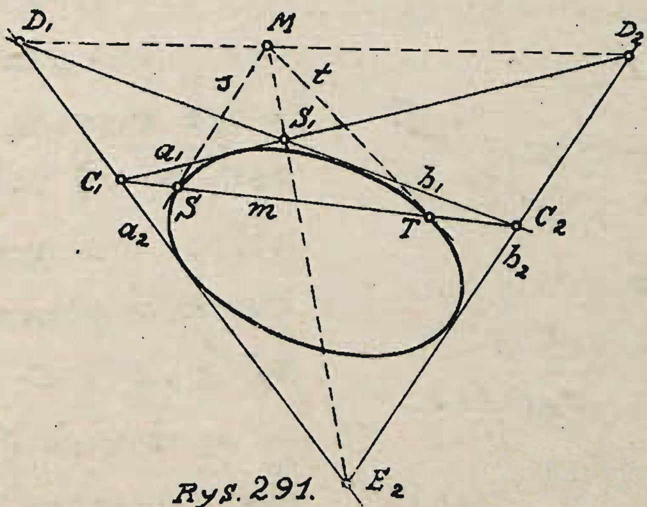
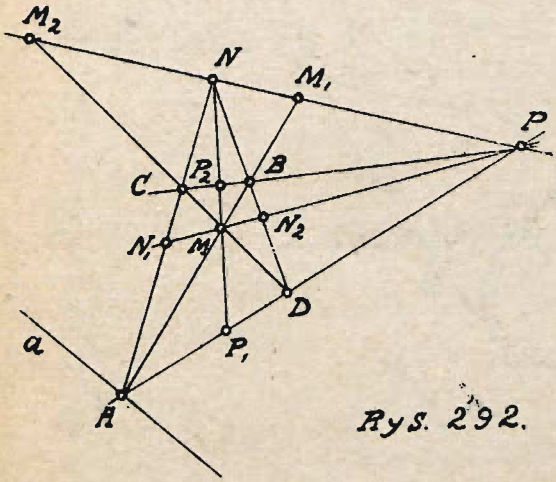


Rys. 291.

§ 163. Twierdzenie. Stożkowa jest wyznaczona przez 4 swoje punkty i styczną w jednym z nich, albo przez 4 swoje styczne i punkt zetknięcia na jednej z nich.

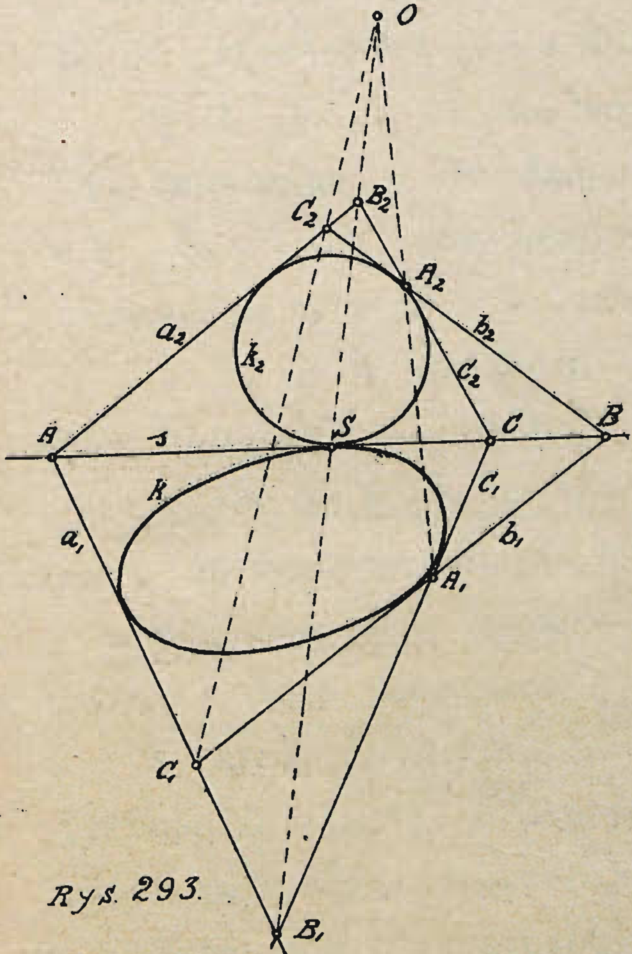
Niechaj będą 4 punkty A, B, C i D /rys. 292/, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej i prosta a , przechodząca przez punkt A . Trójkąt przekątny MNP czworokąta zupełnego $ABCD$ wraz z punktem A i styczną a wyznacza układ biegunowy, dla którego ten trójkąt jest trójkątem biegunowym, a prosta a jest bie-



Rys. 292.

gunową punktu A . Stożkowa tego układu musi przejść oczywiście przez punkt A i być styczną do prostej a /§ 149/, ale będzie ona przechodziła także przez punkty B, C i D , które są sprzężone harmonicznie z punktem A względem punktów M i M_1 , N i N_1 , P i P_1 , a więc są punktami podwójnemi inwolucji biegunowych na prostych AB, AC i AD .

§ 164. Stożkowa rzeczywista, jako rzut koła. Ponieważ określenie stożkowych, podane w § 149 jest rzutowe, więc rzutem każdej stożkowej jest stożkowa, w szczególności, rzutem koła jest stożkowa.- Dowiedźmy teraz, że i nawzajem: każda stożkowa rzeczywista może być uważana za rzut innej stożkowej rzeczywistej, w szczególności za rzut koła. W tym celu wystarczy dowieść, że każda stożkowa rzeczywista jest w kolineacji z kołem.



Rys. 293.

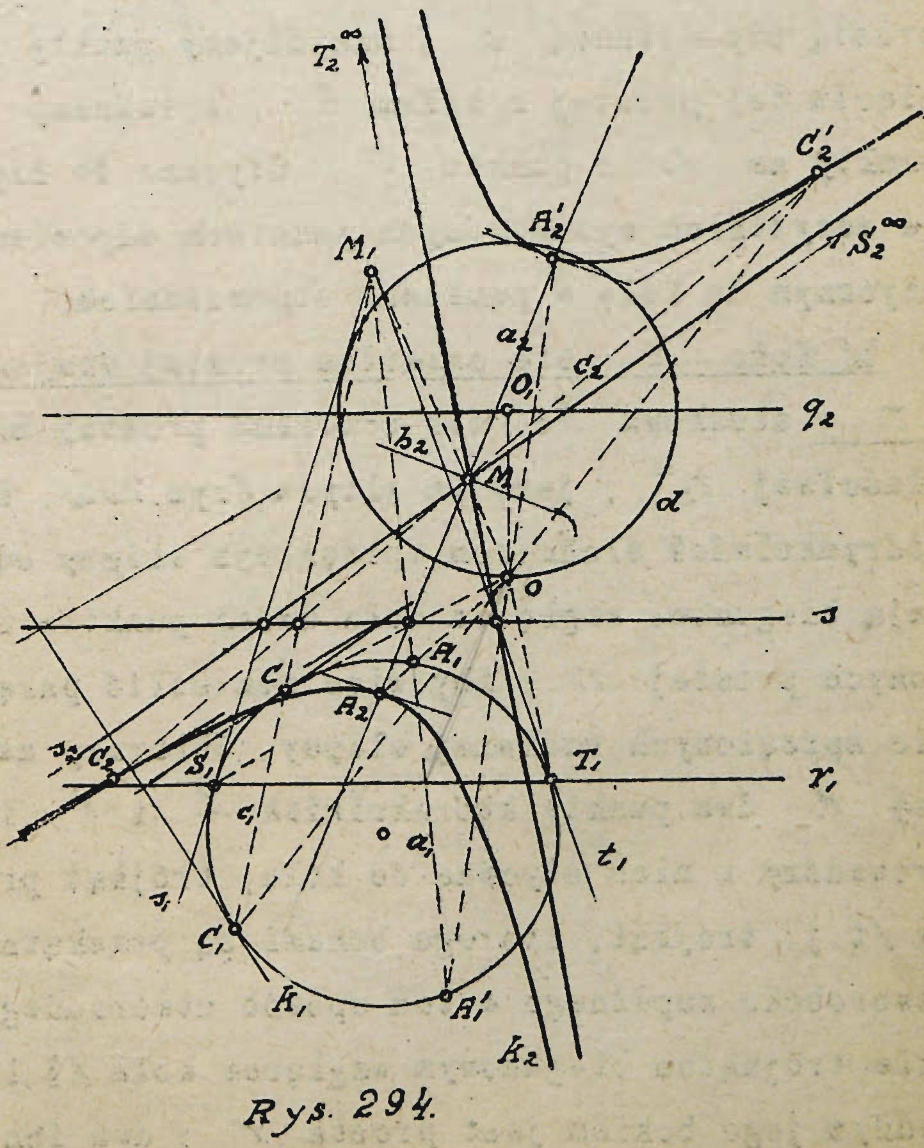
Niech będzie stożkowa k /rys.293/; w dowolnym jej punkcie S poprowadźmy do niej styczną s i wykreślmy jakąkolwiek inną stożkową lub koło k_2 styczne do prostej s w tym samym punkcie S. Na prostej s obieramy jeszcze 3 punkty A, B i C i poprowadźmy z nich styczne a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2. do stożkowej k i do koła k_2. Trójkąty $a_1 b_1 c_1$ i $a_2 b_2 c_2$ są trójkątami Desargues'a /gdyż ich boki przecinają się parami na prostej s /, więc proste

A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2, łączące parami ich wierzchołki, przechodzą przez jeden punkt O. Jeżeli ten punkt uczynimy środkiem kolineacji, prostą s jej osią, a punkty A_1 i A_2 uważać będziemy za parę punktów odpowiednich w tej kolineacji, to kołu k_2 stycznemu do prostych a_2, b_2, c_2 i s i przechodzącemu przez punkt S, odpowiadać będzie stożkowa styczna do prostych a_1, b_1, c_1 i s i przechodząca przez punkt S, a więc na zasadzie § 163 identyczna ze stożkową k.

§ 165. Zastosowania. I. Zadanie. Wykreślić stożkową k_2, która odpowiada danemu kołu k_1, w kolineacji danej. Możemy to zadanie wyrazić np. w tej formie: Wykreślić rzut środkowy koła, leżącego w danej płaszczyźnie sq_2. Wyznaczmy kład O środka rzutów; będzie to środek kolineacji koła k_1 ze stożkową k_2, s będzie osią tej kolineacji, q_2 jedną z prostych wzajemnych; wykreślmy drugą oś wzajemną r_1 /§ 79/. Odróżnimy 3 przypadki:

a/ Koło k_1 przecina prostą wzajemną r_1; stożkowa k_2 przecina prostą niewłaściwą r_2^∞; jest to więc hiperbola /rys.294/. Stycznym s i t do koła k_1 w punktach przecięcia tego koła z osią r_1, odpowiadają asymptoty s_2 i t_2 hiperboli

/§ 156/; ich przecięcie M_2 jest środkiem hiperboli; dwusieczne kątów pomiędzy asymptotami są osiami a_2 i b_2 hiperboli /§ 159/; wyznaczmy

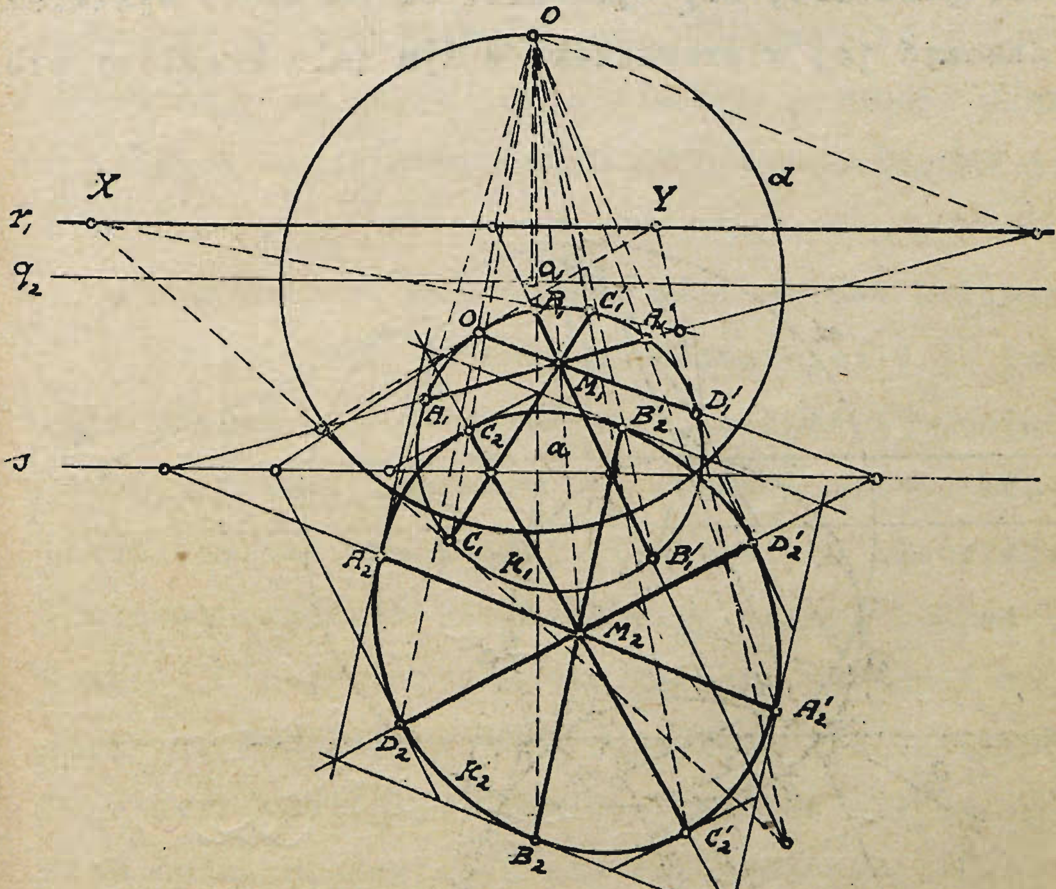


Rys. 294.

wierzchołki A_2 i A_2' hiperboli, t.j. przecięcia osi poprzecznej a_2 z hiperbolą; będą im odpowiadały punkty A_1 i A_1', w których prosta a_1 przetnie koło k_1. Aby wyznaczyć punkty hiperboli, leżące na którejkolwiek średnicy c_2, kreślimy prostą odpowiednią c_1, znajdujemy punkty przecięcia tej prostej z kołem k_1, i rzucamy te punkty na c_2 z punktu O. Styczne do hiperboli we wszystkich wyznaczonych punktach odpowiadają stycznym do koła w punktach odpowiednich.

b/ Koło k_1 nie przecina prostej wzajemnej r_1; stożkowa k_2 nie przecina prostej niewłaściwej r_2^{∞}; jest to elipsa /rys.295/. Dwom którymkolwiek średnicom sprzężonym elipsy odpowiadają biegunowe względem koła dwóch punktów sprzężonych prostej r_1. Aby więc wykreślić parę średnic sprzężonych szukanej elipsy, obierzmy na prostej r_1 dwa punkty którekolwiek X i Y i poprowadźmy z nich styczne do koła; trójkąt przekątny /t.j. trójkąt, którego bokami są przekątne/ czworoboku zupełnego w ten sposób utworzonego będzie trójkątem biegunowym względem koła /§ 161/; jednym jego bokiem jest prosta r; dwa inne niechaj przecinają koło w punktach A_1, A_1' i B_1, B_1';

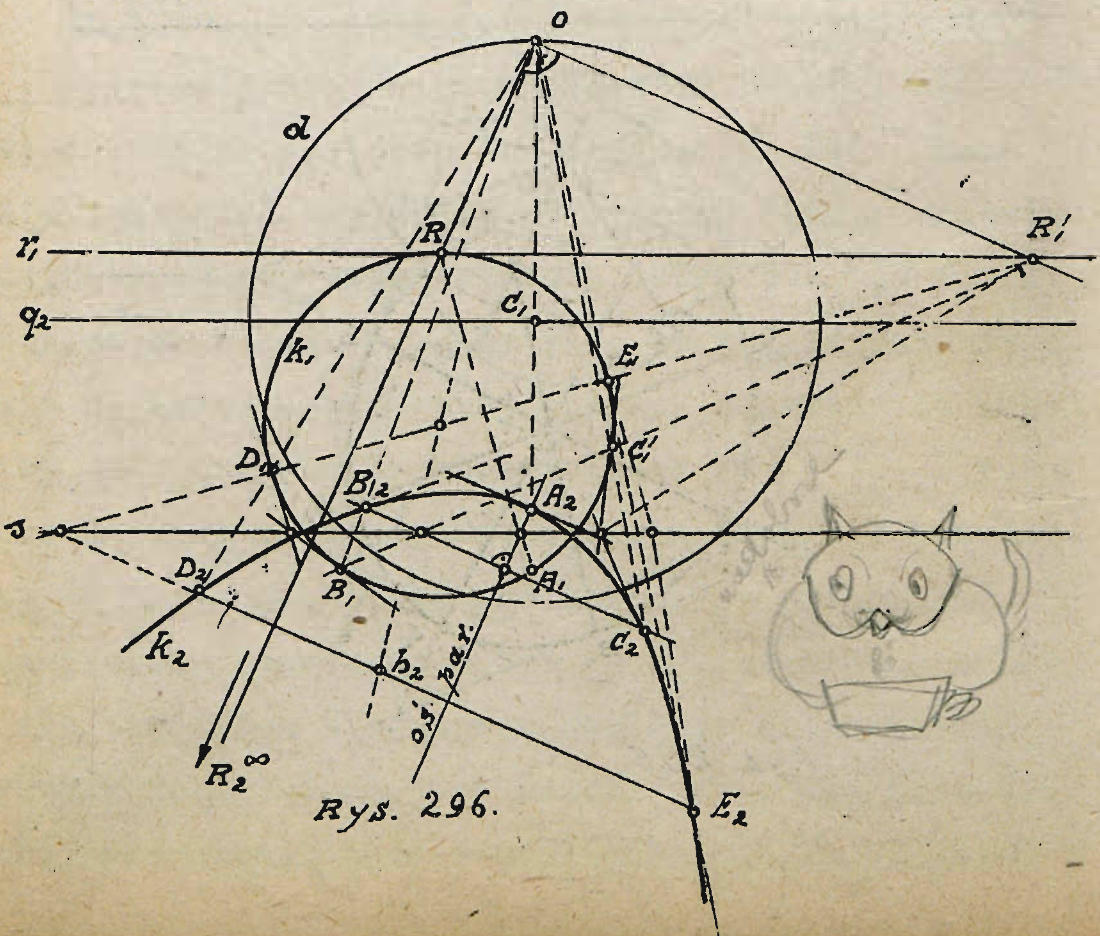
proste $A_2 A_2'$ i $B_2 B_2'$ odpowiadające prostym $A_1 A_1'$ i $B_1 B_1'$ będą średnicami elipsy w tych punktach; na każdej innej średnicy elipsy znajdziemy dwa jej punkty, kreśląc odpowiednią cięciwę koła i rzucając ją z punktu O na tę średnicę; styczne w dwóch końcach każdej średnicy są równoległe



Rys. 295.

i odpowiadają stycznym do koła w końcach odpowiedniej cięciwy.

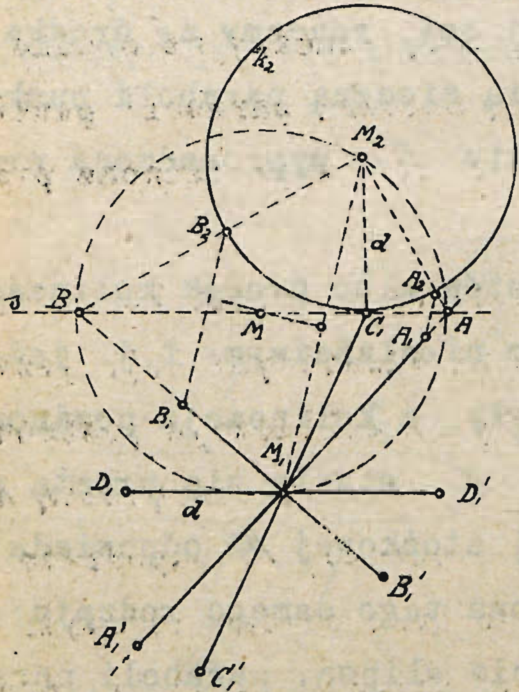
c/ Koło k_1 jest styczne do prostej wzajemnej r_1 ; stożkowa k_2 jest styczna do prostej niewłaściwej r_2^{∞}; jest to parabola /rys.296/. Promień kolineacji, rzucający punkt zetknięcia R_1 koła k_1 z prostą wzajemną r_1 ma kierunek średnic, a więc i osi paraboli, aby wykreślić oś paraboli wystarczy wyznaczyć jej wierzchołek. W tym celu kreślimy pro-



Rys. 296.

mień kolineacji OR_1' prostopadły do OR_1; w punkcie R_1' zejdą się wszystkie sieczne koła, którym odpowiadają sieczne paraboli sprzężone z osią, a więc prostopadłe do niej; w szczególności stycznej do koła z punktu R_1' odpowiada styczna do paraboli w jej wierzchołku, a punktowi zetknięcia A_1 z kołem odpowiada wierzchołek paraboli A_2. Aby znaleźć parę punktów paraboli, które są symetryczne względem jej osi, rzucamy ze środka kolineacji na odpowiednią sieczną paraboli punkty, w których sieczna z punktu R_1' wyprowadzona przecina koło.

II. Jeżeli środek rzutów albo środek kolineacji O stanie się punktem niewłaściwym, t.j. jeżeli rzut stanie się równoległy, a kolineacja powinowactwem, to prosta wzajemna r_1 stanie się prostą niewłaściwą, tak, że każdej stożkowej k_1 odpowiada w tem powinowactwie stożkowa tego samego rodzaju: hiperboli hiperbola, elipsie elipsa, paraboli parabola; w szczególności kołu odpowiada zawsze elipsa /rzutem równoległym koła jest zawsze elipsa/; średnica koła przekształca się na średnicę elipsy, środek koła na środek elipsy, średnice sprzężone koła, t.j. jakiekolwiek dwie jego średnice wzajemnie prostopadłe, na średnice sprzężone elipsy. Na tem można oprzeć <u>wykreślenie osi elipsy</u>, której dane są dwie średnice sprzężone $C_1 C_1'$ i $D_1 D_1'$. Przez jeden z końców C_1 średnicy $C_1 C_1'$ /rys.297/ prowadzimy prostą σ równoległą do średnicy $D_1 D_1'$; będzie to styczna do elipsy, w punkcie C_1 /§157/. Następnie prowadzimy koło K_2 styczne do σ w punkcie C_1 o średnicy równej $D_1 D_1'$; koło to będzie w powinowactwie z elipsą, przytem osią powinowactwa jest prosta σ, a kierunek powinowactwa wyznaczony będzie przez dwa punkty odpowiednie M_1 i M_2. Każdej parze średnic koła wzajemnie prostopadłych odpowiada

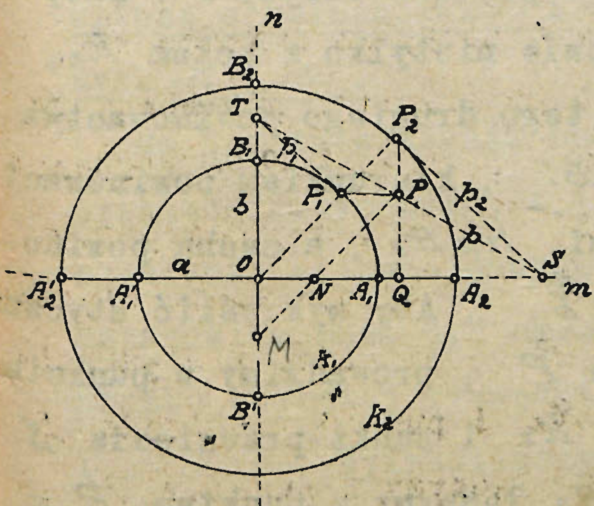


Rys. 297.

para średnic sprzężonych elipsy; aby więc znaleźć jakiekolwiek dwie średnice sprzężone elipsy, prowadzimy ze środka koła M_2 dwie proste wzajemnie prostopadłe i łączymy środek elipsy M_1 ze śladami

tych prostych na σ . Aby wyznaczyć osie elipsy, t.j. takie średnice sprzężone, które byłyby wzajemnie prostopadłe, znajdziemy na σ punkt M jednakowo odległy od M_1 i M_2 , z tego punktu zakreślamy koło, przechodzące przez M_1 i M_2 i wyznaczymy punkty A i B , w których to koło przecina prostą σ ; proste M_1A i M_1B są osiami elipsy. Wierzchołki elipsy znajdziemy prowadząc przez końce A_2 i B_2 średnic sprzężonych koła równoległe do M_1M_2, poczem odmierzamy $OA_1' = OA_1$ i $OB_1' = OB_1$.
W rozdziale XV poznamy prostszą jeszcze konstrukcję osi elipsy.

III. Przypuśćmy teraz, że osią powinowactwa koła z elipsą jest wielka oś elipsy $A_2A_2' = 2a$ /rys.298/, która jest zarazem średnicą koła k_2 . Kierunek powinowactwa jest wtedy prostopadły do wielkiej osi, a równoległy do małej $B_1B_1' = 2b$; cecha powinowactwa /§ 140/ równa jest stosunkowi $\frac{B_1O}{B_2O} = \frac{b}{a}$. Obrawszy



Rys. 298.

punkt jakikolwiek P_2 na kole k_2, znajdźmy odpowiadający mu punkt elipsy P. Jest to taki punkt prostej P_2Q prostopadłej do A_2A_2', że $\frac{PQ}{P_2Q} = \frac{B_1O}{B_2O}$. Połączmy P_2O, poprowadźmy ze środka O koło k_1 o promieniu równym małej półosi B_1O i wyznaczmy punkt P_1, w którym P_2O przecina koło k_1. Równoległa do A_2A_2' z punktu P_1 wyznacza na P_2O szukany punkt elipsy P. Aby więc wykreślić punkt jakikolwiek elipsy, której osie A_2A_2' i B_1B_1' są dane, zakreślamy na osiach koła k_2 i k_1 o wspólnym środku O; wyprowadzamy z punktu O dowolną prostą i z punktów przecięcia jej z kołami k_1 i k_2 prowadzimy równoległe do osi A_2A_2' i B_1B_1'. Punkt przecięcia tych dwóch prostych będzie punktem elipsy P. Elipsa ta będzie w powinowactwie nietylko z kołem k_2, ale i z kołem k_1; osią tego drugiego powinowactwa jest mała oś elipsy B_1B_1', kierunkiem powinowactwa - kierunek wielkiej osi A_2A_2', a cechą powinowactwa stosunek $\frac{A_2O}{A_1O} = \frac{a}{b}$. Aby wykreślić styczną p do elipsy w punkcie P, prowadzimy w punkcie P_2 styczną p_2 do koła k_2 i punkt przecięcia S tej stycznej z osią A_2A_2' łączymy z punktem P; albo prowadzimy w punkcie P_1 styczną p_1 do koła k_1 i punkt przecięcia T tej stycznej z osią B_1

łączymy z punktem P.

Z punktu P poprowadźmy równoległą l do $P_2 O$ i niechaj ta równoległa przetnie osie $B_1 B_1'$ i $A_2 A_2'$ w punktach M i N. Z równoległoboków OP_2PM i OP_1PN wynika, że $PN = OP_2 = a$ i $PN = OP_1 = b$; tak, że M, N i P są punktami, których wzajemne odległości na zmiennej prostej l są stałe, przytem punkt M pozostaje zawsze na osi $B_1 B_1'$, punkt N na osi $A_2 A_2'$, a punkt P na elipsie, której półosie są $PM = a$ i $PN = b$.

Jeżeli więc odcinek MN porusza się w ten sposób, że punkt M posuwa się po prostej n a punkt N po prostopadłej do niej prostej m, to każdy inny punkt P prostej MN zakreśla elipsę o osiach $2PM$ i $2PN$, leżących na prostych m i n.

Na tem twierdzeniu opiera się konstrukcja t.zw. cyrkla eliptycznego, t.j. narzędzia, służącego do kreślenia elips o danych osiach. Prymitywnem takiem narzędziem może być skrawek papieru, na którego prosto obciętej krawędzi odmierzono odcinki $PM = a$ i $PN = b$. Wykreśliwszy dwie proste wzajemnie prostopadłe, układamy skrawek w ten sposób, aby punkt M leżał na jednej z tych prostych, a N

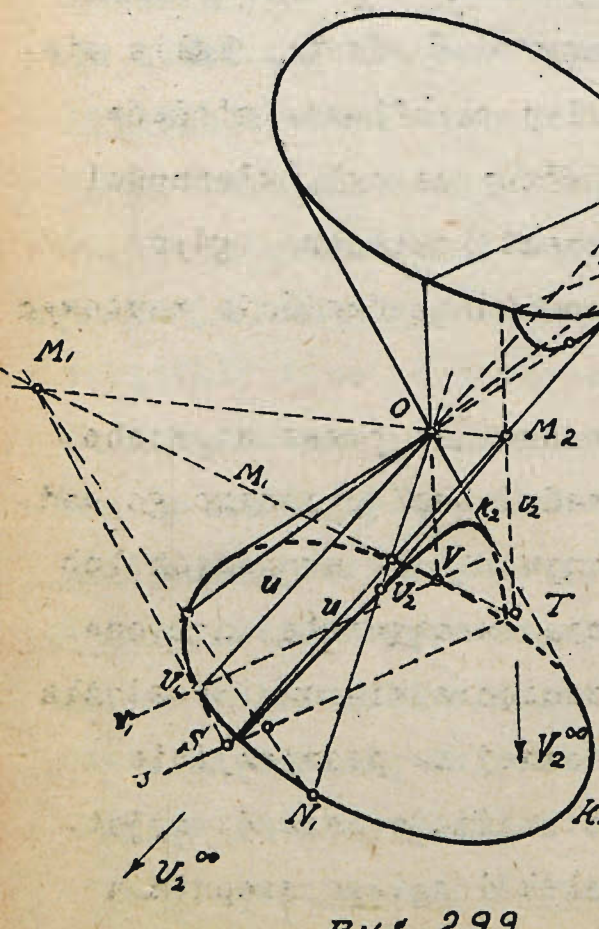
na drugiej, wtedy P będzie punktem elipsy o osiach $2a$ i $2b$. Zmieniając położenie skrawka wyznaczymy dowolną ilość punktów elipsy.

§ 166. Stożki drugiego stopnia. Ogół prostych, rzucających punkty stożkowej k z dowolnego punktu nie leżącego w jej płaszczyźnie oraz ogół płaszczyzn rzucających styczne do tej stożkowej z tego punktu nazywamy stożkiem drugiego stopnia. Stożkowa k nazywa się kierownicą stożka; środek rzutów nazywa się środkiem albo wierzchołkiem stożka; proste, rzucające z wierzchołka punkty kierownicy nazywają się tworzącemi stożka; wszystkie inne proste, wychodzące z wierzchołka nazywają się średnicami stożka; płaszczyzny rzucające z wierzchołka styczne do kierownicy nazywają się płaszczyznami stycznemi do stożka; wszystkie inne płaszczyzny, przechodzące przez wierzchołek, nazywają się płaszczyznami średnicowemi stożka. Na każdej płaszczyźnie stycznej leży jej tworząca zetknięcia ze stożkiem; przez każdą tworzącą przechodzi jej płaszczyzna styczna ze stożkiem.

Stożki drugiego stopnia są tem w geometrji wiązki, czem są stożkowe w geometrji płaskiej. Odpowiadają one dwoiście stożkowym i mogą tak jak one być określone zapomocą układu biegunowego wiązki, t.j. takiego wzajemnego podpprządkowania prostych i płaszczyzn, wychodzących z jednego punktu, że prostej i płaszczyźnie do siebie należącym podporządkowane są płaszczyzna i prosta również do siebie należące /płaszczyzna biegunowa prostej i prosta biegunowa płaszczyzny/. Układ taki byłby wyznaczony przez trójścian biegunowy $OA_1A_2A_3$ i płaszczyznę biegunową Ob jakiejkolwiek prostej OB, z tem zastrzeżeniem, żeby płaszczyzna Ob nie przechodziła przez żadną krawędź, a prosta OB nie leżała na żadnej ścianie trójścianu $OA_1A_2A_3$. Takie niezależne od geometrji płaskiej określenie stożków drugiego stopnia, o ile miałoby na celu własności rzutowe tych stożków, nie jest konieczne, gdyż wszystkie te własności odpowiadają dwoiście rzutowym własnościom stożkowym.

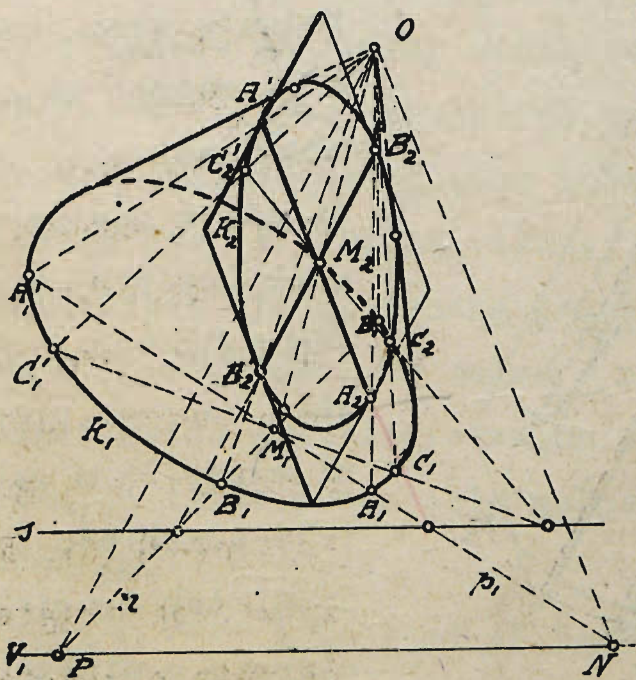
Każda płaszczyzna, przechodząca przez wierzchołek stożka /płaszczyzna średnicowa/ przecina go według dwóch tworzących: rzeczywistych, urojonych lub zjednoczonych, które rzucają rzeczywiste, urojone lub zjednoczone punkty przecięcia kierownicy stożka przez ślad płaszczyzny siecznej na płaszczyźnie kierownicy. Stąd wynika, że każda prosta /z wyjątkiem średnic/ przebija stożek drugiego stopnia w dwóch punktach, rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. Jeżeli bowiem przez daną prostą i wierzchołek stożka prowadzimy płaszczyznę średnicową, to punkty przebicia daną prostą będą punktami, w których ta prosta przecina dwie rzeczywiste, urojone sprzężone, lub zjednoczone proste przecięcia stożka płaszczyzną średnicową.

Przecięcie stożka drugiego stopnia płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołek, jest oczywiście rzutem kierownicy z wierzchołka na płaszczyzmę sieczną. Stożkowa ta jest hiperbolą, elipsą lub parabolą, zależnie od tego, czy płaszczyzna średnicowa Ox równoległa do płaszczyzny siecznej S przecina stożek według prostych rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. W samej rzeczy, gdy płaszczyzna śred-



Rys. 299.

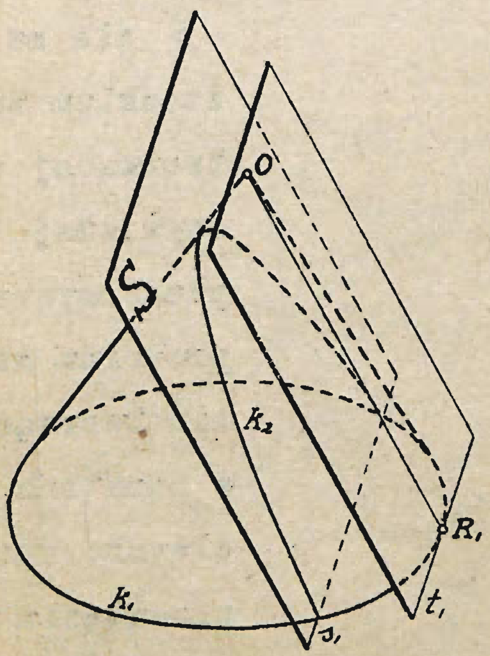
nicowa Or_1 równoległa do płaszczyzny siecznej S przecina stożek według dwóch tworzących rzeczywistych u i v /rys.299/, to stożkowa przecięcia, która jest miejscemgeometrycznem punktów przebicia płaszczyzny S tworzącemi stożka, będzie miała dwa rzeczywiste punkty niewłaściwe, mianowicie punkty U_2^∞ i V_2^∞, w których te tworzące przebijają płaszczyznę S; będzie to zatem <u>hiperbola.</u> Jeżeli płaszczyzna średnicowa Or_1 /rys.300/, równoległa do płaszczyzny siecznej S nie ma ze stożkiem żadnej tworzącej rzeczywistej, to płaszczyzna S przecina wszystkie tworzące w punktach właściwych; stożkowa przecięcia nie ma żadnego punktu niewłaściwego, jest to więc <u>elipsa.</u> Gdy wreszcie



Ryś. 300.

cie płaszczyzna średnicowa równoległa do S jest styczną do stożka /rys.301/, t.j. ma z nią dwie zjednoczone tworzące wspólne, to płaszczyzna S przecina wszystkie tworzące w punktach właściwych z wyjątkiem tej jednej; przecięciem jest przeto stożkowa, posiadająca dwa zjednoczone punkty niewłaściwe, czyli parabola.

Z powyższego wynika, że niema zasady do rozróżniania trzech rodzajów stożków właściwych drugiego stopnia, tak jak rozróżnialiśmy trzy rodzaje stożkowych. W geometrji wiązki właściwej nie istnieje bowiem element, któryby w niej odgrywał taką rolę, jaką odgrywa prosta niewłaściwa w geometrji płaskiej. Każdy stożek drugiego stopnia o wierzchołku właściwym może być przecięty według hiperboli, elipsy



Rys. 301.

lub paraboli; każda więc z tych krzywych może być wzięta za kierownicę tego stożka.

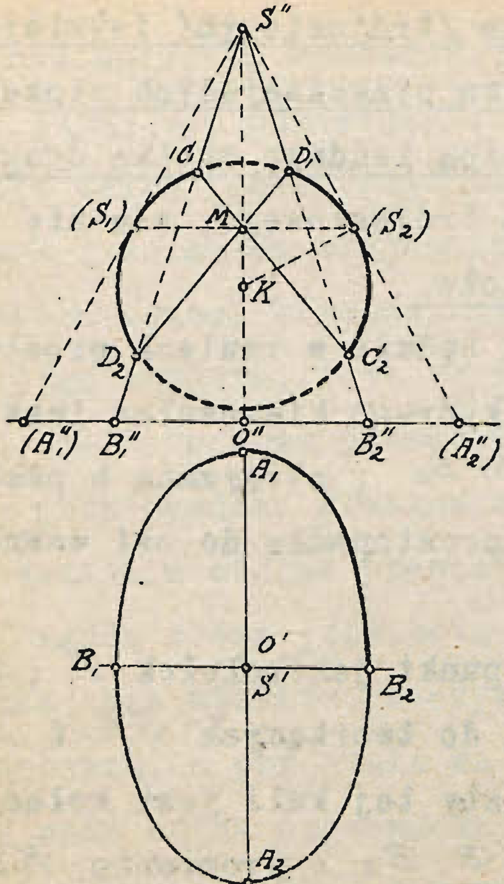
Inaczej rzeczy się mają ze stożkami, których wierzchołki są punktami niewłaściwemi, czyli z walcami. Pomiędzy elementami wiązki niewłaściwej znajduje się jeden niewłaściwy, mianowicie płaszczyzna niewłaściwa. Płaszczyzna ta odgrywa w geometrji wiązki niewłaściwej tę samą rolę, co prosta niewłaściwa w geometrji płaskiej. Dlatego też walec drugiego stopnia może być hiperboliczny, eliptyczny lub paraboliczny, zależnie od tego, czy płaszczyzna niewłaściwa przecina go według dwóch tworzących niewłaściwych rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. Każde przecięcie płaskie walca hiperbolicznego jest hiperbolą, której asymptotami są przecięcia płaszczyzną sieczną płaszczyzn asymptotycznych t.j. stycznych do walca w nieskończoności, podobnież każde przecięcie walca eliptycznego jest elipsą, a każde przecięcie walca parabolicznego jest parabolą.

§ 167. Osie i przecięcia kołowe stożka drugiego stopnia. - Trójścian, rzucający z wierzchołka stożka trójkąt biegunowy kierownicy, jest trójścianem biegunowym; każda jego ściana jest płaszczyzną biegunową przeciwległej mu krawędzi. Można dowieść /dowód musi tutaj być pominięty/, że istnieje jeden i wogóle tylko jeden trójścian biegunowy o krawędziach i ścianach wzajemnie prostopadłych. Każda z takich trzech krawędzi nazywa się osią stożka drugiego stopnia; jest to średnica, mająca tę własność, że biegunowa płaszczyzna średnicowa jest do niej prostopadła. Płaszczyzna którychkolwiek dwóch osi jest dla stożka płaszczyzną symetrji prostokątnej, każda z osi jest osią symetrji prostokątnej stożka. Dla stożków rzeczywistych jedna z osi jest wewnętrzną, a pozostałe są zewnętrzne, t.j. przez dwie osie można poprowadzić do stożka płaszczyzny styczne rzeczywiste, a przez trzecią takiej płaszczyzny poprowadzić nie można. Jeżeli jedna z trzech osi np. oś wewnętrzna jest dana, to pozostałe dwie znajdziemy prowadząc przez wierzchołek równoległe do osi jakiegokolwiek przecięcia, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi danej. Gdy to przecięcie jest kołem, to stożek nazywa się obrotowym i posiada oprócz osi wewnętrznej zwanej osią obrotu, nieskończenie wiele osi zewnętrznych; każda prosta prostopadła do osi obrotu w wierzchołku takiego stożka jest jego osią zewnętrzną.

W stożku nieobrotowym /trójosiowym/ istnieją dwa ustawienia płaszczyzn przecinających stożek według kół tak, że kierownicą każdego stożka drugiego stopnia /obrotowego lub trójosiowego, ale nie zwyrodniałego/, może być koło.

W samej rzeczy niech będzie w rzutach prostokątnych stożek /rys.302/, którego kierownica jest elipsą o osiach A_1A_2 i B_1B_2, otrzymaną w przecięciu stożka płaszczyzną prostopadłą do osi wewnętrznej.

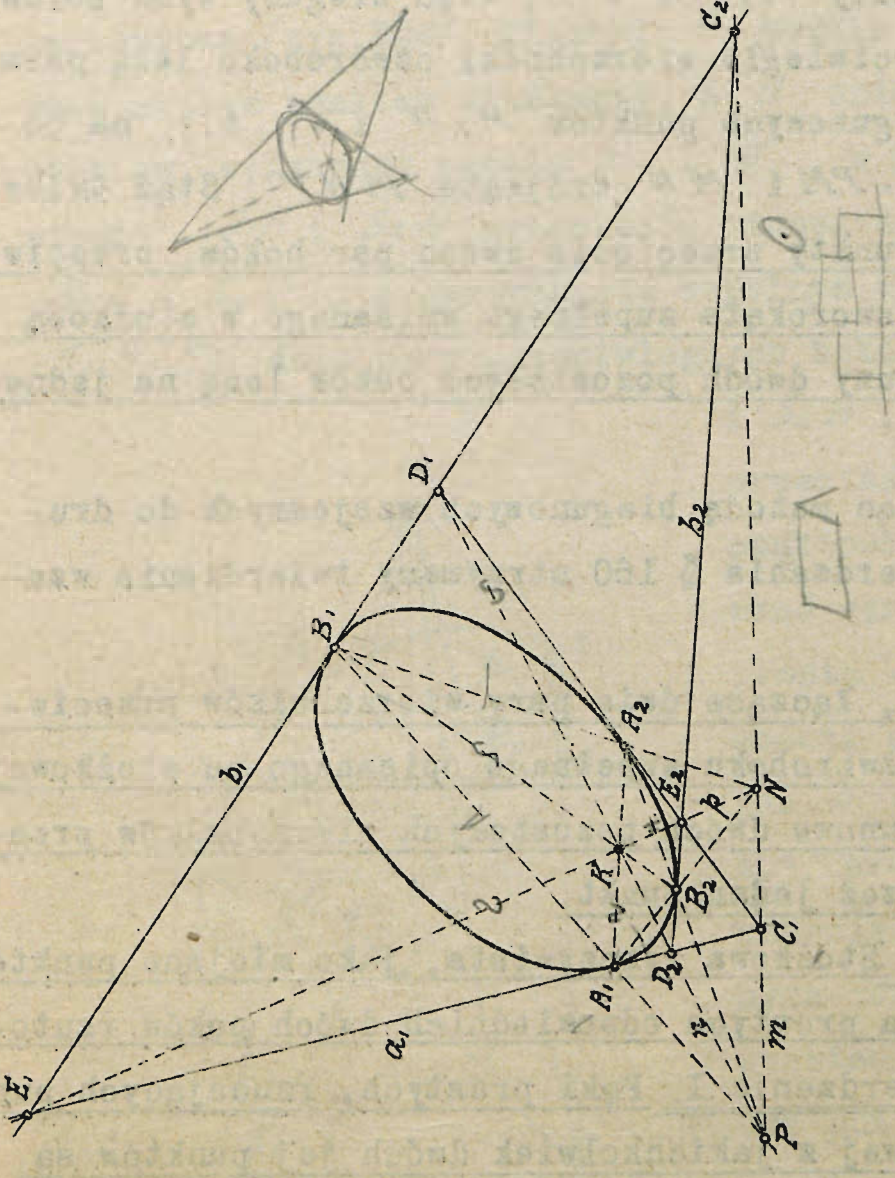
Obrawszy na tej osi punkt jakikolwiek K, opiszmy z niego kulę styczną do tworzących SA_1 i SA_2. Pionowy kontur rzeczywisty tej kuli jest kołem, leżącem w płaszczyźnie SB_1B_2 o promieniu $KS_1=KS_2$ równym odległości punktu K od tworzących SA_1 i SA_2. Połączmy punkty C_1 i C_2 oraz D_1 i D_2, w których to koło przecina tworzące SB_1 i SB_2 i przez cięciwy C_1C_2 i D_1D_2 przeprowadźmy płaszczyzny C i D, prostopadle do płaszczyzny SB_1B_2. Przecięcie kuli płaszczyzną C jest kołem, a przecięcie stożka tą samą płaszczyzną jest stożkową, która z tym kołem ma wspólne: 4 punkty C_1, C_2, S_1 i S_2 i styczne w punktach S_1 i S_2, które są przecięciem płaszczyzny C z płaszczyznami stycznemi w tych punktach do stożka i zarazem do koła. Stożkowa ta



Rys. 302.

jest przeto identyczna z kołem /§ 163, 2/. Płaszczyzna C i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe przecinają więc stożek według kół, tak samo płaszczyzna D i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe.

<u>§ 168. Czworokąt wpisany w stożkową i czworobok opisany na niej wzajemnie biegunowe.</u> Zastosujmy metodę biegunowych wzajemnych /§ 153/ do obu twierdzeń § 161 /rys.303/. Figurą biegunowo wzajemną względem czworokąta zupełnego $A, B, A_2 B_2$ jest czworobok zupełny $a, b, a_2 b_2$, którego boki są styczne do stożkowej w punktach A_1, B_1, A_2 i B_2. Biegunowe punktów przekątnych czworokąta są przekątnemi czworoboku; trójkąt, którego bokami są te przekątne będzie przeto identyczny z trójkątem biegunowym MNP. Ponieważ



Rys. 303.

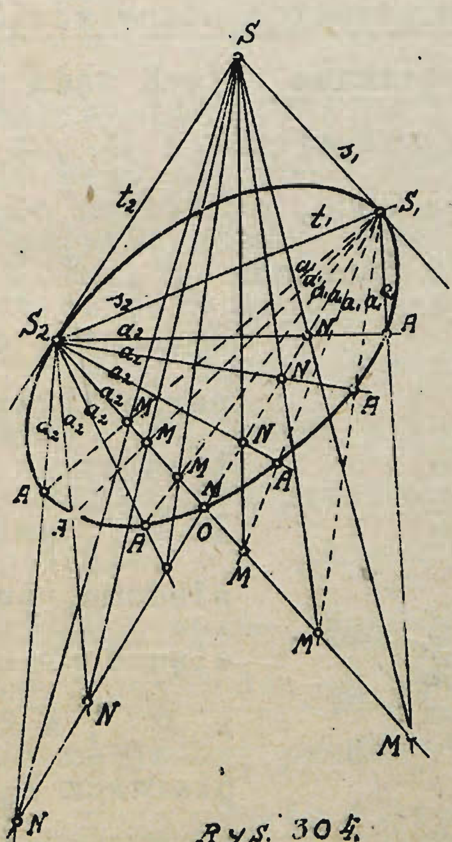
przeciwległe boki czworokąta przechodzą parami przez punkty M, N i P, więc bieguny tych boków, t.j. przeciwległe wierzchołki czworoboku leżą parami na biegunowych punktów M, N i P t.j. na bokach NP, PM i MN trójkąta MNP. Stąd twierdzenie: Punkty przecięcia dwóch par boków, przeciwległych czworokąta zupełnego wpisanego w stożkową oraz bieguny dwóch pozostałych boków leżą na jednej prostej.

Stosując metodę biegunowych wzajemnych do drugiego twierdzenia § 160 otrzymamy twierdzenie wzajemne:

Proste, łączące dwie pary wierzchołków przeciwległych czworoboku zupełnego opisanego na stożkowej oraz biegunowe dwóch pozostałych wierzchołków przechodzą przez jeden punkt.

§ 169. Stożkowa rzeczywista, jako miejsce punktów przecięcia prostych odpowiednich dwóch pęków rzutowych. Twierdzenie I. Pęki prostych, rzucających punkty stożkowej z jakichkolwiek dwóch jej punktów są rzutowe. Niechaj będą dwa jakiekolwiek punkty stożkowej S_1 i S_2, z których rzucamy wszystkie punkty tej samej stożkowej /nie wyłączając punktów S_1 i S_2/; trzeba dowieść, że pęki o wierzchołkach S_1

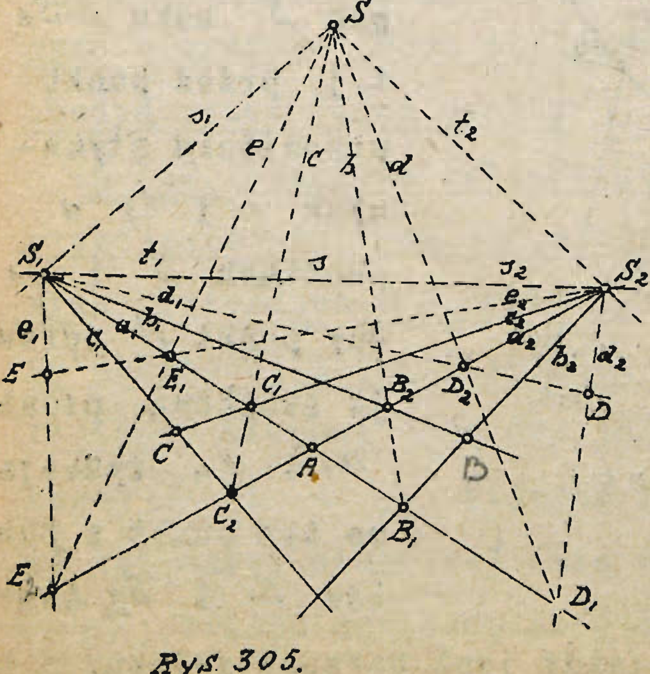
i S_2 , w których odpowiedniemi prostemi są proste a_1 i a_2 , rzucające ten sam punkt A stożkowej są rzutowe /rys.304/. Niechaj O będzie jakimkolwiek stałym punktem stożkowej, a A zmiennym jej punktem; wyznaczmy punkty M i N , w których proste S_1A i S_2A przecinają odpowiednio proste S_2O i S_1O ; w czworokącie zupełnym wpisanym S_1S_2AO dwie pary przeciwległych boków S_1A i S_2A , S_1O i S_2O przecinają się w punktach M i N ; skąd wynika, że prosta MN przechodzi przez biegun S boku S_1S_2 , t.j. przez punkt przecięcia stycznych s_1 i t_2 w punktach S i S_2 . Gdy punkt A opisuje stożkową, proste a_1 i a_2 rzucające ten punkt z punktów S_1 i S_2 tworzą dwa pęki, z których każdy jest perspektywiczny z pę-



Rys. 304.

kiem utworzonym przez obracającą się dokoła punktu S prostą MN ; pęki S_1 i S_2 są przeto rzutowe. Zauważmy, że punkt S jest środkiem perspektywy pęków S_1 i S_2 tak, że prostej, łączącej wierzchołki S_1 i S_2 tych pęków i zaliczonej do jednego z nich, odpowiada w drugim styczna do stożkowej w jego wierzchołku.

Twierdzenie II /odwrotne/. Miejscem geometrycznem punktów przecięcia prostych odpowiednich dwóch pęków rzutowych jest stożkowa. Niech będą dwa pęki rzutowe /ale nie perspektywiczne/: $S_1(a_1 b_1 c_1 ...)$ i $S_2(a_2 b_2 c_2 ...)$ /rys. 305/, z których odpowiednie proste przecinają się w punktach A, B, C...



Rys. 305.

Wyznaczmy środek perspektywy S tych pęków /§ 129, II b/. Jest to, jak wiadomo, punkt przecięcia prostych c i b, z których pierwsza łączy punkty $C_1 \equiv a_1 c_2$ i $C_2 \equiv a_2 c_1$ a druga punkty $B_1 \equiv a_1 b_2$ i $B_2 \equiv a_2 b_1$.

Połączmy punkty S i S prostą s_1, a punkty S_1 i S_2 prostą s_2. Na zasadzie § 173 przez punkty A, B, S_1 i S_2 przechodzi jedna jedyna stożkowa, która jest styczna do prostej s_1; na zasadzie zaś poprzedniego twierdzenia pęki, rzucające z punktów S_1 i S_2 wszystkie punkty tej stożkowej są rzutowe; rzutowość ta może być wyznaczona przez 3 którekolwiek pary prostych odpowiednich, np. przez pary a_1 i a_2, b_1 i b_2, s_1 i $s_2 \equiv s$ skąd wynika że te pęki są identyczne z pękami danemi.

Jeżeli pęki S_1 i S_2 są perspektywiczne, to miejsce geometryczne punktów przecięcia prostych odpowiednich jest stożkową zwyrodniałą, złożoną z prostej $S_1 S_2$, łączącej wierzchołki pęków i osi perspektywy p tych pęków.

Na zasadzie obu powyższych twierdzeń można rozwiązać zadania:

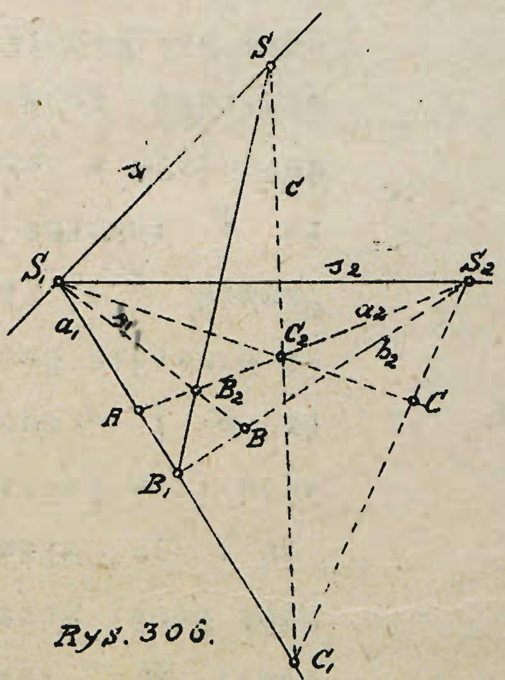
Wykreślić dowolną ilość punktów stożkowej, przechodzącej przez 5 danych punktów /z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej/, albo przechodzącej przez 4 dane punkty i stycznej w jednym z nich do danej prostej, albo: przechodzącej przez 3 dane punkty i stycznej w dwóch z nich do danych prostych.

1. Niech będą dane punkty S_1, S_2, A, B i C /rys.

305/. Zadanie będzie rozwiązane, gdy wskażemy, jak na dowolnej prostej d_1, wychodzącej z punktu S_1 wyznaczyć szósty punkt stożkowej D. Obracając bowiem prostą d_1 dokoła punktu S_1 znajdziemy dowolną ilość punktów stożkowej.

Obierzmy punkty S_1 i S_2 za wierzchołki pęków rzucających punkty stożkowej. Trzy pary prostych S_1A i S_2A, S_1B i S_2B, S_1C i S_2C wyznaczają rzutowość pęków $S_1(a_1b_1c_1\ldots) \barwedge S_2(a_2b_2c_2\ldots)$ które przez przecięcie odpowiednich promieni utworzą stożkową, przechodzącą przez wszystkie 5 danych punktów. Aby na prostej d_1, wychodzącej z punktu S_1 wyznaczyć nowy punkt stożkowej D, odnajdziemy w pęku S_2 prostą d_2, odpowiadającą prostej d_1; punkt D będzie przecięciem prostych d_1 i d_2. Wyznaczmy więc najpierw środek perspektywy S tych pęków, jako przecięcie prostej b, łączącej punkty a_1b_2 i a_2b_1, z prostą c, łączącą punkty a_1c_2 i a_2c_1; poprowadźmy następnie prostą d, łączącą punkt $D_2 = a_2d_1$ z punktem S i przecinającą prostą a_1 w punkcie D_1; prosta $S_2D_1 = d_2$ przecina prostą d_1 w szukanym punkcie D. Zauważmy, że proste SS_1 i SS_2 są stycznemi t_1 i t_2 do stożkowej w punktach S_1 i S_2.

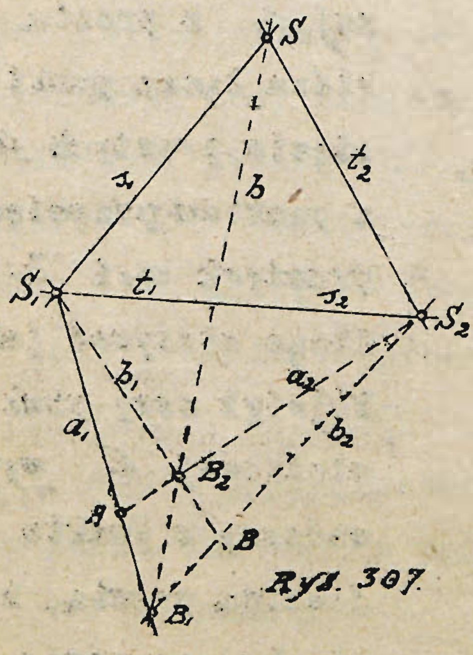
2/ Niechaj będą dane punkty A, B, S_1 i S_2 oraz styczna s w punkcie S_1 /rys.306/. Połączmy punkty S_1 i S_2 z punktami A i B prostemi $a_1 b_1$ i $a_2 b_2$; prostą $S_1 S_2$ oznaczmy literą s_2; rzutowość pęków S_1 i S_2 jest wyznaczona przez 3 pary prostych odpowiednich a_1, b_1, s_1 i a_2, b_2, s_2 /gdyż prostej łączącej wierzchołki S_1 i S_2 i zaliczonej do pęku S_2 odpowiada w pęku S_1 styczna s_1 do stożkowej w punkcie S_1 /.



Rys. 306.

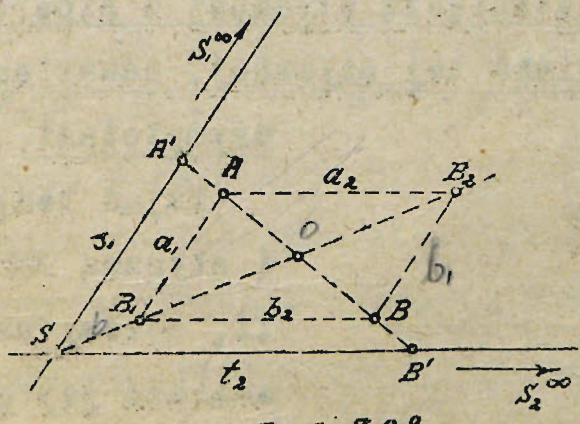
Środek perspektywy S jest przecięciem stycznej s_1 z prostą $B_1 B_2$, która łączy punkt przecięcia prostych a_1 i b_2 z punktem przecięcia prostych a_2 i b_1 . Chcąc otrzymać jakikolwiek nowy punkt stożkowej C wyprowadzamy z punktu S dowolną prostą, która niechaj przetnie prostą a_1 w punkcie C_1 , a prostą a_2 w punkcie C_2 ; proste $S_1 C_2$ i $S_2 C_1$ będą parą prostych odpowiednich pęków S_1 i S_2, a więc ich punkt przecięcia C będzie punktem stożkowej.

3/ Niechaj będą 3 punkty stożkowej S_1, S_2 i A oraz styczne s_1 i t_2 w punktach S_1 i S_2 /rys. 307/. Punkt przecięcia S stycznych s_1 i t_2 będzie środkiem perspektywy pęków rzutowych, rzucających z punktów S_1 i S_2 punkty stożkowej, rzutowość ta jest wyznaczona przez 3 pary prostych: a_1, s_1, t_1 i a_2, s_2, t_2, gdyż prostej $S_1S_2 \equiv t_1 \equiv s_2$ zaliczonej do jednego z tych pęków odpowiada styczna w wierzchołku drugiego. Prowadząc tedy z punktu S dowolną prostą b, która przetnie proste a_1 i a_2 odpowiednio w punktach B_1 i B_2, otrzymamy punkt stożkowej B, jako przecięcie prostych $S_1B_2 \equiv b_1$ i $S_2B_1 \equiv b_2$.



Rys. 307

§ 170. Zastosowanie. Wykreślić hiperbolę, mając asymptoty s_1 i t_2 oraz jeden punkt hiperboli A. Asymptoty, jak wiemy, uważać można za styczne do stożkowej w jej punktach niewłaściwych. Mamy więc poprowadzić stożkową przez punkt A i punkty niewłaściwe S_1 i S_2, w których ma ona być styczną do prostych s_1 i t_2 /rys.308/. Łącząc punkt A z punktami niewłaściwemi S_1 i S_2, t.j. kreśląc z punktu A równoległe a_1 i a_2 do prostych s_1 i t_2 i prowadząc z punktu $S \equiv s_1 t_2$ dowolną prostą b, znajdziemy na niej punkty B_1 i B_2, które połączone znowu z punktami nie-

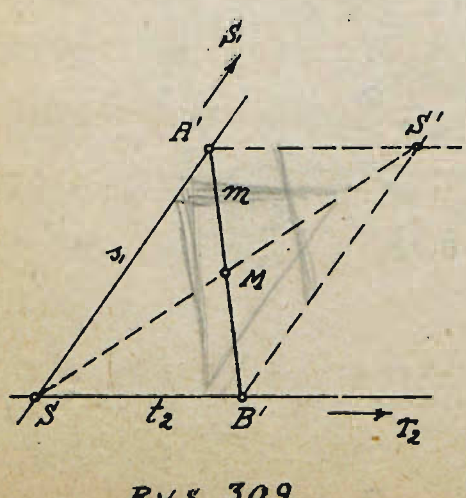


Rys. 308.

właściwemi S_1 i S_2 dadzą proste b_1 i b_2, a ich przecięcie będzie punktem hiperboli B. Zauważmy, że przekątna AB równoległoboku AB_1BB_2 jest przez prostą b w punkcie O podzielona na połowy. Otóż punkt O jest również środkiem odcinka $A'B'$ prostej AB, zawartego między asymptotami, albowiem trójkąty $A'SB'$ i AB_1B są podobne. Stąd wynika, że $AA' = BB'$.

Na każdej siecznej hiperboli, odcinki między krzywą a jej asymptotami są równe.

W szczególności, gdy punkty A i B zostaną zjednoczone w punkcie M /rys.309/, t.j. gdy sieczna AB stanie się styczną do hiperboli w tym punkcie, to odcinki MA' i MB' będą równe, t.j. Punkt zetknięcia stycznej z hiperbolą jest środkiem odcinka tej stycznej, zawartego między asymptotami.



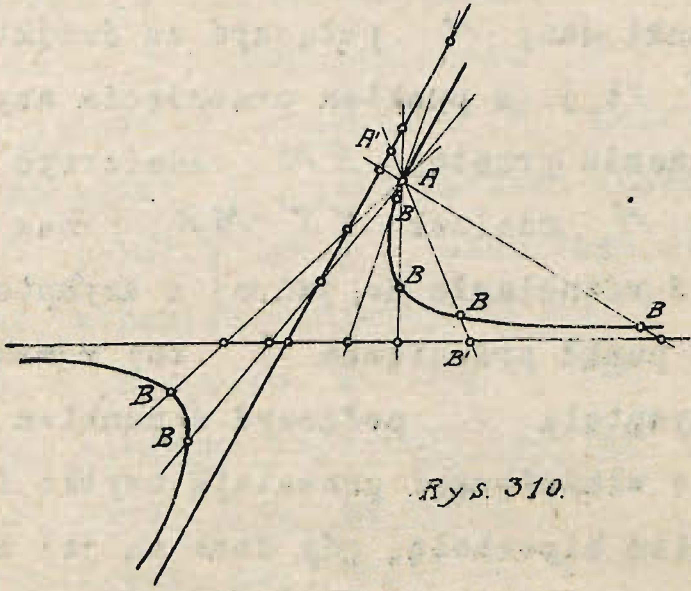
Rys. 309.

Mając tedy asymptoty i styczną m do hiperboli, możemy natychmiast znaleźć jej punkt zetknięcia M. Nawzajem przez każdy punkt hiperboli M możemy poprowadzić styczną m w tym punkcie. W tym celu wystarczy punkt dany M połączyć ze środkiem hiperboli S /t.j. z punktem przecięcia asymptot/; na przedłużeniu prostej SM odmierzyć po stronie punktu M odcinek $MS'=MS$; przez punkt S' poprowadzić równoległą do jednej z asymptot, np. do t_2 i punkt przecięcia A' tej równoległej z drugą asymptotą t_1 połączyć z punktem M.

Te dwie właściwości pozwalają szybko i dokładnie wykreślić hiperbolę, gdy dane są jej asymptoty i jeden punkt właściwy A /lub jedna styczna a, gdyż wtedy znajdujemy natychmiast punkt zetknięcia A /. Prowadzimy mianowicie przez punkt A jakąkolwiek sieczną, która niechaj przetnie asymptoty w punktach A' i B' /rys.310/ i od punktu B' odmierzamy odcinek $B'B = AA'$. W każdym z punktów w ten sposób otrzymanych prowadzimy oczywiście styczną, a mając dostateczną ilość punktów i stycznych wykreślimy stożkową z należytą dokładnością.

<u>§ 171. Stożkowa rzeczywista, jako obwiednia prostych łączących punkty odpowiednie dwóch szeregów rzutowych.</u>

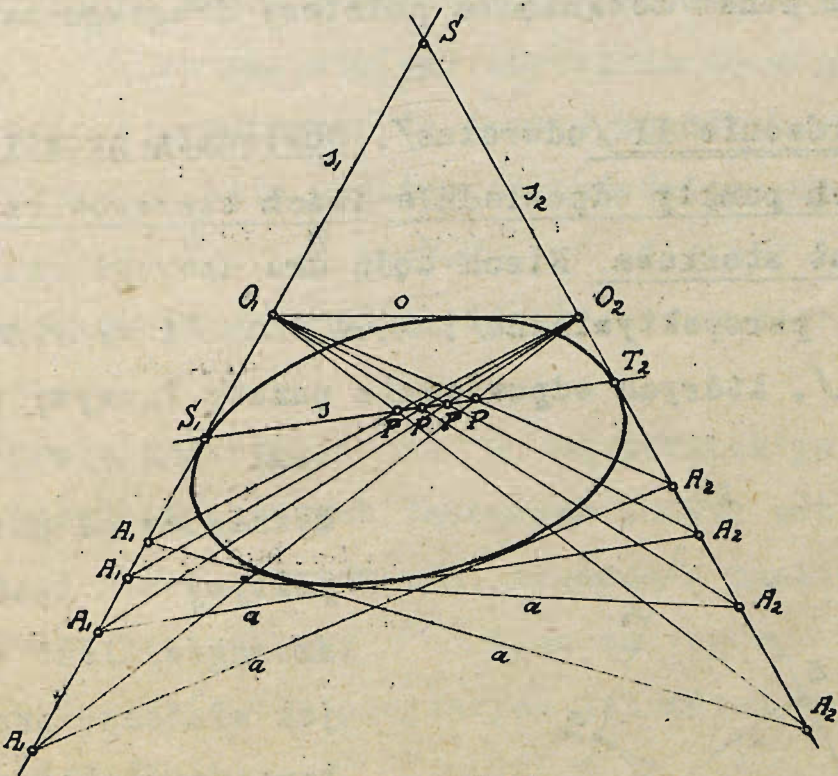
<u>Twierdzenie I. Szeregi punktów przecięcia stycznych do stożkowej z jakiemikolwiek dwiema stycznemi są</u>



Rys. 310.

<u>rzutowe</u> /rys.311/. Niech będą dwie styczne do stożkowej s_1 i s_2; trzeba dowieść, że szeregi o podstawach s_1 i s_2, w których odpowiedniemi punktami A_1 i A_2 są punkty przecięcia stycznych s_1 i s_2 z tą samą styczną a, są rzutowe. Niechaj o będzie jakąkolwiek stałą styczną do stożkowej; oznaczmy jej punkty przecięcia ze stycznemi s_1 i s_2 literami O_1 i O_2; prosta a niechaj będzie zmienną styczną do stożkowej; niechaj ta prosta przecina styczne s_1 i s_2 w punktach A_1 i A_2. Połączmy A_1O_2 i A_2O_1; w czworoboku zupełnym opisanym $s_1 s_2 a o$ proste A_1O_2 i A_2O_1 łączą przeciwległe

wierzchołki, skąd wynika, że ich punkt przecięcia P leży na biegunowej s punktu $s_1 s_2 \equiv S$ t.j.

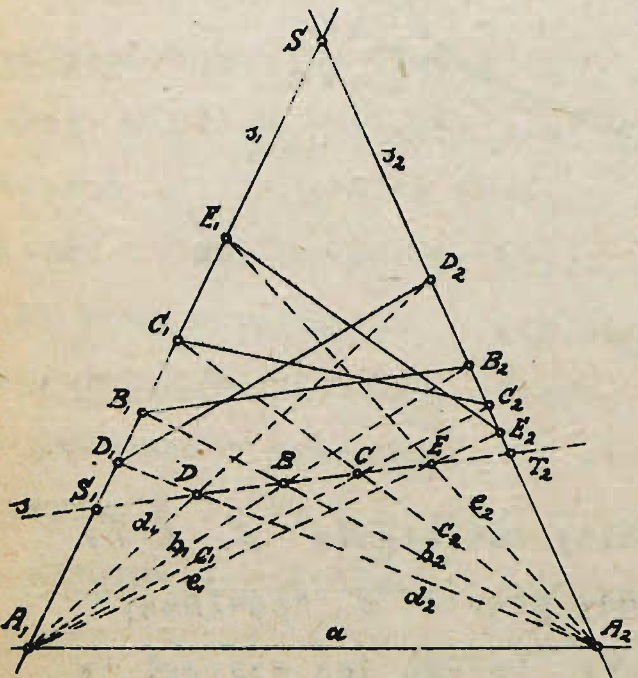


Rys. 311.

na prostej łączącej punkty zetknięcia S_1 i T_2 stycznych s_1 i s_2. Gdy prosta a "powłóczy" stożkową, punkty A_1 i A_2 tworzą dwa szeregi, z których każdy jest w perspektywie z szeregiem utworzonym przez poruszający się na prostej s punkt P;

szeregi s_1 i s_2 są przeto rzutowe. Zauważmy, że prosta S_1T_2 jest osią perspektywy tych szeregów, tak, że punktowi przecięcia podstaw s_1 i s_2, zaliczonemu do jednego z tych szeregów, odpowiada w drugim punkt zetknięcia podstawy drugiego ze stożkową.

Twierdzenie II /odwrotne/. Obwiednią prostych łączących punkty odpowiednie dwóch szeregów rzutowych jest stożkowa. Niech będą dwa szeregi rzutowe /ale nie perspektywiczne/: $s_1(A_1B_1C_1\ldots)$ i $s_2(A_2B_2C_2\ldots)$ /rys.312/, których odpowiednie punkty łączymy prostemi $a, b, c\ldots$



Rys. 312.

Wyznaczmy oś perspektywy s tych szeregów. Jest to, jak wiadomo, prosta łącząca punkty B i C, z których pierwszy jest przecięciem prostych A_1B_2 i A_2B_1, a drugi prostych A_1C_2 i A_2C_1. Wyznaczmy punkty $ss_1 \equiv S_1$ i $ss_2 \equiv T_2$. Na zasadzie

§ 173 istnieje jedna i tylko jedna stożkowa styczna do prostych a, b, s_1 i s_2 i przechodząca przez punkt S_1 ; na zasadzie zaś poprzedniego twierdzenia szeregi punktów przecięcia stycznych s_1 i s_2 ze wszystkiemi stycznemi do stożkowej są rzutowe; rzutowość ta jest wyznaczona przez 3 którekolwiek pary punktów odpowiednich, np. przez pary A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , S_1 i $S_2 \equiv S$, skąd wynika, że te szeregi są identyczne z szeregami danemi.

Jeżeli szeregi s_1 i s_2 są perspektywiczne, to obwiednią prostych łączących punkty odpowiednie jest stożkowa zwyrodniała, złożona z punktu $s_1 s_2 \equiv S$ i środka perspektywy P tych szeregów.

Na zasadzie obu powyższych twierdzeń można rozwiązać zadania:

Wykreślić dowolną ilość stycznych do stożkowej, stycznej do pięciu danych prostych /z których żadne 3 nie przechodzą przez jeden punkt/, albo: stycznej do 4 danych prostych i mającej z jedną z nich dany punkt zetknięcia, albo: stycznej do 3 danych prostych i mających z dwiema z nich dane punkty zetknięcia.

1/ Niech będą dane styczne s_1, s_2, a, b i c

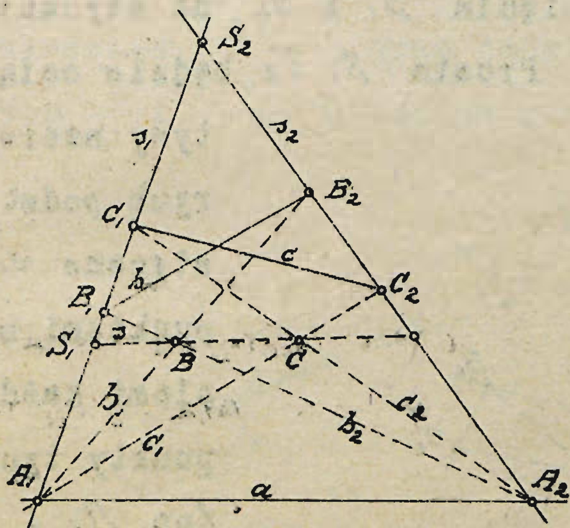
/rys. 312/. Zadanie będzie rozwiązane, gdy wskażemy, jak z dowolnego punktu D_1, leżącego na stycznej s_1, wyprowadzić szóstą styczną d do stożkowej. Zmieniając bowiem położenie tego punktu na stycznej s_1, znajdziemy dowolną ilość stycznych do tej stożkowej.

Obierzmy styczne s_1 i s_2 za podstawie szeregów wyznaczonych przez styczne do stożkowej. Jeżeli styczne a, b i c przecinają styczną s_1 w punktach A_1, B_1 i C_1, a styczną s_2 w punktach A_2, B_2 i C_2, to te trzy pary punktów wyznaczą rzutowość szeregów

$$s_1 (A_1 B_1 C_1 \ldots) \;\overline{\wedge}\; s_2 (A_2 B_2 C_2 \ldots),$$

które przez połączenie odpowiednich punktów utworzą stożkową styczną do wszystkich 5 danych prostych. Aby z punktu D_1, leżącego na stycznej s_1, wyprowadzić nową styczną d, odnajdziemy w szeregu s_2 punkt D_2 odpowiadający punktowi D_1; styczna d łączy dwa punkty odpowiednie D_1 i D_2. Wykreślmy więc najpierw oś perspektywy s tych szeregów, łącząc punkt B przecięcia prostych A_1B_2 i A_2B_1 z punktem C przecięcia prostych A_1C_2 i A_2C_1. Wyznaczmy następnie punkt D przecięcia prostych A_2D_1 i s i połączmy A_1D ; punkt D_2 będzie przecięciem prostych A_1D i s_2 ; prosta D_1D_2 będzie szukaną styczną d . Zauważmy, że oś perspektywy s przecina styczne s_1 i s_2 w punktach ich zetknięcia ze stożkową.

2/ Niechaj będą dane styczne a, b, s_1 i s_2 oraz punkt zetknięcia S_1 stycznej s_1 /rys.313/.-

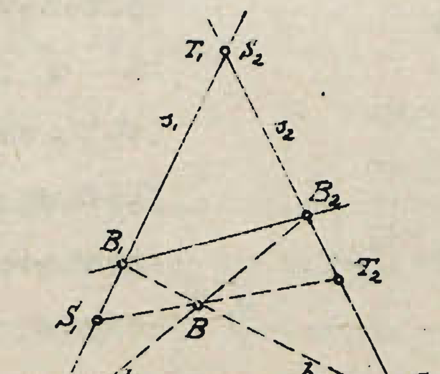


Rys. 313.

Wyznaczmy punkty A_1, B_1 i A_2 B_2 , w których proste a i b przecinają s_1 i s_2 ; punkt s_1s_2 oznaczmy literą S_2 ; rzutowość szeregów s_1 i s_2 jest wyznaczona przez 3 pary punktów odpowiednich $A_1B_1S_1$ i $A_2B_2S_2$ /gdyż punktowi przecięcia podstaw s_1 i s_2 , zaliczonemu do szeregu s_2 odpowiada w szeregu s_1 punkt zetknięcia stycznej s_1 ze stożkową/. Oś perspektywy s łączy punkt S z punktem przecięcia prostych

A_1B_2 i A_2B_1. Chcąc otrzymać jakąkolwiek nową styczną do steżkowej, obieramy na prostej s dowolny punkt C i łączymy go z punktami A_1 i A_2 prostemi c_1 i c_2; punkty s_1c_2 i s_2c_1 będą parą punktów odpowiednich szeregów s_1 i s_2, a więc prosta, która je połączy, będzie styczną c do stożkowej.

3/ Niechaj wreszcie będą 3 styczne s_1, s_2 i a oraz punkty zetknięcia S_1 i T_2 na stycznych s_1 i s_2 /rys.314/. Prosta S_1T_2 będzie osią perspektywy szeregów, których podstawami są styczne s_1 i s_2, a punktami odpowiedniemi każde dwa punkty tych prostych /np. A_1 i A_2/, które leżą na tej samej stycznej a. Obrawszy tedy na prostej S_1T_2 dowolny punkt B i łącząc go z punktami A_1 i A_2 otrzymamy proste b_1 i b_2, które przecinają podstawy s_1 i s_2 w punktach odpowiednich B_2 i B_1 tych szere-

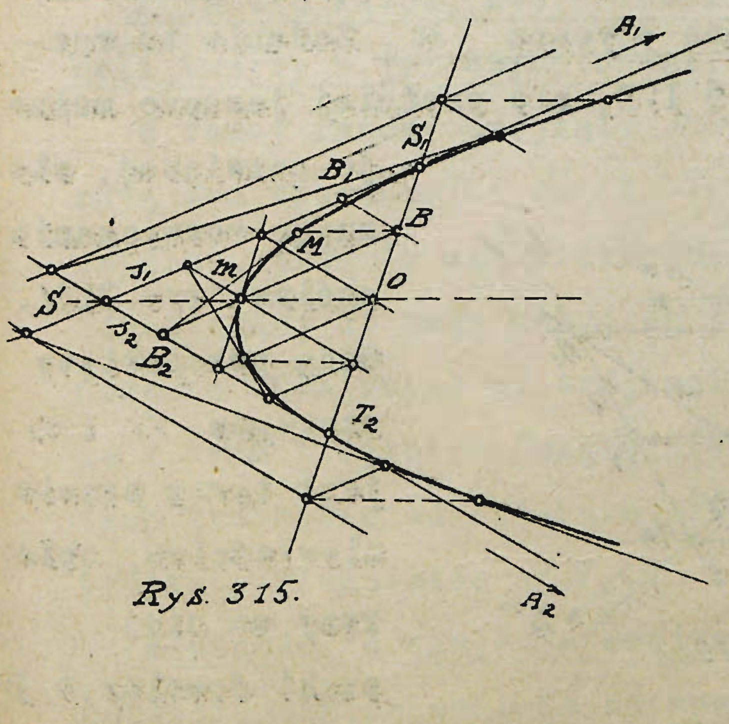


Rys. 314.

gów; prosta $B_1 B_2$ będzie styczną do stożkowej.

§ 172. Zastosowania. I. Wykreślić parabolę, mając jej 4 styczne a, b, c i d. Ponieważ prosta niewłaściwa jest styczną do paraboli, więc mamy wówczas 5 danych stycznych do stożkowej.

II. Wykreślić parabolę, mając jej dwie styczne s_1 i s_2 wraz z punktami zetknięcia S_1 i T_2 /rys. 315/. Mamy teraz dane trzy styczne /s_1, s_2 i prosta niewłaściwa a^∞/, oraz punkty zetknięcia na stycznych S_1 i S_2. Stosując rozwiązanie ogólne obieramy na prostej $S_1 T_2$ dowolny punkt B i łącząc go z punktami niewłaściwemi A_1 i A_2 prostych s_1 i s_2 /t.j. prowadząc z punktu B równolegle do stycznych s_1 i s_2/, otrzymamy na prostych s_1 i s_2

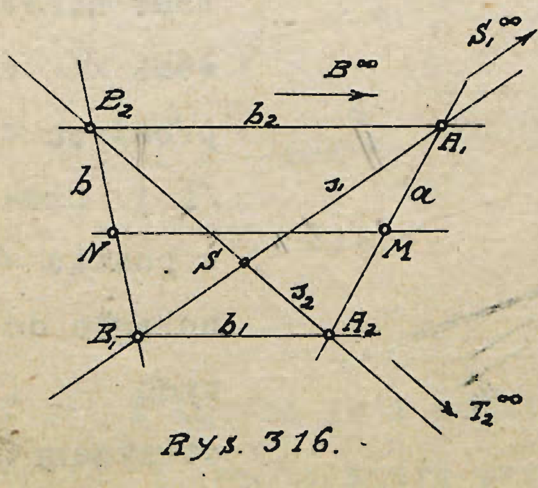


Rys. 315.

---

punkty B_1 i B_2 ; prosta B_1B_2 jest styczną do paraboli. - Prosta, łączący punkt $s_1 s_2 \equiv S$ ze środkiem O cięciwy S_1T_2 jest średnicą sprzężoną z cięciwą S_1T_2 i jej kierunek jest punktem zetknięcia paraboli z prostą niewłaściwą /a więc jest środkiem paraboli/. Łącząc ten punkt z punktem B, t.j. prowadząc $BM \parallel OS$, otrzymamy na prostej b jej punkt zetknięcia M z parabolą. Przesuwając punkt B po prostej S_1T_2 wyznaczymy potrzebną ilość punktów i stycznych paraboli.

III. Wykreślić hiperbolę, mając jej asymptoty s_1 i s_2 oraz jedną styczną α. Zadanie to rozwiązaliśmy już w § 170, ale prościej jeszcze można je rozwiązać, stosując rozwiązanie ogólne /rys. 316/. Osią perspektywy szeregów s_1 i s_2 jest teraz prosta niewłaściwa; obieramy na niej punkt dowolny, t.j jakikolwiek kierunek B^∞ i



Rys. 316.

punkt ten łączymy z punktami A_1 i A_2, w których styczna a przecina styczne s_1 i s_2; innemi słowy z punktów A_1 i A_2 prowadzimy w dowolnym kierunku dwie równoległe b_1 i b_2; punkty B_1 i B_2, w których te proste przetną s_1 i s_2, łączymy nową styczną b. W ten sposób możemy otrzymać dowolną ilość stycznych. Prowadząc przez środek M odcinka $A''B''$ równoległą do obranego kierunku B^{∞}, otrzymamy zarazem punkt zetknięcia N na każdej nowej stycznej b.

Z tego wykreślenia wyciągamy wniosek:

<u>Pola trójkątów, które dowolna styczna do hiperboli tworzy z jej asymptotami, są stałe.</u>

W samej rzeczy trójkąty $A_1A_2B_2$ i $B_1B_2A_1$ mają dwa wierzchołki A_1 i B_2, a więc i bok A_1B_2 wspólne, trzecie zaś wierzchołki A_2 i B_1 leżą na równoległej do tego boku; są to zatem trójkąty równoważne. Odejmując po trójkącie A_1SB_2 od każdego z tych trójkątów /względnie odejmując każdy z tych trójkątów od trójkąta A_1SB_2/ otrzymamy trójkąty równoważne A_1A_2S i B_1B_2S.

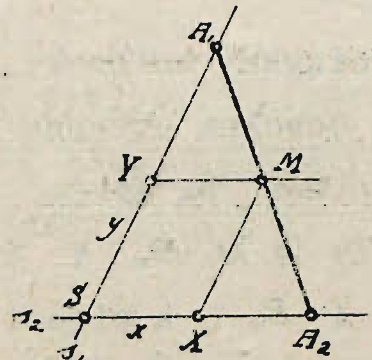
<u>Własność ta znajduje swój wyraz w równaniu hiperboli, odniesionej do asymptot.</u> Z dowolnego punktu M hiperboli /rys. 317/ poprowadźmy równoległe

do asymptot uważanych za osie spółrzędnych; utworzy się wtedy równoległobok $SXMY$, którego pole jest połową pola trójkąta $A_1 A_2 S$; to ostatnie zaś jest stałe, t.j. od położenia punktu M na hiperboli niezależne. Stąd

$$SX \cdot SY \cdot \sin(s_1 s_2) = \text{stałej}.$$

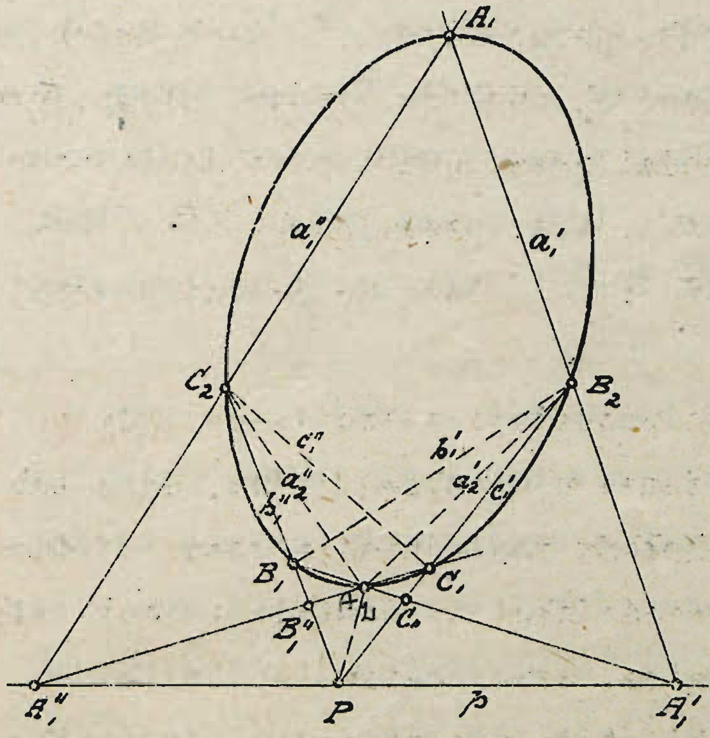
Oznaczając, jak zwykle $SX = x$; $SY = y$ i zauważywszy, że kąt $(s_1 s_2)$ jest stały, mamy równanie hiperboli, odniesionej do asymptot:

$$x \cdot y = \text{stałej}.$$



Rys. 317.

§ 173. Twierdzenie Pascala. - W sześciokącie wpisanym w stożkową boki przeciwległe przecinają się parami w trzech punktach, leżących na jednej prostej. Niech będzie sześciokąt $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ wpisany w stożkową /rys.318/; trzeba dowieść, że punkty P, A_1'' i A_1' w których się przecinają pary boków przeciwległych $B_1 C_2$ i $B_2 C_1$, $C_1 A_2$ i $C_2 A_1$, $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$



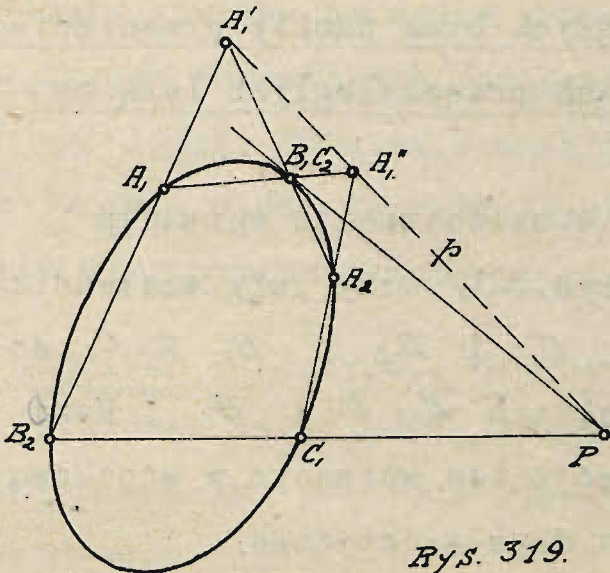
Rys. 318.

leżą na jednej prostej. - Z dwóch wierzchołków niesąsiednich i nieprzeciwległych, np. z B_2 i C_2 rzućmy pozostałe 4 wierzchołki: A_2, A_1, B_1 i C_1. Na zasadzie twierdzenia I § 169 proste rzucające te 4 punkty z punktów B_2 i C_2 stanowią dwie czwórki rzutowe $B_2(a_2' a_1' b_1' c_1')$ i $C_2(a_2'' a_1'' b_1'' c_1'')$. Przetnijmy pierwszą czwórkę prostą $A_2 B_1$, a drugą prostą $A_2 C_1$; otrzymamy dwie czwórki punktów $A_2 A_1' B_1 C_1'$ i $A_2 A_1'' B_1'' C_1''$, które nie tylko będą rzutowe, ale nawet perspektywiczne, bo punkt przecięcia podstaw A_2 odpowiada w tych czwórkach samemu sobie. Stąd wynika, że punkty odpowiednie A_1' i A_1'' , B_1 i B_1'' , C_1 i C_1' leżą na prostych przecinających się w jednym punkcie, mianowicie w środku perspektywy P tych dwóch perspektywicznych czwórek punktów. Innemi słowy, prosta $A_1' A_1''$ przechodzi przez punkt przecięcia prostych $B_1 B_1''$ i $C_1 C_1'$, t.j. przez punkt P , tak, że 3 punkty P, A_1' i A_1'' leżą na jednej prostej, c.b.d.d.

Twierdzenie to pozostaje w swej mocy, gdy w sześciokącie wpisanym w stożkową jedna, dwie lub trzy pary wierzchołków sąsiednich zostaną zjednoczone, przez co sześciokąt wyrodnieje i staje się wpisanym pięciokątem, czworokątem lub trójkątem, a zwyrodniałe boki stają się stycznemi do stożkowej w wierzchołkach zjednoczonych.

1/ Przypuśćmy najpierw, że w sześciokącie wpisanym $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ /rys.319/ jedna para sąsiednich wierzchołków jest zjednoczona; załóżmy np., że wierzchołek C_2 przystaje do B_1 , tak że sześciokąt zniekształca się na pięciokąt wpisany $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1$, w którego jednym wierzchołku (B_1) dana jest styczna.

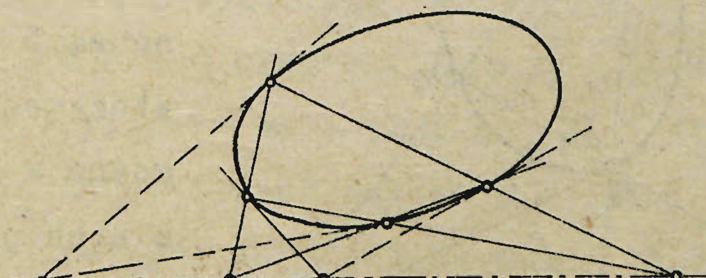
W pięciokącie wpisanym w stożkową punkty przecięcia dwóch par niesąsiednich boków oraz punkt



Rys. 319.

przecięcia piątego boku ze styczną w przeciwległym mu wierzchołku, leżą na jednej prostej.

2/ Załóżmy powtóre /rys.320/, że w sześciokącie wpisanym $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ dwie pary sąsiednich wierzchołków, np. $B_2 C_1$ i $B_1 C_2$ zostały zjednoczone. Figura staje się wpisanym czworokątem $A_1 B_2 A_2 B_1$ i twierdzenie Pascala przekształca się na znane nam dobrze twierdzenie o czworokącie wpisanym § 168, które można sformułować jeszcze tak:

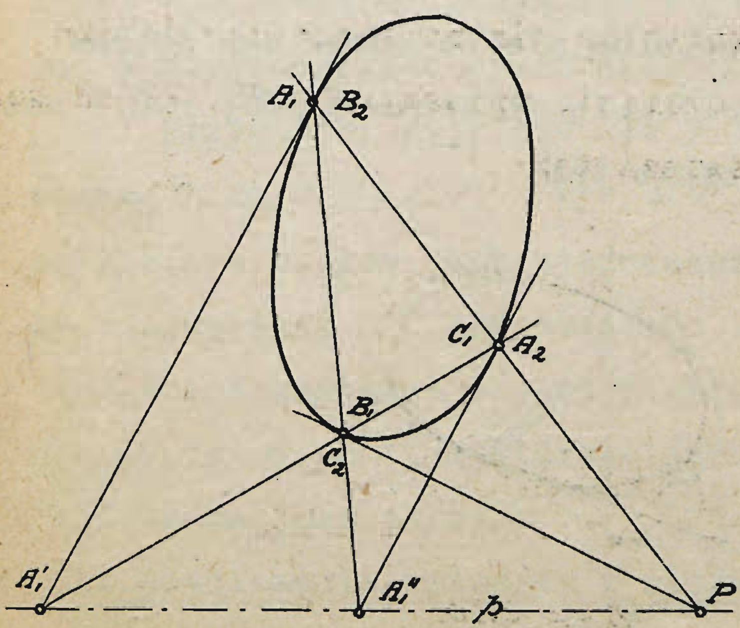


Rys. 320.

W czworokącie wpisanym w stożkową punkty przecięcia boków przeciwległych oraz punkty przecięcia stycznych w wierzchołkach przeciwległych leżą na jednej prostej.

3/ Niechaj wreszcie w sześciokącie wpisanym $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ /rys.321/ trzy pary sąsiednich wierzchołków A_1 i B_2, C_1 i A_2, B_1 i C_2 zostaną zjednoczone w punktach A_1, C_1 i B_1. Mamy wtedy do czynienia z trójkątem wpisanym w stożkową, w którego wierzchołkach dane są styczne.

W trójkącie wpisanym w stożkową punkty przecięcia boków ze stycznemi w wierzchołkach tym bokom przeciwległych, leżą na jednej prostej.



Rys. 321.

Na zasadzie powyższych wniosków można rozwiązać zadania:

1/ Jeżeli dane są 5 punktów stożkowej, to można w każdym z nich poprowadzić styczną /wn.1/;

2/ Jeżeli dane są 4 punkty stożkowej i styczna w jednym z nich, to można wykreślić styczne w każdym z trzech pozostałych /wniosek 2/;

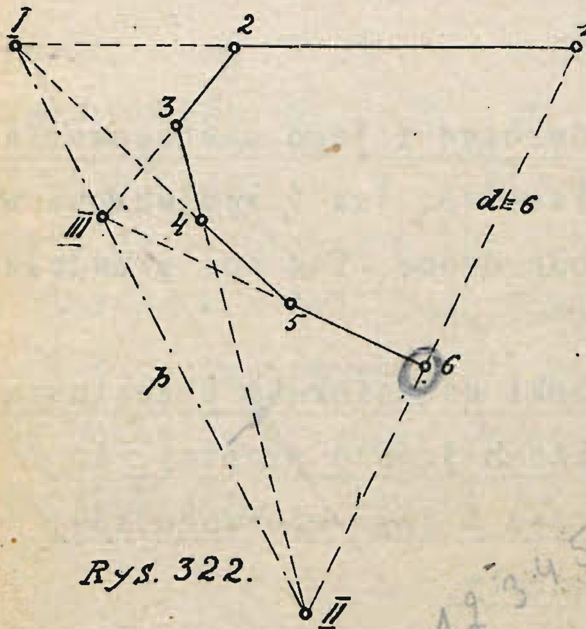
3/ Jeżeli dane są 3 punkty stożkowej i styczne w dwóch z nich, to można wykreślić styczną w trzecim wierzchołku /wn.3/.

§ 174. Twierdzenie odwrotne i jego zastosowanie.

Zarówno twierdzenie Pascala, jak i wymienione wyżej 3 wnioski mogą być odwrócone. Tak np. prawdziwe jest twierdzenie:

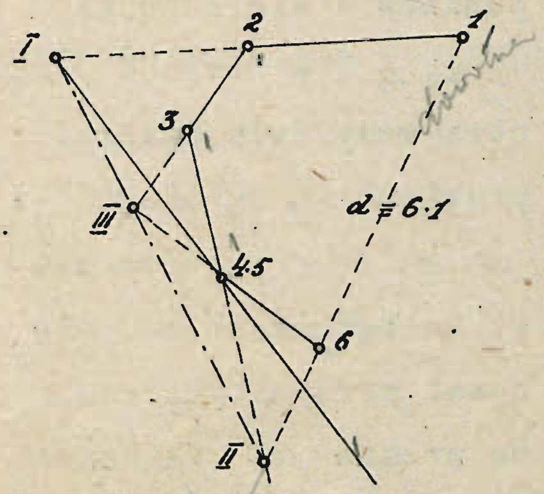
Jeżeli przeciwległe boki sześciokąta przecinają się parami w trzech punktach jednej prostej, to stożkowa przechodząca przez 5 jego wierzchołków, przechodzi także przez szósty.

Na zasadzie tego twierdzenia można wyznaczyć dowolny szósty punkt stożkowej, której 5 punktów 1, 2, 3, 4 i 5 są dane /rys.322/. Szukamy wierzchołka 6 sześciokąta wpisanego, którego pozostałe wierzchołki 1,2,3,4 i 5 oraz bok $61 \equiv d$ jest dany. Wiemy, że boki przeciwległe 12 i 45, 34 i 61, 23 i 56 przecinają się w trzech punktach I, II i III, leżących na jednej prostej /osi Pascala/. Połączywszy punkty 12 i 45 znajdziemy w przecięciu tych prostych punkt I, w przecięciu prostej 34 z $61 \equiv d$ znajdziemy punkt II, prosta I - II jest osią Pascala *p* , na której musi leżeć punkt III. - Będzie to oczywiście punkt, w którym prosta 23 przecina prostą *p* ; łącząc go z punktem 5, otrzymamy w przecięciu z prostą 61 ≡ *d* punkt szukany III.

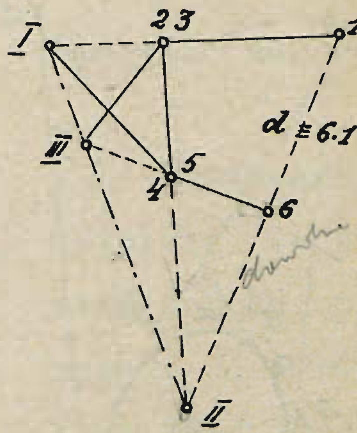


Rys. 322.

Rozwiązanie nie ulega istotnej zmianie, gdy dwa którekolwiek z danych punktów, np. 4 i 5 są zjednoczone, t.j. gdy dane są 4 punkty: 1,2,3 i 45 oraz styczna w punkcie 45 /rys. 323/, albo gdy dwa punkty 2 i 3, oraz dwa inne 4 i 5, są zjednoczone, t.j. gdy dane są 3 punkty 1, 23 i 45 oraz styczne w punktach 23 i 45 /rys.324/.



Rys. 323.



Rys. 324.

§ 175. Twierdzenie Brianchona. W sześcioboku opisanym na stożkowej, wierzchołki przeciwległe leżą parami na trzech prostych, przechodzących przez jeden punkt. Niech będzie sześciobok $a_1\, b_2\, c_1\, a_2\, b_1\, c_2$ opisany na stożkowej /rys.325/, trzeba dowieść, że proste p, a_1'' i a_1' , które łączą pary wierzchołków przeciwległych: $b_1\, c_2$ i $b_2\, c_1$, $c_1 a_2$ i $a_2\, c_1$, $a_1 b_2$ i $a_2\, b_1$ przechodzą przez jeden punkt. Na dwóch bokach niesąsiednich i nieprzeciwległych, np. na b_2 i c_2 , pozostałe 4 boki a_2, a_1, b_1 i c_1 wyznaczają dwie czwórki punktów $A_2'\, A_1'\, B_1'\, C_1'$ i $A_2''\, A_1''\, B_1''\, C_1''$, które na zasadzie twierdzenia I § 171 są rzutowe.-