ZESZYT Nr. 2. TOMU II. 1929 ROK.

AKADEMJA NAUK TECHNICZNYCH

DR STANISŁAW BEŁZECKI

EM. PROFESOR POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Równowaga sił sprężystości w belce pryzmatycznej

RZECZ PRZEDSTAWIONA NA POSIEDZENIU
WYDZIAŁU MAT. FIZ. AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH
DNIA 20 GRUDNIA 1928 R.

WARSZAWA — 1929

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA

RÓWNOWAGA SIŁ SPRĘŻYSTOŚCI W BELCE PRYZMATYCZNEJ.

CZĘŚĆ I.

Historja zagadnienia. Francuska Akademja Nauk ogłaszała to zadanie, jako temat do nagrody, w latach od 1848 do 1858, lecz bez skutku [1].

W roku 1855 w XIV tomie Mém. des savants étrangers, a w roku 1856 w J. de Liouville S. II T. II ukazały się znakomite prace Barré de Saint Venant'a, w których autor daje rozwiązanie dla ciała pryzmatycznego, lub cylindrycznego w tym przypadku, kiedy $N_1 = N_2 = T_3 = 0$ w każdym punkcie ciała. W roku 1862 Clebsch [3] uogólnia obie prace de St Venant'a w jedno zadanie de St. Venanta i daje rozwiązanie odwrotnego zadania $N_3 = T_1 = T_2 = 0$. W roku 1890 E. Mathieu, składając cztery zadania płaskie, daje rozwiązania szczególne prowadzące do nowych funkcyj, które stanowią jakby pierwszy krok w kierunku funkcyj fundamentalnych.

W roku 1891 W. Stiekłow [2], stawiając pytanie, jakie siły powinny działać na skrajnych krawędziach cylindra, aby każda prosta równoległa do osi cylindra w stanie nieodkształconym, przekształcała się w algiebraiczną krzywą trzeciego stopnia,

---

[1] E. Mathieu. L'élasticité 1890 T. II.

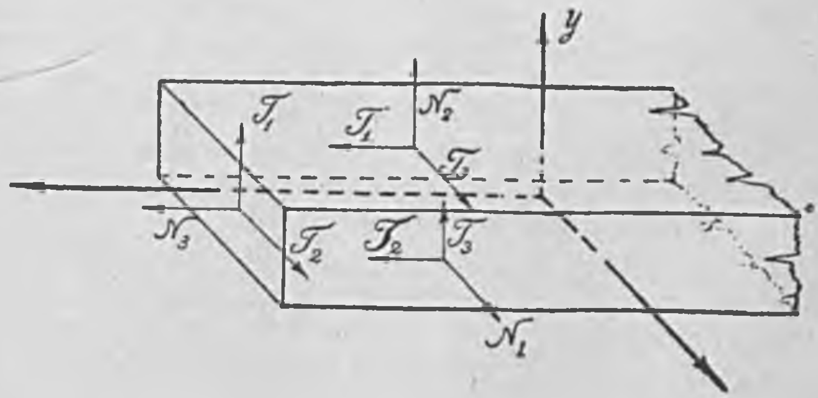
[2] W. Stiekłow. „O równowadze ciał cylindrycznych". Charkow (w jęz. rosyjskim).

[3] Clebsch. „Theorie der Elasticität fester Körper" Leipzig.

stwierdza, że powinny działać te siły, które stanowią rozwiązanie zadania St. Venanta. We wszystkich tych poszukiwaniach zakładano, iż cylinder lub pryzmat są pozbawione ciężaru własnego [1]. Łatwo znaleźć funkcje, które czynią zadość formalnie równaniom równowagi wewnątrz ciała, trudność polega na tem, żeby te funkcje spełniały założone warunki na powierzchniach granicznych ciała; w naszym przypadku na powierzchniach $x = \pm b$, $y = \pm h$, $z = \pm l$.

W dalszym ciągu będę rozpatrywał belkę pryzmatyczną nieważką.

Oznaczenia. Trzy stosunkowe wydłużenia $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ będę oznaczał przez α_1 α_2 α_3; trzy zmiany kątowe $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ przez β_1, β_2, β_3; przestrzenną rozszerzalność $\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ przez Θ; naprężenia sił sprężystości normalne do krawędzi oznaczamy przez: N_1, N_2 N_3, a naprężenia sił tnących oznaczamy przez T_1, T_2, T_3. Te wszystkie oznaczenia stosował G. Lamé.



[1]) Wpływ ciężaru własnego stanowi zadanie niezależne i łatwe do rozwiązania.

Działanie $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2}$ będę oznaczał przez Δ,

a działanie $\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}+2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}\right)$

przez $\Delta\Delta$. N_i i T_i, wyrażone w odkształceniach, będą:

$$N_1=\lambda\,\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x};\quad T_1=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$N_2=\lambda\,\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y};\quad T_2=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\qquad \lambda=\frac{\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)}.E$$

$$N_3=\lambda\,\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z};\quad T_3=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\qquad \mu=\frac{1}{2(1+\eta)}.E$$

E — moduł Young'a; η — liczba Poisson'a.

Współczesny stan teorji sprężystości [1]. Teorja odkształceń i teorja naprężeń stanowią dwa działy, którym są poświęcone albo oddzielne monografje [2], albo rozdziały Mechaniki teoretycznej [3]. Teorja sprężystości rozpoczyna się od ustalenia funkcjonalnej zależności N_i, T_i $(i=1,2,3\ldots)$ od α_i i β_i. Opierając się na zasadzie zachowania energji i na drugiem prawie termodynamiki, dochodzą do wzorów na N_i i T_i wyżej podanych (Green 1837, Thomson 1855, Poincaré 1892 r.) i więcej ogólnych (Cauchy 1828), które uwzględniają zależność N_i T_i od N_i^0 T_i^0, t. j. od tych naprężeń, które były w ciele do momentu, kiedy na ciało zaczęły działać dane siły zewnętrzne. W obecnym stanie nauki nie możemy jeszcze korzystać z wzorów Cauchy'ego, lecz posługujemy się wzorami Greena. Dedukcja Greena i Thomsona oraz doświadczenia Voigt'a potwierdziły empiryczne prawo Hooke'a, które przeszło do historji (Voigt. Allgemeine Formeln. Wied. Ann. 1882 str. 273).

Przedmiotem nauki jest ciało idealnie (doskonale) sprężyste (Perfectly elastic solid). Dla ciał fizycznych zbliżających

---

[1] Po głębszym namyśle zdecydowałem się wprowadzić ten paragraf i będę się na niego powoływał w tej pracy i w następnych.

[2] E. F. Cosserat „Corps déformables" Paris 1909.

[3] Appel. „Traité de mécanique rationelle".

się do tego wzoru ciała idealnie sprężystego stosują także termin: „ciało wzorowo sprężyste".[1])

Powstaje jednak pytanie, czy przy takiem ujęciu ciała teorja sprężystości może być stosowana do szerszej grupy ciał i do szerszej grupy zjawisk.

Teorja sprężystości wskazuje np., że stosunek szybkości fal podłużnych do szybkości fal poprzecznych równa się $\sqrt{3}$, przy założeniu, że liczba Poissona jest równa $1/4$. Zöppritz i Geiger ustalili na zasadzie wielu doświadczeń, że ten stosunek dla fal sejsmicznych na powierzchni ziemi równa się 1,788. Z jednej strony „Perfectly elastic solid" — z drugiej skorupa ziemi, z jednej strony — 1,732, z drugiej — 1,788.

Bardzo zajmujące są inne wyniki prac tych uczonych. Potwierdzają one zgodność badań skorupy ziemi na podstawie teorji sprężystości z doświadczeniami[2]). Wyniki te mogą ośmielić inżynierów do szerokiego stosowania tej nauki w dziedzinie zjawisk, z któremi inżynier ma do czynienia.

Równania równowagi.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}+\sigma . X=0 \\ \frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z}+\sigma . Y=0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T^1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}+\sigma . Z=0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

w których σ oznacza gęstość materji, zawierają sześć niewiadomych funkcji N_i i T_i. Zapomocą wyżej podanych wzorów na N_i i T_i, równania te sprowadzają się do następujących:

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu . \Delta u+\sigma . X=0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu . \Delta v+\sigma . Y=0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu . \Delta w+\sigma . Z=0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

---

[1]) Prof. Karasiński: „Wytrzymałość tworzyw".

[2]) Galicyn. Vorlesungen über Seismometrie. Petersburg 1912 r. G. H. Darwin. Proc. R. S. (różne lata i różne tomy)

Całki tych równań dają ogólne rozwiązanie zadania. Wprowadzając średnie obroty około osi x, y, z, które oznaczymy przez $2w_1, 2w_2, 2w_3$, otrzymamy inną formę tych równań

$$
\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial z}2w_2 - \frac{\partial}{\partial y}2w_3\right] + \sigma . X = 0 \\
&(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}2w_3 - \frac{\partial}{\partial z}2w_1\right] + \sigma . Y = 0 \qquad \text{(c)} \\
&(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial y}2w_1 - \frac{\partial}{\partial x}2w_2\right] + \sigma . Z = 0
\end{aligned}
$$

Oprócz tego, w ogólnym przypadku, mamy trzy równania dla granicznych powierzchni

$$
\begin{aligned}
&\lambda . \theta . l + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial \nu}{\partial x}\right) = P_x \\
&\lambda . \theta . m + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial \nu}{\partial y}\right) = P_y \qquad \text{(d)} \\
&\lambda . \theta . n + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) = P_z
\end{aligned}
$$

l, m, n — są to kosinusy kątów, które tworzy normalna do powierzchni granicznej z osiami x, y, z.

$\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną względem normalnej,

a $$\nu = u . l + v . m + w . n .$$

Grupa (d) w naprężeniach wyraża się tak:

$$
\begin{aligned}
N_1 . l + T_3 . m + T_2 . n &= P_x \\
T_3 . l + N_2 . m + T_1 . n &= P_y \\
T_2 . l + T_1 . m + N_3 . n &= P_z
\end{aligned}
$$

Różniczkując, łatwo dowieść, że

$$\Delta\Delta u = \Delta\Delta v = \Delta\Delta w = 0; \quad \Delta\theta = 0; \quad \Delta\Delta N_i = \Delta\Delta T_i = 0$$

$$(3\lambda + 2\mu)\,\theta = N_1 + N_2 + N_3 ,$$

a zatem

$$\Delta(N_1+N_2+N_3)=0$$

Całkowanie równań (b). Gdy założymy, że

$$\theta=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\Delta F,$$

to równania (b) dadzą nam:

$$\begin{aligned} &\mu\cdot\Delta\left(u-\frac{\partial F}{\partial x}\right)=0 & & u=\frac{\partial F}{\partial x}+P \\ &\mu\cdot\Delta\left(v-\frac{\partial F}{\partial y}\right)=0 & \text{Stąd}\quad & v=\frac{\partial F}{\partial y}+Q \\ &\mu\cdot\Delta\left(w-\frac{\partial F}{\partial z}\right)=0 & & w=\frac{\partial F}{\partial z}+R \end{aligned} \qquad \text{(e)}$$

P, Q i R są funkcjami, z których każda czyni zadość równaniu $\Delta P=\Delta Q=\Delta R=0$ (Laplace'a)

$$\theta=\Delta F+\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\Delta F+\psi \qquad \text{(f)}$$

Podstawiwszy w (b) pochodne wyrażenia (f) i wartości u, v, w z wzorów (e), otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(\lambda+2\mu)\,\Delta F+(\lambda+\mu)\,\psi]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[(\lambda+2\mu)\,\Delta F+(\lambda+\mu)\,\psi]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[(\lambda+2\mu)\,\Delta F+(\lambda+\mu)\,\psi]=0$$

Zakładając

$$\Delta F=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\psi\ ^{*)}$$

*) $\Delta\Delta F=0$.

uczynimy zadość równaniom (b)

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \psi$$

$$N_1 = \mu \left[2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \psi + 2 \frac{\partial P}{\partial x} \right]$$

$$N_2 = \mu \left[2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \psi + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} \right]$$

$$N_3 = \mu \left[2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \psi + 2 \frac{\partial R}{\partial z} \right]$$

$$T_1 = \mu \left[2 \frac{\partial^2 F}{\partial z . \partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right]$$

$$T_2 = \mu \left[2 \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial z} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \right]$$

$$T_3 = \mu \left[2 \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right]$$

Zadania sprowadza się w ten sposób do całkowania równań

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

których całki dadzą P, Q i R, a następnie do całkowania równania

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \psi^{*})$$

Podobne równania spotykamy w teorji ciepła.

Naszem zadaniem będzie sprowadzenie tego zadania do całkowania równań znacznie prostszych.

Postarajmy się znaleźć sześć funkcji N_i i T_i takich, któreby czyniły zadość równaniom (a), równaniu $\Delta (N_1 + N_2 + N_3) = 0$ i warunkom $\Delta \Delta T_i = 0$**). Z równań (a) otrzymamy:

*) $\Delta\Delta F = 0$

**) C. R. 1928 Nr. 22.

$$N_1 = -\int\left(\frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\right) dx + \varphi_1(y, z)$$

$$N_2 = -\int\left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial z}\right) dy + \varphi_2(x, z)$$

$$N_3 = -\int\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y}\right) dz + \varphi_3(x, y)$$

φ_i $(i = 1, 2, 3)$ są to dowolne funkcje powyżej wymienionych zmiennych. Warunek: $\Delta(N_1 + N_2 + N_3) = (3\lambda + 2\mu)\Delta\theta = 0$.

Oczywistą jest rzeczą, że

$$\Delta\Sigma N_i = \Sigma\Delta N_i\,.$$

Istotnie:

$$\Delta N_1 = \lambda\Delta\theta + 2\mu\Delta\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Delta N_2 = \lambda\Delta\theta + 2\mu\Delta\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Delta N_3 = \lambda\Delta\theta + 2\mu\Delta\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\Sigma\Delta N_i = 3\lambda\Delta\theta + 2\mu\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = (3\lambda + 2\mu)\Delta\theta = \Delta\Sigma N_i$$

Wykonywując działanie

$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\Delta(N_1 + N_2 + N_3),$$

otrzymamy równanie

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\underset{xy}{\Delta\Delta} T_3 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot\underset{xy}{\Delta} T_3\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\underset{xz}{\Delta\Delta} T_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot\underset{xz}{\Delta} T_2\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\underset{zy}{\Delta\Delta} T_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\underset{zy}{\Delta} T_1\right] - \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\left[\underset{yz}{\Delta}\varphi_1 + \underset{xz}{\Delta}\varphi_2 + \underset{xy}{\Delta}\varphi_3\right] = 0 \quad \text{(B)}$$

Trzy funkcje

$$
\begin{aligned}
T_3 &= \psi_1(z) \,.\, F_{xy} + \psi_2(z) \,.\, f_{xy} \\
T_2 &= \psi_3(y) \,.\, F_{xz} + \psi_4(y) \,.\, f_{xz} \\
T_1 &= \psi_5(x) \,.\, F_{zy} + \psi_6(x) \,.\, f_{zy}
\end{aligned}
\tag{g}
$$

takie, w których

$$\Delta\Delta\, F_{xy} = \Delta\Delta\, F_{xz} = \Delta\Delta\, F_{zy} = 0; \quad \Delta f_{xy} = \Delta f_{xz} = \Delta f_{zy} = 0\,,$$

a ψ_i są dowolne funkcje swoich zmiennych, czynią zadość równaniu (B), jeżeli $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3 = 0$.

Działanie Δ nad iloczynem $u \,.\, v$ daje:

$$\Delta(u \,.\, v) = u \,.\, \Delta v + v \,.\, \Delta u + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Zastosujmy to do iloczynu $\psi_i(\alpha) \,.\, F_{\beta\gamma}$:

$$\Delta\left[\psi_i(\alpha) \,.\, F_{\beta\gamma}\right] = \psi_i(\alpha)\, \Delta F_{\beta\gamma} + F_{\beta\gamma} \,.\, \Delta\psi_i(\alpha)$$

Ponieważ

$$\frac{\partial\psi_i(\alpha)}{\partial\beta} = \frac{\partial\psi_i(\alpha)}{\partial\gamma} = \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial\alpha} = 0\,, \text{ to}$$

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0\,,$$

a zatem

$$\Delta T_i = \Delta\left[\psi_i(\alpha) \,.\, F_{\beta\gamma} + \psi_{i+1}(\alpha) f_{\beta\gamma}\right] = \psi_i(\alpha)\, \Delta F_{\beta\gamma} +$$
$$+ F_{\beta\gamma}\, \Delta\psi(\alpha) + \psi_{i+1}(\alpha)\, \Delta f_{\beta\gamma} + f_{\beta\gamma}\, \Delta\psi_{i+1}(\alpha)\,.$$

Warunek

$$\Delta\Delta T_i = 0 = \psi_i(\alpha)\, \Delta\Delta F_{\beta\gamma} + 2\Delta\psi_i(\alpha)\, \Delta F_{\beta\gamma} + F_{\beta\gamma}\, \Delta\Delta\psi_i(\alpha) +$$
$$+ \psi_{i+1}(\alpha) \,.\, \Delta\Delta f_{\beta\gamma} + 2\Delta f_{\beta\gamma} \,.\, \Delta\psi_{i+1}(\alpha) + f_{\beta\gamma} \,.\, \Delta\Delta\psi_{i+1}(\alpha) = 0\,,$$

przy założeniu, że

$$\Delta\Delta F_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{i} \quad \Delta f_{\beta\gamma} = 0\,,$$

będzie spełniony, jeżeli

$$\Delta\psi_i(\alpha) = 0 \quad \text{i} \quad \Delta\Delta\psi_{i+1}(\alpha) = 0\,,$$

t. j. $\psi_i(\alpha)$ może być tylko linjową funkcją α, ψ_{i+1} zaś nie może być wyższą od 3 stopnia funkcją α.

Funkcja T_3 nie może być funkcją z, T_2 — funkcją y, a T_1 — funkcją x wyższą od 3 stopnia.

Ponieważ funkcje $F_{\alpha\beta}$ i $f_{\alpha\beta}$ są to funkcje tylko dwóch zmiennych z kombinacji x, y, z po dwie, to ogólne zadanie sprowadza się do takiej kombinacji trzech zadań płaskich, któraby czyniła zadość równaniu *(B)*.

Zadanie płaskie jest zupełnie określone równaniami:

$$\frac{\partial N_i}{\partial\alpha} + \frac{\partial T_i}{\partial\beta} = 0$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial\alpha} + \frac{\partial N_{i+1}}{\partial\beta} = 0$$

i warunkiem $\Delta(N_i + N_{i+1}) = 0$, który można zastąpić warunkiem $\Delta\Delta T_i = 0$

Normalne naprężenia N_i i N_{i+1} powinny być uzupełnione dowolnemi funkcjami, które we współrzędnych Kartezjusza będą linjowemi funkcjami, jedna α, druga β. Te trzy równania określają ogólne rozwiązanie zadania płaskiego.

W naszym przypadku mamy trzy równania równowagi (a) i równania $\Delta\Sigma N_i = 0$, razem 4 równania dla określenia 6 funkcji N_i i T_i. Warunki $\Delta\Delta T_i = 0$ potwierdzają tylko, że obrane funkcje na T_i nie przeczą równaniom równowagi ciał izotropowych. Z tego wynika, że rozwiązanie czyni zadość wszystkim warunkom, ma duży obszar zastosowania, a w jakim ono jest stosunku do ogólnego wyżej otrzymanego rozwiązania, o tem będzie mowa w następnej pracy.

Rozwiązanie polega na takiej kombinacji trzech zadań płaskich, która czyni zadość równaniu (B). Zadanie płaskie, dzięki pracom E. Mathieu'go, M. Lévy'ego, Ribière'a, Mesnager'a i Kołosowa można uważać za wyczerpane.

Będę oznaczał przez *(k, u)* funkcje

$$[(A + Bu)\,e^{k\cdot u} + (C + Du)\,e^{-k\cdot u}]$$

k — liczba, u — jedna ze zmiennych x, y, z.

$$\frac{d^n(k,u)}{du^n} = k^n\left[\left(A+\frac{nB}{k}+Bu\right)e^{ku} \mp (-1)^n\left(c-\frac{nD}{k}+Du\right)e^{-ku}\right]$$

$$\underbrace{\int\int\ldots\ldots\int}_{n}(k,u)\,du^n = \frac{1}{k^n}\left[\left(A-\frac{B}{k}+Bu\right)e^{ku}+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\left(C+\frac{D}{k}+Du\right)e^{-ku}\right]$$

Funkcja

$$F = \Sigma(k,\ u)\cos(kv),\ \text{lub}\ F = \Sigma(k,\ u)\sin(kv)$$

spełnia równanie:

$$\Delta\Delta F = 0$$

Funkcja

$$\Sigma\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial u}(k,\ u)\cos(kv) - \int\Sigma k(k,\ u)\cos(kv)\,du =$$

$$= f = \Sigma\frac{2}{k}(B\,e^{ku} + D\,e^{-ku})\cos(kv)$$

czyni zadość równaniu

$$\Delta f = 0$$

Wyrazy

$$\Sigma(B\,e^{ku} + D\,e^{-ku}),\ \text{lub}\ \Sigma[Ak\,Sh(ku) + Bk\,Ch(ku)]$$

będę oznaczał przez $\left(\frac{k}{u}\right)$.

Jeżeli belka jest wolnopodparta na dwóch podporach, to

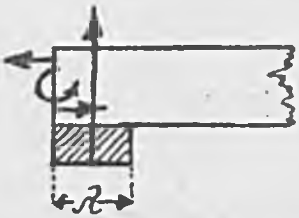
$$\int\int N_2\,dz\,dx + \int\int_{z=l} T_1\,dx\,dy + \int\int_{z=-l} T_1\,dx\,dy = 0$$

$\int\int N_3\,dx\,dy$ albo równa się zeru, albo równa się sile przeto

$$\int\int N_3 . y . dx\,dy = 0$$

Jeśli belka ma końce zamocowane, to

$$\int\int N_2 y\, dx\, dz \neq 0; \quad \underset{z=\pm l}{\int\int T_1\, dx\, dy} = 0;$$



Reakcja podpory na powierzchni $y = -h$ może być rozwinięta w szereg Fourier'a:

(od 0 do $l-\lambda$, $\underset{y=h}{N_2} = 0$, na długości λ przyłożona reakcja podpory)*).

Wzory na T_i przedstawimy w takiej postaci.

$$\left.\begin{aligned}
T_3 &= \psi_1(z)\,\Sigma(m, y)(\cos mx + \sin mx) + \\
&\qquad + \psi_2(z) \sum \left(\frac{q}{x}\right)(\cos qy + \sin qy) \\
T_2 &= \psi_3(y)\,\Sigma(n, x)(\cos nz + \sin nz) + \\
&\qquad + \psi_4(y) \sum \left(\frac{r}{z}\right)(\cos rx + \sin rz) \\
T_1 &= \psi_5(x)\,\Sigma(p, y)(\cos pz + \sin pz) + \\
&\qquad + \psi_6(x) \sum \left(\frac{s}{y}\right)(\cos sz + \sin sz)\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(h)}$$

*) Są to warunki Ribière'a.

Warunki zamocowania końca belki używane przez St. Venant'a są takie: Przy

$$x = y = z = 0$$
$$u = v = w = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Warunki te mogą być różne, byle by belka jako całość została pozbawiona sześciu stopni swobody.

W tych wzorach i we wzorach na N_i $(i = 1, 2, 3)$ mamy do rozporządzenia sześć funkcyj ψ_i, w każdym wyrazie szeregów $\Sigma(k, u)(\cos kv + \sin kv)$ po cztery dowolne stałe i w każdym wyrazie szeregu $\sum\left(\frac{t}{u}\right)(\cos tv + \sin tv)$ po dwie dowolne stałe. Oprócz tego mamy trzy funkcje φ_i $(i = 1, 2, 3)$ i sześć wielkości m, n, p, q, r, s. Wszystkie te wielkości powinny być określone z danych warunków granicznych. Warunki te są określone przez siły, które działają na belkę i rodzaj podpór.

Pierwsze wyrazy w wyrażeniach na T_i będę nazywał biharmonicznemi, drugie harmonicznemi. Będę korzystał z wiadomych wzorów na rzuty głównego wektora L i głównego momentu M sił zewnętrznych działających na krawędzie bęlki.

Na krawędzi $z = l$

$$L_x = -\int\int T_2\,dx\,dy \qquad M_x = \int\int (N_3 y - T_1 l)\,dx\,dy$$

$$L_y = -\int\int T_1\,dy\,dx \qquad M_y = \int\int (T_2 l - N_3 x)\,dx\,dy$$

$$L_z = \int\int N_2\,dx\,dy \qquad M_z = \int\int (T_1 x - T_2 y)\,dx\,dy.$$

Na krawędzi $y = h$

$$L'_x = -\int\int T_3\,dz\,dx\,; \qquad M'_x = \int\int (T_1 h - N_2 z)\,dz\,dx$$

$$L'_y = -\int\int N_2\,dz\,dx\,; \qquad M'_y = \int\int (T_3 z - T_1 x)\,dz\,dx$$

$$L'_z = -\int\int T_1\,dz\,dx\,; \qquad M'_x = \int\int (T_3 h - N_2 x)\,dz\,dx$$

Na krawędzi $x = b$

$$L''_x = -\int\int N_1\,dy\,dz\,; \qquad M''_x = \int\int (T_2 y - T_3 z)\,dz\,dy$$

$$L''_y = -\int\int T_3\,dy\,dz\,; \qquad M''_y = \int\int (N_1 z - T_2 b)\,dz\,dy$$

$$L''_y = -\int\int T_2\,dy\,dz\,; \qquad M''_z = \int\int (N_1 y - T_3 b)\,dz\,dy,$$

Pokażemy jak stosować wzory (h) do rozwiązania poszczególnych zadań i jakie kategorje zadań można rozwiązać zapomocą tych wzorów. [1])

1. Zbadamy biharmoniczne wyrazy ogólnych wzorów na T_i, w założeniu, że $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$.

Ponieważ funkcje ψ_{2i+1} są linjowe, to założymy najpierw:

$$T_3 = \Sigma\,(m,y)\cos(mz),$$
$$T_2 = \Sigma\,(n,x)\cos(nz),$$
$$T_1 = \Sigma\,(p,y)\cos(pz).$$

Normalne naprężenia będą:

$$N_1 = -\sum \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}(m,y)\sin(mx) + \Sigma n \sin(nx)\int(n,x)\,dx,$$

$$N_2 = \sum m \sin(mx)\int(m,y)\,dy + \Sigma p \sin(px)\int(p,y)\,dy$$

$$N_3 = -\sum \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}(n,y)\sin(nz) - \Sigma \sum \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial y}(n,y)\sin(pz)$$

Trzy momenty skręcające:

$$\int\!\!\int (T_1 x - T_2 y)\,dx\,dy = 0,$$

$$\int\!\!\int (T_3 z - T_1 x)\,dz\,dx = 0,$$

$$\int\!\!\int (T_2 y - T_3 z)\,dz\,dy = 0.$$

Dwa dowolne T_i możemy przyjąć jako równe zeru i otrzymamy wówczas zadanie płaskie.

Załóżmy np.

$$T_1 = \Sigma\,[(A + Bq)\,e^{my} + (C + Dy)\,e^{-my}]\cos(mz),$$

---

[1]) Ponieważ mam na celu ogólną teorję, więc szczegółów nie będę podawał. Szczegóły patrz w cytowanej niżej mojej pracy i mojej Teorji sprężystości 1913. Wyd. Stud. Politechniki Petersburskiej.

a otrzymamy:

$$N_2 = \sum\left[\left(A - \frac{B}{m} + By\right)e^{my} - \left(C + \frac{D}{m} + Dy\right)e^{-my}\right] \sin(mz),$$

$$N_3 = -\sum\left[\left(A + \frac{B}{m} + By\right)e^{my} - \left(C - \frac{D}{m} + Dy\right)e^{-my}\right] \sin(mz).$$

Przesunięcia

$$v = \frac{1}{2\mu}\left\{\sum\left[\left(A - \frac{2B}{m} + By\right)e^{my} + \left(C + \frac{2D}{m} + Dy\right)e^{-my}\right] \sin(mz) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(Be^{my} + De^{-my}) \sin(mz)\right\}$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\left\{\sum\left[\left(A + \frac{B}{m} + By\right)e^{my} - \left(C - \frac{D}{m} + Dy\right)e^{-my}\right] \cos(mz) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(Be^{my} + De^{-my}) \cos(mz)\right\} {}^{*})$$

Zbadamy teraz, czy można jedno z T_i przyjąć jako równe zeru nie robiąc żadnych założeń co do N_i.

Założymy np.:

$$T_3 = \Sigma(m, y) \cos(mx),$$

$$T_2 = 0,$$

$$T_1 = \sum(n, y) \cos(nz)$$

$$N_1 = -\sum \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y}(m, y) \sin(mx)$$

$$N_2 = \sum m \sin(mx) \int (m, y)\, dy + \Sigma \sin(nz) \int (n, y)\, dy$$

$$N_3 = -\sum \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y}(n, y) \sin(nz)$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \int (N_1 - \lambda\theta)\, dx + \varphi_1(y, z)$$

*) W takiej postaci dałem rozwiązanie w r. 1905 „Izw. Sobr. I. T. S."

$$w = \frac{1}{2\mu}\int (N_3 - \lambda\theta)\,dz + \varphi_3(x, y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2\mu}\int\left(\frac{\partial N_3}{\partial z} - \lambda\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)dz + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\mu}\int\left(\frac{\partial N_1}{\partial z} - \lambda\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)dz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial z} = 0,$$

to

$$\frac{\lambda}{2\mu}\left[\int\frac{\partial \theta}{\partial x}dz + \int\frac{\partial \theta}{\partial z}dx\right] = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

Prawa część ma postać

$$\psi_1(y, z) + \psi_2(x, y),$$

lub jest funkcją tylko y; lewa ma postać

$$\alpha \, . \, z\,[\Sigma\,(Be^{my} + De^{-my})]\sin(mx) + \beta x\,[\Sigma(Le^{ny} + Ne^{-ny})]\cos(nz)$$

Równanie to będzie spełnione dla:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = B = D = L = N = 0,$$

t. j. kiedy deformacja jest poprzeczną, co będzie uwidocznione poniżej.

Przyjmując, że jedno z T_i jest równe zeru, musimy zrobić pewne założenia co do normalnych naprężeń, jak to uczyde St. Venant.[1])

2 Zadanie St. Venant'a

Założymy $N_1 = N_2 = T_3 = 0$.

Ponieważ powinno być $\Delta\Sigma N_i = 0$, to $\Delta N_3 = 0$ zaś T_2 i T_1 niezależą od z.

---

[1]) Czy ten warunek jest konieczny, o tem będzie mowa w drugiej części tej pracy.

Założymy przeto:

$$T_2 = \Sigma\,(A_n \operatorname{Sh}(ny) + B_n \operatorname{Ch}(ny))\cos(nx),$$
$$T_1 = \Sigma\,(C_m \operatorname{Sh}(mx) + D_m \operatorname{Ch}(mx))\cos(my),$$
$$N_3 = z\,[\Sigma n\,(A_n \operatorname{Sh}(ny) + B_n . \operatorname{Ch}(ny))\sin(nx) + ,$$
$$+ \Sigma m\,(C_m \operatorname{Sh}(mx) + D_n \operatorname{Ch}(mx))\sin(my)].$$

Przy $x = \pm b,\ T_2 = 0$; przy $y = \pm h,\ T_1 = 0.\left(n = \frac{\pi l}{b}, m = \frac{\pi l}{h}\right).$

Takie rozwiązanie jest mylne, bo T_2 i T_1 nie mogą być innemi funkcjami x i y od tych, które są objęte wzorami (g) Ten przykład wskazuje na doniosłość wzoou (B) i ostrzega przed niedostatecznie obmyślonem traktowaniem zadań Teorji Sprężystości.

Z poprzedniego wynika, że biharmoniczne wyrazy na T_i mogą być użyte do rozwiązania zadań płaskich.

3. Założymy teraz, że

$$T_3 = z\,\Sigma\,(m,y)\cos(mx),$$
$$T_2 = y\,\Sigma\,(n,x)\cos(nz),$$
$$T_1 = x\,\Sigma\,(p,y)\cos(pz),$$

$$N_1 = -z\sum \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}(m,y)\sin(mx) + y\,\Sigma n\sin(nz)\int(n,z)\,dx,$$

$$N_2 = z\sum m\sin(mx)\int(m,y)\,dy + x\,\Sigma p\sin(pz)\int(p,y)\,dy,$$

$$N_3 = -y\sum\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}(n,x)\sin(n,z) - x\sum\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial y}(p,y)\sin(pz).$$

Rzuty wszystkich wektorów są równe zeru, rzuty momentów są różne od zera. Wzory obejmują kategorję zadań na gięcie i skręcanie wywołane tylko momentami.

4. Zbadamy teraz harmoniczną część wzorów na T_i.

$$T_3 = \psi_2(z)\,\Sigma A_m \operatorname{Sh}(mx)\cos(my),$$
$$T_3 = \psi_4(y)\,\Sigma B_n \operatorname{Sh}(nz)\cos(nx),$$
$$T_1 = \psi_6(x)\,\Sigma C_p \operatorname{Sh}(py)\cos(pz).$$

Odpowiednie wyrażenie na N_i są następujące:

$$N_1 = \psi_2(z)\,\Sigma A_m \operatorname{Ch}(mx)\sin(my) - \psi_4(y)\,\Sigma B_n \operatorname{Ch}(nz)\sin(nx),$$

$$N_2 = -\psi_2(z)\,\Sigma A_m \operatorname{Ch}(mx)\sin(my) + \psi_6(x)\,\Sigma C_p \operatorname{Ch}(py)\sin(pz),$$

$$N_3 = \psi_4(y)\,\Sigma B_n \operatorname{Ch}(nz)\sin(nx) - \psi_6(x)\,\Sigma C_p \operatorname{Ch}(py)\sin(pz).$$

Charakterystyką zadań ujętych harmoniczną częścią wzorów na T_i jest to, że przestrzenna rozszerzalność równa się zeru. ($\Sigma N_i = \alpha\Theta = 0$). Taka deformacja nazywa się poprzeczną.

Jako szczególny wypadek zadań tej kategorji rozpatrzymy taki

$$T_3 = \psi_2(z)\,A_0,$$

$$T_2 = \psi_4(y)\,B_0,$$

$$T_1 = \psi_6(x)\,C_0.$$

Wszystkie N_i są równe zeru.

Skoro nadamy ψ_{2i+2} ogólną formę $\alpha u + \beta u^3$, to wszystkie rzuty wektorów staną się równe zeru. Otrzymamy więc trzy skręcania około osi przechodzącej przez początek współrzędnych.[1])

Inny przykład poprzecznej deformacji otrzymamy zakładając:

$$T_2 = \Sigma\left(A_m \operatorname{Ch}(mx) + B_m \operatorname{Sh}(mx)\right)\cos(mz),$$

$$T_1 = \Sigma\left(C_n \operatorname{Ch}(ny) + D_n \operatorname{Sh}(ny)\right)\cos(nz).$$

Odpowiednie wyrażenia na N_i są:

$$N_1 = \Sigma\left(A_m \operatorname{Sh}(mx) + B_m \operatorname{Ch}(mx)\right)\sin(mz),$$

$$N_2 = \Sigma\left(C_n \operatorname{Sh}(ny) + D_n \operatorname{Ch}(ny)\right)\sin(nz),$$

$$N_3 = -\left[\Sigma\left(A_m \operatorname{Sh}(mx) + B_m \operatorname{Ch}(mx)\right)\sin(mz) + \right.$$

$$\left. + \Sigma\left(C_n \operatorname{Sh}(nz) + D_n \operatorname{Ch}(ny)\right)\sin(nz)\right].$$

[1]) W przypadku $A_0 = B_0 = C_0$ deformacja będzie jednocześnie podłużną. Odpowiednie przesunięcia będą: $u = \alpha yz$, $v = \alpha xz$; $w = \alpha xy$; $f = \alpha xyz$

Przesunięcia będą:

$$u = \frac{1}{2\mu}\left[\sum\left(A_m \operatorname{Ch}(mx) + B_m \operatorname{Sh}(mx)\right)\sin(mz)\right],$$

$$v = \frac{1}{2\mu}\left[\sum\left(C_n \operatorname{Ch}(ny) + D_n \operatorname{Sh}(ny)\right)\sin(nz)\right],$$

$$w = -\frac{1}{2\mu}\left[\sum\left(A_m \operatorname{Sh}(mx) + B_m \operatorname{Ch}(mx)\right)\cos(mz) + \right.$$

$$\left. + \sum\left(C_n \operatorname{Sh}(ny) + D_n \operatorname{Ch}(ny)\right)\cos(nz)\right].$$

Zakładając $N_2 = 0$ przy $y = -h$, $m = n = \frac{\pi l}{2l}$ i obierając początek spółrzędnych w punkcie $x = -b$, $z = -l$, otrzymamy belkę wolnopodpartą i zgiętą w płaszczyznach yoz i zox.

Otrzymane rozwiązanie stanowi prostą kombinację dwóch zadań płaskich.

$$2w_x \neq 0;\ 2w_y \neq 0;\ 2w_z = 0.$$

Przy wielkich h wyraz $[\operatorname{Sh}(ny) + \operatorname{Th}(mh)\operatorname{Ch}(ny)]$ dąży do e^{ny}, przy $y = -h$ dąży do zera. Przesunięcia v i naprężenia na powierzchni $y = -h$ dążą do zera, a przy $y = y$ wzrastają. Przy dostatecznie wielkiem h belka przestaje być zgiętą, lecz naprężenia w niej wzrastają.

Przykład ściskanej belki otrzymamy zakładając:

$$T_3\ \Sigma\left(A_m \operatorname{Ch}(my) + B_m \operatorname{Sh}(my)\right)\cos mx)$$

$$T_2 = 0,$$

$$T_1 = \Sigma\left(C_n \operatorname{Ch}(ny) + D_n \operatorname{Sh}(ny)\right)\cos(nz)\ ^{1})$$

$$N_1 = -\Sigma\left(A_m \operatorname{Sh}(my) + B_m \operatorname{Ch}(my)\right)\sin(mx),$$

---

[1]) Albo:

$$T_1 = \Sigma\,(ny)\,(\sin(n\,.\,z) + \cos(nz)),$$

$$T_3 = \Sigma\,(my)\,(\sin(mz) + \cos(mz)).$$

Patrz C. K. 1928 N 12 1-e Sem. p. 732.

$$N_2 = \Sigma\,(A_m \operatorname{Sh}(my) + B_m \operatorname{Ch}(my))\sin(mx) +$$
$$+ \Sigma\,(C_n \operatorname{Sh}(ny) + D_n \operatorname{Ch}(ny))\sin(nz),$$
$$N_3 = -\Sigma\,(C_n \operatorname{Sh}(ny) + D_n \operatorname{Ch}(ny))\sin(nz),$$
$$\Theta = 0.$$

Przesunięcia będą:

$$u = \frac{1}{2\mu}\left[\Sigma\frac{1}{m}\Big(A_m \operatorname{Sh}(my) + B_m \operatorname{Ch}(my)\Big)\cos(mx)\right]$$

$$v = \frac{1}{2\mu}\left[\Sigma\frac{1}{m}\Big(A_m \operatorname{Ch}(my) + B_m \operatorname{Sh}(my)\Big)\sin(mx) + \right.$$
$$\left. + \Sigma\frac{1}{n}\Big(C_n \operatorname{Ch}(ny) + D_n \operatorname{Sh}(ny)\Big)\sin(nz)\right].$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\left[\Sigma\frac{1}{n}\Big(C_n \operatorname{Sh}(ny) + D_n \operatorname{Ch}(ny)\Big)\cos(nz)\right].$$

Założymy

$$A_m = C_n = 0,$$
$$N_1 = 0, \quad x = \pm b,$$
$$N_3 = 0, \quad z = \pm 1.$$

Otrzymamy belkę ściskaną; główny wektor jest pochylony do osi współrzędnych. Przy $y = 0$ i dowolnych x i z jest $v = 0$, $2\,w_x = 2\,w_y = 2\,w_z = 0$. Deformacja jest jednocześnie podłużną i poprzeczną.[1])

Przy danej sile, a zatem danych B i D możemy określić taką wysokość belki, przy której N_2 będzie równem granicy sprężystości (graniczna wysokość).[2])

[1]) u, v, w są pochodnemi funkcji:

$$F = \frac{1}{2\mu}\left[\sum\frac{1}{m^2}(A_m \operatorname{Sh} my + B_m \operatorname{Ch} my)\sin mx + \sum\frac{1}{n^2} C_n \operatorname{Sh} ny + \right.$$
$$\left. + D_n \operatorname{Ch} ny)\sin nz\right].$$

[2]) Tą graniczną wysokość otrzymują zwykle rozpatrując ściskanie linjowego elementu ds.

Nieskończenie małe przyrosty po odkształceniu będą:

$$\delta\,ds = \delta\rho\,d\varphi + \rho\,.\,\delta\,d\varphi$$

5. Zakładając $\psi_{2i+2}(u) = u$ oraz

$$T_2 = y \Sigma A_m \operatorname{Ch}(mx) \cos(mz),$$
$$T_1 = x \Sigma B_n \operatorname{Ch}(ny) \cos(nz).$$

Otrzymamy:

$$N_1 = y \Sigma A_m \operatorname{Sh}(mx) \sin(mz),$$
$$N_2 = x \Sigma B_m \operatorname{Sh}(ny) \sin(nz),$$
$$N_3 = -[y \Sigma A_m \operatorname{Sh}(mx) \sin(mz) + x \Sigma B_n \operatorname{Sh}(ny) \sin(nz)]$$
$$\Sigma N_i = 0.$$

Wszystkie wektory są równe zeru; momenty są różne od zera.

Określając przesunięcia otrzymamy:

$$u = \frac{1}{2\mu}\left[y \sum \frac{A_m}{m} \operatorname{Ch}(mx) \sin(nz) - \sum \frac{B_n}{n^2} \operatorname{Sh}(ny) \sin(nz)\right],$$

$$v = \frac{1}{2\mu}\left[x \sum \frac{B_n}{n} \operatorname{Ch}(ny) \sin(nz) - \sum \frac{A_m}{m^2} \operatorname{Sh}(mx) \sin(mz)\right],$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\left[y \sum \frac{A_m}{m} \operatorname{Sh}(mx) \cos(mz) + x \sum \frac{B_n}{n} \operatorname{Sh}(ny) \cos(nz)\right].$$

$$2w_x \neq 0;\ 2w_y \neq 0;\ 2w_z \neq 0.$$

Pozostaje zbadać biharmoniczne wzory w założeniu, że φ_i są różne od zera i ogólne wzory t. j.

wzory $\qquad T_i = \psi_{2i+1} F(\alpha, \beta) + \psi_{2i+2} f(\alpha, \beta).$

Badanie tych wzorów podamy w części II i III.

---

dzieląc przez ρds otrzymamy:

$$\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\delta d\varphi}{dx} \cos\varphi - \frac{\alpha_s}{\rho}.$$

W przypadku ściskania $\alpha_s < 0$. Jeżeli początkowa krzywizna była równa zeru, to:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}.$$

Całkowanie tego równania, patrz „Tr. de Fonctions elliptiques" Halphen T. II.

W ogólnym podanym wyżej, rozwiązaniu równań (b) wzory na T_i i N_i składają się z części biharmonicznej i harmonicznej. W naszych wzorach każde T_i i N_i ma analogiczną formę. Taka forma wzorów jest charakterystyczną dla ciała izotropowego.

Myśl przewodnia autora była bardzo prosta.

Równania równowagi w formie (a) wyrażają równowagę w danym punkcie dowolnego środowiska ciągłego. Żeby to środowisko było izotropowe, powinien być spełniony warunek $\Delta(N_1 + N_2 + N_3) = 0$. Ten warunek będzie spełniony jeśli T_i będą związane równaniem (B). Nadając T_i formę składającą się z części harmonicznej i biharmonicznej, uczynimy zadość równaniom (a) i (B), przy dowolnych funkcjach ψ_i. Drugą charakterystyką ciała izotropowego jest to, że każde T_i jest biharmoniczną funkcją. Ten warunek określa dowolne funkcje ψ_i [1])

Powyższe rozważania doprowadzają do następujących twierdzeń.

1. Operując biharmoniczną częścią wzorów na T_i w założeniu $\varphi_i = 0$, możemy dowolne dwa T_i przyjąć równe zeru, co doprowadza w rezultacie do zadania płaskiego. Przy funkcjach ψ_{2i+1} równych jedności momenty skręcające dookoła dowolnej osi spółrzędnych są równe zeru. Przy funkcjach ψ_{2i+1} równych odpowiednio z, y, x rzuty wektorów wszystkich sił są równe zeru, czyli belka podlega działaniu momentów sił zewnętrznych.

2. Niemożna założyć, że dowolne $T_i = 0$ (przy $\varphi_i = 0$) nie nakładając żadnych warunków na normalne naprężenia. Przyjmując jedno z T_i równe zeru, musimy, podobnie jak to zrobił St. Venant, o odpowiednich dwu normalnych naprężeniach również założyć, że są równe zeru, lecz wówczas otrzymujemy rozwiązanie w funkcjach harmonicznych.

3. Harmoniczna część wzorów na T_i charakteryzuje deformacje poprzeczne, Przy takiej deformacji można o dowolnem T_i założyć, że jest równe zeru.

Wszystkie zadania poprzecznej i podłużnej deformacji zawarte są w harmonicznej części wzorów.

---

[1]) Stosowanie tych równań poza granicami sprężystości bez uwzględnienia fizycznych charakterystyk tego stanu będzie pozbawione nie tylko ścisłości, lecz i sensu. (Przykład 2).

CZĘŚĆ II.

Badanie biharmonicznych wyrazów w założeniu, że dowolne funkcje φ_i są różne od zera.

W poprzednich przykładach zakładaliśmy, że dowolne funkcje φ_1, φ_2 i φ_3 są równe zeru. Jeśli funkcje te są różne od zera i każda z nich czyni zadość równaniu $\Delta\varphi_i = 0$, to otrzymamy inne wnioski.

1. Załóżmy np.

$$T_3 = \Sigma\{(A_m + B_m y)\, e^{my} + (C_m + D_m y)\, e^{-my}\} \cos(mx),$$

$$T_2 = \Sigma\{(E_n + F_n x)\, e^{nx} + (K_n + L_n x)\, e^{-nx}\} \cos(nz),$$

$$T_1 = \Sigma\{(M_p + N_p y)\, e^{py} + (Q_p + R_p p)\, e^{-py}\} \cos(pz).$$

Odpowiednie N_i będą:

$$N_1 = -\sum\left\{\left(A_m + \frac{B_m}{m} + B_m y\right)e^{my} - \right.$$

$$\left. - \left(C_m - \frac{D_m}{m} + D_m y\right)e^{-my}\right\} \sin(mx) +$$

$$+ \sum\left\{\left(E_n - \frac{F_n}{n} + F_x x\right)e^{nx} - \right.$$

$$\left. - \left(K_n + \frac{L_n}{n} + L_n x\right)e^{-nx}\right\} \sin(nz) + \varphi_1(y, z),$$

$$N_2 = \sum \left\{ \left(A_m - \frac{B_m}{m} + B_m y \right) e^{my} - \right.$$

$$\left. - \left(C_m + \frac{D_m}{m} + D_m y \right) e^{-my} \right\} \sin (nx) +$$

$$+ \sum \left\{ \left(M_p - \frac{N_p}{p} + N_p y \right) e^{py} - \right.$$

$$\left. - \left(Q_p + \frac{R_p}{p} + R_p y \right) e^{-py} \right\} \sin (pz) + \varphi_2 (x, z),$$

$$N_3 = - \sum \left\{ \left(E_n + \frac{F_n}{n} + F_n x \right) e^{nx} - \right.$$

$$\left. - \left(K_n - \frac{L_n}{n} + L_n x \right) e^{-nx} \right\} \sin (nz) +$$

$$- \sum \left\{ \left(M_p + \frac{N_p}{p} + N_p y \right) e^{py} - \right.$$

$$\left. - \left(Q_p - \frac{R_p}{p} + R_p y \right) e^{-py} \right\} \sin (pz) + \varphi_3 (x, y).$$

Przestrzenna rozszerzalność

$$\theta = - \frac{2}{3\lambda + 2\mu} \left[\sum \left(\frac{B_m}{m} e^{my} + \frac{D_m}{m} e^{-my} \right) \sin (mx) + \right.$$

$$+ \sum \left(\frac{F_n}{n} e^{nx} + \frac{L_n}{n} e^{-nx} \right) \mathrm{Sn} (nz) +$$

$$+ \sum \left(\frac{N_p}{p} e^{py} + \frac{R_p}{p} e^{-py} \right) \sin (pz) -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left\{ \varphi_1 (y, z) + \varphi_2 (x, z) + \varphi_3 (x, y) \right\} \right].$$

Przesunięcia otrzymamy jako funkcje φ_1, dla określenia których mamy trzy warunki, a mianowicie dane zgóry funkcje T_i.

Dowolna funkcja φ_i zależy tylko od T_i i wyraża się wzorem

$$\varphi_1(\alpha,\beta) = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left\{\int\frac{\partial T_i}{\partial\alpha}d\beta + \int\frac{\partial T_i}{\partial\beta}d\alpha\right\}.\ ^{1)}$$

Jeżeli T_i jest funkcją harmoniczną, to

$$\int\frac{\partial T_i}{\partial\alpha}d\beta + \int\frac{\partial T_i}{\partial\beta}d\alpha = 0.$$

Ponieważ φ_i jest funkcją harmoniczną, to

$$\int\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}d\beta + \int\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}d\alpha = 0.$$

W naszym wypadku

$$\varphi_1(y,x) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\left\{\frac{1}{p}\left(N_p e^{py} + R_p e^{-py}\right)\operatorname{Sin}(pz)\right\},$$

$$\varphi_2(x,z) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\left\{\frac{1}{n}\left(F_n e^{nx} + L_n e^{-nx}\right)\sin(nz)\right\}$$

$$\varphi_3(x,y) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\left\{\frac{1}{m}\left(B_m e^{my} + D^m e^{-my}\right)\sin(mx)\right\},$$

[1]) Określenie dowolnych funkcyj φ_i:

Mamy:

$$\Theta = -\frac{1}{2\lambda+2\mu}\cdot\left|\begin{matrix}\int\frac{\partial T_3}{\partial y}dx + \int\frac{\partial T_2}{\partial z}dx\\ \int\frac{\partial T_3}{\partial x}dy + \int\frac{\partial T_1}{\partial z}dy\\ \int\frac{\partial T_2}{\partial x}dz + \int\frac{\partial T_1}{\partial y}dz\end{matrix}\right| + \frac{1}{3\lambda+2\mu}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)$$

Rzuty przesunięć:

$$u = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{-2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\left\{\int\int\frac{\partial T_3}{\partial y}dx^2 + \int\int\frac{\partial T_2}{\partial z}dx^2\right\} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}x\cdot\varphi_1 + \right.$$

$$+\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left|\begin{matrix}\int T_3\,dy + \int\int\frac{\partial T_1}{\partial z}dy\,dx\\ +\int T_2\,dz + \int\int\frac{\partial T_1}{\partial y}dz\,dx\end{matrix}\right| +$$

$$\theta = -\frac{1}{\lambda+\mu}\left[\sum \frac{1}{m}\left(B_m e^{my} + D_m e^{-my}\right)\sin(mx) + \right.$$

$$+ \sum \frac{1}{n}\left(F_n e^{nx} + L_n e^{-nx}\right)\sin(nz) +$$

$$\left. + \sum \frac{1}{p}\left(N_p e^{py} + R_p e^{-py}\right)\sin(pz)\right].$$

Przesunięcia będą:

$$u = \frac{1}{2\mu}\left[\sum\left\{\frac{1}{m}\left(A_m + \frac{B_m}{m} + B_m y\right)e^{my} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{m}\left(C_m - \frac{D_m}{m} + D_m y\right)e^{-my}\right\}\cos(mx) +$$

$$+ \sum \frac{1}{n}\left\{\left(E_n - \frac{2F_n}{n} + F_n x\right)e^{nx} + \right.$$

$$\left. + \left(K_n + \frac{2L_n}{n} + L_n x\right)e^{-nx}\right\}\sin(nz) +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left\{-\sum \frac{1}{m^2}\left(B_m e^{my} + D_m e^{-my}\right)\cos(mx) + \right.$$

$$\left.\left. + \sum \frac{1}{n^2}\left(F_n e^{nx} - L_n e^{-nx}\right)\sin(nz)\right\}\right],$$

$$\left. + \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left\{\int \varphi_2\, dx + \int \varphi_3\, dx\right\}\right];$$

$$v = \frac{1}{2\mu}\left[-\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\left\{\int\int\frac{\partial T_3}{\partial x}dy^2 + \int\int\frac{\partial T_1}{\partial z}dy^2\right\} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}y\cdot\varphi_2 + \right.$$

$$+ \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left|\begin{matrix} \int T_3\, dx + \int\int\frac{\partial T_2}{\partial z}dx\, dy \\ + \int T_1\, dz + \int\int\frac{\partial T_2}{\partial x}dz\, dy \end{matrix}\right| +$$

$$\left. + \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left\{\int \varphi_1\, dy + \int \varphi_3\, dy\right\}\right];$$

$$v=\frac{1}{2\mu}\Bigg[\sum\frac{1}{m}\Bigg\{\left(A_m-\frac{2B_m}{m}+B_m y\right)e^{my}+$$

$$+\left(C_m+\frac{2D_m}{m}+D_m y\right)e^{-my}\Bigg\}\sin(mx)+$$

$$+\sum\frac{1}{p}\Bigg\{\left(M_p-\frac{2N_p}{p}+N_p y\right)e^{py}+$$

$$+\left(Q_p+\frac{2R_p}{p}+R_p y\right)e^{-py}\Bigg\}\sin(pz)+$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Bigg\{\sum\frac{1}{m^2}(B_m e^{my}-D_m e^{-my})\sin(mx)+$$

$$+\sum\frac{1}{p^2}(N_p e^{py}-R_p e^{-py})\sin(pz)\Bigg\}\Bigg].$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\mu}\Bigg[-\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\left\{\int\int\frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2}dx^2+\int\int\frac{\partial^2 T_2}{\partial z\partial y}dx^2\right\}+$$

$$+\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}x\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left|\begin{matrix}T_3+\int\frac{\partial T_1}{\partial z}dx\\ +\int\frac{\partial T_2}{\partial y}dz+\int\int\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}dx\,dz\end{matrix}\right|+$$

$$+\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\cdot\int\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}dx\Bigg];$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2\mu}\Bigg[-\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\left\{\int\int\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}dy^2+\int\int\frac{\partial^2 T_1}{\partial z\partial x}dy^2\right\}+$$

$$+\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cdot y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left|\begin{matrix}T_3+\int\frac{\partial T_2}{\partial z}dy\\ +\int\frac{\partial T_1}{\partial x}dz+\int\int\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}dz\,dy\end{matrix}\right|+$$

$$+\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\int\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}dy\Bigg];$$

Ponieważ

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=T_3,\ \text{a}$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\Bigg[\sum \frac{1}{n}\Big\{\Big(E_n + \frac{F_n}{n} + F_n x\Big)e^{nx} -$$

$$-\Big(K_n - \frac{L_n}{n} + L_n x\Big)e^{-nx}\Big\}\cos(nz) +$$

$$+\sum \frac{1}{p}\Big\{\Big(M_p + \frac{N_p}{p} + N_p y\Big)e^{py} -$$

$$-\Big(Q_p - \frac{R_p}{p} + R_p y\Big)e^{-py}\Big\}\cos(pz) +$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big\{-\sum \frac{1}{n^2}\Big(F_n e^{nx} + L_n e^{-nx}\Big)\cos(nz) -$$

$$-\sum \frac{1}{p^2}\Big(N_p e^{py} + R_p e^{-py}\Big)\cos(pz)\Big\}\Bigg].$$

$$\frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu}\left\{2T_3 + \int\!\!\int \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}dy^2 + \int\!\!\int \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2}dx^2\right\} = 0; \quad \left(\underset{xy}{\Delta} T_3 = 0\right)$$

$$T_2 = F_{xz};\ T_1 = F_{yz}$$

$$\int\!\!\int \frac{\partial^2 T_2}{\partial z \partial y}dx^2 = 0 = \int\!\!\int \frac{\partial^2 T_1}{\partial z \partial x}\partial y^2$$

$$\int \frac{\partial T_2}{\partial y}dz = 0 = \int \frac{\partial T_1}{\partial x}dz$$

$$\int \frac{\partial T_1}{\partial z}dx = x\frac{\partial T_1}{\partial z};$$

$$\int\!\!\int \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}dz\,dx = x\int \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}dz,$$

więc

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left\{\int \frac{\partial T_1}{\partial z}dy + \int \frac{\partial T_1}{\partial y}dz\right\}$$

W podobny sposób określimy φ_2 i φ_3:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left\{\frac{\partial T_1}{\partial z} + \int \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}dz\right\}.$$

Normalne naprężenia są funkcjami $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=2\eta$ (η — liczba Poisson'a).

Wszystkie obroty są różne od zera.

Przyjmując różne warunki graniczne otrzymamy rozwiązanie szeregu zadań. Takie badania nie przedstawiają żadnych trudności[1]) i nie w chodzą w mój program. Dowolne T_i możemy przyjąć równe zeru, przyczem φ_i będzie również równe zeru.

2. Załóżmy np.

$$T_3=\sum\left\{(A_m+B_m y)e^{my}+(C_m+D_m y)\,e^{-my}\right\}\cos(mx),$$

$$T_2=0,$$

$$T_1=\sum\left\{(K_n+L_n y)\,e^{ny}+(M_n+N_n y)\,e^{-ny}\right\}\cos(nz).$$

Normalne naprężenie będą:

$$N_1=-\sum\left\{\left(A_m+\frac{B_m}{m}B_m y\right)e^{my}-\right.$$

$$\left.-\left(C_m-\frac{D_m}{m}+D_m y\right)e^{-my}\right\}\sin(mx)+\varphi_1(y,z),$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y\partial z}=-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left\{\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}\right\},$$

w razie

$$\underset{zy}{\Delta}T_1=0,\ \varphi_1=0,$$

a zatem

$$\int\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}dx+\int\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}dy=0.$$

[1]) Patrz mój kurs Teorji Sprężystości 1913 (wyd. Studentów Politechniki Petersburskiej).

$$N_2 = \sum \left\{ \left(A_m - \frac{B_m}{m} + B_m y \right) e^{my} - \right.$$

$$\left. - \left(C_m + \frac{D_m}{m} + D_m y \right) e^{-my} \right\} \sin(mx) +$$

$$+ \sum \left\{ \left(K_n - \frac{L_n}{n} + L_n y \right) e^{ny} - \right.$$

$$\left. - \left(M_n - \frac{N_n}{n} + N_n y \right) e^{-ny} \right\} \sin(nz) + \varphi_2(x, z),$$

$$N_3 = - \sum \left\{ \left(K_n + \frac{L_n}{n} + L_n y \right) e^{ny} - \right.$$

$$\left. - \left(M_n - \frac{N_n}{n} + N_n y \right) e^{-ny} \right\} \sin(nz) + \varphi_3(x, y).$$

Z ogólnych wzorów otrzymamy odpowiednie φ_i

$$\varphi_1(y, z) = - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \sum \left(\frac{L_n}{n} e^{ny} + \frac{N_n}{n} e^{-ny} \right) \sin(nz),$$

$$\varphi_2(x, z) = 0,$$

$$\varphi_3(x, y) = - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \sum \left(\frac{B_m}{m} e^{my} + \frac{C_m}{m} e^{-my} \right) \sin(mx).$$

$$\theta = - \frac{1}{\lambda + \mu} \sum \left(\frac{B_m}{m} e^{my} + \frac{D_m}{m} e^{-my} \right) \sin(mx) -$$

$$- \frac{1}{\lambda + \mu} \sum \left(\frac{L_n}{n} e^{ny} + \frac{N_n}{n} e^{-ny} \right) \sin(nz).$$

Przesunięcia będą:

$$u = \frac{1}{2\mu} \left[\sum \frac{1}{m} \left(A_m + \frac{B_m}{m} + B_m y \right) e^{my} - \right.$$

$$\left. - \left(C_m - \frac{D_m}{m} + D_m y \right) e^{-my} \right\} \cos(mx) -$$

$$\left. - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \sum \left(\frac{B_m}{m^2} e^{my} + \frac{D_m}{m^2} e^{-my} \right) \cos(mx) \right].$$

$$v = \frac{1}{2\mu}\left[\sum\left\{\frac{1}{m}\left(A_m - \frac{2B_m}{m} + B_m y\right)e^{my} + \right.\right.$$

$$+\left(C_m + \frac{2D_m}{m} + D_m y\right) e^{-my}\Big\} \sin(mx) +$$

$$+\sum \frac{1}{n}\left\{\left(K_n - \frac{2L_n}{n} + L_n y\right)e^{ny} + \right.$$

$$+\left(M_n + \frac{2N_n}{n} + N_n y\right) e^{-ny}\Big\} \sin(nz) +$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\left(\frac{B_m}{m^2}e^{my} - \frac{D_m}{m^2}e^{-my}\right)\sin(mx) +$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{n^2}\left(L_n e^{ny} - N_n e^{-ny}\right)\sin(nz)\right],$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{n}\left\{\left(K_n + \frac{L_n}{n} + L_n y\right)e^{ny} - \right.\right.$$

$$-\left(M_n - \frac{N_n}{n} + N_n y\right)e^{-ny}\Big\}\cos(nz) -$$

$$\left.-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{n^2}\left(L_n e^{ny} + N_n e^{-ny}\right)\cos(nz)\right].$$

w nie zależy od x, u nie zależy od z, a zatem $T_2 = 0$ i $2w_y = 0$.

Załóżmy:

$$T_3 = T_1 = 0 \text{ przy } y = \pm h$$

$$T_2 = 0 \quad \text{„} \quad y = -h$$

$$m = \frac{\pi l}{2b}; \quad n = \frac{\pi l}{2l};$$

te warunki pozwolą nam określić A_m, B_m i C_m w funkcji D_m; K_n, L_n i M_n w funkcji N_n. Pozostałe współczynniki D_m i N_n określimy, rozwijając dane dowolnie funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych w szeregi.[1])

[1]) Ta kwestja będzie omówiona w części III.

Belka jest zgięta naprężeniami $\underset{y=h}{N_3}$ i ściskana naprężeniami $N_1 = \varphi_1$ i $N_3 = \varphi_3$.

Wektor naprężeń $\underset{y=h}{N_2}$ jest zrównoważony sumą wektorów

$$\int\int T_1\, dx\, dy \text{ i } \int\int T_3\, dy\, dz\,.$$

Belka jest podparta w czterech punktach.

3. Załóżmy jeszcze

$$T_3 = 0\,,$$

$$T_2 = \Sigma \{(A_m + B_m x)\, e^{mx} + (C_m + D_m x)\, e^{-mx}\} \cos(mz)\,,$$

$$T_1 = \Sigma \{(K_n + L_n y)\, e^{ny} + (M_n + N_n y)\, e^{-ny}\} \cos(nz)\,.$$

Otrzymamy:

$$N_1 = \sum \left\{\left(A_m - \frac{B_m}{m} + B_m x\right) e^{mx} - \right.$$
$$\left. - \left(C_m + \frac{D_m}{m} + D_m x\right) e^{-mx}\right\} \sin(mz) + \varphi_1(y, z)\,,$$

$$N_2 = \sum \left\{\left(K_n - \frac{L_n}{n} + L_n y\right) e^{ny} - \right.$$
$$\left. - \left(M_n + \frac{N_n}{n} + N_n y\right) e^{-ny}\right\} \sin(nz) + \varphi_2(x, z)\,,$$

$$N_3 = -\sum \left\{\left(A_m + \frac{B_m}{m} + B_m x\right) e^{mx} - \right.$$
$$\left. - \left(C_m - \frac{D_m}{m} + D_m x\right) e^{-mx}\right\} \sin(mz) -$$
$$- \sum \left\{\left(K_n + \frac{L_n}{n} + L_n y\right) e^{ny} - \right.$$
$$\left. - \left(M_n - \frac{N_n}{n} + N_n y\right) e^{-ny}\right\} \sin(nz)\,.$$

Z ogólnych wzorów otrzymamy:

$$\varphi_1(y,z) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{n}(L_n e^{ny} + N_n e^{-ny})\sin(nz)$$

$$\varphi_2(x,z) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{m}(B_m e^{mx} + D_m e^{-mx})\sin(mz)\,,$$

$$\varphi_3(x,y) = 0\,.$$

$$\begin{aligned}\theta = -\frac{1}{3\lambda+2\mu}\Big[2\sum\left(\frac{B_m}{m}e^{mx}+\frac{D_m}{m}e^{-mx}\right)\sin(mz) + \\ +2\sum\left\{\left(\frac{L_n}{n}e^{ny}+\frac{N_n}{n}e^{-ny}\right)\right\}\sin(nz) + \\ +\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{m}(B_m e^{mx} + D_m e^{-mx})\sin(mx) + \\ +\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{n}(L_n e^{ny} + N_n e^{-ny})\sin(nz)\Big] = \\ = -\frac{1}{\lambda+\mu}\Big[\sum\frac{1}{m}(B_m e^{mx} + D_m e^{-mx})\sin(mz) + \\ +\sum\frac{1}{n}(L_n e^{ny} + N_n e^{-ny})\sin(nz)\Big].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u = \frac{1}{2\mu}\Big[\sum\frac{1}{m}\left\{\left(A_m - \frac{2B_m}{m} + B_m x\right)e^{mx} + \right. \\ \left. +\left(C_m + \frac{2D_m}{m} + D_m x\right)e^{-mx}\right\}\sin(mz) + \\ +\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{m^2}(B_m e^{mx} - D_m e^{-mx})\sin(mz)\Big].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v = \frac{1}{2\mu}\Big[\sum\frac{1}{n}\left\{\left(K_n - \frac{2L_n}{n} + L_n\,.\,y\right)e^{ny} + \right. \\ \left. +\left(M_m + \frac{2N_n}{n} + N_n y\right)e^{-ny}\right\}\sin(nz) + \\ +\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{n^2}(L_n e^{ny} - N_n e^{-ny})\sin(nz)\Big|\end{aligned}$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\Bigg[\sum \frac{1}{m}\Bigg\{\left(A_m + \frac{B_m}{m} + B_m x\right) e^{mx} -$$

$$-\left(C_m - \frac{D_m}{m} + D_m x\right) e^{-mx}\Bigg\} \cos(mz) +$$

$$+\sum \frac{1}{n}\Bigg\{\left(K_n + \frac{L_n}{n} + L_n y\right) e^{ny} -$$

$$-\left(M_n - \frac{N_n}{n} + N_n y\right) e^{-ny}\Bigg\} \cos(nz) -$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Bigg\{\sum \frac{1}{m^2}(B_m e^{mx} + D_m e^{-mx}) \cos(mz) +$$

$$+\sum \frac{1}{n^2}(L_n e^{ny} + N_n e^{-ny}) \cos(nz)\Bigg\}\Bigg]$$

u nie zależy od y, v nie zależy od x, a zatem

$$T_3 = 0, \quad 2w_z = 0.$$

Założymy następujące warunki graniczne:

$$T_2 = 0 \quad \text{przy } x = 0 \text{ i } x = 2b$$

$$T_1 = 0 \quad \text{przy } y = \pm h$$

$$N_1 = 0 \quad \text{przy } x = 0$$

$$N_2 = 0 \quad \text{przy } y = -h.$$

Belka jest zgięta w dwóch płaszczyznach.

Przesunięcia u przy danem x są funkcją tylko z, przesunięcia v przy danem y są także funkcją tylko z.

Określenie współczynników D_n i N_n i w danym wypadku sprowadza się do zadania o rozwijaniu dowolnych funkcyj dwóch zmiennych rzeczywistych na szeregi.

Założenie, że dowolne funkcje są równe zeru sprawia, iż biharmoniczne funkcje stają się harmonicznemi i obydwa zadania $T_2 = 0$ i $T_3 = 0$ sprowadzają się do zadań wyżej rozpatrzonych.

Zakładając $T_1 = 0$, otrzymamy bezpośrednio z ogólnych wzorów odpowiednie wzory dla danego wypadku.

PRACE AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH W WARSZAWIE

Nr.	Tom	Rok		Cena
1	I	1925	Broniewski Witold. Opór elektryczny i rozszerzalność metali. Warszawa. 26 str.	3.00
2	I	1925	Matakiewicz Maksymiljan. Ogólna formuła na średnią chyżość przepływu w łożyskach rzecznych i kanałowych. Lwów. 98 str.	18.00
3	I	1926	Huber Maksymiljan. Kryterja stałości równowagi i ich stosunek do statyki układów sprężystych. Lwów. 57 str.	4.00
4	I	1928	Weigel Kasper. Nowa metoda wyrównywania tryangulacyjnych sieci wieńcowych. Lwów. 22 str.	2.00
5	I	1928	Thullie Maksymiljan i Chmielowiec Alfons. Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych. Lwów. 64 str.	6.50
6	I	1928	Weigel Kasper. Badanie formuł empirycznych przy pomocy szeregów Taylora. Lwów. 16 str.	1.50
1	II	1929	Żorawski Kazimierz. Cztery przyczynki z zakresu kinematyki ciał sztywnych. Wazszawa. 119 str.	8.50

WYDAWNICTWA AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH

Rok		
1925	Mierzejewski Henryk. Polskie placówki badawcze. Warszawa 8°. 135 + IX str.	5.50
1927	Mierzejewski Henryk. Podstawy mechaniki ciał plastycznych. Warszawa 8°. 108 str.	8.50
1927	Grabowski Lucjan. Radiotelegraphische Bestimmung der geographischen Lange von Lemberg. Lwów 4°. 45 str.	8.00
1928	Witoszyński Czesław. Travaux de l'Institut Aerodynamique de Varsovie. 4°. 72 str.	6.00
1928	Grabowski Lucjan. O odwzorowaniach płaskich wiernokątnych elipsoidy obrotowej w których pewien wybrany południk odwzorowuje się jako linja prosta. Lwów. 4°. 8 str.	2.00
1928	Groszkowski Janusz. Metoda kompensacyjna kontroli stałości fali. Warszawa. 8°. 62 str. (Rozprawa doktorska).	5.00
1928	Roliński Józef. Badania nad asocjacją w ciekłych djelektrykach. Warszawa. 8°. 60 str. (Rozprawa doktorska).	4.50
1928	Krupkowski Aleksander. Badania nad stopami niklu z miedzią. Warszawa. 8°. 88 str. (Rozprawa doktorska).	7.50
1928	Burzyński Włodzimierz. Studjum nad hypotezami wytężenia. Lwów. 8°. 191 str. (Rozprawa doktorska).	9.00
1929	Grabowski Lucjan. O konwergencji południkowej w odwzorowaniu Roussilhe'owskiem elipsoidy. Lwów 4°. 28 str.	4.50

Drukarnia W. Nowakowskiego. Polna 70. Tel. 504-12.