

71720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

**MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA**

KWARTALNIK

TOM 16 · ZESZYT 2

WARSZAWA 1978

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

SPIS TREŚCI

<p>R. I. STEPHENS, Wpływ przeciążeń na wzrost szczelin zmęczeniowych Влияние перегрузки на развитие усталостных трещин The influence of overloads on fatigue crack growth</p>	123
<p>M. CHRZANOWSKI, Parametr uszkodzenia w kontynuowanej mechanice zniszczenia Параметр повреждения в механике разрушения сплошной среды Damage parameter in continual fracture mechanics</p>	151
<p>K. KRZEMIŃSKI, Rozkład ciśnień i nośność hydrodynamicznego filmu smarnego w łożyskach porowatych Распределение давления и несущая способность смазочного слоя в пористых подшипниках The pressure distribution and load capacity of the hydrodynamic film in porous bearings</p>	169
<p>J. SZALA, Wpływ sekwencji obciążeń na trwałość zmęczeniową Влияние истории нагружения на усталостную прочность The effect of load sequence on fatigue life</p>	181
<p>F. ROMANÓW, Naprężenia krytyczne wolnopodpartych ścinanych płyt przekładkowych Критические напряжения свободно опертых трехслойных пластин работающих на сдвиг Critical stresses of simply supported sandwich plates in shear</p>	199
<p>J. ŚWIDER, J. WOJNAROWSKI, Grafy przepływu sygnałów w modelowaniu kaskadowej struktury układu wyciągowego Графы сигналов в моделировании каскадной структуры подъемной системы Signal flow graphs in modelling of the cascade structure of the lifting system</p>	215
<p>J. ŚWIDER, J. WOJNAROWSKI, Metoda fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej jako sposób wyznaczania podatności dynamicznej złożonych układów mechanicznych Метод фиктивных источников полосной переменной как способ определения динамической податливости сложных механических систем The fictitious source method in polar coordinates as the method of obtaining dynamical flexibility of composite mechanical systems</p>	225
<p>E. WŁODARCZYK, O pewnym zamkniętym rozwiązaniu problemu propagacji płaskiej fali uderzeniowej w niejednorodnym plastycznym ośrodku politropowym z liniowosprężystym odciążeniem О некотором замкнутом решении задачи о распространении плоской ударной волны в неоднородной политропной среде с линейно-упругой разгрузкой On a certain in closed-form solution of the problem of propagation of a plan shock wave in a nonhomogeneous plastic polytropic medium</p>	235
<p>J. TALER, Апроксимация неусталонного поля температуры в телах валцовых и кулистных Аппроксимация неустановившегося температурного поля в цилиндрических и сферических телах Approximation of the transient temperature field in cylindrical and spherical bodies</p>	247
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	265

74 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 16 · ZESZYT 2

WARSZAWA 1978

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, IGOR KISIEL, WITOLD
NOWACKI, JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
ANDRZEJ DRESCHER — REDAKTOR
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

РЕДАКЦИЯ

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 690 (587+103) egz. Arkuszy wydawn. 12,5. Arkuszy drukarskich 9,75. Papier druk. sat. III kl.
71 g. 70×100. Oddano do składania 10.II.1978 r. Druk ukończono w lipcu 1978 r. Zam. 257 78.
B-56 S-103 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

WPLYW PRZECIĄŻEŃ NA WZROST SZCZELIN ZMĘCZENIOWYCH*)

RALPH I. STEPHENS (IOWA CITY)

Spis oznaczeń

- a długość szczeliny — [mm],
 a_i początkowa długość szczeliny w momencie pierwszego przeciążenia — [mm],
 a^* zakres występowania opóźniania się szczeliny — [mm],
 A współczynnik prędkości wzrostu szczeliny — [mm/cykl],
 B grubość próbki — [mm],
 CT zwarta próbka rozciągana (*compact tension*),
 da/dN prędkość wzrostu szczeliny — [mm/cykl],
 H połowa wysokości próbki — [mm],
 K współczynnik intensywności naprężeń — [MPa \sqrt{m}],
 K_c odporność na pękanie — [MPa \sqrt{m}],
 K_{max} maksymalny współczynnik intensywności naprężeń dla obciążenia o stałej amplitudzie — [MPa \sqrt{m}],
 K_{max1} początkowy maksymalny współczynnik intensywności naprężeń dla pierwszego cyklu obciążenia, o stałej amplitudzie, występującego po przeciążeniu — [MPa \sqrt{m}],
 K_{min} minimalny współczynnik intensywności naprężeń dla obciążenia o stałej amplitudzie — [MPa \sqrt{m}],
 $+\Delta K$ dodatni zakres współczynnika intensywności naprężeń dla obciążenia o stałej amplitudzie — [MPa \sqrt{m}],
 K_0 współczynnik intensywności naprężeń odpowiadający przeciążeniu — [MPa \sqrt{m}],
 K_{op} współczynnik intensywności naprężeń odpowiadający otwarciu szczeliny — [MPa \sqrt{m}],
 K_{eff} efektywny zakres współczynnika intensywności naprężeń = $(K_{max} - K_{op})$ — [MPa \sqrt{m}],
 n współczynnik prędkości wzrostu szczeliny zmęczeniowej (wykładnik eksponencjalnego wzoru na wzrost pęknięć zmęczeniowych),
 N liczba cykli obciążenia,
 N_f liczba cykli do zniszczenia,
 N^* liczba cykli opóźnienia wzrostu szczeliny zmęczeniowej,
 ΔN odległość pomiędzy przeciążeniami w cyklach,
 ΔN_0 liczba przeciążeń w bloku,
 OLR współczynnik przeciążenia = $P_0/P_{max} = K_0/K_{max}$,
 P_{max} maksymalna siła dla obciążenia o stałej amplitudzie — kN,
 P_0 siła odpowiadająca przeciążeniu — [kN],
 R współczynnik asymetrii cyklu obciążenia = P_{min}/P_{max} ,
 $2r_y$ promień (wymiar) strefy uplastycznionej — [mm],
 r^* promień (wymiar) cyklicznej strefy uplastycznionej — [mm],
 RF współczynnik opóźnienia lub trwałość unormowana przy przeciążeniu = trwałość przy przeciążeniu/trwałość porównawcza,
 SEN próbka z pojedynczym karbem krawędziowym,
 S_y umowna granica plastyczności $R_{0.2}$ — [MPa],
 S_u granica wytrzymałości na rozciąganie — [MPa],
 W szerokość próbki — [mm].

Uwaga: 1 MPa (megapaskal) równa się 1 MN/m² (meganiuton na metr kw.). Jednostką współczynnika intensywności naprężenia (MPa \sqrt{m}) może być również MNm^{-3/2}.

*) Tłumaczył dr inż. Grzegorz Glinka, Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W 1960 roku SCHIFFE [1] wykazał, że pojedyncze rozciągające przeciążenia cienkich blach aluminiowych ze szczelinami mogą powodować znaczne zmniejszenie i opóźnienie dalszego zmęczeniowego wzrostu tych szczelin. W 1961 roku HUDSON i HARDRATH [2] przeprowadzili bardziej obszerne badania, które także wykazały, że w przypadku cienkich blach aluminiowych wysokie przeciążenia rozciągające wyraźnie opóźniają wzrost szczelin zmęczeniowych. Jednak w ciągu następných lat stosunkowo niewiele prac poświęcono temu zjawisku. Nic było ono dostatecznie dokładnie badane ani też opisywane aż do roku 1970.

W 1975 roku odbyło się w Montrealu, w Kanadzie, sympozjum na temat: «Wzrost szczelin zmęczeniowych pod widmem obciążeń» [3], które było finansowane przez Komitety E-9 i E-24 American Society for Testing and Materials, zajmujące się problematyką zmęczenia i badań na pęknięcie. Sympozjum to jest przykładem największego skoncentrowanego wysiłku poświęconego oddziaływaniu prostych i złożonych widm obciążeń o zmiennych amplitudach na wzrost szczelin zmęczeniowych. Sympozjum wykazało także złożoność zagadnienia, jakim jest przewidywanie trwałości na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych, zarówno przy prostych, jak i złożonych widmach obciążeń o zmiennych amplitudach.

W roku 1971 w University of Iowa rozpoczęto badania dotyczące zarówno strony poznawczej, jak i przewidywania charakteru wzrostu szczelin zmęczeniowych w metalach przy różnych prostych widmach obciążeń. Niniejszy artykuł stanowi przegląd sześciolletnich badań wykonanych na tym uniwersytecie pod kierownictwem autora. Całość składa się z trzynastu różnych prac badawczych, których wyniki opublikowano w jedenastu artykułach, podanych chronologicznie w literaturze [4÷14]. Badania dotyczą dziewięciu różnych materiałów, wśród których znajdowały się stopy aluminium, stali i żeliwo sferoidalne. Własności mechaniczne oraz składy chemiczne tych materiałów podano w tabl. 1 i 2. Były to materiały w stanie surowym, walcowane na zimno, walcowane na gorąco oraz w stanie łąnym. Granice plastyczności tych materiałów zawarte były w granicach 358÷1412 MPa i znajdowały się wśród nich zarówno materiały cyklicznie umacniające się, jak i osłabiające. Stosowano głównie próbki rozciągane zwarte (*CT*), rys. 1a, lecz dla zweryfikowania wyników otrzymanych z próbek *CT* i pomiaru obciążeń, przy których następowało zamykanie się szczeliny, wykorzystywano także próbki z pojedynczym karbem krawędziowym (*SEN*), rys. 1b. Na końcach próbek wywiercono po trzy otwory w celu zamocowania kulkowych uchwytów umożliwiających zarówno ściskanie, jak i rozciąganie bez wprowadzenia dodatkowych momentów zginających. Szerokość próbek rozciąganych zwartych zmieniano w granicach $W = 80 \div 90$ mm przy stosunku wymiarów $H/W = 0,48 \div 0,60$. Natomiast szerokość wszystkich próbek z pojedynczym karbem krawędziowym była jednakowa i wynosiła $W = 25,4$ mm. Grubości próbek rozciąganych zwartych zmieniały się w zakresie $B = 5,7 \div 10,1$ mm natomiast próbek z pojedynczym karbem krawędziowym w przedziale $B = 3,2 \div 6,3$ mm.

Przebiegi obciążeń realizowane w czasie prób przedstawiono na rys. 1c÷1j. Wyniki prób pod obciążeniami o zmiennych amplitudach porównywano z tzw. wynikami porównawczymi, otrzymanymi z próby z obciążeniem o stałej amplitudzie, pokazanym na rys. 1c.

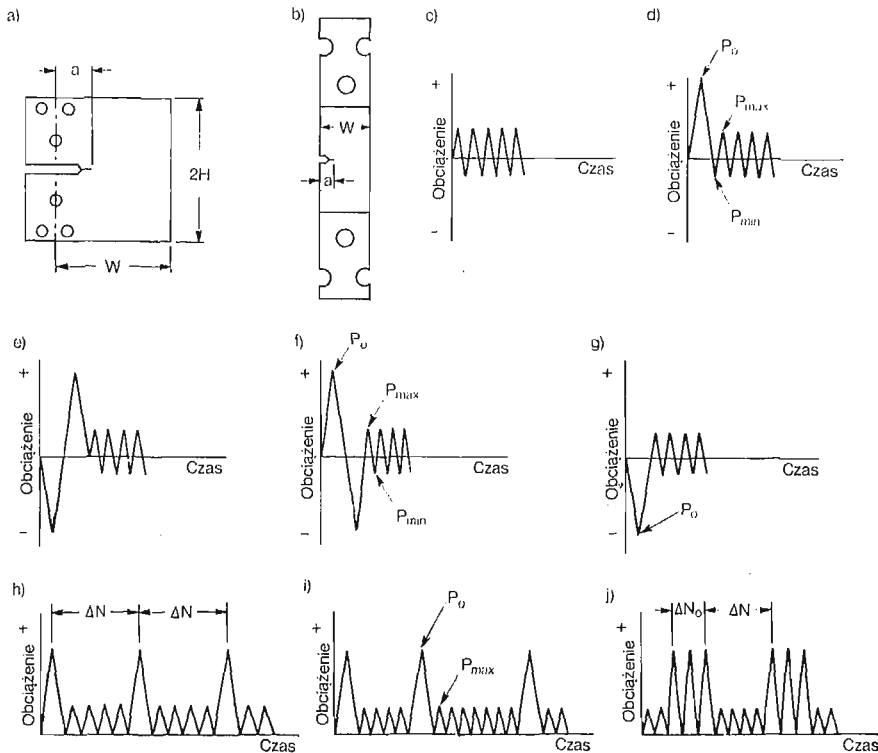
Tablica 1. Monotoniczne własności mechaniczne materiałów oraz kształt próbek zmęczeniowych

Material	Granica plastyczności [MPa]	Granica wytrzymałości na rozciąganie [MPa]	Kształt próbki	Grubość [mm]	Stan materiału
Stop aluminium 2024-T3	358	475	CT, SEN	3,2—9,1	w stanie surowym
Stop aluminium 7075-T6	503	572	CT, SEN	3,2—9,1	w stanie surowym
Stal ASTM A440	372	524	CT	5,7	walcowana na gorąco
Stal AISI walcowana na zimno	636	681	CT	6,3	walcowana na zimno
Stal Hadfielda	426	1062	CT	6,3	walcowana na gorąco
Stal AISI 4140	757	799	CT	8,3	ulepszana cieplnie
	1136	1184	CT	8,3	
	1412	1502	CT	8,3	
Żeliwo sferoidalne	410	677	CT	10,1	w stanie lanym

Tablica 2. Wagowy skład chemiczny materiałów [%]

Material	C	Mn	P	S	Si	Cr	Mo	Cu	Mg	Zn
Stop aluminium 2024-T3		0,6			0,5	0,1		4,3	1,5	0,25
Stop aluminium 7075-T6		0,3			0,5	0,3		1,6	2,5	5,6
Stal ASTM A440	0,16	0,96			0,07	0,08	0,05			
Stal AISI 1020 walcowana na zimno	0,20	0,45	0,04	0,05						
Stal Hadfielda	1,1	12,5	0,028	0,0009	0,24					
Stal AISI 4140	0,39	0,76	0,002	0,015	0,082	0,86	0,14	0,12		
Żeliwo sferoidalne	3,7	0,48	0,02	0,01	2,6	0,06	0,001	0,07		

Na rys. 1d ÷ 1g pokazano przebiegi obciążeń (widma) z przeciążeniami pojedynczymi. Wartość przeciążenia oznaczono symbolem P_0 , natomiast maksymalną i minimalną wartość realizowanego po nim obciążenia o stałej amplitudzie oznaczono odpowiednio przez P_{max} i P_{min} . Próby prowadzono przy stałych współczynnikach asymetrii cyklu $R = P_{min}/P_{max}$ o wartościach z przedziału $+0,5 \div -2$. Cykle przeciążeniowe, jak i następujące po nich cykle obciążenia o stałej amplitudzie mogły więc zawierać zarówno obciążenia ściskające, jak i rozciągające. Współczynnik przeciążenia (OLR) zdefiniowano jako stosunek P_0/P_{max} , którego wartość zmieniano w granicach $1,25 \div 3,0$. Obciążenie z pojedynczymi periodycznymi przeciążeniami rozciągającymi pokazano na rys. 1h, na-



Rys. 1. Próbki zmęczeniowe i widma obciążeń

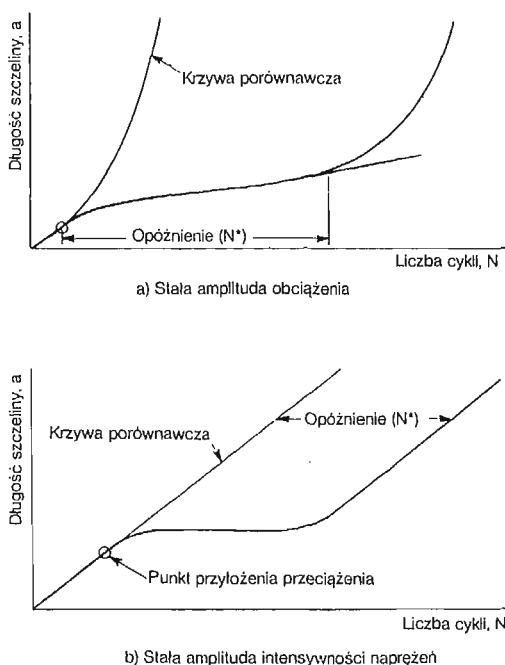
tomiast obciążenie z pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi występującymi nieregularnie widoczne jest na rys. 1i. Liczbę cykli obciążeń realizowaną pomiędzy kolejnymi przeciążeniami, zwaną dalej odstępem, oznaczono symbolem ΔN . Zmieniała się ona w przedziale $10^3 \div 4 \cdot 10^3$ cykli. Obciążenie z periodycznymi przeciążeniami wielokrotnymi przedstawia rys. 1j, gdzie ΔN_0 oznacza liczbę przeciążeń przyłożoną jednoznaczowo, zmieniającą się w zakresie $1 \div 200$ cykli. Wszystkie przeciążenia przedstawione na rys. 1h ÷ 1j miały współczynnik asymetrii cyklu $R = 0$.

Wszystkie badania wykonano na elektrohydraulicznej maszynie zmęczeniowej z automatycznym układem sterującym. Przeciążenia realizowano z częstotliwością $0,01 \div 0,5$ Hz, natomiast obciążenie o stałej amplitudzie — z częstotliwością $5 \div 25$ Hz, zależnie od współ-

czynnika asymetrii cyklu R . Przed przyłożeniem przeciążenia we wszystkich próbkach inicjowano najpierw szczelinę zmęczeniową. Obciążenie, przy którym inicjowano wstępną szczelinę zmęczeniową charakteryzowało się współczynnikiem asymetrii cyklu $R = 0$, a jego wartość maksymalna P_{max} była zawsze równa wartości maksymalnej obciążenia o stałej amplitudzie realizowanego po przyłożeniu przeciążenia. Długość szczeliny mierzono za pomocą stroboskopu i podziałki o dokładności 0,25 mm.

2. Pojedyncze przeciążenia rozciągające i ściskające, $R = 0$

Typowy przykład wzrostu szczeliny zmęczeniowej po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego przedstawiono na rys. 2. Dla porównania pokazano także wzrost szczeliny zmęczeniowej pod obciążeniem o stałej amplitudzie. Nie zaczerknione kółka oznaczają punkt przyłożenia przeciążenia. Rys. 2a przedstawia typowy przykład wzrostu



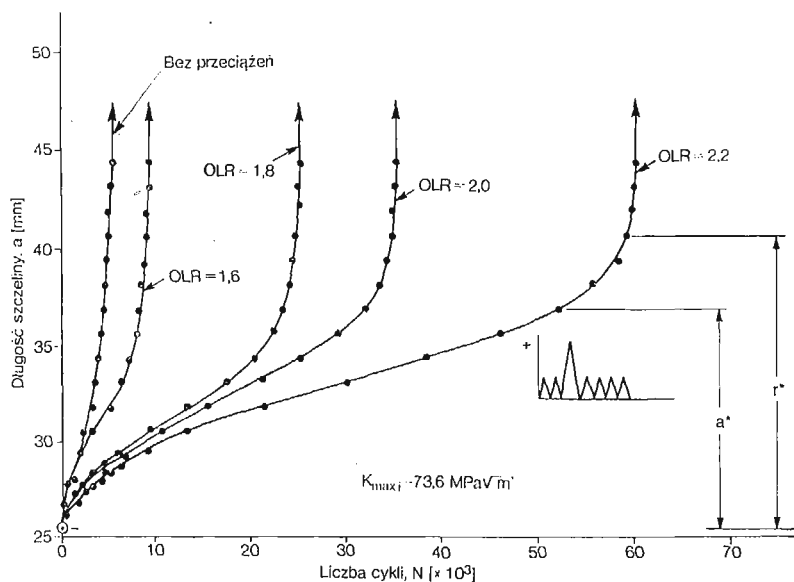
Rys. 2. Schematyczny obraz opóźnienia wzrostu szczeliny zmęczeniowej

szczeliny zmęczeniowej przy stałej amplitudzie obciążenia, natomiast rys. 2b wzrost szczeliny zmęczeniowej przy stałej amplitudzie współczynnika intensywności naprężeń. Jedyną różnicą w obydwóch przykładach jest stała prędkość wzrostu szczeliny rosnącej przy stałej amplitudzie intensywności naprężeń. W obydwóch przypadkach zdefiniowano także to, co się rozumie przez termin — opóźnienie wzrostu szczeliny zmęczeniowej N^* . Zgodnie z rys. 2a przyjęto także, że opóźnienie wzrostu szczeliny zmęczeniowej po przyłożeniu przeciążenia jest zakończone, gdy zależność $a-N$ przestaje być prostoliniowa.

Innym wskaźnikiem opóźnienia jest także stosunek trwałości do zniszczenia, mierzonej od momentu przyłożenia przeciążenia do trwałości porównawczej uzyskanej przy stałej amplitudzie obciążenia. Stosunek ten nazywany jest trwałością unormowaną lub współczynnikiem opóźnienia $R.F.$ Autor stosował obydwie definicje.

Pęknięcia zmęczeniowe zaraz po przyłożeniu przeciążenia rozciągającego często charakteryzują się stosunkowo wysoką prędkością przejściową — rys. 2a i 2b. Ten przejściowy okres wzrostu nazywany jest często «spóźnionym występowaniem opóźnionego wzrostu szczeliny zmęczeniowej» (*delayed retardation of fatigue crack growth*) i zależy od rodzaju materiału, współczynnika przeciążenia, wielkości strefy uplastycznionej przed wierzchołkiem szczeliny spowodowanej przeciążeniem oraz grubości materiału. ELBER tłumaczy to zjawisko w oparciu o tzw. model zamykania się szczeliny. Przyrost długości szczeliny odpowiadający wspomnianemu okresowi, obserwowany w dziewięciu różnych materiałach, wahał się w granicach $0 \div 5$ mm.

2.1. Przeciążenia rozciągające, $R = 0$. Typowe krzywe wzrostu szczeliny zmęczeniowej po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego otrzymane przy $R = 0$, z badania stali A440 [9] przedstawiono na rys. 3. Każda krzywa reprezentuje inną próbkę badaną przy innym współczynniku przeciążenia (OLR), który zmieniano w granicach $1,6 \div 2,2$.



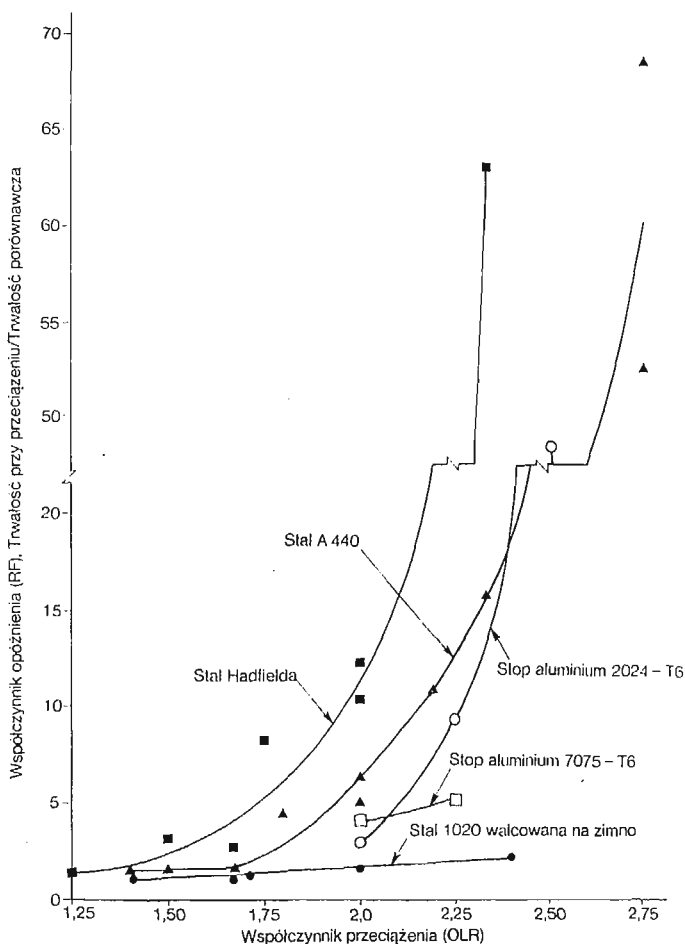
Rys. 3. Wzrost szczeliny zmęczeniowej po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego, stal A440, $R = 0$ [9]

Przeciążenia przykładano dopiero wtedy, gdy szczelina osiągnęła długość początkową równą 25,4 mm. Widać wyraźnie, że przy określonej wartości maksymalnej P_{max} obciążenia o stałej amplitudzie, najdłuższa trwałość i największe opóźnienia występowały przy największych przeciążeniach. Symbol K_{max1} oznacza wartość współczynnika intensywności naprężeń zaraz po przyłożeniu przeciążenia przyjmując, że nie nastąpił w tym czasie przyrost długości szczeliny. Natomiast symbole a^* i r^* zaznaczone na krzywej otrzymanej

przy $OLR = 2,2$ oznaczają odpowiednio przyrost długości w okresie opóźnionego wzrostu szczeliny i wymiar cyklicznej strefy uplastycznionej w płaskim stanie naprężenia, obliczany według RICE'A [16]

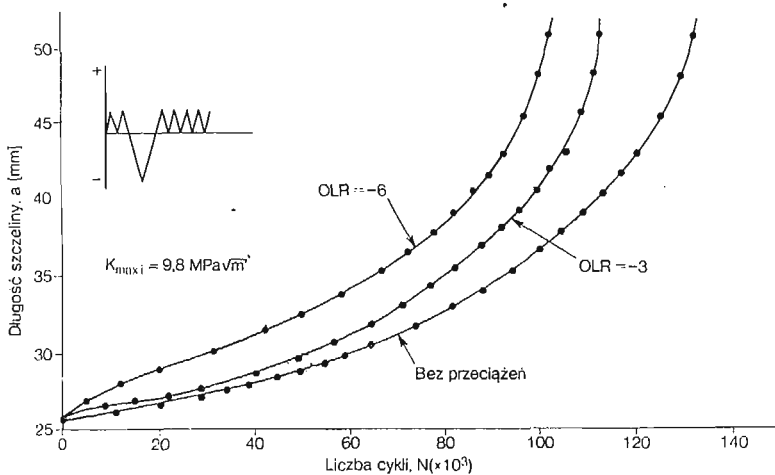
$$(1) \quad r^* = \frac{1}{4}(2r_y) = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{2\pi} \left(\frac{K_0}{S_y} \right)^2 \right] = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_0}{S_y} \right)^2.$$

W przypadku stopów aluminium i stali wartość a^* zmieniała się znacząco w przedziale $0 \div 11$ mm, a wartość r^* — w granicach $1 \div 15$ mm, natomiast wartości stosunku a^*/r^* leżały w przedziale $0 \div 1$. We wszystkich przypadkach opóźnienie wzrostu szczelin zmęczeniowych miało miejsce na odcinku odpowiadającym wymiarowi cyklicznej strefy uplastycznionej w płaskim stanie naprężenia, wywołanej przeciążeniem. Długość okresu wzrostu szczeliny zmęczeniowej na odcinku od a^* do r^* jest stosunkowo mała i dlatego przy opracowywaniu modeli dla określenia trwałości na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych założenie, że $a^* \approx r^*$ jest uzasadnionym przybliżeniem inżynierskim.



Rys. 4. Wpływ współczynnika przeciążenia (OLR) na opóźnienie wzrostu szczeliny zmęczeniowej [4, 5, 7, 9, 10]

Na rys. 4 przedstawiono ostateczne wyniki dotyczące trwałości przy opóźnionym wzroście szczelin zmęczeniowych w funkcji współczynnika przeciążenia [4, 5, 7, 9, 10], uzyskane z badań pięciu różnych materiałów. Widoczne jest, że trwałość nie ulega istotnemu wydłużeniu wskutek przyłożenia przeciążenia, jeśli $OLR \leq 1,4$. Przy większych przeciążeniach uzyskano natomiast nawet 68-krotne wydłużenie trwałości. W stopach aluminium przy $OLR \geq 2,5$ i $R = 0$ występowało nawet całkowite zatrzymanie szczelin zmęczeniowych. Zgodnie z wynikami przedstawionymi na rys. 4 oczywiste jest także, że opóźnienie przy określonym współczynniku przeciążenia silnie zależy od rodzaju materiału. W przypadku stali 1020 walcowanej na zimno przyrost trwałości przy współczynniku przeciążenia $OLR = 2,0$ był na przykład 1,5-krotny, natomiast dla stali Hadfielda około 11-krotny. Wymiar cyklicznej strefy uplastycznionej r^* był przy tym w przypadku stali 1020 bardzo mały, natomiast duży dla stali A440 i stali Hadfielda. Większym opóźnieniem przy $R \geq 0$ charakteryzowały się materiały o niższej granicy plastyczności i wysokiej odporności na pękanie. Podobną tendencję wykazywały także, posiadające różne granice plastyczności, trzy odmiany stali 4140 [13], podczas gdy opóźnienie w żeliwie sferoidalnym było podobne jak w stali walcowanej na zimno.



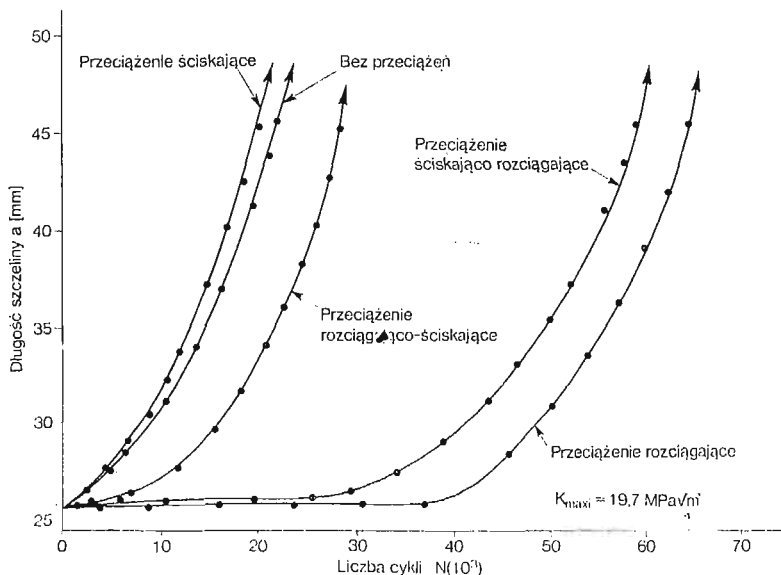
Rys. 5. Wzrost szczeliny zmęczeniowej po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia ściskającego, stop aluminium 2024-T3, $R = 0$ [11]

Stwierdzono, że opóźnienie przy danym obciążeniu i materiale zależy od jego grubości B [12]. Zwiększenie grubości próbek ze stopu aluminium 7075-T6 z 3,2 mm do 6,3 mm spowodowało na przykład około 2,5-krotne zmniejszenie opóźnienia, natomiast w przypadku stopu aluminium 2024-T3 taka sama zmiana grubości spowodowała większe aniżeli 3-krotne zmniejszenie opóźnienia. W obydwóch przytoczonych przykładach badania prowadzono na próbkach z pojedynczym karbem krawędziowym przy współczynniku przeciążenia $OLR = 2,25$.

2.2. Przeciążenia ściskające, $R = 0$. Typowe krzywe wzrostu szczeliny zmęczeniowej w funkcji liczby cykli obciążenia po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia ściskającego [11] przedstawiono na rys. 5. Każda krzywa reprezentuje jedną próbkę, przy czym pokazano

także krzywą porównawczą otrzymaną z próby bez przeciążeń. Uogólniając można stwierdzić, że przeciążenia ściskające zmniejszają lub nie wpływają na trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych. Większy wpływ, jak pokazano na rys. 5, mają wyższe przeciążenia ściskające. Oddziaływanie takich przeciążeń na prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych badano na stopach aluminium [8, 11], stali Hadfielda [4] i walcowanej na zimno stali 1020 [5]. Współczynnik przeciążenia zmieniano w granicach $OLR = -1 \div -6$, otrzymując skrócenie trwałości od $0 \div 45\%$. W przypadku walcowanej na zimno stali 1020, badanej przy współczynnikach $OLR \leq -5$, w większości prób ubytek trwałości nie przekraczał 15% . Największe skrócenie trwałości na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych otrzymano w stopach aluminium. Stwierdzono jednak, że pojedyncze przeciążenia ściskające mają na ogół mniejszy wpływ na wzrost szczelin zmęczeniowych, aniżeli analogiczne przeciążenia rozciągające.

2.3. Kombinowane przeciążenia rozciągająco-ściskające, $R = 0$. Rys. 6 przedstawia całokształt badań i wyników dotyczących wpływu pojedynczych przeciążeń, pokazanych na rys. 1d ÷ 1g, na wzrost szczelin zmęczeniowych. Jak widać istnieje zasadnicza różnica w efektach, zależnie od tego, czy przeciążenie ściskające występuje przed czy po przeciążeniu

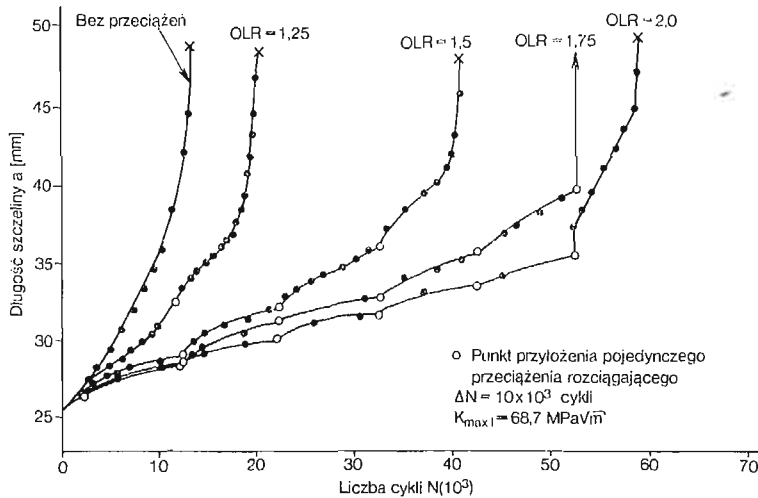


Rys. 6. Wzrost pęknięć zmęczeniowych dla obciążeń z różnymi przeciążeniami pojedynczymi, stop aluminium 7075-T6 [8]

rozciągającym. Przyłożenie przeciążenia ściskającego zaraz po przeciążeniu rozciągającym powoduje całkowite lub częściowe wyeliminowanie wpływów przeciążenia rozciągającego. Natomiast przyłożenie przeciążenia ściskającego przed przeciążeniem rozciągającym ma niewielki wpływ na trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych. Z tych powodów przy przewidywaniu trwałości zmęczeniowej należy dokładnie uwzględnić kolejność występowania wysokich obciążeń.

3. Periodyczne i nieregularne pojedyncze przeciążenia rozciągające, $R = 0$

Do badania wpływu periodycznych i nieregularnych pojedynczych przeciążeń rozciągających, pokazanych na rys. 1h ÷ 1i, użyto stali Hadfielda [4], stali 1020 walcowanej na zimno [5] oraz stali A440 [9]. Wpływ współczynnika przeciążenia na wzrost szczelin zmęczeniowych w stali Hadfielda w przypadku pojedynczych przeciążeń periodycznych, przykładowych w odstępach $\Delta N = 10 \cdot 10^3$ cykli, przedstawiono na rys. 7. Współczynnik przeciążenia zmieniano w granicach $1,25 \div 2,0$. Podobnie jak w poprzednich próbach,

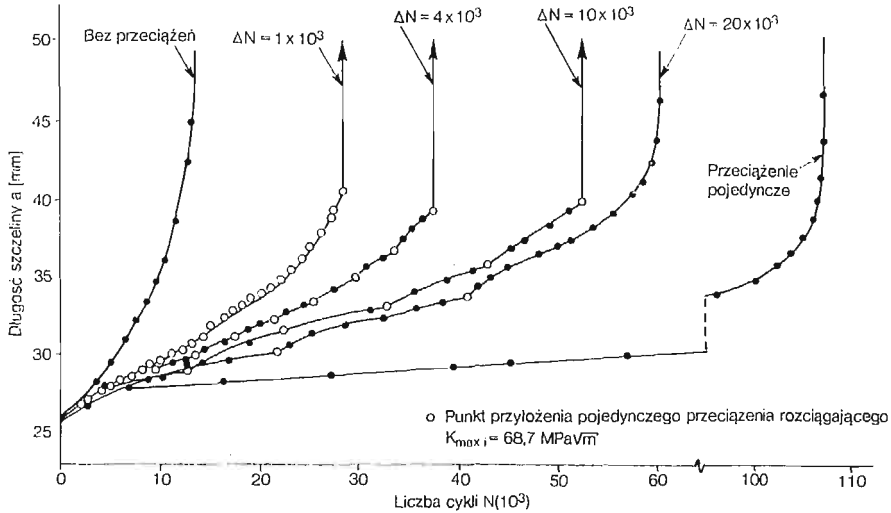


Rys. 7. Wpływ współczynnika przeciążenia (OLR) w przypadku periodycznych pojedynczych przeciążeń rozciągających, stal Hadfielda [4]

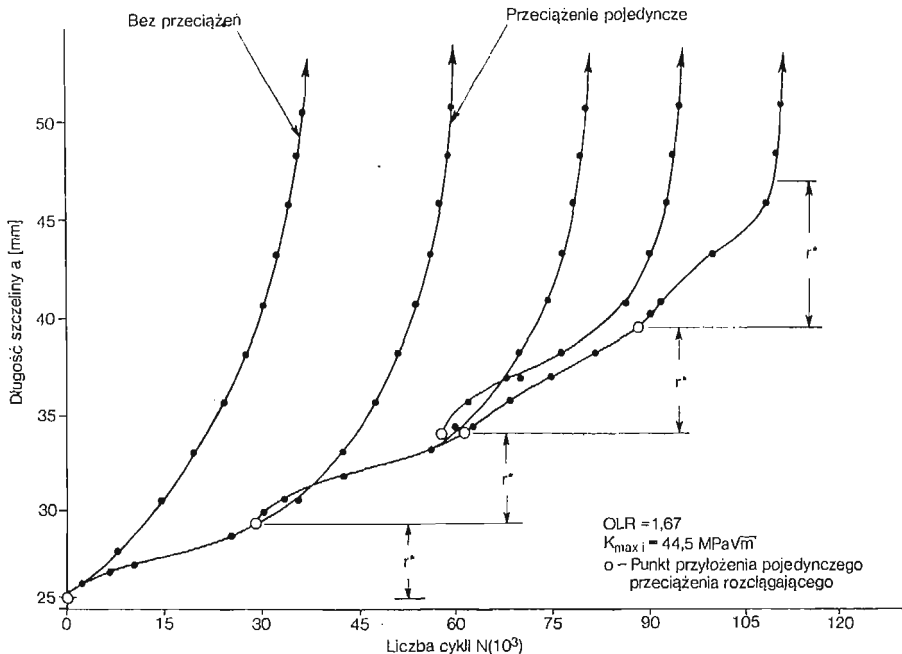
również i w tym przypadku, im wyższe było przeciążenie, tym dłuższa była trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych. Podobne rezultaty dla stali Hadfielda otrzymano również w przypadku pojedynczych przeciążeń periodycznych przykładowych w odstępach $\Delta N = 2 \cdot 10^3$, $4 \cdot 10^3$ i $20 \cdot 10^3$ cykli. Takie same rezultaty otrzymano także w przypadku stali 1020 walcowanej na zimno przy przeciążeniach przykładowych w odstępach $\Delta N = 2 \cdot 10^3$, $5 \cdot 10^3$, $10 \cdot 10^3$ i $20 \cdot 10^3$ oraz współczynnika przeciążenia zmienianym w przedziale $1,43 \div 2,40$ [5].

Wpływ liczby cykli ΔN pomiędzy kolejnymi przeciążeniami periodycznymi przy stałym współczynniku przeciążenia P_0/P_{max} przedstawiono na przykładzie stali Hadfielda na rys. 8 [4]. Wszystkie krzywe otrzymano przy tym samym współczynniku przeciążenia $OLR = 1,75$, podczas gdy ΔN zmieniano w granicach $1 \cdot 10^3 \div 20 \cdot 10^3$ cykli. Najdłuższe trwałości na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych we wszystkich przypadkach otrzymano dla obciążeń z pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi. Z powyższego wynika więc, że wszystkie dalsze przeciążenia występujące po pierwszym przeciążeniu miały w tym przypadku niekorzystny wpływ na trwałość. Wyjaśnieniem tego zjawiska może być fakt, że następne przeciążenia przykładowo zanim szczelina wyszła poza strefę a^* lub r^* utworzoną przez pierwsze przeciążenie rozciągające, i że opóźniony wzrost szczeliny, odpowiadający każdemu przeciążeniu, pojawiał się ze znacznym spóźnieniem w stosunku do

momentu przyłożenia tego przeciążenia. Jednak wyniki wszystkich prób z przeciążeniami periodycznymi, pokazane na rys. 8 wykazują dłuższą trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych aniżeli trwałość uzyskana w próbie bez przeciążeń. Natomiast w przypadku



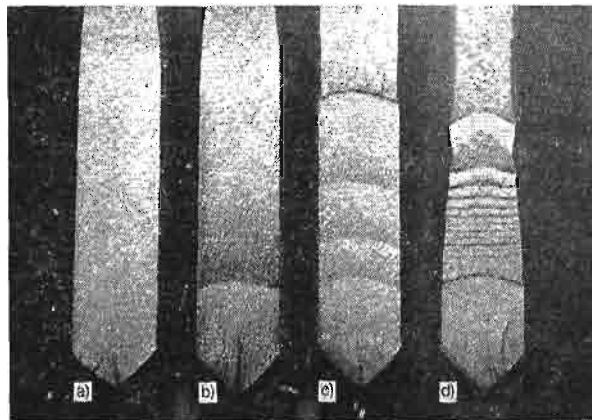
Rys. 8. Wpływ odległości pomiędzy periodycznymi pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi ΔN , stal Hadfielda [4]



Rys. 9. Wzrost szczeliny zmęczeniowej przy nieregularnych pojedynczych przeciążeniach rozciągających, przykładanych w odstępach równych cyklicznym strefom uplastycznionym r^* , stal A440 [9]

stali 1020 walcowanej na zimno przeciążenia periodyczne przykładane w odstępach $\Delta N = 2 \cdot 10^3 \div 20 \cdot 10^3$ dawały dłuższe trwałości na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych aniżeli trwałości uzyskane w próbach z pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi [5]. Jest to wynikiem mniejszych stref a^* i r^* wywołanych przeciążeniami oraz małym spóźnieniem z jakim pojawiał się w tej stali, w stosunku do przyłożonego przeciążenia, opóźniony wzrost szczelin zmęczeniowych.

W celu oszacowania optymalnych z punktu widzenia trwałości odstępów pomiędzy przeciążeniami rozciągającymi, wykonano badania na stali A440 z obciążeniami o różnie rozmieszczonych rozciągających przeciążeniach nieregularnych [9]. Wyniki przedstawione na rys. 9 wykazały, że najdłuższą trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych otrzymuje się dla określonego współczynnika przeciążenia wtedy, gdy pojedyncze przeciążenia rozciągające przykładane są po osiągnięciu przez szczelinę granicy cyklicznej strefy uplastycznionej w płaskim stanie naprężenia r^* , utworzonej przez przeciążenie poprzednie [9]. Każda krzywa widoczna na rys. 9 reprezentuje jedną próbkę. Ponieważ wraz z długością szczeliny rósł również współczynnik intensywności naprężeń K_0 , odpowiadającej kolejnym przeciążeniom, zwiększał się także za każdym razem wymiar strefy r^* .

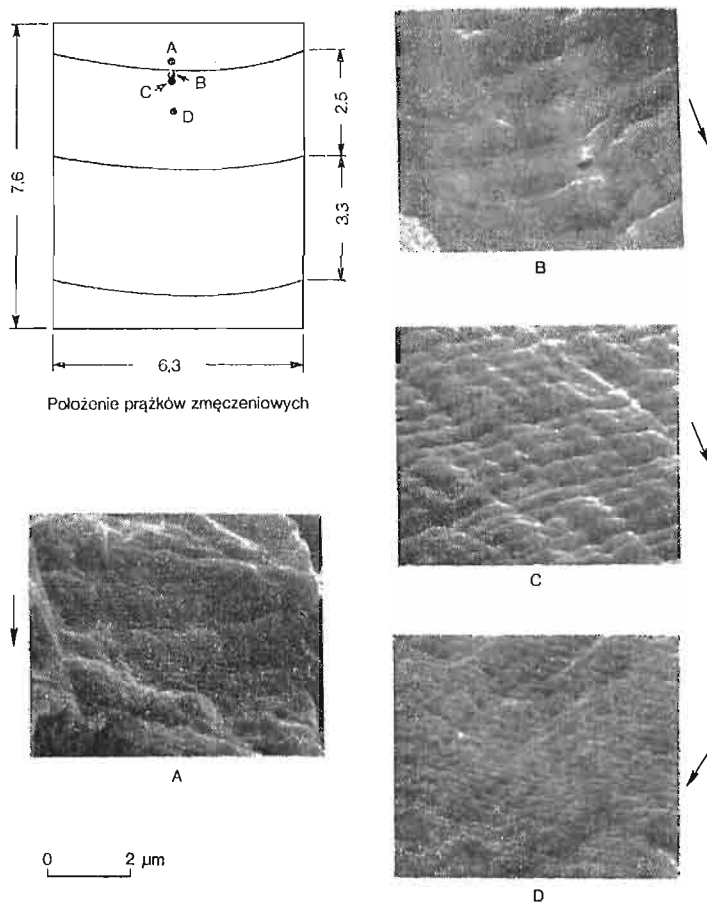


a) $K_{\max i} = 68,7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$; Bez przeciążeń
 b) OLR = 1,75; Przeciążenie pojedyncze
 c) OLR = 1,67; $\Delta N = 40 \times 10^3$ cykli
 d) OLR = 2,0; $\Delta N = 2 \times 10^3$ cykli

Rys. 10. Wpływ przeciążeń na makroskopowy obraz przełomów zmęczeniowych, stal Hadfielda [4]

Z przedstawionych na rys. 7 ÷ 8 rezultatów badań wynika, że przeciążenie rozciągające występujące w widmie obciążeń może mieć wpływ korzystny, niekorzystny lub nie oddziaływać przy danym widmie obciążeń na trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych. Przyrost długości szczeliny w okresie oddziaływania przeciążenia rozciągającego zależy od materiału i intensywności naprężeń odpowiadającej temu przeciążeniu. Na rys. 10 przedstawiono typowe makroskopowe obrazy urzeźbienia przełomów zmęczeniowych otrzymanych przy obciążeniach: a) bez przeciążeń, b) z przeciążeniem pojedynczym, c) z czterema przeciążeniami periodycznymi, d) z wieloma przeciążeniami periodycznymi, które spowodowały nawet widoczny przyrost długości szczeliny [4]. Należy także zauwa-

żyć, że przy dłuższych szczelinach występuje dostrzegalny tzw. tunelowy ich wzrost. We wszystkich przypadkach szczeliny propagowały się według tzw. modelu rozrywania, dając przełom o płaskiej powierzchni (*flat mode*) prostopadłej do powierzchni bocznych próbki z wyraźnie makroskopowo widocznymi miejscami przyłożenia przeciążeń. Tzw. powierzchnie ścięcia (*shear lips*) powstawały zwykle w obszarach końcowego, szybkiego

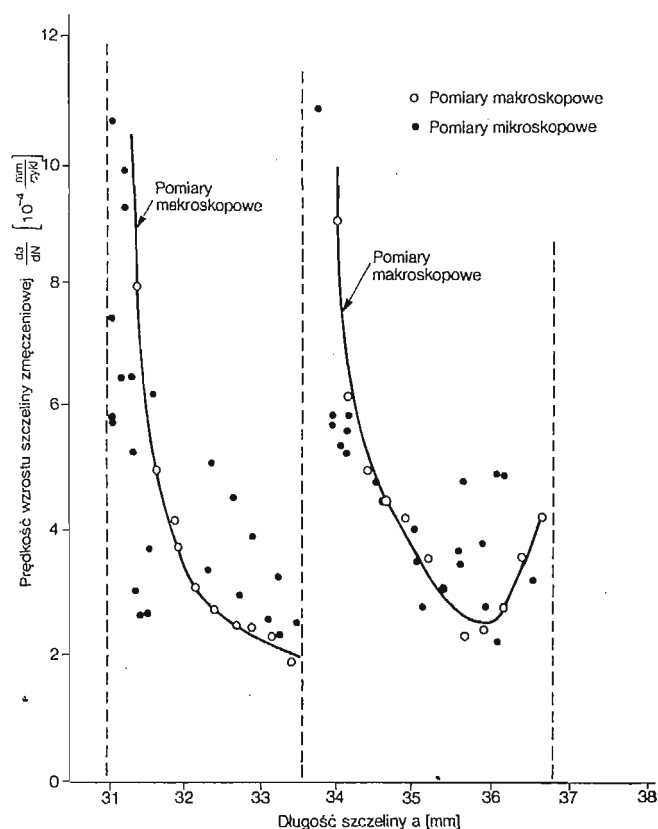


Rys. 11. Prążki zmęczeniowe przed i po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego, stal Hadfielda [4]

wzrostu szczelin. W obszarach oddziaływania przeciążeń wykryto wyraźnie widoczne także na powierzchniach przełomów, produkty korozji ciernej w postaci tlenków żelaza lub tlenków aluminium. Wskazuje to, że istnieje tzw. zamykanie się szczelin w obszarze oddziaływania przeciążenia rozciągającego, którą to hipotezę postawił wcześniej ELBER [15].

Spóźnianie się, w stosunku do momentu przyłożenia przeciążenia rozciągającego, występowania opóźnionego wzrostu szczelin zmęczeniowych pokazano na rys. 3, 7, 8 i 9. Nie jest ono jednak widoczne na rys. 6, gdzie przedstawiono wyniki otrzymane z badania stopu aluminium 7076-T6. Spóźnienie to było największe w materiałach o niskich granicach plastyczności, charakteryzujących się dużymi strefami r^* . Ponieważ makroskopowe pomiary długości szczelin dokonywane były na powierzchniach próbek, powstaje pytanie,

czy spóźnienie z jakim występuje opóźniony wzrost szczelin zmęczeniowych nie jest tylko zjawiskiem powierzchniowym. W tym celu zbadano za pomocą mikroskopu skanninowego (powiększenie $\times 15000$) szereg przełomów w środku grubości kilku materiałów. Tylko niewielki procent przełomów posiadał prążki zmęczeniowe. Jednak na zdjęciach mikrofraktograficznych A, B, C i D (rys. 11) widoczne są prążki zmęczeniowe zarówno przed, jak i po przyłożeniu przeciążenia. Położenie każdego zdjęcia na przełomie pokazano na schemacie, leżącym w lewym górnym rogu rys. 11. Strzałki wskazują kierunek wzrostu szczeliny zmęczeniowej. Zdjęcie A wykonano tuż przed przyłożeniem przeciążenia, natomiast zdjęcia B, C i D po przyłożeniu przeciążenia, w różnych rosnących w stosunku do punktu przyłożenia tego przeciążenia odległościach. Widoczne jest, że prążki zmęczeniowe w chwilę przed przyłożeniem przeciążenia leżą bardzo blisko siebie, co wskazuje na małą prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej. Natomiast w chwilę po przyłożeniu przeciążenia odległości pomiędzy prążkami widocznymi na zdjęciu B są bardzo duże, świadcząc o dużej prędkości wzrostu szczeliny. W miarę jej wzrostu, czyli oddalania się od punktu przyłożenia przeciążenia, odległości między prążkami zmęczeniowymi zmniejszają się (patrz zdjęcie C i D).



Rys. 12. Porównanie prędkości wzrostu szczeliny zmęczeniowej określonych metodami mikro- i makroskopowymi przy obciążeniach z nieregularnymi pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi, stal Hadfielda [4]

Rys. 12 stanowi porównanie prędkości wzrostu szczeliny zmęczeniowej w stali Hadfielda zmierzonej metodą makroskopową podczas badań i prędkości określonej na podstawie średnich odległości pomiędzy prążkami zmęczeniowymi, zmierzonych w różnych punktach przełomu za pomocą mikroskopu skaningowego. Pionowe linie kreskowe widoczne na rys. 12 oznaczają punkt przyłożenia przeciążenia. Pomimo znacznego rozrzutu jakim charakteryzują się uzyskane rezultaty badań mikroskopowych, potwierdzają się jednak wnioski dotyczące spóźnienia z jakim pojawia się opóźniony wzrost szczelin zmęczeniowych, otrzymane z badań makroskopowych.

3.1. Model matematyczny. Przewidywanie wzrostu szczeliny zmęczeniowej pod widmem obciążeń wymaga uwzględnienia wszystkich zjawisk opisanych wyżej. Najwięcej modeli teoretycznych dotyczących tego zagadnienia zbudowano w oparciu o efekty oddziaływania stref uplastycznionych powstających przed wierzchołkiem szczeliny lub w oparciu o hipotezę o zamykaniu się szczeliny [17], wprowadzając do obliczeń nowy parametr tzw. efektywny współczynnik intensywności naprężeń [15, 18]. Jednak bez względu na stosowany model zawsze muszą być znane pewne wielkości dotyczące opóźnień, wzrostu szczelin przy stałej amplitudzie obciążenia oraz odporność na pękanie materiału. Wykorzystując dane dotyczące wzrostu szczelin zmęczeniowych przy obciążeniu o stałej amplitudzie bez przeciążeń i z pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi oraz dane dotyczące granicy plastyczności i odporności na pękanie, przeanalizowano, za pomocą uproszczonego modelu przedstawionego niżej, rezultaty 26 prób z obciążeniami o nieregularnych przeciążeniach rozciągających przeprowadzonych na stali A440 [9]. Różnice pomiędzy trwałościami rzeczywistymi i teoretycznymi, obliczonymi na podstawie tego modelu, wahały się w granicach $57 \div 112\%$. Średnia trwałość teoretyczna stanowiła około 77% trwałości rzeczywistej, przy czym większość wyników leżała po tzw. bezpiecznej stronie, tzn. trwałość teoretyczna była krótsza od rzeczywistej. Trwałości teoretyczne leżące po niebezpiecznej stronie nie wykraczały natomiast nawet poza pasmo rozrzutu uzyskane z prób powtarzanych (dublowanych).

U podstaw wspomnianego wyżej uproszczonego modelu leżą cztery założenia [9]:

1. Opóźnienie wzrostu szczeliny zmęczeniowej w okresie jej przechodzenia przez cykliczną strefę uplastycznioną r^* , utworzoną przez przeciążenie, zmienia się liniowo [por. (1)].

2. Opóźnienie w określonym środowisku jest funkcją współczynnika przeciążenia OLR i współczynnika asymetrii cyklu R .

3. Jeśli wierzchołek szczeliny znajduje się poza strefą r^* , utworzoną przez przeciążenie, jej wzrost dobrze opisuje wzór

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^n.$$

4. Współczynnik intensywności naprężeń odpowiadający każdemu przeciążeniu może być parametrem charakteryzującym warunki, lecz zależnym od wielkości strefy r^* powstałej przy tym współczynniku.

Jeśli wierzchołek szczeliny znajduje się poza strefą r^* , trwałość można obliczać poprzez całkowanie wzoru

$$(2) \quad \frac{da}{dN} = A(\Delta K)^n, \quad \text{gdzie} \quad \Delta K = \Delta \sigma f(a).$$

W wyniku tego całkowania otrzymuje się zależność

$$(3) \quad \Delta N_i = \frac{1}{A(\Delta\sigma)^n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{[f(a)]^n}.$$

Wyrażenie pod całką jest zwykle bardzo złożone i wymaga stosowania maszyn matematycznych. Natomiast jeśli wierzchołek szczeliny znajduje się wewnątrz strefy r^* , do obliczania trwałości w tym obszarze stosuje się wzór (3), którego lewa strona pomnożona jest przez współczynnik opóźnienia RF (patrz rys. 4), a górna granica całkowania a_{i+1} zastąpiona przez sumę $a_i + r_i^*$. A zatem

$$(4) \quad \Delta N_i = (RF) \frac{1}{A(\Delta\sigma)^n} \int_{a_i}^{a_i + r_i^*} \frac{da}{[f(a)]^n}.$$

Wyrażenie (4) dotyczy ilości cykli obciążenia, jaka potrzebna jest do wydłużenia szczeliny o odcinek równy r_i^* . Jeśli zmiana amplitudy obciążenia nastąpi przed wyjściem szczeliny ze strefy r_i^* , wtedy należy użyć przybliżonego wzoru, otrzymanego z pomnożenia wyrażenia (4) przez iloraz $\Delta a_i / r_i^*$, gdzie Δa_i jest przyrostem długości szczeliny, dla którego przeprowadza się obliczenia. Wówczas

$$(5) \quad \Delta N_i = \frac{\Delta a_i}{r_i^*} (RF) \frac{1}{A(\Delta\sigma)^n} \int_{a_i}^{a_i + r_i^*} \frac{da}{[f(a)]^n}.$$

Całkowite zniszczenie nastąpi wtedy, gdy K_{\max} lub K_0 osiągnie wartość równą odporności na pękanie.

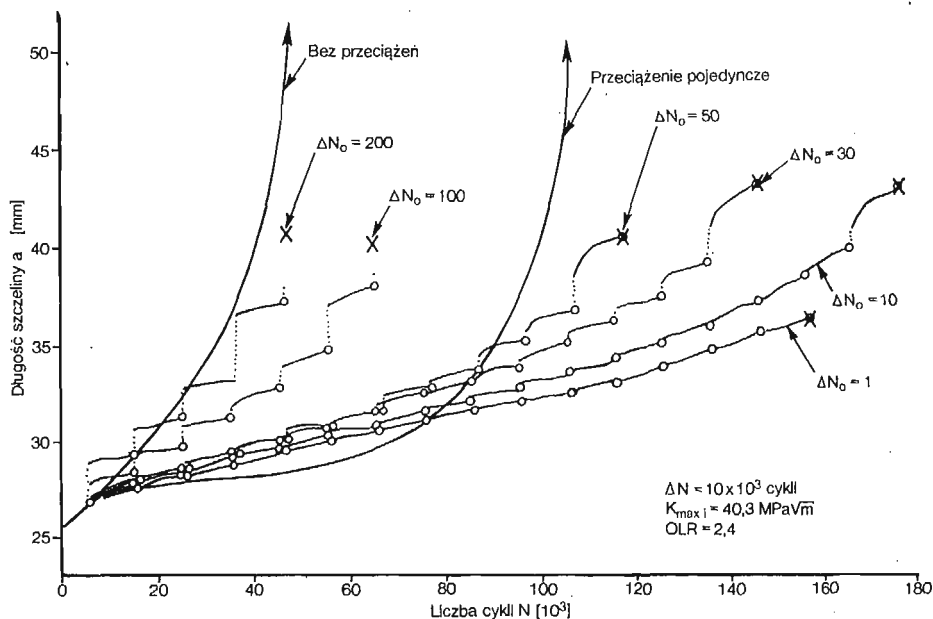
Zastosowanie przedstawionego modelu wymaga jednak dokładnego postępowania krok po kroku za zmianami, jakie od początku do końca zachodzą w widmie obciążeń. Może on być wykorzystywany zarówno do obliczania liczby cykli obciążenia dla danego przyrostu długości szczeliny jak i przyrostu przy danej liczbie cykli i historii obciążenia. Model ten najbardziej użyteczny jest wtedy, gdy skomplikowane widma obciążeń mogą być rozłożone na szereg prostszych bloków obciążeń z przeciążeniami nieregularnymi. Całkowita trwałość na etapie wzrostu szczeliny zmęczeniowej może więc być określona poprzez odpowiednie wykorzystanie wzorów (3), (4) i (5). Wyboru właściwego w danej chwili wzoru dokonuje się na podstawie porównania odpowiednich wartości r^* . Największa wartość r^* jest właśnie parametrem charakterystycznym.

Największą prawdopodobnie wadą przedstawionego modelu uproszczonego jest pominięcie zjawiska spóźnienia z jakim występuje opóźnienie wzrostu szczeliny zmęczeniowej. Przyjęto bowiem, że prędkość wzrostu szczeliny wewnątrz strefy r^* zmienia się liniowo. Zbieżność wyników teoretycznych i eksperymentalnych jest jednak dość dobra. Wyjątek stanowi tylko stal A440, w której opóźniony wzrost szczelin zmęczeniowych pojawił się z dużym spóźnieniem.

4. Periodyczne obciążenia wielokrotne, $R = 0$

Wpływ wielokrotnych periodycznych przeciążeń rozciągających na wzrost szczelin zmęczeniowych badano dla stali 1020 walcowanej na zimno [6]. Badania prowadzono pod obciążeniami przedstawionymi schematycznie na rys. 1j. Stosowano różne ilości przecią-

żeń wielokrotnych $\Delta N_0 = 1, 20, 30, 50, 100$ i 200 cykli oraz różne odstępy pomiędzy tymi przeciążeniami $\Delta N = 5000, 10\ 000$ i $20\ 000$ cykli. Przykłady wzrostu szczelin zmęczeniowych pod takimi obciążeniami pokazano na rys. 13, gdzie każda krzywa reprezentuje jedną próbkę [13]. Pionowe linie punktowe odpowiadają wzrostowi szczeliny zmęczenio-



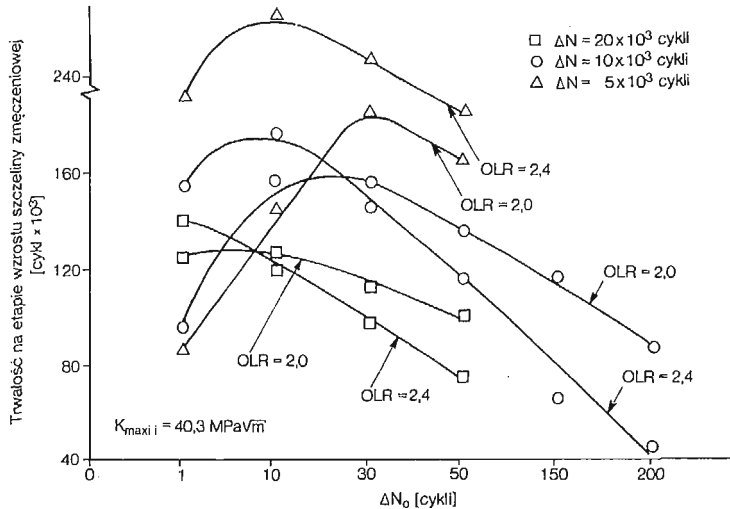
Rys. 13. Wzrost szczelin zmęczeniowych przy wielokrotnych periodycznych przeciążeniach rozciągających, stal 1020 walcowana na zimno [6]

wej spowodowanemu działaniem wielokrotnych przeciążeń rozciągających, natomiast linie ciągłe reprezentują wzrost szczeliny przy obciążeniach niższych. Nie zaznaczonymi kółkami zaznaczono punkty przyłożenia przeciążeń. Dla porównania narysowano także krzywą otrzymaną z próby bez przeciążeń i pojedynczym przeciążeniem rozciągającym. Wyniki badań widoczne na rys. 13 otrzymano przy współczynniku przeciążenia $OLR = P_0/P_{max} = 2,4$ i odstępem $\Delta N = 10\ 000$ cykli.

Widoczne jest, że najdłuższą trwałość otrzymano w niniejszym przypadku dla $\Delta N_0 = 10$ cykli. Trwałość natomiast malała wraz ze wzrostem liczby przeciążeń ΔN_0 . Spowodowane to było zwiększającym się przyrostem szczeliny na skutek przeciążeń. Pojedyncze przeciążenie rozciągające było mniej korzystne od przeciążeń wielokrotnych przykładowych w liczbie $\Delta N_0 = 1 \div 50$ cykli, natomiast bardziej korzystne w stosunku do przeciążeń wielokrotnych przykładowych w liczbach $\Delta N_0 = 100 \div 200$ cykli.

W celu określenia optymalnej liczby przeciążeń [6] wielokrotnych, wyniki badań przedstawiono w postaci wykresu «trwałość — liczba przeciążeń ΔN_0 » (patrz rys. 14). Każda krzywa dotyczy innego współczynnika przeciążenia i innego odstępu pomiędzy tymi przeciążeniami. W większości przypadków najdłuższą trwałość przy współczynnikach przeciążenia większych od 1,7 otrzymano dla $\Delta N_0 = 10$ cykli. Z powyższego wynika,

że kilka wielokrotnych przeciążeń nieregularnych może wydłużyć trwałość bardziej aniżeli pojedyncze przeciążenia nieregularne. Dzieje się to skutkiem większej intensywności ściskających naprężeń pozostających w otoczeniu wierzchołka szczeliny i większym jej zamknięciem. Zmiany liczby przeciążeń ΔN_0 nie miały natomiast większego wpływu na trwałość przy współczynnikach przeciążenia mniejszych od 1,7.



Rys. 14. Wpływ odległości (ΔN) pomiędzy wielokrotnymi periodycznymi przeciążeniami rozciągającymi na trwałość na etapie wzrostu szczeliny zmęczeniowych, stal I020 walcowana na zimno [6]

5. Wpływ małych przeciążeń ściskających, $R < 0$

5.1. Obciążenie o stałej amplitudzie. Większość danych na temat wzrostu szczelin zmęczeniowych przy stałej amplitudzie obciążenia dotyczy zwykle obciążeń rozciągających tzn. $R \geq 0$. Istnieją cztery główne przyczyny, dla których w badaniach wzrostu szczelin zmęczeniowych przy stałej amplitudzie obciążenia pomija się naprężenia ściskające:

1. Nieliczne dotychczasowe badania wykazały, że naprężenia ściskające mają tylko niewielki wpływ na prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych. Wniosek ten wypływa z faktu, że w czasie realizacji części dla cyklu obciążeń ściskających następuje zanikający przyrost długości szczeliny, gdyż w tym okresie jest ona wtedy zamknięta.

2. Hipoteza o zamykaniu się szczeliny wydaje się potwierdzać wniosek o nieszkodliwości naprężeń ściskających.

3. Niejasna jest definicja zakresu współczynnika intensywności naprężeń ΔK i minimalnego współczynnika intensywności naprężeń K_{min} , w części cyklu obciążenia ściskającego.

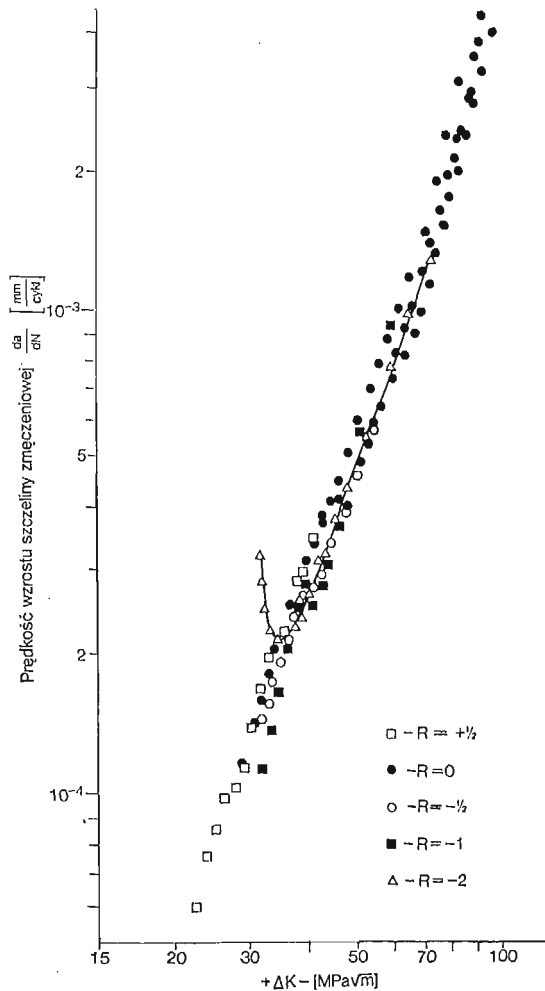
4. W badaniach z obciążeniami ściskającymi wymagane jest bardziej skomplikowane stanowisko do zamocowywania próbek.

W celu głębszego zrozumienia wpływu naprężeń ściskających na wzrost szczelin zmęczeniowych przy stałej amplitudzie obciążenia przeprowadzono badania siedmiu spośród dziewięciu materiałów opisanych w tabl. 1. Badania wykonywano na próbkach rozcią-

ganych zwartych, przy współczynnikach asymetrii cyklu $R = +0,5 \div -3$. Typowy przykład wyników otrzymanych z badań stali A440 [9] przedstawia rys. 15. Rezultaty badań pokazano w postaci wykresów przedstawiających prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych da/dN w funkcji dodatniej (rozciągającej) części zakresu współczynnika intensywności naprężeń $+\Delta K$. Dodatnią część zakresu współczynnika intensywności naprężeń ΔK zdefiniowano jako

$$+\Delta K = K_{\max} - K_{\min}, \quad \text{gdzie} \quad K_{\min} = \begin{cases} 0 & \text{dla } R \leq 0, \\ K_{\min} & \text{dla } R > 0. \end{cases}$$

Unika się w ten sposób niepoprawnej interpretacji ujemnej intensywności naprężeń. Prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych wyznaczono za pomocą maszyny matematycznej, aproksymując zależność pomiędzy długością szczeliny i liczbą cykli obciążenia za pomocą wielomianu, wyznaczanego metodą najmniejszych kwadratów drugiego rzędu, zalecaną przez ASTM Committee E-24 [19].

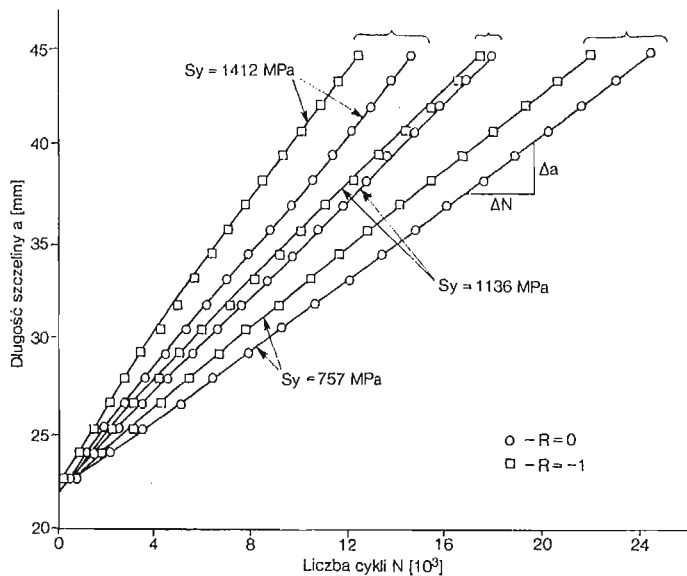


Rys. 15. Wzrost szczelin zmęczeniowych pod obciążeniami o stałych amplitudach z ujemnymi i dodatnimi wartościami współczynnika asymetrii cyklu R , stal A440 [9]

Pomimo różnych współczynników asymetrii cyklu $R = +1/2, 0, -1/2, -1$ wyniki badań charakteryzują się małym rozrzutem. Jest to zgodne z poprzednimi sugestiami o nieszkodliwości naprężeń ściskających. Należy jednak zaznaczyć, że w niniejszych badaniach zauważono około 25% skrócenie trwałości przy zmianie współczynnika asymetrii cyklu od 0 do -1 . Natomiast zupełnie inny był charakter wzrostu szczeliny zmęczeniowej przy współczynniku $R = -2$, jako że początkowo prędkość da/dN malała, a potem rosła.

Ten początkowy stosunkowo szybki wzrost szczeliny był prawdopodobnie przyczyną znacznego skrócenia trwałości dając w efekcie 40÷80% trwałości uzyskanej przy $R = 0$. Mógł on być także wynikiem wcześniejszego inicjowania szczeliny przy $R = 0$, które spowodowało większe jej zaostrenie i powstanie niskich naprężeń pozostających w otoczeniu wierzchołka.

Wąskie pasmo rozrzutu dla podobnie przedstawionych wyników $da/dN = f(+\Delta K)$ otrzymano także w przypadku obydwóch stopów aluminium. Zmniejszenie trwałości o około 10÷30% otrzymano tylko przy $R = -2$ ÷ -3 . Natomiast w przypadku żeliwa sferoidalnego różnice pomiędzy wytopami były większe od różnic wynikających ze zmiany współczynnika asymetrii cyklu od $R = 0$ do $R = -1$.



Rys. 16. Wzrost szczelin zmęczeniowych pod obciążeniami o stałych amplitudach z zerowymi lub ujemnymi współczynnikami asymetrii cyklu, $K_{\max} = 33 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$, Stal AISI 4140 [13]

W przypadku trzech odmian ulepszonej cieplnie stali 4140 o granicach plastyczności 757 MPa, 1136 MPa i 1412 MPa prędkość wzrostu pęknięć zmęczeniowych badano przy stałym zakresie intensywności naprężeń, stosując tzw. technikę stopniowego zmniejszania obciążenia [13]. Badania wykonano na próbkach rozciąganych zwartych (CT) przy współczynnikach $R = 0, -1/2, -1$ i $K_{\max} = 33 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$. Krzywe wzrostu szczeliny zmęczeniowej w funkcji liczby cykli obciążenia przedstawiono na rys. 16. W celu większej przej-

rzystości pokazano tylko jedną piątą wyników. Przy określonym współczynniku asymetrii cyklu R i materiale prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej była stała na całej jej długości. Dla ułatwienia analizy porównawczej wyeliminowano z rysunku także krzywe uzyskane dla $R = -1/2$, ponieważ we wszystkich próbach leżały pomiędzy krzywymi otrzymanymi dla $R = 0$ i $R = -1$.

Wartości prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych podano w tabl. 3. Widoczne jest, że prędkość wzrostu szczelin da/dN w określonym materiale rośnie, jeśli współczynnik R maleje od 0 do -1 . Największa różnica w prędkościach spowodowana zmianą R , jaką zanotowano we wspomnianych trzech odmianach stali 4140, wynosiła 18%, a najmniejsza 2%. Największa różnica była jednakże mniejsza, aniżeli różnice jakie otrzymano przy sta-

Tablica 3. Prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych w stali 4140 przy stałej amplitudzie współczynnika intensywności naprężeń $\Delta a/\Delta N$ [$\mu\text{mm}/\text{cykl}$] $K_{\text{max}} = 33 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$

Sy [MPa]	$R = 0$	$R = -1/2$	$R = -1$
1412	153	161	181
1136	122	126	125
757	91	98	101

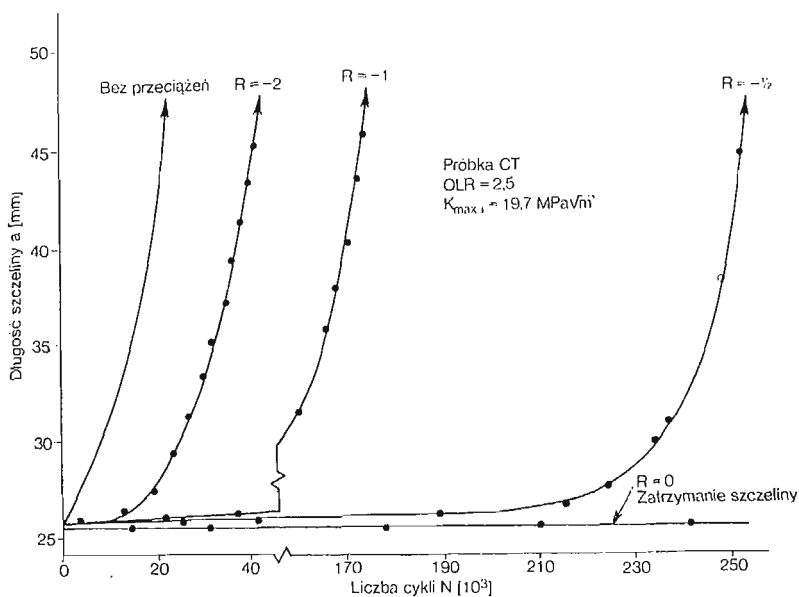
łym współczynniku R pomiędzy tymi odmianami. Różnice pomiędzy rezultatami otrzymanymi dla stali o najwyższej i najniższej granicy plastyczności wahały się bowiem w granicach $68 \div 80\%$. Naprężenia ściskające powodują więc podwyższenie prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych w stali 4140, lecz zmiany te są mniejsze od zmian spowodowanych np. prawie dwukrotnym podwyższeniem granicy plastyczności.

Można więc stwierdzić, że w przypadku siedmiu badanych materiałów naprężenia ściskające powodują przy stałej amplitudzie obciążenia podwyższenie prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych. Jest ono jednak stosunkowo małe i w żadnej z przeprowadzonych prób różnice spowodowane naprężeniami ściskającymi nie były nawet 2-krotne. W przypadku siedmiu badanych materiałów uzasadnione wydaje się więc pomijanie naprężeń ściskających przy określaniu trwałości na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych dla obciążeń o stałych amplitudach. Tego stwierdzenia nie można jednak rozszerzyć, co zostanie wyjaśnione niżej, na wzrost szczelin zmęczeniowych przy obciążeniach o zmiennych amplitudach.

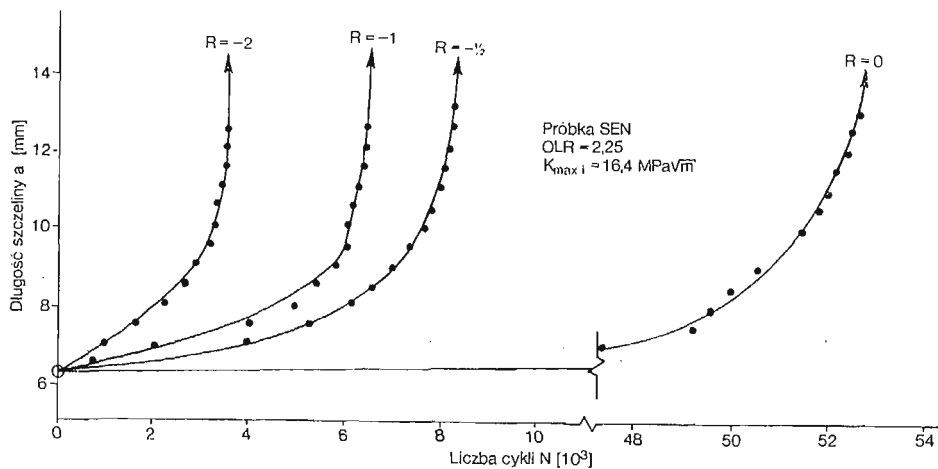
5.2. Pojedyncze przeciążenia rozciągające. Wpływ pojedynczych przeciążeń rozciągających na wzrost szczelin zmęczeniowych badano na próbkach rozciąganych zwartych, wykonanych z tych samych siedmiu materiałów opisanych wyżej. W przypadku stopów aluminium 2024-T3 i 7075-T6 dla celów porównawczych oraz pomiaru współczynnika intensywności naprężeń przy otwieraniu i zamykaniu się szczeliny [12] użyto także próbek z pojedynczym karbem krawędziowym [10]. Wartości współczynników asymetrii cyklu obciążenia realizowanego po przyłożeniu przeciążenia były $R = 0$, $-1/2$, -1 i -2 . Wartości współczynnika przeciążenia zmieniano w granicach $1,67 \div 3,0$. Ażeby w próbach zachowane były

jednakowe warunki w otoczeniu wierzchołka szczeliny, wszystkie szczeliny zmęczeniowe przed przyłożeniem przeciążenia inicjowane były pod obciążeniem o współczynniku $R = 0$.

Na rys. 17 pokazano krzywe wzrostu szczelin zmęczeniowych w funkcji liczby cykli po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego w stopie aluminium 7075-T6. Badania prowadzono na próbkach rozciąganych zwartych. Widoczne jest, że przy współczynniku $R = 0$ nastąpiło całkowite zatrzymanie szczeliny, natomiast dalsze zmniejszanie współczynnika asymetrii cyklu od $R = -1/2$ do $R = -2$ powodowało ciągle

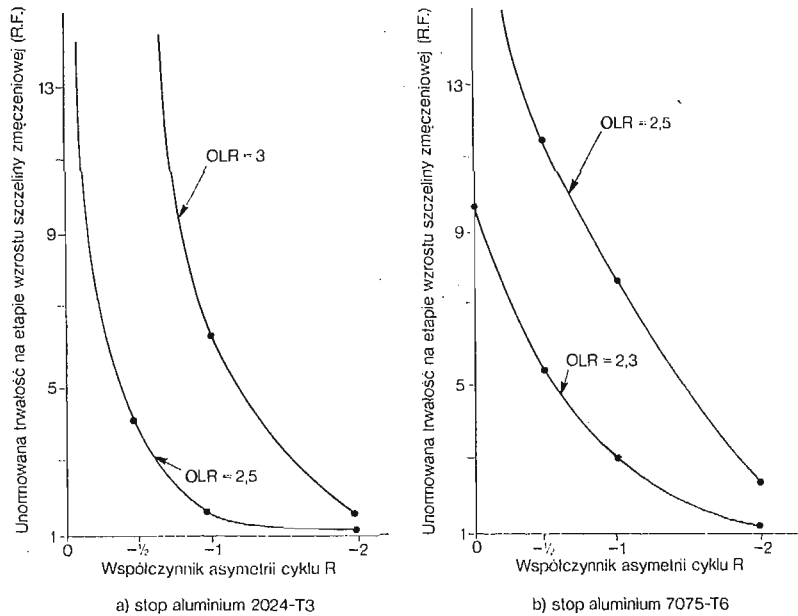


Rys. 17. Wzrost szczelin zmęczeniowych po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego, stop aluminium 7075-T6 [8]



Rys. 18. Wzrost szczelin zmęczeniowych po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego, stop aluminium 2024-T3 [10]

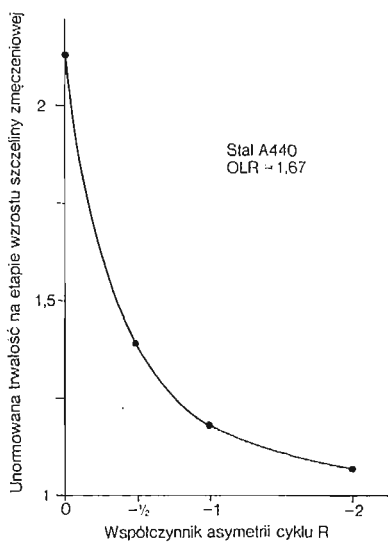
zmniejszanie opóźnienia wzrostu szczelin zmęczeniowych. Podsumowanie wyników badań stopów aluminium 2024–T3 i 7075-T6 przedstawione w postaci wykresów unormowanej trwałości przy przeciążeniach w zależności od współczynnika asymetrii cyklu R [8] widoczne jest na rys. 19. Z przytoczonych rys. 17, 18 i 19 jasno wynika, że niskie naprężenia ściskające występujące po pojedynczym przeciążeniu rozciągającym znacznie zmniejszają opóźnienie wzrostu szczelin zmęczeniowych, jakie w badanych stopach wywołuje tylko przeciążenie rozciągające.



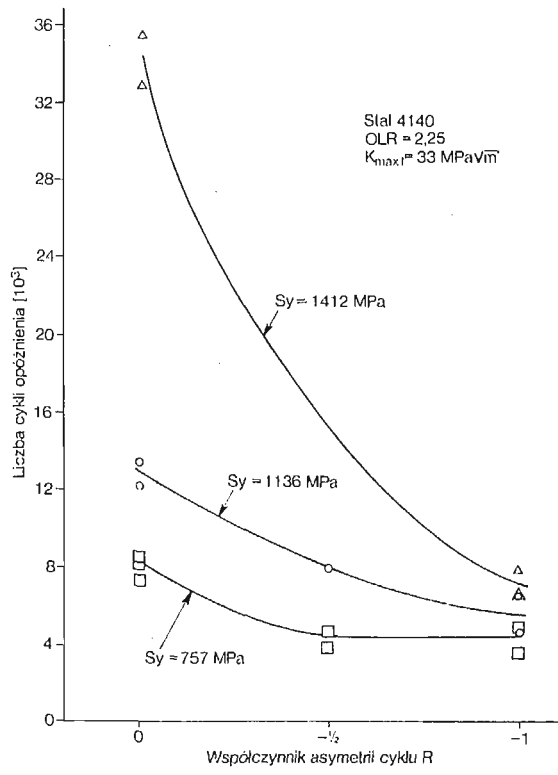
Rys. 19. Wpływ ujemnych współczynników asymetrii cyklu (R) na trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego [8]

Podobne skrócenie unormowanej trwałości przy przeciążeniach i zmniejszanie opóźnienia wskutek zmniejszania współczynnika asymetrii cyklu w przedziale $R = 0 \div -2$ występowało również w stali A440 [9] (patrz rys. 20.) Badania prowadzono na próbkach rozciąganych zwartych przy współczynniku przeciążenia $OLR = 1,67$. Także w przypadku żeliwa sferoidalnego dla $R = -2$ trwałość w obecności przeciążeń była znacznie krótsza aniżeli dla $R = 0$. Na rys. 21 przedstawiono natomiast wpływ współczynnika asymetrii cyklu R na opóźnienie wzrostu szczelin zmęczeniowych, spowodowane pojedynczym przeciążeniem rozciągającym o współczynniku przeciążenia $OLR = 2,25$. Badania prowadzono przy stałym współczynniku intensywności naprężeń ΔK dla wszystkich trzech odmian stali 4140. W tym przypadku również można zauważyć wyraźne zmniejszenie opóźnienia, od pojedynczego przeciążenia rozciągającego przez naprężenia ściskające.

Wyniki badań przedstawione na rys. 17÷21 wskazują, że nawet w zupełnie różnych materiałach, małe naprężenia ściskające, występujące po przeciążeniu rozciągającym powodują znaczne zmniejszenie opóźnienia wzrostu szczeliny zmęczeniowej, wywołanego tym przeciążeniem. Zmniejszenie opóźnienia jest tym większe im większe są naprężenia



Rys. 20. Wpływ ujemnych współczynników asymetrii cyklu (R) na trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego [9, 14]



Rys. 21. Wpływ ujemnych współczynników asymetrii cyklu (R) na opóźnienie wzrostu szczelin zmęczeniowych po przyłożeniu pojedynczego przeciążenia rozciągającego [13]

ściskające. Z powyższego wynika więc, że w przypadku widm obciążeń o zmiennych amplitudach, przy których należy spodziewać się opóźnień, wniosek o nieszkodliwości małych naprężeń ściskających jest błędny.

Rezultaty badań przedstawione na rys. 21 dostarczają także ważnych informacji z innego punktu widzenia, a mianowicie danych dla porównywania materiałów pod względem maksymalnej trwałości przy danym widmie obciążeń. PETRAK [20] oraz GALLAGHER i HUGHES [21] wykazali, że największe opóźnienia przy $R \geq 0$, spowodowane pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi, występują w stalach o niższych granicach plastyczności np: stali HP-9Ni-4Co-30C lub stali 4340. Sugerowałyoby to, że w przypadku obciążeń o zmiennych amplitudach lepsze są stale o niższych granicach plastyczności. Autorzy przytoczonych wyżej prac wskazują jeszcze na fakt, że otrzymane przez nich wyniki zgodne są z hipotezami o zamykaniu się szczeliny zmęczeniowej. Natomiast rezultaty dla $R = 0$ przedstawione na rys. 21 są całkowicie niezgodne z powyższymi wywodami, chociaż należy zaznaczyć, że różnice te są znacznie mniejsze w przypadku $R = -1/2$ lub $R = -1$. Bardzo małe różnice w opóźnieniach zanotowano przy $R = -1$ także w przypadku wspomnianych trzech odmian stali 4140. Z powyższego wynika, że małe naprężenia ściskające powodują większe zmniejszenie opóźnień w stalach o niższych granicach plastyczności. Może to być spowodowane zarówno cykliczną relaksacją ściskających naprężeń pozostających w otoczeniu wierzchołka szczeliny, jak i cyklicznym zmniejszaniem się zamknięcia szczeliny. Wy tłumaczenie tego jest podobne, jak przy śrutowaniu, które ma niewielki wpływ na trwałość w przypadku stali o niskich granicach plastyczności i duży w przypadku stali o średnich i wysokich granicach plastyczności. Porównywanie opóźnień przy $R \geq 0$ może więc prowadzić do zupełnie błędnych wniosków.

6. Zakończenie

Najważniejsze wnioski wypływające z przedstawionych wyżej sześcioletnich badań nad wzrostem szczelin zmęczeniowych w dziewięciu różnych materiałach podano niżej. Wiele z nich może mieć charakter wniosków ogólnych, jednak czytelnik musi pamiętać, że dotyczą tylko warunków w jakich prowadzono badania i nie można ich rozszerzać np. na środowiska korozyjne, czy też warunki, w których panuje inna temperatura.

1. Pojedyncze przeciążenia rozciągające mogą powodować znaczne opóźnienie wzrostu szczelin zmęczeniowych lub nawet całkowite ich zatrzymanie. Opóźnienie jest tym większe, im wyższe jest przeciążenie rozciągające. Stwierdzenie to jest prawdziwe dla przeciążeń o współczynniku intensywności naprężeń K_0 nie przekraczającym 98% odporności na pękanie materiału. Przeciążenia o współczynnikach $OLR \leq 1,4$ powodowały bardzo małe opóźnienia we wszystkich badanych materiałach. Wspomniane opóźnienia przypisuje się powstawaniu ściskających naprężeń pozostających w otoczeniu wierzchołka szczeliny oraz zamykaniu się szczeliny.

2. Przyrost długości szczeliny a^* odpowiadający okresowi występowania opóźnienia wahał się, przy $R \geq 0$ w granicach $0 \div 11$ mm, podczas gdy wymiar cyklicznej strefy uplastycznionej r^* zmieniał się w przedziale $1 \div 15$ mm. Odpowiednie stosunki a^*/r^* były zawsze mniejsze od jedności. Okres występowania opóźnionego wzrostu szczeliny zmęczeniowej jest więc dość dobrze skorelowany z wymiarem cyklicznej strefy uplastycznionej.

Nie jest to jednak prawdziwe przy współczynnikach asymetrii cyklu $R < 0$. Największe opóźnienia przy $R \geq 0$ występują w materiałach o niższych granicach plastyczności.

3. Na wielu przełomach zmęczeniowych zauważono makroskopowe obszary, powstałe po przyłożeniu przeciążenia, świadczące o spóźnieniu z jakim pojawił się opóźniony wzrost szczeliny zmęczeniowej. Szczególnie widoczne były one przy dużych strefach uplastycznionych. Przyrost długości szczeliny odpowiadający temu spóźnieniu osiągał nawet 5 mm. Spóźnienie z jakim pojawia się opóźniony (zwolniony) wzrost szczelin zmęczeniowych widoczny jest także na poziomie mikroskopowym. Świadczą o tym pomierzone, przy pomocy mikroskopu skanningowego, odległości pomiędzy prążkami zmęczeniowymi w środku grubości przełomu. Prędkości wzrostu szczelin zmęczeniowych pomierzone metodami mikro- i makroskopowymi również zasadniczo nie różniły się.

5. Pojedyncze przeciążenia ściskające lekko skracają lub nie oddziałują na trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych przy stałej amplitudzie obciążenia. Większe przeciążenia ściskające powodowały większe skrócenie trwałości. Przeciążenia ściskające o współczynnikach $OLR = -1 \div -6$ powodowały skrócenie trwałości od $0 \div 45\%$. Jednak przeciążenia ściskające mają na ogół znacznie mniejszy wpływ na wzrost szczelin zmęczeniowych aniżeli analogiczne przeciążenia rozciągające.

6. Przeciążenia ściskające występujące tuż przed przeciążeniami rozciągającymi mają niewielki wpływ na opóźnienie wzrostu szczelin zmęczeniowych. Natomiast przeciążenia ściskające występujące zaraz po przyłożeniu przeciążenia rozciągającego mogą częściowo lub całkowicie wyeliminować opóźnienie spowodowane tym przeciążeniem. Przy opracowywaniu modeli dla przewidywania trwałości na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych, bardzo ważnym jest dokładne uwzględnienie kolejności występowania obciążeń.

7. Przy określonym widmie obciążeń pojedyncze przeciążenie rozciągające może więc być korzystne, niekorzystne lub nie mieć żadnego wpływu na wzrost szczelin zmęczeniowych. Zależy to od jego położenia i wielkości w stosunku do innych obciążeń w widmie oraz długości szczeliny, wymiaru strefy uplastycznionej wywołanej tym przeciążeniem i odporności na pękanie. Maksymalną trwałość na etapie wzrostu szczelin zmęczeniowych uzyskano wtedy, gdy nieregularne pojedyncze przeciążenia rozciągające przykładano po osiągnięciu przez szczelinę granicy strefy a^* lub r^* wywołanej przeciążeniem poprzednim.

8. Większy wpływ na wzrost szczelin zmęczeniowych mogą mieć, w porównaniu z pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi wielokrotne przeciążenia rozciągające. Jednak przy współczynnikach przeciążenia mniejszych od 1,7 liczba przeciążeń wielokrotnych, w przypadku stali 1020 walcowanej na zimno, nie miała większego wpływu na trwałość całkowitą.

9. Przy stałej amplitudzie obciążenia naprężenia ściskające mają niewielki wpływ na prędkość wzrostu szczelin zmęczeniowych. Zmiany współczynnika symetrii cyklu w zakresie $R = 0 \div -3$ powodowały, w przypadku wspomnianych wyżej siedmiu zupełnie różnych materiałów, co najwyżej dwukrotną zmianę prędkości da/dN i trwałości całkowitej. Z tego względu przy stałej amplitudzie obciążenia można założyć, że naprężenia ściskające nie powodują uszkodzeń.

10. Natomiast duże i małe naprężenia ściskające mogą być bardzo niekorzystne w przypadku występowania opóźnień wzrostu szczelin zmęczeniowych, spowodowanych pojedynczymi przeciążeniami rozciągającymi. Im większe w takich przypadkach jest naprę-

żenie ściskające, tym większe powoduje uszkodzenie. W niektórych przypadkach naprężenia ściskające mogą nawet całkowicie wyeliminować wspomniane opóźnienia. Z tego względu w przypadku widm obciążeń o zmiennych amplitudach, przy których mogą powstawać opóźnienia wzrostu szczelin zmęczeniowych, założenie, że naprężenia ściskające nie powodują uszkodzeń, może być całkowicie błędne.

11. Porównywanie materiałów pod względem opóźnień przy $R \geq 0$ może prowadzić do błędnych wniosków. Zależnie bowiem od rodzaju materiału różny może być wpływ naprężeń ściskających.

Literatura cytowana w tekście

1. J. SCHIJVE, *Fatigue crack propagation in light alloy sheet material and structures*, Report MP 195, National Luchtvaartlaboratorium (Amsterdam), Aug. 1960.
2. C. M. HUDSON and H. F. HARDRATH, *Effects of changing stress amplitude on the rate of fatigue-crack propagation in two aluminium alloys*, National Aeronautics and Space Administration, TN D-960, Sept. 1961.
3. R. P. WEI and R. I. STEPHENS, *Fatigue crack growth under spectrum loads*, ASTM STP 595, 1976.
4. R. C. RICE and R. I. STEPHENS, *Overload effects on subcritical crack growth in austenitic manganese steel*, Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing, ASTM STP 536, 1973, pp. 95—114.
5. L. G. VARGAS and R. I. STEPHENS, *Subcritical crack growth under intermittent overloading in cold-rolled steel*, Proceedings, Third International Conference on Fracture, Munich, Germany, Vol. VI, April, 1973, V-325.
6. F. H. GARDNER and R. I. STEPHENS, *Subcritical crack growth under single and multiple periodic overloads in cold-rolled steel*, Fracture Toughness and Slow Stable Cracking, ASTM STP 559, 1974, 225—244.
7. R. I. STEPHENS, G. W. MC BURNEY and L. J. OLIPHANT, *Fatigue crack growth with negative R ratio following tensile overloads*, International Journal of Fracture, **10**, 4 (1974) 587—589.
8. R. I. STEPHENS, D. K. CHEN and B. W. HOM, *Fatigue crack growth with negative stress ratio following single overloads in 2024-T3 and 7075-T6 aluminium alloys*, Fatigue Crack Growth under Spectrum Loads, ASTM STP 595, 1976, 27—40.
9. R. I. STEPHENS, E. C. SHEETS and G. O. NJUS, *Fatigue crack growth and life predictions in man-ten steel subjected to single and intermittent tensile overloads*, Cyclic Stress-Strain and Plastic Deformation Aspects of Fatigue Crack Growth, ASTM STP 637, (w druku).
10. R. I. STEPHENS, *Fatigue crack growth specimen configuration with compressive loads present*, Int. J. Fracture, **12**, (1976) 323—326.
11. D. S. LANGERUD and R. I. STEPHENS, *Compressive overload and mean stress effects on fatigue crack growth in 2024-T3 and 2024-T3 aluminium*, Proceedings, Second International Conference on Mechanical Behavior of Materials, ICM-II, Boston, ISA, August, 1976, pp. 1000—1004.
12. D. P. MUSIL and R. I. STEPHENS, *Fatigue crack closure with negative stress ratio following single tensile overloads in 2024-T3 and 7075-T6 aluminium*, Proceedings, Fourth International Congress on Fracture, ICF-4, Waterloo, Canada, June 1977, Vol. II, pp. 1017—1023.
13. G. O. NJUS and R. I. STEPHENS, *The influence of yield strength and negative stress ratio on fatigue crack growth delay in 3130 steel*, Int. J. Fracture (w druku).
14. R. I. STEPHENS, *Fatigue crack growth retardation: fact and fiction*, Proceedings, Ninth ICAF Symposium, International Committee on Aeronautical Fatigue, Darmstadt, Germany, May, 1977.
15. W. ELBER, *The significance of crack closure*, Damage Tolerance in Aircraft Structures, ASTM, STP 486, 1969, 230—251.
16. J. R. RICE, *Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue*, Fatigue Crack Propagation, ASTM, STP 415, 1967, 247—309.
17. O. E. WHEELER, *Spectrum loading and crack growth*, J. Basic Engng., Trans. of ASME, **94**, D, 1 (1977) 181—186.

18. J. WILLENBORG, R. M. ENGLE and H. A. WOOD, *A crack growth retardation model using an effective stress concept*, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Technical Memorandum 71-1-FBR, Jan., 1971.
19. *Tentative method of test for constant-load amplitude fatigue crack growth rates above 10^{-8} m/cycle*, ASTM Committee E-24 Draft, 1977.
20. G. J. PETRAK, *Strength level effects on fatigue crack growth and retardation*, Engng. Fracture Mech., 6(1974) 725—733.
21. J. P. GALLAGHER and T. F. HUGHS, *Influence of yield strength on overload affected fatigue crack growth behavior in 4340 steel*, AFFDL-TR-74-27, 1974.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕГРУЗКИ НА РАЗВИТИЕ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

Приведены результаты экспериментального исследования развития усталостных трещин в девяти разных материалах при разных видах перегрузки. Исследовано влияние растягивающих однократных, многократных и нерегулярных а также сжимающих перегрузок. Опыты в основном проводились на растягиваемых сплошных образцах. После перегрузок прилагались нагрузки с постоянной амплитудой, причем асимметрия цикла была в пределах $R = 0 \div (-2)$. Для проверки данных, полученных из испытаний на растяжение сплошных образцов и измерений закрывания трещин, которые применялись для анализа влияния сжимающих напряжений, использовались образцы с одиночным надрезом. Предложена упрощенная математическая модель для расчета развития усталостных трещин при нерегулярных перегрузках. Эта модель базируется на данных о размерах циклических пластических зон, трещиностойкости и на развитии усталостных трещин при нагрузке с постоянной амплитудой.

Работа является обзором исследований влияния перегрузок на развитие усталостных трещин, проводимых в течение шести лет в Университете Айова.

Summary

THE INFLUENCE OF OVERLOADS ON FATIGUE CRACK GROWTH

Fatigue crack growth behavior was investigated in nine quite different metals under various overload conditions. Single, multiple and intermittent tensile overloads along with single compressive overloads were applied principally to compact tension specimens. Constant amplitude testing following overloads was applied with stress ratios R ranging from 0 to -2 . Single edge notch specimens were also tested to verify compression influence in the compact tension specimens and to measure crack closure. A simplified model was developed to predict fatigue crack growth under intermittent tensile overloads based upon constant amplitude fatigue crack growth behavior, retardation, reversed plane stress plastic zone sizes and fracture toughness. The paper is a review of six years of research at the University of Iowa concerning fatigue crack growth interaction effects.

THE UNIVERSITY OF IOWA, USA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 listopada 1977 r.

PARAMETR USZKODZENIA W KONTYNUALNEJ MECHANICE ZNISZCZENIA*)

MARCIN CHRZANOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Jednym z dwu podstawowych kryteriów projektowania każdej konstrukcji inżynierskiej jest zapewnienie bezpiecznej jej eksploatacji. Pod tym pojęciem rozumie się zwykle fakt, że konstrukcja nie ulegnie zniszczeniu, jeśli tylko nie zostanie osiągnięta krytyczna wartość Q_* pewnej wielkości Q użytej jako miara okresu eksploatacji konstrukcji. Wybór tej wielkości zależy zarówno od warunków pracy konstrukcji, jak i od własności zastosowanych materiałów. W przypadku, gdy konstrukcja pracuje w zakresie umiarkowanych temperatur, a obciążenie wzrasta monotonicznie, jako wielkość tę można przyjąć naprężenie σ (rozumiane na ogół jako pewna kombinacja niezmienników stanu naprężenia) z wartością krytyczną będącą wytrzymałością doraźną $Q_* = \sigma_{ult}$. Dla obciążeń cyklicznych o stałej amplitudzie i przy umiarkowanych temperaturach miarą okresu trwania eksploatacji może być liczba określająca ilość przyłożonych cykli n , a odpowiednią wartością krytyczną liczba N cykli do zniszczenia, tzn. $Q_* = N$. Wreszcie, gdy temperatura jest dostatecznie wysoka i do głosu dochodzą reologiczne własności materiału, miarą okresu eksploatacji może być czas t z krytyczną wartością t_* określająca czas do zniszczenia.

Określenie wielkości Q_* dla złożonych historii obciążenia jest niemożliwe bez rozpatrzenia procesów zachodzących w strukturze materiału. Dla materiałów, które w danych warunkach zachowują się jak kruche, procesy te mogą być utożsamione ze zjawiskami nukleacji, wzrostu i propagacji mikroszczelin. Wyróżnić tu należy przy tym dwa etapy. Pierwszy z nich, nazywany często okresem ukrytych uszkodzeń, zaczyna się we wczesnym okresie eksploatacji i trwa do momentu, w którym staje się niestateczny. Jest to zwykle moment, w którym mikroszczeliny zlewają się formując jedną główną szczelinę, która zaczyna się propagować w materiale. W dalszym ciągu będziemy używali indeksu 1 dla oznaczenia tej wartości wielkości Q , która odpowiada zakończeniu okresu ukrytego zniszczenia. Tak więc drugi okres zniszczenia zaczyna się w «chwili» Q_1 i trwa aż do zniszczenia przy $Q = Q_*$.

Rozróżnienie pomiędzy tymi dwoma etapami procesu zniszczenia jest ważne nie tylko z punktu widzenia jego mechaniki, lecz także z uwagi na aspekty praktyczne. Okres $(0, Q_1)$ jest zwykle bardzo długi w porównaniu z pozostałym okresem (Q_1, Q_*) , a ukryte efekty kruchego zniszczenia w tym okresie nie pozwalają na ostrzeżenie o zbliżaniu się niesta-

*) Praca niniejsza wykonana została w ramach Problemu Międzyresortowego I-23, koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk.

tecznego i niszczącego drugiego okresu. Co więcej, analiza konstrukcji pracującej w tym okresie jest znacznie bardziej złożona, w związku z koniecznością rozważenia pola mikro-szczelin, w przeciwieństwie do drugiego okresu, gdzie do czynienia mamy z jedną dominującą szczeliną. Z tych powodów w kilku dziedzinach mechaniki stosowanej rozwijane jest w latach ostatnich kontynuualne podejście do opisu ukrytego zniszczenia. Ten sposób można za HULTEM [1] nazwać kontynuualną mechaniką uszkodzeń, będącą działem kontynuualnej mechaniki zniszczenia, dyskutowanej obszernie przez DRUCKERA [2] i NOWOŻYŁOWA [3]. Dotychczasowe prace w tym kierunku głównie dotyczą pełzania metali, lecz ostatnio również i zmęczenia metali, a także pęknięcia skał i materiałów skałopodobnych.

Głównym celem niniejszej pracy jest dokonanie przeglądu obecnego stanu rozwoju tej gałęzi mechaniki zniszczenia i wskazanie kierunków dalszych badań. Kontynuualna mechanika uszkodzeń rozwijała się głównie w Europie (Anglia, Francja, Polska, Szwecja, ZSRR), a także w Japonii i dalszy jej rozwój w innych krajach przynieść może znaczny postęp w tej dziedzinie.

Ponieważ rozwój podejścia kontynuualnego nie był związany z żadnym typowym obciążeniem (statycznym, dynamicznym) ani też z określoną klasą materiałów (zarówno skały, beton, jak i stal, miedź, stopy aluminium itp.) poniżej przyjęto sposób prezentacji odnoszący się do poziomu, na którym ciało jest rozważane. Wychodząc z mikrostruktury, rozważymy kolejno jednoosiowy i wieloosiowy stan naprężenia, kończąc przegląd na zastosowaniach kontynuualnej mechaniki zniszczenia do analizy konstrukcji.

2. Parametr uszkodzenia

Występowanie i rozwój porów i mikroszczelin już w bardzo wczesnych okresach eksploatacji konstrukcji w podwyższonych temperaturach stało się podstawą dla KACZANOWA do wprowadzenia parametru strukturalnego w roku 1958 [4]. Zaproponował on określenie uszkodzenia materiału przez skalar ψ nazywany ciągłością materiału. W stanie wyjściowym, gdy brak jest uszkodzeń zakłada się, że $\psi = 1$, a następnie, że ψ maleje wraz z rozwojem uszkodzeń. Dla małych wartości $\psi < \psi_0$ charakter zniszczenia staje się niestatyczny, jednak z uwagi na krótkotrwałość tego okresu zniszczenia można przyjąć $\psi_0 = 0$ w chwili $t = t_*$. W roku 1959 RABOTNOW [5] przedstawił podobną ideę używając oznaczenia $\omega = 1 - \psi$. Ta sama wielkość, oznaczona $D = \omega$ i nazwana parametrem uszkodzenia została użyta w pracy ODQVISTA i HULTA [6], w której poddano dyskusji zastosowanie tego parametru przy zmiennych obciążeniach. Żadna z powyższych definicji nie odnosiła się jednak w bezpośredni sposób do zmian strukturalnych w materiałach polikrystalicznych.

Uszkodzenie materiału przejawiające się w tworzeniu się mikroszczelin różnego typu było jednak stwierdzone doświadczalnie i dyskutowane jest w licznych monografiach, jak np. GAROFALO [7] i ROZENBERGA [8] dla pełzania, czy też przez KENNEDY'EGO [9] w przypadku pełzania i zmęczenia. Nukleacja jam już we wczesnych etapach pełzania była obserwowana przez GREENWOODA [10], a wzrost szczelin w tych warunkach — przez SIVERNSA i PRICE'A [11], a także przez HARRISONA [12] dla zmęczenia przy małej liczbie cykli. Podobnie wzrost liczby pustek w metalach w procesie pełzania był studiowany

przez BALLUFFIEGO i SEIGLE'A [13], a ocenę stopnia uszkodzenia metali na podstawie pomiarów ich gęstości po przerywanych próbach pełzania proponowali SKELTON [14] i SODERBERG [15]. Warte są również zwrócenia uwagi prace SIEGFRIEDA prowadzone w tej dziedzinie od roku 1943 [16] aż po dzień dzisiejszy [17]. Przegląd prac dotyczących powstawania i rozwoju uszkodzeń w metalach przy pełzaniu zawiera specjalna publikacja Amerykańskiego Towarzystwa Badania Materiałów nr 391 [18]. Również i przy zmęczeniu było obserwowane pojawienie się mikrodefektów na wczesnych stadiach tego procesu, a ich wykrycie zależy, zdaniem WEIBULLA [19], jedynie od dokładności użytych metod badawczych.

Definicja parametru uszkodzenia oparta na wynikach badań metalurgicznych została zaproponowana przez WAKULENKĘ i KACZANOWA [21]. Średnia gęstość mikroszczelin została zdefiniowana następująco:

$$(1) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^m \int_{A_{(k)}} b_i n_j dA_{(k)},$$

gdzie V jest objętością ciała w stanie wyjściowym, b_i — wektorem rozwarcia mikroszczeliny, n — wektorem normalnym do $A_{(k)}$ — powierzchni nieciągłości spowodowanej jedną z m mikroszczelin. W ten sposób wprowadzono tensor, charakteryzujący uszkodzenie materiału w danym punkcie. Otwarta pozostaje jednak kwestia pomiaru liczby mikroszczelin m .

Inny sposób powiązania parametru uszkodzeń ze zmianami mikrostruktury w zależności od przyłożonego naprężenia zaproponował HAYHURST [22]. Badał on próbki o przekroju poprzecznym zmieniającym się liniowo wzdłuż ich osi, poddane stałemu obciążeniu wywołującemu w pewnym momencie zerwanie w najwęższym miejscu. Powiązanie parametru uszkodzenia z działającym naprężeniem, było możliwe przez porównanie ilości mikroszczelin przypadających na jednostkę powierzchni w różnych przekrojach.

Bezpośrednie określenie parametru uszkodzenia napotyka jednak liczne trudności i w chwili obecnej dalekie jest od zadowalającego powiązania z procesami fizycznymi zachodzącymi w materiale. Jest to tym bardziej zrozumiałe, jeśli pamiętać będziemy o losowym rozkładzie mikrodefektów i ich skomplikowanej konfiguracji. Co więcej, wydaje się, że określenie wielkości ciągłej jaką jest parametr uszkodzenia poprzez zjawiska fizyczne o dyskretnym rozkładzie jest możliwe tylko przy zastosowaniu metod statystycznych.

Najprostszą propozycją tego typu było potraktowanie przez ODQVISTA i HULTA [6] parametru uszkodzenia D dla jednoosiowego stanu naprężenia jako wartości średniej na powierzchni przekroju poprzecznego rozciąganej próbki

$$(2) \quad D = \frac{A_0 - A_t}{A_0} = \frac{A_d}{A_0},$$

gdzie A_0 jest wielkością początkową przekroju, A_d — zniszczoną częścią przekroju, A_t — częścią przekroju niosącą obciążenie w chwili t . Dzięki tej definicji parametr D został sprowadzony do tej samej klasy wielkości co naprężenie i odkształcenie. Tak więc parametr uszkodzenia może być traktowany jak nowa zmienna stanu [23].

Interpretacja parametru uszkodzenia w ujęciu probabilistycznym stanowi temat szeregu prac MURZEWSKIEGO [24—27]. Zaproponował on wprowadzenie dwu rodzajów

parametrów odpowiedzialnych za uplastycznienie i dekohezję materiału odkształcanego w zakresie sprężysto-plastycznym. Podobne podejście zastosował EIMER [28] dla opisu uszkodzeń reologicznych betonu, definiując naprężenie efektywne w jednoosiowym stanie jako

$$(3) \quad s = \frac{\sigma}{1 - \delta},$$

gdzie σ jest naprężeniem nominalnym, a δ — prawdopodobieństwem zniszczenia w danym punkcie. Ponieważ $\sigma = P/A_0$, to

$$s = \frac{P}{A_0(1 - \delta)}.$$

Porównanie tego wyniku z otrzymanym na podstawie (2)

$$s = \frac{P}{A_0(1 - A/A_0)}$$

wskazuje na możliwość interpretacji parametru uszkodzenia jako prawdopodobieństwa, gdyż

$$(4) \quad \delta = D.$$

Ta interpretacja była podstawą dla CHRZANOWSKIEGO [29], aby powiązać parametr uszkodzenia przy obciążeniu monotonicznie wzrastającym z probabilistyczną teorią zniszczenia WEIBULLA [30]. Zgodnie z rozważaniami w pracy [29] parametr uszkodzenia może być określony

$$D = 1 - [1 - (\sigma/\sigma_{ult})^{m_0+1}]^{\frac{1}{m_0+1}},$$

podczas gdy prawdopodobieństwo zniszczenia wg WEIBULLA wynosi

$$S = 1 - 0,5(\sigma/\sigma_{ult})^n,$$

gdzie n i m_0 są stałymi materiałowymi. Porównanie zmiany tych wielkości wraz ze zmianą przykadanego naprężenia σ dla różnych wartości n i m_0 wskazuje, że

$$(5) \quad D \approx 2S.$$

Tak więc parametrowi uszkodzenia można przypisać interpretację probabilistyczną, a rozkład tego prawdopodobieństwa powiązać ze zjawiskami fizycznymi prowadzącymi do dekohezji.

Podejście stochastyczne i określenie rozkładu prawdopodobieństwa zniszczenia stanowi istotę prac SOBOYEJO [31, 32], który wykorzystał twierdzenia energetyczne dla wyznaczenia funkcji niezawodności przy zniszczeniu w warunkach pełzania. Funkcje te zostały ostatnio użyte przez BOYLE'A [33] przy dyskusji różnych postaci zniszczenia i porównania z wcześniejszymi propozycjami probabilistycznej interpretacji charakterystyk zniszczenia przez BROBERGA [34].

Zupełnie różne podejście do zjawiska rozproszonego uszkodzenia oparte być może o osiągnięcia teorii szczelin. Ten kierunek był raczej związany z badaniem zachowania się jednej dominującej szczeliny w ciałach o różnych własnościach mechanicznych. Zjawiska zachodzące w pobliżu wierzchołka szczeliny, jak np. plastyczne czy lepkie płynięcie,

stanowiły główny przedmiot zainteresowania. Takie podejście odpowiada więc drugiemu, niestatecznemu okresowi procesu zniszczenia, który jak to powyżej wskazywano nie ma tak istotnego znaczenia dla praktyki inżynierskiej. Krytycznej ocenie możliwości zastosowania teorii szczelin do zagadnień opóźnionego zniszczenia przy zmęczeniu i pełzaniu poświęcone są liczne prace konferencji w Filadelfii (1973) i Sheffield (1974) [35].

Znacznie bardziej obiecującym podejściem do opisu ukrytego zniszczenia jest rozwiązywanie wielu współoddziaływujących szczelin. Podstawowe prace z tej dziedziny zebrane są w monografii PANASIUKA [36] i rozwijane w pracach SALGANIKA [37]. Wydaje się jednak, że w chwili obecnej daleko jest jeszcze do praktycznego wykorzystania mechaniki szczelin do rozwiązywania konkretnych problemów inżynierskich w sytuacjach, gdy decydujący jest ukryty okres zniszczenia.

3. Uszkodzenia w jednoosiowym stanie naprężenia

Równanie opisujące kinetykę wzrostu uszkodzeń było zaproponowane po raz pierwszy przez KACZANOWA [4] dla opisu zniszczenia przy pełzaniu. Postuluje on powiązanie prędkości rozwoju uszkodzeń z efektywnym naprężeniem za pomocą związku

$$(6) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi} \right)^m,$$

gdzie A i m są stałymi materiałowymi. Scałkowanie tego równania przy stałym naprężeniu rozciągającym σ_0 z warunkiem początkowym $\psi(0) = 1$ i przy przyjęciu, że zniszczenie nastąpi dla $\psi = 0$ prowadzi do wzoru na czas zniszczenia

$$(7) \quad t_* = \frac{1}{A(m+1)\sigma_0^m}.$$

W układzie $\log \sigma_0 - \log t_*$ wzór ten jest reprezentowany przez linię prostą o nachyleniu $1/m$, przybliżającą dobrze dane doświadczalne dla metali (por. np. [38]). W tym samym układzie linia prosta o nachyleniu $1/n$, gdzie n jest wykładnikiem potęgowym w prawie pełzania $\dot{\epsilon} = B\sigma^n$, odpowiada zniszczeniu ciągliwemu. Uwzględniając zmniejszenie się przekroju poprzecznego próbki w wyniku jej wydłużenia KACZANOW opisał także zniszczenie mieszane, lepko-krucho. Dla $\sigma_0 > \bar{\sigma}_0$, gdzie

$$(8) \quad \bar{\sigma}_0 = \left(\frac{A}{B} \frac{m+1}{n-m} \right)^{\frac{1}{m-n}}$$

decydujące jest zniszczenie ciągliwe, nie związane z procesem rozwoju mikrouszkodzeń. Tak więc równanie (8) określa górny zakres stosowalności teorii KACZANOWA.

Równanie (6) jest ważne tylko dla $\sigma_0 > 0$. Dla naprężeń ściskających KACZANOW [39] proponuje

$$(9) \quad \frac{d\psi}{dt} = 0 \quad \text{dla } \sigma_0 < 0.$$

HULT [40] zaproponował nieco inny «mechanizm drzemiącego uszkodzenia», zgodnie z którym jest

$$(10) \quad 1 - \psi = \omega = 0 \quad \text{dla } \sigma_0 < 0.$$

Praca SWINDEMANA [41] wskazuje na fizyczną zasadność tej ostatniej koncepcji.

W tym samym okresie co i KACZANOW analogiczną hipotezę postawił RABOTNOW [5] proponując związek

$$(11) \quad \omega^{-\beta} \frac{d\omega}{dt} = A \left(\frac{\sigma_{\max}}{1-\omega} \right)^m,$$

gdzie β jest stałą materiałową zależną od hipotetycznego kształtu rozwijających się mikroszczelin ($0 \leq \beta \leq 1/2$), a $\omega = 1 - \psi$. Dla $\beta = 0$, co odpowiada kołowym mikroszczelinom, (11) staje się identyczne z (6) i obie teorie pokrywają się.

W roku 1960 TAIRA [42] zaproponował uproszczoną wersję wcześniejszych teorii zakładając

$$(12) \quad \frac{d\omega}{dt} = a_c (|\sigma|)^{\alpha_c},$$

gdzie a_c i α_c są stałymi materiałowymi.

Pewna modyfikacja równania (6) została przedstawiona przez LEMAITRE'A i CHABOCHE'A [45]

$$(13) \quad \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\sigma}{A} \right)^r (1-\omega)^{-k(\sigma)},$$

gdzie A i r są stałymi materiałowymi, a $k(\sigma)$ jest funkcją, która musi być określona doświadczalnie.

W oparciu o równanie (6) NAMIESTNIKOW [44] zaproponował opis zniszczenia mieszanego dla pełzania nieustalonego.

Inne podejście do kinetyki uszkodzeń przedstawił LINDBORG [45], który identyfikując prędkość narastania uszkodzeń z prędkością wzrostu mikroszczelin, określił czas do zniszczenia jako

$$(14) \quad t_* \approx \frac{1}{2\dot{n}_1 h},$$

gdzie \dot{n}_1 jest prędkością propagacji szczeliny o długości równej długości krawędzi kryształu, a h jest mnożnikiem wzrostu.

Bardzo ważna sugestia zawarta jest w pracy HULTA i BROBERGA [46], którzy zaproponowali uzupełnienie równania (6) przez człon odpowiedzialny za uszkodzenia niezależne od czasu, podobnie jak to dla odkształceń reologicznych zaproponował ODQVIST [47].

Koncepcję tę rozwinął CHRZANOWSKI w pracy [48] rozdzielając parametr uszkodzenia na trzy składowe

$$(15) \quad \omega = \omega_s + \omega_f + \omega_c,$$

podobnie jak i naprężenie

$$(16) \quad \sigma = \langle \sigma_s \rangle + \langle \sigma_f \rangle + \langle \sigma_c \rangle,$$

gdzie indeksy s, f, c odnoszą się odpowiednio do procesów: obciążenia statycznego, zmęczenia i pełzania. Trójkątne nawiasy w (16) użyto, aby podkreślić logiczny jedynie

charakter sumacji. Dla każdej składowej parametru uszkodzeń prędkością ich wzrostu rządzi oddzielne równanie

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_s}{dt} &= A_s \left(\frac{\sigma_s}{1-\omega_s} \right)^{m_s}, \\ \frac{d\omega_f}{dt} &= A_f \left(\frac{\sigma_f}{1-\omega_f} \right)^{m_f} g(\nu), \\ \frac{d\omega_c}{dt} &= A_c \left(\frac{\sigma_c}{1-\omega_c} \right)^{m_c},\end{aligned}$$

gdzie A i m z odpowiednimi indeksami są stałymi materiałowymi, a $g(\nu)$ jest pewną funkcją częstotliwości. Połączenie tych równań zgodnie z (15) i wprowadzenie ω zamiast poszczególnych składowych $\omega_{s,f,c}$ pozwoliło na wyprowadzenie równania opisującego interakcję efektów zależnych i niezależnych od czasu

$$(17) \quad \frac{d\omega}{dt} = A_s \left(\frac{\sigma_s}{1-\omega} \right)^{m_s} \frac{d\sigma_s}{dt} + A_f \left(\frac{\sigma_f}{1-\omega} \right)^{m_f} \frac{1}{\nu} g(\nu) + A_c \left(\frac{\sigma_c}{1-\omega} \right)^{m_c}.$$

Uproszczona wersja tego równania

$$(18) \quad \frac{d\omega}{dt} = A_0 \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{m_0} \frac{d\sigma}{dt} + A \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m$$

była użyta przez CHRZANOWSKIEGO [29] dla opisu interakcji pełzania i zmęczenia.

Pewną modyfikację równania (18), bardziej przydatną przy zadanych odkształceniach cyklicznych, zaproponował BROBERG [49]

$$(19) \quad \frac{d\omega}{dt} = A_0 \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{m_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right) + A \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m.$$

Równanie to było szczegółowo badane w pracach BOSTRÖMA i in. [50] oraz BROBERGA [51].

Inną tendencją mającą na celu możliwie dokładny opis procesu zniszczenia jest sprzężenie związku fizycznego z procesem uszkodzeń, co było dyskutowane już w oryginalnej pracy KACZANOWA [4]. Sprzężenie z równaniem dla pełzania ustalonego zaproponował RABOTNOW [52] i rozwinął następnie w monografii napisanej wspólnie z MILEJKO [53]. Podstawowy układ równań ma postać:

$$(20) \quad \begin{aligned}\dot{\epsilon}_c &= B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n, \\ \dot{\omega} &= A \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m,\end{aligned}$$

gdzie $\dot{\epsilon}_c$ jest prędkością odkształceń pełzania.

Koncepcja ta, w połączeniu z ideą «drzemiącego» uszkodzenia była wykorzystana przez HULTA [54] dla opisu progresywnie narastających uszkodzeń przy cyklicznym deformowaniu w warunkach pełzania. Można jednak łatwo zauważyć, że takie sprzężenie nie opisuje pełzania ustalonego, powodując przyspieszenie procesu akumulacji odkształceń już od chwili $t = 0$.

Opis pełnej krzywej zniszczenia zaproponował CHRZANOWSKI [55—57] sprzęgając równanie teorii umocnienia odkształceniowego z procesem wzrostu uszkodzeń:

$$(21) \quad \begin{aligned} \varepsilon_c^\alpha \dot{\varepsilon}_c &= B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n, \\ \dot{\omega} &= A \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m. \end{aligned}$$

Teorie sprzężone mogą być wyprowadzone w oparciu o teorię RABOTNOWA kinetycznych równań pełzania [58]. Skończona liczba parametrów strukturalnych q_i jest wprowadzona do równania konstytutywnego

$$(22) \quad \dot{\varepsilon}_c = f(\sigma, q_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, p,$$

gdzie

$$dq_i = q_i d\varepsilon_c + b_i d\sigma + c_i dt$$

i a_i, b_i, c_i są funkcjami ε_c, σ, t i q_i . Np. dla $p = 2$, zakładając

$$a_1 = 1, \quad b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = 0, \quad c_2 = g(\sigma, q_2)$$

otrzymuje się układ równań

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_c &= f(\sigma, \omega, \varepsilon_c), \\ \dot{\omega} &= g(\sigma, \omega), \end{aligned}$$

gdzie oznaczono $q_2 = \omega$. Tak więc równania (23) są ogólną postacią równań (21).

Szczególnie ważne z praktycznego punktu widzenia są sytuacje, gdy przyłożone obciążenie (lub przemieszczenia) są niestacjonarne. W tym przypadku szerokie zastosowanie znalazła teoria uszkodzeń, dla której podstawową jest tzw. zasada liniowej sumacji uszkodzeń. Dla zmęczenia zasada ta została sformułowana przez PALMGRENA [59] i uogólniona przez MINERA [60]

$$(24) \quad \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = 1,$$

gdzie n_i oznacza liczbę cykli o amplitudzie naprężeń σ_{ai} , a N_i — liczbę cykli do zniszczenia przy tym samym naprężeniu. Obszerna dyskusja zasady liniowej kumulacji uszkodzeń przy zmęczeniu jest zawarta w pracy MILLERA [61]. Równoległe idea liniowej kumulacji uszkodzeń była rozwijana przy opisie zniszczenia przy pełzaniu. Doświadczalne podstawy tej teorii dały prace ROBINSONA [62—64]. Szczegółowy przegląd prac na tym polu zawarty jest w artykułach przeglądowych ESZTERGARA i ELLISA [65] i ABO EL ATA i FINNIE [66]. Również MARRIOT i PENNY [67] przedstawili obszerną dyskusję ważności zasady liniowej akumulacji uszkodzeń przy pełzaniu, której zapis ma postać

$$(25) \quad \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t_{*i}} = 1,$$

gdzie t_{*i} oznacza czas zniszczenia przy stałym naprężeniu σ_i .

Założenie liniowej interakcji pełzania i zmęczenia daje

$$(26) \quad \sum_{i=1} \frac{n_i}{N_i} + \sum_{i=1} \frac{t_i}{t_{*i}} = 1.$$

Wzór ten nie jest jednak na ogół potwierdzany przez doświadczenia (por. [65] czy [66]). I tak np. norma amerykańska [68] zaleca modyfikację

$$(27) \quad \sum_{i=1} \frac{\dot{n}_i}{N_i} + \sum_{i=1} \frac{\beta t_i}{t_{*i}} \leq 1,$$

gdzie β jest stałą, $\beta < 1$.

ODQVIST i HULT wykazali w pracy [6], że teoria zniszczenia KACZANOWA spełnia zasadę liniowej kumulacji uszkodzeń. Obszerniejsze omówienie pewnych aspektów tego zagadnienia jest podane w pracy [69] dotyczącej tzw. komutatywności czasu i obciążeń.

Zagadnienie interakcji pełzania i zmęczenia pozostaje ostatnio w centrum zainteresowania (por. [35]), choć kwestia ta pozostaje ciągle otwarta. Zastosowanie tu równania (18) czy (19) dla przypadków zmiennych obciążeń może dać interesujące rezultaty.

4. Wieloosiowy stan naprężenia

Równanie (6) wprowadzone tu dla jednoosiowego stanu naprężenia było pomyślane przez KACZANOWA jako opisujące proces zniszczenia także i dla obciążeń złożonych. Naprężenie σ_{\max} może być rozumiane jako maksymalne naprężenie główne σ_1 ($\sigma_1 > 0$). Oznacza to, że zakłada się rozwój mikrouszkodzeń w płaszczyznach prostopadłych do σ_1 . Założenie to było weryfikowane przez wielu badaczy. SÖDERQUIST [70] studiował przypadek dwuosiowego stanu naprężenia, podobnie jak i HAYHURST w serii prac [71—74]. Ten ostatni zajmował się także weryfikacją zniszczenia przy wieloosiowym stanie naprężenia. Badania te wykazują, że kryterium zniszczenia zależy zarówno od materiału, jak i od zakresu temperatury. I tak np. dla handlowo czystej miedzi przy 250°C zastosowanie znajduje kryterium maksymalnego naprężenia rozciągającego, podczas gdy dla stopów aluminium lepiej odpowiada danym doświadczalnym kryterium maksymalnego oktaedrycznego naprężenia styczego.

Bardzo rozległe badania doświadczalne w tej dziedzinie były prowadzone w National Engineering Laboratory, Glasgow pod kierownictwem JOHNSONA [75].

Zastosowanie parametru uszkodzenia w przestrzennym stanie naprężenia zaproponowane zostało w pracy KACZANOWA [76]. Założył on, że uszkodzenie w płaszczyźnie prostopadłej do naprężenia σ_1 zależy również od uszkodzeń ψ_2 i ψ_3 , które mogą rozwijać się w pozostałych dwu prostopadłych płaszczyznach. Uogólnione równanie propagacji uszkodzeń ma postać

$$(28) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -A \left\{ \left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^m + \alpha \left[\left(\frac{\sigma_2}{\psi_2} \right)^m + \left(\frac{\sigma_3}{\psi_3} \right)^m \right] \right\},$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$ jest stałą materiałową. Równania dla ψ_2 i ψ_3 otrzymuje się z (28) przez kołową zamianę wskaźników.

Dla materiałów anizotropowych KACZANOW [77] proponuje

$$(29) \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -A_i \left(\frac{\sigma_i}{\psi_i} \right)^{m_i},$$

gdzie $i = 1, 2, 3$ oznacza osie główne naprężeń, lub uwzględniając (28)

$$(30) \quad \frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} A_j \left(\frac{\sigma_j}{\psi_j} \right)^{m_j},$$

gdzie $0 \leq \alpha_{12} \leq 1$, $0 \leq \alpha_{23} \leq 1$, $0 \leq \alpha_{31} \leq 1$ oraz $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$.

Powyższe teorie są dyskutowane szczegółowo w monografii KACZANOWA [78], dotyczącej zastosowań mechaniki zniszczenia do analizy uszkodzeń przy pełzaniu.

SDOBYRIEW [79] zaproponował uwzględnienie wieloosiowości stanu naprężenia przez wprowadzenie naprężenia efektywnego

$$(31) \quad \sigma_{ef} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_{in}),$$

gdzie σ_{in} jest intensywnością naprężeń. Po wyznaczeniu stanu naprężenia w oparciu o odpowiednie równanie konstytutywne, naprężenie zredukowane obliczone zgodnie z (31) wprowadza się do (6) zamiast σ_{max} . Równanie (31) było uogólnione przez KISIELEWSKIEGO i OSASIUKA [80].

$$(32) \quad \sigma_{ef} = \lambda(\sigma_{in} - \sigma_1) + \sigma_1,$$

gdzie $0 \leq \lambda \leq 1$, a pewną jego modyfikację zaproponował TRUNIN [81]

$$(33) \quad \sigma_{ef} = \frac{1}{2} (\sigma_{in} + \sigma_1)^{1-2k},$$

gdzie

$$k = 3\sigma_m(\sigma_1 + \sigma_{in})^{-1} \text{ a } \sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Daleko posunięte uogólnienie przedstawił RABOTNOW [82] wprowadzając tensor uszkodzeń ψ_{ij} . Prędkość jego składowych jest określona związkiem

$$(34) \quad \dot{\psi}_{ij} = \varphi_{ij}(s_{kl}),$$

gdzie s_{kl} jest tensorem naprężeń rzeczywistych, określonym przez równanie

$$(35) \quad s_{ij} = \Omega_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$$

i

$$(36) \quad \Omega_{ijkl} = \frac{1}{4} (\psi_{ik} \delta_{jl} + \psi_{il} \delta_{jk} + \psi_{jk} \delta_{il} + \psi_{jl} \delta_{ik}),$$

δ_{ij} oznacza jednostkowy tensor kulisty. Teoria ta jako nazbyt ogólna i nie mająca oparcia w badaniach doświadczalnych, a ponadto niewygodna w praktycznych obliczeniach nie znalazła szerszego zastosowania.

Znacznie dogodniejszą z punktu widzenia zastosowań praktycznych jest teoria zniszczenia kruchego materiałów skałopodobnych zaproponowana w oparciu o tensorową reprezentację parametru uszkodzeń przez DRAGONA [83]. Jest ona szczególną postacią ogólnej teorii zaproponowanej przez MROZA [84].

Omawiając przestrzenny stan naprężenia warto zwrócić uwagę na fakt, że w każdym niejednorodnym stanie naprężenia należy rozważyć propagację frontu zniszczenia tj. powierzchni, na której jest $\psi = 0$. KACZANOW w pracy [85] zapisuje równanie ruchu frontu zniszczenia w postaci

$$(37) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} \Big|_{\Sigma} + \frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} \frac{dn}{dt} = 0,$$

gdzie n jest wektorem normalnym do powierzchni frontu Σ . Równanie to może być zapisane w równoważnej postaci

$$(38) \quad A(m+1) \int_0^t \sigma_{\max}^m(t, \tau) d\tau = 1,$$

gdzie $\sigma_{\max}(t, \tau)$ jest maksymalnym naprężeniem głównym w punkcie leżącym na powierzchni Σ w chwili τ i działającym w przedziale czasu $(0, t)$.

Jak to wskazano w rozdz. 1, należy się spodziewać, że przedział (t_1, t_*) , gdzie t_1 jest czasem, gdy $\psi = 0$ w dowolnym punkcie, a t_* — czasem zniszczenia, będzie mały w porównaniu z przedziałem $(0, t_1)$. Tak więc t_1 może być przyjęte jako dobre przybliżenie czasu całkowitego zniszczenia. Dla czystego zginania i grubościennej rury pod wewnętrznym ciśnieniem wykazał to KACZANOW [86]. Przypadek równoczesnego zginania i rozciągania dyskutowano w pracy autora [87] i w pracach PIECHNIKA i CHRZANOWSKIEGO [88, 89]. Pokazano, że

$$(39) \quad 1 \leq \frac{t_*}{t_1} \leq 1 + \frac{2}{2m-1},$$

gdzie graniczne przypadki odpowiadają czystemu rozciąganiu i czystemu zginaniu.

Warto podkreślić jednak, że w pewnych sytuacjach okres ruchu frontu zniszczenia może być znaczny w wyniku korzystnej redystrybucji naprężeń. Przypadek taki był badany przez HAYHURSTA w pracy [90], dotyczącej rozciągania tarczy z kołowym otworem.

W ogólnym przypadku ruch frontu zniszczenia powinien być rozważany dla przestrzennego stanu naprężenia i ciała o zmiennym w czasie brzegu.

5. Zastosowania inżynierskie

Brak w pełni ogólnej teorii zniszczenia powoduje, że nie ma w chwili obecnej zbyt wielu rozwiązań o charakterze stosowanym. Niektóre z nich zawarte są w podstawowych pracach KACZANOWA, uprzednio cytowanych, dotyczących zginania, skręcania i obciążenia ciśnieniem wewnętrznym cylindrów grubościennych. Podobnych zagadnień dotyczą prace CHRZANOWSKIEGO [91—93] i CHRZANOWSKIEGO i KUSIA [94].

Ogólny przypadek obciążenia grubościennej rury był rozważany przez ŻYCZKOWSKIEGO i SKRZYPKA [95] przy wykorzystywaniu kryterium SDOBYRIEWA [79].

Spośród innych przypadków dyskutowanych przez KACZANOWA warto wymienić zniszczenie przy relaksacji [86] i przy uwzględnieniu efektów korozji [96].

Zniszczenie cylindrów obciążonych ciśnieniem w warunkach pełzania było dyskutowane przez TAIRĘ i OTHANI [97] w oparciu o teorię TAIRY [42].

Dwa ważne przypadki zniszczenia przy dwuosiowym pełzaniu rozważali SÖDERQUIST [98] (równomierne wszechstronne rozciąganie tarczy z kołowym otworem) i STORAKERS [99] (kołowa membrana pod ciśnieniem wewnętrznym). Zniszczenie tarczy z kołowym otworem obciążonej momentem skręcającym stanowiło przedmiot badań w pracy HAYHURSTA i STORAKERSA [100].

Wyboczenie z uwzględnieniem uszkodzeń rozważali ŻYCZKOWSKI i ZABORSKI [101] dla prostej teorii KACZANOWA. BOSTRÖM [102] zajął się tym zagadnieniem dla uogólnionego prawa kinetyki uszkodzeń [50].

Obliczanie bardziej złożonych konstrukcji wymaga rozwiązania problemu redystrybucji naprężeń, zachodzącej zarówno w wyniku niestacjonarnego pełzania, jak i zniszczenia. ODQVIST i ERIKSSON [103] rozważali to zagadnienie dla grubościennej rury obciążonej ciśnieniem wewnętrznym. Ten sam przypadek lecz dla opisu pełzania według teorii zaproponowanej w [56] rozważał CHRZANOWSKI [104], badając również wpływ redystrybucji na czas zniszczenia prostej konstrukcji prętowej. Generalne podejście do zagadnienia redystrybucji naprężeń zawarte jest w pracach KACZANOWA [105, 106].

Dla uniknięcia kłopotliwego zagadnienia śledzenia redystrybucji naprężeń MARTIN i LECKIE [107] zaproponowali wprowadzenie globalnego parametru uszkodzenia Ω , charakteryzującego stopień wyczerpania nośności konstrukcji. Dalsze rozwinięcie tej teorii zawarte jest w pracy LECKIEGO i HAYHURSTA [108]. W oparciu o tę koncepcję można znaleźć graniczne oszacowania czasu zniszczenia konstrukcji.

Innym ważnym zakresem zastosowań jest wykorzystanie parametru uszkodzenia w mechanice szczelin. KACZANOW w serii prac [109—111] rozważał propagację szczeliny w ciele osłabionym defektami rozłożonymi w sposób ciągły. Wpływ koncentracji naprężeń wokół ostrych karków na wytrzymałość czasową rozważał RABOTNOW [112]. Istotny przyczynek do badań na tym polu stanowi praca de BONTA [113] w której badano korelację parametru uszkodzeń i uderności stali stopowych. Tym niemniej brak jest w chwili obecnej ściślejszego powiązania klasycznej mechaniki zniszczenia i podejścia kontynuального dyskutowanego w niniejszej pracy.

6. Uwagi końcowe

Idea parametru uszkodzeń została wprowadzona i istotnie rozwinięta dla materiałów, które wykazują własności reologiczne, przejawiające się m.in. w zjawisku opóźnionego zniszczenia. Tylko nieznaczna liczba prac dotyczy innych przypadków, jak obciążenie statyczne czy zmęczenie. Uogólnienie na te zakresy powinno być podstawowym kierunkiem badań.

Od badań doświadczalnych należy w pierwszym rzędzie oczekiwać sklasyfikowania materiałów pod względem formy zniszczenia w przestrzennym stanie naprężenia. W połączeniu z powyżej wspomnianym uogólnieniem wyniki tych badań powinny dać odpowiedź zarówno na pytanie, jaki typ równań stosować dla danego materiału, jak i określić wartości statycznych materiałowych występujących w tych równaniach.

Specjalnej uwagi i dalszych szczegółowych badań wymaga idea globalnego parametru uszkodzeń Ω zastosowana do różnych typów konstrukcji (ustroje prętowe, płyty, powłoki itp). Stać się ona może podwaliną teorii granicznych stanów opóźnionego zniszczenia konstrukcji.

Wreszcie znalezienie ściślejszej korelacji pomiędzy klasyczną mechaniką szczelin a podejściem kontynuualnym do zniszczenia pozwoliłoby na uzasadnienie słuszności tego ostatniego, a także stanowiło podstawę do dalszych badań fizycznej strony rozważanych procesów. Probabilistyczne podejście do procesu rozwoju uszkodzeń wydaje się być w tej sytuacji w pełni adekwatnym do opisów pól mikrodefektów.

Cztery, powyżej omówione, grupy zagadnień wyznaczają zasadnicze kierunki dalszych badań. Tym niemniej istnieje szereg zagadnień, które i na obecnym etapie rozwoju ogólnych teorii mogą być efektywnie rozwiązywane. Wymienić tu należy przede wszystkim problem współdziaływania pełzania i zmęczenia, ważny dla zastosowań praktycznych. Innym, ważnym jest zagadnienie uwzględnienia efektów korozji i jej interakcji ze zniszczeniem przy pełzaniu czy zmęczeniu. Losowe obciążenia, jak i zmienna temperatura są również ważnym działem zastosowań praktycznych i mogą być rozwiązywane w oparciu o już istniejące teorie.

Literatura cytowana w tekście

1. J. HULT, XIV IUTAM Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Delft 1976.
2. D. C. DRUCKER, *A continuum approach to the fracture of metals*, Fracture in Solids, ed. D. C. DRUCKER and J. J. GILMANN, Wiley and Sons, 1963.
3. V. V. NOVOZHILOV, *On the prospects of the phenomenological approach to the problem of fracture*, General Lecture at the 13th Int. Congress of Theoret. and Appl. Mechanics, Moscow 1972.
4. Л. М. КАЧАНОВ, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изв. АН СССР ОТН, 8 (1958).
5. Ю. Н. РАБОТНОВ, *О механике длительного разрушения*, Вопр. проч. мат. и констр., Изд. АН СССР, Москва 1959.
6. F. K. G. ODQVIST, J. HULT, *Some aspects of creep rupture*, Arkiv for Fysik, 19 (1961).
7. F. GAROFALO, *Fundamentals of Creep and Creep-Rupture in Metals*, Macmillan Co., N. York 1965.
8. В. М. РОЗЕНБЕРГ, *Ползучесть металлов*, Изд. Metallurgiya, Москва 1966.
9. A. J. KENNEDY, *Processes of Creep and Fatigue in Metals*, Oliver and Boyd, Edinburgh 1962.
10. G. W. GREENWOOD, *Cavity nucleation in the early stages of creep*, Phil. Mag., 19, 158 (1969).
11. M. J. SIVERNS, A. T. PRICE, *Crack growth under creep conditions*, Nature, 228 (1970).
12. C. B. HARRISON, *High-temperature crack growth in low-cycle fatigue*, Eng. Fract. Mech., 3 (1971).
13. R. W. BALLUFFI, L. L. SEIGLE, *Growth of voids in metals during diffusion and creep*, Acta Met., 5, 449 (1957).
14. R. P. SKELTON, *An assessment of void population from density measurements after creep*, Metal. Sci. J., 2 (1968).
15. R. SODERBERG, *Evidence of Griffith-Orowan type intercrystalline creep fracture*, Proc. 2nd Int. Conf. on Fract., Brighton, 1969, Chapman, Hall Ltd., London 1970.
16. W. SIEGFRIED, *Failure from creep influenced by the state of stress*, J. Appl. Mech., 10, 4(1943).
17. W. SIEGFRIED, *Determination of factors causing embrittlement in time-to-rupture test*, Adv. in Creep Design, 1971.
18. ASTM STP 391, *Literature Survey on Creep Damage in Metals*, ed. J. W. FREEMAN, H. R. VOORHES, 1965.
19. W. WEIBULL, *Fatigue Testing and the Analysis of Results*, Pergamon Press, Oxford 1961.

20. A. A. ВАКУЛЕНКО, М. Л. КАЧАНОВ, *Континуальная теория сред с трещинами*, Мех. Тв. Тела, 4 (1971).
21. М. Л. КАЧАНОВ, *К континуальной теории сред с трещинами*, Мех. Тв. Тела, 2 (1971).
22. D. R. HAYHURST, *Lectures in Chalmers Tekniska Hogskola*, Gothenburg, May, 1974.
23. M. CHRZANOWSKI, *Creep rupture of structures controlled by parallel hardening and deterioration*, EUROMECH 76, Gothenburg, August, 1976.
24. J. MURZEWSKI, *Une theorie statistique du corps fragile quasihomogene*, Proc. IXth Int. Congr. Appl. Mech., Bruxelles 1956, Univ. de Bruxelles 1957.
25. J. MURZEWSKI, *Probabilistic theory of plastic and brittle behaviour of quasihomogeneous materials*, Bull. Ac. Pol. Sc., Ser. Sc. Techn., 7, 11 (1959).
26. J. MURZEWSKI, *Probabilistic theory of plastic and brittle behaviour of quasihomogeneous materials*, Arch. Mech. Stos., 12, 2 (1960).
27. J. MURZEWSKI, *Cumulative damage of solids for random stress*, Eng. Fr. Mech. 8 (1976).
28. C. EIMER, *Wytrzymałość reologiczna betonu w swietle hipotezy uszkodzenia*, Arch. Inż. Łąd., 17, 1 (1971).
29. M. CHRZANOWSKI, *Use of the damage concept in describing creep-fatigue interaction under prescribed stress*, Int. J. Mech. Sc., 18 (1976).
30. W. WEIBULL, *A statistical theory of strength of materials*, Proc. Roy. Ac. Engng Sc., 151 (1939).
31. A. B. O. SOBOYEJO, *Use of entropy principles in estimating reliability functions for creep rupture characteristics of engineering materials at elevated temperatures*, Proc. Int. Conf. Str. Met. Alloys, Tokyo 1967.
32. A. B. O. SOBOYEJO, *Stochastic process model for creep rupture of engineering materials at high temperature*, Proc. 12th IUTAM Congr. Appl. Mech., Stanford, 1968, Springer-V., Berlin 1969.
33. J. T. BOYLE, *On the reduction of the effect of material scatter on the prediction of creep rupture times in structures*, EUROMECH 76, Gothenburg, August 1976.
34. H. BROBERG, *A probabilistic interpretation of creep rupture curves*, Arch. Mech. Stos., 25, 5 (1973).
35. *Creep and Fatigue in Elevated Temperature Applications*, Proc. Int. Conf. IME, ASME, ASTM, Philadelphia, Sept. 1973, Sheffield Apr. 1974, Publ. Mech. Engng Publ. Ltd., London 1975.
36. В. В. ПАНАСЮК, *Предельное равновесие хрупких тел с трещинами*, Изд. Науковая Думка, Киев 1968.
37. Р. Л. САЛГАНИК, *Механика тела с многими трещинами*, Мех. Тв. Тела, 8, 4 (1973).
38. Л. М. КАЧАНОВ, *Теория ползучести*, Физматгиз, Москва 1960.
39. Л. М. КАЧАНОВ, *Хрупкие разрушение в условиях ползучести при циклическом нагружении*, Пробл. мех. тв. тела, Изд. Судостр., Ленинград 1970.
40. J. HULT, *Wytrzymałość konstrukcji w warunkach pelzania, Zagadnienia pelzania i plastycznosci*, PAN, Jablonna, 1973, Ossolineum, Wrocław 1975.
41. R. W. SWINDEMAN, *The interrelation of cyclic, and monotonic creep rupture*, ASME (ASTM) IME Joint Conf. on Creep, N. York-London 1963, IME London 1963.
42. S. TAIRA, *Lifetime of structures subjected to varying load and temperature*, Proc. IUTAM Coll. Creep in Structures, Stanford, 1960, Springer-V., Berlin 1962.
43. J. LEMAITRE, J. L. CHABOCHE, *A non-linear method of creep-fatigue damage cummulation and interaction*, Proc. IUTAM Symp. Viscoel., Gothenburg, Sept. 1974, Springer-V., Berlin 1975.
44. В. С. НАМЕСТНИКОВ, *О времени до разрушения при ползучести*, Прикл. Мех. Тех. Физ., 1 (1961).
45. U. LINDBORG, *Creep cracks and the concept of damage*, J. Mech. Phys. Sol., 16, 5 (1968).
46. J. HULT, H. BROBERG, *Creep rupture under cyclic loading*, The Bulg. 2nd Nat. Congr. Theor. Appl. Mech., Varna 1973.
47. F. K. G. ODQVIST, *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*, Clarendon Press, Oxford 1966.
48. M. CHRZANOWSKI, *Factors influencing creep-fatigue interaction*, Swedish Sol. Mech. Rept, Chalmers Univ. Techn., Göteborg 1973.
49. H. BROBERG, *A new criterion for brittle creep rupture*, J. Appl. Mech., 41, 3 1974.
50. P.-O. BOSTRÖM, H. BROBERG, L. BRÄTHE, M. CHRZANOWSKI, *On failure conditions in visco-elastic media and structures*, Proc. IUTAM Symp. Viscoel., Gothenburg, Sept. 1974. Springer-V., Berlin 1975.

51. H. BROBERG, *Creep damage and rupture: A phenomenological study*, Doct. Diss., Chalmers Univ. Techn., Gothenburg 1975.
52. Ю. Н. РАВОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкций*, Изд. Наука, Москва (Creep problems in structural members, North-Holland, Amsterdam 1969).
53. Ю. Н. РАВОТНОВ, С. Т. Милейко, *Кратковременная ползучесть*, Изд. Наука, Москва 1970.
54. J. HULT, *Structural creep behaviour under alternating load*, Proc. Int. Conf. Creep and Fat. Elev Temp. Appl., ASME, ASTM, IME, Philadelphia 1973, Sheffield 1974, Mech. Engng Publ., Ime, London 1975.
55. M. CHRZANOWSKI, *O możliwości opisu pełnego procesu pełzania metali*, Mech. Teor. Stos., **10**, 1 (1972).
56. M. CHRZANOWSKI, *On the possibility of describing the complete creep process*, Bull. Ac. Pol. Sc., Ser. Sc. Techn., **20**, 3 (1972).
57. M. CHRZANOWSKI, *Opis procesu pełzania metali w świetle teorii umocnienia i hipotezy uszkodzeń*, Z. Nauk. Polif. Krak., Ser. Podst. N. Techn., z. 7, 1973.
58. YU. N. RABOTNOV, *Kinetics of creep and creep rupture*, Proc. IUTAM, Symp., Vienna 1966.
59. A. PALMGREN, *Die Lebensdauer von Kugellagern*, Z. Ver. Deutsch. Ing., **68**, 14 (1924).
60. M. A. MINER, *Cumulative damage in fatigue*, J. Appl. Mech., **12** (1945).
61. K. J. MILLER, *An experimental linear cumulative-damage law*, J. Str. Anal., **5**, 3 (1970).
62. E. L. ROBINSON, *Effect of temperature variation on the creep strength of steel*, Trans. ASME, **60** (1938).
63. E. L. ROBINSON, *100 000 hours creep test*, Mech. Engng, 1943.
64. E. L. ROBINSON *Effect of temperature variation on the long-time rupture strength of steels*, Trans. ASME, **74** (1952).
65. E. P. ESZTERGAR, J. R. ELLIS, *Cumulative damage concepts in creep-fatigue predictions*, Proc. Int. Conf. Therm. Str. Therm. Fat., ed. J. D. Littler, Butterworth 1971.
66. M. M. ABO el ATA, I. FINNIE, *A study of creep damage rules*, J. Basic Engng, **8** (1972).
67. D. L. MARRIOTT, R. K. PENNY, *Strain accumulation and rupture during creep under variable uniaxial tensile loading*, J. Str. Anal., **8**, 3 (1973).
68. ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Case 1331—5.
69. M. CHRZANOWSKI, *Time and load commutativity under creep conditions*, Mech. Res. Com., **1**, 4, (1974).
70. B. SODERQUIST, *On biaxial creep and creep rupture*, Doct. Th., Kungl. T. Hogsk., Stockholm 1968.
71. D. R. HAYHURST, *Isothermal creep deformation and rupture of structures*, Ph. D. Thesis, Cambridge Univ., 1970.
72. D. R. HAYHURST, *The prediction of creep-rupture times of rotating discs using biaxial damage relationships*, J. Appl. Mech. **41**, 4 (1973).
73. D. R. HAYHURST, F. A. LECKIE, *The effect of creep constitutive and damage relationships upon the time to rupture of a solid circular torsion bar*, J. Mech. Phys. Solids, **21** (1973).
74. D. R. HAYHURST, *Creep rupture under multiaxial states of stress*, J. Mech. Phys. Solids, **20** (1972).
75. A. E. JOHNSON, J. HENDERSON, B. KHAN, *Complex stress, creep, relaxation, and fracture of metallic alloys*, Nat. Eng. Lab., H. M. Stst. Office, Edinburgh. 1962.
76. Л. М. КАЧАНОВ, *Некоторые вопросы разрушения в условиях ползучести*, Тр. Всес. совещ. по расч. на полз. и прочн., Изд. Сиб. Отд. АН СССР, 1963.
77. Л. М. КАЧАНОВ, *Некоторые вопросы разрушения в условиях ползучести*, Иссл. по упр. и пласт., Изд. Ленингр. Унив., 6 (1967).
78. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы механики разрушения*, Наука, Москва 1974.
79. В. П. СДОВЫГИН, *Критерии длительной прочности для некоторых легированных сплавов*, Изв. АН СССР, Мех. и машин., 6 (1959).
80. В. Н. КИСЕЛЕВСКИЙ, В. М. ОСАСЮК, *Анализ критериев длительной прочности*, Прикл. мех., 3 (1967).
81. Й. Й. ТРУНИН, *Критерии прочности в условиях ползучести*, Прикл. Мех., 7 (1965).
82. YU. N. RABOTNOV, *Creep rupture*, Proc. 12th Congr. Appl. Mech., Stanford 1960, Springer-V., 1969.
83. A. DRAGON, *On phenomenological description of rock-like materials with account for kinetics of brittle fracture*, Arch. Mech. Stos., **28**, 1 (1976).
84. Z. MRÓZ, *Mathematical models of inelastic concrete behaviour, Inelasticity and Non-Linearity in Struct. Concrete*, Univ. Waterloo, 8 (1972).

85. Л. М. Качанов, *К вопросу о хрупких разрушениях в условиях ползучести при сложном нагружении*, Вест. Ленингр. Унив., 1, 1 (1972).
86. Л. М. Качанов, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изв. АН СССР ОТН, Мех. и машиностр., 5 (1960).
87. M. CHRZANOWSKI, *Zniszczenie kruche w warunkach pelzania ustalonego przy jednoosiowym, niejednorodnym stanie naprężenia*, Pr. dokt., Politechnika Krakowska, listopad, 1967.
88. S. PIĘCHNIK, M. CHRZANOWSKI, *Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending*, I. J. Sol. Struct., 6, (1970).
89. S. PIĘCHNIK, M. CHRZANOWSKI, *Time of total creep rupture of a beam under combined load*, Proc. 2nd IUTAM Symp. Creep in Structures, Gothenburg, Aug. 1970, Springer-V., Berlin 1972.
90. D. R. HAYHURST, *Stress redistribution and rupture due to creep in a uniformly stretched thin plate containing a circular hole*, J. Appl. Mech., 40 (1973).
91. M. CHRZANOWSKI, *Czas zniszczenia pręta rozciąganego przy małym mimośrodku*, Cz. Techn., 9B (111) (1967).
92. M. CHRZANOWSKI, *Pewne problemy zniszczenia kruchego w warunkach pelzania ustalonego*, Cz. Techn., 9B (121) (1968).
93. M. CHRZANOWSKI, *Zniszczenia kruche prętów mimośrodowo rozciąganych przy uwzględnieniu pelzania ustalonego*, Rozpr. Inż., 16, 4 (1968).
94. M. CHRZANOWSKI, S. KUŚ, *Czyste zginanie w warunkach pelzania ustalonego*, Bud. Inż., 9 (285) (1968).
95. M. ŻYCZKOWSKI, J. SKRZYPEK, *Stationary creep and creep rupture of thick-walled tube under combined loading*, Proc. IUTAM Symp. Creep in Structures, Gothenburg 1970, Springer-V., 1972.
96. Л. М. Качанов, *О времени разрушения при воздействии оксидометаллической среды*, Иссл. по упр. и пласт., Изд. Ленингр. Унив., 3 (1964).
97. S. TAIRA, R. OTHANI, *Creep rupture of internally pressurized cylinders at elevated temperatures*, Bull. JSME, 46, (1968).
98. B. SODERQUIST, *Creep rupture under uniform radial tension of a disc with a circular hole*, Acta Polyt. Scand., Phys. Nucl. Ser., 53 (1968).
99. B. STORÅKERS, *Finite creep of a circular membrane under hydrostatic pressure*, Acta Polyt. Scand., Mech. Eng. Ser., 44 (1969).
100. D. R. HAYHURST, B. STORÅKERS, *Creep rupture of the Andrade shear disk*, Proc. Roy. Soc., A 349 (1976).
101. M. ŻYCZKOWSKI, A. ZABORSKI, *Creep rupture phenomena in creep buckling*, Proc. IUTAM Symp. Viscoel., Gothenburg, Sept. 1974, Springer-V., 1975.
102. P.-O. BOSTROM, *Creep buckling considering material damage*, Int. J. Sol. Struct., 11 (1975).
103. F. K. G. ODQVIST, J. ERIKSSON, *Influence of redistribution of stress on brittle creep rupture of thick-walled tubes under internal pressure*, Progr. on Appl. Mech., Macmillan, N. York 1963.
104. М. Хжановски, *Влияние перераспределения напряжений на время хрупкого разрушения в условиях ползучести*, Изв. Высш. Уч. Завед. Машиностр., 11 (1971).
105. Л. М. Качанов, *О влиянии перераспределения напряжений на время хрупкого разрушения*, Мех. Тв. Тела, 1 (1966).
106. L. M. KACHANOV, *On the theory of creep rupture*, Recent Progr. in Appl. Mech., Stockholm 1967.
107. B. J. MARTIN, F. LESKIE, *On the creep rupture of structures*, J. Mech. Phys. Sol., 20 (1972).
108. F. LESKIE, D. R. HAYHURST, *Creep rupture of structures*, Proc. Roy. Soc., A 340, 1662 (1974).
109. Л. М. Качанов, *К вопросу о кинетике роста трещин*, Иссл. по упр. и пласт., Изд. Ленингр. Унив., 2 (1963).
110. Л. М. Качанов, *К вопросу развития трещин в условиях ползучести*, Пробл. гидрод. и мех. спл. среды, Москва 1969.
111. Л. М. Качанов, *О разрушении и росте трещин*, Мех. Тв. Тела, 1 (1968).
112. Ю. Н. Работнов, *Влияние концентраций напряжений на длительную прочность*, Мех. Тв. Тела, 3 (1967).
113. R. A. de BONT, *On correlation between creep damage and fracture toughness of a molybdenum alloyed steel*, Kungl. Tekn. Hogskola, Stockholm, Publ. no. 187, 1973.

Р е з ю м е

ПАРАМЕТР ПОВРЕЖДЕНИЯ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В статье излагается обзор работ по применению понятия параметра повреждения в механике сплошной среды. Эта теория, разработанная Л. М. Качановым в 1958 году, получила в последние годы широкое распространение в связи с её применением к прогнозированию времени безопасной эксплуатации элементов конструкций. Повышенные температуры (ползучесть) и переменны нагрузки (усталость) — это важные области применения обсуждаемой теории. Подробно оговорены работы, посвященные как развитию самой идеи введения переменной состояния, характеризующей повреждение материала, так и примеры приложения теории к инженерным конструкциям. Начертаны также направления дальнейшего развития этой области механики разрушения.

S u m m a r y

DAMAGE PARAMETER IN CONTINUAL FRACTURE MECHANICS

The paper gives a review of works on damage parameter employed in mechanics of deformable body. The theory introduced by L. M. Kachanov in 1958 has recently found a wide applications in predicting of the reliability of structural elements. This is particularly important at high temperature (creep), and under variable loading (fatigue) conditions. The idea of introducing a new variable characterizing the material deterioration, as well as the engineering applications are discussed. Further directions of the development of this branch of continual approach to fracture mechanics are also given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1977 r.

ROZKŁAD CIŚNIEŃ I NOŚNOŚĆ HYDRODYNAMICZNEGO FILMU SMARNEGO
W ŁOŻYSKACH POROWATYCH

KAROL KRZEMIŃSKI (WARSZAWA)

Ważniejsze oznaczenia

- L długość łożyska,
- W nośność łożyska,
- c luz promieniowy,
- h wysokość szczeliny smarnej,
- k_r, k_θ, k_z współczynniki przesączalności,
- p ciśnienie w szczelinie smarnej,
- p^* ciśnienie w tulei porowatej,
- w_0 prędkość przepływu cieczy w kierunku normalnym do powierzchni wewnętrznej tulei porowatej (wydatek na jednostkę powierzchni),
- ε mimośrodowość względna,
- η lepkość dynamiczna oleju.

1. Wstęp

W hydrodynamicznej teorii smarowania łożysk porowatych brak jest dotychczas wyczerpującej analizy wpływu cech geometrycznych łożyska porowatego na rozkład ciśnień w klinie smarnym i nośność łożyska. Określenie rozkładu ciśnień i nośności hydrodynamicznego filmu smarnego w łożyskach porowatych na drodze matematycznej uzyskuje się jako wspólne rozwiązanie równań ruchu cieczy w szczelinie smarnej i tulei porowatej. Występuje tutaj jednoczesny przepływ cieczy w dwóch ośrodkach, tj. w szczelinie smarnej i tulei porowatej oraz wzajemna cyrkulacja cieczy smarnej między nimi. Komplikuje to analizę zjawisk i w znacznym stopniu utrudnia rozwiązanie problemu.

Ruch cieczy w szczelinie smarnej w ogólnym przypadku opisać można równaniem Naviera-Stokesa, a przy wprowadzeniu pewnych uproszczeń równaniem Reynoldsa. Ruch cieczy w tulei porowatej opisuje się równaniem Laplace'a, które wyprowadza się w oparciu o równanie ciągłości przepływu cieczy z uwzględnieniem równania Darcy. Dotychczas brak jest ścisłych, analitycznych rozwiązań tych równań, jak również utrudniona jest numeryczna ich analiza.

Opublikowane rozwiązania równań ruchu cieczy w łożysku porowatym dotyczyły najczęściej przypadków uproszczonych, w których przyjmowano, że łożysko jest nieskończenie wąskie [2, 3] i wówczas pomijano w łożysku przepływ w kierunku obwodowym, lub że łożysko jest nieskończenie długie [7, 9], a wtedy zaniedbuje się przepływ osiowy. W obu

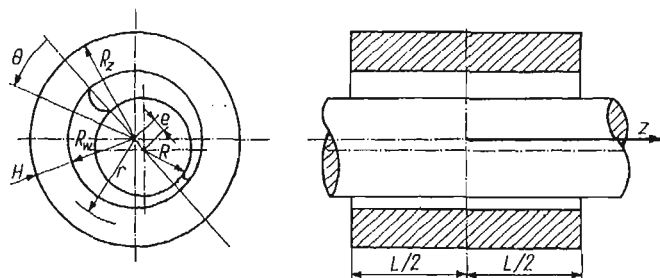
tych przypadkach zagadnienie sprowadza się do rozwiązania jednowymiarowego przepływu w szczelinie smarnej i dwuwymiarowego przepływu w tulei porowatej. Wyniki takich rozwiązań mają raczej charakter jakościowy i nie mogą być bezpośrednio odniesione do łożysk rzeczywistych o skończonej długości.

Nieliczne publikacje dotyczące łożysk porowatych o skończonej długości [8, 10] zawierają tylko zawężone, odnoszące się do szczególnych przypadków wyniki. Brak szerszej, teoretycznej i eksperymentalnej analizy zagadnienia w zasadniczym stopniu utrudnia ocenę zjawisk związanych z procesem hydrodynamicznego smarowania łożysk porowatych.

W niniejszym artykule przedstawiono wyniki numerycznej analizy wpływu zarówno długości łożyska, jak i grubości tulei porowatej na rozkład ciśnień w klinie smarnej i nośność łożyska. Obliczenia dotyczą łożyska o skończonej długości z uwzględnieniem przestrzennego przepływu cieczy w łożysku. Przedstawione wyniki obejmują przypadki, w których tuleja porowata ma budowę izotropową lub anizotropową. Przeprowadzona analiza dotyczy izotermicznego ustalonego przepływu cieczy w łożysku przy założeniu, że ciecz jest newtonowska i nieściśliwa.

2. Równania ruchu cieczy w łożysku porowatym i metoda ich rozwiązania

Analizując łożysko porowate należy rozpatrzyć przepływ cieczy w dwóch obszarach (rys. 1), w szczelinie smarnej i w tulei porowatej. Ruch cieczy w szczelinie smarnej opisano równaniem Reynoldsa, a przepływ cieczy w tulei porowatej równaniem Laplace'a. Za-



Rys. 1. Schemat łożyska porowatego

niedbując siły masowe jako bardzo małe i przyjmując, że przepływ jest izotermiczny, a ciecz jest nieściśliwa, oba równania można napisać w postaci

$$(1) \quad \frac{1}{R_w^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U \frac{\partial h}{R_w \partial \theta} - w_0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_\theta \frac{\partial p^x}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{r,r} \frac{\partial p^x}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial p^x}{\partial z} \right) = 0.$$

Rozwiązanie równań ruchu cieczy przeprowadzono przy następujących warunkach brzegowych:

— na powierzchniach czołowych łożyska ciśnienie równa się zeru (w analizie rozpatruje się nadciśnienie w stosunku do ciśnienia atmosferycznego), tzn. że

$$(3) \quad p\left(r, \theta, \pm \frac{L}{2}\right) = p^x\left(r, \theta, \pm \frac{L}{2}\right) = 0;$$

— tuleja jest wciśnięta w nieprzepuszczalny korpus, zatem

$$(4) \quad \frac{\partial p^x}{\partial r}(R_z, \theta, z) = 0;$$

— w płaszczyźnie symetrii łożyska gradient ciśnienia w kierunku osiowym równa się zeru, czyli

$$(5) \quad \frac{\partial p}{\partial z}(r, \theta, 0) = \frac{\partial p^x}{\partial z}(r, \theta, 0) = 0;$$

— na powierzchni wewnętrznej tulei zachodzą związki

$$(6) \quad \left[k_r \frac{\partial p^x}{\partial r} - w_0 \right] (R_w, \theta, z) = 0 \quad \text{oraz} \quad p(R_w, \theta, z) = p^x(R_w, \theta, z).$$

Obliczenia przeprowadzono przyjmując dla klina smarnego zarówno warunki graniczne Sommerfelda, jak i Reynoldsa zakładając, że w obu przypadkach szczelina smarna wypełniona jest całkowicie olejem.

Do rozwiązania równań ruchu cieczy w łożysku porowatym użyto metody elementów skończonych [1, 4, 6]. Obszar tulei porowatej i filmu smarnego podzielony został na pewne podobszary (przestrzenne, czworosieczne elementy skończone), w których poszukiwana funkcja reprezentująca rozkład ciśnień opisana została przez wartości ciśnień w punktach węzłowych elementu. Przebieg zmienności ciśnienia wewnątrz elementu określono poprzez funkcje kształtu elementu. Poszukiwane rozwiązanie otrzymuje się zgodnie z wariacyjną zasadą ekstremalną przez minimalizację funkcjonału, który reprezentuje energię rozproszoną w układzie. Dla obszaru szczeliny smarnej funkcjonał określa się według wzoru (7), a dla tulei porowatej wzorem (8):

$$(7) \quad F(p) = \int_S \int \left[-\frac{h^3}{24\eta R_w^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{h^3}{24\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} hU \frac{\partial p}{R_w \partial \theta} - w_0 p \right] ds,$$

$$(8) \quad F(p^x) = \int_{\Omega_1} \int \int -\frac{1}{2} \left[k_r \left(\frac{\partial p^x}{\partial r} \right)^2 + \frac{k_\theta}{r^2} \left(\frac{\partial p^x}{\partial \theta} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial p^x}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega_1 + \int_S \int w_0 p ds,$$

gdzie Ω_1 jest obszarem tulei porowatej, S — powierzchnią wewnętrzną tulei porowatej.

W wyniku minimalizacji funkcjonałów $F(p)$ i $F(p^x)$ otrzymuje się układ równań liniowych z niewiadomymi ciśnieniami w punktach węzłowych

$$\frac{\partial F}{\partial \{\bar{p}\}} = [K] \{\bar{p}\} + \{G\} = 0, \quad \text{a stąd} \quad \{\bar{p}\} = -\{G\}[K]^{-1},$$

gdzie $\{\bar{p}\}$ oznacza macierz kolumnową ciśnień w punktach węzłowych, $[K]$, $\{G\}$ — macierze współczynników stałych.

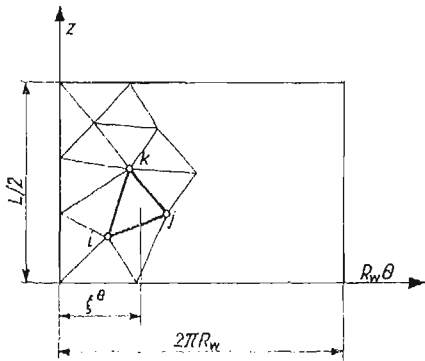
Otrzymane rozwiązanie jest równoważne w rozpatrywanym obszarze rozwiązaniu równań różniczkowych (1) i (2). Podano tutaj tylko ogólne zasady rozwiązania. Bliższe szczegóły oraz pełny algorytm rozwiązania zagadnienia można znaleźć w pracach [4, 6].

3. Obliczenie nośności łożyska oraz kąta działania wypadkowej siły wyporu hydrodynamicznego

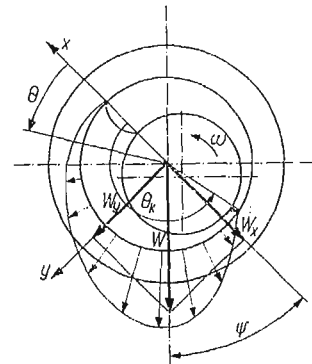
Po rozwiązaniu układu równań uzyskanych w wyniku minimalizacji funkcjonałów w obszarze tulei porowatej i filmu smarnego otrzymuje się ciśnienia w punktach węzłowych. Nośność łożyska oblicza się dokonując całkowania otrzymanych rozkładów ciśnień na powierzchni wewnętrznej tulei. Dla pojedynczego elementu trójkątnego leżącego na płaszczyźnie S wypadkową siłę hydrodynamicznego wyporu można określić ze wzoru

$$(9) \quad P^e = \iint_{\Delta} p R_w d\theta dz = \frac{\Delta}{3} (p_i + p_j + p_k) = \Delta \cdot p_{sr},$$

gdzie Δ oznacza pole trójkąta i, j, k .



Rys. 2. Podział powierzchni wewnętrznej tulei na elementy trójkątne



Rys. 3. Siły działające na powierzchnię wewnętrzną panwi

Współrzędną ξ^e punktu przyłożenia siły P^e znajduje się jako

$$(10) \quad \xi^e = \frac{\iint_{\Delta} R_w^2 \theta p d\theta dz}{\iint_{\Delta} p R_w d\theta dz} = \frac{\sum_{i=1}^3 R_i \theta_i (1 + \delta_{ij}) p_i}{4 \sum_{i=1}^3 p_i},$$

gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Kąt działania wypadkowej siły wyporu hydrodynamicznego dla pojedynczego elementu wyniesie

$$(11) \quad \theta = \frac{\xi^e}{R_w}.$$

Pomijając siły tarcia jako małe, składowe wektora obciążenia zewnętrznego można obliczyć ze wzorów:

$$(12) \quad \begin{aligned} W_x &= \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{\theta_k} p \cos \theta R d\theta dz = \sum_1^N \Delta p_{sr} \cos \theta^e, \\ W_y &= \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{\theta} p \sin \theta R d\theta dz = \sum_1^N \Delta p_{sr} \sin \theta^e, \end{aligned}$$

gdzie N oznacza ilość elementów trójkątnych, na które podzielono powierzchnię S (są to powierzchnie boczne czworościanów przyległych do powierzchni S).

A zatem nośność łożyska można określić z zależności

$$(13) \quad W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2},$$

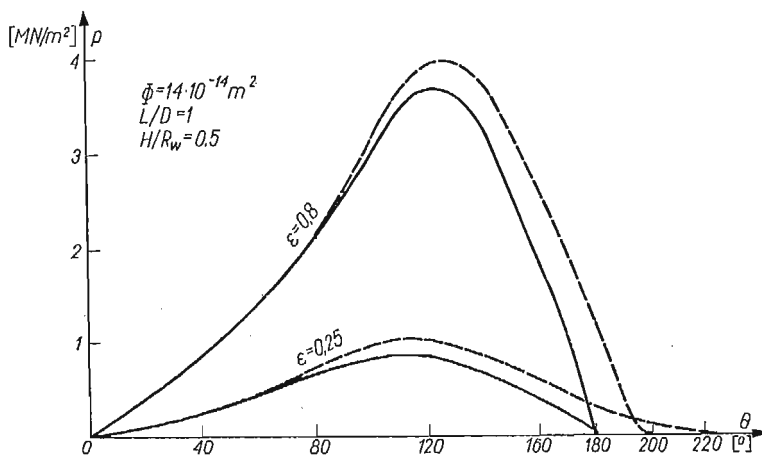
a kąt działania obciążenia ze wzoru

$$(14) \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{W_y}{W_x}.$$

4. Granice klina smarnego

Obliczenie nośności łożyska przeprowadzono zarówno dla klina smarnego rozciągającego się od $\theta = 0$ do $\theta = \pi$ (warunki Sommerfelda), jak również dla klina smarnego, którego początek określa kąt $\theta = 0$, a koniec znajduje się w miejscu $\theta_k = \theta$, gdzie $p = 0$ i $\partial p / r \partial \theta = 0$ (warunki Reynoldsa). Oba te warunki wykorzystywane są często w obliczeniach podawanych w różnych publikacjach, lecz brak jest precyzyjnej relacji między rozkładami ciśnień i nośnością łożysk uzyskiwanymi z obliczeń przy przyjęciu każdego z tych warunków.

Prostszy algorytm obliczeń uzyskuje się przyjmując dla klina smarnego warunki Sommerfelda; stąd ten uproszczony warunek przyjmowany jest przez wielu autorów [2, 3,

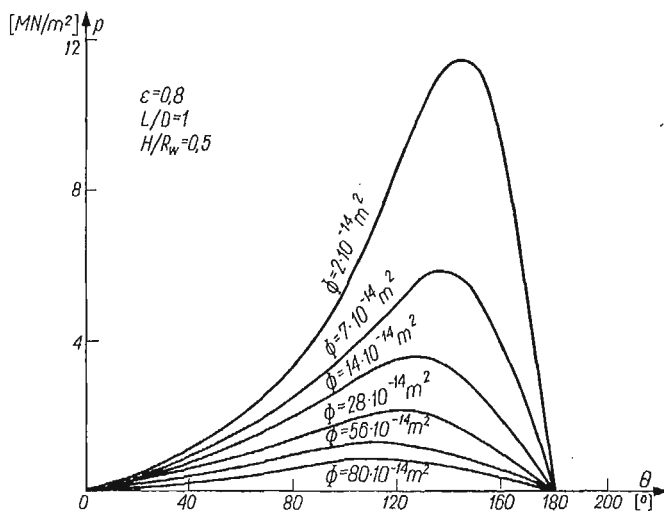


Rys. 4. Rozkłady ciśnień w klinie smarnym dla warunków granicznych Reynoldsa (linia przerywana) i Sommerfelda (linia ciągła)

7, 8]. Wprowadzenie do obliczeń warunków Reynoldsa uzyskuje się na drodze iteracyjnej, co kilkakrotnie przedłuża czas obliczeń. Na rys. 4 podano dla porównania rozkłady ciśnień w filmie smarnym uzyskane przy przyjęciu w obliczeniach warunków Reynoldsa oraz Sommerfelda. Przyjmując w obliczeniach warunki Reynoldsa otrzymuje się wzrost długości klina smarnego tym większy, im mniejsza jest mimośrodowość względna ε . W efekcie nośności klina smarnego liczonego według warunków Reynoldsa wypadają nieco większe w granicach 7—12% niż nośności liczone przy przyjęciu warunków Sommerfelda, przy czym większe przyrosty otrzymuje się dla mniejszych przepuszczalności i mniejszych ε .

5. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla tulei o różnych przepuszczalnościach

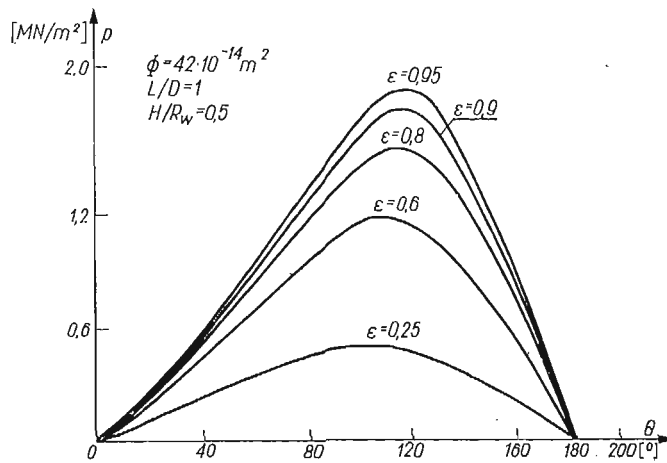
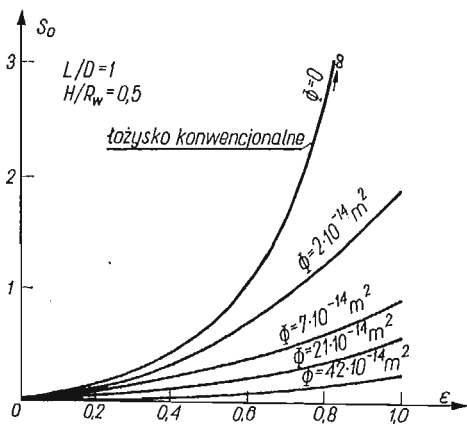
Przepuszczalność materiału panwi ma istotny wpływ na rozkład ciśnień w klinie smarnym, a w efekcie i na nośność łożyska. Im większa przepuszczalność, tym mniejsza nośność łożyska porowatego. Na rys. 5 przedstawiono rozkłady ciśnień w filmie smarnym uży-



Rys. 5. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla łożysk z panwiami o różnych przepuszczalnościach

skane przy założeniu, że panew porowata ma budowę izotropową. Obliczenia przeprowadzono przyjmując dla klina smarnego warunki Sommerfelda (w zakresie kąta $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ przyjęto ciśnienie $p = 0$). Dotyczy to również wszystkich dalej omawianych wyników. Na rys. 6 podane zostały rozkłady ciśnień dla łożyska z tuleją porowatą o przepuszczalności $\varphi = 42 \cdot 10^{-14}$ [m²] dla różnej mimośrodowości względnej ε .

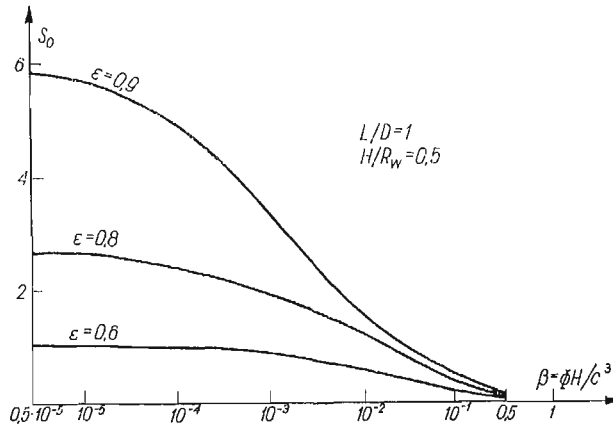
Przebiegi zmian nośności łożysk w zależności od ε dla porowatych panwi o różnych przepuszczalnościach przedstawiono na rys. 7, natomiast na rys. 8 podano zmianę nośności łożysk w zależności od przepuszczalności względnej tulei. Na obu rysunkach noś-

Rys. 6. Przebiegi ciśnię w filmie smarnym dla różnej wartości ϵ Rys. 7. Przebiegi zmian liczby Sommerfelda $S_0 = f(\epsilon)$ dla panwi o różnych przepuszczalnościach

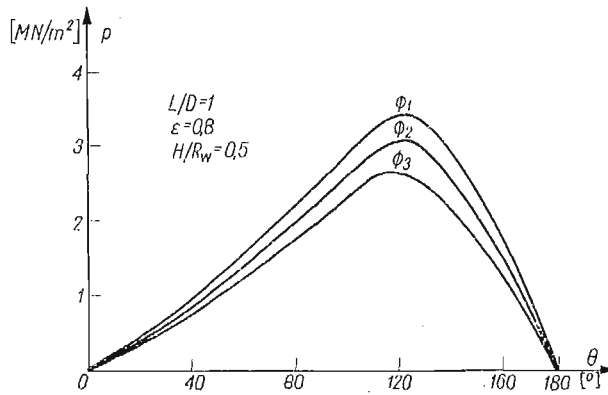
ność łożyska podano w postaci bezwymiarowej określając ją poprzez liczbę Sommerfeld'a

$$(15) \quad S_0 = \frac{p_{sr} c^2}{\omega R \eta} = \frac{W}{DL\eta\omega} \left(\frac{c}{R}\right)^2 = \frac{W}{2L\eta U} \left(\frac{c}{R}\right)^2$$

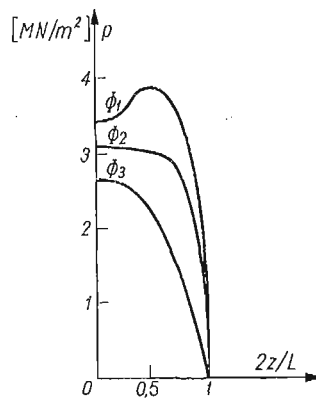
W praktyce produkowane tuleje porowate mają budowę anizotropową, a w zasadzie ortotropową. Ortotropowy rozkład przepuszczalności ma istotny wpływ na rozkład ciśnię w filmie smarnym i na nośność łożyska. Rozkłady ciśnię w filmie smarnym dla tulei ortotropowych przedstawiono na rys. 9 i 10. Dla porównania na obu tych rysunkach naniesiono również rozkład ciśnię dla tulei izotropowej. Szczegółową analizę tego zagadnienia podano w pracy [5].



Rys. 8. Zmiana liczby Sommerfelda w zależności od porowatości względnej tulei $S_0 = f(\beta)$



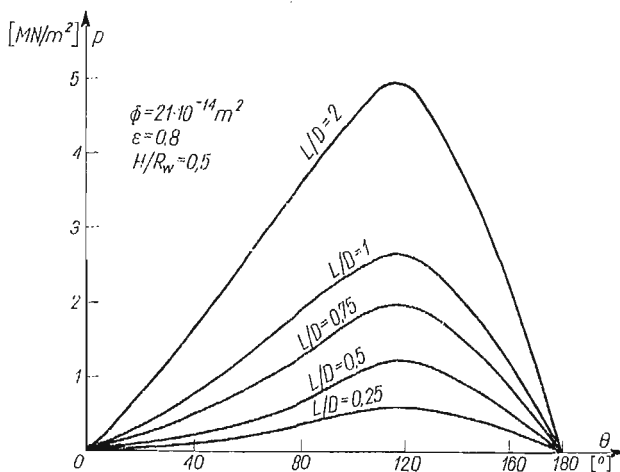
Rys. 9. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym w kierunku obwodowym dla łożysk z panwiami o ortotropowym rozkładzie przepuszczalności $\Phi_1 = 21(1 - 2z/L) \cdot 10^{-14}$ [m²], $\Phi_2 = 21 \cos \pi z/L \cdot 10^{-14}$ [m²] ($\Phi_3 = 21 \times 10^{-14}$ [m²] — panew izotropowa).



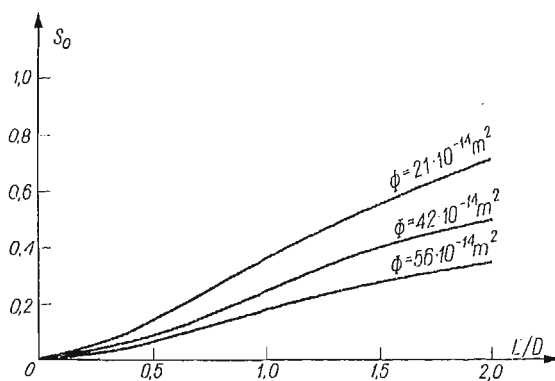
Rys. 10. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym w kierunku osiowym dla łożysk z panwiami o ortotropowym rozkładzie przepuszczalności $\Phi_1 = 21(1 - 2z/L) \cdot 10^{-14}$ [m²], $\Phi_2 = 21 \cos \pi z/L \cdot 10^{-14}$ [m²] (Φ_3 — panew izotropowa)

6. Wpływ długości i grubości ścianki tulei porowatej na nośność łożyska

Omawiane w poprzednich rozdziałach wyniki obliczeń dotyczyły łożysk, dla których długość panwi była równa jej średnicy wewnętrznej ($L/D = 1$). Jak zmieniają się rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla łożysk o różnych długościach przedstawiono na rys. 11.



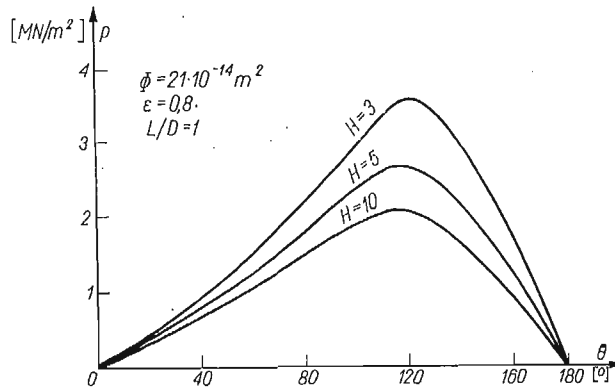
Rys. 11. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla łożysk o różnych długościach

Rys. 12. Przebiegi liczby Sommerfelda w funkcji L/D dla panwi o różnych przepuszczalnościach

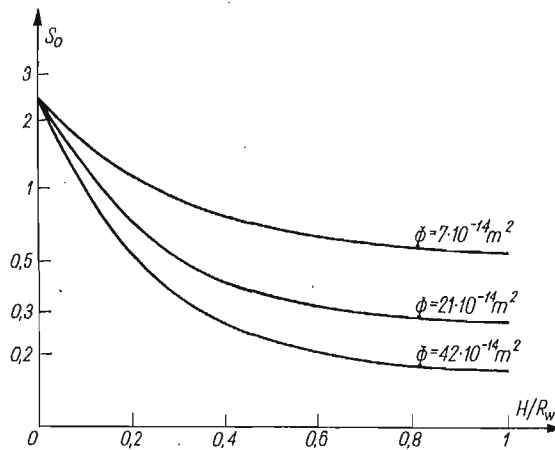
Można zauważyć, że strefa występowania wysokich ciśnień nie zmienia swego położenia wraz ze zmianą długości łożyska, a zatem kąt położenia wypadkowego wyporu hydrodynamicznego będzie stały, niezależny od długości łożyska. Natomiast wraz ze wzrostem długości łożyska następuje wyraźny wzrost ciśnienia w filmie smarnym, wzrasta zatem nośność łożyska.

Wpływ zmiany L/D na nośność łożyska przedstawiono na rys. 12. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że większe przyrosty nośności wraz ze wzrostem długości łożyska występują w przypadku łożysk z panwiami o mniejszych przepuszczalnościach.

Jeżeli wraz ze wzrostem długości panwi wzrasta nośność łożyska, to ze wzrostem grubości ścianki tulei porowatej zmniejsza się nośność łożyska. Na rys. 13 przedstawiono rozkłady ciśnień w klinie smarnym dla łożysk mających tuleje o różnych grubościach ścianki. Wyniki dotyczą tulei izotropowych o przepuszczalności $\Phi = 21 \cdot 10^{-14} \text{ [m}^2\text{]}$. Wraz ze wzrostem grubości tulei porowatej maleją ciśnienia w klinie smarnym i występuje wyraźne przesunięcie strefy maksymalnych ciśnień w kierunku środka klina smarnego, wzrasta zatem kąt ψ . Jak zmienia się nośność łożyska wraz ze zmianą grubości tulei porowatej przedstawiono na rys. 14. Analizowane wielkości podano w postaci bezwymiarowej.



Rys. 13. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla łożysk z tulejami o różnych grubościach ścianki $H = 3, 5, 10 \text{ mm}$



Rys. 14. Zmiana liczby Sommerfelda w funkcji H/R_w

Szczególnie duże zmiany nośności występują dla cienkich panwi łożyskowych i o większej przepuszczalności. Im cieńsza tuleja i o mniejszej przepuszczalności, tym nośność łożyska zbliża się bardziej do nośności łożyska konwencjonalnego.

Należy jednak pamiętać, że przedstawiona analiza dotyczy łożysk porowatych pracujących w warunkach tarcia płynnego, które jest możliwe tylko przy dodatkowym smarowaniu.

waniu i nie może być odniesiona bezpośrednio do łożysk porowatych pracujących jako samosmarowane.

7. Uwagi końcowe

Podsumowując przedstawione w niniejszym opracowaniu wyniki należy stwierdzić, że wymiary geometryczne tulei porowatej, jak i rozkład przepuszczalności wewnątrz tulei mają istotny wpływ na nośność łożyska porowatego.

Wyniki te mogą stanowić podstawę do racjonalnego doboru geometrii łożyska dla konkretnych warunków pracy. Mając określony ilościowy i jakościowy wpływ takich parametrów, jak długość tulei, grubość jej ścianki, przepuszczalność materiału porowatego i jej rozkład wewnątrz tulei na rozkład ciśnień w filmie smarnym i na nośność łożyska, można tak dobrać konstrukcję panwi, aby uzyskać łożysko o określonych własnościach użytkowych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. H. ARGYRIS, D. W. SCHARPF, *The incompressible lubrication problem*, J. Roy. Aero. Soc., 73 (1969)
2. A. CAMERON, *Basic lubrication theory*, London 1971.
3. A. CAPONE, *Lubrication of axially undefined porous bearings*, Wear, 3, 15 (1970).
4. K. KRZEMINSKI, *Nośność poprzecznych łożysk porowatych w warunkach hydrodynamicznego smarowania*, Praca dokt., Warszawa 1974.
5. K. KRZEMINSKI, *Wpływ anizotropii tulei porowatej na własności użytkowe łożyska ślizgowego*, Przegląd Mechaniczny, 22 (1976).
6. K. KRZEMINSKI, T. MARKS, *Zastosowanie metody elementów skończonych w zagadnieniach hydrodynamicznego smarowania poprzecznych łożysk ślizgowych*, Rozpr. Inż., 4 (1976).
7. P. R. K. MURTI, *Hydrodynamic lubrication of short porous bearings*, Wear, 19, 1 (1972).
8. P. R. K. MURTI, *Hydrodynamic lubrication of finite porous bearings*, Wear, 19, 1 (1972).
9. M. REMBIARZ, *Plaski przepływ oleju w łożysku ślizgowym z panewką porowatą*, Arch. Bud. Maszyn, 2 (1973).
10. B. REASON, D. DYER, *A numerical solution for the hydrodynamic lubrication of finite porous journal bearings*, Proc. Inst. Mech. Eng., 7 (1973).

Р е з ю м е

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ В ПОРИСТЫХ ПОДШИПНИКАХ

В работе представлены результаты теоретического анализа распределения давления в смазочном слое и несущей способности пористых подшипников, работающих в условиях гидродинамической смазки. Уравнение движения жидкости решено методом конечных элементов. Определено влияние длины пористой втулки, толщины её стенки и анизотропного распределения проницаемости на распределение давления и несущую способность пористого подшипника.

S u m m a r y

THE PRESSURE DISTRIBUTION AND LOAD CAPACITY OF THE HYDRODYNAMIC FILM
IN POROUS BEARINGS

This work presents a theoretical analysis of the distribution of pressure and load capacity in the hydrodynamic porous bearings. Equation of motion of the lubricant was solved by finite element method. The results are presented concerning the influence of the length of the porous bush of its wall-thickness and anisotropic permeability distribution on the pressure distribution and load capacity.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1977 r.

WPLYW SEKWENCJI OBCIĄŻEŃ NA TRWAŁOŚĆ ZMĘCZENIOWĄ^{*)}

JÓZEF SZALA (BYDGOSZCZ)

Wykaz oznaczeń

- N liczba cykli obciążenia sinusoidalnego o stałej amplitudzie zrealizowana do pęknięcia zmęczeniowego próbki,
 N_0 liczba przecięć przez wykres losowych zmian naprężeń $\sigma(t)$ poziomu odpowiadającego naprężeniom równym zeru,
 N_1 liczba lokalnych ekstremów wykresu losowych zmian naprężeń lub liczba cykli o stałej amplitudzie zrealizowana do pęknięcia zmęczeniowego odpowiadająca poziomowi I naprężeń w widmie naprężeń,
 k liczba poziomów (stopni) wartości naprężeń w widmie lub programie naprężeń lub liczba stopni przyjęta do obliczeń trwałości zmęczeniowej na podstawie hipotezy Palmgrena-Minera,
 m wykładnik potęgi w równaniu krzywej zmęczeniowej,
 n_c sumaryczna liczba cykli w widmie naprężeń lub sumaryczna liczba cykli do pęknięcia próbki w programowanych badaniach zmęczeniowych (trwałość zmęczeniowa),
 n_i liczba cykli zmian naprężeń o wartości σ_i w widmie lub programie naprężeń,
 σ_{ai} wartość amplitudy naprężeń odpowiadająca i -temu poziomowi (stopniowi) w widmie lub programie naprężeń,
 $\sigma_a(N)$ krzywa zmęczeniowa,
 $\sigma_{a\max}(n_c)$ krzywa trwałości zmęczeniowej.

1. Wprowadzenie

Powszechnie stosowanymi charakterystykami do oceny własności zmęczeniowych materiałów, elementów i układów są krzywe zmęczeniowe (krzywe Wöhlera). W przypadkach losowych obciążeń eksploatacyjnych elementów maszyn charakterystyka ta jest niewystarczająca. Dokładniejszą ocenę własności zmęczeniowych w wymienionych przypadkach przeprowadzić można na podstawie znajomości krzywych trwałości zmęczeniowej wyznaczonych na drodze analitycznej lub na podstawie badań z obciążeniem odpowiadającym obciążeniom eksploatacyjnym.

Ze względu na dużą złożoność zjawisk fizycznych zachodzących w procesie zmęczenia nie ma do tej pory jednoznacznego opisu przebiegu wymienionego procesu. Brak ten wypełniono opracowaniem szeregu hipotez kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych o charakterze fenomenologicznym. Analiza przedstawiona w pracy [1] wykazała, że wybrane do

^{*)} Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 0.5.12 pt. *Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych* — koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk.

wyznaczenia trwałości hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych, wykazywały różną zgodność z wynikami badań zmęczeniowych w zależności od przyjętych warunków badań. Brak uniwersalnej hipotezy sprawia, że najczęściej stosowaną do obliczeń trwałości zmęczeniowej jest liniowa hipoteza kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych Palmgrena-Minera. Jedną z jej wad jest nieuwzględnienie sekwencji obciążenia (historii obciążenia). Podjęte w przedstawionej pracy badania umożliwiają ocenę istotności wymienionej wady.

Doświadczalne wyznaczanie trwałości oparte jest na badaniach zmęczeniowych z losowym, zbliżonym do eksploatacyjnego lub programowanym obciążeniem. W ostatnich latach obserwuje się duże zainteresowanie programowanymi badaniami zmęczeniowymi. Badania te prowadzi się głównie w celu wyznaczenia własności zmęczeniowych materiałów, węzłów konstrukcyjnych i elementów maszyn oraz w celu oceny eksploatacyjnej trwałości zmęczeniowej elementów i układów poddanych w warunkach eksploatacji obciążeniami zmiennymi losowo.

Związkom między losowymi i programowanymi obciążeniami z punktu widzenia trwałości zmęczeniowej poświęconych zostało szereg prac. Większość prac dotyczyła badań stopów aluminium, obciążonych zgodnie z widmami od podmuchów działających na samoloty w warunkach eksploatacji. Dane doświadczalne na ten temat podane w literaturze nie są zgodne. W pracy [2] podano, że wyznaczona w badaniach programowanych trwałość zmęczeniowa jest 6-krotnie większa niż trwałość zmęczeniowa wyznaczona przy obciążeniu losowym. Z rezultatów przedstawionych w pracy [3] wynika, że przy odpowiednim programowaniu obciążeń losowych średnia prędkość propagacji pęknięcia zmęczeniowego wyznaczona w badaniach z obciążeniem programowanym i losowym różni się nieistotnie.

Fizyczna analiza kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych wykazuje, że uszkodzenia zmęczeniowe powstałe przy obciążeniach losowych różnią się od uszkodzeń powstałych przy obciążeniach programowanych. Różnice te stwierdzono m.in. na podstawie obserwacji przełomów zmęczeniowych pod mikroskopem elektronowym. Przykład tego rodzaju badań przedstawiono w pracy [4].

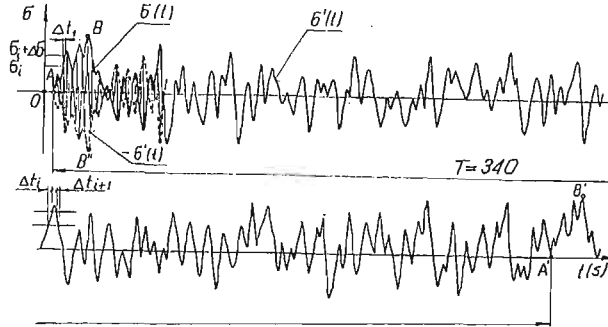
Brak większej liczby danych z badań przeprowadzonych dla różnych materiałów, przy obciążeniach zróżnicowanych pod względem rodzaju (rozciąganie, zginanie, skręcanie oraz stany złożone) i charakteru (obciążenia o charakterze losowym zróżnicowane z punktu widzenia matematycznej teorii procesów losowych) uniemożliwia sformułowanie ścisłych zaleceń dotyczących programowania obciążeń w badaniach zmęczeniowych.

Celem przedstawionej pracy jest:

- stwierdzenie różnic między trwałością zmęczeniową wyznaczoną przy obciążeniu losowym i programowanym,
- stwierdzenie wpływu ukształtowania programu obciążeń na trwałość zmęczeniową wyznaczoną w badaniach stanowiskowych,
- stwierdzenie wpływu ukształtowania programu obciążeń na trwałość zmęczeniową w zależności od wartości obciążeń w widmie,
- podanie danych liczbowych charakteryzujących przebieg krzywych trwałości zmęczeniowej i ich położenie w stosunku do krzywej zmęczeniowej,
- ocenę zgodności liniowej hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych Palmgrena-Minera z wynikami badań zmęczeniowych.

2. Zmienne obciążenia

2.1. Obciążenia losowe. Zmienne naprężenia w czasie $\sigma(t)$ w przekroju próbki otrzymano w próbie obrotowego zginania obciążając koniec próbki zamocowanej wysięgowo we wrzecionie stanowiska badawczego. Podawane w pracy wartości naprężeń nominalnych w przekroju karbu wyznaczono na drodze obliczeń. Wykresy zmian naprężeń o charakterze losowym przedstawiono na rys. 1. Losowym zmianom obciążenia próbki odpowiadają zmiany naprężeń wykreślone na rys. 1 linią grubą $\sigma'(t)$, które z wykresem $-\sigma'(t)$

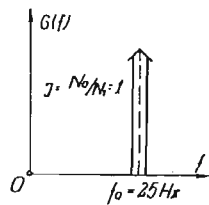


Rys. 1

stanowią odpowiednio wartości amplitud zmian naprężeń $\sigma(t)$ w przekroju obracającej się próbki. Odpowiednie wartości obwiedni powtarzają się po czasie $T = 340$ s (punkty $A-A'$, $B-B'$). Przedstawiony na rys. 1 przebieg zmian naprężeń $\sigma(t)$ można opisać zależnością

$$(1) \quad \sigma(t) = \sigma'(t) \cdot \cos 2\pi n'' t.$$

Prędkość obrotowa n'' badanych próbek wynosiła 25 s^{-1} . Z punktu widzenia przebiegu procesu kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych zastosowane obciążenie pseudolosowe odpowiada zadowalająco obciążeniu losowemu o podobnych charakterystykach stochastycznych. Funkcję gęstości widmowej $G(f)$ zmian naprężeń $\sigma(t)$ przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2

Przebieg funkcji gęstości widmowej pozwala stwierdzić, że losowa zmiana naprężeń w próbce odpowiada, z punktu widzenia teorii procesów losowych, procesowi losowemu o wąskim widmie ($I = N_0/N_1 = 1$).

2.2. Obciążenia programowane. Przyjęta w omawianych badaniach próba obrotowego zginania umożliwia realizację losowych zmian amplitudy naprężeń przy zachowaniu naprężeń

średnich równych zeru. Taki przebieg zmiennych naprężeń w przekroju próbki nie wymaga stosowania metod aproksymacji losowych zmian naprężeń [5] przy opracowywaniu widm naprężeń. Unika się dzięki temu poważnych niedokładności związanych z przybliżonym wyznaczeniem zastępczych, w stosunku do losowych zmian, cykli sinusoidalnych. Wykorzystanie generatora impulsów pseudolosowych o okresie powtarzalności $T = 340$ s dało możliwość dokładnego opracowania widma i oceny maksymalnej wartości naprężenia $\sigma_{a\max}$ (punkt B , rys. 1) w czasie trwania próby zmęczeniowej. Dokładność odwzorowania rozkładu amplitud zmian naprężeń w badaniach trwałości zmęczeniowej ma zasadnicze znaczenie. Wykładniczy charakter krzywych trwałości zmęczeniowej powoduje, że małe różnice w wartościach naprężeń powodują znaczne różnice w wartościach wyznaczonej trwałości zmęczeniowej.

W celu uproszczenia opracowania statystycznego realizacji losowych zmian naprężeń $\sigma(t)$, zakres zmian naprężeń od wartości maksymalnej (punkt B) do wartości minimalnej $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$ (punkt B'') podzielono na 16 przedziałów klasowych. Względną liczbę wartości amplitud naprężeń $\sigma_a(t)$ w poszczególnych przedziałach klasowych o rozpiętości $\Delta\sigma$ (rys. 1) można wyznaczyć obliczając dla poszczególnych przedziałów klasowych wartości

$$(2) \quad f_i = \frac{n_i}{n_c} = \frac{\sum \Delta t_i}{T},$$

gdzie $\sum \Delta t_i = \Delta t_1 + \dots + \Delta t_i + \Delta t_{i+1} + \dots + \Delta t_n$ oznacza sumaryczny czas «przebywania» funkcji $\sigma'(t)$ w przedziale klasowym $[\sigma_{ai}, \sigma_{ai} + \Delta\sigma]$ w czasie T , T — czas równy okresowi zmian obciążenia pseudolosowego (340 s).

Tablica 1:

Lp.	Określenie zmian naprężeń	Schemat i oznaczenie programu	Rozkład amplitud naprężeń
	2	3	4
1	naprężenia o charakterze losowym		
2	stopniowo rosnące		
3	stopniowo malejące		
4	stopniowo rosnące i malejące		
5	o losowym następstwie stopni		

Wyniki statystycznego opracowania wykresu losowych zmian naprężeń przedstawiono w kolumnie 4 tablicy 1. Wykres rozkładu amplitud naprężeń — zwany widmem naprężeń — wykonano w układzie względnych wartości naprężeń $\sigma_{ai}/\sigma_{a\max}$ i względnych wartości kumulowanych liczb cykli $\sum n_i/n_c$. Opracowanie widma naprężeń w odniesieniu do względnych wartości naprężenia i liczby cykli na poszczególnych poziomach naprężeń, ułatwia

wyznaczenie krzywych trwałości zmęczeniowej, jako funkcji naprężenia maksymalnego w widmie od sumarycznej liczby cykli do pęknięcia zmęczeniowego.

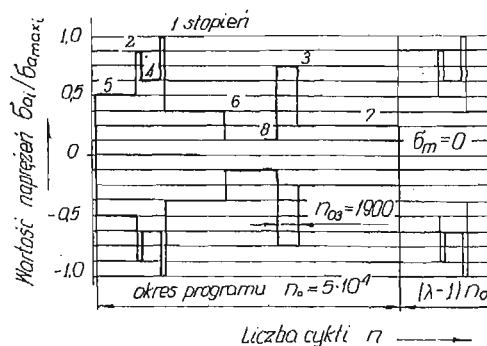
Podstawowymi parametrami charakteryzującymi widmo naprężeń zastosowane w badaniach są: naprężenie maksymalne w widmie $\sigma_{\max} = \sigma_{a \max}$ i postać geometryczna widma. Postać geometryczną widma charakteryzuje się różnymi współczynnikami omówionymi m.in. w pracach [6, 7, 8]. W przedstawionym opracowaniu scharakteryzowano postać geometryczną współczynnikiem wypełnienia widma ξ podanym w pracy [8], który oblicza się ze wzoru

$$(3) \quad \xi = \frac{1}{\sigma_{a \max}} \sum_{i=1}^k \sigma_{ai} f_i.$$

We wzorze (3) f_i oznacza względną częstość występowania naprężeń o wartości σ_{ai} , którą oblicza się z wzoru (2).

W kolumnie 3 tabeli 1 przedstawiono schematycznie postacie graficzne programów naprężeń przyjętych do badań. W programie podanym w wierszu 2 tabeli 1 naprężenia stopniowo rosną od wartości minimalnej do maksymalnej, w dalszym ciągu opracowania program ten oznaczono symbolem *SR*. W wierszu 3 tabeli 1 przedstawiono program o stopniowo malejących naprężeniach — *SM*. W szeregu pracach m.in. [2] i [6] proponuje

stopień <i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
napr. $\bar{\sigma}_{ai}/\bar{\sigma}_{a \max}$	1,00	0,875	0,750	0,625	0,5	0,375	0,250	0,125
liczba cykli n_{oi}	300	600	1900	4050	6900	10250	17500	8500



Rys. 3

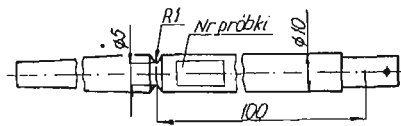
się ukształtowanie programu według schematu podanego w wierszu 4 tabeli 1. W programie *SRM* badania rozpoczyna się od pewnej wartości średniej naprężeń zwiększając stopniowo wartości naprężeń do maksymalnej, następnie stopniowo obniżając do minimalnej wartości itd. W ostatnim programie (wiersz 5 tabeli 1) przyjęto losowe następstwo stopni wartości naprężeń — *SL*. Na rys. 3 podano dla przykładu wykres oraz dane liczbowe programu o losowym następcie stopni, który opracowany został dla względnych wartości naprężeń oraz okresu programu o liczbie cykli $n_0 = 5 \cdot 10^4$.

W przeprowadzonych badaniach liczby cykli w okresach programów były zmienne w zależności od poziomu naprężeń. Liczbę cykli w okresie dobierano z takim wyliczeniem, aby liczba okresów zrealizowanych do pęknięcia zmęczeniowego wynosiła co najmniej 10.

Wszystkie zastosowane w badaniach programy bez względu na wartości naprężeń, liczby cykli w okresie i ukształtowanie programu miały ten sam rozkład wartości amplitud zgodny z widmem naprężeń podanym w kolumnie 4 tablicy 1.

3. Opis badań

3.1. Próbkki. Badania zmęczeniowe przeprowadzono na okrągłych próbkach z karbem przedstawionych na rys. 4. Próbkki wykonano ze stali 45. Doraźna wytrzymałość wyznaczona w próbie rozrywania według PN-71/H-04310 wynosiła średnio $R_m = 77,6 \text{ daN/mm}^2$, a umowna granica plastyczności $R_{e02} = 39 \text{ daN/mm}^2$.



Rys. 4

Karb wykonano dokładnym toczeniem zachowując chropowatość powierzchni na dnie karbu o $R_a = 1,25 \mu\text{m}$.

Do całości badań zmęczeniowych wykonano 400 próbek pobieranych do prób w sposób losowy, próbki oznaczono porządkowymi numerami zgodnie z kolejnością wykonywanych prób.

3.2. Stanowisko badawcze. Do badań zaprojektowano i wykonano w Zakładzie Podstaw Konstrukcji Maszyn Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy stanowisko badawcze przedstawione na rys. 5.

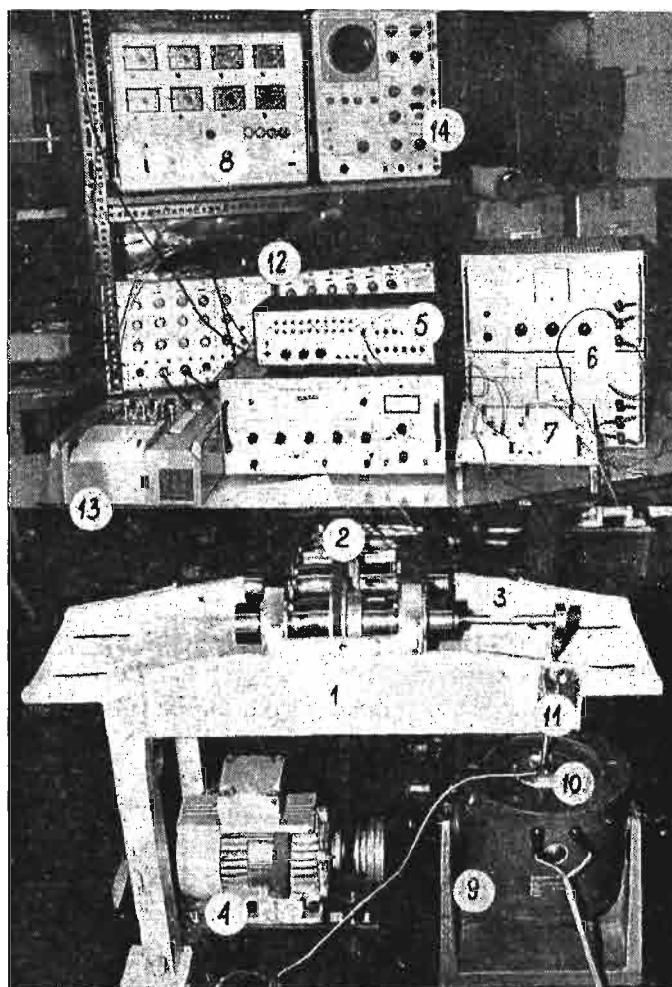
Stanowisko badawcze składa się z trzech części:

- mechanicznej,
- układu obciążającego,
- układu pomiarowego.

Część mechaniczną stanowi urządzenie składające się z korpusu 1, w którym łożyskowane są dwa wrzeciona 2. Każde wrzeciono posiada na obu końcach gniazda stożkowe do mocowania części chwytowej badanych próbek 3. Wrzeciona napędzane są silnikiem elektrycznym 4 za pośrednictwem pasa klinowego.

Układ obciążający składa się z generatora impulsów pseudolosowych 5, stabilizowanych zasilaczy 6, układu sterowania wzбудnikiem 7, urządzenia do programowania obciążeń sinusoidalnych 8, wzbudnika elektromagnetycznego 9.

Układ pomiarowy obciążeń działa na zasadzie wykorzystania tensometrów oporowych. Tensometr oporowy czynny naklejono na płytce 10 łączącej ciągnio 11 z rdzeniem wzbudnika. Układ pomiarowy składa się z mostków tensometrycznych 12, rejestratora szybko-piszącego 13 oraz oscyloskopu 14.



Rys. 5

Naprężenia zmienne w przekroju próbki 3 otrzymuje się w wyniku obciążenia końca próbki wysięgowej przez wzbudnik elektromagnetyczny 12 oraz przez obrót próbki zamocowanej we wrzecionie 2. Zmiana losowa lub programowana naprężeń w przekroju próbki wynika z odpowiedniej zmiany obciążenia próbki. Pseudolosową zmianę obciążenia realizuje automatycznie układ: generator impulsów pseudolosowych 5, dwa stabilizowane zasilacze 6, układ sterowania wzbudnikiem 7 oraz wzbudnik elektromagnetyczny 11. Programowane obciążenie realizowane jest także automatycznie przez układ, w którym generator impulsów pseudolosowych zastąpiony został urządzeniem do programowania obciążeń sinusoidalnych. Zmianę wartości obciążenia losowego i programowanego otrzymuje się przez ustalenie odpowiedniej wartości natężenia prądu potencjometrem urządzenia sterowania wzbudnikiem 7. Liczbę cykli zmian naprężeń w przekroju próbki, która równa jest liczbie obrotów wrzeciona wskazuje licznik cykli, natomiast częstotliwość zmian — wskazuje wskaźnik chwilowej prędkości obrotowej. Licznik cykli oraz

wskaźnik chwilowej prędkości obrotowej umieszczone są w urządzeniu do programowania obciążeń sinusoidalnych 8.

Przebieg obciążeń końca próbki w czasie rejestrowany jest na taśmie rejestratora szybkopiszącego 13. Do bieżącej kontroli przebiegu zmian obciążeń oraz wykrywania zakłóceń służył oscyloskop 14.

Budowę i zasadę działania generatora impulsów pseudolosowych oraz charakterystyki statystyczne generowanych przebiegów omówiono w pracy [9].

3.3. Przebieg badań. Określenie własności zmęczeniowych badanych próbek oraz ocena ilościowa zależności między trwałością przy obciążeniu jednostopniowym, losowym i programowanym wymaga wyznaczenia krzywej zmęczeniowej w zakresie ograniczonej i nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej.

Badania w zakresie ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej przeprowadzono na pięciu poziomach wartości nominalnych naprężeń w próbce badając na każdym z poziomów średnio 7 próbek.

Nieograniczoną wytrzymałość zmęczeniową wyznaczono metodą schodkową na podstawie badań 27 próbek, jako bazę próby zmęczeniowej przyjęto $5 \cdot 10^6$ cykli.

Różnice między trwałością zmęczeniową wyznaczoną przy obciążeniu losowym i programowanym, wpływ ukształtowania programów obciążenia na trwałość zmęczeniową oraz stwierdzenie zależności wymienionych różnic i wpływu od wartości obciążeń w widmie, dokonane zostało na podstawie porównań krzywych trwałości zmęczeniowej wyznaczonych przy obciążeniu losowym i programowanym. Do badań przyjęto obciążenia losowe i programowane omówione w punkcie 2. Poszczególne krzywe trwałości zmęczeniowej wyznaczono na podstawie badań przeprowadzonych średnio na 24 próbkach na 5 poziomach wartości maksymalnych naprężeń w programie: 36,5, 32,5, 28,5, 24,5 i 20,5 daN/mm². W badaniach z obciążeniem losowym wykonano ponadto badania na poziomie wartości naprężenia maksymalnego w programie 40,5 daN/mm², pomijając ze względów technicznych (czas próby — kilka miesięcy) badania na poziomie 20,5 daN/mm².

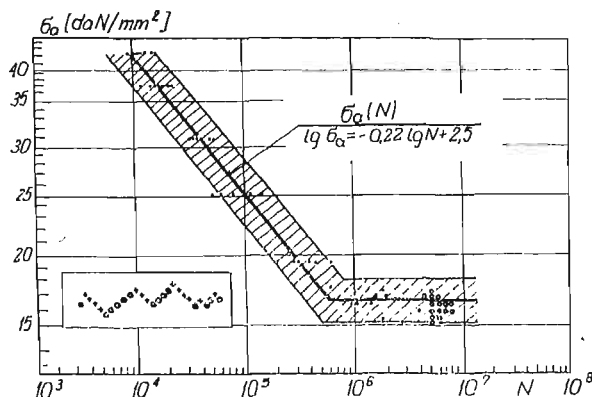
4. Wyniki badań zmęczeniowych i ich opracowanie

4.1. Wyznaczenie krzywej zmęczeniowej. Wyniki badań zmęczeniowych przeprowadzonych w celu wyznaczenia krzywej zmęczeniowej podano na rys. 6. Opracowanie wyników badań w zakresie ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej polegało na wyznaczeniu prostej regresji metodą najmniejszych kwadratów oraz przedziałów ufności dla pojedynczych wyników na poziomie ufności 0,95. Wartość średnią wykreślono ciągłą grubą linią, natomiast obszar zakreślony odpowiada wyznaczonemu przedziałowi ufności. Prosta regresji w układzie logarytmicznym opisać można równaniem

$$(4) \quad \log \sigma_a = -0,2192 \log N + 2,4965.$$

W dolnej części rys. 6 przedstawiono w sposób schematyczny przebieg prób zmęczeniowych według metody schodkowej, znakiem (0) oznaczono próbki, które nie uległy pęknięciu zmęczeniowemu po zrealizowaniu bazowej liczby $5 \cdot 10^6$, natomiast znakiem (+) oznaczono próbki, które uległy pęknięciu przy liczbie cykli mniejszej od liczby bazowej.

Na wykresie krzywej zmęczeniowej punkty zaczernione odpowiadają próbkom, które uległy pęknięciu, natomiast punkty nie zaczernione odpowiadają próbkom, które nie uległy pęknięciu zmęczeniowemu. Wartość średnią nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej

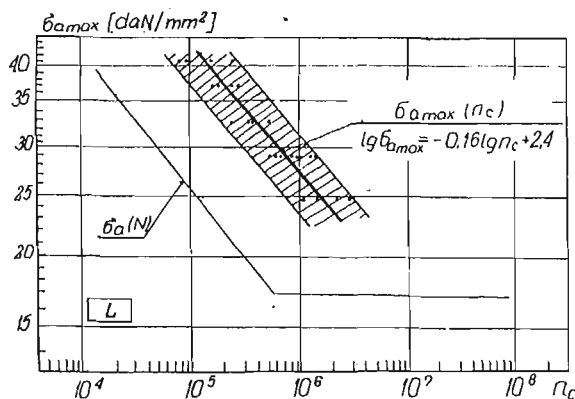


Rys. 6

i odchylenie standardowe wyznaczono na podstawie wzorów Dixona i Mooda. Wartości te wynoszą odpowiednio:

$$\bar{Z}_{90} = 16,56 \text{ daN/mm}^2, \quad s = 0,51 \text{ daN/mm}^2.$$

4.2. Wyznaczenie krzywych trwałości zmęczeniowej. Wyniki badań zmęczeniowych, których celem było wyznaczenie krzywych trwałości zmęczeniowej podano na wykresach w układzie logarytmicznym (rys. 7—11). Dla orientacji na wykresach podano także położenie

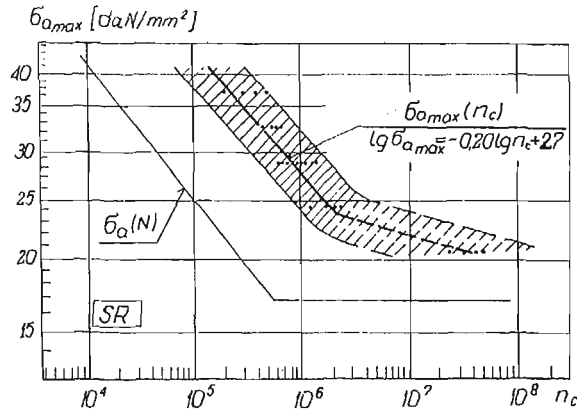


Rys. 7

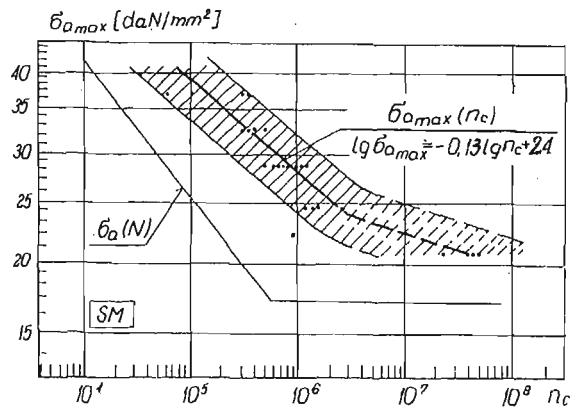
krzywej zmęczeniowej. Opracowanie wyników badań polegało na wyznaczeniu prostych regresji metodą najmniejszych kwadratów. Poszczególne rysunki zawierają wykresy wartości średniej wraz z zakreskowanym obszarem, który odpowiada przedziałowi ufności dla pojedynczych wyników na poziomie ufności 0,95.

Na rys. 7 przedstawiono wyniki badań zmęczeniowych przeprowadzonych przy obciążeniu o charakterze losowym (L).

Wyniki programowanych badań zmęczeniowych dla przyjętych do badań programów naprężeń przedstawiono na rys. 8-11. Na rys. 8 przedstawiono wyniki badań z programem naprężeń stopniowo rosnących (SR), na rys. 9 — stopniowo malejących (SM),

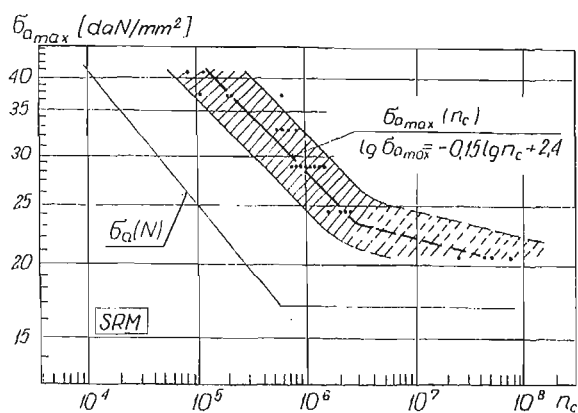


Rys. 8

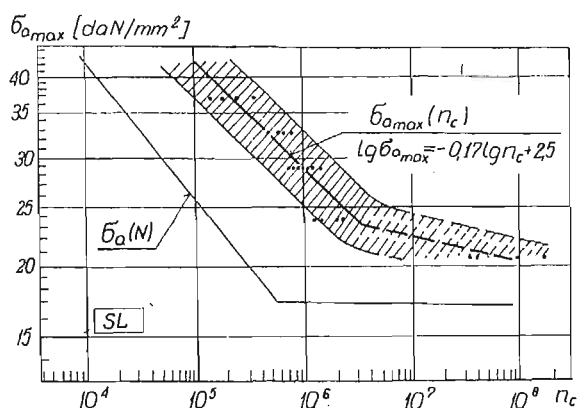


Rys. 9

na rys. 10 — stopniowo rosnących i malejących (SRM) oraz na rys. 11 przedstawiono wyniki badań z programem o losowym następstwie stopni (SL). Do analizy regresji przyjęto wyniki badań odpowiadające naprężeniom maksymalnym w programie $\sigma_{a,max}$ leżącym na poziomach 36,5, 32,5, 28,5 i 24,5 daN/mm^2 . Przebieg krzywych w zakresie naprężeń maksymalnych w programie od 20,5 do 24,5 daN/mm^2 zaznaczony na wykresach liniami przerywanymi jest przybliżony. W zakresie tym wykresy trwałości zmęczeniowej znacznie odbiegają od wyznaczonych prostych regresji zbliżając się asymptotycznie do linii odpowiadającej nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej badanych próbek. Dokładne wyznaczenie przebiegu wykresów dla wartości naprężeń maksymalnych w programie bliskich wartości nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej wymagałoby zrealizowania specjalnego programu badań i ze względu na olbrzymią pracochłonność jest niecelowe. Równania prostych regresji odpowiadających krzywym trwałości zmęczeniowej dla poszcze-



Rys. 10



Rys. 11

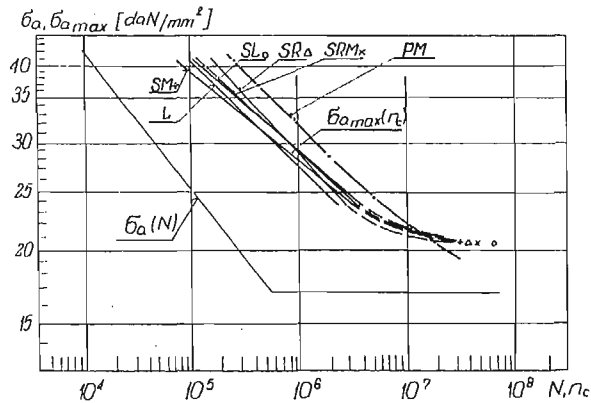
gólnych rodzajów obciążeń podano w tabelicy 2. Wartość średnia współczynników kierunkowych prostych regresji podanych w tabelicy 2 odpowiadających krzywom trwałości zmęczeniowej wynosi 0,1645, natomiast wartość średnia wyrazu wolnego 2,4468.

Tablica 2

Lp.	Oznaczenie obciążenia	Równanie prostej regresji
1	2	3
1	<i>L</i>	$\log \sigma_{a \max} = -0,1609 \log n_c + 2,4076$
2	<i>SR</i>	$\log \sigma_{a \max} = -0,2016 \log n_c + 2,6601$
3	<i>SM</i>	$\log \sigma_{a \max} = -0,1306 \log n_c + 2,3402$
4	<i>SRM</i>	$\log \sigma_{a \max} = -0,1522 \log n_c + 2,3729$
5	<i>SL</i>	$\log \sigma_{a \max} = -0,1665 \log n_c + 2,4525$

5. Analiza wyników

Krzywe trwałości zmęczeniowej wyznaczone w badaniach zmęczeniowych przy obciążeniu losowym i programowanym przedstawione na rysunkach 7—11 posiadają podobne przebiegi. Porównanie wartości współczynników kierunkowych i wyrazów wolnych w równaniach prostych regresji podanych w tablicy 2 odpowiadających poszczególnym krzywym trwałości zmęczeniowej wykazuje małe różnice. Na rys. 12 przedstawiono wzajemne położenie prostych regresji oraz średnich wartości trwałości zmęczeniowej wyznaczonej w programowanych badaniach na poziomie wartości maksymalnego naprężenia w widmie równej $20,5 \text{ daN/mm}^2$.



Rys. 12

Ocenę istotności wymienionych różnic przeprowadzono na podstawie analizy statystycznej uzyskanych rezultatów, która obejmowała sprawdzenie hipotezy o równości średnich wartości trwałości zmęczeniowej (test analizy wariancji dla wielu średnich) oraz sprawdzenie hipotezy o równoległości prostych regresji odpowiadających badaniom przy obciążeniu losowym i programowanym (test równoległości). Badanie równości wartości średnich poszczególnych krzywych dotyczyło wyników na wszystkich poziomach naprężenia maksymalnego w widmie łącznie oraz badania równości wartości średnich na wybranych poziomach o wartościach $28,5$ i $20,5 \text{ daN/mm}^2$.

Poziom o wartości $28,5 \text{ daN/mm}^2$ zbliżony jest do środka zakresu naprężeń przyjętego do badań. Na poziomie tym celem uściślenia analizy wykonano badania na 8 próbkach dla każdej krzywej trwałości. Wyniki badań trwałości zmęczeniowej na poziomie $20,5 \text{ daN/mm}^2$ wyraźnie odbiegają od prostych regresji, stąd konieczność przeprowadzenia oddzielnej analizy statystycznej wyników na tym poziomie.

Przeprowadzona statystyczna analiza wykazała, że na poziomie ufności równym $0,95$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotez: o równości wartości średnich trwałości zmęczeniowej poszczególnych krzywych trwałości dla wyników na wszystkich poziomach łącznie, o równości wartości średnich na poziomach wartości maksymalnych naprężeń w widmach równych $28,5$ i $20,5 \text{ daN/mm}^2$ oraz hipotezy o równoległości wyznaczonych prostych regresji odpowiadających poszczególnym krzywym trwałości.

Z przeprowadzonej analizy statystycznej wynika, że istnieje możliwość zastąpienia badań z obciążeniem losowym przez programowane badania zmęczeniowe, ponieważ różnice w wyznaczonej trwałości zmęczeniowej są nieistotne. Przytoczone stwierdzenie dotyczy całego zakresu naprężeń maksymalnych w widmie przyjętego do badań.

Porównanie krzywych trwałości zmęczeniowej wyznaczonych z zastosowaniem różnie ukształtowanych programów świadczy o nieistotnym wpływie ukształtowania programu na trwałość zmęczeniową. Krańcowe położenia zajmują krzywe wyznaczone z zastosowaniem programów *SR* (stopniowo rosnących naprężeń) i *SM* (stopniowo malejących naprężeń). Maksymalne różnice między wymienionymi krzywymi zachodzą przy wyższych wartościach naprężeń w programie.

Pewnych informacji dostarcza analiza wartości średnich krzywych trwałości zmęczeniowej. W górnym zakresie wartości naprężeń maksymalnych w programie trwałość zmęczeniowa wyznaczona przy obciążeniu losowym jest około: 20, 23 i 80% mniejsza oraz 20% większa od trwałości wyznaczonej w programowanych badaniach zmęczeniowych z zastosowaniem programów (w kolejności odpowiadającej wymienionym wartościom): *SRM*, *SL*, *SR* i *SM*. Dla niższych wartości naprężeń maksymalnych w programie wymienione różnice trwałości zdecydowanie maleją.

Wzajemne położenie prostych regresji przedstawione na rys. 12 oraz wartości współczynników kierunkowych i wartości wyrazów wolnych w równaniach prostych regresji podanych w tabelicy 2 świadczą o tym, że w całym zakresie wartości naprężeń maksymalnych w widmie (programie) przyjętym do badań, najbardziej zbliżony przebieg do krzywej wyznaczonej przy obciążeniu losowym (*L*) mają krzywe wyznaczone przy programowanym obciążeniu o losowym następstwie stopni (*SL*) oraz stopniowo rosnącym i malejącym (*SRM*).

Brak podstaw do odrzucenia hipotezy o równoległości prostych regresji świadczy o tym, że współczynnik kierunkowy prostych regresji w sposób nieistotny zależy od sekwencji obciążeń, a wartość współczynnika kierunkowego zależna jest podobnie jak dla krzywej zmęczeniowej od cech materiałowych i geometrycznych próbki. Fakt ten umożliwia wyznaczenie liczbowych zależności między krzywą zmęczeniową a krzywą trwałości zmęczeniowej dla ściśle określonego widma (określonego np. współczynnikiem wypełnienia ξ).

Dla przyjętych w przedstawionym opracowaniu warunków badań stosunek wartości współczynnika kierunkowego prostej regresji odpowiadającej krzywej zmęczeniowej do wartości średniej współczynników kierunkowych prostych regresji odpowiadających krzywom trwałości zmęczeniowej wynosi około 1,34, natomiast odpowiedni stosunek wyrazów wolnych wynosi około 1,01. Znajomość podanych zależności umożliwia przewidywanie przebiegu krzywej trwałości zmęczeniowej dla określonego widma naprężeń w przypadku, gdy znana jest krzywa zmęczeniowa.

Podane w punkcie 4 rezultaty badań zmęczeniowych umożliwiają przeprowadzenie doświadczalnej weryfikacji liniowej hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych Palmgrena-Minera

$$(5) \quad \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1.$$

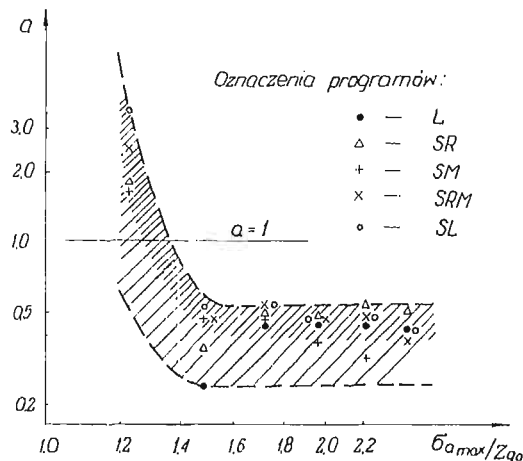
Po prostych przekształceniach wzoru (5) otrzymuje się wzór na trwałość zmęczeniową

$$(6) \quad n_{c0} = \frac{N_1}{\sum_{i=1}^k (\sigma_{ai}/\sigma_{a\max})^m f_i}$$

Z założeń przyjętych w liniowej hipotezie kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych wynika, że w obliczeniach uwzględniane są jedynie poziomy naprężeń o wartościach większych od nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej $\sigma_{ai} > Z_{g0}$. Wykładnik potęgi m obliczony na podstawie wzoru (4) posiada wartość 4,55. Krzywa trwałości zmęczeniowej obliczona na podstawie wzoru (6) przedstawiona została na rysunku 12 i oznaczona literami PM. Jak wynika z rys. 12 trwałość zmęczeniowa obliczona n_{c0} różni się od trwałości zmęczeniowej wyznaczonej w badaniach zmęczeniowych n_{cex} . Za miarę niezgodności wyników obliczeń i badań przyjęto współczynnik wyrażony wzorem

$$(7) \quad a = \frac{n_{cex}}{n_{c0}}$$

Całkowita zgodność obliczeń z wynikami badań zachodzi w przypadku, gdy $a = 1$, dla $a < 1$ obliczona wartość trwałości zmęczeniowej jest większa od doświadczalnej, natomiast gdy $a > 1$ obliczona wartość trwałości zmęczeniowej jest mniejsza od doświadczalnej. Wykres wartości współczynnika a w funkcji względnych wartości naprężenia



Rys. 13

maksymalnego w widmie obliczonego w stosunku do wartości nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej przedstawiono na rys. 13. Wykres wykonano w układzie współrzędnych logarytmicznych. Odpowiednie punkty wykresu odpowiadają wartościom współczynnika a obliczonego dla obciążenia losowego i poszczególnych programów obciążeń, na poziomach naprężeń względnych odpowiadających poziomom naprężeń maksymalnych w programach przyjętych do badań zmęczeniowych. Przebieg zmian zależności współczynnika a od względnych wartości naprężenia maksymalnego w widmie przedstawiono na rys. 13 za pomocą zakreskowanego obszaru, który asymptotycznie zbliża się do rzędnej $\sigma_{a\max}/Z_{g0} = 1$. Większość wyników obliczeń leży w obszarze gęsto zakreskowanym.

Z omawianego wykresu wynika, że istnieje zdecydowana zależność wartości współczynnika a od wzrostu naprężenia maksymalnego w widmie naprężeń dla względnych wartości naprężeń leżących w zakresie 1,0—1,5. Zależność ta jest nieistotna dla wartości większych od 1,5. Zadowalającą zgodność wyników obliczeń trwałości zmęczeniowej według hipotezy liniowej kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych z wynikami badań zmęczeniowych otrzymuje się dla względnych wartości naprężenia maksymalnego w widmie wynoszących około 1,3.

Wyznaczona na podstawie wykresu (rys. 13) wartość współczynnika a umożliwia korektę obliczeń. Wzór (6) przyjmuje wówczas postać

$$(8) \quad n_{co} = \frac{aN_1}{\sum_{i=1}^k (\sigma_{ai}/\sigma_{amax})^m f_i}$$

Nagromadzenie większej liczby tego typu danych, umożliwi w przyszłości przewidywanie przybliżonego przebiegu krzywych trwałości zmęczeniowej na etapie konstruowania elementów i układów, poddanych w warunkach eksploatacji obciążeniom losowym.

Przedstawiona analiza dotyczy ściśle przyjętych warunków badań, a w szczególności charakteru losowych zmian naprężeń, które stanowiły podstawę badań zmęczeniowych z obciążeniem losowym i programowanym. Omówione w punkcie 2 losowe naprężenia charakteryzują się stosunkowo łagodnym przebiegiem, w którym nie obserwuje się nagłych przeciążeń. Występowanie w obciążeniach losowych nagłych przeciążeń o małej częstotliwości występowania może powodować znaczne obniżenie trwałości w stosunku do trwałości zmęczeniowej wyznaczonej w programowanych badaniach zmęczeniowych. Widma naprężeń dla tego typu przebiegów losowych charakteryzują się małymi wartościami współczynnika wypełnienia.

6. Wnioski

Przeprowadzona analiza uzyskanych rezultatów umożliwia sformułowanie następujących wniosków.

1. Badania zmęczeniowe próbek okrągłych ze stali 45 z obciążeniem losowym i programowanym wykazały, że różnice wartości trwałości zmęczeniowej wyznaczone na ich podstawie są nieistotne w całym zakresie naprężeń maksymalnych w widmie przyjętym do badań.

2. W programowanych badaniach zmęczeniowych z wykorzystaniem czterech różnic ukształtowanych programów o wartościach naprężeń stopniowo rosnących (SR), stopniowo malejących (SM), stopniowo malejących i rosnących (SRM) oraz o losowym następcie stopni wartości naprężeń (SL), nie stwierdzono istotnego wpływu ukształtowania programu na wyznaczoną trwałość zmęczeniową w całym zakresie naprężeń maksymalnych w widmie przyjętym do badań.

3. Najbardziej zbliżony przebieg do krzywej trwałości zmęczeniowej wyznaczonej przy obciążeniu losowym mają krzywe wyznaczone w programowanych badaniach zmęczeniowych ze stopniowo rosnącymi i malejącymi wartościami naprężeń (SRM) i z losowym

następstwem stopni wartości naprężeń (SL). Różnice średnich wartości trwałości dla wymienionych krzywych wynoszą około 20%.

4. Nieistotny wpływ sekwencji obciążeń na przebiegi krzywych trwałości zmęczeniowej, umożliwia wyznaczenie zależności parametrów krzywych trwałości od parametrów krzywej zmęczeniowej. Podstawowymi zależnościami umożliwiającymi przewidywanie przebiegu krzywej trwałości zmęczeniowej na podstawie znanej krzywej zmęczeniowej są: stosunek wartości współczynnika kierunkowego krzywej zmęczeniowej do wartości współczynnika kierunkowego krzywej trwałości zmęczeniowej oraz podobny stosunek wyrazów wolnych w równaniach podanych w tablicy 2 i wzorze (4), wartości te wynoszą średnio: 1,34 i 1,01.

5. Doświadczalna weryfikacja hipotezy liniowej kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych wykazała, że różnice między wynikami obliczeń i badań trwałości zmęczeniowej zależą od wartości naprężeń w widmie. Dla przyjętych warunków badań największą zgodność wyników obliczeń i badań zmęczeniowych otrzymano dla wartości względnych naprężeń $\sigma_{a\max}/Z_{g0} \cong 1,3$. Powyżej wartości 1,3 trwałość zmęczeniowa obliczona jest większa, natomiast dla wartości $\sigma_{a\max}/Z_{g0} < 1,3$ mniejsza od doświadczalnej.

Literatura cytowana w tekście

1. J. SZALA, *Obliczenia trwałości zmęczeniowej układów w oparciu o wybrane hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych i ich doświadczalna weryfikacja*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Bydgoszczy, 9 (1974). 197—137.
2. G. JACOBY, *Comparison of fatigue lives under conventional program loading and digital random loading. Effects of environment and complex load history on fatigue life*. ASTM, STP, 462 (1970) 184.
3. J. SCHIJVE F. A. JACOBS, P. J. TROMP, *The effect of load sequence on fatigue crack propagation under random loading and program loading*, National Aerospace Laboratory, NLR, RT 71014 U, (1971).
4. H. NOWACK, *Biharmonische Beanspruchungsabläufe zur Beurteilung der Schädigung unregelmässiger Beanspruchungen*, VDI — Z, 7 (1969) 91—114.
5. J. SZALA, *Zagadnienia aproksymacji zmian obciążeń o charakterze losowym w programowanych badaniach trwałości zmęczeniowej*, Zeszyty Naukowe, Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy, 26 (1975) 141.
6. E. GASSNER, F. W. GRIESE, E. HAIBACH, *Ertragbare Spannungen und Lebensdauer einer Schweissverbindung aus Stahl St 37 bei verschiedenen Formen des Beanspruchungskollektivs*, Metteilug, 3 (1964) 255.
7. R. LEHMAN, *Über die Gültigkeit der Hypothese der linearen Schadensakkumulation*, Maschinenbau-technik, 5 (1970) 252.
8. С. В. СЕРЕНСЕН, В. П. КОГАЕВ, *Долговечность деталей машин с учетом вероятности разрушения при нестационарном переметном нагружении*, Вестник машиностроения, 1 (1966) 7—12.
9. M. RAKOWSKI, *Wymuszenie naprężeń o charakterze przypadkowym przy pomocy generatora sygnałów pseudoprzypadkowych*, Zeszyty Naukowe Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy, 26 (1975) 129.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

В статье дано описание испытаний усталостной прочности образцов, изготовленных из стали 45. Испытания были проведены с применением случайной и программной нагрузки. В программных испытаниях приняты четыре разных программы: с возрастающей нагрузкой SR , с умень-

шающей нагрузкой SM с возрастающе-уменьшающейся нагрузкой SRM и со случайным порядком появления степеней нагружения SL .

Разница долговечности при случайном и программном нагружениях SRM и SL оказалась небольшой. Долговечность при испытаниях с программным нагружением SR была максимально в два раза больше по сравнению со случаем случайной нагрузки.

S u m m a r y

THE EFFECT OF LOAD SEQUENCE ON FATIGUE LIFE

Fatigue lives were studied in 45 steel specimens under random loading and the corresponding program loadings. In the program tests of four types of sequences were employed. This was done in increasing order of amplitudes (SR) increasing — decreasing order (SRM), decreasing order (SM) and random order of amplitudes (SL). The variations of the fatigue life due to the random loading and program loadings SL and SRM were relatively small. The fatigue life was about 20% longer in the latter case. The fatigue life in the SR program test was at most twice times longer than in the random test.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 czerwca 1977 r.

NAPRĘŻENIA KRYTYCZNE WOLNOPODPARTYCH ŚCINANYCH PŁYT PRZEKŁADKOWYCH

FRANCISZEK ROMANÓW (WROCLAW)

Oznaczenia

a, b długość i szerokość płyty,
 $t, 2c$ grubość okładziny i rdzenia,
 E, G, ν moduł Younga, Kirchhoffa i liczba Poissona dla okładziny,
 E_u, G_u, ν_u odpowiednio dla rdzenia,
 m, n ilość półfal w kierunku osi x i y ,

$$\beta = \frac{\pi m}{a}$$

$$q = \frac{\pi n}{b}$$

$$r = a/b$$

q jednostkowe naprężenia tnące,

τ naprężenia tnące,

W ugięcie okładziny w kierunku osi z ,

W_u przemieszczenie rdzenia w kierunku osi z ,

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{sztywność okładziny na zginanie,}$$

$$\psi^2 = \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)}$$

1. Wstęp

Zagadnieniom obliczania naprężeń krytycznych ścinanych płyt przekładkowych poświęcono dotychczas wiele prac. Przedstawione tam metody mogą być jednak stosowane tylko do tzw. cienkich płyt przekładkowych [1, 2], które spełniają warunek

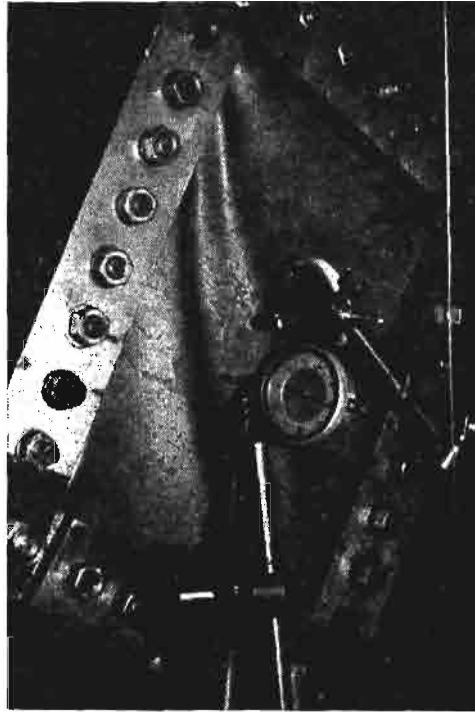
$$(1.1) \quad \frac{\pi^2 Etc}{a^2 G_u (1-\nu)} < 1.$$

Podstawowym uproszczeniem, jakie przyjmowane jest w tych pracach, to nieodkształcalność miękkiego rdzenia w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty. To założenie nie uwzględnia naprężeń ścinających w rdzeniu i uniemożliwia opracowanie ogólniejszej metody oraz projektowanie płyt w oparciu o nośność graniczną. Zasadniczym kryterium wytrzymałościowym tych płyt jest utrata stateczności całej płyty (tzw. ogólna forma utraty stateczności), przy której obciążenia krytyczne są na ogół mniejsze od nośności granicznej.

Z ekonomicznego punktu widzenia interesujące są grubsze płyty, w których naprężenia krytyczne są zbliżane do granicy plastyczności okładziny. Wychodząc z założenia, że ugięcie okładziny opisane jest szeregiem

$$(1.2) \quad W = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b},$$

w pracy [5] rozwiązano zagadnienie stateczności krótkich płyt przekładkowych, dla których ($a/b \leq 2$). Jednak doświadczenia wykazały, że teoretyczne naprężenia krytyczne w stosunku do wyników badań są znacznie zawyżone. Dlatego dalsze poszukiwania doprowadziły do przyjęcia nieco innej funkcji od równania (1.2) która dokładniej opisuje ugięcia wolnopodpartych, ścinanych, prostokątnych płyt przekładkowych i w konsekwencji daje dokładniejsze rozwiązania. Rzeczywisty obraz odkształconej płyty, uzyskany na drodze doświadczalnej, przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Forma utraty stateczności płyt przekładkowych

Przeprowadzone rozważania i otrzymane wnioski są słuszne przy następujących założeniach:

- okładziny wykonane z jednakowego, izotropowego materiału posiadają taką samą grubość,
- rdzeń wykonany z miękkiego izotropowego materiału, dla którego obowiązuje zależność $E_u \cdot c/Et < 0,1$. Oznacza to, że sztywność rdzenia w płaszczyźnie płyty w stosunku do sztywności okładzin jest dużo mniejsza.

Możemy więc przyjąć, że obciążenia leżące w płaszczyźnie płyty przenoszą tylko okładziny. Rdzeń natomiast równomiernie podpira okładziny i przenosi siły tnące oraz siły normalne prostopadłe do powierzchni płyty.

W oparciu o powyższe założenia możemy przyjąć, że lekki rdzeń charakteryzuje się następującymi własnościami: $E_x = E_y = G_{xy} = 0$; $G_{xz} = G_{yz} = G_u$ i $E_z = E_u$.

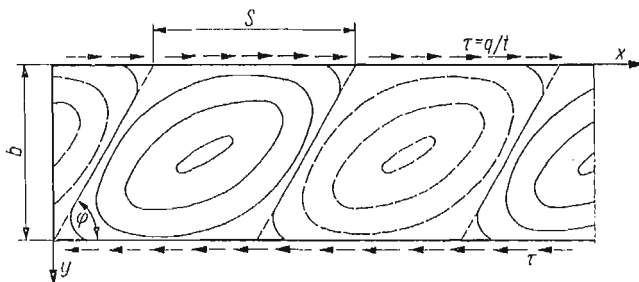
2. Płyta nieskończenie długa

Na początek przeanalizujemy problem naprężeń krytycznych dla płyt teoretycznie nieskończenie długich. Podobnie jak w teorii cienkich płyt przyjmiemy, że ugięcie okładziny opisuje zależność

$$(2.1) \quad W = A \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y).$$

Dla wolnopodpartej płyty funkcja ta spełnia tylko częściowo warunki brzegowe [3].

Na krawędziach płyty ($y = 0$, $y = b$) ugięcia równają się zeru, zaś momenty są różne od zera, gdyż $\partial^2 W / \partial y^2 \neq 0$. Jednak dla uzyskania chociaż przybliżonego rozwiązania będziemy w dalszym ciągu korzystać z tej zależności. Graficzne przedstawienie ugięcia płyty pokazane jest na rys. 2, gdzie s oznacza długość półfali, α charakteryzuje nachylenie linii węzłowych, dla których $x - \alpha y / s$ jest liczbą całkowitą i A jest amplitudą.



Rys. 2. Schemat odkształconej nieskończenie długiej płyty przekładkowej

Przemieszczenie rdzenia w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty zostało określone w ogólnym przypadku w pracy [4] jako funkcja trzech zmiennych

$$(2.2) \quad W_u = \varphi(z) W_{(x,y)} = -\frac{\cosh[p(c-z)]}{\cos hpc} W_{(x,y)},$$

gdzie

$$(2.3) \quad p^2 = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}}{W} \frac{1 - 2\nu_u}{2(1 - \nu_u)}.$$

Jak wynika z zależności (2.2), φ jest tylko funkcją zmiennej z , a ugięcie W funkcją x i y . Aby to założenie było spełnione, zależność (2.3) będziemy traktować jako parametr,

który w konkretnym przypadku ugięcia okładziny posiada stałą wartość. Wielkość tego współczynnika dla niektórych funkcji ugięcia okładziny podano w tablicy 1.

Tablica 1

Funkcja ugięcia okładziny W	Parametr p^2
$A_0 \sin \frac{\pi x m}{a}$	$\left(\frac{\pi m}{a} \psi\right)^2$
$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b}$	$\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\right] \psi^2$
$A \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y)$	$\left(\frac{\pi \psi}{s}\right)^2 \left(1 + \frac{s^2}{b^2} + \alpha^2\right)$
$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b} \cos \frac{\pi}{a} (y - \alpha x)$	$\left(\frac{\pi \psi}{a}\right)^2 \left[m^2 + \left(\frac{a}{b} n\right)^2 + \alpha^2 + 1\right]$

Mając określone przemieszczenie rdzenia możemy teraz za pomocą metody energetycznej znaleźć naprężenia krytyczne.

W związku z tym, iż okładzina traktowana jest jako cienka izotropowa płyta, jej energia odkształcenia sprężystego określona jest wzorem [3]

$$A_K = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Opierając się na przedstawionych we wstępie założeniach odnośnie rdzenia i korzystając z ogólnego równania na energię sprężystą ciała izotropowego, energię sprężystą da się opisać zależnością

$$A_r = G_u \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left\{ \frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \left(\frac{\partial W_u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W_u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_u}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz.$$

Praca wykonana przez zewnętrzne siły ścinające płytę wyraża się wzorem

$$A_z = - \int_0^a \int_0^b q \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy.$$

Uwzględniając dalej równania (2.1) i (2.2) ostatecznie otrzymamy:

$$(2.4) \quad A_K = \frac{4A^2 D a b}{8} \left[\frac{1}{b^4} + \frac{2+6\alpha^2}{s^2 b^2} + \frac{(1+\alpha^2)^2}{s^2} \right],$$

$$(2.5) \quad A_r = \frac{\pi^2 G_u A^2 a b}{8} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) \frac{\operatorname{tgh} pc}{pc},$$

$$(2.6) \quad A_z = q \frac{\pi^2 A^2 \alpha a b}{4s^2}.$$

Nieznane jednostkowe naprężenia tnące q obliczymy z zależności

$$(2.7) \quad A_K + A_r + A_z = 0,$$

$$(2.8) \quad q = \frac{\pi^2 D}{2} \left[\frac{s^2}{b^4} + \frac{2+6\alpha^2}{b^2} + \frac{(1+\alpha^2)^2}{s^2} + \frac{G_u}{2\alpha} \left(\frac{s^2}{b^2} + 1 + \alpha^2 \right) \frac{\operatorname{tgh} pc}{p} \right].$$

W dalszym ciągu interesuje nas najmniejsza wartość q , czyli naprężenia krytyczne. Żądaną wartość otrzymamy z warunku

$$(2.9) \quad \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial q}{\partial \alpha} = 0.$$

Z równania (2.9) przy założeniu, że mamy do czynienia tylko z cienką płytą (bez rdzenia $c = 0$) otrzymamy znane rozwiązania [3]

$$\alpha_0 = 0,7071; \quad s_0 = 1,2247 b$$

i najmniejszą wartość naprężeń

$$q_0 = 5,7 \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Rozwiązanie równań (2.9) najłatwiej przeprowadzić metodą numeryczną. Dla szczególnych przypadków płyt można stosunkowo łatwo określić naprężenia krytyczne metodą analityczną. Dla dostatecznie cienkich płyt przekładkowych można przyjąć, że

$$\operatorname{tgh} pc \approx pc,$$

wtedy z równania (2.8), poprzez wykorzystanie równań (2.9) otrzymamy:

$$s_{kr} = b \sqrt{1 + \alpha_{kr}^2} \sqrt[4]{c_4},$$

$$\alpha_{kr} = \frac{2 - c_2}{2 - c_3},$$

tutaj

$$c_2 = -\sqrt{c_4}(2 + c_5),$$

$$c_3 = \sqrt{c_4}(6 + c_5),$$

$$c_4 = \frac{1}{1 + c_5},$$

$$c_5 = \frac{G_u c b^2}{\pi^2 D}.$$

Podstawiając s_{kr} i α_{kr} do równania (2.8) ostatecznie otrzymamy jednostkowe naprężenia krytyczne.

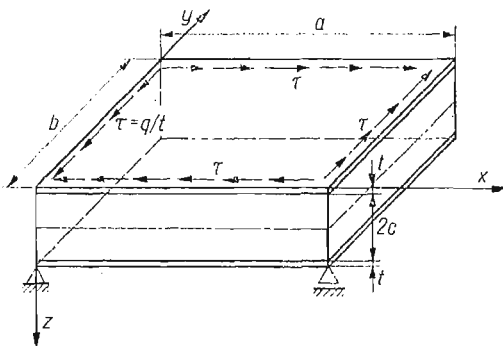
Porównując s_0 z s_{kr} oraz α_0 z α_{kr} można łatwo wykazać, że $s_{kr} < s_0$ i $\alpha_{kr} > \alpha_0$. Oznacza to, że płyta przekładkowa fałduje się w ten sposób, że długość półfali jest mniejsza od długości półfali dla takiej samej cienkiej płyty (bez rdzenia).

3. Płyty prostokątne

Jak już wspomniano we wstępie w pracy [5] rozwiązano problem stateczności krótkich płyt przekładkowych przy założeniu, że ugięcie okładziny opisane jest zależnością (1.2). Schemat takiej płyty przedstawiono na rys. 3. Późniejsze dociekania doprowadzają do wniosku, że dokładniej ugięcie okładziny można opisać następującą zależnością:

$$(3.1) \quad W = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b} \cos \frac{\pi}{a} (y - \alpha x).$$

Wyrażenie to, podobnie jak zależność (2.1), nie spełnia wszystkich warunków brzegowych, gdyż na krawędziach płyty ugięcia są równe zero, zaś momenty nie są równe zero.



Rys. 3. Płyta prostokątna wolnopodparta na całym obwodzie obciążona na krawędziach naprężeniami tnącymi

W dalszym ciągu zostanie wykazane, iż ten fakt dla płyt przekładkowych w przeciwieństwie do płyt bez rdzenia nie jest zbyt istotny. Wykorzystując zależność (2.2) i (3.1), a następnie postępując, podobnie jak w p. 2, otrzymamy wzory na energię sprężystą i pracę sił zewnętrznych.

Energia gięcia okładziny

$$(3.2) \quad A_k = \frac{D}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left\{ \frac{\pi^4}{a^4} \left[(m^2 + \alpha^2)^2 \left(x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_4 x_5 + x_8 x_{11} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (m\alpha^3 + m^3 \alpha) (x_{15} (x_2 - x_8) + x_4 (x_{16} - x_{17})) + m^2 \alpha^2 (4x_2 x_{18} - 2x_4 x_{20} + 4x_8 x_{19}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\pi^4}{a^2} \left[(m^2 + \alpha^2) \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \left(x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_4 x_5 + x_8 x_{11} \right) + \frac{m\alpha}{2} \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x_{15} (x_2 - x_8) + x_4 (x_{16} - x_{17})) + \frac{n}{2ab} (m^2 + \alpha^2) (x_3 (x_1 - x_{11}) + x_5 (x_{10} - x_{14})) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{mn\alpha}{ab} \left(\frac{1}{2} x_3 x_{15} - x_{10} x_{17} - x_4 x_{16} \right) \right] + \pi^4 \left[\left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right)^2 \left(x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_4 x_5 + x_8 x_{11} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{n}{a^3 b} + \frac{n^3}{ab^3} \right) (x_3 (x_1 - x_{11}) + x_5 (x_{10} - x_{14})) + \frac{n^2}{a^2 b^2} (4x_1 x_7 - 2x_5 x_9 + 4x_{11} x_{12}) \right] \right\}$$

Energia sprężysta rdzenia

$$(3.3) \quad A_r = \frac{G_u}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \left\{ p^2 \left(\frac{\operatorname{tgh} pc}{p} - \frac{c}{\cosh^2 pc} \right) \left(x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_4 x_5 + x_8 x_{11} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tgh} pc}{p} + \frac{c}{\cosh^2 pc} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{a^2} \left[m^2 \left(x_2 x_{19} + \frac{1}{2} x_4 x_{20} + x_8 x_{18} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha m}{2} (x_{15} (x_8 - x_2)) + x_4 (x_{17} - x_{16}) + \alpha^2 \left(x_2 x_{11} + x_1 x_8 - \frac{1}{2} x_4 x_5 \right) \right] + \right. \\ \left. + \pi^2 \left[\frac{n^2}{b^2} \left(x_1 x_{12} + \frac{1}{2} x_5 x_9 + x_7 x_{11} \right) + \frac{n}{2ab} (x_3 (x_{11} - x_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + x_5 (x_{14} - x_{10})) + \frac{1}{a^2} \left(x_2 x_{11} + x_1 x_8 - \frac{1}{2} x_4 x_5 \right) \right] \right\} \Bigg\}.$$

W równaniach tych przez x oznaczono następujące całki:

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\pi \alpha}{a} x \sin^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4} \left[1 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \right) \sin 2\pi \alpha \right] = x_1,$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{\pi n}{b} y \cos^2 \frac{\pi}{a} y dy = \frac{b}{4} + \frac{a}{8\pi} \left(1 + \frac{b^2}{n^2 a^2 - b^2} \right) \sin 2\pi \frac{b}{a} = x_2,$$

$$\int_0^b \sin \frac{2\pi}{a} y \sin \frac{2\pi n}{b} y dy = \frac{na^2 b}{2\pi(b^2 - a^2 n^2)} \sin 2\pi \frac{b}{a} = x_3,$$

$$\int_0^b \sin \frac{2\pi}{a} y \sin^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \left(\cos 2\pi \frac{b}{a} - 1 \right) \left[\frac{a}{4\pi} \left(\frac{2b^2}{b^2 - a^2 n^2} - 1 \right) \right] = x_4.$$

$$\int_0^a \sin \frac{2\pi \alpha}{a} x \sin^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4\pi} \left[\frac{2\alpha}{\alpha^2 - m^2} (\cos 2\pi \alpha - 1) + \frac{1}{\alpha} (1 - \cos 2\pi \alpha) \right] = x_5,$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{\pi}{a} y \cos^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \frac{b}{4} - \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2 n^2} + 1 \right) \sin 2\pi \frac{b}{a} \right] = x_7,$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{\pi}{a} y \sin^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \frac{b}{4} + \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2 n^2} - 1 \right) \sin 2\pi \frac{b}{a} \right] = x_8,$$

$$\int_0^b \sin \frac{2\pi}{a} y \cos^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \left(1 - \cos 2\pi \frac{b}{a} \right) \left[\frac{a}{4\pi} \left(1 + \frac{2b^2}{b^2 - a^2 n^2} \right) \right] = x_9,$$

$$\int_0^b \sin \frac{2\pi n}{b} y \sin^2 \frac{\pi}{a} y dy = \frac{a^2 b n}{2\pi(a^2 n^2 - b^2)} \left(\cos 2\pi \frac{b}{a} - 1 \right) = x_{10},$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \sin^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4} + \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \sin 2\pi\alpha = x_{11},$$

$$\int_0^b \cos^2 \frac{\pi}{a} y \cos^2 \frac{\pi n}{b} y dy = \frac{b}{4} + \left[\frac{a}{8\pi} \left(1 + \frac{b^2}{b^2 - a^2 n^2} \right) \right] \sin 2\pi \frac{b}{a} = x_{12},$$

$$\int_0^b \cos^2 \frac{\pi}{a} y \sin \frac{2\pi n}{b} y dy = \frac{a^2 b n}{4\pi(n^2 a^2 - b^2)} \left(1 - \cos 2\pi \frac{b}{a} \right) = x_{14},$$

$$\int_0^a \sin \frac{2\pi\alpha}{a} x \sin \frac{2\pi m}{a} x dx = \frac{am}{2\pi(\alpha^2 - m^2)} \sin 2\pi\alpha = x_{15},$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \sin \frac{2\pi m}{a} x dx = \frac{a\alpha}{4\pi(m^2 - \alpha^2)} (1 - \cos 2\pi\alpha) = x_{16},$$

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \sin \frac{2\pi m}{a} x dx = \frac{am}{4\pi(m^2 - \alpha^2)} (1 - \cos 2\pi\alpha) = x_{17},$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \cos^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4} - \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \right) \right] \sin 2\pi\alpha = x_{18},$$

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \cos^2 \frac{\pi m}{a} x dx = \frac{a}{4} + \left[\frac{a}{8\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \right) \right] \sin 2\pi\alpha = x_{19},$$

$$\int_0^a \sin \frac{2\pi\alpha}{a} x \cos^2 \frac{\pi m}{a} x dx = (1 - \cos 2\pi\alpha) \left[\frac{a}{4\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2 - m^2} \right) \right] = x_{20}.$$

Praca sił zewnętrznych

$$(3.4) \quad A_z = -q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{mn} C_{kl} \frac{\pi^2}{a} \left\{ \frac{ml}{b} (Z_1 Z_3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} Z_4 Z_5 + Z_8 Z_9) + \frac{\alpha l}{b} [Z_{13}(Z_8 - Z_3) + Z_5(Z_{12} - Z_{11})] + \right. \\ \left. + \frac{m}{2a} [Z_4(Z_6 - Z_7) + Z_2(Z_9 - Z_1)] + \frac{\alpha}{a} \left[\frac{1}{2} Z_2 Z_{13} - Z_7 Z_{12} - Z_6 Z_{11} \right] \right\},$$

gdzie:

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\pi\alpha}{a} x \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx = \frac{a}{4\pi(m+k)} [1 - \cos \pi(m+k)] + \\ + \frac{a}{4\pi(m-k)} [\cos \pi(m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha + m + k)} [1 - \cos \pi(2\alpha + m + k)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a}{8\pi(2\alpha-m-k)} [\cos \pi(2\alpha-m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha+m-k)} \times \\
& \times [\cos \pi(2\alpha+m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha-m-k)} [\cos \pi(2\alpha-m+k) - 1] = Z_1, \\
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{2\pi}{a} y \sin \frac{\pi l}{b} y dy & = -\frac{ab}{4\pi[2b+a(n-l)]} \left[\cos \pi \left(\frac{2b}{a} + n-l \right) - 1 \right] + \\
& + \frac{ab}{4\pi[2b-a(n-l)]} \left[1 - \cos \pi \left(\frac{2b}{a} - n+l \right) \right] + \frac{ab}{4\pi[2b+a(n+l)]} \left[\cos \pi \left(\frac{2b}{a} + \right. \right. \\
& \left. \left. + n+l \right) - 1 \right] + \frac{ab}{4\pi[2b-a(n+l)]} \left[\cos \pi \left(\frac{2b}{a} - n-l \right) - 1 \right] = Z_2, \\
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \cos \frac{\pi l}{b} y \cos^2 \frac{\pi}{a} y dy & = \frac{b}{4\pi(n+l)} [\cos \pi(n+l) + 1] + \frac{b}{4\pi(n-l)} [1 - \cos \pi(n-l)] + \\
& + \frac{ab}{8\pi[a(n+l)+2b]} \left[1 - \cos \pi \left(n+l + \frac{2b}{a} \right) \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n+l)-2b]} \left[1 - \cos \pi \times \right. \\
& \left. \times \left(n+l - \frac{2b}{a} \right) \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)+2b]} \left[1 - \cos \pi(n-l) + \right. \\
& \left. + \frac{2b}{a} \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)-2b]} \left[1 - \cos \pi(n-l) - \frac{2b}{a} \right] = Z_3, \\
\int_0^a \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{2\pi \alpha}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx & = \frac{a}{4\pi(2\alpha-k-m)} \sin \pi(2\alpha-k-m) + \\
& + \frac{a}{4\pi(2\alpha-k+m)} \sin \pi(2\alpha-k+m) + \frac{a}{4\pi(2\alpha+k-m)} \sin \pi(2\alpha+k-m) - \\
& - \frac{a}{4\pi(2\alpha+k+m)} \sin \pi(2\alpha+k+m) = Z_4, \\
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{2\pi}{a} y \cos \frac{\pi l}{b} y dy & = \frac{ab}{4\pi(2b-a)(n-l)} \sin \pi \left(\frac{2b}{a} - n+l \right) - \\
& - \frac{ab}{4\pi(2b+a)(n+l)} \sin \pi \left(\frac{2b}{a} + n+l \right) + \frac{ab}{4\pi(2b-a)(n+l)} \sin \pi \left(\frac{2b}{a} - n-l \right) - \\
& - \frac{ab}{4\pi(2b+a)(n-l)} \sin \pi \left(\frac{2b}{a} + n-l \right) = Z_5, \\
\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi l}{b} y \cos^2 \frac{\pi}{a} y dy & = \frac{b}{4\pi(n-l)} \sin \pi(n-l) - \frac{b}{4\pi(n+l)} \sin \pi(n+l) + \\
& + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)-2b]} \sin \pi \left(n-l - \frac{2b}{a} \right) + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)+2b]} \sin \pi \left(n-l + \frac{2b}{a} \right) - \\
& - \frac{ab}{8\pi[a(n+l)-2b]} \sin \pi \left(n+l - \frac{2b}{a} \right) - \frac{ab}{8\pi[a(n+l)+2b]} \sin \pi \left(n+l + \frac{2b}{a} \right) = Z_6,
\end{aligned}$$

$$\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi l}{b} y \sin^2 \frac{\pi}{a} y dy = \frac{b}{4\pi(n-l)} \sin \pi(n-l) - \frac{b}{4\pi(n+l)} \sin \pi(n+l) -$$

$$- \frac{ab}{8\pi[a(n-l)-2b]} \sin \pi \left(n-l - \frac{2b}{a} \right) - \frac{ab}{8\pi[a(n-l)+2b]} \times$$

$$\times \sin \pi \left(n-l + \frac{2b}{a} \right) - \frac{ab}{8\pi[a(n+l)-2b]} \sin \pi \left(n+l - \frac{2b}{a} \right) -$$

$$- \frac{ab}{8\pi[a(n+l)+2b]} \sin \pi \left(n+l + \frac{2b}{a} \right) = Z_7,$$

$$\int_0^b \sin \frac{\pi n}{b} y \cos \frac{\pi l}{b} y \sin^2 \frac{\pi}{a} y dy = \frac{b}{4\pi(n+l)} [1 - \cos \pi(n+l)] + \left(\frac{b}{4\pi(n-l)} \right) \times$$

$$\times [1 - \cos \pi(n-l)] + \frac{ab}{8\pi[a(n+l)+2b]} \left[-1 + \cos \pi \left(n+l + \frac{2b}{a} \right) \right] +$$

$$+ \frac{ab}{8\pi[a(n+l)-2b]} \left[-1 + \cos \pi \left(n+l - \frac{2b}{a} \right) \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)+2b]} \times$$

$$\times \left[\cos \pi \left(n-l + \frac{2b}{a} \right) - 1 \right] + \frac{ab}{8\pi[a(n-l)-2b]} \left[\cos \pi \left(n-l - \frac{2b}{a} \right) - 1 \right] = Z_8,$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi \alpha}{a} x \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx = \frac{a}{4\pi(m+k)} [1 - \cos \pi(m+k)] +$$

$$+ \frac{a}{4\pi(m-k)} [\cos \pi(m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha+m+k)} [\cos \pi(2\alpha+m+k) - 1] +$$

$$+ \frac{a}{8\pi(2\alpha-m-k)} [\cos \pi(2\alpha-m-k) - 1] + \frac{a}{8\pi(2\alpha+m-k)} \times$$

$$\times [1 - \cos \pi(2\alpha+m-k)] + \frac{a}{8\pi(2\alpha-m+k)} [\cos \pi(2\alpha-m+k) - 1] = Z_9,$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi \alpha}{a} x \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx = \frac{a}{4\pi(m-k)} \sin \pi(m-k) -$$

$$- \frac{a}{4\pi(m+k)} \sin \pi(m+k) - \frac{a}{8\pi(m-k-2\alpha)} \sin \pi(m-k-2\alpha) +$$

$$+ \frac{a}{8\pi(m-k+2\alpha)} \sin \pi(m-k+2\alpha) - \frac{a}{8\pi(m+k-2\alpha)} \times$$

$$\times \sin \pi(m+k-2\alpha) - \frac{a}{8\pi(m+k+2\alpha)} \sin \pi(m+k+2\alpha) = Z_{11},$$

$$\int_0^a \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x \cos^2 \frac{\pi \alpha}{a} x dx = \frac{a}{4\pi(m-k)} \sin \pi(m-k) -$$

$$- \frac{a}{4\pi(m+k)} \sin \pi(m+k) + \frac{a}{8\pi(m-k-2\alpha)} \sin \pi(m-k-2\alpha) +$$

$$+ \frac{a}{8\pi(m-k+2\alpha)} \sin \pi(m-k+2\alpha) + \frac{a}{8\pi(m+k-2\alpha)} \sin \pi(m+k-2\alpha) -$$

$$- \frac{a}{8\pi(m+k+2\alpha)} \sin \pi(m+k+2\alpha) = Z_{12},$$

$$\int_0^a \sin \frac{2\pi \alpha}{a} x \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx = \frac{a}{4\pi(k+2\alpha-m)} [1 + \cos \pi(k+2\alpha-m)] +$$

$$+ \frac{a}{4\pi(k+m-2\alpha)} [1 - \cos \pi(k-2\alpha+m)] + \frac{a}{4\pi(k+2\alpha+m)} [\cos \pi(k+m+2\alpha) - 1] +$$

$$+ \frac{a}{4\pi(k-2\alpha-m)} [1 - \cos \pi(k-2\alpha-m)] = Z_{13},$$

tutaj

$$m \neq k, \quad n \neq l.$$

Całkowita energia płyty. Korzystając z równania (2.7) przy uwzględnieniu równań (3.2), (3.3) i (3.4) otrzymamy ostatecznie wzór na całkowitą energię płyty przekładkowej

$$(3.5) \quad A = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 A_{mn} - q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} C_{mn} C_{kl} B_{mnkl},$$

gdzie:

$$A_{mn} = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\pi^4}{a^4} [(m^2 + \alpha^2)^2 (x_1 x_2 + 0,5 x_4 x_5 + x_8 x_{11}) + (m\alpha^3 + m^3 \alpha) \times \right.$$

$$\times [x_{15} (x_2 - x_8) + x_4 (x_{16} - x_{17})] + m^2 \alpha^2 (4x_2 x_{18} - 2x_4 x_{20} + 4x_8 x_{19})] +$$

$$+ \frac{2\pi^4}{a^2} \left[(m^2 + \alpha^2) \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) (x_1 x_2 + 0,5 x_4 x_5 + x_8 x_{11}) + \frac{m\alpha}{2} \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \times \right.$$

$$\times [x_{15} (x_2 - x_8) + x_4 (x_{16} - x_{17})] + \frac{n}{2ab} (m^2 + \alpha^2) [x_3 (x_1 - x_{11}) + x_5 (x_{10} - x_{14})] +$$

$$+ \frac{mn\alpha}{ab} (0,5 x_3 x_{15} - x_{10} x_{17} - x_4 x_{16}) \left. \right] + \pi^4 \left[\left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right)^2 (x_1 x_2 + 0,5 x_5 x_4 + \right.$$

$$+ x_8 x_{11}) + \left(\frac{n}{a^3 b} + \frac{n^3}{ab^3} \right) [x_3 (x_1 - x_{11}) + x_5 (x_{10} - x_{14})] + \frac{n^2}{a^2 b^2} \times$$

$$\times (4x_1 x_7 - 2x_5 x_9 + 4x_{11} x_{12}) \left. \right] + \frac{G_u}{2} p^2 \left(\frac{\operatorname{tg} hpc}{p} - \frac{c}{\cosh^2 pc} \right) \times$$

$$\times (x_1 x_2 + 0,5 x_4 x_5 + x_8 x_{11}) + 0,5 \left(\frac{\operatorname{tg} hpc}{p} + \frac{c}{\cosh^2 pc} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{a^2} [m^2 (x_2 x_{19} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 0,5x_4x_{20} + x_8x_{18}) + \frac{m\alpha}{2} [x_{15}(x_8 - x_2) + x_4(x_{17} - x_{16})] + \alpha^2 \times \\
& \times (x_2x_{11} + x_1x_8 - 0,5x_4x_5) + \pi^2 \left[\frac{n^2}{b^2} (x_1x_{12} + 0,5x_5x_9 + x_7x_{11}) + \right. \\
& \left. + \frac{n}{2ab} [x_3(x_{11} - x_1) + x_5(x_{14} - x_{10})] + \frac{1}{a^2} (x_1x_8 - 0,5x_4x_5 + x_2x_{11}) \right],
\end{aligned}$$

wzór na B_{mnkl} ma postać:

$$\begin{aligned}
B_{mnkl} = & \frac{\pi^2}{a} \left[\frac{ml}{b} (z_1z_3 + 0,5z_4z_5 + z_8z_9) \right] + \frac{\alpha l}{b} [z_{13}(z_8 - z_3) + z_5(z_{12} - z_{11})] + \\
& + \frac{m}{2a} [z_4(z_6 - z_7) + z_2(z_9 - z_1)] + \frac{\alpha}{a} [0,5z_2z_{13} - z_7z_{12} - z_6z_{11}].
\end{aligned}$$

Stosując metodę Ritza-Timoshenki otrzymamy m równań liniowych jednorodnych postaci:

$$\frac{\partial A}{\partial C_{mm}} = 0,$$

rozwiązując następnie wyznacznik tego układu równań, otrzymamy ostatecznie wielkość jednostkowych naprężeń tnących q_{kr} (krytyczne).

W pracy [5] autor wykazał, że dostateczną dokładność rozwiązania zagadnienia dla celów praktycznych uzyskuje się, przyjmując sześć a nawet pięć składników szeregu Fouriera. Toteż w niniejszej pracy ograniczono się do przyjęcia $m = 1, 2, \dots, 5$ i $n = 1, 2, \dots, 5$.

W celu porównania wielkości naprężeń krytycznych dla funkcji ugięcia oskładziny określonej wzorem (1.2) i (3.1) odpowiednie wartości podano w tablicy 2 i 3.

Tablica 2. q^{**} — Jednostkowe naprężenia krytyczne obliczone dla funkcji wg wzoru (1.2)

Lp.	c	m, n	m, n			
			1, ..., 2	1, ..., 3*	1, ..., 4	1, ..., 5
1		0	40,42	33,27	33,17	32,96
2		0,5	402,00	230,91	201,54	196,95
3		1	746,79	409,69	342,86	326,61
4		1,5	1075,32	573,71	465,74	432,64
5		2	1381,95	718,95	567,00	512,54
6		2,5	1662,88	843,57	646,39	568,27
7		3	1916,20	947,72	706,18	605,06
8		3,5	2141,74	1032,97	749,90	628,61
9		4	2340,47	1101,65	781,26	643,47
10		5	2665,42	1199,56	819,19	658,72

Uwaga: dane w tablicy pomnożone przez 10^{-3} dają wartości q w [MN/m]. Grubości rdzenia c pomnożone przez 10^{-2} dają wartości w [m].

Tablica 3. q^* — Jednostkowe naprężenia krytyczne obliczone dla funkcji wg wzoru (3.1)

Lp.	m, n c	1, ..., 2	1, ..., 3	1, ..., 4	1, ..., 5
		1	0	55,2	38,85
2	0,5	361,45	196,95	157,89	145,4
3	1	656,6	341,71	262,33	232,72
4	1,5	937,54	474,0	352,85	304,1
5	2	1200	590,85	427,42	358,45
6	2,5	1597,65	719,17	485,88	397,1
7	3	1659,45	773,81	529,74	423,3
8	3,5	1855	841,69	561,72	449,86
9	4	2028,3	896,24	584,67	451,26
10	5	2535	1002,6	614,79	464,4

Dane w tablicy pomnożone przez 10^{-3} dają wartość q w [MN/m]. Grubość rdzenia c pomnożona przez 10^{-2} dają wartość w [m].

Z porównania jednostkowych naprężeń tnących według funkcji (1.2) (wartości z dwoma gwiazdkami w tablicy 2) z naprężeniami krytycznymi dla funkcji (3.1) (wartości z jedną gwiazdką w tablicy 3) można wyciągnąć bardzo ciekawy wniosek:

— Dla cienkich jednolitych płyt $c = 0$ naprężenia q^{**} są znacznie mniejsze od naprężeń q^* , co oznacza, że funkcja (3.1) daje zawyżone wartości naprężeń.

Podstawową przyczyną wzrostu naprężeń jest częściowe niespełnienie warunków brzegowych, o czym była mowa wcześniej.

Widać więc, że jednolite płyty (bez rdzenia) są bardziej «wrażliwe» na warunki brzegowe.

— Dla grubości rdzenia $c > 0$, np. dla $c = 0,5 \cdot 10^{-2}$ [m] funkcja (3.1) daje dokładniejsze rozwiązania w stosunku do funkcji (1.2) o około 35%.

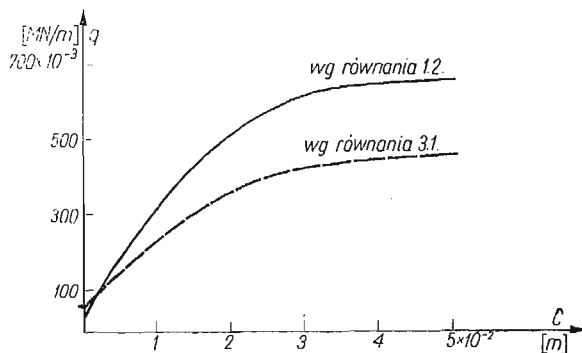
Tablica 4. Procentowy błąd względny $\Delta\%$

Lp.	m, n c	1, ..., 2	1, ..., 3	1, ..., 4	1, ..., 5
		1	0	-26,7	-14,4
2	0,5	11,3	17,2	26,4	35,5
3	1	13,7	19,9	30,7	40,3
4	1,5	14,6	21	32	42,3
5	2	15,2	21,7	32,7	42,9
6	2,5	14	17,2	33,0	43,1
7	3	15,5	22,5	33,2	42,9
8	3,5	15,7	22,7	33,4	42,6
9	4	15,4	22,8	33,6	42,6
10	5	15	20	33	42

$$\Delta = \frac{q^{**} - q^*}{q^*} \cdot 100\%, \quad q^{**} \text{ wg tabl. 2, } q^* \text{ wg tabl. 3}$$

Dla bardziej przejrzystego zobrazowania różnicy wielkości naprężeń krytycznych, na rys. 4 przedstawiono zależność tych naprężeń od grubości rdzenia. Z przebiegu tych krzywych widać, że można dobrać taką grubość rdzenia, powyżej której jego zwiększanie nie daje efektywnych przyrostów naprężeń krytycznych, a tylko niepotrzebnie zwiększa ciężar płyty.

Przykładowe obliczenie naprężeń krytycznych wykonano dla płyty, która charakteryzowała się następującymi parametrami: $a = 28,5 \cdot 10^{-2}$ [m]; $b = 19 \cdot 10^{-2}$ [m]; $D = 17,02 \cdot 10^{-6}$ [MNm]; $t = 0,1 \cdot 10^{-2}$ [m]; $E = 185475,95$ [MN/m²]; $G_u = 23,55$ [MN/m²]; $\nu_u = 0,17$; $\nu = 0,3$ i $E_u = 58,81$ [MN/m²].



Rys. 4. Zależność naprężeń krytycznych od grubości rdzenia obliczonych dla pięciu liczb szeregu (1.2) i (3.1)

Dla ułatwienia bardzo żmudnych obliczeń autor opracował program «MINQ» na EMC umożliwiającą obliczanie naprężeń krytycznych dla dowolnej liczby wyrazów szeregu Fouriera.

W oparciu o parametry płyty, służące jako dane wejściowe, otrzymujemy α_{kr} ; S_{kr} ; q_{kr} ; τ_{kr} i krytyczne obciążenia.

Program dostępny jest w Instytucie Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej.

Literatura cytowana w tekście

1. А. Я. АЛЕКСАНДРОВ и др., *Расчет трехслойных панелей*, Москва 1960.
2. P. P. BIJLAARD, *Analysis of the elastic and elastic stability of sandwich plates by the method of split rigidities*, J. Aeronautical Sci., **18**, 5 (1961) 339—349.
3. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Warszawa 1963.
4. Fr. ROMANÓW, *Stateczność płyt dwuwarstwowych, wolnopodparty, przy obciążeniu ścinającym*. Konstrukcje Lekkie — Konferencje Naukowo-Techniczne w Instytucie Lotnictwa, Warszawa 1966.
5. Fr. ROMANÓW, *Wpływ ilości składników szeregu Fouriera na dokładność obliczeń naprężeń krytycznych w ścinanych płytach przekładkowych*, Prace Instytutu Lotnictwa, 46 (1971).

Резюме

КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН РАБОТАЮЩИХ НА СДВИГ

Используя энергетический метод решена задача расчета критических напряжений трехслойных пластин, подвергнутых воздействию срезающих нагрузок. В результате учёта деформируемости заполнителя по всей его толщине предложенный метод — в отличие от общеизвестных

теорий, например [1, 2] — может применяться без каких-либо ограничений для пластин произвольных геометрических размеров, в которых заполнитель состоит из легких изотропных пенообразных материалов. Рассматриваемые пластины были рассчитаны численным методом, а результаты приведены в таблице 1, 2 и на рис. 4.

Summary

CRITICAL STRESSES OF SIMPLY SUPPORTED SANDWICH PLATES IN SHEAR

Energy method is used to solve the problem of critical stresses in sandwich plates subject to shear loads. Since the deformation over entire thickness of the core was taken into consideration (contrary to the well-known theories [1, 2]), the present theory can be used without any limitation for the plates of arbitrary dimensions with cores made of foam-type isotropic materials. The results of numerical analysis are given in table 1, 2 and Fig. 4.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1977 r.

GRAFY PRZEPŁYWU SYGNAŁÓW W MODELOWANIU KASKADOWEJ STRUKTURY UKŁADU WYCIĄGOWEGO

JERZY ŚWIDER, JÓZEF WOJNAROWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Sięganie do coraz głębiej położonych pokładów węgla kamiennego zmusza konstruktorów do zajęcia się problemami zjawisk dynamicznych zachodzących w układach wyciągowych głębokich szybów. Zagadnieniu modelowania układu wyciągowego poświęcono szereg prac [1-8]. W szczególności w [1] i [2] podano sposób modelowania układu wyciągowego wraz z częścią napędową i sterującą. Problematykę tę podjęto również w pracach [3] i [4]. W [5] przedstawiono sposób budowy schematów strukturalnych układu wyciągowego. Zastosowanie modeli dyskretnych w analizie układów wyciągowych omówiono ostatnio w pracach [6] i [7]. Model układu wyciągowego jako systemu wielkiego przedstawiono w pracy [8].

W niniejszej pracy podjęto próbę zmodelowania układu wyciągowego grafem macierzowym. Analiza macierzowego grafu przepływu sygnałów pozwala na wyznaczenie zmiennych szeregowych i równoległych¹⁾ dowolnego elementu modelu układu wyciągowego w funkcji wymuszenia. Natomiast zwarty, macierzowy opis takiego grafu umożliwia algorytmizację obliczeń i wykorzystanie elektronicznej techniki obliczeniowej.

Wykorzystując spostrzeżenie, że układ wyciągowy charakteryzuje się strukturą kaskadową, podjęto również próbę zamodelowania go czwórnikowymi grafami przepływu sygnałów [9, 10, 11], które nie wymagają układania równań i stanowią równoważny model matematyczny. Jest to szczególnie korzystne przy stosowaniu grafów w modelowaniu analogowym megaukładów. Takim właśnie megaukładem [8] jest dyskretny model układu wyciągowego.

2. Struktura dwójników i graf biegunowy jako model układu wyciągowego

Rozważmy układ wyciągowy w postaci, jak na rys. 1, wyodrębniając w nim silnik napędowy wraz z przekładnią (1), wał napędowy (2), koło pędne (3), lewą (4) i prawą (5) linię wyciągową, lewą (6) i prawą (7) klatkę wyciągową, lewą (8) i prawą (9) część liny wyrównawczej.

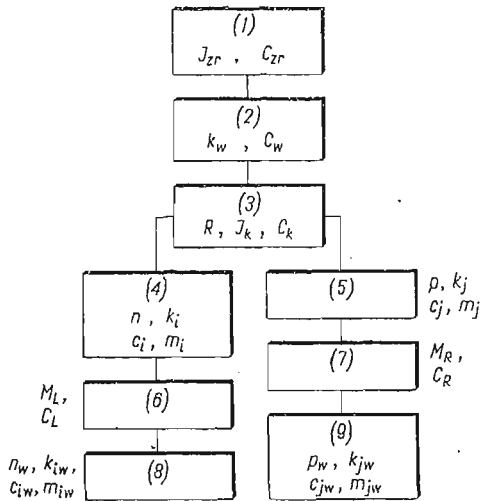
Na rys. 1 oznaczono dodatkowo przez:

I_{zr} zredukowany moment bezwładności wirnika silnika i przekładni,

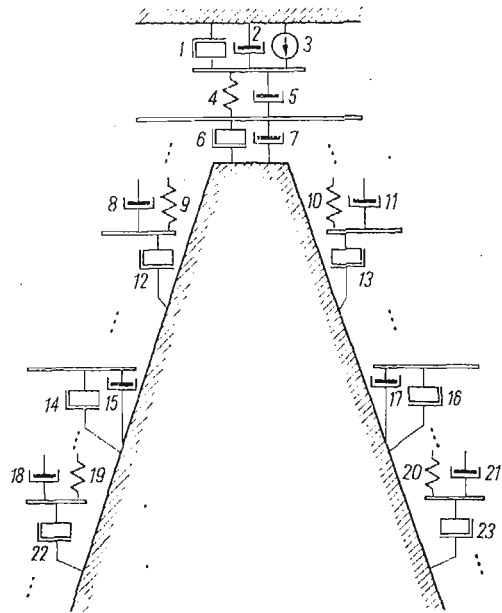
I_k moment bezwładności koła pędnego,

¹⁾ Stosowane są również nazwy: «zmiennie przepływowo» i «zmiennie biegunowe». Por. s. 114. [15].

- C_{zr} zredukowane tłumienie silnika i przekładni,
 C_w tłumienie wału napędowego,
 C_k tłumienie koła napędowego,
 k_w sztywność wału napędowego,
 R promień koła napędowego,
 n liczbę elementów dyskretnego modelu lewej linii wyciągowej,



Rys. 1



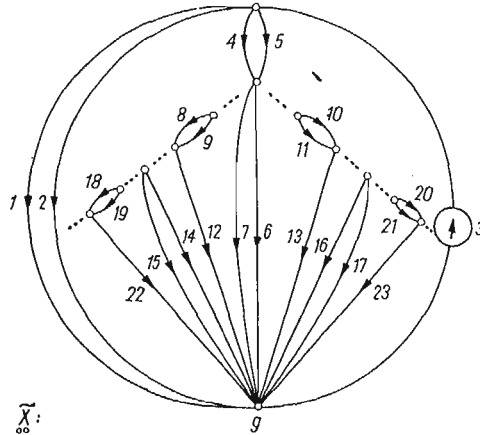
Rys. 2

- k_i, c_i, m_i sztywność, tłumienie i masę i -tego dyskretnego elementu lewej linii wyciągowej ($i \in n$),
 p liczbę elementów dyskretnego modelu prawej linii wyciągowej,
 k_j, c_j, m_j sztywność, tłumienie i masę j -tego dyskretnego elementu prawej linii wyciągowej ($j \in p$),
 M_L masę lewej klatki wyciągowej,
 C_L tłumienie w przewodnicach lewej klatki wyciągowej,
 M_R masę prawej klatki wyciągowej,
 C_R tłumienie w przewodnicach prawej klatki wyciągowej,
 n_w liczbę elementów dyskretnego modelu lewej linii wyrównawczej,
 $\left\{ \begin{array}{l} k_{i_w}, c_{i_w} \\ m_{i_w} \end{array} \right.$ sztywność, tłumienie i masę i_w -tego elementu lewej linii wyrównawczej ($i_w \in n_w$),
 p_w liczbę elementów dyskretnego modelu prawej linii wyrównawczej,
 $\left\{ \begin{array}{l} k_{j_w}, c_{j_w} \\ m_{j_w} \end{array} \right.$ sztywność, tłumienie i masę j_w -tego elementu prawej linii wyrównawczej ($j_w \in p_w$).

Model w postaci dwójników [12] z wyróżnionymi elementami sprężystymi, tłumieniowymi oraz inercyjnymi przedstawiono na rys. 2, gdzie liczby 1 ÷ 23 oznaczają:

1 — I_{zr} , 2 — C_{zr} , 3 — zredukowany moment napędowy M_s , 4 — k_w , 5 — C_w , 6 — I_k , 7 — C_k , 8 — c_i , 9 — k_i , 10 — k_j , 11 — c_j , 12 — m_i , 13 — m_j , 14 — M_L , 15 — C_L , 16 — M_R , 17 — C_R , 18 — c_{iw} , 19 — k_{iw} , 20 — k_{jw} , 21 — c_{jw} , 22 — m_{iw} , 23 — m_{jw} .

Stosując metodę grafów [10, 13], układ wyciągowy w postaci dwójników sprowadzono do grafu biegunowego (rys. 3).



Rys. 3

Wprowadzając następujące definicje:

— jeżeli każda ścieżka grafu biegunowego układu, zaczynająca się i kończąca w biegunie ${}_1x_0$, ma tylko jeden wierzchołek pośredni, to układ ma strukturę równoległą,

— jeżeli w grafie biegunowym układu istnieje ścieżka Hamiltona zaczynająca się i kończąca w biegunie ${}_1x_0$, to układ ma strukturę kaskadową,

— we wszystkich innych przypadkach struktura układu jest mieszana, można zauważyć, że analizowany układ wyciągowy charakteryzuje się rozgałęzioną strukturą kaskadową.

Graf biegunowy układu wyciągowego przyjęto jako podstawę w tworzeniu macierzowego grafu przepływu sygnałów.

3. Macierzowy graf przepływu sygnałów jako model układu wyciągowego

Zgodnie z procedurą podaną w pracy [14] graf biegunowy układu wyciągowego (rys. 3) przetransformowano na graf przepływu sygnałów (rys. 4).

W tym celu [15]:

— w grafie biegunowym wybrano drzewo tworzące $\{1, 6, 12, 13, 14, 16, 22, 23\}$

— gałęziom drzewa przyporządkowano macierz wiersz zmiennych równoległych

$${}_1\mathbf{S} = [{}_1s_1, {}_1s_6, \dots, {}_1s_{12}, \dots, {}_1s_{13}, \dots, {}_1s_{14}, \dots, {}_1s_{16}, \dots, {}_1s_{22}, \dots, {}_1s_{23}, \dots]$$

i macierz wiersz zmiennych szeregowych

$${}_2\mathbf{S} = [{}_2s_1, {}_2s_6, \dots, {}_2s_{12}, \dots, {}_2s_{13}, \dots, {}_2s_{14}, \dots, {}_2s_{16}, \dots, {}_2s_{22}, \dots, {}_2s_{23}, \dots];$$

— cięciwom grafu przyporządkowano macierz wiersz zmiennych równoległych

$${}_1\mathring{S} = [{}_1\mathring{s}_2, {}_1\mathring{s}_3, {}_1\mathring{s}_4, {}_1\mathring{s}_5, {}_1\mathring{s}_6, \dots, {}_1\mathring{s}_7, \dots, {}_1\mathring{s}_8, \dots, {}_1\mathring{s}_9, \dots, {}_1\mathring{s}_{10}, {}_1\mathring{s}_{11}, \dots, {}_1\mathring{s}_{15}, \dots, {}_1\mathring{s}_{17}, \\ \dots, {}_1\mathring{s}_{18}, {}_1\mathring{s}_{19}, \dots, {}_1\mathring{s}_{20}, {}_1\mathring{s}_{21}, \dots]$$

i macierz wiersz zmiennych szeregowych

$${}_2\mathring{S} = [{}_2\mathring{s}_2, 0, {}_2\mathring{s}_4, {}_2\mathring{s}_5, {}_2\mathring{s}_7, \dots, {}_2\mathring{s}_8, {}_2\mathring{s}_9, \dots, {}_2\mathring{s}_{10}, {}_2\mathring{s}_{11}, \dots, {}_2\mathring{s}_{15}, \\ \dots, {}_2\mathring{s}_{17}, \dots, {}_2\mathring{s}_{18}, {}_2\mathring{s}_{19}, \dots, {}_2\mathring{s}_{20}, {}_2\mathring{s}_{21}, \dots];$$

— wymuszenie układu zapisano w postaci macierzy

$${}_2\mathring{S}_w = [0, {}_2\mathring{s}_3, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots];$$

— operatorowe sztywności dynamiczne cięciw zapisano w postaci macierzy diagonalnej

$$\text{DIAG } W(p) = \text{DIAG}[C_{zr}p, 0, k_w, C_w p, C_k p, \dots, c_i p, k_i, \dots, k_j, c_j p, \dots, \\ c_i p, \dots, C_R p, \dots, c_{iw} p, k_{iw}, \dots, k_{jw}, c_{jw}, \dots];$$

— operatorowe podatności dynamiczne gałęzi drzewa zapisano w postaci macierzy diagonalnej

$$\text{DIAG } {}_1W(p) = \text{DIAG} \left[\frac{1}{J_{zr} p^2}, \frac{1}{J_k p^2}, \dots, \frac{1}{m_i p^2}, \dots, \frac{1}{m_j p^2}, \dots, \frac{1}{M_L p^2}, \dots, \frac{1}{M_R p^2}, \dots, \frac{1}{m_{iw} p^2}, \dots, \frac{1}{m_{jw} p^2}, \dots \right].$$

Łącząc odpowiednio punkty przyporządkowane elementom macierzy ${}_1\mathring{S}$, ${}_1\mathring{S}$, ${}_2\mathring{S}_w$, ${}_2\mathring{S}$, ${}_2\mathring{S}$ jak podano poniżej:

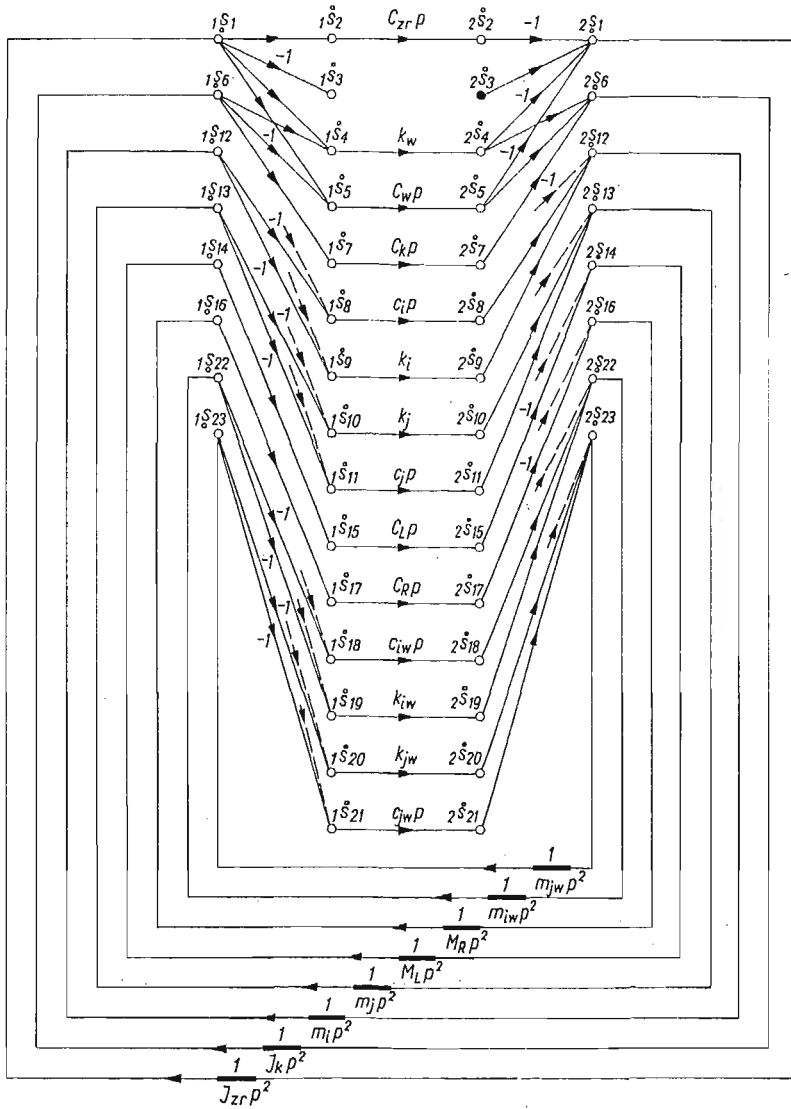
${}_1\mathring{S} - {}_1\mathring{S}$ — sympleksami o wagach 1, -1 i R zgodnie z uogólnionym II prawem Kirchhoffa,

$({}_2\mathring{S} + {}_2\mathring{S}_w) - {}_2\mathring{S}$ — sympleksami o wagach 1, -1 i R zgodnie z uogólnionym I prawem Kirchhoffa,

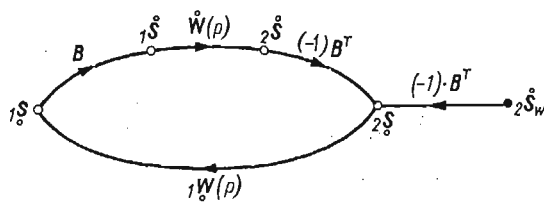
${}_1\mathring{S} - {}_2\mathring{S}$ — sympleksami o wagach równych odpowiednio elementom macierzy $\mathring{W}(p)$ zgodnie z równaniami biegunowymi cięciw grafu,

${}_2\mathring{S} - {}_1\mathring{S}$ — sympleksami o wagach równych odpowiednio elementom macierzy ${}_1\mathring{W}(p)$ zgodnie z równaniami biegunowymi gałęzi drzewa tworzącego, uzyskano graf przepływu sygnałów jak na rys. 4. Graf ten można przedstawić w postaci czwórnika w reprezentacji macierzowej (rys. 5), gdzie \mathbf{B} , $(-1) \cdot \mathbf{B}^T$ oznaczają macierze rozptyłu sygnałów zmiennych równoległych i szeregowych²⁾.

²⁾ Stosowane są również odpowiednio oznaczenia: ${}_1\vec{\mathbf{B}}$ i ${}_2\vec{\mathbf{B}}$.



Rys. 4



Rys. 5

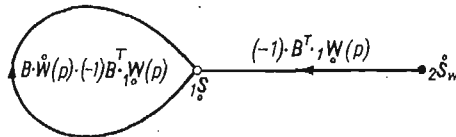
[219]

Dla grafu z rys. 5 macierz \mathbf{B} ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & \dots & 8 & 9 & \dots & 10 & 11 & \dots & 15 & 17 & \dots & 18 & 19 & \dots & 20 & 21 & \dots \\ \text{*/**} & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & \cdot \\ & \cdot \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & \cdot \\ & \cdot \\ 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & \cdot \\ & \cdot \\ 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & \cdot \\ & \cdot \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & \cdot \\ & \cdot \\ 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & \cdot \\ & \cdot \\ 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & \dots \\ & \cdot \\ & \cdot \end{array} \end{array}$$

* Cięgiwy, ** odcięcia

Macierzowy graf przepływu sygnałów przedstawiony na rys. 5 można zredukować [5] do postaci ukazanej na rys. 6.



Rys. 6

Ostatecznie z grafu przedstawionego na rys. 6 wynika następujące równanie macierzowe:

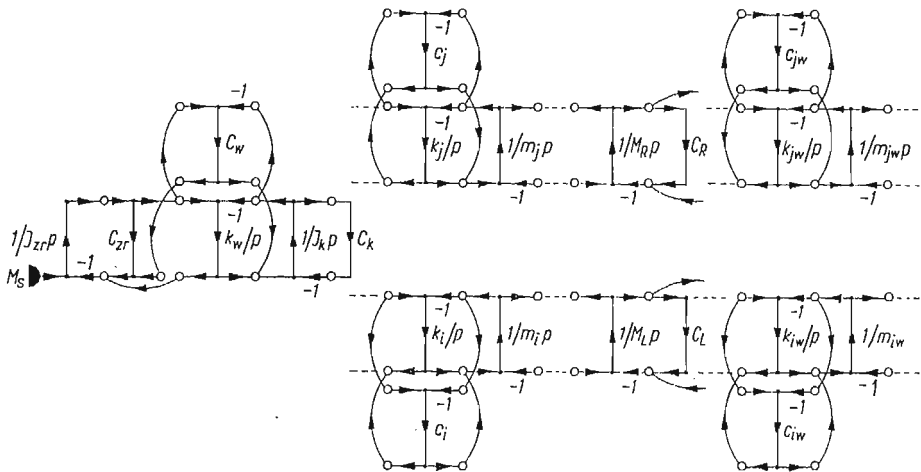
$${}_1\dot{S}_w = {}_2\dot{S}_w \cdot (-1)B^T \cdot {}_1\dot{W}(p) \cdot [1 - B \cdot \dot{W}(p) \cdot (-1)B^T \cdot {}_1\dot{W}(p)]^{-1},$$

mogące być podstawą do wyznaczenia:

- macierzy zmiennych odpowiedzi w funkcji sił wzbudzających,
- przepustowości operatorowej i widmowej układu wyciągowego,
- równania charakterystycznego układu wyciągowego.

4. Czwórnikowy graf przepływu sygnałów jako podstawa zbudowania modelu analogowego układu wyciągowego

Jak wcześniej zauważono, układ wyciągowy charakteryzuje się rozgałęzioną strukturą kaskadową. Dyskretne układy mechaniczne o strukturze kaskadowej wygodnie jest modelować czwórnikowym grafem przepływu sygnałów. Graf taki buduje się przez kaskadowe łączenie grafów czwórników elementów układu mechanicznego [9]. Czwórnikowy graf przepływu sygnałów układu wyciągowego z rys. 2 przedstawiono na rys. 7. Graf ten można również uzyskać bezpośrednio przez przekształcenie grafu przepływu sygnałów z rys. 4.



Rys. 7

Jeżeli wszystkie elementy modelu układu są liniowe, to uzyskany graf może być podstawą wyznaczania operatorowej funkcji przenoszenia między źródłem a dowolnym węzłem [9, 14].

W celu przeprowadzenia analizy na maszynie analogowej uzyskany graf przepływu sygnałów można przetransformować na program dla EMA, ponieważ grafom czwórników odpowiadają izomorficzne czwórniki analogowe [9]. Transformacja grafu przepływu sygnałów na model analogowy polega na (rys. 8):



Rys. 8

- zastąpieniu zbioru zmiennych przyporządkowanych wierzchołkom grafu zbiorem zmiennych analogowych \bar{s} ,
- zastąpieniu operatorowych wag G_{ij} wszystkich gałęzi grafu przepływu sygnałów członami operacyjnymi maszyny analogowej realizującymi te wagi,
- włączeniu biernych członów operacyjnych wprowadzających opisane relacje transformacji α_{ij} .

Jeżeli a_{s1} i a_{sJ} są przyjętymi współczynnikami skali zmiennych, to relacje α_{ij} mają postać

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{sJ}}{a_{s1}}.$$

Uzyskany w ten sposób model analogowy układu wyciągowego można uprościć, korzystając z podstawowych zasad przekształcenia schematów analogowych, i wykorzystać do badania procesów przejściowych i ruchu ustalonego na elektronicznej maszynie analogowej.

5. Wnioski

1. Układ wyciągowy głębokiego szybu kopalni można przedstawić w postaci modelu o rozgałęzionej strukturze kaskadowej.
2. Zastosowanie macierzowego grafu przepływu sygnałów do modelowania układu wyciągowego pozwala na szybkie uzyskanie zawartego, macierzowego opisu zjawisk zachodzących w przyjętym modelu. Pozwala to na optymalizację i automatyzację obliczeń.
3. W opisie układów mechanicznych czwórnikowym grafem przepływu sygnałów można pominąć etap wypisywania równań różniczkowych, co przyspiesza sporządzenie programu dla elektronicznej maszyny analogowej.
4. Izomorfizm grafu czwórnikowego elementu modelu mechanicznego i jego czwórnika analogowego umożliwia dowolne rozbudowywanie kaskadowej struktury przyjętego modelu bez konieczności rozbudowania układu równań. Ułatwia to modyfikację parametrów, zmianę warunków początkowych i sygnałów wejściowych w procesie prowadzenia eksperymentu analogowego.

Literatura cytowana w tekście

1. Ф. В. Флоринский, В. В. Безпалько, В. В. Колосов, *О динамическом аналоге подъемной установки*, Сб. Стальные канаты № 10, Киев 1972.
2. В. В. Безпалько, Л. В. Колосов, А. П. Нестеров, Ю. Р. Бредихин, *О выборе эквивалентных схем шахтных многоканатных подъемных установок*, Известия вузов, Горный журнал, 1 (1971).
3. L. SZKLARSKI, R. WOJNICKI, A. STANKIEWICZ, *Badania dynamiki maszyn wyciągowych z uwzględnieniem sprężystości liny*, Materiały Międzynarodowej Konferencji Automatyzacji Górnictwa, t. 1, Kraków 1969, s. 9—14.
4. L. SZKLARSKI, A. SKALNY, *Teoretyczne zagadnienia maszyn wyciągowych*, cz. 1, Warszawa 1975.
5. Ю. Г. Киричок, В. М. Чермалых, *Привод шахтных подъемных установок большой мощности*, Недра, Москва 1972.
6. W. KLICH, M. WÓJCİK, *Zastosowanie dyskretnego modelu urządzenia wyciągowego do analizy dynamiki awaryjnego hamowania*, Zbiór referatów XV Sympozjum Optymalizacja w Mechanice. PTMTS, Gliwice-Wisła 1976, s. 173—186.
7. Streszczenie referatów Sympozjum Naukowo-Technicznego «Kierunki projektowania i budowy urządzeń wyciągowych i głównego odwadniania w polskim górnictwie miedziowym», Lubin—Wrocław—Kraków 1976.
8. Praca zbiorowa pod red. J. WOJNAROWSKIEGO, *Pewne problemy modelowania wieloliniowych układów wyciągowych*, Gliwice 1976, s. 71.

9. L. ROBICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Grafy przepływu sygnałów*, Warszawa 1968.
10. J. WOJNAROWSKI, *Graf jako język struktury układu*, Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, Mechanika, z. 52, (1973), 3—21.
11. J. WOJNAROWSKI, *Metodyczne ćwiczenia laboratoryjne z mechanicznej teorii maszyn*, Skrypt Uczel-niany Pol. Śląskiej nr 600, Gliwice 1975.
12. В. Н. ФЕДОРОВИЧ, И. М. ОРЛОВА, А. А. ИВАНОВ, *Расчет динамических моделей с ручагами связи электромеханических колебательных систем методом графов*, Вопросы радиоэлектроники, Тех-ника приводной связи, 3 (1971).
13. J. WOJNAROWSKI, *Analiza dyskretnych liniowych układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody metodą grafów*, Zbiór referatów VII Polsko-Czechosłowackiej Konferencji Dynamiki Maszyn, Gliwice 1971, s. 567—581.
14. J. S. MASON, H. J. ZIMMERMANN, *Electronic Circuits, Signal and Systems*, New York—London 1960.
15. J. WOJNAROWSKI, *Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych*, Pol. Śląska — PTMITS Oddział Gliwice, z. 38, Gliwice 1977.

Р е з ю м е

ГРАФЫ СИГНАЛОВ В МОДЕЛИРОВАНИИ КАСКАДНОЙ СТРУКТУРЫ
ПОДЪЕМНОЙ СИСТЕМЫ

В работе представлен метод моделирования подъемной системы матричным графом сигналов. Используя наблюдение, что подъемная система с большой глубиной вытягивания характеризуется каскадной структурой, разработана её модель в виде четырехполосного графа сигналов. Изоморфная с ним аналоговая система может быть основой в исследовании влияния параметров подъемной системы на её динамические характеристики.

S u m m a r y

SIGNAL FLOW GRAPHS IN MODELLING OF THE CASCADE STRUCTURE OF THE LIFTING
SYSTEM

The modelling procedure of the lifting system by means of the matrix signal flow graph has been presented. Using the fact that the deep pulling lifting system is characterized by a cascade structure, the four terminal signals flow graph has been used to model it. The analogue system isomorphous with the graph may serve as the basis for investigating the influence of the lifting system parameters on its dynamic characteristics.

INSTYTUT PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 sierpnia 1977 r.

METODA FIKCYJNYCH ŹRÓDEŁ ZMIENNEJ BIEGUNOWEJ JAKO SPOSÓB
WYZNACZANIA PODATNOŚCI DYNAMICZNEJ ZŁOŻONYCH UKŁADÓW
MECHANICZNYCH

JERZY ŚWIDER, JÓZEF WOJNAROWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Jedną z charakterystyk układu mechanicznego jest macierz podatności dynamicznych, której elementy stanowią, w opisie wielowejściowych układów mechanicznych, funkcje odwzorowujące harmoniczne zmienne przepływowe i -tego wejścia w zmienne biegunowe j -tego wyjścia. Znane są różne metody wyznaczania funkcji podatności dynamicznej. Metody klasyczne wymagają zawsze opisu analizowanego układu w formie równań różniczkowych [1, 2, 3] i przez to stwarzają określone trudności w sformułowaniu zagadnienia dla przygotowania programu na maszynę cyfrową. Metody niekonwencjonalne umożliwiają opuszczenie etapu układania równań różniczkowych. W pracach [4, 5] podano sposób wyznaczania funkcji podatności dynamicznych układów mechanicznych przy użyciu grafów i liczb strukturalnych. W pracy [6] rozpatrzono zagadnienia analizy górniczego układu wyciągowego przy zastosowaniu macierzowych grafów przepływu sygnałów¹⁾. Uzyskany w niej graf może być podstawą wyznaczania charakterystyk dynamicznych przyjętego modelu, w tym także funkcji podatności. Zastosowanie tego grafu do obliczenia macierzy podatności jest jednak utrudnione z uwagi na istnienie pętli²⁾. Złożoność obliczeń można uprościć, jeśli do wyznaczania macierzowego grafu przepływu sygnałów zastosować metodę fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej. W niniejszej pracy przedstawiono tę metodę, a na przykładzie górniczej maszyny wyciągowej pokazano sposób wyznaczania funkcji podatności dynamicznej.

2. Metoda fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej

Podstawą tej metody jest teza, że swobodny układ mechaniczny można modelować grafem biegunowym $\overset{\infty}{\infty}X$ posiadającym gałęzie wymuszenia, które reprezentują fikcyjne źródła zmiennej biegunowej. Ponadto w metodzie tej korzystano z transformacji grafu $\overset{\infty}{\infty}X$ w graf przepływu sygnałów [4, 6, 7].

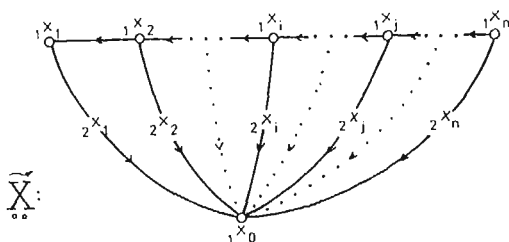
¹⁾ Macierzowym grafem przepływu sygnałów nazywamy taki graf, którego transmitancje (przyporządkowane gałęziom) i zmienne (przyporządkowane wierzchołkom) są macierzami.

²⁾ Por. rys. 6 [6].

Rozważmy układ mechaniczny o n stopniach swobody. Graf takiego układu [4, 8, 9] przyjmie postać jak na rys. 1. Zgodnie z definicją grafu biegunowego, każdej krawędzi przypisana jest para zmiennych wielkości fizycznych, czyli istnieje dla grafu przyporządkowanie

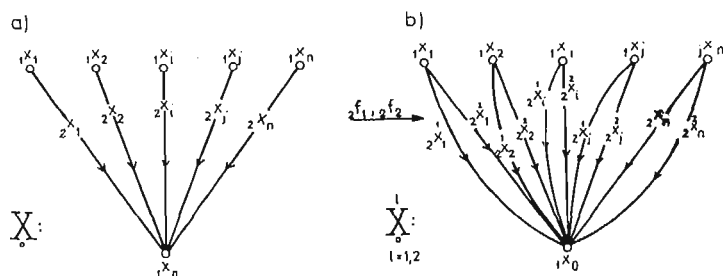
$${}_2f: {}_2X \rightarrow [{}_1S, {}_2S],$$

gdzie ${}_1S$ jest zbiorem zmiennych biegunowych, np. zbiorem przemieszczeń, ${}_2S$ jest zbiorem zmiennych przepływowych, np. zbiorem sił, ${}_2f$ jest funkcją przyporządkowującą.



Rys. 1

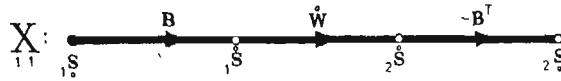
Jeśli przekształcimy graf $\overset{\infty}{X}$ tak, że drzewo Lagrange'a (rys. 2a) zastąpimy drzewem z multigałęziami (rys. 2b), to uzyskamy graf z «multidrzewem Lagrange'a». Każdej z gałęzi ${}_2x$ multidrzewa przyporządkowano parę zmiennych $[{}_1s, {}_2s]$, a każdej z gałęzi ${}_1x$ — tylko zmienną biegunową ${}_1s$.



Rys. 2

Zmienne biegunowe ${}_1s_i$ przyporządkowane gałęziom multigałęzi $({}_2x, {}_2x)_i$, ($i = 1 \div n$) są sobie równe, ponieważ gałęzie te rozpięte są na parze tych samych wierzchołków $({}_1x_0, {}_1x_i)$. Gałęzie ${}_2x_i$, ($i = 1 \div n$) traktować będziemy jako fikcyjne źródła zmiennej biegunowej, a utworzone z nich drzewo $\overset{1}{X}_0$ nazwiemy «drzewem fikcyjnych źródeł» zmiennej biegunowej. Tak uzyskany graf $\overset{\infty}{X}$, czyli graf z multidrzewem Lagrange'a $\overset{1}{X}_0$, stanowi podstawę do przeprowadzenia transformacji układu w macierzowy graf przepływu sygnałów. Stosując procedurę podaną w pracy [6] i przyjmując jako drzewo tworzące — drzewo $\overset{1}{X}_0$, uży-

skujemy macierzowy graf przepływu sygnałów (rys. 3). Dzięki przekształceniu grafu biegunowego do grafu z multidrzewem Lagrange'a $\overset{I}{X}$ uzyskujemy graf $\overset{\infty}{X}$, w którym wszystkie krawędzie reprezentujące rzeczywiste elementy układu mechanicznego są cięciwami, a więc należą do przeciwdrzewa $\overset{\circ}{X}$. Uzyskany przez transformację graf przepływu sygnałów redukuje się wtedy do ścieżki prostej, zawierającej trzy łuki (rys. 3), w której:



Rys. 3

- $1S$ — macierz wierszową fikcyjnych źródeł zmiennych biegunowych,
- $1\overset{\circ}{S}$ — macierz wierszową zmiennych biegunowych cięciw,
- $2\overset{\circ}{S}$ — macierz wierszową zmiennych przepływowych cięciw,
- $2S$ — macierz wierszową zmiennych przepływowych odpowiadających, w reprezentacji dualnej, fikcyjnym źródłom zmiennych biegunowych,
- $\overset{\circ}{W}$ — diagonalną macierz operatorowych sztywności dynamicznych wszystkich rzeczywistych elementów układu mechanicznego,
- $B, -B^T$ — macierze rozptywu sygnałów [6]³⁾ wynikające z I i II postulatu dla grafów biegunowych [4].

Macierz rozptywu sygnałów charakteryzuje rozptyw zmiennych przepływowych $2s_i$ w wierzchołkach i zmiennych biegunowych $1s_i$ w konturach grafu biegunowego.

Zatem każdy graf biegunowy swobodnego układu mechanicznego można, dzięki przekształceniu do grafu $\overset{\infty}{X}$ z drzewem fikcyjnych źródeł zmiennej $1s_i$, sprowadzić do ścieżki prostej macierzowego grafu przepływu sygnałów.

3. Sposób wyznaczania macierzy podatności dynamicznych

Dokonując inwersji ścieżki prostej grafu przedstawionego na rys. 3, łatwo spostrzec, że inwersja iloczynu $B \cdot \overset{\circ}{W} \cdot (-B^T)$ jest macierzą operatorowych podatności układu⁴⁾

$$Y(p) = - [B \cdot \overset{\circ}{W} \cdot (-B^T)]^{-1},$$

co jest rozwiązaniem sformułowanego problemu.

Dla $p = \hat{i}\omega$, gdzie $\hat{i} = \sqrt{-1}$, macierz operatorowa $Y(p)$ staje się macierzą podatności dynamicznych układu mechanicznego [3, 4].

Wtedy

$$Y(\hat{i}\omega) = [{}_{2s_i}Y_{1s_j}(\hat{i}\omega)], \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie ${}_{2s_i}Y_{1s_j}(\hat{i}\omega)$ oznacza podatność dynamiczną układu między i -tą zmienną przepływową (wzbudzenie układu), a j -tą zmienną biegunową (odpowiedź układu).

W takim ujęciu wyznaczanie funkcji podatności dynamicznych układu mechanicznego polega na:

³⁾ Por. odnośnik 1), s. 218.

⁴⁾ Znak minus wynika z konieczności zmiany znaku zmiennej biegunowej wzbudzenia w dualnej reprezentacji grafu $\overset{\infty}{X}$.

- przedstawieniu swobodnego układu mechanicznego w postaci grafu obciążonego $\overset{\text{II}}{\overset{\text{I}}{\mathbb{X}}}$,
- przejściu z grafu swobodnego $\overset{\text{II}}{\overset{\text{I}}{\mathbb{X}}}$ do grafu biegunowego z multidrzewem Lagrange'a $\overset{\text{I}}{\mathbb{X}}$,
- dokonaniu transformacji uzyskanego grafu w macierzowy graf przepływu sygnałów $\overset{\text{I}}{\mathbb{X}}$ przy wyborze drzewa fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej ($\overset{\text{I}}{\mathbb{X}}$) jako drzewa tworzącego graf,
- wyznaczeniu odwrotności transmitancji ścieżki prostej grafu $\overset{\text{I}}{\mathbb{X}}$.

Należy zwrócić uwagę, że przy praktycznym wykorzystaniu przedstawionej metody wyznaczania podatności dynamicznej złożonych układów mechanicznych, nie ma potrzeby przeprowadzania całego ciągu transformacji. Opisane transformacje i przekształcenia dokonane na grafach należy traktować jedynie jako dowód, że wyrażenie $-\mathbf{[B \cdot \overset{\circ}{W} \cdot (-B^T)]}^{-1}$ jest macierzą funkcji podatności dynamicznych. Natomiast macierze \mathbf{B} , $\overset{\circ}{\mathbf{W}}$ i $-\mathbf{B}^T$ można wypisać bezpośrednio z grafu biegunowego analizowanego układu.

Twierdzenie: Macierz $\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)$ podatności dynamicznych układu mechanicznego, uzyskana metodą fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej, jest zawsze macierzą kwadratową o wymiarze $n \times n$, gdzie n jest liczbą stopni swobody układu. Wskaźniki kolumn macierzy $\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)$ odpowiadają wskaźnikom elementów w wierszu odpowiedzi układu, a wskaźniki wierszy — wskaźnikom elementów w wierszu wzbudzenia układu.

Aby wykazać prawdziwość tego twierdzenia przyjmijmy, że:

- L — jest liczbą elementów układu mechanicznego, odpowiadającą liczbie krawędzi jego grafu biegunowego,
 - n — jest liczbą stopni swobody układu mechanicznego, odpowiadającą liczbie gałęzi drzewa Lagrange'a jego grafu biegunowego,
 - w_m ($m = 1, 2, \dots, i, j, \dots$) — jest wskaźnikiem wiersza macierzy $\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)$,
 - k_r ($r = 1, 2, \dots, i, j, \dots$) — jest wskaźnikiem kolumny macierzy $\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)$,
 - ${}_1s_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) — jest elementem macierzy wierszowej ${}_1\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ odpowiedzi układu,
 - ${}_2s_\beta$ ($\beta = 1, 2, \dots, n$) — jest elementem macierzy wierszowej ${}_2\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ wzbudzenia układu,
- Obowiązują również zależności

$${}_1\overset{\circ}{\mathbf{S}} = {}_2\overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Y}(\hat{i}\omega),$$

$$\mathbf{Y}(\hat{i}\omega) = \mathbf{[B \cdot \overset{\circ}{W} \cdot (-B^T)]}^{-1}, \quad (\max w_m, \max k_r).$$

Wtedy macierz podatności dynamicznych przyjmie postać macierzy kwadratowej:

$$w_m \overbrace{\{[\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)]_{n \times n}\}}^{k_r} \rightarrow \begin{cases} m = 1, 2, \dots, i, j, \dots, n, \\ r = 1, 2, \dots, i, j, \dots, n, \end{cases}$$

a wskaźniki wierszy m i kolumn r macierzy $\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)$ odpowiadają wskaźnikom zmiennych przepływowych β i biegunowych α :

$$r \leftrightarrow \alpha, \quad m \leftrightarrow \beta.$$

Dowód: Z drugiego postulatu dla grafów biegunowych wynika $[\mathbf{B}]_{n \times L}$. Macierz sztyw-

ności dynamicznych wszystkich elementów układu mechanicznego jest diagonalną $[\mathbf{W}]_{L \times L}$.

Zatem

$$-[\mathbf{B}]_{n \times L} \cdot [\mathbf{W}]_{L \times L} \cdot [-\mathbf{B}^T]_{L \times n}]^{-1} = [\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)]_{n \times n}$$

i $r = 1, 2, \dots, i, j, \dots, n$, $m = 1, 2, \dots, i, j, \dots, n$.

Z zależności

$${}_2\mathbf{S} \cdot \mathbf{Y}(\hat{i}\omega) = {}_1\mathbf{S}$$

wynika, że przy jednym niezerowym i -tym elemencie ${}_2S_i$ macierzy wzbudzenia ${}_2\mathbf{S}$ otrzymujemy

$${}_1S_j = {}_2S_i [\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)]_{w_i, k_j},$$

co implikuje odpowiedniość wskaźników:

$$r \leftrightarrow \alpha, \quad m \leftrightarrow \beta.$$

Podatność dynamiczna ${}_2S_i Y_{1s_j}(\hat{i}\omega)$ jest więc elementem macierzy kwadratowej $\mathbf{Y}(\hat{i}\omega)$ leżącym w i -tym wierszu j -tej kolumny c.n.u.

W ogólnym przypadku funkcje ${}_2S_i Y_{1s_j}$ są zespolone i można je zapisać jako

$${}_2S_i Y_{1s_j}(\hat{i}\omega) = \operatorname{Re}[{}_2S_i Y_{1s_j}(\hat{i}\omega)] + \operatorname{Im}[{}_2S_i Y_{1s_j}(\hat{i}\omega)] \cdot \hat{i}$$

lub

$${}_2S_i Y_{1s_j}(\hat{i}\omega) = A(\omega) e^{i\hat{\Phi}(\omega)},$$

gdzie $A(\omega)$ jest współczynnikiem uwielokrotnienia amplitudy, $\hat{\Phi}(\omega)$ jest kątem przesunięcia fazowego.

Dla zachowawczych układów mechanicznych funkcje podatności dynamicznych są rzeczywiste i stanowią wprost współczynniki uwielokrotnienia między i -tym wzbudzeniem harmonicznym i j -tą odpowiedzią układu.

4. Wyznaczenie podatności dynamicznej układu wyciągowego

Dla ilustracji metody rozważymy górnica maszynę wyciągową [10], której model przedstawiono na rys. 4.

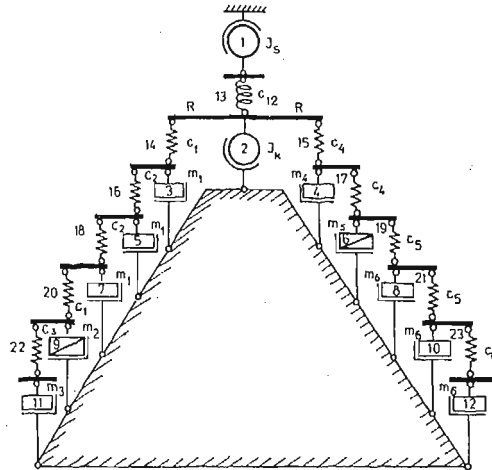
W modelu tym wyodrębniono: wirnik silnika, maszyny wyciągowej (1), koło pędne (2), elementy masy dyskretnego modelu lewej liny (3, 5, 7), element masy dyskretnego modelu prawej liny (4), lewe naczynie wydobywcze⁵⁾ (9), prawe naczynie wydobywcze z ładunkiem (6), element masy dyskretnego modelu lewej części liny wyrównawczej (11), elementy masy dyskretnego modelu prawej części liny wyrównawczej (8, 10, 12), promień koła pędnego (R), sztywność skrętną wału pędnego (13), sztywności wzdłużne dyskretnego modelu lewej liny (14, 16, 18, 20), sztywności wzdłużne dyskretnego modelu prawej liny (15, 17), sztywność wzdłużną dyskretnego modelu lewej części liny wyrównawczej (22), sztywności wzdłużne dyskretnego modelu prawej części liny wyrównawczej (19, 21, 23). Do dalszych obliczeń przyjęto następujące parametry, wyznaczone dla rzeczywistej górniczej maszyny wyciągowej⁶⁾:

⁵⁾ Stosowana jest również nazwa skip.

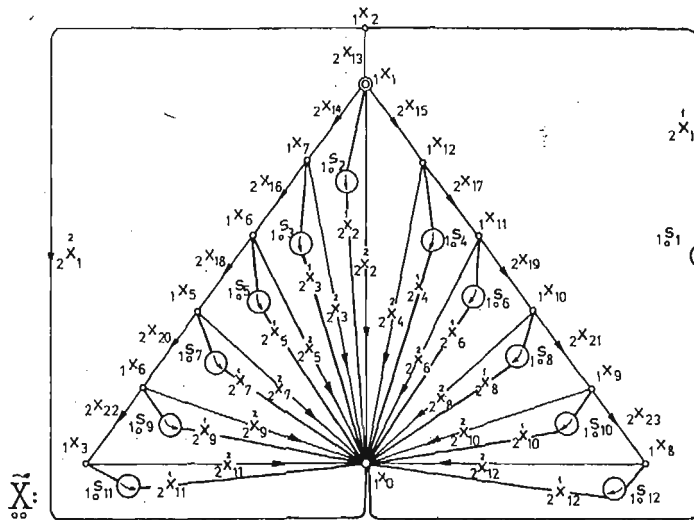
⁶⁾ Projektowanej dla jednej z kopalń.

$J = 5,3 \cdot 10^{-3} [\text{MNms}^2]$, $C_{12} = 500 [\text{MNm}(\text{rd})^{-1}]$, $J_k = 5,2 \cdot 10^{-2} [\text{MNms}^2]$,
 $C_1 = 2,2 [\text{MNm}^{-1}]$, $C_2 = 1,1 [\text{MNm}^{-1}]$, $C_3 = 1,16 [\text{MNm}^{-1}]$, $C_4 = 3,2 [\text{MNm}^{-1}]$,
 $C_5 = 0,72 [\text{MNm}^{-1}]$, $m_1 = 5,55 \cdot 10^{-3} [\text{MNs}^2\text{m}^{-1}]$, $m_2 = 19,2 \cdot 10^{-3} [\text{MN}^{-1}\text{s}^2]$,
 $m_3 = 1,1 \cdot 10^{-3} [\text{MNs}^2\text{m}^{-1}]$, $m_4 = 3,8 \cdot 10^{-3} [\text{MNs}^2\text{m}^{-1}]$, $m_5 = 32 \cdot 10^{-3} [\text{MNs}^2\text{m}^{-1}]$,
 $m_6 = 5 \cdot 10^{-3} [\text{MNs}^2\text{m}^{-1}]$.

Tak przyjęty model opisano grafem obciążonym $\overset{\infty}{\underset{\infty}{X}}$ (rys. 5). Graf ten przekształcono do grafu z drzewem Lagrange'a fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej ${}_1S_i$, ($i = 1, 2, \dots, 12$).



Rys. 4



Rys. 5

Zgodnie z procedurą podaną w pracy [6] uzyskany graf obciążony $\overline{\overline{X}}$ przetransformowano w macierzowy graf przepływu sygnałów X_{11} (rys. 3) z opisującymi go macierzami:

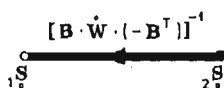
$$\begin{aligned} {}_1S &= [{}_1s_i], (i = 1, 2, \dots, 12), \\ {}_1S &= [{}_1s_j], (j = 1, 2, \dots, 23), \\ {}_2S &= [{}_2s_j], (j = 1, 2, \dots, 23), \\ {}_2S &= [{}_2s_i], (i = 1, 2, \dots, 12), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{W} = \text{DIAG} & [0,0053 p^2, 0,052 p^2, 0,00555 p^2, 0,0038 p^2, \\ & 0,00555 p^2, 0,032 p^2, 0,00555 p^2, 0,0053 p^2, \\ & 0,0192 p^2, 0,0053 p^2, 0,0011 p^2, 0,0053 p^2, \\ & 500, 2,2, 3,2, 1,1, 3,2, 1,1, 0,72, 2,2, \\ & 0,72, 1,16, 0,72], \end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę, że wierzchołek ${}_1x_1$ grafu obciążonego $\overline{\overline{X}}$ (rys. 5) jest wierzchołkiem incydentności krawędzi opisanych niejednorodnymi zmiennymi przepływowymi i biegunowymi. Każdy punkt grafu biegunowego, w którym incydentne są krawędzie opisane niejednorodnymi zmiennymi nazywać będziemy «wierzchołkiem niejednorodnych zmiennych», a każdy kontur zawierający taki wierzchołek — «konturem niejednorodnych zmiennych».

Stwierdzenie: Jeżeli graf biegunowy $\overline{\overline{X}}$ posiada wierzchołek (lub wierzchołki) niejednorodnych zmiennych, to zawsze macierze rozptyłu sygnałów B i $-B^T$ grafu X_{11} zawierają mianowane elementy ujednorodniające zmienne, zwykle różne od jedności⁷⁾.

Powyższe stwierdzenie wynika z faktu, że macierze $-B^T$ i B są macierzami współczynników zmiennych przepływowych i biegunowych w równaniach wyrażających pierwsze i drugie uogólnione prawo Kirchhoffa. Redukując graf przepływu sygnałów X_{11} do jednego łuku oraz dokonując jego inwersji uzyskano graf pokazany na rys. 6.

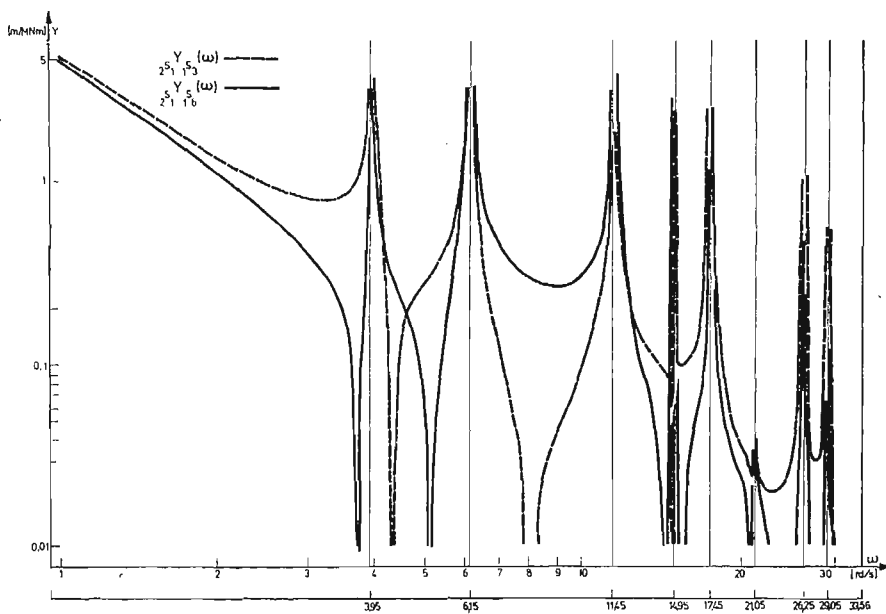


Rys. 6

Z rys. 6 wynika bezpośrednio, że transmitancja uzyskanego łuku $Y(p) = [B \cdot \dot{W} \times (-B^T)]^{-1}$ jest macierzą operatorowych podatności dynamicznych modelu układu wyciągowego. Dla przyjętych parametrów modelu układu, oraz przy założeniu $p = i\omega$ wyznaczono na maszynie cyfrowej WANG funkcje podatności dynamicznej między silnikiem maszyny wyciągowej a lewym pustym naczyniem wydobywczym — ${}_{2s_1}Y_{1s_9}$ oraz prawym naczyniem wydobywczym z ładunkiem ${}_{2s_1}Y_{1s_6}$.

Wykresy uzyskanych funkcji podatności dynamicznych górniczej maszyny wyciągowej (rys. 7) pozwalają wnioskować o zachowaniu się odkształceń charakterystycznych

⁷⁾ Por. str. 276 [4]



Rys. 7

węzłów maszyny wyciągowej w funkcji częstości wzbudzenia, co jednak nie było celem niniejszej pracy.

Skalę częstości uzyskanych wykresów ograniczono do 30 [rds⁻¹] z uwagi na to, że poza tym zakresem wartości obydwu funkcji $Y(\omega)$ są bardzo małe [rzędu $10^{-4}(m[\text{MNm}]^{-1})$]. Jest to również uzasadnione faktem, że w przedziale $0 \div 30$ [rds⁻¹] znajduje się osiem pierwszych niezerowych częstości rezonansowych układu. Z maszyny cyfrowej uzyskano poszukiwane funkcje (w postaci wydruku) w przedziale $0,1 \div 500$ [rds⁻¹].

5. Wnioski

Opracowana metoda wyznaczania podatności dynamicznych jest wygodnym narzędziem w prowadzeniu numerycznej analizy drgań złożonych układów mechanicznych. Charakteryzuje ją:

- pominięcie etapu sporządzenia modelu matematycznego w formie równań różniczkowych ruchu,
- prosta postać macierzowego grafu przepływu sygnałów przedstawiającego relacje między zmiennymi przepływowymi wzbudzenia a zmiennymi biegunowymi odpowiedzi układu,
- łatwość wprowadzenia zmian do programu obliczeń maszyny cyfrowej przy modyfikacji parametrów układu,
- szybkie uzyskiwanie wyników numerycznych stanowiących elementy macierzy podatności.

W szczególności, wyznaczone dla przyjętego modelu górniczej maszyny wyciągowej funkcje podatności dynamicznych (rys. 7) umożliwiają ocenę:

- częstości drgań własnych i szerokości pasm rezonansowych,
- wartości liczbowych podatności dynamicznych między silnikiem maszyny wyciągowej a lewym i prawym naczyniem wydobywczym w analizowanym położeniu układu.

Przedstawiona metoda wyznaczania podatności dynamicznych może być stosowana w specjalistycznych biurach projektowych, a uzyskane wyniki numeryczne mogą zostać wykorzystane w projektowaniu górniczych maszyn wyciągowych do dużej głębokości ciągnięcia urobku.

Literatura cytowana w tekście

1. Y. TAKAHASHI, H. J. RABINS, D. M. AUSLANDER, *Sterowanie i systemy dynamiczne*, WNT, Warszawa 1976.
2. R. E. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
3. V. STREJC, M. SALAMON, Z. KOTEK, M. BALDA, *Teoria regulacji automatycznej*, WNT Warszawa 1962.
4. J. WOJNAROWSKI, *Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych*, Politechnika Śląska PTMTS Oddz. Gliwice z. 38, Gliwice 1977.
5. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych wyższej kategorii w modelowaniu układów mechanicznych*, XVI Sympozjum «Modelowanie w Mechanice», PTMTS Oddz. Gliwice, Beskid Śląski, marzec 1977, s. 505—517.
6. J. ŚWIDER, J. WOJNAROWSKI, *Grafy przepływu sygnałów w modelowaniu kaskadowej struktury układu wyciągowego*, (w tym zeszycie), s. 215—223.
7. J. S. MASON, H. J. ZIMMERMANN, *Elektronic Circuits, Signal and Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York — London 1960.
8. H. E. KOENIG, W. A. BLACKWELL, *Electromechanical System Theory*, McGraw — Hill Book Company, New York 1961.
9. J. WOJNAROWSKI, *Graf jako język struktury układu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika z. 52, Gliwice 1973, s. 3—21.
10. Praca zbiorowa pod red. J. WOJNAROWSKIEGO, *Pewne problemy modelowania wieloliniowych układów wyciągowych*, Gliwice 1976.

Резюме

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЮСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ КАК СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОДАТЛИВОСТИ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе, используя метод фиктивных источников полюсной переменной нагруженного графа, представлен способ получения матричных графов сигналов сложных механических систем. На примере модели горной подъемной машины определены функции динамической податливости, как элементы обратной матрицы передаточной функции пути графа сигналов.

S u m m a r y

THE FICTICIOUS SOURCE METHOD IN POLAR COORDINATES AS THE METHOD OF
OBTAINING DYNAMICAL FLEXIBILITY OF COMPOSITE MECHANICAL SYSTEMS

In this paper authors apply the fictitious source method in polar variables of the loaded graph and show the method of obtaining the matrix signal flow graphs of composite mechanical systems. Using the example of a model of a mining hoisting machine, dynamical flexibility function with factors of inverse transmittance matrix of path signal flow simple graph, was determined.

INSTYTUT PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 sierpnia 1977 r.

O PEWNYM ZAMKNIĘTYM ROZWIĄZANIU PROBLEMU PROPAGACJI PŁASKIEJ FALI
UDERZENIOWEJ W NIEJEDNORODNYM PLASTYCZNYM OŚRODKU POLITROPOWYM
Z LINIOWOSPREŻYSTYM ODCIĄŻENIEM

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

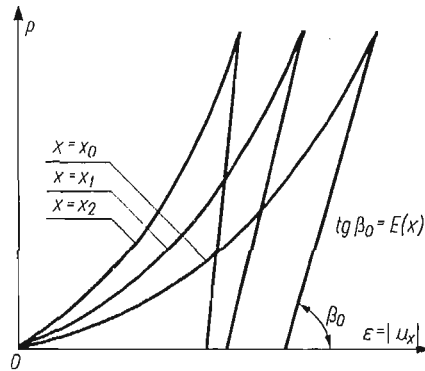
Problem propagacji fal uderzeniowych w niejednorodnych, politropowych ośrodkach plastycznych jest ciągle aktualny i otwarty. Był on już rozpatrywany przez wielu autorów. I tak, w monografii [1] przedstawione jest rozwiązanie problemu propagacji płaskich, cylindrycznych i kulistych fal uderzeniowych w suchym, niejednorodnym gruncie, modelowanym gazem plastycznym [2]. Zastosowano tutaj skokową aproksymację niejednorodności ośrodka, przy zachowaniu stałej jego gęstości za frontem fali (gaz plastyczny). Zagadnienie propagacji płaskiej fali uderzeniowej w ośrodku trójskładnikowym ze stałą gęstością w strefie obciążenia wraz z odbiciem od nieruchomej przegrody rozpatrzono w pracy [3]. W kolejnych publikacjach [4—6] podano efektywną metodę konstrukcji zamkniętych rozwiązań propagacji fal sprężysto-plastycznych typu uderzeniowego w określonej klasie ośrodków niejednorodnych, których ruch opisuje się równaniem Eulera-Darboux [7]. W pracach [8, 9] rozwiązano problem rozprzestrzeniania się płaskich fal naprężenia w niejednorodnym ośrodku trójskładnikowym. Do analizy problemu wykorzystano model ośrodka podany przez LACHOWA [10] i RACHMATULINA [11]. W modelu tym założono, że współczynniki objętościowej zawartości poszczególnych składników (powietrza, wody i cząstek mineralnych) są liniowymi funkcjami współrzędnej przestrzennej x (głębokości). Poza tym przyjęto, że wypadkowa gęstość ośrodka i moduł odciażenia zmieniają się według tego samego przepisu funkcyjnego. Przy takich uproszczeniach natury fizycznej uzyskano analityczne rozwiązanie dość złożonego problemu, przy czym w [8] rozwiązanie skonstruowano metodą odwrotną, natomiast w [9] — metodą bezpośrednią z wykorzystaniem konkretnego warunku brzegowego. Zastosowano tutaj metodę rozwinięcia poszczególnych segmentów frontu fali uderzeniowej w szeregi Taylora [12-16], przy czym współczynniki rozwinięcia obliczono z równań ruchu i warunków granicznych. Stosując analogiczną technikę konstrukcji rozwiązania w pracy [17] rozpatrzono problem odbicia się niestacjonarnej płaskiej fali uderzeniowej od ruchomej masywnej przegrody, umieszczonej w trójskładnikowym, niejednorodnym ośrodku LACHOWA [10]. Odnośnie niejednorodności ośrodka przyjęto analogicznie ograniczenia, jak w pracach [8, 9].

Okazuje się, że można skonstruować zamknięte rozwiązanie problemu propagacji niestacjonarnej fali uderzeniowej w ośrodku niejednorodnym dla znacznie szerszej klasy niejednorodności, niż rozpatrzono w pracach [8, 9, 17]. Problemem tym zajmiemy się w niniejszej publikacji.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale drugim formułujemy problem, a w trzecim konstruujemy ogólne jego rozwiązanie na froncie i za frontem fali, w tym i na brzegu półprzestrzeni. Rozpatrzono modele ciał gazowych, płynnych i stałych. W rozdziale czwartym przeanalizowano dość dokładnie model ośrodka trójskładnikowego.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy ruch półprzestrzeni wypełnionej niejednorodnym ośrodkiem politropowym ze stałym lub słabozmiennym oporem falowym [$\varrho_0(x) a(x) \approx \text{const}$ lub $d[\varrho_0(x) a(x)] \approx 0$] i liniowosprężystym odciążeniem (rys. 1). Założymy, że od powierzchni półprzestrzeni propaguje się w głąb ośrodka, ze zmienną prędkością $D(t)$, płaska fala uderzeniowa. Poza tym przyjmiemy, że $D(t)$ jest znaną funkcją czasu. Wówczas rozwiązanie problemu na froncie i za frontem fali uderzeniowej, w tym i warunek brzegowy, są jednoznacznie zdeterminowane przez postać funkcji $D(t)$.



Rys. 1

Na froncie fali uderzeniowej, zgodnie z prawami zachowania masy i impulsu, mamy

$$(2.1) \quad \varrho_0(x)D(t) = \varrho_{01}(x)[D(t) - v_{01}(x)],$$

$$(2.2) \quad \varrho_0(x)D(t)v_{01}(x) = p_{01}(x) - p_0(x).$$

Poza tym, z politropowości ośrodka wynika, że

$$(2.3) \quad p_{01}(x) = p_0(x)\Phi\left[\frac{\varrho_{01}(x)}{\varrho_0(x)}\right] \quad \text{lub} \quad \varrho_{01}(x) = \varrho_0(x)\Psi\left[\frac{p_{01}(x)}{p_0(x)}\right],$$

gdzie indeksem „0” oznaczyliśmy parametry stanu ośrodka niezaburzonego przed frontem fali, natomiast indeksem „01” — parametry stanu na froncie fali uderzeniowej.

Ciągłym ruchem ośrodka za frontem fali uderzeniowej, zgodnie z przyjętymi założeniami, rządzą następujące równania:

$$(2.4) \quad v_{,t} = -\frac{1}{\varrho_0(x)}p_{,x}$$

$$(2.5) \quad \frac{\varrho_0(x)}{\varrho} = 1 + u_{,x}, \quad u_{,x} = \varepsilon,$$

$$(2.6) \quad p = p_{01}(x) - E(x)[u_{,x} - \varepsilon_{01}(x)].$$

Eliminując z (2.4), (2.5) i (2.6) funkcje v , p i ϱ , otrzymujemy jedno ekwiwalentne równanie ruchu drugiego stopnia, w którym szukaną funkcją jest przemieszczenie $u(x, t)$. Ma ono postać

$$(2.7) \quad u_{,tt} = a^2(x)u_{,xx} + \frac{E'(x)}{\varrho_0(x)}u_{,xx} - \frac{1}{\varrho_0(x)}[p'_{01}(x) + E'(x)\varepsilon_{01}(x) + E(x)\varepsilon'_{01}(x)],$$

gdzie prędkość propagacji zaburzeń a wyraża się wzorem

$$(2.8) \quad a(x) = \sqrt{\frac{E(x)}{\varrho_0(x)}}.$$

Z kolei równanie (2.7) można zastąpić równoważnym układem dwóch równań różniczkowych zwyczajnych, spełnionych na charakterystykach

$$(2.9) \quad dx = \mp a(x)dt \quad \text{lub} \quad t = \pm \int_0^x \sqrt{\frac{\varrho_0(\xi)}{E(\xi)}} d\xi + \tau,$$

o następującej postaci:

$$(2.10) \quad dp = \mp d[\sqrt{\varrho_0(x)E(x)}v]; \quad d[\sqrt{\varrho_0(x)E(x)}] \approx 0.$$

Związki różniczkowe (2.10) po scałkowaniu przyjmują postać skończoną

$$(2.11) \quad p = \mp \sqrt{\varrho_0(x)E(x)}v + C^\pm, \quad \varrho_0(x)E(x) \approx \text{const.}$$

3. Rozwiązanie ogólne problemu

W ten sposób jednoznacznie sformułowaliśmy badany problem. Przejdziemy obecnie do skonstruowania jego rozwiązania.

W pierwszej kolejności określimy parametry stanu ośrodka na froncie fali uderzeniowej o następującym równaniu:

$$(3.1) \quad x = \varphi(t) = \int_0^t D(\tau) d\tau.$$

Ze związków (2.1) i (2.2) oraz (2.3), po wyeliminowaniu funkcji $\varrho_{01}(x)$ i $v_{01}(x)$, otrzymujemy

$$(3.2) \quad \Psi[z(t)][\alpha(t) + 1 - z(t)] = \alpha(t),$$

gdzie

$$(3.3) \quad z(t) = \frac{p_{01}[\varphi(t)]}{p_0[\varphi(t)]}, \quad \alpha(t) = \frac{\varrho_0[\varphi(t)]D^2(t)}{p_0[\varphi(t)]}.$$

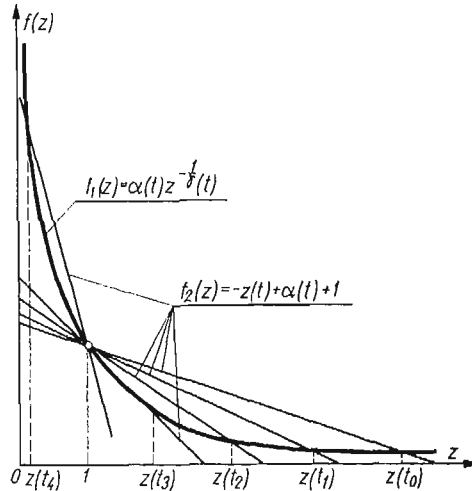
Równanie (3.2) w ogólnym przypadku jest równaniem przestępnym. Jego postać zależy od rodzaju funkcji $\Psi[z(t)]$. Na przykład dla gazu politropowego mamy

$$(3.4) \quad \Psi[z(t)] = z^{1/\gamma}(t)$$

i równanie (3.2) przyjmuje wówczas prostą postać

$$(3.5) \quad \alpha(t)z^{-1/\gamma}(t) = -z(t) + \alpha(t) + 1.$$

Łatwo wykazać (patrz rys. 2), że równanie (3.5) może posiadać trzy pierwiastki rzeczywiste. Jeden z nich, niezależnie od wartości prędkości propagacji frontu fali uderzeniowej $D(t)$, ma stałą wartość i wynosi $z_1(t) \equiv 1$. Jest to rozwiązanie trywialne, odpowiadające falom akustycznym. Drugi pierwiastek jest mniejszy od jedności i nie ma sensu fizycznego (rozrzedzeniowe fale uderzeniowe w normalnym gazie politropowym nie występują). Wreszcie trzeci pierwiastek, większy od jedności, jest poszukiwanym jednoznacznym roz-



Rys. 2

wiązaniem dla fali uderzeniowej. Przy dowolnych wartościach wykładnika politropy γ określamy go na ogół w sposób numeryczny. W szczególnych przypadkach otrzymujemy zamknięte rozwiązanie równania (3.5). I tak na przykład:

$$(3.6) \quad z(t) = \alpha(t) \quad \text{dla } \gamma = 1 \quad (\text{gaz izotermiczny [18]}),$$

$$(3.7) \quad z(t) = \frac{1}{2} [2\alpha(t) + 1 + \sqrt{4\alpha(t) + 1}] \quad \text{dla } \gamma = 2 \quad \text{oraz}$$

$$(3.8) \quad z(t) = \sqrt[3]{-q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^3}} + \sqrt[3]{-q_1 - \sqrt{q_1^2 + q_2^3}} \quad \text{dla } \gamma = 3,$$

gdzie

$$q_1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{2(2+3\alpha)^3}{27} + \frac{(2+3\alpha)(3\alpha^2+3\alpha+1)}{3} - \alpha^3 \right],$$

$$q_2 = \frac{8\alpha^2 - 3\alpha - 1}{9}.$$

Z kolei dla ośrodka politropowego opisanego równaniem Taity (płyny [19] i ciała stałe [20]) mamy

$$(3.9) \quad \Phi \left[\frac{\rho_{01}(x)}{\rho_0(x)} \right] = \frac{A_0(x)}{p_0(x)} \left\{ \left[\frac{\rho_{01}(x)}{\rho_0(x)} \right]^n - 1 \right\} + 1.$$

Dalej z wzorów (2.1)-(2.3) po wykorzystaniu (3.9) otrzymujemy

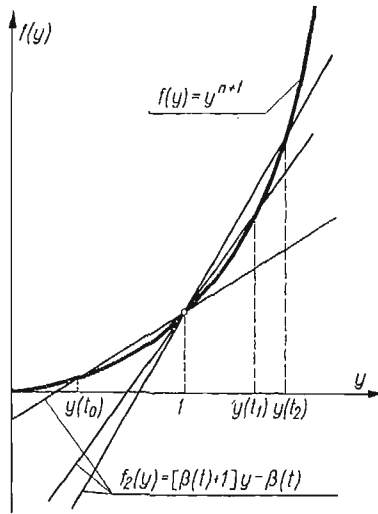
$$(3.10) \quad y^{n+1}(t) - [\beta(t) + 1]y(t) + \beta(t) = 0,$$

gdzie obecnie

$$(3.11) \quad y(t) = \frac{\rho_{01}[\varphi(t)]}{\rho_0[\varphi(t)]}, \quad \beta(t) = \left[\frac{D(t)}{c_0(t)} \right]^2,$$

$$c_0^2(t) = \frac{A_0[\varphi(t)]}{\rho_0[\varphi(t)]} = \frac{a_0^2(t)}{n}, \quad a_0^2(t) = \frac{nA_0[\varphi(t)]}{\rho_0[\varphi(t)]}.$$

Równanie (3.10) posiada również trzy dodatnie pierwiastki rzeczywiste (patrz rys. 3). Warunki badanego problemu spełnia tylko pierwiastek $z(t) > 1$. Podobnie jak w przypadku gazu politropowego, pierwiastki równania (3.10) określamy na ogół numerycznie. Dla nie-



Rys. 3

których szczególnych wartości wykładnika n otrzymujemy rozwiązania zamknięte. Mają one postać

$$(3.12) \quad y(t) = \beta(t) \quad \text{dla} \quad n = 1,$$

$$(3.13) \quad y(t) = \frac{1}{2} \left| \sqrt{1 + 4\beta(t)} - 1 \right| \quad \text{dla} \quad n = 2 \quad \text{oraz}$$

$$(3.14) \quad y(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[\beta(t) + \frac{7}{27} \right]} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left[\beta(t) + \frac{7}{27} \right]^2 + \left(\frac{2}{9} \right)^3} + \\ + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[\beta(t) + \frac{7}{27} \right]} - \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left[\beta(t) + \frac{7}{27} \right]^2 + \left(\frac{2}{9} \right)^3}.$$

Prędkość ruchu ośrodka na froncie fali uderzeniowej v_{01} określamy ze wzorów:

$$(3.15) \quad v_{01}[\varphi(t)] = \frac{a_1^2(t)}{D(t)} [z(t) - 1], \quad a_1(t) = \frac{p_0[\varphi(t)]}{\rho_0[\varphi(t)]},$$

lub

$$(3.15') \quad v_{01}[\varphi(t)] = D(t) \left[1 - \frac{1}{y(t)} \right].$$

Przejdziemy obecnie do rozwiązania problemu za frontem fali uderzeniowej. Wykorzystując związki na charakterystykach (2.11) (rys. 4), po przekształceniach otrzymujemy

$$(3.16) \quad p(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a(x_1)}{D(t_1)} p_0(x_1) - \frac{a(x_2)}{D(t_2)} p_0(x_2) + \left[1 - \frac{a(x_1)}{D(t_1)} \right] p_{01}(x_1) + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{a(x_2)}{D(t_2)} \right] p_{01}(x_2) \right\},$$

$$(3.17) \quad v(x, t) = \frac{1}{2\varrho_0(x)a(x)} \left\{ -\frac{a(x_1)}{D(t_1)} p_0(x_1) - \frac{a(x_2)}{D(t_2)} p_0(x_2) - \left[1 - \frac{a(x_1)}{D(t_1)} \right] p_{01}(x_1) + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{a(x_2)}{D(t_2)} \right] p_{01}(x_2) \right\},$$

gdzie

$$(3.18) \quad x_1 = \varphi(t_1) = \int_0^{t_1} D(t) dt, \quad t_1 = t - \int_x^{\varphi(t_1)} \frac{d\xi}{a(\xi)}, \\ x_2 = \varphi(t_2) = \int_0^{t_2} D(t) dt, \quad t_2 = t + \int_x^{\varphi(t_2)} \frac{d\xi}{a(\xi)}.$$

Rozwiązanie na brzegu półprzestrzeni otrzymujemy kładąc we wzorach (3.16)-(3.18) $x = 0$. Tym samym problem został rozwiązany.

4. Propagacja fali uderzeniowej w niejednorodnym ośrodku trójskładnikowym

Rozpatrzmy propagację fali uderzeniowej w trójskładnikowym ośrodku LACHOWA [10] o następującym równaniu stanu:

$$(4.1) \quad \varrho = \varrho_0(x) \left\{ \alpha_1(x) \left[1 + \frac{\gamma_1(p-p_0)}{\varrho_1 c_1^2} \right]^{-1/\gamma_1} + \alpha_2(x) \left[1 + \frac{\gamma_2(p-p_0)}{\varrho_2 c_2^2} \right]^{-1/\gamma_2} + \right. \\ \left. + \alpha_3(x) \left[1 + \frac{\gamma_3(p-p_0)}{\varrho_3 c_3^2} \right]^{-1/\gamma_3} \right\}^{-1},$$

gdzie ϱ jest wypadkową gęstością ośrodka przy ciśnieniu p , natomiast $\varrho_0(x)$ oznacza wypadkową gęstość przy ciśnieniu atmosferycznym p_0 . Poza tym $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ są gęstościami właściwymi, c_1, c_2, c_3 — prędkościami propagacji dźwięku, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — wykładnikami politrop, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — współczynnikami objętościowych zawartości dla poszczególnych składników: powietrza, wody i kwarcu.

Zgodnie z założeniami modelu Lachowa mamy

$$(4.2) \quad \varrho_0(x) = \alpha_1(x)\varrho_1 + \alpha_2(x)\varrho_2 + \alpha_3(x)\varrho_3,$$

$$(4.3) \quad \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) = 1.$$

Dodatkowo przyjmijmy, że $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ i $\alpha_3(x)$ są liniowymi funkcjami zmiennej x :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \alpha_1(x) &= \alpha_{01}(1+b_1x); & b_1 < 0; & |b_1x| < 1, \\ \alpha_2(x) &= \alpha_{02}(1+b_2x); & b_2 > 0; & 0 < \alpha_1(x) < \alpha_2(x) < 1, \\ \alpha_3(x) &= 1 - \alpha_{01} - \alpha_{02} - (\alpha_{01}b_1 + \alpha_{02}b_2)x. \end{aligned}$$

W takim przypadku gęstość początkowa $\varrho_0(x)$ również w sposób liniowy zależy od głębokości x i ma postać

$$(4.5) \quad \varrho_0(x) = \varrho_0(0)(1+kx); \quad k > 0,$$

gdzie

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \varrho_0(0) &= \alpha_{01}\varrho_1 + \alpha_{02}\varrho_2 + (1 - \alpha_{01} - \alpha_{02})\varrho_3, \\ k &= \frac{1}{\varrho_0(0)} [\alpha_{01}\varrho_1b_1 + \alpha_{02}\varrho_2b_2 - (\alpha_{01}b_1 + \alpha_{02}b_2)\varrho_3]. \end{aligned}$$

Poza tym założymy, że moduł liniowego obciążenia $E(x)$ wynosi

$$(4.7) \quad E(x) = E(0)(1+kx),$$

natomiast front fali uderzeniowej jest linią prostą o postaci

$$(4.8) \quad x = \varphi(t) = D_0t, \quad D_0 = \text{const.}$$

Wówczas charakterystyki (3.18) w strefie odciążenia są liniami prostymi o następujących równaniach:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} t + \frac{x}{a_0} &= \left(1 + \frac{D_0}{a_0}\right)t_1, & t_1 &= \frac{a_0}{a_0 + D_0} \left(t + \frac{x}{a_0}\right), \\ t - \frac{x}{a_0} &= \left(1 - \frac{D_0}{a_0}\right)t_2, & t_2 &= \frac{a_0}{a_0 - D_0} \left(t - \frac{x}{a_0}\right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.10) \quad a_0 = \sqrt{E(0)/\varrho_0(0)}.$$

W celu wprowadzenia obliczeń liczbowych przyjmujemy następujące wartości dla poszczególnych parametrów:

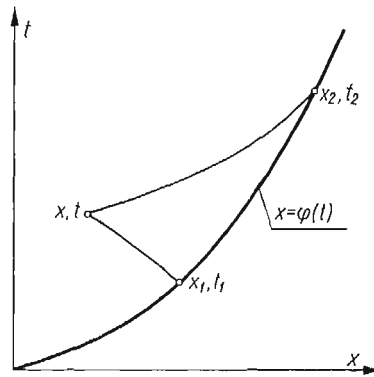
$$(4.11) \quad \begin{aligned} \varrho_1 &= 0,129 \text{ kg/m}^3; & \varrho_2 &= 100 \text{ kg/m}^3; & \varrho_3 &= 265 \text{ kg/m}^3 \\ c_1 &= 3,3 \cdot 10^2 \text{ m/s}; & c_2 &= 1,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}; \\ c_3 &= 4,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}; & a_0 &= 10^4 \text{ m/s}; \\ \gamma_1 &= 1,4; & \gamma_2 &= 7; & \gamma_3 &= 3; & p_0 &= 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2; \\ \alpha_{01} &= 0,02; & \alpha_{02} &= 0,40; & b_1 &= -10^{-6} \text{ 1/m}; & b_2 &= 2,10^{-8} \text{ 1/m}. \end{aligned}$$

Z wzorów (2.1) i (2.2) oraz równania stanu (4.1), po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(4.12) \quad \frac{p_{01}(x) - p_0}{\varrho_0(x)D_0^2} = 1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) \left\{ 1 - \frac{\gamma_i [p_{01}(x) - p_0]}{\varrho_i c_i^2} \right\}^{-1/\gamma_i}.$$

Jest to przestępne równanie, z którego w sposób numeryczny określamy funkcję $p_{01}(x)$. Z wykonanych obliczeń liczbowych wynika (patrz rys. 5), że ciśnienie $p_{01}(x)$ dla przyjętych danych jest funkcją zbliżoną do linii prostej

$$(4.13) \quad p_{01}(x) \approx p_{01}(0) (1 - \lambda x); \quad \lambda > 0,$$



Rys. 4

gdzie

$$(4.14) \quad p_{01}(0) = p_0 + \varrho_0(0) D_0^2 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i(0) \left[1 - \frac{\gamma_i [p_{01}(0) - p_0]}{\varrho_i c_i^2} \right]^{-1/\nu_i} \right\}.$$

Wartość współczynnika λ wynika z liniowej aproksymacji funkcji $p_{01}(x)$ (patrz rys. 5). Prędkość na froncie fali można teraz wyrazić wzorem

$$(4.15) \quad v_{01}(x) = \frac{p_{01}(0)(1 - \lambda x) - p_0}{\varrho_0(0) D_0 (1 + kx)}.$$

Wprowadzając wyrażenia (4.8), (4.9) i (4.13) do wzorów (3.16) i (3.17) otrzymamy

$$(4.16) \quad p(x, t) = p_{01}(0) \left[1 - \lambda \left(\frac{2a_0^2}{a_0^2 - D_0^2} D_0 t - \frac{D_0^2 + a_0^2}{a_0^2 - D_0^2} x \right) \right]$$

oraz

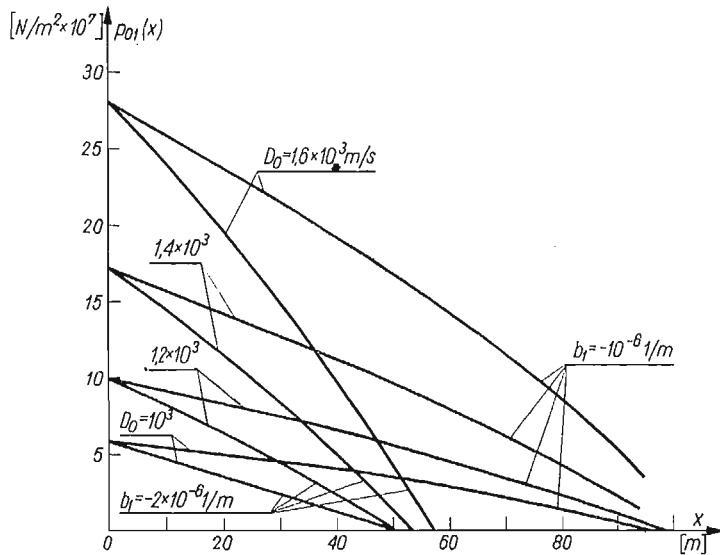
$$(4.17) \quad v(x, t) = \frac{p_{01}(0)}{\varrho_0(0) a_0} \frac{1}{1 + kx} \left\{ \frac{a_0}{D_0} \left[1 - \frac{p_0}{p_{01}(0)} \right] - \lambda \left[\frac{a_0^2 + D_0^2}{a_0^2 - D_0^2} a_0 t - 2 \frac{a_0 D_0}{a_0^2 - D_0^2} x \right] \right\}.$$

Kładąc w wyrażeniach (4.16) i (4.17) $x = 0$, otrzymamy odpowiednio ciśnienie działające na powierzchnię półprzestrzeni (warunek brzegowy) generujące prostopolną falę uderzeniową $x = D_0 t$ oraz prędkość przemieszczania się tej powierzchni:

$$(4.18) \quad p(0, t) = p_{01}(0) \left[1 - \lambda \frac{2a_0^2}{a_0^2 - D_0^2} D_0 t \right],$$

oraz

$$(4.19) \quad v(0, t) = \frac{p_{01}(0)}{\varrho_0(0) a_0} \left\{ \frac{a_0}{D_0} \left[1 - \frac{p_0}{p_{01}(0)} \right] - \lambda \frac{a_0^2 + D_0^2}{a_0^2 - D_0^2} a_0 t \right\}.$$



Rys. 5

Wyprowadzone wzory otrzymaliśmy przy założeniu, że $d[\varrho_0(x)a(x)] = \varrho_0(0)a_0 k \approx 0$. Nie korzystając z tego założenia rozwiązanie problemu można skonstruować za pomocą funkcji Riemanna [8]. Wówczas ciśnienie na brzegu wyraża się skomplikowanym wzorem o następującej postaci:

$$(4.20) \quad p(0, t) = p_1 + p_2(t) + p_3(t),$$

gdzie

$$p_1 = p_{01}(0) \left(1 - \frac{a_0^2}{D_0^2} \right),$$

$$p_2 = p_{01}(0) \left[-\frac{\lambda}{k} \frac{a_0^2}{D_0^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{k} \right) \frac{a_0(a_0^2 - D_0^2)}{2D_0^2} \left(\frac{1}{ka_0 D_0 t + a_0 - D_0} + \frac{1}{ka_0 D_0 t + a_0 + D_0} \right) \right],$$

$$p_3 = 2p_{01}(0)(2A_1 - A_2) \left\{ -2 + \sqrt{\frac{P}{A_7}} + \sqrt{\frac{Q}{A_6 A_7}} + \frac{A_6 + 1}{2\sqrt{A_6}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{A_6 A_7}{R}} - \arcsin \sqrt{\frac{Q}{R}} \right) + \frac{A_3}{A_4} \left\{ \left(\frac{1}{A_7 Y} - \frac{1}{2Y} \sqrt{\frac{A_7}{Y}} \right) \ln \left| \frac{\sqrt{Y} + \sqrt{A_7}}{\sqrt{Y} - \sqrt{A_7}} \right| \left| \frac{\sqrt{A_6 Y} - \sqrt{Q}}{\sqrt{A_6 Y} + \sqrt{Q}} \right| + \frac{2}{X} - \frac{A_7}{XY} + \left(\frac{1}{A_6 Y - Q} - \frac{1}{Y} \right) \sqrt{\frac{A_6 A_7}{Q}} - \frac{P + Q}{R} \left(\frac{A_6}{\sqrt{A_7 P}} + \sqrt{\frac{A_6}{A_7 Q}} \right) - \frac{A_6 A_7 S [P - (A_6 - 1)] - PY(2A_6 S - A_7)}{Y(PY + A_6 A_7 S) \sqrt{A_7 P}} + \frac{A_6 SQ(2Y + A_7) - A_7 Y [A_6 (A_6 - 1) S - Q]}{Y(A_7 Y + SQ) \sqrt{A_6 A_7 Q}} \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Y+A_6S}{Y\sqrt{A_6SY}} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{PY}{A_6A_7S}} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A_7Y}{SQ}} \right) + \frac{A_3}{A_4} \left\{ \frac{2X+A_7}{X\sqrt{A_7X}} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A_7}{X}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{P}{Y}} \right) + \frac{2}{Y} + \frac{A_7}{XY} + \frac{(A_6-1)X-P}{X(X+P)} \sqrt{\frac{A_7}{Q}} + \frac{2R-(A_6+1)A_7}{R\sqrt{A_6A_7Q}} + \right. \\
& \left. + \frac{(A_6-1)R+(A_6+1)P}{A_6R\sqrt{A_7P}} + \frac{A_7V[(A_6-1)X-Q]-XQ(2V+A_6A_7)}{X(XQ+A_7V)\sqrt{A_6A_7Q}} - \right. \\
& \left. - \frac{PV(2X-A_7)-A_7X[A_6P-(A_6-1)V]}{X(A_6A_7X+PV)\sqrt{A_7P}} + \frac{A_6X+V}{X\sqrt{A_6XV}} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{XQ}{A_7V}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A_6A_7X}{PV}} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$P = (A_6-1)t + A_7,$$

$$Q = (A_6-1)t + A_6A_7,$$

$$R = (A_6-1)t + (A_6+1)A_7,$$

$$X = t + \frac{A_5}{A_4},$$

$$Y = t + A_7 + \frac{A_5}{A_4},$$

$$S = \frac{A_5}{A_4} + \frac{t-A_7}{A_6},$$

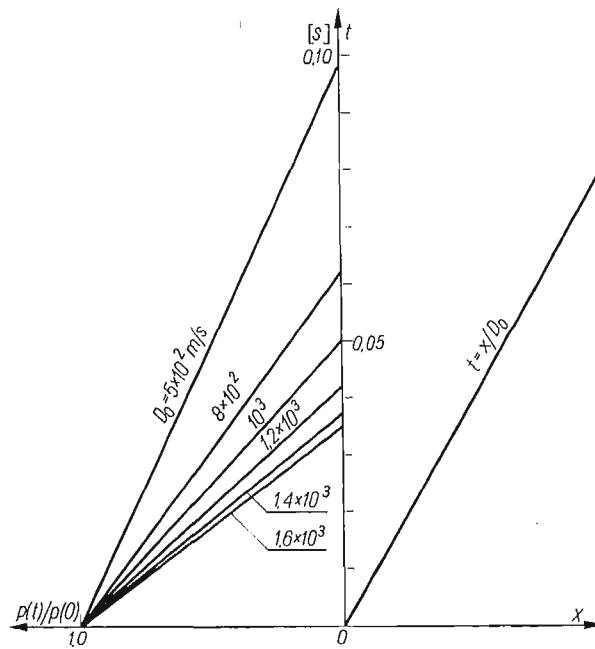
$$V = A_6t + (A_6+1)A_7 + \frac{A_5}{A_4},$$

$$A_1 = \frac{\lambda(a_0^2 - D^2)}{2kD^2}, \quad A_2 = \frac{\lambda}{k} \frac{a_0^2}{D^2},$$

$$A_3 = - \left(1 + \frac{\lambda}{k} \right) \frac{a_0(a_0^2 - D^2)}{2D^2}, \quad A_4 = ka_0D,$$

$$A_5 = a_0 - D, \quad A_6 = \frac{a_0 + D}{a_0 - D}, \quad A_7 = \frac{2}{ka_0}.$$

W celu zbadania efektywności i dokładności przedstawionej w niniejszej pracy metody, porównano wyniki liczbowe uzyskane za pomocą obydwóch wzorów, tj. (4.18) i (4.20). Okazuje się, że wyniki te z dość dużą dokładnością pokrywają się (występują różnice na czwartym miejscu po przecinku) i na wykresach są nierozróżnialne (patrz rys. 6). Ze wzoru (4.18) i z liczbowych wyników uzyskanych za pomocą wzoru (4.20) wynika, że przyjętym założeniom odnośnie niejednorodności ośrodka prędkości propagacji fali uderzeniowej odpowiada liniowa zmiana ciśnienia na powierzchni półprzestrzeni (rys. 6). Wniosek ten ma kapitalne znaczenie praktyczne. Daje bowiem praktyczne wskazówki jak należy postępować w problemach oddziaływania fal naprężenia na obiekty fortyfikacyjne, umieszczone w niejednorodnych gruntach wieloskładnikowych.



Rys. 6

Literatura cytowana w tekście

1. X. A. РАХМАТУЛИН, А. Я. САГОМОНЯН, Н. А. АЛЕКСЕЕВ, *Вопросы динамики грунтов*, Москва 1964.
2. X. A. РАХМАТУЛИН, Л. И. СТЕПАНОВА, *О распространении ударной волны взрыва в грунтах*, Сборник статей по взрыву, Изд. АН СССР, 1957.
3. Г. М. ЛЯХОВ, Р. А. ОСАДЧЕНКО, Н. И. ПОЛЯКОВА, *Плоские волны в неоднородных пластических средах и их взаимодействие с преградами*, ПМТФ, 4 (1969).
4. E. WŁODARCZYK, *Propagation of elastic-plastic and shock waves in a bar of finite length and monotone decreasing cross-sectional area*, Proc. Vibr. Probl., 7, 2 (1966).
5. E. WŁODARCZYK, *On a certain class of closed-form solutions of the propagation problem of a plane elastic-plastic stress wave in a nonhomogeneous medium*, Proc. Vibr. Probl., 7, 3 (1966).
6. E. WŁODARCZYK, *O pewnej klasie zamkniętych rozwiązań problemu propagacji kulistej i cylindrycznej fali obciążenia w niejednorodnym ośrodku sprężysto-plastycznym*, Biul. WAT, 15, 7 (1966).
7. Н. С. КОШЛЯКОВ, Э. Б. ГЛИНЕР, М. М. СМИРНОВ, *Основные дифференциальные уравнения математической физики*, Москва 1962.
8. E. WŁODARCZYK, LUC DU KHUONG, *Propagation of a plane shock wave in nonhomogeneous water saturated soil*, J. Techn. Phys., 17, 4 (1976).
9. E. WŁODARCZYK, LUC DU KHUONG, *Plane shock wave in a nonhomogeneous multicomponent medium*, J. Techn. Phys., 18, 2 (1977).
10. Г. М. ЛЯХОВ, *Ударные волны в многокомпонентных средах*, Изд. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1 (1958).
11. Г. М. РАХМАТУЛИН, *О распространении волн в многокомпонентных средах*, ПИММ, 33, 4 (1969).
12. F. SŁWALCZYK, E. WŁODARCZYK, *A method of solving the problem of propagation of a nonstationary plane shock wave in an inelastic medium*, Proc. Vibr. Probl., 12, 3 (1971).

13. E. WŁODARCZYK, *A closed-form solution of the propagation problem of plane shock wave in a polytropic plastic body with elastic unloading properties*, Proc. Vibr. Probl., **12**, 4 (1971).
14. E. WŁODARCZYK, *On the loading process behind the fronts of reflected and refracted shock waves in plastic layered media*, Proc. Vibr. Probl., **12**, 4 (1971).
15. E. WŁODARCZYK, *A closed-form solution of the propagation problem of an unloading shock wave in a bilinear elastic body*, Proc. Vibr. Probl., **13**, 3 (1972).
16. E. WŁODARCZYK, *Propagation of a plane loading shock wave in a bilinear elastic bar*, Proc. Vibr. Probl. **13**, 4 (1972).
17. E. WŁODARCZYK, LUC DU KHUONG, *Reflection of plane shock wave from a moving solid partition placed in nonhomogeneous three-component medium*, J. Techn. Phys. (w druku).
18. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Москва 1968.
19. R. H. COLE, *Underwater explosions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1948.
20. В. П. Чельшев, Б. И. Шехтер, Л. А. Шутко, *Об изменении давления на поверхности преграды при контактно-м взрыве заряда ВВ*, Физика взрыва, **6**, 2 (1970).

Р е з ю м е

О НЕКОТОРОМ ЗАМКНУТОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ
ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛИТРОПНОЙ СРЕДЕ
С ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ РАЗГРУЗКОЙ

В работе представлено замкнутое решение задачи о распространении нестационарной плоской ударной волны в неоднородной политропной среде с постоянным и слабопеременным волновым сопротивлением ($\rho a \approx \text{const}$). Решение построено обратным методом. Получены замкнутые формулы для параметров состояния исследуемой среды на фронте и за фронтом волны. Рассмотрены примеры конкретных политропных сред. Построенное решение, кроме непосредственного практического значения, из-за аналитического характера является хорошим тестом для приближенных методов.

S u m m a r y

ON A CERTAIN IN CLOSED-FORM SOLUTION OF THE PROBLEM OF PROPAGATION OF
A PLANE SHOCK WAVE IN A NONHOMOGENEOUS PLASTIC POLYTROPIC MEDIUM

Problem of propagation of a non-stationary plane shock wave in a inhomogeneous polytropic medium with the constant or slightly variable wave resistance ($\rho a \approx \text{const}$) was solved in the presented paper. The solution was constructed by the reciprocal method. The closed formulae were obtained defining the state parameters of the medium investigated at the wave front and behind the front. The examples of real polytropic media were analysed. The constructed solution, in addition to direct practical meaning, represents, in view of its closed form, a good test for the approximate methods.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 października 1977 r.

APROKSYMACJA NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY W CIAŁACH WALCOWYCH
I KULISTYCH

JAN T A L E R (KRAKÓW)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a promień wewnętrzny walca,
 b promień zewnętrzny walca,
 c ciepło właściwe,
 C_0, C_1, C_2 stałe,
 $Fo = \frac{\alpha \cdot t}{a^2}$ liczba Fouriera,
 $J_0(x), J_1(x)$ funkcje Bessela I rodzaju, odpowiednio rzędu zerowego i pierwszego,
 $k = \frac{b}{a}$ stosunek promienia zewnętrznego walca do wewnętrznego,
 $l = b - \delta(t)$,
 m, n liczby naturalne,
 q strumień cieplny na wewnętrznej powierzchni walca,
 $Q = 2\pi a q$
 r promień,
 $R = \frac{r}{a}$ promień bezwymiarowy,
 S powierzchnia ograniczająca ciało o objętości V ,
 t czas,
 T^* temperatura dokładna,
 T temperatura przybliżona,
 T_0 temperatura początkowa,
 u temperatura zewnętrznej ścianki walca,
 V objętość ciała,
 $w = \frac{\lambda(u - T_0)}{qa}$ bezwymiarowa temperatura zewnętrznej ścianki walca,
 $Y_0(x), Y_1(x)$ funkcje Bessela II rodzaju odpowiednio rzędu zerowego i pierwszego,
 $\delta(t)$ głębokość wnikania ciepła (rys. 1),
 $\eta = 1 + \frac{\delta}{a}$,
 $\theta^* = \frac{\lambda(T^* - T_0)}{qa}$ temperatura bezwymiarowa, dokładna,
 $\theta = \frac{\lambda(T - T_0)}{qa}$ temperatura bezwymiarowa, przybliżona,
 $\alpha = \frac{\lambda}{c\rho}$ współczynnik wyrównania temperatury,
 λ współczynnik przewodzenia ciepła,
 μ_m dodatnie pierwiastki równania charakterystycznego,
 ρ gęstość materiału walca,

1. Wstęp

Dokładność analitycznych metod przybliżonych w znacznym stopniu zależy od funkcji aproksymującej dokładne pole temperatury. Brak reguł konstruowania rozwiązań przybliżonych utrudnia praktyczne zastosowanie wymienionych metod. Z tych też względów, w ostatnich latach prowadzone są prace nad zasadami wyboru rozwiązań przybliżonych zapewniających dostateczną ich dokładność i eliminujących z obliczeń przypadkowość.

Oryginalne procedury konstruowania rozwiązań przybliżonych w metodzie KANTOROWICZA prezentowane są w pracach KERRA [1] oraz KRAJEWSKIEGO [2,3].

W niniejszej pracy przedstawiono sposób wyboru rozwiązań przybliżonych w metodach wykorzystujących koncepcję głębokości wnikania ciepła [4-8], oparty na metodzie uśredniania funkcjonalnych poprawek [9, 10].

Zwykle funkcja aproksymująca dokładny niestalony rozkład temperatury jest wielomianem drugiego stopnia współrzędnej r [5, 10, 11] niezależnie od tego czy rozważane ciało jest płaskie, walcowe czy kuliste. Tak prosta funkcja przybliżająca w wielu przypadkach nie zapewnia dostatecznej dokładności rozwiązań, dlatego też w dotychczasowej literaturze znane są metody konstrukcji funkcji przybliżających pozwalających otrzymać rozwiązania bardziej dokładne, szczególnie w przypadku ciał płaskich [4, 12]. Również w przypadku ciał walcowych i kulistych, jak wykazał LARDNER [13, 14], paraboliczny rozkład temperatury wymaga modyfikacji.

Zaproponowana przez LARDNERA modyfikacja, jak wykazano w dalszej części pracy, jest w wielu przypadkach zawodna. Z tych też względów przedmiotem niniejszej pracy jest wybór funkcji przybliżających dokładne, jednowymiarowe, niestalone pole temperatury w ciałach walcowych i kulistych.

2. Konstrukcja przybliżonego rozkładu temperatury

Przy konstrukcji funkcji przybliżającej dokładny rozkład temperatury wykorzystana zostanie metoda uśredniania funkcjonalnych poprawek [9].

Wymieniona metoda jest stosowana do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych niestalonego przewodzenia ciepła [10]. Należy jednak podkreślić, że funkcją przybliżającą dokładny rozkład temperatury jest parabola drugiego stopnia niezależnie od kształtu ciała [10], co sprawia, że dokładność otrzymywanych wyników w przypadku ciał walcowych i kulistych nie jest zbyt duża.

W niniejszej pracy równanie przewodzenia ciepła

$$(2.1) \quad \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T^*) = c\varrho \frac{\partial T^*}{\partial t},$$

w oparciu o metodę funkcjonalnych poprawek przybliżono równaniem

$$(2.2) \quad \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = c\varrho \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

Łatwo zauważyć, że lokalną szybkość zmian temperatury w czasie w równaniu (2.1) zastąpiono w równaniu (2.2) szybkością uśrednioną po całej objętości ciała.

Ponieważ średnia szybkość zmian temperatury ciała nie zależy od współrzędnych ($c\varrho = \text{const}$), więc z (2.2) wynika, że

$$(2.3) \quad \text{div}(\lambda \text{ grad } T) = f(t),$$

gdzie

$$(2.4) \quad f(t) = c\varrho \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

W celu wykazania związku równania (2.2) z metodą bilansu cieplnego [4], równanie (2.3) zostanie scałkowane po objętości

$$(2.5) \quad \int_V \text{div}(\lambda \text{ grad } T) dV = f(t) \int_V dV.$$

Stosując do przekształcenia lewej strony równania (2.5) regułę Gaussa-Ostrogradskiego i uwzględniając w (2.5) zależność (2.4), otrzymuje się równanie bilansu cieplnego dla ciała o objętości V ograniczonego powierzchnią S

$$(2.6) \quad \int_S \mathbf{n}_0 \lambda \text{ grad } T dS = \int_V c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

Tak więc równanie (2.6) jest równoważne równaniu (2.2) pod warunkiem, że temperatura przybliżona spełnia równanie (2.3). Przy praktycznym rozwiązywaniu zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła równanie (2.3) pozwala wyznaczyć funkcję przybliżającą dokładny rozkład temperatury, natomiast równanie (2.2) lub (2.6) — funkcję, $f(t)$. Należy podkreślić, że równanie (2.3) może być stosowane do określania temperatury przybliżonej w innych metodach niż omówione wyżej metody uśredniania funkcjonalnych poprawek i bilansu cieplnego.

Z uwagi na fakt, że metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych wykorzystujących głębokość wnikania ciepła stosowane są dotychczas do równań jednowymiarowych, więc równanie (2.3) zapisane dla pola jednowymiarowego przyjmuje postać

$$(2.7) \quad \frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left(\lambda r^n \frac{dT}{dr} \right) = f(t).$$

Po dwukrotnym scałkowaniu po r (2.7) przy założeniu, że $\lambda = \text{const}$ otrzymuje się przybliżony rozkład temperatury:

$$(2.8) \quad T = \frac{1}{2} C_0 r^2 + C_1 r + C_2, \quad \text{gdy } n = 0 \text{ (ciała płaskie),}$$

$$(2.9) \quad T = \frac{1}{4} C_0 r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad \text{gdy } n = 1 \text{ (ciała walcowe),}$$

$$(2.10) \quad T = \frac{1}{6} C_0 r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2, \quad \text{gdy } n = 2 \text{ (ciała kuliste),}$$

gdzie

$$C_0 = \frac{f(t)}{\lambda}.$$

Równanie (2.2) przyjmuje postać

$$(2.11) \quad \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) = c\varrho \frac{n+1}{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial T}{\partial t} r^n dr,$$

natomiast równanie (2.6)

$$(2.12) \quad \lambda r^n \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_2} - \lambda r^n \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \int_{r_1}^{r_2} c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} r^n dr.$$

3. Przykład obliczeniowy

Zastosowanie przedstawionej procedury zostanie zilustrowane na przykładzie obliczania nieustalonego pola temperatury w nieskończenie długim wydrążonym walcu, którego zewnętrzna ścianka jest izolowana cieplnie, nagrzewany na wewnętrznej powierzchni stałym strumieniem cieplnym. Temperatura początkowa walca jest stała i niezależna od promienia.

Pole temperatury w walcu określone jest równaniem różniczkowym przewodzenia ciepła

$$(3.1) \quad \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^*}{\partial r} \right),$$

warunkami brzegowymi

$$(3.2) \quad \lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0,$$

$$(3.3) \quad \lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{Q}{2\pi a} = -q,$$

oraz warunkiem początkowym

$$(3.4) \quad T^* \Big|_{t=0} = T_0.$$

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe określone w wykazie oznaczeń otrzymuje się

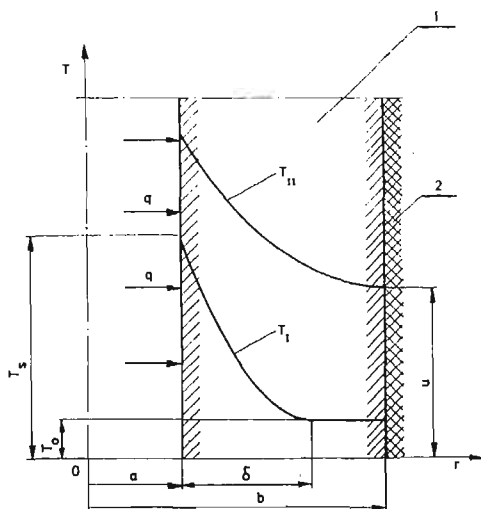
$$(3.5) \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial F_0} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta^*}{\partial R} \right),$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial R} \Big|_{R=k} = 0$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial R} \Big|_{R=1} = -1,$$

$$(3.8) \quad \theta^* \Big|_{F_0=0} = 0.$$

Dokładne rozwiązanie sformułowanego problemu można znaleźć w pracach [15, 16] a także łatwo otrzymać je z wyrażenia (5.5.16) pracy [17] wykorzystując zależność (5.5.19). W niniejszej pracy przybliżone pole temperatury określone zostanie za pomocą metody bilansu cieplnego, określonej równaniem (2.12), które jest równoważne równaniu (2.11).



Rys. 1. Rozkład temperatury w wydrążonym walcu nagrzewanym na wewnętrznej powierzchni stałym strumieniem cieplnym

1 — cylinder, 2 — izolacja cieplna, T_I i T_{II} — temperatura w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła

Podobnie jak w innych metodach stosujących koncepcję głębokości wnikania ciepła proces wnikania ciepła podzielony zostanie na dwie fazy. Rozkład temperatury w I i II fazie wnikania ciepła przedstawiony jest schematycznie na rys. 1. Równanie bilansu cieplnego (2.12) w pierwszej fazie wnikania ciepła, zapisane w formie bezwymiarowej ma postać

$$(3.9) \quad R \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_1^\eta = \frac{d}{dFo} \int_1^\eta \theta R dR.$$

Uwzględniając warunek brzegowy (3.7) oraz warunki wynikające z definicji głębokości wnikania ciepła [5], tj.

$$(3.10) \quad \theta \Big|_{R=\eta} = 0,$$

$$(3.11) \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=\eta} = 0,$$

równanie (3.9) ma postać

$$(3.12) \quad \frac{d}{dFo} \int_1^\eta \theta R dR = 1.$$

Przybliżony rozkład temperatury zapisany w formie bezwymiarowej, zgodnie z (2.9) określony jest wyrażeniem

$$(3.13) \quad \theta = \frac{1}{4} C_0 R^2 + C_1 \ln R + C_2.$$

Po wyznaczeniu stałych C_0 , C_1 i C_2 z warunku brzegowego (3.7) oraz warunków (3.10) i (3.11) i ponownym ich podstawieniu do (3.13), przybliżony rozkład temperatury w I fazie wnikania ciepła określony jest wyrażeniem

$$(3.14) \quad \theta = \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \left(\frac{R^2 - \eta^2}{2\eta^2} + \ln \frac{\eta}{R} \right), \quad 1 \leq R \leq \eta,$$

$$\theta = 0, \quad \eta \leq R \leq k.$$

Podstawiając (3.14) do (3.12) i całkując otrzymane równanie różniczkowe przy warunku początkowym

$$\eta|_{F_0=0} = 1$$

otrzymuje się

$$(3.15) \quad \eta^2 + 1 - \frac{4\eta^2}{\eta^2 - 1} \ln \eta = 8 F_0.$$

Dla większych wartości η , a więc i większych wartości liczby Fouriera, z (3.15) otrzymuje się

$$(3.16) \quad \eta^2 \approx 8 F_0.$$

Temperatura wewnętrznej powierzchni rury θ_s dla większych wartości F_0 wynosi

$$(3.17) \quad \theta_s \approx -\frac{1}{2} + \ln \eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\eta^2}{e} \right)$$

Uwzględniając w (3.17) zależność (3.16) otrzymuje się ostatecznie

$$(3.18) \quad \theta_s = \theta|_{R=1} \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{8}{e} F_0 \right) = \frac{1}{2} \ln (2,94 F_0).$$

Rozwiązanie dokładne dla większych wartości F_0 ma postać [18]

$$(3.19) \quad \theta_s = \frac{1}{2} \ln (2,24 F_0).$$

Ponieważ przybliżone określanie pola temperatury w wydrążonym walcu nagrzewanym od wewnątrz w I fazie wnikania ciepła jest identyczne jak w przypadku pustki cylindrycznej, więc jest możliwe porównanie otrzymanych wyników z podanymi przez LARDNERA i POHLE'A w pracy [13]. LARDNER i POHLE stosując przybliżony rozkład temperatury określony wyrażeniem

$$(3.20) \quad T = -\frac{qa}{\lambda} \frac{(\eta - R)^2}{(2 \ln \eta + \eta - 1)(\eta - 1)} \ln \frac{R}{\eta}, \quad 1 \leq R \leq \eta,$$

$$T = 0, \quad \eta \leq R,$$

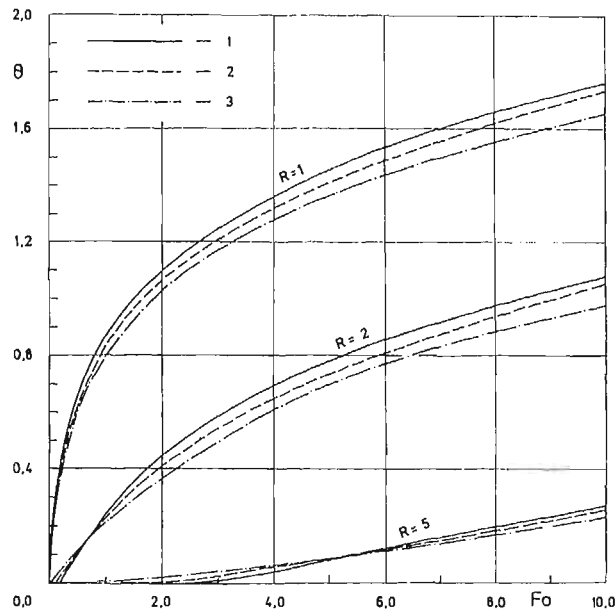
otrzymali następującą zależność dla $Fo(\eta)$

$$(3.21) \quad Fo = -[(72\eta^2 - 96\eta + 36)\ln\eta - 13\eta^4 + 36\eta^2 - 32\eta + 9][144(\eta - 1)(2\ln\eta + \eta - 1)]^{-1}.$$

Dla większych wartości Fo temperatura powierzchni pustki określona jest zależnością

$$(3.22) \quad \theta_s = \frac{1}{2} \ln(3,32 Fo).$$

Z porównania przedstawionych rozwiązań wynika, że rozwiązanie (3.18) otrzymane w niniejszej pracy lepiej aproksymuje rozwiązanie dokładne (3.19) w porównaniu z wynikiem (3.22) otrzymanym przez LARDNERA i POHLE'A. Stwierdzenie to jest słuszne dla większych wartości liczby Fouriera.



Rys. 2. Rozkład temperatury wokół pustki cylindrycznej w zależności od czasu
 1 — niniejsza praca (3.14), 2 — metoda Lardnera i Pohle'a (3.20), 3 — rozwiązanie dokładne [20]

Porównanie wartości temperatury określonych wzorem (3.14) otrzymanym w niniejszej pracy z rozwiązaniem LARDNERA i POHLE'A (3.20) oraz rozwiązaniem dokładnym [20] dla mniejszych wartości liczby Fouriera Fo , dla różnych wartości promienia R przedstawiono na rys. 2. Z przedstawionego porównania wynika, że dla mniejszych wartości Fo rozwiązanie otrzymane przez LARDNERA i POHLE'A jest dokładniejsze od przedstawionego w niniejszej pracy.

Należy jednak podkreślić, że w miarę upływu czasu bardziej dokładne staje się rozwiązanie prezentowane w pracy. Zarówno rozwiązanie (3.14) jak i (3.20) znacznie lepiej aproksymują rozwiązanie dokładne w porównaniu z wynikami otrzymanymi przy założeniu parabolicznego rozkładu temperatury, o czym świadczy porównanie przeprowadzone

w pracy [13]. Widać to również z rys. 3, gdzie porównano wartości temperatury obliczone według wzorów (3.14) i (3.20) z temperaturą określoną parabolą drugiego stopnia [13]

$$(3.23) \quad \theta = \frac{1}{2(\eta-1)}(\eta-R)^2, \quad 1 \leq R \leq \eta, \\ \theta = 0, \quad \eta \leq R,$$

gdzie η określone jest równaniem [13]

$$(3.24) \quad 24 \text{Fo} = (\eta-1)^3 + 4(\eta-1)^2.$$

Następnie rozważona zostanie druga faza wnikania ciepła (rys. 1), która rozpoczyna się z chwilą gdy głębokość wnikania ciepła staje się równa grubości ścianki walca, tj. gdy $\eta = k$.

Czas, po upływie którego następuje druga faza wnikania ciepła oznaczmy przez t_1 , a odpowiadającą mu liczbę Fouriera przez Fo_1 . Wartości Fo_1 łatwo wyznaczyć w każdym z rozważanych przypadków podstawiając $\eta = k$ w równaniach (3.15), (3.21) i (3.24). Równanie bilansu cieplnego otrzymuje się z równania (2.12) po uwzględnieniu, że $r_1 = a$, $r_2 = b$ oraz warunku brzegowego (3.2). Przekształcając otrzymane tak równanie do postaci bezwymiarowej otrzymuje się

$$(3.25) \quad \frac{d}{d\text{Fo}} \int_1^k \theta R dR = 1, \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1.$$

Podobnie jak w pierwszej fazie wnikania ciepła rozkład temperatury w II fazie przybliżony zostanie funkcją (3.13). Po wyznaczeniu stałych C_0 , C_1 i C_2 z warunków brzegowych (3.6) i (3.7) oraz z warunku (rys. 1)

$$(3.26) \quad \theta|_{R=k} = \frac{\lambda(u-T_0)}{qa} = w$$

i ponownym ich podstawieniu do (3.13), rozkład temperatury określony jest wyrażeniem:

$$(3.27) \quad \theta = \frac{1}{2} \frac{1}{k^2-1} R^2 - \frac{k^2}{k^2-1} \ln R + w + \frac{k^2 \ln k}{k^2-1} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k^2-1} \\ \text{Fo} \geq \text{Fo}_1, \quad 1 \leq R \leq k.$$

Podstawiając (3.27) do (3.25) i całkując otrzymane równanie różniczkowe przy warunku początkowym

$$w|_{\text{Fo}=\text{Fo}_1} = 0$$

otrzymuje się

$$(3.28) \quad w = \frac{2(\text{Fo}-\text{Fo}_1)}{k^2-1}, \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1,$$

gdzie Fo_1 wyznaczone z (3.15) po podstawieniu $\eta = k$ wynosi

$$(3.29) \quad \text{Fo}_1 = \frac{1}{8}(k^2+1) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k^2-1} \ln k.$$

Po podstawieniu (3.28) do (3.27) z uwzględnieniem (3.29) pole temperatury w drugiej fazie wnikania ciepła określone jest wyrażeniem

$$(3.30) \quad \theta = \frac{k^2}{k^2-1} \ln\left(\frac{k}{R}\right) + \frac{k^2}{(k^2-1)^2} \ln k - \frac{k^2-R^2}{2(k^2-1)} - \frac{1}{4} \frac{k^2+1}{k^2-1} + \frac{2F_0}{k^2-1},$$

$$Fo \geq Fo_1.$$

Dokładne rozwiązanie rozważanego zagadnienia ma postać [15, 16]

$$(3.31) \quad \theta^* = \theta_q + \theta_n,$$

gdzie

$$(3.32) \quad \theta_q = \frac{k^2}{k^2-1} \ln\left(\frac{k}{R}\right) + \frac{k^2}{(k^2-1)^2} \ln k - \frac{k^2-R^2}{2(k^2-1)} - \frac{k^2+1}{4(k^2-1)} + \frac{2}{k^2-1} Fo;$$

$$(3.33) \quad \theta_n = -\pi \sum_{m=1}^{\infty} C_m(k) [J_0(\mu_m R) Y_1(\mu_m k) - J_1(\mu_m k) Y_0(\mu_m R)] \exp(-\mu_m^2 Fo),$$

gdzie

$$C_m(k) = \frac{J_1(\mu_m) J_1(\mu_m k)}{\mu_m [J_1^2(\mu_m k) - J_1^2(\mu_m)]},$$

a μ_m są dodatnimi pierwiastkami równania charakterystycznego

$$J_1(\mu k) Y_1(\mu) - J_1(\mu) Y_1(\mu k) = 0.$$

Z porównania (3.30) z (3.31) wynika, że rozwiązanie przybliżone w drugiej fazie wnikania ciepła jest identyczne z rozwiązaniem dokładnym θ_q określającym pole temperatury w stanie quasi-stacjonarnym. Błąd spowodowany pominięciem szeregu nieskończonego θ_n w rozwiązaniu (3.31) dla różnych wartości liczb Fouriera i stosunku promienia zewnętrznego do wewnętrznego walca można wyznaczyć z rys. 5 pracy [15]. W przypadku rury o stosunku promienia zewnętrznego do wewnętrznego równym $k = 5/3$, maksymalna wartość $\left(-\frac{\theta_n}{\theta_q}\right) \Big|_{R=1}$ wynosi $\left(-\frac{\theta_n}{\theta_q}\right) \Big|_{R=1} \approx 0,085$ zgodnie z pracą [15] i występuje na początku drugiej fazy wnikania ciepła, tj. dla $Fo = 0,073$. Wartość $\left(-\frac{\theta_n}{\theta_q}\right) \Big|_{R=1}$ szybko jednak maleje i dla $Fo = 0,2$ jest praktycznie równa zero, czyli od tego momentu w ścianie rury ustala się quasi-stacjonarne pole temperatury. Dla porównania rozważmy drugą fazę wnikania ciepła przy aproksymacji pola temperatury wielomianem drugiego stopnia od r i według metody LARDNERA. W pierwszym przypadku pole temperatury przybliżone zostanie wielomianem

$$(3.34) \quad \theta = C_0 R^2 + C_1 R + C_2.$$

Po wyznaczeniu stałych C_0 , C_1 i C_2 z warunków brzegowych (3.6), (3.7) i (3.26) i ponownym ich podstawieniu do (3.34) otrzymuje się

$$(3.35) \quad \theta = \frac{1}{2(k-1)} (k-R)^2 + w.$$

Podstawiając (3.35) do (3.25) i całkując otrzymane równanie różniczkowe przy warunku początkowym

$$w|_{Fo= Fo_1} = 0$$

otrzymuje się

$$(3.36) \quad w = \frac{2(Fo - Fo_1)}{k^2 - 1}, \quad Fo \geq Fo_1$$

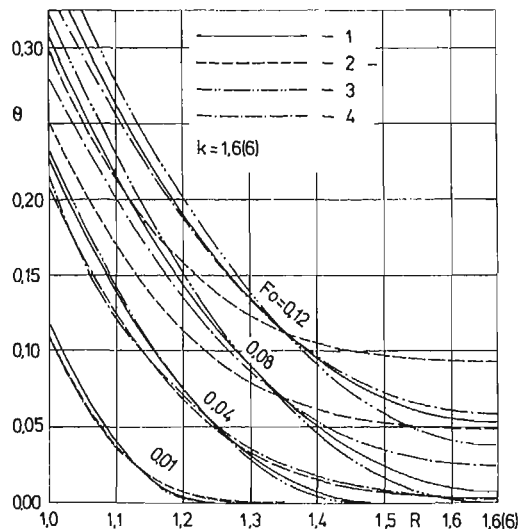
gdzie Fo_1 wyznaczone z (3.24), po uwzględnieniu, że $\eta = k$, wynosi

$$(3.37) \quad Fo_1 = \frac{1}{24} [(k-1)^3 + 4(k-1)^2].$$

Uwzględniając (3.36) w (3.35) pole temperatury w drugiej fazie wnikania ciepła określone jest wyrażeniem

$$(3.38) \quad \theta = \frac{1}{2(k-1)} (k-R)^2 + \frac{2Fo}{k^2-1} - \frac{1}{12} \frac{(k-1)^2 + 4(k-1)}{k+1},$$

$$Fo \geq Fo_1.$$



Rys. 3. Rozkład temperatury w wydrążonym walcu w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła dla różnych liczb Fouriera

1 — niniejsza praca (3.14) i (3.30), 2 — metoda Lardnera i Pohle'a (3.20) i (3.43), 3 — paraboliczny rozkład temperatury (3.23) i (3.38), 4 — rozwiązanie dokładne (3.31)

W drugim przypadku przybliżone pole temperatury zgodnie z metodą LARDNERA ma postać

$$(3.39) \quad \theta = C_0(k-R)^2 \ln \left(\frac{R}{k} \right) + C_1.$$

Po wyznaczeniu stałych z warunków brzegowych (3.7) i (3.26) i ponownym ich podstawieniu do (3.39) otrzymuje się

$$(3.40) \quad \theta = \frac{1}{(1-k)(2\ln k + k - 1)} (k-R)^2 \ln\left(\frac{R}{k}\right) + w.$$

Podstawiając (3.40) do (3.25) i całkując otrzymane równanie różniczkowe przy warunku początkowym $w|_{Fo=Fo_1} = 0$ otrzymuje się

$$(3.31) \quad w = \frac{2(Fo - Fo_1)}{k^2 - 1}, \quad Fo \geq Fo_1,$$

gdzie Fo_1 wyznaczone z (3.21), po podstawieniu $\eta = k$, wynosi

$$(3.42) \quad Fo_1 = [(72k^2 - 96k + 36)\ln k - 13k^4 + 36k^2 - 32k + 9] \times \\ \times [144(1-k)(2\ln k + k - 1)]^{-1}.$$

Podstawiając (3.41) do (3.40) i uwzględniając (3.42) otrzymuje się

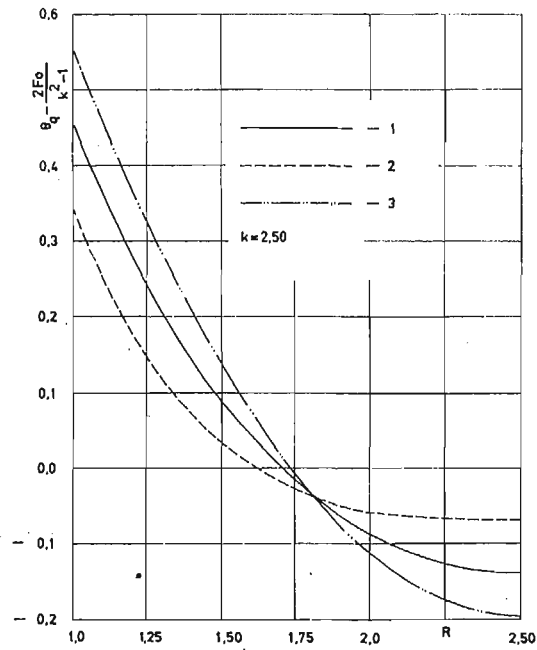
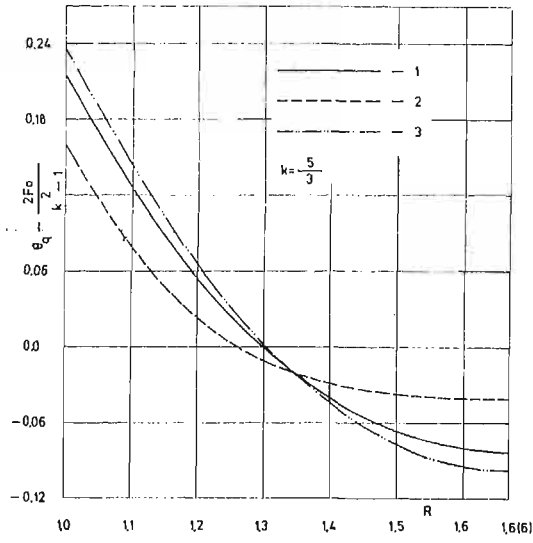
$$(3.43) \quad \theta = \frac{1}{(1-k)(2\ln k + k - 1)} (k-R)^2 \ln\left(\frac{R}{k}\right) + \frac{2Fo}{k^2 - 1} - [(72k^2 - 96k + 36)\ln k - \\ - 13k^4 + 36k^2 - 32k + 9] [72(k^2 - 1)(1-k) \times (2\ln k + k - 1)]^{-1}, \\ Fo \geq Fo_1.$$

Na rys. 3 przedstawiono pole temperatury w wydrążonym walcu o stosunku promienia zewnętrznego do wewnętrznego $k = 5/3$. Czas bezwymiarowy Fo_1 , po którym następuje druga faza wnikania ciepła zależy od funkcji przybliżającej; dokładny rozkład temperatury i obliczony według wzorów (3.29), (3.37) i (3.42) dla $k = 5/3$ wynosi odpowiednio $Fo_1 = 0,0730$, $Fo_1 = 0,0864$ i $Fo_1 = 0,0358$. Z porównania przedstawionego na rys. 3 wynika że w drugiej fazie wnikania ciepła rozwiązanie przedstawione w niniejszej pracy najlepiej aproksymuje rozwiązanie dokładne. Najmniej dokładny jest rozkład temperatury wyznaczony wg metody LARDNERA.

Na rys. 4 i 5 przedstawiono porównanie funkcji $\theta_q - \frac{2Fo}{k^2 - 1}$ obliczonej dla drugiej fazy wnikania ciepła według wzorów (3.30), (3.38 i (3.43) z funkcją $\theta_q - \frac{2Fo}{k^2 - 1}$ obliczoną według wzoru (3.32).

Z przedstawionych rysunków wynika, że sposób aproksymacji pola temperatury zaproponowany w niniejszej pracy zapewnia największą dokładność, gdyż w stanie quasi-stacjonarnym przybliżony i dokładny rozkład temperatury są identyczne. Należy podkreślić, że jest to cecha bardziej ogólna przedstawionego w pracy sposobu aproksymacji dokładnego pola temperatury. Identyczność przybliżonego pola temperatury określonego wg (2.3) i dokładnego wynika stąd, że w stanie stacjonarnym funkcja $f(t)$ jest równa zeru i rozwiązanie przybliżone określone według (2.3) i dokładne w stanie stacjonarnym są identyczne.

Powyższe uwagi nie dotyczą innych sposobów aproksymacji pola temperatury omówionych w niniejszej pracy.



Rys. 4 i 5. Zmiany funkcji $\theta_e - \frac{2Fo}{k^2-1}$ w zależności od promienia

1 — niniejsza praca według (3.30) i rozwiązanie dokładne (według (3.32), 2 — metoda Lardnera i Pohle'a według (3.43), 3 — paraboliczny rozkład temperatury według (3.38)

4. Omówienie innych prac

Sposób wyboru funkcji aproksymującej nieustalony rozkład temperatury w ciałach walcowych i kulistych przedstawił LARDNER i POHLE [13, 14].

W wymienionych pracach przybliżony profil temperatury zaleca się wybierać w postaci

$$(4.1) \quad T(r, t) = W(r) \ln r$$

w przypadku ciał walcowych oraz postaci

$$(4.2) \quad T(r, t) = W(r) \cdot \frac{1}{r},$$

w przypadku ciał kulistych, gdzie $W(r)$ jest wielomianem współrzędnej r .

O ile w przypadku ciał kulistych sposób ten nie budzi zastrzeżeń, to w przypadku ciał walcowych nasuwają się pewne wątpliwości.

LARDNER i POHLE [13] analizując pole temperatury wokół pustki cylindrycznej nagrzewanej stałym strumieniem cieplnym, aproksymowali rozkład temperatury wyrażeniem

$$(4.3) \quad T = \frac{-\frac{qa}{\lambda} \left(\frac{\delta+a-r}{a} \right)^2}{\frac{\delta}{a} \left(2 \ln \frac{\delta+a}{a} + \frac{\delta}{a} \right)} \ln \frac{r}{a+\delta},$$

$$a \leq r \leq (a+\delta), \quad T = 0, \quad (a+\delta) \leq r.$$

Łatwo sprawdzić, że wybierając profil temperatury w postaci (4.1) z uwzględnieniem, że

$$W(r) = C_0 + C_1 r + C_2 r^2$$

i określając współczynniki C_0 , C_1 i C_2 z warunków brzegowych (3.3) oraz (3.10) i (3.11) zapisanych w postaci wymiarowej nie otrzyma się wyrażenia (4.3). Łatwo natomiast je uzyskać, określając rozkład temperatury wyrażeniem:

$$(4.4) \quad T = C \left(1 - \frac{r-a}{\delta} \right)^2 \ln \frac{r}{a+\delta}, \quad a \leq r \leq (a+\delta);$$

$$T = 0, \quad (a+\delta) \leq r$$

i określając stałą C z warunku brzegowego (3.3).

Zauważmy, że wybór mnożnika logarytmicznego w (4.4) nie jest jednoznaczny. W miejsce $\ln \frac{r}{a+\delta}$ można wybrać np. $\ln \frac{r}{b}$ lub $\ln \frac{r}{p(a+\delta)}$, gdzie $p \geq 1$ i warunki brzegowe wynikające z definicji głębokości wnikania ciepła, tj. (3.10) i (3.11) będą nadal spełnione.

Ponadto zachodzi pytanie, jak wybrać przybliżony rozkład temperatury w drugiej fazie wnikania ciepła, gdy warunki brzegowe na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni są niejednorodne»

Omówione tu trudności potwierdza częściowo sposób w jaki uwzględnione zostały zalecenia LARDNERA i POHLE'A w pracy [19]. Poza tym dokładność aproksymacji pola temperatury w II fazie wnikania ciepła jest niedostateczna.

Problemy wyboru funkcji aproksymującej w przypadku ciał walcowych porusza również VUJANOVIĆ w pracy [7]. Autor stwierdza, że przedstawiona przez niego metoda przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych nieustalonego przewodzenia zapewnia dostateczną dokładność przy aproksymacji pola temperatury wielomianem II stopnia, niezależnie od kształtu ciała i demonstrowa to określając nieustalone pole temperatury w pełnym walcu ogrzewanym na powierzchni stałym strumieniem ciepłym. Na podstawie rozwiązania tego samego problemu zostanie wykazane, że stwierdzenie to jest nieprawdziwe.

Pole temperatury w walcu określone jest przez równanie różniczkowe (3.1), warunki brzegowe

$$(4.3) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = q,$$

$$(4.4) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

gdzie b oznacza promień zewnętrzny walca, i warunek początkowy

$$(4.5) \quad T|_{t=0} = 0.$$

Równanie bilansu cieplnego (2.12) w I fazie wnikania ciepła, uwzględniając że w rozważanym przypadku $r_1 = b - \delta(t)$ i $r_2 = b$, ma postać

$$(4.8) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b c\rho r T(r, t) dr = bq.$$

Wybierając podobnie, jak VUJANOVIĆ [7] paraboliczny rozkład temperatury

$$(4.9) \quad T = \frac{q}{2\lambda(b-l)} (r-l)^2 \equiv \frac{q\delta}{2\lambda} \left(1 - \frac{b-r}{\delta}\right)^2, \quad (b-\delta) \leq r \leq b,$$

$$T = 0, \quad 0 \leq r \leq (b-\delta),$$

gdzie $l = b - \delta$, podstawiając (4.9) do (4.8) i uwzględniając, że $\delta|_{t=0} = 0$, otrzymuje się

$$(4.10) \quad \frac{\pi t}{b^2} = \frac{1}{6} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{\delta}{b}\right)^3.$$

VUJANOVIĆ [7] otrzymał natomiast następującą zależność dla określenia głębokości wnikania ciepła $\delta(t)$:

$$(4.11) \quad 20 \frac{\pi \cdot t}{b^2} = 5 \left[1 - \left(\frac{b-\delta}{b}\right)^2 \right] + 62 \left(\frac{\delta}{b}\right) + 288 \ln \frac{4}{4 + \frac{\delta}{b}}.$$

W drugiej fazie wnikania ciepła równanie bilansu cieplnego (2.12) przyjmuje postać

$$(4.12) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b c\rho r T(r, t) dr = bq.$$

Przyjmując rozkład temperatury

$$(4.13) \quad T = \frac{2qb}{\lambda} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{r}{b} \right)^2 + u(t) \right],$$

i wyznaczając $u(t)$ z równania (4.12) przy warunku początkowym $u(t)|_{t=t_1} = 0$ po ponownym podstawieniu do (4.13) otrzymuje się

$$(4.14) \quad T = \frac{2qb}{\lambda} \left[\frac{\kappa t}{b^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{r}{b} \right)^2 - 0,125 \right],$$

$$0 \leq r \leq b, \quad t \geq t_1.$$

Czas t_1 , po którym rozpoczyna się druga faza wnikania ciepła wyznacza się z (4.10) po podstawieniu $\delta = b$. W danym przypadku

$$(4.15) \quad t_1 = 0,125 \frac{b^2}{\kappa}.$$

Rozwiązanie VUJANOVIĆA ma postać

$$(4.16) \quad T = \frac{2qb}{\lambda} \left[\frac{\kappa t}{b^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{r}{b} \right)^2 - 0,137 \right], \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \geq 0,137 \frac{b^2}{\kappa}.$$

Rozwiązanie dokładne [18] dla większych wartości czasu określone jest wyrażeniem (4.14), a więc pokrywa się z rozwiązaniem przybliżonym otrzymanym za pomocą metody bilansu cieplnego.

Porównanie rozwiązań przybliżonych ze ścisłym [20] również wskazuje, że bardziej dokładne jest rozwiązanie otrzymane za pomocą metody bilansu cieplnego, tak więc i w przypadku metody VUJANOWICA [7], należy zastosować zmodyfikowany profil temperatury w ciałach walcowych i kulistych, aby otrzymać dobrą dokładność.

Wydaje się, że kształt paraboli drugiego stopnia i krzywej przedstawiającej dokładny rozkład temperatury w przypadku ciał kulistych i cylindrycznych znacznie się różnią, w związku z czym niezależnie od zastosowanej metody należy zmodyfikować przybliżony rozkład temperatury.

5. Wnioski

Zaproponowany sposób konstrukcji funkcji przybliżającej jednowymiarowe, niestabilne pole temperatury uwzględnia kształt rozważanego ciała.

Wykazano również, że aproksymacja dokładnego pola temperatury wielomianem drugiego stopnia w przypadku ciał walcowych i kulistych prowadzi do znacznych błędów. W porównaniu z metodą wyboru rozwiązania przybliżonego przedstawioną przez LARDNERA i POHLE'A [13] sposób prezentowany w niniejszej pracy zapewnia większą dokładność obliczeń w drugiej fazie wnikania ciepła i jest łatwy w zastosowaniu, szczególnie przy niejednorodnych warunkach brzegowych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. D. KERR, *An extension of the Kantorovich method*, Quart. Appl. Math., 2, **26** (1968) 219—229.
2. B. KRAJEWSKI, *Ein direktes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion*, Int. J. Heat Mass Transfer, 16 (1973) 469—483.
3. B. KRAJEWSKI, *Modyfikacja metody Kantorowicza*, Archiwum Termodynamiki i Spalania, 4, **7** (1976) 545—556.
4. T. R. GOODMAN, *Application of integral methods to transient non-linear heat transfer*, Advances in Heat Transfer, **1**, New York 1964.
5. M. A. BИOT, *Variational principles in heat transfer*, Oxford 1970.
6. B. VUJANOVIĆ, *An approach to linear and nonlinear heat transfer problems using a Lagrangian*, AIAA Journal, 1, **9** (1971) 131—134.
7. B. VUJANOVIĆ, *On one variational principle for irreversible phenomena*, Acta Mechanica, 3—4, **19**, (1974) 259—275.
8. J. TALER, *Zastosowanie zasady Gaussa do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych przewodzenia ciepła*, Rozpr. Inż., 2, **25** (1977) 349—368.
9. Ю. Д. Соколов, *О методе осреднения функциональных поправок*, Украинский Математический Журнал, 1, **9** (1957) 82—99.
10. Ю. С. Постольник, *Нагрев цилиндра излучением*, Прикладная Механика, 6, **1** (1965) 14—20.
11. А. И. Золотарев, Ю. С. Постольник, В. М. Губа, *Расчёт температуры и напряжений в цилиндре при переменном тепловом потоке*, Известия ВУЗов, Чёрная Металлургия, 2, **20** (1977) 144—147.
12. B. E. LAUNDER, *An improved Pohlhausen type method of calculating the two-dimensional laminar boundary layer in a pressure gradient*, Transact. of the ASME, J. Heat Transfer, 3, **86** (1964) 360—364.
13. T. J. LARDNER, F. V. POHLE, *Application of the heat balance integral to problems of cylindrical geometry*, Transact. of the ASME, J. Appl. Mech. **28** (1961) 310.
14. T. J. LARDNER, *Approximate heat conduction solutions for nonplanar geometries*, Transact. of the ASME, J. Heat Transfer, 3, **32** (1965) 423.
15. S. BRUIN, W. A. BEVERLOO, *Transient temperature distributions in cylindrical shells*, Int. J. Heat Mass Transfer, **11** (1968) 1653—1656.
16. Л. Е. Белоусова, *Нестационарные температурные напряжения в полом цилиндре при действии потока тепла на внутреннюю поверхность*, Инженерно-физический Журнал, 2, **27** (1974).
17. A. V. LUIKOV, *Analytical heat diffusion theory*, New York 1968.
18. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1959.
19. I. S. HADIV, *Solidification of semitransparent cylindrical medium by conduction and radiation*, Transact. of the ASME, J. Heat Transfer, 1, **95** (1973).
20. А. И. Пехович, В. М. Жидких, *Расчёты теплового режима твердых тел*, Ленинград 1968.

Резюме

АППРОКСИМАЦИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

В работе предложен метод подбора приближенного неустойчившегося распределения температуры в цилиндрических и сферических телах. Этот метод применим для приближенного решения уравнений тепло- и массопереноса с помощью методов, использующих понятие глубины проникания тепла. В качестве примера применения метода рассчитано распределение температуры в полом цилиндре для случая постоянного теплового потока к внутренней стенке и теплоизолированной внешней стенке. Использован интегральный метод теплового баланса. На основе сопоставления приближенных решений с точным установлено, что предлагаемый метод более точен, чем метод Ларднера и Пола [13], особенно для больших значений времени. Доказано, что в случае цилиндрических тел вариационный метод Вуяновича [7], как и другие методы, требует модификации параболического распределения температуры.

S u m m a r y

APPROXIMATION OF THE TRANSIENT TEMPERATURE FIELD IN CYLINDRICAL AND SPHERICAL BODIES

The paper presents a method for the choice of the approximate temperature distribution in the bodies of cylindrical and spherical geometry. The method is appropriate for solving any problem governed by diffusion — type equation with the aid of the methods using the concept of thermal boundary layer. Particular cases considered in this paper include the transient temperature distributions in a hollow cylinder in the case of heat being transferred at a constant rate to the inner wall surface, while the outer wall surface is insulated against heat losses. It is found that, for problems involving polar or spherical symmetry, Lardner's and Pohle's methods are inappropriate because the solution does not tend to the proper form of the steady — state solution in the limit for large time (in the second phase of heat penetration). It is shown that Vujanovic's variational method [7] cannot be improved to produce better results with parabolic temperature distribution in a cylindrical body.

INSTYTUT APARATURY PRZEMYSŁOWEJ
I ENERGETYKI POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 października 1977 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

PROFESOR DOKTOR KAZIMIERZ WOLSKI*

Absolwenci Wydziałów Mechanicznych powojennych lat Politechniki Warszawskiej dobrze pamiętają osobę profesora KAZIMIERZA WOLSKIEGO, wychowawcy i nauczyciela wielu inżynierów-mechaników, wybitnego naukowca i konstruktora przemysłu lotniczego. Z okazji 90 rocznicy Jego urodzin, pragniemy przedstawić Jego sylwetkę szerszemu gronu pracowników naukowych.

Prof. KAZIMIERZ WOLSKI urodził się dnia 2 września 1887 r. w Mińsku Mázowieckim. Po ukończeniu Szkoły Realnej w Warszawie oraz Szkoły im. H. Wawelberga i S. Rotwanda w 1910 r., wyjechał do Belgii, gdzie w 1913 r. uczęszczał na Wydział Mechaniczny Politechniki w Mons (Ecole des Mines). Po wybuchu pierwszej wojny światowej wrócił do kraju, a następnie wyjechał do Moskwy w 1915 r., gdzie jako obliczeniowiec i konstruktor pracował w wytwórni lotniczej, współpracując ze znanymi rosyjskimi konstruktorami A. Tupolewem i J. Niestierowem. W 1918 r. wrócił do kraju i rozpoczął pracę w szybko rozwijającym się po wyzwoleniu lotnictwie polskim. W przemyśle lotniczym pracował aż do wybuchu drugiej wojny światowej, a w 1939 r. został ewakuowany do Francji. W kraju tym spędził cały okres wojenny, pracując początkowo w wytwórni lotniczej w Argenteuil pod Paryżem.

Po powrocie do Warszawy w r. 1946 rozpoczął pracę jako samodzielny pracownik naukowy w Głównym Instytucie Lotnictwa i jednocześnie jako zastępca profesora na Politechnice Warszawskiej. W 1948 r. otrzymał stopień doktora nauk technicznych na Politechnice Gdańskiej. Jego promotorem był prof. M. T. Hüber. Od 1951 r. był kierownikiem Katedry Mechaniki Ogólnej na Wydziale Mechanicznym Konstruktoryjnym, a w 1955 r. został mianowany profesorem nadzwyczajnym. W 1960 r. prof. KAZIMIERZ WOLSKI przeszedł na emeryturę.

Jako konstruktor, prof. KAZIMIERZ WOLSKI miał wiele oryginalnych osiągnięć. Wymienić tu należy chociażby projekt hangaru lotniczego (1926 r.), komorę stratosferyczną dla Centrum Badań Lotniczo-Lekarskich (1924 r.) — największą w owych czasach w Europie, wagę dla tunelu aerodynamicznego w Instytucie Lotnictwa (1960 r.) oraz przekładnię ewolwentową prostokreślną (1972 r.).

Dorobek naukowy prof. KAZIMIERZA WOLSKIEGO obejmuje około 40 pozycji i zawiera wiele oryginalnych prac oraz skryptów uczelnianych na temat mechaniki ogólnej, teorii drgań i teorii mechanizmów. Jego praca doktorska dotyczyła kinematyki wyższych pochodnych i przedstawiała oryginalne studium geometrii ruchu, wynikające z analizy pochodnych czasowych. Duże znaczenie miały prace prof. WOLSKIEGO na temat punktowego charakteru kontaktu w przekładniach zębatych o zębach skośnych. Autor wykazał, że skutek deformacji zębów początkowy liniowy kontakt przechodzi w punktowy. Potwierdza to fakt wysokiej sprawności tego rodzaju przekładni oraz charakter zużycia powierzchni. Konsekwencją tego odkrycia była propozycja użycia nowego typu zębów skośnych niższych, mających odrębne korzystne własności. Oryginalna jest również idea użycia punktów kinetycznych przy analizie dynamicznej układu materialnego, a w szczególności w analizie drgań i wyważaniu układów mas drgających. Kilka prac prof. WOLSKIEGO dotyczy zagadnień tarcia kontaktowego i jego opisu w ramach mechaniki.

Duże znaczenie odegrały skrypty prof. WOLSKIEGO dotyczące statyki, kinematyki i dynamiki, oryginalnie opracowane przy użyciu zapisu wektorowego. Były one podstawowymi podręcznikami dla wielu roczników studentów powojennych lat Politechniki Warszawskiej.

* Niniejszy artykuł został napisany w roku 1977 z okazji 90-lecia urodzin Prof. K. Wolskiego. Redakcja z żalem zawiadamia, że Prof. Wolski zmarł 2 lutego 1978 r.

Wielu wychowanków prof. WOLSKIEGO uzyskało stopnie naukowe i zajmuje wysoką pozycję naukową na uczelniach lub w instytutach badawczych.

Kończąc ten krótki artykuł należy jeszcze wspomnieć o osobowości prof. Kazimierza WOLSKIEGO, człowieka skromnego, o dużym uroku osobistym. Jest to sylwetka inżyniera-badacza, wychodzącego w swych badaniach z faktów doświadczalnych i stosującego jednocześnie ścisłe metody naukowe.

Jerzy Lamparski, Zenon Mróz (Warszawa)

SPRAWOZDANIE

z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej za II, III i IV kwartały 1977 r.

I. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyły się 52 zebrania naukowe, na których wygłoszono 56 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
1	2	3	4	5	6
Oddział w Bydgoszczy					
1.	11.05.77	J. Szala	Wpływ sekwencji obciążeń na trwałość zmęczeniową	15	4
2.	06.11.77	H. Wołka	Izolacja układów wielomasowych od wpływu drgań losowych	10	4
3.	21.12.77	T. Kabat	Numeryczna analiza stateczności układów kratowych i kratowocięgnowych	15	8
Oddział w Częstochowie					
4.	07.04.77	R. Przybylski	Problematyka strat częściowego zasilania w turbinach parowych	32	6
5.	03.05.77	J. Wojciechowski	Modelowanie badań aerodynamicznych budowli przemysłowych	15	5
6.	27.05.77	J. Kołakowski	Analiza usztywnień elementów konstrukcji cienkich	16	4
7.	14.07.77	T. Pełczyński	Hipotezy wytrzymałościowe w przeróbce plastycznej	27	5
8.	24.10.77	E. P. Dyban	Problemy ochładzania elementów turbin gazowych	114	18
9.	28.10.77	E. P. Dyban	Procesy wymiany ciepła i impulsu w warstwach przyściennych przy zwiększonej turbulencji przepływu zewnętrznego	28	4
10.	26.11.77	J. Dietrych	Dzieło inżyniera a mechanika	28	5
11.	09.12.77	M. Dietrich	Metody stochastyczne w konstrukcji maszyn	26	5
Oddział w Gdańsku					
12.	26.09.77	M. Sewell (W. Brytania)	Some applications of cathastrophic theory	23	3

1	2	3	4	5	6
13.	07.10.77	A. Weberski	Problemy stochastyczne w dynamice płyt cienkich	11	4
14.	17.12.77	Z. Cywiński	Sprawozdanie z pobytu naukowego zagranicą	11	5
15.	17.12.77	W. Gawroński	Elementy rozmyte i ich zastosowanie w modelowaniu układów nieskończonych	13	7
Oddział w Gliwicach					
16.	26.04.77	H. Skowron	Problemy identyfikacji w modelowaniu układów elastycznego posadowienia obrabiarek	20	6
17.	21.10.77	A. Weberski	Zastosowanie funkcji Rwaczewa w zagadnieniach dynamiki stochastycznej płyt	18	4
18.	25.11.77	J. Składzeń	Zastosowanie równań różnicowych w analizie cieplnej procesu zamrażania górotworu	10	5
Oddział w Krakowie					
19.	15.06.77	W. Krzyś	Optimalizacja wzmocnienia połączeń rozgałęzionych naczyń ciśnieniowych oraz sprawozdanie i impresje z III Międzynarodowego Kongresu Naczyń Ciśnieniowych w Japonii	18	4
20.	20.09.77	Mario Tschinke	Application of experimental mechanics at the Institute of Machine Design of the University of Palermo — Italy	34	4
21.	20.09.77	Mario Tschinke	Teaching and research in the field of experimental stress analysis in Italian Universities		
22.	21.09.77	August Ajovalasit (z Uniwersytetu w Palermo)	The applications to holographic interferometry to photoelasticity	30	3
23.	04.11.77	E. Masur (Chicago)	Optimal desing of symmetric structures against postbuckling collapse	18	4
24.	15.12.77	J. Kubik	Podstawy termodynamiki procesów termodyfuzji	13	5
Oddział w Łodzi					
25.	28.04.77	B. L. Pielech	Rozwój badań naukowych z mechaniki cienkościennych elementów konstrukcji w Akademii Nauk ZSRR	28	—
26.	30.09.77	Donald Pack	Complementary bivariational principles for linear integral equations of Fredholm type with applications to rarefied gas dynamics	15	5

1	2	3	4	5	6
27.	17.11.77	Wolfgang Rose	Metoda pomiaru sił w węzłach mechanizmów dźwigniowych	30	4
28.	17.11.77	Klaus-Dieter Wolf	Zastosowanie aktywnego ekranu do obliczeń i projektowania konstrukcji mechanicznych		6
29.	24.10.77	Horst Aurich	Metoda redukcji stopni swobody przy analizie drgań własnych i wymuszonych złożonych korpusów maszyn	20	5
30.	01.12.77	J. Klepaczko, }	dwa oddzielne referaty wprowadzające nt. «Aktualne zagadnienia propagacji fal w ośrodkach niesprężystych»	28	7
31.		W. Kosiński }			
Zorganizowane wspólnie z Sekcją Mechaniki Ciała Stałego Komitetu Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN					
Oddział w Opolu					
32.	22.06.77	Z. Bzymek	Zastosowanie systemu STRAINS	22	8
Oddział w Poznaniu					
33.	25.04.77	A. Sawczuk	Zastosowanie reprezentacji tensorowych w mechanice ośrodków plastycznych	26	7
34.	18.05.77	M. M. Carrol	Nonlinear modulus for porous materials	21	4
35.	13.06.77	W. Derski	Równania ruchu ośrodka porowatego	18	5
36.	21.11.77	Z. Kączkowski	Metoda czasoprzestrzenna elementów skończonych w ujęciu macierzy przeniesienia	20	7
Oddział w Rzeszowie					
37.	15.06.77	Z. Bychawski	Sprawozdanie z uczestnictwa w Kongresie Naukowym w Szwecji		
38.	15.06.77	Z. Stojek	Sprawozdanie z uczestnictwa w Sympozjum w Opolu		
39.		Z. Bychawski	Sprawozdanie z udziału w zagranicznych kongresach naukowych w roku 1977		
40.		E. Rejman	Pseudopłaskie zagadnienie reologii		
Oddział w Szczecinie					
41.	05.05.77	Helmut Pfau (z WSI w Wismarze)	Zastosowanie metody różnic skończonych do wyznaczania drgań usztywnionych płyt i powłok o małej krzywiznie	19	5
42.	05.05.77	W. Majewski	Wpływ geometrii odkształceń pospawalniczych na naprężenia w osiowo ściskanych płytach		3

1	2	3	4	5	6
43.	13.10.77	J. Więckowski	Dynamika mostów promowych	25	5
44.	09.11.77	E. Brzuchowski	Cyfrowy zapis kształtu w układzie niekartezjańskim	14	4
45.	01.12.77	P. Wierzchowski	Nośność graniczna belek hybrydowych	14	4
46.	15.12.77	A. Stępniewski	Pewne uwagi o interpretacji podstaw statyki i o zasadzie krętu układu materialnego	17	7
47.	17.12.77	Z. Kamieniecka	Model gospodarki paliwowo-energetycznej w zakładzie przemysłowym	13	4
Oddział we Wrocławiu					
48.	18.06.77	E. Gawrych-Żukowski	Współrzędne kinematyczne punktu w analizie statycznej pręta o krzywiźnie dowolnej	8	5
49.	28.05.77	E. Ciurzyński	Modelowanie wymiany ciepła w połączeniach czołowych uzwojeń stojanów maszyn elektrycznych	7	4
50.	22.06.77	H. Kaswiner (z Australii)	Organizacja elektroenergetycznych badań naukowych w Australii	4	2
Oddział w Warszawie					
51.	06.06.77	St. Dubiel	Koncepcja uogólnionego ujęcia dynamiki układów	8	5
Oddział w Zielonej Górze					
52.	03.01.77	H. Kaźmierczak (Zebranie niezamieszczone w sprawozdaniu za I kw.)	Pole temperatury, stan przemieszczeń i naprężeń dynamicznych w krążku wirującym	3	2
53.	15.04.77	J. Wojnarowski	Grafiy obciążone jako modele układów mechanicznych	6	1
54.	26.04.77	A. Sawczuk	Problemy i metody analizy konstrukcji plastycznych	5	2
55.	16.06.77	W. Nowacki	Rozwój mechaniki ciała stałego w Polsce	8	1
56.	01.09.77	J. Kowalski	Optymalne projektowanie przekładni mechanicznych przy wykorzystaniu programowania nieliniowego	4	1
57.		B. Jakubowska wygłosiła referat Z. K. Leśniaka	Optymalizacja systemów metodą dekompozycji	8	4

II. Sympozja i konferencje naukowe

Oddział w Opolu przeprowadził w dniach 26—28 maja 1977 r. konferencję na temat «Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji». Konferencja zorganizowana była wspólnie z Sekcją Mecha-

niki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Zespołem Metod Komputerowych w Mechanice Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN oraz Instytutem Inżynierii Lądowej Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu.

W skład Komitetu Naukowego Konferencji wchodził: prof. dr hab. E. BIELEWICZ, prof. dr hab. W. GUTKOWSKI, prof. dr hab. J. KRUSZEWSKI, doc. dr hab. O. MATEJA, prof. dr hab. G. RAKOWSKI, prof. dr hab. A. SAWCZUK, prof. dr J. SZMELTER, prof. dr hab. Z. WASZCZYŹYŃ.

Oddział w Częstochowie, wspólnie z Instytutem Maszyn Przepływowych w Gdańsku oraz Instytutem Maszyn Ciepłych Politechniki Częstochowskiej, zorganizował w dniu 27 czerwca 1977 r. Sesję Międzyrodowiskową nt. «Przepływy przez palisady łopatkowe, stopnie i grupy stopni maszyn przepływowych». W imprezie uczestniczyło 29 osób reprezentujących 5 krajowych ośrodków akademickich. Sesję otworzył prof. dr hab. J. ELSNER — przewodniczący Oddziału PTMTS w Częstochowie. Tematyka obrad dotyczyła prac prowadzonych przez poszczególne ośrodki w ramach problemu międzyresortowego «Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych».

Wygłoszono następujące referaty:

1. A. JARŻA (IMC P. Cz.), *Analiza przepływu w kanałach zakrzywionych,*
2. J. ELSNER (IMC P. Cz.), *Badania przepływów wtórnych w modelowej palisadzie kierowniczej,*
3. T. TARNOWSKI (IMC P. Cz.), *Analiza makro- i mikrostruktury przepływu przez palisadę profili kierowniczych z wymianą masy przez układy szczelin na powierzchni łopatek,*
4. R. PUZYREWSKI, K. NAMIEŚNIK (IMP PAN), *Badania przepływów transsonicznych przez palisady łopatkowe,*
5. J. KLAMMER (ITE PW), *Opracowanie metod i programu obliczania wymiany ciepła pomiędzy czynnikiem roboczym a powierzchnią łopatki kierowniczej turbiny gazowej,*
6. W. GUNDLACH (IMP PŁ), *Badanie przepływu i procesu dysypacji (straty brodzenia) między nieruchomą i wirującą tarczą w maszynach wirnikowych,*
7. A. BRYŁA (ITC PW), *Opracowanie algorytmu do projektowania stopnia osiowego turbiny gazowej,*
8. T. CHMIELNIAK (IMiUE P. Śl.), *Analiza i wybór metod obliczania pola prędkości i ciśnienia w stopniach sprężających z uwzględnieniem zjawisk występujących w rzeczywistym przepływie,*
9. A. POTOPCZYK (IMP PŁ), *Badanie przepływu i doskonalenie metod obliczeń promieniowych i osiowo-promieniowych stopni sprężających i sprężarek,*
10. A. TARNOGRODZKI (IMP PŁ), *Wykonanie badań nad dyfuzorami nadłźwiętkowymi stopni sprężarek promieniowych,*
11. S. WIECHOWSKI (ITC Łódź), *Problematyka prowadzonych w ITC badań przepływowych stopni turbin.*

W dyskusji zabrało głos 11 uczestników Sesji. Obrady podsumował prof. dr hab. J. KRZYŻANOWSKI (IMP PAN), koordynator grupy tematycznej 02 problemu międzyresortowego MRI 25, stwierdzając celowość tego typu spotkań naukowych.

Oddział w Gliwicach wspólnie z Zespołem Dynamiki Maszyn Komitetu Budowy Maszyn PAN i z Zespołem Transportu Pionowego i Poziomego Instytutu Mechanizacji Górnictwa Politechniki Śląskiej zorganizował w dniach 9 i 10 grudnia 1977 r. w Katowicach konferencję na temat «Modelowanie górniczych maszyn wyciągowych». W ramach konferencji wygłoszono 30 referatów oraz odbyła się dyskusja okrągłego stołu.

Oddział w Opolu zorganizował w dniach 26—25 listopada 1977 r. sympozjum nt. «Komputeryzacja badań doświadczalnych w mechanice konstrukcji». W sympozjum wzięło udział 80 osób, głosów w dyskusji było 57. Wygłoszono 23 referaty.

III. Seminaria

Oddział w Gdańsku zorganizował seminarium na temat «Analiza funkcjonalna», które prowadzone było przez doc. dr B. PALCZEWSKIEGO. Seminarium odbywało się od kwietnia do czerwca 1977 r.

Oddział ten przeprowadził też w listopadzie i grudniu 1977 r. dwa inne seminaria:

— «Nielineowa teoria powłok», które prowadził doc. dr W. PIETRASZKIEWICZ. W seminarium wzięło udział 9 osób.

— «Elementy analizy funkcjonalnej», które prowadził doc. dr B. PALCZEWSKI. W seminarium wzięło udział 10 osób.

Oddział w Częstochowie zorganizował w październiku 1977 r. seminarium nt. «Termoanemometria w aerodynamice doświadczalnej». Prowadził je prof. dr E. P. DYBAN. W seminarium wzięło udział 14 osób.

IV. Kursy

Oddział w Poznaniu przeprowadził kurs na temat «Optymalizacja w mechanice ciał odkształcalnych». Kurs trwał od 6 kwietnia do 16 czerwca 1977 r. i wzięło w nim udział 22 uczestników.

Oddział w Częstochowie przeprowadził w grudniu 1977 r. kurs nt. «Analiza korelacyjno-spektralna w przepływach turbulentnych» z udziałem 15 uczestników. Kurs prowadził prof. dr hab. J. ELSNER.

Oddział w Gliwicach przeprowadził 15 wykładów kursu nt. «Zastosowanie grafów w mechanice i technice». Wykłady prowadzili: dr J. KACZMARSKI i doc. dr J. WOJNAROWSKI. W kursie uczestniczyło 10 osób.

V. Działalność wydawnicza

Oddział w Częstochowie wydał metodą małej poligrafii materiały do kursu prowadzonego przez prof. dr hab. J. ELSNERA nt. «Analiza korelacyjno-spektralna w przepływach turbulentnych».

Oddział w Opolu wydał I tom materiałów konferencyjnych na temat «Komputeryzacja w mechanice konstrukcji».

VI. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach PTMTS ilustruje następująca tabela:

Lp.	Oddział	Stan na koniec I kw. 1977 r.	Stan na koniec IV kw. 1977 r.	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym
1.	Bydgoszcz	27	27	—
2.	Częstochowa	40	54	+4
3.	Gdańsk	48	49	+1
6.	Gliwice	139	157	+18
4.	Kraków	76	82	+6
5.	Łódź	52	57	+5
7.	Opole	18	20	+2
8.	Poznań	61	65	+4
9.	Rzeszów	31	20	-11
10.	Szczecin	33	34	+1
11.	Warszawa	228	227	-1
12.	Wrocław	63	73	+10
13.	Zielona Góra	19	11	-8
	Razem	855	886	+31

W okresie sprawozdawczym odbyły się 3 zebrania Zarządu Głównego PTMTS, 1 zebranie Głównej Komisji Rewizyjnej oraz 56 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

WYNIKI
OGÓLNOKRAJOWYCH KONKURSÓW NAUKOWYCH NA PRACE Z DZIEDZINY
MECHANIKI

Oddział w Łodzi przeprowadził konkurs naukowy na prace teoretyczne z dziedziny mechaniki. Na konkurs zgłoszonych zostało 16 prac. Pierwszej nagrody nie przyznano.

Dwie równorzędne nagrody drugiego stopnia po zł. 7.000.— każda otrzymali: Józef BAJKOWSKI za pracę pt. *Generowanie rezonansów pobocznych przez impulsy sił w nieliniowych układach drgających* i Paweł WIEWIÓRSKI za pracę pt. *Przechodzenie słabych fal uderzeniowych przez rozgałęzienie przewodów rurowych*.

Dwie równorzędne nagrody trzeciego stopnia po zł. 5.000.— każda otrzymali: Maciej KULISIEWICZ za pracę pt. *Identyfikacja empiryczna charakterystyki tłumienia nieliniowych układów dynamicznych* i Walerian SZYSZKOWSKI za pracę pt. *Analiza możliwości przystosowania się pewnego typu osiowosymetrycznej konstrukcji powłokowej poprzez lokalną stateczność jej powierzchni*.

Dwa wyróżnienia po zł. 3.000.— każda otrzymali: Kazimierz POSTELNIK za pracę pt. *Kontynualna termomechanika płyt i powłok* i Stanisław WOJCIECHOWSKI za pracę pt. *Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej ortotropowej płyty pierścieniowej, poddanej działaniu sił promieniowych zmieniających w czasie*.

Oddział w Częstochowie przeprowadził ogólnokrajowy konkurs naukowy na prace doświadczalne z mechaniki technicznej. Na konkurs wpłynęło 10 prac.

Nagrodę pierwszego stopnia w wys. zł. 9.000.— otrzymał Jerzy WASOWSKI za pracę pt. *Badanie ugięć płyt metodą mory*.

Dwie równorzędne nagrody drugiego stopnia po zł. 6.500.— każda otrzymali: Jacek KAPKOWSKI za pracę pt. *Analiza sprężysto-plastyczna jarzma połączenia sworzniowego* i Ryszard WOJNAR za pracę nt. *Wyznaczanie dewiatora naprężeń na podstawie obrazu izochrom*.

Dwie równorzędne nagrody trzeciego stopnia po zł. 4.000.— otrzymali: Janusz KASPERKIEWICZ za pracę nt. *Wytrzymałość i odkształcalność graniczna przy rozciąganiu fibrobetonu z włóknem stalowym* oraz Zbigniew ORŁOŚ i Kazimierz TOMASZEWSKI za pracę nt. *Badania odkształceń i naprężeń termosprężystych na modelach epoksydowych metodą tensometrii elektrozrezystancyjnej*.

Wyróżnienia pisemne otrzymali: Ewa DRESCHER i Radosław MICHAŁOWSKI za pracę nt. *Ultradźwiękowa metoda badania ośrodków ziarnistych w procesach deformacji*, Wincenty MROZEK za pracę nt. *Badania modelowe nośności podłoża analogowego obciążonego fundamentami szeregowymi* i Krzysztof KOZAKIEWICZ za pracę nt. *Metoda polowa określania wektora przemieszczeń silnie deformowanych powierzchni*.

OGÓLNOPOLSKI KONKURS
NA PRACE TEORETYCZNE Z MECHANIKI

Gliwicki Oddział PTMTS, w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS w Warszawie, ogłasza Krajowy Konkurs na prace teoretyczne z mechaniki.

W konkursie mogą brać udział tylko członkowie PTMTS nie posiadający tytułu profesora, docenta lub stopnia doktora habilitowanego.

Prace konkursowe, zawierające elementy nowości w stosunku do aktualnego stanu wiedzy, należy przysłać do Sekretariatu Oddziału Gliwickiego PTMTS (ul. Powstańców Warszawskich 12 p. 16) 44-100 Gliwice, Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej, w terminie do dnia 15 września 1978 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani zgłoszona do druku. Maszynopis pracy należy przesłać w 3 egz. w formie nadającej się do druku, jego objętość nie powinna przekraczać 20 stron, nie licząc rysunków i wykresów.

Pracę należy opatrzyć godłem, a nazwisko, imię i adres uczestnika wraz z podaniem miejsca pracy podać w zamkniętej kopercie.

Dopuszczone do konkursu prace uczestnicy referują na publicznym zebraniu naukowym, w terminie określonym przez Zarząd.

Prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału w porozumieniu z Zarządem Głównym.

Konkurs prowadzony będzie zgodnie z regulaminem Konkursów Naukowych PTMTS.

Nagrody

I — 12.000 zł.

II — 8.000 zł.

III — 5.000 zł.

Zarząd Oddziału zastrzega sobie prawo innego podziału nagród.

Nagrodzone prace przekazane zostaną do opublikowania w czasopiśmie «Mechanika Teoretyczna i Stosowana». Prace nie nagrodzone będą zwrócone Autorom po zatrzymaniu jednego egzemplarza w archiwum Oddziału.

*Przewodniczący Sądu
Konkursowego*

Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski

*Przewodniczący
Oddziału Gliwickiego PTMTS*

Doc. dr hab. inż. Józef Wojnarowski

K O M U N I K A T

XV MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

XV Międzynarodowy Kongres Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej odbędzie się w dniach 18—23 sierpnia 1980 r. na terenie Uniwersytetu w Toronto.

Selekcją prac zgłoszonych na Kongres będzie się zajmował Międzynarodowy Komitet Programowy we współpracy z komitetami narodowymi IUTAM. Prace w liczbie 6 egzemplarzy należy nadsyłać do 4 lutego 1980 r. pod adresem:

*Mr. Ken Charbonneau
Executive Secretary
ICTAM Toronto
National Research Council
Ottawa, Ontario, KIA OR6, CANADA*

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- S. BERCZYŃSKI, H. MAĆKOWIAK, K. MARCHELEK, Modelowanie wielostopniowych przekładni zębatych metodą sztywnych elementów skończonych
Моделирование многоступенчатых зубчатых передач по методу жестких конечных элементов
Modelling of multiple toothed gears by rigid finite elements
- A. TRZĘSOWSKI, O makroskopowych naprężeniach w ośrodkach wielofazowych
O макроскопических напряжениях в неоднородной среде
On macroscopic stresses in a multi-component medium
- K. GRYSA, J. JANIKOWSKI, O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych, pojawiających się w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych
O суммировании некоторых рядов Дини и тригонометрических существующих в задачах механики сплошных сред
Summation of certain Dini and trigonometric series occurring in problems of the theory of continuous media
- S. MATYSIAK, A. WACHESKA-SKOWRON, O jednoznaczności rozwiązania pewnych mieszanych zagadnień brzegowych dla półprzestrzeni mikropolarnej
Об однозначности решений смешанных краевых задач для микрополярного полупространства
On uniqueness of solution of mixed boundary value problems for micropolar half-space
- A. SZANIAWSKI, A. ZACHARA, Przepływ laminarny w kanale o zmiennym przekroju z ruchomymi i porowatymi ściankami
Ламинарное течение в канале с переменным поперечным сечением и с подвижными и простыми стенками
Laminar flow in a channel of a variable cross-section with movable and porous walls
- J. WŁASNY, Optymalizacja kształtu pręta ściskanego z uwzględnieniem ciężaru własnego metodą programowania dynamicznego
Оптимальное проектирование по методу динамического программирования скатого стержня с учетом собственного веса
Optimal design of a bar under axial force and own weight by means of dynamic programming
- J. KOLENDĄ, Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów maszyn
Метод идентификации динамической податливости фундаментов машин
Identification method of the dynamical receptance of machine foundations
- K. GRUDZIŃSKI, L. ŁABUĆ, T. BURDA, Osiowo-symetryczne połączenie klejone o optymalnym rozkładzie naprężeń stycznych w warstwie kleju
Осесимметричные клеевые соединения с оптимальным распределением касательных напряжений в клеевом слое
Axi-symmetric glue joints with optimal shearing stress distribution within the glue layer
- E. WŁODARCZYK, O pewnym zjawisku w procesie detonacji zawieszinowych materiałów wybuchowych zanurzonych w hydrostatycznym polu ciśnienia
O некотором явлении в процессе детонации взвешенных взрывчатых смесей погруженных в гидростатическом поле давления
On a phenomenon occurring in the process of detonation of suspension explosives immersed in a hydrostatic pressure field
- J. WAJKOWSKI, Generowanie rezonansów pobocznych przez impulsy sił w nieliniowych układach drgających
Генерирование силовыми импульсами побочных резонансов в нелинейных колебательных системах
Secondary resonances generation by force impulses in nonlinear vibrating systems

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i cały rok następny,
- do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along, with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch 0-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
