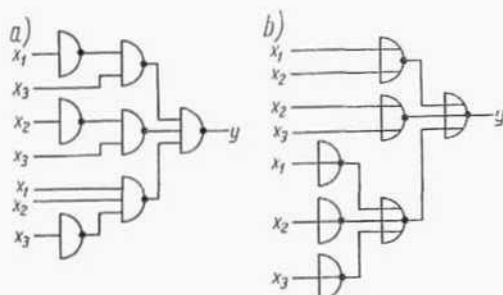


można zrealizować za pomocą podanej liczby elementów (gdy negacje zmiennych nie są dane), więc odpowiednie układy będą miały postać jak na rys. 3-27.



Rys. 3-27. Realizacja funkcji za pomocą elementów NAND i NOR

Gdy negacje argumentów są do dyspozycji, najprostsze układy uzyskuje się zazwyczaj z postaci normalnych funkcji (tzn. sum iloczynów lub iloczynów sum). Gdy jednak negacje argumentów nie są dane, istotne uproszczenie układu można osiągnąć przez faktoryzację i inne metody przekształcania funkcji, np.

$$(a + \bar{b})(a + \bar{d})c = (a + \bar{b}\bar{d})c$$

6 NOR 4 NOR

$$a\bar{b} + a\bar{c} + d = a(\bar{b} + \bar{c}) + d$$

6 NAND 4 NAND

albo

$$(a + \bar{b})(\bar{a} + b) = (a + \bar{a}\bar{b})(\bar{a}\bar{b} + b) \quad \text{gdyż} \quad a + \bar{a}b = a + b$$

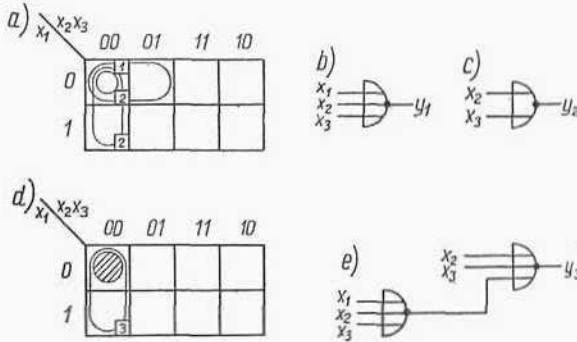
5 NOR 4 NOR

Znalezienie takiej funkcji, by jej realizacja z elementów NOR albo NAND była najprostsza, jest zadaniem trudnym. Jedna z możliwych metod postępowania polega na przekształceniach typu algebraicznego.

3.3.2. SYNTEZA ALGEBRAICZNA

Niech zadanie polega na zaprojektowaniu układu z elementów NOR. Pojedynczy taki element realizuje funkcję, która jest albo negacją argumentu, albo iloczynem negacji argumentów, a więc każda funkcja zadana

przez $F^1 = (0 \dots 0)$ może być zrealizowana przez jeden element NOR. Na przykład funkcji $y_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ (jedynek w kratce nr 1 na rys. 3-28a) odpowiada $F_1^1 = (000)$ — rys. 3-28b, funkcji $y_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3$ (kratki nr 2) odpowiada $F_2^1 = (-00)$ — rys. 3-28c itd. Jeśli układy realizujące funkcje



Rys. 3-28. Ilustracja współpracy dwóch NOR'ów

y_1 i y_2 połączy się w sposób przedstawiony na rys. 3-28e, to otrzymany układ będzie realizował funkcję

$$y_3 = \overline{x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3} = \bar{x}_2 \bar{x}_3 (x_1 + x_2 + x_3) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

czyli $F_3^1 = (100)$.

Funkcji y_3 odpowiada jedynka w kratce nr 3 na rys. 3-28d, a tę kratkę można uważać za wynik odjęcia od kraterki nr 2 kratki nr 1. Ponieważ między kratkami tablicy a elementami zbiorów F^0 , F^1 i F^x istnieje bezpośrednia zależność, można napisać, że

$$F_3^1 = F_2^1 - F_1^1$$

czyli

$$(100) = (-00) - (000) \quad (3-1)$$

Zastosowana tu operacja ma znaczenie różnicy zbiorów, a wynik staje się oczywisty jeśli się zauważy, że

$$(-00) = \begin{pmatrix} 000 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Charakterystyczną cechą równości (3-1) jest to, że po prawej stronie występują wyrażenia opisane samymi zerami, a więc łatwo realizowalne za pomocą elementu NOR.

Z powyższych rozważań wynika pewna metoda postępowania. Jeśli formułę F^1 albo F^0 przekształci się z pomocą operacji różnicy w wyrażenie o samych zerach, to ułatwi się tym samym realizację funkcji elementami NOR. Realizacja wyrażenia $A-B$ polega na dołączeniu wyjścia elementu realizującego B do wejścia elementu realizującego A (rys. 3-28e).

Można zauważyć, że zależność (3-1) nie jest jedyną postacią przekształcenia wyrażenia (100) w wyrażenie bez jedynek. Prawdziwe są również zależności:

$$\begin{aligned}(100) &= (-00) - (00-) \\ (100) &= (-00) - (0--)\end{aligned}\quad (100) = (-00) - (0-0)$$

Wszystkie te równania można opisać łatwiej, wprowadzając symbol \hat{a} , oznaczający (a) albo $(-)$, przy czym a jest elementem zbioru $\{0, 1, -\}$. Wobec tego

$$(\hat{a}\hat{b}) = \begin{cases} (-) \\ (a-) \\ (-b) \\ (ab) \end{cases}$$

oraz

$$(100) = (-00) - (0\hat{0}\hat{0})$$

Jeśli $A = (ab...x)$ to $\hat{A} = (\hat{a}\hat{b}...\hat{x})$ i powyższą zależność można uogólnić do postaci:

$$(1A) = (-A) - (0\hat{A}) \quad (3-2)$$

Przykładem wykorzystania tej równości może być funkcja nierównoważności

$$F_4^1 = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Na podstawie (3-2) uzyskuje się:

$$(01) = (0-) - (\hat{0}\hat{0})$$

$$(10) = (-0) - (\hat{0}\hat{0})$$

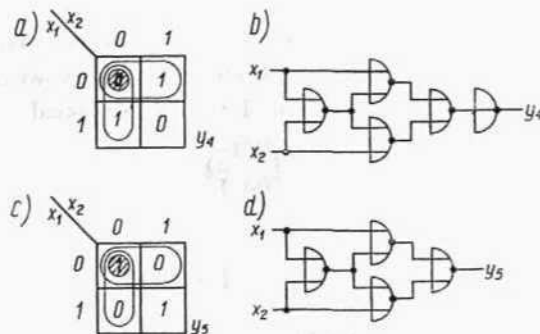
Ponieważ równania, w których występuje \hat{a} są prawdziwe dla każdej wartości \hat{a} , więc prawdziwa jest zależność

$$\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0-) - (00) \\ (-0) - (00) \end{pmatrix}$$

gdyż

$$(00) = (\hat{00}) \cap (\hat{00})$$

Uzyskany wspólny człon zbiorów odejmowanych umożliwia wykorzystanie wspólnego elementu. Przekształcona tu postać F^1 zawiera więcej niż jeden składnik, więc niezbędna jest realizacja sumy tych składników, czyli pierwszego poziomu układu. Dla elementów NOR i F^1 pierwszy poziom ma dwa elementy, więc ostateczny układ dla funkcji nierównoważności ma postać z rys. 3-29b. Ogólnie można stwierdzić,



Rys. 3-29. Tablica (a) i układ (b) dla funkcji nierównoważności oraz tablica (c) i układ (d) dla funkcji równoważności

że jeśli wyrażenie F^1 albo F^0 sprowadzi się do postaci $A-B$, to realizacja poziomu I wynika z ogólnych zasad (p.3.3.1), poziom II jest określony wyrażeniem A , a poziom III — wyrażeniem B .

Dla funkcji równoważności przedstawionej w postaci

$$y_5 = (x_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + x_2)$$

jest

$$F_5^0 = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$$

więc podobnie jak poprzednio można napisać

$$\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0- \\ -0 \end{pmatrix} - (00)$$

ale, ponieważ wyrażenie pochodzi od F^0 , poziom I będzie zawierać tylko jeden element NOR (rys. 3-29d).

Zależność (3-2) jest pomocna przy syntezie układów NOR tylko wówczas, gdy człon A składa się z samych zer lub zer i kresek (a w szczególnym przypadku — z samych kresek). Człon A o takiej postaci będzie nazywany *rdzeniem funkcji*, można więc powiedzieć, że funkcja y_4 ma dwa rdzenie. Od liczby rdzeni zależy wprost liczba elementów drugiego poziomu układu, jest więc celowe przedstawianie funkcji w takiej postaci, która zawiera najmniejszą liczbę rdzeni. Można zauważyć, że proces sklejania prowadzi do zmniejszenia tej liczby i dlatego należy przekształcać F^0 albo F^1 do postaci skróconej.

Jeśli kilka składników postaci skróconej, ma taki sam rdzeń, to można je zapisać w postaci αA , przy czym α oznacza wówczas wyrażenie o kilku wierszach, złożone z symboli 1 i -. Na przykład, jeśli

$$F^0 = \begin{pmatrix} 001- \\ 00-1 \end{pmatrix}$$

to

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1- \\ -1 \end{pmatrix} \quad A = (00-)$$

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami można napisać, że w tym przypadku $\alpha = x_3 + x_4$, a więc $\bar{\alpha} = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$, czyli

$$\bar{\alpha} = (-00)$$

Ponieważ

$$\alpha A + \bar{\alpha} A = A$$

to

$$\begin{pmatrix} \alpha A \\ \bar{\alpha} A \end{pmatrix} = (-A)$$

oraz między wyrażeniami αA uważanymi za zbiory zachodzą następujące relacje

$$(\bar{\alpha} A) \subseteq (\bar{\alpha} \hat{A})$$

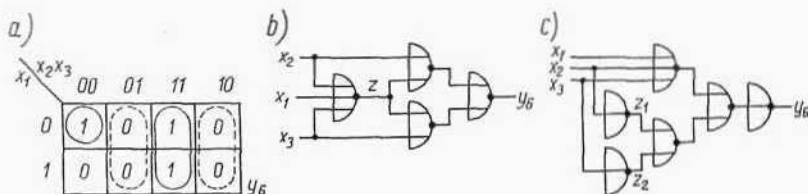
$$(\bar{\alpha} \hat{A}) \cap (\alpha A) = \emptyset$$

więc prawdziwe jest równanie:

$$(\alpha A) = (-A) - (\bar{\alpha} \hat{A}) \quad (3-3)$$

Zależność (3-2) jest szczególnym przypadkiem zależności (3-3), która stanowi podstawę prezentowanej metody. Przydatność uzyskanego równania wyjaśnia przykład z rys. 3-30. Z tablicy otrzymuje się postać skróconą funkcji y_6

$$F_6^0 = \begin{pmatrix} -01 \\ -10 \\ 10- \\ 1-0 \end{pmatrix} *$$



Rys. 3-30. Przykład syntezy algebraicznej

Jeden z wyróżnionych składników można usunąć bez zmiany wartości funkcji, jednakże zachowując wszystkie składniki uzyskuje się prostszy układ, gdyż

$$\begin{pmatrix} -01 \\ 10- \end{pmatrix} = (-0-) - (0\hat{0}0)$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 1-0 \end{pmatrix} = (--0) - (00\hat{0})$$

więc

$$F_6^0 = \begin{pmatrix} -01 \\ 10- \\ -10 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0- \\ --0 \end{pmatrix} - (000)$$

Odpowiedni układ jest przedstawiony na rys. 3-30b. Dla tej samej funkcji można wyznaczyć drugą postać

$$F_6^1 = \begin{pmatrix} 000 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Dla (-11) rdzeń wynosi $(---)$, natomiast $\alpha = x_2 x_3$, więc $\bar{\alpha} = \bar{x}_2 + \bar{x}_3$ i

$$(-11) = (---) - \begin{pmatrix} -0- \\ -0 \end{pmatrix}$$

Po uwzględnieniu członu (000) otrzymuje się układ przedstawiony na rys. 3-30c.

Przy bardziej złożonych zadaniach stosowanie zapisu przyjętego wyżej jest niedogodne. Można go zmodyfikować wprowadzając dla sygnałów wyjściowych elementów poziomu III symbol z (rys. 3-30b,c). Zamiast

$$F_6^0 = \begin{pmatrix} -0- \\ -0 \end{pmatrix} - (000)$$

można wówczas napisać

$$F_6^0 = \begin{pmatrix} -0- & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \\ z = (000)$$

Pionowa kreska w tym zapisie oddziela zmienne wejściowe x_1, x_2, x_3 od zmiennej z . Pod kreską poziomą zapisano funkcję z . Taki zapis jednoznacznie określa trzypoziomowy układ NOR, umożliwiając przy tym łatwą ocenę obciążeń poszczególnych wejść (liczba zer w odpowiedniej kolumnie) i określenie liczby elementów (liczba wierszy nad kreską jest równa liczbie elementów poziomu II, a pod kreską — poziomu III).

Drugi układ dla funkcji y_6 wynika więc z przekształcenia

$$F_6^1 = \begin{pmatrix} 000 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 000 & -- \\ -- & 00 \end{pmatrix} \\ z_1 = \begin{pmatrix} -0- \\ -0 \end{pmatrix} \\ z_2 = \begin{pmatrix} -0- \\ -0 \end{pmatrix}$$

Zmienne występują tu w kolejności x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 .

Jeśli z postaci skróconej funkcji można usunąć pewne składniki zmniejszając tym samym liczbę rdzeni funkcji, to oczywiście należy to uczynić, gdyż zmniejszy się wówczas liczba elementów poziomu II, bez rozbudowy innych poziomów. Niekiedy liczbę rdzeni można dodatkowo zmniejszyć, zmieniając postać niektórych składników postaci skróconej. Zmiana ta polega na takim zastąpieniu kresek zerami, aby wartość funkcji

nie uległa zmianie, a nowoutworzony rdzeń był taki jak dla innego składnika funkcji. Możliwość takiej modyfikacji względnie łatwo można rozpoznać, gdyż podlegają jej takie wyrażenia, których wszystkie symbole 0 i 1 występują już w innych wyrażeniach tworzących łącznie postać skróconą. Na przykład postać funkcji

$$F^0 = \begin{pmatrix} 010- \\ --01 \\ 1--1 \end{pmatrix}$$

ma 3 rdzenie, wliczając (---). Jednakże elementy drugiego wiersza wchodzi w skład pozostałych, co nasuwa przypuszczenie, że można tu dokonać przekształceń.

Rzeczywiście:

$$(--01) = \begin{pmatrix} 0-01 \\ 1-01 \end{pmatrix}$$

a składnik (1-01) jest zawarty w (1--1), więc można funkcję zapisać w postaci

$$F^0 = \begin{pmatrix} 010- \\ 0-01 \\ 1--1 \end{pmatrix}$$

o dwóch rdzeniach. Procedura ta nie zawsze daje korzyści.

Na podstawie powyższych rozważań można sprecyzować następujący algorytm syntezy 3-poziomowych układów NOR.

1. Znany*mi* metodami należy funkcję doprowadzić do zero-jedynkowej postaci skróconej F^0 albo F^1 . W większości przypadków postać F^0 prowadzi do prostszego układu.

2. Składniki postaci skróconej dzieli się na grupy o wspólnym rdzeniu. Jeśli jakaś grupa może być usunięta bez zmiany wartości funkcji, usuwa się ją. Wnioski dotyczące tego rugowania wynikają wprost z tablicy Karnaugh'a lub tablicy implikantów, przy minimalizacji funkcji.

3. Jeśli wszystkie symbole 0 i 1 jakieg*o*s grupy występują w innych grupach, należy zbadać możliwość zmniejszenia liczby rdzeni przez zastąpienie niektórych kresek — zerami bez zmiany wartości funkcji.

4. Do grup o wspólnym rdzeniu stosuje się wzór (3-3).

5. Każde wyrażenie z symbolem \hat{a} reprezentuje zbiór, który może być zastąpiony jednym swoim elementem. Elementy te wybiera się tak, aby ich liczba dla wszystkich grup była najmniejsza, a same elementy — najprostsze.

6. Funkcję zapisuje się w umowny sposób ułatwiający rysowanie schematu logicznego. Należy pamiętać o nie objętych zapisem elementach poziomu I.

Zasady te zostaną zilustrowane kilkoma przykładami.

Funkcja

$$y_7(x_1, x_2, x_3) = \prod (5, 6)$$

może być zapisana w postaci

$$F_7^0 = \begin{pmatrix} 101 \\ 110 \end{pmatrix}$$

stanowiącej jednocześnie postać kanoniczną i skróconą. Funkcja ma 2 rdzenie, więc

$$\begin{aligned} (101) &= (-0-) - \begin{pmatrix} 0\hat{0}- \\ -\hat{0}0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (z_1) \\ (z_2) \end{matrix} \\ (110) &= (-0-) - \begin{pmatrix} 0-\hat{0} \\ -0\hat{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} (z_1) \\ (z_2) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} (0---) \\ (-00) \end{matrix} \end{aligned}$$

Wartości \bar{z} zostały tu wyznaczone tak jak dla y_6 . Pod kreską umieszczono najprostsze, wspólne postacie wyrażeń nad kreską.

Uzyskane wyniki można teraz zapisać inaczej:

$$\begin{aligned} F_7^0 &= \begin{pmatrix} 101 \\ 110 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -0- & 00 \\ --0 & 00 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0--- \\ (-00) \end{pmatrix}} \\ z_1 &= \begin{pmatrix} 0--- \\ (-00) \end{pmatrix} \\ z_2 &= \begin{pmatrix} 0--- \\ (-00) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Realizacja wymaga użycia 5 elementów NOR (4 wiersze i 1 element poziomu I) — rys. 3-31.

Dla tej samej funkcji druga postać skrócona to

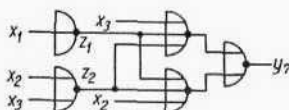
$$F_7^1 = \begin{pmatrix} 0- \\ -00 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Przekształcenia wymaga tylko trzeci składnik

$$(-11) = (---) - \begin{pmatrix} 0- \\ -0 \end{pmatrix}$$

więc

$$F_7^1 = \begin{pmatrix} 0- \\ -00 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0- & | & - \\ -00 & | & - \\ --- & | & 00 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-0-) \\ (-0) \end{matrix}$$



Rys. 3-31. Przykład syntezy układu 3-poziomowego

Realizacja tej postaci wymaga aż 7 elementów NOR (5 wierszy i 2 elementy poziomu I).

Dla funkcji

$$y_8 = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$$

uzyskuje się postać skróconą

$$F_8^0 = \begin{pmatrix} 001 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ:

$$\begin{aligned} (001) &= (00-) - (\hat{0}\hat{0}\hat{0}) \\ (1-0) &= (-0-) - \frac{(0-\hat{0})}{(0-0)} \end{aligned}$$

więc

$$F_8^0 = \begin{pmatrix} 001 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00- & | & 0 \\ -0- & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (0-0) \end{matrix} \quad (4 \text{ NOR})$$

Druga postać skrócona tej funkcji to

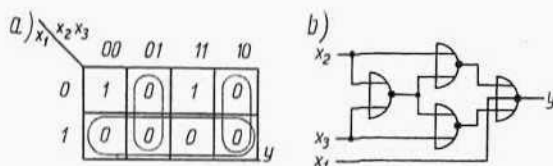
$$F_8^1 = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-1 \\ 01- \\ -11 \end{pmatrix}_*$$

Jeden z wyróżnionych składników można usunąć. Ponieważ grupy rdzeniowe mają postać

$$(0-0) \quad (01-)^* \quad \begin{pmatrix} 1-1 \\ -11 \end{pmatrix}_*$$

należy usunąć składnik $(01-)$. Ostatnią grupę przekształca się w sposób następujący:

$$\begin{pmatrix} 1-1 \\ -11 \end{pmatrix} = (---) - \begin{pmatrix} 00- \\ --0 \end{pmatrix}$$



Rys. 3-32. Przykład bezpośredniego dołączania wejść
gdyż dla $\alpha = x_1x_3 + x_2x_3$ jest $\bar{\alpha} = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3$. Wobec tego

$$F_8^1 = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 & | & -- \\ --- & | & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 00- \\ --0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ NOR})$$

Na uwagę zasługują funkcje typu

$$\text{lub} \quad y = x_1 + f(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$y = x_1 \cdot f(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Ze względu na możliwość prostego dołączenia do układu wejścia x_1 , można tu rozpatrywać tylko funkcję $f(x_2, x_3, \dots, x_n)$. Na przykład tablica z rys. 3-32a przedstawia funkcję

$$y = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_3)(x_2 + \bar{x}_3)$$

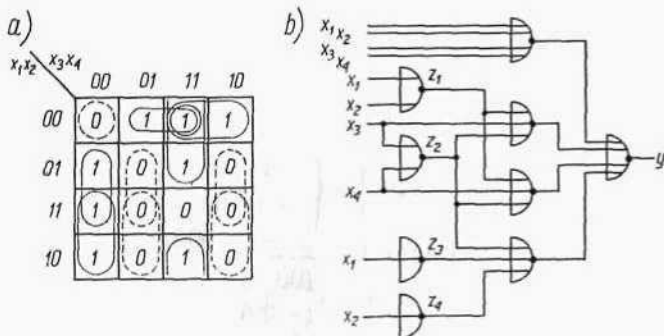
Zamiast rozważać postać

$$F^0 = \begin{pmatrix} 1-- \\ -10 \\ -01 \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad F^1 = \begin{pmatrix} 000 \\ 011 \end{pmatrix}$$

można przekształcić

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -01 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} --0 & 0 \\ -0- & 0 \end{pmatrix}}{(-00)}$$

a wejście x_1 dołączyć do układu jak na rys. 3-32b.



Rys. 3-33. Przykład układu o większej liczbie wejść

Przy większej liczbie zmiennych trudności w posługiwaniu się prezentowaną metodą rosną w bardzo małym stopniu. Na przykład dla funkcji zadanej tablicą z rys. 3-33a otrzymuje się

$$F_9^0 = \begin{pmatrix} 0000 \\ -101 \\ -110 \\ 1-01 \\ 1-10 \\ 11-1 \\ 111- \end{pmatrix} \begin{matrix} * \\ * \end{matrix}$$

Jeden z wyróżnionych składników może być usunięty.

Po wydzieleniu grup rdzeniowych, na podstawie (3-3) otrzymuje się:

$$\begin{pmatrix} -101 \\ 1-01 \end{pmatrix} = (-0-) - \begin{pmatrix} 00\hat{0}- \\ -\hat{0}0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -110 \\ 1-10 \end{pmatrix} = (---0) - \begin{pmatrix} 00-\hat{0} \\ -\hat{0}0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11-1 \\ 111- \end{pmatrix} = (----) - \begin{pmatrix} 0--- \\ -0--- \\ --00 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z_3 \\ z_4 \\ z_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (00--) \\ (--00) \\ (0---) \\ (-0---) \end{matrix}$$

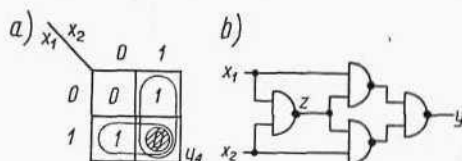
czyli

$$F_9^0 = \begin{pmatrix} 0000 \\ -101 \\ 1-01 \\ -110 \\ 1-10 \\ 11-1 \\ 111- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0000 & | & ---- \\ -0- & | & 00-- \\ ---0 & | & 00-- \\ ---- & | & -000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (00--) \\ (--00) \\ (0---) \\ (-0---) \end{matrix}$$

Odpowiedni układ przedstawiono na rys. 3-33b.

Przedstawiony wyżej algorytm oraz wzór (3-3) stosuje się — z niewielkimi zmianami — również do syntezy układów z elementami NAND. Różnice polegają na tym, że za pomocą wzoru (3-3) usuwa się z formuł nie jedynki lecz zera, rdzeniem jest wyrażenie bez zer, a w większości



Rys. 3-34. Synteza układu nierównoważności elementów NAND

przypadków prostsze rozwiązanie uzyskuje się z przekształcenia postaci skróconej F^1 (mnšej elementów poziomu I).

Na przykład funkcja nierównoważności y_4 (rys. 3-34a) może być przekształcona w następujący sposób:

$$F_4^1 = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (01) = (-1) - (\hat{1}\hat{1}) \\ (10) = (1-) - (\hat{1}\hat{1}) \end{array}$$

$$F_4^1 = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1- & 1 \end{pmatrix}}{(11)} \quad (4 \text{ NAND})$$

Przekształcając drugą postać funkcji uzyskuje się

$$F_4^0 = \begin{pmatrix} 00 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (00) = (-) - \begin{pmatrix} 1- \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$F_4^0 = \begin{pmatrix} 00 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -- & 11 \\ 11 & -- \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1- \\ -1 \end{pmatrix}} \quad (6 \text{ NAND})$$

Inna rozpatrywana wyżej funkcja y_6 ma dwie równorzędne realizacje:

$$F_6^1 = \begin{pmatrix} 000 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} --- & 111 \\ -11 & --- \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1-- \\ -1- \\ --1 \end{pmatrix}} \quad (6 \text{ NAND})$$

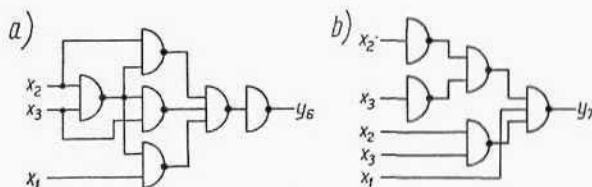
oraz

$$F_6^0 = \begin{pmatrix} -01 \\ -10 \\ 10- \\ 1-0 \end{pmatrix}^* \quad \begin{array}{l} (-01) = (--1) - (-\hat{1}\hat{1}) \\ (-10) = (-1-) - (-\hat{1}\hat{1}) \\ \begin{pmatrix} 10- \\ 1-0 \end{pmatrix} = (1--)-(\hat{1}\hat{1}\hat{1}) \end{array}$$

$$F_6^0 = \frac{\begin{pmatrix} --1 & 1 \\ -1- & 1 \\ 1-- & 1 \end{pmatrix}}{(-11)} \quad (6 \text{ NAND})$$

Drugie rozwiązanie jest przedstawione na rys. 3-35a. Funkcję y_7 można przedstawić w postaci

$$F_7^1 = \begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 1 & 1 \\ - & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Rys. 3-35. Przykłady układów z elementami NAND

Ponieważ

$$(-00) = (---) - \begin{pmatrix} - & 1 & - \\ - & - & 1 \end{pmatrix}$$

więc

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 1 \\ - & - & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} - & 1 & 1 \\ - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & - \\ - & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} - & 1 & - \\ - & - & 1 \end{pmatrix}} \quad (5 \text{ NAND})$$

a wejście x_1 wprowadza się tak jak na rys. 3-35b.

Przekształcając F_7^0 otrzymuje się również układ o pięciu elementach.

Dla funkcji y_8 będzie

$$F_8^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & - \\ 0 & 1 & - \\ - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^*$$

można więc napisać np.

$$F_8^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & - \\ - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} - & - & - \\ - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ - & - \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & - \\ - & - & 1 \end{pmatrix}} \quad (6 \text{ NAND})$$

albo

$$F_8^0 = \begin{pmatrix} 001 \\ 1-0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (001) = (-1-1) - \begin{pmatrix} 1-\hat{1} \\ -1\hat{1} \end{pmatrix} \\ (1-0) = (1--1) - \begin{pmatrix} \hat{1}-1 \\ (1-1) \\ (-1-) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$F_8^0 = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1- & 1- \end{pmatrix}}{\begin{matrix} (1-1) \\ (-1-) \end{matrix}} \quad (6 \text{ NAND})$$

Przy przekształcaniu postaci opisujących funkcję y , można zauważyć, że liczba sygnałów pomocniczych z przekracza liczbę sygnałów x . Oznacza to, że prostszy rezultat uzyska się przez wprowadzenie negacji sygnałów x i realizację minimalnej postaci normalnej.

3.3.3. UKŁADY WIELOPOZIOMOWE

W niektórych przypadkach liczbę elementów lub obciążeń wejść w układzie 3-poziomowym można zmniejszyć, przez powiększenie liczby poziomów. Możliwość taka istnieje szczególnie często, gdy w postaciach skróconych F^0 albo F^1 występuje charakterystyczne zestawienie zmiennych:

$$\begin{pmatrix} \dots a \dots \\ \dots b \dots \\ \dots c \dots \\ \dots \\ \dots \bar{a}\bar{b}\bar{c} \dots \end{pmatrix}$$

przy czym a, b, c przyjmują wartości ze zbioru $\{0, 1\}$. Jeśli przy takim układzie będzie się stosować wzór (3-3) dopuszczając w części α zarówno zera jak i jedynki, to będzie możliwe zmniejszenie rdzeni funkcji, rozumianych jako wspólna część kilku składników postaci skróconej.

Na przykład przy realizacji z elementów NOR funkcji

$$F^0 = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -10 \\ 101 \end{pmatrix}$$

stosując procedurę z p.3.3.2 wydzieli się 3 różne rdzenie, co prowadzi do układu o 6 elementach NOR. Jeśli jednak za rdzeń dwu pierwszych składników przyjmuje się $(--0)$, to na podstawie (3-3) uzyska się:

$$\begin{pmatrix} 0-0 \\ -10 \end{pmatrix} = (---0) - (10\hat{0})$$

Przy typowym przekształcaniu trzeciego składnika będzie

$$(101) = (-0-) - \begin{pmatrix} 0\hat{0}- \\ -\hat{0}0 \end{pmatrix}$$

gdyż $\alpha = x_1 x_3$, więc $\bar{\alpha} = \bar{x}_1 + \bar{x}_3$. Jednakże $\bar{x}_1 + \bar{x}_3 = \bar{x}_1 + x_1 \bar{x}_3$ więc można napisać

$$(101) = (-0-) - \begin{pmatrix} 0\hat{0}- \\ 1\hat{0}0 \end{pmatrix}$$

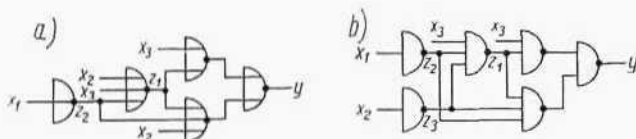
Z kolei wspólny dla obu wyrażeń człon (100) , to

$$(100) = (-00) - (0\hat{0}\hat{0})$$

a więc wszystkie przekształcenia można zapisać w postaci

$$F^0 = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -10 \\ 101 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} --0 & | & 0- \\ -0- & | & 00 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (100) \\ (0-- \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} --0 & | & 0- \\ -0- & | & 00 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (-00 & | & -0) \\ (0-- \end{pmatrix}}$$

Element realizujący sygnał z_2 występuje tu zarówno w poziomie III jak i IV (rys. 3-36a), nie wprowadzano więc nowej nazwy dla tego sygnału.



Rys. 3-36. Układy czteropoziomowe

W podobny sposób przy realizacji z elementów NAND funkcji

$$F^1 = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -11 \\ 000 \end{pmatrix}$$

można napisać

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1- \\ -11 \end{pmatrix} &= (-1) - (00\hat{1}) \\ (000) &= (---) - \begin{pmatrix} 001 \\ 1-- \\ -1- \end{pmatrix} \\ (001) &= (-1) - \begin{pmatrix} 1-- \\ -1- \end{pmatrix} \end{aligned}$$

więc

$$F^1 = \begin{pmatrix} 1- \\ -11 \\ 000 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & | & 1- \\ --- & | & 111 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 001 \\ 1-- \\ -1- \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & | & 1- \\ --- & | & 111 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 & | & -11 \\ 1-- \\ -1- \end{pmatrix}}$$

Odpowiedni układ (rys. 3-36b) zawiera 6 elementów, zamiast 7 w wersji 3-poziomowej.

Dla układu z elementów NAND zadanego funkcją

$$F^1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 00- \\ 0-1 \end{pmatrix}$$

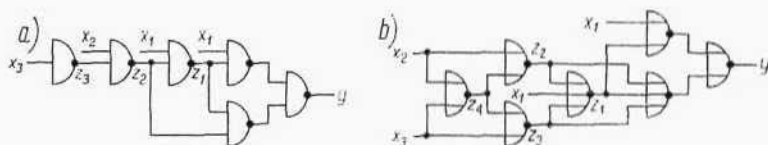
można otrzymać

$$\begin{aligned} (110) &= (1--)-\begin{pmatrix} \hat{1}0- \\ \hat{1}-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 00- \\ 0-1 \end{pmatrix} &= (---)-\begin{pmatrix} 1\hat{0}- \\ 1-\hat{1} \\ -10 \end{pmatrix} \\ \left. \begin{pmatrix} 10- \\ 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} \right\} &= (1--)-(\hat{1}10) \\ (-10) &= (-1-)-(-\hat{1}1) \\ &\quad \frac{(-10)}{(-1)} \end{aligned}$$

więc

$$F^1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 00- \\ 0-1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1-- & | & 1-- \\ --- & | & 11- \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1-- & | & -1- \\ -1- & | & --1 \\ --1 \end{pmatrix}}$$

Układ jest przedstawiony na rys. 3-37a.



Rys. 3-37. Układy pięciopoziomowe

Trudniejsze jest uproszczenie układu z elementów NOR, zadanego przez

$$F^0 = \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \\ 111 \end{pmatrix}$$

Jedna z możliwości przekształceń ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \end{pmatrix} &= (0--)-\begin{pmatrix} \hat{0}00 \\ \hat{0}11 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix} &= (---)-\begin{pmatrix} 000 \\ 011 \\ -10 \\ -01 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 000 \\ 011 \end{pmatrix} &= (0--)-\begin{pmatrix} \hat{0}01 \\ \hat{0}10 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -10 \\ -01 \end{pmatrix} &= (-0-)-\begin{pmatrix} \hat{0}0 \\ \hat{0}0 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} (-01) \\ (-10) \\ (-00) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

więc

$$F^0 = \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \\ 111 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0- & | & 0- \\ - & | & 00- \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0- & | & -00- \\ -0- & | & -0 \\ -0 & | & -0 \\ -00 \end{pmatrix}}$$

Układ realizujący tę funkcję jest przedstawiony na rys. 3-37b.

Jak wykazują powyższe przykłady, główna trudność procesu syntezy polega na takim doborze α , by wyrażenia $\bar{\alpha}$ mogły zawierać wiele członów wspólnych.

Należy zwrócić uwagę na to, że układy wielopoziomowe wprowadzają odpowiednio większe opóźnienia na drodze sygnału od wejścia do wyjścia układu, a różnice między opóźnieniami różnych sygnałów mogą spowodować szkodliwe procesy przejściowe sygnału wyjściowego. Ponieważ w wielu przypadkach zwiększenie liczby poziomów nie przynosi wyraźnych korzyści, zazwyczaj poprzestaje się na łatwiejszej syntezie układów 3-poziomowych.

3.3.4. UKŁADY WIELOWYJŚCIOWE

Przy syntezie układów wielowyjściowych należy przeprowadzić dokładną analizę składników przekształconej postaci skróconej jednej funkcji pod kątem ich przydatności w innych funkcjach. Na przykład sumator jednobitowy, zadany tablicą z rys. 3-13b, można opisać wyrażeniami (kolejność zmiennych — p, a, b):

$$F_s^0 = \begin{pmatrix} 000 \\ 011 \\ 101 \\ 110 \end{pmatrix}, \quad F_{p'}^0 = \begin{pmatrix} 00- \\ 0-0 \\ -00 \end{pmatrix}$$

Przy realizacji z elementów NOR można przekształcić F_s^0

$$\begin{pmatrix} 000 \\ 011 \end{pmatrix} = (0--) - \begin{pmatrix} \hat{0}01 \\ \hat{0}10 \end{pmatrix}$$

$$(101) = (-0-) - \begin{pmatrix} 0\hat{0}1 \\ -\hat{0}0 \end{pmatrix}$$

$$(110) = (--0) - \begin{pmatrix} 0\hat{1}\hat{0} \\ -\hat{0}\hat{0} \end{pmatrix}$$

$$z_1 = (001) = (00-) - (\hat{0}\hat{0}\hat{0})$$

$$z_2 = (010) = (0-0) - (\hat{0}\hat{0}\hat{0})$$

$$z_3 = (-00) = \quad \quad \quad (-\hat{0}\hat{0})$$

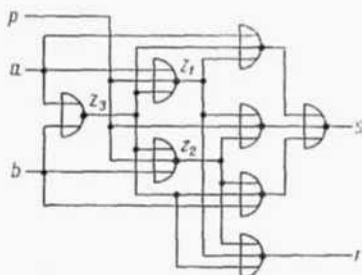
więc

$$F_s^0 = \begin{pmatrix} 000 \\ 011 \\ 101 \\ 110 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0- & 00- \\ -0- & 0-0 \\ -0 & -00 \end{array} \right)$$

$$z_1 = \quad \quad \quad (00- | --0)$$

$$z_2 = \quad \quad \quad (0-0 | --0)$$

$$z_3 = \quad \quad \quad (-00)$$



Rys. 3-38. Sumator jednobitowy

Porównanie składników tej postaci ze składnikami $F_{p'}^0$, nasuwa my o wykorzystaniu członów z . Rzeczywiście, można napisać

$$F_{p'}^0 = \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ -00 \end{pmatrix}$$

więc realizacja sumatora może mieć schemat z rys. 3-38. Wyrażenia F^1 dla sumatora mają postać

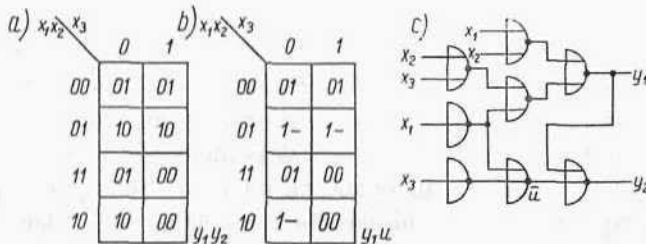
$$F_s^1 = \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \\ 111 \end{pmatrix} \quad F_{p'}^0 = \begin{pmatrix} 11- \\ 1-1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Nietrudno zauważyć, że powstają one przez zamianę 1 na 0 i 0 na 1 w odpowiednich wyrażeniach F^0 . Wynikają z tego dwa istotne wnioski:

— sumator jednobitowy z elementów NAND ma identyczny schemat jak sumator z elementów NOR,

— jeśli do wejść sumatora doprowadzi się sygnały $\bar{p}, \bar{a}, \bar{b}$, to na wyjściach otrzyma się \bar{s} i \bar{p}' .

Ta druga cecha jest wykorzystywana przy tworzeniu układów iteracyjnych z segmentów, w których łatwiej realizuje się \bar{p}' , niż p' (rozdz. 5).



Rys. 3-39. Synteza układu dwuwyjściowego z elementów NOR

Istotne korzyści uzyskuje się w takich układach wielowyjściowych, w których ma miejsce zależność $F_i^1 \subseteq F_j^0$ (przy realizacjach z elementów NOR) albo $F_i^0 \subseteq F_j^1$ (przy realizacjach z elementów NAND). Można wówczas wyjście y_i wprowadzić na wejście ostatniego elementu układu y_j , co upraszcza budowę tego układu.

Na przykład dla funkcji zadanych tablicą z rys. 3-39a jest

$$F_1^1 = \{2, 3, 4\} = \begin{pmatrix} 01- \\ 100 \end{pmatrix} \quad F_1^0 = \{0, 1, 5, 6, 7\} = \begin{pmatrix} 00- \\ 11- \\ 1-1 \\ -01 \end{pmatrix} *$$

$$F_2^1 = \{0, 1, 6\} = \begin{pmatrix} 00- \\ 11- \\ 1-1 \end{pmatrix} \quad F_2^0 = \{2, 3, 4, 5, 7\} = \begin{pmatrix} 01- \\ 10- \\ 1-1 \\ -11 \end{pmatrix}^*$$

Przy niezależnej syntezie (pod kątem stosowania elementów NOR) otrzymuje się:

$$F_1^0 = \begin{pmatrix} 00- \\ 11- \\ 1-1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 00- & | & -- \\ -- & | & 00 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -00 & | & -- \\ 0-- & | & -- \end{pmatrix}} \quad (5 \text{ NOR})$$

$$F_2^0 = \begin{pmatrix} 01- \\ 10- \\ 1-1 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0-- & | & 0- \\ -0- & | & 0- \\ -- & | & 00 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 00- & | & -- \\ --0 & | & -- \end{pmatrix}} \quad (6 \text{ NOR})$$

Jeśli jednak zauważy się, że $F_1^1 \cap F_2^1 = \emptyset$ (brak wyrażen 11 w tablicy na rys. 3-39a), a więc $F_1^1 \subseteq F_2^0$ i $F_2^1 \subseteq F_1^0$, to (p.3.2) jedną z tych funkcji można wyrazić za pomocą negacji drugiej oraz członu uzupełniającego u . Ponieważ prostsza jest realizacja y_1 — należy modyfikować y_2 : $y_2 = \bar{y}_1 u$. Wtedy gdy $y_1 = 1$, to $y_2 = 0$, niezależnie od u , więc funkcję u otrzymuje się z y_2 , wpisując wartość nieokreśloną wszędzie tam, gdzie $y_1 = 1$ (rys. 3-39b). Wobec tego

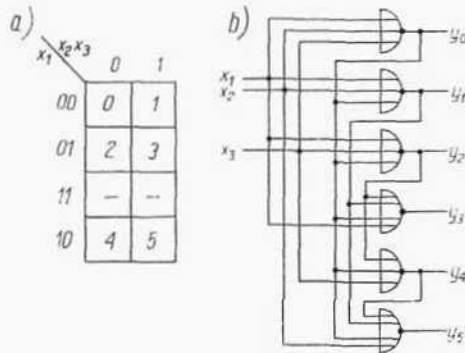
$$u = \bar{x}_1 + \bar{x}_3 \quad \text{oraz} \quad y_2 = \bar{y}_1 (\bar{x}_1 + \bar{x}_3) = \bar{y}_1 \cdot \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

Teraz układ (rys. 3-39c) zawiera nie 11 lecz 8 elementów.

Przedstawiona właściwość układów wielowyjściowych z elementów NOR jest szczególnie przydatna przy syntezie dekodów — układów do zmiany kodu dwójkowego (jednego z wielu możliwych) na kod „1 z n ”. W kodzie „1 z n ” tylko na jednym wyjściu może być 1, więc zachodzi oczywiście przypadek $F_i^1 \cap F_j^1 = \emptyset$ dla każdej pary (i, j) funkcji wyjściowych.

Przykładem postępowania niech będzie synteza dekodera trzybitowego naturalnego kodu dwójkowego, ale przy określonych tylko sześciu pierwszych pozycjach tego kodu.

Zamiast sześciu tablic Karnaugh można — w przypadku dekodów — zastosować tylko jedną tablicę, wpisując symbol i ($i = 0, 1, 2, \dots$) wszędzie tam, gdzie $y_i = 1$. Z uzyskanej tablicy (rys. 3-40a) wynika, że bezpośrednio tylko y_0 może być otrzymana bez stosowania negacji



Rys. 3-40. Tablica i układ dekodera

argumentów, gdyż $F_0^1 = (000)$. Wykorzystując y_0 do usuwania jedynek z innych wyrażeń F_i^1 , otrzymuje się

$$F_1^1 = (001) = \frac{(00-|0)}{(000|-)} \quad F_2^1 = (010) = \frac{(0-0|0)}{(000|-)} \text{ itd.}$$

Do określania y_4 można wykorzystać uzyskane już y_2 i y_0 , do określenia y_3 — y_0 , y_1 , y_2 , a do wyznaczenia y_5 — y_0 , y_1 , y_4 . Przy takim postępowaniu nie będą potrzebne negacje argumentów i schemat układu będzie taki jak na rys. 3-40b.

W podobny sposób można postępować również wówczas, gdy negacje argumentów są do dyspozycji, gdyż wykorzystanie y_i do budowy y_j umożliwia zmniejszenie obciążenia wejść. Oczywiście sposób dobierania sygnałów będzie wtedy inny niż w opisanym przykładzie, gdyż powinien uwzględniać równomierność obciążeń wejść i wyjść.

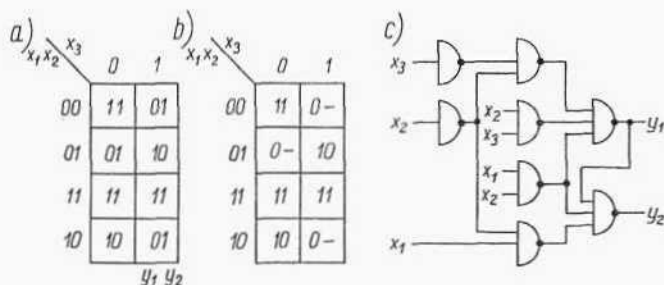
Przykład układu o korzystnej realizacji z elementów NAND jest przedstawiony na rys. 3-41. Z tablicy (rys. 3-41a) wynika, że

$$F_1^1 = \{0, 3, 4, 6, 7\} = \begin{pmatrix} -00 \\ -11 \\ 11- \end{pmatrix} \quad F_1^0 = \{1, 2, 5\} = \begin{pmatrix} -01 \\ 010 \end{pmatrix}$$

$$F_2^1 = \{0, 1, 2, 5, 6, 7\} = \begin{pmatrix} 00- \\ 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} 0-0 \\ -01 \\ 11- \end{pmatrix} \quad F_2^0 = \{3, 4\} = \begin{pmatrix} 011 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $F_1^0 \subseteq F_2^1$ oraz $F_2^0 \subseteq F_1^1$, więc można napisać np. $y_2 = \bar{y}_1 + v$, czyli gdy $y_1 = 0$, to $y_2 = 1$, niezależnie od wartości v . Z tablicy (na rys. 3-41b) otrzymuje się np.

$$F_v^1 = \begin{pmatrix} 00- \\ 11- \end{pmatrix} \quad F_v^0 = \begin{pmatrix} 01- \\ 10- \end{pmatrix}$$



Rys. 3-41. Synteza układu dwuwyjściowego z elementów NAND

Z form F_1^1 i F_v^1 najprościej będzie usunąć zera po prostu przez niezależne negacje, więc ostateczny schemat będzie miał postać jak na rys. 3-41c.

LITERATURA

1. Bromirski J.: Teoria automatów. Warszawa 1969, WNT.
2. Majewski W.: Układy logiczne. Warszawa, 1969, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej.
3. Miller R. E.: Switching Theory. vol. 1. USA 1965, J. Wiley.
4. Siviński J.: Układy przełączające w automatyce. Warszawa 1968, WNT.
5. Traczyk W.: Projektowanie tranzystorowych układów przełączających. Warszawa 1966, WNT.
6. Wawilow E. N., Portnoj G. P.: Synteza układów elektronicznych maszyn cyfrowych. Warszawa 1967, WNT.