zaczętego wyżej można zminimalizować w następujący sposób:

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 =$$
$$= (\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3) + (\bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3) + (x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3) =$$
$$= \bar{x}_2x_3 + x_2x_3 + x_1x_2 = x_3 + x_1x_2$$

Aby utworzyć pary wyrażeń sąsiednich, wpisano tu dwukrotnie iloczyn $x_1x_2x_3$, ale jest to dozwolone, gdyż w algebrze Boole'a $A = A + A$, więc każdy składnik może się powtarzać, bez zmiany wartości funkcji.

Przeprowadzając sklejanie w postaci kanonicznej iloczynu (dla tego samego przykładu) otrzymuje się

$$y = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3) = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$$

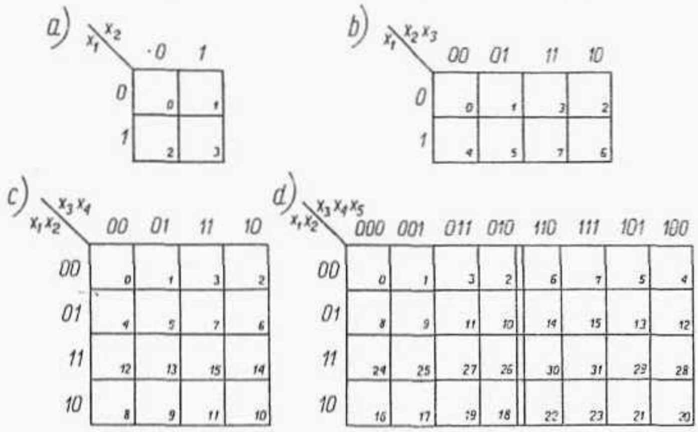
Z zasady rozdzielności (1-13) wynika, że obydwa te wyniki są sobie równe, a do realizacji prostszego z nich są potrzebne elementy: $1 \times$ LUB, $1 \times$ I. Różnica między realizacją postaci kanonicznej i postaci minimalnej jest więc bardzo duża.

W wyniku sklejania uzyskuje się wyrażenia, które już nie są postaciami kanonicznymi, ale zachowują postać sumy iloczynów oraz iloczynu sum. Wyrażenia tego typu przyjęto nazywać ***postacją normalną sumy*** (*normalną postacią alternatywną*) i ***postacią normalną iloczynu*** (*normalną postacią koniunkcyjną*).

W przypadku złożonych funkcji wielu zmiennych wyszukiwanie wyrażeń sąsiednich i sklejanie w sposób podany wyżej staje się bardzo uciążliwe, zwłaszcza że dla otrzymania postaci minimalnej trzeba dokonać wszystkich możliwych sklejeń. Istnieją inżynierskie metody upraszczające procedurę minimalizacji, gdy liczba zmiennych nie przekracza 6 lub gdy liczba wyrazów zadanej postaci kanonicznej nie jest zbyt duża. W innych przypadkach rozwiązań minimalnych trzeba szukać z pomocą cyfrowych maszyn matematycznych.

### 3.1.4. METODA KARNAUGHA

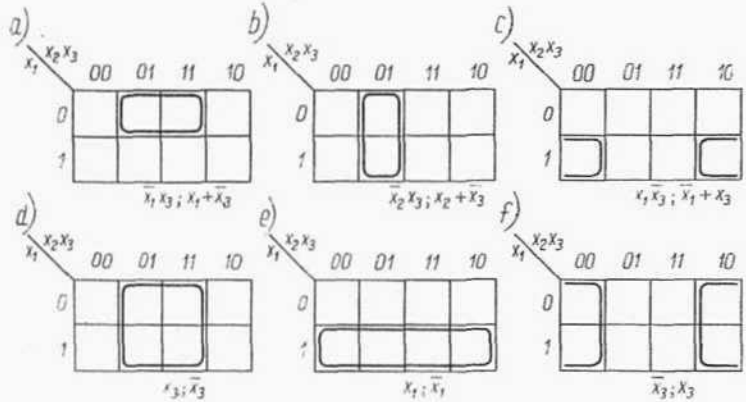
Metoda tablic Karnaugha (zwana też metodą kart Veitcha) ułatwia sklejanie przez takie usytuowanie na płaszczyźnie wyrażeń postaci kanonicznej, aby wyrażenia sąsiednie podlegające sklejeniu były umieszczone blisko siebie, a więc były sąsiednimi również w sensie geograficznym. Dla funkcji $n$ zmiennych każdy składnik postaci kanonicznej może mieć $n$ składników sąsiednich. W tabeli o postaci stosowanej wyżej każdy wiersz ma tylko dwa wiersze sąsiednie, a więc wykorzystanie tego sąsiedztwa do minimalizacji ogranicza się do, praktycznie biorąc, mało ważnego



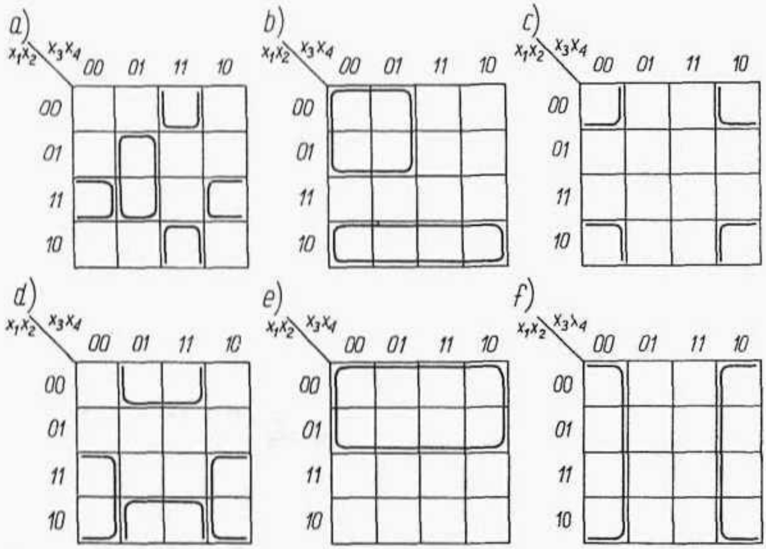
Rys. 3-2. Tablice Karnaugha: dwóch, trzech, czterech i pięciu zmiennych

przypadku funkcji dwóch zmiennych. Jeśli jednak podobną tabelę przedstawi się w postaci zestawienia o dwóch współrzędnych, to liczba sąsiadów geograficznych wzrośnie do czterech. Przykłady tablic Karnaugha przedstawiono na rys. 3-2. Każda kratka tablicy odpowiada jednej kombinacji wartości zmiennych wejściowych. Kod tych kombinacji jest dobrany tak, aby sąsiednie kratki różniły się wartością jednej tylko zmiennej, a więc by odpowiadały im sąsiednie wyrażenia. Kod o takich własnościach był przedstawiony w p. 1.3 jako kod *Graya*. Do opisanej tym kodem tablicy wpisuje się symbole, odpowiadające wartości funkcji dla odpowiednich kombinacji zmiennych wejściowych. Aby ułatwić to wpisywanie w przypadku, gdy funkcja jest zadana w postaci liczb dziesiętnych, na rys. 3-2 wpisano do tablic odpowiednie liczby.

Jeśli w dwóch sąsiednich kratkach wypełnionej tablicy Karnaugha znajdują się jednakowe symbole (0 albo 1), to odpowiadające tym kratkom wyrażenia można skleić, co odpowiada usunięciu litery, która w ramach sklejanej grupy zmienia wartość. Takie sąsiednie kratki tablicy,




Rys. 3-3. Przykłady sklejania w tyblicach trzech zmiennych




Rys. 3-4. Przykłady sklejania w tablicach czterech zmiennych

tworzące pary, łączy się linią dla zaznaczenia możliwości sklejania. Na rys. 3-3a, b, c pokazano kilka wersji usytuowania takich par w przypadku funkcji trzech zmiennych. Gdy wyróżnione kratki zawierają jedynki, zamiast odpowiadającego im wyrażenia $Ax+A\bar{x}$ można przyjąć $A$; jeśli zawierają zera — zamiast $(B+x)$ $(B+\bar{x})$ można przyjąć $B$. Jeśli na przykład na rys. 3-3a w zakreślonym obwodzie występują jedynki, odpowiada to wyrażeniu

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2x_3 = \bar{x}_1(\bar{x}_2+x_2)x_3 = \bar{x}_1x_3$$

Taki sam wynik można otrzymać bezpośrednio z tablicy, ponieważ w ramach wyróżnionej grupy $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, natomiast $x_2$ jest zerem lub jedynką, co oznacza, że może być usunięte. Ponieważ wyłączaniu jedynek z tablicy odpowiada funkcja o postaci „suma iloczynów", więc rezultat uproszczenia będzie iloczynem, przy czym symbolowi 0 odpowiada $\bar{x}$, a symbolowi 1 — $x$.

Jeśli w zakreślonym obwodzie na rys. 3-3a występują zera, odpowiednie wyrażenie można przedstawić w postaci

$$(x_1+x_2+\bar{x}_3)(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3) = x_1+\bar{x}_3$$

To samo otrzymuje się bezpośrednio z tablicy pamiętając, że argument zmieniający wartość w ramach rozważanej grupy jest odrzucany i że wynik łączenia zer będzie sumą, przy czym symbolowi 0 odpowiada $x$, a symbolowi 1 — $\bar{x}$.

Dwie kratki tablicy tworzące parę o jednakowych symbolach można skleić z inną parą o takich samych symbolach, jeśli obie pary tworzą prostokąt lub kwadrat (rys. 3-3d, e, f). Obowiązują wówczas zależności

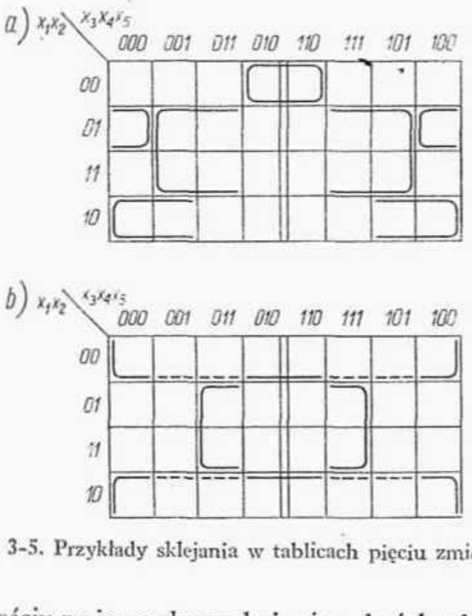
$$(Ax_1x_2+Ax_1\bar{x}_2)+(A\bar{x}_1x_2+A\bar{x}_1\bar{x}_2) = A$$

$$[(B+x_1+x_2)(B+x_1+\bar{x}_2)][(B+\bar{x}_1+x_2)(B+\bar{x}_1+\bar{x}_2)] = B$$

Jednakowe symbole objęte prostokątem można więc opisać iloczynem (jeśli te symbole to jedynki) lub sumą (jeśli to zera), w które wchodzą tylko litery o wartościach nie zmieniających się w ramach tej grupy. Na rys. 3-3 podano wyniki sklejania, przy czym na pierwszym miejscu umieszczono wyrażenia opisujące grupę jedynek, a na drugim — grupę zer.

Zupełnie podobnie opisuje się grupy 2- i 4-kratkowe w tablicach czterech zmiennych (rys. 3-4). Należy pamiętać, że przeciwległe krawędzie tablicy można uważać za jedną linię — stąd grupy dzielone: góra-dół lub lewo-prawo. Dwie grupy 4-kratkowe można skleić ze sobą, jeśli w tablicy tworzą prostokąt (rys. 3-4e, f).

Tablice pięcioargumentowe składają się z dwu tablic czteroargumentowych, wewnątrz których obowiązują te same zasady sklejania co poprzednio. Każda kratka oprócz czterech sąsiadujących bezpośrednio ma jeszcze piątą kratkę sąsiednią, usytuowaną symetrycznie względem osi tablicy. Tak więc sklejane mogą być wszystkie kratki leżące symetrycznie względem pionowej osi, dzielącej tablicę. Kilka przykładów pokazano na rys. 3-5.




Rys. 3-5. Przykłady sklejania w tablicach pięciu zmiennych

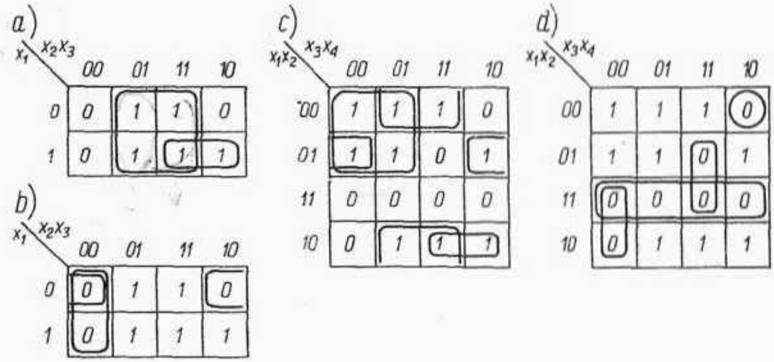
Tablicę sześciu zmiennych uzyskuje się z dwóch tablic pięciu zmiennych, a sklejane mogą być zarówno kratki leżące symetrycznie względem osi pionowej jak i względem osi poziomej. Dalsze zwiększanie tablicy bardzo utrudnia wyszukiwanie wyrażeń sąsiednich i metoda staje się nieprzydatna.

Pokazane na rys. 3-3, 3-4 i 3-5 przykłady łączenia symboli w grupy umożliwiają wysnucie ogólnego wniosku: grupa 2-kratkowa zmienia dwa człony w postaci kanonicznej — jeden usuwa, drugi zmniejsza o jedną literę; grupa 4-kratkowa zmienia cztery człony postaci kanonicznej — trzy usuwa, a czwarty zmniejsza o dwie litery itd. Wynika stąd, że im większa jest grupa połączonych kratek, tym lepszy efekt minimalizacji. Przykłady — by nie gmatwać rysunku — pokazują tylko grupy rozłączne, ale nie jest to konieczne — grupy mogą mieć kratki wspólne.

Minimalizacja funkcji wpisanej do tablicy Karnaugha może być przeprowadzana w następującej kolejności:

1. Należy zdecydować, czy będzie się wybierać grupy zer czy grupy jedynek. Decyzja ta często zależy od posiadanych elementów (będzie to wyjaśnione niżej), jeśli natomiast elementy nie wprowadzają ograniczeń, należy łączyć w grupy te symbole, które dają prostsze rozwiązanie. Niekiedy można to przewidzieć z góry (gdy np. jednych grup jest więcej niż innych), ale często trzeba sprawdzić obie możliwości.

2. Wśród wybranych symboli (0 albo 1) poszukuje się możliwości utworzenia największej grupy (lub grup), np. 16-kratkowej, a jeśli takiej nie ma to 8-kratkowej itd. Wybrane symbole leżące poza wydzielonymi




Rys. 3-6. Minimalizacja funkcji

grupami łączy się w grupy mniejsze, przy czym można łączyć kratki już raz wykorzystane, jeśli pomoże to w powiększeniu grupy. Symbole, których nie można połączyć w żadną grupę, zakreśla się również, jako grupy 1-kratkowe.

3. Wyodrębnione w tablicy grupy opisuje się postacią normalną, redukując wyrażenia wg podanych wyżej zasad. Jeśli w tablicy istnieje

grupa, której wszystkie kratki należą też do innych grup, to trzeba usunąć nadmiar, pozostawiając tylko grupy niezbędne.

Jeśli istnieje więcej niż jedna możliwość łączenia w grupy, należy wybrać bardziej dogodną ze względu na obciążenie obwodów wejściowych układu.

Powyższe zasady zostaną zilustrowane kilkoma przykładami.

Zadanie wyróżniania trzybitowych liczb nieparzystych lub podzielnych przez 3 można opisać tablicą Karnaugha z rys. 3-6a, b, w czym pomocna może być tablica wartości dziesiętnych z rys. 3-2b. Wyszukanie maksymalnych grup nie sprawia tu żadnych trudności i na podstawie rys. 3-6a otrzymuje się

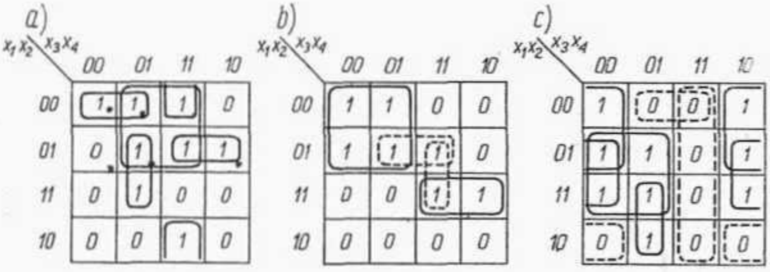
$$y = x_3 + x_1 x_2$$

a na podstawie rys. 3-6b

$$y = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$$

Nieco trudniejsza jest minimalizacja funkcji czterech zmiennych, np. zadanej w postaci dziesiętnej

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum (0, 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11\}$$




Rys. 3-7. Minimalizacja funkcji

Z pomocą tablicy z rys. 3-2c wypełnia się tablice Karnaugha (rys. 3-6c, d), z których — po utworzeniu maksymalnych grup — otrzymuje się normalne postaci minimalne

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3$$

oraz

$$y = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + x_3 + x_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4)$$

W przypadku funkcji opisanej tablicą z rys. 3-7a, 4-kratkowej grupy jedynek nie należy uwzględniać w wyrażeniu minimalnym, więc

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_2x_3x_4$$

Łatwo sprawdzić, że druga postać minimalna to

$$y = (\bar{x}_2 + x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_3 + x_4)$$

Na rysunku 3-7b przedstawiono funkcję, którą (w przypadku uzyskiwania postaci normalnej sumy) można zminimalizować do dwóch różnych postaci:

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_4$$

albo

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4$$

Gdy funkcja jest zadana w postaci kanonicznej, jej wpisanie do tablicy Karnaugha nie nastręcza większych trudności, jako że każdemu członowi takiej postaci odpowiada jedna kratka tablicy. Jeśli natomiast funkcja jest zadana w postaci niekanonicznej normalnej (np. otrzymanej z opisu słownego), to poszczególnym jej członom przypisuje się odpowiednie grupy kratek tablicy — zależnie od liczby zmiennych funkcji i danego członu. Zasady są oczywiście takie same jak przy czynnościach odwrotnych, opisywanych wyżej. Na przykład po wpisaniu do tablicy (rys. 3-7c) funkcji

$$y = (\bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

okazuje się, że ostatni czynnik tej postaci jest zbędny, gdyż odpowiadające mu kratki tkwią już w innych członach, więc

$$y = (\bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_2 + x_4)$$

albo

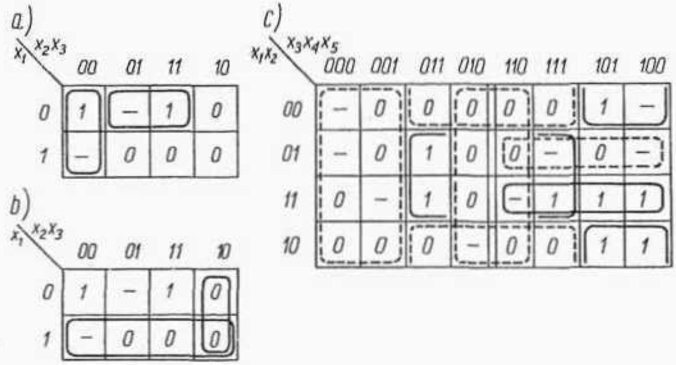
$$y = \bar{x}_1\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_3x_4$$

Rozważane wyżej przykłady dotyczyły funkcji w pełni określonych, dla których wszystkie kratki tablicy zawierały symbol 0 albo 1. W przypadku funkcji niepełnych, w kratkach o nieokreślonej wartości funkcji stawia się kreskę i kratki te można dołączać zarówno do grupy zer jak i do grupy jedynek, byleby uzyskane grupy były największe. Na przykład funkcja, opisana tablicami rys. 3-8a,b, bez uwzględnienia pozycji nieokreślonych ma postać

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + x_3)$$

a po ich uwzględnieniu

$$y = \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_3)$$



Rys. 3-8. Minimalizacja funkcji niepełnych

Inna funkcja, przedstawiona na rys. 3-8c, dzięki kratkom z nieokreśloną wartością może być zapisana w postaci względnie prostych wyrażeń

$$y = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_4 x_5 + \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

albo

$$y = (x_3 + x_4)(\bar{x}_4 + x_5)(x_2 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

Z faktu, że funkcje niepełne mają zwiększone możliwości minimalizacji, wynika konieczność gruntownej analizy każdych założeń.

### 3.1.5. METODA QUINE'A-MC CLUSKEYA

Przy większej liczbie zmiennych, gdy metoda Karnaugha staje się uciążliwa, dogodniej jest stosować metody Quine'a-Mc Cluskeya.

Algorytm minimalizacji Quine'a polega na stosowaniu dwóch operacji:

— *sklejania niepełnego* $Ax + A\bar{x} = Ax + A\bar{x} + A$