

C
Nr. 20295.
Politechnika Warszawska

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI
WARSZAWSKIEJ

Nr. Inwent. 356

Inż. elektr. ROMAN TREHCINSKI
PROF. POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

OBWODY NIBYUSTALONE

WEDŁUG WYKŁADÓW
DLA SEKCJI PRĄDÓW SŁABYCH
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

WARSZAWA — 1930

Skład Główny w Komisji Wydawniczej Tow. Bratniej Pomocy
Studentów Politechniki Warszawskiej, Warszawa, Polna 3, tel. 182-10

SIBLIOTEKA POLITECHNIKI

WARSZAWSKIEJ

Nr. Inwent.

356

Inż. elektr. ROMAN TRECHCIŃSKI

PROF. POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

OBWODY NIEYUSTALONE

WEDŁUG WYKŁADÓW
DLA SEKCJI PRĄDÓW SŁABYCH
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

WARSZAWA — 1930

Skład Główny w Komisji Wydawniczej Tow. Bratniej Pomocy
Studentów Politechniki Warszawskiej, Warszawa, Polna 3, tel. 182-10

i.2.3754



~~9.295~~

C. 90295

#256.5

Wstęp. W obwodzie niyustalonym, złożonym z oporności R i indukcyjności L w połączeniu szeregowym, prąd ustalający się jest funkcją czasu t .

W wypadku szczególnym pierwszym, gdy do chwili Θ napięcie było równe zeru, w chwili Θ nastąpiło momentalne podniesienie się do wartości V_s i następnie wartość napięcia V_s pozostaje stałą, mamy:

$$\text{do chwili } \Theta: v = 0; \quad \frac{dv}{dt} = 0; \quad i = 0$$

$$\text{w chwili } \Theta: \frac{dv}{dt} = \infty; \quad \text{po chwili } \Theta: v = V_s;$$

$$i = \frac{V_s}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\Theta)} \right]$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych; po upływie czasu nieskończenie długiego prąd osiąga wartość ustaloną $I_s = \frac{V_s}{R}$.

W wypadku szczególnym drugim, gdy do chwili Θ napięcie było nieskończenie dawno równe stałej wartości V_1 i w chwili Θ raptem przybrała stałą wartość V_2 :

$$\text{do chwili } \Theta: v = V_1; \quad \frac{dv}{dt} = 0; \quad i = I_1 = \frac{V_1}{R}$$

$$\text{w chwili } \Theta: \frac{dv}{dt} = \infty \quad \text{po chwili } \Theta: v = V_2;$$

$$i = \frac{V_1}{R} + \frac{V_2 - V_1}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\Theta)} \right].$$

Wzór dla chwilowych wartości prądu możemy napisać inaczej:

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} \right] - \frac{V_1}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} \right] = \\
 &= \frac{V_1}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} + \frac{V_2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} \right] = \\
 &= I_1 e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} + I_2 \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} \right] \dots (1)
 \end{aligned}$$

Z tego wzoru widzimy, że o ile mamy przejście w obwodzie niby ustalonym od jednej wartości ustalonej prądu I_1 do drugiej I_2 , to chwilowa wartość prądu równa się sumie dwóch składowych, z których pierwsza zanika na zasadzie prawa $e^{-\frac{R}{L}t}$, a druga powstaje na zasadzie prawa $\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

W wypadku szczególnym trzecim, gdy do chwili θ wartości napięcia i prądu równały się V_1 i I_1 , w chwili θ napięcie V_1 raptem przyjęło wartość zera, to jest $V_2 = 0$ to prąd obliczymy na podstawie wzoru pierwszego:

$$i = \frac{V_1}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)}$$

Wzór pierwszy możemy napisać jeszcze w postaci:

$$i = \frac{V_2}{R} + \left(\frac{V_1}{R} - \frac{V_2}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} = I_2 + (I_1 - I_2) e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} \dots (2)$$

Ten wzór wskazuje, że wartość prądu chwilowa równa się przyszłej wartości prądu ustalonego, więcej różnica pomiędzy pierwszym prądem ustalonym, a drugim zanikająca według

prawa $e^{-\frac{R}{L}t}$.

Prąd naturalny. Założymy, że w obwodzie niybustalonym napięcie wzrasta proporcjonalnie do czasu, a więc wyraża się wzorem:

$$v = Ct,$$

gdzie C jest wartością stałą, wzrost odbywa się w czasie $t = -\infty$ do $t = +\infty$ i że w chwili $t = 0$ wartość napięcia przechodzi zero.

Dla dowolnej chwili mamy zależności:

$$v = iR + L \frac{di}{dt}; \quad \frac{dv}{dt} = C; \quad \frac{dv^2}{dt^2} = 0.$$

Różniczkując pierwsze równanie otrzymujemy:

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2}.$$

Dla przebiegu ciągnącego się nieskończenie długo:

$$\frac{d^2i}{dt^2} = 0; \quad \frac{dv}{dt} = R \frac{di}{dt}; \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt}$$

Podstawiając wyraz otrzymamy dla $\frac{di}{dt}$ do równania początkowego, otrzymamy

$$i = \frac{v}{R} - \frac{L}{R^2} \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (3)$$

Wzór trzeci określa nam wartość prądu naturalnego w przebiegu ciągłym, nieskończonym, przy stałej wartości zmian napięcia.

Wykresy. Wybierzemy dla osi odciętych skalę czasu nie w sekundach lecz w jednostkach τ , określonych wzorem

$$\tau = \frac{L}{R} \dots \dots \dots (4)$$

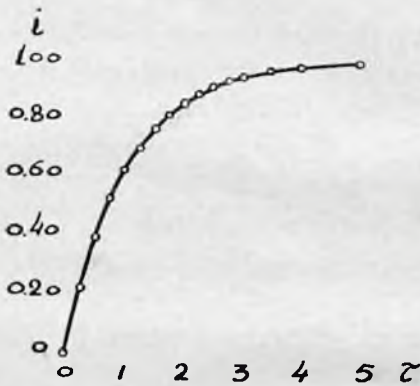
Dla osi rzędnych wybierzemy dowolną skalę napięcia v ; dla prądu zaś skala określi się wzorem

$$\text{skala } (i) = \text{skala } (v) \times R \dots \dots \dots (5)$$

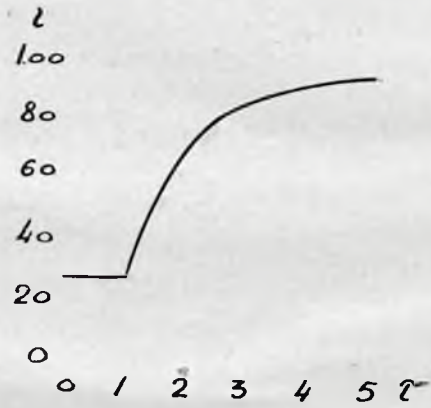
Przy powyższej skali odciętych krzywa, charakteryzująca wartość prądu w czasie, będzie wspólną dla wszystkich możliwych kombinacji stosunku $\frac{R}{L}$.

Skala rzędnych dałaby dla obwodu przy $L = 0$, wzajemnie nakładające się krzywe dla napięcia i prądu. Pierwsze pochodne napięcia i prądu naturalnego przy jednakowej ich wartości liczbowej będą jednakowo nachylone względem osi odciętych w obwodach ustalonych i nibyustalonych. Przy tej skali również wartość prądu ustalonego na wykresie nakłada się na wartość ustalonego napięcia.

Na rys. 1, 2, 3 i 4 są pokazane wykresy prądów dla wypadków szczególnych pierwszego, drugiego i trzeciego, a także napięcie i prąd naturalny w okresie czasu w bliskości zera; liczbowe wartości przyjęto: $R = 20 \Omega$; $L = 0,1 H$, skąd $\tau = 0,005 s$.



Rys. 1



Rys. 2

Przykład pierwszy. Jednostajny wzrost napięcia od zera do wartości stałej.

$$t < 0: v = 0; i = 0$$

$$0 < t < \theta: \frac{dv}{dt} = C;$$

$$t > \theta: v = V_s; \frac{dv}{dt} = 0$$

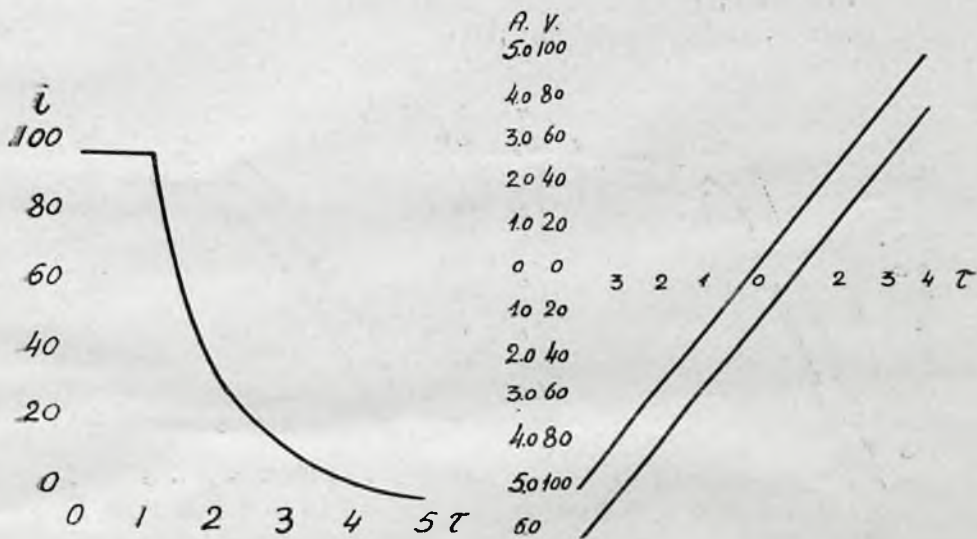
Gdyby przebieg zmiany napięcia ciągnął się nieskończenie długo, prąd przybliżałby się do wartości prądu naturalnego; tu wartości chwilowe, a więc i krzywa prądu nie mogą zależeć od warunków nieaktualnych, to jest od przyszłej granicy ustalenia się napięcia.

Stosując prawo przejścia wzoru pierwszego nie tylko dla prądu ustalonego, lecz i dla prądu naturalnego, otrzymamy:

$$\left[i \right]_{0 < t < \theta} = \left(\frac{v}{R} - \frac{L}{R^2} \frac{dv}{dt} \right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \dots (6)$$

W chwili θ :

$$i_{\theta} = \left(\frac{V_s}{R} - \frac{L}{R^2} C \right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\theta} \right)$$



Rys. 3

Rys. 4

Przejście od chwilowej wartości prądu i_{θ} do prądu ustalonego nie może zależeć od warunków powstania prądu i_{θ} .

Stosując prawo przejścia wzoru pierwszego, mamy:

$$\begin{aligned} \left[i \right]_{t > 0} &= i_{\theta} e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} + I_2 \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} \right] = \\ &= \left(\frac{V_s}{R} - \frac{L}{R^2} C \right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\theta} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-\theta)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{V_s}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\Theta)} \right] = \\
 = & \frac{V_s}{R} - \left[\frac{V_s}{R} e^{-\frac{R}{L}\Theta} + \frac{L}{R^2} C \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\Theta} \right) \right] e^{-\frac{R}{L}(t-\Theta)} \quad \dots (7)
 \end{aligned}$$

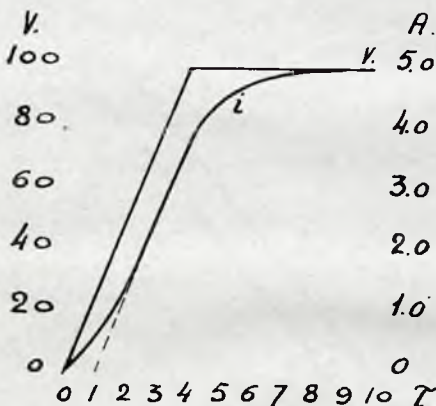
Na rys. 5 pokazany jest odpowiedni wykres napięcia i prądu.

$$R = 20 \Omega; \quad L = 0,1 \text{ H}; \quad \frac{dv}{dt} = 5000 \text{ Vs}^{-1};$$

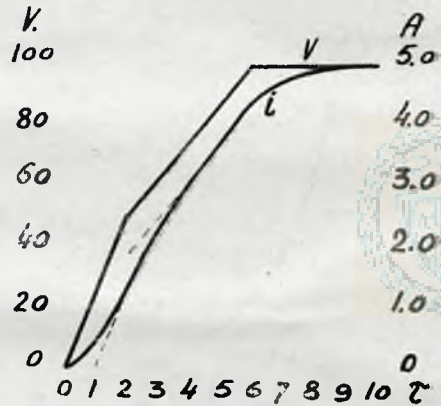
$$\tau = 0,005 \text{ s};$$

$$\text{skala napięć } 1V = 0,5 \text{ mm};$$

$$\text{skala prądów } 1A = R \times \text{skala napięć} = 10 \text{ mm}.$$



Rys. 5



Rys. 6

Rzzykład drugi. Wzrost napięcia w dwóch okresach; w każdym z tych okresów jednostajny, lecz z różną szybkością od zera do wartości stałej.

$$t < 0: v = 0; \quad i = 0;$$

$$0 < t < \Theta_1: \frac{dv}{dt} = C_1; \quad v_{\Theta_1} = V_1;$$

$$\Theta_1 < t < \Theta_2: \frac{dv}{dt} = C_2; \quad v_{\Theta_2} = V_2;$$

$$t < \Theta_2: v = V_2 = V_s; \quad \frac{dv}{dt} = \Theta;$$

$$\begin{aligned} [i]_{0 < t < \theta_1} &= \left(\frac{v}{R} - \frac{L}{R^2} \frac{dv}{dt} \right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \\ [i]_{t = \theta_1} &= \left(\frac{V_1}{R} - \frac{L}{R^2} C_1 \right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\theta_1} \right) \end{aligned}$$

Stosując prawo przejścia wzoru pierwszego, otrzymamy:

$$\begin{aligned} [i]_{\theta_1 < t < \theta_2} &= i_{\theta_1} e^{-\frac{R}{L}(t-\theta_1)} + \\ &+ \left(\frac{v}{R} - \frac{L}{R^2} \frac{dv}{dt} \right) \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\theta_1)} \right] = \\ &= \left(\frac{V_1}{R} - \frac{L}{R^2} C_1 \right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\theta_1} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-\theta_1)} + \\ &+ \left(\frac{v}{R} - \frac{L}{R^2} \frac{dv}{dt} \right) \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\theta_1)} \right] \dots (8) \\ i_{\theta_2} &= \left(\frac{V_1}{R} - \frac{L}{R^2} C_1 \right) \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\theta_1} \right) e^{-\frac{R}{L}(\theta_2-\theta_1)} + \\ &+ \left(\frac{V_2}{R} - \frac{L}{R^2} C_2 \right) \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(\theta_2-\theta_1)} \right] \\ [i]_{t > \theta_2} &= i_{\theta_2} e^{-\frac{R}{L}(t-\theta_2)} + \frac{V_2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\theta_2)} \right]. \end{aligned}$$

Na rys. 6 widzimy przebieg takiego napięcia i prądu.

Włączenie zmiennego napięcia sinusoidalnego o stałej amplitudzie.

$v = V \sin \omega t$, gdzie $\omega = 2\pi f$ i f ilość okresów na sekundę (częstotliwość). Wartość prądu ustalonego będzie

$$i = \frac{V \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{gdzie } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

Jeżeli obwód niyustalony został włączony do zmiennego ustalonego napięcia w chwili θ , to chwilowa wartość prądu określi się wzorem:

$$i = \frac{V \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} - \frac{V \sin(\omega\theta - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\frac{R}{L}(t - \theta)} =$$

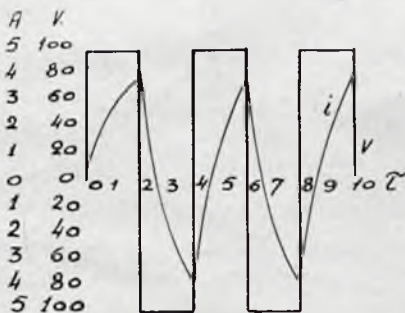
$$= \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\omega\theta - \varphi) e^{-\frac{R}{L}(t - \theta)} \right]$$

Jeżeli krzywa napięcia jest wypadkową kilku prądów harmonicznym to dla każdej oddzielnie możemy określić wartość prądu ustalającego się w każdej dowolnej chwili i po dodaniu chwilowych wartości oddzielnych prądów harmonicznym otrzymamy chwilową wartość wypadkową prądu ustalającego się.

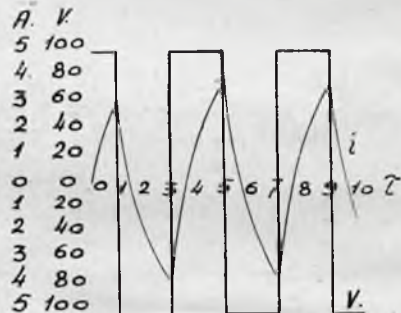
Dla pewnych szczególnych krzywych prądy ustalające się mogą być dokładniej i prędzej otrzymane przez zastąpienie krzywej ciągłej linią łamaną, złożoną z odcinków prostych, niż rozkładaniem na oddzielne harmoniczne sinusoidy.

Przykład trzeci. Włączenie napięcia ustalonego prostokątnego.

Stosując prawo przejścia nie tylko dla wartości $\frac{dv}{dt}$ większych od zera, lecz i dla mniejszych, otrzymamy krzywą prądu. Dla



Rys. 7

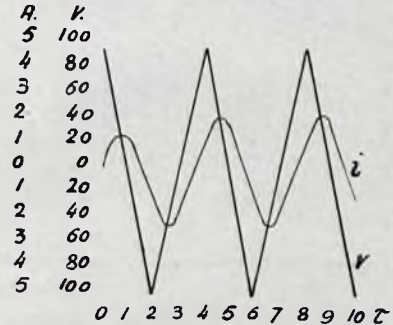
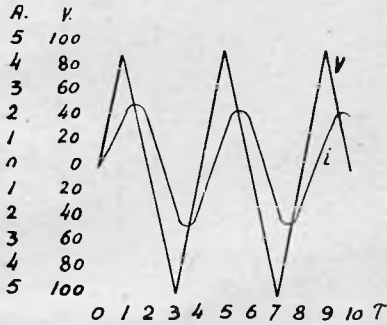


Rys. 8

dwu różnych chwil włączenia powyższe krzywe są wskazane na rys. 7 i 8; w liczbowym przykładzie założono: $V_m = 100 \text{ V}$; $f = 50 \text{ } \omega \text{ s}^{-1}$; $R = 20 \text{ } \Omega$ i $L = 0,1 \text{ H}$.

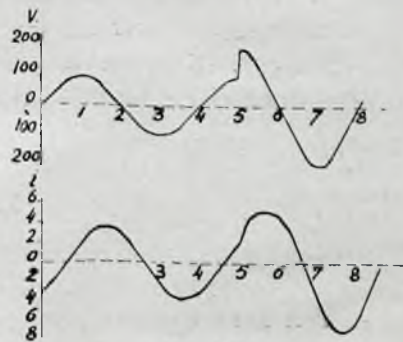
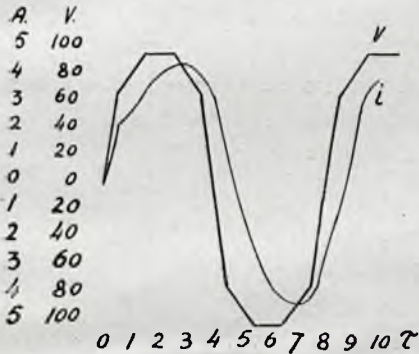
Przykład czwarty. Włączenie zmiennego napięcia ustalonego trójkątnego.

Stosując prawo przejścia dla dowolnych znaków $\frac{dv}{dt}$ i prądów naturalnych, otrzymamy chwilowe prądy. Odpowiednie wykresy dla dwóch chwil włączenia są wskazane na rys. 9 i 10.



Przykład piąty. Włączenie zmiennego napięcia ustalonego trapezoidalnego.

Analogiczną metodą znajdziemy krzywą prądu włączenia w dowolnej chwili; rys. 11 daje przykład tego przebiegu. Metoda obliczenia pozostaje tą samą dla dowolnej ilości załamań linii napięcia; zmniejszając odpowiednio odcinki, możemy do-



wolnie przybliżyć się do krzywej napięcia dowolnego kształtu i znaleźć prąd włączenia dla dowolnej krzywej w dowolnej chwili.

Raptowna zmiana przebiegu sinusoidalnego napięcia dla pewnej chwili pokazana jest na rys. 12. Dowolne odkształcenia dowolnej krzywej napięcia możemy uważać jako zmianę samego napięcia i metodą przybliżenia według prądów naturalnych znaleźć chwilową wartość prądu w każdej dowolnej chwili.

Raptowna zmiana oporności w chwili Θ z ustalonej wartości R_1 do ustalonej wartości R_2 daje chwilowe wartości prądów:

$$\begin{aligned}
 t < \Theta: I_1 &= \frac{V_s}{R_1} \\
 t > \Theta: i &= I_1 e^{-\frac{R_2}{L}(t-\Theta)} + \frac{V_s}{R_2} \left[1 - e^{-\frac{R_2}{L}(t-\Theta)} \right] = \\
 &= I_1 e^{-\frac{R_2}{L}(t-\Theta)} + I_2 \left[1 - e^{-\frac{R_2}{L}(t-\Theta)} \right] \dots \dots (9)
 \end{aligned}$$

Przejsie od wartości prądu I_1 do wartości I_2 odbywa się tu w nowej skali odciętych $\tau_2 = \frac{L}{R_2}$ analogicznie do przejść wzoru pierwszego. Jeżeli zatem na wykresie rys. 2 skala czasu do chwili Θ była $\tau_1 = \frac{L}{R_1}$, a po chwili Θ skalę tą zmienimy na $\tau_2 = \frac{L}{R_2}$, to ta sama krzywa wskazuje wartości prądów po chwili Θ .

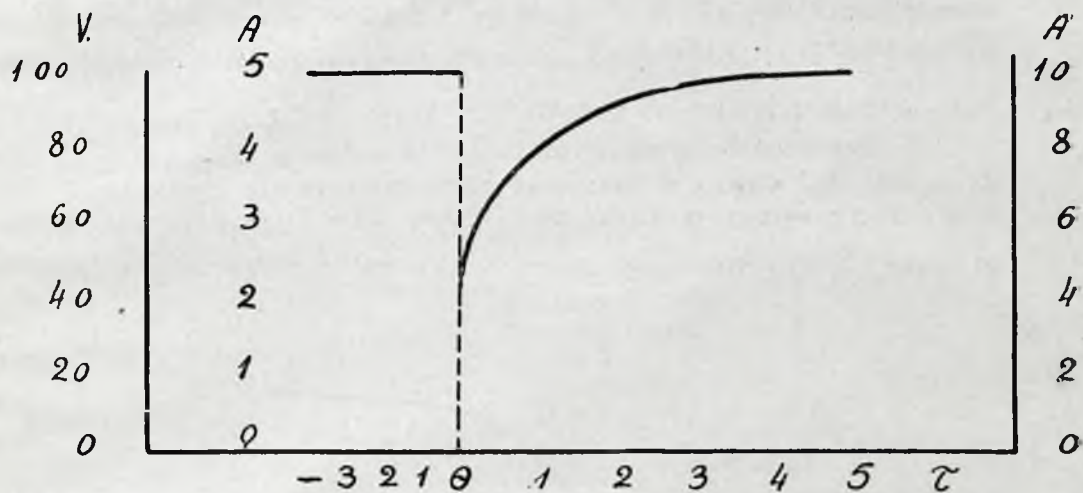
W przykładzie liczbowym szóstym założono $V_s = 100 V$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$ i $L = 0,1 H$.

Na rys. 13 skala napięć jest stałą $1 v = 0,5 mm$; skala dla prądu do chwili Θ będzie $1 A = 10 mm$; po chwili Θ : $1 A = 5 mm$; wartość τ_1 do chwili Θ będzie $\tau_1 = \frac{L}{R_1} = \frac{0,1}{20} = 000,5 s = ms$; po chwili Θ :

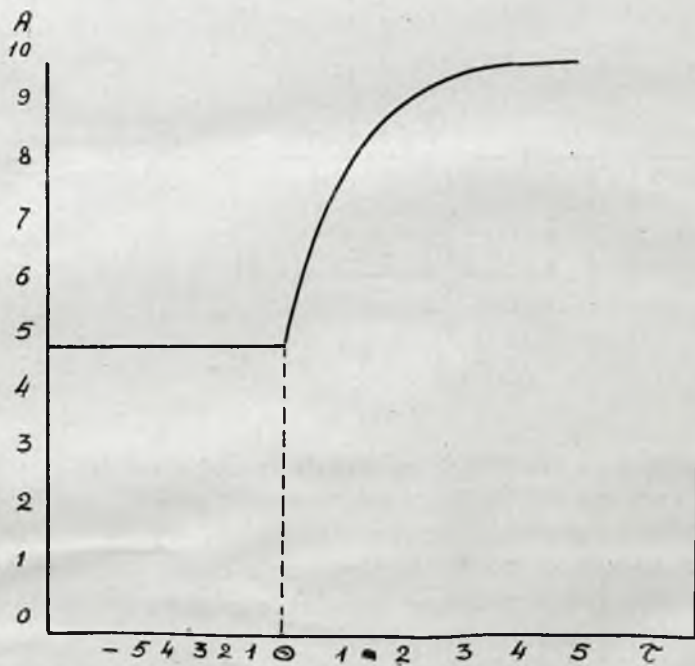
$$\tau_2 = \frac{L}{R_2} = \frac{0,1}{10} = 0,01 s = 10 ms.$$

Ten sam wykres jest uwidoczniiony na rys. 14 tylko skala prądu jest stałą: $1 A = 5 mm$; skala napięć do chwili Θ : $1 V = 0,5 mm$; po chwili Θ : $1 V = 1 mm$.

Stopniowa zmiana oporności od R_1 do wartości R_2 , która przy ustalonem napięciu dałaby przejście od prądu $I_1 = \frac{V_s}{R_1}$ do

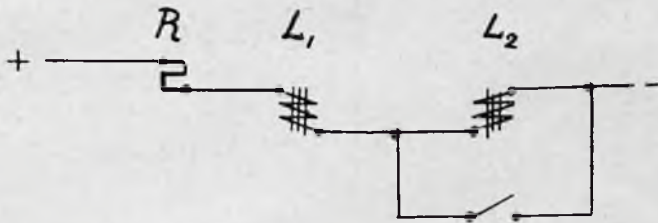


Rys. 13



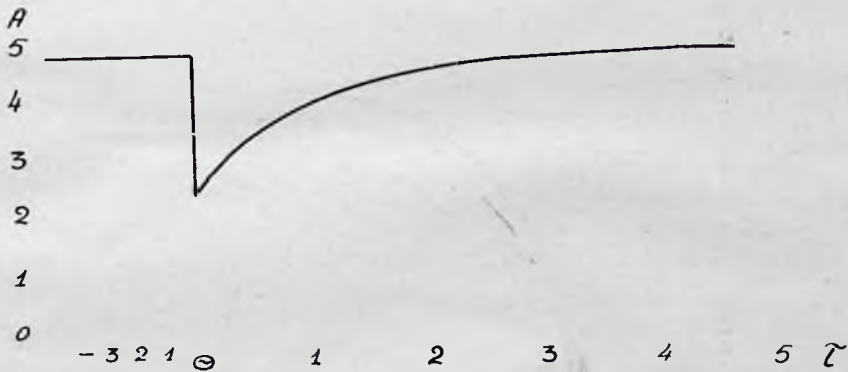
Rys 14

schematu uwidocznionego na rys. 16, przy czym L_2 do chwili Θ jest zwarte (na krótko) i w chwili Θ zwora jest momentalnie usunięta. Po chwili Θ wartość $\tau = \frac{L_1 + L_2}{R}$. Na rys. 17, 18 i 19 są wskazane przebiegi prądów dla $L_2 = L_1$, $L_2 = \frac{1}{3} L_1$ i $L_2 = 3 L_1$.



Rys. 16

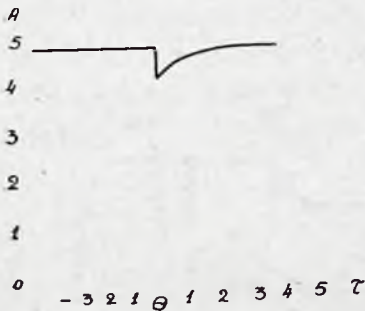
Jako przykład dziewiąty założono, że armatura elektromagnesu jest bardzo lekką, a zatem przepuszczony jest wpływ bezwładności jej masy.



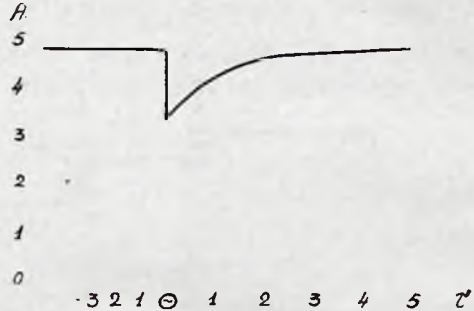
Rys. 17

Powyższa armatura jest odciągana przez sprężynę bardzo długą, a zatem przepuszczonem jest zwiększenie się naciągu przy ruchu armatury. W omawianym wypadku armatura bardzo szybko przyciągnęłaby się w chwili dojścia wartości prądu do takiej, która wywołałaby siłę, przeciwdziałającą sile sprężyny. Ten proces będzie zupełnie odpowiadał momentalnemu zwiększeniu się indukcyjności, czyli będzie analogicznym do otwarcia zwory w przykładzie ósmym. Jeżeli założyć, że samoindukcja elektro-

magnesu jest odwrotnie proporcjonalną do przestrzeni powietrznej, co jest identyczne z przybliżeniem, że reszta obwodu magnetycznego posiada bardzo małą oporność magnetyczną, to wartość prądu spadnie proporcjonalnie do zwiększenia się indukcyjności.

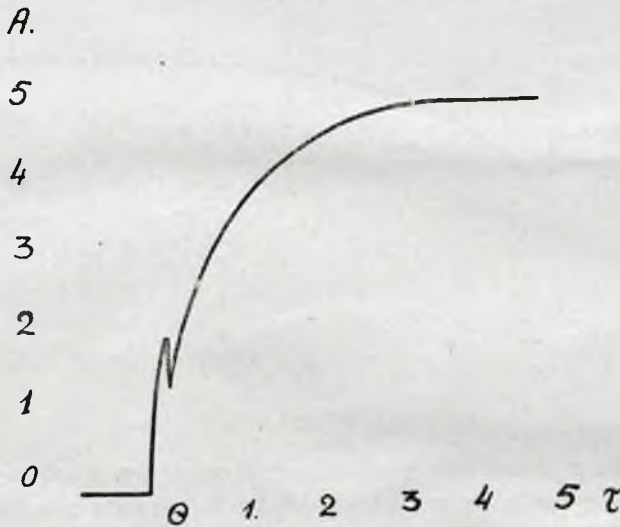


Rys. 18



Rys. 19

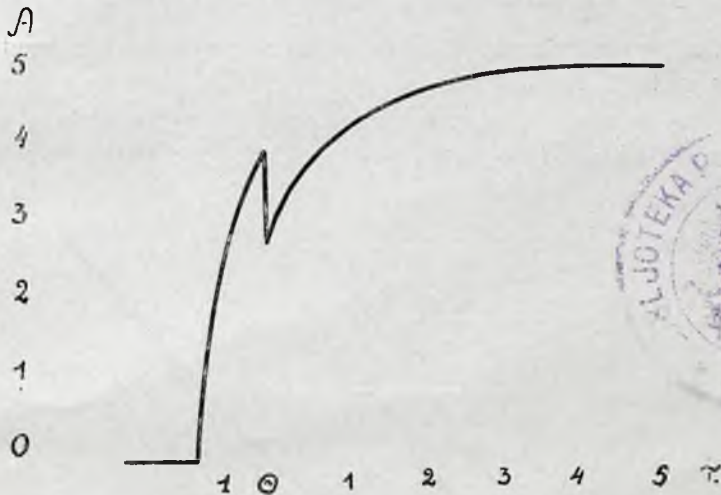
Ponieważ jednak indukcyjność jest odwrotnie proporcjonalna do oporności magnetycznej, to strumień magnetyczny pozostanie



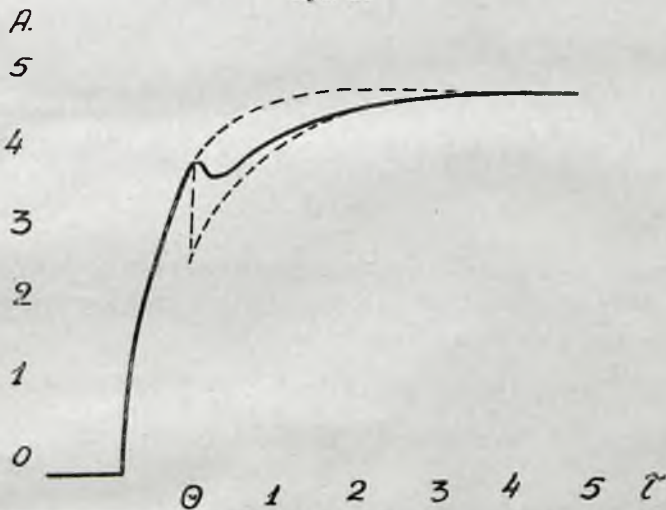
Rys. 20

bez zmiany i armatura będzie przyciągana ze stałą siłą. Jeżeli zatem bardzo wolno zwiększać prąd przez zmniejszanie dodatkowej oporności, to można traktować prąd magnesujący, jako ustalony; przy dalszem, bardzo małym, zwiększeniu się prądu

armatura momentalnie przyciągnie ze stałą siłą przy stałym strumieniu; w dalszym ciągu, przy pozostawieniu oporności bez zmiany, prąd będzie wzrastał; wykres prądu będzie bardzo bliski do wykresów na rys. 17, 18 lub 19.



Rys. 21



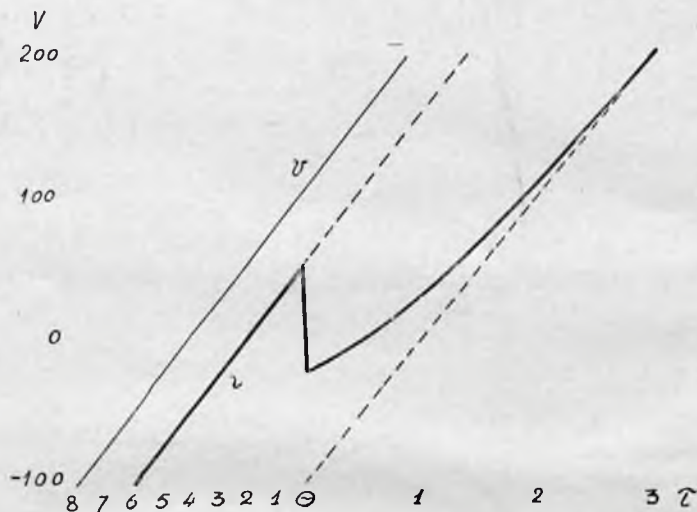
Rys. 22

Jako przykład dziesiąty założono, że elektromagnes, opisany w przykładzie dziewiątym włączony został do stacjonarnego napięcia. $V_s = 100 V$, $R = 20 \Omega$; indukcyjność przy oddalonej armaturze $0,1 H$ i przy przyciągniętej $0,2 H$. Do chwili przycią-

gnięcia $\tau = 5 \text{ ms}$; po przyciągnięciu $\tau = 10 \text{ ms}$. Wartość prądu przyciągania przyjęto 2 A dla wykresu rys. 20 i 4 A dla rys. 21.

W przykładzie jedenastym założono równomierną zmianę indukcyjności $\frac{dL}{dt} = 30 \text{ H s}^{-1}$, $L_1 = 0,1 \text{ H}$, $R = 20 \Omega$, $V_s = 100 \text{ V}$, ostateczną wartość $L_2 = 0,1 \text{ H}$, prąd przyciągania 4 A , czas przyciągania określi się $3,3 \text{ ms}$.

Gdyby armatura została przyciągnięta momentalnie, to wartość prądu określiłaby się według rys. 21; ponieważ wzrost



Rys. 23

indukcyjności jest stopniowy, to faktyczna wartość prądu określi się jako przyszła wartość więcej różnica między powyższymi prądami, a zanikająca według prawidła

$$e^{-\frac{dL}{dt}(t-\theta)} \times e^{-\frac{R}{L_1+L_2}(t-\theta)};$$

odpowiedni wykres jest pokazany na rys. 22.

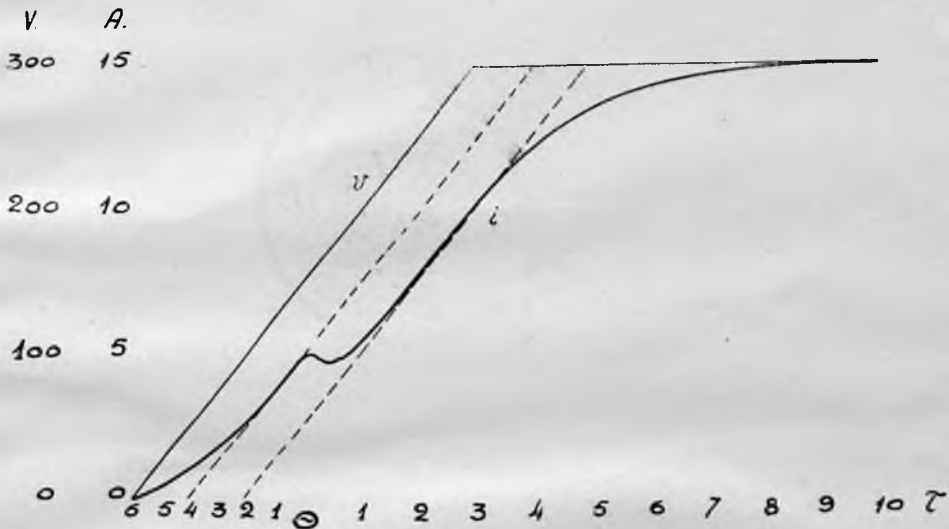
Chwilowa wartość prądu podczas momentalnego spadku określa się według wzoru:

$$i_{\theta+0} = i_{\theta-0} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_1+L_2}};$$

według powyższego wzoru zostały obliczone wykresy rys. 17, 18, 19, 20, 21 i 22.

W przykładzie dwunastym założono równomierne wzrastanie napięcia $\frac{dv}{dt} = \text{const.}$, układ według schematu rys. 16, włączenie momentalne indukcyjności L_2 w chwili Θ , $R = 20 \Omega$, $L_1 = 0,1 H$, $\frac{dv}{dt} = 5000 V_s^{-1}$, $L_2 = 0,3 H$.

Wykres prądu wskazany jest na rys. 23.



Rys. 24

W przykładzie trzynastym założono równomierne wzrastanie napięcia od zera aż do wartości ustalonej $\frac{dv}{dt} \text{const.} = 5000 V_s^{-1}$; w międzyczasie stopniowa zmiana indukcyjności $\frac{dL}{dt} = 30 H_s^{-1}$; początkowa wartość $L = 0,1 H$; ostateczna $0,2 H$, $R = 20 \Omega$, $V_s = 300 V$.

Wykres prądu jest wskazany na rys. 24.