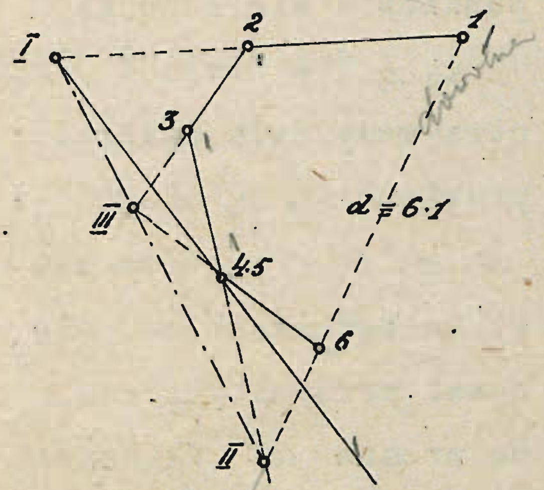
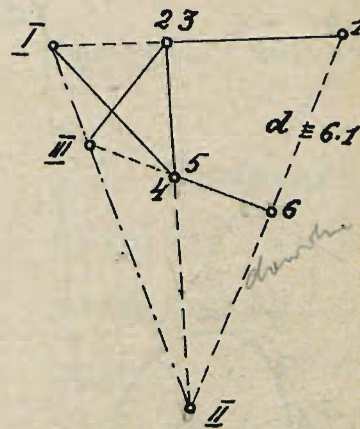
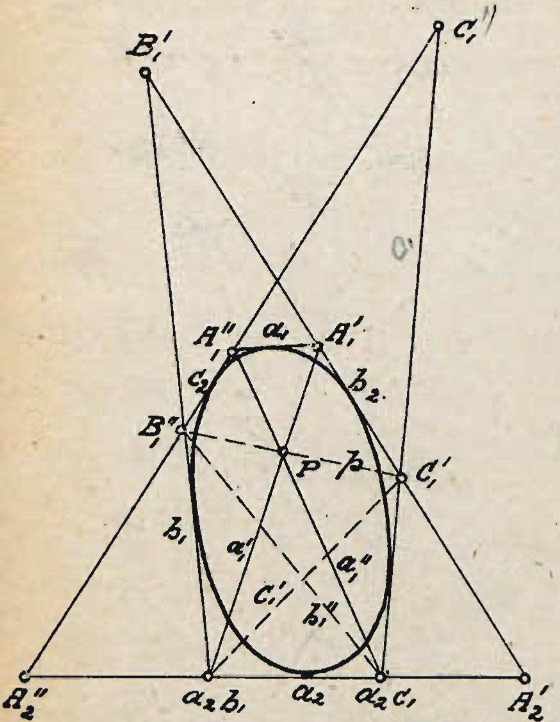


Rys. 323.



Rys. 324.

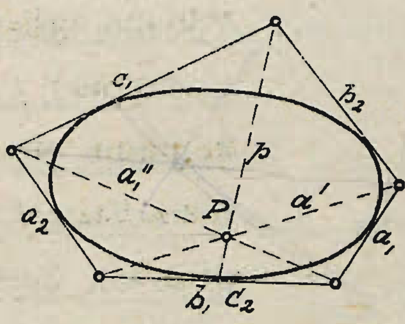
§ 175. Twierdzenie Brianchona. W sześcioboku opisanym na stożkowej, wierzchołki przeciwległe leżą parami na trzech prostych, przechodzących przez jeden punkt. Niech będzie sześciobok $a_1\, b_2\, c_1\, a_2\, b_1\, c_2$ opisany na stożkowej /rys.325/, trzeba dowieść, że proste p, a_1'' i a_1' , które łączą pary wierzchołków przeciwległych: $b_1 c_2$ i $b_2 c_1$, $c_1 a_2$ i $a_2 c_1$, $a_1 b_2$ i $a_2 b_1$ przechodzą przez jeden punkt. Na dwóch bokach niesąsiednich i nieprzeciwległych, np. na b_2 i c_2 , pozostałe 4 boki a_2, a_1, b_1 i c_1 wyznaczają dwie czwórki punktów $A_2'\, A_1'\, B_1'\, C_1'$ i $A_2''\, A_1''\, B_1''\, C_1''$, które na zasadzie twierdzenia I § 171 są rzutowe.-



Rys. 325.

Rzucając pierwszą czwórkę punktów z wierzchołka $a_2 b_1$, a drugą z $a_2 c_1$, otrzymamy dwie czwórki prostych $a_2\, a_1'\, b_1\, c_1'$ i $a_2\, a_1''\, b_1''\, c_1$, które nie-tylko będą rzutowe, ale nawet perspektywiczne, bo prosta a_2, łącząca wierzchołki, odpowiada w tych czwórkach samej sobie. Stąd wynika, że proste odpowiednie a_1' i a_1'', b_1 i b_1'', c_1' i c_1 przecinają się w punktach leżących na jednej prostej, mianowicie na osi perspektywy p tych dwóch perspektywicznych czwórek. Innemi słowy, punkt $a_1' a_1''$ leży na prostej, łączącej punkty $b_1 b_1''$ i $c_1' c_1$ t.j. na prostej p, tak że 3 proste: p, a_1' i a_1'' przechodzą przez jeden punkt P, co b.d.o.

Twierdzenie to pozostanie w mocy, gdy w sześciobоku opisanym na stożkowej jedna, dwie lub trzy pary boków sąsiednich zostaną zjednoczone, przez co sześciobok wyrodnieje i staje się opisanym pięciobokiem, czworobokiem lub trójkątem, a zwyrodniałe wierzchołki stają się punktami zetknięcia na bokach zjednoczonych.

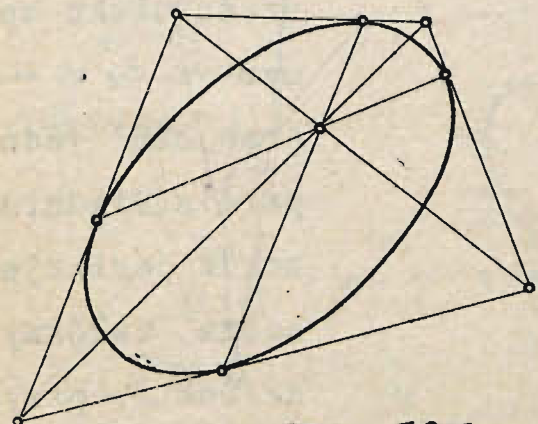


Rys. 326.

1/ Przypuśćmy najpierw, że w sześcioboku opisanym $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ /rys. 326/ jedna para sąsiednich boków jest zjednoczona, załóżmy np. że bok c_2 przystaje do b_1 tak, że sześciobok $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ przekształca się na pięciobok opisany $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1$, na którego jednym boku b_1 dany jest punkt zetknięcia $b_1 c_2$.

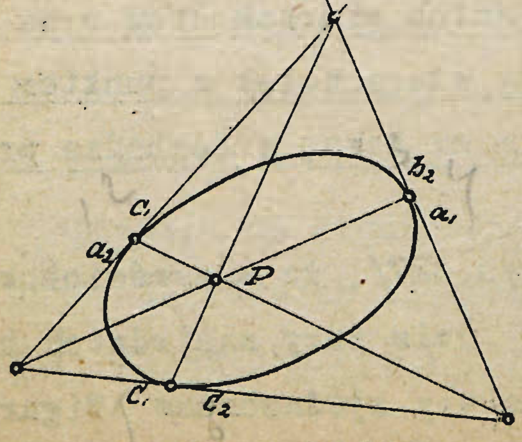
W pięcioboku opisanym na stożkowej, proste, łączące dwie pary niesąsiednich wierzchołków oraz prosta, która łączy piąty wierzchołek z punktem zetknięcia na przeciwległym mu boku, przechodzą przez jeden punkt.

2/ Załóżmy powtóre /rys. 327/, że w sześcioboku opisanym $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ dwie pary sąsiednich boków, np. $b_2 c_1$ i $b_1 c_2$ zostały zjednoczone. Figura staje się opisanym czworobokiem $a_1 b_2 a_2 b_1$ i twierdzenie Brianchona przekształca się na znane nam dobrze twierdzenie o czworoboku opisanym /§ 168/, które można wyrazić jeszcze tak: W czworoboku opisanym na stożkowej proste, łączące wierzchołki przeciwległe oraz proste, łączące punkty zetknięcia na bokach przeciwległych, przechodzą przez jeden punkt.



Rys. 327.

3/ Niechaj wreszcie w sześcioboku opisanym $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ /rys. 328/ trzy pary sąsiednich boków a_1 i b_2, c_1 i a_2, b_1 i c_2 zostaną zjednoczone na bokach a_1, b_1 i c_1. Mamy wtedy do czynienia z opisanym na stożkowej trójkątem,



Rys. 328.

na którego bokach dane są punkty zetknięcia.

W trójkącie opisanym na stożkowej proste łączące wierzchołki z punktami zetknięcia na bokach tym wierzchołkom przeciwległych, przechodzą przez jeden punkt.

Na zasadzie powyższych wniosków można rozwiązać zadania:

1/ Jeżeli dane są 5 stycznych do stożkowej, to można na każdej z nich wyznaczyć punkt zetknięcia /wn.1/.

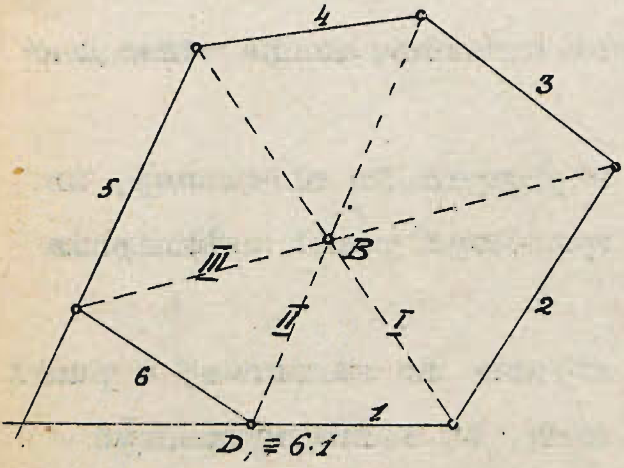
2/ Jeżeli dane są 4 styczne do stożkowej i punkt zetknięcia na jednej z nich, to można wyznaczyć punkty zetknięcia na każdej z trzech pozostałych stycznych /wn.2/.

3/ Jeżeli dane są 3 styczne do stożkowej i punkty zetknięcia na dwóch z nich, to można wyznaczyć punkt zetknięcia na trzeciej stycznej /wn. 3/.

§ 176. Twierdzenie odwrotne i jego zastosowanie. Odwracając rozumowanie, służące do dowodu twierdzenia Brianchona, dowodzimy twierdzenia odwrotnego:

Jeżeli proste, łączące przeciwległe wierzchołki sześcioboku przechodzą przez jeden punkt, to stożkowa styczna do pięciu jego boków jest styczną także do szóstego.

Na zasadzie tego twierdzenia można wykreślić dowolną szóstą styczną do stożkowej, której 5 stycznych 1, 2, 3, 4 i 5 są dane /rys.329/.



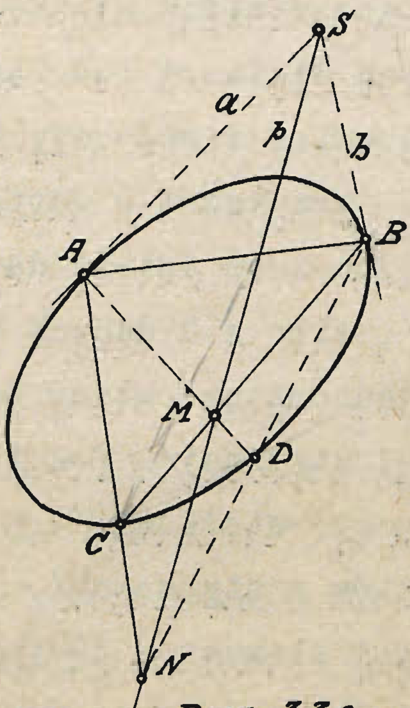
Rys. 329.

Szukamy boku 6 sześcioboku opisanego, którego pozostałe boki 1, 2, 3, 4 i 5 oraz wierzchołek 61 ≡ D jest dany. Wiemy, że wierzchołki przeciwległe 12 i 45 , 34 i 61, 23 i 56 leżą parami na prostych I, II, III, przechodzących przez jeden punkt /punkt Brianchona/. Połączmy punkty 12 i 45 prostą I, a punkty 34 i 61 ≡ D prostą II; punkt przecięcia prostych I i II jest punktem Brianchona B , przez który przejść musi również prosta III; łączy ona oczywiście punkt 23 z punktem B ; w przecięciu jej z prostą 5 otrzymamy punkt 56, który wraz z punktem 61 ≡ D wyznaczy szukaną styczną 6.

Rozwiązanie to może być zastosowane również i wtedy, gdy jedna lub dwie pary danych stycznych są zjednoczone, t.j. gdy dane są 4 styczne i punkt zetknięcia na jednej z nich, lub gdy dane są 3 styczne i punkty zetknięcia na dwóch z nich. Styczne, na których dane są punkty zetknięcia opatrujemy poprostu dwoma numerami kolejnemi np. 56, dany punkt zetknięcia na tej stycznej uważamy za punkt przecięcia stycznych 5 i 6.

§ 177. Twierdzenia Staudta. Mając 5 punktów, albo pięć stycznych rzeczywistych stożkowej, możemy na zasadzie twierdzeń Steinera lub Pascala i Brianchona wykreślić dowolną ilość nowych punktów i stycznych stożkowej - przytem z 5 danych punktów mogą każde dwa być zjednoczone /wtedy dana jest styczna w tym punkcie/, albo z 5 danych stycznych mogą każde dwie być zjednoczone /wtedy dany jest punkt zetknięcia na tej stycznej/. Powstaje pytanie, - czy można wyznaczyć stożkową /t.j. wykreślić dowolną ilość jej punktów i stycznych/, jeżeli z pomiędzy pięciu danych jej elememtów /5 punktów lub 5 stycznych/ dwa, albo dwa i jeszcze dwa, są urojone sprzężone, - t.j. jeżeli zamiast dwóch punktów rzeczywistych dana jest biegunowa inwolucja eliptyczna na prostej zewnętrznej, albo jeżeli zamiast dwóch stycznych rzeczywistych dana jest biegunowa inwolucja eliptyczna dokoła punktu wewnętrznego ? Odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie Staudta.

1. Punkty, w których dwa boki trójkąta wpisanego w stożkową przecinają prostą sprzężoną z trzecim bokiem są sprzężone. - Niech będzie /rys.330/ trójkąt ABC wpisany w stożkową i niechaj punkt S będzie biegunem boku AB. Poprowadźmy przez punkt S jakąkolwiek prostą p ; trzeba dowieść, że punkty M i N, w których ta prosta przecina boki BC i AC są biegunowo sprzężone. Połączmy BN ; prosta BN jest sieczną stożkowej i przecina ją zatem jeszcze w jednym punkcie D . Po-

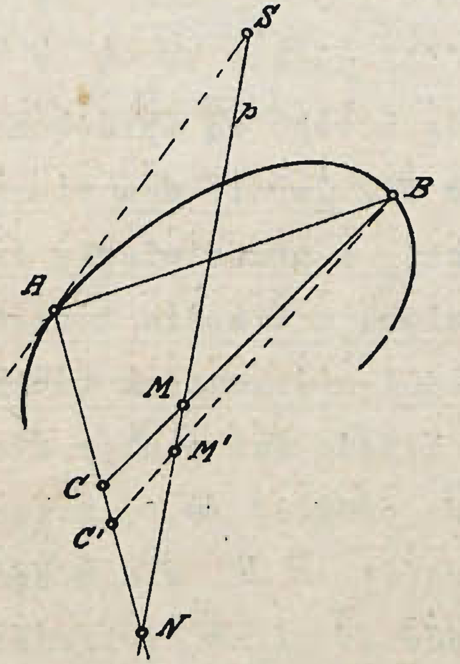


Rys. 330.

łączmy AD ; powiadam, że AD przechodzi przez punkt M . W samej rzeczy, - w czworokącie zupełnym wpisanym $ABCD$ dwa punkty przekątne M i N i biegun boku AB muszą leżeć na jednej prostej /§ 168/, t.j. trzy proste AD, BC i SN muszą przechodzić przez jeden punkt M . Otóż punkty M i N , jako wierzchołki trójkąta biegunowego są sprzężone.

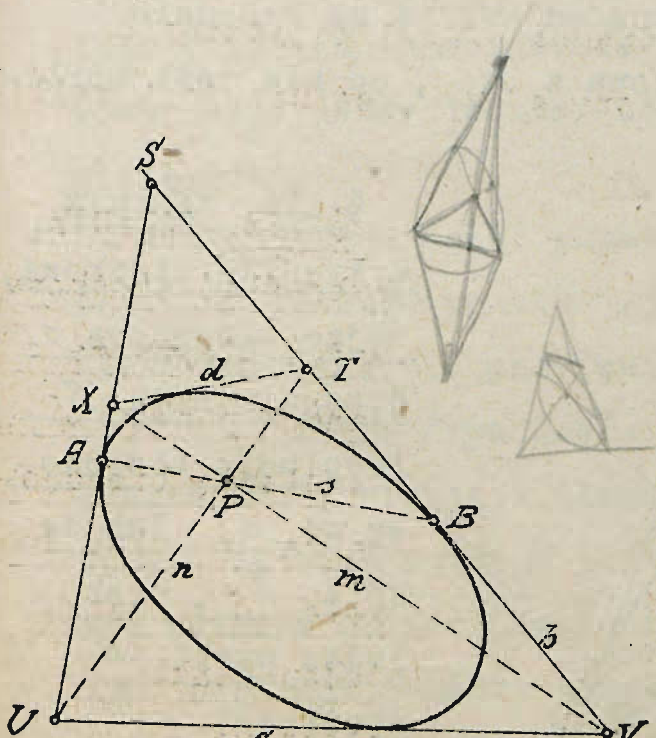
II./Odwrotne względem I/. <u>Jeżeli dwa wierzchołki trójkąta leżą na stożkowej, a przeciwległe im boki przecinają prostą, sprzężoną z trzecim bokiem w punktach sprzężonych, to trzeci wierzchołek trójkąta leży także na stożkowej.</u> Niech będą dwa punkty stożkowej A i B /rys.331/, a na prostej p , przechodzącej przez biegun S prostej AB niech będą dane 2 punkty biegunowo sprzężone M i N ; trzeba dowieść, że proste AN i BM przecinają się w punkcie C , który leży na stożkowej. Przypuśćmy, że jest inaczej, t.j. że punkt C nie leży na stożkowej.- W takim razie prosta AN , która jest sieczną /bo przechodzi przez punkt stożkowej A i jest różna od stycznej AS / musiałaby przeciąć stożkową w pewnym punkcie C' , różnym od C . Połączywszy BC', otrzymalibyśmy na prostej p pewien punkt M' , który byłby różny od M i na zasadzie twierdzenia I sprzężony z N , co nie jest możliwe.

III. /Wzajemne względem I/. Proste, które łączą dwa wierzchołki trójkąta opisanego na stożkowej z punktem sprzężonym z trzecim wierzchołkiem, są sprzężone.



Rys. 331.

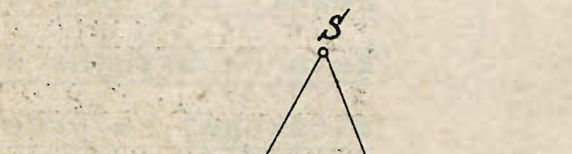
Niech będzie trójkąt SUV /rys. 332/ opisany na stożkowej i niechaj s będzie biegunową wierzchołka S. - Obierzmy na prostej s punkt jakikolwiek P ; trzeba dowieść, że proste m i n , które rzucają punkt P z wierzchołków U i V są sprzężone. Punkt T , w którym prosta n przecina styczną b , jest punktem zewnętrznym /§ 152/, można więc z niego wyprowadzić jeszcze jedną styczną d . Powiadam, że prosta m przechodzi przez punkt X , w którym d przecina styczną a . W samej rzeczy, w czworoboku zupełnym opisanym $abcd$ dwie przekątne m i n i biegunowa s wierzchołka S muszą przechodzić przez jeden punkt P /§ 168/, t.j. trzy punkty X, V i P muszą leżeć na jednej prostej m. Otóż proste m i n, jako dwa boki trójkąta biegunowego, są sprzężone.



Rys. 332.

IV./Odwrotne względem III i wzajemne względem II/. Jeżeli dwa boki trójkąta są styczne do stożkowej, a proste, rzucające przeciwległe im wierzchołki z punktu sprzężonego z trzecim wierzchołkiem są sprzężone, to trzeci bok trójkąta jest także styczny do stożkowej.

Niech będą dwie styczne do stożkowej a i b /rys.333/ oraz dwie proste sprzężone m i n, wychodzące z punktu P, leżącego na biegunowej s punktu ab; trzeba dowieść, że prosta c, która łączy punkty an i bm jest styczną dla stożkowej. Przypuśćmy, że jest inaczej, t.j. że prosta c, nie jest styczną do stożkowej. W takim razie z punktu an, który jest zewnętrzny /§ 152/, możnaby wyprowadzić do stożkowej pewną styczną c' różną od c. Prosta m' rzucająca punkt bc' z punktu B byłaby różna od m i na zasadzie twierdzenia III sprzężona z n, co nie jest możliwe.

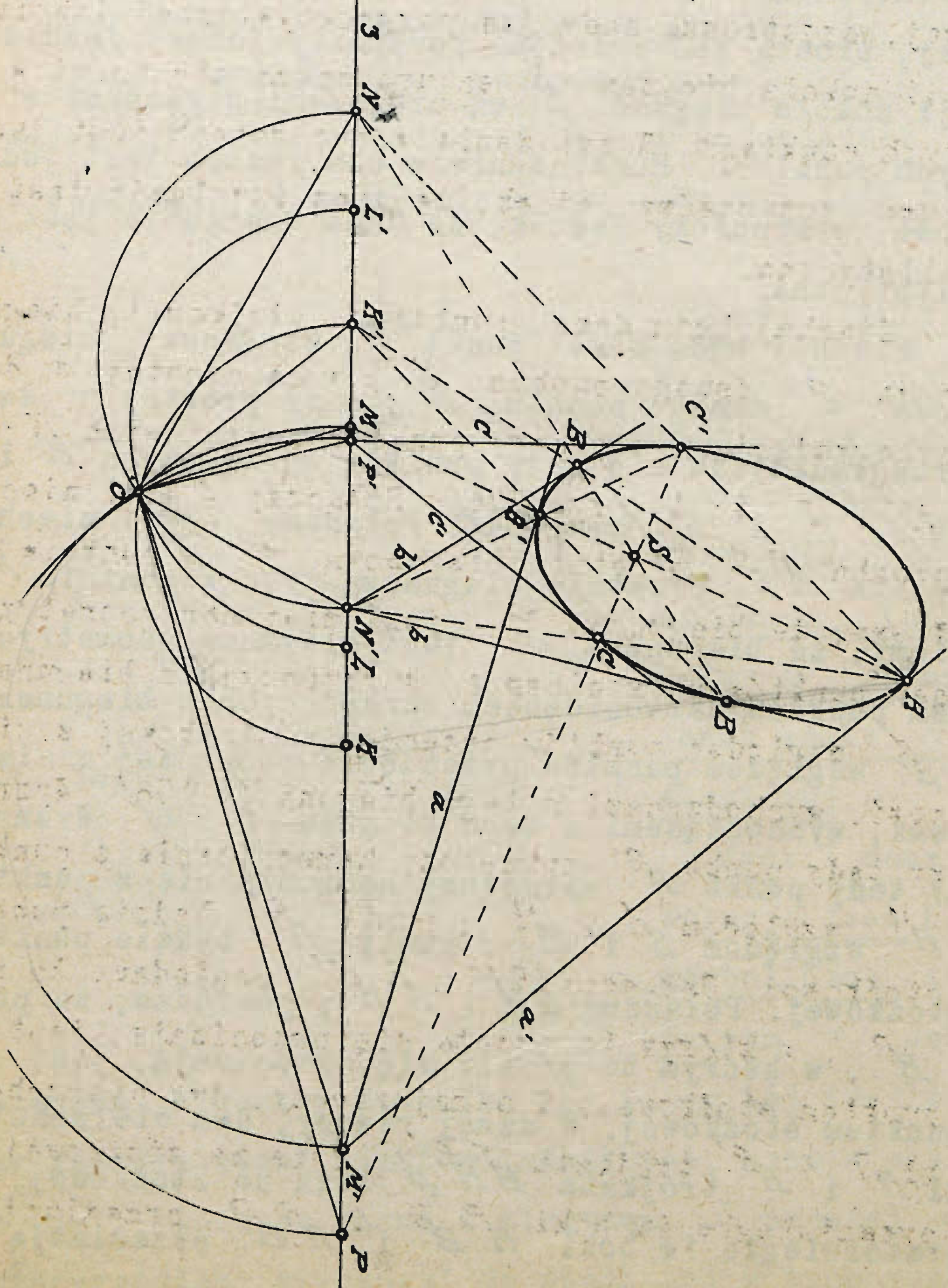


Rys. 333.

§ 178. ZADANIE. Wykreślić stożkową, mając biegunową s danego punktu S, inwolucję biegunową na s lub do koła S, oraz jeden punkt A stożkowej.

Jeżeli dana inwolucja jest hiperboliczna, to prosta s jest sieczną, a punkty podwójne S_1 i S_2 tej inwolucji są rzeczywistemi punktami stożkowej, proste zaś s_1 i s_2, które je łączą z biegunem S prostej s są rzeczywistemi stycznemi do stożkowej w tych punktach. Jeżeli dana inwolucja jest eliptyczna, to s jest prostą zewnętrzną, a punkty podwójne inwolucji są urojonemi sprzężonemi punktami stożkowej, proste zaś podwójne perspektywicznej inwolucji dokoła bieguna S są urojonemi stycznemi w tych punktach. Rozwiązanie w obu razach jest jednakowe, przypuśćmy jednak, że dana inwolucja jest eliptyczna.

Niechaj będą dane: punkt A stożkowej, biegunowa s danego punktu S, a na prostej s dwie przegradzające się pary punktów sprzężonych K i K', L i L' /rys.334/. Połączmy AS i niechaj prosta AS przetnie biegunową s w punkcie M. Wiemy, że biegunowa s jest miejscem geometrycznem punktów harmonicznie sprzężonych z biegunem S względem punktów przecięcia stożkowej z siecznemi, wychodzącemi z tego bieguna /§ 156/. Wyznaczmy tedy punkt A' sprzężony harmonicznie z punktem A względem S i M; punkt A' będzie punktem stożkowej. Połączmy AK i $A'K'$, powiadam, że punkt B, w którym te proste się przecinają, jest punktem stożkowej. W samej rzeczy, dwa wierzchołki A i A' trójkąta $AA'B$ leżą na stożkowej, a przeciwległe im boki $A'B$ i AB przecinają



Rys. 334.

prostą, sprzężoną z trzecim bokiem AA' tego trójkąta w punktach sprzężonych; na zasadzie twierdzenia II § 177 trzeci wierzchołek B leży również na stożkowej. Podobnież punkt B', w którym się przecinają proste AK' i $A'K$ leży również na stożkowej. Każda para punktów sprzężonych prostej $\mathcal{J}$ pozwala w ten sposób wyznaczyć dwa nowe punkty stożkowej. Na zasadzie własności czworokąta $AA'BB'$, wpisanego w stożkową, wynika, że prosta BB' przechodzi przez punkt S /§ 161/, co pozwala odrazu wykreślić styczne w punktach B i B'. Punkt przecięcia tych stycznych N' jest biegunem prostej BB'; leży on na $\mathcal{J}$, albowiem biegun prostej $\mathcal{J}$ leży na BB'. Będzie to zatem punkt sprzężony z punktem N, w którym prosta BB' przecina $\mathcal{J}$ i jako taki może być wynaleziony.

Aby więc po wyznaczeniu punktów B i B' szybko znaleźć dostateczną ilość dalszych punktów i stycznych, najlepiej postępować tak:

Połączmy BB' i niechaj prosta BB' przetnie $\mathcal{J}$ w punkcie N; wyznaczmy punkt N' sprzężony z N i połączmy go z B i B', będą to styczne b i b'. Korzystając z punktów sprzężonych N

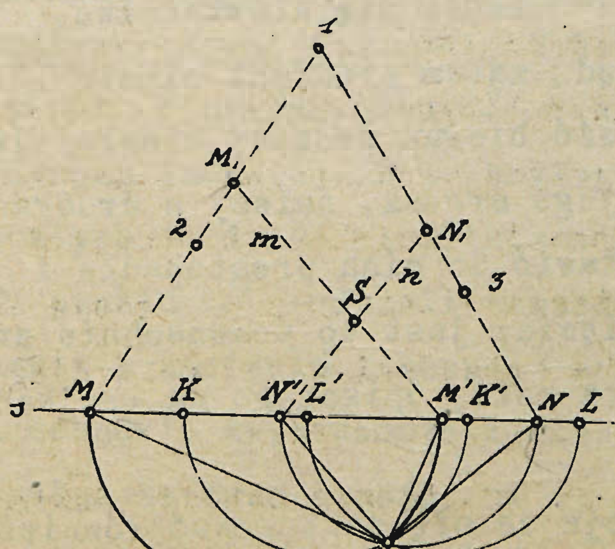
i N' , znajdźmy dwa nowe punkty stożkowej C i C', będą to, jak wiemy, punkty przecięcia prostych AN i $A'N'$ oraz AN' i $A'N$. Połączmy CC' i niechaj prosta CC' przetnie s w punkcie P ; wyznaczmy punkt P' sprzężony z P i połączmy go z C i C' ; otrzymamy w ten sposób styczne c i c' w punktach C i C' . W ten sposób postępujemy dalej: a więc korzystając z punktów P i P' , wyznaczmy dwa nowe punkty D i D' , połączmy DD' i t.d.

Jeżeli dana prosta s będzie prostą niewłaściwą, a inwolucja dokoła bieguna S /środka stożkowej/ będzie prostokątna, to stożkowa będzie kołem, odcinki AS i $A'S$ staną się równe, a proste AK i $A'K'$ oraz AK' i $A'K$ prostopadłe; odnajdujemy więc znaną własność koła, polegającą na tem, że z punktów jego okręgu widać średnicę AA' pod kątem prostym.

Do tego samego zadania można sprowadzić rozwiązanie zadania wzajemnego:

Wykreślić stożkową, mając biegun S danej prostej s , inwolucję biegunową dokoła S /lub na s / oraz jedną styczną a stożkowej. W tym celu wystarczy wyznaczyć punkt zetknięcia A na stycznej *a* /rys.334/. Wyznaczywszy punkt *M'*, w którym *a* przecina *s*, połączymy punkt *M*, sprzężony z *M'*, z biegunem *S* prostej *s*; w przecięciu prostych *a* i *MS* leży punkt *A*.

§ 179. ZADANIE. Wykreślić stożkową, mając jej 3 punkty 1, 2 i 3 oraz inwolucję biegunową na danej prostej *s*. Zadanie to dałoby się sprowadzić do poprzedniego, gdybyśmy zdołali wyznaczyć biegun *S* prostej *s*. Moglibyśmy wtedy bowiem uważać za dane: biegunową *s* danego punktu *S*, inwolucję biegunową na *s* /lub perspektywiczną z nią inwolucję biegunową dokoła *S* / oraz jeden punkt stożkowej, naprz. 1. Dla wykreślenia bieguna prostej *s* wystarczy znaleźć biegunowe dwóch punktów tej prostej, np. punktów *M* i *N*, w których proste 12 i 13 przecinają *s* /rys.335/. Aby wykreślić biegunową *m* punktu *M* zważmy, że do tej prostej muszą należeć: 1/ punkt



Rys. 335

M_1 sprzężony harmonicznie z M względem punktów 1 i 2, 2/ punkt M' sprzężony z M w danej inwolucji biegunowej. Podobnież biegunowa n punktu N łączy punkty N_1 i N', z których pierwszy jest harmonicznie sprzężony z N względem 1 i 3, a drugi jest sprzężony z N w danej inwolucji biegunowej. Przecięcie prostych m i n jest biegunem S prostej $MN = s$.

Jeżeli daną prostą s będzie prosta niewłaściwa, a dana na niej inwolucja biegunowa będzie inwolucją kierunków prostopadłych, t.j. gdy stożkowa stanie się kołem, to stosując podane rozwiązanie, odnajdziemy znaną konstrukcję środka koła, którego dane są trzy punkty 1, 2 i 3. W samej rzeczy punkty M i N staną się niewłaściwe, punkty M_1 i N_1 będą zatem środkami cięciw 12 i 13. Aby więc znaleźć biegun prostej niewłaściwej względem koła t.j. jego środek, należy w środkach cięciwy 12 i 13 wystawić do nich prostopadłe i wyznaczyć ich przecięcie; jest to powszechnie znane wykreślenie środka koła, opisanego na trójkącie 123.

Ta sama konstrukcja da się zastosować również wtedy, gdy z pośród trzech danych punktów rzeczywistych dwa, np. 1 i 2, są zjednoczone, t.j. gdy dane są dwa punkty 1 i 2, styczna w jednym z nich, np. w 1 oraz inwolucja biegunowa na prostej 3 .

Biegunowa m punktu M , w którym dana stycz-na przecina s , przechodzi wtedy przez punkt 1.

Zupełnie w taki sam sposób rozwiązalibyśmy za-danie wzajemne:

Wykreślić stożkową, mającą 3 styczne 1, 2 i 3 oraz inwolucję biegunową dokoła danego punktu S , przytem z pośród stycznych rzeczywistych 1, 2 i 3 dwie mogłyby być zjednoczone, t.j. mogą być dane dwie styczne, punkt zetknięcia na jednej z nich oraz inwolucja biegunowa dokoła danego punktu S .

§ 180. ZADANIE. Wykreślić stożkową, mając jeden jej punkt A oraz dwie inwolucje biegunowe na dwóch prostych s i t . Wykreślmy na prostych s i t punkty S i T , które są sprzężone w danych inwolucjach z punktem P przecięcia prostych s i t ; prosta ST będzie biegunową p punktu P . Jeżeli oznaczymy literami B i C punkty przecięcia siecznej p ze stożkową, to na zasadzie twierdzenia I Staudta proste AB i AC przetną zarówno prostą s , jak i prostą t w punktach sprzężonych, skąd wynika, że proste AB

i AC stanowią parę prostych sprzężonych zarówno w inwolucji rzucającej z punktu A inwolucję biegunową na prostej s , jak i w inwolucji, rzucającej z tego samego punktu inwolucję biegunową na prostej t /§ 136/.

Tak samo rozwiązujemy zadanie wzajemne:

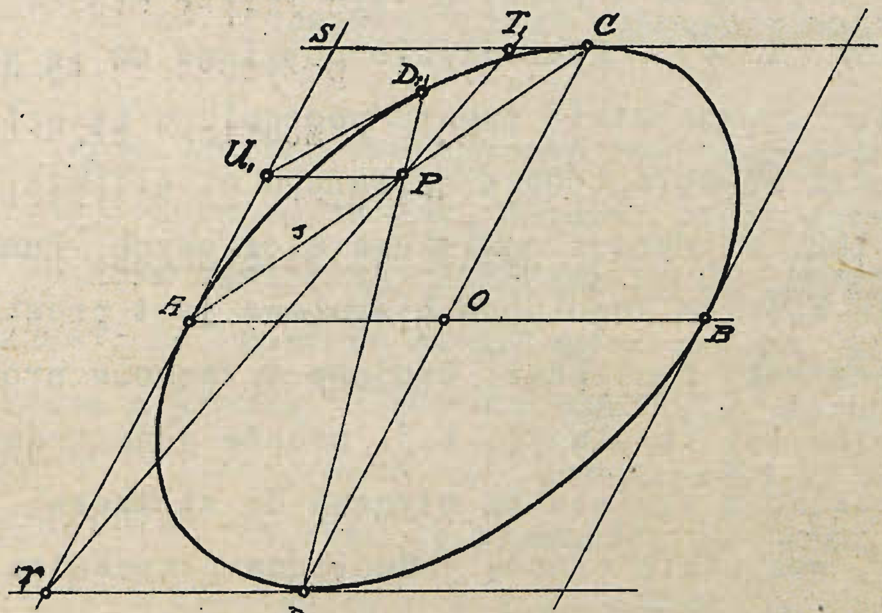
Wykreślić stożkową, mając jej styczną 1 oraz dwie inwolucje biegunowe dokoła dwóch punktów S i T.

Ze wszystkich dotychczas rozwiązanych przypadków wynika zatem:

Stożkowa jest wyznaczona przez 5 punktów lub przez 5 stycznych, które mogą być rzeczywiste lub parami urojone, sprzężone lub zjednoczone.

§ 181. ZADANIE. Wykreślić elipsę, mając parę średnic sprzężonych AB i CD /rys.336/.

Poprowadziwszy przez punkty A i B równoległe do CD , a przez punkty C i D równoległe do AB, otrzymamy równoległobok, opisany na stożkowej. Wystarczy wykreślić łuk elipsy, zawarty pomiędzy punktami A i C ; pozostałą część krzywej można wykreślić na zasadzie symetrji ukośnej względem średnic AB i CD oraz na zasadzie symetrji względem środka O . Zauważmy trójkąt STU^{∞}, którego wierzchołek U^{∞} jest punktem



Rys. 336.

niewłaściwym średnicy AB ; biegunowa s wierzchołka S jest prostą AC ; obrawszy na niej punkt dowolny P , rzućmy go z dwóch pozostałych wierzchołków U^{∞} i T na boki przeciwległe ST i SU^{∞} i połączmy rzuty U_1 i T_1 ; prosta U_1T_1 będzie styczną do stożkowej. Ponieważ w czworoboku opisanym o wierzchołkach U^{∞}, T, U_1 i T_1 znamy punkt zetknięcia D na boku TU^{∞} , więc prosta DP wyznaczy na przeciwległym boku U_1T_1 punkt zetknięcia D_1 /§ 175, 3/. Przesuwając punkt

P wzdłuż odcinka AC otrzymamy dowolną ilość stycznych i punktów łuku elipsy między punktami A i C. Wykreślenie powyższe ma tę ważną zaletę, że wszystkie punkty pomocnicze zawarte są wewnątrz równoległoboku opisanego na elipsie.

§ 182. Własności ogniskowe stożkowych. Punkty, dokoła których inwolucja biegunowa jest prostokątną, nazywamy ogniskami. Urojone sprzężone proste podwójne tej inwolucji, t.j. proste jednorodne wychodzące z ogniska są styczne do stożkowej. Jak wiemy, wszystkie proste jednorodne przechodzą przez punkty kołowe, ogniska są to więc punkty przecięcia dwóch par stycznych urojonych, wyprowadzonych do stożkowej z obu punktów kołowych. Styczne te tworzą czworobok, którego dwa wierzchołki są punktami kołowemi, a pozostałe cztery - ogniskami stożkowej.

Środek koła jest ogniskiem, albowiem inwolucja biegunowa dokoła tego punktu jest prostokątną. Jak zobaczymy niebawem, w środku koła są zjednoczone wszystkie cztery jego ogniska.

Aby znaleźć rzeczywiste ogniska stożkowej, które nie jest kołem, ustalmy kilka własności ognisk, które wynikają z ich określenia.

1/ Ponieważ inwolucja biegunowa dokoła każdego ogniska jest prostokątną, a więc eliptyczną, więc <u>każde ognisko rzeczywiste jest punktem wewnętrznym stożkowej.</u>

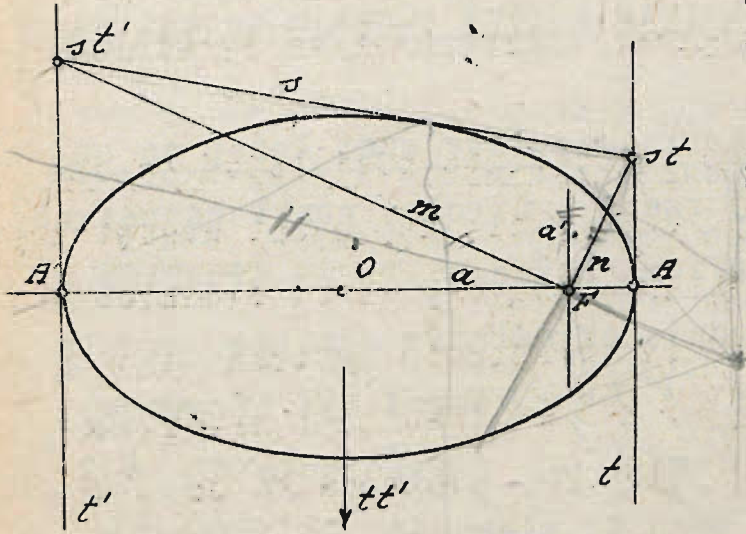
<u>2/ Każde ognisko rzeczywiste musi leżeć na osi stożkowej.</u> W samej rzeczy, niechaj punkt wewnętrzny F będzie ogniskiem. Połączmy go ze środkiem O stożkowej. Na zasadzie określenia ogniska, prostą sprzężoną z prostą $FO \equiv a$ w inwolucji biegunowej dokoła F jest prosta a' prostopadła do FO. Średnica FO ma więc tę własność, że jedna, a więc wszystkie cięciwy z nią sprzężone są do niej prostopadłe, jest to więc oś stożkowej.

3/ Ponieważ ognisko F jest punktem wewnętrznym stożkowej, więc oś FO, na której ono leży, musi przecinać stożkową; jeżeli zatem stożkowa jest hiperbolą, to <u>rzeczywiste ogniska mogą tylko leżeć na osi poprzecznej.</u>

Niech będzie stożkowa o środku właściwym t.j. elipsa lub hiperbola /rys.337/, i niech F będzie jej ogniskiem. W wierzchołkach A i A', w których oś FO przecina stożkową, poprowadźmy styczne t i t'; są to proste równoległe do osi b, a więc prostopadłe do osi $a \equiv AA'$. Poprowadźmy

---

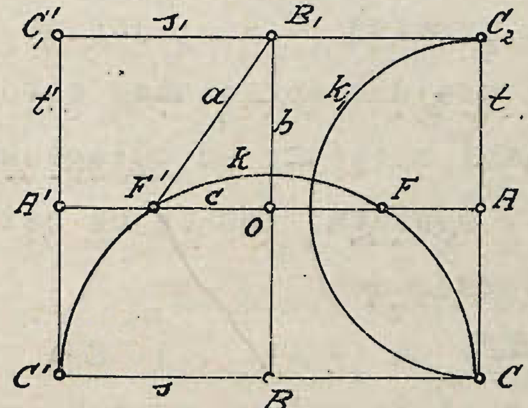
trzecią styczną jakąkolwiek s i zastosujmy twierdzenie III Staudta /§ 179/ do opisanego na stożkowej trójkąta stt'. Biegunową wierzchołka tt' jest oś AA'; proste, które rzucają pozostałe dwa wierzchołki st i st' z każdego punktu osi AA' są sprzężone, a więc na zasadzie określenia ogniska, wzajemnie prostopadłe. Stąd twierdzenie:



Rys. 337.

Odcinek stycznej s, zawarty pomiędzy stycznemi t i t' w wierzchołkach A i A' stożkowej, jest widziany z każdego ogniska leżącego na osi AA' pod kątem prostym.

Nawzajem, jeżeli istnieje na osi AA' punkt F z którego odcinek stycznej zawarty pomiędzy stycznemi w wierzchołkach A i A' widziany jest pod kątem prostym - to ten punkt jest ogniskiem. Albowiem na zasadzie twierdzenia IV Staudta /§ 177/ proste n i m /rys.337/ są sprzężone, punkt F posiada zatem tę własność, że dwie / aa' i mn / a więc wszystkie pary prostych sprzężonych przeń przechodzących są prostokątne.

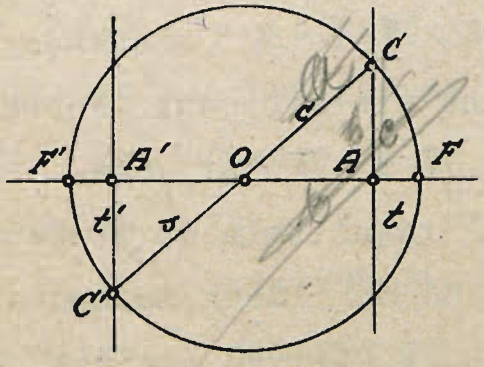


Rys. 338.

Wyznaczmy ogniska elipsy /rys.338/, której dane są 4 wierzchołki: A, A', B i B_1. Szukajmy najpierw ognisk, leżących na wielkiej osi. Poprowadźmy w wierzchołkach A, A' i B styczne t, t' i s. Pierwsze dwie są równoległe do BB_1, trzecia jest równoległa do AA'. Szukane ogniska będą punktami osi AA', z których odcinek CC' stycznej s widziany jest pod kątem prostym.- Jeżeli tedy na odcinku $CC' = AA'$ zakreślamy koło k, jak na średnicy, to punkty przecięcia tego koła z osią AA' będą ogniskami. Na osi AA' leżą dwa ogniska rzeczywiste F i F', albowiem promień koła k jest większy niż odległość jego środka od osi AA'

Aby znaleźć ogniska, leżące na małej osi BB_1 trzebaby wyznaczyć punkty przecięcia tej osi z kołem k, zakreślonem na prostej CC_1, jak na średnicy. Punkty te będą urojone sprzężone, albowiem promień koła k, jest mniejszy od odległości jego środka od osi BB_1. Ogniska, leżące na osi BB_1 są zatem urojone sprzężone.

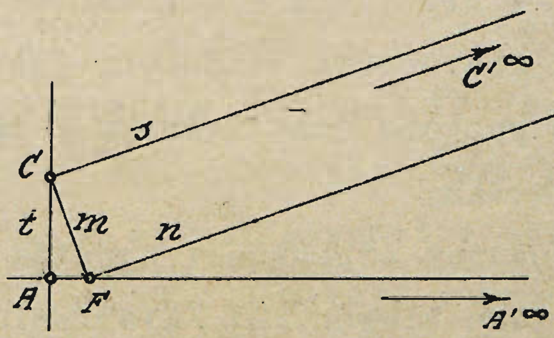
Jeżeli osie AA' i BB_1 są równne, t.j. gdy elipsa jest kołem, to wszystkie cztery ogniska są zjednoczone w środku koła, albowiem każde z kół k i k_1 jest styczne do jednej z osi AA' i BB_1.



Rys. 339.

Rzeczywiste ogniska elipsy są to zatem punkty, które leżą na wielkiej osi po obu stronach środka w odległości $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; jeżeli, jak zwykle, oznaczymy $OA = a$, $OB = b$.

Aby wyznaczyć rzeczywiste ogniska hiperboli /rys.339/, poprowadźmy w wierzchołkach A i A' osi poprzecznej styczne t i t', a za trzecią styczną uważajmy asymptotę s, która niechaj przecina tamte styczne w punktach C i C'. Na odcinku CC' zakreślmy koło k jak na średnicy, punkty jego przecięcia z osią AA' będą ogniskami F i F'. Hiperbola posiada zatem również dwa i tylko dwa ogniska rzeczywiste. Odległości tych punktów od środka O równe są promieniowi koła k, t.j. połowie odcinka CC'. Jeżeli przez analogję z elipsą długość odcinka AC oznaczymy przez b, to $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



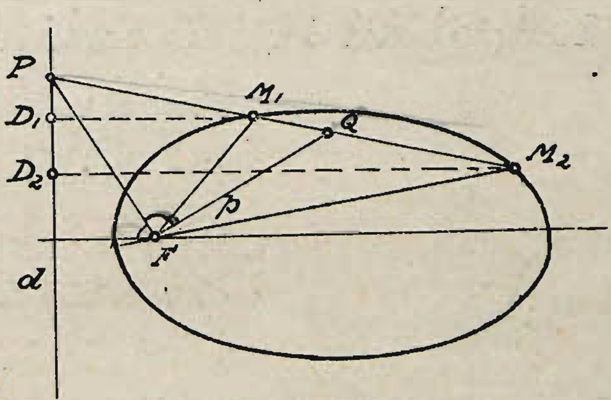
Rys. 340.

Dla wyznaczenia ognisk paraboli /rys.340/ poprowadźmy w wierzchołku właściwym A styczną t; styczna t w wierzchołku niewłaściwym jest prostą niewłaściwą. Jeżeli dana jest styczna jakakolwiek s, przecinająca

t w punkcie C i posiadająca kierunek C'^{∞} to ogniskiem będzie taki punkt F osi AA'^{∞}, z którego CC'^{∞} widać pod kątem prostym. Jeżeli w punkcie C wystawimy do s prostopadłą m, to punkt F, w którym m przecina AA'^{∞}, będzie ogniskiem paraboli. Ponieważ z każdego innego punktu właściwego osi AA'^{∞} odcinek CC'^{∞} byłby widziany pod kątem różnym od prostego, więc punkt F jest jedynem rzeczywistem i właściwem ogniskiem paraboli.

Biegunowe ognisk nazywają się kierownicami. W elipsie i hiperboli istnieją dwie kierownice rzeczywiste, są to proste zewnętrzne, symetryczne względem środka i prostopadłe do osi /wielkiej w elipsie, poprzecznej w hiperboli/. W paraboli istnieje tylko jedna kierownica właściwa; jest to prostopadła do osi w punkcie symetrycznym z ogniskiem względem wierzchołka.

Twierdzenie I. Stosunek odległości punktów stożkowych od ogniska i jego biegunowej /kierownicy/ jest stały. Weźmy dwa jakiekolwiek punkty stożkowej M_1 i M_2 /rys.341/ niechaj sieczna M_1M_2 przetnie biegunową d ogniska F /kierownicę/ w punkcie P; biegunowa p punktu P przejdzie przez ognisko F i przetnie sieczną $M_1 M_2$ w punkcie Q, który jest harmonicznie sprzężony z P względem M_1 i M_2; proste FP i FQ jako sprzężone i wychodzące z ogniska są wzajemnie prostopadłe. Czwórka prostych $F(M_1 M_2 P Q)$, rzucająca harmoniczną czwórkę $M_1 M_2 P Q$ jest harmoniczną; ponieważ zaś proste sprzężone FP i FQ są wzajemnie prostopadłe, więc są one dwusiecznemi kątów między prostemi FM_1 i FM_2;



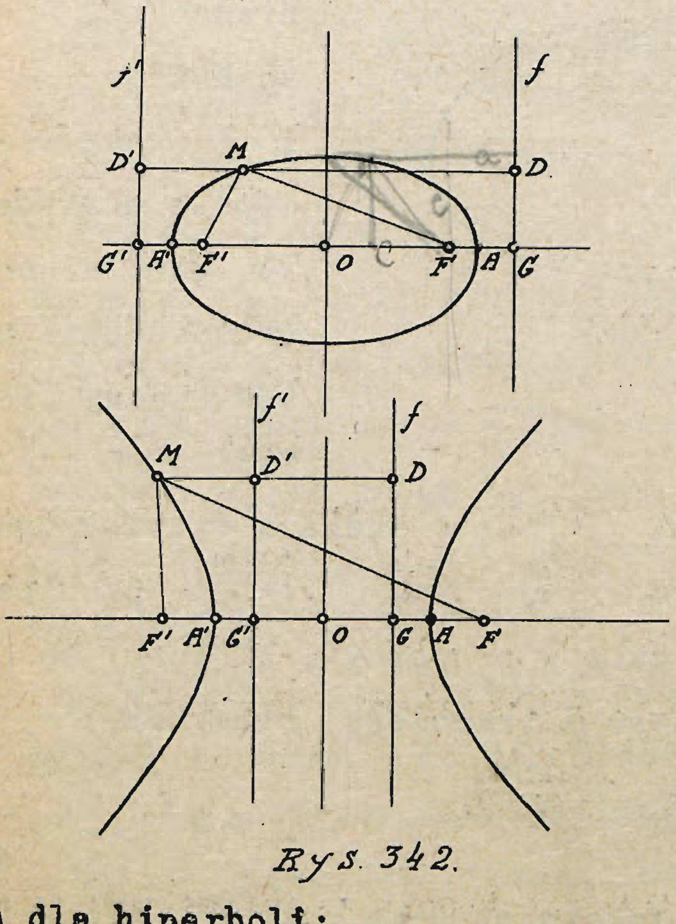
Rys. 341.

w trójkącie FM_1M_2 - FP jest jedną z dwusiecznych kąta F, a więc $\frac{FM_1}{FM_2} = \frac{PM_1}{PM_2} = \frac{M_1D_1}{M_2D_2}$; przestawiając wyrazy średnie w proporcji, złożonej ze stosunków pierwszego i trzeciego, otrzymamy:

$$\frac{FM_1}{M_1D_1} = \frac{FM_2}{M_1D_2} \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Wartość tego stałego stounku nazywamy <u>mimośrodem</u> stożkowej i oznaczamy literą ε; biorąc punkt M, w jednej z wierzchołków stożkowej łatwo obliczyć, że dla elipsy i hiperboli $\varepsilon = \frac{c}{a}$, gdzie c jest odległością ogniska od środka stożkowej i równa się $\sqrt{a^2-b^2}$ dla elipsy, a $\sqrt{a^2+b^2}$ dla hiperboli.

Twierdzenie II. Suma odległości każdego punktu elipsy od obu jej ognisk równa się wielkiej osi $AA'=2a$; różnica odległości każdego punktu hiperboli od obu jej ognisk równa się osi poprzecznej $AA=2a$



Rys. 342.

Z twierdzenia I wynika zarówno dla elipsy, jak dla hiperboli /rys. 342/

$$\frac{MF}{MD} = \frac{MF'}{MD'} = \frac{c}{a}$$

stąd dla elipsy:

$$\frac{MF+MF'}{MD+MD'} = \frac{c}{a},$$

a dla hiperboli:

$$\frac{MF-MF'}{MD-MD'} = \frac{c}{a};$$

$\frac{FH}{AB} = \frac{c}{a}$

$AG = \frac{(a-c)\cdot a}{c} + a$

$\frac{a^2 - ac + ac}{c}$

$\varepsilon = \frac{c}{a}$

ale dla elipsy:

$$MD + MD' = GG' = 2\,OG = 2\,\frac{a^2}{c}$$

skąd

$$MF + MF' = 2\,\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2}{c} = 2a,$$

a dla hiperboli

$$MD - MD' = GG' = 2\,OG = 2\,\frac{a^2}{c},$$

skąd

$$MF - MF' = 2\,\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2}{c} = 2a.$$

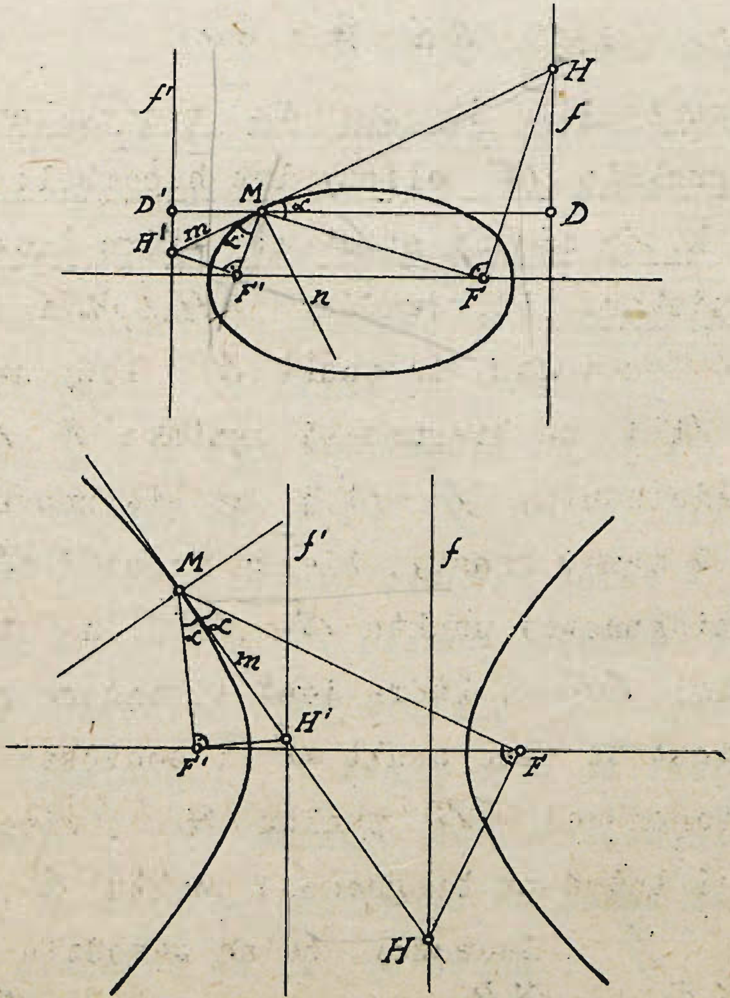
Twierdzenie III. Styczna m i normalna n w każdym punkcie M elipsy lub hiperboli są dwusiecznemi kątów między prostemi, które łączą punkt M z ogniskami. Poprowadźmy $FH \perp MF$ i $F'H' \perp MF'$ /rys. 343/ powiadam, że punkt H leży na kierownicy f /t.j. na biegunowej ogniska F /, a punkt H' na kierownicy f' /t.j. na biegunowej ogniska F' /. W samej rzeczy, biegun prostej MF musi leżeć na biegunowej punktu M, t.j. na stycznej m i na prostej FH, która jest sprzężona z prostą FM; jest to więc punkt H; ponieważ punkt F leży na biegunowej FM punktu H, więc punkt H musi leżeć na biegunowej punktu F, t.j. na kierownicy f. Zauważmy, że na zasadzie twierdzenia I $\frac{MF}{MF'} = \frac{MD}{MD'}$; ponieważ zaś $\frac{MD}{MD'} = \frac{MH}{MH'}$, więc

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{MH}{MH'} ,$$

czyli

$$\frac{MF}{MH} = \cos.\alpha = \frac{MF'}{MH'} = \cos\alpha'$$

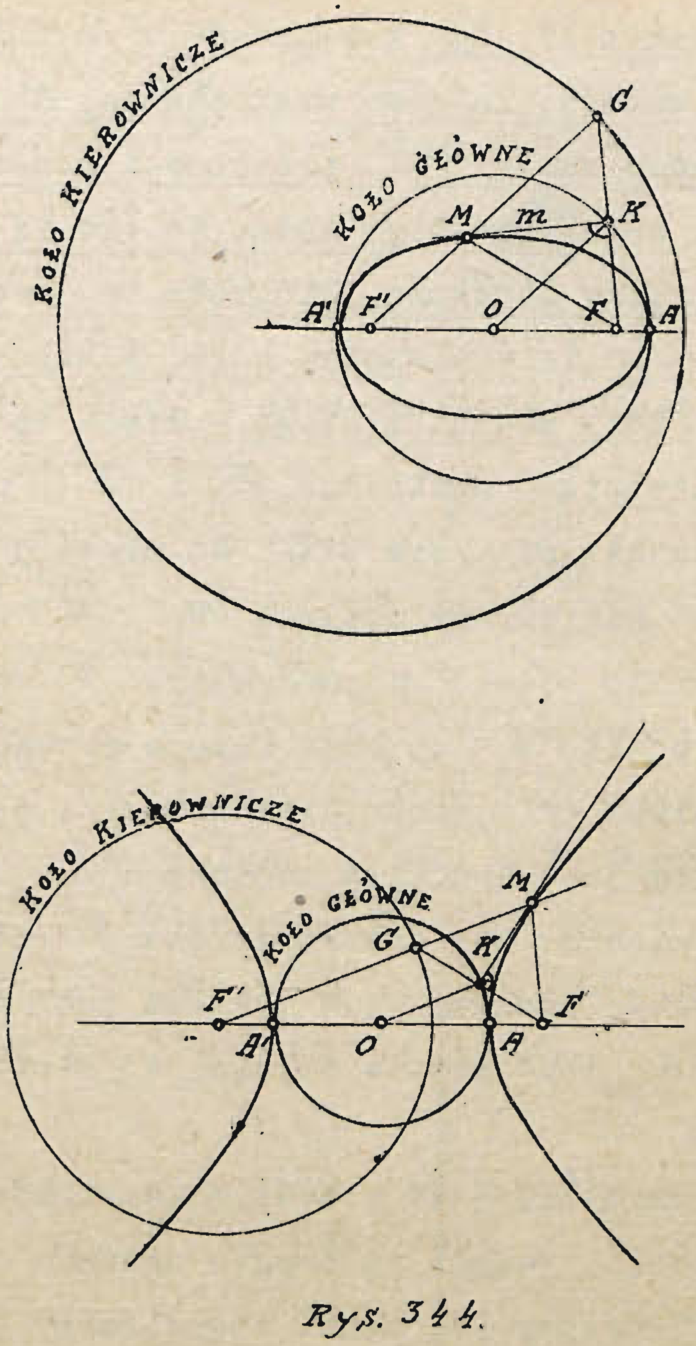
skąd $\alpha = \alpha'$, co dowodzi twierdzenia.



Rys. 343.

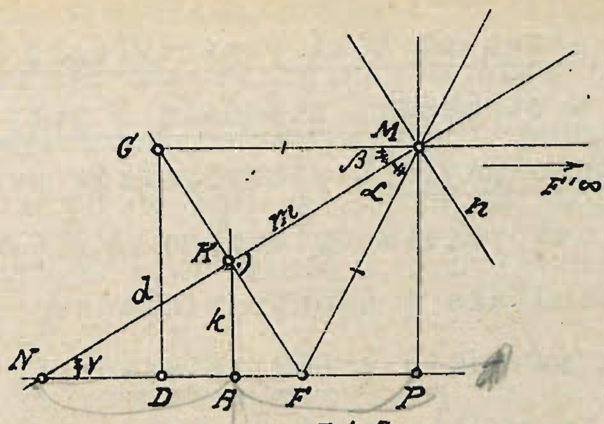
Twierdzenie IV. Gdy kąt prosty FKM porusza się w ten sposób, że jego wierzchołek K opisuje koło, a jedno ramię FK przechodzi przez punkt F nie leżący na okręgu tego koła, to drugie ramię KM powłóczy stożkową. Stożkowa ta jest elipsą, gdy punkt F leży wewnątrz koła, a hiperbolą, gdy punkt F leży zewnątrz niego. - Niech będzie elipsa lub hiperbola o ogniskach F i F', przechodząca przez punkt M /rys.344/. Na prostej $F'M$ od punktu M odmierzamy odcinek $MG = MF$ tak, żeby $F'G$ równało się $2a$. Gdy punkt M opisuje stożkową, punkt G opisuje koło o promieniu $2a$ dokoła ogniska F' /koło kierownicze/; przeto punkt K, który jest środkiem odcinka FG, opisuje koło o promieniu a dokoła środka O stożkowej /koło główne/; prosta KM, która jest dwusieczną kąta FMG, jest przeto styczną do stożkowej w punkcie M.

Twierdzenia III i IV prawdziwe są także w przypadku paraboli, jeżeli za drugie ognisko F' paraboli uważać będziemy jej punkt niewłaściwy. - Niech A będzie wierzchołkiem /właściwym/ paraboli, t - styczną w tym wierzchołku, m - styczną jakąkolwiek, która niechaj przecina oś paraboli w punkcie



Rys. 344.

N , a styczną *k* w punkcie *K* /rys.345/. Aby wyznaczyć punkt zetknięcia *M* na stycznej *m* , wykreślmy biegunową punktu *N* . Będzie to prosto-



Rys. 345.

padła do osi, wystawiona w punkcie P symetrycznym z N względem A; punkt M będzie przeto symetryczny z N względem K. Ognisko F znajdziemy w przecięciu osi z prostopadłą do m, wystawioną w punkcie K. Przez M poprowadźmy równoległą MF'^{∞} do osi, t.j. prostą w kierunku ogniska niewłaściwego. Trójkąt FMN jest równoramienny /bo $MK = NK$ i $KF \perp MN$ /, skąd wynika $\gamma = \alpha = \beta$.

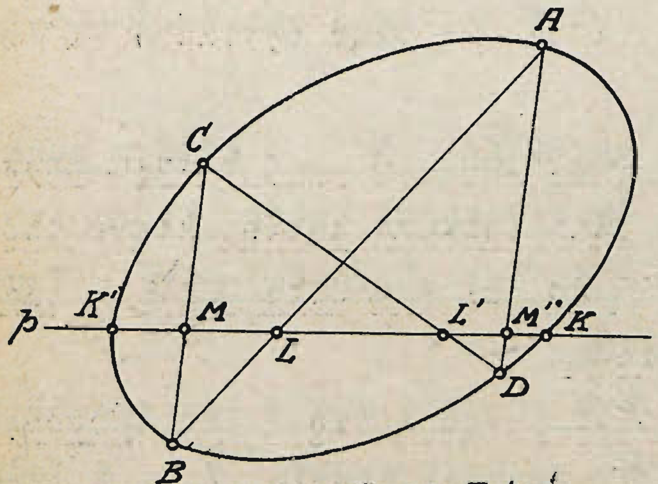
A więc:

Styczna m i normalna n w każdym punkcie M paraboli są dwusiecznemi kątów, które tworzy równoległa MF'^{∞} do osi z prostą MF, łączącą punkt M z ogniskiem.

Gdy kąt prosty FKM porusza się w ten sposób, że jego wierzchołek K opisuje prostą k, a jedno ramię FK przechodzi przez punkt F, nie leżący na prostej k, to drugie ramię powłóczy parabolę.

§ 183. Twierdzenie Desargues'a. I. Punkty, w których dowolna sieczna przecina stożkową, oraz punkty, w których ta sieczna przecina boki przeciwległe czworokąta wpisanego w stożkową, stanowią 3 pary punktów sprzężonych inwolucji. Z wierzchołków przeciwległych A i C czworokąta wpisanego $ABCD$ /rys. 346/ rzućmy pozostałe 4 punkty stożkowej K, K', B i D. Na zasadzie § 169, I czwórki prostych rzucających te punkty z wierzchołków A i C są rzutowe; przecięcie tych czwórek prostą p stanowić przeto będzie dwie czwórki punktów na wspólnej podstawie:

$$p(KK'LM') \barwedge p(KK'ML');$$



Rys. 346'.

Ale druga z tych czwórek jest rzutowa z czwórką $K'KL'M$ /bo dwustosunki $KK'ML'$ i $K'KL'M$ są równe, skąd wynika:

$$p(KK'LM') \barwedge p(K'KL'M).$$

Ponieważ punkty K i K' odpowiadają sobie w tych czwórkach podwójnie, więc wszystkie inne pary punktów odpowiednich, a więc L i L', M i M' również odpowiadają sobie podwójnie, t.j. są w inwolucji /§ 136/ c.b.d.o. /Inwolucji tej nie należy oczywiście mieszać z inwolucją biegunową na prostej p /.

Twierdzenie powyższe pozostanie w mocy jeszcze wtedy, gdy sieczna p stanie się styczną do stożkowej. W punkcie zetknięcia zostaną wtedy zjednoczone oba punkty K i K', skąd wynika:

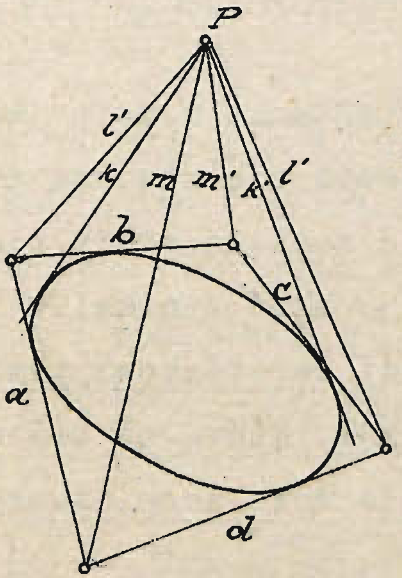
Punkt zetknięcia stycznej ze stożkową jest jednym z punktów podwójnych inwolucji, którą na tej stycznej wyznaczają boki przeciwległe dowolnego czworokąta wpisanego w stożkową.

Posługując się zasadą dwoistości dowiedlibyśmy twierdzenia wzajemnego /rys.347/.

II. Styczne wyprowadzone do stożkowej z dowolnego punktu zewnętrznego oraz proste, rzucające z tego punktu wierzchołki przeciwległe czworoboku opisanego na stożkowej, stanowią trzy pary prostych sprzężonych inwolucji.

Twierdzenie Desargues'a, podobnie jak twierdzenie Pascala i Brianchona wyrażają zależność linjową między 6 punktami lub 6 stycznemi stożkowej. Dlatego też na tych twierdzeniach można oprzeć jeszcze jeden sposób wykreślenia linjowego stożkowej, przechodzącej przez 5 danych punktów lub stycznej do 5 danych prostych.

§184. Zagadnienie 2-go stopnia. Wyznaczenie stożkowej przez 5 jej elementów tego samego rodzaju jest zagadnieniem, które w każdym przypadku ma jedno i tylko jedno rozwiązanie i da się uskutecznić zapomocą konstrukcji linjowej t.j. bez użycia cyrkla i ekierki. Mówimy o takich zagadnieniach, że są pierwszego stopnia. Poniżej podajemy kilka przykładów zagadnień drugiego stopnia, t.j. takich, które mają wogóle dwa rozwiązania. Zagadnienia te wymagają użycia cyrkla, a zapomocą konstrukcji linjowej dadzą się rozwiązać jedynie wtedy, gdy w płaszczyźnie rysunku mamy wykreślone koło w dowolnem zresztą położeniu i dowolnej wielkości /Steiner/.



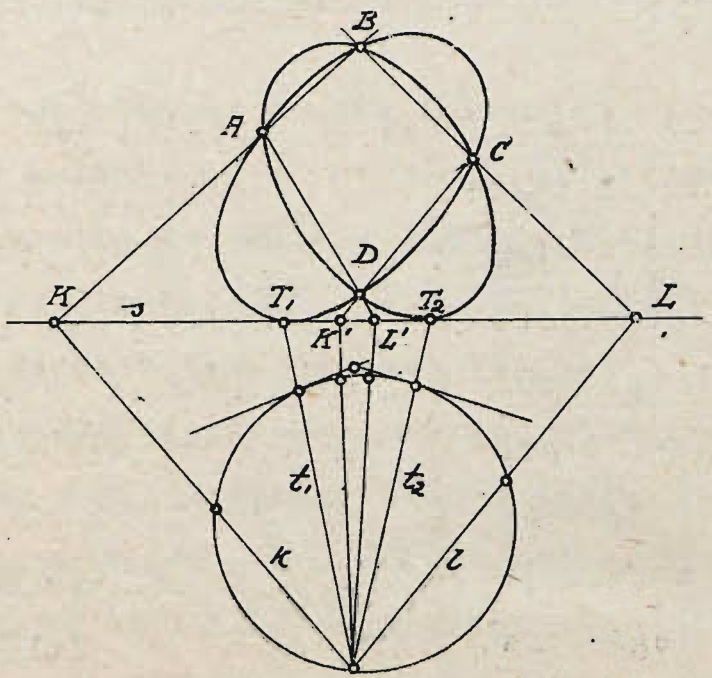
Rys. 347.

I. Wykreślić stożkową, przechodzącą przez 4 dane punkty A, B, C i D i styczną do danej prostej σ.

Zadanie to sprowadzi się do zadania już rozwiązanego: "Wykreślić stożkową, przechodzącą przez 5 danych punktów," jeżeli zdołamy na stycznej wyznaczyć punkt zetknięcia T. Zauważmy, że czworokąt $ABCD$/rys.348/ jest wpisany w stożkową; na zasadzie artykułu poprzedniego punkt zetknięcia na stycznej σ jest przeto jednym z dwóch punktów podwójnych inwolucji $KK'LL'$, którą wyznaczają boki przeciwległe czworokąta $ABCD$. Zależnie od tego, czy inwolucja ta jest hiperboliczna, paraboliczna lub eliptyczna, znajdziemy dwa, jedno lub "zero" rozwiązań.

Zupełnie tak samo rozwiążemy zadanie wzajemne:

II. Wykreślić stożkową styczną do czterech danych prostych a, b, c i d i przechodzącą przez dany punkt S. Punkt S łączymy z wierzchołkami przeciwległemi czworoboku opisanego $abcd$. i zapomocą koła Steinera znajdujemy proste podwójne inwolucji, przez te dwie pary prostych dokoła punktu S wyznaczonej.

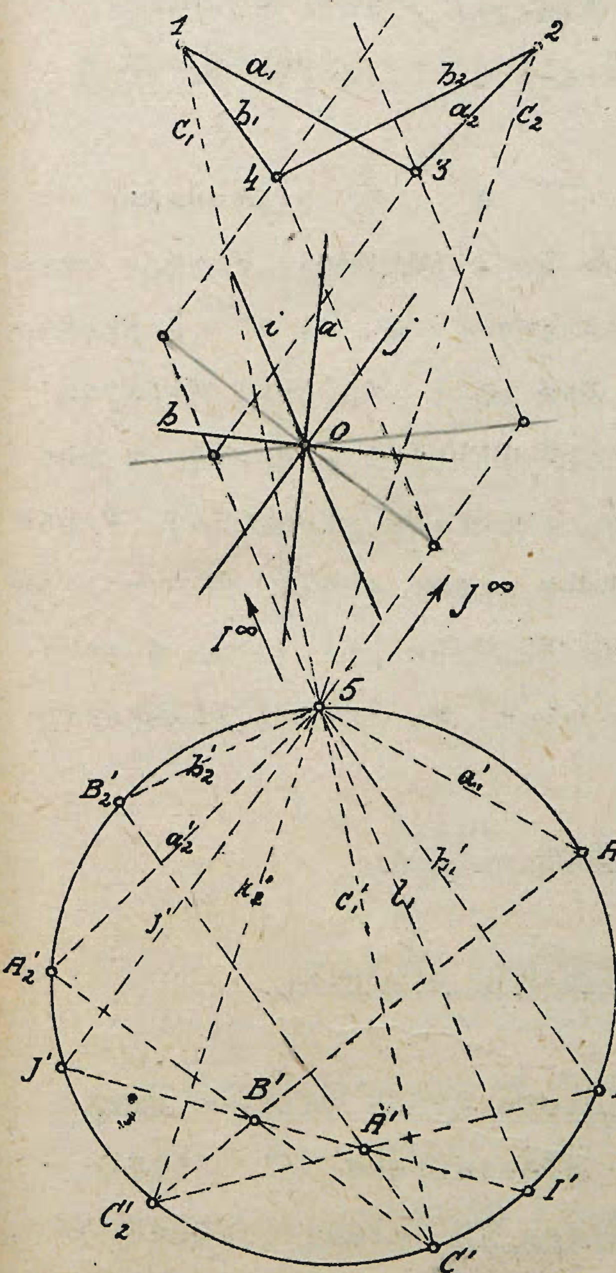


Rys. 348.

III. Znaleźć punkty przecięcia prostej ze stożkową, wyznaczoną przez 5 punktów 1,2,3,4 i 5; lub z punktu S wyprowadzić styczne do stożkowej, wyznaczonej przez 5 stycznych 1,2,3,4 i 5.

Zastosujmy to zadanie do następującego przypadku szczególnego.

Wykreślić asymptoty stożkowej, danej zapomocą 5-ciu punktów 1,2,3, 4 i 5 /rys.349/. W tym celu należy najpierw wyznaczyć punkty, w których prosta niewłaściwa przecina stożkową, a później w tych



Rys. 349.

punktach poprowadzić styczne /§ 155/. Dla rozwiązania pierwsze części zadania tworzymy pęki rzutowe

$1(a, b, c, \dots) \pi 2(a_2 b_2 c_2 \dots$

które rzucają z punktów 1 i 2 wszystkie punkty stożkowej. Proste a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2 wyznaczają na prostej niewłaściwej 3 pary punktów t.j. kierunków odpowiednich; należy znaleźć kierunki podwójne t.j. asymptotyczne.- Przez punkt jakikolwiek np. przez

5 prowadzimy koło Steinera i z jego pomocą wyznaczamy proste podwójne dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku 5, których proste a_1', b_1', c_1' i a_2', b_2', c_2'. są równoległe do prostych a_1, b_1, c_1 i a_2, b_2, c_2.

Znalazłszy kierunki I^∞ i J^∞ prowadzimy styczne w tych kierunkach do stożkowej; łącząc każdy z tych punktów niewłaściwych I^∞ i J^∞ z punktami 3, 4 i 5 otrzymamy dwa pęki rzutowe, których środek perspektywy O jest punktem przecięcia obu stycznych szukanych, t.j. środkiem stożkowej. Proste i i j, poprowadzone przez punkt O w kierunkach I^∞ i J^∞ są asymptotami, dwusieczne a i b kątów między niemi są osiami stożkowej.

ROZDZIAŁ XIV.

POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

§ 185. Kolineacja środkowa dwóch układów przestrzennych. Niech będzie płaszczyzna S, którą nazywać będziemy płaszczyzną kolineacji, punkt O który nazwiemy środkiem kolineacji i dwa punkty A_1 i A_2, leżące na dowolnej prostej a, wychodzą-