

y II 720  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

**MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA**

**KWARTALNIK**

**TOM 16 · ZESZYT 1**

**WARSZAWA 1978**

**PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE**

531

## SPIS TREŚCI

<b>R. KOTOWSKI</b> , Dyskretne modele dyslokacji Дискретные модели дислокаций Discrete models of dislocations	3
<b>T. MAJEWSKI</b> , Samoczynne wyważanie wirnika podpartego sprężystości w dwóch kierunkach Автоматическое уравновешивание ротора, поддерживаемого упруго в двух направлениях An automatic balancing of rotor elasticity supported in two directions	25
<b>J. HOLNICKI-SZULC</b> , Zagadnienia sprężania w ośrodkach dwufazowych Предварительное напряжение в двухфазовых средах On the prestressing in diphas media	41
<b>J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA</b> , Wpływ spadochronu na ruch zasobnika osiowo-symetrycznego zrzuconego z samolotu Влияние парашюта на движение осево-симметричного объекта сбрасываемого с самолета The influence of a parachute on the motion of an axially symmetric airdropped object	57
<b>S. PŁECHNIK</b> , Kinematyczna równoważność układów sił Кинематическая эквивалентность систем сил Kinematic equivalence of a system of forces	71
<b>K. RUP</b> , Modyfikacja metody uśredniania funkcjonalnych poprawek w zagadnieniach konwekcji wymuszonej i przepływu ciepła Модификация метода осреднения функциональных поправок An extension of the averaging method of functional errors	81
<b>J. WRANIK</b> , Iteracyjna metoda obliczania dowolnych ciał odkształcalnych w zakresie liniowo sprężystym Итерационный метод расчета произвольных линейно упругих тел Iteration method of calculating arbitrary deformable bodies in a linear elastic range	89
<b>J. WRANIK</b> , Obliczanie dowolnych tarcz metodą iteracyjną Расчет дисков итерационным методом Calculation of discs by means of iteration method	101
<b>BIULETYN INFORMACYJNY</b>	113

Y II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 6 · Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1 9 7 8

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

JERZY ANTONIAK — PRZEWODNICZĄCY,  
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,  
JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI  
LECH DIETRICH — REDAKTOR  
ANDRZEJ DRESCHER — REDAKTOR  
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ  
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR  
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 700 (596 + 104). Ark. wydawniczych 9,0. Ark. drukarskich 7,5 + 0,25 luz. wkł. Papier druk. sat. III kl. 70 g, 70×100. Oddano do składania 29.X.1977 r. Druk ukończono w marcu 1978 r. Zam. 1486/77. S-103 Cena zł 30,—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## DYSKRETNE MODELE DYSLOKACJI

ROMUALD KOTOWSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Dyslokacje są to jednowymiarowe defekty sieci krystalicznej. Są one odpowiedzialne za plastyczne zachowanie się ciał stałych. Istnienie ich zostało potwierdzone eksperymentalnie przy użyciu promieni Roentgena i mikroskopu elektronowego. Teorie opisujące zachowanie się dyslokacji, ich oddziaływanie wzajemne oraz z innymi defektami sieci krystalicznej, np. z defektami punktowymi, ich wpływ na własności mechaniczne ciał są przedmiotem badań od przeszło osiemdziesięciu lat. Stanowią one dział mechaniki ciała stałego. Przez wiele lat dyslokacje z dużym powodzeniem badano w ramach kontynualnej teorii ośrodków ciągłych. Pozwalało to na stosowanie dobrze rozpracowanego aparatu analizy matematycznej. Istnieje jednak wiele takich zagadnień, gdy konieczna jest wiedza na temat szczegółów dyskretnej budowy kryształu, a wtedy powyższe podejście staje się niezadowolające. Jednym z takich problemów jest zagadnienie naprężenia Peierlsa, czyli minimalnego naprężenia, które musi być przyłożone z zewnątrz do kryształu, aby spowodować ruch dyslokacji. Zakłada się, że dyslokacja podczas ruchu pozostaje prostoliniowa. Nie uwzględnia się również wpływu temperatury.

Dyskretne modele dyslokacji mają znaczną niedogodność polegającą na ogromnych trudnościach rachunkowych. Z tego względu stosuje się szereg przybliżeń, co powoduje, że otrzymane wyniki nie zawsze są wiarygodne.

W niniejszej pracy przedstawiono przegląd dyskretnych modeli dyslokacji, w których podjęto próby wyliczenia naprężenia Peierlsa. Zaprezentowano modele Frenkla-Kontorovej, Peierlsa-Nabarro, Maradudina, Sandersa i Roguli oraz wspomniano o półdyskretnych modelach stosowanych w komputerowej symulacji dyslokacji w kryształach.

### 2. Model Frenkla-Kontorovej

Model zaproponowany przez Frenkla i Kontorową był jednym z pierwszych, w którym starano się oddać dyskretną naturę dyslokacji w kryształach.

W modelu tym kryształ jest podzielony myślowo na dwie części: górną i dolną. Część górna jest zastąpiona przez jednowymiarowy łańcuch punktów materialnych (atomów) połączonych identycznymi sprężynkami o stałej sprężystości  $k$ . Oddziaływanie obu półkryształów uwzględnia się przez umieszczenie łańcucha atomów w nieruchomym okresowym potencjale  $W(x)$ , o okresie równym  $b$ , gdzie  $b$  jest odległością międzyatomową.

Dyslokację krawędziową wprowadza się dostarczając lub usuwając jeden atom z nieskończonego łańcucha (rys. 1).

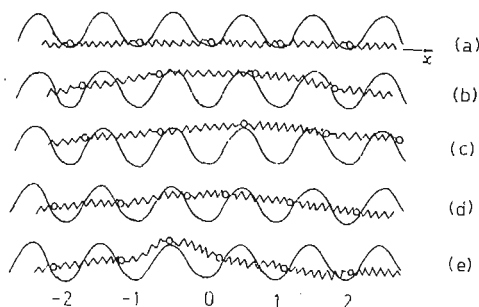
Energia potencjalna kryształu wynosi

$$(2.1) \quad U = \frac{k}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (\psi_{j+1} - \psi_j)^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} W(\psi_j),$$

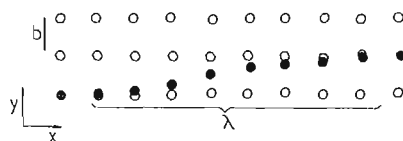
gdzie  $\psi_j$  jest wychyleniem atomu o numerze  $j$  z  $j$ -tego minimum potencjału. Różniczkując (2.1) względem  $\psi_j$ , otrzymujemy warunek stanu równowagi  $j$ -tego atomu

$$(2.2) \quad k(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}) - \frac{\partial W(\psi_j)}{\partial \psi_j} = 0,$$

który głosi, że atom znajduje się w stanie równowagi wtedy, gdy siły sprężystości sprężynek są równoważone siłami potencjalnymi związanymi z potencjałem  $W(x)$ .



Rys. 1. Dyslokacja krawędziowa w modelu Frenkla-Kontorovej; (a) kryształ idealny; gdy minimum potencjałów o 1 więcej niż atomów: (b) konfiguracja stabilna; (c) konfiguracja niestabilna; gdy atomów o 1 więcej niż minimum potencjału: (d) konfiguracja stabilna; (e) konfiguracja niestabilna



Rys. 2. Dyslokacja śrubowa w modelu Frenkla-Kontorovej

● atomy łańcucha, ○ atomy sieci (wg [1])

W oryginalnej pracy Frenkla i Kontorovej, jako potencjał przyjęto następującą funkcję:

$$(2.3) \quad W(\psi_j) = A \left( 1 - \cos \frac{2\pi\psi_j}{b} \right)$$

i rozwiązano zagadnienie dynamiczne

$$(2.4) \quad m \frac{d^2\psi_j}{dt^2} = -\frac{2\pi A}{b} \sin \frac{2\pi\psi_j}{b} + k(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}),$$

kładąc

$$\nabla^2\psi_j = \psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1} \approx \frac{\partial^2\psi_j}{\partial x^2} b^2,$$

gdzie skorzystano z przybliżenia długofalowego [1].

W modelu Frenkla-Kontorovej można badać również dyslokację śrubową. W tym celu należy rozważyć jednowymiarowy łańcuch atomów ruchomych leżący na dwuwymiarowej siatce atomów nieruchomych (rys. 2). Ruch dyslokacji w kierunku  $x$  sprowadza się do

kolejnego przemieszczania się atomów łańcucha na odcinku o długości  $\lambda$  w kierunku  $y$  na drodze  $\Delta y = b$  z jednego prostoliniowego szeregu atomów sieci na następny. Zakłada się, że atomy z łańcucha oddziałują z atomami sieci za pomocą potencjału, np. typu (2.3), a energia oddziaływania atomów z łańcucha między sobą zależy od ich względnego przemieszczenia w kierunku  $y$  i wynosi

$$\frac{1}{2} \beta (\eta_{j+1} - \eta_j)^2,$$

gdzie  $\eta_j$  jest przemieszczeniem  $j$ -tego atomu z łańcucha. Równanie równowagi dla atomów łańcucha zapisuje się wtedy następująco:

$$\beta (\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}) - A \sin \frac{2\pi\eta_j}{b} = 0$$

i problem sprowadza się do zagadnienia dyslokacji krawędziowej.

Równanie (2.2) z potencjałem (2.3) było rozwiązywane przez różnych autorów, ale przez sprowadzenie równania różnicowego do różniczkowego. Pierwsze dokładne numeryczne rozwiązanie równania różnicowego dla konfiguracji symetrycznych pojedynczej dyslokacji podali HOBART i CELLI [2], otrzymując wyniki w postaci zbieżnych szeregów potęgowych przemieszczeń atomowych.

HOBART w pracy [3] przedstawił metodę obliczenia naprężenia Peierlsa w modelu Frenkla-Kontorovej, korzystając z równania (2.2) zapisanego w postaci

$$(2.5) \quad k(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}) + \frac{2\pi A}{b} \sin \frac{2\pi\psi_j}{b} = 0.$$

Stałe  $k$  i  $A$  dadzą się przedstawić za pomocą stałych sprężystych  $\nu$ ,  $\mu$  i  $E$  [3], gdzie  $\nu$  — współczynnik Poissona,  $\mu$  — moduł ścinania, a  $E$  — moduł Younga, w następujący sposób:

$$(2.6) \quad A = \frac{\mu b^3 c}{4\pi a}, \quad k = \frac{acE}{b(1-\nu^2)},$$

gdzie  $a$  jest odległością między płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny poślizgu, a  $abc$  jest objętością komórki elementarnej. Hobart wykazał, że naprężenie Peierlsa jest proporcjonalne do siły  $R_{\max}$  działającej na atom  $n = 0$  potrzebnej do utrzymania go w odległości  $y_0$  od położenia równowagi i wynosi

$$(2.7) \quad \sigma_p \cong \frac{aE}{b\mu(1-\nu^2)} \frac{R_{\max}}{w},$$

gdzie  $w(s)b$  jest szerokością dyslokacji, gdy znajduje się ona w położeniu  $sb$  dla  $0 \leq s \leq 1$ .

Energia Peierlsa jest równa pracy, jaką musi wykonać owa siła  $R$  podczas ciągłego przejścia dyslokacji od jednej konfiguracji równowagi do następnej

$$(2.8) \quad E_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{y_{II}} R(y_0) dy_0.$$

Rachunki można wykonać tylko numerycznie. Metoda jest na tyle ogólna, że może mieć zastosowanie również do innych potencjałów. Hobart wykonał obliczenia dla

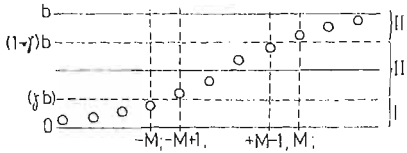
$$(2.9) \quad \frac{dW(\psi_j)}{d\psi_j} = \frac{kb}{2\pi} \left[ P \sin \left( \frac{2\pi\psi_j}{b} \right) - Q \sin \left( \frac{4\pi\psi_j}{b} \right) \right]$$

w pracy [4] i dla

$$(2.10) \quad \frac{dW(\psi_j)}{d\psi_j} = \frac{\pi^2 A}{b} \left[ \left( \frac{2\psi_j}{b} \right) - \left( \frac{2\psi_j}{b} \right)^3 \right]$$

w pracy [5]. Stwierdzono dla tych wszystkich potencjałów, iż energia Peierlsa maleje wykładniczo wraz ze wzrostem szerokości dyslokacji, mimo oczywistych różnic w wyliczonych wartościach energii. HOBART [6] podał również sposób przybliżonego obliczenia energii Peierlsa przy użyciu metody zmiennej zespolonej. Otrzymane wyniki są w dość dobrej zgodzie z metodą dokładną.

Dokładne analityczne rozwiązanie w modelu Frenkla-Kontorovej można znaleźć, gdy potencjał jest odcinkami paraboliczną funkcją przemieszczenia. Rozwiązanie takie znaleźli KRATOCHVIL i INDENBOM [7] oraz WEINER i SANDERS [8]. Dokładną analizę tego modelu znaleźć można również w pracy ROGULI [9].



Rys. 3. Podział kryształu na strefy w modelu Frenkla-Kontorovej

Kryształ podzielono na trzy strefy (rys. 3), ze względu na wartość przemieszczeń atomów w stosunku do parametru modelu:

$$(2.11) \quad \begin{array}{ll} \text{III:} & (1-\gamma)b \leq \psi_j \leq b, \quad M \leq j < +\infty, \\ \text{II:} & \gamma b \leq \psi_j \leq (1-\gamma)b, \quad -M < j < M, \\ \text{I:} & 0 \leq \psi_j \leq \gamma b, \quad -\infty < j \leq -M. \end{array}$$

W strefie II jest  $2M-1$  atomów połączonych tzw. słabymi wiązaniami. Numery atomów przybierają wartości połówkowe, gdy liczba słabych wiązań jest parzysta i całkowite, gdy nieparzysta. Konfiguracja równowagi opisana jest następującymi równaniami dla odpowiednich stref:

$$(2.12) \quad \begin{array}{l} \text{III:} \quad k\nabla^2\psi_j - \mu b(\psi_j - b) = 0, \\ \text{II:} \quad k\nabla^2\psi_j + \frac{2\mu b\gamma}{1-2\gamma} \left( \psi_j - \frac{b}{2} \right) = 0, \\ \text{I:} \quad k\nabla^2\psi_j - \mu b\psi_j = 0. \end{array}$$

Dla danej wartości  $\gamma$  mamy zawsze dwie konfiguracje równowagi o  $M$  różniącym się o  $1/2$ . Gdy  $M$  jest połówkowe, to konfiguracja słabych wiązań jest symetryczna względem maximum, a dla  $M$  całkowitego jest symetryczna względem minimum potencjału. Stabilna jest ta konfiguracja, która ma mniejszą liczbę słabych wiązań.

Gdy do kryształu przyłożone jest naprężenie ścinające  $\tau$ , to na każdy atom działa siła  $f = -\tau b^2$ . Rozwiązania szuka się w postaci

$$(2.13) \quad \eta_j = \psi_j + \varphi_j - \frac{\tau b}{\mu},$$



gdzie  $\varphi_j$  jest rozwiązaniem przy  $\tau = 0$ , a  $-\tau b/\mu$  jest przesunięciem atomu w nieskończoności wywołanym działaniem naprężenia  $\tau$ . Żąda się, by  $\varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \pm\infty} 0$ .

Równania na  $\varphi_j$  dadzą się zapisać w postaci

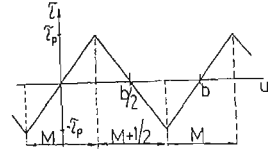
$$(2.14) \quad \begin{aligned} \text{III: } \nabla^2 \varphi_j - P \varphi_j &= 0, \\ \text{II: } \nabla^2 \varphi_j + Q \left( \varphi_j - \frac{\tau b}{2\mu\gamma} \right) &= 0, \\ \text{I: } \nabla^2 \varphi_j - P \varphi_j &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $P = \mu b/k$ , a  $Q = 2\gamma P/(1-2\gamma)$ .

W stanie granicznym, gdy atom o numerze  $M$  znajduje się na granicy stref II - III, to wtedy  $\eta_M = (1-\gamma)b$  i  $\tau = \tau_p$  wynosi

$$(2.15) \quad \tau_p = \mu\gamma \frac{\cos M\theta - \beta \cos(M-1)\theta}{\sin M\theta - \beta \sin(M-1)\theta} \frac{\sin M\theta - \delta \sin(M-1)\theta}{\cos M\theta - \delta \cos(M-1)\theta},$$

gdzie  $\delta = \beta \frac{1-2\gamma}{\beta-2\gamma}$ ,  $\beta = \frac{1}{2} [2 + P - \sqrt{P^2 + 4P}]$ ,  $\cos \theta = 1 - \frac{Q}{2}$ .

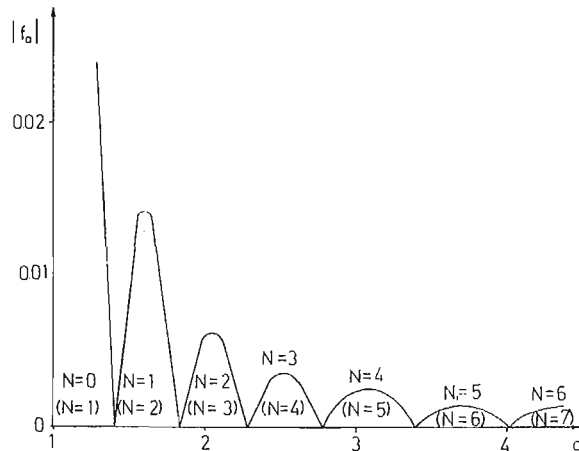


Rys. 4. Zmiany  $\tau_p$  w czasie ruchu dyslokacji w modelu Frenkla-Kontorovej

Gdy atom o numerze  $-M$  znajduje się na granicy stref I - II, to  $\eta_{-M} = \gamma b$  i  $\tau = -\tau_p$ . Dla ustalonych  $\mu, \gamma, k$ , a więc i  $M$ , w czasie ruchu dyslokacji, np. w prawo, następuje na przemian zmiana liczby słabych wiązań o  $+1$  przy przejściu ze strefy II do III i o  $-1$  przy przejściu ze strefy I do II, a

$$(2.16) \quad -\tau_p \leq \tau \leq \tau_p.$$

Możemy więc  $\tau_p$  utożsamić z naprężeniem Peierlsa. Zmiany  $\tau$  w czasie ruchu dyslokacji pokazuje rys. 4.

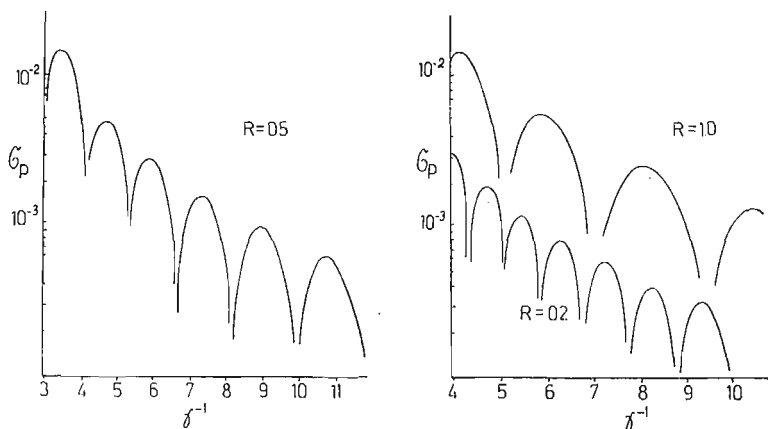


Rys. 5. Wykres  $\tau_p(\gamma^{-1})$  wg Kratochvila i Indenboma [7]

$N$  oznacza liczbę atomów w strefie II. Liczby w nawiasach odpowiadają konfiguracjom niestabilnym;  $d = 1/(2\gamma)$ ,  $f_0 = \tau_p$

Jeżeli przejścia II - III i I - II występują równocześnie, to  $\tau_p = -\tau_p$ , czyli  $\tau_p \equiv 0$  i dyslokacja może przemieszczać się w kryształach bez przykładania sił zewnętrznych, a liczba słabych wiązań pozostaje bez zmian.

Na rys. 5 i 6 przedstawiono wykresy zmian  $\tau_p$  w funkcji  $\gamma^{-1}$  otrzymane przez KRATOCHVILA i INDENBOMA [7] oraz WEINERA i SANDERSA [8].



Rys. 6. Wykres  $\tau_p(\gamma^{-1})$  wg Weinera i Sandersa [8]

### 3. Model Peierlsa-Nabarro

Model dyslokacji zasugerowany przez Orowana, a następnie rozwinięty przez Peierlsa i Nabarro wzbudził wielkie zainteresowanie i wywarł duży wpływ na rozwój teorii dyslokacji w kryształach. Właśnie w tym modelu Peierls jako pierwszy oszacował naprężenie potrzebne do przeprowadzenia dyslokacji z komórki do komórki.

Model Peierlsa-Nabarro został zbudowany przy następujących założeniach (rys. 7):

- kryształ składa się z dwu połączonych ze sobą, ciągłych, sprężystych półprzestrzeni;
- wzdłuż płaszczyzny połączenia (cięcia) półprzestrzenie mają strukturę atomową;
- oddziaływanie atomów z najniższej warstwy górnej półprzestrzeni z atomami najwyższej warstwy dolnej półprzestrzeni jest typu sinusoidalnego, natomiast w każdej z półprzestrzeni osobno spełnia ono prawo Hooke'a;
- przemieszczenia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny poślizgu są zaniedbywalnie małe i nie są brane pod uwagę również wszelkie efekty temperaturowe;
- dyslokacja jest prostoliniowa.

Model ten może być oczywiście modyfikowany, na przykład przez żądanie, aby oddziaływanie atomów wzdłuż płaszczyzny cięcia było dowolną funkcją okresową (np. LEJČEK [10] i KROUPA, LEJČEK [11]), o okresie równym stałej sieci, byle tylko dla małych względnych przemieszczeń  $\Phi_i$  zachodził liniowy związek:

$$(3.1) \quad \sigma_{xy} = \frac{\mu}{d} \Phi_x(x) \quad \text{dla dyslokacji krawędziowej,}$$

$$\sigma_{yx} = \frac{\mu}{d} \Phi_z(x) \quad \text{dla dyslokacji śrubowej,}$$

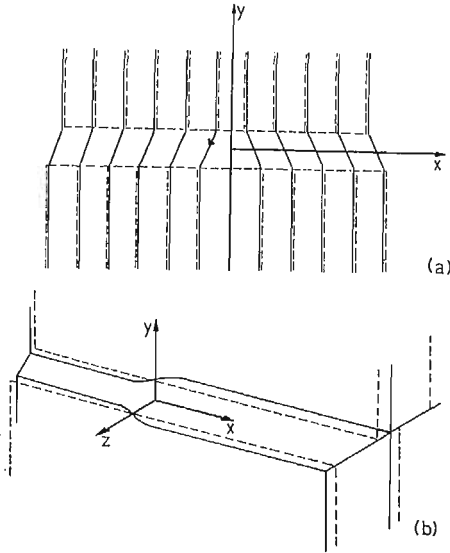
gdzie  $d$  jest odległością międzypłaszczyznową. Szczególnie proste wyniki otrzymuje się jednakże wtedy, gdy przyjmie się zależność sinusoidalną.

Początkowo przemieszczenie dolnej półprzestrzeni względem górnej (na rys. 7 linie przerywane) wynosi

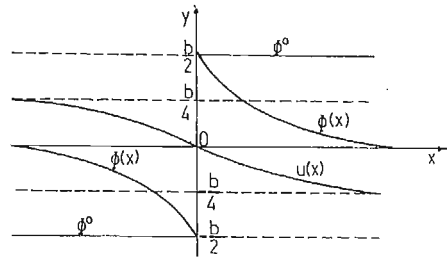
$$(3.2) \quad \Phi_x^0 = \Phi_z^0 = \begin{cases} b/2 & \text{dla } x > 0 \\ -b/2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Po nałożeniu na półprzestrzenie takich przemieszczeń, że tworzy się odpowiednio dyslokacja krawędziowa lub śrubowa:

$$(3.3) \quad \Phi_x = \begin{cases} 2u_x + b/2 & \text{dla } x > 0 \\ 2u_x - b/2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}; \quad \Phi_z = \begin{cases} 2u_z + b/2 & \text{dla } x > 0 \\ 2u_z - b/2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$



Rys. 7. Dyslokacja krawędziowa (a) i śrubowa (b) w modelu Peierlsa-Nabarro (wg [12])



Rys. 8. Wykres przemieszczeń w modelu Peierlsa-Nabarro (wg [12])

Ogólnie, przemieszczenia zachowują się tak, jak pokazano na rys. 8. Z przemieszczeniami związane są siły, wywołane zakłóceniem wiązań w płaszczyźnie  $y = 0$ . Zgodnie z przyjętymi założeniami, np. dla dyslokacji śrubowej

$$(3.4) \quad \sigma_{yx}(x, 0) = \frac{-\mu b}{2\pi d} \sin \frac{4\pi u_z}{b}$$

Formalna teoria sprężystości, jak również założenie ciągłego rozkładu dyslokacji wzdłuż osi  $Ox$ , prowadzi do związku

$$(3.5) \quad \sigma_{yz}(x, 0) = \frac{\mu}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_z(x')}{dx'} \frac{dx'}{x' - x},$$

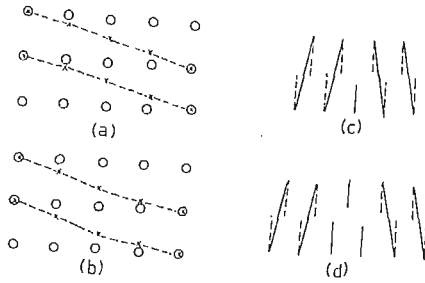
gdzie  $P$  oznacza, że całkę należy rozumieć w sensie wartości głównej Cauchy'ego. Przyrównując (3.4) i (3.5) otrzymujemy równanie całkowe, którego rozwiązaniem jest

$$(3.6) \quad u_z = -\frac{b}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta},$$

gdzie  $\eta = d/2$ . Naprężenie wyraża się teraz równaniem

$$(3.7) \quad \sigma_{yz}(x,0) = \frac{\mu b}{2\pi} \frac{x}{x^2 + \eta^2}.$$

Ostatni wzór wskazuje na istotną cechę modelu Peierlsa-Nabarro: w zerze, czyli w jądrze dyslokacji, nie ma osobliwości naprężenia, które pojawiało się w modelu kontynualnym. Osobliwość pojawia się teraz w odległości  $\pm\eta$  od płaszczyzny poślizgu.



Rys. 9. Symetryczne konfiguracje dyslokacji w modelu Peierlsa-Nabarro (wg [12])

(a), (b) — dyslokacja śrubowa; (c), (d) — dyslokacja krawędziowa;  $\circ$  i  $\times$  oznaczają atomy odpowiednio nad i pod płaszczyznę poślizgu, a linie przerywane na rysunku dyslokacji krawędziowej — położenie rzędów atomów, gdyby nie było dyslokacji

Podczas ruchu dyslokacji następuje zmiana energii potencjalnej kryształu. Zależność energii potencjalnej od położenia dyslokacji jest funkcją okresową, o okresie równym długości wektora Burgersa  $b$ , ze względu na periodyczną budowę kryształu. Aby przejść z jednej konfiguracji symetrycznej do drugiej (rys. 9), dyslokacja musi znaleźć się w konfiguracji niesymetrycznej. Oczekiwano, że ta ostatnia będzie miała energię wyższą, czyli że naprężenie ścinające powodujące zmianę konfiguracji też będzie się zmieniać okresowo. W modelu założono, że podczas ruchu dyslokacji energia sprężysta w obu półprzestrzeniach nie ulega zmianie, zmienia się natomiast tylko energia pochodząca od zmiany względnych przemieszczeń, będąca sumą po wszystkich atomach wzdłuż płaszczyzny cięcia i wynosi

$$(3.8) \quad W(\alpha) = \frac{\mu b^2}{4\pi} + \frac{\mu b^2}{2\pi} \exp\left[-\frac{4\eta\pi}{b}\right] \cos 4\alpha\pi,$$

gdzie  $\alpha b$  jest wychyleniem dyslokacji z jednej z konfiguracji symetrycznych. Różniczkując otrzymany wzór po  $\alpha$  można znaleźć siłę i naprężenie, jakimi należy działać na dyslokację, aby przesunąć ją z jednego położenia równowagi w następną:

$$(3.9) \quad F = -\frac{1}{b} \frac{dW(\alpha)}{d\alpha} = 2\mu b \exp\left[-\frac{4\eta\pi}{b}\right] \sin 4\alpha\pi, \quad \sigma_{yx} = \frac{1}{b} F.$$

Energia osiąga maksimum, gdy  $\cos 4\alpha\pi = 1$ , a minimum, gdy  $\cos 4\alpha\pi = -1$ . Maksimum mamy więc, gdy  $\alpha = 0$  lub  $1/2$ , a minimum, gdy  $\alpha = 1/4$ . Wniosek jest niespodziewany i sprzeczny z oczekiwaniami: największą energię mają konfiguracje symetryczne, a konfiguracja niesymetryczna jest obdarzona energią minimalną.

Naprężenie Peierlsa, czyli maksymalne naprężenie potrzebne do przeprowadzenia dyslokacji do następnej komórki, pojawia się wtedy, gdy  $\alpha = 1/8$  i wynosi

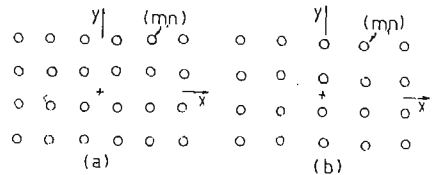
$$(3.10) \quad \sigma_p = 2\mu \exp\left[-\frac{4\eta\pi}{b}\right].$$

HIRTH i LOTHE [12] uważają, że nieoczekiwana postać energii potencjalnej jest częściowo skutkiem sumowania niezależnie po płaszczyznach górnej i dolnej. Metoda ta nie ma

silnego uzasadnienia fizycznego i pociąga za sobą zbytne wygładzenie funkcji w pobliżu jądra dyslokacji. Sugerują, że sumowanie energii pochodzącej od względnych przemieszczeń par rzędów atomów powinno poprawić ten wynik.

4. Model Maradudina

MARADUDIN [13] zaproponował prosty model dyslokacji śrubowej w sieci krystalicznej, w której każdy atom oddziałuje tylko ze swymi najbliższymi czterema współpłaszczyznowymi sąsiadami zgodnie z prawem Hooke'a. Odległości pomiędzy atomami w kierunku prostym do płaszczyzny przekroju są stałe. Maradudin wyliczył przemieszczenia atomów w dwu konfiguracjach dyslokacji śrubowej: w konfiguracji I, gdy dyslokacja znajduje się w środku komórki elementarnej i w konfiguracji II, gdy dyslokacja znajduje się na krawędzi komórki elementarnej (rys. 10). Następnie podał wyrażenia na energie od-



Rys. 10. Konfiguracje dyslokacji śrubowej w modelu Maradudina; (a) konfiguracja I; (b) konfiguracja II

kształcenia powyższych konfiguracji. Różnica tych energii jest energią Peierlsa. Pionowe przemieszczenie atomu o współrzędnych  $(m, n)$  oznaczono  $w(m, n)$ . Jest ono wielowartościową funkcją położenia atomu w tym sensie, że wzrasta o  $b$  po zatoczeniu konturu Burgersa wokół linii dyslokacji. Aby uniknąć kłopotów związanych z wielowartościowością pola przemieszczeń wprowadzono cięcie wzdłuż osi  $0x$ . Położenie tego cięcia jest w ogólności dowolne.

Stan równowagi rzędu atomów o współrzędnych  $(m, n)$  jest opisany równaniem

$$(4.1) \quad A(w_{m+1,n} - w_{m-1,n}) + B(w_{m,n+1} - w_{m,n-1}) - (2A + 2B)w_{m,n} = \\ = Bb(\delta_{m,k+1/2} \delta_{n,1/2} - \delta_{m,k+1/2} \delta_{n,-1/2}) \text{ w konfiguracji I,} \\ = Bb(\delta_{m,k} \delta_{n,1/2} - \delta_{m,k} \delta_{n,-1/2}) + Bb/2(\delta_{m,0} \delta_{n,1/2} - \delta_{m,0} \delta_{n,-1/2}) \text{ w konfiguracji II,}$$

gdzie  $A$  i  $B$  są stałymi siłowymi oddziaływania atomów, odpowiednio w kierunku  $x$  i w kierunku  $y$ , a  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$

MARADUDIN [13] rozwiązał równania (4.1) metodą transformacji Fouriera, a BULLOUGH i TEWARY [14] metodą funkcji Greena. Otrzymali oni identyczne wyniki, mianowicie:

dla konfiguracji I

$$(4.2) \quad w_{m,n} = \frac{b}{4} - \frac{b}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{\sin x} \frac{\sin 2mx \sin 2my}{C \sin^2 x + \sin^2 y} dx dy,$$

dla konfiguracji II

$$(4.3) \quad w_{m,n} = \frac{b}{4} - \frac{b}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \sin 2my}{\sin x} \frac{\sin y \sin 2ny}{C \sin^2 x + \sin^2 y} dx dy,$$

gdzie  $C = A/B$ . W granicy, gdy  $Am^2 + Bn^2$  jest duże, wzory te przechodzą w dobrze znany związek z kontynuualnej teorii dyslokacji

$$(4.4) \quad w_{n,n} = \frac{b}{2\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{C} \frac{n}{m}.$$

Jest on identyczny dla obu konfiguracji, gdyż w teorii kontynuualnej nie bierze się pod uwagę szczegółów budowy jądra dyslokacji.

Energia odkształcenia została policzona w pracy [13] jako praca wykonana przez siły zewnętrzne na kryształ podczas wprowadzania do niego dyslokacji. Otrzymano następujące wyniki:

$$(4.5) \quad E_I = \frac{b}{4\pi} \sqrt{AB} \left\{ \ln 2\gamma - \frac{1}{2} \ln \frac{1+C}{4} + \frac{1}{4} \ln C + \ln \frac{R}{\sqrt{\zeta\eta}} \right\},$$

$$E_{II} = \frac{b}{4\pi} \sqrt{AB} \left\{ \ln 2\gamma - \frac{1}{2} \ln \frac{1+C}{4} + \frac{1}{\sqrt{C}} \left( \pi - \arcsin \sqrt{\frac{C}{1+C}} \right) + \frac{1}{4} \ln C + \ln \frac{R}{\sqrt{\zeta\eta}} \right\},$$

gdzie  $\gamma$  jest stałą Eulera,  $\ln \gamma = 0,57722$ ,  $R$  zewnętrznym promieniem kryształu (przyjmuje się, że kryształ ma kształt walca),  $\zeta$ ,  $\eta$  odległością między sąsiednimi rzędami atomów odpowiednio w kierunku  $x$  i  $y$ . Tak więc

$$(4.6) \quad E_{II} - E_I = \frac{Bb}{4\pi} \left( \pi - \arcsin \sqrt{\frac{C}{1+C}} \right).$$

Otrzymana w ten sposób różnica energii jest nadmiernie duża. CELLI [15] poprawił wynik Maradudina wprowadzając dla dwu rzędów  $(0, 1/2)$  i  $(0, -1/2)$  w konfiguracji II potencjał

$$(4.7) \quad \frac{bB}{4\pi^2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi\Delta w}{b} \right),$$

co dla dyslokacji  $[110]$  w NaCl obniżyło wartość energii Peierlsa o rząd wielkości.

HÖLZLER i SIEMS [16] stwierdzili, że jeśli zastosuje się poprawkę Celliego do modelu Maradudina dla dyslokacji  $[001]$  w kryształ sześciennym, to różnica  $E_{II} - E_I$  staje się ujemna. Jest to spowodowane faktem, że największe względne przemieszczenia będą teraz w konfiguracji I. Zaproponowali więc, aby wprowadzić sinusoidalną zależność sił od przemieszczeń dla wszystkich wiązań, co obniżyłoby względne przemieszczenia również w konfiguracji I i zmniejszyłoby  $E_I$  w ten sposób, że różnica energii znów byłaby dodatnia.

## 5. Model Sandersa

SANDERS [17] zbudował dyskretny model dyslokacji krawędziowej w kryształ o sieci sześcienniej prostej przystosowany do badania wpływu naprężenia ścinającego przyłożonego z zewnątrz na geometrię dyslokacji. Założył on liniowe oddziaływania pomiędzy najbliższymi sąsiadami (oprócz płaszczyzny poślizgu) uwzględniając siły centralne i niecentralne. Rozważane były tylko cztery rzędy atomów najbliższe płaszczyzny poślizgu. Przemieszczenia atomów w tych rzędach dane są następującymi wzorami:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u_{1j} &= u_{1j}^I + u_{1j}^{II} + \varphi'_j, & u_{-1,j} &= u_{-1,j}^I + u_{-1,j}^{II} + \psi'_j, \\ u_{2j} &= u_{2j}^I + u_{2j}^{II} + \bar{\varphi}'_j, & u_{-2,j} &= u_{-2,j}^I + u_{-2,j}^{II} + \bar{\psi}'_j, \end{aligned}$$

gdzie  $u_{ij}$  jest poziomym przemieszczeniem atomu w  $i$ -tym rzędzie i w  $j$ -tej kolumnie,  $u_{ij}^I$  jest przemieszczeniem atomu wywołanym jednorodnym naprężeniem ścinającym  $\tau$  przyłożonym w nieskończoności z zewnątrz do kryształu:

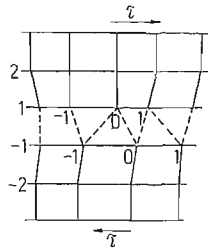
$$(5.2) \quad \begin{aligned} u_{ij}^I &= \frac{\tau b^2}{k_2} (i-1) & i > 0, \\ u_{ij}^I &= \frac{\tau b^2}{k_2} (i+1) & i < 0, \end{aligned}$$

gdzie  $k_2$  jest miarą sił niecentralnych (co wynika z porównania z kontynuualną teorią sprężystości, gdyż  $k_2 = c_{44}b = \mu b$ ), a  $u_{ij}^I$  jest odkształceniem potrzebnym do wprowadzenia dyslokacji:

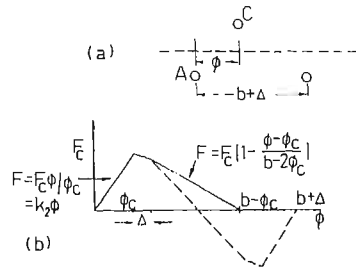
$$(5.3) \quad u_{ij}^{II} = \begin{cases} -b/4 & j > 0 \\ 0 & j = 0; \\ b/4 & j < 0 \end{cases} \quad u_{-1,j}^{II} = \begin{cases} b/4 & j \geq 0 \\ -b/4 & j < 0 \end{cases}$$

Po wprowadzeniu dyslokacji atomy doznają relaksacji i zajmują położenia równowagi, co określają funkcje  $\varphi_j^I$ ,  $\bar{\varphi}_j^I$ ,  $\psi_j^I$  i  $\bar{\psi}_j^I$  zmierzające do zera, gdy  $j \rightarrow \infty$ .

W pobliżu jądra dyslokacji przemieszczenia są tak duże, że porzucono tutaj założenie o oddziaływaniu tylko najbliższych sąsiadów i uwzględniono oddziaływanie atomów z rzędu 1 z dwoma atomami z rzędu -1 (linie przerywane na rys. 11). Siła oddziaływania jest funkcją poziomej odległości  $\Phi_{ij}$  pomiędzy oddziaływującymi atomami, gdzie  $\Phi_{ij}$  jest odległością pomiędzy  $i$ -tym atomem z 1 rzędu i  $j$ -tym atomem z rzędu -1.



Rys. 11. Dyslokacja krawędziowa w modelu Sandersa



Rys. 12. (a) Trzy typowe atomy w pobliżu płaszczyzny poślizgu; (b) wykres siły działającej na atom C pochodzącej od atomu A (linia ciągła) i od dwu atomów poniżej płaszczyzny poślizgu (linia przerywana); w modelu Sandersa

Równania równowagi zapisują się następująco:

dla atomów usytuowanych daleko od płaszczyzny poślizgu

$$(5.4) \quad k_1(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}) + k_2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}) = 0,$$

gdzie  $k_1$  jest miarą sił centralnych;

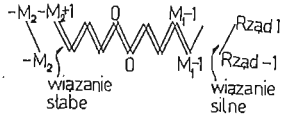
dla atomów z czterech rzędów najbliższych do płaszczyzny poślizgu

$$(5.5) \quad \begin{aligned} k_2(u - u_{1j}) + k_1(u_{1,j+1} + u_{1,j-1} - 2u_{1j}) &= F_{j,j-1} - F_{jj}, \\ k_2(u_{-2,j} - u_{-1,j}) + k_1(u_{-1,j+1} + u_{-1,j-1} - 2u_{-1,j}) &= F_{jj} - F_{j+1,j}. \end{aligned}$$

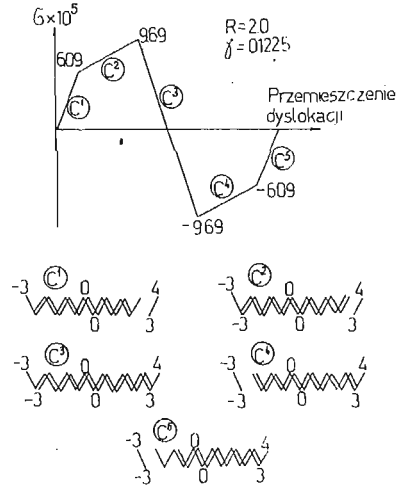
$F_{ij}$  jest siłą oddziaływania  $i$ -tego atomu z rzędu 1 z  $j$ -tym atomem z rzędu  $-1$ . Założono następujący charakter zależności  $F(\Phi)$ :

$$(5.6) \quad F/(k_2 b) = \begin{cases} \Phi/b & 0 \leq \Phi/b \leq \gamma, \\ -\alpha\Phi/b + \gamma(1+\alpha), & \gamma \leq \Phi/b \leq 1-\gamma, \\ 0 & \Phi/b \geq 1-\gamma, \end{cases}$$

gdzie  $\gamma = \Phi_c/b = F_c/(k_2 b) = \tau_c/b$ ,  $\alpha = \gamma/(1-2\gamma)$ ,  $\tau_c$  oznacza krytyczne napięcie ścinające kryształu doskonałego (rys. 12).



Rys. 13. Przykładowy rozkład wiązań wzdłuż płaszczyzny poślizgu w modelu Sandersa.  $M_1$  i  $M_2$  są to numery, liczone od środka, tych atomów, które pierwsze są połączone silnymi wiązaniami



Rys. 14. Przykład zmiany naprężenia zewnętrznego i konfiguracji słabych wiązań w czasie ruchu dyslokacji w modelu Sandersa

Gdy względna pozioma odległości pomiędzy dwoma atomami z dwu sąsiednich poziomych rzędów jest z przedziału  $[0, \gamma]$ , to mówimy, że atomy są połączone silnym wiązaniem, a gdy ta odległość jest z przedziału  $[\gamma, 1-\gamma]$ , to mówimy, że wiązanie jest słabe (rys. 13). Tak więc, płaszczyznę poślizgu można podzielić na trzy części:

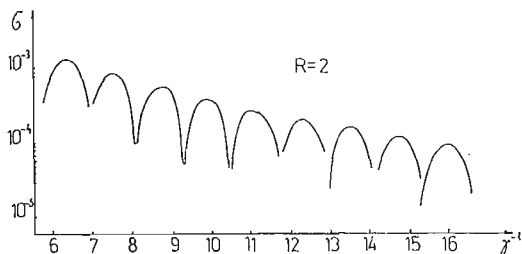
$$\begin{aligned} j \leq -M_2, & \quad F_{jj} \text{ silne, } F_{j,j-1} = 0, \\ -M_2 + 1 \leq j \leq M_1 - 1, & \quad F_{jj} \text{ i } F_{j+1,j} \text{ słabe,} \\ j \geq M_1, & \quad F_{j,j-1} \text{ silne, } F_{jj} = 0. \end{aligned}$$

Sanders badał quasi-statyczny ruch dyslokacji (przejście z jednej komórki do następnej) dla  $R = 1,0, 2,0, 5,0$  ( $R = k_1/k_2$ ) i dla różnych wartości  $\gamma$ . Typowy przebieg zależności przemieszczenia dyslokacji od przyłożonego naprężenia  $\sigma = \tau/b$  pokazuje rys. 14.

Początkowa konfiguracja  $C^1$  jest stabilna (dodatniemu naprężeniu odpowiada dodatnie przemieszczenie), natomiast konfiguracja  $C^3$  jest niestabilna — w ruchu dynamicznym dyslokacja powinna albo skoczyć do przodu, albo powrócić z powrotem do konfiguracji stabilnej. Naprężenie Peierlsa to maksymalne naprężenie występujące w tym cyklu wynoszące  $9,65 \times 10^{-5}$ .



Oprócz cyklu omówionego powyżej, Sanders zaobserwował również takie, w których konfiguracja początkowa była niestabilna i takie, w których były dwie konfiguracje stabilne w jednym cyklu. Końcowy wynik obliczeń naprężenia Peierlsa pokazuje rys. 15. Uderzającą cechą jest okresowy przebieg  $\tau_p$  w funkcji  $\gamma^{-1}$ .

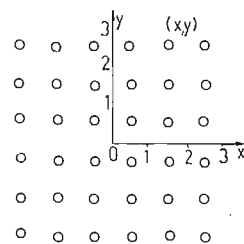


Rys. 15. Zmiana naprężenia Peierlsa w funkcji  $\gamma^{-1}$  w modelu Sandersa

### 6. Model Roguli

ROGULA [18] zaproponował dynamiczny, atomowy model prostoliniowej dyslokacji śrubowej w sieciach Bravaisa. Wyprowadził on wyrażenia na pola prędkości i dystorsji oraz znalazł zależność prędkości poruszającej się dyslokacji od działającego na kryształ jednorodnego naprężenia zewnętrznego.

Model Roguli przystosowano [19] do quasi-statycznego ruchu dyslokacji, co pozwoliło znaleźć statyczne naprężenie Peierlsa w funkcji parametru modelu  $\gamma$ .



Rys. 16. Przekrój poprzeczny przez sieć sześcienną prostą

Rozpatrzono sześcienną, prostą, prymitywną sieć krystaliczną. Przekrój poprzeczny tworzy sieć kwadratową (rys. 16). Założono, że w nieskończonej sieci znajduje się pojedyncza dyslokacja śrubowa o wektorze Burgersa  $\mathbf{b}$  ( $|\mathbf{b}| = 1$ ) równoległym do osi  $Oz$ . Dyslokacja może zajmować różne położenia wewnątrz komórki, w której umieszczono początek układu współrzędnych. Ponadto zrobiono następujące założenia:

a) ruch atomów dozwolony jest tylko w kierunku równoległym do osi  $Oz$  (równoległe do linii dyslokacji), przy czym odległości między atomami w tym kierunku są stałe (atomy są «nanizane na sztywne pręty», a kółko na rys. 16 oznacza jeden taki pręt);

b) każdy atom oddziałuje tylko ze swymi czterema najbliższymi «współpłaszczyznowymi» sąsiadami;

c) energia oddziaływania atomów jest odcinkami paraboliczną funkcją dystorsji  $\beta_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2$ .

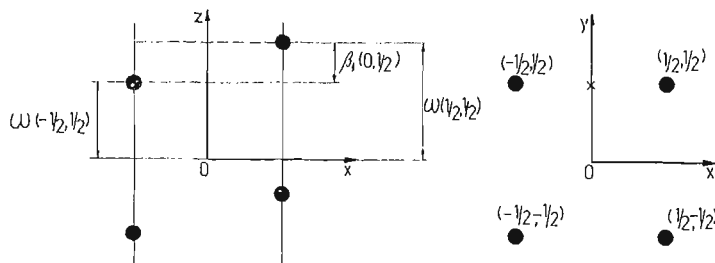
Dystorsją  $\beta_k(x, y)$  nazwano wielkość

$$(6.1) \quad \beta_k(x, y) = D_k w(x, y) - n_k,$$

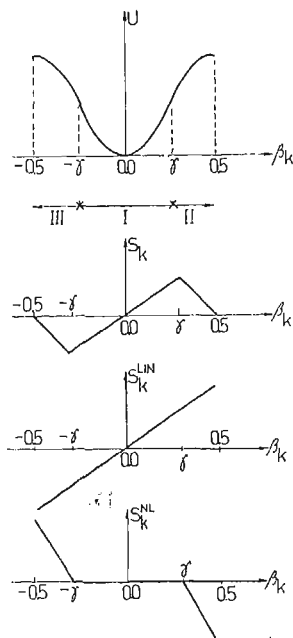
gdzie  $D_k$  jest operatorem różnicy centralnej,  $w(x, y)$  jest pionowym przemieszczeniem atomu o współrzędnych  $(x, y)$ , a  $n_k$  są takimi liczbami całkowitymi, by  $|\beta_k(x, y)| \leq 0,5$  (rys. 17). Wielkości  $\beta_k(x, y) = 0,5$  i  $\beta_k(x, y) = -0,5$  są równoważne. Po rozpisaniu wzorów (6.1):

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \beta_1(x, y) &= w(x+1/2, y) - w(x-1/2, y) - n_1, \\ \beta_2(x, y) &= w(x, y+1/2) - w(x, y-1/2) - n_2 \end{aligned}$$

widać, że dystorsje określone są w środkach odcinków łączących atomy:  $\beta_1(x, y)$  w środkach odcinków poziomych, a  $\beta_2(x, y)$  w środkach odcinków pionowych (rys. 16 i 17).



Rys. 17. Dystorsja  $\beta_1(0, 1/2)$



Rys. 18. Zależność energii i siły oddziaływania atomów od dystorsji w modelu Roguli. Rozkład siły oddziaływania na część liniową i nieliniową

Na rys. 18 przedstawiono zależność energii  $U$  i siły  $S_k$  oddziaływania dwu atomów od dystorsji

$$(6.3) \quad S_k = \frac{\partial U(\beta)}{\partial \beta_k}.$$

Wartość dystorsji  $\beta_k = \gamma$ , będąca parametrem modelu, wyznacza granicę liniowej zależności siły oddziaływania od dystorsji. W związku z tym przedział wartości dystorsji  $[-0,5, 0,5]$  podzielono na trzy części (rys. 18): jeśli wartość dystorsji jest z obszaru I to mówimy, że odpowiednie wiązanie jest silne, zaś w przypadku, gdy wartość dystorsji jest z obszaru II lub III, to mówimy że, wiązanie jest słabe. Siłę oddziaływania atomów z sąsiednich rzędów można rozbić na część liniową i nieliniową:

$$(6.4) \quad S_k(x, y) = (S_k^{\text{LIN}} + S_k^{\text{NL}})(x, y).$$

Nieliniową część oddziaływania można wyrazić przez liniową, jeśli wprowadzi się wielkość

$$(6.5) \quad f(x, y) = -D_k S_k^{\text{LIN}}(x, y),$$

gdzie  $f(x, y)$  jest wielkością taką, że  $\mathbf{b} \cdot f(x, y)$  przedstawia siłę, z jaką należy działać na atom o współrzędnych  $(x, y)$ , aby otrzymać taki sam efekt, jaki daje nieliniowa część (6.4).

Sumaryczny wektor Burgersa zdefiniowano następująco:

$$(6.6) \quad \sum_C \beta_k D x_k = \sum_{\text{int} C} R_k \beta_k.$$

Po lewej stronie równania sumowanie odbywa się po odcinkach konturu  $C$  (gdyż  $DQ$  oznacza przyrost wielkości  $Q$  na elementarnym odcinku konturu  $C$ ), a po prawej stronie równania po komórkach zawartych wewnątrz konturu  $C$ . Tutaj

$$(6.7) \quad R_k = \varepsilon_{ik} D_{i, k} \quad \text{i} \quad k = 1, 2,$$

a  $\varepsilon_{ik}$  jest antysymetrycznym tensorem jednostkowym

$$(6.8) \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1.$$

Wielkość zdefiniowana jako

$$(6.9) \quad R_k \beta_k(x, y) = \alpha(x, y)$$

gra taką samą rolę, jak gęstość dyslokacji, w omawianym przypadku dyslokacji śrubowych, w teorii kontynualnej. Pole  $\alpha(x, y)$  jest określone dla całkowitych wartości  $x$  i  $y$ , a poszczególne jego elementy mogą przyjmować trzy wartości: 0 — gdy w danej komórce nie ma dyslokacji i  $\pm 1$  — gdy w komórce znajduje się dyslokacja o wektorze Burgersa równym  $\pm \mathbf{b}$ .

Układ równań

$$(6.10) \quad \begin{aligned} -D_k S_k^{\text{LIN}}(x, y) &= f(x, y), \\ R_k \beta_k(x, y) &= \alpha(x, y), \end{aligned}$$

po prostych przekształceniach da się sprowadzić do postaci

$$(6.11) \quad -a D_k D_k \beta_l = D_l f - a R_l \alpha,$$

gdzie  $a = \mu$  jest modułem ścinania. Równanie to rozwiązano metodą funkcji Greena i znaleziono, że

$$(6.12) \quad \beta(x, y) = \frac{1}{a} D_i G^* f - R_i G^* \alpha,$$

gdzie  $*$  oznacza splot dyskretny:

$$(6.13) \quad Q * P = \sum_{x', y'} Q(x - x', y - y') P(x', y'),$$

a  $G$  jest funkcją Greena

$$(6.14) \quad G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(yq_2) (2 - \cos q_2 - \sqrt{(2 - \cos q_2)^2 - 1})^{|x|} - 1}{\sqrt{(2 - \cos q_2)^2 - 1}} dq_2,$$

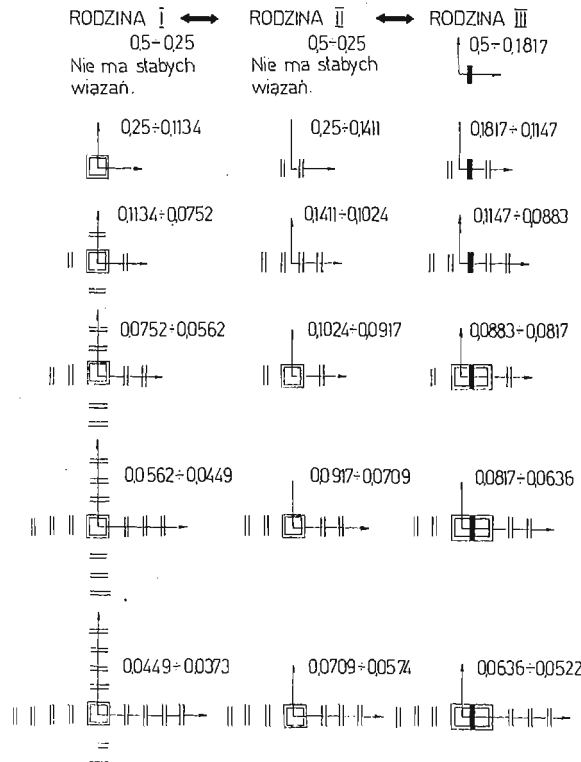
przy czym  $G(0,0) = 0,0$ .

Ponieważ dyslokacja znajduje się w tej samej komórce, w której jest początek układu współrzędnych, więc

$$(6.15) \quad \alpha(x, y) = \delta_{x0} \delta_{y0},$$

gdzie  $\delta_{ij}$  jest deltą Kröneckera, a wzory na dystorsje zapisują się następująco:

$$(6.16) \quad \begin{aligned} \beta_1(x, y) &= \frac{1}{a} \sum_{x', y'} [G(x-x'+1/2, y-y') - G(x-x'-1/2, y-y')] f(x', y') + \\ &\quad + G(x, y+1/2) - G(x, y-1/2), \\ \beta_2(x, y) &= \frac{1}{a} \sum_{x', y'} [G(x-x', y-y'+1/2) - G(x-x', y-y'-1/2)] f(x', y') - \\ &\quad - G(x+1/2, y) + G(x-1/2, y). \end{aligned}$$



Rys. 19. Trzy rodziny symetrycznych konfiguracji równowagi słabych wiązań przy  $\beta_1 = 0$  w modelu Roguli. Obok każdej konfiguracji podano zakres  $\gamma$  jej ważności;  $\blacksquare$  oznacza dystorsję równą 0,5

Wpływ naprężenia zewnętrznego został uwzględniony przez wprowadzenie jednorodnego pola dystorsji  $\beta_k$ . Tak więc całkowita dystorsja jest dana wzorem

$$(6.17) \quad \beta_k(x, y) = \beta_k^D(x, y) + \beta_k^0,$$

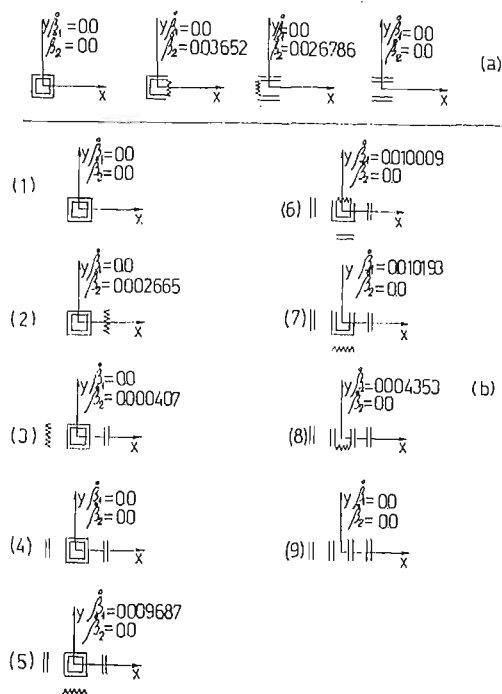
gdzie  $\beta_k^p(x, y)$  jest polem dystorsji wywołanym obecnością dyslokacji i dane jest wzorami (6.16).

Zbadane zostały dwa procesy:

- a) proces zmian konfiguracji równowagi słabych wiązań w funkcji  $\gamma$  przy  $\beta_k = 0$ ;
- b) proces zmian konfiguracji słabych wiązań w funkcji  $\beta_k$  przy ustalonym  $\gamma$ .

W procesie drugim maksymalna  $\beta_k$  występująca w quasi-statycznym ruchu dyslokacji poprzez komórkę elementarną jest proporcjonalna do naprężenia Peierlsa.

Śledząc proces pierwszy, stwierdzono istnienie trzech rodzin symetrycznych konfiguracji słabych wiązań (rys. 19). W rodzinie III jedna z dystorsji jest równa  $\pm 0,5$ , czyli dyslokacja znajduje się na krawędzi komórki. Wybierając dowolną konfigurację z rodziny I, ustalając  $\gamma$  i zmieniając odpowiednio  $\beta$  można dojść tylko do jednej z konfiguracji z rodziny II. Żaden proces tego typu nie wyprowadza dyslokacji na krawędź komórki (rys. 20) (uwaga ta nie dotyczy pierwszej konfiguracji (bez słabych wiązań) z rodziny I). Przy równoczesnej zmianie obu  $\beta_k$  otrzymano ciąg konfiguracji o rosnącej liczbie słabych wiązań (rys. 21), a w ostatniej konfiguracji z tego ciągu dwie dystorsje są równocześnie równe 0,5. Proces ten prowadzi do kruchego zniszczenia kryształu. Tak więc konfiguracje z rodziny I odpowiadają dyslokacjom utwierdzonym.

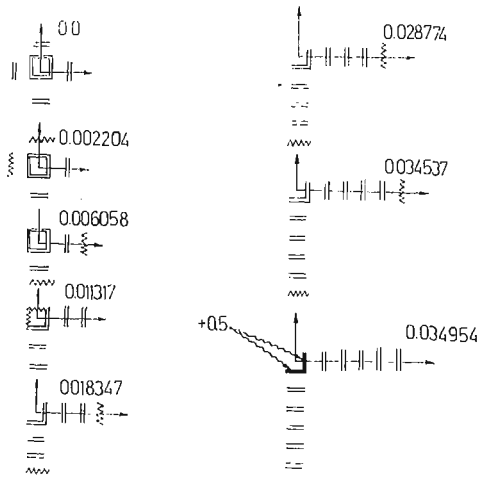


Rys. 20. Przykłady zmian konfiguracji słabych wiązań w funkcji  $\beta_k$  dla (a)  $(0,2500, 0,1817) \in \gamma = 0,2$ ; (b)  $(0,1817, 0,1134) \in \gamma = 0,12$  w modelu Roguli

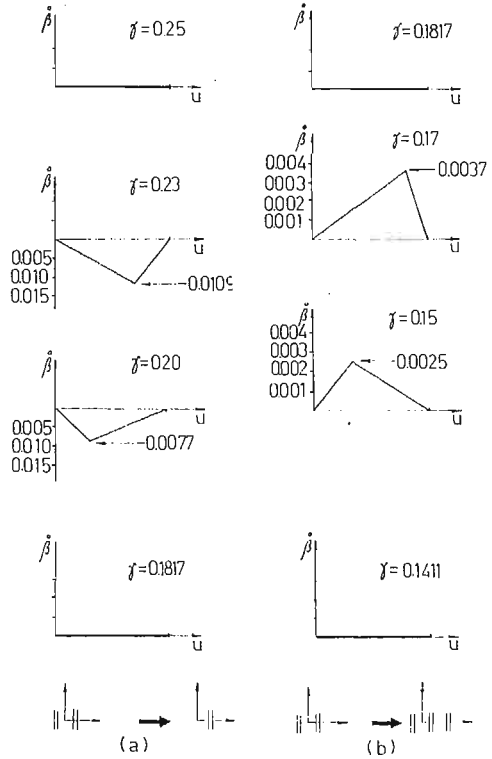
Konfiguracje z rodziny II (oprócz pierwszej) mają ściśle wyznaczoną płaszczyznę • poślizgu dyslokacji. Dyslokacja osiąga konfigurację z rodziny III (a więc jest dyslokacją, ruchomą) tylko wtedy, gdy naprężenie zewnętrzne jest przyłożone do kryształu w taki

sposób, że siła działa na dyslokację równoległe do kierunku, w którym jest najwięcej słabych wiązań. Przykłady takich procesów pokazano na rys. 22.

Na rys. 23 pokazano w funkcji  $\gamma$  (w skali  $\gamma^{-1}$ ) zmiany konfiguracji słabych wiązań (z rodziny II i III) w trakcie zmiany położenia dyslokacji  $u$ . Gdy  $u = \pm 0,5$ , to dyslokacja znajduje się na krawędzi komórki, a  $u = 0$  jest równoważne  $u = 1$ . Liniami ukośnymi zakreskowano obszary, w których dana konfiguracja jest stabilna, co odpowiada minimum energetycznemu, a liniami poziomymi obszary niestabilności konfiguracji (maximum energetyczne).



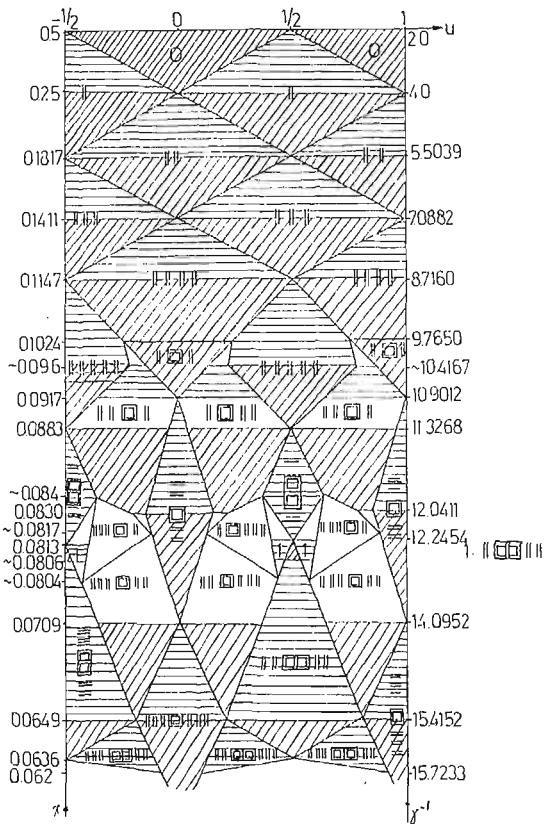
Rys. 21. Ciąg konfiguracji w modelu Roguli dla  $\gamma = 0, 095$  przy równoczesnej zmianie  $\beta_k$ ,  $k = 1, 2$ ;  $\beta_1 = \beta_2$ . Przy każdej konfiguracji podano osiągniętą wartość  $\beta$



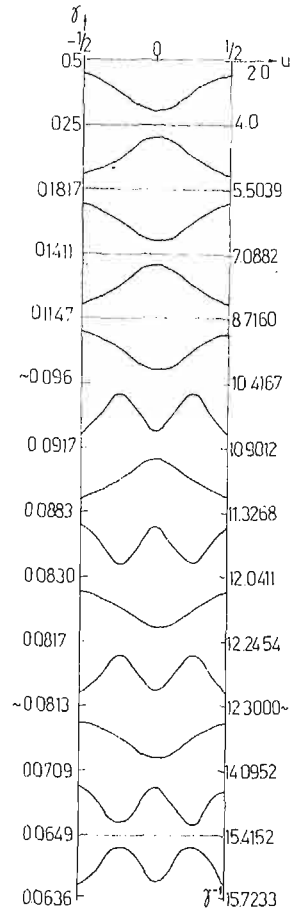
Rys. 22. Zmiany  $\beta$  w funkcji położenia dyslokacji  $u$  w modelu Roguli; (a)  $\gamma \in [0,1411, 0,1147]$ ; (b)  $\gamma \in [0,1147, 0,1024]$

Na rys. 24 podano schematyczne przekroje powierzchni energii płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny poślizgu dyslokacji. Linie poziome odpowiadają tym wartościom  $\gamma$ , dla których napężenie Peierlsa jest zerowe. Stwierdzono istnienie niesymetrycznych położów równowagi dyslokacji wewnątrz komórki.

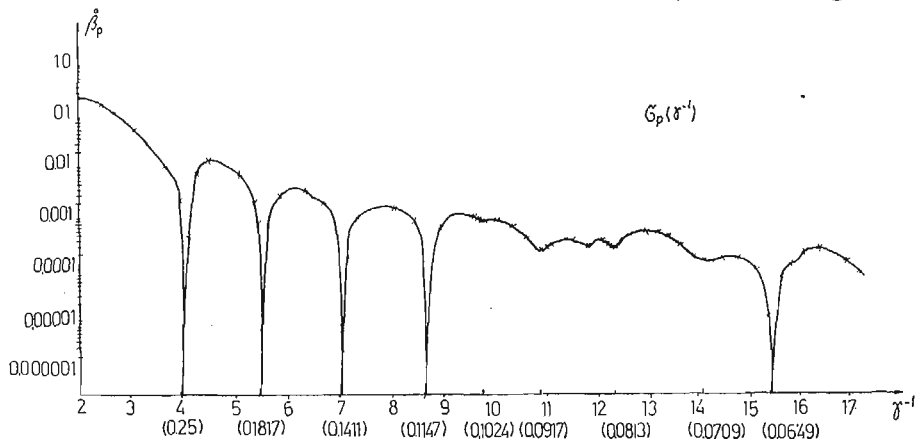
Zależność napężenia Peierlsa od parametru modelu  $\gamma$  pokazano na rys. 25. Jeśli by nie uwzględniać punktów, w których napężenie znika, to oprócz zakresu  $\gamma \in [0,5, 0,25]$ , wraz ze wzrostem  $\gamma^{-1}$  maleje ono wykładniczo.



Rys. 23. Wykres zmian konfiguracji słabych wiązań w modelu Roguli w funkcji  $\gamma$  i  $u$ . // — obszary konfiguracji stabilnych; ≡ — obszary konfiguracji niestabilnych



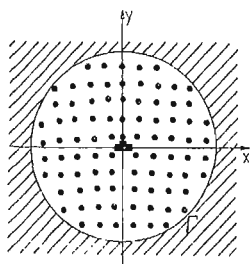
Rys. 24. Schematyczne przekroje powierzchni energii dyslokacji płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny poślizgu w funkcji  $\gamma$  w modelu Roguli



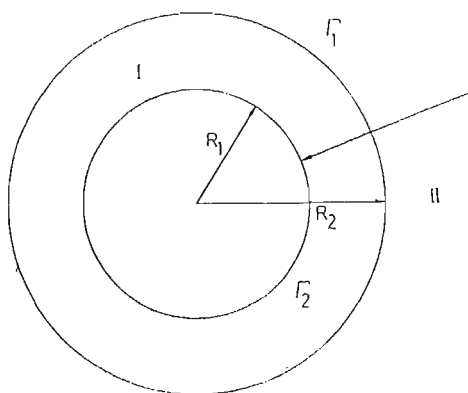
Rys. 25. Wykres zmian naprężenia Peierlsa w funkcji  $\gamma^{-1}$  w modelu Roguli. W nawiasach podano wartości  $\gamma$  dla których następuje zmiana konfiguracji;  $\tau_p = a\beta_p$

## 7. Modele półdyskretne

W ciągu ostatnich kilkunastu lat w związku z postępem w dziedzinie budowy elektronicznych maszyn cyfrowych, które są coraz szybsze i mają coraz większą pamięć, gwałtownie rozwinęła się nowa technika teoretycznego badania własności materiałów, tzw. metoda symulacji komputerowej. Przegląd zagadnień rozwiązywanych tą metodą można znaleźć np. w pracach [20] i [21]. Wiele prac poświęcono dyslokacjom przede wszystkim w strukturach sześciennych centrowanych objętościowo (bcc) [22]. Wspólną cechą wszystkich modeli dyslokacji rozwiązywanych metodą symulacji komputerowej jest podział kryształu na dwie części: w obszarze I uwzględnia się atomową (dyskretną) budowę kryształu, natomiast w obszarze II korzysta się z kontynuualnej teorii sprężystości. Dyslokacja znajduje się oczywiście w obszarze I (rys. 26). W obszarze I rachunki przeprowadza się korzystając z dwuciałowych półempirycznych potencjałów, przy czym uwzględnia się oddziaływanie



Rys. 26. Półdyskretny model dyslokacji wg [23]. Obszar I (zakropkowany), w którym uwzględnia się dyskretną budowę kryształu od obszaru II (zakreskowanego), w którym korzysta się z wyników kontynuualnej teorii sprężystości oddziela sztywna granica  $\Gamma$



Rys. 27. Półdyskretny model dyslokacji z elastyczną granicą i nakładającymi się obszarami I i II

nie tylko najbliższych, ale i dalszych sąsiadów. Stosuje się w tych modelach zasadniczo dwa podejścia: gdy granica  $\Gamma$  oddzielająca część atomową modelu od ciągłej jest sztywna (*rigid boundary*) i gdy granica ta jest elastyczna (*flexible boundary*). W metodzie pierwszej wylicza się położenia atomów na granicy zgodnie z liniową lub nieliniową [23] teorią sprężystości, izotropową lub anizotropową, a następnie atomy w obszarze I poddaje się procesowi relaksacji. W podejściu drugim (rys. 27) stosuje się proces iteracyjny. W pierwszym kroku przeprowadza się obliczenia w obszarze I ze sztywną granicą  $\Gamma_1$ . Następnie wykonuje się obliczenia zgodnie z teorią sprężystości w obszarze II biorąc pod uwagę warunki brzegowe na  $\Gamma_2$  otrzymane na podstawie kroku pierwszego. W trzecim kroku wykonuje się obliczenia w obszarze I z pozycjami atomów na  $\Gamma_1$  ustalonymi przez drugi krok. Metoda ta ma tę przewagę nad pierwszą, że pozwala uzyskać podobne rezultaty przy dużo mniejszym obszarze I, co z kolei przyczynia się do znacznego zaoszczędzenia czasu



maszyny. Poświęcone tej metodzie są np. prace TEODOSIU i NICOLAE [24] oraz TEODOSIU, NICOLAE i PAVEN [25].

Przy pomocy powyżej zarysowanych metod badano w kryształach między innymi wpływ naprężeń zewnętrznych na geometrię poślizgu dyslokacji, tak śrubowych, jak i krańdziowych. Na przykład, BASIŃSKI, DUESBERY, TAYLOR [26, 27], stwierdzili, że dla dyslokacji śrubowej w sieci bcc sodu naprężenie Peierlsa zależy od orientacji przyłożonego naprężenia zewnętrznego i ma minimalną wartość  $0,0105 \mu$  dla poślizgu w kierunku bliźniakowania na płaszczyznach  $\{112\}$ . W fazie hcp sodu naprężenie to jest co najmniej 25 razy mniejsze. Stwierdzono również, że ruch dyslokacji śrubowej w sieci hcp jest ograniczony tylko do jednej płaszczyzny poślizgu, gdy natomiast w sieci bcc ma miejsce poprzez jednostkową translację po płaszczyznach  $\{110\}$  z prawem wyboru, że dwa kolejne przesunięcia nie mogą mieć miejsca na tych samych płaszczyznach poślizgu.

### 8. Zakończenie

Z przedstawionych modeli widać, że problem naprężenia Peierlsa jest bardzo złożony. Peierls i Nabarro otrzymali wynik sprzeczny z oczekiwaniami: konfiguracje symetryczne, o których sądzono, że mają energię mniejszą okazały się niestabilne. Próby obliczenia naprężenia Peierlsa w jednowymiarowym modelu dyslokacji Frenkla-Kontorovej przez KRATOCHVILA i INDENBOMA [7] oraz WEINERA i SANDERSA [8], w modelu dyslokacji śrubowej SANDERSA [17] oraz w trójwymiarowym modelu dyslokacji śrubowej ROGULI [19], wskazały na jego nową istotną cechę: naprężenie Peierlsa oscyluje wraz ze zmianą parametru modelu  $\gamma$  charakteryzującego materiał, a dla niektórych jego wartości jest równe zeru. Oznacza to, że przewiduje się możliwość istnienia takich kryształów, w których dyslokacje mogą przemieszczać się przy zerowych siłach zewnętrznych. Fakt ten dla wielu badaczy wydaje się być mało prawdopodobny. Modele te potwierdziły również wynik Peierlsa i Nabarro. Stwierdzono mianowicie, iż fakt czy dane położenie równowagi dyslokacji jest stabilne czy też niestabilne zależy od materiału, w którym badano dyslokację.

Dużym zaskoczeniem było stwierdzenie w modelu Roguli, że w sieci sześcienniej prostej istnieją takie konfiguracje słabych wiązań, dla których dyslokacje są utwierdzone. Znaczący to mianowicie tyle, że dyslokacja nie może być przepchnięta do sąsiedniej komórki bez spowodowania zniszczenia kryształu. Są to konfiguracje o najwyższej, czterokrotnej symetrii obrotowej, gdzie słabe wiązania układają się w kształcie krzyża. Dyslokacja staje się ruchoma, tzn. że można ją przeprowadzić do sąsiedniej komórki dopiero wtedy, gdy konfigurację krzyżową słabych wiązań doprowadzi się do konfiguracji w kształcie paska.

We wszystkich dotychczasowych próbach obliczenia naprężenia Peierlsa uwzględniano tylko oddziaływania dwuciałowe. Jest rzeczą prawdopodobną, że przynajmniej w jądrze dyslokacji i jego najbliższym otoczeniu dużą rolę odgrywają oddziaływania wielociałowe. Tak więc, nie będzie można mówić o pełnym sukcesie dopóty, dopóki nie zostanie rozwiązane zadanie oddziaływania wielu ciał. Na obecnym etapie pozostaje tylko nadzieja, że do wygładzenia krzywej  $\sigma_p(\gamma)$  być może wystarczy uwzględnienie oddziaływania dalszych sąsiadów.

## Literatura cytowana w tekście

1. Ю. И. ФРЕНКЕЛЬ, *Введение в теорию металлов*, Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва 1958, стр. 345-358.
2. R. HOBART, V. CELLI, *J. Appl. Physics*, **33**, 60 (1962).
3. R. HOBART, *J. Appl. Physics*, **36**, 1944 (1965).
4. R. HOBART, *J. Appl. Physics*, **36**, 1948 (1965).
5. R. HOBART, *J. Appl. Physics*, **37**, 3573 (1966).
6. R. HOBART, w: *Dislocation Dynamics*, Battelle Institute Material Science Colloquia, May 1-6, 1967, A. R. ROSENFELD, G. T. HAHN, A. L. BEMENT Jr., R. I. JAFFEE, Eds., McGraw-Hill 1968, s. 161-173.
7. J. KRATOCHVIL, V. L. INDENBOM, *Czech. J. Phys.*, **B13**, 844 (1963).
8. J. H. WEINER, W. T. SANDERS, *Phys. Rev.*, **134**, A 1007 (1964).
9. D. ROGULA, w: *Teoria defektów w ośrodkach stałych*, Ossolineum, 1973, s. 260 - 273, 285 - 292.
10. L. LEJČEK, *Czech. J. Phys.*, **B22**, 802 (1972).
11. F. KROUPA, L. LEJČEK, *Czech. J. Phys.* **B22**, 813 (1972).
12. J. P. HIRTH, J. LOTHE, *Theory of Dislocations*, McGraw-Hill 1968, s. 214 - 224.
13. A. A. MARADUDIN, *J. Phys. Chem. Solids*, **9**, 1 (1959).
14. R. BULLOUGH, V. K. TEWARY, Reprint T. P. 547, Theoretical Physics Division, U.K.A.E.A. Research Group, Harwell (1973).
15. V. CELLI, *J. Phys. Chem. Solids*, **19**, 100 (1961).
16. A. HÖLZLER, R. SIEMS, w: *Fundamental Aspects of Dislocation Theory*, J. A. SIMONS, R. de WIT, R. BULLOUGH, Eds., Nat. Bur. Stand. U.S. Spec. Publ. 317, 1970, tom I, s. 291-298.
17. W. T. SANDERS, *Phys. Rev.*, **128**, 1540 (1962).
18. D. ROGULA, *Biuletyn WAT*, **XVI**, **3**, 175 (1967).
19. R. KOTOWSKI, *Rozprawa doktorska*, IPPT PAN, Warszawa 1976.
20. *Interatomic Potentials and Simulation of Lattice Defects*, Battelle Institute Material Science Colloquia, June 14 - 19, 1971, P. R. GEHLEN, J. R. BEELER Jr., R. I. JAFFEE, Eds., Plenum Press. N. Y., 1972.
21. *Машинное моделирование при исследовании материалов*, Сборник переводов под редакцией Д. Б. Позднеева, Мир, Москва 1974.
22. V. VITEK, *Crystal Lattice Defects*, **5**, 1 (1974).
23. C. TEODOSIU, *J. Phys. F: Metal Phys.*, **4**, L225 (1974).
24. C. TEODOSIU, V. NICOLAE, *Rev. Roum. Sci. Tech.-Mec. Appl.*, **17**, 919 (1972).
25. C. TEODOSIU, V. NICOLAE, P. PAVEN, *Phys. Stat. Sol. (a)*, **27**, 191 (1975).
26. Z. S. BASIŃSKI, M. S. DUESBERY, R. TAYLOR, *Can. J. Phys.*, **49**, 2160, (1971).
27. Z. S. BASIŃSKI, M. S. DUESBERY, R. TAYLOR, w [20], s. 537 - 551.

## Резюме

## ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДИСЛОКАЦИЙ

В работе рассмотрены дискретные модели дислокаций Френкля-Конторовой, Пайерлса-Набарро, Марадудина, Сандерса и Рогули. Приведен краткий обзор попыток расчета напряжения Пайерлса в этих моделях.

## Summary

## DISCRETE MODELS OF DISLOCATIONS

The Frenkel-Kontorova, Peierls-Nabarro, Maradudin, Sanders and Rogula discrete models of dislocations are discussed. Attempts to calculate Peierls stress in these models are briefly reviewed.

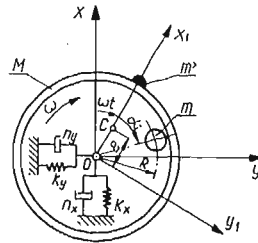
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN  
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1977 r.

SAMOCZYNNE WYWAŻANIE WIRNIKA PODPARTEGO SPRĘŻYŚCIE W DWÓCH  
KIERUNKACH

TADEUSZ MAJEWSKI (WARSZAWA)

Przebadano wirnik, który jest niewyważony statycznie i pod działaniem nierównoważnych sił odśrodkowych porusza się ruchem płaskim w ten sposób, że oś obrotu wirnika  $O$  może przemieszczać się wzdłuż osi  $x$  i  $y$  nieruchomego układu współrzędnych  $xAy$ . W cylindrycznym podtoczeniu znajdują się elementy swobodne, np. kulki. Schemat takiego wirnika przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Schemat układu

W pracy [1] rozpatrzono zachowanie się niewyważonego wirnika, którego oś obrotu została podparta sprężystością w jednym kierunku i wykazano, że przy prędkościach nadkrytycznych  $\omega > \omega_{0x}$  elementy swobodne przemieszczają się do położenia zapewniającego wyważenie się układu.

W stosunku do układu z rys. 1 przyjmuje się następujące założenia: bieżnia, po której poruszają się elementy wyważające ma kształt okręgu, którego środek pokrywa się z osią obrotu  $O$ , wirnik obraca się ze stałą prędkością  $\omega = \text{const}$ , elementy wyważające poruszają się w płaszczyźnie poziomej i w związku z tym pominięte zostaną siły ciężkości, istniejące siły oporu są proporcjonalne do prędkości, elementy wyważające toczą się bez poślizgu i oderwań oraz nie zderzają się.

Ważniejsze oznaczenia

- $M$  masa wirnika,
- $m$  masa elementu wyważającego,
- $Me$  niewyważenie statyczne wirnika,
- $k_x, k_y$  sztywności podparcia sprężystego w kierunku osi  $x$  i  $y$ ,
- $n_x, n_y, n_1$  współczynniki oporu wiskotycznego dla wirnika i elementu,
- $r$  promień elementu swobodnego,
- $J$  masowy moment bezwładności elementu względem jego osi symetrii.

### 1. Równania ruchu i warunki wyważenia się układu

Wirnik z  $n$  elementami swobodnymi ma  $2+n$  stopni swobody, przy czym niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi są  $x, y, \alpha_i$ . Masy i promienie wszystkich elementów przyjmuje się jednakowe. W oparciu o równania Lagrange'a ułożono równania ruchu układu. Równania te mają postać

$$(1) \quad (M+nm)\ddot{x} + n_x\dot{x} + k_x x = Me\omega^2 \cos\omega t + mR \sum_{i=1}^n (\omega + \dot{\alpha}_i)^2 \cos(\omega t + \alpha_i) + \\ + mR \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \sin(\omega t + \alpha_i)$$

$$(2) \quad (M+nm)\ddot{y} + n_y\dot{y} + k_y y = Me\omega^2 \sin\omega t + mR \sum_{i=1}^n (\omega + \dot{\alpha}_i)^2 \sin(\omega t + \alpha_i) + \\ - mR \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \cos(\omega t + \alpha_i),$$

$$(3) \quad m_z R \ddot{\alpha}_i = m[\dot{x} \sin(\omega t + \alpha_i) - \dot{y} \cos(\omega t + \alpha_i)] - n_1 R \dot{\alpha}_i,$$

gdzie  $m_z = m + J/r^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Równania (1) i (2) opisują drgania postępowe osi wirnika  $O$  w kierunkach  $x$  i  $y$ . Natomiast równania (3) opisują ruch poszczególnych elementów swobodnych względem wirnika.

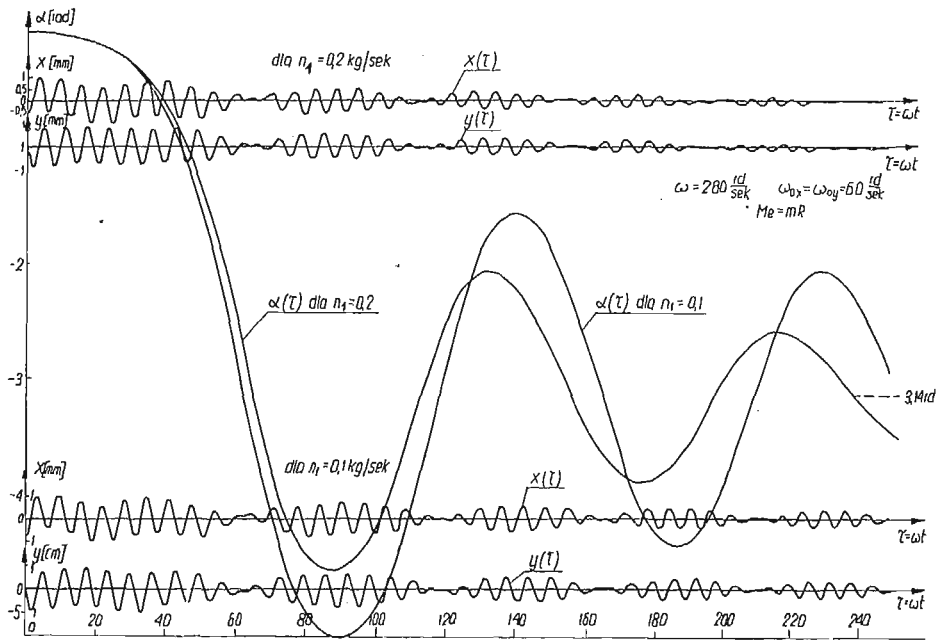
Niewyważony wirnik wykonuje drgania pod działaniem sił odśrodkowych. Na skutek jego drgań pojawiają się pewne siły, które starają się przesunąć elementy swobodne względem wirnika. Mogą one zatem zająć takie położenia końcowe  $\alpha_{ik}$ , przy których układ byłby całkowicie wyrównoważony. Wtedy prawe strony równań (1), (2) będą równe zero dla dowolnej chwili  $t$ . Może to zachodzić wtedy, gdy współczynniki stojące przy funkcjach  $\sin\omega t$ ,  $\cos\omega t$  są równe zero. Stąd otrzymujemy

$$(4) \quad mR \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{ik} = 0, \\ Me + mR \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{ik} = 0.$$

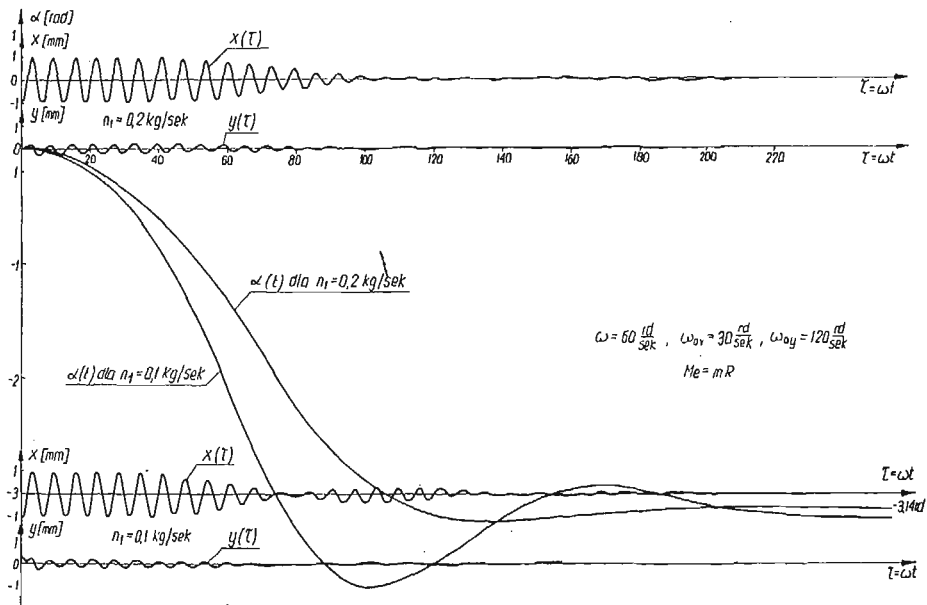
Równania różniczkowe (1) - (3) ze względu na swoją złożoność, nieliniowość i wzajemne sprzężenie są trudne do rozwiązania. Rozwiązywano je numerycznie metodą RUNGEGO-KUTTY na EMC ODRA 1204. Przeprowadzono obliczenia dla szeregu wartości prędkości kątowej  $\omega$ . Wykresy z rys. 2 i 3 przedstawiają zachowanie się w czasie wirnika i elementów wyważających w przypadku wyważania jedną kulką  $n = 1$ . Masa kulki jest tak dobrana, że  $mR = Me$ . Zgodnie z warunkami (4) położenie elementu, przy którym układ będzie całkowicie wyważony jest  $\alpha_k = \pm\pi$ .

Wykresy z rys. 4 odnoszą się do tego samego wirnika z tym, że do wyważania użyto dwóch jednakowych kulek. W tym przypadku ich masy powinny być takie, żeby  $2mR > Me$ , a współrzędne końcowe  $\alpha_{1k}$ ,  $\alpha_{2k}$ , przy których wirnik byłby całkowicie wyważony, określa zależność

$$(5) \quad \alpha_{1k} = -\alpha_{2k} = \arccos[-Me/2mR].$$

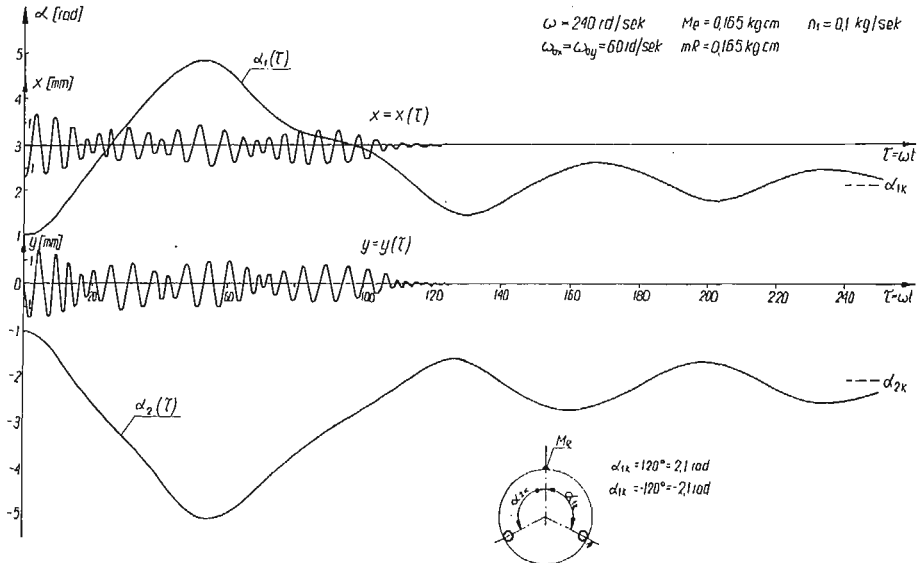


Rys. 2. Wyważanie jednym elementem



Rys. 3. Wyważanie jednym elementem

Przykładowe przebiegi  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$ ,  $\alpha(\tau)$  przedstawione na rys. 2÷4 wskazują, że przy prędkościach  $\omega > \omega_{0x}$ ,  $\omega_{0y}$ , gdzie  $\omega_{0x} = \sqrt{k_x/M}$ ,  $\omega_{0y} = \sqrt{k_y/M}$ , elementy wyważające rzeczywiście dążą do położen  $\alpha_{ik}$ , przy których układ jest wyważony, a drgania wirnika stopniowo zanikają. Również dla pewnych prędkości  $\omega_{0x} < \omega < \omega_{0y}$  można uzyskać wyważenie się układu, jak pokazują wykresy z rys. 3.



Rys. 4. Wyważanie dwiema kulkami

## 2. Rozwiązanie uproszczone

Wyrażenia  $mR \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \sin(\omega t + \alpha_i)$ ,  $mR \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \cos(\omega t + \alpha_i)$  występujące w równaniach (1) i (2) można pominać bez obawy popełnienia większego błędu, gdyż są one dużo mniejsze w stosunku do pozostałych członów i zanikają jednocześnie z zanikaniem drgań wirnika. Po tym uproszczeniu prawe strony równań (1) i (2) przedstawiają sumę rzutów sił odśrodkowych na oś  $x$  lub  $y$ .

W związku z tym możemy przyjąć drgania wirnika jako sumę drgań od poszczególnych sił odśrodkowych działających na wirnik:

$$(6) \quad \begin{aligned} x(t) &= a_{0x} \cos(\omega t - \varphi_{0x}) + \sum_{i=1}^n a_{ix} \cos(\omega t + \alpha_i - \varphi_{ix}), \\ y(t) &= a_{0y} \sin(\omega t - \varphi_{0y}) + \sum_{i=1}^n a_{iy} \sin(\omega t + \alpha_i - \varphi_{iy}), \end{aligned}$$

gdzie  $a_{0x}$ ,  $a_{ix}$ ,  $\varphi_{0x}$ ,  $\varphi_{ix}$  są amplitudami i kątami przesunięcia fazowego dla drgań w kierunku osi  $x$ ,  $a_{0y}$ ,  $a_{iy}$ ,  $\varphi_{0y}$ ,  $\varphi_{iy}$  oznaczają amplitudy i fazy dla drgań w kierunku  $y$ .

Równanie (3) opisuje ruch  $i$ -tego elementu swobodnego pod działaniem siły:

$$(7) \quad P_i = m[\ddot{x} \sin(\omega t + \alpha_i) - \ddot{y} \cos(\omega t + \alpha_i)].$$

Zależy ona od przyspieszeń, jakie występują w poszczególnych ruchach składowych osi wirnika. Jeżeli przyjęto drgania wirnika jako sumę drgań harmonicznych, to siła  $P_i$ , po wykorzystaniu zależności (6), może być przedstawiona w postaci

$$(8) \quad P_i = -0,5m\omega^2 e [a'_{0x} \sin(\alpha_i + \varphi_{0x}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jx} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \sin(\alpha_i - \alpha_j + \varphi_{jx}) - \\ - 0,5m\omega^2 e [a'_{0y} \sin(\alpha_i + \varphi_{0y}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jy} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \sin(\alpha_i - \alpha_j + \varphi_{jy})] - \\ - 0,5m\omega^2 e [a'_{0x} \sin(2\omega t + \alpha_i - \varphi_{0x}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jx} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \sin(2\omega t + \alpha_i + \alpha_j - \varphi_{jx})] + \\ + 0,5m\omega^2 e [a'_{0y} \sin(2\omega t + \alpha_i - \varphi_{0y}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jy} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \sin(2\omega t + \alpha_i + \alpha_j - \varphi_{jy})],$$

gdzie  $b = mR/Me$ ,  $a'_0 = a_0/e$ ,  $a'_i = a_i/be$ .

W pracach [1, 2] wykazano, że człony okresowe względem czasu występujące w zależności (8), mają mały wpływ na ruch elementu wyważającego. W dodatku występują one z przeciwnymi znakami, przez co ich wpływ wzajemnie się znosi. Do dalszych rozważań można przyjąć uśrednioną siłę  $\bar{P}_i$  jako

$$(9) \quad \bar{P}_i = \frac{1}{T} \int_0^T P_i dt, \quad \text{gdzie} \quad T = \frac{\pi}{\omega}.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(10) \quad P_0 = 0,5m\omega^2 e, \\ F_{ix} = - [a'_{0x} \sin(\alpha_i + \varphi_{0x}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jx} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \times \sin(\alpha_i - \alpha_j + \varphi_{jx})], \\ F_{iy} = - [a'_{0y} \sin(\alpha_i + \varphi_{0y}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jy} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \times \sin(\alpha_i - \alpha_j + \varphi_{jy})], \\ F_i = F_{ix} + F_{iy},$$

siłę  $\bar{P}_i$  można zapisać w postaci

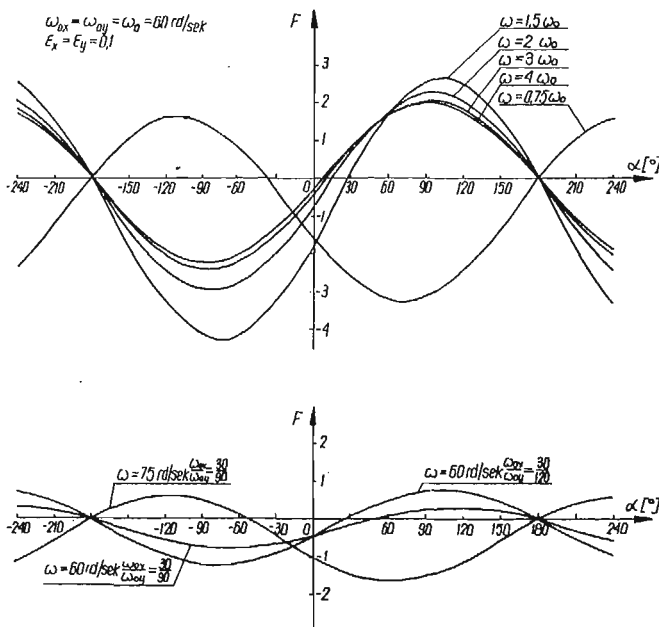
$$(11) \quad \bar{P}_i = \bar{P}_{ix} + \bar{P}_{iy} = P_0(F_{ix} + F_{iy}) = P_0 F_i.$$

Wyrażenie  $P_0$  decyduje o wartości siły  $\bar{P}_i$ . Natomiast  $F_i = F_{ix} + F_{iy}$  jest bezwymiarową funkcją okresową względem  $\alpha_i$  i przedstawia zmianę siły wymuszającej  $\bar{P}_i$  w zależności od położenia poszczególnych elementów. Funkcje  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$  pochodzą odpowiednio od drgań wzdłuż osi  $x$  lub  $y$ . Jeżeli prędkość kątowna jest niezbyt duża, a jedna ze sztywności jest bardzo duża np.  $k_y$ , tak że  $\omega \ll \omega_{0y}$ , to wtedy  $F_y \rightarrow 0$  i wówczas otrzymujemy układ, który może drgać tylko w jednym kierunku. Gdy wirnik podparty jest w ten sposób, że sztywności w obu kierunkach są jednakowe ( $k_x = k_y$ ), a współczynniki oporu równe ( $n_x = n_y$ ), wówczas  $\omega_{0x} = \omega_{0y}$  i w dalszej kolejności  $F_{ix} = F_{iy}$ .

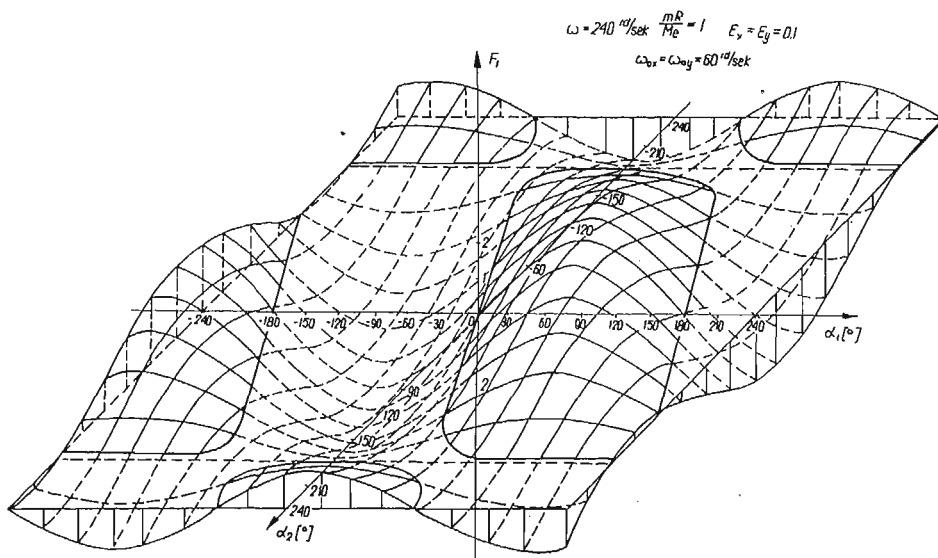
W tym przypadku siła wymuszająca ruch  $i$ -tego elementu

$$(12) \quad P_i = \bar{P}_i = P_0 F_i = 2P_0 F_{ix}$$

jest dwa razy większa w porównaniu z siłą występującą w przypadku wirnika podpartego sprężystie tylko w jednym kierunku, a siły okresowe względem czasu nie występują.



Rys. 5. Wykres funkcji  $F = F_x + F_y$



Rys. 6. Wykres funkcji  $F_1$



Wartość siły  $P_i$  jest proporcjonalna do kwadratu prędkości kątowej wirnika. Przykładowo na rys. 5 przedstawiono funkcję  $F_i$  dla przypadku wyważania jedną kulką. Przebieg funkcji  $F_i$  dla prędkości kątowych wirnika  $\omega < \omega_{0x}$ ,  $\omega_{0y}$  jest inny niż dla prędkości większych od częstości drgań własnych. Funkcja  $F_i$  przyjmuje wartości zerowe w dwóch punktach. Jednym z nich jest położenie elementu  $\alpha = \pm\pi$ , przy którym układ byłby wyważony.

Wykres na rys. 6 przedstawia funkcję  $F_1$  dla przypadku wyważenia dwiema kulkami. Funkcje  $F_1$  i  $F_2$  przyjmują jednocześnie wartości zerowe, gdy oba elementy znajdują się w położeniach  $\alpha_{1k}$ ,  $\alpha_{2k}$  określonych zależnością (4).

### 3. Stateczność

Przyjmując, że elementy wyważające zajęły położenia  $\alpha_{ik}$ , przy których układ byłby całkowicie wyważony wprowadza się «małe» zakłócenia ruchu i bada ten ruch. Jeżeli będzie on zanikający świadczy to o stateczności układu. W przypadku, gdy elementy wyważające oddalają się od położen  $\alpha_{ik}$  oznacza to, że położenia te nie są położeniami równowagi trwałe.

Stateczność zostanie zbadana w oparciu o równanie ruchu

$$(13) \quad m_z R \ddot{\alpha}_i = \bar{P}_i - n_1 R \dot{\alpha}_i,$$

gdzie siłę  $\bar{P}_i$  określa zależność (11). Przebadano przypadek  $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_0$ . Współrzędna określająca położenie elementu wyważającego może być zapisana w postaci

$$(14) \quad \alpha_i = \alpha_{ik} + \eta_i,$$

gdzie  $\eta_i(t)$  jest małym przemieszczeniem względem  $\alpha_{ik}$ .

Po podstawieniu wyrażenia (14) do zależności (11) na siłę  $\bar{P}_i$ , rozwinięciu jej w szereg Taylora i wzięciu pod uwagę pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia otrzymujemy zależność na siłę, gdy elementy znajdują się w sąsiedztwie położen  $\alpha_{ik}$ . Po jej podstawieniu do (13) otrzymujemy równania ruchu zakłóconego. W przypadku wyważania jedną kulką równania te przyjmują postać

$$(15) \quad a_0 \ddot{\eta} + a_1 \dot{\eta} + a_2 \eta = 0,$$

gdzie  $a_0 = m_z R/m_e$ ,  $a_1 = 2a'_0 \sin \varphi_0 + n_1 R/m\omega e$ ,  $a_2 = -a'_0 \cos \varphi_0$ , a pochodne są określone względem zmiennej  $\tau = \omega t$ .

Jest to równanie różniczkowe o współczynnikach niezależnych od czasu. Stateczność zbadano w oparciu o kryterium Hurwitza. Rozwiązanie równania (15) jest stateczne, gdy jego współczynniki spełniają warunki:  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ . Pierwsze dwa są zawsze spełnione, natomiast ostatni warunek jest spełniony tylko dla prędkości kątowych większych od prędkości krytycznych.

Równania różniczkowe opisujące ruch zakłócony dwóch elementów wyważających mają postać:

$$(16) \quad \begin{aligned} a_{11} \ddot{\eta}_1 + b_{11} \dot{\eta}_1 + c_{11} \eta_1 + b_{12} \ddot{\eta}_2 + c_{12} \eta_2 &= 0, \\ a_{22} \ddot{\eta}_2 + b_{22} \dot{\eta}_2 + c_{22} \eta_2 + b_{21} \ddot{\eta}_1 + c_{21} \eta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązań powyższych równań szukamy w postaci

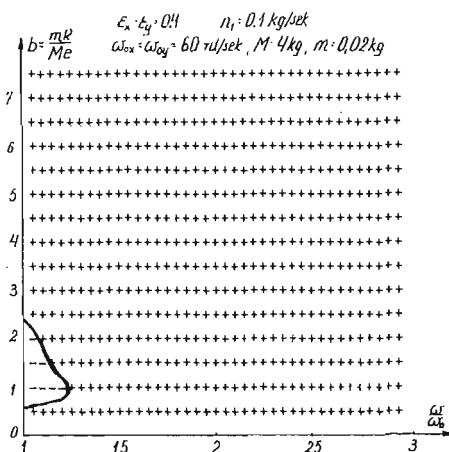
$$(17) \quad \eta_1 = \lambda_1 e^{rt}, \quad \eta_2 = \lambda_2 e^{rt},$$

a po ich podstawieniu do (16) i przyrównaniu wyznacznika charakterystycznego do zera otrzymujemy równanie czwartego stopnia

$$(18) \quad a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a = 0.$$

Stałe  $a, b, c$  w równaniach (16) i (18) zależą od parametrów układu, takich jak  $m, R, b, e, \omega$ . Pierwiastki równania (18) mają ujemne części rzeczywiste, gdy współczynniki tego równania spełniają cztery warunki:

$$(19) \quad \begin{aligned} a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0. \end{aligned}$$



Rys. 7. Wykres stateczności  
Obszar stateczny +, obszar niestateczny -

Warunek pierwszy i trzeci są zawsze spełnione, zaś warunek drugi jest spełniony tylko dla  $\omega > \omega_0$ . Sprawdzenia wymaga czwarty warunek w zakresie prędkości nadkrytycznych. Stwierdzono, że w zasadzie położenia elementów wyważających  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}$  są położeniami równowagi trwałej przy prędkościach  $\omega > \omega_0$ . Jedynie bardzo blisko prędkości krytycznej  $\omega_0$  i dla  $b \approx 0,7$  pojawiają się obszary niestateczne.

Ze wzrostem wartości współczynników tłumienia drgań  $n_x, n_y$ , obszar niestateczny powiększa się. Na rys. 7 przedstawiono zakresy prędkości kątowych wirnika, przy których położenia  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}$  są stateczne.

#### 4. Rola oporów toczenia

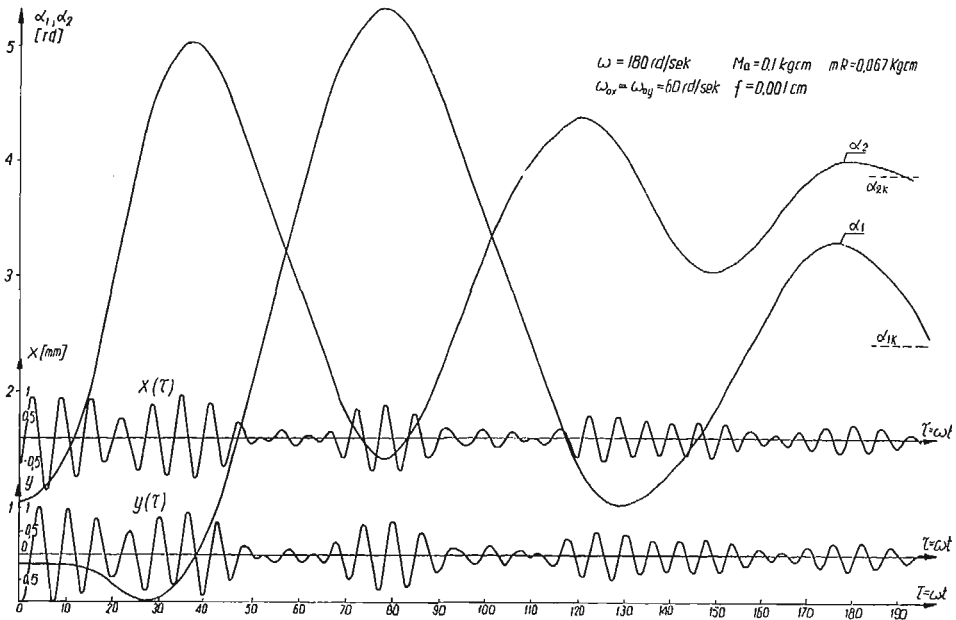
W poprzednich rozważaniach uwzględniono jedynie tłumienie typu wiskotycznego. Współczynnik oporu toczenia  $f$  jest małą wielkością. Jednak siła odśrodkowa działająca na element wyważający jest znaczna, co powoduje, że wpływ oporów toczenia na zachowanie się układu jest duży. Będzie on decydował o dokładności ustawienia się elementów wyważających, a przez to będzie wpływał na dokładność wyważenia się układu.

Przyjmując, że ruchom elementów wyważających przeciwstawiają się tylko opory toczenia, równanie ruchu  $i$ -tej kulki lub rolki o promieniu  $r$  ma postać

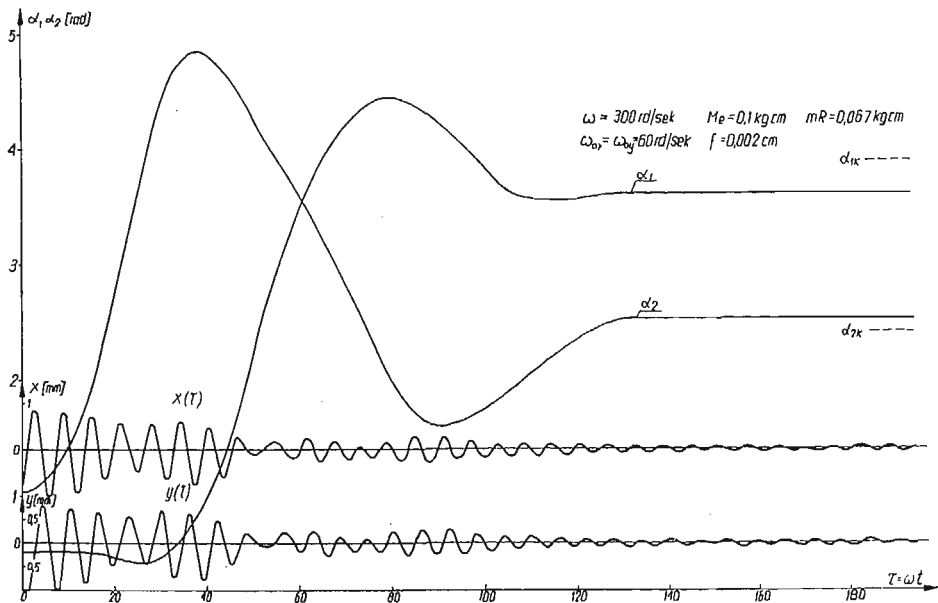
$$(20) \quad m_z R \ddot{\alpha}_i = m [\ddot{x} \sin(\omega t + \alpha_i) - \ddot{y} \cos(\omega t + \alpha_i)] - N_i \frac{f}{r} \text{sign} \dot{\alpha},$$

gdzie  $N_i \cong mR\omega^2$ .

Różniczkowe równania ruchu wirnika (1), (2) pozostają bez zmian. Równania ruchu układu rozwiązano numerycznie dla szeregu wartości prędkości kątowych i współczynników oporu otoczenia. Przykładowe rozwiązania równań (1), (2) i (20) są przedstawione na rys. 8 i 9.



Rys. 8. Wyważanie dwiema kulkami



Rys. 9. Wyważanie dwiema kulkami

Przy prędkości kątowej wirnika  $\omega > \omega_{0x}, \omega_{0y}$  i oporze toczenia  $f \neq 0$  elementy wyważające zajmują położenia końcowe przesunięte o  $\Delta\alpha_i$  względem  $\alpha_{ik}$  przy których układ byłby wyważony idealnie.

Element wyważający nie zacznie się toczyć dopóki jest spełniony warunek

$$(21) \quad |P_i|r \leq N_i f.$$

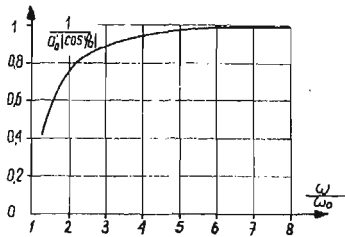
Wielkość szcztkowego niewyważenia, jakie pozostaje przy niedokładnym ustawieniu się elementów wyważających zostanie wyznaczona dla przypadku takiego podparcia wirnika, że  $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_0$ . Traktując odchyłkę  $\Delta\alpha_i$  jako małą wielkość, a następnie rozwijając wyrażenie (12) na siłę działającą na  $i$ -ty element i biorąc pod uwagę pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia, otrzymujemy zależność na siłę  $P_i$ , gdy element wyważający znajduje się blisko położenia  $\alpha_{ik}$ . Po podstawieniu do (21) obliczamy maksymalne odchyłki  $\Delta\alpha_{\max}$ , a następnie maksymalne niewyważenie  $\Delta|Me|_{\max}$  jakie może pozostać.

W przypadku zastosowania jednego elementu wyważającego:

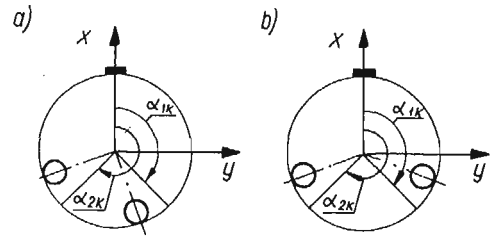
$$(22) \quad \Delta\alpha_{\max} = \pm \frac{Rf}{er} \frac{1}{a'_0 |\cos \varphi_0|},$$

$$(23) \quad \Delta|Me|_{\max} \cong mR\Delta\alpha_{\max} = \frac{2RMf}{r} \frac{1}{a'_0 |\cos \varphi_0|}.$$

Z zależności (22) i (23) wynika, że dla wirnika podpartego sprężysto w dwóch kierunkach błąd ustawienia się elementu wyważającego  $\Delta\alpha_{\max}$  jest dwa razy mniejszy w porównaniu z identycznym układem podpartym sprężysto tylko w jednym kierunku [1]. Odchyłka  $\Delta\alpha_{\max}$  i niewyważenie szcztkowe  $\Delta|Me|_{\max}$  są proporcjonalne do współczynnika oporu toczenia  $f$ . Błąd ustawienia elementu i niewyważenia szcztkowe zależą od wyrażenia  $1/a'_0 |\cos \varphi_0|$ , które jest funkcją prędkości kątowej wirnika (rys. 10).



Rys. 10. Wykres funkcji  $1/a'_0 |\cos \varphi_0|$



Rys. 11. Ustawienie elementów wyważających

Jeżeli chcemy uzyskać małe niedokładności, to operację wyważenia należy przeprowadzać przy prędkościach  $\omega$  niewiele większych od  $\omega_{0x}$  i  $\omega_{0y}$ .

W przypadku użycia dwóch kulek z warunku (21) otrzymujemy cztery rozwiązania ze względu na ich ustawienie się względem  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}$ . Na rys. 11 przedstawiono dwie możliwości ustawienia się kulek. W pierwszym rozwiązaniu obie kulki są przesunięte w tym samym kierunku czyli  $\Delta\alpha_1$  i  $\Delta\alpha_2$  mają ten znak (rys. 11a):

$$(24) \quad \Delta\alpha'_{1\max} = \frac{Mf}{mra'_0} \frac{\sin(\alpha_k + \varphi_0)}{2\sin\alpha_k \cos^2\alpha_k},$$

$$(25) \quad \Delta\alpha'_{2\max} = \frac{Mf}{mra'_0} \frac{\sin(-\alpha_k + \varphi_0)}{2\sin\alpha_k \cos^2\alpha_k}.$$

Niewyważenie szcztątkowe w tym przypadku wynosi

$$(26) \quad \Delta|Me|'_{\max} = \frac{MRf}{ra'_0} \frac{1}{|\cos\alpha_k|}.$$

Drugie rozwiązanie odpowiada przesunięciu się kulek w przeciwnych kierunkach (rys. 11b):

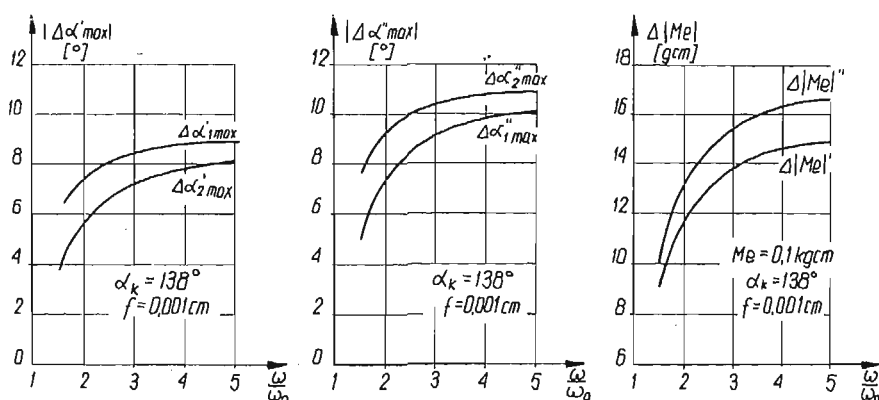
$$(27) \quad \Delta\alpha''_{1\max} = -\frac{Mf}{mra'_0} \frac{\cos(\alpha_k + \varphi_0)}{2\sin^2\alpha_k \cos\alpha_k},$$

$$(28) \quad \Delta\alpha''_{2\max} = \frac{Mf}{mra'_0} \frac{\cos(-\alpha_k + \varphi_0)}{2\sin^2\alpha_k \cos\alpha_k}.$$

Niewyważenie szcztątkowe dla tego rozwiązania wynosi

$$(29) \quad \Delta|Me|''_{\max} = \frac{MRf}{ra'_0} \frac{1}{\sin\alpha_k}.$$

Pozostałe dwa rozwiązania różnią się od otrzymanych tylko znakiem. Dla układu o pewnych parametrach przebadano związki (24)÷(29) w zależności od prędkości kątowej wirnika, a wyniki przedstawiono na rys. 12. Dla prędkości kątowych  $\omega$  znacznie większych od



Rys. 12. Zależność błędów ustawienia kulek i niewyważenia szcztątkowego od prędkości kątowej wirnika

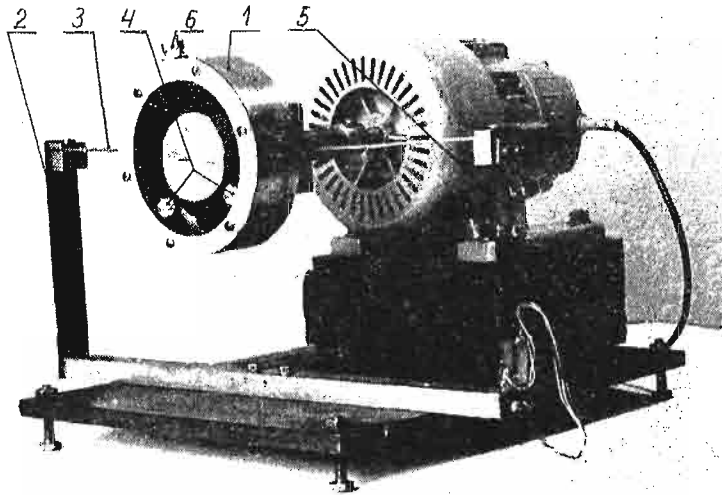
prędkości krytycznej  $\omega_0$  można przyjąć  $\varphi_0 \cong \pi$  i  $a'_0 \cong 1$  przez co zależności (24)÷(29) znacznie się upraszczają. Odchyłki  $\Delta\alpha_{\max}$  i niewyważenie szcztątkowe  $\Delta|Me|_{\max}$  maleją, jeżeli stosunek  $\omega/\omega_0$  dąży do jedności. Z podanych zależności wynika, że przy zachowaniu stałego iloczynu  $mR$  niedokładności ustawienia się kulek i niewyważenie szcztątkowe są tym mniejsze, im mniejszy jest promień  $R$ . Jeżeli dąży się do jak najlepszego wyważenia układu, to należy dobierać elementy wyważające o dużych promieniach  $r$ , lecz poruszające się po torze o małym promieniu  $R$ . Im mniejsze są opory toczenia  $f$ , tym mniejsze jest

niewyważenie szczątkowe. Również w tym przypadku niedokładności ustawienia kulek i niewyważenie końcowe są dwa razy mniejsze w porównaniu z  $\Delta\alpha_{\max}$  i  $\Delta|Me|_{\max}$  dla takiego samego układu, ale z podparciem sprężystym tylko w jednym kierunku.

### 5. Badania

Zbudowano stanowisko doświadczalne (rys. 13) odpowiadające modelowi przyjętemu do rozważań teoretycznych i na nim sprawdzono efekt wyrównoważania się układu.

Wirnik 1 o masie  $M = 2,5$  kg podparto sprężynami płaskimi pionowymi 2 i poziomymi 3. Takie zawieszenie umożliwia wzbudzenie drgań wirnika w dwóch kierunkach  $x$  i  $y$ . Elementami wyważającymi były dwie kulki łożyskowe 4 każda o masie  $m = 18,7$  g i średnicy 16,7 mm. Drgania wirnika rejestrowano przy pomocy tensometrów oporowych 5 naklejonych na sprężynach pionowych. Wielkość niewyważenia regulowano ilością podkładek pod śrubą 6.



Rys. 13. Stanowisko badawcze

Do napędu wirnika użyto silnika o prędkości obrotowej  $n = 1500$  obr/min. Badanie przeprowadzono tylko przy jednej prędkości. Po ustaleniu się prędkości obrotowej wirnika kulki były uruchamiane przez zwolnienie specjalnej blokady, a następnie po ich ustawieniu ponownie blokowane. Kulki ustawiane w różnych położeniach początkowych  $\alpha_{10}, \alpha_{20}$  zawsze przemieszcza się do położenia bliskich wartościom teoretycznym. Odchyłki ustawienia kulek nie przekraczały  $8^\circ$ .

Przykładowe wyniki pomiarów:

1) Wirnik wyważony  $Me = 0$ . Początkowe niewyważenie układu jest spowodowane przez kulki. W tym przypadku powinny one ustawić się na jednej średnicy, tzn.  $\alpha_{2k} - \alpha_{1k} = 180^\circ$ . Wyniki przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1.

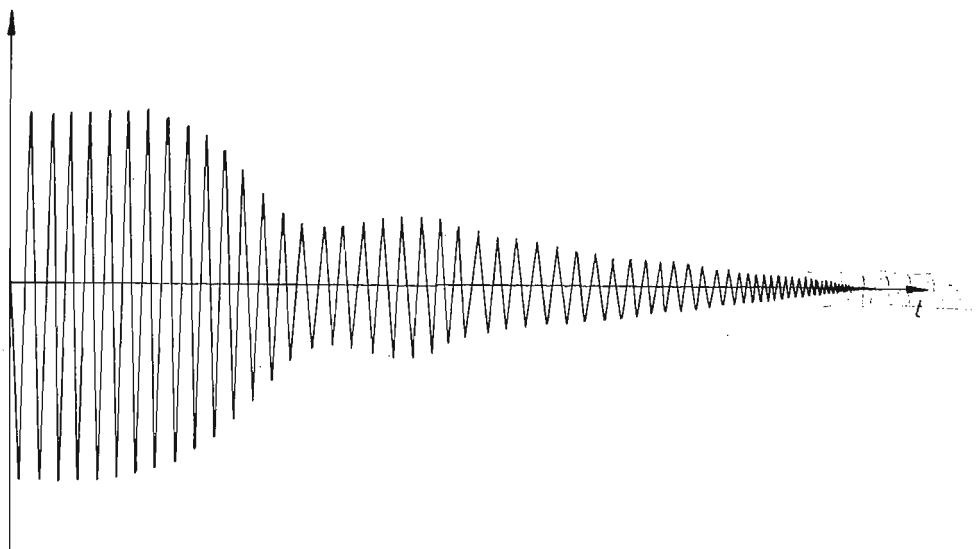
Nr pomiaru	Położenie początkowe		Położenie końcowe	
	$\alpha_{10}$	$\alpha_{20}$	$\alpha_{1k}$	$\alpha_{2k}$
1	140	225	0	187
2	195	275	25	210

Tablica 2.

Nr pomiaru	Położenie początkowe		Położenie końcowe	
	$\alpha_{10}$	$\alpha_{20}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
3	77	100	142	230
4	225	280	138	229
5	48	70	140	225

2) Niewyważenie statyczne wirnika  $Me = 0,12$  kg cm. Położenia kulek, przy których układ byłby całkowicie wyważony wyznaczone z warunków (4) wynoszą  $\alpha_{1k} = 138^\circ$ ,  $\alpha_{2k} = 222^\circ$ . Wyniki przedstawiono w tablicy 2.

Oscylogram drgań wirnika dla pomiaru nr 3 jest przedstawiony na rys. 14.



Rys. 14. Oscylogram drgań wirnika

## 6. Wnioski

W pracy podano ogólne równania opisujące zachowanie się układu wyważanego  $n$  elementami swobodnymi, którymi mogą być kulki lub rolki. Szczegółowe rozważania dotyczyły przypadków, w których stosuje się jeden lub dwa elementy. Użycie jednego elementu jest skuteczne tylko dla określonego niewyważenia. W tym przypadku element nie ma możliwości «dopasowania» się do wielkości niewyważenia, które jest nieznanne. Jest to raczej problem teoretyczny, ponieważ z praktycznego punktu widzenia użycie jednego elementu jest mało przydatne. Stosując co najmniej dwa elementy istnieje możli-

wość «dopasowania» się układu poprzez odpowiednie ustawienie się tych elementów, w zależności od niewyważenia. Zatem wielkość niewyważenia, jak i jego położenie może się zmieniać w pewnym zakresie, a elementy ruchome tak się będą ustawiać, że wirnik będzie zawsze wyrównoważony. Na drodze rozważań teoretycznych, jak również w oparciu o wyniki uzyskane z badań na stanowisku doświadczalnym stwierdzono, że samoczynne wyważenie wirnika podpartego sprężyste w dwóch kierunkach następuje, jeżeli jego prędkość obrotowa jest większa od częstości drgań swobodnych  $\omega_{0x}$ ,  $\omega_{0y}$ .

Samoczynne wyważenie można również osiągnąć przy prędkościach kątowych  $\omega_{0x} < \omega < \omega_{0y}$ , ale nie w całym zakresie  $\omega_{0x} \div \omega_{0y}$ , a dokładności jakie się wtedy otrzymuje są małe. Wynika to stąd, że składowe  $P_{ix}$ ,  $P_{iy}$  siły wymuszającej ruch elementu mają przeciwnie znaki i odejmują się. A zatem siła wymuszająca jest mała przy istnieniu znacznych sił oporu. Błędy ustawienia kulek oraz niewyważenie szczałkowe są wprost proporcjonalne do współczynnika oporu toczenia. Dlatego bieżnia bębna i elementy wyważające powinny być tak dobrane, aby wpływ tego oporu był jak najmniejszy. Elementy wyważające powinny być jak największe, a ich środek masy powinien poruszać się po jak najmniejszym promieniu  $R$ . W przypadku elementów wyważających, które nie mogą się przetaczać tylko ślizgać należałoby brać pod uwagę opór poślizgu. W stosunku do oporu toczenia jest on dużo większy. W związku z tym błędy wtedy powstające byłyby dużo większe i dlatego elementów takich nie należy raczej stosować.

Do zalet tej metody należy zaliczyć to, że jest ona bardzo prosta, nie wymaga drogich i skomplikowanych maszyn, wyważenie odbywa się bez udziału człowieka i następuje prawie jednocześnie z pojawieniem się niewyważenia.

Wadą tej metody jest jej skuteczność tylko przy prędkościach nadkrytycznych, natomiast przy obrotach podkrytycznych elementy swobodne powiększają niewyważenie. Na skutek istnienia oporu toczenia układ nie wyważa się do końca.

#### Literatura cytowana w tekście

1. T. MAJEWSKI, *Samoczynne wyważenie wirnika podpartego sprężyste w jednym kierunku*, Arch. Bud-Masz., 3 (1976).
2. Ю. Ю. Блехман, *Синхронизация динамических систем*, Москва 1971.

#### АВТОМАТИЧЕСКОЕ УРАВНОВЕШИВАНИЕ РОТОРА, ПОДДЕРЖИВАЕМОГО УПРУГО В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

#### Резюме

В работе описывается метод автоматического уравновешивания роторов при помощи подвижных элементов, таких как например шарики и ролики. Приводятся дифференциальные уравнения движения, описывающие поведение системы в процессе уравновешивания. Даются решения этих уравнений, выполненные при помощи электронно-вычислительной машины, и приближенные решения. Показывается, что подвижные элементы перемещаются в положения, которые соответствуют полному равновесию системы. Была проведена проверка устойчивости положений шариков, обеспечивающих полное равновесие системы. Было исследовано влияние сопротивления качения на свойственные данному методу погрешности.



## S u m m a r y

## AN AUTOMATIC BALANCING OF ROTOR ELASTICLY SUPPORTED IN TWO DIRECTIONS

This work concerns the method of an automatic balancing of rotors by the movable elements such as balls and rollers. The differential equations of motion describing the behaviour of the system during balancing is derived. Numerical and simplified analytical solutions of these equations are presented. It is shown that the adjustable elements move to the positions at which the system would be completely balanced. This position is shown to be stable. The influence of roll resistance on the accuracy of the solution is discussed.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 maja 1976 r.*



## ZAGADNIENIA SPRĘŻANIA W OŚRODKACH DWUFAZOWYCH\*

JAN HOLNICKI-SZULC (WARSZAWA)

Podejście do zagadnień sprężania, jako do analizy wstępnych stanów naprężenia utrwalonych w ustroju, pomimo niewystępowania obciążeń zewnętrznych prezentowane było w różnych aspektach w kilku pracach ostatnich lat [1 - 5].

Artykuł ten stanowi kontynuację rozważań na temat sprężania opisanych w pracy [6], gdzie analizowane były wstępne stany odkształceń  $\epsilon^R$  i naprężeń  $\sigma^R$  wywołane w ośrodku ciągłym przez wymuszenie pierwotnych stanów odkształceń  $\epsilon^L$  (dystorsji) lub związanych z nimi naprężeń  $\sigma^L$  niezgodnych z geometrycznymi i statycznymi więzami ośrodka. Celem wywołania stanów wstępnych była optymalna regulacja stanów końcowych  $\epsilon = \epsilon^L + \epsilon^R$ ,  $\sigma = \sigma^L + \sigma^R$ , gdzie  $\epsilon^L$ ,  $\sigma^L$  są ustalonymi stanami związanymi z obciążeniem zewnętrznym. Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest sprężanie ustrojów dwufazowych. Analizowane są wstępne stany wywołane w każdej z faz:  $\epsilon^{R'}$ ,  $\epsilon^{R''}$ ,  $\sigma^{R'}$ ,  $\sigma^{R''}$ , na skutek wymuszenia niezależnych pól pierwotnych odkształceń  $\epsilon^L$ ,  $\epsilon^{L''}$  lub odpowiadających im pól pierwotnych naprężeń  $\sigma^L$ ,  $\sigma^{L''}$ . Stany wstępne pozostają trwale w ustroju pomimo braku obciążeń zewnętrznych. Celem sprężania, czyli wymuszania stanów wstępnych, jest optymalna regulacja stanów końcowych w jednej lub w obu fazach, przy czym narzucony jest na stany wstępne i końcowe warunek nierozdzielności obu faz.

Jako pierwowzór rozpatrywanego modelu ciągłego ośrodka dwufazowego można przyjąć ośrodek ciągły z gęsto rozproszoną strukturą kratową fazy sprężającej (rys. 1). Stosując kontynuacyjny model opisu tego kompozytu otrzymujemy wyidealizowany ciągły ośrodek dwufazowy posiadający tę cechę, że każdemu punktowi geometrycznemu z obszaru  $V$  przyporządkowane są dwa punkty materialne należące do różnych faz.

Zaprezentowany zostanie ogólny opis sprężania dwufazowego, z którego otrzymać będzie można opisy przypadków szczególnych: sprężania wewnętrznego [6] oraz sprężania zewnętrznego (omawianego dalej w pracy) polegającego na wprowadzeniu niezależnych, lecz spełniających więzy geometryczne w każdej z faz odkształceń pierwotnych  $\epsilon^L$ ,  $\epsilon^{L''}$ , a następnie na zespoleniu obu faz, co związane jest z wymuszeniem wspólnej deformacji wstępnej  $\epsilon^{R'} = \epsilon^{R''} = \epsilon^R$ .

W pracy omówiono także przypadek szczególny sprężania zewnętrznego, tzw. sprężanie powierzchniowe (rys. 2), w którym obie fazy nie przenikają się, lecz stykają się wzdłuż powierzchni kontaktowej  $S$ . Przyczyną wywołania stanów wstępnych jest w tym przypadku

\* Praca wykonana została w ramach współpracy polsko-amerykańskiej (fundusz Marii Skłodowskiej-Curie NO. INT 75-08722) na temat «Optymalizacja elementów i systemów konstrukcyjnych».

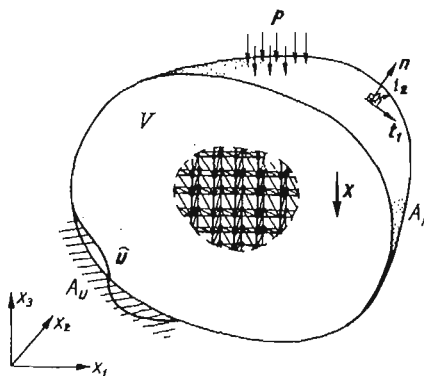
wprowadzenie niezależnych deformacji pierwotnych brzegu  $S$  obu faz, a następnie ich zespolenie.

Po ogólnym sformułowaniu zagadnienia sprężania w ośrodkach dwufazowych o przenikających się fazach i wprowadzeniu formalizmu jego opisu (rozd. 1) wyznaczono (rozd. 2) stany naprężeń i odkształceń wstępnych generowane w ośrodku przez dowolnie dane pola dystorsji. W rozdziale 3 przeanalizowano sprężanie powierzchniowe w ośrodkach o fazach rozdzielonych powierzchnią kontaktową. W rozdziale 4 przedyskutowano rozwiązanie zagadnienia optymalnego sprężania ze względu na minimalizację wyężenia w fazie sprężanej w przypadku ośrodka o dwu przenikających się fazach (4a) oraz w przypadku sprężania powierzchniowego (4b). W rozdz. 5 przedstawiono przykład sprężania powierzchniowego dwuwarstwowej rury ciśnieniowej. Przykładem zastosowania sprężania zewnętrznego w ośrodkach o przenikających się fazach jest sprężanie elementów siatkobetonowych.

### 1. Zależności podstawowe dla sprężonego ośrodka o dwu przenikających się fazach

Rozpatrujemy dwufazowe ciała liniowo sprężyste zajmujące w  $R_3$  obszar  $V$  ograniczony brzegiem  $A = A_p \cup A_u$  (rys. 1).

Na obciążenie zewnętrzne (użytkowe) ustroju składa się obciążenie polem sił masowych  $\mathbf{X}$  w obszarze  $V$ , polem obciążeń brzegowych  $\mathbf{p}$  na części  $A_p$  brzegu oraz polem wymuszonych przemieszczeń  $\hat{\mathbf{u}}$  na części  $A_u$  brzegu. Ograniczamy rozważania do zagadnień statycznych, do małych odkształceń oraz do regularnych pól tensorowych, których składowe w układzie kartezjańskim  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) są funkcjami klasy  $C^2$ .



Rys. 1.

Wstępne stany odkształceń faz przedstawić można jako sumy pól dystorsji i odkształceń związanych prawem Hooke'a z wywołanymi naprężeniami wstępnymi [7].

$$(1.1) \quad \overset{R}{\epsilon}' = \dot{\epsilon}' + \mathbf{B}' \overset{R}{\sigma}', \quad \overset{R}{\epsilon}'' = \dot{\epsilon}'' + \mathbf{B}'' \overset{R}{\sigma}'',$$

skąd, definiując:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}' &= \mathbf{A}' \dot{\epsilon}', & \dot{\sigma}'' &= \mathbf{A}'' \dot{\epsilon}'', \\ \dot{\epsilon}' &= \mathbf{B}' \dot{\sigma}', & \dot{\epsilon}'' &= \mathbf{B}'' \dot{\sigma}'' \end{aligned}$$

otrzymujemy zmodyfikowane związki konstytutywne stanów wstępnych:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \overset{R}{\sigma}' &= \mathbf{A}'(\overset{R}{\epsilon}' - \dot{\epsilon}'), & \overset{R}{\sigma}'' &= \mathbf{A}''(\overset{R}{\epsilon}'' - \dot{\epsilon}''), \\ \overset{R}{\epsilon}' &= \mathbf{B}'(\overset{R}{\sigma}' + \dot{\sigma}') & \overset{R}{\epsilon}'' &= \mathbf{B}''(\overset{R}{\sigma}'' + \dot{\sigma}''). \end{aligned}$$

Zmodyfikowane związki konstytutywne dla stanów końcowych, będących superpozycją stanów wstępnych i stanów użytkowych wywołanych przez obciążenia zewnętrzne:  $\epsilon' = \overset{R}{\epsilon}' + \overset{L}{\epsilon}'$ ,  $\epsilon'' = \overset{R}{\epsilon}'' + \overset{L}{\epsilon}''$ ,  $\sigma' = \overset{R}{\sigma}' + \overset{L}{\sigma}'$ ,  $\sigma'' = \overset{R}{\sigma}'' + \overset{L}{\sigma}''$  przyjmują, postać:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma' &= \mathbf{A}'(\epsilon' - \dot{\epsilon}'), & \sigma'' &= \mathbf{A}''(\epsilon'' - \dot{\epsilon}''), \\ \epsilon' &= \mathbf{B}'(\sigma' + \dot{\sigma}'), & \epsilon'' &= \mathbf{B}''(\sigma'' + \dot{\sigma}''). \end{aligned}$$

Na końcowe stany naprężeń narzucone są więzy statyczne

$$(1.5) \quad \mathcal{R}(\sigma' + \sigma'', \mathbf{X}, \mathbf{p}) = 0$$

rozumiane jako równania równowagi

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma' + \sigma'') + \mathbf{X} &= 0 & \text{w obszarze } V, \\ (\sigma' + \sigma'')\mathbf{n} &= \mathbf{p} & \text{na brzegu } A_p. \end{aligned}$$

Na końcowe stany odkształceń narzucone są warunki wspólnej deformacji obu faz

$$(1.7) \quad \epsilon' = \epsilon'' = \epsilon$$

oraz więzy geometryczne

$$(1.8) \quad \mathcal{G}(\epsilon, \hat{\mathbf{u}}) = 0$$

rozumiane jako warunki:

zgodności odkształceń Saint-Venanta w obszarze  $V$ :

$$(1.9) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \epsilon = 0;$$

zgodności pola deformacji  $\epsilon$  z przemieszczeniami  $\hat{\mathbf{u}}$  danymi na brzegu  $A_u$ .

W przypadku analizy sprężania ośrodka ciągłego gęsto rozłożoną wiązką cięgien sprężających (np. model kablobetonu) należałoby uogólnić rozważania dopuszczając różne postacie więzów geometrycznych (1.7), (1.8) dla obu faz oraz wprowadzając ograniczenia stanu naprężeń w fazie sprężającej do naprężeń rozciągających.

Zamiast posługiwać się wielkościami opisującymi stany w poszczególnych fazach, wygodniej będzie wprowadzić ich symetryczne i antysymetryczne części związane odpowiednio z wielkościami makroskopowymi, opisującymi stany zastępczego, «średnionego» ośrodka, oraz z wielkościami mikroskopowymi, opisującymi lokalne zaburzenia stanów makroskopowych w obu fazach.

Zdefiniujemy w związku z tym symetryczne i antysymetryczne (względem obu faz) części pierwotnych stanów odkształceń i naprężeń oraz operatorów konstytutywnych:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^s &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}' + \dot{\epsilon}''), \\ \dot{\epsilon}^a &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}' - \dot{\epsilon}''), \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad \sigma^s \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\sigma' + \sigma''),$$

$$\sigma^a \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\dot{\sigma}' - \dot{\sigma}'');$$

$$(1.12) \quad A^s \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(A' + A''),$$

$$A^a \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(A' - A'');$$

$$(1.13) \quad B^s \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(B' + B''),$$

$$B^a \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(B' - B'').$$

Wyrażając związki (1.2) stanów pierwotnych przez nowo zdefiniowane składowe, otrzymujemy:

$$(1.14) \quad \dot{\sigma}^s = A^s \dot{\epsilon}^s + A^a \dot{\epsilon}^a,$$

$$\dot{\sigma}^a = A^a \dot{\epsilon}^s + A^s \dot{\epsilon}^a;$$

$$(1.15) \quad \dot{\epsilon}^s = B^s \dot{\sigma}^s + B^a \dot{\sigma}^a,$$

$$\dot{\epsilon}^a = B^a \dot{\sigma}^s + B^s \dot{\sigma}^a.$$

Wprowadzając rozkład stanów odkształcenia  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$  oraz stanów naprężenia  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  na części symetryczne (opisujące makroodkształcenia oraz makronaprężenia ośrodka dwufazowego) i antysymetryczne (opisujące mikroodkształcenia oraz mikronaprężenia w poszczególnych fazach), analogicznie do (1.10), (1.11), zmodyfikowane związki konstytutywne (1.4) przyjmują postać:

$$(1.16) \quad \sigma^s = A^s(\epsilon^s - \dot{\epsilon}^s) + A^a(\epsilon^a - \dot{\epsilon}^a),$$

$$\sigma^a = A^a(\epsilon^s - \dot{\epsilon}^s) + A^s(\epsilon^a - \dot{\epsilon}^a);$$

$$(1.17) \quad \epsilon^s = B^s(\sigma^s + \dot{\sigma}^s) + B^a(\sigma^a + \dot{\sigma}^a),$$

$$\epsilon^a = B^a(\sigma^s + \dot{\sigma}^s) + B^s(\sigma^a + \dot{\sigma}^a),$$

zaś równania więzów (1.5), (1.7), (1.8) przyjmują postać:

$$(1.18) \quad \mathcal{R}(\sigma^s, \mathbf{X}, \mathbf{p}) = 0, \quad \mathcal{C}(\epsilon^s, \hat{\mathbf{u}}) = 0, \quad \epsilon^a = 0.$$

Wstawiając (1.16)<sub>1</sub>, (1.14)<sub>1</sub> do równań (1.18)<sub>1,2</sub> oraz wykorzystując (1.18)<sub>3</sub> otrzymujemy opis stanu odkształcenia  $\epsilon = \epsilon^s$ , wspólnego dla obu faz w zależności od stanów pierwotnych i obciążeń zewnętrznych:

$$(1.19) \quad \mathcal{R}(A^s \epsilon - \dot{\sigma}^s, \mathbf{X}, \mathbf{p}) = 0,$$

$$\mathcal{C}(\epsilon, \hat{\mathbf{u}}) = 0.$$

Widać stąd, że wpływ pola dystorsji na stan odkształceń  $\epsilon$  zależy od niezgodności  $\sigma^s$  z więzami statycznymi i jest identyczny ze stanem odkształceń wywołanych przez zastępcze obciążenie zewnętrzne –  $\mathcal{R}(\dot{\sigma}^s)$ . Jest to uogólnienie «analogii sił masowych» [7, 8] na przypadek ośrodka dwufazowego.

Wstawiając (1.17)<sub>1</sub> i (1.15)<sub>1</sub> do równań (1.18)<sub>1,2</sub>, natomiast (1.17)<sub>2</sub> i (1.15)<sub>2</sub> do warunku (1.18)<sub>3</sub> otrzymujemy opis makro- i mikronaprężeń w zależności od stanów pierwotnych i obciążeń zewnętrznych:

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(\boldsymbol{\sigma}^s, \mathbf{X}, \mathbf{p}) &= 0, \\ \mathcal{C}(\mathbf{B}^s \boldsymbol{\sigma}^s + \mathbf{B}^a \boldsymbol{\sigma}^a + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s, \hat{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \mathbf{B}^a \boldsymbol{\sigma}^s + \mathbf{B}^s \boldsymbol{\sigma}^a + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a &= 0. \end{aligned}$$

Widać stąd, że wpływ na stan naprężeń wywołany przez pola dystorsji zależy od niezgodności makrodystorsji  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s$  z więzami geometrycznymi (por. «tensor niezgodności» KRÖNERA [9]) oraz od niezgodności dystorsji z ograniczeniem dotyczącym wspólnoty odkształceń obu faz (mikrodystorsje  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a$ ).

Układ związków (1.19) (1.20) opisuje najogólniejszy przypadek sprężania dwufazowego. Uwzględniając w nich znikające stany pierwotne uzyskujemy opis stanów odkształceń i naprężeń ustroju niesprężonego. Oznaczamy te stany jako stany użytkowe  $\overset{L}{\boldsymbol{\epsilon}}, \overset{L}{\boldsymbol{\sigma}}^s, \overset{L}{\boldsymbol{\sigma}}^a$  i traktować je będziemy w rozważaniach jako znane.

Podstawiając w związkach (1.19) (1.20), znikające obciążenie zewnętrzne: siłowe  $\mathbf{X} = 0, \mathbf{p} = 0$  oraz przemieszczeniowe  $\hat{\mathbf{u}} = 0$ , uzyskujemy opis wstępnych stanów odkształcenia  $\overset{R}{\boldsymbol{\epsilon}}$  i naprężeń  $\overset{R}{\boldsymbol{\sigma}}^s, \overset{R}{\boldsymbol{\sigma}}^a$ , ortogonalnych do stanów użytkowych w tym sensie, że nie dają wkładu do globalnej energii sprężystej ustroju.

Z postaci równań (1.19), (1.20) widać, że w przypadku dwu faz o jednorodnych cechach sprężystych ( $\mathbf{B}^a = 0$ ) makro i mikrostanu rozprzęgają się. Odkształcenia wstępne  $\overset{R}{\boldsymbol{\epsilon}}$  i makronaprzężenia wstępne  $\overset{R}{\boldsymbol{\sigma}}^s$  zależą jedynie od makrodystorsji  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s$ , zaś mikronaprzężenia wstępne  $\overset{R}{\boldsymbol{\sigma}}^a$  zależą jedynie od mikrodystorsji  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a$  i są lokalnie samozrównoważone.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z ustrojem jednofazowym, przyjmując mikrowielkości jako znikające, otrzymujemy z wypisanych zależności związki opisujące «sprężanie wewnętrzne» [6].

«Sprężanie zewnętrzne» zdefiniujemy jako taki przypadek, w którym pola mikro- i makrodystorsji spełniają jednorodne więzy geometryczne (1.8):

$$(1.21) \quad \mathcal{C}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s) = 0, \quad \mathcal{C}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a) = 0.$$

Techniczna realizacja tego sposobu sprężania polega na wywołaniu niezależnych, geometrycznie zgodnych deformacji pierwotnych obu faz, a następnie na ich zespoleniu i cofnięciu przyczyn wywołujących deformacje pierwotne. Sposób ten może być zastosowany do sprężania elementów betonowych siatką ciągien.

## 2. Analiza stanów wstępnych wywołanych sprężeniem

Przeprowadzimy konstrukcję rozwiązania zagadnień brzegowych (1.19) oraz (1.20), opisujących wstępne stany naprężeń i odkształceń, po położeniu  $\mathbf{X} = 0, \mathbf{p} = 0, \hat{\mathbf{u}} = 0$ .

Wykorzystajmy w tym celu rozkład pól odkształceń i naprężeń pierwotnych na (ortogonalne w sensie iloczynu  $\int \dot{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dv$ ) części składowe opisujące odpowiednio stany zgodne

z więzami statycznymi (1.5) i oznaczone symbolem  $\mathcal{R}$  oraz stany zgodne z więzami geometrycznymi (1.8) i oznaczone symbolem  $\mathcal{C}$  [6]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^s &= \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s, \\ \dot{\epsilon}^a &= \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}^s &= \dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s, \\ \dot{\sigma}^a &= \dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^a, \end{aligned}$$

przy czym:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s) &= \mathcal{R}(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a) = 0, \\ \mathcal{C}(\dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s) &= \mathcal{C}(\dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a) = 0. \end{aligned}$$

Związki (1.14) i (1.15) wiążące stany pierwotne przyjmują po uwzględnieniu (2.1), (2.2) postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}^s &= \mathbf{A}^s(\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s) + \mathbf{A}^a(\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a), \\ \dot{\sigma}^a &= \mathbf{A}^a(\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s) + \mathbf{A}^s(\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a); \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^s &= \mathbf{B}^s(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s) + \mathbf{B}^a(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^a), \\ \dot{\epsilon}^a &= \mathbf{B}^a(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s) + \mathbf{B}^s(\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a + \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^a). \end{aligned}$$

Podstawiając (2.2)<sub>1</sub> do (1.19)<sub>1</sub> i wykorzystując (2.3)<sub>1</sub> otrzymujemy z równań więzów statycznych

$$(2.6) \quad \epsilon^R = \mathbf{A}^s \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s.$$

Rozwiązanie to spełnia także równania więzów geometrycznych (1.19)<sub>2</sub>, co wynika z podstawienia (2.4)<sub>1</sub> do (2.6)

$$(2.7) \quad \epsilon^R = \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^s + \mathbf{A}^s \mathbf{A}^a \dot{\epsilon}_{\mathcal{C}}^a$$

oraz z uwzględnienia warunku (2.3)<sub>2</sub>.

Zatem rozwiązania (2.6) lub (2.7) opisują poszukiwane pola odkształceń wstępnych wyrażone przez wywołujące je pola naprężeń lub odkształceń pierwotnych.

Podobnie, wykorzystując związki (2.1)<sub>1</sub>, (2.5) i (2.3)<sub>2</sub> można sprawdzić, że stany:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathcal{R}}^R &= -\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^s, \\ \sigma_{\mathcal{R}}^a &= -\dot{\sigma}_{\mathcal{R}}^a - \mathbf{B}^s \mathbf{B}^a \dot{\sigma}_{\mathcal{C}}^s \end{aligned}$$

stanowią rozwiązanie układu równań (1.20), a zatem opisują poszukiwane pola naprężeń wstępnych wywołane przez naprężenia pierwotne. Pola te można wyrazić przez odkształcenia pierwotne przekształcając rozwiązania (2.8) przy użyciu związków (2.4), (2.5):

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathcal{R}}^s &= \mathbf{A}^s \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \mathbf{A}^a \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a, \\ \sigma_{\mathcal{R}}^a &= -\mathbf{B}^s [\dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a + \mathbf{B}^a (\mathbf{A}^s \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^s + \mathbf{A}^a \dot{\epsilon}_{\mathcal{R}}^a)]. \end{aligned}$$

Podstawiając w rozwiązaniach (2.6) ÷ (2.9)  $\dot{\epsilon}^a = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\sigma}^a = \mathbf{0}$  otrzymujemy opis stanów wstępnych wywołanych sprężaniem wewnętrznym ośrodka dwufazowego, który wzbogaca rozwiązanie zagadnienia sprężania wewnętrznego ośrodka jednofazowego [6] o człony mikronaprężeń wstępnych  $\sigma_{\mathcal{R}}^a$  wywołanych na skutek różnic sztywności obu faz.



W przypadku sprężania zewnętrznego (1.21) należy przyjąć (por. (2.6)):

$$(2.10) \quad \dot{\epsilon}^s = \dot{\epsilon}_{\mathcal{G}}^s, \quad \dot{\epsilon}^a = \dot{\epsilon}_{\mathcal{G}}^a, \quad \dot{\sigma}^s = \dot{\sigma}_{\mathcal{G}}^s, \quad \dot{\sigma}^a = \dot{\sigma}_{\mathcal{G}}^a,$$

co prowadzi do rozwiązania w postaci:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \epsilon &= \mathbf{A}^s \dot{\epsilon}_{\mathcal{G}}^s = \dot{\epsilon}_{\mathcal{G}}^s + \mathbf{A}^s \mathbf{A}^a \dot{\epsilon}_{\mathcal{G}}^a, \\ \sigma^s &= 0, \\ \sigma^a &= -\mathbf{B}^s \dot{\epsilon}_{\mathcal{G}}^a = -\dot{\sigma}_{\mathcal{G}}^a - \mathbf{B}^s \mathbf{B}^a \dot{\sigma}_{\mathcal{G}}^s \end{aligned}$$

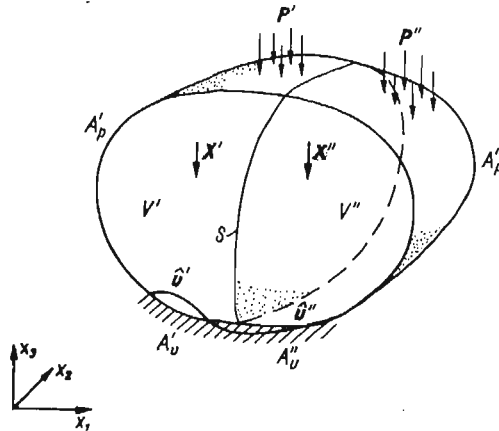
gubiącej w stosunku do rozwiązań (2.6)÷(2.9) makronapężenia wstępne  $\sigma^s$ , charakterystyczne dla sprężania wewnętrznego.

Związki (2.11) pozwalają określić jednoznacznie stany wstępne w obu fazach.

Cechą charakterystyczną sprężania zewnętrznego ośrodka o dwu przenikających się fazach jest możliwość lokalnego sterowania stanów naprężeń w jednej z faz (w fazie sprężanej I) przez wymuszanie odpowiednich mikronaprężeń  $\sigma^s$ . Wprowadzane w tym celu dystorsje  $\dot{\epsilon}_{\mathcal{G}}^a$  (realizowane np. przez sprężającą fazę siatki kratowej II) nie mają wpływu na stan makronaprężeń  $\sigma^s$ .

### 3. Sprężanie powierzchniowe

W poprzednich rozważaniach zakładaliśmy, że mamy do czynienia z rozmytym kompozytem, którego obie fazy oddziałują na siebie w całym obszarze  $V$ . Można jednak uogólnić rozważania na przypadki, w których obszar wzajemnego kontaktu obu faz jest podobszarem  $V$ . Zajmijmy się jednym z takich przypadków, gdy obie fazy oddziałują na siebie wzdłuż pewnej powierzchni kontaktowej  $S$ .



Rys. 2

Przyjmijmy, że obszar rozpatrywanego ciała składa się z dwu podobszarów  $V'$  i  $V''$  (rys. 2). Faza I wypełnia obszar  $V'$  zaś faza II wypełnia obszar  $V''$ . Powierzchnia  $S$  jest powierzchnią rozdziału obu faz, a zatem jedynym obszarem wzajemnego ich kontaktu.

Niech powierzchnie brzegowe  $S'$ ,  $S''$  obu faz doznają pierwotnych zmian kształtu opisanych jako niezależne przemieszczenia pierwotne  $u'$ ,  $u''$ . Jeśli pomimo niezgodności

zdeformowanych pierwotnie brzegów wymusimy ich zgodne zespolenie, to wywołane zostaną w obu fazach wstępne stany odkształcenia  $\epsilon^R, \epsilon^{R'}$  i naprężenia  $\sigma^R, \sigma^{R'}$ . Wywołane pole przemieszczeń wstępnych  $\mathbf{u}^R$  jest polem ciągłym w całym obszarze  $V$ , natomiast pola odkształceń i naprężeń wstępnych są ciągłe w podobzarach  $V'$  i  $V''$ , jednak ich składowe mogą doznawać skoku na powierzchni  $S$ . Opisany sposób wprowadzania stanów wstępnych nazwijmy «sprężaniem powierzchniowym».

W rozważaniach ograniczamy się do rozpatrywania rozwiązań odpowiednio regularnych i zakładamy w związku z tym, że rozpatrywane funkcje są w obszarach  $V'$  i  $V''$  klasy  $C^2$ .

Pierwotne deformacje brzegów  $S'$  i  $S''$  będą zatem występowały w powiązaniu z odpowiednio regularną deformacją poszczególnych faz  $\dot{\epsilon}'$  i  $\dot{\epsilon}''$ .

Zdefiniujemy deformacje pierwotne obu faz jako stany odkształceń wyznaczone jednoznacznie przez związki:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}'(\mathbf{A}'\dot{\epsilon}') &= 0, \\ \mathcal{C}'(\dot{\epsilon}') &= 0; \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}''(\mathbf{A}''\dot{\epsilon}'') &= 0, \\ \mathcal{C}''(\dot{\epsilon}'') &= 0, \end{aligned}$$

wszędzie poza  $S$  oraz przez warunki zgodności  $\dot{\epsilon}'$  i  $\dot{\epsilon}''$  odpowiednio z przemieszczeniami  $\dot{\mathbf{u}}'$  i  $\dot{\mathbf{u}}''$  na powierzchni  $S$ .

Ponieważ deformacje pierwotne spełniają więzy geometryczne obu faz, sprężanie powierzchniowe jest przypadkiem szczególnym sprężania zewnętrznego, w którym obszar kontaktu obu faz ograniczony jest do powierzchni  $S$ .

Zdefiniujemy obciążenia pierwotne brzegów  $S', S''$ :

$$(3.3) \quad \dot{\mathbf{p}}' = \mathbf{A}'\dot{\epsilon}'\mathbf{n}', \quad \dot{\mathbf{p}}'' = \mathbf{A}''\dot{\epsilon}''\mathbf{n}''.$$

Związki (3.1), (3.3)<sub>1</sub> oraz (3.3)<sub>2</sub> przyporządkowują jednoznacznie funkcjom przemieszczeń pierwotnych  $\dot{\mathbf{u}}', \mathbf{u}'$  na  $S$  funkcje obciążeń pierwotnych na  $S$ , definiując nam w tym sensie powierzchniowe operatory konstytutywne  $\mathcal{A}'$  i  $\mathcal{A}''$ :

$$(3.4) \quad \dot{\mathbf{p}}' = \mathcal{A}'(\dot{\mathbf{u}}'), \quad \dot{\mathbf{p}}'' = \mathcal{A}''(\dot{\mathbf{u}}'').$$

Przyjmując  $\dot{\mathbf{p}}', \dot{\mathbf{p}}''$  jako funkcje określone na  $S$ , wyznaczyć można ze związków (3.1)<sub>1,2</sub>, (3.3)<sub>1</sub> oraz (3.2)<sub>1,2</sub> (3.3)<sub>2</sub> jednoznacznie określone pola  $\dot{\epsilon}'$  w  $V'$  i  $\dot{\epsilon}''$  w  $V''$ . Związki (3.1)<sub>3,4</sub> (3.2)<sub>3,4</sub> pozwalają wtedy określić z dokładnością do ruchów sztywnych przemieszczenia pierwotne  $\dot{\mathbf{u}}', \dot{\mathbf{u}}''$  przyporządkowane jednoznacznie obciążeniom  $\dot{\mathbf{p}}', \dot{\mathbf{p}}''$ .

Związki (3.1), (3.2), (3.3) definiują nam w tym sensie odwrotne powierzchniowe operatory konstytutywne  $\mathcal{B}'$  i  $\mathcal{B}''$ :

$$(3.5) \quad \dot{\mathbf{u}}' = \mathcal{B}'(\dot{\mathbf{p}}'), \quad \dot{\mathbf{u}}'' = \mathcal{B}''(\dot{\mathbf{p}}'').$$

Dysponując zdefiniowanymi operatorami konstytutywnymi, można sprowadzić analizę sprężania powierzchniowego do analizy wstępnych pól przemieszczeń  $\mathbf{u}^R$  i obciążeń  $\mathbf{p}^R, \mathbf{p}^{R'}$  wywołanych na powierzchni  $S$  przez stany pierwotne  $\dot{\mathbf{u}}', \dot{\mathbf{u}}''$  lub  $\dot{\mathbf{p}}', \dot{\mathbf{p}}''$ .

Postępując analogicznie, jak w rozdz. 1, otrzymujemy zmodyfikowane związki konstytutywne stanów wstępnych:

$$(3.6) \quad \mathbf{p}^R = \mathcal{A}'(\mathbf{u}^R - \dot{\mathbf{u}}'), \quad \mathbf{p}^{R'} = \mathcal{A}''(\mathbf{u}^{R'} - \dot{\mathbf{u}}'');$$

$$(3.7) \quad \mathbf{u}^R = \mathcal{B}'(\mathbf{p}^R + \dot{\mathbf{p}}'), \quad \mathbf{u}^{R'} = \mathcal{B}''(\mathbf{p}^{R'} + \dot{\mathbf{p}}'').$$

Na wstępne stany obciążeń narzucone są więzy statyczne w postaci równań równowagi na powierzchni  $S$

$$(3.8) \quad \mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = 0,$$

zaś na wstępne stany przemieszczeń narzucone są więzy geometryczne w postaci warunku nierozdzielności faz wzdłuż  $S$

$$(3.9) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}'' = \mathbf{u}.$$

Przeprowadzając konstrukcję rozwiązań zagadnienia (3.6) ÷ (3.9) wyznaczających stany wstępne, analogiczną do konstrukcji opisanej w rozdz. 2 otrzymujemy

$$(3.10) \quad \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}}^s + \mathcal{A}^{s_0^{-1}} \mathcal{A}^a(\dot{\mathbf{u}}^a)$$

lub

$$(3.11) \quad \mathbf{u} = \mathcal{A}^{s^{-1}}(\dot{\mathbf{p}}^s).$$

W związkach tych  $\mathcal{A}^{s^{-1}}$  oznacza operator odwrotny do  $\mathcal{A}^s$ , zaś  $\mathcal{A}^{s_0^{-1}} \mathcal{A}^a$  oznacza superpozycję operatorów.

Opis wstępnych stanów obciążeń przybiera postać:

$$(3.12) \quad \mathbf{p}^s = 0, \quad \mathbf{p}^a = -\mathbf{p}^a - \mathcal{B}^{s_0^{-1}} \mathcal{B}^a(\dot{\mathbf{p}}^s)$$

lub

$$(3.13) \quad \mathbf{p}^s = 0, \quad \mathbf{p}^a = -\mathcal{B}^s(\dot{\mathbf{u}}^a).$$

Związki (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) opisują jednoznacznie wstępne stany przemieszczeń i obciążeń obu faz na powierzchni  $S$ .

#### 4. Optymalna regulacja końcowego stanu naprężenia w jednej z faz

Zajmijmy się, na zakończenie, zagadnieniem sprężania zewnętrznego ze względu na minimalizację wyteżenia w jednej z faz (w fazie sprężanej — np. w fazie I). Faza II spełnia w tym przypadku rolę fazy sprężającej. Końcowe stany w niej wywołane mogą okazać się niekorzystne, czym płacimy za optymalną regulację stanów w fazie I.

**4.1. Sprężanie zewnętrzne w ośrodku o dwu przenikających się fazach.** Rozważmy na wstępie możliwości wywołania w fazie I dowolnych stanów wstępnych.

Z równań (2.11) wynika, że możliwe jest jednoczesne wywołanie w fazie I dowolnie ustalonych, niezależnych od siebie stanów wstępnego odkształcenia  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'$  i naprężenia  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'_\varphi$ . Należy w tym celu wprowadzić do ustroju stany pierwotnych odkształceń opisane związkami:

$$(4.1) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' + \mathbf{A}^s \mathbf{A}^a \mathbf{B}^s \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_\varphi, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^a = -\mathbf{B}^s \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_\varphi.$$

Związki (4.1) pozwalają określić pierwotne deformacje poszczególnych faz. Jeżeli przyjmiemy, że stany pierwotne wywołane są jedynie w fazie sprężającej, czyli wprowadzimy ograniczenie:

$$(4.2) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 0,$$

to z rozwiązania (4.1) wynika, że możliwe jest wywołanie dowolnie ustalonego stanu naprężeń wstępnych  $\overset{R}{\sigma}'_0$  w fazie sprężanej przez wymuszenie odkształceń pierwotnych fazy sprężającej

$$(4.3) \quad \dot{\epsilon}'' = 2\mathcal{B}^s \overset{R}{\sigma}'_0.$$

Wynika stąd oczywisty wniosek, że przyjęcie kryterium minimalizacji wyężenia  $J_\sigma$  w fazie I, przy czym

$$(4.4) \quad J_\sigma = \frac{1}{2} \int_V \sigma' \mathbf{B}' \sigma' dv = \frac{1}{2} \int_V (\overset{R}{\sigma}'_0 + \overset{L}{\sigma}') \mathbf{B}' (\overset{R}{\sigma}'_0 + \overset{L}{\sigma}') dv,$$

prowadzi do rozwiązania

$$(4.5) \quad \overset{R}{\sigma}'_0 = -\overset{L}{\sigma}',$$

które związane jest ze znikaniem stanu naprężeń końcowych  $\sigma' = 0$  w fazie sprężanej.

**4.2. Przypadek sprężania powierzchniowego.** Rozważmy możliwość wywołania na powierzchni  $S$  fazy sprężanej I dowolnych stanów wstępnych.

Postępując analogicznie jak w p. 4.1 można wykazać, że dowolnie przyjęte stany  $\overset{R}{u}'$ ,  $\overset{R}{p}'$  wywołać można przez wprowadzenie jednoznacznie określonych stanów przemieszczeń pierwotnych:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{u}' &= \overset{R}{u}' + (\mathcal{A}^{s_0} \mathcal{A}^a - 1) \mathcal{B}^s(\overset{R}{p}'), \\ \dot{u}'' &= \overset{R}{u}' + (\mathcal{A}^{s_0} \mathcal{A}^a + 1) \mathcal{B}^s(\overset{R}{p}'). \end{aligned}$$

lub stanów obciążeń pierwotnych

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{p}' &= (1 - \mathcal{B}^{s_0} \mathcal{B}^a) \mathcal{A}^s(\overset{R}{u}') - \overset{R}{p}', \\ \dot{p}'' &= (1 + \mathcal{B}^{s_0} \mathcal{B}^a) \mathcal{A}^s(\overset{R}{u}') + \overset{R}{p}'. \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że stany pierwotne wywoływane są jedynie w fazie sprężającej

$$(4.8) \quad \dot{u}' = 0, \quad \dot{p}' = 0,$$

to rozwiązania (4.6) lub (4.7) określają jednoznacznie stany pierwotne na powierzchni  $S$  fazy II

$$(4.9) \quad \dot{p}'' = 2\mathcal{A}^s(\overset{R}{u}')$$

lub

$$(4.10) \quad \dot{u}'' = 2\mathcal{B}^s(\overset{R}{p}'),$$

które wzbudzają stany wstępne  $\overset{R}{u}'$  lub  $\overset{R}{p}'$ .

Ze względu na możliwość wywołania (w ogólnym przypadku) dowolnych, niezależnych od siebie stanów wstępnych  $\overset{R}{u}'$ ,  $\overset{R}{p}'$ , zagadnienia optymalnej regulacji stanów końcowych:  $\epsilon' = \overset{R}{\epsilon}' + \overset{L}{\epsilon}'$ ,  $\sigma' = \overset{R}{\sigma}' + \overset{L}{\sigma}'$  ze względu na kryterium (4.4) można rozpatrywać, przy ustalonych stanach użytkowych  $\overset{L}{\epsilon}'$ ,  $\overset{L}{\sigma}'$ , jako poszukiwanie optymalnych warunków brzegowych  $\overset{R}{u}'$ ,  $\overset{R}{p}'$  na powierzchni  $S$  ograniczającej  $V$ . Po wyznaczeniu stanów  $\overset{R}{u}'$ ,  $\overset{R}{p}'$  na  $S$ , gwarantujących

optymalne rozkłady  $\sigma'$ ,  $\epsilon'$  w  $V'$ , można określić ze związków (4.6) (4.7) stany pierwotne, wywołujące pożądaną regulację stanów końcowych.

Zagadnienie minimalizacji globalnego wyteżenia w fazie I jest w tym przypadku równoważne minimalizacji globalnej energii wewnętrznej  $J_{E'}$  fazy I:

$$(4.11) \quad J_{E'} = \frac{1}{2} \int_{V'} \sigma' \epsilon' dv.$$

W celu poszukiwania optymalnych warunków brzegowych na  $S$  rozważmy możliwość rozkładu stanów końcowych  $\sigma'$ ,  $\epsilon'$  w fazie I na dwie ortogonalne części składowe, z których jedna podlega regulacji przez sprężanie powierzchniowe, a druga nie:

$$(4.12) \quad \sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2, \quad \epsilon' = \epsilon'_1 + \epsilon'_2.$$

Dla skonstruowania postulowanych rozkładów przyjmijmy z definicji pomocnicze stany  $\epsilon'_p$ ,  $\sigma'_p = \mathbf{A}'\epsilon'_p$  jako stany wywołane siłowym obciążeniem zewnętrznym działającym na fazę I przy warunku pełnego utwierdzenia brzegu  $S$ . Opisane są one zależnościami:

$$(4.13) \quad \mathcal{R}'(\sigma'_p, \mathbf{X}', \mathbf{p}') = 0, \quad \mathcal{G}'(\epsilon'_p) = 0$$

oraz warunkiem zgodności pola  $\epsilon'_p$  ze znikającymi przemieszczeniami na  $S$ .

Zdefiniujmy analogicznie stany  $\epsilon'_u$ ,  $\sigma'_u = \mathbf{A}'\epsilon'_u$  jako stany wywołane przemieszczeniami  $\hat{u}'$  brzegu  $\mathbf{A}'_u$ , przy warunku swobodnego brzegu  $S$ . Opisane są one zależnościami:

$$(4.14) \quad \mathcal{R}'(\sigma'_u) = 0 \quad \mathcal{G}'(\epsilon'_u, \hat{u}') = 0 \quad \sigma'_u \mathbf{n}' = 0 \quad \text{na } S.$$

Niech części rozkładu stanów użytkowych  $\epsilon'_1$ ,  $\sigma'_1 = \mathbf{A}'\epsilon'_1$  stanowią sumę określonych wyżej stanów:

$$(4.15) \quad \epsilon'_1 \stackrel{\text{df}}{=} \epsilon'_p + \epsilon'_u, \quad \sigma'_1 \stackrel{\text{df}}{=} \sigma'_p + \sigma'_u.$$

Ze względu na jednoznaczność rozwiązań zagadnień brzegowych (4.13), (4.14) teorii sprężystości, stany  $\epsilon'_1$ ,  $\sigma'_1$  określone są jednoznacznie.

Można zatem dokonać w sposób jednoznaczny rozkładu stanów  $\epsilon'$ ,  $\sigma'$  na części składowe (4.12), przy czym części  $\epsilon'_2$ ,  $\sigma'_2$  stanowią różnicę pól całkowitych i pól (4.15):

$$(4.16) \quad \epsilon'_2 \stackrel{\text{df}}{=} \epsilon' - \epsilon'_1, \quad \sigma'_2 \stackrel{\text{df}}{=} \sigma' - \sigma'_1.$$

Są to składowe wywołane oddziaływaniem fazy II poprzez powierzchnię  $S$  na fazę I, które spełniają jednorodne równania więzów w obszarze  $V'$ :

$$(4.17) \quad \mathcal{R}'(\sigma'_2) = 0, \quad \mathcal{G}'(\epsilon'_2) = 0.$$

Można pokazać, że pola  $\sigma'_1$ ,  $\epsilon'_1$  oraz  $\sigma'_2$ ,  $\epsilon'_2$  są ortogonalne w sensie ich iloczynu skalarnego

$$(4.18) \quad \int_{V'} \sigma'_1 \epsilon'_2 dv = \int_{V'} \sigma'_2 \epsilon'_1 dv = 0.$$

Pozwala to przedstawić funkcjonal energii wewnętrznej (4.11) w postaci

$$(4.19) \quad I_{E'} = \frac{1}{2} \int_{V'} (\sigma'_1 \epsilon'_1 + \sigma'_2 \epsilon'_2) dv.$$

Można pokazać, że ze względu na dodatnią określoność obu składników podcałkowych oraz na fakt, że dowolne stany wstępne wywołane w obszarze  $V'$  spełniają warunki

(4.17), czyli są ortogonalne do stanów  $\sigma'_1, \epsilon'_1$  wynika, że kryterium (4.11) prowadzi do wyznaczenia stanów wstępnych:

$$(4.20) \quad \overset{R}{\epsilon}' = -\overset{L}{\epsilon}'_2, \quad \overset{R}{\sigma}' = -\overset{L}{\sigma}'_2$$

powodujących znikanie części  $\epsilon'_2 = \overset{L}{\epsilon}'_2 + \overset{R}{\epsilon}'$ ,  $\sigma'_2 = \overset{L}{\sigma}'_2 + \overset{R}{\sigma}'$  stanów końcowych.

Wyrażając wniosek (4.20) w języku wielkości powierzchniowych na  $S$  otrzymujemy:

$$(4.21) \quad \overset{R}{u}' = -\overset{L}{u}'_2, \quad \overset{R}{p}' = -\overset{L}{p}'_2.$$

Można pokazać, że rozwiązanie optymalne (4.21) wymuszane jest bez udziału stanów pierwotnych fazy I:

$$(4.22) \quad \dot{u}' = 0, \quad \dot{p}' = 0.$$

Zatem korzystając z rozwiązań (4.9) lub (4.10) oraz ze związków (4.21) otrzymujemy optymalne rozkłady pierwotnych przemieszczeń lub obciążeń na brzegu  $S$  fazy II:

$$(4.23) \quad \dot{u}' = -2\mathcal{B}^S(\overset{L}{p}'_2), \quad \dot{p}' = -2\mathcal{A}^S(\overset{L}{u}'_2)$$

wywołujących identyczne efekty. W wyniku sprężenia w fazie I pozostają stany końcowe  $\sigma' = \overset{L}{\sigma}'_1, \epsilon' = \overset{L}{\epsilon}'_1$ , charakteryzujące się, jak to wynika z definicji (4.13)÷(4.15) tym, że obciążenie brzegowe na powierzchni  $S$ :  $p' = \sigma'n'$  jest takie, jakie wywołane byłoby przez zewnętrzne obciążenia siłowe  $X', p'$  fazy I przy pełnym utwierdzeniu brzegu  $S$ , zaś przemieszczenia  $u'$  powierzchni  $S$  są takie, jakie wywołane byłyby przez ruchy  $\hat{u}'$  powierzchni  $A'_u$  przy warunku swobodnego brzegu  $S$ .

W przypadku, gdy nie występują przemieszczenia  $\hat{u}'$  na brzegu  $A'_u$  stany  $\overset{L}{\sigma}'_u, \overset{L}{\epsilon}'_u$  wyznaczone przez (4.14) znikają i sprężenie optymalne daje w fazie I efekt końcowy identyczny z przyjęciem warunku pełnego utwierdzenia  $u' = 0$  na powierzchni  $S$ .

W przypadku, gdy nie występują siłowe obciążenia zewnętrzne w fazie I ( $X' = 0, p' = 0$ ), stany  $\overset{L}{\sigma}'_p, \overset{L}{\epsilon}'_p$ , wyznaczone przez (4.13) znikają i sprężenie optymalne daje w fazie I efekt końcowy identyczny z przyjęciem warunku brzegu swobodnego  $\sigma'n' = 0$  na powierzchni  $S$ .

W przypadku, gdy znikają wszystkie obciążenia zewnętrzne fazy I (siłowe  $X = 0, p' = 0$  oraz przemieszczeniowe  $\hat{u}' = 0$ ) to otrzymujemy w wyniku sprężenia optymalnego trywialne rozwiązanie  $\overset{R}{p}' = 0, \overset{R}{u}' = 0$  stowarzyszone ze znikaniem stanów końcowych  $\sigma' = 0, \epsilon' = 0$  w fazie I. Całe obciążenie zewnętrzne przenoszone jest wtedy przez fazę II.

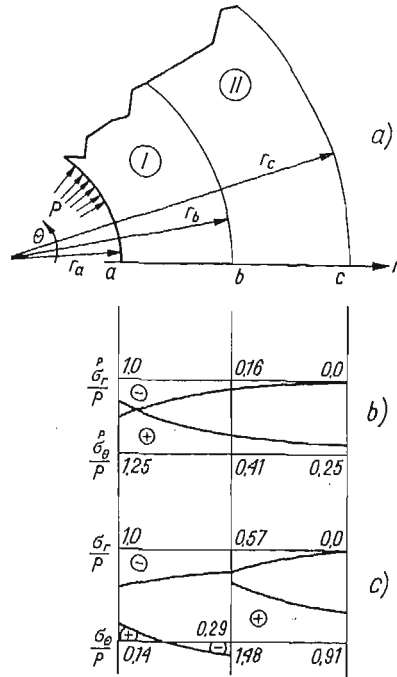
Jako szczególny przypadek sprężania powierzchniowego traktować można sprężanie wywoływane przemieszczeniami pierwotnymi  $\dot{u}$  wymuszonymi na części brzegu ustroju  $A_u$  (por. [10]).

Traktując brzeg  $A_u$  jako powierzchnię  $S$  kontaktu faz zauważamy, że stany  $\overset{L}{\sigma}'_u, \overset{L}{\epsilon}'_u$  definiowane związkami (4.14) nie istnieją w tym przypadku. Wynika stąd wniosek, że sprężanie ze względu na minimalizację energii wewnętrznej ustroju prowadzi do uzyskania efektu pełnego utwierdzenia  $u = 0$  na brzegu  $A_u$  w stanie końcowym. Jest to zbieżne z wnioskiem o ortogonalności części stanów użytkowych wywołanych obciążeniem siłowym oraz przemieszczeniami podpór. Optymalne sprężanie ruchami podpór redukuje do zera drugą z wymienionych części stanów użytkowych.

## 5. Przykład sprężania powierzchniowego

O ile rozwiązanie zagadnienia optymalnego sprężania (4.3), (4.5) dla ośrodka o dwu przenikających się fazach jest intuicyjnie oczywiste, o tyle celowe jest zilustrowanie przykładem rozwiązania zagadnienia sprężania powierzchniowego (4.23), (4.21).

Rozważmy przykład rury ciśnieniowej dwuwarstwowej poddanej ciśnieniu wewnętrznemu  $p$  (rys. 3a). Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w rurze niesprężonej [8] pokazany został na rys. 3b. Stosując sprężanie powierzchniowe polegające na odpowiednim wpsowaniu rozszerzonej względem stanu naturalnego (np. przez ogrzanie) rury zewnętrznej na nienapężoną rurę wewnętrzną, uzyskajmy efekt minimalizacji energii sprężystej (wytężenia) zmagazynowanej w fazie I.



Rys. 3

Stan naprężeń dla rury niesprężonej opisany jest związkami Lamégo:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{pa^2}{c^2 - a^2} - \frac{pa^2c^2}{r^2(c^2 - a^2)}, \\ \sigma_\theta &= \frac{pa^2}{c^2 - a^2} + \frac{pa^2c^2}{r^2(c^2 - a^2)}. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia rozwiązania optymalnego sprężania (4.23)<sub>1</sub> należy skonstruować powierzchniowy funkcjonal konstytutywny  $\mathcal{B}^s$ .

Wyznamy w tym celu, dla samej rury wewnętrznej, przemieszczenia  $u'$  na powierzchni rozdzielającej fazy ( $r = b$ ) wywołane obciążeniem zewnętrznym  $p'$  działającym na tę powierzchnię, przy warunku swobodnego brzegu wewnętrznego ( $r = a$ ). Dostosowując

rozwiązanie (5.1) do opisu stanu naprężeń w pierścieniu wewnętrznym oraz wykorzystując związki

$$(5.2) \quad \frac{u'}{r} = \frac{1}{E'} (\sigma'_\theta - \nu' \sigma'_r)$$

otrzymujemy

$$(5.3) \quad u' = \frac{b}{E'} \frac{(1-\nu')b^2 + (1+\nu')a^2}{b^2 - a^2} p'.$$

Analogicznie wyznaczyć można, dla samej rury zewnętrznej, przemieszczenia  $u''$  na powierzchni rozdzielającej fazy wywołane obciążeniem zewnętrznym  $p''$  działającym na tę powierzchnię, przy warunku swobodnego brzegu zewnętrznego ( $r = c$ )

$$(5.4) \quad u'' = \frac{b}{E''} \frac{(1-\nu'')b^2 + (1+\nu'')c^2}{c^2 - b^2} p''.$$

Związki (5.3) i (5.4) definiują liniowe, powierzchniowe funkcjonały konstytutywne  $\mathcal{B}'$  i  $\mathcal{B}''$  dla każdej z faz. Konstruując symetryczny konstytutywny funkcjonał powierzchniowy  $\mathcal{B}^s$  otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia optymalnego sprężania (4.23)<sub>1</sub> w postaci

$$(5.5) \quad \dot{u}'' = -b \left[ \frac{(1-\nu')b^2 + (1+\nu')a^2}{E'(b^2 - a^2)} + \frac{(1-\nu'')b^2 + (1+\nu'')c^2}{E''(c^2 - b^2)} \right] p_2^L,$$

gdzie  $p_2^L$  jest, zgodnie z definicją (4.16)<sub>2</sub>, różnicą pomiędzy oddziaływaniem rury zewnętrznej na wewnętrzną w stanie użytkowym a oddziaływaniem sztywnego podłoża na brzeg zewnętrzny ( $r = b$ ) rury wewnętrznej obciążonej ciśnieniem  $p$  (na brzegu  $r = a$ )

$$(5.6) \quad p_2^L = p' - p_1^L = - \frac{a^2(c^2 - b^2)}{b^2(c^2 - a^2)} + \frac{2a^2p}{(1-\nu')b^2 + (1+\nu')a^2}.$$

W przypadku, gdy materiał obu faz jest jednorodny, otrzymujemy z (5.5) i (5.6) wartość

$$(5.7) \quad \dot{u}'' = - \frac{2pa^2b}{E(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{2b^2(c^2 - a^2)}{(c^2 - b^2)[(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2]} - 1 \right\},$$

o którą należy zmniejszyć promień wewnętrznej powierzchni brzegowej ( $r = b$ ) rury zewnętrznej (w jej stanie naturalnym), aby po wciśnięciu jej na rurę wewnętrzną otrzymać efekt optymalnego sprężenia.

Wykorzystując znajomość pola przemieszczeń w stanie użytkowym oraz fakt, że punkty powierzchni rozdzielającej obie fazy ( $r = b$ ) nie ulegają, w stanie końcowym, przemieszczeniom (por. wnioski po rozwiązaniu (4.23)), można wyznaczyć obciążenia brzegów ( $r = b$ ) obu faz w stanie wstępnym

$$(5.8) \quad p^R = -p^{R'} = - \frac{(b^2 - a^2)[(1-\nu)b^2 + (1+\nu)c^2]}{(c^2 - cb^2)[(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2]} p.$$

Znajomość obciążeń wstępnych (5.8) pozwala wyznaczyć wstępne stany naprężenia, a następnie, po dodaniu rozwiązania (5.1), stany końcowe. Na rys. 3c pokazano efekt redystrybucji stanu naprężeń wywołanej sprężeniem optymalnym (w przypadku  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ) i związanej z ok. 24%-owym odciążeniem rury wewnętrznej (mierzone globalnym wyężeniem całej fazy I).



## Literatura cytowana w tekście

1. L. D. HOFMEISTER, L. P. FELTON, *Prestressing in structural synthesis*, AIAA Journal, 2, 8, (1970).
2. L. P. FELTON, *On optimum design of prestressed beam structures*, AIAA Journal, 3, 14 (1976).
3. J. E. TAYLOR, *Optimal prestress against buckling. An energy approach*, Int. J. Solid. Struct., 2, 7 (1971).
4. Z. MRÓZ, J. E. TAYLOR, *Prestress for maximum strength*, Int. J. Solid Struct., 9 (1973) 1535 - 1541.
5. J. C. NAGTEGAAL, *On optimal design of prestressed elastic structures*, Int. J. Mech. Sci., 14 (1972) 779 - 871.
6. J. HOLNICKI-SZULC, *Theory of prestressing I*, Bull. Acad. Pol. Sci. Techn., 1, 24 (1976).
7. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, §§ 4, 8, PWN, Warszawa 1970.
8. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, § 14. McGraw-Hill, 1951.
9. E. KRÖNER, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Ergeb. angew. Math., 5 (1958).
10. Z. MRÓZ, G. I. N. ROZVANY, *Optimal design of structures with variable support conditions*, J. Opt. The Appl., 1, 15 (1975).

## Резюме

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В ДВУХФАЗОВЫХ СРЕДАХ

В работе проведен анализ состояний предварительного напряжения и деформации, вызванных в упругой двухфазовой среде путем введения в обеих фазах независимых, произвольных, неподчиняющихся ни статическим ни геометрическим связям полей дисторсий. Сущностью внешнего сжатия является введение таких полей дисторсий в обеих фазах, чтобы поля предварительных напряжений и деформаций, возбужденные в одной из фаз (в сжимаемой фазе), выгодным образом регулировали в ней окончательное распределение напряжений и деформаций. Эти состояния являются суммой соответствующих предварительных состояний и состояний вызванных нагрузкой. Вторая фаза выполняет роль сжимающей фазы.

Решены некоторые задачи оптимального регулирования окончательных состояний напряжений и деформаций.

## Summary

## ON THE PRESTRESSING IN DIPHASE MEDIA

We analyze initial states of stress and deformation produced in an elastic diphase medium by forcing independent, arbitrary distortion fields, which do not necessarily fulfil the static or geometric constraints in both phases. External prestressing consists mainly in introducing the both phases such distortion fields that the fields of initial stress and deformation induced in one (prestressed) phase cause a desirable adjustment of the distribution of the final states of stress and deformation in this phase. These states are a sum of the corresponding initial states and states caused by external load. The other phase plays a role of the prestressing one. Some examples of an optimal control of the final states of stresses in the prestressed phase are discussed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN  
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 stycznia 1977 r.

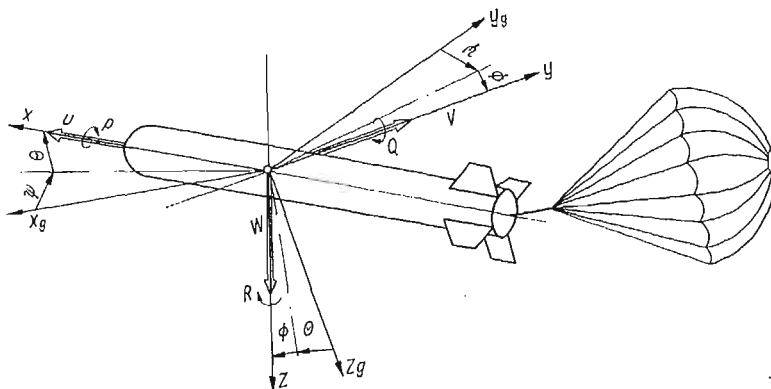


## WPLYW SPADOCHRONU NA RUCH ZASOBNIKA OSIOWO SYMETRYCZNEGO ZRZUCANEGO Z SAMOLOTU

JERZY MARYNIAK, KAZIMIERZ MICHALEWICZ, ZYGMUNT WINCZURA  
(WARSZAWA)

### 1. Wstęp

W pracy zbadano wpływ spadochronu hamującego i silnika przyspieszającego na parametry lotu zasobnika zrzuconego z samolotu. Zasobnik traktowano jako układ mechaniczny sztywny, na który działają siły zewnętrzne [2, 16, 18, 22, 26], między innymi siła hamująca spadochronu i ciąg silnika raketowego [23, 25]. Przyjęto założenie, że spadochron ustawiał się równoległe do kierunku wektora prędkości układu, a więc nie uwzględniono kąta natarcia i ślizgu spadochronu.



Rys. 1

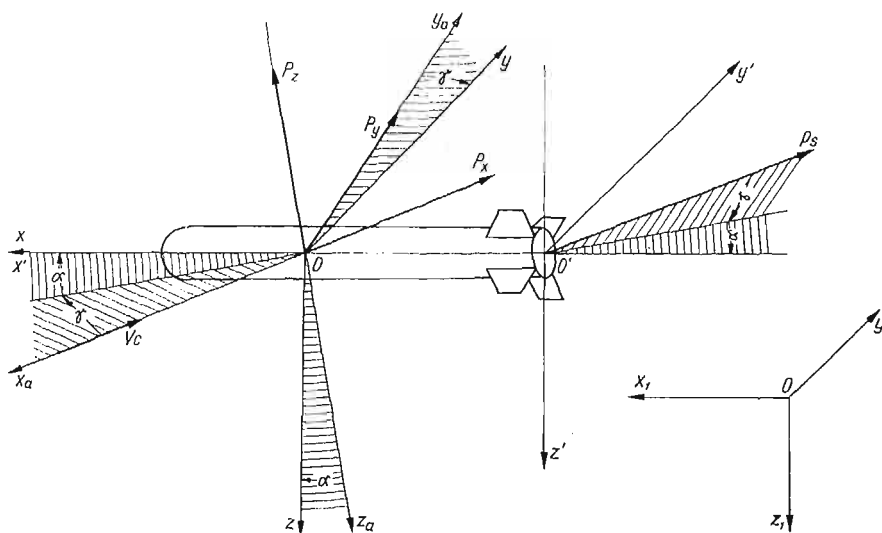
Równania ruchu wyprowadzono stosując podstawowe zasady dynamiki Newtona dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych w układzie współrzędnych związanych z zasobnikiem [3, 4, 5, 9]. Uwzględniono pięć stopni zasobnika sztywnego: trzy określające położenie środka masy oraz pochylenie  $\theta$  i odchylenie  $\Psi$ .

Przykładowe obliczenia numeryczne wykonano w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych według własnych programów. Wyprowadzone w niniejszej pracy równania ruchu są uniwersalne i można je bezpośrednio zastosować do opisu ruchu dowolnych nieodkształcalnych obiektów swobodnych w przyjętych układach odniesienia (rys. 1).

## 2. Przyjęte układy współrzędnych

Do opisu dynamiki zasobnika, traktowanego jako obiekt swobodny, niezbędne oraz bardzo wygodne jest przyjęcie następujących układów odniesienia:

- grawitacyjnego związanego z Ziemią  $0x_1y_1z_1$ ,
- prędkościowego związanego z przepływem  $0x_ay_az_a$ ,
- związanego sztywno z obiektem  $0xyz$ ,
- grawitacyjnego  $0x_θy_θz_θ$ , związanego ze środkiem masy poruszającego się obiektu równoległego do układu nieruchomego  $0x_1y_1z_1$ .



Rys. 2.

Ruch zasobnika został opisany w centralnym układzie współrzędnych  $0xyz$  sztywno związanych z obiektem (rys. 2). Chwilowe położenie zasobnika jako ciała sztywnego wyznaczano przez:

— położenie środka masy  $\bar{r}_1(x_1y_1z_1)$  mierzone względem nieruchomego układu współrzędnych  $0x_1y_1z_1$ ,

— quasi-eulerowskimi kątami obrotu zasobnika  $\Phi, \theta, \Psi$  określającego położenie układu związanego z bryłą  $0xyz$  względem grawitacyjnego układu związanego ze środkiem masy poruszającego się obiektu  $0x_θy_θz_θ$ .

Składowe wektorów chwilowych prędkości liniowej i kątowej w przyjętym układzie współrzędnych (rys. 1) są następujące:

wektor prędkości liniowej

$$(1) \quad \bar{V}_c = U\bar{i} + V\bar{j} + W\bar{k},$$

gdzie  $U$  oznacza prędkość podłużną,  $V$  prędkość boczną,  $W$  prędkość przemieszczeń pionowych;

wektor prędkości kątowej

$$(2) \quad \bar{\Omega} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k},$$

przy czym  $P$  jest kątową prędkością przechylenia,  $Q$  kątową prędkością pochylenia,  $R$  kątową prędkością odchylenia.

Prędkości kątowe  $P, Q, R$  są liniowymi związkami prędkości uogólnionych  $\Phi', \theta', \Psi'$  o współczynnikach zależnych od współrzędnych uogólnionych  $\Phi, \theta, \Psi$  i posiadają następującą postać:

$$(3) \quad \text{col}[P, Q, R] = \Lambda_{\Omega} \text{col}[\Phi', \theta', \Psi'],$$

gdzie  $\Lambda_{\Omega}$  jest macierzą transformacji [9, 10].

Związki kinematyczne między prędkościami liniowymi  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$  mierzonymi w układzie nieruchomym  $0x_1, y_1, z_1$ , a składowymi prędkościami  $U, V, W$  są następujące:

$$(4) \quad \text{col}[U, V, W] = \Lambda_{\bar{V}}^{-1} \text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1],$$

przy czym  $\Lambda_{\bar{V}}^{-1}$  jest macierzą transformacji [9, 10].

Związki (3) i (4) wyznaczają zależności kinematyczne, między prędkościami  $U, V, W, P, Q, R$  a prędkościami uogólnionymi  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \Phi', \theta', \Psi'$ .

### 3. Dynamiczne równania ruchu obiektu

Składowe wektorów sił zewnętrznych i momentów sił zewnętrznych działających na zasobnik, w przyjętym układzie współrzędnych są następujące (rys. 2):

— wektor sił zewnętrznych

$$(5) \quad \bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

gdzie  $X$  oznacza siłę podłużną,  $Y$  siłę boczną,  $Z$  siłę pionową;

— wektor momentu głównego

$$(6) \quad \bar{M} = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k},$$

przy czym  $L$  jest momentem przechylającym,  $M$  momentem pochyłającym,  $N$  momentem odchyłającym.

Siły i momenty sił zewnętrznych są funkcjami zmiennych opisujących ruch i położenie ciała:  $U, V, W, P, Q, R, \Phi, \theta, \Psi$  [3, 4, 9, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 28].

Składowe sił i momentów działających na obiekt są składowymi:

— siły grawitacyjnej

$$(7) \quad m\bar{g} = \Lambda_g mg,$$

— sił i momentów aerodynamicznych — wyprowadzono przy uwzględnieniu stacjonarnej aerodynamiki, przy czym linearyzację sił i momentów przeprowadzono wg metody Bryana [3, 4, 9, 27],

— ciągu silnika raketowego  $T_p$ ,

— oporu spadochronu hamującego

$$(8) \quad P_s = \frac{1}{2} \rho S V_c^2 C_{xs}.$$

Analizowany w niniejszej pracy obiekt ruchomy traktowano w rozważaniach ogólnych jako nieodkształcalny obiekt swobodny [9]. Mianem takim można nazwać dowolny obiekt rzeczywisty, którego badanie własności dynamicznych nie wymaga uwzględnienia odkształcalności ciała, względnych wychyleń jego elementów jak również więzów.

Badając ruch rzeczywistego obiektu, którym jest rozpatrywany zasobnik wprowadza się następujące założenia:

— układ współrzędnych  $Oxyz$  związany jest z poruszającym się obiektem i jego początek pokrywa się ze środkiem masy ciała;

— na poruszający się obiekt działają siły ciężkości, aerodynamiczne i napędu raketowego.

Równania ruchu obiektu wyprowadzono w oparciu o podstawowe równania dynamiki [9] słuszne dla układów inercjalnych, które dla ciała o stałej masie  $m = \text{const}$  mają postać

$$(9) \quad m \left( \frac{\delta \bar{V}_c}{\delta t} + \bar{\Omega} \times \bar{V}_c \right) = \bar{F},$$

$$(10) \quad \frac{\delta \bar{K}_c}{\delta t} + \bar{\Omega} \times \bar{K}_c = \bar{M}.$$

Stosując przekształcenia [9, 10, 11, 12, 14] oraz rzutując wektorowe równania ruchu (9), (10) na osie układu współrzędnych, otrzymano dynamiczne równania ruchu postępowego i obrotowego w postaci skalarnej, które dla rozpatrywanego obiektu przy założeniu  $P = \Phi = L = 0$  mają następującą postać:

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= RV - QW - g \sin \Theta + \frac{1}{m} (X_0 + X_w W + X_q Q + T_p + P_{sx}), \\ \frac{dV}{dt} &= RU + \frac{1}{m} [Y_v V + (Y_r + Y_{rs})R + Y_0 + P_{sy}], \\ \frac{dW}{dt} &= QU + g \cos \Theta + \frac{1}{m} [Z_0 + Z_w W + (Z_q + Z_{qs})Q + P_{sz}], \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{I_y} [M_0 + M_w W + (M_q + M_{qs})Q], \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{1}{I_x} [N_0 + N_v V + (N_r + N_{rs})R], \\ \frac{d\theta}{dt} &= Q, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= R \cos^{-1} \Theta, \\ \frac{dx_1}{dt} &= U \cos \Theta \cos \Psi - V \sin \Psi + W \sin \Theta \cos \Psi, \\ \frac{dy_1}{dt} &= U \cos \Theta \sin \Psi + V \cos \Psi + W \sin \Theta \sin \Psi, \\ \frac{dz_1}{dt} &= -U \sin \Theta + W \cos \Theta, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 X_0 &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 (-C_x \cos \alpha \cos \gamma + C_y \sin \gamma + C_z \sin \alpha \cos \gamma), \\
 Y_0 &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 (-C_x \cos \alpha \sin \gamma - C_y \cos \gamma + C_z \sin \alpha \sin \gamma), \\
 Z_0 &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 (-C_x \sin \alpha - C_z \cos \alpha), \\
 M_0 &= \frac{1}{2} \rho S V_c^2 [L_{ch} (C_m \cos \gamma - C_n \sin \alpha \sin \gamma) - l_{sh} C_{xs} \sin \alpha], \\
 N_0 &= -\frac{1}{2} \rho S V_c^2 [L_{ch} C_n \cos \alpha - l_{sh} C_{xs} \cos \alpha \sin \gamma], \\
 P_{sx} &= -\frac{1}{2} \rho S V_c^2 C_{xs} \cos \alpha \cos \gamma, \\
 P_{sy} &= -\frac{1}{2} \rho S V_c^2 C_{xs} \cos \alpha \sin \gamma, \\
 P_{sz} &= -\frac{1}{2} \rho S V_c^2 C_{xs} \sin \alpha,
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

przy czym  $\alpha = \arctg W/U$ ,  $\gamma = \arcsin V/V_c$ ,  $V_c^2 = U^2 + V^2 + W^2$  oraz wprowadzono następujące oznaczenia:  $\rho$  — gęstość powietrza,  $S$  — przekrój poprzeczny korpusu zasobnika,  $L_{ch}$  — długość korpusu zasobnika,  $l_{sh}$  — odległość od  $SC$  zasobnika do węzła zamocowania spadochronu,  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ,  $C_m$ ,  $C_n$  — bezwymiarowe współczynniki sił i momentów aerodynamicznych,  $C_{xs}$  — bezwymiarowy współczynnik oporu spadochronu.

Współczynniki  $X_w$ ,  $N_r$  określające zmiany sił i momentów aerodynamicznych w funkcji parametrów kinematycznych ruchu noszą nazwę pochodnych aerodynamicznych [1, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15], a współczynniki  $Y_{rs}$ ,  $N_{rs}$  pochodnych silnikowych [4, 12]. Wyznacza się je zgodnie z przyjętą w lotnictwie zasadą przy badaniu stateczności układów latających zakładając, że zmiany symetrycznych parametrów ruchu powodują zmiany symetrycznych sił i momentów, a zmiany antysymetryczne — sił i momentów antysymetrycznych [4, 5, 7, 10, 11, 12].

Pochodne aerodynamiczne są następujące:

$$\begin{aligned}
 X_w &= -\frac{1}{2} \rho S \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}, \\
 X_q &= -\frac{1}{2} \rho S \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \frac{1}{S_b} \int_{x_2}^{x_1} C(x) x dx, \\
 Y_v &= -\frac{1}{2} \rho S \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_y}{\partial \gamma}, \\
 Y_r &= \frac{1}{2} \rho S \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_y}{\partial \gamma} \frac{1}{S_b} \int_{x_2}^{x_1} C(x) x dx,
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 Z_w &= -\frac{1}{2} \rho S \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}, \\
 Z_q &= -\frac{1}{2} \rho S \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \frac{1}{S_b} \int_{x_2}^{x_1} C(x) x dx, \\
 M_w &= \frac{1}{2} \rho S L_{ch} \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}, \\
 M_q &= \frac{1}{2} \rho S L_{ch} \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \frac{1}{S_b} \int_{x_2}^{x_1} C(x) x dx, \\
 N_v &= -\frac{1}{2} \rho S L_{ch} \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_n}{\partial \gamma}, \\
 N_r &= \frac{1}{2} \rho S L_{ch} \frac{V_c^2}{U} \frac{\partial C_n}{\partial \gamma} \frac{1}{S_b} \int_{x_2}^{x_1} C(x) x dx,
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

a pochodne silnikowe:

$$\begin{aligned}
 Y_{r_s} &= l_s m_s, & Z_{q_s} &= l_s m_s, \\
 M_{q_s} &= -l_s^2 m_s, & N_{r_s} &= -l_s^2 m_s,
 \end{aligned}$$

gdzie  $S_b$  oznacza powierzchnię przekroju podłużnego zasobnika,  $C(x)$  funkcję zmiany przekroju poprzecznego zasobnika wzdłuż jego długości,  $l_s$  odległość od  $SC$  zasobnika do dyszy silnika,  $Q_p/gt_s = m_s$  wydatek sekundowy gazów prochowych.

#### 4. Własności dynamiczne obiektu w ruchu

Równania (11) opisujące przestrzenny ruch zasobnika zrzuconego z samolotu są równaniami różniczkowymi, silnie nieliniowymi o zmiennych współczynnikach [6]. Scałkowano je numerycznie wykorzystując metodę RUNGE-KUTTA. Analizę numeryczną przeprowadzono w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych. Opracowany program ma na celu zbadanie wpływu [8] parametrów lotu nosiciela i parametrów konstrukcyjnych obiektu na tor zasobnika  $f(x_1, z_1)$  i inne wielkości charakteryzujące ruch obiektu na torze.

Obliczenia wykonano dla następujących danych wyjściowych:

- prędkość zrzutu  $V_0 = 150, 250$  [m/s],
- wysokość zrzutu  $H = 200$  [m],
- początkowego kąta pochylenia toru  $\Theta_0 = 0^\circ$ ,
- ciągu silnika raketowego  $T_p = 1200$  [kG],
- spadochronów o różnej intensywności hamowania,

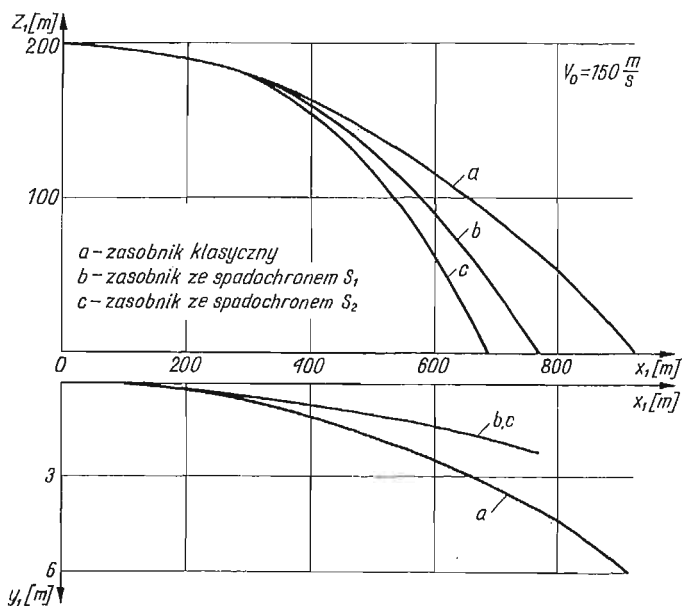
przy zachowaniu stałych wartości charakterystyk geometrycznych, masowych i aerodynamicznych zasobnika. Charakterystyczne wyniki analizy numerycznej badanego modelu zasobnika przedstawiono w formie wykresów na rys. 3÷12.

Z analizy uzyskanych rezultatów obliczeń numerycznych wynika, że profil toru lotu zasobnika  $Z_1 = Z_1(x_1)$  w istotny sposób zależy od parametrów lotu nosiciela w momencie

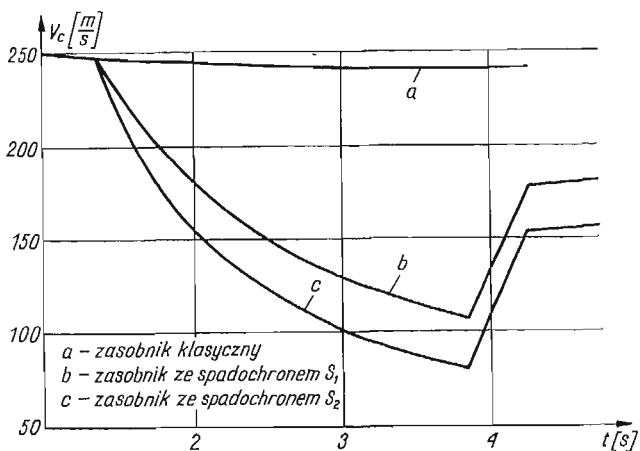


zrzutu, efektywności hamowania spadochronem oraz wielkości ciągu silnika przyspieszającego.

Dla określonych warunków początkowych, danego ciągu silnika raketowego wraz ze wzrostem efektywności hamowania donośność poruszającego się obiektu znacznie maleje (rys. 3). Z wykresu toru lotu w płaszczyźnie  $0x_1, y_1$  wynika, że tor obiektu nie leży w płaszczyźnie, przy czym zasobnik swobodnie spadający zbacza bardziej niż zasobnik hamowany i przyspieszany. Zjawisko to spowodowane jest przesunięciem charakterystyk aerodynamicznych wynikających z małej asymetrii geometrycznej, a wielkość zбочenia zależna jest od wartości chwilowych składowych wektora prędkości.

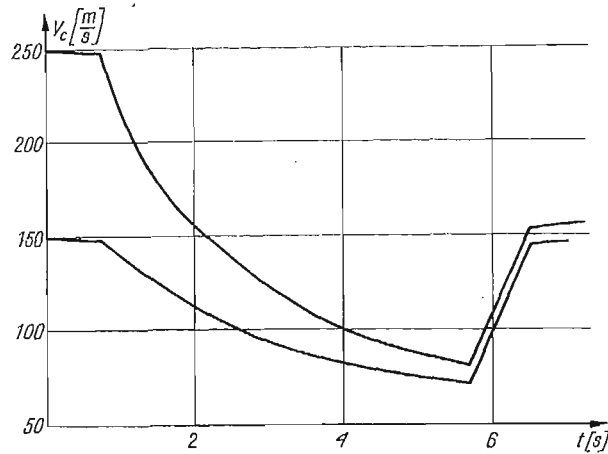


Rys. 3.

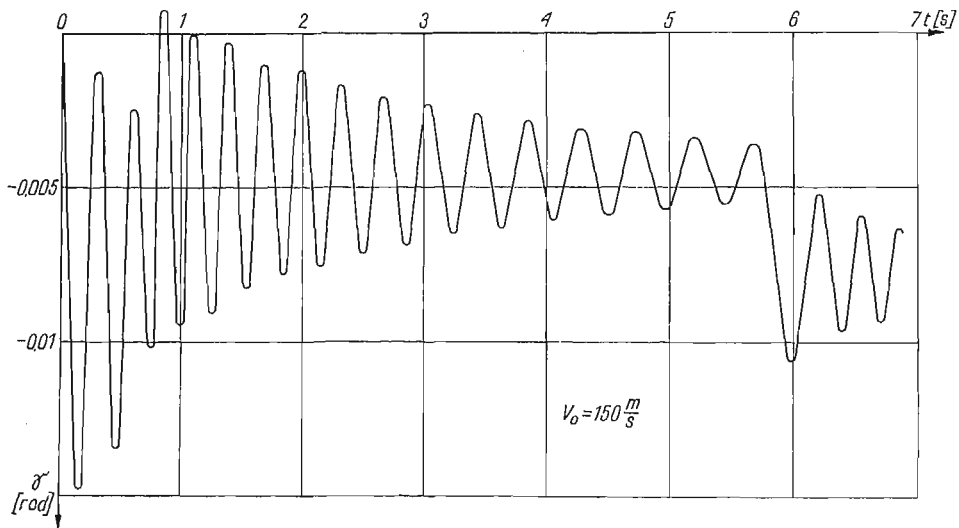


Rys. 4.

Interesujący przebieg ma zmiana wektora prędkości całkowitej zasobnika na torze. Dla porównania na jednym wykresie przedstawiono krzywe dla obiektu swobodnie spadającego oraz obiektów hamowanych i przyspieszanych. Z analizy uzyskanych przebiegów wynika, że dla określonych parametrów zrzutu i charakterystyk konstrukcyjnych zmiana prędkości całkowitej w istotny sposób zależy od efektywności hamowania spadochronem (rys. 4). Natomiast prędkość końcowa zasobnika o przyjętym rozwiązaniu konstrukcyjnym w niewielkim stopniu zależy od prędkości zrzutu, co świadczy o dużej „elastyczności” spadochronu hamującego (rys. 5).



Rys. 5

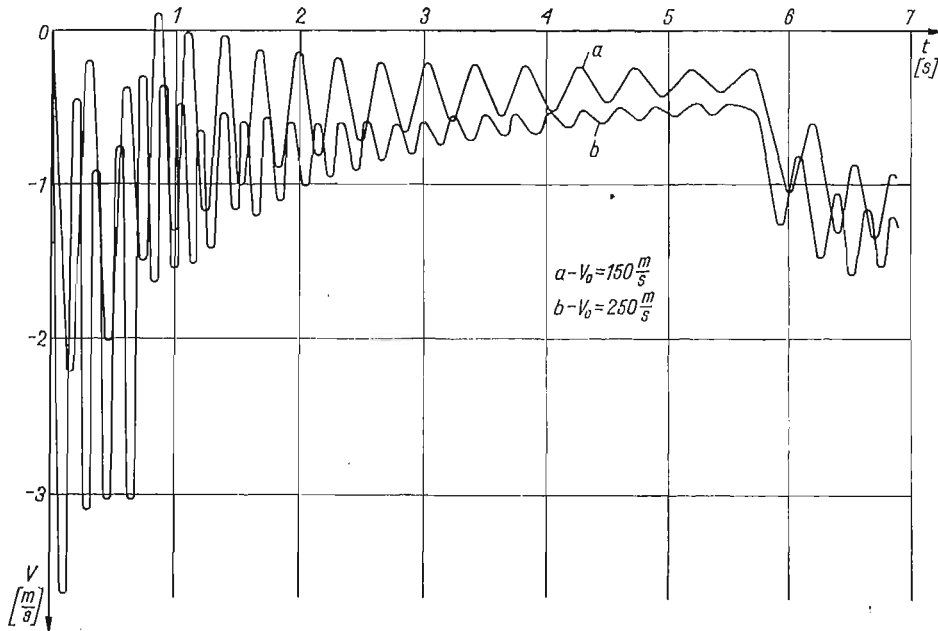


Rys. 6

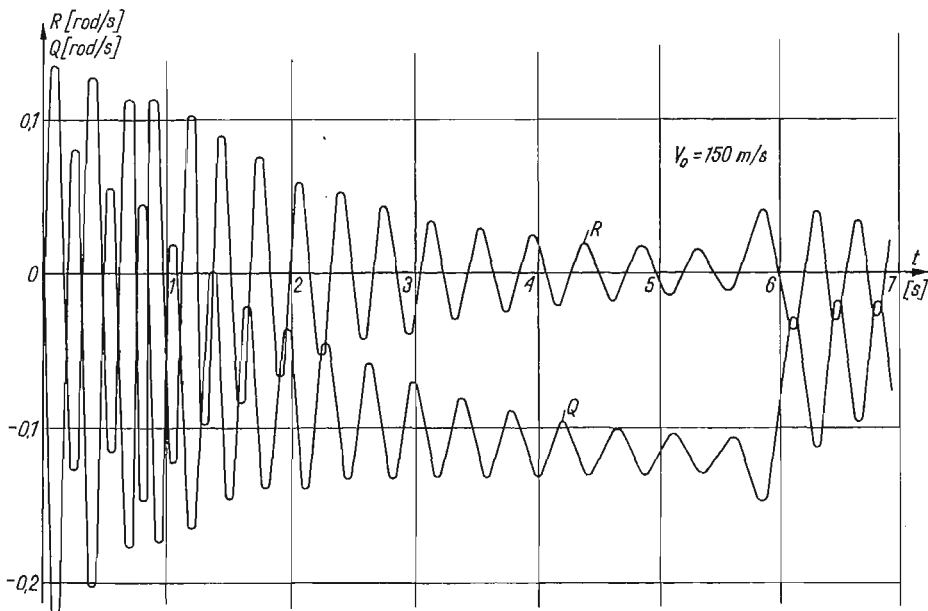
Z wykresu przedstawiającego zmianę kąta ślizgu  $\gamma$  na torze (rys. 6) wynika, że kąt ślizgu zmienia się periodycznie, przy czym amplituda i okres wahań zależą od sił działających na zasobnik. Na wykresie dają się wyodrębnić trzy fazy ruchu obiektu: swobodny spadek do czasu  $t = 0,7$  s, hamowanie spadochronem do  $t = 5,7$  s, przyspieszenie silni-

kiem raketowym do  $t = 6,5$  s. W czasie hamowania, mimo spadku prędkości ruch zasobnika stabilizuje się, amplituda wahań kąta ślizgu znacznie zmniejsza się. Włączenie silnika raketowego powoduje chwilową destabilizację, po czym w trakcie rozprędzania zasobnika amplituda wahań jest silnie tłumiona.

Charakter zmian prędkości bocznej  $V$  na torze (rys. 7) jest bardzo podobny do zmian



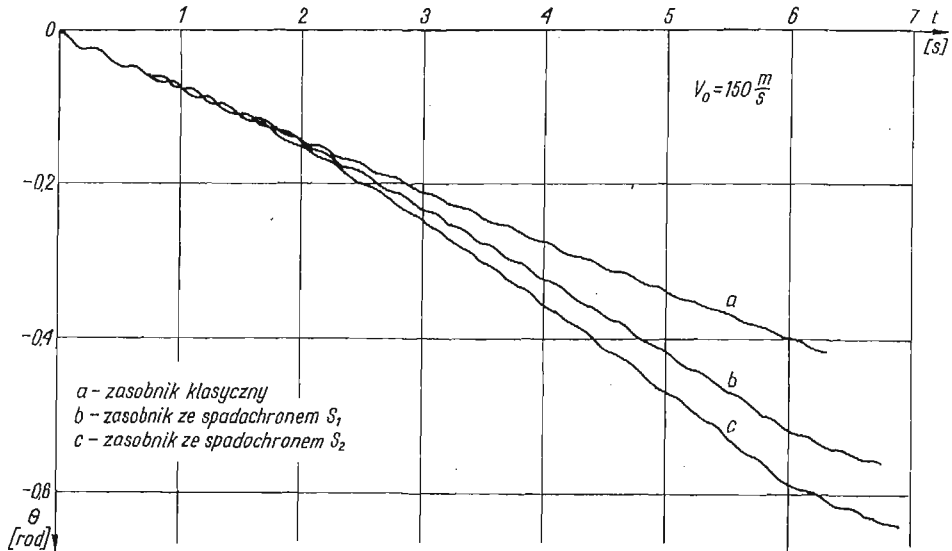
Rys. 7



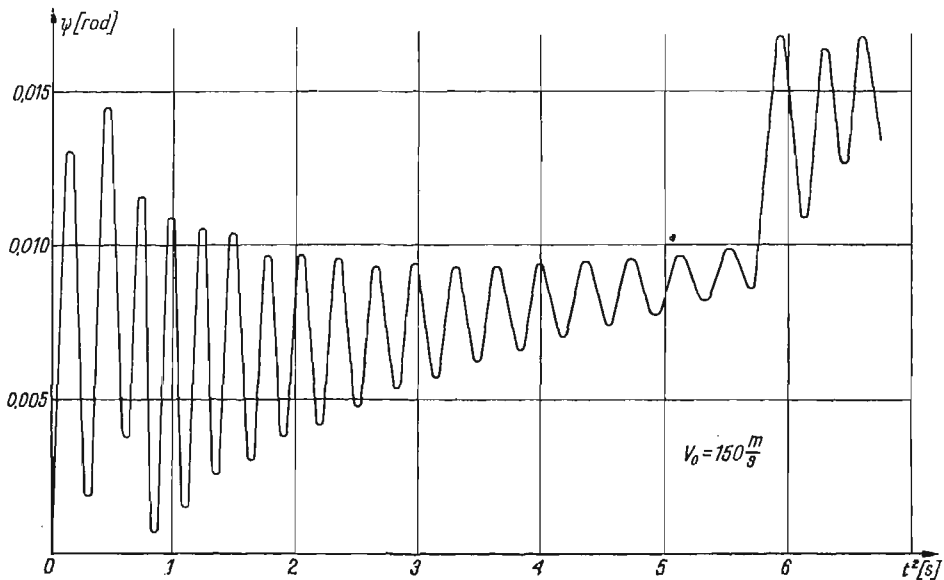
Rys. 8

kąta ślizgu, ponieważ te wielkości są ściśle zależne od siebie. Na kolejnym rysunku przedstawiono zmianę prędkości kątowej pochylania  $Q$  i odchylenia  $R$  w czasie lotu zasobnika (rys. 8). Widoczne jest przesunięcie krzywej  $Q = Q(t)$  w stosunku do krzywej  $R = R(t)$  spowodowane działaniem w płaszczyźnie rzutu  $0x_1 z_1$  siły ciężkości, a konkretnie przyspieszenia grawitacyjnego.

Zmiana kąta pochylenia zasobnika na torze  $\Theta$  ma charakter oscylacyjny (rys. 9). Zasadniczy wpływ na wielkość kąta upadku  $\Theta_k$  ma efektywność hamowania spadochronem, przy czym wzrost efektywności powoduje wzrost kąta upadku i jednocześnie zmniejsz-



Rys. 9

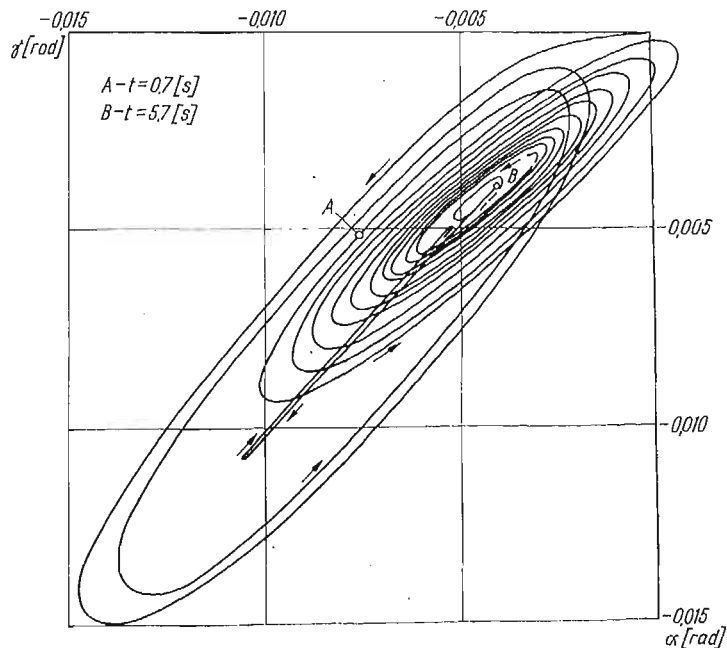


Rys. 10

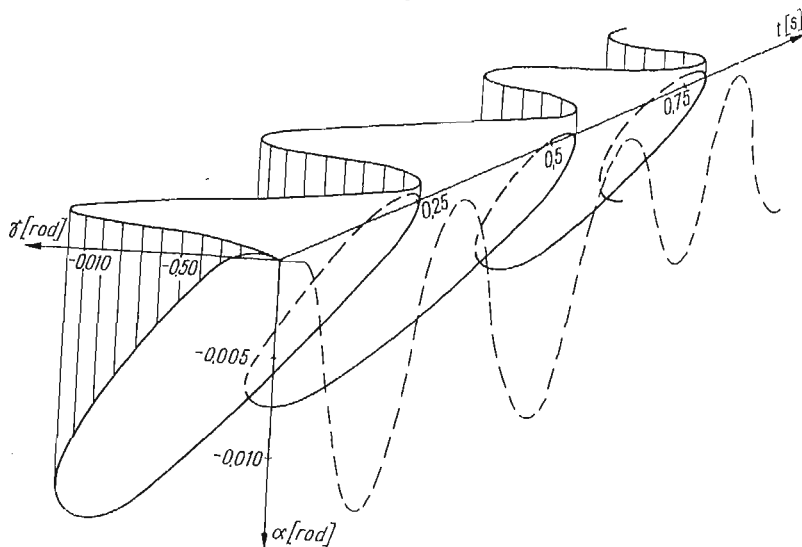
szenie częstości oscylacji. Kąt odchylenia  $\Psi$  zmienia się podobnie jak prędkość odchylenia  $R$  ze względu na zależność tych wielkości od siebie (rys. 10).

Ruch nutacyjny zasobnika  $\alpha = \alpha(\gamma)$  przedstawiono na rys. 11. Wyraźnie dają się wyróżnić trzy fazy ruchu: swobodny spadek, hamowanie i przyspieszenie. Charakteryzują się one różną długością większej osi zataczanej elipsy oraz różnym nachyleniem tej osi, a w fazie przyspieszenia kierunek obrotu zmienia się na przeciwny.

Rysunek 12 przedstawia ruch nutacyjny zasobnika przedstawiony przestrzennie.



Rys. 11



Rys. 12

### 5. Wnioski ogólne

Przedstawiona metoda badania własności dynamicznych obiektu umożliwia analizę ruchu układu o dowolnym schemacie konstrukcyjnym, dając przy tym ciągłą informację o zmianie parametrów lotu na torze. Stosowane aktualnie metody balistyki zewnętrznej mają ograniczone zastosowanie do analizy obiektów charakteryzujących się tzw. czasem charakterystycznym  $\Theta \leq 30$  s, co odpowiada obiektom poruszającym się lotem swobodnym.

Analizowany w niniejszej pracy zasobnik z układem hamująco-przyspieszającym ma zastosowanie do zrzutów z małych wysokości. Najistotniejszą fazą ruchu takiego układu jest lot hamowany, gdyż zmniejszenie prędkości o określoną wartość powoduje zakrzywienie toru lotu obiektu, co w konsekwencji ma zasadniczy wpływ na parametry ruchu zasobnika w punkcie upadku.

Spadochron wykorzystany do wyhamowania prędkości ruchu charakteryzuje się pewnymi cechami, które szczególnie predestynują go do zastosowania w proponowanym układzie konstrukcyjnym, mianowicie:

- prędkość końcowa w fazie hamowania w małym stopniu zależy od prędkości zrzutu, co świadczy o tzw. elastyczności układu ze względu na warunki zrzutu,
- spadochron w dużym stopniu tłumi wahania zasobnika powodując «uszytywnienie aerodynamiczne» układu,
- zwiększenie efektywności hamowania spadochronu powoduje: większy spadek prędkości, większe wystromienie toru oraz zmniejszenie częstości oscylacji parametrów ruchu.

Wynika stąd, że dla osiągnięcia założonego punktu upadku ciała zrzuconego z pewnej wysokości z daną prędkością początkową, należy odpowiednio ukształtować charakterystyki aerodynamiczne całego układu, co sprowadza się do dobrania dla zasobnika właściwego spadochronu zapewniającego wymagane wyhamowanie i stateczność ruchu układu.

### Literatura cytowana w tekście

1. W. ALBRING, *Augewandte Stromungslehre*, Dresden und Leipzig 1961.
2. Z. DŻYGADŁO, A. KRZYŻANOWSKI, E. PIOTROWSKI, *Dynamika lotu osiowo-symetrycznego ciała z wiatkiem urządzeniem hamującym*, Biuletyn WAT, 1/257, 23 (1974).
3. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, New York 1972.
4. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, cz. I i II, Łódź—Warszawa 1961.
5. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, Warszawa 1971.
6. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Warszawa 1971.
7. S. F. HOERNER, *Aerodynamics Drag*, Ohio 1951.
8. S. MARUSZKIEWICZ, *Obliczenia parametrów ruchu obiektu w swobodnym spadku*, Program TOR 1 - 5, ITWL 1976.
9. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika nr 32, 1975.
10. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, F. MISIAK, Z. WINCZURA, *Obliczenia teoretyczne własności dynamicznych bomb lotniczych*, Informator ITWL nr 49, Warszawa 1975.
11. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, F. MISIAK, Z. WINCZURA, *Wpływ wychylenia steru wysokości na własności dynamiczne bomb lotniczych*, Informator ITWL nr 50, Warszawa 1976.

12. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, *Wplyw silników hamująco-przyspieszających na własności obiektu osiowosymetrycznego w ruchu płaskim*, Informator ITWL nr 51, Warszawa 1976.
13. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, J. OSTROWSKI, Z. WINCZURA, *Zagadnienia aerodynamiki bomb lotniczych w zakresie prędkości poddźwiękowych*, Informator ITWL nr 52, Warszawa 1976.
14. J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, *Dynamika lotu obiektów zrzucanych z samolotu*, Materiały IV konferencji instytutów Wydziału Elektromechanicznego WAT, poz. 12, Warszawa 1976.
15. J. N. NIELSEN, *Missile Aerodynamic*, New York, Toronto, London 1960.
16. F. J. REGAN, J. SMITH, *The Aeroballistics of a Terminally Corrected Spinning Projectile (TCSP) AIAA*, Paper No. 74 - 796, August 1975.
17. Y. ROCARD, *Dynamics Instability — Automobiles, Aircraft, Suspension Bridges*, London 1957.
18. H. SCHLICHTING, E. TRUCKENBRODT, *Aerodynamik des Flugzeuges*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Teil I — 1959, Teil II — 1960.
19. К. А. АБГАРЯН, И. М. РАПОПОРТ, *Динамика ракет*, Москва 1969.
20. Р. Б. ДОУ, *Основы теории современных снарядов*, Москва 1964.
21. А. А. ЛЕБЕДЕВ, И. С. ЧЕРНОБРОВКИН, *Динамика полёта беспилотных летательных аппаратов*, Москва 1973.
22. И. Ф. КРАСНОВ, В. Н. КОШЕВОЙ, А. Н. ДАНИЛОВ, В. Ф. ЗАХАРЧЕНКО, *Аэродинамика ракет*, Москва 1968.
23. В. Д. КУРОВ, Ю. М. ДОЛЖАНСКИЙ, *Основы проектирования пороховых ракетных снарядов*, Москва 1961.
24. А. МНЕРЕ, *Механика полёта*, т. I, *Теория траекторий полёта*, Москва 1965.
25. Г. М. МОСКАЛЕНКО, *Инженерные методы проектирования в ракетодинамике*, Москва 1974.
26. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолёта*, Москва 1957.
27. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, И. В. СТРАЖЕВА, *Динамика полёта. Траектории летательных аппаратов*, Москва 1963.
28. В. К. СВЯТОДУХ, *Динамика пространственного движения управляемых ракет*, Москва 1969.

## Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ ПАРАШЮТА НА ДВИЖЕНИЕ ОСЕВО-СИМЕТРИЧЕСКОГО  
ОБЪЕКТА СБРАСЫВАЕМОГО С САМОЛЁТА

В работе рассматриваются динамические свойства свободно падающего объекта с тормозным парашютом и ускорительным ракетным двигателем. Объект считается жестким телом с пятью степенями свободы. Движение его описано системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнения интегрированы численным методом с учётом принятых начальных условий. Для разных параметров сброса вычислены траектории полёта, изменение угла тангажа, рыскания, угла атаки, скольжения, скорости центра масс объекта и её составляющие. Аэродинамические характеристики получены экспериментально, путем испытания моделей в аэродинамических трубах.

## S u m m a r y

THE INFLUENCE OF A PARACHUTE ON THE MOTION OF AN AXIALLY SYMMETRIC  
AIRDROPPED OBJECT

The paper presents an analysis of dynamic properties of a freely moving object equipped with a braking parachute and an accelerating rocket engine. The object is treated as a rigid body with five degrees of freedom. The movement of the object is described by a system of second-order non-linear differential equations.

The equations were integrated numerically for the assumed initial conditions. Flight paths, variations of angles of elevation azimuth attack and sideslip, variations of velocity of the centre of mass and its components were calculated for different airdrop parameters. Aerodynamic characteristics were obtained empirically from model testing in a wind tunnel.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1977 r.*



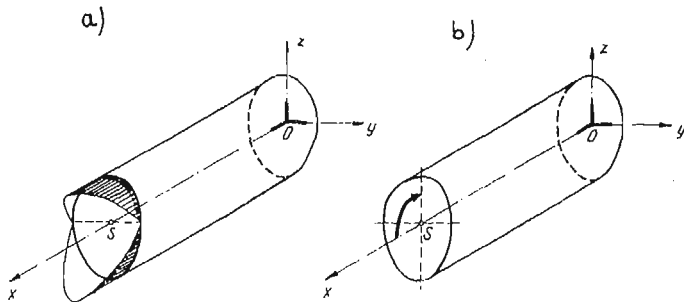
## KINEMATYCZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ UKŁADÓW SIŁ

STEFAN PIECHNIK (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Rozważmy lity, nieswobodny pręt pryzmatyczny o dowolnym przekroju poprzecznym (rys. 1) określony w układzie osi  $x, y, z$ , gdzie oś  $x$  jest osią pręta a  $y, z$  osiami głównymi, centralnymi przekroju poprzecznego i obciążmy go na ściankach czołowych np. obciążeniem, którego gęstość zapiszemy w postaci:  $q_{vx} = az$ ,  $q_{vy} = 0$ ,  $q_{vz} = 0$ ,  $a > 0$ .

Dla tak przyjętego obciążenia (rys. 1a) łatwo znaleźć ściśle rozwiązanie zagadnienia brzegowego teorii sprężystości, a więc macierze naprężeń, odkształceń i przemieszczeń, których elementy spełniają równania Naviera, Cauchy'ego, Hooke'a oraz statyczne warunki brzegowe i pewną grupę warunków kinematycznych. Jak łatwo sprawdzić, obciążenie pokazane na rys. 1a redukuje się do momentu zginającego w płaszczyźnie  $xz$ , stąd

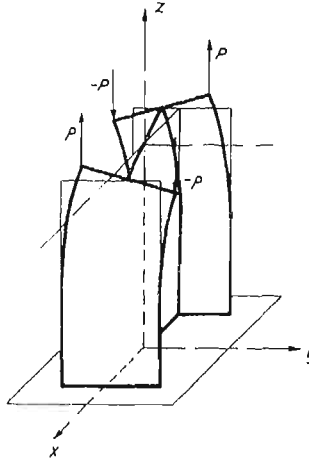


Rys. 1

też w przypadku takiego obciążenia mówić będziemy o «czystym zginaniu». Otrzymane rozwiązanie powyższego zadania możemy wykorzystać dla całej grupy innych obciążeń ścianek poprzecznych, jeśli tylko obciążenia te redukują się do pary w płaszczyźnie  $xz$ . Wykorzystujemy bowiem zasadę de S. Venanta, w myśl której, macierze naprężeń, odkształceń i przemieszczeń różnić się będą dowolnie mało, z wyjątkiem obszaru sąsiadującego z powierzchnią obciążoną, dla różnych, ale statycznie równoważnych obciążeń przyłożonych na małej w stosunku do całej powierzchni. Jakiegokolwiek więc obciążenie, które da się zredukować do pary, zastępować będziemy tą parą (rys. 1b). Wykorzystując równania statycznej równowagi z układem pokazanym na rys. 1a, znajdujemy odpowiednie wzory określające naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia. Przypadek pokazany na rys. 1b, jest więc reprezentantem zbioru obciążeń, w którym określona jest relacja statycznej równowagi. W przypadku obciążenia pokazanego na rys. 1b mówić

będziemy o «zginaniu prostym» lub prościej o «zginaniu». Podobnie, jak proste zginanie, tak i proste rozciąganie i proste skręcanie lub kombinacja tych wszystkich (obciążenie złożone) będą reprezentantami odpowiednich klas równoważności.

Istnieje jednak pewna grupa prętów, dla których zastąpienie układu sił innym statycznie im równoważnym może prowadzić do zasadniczych błędów. Do takich prętów należą pręty cienkościenne. Rozważmy prosty przykład pokazany na rys. 2.



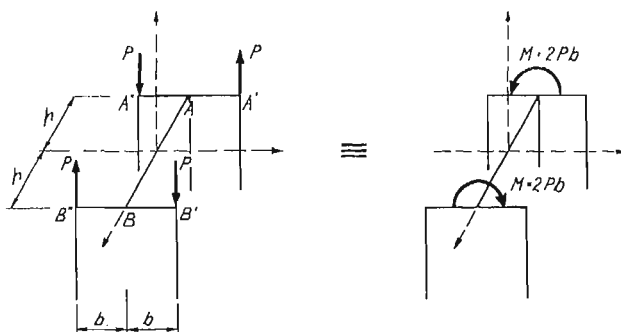
Rys. 2

Gdyby układ sił zastąpić układem statycznie równoważnym w środku ciężkości przekroju poprzecznego, otrzymalibyśmy układ zerowy, co oznaczałoby zerowanie się naprężeń, odkształceń i przemieszczeń. Jak widać z rys. 2 byłoby to zbyt grubym przybliżeniem nawet dla przekrojów poprzecznych dostatecznie odległych od ścianki czołowej. W przypadku prętów cienkościennych nie możemy przyjąć zasady de Saint Venanta, przynajmniej w takiej postaci, w jakiej została ona sformułowana. Oznaczałoby to konieczność rozwiązywania każdego przypadku obciążenia osobno lub inaczej mówiąc, niemożność określenia reprezentanta dla pewnych grup obciążeń.

## 2. Definicja kinematycznej równoważności układów sił

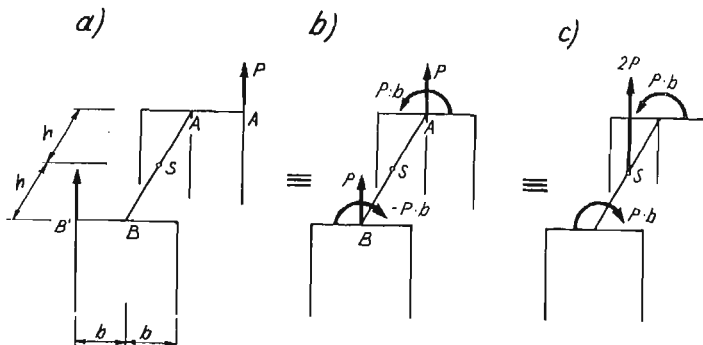
Rozważmy najpierw kilka przykładów obciążenia pręta cienkościennego, które można zastąpić innym układem statycznie równoważnym, ale równocześnie takim, aby efekt kinematyczny obu układów był jednakowy. Rozpatrzmy w tym celu układ obciążeń podany na rys. 2. Przykład układu równoważnego przedstawia rys. 3. Przenosząc siłę  $P$  z punktu  $A'$  do  $A$  dodajemy moment  $Pb$ , przenosząc siłę  $-P$  z punktu  $A''$  do  $A$  dodajemy moment  $Pb$  otrzymując w punkcie  $A$  tylko moment  $M = 2Pb$ , albowiem siły redukują się. Postępując podobnie z siłami zaczepionymi w punktach  $B'$  i  $B''$  otrzymamy w punkcie  $B$  moment  $M = -2Pb$ . Nowy układ stanowi więc biparę, której pary działają w płaszczyznach półek. Nowy układ złożony z bipary wywołuje ten sam efekt kinematyczny co układ wyjściowy.

Na rys. 4 przedstawiono drugi przykład. Dokonajmy redukcji do punktu  $S$ , będącego środkiem ciężkości dwuteownika; siłę  $P$  z punktu  $A'$  przenieśmy do punktu  $A$ , dodając dla zachowania statycznej równoważności moment  $M = Pb$ , przenosząc siłę  $P$  z punktu  $B'$  do  $B$  otrzymamy nowy układ, który przedstawia rys. 4b. Przenosząc następnie siłę  $P$  z punktu  $A$  do  $S$  dodajemy moment  $Ph$ . Przenosząc siłę  $P$  z punktu  $B$  do  $S$  dodajemy



Rys. 3

moment  $-Ph$ . Oba dodane momenty działające w jednej płaszczyźnie redukują się, w wyniku czego otrzymujemy układ przedstawiony na rys. 4c złożony z siły  $2P$  i bipary o bimomencie  $B_\omega = Pbh$ . Również w tym przypadku efekt kinematyczny układu na rys. 4c będzie analogiczny z takim efektem układu pokazanego na rys. 4a.



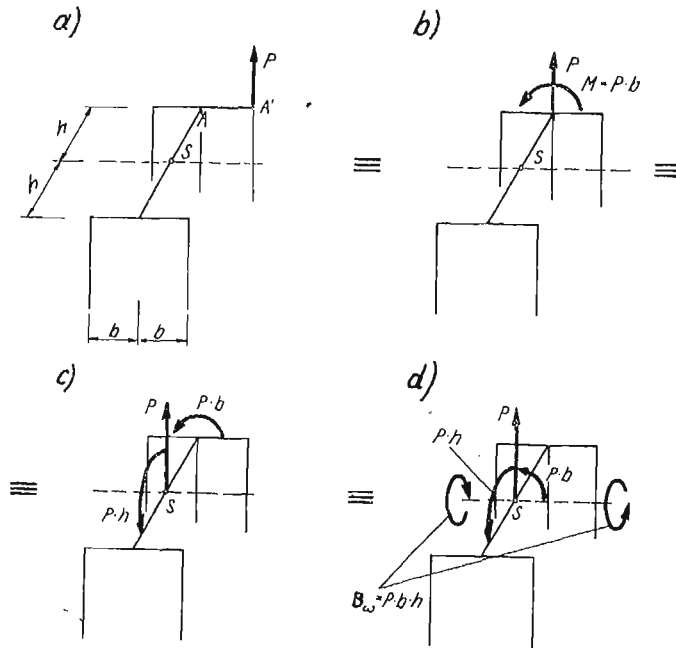
Rys. 4

Trzecim wreszcie przykładem redukcji do punktu  $S$  niech będzie układ pokazany na rys. 5a. Sposób redukcji pokazany na rys. 5 nie wymaga komentarza, dodajmy tylko, że przenosząc moment  $Pb$  (rys. 5c) z płaszczyzny półki do równoległej płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $S$  dodać musimy biparę o bimomencie  $B_\omega = Pbh$ . I w tym przypadku intuicja podsuwa kinematyczną równoważność układów pokazanych na rys. 5a i 5d.

Rozważone powyżej przykłady dotyczyły układu przyłożonego do pręta o prostym przekroju poprzecznym; w przypadku bardziej złożonych przekrojów narzuca się konieczność wprowadzenia precyzyjnego określenia pojęcia kinematycznej równoważności dwóch układów. Wprowadzenie takiego pojęcia pozwoliłoby przede wszystkim na możliwość rozwiązania pręta cienkościennego dla pewnego reprezentatywnego układu. Rozwiązanie

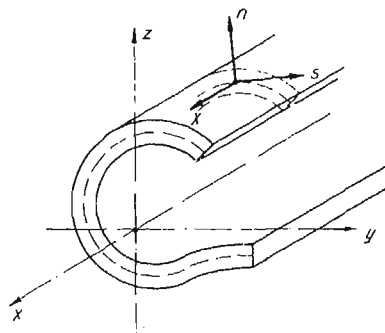
to byłyby ważne dla całej grupy obciążeń kinematycznie równoważnych danemu, jeśli oczywiście uogólnić zasadę de Saint Venanta, na układy kinematycznie równoważne.

W odróżnieniu od statycznej równoważności, równoważność kinematyczna nie może być zdefiniowana bez uwzględnienia kształtu bryły, albowiem właśnie deformacja bryły decyduje o kinematycznej równoważności. Wynika stąd, że sposób redukcji danego układu



Rys. 5

do układu kinematycznie mu równoważnego nie może być dowolny. Umówimy się, że przyłożony do pręta układ sił będziemy redukować do ustalonego punktu leżącego wewnątrz pręta lub sztywno związanego z prętem w ten sposób, że drogą redukcji będzie oś środkowa przekroju poprzecznego i tworzące powierzchni środkowej. Inaczej mówiąc drogą redukcji wyznaczać będzie lokalny krzywoliniowy ortogonalny układ współrzędnych  $(x, s, n)$  (rys. 6).



Rys. 6

W myśl powyższego przyjmujemy następującą definicję: *Dwa układy (A) i (B), przyłożone do pręta cienkościennego, nazywać będziemy kinematycznie równoważnymi, jeśli redukując je do ustalonego punktu R, sztywno związanego z osią środkową przekroju poprzecznego, w taki sposób, że drogę redukcji wyznacza lokalny krzywoliniowy ortogonalny układ osi (x, s, n) otrzymujemy w punkcie R równość wektorów sum, wektorów momentów i bimomentów.*

$$(2.1) \quad \bar{S}(A) = \bar{S}(B), \quad \bar{M}_R(A) = \bar{M}_R(B), \quad B_\omega(A) = B_\omega(B).$$

Statyczna równoważność dwóch układów wymaga równości tylko sum i momentów, a więc układy kinematycznie równoważne są statycznie równoważnymi.

### 3. Przykłady zastosowań

Pierwszym zastosowaniem przyjętej definicji o kinematycznej równoważności jest uogólnienie zasady de Saint Venanta, którą możemy teraz sformułować: *Jeśli na niewielkiej powierzchni pręta cienkościennego przyłożony jest układ (A) wywołujący w przecie pewną macierz naprężeń, odkształceń i przemieszczeń, to jeśli na tej powierzchni układ (A) zastąpimy kinematycznie równoważnym układem (B), wówczas stany naprężeń odkształceń i przemieszczeń różni się będą dowolnie mało z wyjątkiem obszaru leżącego w sąsiedztwie powierzchni przyłożenia układów (A) i (B).*

Konsekwencje takiego uogólnienia są nader oczywiste.

Drugim zastosowaniem pojęcia kinematycznej równoważności jest pokazanie sensu i uzasadnienie nazwy występującego w analizie prętów cienkościennych wyrażenia

$$(3.1) \quad B_\omega = \int \int_A \sigma_x(x, s) \omega(s) dA,$$

które nosi nazwę bimomentu, a które wprowadza się bardzo formalnie. Np. MUTERMILCH [1] obliczając pracę naprężenia  $\sigma_x$  na przemieszczeniu  $u_x$  otrzymuje

$$(3.2) \quad L_1 = \int \int_A u_x \sigma_x dA = u \int \int_A \sigma_x dA - v' \int \int_A \sigma_x y dA - w' \int \int_A \sigma_x z dA - \theta' \int \int_A \sigma_x \omega dA,$$

aby następnie stwierdzić «... ostatni składnik wyrażenia... jest również pracą wirtualną pewnej nowej siły wewnętrznej  $B_\omega = \int \int \sigma \omega dA$ , zwanej bimomentem, na przemieszczeniu  $u_x$ ».

Wielu autorów m.in. FIŁONIENKO-BORODICZ [2], mając wyrażone naprężenia normalne w postaci

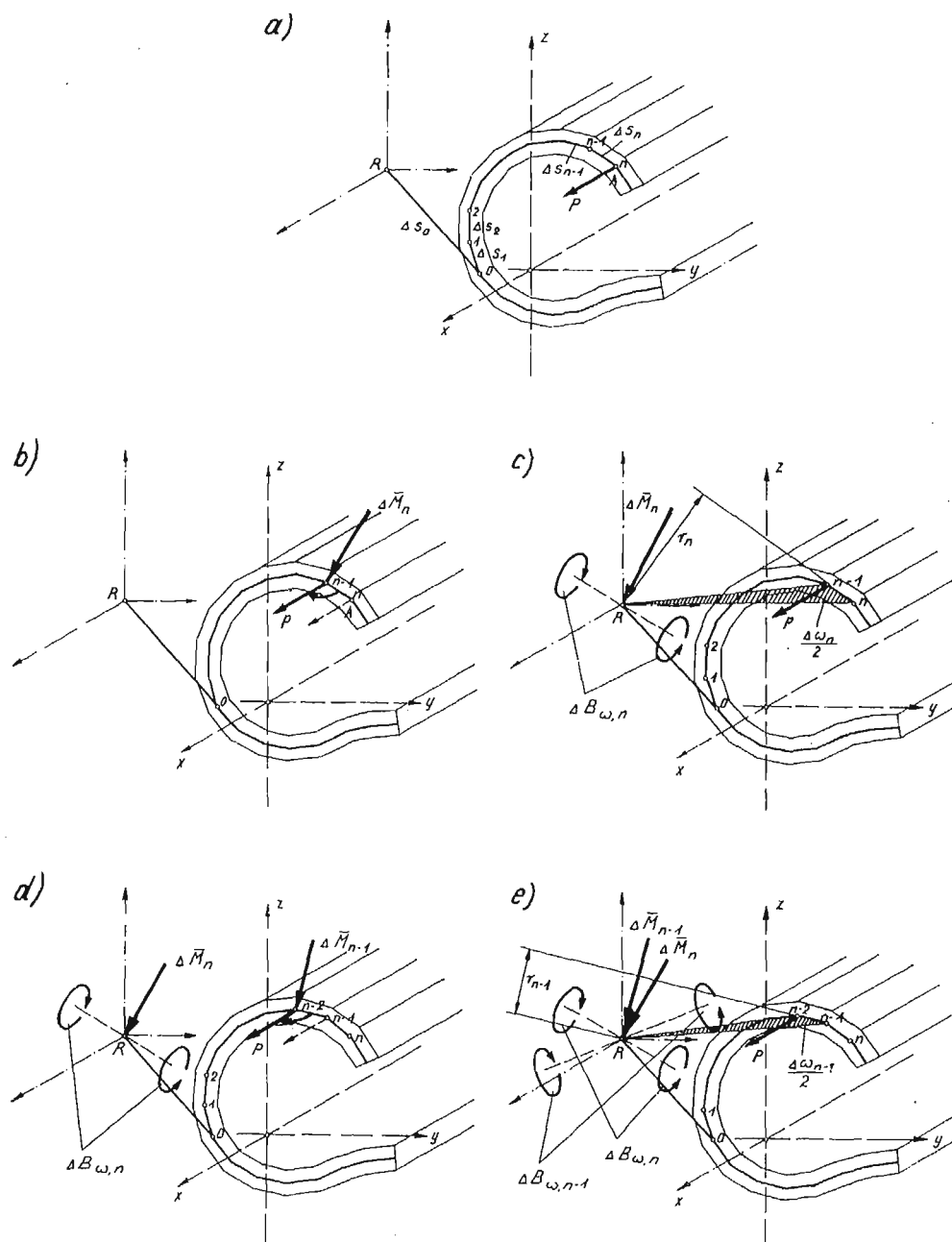
$$(3.3) \quad \sigma_x = E_1 [\zeta' - \xi'x - \eta'y - \varphi''\omega],$$

w wyniku formalnego pomnożenia obu stron przez  $\omega$  i wykonania całkowania po powierzchni przekroju poprzecznego otrzymuje

$$(3.4) \quad \int \int_A \sigma_x \omega dA = B_\omega = -\varphi'' E_1 J_\omega$$

i pisze «... wielkość  $B_\omega$ , to tak zwany giętno-skrętny bimoment; jego wymiar wynosi [kG cm<sup>2</sup>]». Podobnie rzecz traktuje RUTECKI [3]. Próby wyjaśnienia sensu  $B_\omega$ , znajdujemy

w książkach BIELAJEWA [4] i PANARINA, TARASENKI [5], na najprostszym przykładzie naprężeń w ścianie ceownika. Gdyby dokonać tej próby dla naprężeń, np. w półkach, moglibyśmy dojść do błędnego rezultatu, jeśli nie wprowadzić dodatkowej umowy o drodze redukcji, innymi słowy o kinematycznej równoważności układów. Wykorzystując podaną



Rys. 7

definicję kinematycznej równoważności, bez trudu pokażemy sens i uzasadnienie nazwy dla dowolnego przekroju poprzecznego i dowolnego punktu redukcji  $R$ .

Rozważmy pokazany na rys. 7a układ i zredukujmy go do punktu  $R$ . Niech punkt  $R$  będzie «środkiem zgięcia», a punkt  $O$  głównym zerowym punktem współrzędnej wycinkowej. Przenosząc z punktu  $A$  siłę  $P$  (rys. 7a) do punktu  $(n-1)$  dodajemy parę o wektorze (rys. 7b)

$$(3.5) \quad \Delta \bar{M}_n = \Delta \bar{s}_n \times \bar{P}.$$

Przenosząc moment do równoległej płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $R$  dołączamy biparę o bimomencie

$$(3.6) \quad \Delta B_{\omega, n} = P \Delta s_n r_n = P \Delta \omega_n$$

otrzymując układ kinematycznie równoważny pokazany na rys. 7c. Przenosząc dalej siłę  $P$  do punktu  $(n-2)$  dołączamy parę o wektorze

$$(3.7) \quad \Delta \bar{M}_{n-1} = \Delta \bar{s}_{n-1} \times \bar{P}$$

otrzymując układ pokazany na rys. 7d. Przenosząc z kolei moment  $\Delta \bar{M}_{n-1}$  do równoległej płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $R$  dodajemy biparę o bimomencie

$$(3.8) \quad \Delta B_{\omega, n-1} = P \Delta s_{n-1} r_{n-1} = P \Delta \omega_{n-1},$$

jak pokazano na rys. 7c. Postępując analogicznie tak, aż siła  $\bar{P}$  znajdzie się w punkcie  $R$  otrzymamy w rezultacie zredukowany do tego punktu układ kinematycznie równoważny danemu, który składa się: z siły  $\bar{P}$  zaczepionej w  $R$ , wektora momentu

$$(3.9) \quad \bar{M} = \sum_{i=0}^n \Delta \bar{M}_i = \sum_{i=0}^n \Delta \bar{s}_i \times \bar{P} = \left( \sum_{i=0}^n \Delta \bar{s}_i \right) \times \bar{P} = R\bar{A} \times \bar{P}$$

oraz bipary o bimomencie

$$(3.10) \quad B_{\omega} = \sum_{i=0}^n \Delta B_{\omega, i} = \sum_{i=0}^n P \Delta s_i r_i = P \sum_{i=0}^n \Delta s_i r_i = P \omega(A).$$

Ostatnie dwa wyrażenia traktować możemy jako sumę aproksymacyjną w przypadku, gdy przekrój poprzeczny ma oś środkową o dowolnej krzywej  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$ . W tym przypadku mamy

$$(3.11) \quad \bar{M} = \left( \int_{\bar{R}\bar{A}} \bar{d}s \right) \times \bar{P} = \bar{R}\bar{A} \times \bar{P},$$

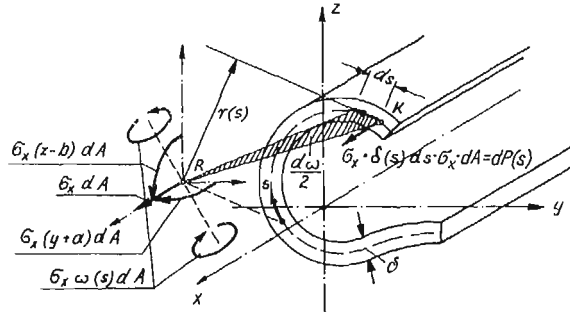
$$B_{\omega} = P \int_{\bar{R}\bar{A}} r(s) ds = P \int_{\bar{R}\bar{A}} d\omega = P \omega(A).$$

Wektor  $\bar{M}$ , jak widać, nie zależy od kształtu krzywej, a jedynie od współrzędnych punktów  $R$  i  $A$ , w przeciwieństwie do wartości bimomentów. Zredukujmy teraz do punktu  $R$  siły wewnętrzne o gęstości  $\sigma_x$  rozpostarte nad przekrojem poprzecznym pokazanym na rys. 8. Jeśli oznaczymy przez  $d\bar{P}(s) = \bar{\sigma}_x \delta(s) ds$  i postępować będziemy analogicznie, jak w przypadku pokazanym na rys. 7, zredukujemy układ do punktu  $R$  otrzymując

$$(3.12) \quad \begin{aligned} d\bar{N} &= \bar{\sigma}_x \delta(s) ds, \\ d\bar{M} &= \bar{R}\bar{K} \times d\bar{P}(s) = \bar{R}\bar{K} \times \bar{\sigma}_x \delta(s) ds, \\ dB_{\omega} &= \sigma_x \omega(s) \delta(s) ds. \end{aligned}$$

Sumując zredukowane w punkcie  $R$  układy od wszystkich elementarnych sił  $d\bar{P}(s)$  na całej krzywej  $c$ , otrzymamy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} N &= \int_C \sigma_x \delta(s) ds = \int_A \sigma_x dA, \\ \bar{M} &= \int_C \bar{R}\bar{K} \times \bar{\sigma}_x \delta(s) ds = \int_A \bar{R}\bar{K} \times \bar{\sigma}_x d\bar{A}, \\ B_\omega &= \int_C \sigma_x \omega(s) \delta(s) ds = \int_A \sigma_x \omega(s) dA. \end{aligned}$$



Rys. 8

Układ ten jest kinematycznie równoważny układowi sił wewnętrznych o gęstości  $\sigma_x$  rozpostartych nad całym przekrojem poprzecznym. W wyniku tego rozumowania stają się jasne nazwa i sens całki  $B_\omega$ . Kolejnym wreszcie przykładem wykorzystania kinematycznej równoważności układów jest wyprowadzenie wzoru na naprężenia normalne  $\sigma_x$  wyrażone poprzez siły przekrojowe ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  i  $B_\omega$ ). Wykorzystujemy tu bowiem warunek kinematycznej równoważności układów sił zewnętrznych ( $Z$ ) po jednej stronie przekroju z układem sił wewnętrznych ( $W$ )

$$(3.14) \quad \bar{S}(Z) = \bar{S}(W), \quad \bar{M}(Z) = \bar{M}(W), \quad B_\omega(Z) = B_\omega(W).$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. P. JASTRZĘBSKI, J. MUTERMILCH, W. ORŁOWSKI, *Wytrzymałość materiałów*, Arkady, Warszawa 1974.
2. М. М. Филоненко-Бородич и др., *Курс сопротивления материалов*, ч. II, Гос. Изд. Техн. Теорет. Лит., Москва 1949.
3. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, PWN, Warszawa 1966.
4. N. M. BIELAJEW, *Wytrzymałość materiałów*, Wyd. MON, Warszawa 1954.
5. Н. Я. Панарин, Ю. Ю. Тарасенко, *Сопротивление материалов*, Гос. Издат. Лит. Стр. Арх. и Стр. Мат., Москва 1962.

#### Резюме

#### КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ СИЛ

В работе представлено определение «кинематической эквивалентности систем сил». Из множества систем сил, в котором определено понятие статической эквивалентности, выделен класс эквивалентных систем, вызывающих такой же кинематический эффект. В отличие от статической, кинематическая эквивалентность систем зависит от формы тела. Рассмотрен ряд примеров использования такого определения при анализе тонких стержней.



## S u m m a r y

## KINEMATIC EQUIVALENCE OF A SYSTEM OF FORCES

In the paper the definition of «kinematic equivalence of a system» has been formulated. From the set of forces in which the relation of statical equivalence is given, one can distinguish the equivalence class of forces giving the same kinematic effects. In contrary to static equivalence, the kinematical one depends on the shape of the loaded body. Several examples are presented in which the introduced definition is used in the analysis of slender bars.

INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1977 r.*

---



MODYFIKACJA METODY UŚREDNIANIA FUNKCJONALNYCH POPRAWEK  
W ZAGADNIENIACH KONWEKCYI WYMUSZONEJ I PRZEPIYU CIEPŁA

KAZIMIERZ R U P (KRAKÓW)

1. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono metodę [1], za pomocą której można rozwiązywać zagadnienia związane z nieustalonym przepływem ciepła, jak również zagadnienia związane z konwekcją wymuszoną w stanach ustalonych i nieustalonych.

W pracach [2, 3] posługiwano się metodą uśredniania funkcjonalnych poprawek przy rozwiązywaniu równania przewodnictwa cieplnego wykorzystując pojęcie głębokości wnikania ciepła.

Posługiwanie się zaproponowaną modyfikacją umożliwi zastosowanie metody do rozwiązywania wymienionych zagadnień, bez konieczności wprowadzania pojęcia głębokości wnikania ciepła.

W pierwszej części pracy ogólnie scharakteryzowano metodę uśredniania funkcjonalnych poprawek, podano sposób konstrukcji funkcji przybliżonych oraz dokonano po raz pierwszy uśredniania wartości funkcji po polu, a nie, jak dotychczas [2, 3] dla przypadku układu cylindrycznego, uśredniania po promieniu.

W następnych częściach pracy podano zasadę konstruowania warunków początkowych oraz przebieg obliczeń. Obliczenia zilustrowano przykładem liczbowym.

Oznaczenia

- $a$  współczynnik wyrównania temperatury,  
 $A(X), B(X)$  funkcje,  
 $C$  stała,  
 $d$  średnica rury,  
 $Pe = \frac{\bar{w}d}{a}$  liczba Pecleta,  
 $r$  współrzędna,  
 $R$  promień rury,  
 $t$  temperatura,  
 $t_s$  temperatura ścianki,  
 $t_0$  temperatura początkowa,  
 $T = \frac{t-t_s}{t_0-t_s}$  temperatura bezwymiarowa,  
 $\bar{w}$  prędkość średnia.

$$\begin{aligned}
 & x \text{ współrzędna,} \\
 X = \frac{2}{Pe} \cdot \frac{x}{d} & \text{ bezwymiarowa współrzędna,} \\
 & \alpha(X) \text{ funkcja,} \\
 \varrho = \frac{r}{R} & \text{ bezwymiarowa współrzędna.}
 \end{aligned}$$

## 2. Charakterystyka metody uśredniania funkcjonalnych poprawek

Początkowo metoda uśredniania funkcjonalnych poprawek była zastosowana przez SOKOŁOWA [1] do rozwiązywania równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo-całkowych. Jest to przybliżona metoda, w ogólności polegająca na zastąpieniu samej funkcji ciągłej w danym obszarze jej średnią całkową w tym obszarze. Wyznaczona w ten sposób w pierwszym przybliżeniu funkcja, podobnie jak w zmodyfikowanej metodzie KANTOROWICZA [4, 5], nie ulega zmianie przy konstruowaniu następnego przybliżenia. Jest to znaczną zaletą metody, gdyż w ten sposób eliminuje się ponowne obliczanie współczynników funkcyjnych już poprzednio wyznaczonych przy rozwiązywaniu, np. równania przewodnictwa cieplnego.

Zaznaczyć należy, że w oryginalnej metodzie KANTOROWICZA wprowadzenie nowego członu przy rozwiązywaniu podobnego problemu zmienia układ równań, z których wylicza się wymienione współczynniki. Tak więc, w metodzie uśredniania funkcjonalnych poprawek, podobnie jak w zmodyfikowanej metodzie KANTOROWICZA [4, 5], do wyznaczenia poszczególnych współczynników funkcyjnych wystarczy rozwiązać jedno odpowiednie równanie różniczkowe, a nie, jak w oryginalnej metodzie KANTOROWICZA, układ równań różniczkowych.

W dalszym ciągu istota metody uśredniania funkcjonalnych poprawek zostanie przedstawiona na przykładzie równania różniczkowego opisującego nieizotermiczny przepływ cieczy rzeczywistej przez prostoosiową rurę kołową, przy założeniu niezależności własności fizykochemicznych cieczy od temperatury [6]. Jest to równanie różniczkowe typu parabolicznego i w naszym przypadku wraz z warunkami brzegowymi ma postać

$$(2.1) \quad (1 - \varrho^2) \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right]$$

oraz

$$(2.2) \quad X \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 1, \quad T = 1,$$

$$(2.3) \quad X > 0, \quad \varrho = 1, \quad T = 0,$$

$$(2.4) \quad X > 0, \quad \varrho = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varrho} = 0.$$

W niniejszej pracy równanie (2.1) zostanie rozwiązane za pomocą metody uśredniania funkcjonalnych poprawek bez konieczności wprowadzania pojęcia głębokości penetracji.

W pierwszym przybliżeniu, podobnie jak w zmodyfikowanej metodzie KANTOROWICZA [4], założymy, że wydzielona eliptyczna część równania (2.1) ma postać

$$(2.5) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \varrho \frac{\partial T_1}{\partial \varrho} \right] = (1 - \varrho^2) \dot{\alpha}_1(X) = (1 - \varrho^2) \frac{d\alpha(X)}{dX}.$$

Zgodnie z zasadą metody uśredniania funkcjonalnych poprawek napiszemy

$$(2.6) \quad \alpha_1(X) = 2 \int_0^1 T_1 \varrho d\varrho.$$

W wyrażeniu (2.6) przeprowadzono uśrednianie funkcji  $T_1(X, \varrho)$  po powierzchni. Całkując równanie (2.5) dwukrotnie po  $\varrho$  otrzymuje się

$$(2.7) \quad T_1(X, \varrho) = \left[ \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right] \dot{\alpha}_1(X) + A_1(X) \ln \varrho + B_1(X).$$

Współczynniki funkcyjne  $A_1(X)$  i  $B_1(X)$  w równaniu (2.7) wyznacza się przy uwzględnieniu warunków brzegowych (2.3) i (2.4). Po wyznaczeniu w (2.7)  $A_1(X)$  i  $B_1(X)$ , wyznacza się dalej funkcję  $\dot{\alpha}_1(X)$  z wyrażenia (2.6).

W wyniku takiego postępowania otrzymuje się liniowe równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu, z którego ostatecznie określa się funkcję  $\dot{\alpha}_1(X)$ . Równanie to w ogólnym przypadku ma postać

$$(2.8) \quad \dot{\alpha}_1(X) + p(X) \alpha_1(X) = q(X).$$

Równanie (2.8) można łatwo całkować [7] uzyskując następujące rozwiązanie:

$$(2.9) \quad \alpha_1(X) = e^{-\int p(X) dX} \left[ C + \int q(X) e^{\int p(X) dX} dX \right].$$

W wyrażeniu (2.9) stała  $C$  oznacza pewną wartość początkową. Ponieważ w (2.7) występuje pochodna funkcji  $\alpha_1(X)$ , przeto wystarczy zróżniczkować wyrażenie (2.9) i podstawić do (2.7). Stała  $C$  w wyrażeniu (2.9) zostanie wyznaczona podobnie, jak w [4, 8] przez wyznaczenie początkowo  $\dot{\alpha}_1(0)$ , a następnie wykorzystanie wyrażenia (2.9).

Tak więc, wartość początkowa  $\dot{\alpha}_1(0)$  będzie wyznaczona z postulatu najmniejszej sumy kwadratów, a mianowicie:

$$(2.10) \quad \int_V [T(0, \varrho) - T_1(0, \varrho)]^2 dV = \text{minimum}.$$

Warunek (2.10) dostarcza dla każdego przybliżenia jedno równanie, podobnie jak w zmodyfikowanej metodzie KANTOROWICZA [4]. W drugim przybliżeniu zakłada się odpowiednio

$$(2.11) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \varrho \frac{\partial T_2}{\partial \varrho} \right] = (1 - \varrho^2) \frac{\partial T_2}{\partial X},$$

gdzie

$$(2.12) \quad T_2 = T_1 + \alpha_2(X).$$

Podstawiając (2.12) do (2.11) otrzymuje się

$$(2.13) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \varrho \frac{\partial T_2}{\partial \varrho} \right] = (1 - \varrho^2) \frac{\partial T_1}{\partial X} + (1 - \varrho^2) \dot{\alpha}_2(X).$$

Zgodnie z zasadą metody uśredniania funkcjonalnych poprawek  $\alpha_2(X)$  wynosi

$$(2.14) \quad \alpha_2(X) = 2 \int_0^1 [T_2 - T_1] \varrho d\varrho.$$

Całkując dwukrotnie po  $\varrho$  wyrażenie (2.13) i uwzględniając następnie warunki brzegowe (2.3) i (2.4) wyznacza się odpowiednio funkcje  $A_2(X)$  i  $B_2(X)$ . Otrzymane w ten sposób wyrażenia podstawia się do (2.14) i wyznacza ostatecznie funkcję  $\alpha_2(X)$  przez rozwiązanie równania różniczkowego o postaci (2.8).

Podobnie jak w przypadku pierwszego przybliżenia, wyznacza się wartości początkowe, a następnie uzyskuje się wyrażenie opisujące żądany rozkład temperatury w drugim przybliżeniu. Ogólnie w  $n$ -tym przybliżeniu będzie

$$(2.15) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \varrho \frac{\partial T_n}{\partial \varrho} \right] = (1 - \varrho^2) \frac{\partial T_n}{\partial X},$$

gdzie  $T_n = T_{n-1} + \alpha_n(X)$ , oraz

$$(2.16) \quad \alpha_n(X) = 2 \int_0^1 [T_n - T_{n-1}] \varrho d\varrho.$$

Pozostałe obliczenia wykonuje się podobnie, jak w przypadku przybliżenia pierwszego i drugiego.

### 3. Przykład obliczeniowy

Uwzględniając w (2.7) warunki brzegowe (2.3) i (2.4) mamy

$$(3.1) \quad \begin{cases} A_1(X) = 0, \\ B_1(X) = -\frac{3}{16} \dot{\alpha}_1(X). \end{cases}$$

Podstawiając (3.1) do (2.7) otrzymuje się

$$(3.2) \quad T_1(X, \varrho) = \frac{1}{16} [1 - \varrho^4] \dot{\alpha}_1(X) - \frac{1}{4} [1 - \varrho^2] \dot{\alpha}_1(X).$$

Następnie (3.2) podstawia się do (2.6), co prowadzi do

$$(3.3) \quad \alpha_1(X) = 2 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{16} [1 - \varrho^4] \dot{\alpha}_1(X) - \frac{1}{4} [1 - \varrho^2] \dot{\alpha}_1(X) \right\} \varrho d\varrho.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymuje się równanie różniczkowe

$$(3.4) \quad \alpha_1(X) = -\frac{1}{12} \dot{\alpha}_1(X).$$

Całkując równanie różniczkowe (3.4) otrzymuje się

$$(3.5) \quad \alpha_1(X) = C_1 e^{-12X}.$$

Ponieważ w (3.2) występuje pochodna (3.5), wobec tego

$$(3.6) \quad \dot{\alpha}_1(X) = C_2 e^{-12X}.$$

Stałą  $C_2$  wyznacza się z warunku (2.10). W naszym przypadku warunek ten ma postać

$$(3.7) \quad \int_0^1 \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{16} (1 - \varrho^4) - \frac{1}{4} (1 - \varrho^2) \right] \dot{\alpha}_1(0) \right\} \left[ \frac{1}{16} (1 - \varrho^4) - \frac{1}{4} (1 - \varrho^2) \right] \varrho d\varrho = 0$$

Po całkowaniu (3.7) mamy

$$(3.8) \quad \dot{\alpha}_1(0) = -\frac{160}{19}.$$

Podstawiając (3.8) do (3.6) otrzymujemy

$$(3.9) \quad \dot{\alpha}_1(X) = -\frac{160}{19} e^{-12X}.$$

Ostatecznie pierwsze rozwiązanie przybliżone ma postać

$$(3.10) \quad T_1(X, \varrho) = \frac{40}{19} [1 - \varrho^2] e^{-12X} - \frac{10}{19} [1 - \varrho^4] e^{-12X}.$$

Dla wykonania drugiego przybliżenia całkujemy dwukrotnie wyrażenie (2.11) otrzymując

$$(3.11) \quad T_2(X, \varrho) = -\frac{480}{19} \left[ \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4 + \frac{1}{36} \varrho^6 \right] e^{-12X} + \frac{120}{19} \times \\ \times \left[ \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{36} \varrho^6 - \frac{1}{16} \varrho^4 + \frac{1}{64} \varrho^8 \right] e^{-12X} + \left[ \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right] \times \\ \times \dot{\alpha}_2(X) + A_2(X) \ln \varrho + B_2(X).$$

Uwzględniając w (3.11) warunki brzegowe (2.3), (2.4) wyznacza się  $A_2(X)$  i  $B_2(X)$ , które następnie podstawia się do (3.11) otrzymując

$$(3.12) \quad T_2(X, \varrho) = -\frac{15}{152} [1 - \varrho^8] e^{-12X} + \frac{50}{57} [1 - \varrho^6] e^{-12X} - \\ - \frac{105}{38} [1 - \varrho^4] e^{-12X} + \frac{1}{16} [1 - \varrho^4] \dot{\alpha}_2(X) + \frac{90}{19} [1 - \varrho^2] e^{-12X} - \frac{1}{4} [1 - \varrho^2] \dot{\alpha}_2(X).$$

Wyrażenie (3.12) i (3.10) podstawia się do (2.14), co daje

$$(3.13) \quad \alpha_2(X) = 2 \int_0^1 \left\{ -\frac{15}{152} [1 - \varrho^8] e^{-12X} + \frac{50}{57} [1 - \varrho^6] e^{-12X} - \frac{105}{38} \times \right. \\ \times [1 - \varrho^4] e^{-12X} + \frac{1}{16} [1 - \varrho^4] \dot{\alpha}_2(X) + \frac{90}{19} [1 - \varrho^2] e^{-12X} - \\ \left. - \frac{1}{4} [1 - \varrho^2] \dot{\alpha}_2(X) - \frac{40}{19} [1 - \varrho^2] e^{-12X} + \frac{10}{19} [1 - \varrho^4] e^{-12X} \right\} \varrho d\varrho.$$

Po całkowaniu (3.13) otrzymuje się następujące równanie różniczkowe typu (2.8):

$$(3.14) \quad \dot{\alpha}_2(X) + 12\alpha_2(X) = \frac{92}{19} e^{-12X}.$$

Wykorzystując następnie związek (2.9) otrzymuje się

$$(3.15) \quad \alpha_2(X) = \frac{92}{19} X e^{-12X} + C_3 e^{-12X}.$$

Ponieważ w (3.12) występuje pochodna funkcji  $\alpha_2(X)$ , to różniczkując (3.15) otrzymujemy

$$(3.16) \quad \dot{\alpha}_2(X) = \frac{92}{19} e^{-12X} - \frac{1104}{19} X e^{-12X} + C_4 e^{-12X}.$$

Stałą  $C_4$  wyznacza się podobnie jak w przypadku przybliżenia pierwszego z warunku (2.10). Warunek (2.10) w tym przypadku przyjmuje postać

$$(3.17) \quad \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{15}{152} [1 - \varrho^8] - \frac{50}{57} [1 - \varrho^6] + \frac{105}{38} [1 - \varrho^4] - \frac{90}{19} [1 - \varrho^2] - \right. \\ \left. - \dot{\alpha}_2(0) \left[ \frac{1}{16} (1 - \varrho^4) - \frac{1}{4} (1 - \varrho^2) \right] \right\} \left[ \frac{1}{4} (1 - \varrho^4) - (1 - \varrho^2) \right] \varrho d\varrho = 0.$$

W wyniku całkowania (3.17) otrzymuje się

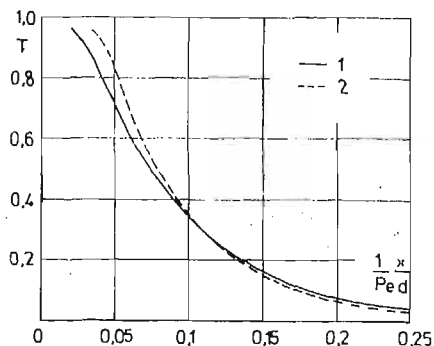
$$(3.18) \quad \dot{\alpha}_2(0) = \frac{39280}{7581}.$$

Po podstawieniu (3.18) do (3.16) mamy

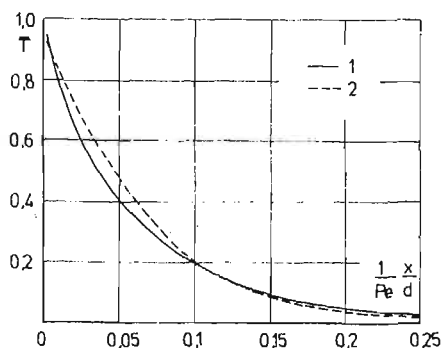
$$(3.19) \quad \dot{\alpha}_2(X) = \frac{39280}{7581} e^{-12X} - \frac{1104}{19} X e^{-12X}.$$

Podstawiając (3.19) do (3.12) otrzymuje się ostatecznie

$$(3.20) \quad T_2(X, \varrho) = -\frac{15}{152} [1 - \varrho^8] e^{-12X} + \frac{50}{57} [1 - \varrho^6] e^{-12X} - \frac{36985}{15162} \times \\ \times [1 - \varrho^4] e^{-12X} + \frac{26090}{7581} [1 - \varrho^2] e^{-12X} - \frac{69}{19} [1 - \varrho^4] X e^{-12X} + \\ + \frac{276}{19} X [1 - \varrho^2] e^{-12X}.$$



Rys. 1. Rozkład temperatury bezwymiarowej wzdłuż osi rury  
1 — rozwiązanie dokładne, 2 — rozwiązanie otrzymane w pracy



Rys. 2. Rozkład temperatury średniej po długości rury  
1 — rozwiązanie dokładne, 2 — rozwiązanie otrzymane w pracy



Залежність (3.20) порівняно з розв'язанням докладним [6] на рис. 1. Ponadto на рис. 2 przedstawiono zmianę temperatury średniej przepływającej cieczy uzyskaną w pracy w porównaniu z rozwiązaniem dokładnym [6]. Temperaturę średnią wyznaczono z zależności

$$(3.21) \quad \bar{T}_2 = 4 \int_0^1 [1 - \varrho^2] T_2 \varrho d\varrho,$$

uzyskując

$$(3.22) \quad \bar{T}_2 = \left[ \frac{253}{38} X + \frac{21809}{22743} \right] e^{-12X}.$$

#### 4. Wnioski

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że metoda усреднения функциональных поправок pozwala на określenie stosunkowo prostych zależności opisujących pole temperatury w strumieniu przepływającej cieczy. Tok obliczeń jest podobny do zmodyfikowanej metody KANTOROWICZA. Zaletą metody усреднения функциональных поправок jest mniejsza trudność przy konstruowaniu poszczególnych przybliżeń, jak również łatwiejszy dobór odpowiednich funkcji przybliżających w porównaniu do zmodyfikowanej metody KANTOROWICZA.

W pracy wykorzystano po raz pierwszy przy zastosowaniu metody усреднения функциональных поправок warunek do obliczania wartości początkowych polegający na spełnieniu postulatu najmniejszej sumy kwadratów (2.10). Warunek ten pozwala wyznaczyć stałą w równaniu (2.9), której dotychczas nie można było wyznaczyć. Ponadto w przytoczonym przykładzie dokonano усреднения функции по поверхности, co jest bardziej poprawne niż усреднение по promieniu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Ю. Д. Соколов, *О методе осреднения функциональных поправок*, УМЖ, 1, 9 (1957).
2. Ю. С. Постольник, *К вопросу о функции распределения температуры по сечению тел, нагреваемых излучением*, Изв. вузов. Черная металлургия, 6 (1968).
3. Ю. С. Постольник, *Одномерный конвективный нагрев при зависящем от времени коэффициенте теплообмена*, ИФЖ, 2, 18 (1970).
4. В. КРАJEWSKI, *Modyfikacja metody Kantorowicza*, Archiwum Termodynamiki i Spalania, 4, 7 (1976).
5. A. D. KERR, *An extension of the Kantorovich method*, Quart. Appl. Math., 2, 26 (1968).
6. Б. С. Петухов, *Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах*, Москва 1967.
7. Н. М. Матвеев, *Дифференциальные уравнения*, Минск 1976.
8. В. КРАJEWSKI, *Ein directes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion*, Int. J. Heat Mass Transfer, 16 (1973).

#### Резюме

#### МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОПРАВК

Предложена модификация метода осреднения функциональных поправок, которая объяснена на примере решения дифференциального уравнения параболического типа. Даны указания по получению приближенных решений. Полученные результаты удовлетворительно аппроксимируют точные решения.

## Summary

## AN EXTENSION OF THE AVERAGING METHOD OF FUNCTIONAL ERRORS

An extension of the method of averaging of functional errors is discussed. The suggested method explained on an example of a differential parabolic equations. A special set of conditions is also presented which allows to choose a trial function. The results obtained were shown to approximate fairly well the exact solutions.

INSTYTUT APARATURY PRZEMYSŁOWEJ I ENERGETYKI  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lipca 1977 r.*

---

ITERACYJNA METODA OBLICZANIA DOWOLNYCH CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH  
W ZAKRESIE LINIOWO SPRĘŻYSTYM

JÓZEF WRANIK (BIELSKO-BIAŁA)

1. Wstęp

Praca niniejsza stanowi uogólnienie prac [1, 10, 11, 12, 13] i dotyczy rozwiązywania metodą iteracyjną dowolnych ciał odkształcalnych w zakresie liniowo sprężystym. Można również korzystać z niej przy rozwiązywaniu równań z operatorami liniowymi.

Przedstawiana metoda ma wiele cech wspólnych z metodą perturbacji [2, 8] i jest w pewnym sensie jej uogólnieniem. W metodzie perturbacji [8] wprowadza się do równania parametr perturbacyjny  $\varepsilon$  przyjmujący wartości z przedziału  $[0, 1]$ . Równanie operatorowe

$$(1.1) \quad \mathcal{U}Z = g$$

przyjmuje wówczas postać równania zastępczego

$$(1.2) \quad \mathcal{U}(\varepsilon)Z_\varepsilon = g,$$

a dla szczególnych wartości  $\varepsilon$ , np.  $\varepsilon = 0$ , otrzymujemy równanie

$$(1.3) \quad \mathcal{U}\dot{Z} = g,$$

które rozwiązuje się prościej, lub którego rozwiązanie jest znane.

Rozwijając rozwiązanie  $Z_\varepsilon$  równania (1.2) w szereg zbieżny względem potęg  $\varepsilon$ , otrzymuje się ciąg równań, z których przy szczególnej wartości  $\varepsilon$  np.  $\varepsilon = 0$ , wyznacza się kolejne przybliżenia, a rozwiązaniem równania (1.2) jest wspomniany szereg dla  $\varepsilon = 1$ .

FUNG w pracy [2] przedstawia dla szczególnego przypadku zagadnienia teorii sprężystości metodę zaburzeń przez zmianę współczynnika Poissona  $\nu$  (metoda pomysłu WESTERGAARDA). Można zauważyć, że wprowadzenie parametru perturbacyjnego  $\varepsilon$  jako mnożnika  $\nu$  zmienia wartość  $\nu$ , a tym samym zmienia operator równania Naviera. WESTERGAARD nie wprowadza w sposób jawny współczynnika  $\varepsilon$ , dobiera jednak taką szczególną wartość  $\nu = m$ , aby rozwiązanie równania Naviera było prostsze lub znane.

W metodzie iteracji, proponowanej w niniejszej pracy, również nie operuje się w sposób jawny parametrami zaburzającymi stan dany, lecz przyjmuje się operator zastępczy prostszy (lub ciało zastępcze prostsze), zbliżony swą postacią do danego, taki jednak, aby otrzymywany szereg był zbieżny. Za pomocą przyjętego operatora zastępczego, stacjonarnego dla procesu iteracyjnego, rozwiązuje się ciąg zagadnień prostszych, z których tworzy się szereg nieskończony, zbieżny do rozwiązania danego.

Jedną z zalet proponowanej metody jest możliwość przeprowadzenia oceny błędów, jakie się popełnia przy rozwiązywaniu zagadnień teorii sprężystości, w przypadku idealizacji ciała odkształcalnego, gdy np. ciało niejednorodne zastępujemy w obliczeniach ciałem jednorodnym, lub anizotropowe — ciałem izotropowym, itp.

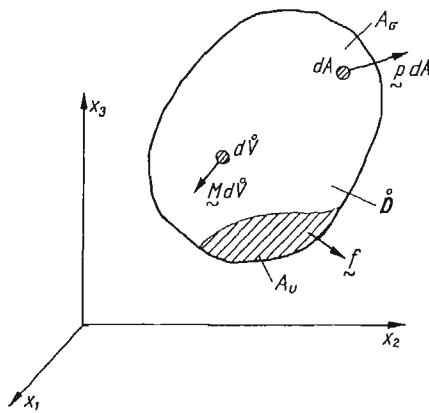
Ocena błędów jest tu prostsza niż np. w metodzie elementów skończonych, za pomocą której oszacowanie wpływu cech sprężystości ciała na wyniki obliczeń jest możliwe wyłącznie przez porównanie rozwiązań.

W opracowaniu skorzystano z zapisu operatorowego, oznaczając operatory wyróżnionym drukiem np.  $\mathcal{U}$ , i opierając się na stwierdzeniu, że «działaniom na operatorach w  $C^n$  odpowiadają analogiczne działania na odpowiadających im macierzach według reguł algebry liniowej» [5].

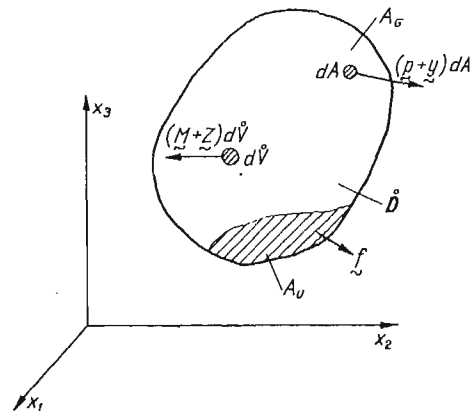
Używać będziemy prostokątnego kartezjańskiego układu współrzędnych odniesienia; w układzie takim znika różnica między kontrawariantnością i kowariantnością, w związku z czym prowadzenie przekształceń za pomocą rachunku tensorowego sprowadziłoby się wyłącznie do notacji tensorowej, operującej wskaźnikami, które tu zajmowałyby miejsce innym wskaźnikiem, niezbędnym z fizycznego punktu widzenia. W tym przypadku wygodniejsza będzie notacja operatorowa i macierzowa. Składowe stanów naprężenia i odkształcenia traktować będziemy jako składowe wektorów.

## 2. Sformułowanie problemu

Dane jest dowolne ciało  $V$  stałe odkształcalne i sprężyste, anizotropowe lub niejednorodne (rys. 1) z dowolnymi warunkami brzegowymi (trzęcie podstawowe zagadnienie brzegowe), w którym na powierzchni  $A_\sigma$  dane są obciążenia  $\mathbf{p}$ , a na powierzchni  $A_u$  — przemieszczenia  $\mathbf{f}$  [6].



Rys. 1. Ciało dane  $V$  (układ dany  $U$ ) \*



Rys. 2. Ciało zastępcze  $\tilde{V}$

Rozwiązanie tego zagadnienia można przeprowadzić za pomocą pewnego z a s t ę p - c z e g o c i a ł a s p r ęż y s t e g o  $\tilde{V}$ , przystającego geometrycznie do ciała  $V$ , o identycznych jak w ciele  $V$  powierzchniach  $A_\sigma$  i  $A_u$  ograniczających ciało (rys. 2). Zakładamy, że jest możliwe rozwiązanie ciała zastępczego. Będzie to więc z zasady ciało o prostszych cechach fizycznych np. izotropowe i jednorodne.

Punktem wyjścia jest równoważność obu ciał pod względem pól przemieszczeń, przy wynikających stąd różnych polach sił. Można więc stwierdzić, że siły masowe  $\mathbf{M}$  (znane)

\* Symbole podkreślone wężykami na rysunkach odpowiadają symbolom pogrubionym w tekście.

obciążające ciało  $V$  nie są równe siłom masowym  $\mathbf{M} + \mathbf{Z}$  (nieznanym), obciążającym ciało zastępcze  $\dot{V}$ , oraz odpowiednio obciążenia  $\mathbf{p}$  (znane) na powierzchni  $A_\sigma$  ciała  $V$  nie są równe obciążeniom  $\mathbf{p} + \mathbf{y}$  (nieznanym) na powierzchni  $A_\sigma$  ciała  $\dot{V}$ . Przemieszczenia  $\mathbf{f}$  na  $A_u$  natomiast są sobie równe w obu ciałach  $V$  i  $\dot{V}$ , co wynika z założonej równości pól przemieszczeń.

Gdyby znane były siły masowe  $\mathbf{Z}$  i siły powierzchniowe  $\mathbf{Y}$ , to przy założonej możliwości rozwiązania ciała  $\dot{V}$  można by obliczyć przemieszczenia  $\dot{\mathbf{U}}$ , które z kolei przy założonej równości pól przemieszczeń ciał  $V$  i  $\dot{V}$  byłyby podstawą do określenia sił wewnętrznych w ciele  $V$ . Problemem podstawowym jest tu więc (pomijając rozwiązanie ciała  $\dot{V}$ ) określenie niewiadomych sił  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{y}$ .

Można zauważyć analogię do metody sił dla układów prętowych lub dla ciał z niejednorodnymi warunkami brzegowymi, w której przyjmuje się układ zastępczy z niewiadomymi siłami (tu odpowiednio  $\dot{V}$ ,  $\mathbf{M} + \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{p} + \mathbf{y}$ ), a następnie z warunków nierozdzielności (tu  $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$ ) określa się równania algebraiczne lub całkowe z niewiadomymi siłami.

Równoważność obu układów przedstawionych na rys. 1 i 2 pod względem pól przemieszczeń można udowodnić, rozpatrując zadanie odwrotne do sformułowanego i opierając się na twierdzeniu Kirchoffa o jednoznaczności rozwiązań zagadnień teorii sprężystości dla ciała liniowo sprężystego z dodatnio określoną funkcją energii odkształcenia.

Założmy, że znane są siły masowe  $\mathbf{M} + \mathbf{Z}$  i  $\mathbf{p} + \mathbf{y}$  w ciele  $\dot{V}$ ; korzystając np. z relacji (2.2) obliczyć możemy  $\dot{\mathbf{U}}$ , a następnie na podstawie (2.1) określamy wektor  $\mathbf{U}$ , który jest podstawą do jednoznacznego (uwagi końcowe pracy) określenia wektora odkształceń  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

Wektor odkształceń  $\boldsymbol{\epsilon}$  wyznacza jednoznacznie naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  w ciele  $V$  (2.6), a te z kolei określają jednoznacznie siły masowe  $\mathbf{M}$  i siły powierzchniowe  $\mathbf{p}$ . Zadanie postawione jest więc również jednoznacznie określone, a tym samym istnieje realna możliwość doboru sił  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{y}$  takich, by układy, dany i zastępczy, były sobie równoważne.

Wektor przemieszczeń  $\dot{\mathbf{U}}$  w ciele  $\dot{V}$  można przedstawić za pomocą tensora przemieszczeniowego Greena  $\dot{\mathbf{U}}$  ciała  $\dot{V}$ , w postaci równań całkowych, w których niewiadomymi funkcjami są składowe wektorów  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{y}$ .

Korzystając z założonej równości

$$(2.1) \quad \mathbf{U} = \dot{\mathbf{U}},$$

otrzymujemy

$$(2.2) \quad \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U} = \int_V \dot{\mathbf{U}} \mathbf{Z} dV + \int_A \dot{\mathbf{U}} \mathbf{y} dA - \int_A \dot{\mathbf{P}} \mathbf{f} dA + \int_V \dot{\mathbf{U}} \mathbf{M} dV + \int_A \dot{\mathbf{U}} \mathbf{p} dA,$$

gdzie  $\dot{\mathbf{U}}$  oznacza tensor przemieszczeniowy Greena ciała  $\dot{V}$ ,  $\dot{\mathbf{P}}$  macierz oddziaływań dla ciała  $\dot{V}$  na powierzchni  $A_u$  przy obciążeniu w punkcie  $\boldsymbol{\xi}$  siłą masową  $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{Z}$  wektor nieznanymi sił masowych w ciele  $\dot{V}$ ,  $\mathbf{y}$  wektor nieznanymi sił powierzchniowych na powierzchni  $A_\sigma$  w ciele  $\dot{V}$ .

Zauważmy, że siły masowe i powierzchniowe w ciałach  $V$  i  $\dot{V}$  można przedstawić następująco:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{M} &= -\mathfrak{B} \mathfrak{D}^{-1} \bar{\mathfrak{J}} \mathfrak{W}^T \mathbf{U}, & \mathbf{M} + \mathbf{Z} &= -\mathfrak{B} \mathfrak{D}^{-1} \bar{\mathfrak{J}} \mathfrak{W}^T \dot{\mathbf{U}}, \\ \mathbf{p} &= \mathfrak{H} \mathfrak{D}^{-1} \bar{\mathfrak{J}} \mathfrak{W}^T \mathbf{U}, & \mathbf{p} + \mathbf{y} &= \mathfrak{H} \mathfrak{D}^{-1} \bar{\mathfrak{J}} \mathfrak{W}^T \dot{\mathbf{U}}, \end{aligned}$$

gdzie  $\mathfrak{W}$  oznacza operator różniczkowy równań równowagi,  $\mathfrak{W}^T$  transponowany operator różniczkowy równań równowagi,  $\mathfrak{D}$  macierz cech sprężystości ciała  $V$ ,  $\bar{\mathfrak{D}}$  macierz cech

sprężystości ciała zastępczego  $\dot{V}$ ,  $\mathfrak{H}$  macierz kosinusów kierunkowych normalnej do powierzchni  $A_\sigma$  ciała  $V$  lub  $\dot{V}$ .

A zatem

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{B}^T\mathbf{U} = \boldsymbol{\epsilon}, \quad \bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{B}^T\dot{\mathbf{U}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}},$$

$$\mathfrak{H} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & 0 & 0 & \cos \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_3 \\ 0 & \cos \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_3 & 0 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & 1 & \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \\ 0 & & & \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy stąd po przekształceniach

$$(2.4) \quad \mathbf{Z} = -\mathfrak{B}(\mathfrak{D}^{-1} - \mathfrak{D}^{-1})\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{B}^T\dot{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{y} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}^{-1} - \mathfrak{D}^{-1})\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{B}^T\dot{\mathbf{U}}.$$

Podstawiając (2.4) do (2.2) otrzymamy również

$$(2.5) \quad \dot{\mathbf{U}} = - \int_V \dot{\mathbf{U}}\mathfrak{B}(\mathfrak{D}^{-1} - \mathfrak{D}^{-1})\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{B}^T\dot{\mathbf{U}}dV + \int_A \dot{\mathbf{U}}\mathfrak{H}(\mathfrak{D}^{-1} - \mathfrak{D}^{-1})\bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{B}^T\dot{\mathbf{U}}dA + \\ - \int_A \mathfrak{P}fdA + \int_V \dot{\mathbf{U}}MdV + \int_A \dot{\mathbf{U}}pdA.$$

Otrzymaliśmy układ równań całkowych z niewiadomymi składowymi wektora przemieszczeń  $\dot{\mathbf{U}}$ . Po obliczeniu wektora  $\dot{\mathbf{U}}$  obliczymy z (2.3) obciążenia ciała  $\dot{V}$ . Spełnione jest (2.1). Siły wewnętrzne i odkształcenia ciała  $V$  obliczymy w zwykły sposób według wzorów

$$(2.6) \quad \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\mathfrak{J}}\mathfrak{B}^T\mathbf{U}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{D}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}.$$

Rozwiązanie układu równań całkowych (2.5) jest problemem złożonym o dużym stopniu trudności. Spróbujemy go rozwiązać, omijając równania całkowe w postaci (2.5), a korzystając z proponowanej metody iteracji.

### 3. Matematyczne sformułowanie metody iteracji

Równania operatorowe, przedstawione w postaci

$$(3.1) \quad \mathbf{z} = \mathfrak{U}\mathbf{z} + \mathbf{g}$$

dobrze nadają się do iteracyjnego rozwiązywania i są szeroko omówione np. w pracach [4, 7, 8, 9].

Słabo opracowane są metody iteracyjne równań operatorowych w postaci

$$(3.2) \quad \mathfrak{U}\mathbf{z} = \mathbf{g}$$

i nie w każdym przypadku można je sprowadzić do postaci (3.1), [4]. Proponowana metoda iteracji nadaje się zarówno dla równań typu (3.1), jak i (3.2), bez konieczności sprowadzania równań do postaci (3.1).

Niech dane będzie równanie operatorowe (3.2) z określonymi warunkami granicznymi, gdzie  $\mathcal{U}$  jest operatorem liniowym,  $\mathbf{g}$  — danym elementem przestrzeni wektorowej. Pod pojęciem operacji rozumiemy tu będziemy operację, która funkcji  $\mathbf{z}$  przyporządkowuje funkcję  $\mathcal{U}\mathbf{z}$ , przy czym może to być operacja różniczkowania, całkowania, przekształcenia za pomocą macierzy, bądź też operacja związana z jakąkolwiek metodą rozwiązywania ciała odkształcalnego, lub innego dowolnego obiektu.

Załóżmy, że przedstawienie rozwiązania równania (3.2) w postaci zamkniętej jest trudne lub niemożliwe i przyjmijmy, że istnieje taki operator zastępczy  $\dot{\mathcal{U}}$ , za pomocą którego równanie o postaci

$$(3.3) \quad \dot{\mathcal{U}}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}$$

jest rozwiązywalne, czyli

$$(3.4) \quad \dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathcal{U}}^{-1}\mathbf{g}.$$

Jeżeli operator  $\dot{\mathcal{U}}$  jest «zbliżony» do operatora  $\mathcal{U}$ , wówczas rozwiązanie (3.4) możemy traktować jako przybliżenie poszukiwanego wektora  $\mathbf{z}$ , czyli  $\mathbf{z} \cong \dot{\mathbf{z}}$ .

Przeprowadźmy operację  $\mathcal{U}$  na wektorze  $\dot{\mathbf{z}}$ , otrzymamy

$$(3.5) \quad \mathcal{U}\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{g}},$$

a podstawiając do (3.5) rozwiązanie (3.4) otrzymamy

$$(3.6) \quad \dot{\mathbf{g}} = \mathcal{S}\mathbf{g},$$

gdzie operator  $\mathcal{S} = \mathcal{U}\dot{\mathcal{U}}^{-1}$ .

Przedstawmy rozwiązanie  $\mathbf{z}$  i wektor  $\mathbf{g}$  w postaci

$$(3.7a) \quad \mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}} + \Delta_1 \mathbf{z},$$

$$(3.7b) \quad \mathbf{g} = \dot{\mathbf{g}} + \Delta_1 \mathbf{g}.$$

Przy podstawieniu (3.7) do (3.2) otrzymamy

$$\dot{\mathcal{U}}\dot{\mathbf{z}} + \mathcal{U}\Delta_1 \mathbf{z} = \dot{\mathbf{g}} + \Delta_1 \mathbf{g},$$

a stąd

$$(3.8) \quad \mathcal{U}\Delta_1 \mathbf{z} = \Delta_1 \mathbf{g}.$$

Ponieważ na podstawie (3.7b):

$$\Delta_1 \mathbf{g} = \mathbf{g} - \dot{\mathbf{g}} = (\mathfrak{J} - \mathcal{S})\mathbf{g}, \quad \text{gdzie } \mathfrak{J}\mathbf{g} = \mathbf{g},$$

otrzymamy

$$(3.9) \quad \mathcal{U}\Delta_1 \mathbf{z} = \mathbf{r}\mathbf{g},$$

gdzie  $\mathbf{r} = \mathfrak{J} - \mathcal{S}$  jest operatorem, a  $\mathfrak{J}$  operatorem jednostkowym [4].

Otrzymane równanie (3.9) jest podobne do równania (3.2). Postępując identycznie jak z równaniem (3.2) otrzymamy następnne przybliżenie  $\Delta_1 \dot{\mathbf{z}}$  oraz  $\Delta_2 \dot{\mathbf{g}}$  i  $\Delta_2 \mathbf{g}$ .

W kolejnym  $i$ -tym kroku iteracyjnym otrzymamy

$$(3.10a) \quad \Delta_{i-1} \dot{z} = \dot{U}^{-1} r^{-1} g,$$

$$(3.10b) \quad \Delta_{i-1} \dot{g} = \mathfrak{S} r^{i-1} g,$$

$$(3.10c) \quad \Delta_i g = r^i g,$$

gdzie operacja  $r^i$  wyraża się wzorem rekurencyjnym:

$$(3.11) \quad r^i g = r(r^{i-1} g).$$

W rezultacie otrzymujemy ciąg wektorów  $\Delta_i \dot{z}$  i w myśl (3.7) rozwiązanie możemy przedstawić w postaci

$$(3.12) \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i \dot{z},$$

przy czym  $\Delta_0 \dot{z} = \dot{z}$ .

Korzystając z (3.10a) otrzymamy

$$(3.13) \quad z = \dot{U}^{-1}(g + r g + r^2 g + \dots + r^i g + \dots)$$

lub

$$(3.14) \quad z = \dot{U}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} r^i g,$$

przy czym operacja  $r^0 g = \mathfrak{I} g = g$ .

Jeżeli założymy, że szereg (3.13) jest jednostajnie zbieżny w obszarze rozpatrywanym i że wykonalne są operacje  $\mathfrak{U}$ ,  $\dot{\mathfrak{U}}$ ,  $\dot{\mathfrak{U}}^{-1}$  w tym obszarze, to podstawiając (3.13) do (3.2), otrzymamy

$$\mathfrak{U} z = \dot{\mathfrak{U}} \dot{\mathfrak{U}}^{-1}(g + r g + r^2 g + \dots) = \mathfrak{S} g + \mathfrak{S} r g + \mathfrak{S} r^2 g + \dots = \dot{g} + \Delta_1 \dot{g} + \Delta_2 \dot{g} + \dots = g,$$

co należało wykazać.

Zbieżność szeregu (3.14) zależy od operatora  $r$ , a co za tym idzie od operatora zastępczego  $\dot{\mathfrak{U}}$ . Warunki, jakie spełniać musi operator  $\dot{\mathfrak{U}}$ , aby szereg (3.14) był jednostajnie zbieżny, muszą być rozpatrywane niezależnie dla poszczególnych zagadnień fizyki czy matematyki (zagadnienia teorii sprężystości, równania algebraiczne, równania różniczkowe, równania całkowe).

W większości zagadnień nie jest możliwe przedstawienie rozwiązania w postaci (3.14) z powodu trudności w określeniu operatora  $r$ . W takim przypadku rozwiązanie przeprowadzić można wg algorytmu, który doprowadził do szeregu (3.14), a  $\dot{\mathfrak{U}}^{-1} g$  traktować jako symbol określający rozwiązanie układu zastępczego. Jako przykłady zastosowania podanego sposobu mogą posłużyć prace [1, 10, 11, 12, 13].

Niżej ilustruje się podaną metodę przykładem równania różniczkowego drugiego rzędu, w którym operatora  $r$  nie wyznaczamy. Zagadnienie równań różniczkowych wymaga niewątpliwie osobnego rozpatrzenia.

Dane jest równanie

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \alpha^2 z = 0,$$

przy czym  $z(0) = 0$  i  $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} = a$ . Tutaj  $\mathfrak{U} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2\right)$ ,  $g = 0$ .



Przyjmijmy operator zastępczy  $\dot{\mathcal{U}} = d^2/dx^2$ . Otrzymamy przy uwzględnieniu warunków początkowych

$$\dot{z} = \dot{\mathcal{U}}^{-1}g = ax$$

oraz

$$\dot{g} = \mathcal{U}\dot{z} = \mathcal{U}(ax) = \alpha^2 ax, \quad \Delta_1 g = g - \dot{g} = rg = -\alpha^2 ax.$$

W drugim kroku iteracyjnym otrzymujemy równanie:

$$\mathcal{U}\Delta_1 z = -\alpha^2 ax$$

oraz

$$\Delta_1 \dot{z} = \dot{\mathcal{U}}^{-1}(-\alpha^2 ax) = -\alpha^2 a \frac{x^3}{3!}, \quad \Delta_1 \dot{g} = \mathcal{U}\left(-\alpha^2 a \frac{x^3}{3!}\right) = -\alpha^2 ax - \alpha^4 a \frac{x^3}{3!},$$

$$\Delta_2 g = \Delta_1 g - \Delta_1 \dot{g} = \alpha^4 ax^3, \quad \mathcal{U}\Delta_2 z = \alpha^4 a \frac{x^3}{3!}.$$

Postępując podobnie otrzymamy według (3.13)

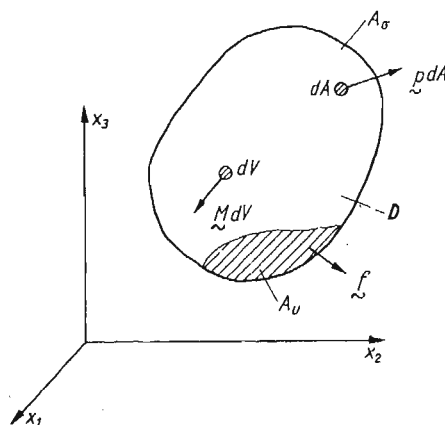
$$z = ax - a\alpha^2 \frac{x^3}{3!} + a\alpha^4 \frac{x^5}{5!} - \dots = \frac{a}{\alpha} \left( \alpha x - \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} - \dots \right)$$

więc  $z = \frac{a}{\alpha} \sin(\alpha x)$ .

#### 4. Zastosowanie metody iteracyjnej do dowolnego ciała odkształcalnego

Problem sformułowany w p. 2 rozwiążemy metodą iteracyjną zgodnie z p. 3.

Konieczne jest wprowadzenie dodatkowych symboli na następujące układy: ciało  $V$  z danymi warunkami brzegowymi nazwiemy układem danym  $U$  (rys. 1), ciało zastępcze  $\dot{V}$  z określonymi przez układ  $U$  warunkami brzegowymi nazwiemy układem zastępczym  $\dot{U}$  (rys. 3), ciało  $V$  z warunkami brzegowymi wynikającymi z rozwiązania układu zastępczego  $\dot{U}$  oznaczymy przez  $W$ . Niewiadome siły masowe  $Z$  i powierzchniowe  $y$  wyznaczmy na drodze iteracyjnej.



Rys. 3. Układ zastępczy  $\dot{U}$

Założeniem podstawowym metody jest znajomość lub możliwość rozwiązania ciała zastępczego obciążonego dowolnie siłami masowymi i powierzchniowymi. Ponieważ ciało zastępcze ma charakterystyki zbliżone do charakterystyk ciała danego, można przypusz-

czać, że obciążenie ciała zastępczego, tak jak ciała danego, da również zbliżone rozwiązania (3.3).

W początkowym kroku iteracyjnym obciążamy więc ciało zastępcze siłami danymi  $\mathbf{p}$  na powierzchni  $A_\sigma$ , danymi siłami masowymi  $\mathbf{M}$  oraz danymi przemieszczeniami  $\mathbf{f}$  na powierzchni  $A_u$ .

Z rozwiązania układu zastępczego  $\dot{U}$  podobnie do (3.4) otrzymujemy: wektor naprężeń  $\dot{\sigma}$ , wektor przemieszczeń  $\dot{\mathbf{u}}$  i wektor odkształceń  $\dot{\epsilon}$ . Założona w p. 2 równoważność pól przemieszczeń ciał  $V$  i  $\dot{V}$  daje relację

$$(4.1) \quad \overset{w}{\epsilon} = \dot{\epsilon}$$

równoznaczną z wymuszeniem w ciele  $V$  odkształceń  $\dot{\epsilon}$ .

Otrzymujemy układ  $W$ . Naprężenia  $\overset{w}{\sigma}$  i obciążenia  $\overset{w}{\mathbf{M}}$  i  $\overset{w}{\mathbf{p}}$  układu  $W$  obliczymy korzystając z równości (4.1), mianowicie

$$(4.2) \quad \mathcal{D}\overset{w}{\sigma} = \dot{\mathcal{D}}\dot{\sigma}.$$

Przekształcając (4.2) otrzymamy (patrz (3.5), (3.6)),

$$(4.3) \quad \overset{w}{\sigma} = \mathcal{S}\dot{\sigma},$$

gdzie

$$(4.4) \quad \mathcal{S} = \mathcal{D}^{-1}\dot{\mathcal{D}}$$

Korzystając z (2.3) i (4.3) otrzymujemy obciążenia układu  $W$ :  
siły masowe

$$(4.5a) \quad \overset{w}{\mathbf{M}} = -\mathcal{W}\overset{w}{\sigma} = -\mathcal{W}\mathcal{S}\dot{\sigma},$$

siły powierzchniowe

$$(4.5b) \quad \overset{w}{\mathbf{p}} = \mathcal{H}\overset{w}{\sigma} = \mathcal{H}\mathcal{S}\dot{\sigma}.$$

Rozwiązanie układu  $U$  przedstawimy w postaci podobnej do (3.7), tj.

$$(4.6) \quad U = W + \Delta_1 U,$$

przy czym w miejsce symboli  $U$ ,  $W$ ,  $\Delta_1 U$  w równaniu (4.6) można podstawić odpowiednie wektory odkształceń, wówczas  $\epsilon = \overset{w}{\epsilon} + \Delta_1 \epsilon$ , wektory przemieszczeń —  $\mathbf{u} = \overset{w}{\mathbf{u}} + \Delta_1 \mathbf{u}$ , naprężeń —  $\sigma = \overset{w}{\sigma} + \Delta_1 \sigma$ , siły masowe —  $\mathbf{M} = \overset{w}{\mathbf{M}} + \Delta_1 \mathbf{M}$ , lub siły powierzchniowe —  $\mathbf{p} = \overset{w}{\mathbf{p}} + \Delta_1 \mathbf{p}$ .

Otrzymamy obciążenia układu  $\Delta_1 \mathbf{u}$  w postaci

$$(4.7a) \quad \Delta_1 \mathbf{p} = \mathcal{H}\mathbf{r}\dot{\sigma},$$

$$(4.7b) \quad \Delta_1 \mathbf{M} = -\mathcal{W}\mathbf{r}\dot{\sigma},$$

$$(4.7c) \quad \Delta_1 \mathbf{f} = 0,$$

gdzie

$$(4.8) \quad \mathbf{r} = \mathcal{J} - \mathcal{S}, \quad \mathcal{J} \text{ — macierz jednostkowa.}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ  $\Delta_1 U$ , który jest ciałem  $V$  z siłami  $\Delta_1 \mathbf{p}$  (4.7a) na powierzchni  $A_\sigma$ , z siłami masowymi  $\Delta_1 \mathbf{M}$  (4.7b) i zerowymi przemieszczeniami  $\Delta_1 \mathbf{f} = 0$  (4.7c) na powierzchni  $A_u$ .

Rozwiązanie układu  $\Delta_1 U$  można przedstawić w postaci analogicznej do (4.6)

$$(4.9) \quad \Delta_1 U = \Delta_1 W + \Delta_2 U,$$

przy czym układ  $\Delta_1 W$  otrzymujemy w drugim kroku iteracyjnym, podobnie do układu  $W$ .

W kolejnym  $i$ -tym kroku iteracyjnym otrzymamy:

obciążenia układu  $\Delta_i \dot{U}$

$$(4.10a) \quad \Delta_i \dot{\mathbf{p}} = \Delta_i \mathbf{p} = \mathfrak{H}r \Delta_{i-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

$$(4.10b) \quad \Delta_i \dot{\mathbf{M}} = \Delta_i \mathbf{M} = -\mathfrak{B}r \Delta_{i-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

rozwiązanie układu  $\Delta_i U$  w postaci wektorów naprężeń  $\Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}$  i odkształceń  $\Delta_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ , odkształcenia w układzie  $\Delta_i W$

$$(4.11) \quad \Delta_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \Delta_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}},$$

naprężenia w układzie  $\Delta_i W$ ,

$$(4.12) \quad \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathfrak{S} \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

obciążenia układu  $\Delta_i W$

$$(4.13) \quad \Delta_i \dot{\mathbf{M}} = -\mathfrak{B} \mathfrak{S} \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \Delta_i \dot{\mathbf{p}} = \mathfrak{H} \mathfrak{S} \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

obciążenia układu  $\Delta_{i+1} U$

$$(4.14a) \quad \Delta_{i+1} \mathbf{p} = \mathfrak{H}r \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

$$(4.14b) \quad \Delta_{i+1} \mathbf{M} = -\mathfrak{B}r \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Rozwiązanie układu  $\Delta_i U$  przedstawić możemy podobnie do (4.6) i (4.9) w postaci

$$(4.15) \quad \Delta_i U = \Delta_i W + \Delta_{i+1} U,$$

a stąd wynika przedstawienie rozwiązania układu  $U$  w postaci nieskończonego szeregu:

$$(4.16) \quad U = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i W.$$

Postać (4.16) rozwiązania możemy przedstawić przy wykorzystaniu (4.15) następująco:

$$(4.17) \quad U = U - \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_{i+1} U.$$

Związek (4.17) jest dowodem zbieżności szeregu (4.16) przy warunku

$$(4.18) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_{i+1} U = 0.$$

Można zauważyć, że o wielkościach składowych wektorów obciążenia  $\Delta_i \mathbf{p}$  i  $\Delta_i \mathbf{M}$  decyduje macierz  $r$ ; wzory (4.10) i (4.14). Jeżeli macierz  $r$  dobierzemy tak, aby spełnione były nierówności:

$$(4.19) \quad \|\Delta_{i+1} \mathbf{p}\| < \|\Delta_i \mathbf{p}\|, \quad \|\Delta_{i+1} \mathbf{M}\| < \|\Delta_i \mathbf{M}\|,$$

wówczas również normy wektorów naprężenia i odkształcenia będą maleć z kolejnym krokiem iteracyjnym, co wynika wprost z (4.14) i definicji normy. Otrzymamy

$$\|\mathfrak{B}r \Delta_{i+1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\| < \|\mathfrak{B}r \Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}\|,$$

a stąd

$$(4.20) \quad \|\Delta_{i+1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\| < \|\Delta_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}\|$$

i podobnie

$$(4.21) \quad \|\Delta_{i+1}\dot{\mathbf{e}}\| < \|\Delta_i\dot{\mathbf{e}}\|.$$

Przy  $i \rightarrow \infty$  normy wektorów zmierzają do zera, a tym samym składowe odpowiednich wektorów osiągną wartości zerowe.

Zagadnieniem osobnym jest możliwość spełnienia warunków (4.19). Mogą one być spełnione przy takim doborze macierzy  $\mathbf{r}$ , aby zachodziła nierówność

$$(4.22) \quad \|\mathbf{r}\| < 1,$$

wynikająca z twierdzeń związanych ze zbieżnością szeregu macierzowego.

Macierz  $\mathbf{r}$  (4.8) określona jest przez ciało zastępcze  $\check{V}$ ; zatem im bliższe będzie ono ciału danemu  $V$ , tym norma macierzy  $\mathbf{r}$  będzie mniejsza, a zbieżność lepsza. Zważając na możliwość rozwiązania ciała zastępczego  $\check{V}$  dobierzemy jego charakterystyki jak najprostsze, np. ciało izotropowe, jednorodne i jednospójne. Przy z góry określonym rodzaju ciała zastępczego różniącego się dość znacznie od ciała danego, zachodzi problem optymalnego doboru wartości charakterystyk ciała zastępczego ze względu na nierówność (4.22).

Zagadnienie ciała zastępczego wygodniej jest rozpatrywać dla określonego rodzaju ciała danego (tarcze, płyty, powłoki); problem ten będzie przedmiotem osobnych opracowań.

Obliczmy jeszcze obciążenia  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{y}$ . Podobnie do (4.16), możemy utworzyć szereg nieskończony z ciągu rozwiązań  $\Delta_i \dot{U}$ , wtedy

$$(4.23) \quad \mathbf{M} + \mathbf{Z} = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{p} + \mathbf{y} = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}} + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{p}}.$$

Korzystając z (4.10) otrzymamy

$$(4.24) \quad \mathbf{Z} = -\mathfrak{B}\mathfrak{r}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{i-1} \dot{\mathbf{\sigma}}\right), \quad \mathbf{y} = \mathfrak{S}\mathfrak{r}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{i-1} \dot{\mathbf{\sigma}}\right),$$

lub

$$(4.25) \quad \mathbf{Z} = -\mathfrak{B}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{\sigma}}\right), \quad \mathbf{y} = \mathfrak{S}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \dot{\mathbf{\sigma}}\right),$$

ponieważ  $\Delta_i \dot{\mathbf{M}} = -\mathfrak{B}\Delta_i \dot{\mathbf{\sigma}}$  i  $\Delta_i \dot{\mathbf{p}} = \mathfrak{S}\Delta_i \dot{\mathbf{\sigma}}$ .

## 5. Uwagi końcowe

Rozważmy jeszcze związane z samonaprężeniami zagadnienie jednoznaczności rozwiązania. Czy narzucając w układzie  $\Delta_i \mathcal{W}$  przemieszczenia otrzymujemy jednoznacznie określone naprężenia? Odkształcenia niezależne od sił zewnętrznych powodują wystąpienie samonaprężeń tylko wtedy, gdy nie spełniają warunków nierozdzielności [3]. W przypadkach rozpatrywanych warunki nierozdzielności są zawsze spełnione, gdyż wektor odkształceń narzucony w układzie  $\Delta_i \mathcal{W}$  ciała danemu jest wzięty z rozwiązania układu  $\Delta_i \dot{U}$ , który możemy zawsze rozwiązać jednoznacznie.

Rozwiązanie w każdym kroku iteracyjnym jest więc jednoznaczne, a tym samym i suma szeregu nieskończonego — lub w rozwiązaniu przybliżonym suma częściowa — są jednoznacznie określone.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. BUDZIANOWSKI, F. ANDERMANN, J. WRANIK, *Pewien iteracyjny sposób wyznaczania naprężeń w tarczach wielospójnych*, Mech. Teor. i Stos., 2, 12 (1974).
2. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, Warszawa, 1969.
3. M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, Część I, Warszawa 1954.
4. А. Ю. Лучка, *Теория и применение метода осреднения функциональных поправок*, Киев 1963.
5. W. MŁAK, *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, Warszawa 1970.
6. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, Warszawa 1970.
7. A. PISKOREK, *Równania całkowite*, Warszawa 1971.
8. G. N. POŁOŻY, *Metody przybliżonych obliczeń*, Warszawa 1966.
9. Ю. Д. Соколов, *Метод осреднения функциональных поправок*, Киев 1967.
10. J. WRANIK, *Iteracyjna metoda obliczania tarcz o ciągłej zmianie grubości według funkcji jednej zmiennej*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budownictwo, 41 (1976).
11. J. WRANIK, *Iteracyjne odwracanie macierzy kwadratowych występujących w mechanice budowli*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budownictwo, 41 (1976).
12. J. WRANIK, *Iteracyjna metoda obliczania tarcz w zakresie liniowo sprężystym*, Materiały XVIII Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, Wisła, wrzesień 1976.
13. J. WRANIK, *Iteracyjna metoda obliczania dowolnych tarcz w zakresie liniowo sprężystym*, II nagroda na konkursie PTMTS, Poznań, grudzień 1976.

#### Резюме

#### ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЛИНЕЙНО УПРУГИХ ТЕЛ

В работе представлен общий итерационный метод, который можно применять как при решении произвольных линейно упругих тел, обладающих положительно определенной функцией энергии деформации, так и при решении некоторых математических задач.

Применительно к задачам теории упругости, метод состоит в замене данного тела некоторым фиктивным телом, для которого решается ряд краевых задач при изменяющихся в итерационном процессе нагрузках. Это приводит к образованию бесконечного ряда векторов напряжений и деформаций.

Предлагаемый метод похож на метод малого параметра, так как состоит в незначительном изменении параметров данного тела (данного оператора) и последовательном решении фиктивного тела (упрощенного оператора) при условии сходимости приближенных решений к точному.

Формулируя решение задачи теории упругости при помощи фиктивного тела можно заметить аналогию с методом сил.

#### Summary

#### ITERATION METHOD OF CALCULATING ARBITRARY DEFORMABLE BODIES IN A LINEAR ELASTIC RANGE

In the present work a certain general iteration method is described applicable to arbitrary linear elastic bodies with a positive definite strain energy function and to some other mathematical problems. The considered iteration method, as applied to deformable bodies, consists in replacing the given body by an auxiliary

one, and then solving consecutively the auxiliary system with loads changing in the iterative procedure. In the solution infinite series of stress and deformation vectors are constructed. A certain similarity of the present method to the perturbation and force methods is pointed out.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA  
FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1977 r.*

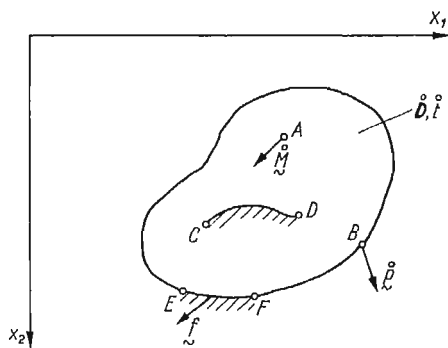
---

## OBLICZANIE DOWOLNYCH TARCZ METODĄ ITERACYJNĄ

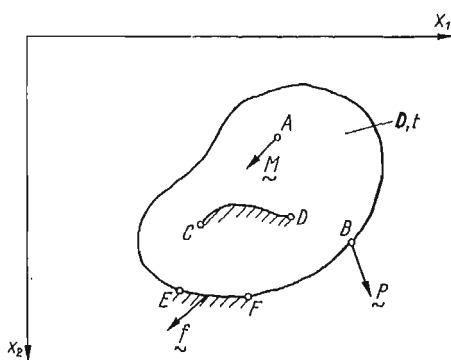
JÓZEF WRANIK (BIELSKO-BIAŁA)

### 1. Przedstawienie zagadnienia

W pracy niniejszej zastosowano metodę iteracyjną omówioną w [5] do tarcz, które wykazują cechy niejednorodności i anizotropii oraz mają zmienną grubość. Tarcze wielospójne i ze zmienną grubością omówiono w pracach [1, 4]. Rozważana tarcza określona jest przez macierz cech sprężystości  $\mathfrak{D}(x_1, x_2)$  i zmienną grubość  $t(x_1, x_2)$ , (rys. 1). Tarcza może być dowolnie podparta na brzegu (linia więzów  $EF$  na rys. 1) i w obszarze (linia więzów  $CD$  rys. 1) oraz może być poddana obciążeniom siłami powierzchniowymi  $\underline{p}$ , siłami masowymi  $\underline{M}$  oraz wymuszonemu stanowi przemieszczeń  $\underline{f}$  w liniach więzów.



Rys. 1. Układ dany  $\underline{U}^*$



Rys. 2. Układ zastępczy  $\underline{U}$

Odształcenia tarczy są małe i znajdują się w przedziale liniowo sprężystym. W całym obszarze tarczy zakładamy istnienie płaskiego stanu naprężenia.

Układ zastępczy  $\underline{U}$  przedstawiono na rys. 2, a układ  $\underline{W}$  na rys. 3.

Metodę obliczeń omówiono w [5]; tutaj przytacza się jedynie podstawowe wzory, na które powołano się w przykładach.

W kolejnym  $i$ -tym kroku iteracyjnym zgodnie z [5] otrzymamy:

obciążenia układu  $\Delta_{i-1} \underline{U}$

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Delta_i \underline{p} &= \mathfrak{S}r \Delta_{i-1} \underline{N}, \\ \Delta_i \underline{M} &= -\mathfrak{W}r \Delta_{i-1} \underline{N}, \end{aligned}$$

gdzie  $\Delta_{i-1} \underline{N} = \Delta_{i-1} \underline{\sigma} \cdot \underline{i}$  jest wektorem sił wewnętrznych w układzie  $\Delta_{i-1} \underline{U}$ ;

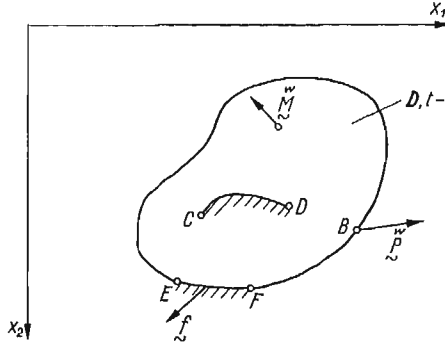
\* Symbole podkreślone wężykami na rysunkach odpowiadają symbolom pogrubionym w tekście.

siły wewnętrzne układu  $\Delta_i W$

$$(1.2) \quad \Delta_i \overset{w}{N} = \mathfrak{S} \Delta_i \dot{N},$$

obciążenie układu  $\Delta_i W$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Delta_i \overset{w}{p} &= \mathfrak{H} \mathfrak{S} \Delta_i \dot{N}, \\ \Delta_i \overset{w}{M} &= -\mathfrak{B} \mathfrak{S} \Delta_i \dot{N}, \end{aligned}$$



Rys. 3. Układ  $W$

gdzie

$$(1.4) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{D}^{-1} \dot{\mathfrak{D}} t t^{-1},$$

$$(1.5) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{J} - \mathfrak{D}^{-1} \dot{\mathfrak{D}} t t^{-1},$$

$$(1.6) \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & \partial/\partial x_2 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix}$$

operator różniczkowy równań równowagi;

$$(1.7) \quad \mathfrak{H} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

## 2. Układ zastępczy

Tarczę zastępczą przyjmiemy jednorodną, izotropową ze stałą grubością, geometrycznie przystającą do tarczy danej.

2.1. Tarcza zastępcza dla przypadku tarczy danej niejednorodnej i izotropowej ze zmieniającą się grubością. Dla wyszczególnionego przypadku macierz  $\mathfrak{r}$  przedstawia się następująco:

$$(2.1) \quad \mathfrak{r} = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \nu \dot{\nu}) e & -(\nu - \dot{\nu}) e & 0 \\ -(\nu - \dot{\nu}) e & 1 - (1 - \nu \dot{\nu}) e & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (1 - \nu)(1 + \dot{\nu}) e \end{bmatrix},$$



gdzie

$$e = \frac{E(x_1, x_2) t(x_1, x_2)}{\dot{E} \cdot \dot{t}} \cdot \frac{1}{1 - \nu^2(x_1, x_2)}$$

Normę macierzy  $r$  wygodnie obliczyć jako normę spektralną [3]

$$(2.2) \quad \|r\|^2 = \max_i (\lambda_i(r^T r)).$$

Otrzymujemy wówczas

$$(2.3) \quad \sqrt{\lambda_1} = 1 - \frac{1 - \dot{\nu}}{1 - \nu} \frac{Et}{\dot{E} \dot{t}},$$

$$\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_3} = 1 - \frac{1 + \dot{\nu}}{1 + \nu} \frac{Et}{\dot{E} \dot{t}},$$

gdzie  $\lambda_i$  są wartościami własnymi macierzy  $r^T r$ .

Większa z wartości  $|\sqrt{\lambda_i}|$  określa normę macierzy  $r$ . Wystarczy więc zbadać nierówność

$$(2.4) \quad \lambda_1 - \lambda_2 > 0;$$

z wyrażenia (2.4) otrzymamy,

$$(2.5) \quad 4e(\dot{\nu} - \nu) [1 - (1 - \nu\dot{\nu})e] > 0.$$

Z nierówności (2.5) wynika, że normą macierzy  $r$  będzie  $|\sqrt{\lambda_1}|$  wówczas, gdy spełnione będą warunki:

$$(2.6) \quad \dot{\nu} > \nu \text{ i } (1 - \nu\dot{\nu})e < 1,$$

lub

$$\dot{\nu} < \nu \text{ i } (1 - \nu\dot{\nu})e > 1.$$

Dalsze rozważania przeprowadzimy przy założeniu, że norma macierzy  $r$  jest określona jako  $|\sqrt{\lambda_1}|$ ; przy warunkach (2.6) normę macierzy możemy przedstawić w postaci

$$(2.7) \quad \|r\| = |1 - \|\mathcal{D}^{-1}\| \cdot \|\dot{\mathcal{D}}^{-1}\|^{-1} \dot{t} \dot{t}^{-1}|$$

lub

$$(2.8) \quad \|r\| = \dot{t}^{-1} \cdot \|\dot{\mathcal{D}}^{-1}\|^{-1} \cdot \|\dot{\mathcal{D}}^{-1}\| \dot{t} - \|\mathcal{D}^{-1}\| \cdot \dot{t}.$$

Można zauważyć, że zbieżność szeregu iteracyjnego będzie najlepsza przy przyjętym modelu tarczy zastępczej wówczas, gdy normy, maksymalna i minimalna będą sobie równe, czyli gdy

$$(2.9) \quad \|r(x_1, x_2)\|_{\max} = \|r(x_1, x_2)\|_{\min}.$$

Relacja (2.9) oznacza jednakowe założenia zbieżności szeregu dla punktów tarczy, w których zróżnicowanie cech fizycznych i geometrycznych tarcz danej i zastępczej jest największe, czyli dla punktów, w których funkcja (2.8) osiąga ekstrema.

Wprowadzimy oznaczenia:

$$(2.10) \quad t', \nu', E', \mathcal{S}' \text{ — wielkości odpowiadające normie } \|t\mathcal{D}^{-1}\|_{\min},$$

$$t'', \nu'', E'', \mathcal{S}'' \text{ — wielkości odpowiadające normie } \|t\mathcal{D}^{-1}\|_{\max}.$$

Z (2.9) wynika równość bezwzględnych wartości elementów macierzy o normach  $\|\mathbf{r}\|_{\max}$  i  $\|\mathbf{r}\|_{\min}$ .

Przy oznaczeniach (2.10) otrzymujemy następujące równanie macierzowe

$$(2.11) \quad \mathfrak{S} - t' t'^{-1} \mathfrak{S}' = t'' t''^{-1} \mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}.$$

Z rozwiązania równania (2.11) otrzymujemy

$$(2.12) \quad \dot{\nu} = -\frac{B'\nu' + B''\nu''}{B' + B''},$$

$$(2.13) \quad \dot{E}t = \frac{(B' + B'')^2 - (B'\nu' + B''\nu'')^2}{2(B' + B'')},$$

gdzie

$$B' = \frac{E't'}{1-\nu'^2}; \quad B'' = \frac{E''t''}{1-\nu''^2}.$$

**2.2. Tarcza zastępcza jednorodna, izotropowa przy przyjęciu  $\dot{\nu} = 0$ .** Zbieżność szeregu iteracyjnego przy z góry określonej wartości współczynnika Poissona  $\dot{\nu}$  tarczy zastępczej będzie słabsza aniżeli dla przypadku omówionego w p. 2.1, lecz często może dać korzyści przy rozwiązywaniu układów zastępczych w kolejnych krokach iteracyjnych.

Macierz  $\mathbf{r}$  w tym przypadku przedstawia się w postaci

$$(2.14) \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1-e & -\nu e & 0 \\ -\nu e & 1-e & 0 \\ 0 & 0 & 1-(1-\nu)e \end{bmatrix}.$$

Norma tej macierzy wynosi

$$(2.15) \quad \|\mathbf{r}\| = \max \begin{cases} |1-e| + \nu e \\ |1-(1-\nu)e| \end{cases}.$$

Dla  $e < 1$  otrzymujemy

$$(2.16) \quad \|\mathbf{r}\| = 1 - \frac{Et}{\dot{E}t} \frac{1}{1+\nu},$$

dla  $e > 1$  zaś otrzymujemy

$$(2.17) \quad \|\mathbf{r}\| = \frac{Et}{\dot{E}t} \frac{1}{1-\nu} - 1.$$

Nierówność  $\|\mathbf{r}\| < 1$  odniesiona do relacji (2.16) przy  $e < 1$  będzie spełniona dla każdej wartości  $\dot{E}t$ , a odniesiona do relacji (2.17) przyjmie postać

$$(2.18) \quad \dot{E}t > \frac{1}{2} \frac{Et}{1-\nu}.$$

Relacja (2.18) jest warunkiem zbieżności szeregu iteracyjnego ([5], (4.16)) przy  $\dot{\nu} = 0$ . Będzie on spełniony dla każdej pary argumentów  $(x_1, x_2)$ , gdy obliczymy  $\dot{E}t$  ze wzoru

$$(2.19) \quad \dot{E}t = \frac{1}{2} \left( \frac{E't'}{1-\nu'} + \frac{E''t''}{1-\nu''} \right).$$

2.3. Tarcza zastępcza dla przypadku tarczy danej anizotropowej. Macierz cech sprężystości ciała anizotropowego w płaskim zadaniu teorii sprężystości przedstawia się następująco [2]:

$$(2.20) \quad \mathfrak{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix}.$$

Rozważmy tarczę zastępczą izotropową, określoną przez macierz sprężystości

$$(2.21) \quad \dot{\mathfrak{D}} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

i zapiszmy ją w postaci

$$(2.22) \quad \dot{\mathfrak{D}} = \begin{bmatrix} x & -y & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & 2(x+y) \end{bmatrix}.$$

Wartości niewiadomych  $x$  i  $y$  określimy z warunku osiągnięcia przez normę macierzy  $\mathfrak{r}$  wartości minimalnej. Macierz przedstawia się następująco:

$$(2.23) \quad \mathfrak{r} = \begin{bmatrix} 1-(a_{11}x-a_{12}y) & -a_{12}x+a_{22}y & -2a_{13}x-2a_{13}y \\ -a_{12}x+a_{22}y & 1-(a_{22}x-a_{12}y) & -2a_{23}x-2a_{23}y \\ -a_{13}x+a_{23}y & -a_{23}x+a_{13}y & 1-(2a_{33}x-2a_{33}y) \end{bmatrix},$$

gdzie  $a_{ik}$  są elementami macierzy  $\mathfrak{D}^{-1}$ .

Rozważmy normę euklidesową macierzy  $\mathfrak{r}$

$$(2.24) \quad (\|\mathfrak{r}\|_E)^2 = (1-(a_{11}x-a_{12}y))^2 + (-a_{12}x+a_{22}y)^2 + (2a_{13}x+2a_{13}y)^2 + \\ + (-a_{12}x+a_{22}y)^2 + (1-(a_{22}x-a_{12}y))^2 + (2a_{23}x+2a_{23}y)^2 + \\ + (-a_{13}x+a_{23}y)^2 + (-a_{23}x+a_{13}y)^2 + (1-(2a_{33}x+2a_{33}y))^2.$$

Normę (2.24) jako formę kwadratową możemy zapisać w postaci

$$(2.25) \quad (\|\mathfrak{r}\|'_E)^2 = (\mathfrak{A}\mathfrak{s} + \mathfrak{b})^T (\mathfrak{A}\mathfrak{s} + \mathfrak{b}),$$

gdzie  $\mathfrak{s}^T = [x, y]$ ,  $\mathfrak{b}^T = [100100]$ ,

$$(2.26) \quad \mathfrak{A}^T = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{12} & -a_{22} & -a_{13} & -a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{22} & a_{12} & a_{23} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

Ze względu na specyficzny charakter macierzy  $\dot{\mathfrak{D}}$  taki, że jej element  $2(x+y)$  jest określony przez pozostałe elementy tej macierzy, nie wprowadzono do rozważań trzech składników wyrażenia (2.24), odpowiadających elementowi  $2(x+y)$  macierzy  $\dot{\mathfrak{D}}$ , stąd oznaczenie  $\|\mathfrak{r}\|'_E$ .

Minimum funkcji  $\|\mathfrak{r}\|'_E$  znajdziemy w zwykły sposób, przyrównując jej pochodne cząstkowe względem  $x$  i  $y$  do zera, przy czym wystarczy rozpatrzyć funkcję podpierwiastkową. Otrzymamy

$$(2.27) \quad \frac{\partial(\|\mathfrak{r}\|'_E)^2}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{s}^T}{\partial x} \mathfrak{A}^T (\mathfrak{A}\mathfrak{s} + \mathfrak{b}) + (\mathfrak{A}\mathfrak{s} + \mathfrak{b})^T \mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\|\mathfrak{r}\|'_E)^2}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{s}^T}{\partial y} \mathfrak{A}^T (\mathfrak{A}\mathfrak{s} + \mathfrak{b}) + (\mathfrak{A}\mathfrak{s} + \mathfrak{b})^T \mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y} = 0,$$

gdzie

$$(2.28) \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = [10]; \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} = [0 \ 1].$$

Układ równań (2.27) z niewiadomymi  $x$  i  $y$  przy podstawieniu (2.28) i przekształceniu przyjmie postać

$$(2.29) \quad \mathfrak{U}^T \mathfrak{U} \mathbf{s} + \mathfrak{U}^T \mathbf{b} = 0.$$

Dla przypadku tarczy ortotropowej macierz  $\mathfrak{U}$  i wektor  $\mathbf{b}$  przyjmą postać

$$(2.30) \quad \mathfrak{U}^T = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{12} & -a_{22} \\ a_{12} & a_{11} & a_{22} & a_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 1].$$

Rozwiązując układ (2.29) względem wektora  $\mathbf{s}$  przy podstawieniu (2.30) otrzymamy

$$(2.31) \quad x = \frac{(a_{11} + a_{22})(a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}^2) - 4a_{12}^2(a_{11} + a_{22})}{(a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}^2)^2 - 4a_{12}^2(a_{11} + a_{22})^2},$$

$$y = \frac{2(a_{11} + a_{22})^2 a_{12} - 2a_{12}(a_{11}^2 + 2a_{12}^2 + a_{22}^2)}{(a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}^2)^2 - 4a_{12}^2(a_{11} + a_{22})^2}.$$

Macierz  $\mathfrak{D}$  o elementach określonych wzorami (2.31) daje minimalną normę euklidesową macierzy  $\mathfrak{r}$ , a tym samym gwarantuje najszybszą zbieżność szeregu iteracyjnego.

Przy przyjęciu prostszej tarczy zastępczej, dla której  $\dot{\nu} = 0$ , określonej przez macierz

$$(2.32) \quad \mathfrak{D} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{bmatrix},$$

otrzymamy dla przypadku tarczy anizotropowej

$$(2.33) \quad x = \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2}$$

oraz dla tarczy ortotropowej

$$(2.34) \quad x = \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{11}^2 + a_{12}^2 + 2a_{12}^2}.$$

### 3. Przykłady

**3.1. Tarcza niejednorodna.** Dany jest układ przedstawiony na rys. 4, scharakteryzowany przez:

$$\begin{aligned} t &= (1 + 0,2y) \cdot 10^{-2} \text{ m} && \text{— grubość tarczy,} \\ E &= 2(1 - 0,2y) 10^8 \text{ Nm}^{-2} && \text{— moduł sprężystości podłużnej,} \\ \nu &= 0,2y && \text{— współczynnik Poissona.} \end{aligned}$$

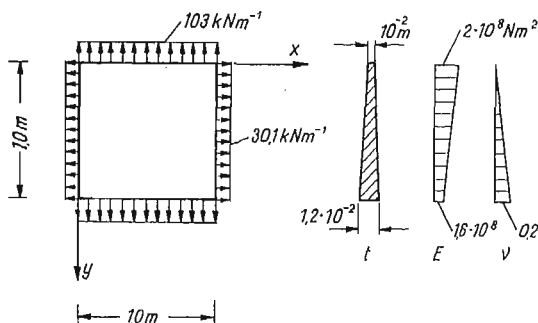
Macierz  $t\mathfrak{D}^{-1}$  przedstawia się następująco:

$$t\mathfrak{D}^{-1} = 2 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0,2y & 0 \\ 0,2y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 0,2y) \end{bmatrix}.$$

Norma macierzy  $t\mathcal{D}^{-1}$  wynosi

$$\|t\mathcal{D}^{-1}\| = 2 \cdot 10^6(1 + 0,2y).$$

Norma osiąga ekstrema dla  $y = 0$  i  $y = 1$ .



Rys. 4. Układ dany  $U$

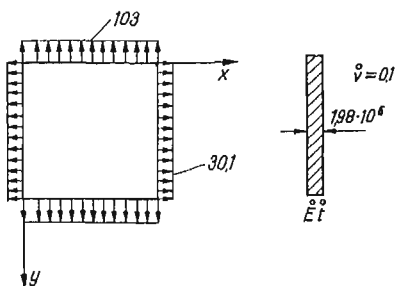
Otrzymamy

$$\begin{aligned} t' &= 10^{-2} \text{ m}, & t'' &= 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \\ E' &= 2 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}, & E'' &= 1,6 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-2}, \\ \nu' &= 0, & \nu'' &= 0,2. \end{aligned}$$

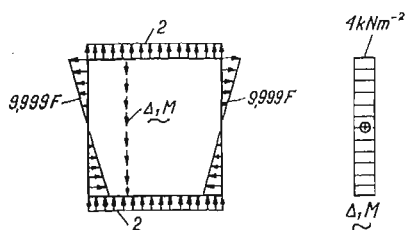
Według wzorów (2.12) i (2.13) obliczamy  $\dot{\nu} = 0,1$ ,  $\dot{E}t = 1,98 \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ .

Obliczamy macierz  $\mathcal{S}$ , według wzoru (1.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 2 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0,2y & 0 \\ 0,2y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-0,2y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2 \end{bmatrix} \frac{10^{-6}}{1,98} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-10^{-2}F & 10^{-1}F & 0 \\ 10^{-1}F & 1-10^{-2}F & 0 \\ 0 & 0 & 1-11F \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Rys. 5. Układ  $\dot{U}$



Rys. 6. Układ  $\Delta_1 U(\Delta_1 \dot{U})$

Macierz  $r$  obliczymy według wzoru (1.5), otrzymamy

$$r = 10^{-2}F \begin{bmatrix} 1 & -10 & 0 \\ -10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } F = 2,0202y - 1,0101.$$

Układ  $\dot{U}$  przedstawiono na rys. 5; jego rozwiązanie określone jest przez wektory naprężeń i odkształceń następująco:

$$\dot{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 30,1 \\ 103 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5,045 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Obliczamy obciążenie układu  $\Delta_1 U$  według wzorów (1.1) dla  $i = 1$ . Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 6. Obciążenie to przyłożone do tarczy zastępczej daje łącznie z tą tarczą układ  $\Delta_1 \dot{U}$ , którego rozwiązanie stanowią wektory naprężeń i odkształceń, odpowiednio:

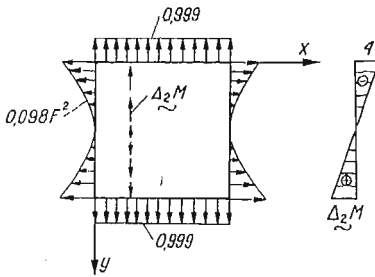
$$\Delta_1 \dot{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -9,999 \\ -1,98 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F, \quad \Delta_1 \dot{\mathbf{\epsilon}} = \begin{bmatrix} -4,95 \\ -0,495 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} F.$$

Obciążenie układu  $\Delta_2 U$  obliczymy według (1.1) dla  $i = 2$ ; przedstawiono je na rys. 7. Układ  $\Delta_2 \dot{U}$  daje rozwiązanie

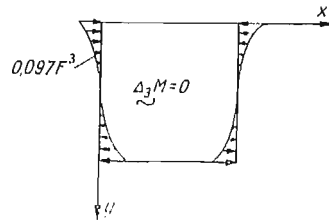
$$\Delta_2 \dot{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0,09801 \\ 0,9801 \\ 0 \end{bmatrix} F^2, \quad \Delta_2 \dot{\mathbf{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4455 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} F^2.$$

Podobnie obliczono obciążenia układu  $\Delta_3 U$ ; które przedstawiono na rys. 8.

Obciążenia układu  $\Delta_3 U$  stanowią około 0,1% obciążeń układu danego, można więc pominąć dalsze obliczenia zadowalając się dokładnością około 0,1%.



Rys. 7. Układ  $\Delta_2 U(\Delta_2 \dot{U})$



Rys. 8. Układ  $\Delta_3 U(\Delta_3 \dot{U})$

Rozwiązanie układu  $U$  przedstawia się więc w postaci szeregu rozwiązań układów  $\Delta_i \dot{U}$ , przy czym wektor sił wewnętrznych otrzymamy w postaci iloczynu  $\mathfrak{S} \sum_{i=0}^2 \Delta_i \dot{\mathbf{N}}$ , a wektor odkształceń w postaci  $\sum_{i=0}^2 \Delta_i \dot{\mathbf{\epsilon}}$ , a zatem

$$\mathbf{N} \cong \mathfrak{S} \left( \begin{bmatrix} 30,1 \\ 103 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9,999 \\ -1,98 \\ 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,98 \\ 0 \end{bmatrix} F^2 \right) = \begin{bmatrix} 1-10^{-2}F & 10^{-1}F & 0 \\ 10^{-1}F & 1-10^{-2}F & 0 \\ 0 & 0 & 1-11F \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 30,1-9,999F+0,098F^2 \\ 103-1,98F+0,98F^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30,1+0,097(2,02y-1,01)^3 \\ 103 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

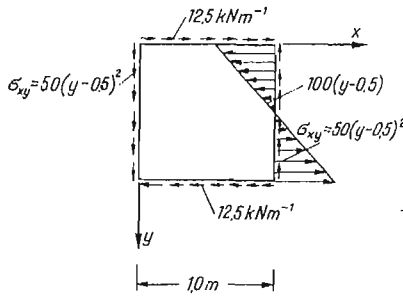
Wektor odkształceń

$$\epsilon \cong \left( \begin{bmatrix} 10 \\ 5,045 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,95 \\ -0,495 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4455 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F^2 \right) \cdot 10^{-6} = \begin{bmatrix} 15-10y \\ 10,904-2,818y+1,818y^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

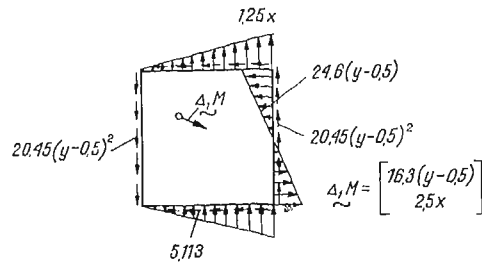
3.2. Tarcza ortotropowa. Dana jest tarcza ortotropowa, obciążona jak na rys. 9. Jej macierz sprężystości przedstawia się następująco:

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} 1,064 & -0,213 & 0 \\ -0,213 & 0,709 & 0 \\ 0 & 0 & 3,333 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ MNm}^{-2},$$

przy czym  $E_1 = 0,94 \cdot 10^4 \text{ MNm}^{-2}$ ,  $\nu_1 = 0,2$ ,  $E_2 = 1,41 \cdot 10^4 \text{ MNm}^{-2}$ ,  $\nu_2 = 0,3$ .



Rys. 9. Układ  $U(\dot{U})$



Rys. 10. Układ  $\Delta_1 U(\Delta_1 \dot{U})$

Według wzorów (2.31) obliczamy elementy  $x$  i  $y$  macierzy tarczy zastępczej; otrzymujemy  $x = 0,8066 \cdot 10^{-4}$ ,  $y = 0,1780 \cdot 10^{-4}$ .

Korzystając z (2.23) otrzymujemy

$$r = \begin{bmatrix} 0,246 & -0,064 & 0 \\ -0,025 & -0,263 & 0 \\ 0 & 0 & 0,409 \end{bmatrix}.$$

Macierz  $\mathfrak{S}$  obliczymy jako  $\mathfrak{S} = \mathfrak{J} - r$ , mianowicie

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} 0,754 & 0,064 & 0 \\ 0,025 & 1,263 & 0 \\ 0 & 0 & 0,591 \end{bmatrix}.$$

Obciążając tarczę zastępczą identycznie jak tarczę daną otrzymujemy wektor  $\dot{N}$  sił wewnętrznych w postaci

$$\dot{N} = \begin{bmatrix} 100x(y-0,5) \\ 0 \\ -50(y-0,5)^2 \end{bmatrix}.$$

Obciążenie w układzie  $\Delta_1 U$  obliczymy za pomocą wzorów (1.1), wynik przedstawiono na rys. 10.

Układ  $\Delta_1 \dot{U}$  otrzymamy obciążając tarczę zastępczą siłami z układu  $\Delta_1 \dot{U}$ . Rozwiązaniem układu  $\Delta_1 U$  jest

$$\Delta_1 \dot{N} = \begin{bmatrix} 24,6x(y-0,5) \\ -2,5x(y-0,5) \\ -20,45(y-0,5)^2 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie obliczonego wektora  $\Delta_1 \dot{N}$  korzystając ponownie z wzorów (1.1) obliczymy obciążenie w układzie  $\Delta_2 U$ . Obciążenie tarczy zastępczej jest identyczne. Rozwiązanie układu  $\Delta_2 U$  przedstawia wektor sił wewnętrznych

$$\Delta_2 \dot{N} = \begin{bmatrix} 6,21x(y-0,5) \\ 0,043(y-0,5) \\ -8,364(y-0,5)^2 \end{bmatrix}.$$

Podobnie otrzymamy

$$\Delta_3 \dot{N} = \begin{bmatrix} 1,516x(y-0,5) \\ -0,167x(y-0,5) \\ -3,42(y-0,5)^2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_4 \dot{N} = \begin{bmatrix} 0,373x(y-0,5) \\ 0,001x(y-0,5) \\ -1,399(y-0,5)^2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem układu  $U$  jest więc

$$N \cong \mathcal{E} \sum_{i=0}^4 \Delta_i \dot{N} = \begin{bmatrix} 99,89x(y-0,5) \\ 0,005x(y-0,5) \\ -50,97(y-0,5)^2 \end{bmatrix},$$

$$\epsilon = \sum_{i=0}^4 \Delta_i \dot{\epsilon} = \mathcal{D} \sum_{i=0}^4 \Delta_i \dot{N} = \begin{bmatrix} 107,6x(y-0,5) \\ -25,73x(y-0,5) \\ 169,83(y-0,5)^2 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. BUDZIANOWSKI, F. ANDERMANN, J. WRANIK, *Pewien iteracyjny sposób wyznaczania naprężeń w tarczach wielospójnych*. Mech. Teor. i Stos. 2, 12 (1974).
2. С. ЛЕХНИЦКИЙ, *Анизотропные пластинки*, Огиз-гостехиздат, 1947.
3. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, Warszawa 1971.
4. J. WRANIK, *Iteracyjna metoda obliczania tarcz o ciągłej zmianie grubości według funkcji jednej zmiennej*, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Bud., 41, 1976.
5. J. WRANIK, *Iteracyjna metoda obliczania dowolnych ciał odkształcalnych w zakresie liniowo sprężystym*, Mech. Teor. i Stos. 1, 16(1978).

#### Резюме

#### РАСЧЕТ ДИСКОВ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

В работе представлен итерационный метод расчета односвязных дисков переменной толщины обладающих неоднородностью и анизотропией. Приведены фиктивные системы для произвольных дисков и примеры расчета неоднородного и анизотропного дисков.



## S u m m a r y

## CALCULATION OF DISCS BY MEANS OF ITERATION METHOD

In this work an iteration method is used to solve the non-homogeneous and anisotropic discs with variable thickness. Auxiliary systems of arbitrary discs are introduced and illustrative examples are presented including a non-homogeneous and anisotropic discs.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA  
FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1977 r.*

---



# BIULETYN INFORMACYJNY

## XVI SYMPOZJON «MODELOWANIE W MECHANICE»

Symposium pod hasłem «Modelowanie w mechanice» został zorganizowany przez Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Oddziału Gliwickiego i odbył się w Wiśle Jarzębatej w dniach 9—15 marca 1977 r.

Otwarcia Sympozjonu dokonał przewodniczący Zarządu Oddziału Gliwickiego PTMTS doc. dr inż. Józef WOJNAROWSKI.

W imieniu Zarządu Głównego PTMTS wystąpił sekretarz generalny prof. dr hab. inż. Marek DIETRICH.

Prorektor doc. dr inż. Szczepan WYRA, który wystąpił w imieniu władz Politechniki Śląskiej, wysoko ocenił działalność Oddziału Gliwickiego PTMTS w rozwijaniu i krzewieniu mechaniki; złożył też uczestnikom Sympozjonu życzenia owocnych obrad, a Towarzystwu dalszych sukcesów.

Po tych wystąpieniach przewodniczącymi obrad plenarnych zostali wybrani prof. dr hab. inż. M. DIETRICH i prof. dr hab. inż. Zb. ORŁOŚ.

W czasie obrad plenarnych wygłoszono następujące referaty przeglądowe:

— prof. dr inż. J. DIETRICH (IPKM Politechnika Śląska): *Przedmiot optymalizacji w działaniach technicznych*,

— doc. dr hab. R. DOROSZKIEWICZ, dr inż. J. LIETZ, dr inż. B. MICHALSKI (IPPT PAN Warszawa): *Modelowanie elastooptyczne układów mechanicznych*,

— prof. dr hab. inż. L. MÜLLER (Politechnika Śląska): *Metody doboru skal w modelach fizycznych*,

— prof. dr hab. inż. B. SKALMIERSKI (Politechnika Śląska): *Model przekroczeń w układach mechanicznych*.

Pozostałe prace referowane w czasie obrad obejmowały następujące grupy problemowe:

C — modelowanie procesów i systemów cieplnych,

D — modelowanie w dynamice maszyn,

G — modelowanie metodą grafów,

K — modelowanie układów konstrukcyjnych,

M — metody modelowania.

W pracach tych poświęcono wiele uwagi współczesnym metodom modelowania w mechanice wykazując, że modelowanie ma nie tylko charakter użytkowy, ale również duże walory poznawcze. Modelowanie określonej rzeczywistości jest dzisiaj nauką rozległą i wciąż rozwijającą się. Umożliwia ona nie tylko poznanie istoty zjawiska, lecz także jest nieodzownym ogniwem współczesnych badań naukowych.

Wygłoszono następujące referaty:

1. R. BĄK, T. BURCZYŃSKI (Politechnika Śląska) — *Modelowanie dynamicznych obciążeń pionowych działających na kolejowy zestaw kołowy w czasie eksploatacji*,
2. A. BODNAR, A. LECHOWICZ, K. MARCHELEK (Politechnika Szczecińska) — *Modelowanie procesów dynamicznych w układach pozycjonowania zawierających sprzęgła cierne*,
3. E. BRZUCHOWSKI (Politechnika Wroclawska) — *Cyfrowe modelowanie sieci*,
4. C. CEMPEL (Politechnika Poznańska) — *Modelowanie zagadnień wibroizolacji maszyn i urządzeń*,
5. M. CHUDEK, J. DRWIĘGA, W. OŁASZEWSKI, S. STAŁĘGA (Politechnika Śląska) — *Modelowanie metodą symulacji analogowej procesów współpracy obudowy górniczej z dynamicznie deformującym się górotworem*,
6. A. DENDURA, S. ŚWISZCZOWSKI (Politechnika Krakowska) — *Projektowanie optymalnych kształtów prętów metodą programowania geometrycznego*,

7. M. DIETRICH, B. KRASNOWSKI (Politechnika Warszawska) — *Pewien model sprzęgła zębatego,*
8. B. DOBROWOLSKI (Politechnika Wrocławska) — *Model matematyczny przepływu płynu rzeczywistego przez rurociąg ze zwężką,*
9. L. GŁADYSIEWICZ, M. HARDYGÓRA, T. ŻUR (Politechnika Wrocławska) — *Model tkaninowej taśmy wieloprzekładowej,*
10. L. GŁADYSIEWICZ, J. SZYMAŃSKI, T. ŻUR (Politechnika Wrocławska) — *Model reologiczny taśmy prężnościowej,*
11. K. GRABCZYŃSKI (ITB Warszawa) — *Doświadczalna analiza pracy statycznej wielootworowej ściany usztywniającej i jej model obliczeniowy,*
12. R. GRZYMKOWSKI, K. MAZUR (Politechnika Śląska) — *Model numeryczny nieustalonego przepływu ciepła w procesie odlewania ciągłego,*
13. J. JAMRÓZ, R. URBAŃSKI (Politechnika Gdańska) — *Modelowanie i obliczanie obiegów ciepłych okrętowych silowni turboparowych na maszynach cyfrowych,*
14. Z. KOWAL (Politechnika Wrocławska) — *Stochastyczny model wyczerpania nośności prętowych konstrukcji przestrzennych,*
15. H. KUDĘLA (Politechnika Wrocławska) — *Metoda dekompozycji w modelowaniu zagadnień fizycznych opisywanych parabolicznymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi,*
16. R. KRZYWIEC (Uniwersytet Warszawski) — *O wielociągowym modelowaniu mechanicznych systemów wielkich,*
17. L. LAUDAŃSKI (Politechnika Rzeszowska) — *O generowaniu procesów opisujących dynamikę samolotu,*
18. M. MAJEWSKI, C. CEMPEL (Politechnika Poznańska) — *Randomizacja w układach dynamicznych i jej wykorzystanie do modelowania struktur mechano-akustycznych,*
19. S. MIKUŁA (Politechnika Śląska) — *Model rozwoju pęknięć zmęczeniowych w elementach stalowych umocnionych zgniotem powierzchniowym,*
20. J. MILANOWSKI (WSI Koszalin) — *Identyfikacja analityczna dynamicznych układów mechanicznych,*
21. B. MOCHNACKI, B. ORTYL (Politechnika Śląska) — *O pewnej metodzie rozwiązania wielowymiarowego problemu Stefana,*
22. K. NAZARCZUK (Politechnika Warszawska) — *Modelowanie poślizgów w złożonych łańcuchach kinematycznych,*
23. W. NOWAK (Politechnika Szczecińska) — *Sprawność rekuperatora pętlicowego z przegrodami segmentowymi,*
24. A. OŁĘDZKI, W. SZYDŁOWSKI, K. ORKAN-ŁĘCKI (Politechnika Warszawska) — *Modelowanie procesów zderzenia w parach kinematycznych,*
25. T. OPOLSKI (WSI Lublin) — *Model pracy gryzów urabiających skalę,*
26. J. OTTE, A. SZAFRANIEC (Politechnika Śląska) — *Badania przepływów w wirnikach maszyn promieniowych metodą analogii elektrycznej,*
27. E. PALCZAK, St. STRYCZEK (Politechnika Wrocławska) — *Analiza stabilności hydraulicznego mechanizmu kierowniczego kopalnianej ładowarki przegubowej,*
28. A. PIELORZ (IPPT PAN) — *Modelowanie układu złożonego z pręta uderzonego drugim prętem z zamocowaną bryłą sztywną,*
29. S. RABIEJ, R. STANISZEWSKI, St. ZIEMBA (Warszawa) — *Modelowanie systemu projektowania w warunkach nieustannego napływu informacji,*
30. I. SIWICKI, A. OŁĘDZKI (Politechnika Warszawska) — *Zastosowanie metody grafów więzów w modelowaniu pras hydraulicznych,*
31. M. SZATA (Politechnika Warszawska) — *Budowa modelu matematycznego procesu w oparciu o parametryczny zapis twierdzenia  $\pi$ ,*
32. W. SZUŚCIK, K. KOŚLACZ, J. BĄK (Politechnika Śląska) — *Obliczenie współczynnika bezpieczeństwa odniesionego do granicy plastyczności przy projektowaniu stropnic typu belkowego obudów zmechanizowanych,*
33. W. SZUŚCIK, S. SZWEDA (Politechnika Śląska) — *Modelowanie obciążeń stropnic i osłon podpierających zawał obudów podporowo-osłonowych,*
34. J. ŚWIDER, J. WOJNAROWSKI (Politechnika Śląska) — *Grafy przepływu sygnałów w modelowaniu kaskadowej struktury układu wyciągowego,*

35. S. ŚWISZCZOWSKI, D. ZBOŚ (Politechnika Krakowska) — *Projekt uniwersalnego pakietu programów metody sekwencyjnego programowania geometrycznego*,
36. D. TEJSZERSKA, J. WOJNAROWSKI (Politechnika Śląska) — *Modelowanie tłumionych drgań eolicznych przewodów napowietrznych*,
37. J. TOMECZEK, W. KUDZIA (Politechnika Śląska) — *Opis matematyczny suszenia materiałów drobnoziarnistych w łożu fluidalnym*,
38. K. WERNEROWSKI, J. GĄSIOROWSKI (ATR Bydgoszcz) — *Modelowanie analogowe ślizgowego łożyska poprzecznego*,
39. J. WOJNAROWSKI (Politechnika Śląska) — *Modelowanie układów mechanicznych za pomocą grafów i liczb strukturalnych* (referat przeglądowy),
40. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ (Politechnika Śląska) — *Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych wyższej kategorii w modelowaniu układów mechanicznych*,
41. J. WOJNAROWSKI, J. KROPKA (Politechnika Śląska) — *Modelowanie układów mechanicznych za pomocą grafów sprzężeń*,
42. J. WOJNAROWSKI, A. MEDER, D. TEJSZERSKA (Politechnika Śląska) — *Modelowanie wieloliniowych układów wyciągowych*,
43. J. WRÓBEL (Politechnika Warszawska) — *Symulacyjne badanie efektów nieliniowości przy cyfrowym modelowaniu zawieszania samochodu*.

Duże zainteresowanie wśród uczestników wzbudziły referaty przeglądowe: *Przedmiot optymalizacji w działaniach technicznych* wygłoszony przez prof. dr inż. J. DIETRZYCHA, oraz *Modelowanie układów mechanicznych za pomocą grafów i liczb strukturalnych* wygłoszony przez doc. dr inż. J. WOJNAROWSKIEGO.

W pierwszym prof. J. DIETRZYCH opisał model przedstawiający przedmioty optymalizacji w działaniach technicznych w postaci grafów systemu nauki konstrukcji. W drugim doc. J. WOJNAROWSKI podał próbę systemowego przedstawienia metody modelowania układów mechanicznych za pomocą grafów i liczb strukturalnych.

Autorzy zgłoszonych referatów reprezentowali następujące ośrodki naukowe: Gliwice — 18 referatów, Warszawa — 10 referatów, Wrocław — 8 referatów, Kraków, Poznań, Szczecin po 2 referaty Bydgoszcz, Gdańsk, Koszalin, Lublin i Rzeszów po 1 referacie.

W dyskusji, która stała na wysokim poziomie naukowym, zabierano głos 141 razy.

Ponadto przeprowadzono dyskusję okrągłego stołu na temat aktualnie rozwijanych prac badawczych w ośrodkach naukowych kraju. W dyskusji tej wzięło udział 17 uczestników.

Ogółem w Sympozjone wzięło udział 112 uczestników (w tym 18 profesorów, 33 docentów, 45 pomocniczych pracowników naukowych oraz 16 członków studenckiego Koła Naukowego).

Na zakończenie obrad uczestnicy z innych ośrodków naukowych podkreślili wysoką rangę i potrzebę kontynuowania tradycyjnych już sympozjone Oddziału Gliwickiego PTMTS.

Jednocześnie z obradami Sympozjonu odbywało się pod patronatem przewodniczącego Oddziału Gliwickiego PTMTS Seminarium Studenckiego Koła Naukowego Mechaniki Stosowanej im. Prof. W. BURZYŃSKIEGO. W Sesji wzięli udział studenci niżej podanych uczelni: Politechniki Śląskiej — 5, Politechniki Warszawskiej — 7, Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie — 4.

W czasie obrad Seminarium, w którym brali udział również uczestnicy Sympozjonu, wygłoszono 13 referatów (PŚI — 5, PW — 5, WSP — 3).

Referowane prace oceniało jury w składzie: doc. dr inż. Roman BĄK, dr inż. Jerzy KUCZYŃSKI i dr inż. Stanisław MIKUŁA, które wyróżniło 4 spośród 13 prac, mianowicie:

J. FLAKA (PŚI) — *Zastosowanie grafów w poszukiwaniu określonych klas układów kół pośrednich dla przekładni ciernych*,

T. KLIMOWICZA (PW) — *Badanie mechanizmu rozrządu silnika samochodu Fiat 126P*,

W. MAROWSKIEGO (PW) — *Zastosowanie metody szeregów połączonych do określania gęstości prawdopodobieństwa odpowiedzi układu dynamicznego na zaburzenia losowe*,

J. ROSIŃSKIEJ (WSP) — *Wybrane zagadnienie wytrzymałościowe klejonego połączenia elektronu*.

Ta forma oddziaływania PTMTS na krzewienie mechaniki w ramach studenckiej działalności naukowej spotkała się z aprobatą uczestników Sympozjonu, którzy sugerowali wiele udoskonaleń w rozwijaniu mechaniki wśród studentów.

J. Wojnarowski (Gliwice)

**XIX POLSKA KONFERENCJA MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO**  
**Ruciane—Piaski, 7—16 września 1977 r.**

XIX Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego odbyła się w dniach 7—16 września w miejscowości Piaski k. Rucianego, w województwie suwalskim, w ośrodku czasowo-wypoczynkowym «Malinka» Kombinat Budownictwa Miejskiego Warszawa—Wschód. Ośrodek położony jest w malowniczym ustroniu, wśród lasów nad jeziorem Beldan.

Organizatorem konferencji był Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk w Warszawie. Komitet Organizacyjny z ramienia IPPT PAN stanowili: prof. dr Marek Sokołowski — przewodniczący i dr Romuald Kotowski — sekretarz.

W Konferencji wzięło udział 139 uczestników, w tym 94 z Polski i 45 z zagranicy z następujących państw europejskich i pozaeuropejskich (w nawiasach podano liczbę uczestników): Arabia Saudyjska (1), Belgia (1), Bułgaria (1), CSSR (2), Dania (1), Francja (2), Japonia (2), Jugosławia (3), Norwegia (1), NRD (4), RFN (7), Stany Zjednoczone (5), Szwecja (1), Wielka Brytania (3), Włochy (6), ZSRR (5).

Wygłoszono 98 referatów, w tym 11 referatów generalnych prezentowanych przez naukowców zaproszonych przez Komitet Organizacyjny. Referaty generalne były następujące:

1. G. I. BARENBLATT (ZSRR) — Propagacja szyjki w polimerach — przykład zjawiska nielokalnego,
2. A. G. CROCKER (Wielka Brytania) — Obliczenia dyskretne w przestrzeni rzeczywistej struktury i oddziaływań krystalicznych,
3. A. C. ERINGEN (USA) — Mechanika ośrodków ciągłych w skali atomowej,
4. E. A. EVANS (USA) — Mechanika i termodynamika błon biologicznych,
5. W. A. GREEN (Wielka Brytania) — Propagacja fal w silnie anizotropowych materiałach sprężystych,
6. E. KRÖNER (RFN) — Efektywne własności ośrodków stochastycznych,
7. Th. LEHMAN (RFN) — Pewne aspekty nieizotermicznych dużych odkształceń niesprężystych,
8. J. LOTHE (Norwegia) — Dyslokacje i fale powierzchniowe w anizotropowych ośrodkach sprężystych. Kryteria istnienia dla fal powierzchniowych. Uogólnienia dla ośrodków piezoelektrycznych,
9. M. P. NIELSEN (Dania) — Analiza plastyczna ścinania w betonie,
10. A. SAWCZUK (Polska) — Wykorzystanie reprezentacji funkcji tensorowych w mechanice ośrodków niesprężystych,
11. W. SZCZEPIŃSKI (Polska) — Problemy kształtowania wytrzymałościowego konstrukcji o złożonym kształcie.

Ponadto należy odnotować, że w konferencji wzięli udział naukowcy tej miary, co prof. prof. I. N. SNEDDON i G. S. SZAPIRO.

Powyższa lista daje pewien pogląd na zakres dyskutowanych podczas konferencji zagadnień; można jednak pokusić się o bardziej precyzyjne sklasyfikowanie omawianych problemów mechaniki. Większość prac miała charakter teoretyczny. Można było zaobserwować szeroką gamę zainteresowań: były prace poświęcone zarówno podstawom mechaniki, jak i prace mające charakter czysto aplikacyjny (inżynierski). Do pierwszej grupy zaliczyć można prace dotyczące nielokalnych teorii ośrodków materialnych, teorii defektów w ciałach stałych, teorii ośrodków mikropolarnych, nieliniowej teorii sprężystości, teorii plastyczności, termodynamiki, propagacji fal zjawisk występujących w polimerach oraz teorii ośrodków sypkich i porowatych. Do drugiej grupy należą prace zajmujące się wykorzystaniem do konkretnych obliczeń teorii płyt i powłok, prace poświęcone dynamice konstrukcji, kompozytom, optymalizacji i metodzie elementów skończonych.

Oczywiście, podział ten nie jest jednoznaczny, tak jak nie jest sprecyzowane, gdzie kończy się „czysta” i dalej «teoria», a zaczyna zastosowanie. Przedstawiono również prace doświadczalne.

Czas przeznaczony na wygłoszenie referatu i dyskusję wynosił dla referatów generalnych 60 min., a dla referatów zwyczajnych 30 min. Był więc on wystarczająco długi (w porównaniu z czasem do dyskusji na innych konferencjach) na rzetelne przedstawienie otrzymanych wyników.

Podczas konferencji panowała atmosfera sprzyjająca dyskusjom naukowym, które nieraz przeciągały się do późnych godzin nocnych.

Materiały z konferencji dostępne są w postaci dwu wersji streszczeń referatów (polskiej i angielskiej) oraz dwujęzycznego programu z listą i adresami uczestników.

Referaty mogły być wygłoszone we wszystkich językach kongresowych, jednakże w większości prezentowano prace w językach angielskim i polskim.

Oprócz programu naukowego, organizatorzy zapewnili również uczestnikom program socjalny. Zorganizowano dwie wycieczki krajoznawcze: statkiem po jeziorach oraz do Gierłoża i św. Lipki. Dostępne były również lodzie oraz konie do jazdy wierzchem. Niestety pogoda nie pozwoliła wykorzystać w pełni tych możliwości.

*Romuald Kotowski (Warszawa)*

### MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA NAPĘDU I PRZEKŁADNI ZĘBATYCH Chicago, 28—30 września 1977 r.

Międzynarodowa Konferencja Napędu i Przekładni Zębatych stanowiła drugą Międzynarodową Konferencję Uzębień, zorganizowaną pod egidą ASME. Komitet Napędu i Przekładni Zębatych Oddziału Konferencji Maszynowych ASME przygotował konferencję w ramach współpracy z ASME, USCoToMM oraz IET SYNECOT. Temat konferencji brzmiał: „Blisko cztery tysiąclecia postępu w napędach”. Głównym celem konferencji było przedstawienie osiągnięć w dziedzinie techniki napędu i przekładni zębatych.

Podczas konferencji przedstawiono ogółem 81 prac, w tym 37 autorów amerykańskich oraz 44 autorów zagranicznych, wśród których było 18 prac z Japonii, 9 z Wielkiej Brytanii, 3 z Polski, 3 z Republiki Federalnej Niemiec, 2 z Brazylii, 2 z Kanady oraz po 1 z Bułgarii, Egiptu, Francji, Grecji, Indii, Szwajcarii i Związku Radzieckiego. Wszystkie prace z wyjątkiem 8 (5 z USA oraz po 1 z Polski, Japonii i Wielkiej Brytanii) zostały opublikowane przed konferencją.

Przewodniczącym konferencji był dr D. TOWNSEND (Nasa Lewis Research Center), zaś mówcą podczas wspólnego obiadu uczestników konferencji w dniu 29.09.1977 był dr J. H. FURBAY (General Motors), światowy podróżnik, znany ze swych wielu międzynarodowych osiągnięć i występów w radiu. Dr FURBAY wygłosił ciekawy odczyt nt. «Perspektywy przemodelowania cywilizacji w naszych czasach».

Konferencja odbyła się w 19 sesjach. Ramowy program konferencji był następujący:

28.09.1977 r.

Sesja PTG-1 «Wytrzymałość przekładni zębatych». Przewodn. dr D. H. RIMBEY (University of South Florida), 3 referaty.

Sesja PTG-2 «Łańcuchy i pasy». Przewodn. S. WORLEY (The Gates Rubber Company, Denver), 8 referatów.

Sesja PTG-3 «Smarowanie i zużycie». Przewodn. A. STRANFORD (Dresser Industries Inc., Orlean), 4 referaty.

Sesja PTG-4 «Geometria ząbów». Przewodn. R. KASUBA (Cleveland State University), 4 referaty.

29.09.1977 r.

Sesja PTG-5 «Wytrzymałość przekładni zębatych». Przewodn. dr A. SEIREG (University of Wisconsin-Madison), 5 referatów.

Sesja PTG-6 «Produkcja». Przewodn. J. R. MILLER (Miller Associates Inc., Milwaukee), 5 referatów.

Sesja PTG-7 «Hałas przekładni». Przewodn. D. R. HOUSER (Ohio State University), 3 referaty.

Sesja PTG-8 «Typy przekładni». Przewodn. G. L. SCOTT (American Gear Manufacturers Association, Arligton), 5 referatów.

Sesja PTG-9 «Dynamika przekładni zębatych». Przewodn. J. R. TROXLER (Northern Arizona University), 5 referatów.

Sesja PTG-10 «Smarowanie i zużycie». Przewodn. H. E. STAPH (Southwest Research Institute, San Antonio), 4 referaty.

Sesja PTG-11 «Wytrzymałość powierzchniowa zębów». Przewodn. D. W. DUDLEY (Solar Turbines International, San Diego), 5 referatów.

Sesja PTG-12 «Konstrukcja». Przewodn. E. M. ALMEIDA (Dana Corporation Fort Wayne), 4 referaty.

30.09.1977 r.

Sesja PTG-13 «Wytrzymałość powierzchniowa zębów». Przewodn. E. SHIPLEY (Mechanical Technology Inc., Latham), 4 referaty.

Sesja PTG-14 «Dynamika przekładni zębatych». Przewodn. M. J. DROSJACK (Shell Oil Company, Houston), 5 referatów.

Sesja PTG-15 «Sprzęgła i połączenia wałów». Przewodn. M. M. CALISTRAT (Koppers Company Inc., Baltimore), 5 referatów.

Sesja PTG-16 «Zastosowanie przekładni zębatych». Przewodn. D. L. BORDEN (Falk Corp., Milwaukee), 3 referaty.

Sesja PTG-17 «Sprzęgła i połączenia wałów». Przewodn. Q. W. HEIN (Falk Corp., Milwaukee), 3 referaty.

Sesja PTG-18 «Materiały na koła zębate». Przewodn. E. T. BERGQUIST (Western Gear Company, Lynwood), 3 referaty.

Sesja PTG-19 «Przekładnie zębate». Przewodn. A. TUCKER (Solar Turbines International, San Diego), 3 referaty.

W konferencji wzięło udział dwóch uczestników z Polski: prof. M. DIETRICH i dr J. KOWALSKI.

Dr J. KOWALSKI przedstawił w ramach Sesji PTG-12 2 prace: «Optymalna synteza dwustopniowych przekładni zębatych walcowych przy wykorzystaniu programowania nieliniowego» (publikacja nr 77-DET-171) oraz «Optymalna synteza dwustopniowych przekładni zębatych stożkowo-walcowych przy wykorzystaniu programowania nieliniowego» (publikacja nr 77-DET-172).

Prof. M. DIETRICH wygłosił w ramach Sesji PTG-14 referat pt. «Dynamika przekładni walcowych» przedstawiający kompleksowe badania doświadczalne nad określeniem współczynnika nadywżki dynamicznej.

Podkreślić należy bardzo wysoki poziom wygłoszonych referatów oraz szczególnie miłą atmosferę obrad.

*J. Kowalski (Poznań)*



## INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych przez przestrzeganie następujących wytycznych:

1. Prace powinny być napisane piśmem maszynowym w dwóch egzemplarzach (oryginał + kopia), na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronicę z kolejną numeracją. Odbitki kserograficzne nie będą akceptowane jako oryginał.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wypisywać ręcznie lub na maszynie, bardzo czytelnie, używając liter łacińskich i greckich. Wskaźniki potęg i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3, itd.; 2.1, 2.2, 2.3, itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach w podaniu kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikac zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Wykaz literatury należy podać wg kolejności cytowania w tekście, wymieniając: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2 itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nieprzestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, 00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- R. I. STEPHENS, Wpływ przeciążeń na wzrost szczelin zmęczeniowych  
Влияние перегрузки на развитие усталостных трещин  
The influence of overloads on fatigue crack growth
- M. CHRZANOWSKI, Parametry uszkodzenia w kontynuualnej mechanice zniszczenia  
Параметры повреждения в механике разрушения сплошной среды  
Damage parameters in continual fracture mechanics
- K. KRZEMIŃSKI, Rozkład ciśnień i nośność hydrodynamicznego filmu smarnego w łożyskach porowatych  
Распределение давления и несущая способность смазочного слоя в пористых подшипниках  
The pressure distribution and load capacity of the hydrodynamic film in porous bearings
- J. SZALA, Wpływ sekwencji obciążeń na trwałość zmęczeniową  
Влияние истории нагружения на усталостную прочность  
The effect of load sequence on fatigue life
- F. ROMANÓW, Naprężenia krytyczne wolnopodpartych ścinanych płyt przekładkowych  
Критические напряжения свободно опертых трехслойных пластин работающих на сдвиг  
Critical stresses of simply supported sandwich plates in shear
- J. ŚWIDER, J. Wojnarowski, Grafy przepływu sygnałów w modelowaniu kaskadowej struktury układu wyciągowego  
Графы сигналов в моделировании каскадной структуры подъемной системы  
Signal flow graphs in modelling of the cascade structure of the lifting system
- J. ŚWIDER, J. Wojnarowski, Metoda fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej jako sposób wyznaczenia podatności dynamicznej złożonych układów mechanicznych  
Метод фиктивных источников полюсной переменной как способ определения динамической податливости сложных механических систем  
The fictitious source method in polar coordinates as the method of obtaining dynamical flexibility of composite mechanical systems
- E. WŁODARCZYK, O pewnym zamkniętym rozwiązaniu problemu propagacji płaskiej fali uderzeniowej w niejednorodnym plastycznym ośrodku politropowym z liniowo-sprężystym obciążeniem  
О некотором замкнутом решении задачи о распространении плоской, ударной волны в неоднородной среде с линейно-упругой разгрузкой  
On a certain in closed-form solution of the problem of propagation of a plane shock wave in a nonhomogeneous plastic polytropic medium
- J. TALER, Апроксимация неусталонного поля температуры в телах валцовых и кулистных  
Аппроксимация неустановившегося температурного поля в цилиндрических и сферических телах  
Approximation of the transient temperature field in cylindrical and spherical bodies

BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

Warunki prenumeraty  
Cena prenumeraty krajowej  
rocznie zł 120.—  
półrocznie zł 60.—

Prenumeratę na kaj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowy doręczyciele w terminach:

— do dnia 25 listopada na styczeń, 1-szy kwartał, I-sze półrocze roku następnego i na cały rok następny,

— do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty i na pozostałe okresy roku bieżącego  
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przejmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PĀN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period od time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch 0-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, — Pałac Kultury i Nauki piętro 17, pokój 1724)*

---