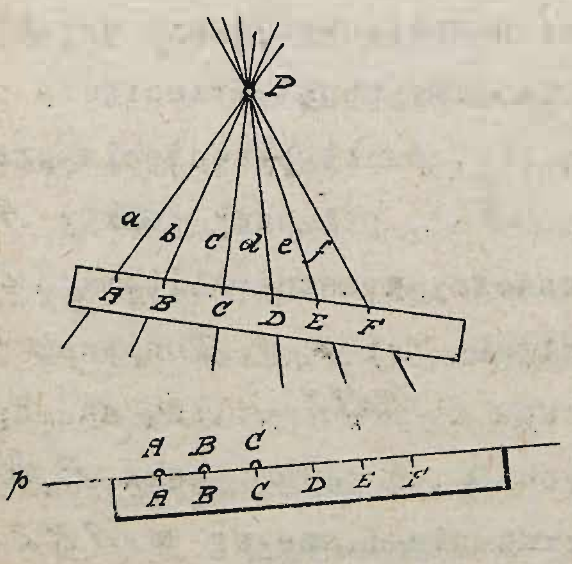
§ 129. Wyznaczenie elementów odpowiednich dwóch rzutowych szeregów, albo pęków, albo szeregu i pęku.

I sposób. a/ Niechaj będzie dowolna ilość prostych $a, b, c, d, e, f \ldots$ wychodzących z punktu P, a na prostej p niechaj będą 3 punkty A, B i C, które mają odpowiadać prostym a, b i c w rzutowości $P(abc\ldots) \overline{\wedge} p(ABC\ldots)$ / rys.244/.

Wziąwszy skrawek papieru, którego jedna krawędź jest prosta, i przyłożywszy go tą krawędzią do prostej p odetnijmy na skrawku punkty A, B i C, poczem odjąwszy go od prostej p, szukajmy takiego położenia tego skrawka, aby proste a, b i c przechodziły odpowiednio przez punkty A, B i C. Gdy to zostanie osiągnięte, odetnijmy



Rys. 244.

na skrawku punkty $D, E, F \ldots$, w których proste $d, e, f \ldots$ przecinają jego krawędź, poczem przyłożywszy skrawek znowu do prostej p w ten sposób, aby punkty A, B i C przystały do zrobionych poprzednio znaków, przenieśmy odcięte na skrawku punkty $D, E, F \ldots$ na prostą p.

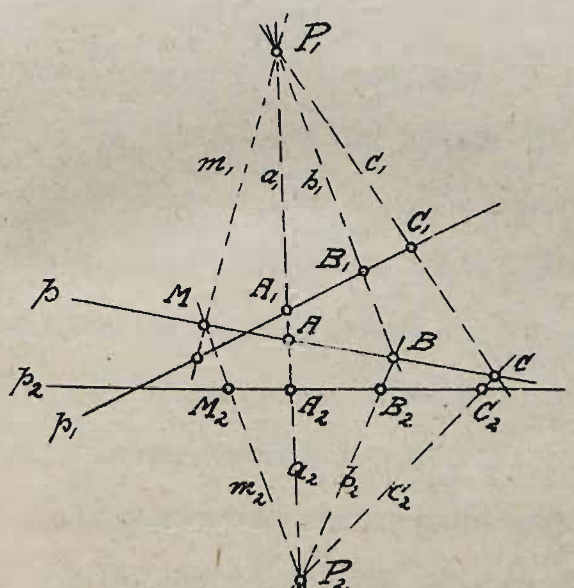
b/ W taki sam sposób postąpić możemy, gdy mamy wyznaczyć proste $d, e, f \ldots$, odpowiadające punktom $D, E, F \ldots$ w rzutowości $p(ABC\ldots) \barwedge P(abc\ldots)$. Przyłożywszy skrawek do prostej p odcinamy na nim punkty $A, B, C, D, E, F \ldots$ poczem szukamy takiego położenia skrawka, aby punkty A, B, C, leżały odpowiednio na prostych a, b i c. Gdy to zostanie osiągnięte, przenosimy zaznaczone na skrawku punkty $D, E, F \ldots$ na papier i łączymy je z punktem P.

c/ Niechaj na prostej p_1 dana będzie dowolna ilość punktów $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 \ldots$. a na prostej p_2 niechaj będą dane 3 punkty: A_2, B_2 i C_2, które mają odpowiadać punktom A_1, B_1 i C_1 w rzutowości $p_1(A_1B_1C_1\ldots) \barwedge p_2(A_2B_2C_2\ldots)$. Obrawszy jakikolwiek punkt P_1, nie leżący na prostej, połączmy go ze wszystkiemi punktami $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 \ldots$. Weźmy znowu skrawek papieru, przyłóżmy jego krawędź do prostej p_2, odetnijmy na krawędzi punkty A_2, B_2 i C_2, i szukajmy takiego położenia skrawka, aby odcięte na jego krawędzi punkty leżały odpowiednio na prostych P_1A_1, P_1B_1 i P_1C_1, wtedy proste P_1D_1, P_1E_1, P_1F_1... wyznaczą na tej krawędzi punkty D_2, E_2, F_2, ... , które pozostaje tylko przenieść na prostą p_2 .

d/ Niechaj z punktu P_1 wychodzi dowolna ilość prostych a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, ... , a z punktu P_2 niechaj wychodzą 3 proste a_2, b_2 i c_2, które mają odpowiadać prostym a_1, b_1 i c_1 w rzutowości: $P_1(a_1 b_1 c_1 ...) \overline{\wedge} P_2(a_2 b_2 c_2 ...)$. Ułożywszy w dowolny sposób skrawek papieru, odetnijmy na jego krawędzi punkty A, B, C, D, E, F.... , w których proste a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1... przecinają tę krawędź, poczem umieśćmy ten skrawek w taki sposób, aby proste a_2, b_2 i c_2 przechodziły przez punkty A, B i C ; wtedy proste, łączące punkt P_2 z pozostałemi punktami D, E, F... będą odpowiadały w danej rzutowości prostym d_1, e_1, f_1... pęku $P_1(a_1 b_1 c_1 ...)$

<u>II sposób.</u> Ze stanowiska praktyki kreślarskiej sposoby powyższe są bardzo użyteczne, gdyż przesuwając w tę lub ową stronę skrawek papieru z odciętemi na jego krawędzi punktami A, B i C, możemy po kilku próbach z <u>dostatecznem przybliżeniem</u> umieścić te punkty odpowiednio na prostych a_1, b_1

i C_1. Ze stanowiska teorji rozwiązania te nie mają wartości, gdyż nie wskazują tutaj w jaki sposób można sprawić, aby 3 dowolne punkty danej prostej upadły dokładnie na 3 dane proste, wychodzące z jednego punktu. Wskażemy przeto inne wprawdzie mniej praktyczne, ale za to ścisłe sposoby rozwiązania tych samych zagadnień, przytem okaże się, że do ich zastosowania wystarczy użycie samego tylko linjału /konstrukcje linjowe, zagadnienia I stopnia/.



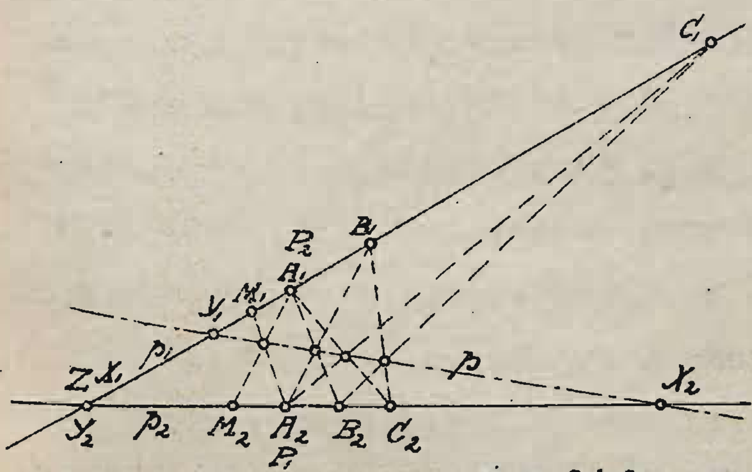
Rys. 245.

a/ Niechaj będą /rys.245/ dwa szeregi o podstawach p_1 i p_2, których rzutowość jest dana zapomocą 3 par punktów odpowiednich A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2. Połączmy które-kolwiek dwa punkty odpowiednie np. A_1 i A_2 i na prostej A_1A_2 obieramy dowolnie dwa punkty P_1 i P_2. Z punktu P_1 rzućmy szereg $p_1(A_1B_1C_1\ldots)$, a z punktu P_2 szereg $p_2(A_2B_2C_2\ldots)$

i uważajmy w pękach o wierzchołkach P_1 i P_2 za odpowiednie te proste, które rzucają odpowiednie punkty szeregów p_1 i p_2. Pęki P_1 i P_2 są rzutowe, gdyż są one perspektywiczne z rzutowemi szeregami $p_1(A_1 B_1 C_1 \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2 B_2 C_2 \dots)$ są one nadto perspektywiczne, gdyż prosta łącząca wierzchołki $P_1 P_2$ odpowiada samej sobie $(a_1 \equiv a_2)$. Odpowiednie proste pęków P_1 i P_2 muszą się więc przecinać na jednej prostej /osi perspektywy tych pęków/; będzie ona wyznaczona przez dwa jakiekolwiek swoje punkty np. przez $B \equiv b_1 b_2$ i $C = c_1 c_2$. Proste każdej innej pary przecinać się muszą na prostej $BC \equiv p$. Aby więc wyznaczyć punkt M_2, odpowiadający punktowi M_1, łączymy $P_1 M_1 \equiv m_1$, wyznaczamy punkt $p\, m_1 \equiv M$, łączymy $P_2 M \equiv m_2$ i wyznaczamy punkt $p_2\, m_2 \equiv M_2$.

Ponieważ punkty P_1 i P_2 są dowolnemi punktami prostej $A_1 A_2$, przeto dogodnie będzie wziąć punkt P_1 w punkcie A_2, a punkt P_2 w punkcie A_1 /rys. 246/, osią perspektywy pęków P_1 i P_2 będzie prosta p, łącząca punkt C przecięcia prostych $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$ z punktem B przecięcia prostych $A_1 C_2$ i $A_2 C_1$; dwa punkty M_1 i M_2 są odpowiednie w szeregach $p_1(A_1 B_1 C_1 \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2 B_2 C_2 \dots)$

jeżeli proste $A_1 M_2$ i $A_2 M_1$ przecinają się w punkcie którymkolwiek M osi p .



Rys. 246.

Jeżeli szeregi rzutowe p_1 i p_2 nie są perspektywiczne, to punkt przecięcia Z podstaw p_1 i p_2 nie odpowiada samemu sobie. Jeżeli ten punkt zaliczymy do szeregu p_1 , oznaczając go literą X_1 , to punkt odpowiedni X_2 znajdziemy stosując regułę ogólną: trzeba na prostej p_2 wyznaczyć taki punkt X_2, aby proste $A_2 X_1$ i $A_1 X_2$ przecinały się na prostej p_2 . Ale $A_2 X_1 \equiv p_2$; X_2 musi być przeto takim punktem prostej p_2 , aby prosta $A_1 X_2$ przecinała prostą p_2 na prostej p , t.j. $X_2 \equiv p\, p_2$. Jeżeli punkt Z zaliczymy do szeregu p_2 , oznaczając go literą Y_2 , to punkt odpowiedni Y_1 będzie leżał w przecięciu prostych p i p_1 , tak że:

<u>punktowi przecięcia podstaw dwóch szeregów rzutowych</u>

odpowiadają w obu szeregach punkty, w których oś perspektywy przecina podstawy, i nawzajem: oś perspektywy dwóch szeregów rzutowych p_1 i p_2 łączy punkty X_2 i Y_1, odpowiadające w obu szeregach punktowi $X_1 \equiv Y_2$ przecięcia podstaw $p_1 p_2$.

Ponieważ każdemu punktowi jednego z dwóch szeregów rzutowych, np. X_1 albo Y_2 odpowiada w drugim jeden jedyny punkt X_2, względnie Y_1, więc oś perspektywy nie zależy od tego, czy wierzchołki pęków P_1 i P_2 obierzemy w punktach A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2, M_1 i M_2 ... . Stąd wynika:

Jeżeli wierzchołki pierwszy, trzeci i piąty sześciokąta $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ leżą na prostej p_1, a wierzchołki: drugi, czwarty i szósty na prostej p_2, to punkty A, B i C przecięcia boków "przeciwległych" sześciokąta $B_1 C_2$ i $B_2 C_1$, $A_1 C_2$ i $A_2 C_1$, $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$, leżą na jednej prostej p.

Jest to zresztą przypadek szczególny twierdzenia Pascala o sześciokącie wpisanym w stożkową, o którym niebawem będzie mowa.

Rzutowość dwóch szeregów na danych podstawach p_1 i p_2 jest wyznaczona przez oś perspektywy p

oraz jedną parę A_1 i A_2 punktów odpowiednich, gdyż oś perspektywy jest równoznaczna z dwiema parami punktów odpowiednich: X_1 i X_2, Y_1 i Y_2.

Jeżeli punkty niewłaściwe prostych p_1 i p_2 nie odpowiadają sobie wzajemnie, to oznaczmy literą R_1 punkt odpowiadający w szeregu p_1 punktowi niewłaściwemu R_2^{∞} szeregu p_2, a literą Q_2 punkt odpowiadający w szeregu p_2 punktowi niewłaściwemu Q_1^{∞} szeregu p_1. Punkty R_1 i Q_2 nazywają się punktami wzajemnemi szeregów p_1 i p_2. Ponieważ dwustosunki $(A_1 B_1 Q_1^{\infty} R_1)$ i $(A_2 B_2 Q_2 R_2^{\infty})$ są równe, więc $\frac{B_1 R_1}{A_1 R_1} = \frac{A_2 Q_2}{B_2 Q_2}$ /§ 119/, stąd wynika $A_1 R_1 \cdot A_2 Q_2 = B_1 R_1 \cdot B_2 Q_2$; czyli

Iloczyn odległości dwóch punktów odpowiednich A_1 i A_2 od punktów wzajemnych R_1 i Q_2 jest liczbą stałą.

Jeżeli punkty niewłaściwe obu szeregów rzutowych odpowiadają sobie wzajemnie, to gdy oznaczymy literą Q_1^{∞} punkt niewłaściwy prostej p_1, wypadnie oznaczyć literą Q_2^{∞} punkt niewłaściwy prostej p_2. Niechaj A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 będą trzema parami punktów odpowiednich tych szeregów; dołączając czwartą parę punktów odpowiednich Q_1^{∞} i Q_2^{∞}, możemy napisać:

$$(A_1\ B_1\ C_1\ Q_1^{\infty}) = (A_2\ B_2\ C_2\ Q_2^{\infty})$$

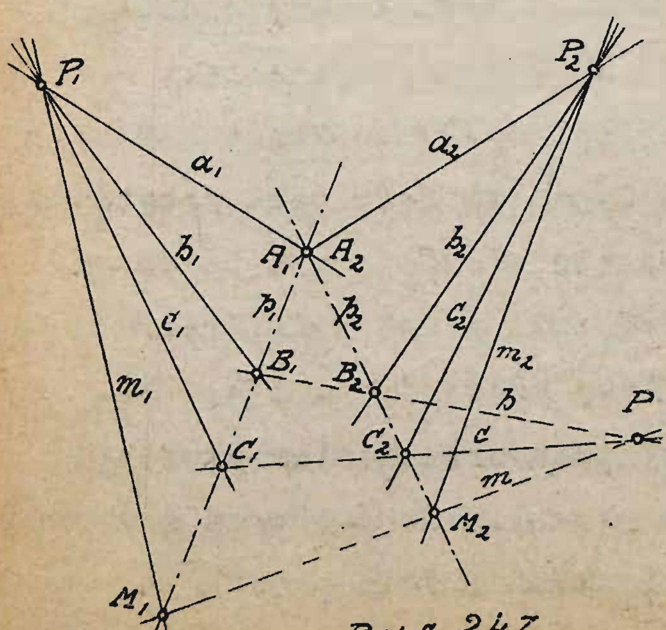
skąd

$$\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} = \frac{A_2 C_2}{B_2 C_2} \quad (\S\ 119)$$

Mamy tedy wniosek:

Jeżeli punkty niewłaściwe dwóch szeregów rzutowych odpowiadają sobie wzajemnie, to te szeregi są "podobne", to stosunek odległości dwóch którychkolwiek punktów jednego szeregu do odległości odpowiadających im punktów drugiego szeregu jest liczbą stałą.

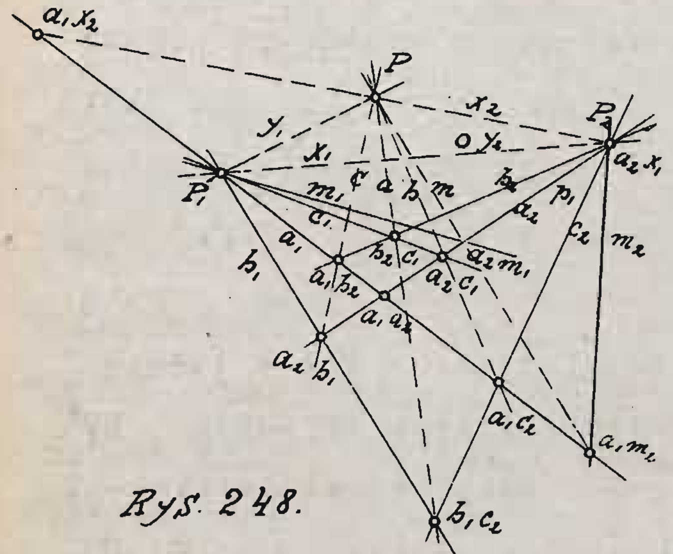
b/ Niech będą dwa pęki o wierzchołkach P_1 i P_2 których rzutowość jest dana zapomocą 3 par prostych odpowiednich a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2 /rys.247/. Przez punkt przecięcia którychkolwiek 2-ch promieni odpowiednich, np. a_1 i a_2, poprowadźmy dowolnie dwie proste p_1 i p_2 i uważajmy w szeregach p_1 i p_2 za odpowiednie te



Rys. 247.

punkty, która leżą na odpowiednich prostych pęków P_1 i P_2 . Szeregi p_1 i p_2 są rzutowe, gdyż są one perspektywiczne z rzutowemi pękami $P_1 (a_1 b_1 c_1 ...) \barwedge P_2 (a_2 b_2 c_2 ...)$ są one nadto perspektywiczne, gdyż punkt przecięcia podstaw $p_1 p_2$ odpowiada samemu sobie $(A_1 \equiv A_2)$. Odpowiednie punkty szeregów p_1 i p_2 muszą przeto leżeć na prostych przecinających się w jednym punkcie /środku perspektywy tych szeregów/, będzie on wyznaczony przez dwie którekolwiek proste przezeń przechodzące, np. przez $b \equiv B_1 B_2$ $c \equiv C_1 C_2$. Punkty odpowiednie każdej innej pary leżeć muszą na prostej, wychodzącej z punktu $bc \equiv P$. Aby więc wyznaczyć prostą m_2 , odpowiadającą prostej m_1 , wyznaczamy punkt $p_1 m_1 \equiv M_1$, łączymy $PM_1 \equiv m$, wyznaczamy punkt $p_2 m \equiv M_2$ i łączymy $P_2 M_2 \equiv m_2$.

Ponieważ proste p_1 i p_2 są dowolnemi prostemi, wyprowadzonemi z punktu $a_1 a_2$, przeto dogodnie będzie uczynić $p_1 \equiv a_2$ i $p_2 \equiv a_1$ /rys. 248/. Środkiem perspektywy szeregów p_1 i p_2 będzie punkt P , który jest przecięciem prostej c , łączącej punkty $a_1 b_2$ i $a_2 b_1$ prostą b , łączącą punkty $a_1 c_2$ i $a_2 c_1$; dwie proste m_1



Rys. 248.

i m_2 są odpowiednie w pękach $P_1(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge$ $\barwedge P_2(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ jeżeli prosta m, łącząca punkty $a_1 m_2$ i $a_2 m_1$ przechodzi przez środek perspektywy P.

Jeżeli pęki rzutowe P_1 i P_2 nie są perspektywiczne, to prosta z, łącząca wierzchołki P_1 i P_2, nie odpowiada samej sobie. Jeżeli tę prostą zaliczymy do pęku P_1, oznaczając ją literą x_1, to prostą odpowiednią znajdziemy, prowadząc z punktu P_2 taką prostą x_2, aby prosta, łącząca punkty $a_2 x_1$ i $a_1 x_2$ przechodziła przez punkt P. Ale $a_2 x_1 \equiv P_2$; x_2 musi być przeto taką prostą, wychodzącą z punktu P_2, aby prosta, łącząca punkty $a_1 x_2$ i P_2 przechodziła przez punkt P, t.j. $x_2 \equiv PP_2$. Jeżeli prostą z zaliczymy do pęku P_2, oznaczając ją literą y_2, to prosta odpowiednia y_1 będzie łączyła punkty P i P_1 t.zn. że:

prostej łączącej wierzchołki dwóch pęków rzutowych odpowiadają w obu pękach proste, które łączą środek perspektywy z wierzchołkami i nawzajem środek perspektywy pęków rzutowych P_1 i P_2 jest przecięciem prostych x_2 i y_1, odpowiadających w obu pękach prostej $x_1 \equiv y_2$, łączącej wierzchołki P_1 i P_2.

Ponieważ każdej prostej jednego z dwóch pęków rzutowych, np. x_1 lub y_2, odpowiada w drugim jedna jedyna prosta x_2, wzgl. y_1, więc środek perspektywy nie zależy od tego, czy za podstawy szeregów p_1 i p_2 obraliśmy proste a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2, m_1 i m_2... Stąd wniosek:

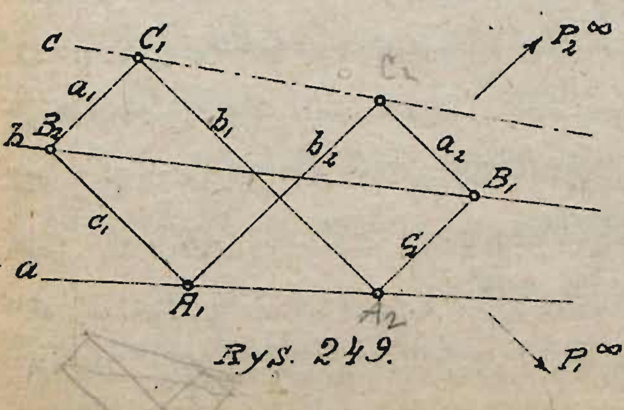
Jeżeli boki: pierwszy, trzeci i piąty sześcioboku $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ przechodzą przez punkt P_1, a boki: drugi, czwarty i szó-sty przez punkt P_2, to proste a, b i c, łączące wierzchołki "przeciwległe" sześciokąta $b_1 c_2$, $b_2 c_1$, $c_1 c_2$ i $a_2 c_1$, $a_1 b_2$ i $a_2 b_1$, przechodzą przez jeden punkt P.

Jest to zresztą przypadek szczególny twierdzenia Brianchona o sześcioboku opisanym na stożkowej, o którym niebawem będzie mowa.

Rzutowość dwóch pęków o danych wierzchołkach P_1 i P_2 jest wyznaczona przez środek perspektywy P oraz jedną parę a_1 i a_2 prostych odpowiednich, gdyż środek perspektywy jest równoznaczny z dwiema parami prostych odpowiednich x_1 i x_2, y_1 i y_2.

Dwa pozornie różne wzajemne twierdzenia: o sześciokącie, którego wierzchołki leżą na 2-ch prostych p_1 i p_2 i o sześcioboku, którego boki przechodzą przez dwa punkty P_1 i P_2, są w rzeczy samej tem samem twierdzeniem, którego istota polega na istnieniu t.zw. konfiguracji Pascala, złożonej z 9 punktów i 9 prostych w ten sposób, że przez każdy punkt przechodzą 3 proste i na każdej prostej leżą 3 punkty.

§ 130. Zastosowanie. Zastosujmy twierdzenie o sześcioboku $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$, którego boki a_1, b_1 i c_1 przechodzą przez punkt P_1, a boki a_2, b_2 i c_2 przez punkt P_2, do rozwiązania zagadnienia: Połączyć punkt C_1 z niedostępnym punktem przecięcia prostych a i b /rys. 249/.

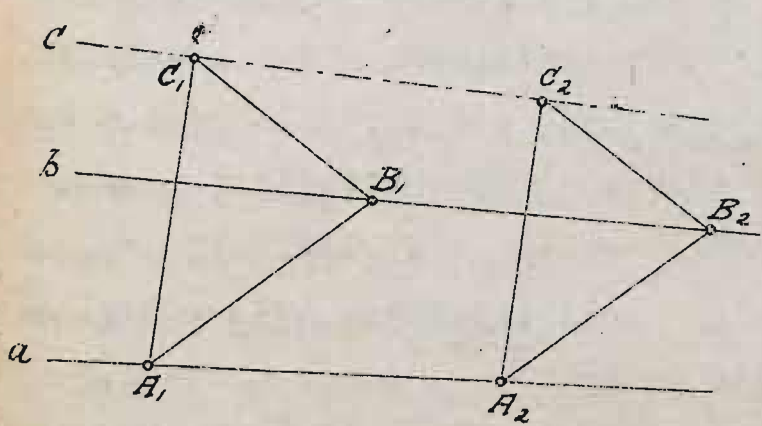


Rys. 249.

Z punktu C_1 wyprowadźmy dwie proste: pierwszą w kierunku dowolnym P_1^∞ do punktu A_2 na prostej a , drugą w kierunku dowolnym P_2^{∞} do punktu B_2 na prostej b.. Z punktu A_2 wyprowadźmy równoległą do C_1B_2 do punktu B_1 na prostej b , a z punktu B_2 równoległą do C_1A_2 do punktu A_1 na prostej a , Z punktu B_1 wyprowadźmy znowu równoległą do C_1A_2 i z punktu A_1 równoległą do C_1B_2 ; połączmy wreszcie punkt C_1 z punktem C_2 , w którym przecinają się ostatnie dwie proste. Powiadam, że prosta C_1C_2 przejdzie przez punkt ab . W samej rzeczy, w sześcioboku $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ boki pierwszy, trzeci i piąty przechodzą przez punkt P_1^{∞}, a boku, drugi, czwarty i szósty przez punkt P_2^{∞}, skąd wynika, że proste, łączące przeciwległe wierzchołki tego sześcioboku A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 przechodzą przez jeden punkt.

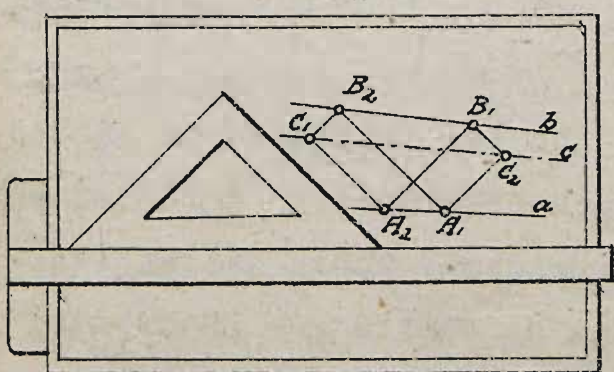
Zagadnienie to można też rozwiązać na zasadzie twierdzeń o trójkątach Desargues'a /§ 75/. Z punktu C_1 /rys.250/ wyprowadzamy znowu jakiekolwiek dwie proste, pierwszą do punktu A_1 na prostej a , drugą do punktu B_1 na prostej b i łączymy punkty A_1 i B_1 . Przez dowolny punkt A_2 prostej a prowadzimy równoległą do A_1B_1 do punktu B_2 na prostej b i równoległą do A_1C_1 , a z punktu

B_2 równoległą do B_1C_1; wreszcie łączymy punkt C_1 z punktem C_2, w którym się przecinają dwie ostatnie proste. Trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są trójkątami Desargues'a, gdyż odpowiednie ich boki przecinają się w trzech punktach niewłaściwych, które, jak wiadomo, leżą na jednej prostej /mianowicie na prostej niewłaściwej/.



Rys. 250

Z tych dwóch rozwiązań pierwsze jest bardziej praktyczne, zwłaszcza, jeżeli się posługujemy rajszyną i po niej ślizgającą się ekierką, jak

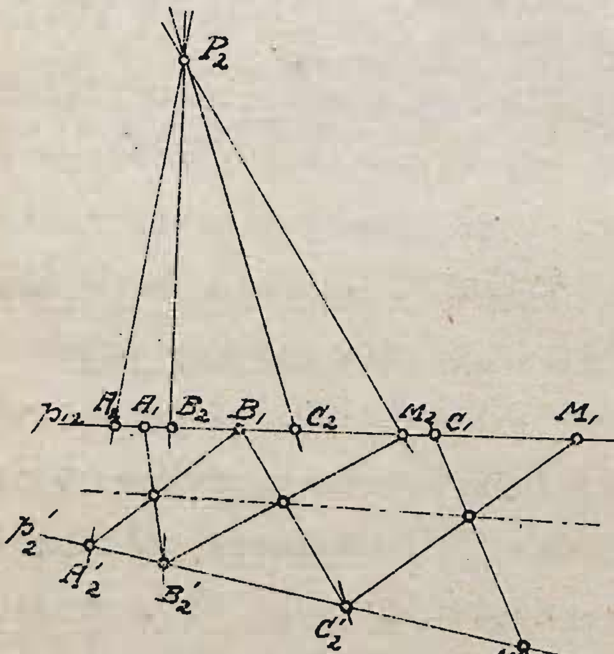


Rys. 251.

to wskazuje rys. 251.

§ 131. SZEREGI RZUTOWE NA WSPÓLNEJ PODSTAWIE I PĘKI RZUTOWE O WSPÓLNYM WIERZCHOŁKU. Ponieważ dwustosunek czterech elementów szeregu lub pęku zachowuje się przez rzuty i przecięcia, więc przez dowolną ilość rzutów i przecięć dochodzimy zawsze do szeregu lub pęku rzutowego z pierwszym szeregiem lub pękiem. Przypadkiem szczególnie ważnym rzutowości dwóch szeregów lub dwóch pęków będzie ten, gdy podstawy szeregów lub gdy wierzchołki pęków przystają do siebie /są zjednoczone/. Zdarza się to np. wówczas, gdy wyszedłszy z pewnego szeregu o podstawie p_1, po pewnej liczbie rzutów i przecięć przetniemy pęk P_{n-1} prostą p_1; wtedy na prostej p_1 będą leżały dwa szeregi rzutowe $p_1(A_1B_1C_1\ldots) \barwedge p_1(A_nB_nC_n\ldots)$. I podobnież co do pęków: może się zdarzyć, że wyszedłszy z pewnego pęku o wierzchołku P_1, po pewnej liczbie przecięć i rzutów, rzucimy szereg P_{n-1} z punktu P_1; wtedy punkt P_1 będzie wspólnym wierzchołkiem dwóch pęków rzutowych $P_1(a_1b_1c_1\ldots) \barwedge P_1(a_nb_nc_n\ldots)$ Takie dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie lub pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku, jak każde wogóle rzutowe szeregi lub pęki, są wyznaczone przez 3 pary elementów odpowiednich, ale wykreślenia podane w poprzednim artykule, służące do wyznaczania elementów odpowiednich w tym przypadku zawodzą.

Niechaj będą na prostej p_{12} /rys.252/ 3 pary A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 punktów, które wyznaczają dwa szeregi rzutowe $p_{12}(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge$ $\barwedge\, p_{12}(A_2 B_2 C_2 \ldots)$; aby wyznaczyć dla punktu M_1 pierwszego szeregu odpowiadający mu punkt M_2 drugiego, rzućmy z dowolnego punktu P_2 punkty A_2, B_2 i C_2 na dowolną prostą p_2' i znajdźmy na tej prostej taki punkt M_2', że punkty M_1 i M_2' odpowiadają sobie rzutowo w szeregach $p_{12}(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge$ $\barwedge\, p_2'(A_2' B_2' C_2' \ldots)$, poczem rzućmy punkt M_2' z punktu P_2 na p_{12} ; otrzymany w ten sposób punkt M_2 jest szukanym, gdyż /§ 138/



Rys. 252.

$$(A_1 B_1 M_1 C_1) = (A_2' B_2' M_2' C_2')$$

a na mocy § 123

$$(A_2' B_2' M_2' C_2') = (A_2 B_2 M_2 C_2);$$

skąd wynika:

$$(A_1 B_1 M_1 C_1) = (A_2 B_2 M_2 C_2).$$

Opierając się na zasadzie dwoistości znaleźlibyśmy analogiczne wykreślenie linjowe, pozwalające odnaleźć prostą m_2, odpowiadającą danej prostej m_1 w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku P.

§ 132. ELEMENTY PODWÓJNE. Jeżeli w dwóch szeregach rzutowych na wspólnej podstawie, - albo w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku, - 3 pary elementów odpowiednich są zjednoczone, to wszystkie pary elementów odpowiednich są zjednoczone, t.j. te szeregi, wzgl. pęki, są identyczne. - W samej rzeczy, niech będą np. dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p_{12} i niech punkty A_1 i A_2 będą zjednoczone w punkcie A tej prostej, punkty B_1 i B_2 w punkcie B, a punkty C_1 i C_2 w punkcie C. Jeżeli punkty M_1 i M_2 stanowią jakąkolwiek inną parę punktów odpowiednich, to na zasadzie § 127

$$(A_1 B_1 M_1 C_1) = (A_2 B_2 M_2 C_2)$$

t.j.

$$(A B M_1 C) = (A B M_2 C).$$

skąd wynika, że punkty M_1 i M_2 są identyczne.

Jeżeli więc dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie /albo dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku/ nie są identyczne, to mogą mieć <u>najwyżej dwie pary elementów odpowiednich zjednoczonych</u>; t.j. na wspólnej podstawie p_{12} istnieją najwyżej dwa punkty I_{12} i J_{12} /ze wspólnego wierzchołka P_{12} wychodzą najwyżej dwie proste i_{12} i j_{12} /, które odpowiadają samym sobie. Punkty I_{12} i J_{12} nazywamy <u>punktami podwójnemi</u> szeregów rzutowych $p_{12}(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p_{12}(A_2 B_2 C_2 \ldots)$ proste i_{12} i j_{12} nazywamy <u>prostemi podwójnemi</u> pęków rzutowych

$$P_{12}(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge P_{12}(a_2 b_2 c_2 \ldots)$$

Wykreślenie podane w artykule poprzednim dla wyznaczenia pary punktów odpowiednich dwóch szeregów rzutowych na wspólnej podstawie nie da się zastosować do wyznaczenia punktów podwójnych tych szeregów. Do tego celu służy t.zw. <u>wykreślenie Steinera.</u>

Niech będą na wspólnej podstawie p_{12} /rys.253/

dwa szeregi, których rzutowość jest określona zapomocą trzech par punktów odpowiednich A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2. Wykreślmy dowolne koło k i obrawszy na jego obwodzie punkt P_{12}, rzućmy z niego wszystkie te punkty; proste rzucające a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2 wyznaczają dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku P_{12}. Z punktu A_1', w którym prosta a_1 przecina koło, rzućmy punkty A_2', B_2' i C_2'; proste rzucające a_2', b_2', c_2',... , na zasadzie znanego twierdzenia o kątach wpisanych w koło, opartych na tym samym łuku, tworzą ze sobą te same kąty, co proste a_2, b_2, c_2,... tak, że pęki $P_{12}(a_2\, b_2\, c_2 \dots)$ i $A_1'(a_2'\, b_2'\, c_2' \dots)$ są równe, a więc, oczywiście, rzutowe. Podobnież z punktu A_2', w którym prosta a_2 przecina koło, rzućmy punkty A_1', B_1' i C_1'; proste rzucające: a_1', b_1', c_1',... tworzą ze sobą te same kąty, co proste a_1, b_1, c_1,... , tak że pęki $P_{12}(a_1\, b_1\, c_1 \dots)$ i $A_2'(a_1'\, b_1'\, c_1' \dots)$ są równe, a więc oczywiście rzutowe.

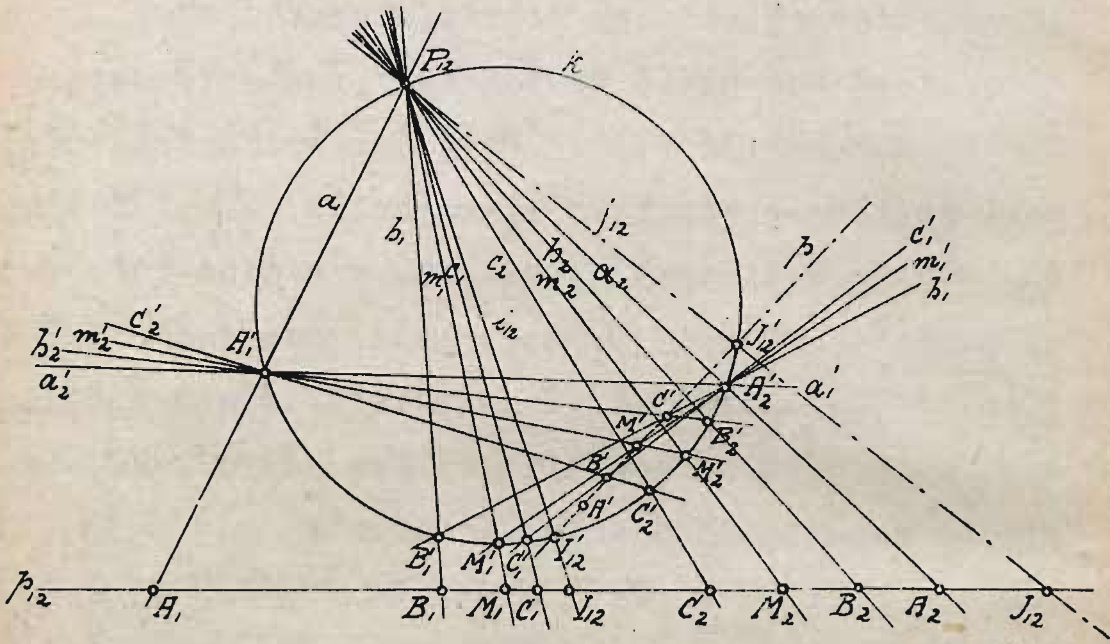
Ponieważ

$$P_{12}(a_1\, b_1\, c_1 \dots) \,\overline{\wedge}\, P_{12}(a_2\, b_2\, c_2 \dots)$$

więc

$$A_2'(a_1'\, b_1'\, c_1' \dots) \,\overline{\wedge}\, A_1'(a_2'\, b_2'\, c_2' \dots)$$

-



Rys. 253.

pęki te jednak nietylko są rzutowe, ale i perspektywiczne, albowiem prosta, łącząca wierzchołki A_1' i A_2' odpowiada samej sobie w tych pękach $(a_1' \equiv a_2')$. Stąd wynika, że punkty przecięcia promieni odpowiednich $b_1' b_2'$, $c_1' c_2', \dots,$ $m_1' m_2' \dots$ leżą na jednej prostej p, która jest zatem wyznaczoną przez dwa którekolwiek z tych punktów, np. przez $C' \equiv b_1' b_2'$ i $B' \equiv c_1' c_2'$. Aby wyznaczyć jakąkolwiek inną parę prostych odpowiednich, wystarczy połączyć dowolny punkt M' prostej $B'C' \equiv p$ z punktami A_1' i A_2'.

Stąd wynika, że dla wyznaczenia punktu M_2, który w drugim szeregu odpowiada punktowi M_1 pierwszego szeregu, należy postąpić jak następuje:

Połączyć punkty $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ i M_1 z punktem P_{12} prostemi $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ i m_1; wyznaczyć punkty $A_1', B_1', C_1', A_2', B_2', C_2'$ i M_1', w których te proste przecinają koło k; połączyć $A_1'B_2' \equiv b_2'$ i $A_2'B_1' \equiv b_1'$; wyznaczyć punkt $b_2'b_1' \equiv B'$; połączyć $A_1'C_2' \equiv c_2'$ i $A_2'C_1' \equiv c_1'$; wyznaczyć punkt $c_2'c_1' \equiv C'$; połączyć $B'C' \equiv p$; wyznaczyć punkt $m_1'p \equiv M'$; połączyć $M'A_1' \equiv m_2'$; wreszcie wyznaczyć punkt $m_2'p \equiv M_2$.

Trojakie może być położenie prostej p względem koła k; albo może to być prosta zewnętrzna względem tego koła, albo styczna do niego, albo wreszcie jego sieczna. Przypuśćmy, że prosta p przecina koło k w dwóch punktach I_{12}' i J_{12}'. Każdy z tych punktów wyznacza z punktem P_{12} prostą, która odpowiada samej sobie w pękach rzutowych:

$$P_{12}(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge P_{12}(a_2 b_2 c_2 \ldots)$$

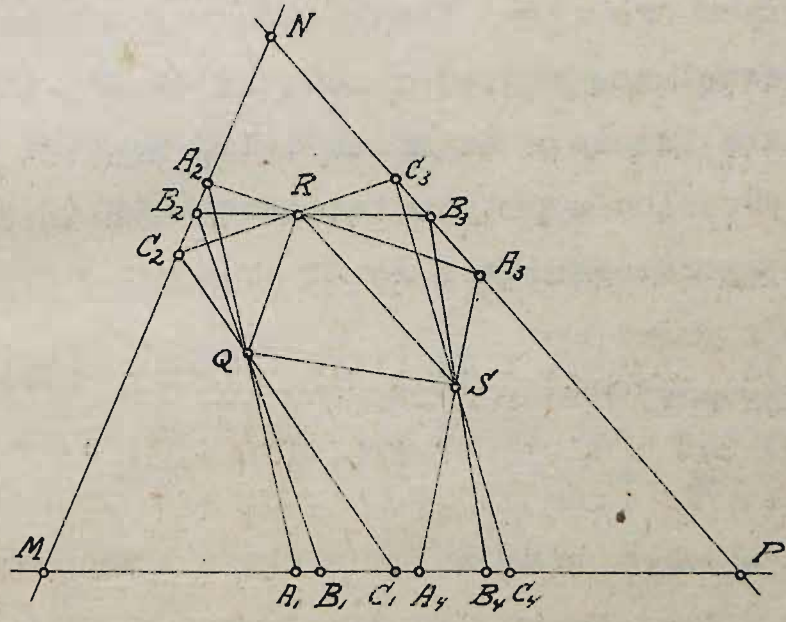
Punkty I_{12} i J_{12}, w których tak wyznaczone proste i_{12} i j_{12} przecinają prostą p_{12}, są zatem punktami podwójnemi szeregów rzutowych $p_{12}(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p_{12}(A_2 B_2 C_2 \ldots)$. Jeżeli prosta p jest styczną do koła k, to punkty I'_{12} i J'_{12}; a więc i punkty I_{12} i J_{12} są zjednoczone; istnieje więc wtedy tylko jeden punkt podwójny tych szeregów. Jeżeli wreszcie prosta p jest zewnętrzną względem koła k, to punkty podwójne nie istnieją wcale.

W wykreśleniu powyższem zawarte już jest oczywiście wyznaczenie par prostych odpowiednich oraz prostych podwójnych i_{12} i j_{12} dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku P_{12}:

$$P_{12}(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge P_{12}(a_2 b_2 c_2 \ldots)$$

Wyznaczenie punktów podwójnych dwóch szeregów rzutowych na jakiejkolwiek podstawie p_{12} oraz wyznaczenie prostych podwójnych dwóch pęków rzutowych o jakimkolwiek wierzchołku P_{12}, da się uskutecznić zapomocą jednego jedynego koła k, leżącego w płaszczyźnie tych podstaw i wierzchołków. Wykreślenie to <u>nie wymaga zatem użycia cyrkla;</u> jeżeli tylko w płaszczyźnie rysunku raz na zawsze wykreślone jest jakiekolwiek koło /zwane kołem Steinera/.

§ 133. ZASTOSOWANIE. Wykreślić trójkąt wpisany w trójkąt MNP i opisany na trójkącie QRS.



Rys. 254.

Na boku MP /rys.254/ obierzmy trzy dowolne punkty A_1, B_1 i C_1; rzućmy je z punktu Q na bok MN; otrzymane punkty A_2, B_2 i C_2 rzućmy z punktu R na bok NP, wreszcie tak otrzymane punkty A_3, B_3 i C_3 rzućmy jeszcze raz z punktu

S na bok MP ; ponieważ szeregi

$$A_1 B_1 C_1 \ldots \quad \text{i} \quad A_2 B_2 C_2 \ldots$$
$$A_2 B_2 C_2 \ldots \quad \text{i} \quad A_3 B_3 C_3 \ldots$$
$$A_3 B_3 C_3 \ldots \quad \text{i} \quad A_4 B_4 C_4 \ldots$$

są perspektywiczne /środkami perspektywy są kolejno punkty Q , R i S /, więc szeregi

$$A_1 B_1 C_1 \ldots \quad \text{i} \quad A_4 B_4 C_4 \ldots$$

są rzutowe na wspólnej podstawie MP ; zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia punktów podwójnych I_{12} i J_{12} tych szeregów i ma 2, 1 lub 0 rozwiązań /zagadnienie II stopnia/.

§ 134. SZEREGI I PĘKI INWOLUCYJNE. Niechaj będą dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p_{12}. Każdy punkt M prostej p_{12} może być zaliczony bądź do pierwszego, bądź do drugiego szeregu. Jeżeli punkt M zaliczymy do pierwszego szeregu i oznaczymy go literą A_1 , to w drugim szeregu będzie mu odpowiadał pewien punkt, który oznaczymy literą A_2 . Jeżeli ten sam punkt zaliczymy do drugiego szeregu i oznaczymy go literą B_2 , to w pierwszym szeregu będzie mu odpowiadał pewien punkt B_1 , który wogóle będzie różny od punktu A_2 . Może się wszakże zdarzyć, że punkty A_2 i B_1 przystaną do siebie w pewnym punkcie N prostej p_{12}; wówczas mówimy, że punkty M i N odpowiadają sobie podwójnie, co oznacza, że punktowi M odpowiada zawsze ten sam punkt N, niezależnie od tego, do którego z dwóch szeregów zaliczymy punkt M.

Podobnież dla pęków. Może się zdarzyć, że w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku P_{12} dwie proste m i n, wychodzące z punktu P_{12} odpowiadają sobie podwójnie, t.j. że prostej m odpowiada zawsze ta sama prosta n, niezależnie od tego, do którego z dwóch pęków prostą m zaliczymy. Dowiedziemy teraz twierdzenia:

Jeżeli w dwóch szeregach rzutowych na wspólnej podstawie, albo w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku dwa elementy odpowiednie odpowiadają sobie podwójnie, to każde dwa elementy odpowiednie odpowiadają sobie podwójnie.

Niech będą np. dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie i niech istnieje jedna para punktów odpowiednich A_1 i A_2, które odpowiadają sobie podwójnie, tak że jeżeli

$$A_1 = B_2 \quad \text{to} \quad A_2 = B_1$$

Trzeba okazać, że wtedy każda para punktów odpowiednich, np. C_1 i C_2 odpowiada sobie podwójnie, t.j. że jeżeli

$$D_1 \equiv C_2 \quad \text{to} \quad D_2 \equiv C_1$$

Otóż na zasadzie § 127

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$$

kładąc na mocy założenia

$$A_2 \equiv B_1 ; \quad B_2 \equiv A_1 , \quad C_2 \equiv D_1$$

otrzymamy

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (B_1 A_1 D_1 D_2)$$

czyli

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{B_1D_1}{A_1D_1} : \frac{B_1D_2}{A_1D_2}$$

t.j.

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_1D_2}{B_1D_2}$$

co oznacza, że stosunki podziału punktów C_1 i D_2 względem punktów A_1 i B_1 są równe, skąd wynika, że $C_1 \equiv D_2$, c.b.d.o.

Dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p_{12}, w których jedna, a więc wszystkie pary punktów odpowiednich odpowiadają sobie podwójnie, nazywają się inwolucją na prostej p_{12}. Każdemu punktowi prostej p_{12}, odpowiada jeden jedyny punkt tej samej prostej, o którym mówimy, że jest z tamtym inwolucyjnie sprzężony.

Ponieważ rzutowość dwóch szeregów jest wyznaczona przez 3 którekolwiek pary punktów odpowiednich, więc inwolucja na prostej p_{12}, będzie wyznaczona przez dwie którekolwiek pary punktów sprzężonych A_1 i A_2; B_1 i B_2; każda z tych dwóch par bowiem, po przestawieniu jej elementów stworzy nową parę punktów odpowiednich tych dwóch szeregów rzutowych, które stanowią inwolucję:

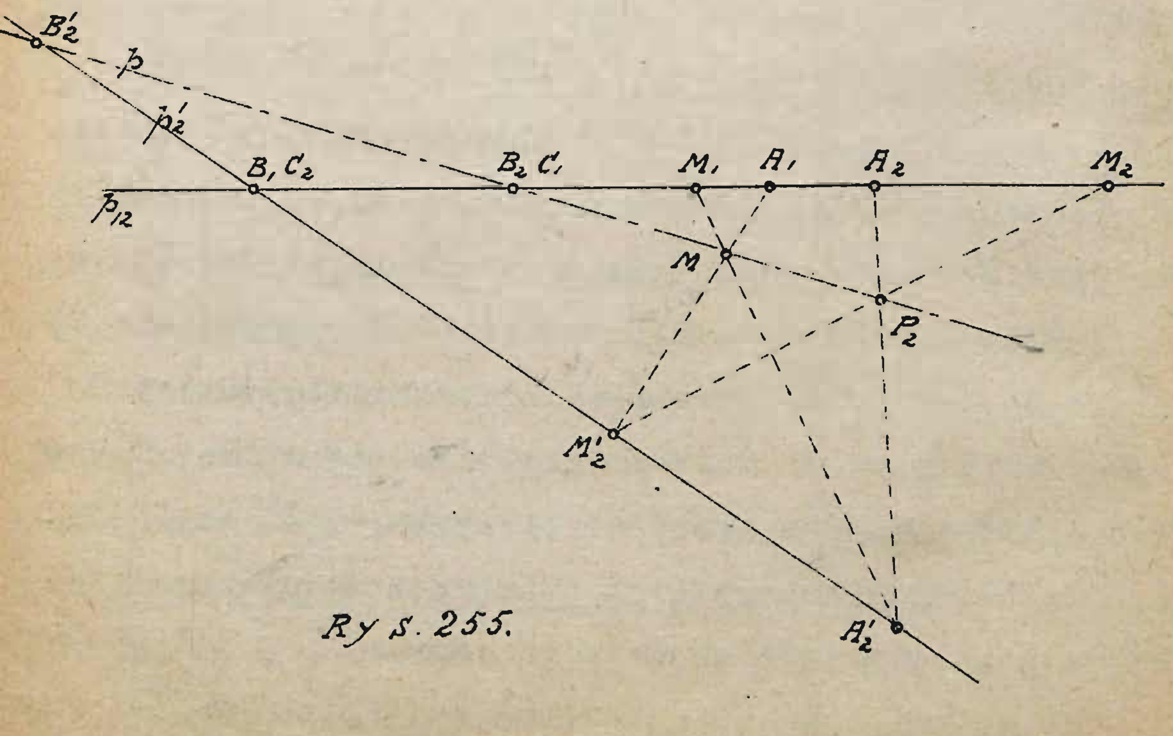
$$p_{12}\,(A_1\,B_1\,A_2\,B_2 ..) \;\overline{\wedge}\; p_{12}'\,(A_2\,B_2\,A_1\,B_1 ..)$$

Dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku P_{12}, w których jedna, a więc wszystkie pary prostych odpowiednich odpowiadają sobie podwójnie, nazywają się inwolucją dokoła punktu P_{12}. Każdej prostej, wychodzącej z punktu P_{12}, odpowiada jedna jedyna wychodząca z tegoż punktu prosta, o której mówimy, że jest z tamtą inwolucyjnie sprzężona.

Inwolucja dokoła punktu P_{12} jest wyznaczona przez którekolwiek dwie pary prostych sprzężonych a_1 i a_2, b_1 i b_2; po przestawieniu bowiem elementów jednej z tych par otrzymamy nową parę prostych odpowiednich tych dwóch pęków rzutowych, które stanowią inwolucję:

$$P_{12}\,(a_1\,b_1\,a_2\,b_2 ..) \;\overline{\wedge}\; P_{12}\,(a_2\,b_2\,a_1\,b_1 ..)$$

135. Własności inwolucyjne czworokąta i czworoboku zupełnego. Niechaj będzie dana inwolucja, t.j. takie dwa rzutowe szeregi na wspólnej podstawie p_{12} , że dwa punkty tej prostej odpowiadają sobie podwójnie, tak że jeśli w jednym z nich przystaną do siebie punkt B_1 pierwszego szeregu z punktem C_2 drugiego szeregu, to w drugim przystaną do siebie punkt B_2 drugiego szeregu z punktem C_1 pierwszego. Rzutowość tych dwóch szeregów jest wyznaczona przez 3 pary punktów A_1 i A_2, B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , przytem druga i trzecia



Rys. 255.

para są zjednoczone w dwóch punktach $B' \equiv C_2$ i $B_2 \equiv C_1$ /rys.255/. Wyznaczmy na prostej p_{12} punkt M_2 sprzężony inwolucyjnie z jakimkolwiek danym punktem M_1 tej samej prostej. Stosując wykreślenie § 133 /rys.252/ trzeba najpierw, jak wiemy, z dowolnego punktu P_2 rzucić punkty A_2, B_2 i C_2 na dowolną prostą p_2'. Poprowadźmy tę prostą przez punkt $B_1 \equiv C_2$ i obrawszy gdziekolwiek punkt P_2, rzućmy z niego punkty A_2, B_2 i C_2 na prostą p_2'; otrzymawszy punkty A_2', B_2' i $C_2' \equiv B_1 \equiv C_2$. Znajdźmy teraz punkt M_2', odpowiadający rzutowo punktowi M w szeregach:

$$p_{12}(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p_2'(A_2' B_2' C_2' \ldots)$$

W tym celu znajdźmy oś perspektywy tych szeregów. Łączy ona, jak wiadomo /§ 129, II a/ punkty odpowiadające w obu szeregach punktom przecięcia podstaw $B_1 \equiv C_2'$; otóż punktowi B_1 odpowiada B_2', punktowi C_2' odpowiada C_1; osią perspektywy będzie zatem prosta $B_2' C_1 \equiv p$. Aby otrzymać punkt M_2', odpowiadający rzutowo punktowi M_1, łączymy ten ostatni z którymkolwiek punktem szeregu p_2', np. z punktem A_2'; punkt przecięcia M prostej $M_1 A_2'$ z osią perspektywy p łączymy z punktem A_1; prosta $M A_1$ przecina p_2' w punkcie M_2'. Pozostaje rzucić punkt M_2' z punktu P_2 na p_{12}, aby otrzymać szukany punkt M_2.

Zauważmy czworokąt zupełny $MP_2A_2'M_2'$, którego dwa przeciwległe boki p i p_2' przechodzą przez punkty $B_2 \equiv C_1$ i $B_1 \equiv C_2$, dwa inne MM_2' i P_2A_2' - przez punkty A_1 i A_2, jeden z pozostałych przez M_1, a drugi przez M_2. Stąd twierdzenie:

<u>Boki przeciwległe czworokąta zupełnego przecinają prostą w trzech parach punktów inwolucji.</u>

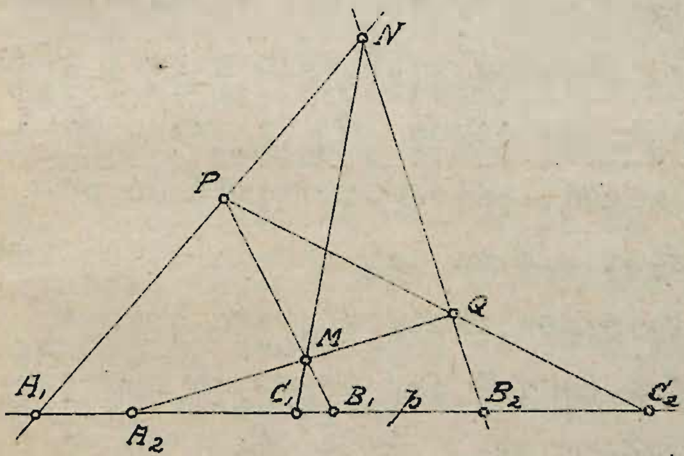
Na zasadzie dwoistości wnioskujemy o słuszności twierdzenia wzajemnego.

<u>Proste, rzucające z dowolnego punktu wierzchołki przeciwległe czworoboku zupełnego stanowią trzy pary prostych inwolucji.</u>

Własności harmoniczne czworoboku i czworokąta zupełnego /§ 124/ są tylko przypadkiem szczególnym własności inwolucyjnych tych figur. Tak np. 3 pary punktów sprzężonych inwolucyjnie A_1 i A_2, B_1 i B_2, M_1 i N_2 stają się dwiema parami punktów sprzężonych harmonicznie A i B, M i N, gdy punkty pierwszej pary A_1 i A_2 zostaną zjednoczone w punkcie A, a punkty drugiej pary B_1 i B_2 w punkcie B; prosta p, przecinająca czworokąt

$CFDE$, przechodzi wówczas przez dwa jego punkty przekątne A i B /rys.255/. Punkty te są <u>punktami podwójnemi inwolucji,</u> którą czworokąt $CFDE$ wyznacza na prostej p ; przegradzają one harmonicznie każdą parę punktów M i N, sprzężonych inwolucyjnie.

Opierając się na własnościach inwolucyjnych czworokąta zupełnego, można za pomocą <u>konstrukcji linjowej</u> wyznaczyć punkt C_2 sprzężony z jakimkolwiek danym punktem C_1 w inwolucji, wyznaczonej przez dwie pary punktów sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2. Przypuśćmy, że na prostej p /rys.256/ dane są dwie pary punktów inwolucyjnie sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2 oraz punkt C_1. Aby znaleźć punkt C_2 z nim sprzężony, poprowadźmy przez C_1 prostą jakąkolwiek i weźmy na niej dowolne dwa punkty M i N. Połączmy punkt M z punktami należącemi



Rys. 256.

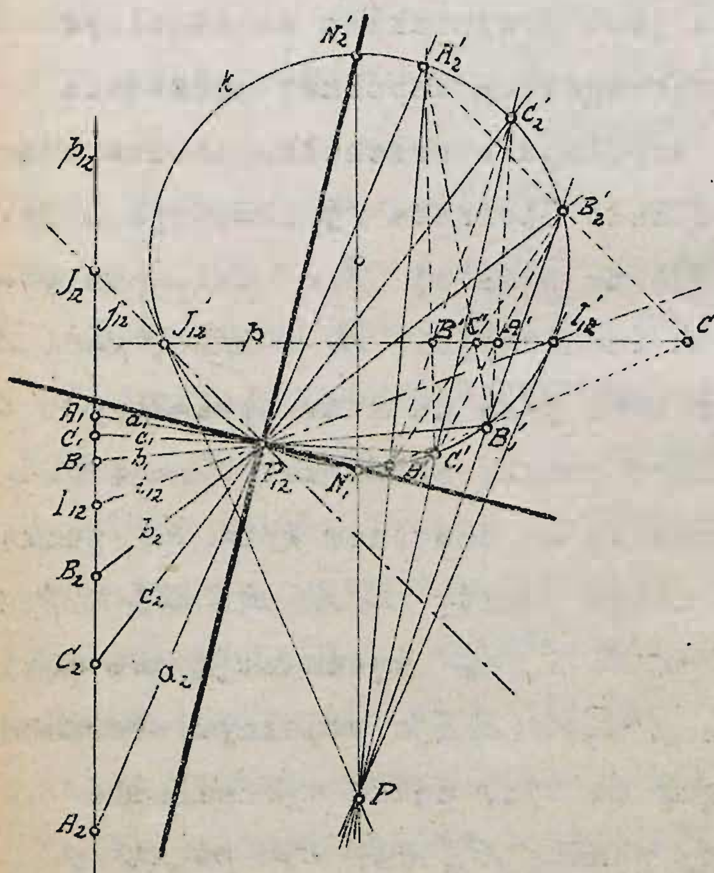
do par różnych, np. z A_2 i B_1, a punkt N z pozostałemi punktami tych par A_1 i B_2; w utworzonym w ten sposób czworokącie $MNPQ$ poprowadźmy szósty bok PQ; w przecięciu jego z prostą p otrzymamy szukany punkt C_2. Jeżeli jedna z dwóch danych par punktów sprzężonych inwolucyjnie A_1 i A_2, B_1 i B_2, np. A_1 i A_2 jest zjednoczona w punkcie podwójnym I_{12}, to drugi punkt podwójny inwolucji, J_{12}, znajdziemy, jako punkt sprzężony harmonicznie z punktem I_{12} względem punktów drugiej pary B_1 i B_2.

Podobnież, opierając się na własnościach inwolucyjnych czworoboku zupełnego można podać konstrukcję linjową prostej c_2, sprzężonej z daną jakąkolwiek prostą c_1 w inwolucji wyznaczonej przez dwie pary prostych sprzężonych a_1 i a_2, b_1 i b_2. Możemy zresztą to zagadnienie sprowadzić do poprzedniego, opierając się na tej zasadzie, że inwolucja zachowuje się przez rzuty i przecięcia.- Jeżeli jedna z dwóch danych par prostych sprzężonych inwolucyjnie a_1 i a_2, b_1 i b_2, np. a_1 i a_2, jest zjednoczona na prostej podwójnej i_{12}, to drugą prostą podwójną inwolucji, j_{12}, znajdziemy jako prostą sprzężoną harmonicznie z prostą i_{12} względem prostych drugiej pary b_1 i b_2.

§ 136. Zastosowanie koła Steinera do wyznaczenia elementów sprzężonych i podwójnych danej inwolucji.

Konstrukcja elementów sprzężonych inwolucji za pomocą czworokątu i czworoboku zupełnego /rys.256/ nie zawsze jest praktyczna, a już wcale nie da się zastosować do wyznaczania elementów podwójnych. - Ponieważ inwolucja jest przypadkiem szczególnym rzutowości dwóch szeregów na wspólnej podstawie lub dwóch pęków o wspólnym wierzchołku, można więc do niej zastosować koło Steinera /§ 132, rys.253/. Niech będą /rys.257/ na prostej p_{12} dwie pary punktów sprzężonych inwolucyjnie A_1 i A_2, B_1 i B_2; mamy 1/ wyznaczyć nową parę punktów sprzężonych C_1 i C_2 i 2/ wyznaczyć punkty podwójne I_{12} i J_{12} tej inwolucji. Obrawszy na dowolnem kole k punkt P_{12}, rzućmy z niego punkty A_1, A_2, B_1 i B_2. Proste rzucające a_1, a_2, b_1 i b_2 wyznaczają dwa pęki rzutowe $P_{12}(a_1 b_1 b_2 \ldots) \overline{\wedge} P_{12}(a_2 b_2 b_1 \ldots)$ o wspólnym wierzchołku P_{12}. Zastosujmy do tych pęków wykreślenie § 127. Wyznaczywszy punkty A_1', A_2', B_1' i B_2', w których proste a_1, a_2, b_1 i b_2 przecinają koło, znajdźmy punkt przecięcia C'' prostych $A_1'B_1'$ i $A_2'B_2'$ i punkt przecięcia C' prostych $A_2'B_1'$ i $A_1'B_2'$, a następnie połączmy punkty C' i C''

prostą p . Aby wyznaczyć nową jakąkolwiek parę punktów sprzężonych C_1 i C_2 , łączymy dowolny punkt B' prostej p z punktami A_1' i A_2' ; punkty C_1' i C_2' , w których proste $A_2'B'$ i $A_1'B'$ przecinają koło, rzucamy z punktu P_{12} na prostą p_{12} .



Rys. 257.

Punkt A' przecięcia prostych $B_1'C_2'$ i $B_2'C_1'$ leży również na prostej p . W samej rzeczy, pęki $B_1'(B_2'A_1'A_2'C_1'C_2'\ldots)$ i $B_2'(B_1'A_2'A_1'C_2'C_1'\ldots)$ są rzutowe, a prosta $B_1'B_2'$, łącząca ich wierzchołki, odpowiada w nich samej sobie, skąd wynika, że pęki te są perspektywiczne, proste $B_1'A_1'$ i $B_2'A_2'$, $B_1'A_2'$ i $B_2'A_1'$, $B_1'C_2'$ i $B_2'C_1'$ przecinają się zatem parami w punktach C'', C' i A' , leżących na jednej prostej

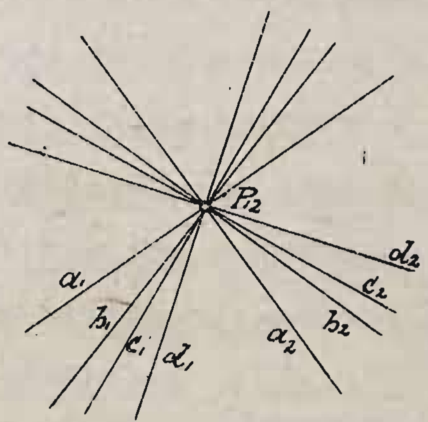
/osi perspektywy tych pęków/. Zauważmy teraz dwa trójkąty $A_1'B_1'C_2'$ i $A_2'B_2'C_1'$; są to trójkąty Desargues'a /§ 75/, gdyż boki ich przecinają się parami w punktach A', B', C' , leżących na prostej p ; stąd wynika, że wierzchołki tych trójkątów A_1' i A_2' , B_1' i B_2' , C_1' i C_2' leżą parami na prostych przechodzących przez jeden punkt P.

Aby więc znaleźć nową parę punktów sprzężonych C_1 i C_2 , wystarczy: 1/ wyznaczyć punkt P , jako przecięcie prostych $A_1'A_2'$ i $B_1'B_2'$; 2/ z punktu P wyprowadzić jakąkolwiek sieczną do koła k i 3/ punkty przecięcia tej siecznej z kołem C_1' i C_2' rzucić z punktu P_{12} na prostą p . Jeżeli punkt P jest zewnętrznym względem koła k , to rzuty punktów zetknięcia I_{12} i J_{12} stycznych, wyprowadzonych z punktu P do koła, są punktami podwójnemi I_{12} i J_{12} . Punkty takie nie istnieją, gdy P jest punktem wewnętrznym koła i są zjednoczone, gdy P leży na okręgu. Należy więc odróżnić 3 rodzaje inwolucji: hyperboliczna o 2-ch odrębnych elementach podwójnych, paraboliczna o zjednoczonych elementach podwójnych i eliptyczna - bez tych elementów.

W wykreśleniu powyższem zawarte już jest oczywiście wyznaczenie par prostych sprzężonych c_1 i c_2 oraz prostych podwójnych i_{12} i j_{12} inwolucji dokoła punktu P_{12}. Zastosujmy jeszcze to wykreślenie do wyznaczenia prostokątnej pary prostych sprzężonych danej inwolucji. W tym celu wystarczy wyprowadzić z P średnicę koła; proste n_1 i n_2, rzucające z punktu P_{12} końce N_1' i N_2' tej średnicy będą wzajemnie prostopadłemi prostemi sprzężonemi. Jeżeli punkt P leży w środku O koła k, to oczywiście każda sieczna z niego wychodząca jest średnicą, wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne:

W inwolucji dokoła punktu albo wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, albo tylko jedna.

Jeżli inwolucja dokoła punktu P_{12} jest hyperboliczna /rys.257/, to prostokątna para prostych sprzężonych n_1 i n_2 dzieli na połowy kąty między prostemi podwójnemi i_{12} i j_{12}. Wynika to z równości łuków $N_2' I_{12}'$ i $N_2' J_{12}'$ $(ON_2' \perp I_{12}' J_{12}')$. Inwolucja, której wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, nazywa się prostokątną. Eliptyczną tę inwolucję zakreślają ramiona kąta prostego, gdy ten obraca się dokoła swego wierzchołka; są to więc dwa pęki równe o wspólnym wierzchołku i zwrocie, w których proste odpowiednie są wzajemnie prostopadłe /rys. 258/.

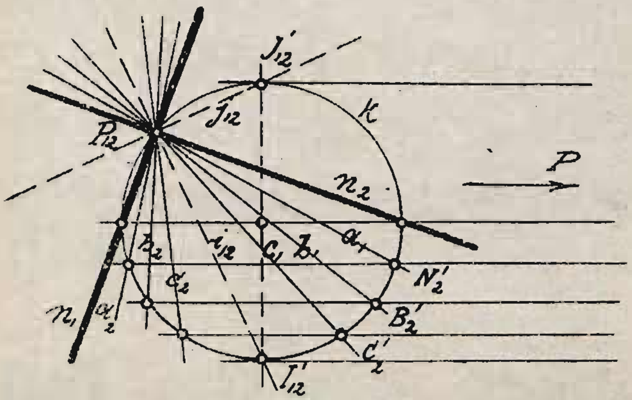


Rys. 258.

Jeżeli punkt P jest niewłaściwy, to łuki odcięte na okręgu przez sieczne z tego punktu wychodzące są równe. Hyperboliczna inwolucja, która temu położeniu punktu P odpowiada, nazywa się symetryczną; proste podwójne są wzajemnie prostopadłe; są one dwusiecznemi kątów między każdemi dwiema prostemi sprzężonemi /rys.259/. Inwolucja ta jest więc utworzona przez dwa pęki równe o wspólnym wierzchołku i zwrotach przeciwnych. Dwusieczne kątów między prostemi podwójnemi stanowią parę sprzężonych prostych prostokątnych tej inwolucji.

Zagadnienie wyznaczenia pary prostokątnych prostych sprzężonych inwolucji jest przypadkiem szczególnym zadania.

Dane są dwie inwolucje na wspólnej podstawie albo o wspólnym wierzchołku; znaleźć parę sprzężonych elementów zarówno w jednej, jak i w drugiej inwolucji.



Rys. 259.

Niech będą np. dwie inwolucje prostych o wspólnym wierzchołku:

$$S(a_1 a_2\, b_1 b_2) \text{ i } S(c c'\, d d').$$

Na dowolnym kole k, przechodzącem przez S wyznaczmy punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C, C', D i D' w których proste a_1, a_2, b_1, b_2, c, c', d i d' przecinają to koło. Wyznaczmy punkt P jako przecięcie prostych $A_1 A_2$ i $B_1 B_2$ oraz punkt Q jako przecięcie prostych CC' i DD'. Jeżeli prosta PQ przecina koło k w punktach M_1 i M_2, to proste $SM_1 \equiv m_1$ i $SM_2 \equiv m_2$ są sprzężone zarówno w pierwszej, jak w drugiej inwolucji. Zagadnienie nie ma więc rozwiązania tylko wtedy, gdy prosta PQ

jest zewnętrzną względem koła. Łatwo się przekonać, że wówczas punkty zetknięcia I_{12} i J_{12} stycznych do koła, wyprowadzonych z punktu P, przegradzają punkty zetknięcia H i K stycznych, wyprowadzonych z punktu Q; skąd wynika, że zagadnienie nie ma rozwiązania jedynie wtedy, gdy obie inwolucje są hyperboliczne i gdy elememty podwójne jednej z nich przegradzają elementy podwójne drugiej.

__§ 137. Inwolucja hyperboliczna, paraboliczna i eliptyczna.__ W artykule poprzednim nazwaliśmy inwolucję hyperboliczną, paraboliczną lub eliptyczną, zależnie od tego, czy ma dwa, jeden, lub czy nie ma żadnego elementu podwójnego. Okażemy teraz, jak nie wyznaczając elementów podwójnych możemy jednym rzutem oka rozpoznać, którą z tych trzech inwolucji wyznaczają dwie pary elementów w niej sprzężonych.

Niech będzie na prostej p_{12} inwolucja $A_1 A_2 B_1 B_2$ /t.j. inwolucja wyznaczona przez pary punktów sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2 /. Inwolucja ta jest utworzona przez dwa szeregi rzutowe $p_{12}(A_1 A_2 B_1 B_2) \overline{\wedge}$ $\overline{\wedge}\, p_{12}(A_2 A_1 B_2 B_1)$ w ten sposób, że każdemu punktowi prostej p_{12} odpowiada w obu szeregach ten sam punkt. Punkty wzajemne R_1 i Q_2 tych szeregów

/ § 129, II a/ są przeto zjednoczone w pewnym punkcie O , który nazwiemy <u>środkiem inwolucji</u> $A_1 A_2 . B_1 B_2$. Ponieważ iloczyn odległości dwóch punktów odpowiednich A_1 i A_2 lub B_1 i B_2 lub C_1 i C_2 od punktów wzajemnych R_1 i Q_2 jest liczbą stałą, więc

<u>Iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest liczbą stałą</u>

$$OA_1 \cdot OA_2 = OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2 = \cdots$$

Przypuśćmy najpierw, że ta liczba jest dodatnia $+k^2$. Punkty sprzężone np. A_1 i A_2 , muszą leżeć po tej samej stronie środka inwolucji O , a więc albo obydwa po prawej, albo obydwa po lewej jego stronie. Prócz tego łatwo dowieść, że każde dwie pary punktów sprzężonych się nie przegradzają, t.j. że oba punkty jednej pary leżą wewnątrz lub oba zewnątrz punktów drugiej pary. Jest to oczywiste, gdy pary A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2 leżą po przeciwnych stronach środka inwolucji O /rys.260/. Przypuśćmy więc, że pary A_1 i A_2 oraz C_1 i C_2 leżą po tej samej stronie środka inwolucji O . Ponie-

Rys. 260.

waż $OA_1 \cdot OA_2 = OC_1 \cdot OC_2$ więc jeżeli C_1 leży bliżej punktu O niż A_1, to C_2 musi leżeć dalej niż A_2 od punktu O i naodwrót, gdyby C_1 leżał dalej niż A_1 od punktu O, to C_2 leżałby bliżej niż A_2, tak że jedna z tych par punktów obejmie zawsze drugą. Z powyższego wynika, że gdy punkt pewien M_1 porusza się w jedną stronę prostej p_{12}, to sprzężony z nim punkt M_2 porusza się zawsze w stronę przeciwną.

Zupełnie inaczej rzeczy się mają, gdy iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest liczbą ujemną $-k$. Punkty sprzężone muszą oczywiście leżeć po przeciwnych stronach środka inwolucji O. Łatwo dowieść, że każde dwie pary punktów sprzężonych się przegradzają. W samej rzeczy, jeżeli punkt B_1 leży bliżej od środka inwolucji O, niż punkt A_1, to punkt B_2 musi leżeć dalej od O, niż A_2, tak że, gdy B_1 leży między A_1 i A_2, to B_2 musi leżeć na zewnątrz odcinka A_1A_2 /rys. 261/. Gdy zatem pewien punkt M_1

Rys. 261.

porusza się w jedną stronę prostej p_{12} , to sprzężony z nim punkt M_2 porusza się w tę samą stronę.

Przypuśćmy wreszcie, że iloczyn odległości każdych dwóch punktów sprzężonych od środka inwolucji równy jest zeru. Ponieważ iloczyn dwóch liczb tylko wtedy jest zerem, gdy przynajmniej jedna z tych liczb jest zerem, więc wszystkie punkty prostej p_{12} są sprzężone ze środkiem inwolucji O . Punkt ten jest więc także sprzężony sam ze sobą i może uchodzić za punkt podwójny tej inwolucji, zresztą jedyny.

Jeżeli punkt podwójny inwolucji $A_1 A_2\ B_1 B_2$ oznaczymy literą I_{12} , to dla jego wyznaczania mamy równanie:

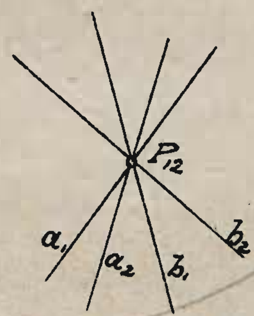
$$OI_{12} \cdot OI_{12} = OI_{12}^2 = \text{stałej} .$$

Równanie to będzie miało dwa pierwiastki rzeczywiste i odrębne tylko wtedy, gdy ta stała będzie liczbą dodatnią $+k^2$; $OI_{12} = \pm k$. Jeżeli stała jest liczbą ujemną, to punkty podwójne nie istnieją; gdy stała jest zerem, punkt podwójny jest jeden tylko, mianowicie środek inwolucji. A zatem:

<u>Inwolucja punktów jest hyperboliczną, gdy którekolwiek dwie pary punktów sprzężonych się nie</u>

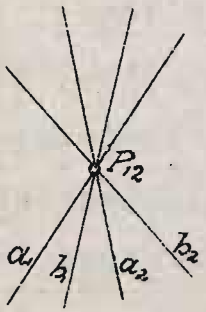
przegradzają, eliptyczna zaś, gdy te pary się przegradzają.

Inwolucja prostych jest hyperboliczna, paraboliczna lub eliptyczna, zależnie od tego, czy inwolucja punktów, wyznaczona przez nią na dowolnej prostej jest hyperboliczna, paraboliczna lub eliptyczna. Stąd wynika, że w inwolucji hyperbolicznej prostych pary prostych sprzężonych się nie przegradzają /rys.262/, w inwolucji eliptycznej te pary się przegradzają /rys.263/, w inwolucji parabolicznej wszystkie proste są sprzężone z jedną jedyną prostą, która jest zatem również sprzężona sama ze sobą i może uchodzić za prostą podwójną, zresztą jedyną.



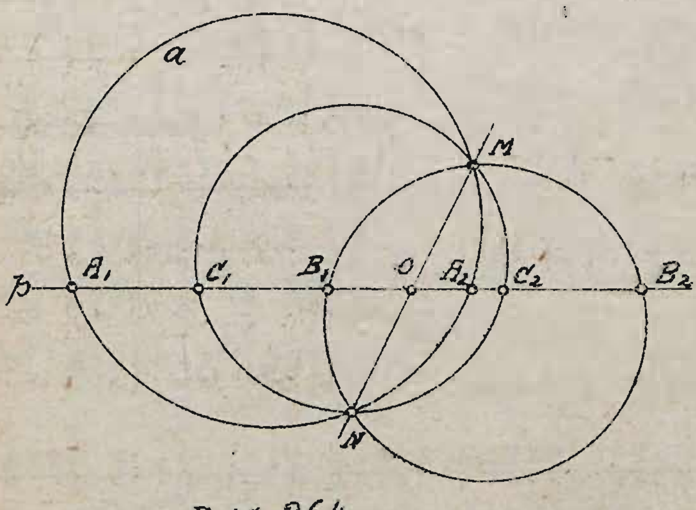
Rys.262

§ 138. Inny sposób wyznaczenia elementów sprzężonych i podwójnych inwolucji. Na tej własności każdej inwolucji punktów, że iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest stały, można oprzeć wykreślenie par punktów sprzężonych i podwój-



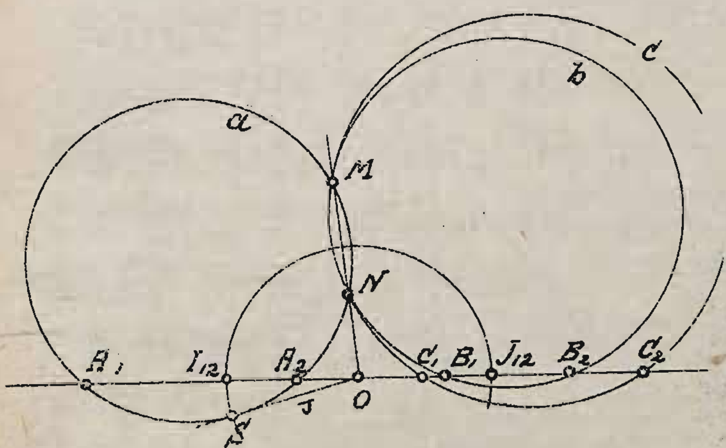
Rys. 253.

nych. Niech będą na prostej p dane dwie pary punktów A_1 i A_2, B_1 i B_2 przegradzających się /rys.264/ lub nie /rys. 265 i 266/. Poprowadźmy dwa przecinające się wzajemnie koła a i b dowolnego promienia, jedno przez punkty A_1 i A_2, drugie przez B_1 i B_2. Połączmy punkty M i N przecięcia się tych kół; powiadam, że prosta MN wyznacza na prostej p środek inwolucji O. W samej rzeczy, z punktu O do każdego z tych kół



Rys. 264

wychodzą dwie sieczne p i MN; iloczyn odległości punktu O od punktów przecięcia każdej siecznej z kołem ma być stały, przytem dodatni, gdy punkt O leży zewnątrz koła, ujemny, gdy O leży wewnątrz niego. Mamy zatem w każdym przypadku:



Rys. 265.

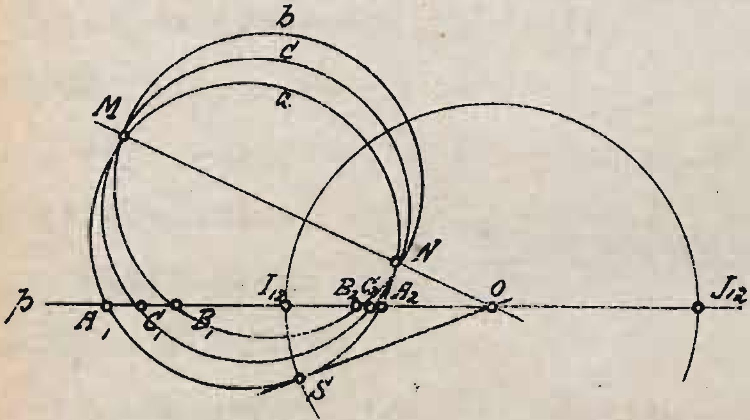
$$OA_1 \cdot OA_2 = OM \cdot ON = OB_1 \cdot OB_2 ;$$

co możliwe tylko wówczas, gdy punkt O jest środkiem inwolucji. Chcąc otrzymać na prostej p parę punktów sprzężonych, prowadzimy przez punkty M i N jakiekolwiek koło c; punkty C_1 i C_2, w których ono przecina prostą p są sprzężone. - W samej rzeczy:

$$OC_1 \cdot OC_2 = OM \cdot ON = \text{stałej.}$$

Z wykreślenia powyższego wynika, że punkt zetknięcia prostej p z kołem przechodzącem przez punkty M i N, i stycznem do p jest punktem podwójnym inwolucji.

Jeżeli pominiemy przypadek paraboliczny, jako już wyczerpany, to zagadnienie wyznaczenia punktów podwójnych inwolucji albo ma dwa rozwiązania, albo nie ma żadnego. - Jeżeli mianowicie punkty M i N leżą po tej samej stronie



Rys. 266.

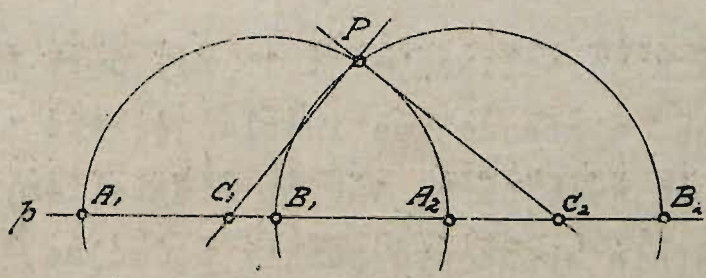
prostej p, to mamy dwa rozwiązania, jeżeli zaś leżą one po przeciwnych stronach prostej p, to nie istnieje żadne. Ale punkty M i N leżą wtedy i tylko wtedy po jednej stronie p, gdy pary A_1 i A_2, B_1 i B_2 się nie przegradzają; po przeciwnych zaś tylko wtedy, gdy te pary się przegradzają.

Jeżeli inwolucja na prostej p jest hyperboliczna t.j. jeżeli każde dwie pary punktów sprzężonych się nie przegradzają, a iloczyn odległości punktów każdej takiej pary od środka inwolucji jest liczbą dodatnią $+k^2$, to znajdziemy punkty podwójne, odmierzając od środka inwolucji po obu jego stronach odcinek $OI_{12} = OJ_{12} = \pm k$. Odcinek ten znajdziemy jako styczną do jednego z kół, przechodzących przez punkty M i N /rys .265 i 266/. W samej rzeczy, wiadomo, że jeżeli z punktu zewnętrznego O do koła poprowadzić styczną s i sieczną p, to styczna OS jest średnią proporcjonalną między całą sieczną OA_1 i jej odcinkiem zewnętrznym OA_2, czyli: $OS^2 = OA_1 \cdot OA_2 = +k^2$; $OS = /k/$. Odmierzając tedy styczną OS na prostej p po obu stronach punktu O, otrzymamy dwa punkty podwójne I_{12} i J_{12}. Będą to oczywiście punkty zetknięcia kół, przechodzących przez punkty M i N i stycznych do prostej p. Punkty te, jak już wiemy, przegradzają harmonicznie każdą parę punktów sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2.

Szczególnie łatwem jest wykreślanie par punktów sprzężonych w <u>inwolucji symetrycznej,</u> t.j. takiej inwolucji hyperbolicznej, której jeden punkt podwójny jest niewłaściwy. Punkty sprzężone A_1 i A_2 są symetryczne względem drugiego punktu podwójnego, który wraz z pierwszym, t.j. z punktem niewłaściwym, przegradza je harmonicznie. Są to więc dwa szeregi "równe" na wspólnej podstawie i o zwrotach przeciwnych.

Dla wyznaczenia par prostych sprzężonych inwolucji dokoła punktu P oraz dla wyznaczenia prostych podwójnych, gdy one istnieją, t.j. w przypadku inwolucji hyperbolicznej, zaleca się przecięcia dwóch danych par prostych sprzężonych a_1 i a_2, b_1 i b_2 prostą jakąkolwiek p i sprowadzenia zadania do wyznaczenia par punktów sprzężonych, wzgl. punktów podwójnych, inwolucji na prostej p, wyznaczonej przez pary punktów A_1 i A_2, B_1 i B_2, w których prosta p przecina proste a_1 i a_2, b_1 i b_2. Jeżeli w dodatku sieczna p będzie równoległa do jednej z czterech danych prostych, np. do b_2, to prosta b_1 z nią sprzężona wyznaczy na siecznej p odrazu środek inwolucji O, przez co znalezienie nowych par punktów znacznie zostanie przyśpieszone. Proste c_1 i c_2, rzucające z punktu P punkty C_1 i C_2, będą parą prostych sprzężonych; proste i_{12} i j_{12}, rzucające punkty podwójne I_{12} i J_{12} będą prostemi podwójnemi. Proste te przegradzają harmonicznie każdą parę a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2 prostych sprzężonych.

Istnieje wszakże jeden przypadek inwolucji eliptycznej dokoła punktu, w którym nietylko pary prostych sprzężonych mogą być bezpośrednio łatwo wyznaczone, ale który nawet nadaje się do tego, aby wykreślanie par punktów sprzężonych każdej inwolucji eliptycznej na prostej było do niego sprowadzone. Mam na myśli <u>inwolucje prostokątną</u>, w której proste sprzężone są do siebie prostopadłe /§ 136. Rys:258/. Jeżeli na prostej p /rys.267/ dane są dwie pary przegradzających się punktów sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2, to łatwo znaleźć jeden z dwóch punktów P lub Q, z których odcinek A_1A_2 oraz B_1B_2 widać pod kątem prostym. W tym celu na A_1A_2 oraz na B_1B_2 zakreślamy koła jak na średnicach i niech P będzie jednym z dwóch punktów przecięcia się tych kół. Proste PA_1 i PA_2 oraz PB_1 i PB_2 są prostopadłe, wyznaczona przez te dwie



Rys. 267.

pary prostopadłych prostych inwolucja nie może zatem różnić się od inwolucji prostokątnej perspektywicznej z daną inwolucją punktów. Jeżeli chcemy znaleźć punkt C_2, sprzężony z dowolnym punktem C_1, łączymy PC_1 i w punkcie P wystawiamy do PC_1 prostopadłą, która przetnie prostą p w szukanym punkcie C_2. Łatwo spostrzegamy, że wykreślenie to nie różni się zasadniczo od wykreślenia, podanego na Rys.264.

§ 139. Punkty i proste urojone. W przypadku inwolucji eliptycznej równanie dla wyznaczenia odległości punktów podwójnych od środka inwolucji

$$OI_{12}^2 = -k^2$$

ma dwa pierwiastki urojone $OI_{12} = \pm ki$; możemy wtedy powiedzieć, że same te punkty podwójne są urojone.

W przypadku hyperbolicznym, t.j. gdy pary punktów sprzężonych, wyznaczające inwolucję, się nie przegradzają, te dwie pary, jak to widzieliśmy, pozwalają istotnie wyznaczyć punkty podwójne, które nawzajem wyznaczają inwolucję. W wielu zadaniach możnaby zatem niewątpliwie zastąpić te dwa punkty przez dwie pary punktów sprzężonych inwolucji hyperbolicznej, przez owe punkty podwójne wyznaczonej. Naturalnie, takie zastępstwo nie miałoby żadnego praktycznego znaczenia, gdyż naogół nie upraszczałoby, a raczej utrudniałoby każde zadanie. Atoli inaczej rzeczy się mają w przypadku inwolucji eliptycznej; tutaj punkty podwójne są urojone, t.j. jako punkty w dotychczasowem rozumieniu nie istnieją. To, co byłoby dziwactwem w przypadku hyperbolicznym, stać się może, jak zobaczymy, pożytecznem uogólnieniem w przypadku eliptycznym. Zastępując bowiem termin: inwolucja eliptyczna na prostej" przez termin "punkty urojone" osiągnąć możemy, dzięki daleko idącej analogji między punktami rzeczywistemi i urojonemi, pożądaną jednolitość i prostotę w brzmieniu wielu twierdzeń i nieocenione wskazówki przy rozwiązaniu licznych zadań. Jeżeli zatem na prostej p dana jest inwolucja eliptyczna, np. przez dwie pary przegradzających się punktów sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2, to powiemy, że dane są na tej prostej dwa punkty urojone sprzężone, mianowicie punkty podwójne tej inwolucji. Podobnież, jeżeli dokoła punktu P dana jest inwolucja eliptyczna, np. przez dwie pary przegradzających się prostych sprzężonych a_1 i a_2, b_1 i b_2, to powiemy że dane są wychodzące z tego punktu dwie proste urojone sprzężone.

Jeżeli inwolucja eliptyczna dokoła punktu P jest w perspektywie z inwolucją /oczywiście także eliptyczną/ na prostej p, to mówimy, że proste urojone, określone przez inwolucję dokoła punktu P, oraz punkty urojone, określone przez inwolucję na prostej p, należą do siebie wzajemnie /albo że proste urojone "przechodzą" przez punkty urojone, albo że punkty urojone "leżą" na prostych urojonych/.

W ten sposób przez każde dwa punkty urojone sprzęż. przechodzi jedna prosta rzeczywista /mianowicie podstawa inwolucji, która je określa/ i nieskończenie wiele par prostych urojonych sprzężonych; nawzajem, na każdych dwóch prostych urojonych sprzężonych leży jeden punkt rzeczywisty /mianowicie wierzchołek inwolucji, która te proste określa/ i nieskończenie wiele par punktów urojonych sprzężonych. Każdy punkt rzeczywisty można "połączyć" z każdemi dwoma punktami urojonemi, sprzężonemi, rzucając z pierwszego inwolucję określającą dwa drugie; proste, łączące te dwa punkty urojone z punktem rzeczywistym będą rzeczywiste i zjednoczone tylko wtedy, gdy punkt rzeczywisty leży na podstawie inwolucji, określającej punkty urojone. Nawzajem, każda prosta rzeczywista "przecina" każde dwie proste urojone sprzężone w punktach, które będą rzeczywiste i zjednoczone tylko wtedy, gdy prosta rzeczywista przechodzi przez wierzchołek inwolucji, określającej proste urojone.

Na zasadzie przytoczonych wyżej własności mogłoby się zdawać, że punkty i proste urojone mają wogóle wszystkie te same własności, co punkty i proste rzeczywiste. Przed tak daleko posuniętą identyfikacją należy jednak przestrzedz: analogja między utworami rzeczywistemi a urojonemi nie dotyczy wszystkich tych własności, które zależą od uporządkowania elementów /np. przegradzanie lub nieprzegradzanie dwóch par elementów/; dzięki temu np. pojęcie odcinka i kąta urojonego nie może być geometrycznie określone. Wiele natomiast własności punktów i prostych rzeczywistych, a mianowicie te, które dotyczą wzajemnego należenia punktów i prostych zachodzą również dla punktów i prostych urojonych, dzięki czemu wyniki, dotyczące elementów rzeczywistych dadzą się nieraz uogólnić dla elementów urojonych.

§ 140. Proste jednorodne i punkty kołowe. Na szczególną uwagę zasługują proste urojone sprzężone, określone przez inwolucję prostokątną dokoła jakiegokolwiek właściwego punktu. Są to t.zw. proste jednorodne. Wszystkie one przechodzą przez dwa urojone sprzężone punkty niewłaściwe, które nazywamy punktami kołowemi i które są określone przez t.zw. inwolucję absolutną na prostej niewłaściwej, t.j. przez inwolucję kierunków wzajemnie prostopadłych. Jak zobaczymy później, przez te punkty urojone przechodzą również wszystkie koła leżące w płaszczyźnie uważanej, zarówno rzeczywiste, jak urojone.

ROZDZIAŁ XIII.

STOŻKOWE I STOŻKI.

§ 141. Pespektywiczność dwóch układów płaskich. Rzucając figurę F, leżącą w płaszczyźnie S na płaszczyznę P z punktu O, nieleżącego na żadnej z tych płaszczyzn, otrzymujemy figurę F_1, która z figurą F znajduje się w pewnym związku geometrycznym, polegającym na tem, że