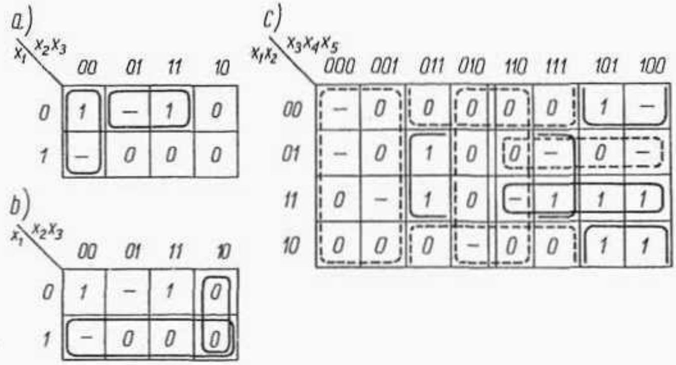
funkcja, opisana tablicami rys. 3-8a,b, bez uwzględnienia pozycji nieokreślonych ma postać

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + x_3)$$

a po ich uwzględnieniu

$$y = \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_3)$$



Rys. 3-8. Minimalizacja funkcji niepełnych

Inna funkcja, przedstawiona na rys. 3-8c, dzięki kratkom z nieokreśloną wartością może być zapisana w postaci względnie prostych wyrażeń

$$y = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_4 x_5 + \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

albo

$$y = (x_3 + x_4)(\bar{x}_4 + x_5)(x_2 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

Z faktu, że funkcje niepełne mają zwiększone możliwości minimalizacji, wynika konieczność gruntownej analizy każdych założeń.

3.1.5. METODA QUINE'A-MC CLUSKEYA

Przy większej liczbie zmiennych, gdy metoda Karnaugha staje się uciążliwa, dogodniej jest stosować metody Quine'a-Mc Cluskeya.

Algorytm minimalizacji Quine'a polega na stosowaniu dwóch operacji:

— *sklejania niepełnego* $Ax + A\bar{x} = Ax + A\bar{x} + A$

oraz

— *pochłaniania* $A+Ax = A+A\bar{x} = A$

Jeżeli w postaci kanonicznej sumy przeprowadzi się wszystkie sklejenia niepełne, a następnie — wszystkie możliwe pochłaniania, to uzyska się postać prostszą, tzw. *postać skróconą*.

Sens operacji sklejenia niepełnego najlepiej wyjaśni przykład. Gdyby do funkcji

$$y = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

zastosować regułę sklejania zwykłego, wówczas po sklejeniu pierwszego i ostatniego składnika uzyskałoby się formułę

$$y = x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3$$

w której nie ma członów sąsiednich. Jeśli natomiast do tego samego wyrażenia zastosować regułę sklejania niepełnego, uzyskuje się

$$y = x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

skąd, po uwzględnieniu pochłaniania

$$y = x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2$$

Tak prosty rezultat powstał dzięki trzykrotnemu wykorzystaniu ostatniego składnika pierwotnej postaci; zastosowanie sklejania niepełnego i pochłaniania uwalnia od konieczności analizy wyrażenia pod kątem zwielokrotnienia jego składników.

Dla dalszych rozważań przydatne będą następujące określenia.

Implikant funkcji f to taka funkcja g (tych samych argumentów), że dla wszystkich kombinacji wartości argumentów, jeśli $g = 1$, to i $f = 1$. Mówi się, że implikant g *pokrywa* (część lub wszystkie) jedynki funkcji f.

Implikant prosty to iloczyn G (zmiennych x), który jest implikantem i który, zmniejszony o dowolną literę, przestaje być implikantem. Skoro każda funkcja może być przedstawiona w postaci kanonicznej sumy, obejmującej wszystkie kombinacje, dla których $f = 1$, to może też być przedstawiona w postaci sumy wszystkich prostych implikantów, które z pewnością pokrywają wszystkie jedynki funkcji. Można więc napisać

$$f = \sum_{i=1}^{l} G_i$$

przy czym l oznacza liczbę wszystkich prostych implikantów.

Łatwo zauważyć, że *postać skrócona*, uzyskana przez stosowanie algorytmu Quine'a, jest właśnie sumą wszystkich prostych implikantów danej funkcji, gdyż zawiera wszystkie nieskracalne iloczyny pochłaniające postać kanoniczną. Każdy prosty implikant reprezentuje w postaci skróconej jeden albo dwa, albo cztery itd. składniki postaci kanonicznej. Często się zdarza, że któryś z prostych implikantów reprezentuje przy tym te pełne iloczyny, które już są reprezentowane przez inne proste implikanty. Usunięcie takiego prostego implikanta z formuły opisującej funkcję nie zmieni oczywiście jej wartości, jako że nadal składnik postaci kanonicznej będzie reprezentowany. Jeśli w postaci skróconej funkcji usunie się wszystkie zbędne proste implikanty, to uzyska się postać, zawierającą najmniejszą liczbę najprostszych (nieskracalnych) składników, a więc *postać minimalną*. Niekiedy upraszczanie postaci skróconej można przeprowadzić kilkoma różnymi sposobami; uzyskuje się wówczas tzw. *postacie końcowe* (*nieredukowalne*), z których co najmniej jedna jest postacią minimalną.

Poszukiwania minimalnego zbioru prostych implikantów, których suma równa jest funkcji, dokonuje się zwykle za pomocą tzw. *tablic implikantów*, pokazujących, które proste implikanty pochłaniają poszczególne składniki postaci kanonicznej. Zasady postępowania wyjaśni przykład. Funkcja

$$y = x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

po przeprowadzeniu wszystkich operacji sklejania niepełnego i pochłaniania przybiera postać skróconą

$$y = x_1 x_3 + x_1 x_2 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

W celu zbadania, czy jest to postać minimalna, buduje się tablicę (tybl. 3-1), której kolumny opisuje się wszystkimi składnikami postaci kanonicznej K_i, a wiersze — wszystkimi składnikami postaci skróconej G_j. W tablicę wpisuje się znak wyróżniający (np. × w miejsce, którego współrzędna G_j pochłania współrzędną K_i, a następnie wybiera się minimalną liczbę tych prostych implikantów, które pokrywają znakami × wszystkie kolumny. Z tabl. 3-1 uzyskuje się dwie takie możliwości, którym odpowiadają dwie postacie nieredukowalne:

$$y = x_1 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_3$$

$$y = x_1 x_2 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

Tablica 3-1

Tablica implikantów

		Składniki sumy K_i					
		$x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_2$
Proste implikanty	x_1x_3	×		×			
	x_1x_2	×			×		
	$\bar{x}_2x_3$		×	×			
	$\bar{x}_1\bar{x}_2$		×				×
	$x_2\bar{x}_3$				×	×	
	$\bar{x}_1\bar{x}_3$					×	×

Obydwa te rezultaty mają taką samą liczbę liter, a więc oba mogą być uznane za postaci minimalne.

Powyższe rozważania dotyczyły przetwarzania kanonicznej postaci sumy w minimalną postać normalną sumy. Zupełnie podobnie można kanoniczną postać iloczynu przetworzyć w minimalną postać normalną iloczynu. Prostemu implikantowi odpowiada wówczas ***prosty implicent*** — suma (H) zmiennych x taka, że jeśli $H = 0$, to i $f = 0$. Niepełnego sklejania dokonuje się wg zależności

$$(A+x)(A+\bar{x}) = (A+x)(A+\bar{x})A$$

pochłanianie natomiast polega na stosowaniu wzorów

$$A(A+x) = A(A+\bar{x}) = A$$

Przejście od postaci skróconej do postaci końcowych i postaci minimalnej odbywa się według podobnych zasad jak dla implikantów.

Metody Quine'a i Karnaugha służą do tego samego celu i, jak łatwo zauważyć, istnieje między nimi duże podobieństwo. Implikantom odpowiadają grupy jedynek w tablicy, implikanty proste — to największe z możliwych typowe grupy prostokątne, natomiast implicenty — to grupy zer. Różnica polega na tym, że zamiast tablicy implikantów (implicentów), w rugowaniu zbędnych grup w tablicach Karnaugha pomaga geometryczny obraz tych grup i jego analiza. Na przykład funkcja z ostatniego przykładu może być wpisana do tablicy, w której można wyodrębnić sześć 2-kratkowych grup jedynek (postać skrócona), ale do objęcia wszystkich jedynek wystarczą tylko trzy odpowiednie grupy, co oczywiście jest zgodne z wynikami uzyskanymi wyżej.

Zastosowanie metody Quine'a w podanej postaci jest łatwe nawet przy dużej liczbie zmiennych, ale wymaga żmudnego wypisywania bardzo długich formuł (po niepełnym sklejaniu), w których łatwo o pomyłkę. Dlatego też w praktyce dogodniej jest stosować (także w przypadku wykorzystywania maszyny cyfrowej) podaną przez Mc Cluskeya odmianę metody Quine'a.

Minimalizację kanonicznej postaci sumy *metodą Mc Cluskeya* przeprowadza się w następującej kolejności.

1. Wszystkie pełne iloczyny wchodzące w skład postaci kanonicznej wypisuje się w formie kolumny liczb binarnych, pisząc 0 zamiast $\bar{x}_i$ oraz 1 zamiast x_i.

2. Drugą kolumnę tworzy się z liczb pierwszej kolumny, dzieląc je na grupy indeksowe. W pierwszym wierszu wypisuje się liczbę złożoną z samych zer (jeśli występuje ona w kolumnie I), następnie grupę liczb o jednej jedynce, grupę o dwóch jedynkach itd. Poszczególne grupy należy wyraźnie oddzielić. Przy pewnej wprawie kolumnę z podziałem na grupy można tworzyć wprost z formuły logicznej, omijając etap 1.

3. Następna kolumna powstaje z rezultatów sklejeń liczb kolumny drugiej, przy czym obowiązują następujące zasady:

a) skleja się wyrażenia należące do sąsiednich grup;

b) sklejane człony mogą się różnić tylko na jednej pozycji, a przy sklejeniu (a 0 b) z (a 1 b) powstaje (a–b), który to wynik wpisuje się do kolumny, stawiając przy sklejonych wyrażeniach poprzedniej kolumny odpowiedni znaczek (np. V);

c) każde wyrażenie może być sklejane dowolną liczbę razy;

d) należy wyczerpać wszystkie możliwości sklejeń;

e) wyniki sklejeń grupy z indeksem 0 z grupą z indeksem 1 oddziela się od wyników sklejeń grup indeksowych 1 i 2 itd. — tworząc nowe grupy;

f) wyników powtarzających się można nie wpisywać.

4. Następne kolumny powstają z poprzednich przy zachowaniu tych samych zasad. Należy pamiętać, że wyrażenia sąsiednie (które trzeba skleić) muszą mieć kreski na tych samych pozycjach. Na przykład z (11-0-) i (10-0-) otrzymuje się (1--0-). Tworzenie nowych kolumn

przerywa się, gdy w ostatniej kolumnie nie można już przeprowadzić żadnych sklejeń.

5. Wyrażenia, które nie podlegały sklejeniu (ze wszystkich kolumn), zamienia się na postać literową przez operację odwrotną niż w p.1. Litery odpowiadające kreskom opuszcza się. Na przykład (10-0-) oznacza $x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ itp. Otrzymane wyrażenia są prostymi implikantami funkcji, a ich suma tworzy postać skróconą.

6. Buduje się tablicę implikantów i wybiera wszystkie postacie nieredukowalne.

7. Spośród postaci nieredukowalnych wybiera się minimalną. Na przykład funkcja

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2x_3x_4+$$
$$+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

może być zapisana i przetworzona w następujący sposób:

0001 V	0001 V	0-01 V	--01
0100 V	0100 V	-001 V	01--
0101 V	1000 V	010- V	-10-
0110 V	——	01-0 V	1-0-
0111 V	0101 V	-100 V	
1000 V	0110 V	100- V	
1001 V	1001 V	1-00 V	
1100 V	1100 V	——	
1101 V	——	01-1 V	
	0111 V	-101 V	
	1101 V	011- V	
		1-01 V	
		110- V	

Stąd postać skrócona funkcji

$$y = \bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2+x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3$$

Odpowiednia tablica implikantów (tabl. 3-2) jest przedstawiona — dla odmiany — ze współrzędnymi w postaci zero-jedynkowej. Dla ułatwienia wyznaczania postaci minimalnej oznaczono w tablicy gwiazdkami te proste implikanty, które są niezbędne, gdyż jako jedyne obejmują niektóre kolumny (z jednym tylko krzyżykiem) i te kolumny, które są objęte implikantami z gwiazdką. Ponieważ w tabl. 3-2 wszystkie kolumny zostały objęte trzema implikantami z gwiazdką (tzw. *zasadniczymi*

Tablica 3-2

Tablica implikantów

	0001	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1100	1101
--01*	×		×				×		×
01--*		×	×	×	×				
-10-		×	×					×	×
1-0-*						×	×	×	×
	•	•	•	•	•	•	•	•	•

implikantami prostymi), więc czwarty jest zbędny i minimalna postać normalna funkcji to

$$y = \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_3$$

Przy minimalizacji funkcji niepełnych etapy 1 do 5 wykonuje się jak dla funkcji pełnych, z tym że oprócz składników postaci kanonicznej do działań włącza się również kombinacje odpowiadające nieokreślonej wartości funkcji. Tablicę implikantów (p.6) buduje się natomiast tylko dla składników obowiązujących.

Na przykład

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + \\ + x_1 x_2 x_3 x_4 + (x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4)$$

0010 V	0010 V	001- V	-01-
0011 V	1000 V	-010 V	
0101 V	——	10-0	
1000 V	0011 V	——	
1010 V	0101	-011 V	
1111 V	1010 V	101- V	
(1011) V	——	——	
	1011 V	1-11	
	——		
	1111 V		

Postać skrócona

$$y = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 + x_1 x_3 x_4 + \bar{x}_2 x_3$$

Z tablicy 3-3 wynika, że jest to jednocześnie postać minimalna.

Tablica 3-3

Tablica implikantów funkcji niepełnej

	0010	0011	0101	1000	1010	1111
0101 •			×			
10-0 •				×	×	
1-11 •						×
-01- •	×	×			×	
	•	•	•	•	•	•

W bardzo podobny sposób minimalizuje się funkcje zadane w postaci kanonicznej iloczynu lub funkcje, których postać minimalna ma być, z jakichś względów, iloczynem sum. W takich przypadkach w punkcie 1 podanego wyżej algorytmu minimalizacji metodą Mc Cluskeya wszystkie czynniki postaci kanonicznej iloczynu wypisuje się w postaci kolumny liczb binarnych, pisząc 1 zamiast $\bar{x}_i$ oraz 0 zamiast x_i. Dalsze etapy wykonuje się jak poprzednio i tylko tablica redukcyjna jest tu *tablicą implicentów*, a od postaci zero-jedynkowej przechodzi się do postaci normalnej iloczynu.

Minimalizowana wyżej funkcja o 9 składnikach (tabl. 3-2) może być wyrażona za pomocą pozostałych 7 składników, tworzących postać kanoniczną iloczynu, a więc pierwsza kolumna będzie zawierała te liczby czterobitowe, które nie weszły w skład tamtej kolumny

0000 V	0000 V	00-0	-01-
0010 V	——	——	——
0011 V	0010 V	001- V	1-1-
1010 V	——	-010 V	
1011 V	0011 V	——	
1110 V	1010 V	-011 V	
1111 V	——	101- V	
	1011 V	1-10 V	
	1110 V	——	
	——	1-11 V	
	1111 V	111- V	

Postać skrócona

$$y = (x_1+x_2+x_4)(x_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_3)$$

jest również, jak wynika z tablicy implicentów (tybl. 3-4), postacią normalną minimalną.

Tablica 3-4

Tablica implicentów

	0000	0010	0011	1010	1011	1110	1111
00-0 *	×	×					
-01- *		×	×	×	×		
1-1- *				×	×	×	×
	*	*	*	*	*	*	*

W przypadku funkcji dużej liczby zmiennych wypisywanie wielu kolumn jest uciążliwe i łatwo powoduje błędy, dlatego bardziej wskazane jest posługiwanie się zapisem dziesiętnym. Ogólne zasady są takie jak wyżej, a kolejność czynności może być następująca:

1. Określa się indeksy poszczególnych liczb, opisujących postać kanoniczną iloczynu lub sumy, i wypisuje kolumnę z podziałem na grupy o jednakowych indeksach. Liczby odpowiadające pozycjom nieokreślonym są traktowane tak jak pozostałe.

2. Druga kolumna powstaje z pierwszej w wyniku sklejania, przy czym obowiązują następujące zasady:

a) skleja się liczby należące do sąsiednich grup,

b) sklejane liczby muszą się różnić o $2^k (k = 0,1,2, \ldots)$,

c) liczby można sklejać tylko wówczas, gdy liczba z grupy o większym indeksie jest większa,

d) wynik sklejenia *a* z *b* zapisuje się w postaci *a,b* (*c*) — przy czym *c* jest różnicą między *a* i *b*,

e) każda liczba może być sklejana dowolną liczbę razy,

f) należy wyczerpać wszystkie możliwości sklejeń,

g) wyniki sklejeń dzieli się na grupy, jak poprzednio, a wyrażenia powtarzające się nie są wypisywane.

3. Następne kolumny powstają z poprzednich przy zachowaniu tych samych zasad; dodatkowo różnice umieszczone w nawiasach skle-

janych wyrażeń muszą być jednakowe, a wynik ma w nawiasie nie jedną, lecz kilka różnic. Na przykład 1,3 (2) i 5,7 (2) dają 1,3,5,7 (2,4), natomiast 1,3 (2) z 5,9 (4) nie skleja się.

4. Wyrażenia, których nie udało się skleić, odpowiadają prostym implikantom (implicentom) funkcji. Tworzy się z nich tablicę i ruguje wyrażenia zbędne, wybierając postacie minimalne.

5. Wyrażenia nieredukowalne zamienia się na postać binarną a następnie literową, zgodnie z następującymi zasadami:

a) wypisuje się w postaci binarnej pierwszą liczbę wchodzącą w skład implikantu (implicentu);

b) na pozycjach, których waga[1] równa jest podanym w nawiasie różnicom, pisze się zamiast zera — kreski; np 1,3 (2) to: a) 001, b) 0-1, natomiast 0,2,4,6 (2,4) to: a) 0000, b) 0--0;

c) poszczególnym pozycjom zero-jedynkowym przypisuje się odpowiednie litery.

Przykładem postępowania może być minimalizacja funkcji

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum[0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 12\ (8,\ 14)]$$

0 1 1 1 2 2 2 1 3 — indeksy

0 V	0,1 (1) V	0, 1, 4, 5 (1,4)
—	0,2 (2) V	
1 V	0,4 (4) V	0, 2, 8,10 (2,8)
2 V	0,8 (8) V	
4 V	—	0, 4, 8,12 (4,8)
8 V	1,5 (4) V	
—	2,10 (8) V	—
5 V	4,5 (1) V	8,10,12,14 (2,4)
10 V	4,12 (8) V	
12 V	8,10 (2) V	
—	8,12 (4) V	
14 V	—	
	10,14 (4) V	
	12,14 (2) V	

[1] Zawsze przy tych zamianach występuje naturalny kod dwójkowy o wagach 1, 2, 4, 8 itd.; wagą pozycji i jest 2^i.

Przy takim zapisie prostych implikantów wypełnianie tablicy (tabl. 3-5) jest bardzo łatwe — po prostu krzyżyki należy postawić w miejscu, gdzie numer kolumny wchodzi w numer wiersza przed nawiasem.

Tablica 3-5

Tablica implikantów

	0	1	2	4	5	10	12
0, 1, 4, 5 (1,4) *	×	×		×	×		
0, 2, 8,10 (2,8) *	×		×			×	
0, 4, 8,12 (4,8)	×			×			×
8,10,12,14 (2,4)						×	×
	*	*	*	*	*	*	

Z tablicy 3-5 wynika, że minimalizowana funkcja może być przedstawiona w postaci:

$$\begin{matrix} 0,1,4,5\ (1,4) \\ 0,2,8,10\ (2,8) \\ 0,4,8,12\ (4,8) \end{matrix} \quad \text{lub} \quad \begin{matrix} 0,1,4,5\ (1,4) \\ 0,2,8,10\ (2,8) \\ 8,10,12,14\ (2,4) \end{matrix}$$

to znaczy

$$\begin{pmatrix} 0\text{-}0\text{-} \\ \text{-}0\text{-}0 \\ \text{--}00 \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} 0\text{-}0\text{-} \\ \text{-}0\text{-}0 \\ 1\text{--}0 \end{pmatrix}$$

skąd

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

lub

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_4$$

Jeśli zadana funkcja jest opisana za pomocą symbolu $\prod$ (odpowiednik postaci kanonicznej iloczynu), postępowanie różni się tylko w ostatnim etapie; przy przechodzeniu do postaci literowej symbolom 0 i 1 odpowiadają nie $\bar{x}$ i x, lecz — odpowiednio x i $\bar{x}$, a wynik ma postać iloczynu sum.

3.1.6. FUNKCJE SILNIE NIEOKREŚLONE

W praktyce często występują funkcje o wielu zmiennych lecz stosunkowo niewielu kombinacjach, dla których funkcja jest określona. Stosowanie tablic Karnaugha jest wówczas niemożliwie ze względu na liczbę zmiennych, natomiast stosowanie metod Quine'a-Mc Cluskeya nie pozwala wykorzystać silnej nieokreśloności funkcji gdyż kombinacje nieokreślone uważa się tam wstępnie za określone, a więc trzeba przetwarzać długie kolumny liczb. W takich przypadkach może być celowe zastosowanie metody upraszczania wyrażeń na podstawie porównania kombinacji, dla których funkcja przybiera wartość 0 z kombinacjami, dla których funkcja jest równa 1.

Przede wszystkim — dla funkcji silnie nieokreślonych trzeba zmodyfikować metody ich zapisu tak, by uniknąć konieczności wypisywania wielu pozycji odpowiadających wartości nieokreślonej. Można to zrobić podając składniki obydwu postaci kanonicznych np.

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum[0, 1, 8, 12(...)] = \prod[(4, 5, 6\ (...)]$$

lub wypisując te same liczby w postaci dwóch zbiorów; pierwszy (F^1) określa kombinacje, dla których funkcja jest równa 1, drugi (F^0) — kombinacje, dla których funkcja jest równa 0. Wszystkie pozostałe możliwości obejmuje zbiór F^x — kombinacji o nieokreślonej wartości funkcji. Rozważaną funkcję można więc zapisać:

$$F^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{0, 1, 8, 12\} \qquad F^0(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{4, 5, 6\}$$

lub w postaci zero-jedynkowej

$$F^1 = \begin{pmatrix} 0000 \\ 0001 \\ 1000 \\ 1100 \end{pmatrix} \quad F^0 = \begin{pmatrix} 0100 \\ 0101 \\ 0110 \end{pmatrix}$$

Porównanie elementów zbiorów F^1 i F^0 pozwala zauważyć, że w tym konkretnym przypadku:

— wszystkie elementy F_0 zaczynają się od 0, natomiast dwa elementy F^1 — od 1, można więc te dwa elementy zastąpić jednym, o postaci (1---), mając pewność, że w tak utworzoną grupę nie wchodzi żaden składnik F^0;

— cechą odróżniającą dwa pierwsze składniki F^1 od wszystkich składników F^0 jest 0 na drugim miejscu, można je więc zastąpić wyrażeniem (-0--).

Z rozważań tych wynika, że funkcję można przedstawić w postaci

$$F^1_{min} = \begin{pmatrix} 1\text{---} \\ \text{-0--} \end{pmatrix}$$

czyli $y = x_1 + \bar{x}_2$.

Wyprowadzanie wyrażenia logicznego nie od F^1, lecz od F^0 daje taką samą postać, gdyż cechą charakterystyczną składników F^0 jest człon 01 na początku, a więc wyrażenie (01--) obejmuje F^0 i nie obejmuje F^1

$$F^0_{min} = (01\text{--})$$

czyli $y = x_1 + \bar{x}_2$.

Jak wynika z tego przykładu, uproszczenie funkcji silnie nieokreślonej może być przeprowadzone przez takie przekształcenie postaci F^1 lub F^0, by otrzymane wyrażenia zawierały tylko pozycje istotnie odróżniające składniki F^1 od składników F^0. Wyszukiwanie odpowiednich postaci może być przeprowadzone w następującej kolejności.

1. Buduje się tablicę, której wiersze odpowiadają składnikom F^0, a kolumny — składnikom F^1 (lub odwrotnie) wypisanym w postaci zero-jedynkowej.

2. W tablicę wpisuje się (w postaci dziesiętnej) liczby, odpowiadające pozycjom, na których symbol wiersza i symbol kolumny różnią się; np. na przecięciu wiersza (0110) i kolumny (1100) należy wpisać 1,3.

3. Dla każdego wiersza (każdej kolumny) wypisuje się minimalne zbiory takich liczb, które występują we wszystkich kolumnach rozpatrywanego wiersza (lub we wszystkich wierszach rozpatrywanej kolumny), np. w wierszu

$$1{,}2 - 2{,}3 - 2{,}4$$

takim minimalnym zbiorem będzie 2, a w wierszu

$$1{,}2 - 2{,}3 - 3{,}4$$

minimalne zbiory to 1,3; 2,4; 2,3.

4. Jeśli wśród wypisanych zbiorów minimalnych są zbiory o mniejszej (niż w pozostałych) liczbie liter, należy sprawdzić, czy nie można ich zastąpić innymi zbiorami spośród wypisanych.

5. Ponieważ minimalne zbiory określają te pozycje wyrażenia zero-jedynkowego, które nie mogą być zastąpione kreskami, wybiera się spośród wypisanych zbiorów taką ich rodzinę, by obejmowała wszystkie elementy F^1 lub F^0.

6. Na podstawie uzyskanych liczb dziesiętnych odtwarza się uproszczoną postać zero-jedynkową wypisując tylko te pozycje, które wchodzą w skład zbiorów wyróżnionych, a pozostałe zastępując kreskami. Z tej postaci przechodzi się do postaci literowej wg zasad stosowanych poprzednio.

Przykład wyraźniej przedstawi kolejne czynności tego algorytmu. Niech zadanie polega na zminimalizowaniu funkcji, zadanej przez F^1 i F^0

$$F^0 = \begin{pmatrix} 0100101 \\ 1000110 \\ 1010000 \\ 1010110 \\ 1110101 \end{pmatrix} \qquad F^1 = \begin{pmatrix} 1000101 \\ 1011110 \\ 1101110 \\ 1110111 \end{pmatrix}$$

Tablica 3-6

Tablica niezgodności

F^0 \ F^1	1000101	1011110	1101110	1110111	
0100101	1,2	1,2,3,4, 6,7	1, 4, 6,7	1, 3, 6,	1; (2,6)
1000110	6,7	3,4	2, 4,	2,3, 7	4,7
1010000	3, 5, 7	4,5,6	2,3,4,5,6	2, 5,6,7	5; (4,7)
1010110	3, 6,7	4	2,3,4	2, 7	4,7
1110101	2,3	2, 4, 6,7	3,4, 6,7	6	2,6; 3,6
	2,7	4	4	2,6; 6,7	

Wypełnienie odpowiedniej tablicy (tabl. 3-6) nie przedstawia żadnych trudności. W celu uzyskania uproszczonej postaci normalnej sumy należy przeanalizować kolumny, wyszukując zbiory minimalne (wg p. 3). Są to

$$2,7 - 4 - 4 - 2,6;\ 6,7$$

a odpowiednie formy zero-jedynkowe, to

2,7 - (-0----1)
4 - (---1---)
4 - (---1---)
2,6 - (-1---1-); 6,7 - (-----11)

Żadna z postaci odpowiadających pierwszej i czwartej kolumnie nie obejmuje wyrażeń drugiej i trzeciej kolumny, więc zbiór 4 nie może być zastąpiony przez inne. Wynikają stąd dwie możliwe postaci uproszczone:

$$F^1_{min} = \begin{pmatrix} \text{-0----1} \\ \text{---1---} \\ \text{-1---1-} \end{pmatrix}$$

czyli $y = \bar{x}_2 x_7 + x_4 + x_2 x_6$,
lub

$$F^1_{min} = \begin{pmatrix} \text{-0----1} \\ \text{---1---} \\ \text{-----11} \end{pmatrix}$$

czyli $y = \bar{x}_2 x_7 + x_4 + x_6 x_7$.

Aby uzyskać uproszczoną postać normalną iloczynu, należy przeanalizować w podobny sposób wiersze tablicy. Zbiory minimalne to, odpowiednio

1 - 4,7 - 5 - 4,7 - 2,6; 3,6

lecz miejsce zbioru (1) może zająć zbiór (2,6), o takich samych symbolach jak w ostatnim wierszu, a zamiast zbioru (5) można przyjąć (4,7). Otrzymuje się więc rodzinę niezbędnych zbiorów

2,6 - 4,7 - 4,7 - 4,7 - 2,6

którym odpowiada postać

$$F^0_{min} = \begin{pmatrix} \text{-1---0-} \\ \text{---0--0} \end{pmatrix}$$

czyli $y = (\bar{x}_2 + x_6)(x_4 + x_7)$. Jest to wyrażenie jeszcze prostsze niż otrzymane poprzednio.

Przedstawiona wyżej procedura prowadzi do rozwiązań quasi-optymalnych, gdyż — dla uproszczenia — uwzględnia tylko minimalne zbiory liczb, występujących we wszystkich kolumnach albo wierszach (p. 3). Rozwiązanie optymalne uzyskuje się rozpatrując wszystkie takie zbiory i wybierając spośród nich minimalny zestaw, obejmujący wszystkie elementy F^1 albo F^0.

3.2. UKŁADY Z ELEMENTÓW STYKOWYCH ALBO Z ELEMENTÓW I, LUB, NIE

3.2.1. FAKTORYZACJA

Przy porównaniu urządzeń o zbliżonych parametrach technicznych, bierze się głównie pod uwagę dwa czynniki: niezawodność i koszt. Dobry projekt powinien być rozwiązany według tej wersji, która zabezpiecza kompromis między kosztami a niezawodnością. W typowych układach przełączających, w których niezawodność nie jest zwiększana przez dublowanie sprzętu, zwykle optymalną w rozważanym sensie wersję uzyskuje się przez minimalizację liczby elementów i ich wejść, a więc powstaje problem *minimalizacji układu.*

W realizacjach stykowych minimalnym będzie układ o najmniejszej liczbie zestyków, a zatem opisany funkcją o najmniejszej liczbie liter.

W realizacjach bezstykowych można wyodrębnić dwa przypadki:

— gdy układ buduje się z elementów dyskretnych (diod, tranzystorów itp.) układ minimalny zawiera najmniejszą liczbę tych elementów (dla ułatwienia obliczeń wprowadza się niekiedy jednostkę porównawczą: diodę — $1D$, a wówczas tranzystor to np. 3 diody: $1T = 3D$ itd.);

— gdy układ buduje się z gotowych bloków, układ minimalny zawiera najmniejszą możliwą liczbę bloków, a przy równej ich liczbie — wybiera się układ mniej obciążający sygnały wejściowe lub wyjściowe.

Opisane wyżej metody minimalizacji funkcji umożliwiają uzyskanie funkcji o minimalnej liczbie liter, ale w postaci normalnej sumy lub postaci normalnej iloczynu. Tak określone funkcje są wygodną postacią dla dalszych modyfikacji, mających na celu uzyskanie postaci, opisujące układ minimalny. Sposób dalszego przekształcania wyrażeń zależy w dużym stopniu od rodzaju stosowanych elementów i opiera się głównie na wyłączaniu przed nawias części wspólnych i stosowaniu praw rozdziel-