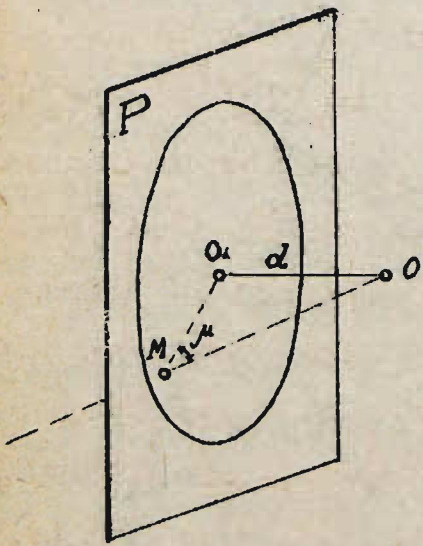
C Z Ę Ś Ć III.

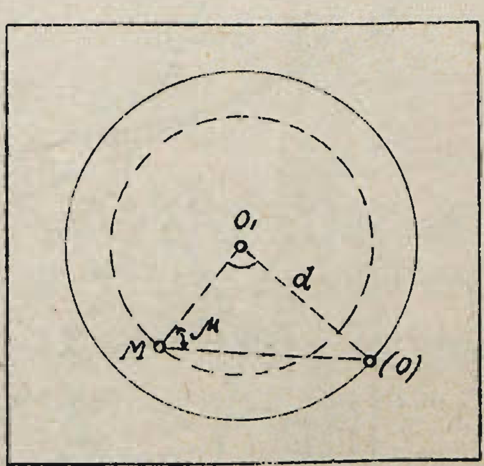
P E R S P E K T Y W A.

ROZDZIAŁ VIII. PROSTA, PUNKT I PŁASZCZYZNA.

§81. Punkt główny i koło oddalenia. Niechaj będzie płaszczyzna rzutów P i punkt O na niej nie leżący zwany środkiem rzutów. /Rys.175/. Płaszczyznę rzutów P uczyńmy płaszczyzną rysunku, aby położenie środ-



Rys. 175



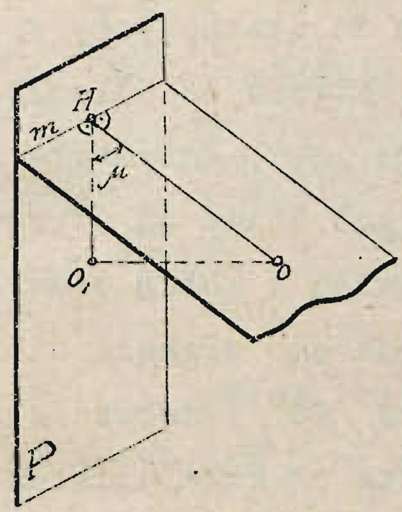
Rys. 176.

ka rzutów O było względem tej płaszczyzny wyznaczone, niechaj będzie dany jego rzut prostokątny O_1 na tę płaszczyznę oraz odległość d punktu O od niej.

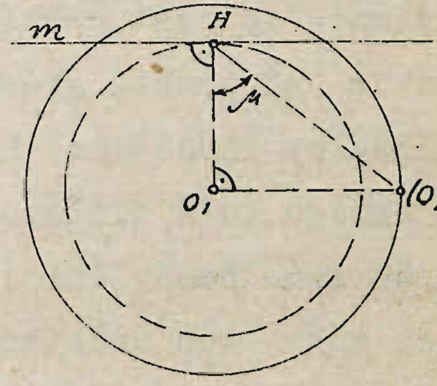
Obierzmy zatem /Rys. 176/ na płaszczyźnie rysunku punkt O_1 zwany punktem głównym i z tego punktu jako środka, promieniem równym odcinkowi d /oddalenie/ zakreślmy koło, które nazywać będziemy kołem oddalenia. Gdy dane jest koło oddalenia, to wyznaczymy środek rzutów O, wystawiając w środku O_1 koła prostopadłą do jego płaszczyzny i odmierzając na niej w kierunku oka promień koła oddalenia d.

§82. Promienie i płaszczyzny rzucające. Każda prosta wychodząca ze środka rzutów O nazywa się promieniem rzucającym. Punkt M /Rys. 175 i 176/, w którym promień rzucający jakikolwiek przebija płaszczyznę rzutów P, nazywa się śladem promienia rzucającego. Prosta O_1M jest rzutem prostokątnym promienia rzucającego OM, kąt $O_1MO = \mu$ jest zatem nachyleniem promienia rzucającego do płaszczyzny rzutów. Jeżeli dane jest koło oddalenia i ślad promienia rzucającego, to wyznaczymy nachylenie jego μ, wykreślając prawdziwy kształt i wielkość trójkąta prostokątnego O_1MO. Możemy sobie przytem wyobrazić, że trójkąt ten przez obrót dokoła O_1M przewrócony zostanie na płaszczyznę rzutów. Aby go wykreślić w tym położeniu wystawiamy w punkcie O_1 promień koła oddalenia prostopadły do O_1M i łączymy jego koniec (0) z punktem M , kąt $O_1 M (0)$ jest nachyleniem μ promienia O M do płaszczyzny rzutów P . Wszystkie promienie rzucające, których ślady M znajdują się na okręgu koła spółśrodkowego z kołem oddalenia, mają to samo nachylenie μ do płaszczyzny rzutów, nachylenie to należy bowiem, jak to wynika z powyższego wykreślenia, jedynie od odległości punktu M od punktu głównego O_1 . Jest ono większe od 45^0 , gdy punkt M znajduje się wewnątrz koła oddalenia, równe 45^0 , gdy ten punkt znajduje się na okręgu koła oddalenia, mniejsze od 45^0 , gdy punkt M leży nazewnątrz koła oddalenia.

Każda płaszczyzna przechodząca przez środek rzutów O nazywa się <u>płaszczyzną rzucającą.</u> Prosta m , według której płaszczyzna rzucająca przecina płaszczyznę rzutów P , nazywa się <u>śladem płaszczyzny</u> rzucającej /Rys.177 i 178/. Z punktu głównego O_1 spuśćmy prostopadłą O_1H na m i połączmy spodek jej H ze środkiem rzutów O , na zasadzie twierdzenia o trzech prostopadłych prosta O H jest prostopadłą do śladu m , jest to zatem linja największego spadku płaszczyzny rzucającej, a kąt $O_1 H O \cong \mu$ jest kątem linjowym kąta dwusiecznego między płaszczyzną rzutów i płaszczyzną rzucającą. Kąt ten wykreślimy z łatwością kreśląc prawdziwy kształt i

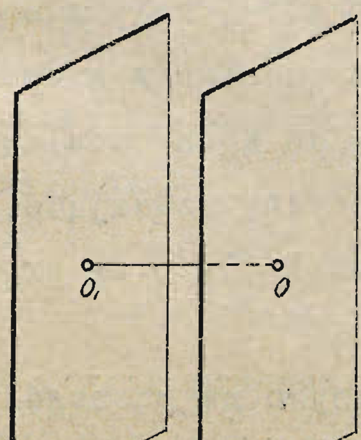


Rys. 177



Rys. 178

wielkość trójkąta prostokątnego O_1 H O . Możemy sobie przytem wyobrazić, że trójkąt ten, obracając się dokoła O_1 H , przewrócony zostanie na płaszczyznę rzutów. Przez punkt główny O_1 prowadzimy zatem dwie proste: jedna O_1 H



Rys. 179

prostopadła, druga O_1 (O) równoległa do śladu m, poczem łączymy spodek prostopadłej H z końcem /O/ promienia leżącego na równoległej, kąt O_1 H (O) = μ jest szukanym kątem dwuściennym t.j. nachyleniem płaszczyzny rzucającej 0-m do płaszczyzny rzutów P. Nachylenie to jest zależne jedynie od odległości śladu m od punktu głównego O_1 ; wszystkie zatem płaszczyzny rzucające, których ślady są styczne do tego samego koła spółśrodkowego z kołem oddalenia, mają to samo nachylenie. Jest ono większe od 45^o , równe 45^o , lub mniejsze od 45^o , zależnie od tego, czy to koło jest mniejsze od koła oddalenia, przystaje do niego lub też jest od niego większe. Inaczej mówiąc : płaszczyzna rzucająca jest do płaszczyzny rzutów nachylona pod kątem większym od 45^o, równym 45^o lub mniejszym od 45^o , zależnie od tego, czy jej ślad przecina koło oddalenia w dwóch punktach różnych, jest styczny do koła oddalenia lub tego koła nie przecina. Płaszczyzny rzucające, których ślady przechodzą przez punkt O_1 , są prostopadłe do płaszczyzny rzutów P .

Z pośród płaszczyzn rzucających na szczególną uwagę zasługuje płaszczyzna R /Rys.179/ równoległa do płaszczyzny rzutów P : jest to tak zwana <u>płaszczyzna znikania,</u> jej ślad r jest prostą niewłaściwą płaszczyzny P .

<u>§83. Rzut środkowy punktu i prostej.</u> Niech będzie

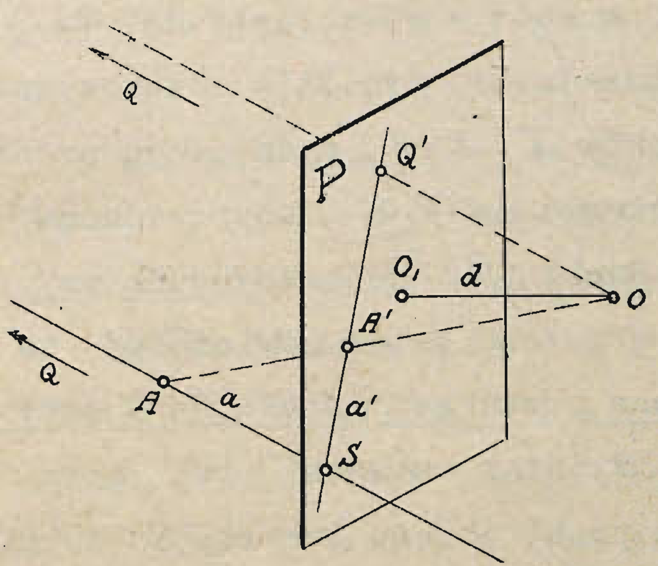
jakikolwiek punkt przestrzeni A , różny od punktu O . Ślad A' promienia rzucającego O A nazywa się rzutem środkowym punktu A . Stąd wynika, że każdy punkt przestrzeni A /z wyjątkiem środka rzutów O / wyznacza swój rzut środkowy A' , natomiast rzut środkowy A' punktu A nie wyznacza tego punktu, wszystkie bowiem punkty promienia rzucającego O A' mają ten sam rzut środkowy A' .

Niech będzie jakakolwiek prosta przestrzeni a , nie przechodząca przez środek rzutów O . Ślad a' płaszczyzny rzucającej Oa nazywa się rzutem środkowym prostej a . Jeżeli prosta przechodzi przez środek rzutów, t.j. jeżeli jest prostą rzucającą, to rzutem jej jest punkt, a mianowicie ślad tej prostej rzucającej. W każdym przypadku prosta wyznacza swój rzut środkowy, natomiast rzut środkowy a' prostej a nie wyznacza wogóle tej prostej, wszystkie bowiem proste płaszczyzny rzucającej O-a' mają ten sam rzut środkowy a' . Wyjątek stanowią jedynie proste, których rzut jest punktem, taki rzut wyznacza bowiem prosta rzucająca, której jest śladem.

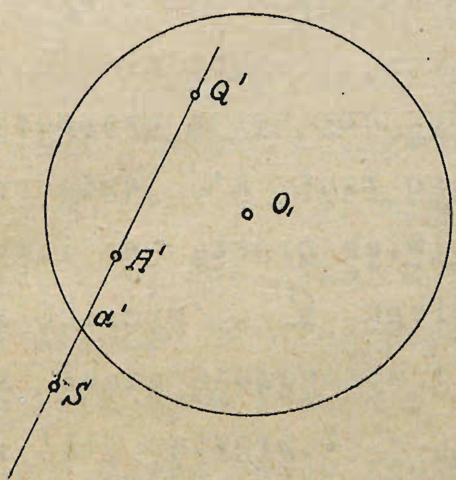
Jeżeli punkt A leży na prostej a , to rzut A' tego punktu leży na rzucie a' tej prostej. Ale nie nawzajem, bo jeżeli rzut punktu A leży na rzucie prostej a, to można stąd wnosić tylko, że punkt A leży w płaszczyźnie rzucającej prostą a.

Rzutem każdej prostej, leżącej w płaszczyźnie znikania R, jest prosta niewłaściwa r płaszczyzny rzutów P; rzutem każdego punktu leżącego w płaszczyźnie znikania, jest punkt leżący na prostej r, ta okoliczność tłomaczy nazwę "płaszczyzny znikania", gdyż rzuty wszystkich figur leżących w tej płaszczyźnie leżą na prostej niewłaściwej płaszczyzny rzutów, t.j. jak się czasem mówi, "znikają" w nieskończoności.

§84. Odwzorowanie prostej zapomocą jej śladu i punktu zbiegu. Widzieliśmy, że rzut środkowy punktu nie wyznacza tego punktu; aby więc punkt wyznaczyć, trzeba by o nim posiadać inną jeszcze wiadomość, np. znać odległość jego od swego rzutu. W szczególności wyznaczone będą przez swoje rzuty te punkty, o których wiemy, że leżą w płaszczyźnie rzutów, albo w płaszczyźnie niewłaściwej. Pierwsze, które oznaczać będziemy literami S, S_1, S_2, S_3, przystają do swoich rzutów, rzuty 2-gie drugich oznaczać będziemy literami Q', Q_1', Q_2', Q_3'. Otóż każda prosta właściwa ma jeden punkt w płaszczyźnie rzutów, zwany śladem S, oraz jeden punkt w płaszczyźnie niewłaściwej, zwany



Rys. 180



Rys. 181.

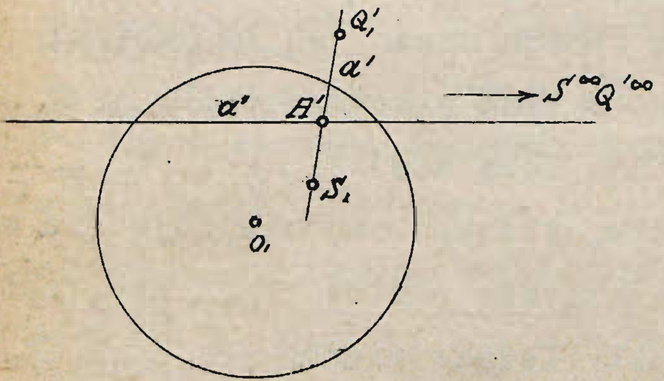
kierunkiem Q.

Ślad i kierúnek, jak wogóle każde inne dwa punkty, wyznaczają prostą. Widzimy zatem, że każda prosta będzie wyznaczona przez rzuty S i Q' tych dwóch swoich punktów. Punkty S i Q' jako rzuty punktów prostej a , muszą leżeć na jej rzucie a' , który zatem jest przez te dwa punkty wyznaczony. Punkt S jest punktem przebicia płaszczyzny rzutów P prostą daną a /Rys.180

punkt Q' , jako rzut punktu niewłaściwego prostej a , jest punktem, w którym równoległa do a , przez punkt O poprowadzona, przebija płaszczyznę rzutów. Nawzajem punkty S i Q' wyznaczają prostą a : jest to równoległa do OQ' poprowadzona przez punkt S . Punkt Q' nazywamy punktem zbiegu prostej a , możemy zatem powiedzieć, że prosta jest wyznaczona przez swój ślad S i swój punkt zbiegu Q' . Wyjątek stanowi ten przypadek, gdy ślad i punkt zbiegu przystając do siebie leżą w nieskończoności, prosta a jest wtedy równoległą do P i przez swój rzut a' nie jest dostatecznie wyznaczoną /§83/. Gdy punkty S i Q' przystają do siebie, ale nie leżą w nieskończoności, prosta a jest rzucającą.

§85. Odwzorowanie punktu. Aby teraz wyznaczyć położenie punktu A , którego rzut A' jest dany, poprowadźmy przez A jakąkolwiek prostą a i wyznaczmy jej ślad S i punkt zbiegu Q' . /Rys.180 i 181/. Trzy punkty S , Q' i A' wyznaczają punkt A , albowiem wyznaczają prostą a i prostą O A' , które leżąc w płaszczyźnie rzucającej prostą a , wyznaczają punkt przecięcia A tych dwóch prostych. Tak więc punkt przestrzeni A będzie wyznaczony przez swój rzut A' oraz ślad S i punkt zbiegu Q' prostej, na której leży.

Trzy płaszczyzny: płaszczyzna rzutów P, płaszczyzna niewłaściwa Q i płaszczyzna znikania R, wyznaczają na każdej prostej trzy punkty S, Q i R, które są zjednoczone tylko na prostych równoległych do P. Z wyjątkiem tedy tych prostych każda prosta zostanie podzieloną przez płaszczyzny P, Q i R na trzy części SQ, QR i RS, z których ostatnia jest skończoną, dwie zaś pierwsze są nieskończone. Rzuty tych trzech części są to odcinki SQ', $Q'R'$ i $R'S$; z tych pierwszy tylko jest skończony. Punkty, które leżą między S i Q, t.j. punkty leżące dla widza, którego oko znajduje się w środku rzutów, za płaszczyzną rzutów, mają swe rzuty na odcinku SQ'; punkty leżące między Q i R t.j. za widzem mają swe rzuty między punktami Q' i R' t.j. poza punktem zbiegu Q', wreszcie punkty leżące między R i S, t.j. między widzem i płaszczyzną rzutów, mają swe rzuty między punktami R' i S, t.j przed śladem S. Teoretycznie rzeczy biorąc, punkty wszystkich tych trzech rodzajów równie dobrze są wyznaczone przez swoje rzuty na prostej SQ'; jeżeli jednak dbać chcemy o to, aby rzuty punktów i prostych czyniły na widzu, którego oko jest umieszczone w środku rzutów, wrażenie punktów i prostych, od których pochodzą, to jedynie punkty, których rzuty znajdują się na odcinku SQ' uczynią zadość temu wymaganiu. Płaszczyznę rzutów obieramy bowiem na odległości najwyraźniejszego widzenia od środka rzutów /około 25 cm./, niektóre zatem punkty leżące między okiem a płaszczyzną rzutów będą leżały zbyt blizko oka, aby mogły być wyraźnie widziane; punkty zaś znajdujące się za okiem zgoła widziane być nie mogą. Tak więc będzie wskazanem obierać w taki sposób płaszczyznę i środek rzutów, aby figura przestrzenna, którą odwzorować pragniemy znajdowała się za płaszczyzną rzutów.



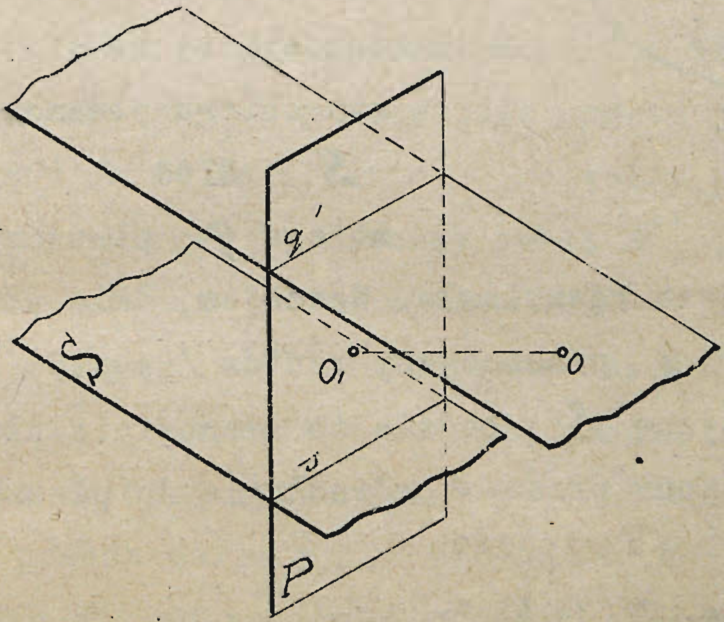
Rys. 182.

Oczywiście nie da się często uniknąć, aby pewne pomocnicze punkty wypadły w jednym z dwóch innych obszarów, na które przestrzeń została podzieloną przez płaszczyzny P, Q i R.

Co się tyczy prostych równoległych do płaszczyzny rzutów, to ponieważ ślad i punkt zbiegu takiej prostej są zjednoczone w nieskończoności /§84/, więc dla jej wyznaczenia potrzeba innego jej punktu A . /~~Rys. 182~~/. Oprócz rzutu a' takiej prostej trzeba podać ślad $S_/$ i punkt zbiegu $Q'_/$ prostej jakiejkolwiek $a_/$, która ją przecina.

§86. Odwzorowanie płaszczyzny zapomocą jej śladu i prostej zbiegu.

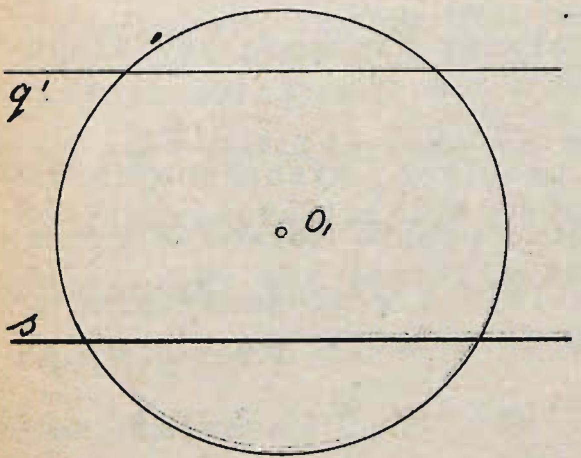
Są wszakże dwa rodzaje prostych, wyznaczonych dostatecznie przez swoje rzuty: proste leżące w płaszczyźnie rzutów P i proste leżące w płaszczyźnie Q, t.j. proste niewłaściwe. Pierwsze mają ślady nieoznaczone, punkty zbiegu niewłaściwe, drugie mają punkty zbiegu nieoznaczone, a ślady niewłaściwe. Z prostych tych obu rodzajów korzystamy dla odwzorowania płaszczyzn.



Rys. 183.

Na każdej płaszczyźnie S istnieje prosta s przecięcia z płaszczyzną rzutów, czyli ślad, oraz prosta niewłaściwa q, czyli ustawienie tej płaszczyzn

Rzut pierwszej prostej przystaje do niej; aby otrzymać rzut drugiej czyli prostą zbiegu /kraniec/ q' płaszczyzny S, trzeba poprowadzić płaszczyznę rzucającą równoległą do S /Rys.183/ ślad tej płaszczyzny rzucającej będzie prostą zbiegu płaszczyzny S. Ślad s i prosta zbiegu q' płaszczyzny S są oczywiście równoległe. Nawzajem, dwie proste równoległe s i q' płaszczyzny rzutów /Rys.184/ wyznaczają płaszczyznę S; będzie to mianowicie płaszczyzna poprowadzona przez s równolegle do płaszczyzny Oq'.



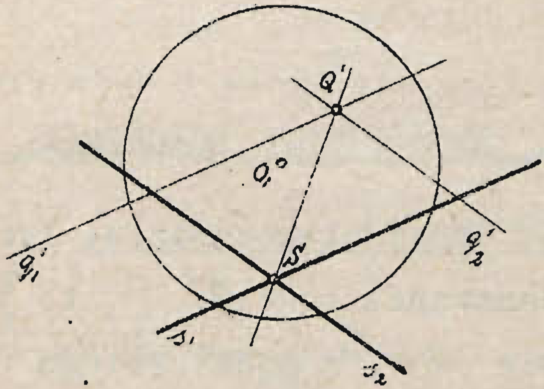
Rys. 184.

Jeżeli proste s i q' są zjednoczone, to płaszczyzna jest rzucająca, t.j. przechodzi przez środek rzutów O; wyjątek stanowią jedynie płaszczyzny, których ślady i proste zbiegu są zjednoczone w nieskończoności; są to płaszczyzny równoległe do płaszczyzny rzutów. Dla ich wyznaczenia potrzeba podać jeden ich punkt jakikolwiek, leżący na prostej przebijającej płaszczyznę daną $(S, Q'A')$.-

ROZDZIAŁ IX. ZAGADNIENIA POŁOŻENIA.

§87. Prosta leżąca w danej płaszczyźnie. Jeżeli prosta SQ leży w płaszczyźnie sq', to jej ślad S leży na śladzie s, a punkt zbiegu Q' na prostej zbiegu q' płaszczyzny. Aby więc w danej płaszczyźnie sq' poprowadzić prostą jakąkolwiek, wystarczy obrać na śladzie s dowolny punkt S, a na prostej zbiegu q' dowolny punkt Q'; prosta SQ' będzie leżała w płaszczyźnie sq'. Aby przez prostą SQ' poprowadzić płaszczyznę jakąkolwiek, wystarczy przez S poprowadzić dowolną prostą s, a przez Q' prostą do niej równoległą q', płaszczyzna sq' będzie przechodziła przez prostą SQ'.

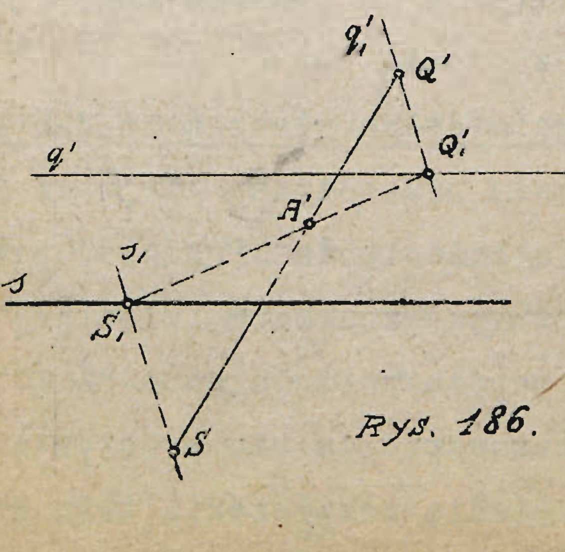
§88. Prosta przecięcia dwóch płaszczyzn danych. Niech będą /Rys.185/ dwie płaszczyzny s_1q_1' i s_2q_2' mamy znaleźć ich prostą przecięcia. Ponieważ prosta szukana jest wspólna obu płaszczyznom, więc jej ślad S musi być punktem wspólnym obu śladom s_1 i s_2, a punkt zbiegu Q' punktem wspólnym obu prostym zbiegu q_1' i q_2'. Zauważmy, że dla rozwiązania tego zadania



Rys. 185.

nie korzystamy z koła oddalenia. W zadaniach tej kategorji, zwanych zadaniami położenia, będziemy odtąd opuszczali koło oddalenia, stwierdzając przez to, że rozwiązanie tych zadań wyda się poprawnem dla oka umieszczonego gdziekolwiek w przestrzeni.

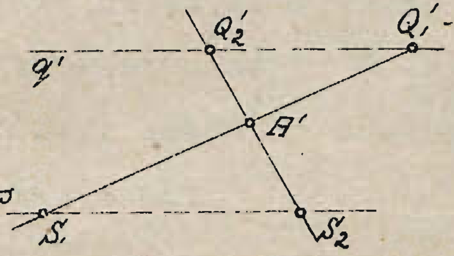
§89. Punkt przebicia płaszczyzny prostą. Niech będzie /Rys.186/ płaszczyzna $s q'$ i prosta w niej nie leżąca SQ'. Aby wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny $s q'$ prostą SQ', poprowadźmy przez tę ostatnią płaszczyznę jakąkolwiek $s_1 q_1'$. W tym celu prowadzimy przez S prostą dowolną s_1, a przez Q' prostą do niej równoległą q_1'. Wyznaczmy prostą $S_1 Q_1'$



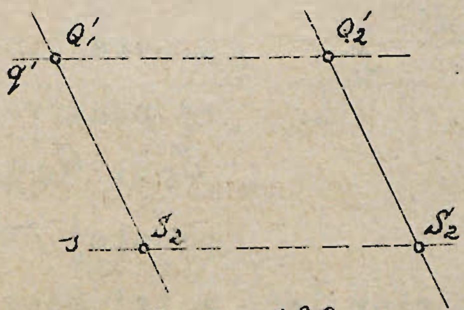
Rys. 186.

według której płaszczyzny sq' i $s_1 q_1'$ się przecinają; punkt przecięcia tej prostej z daną prostą SQ' będzie rzutem szukanego punktu A.

§90. Proste przecinające się. Jeżeli dwie proste się przecinają, to wyznaczają wspólną płaszczyznę: ślad tej płaszczyzny łączy ślady danych prostych, a prosta zbiegu płaszczyzny łączy punkty zbiegu tych prostych; wiemy już, że ślad i prosta zbiegu płaszczyzny muszą być równoległe. Tak więc warunkiem koniecznym i dostatecznym przecinania się dwóch prostych S_1Q_1' i S_2Q_2' /Rys.187/ jest ten, aby prosta q', która łączy punkty zbiegu Q_1' i Q_2' była równoległa do prostej s, która łączy ślady S_1 i S_2 tych prostych.



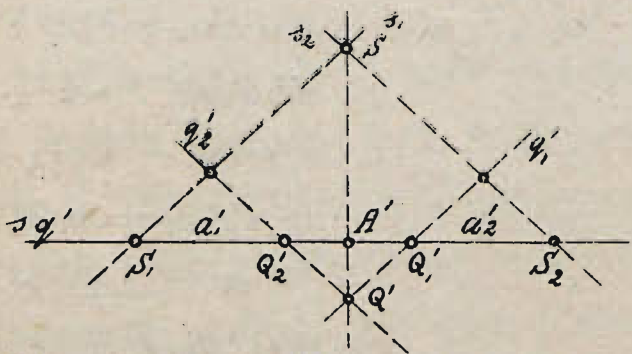
Rys. 187.



Rys. 188.

Rozważmy jeszcze dwa przypadki szczególne:

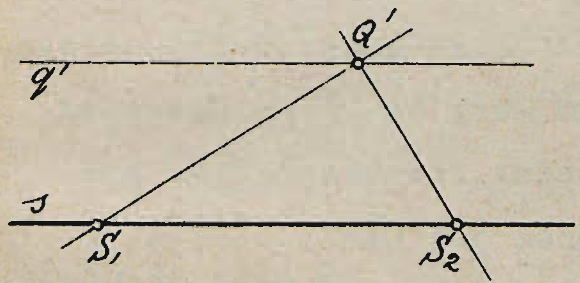
1/ Odcinki $S_1 Q_1'$ i $S_2 Q_2'$ są równe, równoległe i w te same zwrócone strony /Rys.188/. Ponieważ wtedy proste $s \equiv S_1 S_2$ i $q' \equiv Q_1' Q_2'$ będą równoległe, więc proste $S_1 Q_1'$ i $S_2 Q_2'$ się przecinają. Rzut punktu ich przecięcia jest punktem niewłaściwym, zatem sam punkt przecięcia leży w płaszczyźnie znikania R . I nawzajem, jeżeli punkt przecięcia dwóch prostych leży w płaszczyźnie znikania R , to odległość punktu zbiegu od śladu na obu rzutach są równe i rzuty te są równoległe.



Rys. 189.

2/ Rzuty a_1' i a_2' obu prostych leżą na tej samej prostej, t.j.cztery punkty S_1 , Q_1' S_2 i Q_2' leżą na prostej /Rys.189/ Proste się przecinają albowiem leżą w tej samej płaszczyźnie rzucającej, wyznaczenie rzutu punktu przecięcia jednak zawodzi, albowiem punkt przecięcia rzutów a_1' i a_2' jest nieoznaczony. Poprowadźmy przez prostą $S_1 Q_1'$ płaszczyznę jakąkolwiek $s_1 q_1'$, a przez prostą $S_2 Q_2'$ płaszczyznę jakąkolwiek $s_2 q_2'$. Trzy płaszczyzny: $s_1 q_1'$, $s_2 q_2'$ i płaszczyzna rzucająca sq' , przecinają się po dwie według trzech prostych przechodzących przez jeden punkt, który jest punktem szukanym, albowiem dwie z tych prostych są to $S_1 Q_1'$ i $S_2 Q_2'$. Jego rzut A' leży w przecięciu prostej $s \equiv q'$ z prostą SQ', według, której przecinają się płaszczyzny pomocnicze $s_1 q_1'$ i $s_2 q_2'$.

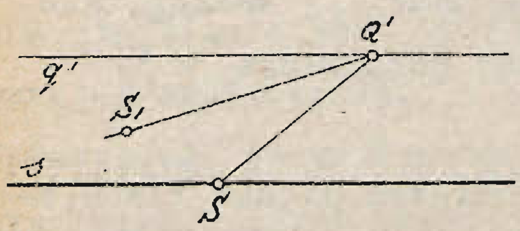
§91. Proste równoległe. Ponieważ proste równoległe mają wspólny punkt niewłaściwy, więc rzut tego punktu czyli ich punkt zbiegu jest wspólnym punktem ich rzutów. Proste równoległe mają zatem punkt zbiegu wspólny. Nawzajem dwie proste, mające punkt zbiegu wspólny Q' są równoległe, gdyż każda z nich jest równoległa do prostej rzucającej OQ'. W szczególności, proste, mające punkt zbiegu w punkcie głónym O_1 są prostopadłe do płaszczyzna rzutów.



Rys. 190.

Aby przez dwie proste równoległe $S_1 Q_1'$ i $S_2 Q_2'$ /Rys. 190/ poprowadzić płaszczyznę, łączymy ślady S_1 i S_2 prostą s, która będzie śladem i przez wspólny punkt zbiegu Q' równolegle do s prowadzimy prostą q', która będzie prostą zbiegu szukanej płaszczyzny.

§92. Proste i płaszczyzny równoległe. Prosta równoległa do płaszczyzny ma swój punkt zbiegu na prostej zbiegu płaszczyzny. W samej rzeczy, prostą równoległą do danej płaszczyzny nazywamy prostą równoległą do jakiejkolwiek prostej tej płaszczyzny. Otóż prosta jakakolwiek SQ' /Rys.191/ płaszczyzny $\sigma q'$ ma swój punkt zbiegu

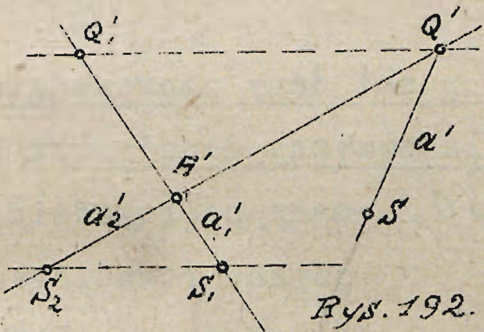


Rys. 191.

Q' na prostej zbiegu q' płaszczyzny, a prosta $S_1 Q_1'$ równoległa do SQ' ma z nią punkt zbiegu Q' wspólny, który zatem leży na q'. Nawzajem prosta zbiegu q' płaszczyzny równoległej do prostej SQ' przechodzi przez jej punkt zbiegu Q'. W szczególności płaszczyzny równoległe do OO_1, t. j. prostopadłe do płaszczyzny rzutów mają proste zbiegu przechodzące przez punkt główny O_1.

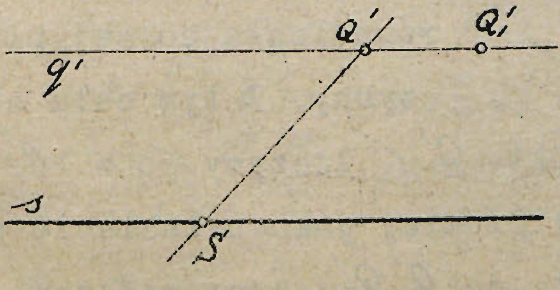
§93. Płaszczyzny równoległe. Ponieważ płaszczyzny równoległe mają wspólną prostą niewłaściwą, więc rzut tej prostej, czyli ich prosta zbiegu, jest obu tym płaszczyznom wspólną. Płaszczyzny równoległe mają prostą zbiegu wspólną.

§94. ZADANIE. Przez dany punkt poprowadzić prostą równoległą do prostej danej. Niech będzie prosta SQ' oraz punkt A, dany przez swój rzut A' leżący na rzucie a_1' prostej S_1Q_1' /Rys.192/; rzut a_2' szukanej prostej otrzymamy przez połączenie punktu A' z punktem Q'; pozostaje wyznaczyć jedynie ślad s_2 tej prostej. Ponieważ prosta szukana leży z prostą S_1Q_1' w jednej płaszczyźnie, więc jej ślad otrzymamy, prowadząc przez S_1 równoległą do $Q'Q_1'$ do przecięcia z rzutem a_2'. Zauważmy, że w zadaniu tym punkt S nie był potrzebny, do wyznaczenia bowiem prostej a_2 wystarcza znać kierunek prostej danej, który jest całkowicie wyznaczony przez jej punkt zbiegu Q'. Uwaga ta w równej mierze dotyczy i następnego zadania.



Rys. 192.

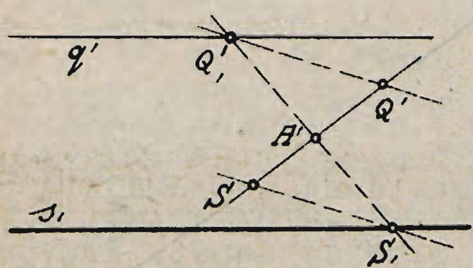
§95. ZADANIE. Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę równoległą do innej prostej danej. Przypuśćmy, że przez prostą SQ' mamy przeprowadzić płaszczyznę równoległą do prostych, których kierunek jest



Rys. 193.

wyznaczony przez dany ich punkt zbiegu Q'_1 /Rys.193/. Prosta zbiegu q' szukanej płaszczyzny musi przechodzić przez Q', gdyż prosta SQ' ma leżeć w tej płaszczyźnie, musi on jednak przechodzić również i przez Q'_1, gdyż proste, których ten punkt jest punktem zbiegu, są równoległe do tej płaszczyzny; prosta zbiegu q' będzie to zatem prosta $Q'Q'_1$. Ślad s szukanej płaszczyzny otrzymamy prowadząc przez S równoległą do q'.

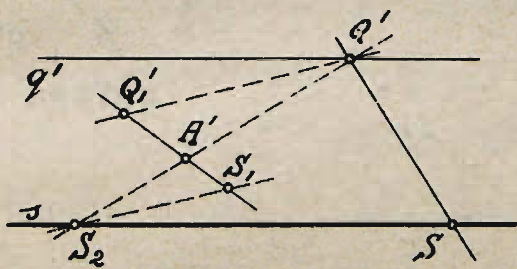
§96. ZADANIE. Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej. Przypuśćmy, że przez punkt $A(A', SQ')$ mamy poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny, której prosta zbiegu q' jest dana /Rys.194/. Poprowadźmy najpierw przez punkt A jakąkolwiek prostą równoległą do tej płaszczyzny. W tym celu obieramy na q' dowolny punkt Q'_1, łączymy go z A' i wyznaczamy ślad S_1 tej prostej jako przecięcie prostej Q'_1A' z równoległą do $Q'Q'_1$ poprowadzoną przez punkt S. Punkt S_1 jest jednym z punktów śladu s płaszczyzny szukanej, gdyż płaszczyzna ta,



Rys. 194.

jako równoległa do danej, przechodzić musi przez prostą $S_1 Q_1'$. Prosta zbiegu szukanej płaszczyzny przystaje do prostej zbiegu q', ślad zaś s będzie równoległą do q' poprowadzoną przez S_1

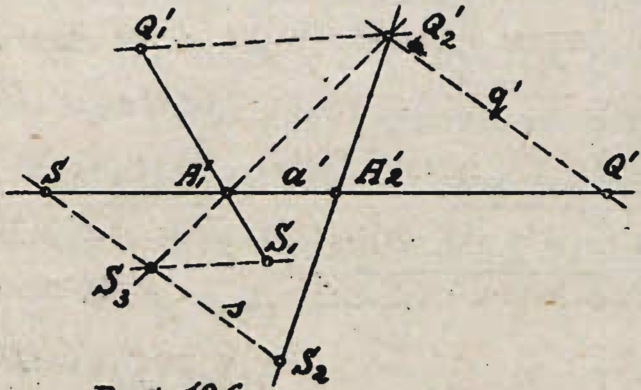
§97. ZADANIE. Przez daną prostą i punkt na niej nie leżący poprowadzić płaszczyznę. Niech będzie prosta SQ' /Rys.195/ oraz punkt $(A_1', S_1 Q_1')$ poprowadźmy przezeń prostą $S_2 Q'$ równoległą do SQ' /§94/, poczem przez proste równoległe SQ' i $S_2 Q'$ poprowadźmy płaszczyznę sq' /§91/.



Rys. 195.

§98. ZADANIE. Poprowadzić prostą przez dwa punkty dane. Niech będą dwa punkty $(A_1', S_1 Q_1')$ i $(A_2', S_2 Q_2')$ /rys.196/, prosta $A_1 A_2$ będzie rzutem a' szukanej prostej, mamy znaleźć jej ślad, i punkt zbiegu. Przez punkt A_1 i prostą $S_2 Q_2'$ poprowadźmy płaszczyznę; prosta $A_1 A_2$ będzie leżała w tej płaszczyźnie, t.j. będzie miała ślad S na śladzie s, a punkt zbiegu Q' na prostej zbiegu q' tej płaszczyzny. Prowadzimy zatem przez A_1 równoległą do

$S_2 Q_2'$ i przez proste równoległe $S_2 Q_2'$ i $S_3 Q_2'$ płaszczyznę $s\, q'$, której ślad s wyznaczy na rzucie a' ślad S', a prosta zbiegu q' punkt zbiegu Q' szukanej prostej.

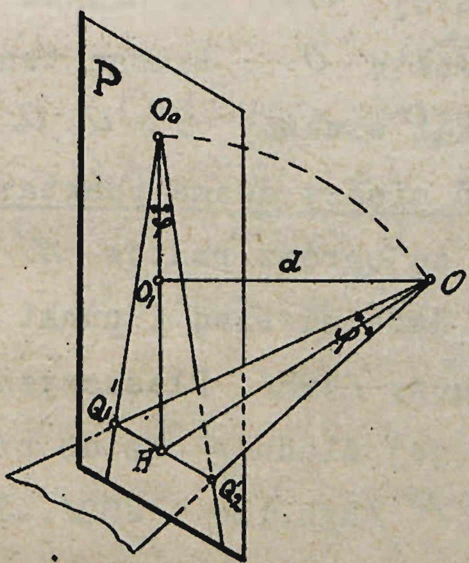


Rys. 196.

ROZDZIAŁ X. ZAGADNIENIA MIAROWE.

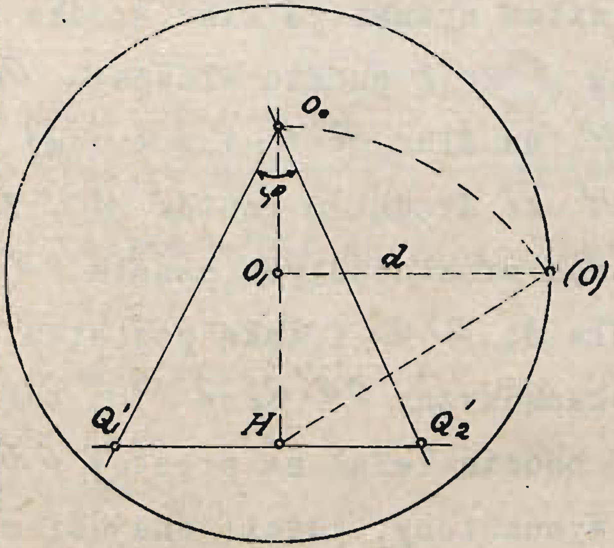
§99. Kłady figur, leżących w płaszczyźnie rzucającej. Zagadnienia dotyczące prawdziwej wielkości i kształtu figur dają się łatwo rozwiązać, jeżeli te figury leżą w płaszczyźnie rzucającej. Należą tu przedewszystkiem dwa zadania.

1/Wyznaczyć kąt między dwiema danemi prostemi. Przez środek rzutów O poprowadźmy do danych prostych /przecinających się lub skośnych/ proste równoległe $O Q_1'$ i $O Q_2'$ /Rys.197/, trzeba znaleźć wielkość kąta między temi prostemi. W tym celu obróćmy płaszczyznę rzucającą $O Q_1' Q_2'$ dokoła jej śladu $Q_1' Q_2'$ aż do przystania z płaszczyzną rzutów P. Ponieważ punkty Q_1' i Q_2' przy tym obrocie nie zmienią swego położenia, wystarczy zatem wyznaczyć kład środka rzutów O na płaszczyznę P. Z punktu głównego O_1 spuśćmy prostpadłą O_1H na ślad $Q_1'Q_2'$ i połączmy spodek tej prostopadłej H ze środkiem rzutów O. Na mocy twierdzenia o trzech prostopadłych prosta OH jest również prostopadła do $Q_1'Q_2'$ i taką pozostanie po dokonanym kładzie płaszczyzny $OQ_1'Q_2'$ na P, tak, że kład O_0 punktu O będzie leżał na prostej OH. Punkt ten będzie zatem wyznaczony, jeżeli znajdziemy prawdziwą długość odcinka OH, który jest promieniem obrotu punktu O.



Rys. 197.

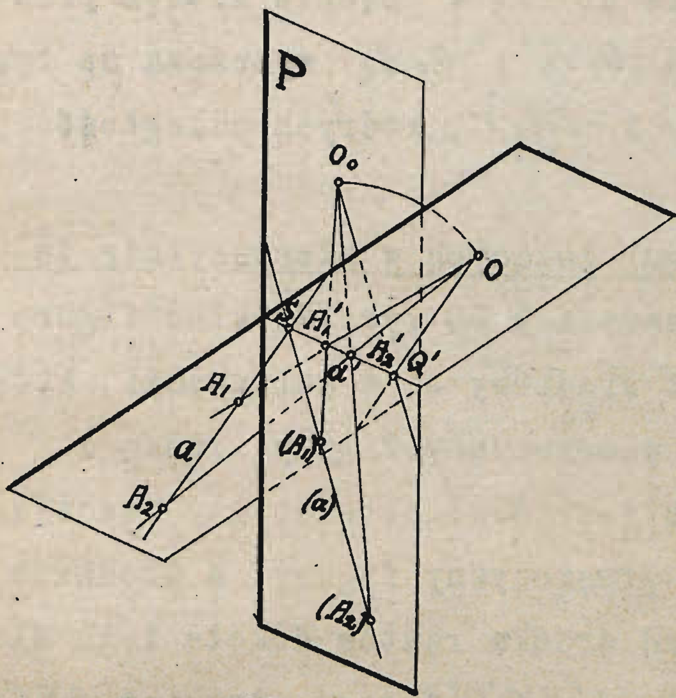
Odcinek ten jest atoli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego OO_1H którego obie *przyprostokątne* są dane, jedna O_1H jest odległością punktu głównego O_1 od śladu $Q_1'Q_2'$, druga O_1O jest oddaleniem d.



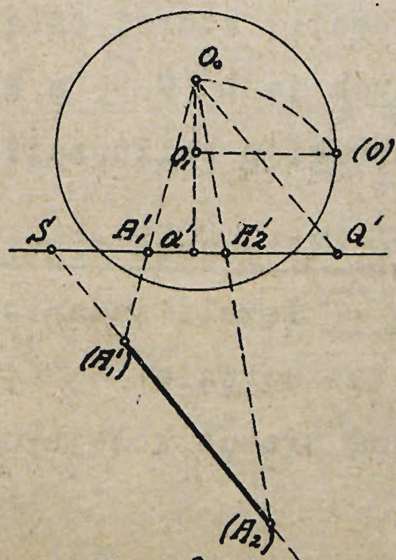
Rys. 198.

Jeżeli zatem /Rys.198/ poprowadzimy promień koła oddalenia równoległy do $Q_1'Q_2'$ i koniec tego promienia (O) połączymy z punktem H, a następnie odmierzymy odcinek $(O)H$ na prostej O_1H od punktu H, to otrzymamy kład O_o punktu O. Łącząc ten punkt z Q_1' i Q_2' otrzymamy kąt szukany $\varphi = Q_1' O_o Q_2'$.

<u>2/ Wyznaczyć odległość między dwoma punktami danemi.</u> Możemy przypuścić, że oprócz rzutów A_1' i A_2' danych punktów A_1 i A_2 dane są ślad i punkt zbiegu prostej a, która je łączy /§98/. Płaszczyznę rzucającą Oa obróćmy dokoła jej śladu a' aż do przystania z płaszczyzną rzutów P /Rys.184 i 200/. Sposobem przed chwilą wskazanym znajdźmy kład O_o punktu O. W płaszczyźnie Oa leżą dwie proste równoległe:



Rys. 199.



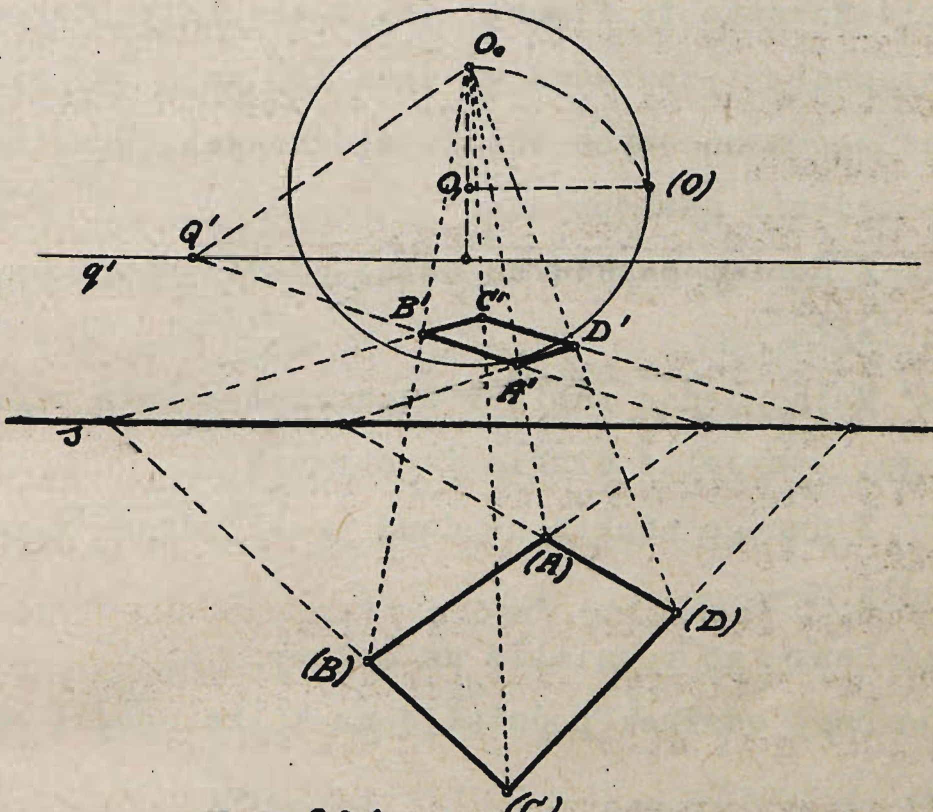
Rys. 200.

OQ' i a, oraz proste rzucające OA_1 i OA_2; po dokonanym kładzie płaszczyzny Oa punkt O upadnie na O_0, punkty S, Q', A_1' i A_2' nie zmienią położenia, proste O_0Q' i (a) jako kłady prostych równoległych OQ' i a pozostaną równoległe. Jeżeli tedy połączymy O_0Q', to prosta (a) poprowadzona przez S równolegle do $O_o Q'$ będzie kładem prostej a ; proste zaś $O_o A_1'$ i $O_o A_2'$ wyznaczą na tym kładzie punkty (A_1) i (A_2), których odległość jest szukaną.

§ 100. Kłady figur leżących w płaszczyźnie jakiejkolwiek. Na zasadzie § 80 rys.171 kład figury płaskiej i jej rzut środkowy są w kolineacji, której osią jest ślad płaszczyzny figury, jedną z prostych wzajemnych jest ślad płaszczyzny rzucającej równoległej do płaszczyzny figury, a środkiem kolineacji jest kład środka rzutów dokoła tego śladu. Mając więc rzut $A'B'C'D'$ figury płaskiej $ABCD$ /rys.201/ oraz ślad s i prostą zbiegu q' jej płaszczyzny, wyznaczamy kład $(A)(B)(C)(D)$ tej figury na zasadzie kolineacji, której osią jest s, jedną z prostych wzajemnych jest q', a kład O_o środka rzutów O jest środkiem kolineacji.

§ 101. Zadania miarowe, dotyczące figur leżących w danej płaszczyźnie $s\,q'$. Jeżeli zadanie dotyczy figury leżącej w danej płaszczyźnie $s\,q'$, to możnaby je rozwiązać zapomocą trzech kolejnych czynności:

1/ kładu danej figury płaskiej na płaszczyznę rzutów, 2/ rozwiązania zadania w tej płaszczyźnie



Rys. 201.

i 3/ powrotu uzupełnionej przez rozwiązanie zadania figury do pierwotnego jej położenia. Metoda taka byłaby jednak zawiłą i wymagającą dużo miejsca, które niezawsze mamy do dyspozycji. Byłoby pożądanem umieć <u>bezpośrednio</u> rozwiązywać zadania dotyczące figur leżących w danej płaszczyźnie, t.j. <u>kreślić</u> w płaszczyźnie sq' tak jak kreślimy w płaszczyźnie rysunku. W tym celu potrzeba i wystarcza umieć rozwiązać zasadnicze zadanie wykreślne geometrji płaskiej, dotyczące figur leżących w płaszczyźnie $\vartheta q'$, jeżeli zarówno te figury, jak i elememty stanowiące rozwiązanie tych zadań są dane lub mają być wyznaczone zapomocą swych rzutów środkowych. Rozwiążemy więc zadania następujące:

1/ Z danego punktu do danej prostej poprowadzić równoległą.

2/ Mając jedno ramię i wierzchołek kąta równego danemu, wykreślić drugie jego ramię.

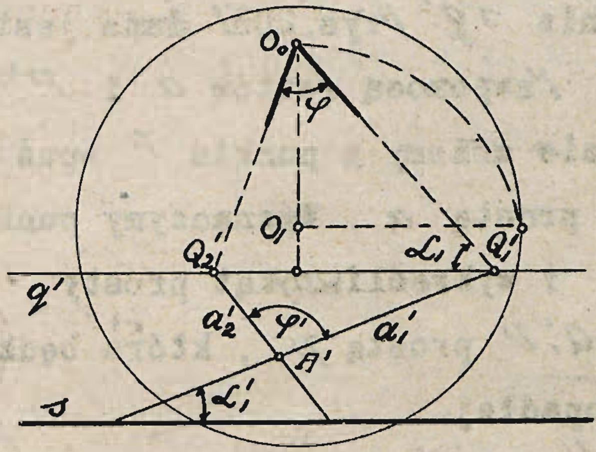
3/ Z danego punktu na daną prostą spuścić prostopadłą.

4/ Dany kąt podzielić na połowy.

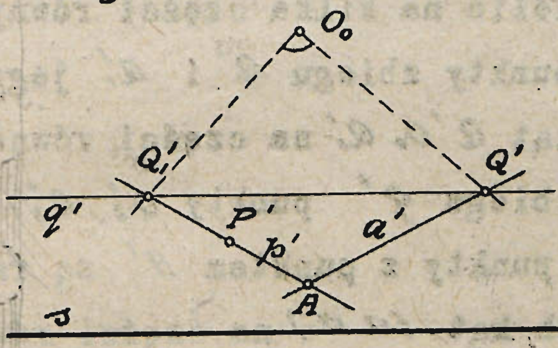
5/ Dany odcinek podzielić na kilka części równych.

6/ Na danej prostej od danego jej punktu odmierzyć odcinek równy danemu. Wszystkie te zadania mamy rozwiązać nie kładąc płaszczyzny $\vartheta q'$ na płaszczyznę rzutów.

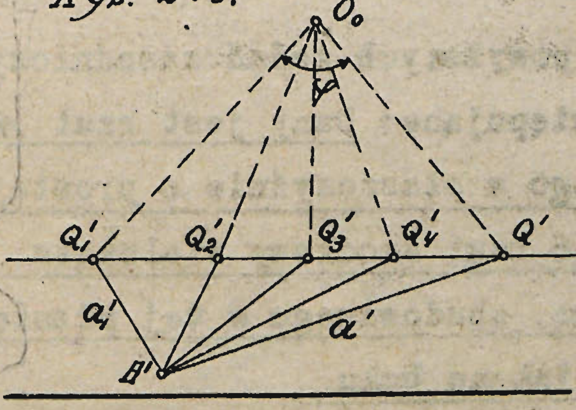
§ 102. Zadania płaskie zasadnicze dotyczące kątów. Pierwsze z powyższych zadań zasadniczych rozwiązaliśmy już w § 91 rys.190. Aby rozwiązać zadania 2, 3 i 4 dotyczące kątów, zauważmy, że dwie proste a_1 i a_2 przecinając się w punkcie A tworzą kąt, którego prawdziwa wielkość równa się kątowi $Q_1' O_0 Q_2'$



Rys. 202.



Rys. 203.



Rys. 204.

/rys.202/. Przypuśćmy teraz, że zapomocą rzutów a_1' i A' dane są w płaszczyźnie sq' jedno ramię a_1 i wierzchołek A kąta równego danemu kątowi φ ; mamy wykreślić rzut drugiego ramienia tego kąta /rys.202/. Przedłużmy a_1' do przecięcia z q' w punkcie Q_1', połączmy $Q_1'O_0$ i odmierzmy kąt $Q_1'O_0Q_2' = \varphi$, wreszcie połączmy $Q_2'A' = a_2'$. Prawdziwa wielkość kąta między prostymi a_1 i a_2 będzie φ .

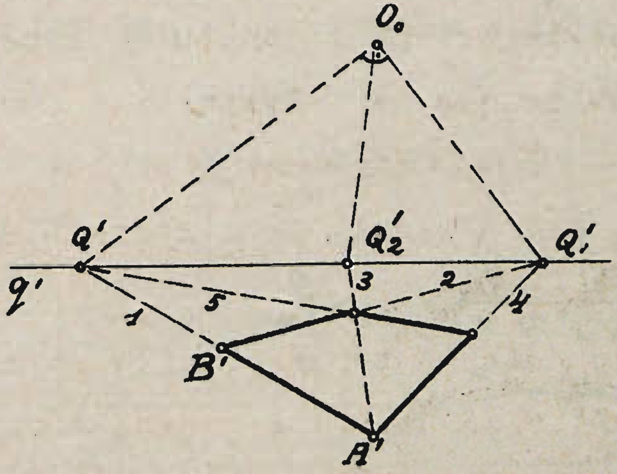
Jeżeli w płaszczyźnie $\vartheta q'$ /rys.203/ dana jest prosta a i punkt P /zapomocą rzutów a' i P' /, to na tej samej zasadzie możemy z punktu P spuścić prostopadłą p na prostą a . Wyznaczymy punkt zbiegu Q' prostej a i wykreśliwszy kąt prosty $Q'O_o Q_1'$, połączymy $Q_1'P$ prostą p , która będzie rzutem szukanej prostopadłej.

Gdy chcemy kąt A /dany zapomocą rzutów swych ramion a' i a_1' /podzielić na kilka części równych /rys.204/, znajdujemy punkty zbiegu Q' i Q_1' jego ramion i podzieliwszy kąt $Q'O_o Q_1'$ na części równe wyznaczamy na prostej zbiegu q' punkty Q_2', Q_3'....

Proste, które łączą te punkty z punktem A' są rzutami prostych dzielących kąt $(a\ a_1)$ na części równe.

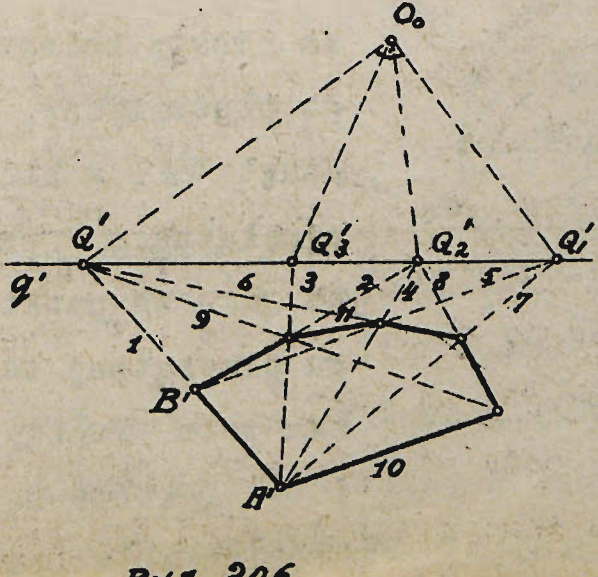
Jako zastosowanie powyższych zadań zasadniczych rozwiążmy zadanie następujące: Dany jest rzut $A'B'$ odcinka AB , leżącego w płaszczyźnie o prostej zbiegu q' ; wykreślić rzut środkowy wielokąta $(n = 4, 6, 8)$ foremnego, zbudowanego w tej płaszczyźnie na odcinku AB jak na boku.

Ślad płaszczyzny może nie być dany, gdyż nie jest on potrzebny w żadnym z wykreśleń Rys.190, 202, 203 i 204. Punkty zbiegu Q' boku AB /rys.205, 206, 207/ połączmy z kładem O_0, środka rzutów, odmierzmy kąt prosty $Q'O_0Q_1'$, podzielmy go na 2, 3 lub 4 części równe i poprowadźmy proste 2,3,4,5... w porządku wskazanym przez ich numery.



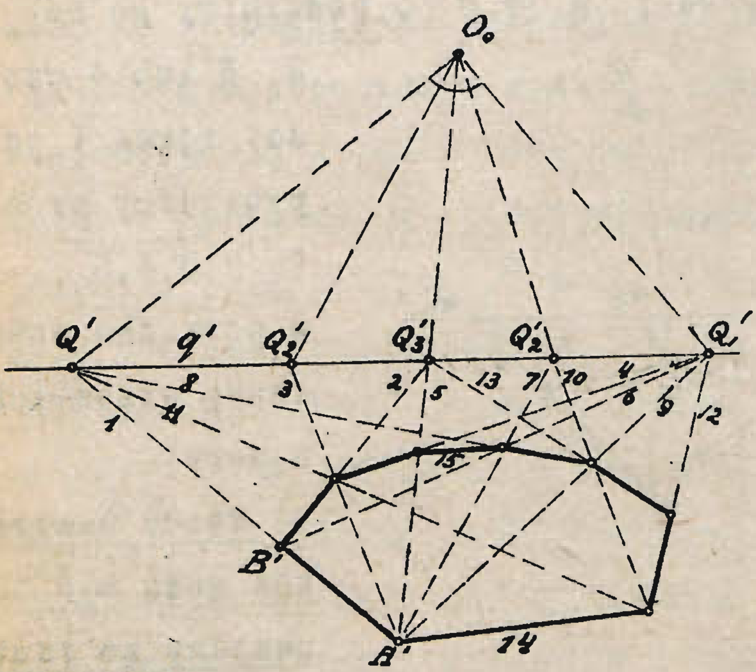
Rys. 205.

Każdy czworokąt może być uważany za rzut środkowy kwadratu. W samej rzeczy, w danym czworokącie $A'B'C'D'$ /rys. 208/ wyznaczmy punkty Q_1' i Q_2' w których przecinają się jego boki przeciwległe i uważajmy te punkty za

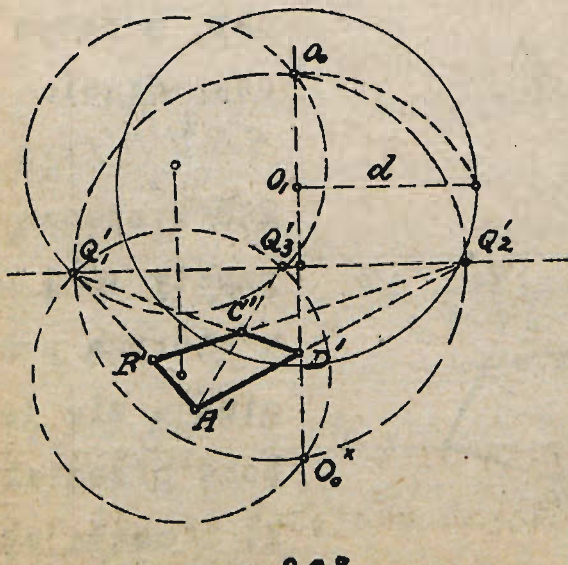


Rys. 206.

punkty zbiegu boków kwadratu, prostą $q' \equiv Q_1', Q_2'$



Rys. 207.

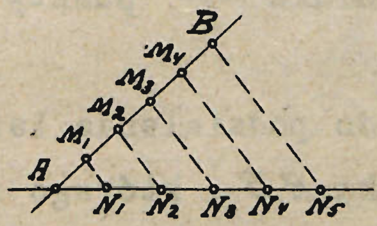


Rys. 208.

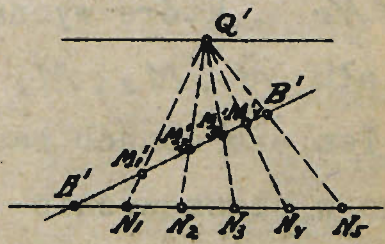
za prostą zbiegu jego płaszczyzny, a punkt Q_3', w którym przekątna $A'C'$ przecina q', za punkt zbiegu przekątnej tego kwadratu. Punkty O_0 i O_0^x, które są przecięciem koła opisanego na $Q_1' Q_2'$, jak na średnicy z kołami obejmującemi kąt 45° i opisanemi na nim $Q_1' Q_3'$, - są kładami środka rzutów O dokoła q'. Punkt główny O_1 może być jakimkolwiek punktem obranym wewnątrz $O_0 O_0^x$; jeżeli w szczególności O_1 leży na q', to płaszczyzna kwadratu jest prostopadłą do płaszczyzny rzutów.

§ 103. Zadania płaskie zasadnicze, dotyczące odcinków. Punkty miarowe.

1/ Leżący w płaszczyźnie $\vartheta q'$ odcinek AB, którego rzut $A'B'$ jest dany, podzielić na części równe, t.j. wyznaczyć rzuty M_1', M_2', M_3'.... punktów M_1, M_2, M_3.... dzielących ten odcinek na części równe, nie kładąc odcinka na płaszczyznę rzutów.



Rys. 209.



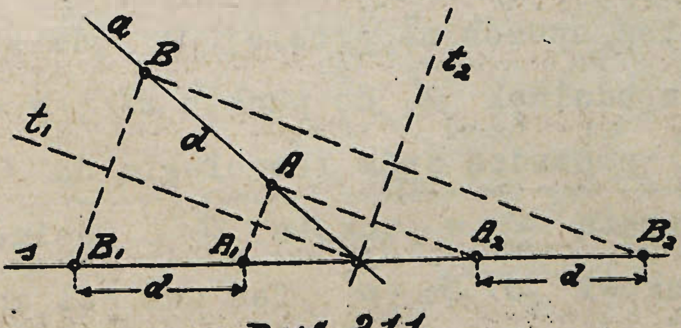
Rys. 210.

W tych warunkach użycie cyrkla nie prowadzi do celu, albowiem rzuty równych odcinków naogół nie są równe. Tylko na śladzie ϑ płaszczyzny $\vartheta q'$ oraz na prostych do niego równoległych rzuty równych odcinków są równe i podział odcinka leżącego na jednej z tych prostych mógłby być dokonany zapomocą cyrkla. Otóż wiadomo, iż podział jakiegokolwiek odcinka na części równe może być zapomocą równoległych sprowadzony do podziału innego odcinka, leżącego na prostej o dowolnym kierunku. Przypuśćmy np., że mamy podzielić odcinek AB na 5 części równych /r.209/, ale warunki od nas niezależne nie pozwalają na użycie cyrkla na prostej o kierunku α, natomiast użycie jego na prostej o kierunku σ nie podlega żadnym ograniczeniom. Przez jeden z końców A odcinka AB prowadzimy prostą o kierunku σ, na której odmierzamy cyrklem 5 dowolnych równych odcinków AN_1, N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4 i N_4N_5, poczem przez punkty N_1, N_2, N_3 i N_4 prowadzimy równoległe do prostej BN_5, które wyznaczą na odcinku AB punkty podziału M_1, M_2, M_3 i M_4.

Ten sam sposób zastosujemy do podzielenia leżącego w płaszczyźnie $\sigma q'$ odcinka AB, którego rzut $A'B'$ jest dany /rys.210/. Ponieważ na prostej AB użycie cyrkla jest niemożliwe, natomiast możemy go użyć na każdej prostej równoległej do $\sigma // q'$, przeto przez A' prowadzimy równoległą do q' i odmierzamy na niej od punktu A' pięć jakichkolwiek równych odcinków $A'N_1$, N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4 i N_4N_5, wyznaczamy punkty zbiegu Q' prostej BM_5 i łączymy z nim punkty N_1, N_2, N_3 i N_4, proste te wyznaczą na $A'B'$ rzuty M_1', M_2', M_3' i M_4' punktów podziału M_1, M_2, M_3 i M_4.

2/ Dany jest rzut prostej i punktu na niej leżącego, wyznaczyć rzut odcinka danej długości odmierzonego na prostej od danego na niej punktu.-

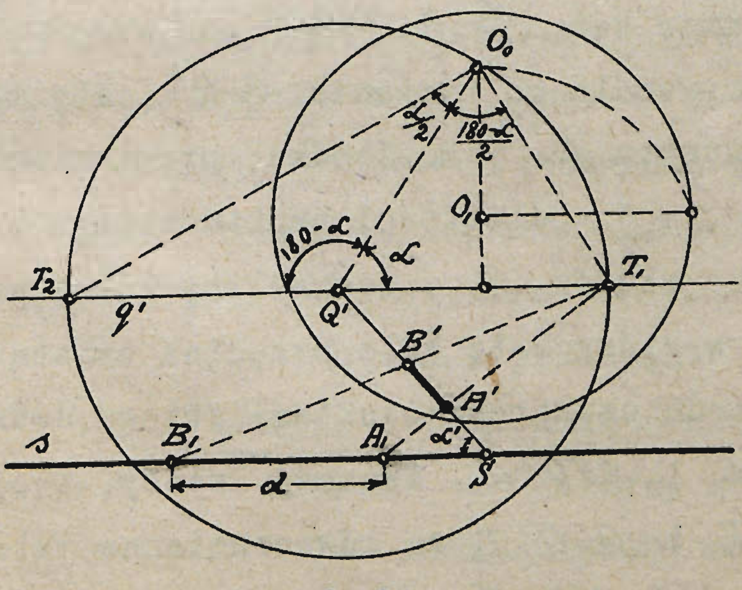
Możemy przypuścić, że dana jest płaszczyzna, w której prosta leży, gdyby bowiem były dane tylko ślad i punkt zbiegu prostej, to dwie równoległe w dowolnym kierunku przez te punkty poprowadzone wyznaczyłyby taką płaszczyznę ϑ'.



Rys. 211.

Oczywiście, zadanie to nie może być rozwiązane zapomocą odmierzenia danego odcinka cyrklem, gdyż w perspektywie długości odcinków ulegają wogóle zmianie. Istnieje wszakże jedna prosta płaszczyzny sq', mianowicie ślad s , na której po wyższe zadanie mogłoby być rozwiązane bezpośrednio, a więc zapomocą cyrkla. Otóż powiadam, że odmierzenie odcinka danej długości na jednej prostej może być zapomocą prowadzenia równoległych sprowadzone do odmierzenia tego samego ocinka na innej prostej. Przypuśćmy, że mamy odmierzyć odcinek danej długości d na prostej a od punktu A , ale dla pewnych względów użycie cyrkla na tej prostej nie jest możliwe, natomiast możliwe jest ono na innej prostej s /rys.211/. Prowadzę dwusieczne t_1 i t_2 kątów wyznaczonych przez proste a i s i przez punkt A prowadzę prostopadłą do jednej dwusiecznej t_1 , a więc równoległą do drugiej t_2 ; od punktu A_1 otrzymanego w ten sposób na prostej s odmierzam zapomocą cyrkla odcinek d do punktu B_1 , wreszcie przez punkt B_1 prowadzę znów równoległą do t_2 do przecięcia z prostą a w punkcie B . Odcinek AB równa się odcinkowi $A_1B_1 = d$. Ten sam cel możemy oczywiście osiągnąć, jeżeli z punktu A poprowadzimy równoległą do dwusiecznej t , a otrzymawszy na prostej s punkt A_2 , odmierzymy na niej ocinek d do punktu B_2 i przez ten punkt poprowadzimy jeszcze raz równoległą do dwusiecznej t_1 . Do rozwiązania tego zadania wystarczy posiadać kierunek jednej lub drugiej dwusiecznej kąta (as).

Przeprowadźmy to samo wykreślenie w perpektywie /rys.212/. Niech S będzie śladem a Q' punktem zbiegu prostej a , a A' rzutem punktu A na niej leżącego, od tego punktu na prostej a odmierzono odcinek danej długości d ; trzeba znaleźć rzut B' końca tego odcinka. Poprowadźmy



Rys. 212.

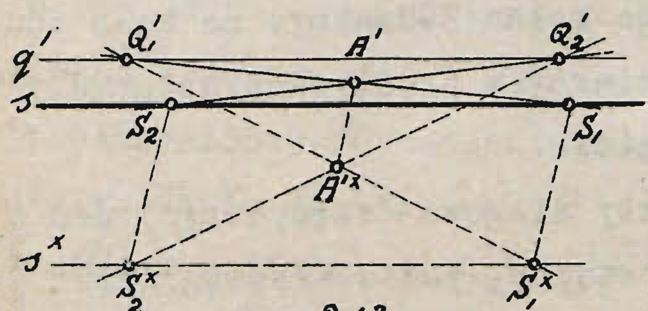
przez prostą SQ' dowolną płaszczyznę sq': bezpośrednie odmierzenie odcinka d zapomocą cyrkla możliwe jest jedynie na prostej σ płaszczyzny $\sigma q'$; albowiem ta prosta znajduje się w płaszczyźnie rzutów, t.j. w płaszczyźnie rysunku. Jak to stwierdziliśmy powyżej, dla rozwiązania zadania wystarcza znać kierunek jednej z dwusiecznych t_1 i t_2 kątów α i $180-\alpha$, które tworzą ze sobą proste a i σ. Kierunek ten w perspektywie jest wyznaczony przez punkt zbiegu T_1 lub T_2 tych dwusiecznych; aby te punkty na prostej zbiegu q' otrzymać, trzeba, jak wiadomo, odnaleźć najpierw kład O_0 środka rzutów, a następnie kąty $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{180-\alpha}{2}$ odmierzyć po obu stronach wspólnego ramienia $O_0 Q'$. Aby tego dokonać, z punktu Q' jako środka, promieniem równym $O_0 Q'$, t.j. odległości punktu zbiegu prostej a od środka rzutów O, zakreślamy koło; punkty T_1 i T_2, w których to koło przecina prostą zbiegu q', będą szukanemi punktami zbiegu dwusiecznych kątów α i $180-\alpha$. W samej rzeczy, trójkąty $O_0 Q' T_1$ i $O_0 Q' T_2$ są równoramienne, stąd zaś wynika, że kąt $Q' O_0 T_1$ równa się połowie kąta zewnętrznego $T_2 Q' O_0$, kąt zaś $Q' O_0 T_2$ równa się połowie kąta zewnętrznego $T_1 Q' O_0$. Ale kąt $T_2 Q' O_0 = 180° - \alpha$, a kąt $T_1 Q' O_0 = \alpha$, jak tego dowiedliśmy w § 102.

Punkty T_1 i T_2, przy których pomocy można odmierzać dowolne odcinki na prostej a oraz na prostych do niej równoległych, nazywają się punktami miarowemi prostej a /lub mniej trafnie: punktami dziełenia/. Koło o środku Q' i promieniu O_0Q' nazywamy kołem miarowem prostej a ; punkty miarowe prostej a, leżące na prostych zbiegu wszystkich płaszczyzn przechodzących przez tę prostą, leżą na okręgu tego koła. Zauważmy, że koło oddalenia jest kołem miarowem prostych prostopadłych do płaszczyzny rzutów.

Znalazłszy punkty miarowe /zazwyczaj jeden z nich tylko bywa dostępny, jeden zresztą tylko jest wogóle potrzebny/, łączymy jeden z nich, np. T_1 z punktem A' i otrzymujemy w przecięciu z s punkt A_1 ; odmierzamy od tego punktu na prostej s odcinek $A_1B_1 = d$ i punkt B_1 łączymy z T_1, otrzymując w przecięciu z a' szukany punkt B'.

To samo wykreślenie posłużyć może do rozwiązania zadania odwrotnego: Znaleźć prawdziwą długość odcinka, którego rzut na danej prostej SQ' jest dany. Będzie ono miało przewagę prostoty i oszczędności miejsca nad rozwiązaniem podanem w § 111, a opartem na metodzie kładów.

§ 104. Zastosowanie powinowactwa do wyznaczenia punktu przecięcia prostych, których rzuty przecinają się pod małym kątem. Wyznaczenie punktu, w którym przecinają się proste $S_1 Q_1'$ i $S_2 Q_2'$, leżące w płaszczyźnie $s q'$ staje się tem mniej dokładne, im odległość prostych s i q' jest mniejsza. Dla podniesienia dokładności wyznaczenia tego punktu, kreślimy prostą $s^x \parallel s$ w dostatecznie wielkiej odległości od q' /rys.213/ i obrawszy na s^x punkt S_1^x łączymy go z S_1, poczem przez S_2 prowadzimy równoległą do $S_1 S_1^x$, która przetnie s^x w punkcie S_2^x. Połączywszy $S_1^x Q_1'$ i $S_2^x Q_2'$, wyznaczmy punkt A'^x przecięcia tych prostych. Punkty A'^x i A' są odpowiednie w powinowactwie wyznaczonem przez oś q' oraz parę punktów odpowiednich S_1 i S_1^x. Prosta poprowadzona przez A'^x równolegle do $S_1 S_1^x$ musi



Rys. 213.

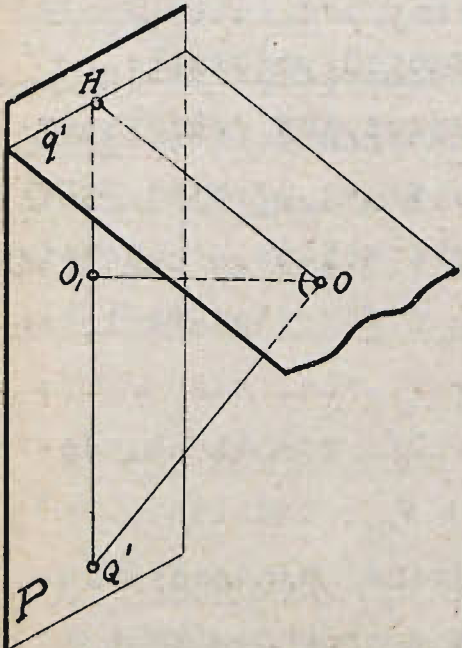
tedy przejść przez punkt A', który w ten sposób zostanie wyznaczony jako punkt przecięcia tej prostej z którąkolwiek z dwóch prostych $S_1 Q_1'$ lub $S_2 Q_2'$.

§ 105. Proste i płaszczyzny prostopadłe.

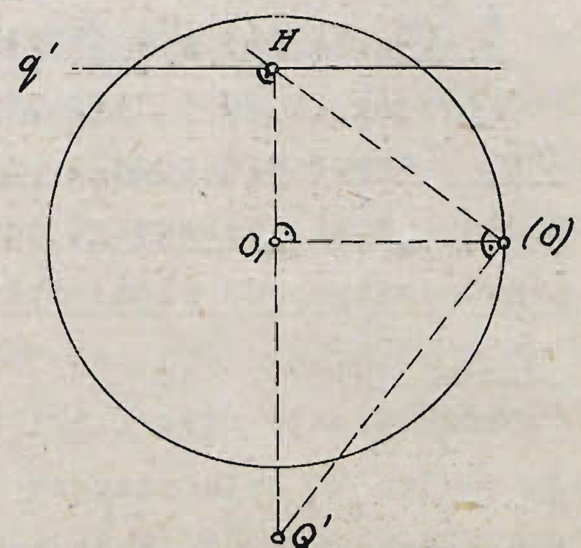
ZADANIE 1. Dana jest płaszczyzna rzucająca Oq'; wyznaczyć prostą rzucającą do niej prostopadłą, czyli: Wyznaczyć punkt zbiegu Q' prostych prostopadłych do płaszczyzn o danej prostej zbiegu q'.

Trzy proste /rys.214 i 215/: prosta największego spadku OH płaszczyzny Oq', oddalenie OO_1 i prostopadła OQ' leżą w jednej płaszczyźnie prostopadłej do q'. W ten sposób powstaje trójkąt prostokątny HOQ', którego znamy wysokość OO_1 oraz jeden z odcinków przeciwprostokątnej, mianowicie O_1H; jest to odległość punktu głównego O_1 od prostej zbiegu q'. Przewróćmy trójkąt HOQ' na płaszczyznę rzutów dokoła prostej O_1H i wykreślmy go w tem położeniu; punkty H, O_1 i Q', jako należące do osi obrotu nie zmienią przytem swego położenia. Aby wyznaczyć punkt szukany Q', spuszczamy z punktu głównego na q' prostopadłą, spodek jej H łączymy z końcem (O)

równoległego do q' promienia koła oddalenia i w punkcie (O) wystawiamy prostopadłą do $H(O)$.



Rys. 214.



Rys. 215.

Punkt Q' leży w przecięciu tej prostopadłej z prostą O_1H.

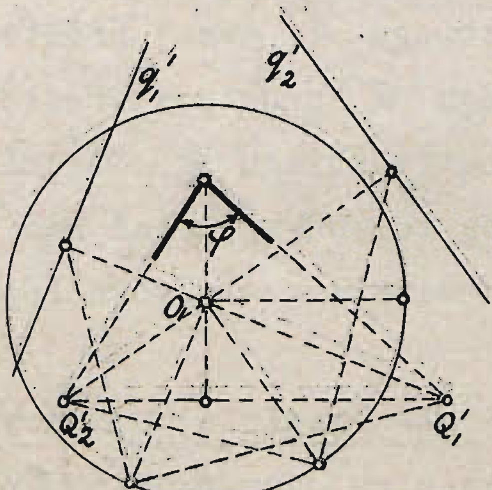
ZADANIE 2. Dana jest prosta rzucająca OQ; wyznaczyć płaszczyznę rzucającą do niej prostopadłą, czyli: Wyznaczyć prostą zbiegu q' płaszczyzn prostopadłych do prostych o danym punkcie zbiegu Q'.

Rozwiązanie polega oczywiście na wykreśleniu kładu tego samego trójkąta prostokątnego HOQ', z tą jedynie różnicą, że nie punkt Q', ale punkt H jest szukany /rys.205 i 215/. Prosta zbiegu q' jest prostopadłą do O, Q', poprowadzoną przez H.

ZADANIE 3. Przez daną prostą S, Q' poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej płaszczyzny $s\,q'$. Prosta zbiegu q' szukanej płaszczyzny musi przechodzić przez punkt zbiegu Q' danej prostej /§87/ oraz przez punkt zbiegu Q' prostych prostopadłych do płaszczyzny o prostej zbiegu q', będzie to zatem prosta łącząca oba te punkty; ślad zaś s, będzie prostą poprowadzoną przez S, równolegle do q'.

ZADANIE 4. W danej płaszczyźnie s, q' poprowadzić prostą, która przecina daną prostą $S\,Q'$ i jest do niej prostopadła. Punkt zbiegu Q' szukanej prostej musi leżeć na prostej zbiegu q' danej płaszczyzny /§ 87/ oraz na prostej zbiegu q' płaszczyzn prostopadłych do prostych o punkcie zbiegu Q'; będzie to zatem punkt przecięcia obu tych prostych; ślad S, będzie punktem, w którym równoległa do $Q'Q'$, poprowadzona przez S przecina s.

ZADANIE 5. Przez dany punkt (H', S, Q') poprowadzić prostopadłą do płaszczyzny danej $s\,q'$. Wyznaczymy najpierw prostą zbiegu q' płaszczyzn prostopadłych do prostych o punkcie zbiegu Q', poczem przez punkt (A', S, Q') poprowadzimy płaszczyznę o prostej zbiegu q' /§ 96/ i jeżeli potrzeba, wyznaczymy punkt, w którym ta płaszczyzna przecina prostą SQ' /§ 89/.

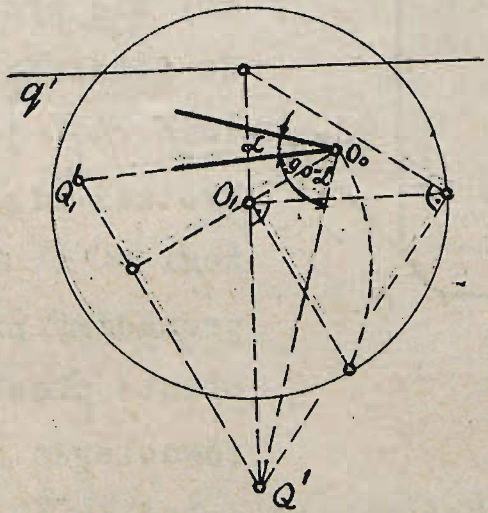


Rys. 216.

§ 106. Kąty dwuścienne. Zadanie. Znaleźć wielkość kąta dwuściennego dwóch płaszczyzn, których proste zbiegu q_1' i q_2' są dane. Jeżeli z jakiegokolwiek punktu np. ze środka rzutów spuścimy prostopadłe OQ_1' i OQ_2' na obie płaszczyzny, to kąt między tymi prostopadłymi równy jest kątowi dwuściennemu tych płaszczyzn lub z nim spełniający. Znajdźmy przeto /rys.216/ ślady Q_1' i Q_2' promieni rzucających prostopadłych do tych płaszczyzn /§ 105/, zad.1/, poczem wyznaczmy kąt $Q_1' O Q_2'$ przez kład trójkąta $Q_1' O Q_2'$ dokoła $Q_1' Q_2'$ /§ 99/.

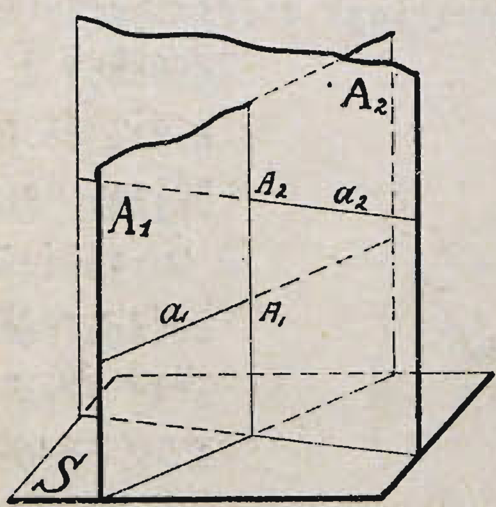
§ 107. Kąt prostej z płaszczyzną. Zadanie. Znaleźć wielkość kąta prostej z płaszczyzną, jeżeli ich punkt zbiegu Q_1' i prosta zbiegu q' są dane. -

Kąt prostej z płaszczyzną jest dopełnieniem kąta prostej z prostopadłą do płaszczyzny. Jeżeli Q_1' jest punktem zbiegu danej prostej /rys.217/, a q' prostą zbiegu danej płaszczyzny, to znajdujemy najpierw punkt zbiegu Q' prostopadłych do płaszczyzn o prostej zbiegu q', a następnie wyznaczamy kąt między prostemi, których punkty zbiegu są Q_1' i Q'; kąt dopełniający będzie szukanym kątem $\mathcal{L}$.



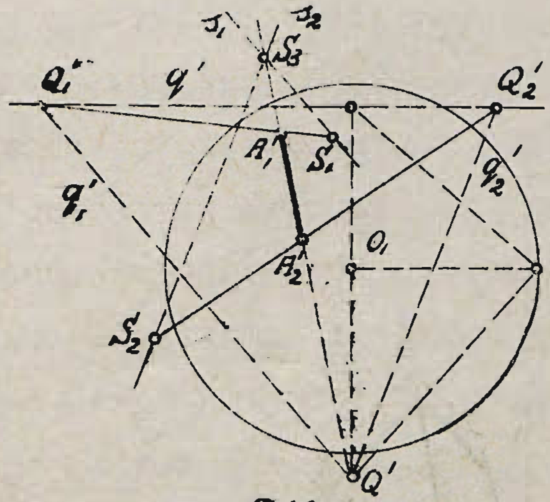
Rys. 217.

§ 108. Odległość prostych skośnych. Jest to długość wspólnej prostopadłej przecinającej obie proste. Aby ją otrzymać, poprowadźmy płaszczyznę S do obu prostych równoległą /rys.218/ i przez każdą z tych prostych poprowadźmy następnie płaszczyznę prostopadłą do S. Przecięcie tych płaszczyzn będzie prostą przecinającą obie dane proste i do każdej z nich prostopadłą. Aby się przekonać, że istotnie odległość A_1A_2 jest najkrótszą między prostemi a_1 i a_2, poprowadźmy przez te proste płaszczyzny równoległe do S; odcinek A_1A_2 jest najkrótszą odległością tych płaszczyzn; każdy inny odcinek, łączący jakikolwiek punkt prostej a_2 z jakimkolwiek punktem prostej a_1 byłby pochyły do obu tych płaszczyzn, a zatem dłuższy od odcinka A_1A_2.



Rys. 218.

Niech będą /rys.219/ dwie proste S_1Q_1' i S_2Q_2'; prosta $q' \equiv Q_1'Q_2'$ jest prostą zbiegu płaszczyzn do obu tych prostych równoległych. Wyznaczmy punkt zbiegu Q' prostych do płaszczyzn tych prostopadłych /§ 105 zad.1/ i zapomocą tego punktu wykreśl-

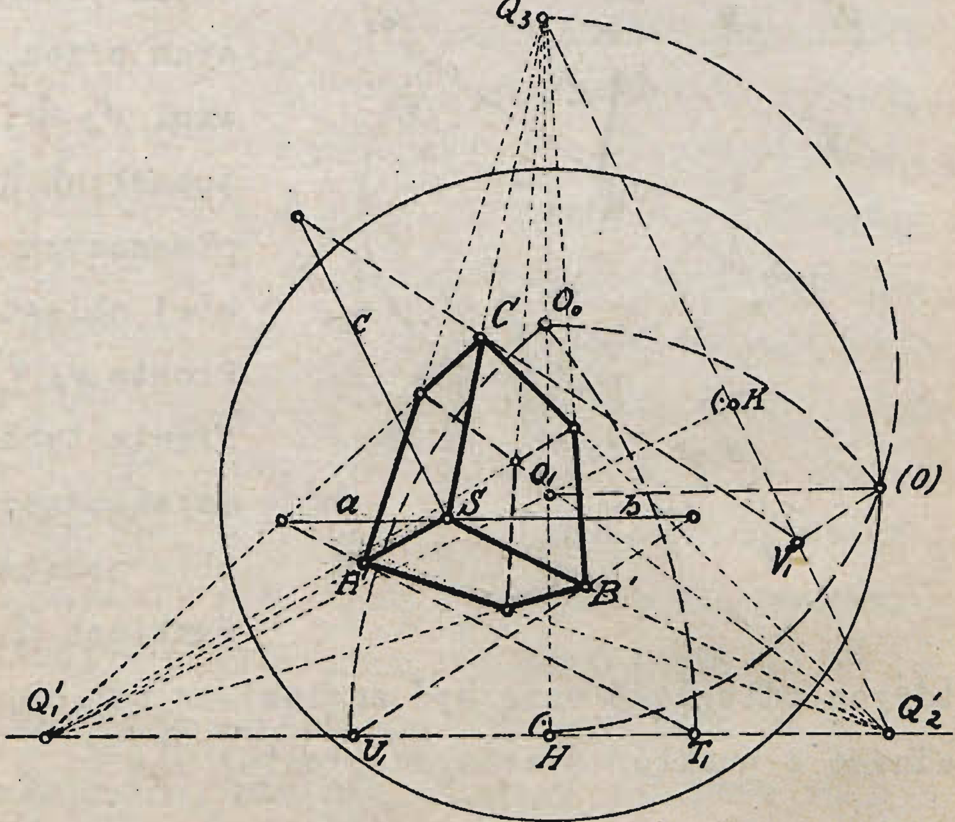


Rys. 219.

my proste zbiegu q_1' i q_2' i ślady s_1 i s_2 płaszczyzn przechodzących przez $S_1 Q_1'$ wzgl. $S_2 Q_2'$ i prostopadłych do płaszczyzn o prostej zbiegu q'. Prosta $S_3 Q'$ przecięcia tych płaszczyzn przecina obie proste w punktach A_1 i A_2, których odległość może być znaleziona np. zapomocą jednego z punktów miarowych prostej $S_3 Q'$.

§ 109. Zastosowanie. Zadanie. Wykreślić rzut środkowy prostopadłościanu, jeżeli dane są punkty zbiegu Q_1', Q_2' i Q_3' oraz długości a, b i c krawędzi wychodzących z wierzchołka leżącego w danym punkcie S płaszczyzny rzutów.

Ponieważ Q_1', Q_2' i Q_3' /rys.220/ są punktami zbiegu trzech prostych wzajemnie prostopadłych, więc punkt główny O_4 będzie leżał na prostopadłej $Q_3'H$,



Rys. 220.

spuszczonej z Q_3' na $Q_1' Q_2'$ oraz na prostopadłej $Q_1' K$ spuszczonej z Q_1' na $Q_2' Q_3'$; jest to więc punkt przecięcia tych dwóch prostopadłych . Promień koła oddalenia $O_1 (O)$ znajdziemy w przecięciu półkola opisanego na $Q_3' H$ z równoległą do $Q_1' Q_2'$ wyprowadzoną z punktu głównego O_1. Zakreślając z punktu H koło promieniem $H(O)$ /albo opisując na $Q_1' Q_2'$ półkole/ wyznaczymy na $Q_3' H$ kład O_o środka rzutów dokoła $Q_1' Q_2'$; koła zakreślone z punktów zbiegu Q_1' i Q_2' promieniami $Q_1' O_o$ wzgl. $Q_2' O_o$ wyznaczą na $Q_1' Q_2'$ punkty miarowe T_1 i U_1 prostych o punktach zbiegu Q_1' wzgl. Q_2', koło zaś zakreślone z punktu Q_3' promieniem $Q_3'(O)$ / = odległości punktu zbiegu Q_3' od środka rzutów/wyznaczy na $Q_2' Q_3'$ punkt miarowy V_1 prostych o punkcie zbiegu Q_3'. Odmierzmy od punktu S odcinki a i b na równoległej do $Q_1' Q_2'$, a odcinek c na równoległej do $Q_2' Q_3'$, łącząc końce tych odcinków z punktami miarowemi T_1, U_1 i V_1, otrzymamy na prostych SQ_1', SQ_2' i SQ_3' punkty A', B' i C', które są rzutami wierzchołków prostopadłościanu leżącemi na krawędziach wychodzących z wierzchołka S; pozostałe wierzchołki wyznaczymy bez trudności zapomocą punktów zbiegu Q_1', Q_2' i Q_3' krawędzi prostopadłościanu.-