ROZDZIAŁ XI. PERSPEKTYWA STOSOWANA.

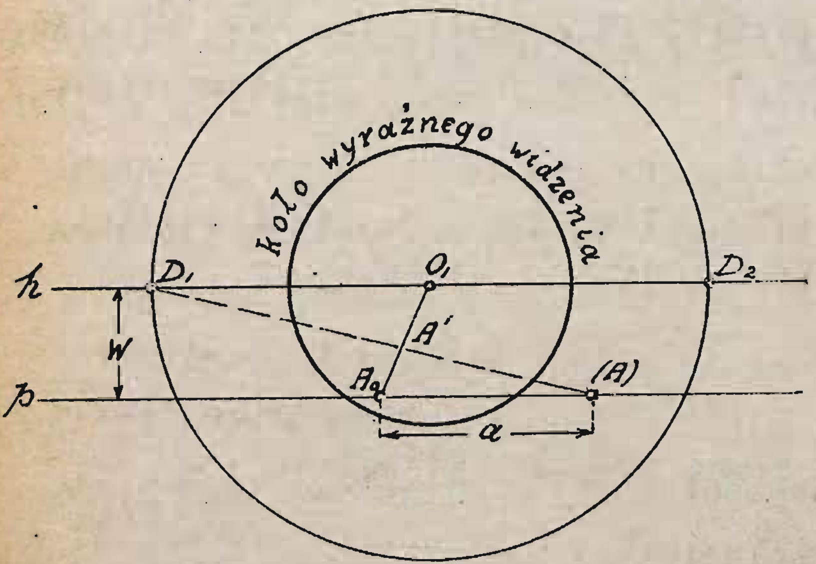
Przedmiotem perspektywy stosowanej jest wykreślenie rzutów środkowych figur, których rzuty prostokątne są dane, z uwzględnieniem anatomicznych i fizjologicznych właściwości oka oraz warunków praktycznego wykonania rysunku.

§110. Stożek i koło wyraźnego widzenia. Jeżeli, jak to zwykle mieć chcemy, płaszczyzna rzutów P jest pionową, a oko, w środku rzutów O umieszczone, jest skierowane na punkt główny O_1, to wyraźnie widziane mogą być te tylko figury, które znajdują się wewnątrz stożka obrotowego, mającego za oś prostą $O\,O_1$, a którego tworzące są od tej osi odchylone pod kątem nie większym od $30°$. Podstawą tego stożka wyraźnego widzenia będzie na płaszczyźnie rzutów koło o środku O_1, którego promień będzie równy mniej więcej połowie promienia koła oddalenia /co odpowiada odchyleniu tworzącej stożka od osi $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 26°30'$/. Jeżeli perspektywa figury ma wywołać złudzenie rzeczywistości to rzut figury musi być zawarty wewnątrz tego koła, zwanego kołem wyraźnego widzenia. Brzegi obrazu perspektywicznego, mającego zwykle kształt prostokąta, nie powinny w żadnym razie być prostemi zewnętrznemi względem koła wyraźnego widzenia.

§111. Wybór koła oddalenia. Punkt główny O obieramy zazwyczaj w pobliżu środka prostokąta przeznaczonego na obraz perspektywiczny. Jeżeli przypuścimy, że normalne oko ludzkie widzi wyraźnnie tylko takie przedmioty, które znajdują się od niego w odległości nie mniejszej od 25 cm. to stąd wynikałoby, że promień koła oddalenia nie powinien być mniejszy od 25 cm. Wniosek taki byłby zbyt pospieszny. Bez wątpienia należy uznać zasadę, że obraz perspektywiczny najlepsze wywrze wrażenie, gdy oko będzie umieszczone w środku rzutów. Nie jest to wszakże bezwzględnie konieczne, wiemy z doświadczenia, że przy oglądaniu obrazu możemy zmieniać w dość znacznych granicach punkt widzenia, nie dostrzegając powstającej z tego powodu niepoprawności obrazu. Przyczyna tego jest oczywiście psychologicznej natury.

Pobudki psychologicznej natury sprawiają również, że uważamy za poprawny każdy obraz, który jest figurą podobną do obrazu perspektywicznego i to nawet wtedy, gdy z powodu znacznego zmniejszenia obrazu /a więc i oddalenia/, oko nie mogłoby znajdować się w środku rzutów, leżącego wtedy na zbyt małej odległości od płaszczyzny obrazu, aby z tego punktu mogły być wyraźnie widziane figury w niej wykreślone. Koło oddalenia może więc być dowolnie małem pod warunkiem, aby zmniejszeniu normalnego oddalenia odpowiadało proporcjonalne zmniejszenie wymiarów figury, która ma być odwzorowana.

§112. Linja przyziemna, horyzont, punkty oddalenia. Jedną z płaszczyzn poziomych zwiemy płaszczyzną przyziemną; jej ślad p nazywamy linją przyziemną, jej prostą zbiegu h - horyzontem /Rys. 221/. Odległość tych dwóch prostych W nazywamy wysokością horyzontu, jest ona równa wysokości środka rzutów, t.j. oka nad płaszczyzną przyziemną. Wysokość horyzontu obieramy więc zazwyczaj w granicach 150 - 200 cm. w tej skali - w jakiej wyobrażamy sobie zmniejszoną figurę, którą odwzorować pragniemy.



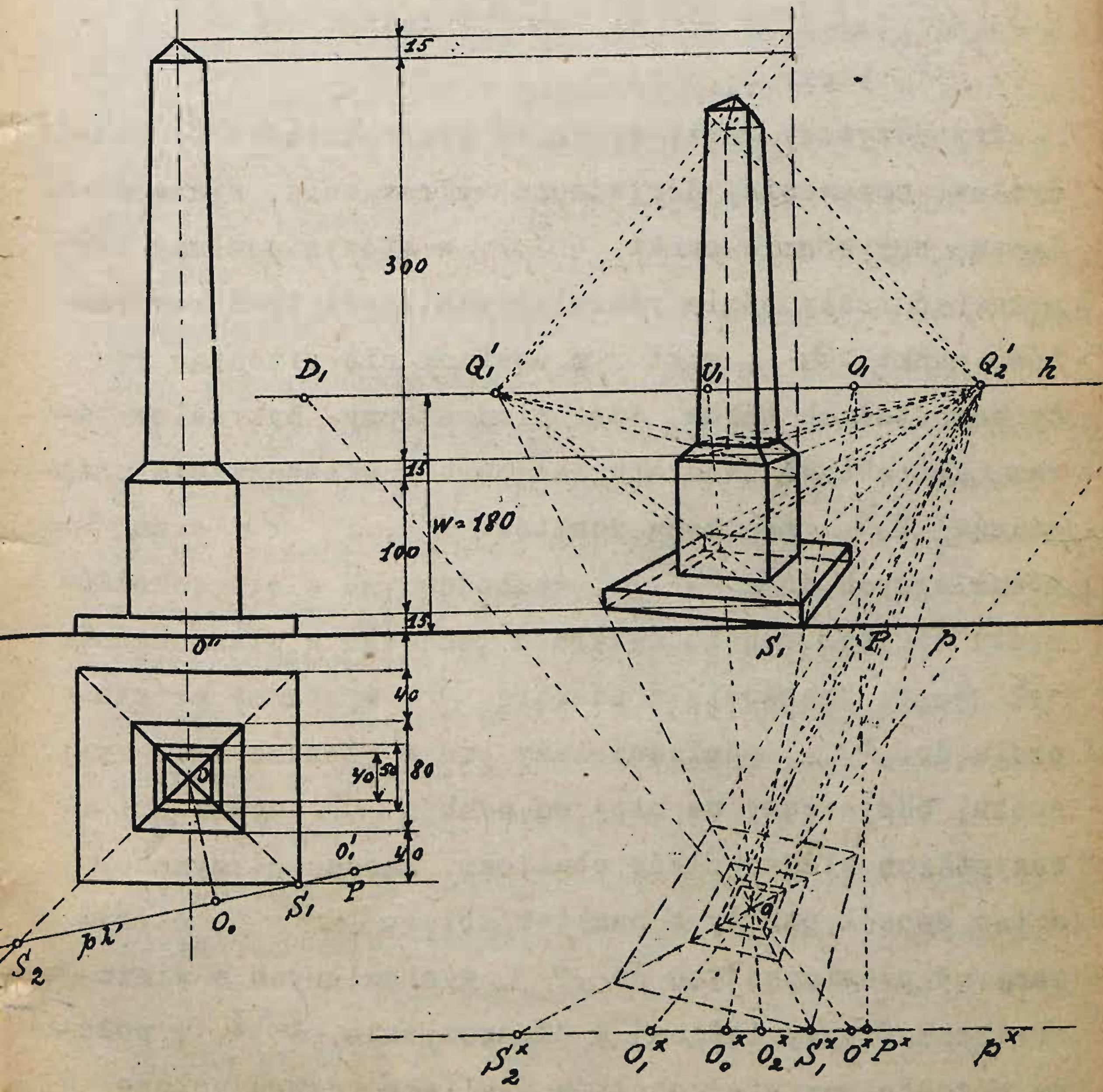
Rys. 221.

skala ta nie może być większa od tej, która odpowiada zmniejszeniu normalnego promienia koła oddalenia /25 cm./ Horyzont h przechodzi przez punkt główny O_1, albowiem płaszczyzna przyziemna ph jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Punkty przecięcia D_1 i D_2 koła oddalenia z horyzontem nazywają się <u>punktami oddalenia</u>; są to punkty miarowe prostych prostopadłych do płaszczyzny rysunku, a więc mających punkty zbiegu w punkcie głównym O_1. Proste mające punkty zbiegu w punkcie D_1 lub D_2, są prostemi poziomemi tworzącemi kąt 45° z płaszczyzną rysunku.

<u>§113. Perspektywa, figury, której rzuty prostokątne są dane.</u> Niech będą dane, w skali 1 : 50, rzuty prostokątne obelisku /Rys. 222/, mamy wykreślić jego perspektywę w założeniu, że płaszczyzna rzutów P jest płaszczyzną pionową, której ślad poziomy na płaszczyźnie przyziemnej czyli linja przyziemna, jest prostą p, przechodzącą przez jeden z wierzchołków S_1 podstawy obelisku; - będzie to zarazem rzut poziomy h' horyzontu h, którego wysokość niechaj będzie $W = 180 cm.$ /w skali 1 : 50/. Obierzmy na $p \equiv h$ punkt $O_1' \equiv P$, który uważajmy za rzut poziomy punktu głównego O_1, leżącego na

horyzoncie h . Ze środka O podstawy obelisku spuśćmy prostopadłą na ph' , wyznaczmy jej spodek O_0 oraz punkty S_1 i S_2 , w których przekątne rzutu poziomego obelicku przecinają prostą p .

Wykreśliwszy linję przyziemną p i horyzont h /$W = 180 cm.$/, obieramy na horyzoncie punkt O_1 , od którego w jedną którąkolwiek stronę /np. w lewo/ odmierzamy oddalenie $d = O_1D_1 = 400 cm.$/w skali 1:50/. Pierwszem zadaniem naszem będzie wykreślić w płaszczyźnie ph , albo lepiej w pł. $p^x h$ do niej równoległej /§104/, rzut poziomy obelisku. W tym celu wyznaczmy na p^x punkt P^x , który jest spodkiem prostopadłej spuszczonej z O_1 na p^x i od punktu P^x odmierzmy na p^x odcinki $P^x O_0^x = PO_0$, $P^x S_1^x = PS_1$, $P^x S_2^x = PS_2$ i $O_0^x O^x = O_0 O$.
Połączmy $O_0^x O_1$ i $O^x D_1$, przecięcie tych prostych wyznaczy rzut środkowy O' punktu O ; proste $O'S_1^x$ i $O'S_2^x$ będą środkowemi rzutami przekątnych rzutu poziomego obelisku, punkt zbiegu pierwszej z nich może być wyznaczony (Q'_1) , punkt zbiegu drugiej jest niedostępny. Na rzutach środkowych prostych OS_1 i OS_2 trzeba teraz wyznaczyć rzuty środkowe wierzchołków czterech kwadratów, z których skła-


15
300
15
100
15
W=180
D₁
Q'₁
U₁
O₁
Q'₂
h
S₁
P
p
O''
40
80
50
40
40
O'₁
P
S₁
O₀
S₂
pλ'
S₂ˣ
O₁ˣ
O₀ˣ
O₂ˣ
S₁ˣ
Oˣ
Pˣ
pˣ

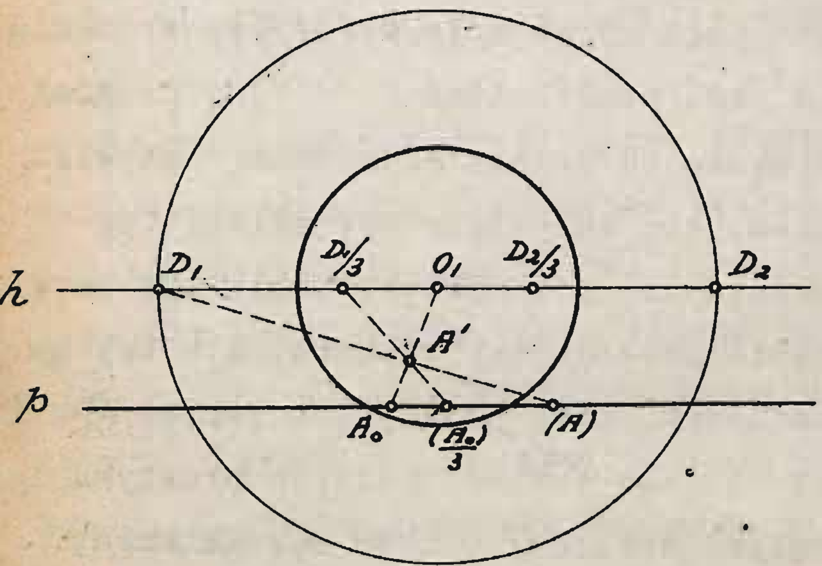
Rys. 222.

da się rzut poziomy obelisku. Najłatwiej tego dokonać zapomocą punktów miarowych T_1 i U_1 tych prostych /§103/, znajdziemy je, odmierzając na p^x odcinki $S^x O_1^x = S_1 O$ i $S_2^x O_2^x = S_2 O$ i łącząc $O_1^x O'$ i $O_2^x O'$.

Wyznaczywszy rzuty środkowe wierzchołków 4 kwadratów, sprawdzimy dokładność wykreślenia, wyznaczając na horyzoncie punkt Q_2', w którym powinny się przeciąć rzuty ośmiu równoległych boków tych kwadratów, punkt Q_3', w którym powinny się przeciąć rzuty pozostałych boków, jest niedostępny. Wykreślmy teraz perspektywę kwadratu leżącego w płaszczyźnie przyziemnej ph zapomocą punktów Q_1' i Q_2' oraz równoległych do OP^x, wychodzących z wierzchołków rzutu takiego samego kwadratu leżącego w płaszczyźnie $p^x h$. Następnie w punkcie S_1 wystawmy prostopadłą do p; ponieważ leży ona w płaszczyźnie rysunku, odmierzamy na niej od punktu S_1 wysokości wszystkich wierzchołków obelisku. Łącząc otrzymane w ten sposób punkty z punktem zbiegu Q_1', otrzymamy na prostopadłych do p, wystawionych w wierzchołkach figury leżącej w płaszczyźnie $p^x h$, połowę pozostałych wierzchołków obelisku, drugą połowę wierzchołków otrzymamy zapomocą tych samych prostopadłych oraz punktu Q_2'.

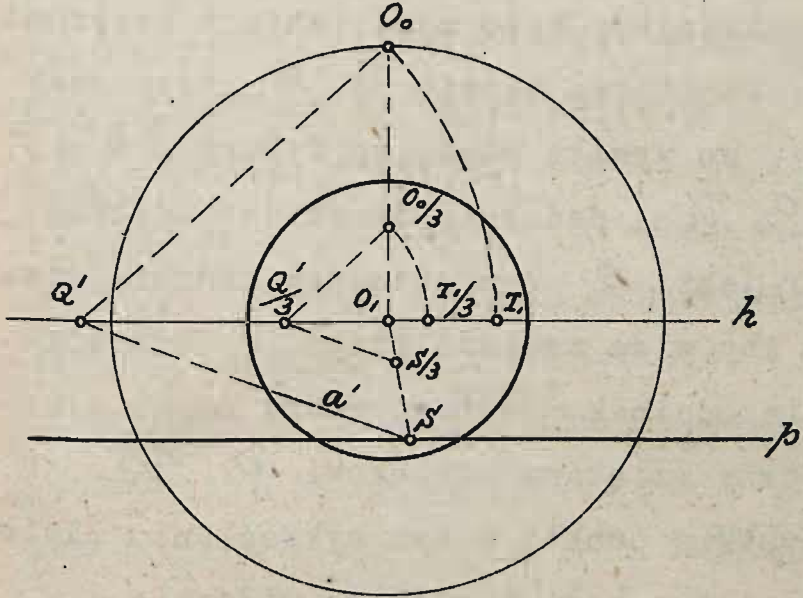
§114. Punkty zredukowane. Jak to powiedzieliśmy w §110, perspektywa rysowanej przez nas figury nie powinna wykraczać poza obręb koła wyraźnego widzenia którego środkiem jest punkt główny O_1, a promień jest niewiele większy od połowy oddalenia. Oczywiście jest pożądanem, aby wszystkie wykreślenia potrzebne do wykonania tej perspektywy mogły być uskutecznione w obrębie płaszczyzny rysunku, dla tej perspektywy przeznaczonym. Otóż punkty oddalenia D_1 i D_2 oraz punkty zbiegu i ślady różnych prostych leżą poza tym obrębem; wskażemy przeto wykreślenia, które pozwolą nam obyć się bez tych punktów, - innemi słowy zastąpimy punkty D_1 i D_2 oraz niedostępne punkty zbiegu i ślady punktami zredukowanemi. Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć rzut środkowy punktu A leżącego w płaszczyźnie ph na danej odległości a od punktu A_0 linji przyziemnej p. W tym celu należałoby postąpić tak jak w § poprzednim postąpiliśmy dla wyznaczenia punktu O: połączyć $A_0 O_1$ odmierzyć od punktu A_0 w jedną lub drugą stronę prostej p odcinek $A_0(A) = a$, połączyć punkt (A) z tym z dwóch punktów D_1 lub D_2, który leży po przeciwnej stronir prostej $A_0 O_1$

niż punkt (A) ; punkt przecięcia prostych $A_o(O_1)$ i $(A)D_1$ jest rzutem punktu A. /Rys.223/. Wykreślenie to zawodzi, gdy jeden choćby z dwóch punktów D_1 i (A) lub D_2 i (A) jest niedostępny; postąpimy wtedy jak następuje: Odmierzmy na horyzoncie h od punktu głównego O_1 w jedną lub drugą stronę odcinki $O_1\frac{D_1}{3}$ i $O_1\frac{D_2}{3}$ równe np. trzeciej części oddalenia O_1D_1 ; od punktu A_o odmierzmy odcinek $A_o\frac{(A)}{3}$ równy trzeciej części odcinka $A_o(A) = \frac{a}{3}$; jest oczywistem, że prosta $\frac{(A)}{3}\frac{D_1}{3}$ przecina prostą A_oO_1 w tym samym punkcie A', w którym ją przecina prosta $(A)D_1$. Potrzebne do wyznaczenia punktu A' punkty $\frac{D_1}{3}$ i $\frac{(A)}{3}$ leżą w obrębie koła wyraźnego widzenia.



Rys. 223

Przypuśćmy teraz, że dany jest rzut a' prostej a, której ślad S leży w obrębie koła wyraźnego widzenia, a której punkt zbiegu Q' leży poza jego obrębem /Rys.224/ mamy znaleźć punkt miarowy T_1 lub T_2 tej prostej nie korzystając w tym celu z żadnego punktu leżącego nazewnątrz koła wyraźnego widzenia. Gdyby to ograniczenie nie było nam narzucone, znaleźlibyśmy punkt T_1 na horyzoncie w przecięciu z okręgiem koła zakreślonego z punktu zbiegu Q' promieniem $Q'O_o$, przytem punkt O_o, t.j. kład środka rzutów O leży teraz na kole oddalenia. Aby uniknąć punktów Q' i O_o, które leżą poza obrębem koła wyraźnego widzenia, dzielimy O_1S na kilka, np. na trzy części równe i z punktu $S/3$ prowadzimy równole-



Rys. 224.

głą do a' otrzymująo na horyzoncie punkt $Q'/3$, którego odległość od O_1 jest trzecią częścią odległości punktu Q' od O_1. Punkt $Q'/3$ łączymy z punktem $O_0/3$, którego odległość od O_1 jest trzecią częścią oddalenia, poczem promieniem $Q'/3$ $a/3$, z punktu $Q'/3$ zakreślamy koło przecinające horyzont w punkcie $T_1/3$. Punkt ten będzie od O_1 trzy razy bliżej niż T_1, co wynika stąd, że figury $S Q' a T_1$ i $S/3$ $Q'/3$ $O_0/3$ $T_1/3$ są podobne; środkiem podobieństwa tych figur jest O_1, a stosunek podobieństwa równa się 3. Aby więc znaleźć punkt T_1 odmierzamy na horyzoncie odcinek $O_1 T_1$ równy co do wielkości i znaku trzy razy wziętemu odcinkowi O_1 $T_1/3$. W ten sposób wszystkie punkty w tym wykreśleniu użyte znalazły się wewnątrz koła wyraźnego widzenia.-

CZĘŚĆ IV. KRZYWE, STOŻKI I POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

ROZDZIAŁ XII. SZEREGI I PĘKI RZUTOWE.

§.115. Określenie geometrji rzutowej. Istota wszystkich metod geometrji wykreślnej, jak to zauważyliśmy już w § 1, polega ~~na przekształceniu~~ danej figury przestrzennej na figurę płaską zapomocą kolejnych dwóch czynności: rzucania i przecinanie. Zanim przystąpimy do dalszego rozwinięcia metod geometrji wykreślnej, trzeba bliżej poznać te własności figur, które zostają zachowane przez rzuty i przecięcia. Do takich należy przedewszystkiem wzajemna przynależność elementów geometrycznych /punktów i prostych, prostych i płaszczyzn/. Jeżeli punkt A leży na prostej b , to prosta b rzucająca punkt A z dowolnego punktu C leży w płaszczyźnie B rzucającej z tego samego środka rzutów prostą b , jeżeli prostą a leżącą w płaszczyźnie B przetniemy płaszczyzną jakąkolwiek, to punkt A , w którym płaszczyzna sieczna przecina prostą a leży na prostej b , według której ta sama płaszczyzna przecina płaszczyznę B . Typowemi twierdzeniami, dotyczącemi własności, zachowujących się przez rzuty i przecięcia, są twierdzenia o trójkątach Desargues'a /§75, Rys.167/. Istota tych twierdzeń polega na istnieniu t.zw. konfiguracji Desargues'a, t.j. figury płaskiej, złożonej z 10 punktów i 10 prostych w ten sposób, że przez każdy punkt przechodzą 3 proste i na każdej prostej leżą 3 punkty. Jeżeli z jakiegokolwiek punktu P rzucimy wszystkie te 10 punktów i 10 prostych, to otrzymamy figurę złożoną z 10 prostych i 10 płaszczyzn wychodzących z punktu P w ten sposób, że przez każdą prostą przechodzić będą 3 płaszczyzny i w każdej płaszczyźnie leżeć będą 3 proste. Stąd przekonywamy się o prawdziwości twierdzeń:

III. Jeżeli krawędzie dwóch trójścianów o wspólnym wierzchołku leżą parami w 3 płaszczyznach przechodzących przez jedną prostą, to ich ściany przecinają się parami według 3 prostych jednej płaszczyzny.

IV. Jeżeli ściany dwóch trójścianów o wspólnym wierzchołku przecinają się parami według 3 prostych jednej płaszczyzny, to ich krawędzie leżą parami w 3 płaszczyznach przechodzących przez jedną prostą.

Nawzajem, przecinając tę figurę, złożoną z 10 prostych i 10 płaszczyzn wychodzących z jednego punktu, płaszczyzną jakąkolwiek, otrzymalibyśmy figurę, z której wnioskowalibyśmy o prawdziwości twierdzenia I i II § 75. Twierdzenia o trójkątach Desargues'a wyrażają więc własność, zachowującą się przez rzuty i przecięcia.

Część geometrji, której przedmiotem jest badanie własności niezmieniających się przez rzuty i przecięcia nazywa się geometrją rzutową.

§116. Geometrja rzutowa płaska i geometrja rzutowa wiązki. Geometrja płaska bada własności figur złożonych z punktów i prostych jednej płaszczyzny; przedmiotem geometrji wiązki są własności figur złożonych z prostych i płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt. Twierdzenia o trójkątach Desargues'a /§79/ należą do geometrji płaskiej, twierdzenia o trójścianach Desargues'a /§115/ należą do geometrji wiązki.

Z każdego twierdzenia geometrji rzutowej płaskiej można bezpośrednio otrzymać odpowiednie twierdzenie geometrji rzutowej wiązki, zastępując wyrazy oznaczające punkty i proste odpowiedniemi wyrazami oznaczającemi rzucające je proste i płaszczyzny, i nawzajem. Niema więc potrzeby rozwijać niezależnie obu geometrji, wystarczy zająć się geomatrją rzutową płaską, w której jest dana łatwość dokładnego ilustrowania myśli zapomocą rysunku.

§120. Dwoistość w geometrji przestrzeni. Istnieje inny jeszcze związek pomiędzy twierdzeniami geometrji rzutowej płaskiej a twierdzeniami geometrji rzutowej wiązki, pozwalający z każdego twierdzenia jednej z nich wyprowadzić bezpośrednio pewne twierdzenie drugiej. Związek ten nazywa się wzajemnością i oparty jest na następującej zasadzie, zwanej zasadą dwoistości geometrji przestrzeni:

Jeżeli prawdziwe jest pewne twierdzenie, dotyczące wzajemnej przynależności punktów, prostych i płaszczyzn, to będzie prawdziwe inne twierdzenie, dotyczące tej samej własności, w której zamiast pojęcia "punkt" figurować będzie pojęcie "płaszczyzna" i nawzajem.

Tak np. twierdzenia Desargues'a I i IV, II i III są wzajemne, z twierdzenia I /§75/ otrzymalibyśmy IV /§115/ zastępując pojęcie:

wierzchołek	pojęciem	ściana
trójkąt	"	trójścian
prosta	"	prosta
bok	"	krawędź
punkt	"	płaszczyzna.

§118. Dwoistość w geometrji płaskiej i w geometrji wiązki. Jeżeli prawdziwe jest pewne rzutowe twierdzenie geometrji płaskiej, to na zasadzie §116 prawdziwe być musi twierdzenie geometrji wiązki, otrzymane przez zastąpienie pojęcia "punkt" pojęciem "prosta" i pojęcia "prosta" pojęciem "płaszczyzna". Ale wtedy na zasadzie §117 prawdziwe być musi twierdzenie geometrji płaskiej, otrzymane przez zamianę w tym ostatnim twierdzeniu pojęcia "płaszczyzna" pojąciem "punkt", stąd wynika, że :

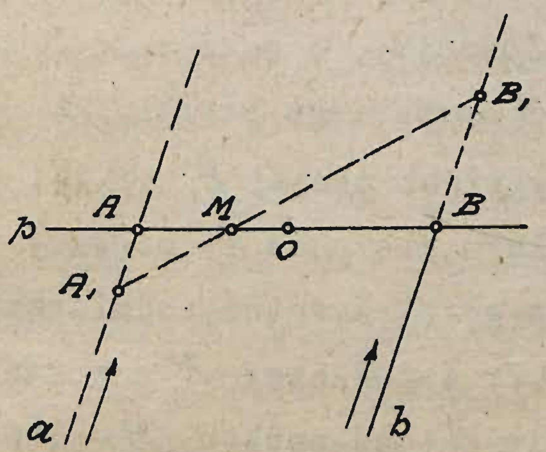
prawdziwe być musi twierdzenie geometrji płaskiej otrzymane przez zastąpienie w danym twierdzeniu geometrji płaskiej pojęcia "punkt" pojęciem "prosta" i pojęcia "prosta" pojęciem "punkt".

W geometrji płaskiej istnieje więc również zasada dwoistości polegająca na wzajemności pojęć "punkt" i "prosta" /np. twierdzenia I i II §87 o trójkątach Desargues'a.

Tak samo dowodzimy, że w geometrji wiązki istnieje zasada dwoistości i polegająca na wzajemności pojęć "prosta" i "płaszczyzna" /np. twierdzenia III i IV §115 o trójścianach Desargues'a/.

§119. Dwustosunek 4 punktów jednej prostej.

Niech będą na prostej p /Rys.225/ dwa stałe punkty A i B zwane pierwszym i drugim punktem głównym oraz punkt zmienny M, zwany punktem podziału. Uważajmy zwrot od A do B za dodatni; zmierzmy dowolną



Rys. 225.

jednostką odcinki AM i BM, uważając każdy z nich za dodatni, jeżeli posiada ten sam zwrot co AB; w przeciwnym razie uważajmy go za ujemny. Stosunek

$$\mu = \frac{AM}{BM}$$

nazywamy <u>stosunkiem podziału</u> punktu M względem punktów A i B. Każdemu punktowi M prostej p odpowiada określona liczba, mianowicie jego stosunek podziału, liczba ta jest zresztą niezależna od tego, czy zwrot AB czy BA uznaliśmy za dodatni. Stosunek podziału jest ujemny dla wszystkich punktów leżących między A i B, gdyż wtedy AM i BM, niezależnie od umowy, mają przeciwne znaki - jest on dodatni dla wszystkich punktów leżących zewnątrz odcinka AB, gdyż wtedy AM i BM mają zawsze ten sam znak. Zbadajmy, w jaki sposób zmienia się stosunek μ, gdy M przebiega prostą p.

W tym celu poprowadźmy przez punkty A i B równoległe a i b w dowolnym kierunku i obrawszy na obu tych prostych ten sam zwrot dodatni, odmierzmy na b odcinek $BB_1 = +1$ i połączmy B_1 z punktem M; odległość punktu A od punktu A_1, w którym B_1M przecina a, będzie co do wartości bezwzględnej i znaku równa μ, gdyż

$$\frac{AA_1}{BB_1} = AA_1 = \frac{AM}{BM} = \mu$$

Gdy M znajduje się w A, $AA_1 = \mu = 0$; gdy M posuwa się od A ku środkowi O odcinka AB, μ pozostaje ujemne i osiąga w punkcie O wartość -1; pomiędzy O i B pozostając ujemne wzrasta nieograniczenie co do wartości bezwzględnej i w punkcie B staje się $\pm\infty$, gdyż prosta B_1M jest wtedy równoległa do α. Dla wszystkich punktów zewnętrznych względem odcinka AB μ jest, jak to już zaznaczyliśmy liczbą dodatnią, przytem dla punktów leżących po stronie punktu B, μ jest zawarte pomiędzy $+\infty$ i $+1$, natomiast dla punktów leżących po stronie punktu A, μ posiada wartości pomiędzy O i $+1$. Gdy M oddala się nieograniczenie w jedną lub drugą stronę, B_1M staje się równoległa do p i $AA_1 = \mu = +1$. Tak więc:

Jeżeli na prostej p dane są dwa punkty A i B to każdemu punktowi M tej prostej odpowiada jedna jedyna liczba algebraiczna, mianowicie stosunek podziału μ punktu M względem punktów A i B.

Nawzajem, każdej /dodatniej lub ujemnej/ liczbie μ odpowiada wtedy jeden jedyny punkt M prostej p, ten mianowicie, którego stosunkiem podziału względem punktów A i B jest μ.

W samej rzeczy, poprowadźmy przez A i B równoległe a i b w dowolnym kierunku i obrawszy na obu jednakowy zwrot dodatni odmierzmy na nich odcinki AA_1 i BB_1, których stosunek co do wartości bezwzględnych i znaku równy jest μ, prosta A_1B_1 przecina p w punkcie szukanym M.

Niechaj będą teraz /rys.226/ dwa punkty M i N, których stosunki podziału względem punktów głównych A i B niechaj będą μ i ν. Iloraz μ/ν nazywamy dwustosunkiem /stosunkiem anharmonicznym/ 4-ch punktów $ABMN$. Jest on dodatni, gdy M i N albo leżą oba wewnątrz albo oba zewnątrz odcinka AB, t.j. gdy pary punktów AB i MN się nie przegradzają, - jest on ujemny, gdy jeden z punktów M i N leży między punktami A i B, a drugi poza niemi.

Dwustosunek $\lambda = \mu/\nu = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$ oznaczamy symbolem $/ABMN/$ /przestrzegając ściśle określonego następstwa liter/. W symbolu tym pierwsza i druga litera oznacza pierwszy i drugi punkt główny, trzecia i czwarta - pierwszy i drugi punkt podziału. Jeżeli więc na prostej p obierzemy 4 punkty A,B,M,N, to $(ABMN)$ oznacza dwustosunek $\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$, podczas gdy np. $(BMAN)$ oznaczałby dwustosunek

$$\frac{BA}{MA} = \frac{BN}{MN}$$

Ponieważ z 4 liter można ułożyć 24 przestawień, więc 4 punkty prostej p wyznaczają 24 dwustosunki, które jednak niewszystkie są różne. W samej rzeczy wartość dwustosunku

$$(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$$

nie zmieni się przez następujące przestawienia

$$(ABMN) = (MNAB) = (NMBA) = (BANM),$$

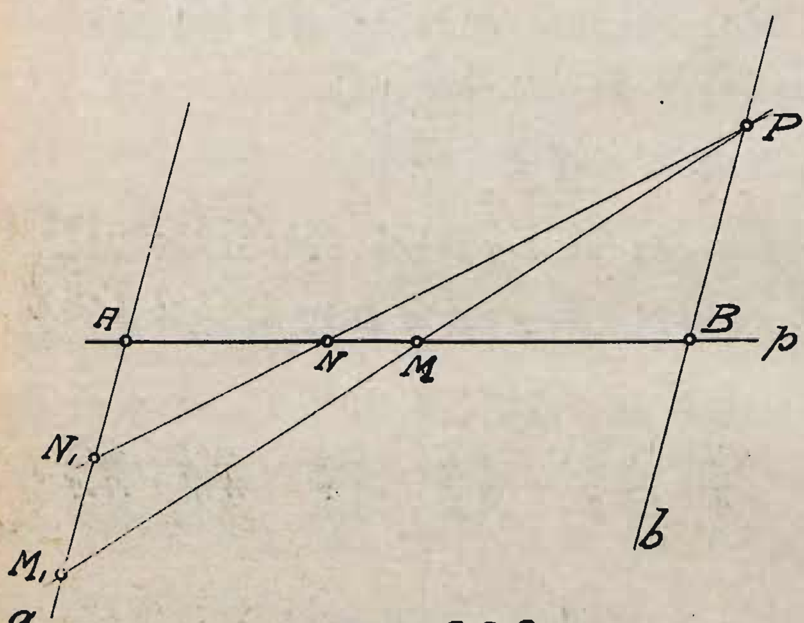
gdyż

$$\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN} = \frac{MA}{NA} : \frac{MB}{NB} = \frac{NB}{MB} : \frac{NA}{MA} = \frac{BN}{AN} : \frac{BM}{AM};$$

stąd wynika:

<u>Dwustosunek 4 punktów nie zmienia swej wartości, gdy zmienimy jednocześnie porządek punktów zasadniczych i porządek punktów podziału, lub gdy punkty podziału uczynimy punktami zasadniczemi i nawzajem.</u>

Jeżeli z pośród 4 punktów A, B, M, N prostej p trzy np. A, B i M uważać będziemy za stałe, a czwarty N za zmienny, to gdy punkt N przebiegać będzie prostą p, dwustosunek $(ABMN) =$ $= \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$ posiądzie kolejno wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$. Gdy bowiem wartość pierwszego stosunku $\mu = \frac{AM}{BM}$ jest stała i różna od zera, wartość drugiego $\nu = \frac{AN}{BN}$ zmienia się w sposób ciągły, otrzymując kolejno wszystkie wartości liczebne. Iloraz $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$ musi zatem również zmieniać swą wartość w granicach od $+\infty$ do $-\infty$.



Rys. 226.

Nawzajem, jeżeli dane są 3 punkty A, B i M prostej p, to każdej liczbie λ odpowiadać będzie jeden jedyny punkt N tej prostej, ten mianowicie, dla którego dwustosunek $(ABMN) = \lambda$. W samej rzeczy, przez punkty A i B poprowadźmy równoległe a i b, odmierzmy na a takie dwa odcinki AM_1 i AN_1 aby $\frac{AM_1}{AN_1} = \lambda$, połączmy MM_1, wyznaczmy punkt P, w którym MM_1 przecina b, wreszcie połączmy PN_1 , która przetnie p w szukanym punkcie N . Gdyż

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AM_1}{BP} ; \quad \frac{AN}{BN} = \frac{AN_1}{BP}$$

skąd

$$(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN} = \frac{AM_1}{AN_1} = \lambda$$

W ten sposób dwustosunek $(ABMN)$ danych 4 punktów prostej p może być sprowadzony do stosunku podziału. W tym celu /rys.241/ wystarczy poprowadzić przez A i B równoległe a i b i z obranego na b punktu P rzucić punkty M i N na prostą a , otrzymując na niej odcinki AM_1 i AN_1 których stosunek $= (ABMN)$.

Gdy punkt N jest punktem niewłaściwym prostej p , to dwustosunek $(ABMN)$ staje się stosunkiem $\frac{AM}{BM}$, gdyż wtedy stosunek $\frac{AN}{BN} = +1$.

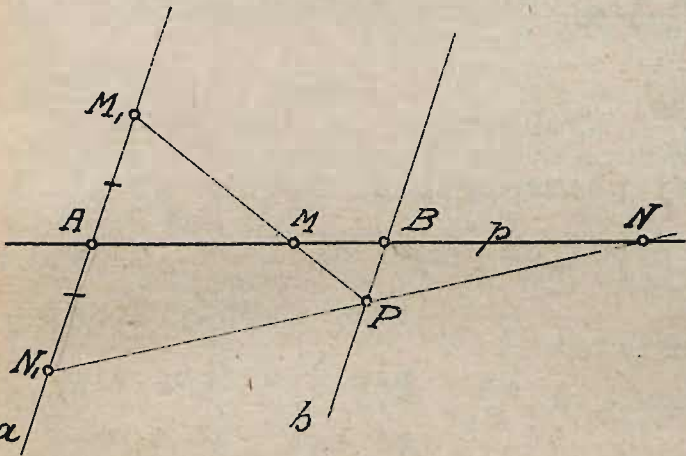
120. Grupy harmoniczne punktów. Szczególnie ważnym jest ten przypadek, gdy cztery punkty A, B, M , N leżą na prostej p w taki sposób, że dwustosunek $(ABMN) = -1$.

Stosunek podziału punktów M i N : $\mu = \frac{AM}{BM}$ i $\nu = \frac{AN}{BN}$ są wtedy równe co do wartości bezwzględnej, lecz przeciwnie co do znaku $(\mu = -\nu)$, tak że jeden z punktów M i N dzieli zewnętrznie odcinek AB w tym samym stosunku, w którym drugi dzieli go wewnętrznie. O punktach A, B, M, N mówimy, że tworzą grupę harmoniczną, o punktach M i N, mówimy, że dzielą harmonicznie odcinek AB, albo że są harmonicznie sprzężone względem punktów A i B. Przestawienie liter A i B w dwustosunku $(ABMN)=-1$, zmieniając każdy ze stosunków μ i ν na jego odwrotność, nie zmieni ich ilorazu, podobnież przestawienie liter M i N, zmieniając μ na ν i ν na μ nie zmieni również ilorazu $\frac{\mu}{\nu}=-1$. Ponieważ wreszcie dwustosunek $(ABMN)$ nie zmieni się i wtedy, gdy litery M i N postawimy przed literami A i B, więc:

Jeżeli punkty M i N są harmonicznie sprzężone względem punktów A i B /dzielą harmonicznie odcinek AB/, to nawzajem punkty A i B są harmonicznie sprzężone względem punktów M i N /dzielą harmonicznie odcinek MN/, nie potrzeba przytem zwracać uwagi na to, który z punktów każdej pary AB i MN jest pierwszy. Ponieważ pary AB i MN wzajemnie się przegradzają, mówimy więc poprostu, że pary punktów AB i MN

przegradzają się harmonicznie.

Jeżeli jedna para punktów sprzężonych, np. AB jest dana, to każdemu trzeciemu punktowi M prostej AB odpowiada jeden jedyny z nim sprzężony czwarty harmonicznie punkt N. Aby go wyznaczyć stosujemy wykreślenie § 119, przez punkty A i B /rys.227/ kreślimy w dowolnym kierunku równoległe a i b, na prostej a odmierzamy w przeciwne strony równe odcinki AM_1 i AN_1 dowolnej długości /wtedy $\frac{AM_1}{AN_1} = -1$ / i punkt P, w którym M_1M przecina b, łączymy z N_1, prosta N_1P przetnie p w czwartym harmonicznym punkcie N.



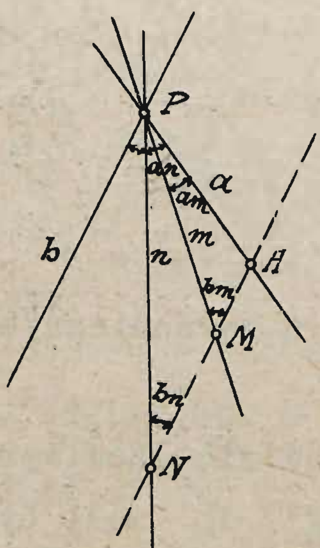
Rys. 227.

Gdy punkt M jest punktem niewłaściwym prostej p $(\nu = +1)$, to punkt N musi być środkiem odcinka AB $(\mu = -1)$. Każdy odcinek jest przez swój środek i punkt niewłaściwy podzielony harmonicznie.

Gdy punkt M przystanie do punktu A $(\mu = 0)$ albo do punktu B $(\mu = \pm\infty)$, to i punkt N przystanie do punktu A $(\nu = 0)$ wzgl. do punktu B $(\nu = \mp\infty)$. <u>Jeżeli dwa punkty grupy harmonicznej schodzą się w jednym punkcie, to jeszcze jeden punkt tej grupy upada w tym punkcie.</u>

<u>§ 121. Dwustosunek 4 promieni, wychodzących z jednego punktu.</u>

Niechaj z punktu P wychodzą 4 proste a, b, m i n, leżące w jednej płaszczyźnie. Dokoła punktu P oraz na każdej z prostych a, b, m i n obieramy zwroty dodatnie i umówmy się, że kąt $(a\,b) < \pi$ uważać będziemy za dodatni, jeżeli dodatnią stronę prostej a trzeba obrócić o ten kąt w dodatnią stronę, aby ona przystała do dodatniej strony prostej b. War-



Rys. 228.

tość wyrażenia

$$\lambda = \frac{\sin(am)}{\sin(bm)} : \frac{\sin(an)}{\sin(bn)}$$

nazywamy dwustosunkiem /stosunkiem naharmonicznym/ 4 promieni a, b, m, n. Wartość ta jest zresztą niezależna od powyższej umowy; w samej rzeczy, zmiana zwrotu na którejkolwiek z prostych a, b, m, n powoduje zmianę znaku w dwóch wyrazach tego dwustosunku, a zmiana zwrotu dokoła punktu P powoduje zmianę znaku wszystkich czterech wyrazów.

Dwustosunek $(a\,b\,m\,n)$ jest dodatni, gdy pary promieni ab i mn się nie przegradzają, - ujemny, gdy te pary się przegradzają. Podobnie jak w dwustosunkach 4 punktów mamy:

$$(abmn) = (mnab) = (nmba) = (banm)$$

Aby wyznaczyć dwustosunek $(abmn)$, poprowadźmy /rys:228/ równoległą do prostej b, która niechaj przetnie proste a, m i n w punktach A, M i N. Z trójkąta PAM mamy

$$\frac{\sin(am)}{\sin(bm)} = \frac{AM}{AP}$$

z trójkąta PAN:

$$\frac{\sin(an)}{\sin(bn)} = \frac{AN}{AP}$$

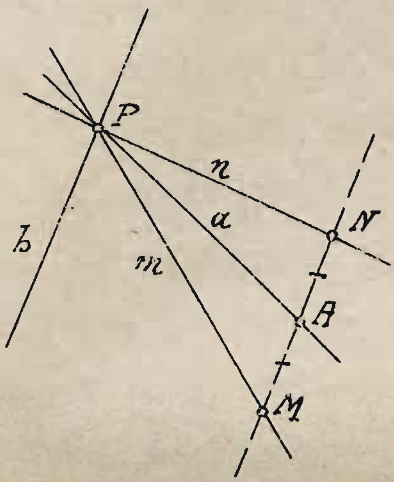
dzieląc te proporcje stronami otrzymamy:

$$(a\,b\,m\,n) = \frac{\sin(am)}{\sin(bm)} : \frac{\sin(an)}{\sin(bn)} = \frac{AM}{AN},$$

skąd łatwy sposób wykreślenia prostej n, gdy 3 proste a, b i m oraz dwustosunek $(a\,b\,m\,n)$ są dane.

§ 122. Grupy harmoniczne promieni. Szczególnie ważnym jest przypadek, gdy 4 proste a, b, m, n przechodzą przez punkt P, w taki sposób, że dwustosunek $(a\,b\,m\,n) = -1$. Mówimy w tym przypadku, że te 4 proste tworzą grupę harmoniczną, lub że proste m i n harmonicznie dzielą kąt $(a\,b)$, albo że są sprzężone harmonicznie względem prostych a i b. Podobnie jak w grupach harmonicznych punktów łatwo okazać, że przestawienie liter a i b lub m i n lub obu liter $a\,b$ z obu literami $m\,n$ nie zmieni dwustosunku $(a\,b\,m\,n)$, tak że będzie można o dwóch parach promieni $a\,b$ i mn grupy harmonicznej poprostu powiedzieć, że się harmonicznie przegradzają.

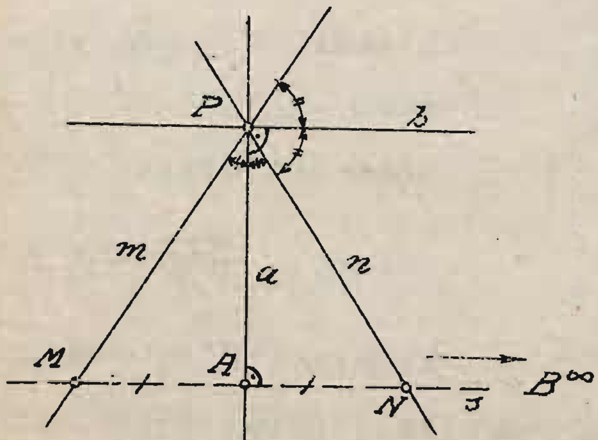
Jeżeli jedna para promieni sprzężonych jest dana, np. $a\,b$, to każdemu trzeciemu promieniowi m odpowiada jeden jedyny z nim sprzężony



Rys. 229.

czwarty harmoniczny promień n. Aby go wyznaczyć /rys.229/ stosujemy wykreślenie § 121, prowadzimy równoległą do b, która przecina proste a i m w punktach A i M, pocześ odmierzamy $AN=AM$ /wtedy $\frac{AM}{AN}=-1$ / i łączymy $PN \equiv n$.

Z wykreślenia tego wynika, że dwa boki m i n trójkąta PMN są sprzężone harmonicznie względem środkowej a, odpowiadającej trzeciemu bokowi i równoległej b do tego boku z przeciwległego mu wierzchołka P. Jak wiadomo, gdy środkowa trójkąta jest jego wysokością, to jest zarazem jego dwusieczną; stąd wniosek, że dwusieczne kątów, które tworzą dwie przecinające się proste, harmonicznie je przegradzają. Jak wiadomo, te dwusieczne są wzajemnie prostopadłe; nawzajem można dowieść, że gdy dwa promienie sprzężone a i b grupy harmonicznej $(a\, b\, m\, n)$ są wzajemnie prostopadłe, to są one dwusiecznemi kątów między prostemi m i n. Poprowadźmy sieczną s prostopadle do a, a więc równolegle do b i niechaj ta sieczna przetnie promienie a, b, m i n w punktach A, B^{∞}, M i N /rys.230/. Punkt B^{∞} jest niewłaściwy, skąd wynika, że sprzężony z nim punkt A jest środkiem odcinka MN /§ 120/. Trójkąt PMN jest równoramienny, gdyż wysokość PA jest zarazem środkową,



Rys. 230.

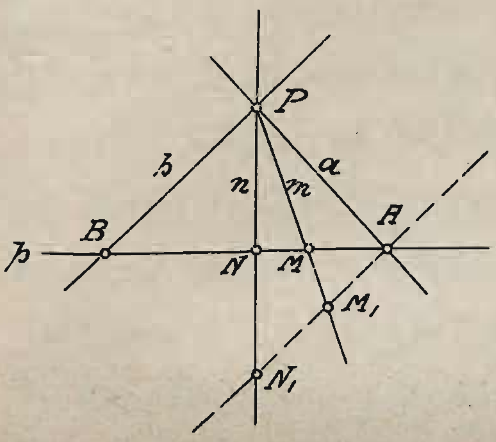
musi więc ona być również i dwusieczną kąta MPN Prosta b do niej prostopadła jest wtedy dwusieczną kąta przyległego.

§ 123. TWIERDZENIE. Dwustosunek jest własnością rzutową to jest zachowuje się przez rzuty i przecięcia. Niech będą 4 punkty A, B, M i N /rys. 231/, leżące na prostej p oraz punkt P nie leżący na niej. Połączmy PA, PB, PM i PN prostemi a, b, m i n; trzeba okazać, że $(ABMN)=$

$=(a\,b\,m\,n)$. Przez A poprowadźmy równoległą do b, przecinającą proste m i n w punktach M_1 i N_1. Na zasadzie § 119 /rys.226/ stosunek

$$\frac{AM_1}{AN_1}=(ABMN);$$

na zasadzie § 121 /rys.228/ ten sam stosunek $=(a\,b\,m\,n)$ skąd wynika, że



Rys. 231.

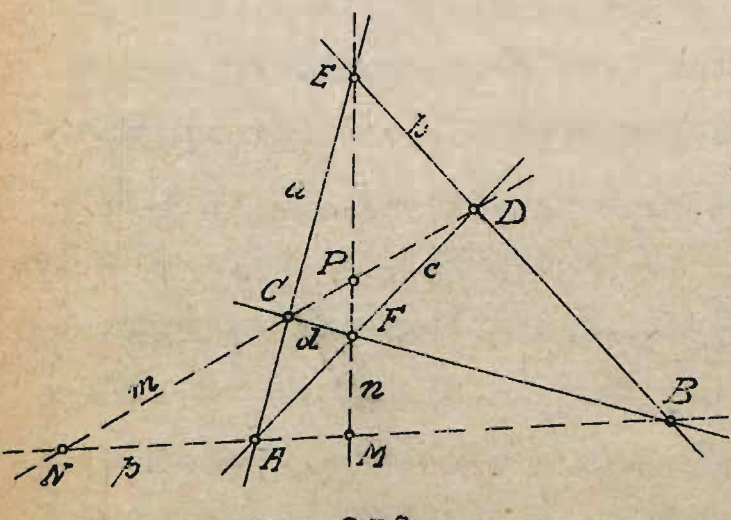
$$(ABMN)=(a\,b\,m\,n),\quad c.b.d.o.$$

W szczególności, grupa prostych rzucających grupę harmoniczną punktów oraz grupa punktów przecięcia grupy harmonicznej prostych, jest harmoniczna.

Jeżeli 4 punkty A, B, M, N, prostej p rzucimy z dowolnego punktu P na prostą p_1, otrzymane w ten sposób punkty A_1, B_1, M_1, N_1 rzucimy z dowolnego punktu P_1 na prostą p_2 i t.d., to $(ABMN)=$ $=(A_1B_1M_1N_1)=(A_2B_2M_2N_2)$.... Zastosujmy ten wniosek do grup harmonicznych.

§ 124. Własności harmoniczne czworoboku i czworokąta zupełnego.

Figura utworzona przez 4 proste a, b, c, d, płaszczyzny, z których żadne 3 nie przechodzą przez jeden punkt, oraz przez 6 punktów przecięcia tych prostych po dwie, nazywa się czworobokiem zupełnym $abcd$. Proste a, b, c, d nazywają się bokami, punkty ich przecięcia A, B, C, D, E, F nazywają się wierzchołkami czworoboku zupełnego. Dwa wierzchołki nie leżące na wspólnym boku nazywają się przeciwległemi. Proste p, m i n, łączące wierzchołki przeciwległe A i B, C i D, E i F nazywają się przekątnemi /rys.232/.



Rys. 232.

Rzućmy czwórkę punktów A, B, M, N, z punktu E na prostą m. Otrzymane w ten sposób punkty C, D, P, N stanowią czwórkę, której dwustosunek $(CDPN)$ musi być równy dwustosunkowi

$(ABMN)$ /§ 123/. Punkty C, D, P, N rzućmy z punktu F z powrotem na prostą p. Otrzymamy punkty B, A, M, N, których dwustosunek $(BAMN)$ musi być równy $(CDPN)$. W ten sposób:

$$(ABMN) = (CDPN) = (BAMN),$$

ale

$$(BAMN) = \frac{1}{(ABMN)}$$

tak, że

$$(ABMN)^2 = 1.$$

ponieważ zaś $(ABMN)$ nie może być równy $+1$ gdyż wtedy punkty M i N musiałyby przystać do siebie, więc:

$$(ABMN) = -1$$

to znaczy, czwórka $ABMN$ jest harmoniczna.

W czworoboku zupełnym punkty przecięcia jednej przekątnej z dwiema innemi są harmonicznie sprzężone względem wierzchołków na tej przekątnej leżących.

Na zasadzie tej własności czworoboku, można za pomocą samego tylko linjału znaleźć na prostej p pkt N sprzężony harmonicznie z danym punktem M względem dwóch innych danych punktów A i B tej samej prostej. Przez punkt M /rys.232/ prowadzimy dowolną prostą n i obieramy na niej dwa punkty E i F, które łączymy z punktami A i B, tworząc czworobok $abcd$ o przekątnych p i n trzecia przekątna m przecina p w punkcie szukanym N.

W szczególności dany odcinek AB możemy podzielić na połowy zapomocą samego tylko linjału, jeżeli dana jest prosta n równoległa do AB, a więc jeżeli dany jest punkt niewłaściwy N^{∞} prostej AB. Obrawszy na n dwa punkty E i F i połączywszy je, jak poprzednio, z punktami A i B, otrzymamy środek odcinka AB zapomocą przekątnej m czworoboku zupełnego $abcd$. Nawzajem, jeżeli dany jest na prostej p jakikolwiek odcinek podzielony na połowy, to można przez punkt jakikolwiek E poprowadzić równoległą do p zapomocą konstrukcji linjowej, t.j. zapomocą samego tylko linjału.

Figura utworzona przez 4 punkty A, B, C i D. płaszczyzny, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej, oraz przez 6 prostych, łączących te punkty po dwa, nazywa się czworokątem zupełnym $ABCD$. Punkty A, B, C, D nazywają się wierzchołkami, proste je łączące $a, b, c, d, e, f,$ nazywają się bokami czworokąta zupełnego. Dwa boki nie przechodzące przez wspólny wierzchołek nazywają się przeciwległemi. Punkty P, M i N przecięcia boków przeciwległych ab, cd i ef nazywają się punktami przekątnemi /rys.233/.

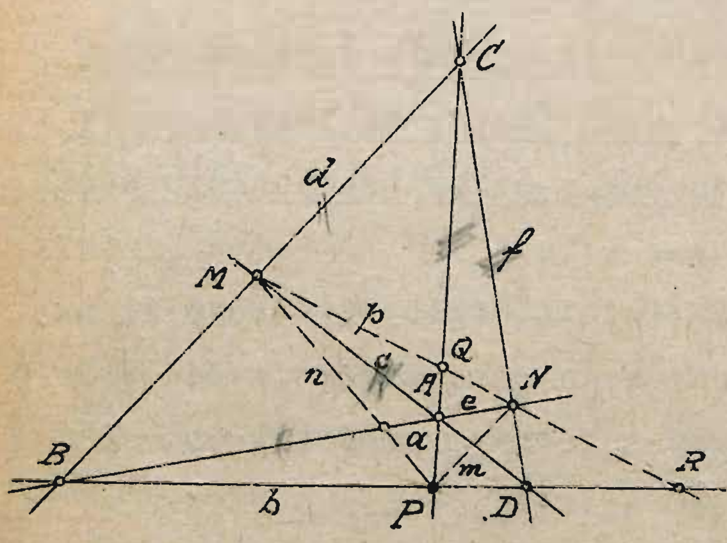
Czworokąt zupełny jest figurą płaską wzajemną względem czworoboku zupełnego; bokom, wierzchołkom i przekątnym pierwszego odpowiadają wierzchołki, boki i punkty przekątne drugiego i nawzajem. Na zasadzie dwoistości moglibyśmy przeto wnioskować o prawdziwości następującego twierdzenia:

W czworokącie zupełnym proste łączące jeden punkt przekątny z dwoma innymi są harmonicznie sprzężone względem boków przez ten punkt przechodzących.

Dowód tego twierdzenia mógłby być również na zasadzie dwoistości wywnioskowany z dowodu twierdzenia o czworoboku zupełnym, prościej jednak można je okazać jak następuje: Niech będzie /rys.233/ czworokąt zupełny $ABCD$, niechaj punkty P, M i N będą punktami przekątnemi tego czworokąta, dowiedziemy, że czwórka prostych

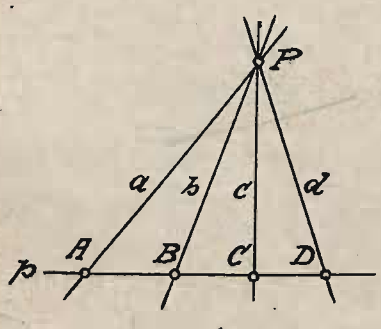
$abmn$ jest harmoniczna. Zauważmy czworobok zupełny $cdef$, którego jedną z przekątnych jest p. Na zasadzie twierdzenia poprzedniego czwórka punktów $QRNM$ jest harmoniczna, stąd wynika, że czwórka prostych $abmn$, rzucających te punkty z punktu P jest harmoniczną.

§ 125. Czwórki perspektywiczne. Mówimy, że czwórka punktów $ABCD$, leżących na prostej $p[p(ABCD)]$ jest perspektywiczna z czwórką prostych $abcd$, wychodzących z punktu $P[P(abcd)]$, jeżeli proste a, b, c i d przechodzą odpowiednio przez punkty A, B, C i D, tak że punkty A, B, C i D są przecięciami prostej p prostemi a, b, c i d, a proste a, b, c i d rzucają punkty A, B, C i D z punktu P.



Rys. 233.

/rys.234/.



Rys. 234.

Prosta p nazywa się podstawą czwórki $p\,(ABCD)$ punkt P nazywa się wierzchołkiem czwórki $P\,(abcd)$. Perspektywiczność czwórek $p(ABCD)$ i $P\,(abcd)$ oznaczamy symbolem

$$p\,(ABCD) \,\overline{\wedge}\, P\,(abcd)$$

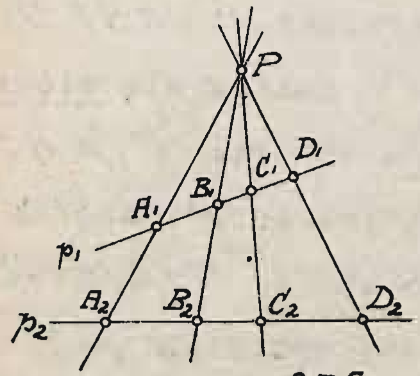
Na zasadzie § 123, jeżeli te czwórki są perspektywiczne, to dwustosunki $(ABCD)$ i $(abcd)$ są równe.

Mówimy, że czwórki punktów $p_1\,(A_1B_1C_1D_1)$ i $p_2\,(A_2B_2C_2D_2)$ są perspektywiczne

$$p_1\,(A_1B_1C_1D_1) \,\overline{\wedge}\, p_2\,(A_2B_2C_2D_2)$$

jeżeli istnieje czwórka $P\,(abcd)$, której proste łączą odpowiednio punkty A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2, D_1 i D_2, tak, że obie czwórki punktów są przecięciami tej samej czwórki prostych. Punkt P nazywa się środkiem perspektywy czwórek $p_1\,(A_1B_1C_1D_1)$ i $p_2\,(A_2B_2C_2D_2)$ /rys.235/. Mówimy, że czwórki prostych $P_1\,(a_1b_1c_1d_1)$ i $P_2\,(a_2b_2c_2d_2)$ są perspektywiczne

$$P_1\,(a_1b_1c_1d_1) \,\overline{\wedge}\, P_2\,(a_2b_2c_2d_2),$$



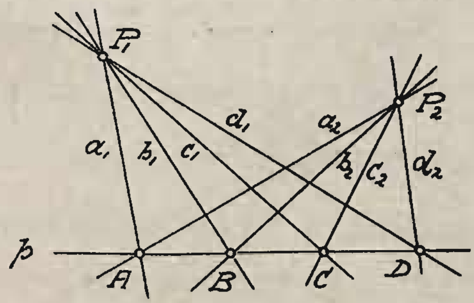
Rys. 235.

jeżeli istnieje czwórka $p(ABCD)$, której punkty są odpowiednio przecięciami prostych a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2, d_1 i d_2, tak, że obie czwórki prostych rzucają tę samą czwórkę punktów. Prosta p nazywa się <u>osią perspektywy</u> czwórek $P_1(a_1 b_1 c_1 d_1)$ i $P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$ /rys.236/. Na zasadzie § 123, jeżeli $p_1(A_1B_1C_1D_1) \barwedge p_2(A_2B_2C_2D_2)$, to $(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2)$ jeżeli $P_1(a_1 b_1 c_1 d_1) \barwedge P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$ to

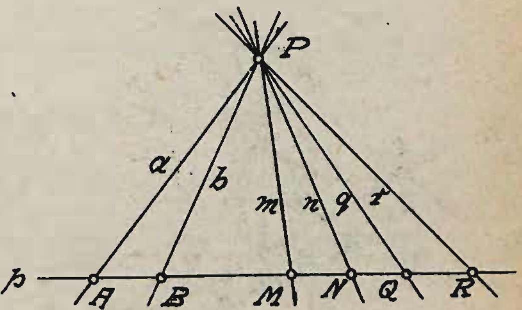
$$(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2).$$

<u>§ 126.</u> <u>Szeregi i pęki perspektywiczne.</u> Niechaj będzie prosta p i punkt P na niej nie leżący /rys.237/. Między punktami prostej p i prostemi, wychodzącemi z punktu P, można ustalić odpowiedniość doskonałą, t.j. taką, że każdemu punktowi A prostej p odpowiadać będzie jedna jedyna prosta a, wychodząca z punktu P, ta mianowicie, która przez punkt A przechodzi, - a każdej prostej b, wychodzącej z punktu P, odpowiadać będzie na prostej p jeden jedyny punkt B, ten mianowi-

cie, który leży na prostej b . Mówimy wtedy, że



Rys. 236.



Rys. 237.

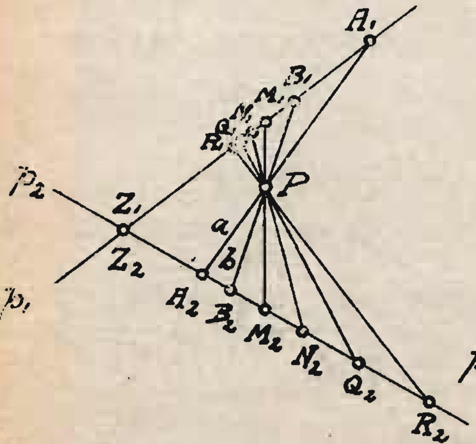
szereg punktów $p(AB\ldots)$ jest perspektywiczny z pękiem prostych $P(ab\ldots)$, co oznaczamy

$$p(AB\ldots) \barwedge P(ab\ldots)$$

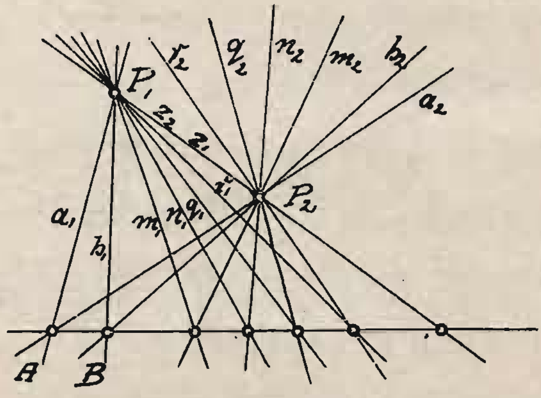
Prosta p nazywa się podstawą szeregu $p(AB\ldots)$ punkt P nazywa się wierzchołkiem pęku $P(ab\ldots)$ Jeżeli M, N, Q i R są jakiemikolwiek czterema punktami szeregu $p(AB\ldots)$, a proste m, n, q i r odpowiadają im w pęku $P(ab\ldots)$, to czwórki $p(MNQR)$ i $P(mnqr)$ są perspektywiczne tak, że

$$(MNQR) = (mnqr)$$

Niech będą teraz w płaszczyźnie rysunku dwie proste p_1 i p_2 /rys.238/. Między punktami prostej p_1 i punktami prostej p_2 można ustalić od-



Rys. 238.



Rys. 239.

powiedniość doskonałą, t.j. taką, że każdemu punktowi A_1 prostej p_1, odpowiadać będzie jeden jedyny punkt A_2 prostej p_2 i nawzajem, każdemu punktowi B_2 prostej p_2 odpowiadać będzie jeden jedyny punkt B_1 prostej p_1. W tym celu obieramy w płaszczyźnie rysunku punkt jakikolwiek P, nie leżący na żadnej z prostych p_1 i p_2, i umawiamy się, że każdemu punktowi prostej p_1, np. punktowi A_1, będzie odpowiadał ten punkt A_2 prostej p_2, który leży na prostej PA_1, a każdemu punktowi prostej p_2, np. punktowi B_2, odpowiadać będzie ten punkt B_1 prostej p_1, który leży na prostej PB_2, tak, że proste $a, b \ldots$, łączące pary punktów odpowiednich A_1 i A_2 , B_1 i $B_2 \ldots$ przechodzić będą zawsze przez punkt P . W ten sposób zarówno szereg $p_1(A_1B_1\ldots)$ jak szereg $p_2(A_2B_2\ldots)$ jest perspektywiczny z tym samym pękiem prostych $P(a\,b\ldots)$. Mówimy wtedy, że <u>szeregi</u> $p_1(A_1B_1\ldots)$ i $p_2(A_2B_2\ldots)$ są <u>perspektywiczne</u>, co oznaczamy

$$p_1(A_1B_1\ldots) \overline{\wedge} p_2(A_2B_2\ldots)$$

Proste p_1 i p_2 nazywają się <u>podstawami</u> tych szeregów perspektywicznych, - punkt P nazywa się <u>środkiem ich perspektywy</u>. Jeżeli M_1, N_1, Q_1 i R_1 są jakiemikolwiek czterema punktami prostej p_1 , a punkty M_2, N_2, Q_2 i R_2 <u>odpowiadają im</u> na prostej p_2 w szeregach perspektywicznych $p_1(A_1B_1\ldots) \overline{\wedge}$ $\overline{\wedge}\, p_2(A_2B_2\ldots)$, to czwórki punktów $p_1(M_1N_1Q_1R_1)$ i $p_2(M_2N_2Q_2R_2)$ są perspektywiczne, tak, że na zasadzie § 123 $(M_1N_1Q_1R_1) =$ $= (M_2N_2Q_2R_2)$. Z określenia szeregów perspektywicznych $p_1(A_1B_1\ldots)$ i $p_2(A_2B_2\ldots)$ wynika, że <u>punkt przecięcia podstaw</u> p_1 i p_2 <u>odpowiada samemu sobie</u>; jeżeli więc punkt ten zaliczymy do szeregu $p_1(A_1B_1\ldots)$ i oznaczymy np. literą Z_1 , to gdy ten sam punkt zaliczymy do szeregu $p_2(A_2B_2\ldots)$ winniśmy go oznaczyć literą Z_2 .

Niechaj będą wreszcie w płaszczyźnie rysunku dwa punkty P_1 i P_2 /rys.251/. Między prostemi, wychodzącemi z punktu P_1 i prostemi, wychodzącemi z punktu P_2, można ustalić odpowiedniość doskonałą, t.j. taką, że każdej prostej a_1, wychodzącej z punktu P_1, odpowiadać będzie jedna jedyna prosta a_2, wychodząca z punktu P_2 i nawzajem, każdej prostej b_2, wychodzącej z punktu P_2, odpowiadać będzie jedna jedyna prosta b_1, wychodząca z punktu P_1. W tym celu kreślimy w płaszczyźnie rysunku prostą jakąkolwiek p, nie przechodzącą przez żaden z punktów P_1 i P_2, i umawiamy się, że każdej prostej, wychodzącej z punktu P_1, np. prostej a_1, będzie odpowiadała ta prosta a_2, wychodząca z punktu P_2, która przechodzi przez punkt $p\,a_1$, a każdej prostej, wychodzącej z punktu P_2, np. prostej b_2, odpowiadać będzie ta prosta b_1, wychodząca z punktu P_1, która przechodzi przez punkt $p\,b_2$, tak, że punkty $A, B, \ldots$ przecięcia par prostych odpowiednich a_1 i a_2, b_1 i $b_2 \ldots$ leżeć będą zawsze na prostej p. W ten sposób, zarówno pęk $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ jak pęk $P_2(a_2 b_2 \ldots)$, jest perspektywiczny z tym samym szeregiem punktów $p(A, B, \ldots)$. Mówimy wtedy, że pęki $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ i $P_2(a_2 b_2 \ldots)$ są perspektywiczne, co oznaczamy

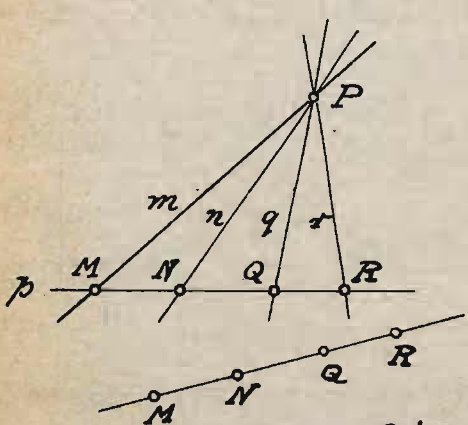
$$P_1(a_1 b_1 \ldots) \overline{\wedge} P_2(a_2 b_2 \ldots)$$

Punkty P_1 i P_2 nazywają się wierzchołkami pęków perspektywicznych, prosta p nazywa się osią ich perspektywy. Jeżeli m_1, n_1, q_1 i r_1 są jakiemikolwiek czterema prostemi, wychodzącemi z punktu P_1, a wychodzące z punktu P_2 proste m_2, n_2, q_2 i r_2 odpowiadają im w pękach perspektywicznych $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ i $P_2(a_2 b_2 \ldots)$, to czwórki prostych $P_1(m_1 n_1 q_1 r_1)$ i $P_2(m_2 n_2 q_2 r_2)$ są perspektywiczne, tak że $(m_1 n_1 q_1 r_1) = (m_2 n_2 q_2 r_2)$. Z określenia pęków perspektywicznych $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ i $P_2(a_2 b_2 \ldots)$ wynika, że prosta P_1P_2, łącząca oba wierzchołki odpowiada samej sobie; jeżeli więc prostą tę zaliczymy do pęku $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ i oznaczymy np. literą z_1, to gdy tę samą prostą zaliczymy do pęku $P_2(a_2 b_2 \ldots)$ winniśmy ją oznaczyć literą z_2.

§ 127. Czwórki i szeregi rzutowe. Niechaj czwórka punktów $p(MNQR)$ będzie perspektywiczna z czwórką prostych $P(mnqr)$ /rys.240/, na zasadzie § 125 dwustosunki $(MNQR)$ i $(mnqr)$

są równe. Wyobraźmy sobie teraz, że prosta p wraz z leżącemi na niej punktami M, N, Q i R zostanie w dowolny sposób ze swego miejsca przesunięta, ponieważ na skutek tego przesunięcia wzajemne odległości punktów M, N, Q i R nie zostaną zmienione, więc dwustosunki $(mnqr)$ i $(MNQR)$ wciąż jeszcze będą równe, choć czwórki te wogóle przestaną być perspektywicznemi. Tak samo stałoby się, gdybyśmy nie ruszając czwórki punktów $p(MNQR)$ poruszyli z miejsca czwórkę prostych $P(m\,n\,q\,r)$.

Podobnież, jeżeli z dwóch perspektywicznych czwórek punktów $p_1(M_1 N_1 Q_1 R_1)$ i $p_2(M_2 N_2 Q_2 R_2)$ jedna przeniesioną zostanie w inne miejsce, to perspektywiczność tych czwórek wogóle zostanie zatraconą, choć dwustosunki $(M_1 N_1 Q_1 R_1)$ i $(M_2 N_2 Q_2 R_2)$ pozostaną równe. Mówimy, że dwie czwórki punktów:



Rys. 240.

$p_1(M_1 N_1 Q_1 R_1)$ i $p_2(M_2 N_2 Q_2 R_2)$ albo że dwie czwórki prostych $P(m_1 n_1 q_1 r_1)$ i $P_2(m_2 n_2 q_2 r_2)$ albo że czwórka punktów $p(MNQR)$ i czwórka prostych $P(mnqr)$ są rzutowe, jeżeli dwustosunki $(M_1 N_1 Q_1 R_1)$ i $(M_2 N_2 Q_2 R_2)$ są równe.- Czwórki perspektywiczne są przeto zawsze rzutowe, ale czwórki rzutowe mogą nie być perspektywiczne. Rzutowość czwórek oznaczamy symbolem $\barwedge$, np. piszemy

$$P_1(m_1 n_1 q_1 r_1) \barwedge P_2(m_2 n_2 q_2 r_2).$$

Niechaj będą w płaszczyźnie rysunku dwie proste p_1 i p_2. Na prostej p_1 obierzemy trzy punkty A_1, B_1 i C_1, a na prostej p_2 trzy punkty A_2, B_2 i C_2. Między punktami prostej p_1 a punktami prostej p_2 ustalimy odpowiedniość doskonałą w ten sposób, że

1/ punktowi A_1 prost. p_1 odpowiada punkt A_2 prostej p_2 i nawzajem,

2/ punktowi B_1 prost. p_1 " " B_2 prostej p_2 i nawzajem.

3/ punktowi C_1 prost. p_1 " " C_2 prostej p_2 i nawzajem.

4/ każdemu innemu punktowi M_1 prostej p_1 odpowiadać będzie taki punkt M_2 prostej p_2, że dwustosunki $(A_1 B_1 C_1 M_1)$ i $(A_2 B_2 C_2 M_2)$ są równe.

Tak ustalona odpowiedniość między punktami prostej p_1 a punktami prostej p_2 nazywa się rzutowością szeregów $p_1(A_1 B_1 C_1 \dots)$ i $p_2(A_2 B_2 C_2 \dots)$ co oznaczamy:

$$p_1(A_1 B_1 C_1 \dots) \barwedge p_2(A_2 B_2 C_2 \dots)$$

i mówimy, że te szeregi są rzutowe.

W ten sam sposób określamy rzutowość dwóch pęków

$$P_1(a_1 b_1 c_1 \dots) \barwedge P_2(a_2 b_2 c_2 \dots)$$

i rzutowość pęku i szeregu

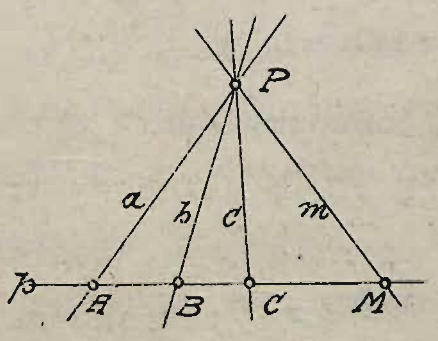
$$P(a\, b\, c \dots) \barwedge p(A\, B\, C \dots).$$

Rzutowość dwóch szeregów /pęków, szeregu i pęku/ jest określona przez 3 którekolwiek pary elementów odpowiednich.

Jeżeli wychodząc z jakiegokolwiek pęku $P_1(a_1 b_1 c_1 \dots)$ przetniemy go dowolną prostą p_1, to otrzymamy perspektywiczny z tym pękiem szereg $p_1(A_1 B_1 C_1 \dots)$; rzucając ten szereg z dowolnego punktu, otrzymamy pęk $P_2(a_2 b_2 c_2 \dots)$, perspektywiczny z szeregiem $p_2(A_2 B_2 C_2 \dots)$ i pękiem $P_1(a_1 b_1 c_1 \dots)$; przecinając pęk P_2 dowolną prostą p_2, otrzymamy szereg p_2, który będzie perspektywiczny z pękiem P_2 i szeregiem p_1, ale który wogóle nie będzie już perspektywiczny z pękiem P_1, choć będzie wciąż jeszcze z nim rzutowy; postępując w ten sam sposób dalej, otrzymywać będziemy na zmianę to pęk, to szereg, który będzie rzutowy z każdym poprzednim pękiem lub szeregiem, ale perspektywiczny będzie tylko z ostatnim pękiem i z ostatnim szeregiem. Wyrażamy to krótko, mówiąc

Rzutowość zachowuje się przez rzuty i przecięcia, perspektywiczność wogóle zatraca się przez rzuty i przecięcia.

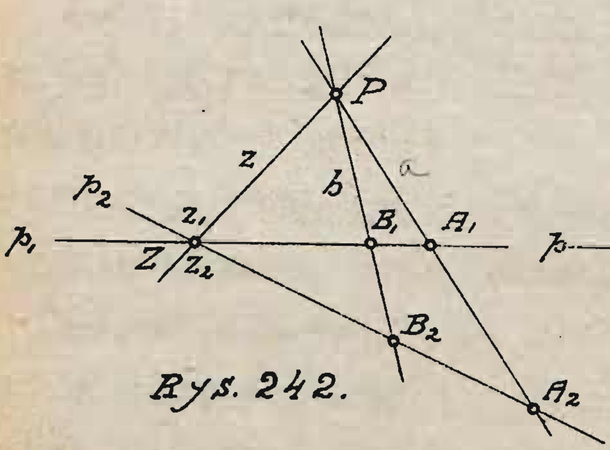
§ 128. TWIERDZENIA: 1. Jeżeli 3 proste a, b i c pęku $P(a\,b\,c\ldots)$ przechodzą przez 3 odpowiadające im punkty A, B i C rzutowego z tym pękiem szeregu $p\,(A\,B\,C\ldots)$, to ten pęk i szereg są perspektywiczne. W samej rzeczy każda czwarta prosta m, wychodząca z punktu P /rys.241/ musi przejść wtedy przez odpowiadający jej punkt M, na prostej p istnieje bowiem jeden jedyny punkt M, dla którego dwustosunek $(A\,B\,C\,M)$ byłby równy dwustosunkowi $(a\,b\,c\,m)$ /§ 120/.



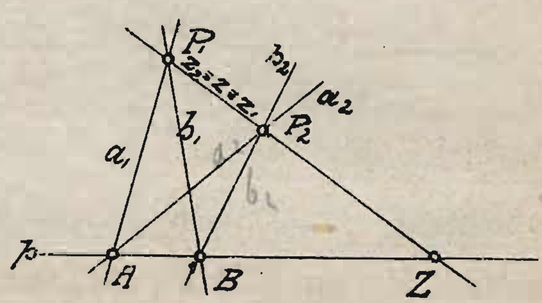
Rys. 241.

II. Jeżeli w dwóch szeregach rzutowych punkt przecięcia Z podstaw p_1 i p_2 odpowiada samemu sobie $Z \equiv Z_1 \equiv Z_2$, to te szeregi są perspektywiczne. Niechaj A_1 i A_2, B_1 i B_2 będą dwiema parami punktów, odpowiadających sobie wzajemnie w rzutowości danej /rys.242/.

Połączmy punkty A_1 i A_2 prostą a, punkty



Rys. 242.



Rys. 243.

B_1 i B_2 prostą b; oznaczmy punkt przecięcia prostych a i b literą P; połączmy wreszcie punkt P z punktem Z prostą z. Ponieważ proste a, b i z pęku $P(abz...)$ przechodzą przez odpowiadające im punkty A, B i Z szeregu $p_1(A_1B_1Z_1...)$, więc na zasadzie twierdzenia I pęk $P(abz...)$ i szereg $p_1(A_1B_1Z_1...)$ są perspektywiczne; ponieważ te same proste a, b i z

przechodzą przez punkty A_2, B_2 i Z_2 szeregu $p_2\ (A_2 B_2 Z_2 ...)$, więc na mocy tego samego twierdzenia pęk $P(a\,b\,z ...)$ i szereg $p_2\ (A_2 B_2 Z_2 ...)$ są perspektywiczne, tak że szeregi $p_1\ (A_1 B_1 Z_1 ...)$ i $p_2\ (A_2 B_2 Z_2 ...)$ są perspektywiczne z tym samym pękiem $P(a\,b\,z ...)$, a więc są perspektywiczne ze sobą.

III. Jeżeli w dwóch pękach rzutowych prosta z_1, łącząca wierzchołki P_1 i P_2, odpowiada samej sobie $z \equiv z_1 \equiv z_2$, to te pęki są perspektywiczne. Niechaj a_1 i a_2, b_1 i b_2 będą dwiema parami prostych odpowiadających sobie wzajemnie w rzutowości danej /rys:243/. Oznaczmy punkt przecięcia prostych a_1 i a_2 literą A, punkt przecięcia prostych b_1 i b_2 literą B, połączmy punkty A i B prostą p; oznaczmy wreszcie literą Z punkt przecięcia prostych p i z. Ponieważ punkty A, B i Z szeregu $p\ (A B Z ...)$ leżą na odpowiadających im prostych a_1, b_1 i z_1 pęku $P_1\ (a_1 b_1 z_1 ...)$ więc na zasadzie twierdzenia I szereg $p\ (A B Z ...)$ i pęk $P_1\ (a_1 b_1 z_1 ...)$ są perspektywiczne; na tej samej zasadzie szereg $p\ (A B Z ...)$ jest perspektywiczny z pękiem $P_2\ (a_2 b_2 z_2 ...)$, skąd wynika, że pęki $P_1\ (a_1 b_1 z_1 ...)$ i $P_2\ (a_2 b_2 z_2 ...)$ są perspektywiczne.