§ 140. Proste jednorodne i punkty kołowe. Na szczególną uwagę zasługują proste urojone sprzężone, określone przez inwolucję prostokątną dokoła jakiegokolwiek właściwego punktu. Są to t.zw. proste jednorodne. Wszystkie one przechodzą przez dwa urojone sprzężone punkty niewłaściwe, które nazywamy punktami kołowemi i które są określone przez t.zw. inwolucję absolutną na prostej niewłaściwej, t.j. przez inwolucję kierunków wzajemnie prostopadłych. Jak zobaczymy później, przez te punkty urojone przechodzą również wszystkie koła leżące w płaszczyźnie uważanej, zarówno rzeczywiste, jak urojone.

ROZDZIAŁ XIII.

STOŻKOWE I STOŻKI.

§ 141. Pespektywiczność dwóch układów płaskich. Rzucając figurę F , leżącą w płaszczyźnie S na płaszczyznę P z punktu O , nieleżącego na żadnej z tych płaszczyzn, otrzymujemy figurę F_1 , która z figurą F znajduje się w pewnym związku geometrycznym, polegającym na tem, że

1/ Każdemu punktowi figury F odpowiada jeden jedyny punkt figury F_1 i nawzajem, każdemu punktowi figury F_1 odpowiada jeden jedyny punkt figury F.

2/ Każdej prostej figury F odpowiada jedna jedyna prosta figury F_1 i nawzajem, każdej prostej figury F_1 odpowiada jedna jedyna prosta figury F.

3/ Punktowi i prostej, należącym do siebie w jednej z tych figur, odpowiadają punkt i prosta drugiej figury, które również do siebie należą.

4/ Punkty odpowiednie leżą parami na prostych, przechodzących przez jeden punkt /mianowicie przez punkt O/ i

5/ Proste odpowiednie przecinają się w punktach leżących na jednej prostej /mianowicie na prostej przecięcia $\jmath$ płaszczyzn S i P /.

Oczywista, że każdy punkt i każda prosta płaszczyzny S mogą być zaliczone do figury F, a każdy punkt i każda prosta płaszczyzny P mogą być zaliczone do figury F_1. Tak rozszerzone pojęcia figur płaskich nazywają się <u>układami płaskiemi</u> F i F_1. Związek geometryczny dwóch układów płaskich, <u>leżących w różnych płaszczyznach</u>, polegający na powyższych 5-ciu własnościach, nazywa się ich perspektywicznością; o układach F i F_1 mówimy, że są w perspektywie. Z rozważań rozdziału poprzedniego wynika, że każdemu szeregowi lub pękowi jednego układu odpowiada perspektywiczny a więc i rzutowy z nim szereg lub pęk drugiego układu. Prostej niewłaściwej q^{∞} układu F odpowiada w układzie F_1 prosta q_1, która wogóle jest właściwa; jest to ślad na płaszczyźnie P płaszczyzny prowadzonej przez punkt O równolegle do płaszczyzny S; prostej niewłaściwej r_1^{∞} układu F_1 odpowiada w układzie F prosta r, która jest śladem na płaszczyźnie S płaszczyzny poprowadzonej przez punkt O równolegle do płaszczyzny P.

§ 142. Kolineacja środkowa dwóch układów płaskich. Jeżeli układ płaski F rzucimy z dwóch różnych punktów O_1 i O_2 na tę samą płaszczyznę P, to otrzymamy w tej płaszczyźnie dwa układy płaskie F_1 i F_2, które są w związku scharakteryzowanym przez te same 5 własności wymienionych w artykule poprzednim. Związek ten nazywamy kolineacją środkową układów F_1 i F_2 /§§ 76 - 80/. Środkiem tej kolineacji jest punkt O, w którym prosta O_1O_2 przebija płaszczyznę P; przez ten punkt przechodzą wszystkie proste łączące punkty odpowiednie dwóch układów: A_1 i A_2, B_1 i B_2 ... ; <u>osią</u> tej kolineacji jest ślad s płaszczyzny S układu F na płaszczyźnie P; na prostej s leżą wszystkie punkty przecięcia prostych odpowiednich dwóch układów: a_1 i a_2, b_1 i b_2 ... Każde dwa szeregi odpowiednie, których podstawy nie przechodzą przez środek kolineacji O, są perspektywiczne, a więc i rzutowe; środkiem ich perspektywy jest punkt O; każde dwa pęki odpowiednie, których wierzchołki nie leżą na osi kolineacji s, są perspektywiczne, a więc i rzutowe, - osią ich perspektywy jest prosta s. Środek kolineacji O oraz wszystkie punkty osi kolineacji s odpowiadają same sobie; oś kolineacji oraz wszystkie proste, przechodzące przez środek kolineacji O /<u>promienie kolineacji</u>/ odpowiadają same sobie. Prostej niewłaściwej q_1^∞ układu F_1 odpowiada prosta q_2; prostej niewłaściwej r_2^∞ układu F_2 odpowiada prosta r_1; proste q_2 i r_1 nazywają się <u>prostemi wzajemnemi</u>; są one równoległe do osi kolineacji s i mają tę własność, że <u>odległość jednej z nich od środka kolineacji i odległość drugiej od osi kolineacji są odcinkami rów-</u>

nej długości i przeciwnego zwrotu /§ 79/.

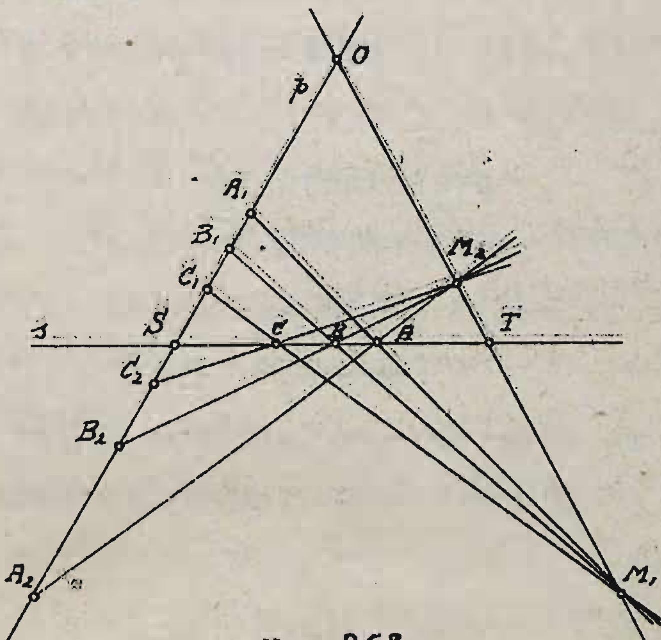
Jeżeli jeden z dwóch punktów O_1 i O_2, z których rzucamy układ F, np. punkt O_2 jest kierunkiem prostopadłym do płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego między płaszczyznami P i S, to rzut F_2 układu F z tego punktu jest kładem układu F na płaszczyznę P dokoła śladu s:
Z dwóch układów, będących w kolineacji środkowej, można zawsze jeden którykolwiek z nich uważać za kład układu, którego rzutem jest drugi.

Kolineacja środkowa jest wyznaczona przez swój środek O, swoją oś s i jedną parę punktów odpowiednich A_1 i A_2, leżących na prostej, przechodzącej przez środek O, albo przez jedną parę prostych odpowiednich a_1 i a_2, przecinających się w punkcie, leżącym na osi s. W szczególności kolineacja środkowa będzie wyznaczona przez środek O, oś s i jedną z prostych wzajemnych q_2 lub r_1 /§ 79/.

Pary punktów odpowiednich A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2, leżących na tym samym promieniu kolineacji p /rys.268/, tworzą dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p:

$$p(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p(A_2 B_2 C_2 \ldots).$$

Środek kolineacji O i punkt S, w którym promień kolineacji p przecina oś kolineacji, są punktami odpowiedniemi tych szeregów. -



Rys. 268.

W samej rzeczy niechaj kolineacja środkowa będzie dana przez swój środek O, oś s i dwa punkty odpowiednie A_1 i A_2, leżące na prostej p, przechodzącej przez punkt O. Aby wyznaczyć punkty $B_2, C_2, \ldots$, odpowiadające w tej kolineacji punktom $B_1, C_1, \ldots$ prostej p, obierzmy najpierw punkt jakikolwiek M_1, nie leżący ani na osi s, ani na prostej p i wyznaczmy punkt odpowiedni M_2. W tym celu połączmy punkty A_1 i M_1 i punkt A, w którym prosta $A_1 M_1$ przecina oś σ, połączmy z punktem A_2; prosta AA_2 przetnie promień kolineacji OM, w szukanym punkcie M_2. Aby znaleźć punkty $B_2, C_2, \ldots$ odpowiadające punktom $B_1, C_1, \ldots$ połączmy te ostatnie punkty z punktem M_1 i punkty $B, C, \ldots$, w których proste $M_1 B_1, M_1 C_1 \ldots$ przecinają oś σ, połączmy z punktem M_2; proste $M_2 B, M_2 C \ldots$ przetną promień kolineacji p w szukanych punktach $B_2, C_2, \ldots$. Szeregi $A_1, B_1, C_1, \ldots$ i $A_2, B_2, C_2 \ldots$ są więc perspektywiczne z tym samym szeregiem $A, B, C \ldots$, a więc są rzutowe ze sobą.

Dwustosunek (OSA_1A_2) jest dla każdej kolineacji środkowej liczbą stałą, t.j. niezależną ani od prostej p, na której leżą oba punkty A_1 i A_2, ani od położenia samych tych punktów na prostej p. W samej rzeczy, oznaczywszy literą T punkt, w którym prosta OM_1M_2 przecina oś kolineacji i zważywszy, że dla każdych dwóch punktów odpowiednich A_1 i A_2, B_1 i $B_2 \ldots$ istnieje punkt osi $A, B \ldots$, który jest środkiem perspektywy czwórek $OSA_1A_2 \ldots$ i OTM_1M_2, OSB_1B_2 i $OTM_1M_2 \ldots$

mamy

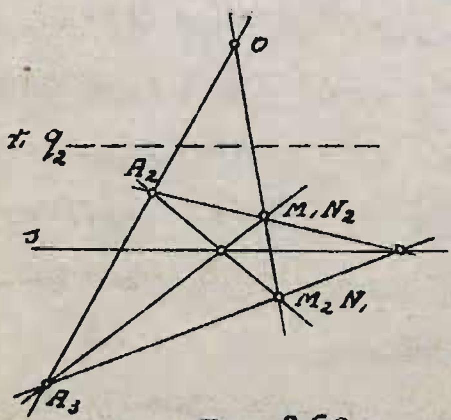
$$(OSA_1A_2) = (OSB_1B_2) = (OTM_1M_2)$$

Wartość λ tego dwustosunku nazywa się cechą kolineacji środkowej, - jest to wartość stosunku, w którym oś wzajemna r_1 dzieli odległość środka O od osi s /gdyż $(OSR_1R_2^{\infty}) = \frac{OR_1}{SR_1}$ /, albo w którym oś wzajemna q_2, dzieli odległość osi s od środka O /gdyż $(OSQ_1^{\infty}Q_2) = \frac{SQ_2}{OQ_2}$ /.

Tak samo dowiedlibyśmy, że pary prostych odpowiednich a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2, wychodzących z tego samego punktu S osi kolineacji, tworzą dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku S: $S(a_1b_1c_1\ldots) \barwedge S(a_2b_2c_2\ldots)$, przytem dwustosunek (psa_1a_2), gdzie $p \equiv OS$ jest liczbą stałą, równą zresztą tej samej liczbie λ, która jest wartością dwustosunku (OSA_1A_2).

Jeżeli cecha kolineacji środkowej $\lambda = -1$, to ta kolineacja nazywa się inwolucyjną. Na każdym promieniu kolineacji punkty odpowiednie A_1 i A_2, B_1 i $B_2\ldots$ są wówczas sprzężone inwolucyjnie, tak że każdemu punktowi P odpowiada jeden jedyny punkt, niezależny od tego, czy punkt P zaliczymy do układu F_1, czy do układu F_2. - Podobnież pary prostych odpowiednich a_1 i a_2, b_1 i $b_2\ldots$

wychodzących z tego samego punktu S osi, są w inwolucji, tak że każdej prostej p odpowiada jedna jedyna prosta, niezależna od tego, do którego układu tamtą prostą zaliczymy. W szczególności, prostej niewłaściwej odpowiada jedna jedyna prosta wzajemna $q_2 \equiv r_1$, która leży pośrodku między środkiem a osią kolineacji. Każde dwie pary punktów odpowiednich tworzą czworokąt zupełny /rys.269/, którego jeden punkt przekątny jest środkiem, a drugi leży na osi kolineacji; każde dwie pary prostych odpowiednich tworzą czworobok zupełny, którego jedna przekątna jest osią, a druga przechodzi przez środek kolineacji.



Rys. 269.

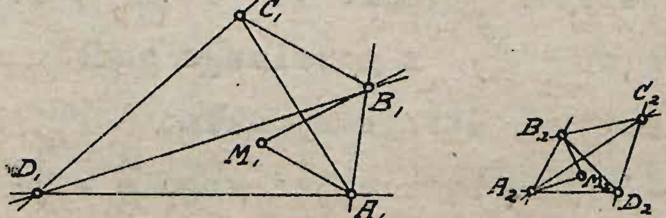
Dwa układy płaskie w kolineacji inwolucyjnej stanowią właściwie jeden jedyny układ płaski, którego zarówno punkty, jak proste, są parami sprzężone.

§ 143. Kolineacja ogólna dwóch układów płaskich. Niech będą dwa układy płaskie F_1 i F_2, spełniające wszystkie 5 warunków § 141, a więc perspektywiczne, jeżeli nie leżą w jednej płaszczyźnie, lub w kolineacji środkowej, jeżeli leżą w jednej płaszczyźnie. Nie tykając jednego z tych układów przenieśmy drugi w dowolny sposób; z 5 warunków, którym te układy czyniły zadość, ostatnie dwa nie będą wogóle w nowem położeniu tych układów spełnione, podczas gdy pierwsze trzy pozostaną w swej mocy, nie ustanie również rzutowość odpowiednich czwórek, szeregów i pęków.- O układach takich mówimy wciąż jeszcze, że są w kolineacji, która jednak nie będzie już wogóle środkową; ta ostatnia jest przypadkiem szczególnym owej kolineacji ogólnej.

Do kolineacji ogólnej dwóch układów płaskich możemy dojść na innej jeszcze drodze. Niech będą dwa układy perspektywiczne F_1 i F_2; rzucając jeden z nich np. F_2 z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę, otrzymamy układ F_3, który z układem F_1 nie będzie już wogóle w perspektywie, choć pozostanie z nim w kolineacji ogólnej. Kolineacja ta zostanie zresztą zachowaną po dowolnej ilości kolejnych rzutów każdego z układów F_1 i F_2 .- Podobnież, wychodząc z dwóch układów F_1 i F_2 , znajdujących się w kolineacji środkowej i przekształcając środkowo-kolineacyjnie w dowolny sposób jeden lub oba układy F_1 i F_2 , otrzymamy nowe układy, które będą ze sobą w kolineacji ogólnej.

Kolineacja ogólna jest wyznaczona przez 4 pary punktów albo 4 pary prostych odpowiednich z tem zastrzeżeniem, żeby żadne 3 z tych punktów w żadnym układzie nie leżały na jednej prostej, względnie, aby żadne 3 z tych prostych w żadnym układzie nie przechodziły przez jeden punkt.

Innemi słowy, kolineacja ogólna jest wyznaczona przez odpowiedniość dwóch czworokątów lub dwóch czworoboków zupełnych. W samej rzeczy, niech będą np. dwa czworokąty zupełne $A_1 B_1 C_1 D_1$ i $A_2 B_2 C_2 D_2$,



Rys. 270.

leżące w jednej lub w różnych płaszczyznach /rys.270/; jeżeli założymy, że punktom A_1, B_1, C_1 i D_1 pierwszego układu odpowiadają punkty A_2, B_2, C_2 i D_2 drugiego układu, to każdemu punktowi M_1, leżącemu w płaszczyźnie czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ i zaliczonemu do I układu odpowiada jeden jedyny punkt M_2, leżący w płaszczyźnie czworokąta $A_2B_2C_2D_2$ i należący do układu II. Połączmy punkt M_1 z dwoma którymikolwiek wierzchołkami czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ np. z A_1 i B_1. Punkty te będą wierzchołkami dwóch czwórek

$$A_1(B_1\,C_1\,D_1\,M_1) \quad \text{i} \quad B_1(A_1\,C_1\,D_1\,M_1)$$

Wyznaczmy w układzie II proste A_2M_2 i B_2M_2 odpowiadające prostym A_1M_1 i B_1M_1 w czwórkach rzutowych

$$A_1(B_1\,C_1\,D_1\,M_1) \;\overline{\wedge}\; A_2(B_2\,C_2\,D_2\,M_2) \text{ i}$$

$$B_1(A_1\,C_1\,D_1\,M_1) \;\overline{\wedge}\; B_2(A_2\,C_2\,D_2\,M_2);$$

punkt przecięcia prostych A_2M_2 i $B_2M_2 \equiv M_2$ będzie odpowiadał punktowi M_1, który jest przecięciem prostych odpowiednich A_1M_1 i B_1M_1.

§ 144. Korelacja dwóch układów płaskich. Kolineacja dwóch układów płaskich naprowadza nas na nowy związek geometryczny dwóch układów płaskich zwany korelacją, polegający na następujących własnościach:

1/ Każdemu punktowi układu F_1 odpowiada jedna jedyna prosta układu F_2 ; każdej prostej układu F_1 odpowiada jeden jedyny punkt układu F_2 i nawzajem.

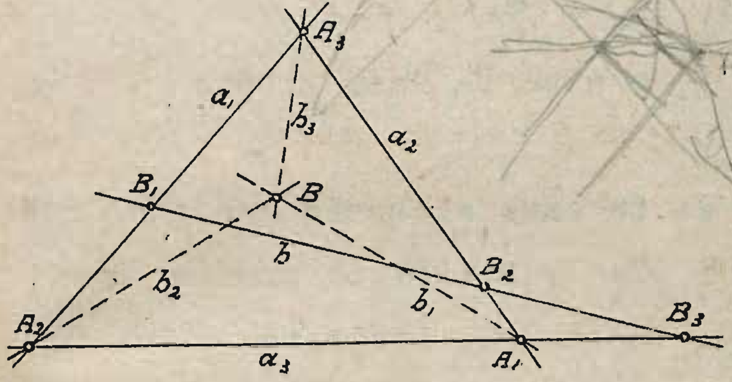
2/ Punktowi i prostej, należącym do siebie w jednym układzie, odpowiada prosta i punkt drugiego układu, które również do siebie należą.

3/ Każdej czwórce punktów jednego układu odpowiada czwórka prostych drugiego, która jest z nią rzutowa i nawzajem; wogóle każdemu szeregowi punktów jednego układu odpowiada pęk prostych drugiego i nawzajem.

"Korelacja" taka będzie wyznaczona przez założenie odpowiedniości wzajemnej 4 punktów jakichkolwiek I układu A_1, B_1, C_1 i D, z 4 prostemi drugiego układu a_1, b_1, c_1 i d_1, z tem jedynem zastrzeżeniem, żeby z tych 4 punktów żadne 3 nie leżały na jednej prostej, ani z tych 4 prostych żadne 3 nie przechodziły przez jeden punkt; innemi słowy przez założenie odpowiedniości czworokąta zupełnego $A_1 B_1 C_1 D_1$ z czworobokiem zupełnym $a_1 b_1 c_1 d_1$.

§ 145. Układ biegunowy. Niech będzie trójkąt

$A_1 A_2 A_3$ /którego boki oznaczymy literami: $a_1 \equiv A_2A_3$, $a_2 \equiv A_3A_1$ i $a_3 \equiv A_1A_2$ /, punkt jakikolwiek B nie leżący na żadnym z boków i prosta nie przechodząca przez żaden z wierzchołków tego trójkąta /rys.271/. Na mocy poprzedniego artykułu odpowiedniość punktów A_1, A_2 A_3 i B i prostych a_1, a_2, a_3 i b wyznacza korelację dwóch układów płaskich, leżących w tej samej płaszczyźnie. Korelacja ta ma tę własność, że <u>każdemu punktowi tej płaszczyzny odpowiada zawsze ta sama prosta, a każdej prostej ten sam punkt, niezależnie od tego, do którego układu tamten punkt albo tamtą prostą zaliczymy.</u>



Rys. 271.

Przedewszystkiem własność ta dotyczy punktów A_1, A_2, A_3, B i prostych a_1, a_2, a_3, b. Jeżeli zaliczymy punkty A_1, A_2, A_3 i B do I układu, to na mocy założenia odpowiadają im proste a_1, a_2, a_3 i b. Jeżeli te punkty zaliczymy do II układu, uważając je za przecięcia prostych a_2 i a_3, a_3 i a_1, a_1 i a_2, A_1B i A_2B to odpowiadać tym punktom będą w I układzie proste łączące punkty A_2 i A_3, A_3 i A_1, A_1 i A_2, a_1b i a_2b, a więc te same proste a_1, a_2, a_3 i b.

Stąd wynika, że tę samą własność posiadać będą punkty B_1, B_2 i B_3, w których prosta b przecina boki a_1, a_2 i a_3 trójkąta $A_1A_2A_3$, oraz proste b_1, b_2 i b_3, które łączą punkt B z jego wierzchołkami A_1, A_2 i A_3. Skoro bowiem punktom A_1, A_2, A_3 i B odpowiadają w obu układach te same proste a_1, a_2, a_3 i b, to prostym $A_1B \equiv b_1$, $A_2B \equiv b_2$, $A_3B \equiv b_3$ odpowiadać muszą w obu układach te same punkty $a_1b \equiv B_1$, $a_2b \equiv B_2$ i $a_3b \equiv B_3$.

Tę samą własność rozszerzymy teraz na wszystkie punkty, leżące na którejkolwiek z prostych a_1, a_2, a_3 i b i na wszystkie proste, przechodzące przez którykolwiek z punktów A_1, A_2, A_3 i B. Tak np. ponieważ punktom A_2, A_3 i B_1 odpowiadają w obu układach te same proste a_2, a_3 i b_1, więc każdemu punktowi M prostej a_1 odpowiadać będzie w obu układach ta sama prosta m_1, przechodząca przez punkt A_1 w ten sposób, aby

$$a_1(A_2 A_3 B_1 M_1) \barwedge A_1(a_2 a_3 b_1 m_1).$$

Wreszcie tę samą własność posiadać będą wszystkie inne punkty i proste płaszczyzny. Połączmy np. punkt jakikolwiek P, nie leżący na żadnej z prostych a_1, a_2, a_3 i b z punktami A_1 i A_2 prostemi p_1 i p_2; ponieważ na mocy poprzedniego ustępu, prostym tym w obu układach odpowiadają te same punkty P_1 i P_2, więc punktowi P odpowiadać musi w obu układach ta sama prosta $P_1P_2 = p$.

Te dwa układy korélacyjne można przeto uważać za jeden jedyny układ płaski, w którym zachodzi wzajemne podporządkowanie punktów i prostych prostym i punktom. Układ taki nazywamy <u>biegunowym</u>; prosta p, podporządkowana punktowi P, nazywa się jego <u>biegunową</u>; punkt P, podporządkowany prostej p nazywa się jej <u>biegunem</u>.

Ponieważ punktowi i prostej, należącym do siebie podporządkowane są proste i punkty również do siebie należące, więc mamy twierdzenie:

Jeżeli punkt C leży na biegunowej punktu B, to biegunowa punktu C przechodzi przez punkt B.

Jeżeli prosta c przechodzi przez biegun prostej b, to biegun prostej c leży na prostej b.

Stąd zaś wynika, że biegunową punktu przecięcia prostych m i n jest prosta, łącząca ich bieguny M i N i nawzajem biegunem prostej, łączącej punkty M i N jest punkt przecięcia ich biegunowych m i n.

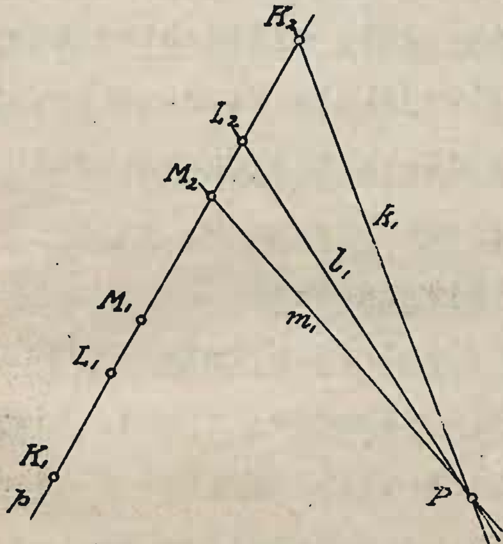
§ 146. Punkty i proste sprzężone. Inwolucja biegunowa. Proste b i c, mające tę własność, że biegun jednej z nich leży na drugiej /a wtedy biegun drugiej leży na pierwszej/, nazywają się prostemi biegunowo sprzężonemi; punkty B i C, z których jeden leży na biegunowej drugiego /a wtedy drugi leży na biegunowej pierwszego/, nazywają się punktami biegunowo sprzężonemi.

Niechaj będzie szereg punktów $K_1, L_1, M_1 \dots$ na podstawie p /rys.272/; biegunowe tych punktów $k_1, l_1, m_1, \dots$ przechodzić będą wszystkie przez biegun prostej p; oznaczmy literami $K_2, L_2, M_2 \dots$ punkty, w których proste $k_1, l_1, m_1, \dots$ przecinają prostą p . Ponieważ

$$p(K_1 L_1 M_1 \ldots) \overline{\wedge} P(k_1 l_1 m_1 \ldots) \overline{\wedge} p(K_2 L_2 M_2 \ldots)$$

więc

$$p(K_1 L_1 M_1 \ldots) \overline{\wedge} p(K_2 L_2 M_2 \ldots)$$



Rys. 272.

Łatwo okazać, że każde dwa punkty odpowiednie tych szeregów rzutowych na wspólnej podstawie odpowiadają sobie podwójnie. Zaliczmy np. punkt K_2 do I szeregu; punkt odpowiedni znajdziemy w przecięciu prostej p z biegunową punktu K_2 ; ale na mocy I twierdzenia poprzedniego artykułu biegunowa punktu K_2 przechodzi przez biegun prostej k_1 , to jest przez punkt K_1 ; w ten sposób punkty K_1 i K_2 odpowiadają sobie podwójnie, skąd już wynika, że każde dwa punkty odpowiednie L_1 i L_2 , M_1 i $M_2 \ldots$ odpowiadają sobie podwójnie, tak że dwa szeregi rzutowe

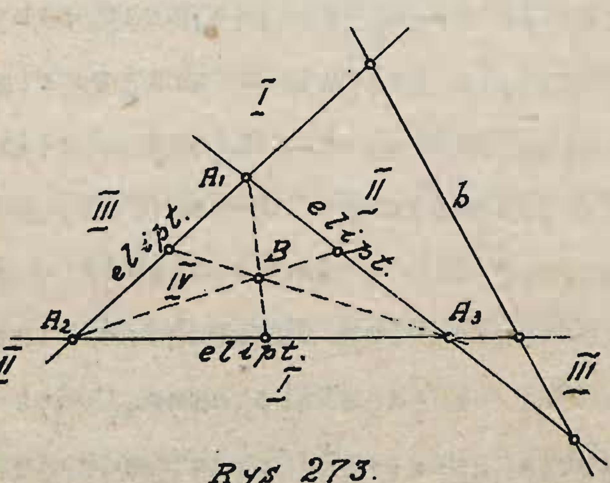
$p_1(K_1 L_1 M_1 K_2 L_2 M_2)$ i $p(K_2 L_2 M_2 K_1 L_1 M_1)$ stanowią inwolucję punktów /§ 136/. Mamy więc twierdzenie:

W układzie biegunowym na każdej prostej punkty biegunowo sprzężone stanowią inwolucję i wzajemnie: dokoła każdego punktu proste biegunowo sprzężone stanowią inwolucję. W ten sposób, układ biegunowy wyznacza na każdej prostej i dokoła każdego punktu pewną inwolucję, zwaną inwolucją biegunową, tak że punkty lub proste sprzężone biegunowo są zarazem sprzężone w inwolucji biegunowej.

Inwolucja biegunowa na dowolnej prostej p jest perspektywiczna z inwolucją biegunową dokoła bieguna P tej prostej, jeżeli bowiem punkty K_1 i K_2, L_1 i L_2 ... stanowią pary punktów sprzężonych inwolucji biegunowej na prostej p, to ich biegunowe k_1 i k_2, l_1 i l_2 ... stanowiące pary prostych sprzężonych inwolucji biegunowej dokoła punktu P, przechodzą odpowiednio przez pary punktów sprzężonych K_2 i K_1, L_2 i L_1 ... inwolucji biegunowej na prostej p.

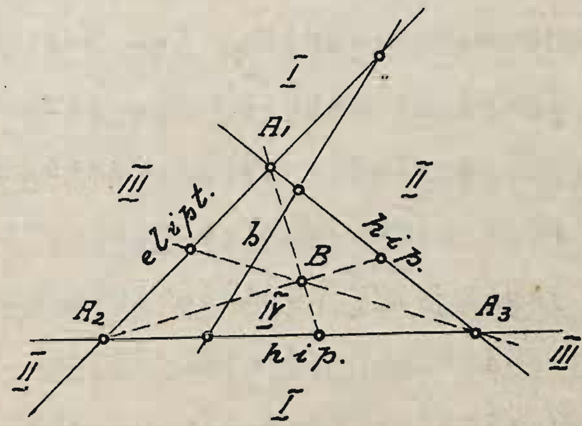
§ 147. Trójkąty biegunowe. Ponieważ proste a_1, a_2 i a_3 są biegunowemi punktów A_1, A_2 i A_3, więc każde dwie z tych prostych i każde dwa z tych punktów są ze sobą biegunowo sprzężone. Trójkąt $A_1 A_2 A_3$ ma tę osobliwość, że każdy jego wierzchołek jest biegunem przeciwległego mu boku, każde dwa jego wierzchołki i każde dwa jego boki są sprzężone. Trójkąt taki nazywamy trójkątem biegunowym.- Trójkątów biegunowych jest oczywiście nieskończenie wiele. Dla otrzymania któregokolwiek z nich postępujemy jak następuje: Obieramy dowolnie punkt M ; znajdujemy jego biegunową m ,na prostej m obieramy dowolnie punkt N i znajdujemy jego biegunową n , która na mocy twierdzenia § 145 przejdzie przez punkt M , wreszcie łączymy punkty M i N prostą p ; będzie to na zasadzie § 145 biegunowa punktu P , w którym się przecinają proste m i n . Trójkąt MNP będzie trójkątem biegunowym. Oczywiście ten sam układ biegunowy, który określiliśmy zapomocą trójkąta biegunowego $A_1 A_2 A_3$, punktu B i jego biegunowej b , można określić zapomocą każdego innego trójkąta biegunowego MNP jakiegokolwiek punktu Q i jego biegunowej q.

§ 148. Układy biegunowe jednostajne i niejednostajne. Niech będzie układ biegunowy, wyznaczony przez trójkąt biegunowy $A_1 A_2 A_3$ oraz biegunową b punktu dowolnego B , przytem punkt B nie leży na żadnym z boków, a prosta b nie przechodzi przez żaden z wierzchołków trójkąta $A_1A_2A_3$. Trójkąt ten dzieli płaszczyznę na 4 obszary, z których jeden tylko bywa skończony i nazywa się wtedy polem trójkąta, a trzy są nieskończone /rys. 273 i 274/. Ponieważ punkt B nie może leżeć na żadnym z boków trójkąta, więc musi on należeć tylko do jednego z 4 obszarów płaszczyzny, ponieważ prosta b nie może przechodzić przez żaden wierzchołek, więc musi ona przenikać do trzech obszarów, dla czwartego pozostając obcą. Wobec tego względne położenie punktu B i prostej b może być tylko dwojakie: albo prosta b nie przenika do obszaru, w którym leży punkt B, t.j. nie przecina obwodu tego obszaru



Rys 273.

/rys.273/, albo prosta b przenika do obszaru,



Rys. 274.

w którym znajduje się punkt B t.j. przecina obwód tego obszaru /rys.274/. Pierwszy przypadek zachodzi np. wtedy, gdy punkt B znajduje się w obszarze IV, t.j. wewnątrz trójkąta biegunowego, a prosta b nie przenika do obszaru IV, t.j. nie przecina obwodu tego trójkąta /rys.273/.. Inwolucja biegunowa jest wtedy na wszystkich trzech bokach trójkąta $A_1 A_2 A_3$ eliptyczna, gdyż na każdym boku dwa punkty sprzężone przegradzają wierzchołki na nim leżące. Jeżeli wyznaczymy biegunową p dowolnego punktu P, to się pokaże, że ta biegunowa nie przenika do obszaru, w którym się znajduje punkt P . W samej rzeczy, zauważmy, że rzut któregokolwiek wierzchołka trójkąta biegunowego z punktu P na bok przeciwległy oraz punkt, w którym biegunowa p ten bok przecina, są sprzężone /gdyż prosta A,P jest biegunową punktu a,p /, a więc w danym razie są te punkty na każdym z boków przez wierzchołki przegrodzone; ponieważ zaś rzuty wierzchołków leżą zawsze na obwodzie obszaru, w którym leży środek rzutów P , więc prosta p tego obwodu nie przetnie, t.j. nie przeniknie do obszaru, zawierającego punkt P . Możemy więc twierdzić stanowczo, że w takim układzie biegunowym nie istnieją punkty rzeczywiste, któreby leżały na własnych biegunowych.

Układ biegunowy taki nazywamy jednostajnym, albowiem inwolucja biegunowa jest wtedy na każdej prostej i dokoła każdego punktu jednego rodzaju, mianowicie eliptyczna.

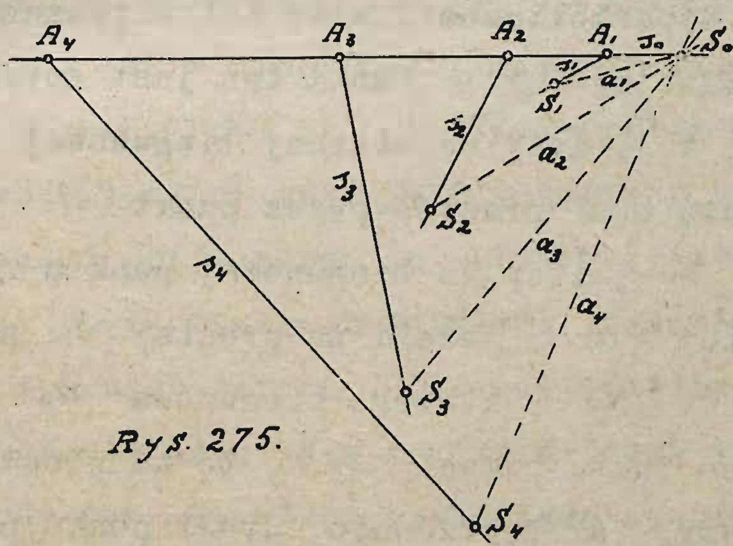
Drugi przypadek będzie miał miejsce wtedy np. gdy punkt B znajdzie się w obszarze IV, t.j. wewnątrz trójkąta biegunowego, a prosta b nie ominie tego obszaru, t.j. przetnie obwód trójkąta, przytem dwa jego boki zostaną przez nią przecięte wewnętrznie, a trzeci zewnętrznie /rys.274/. Jest oczywistem, że inwolucja biegunowa na tych dwóch bokach, które są przecięte wewnętrznie przez prostą b, będzie hiperboliczna. Na pierwszych dwóch bokach istnieją zatem po dwa rzeczywiste punkty podwójne, t.j. sprzężone same ze sobą, a więc leżące na własnych biegunowych. Natomiast na trzecim boku trójkąta biegunowego nie istnieją punkty rzeczywiste, leżące na własnych biegunowych. Układ biegunowy tak określony nazywamy niejednostajnym, albowiem inwolucja przezeń wyznaczona na różnych prostych i dokoła różnych punktów nie jest jednego rodzaju.

§ 149. Określenie stożkowych. Ogół punktów i prostych, rzeczywistych i urojonych, które w danym układzie biegunowym są sprzężone same ze sobą, nazywamy stożkową.

Punkty samosprzężone nazywamy punktami stożkowej tego układu; przechodzące przez nie własne ich biegunowe nazywamy stycznemi do stożkowej w tych punktach. Punkty stożkowej są to więc punkty podwójne inwolucji, którą dany układ biegunowy wyznacza na jakiejkolwiek prostej rzeczywistej; styczne do stożkowej są to proste podwójne inwolucji, którą ten układ wyznacza dokoła jakiegokolwiek punktu rzeczywistego. Na każdej prostej rzeczywistej leżą dwa punkty stożkowej: rzeczywiste, urojone, sprzężone lub zjednoczone; z każdego punktu rzeczywistego wychodzą dwie styczne: rzeczywiste, urojone, sprzężone lub zjednoczone. Innemi słowy, każda prosta "przecina" stożkową w dwóch punktach /rzeczywistych odrębnych, rzeczywistych zjednoczonych lub urojonych sprzężonych/; z każdego punktu można do stożkowej wyprowadzić dwie styczne /rzeczywiste odrębne, rzeczywiste zjednoczone lub urojone sprzężone/. Wyrażamy to krótko, mówiąc, że stożkowe są krzywemi drugiego rzędu i drugiej klasy.

§ 150. Stożkowe urojone i rzeczywiste. W układzie biegunowym jednostajnym wszystkie punkty stożkowej i wszystkie styczne do stożkowej są urojone, gdyż inwolucja biegunowa na każdej prostej rzeczywistej i dokoła każdego punktu rzeczywistego jest eliptyczna. Stożkowa takiego układu jest więc urojona; mówimy, że każda prosta rzeczywista "przecina" ją w dwóch punktach urojonych sprzężonych i że z każdego punktu rzeczywistego "wychodzą" do niej dwie styczne urojone sprzężone.

W układzie biegunowym niejednostajnym istnieją punkty i styczne stożkowej zarówno rzeczywiste, jak urojone; dowiedziemy, że punktów i stycznych rzeczywistych jest nieskończenie wiele. Niechaj będzie w danym układzie biegunowym punkt S_0, który leży na własnej swej biegunowej s_0 /rys:275/; może to być np. punkt podwójny hiperbolicznej inwolucji biegunowej na jednym z boków trójkąta biegunowego. Weźmy na prostej s_0 dowolny punkt A_1; jego biegunowa a_1 przechodzić musi przez punkt S_0; w samej rzeczy wiemy, że jeżeli biegunowa punktu S_0 /t.j. prosta s_0 / przechodzi przez



Rys. 275.

punkt A_1, to nawzajem biegunowa punktu A_1

/t.j. prosta a_1, przechodzi przez punkt S_0 / /§ 145/. Punkty A_1 i S_0 są zatem sprzężone, gdyż biegunowa jednego (A_1) przechodzi przez drugi (S_0). W ten sposób inwolucja biegunowa na prostej s_0 jest paraboliczna, wszystkie bowiem punkty prostej s_0 są sprzężone z jednym jedynym punktem S_0, który jest punktem podwójnym tej inwolucji, zresztą jedynym.

Inaczej się rzeczy mają z prostą a_1. Nie przechodzi ona przez własny biegun, inwolucja biegunowa nie jest więc na niej paraboliczna. Ponieważ zaś ta inwolucja ma jeden punkt podwójny S_0, musi ona być hiperboliczna i mieć zatem jeszcze drugi punkt podwójny S_1. Punkt ten jest sprzężony sam ze sobą, t.j. leży na własnej biegunowej s_1, która zresztą musi przejść przez punkt A_1, gdyż jej biegun S_1, leży na biegunowej punktu A_1, t.j. na prostej a_1. Jeżeli na prostej s_0 obierzemy inny punkt A_2, którego biegunowa a_2 przechodzi zatem znowu przez S_0, to na prostej a_2 znajdziemy, jak poprzednio, drugi punkt podwójny S_2, który jest sprzężony z samym sobą, t.j. leży na własnej swej biegunowej s_2, przechodzącej przez A_2. W ten sposób w danym niejednostajnym układzie biegunowym każdemu punktowi A_n prostej s_0 sprzężonej samej ze sobą podporządkowany być może punkt S_n sprzężony sam ze sobą, t.j. leżący na własnej biegunowej s_n. Położenie punktu S_n i prostej s_n zależy zatem wyłącznie od położenia punktu A_n na prostej s_0.

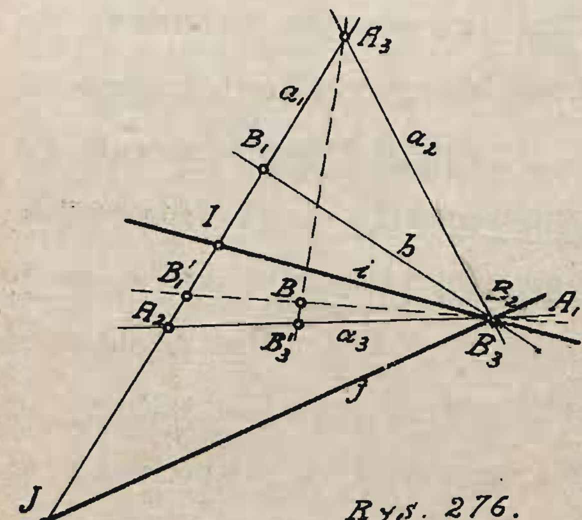
Jeżeli sobie tedy pomyślimy, że pewien punkt zmienny A poprzez punkty $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots$ porusza się w sposób ciągły po prostej s_0, "opisując" tę prostą, to punkt zmienny S poruszać się będzie poprzez punkty $S_1, S_2, S_3, S_4 \ldots$ również w sposób ciągły, "opisując" stożkową rzeczywistą. Jednocześnie zaś prosta zmienna s, poruszając się w sposób ciągły poprzez proste

po [illegible]

$s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ "powłóczyć" będzie tę samą stożkową. Stożkowa rzeczywista jest "miejscem geometrycznem" opisującego ją punktu i zarazem "obwiednią" powłóczącej ją prostej. Gdy punkt zmienny A, opisując prostą s_0, przeszedłszy przez jej punkt niewłaściwy, powróci z przeciwnej strony do punktu S_0, to i punkt zmienny S, opisując stożkową powróci do punktu S_0. Stożkowa rzeczywista jest przeto krzywą zamkniętą.

§ 151. Stożkowe zwyrodniałe. W § 145 określiliśmy układ biegunowy zapomocą trójkąta biegunowego $A_1 A_2 A_3$ i biegunowej b punktu jakiegokolwiek B z tem zastrzeżeniem, że punkt B nie leży na żadnym z boków, a prosta b nie przechodzi przez żaden z wierzchołków trójkąta $A_1 A_2 A_3$. Odrzućmy teraz te zastrzeżenia.

Przypuśćmy najpierw, że biegunowa b punktu jakiegokolwiek B przechodzi przez jeden z wierzchołków trójkąta biegunowego, np, przez A_1 /rys.276/. Jest oczywistem, że inwolucja biegunowa na bokach a_2 i a_3 będzie paraboliczna, na trzecim zaś boku albo hiperboliczna, albo eliptyczna. W każdym przypadku biegunowa dowolnego punktu M może być wyznaczona i przejdzie przez punkt A_1; natomiast biegun dowolnej prostej m jest nieoznaczony; może to być

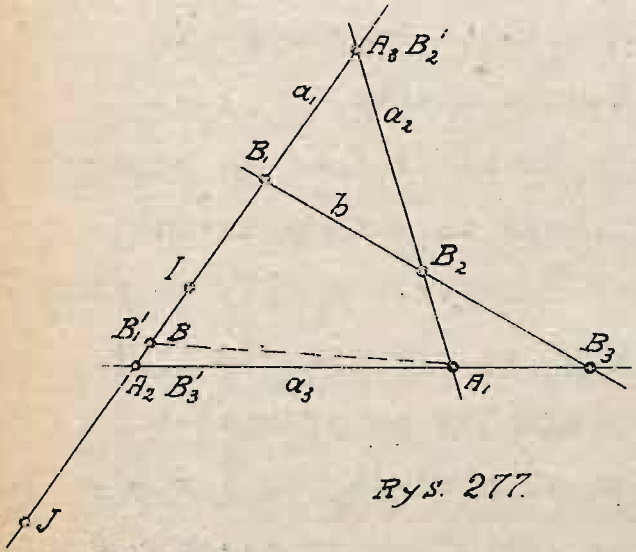


Rys. 276.

mianowicie dowolny punkt leżący na biegunowej punktu $a_1 m$. Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1, a więc i dokoła punktu A_1 jest hiperboliczna, to wszystkie punkty leżące na prostych podwójnych tej inwolucji są samosprzężone; te dwie proste i i j i wszystkie punkty na nich leżące stanowią zatem stożkową rzeczywistą /rys. 276/. Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1 i dokoła punktu A_1 jest eliptyczna, to i wtedy urojone punkty, leżące na urojonych prostych podwójnych tej inwolucji są samosprzężone; te dwie urojone proste samosprzężone oraz wszystkie na nich leżące punkty stanowią zatem stożkową urojoną, której jednym punktem rzeczywistym jest A_1.

Dwie proste rzeczywiste i dwie proste urojone sprzężone są krzywą drugiego rzędu /bo każda prosta rzeczywista przecina ją w dwóch punktach/ i klasy zerowej /bo z dowolnego punktu nie można do niej wyprowadzić żadnej stycznej/.

Przypuśćmy następnie, że biegun B jakiejkolwiek danej prostej b leży na jednym z boków trójkąta biegunowego, np. na a_1 /rys.277/; jest oczywistem, że inwolucja biegunowa na bokach a_2 i a_3 będzie paraboliczna, na trzecim zaś boku a_1 albo hiper-



Rys. 277.

boliczna, albo eliptyczna. W każdym przypadku biegun dowolnej prostej m może być wyznaczony i leży zawsze na a_1 ; natomiast biegunowa dowolnego punktu M jest nieoznaczona; może to być mianowicie dowolna prosta, przechodząca przez biegun prostej A_1M . Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1 jest hiperboliczna, to wszystkie proste, przechodzące przez punkty podwójne tej inwolucji są samosprzężone, te dwa punkty I i J oraz wszystkie proste przez nie przechodzące stanowią zatem stożkową rzeczywistą /rys.277/. Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1 jest eliptyczna, to i wtedy urojone proste, przechodzące przez urojone punkty podwójne tej inwolucji są samosprzężone; te dwa urojone punkty sprzężone i wszystkie przez nie przechodzące proste stanowią zatem stożkową urojoną, której jedyną styczną rzeczywistą jest α_1.

Dwa punkty rzeczywiste i dwa punkty urojone sprzężone są krzywą drugiej klasy /bo z każdego punktu rzeczywistego wychodzą do niej dwie styczne/ i rzędu zerowego /bo dowolna prosta jej nie przecina/.

§ 152. Proste zewnętrzne, sieczne i styczne. Prosta, na której układ biegunowy wyznacza inwolucję eliptyczną, nazywa się zewnętrzną względem stożkowej tego układu. Prosta zewnętrzna "przecina" zatem stożkową w dwóch punktach urojonych sprzężonych, mianowicie w punktach podwójnych inwolucji eliptycznej, wyznaczonej przez układ biegunowy na tej prostej. Względem stożkowych urojonych wszystkie proste są zewnętrzne.

Prosta, na której inwolucja biegunowa jest hiperboliczna, nazywa się sieczną stożkowej tego układu.

Każda sieczna "przecina" stożkową w dwóch punktach rzeczywistych, mianowicie w punktach podwójnych inwolucji biegunowej.

Prosta, na której inwolucja biegunowa jest paraboliczną, jest styczna do stożkowej /§ 149/. Na stycznej leży jeden jedyny punkt samosprzężony, który jest jej biegunem i nazywa się punktem zetknięcia tej stycznej ze stożkową. Wszystkie inne proste, przechodzące przez punkt zetknięcia, są sieczne, bo gdyby przezeń przechodziła prosta zewnętrzna, to nie mógłby na niej leżeć punkt rzeczywisty stożkowej.

Jeżeli inwolucję paraboliczną uważać będziemy za przypadek "graniczny" inwolucji hiperbolicznej, to możemy powiedzieć, że styczna ma ze stożkową dwa punkty wspólne, które zostały "zjednoczone" w punkcie zetknięcia. Styczną do stożkowej w danym jej punkcie S_o /rys.275/ możemy przeto uważać za granicę siecznej przez ten punkt przechodzącej, gdy drugi jej punkt przecięcia ze stożkową nieograniczenie zbliża się do punktu S_o.

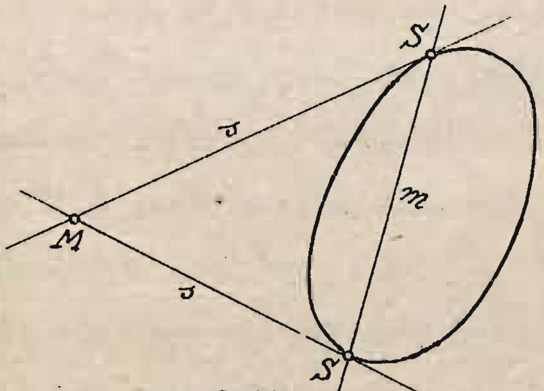
§ 153. Punkty wewnętrzne, punkty zewnętrzne i punkty leżące na stożkowej. Punkt, dokoła którego układ biegunowy wyznacza inwolucję eliptyczną, nazywa się wewnętrznym względem stożkowej tego układu. Z punktu wewnętrznego wychodzą do stożkowej dwie styczne urojone sprzężone, mianowicie proste podwójne inwolucji eliptycznej, wyznaczonej przez układ biegunowy dokoła tego punktu. Względem stożkowych urojonych wszystkie punkty są wewnętrzne.

Punkt, dokoła którego inwolucja biegunowa jest hiperboliczna, nazywa się <u>zewnętrznym</u> względem stożkowej tego układu. Z punktu zewnętrznego można do stożkowej wyprowadzić dwie styczne rzeczywiste; są to proste podwójne inwolucji hiperbolicznej, wyznaczonej dokoła tego punktu przez układ biegunowy.

O punkcie, dokoła którego inwolucja biegunowa jest paraboliczna, mówimy, że <u>leży na stożkowej.</u>- Przez taki punkt przechodzi jedna jedyna prosta samosprzężona, która jest jego biegunową i nazywa się <u>styczną do stożkowej w tym punkcie.</u> Wszystkie inne punkty leżące na stycznej są zewnętrzne, bo gdyby leżał na niej punkt wewnętrzny, to nie mogłaby przezeń przechodzić żadna styczna rzeczywista.

Jeżeli inwolucję paraboliczną uważać będziemy za przypadek "graniczny" inwolucji hiperbolicznej, to możemy powiedzieć, że z punktu leżącego na stożkowej wychodzą do niej dwie styczne "zjednoczone". Punkt zetknięcia stożkowej a daną prostą σ /rys.275/ możemy przeto uważać za granicę punktu zewnętrznego, na tej prostej leżącego, gdy druga styczna, z tego punktu do stożkowej wychodząca, nieograniczenie zbliża się do stycznej σ.

Jeżeli z punktu zewnętrznego M wyprowadzimy do stożkowej dwie styczne s i s , to prosta która łączy punkty zetknięcia S i S /rys.278/ jest biegunową punktu M . W samej rzeczy, biegunowa punktu przecięcia M dwóch prostych s i s łączy ich bieguny S i S /§ 145/. Nawzajem punkt przecięcia stycznych s i s jest biegunem prostej, łączącej ich punkty zetknięcia S i S , gdyż biegun prostej m jest przecięciem biegunowych dwóch punktów tej prostej.-



Rys. 278.

Punkty podwójne inwolucji biegunowej na prostej m są przeto punktami zetknięcia stożkowej ze stycznemi, wyprowadzonemi do niej z bieguna prostej m , i nawzajem, proste podwójne inwolucji biegunowej dokoła punktu M są stycznemi do stożkowej w punktach przecięcia jej przez biegunową punktu M.

Jeżeli stożkowa jest rzeczywista, <u>to biegunowa punktu zewnętrznego jest sieczną, a biegunowa punktu wewnętrznego jest prostą zewnętrzną,</u> co wynika stąd, że inwolucja biegunowa na prostej m jest w perspektywie z inwolucją biegunową dokoła bieguna prostej m /§ 146/. Ponieważ układ biegunowy jest wtedy niejednostajny, więc w każdym trójkącie biegunowym na dwóch bokach inwolucja biegunowa jest hiperboliczna, a na trzecim eliptyczna, t.j. dwa boki są siecznemi, a trzeci prostą zewnętrzną, skąd wynika, że <u>w każdym trójkącie biegunowym stożkowej rzeczywistej dwa wierzchołki są zewnętrzne, a trzeci jest wewnętrznym punktem tej stożkowej.</u>

<u>Każda prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny stożkowej rzeczywistej jest sieczną.</u>- W samej rzeczy, utwórzmy trójkąt biegunowy, którego bokami niechaj będą: prosta p, przechodząca przez dany punkt wewnętrzny M, biegunowa m tego punktu i biegunowa n punktu przecięcia N prostych p i m. Ponieważ biegunowa m punktu wewnętrznego M jest prostą zewnętrzną, więc oba pozostałe boki p i m muszą być siecznemi.

W podobny sposób można okazać, że każdy punkt, leżący na prostej zewnętrznej względem stożkowej rzeczywistej jest zewnętrzny.

Natomiast proste, wychodzące z punktu zewnętrznego mogą być sieczne, styczne lub zewnętrzne: punkty leżące na siecznej mogą być wewnętrzne, zewnętrzne lub leżeć na stożkowej.

Wszystkie proste, przechodzące przez punkt stożkowej, są siecznemi z wyjątkiem stycznej /§ 149/; wszystkie punkty stycznej, z wyjątkiem punktu zetknięcia, są zewnętrzne, bo ich biegunowe są siecznemi.

§ 154. Metoda biegunowych wzajemnych. Zasada dwoistości w geometrji płaskiej polega, jak wiadomo /§ 118/ na tem, że jeżeli prawdziwe jest pewne rzutowe twierdzenie geometrji płaskiej, to musi być prawdziwe pewne inne twierdzenie, otrzymane przez zamianę w tamtem twierdzeniu pojęcia: "punkt" pojęciem "prosta" i nawzajem pojęcia "prosta" pojęciem "punkt". Układ biegunowy płaski pozwala urzeczywistnić zasadę dwoistości, t.j. wykreślić figurę, która jest wzajemna względem danej figury płaskiej, a to przez zamianę każdego punktu na jego biegunową i każdej prostej na jej biegun, przez co każdy punkt i prosta do siebie należące zostaną zastąpione przez biegunową i biegun również do siebie należące. Dwie figury w ten sposób sobie wzajemnie podporządkowane nazywamy biegunowo wzajemnemi.- Istnieją przytem figury, np. trójkąty biegunowe, które przystają do własnych swych figur biegunowych. Do takich należy przedewszystkiem stożkowa danego układu biegunowego. Jeżeli przeto odnajdziemy jakąkolwiek rzutową własność stożkowej, to stosując biegunowość, która posłużyła do określenia tej stożkowej, otrzymamy pewną inną własność rzutową tej samej stożkowej. /W ten sposób zostało np. odkryte twierdzenie Brianchona/. Metoda biegunowych wzajemnych niema bezpośredniego zastosowania do miarowych własności figur /równość odcinków, kątów i pól, prostopadłość i równoległość prostych i wogóle te własności, które zależą od elementów niewłaściwych i od inwolucji prostokątnej/.

§ 155. Trzy rodzaje stożkowych.- Stożkowa nazywa się hiperbolą, elipsą lub parabolą, zależnie od tego, czy inwolucja biegunowa na prostej niewłaściwej jest hiperboliczna, eliptyczna lub paraboliczna, t.j. zależnie od tego, czy prosta niewłaściwa jest sieczną, prostą zewnętrzną lub styczną. Wszystkie stożkowe urojone /a więc i dwie proste urojone sprzężone/ są elipsami; dwie proste rzeczywiste należy zaliczyć do rodzaju "hiperbola", jeżeli te proste przecinają się w punkcie właściwym; do rodzaju "parabola", jeżeli są równoległe lub zjednoczone. Dla dwóch punktów rzeczywistych lub urojonych sprzężonych, które są krzywą rzędu zerowego, w tej klasyfikacji niema miejsca, albowiem prosta niewłaściwa tej stożkowej nie przecina.

§ 156. Środek, średnica, asymptoty. Biegun prostej niewłaściwej nazywa się środkiem stożkowej, a biegunowa każdego punktu niewłaściwego nazywa się średnicą. Wszystkie średnice stożkowej przechodzą przez jej środek, albowiem bieguny średnic leżą na biegunowej środka, t.j. na prostej niewłaściwej.

Środek stożkowej jest punktem zewnętrznym w hiperboli /bo jego biegunowa jest sieczną/, wewnętrznym w elipsie /bo jego biegunowa jest prostą zewnętrzną/. W paraboli środek jest punktem zetknięcia stożkowej z prostą niewłaściwą /bo jego biegunowa, t.j. prosta niewłaściwa jest styczną do stożkowej/. Środek więc jest punktem właściwym w hiperboli i elipsie, - niewłaściwym w paraboli. Wszystkie średnice paraboli są równoległe.

Inwolucja średnic sprzężonych, t.j. inwolucja biegunowa dokoła środka jęst w perspektywie z inwolucją biegunową na prostej niewłaściwej /§ 146/ a więc jest ona hiperboliczną w hiperboli, eliptyczną w elipsie. Proste podwójne inwolucji średnic sprzężonych nazywają się asymptotami; są one rzeczywiste, odrębne i właściwe w hiperboli, rzeczywiste, zjednoczone i niewłaściwe w paraboli, urojone sprzężone w elipsie. Z określenia tego wynika, że asymptoty są to styczne do stożkowej, wyprowadzone z jej środka; punkty zetknięcia są to punkty przecięcia biegunowej środka, t.j. prostej niewłaściwej, ze stożkową /§ 153/. Moglibyśmy więc określić asymptoty, jako styczne do stożkowej w punktach, w których stożkowa ta jest przecięta przez prostą niewłaściwą. Punkty te nazywamy kierunkami asymptotycznemi.

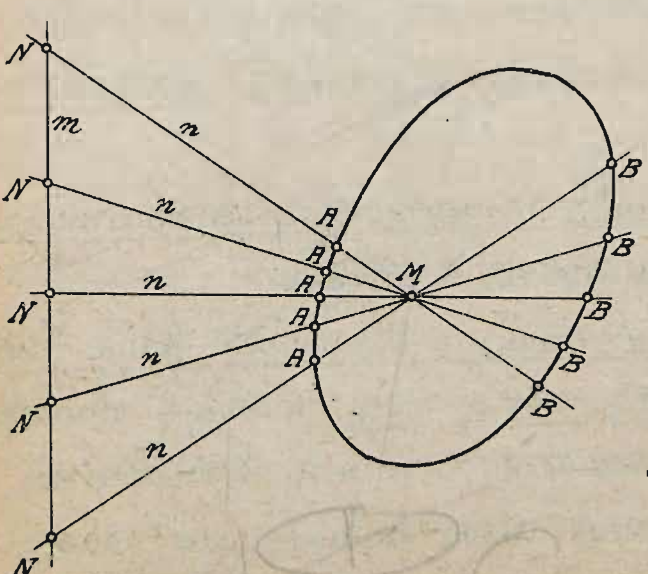
W hiperboli asymptoty przegradzają harmonicznie każdą parę średnic sprzężonych /§ 138/.

Z dwóch średnic sprzężonych hiperboli jedna jest sieczną, a druga prostą zewnętrzną. W samej rzeczy, dwie średnice sprzężone wraz z prostą niewłaściwą tworzą trójkąt biegunowy; otóż wiadomo, że jeden z boków każdego trójkąta biegunowego zawsze jest prostą zewnętrzną, a dwa są siecznemi /§ 152/. Ponieważ prosta niewłaściwa jest względem hiperboli sieczną, więc z dwóch pozostałych boków jeden musi być sieczną, a drugi prostą zewnętrzną.

Ponieważ środek elipsy jest punktem wewnętrznym, więc wszystkie średnice elipsy są siecznemi.

Odcinek siecznej, zawarty między punktami przecięcia jej ze stożkową, nazywamy cięciwą stożkową. Jeżeli nie zachodzi obawa dwuznaczności, to cięciwę przechodzącą przez środek, t.j. leżącą na średnicy, również nazywamy średnicą. Lepiej wszakże nazywać ją cięciwą środkową.

§ 157. Własności harmoniczne bieguna i biegunowej. Niechaj będzie punkt M, nie leżący na stożkowej, i jego biegunowa m /rys.279/. Przez punkt M poprowadźmy jakąkolwiek sieczną n; inwolucja biegunowa na tej prostej jest hiperboliczna /§ 152/, a punkty podwójne tej inwolucji A i B są



Rys. 279.

to punkty przecięcia siecznej n ze stożkową; otóż wiemy /§ 138/, że punkty podwójne inwolucji hiperbolicznej przegradzają harmonicznie każdą parę punktów sprzężonych. Jedną z takich par stanowią punkty M i N, z których pierwszy jest biegunem, a drugi leży na jego biegunowej. Stąd twierdzenie:

Biegunowa jest miejscem geometrycznem punktów sprzężonych harmonicznie z biegunem względem punktów w których sieczne wychodzące z bieguna przecinają stożkową.

/Stosująo do tego twierdzenia zasadę dwoistości znajdziemy twierdzenie wzajemne:

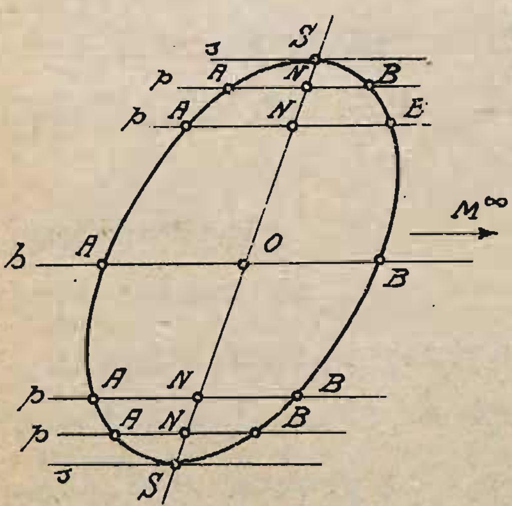
Biegun jest punktem spotkania prostych sprzężonych harmonicznie z biegunową względem stycznych, wyprowadzonych do stożkowej z punktów zewnętrznych biegunowej/.

Jeżeli więc z danego punktu M poprowadzimy dwie jakiekolwiek sieczne n, n i na każdej z nich wyznaczymy punkt N, sprzężony harmonicznie z punktem M względem punktów A i B, w których ta sieczna przecina stożkową, to prosta NN będzie biegunową m punktu M. Jeżeli punkt M jest zewnętrzny, to jego biegunowa m przecina stożkową w punktach S, S, które są punktami zetknięcia stycznych s, s, wyprowadzonych do stożkowej z bieguna M /rys.278/.

Jeżeli punkt M jest punktem niewłaściwym /rys,280/, to jego biegunowa jest średnicą, sieczne wychodzące z punktu M^{∞} są wówczas równoległe; punkty N, N sprzężone harmonicznie z punktem N^{∞} są środkami cięciw AB, AB, ... A więc: Środki cięciw równoległych leżą na średnicy.

Cięciwy te są sprzężone ze średnicą, bo przechodzą przez biegun średnicy, który jest kierunkiem tych cięciw.

Każda średnica dzieli cięciwy z nią sprzężone na połowy.



Rys. 280.

Stąd wynika, że każda średnica jest dla stożkowej osią symetrji /wogóle ukośnej/.

Wśród cięciw sprzężonych z daną średnicą znajduje się także średnica. Ponieważ każde dwie średnice przecinają się w środku stożkowej, więc

Środek stożkowej dzieli każdą cięciwę środkową na połowy. Jest to zatem środek symetrji stożkowej.

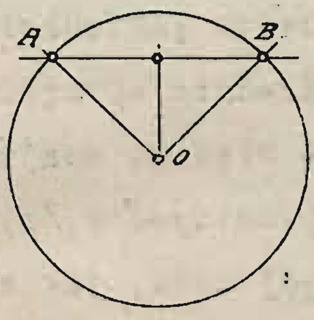
Dwie średnice sprzężone mają tę własność, że każda z nich dzieli cięciwy równoległe do drugiej na połowy.

Styczne w końcach średnicy są równoległe do cięciw z nią sprzężonych. Opierając się na tej ostatniej własności, wyznaczyć można punkt zetknięcia na stycznej, poprowadzonej do wykreślonej stożkowej. Jest to punkt, w którym tę styczną przecina prosta, łącząca środki dwóch jakichkolwiek cięciw do stycznej równoległych.

§ 158. Osie i wierzchołki. Średnica prostopadła do prostych z nią sprzężonych nazywa się osią; jest to więc dla stożkowej oś symetrji prostokątnej. W elipsie i hiperboli osią jest każda z dwóch średnio sprzężonych wzajemnie prostopadłych; hiperbola ma zawsze dwie osie; elipsa ma dwie, albo nieskończenie wiele, gdyż /§ 145/ w inwolucji eliptycznej dokoła punktu albo wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, albo tylko jedna. Osie elipsy i hiperboli mogą być wykreślone, jeżeli dane są dwie pary średnio sprzężonych. W szczególności osie hiperboli są dwusiecznemi kątów pomiędzy asymptotami.

Punkty, w których oś przecina stożkową, nazywamy jej wierzchołkami. Gdy nie zachodzi obawa dwuznaczności, to odcinek osi, zawarty pomiędzy rzeczywistemi wierzchołkami nazywamy również osią, lepiej wszakże nazywać ten odcinek cięciwą osiową. W elipsie każda średnica, a więc i każda oś, przecina stożkową w punktach rzeczywistych; elipsa posiada zatem 4 wierzchołki rzeczywiste /albo nieskończenie wiele/; większa z cięciw osiowych elipsy nazywa się wielką, mniejsza małą osią elipsy. W hiperboli jedna tylko oś, zwana poprzeczną, przecina stożkową w punktach rzeczywistych, hiperbola posiada zatem 2 wierzchołki rzeczywiste i 2 urojone sprzężone. Parabola posiada jedną tylko oś właściwą i jeden właściwy wierzchołek; za drugą oś należy uważać prostą niewłaściwą, która jest średnicą sprzężoną z osią właściwą.

§ 159. Koło jako stożkowa. Okażemy teraz, że elipsa, w której inwolucja biegunowa dokoła środka jest prostokątna, jest kołem. Niech A i B będą dwoma punktami takiej elipsy. Średnica prostopadła do cięciwy AB jest z nią sprzężona, a więc ją dzieli na połowy. Trójkąt OAB /rys.281/ jest równoramienny, gdyż jego wysokość jest zarazem środkową, skąd wynika $OA = OB$. Wszystkie punkty tej elipsy są zatem jednakowo odległe od środka; elipsa ta jest więc kołem. Każde dwie średnice wzajemnie prostopadłe są sprzężone; każda średnica koła jest jego osią, każdy punkt koła jest jego wierzchołkiem.

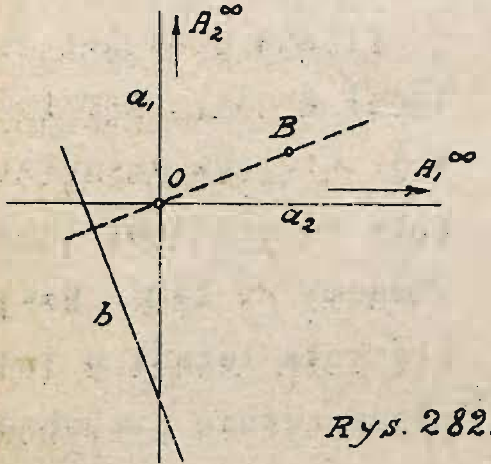


Rys. 281.

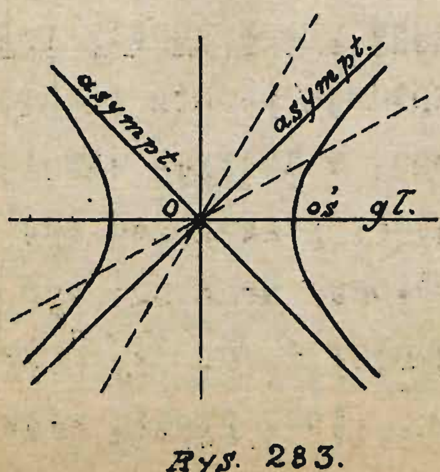
Proste podwójne inwolucji średnio sprzężonych t.j. urojone asymptoty koła są prostemi jednorodnemi /§ 140/. Wszystkie koła leżące w jednej płaszczyźnie przechodzą przez punkty kołowe tej płaszczyzny /§ 140/; koło może być określone rzutowo, jako stożkowa przechodząca przez punkty kołowe.

Pod określenie "kół" podpadają przeto również te wszystkie stożkowe urojone, w których inwolucja dokoła środka jest prostokątna, przechodzą one bowiem również przez punkty kołowe. Mogą one być określone np. przez trójkąt biegunowy $O A_1^\infty A_2^\infty$ /rys.282/, którego jeden bok $A_1^\infty A_2^\infty$ jest prostą niewłaściwą, a dwa inne są wzajemnie prostopadłe, oraz przez biegun B i biegunową b prostopadłą do OB, lecz nie przenikającą do ćwiartki, w której leży punkt B. Proste jednorodne należy uważać za koło zwyrodniałe.

§ 160. Hiperbola równoboczna. Hiperbola, w której inwolucja średnic sprzężonych jest symetryczna /§ 148/ nazywa się równoboczną; jej asymptoty są dwusiecznemi kątów dwóch jakichkolwiek średnic sprzężonych, a więc są wzajemnie prostopadłe /rys.283/; jej osie, jak w każdej zresztą hiperboli, są dwusiecznemi kątów między asmptotami. - Hiperbola równoboczna jest stożkową z wielu względów analogiczną do koła.



Rys. 282.

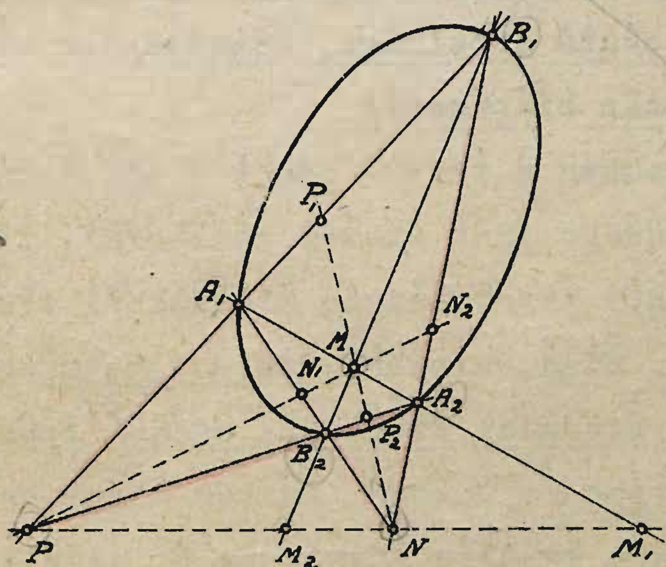


Rys. 283.

§ 161. Czworokąt zupełny wpisany w stożkową i czworobok zupełny

opisany na stożkowej. Niechaj wierzchołki czworokąta zupełnego $A_1 B_1 A_2 B_2$ leżą na stożkowej /rys.284/. Połączmy punkty przekątne M, N i P. Powiadam, że trójkąt MNP jest biegunowy.

W samej rzeczy, każdy bok tego trójkąta jest biegunową przeciwległego wierzchołka. Okażemy np. że bok NP jest biegunową wierzchołka M. W tym celu wystarczy dowieść, że punkt M_1 jest sprzężony harmonicznie z punktem M względem punktów A_1 i A_2, a punkt M_2 względem B_1 i B_2. Zauważmy



Rys. 284.

czworobok zupełny o bokach A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2

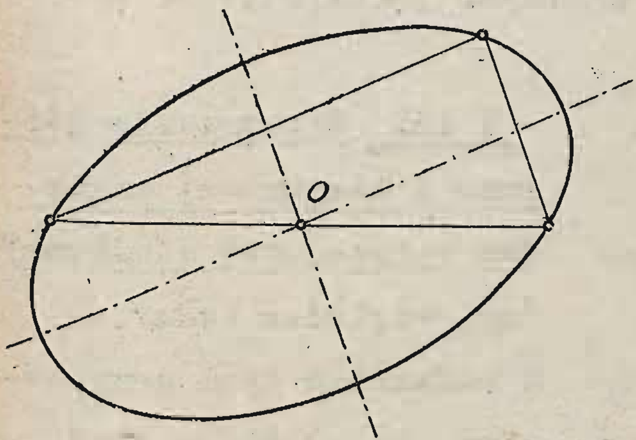
i B_2A_1, którego przekątnemi są A_1A_2, B_1B_2 i NP; w czworoboku tym punkty przecięcia przekątnej A_1A_2 z przekątnemi B_1B_2 i NP są sprzężone harmonicznie względem wierzchołków, leżących na A_1A_2 /§ 124/, t.j. punkty M i M_1 przegradzają harmonicznie punkty A_1 i A_2, podobnież punkty przecięcia przekątnej B_1B_2 z przekątnemi A_1A_2 i NP są sprzężone harmonicznie względem wierzchołków, leżących na B_1B_2 t.j. punkty M i M_2 przegradzają harmonicznie punkty B_1 i B_2 c.b.d.d.

Tak więc mamy twierdzenie:

Trójkąt, którego wierzchołkami są punkty przekątne czworokąta zupełnego, wpisanego w stożkową, jest trójkątem biegunowym.

Jeżeli jednym z trzech punktów przekątnych czworokąta wpisanego jest środek stożkowej, to dwa pozostałe punkty przekątne są kierunkami średnio sprzężonych. Stąd wniosek: Ramiona kąta wpisanego opartego na średnicy stożkowej mają kierunki średnio sprzężonych /rys.285/. Na tem można oprzeć wykreślenie pary średnic sprzężonych, jeżeli dana jest np. jedna oś i jeden punkt stożkowej.

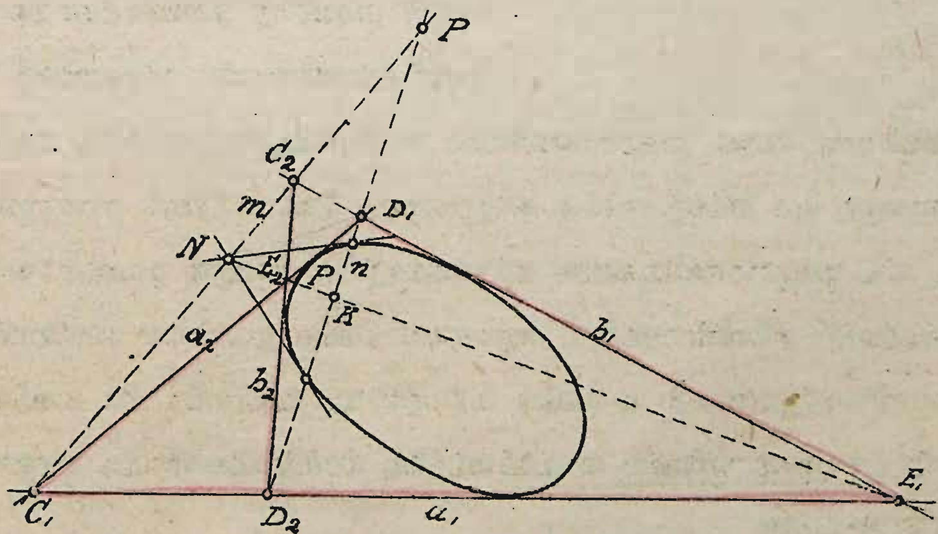
Zupełnie tak samo moglibyśmy na zasadzie dwoistości dowieść twierdzenia wzajemnego, które brzmi:



Rys. 285.

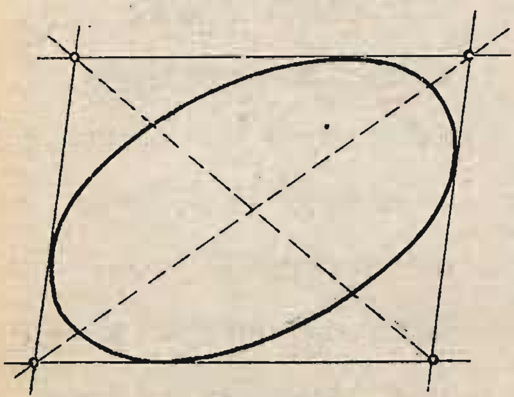
Trójkąt, którego bokami są przekątne czworoboku zupełnego, opisanego na stożkowej, jest trójkątem biegunowym /rys.286/.

Jeżeli z trzech przekątnych czworoboku opisanego jedna jest prostą niewłaś-



Rys. 286.

ciwą, t.j. jeżeli czworobok opisany jest równoległobokiem, to dwie pozostałe przekątne są średnicami sprzężonemi /rys.287/. Na tem polega sposób wykreślenia pary średnic sprzężonych jakiejkolwiek wykreślonej stożkowej.

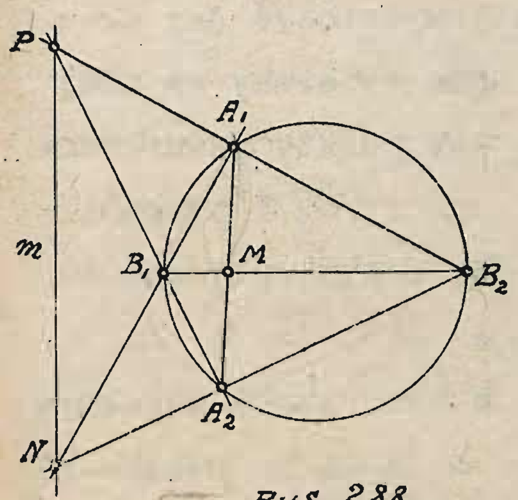


Rys. 287.

§ 162. Wyznaczenie bieguna i biegunowej względem wykreślonej stożkowej /np. względem koła/:-

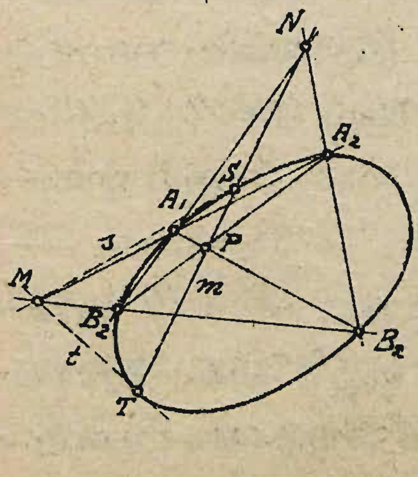
W zadaniach tych przypuścimy, że stożkowa jest wykreślona, t.j. że możemy z należytą dokładnością bezpośrednio wyznaczyć punkty przecięcia jakiejkolwiek siecznej ze stożkową oraz poprowadzić z każdego punktu zewnętrznego do niej obie styczne. Natomiast przypuszczamy, iż poprowadzenie stycznej w danym punkcie wykreślonej stożkowej i wyznaczenie punktu zetknięcia danej stycznej z taką stożkową należą do zadań, których bezpośrednio z należytą dokładnością rozwiązać nie umiemy.

Niech będzie punkt M /rys.288/, nie leżący na stożkowej; aby wykreślić jego biegunową, prowadzimy z niego dwie jakiekolwiek sieczne, które niechaj przecinają stożkową w punktach A_1 i A_2, B_1 i B_2.



Rys. 288.

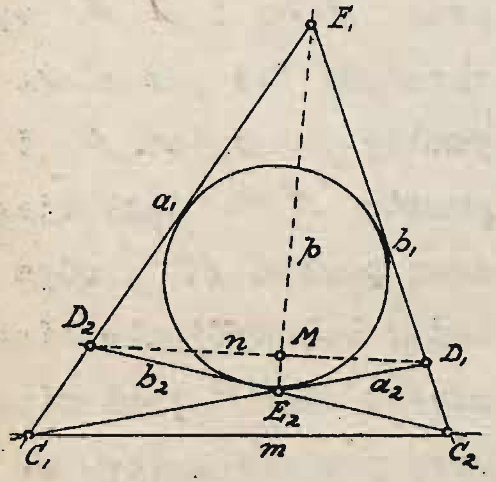
W czworokącie zupełnym $A_1B_1A_2B_2$ punkt M jest jednym z punktów przekątnych; łącząc A_1B_1 i A_2B_2 oraz A_1B_2 i A_2B_1 wyznaczymy dwa pozostałe punkty przekątne N i P, prosta NP jest biegunową punktu M, gdyż każdy bok trójkąta biegunowego MNP jest biegunową przeciwległego mu wierzchołka. Jeżeli punkt M jest zewnętrzny /rys. 289/, to punkty zetknięcia stycznych s i t z niego wyprowadzonych są punktami, w których biegunowa punktu M przecina stożkową /§ 152/. Wykreślenie powyższe daje przeto w tym przypadku rozwiązanie zadania: <u>Wyznaczyć na danej stycznej s do wykreślonej stożkowej jej punkt</u>



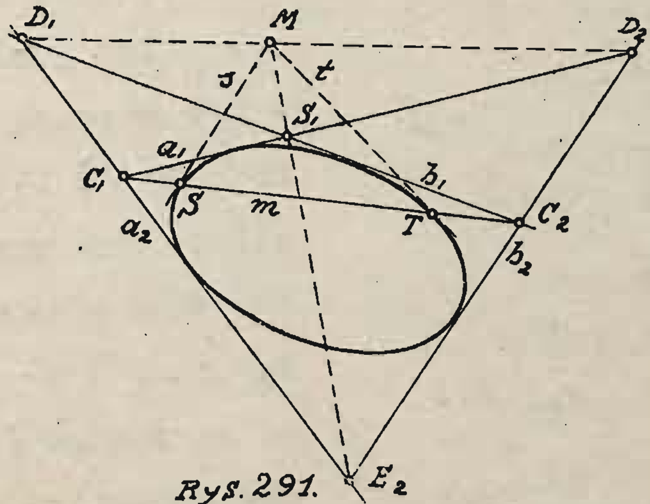
Rys. 289.

zetknięcia z tą stożkową.

Niech będzie prosta m /rys.290/, która nie jest styczną do stożkowej; aby wyznaczyć jej biegun obieramy na niej dwa punkty zewnętrzne C_1 i C_2 i prowadzimy z nich styczne a_1 i a_2, b_1 i b_2. W czworoboku zupełnym $a_1 b_1 a_2 b_2$ prosta m jest jedną z przekątnych: łącząc wierzchołki D_1 i D_2, E_1 i E_2 otrzymamy dwie pozostałe przekątne n i p; ich punkt przecięcia M jest biegunem prostej m, gdyż każdy wierzchołek trójkąta biegunowego o bokach m, n i p jest biegunem przeciwległego mu boku. Jeżeli prosta m jest sieczną /rys.291/, to styczne w punktach przecięcia jej ze stożkową S i T przecinają się w biegunie prostej m /§ 152/. Wykreślenie powyższe daje przeto w tym przypadku rozwiązanie zadania: W danym punkcie S wykreślonej stożkowej wykreślić do niej styczną.



Rys. 290.



Rys. 291.

§ 163. Twierdzenie. Stożkowa jest wyznaczona przez 4 swoje punkty i styczną w jednym z nich, albo przez 4 swoje styczne i punkt zetknięcia na jednej z nich.

Niechaj będą 4 punkty A, B, C i D /rys. 292/, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej i prosta a, przechodząca przez punkt A. Trójkąt przekątny MNP czworokąta zupełnego $ABCD$ wraz z punktem A i styczną a wyznacza układ biegunowy, dla którego ten trójkąt jest trójkątem biegunowym, a prosta a jest bie-