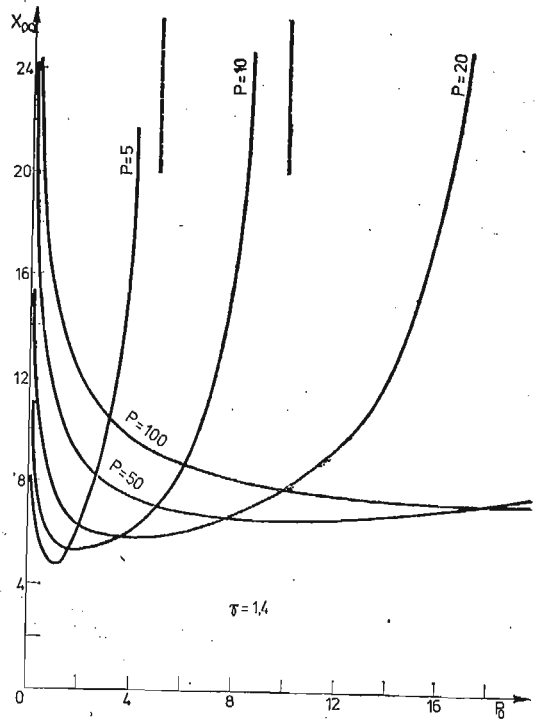
$$P_0 = 0 \text{ i } P_0 = P.$$

Pierwsza z nich odpowiada przypadkowi fali uderzeniowej propagującej się w silnie rozrzedzonym gazie, natomiast druga reprezentuje przejście fali uderzeniowej w falę akustyczną. W obydwóch wymienionych przypadkach punkt przecięcia się prostych $x = dt$ i $x = a(t - \tau)$ (patrz rys. 1) przesuwa się do nieskończoności.

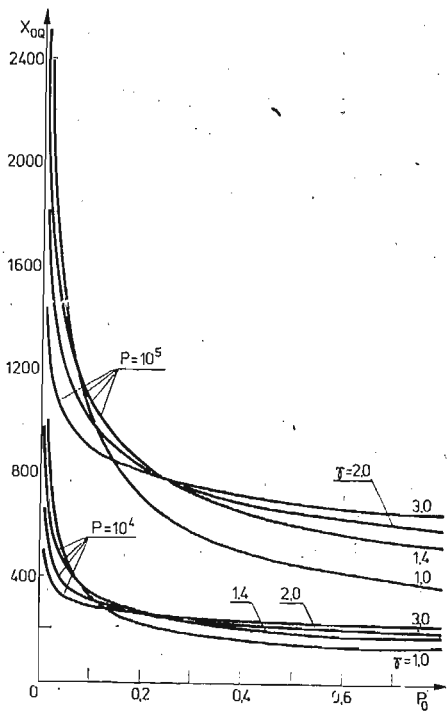
Na rysunkach 3 i 4 pokazujemy przykładowy charakter zmian wielkości X_{0Q} w funkcji P_0 dla kilku wartości intensywności fali uderzeniowej P (rys. 3) oraz dla kilku charakterystycznych wartości wykładnika politropy γ (rys. 4). Rysunki oznaczone literą a zawierają informację o głębokości wnikania stacjonarnej fali uderzeniowej w ośrodek izentropowo rozrzedzony ($P_0 < 1$), natomiast literą b — w ośrodek izentropowo zagęszczony ($P_0 > 1$). Charakterystyczną cechą zamieszczonych wykresów jest bardzo intensywny gradient malenia wielkości X_{0Q} przy wzroście parametru P_0 w granicach od 1 - 5, a w szczególności dla fal o dużych intensywnościach. W przypadku izotermicznego początkowego sprężania ośrodka proces malenia głębokości wnikania impulsu stałego ciśnienia ulega dalszej intensyfikacji (porównaj wielkości X_{0Q} i X_{0T} na rys. 5b). Na przykład wzrost ciśnienia, początkowego do 4 atmosfer powoduje dwukrotne zmniejszenie głębokości wnikania impulsu ciśnienia, a to z kolei prowadzi do dwukrotnego obniżenia energii wewnętrznej gazu, wpompowanej doń przez warunek brzegowy. Jest to właśnie główna przyczyna, powodująca obniżenie zdolności detonacyjnych zawieszinowych materiałów wybuchowych w głębokich otworach zawodnionych. Wypływa stąd praktyczny wniosek, że konstrukcja ładunków powinna być taka, aby obudowa zewnętrzna izolowała ZMW od hydrostatycznego ciśnienia słupa wody.



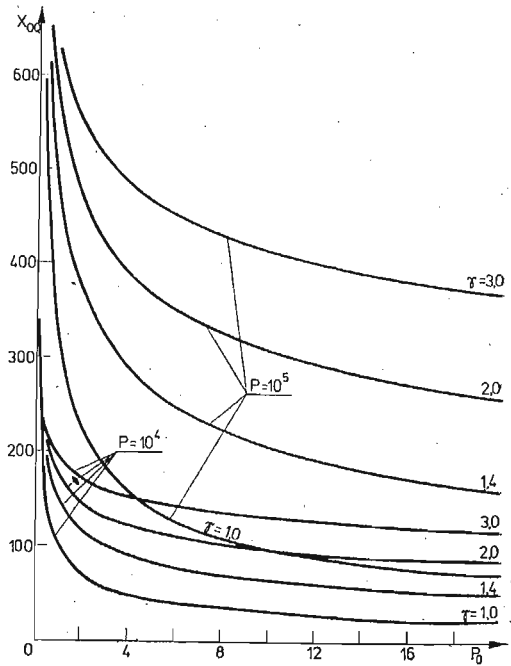
Rys. 3a



Rys. 3b

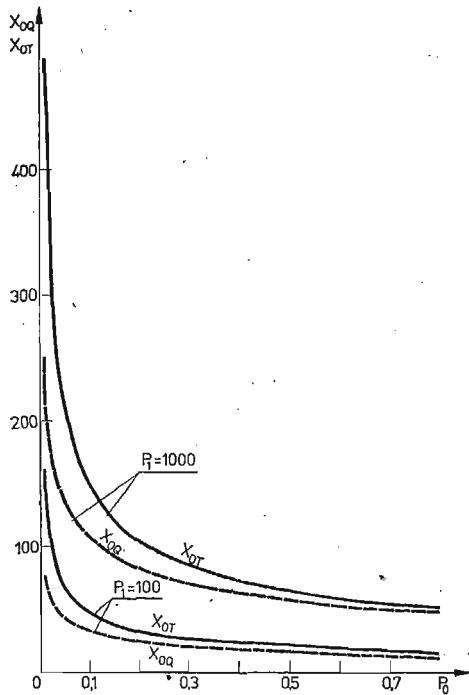


Rys. 4a

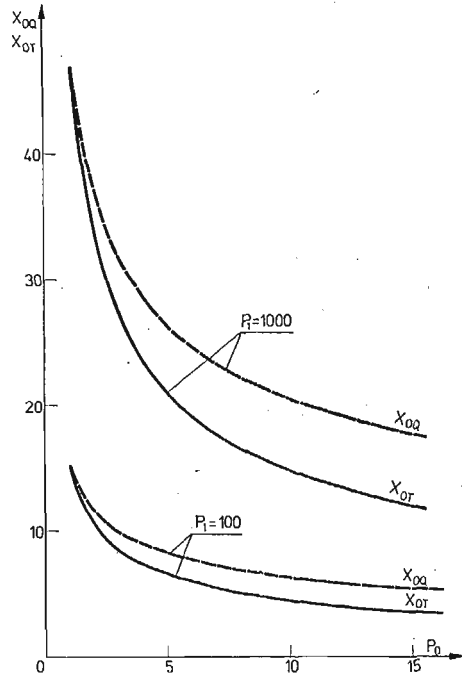


Rys. 4b

Istotny wpływ na zmianę parametru X_{0Q} posiada wykładnik politropy γ (rys. 4a i b), przy czym im bardziej gaz jest ściśliwy (mniejszy wykładnik politropy), tym intensywniej meleje głębokość wnikania stacjonarnej fali uderzeniowej. Na przykład dla gazu izotermicznego ($\gamma = 1$) nadciśnienie 4 atmosfer zmniejsza głębokość wnikania o połowę w stosunku do wnikania przy 1 atmosferze.



Rys. 5a

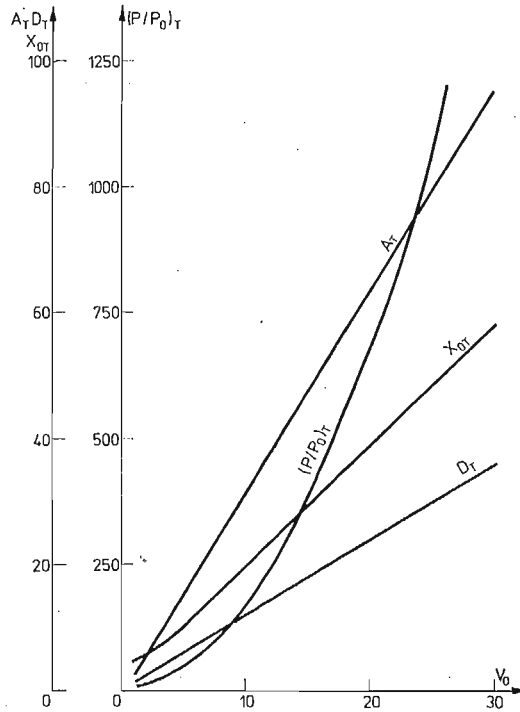


Rys. 5b

W przypadku podciśnienia ($P_0 < 1$) głębokość wnikania impulsu rośnie wraz ze wzrostem podciśnienia, przy czym największe przyrosty mają miejsce dla $P_0 < 0,1$ (rys. 3a, 4a i 5a). Przypadek podciśnienia nie występuje w naturalnych warunkach detonowania MW. Może być realizowany w celach badawczych w warunkach laboratoryjnych.

Przejdziemy obecnie do analizy wzorów wyprowadzonych dla wymuszenia kinematycznego. Jak wynika z wzorów (3.16) - (3.20) przy izotermicznym sprężaniu gazu przed frontem fali uderzeniowej, głębokość wnikania impulsu ciśnienia zależy tylko od rodzaju gazu (wykładnika politropy γ) i od prędkości ruchu brzegu (tłoka). Natomiast nie zależy od początkowego ciśnienia p_0 . Występuje tutaj zasadnicza różnica w stosunku do wymuszenia dynamicznego (impulsem ciśnienia). Okazuje się, że zmiana parametru P_0 powoduje odpowiednio proporcjonalną zmianę wielkości P i stosunek $P/P_0 = \text{const}$, zatem X_{0T} nie zależy od P_0 . Dla fal intensywnych opisane własności wnikania impulsu obejmują również przypadek adiabatycznego sprężania początkowego (wzory (3.21) - (3.23)). Zwróćmy uwagę na fakt, że dla fal intensywnych (a takie występują w procesie inicjacji detonacji) głębokość

wynikania impulsu zależy w sposób liniowy od prędkości ruchu tłoka. Analizując wykresy zamieszczone na rys. 6, za fale intensywne można uważać zaburzenia wygenerowane ruchem tłoka z prędkością $v_0 \geq 4c_0$ ($V_0 \geq 4$).



Rys. 6

Reasumując wyniki niniejszej pracy można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Głębokość wnikania zewnętrznego prostokątnego impulsu ciśnienia w gaz politropowy w sposób istotny zależy od ciśnienia początkowego gazu. Ze wzrostem tego ciśnienia głębokość intensywnie maleje.

2. Dla każdej intensywności fali P , przy ustalonym wykładniku politropy γ , istnieje ściśle określona wartość ciśnienia początkowego P_0 , przy którym głębokość wnikania (parametr X_0^*) prostokątnego impulsu ciśnienia w gazowy ośrodek politropowy jest najmniejsza.

3. Głębokość wnikania stacjonarnych zaburzeń w gaz politropowy wymuszonych jednostajnym ruchem tłoka (wymuszenie kinematyczne) nie zależy od początkowego ciśnienia w gazie. Głębokość wnikania silnych zaburzeń stacjonarnych jest proporcjonalna do prędkości tłoka.

4. Zbadane w pracy teoretycznie i potwierdzone eksperymentami zjawisko jest główną przyczyną powodującą obniżenie zdolności detonacyjnych zawieszinowych materiałów wybuchowych w głębokich otworach zawodzionych.

5. Konstrukcja ładunków wybuchowych powinna być taka aby obudowa zewnętrzna izolowała ZMW od hydrostatycznego ciśnienia słupa wody.

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. COOK, *The science of high explosives*, New York 1958.
2. R. W. VAN DOLAH, C. M. MASON, D. R. FORSHEY, *Development of slurry explosives for use in potentially flammable gas atmospheres*, Rep. of investigations 7195, US Dep. of the Interior, Bureau of Mines, October 1968.
3. В. Б. ИОФФЕ, Б. А. МЕНЬШИКОВ, *О детонационной способности водонаполненных взрывчатых веществ*, Горное дело, со. 75/32, Москва 1975.
4. M. MACIEJEWSKI, A. MARANDA, J. NOWACZEWSKI, E. WŁODARCZYK, B. ZYGMUND, *О новым materiale wybuchowym typu „Watex”*, Biul. WAT, 25, 12 (1976).
5. A. MARANDA, J. NOWACZEWSKI, A. ROZWADOWSKA, E. WŁODARCZYK, B. ZYGMUNT, *On certain properties explosives type slurry*, J. Techn. Phys., 18, 4 (1977).
6. Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, Ю. П. РАЙЗЕР, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. Москва 1963.
7. M. MACIEJEWSKI, A. MARANDA, J. NOWACZEWSKI, E. WŁODARCZYK, B. ZYGMUNT, *Analiza parametrów odbitej fali uderzeniowej w układzie gaz-ciało stałe*, Rozpr. Inż. (w druku).
8. E. WŁODARCZYK, *The influence of initial pressure on the process of propagation of the stationary pressure pulse in a polytropic gas*, J. Techn. Phys., 19, 3; 1970.

Резюме

О НЕКОТОРОМ ЯВЛЕНИИ В ПРОЦЕССЕ ДЕТОНАЦИИ ВЗВЕШЕННЫХ
ВЗРЫВЧАТЫХ СМЕСЕЙ ПОГРУЖЕННЫХ В ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ
ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ

В работе исследовано влияние начальных и граничных условий (динамического и кинематического типа) на глубину проникания внешнего прямоугольного импульса вглубь политропного газа. Показано аналитически, что в случае внешнего прямоугольного импульса, данного в виде давления ($J = p_1 \tau$, $p_1 = \text{const}$), его глубина проникания в политропный газ существенным образом зависит от начального давления в этом газе. Вместо того, если импульс образуется движением границы (поршень) — такая зависимость не выступает. Обнаруженное явление играет важную роль в процессе инициирования детонации взрывчатых веществ взвешенного типа в глубоких водонаполненных отверстиях.

Summary

ON A PHENOMENON OCCURRING IN THE PROCESS OF DETONATION OF SUSPENSION
EXPLOSIVES IMMERSSED IN A HYDROSTATIC PRESSURE FIELD

The analysis concerns the influence of the initial and boundary conditions (dynamical and kinematical) on the depth of penetration of an external rectangular pulse into a polytropic gas. It is analytically proved that in the case of an external, rectangular pulse of pressure ($J = p_1 \tau$, $p_1 = \text{const}$), its depth of penetration into a polytropic gas substantially depends on the initial pressure acting in that gas. If, however, the pulse is produced by a uniform of the boundary (a piston), such a relationship does not hold. The phenomenon discovered is of primary importance for the process of initiation of detonations in suspension explosives in deep water-filled excavations.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 stycznia 1978 r.

GENEROWANIE REZONANSÓW POBOCZNYCH PRZEZ IMPULSY SIŁ W NIELINIOWYCH UKŁADACH DRGAJĄCYCH*

JÓZEF BAJKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Jak wiadomo, w liniowych dysypacyjnych układach drgających rozwiązania ustalone są jednoznacznie określone przez parametry układu i harmoniczne wymuszenie zewnętrzne. Ustalona odpowiedź układu jest odpowiedzią harmoniczną o częstości siły wymuszającej, gdyż inne składowe odpowiadające drganiom swobodnym są wytlumiane z upływem czasu.

Istotną cechą nieliniowych układów drgających wzbudzanych siłami harmonicznymi jest możliwość istnienia kilku statecznych rozwiązań ustalonych — zależnie od warunków początkowych. Ustalona odpowiedź układu może zatem zawierać oprócz składowej o częstości siły wymuszającej inne składowe harmoniczne, o innych częstościach i znacznie większych amplitudach. Jako przypadki szczególne wymienić tu możemy następujące typy odpowiedzi:

— w odpowiedzi układu dominuje składowa o częstości wymuszenia; odpowiedź ta występuje zarówno w otoczeniu rezonansów głównych, tzn. gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej z częstości własnych układu, jak i z dala od nich,

— w odpowiedzi układu dominuje składowa o częstości będącej wielokrotnością (ultraharmoniczne) lub podwielokrotnością (subharmoniczne) częstości wymuszenia,

— odpowiedź prawie-periodyczną, w której oprócz składowej o częstości wymuszenia wystąpi kilka składowych harmonicznymi o częstościach niewspółmiernych.

Periodyczne odpowiedzi: subharmoniczną i ultraharmoniczną oraz odpowiedź prawie-periodyczną określa się terminem *rezonanse poboczne*. Rezonanse periodyczne występują zarówno w układach o jednym, jak i o wielu stopniach swobody, natomiast rezonanse prawie-periodyczne mogą wystąpić tylko w układach o więcej niż jednym stopniu swobody.

Zadanie zbadania warunków, dla których układ nieliniowy realizuje tę lub inną odpowiedź ustaloną, rozwinęły się w ostatnich latach w osobną gałąź teorii drgań, przybierając nazwę *obszarów przyciągania* [1, 2, 3, 4]. Znaczne zainteresowanie tymi problemami wynika zarówno z naukowo-poznawczego charakteru tego zadania, jak i z potrzeby znajomości tych zagadnień w zastosowaniach inżynierskich. Wiąże się to z faktem, że w zakresach częstości wymuszenia, w których teoria liniowa przewiduje drgania harmoniczne o małych amplitudach, mogą przy pewnych warunkach początkowych, bądź przy-

*¹ Praca wyróżniona II nagrodą na konkursie zorganizowanym przez Oddział Łódzki PTMTS w roku 1977.

padkowych impulsach sił, bądź skokowych zmianach sztywności, mas czy amplitud wymuszenia, pojawić się drgania o innych częstościach i znacznych amplitudach. Zadanie wyznaczania obszarów przyciągania polega na wyznaczeniu obszarów warunków początkowych, przy których po pewnym stanie przejściowym ustala się drganie odpowiadające danemu typowi rezonansu pobocznego lub drganie harmoniczne.

Teoria periodycznych rezonansów pobocznych w układach o jednym stopniu swobody i związanych z nimi obszarów przyciągania jest stosunkowo dobrze znana [3,]. Teoria rezonansów pobocznych w układach o wielu stopniach swobody jest jeszcze słabo rozwinięta, a zagadnienie obszarów przyciągania rezonansów prawie-periodycznych nie było dotychczas rozważane.

Zadaniem niniejszej pracy jest zbadanie, czy impulsy sił przyłożone przypadkowo do układu wymuszanego siłą harmoniczną mogą spowodować zmianę odpowiedzi układu z odpowiedzi harmonicznego o małej amplitudzie (z dala od głównego rezonansu), do odpowiedzi odpowiadającej rezonansowi pobocznemu — ze znaczną amplitudą drgań. Przyjęto założenie, że efektem impulsów sił przyłożonych w chwili t_0 są początkowe prędkości, przy zerowych przemieszczeniach początkowych układu. Odpowiedzi na to pytanie szukano na drodze obliczeń teoretycznych, wykorzystując przybliżone metody analityczne, oraz za pomocą maszyn analogowych wraz z urządzeniami pomiarowo-rejestrującymi. Teoretyczne rozwiązanie zadania dla przypadku rezonansu prawie-periodycznego (dwuczęstościowego) okazało się bardzo złożone i wymagało opracowania specjalnego algorytmu numerycznego. Przy badaniu tego zagadnienia za pomocą maszyn analogowych udało się opracować specjalny układ pomiarowo-rejestrujący, pozwalający na automatyczne wyznaczanie obszarów przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych (na rejestratorze $X-Y$).

2. Ogólne równania ruchu układu

Rozważmy nieliniowy, holonomiczny, dysypacyjny układ drgający o n stopniach swobody, którego równania ruchu przyjęto w postaci

$$(2.1) \quad A\ddot{q} + C\dot{q} + f(q) + \varphi(q, \dot{q}) - P \cos vt = 0,$$

gdzie $A \equiv [a_{ik}]$ oznacza macierz bezwładności, kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona, $C \equiv [c_{ik}]$ macierz sztywności, kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona, zaś $q = \text{col}[q_1, q_2, \dots, q_n]$ współrzędne uogólnione, f, φ, P macierze kolumnowe reprezentujące: nieliniową część sił sprężystych, tłumienia i amplitud sił wymuszających.

Zakładamy, że nieliniowy układ zachowawczy posiada energię potencjalną, dodatnio określoną, a siły sprężyste będące odpowiednimi jej pochodnymi cząstkowymi są nieparzystymi analitycznymi funkcjami swych argumentów i przedstawiane są za pomocą skończonych szeregów Taylora:

$$V(0, \dots, 0) = 0,$$

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(-q_1, \dots, -q_n),$$

$$V > 0 \text{ dla } q_i \text{ nie wszystkich równych zeru,}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n c_{ik} q_k + f_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Energia kinetyczna układu jest formą kwadratową względem $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, dodatnio określoną

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q}.$$

Funkcje (q, \dot{q}) przedstawiające siły tłumienia spełniają warunki:

$$\varphi_i(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = 0,$$

$$\varphi_i(q_1, \dots, q_n, 0, \dots, 0) = 0,$$

$$\varphi_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = -\varphi_i(q_1, \dots, q_n, -\dot{q}_1, \dots, -\dot{q}_n),$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i \dot{q}_i > 0 \text{ dla } \dot{q}_i \text{ nie wszystkich równych zeru.}$$

Przyjmuje się, że można je przedstawić w postaci skończonych szeregów Taylora.

Równania (2.1) opisują zarówno drgania układów, których modele mechaniczne są modelami o masach skupionych, jak i drgania układów o ciągłym rozkładzie mas, jeśli odpowiedź przedstawimy w postaci skończonego szeregu:

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(r) q_i(t),$$

gdzie $\psi(r)$ oznacza liniowo niezależne funkcje wektora r .

3. Badanie rezonansów pobocznych za pomocą kombinowanej metody Ritz — uśredniania

Do obliczeń teoretycznych wykorzystałem przybliżoną metodę Ritz — uśredniania ($R-A$) [7]. Metoda ta pozwala badać zarówno stany ustalone, jak i nieustalone, a więc i obszary przyciągania. W pierwszym etapie rozpatruje się tu drgania swobodne układu zachowawczego nieliniowego, dla którego równania ruchu zapiszemy w postaci

$$(3.1) \quad \varepsilon_{ic} \equiv m_i \ddot{q}_i + \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{q}_k + f_i(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ogólne rozwiązanie układu zachowawczego (3.1) zakładamy w pierwszym przybliżeniu w formie

$$(3.2) \quad q_i(t) = \sum_{s=1}^n a_s \bar{b}_{is} \cos \bar{\omega}_s t, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

i żądamy, aby nieznanne $\bar{\omega}_s, \bar{b}_{is}$ w rozwiązaniu (3.2) spełniały zależności (wykorzystana uogólniona metoda Ritz lub procedura bilansu harmonicznego)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_{ic}(t) \cos \bar{\omega}_s t dt = 0, \quad i, s = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $\varepsilon_{ic}(t)$ pozostałości równań (3.1) po podstawieniu przybliżonego rozwiązania (3.2). Otrzymujemy w ten sposób układ nieliniowych równań algebraicznych z niewiadomymi

$\bar{\omega}_s, \bar{b}_{is}$. Rozwiązanie, możliwe na ogół tylko na drodze numerycznej, daje nam szukane współczynniki — «sprzężone» nieliniowe częstości i postacie własne, jako funkcje wszystkich amplitud a_1, \dots, a_n :

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_s &= \bar{\omega}_s(a_1, \dots, a_n), \\ \bar{b}_{is} &= \bar{b}_{is}(a_1, \dots, a_n), \quad i, s = 1, 2, \dots, n; \bar{b}_{1s} = 1.\end{aligned}$$

W drugim etapie metody $R-A$ rozwiązania ogólnego układu (2.1) poszukujemy w postaci

$$(3.3) \quad q_i = \sum_{s=1}^p a_s \bar{b}_{is} \cos \theta_s + C_i \cos \nu t, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$s = 1, 2, \dots, p, p \leq n,$$

gdzie $\theta_s = \bar{\omega}_s t + \phi_s$, i stosujemy procedurę metody uśredniania [3]. Zgodnie z tą procedurą otrzymujemy równania:

$$(3.4a) \quad \frac{da_s}{dt} = \frac{1}{M_{ss} \bar{\omega}_s} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \bar{b}_{is} (\Delta f_i + \varphi_i) \sin \theta_s dt \equiv D_s(a_1, \dots, a_p, \varphi),$$

$$(3.4b) \quad \frac{d\varphi_s}{dt} = \frac{1}{M_{ss} a_s \bar{\omega}_s} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \bar{b}_{is} (\Delta f_i + \varphi_i) \cos \theta_s dt \equiv \Delta \omega_s(a_1, \dots, a_p, \varphi),$$

gdzie

$$\begin{aligned}M_{ss} &= \sum_{i=1}^n m_i \bar{b}_{is}^2, \quad s = 1, 2, \dots, p, \\ \Delta f_i &= f_i[a_1 \bar{b}_{11} \cos \theta_1 + C_1 \cos \nu t, \dots, a_n \bar{b}_{ns} \cos \theta_s + C_n \cos \nu t] + \\ &\quad - f_i[a_1 \bar{b}_{11} \cos \theta_1, \dots, a_n \bar{b}_{ns} \cos \theta_s].\end{aligned}$$

Ponieważ rozpatrujemy zakresy częstości z dala od głównych rezonansów, przyjmujemy się, że amplitudy C_i spełniają równania:

$$(3.5) \quad -m_i C_i \nu^2 + \sum_{k=1}^n c_{ik} C_k = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Rezonans poboczny otrzymujemy, wtedy gdy w rozwiązaniu (3.3) chociaż jedna z amplitud a_s nie jest równa zero, tj. $da_s/dt \neq 0$ dla $a_s \neq 0$. Wartości amplitud $a_s = a_s(\nu)$, $s = 1, 2, \dots, p$, otrzymamy z równań (3.4a) dla stanu ustalonego:

$$(3.6a) \quad \frac{da_s}{dt} = D_s(a_1, a_2, \dots, a_p, \phi) = 0$$

oraz z dodatkowego równania:

$$(3.6b) \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^p (\bar{\omega}_s + \Delta \omega_s) n_s - \nu = 0$$

gdzie $\Delta\omega_s$ oznacza poprawki częstości poszczególnych harmoniczych w (3.3)

$$(3.7) \quad \phi = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^p n_s \phi_{os}.$$

Ostatnia z równości (3.7) wynika z faktu że rezonanse poboczne mogą pojawić się tylko w tych przypadkach, dla których spełniona jest relacja

$$(3.8) \quad \nu = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^p n_s \check{\omega}_s,$$

gdzie $\check{\omega}_s = \bar{\omega}_s + \Delta\omega_s$, a $N = 1, 2, 3, \dots$, $n_s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — liczby całkowite odpowiednio dobrane do formy funkcji nieliniowych.

Ostatecznie rozwiązanie odpowiadające rezonansom pobocznym będzie następujące:

$$(3.9) \quad q_i = \sum_{s=1}^p a_s \bar{b}_{is} \cos[(\bar{\omega}_s + \Delta\omega_s)t + \phi_{os}] + C_i \cos \nu t, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Relacja (3.8) nie precyzuje jeszcze typu rezonansu, tj. jakie wartości przybierają liczby n_s przy danym typie nieliniowości. Udało się wykazać, że wyznaczenie wszystkich kombinacji liczb n_s , tj. wszystkich typów rezonansów pobocznych, można sprowadzić do stosunkowo prostej procedury, mianowicie: weźmy nieliniowe funkcje reprezentujące siły sprężyste oraz siły tłumienia występujące w uśrednionych równaniach (3.4) i, podstawiając rozwiązanie (3.3), rozwińmy je na uogólniony szereg Fouriera:

$$(3.10) \quad \sum_{i=1}^n \bar{b}_{is} (\Delta f_i + \varphi_i) = p \delta^{(s)} + \sum_{i=1}^p [p_i^{(s)} \cos \theta_i + g_i^{(s)} \sin \theta_i] + \\ + \sum_{\bar{m}} p_{m_1, m_2}^{(s)} \dots \cos(m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p + m_v \nu t) + \\ + \sum_{\bar{m}} g_{m_1, m_2}^{(s)} \dots \sin(m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p + m_v \nu t) + p_v^{(s)} \cos \nu t + g_v^{(s)} \sin \nu t,$$

gdzie $\sum_{\bar{m}}$ oznaczają sumy po wszystkich $m_1, \dots, m_p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ za wyjątkiem przypadku, kiedy jedna z wartości $m = 1$, a pozostałe są równe zero.

Warunkiem koniecznym istnienia niezerowych amplitud a_s (w stanie ustalonym), jest znikanie członów z $\sin \theta_s$ w (3.4a). Ponieważ dla układów dysypacyjnych $g_i^{(s)} \neq 0$, więc aby spełnić ten warunek musimy znaleźć taką kombinację współczynników $m_1, m_2, \dots, m_p, m_v$ w wyrażeniach $\cos(m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p + m_v \nu t)$ lub $\sin(m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p + m_v \nu t)$, aby uzyskać dodatkowe człony z $\sin \theta_s$, tzn. jeśli spełnimy warunek:

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^p m_i \theta_i + m_v \nu t = \theta_s + \phi_s, \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

Równość (3.11) będzie spełniona jeśli między ν a częstościami $\check{\omega}_s = d\theta_s/dt$, $s = 1, 2, \dots, p$, znajdzie relacja (3.7), przy n_1, n_2, \dots, n_s wynikających z m_1, \dots, m_p w rozwinięciu (3.10).

W rezultacie uzyskamy dodatkowe człony z $\sin \theta_s$, a rozwinięcie (3.10) można przedstawić następująco:

$$\sum_{i=1}^n \bar{b}_{is} (\Delta f_i + \varphi_i) = p_0^{(s)} + \sum_{s=1}^p [(p_i^{(s)} + p_{ic}^{(s)}) \cos \theta_i + (g_i^{(s)} + g_{ic}^{(s)}) \sin \theta_i] + \text{wyższe harmoniczne.}$$

Równania (3.6a) przedstawiają się teraz następująco:

$$(3.12) \quad g_s^{(s)} + g_{sc}^{(s)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

Postępowanie takie pozwala wykryć wszystkie kombinacje liczb n_s w (3.8) dla danego typu funkcji nieliniowych, a więc wszystkie typy rezonansów pobocznych.

Należy zaznaczyć, że nie są to warunki dostateczne, gdyż z istnienia dodatkowych wyrazów $g_{sc}^{(s)}$ nie wynika jeszcze istnienie rezonansów pobocznych. Równość (3.12) będzie spełniona tylko wtedy, gdy $g_s^{(s)}$ i $g_{sc}^{(s)}$ będą różnych znaków.

4. Rezonanse poboczne w układzie o dwóch stopniach swobody

Szczegółowe obliczenia teoretyczne i badania analogowe wykonano dla pewnego typu układu nieliniowego o dwóch stopniach swobody, złożonego z dwóch mas połączonych więzią sprężystą typu Duffinga, w przypadku występowania liniowego tłumienia, wzbudzanego siłą harmoniczną o stałej amplitudzie. Równania ruchu takiego układu są następujące:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + k_1 q_1 + k_{12}(q_1 - q_2) + \bar{\mu} \bar{l} \left[\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right] + \bar{\mu} (q_1 - q_2)^3 &= \bar{P} \cos \bar{\nu} t, \\ m_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + k_{12}(q_2 - q_1) + \bar{\mu} \bar{l} \left[\frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_1}{dt} \right] + \mu (q_2 - q_1)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając bezwymiarowy czas $\tau = \sqrt{k_{12}/m_2} t$ równania ruchu przybierają postać:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + \kappa^2 q_1 + \gamma (q_1 - q_2) + \mu \gamma l \left[\frac{dq_1}{d\tau} - \frac{dq_2}{d\tau} \right] + \mu \gamma (q_1 - q_2)^3 &= P \cos \nu \tau \\ \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + q_2 - q_1 - \mu l \left[\frac{dq_1}{d\tau} - \frac{dq_2}{d\tau} \right] - \mu (q_1 - q_2)^3 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma &= m_2/m_1, & \kappa^2 &= k_1 \gamma / k_2, & \mu &= \bar{\mu} / k_{12}, \\ l &= \bar{l} \sqrt{k_{12}/m_2}, & \bar{\nu} &= \nu \sqrt{m_2/k_{12}}, & P &= \bar{P}/m_1 \sqrt{m_2/k_{12}}. \end{aligned}$$

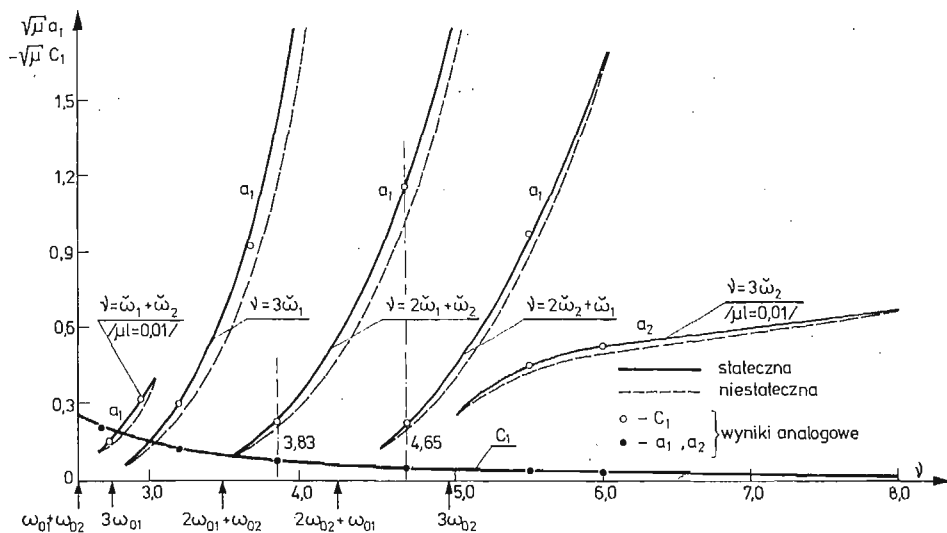
W obecnej pracy rozważam zagadnienie rezonansów pobocznych występujących w pewnych obszarach częstości ν , w których możliwe jest stateczne rozwiązanie harmoniczne o częstości siły wymuszającej:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} q_1 &= C_1 \cos(\nu \tau + \phi_1), \\ q_2 &= C_2 \cos(\nu \tau + \phi_2), \end{aligned}$$

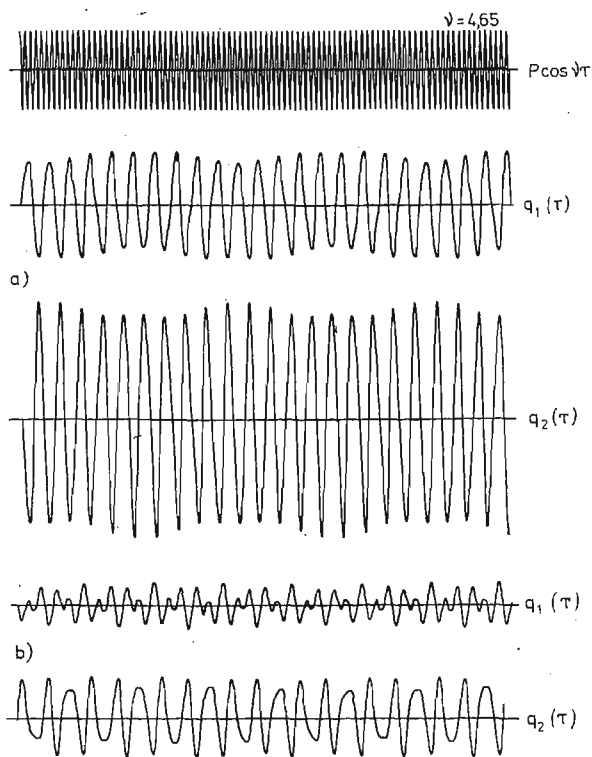
jak również stateczne rozwiązanie odpowiadające rezonansom pobocznym, które w pier-

wszym przybliżeniu zakładamy w postaci:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} q_1 &= a_1 \cos(\check{\omega}_1 \tau + \phi_{01}) + a_2 \cos(\check{\omega}_2 \tau + \phi_{02}) + C_1 \cos \nu \tau, \\ q_2 &= a_1 \bar{b}_{21} \cos(\check{\omega}_1 \tau + \phi_{01}) + a_2 \bar{b}_{22} \cos(\check{\omega}_2 \tau + \phi_{02}) + C_2 \cos \nu \tau. \end{aligned}$$



Rys. 1



Rys. 2

Metodyka przedstawiona w rozdz. 3 pozwoliła wykryć, że dla rozważanego przykładu możliwe są następujące rezonanse poboczne: rezonanse prawie-periodyczne $2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$, $2\check{\omega}_2 + \check{\omega}_1$, $\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$, oraz rezonanse periodyczne subharmoniczne: $3\check{\omega}_1$ i $3\check{\omega}_2$ [1].

Szczegółowe obliczenia wykonano dla przykładu liczbowego scharakteryzowanego danymi: $\omega_{01} = 0,915$, $\omega_{02} = 1,645$, $\gamma = 0,279$, $\kappa^2 = 2,27$, $\mu l = 0,02$, $\mu P^2 = 1$.

Charakterystyki amplitudowo-częstościowe $a_1 = a_1(\nu)$ znalezione za pomocą metody Ritza — uśredniania według wzorów (3.6) dla wymienionych rezonansów pobocznych pokazano na rys. 1. Widzimy, że w pewnych przedziałach częstości ν , możemy zależnie od warunków początkowych otrzymać trzy różne typy odpowiedzi ustalonej. Np. przy częstości $\nu = 4,65$ mamy:

- odpowiedź prawie-periodyczną typu $\nu = 2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$,
- odpowiedź prawie-periodyczną typu $\nu = 2\check{\omega}_2 + \check{\omega}_1$,
- odpowiedź harmoniczną o częstości siły wymuszającej.

Przebiegi czasowe $q_1(\tau)$ i $q_2(\tau)$ charakterystyczne dla odpowiedzi prawie-periodycznych pokazane są na rys. 2.

Aby znaleźć odpowiedź na pytanie, które z trzech możliwych statecznych rozwiązań będzie generowane przez układ, musimy wyznaczyć obszary przyciągania każdego z nich.

5. Wyznaczanie obszarów przyciągania za pomocą metody R — A i procedury numerycznej

Zadanie wyznaczania obszarów przyciągania rezonansów pobocznych sprowadza się w ogólnym przypadku do scałkowania równań (3.6).

W przypadku rezonansów periodycznych równania (3.6) przybierają postać:

$$(5.1) \quad \frac{da}{dt} = D_1(a, \phi), \quad \frac{d\phi}{dt} = D_2(a, \phi).$$

Zadanie jest dwuparametrowe (a, ϕ), a obszarów przyciągania poszukujemy na płaszczyźnie Hayashiego, tj. płaszczyźnie tak dobranej, aby stanom ustalonym odpowiadały punkty osobliwe równań (5.1). Separatryse, czyli krzywą rozdzielającą obszary o różnym charakterze odpowiedzi, znajdziemy przez numeryczne scałkowanie równań (5.1) w ujemnym czasie [3], z warunkami początkowymi z najbliższego sąsiedztwa niestatecznego punktu osobliwego.

Metoda ta stosowana była efektywnie do wyznaczania obszarów przyciągania rezonansów periodycznych, gdy zagadnienie było dwuwymiarowe, a separatrysa linią płaską.

W obecnej pracy podjęto próbę wyznaczenia obszarów przyciągania rezonansów prawie-periodycznych dwuczęstościowych, a więc rozwiązania zagadnienia określonego trzema parametrami (a_1, a_2, ϕ). Równania (3.6) są teraz następujące:

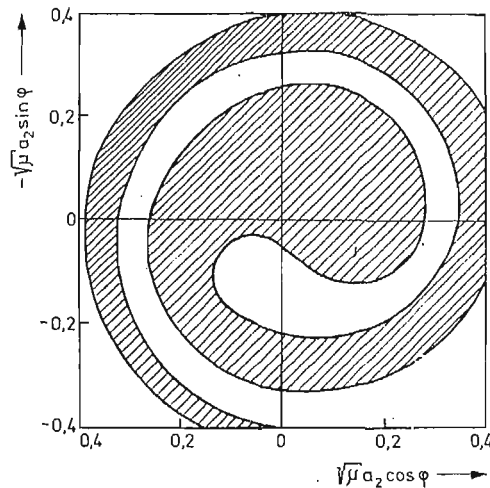
$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= D_1(a_1, a_2, \phi), \\ \frac{da_2}{dt} &= D_2(a_1, a_2, \phi), \\ \frac{d\phi}{dt} &= D_3(a_1, a_2, \phi). \end{aligned}$$

Ponieważ zagadnienie jest trzyparametrowe, zaistniała konieczność uogólnienia znanych dotąd metod wyznaczania obszarów przyciągania i wyboru odpowiedniej przestrzeni trójwymiarowej, takiej aby stanom ustalonym odpowiadały punkty osobliwe równań (5.2), a w której separatrysa jest powierzchnią. Przestrzenią spełniającą te warunki może być trójwymiarowa przestrzeń kartezjańska o współrzędnych

$$(5.3) \quad (a_1, a_2 \cos \phi, a_2 \sin \phi).$$

Dla wyznaczenia separatrysy w przypadku rezonansów periodycznych wystarczyło znalezienie dwóch krzywych całkowych zbieżających z obu stron do niestatecznego punktu osobliwego przy $t \rightarrow \infty$.

Zadanie komplikuje się bardzo w przypadku rezonansów prawie-periodycznych. Separatrysa jest teraz powierzchnią wyznaczoną przez nieskończoną ilość trajektorii zbieżających do niestatecznego punktu osobliwego przy $t \rightarrow \infty$. Możemy ją zatem wyznaczyć tylko w sposób przybliżony. Aby to uczynić, musimy znaleźć wiele trajektorii leżących na niej, i opierając się na nich, wyznaczyć separatrycę. W tym celu należy scałkować numerycznie w ujemnym czasie równania (5.2), z warunkami początkowymi z najbliższego sąsiedztwa niestatecznego punktu osobliwego.



Rys. 3

Na rys. 3 pokazane są obszary przyciągania rezonansu prawie-periodycznego $\nu = 2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$ (obszar zakreskowany), na płaszczyźnie $(a_2 \cos \phi, a_2 \sin \phi)$ dla ustalonej wartości $a_1 = 0,20$ i częstości wymuszenia $\nu = 3,83$. Należy dodać, że dla malejących wartości amplitudy a_1 obszary przyciągania tego rezonansu zmniejszają się i poniżej $a_1 = 0,14$ wszystkie warunki początkowe prowadzą do rozwiązania harmonicznego o częstości siły wymuszającej ν .

Zgodnie z postawionym zadaniem, mając określone obszary przyciągania w przestrzeni (5.3), przejdziemy następnie do znalezienia ich w przestrzeni warunków początkowych.

Dla rozważanego układu o dwóch stopniach swobody istnieją cztery warunki początkowe — dwa na przemieszczenia:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} q_1(0) &= a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2 + C_1, \\ q_2(0) &= a_1 \bar{b}_{21} \cos \phi_1 + a_2 \bar{b}_{22} \cos \phi_2 + C_2 \end{aligned}$$

i dwa na prędkości:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \dot{q}_1(0) &= -a_1 \dot{\omega}_1 \sin \phi_1 - a_2 \dot{\omega}_2 \sin \phi_2, \\ \dot{q}_2(0) &= -a_1 \bar{b}_{21} \dot{\omega}_1 \sin \phi_1 - a_2 \bar{b}_{22} \dot{\omega}_2 \sin \phi_2. \end{aligned}$$

Jeśli w wyrażeniach (5.4) i (5.5) podstawimy parametry dla stanu ustalonego (lub z jego najbliższego sąsiedztwa), to w czterowymiarowej przestrzeni warunków początkowych $[q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)]$ znajdziemy obszary przyciągania badanego pobocznego rezonansu prawie-periodycznego $2\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2$.

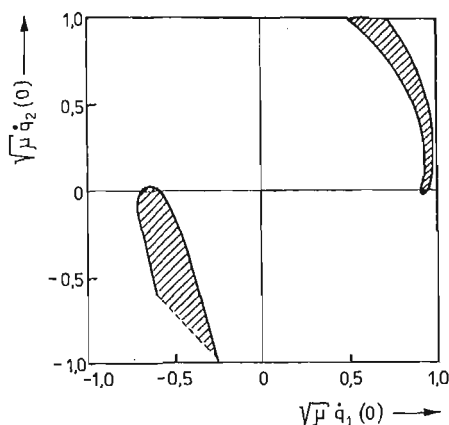
W obecnej pracy postawiono pytanie, czy na płaszczyźnie $[\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)]$ są obszary przyciągania tego rezonansu przy założeniu, że przemieszczenia mas w chwili początkowej są równe zeru, tzn.:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2 + C_1 &= 0, \\ a_1 \bar{b}_{21} \cos \phi_1 + a_2 \bar{b}_{22} \cos \phi_2 + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Taki przypadek może być interpretowany fizycznie jako efekt przyłożenia w chwili początkowej do mas układu impulsów sił.

Wykorzystując poprzednio uzyskane wyniki — rys. 3, wyznaczmy obszary przyciągania na płaszczyźnie $[\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)]$. Każdy punkt leżący na separatrysie określony jest przez trzy parametry a_1, a_2, ϕ . Poza tym dla tego typu rezonansu prawdziwy jest związek:

$$(5.7) \quad \phi = 2\phi_1 + \phi_2.$$



Rys. 4

Aby więc istniały obszary przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych przy zerowych przemieszczeniach początkowych, musi być równocześnie z (5.7) spełniony warunek (5.6). Punkty, dla których spełniona jest równość (5.7) przy równocześnie spełnio-

nym warunku (5.6), zostały znalezione numerycznie. Następnie wyznaczono odpowiednie obszary przyciągania na podstawie wzorów (5.5).

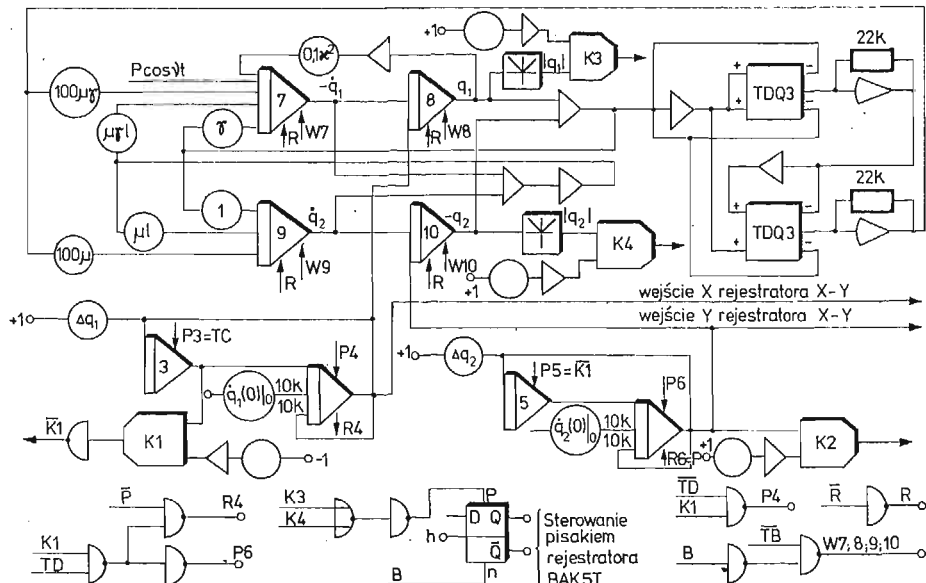
Rys. 4 przedstawia obszary przyciągania pobocznego rezonansu prawie-periodycznego $\nu = 2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$ na płaszczyźnie prędkości początkowych, przy zerowych przemieszczeniach mas układu w chwili początkowej.

6. Wyznaczenie obszarów przyciągania za pomocą maszyn analogowych i automatycznego układu pomiarowo-rejestrującego

Wobec pracochłonności i małej efektywności metod numerycznych w wyznaczaniu obszarów przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych — szczególnie dla przypadku rezonansów prawie-periodycznych, jak również w celu porównania wyników teoretycznych z doświadczalnymi, zadanie to rozwiązano na maszynie analogowej MEDA 41TC, modelując ściśle równania ruchu (4.2).

Mogą one być badane w sposób tradycyjny. Oznacza to ręczne wprowadzanie nastaw na wszystkie potencjometry, śledzenie rozwiązania na ekranie oscyloskopu, nanoszenie punktów o współrzędnych, których wartości odpowiadają rozwiązaniom rezonansowym. Obszary przyciągania interesującego nas rezonansu pobocznego można znaleźć (jeśli istnieją), zagęszczając odpowiednio punktami płaszczyznę $[\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)]$.

Opisana powyżej metodyka wyznaczania obszarów przyciągania, aczkolwiek jest znacznie szybsza od cyfrowej, jednak także zajmuje dosyć dużo czasu. Dlatego też dla ograniczenia do minimum czynności manualnych w czasie prowadzenia badań i zmniejszenia ich pracochłonności, opracowany został specjalny układ pomiarowo-rejestrujący, który automatycznie wyznacza obszary przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych. Czynności manualne sprowadzają się tu do ustalenia częstości siły wymuszającej oraz wybrania górnej i dolnej granicy $\dot{q}_1(0)$ i $\dot{q}_2(0)$.



Rys. 5

Schemat układu analogowego do rozwiązania równań (4.2) oraz układu pomiarowo-rejestrującego pokazano na rys. 5. Do realizacji wymuszenia harmonicznego zastosowano generator funkcji $f(t) = \cos \nu t$, o stabilizowanej amplitudzie i płynnej zmianie częstości.

Zadawanie warunków początkowych $\dot{q}_1(0)$ i $\dot{q}_2(0)$ realizowane jest automatycznie. Wartość $\dot{q}_1(0)$ podawana za pomocą tego układu określona jest wzorem

$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_1(0)|_0 + i\Delta q_1,$$

gdzie $\dot{q}_1(0)|_0$ oznacza wartość $\dot{q}_1(0)$ w kroku zerowym, Δq_1 wielkość przyrostu $\dot{q}_1(0)$, zaś $i = 0, 1, \dots, k$ liczbę kroków.

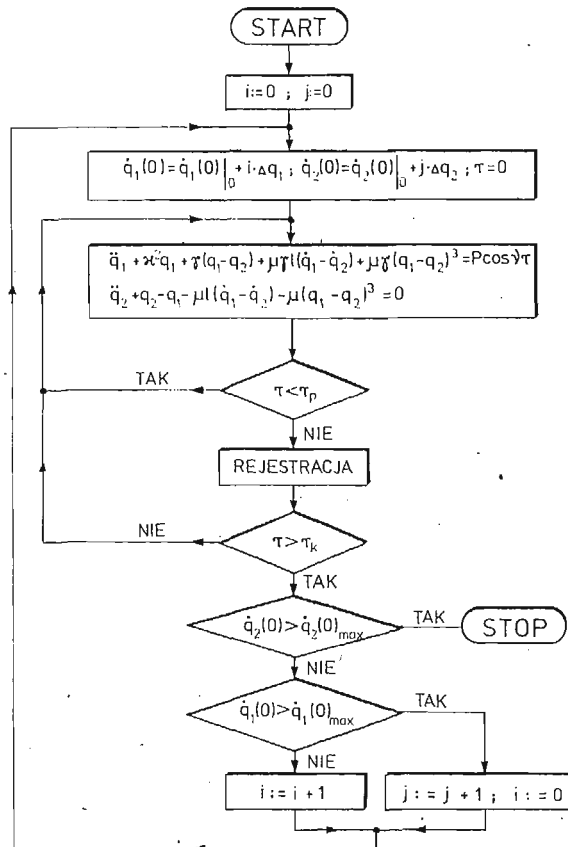
Układ jest tak zbudowany, że jednemu pełnemu cyklowi zmian $\dot{q}_1(0)$ odpowiada stała wartość $\dot{q}_2(0)$ i zmienia się w chwili, gdy będzie spełniony warunek

$$\dot{q}_1(0)|_0 + i\Delta q_1 \geq \dot{q}_1(0)|_{\max}.$$

Bieżąca wartość warunku początkowego $\dot{q}_2(0)$ jest określona przez

$$\dot{q}_2(0) = \dot{q}_2(0)|_0 + j\Delta q_2,$$

gdzie $\dot{q}_2(0)|_0$ oznacza wartość $\dot{q}_2(0)$ w kroku zerowym, Δq_2 wielkość przyrostu $\dot{q}_2(0)$, zaś $j = 0, 1, \dots, m$ liczbę kroków.

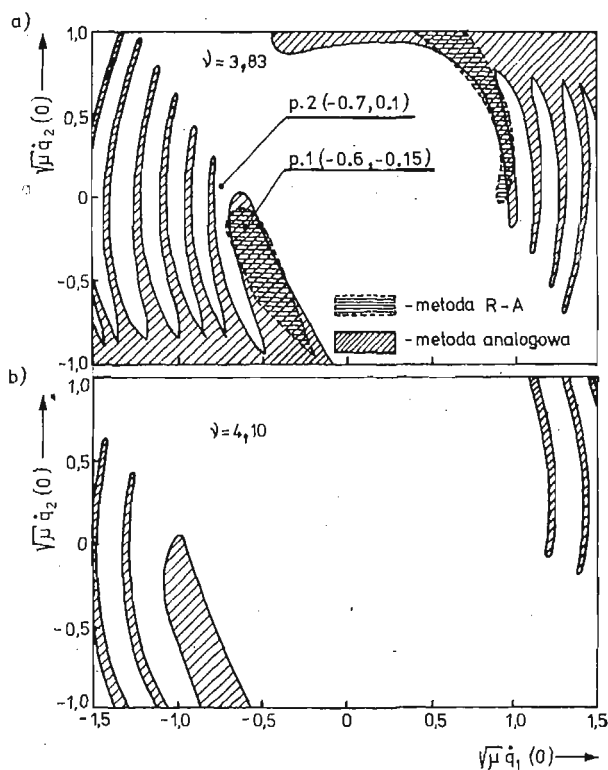


Rys. 6

Osiągnięcie przez układ górnej granicy badanego przedziału, tzn. gdy będzie spełniony warunek

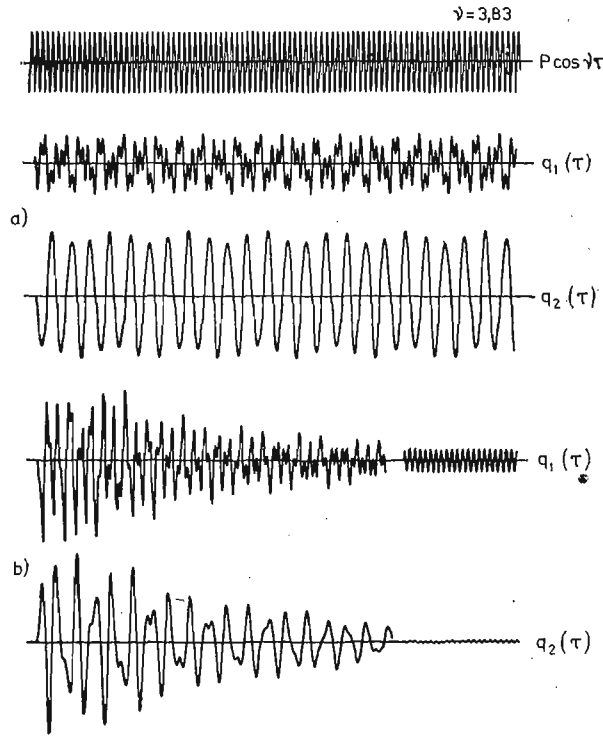
$$\dot{q}_2(0)|0 + j\Delta q_2 \geq q_2(0)|_{\max},$$

jest sygnałem do zatrzymania dalszej pracy maszyny. Będzie to oznaczać, że przebadany został układ dla określonych przedziałów wartości początkowych $\dot{q}_1(0)$ i $\dot{q}_2(0)$ z wybranymi krokami Δq_1 i Δq_2 . Wartości $\dot{q}_1(0)$ i $\dot{q}_2(0)$ podawane są także na odpowiednie wejścia $X = \dot{q}_1(0)$ i $Y = \dot{q}_2(0)$ rejestratora BAK 5T. Pisak rejestratora jest sterowany w ten sposób, że jeśli mamy odpowiedź rezonansową wówczas zaznaczy punkt na wykresie, w przeciwnym przypadku nic nie zaznaczy.



Rys. 7

Rys. 6 przedstawia algorytm programu dla rozwiązania postawionego zadania, a więc automatycznego wyznaczania obszarów przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych. Rys. 7 przedstawia obszary przyciągania rezonansu prawie-periodycznego $\nu = 2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$ przy częstościach $\nu = 3,83$ i $4,10$, wyznaczone przy zastosowaniu proponowanego układu. Na rysunku tym pokazane są także obszary przyciągania tego rezonansu znalezione metodą Ritza — uśredniania. Łatwo zauważyć, że są one tylko częścią obszaru wyznaczonego doświadczalnie. Na rys. 8 pokazane są przebiegi czasowe $q_1(\tau)$ i $q_2(\tau)$ prowadzące do różnych rozwiązań: prawie-periodycznego $2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$ przy warunkach początkowych — punkt 1 na rys. 7, bądź harmonicznego o częstości wymuszenia przy warunkach początkowych — punkt 2 na rys. 7.



Rys. 8

7. Wnioski

Przedstawiony w niniejszej pracy problem generowania rezonansów pobocznych przez impulsy sił w nieliniowych układach drgających o wielu stopniach swobody, związany jest ściśle z zagadnieniem wyznaczania obszarów przyciągania tychże rezonansów i został rozwiązany w dwojaki sposób:

— wykorzystując teoretyczną, przybliżoną metodę badania nieliniowych układów drgających oraz odpowiednią technikę numeryczną,

— przez zamodelowanie ścisłych równań ruchu na maszynie analogowej.

Wyniki przedstawione na rys. 4 i 7 pozwalają stwierdzić, że występują obszary przyciągania pobocznego rezonansu prawie-periodycznego $2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$, przy założeniu zerowych przemieszczeń i przy danych odpowiednich prędkościach początkowych. Wynika z tego, że tego typu rezonans może być generowany przez impulsy sił.

Wykorzystana przybliżona teoretyczna metoda Ritza — uśredniania nadaje się do efektywnego wyznaczania obszarów przyciągania i daje wyniki bliskie analogowym. Jednak wyznaczone w ten sposób obszary przyciągania są tylko częścią obszaru wyznaczonego doświadczalnie. Prócz tego wymaga ona pracochłonnych obliczeń i stosowania specjalnych technik numerycznych.

Zastosowanie maszyn analogowych do rozwiązania postawionego zadania okazało się bardzo efektywne, głównie ze względu na opracowanie specjalnego układu pomiarowo-rejestrującego, który automatycznie wyznacza obszary przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych. Pozwoliło to na wielokrotne zmniejszenie czasochłonności w stosunku do analogicznych obliczeń numerycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. BAJKOWSKI, *Obszary przyciągania rezonansów pobocznych w nieliniowych układach drgających*, Prace IPPT PAN 6 (1977).
2. J. BAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Domains of attraction of the secondary periodic and combination resonances in nonlinear two-degree-of-freedom system*, Int. Conf. on Nonlinear Oscill., Berlin 1975.
3. C. HAYASHI, *Nonlinear oscillations in physical systems*, McGraw-Hill., New York 1964.
4. W. S. LOUD, P. R. SETHNA, *Some explicit estimates for domains of attraction*, J. of Diff. Equat., 2,2 (1966), 158—172.
5. J. MĘDRZYCKI, *Technika analogowa i hybrydowa*, WNT, Warszawa 1974.
6. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the phenomenon of the combination resonance in nonlinear two-degree-of-freedom systems*, Int. J. Nonlinear Mech., 4,2 (1969), 335—359.
7. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *An approximate method of treating transients in nonlinear, multi-degree-of-freedom vibrating systems*, Int. Conf. Equa-diff 73, Bruksela 1973.

Резюме

ГЕНЕРИРОВАНИЕ СИЛОВЫМИ ИМПУЛЬСАМИ ПОБОЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В работе рассмотрено генерирование периодических и почти-периодических резонансов в нелинейных диссипативных колебательных системах, возбуждаемых гармоническими силами. Исследуется вопрос — могут ли силовые импульсы, приложенные к такой системе, привести к изменению гармонического колебания с малой амплитудой в один из побочных резонансов со значительной амплитудой колебаний. Предполагается, что в результате силового импульса возникают начальные скорости при нулевых начальных перемещениях системы. Представленная задача тесно связана с вопросом об определении области притягивания побочных резонансов. Даются для решения: а) используя теоретический приближенный метод усреднения Рунге, б) посредством моделирования точных уравнений движения на аналоговой вычислительной машине и разработки специальной измерительно-регистрающей системы, которая автоматически определяет области притягивания на плоскости начальных скоростей.

Summary

SECONDARY RESONANCES GENERATION BY FORCE IMPULSES IN NONLINEAR VIBRATING SYSTEMS

There are examined periodic and almost-periodic secondary resonances generations in nonlinear dissipative vibrating systems excited by harmonic forces. It was tested if force impulses applied to the system can cause alteration from small amplitude response to response corresponding with one of secondary re-

sonances at significant vibration amplitude. It was assumed that initial velocities are resulting from the force impulses, the initial displacements of the system taken equal to zero. The problem was strongly connected with the problem of determining the domains of attraction and was solved by two methods: a) according to original, approximate Ritz-averaging method, b) by modelling the original equation of motion on analog computer and preparing measure-recording system, which automatically determines domains of attraction in the initial velocities plane.

ZAKŁAD UKŁADÓW MECHANICZNYCH IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lutego 1978 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

KONFERENCJA NAUKOWA

«MODELOWANIE GÓRNICZYCH MASZYN WYCIĄGOWYCH»

W dniach 9 - 10 grudnia 1977 r. odbyła się w sali dydaktycznej Ośrodka Postępu Technicznego w Katowicach Konferencja Naukowa pt. «Modelowanie Górniczych Maszyn Wyciągowych» zorganizowana przez: Zespół Dynamiki Maszyn Komitetu Budowy Maszyn PAN, Zarząd Gliwickiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Zespół Transportu Pionowego i Poziomego Instytutu Mechanizacji Górnictwa Politechniki Śląskiej w Gliwicach.

Konferencja poświęcona była problematyce metod modelowania oraz wykorzystania poszczególnych modeli dla opisu dynamiki urządzenia wyciągowego w różnych stanach pracy i awarii. Zaprezentowano również wyniki eksperymentów przeprowadzonych na modelach mechanicznych poszczególnych elementów wyciągu.

Celem konferencji było zaprezentowanie systemowego podejścia do problemów górniczych urządzeń wyciągowych oraz przedstawienie najnowszych osiągnięć w zakresie teorii maszyn wyciągowych uzyskanych w kraju. Dalszym celem konferencji było wytyczenie, na podstawie przedłożonych materiałów i dyskusji nad nimi, głównych kierunków badań teoretycznych, laboratoryjnych i przemysłowych górniczych urządzeń wyciągowych odpowiadających perspektywom rozwoju tych urządzeń do roku 1985.

Z uwagi na poruszoną problematykę, konferencja spotkała się z dużym zainteresowaniem. Wzięło w niej udział 139 osób; wygłoszono 26 referatów w pięciu częściach tematycznych, którym przewodniczyli kolejno: prof. dr hab. inż. Zygmunt KAWECKI, prof. dr hab. inż. Tadeusz OPOLSKI, prof. dr hab. inż. Marek DIETRICH, doc. dr hab. inż. Józef WOJNAROWSKI i doc. dr inż. Tadeusz ZMYŚLÓWSKI. W dyskusji nad referatami zabrały głos 54 osoby.

W zakończeniu pierwszego dnia obrad odbyło się spotkanie okrągłego stołu, w którym uczestniczyli jeszcze: prof. dr hab. inż. Jerzy ANTONIAK, prof. dr hab. inż. Adam KLICH, prof. dr hab. inż. Juliusz STACHURSKI i prof. dr hab. inż. Stefan ZIEMBA. W czasie spotkania wywiązała się ożywiona dyskusja, w trakcie której wymieniono wiele cennych myśli i uwag oraz propozycji na linii przemysł—nauka.

W drugim dniu konferencji uczestnicy zwiedzili nowoczesny Zakład Maszyn Wyciągowych w ZUT «ZGODA» w Świętochłowicach, który jest cenionym w kraju i zagranicą producentem maszyn wyciągowych i silników okrętowych, gdzie zapoznali się z aktualnymi problemami sfery konstruowania i wytwarzania tych maszyn.

W części rekreacyjnej odbyła się wycieczka do Zabytkowej Kopalni Srebra w Tarnowskich Górach.

Materiały konferencyjne zostały wydrukowane w dwóch Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej, Seria Górnictwo, Zeszyt 80 i 81, Gliwice 1977, i obejmują łącznie 29 artykułów, przytoczonych poniżej w kolejności alfabetycznej:

Zeszyt 80

1. J. CZAPLICKI, S. ZIEMBA, *Próba zbudowania modelu systemowo ujętej problematyki naukowo-technicznej górniczych maszyn wyciągowych,*
2. J. ANTONIAK, A. LATKA, *Badania modelowe wpływu postaci konstrukcyjnej zasobnika skłipu na charakter i natężenie wpływu masy węgla,*
3. A. CARBOGNO, S. KONIECZNY, *Badanie zjawiska zachowania się lin wyrównawczych okrągłych w szwach podczas pracy górniczego urządzenia wyciągowego,*

4. W. CIEŚLAK, *Wypadkowy moment hamowania hamulca tarczowego wieloszczękowego*,
5. J. CZAJA, *Określenie przebiegów sił w linach nośnych i wyrównawczych urządzenia wyciągowego w stanie awaryjnym przy krańcowym położeniu naczyń wydobywczych*,
6. J. M. CZAPLICKI, *Analiza wykorzystania czasu dyspozycyjnego w eksploatacji maszyn wyciągowych*,
7. J. M. CZAPLICKI, *Pewien model procesu eksploatacji maszyn wyciągowych*,
8. M. DIETRICH, W. OZIMOWSKI, Z. WALCZAK, *O bezpieczeństwie dźwigu osobowego*,
9. K. GIERLOTKA, *Wpływ struktury i nastaw regulatora prędkości na przebiegi przejściowe tyrystorowej maszyny wyciągowej*,
10. W. GÓRSKI, M. LATARNIK, *Symulacyjna technika projektowania górniczych urządzeń wyciągowych*,
11. J. HANKUS, *Modele regresyjne wzdłużnych odkształceń i modułu sprężystości lin wyciągowych*,
12. A. JAKUBOWICZ, J. KAPŁANEK, *Model przeniesienia siły przez ciąгло na konstrukcję kosza skipu*,
13. S. KAWULOK, *Dynamika naczyń wyciągowego przejeżdżającego wzdłuż pojedynczych nierówności na prowadnikach*,
14. A. KLICH, S. WOLNY, *Drgania parametryczne w układzie naczynie wydobywcze — zbrojenie szybowe*,

Zeszyt 81

1. A. KLICH, M. WÓJCIK, St. BIAŁAS, *Modelowanie mechaniczne urządzeń wyciągowych dla analizy procesu awaryjnego hamowania*,
2. J. KOSZELSKI, *Wpływ wykładziny cierniej na obciążenie powłoki wielolinowego kola pędnego*,
3. Z. LIBERUS, K. KALINOWSKI, *Problemy optymalizacji momentu dynamicznego maszyny wyciągowej szybu głębokiego*,
4. A. MUSZYŃSKA, B. RADZISZEWSKI, A. ZALESKI, *Warunki równowagi dynamicznej hamulca cierniego maszyny wyciągowej*,
5. W. NADOLSKI, A. PIELORZ, *Badania przemieszczeń i odkształceń w wybranych elementach maszyn górniczych*,
6. K. OLSZEWSKA, *Niezawodność układu automatycznej regulacji kopalnianej maszyny wyciągowej w oparciu o dane eksploatacyjne*,
7. T. OPOLSKI, R. NIEDBAŁ, *Niezawodność hamulców szczękowych maszyn wyciągowych*,
8. J. RZYSKO, W. LINKE, J. OLSZEWSKI, *Kryteria doboru funkcji przybliżonych służących do budowy modelu dyskretnego drgań podłużnych liny wyciągowej*,
9. L. SZKLARSKI, M. ZAJĄC, A. DZIADECKI, *Modelowanie napędu maszyny wyciągowej z uwzględnieniem sprężystości liny*,
10. J. WOJNAROWSKI, *Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych w badaniu drgań górniczych maszyn wyciągowych*,
11. J. WOJNAROWSKI, J. KARP, *Wpływ zmiany momentu odkrętnego na własności reologiczne lin wyciągowych*,
12. J. WOJNAROWSKI, A. MEDER, *O numerycznym modelowaniu drgań wielolinowych górniczych układów wyciągowych*,
13. J. WOJNAROWSKI, J. ŚWIDER, *Wyznaczanie funkcji podatności dynamicznej górniczej maszyny wyciągowej metodą grafów*,
14. J. WOJNAROWSKI, D. TEJSZERSKA, *Modelowanie wielolinowych układów wyciągowych*,
15. T. ZMYŚLowski, *Problemy ujęcie sprzężeń ciernych i hamowania wyciągów*.

Jerzy Antoniak (Gliwice)

List do Redakcji

O ARTYKULE STEFANA PIECHNIKA PT. „KINEMATYCZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ UKŁADÓW SIŁ“, MECH. TEORET. I STOS., 1978, R. 16, NR 1 S. 71-79.

ZBIGNIEW KĄCZKOWSKI (WARSZAWA)

Na temat wymienionej wyżej pracy S. Piechnika miałem okazję wypowiedzieć się w pofnej opinii przekazanej Redakcji MTiS w maju ubiegłego roku. Ponieważ jednak zastrzeżenia moje nie zostały wzięte pod uwagę ani przez Autora, ani przez Redakcję, przeto — uważając je za istotne — uznałem za konieczne przedstawienie swoich racji szerokiemu kręgowi Czytelników czasopisma.

Podstawową tezę Autora jest, że zasada de Saint Venanta będzie mogła być stosowana również do prętów cienkościennych pod warunkiem odpowiedniego uogólnienia pojęcia statycznej równoważności układu sił działających w przekroju poprzecznym pręta. W szczególności, jeżeli różne rozkłady naprężeń normalnych σ_{xi} ($i = 1, 2, \dots$) redukują się do jednakowych sił podłużnych, jednakowych momentów zginających i jednakowych bimomentów, to w odległości przewyższającej wyraźnie rozmiary przekroju powstają praktycznie jednakowe stany napięcia i odkształcenia. Ponieważ zaś za statycznie równoważne traktowano dotąd te rozkłady naprężeń σ_{xi} , które spełniały warunki:

$$(1) \quad \int_A \sigma_{xi} dA = N, \quad \int_A \sigma_{xi} y dA = M_x, \quad \int_A \sigma_{xi} z dA = M_y,$$

przeto dodatkowy warunek

$$(2) \quad \int_A \sigma_{xi} \omega dA = B_\omega$$

wymaga uogólnienia pojęcia statycznej równoważności układów sił.

Z tezą tą trudno się nie zgodzić. Dopóki rozpatrywało się pręty o przekroju zwartym, dopóty rozkład naprężenia σ_x w przekroju dostatecznie odległym od miejsc przyłożenia naprężeń zewnętrznych zależał praktycznie od trzech wielkości zdefiniowanych wzorami (1). W pręcie cienkościennym rozkład ten zależy także od nowej wielkości *s t a t y c z n e j* zdefiniowanej całką (2).

Ale nie o sprawę uogólnienia pojęcia statycznej równoważności mi chodzi. Protestuję stanowczo przeciwko wprowadzaniu do języka mechaniki terminu „kinematyczna równoważność” w odniesieniu do układów sił. Kinematyka jest nauką o geometrii ruchu, wyraźnie odgraniczoną od statyki, zajmującej się problemami równowagi wielkości statycznych. Oczywiście niemal każde działanie sił na ustrój odkształcalny powoduje zmianę jego formy, a zatem jest przyczyną zjawisk kinematycznych. Np. siła podłużna powoduje

z reguły przesunięcie przekroju wzdłuż osi pręta, a moment zginający — obrót pręta przekroju. Analogicznie, działanie bimomentu może (ale nie musi) wywołać spaczenie przekroju połączone z jego obrotem dokoła jednej z osi podłużnych pręta. Nie jest to więc zjawisko jakościowo różne od poprzednich. Ponadto dodatkowy warunek (2) ma, podobnie jak warunki (1), czysto statyczny charakter i nie ma żadnego związku ze skutkami kinematycznymi, jakie bimoment wywołuje.

W pewnych przypadkach mogą zresztą pojawiać się siły wewnętrzne, którym nie towarzyszą żadne zjawiska kinematyczne. Np. w pręcie obustronnie utwierdzonym pod wpływem równomiernego wzrostu temperatury powstaje siła osiowa, a pod wpływem temperatury liniowo zmiennej na wysokości przekroju — moment zginający. Mimo to w pręcie tym nie pojawiają się ani przesunięcia ani obroty przekrojów. Podobnie, można sobie wyobrazić obustronnie utwierdzony pręt (niekoniecznie cienkościenny), w którym rozkład temperatury, np. według funkcji

$$(3) \quad t = ayz$$

wywołuje powstanie bimomentu, któremu nie towarzyszy spaczenie przekrojów poprzecznych pręta. A zatem kinematyka — to jedno, a statyka — to zupełnie co innego i nie należy mieszać ze sobą obu tych pojęć.

Poza tym w swojej opinii sprzed roku wskazywałem na inne usterki, których usunięcie mogłoby tylko ulepszyć pracę. W szczególności zlekceważono następujące uwagi i propozycje:

1. Krytykowałem nieporadność językową sformułowania zasady de Saint Venanta: „w myśl której, macierze naprężeń, odkształceń i przemieszczeń różnić się będą dowolnie mało (podkr. Z. K.), z wyjątkiem obszaru sąsiadującego z powierzchnią obciążoną, dla różnych, ale statycznie równoważnych obciążeń przyłożonych na małej w stosunku do całej powierzchni”. Proponowałem, aby zamiast tego oryginalnego, ale niejasnego sformułowania zacytować zasadę de Saint Venanta w brzmieniu podanym przez klasyka naszej wytrzymałości materiałów, M. T. Hubera. O ileż bowiem łatwiej można ją zrozumieć, gdy jest ona, z należytą dbałością o precyzję sformułowań naukowych, wyrażona nienaganną polszczyzną: „Jeżeli na pewien niewielki obszar ciała sprężystego w równowadze działają kolejno rozmaicie rozmieszczone, ale statycznie równoważne, obciążenia, to w odległości od obszaru przewyższającej wyraźnie jego rozmiary powstają praktycznie jednakowe stany napięcia i odkształcenia”. (M. T. Huber: „Stereomechanika techniczna” cz. I, Warszawa 1951 PZWSz, str. 103).
2. Proponowałem uzupełnienie spisu literatury pozycją: W. Burzyński: „O niedomaganiach i koniecznych uzupełnieniach de Saint-Venantowskiej teorii prętów prostych”, Prace Wrocł. Tow. Nauk., ser. B, nr 42, 1951, Wrocław.
3. Zwracałem uwagę na niestosowność wymieniania tylko drugiego nazwiska przy cytowaniu dzieła sygnowanego przez trzech autorów: P. Jastrzębskiego, J. Mutermilcha i W. Orłowskiego.

Przykro mi, że w związku z niezbyt ostatecznie ważnym przyczynkiem do XIX-wiecznej problematyki musiałem zająć tyle miejsca w czasopiśmie. Obawiałem się jednak, że,

gdyby publicznie lansowany (nie tylko zresztą na łamach „Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej”), nielogiczny termin „kinematyczna równoważność układów sił” nie spotkał się z publicznym zdecydowanym odporem, to mógłby zakorzenieć się i zachwiać nasz język naukowy.

Zbigniew Kączkowski

**ODPOWIEDŹ AUTORA PRACY „KINEMATYCZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ UKŁADÓW SIŁ“
(MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA, 1978 R. 16, NR 1, S. 71-79) NA UWAGI
Z. KĄCZKOWSKIEGO ZAWARTE W JEGO „LIŚCIE DO REDAKCJI“**

STEFAN PIECHNIK (KRAKÓW)

Wymienione przez Z. Kączkowskiego w „Liście do Redakcji” uwagi dotyczące mojej pracy są powtórzeniem zastrzeżeń, jakie zawarł On w swej poufnej opinii redakcyjnej. Odpowiedzi mojej na tę opinię Redakcja nie przekazała opiniodawcy zajmując — jak się mogę domyśleć — w tej sprawie własne stanowisko.

Z listu Z. Kączkowskiego łatwo odczytać, że protest dotyczy głównie nazwy „kinematyczna równoważność ...”. Można by się ostatecznie zgodzić na zmianę nazwy, bo ta nie jest najważniejsza, ale „List” dowodzi funkcjonowania pewnego „zjawiska” dosyć powszechnego), któremu podlega (świadomie lub nie) liczna (niestety) grupa ludzi uczących mechanikę. Zjawiskiem tym jest nadmierna skłonność do *t r w a n i a* w ustalonych nawykach myślowych i stereotypach. Ludzie ci nie chcą (a może nie potrafią?) dostrzec, że *a p a r a t f o r m a l n y* mechaniki nie jest statycznym, niezmiennym zbiorem pojęć, terminów i reguł, ale że stosownie do celów i potrzeb aparat ten podlega określonym zmianom i rozszerzeniom *n i e n a r u s z a j ą c* przy tym ani zasadniczych treści, ani tym bardziej przedmiotu badań mechaniki, jakim jest i pozostanie ruch ciał materialnych. Co więcej, ludzie ci odżegnują się od wszelkiej formalizacji, upatrując w niej zaciemnianie treści fizycznej mechaniki, próbę zamachu na znaczenie i istotę inżynierskiej intuicji. Zapominają przy tym, że sami posługują się określonymi definicjami (bo bez tych *n i e m o ż n a* analizować żadnego problemu mechaniki), a zatem stosują elementy odpowiedniego formalizmu. Każdy, kto posługuje się określonym systemem formalnym, wie jaką rolę należy przypisać *t r e ś c i* definicji, a jaką jej *n a z w i e*, i że ta ostatnia nawet trafnie, estetycznie i wygodnie dobrana *n i e i m p l i k u j e* w żadnym przypadku istoty treści, którą niesie. Tak np. powszechnie stosowana w rachunku wariacyjnym i teorii procesów optymalnych nazwa „równanie Eulera-Lagrange’a” na określenie warunku optymalności mogłaby sugerować (gdyby się podzielało stanowisko Autora „Listu”), że równanie to wyprowadzili wspomniani wyżej uczeni, podczas gdy wiadomo, że w odniesieniu do większości rezultatów współczesnego rachunku wariacyjnego nie mogli tego uczynić, gdyż nie mieli za swego życia tych możliwości. (podobnie gdy rozmawiam z Iksem o Z. Kączkowskim, to nie od razu musi mój rozmówca kojarzyć nazwisko to ze znanym specjalistą mechaniki budowli). Skąd zatem tak gwałtowny protest przeciwko *n a z w i e*, która sama w sobie nie jest nośnikiem informacji o pojęciu, które reprezentuje? W świetle

tych uwag (nie nowych przecież) zdziwienie budzić musi wniosek, do jakiego doszedł Autor „Listu”. że nazwa „kinematyczna równoważność” prowadzi do pomieszania pojęć „kinematyka” i „statyka”. A przy sposobności — kinematyka nie jest „nauką o geometrii ruchu”, jak utrzymuje Autor „Listu” bo „kinematyka” i „geometria ruchu” to synonimy (nie jest więc „kinematyka nauką o ... kinematyce”)!

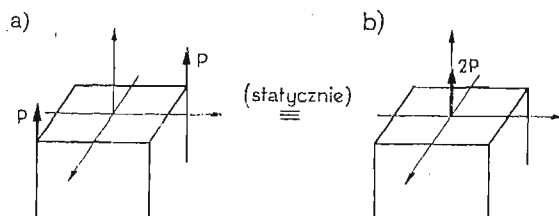
W moim przekonaniu uważny czytelnik znający definicję statycznej równoważności układów sił napotykać na nową, zaproponowaną w moim artykule, definicję „kinematycznej równoważności układów sił” nie powinien mieć żadnych ubocznych skojarzeń i domysłów, a tylko określoną treść, jaką niesie relacja „kinematycznej równoważności”. Ale skoro moja zbyt wiara w ten brak skojarzeń została zachwiana, jak tego dowodzi protest Autora „Listu”, gotów jestem raz jeszcze wywody swe w syntetycznej formie powtórzyć.

Spróbujmy zatem raz jeszcze wyjaśnić cel pracy:

Niech dany będzie zbiór Ω układów wektorów. Weźmy podzbiór $\Omega^* \subset \Omega$ taki, że każde dwa elementy tego podzbioru spełniają relację

$$(1) \quad \bar{S}(A) = \bar{S}(B), \quad \bar{M}_Q(A) = \bar{M}_Q(B)$$

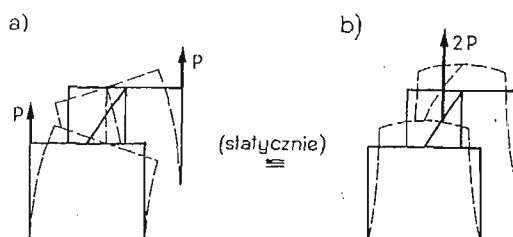
(Suma układu (A) jest równa sumie układu (B) i moment układu (A) względem punktu Q jest równy momentowi układu (B) względem tego samego punktu). Łatwo udowodnić, że jest to relacja równoważności (ani statycznej ani „kinematycznej” ani żadnej innej — po prostu relacja równoważności rozumiana tak, jak ją się rozumie w matematyce, logice i wszelkich systemach formalnych). Relacja ta nosi nazwę „stycznej równoważności układów wektorów”. Tendencyjnie napisałem „układów wektorów”, bo mogą być to np. układy wektorów prędkości, pędu, przyspieszeń, natężenia pola elektrycznego itp. Relacja (1) jest czysto formalną definicją — jej wykorzystanie i interpretacja fizyczna zależą od problemu i fizycznych okoliczności zagadnienia, mimo że jej nazwa mogłaby sugerować zastosowanie tylko do problemów statyki. Może ona mieć lub nie zastosowania w mechanice w zależności od poruszanego zagadnienia. Zostańmy jednak przy układach wektorów sił zewnętrznych. Jakie znaczenie ma powyższa relacja w mechanice nie trzeba uzasadniać. Choć warto może przytoczyć jedno. Znając rozwiązanie zagadnienia brzegowego mechaniki ciała stałego tzn. T_σ , T_ε i \bar{u} dla jednego reprezentanta



Rys. 1

klasy równoważności, rozwiązanie to można wykorzystać — dzięki zasadzie de Saint Venanta — dla każdego układu z tej klasy równoważności. Jeśli przedmiotem rozważań jest pręt, to powyższą zasadę możemy zastosować tylko do tzw. prętów litych. W przypadku prętów cienkościennych relacja (1) (choć nadal poprawna formalnie) nie może być przy-

jęta. Nie jest bowiem możliwe (z powodów natury fizycznej), by rozwiązanie dla reprezentanta wyżej wymienionej klasy równoważności było słuszne dla innych układów tej klasy. Dowód tego jest natychmiastowy. Rozważmy pręt lity obciążony układem sił zewnętrznych jak na rys. 1a. Rozwiązanie zadania przedstawionego na rys. 1b może być również wykorzystane w przypadku obciążenia jak na rys. 1a (i nie tylko takiego, a dla każdego innego spełniającego relację statycznej równoważności). Obciążmy teraz takim samym układem jak na rys. 1a pręt cienkościenny. Rozwiązanie dla układu (b) nie może być wykorzystane dla układu (a) na mocy zasady de Saint Venanta. Efekty kinematyczne, jakie wywołują układy (a) i (b) są diametralnie różne (por. rys. 2). Nasuwa się więc naturalne



Rys. 2

pytanie: czy w zbiorze układów sił zewnętrznych można określić taką relację równoważności, (inną niż (1)), aby np. rozwiązanie dla reprezentanta tej klasy (tzn. dla określonego układu sił) można było wykorzystać dla każdego układu tej klasy, tzn. dla każdego innego układu sił spełniającego tę poszukiwaną relację równoważności? (a tym samym unikając konieczności rozwiązywania każdego przypadku obciążenia osobno).

Celem pracy „Kinematyczna równoważność...” jest określenie właśnie takiej relacji równoważności. Oczywiście jest rzeczą, że poszukiwana relacja równoważności określać powinna klasę układów dających ten sam efekt kinematyczny (gdyż ten jest w danym przypadku istotny). Z tych właśnie powodów wspomnianą relację zaproponowaną w artykule nazwałem „kinematyczną równoważnością układów sił” oddającą moim zdaniem dobrze jej istotę. Można ją również nazwać „relacją X”, albowiem nazwę stawiam na drugim miejscu po treści. Może pod wpływem „publicznego zdecydowanego odporu” (Z. Kączkowski) przyjdzie nazwę zmienić, ale tylko w przypadku gdyby argumentacja była poprawna.

Itak przechodząc do „Listu” Z. Kączkowskiego:

1. Podstawową tezę pracy nie jest uogólnienie pojęcia statycznej równoważności— jak pisze Z. Kączkowski, a wręcz przeciwnie, ze zbioru układów statycznie równoważnych wybranie podzbioru układów sił spełniających dodatkowo warunek.
2. Praca nie dotyczy układów sił działających w przekroju poprzecznym pręta, a dotyczy układów sił zewnętrznych przyłożonych do pręta (dokładniej do odciętej przekrojem poprzecznym części pręta). Nie ma sensu mówić (aczkolwiek można) o równoważnych układach sił wewnętrznych (jedną ze współrzędnych gęstości tych sił jest σ_x). Równania (1) i (2), które Z. Kączkowski wymienia w „Liście” są to równania wynikające z równoważności układów sił wewnętrznych z odpowiednim układem sił zewnętrznych. Taka rzeczywistość jest ich postać dla dowolnego układu ze zbioru, w którym określona jest

relacja, której nazwa tak bardzo nie podoba się Z. Kączkowskiemu. Równania te są dopiero konsekwencją wprowadzonej relacji porządkującej.

3. Z. Kączkowski pisze w „Liście”: „... w płęcie cienkościennym układ ten (σ_x — dop. mój) zależy także od nowej wielkości statycznej zdefiniowanej całką (2)”. W poufnej opinii natomiast pisze: „Po prostu w prętach cienkościennych p o j a w i a s i ę (podkr. moje) jeszcze jedna uogólniona siła wewnętrzna — bimoment — zdefiniowana (tak jak wszystkie inne) określoną całką z naprężeń σ_x . A że bimoment może być w rozmaity sposób realizowany, to Autor pokazał na rysunkach”. Podobnie postępuje wielu autorów — o czym piszę w pracy — stwierdzając formalnie, że taką a taką całkę będziemy nazywać bimomentem, który „się pojawia”. Na marginesie należy przypomnieć, że bimoment jest to liczba, którą przyporządkowujemy biparze i bimomentu jako liczby nie można w różny sposób realizować. Jednym z celów pracy było pokazanie bipary i to zarówno sił zewnętrznych jak i wewnętrznych. Bipara sił zewnętrznych stanowiła podstawę sformułowania relacji równoważności, której nazwa napotyka na odpór.
4. Krytykę odnośnie „nieporadności językowej” w sformułowaniu zasady de Saint Venanta przyjmuję nie bez uczucia satysfakcji, że znalazłem się w dobrym towarzystwie! (por. W. Nowacki, „Teoria sprężystości”, PWN 1970, cz. II, rozdz. 5, § 22, s. 264).
5. Nie cytowałem w swej pracy artykułu W. Burzyńskiego, przeto nie ma tej pozycji w spisie literatury.
6. Uważam za niestosowne dopisywanie nazwisk osób do pracy, której nie wykonywali. Rozdział o prętach cienkościennych w książce zamieszczonej w poz. 1 spisu literatury napisał tylko J. Mutermilch (por. odpowiednią uwagę w książce). W bibliografii wymieniono natomiast wszystkich autorów.
7. Nie bardzo rozumiem zdania „o XIX — wiecznej problematyce”. Czyżbyśmy znali rozwiązania wszystkich zagadnień postawionych w poprzednich wiekach? Jeżeli jednak uwaga Autora „Listu” znaczyć miała przestarzałość i oczywistość poruszanej problematyki, to sam fakt tak zaangażowanej Jego odpowiedzi polemicznej dowodzi, że i w XIX-wiecznej problematyce wciąż jeszcze znaleźć można temat do wcale nie banalnej (jak tego dowodzi treść „Listu”) polemiki.

W zakończeniu należy dodać, że publikowana praca „Kinematyczna równoważność układów sił” nie nosi znamion odkrycia naukowego, ma za zadanie jedynie spełnić rolę porządkującą w zakresie zastosowań i interpretacji pewnych wielkości statycznych.

Stefan Piechnik

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- R. GUTOWSKI, Modele matematyczne procesów dynamicznych i stateczność ruchu
Математические модели динамических процессов и устойчивость движения
Mathematical models of dynamical processes and stability of motion
- J. J. WĄSOWSKI, Badanie ugięć płyt metodą moiré
Исследование изгиба пластин методом муара
Examination of the deflection of the plates by moiré method
- J. KARKOWSKI, Analiza sprężysto-plastycznego jarzma połączenia sworzniowego
Упруго-пластический анализ проушины стержневого соединения
Elastic-plastic analysis of bridge plate of pin joints
- Z. ORŁOŚ, K. TOMASZEWSKI, Badania odkształceń i naprężeń termosprężystych na modelach epoksydowych metodą tensometrii elektrozestancyjnej
Исследования термоупругих деформаций и напряжений эпоксидных моделей методом электрорезистивной тензометрии
Investigations of thermoelastic strains and stresses of epoxy models by means of electroresistance tensometry
- F. TWARDOSZ, J. ZIELNICA, O stateczności dynamicznej powłoki stożkowej przy pulsujących siłach podłużnych i poprzecznych z uwzględnieniem nieliniowego tłumienia materiałowego
Об динамической устойчивости конической оболочки при пульсирующих продольных и поперечных силах с учетом нелинейного демпфирования материала
Dynamical stability of a conical shell loaded by transversal and longitudinal forces with the nonlinear material's damping
- J. ŁUCZKO, Optymalny dobór bezinercyjnego układu amortyzacji przy wymuszeniu harmonicznym
Оптимальный подбор безинерционной системы амортизации при гармоническом вынуждении
Optimal choice of non-inertial system of vibroisolation with harmonic forcing
- M. ALWIŃSKA, A. GAJEWSKI, Optymalne kształtowanie belki wspornikowej obciążonej siłami zewnętrznymi i ciężarem własnym w warunkach pełzania
Оптимальное формирование консольной балки нагруженной внешними силами и собственным весом в условиях ползучести
Optimal design of the cantilever beam loaded by external forces and by its own weight in creeping conditions
- J. WOJNAROWSKI, J. ŚWIDER, Metoda niezależnych konturów bezpośredniej transformacji układu mechanicznego w graf przepływu sygnałów
Метод независимых контуров непосредственной трансформации механической системы в граф сигналов
A method of independent cycles of direct transformation of a mechanical system into a flow graph of signals
- J. KOLEŃDA, Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności dynamicznej fundamentów. Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów linii wałów
Вынужденные колебания валопроводов с учетом асимметрии изгибной жесткости и податливости фундаментов. Метод идентификации динамической податливости фундаментов валопроводов
Forced vibrations of shaftings with asymmetry of a bending rigidity of flexible foundations. Identification method of the dynamical receptances of shafting foundations
- W. WOJEWÓDZKI, A. PERDZYŃSKA, Określenie ugięć lepkoplastycznej płyty prostokątnej obciążonej impulsem ciśnienia
Определение прогибов вязкопластической прямоугольной пластинки нагруженной действием импульса давления
Determination of a viscoplastic rectangular plate under pressure impulse
- W. SZYSZKOWSKI, Analiza możliwości przystosowania się pewnego typu osiowo-symetrycznej konstrukcji powłokowej poprzez lokalną utratę stateczności jej powierzchni
Анализ возможности приспособления некоторых осесимметричных оболочек после потери устойчивости
The analysis of adaptation possibilities of some axisymmetrical shells after local buckling
- J. LELLEP, Optymalizacja położenia podpór belki sztywno-plastycznej obciążonej impulsem prędkości
Оптимализация расположения дополнительных опор при импульсно нагруженной жестко-пластической балке
Optimal location of additional supports in the case of a rigid-plastic beam loaded impulsively
- A. ŻMITROWICZ, Siły tarcia Coulomba podczas wirowania
Силы трения Куломба при вращении
Coulomb friction forces during rotation

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i cały rok następny,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
