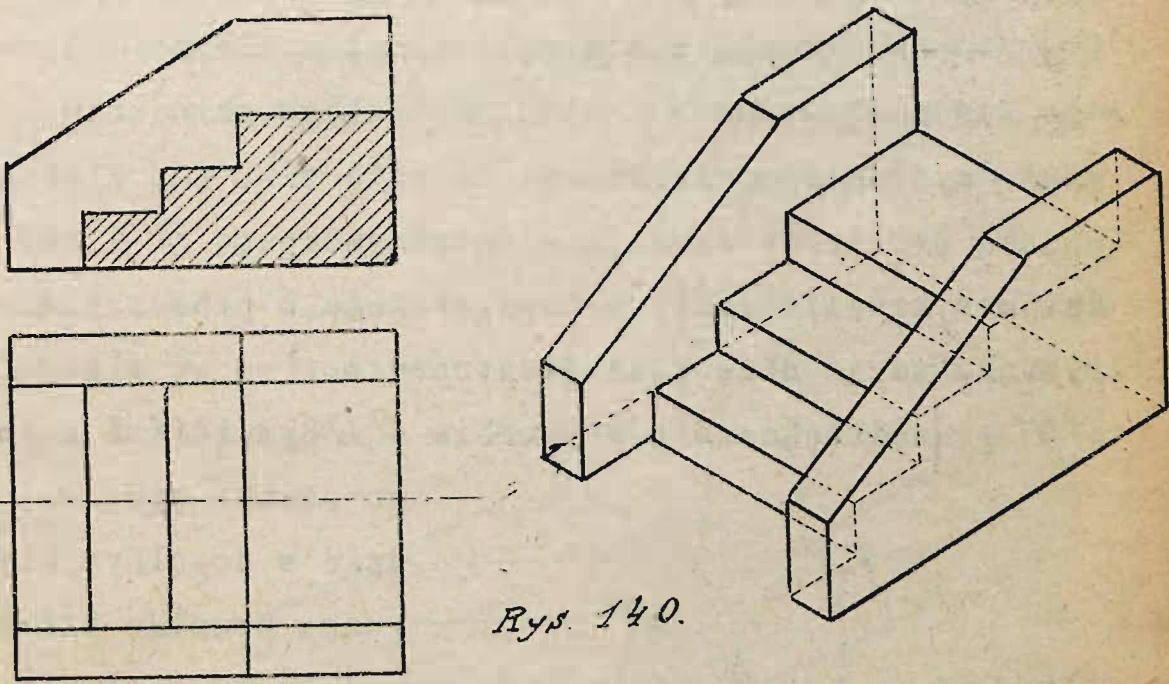
kreślono np. w rzucie izometrycznym schodki złożone z trzech stopni, do których z obu stron przylegają dwie ściany.



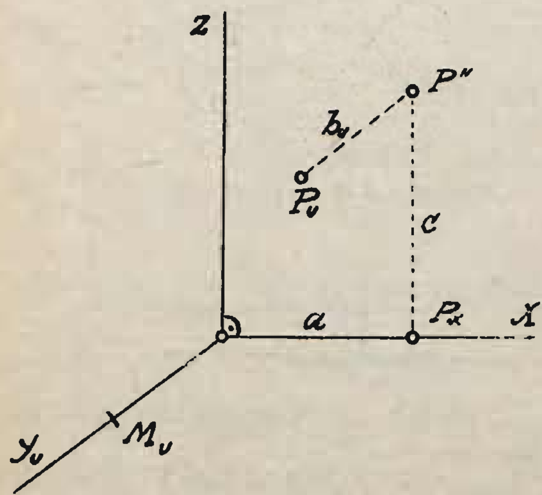
Rys. 140.

Podziałka 1:5 Podziałka $\sqrt{3}:5\sqrt{2} = 1:4,08$.

ROZDZIAŁ VI. RZUTY UKOSNE.

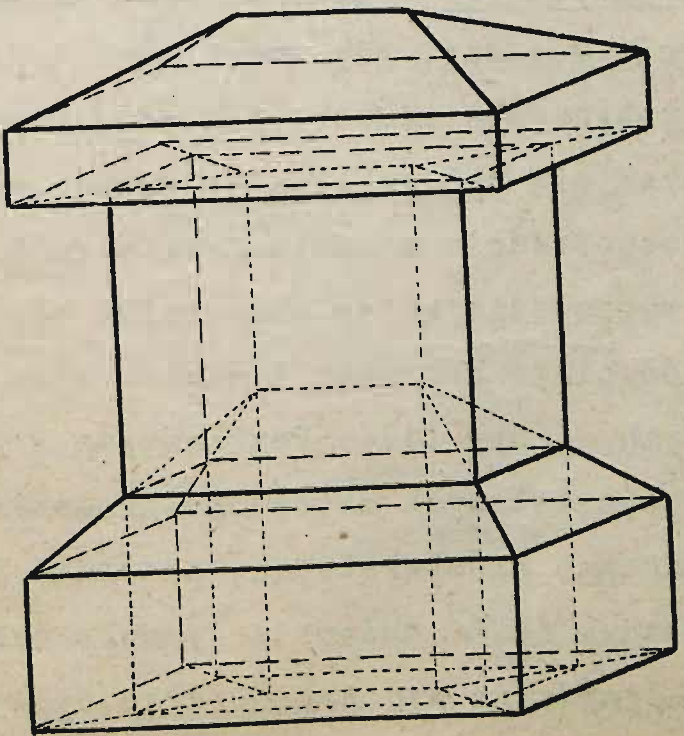
§57. Odwzorowanie punktu. Przypuśćmy teraz, że płaszczyzna rzutów P jest równoległa lub nawet przystaje do jednej z płaszczyzn spółrzędnych, np. do zx lub xy, kierunek zaś rzutów jest ukośny względem tej płaszczyzny. Wtedy mamy do czynieni z aksometrją ukośną, zwaną też rzutami ukośnemi,

<u>perspektywą równoległą lub kawalerską.</u> Każda figura, położona w płaszczyźnie do niej równoległej będzie odwzorowana w naturalnej wielkości i kształcie. Dwie spółrzędne każdego punktu figury /X i Z albo X i Y/ odwzorowują się w naturalnej wielkości, trzecia zaś spółrzędna /Y lub Z/ ulega skróceniu wzgl. wydłużeniu, zależnemu od kąta α, pod którym padają promienie rzucające na płaszczyznę P. Aby zatem wykreślić rzuty osiowe, trzeba w płaszczyźnie rysunku wziąć dwie osie prostopadłe X i Z albo X i Y przecinające się w punkcie O /Rys.141/ i z tego punktu wyprowadzić w dowolnym kierunku prostą, która będzie rzutem ukośnym trzeciej osi Y albo Z. Na tym rzucie osiowym weźmiemy dowolny odcinek OM_v uważając go za rzut ukośny odcinka znanej długości /np. jednostki długości/ leżącego na trzeciej osi. Mając spółrzędne a, b i c jakiegokolwiek punktu P,



Rys. 141.

odmierzamy na osi X od punktu O spółrzędną a w naturalnej wielkości do punktu P_x, w tym punkcie wystawiamy prostopadłą do osi X (a więc równoległą do osi Z) i od punktu P_x odmierzamy na niej również w naturalnej wielkości spółrzędną c do punktu P'', wreszcie z punktu P'' prowadzimy równoległą do y'' i od punktu P'' odmierzamy na niej odcinek $P''P_u$, który tak się ma do spółrzędnej b, jak odcinek OM_u do prawdziwej długości odcinka OM leżącego na osi y. W ten sposób spółrzędna b ulega skróceniu (lub wydłużeniu) w stosunku $\cot g \alpha$,



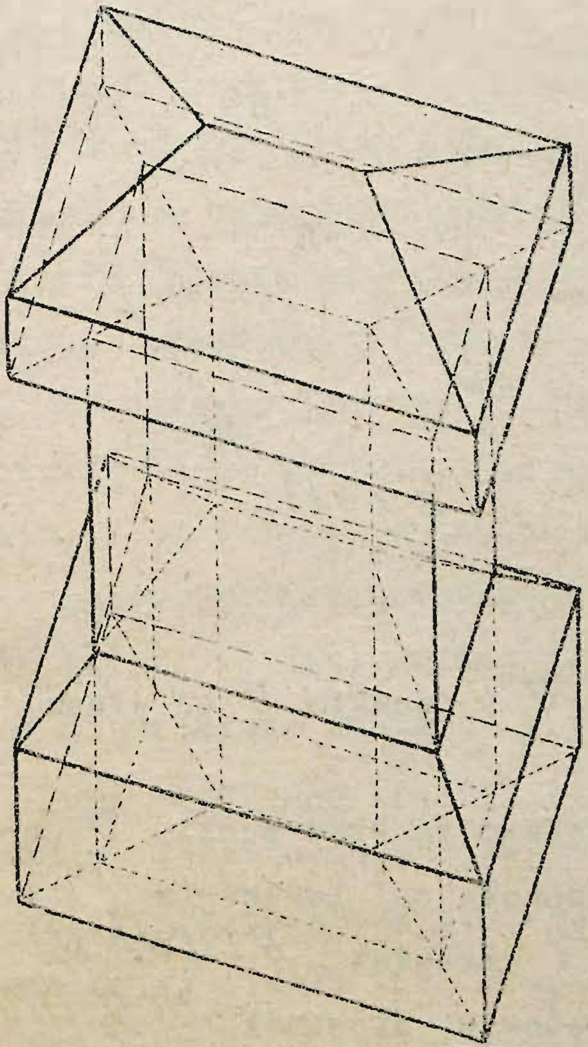
Rys. 142.

gdzie α jest kątem promieni rzucających z płaszczyzną rysunku.

§58. Rzut ukośny figury, której rzuty prostokątne są dane.

Wykreślmy rzut ukośny słupa kamiennego, którego rzuty prostokątne były podane na rys.131, przypuszczając, że skrócenie na osi y, t.j. $\cot\alpha = \frac{1}{2}$ /rys.142/. Sposób wykreślenia różni się od sposobu podanego w §54 tem jedynie, że dla wykonania rysunku potrzebna jest redukcja, zupełnie zresztą dowolna, jednego tylko wymiaru.

§59. Perspektywa wojskowa. Rzut ukośny będzie szczególnie dogodny, gdy $\cot\alpha = 1$ t.j. gdy $\alpha = 45°$ jeżeli płaszczyzną rzutów jest płaszczyzna xy, to rzut nazywa się perspektywą wojskową. Rzut ten otrzymujemy bezpośrednio z rzutu poziomego t.j. z planu figury, wyprowadzając ze wszystkich jego punktów linje w dowolnym kierunku i odmierzając na nich wysokość tych . /Rys.143/. Perspektywa wojskowa jest jedną z najprostszych metod odwzorowania figur danych w rzutach prostokątnych; podobnie jak w rzucie izometrycznym /§56/ możemy z rysunku bezpośrednio wybierać prawdziwe wymiary spółrzędnych każdego punktu, niestety jednak obrazy otrzymano są w znacz

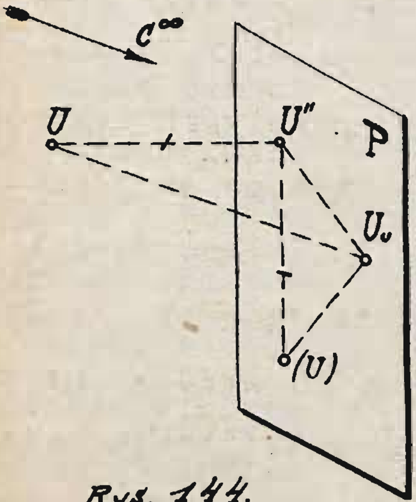


Rys. 143.

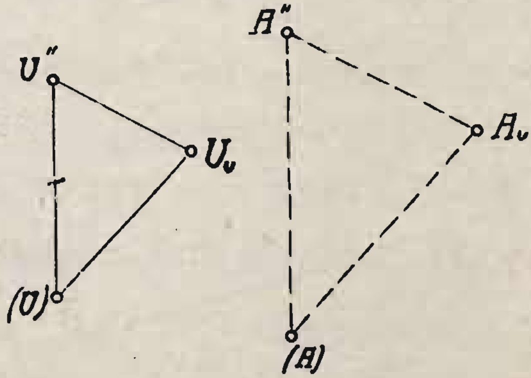
nym stopniu zniekształcone.

§60. Trójkąt rzutowy. Niechaj będzie punkt jakikolwiek U nie leżący w płaszczyźnie rysunku, t.j. w płaszczyźnie aksonometrji P /Rys. 144/; niechaj punkt U'' będzie rzutem prostokątnym, a punkt U_u rzutem ukośnym punktu U na płaszczyznę P /Rys. 144 i 145/. Przez punkt U'' poprowadźmy jakąkolwiek prostą /np. pionową/

w płaszczyźnie P i odmierzmy na tej prostej odcinek



Rys. 144.

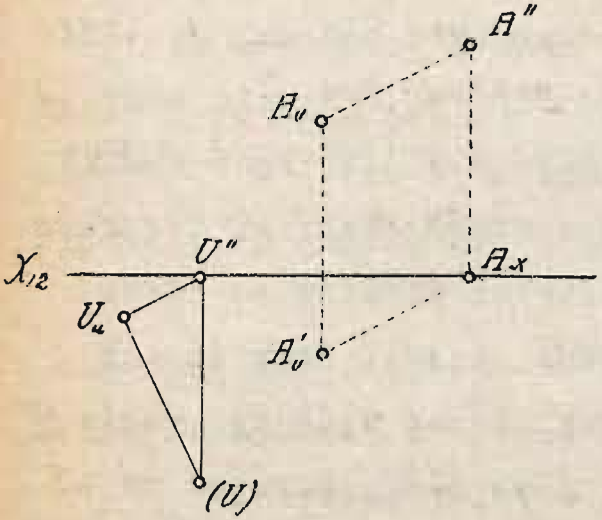


Rys. 145.

$U''(U)$ równy odległości $U''U$ punktu U od płaszczyzny P.

Punkt (U) możemy uważać za kład punktu U po dokonanym jego obrocie dokoła osi leżącej w P i przechodzącej przez U''. Trójkąt $U''(U)U_u$ nazywa się trójkątem rzutowym, stosunek $U''U_u : U''(U) = \cot g\,\alpha$ nazywa się skróceniem rzutu ukośnego; przez podanie takiego trójkąta kąt α, a więc i kierunek rzutu ukośnego jest wyznaczony. Trójkątów rzutowych jest oczywiście nieskończenie wiele, ten sam rzut ukośny może być określony przez trójkąty rzutowe różne co do położenia, wielkości i kształtu. Aby trójkąt był rzutowym wystarcza bowiem, by jeden jego bok był równoległy do stałego kierunku oraz by stosunek tego boku do jednego z pozostałych równał się $\cot g.\alpha$. Przez podanie któregokolwiek trójkąta rzutowego odległości wszystkich punktów od płaszczyzny rysunku są wyznaczone, jeżeli dane są ich rzuty: prostokątny i ukośny. Niech będą np. rzuty A'' i A_u pewnego punktu A, /Rys.145/, kreśląc na odcinku $A''A_u$ trójkąt jednokładny z trójkątem rzutowym, t.j. trójkąt o bokach odpowiednio równoległych do boków trójkąta rzutowego, wyznaczmy odcinek $A''(A)$, który jest prawdziwą odległością punktu A od płaszczyzny rysunku, t.j. od punktu A''.

§61. Pierwsza i druga płaszczyzna rzutów. Wprowadźmy teraz nową płaszczyznę rzutów prostopadłą do P którą nazwiemy pierwszą płaszczyzną rzutów i oznaczymy literą P_1. Będzie ona wyznaczona przez swój ślad X_{12} na dotychczasowej płaszczyźnie rzutów P, którą od tej chwili nazywać będziemy drugą płaszczyzną rzutów i oznaczymy przez P_2. Mając rzut ukośny A_u i rzut prostokątny A'' na drugą płaszczyznę rzutów, można z łatwością znaleść rzut ukośny A_u' rzutu prostokątnego A' na pierwszą płaszczyznę rzutów. Z punktu A'' opuśćmy prostopadłą na oś X_{12} /Rys.146/ i na odcinkach $A''A_u$ i $A''A_x$ zbudujemy równoległobok; czwarty wierzchołek A'_u tego równoległoboku będzie szukanym punktem. Nawzajem, mając rzut ukośny A_u i



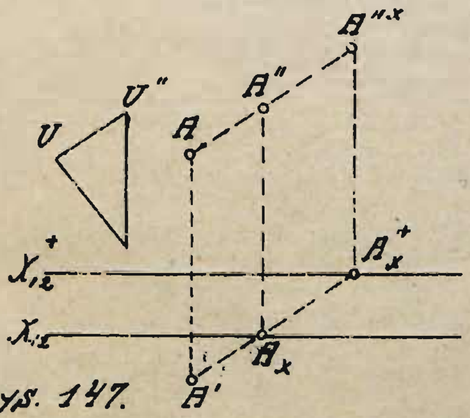
Rys. 146.

rzut ukośny A'_u pierwszego rzutu A', możemy znaleźć rzut drugi A''. W tym celu z punktu A'_u prowadzimy równoległą do boku $U_u U''$ trójkąta rzutowego, z punktu przecięcia A_x tej równoległej z osią X_{12} wystawiamy do niej prostopadłą, na której odmierzamy $A_x A'' = A'_u A_u$. Prosta AA' jest równoległa do płaszczyzny rysunku P_2, zatem jej rzut ukośny $A_u A'_u$ jest jej równy i do niej równoległy. Gdy nie będzie zachodziła obawa pomieszania punktu przestrzeni A z jego rzutem ukośnym A_u oraz pierwszego rzutu A' z rzutem ukośnym pierwszego rzutu A'_u, będziemy opuszczali wskaźnik „u". Widzimy zatem, że zamiast odwzorowywać punkt

A zapocą pary punktów A_u A'' leżących na prostej o stałym kierunku U_u U'', możemy go odwzorować za pomocą pary punktów A_u, A'_u, leżących na prostej o stałym kierunku prostopadłym do osi X_{12}. Odcinek A'_u A_u jest przytem równy i równoległy do pierwszej odległości punktu A.

Tak pojęta metoda rzutów ukośnych nie jest dla nas nową; stosowaliśmy ją wielokrotnie dla objaśnienia wykreśleń metody rzutów prostokątnych.

§62. Przeniesienie równoległe osi. Z wykreślenia podanego w § poprzednim dla znalezienia rzutu wynika, że przez przeniesienie równoległe osi X_{12} drugie odległości punktów odwzorowanej w rzutach ukośnych figury powiększają się lub zmniejszają o ten sam odcinek. Jeżeli zatem dane są rzuty ukośne F_u i F'_u figury F, to przeniesienie równoległe osi X_{12} nie ma wpływu na żaden z tych rzutów ukośnych, natomiast drugi rzut F'' ulega przeniesieniu w kierunku równoległym do UU'' na odle-



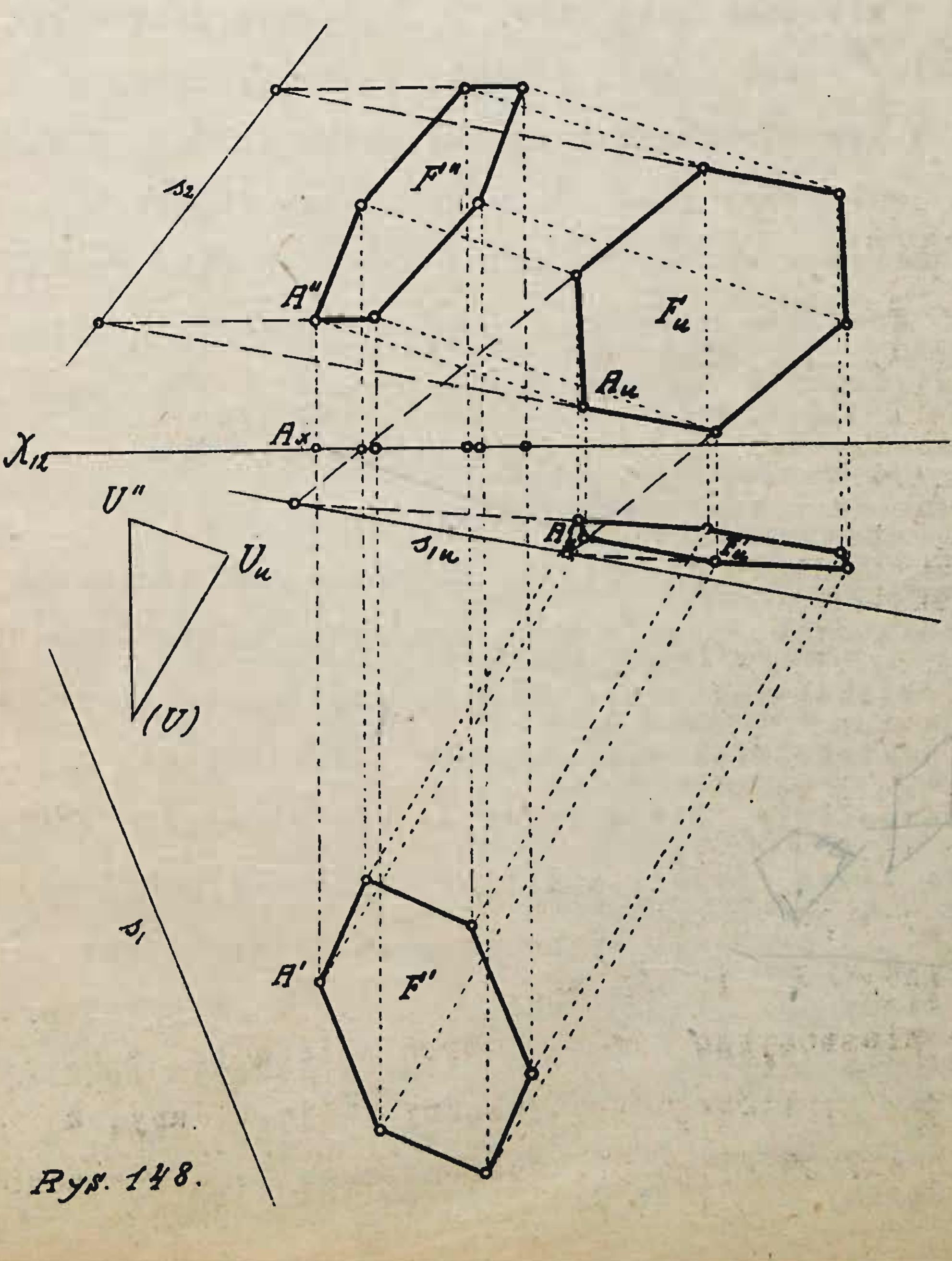
Rys. 147.

głość $A_x A_x^+$. Podobnie, jak w rzutach prostokątnych opuszczamy zatem zazwyczaj oś X_{12} i wprowadzamy ją w miarę potrzeby, licząc się z jaknajgodniejszym jej dla naszego celu położeniem. Kierunek osi X_{12} jest wyznaczony, gdy dane są rzuty ukośne A, A' jednego choćby punktu A, albowiem pierwsza odległość AA' tego punktu, a więc i jej rzut ukośny $A_u A'_u$, jest do osi X_{12} prostopadły /rys.147/.

<u>§63. Związek rzutów ukośnych danej figury z jej rzutami prostokątnemi.</u> Jeżeli dane są rzuty ukośne F_u i F'_u figury F, oraz trójkąt rzutowy $U''U(U)$, to możra znaleść jej rzuty prostokątne F'' i F' i to w sposób znacznie prostszy, niżby to miało miejsce w aksonometrji prostokątnej. Poprowadzimy dowolną prostopadłą do prostej łączącej rzuty ukośne jakiegokolwiek punktu A i obrawszy ją za oś X_{12}, wyznaczymy drugie rzuty A'', B'' ... punktów A, B ... /§61/, poczem zapomocą trójkąta rzutowego znajdziemy pierwsze rzuty tych punktów, jak to widzimy na rys.148.

Nawzajem, gdy dane są rzuty prostokątne $F'F''$ figury F, to otrzymamy jej rzuty ukośne w sposób następujący: Obrawszy trójkąt rzutowy $U''U(U)$ i oś X_{12}, z pierwszego rzutu A' każdego punktu

A prowadzę równoległą do $(U)\,U''$, a z punktu A_x , w którym rzędna $A'A''$ przecina X_{12} równoległą do $U''\,U_u$; w przecięciu tych dwóch równoległych otrzymym rzut ukośny A'_u pierwszego

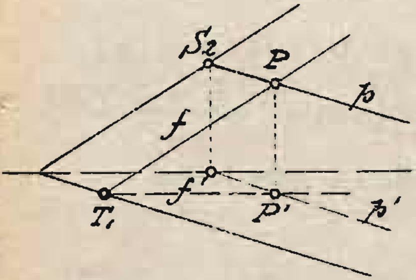


Rys. 148.

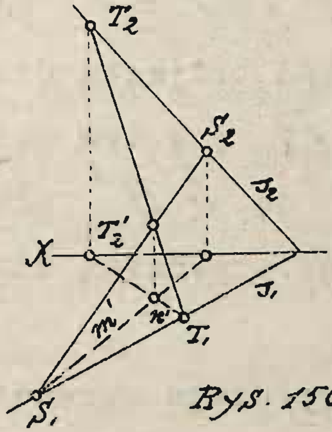
rzutu A'. Wystawiając w tym punkcie odcinek równy i równoległy do pierwszej odległości $A_x A''$ punktu A, otrzymam rzut ukośny A_u punktu A.

Pierwszy rzut F' i jego rzut ukośny F'_u są w powinowactwie, którego osią jest x_{12}, a kierunkiem - kierunek boku $(V)V_u$ trójkąta rzutowego; jeżeli F jest figurą płaską, to drugi rzut F'' jest w powinowactwie z rzutem ukośnym F_u, którego osią jest drugi ślad s_2 płaszczyzny figury F, a kierunkiem - kierunek boku $V''V_u$ trójkąta rzutowego. Wreszcie, podobnie jak w aksonometrji prostokątnej tak i w rzutach ukośnych, F_u i F'_u są w powinowactwie, którego osią jest ślad s_{1u}, a kierunkiem - kierunek prostopadły do osi x_{12}.

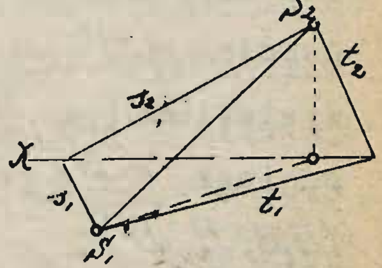
§64. Zadania położenia. Podobnie jak w rzutach prostokątnych, prosta może być odwzorowana przez dwa jakiekolwiek swoje punkty, a płaszczyzna przez dwie jakiekolwiek swoje proste, przecinające się lub równoległe. Wiele zadań da się rozwiązać szczególnie łatwo, jeżeli punktami, wyznaczającemi prostą p, i prostemi wyznaczającemi płaszczyznę S będą ślady S_1 i S_2 wzgl. s_1 i s_2. Rys.149 przedstawia płaszczyznę $s_1 s_2$ wraz z leżącym na niej punktem P, którego rzut ukośny P jest dany, a rzut ukośny P' jego pierwszego rzutu jest wyznaczony z pomocą jednej z dwóch prostych głównych p lub



Rys. 149.



Rys. 150.



Rys. 151.

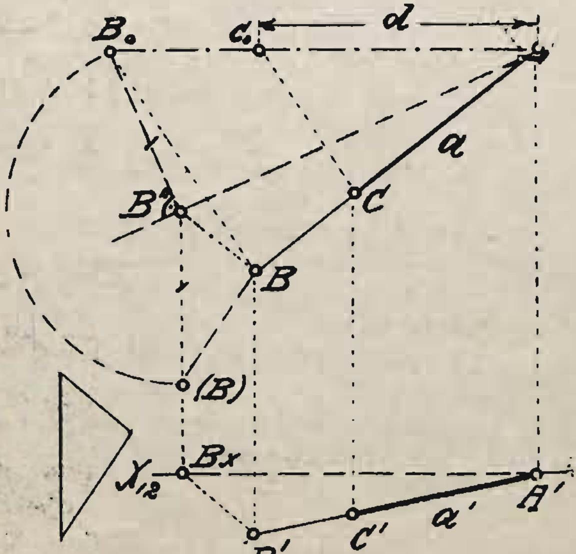
f. /Rys.150/ przedstawia wyznaczenie śladów płaszczyzny, której dwie proste m i n są dane $(m \cdot m' : n \cdot n')$. Rys.151 przedstawia przecięcie dwóch płaszczyzn $s_1\ s_2$ i $t_1\ t_2$. Przykłady te wskazują, że rozwiązanie zadań położenia za pomocą śladów jest w rzucie ukośnym nieco prostsze nawet, niż w rzutach prostokątnych /Por. Rys.38, 40, 42/.

§65. Zadanie miarowe. Jakkolwiek możnaby wszystkie zadania miarowe sprowadzić do rzutów prostokątnych /§63/, będzie wogóle prościej rozwiązywać te zadania bezpośrednio, jak to okażą następujące przykłady.

1/. Wyznaczyć prawdziwą długość odcinka, którego rzuty ukośne AB, $A'B'$ są dane. Poprowadźmy /rys. 149/ oś X_{12} prostopadle do AA' przez A' i zapomocą trójkąta rzutowego wyznaczmy B_x , B'' oraz prawdziwą długość $(B)B''$ odcinka BB'' , poczem wykonajmy kład trójkąta prostokątnego ABB'' dokoła AB'' na P_1 ; w tym celu na prostopadłej wystawionej w B'' do AB'' odmierzamy $B''B_o = B''(B)$, odcinek AB_o jest prawdziwą długością odcinka $(AB, A'B')$.

Do zadanie powyższego sprowadza się następujące zadanie:

2/ Na prostej (aa') od danego na niej punktu (AA') odmierzyć dany odcinek d. Poprowadźmy /Rys.152/ oś X_{12} przez A' prostopadle do AA' i obrawszy na aa' dowolny punkt BB' wyznaczmy jak poprzednio kład AB_o odcinka $(AB, A'B')$. Odmierzywszy na AB_o od punktu A odcinek $AC_o = d$, poprowadźmy

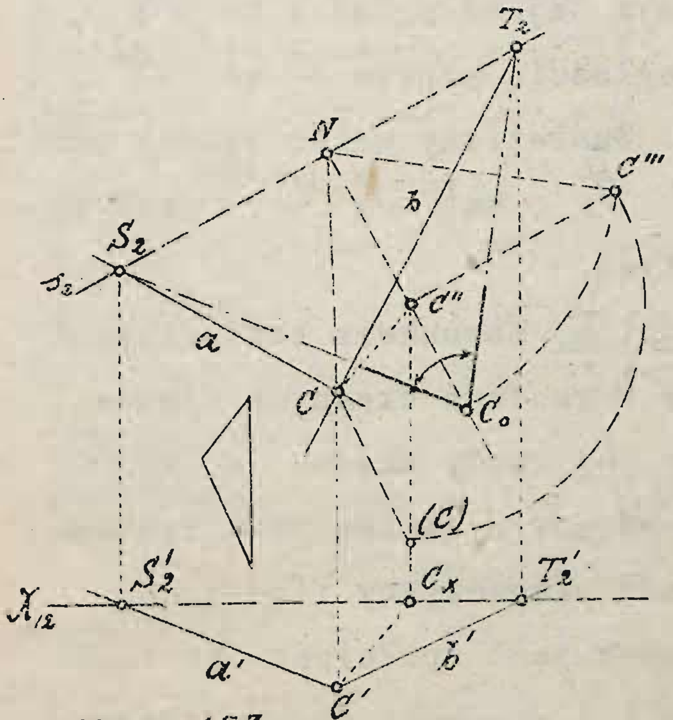


Rys. 152.

z punktu C_o równoległą do $B_o B$, która przetnie

AB w punkcie C; odcinek $(AC, A'C')$ jest szukanym.

3/ Kład płaszczyzny, wyznaczonej przez dwie przecinające się proste. /Wyznaczenie kąta dwóch prostych/. Niech będą dwie proste aa' i bb' przecinające się w punkcie CC' /Rys.153/, poprowadźmy oś X_{12} prostopadle do CC' i wyznaczmy ślady S_2 i T_2

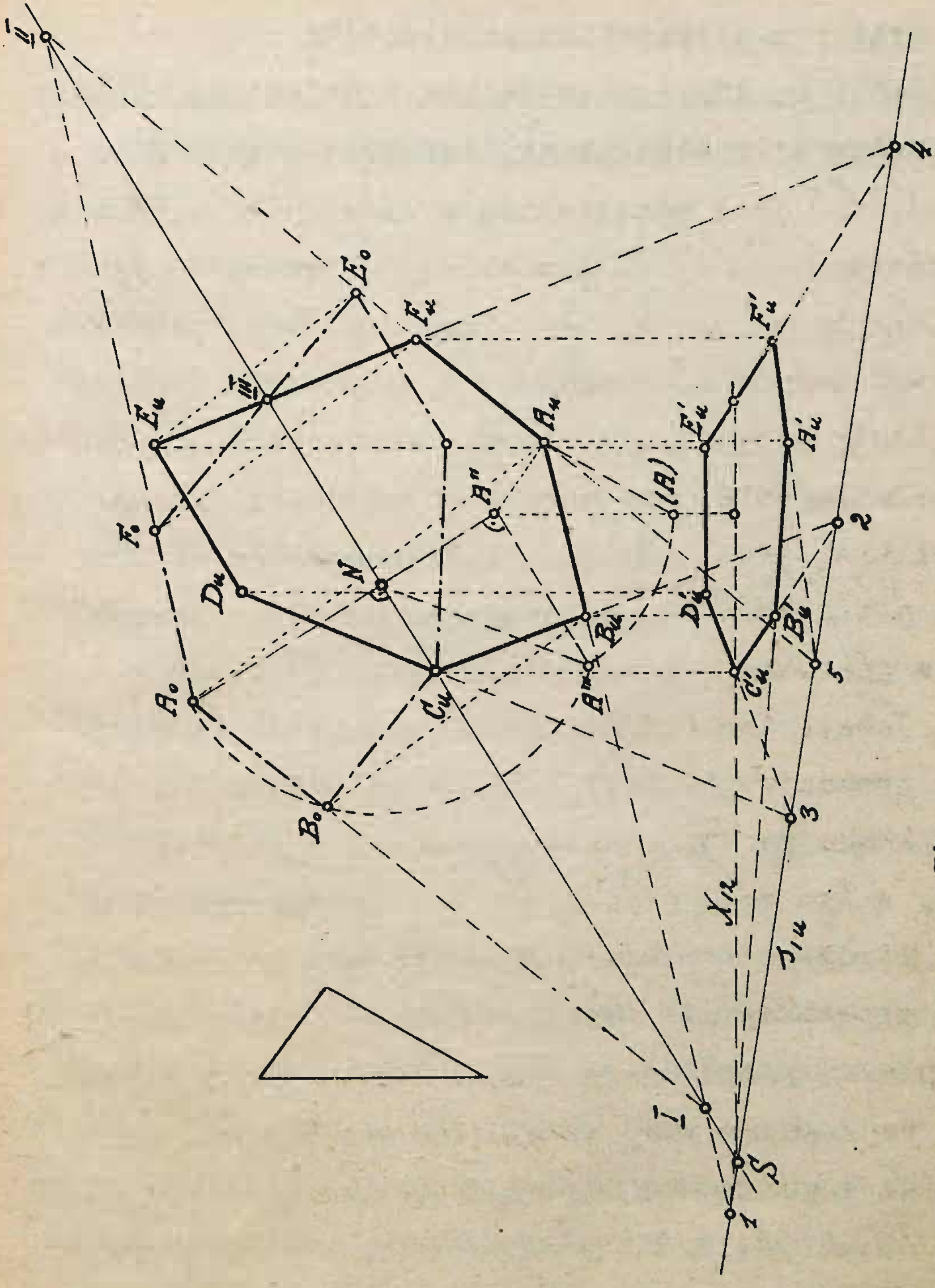


Rys. 153.

prostych aa' i bb'. Dokoła prostej $s_2 \equiv S_2T_2$, która jest drugim śladem płaszczyzny ab, dokonajmy kładu tej płaszczyzny, punkty S_2 i T jako należące do osi obrotu pozostaną nieruchome, wystarczy wyznaczyć kład punktu CC'.

Znajdźmy najpierw frugi rzut C'' tego punktu oraz odległość jego $C''(C)$ od P. Na prostopadłej $C''N$ do śladu s_2 odmierzamy od punktu N odległość punktu C od śladu s_2, wyznaczoną jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego $C''NC'''$, którego jedna przyprostokątna $C''N$ jest rzutem prostokątnym tej odległości na P_2, a druga $C''C'''$ jest odległością punktu C od P_2, a więc równą $C''(C)$. Znaleziony w ten sposób punkt C_o łączymy z S_2 i T_2, kąt $S_2 C_o T_2$ jest kątem dwóch danych prostych.

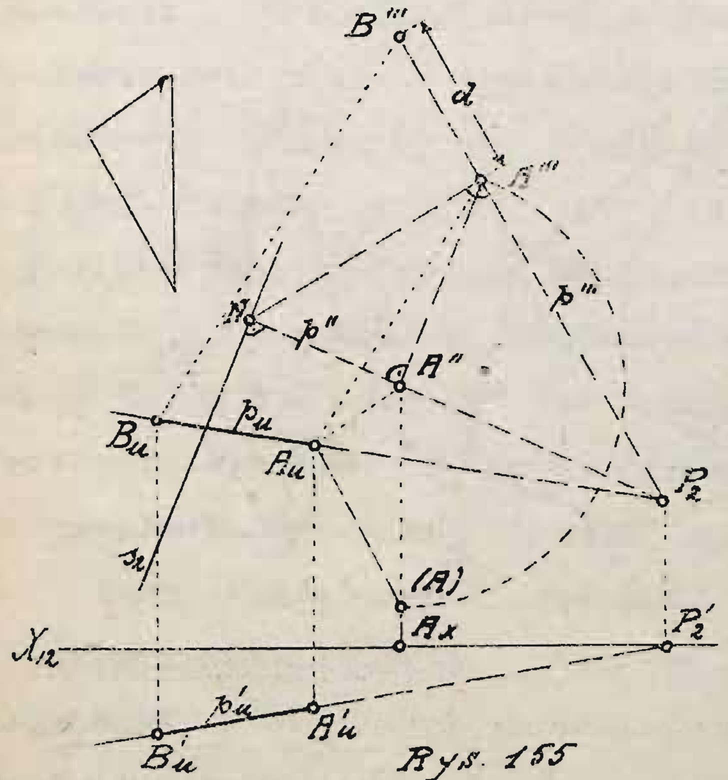
4/ <u>Kłady figur płaskich.</u> Warunkeim koniecznym i dostatecznym. aby dana w rzutach ukośnych figura była płaska, jest, aby jej rzuty ukośne F_u i F_u' były w powinowactwie, oś powiniwactwa jest rzutem ukośnym pierwszego śladu płaszczyzny figury s_{1u} /§63/. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to znajdziemy prawdziwy kształt i wielkość figury zapomocą jej kładu na P_2 dokoła śladu s_2 jej płaszczyzny. W tym celu /Rys.154/ — przez rzut ukośny C_u' jednego z wierzchołków pierwszego rzutu F_u' figury prowadzimy oś X_{12}, wyznaczamy drugi ślad s_2 płaszczyzny figury i sposobem wskazanym w artykule poprzednim znajdujemy kład A_o innego któregokolwiek wierzchołka figury, Zapomocą powinowactwa figur F_u i F_o, którego osią jest s_2, a kierunkiem - kierunek prostej $A_u A_o$, wyznaczamy pozostałe punkty i proste kładu F_o.


II
4
E₀
F'ᵤ
Fᵤ
III
Eᵤ
E'ᵤ
Aᵤ
A'ᵤ
A''
(A)
F₀
2
N
Dᵤ
D'ᵤ
Bᵤ
B'ᵤ
5
A'''
C'ᵤ
A₀
Cᵤ
3
B₀
X₁₂
s₁ᵤ
I
S
1

Rys. 154.

§66. Proste i płaszczyzny prostopadłe.

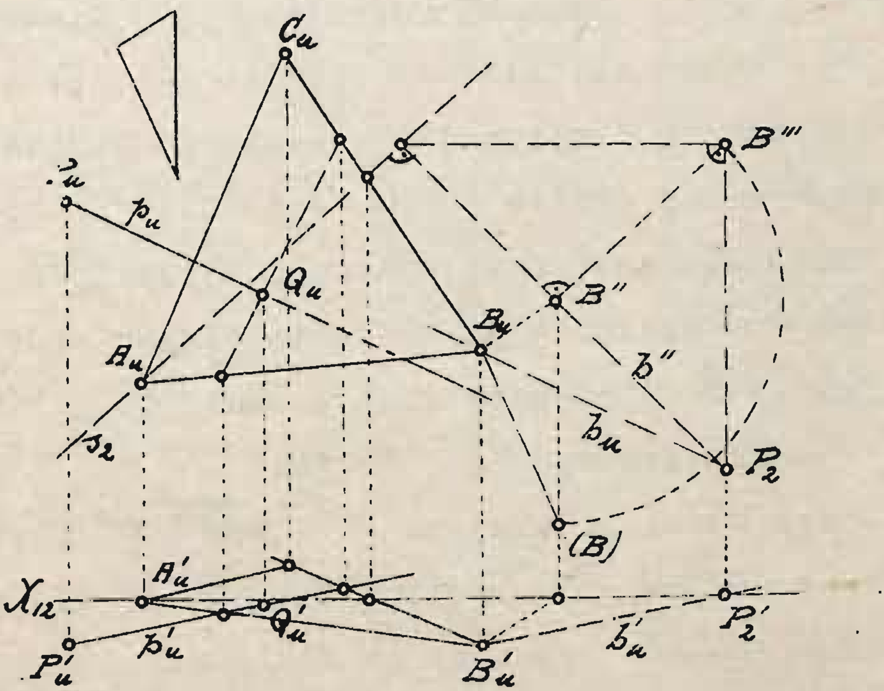
Zadanie I. Do danej płaszczyzny w danym jej punkcie wystawić prostopadłą danej długości. Możemy przypuścić, że płaszczyzna jest dana za pomocą swego drugiego śladu s_2, osi x_{12} i rzutów ukośnych A_u, A'_u jej punktu A; jeżeli bowiem płaszczyzna byłaby dana w inny sposób, np. zapomocą



Rys. 155

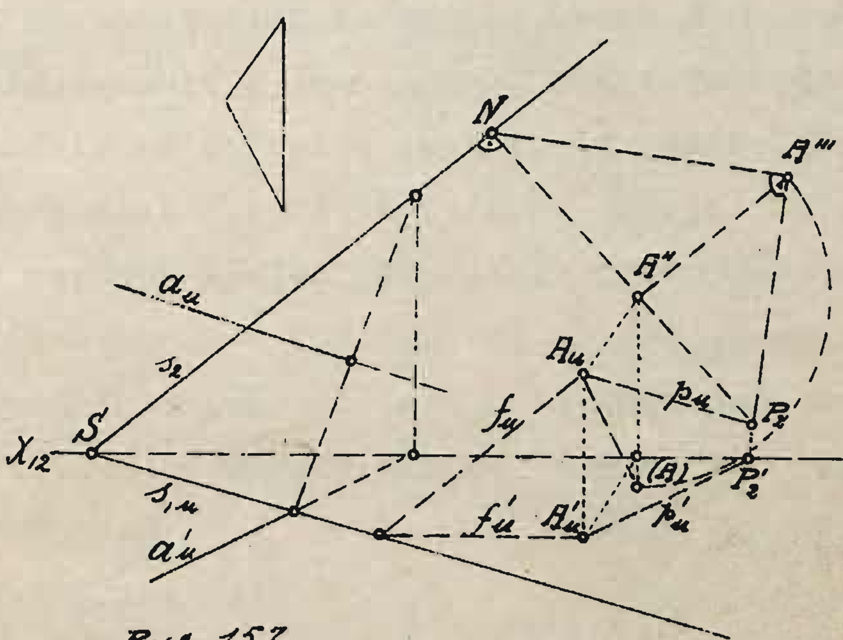
dwóch swoich prostych, a punkt A tej płaszczyzny zapomocą jednego ze swych rzutów ukośnych np. A_u, to obrawszy dowolnie oś x_{12}, moglibyśmy wyznaczyć ślad s_2 i drugi rzut ukośny A'_u punktu A. Przez punkt A poprowadźmy płaszczyznę P_3 prostopadłą do s_2 /rys.155/, w tej płaszczyźnie leżeć musi szukana prostopadła p, której drugi ślad P_2 musi leżeć na drugim śladzie płaszczyzny P_3, t.j. na prostopadłej p'' spuszczonej z punktu A'' na s_2. Obróćmy płaszczyznę P_3 dokoła - jej śladu p'' na P_2 i wyznaczmy kład A''' punktu A; prosta $A'''N$ będzie kładem linji największego spadku płaszczyzny danej, prosta $p''' = A'''P_2$ do niej prostopadła - kładem szukanej prostopadłej, a punkt P_2, w którym p''' przecina p'' - drugim śladem prostej p. Łącząc $P_2 A_u$ otrzymamy rzut ukośny p_u, łącząc $P_2' A_u'$ otrzymamy p_u'. Trójkąt $A_u A'' A'''$ jest rzutowym, odmierzywszy na p''' $A'''B''' = d$ i poprowadziwszy $B'''B_u \parallel A'''A_u$ otrzymamy B_u, którego rzędna $B_u B_u'$ wyznacza na p_u' punkt B_u'.

Zadanie II. Z punktu $P_u P_u'$ na płaszczyznę $(A_u B_u C_u, A_u' B_u' C_u')$ spuścić prostopadłą. Przez punkt A_u' poprowadźmy oś X_{12} i wyznaczmy drugi ślad płaszczyzny ABC, poczem na mocy poprzedniego zadania wykreślmy rzuty ukośne $b_u b_u'$ prostopadłej b wystawionej w punkcie B do płaszczyzny ABC /rys.156/. Z punktu $P_u P_u'$ poprowadźmy prostą $p_u p_u' \parallel b_u b_u'$. Punkt przebicia $Q_u Q_u'$ prostej p z płaszczyzną ABC wyznaczymy według §64.



Rys. 156.

Zadanie III. Do danej prostej $a_u a'_u$ przez dany punkt $A_u A'_u$ poprowadzić płaszczyznę prostopadłą. Przez punkt $A_u A'_u$ /rys.157/ poprowadźmy prostą $p_u p'_u$, równoległą do $a_u a'_u$ i obrawszy oś X_{12} wyznaczmy drugi ślad $P_2 P'_2$ tej prostej. Wyznaczywszy drugi rzut A'' oraz odległość $A''(A)$ punktu A od P_2, wykreślmy trójkąt prostokątny $P_2 A''' N$, w którym dana jest wysokość $A''A''' = A''(A)$ i jeden z odcinków przeciwprostokątnej, mianowicie $A''P_2$. Prosta s_2 prostopadła do $A''P_2$ w punkcie N jest drugim śladem szukanej

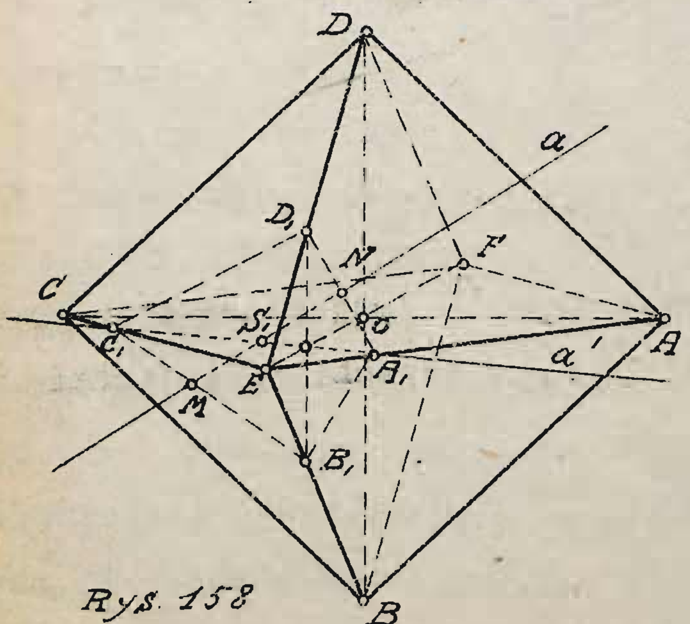


Rys. 157.

płaszczyzny, pierwszy ślad s_1 znajdziemy np. zapomocą linji czołowej $f_u f_u'$, przechodzącej przez punkt $A_u A_u'$.

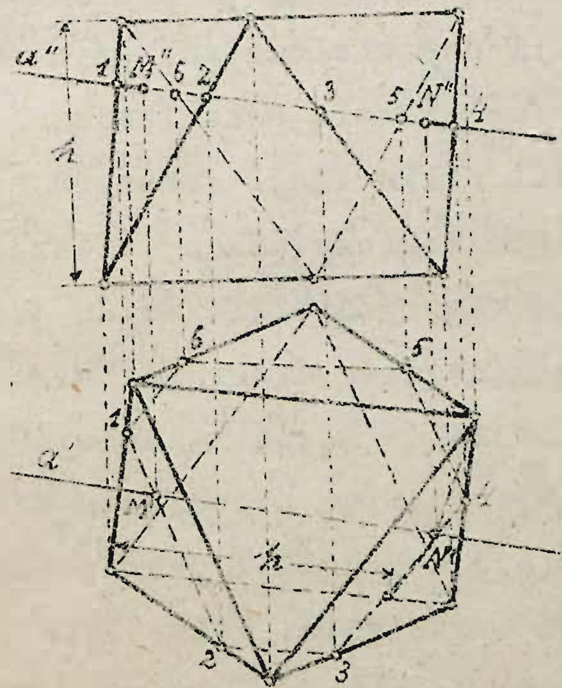
ROZDZIAŁ VII. PRZECIĘCIA I PRZENIKANIA WIELOŚCIANÓW

§ 67. Przebicie wielościanu prostą. Metoda ogólna, według której wyznaczamy punkty przebicia wielościanu prostą daną, polega na poprowadzeniu przez tę prostą płaszczyzny pomocniczej i wyznaczeniem rzutów wielokąta, który jest przecięciem wielościanu ową płaszczyzną. Punkty, w których dana prosta przecina obwód tego wielokąta, należą zarówno do prostej danej, jak do powierzchni wielościanu, są to więc szukane punkty przebicia. Obiór płaszczyzny pomocniczej zależeć będzie wogóle od wielościanu i od metody, którą jest odwzorowany. Najczęściej posługujemy się jedną z płaszczyzn rzucających daną prostą. Na rys.158 wyznaczyliśmy w ten sposób punkty przebicia danego w rzucie ukośnym ośmiościa-



Rys. 158

nu foremnego $ABCDEF$ prostą aa'. Płaszczyzną pomocniczą jest tutaj płaszczyzna aa', rzucająca prostą a poziomo, przecina ona ośmiościan według czworokąta A, B, C, D, punkty M i N, w których a przecina obwód tego czworokąta są szukanemi punktami przebicia. Podobnież dla wyznaczenia punktów, w których prosta $a'a''$ przebija ośmiościan foremny dany w rzutach prostokątnych, prowadzimy /rys.159/ płaszczyznę rzucającą prostą a pionowo, wyznaczamy rzut poziomy 6-kąta przecięcia, a następnie punkty M' i N' w których a' przecina jego obwód. W pewnych przypadkach dogodniej

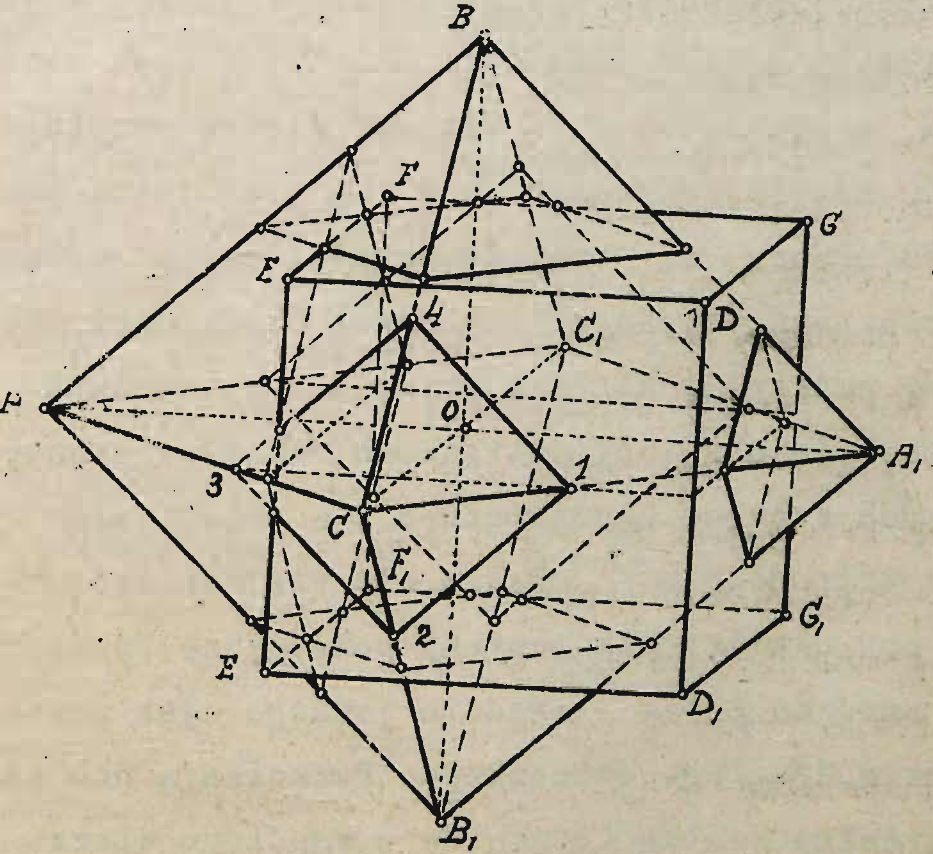


Rys. 159.

jest obrać inną płaszczyznę pomocniczą, której przecięcie z wielościanem jest wielokątem możliwie najprostszym. Jeżeli np. szukamy punktów, w których prosta przebija ostrosłup lub graniastosłup, to najdogodniej będzie zastosować płaszczyznę przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa, względnie płaszczyznę równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa /rys.161 i 162/.

§ 68. Wzajemne przenikanie dwóch wielościanów. Do zagadnień o przebijaniu wielościanów prostemi sprowadzają się zagadnienia wzajemnego przenikania się wielościanów. Jeżeli dwa wielościany mają część objętości wspólną, mówimy, że się przenikają, istnieje wtedy jedna lub kilka linji łamanych zamkniętych, leżących na obu wielościanach; wierzchołki tych łamanych są punktami przebicia ścian jednego wielościanu przez krawędzie drugiego. Figurę przenikania dwóch wielościanów można wyznaczyć dwoma sposobami: 1/ albo wyznaczając przecięcie każdej ściany jednego wielościanu z drugim i uwzględniając tylko te części każdego przecięcia, które leżą wewnątrz obwodu tej ściany, 2/ albo wyznaczając punkty przebicia jednego wielościanu krawędziami drugiego i nawzajem, a następnie tak łącząc te punkty, aby połączone punkty leżały na tej samej ścianie, zarówno w jednym, jak w drugim wielościanie.

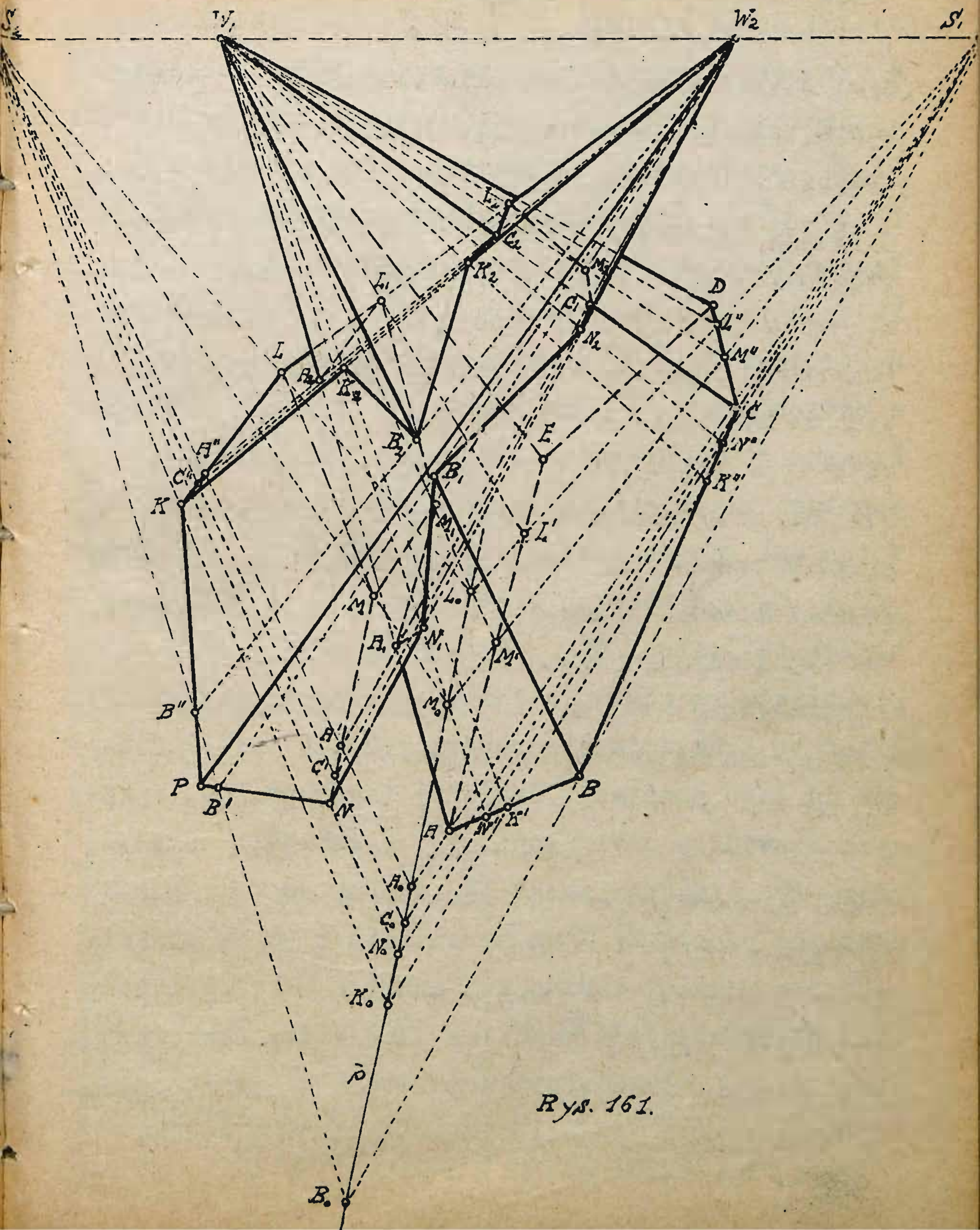
§ 69. Przenikanie sześcianu i ośmiościanu foremnego o osiach wzajemnie równoległych. Niechaj będzie dany w rzucie ukośnym ośmiościan foremny o osiach AA_1, BB_1 i CC_1 oraz sześcian $DEFGD_1E_1F_1G_1$, którego krawędzie są odpowiednio równoległe do osi ośmiościanu /rys.160/. Wyznaczmy najpierw kwadrat $1, 2, 3, 4$, według którego płaszczyzna ściany DD_1E_1E przecina ośmiościan i uwzględnijmy tę tylko część tego kwadratu, która leży wewnątrz ściany DD_1E_1E.



Rys. 160.

Postępująo w ten sam sposób ze wszystkimi innymi ścianami sześcianu otrzymamy figurę przenikania, złożoną z jednego 14-kąta skośnego, 2-oh trójkątów i jednego kwadratu.

§ 70. Przenikanie dwóch ostrosłupów. Niech $W_2 KLMNP$ i $W_1 ABCDE$ /rys.161/ będą rzutami dwóch ostrosłupów, prosta p niech będzie rzutem prostej przecięcia płaszczyzn S_1 i S_2, w których leżą podstawy $ABCDE$ i $KLMNP$ tych ostrosłupów, a punkty S_1 i S_2 rzutami śladów prostej $W_1 W_2$ na płaszczyznach S_1 i S_2, obojętną jest przytem rzeczą, czy mamy do czynieniami z rzutami prostokątnemi, ukośnemi lub nawet środkowemi. Wyznaczmy punkty, w których krawędzie ostrosłupa W_1 przebijają ściany ostrosłupa W_2 oraz punkty, w których krawędzie ostrosłupa W_2 przebijają ściany ostrosłupa W_1. Przez oba wierzchołki W_1 i W_2 poprowadźmy płaszczyzny pomocnicze, przechodzące zarówno przez krawędzie jednego, jak przez krawędzie drugiego ostrosłupa. Przecinają one każdy ostrosłup według trójkątów o wspólnym wierzchołku W_1 lub W_2 i o podstawach, które są śladami tych płaszczyzn na S_1 lub S_2. Wykreślmy najpierw w płaszczyźnie S_1 ślad płaszczyzny przecho-



S_2
W_1
W_2
S_1
L_2
C_2
K_2
L_1
M_2
D
N_2
L
K_2
C
E
A''
C_1
B_1
K
K''
L'
L_0
M
N_1
M'
B''
M_0
P
B'
N
A
K'
B
A_0
C_0
N_0
K_0
p
B_0

Rys. 161.

dzącej przez krawędź W_1A i wierzchołek W_2 .- W tym celu łączymy najpierw punkt S_1 z punktem A, wyznaczamy następnie punkt A_0 , w którym prosta S_1A przecina p , poczem łączymy punkt A_0 i S_2. . Prosta A_0S_2 jest śladem płaszczyzny W_1W_2A na S_2; łącząc wierzchołek W_2 z punktami A' i A'' , w których ta prosta przecina obwód $KLMNP$ otrzymamy trójkąt $W_2A'A''$ przecięcia płaszczyzny W_1W_2A z ostrosłupem W_2 , a punkty A_1 i A_2 , w którycl krawędź W_1A przecina obwód tego trójkąta, są punktami przebicia ostrosłupa W_2 krawędzią W_1A . W ten sam sposób znajdziemy punkty B_1 i B_2 oraz C_1 i C_2 , w których krawędzie W_1B i W_1C przebijają ostrosłup W_2 . Krawędzie W_1D i W_1E nie przebijają go wcale, albowiem ślady płaszczyzn przez te krawędzie przechodzących nie przecinają obwodu jego podstawy. Znajdźmy teraz punkty, w których krawędzie ostrosłupa W_2 przebijają ostrosłup W_1 . Łączymy punkt S_2 z punktem K i przedłużając prostą S_2K do przecięcia z p w punkcie K_0 , a później łącząc ten punkt z S_1 , otrzymamy ślad płaszczyzny W_1W_2K na S_2, który przecina obwód pierwszej podstawy w punktach K' i K''; proste W_1K' i W_1K'' przecinają krawędź W_2K w punktach K_1 i K_2, które są punktami przebicia ostrosłupa W_1 krawędzią W_2K. Podobnież znajdziemy punkty L_1 i L_2, M_1 i M_2, N_1 i N_2, w których krawędzie W_2L, W_2M i W_2N przebijają ostrosłup W_1; krawędź W_2P nie przebija wcale ostrosłupa W_1.

Tak więc mamy 14 punktów przebicia:

A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 K_1 K_2
L_1 L_2 M_1 M_2 N_1 N_2.

Ponieważ boki linji przenikania mają leżeć na ścianach obu ostrosłupów, więc łączyć należy tylko te punkty, które leżą na tej samej ścianie zarówno w pierwszym, jak i w drugim ostrosłupie. Każdy ze znalezionych 14 punktów leży na trzech ścianach, których jest przecięciem, jak to uwidoczniono w następującym wykazie:

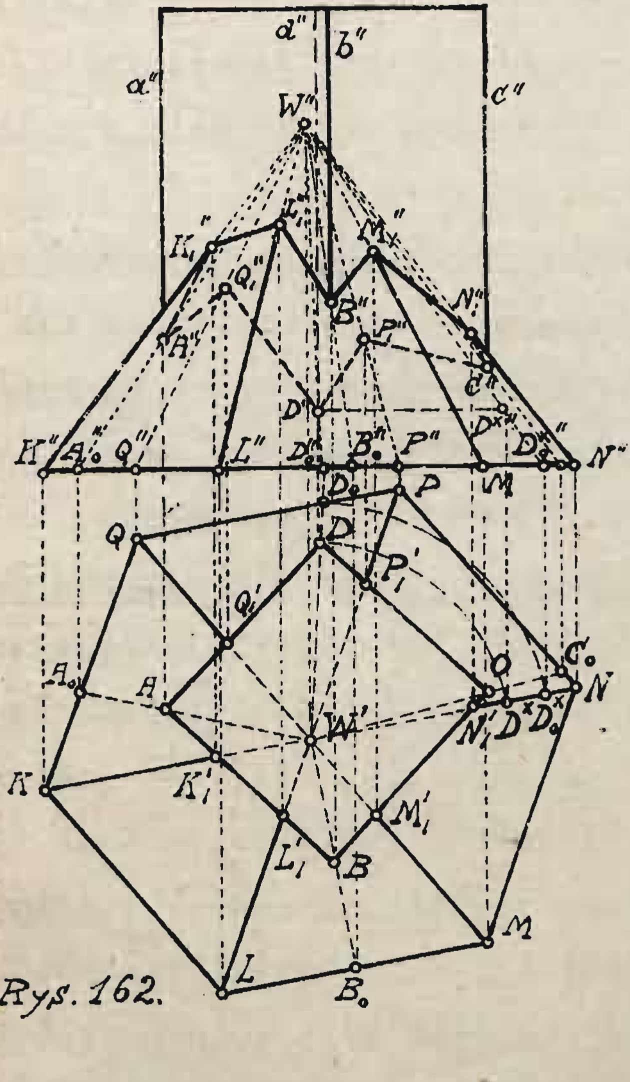
A_1	W_1AB	W_1AE	W_2MN	K_2	W_2KL	W_2KP	W_1BC
A_2	W_1AB	W_1AE	W_2KL	L_1	W_2LM	W_2KL	W_1AE
B_1	W_1BC	W_1AB	W_2NP	L_2	W_2LM	W_2KL	W_1CD
B_2	W_1BC	W_1AB	W_2KP	M_1	W_2MN	W_2LM	W_1AE
C_1	W_1CD	W_1BC	W_2MN	M_2	W_2MN	W_2LM	W_1CD
C_2	W_1CD	W_1BC	W_2KL	N_1	W_2NP	W_2MN	W_1AB
K_1	W_2KL	W_2KP	W_1AB	N_2	W_2NP	W_2MN	W_1BC

Aby znaleźć punkt, z którym należy połączyć A_1, weźmy dwie jego ściany do dwóch ostrosłupów należące, np. W_1AB i W_2NP, i szukajmy śród pozostałych punktów takiego, któryby leżał na tych samych ścianach: będzie to punkt N_1. Ale punkt ten leży również na przecięciu ścian W_1AB i W_2NP, szukamy więc śród pozostałych punktów takiego, któryby leżał na obu tych ścianach; będzie to punkt B_1. Punkt ten leży również na przecięciu ścian W_1BC i W_2NP; drugim punktem na tych samych obu ścianach leżącym będzie N_2. Punkt N_2 leży prócz tego na ścianach W_1BC i W_2MN, na tych samych dwóch ścianach leży punkt C_1. W ten sposób możemy postępować dopóty, dopóki nie dojdziemy z powrotem do punktu A_1, co może nastąpić albo po wymienieniu wszystkich pozostałych punktów, albo też może z pominięciem niektórych z pośród nich. W pierwszym przypadku mówimy, że przenikanie jest *częściowe*, w drugim *zupełne*. W naszym przykładzie mamy przenikanie częściowe; wszystkie 14 punktów dadzą się ustawić w taki sposób, że każdy punkt należy połączyć z następnym, a ostatni z pierwszym:

$A_1\ N_1\ B_1\ N_2\ C_1\ M_2\ L_2\ C_2\ K_2\ B_2\ K_1\ A_2\ L_1\ M_1$

Figurą przenikania jest przeto 14-kąt skośny; dla zdecydowania, który z boków tego 14-kąta jest widzialny, służy zasada oczywista, że tylko taki bok jest widzialny, który leży na widzialnej ścianie pierwszego i na widzialnej ścianie drugiego ostrosłupa.

§ 71. Przenikanie dwóch graniastosłupów lub ostrosłupa z graniastosłupem. Ten sam sposób może być zastosowany do wyznaczenia figury przenikania dwóch graniastosłupów lub ostrosłupa z graniastosłupem, jeżeli zauważymy, że graniastosłup można uważać za ostrosłup o wierzchołku niewłaściwym. Płaszczyzny pomocnicze przez ten wierzchołek przechodzące stają się równoległe do krawędzi graniastosłupa. Przypuśćmy np. /rys.162/, że mamy wyznaczyć figurę przenikania graniastosłupa foremnego o podstawie kwadratowej $ABCD$, leżącej w P_1 z ostrosłupem foremnym sześciokątnym o wierzchołku $W'W''$ i podstawie $KLMNPQ$, leżącej również w P_1. Płaszczyzny pomocnicze będą to płaszczyzny, przechodzące przez $\ddot{W}$ i równoległe do krawędzi graniastosłupa, a więc prostopadłe do P_1. Pierwsze ślady tych płaszczyzn będą to proste wyprowadzone z W' do wszystkich

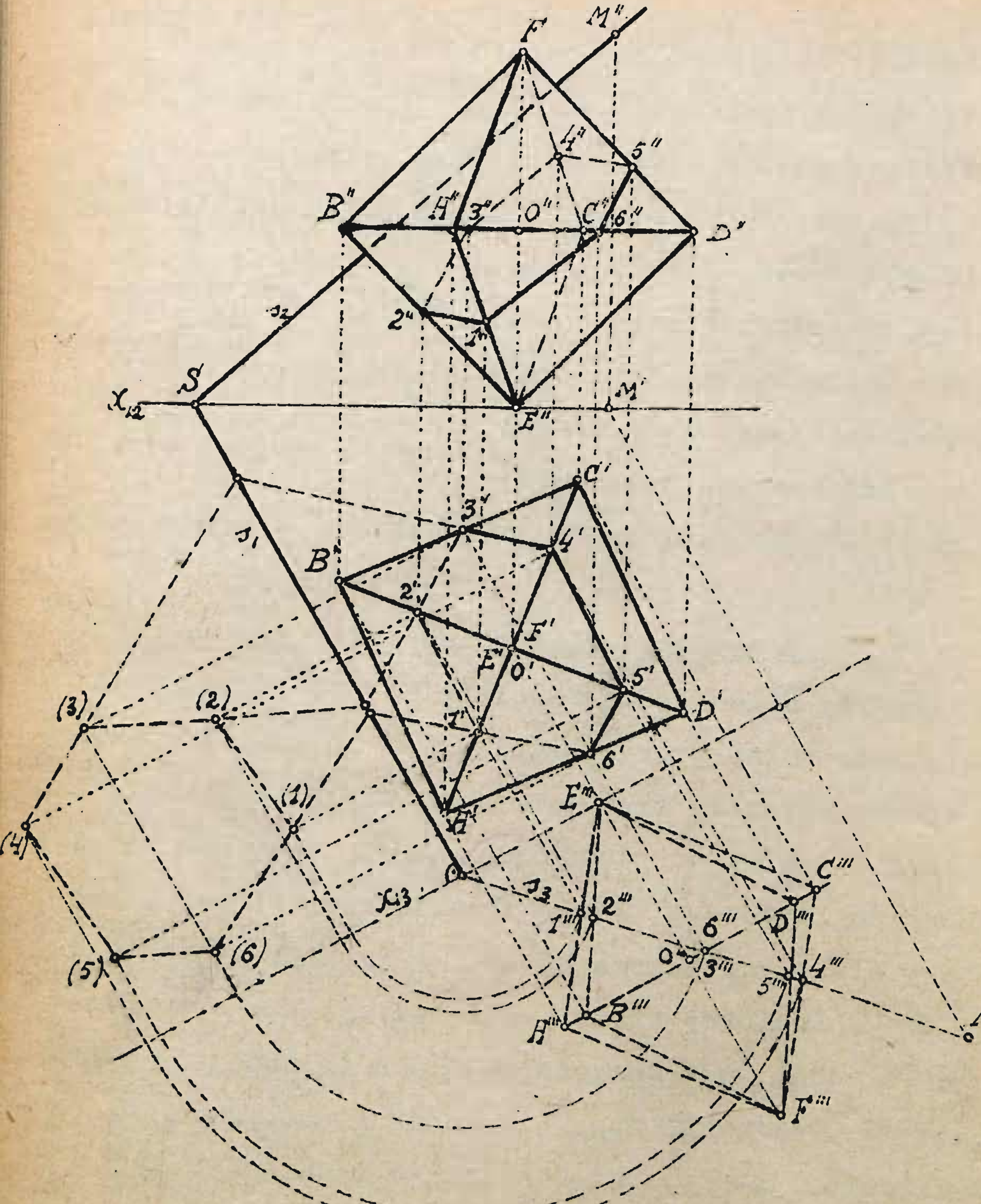


Rys. 162.

10 wierzchołków obu podstaw. Pierwsze rzuty punktów przebicia krawędzi bocznych ostrosłupa ze ścianami graniastosłupa są to punkty, w których pierwsze rzuty tych krawędzi przecinają obwód podstawy graniastosłupa, pierwsze rzuty punktów przebicia krawędzi bocznych graniastosłupa ze ścianami ostrosłupa będą to oczywiście wierzchołki $ABCD$ podstawy graniastosłupa. Aby wyznaczyć drugie rzuty tych punktów, wyznaczamy drugie rzuty prostych przecięcia ścian ostrosłupa z płaszczyznami pomocniczemi, przechodzącemi przez

krawędzie ostrosłupa, jak to wskazuje rysunek. Wszakże wyznaczenie punktu D_1'' byłoby nader niedokładne, gdyż proste $D'D''$ i $W''D_0''$ przecinają się pod bardzo małym kątem. W takim przypadku obracamy prostą WD_0 dokoła wysokości ostrosłupa o taki kąt, aby wyznaczenie na niej punktu D_1 dało się dokonać z dostateczną dokładnością, poczem powracamy z prostą WD_0 wraz z wyznaczonym na niej punktem D_1 do położenia pierwotnego. Użycie obrotu byłoby zresztą zgoła nieuniknione, gdyby prosta $W'D$ była równoległą do linji rzędnych.

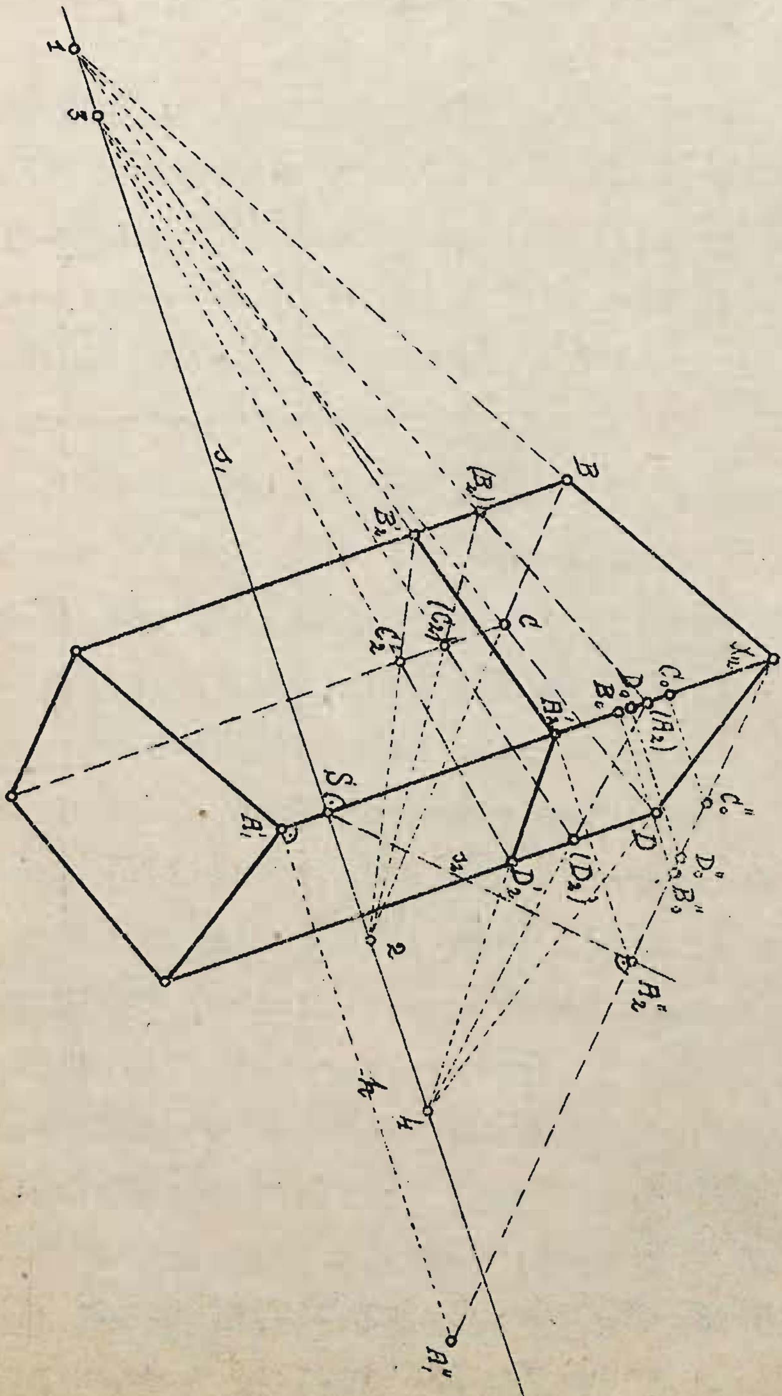
§ 72. Przecięcie wielościanu płaszczyzną jakąkolwiek. Niech będzie wielościan, np. ośmiościan foremny o osi prostopadłej do P_1 /rys.163/, mamy wyznaczyć rzuty oraz prawdziwą wielkość przecięcia tego ośmiościanu płaszczyzną $\vartheta_1 \vartheta_2$. Za nową płaszczyznę rzutów P_3 weźmy płaszczyznę, której pierwszy ślad, czyli nowa oś X_{13} , jest prostopadły do ϑ_1 . Znajdźmy trzeci rzut ośmiościanu oraz trzeci ślad ϑ_3 płaszczyzny $\vartheta_1 \vartheta_2$, a to zapomocą punktu M , wziętego dowolnie na drugim śladzie ϑ_2 . Trzecie rzuty przecięcia leżą w punktach $1'''2'''3'''$ $4'''5'''$ i $6'''$ na śladzie ϑ_3 ; stąd znajdziemy pierwsze, a wreszcie drugie rzuty wierzchołków wielokąta


F
M''
4''
5''
B''
H''
3''
0''
C''
6''
D''
2''
1''
S
x_{12}
E''
M'
C'
3'
4'
B'
2'
F'
E'
0'
5'
D'
1'
6'
H'
(3)
(2)
(1)
(4)
(5)
(6)
x_{13}
E'''
C'''
2'''
1'''
6'''
D'''
0'''
3'''
4'''
5'''
B'''
H'''
M'''
F'''

Rys. 163.

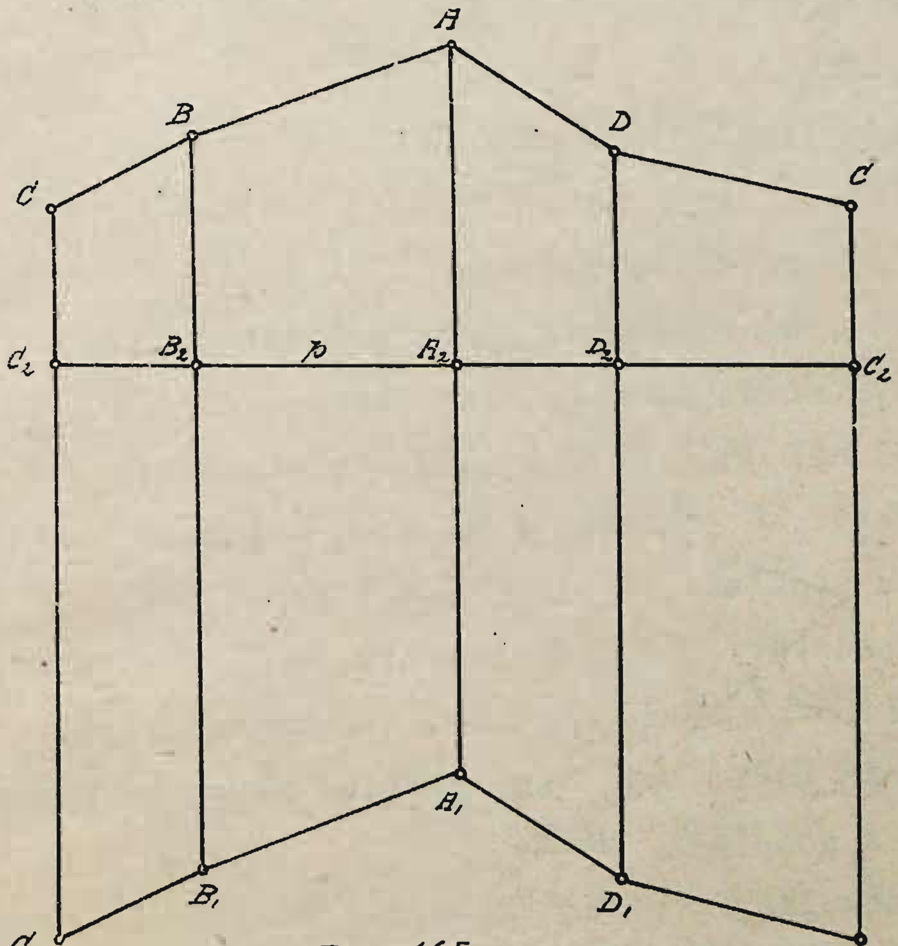
przecięcia. Prawdziwą wielkość i kształt przecięcia znajdziemy, kładąc płaszczyznę $s_1 s_2$ dokoła s_1 na P_1.

§ 73. Rozwinięcie powierzchni graniastosłupa. Niech będzie dana, leżąca w płaszczyźnie P_1 podstawa $ABCD$ graniastosłupa pochyłego, pierwszy rzut $A'A'_1$ jego krawędzi bocznej AA_1 oraz wysokość graniastosłupa h. /rys.164/. Jeżeli powierzchnię boczną graniastosłupa rozciąć według jednej z jego krawędzi bocznych, np. według CC_1 i rozpostrzeć kąty dwuścienne, to ta powierzchnia staje się polem płaskiem, złożonem z 4-ch równoległoboków. Pole to nazywa się rozwinięciem powierzchni bocznej graniastosłupa. Aby je wykreślić przetnijmy przedewszystkiem graniastosłup płaszczyzną prostopadłą do krawędzi bocznych i znajdźmy prawdziwy kształt i wielkość tego przecięcia. Ślad s_1 płaszczyzny siecznej będzie jakąkolwiek prostą prostopadłą do $A'A'_1$ /§ 17/. Pierwszy rzut szukanego przecięcia będzie z podstawą $ABCD$ w powinowactwie, którego osią jest s_1, a kierunkiem kierunek rzutu $A'A'_1$. W samej rzeczy, podstawa $ABCD$ i rzut $A'_2B'_2C'_2D'_2$ są rzutami równoległymi tego samego 4-kąta płaskiego $A_2B_2C_2D_2$ /§ 35/. Dla wyzna-



Rys. 164.

czenia więc tego rzutu wystarczy znaleźć rzut jednego wierzchołka tego 4-kąta, np. A_2' . Obrawszy



Rys. 165.

AA_1' za oś X_{12}, znajdziemy A_1'' , odmierzając $A_1'A_1'' = h$; AA_1'' jest drugim rzutem i zarazem rzeczywistą długością krawędzi AA_1.

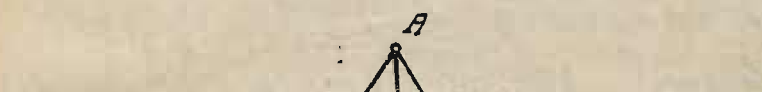
Spuszczając z punktu S prostopadłą na AA_1'' , znajdziemy drugi ślad s_2 płaszczyzny siecznej, a punkt A_2'', w którym ten ślad przecina AA_1'' będzie drugim rzutem szukanego punktu A_2, rzędna punktu A_2'' wyznaczy na AA_1' pierwszy rzut A_2' tego punktu.

Kład przecięcia $A_2 B_2 C_2 D_2$ na P_1 jest w powinowactwie z jego rzutem /§ 35/, przytem oś i kierunek powinowactwa zostają te same. Aby więc wyznaczyć prawdziwą wielkość i kształt tego przecięcia, wystarczy znaleźć kład jednego jego wierzchołka, np. A_2. W tym celu odmierzamy na AA_1' od punktu S odcinek $S(A_2) \equiv SA_2'''$. Łącząc punkt (A_2) z punktami 1 i 4, w których boki AB i AD podstawy $ABCD$ przecinają s, otrzymamy dwa boki $(A_2)(B_2)$ i $(A_2)(D_2)$ szukanego kładu, dwa pozostałe boki znajdziemy również zapomocą powinowactwa z podstawą $ABCD$.

Na dowolnej prostej p odmierzamy teraz /rys. 165/ obwód 4-kąta $A_2 B_2 C_2 D_2$, w punktach $A_2 B_2 C_2$ i D_2 wystawiamy prostopadłe do p i odmierzamy na nich odcinki A_2A, B_2B, C_2C i D_2D równe odpowiednio prawdziwym długościom odcinków tej samej nazwy na krawędziach graniastosłupa. Jeden z nich AA_2 równy jest odcinkowi AA_2'', inne znajdujemy w taki sam sposób na prostej AA_1'' zapomocą równoległych do $A_2' A_2''$, wykreślonych w końcach B_0, C_0 i D_0 odcinków $AB_0 = BB_2'$, $AC_0 = CC_2'$ i $AD_0 = DD_2'$.

Odmierzmy teraz na prostych AA_2, BB_2, CC_2 i DD_2 odcinki AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 równe prawdziwej długości krawędzi, t.j. odcinkowi AA_1'' /rys.164/, wielokąt $CBADCC_1D_1A_1B_1C_1$ jest rozwinięciem powierzchni bocznej danego graniastosłupa.

<u>§ 74. Przecięcie ostrosłupa płaszczyzną.</u> Niech będzie /rys.166/ w płaszczyźnie P podstawa $ABCDE$ ostrosłupa i niech S' będzie rzutem jego wierzchołka S na płaszczyznę P, prosta J niechaj będzie na niej śladem płaszczyzny S, a punkt A_1' rzutem punktu A_1, w którym ta płaszczyzna przecina krawędź SA; mamy znaleźć rzut przecięcia $A_1B_1C_1D_1E_1$ ostrosłupa płaszczyzną S. Trzy płaszczyzny P, S i SAB prze-

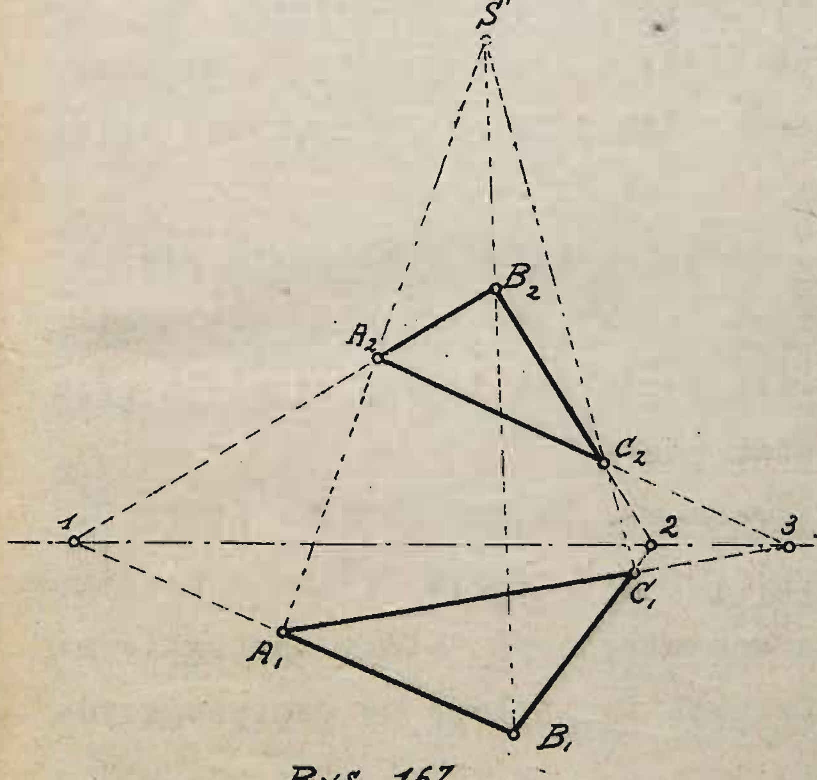


Rys. 166.

cinają się po dwie według prostych przechodzących przez jeden punkt, który nazywamy punktem przecięcia tych 3 płaszczyzn. Dwie z tych prostych są to s i AB, trzecia A_1B_1, a więc i jej rzut $A_1'B_1'$, musi zatem przechodzić przez punkt 1, w którym AB przecina s. Punkt B_1' znajdziemy przeto w sposób następujący: Przedłużamy AB do przecięcia z s w punkcie 1, z którym łączymy punkt A_1', prosta $1A_1'$ przecina $S'B$ w punkcie B_1'. Tak samo znajdziemy następny punkt C_1', gdyż proste BC i $B_1'C_1'$ muszą się również przecinać na prostej s, i tak kolejno wszystkie inne D_1', E_1'; dla sprawdzenia dokładności rysunku stwierdzimy, że proste $E_1'A_1'$ i EA przetną się na prostej s.

<u>§ 75.</u> <u>Trójkąty Desargues'a.</u> Niech będą /rys. 167/ dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, których wierzchołki A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 leżą parami na prostych A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2, przechodzących przez jeden punkt S'. Jeden z tych trójkątów, np. $A_1B_1C_1$ możemy uważać za podstawę ostrosłupa trójkątnego /czworościanu/, punkt S' możemy uważać za rzut prostokątny wierzchołka tego ostrosłupa na płaszczyznę trójkąta ABC, wtedy

trójkąt $A_2\ B_2\ C_2$ będzie rzutem prostokątnym trójkąta A B C , którego wierzchołki leżą na krawędziach ostrosłupa. Płaszczyzna trójkąta $A_2\ B_2\ C_2$ musi przeciąć płaszczyznę trójkąta $A_1\ B_1\ C_1$ według pewnej prostej s , na której spotkać się muszą boki $A_1\ B_1$ i $A_2\ B_2$, $B_1\ C_1$ i $B_2\ C_2$, $C_1\ A_1$ i $C_2\ A_2$. Stąd twierdzenie:



Rys. 167

I. Jeżeli wierzchołki dwóch trójkątów leżą parami na trzech prostych przechodzących przez jeden punkt, to boki tych trójkątów przecinają się parami w trzech punktach jednej prostej.

Nawzajem niech będą dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, których boki A_1B_1 i A_2B_2 , B_1C_1 i B_2C_2 , C_1A_1 i C_2A_2 przecinają się parami w trzech punktach 1, 2 i 3 prostej s . Jeden z tych trójkątów np. $A_2B_2C_2$ możemy uważać za rzut prostokątny trójkąta ABC leżącego w płaszczyźnie S przecinającej płaszczyznę trójkąta $A_1B_1C_1$ według prostej s, przytem boki A_1B_1 i AB, B_1C_1 i BC, C_1A_1 i CA przecinają się parami w tych samych punktach 1, 2 i 3. Prowadząc płaszczyzny przez każdą parę tych prostych, otrzymamy ostrosłup trójkątny o podstawie $A_1B_1C_1$, na którego krawędziach będą leżały wierzchołki trójkąta ABC; rzuty tych wierzchołków t.j. punkty A_2, B_2 i C_2 będą zatem leżały na rzutach krawędzi SA_1, SB_1 i SC_1, t.j. na prostych $S'A_1$, SB_1 i $S'C_1$. Stąd twierdzenie:

<u>II. Jeżeli boki dwóch trójkątów przecinają się parami w trzech punktach jednej prostej, to wierzchołki tych trójkątów leżą parami na trzech prostych przechodzących przez jeden punkt</u>

<u>§78. Kolineacja środkowa.</u> Figury ABCDE i $A_1B_1C_1D_1E_1$ rys. 166 albo $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ rys 167 są w pewnym szczególnym związku geometrycznym, który zasługuje na bliższe zbadanie. Związek ten polega na następujących 5 faktach:

1/ Każdemu punktowi pierwszej figury odpowiada jeden jedyny punkt drugiej figury i nawzajem,

2/ Każdej prostej pierwszej figury odpowiada jedna jedyna prosta drugiej figury i nawzajem,

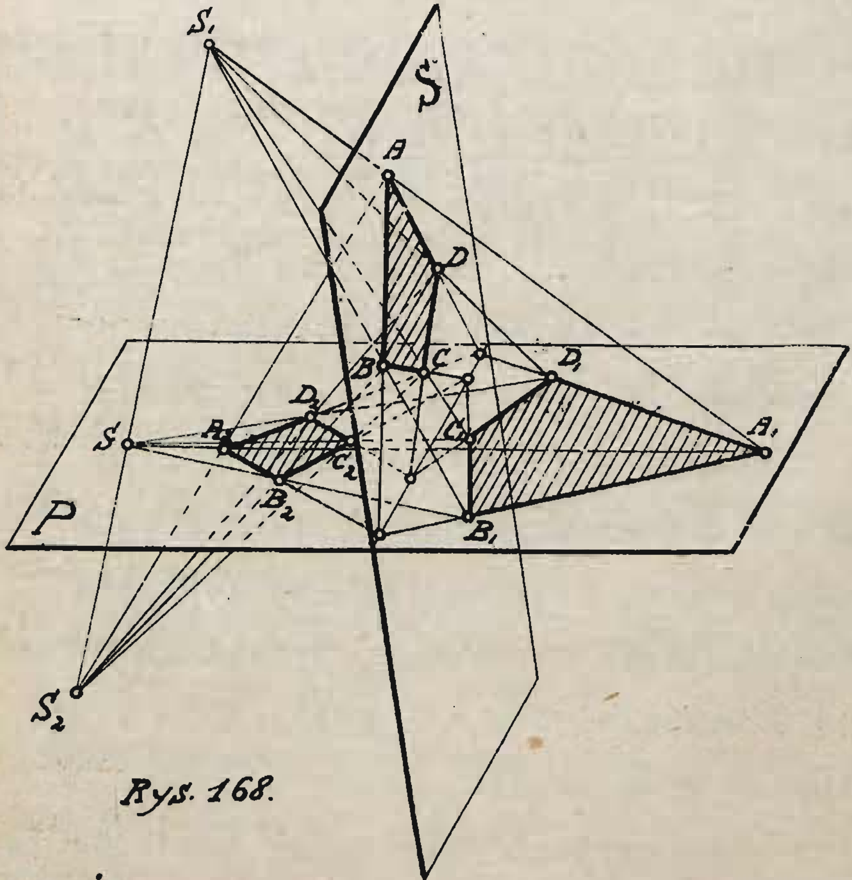
3/ Punktowi i prostym należącym do siebie w pierwszej figurze odpowiadają w drugiej punkt i prosta również do siebie należące,

4/ Punkty odpowiednie leżą na prostych, przechodzących przez jeden punkt,

5/ Proste odpowiednie przecinają się w punktach jednej prostej.

O dwóch figurach czyniących zadość tym 5 warunkom mówimy, że są w kolineacji środkowej, albo że są homologiczne. Punkt S' , w którym spotykają się proste, łączące punkty odpowiednie, nazywa się środkiem kolineacji, prosta s , na której przecinają się proste odpowiednie, nazywa się osią kolineacji. Jeżeli środek kolineacji stanie się punktem niewłaściwym, to kolineacja staje się powinowactwem, jeżeli oś kolineacji stanie się prostą niewłaściwą, to kolineacja jednokładnością staje się podobieństwem środkowem, jeżeli zarówno środek jak oś są niewłaściwe, to kolineacja staje się przesunięciem równoległem.

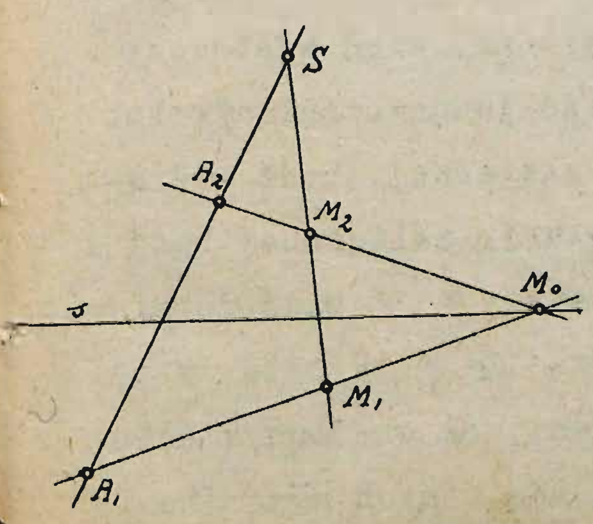
§77. Figury homologiczne jako rzuty środkowe tej samej fig. płask. z dwóch punktów na tę samą płaszczyznę. Figury homologiczne otrzymujemy zawsze, gdy figurę płaską A B C D ... rzucamy na tę samą płaszczyznę P z dwóch różnych punktów S_1 i S_2 /rys.168/. W samej rzeczy, rzuty A_1 B_1 C_1 D_1... i A_2 B_2 C_2 D_2... są wtedy w takim związku, że punkty odpowiednie A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ... leżą parami na prostych, według których płaszczyzny S_1S_2A , $S_1S_2B_2$ ... przecinają płaszczyznę P ; proste te przechodzą oczywiście przez ślad S prostej S_1S_2 na płaszczyźnie P . Proste odpowiednie A_1B_1 i A_2B_2 , B_1C_1 i B_2C_2 ... przecinają proste AB , BC ,.. a więc i siebie wzajemnie na śladzie s płaszczyzny S .



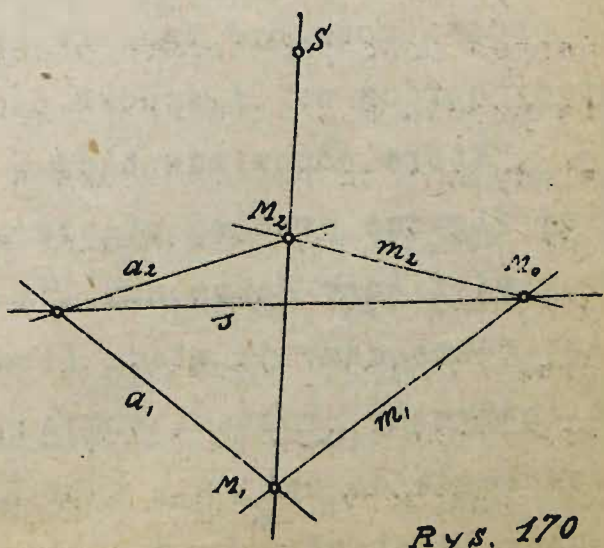
Rys. 168.

§78. Wyznaczenie kolineacji. Figura homologiczna z daną figurą A_1 B_1 C_1 D_1... jest wyznaczona, jeżeli dane są: środek kolineacji S , oś kolineacji s oraz jeden punkt A_2 lub jedna prosta a_2 drugiej figury, albo trzy punkty A_2 , B_2 i C_2 lub trzy proste a_2 , b_2 i c_2 drugiej figury, co wychodzi zresztą na to samo, gdyż trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ względnie $a_1b_1c_1$ i $a_2b_2c_2$ są trójkątami Desargues'a, które wyznaczają oś i środek kolineacji.

Niechaj więc oprócz środka S i osi s będą dane na prostej wychodzącej z S dwa punkty odpowiednie A1 i A_2 , aby znaleźć punkt drugiej figury, odpowiadający jakiemukolwiek punktowi M_1 pierwszej figury /Rys.169/ łączymy A_1 M_1 i wyznaczamy punkt Mo , w którym ta prosta przecina s ; prostej A_1 Mo odpowiada prosta A_2 Mo przecinająca ją na osi s i przechodząca przez A_2, punkt M_2 musi leżeć na prostej A_2Mo oraz na prostej SM_1 , jest to więc punkt przecięcia tych dwóch prostych.



Rys. 169



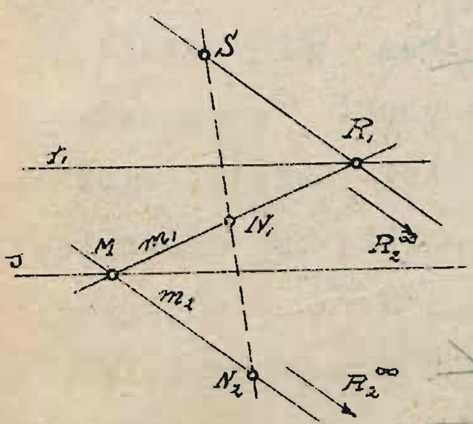
Rys. 170

Jeżeli zamiast punktów A_1 i A_2 będą dane proste a_1 i a_2 przecinające się na osi s, to aby znaleźć prostą drugiej figury odpowiadającą jakiejkolwiek prostej m_1 pierwszej figury /Rys.170/, łączymy punkt $a_1 m_1 \equiv M_1$ ze środkiem S i wyznaczamy punkt przecięcia M_2 tej prostej z a_2; łącząc punkt M_2 z punktem M_0, w którym m_1 przecina s, otrzymamy prostą m_2.

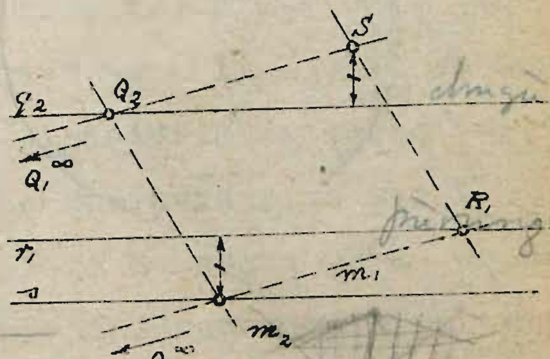
Punkt S oraz wszastkie punkty leżące na prostej s; prosta s oraz wszystkie proste wychodzące z punktu S, odpowiadają samym sobie.-

§79. Proste wzajemne. Wyznaczenie kolineacji zapomocą środka i osi oraz dwóch prostych odpowiednich a_1 i a_2 będzie szczególnie dogodne, jeżeli jedną z tych danych prostych będzie prosta niewłaściwa. Ponieważ ta prosta może być uważana za daną, więc wystarczy wtedy oprócz osi i środka podać jedną prostą g_2 lub r_1, która odpowiada bądź w pierwszej, bądź w drugiej figurze prostej niewłaściwej, zaliczonej bądź do drugiej figury /oznaczamy ją wtedy g_1^{∞}/ bądź do pierwszej /oznaczamy ją wtedy literą r_2^{∞}/. Proste g_2, r_1 nazywamy prostemi wzajemnemi, są one oczywiście równoległe do osi s, gdyż każda z nich przecina s w punkcie niewłaściwym. Kolineacja jest przeto wyznaczona, gdy dane są : środek i oś kolineacji oraz jedna z prostych wzajemnych.

Niech będą np. dane S, s i r_1, mamy znaleźć prostą m_2 odpowiadającą danej prostej m_1 oraz punkt N_2 odpowiadający danemu punktowi N_1.



Rys. 171



Rys. 172.

Wyznaczmy /Rys.171/ jak poprzednio punkty $m_1 r_1 = R_1$ i $m_1 s = M$, w których prosta m_1 przecina r_1 i s, punkt M odpowiada samemu sobie, jako punkt leżący na osi kolineacji, punkt R_2 będzie przecięciem prostej $S R_1$ z prostą r_2^∞ t.j. z prostą niewłaściwą; będzie to więc kierunek prostej $S R_1$. Prosta m_2 wychodzi przeto z punktu M i posiada ten sam kierunek co prosta $S R_1$, to znaczy jest do niej równoległa.

Aby znaleźć N_2, odpowiadający danemu punktowi N_1, prowadzimy przez N_1 dowolną prostą m_1 i znajdujemy jak poprzednio prostą jej odpowiadającą m_2, punkt

N_2 będzie przecięciem prostach $S\,N_1$ i m_2.

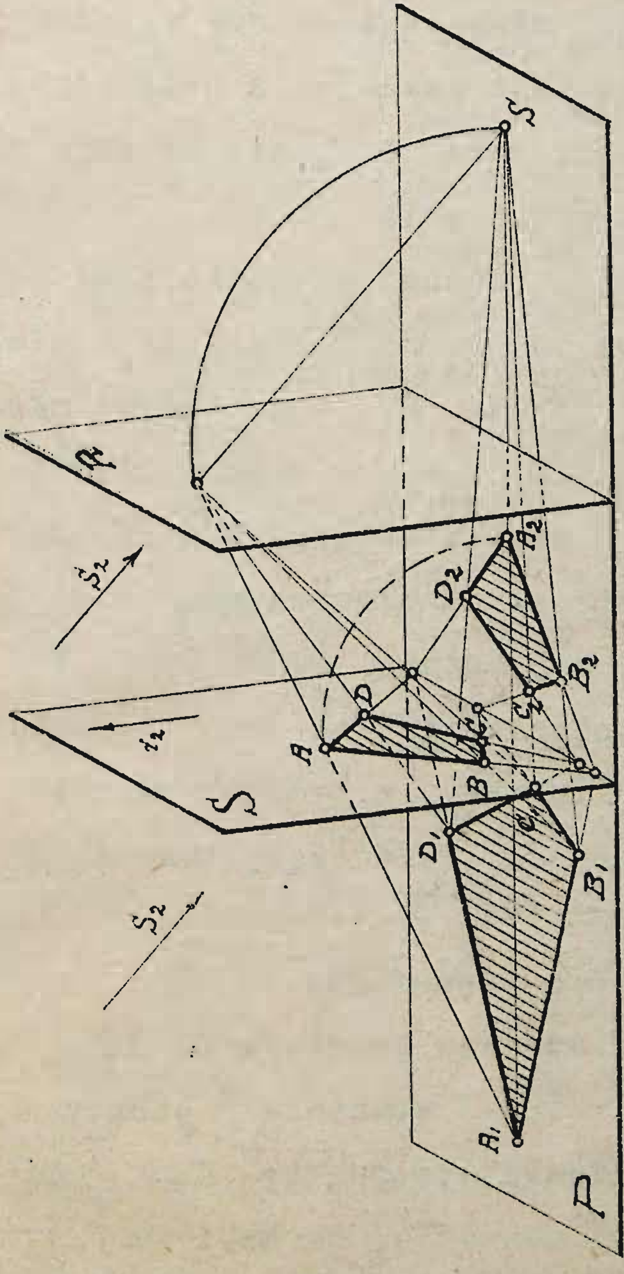
W szczególności jeżeli punkt Q_1 jest niewłaściwym prostej m_1 /Rys.172/, to odpowiadający mu punkt Q_2 prostej m_2 należy do prostej wzajemnej q_2, która w ten sposób może być wyznaczona.

Aby więc wykreślić prostą wzajemną q_2, jeżeli dane są s, S i r_2 wyznaczamy punkt Q_2 odpowiadający punktowi niewłaściwemu prostej jakiejkolwiek m_1. W tym celu kreślimy najpierw prostą m_2 /równoległa do $S\,R_1$ przez M/, łączymy $S\,Q_1^{\infty}$/ t.j. przez S prowadzimy równoległą do m_1/ i w przecięciu z m_2 otrzymujemy punkt Q_2. Równoległa do s poprowadzona przez Q_2 jest prostą wzajemną q_2.

Z równoległoboku $S\,R_1\,M\,Q_2$ wynika:

Odległość jednej z prostych wzajemnych od środka kolineacji S i odległość drugiej od osi kolineacji s są odcinkami równej długości lecz przeciwnego zwrotu.

§80. Rzut środkowy i kład figury płaskiej. Dwa rzuty figury płaskiej na tę samą płaszczyznę P będą w kolineacji środkowej, także wtedy, gdy jeden /ale tylko jeden/ z dwóch punktów S_1 i S_2 jest niewłaściwy. Przypadek ten jest szczególnie ważny, gdy punkt ten jest kierunkiem prostopadłym do jednej z płaszczyzn dwusiecznych kąta dwuściennego S P . Rzut figury A B C D ... z tego punktu niewłaściwego jest poprostu kładem jej na płaszczyznę P przez obrót dokoła s /Rys. 173/. Stąd wniosek, że rzut środkowy figury płaskiej i jej kład na płaszczyznę rzutów są w kolineacji środkowej. Osią tej kolineacji jest ślad s płaszczyzy S , środkiem jest

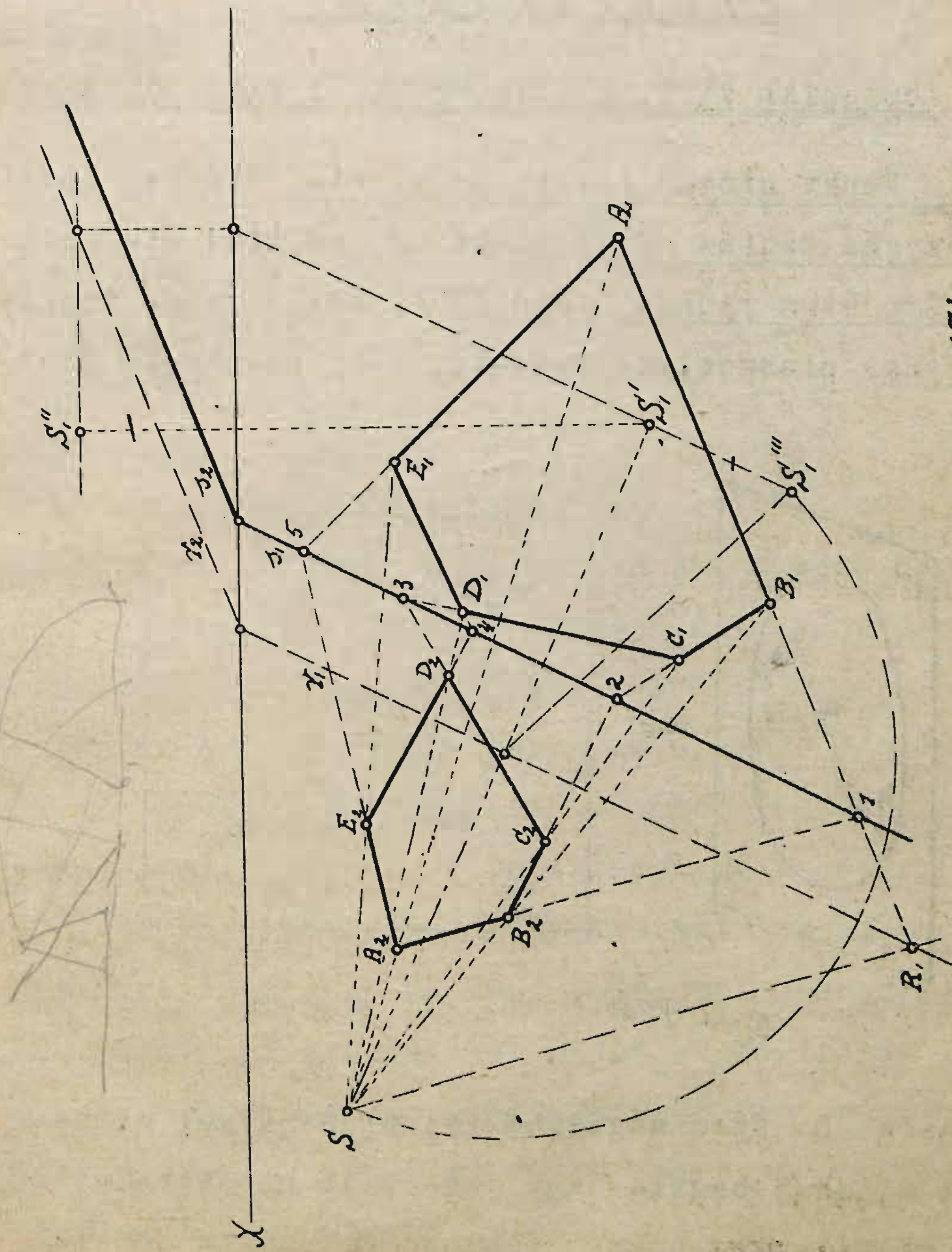


Rys. 173.

kład środka rzutów S_1 dokoła śladu r_1 płaszczyzny R poprowadzonej przez S_1 równolegle do pl. S ; S , s i r_1 jak wiadomo/§ 77/ wyznaczają kolineację figur A_1 B_1 C_1 D_1 ... i A_2 B_2 C_2 D_2 ...

Na zasadzie powyższej własności możemy wyznaczyć prawdziwą wielkość i kształt przecięcia ostrosłupa $S_1 A_1 B_1 C_1 D_1 \ldots$ płaszczyzną S, nie kreśląc rzutów prostokątnych tego przecięcia.

Niech S_1' i S_1'' będą rzutami prostokątnymi ostrosłupa, którego podstawa $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ leży w płaszczyźnie P_1 /Rys.174/. Przez S_1 poprowadźmy płaszczyznę $r_1 r_2$ równoległą do $s_1 s_2$ i zróbmy kład tej płaszczyzny dokoła r_1 wraz z leżącym w niej punktem S_1. Kład przecięcia ostrosłupa płaszczyzną $s_1 s_2$ jest w kolineacji środkowej z podstawą $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ostrosłupa, osią tej kolineacji jest ślad s_1, środkiem S jest kład punktu S_1, a prosta r_1 jest jedną z prostych wzajemnych. Przedłużmy bok $A_1 B_1$; do przecięcia z prostemi s_1 i r_1 w punktach 1 i R_1; prowadząc przez 1 prostą równoległą do $R_1 S$, otrzymamy prostą odpowiadającą prostej $A_1 B_1$, na której proste SA_1 i SB_1 wyznaczą punkty A_2 i B_2 szukanego kładu. Pozostałe punkty C_2, D_2 i E_2 znajdziemy na tej zasadzie, że boki $B_1 C_1$ i $B_2 C_2$, $C_1 D_1$ i $C_2 D_2$, $D_1 E_1$ i $D_2 E_2$ przecinają się na osi s_1.



Rys. 174