Dwa twierdzenia z teorji ram.

Napisał Stanisław Bełzecki.

Przy rozpatrywaniu zgięcia ram, odkształcenia i przesunięcia, wywołane działaniem sił osiowych, mogą być odrzucone, jako bardzo małe w porównaniu z odkształceniami, wywołanemi gięciem prętów.

Z teorji gięcia mamy:

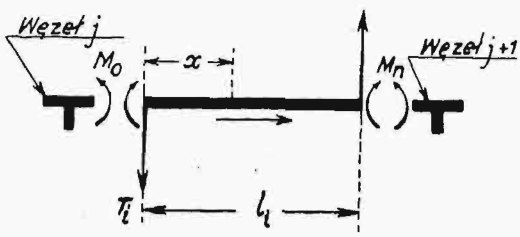
$$EI_i \frac{d\varphi}{dx} = M_x^i,$$

$$M_x^i = -M_0^i + T_i . x + \mu_x^i,$$

gdzie μ_x^i — moment gnący w belce wolno opartej na podporach.

$$\mu_x^i = 0 \quad \text{przy} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = l_i,$$

$$M_x^i \quad \text{przy} \quad x = l_i \quad \text{równa się} \quad M_n^i.$$



Rys. 1.

Równanie $M_n^i + M_0^i = T_i . l_i$ wyraża warunek równowagi momentów w pręcie.

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x^i}{EI_i}; \quad d\varphi = \frac{M_x^i}{EI_i} dx,$$

$$\varphi^{j+1} - \varphi^j = \varphi_i = \frac{l_i}{2EI_i}\left(M_n^i - M_0^i\right) + \frac{1}{EI_i}\int_0^{l_i} \mu_x^i . dx,$$

$$\frac{1}{EI_i}\int_0^{l_i} \mu_x^i . dx = \frac{1}{EI_i} . \varphi_\mu^i;$$

$$d\eta_i = (l_i - x)\, d\varphi;$$

$$\eta_i = \frac{l_i^2}{6EI_i}\left(M_n^i - 2M_0^i\right) + \frac{1}{EI_i}\int_0^{l_i} \mu_x^i (l_i - x)\, dx;$$

$$\frac{1}{EI_i}\int_0^{l_i} \mu_x^i (l_i - x)\, dx = \frac{1}{EI_i}\eta_\mu^i,$$

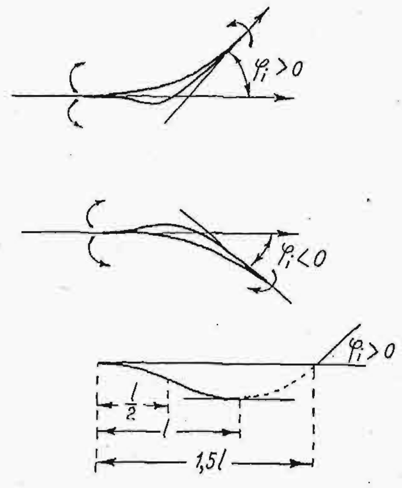
Jeżeli $\mu_x^i = 0$, $M_x = 0$ przy

$$x = \xi = \frac{M_0^i}{T_i} = \frac{M_0^i}{M_0^i + M_n^i} . l_i .$$

$$\varphi_x^i = \frac{x}{2EI_i}\left(-2M_0^i + T_i x\right);$$

$$\varphi_x^i = 0 \quad \text{przy} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = \xi_1 = \frac{2M_0^i}{T_i} = \frac{2M_0^i}{M_0^i + M_n^i} . l_i,$$

$$\eta_i = 0 \quad \text{przy} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = \xi_2 = \frac{3M_0^i}{T_i} = \frac{3M_0^i}{M_0^i + M_n^i} . l_i .$$



Rys. 2.

Jeżeli $\varphi_i = 0$, $M_n^i = M_0^i$;

$$\xi = \frac{l_i}{2}; \quad \xi_1 = l_i; \quad \xi_2 = 1{,}5\, l_i;$$

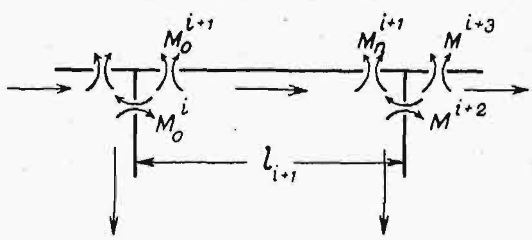
przy $x = \xi_2$,

$$\varphi_i = \frac{\xi_2}{2EI_i}\left(-2M_0^i + 3M_0^i\right) > 0.$$

Równowagę pręta l_i napisaliśmy w postaci:

$$M_0^i + M_n^i = T_i . l_i,$$

t. j. w założeniu, że $M_0^i > 0$, $M_n^i > 0$.



Rys. 3.

Równowagę węzła musimy pisać w postaci

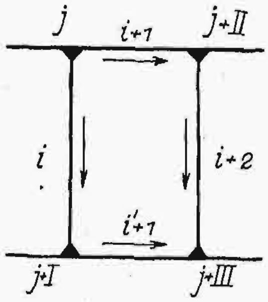
$$-M_n^{i+1} - M_n^{i+2} - M_0^{i+3} = 0.$$

albo

$$M_n^{i+1} + M_n^{i+2} + M_0^{i+3} = 0,$$

w założeniu, że w węźle niema momentów sił zewnętrznych. Jest oczywiste, że dość wskazać rzeczywisty znak jednego z momentów, żeby znaki wszystkich innych były wiadome. Z tego względu wprowadzamy wszystkie M_0^k, M_n^k algebraicznie.

Rozpatrzymy odkształcenia jednej ramy:



Rys. 4.

$$\varphi^{j+\mathrm{II}} - \varphi^{j} = \varphi_{i+1}$$

$$\varphi^{j+\mathrm{III}} - \varphi^{j+\mathrm{II}} = \varphi_{i+2}$$

$$\mp \varphi^{j+\mathrm{I}} \pm \varphi^{j} = \mp \varphi_{i}$$

$$\mp \varphi^{j+\mathrm{III}} \pm \varphi^{j+\mathrm{I}} = \mp \varphi_{i'+1}$$

$$\Sigma \varphi^{j} = 0 = \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2} - \varphi_{i} - \varphi_{i'+1}.$$

$$\varphi_{i+1} + \varphi_{i+2} = \varphi_{i} + \varphi_{i'+1} \quad \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Oznaczymy wydłużenia prętów pod działaniem sił osiowych przez λ:

$$\lambda_{i+1} + u_{i+2} + h \,.\, \varphi^{j+\mathrm{II}} = u_{i} + h \,.\, \varphi^{j} + \lambda_{i'+1}.$$

Zakładając $\lambda_{i'+1} - \lambda_{i+1} = 0$, mamy

$$u_{i+2} = u_{i} - h\varphi_{i+1} \quad \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

w kierunku osi x

$$v_{i+1} + l_{i+1}\varphi^{j} + \lambda_{i+2} = \lambda_{i} + v_{i'+1} + l_{i+1}\varphi^{j+\mathrm{I}}$$

$$v_{i'+1} = v_{i+1} - l_{i+1}\varphi_{i} \quad \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

Trzy równania (a), (b), (c) dają odkształcenia ramy.

Założymy, że siły zewnętrzne danych wektorów działają tylko w węzłach.

Równania równowagi węzłów:

$$M_n^{i-1} + M_0^{i} + M_0^{i+1} = 0 \quad . \quad . \quad \text{węzła } j$$

$$M_n^{i+1} + M_0^{i+2} + M_0^{i+3} = 0 \quad . \quad \text{,,} \quad j+\mathrm{II}$$

$$M_n^{i'-1} + M_n^{i} + M_0^{i'+1} = 0 \quad . \quad \text{,,} \quad j+\mathrm{I}$$

$$M_n^{i'+1} + M_n^{i+2} + M_0^{i'+3} = 0 \quad . \quad \text{,,} \quad j+\mathrm{III}.$$

Z równania (c), zakładając $I_{i'+1} = I_{i+1}$, mamy:

$$\frac{l_{i+1}^2}{6I_{i+1}}\left(M_n^{i'+1} - 2M_0^{i'+1}\right) = \frac{l_{i+1}^2}{6I_{i+1}}\left(M_n^{i'+1} - 2M_0^{i+1}\right) - \frac{l_{i+1}\,.\,h}{2I_i}\left(M_n^{i} - M_0^{i}\right),$$

$$M_n^{i'+1} - M_n^{i+1} + 2(M_0^{i+1} - M_0^{i'+1}) = -\frac{3h}{l_{i+1}}\cdot\frac{I_{i+1}}{I_i}\left(M_n^{i} - M_0^{i}\right).$$

Rugując $M_n^{i} - M_0^{i} = M_n^{i-1} - M_n^{i'-1} + M_0^{i'+1} - M_0^{i+1}$, otrzymamy:

$$\left(M_n^{i'+1} - M_n^{i+1}\right)\left(1 + \frac{3h}{l_{i+1}}\,\frac{I_{i+1}}{I_i}\right) + 2\left(M_0^{i+1} - M_0^{i'+1}\right) + \frac{3h}{l_{i+1}}\cdot\frac{I_{i+1}}{I_i}\left(M_n^{i-1} - M_n^{i'-1}\right),$$

czyli

$$M_n^{i'+1} = M_n^{i+1},$$

$$M_0^{i+1} = M_0^{i'+1},$$

$$M_n^{i-1} = M_n^{i'-1}.$$

Z równania (a) otrzymamy:

$$\left(1 + \frac{h}{l_{i+1}}\cdot\frac{I_{i+1}}{I_{i+2}} - \frac{h}{l_{i+1}}\cdot\frac{I_{i+1}}{I_i}\right)\left(M_n^{i'+1} - M_0^{i+1}\right) + \left(1 - \frac{h}{l_{i+1}}\cdot\frac{I_{i+1}}{I_i}\right)\left(M_0^{i+1} - M_0^{i'+1}\right) = \frac{h}{l_{i+1}}\cdot\frac{I_{i+1}}{I_{i+2}}\left(M_0^{i+3} - M_0^{i'+3}\right),$$

skąd

$$M_n^{i'+1} = M_0^{i+1},$$

$$M_0^{i+1} = M_0^{i'+1},$$

$$M_0^{i+3} = M_0^{i'+3};$$

— obydwa pasy ramownic są zgięte jednakowo

$$M_n^{i} = M_0^{i} \quad (i = 1, 3, 5, 7, \ldots)$$

$$\varphi_{i\ (i = 1, 3, 5, 7, \ldots)} = 0.$$

Z równania (b)

$$\frac{h^2}{6I_{i+2}}\left(M_n^{i+2} - 2M_0^{i+2}\right) = \frac{h}{6I_i}\left(M_n^{i} - 2M_0^{i}\right) - \frac{h\,.\,l_{i+1}}{2I_{i+1}}\left(M_n^{i+1} - M_0^{i+1}\right) - \frac{I_i}{I_{i+2}}M_0^{i+2} =$$

$$= -M_0^{i} - \frac{3l_{i+1}}{h}\cdot\frac{I_i}{I_{i+1}}\left(-2M_0^{i+1} + T_{i+1}\,.\,l_{i+1}\right),$$

$$\frac{I_i}{I_{i+2}}\left(M_n^{i+1} + M_0^{i+3}\right) = M_n^{i-1} + M_0^{i+1} + \frac{6l_{i+1}}{h}\cdot\frac{I_i}{I_{i+1}}M_0^{i+1} - \frac{3l_{i+1}}{h}\cdot\frac{I_i}{I_{i+1}}\,.\,T_{i+1}\,.\,l_{i+1},$$

$$\frac{I_i}{I_{i+2}}(-M_0^{i+1} + T_{i+1}\,.\,l_{i+1} + M_0^{i+3}) =$$

$$= -M_0^{i-1} + T_{i-1}\,.\,l_{i-1} + M_0^{i+1} + \frac{6l_{i+1}}{h}\cdot\frac{I_i}{I_{i-1}}M_0^{i+1} - \frac{3l_{i+1}}{h}\cdot\frac{I_i}{I_{i+1}}\,.\,T_{i+1}\,.\,l_{i+1},$$

albo

$$M_0^{i+1}\left(1 + \frac{I_i}{I_{i+2}} + \frac{6l_{i+1}}{h}\cdot\frac{I_i}{I_{i+1}}\right) + M_0^{i+1} - M_0^{i+3}\frac{I_i}{I_{i+2}} = \left(\frac{I_i}{I_{i+2}} + \frac{3l_{i+1}}{h}\cdot\frac{I_i}{I_{i+1}}\right)T_{i+1}\,.\,l_{i+1} - T_{i-1}\,.\,l_{i-1};$$

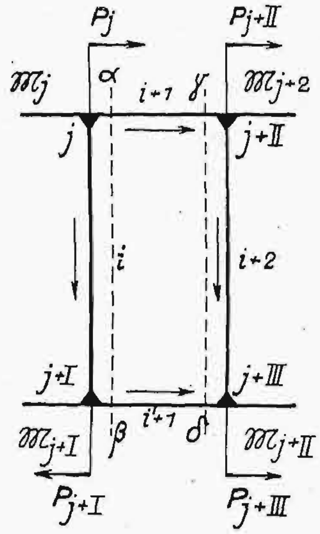
$$T_{i+1} = \frac{Q - \Sigma P_j}{2}.$$

Równanie trzech momentów.

Twierdzenie. Jeśli na ramownicę działają siły zewnętrzne tylko w węzłach, to obydwa pasy są zgięte jednakowo; φ_i słupków są równe zeru (punkty przegięcia pośrodku) i zadanie sprowadza się do równania trzech momentów. Ramownica jest wolno podparta na podporach. Jeśli jest ona leżąca, to jest to belka Virendeel'a; jeśli jest stojąca, to stanowi jedną z belek ściany.

W y p a d e k   o g ó l n y (ramownicy wolno opartej).

Na pręty ramownicy działają dowolne siły i momenty; w węzłach działają momenty sił zewnętrznych.



Rys. 5.

Równania równowagi węzłów:

$$M_n^{i-1} + M_0^i + M_0^{i+1} + \mathfrak{M}_j = 0,$$

$$M_n^{i+1} + M_0^{i+2} + M_0^{i+3} + \mathfrak{M}_{j+\mathrm{II}} = 0,$$

$$M_n^{i'-1} + M_n^i + M_0^{i'+1} + \mathfrak{M}_{j+\mathrm{I}} = 0,$$

$$M_n^{i'+1} + M_n^{i+2} + M_0^{i'+3} + \mathfrak{M}_{j+\mathrm{III}} = 0.$$

W danym wypadku $Q - \Sigma P_j + T_{i+1} + T_{i'+1} = 0$, lecz $T_{i+1} \neq T_{i'+1}$.

Wobec tego forma rozwiązania, podana wyżej, w funkcji T_{i+1} i T_{i-1} nie może być stosowana.

Równania równowagi prętów l_{i+1} i $l_{i'+1}$:

$$M_0^{i+1} + M_n^{i+1} = T_{i+1} \, . \, l_{i+1},$$

$$M_0^{i'+1} + M_n^{i'+1} = T_{i'+1} \, . \, l_{i+1},$$

po dodaniu

$$M_0^{i+1} + M_n^{i+1} + M_0^{i'+1} + M_n^{i'+1} = (T_{i+1} + T_{i'+1})\, l_{i+1},$$

dają równowagę wycinków ramy płaszczyznami $\alpha\beta$, $\gamma\delta$:

$$T_{i+1} + T_{i'+1} = (Q - \overset{j}{\Sigma} P) = 0,$$

a zatem

$$M_0^{i'+1} + M_n^{i'+1} = -\left[(Q - \overset{j}{\Sigma} P) + M_0^{i+1} + M_n^{i+1} \right] \ldots \text{(d)}$$

Zamiast równowagi dwóch innych prętów, możemy wyzyskać równowagę całej ramy, biorąc momenty względem j.

$$M_n^{i-1} + M_n^{i'-1} + M_0^{i+3} + M_0^{i'+3} + \left(Q - \overset{j+\mathrm{II}}{\Sigma} P\right) l_{i+1} = 0,$$

skąd

$$M_n^{i'-1} + M_0^{i'+3} = -\left[(Q - \overset{j+\mathrm{II}}{\Sigma} P) + M_n^{i-1} + M_0^{i+3} \right] \quad \text{(e)}$$

Podstawiając do (c), otrzymamy

$$\frac{l_{i+1}^2}{6 I_{i+1}} \left(M_n^{i'+1} - 2 M_0^{i'+1} \right) + \frac{v_\mu^{i'+1}}{I_{i+1}} =$$

$$= \frac{l_{i+1}^2}{6 I_{i+1}} \left(M_n^{i+1} - 2 M_0^{i+1} \right) + \frac{v_\mu^{i+1}}{I_{i+1}} -$$

$$- \frac{l_{i+1} h}{2 I_i} \left(M_n^i - M_0^i \right) - l_{i+1} \frac{\varphi_\mu^i}{I_i},$$

$$M_n^i - M_0^i = -[\mathfrak{M}_{j+1} + M_n^{i'-1} + M_0^{i'+1}] + [\mathfrak{M}_j + M_n^{i-1} + M_0^{i+1}].$$

Oznaczymy $\frac{3h}{l_{i+1}} . \frac{I_{i+1}}{I_i}$ przez a.

$$M_n^{i'+1} - (2 + a) M_0^{i'+1} - a M_n^{i'-1} = a \left(\mathfrak{M}_{j+1} - \mathfrak{M}_j - M_n^{i-1} - M_0^{i+1} \right) + M_n^{i+1} - M_0^{i+1} + d_c = D_c + d_c = D'_c,$$

$$d_c = \frac{6}{l_{i+1}^2} \left(\varphi_\mu^{i+1} - h \varphi_\mu^i . \frac{I_{i+1}}{I_i} - \varphi_\mu^{i+1} \right) \quad . \quad . \quad \text{(c)}^{\text{bis}}$$

Z równania (a) otrzymamy:

$$\left(1 + \frac{a}{3}\right) M_0^{i'+1} - M_n^{i'+1} \left(1 + \frac{b}{3}\right) - \frac{b}{3} M_0^{i'+3} =$$

$$= \frac{a}{3} \left(\mathfrak{M}_j - \mathfrak{M}_{j+\mathrm{I}} \right) - \frac{b}{3} \left(\mathfrak{M}_{j+\mathrm{II}} - \mathfrak{M}_{j+\mathrm{III}} \right) +$$

$$+ \frac{a}{3} \left(M_n^{i-1} + M_0^{i+1} - M_n^{i-1} \right) -$$

$$- \frac{b}{3} \left(M_0^{i+3} + M_n^{i+1} \right) + d_a = D_a + d_a \ldots \text{(a)}^{\text{bis}}$$

$$d_a = \frac{2}{l_{i+1}} \left(\varphi_\mu^{i'+1} + \varphi_\mu^i \frac{I_{i+1}}{I_i} - \varphi_\mu^{i+3} \frac{I_{i+1}}{I_{i+2}} - \varphi_\mu^{i+1} \right).$$

Z (c) mamy

$$M_0^{i+3} = -[(Q - \overset{j+\mathrm{III}}{\Sigma} P) + M_n^{i-1} + M_0^{i+3}] - M_n^{i'-1}.$$

Podstawiwszy do (a)^bis, otrzymamy:

$$\left(1 + \frac{a}{3}\right) M_0^{i'+1} - \left(1 + \frac{b}{3}\right) M_n^{i'+1} + \frac{b}{3} M_0^{i'-1} =$$

$$= D_a + d_a + \left[\left(Q - \overset{j+\mathrm{III}}{\Sigma} P \right) + M_n^{i-1} + M_0^{i+3} \right] = D'_a.$$

Z tego równania i z (c)^bis określimy $M_0^{i'+1}$ i $M_n^{i'+1}$ w funkcji $M_n^{i'-1}$.

Po podstawieniu do (d) określimy $M_n^{i'-1}$.

$$M_0^{i'+1} = -3 M_n^{i'-1} \frac{\left[a + \frac{b}{3}(a - 1) \right] + D'_a + D'_c \left(1 + \frac{b}{3}\right)}{[3 + 2a - b(2 + a)]},$$

$$M_n^{i'+1} = -3(2 + a) M_n^{i'-1} \frac{a + \frac{b}{3}(a - 1) + D'_a + D'_c \left(1 + \frac{b}{3}\right)}{3 + 2a - b(2 + a)} + a M_n^{i'-1} + D'_a.$$

Po dodaniu i uwzględnieniu (d):

$$-M_n^{i'-1}\left\{3(3+a)\left[\frac{a+\frac{b}{3}(a-1)+D'_a+D'_c\left(1+\frac{b}{3}\right)}{3+2a-b(2+a)}+a\right\}=\right.$$

$$=-\left[(Q-\sum^{j}P)+M_0^{i+1}+M_n^{i+1}\right]-D'_a,$$

$$M_n^{i'-1}=\frac{\left[(Q-\sum^{j}P)+M_0^{i+1}+M_n^{i+1}\right]+D'_a}{3(3+a)\left\{\frac{a+\frac{b}{3}(a-1)+D'_a+D'_c\left(1+\frac{b}{3}\right)}{3+2a-b(2+a)}+a\right\}},$$

$$M_0^{i+3}=-\left[(Q-\sum^{j+\mathrm{III}}P)+M_n^{i+1}+M_0^{i+3}\right]-M_n^{i'-1}.$$

Z równania (b) mamy:

$$\frac{h^2}{6I_{i+2}}(M_n^{i+2}-2M_0^{i+2})+\frac{u_\mu^{i+2}}{I_{i+2}}=\frac{h^2}{6I_i}(M_n^i-M_0^i)+$$

$$+\frac{u_\mu^i}{I_i}-\frac{h\,l_{i+1}}{2I_{i+1}}(M_n^{i+1}-M_0^{i+1})-\frac{h\,.\,\varphi_\mu^{i+1}}{I_{i+1}}.$$

Rugując $M_n^{i+2}-2M_0^{i+2}$ i $M_n^i-M_0^i$ zapomocą równań równowagi węzłów $M_n^{i'-1}$, $M_0^{i'+1}$, $M_n^{i'+1}$, $M_0^{i'+3}$, z podanych wyżej wzorów, otrzvmamy równania czterech momentów M_n^{i-1}, M_0^{i+1}, M_n^{i+1}, M_0^{i+3}.

Stosując te twierdzenia, w niektórych przypadkach, można otrzymać wyniki szybciej, niż metodą wykreślno-analityczną Suter'a.

Hamulce zespolone w zastosowaniu do pociągów towarowych.

Napisał Inż. Zygmunt Rytel.

Zamiast wstępu. Charakterystycznem jest dla zagadnienia zastosowania hamulców zespolonych na P. K. P., że każdy z rzeczników poszczególnych systemów uważa, iż nad tak prostą sprawą, jaką jest wybór najlepszego systemu, nie powinno się tracić czasu, lecz należałoby odrazu wybrać zalecany system, będący oczywiście najlepszym; o ile zaś kto jest innego zdania, to chyba dlatego, że nie zna się na rzeczy.

Publiczne odczyty i dyskusje, zapoczątkowane przez podpisanego, prof. St. Płużańskiego i prof. Rihosek'a w Stowarzyszeniu Techników, p. A. Pawłowskiego na Zjeździe Inż. Mechaników, wysunęły tę sprawę na forum techniczne. Stało się to jednak może nieco przedwcześnie, gdyż samo Ministerstwo Komunikacji studjów swych w tym kierunku nie zakończyło i stoi obecnie przed dokonaniem niezbędnych prób. Widzimy więc z tego, że Ministerstwo przystąpiło do sprawy z ostrożnością, na jaką tak ważne zagadnienie zasługuje, tembardziej, że sprawę hamulców dla pociągów towarowych rozwiązały i wprowadziły u siebie dotychczas tylko dwa państwa w Europie, reszta zaś państw jest obecnie dopiero w trakcie wbudowywania ich lub też studjowania zagadnienia.

Szybkie wprowadzenie hamulców zespolonych, niezależnie od systemu, powinno interesować przedewszystkiem Min. Spraw Wojskowych, a to ze względu na to, że zaopatrzenie pociągów towarowych w hamulce zespolone zwiększy wydatnie przelotność linij i przyśpieszy przeszło dwukrotnie przerzucanie transportów wojsk z jednej granicy na drugą.

Z chwilą jednak, gdy zagadnienie to omawiane jest na łamach poważnego czasopisma technicznego, należałoby oczekiwać, że będzie traktowane przez autorów rzeczowo i przytoczone dane będą sprawdzone; w przeciwnym bowiem razie podrywa się zaufanie do wszystkich podawanych opinij i zamiast wyjaśnienia całego zagadnienia wnosi się tylko zamęt.

Oto parę przykładów: na str. 465 „Przeglądu Technicznego" czytamy: „Dopiero z dodaniem drugiego cylindra Westinghouse'a, mianowicie cylindra do hamowania ładunku, komplet West. waży nieco więcej niż K. K." Na str. zaś 592 czytamy: „Pod względem finansowym Francja nie mogła przyjąć hamulca Kunze-Knorr'a, nawet gdyby był wyrabiany we Francji, ponieważ koszty zaopatrzenia całego taboru byłyby dwa razy wyższe, aniżeli koszty uposażenia w hamulce systemu Westinghouse'a".

Każdy technik, pobieżnie nawet znający się na tych 2-ch systemach, wie, że co do dokładności i trudności wykonania systemy te są sobie równe, a przy równej wadze muszą kosztować mniej więcej to samo; wogóle zaś koszt pneumatycznej części hamulców stanowi znacznie mniej, aniżeli połowę kosztów całkowitej instalacji.

Na str. 463 czytamy: „Hamowanie ładunku w całości umożliwia system Kunze-Knorr'a", — gdy tymczasem wiadomo, że hamulec Kunze-Knorr'a hamuje tylko 5 t ładunku, co np. przy ładunku węglarek 20 t stanowi tylko 25%.

Na str. 629: „Obecnie (1930) na sieci francuskiej, w służbie noramlnej, niema wagonów towarowych z hamulcem West. Lu, a to dlatego, żeby nie robić trudności w eksploatacji". Czy jednak jest pewność, że w eksploatacji hamulec West. Lu wykaże swe zalety, tak szumnie reklamowane?

Na str. 681 podana jest opinja 3-ch rzeczoznawców: Niemca, Polaka i Francuza. Otóż, o ile pierwsi dwaj potraktowali swe zadanie poważnie (chociaż opinje te nie są pozbawione stronniczości),