C Z Ę Ś Ć V.

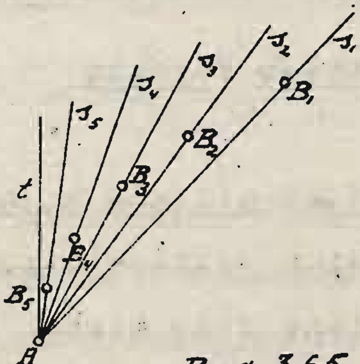
KRZYWE I POWIERZCHNIE W OGÓLNOŚCI.

ROZDZIAŁ XV. KRZYWE PŁASKIE.

§ 198. Krzywa płaska jako miejsce i jako obwiednia. Przy badaniu stożkowych rzeczywistych rozważaliśmy te krzywe z dwojakiego stanowiska: albo jako miejsce geometryczne, poruszające się według pewnego prawa punktu, który tę krzywę opisuje, albo jako obwiednię poruszającej się według pewnego prawa prostej, która tę krzywą powłóczy. Ta dwoistość określenia tej samej krzywej nie ogranicza się bynajmniej do stożkowych, ale dotyczy wogóle wszystkich krzywych płaskich. Każda krzywa płaska jest zarazem miejscem i obwiednią.

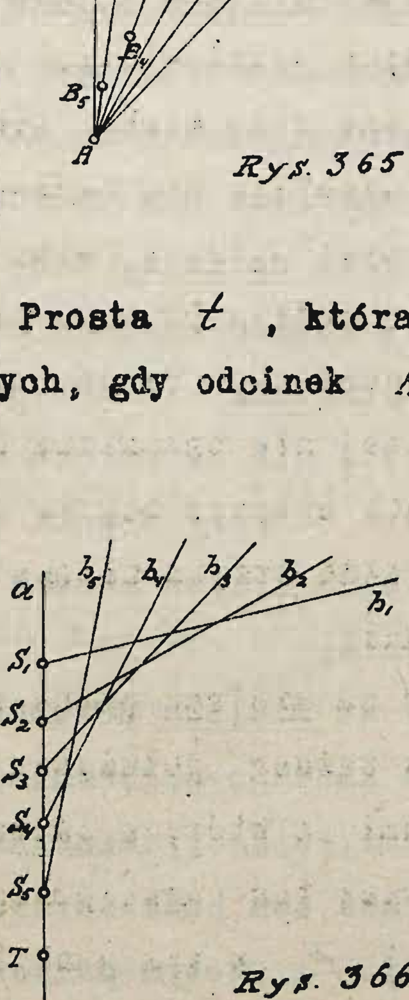
Gdy krzywą k uważamy za miejsce poruszającego się punktu, to możemy dla każdego położenia tego punktu /z pewnemi wyjątkami, o których zaraz będzie mowa/ określić prostą przez ten punkt przechodzącą i zwaną styczną do krzywej k w tym punkcie.

Z pośród położeń poruszającego się punktu obierzmy jedno stałe A /rys.365/ oraz drugie zmienne B i połączymy $AB = s$. Gdy punkt B zbliżać się będzie do punktu A poprzez punkty $B_1, B_2, B_3 \ldots$ krzywej, tak że odcinek AB maleć będzie nieograniczenie, to sieczne: $s_1 = AB_1, s_2 = AB_2, s_3 = AB_3$ i t.d. będą stanowiły ciąg prostych pęku



Rys. 365

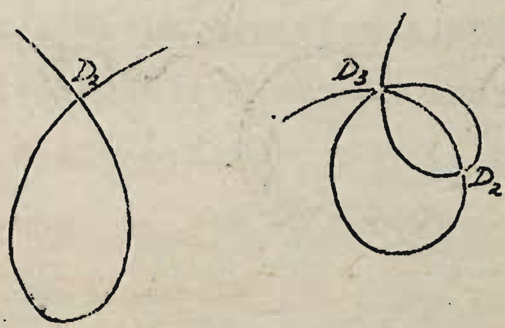
A. Prosta t, która jest granicą ciągu tych siecznych, gdy odcinek AB dąży do zera, nazywa się <u>styczną</u> do krzywej k w punkcie A, punkt A nazywa się jej <u>punktem zetknięcia</u> z krzywą.



Rys. 366.

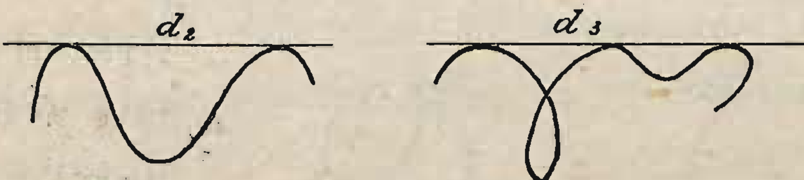
Może się zdarzyć, że punkt B, opisujący krzywą, przejdzie przez ten sam punkt płaszczyzny D dwa lub więcej razy /rys. 366/; punkt taki nazywa się punktem podwójnym względnie n - krotnym. Wogóle punkt ruchomy B za pierwszym razem nadejdzie do punktu D poprzez inne punkty niż za drugim razem, w punkcie podwójnym mamy tedy wogóle dwie styczne, w punkcie n -krotnym, - n stycznych.

Gdy krzywą k uważamy za obwiednią poruszającej się prostej, to możemy dla każdego położenia tej prostej /z pewnemi wyjątkami, o których zaraz będzie mowa/, określić punkt na tej prostej leżący i zwany punktem zetknięcia tej prostej z krzywą k .



Rys. 367

Z pośród położeń poruszającej się prostej obierzmy jedno stałe a /rys. 366/ oraz drugie zmienne b i wyznaczmy punkt przecięcia $a\,b \equiv S$. Gdy prosta b zbliżać się będzie do prostej a po przez położenia $b_1, b_2, b_3 \ldots$ tak, że kąt (ab) maleć będzie nieograniczenie, to punkty $S_1 \equiv ab_1$, $S_2 \equiv ab_2$, $S_3 \equiv ab_3$, i t.d. będą stanowiły ciąg punktów prostej a. Punkt T, który jest granicą ciągu tych punktów, gdy kąt (ab) dąży do zera, nazywa się punktem zetknięcia prostej a z krzywą k, prosta a nazywa się styczną do krzywej w tym punkcie.

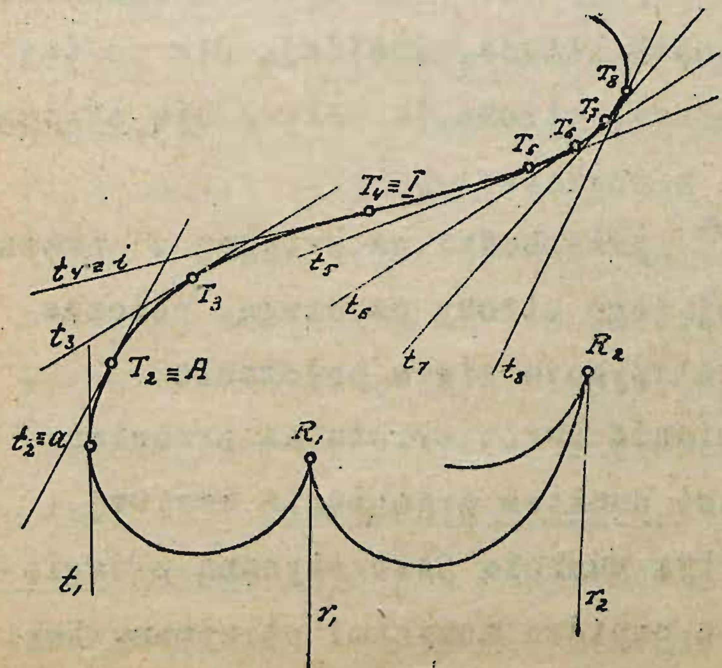


Rys. 368.

Może się zdarzyć, że prosta b, powłócząca krzywą, przystanie do tej samej prostej płaszczyzny d dwa lub więcej razy /rys.368/, prosta taka nazywa się styczną podwójną, względnie n-krotną. Wogóle prosta ruchoma b za pierwszym razem przystanie do prostej d po przejściu innych położeń niż za drugim razem, na stycznej podwójnej leżeć tedy będą wogóle dwa punkty zetknięcia, na stycznej n -krotnej - n punktów zetknięcia.

Możemy odtąd uważać, że krzywa k powstaje jednocześnie obu sposobami: jako miejsce poruszającego się punktu i jako obwiednia stycznej w tym punkcie. Wyobraźmy sobie, że punkt T porusza się po prostej t, podczas gdy ta prosta obraca się jednocześnie dokoła punktu T. W każdem położeniu punktu T prosta t jest styczną do krzywej w tym punkcie; w ten sposób, gdy punkt T opisuje krzywą, prosta t jednocześnie ją powłóczy.

Gdy np. tniemy papier nożycami, to punkt spotkania się dwóch ostrzy nożyc, trzymanych w prawej ręce, posuwa się wzdłuż prostej, podczas gdy lewa ręka nadaje kartce papieru ruch obrotowy dokoła tego punktu. Wychodzi to na to samo, jakgdyby papier był nieruchomy, a prosta przez nożyce wycinana



Rys. 369.

obracała się dokoła tego punktu w przeciwną stronę.

Jeżeli w pewnym punkcie A krzywej /rys.369/ ani ruch punktu T po prostej t, ani obrót tej prostej dokoła punktu T nie zmienia zwrotu, t.j. gdy punkt T przechodzi na prostej t z jednej strony punktu A na drugą, a jednocześnie ta prosta przechodzi z jednej strony prostej a na drugą, to punkt A i styczna a nazywają się punktem zwyczajnym i styczną zwyczajną krzywej. Takie są np. wszystkie punkty łuku, wycinanego nożycami z papieru, jeżeli w ciągu wycinania ruch nożyc nie został zatrzymany, a kartka papieru była obracana wciąż w tę samą stronę. Z określenia punktu zwyczajnego wynika, że punkty krzywej nieskończenie mu bliskie, a po obu jego stronach leżące, znajdują się po tej samej stronie stycznej, strona ta nazywa się stroną wklęsłości krzywej w punkcie A.

Jeżeli punkt T przechodzi na prostej t przez punkt I z jednej jego strony na drugą, podczas gdy prosta t zatrzymuje się w położeniu i, aby natychmiast zmienić zwrot obrotu na przeciwny, to punkt I jest punktem przegięcia krzywej, a styczna i w tym punkcie jest styczną przegięcia. Przy wycinaniu papieru nożycami otrzymamy taki punkt w chwili, gdy nie przerywając prawą ręką ruchu nożyc, zmienimy lewą ręką nagle zwrot obrotu kartki papieru.

Jest rzeczą oczywistą, że punkty krzywej nieskończenie bliskie punktu przegięcia, a po obu jego stronach leżące, znajdują się po przeciwnych stronach stycznej przegięcia; styczna ta przechodzi zatem w punkcie przegięcia z jednej strony krzywej na drugą.

Jeżeli prosta t nie przestaje w pewnem położeni. r_1, obracać się w tę samą wciąż stronę, podczas gdy punkt T, dokoła którego jej obrót się odbywa, zatrzyma się w punkcie R_1, aby zmienić zwrot swego ruchu na tej prostej, to prosta r_1, nazywa się styczną zwrotu, a punkt R_1 punktem zwrotu I rodzaju. Zapomocą krajania papieru nożycami trudniej taki punkt otrzymać, ponieważ nożyce krają w jedną tylko stronę; należałoby więc, doszedłszy do punktu R_1 i przerwawszy krajanie, wykonać dodatkowo obrót papieru o 180^0, poczem, rozpocząwszy krajanie, obracać papier w tę samą stronę, co poprzednio.

Wreszcie może się zdarzyć, że w pewnej chwili jednocześnie ulegają zatrzymaniu i doznają zmiany zwrotu zarówno ruch punktu T wzdłuż prostej t, jak i obrót prostej t dokoła punktu T. Punkt R_2, w którym to następuje, nazywa się punktem zwrotu II rodzaju albo dziobem. Dziób krzywej jest przeto zjednoczonym punktem przegięcia i punktem zwrotu I rodzaju. Aby otrzymać taki punkt na krzywej wycinanej nożycami z papieru, należałoby dosiągłszy punktu R_2, przerwać krajanie, wykonać obrót papieru o 180^0, poczem, rozpocząwszy krajanie, obracać papier w przeciwną stronę niż poprzednio.

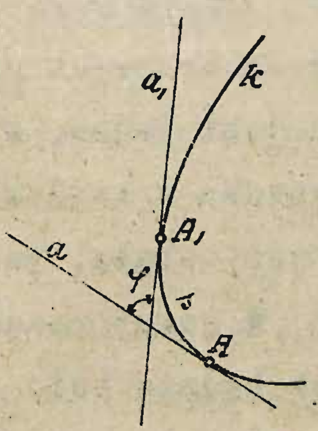
Punkty i styczne: podwójne, wielokrotne, przegięcia i zwrotu nazywamy punktami i stycznemi osobliwemi. Z samego określenia tych elementów krzywej wynika, że pomiędzy punktami i stycznemi osobliwemi istnieje wzajemność dwoista.

Wzajemnemi są mianowicie: punkt podwójny i styczna podwójna, punkt przegięcia i styczna zwrotu, punkt zwrotu i styczna przegięcia.

§ 199. Koło krzywizny. Ponieważ krzywa k powstaje przez obrót prostej t dokoła jej punktu T, który się na niej jednocześnie porusza, więc wszystkie własności krzywej w pobliżu danego jej punktu A zależeć muszą wyłącznie od ilorazu szybkości tych dwóch ruchów w chwili, gdy punkt T przechodzi przez punkt A, t.j. od krzywizny k w tym punkcie. Ujmiemy to określenie nieco ściślej.

Niech będą na krzywej k punkt zwyczajny A i punkt jakikolwiek A_1 /rys.370/. Poprowadźmy w tych punktach styczne a i a_1. Długość wyprostowanego łuku AA_1 oznaczamy przez s; naturalną miarę kąta $(a\,a_1)$ oznaczamy przez φ. Krzywizną - średnią krzywej k między punktem A i A_1 nazywamy iloraz:

$$K_1 = \frac{\varphi}{s};$$

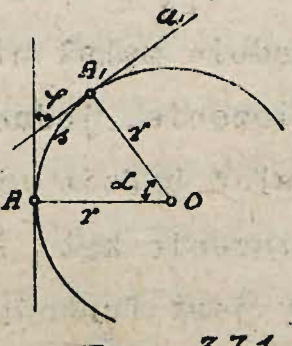


Rys. 370

Gdy punkt A_1 zbliżać się będzie ku punktowi A, to łuk s będuie malał nieograniczenie, jednocześnie maleć będzie nieograniczenie kąt φ, który jest funkcją łuku s. Krzywizną rzeczywistą krzywej k w punkcie A nazywa się granica ilorazu $\frac{\varphi}{s}$, gdy s dąży do zera, czyli

$$K = \lim_{s=0} \frac{\varphi(s)}{s} = \frac{d\varphi}{ds};$$

Nieskończenie malejący łuk ds nazywamy elementem krzywej k; zależny od niego, nieskończenie malejący kąt $d\varphi$ między stycznemi w końcach elementu ds nazywamy kątem styczności. Możemy więc powiedzieć, że krzywizną w punkcie A krzywej nazywa się iloraz kąta styczności przez odpowiadający mu element krzywej w punkcie A. W punkcie przegięcia I kąt styczności $d\varphi = 0$, a więc krzywizna w tym punkcie $K = 0$. W punkcie zwrotu I rodzaju R_1: $ds = 0$; $K = \infty$.



Rys. 371.

Wśród krzywych płaskich jest jedna, której krzywizna w każdym punkcie jest stała; jest to koło. W samej rzeczy, niech będzie koło O /rys.371/ promienia r i na nim dwa punkty A i A_1, oraz styczne a i a_1 w tych punktach, kąt między temi stycznemi φ = kątowi α między promieniami punktów A i A_1, łuk $AA_1 = s = r \cdot \alpha$, a więc krzywizna średnia

$$K = \frac{\varphi}{s} = \frac{\alpha}{r\alpha} = \frac{1}{r};$$

Gdy A_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do A i krzywizna średnia dążyć będzie do krzywizny rzeczywistej w punkcie A, wartość $\frac{1}{r}$ jako liczba stała nie ulegnie zmianie, tak, że krzywizna rzeczywista w punkcie A:

$$K = \frac{1}{r};$$

Krzywizna koła w każdym jego punkcie jest przeto liczbą stałą i równa się odwrotności promienia koła.

Przypuśćmy teraz, że mamy krzywą k, której krzywizną rzeczywistą K w zwyczajnym jej punkcie A obliczyliśmy na zasadzie jej równania, biorąc pochodną kąta φ względem łuku s. Zamiast notować otrzymaną liczbę K moglibyśmy zanotować jej odwrotność, t.j. podać promień koła tej samej krzywizny, czyli t.zw. promień krzywizny w punkcie A:

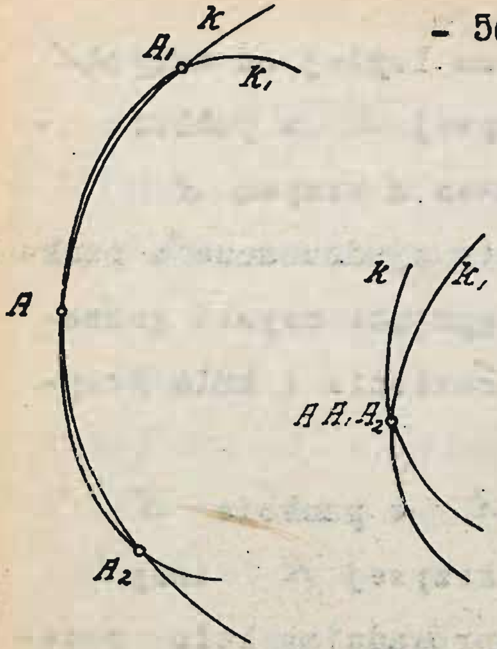
$$r = \frac{1}{K};$$

Jeżeli koło to wykreślimy w ten sposób, by jego okrąg przechodził przez punkt A, by jego styczna w tym punkcie przystała do stycznej a krzywej k i by punkty nieskończenie bliskie punktu A na krzywej k i na kole k_1 leżały po tej samej stronie wspólnej stycznej a, to te dwie krzywe posiadać będą we wspólnym punkcie A wspólną styczną a i wspólną krzywiznę K. Aby wyznaczyć środek K koła k, wystawmy w punkcie A do stycznej a prostopadłą, czyli t.zw. <u>normalną</u> krzywej k w punkcie A i po stronie wklęsłości od punktu A odmierzmy na tej normalnej promień krzywizny $r = \frac{1}{K}$. Z otrzymanego w ten sposób punktu K zakreślmy koło k_1 promieniem $r = \frac{1}{K} = KA$; koło to nazywamy <u>kołem krzywizny</u>, jego środek K - <u>środkiem krzywizny</u> w punkcie A.

O każdem kole, które ma z krzywą k wspólny punkt A i wspólną z nim styczną a, możemy powiedzieć, że ma z tą krzywą wspólne dwa punkty, zjednoczone w punkcie A. Miejscem geometrycznem środków tych kół jest normalna n krzywej k w punkcie A; wśród tych kół jedno, mianowicie koło krzywizny k_1, ma z krzywą k nadto wspólną krzywiznę k i dzięki temu lepiej od wszystkich innych przylega do krzywej k w pobliżu punktu A. Koło k_1 ma zatem z krzywą k wspólne przynajmniej 3 punkty zjednoczone w punkcie A. Stąd wynika następujące czysto geometryczne określenie środka promienia i koła krzywizny:

Poprowadźmy do krzywej k w punkcie A styczną a i obrawszy na krzywej k inny punkt jakikolwiek A_2 poprowadzimy koło, przechodzące przez punkty A i A_2 oraz styczne do a. Zbliżajmy teraz punkt A_2 do punktu A i w każdem położeniu punktu A_2 wyznaczajmy koła, przechodzące przez A i A_2 i styczne do a. Środki tych kół $K', K'', K'''...$ leżeć będą oczywiście na normalnej n. Środkiem krzywizny krzywej k w jej punkcie A nazywa się punkt K normalnej n, który jest granicą ciągu punktów $K', K'', K'''...$, gdy odcinek AA_2 dąży do zera.

Gdy dwie krzywe k i k_1 mają $1, 3, 5...$ i wogóle nieparzystą ilość punktów wspólnych, to punkt opisujący jedną z tych krzywych po przejściu przez wszystkie punkty wspólne musi wydostać się na drugą stronę drugiej krzywej. Ponieważ koło

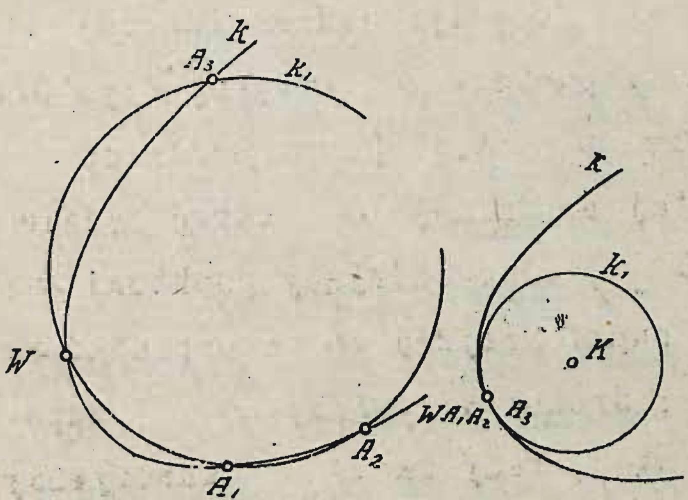


Rys. 372.

krzywizny ma z krzywą przynajmniej trzy punkty zjednoczone wspólne, więc będzie ono wogóle przechodzić w punkcie A z jednej strony krzywej k na drugą /rys. 372/, podobnie jak styczna w punkcie przegięcia przechodzi z jednej strony krzywej na drugą /rys.369/.

Gdy dwie krzywe k i k_1 mają $2, 4, 6 \ldots$ i wogóle parzystą ilość punktów wspólnych, to punkt opisujący jedną z tych krzywych po przejściu przez wszystkie punkty wspólne musi pozostać po tej samej stronie drugiej krzywej. Otóż na krzywej mogą się zdarzyć takie punkty zwyczajne W, że koło krzywizny, wyznaczone, jak zawsze przez punkt W i dwa punkty nieskończenie mu bliskie A_1 i A_2 /rys.373/ przecina ją jeszcze w jednym punkcie nieskończenie bliskim A_3. Punkty, posiadające tę własność, nazywają się wierzchołkami krzywej.

Ponieważ promień krzywizny jest odwrotnością



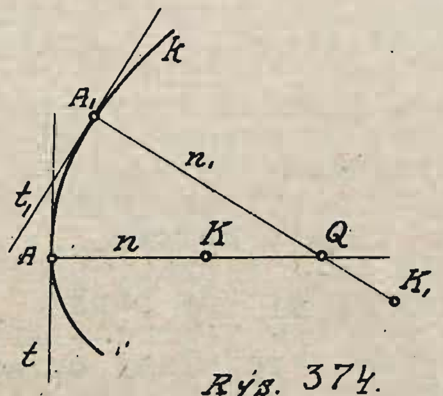
Rys. 373.

krzywizny rzeczywistej, zatem w punkcie przegięcia promień krzywizny jest nieskończenie wielki, koło krzywizny zniekształca się do prostej, a mianowicie do stycznej przegięcia; w punkcie zwrotu I rodzaju krzywizna jest nieskończona, promień krzywizny równy więc jest zeru; koło krzywizny wyrodnieje do punktu, a mianowicie do punktu zwrotu.

§ 200. Ewoluta i ewolwenta. Gdy punkt T opisuje krzywą k, to środek krzywizny opisuje inną krzywą, zwaną odwijającą albo ewolutą krzywej k. Nawzajem, krzywa k nazywa się odwiniętą albo ewolwentą krzywej.

Ewoluta jest miejscem geometrycznem środków krzywizny ewolwenty. W punktach zwrotu ewoluta dotyka ewolwenty; punkty ewoluty, które odpowiadają punktom przegięcia ewolwenty, leżą w nieskończoności.

Ewoluta krzywej k może być jednak inaczej jeszcze określona. W punkcie A krzywej /rys.374/ poprowadźmy normalną n , t.j. prostopadłą do stycznej t . Na tej normalnej n leżeć będzie środek krzywizny K , odpowiadający punktowi A . Weźmy inny jeszcze punkt krzywej A_1 i poprowadźmy w nim normalną n_1 ; środek krzywizny K_1 , odpowiadający punktowi A_1 , leży na n_1 . Oznaczywszy punkt przecięcia normalnych n i n_1 przez Q , zbliżajmy punkt A_1 nieograniczenie do punktu A ; środek krzywizny K_1 , leżąc wciąż na normalnej n_1 , zbliżać się będzie nieograniczenie do środka K , leżącego na n . Dzięki temu punkt Q również zbliżać się musi do K , tak, że granicą punktu Q , gdy A_1 zbliża się nieograniczenie do A , jest środek krzywizny K krzywej k w punkcie A . Gdy teraz punkt A opi-



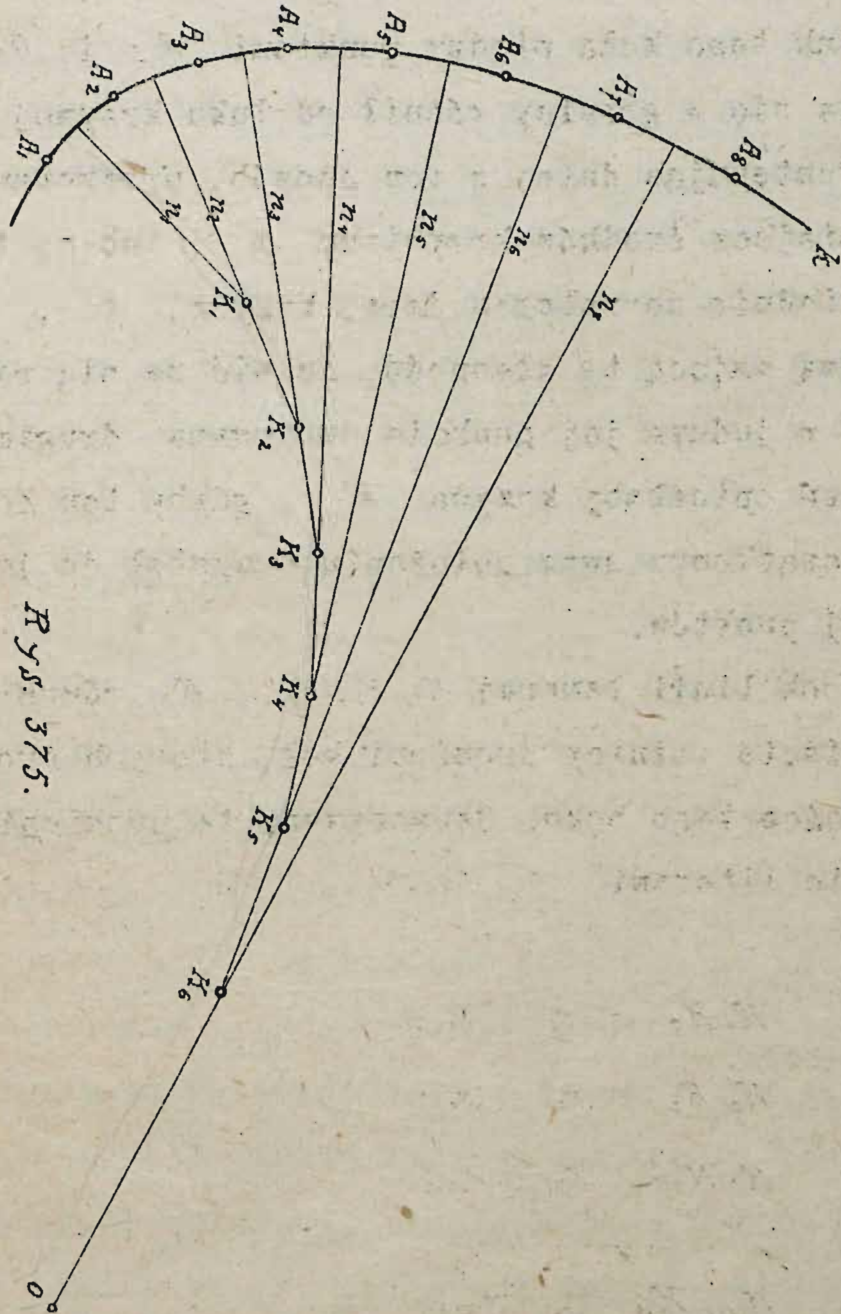
Rys. 374.

sywać będzie krzywą k, to normalna n w tym punkcie powłóczyć będzie krzywą k, która jest miejscem geometrycznem środków krzywizny, czyli ewolutą krzywej k. Ewoluta jest obwiednią normalnych ewolwenty.

Pochodzenie nazw: ewoluta = odwijająca i ewolwenta = odwinięta tłomaczy następujące rozważanie:

Weźmy na krzywej k /rys.375/ dowolną ilość punktów, które oznaczmy w kolei ich następstwa $A_1, A_2, A_3, A_4 ...$; jeżeli odległości każdych dwóch punktów sąsiednich maleć będzie nieograniczenie, to każdy z łuków $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4 ...$ można będzie uważać za odcinek prostej, albo za łuk koła przechodzącego przez dwa końce każdego łuku krzywej i jeszcze jeden punkt następny, popełniając przytem błąd nieskończenie mały rzędu wyższego niż pierwszy. W środku odcinka $A_1 A_2$ wystawmy do niego prostopadłą n_1, w środku odcinka $A_2 A_3$ wystawmy do tego odcinka prostopadłą n_2 i t.d. Proste $n_1, n_2, n_3 ...$ przetną każda następną w punktach $K_1, K_2, K_3 ...$ Otrzymamy w ten sposób linję łamaną, której wierzchołkami będą te punkty, a bokami proste n_1, n_2, n_3;

łamana ta zbliżać się będzie do pewnej krzywej k', gdy łamana $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots$ - zbliżać się będzie do krzywej k. Odcinki $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4 \ldots$ stawać się będą elementami krzywej k, prostopadłe $n_1, n_2, n_3 \ldots$ jej normalnemi, a zarazem stycznemi do krzywej k'. Granicą więc linji łamanej $K_1 K_2 K_3 K_4 \ldots$ będzie ewoluta krzywej k. W dowolnym punkcie O ostatniego boku tej łamanej umocujmy nić giętką i nierozciągliwą i naprężywszy nawińmy ją na linję łamaną $K_1 K_2 K_3 \ldots$, drugi zaś koniec tej nici z przymocowanym do niego ołówkiem umieśćmy w punkcie A_2 i następnie odwijajmy naprężoną nić, dopóki jej koniec nie przystanie do punktu A_3. Koniec nici opisze łuk koła o środku K_1, przechodzącego przez punkty A_1, A_2, A_3; koło to stanie się kołem krzywizny w punkcie A_2, gdy te trzy punkty zbliżać się będą do siebie nieograniczenie. Nieskończenie mały łuk tego koła między punktami A_2 i A_3 nie będzie wtedy różnił się od łuku krzywej między temi punktami. Odwijając dalej nić tak, aby jej koniec przeniósł się z punktu A_3 do punktu A_4, wykreślimy znowu łuk koła o środku K_2, które przechodzi przez punkty A_2, A_3 i A_4 i które stanie



Rys. 375.

się kołem krzywizny w punkcie A_3, gdy te trzy punkty zbliżą się do siebie nieograniczenie; dzięki temu łuk tego koła między punktami A_3 i A_4 nie będzie się w granicy różnił od łuku krzywej k. Postępując dalej w ten sposób, przekonamy się, że miejsce środków krzywizny K, lub co to samo, obwiednia normalnych danej krzywej k, jest krzywą mającą tę własność, że nić na nią nawinięta i w jednym jej punkcie umocowana, drugim swym końcem opisałaby krzywą k, gdyby ten koniec w początkowym swym położeniu przystał do jednego z jej punktów.

Każdy bok linji łamanej $K_1, K_2, K_3 \dots K_n$ równa się oczywiście różnicy promieni kół, których środkami są końce tego boku. Oznaczywszy te promienie odpowiednio literami $r_1, r_2, r_3, \dots r_n$, mamy:

$$K_1K_2 = r_2 - r_1;$$

$$K_2K_3 = r_3 - r_2;$$

$$K_3K_4 = r_4 - r_3;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$K_{n-1}K_n = r_n - r_{n-1};$$

Dodając te równości stronami, otrzymamy łamaną:

$$K_1K_n = r_2 - r_1 + r_3 - r_2 + r_4 - r_3 + \ldots$$
$$\ldots r_{n-1} - r_{n-2} + r_n - r_{n-1} = r_n - r_1 ;$$

czyli: obwód linji łamanej $K_1 K_2 K_3 K_4 \ldots K_n$ = różnicy promieni kół, których środki są końcami tej łamanej. Przechodząc do granicy, mamy twierdzenie:

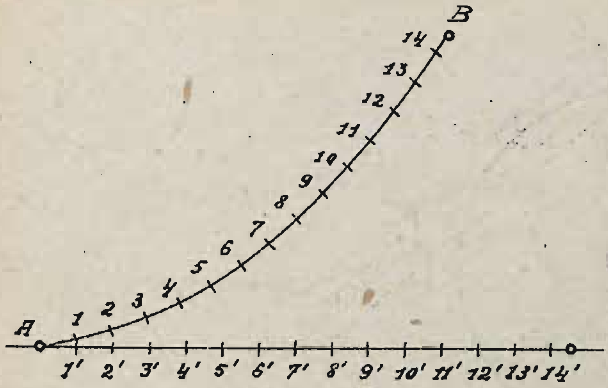
Długość łuku ewoluty równa się różnicy promieni krzywizny ewolwenty w punktach odpowiadających końcom tego łuku.

Stąd wynika możliwość rektyfikacji łuków tych krzywych, dla których ewolwenty umiemy wyznaczać promienie krzywizny. Zrobimy z tego później użytek dla cykloidy.

Na zasadzie powyższego twierdzenia możliwą jest inna jeszcze interpretacja ewolwenty. Zostanie ona mianowicie opisana przez punkt A prostej n, toczącej się bez poślizgu po krzywej k. Ewolwenta należy zatem do krzywych, które opisuje punkt sztywno związany z krzywą toczącą się bez poślizgu po innej krzywej stałej. O krzywych tych, zwanych ruletami, będzie mowa w § 202.

Każda krzywa posiada nieskończenie wiele ewolwent, każdy bowiem punkt stycznej, powłóczącej tę krzywą opisuje ewolwentę. Wszystkie te ewolwenty posiadają wspólne normalne, których odcinki, zawarte między dwiema ewolwentami są równe. Krzywe, posiadające tę własność, nazywamy równoległemi.

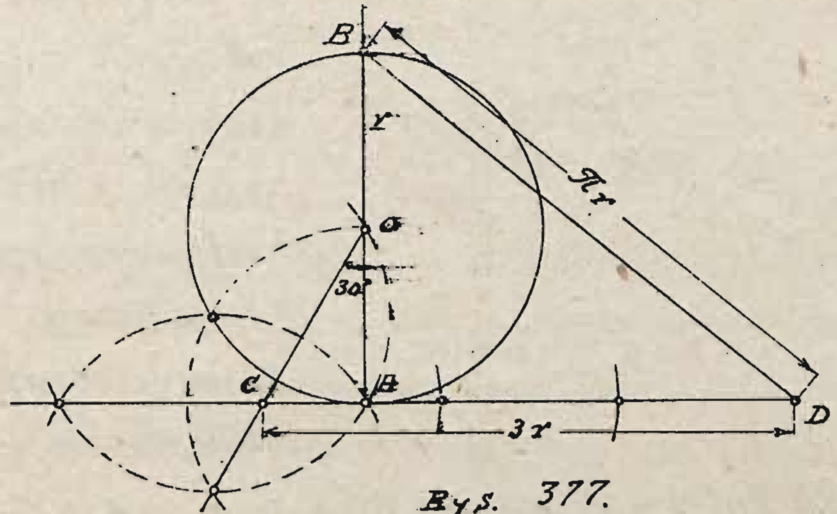
§ 201. Ewolwenta koła. Z rozważań powyższych wynika, że dla wykreślenia ewolwenty danej krzywej trzeba umieć wyprostować dowolny jej łuk. Zadanie to można naogół rozwiązać tylko w przybliżeniu. Jeżeli mamy np. wyznaczyć długość wyprostowanego łuku AB krzywej danej K /rys.376/, to obieramy na nim pewną ilość punktów $1, 2, 3, 4, \ldots$ i następnie na prostej a od punktu A' odmierzamy cięciwę $A1$ do punktu $1'$; od punktu $1'$ cięciwę $1\cdot2$ do punktu $2'$ i t.d. W ten sposób zastępujemy łuki $A1, 1\cdot2, 2\cdot3, \ldots$ cięciwami tej samej nazwy; oczywista, że długość łuku AB będzie wyznaczona tem dokładniej /przynajmniej w teorji/, im więcej punktów pośrednich weźmiemy pomiędzy punktami A i B. Wykreślenie będzie łatwiejsze, gdy punkty $1, 2, 3, \ldots$ będą tak obrane na krzywej, że wszystkie cięciwy $A1, 1\cdot2, 2\cdot3, \ldots$ z wyjątkiem może ostatniej $14\cdot B$ będą równe.



Rys. 376.

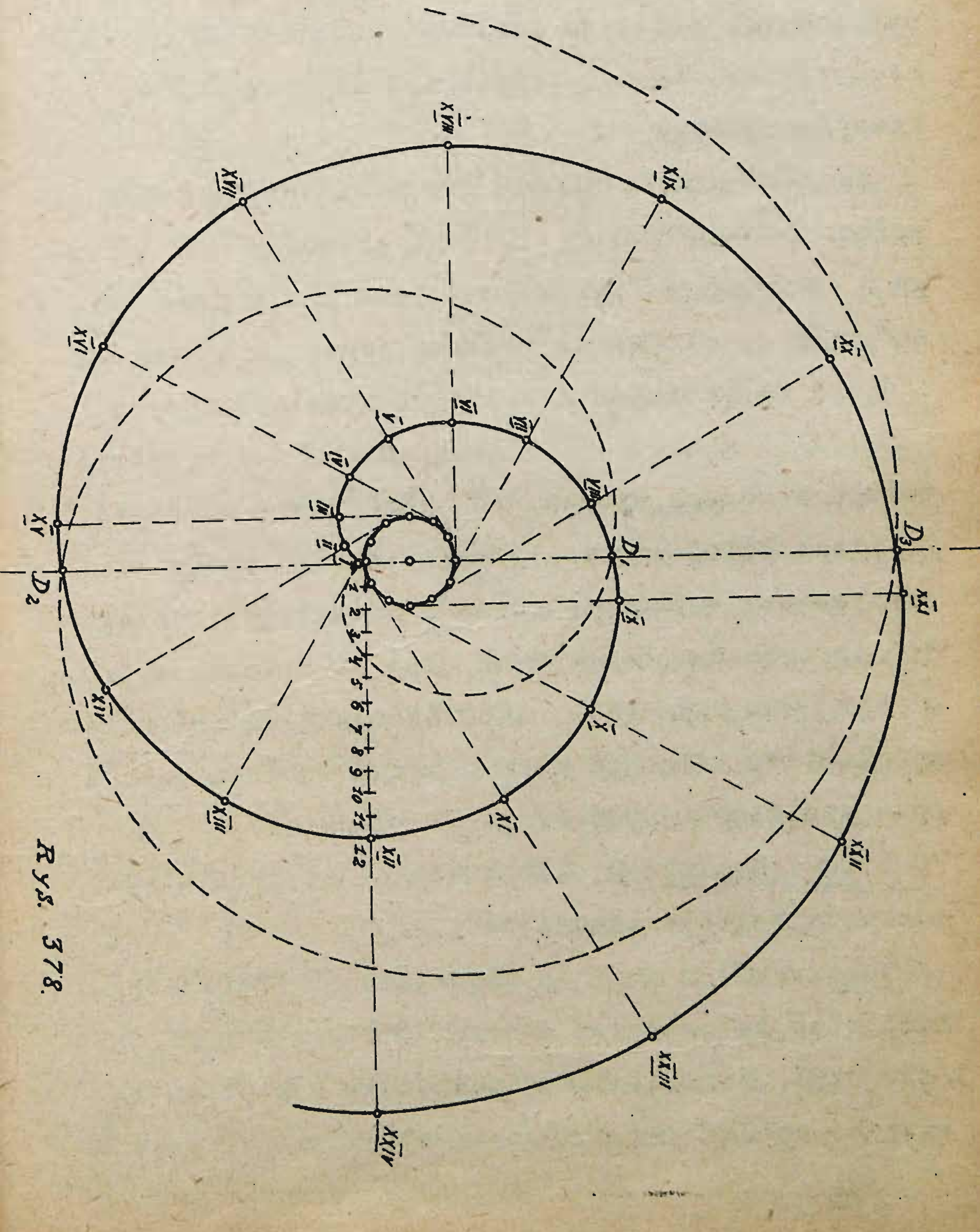
Gdy krzywą, którą mamy wyprostować, jest koło lub jego część wymierna, wtedy najlepiej zastosować sposób Kochańskiego, który ma tę osobliwość, że daje się wykreślić jednym otwarciem cyrkla. W końcu A średnicy AB /rys:377/ kreślimy styczną do koła. Poprowadziwszy promień pod kątem 30° do średnicy AB, odmierzamy od punktu C, w którym ten promień przecina styczną odcinek $CD = 3r$. Odcinek BD, jak łatwo obliczyć $= 3,14153r \approx \pi r$ z dokładnością do 0,0001 r. Przy wyprostowaniu okręgu o średnicy 1 m. błąd jest mniejszy od 0,1 $^m/_m$, a więc jest znacznie mniejszy niż błąd, który dzięki niedokładności narzędzi kreślarskich popełniamy np. przy wyznaczaniu punktu przecięcia dwóch prostych.

Wykreślmy np. ewolwentę koła. Niech będzie koło A /rys.378/; poprowadźmy do niego styczną w punkcie O i od tego punktu odmierzmy na niej



Rys. 377.

długość okręgu, wyznaczoną np. sposobem Kochańskiego. Podzielmy następnie okrąg koła A oraz wyprostowaną jego długość a na jednakową ilość równych części, np. na 12 ; w punktach $1, 2, 3, \ldots 11$. Na stycznej w punkcie 1 odmierzmy odcinek $1\overline{I} = 01$ t.j. $1/12$ wyprostowanego okręgu; punkt $\overline{I}$ będzie punktem ewolwenty koła, a koło o środku 1 i promieniu $1\overline{I}$ będzie kołem krzywizny tej ewolwenty w punkcie $\overline{I}$; podobnież na stycznej w punkcie 2 odmierzamy odcinek $2\overline{II} = 0{\cdot}2$ t.j. $2/12$ wyprostowanego okręgu; punkt $\overline{II}$ będzie znowu punktem ewolwenty; koło o środku 2 i promieniu $2\overline{II}$ będzie ko-

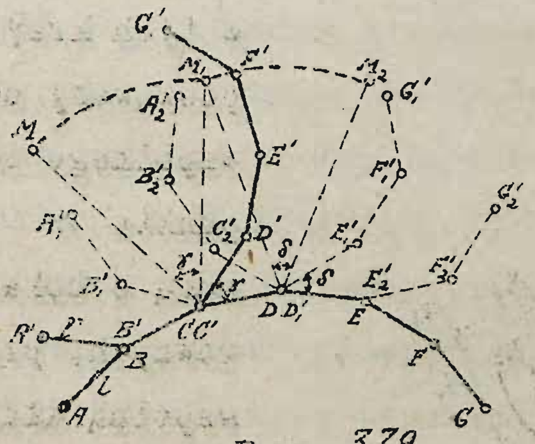


Rys. 378.

łem tej krzywizny w punkcie II. Postępując w ten sposób, dojdziemy do punktu XII, poczem dla wyznaczenia dalszych punktów wystarczy na normalnych $1I, 2II, 3III, \ldots$ odmierzać długość a wyprostowanego okręgu.

Ewolwenta koła składa się właściwie z dwóch gałęzi symetrycznych względem średnicy OA /druga z tych gałęzi wykreślona jest linją przerywaną/, tak że krzywa ta posiada jeden punkt zwrotu O i nieskończenie wiele punktów podwójnych $D_1, D_2, D_3, \ldots$ leżących na osi symetrji po obu stronach środka A. Godzi się zauważyć, że przez obrót ewolwenty koła dokoła środka A otrzymujemy ewolwentę równą i równoległą; odległością tych dwóch krzywych jest mianowicie wyprostowany łuk koła A, odpowiadający kątowi obrotu. Jest to własność wyróżniająca ewolwentę koła od wszystkich innych krzywych płaskich.

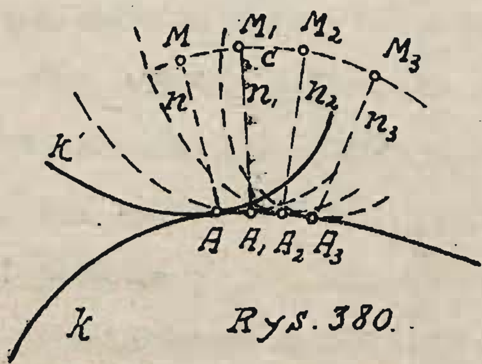
§ 202. Rulety. Niech będą w płaszczyźnie rysunku dwie linje łamane: $l = ABCD \ldots$ i $l' = A'B'C'D' \ldots$ o odpowiednich równych bokach, tak że $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $CD = C'D', \ldots$ /rys. 379/. Niechaj dwa odpowiednie boki tych łamanych, np. BC i $B'C'$ będą zjednoczone; przypuśćmy nadto, że z łamaną l' związany jest sztywno punkt jakikolwiek M. Obróćmy łamaną l' wraz z punktem M dokoła $C \equiv C'$ o kąt $D'CD = \gamma$ tak, żeby bok $C'D'$ przystał do CD; punkt M obróci się dokoła C również o kąt γ i zajmie położenie punktu M_1. Następnie obróćmy łamaną l' wraz z punktem M dokoła $D \equiv D_1'$ o kąt $E_1'DE = \delta$ tak, żeby bok $D_1'E_1'$ przystał do DE;



Rys. 379.

punkt M związany sztywno z łamaną l' obróci się dokoła D o kąt δ i zajmie położenie M_2. Gdy postępować będziemy w ten sposób dalej, tocząc łamaną l' po l bez poślizgu, punkt M będzie zakreślał łuki kół, których środki będą się przenosić od wierzchołka do wierzchołka łamanej l, a kąty środkowe będą za każdym razem sumą kątów spełniających odpowiednie kąty obu łamanych.

Niech będą w płaszczyźnie rysunku dwie krzywe k i k' /rys.380/, z których pierwsza jest stała, a druga ruchoma, i niechaj w pewnej chwili krzywe te będą styczne w punkcie A ; przypuśćmy znowu, że z krzywą ruchomą k' związany jest sztywno punkt jakikolwiek M . Wpiszmy w każdą z tych krzywych, począwszy od wspólnego ich punktu A , łamaną o bokach równych; przytem wspólną długość boków możemy obrać dowolnie małą. Im mniejsza będzie ta długość, tem bardziej łamane l i l' zbliżać się będą do krzywych k i k' . Gdy z łamanemi l i l' postępować będziemy tak jak poprzednio, to punkt M zakreślać będzie łuki kół, których środki będą w każdorazowym punkcie wspólnym łamanych l i l'. Gdy długości boków maleć



Rys. 380.

będą nieograniczenie i łamane l i l' zbliżać się będą do krzywych k i k', to droga opisana przez punkt M zbliżać się będzie do pewnej krzywej C, albowiem punkty $M, M_1, M_2, \ldots$ staną się nieskończenie bliskie. Mówimy wtedy, że krzywa k', zwana tworzącą, toczy się bez poślizgu po krzywej k, zwanej kierownicą. Z określenia krzywej tworzącej wynika, że długości łuków między punktem zetknięcia krzywej tworzącej z kierownicą a punktami tych krzywych, które do siebie niegdyś przystawały lub z czasem przystawać będą, muszą być równe. Krzywa opisana przez punkt M, sztywno związany z krzywą tworzącą, nazywa się ruletą.

Nieskończenie małe odcinki $MM_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots$ możemy uważać za elementy krzywej, wyznaczające kierunki stycznych do rulety w punktach $M, M_1, M_2 \ldots$. Prostopadła wystawiona do odcinka MM_1, w jego środku, przechodzi przez punkt C; gdy punkt M_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do punktu M, prostopadła ta stanie się normalną do rulety w punkcie M. Stąd twierdzenie: Normalna do rulety przechodzi przez każdorazowy punkt zetknięcia krzywej tworzącej z kierownicą.

§ 203. Cykloidy. Wspomnieliśmy poprzednio

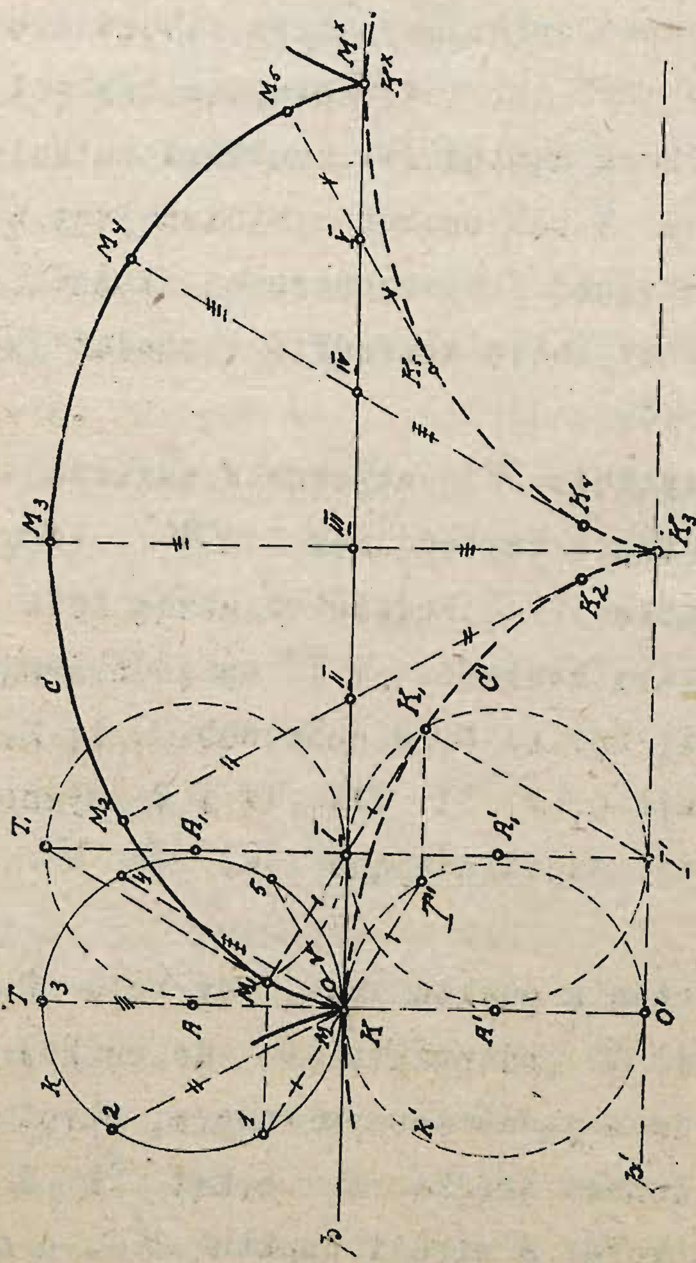
/§ 200/, że każda krzywa płaska może być uważana za ruletę, dla której krzywa tworząca jest prosta, a kierownicą - ewoluta danej krzywej. Często jednak dogodniej będzie za krzywą tworzącą wziąć inną krzywą, np. koło.

Szczególnie ważnemi są rulety, opisane przez punkt związany sztywno z kołem, toczącym się po prostej. Krzywe w ten sposób powstałe nazywamy ogólnie <u>cykloidami.</u> Jeżeli przytem punktem opisującym jest punkt należący do okręgu koła tworzącego, cykloida jest <u>zwyczajną,</u> gdy jest nim punkt zewnętrzny tego koła, mamy cykloidę <u>skurczoną;</u> punkt wewnętrzny koła tworzącego opisuje cykloidę <u>wyciągniętą.</u>

Wykreślmy <u>cykloidę zwyczajną</u> i zbadajmy jej własności. Niech będzie koło k, które toczy się po prostej p /rys. 381/; mamy wykreślić krzywą opisaną przez punkt, należący do okręgu koła k. W ciągu jednego obrotu koła punkt M raz i tylko raz będzie punktem zetknięcia koła tworzącego k z kierownicą p. Ten punkt M obierzmy za początek cykloidy. Po jednym obrocie punkt opisujący znowu stanie się punktem zetknięcia M^x; odległość MM^x, na zasadzie określenia rulety, równa się długości okręgu koła k. Po drugim zupełnym obrocie koła punkt opisujący znowu stanie się punktem zetknięcia M^{xx} i t.d., przytem kształt krzywej pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami zetknięcia będzie taki sam. W ten sposób cykloida jest krzywą perjodyczną, złożoną z nieskończonej ilości równych zwojów. Wystarczy zatem wykreślić i zbadać jeden taki zwój MM^x.

Wykreśliwszy koło A styczne w punkcie M do prostej p, odmierzmy odcinek MM^x równy długości okręgu koła k. Podzielmy okrąg koła oraz jego wyprostowaną długość MM^x na jednakową ilość równych części, np. na 6, w punktach 0, 1, 2, 3, 4 i 5, względnie 0, I, II, III, IV i V. Wyznaczmy punkty cykloidy, odpowiadające $1/6$; $2/6$; $3/6$; ... obrotu koła.

Zmianę położenia punktu M, gdy koło k toczy się po prostej p od punktu O do punktu $\underline{I}$: zawdzięczamy dwom jednoczesnym ruchom: obrotowi punktu M dokoła środka A o kąt $\pi/3$ i przesunięciu całego koła, a więc i punktu M, o odcinek $O\underline{I}$. Aby więc wyznaczyć położenie punktu M po $1/6$ całego obrotu, możemy najpierw obrócić punkt



Rys. 381

M dokoła nieruchomego środka A o kąt $\pi/3$, przez co punkt M dostanie się do punktu $1'$, potem zaś przesunąć punkt $1'$ równolegle do p o odcinek $1M_1 = O\underline{I} = \frac{2\pi r}{6}$. Połączmy $M1$ i $\underline{I}M_1$, punkt M_1 jest wierzchołkiem równoległoboku, zbudowanego na odcinkach $O1$ i $O\underline{I}$; wyznaczymy go więc najprościej, wyprowadzając z punktu $\underline{I}$ odcinek $\underline{I}M_1$ równy i równoległy odcinkowi $O1$. Podobnież aby wyznaczyć punkt M_2, w którym punkt opisujący znajdzie się po $2/6$ obrotu, zbudujmy równoległobok na odcinkach $O2$ i $O\underline{II}$ t.j. z punktu $\underline{II}$ wyprowadzimy odcinek równy i równoległy odcinkowi $O2$. Punkt M_3 znajdziemy, wyprowadzając z punktu $\underline{III}$ odcinek $\underline{III}M_3 \# O3$; i t.d.

Wykreślmy styczne w tak otrzymanych punktach $M, M_1, M_2, M_3, \ldots$ W tym celu zauważmy, że na zasadzie ogólnego, wszystkich rulet dotyczącego twierdzenia /§ 202/ normalne do cykloidy w tych punktach przechodzić muszą przez każdorazowe punkty zetknięcia koła k z prostą p, będą to więc proste $MO, M_1\underline{I}, M_2\underline{II}, M_3\underline{III}, \ldots$ styczne zaś, jako proste do nich prostopadłe, będą prostemi $MT, M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3, \ldots$

Wykreślmy teraz koło k', równe kołu k i styczne do niego oraz do kierownicy p w tym samym punkcie O; równolegle do p poprowadźmy styczną p' do koła k' i załóżmy, że koło to toczy się po prostej p'; jeżeli punktem opisującym będzie punkt $K = M$, to krzywa przezeń opisana będzie cykloidą C', równą cykloidzie C i przesuniętą o πr w kierunku prostej p i o $2r$ w kierunku do niej prostopadłym.- Dowiedziemy, że cykloida C' jest ewolutą cykloidy C.

Gdy koło k' obróci się o $1/6$ całego okręgu, to punkt opisujący zakreśli łuk KK_1 cykloidy C', punkt K_1, otrzymamy, jak poprzednio, obracając najpierw punkt K dokoła nieruchomego środka A' o kąt $\pi/3$, przez co punkt K dostanie się do punktu $1'$, potem zaś przesuwając punkt $1'$ równolegle do p' o odcinek $1'K_1 = O'T' = OI = \frac{2\pi r}{6}$. Prosta K_1I^* jest normalną do cykloidy C' w punkcie K_1, prostopadła zaś do niej prosta K_1I jest styczną do tej krzywej.

Otóż M_1I i IK_1 stanowią jedną prostą, której środkiem jest punkt I. A więc normalna

$M_1 I$ do cykloidy C jest zarazem styczną do cykloidy C' ; ta ostatnia krzywa jest przeto obwiednią normalnych do pierwszej, czyli jej ewolutą.

Aby więc wyznaczyć środek krzywizny K_1 w punkcie M_1 cykloidy C , wystarczy na normalnej $M_1 I$ od punktu I odmierzyć $IK_1 = M_1 I$. Promień krzywizny cykloidy równa się podwojonej normalnej.

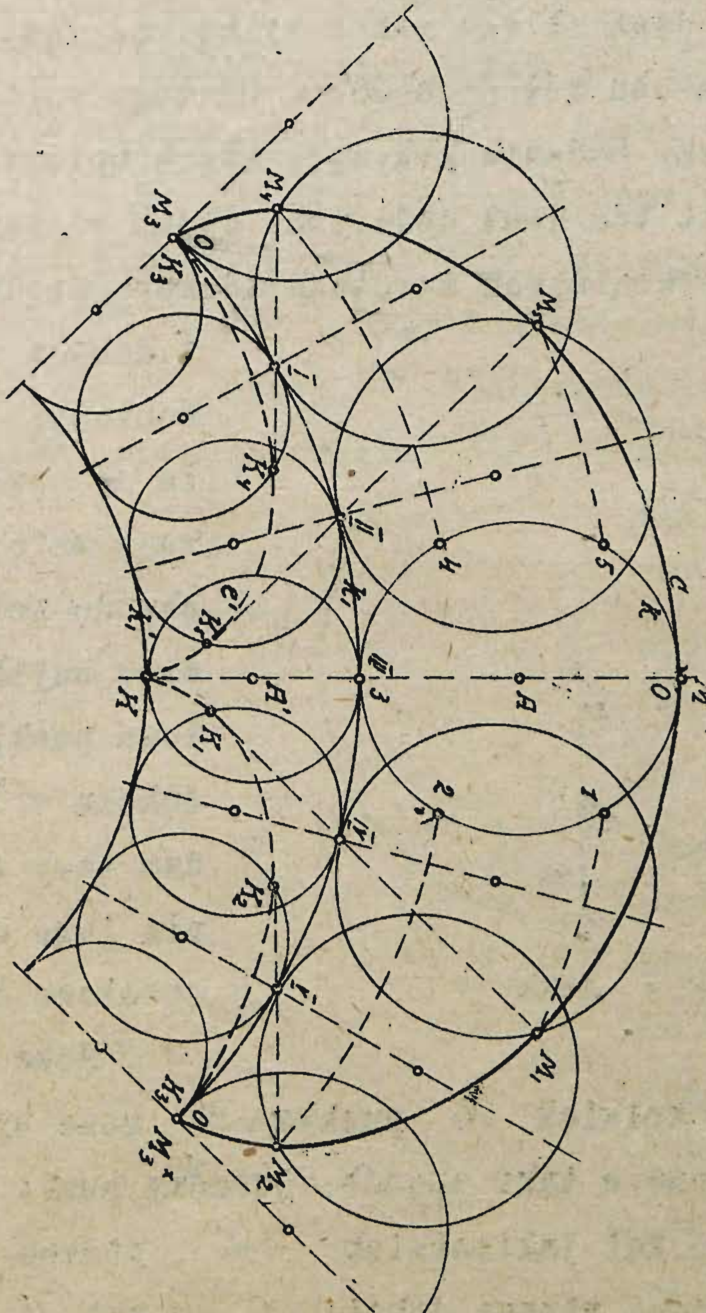
Dzięki tej własności cykloidy bardzo mała ilość punktów wystarcza do dokładnego jej wyznaczenia. Zauważmy, że punkt M jest punktem zwrotu cykloidy C , gdyż promień krzywizny w tym punkcie $= 0$, punkt M_2 jest wierzchołkiem cykloidy; w samej rzeczy, koło krzywizny dla tego punktu leży z obu jego stron po tej samej stronie krzywej, gdyż prosta $M_3 K_3$ jest osią symetrji cykloidy.

Na zasadzie dowiedzionego w § 200 twierdzenia, długość łuku ewoluty równa się różnicy promieni krzywizny ewolwenty w punktach, odpowiadających końcom tego łuku. Stąd wynika, że np. łuk $KK_1 =$ odcinkowi $M_1 K_1 = 2\, K1'$. Łuk cykloidy, mierzony od jej wierzchołka = podwojonej cięciwie odpowiadającego mu łuku koła tworzącego. W szczególności łuk $KK_3 = K_3M_3 = 4r$ stąd wniosek:

Długość jednego zwoju cykloidy zwyczajnej jest cztery razy większa od średnicy koła tworzącego.

§ 204. Epicykloidy i hypocykloidy. Gdy koło toczy się po stałem kole k_1, to punkt związany sztywno z kołem ruchomem opisuje epicykloidę lub hypocykloidę, zależnie od tego, czy koła k i k_1 są styczne zewnętrznie lub wewnętrznie; każda z tych krzywych może być zwyczajną, skurczoną lub wyciągniętą, zależnie od tego, czy punkt opisujący leży na okręgu, na zewnątrz lub wewnątrz toczącego się koła. Między temi krzywemi, a cykloidami istnieje daleko idąca analogja. W szczególności zauważmy, że ewoluta epi = lub hypocykloidy zwyczajnej jest spółśrodkową i podobną epi = lub hypocykloidą.- Opierając się na tej własności można z łatwością wykreślić te krzywe. Na rys.382 przedstawiono jeden zwój epicykloidy zwyczajnej w tym założeniu, że promień tworzącego koła jest czwartą częścią promienia koła kierowniczego.

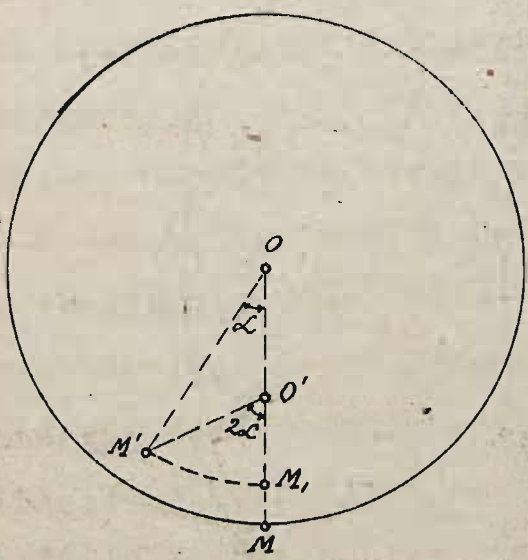
§ 205. Elipsa jako hypocykloida. Twierdzenie. Gdy koło O' o promieniu r toczy się wewnątrz koła O o promieniu $2r$, to każdy punkt należą-



Rys. 382.

cy do okręgu koła O' opisuje średnicę koła O .

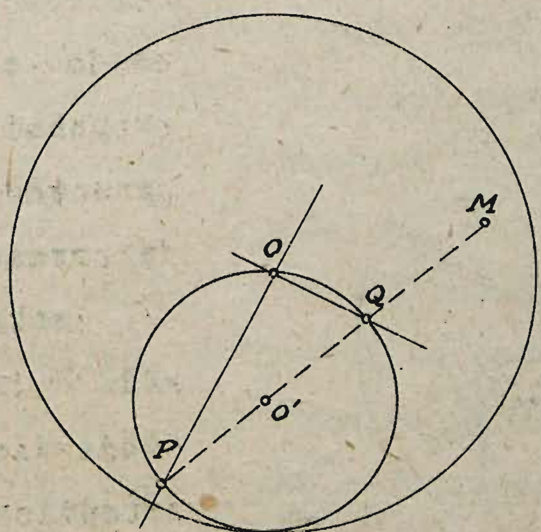
W czasie jednego zupełnego obrotu koła O' każdy punkt M jego okręgu raz i tylko raz jest punktem zetknięcia obu kół /rys.383/. Od tego położenia rozpoczniemy badanie krzywej, którą opisuje punkt M . Punkt ten jest obdarzony dwoma ruchami obrotowemi o przeciwnych zwrotach: dokoła środka O' i dokoła środka O. Ponieważ obwód koła O' jest dwa razy mniejszy od obwodu koła O , więc szybkość obrotowa punktu M dokoła O' jest dwa razy większa niż jego szybkość obrotowa dokoła O . Nowe położenie jakie-kolwiek M_1 punktu M może być przeto znalezione w taki sposób: Obróćmy punkt M dokoła O' o kąt jakikolwiek 2α , poczem obróćmy go w przeciwną stronę dokoła O o kąt α ; jest oczywistem, że po wykonaniu tych dwóch obrotów



Rys. 383.

punkt M pozostanie na średnicy OM.

Twierdzenie. Gdy koło O' o promieniu r toczy się wewnątrz koła O o promieniu $2r$, to każdy punkt sztywno związany z kołem O' opisuje elipsę spółśrodkową z kołem O. Punkt M sztywno związany z kołem O' /rys. 384/ połączmy ze środkiem tego koła i niechaj prosta $O'M$ przetnie koło O' w punktach P i Q. Przy toczeniu się koła O' wewnątrz koła O punkt P, na zasadzie powyższego twierdzenia, opisuje prostą OP; na tej samej zasadzie punkt Q opisuje prostą OQ. Ponieważ proste OP i OQ są wzajemnie prostopadłe, a punkt M, jako sztywno związany z kołem O' jest stałym punktem średnicy PQ, więc ten punkt opisuje elipsę o osiach OP i OQ.

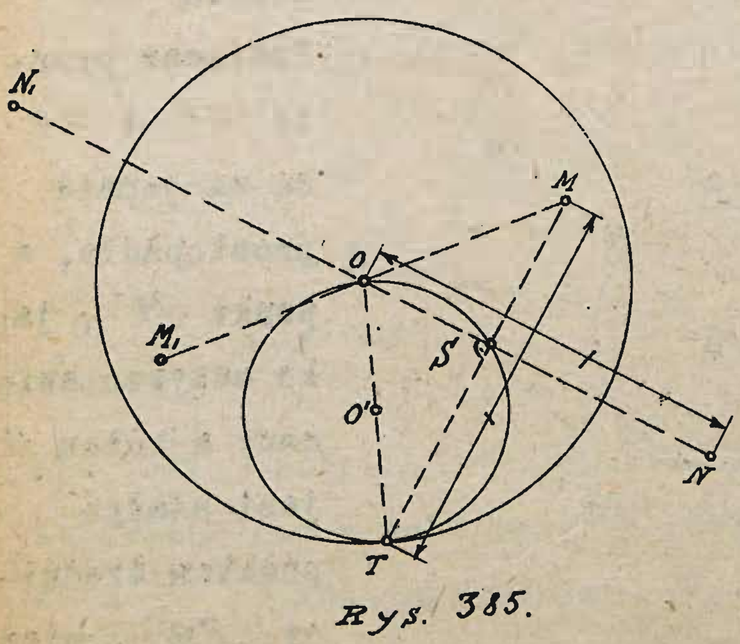


Rys. 384.

których długości są $2MP$ i $2MQ$.

W samej rzeczy, punkt opisujący M jest stałym punktem prostej, której dwa inne stałe punkty P i Q ślizgają się po ramionach kąta prostego POQ.

§ 206. Wyznaczenie osi elipsy. Połączmy punkt M ze środkiem elipsy O i znajdźmy średnicę sprzężoną ze średnicą OM /rys. 385/. W tym celu zauważmy, że, normalna do każdej rulety przechodzi przez chwilowy punkt zetknięcia krzywej tworzącej z krzywą kierowniczą /§ 190/; normalna do elipsy w punkcie M przechodzi tedy przez punkt T zetknięcia kół O i O'. Otóż wiemy, że średnica sprzężona z daną średnicą OM jest równoległa do stycznej w



Rys. 385.

punkcie M /§ 162/, a więc jest prostopadła do normalnej MT. Z punktu O spuszczamy tedy prostopadłą OS na MT; OS jest średnicą sprzężoną z OM; aby wyznaczyć jej długość, zauważmy, że przy toczeniu koła O' wewnątrz koła O punkt S pozostaje na OS, punkt T na OT, a odległości MS i MT nie ulegają zmianie. Elipsa opisana przez punkt M powstaje więc również i w ten sposób, że prosta MST porusza się ślizgając się punktem S po prostej OS, a punktem T po prostej OT.

Aby więc znaleźć koniec N średnicy OS, trzeba wykreślić prostą MST w takiem położeniu, żeby punkt T upadł na O, wtedy punkt M zajmie szukane położenie N. Odmierzając więc na prostej OS odcinki $ON = ON_1 = MT$, wyznaczymy średnicę NN_1, sprzężoną z MM_1.

Nawzajem, wykonując to samo wykreślenie w porządku odwrotnym rozwiążemy zadanie:

Mając dwie średnice sprzężone MM_1 i NN_1 wykreślić osie elipsy.

Z końca M średnicy MM_1 /rys.386/ spuszczamy prostopadłą na średnicę NN_1 i odmierzamy na tej prostopadłej od punktu M w jedną lub drugą stronę $MT = ON$; na OT zakreślamy koło jak na średnicy i środek tego koła O' łączymy z M. Niechaj prosta $O'M$ przecina koło O' w punktach P i Q ; odmierzając na prostych OQ i OP odcinki $OA = OA_1 = MP$ i $OB = OB_1 = MQ$, otrzymamy osie elipsy AA_1 i BB_1.

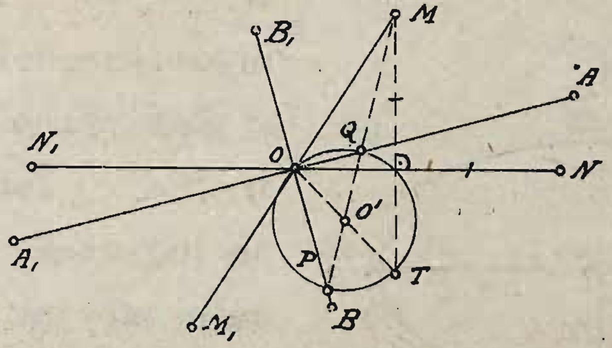
§ 207. Środki krzywizny elipsy w jej wierzchołkach. Twierdzenie. Normalna do elipsy w jej punkcie jakimkolwiek M przecina osie elipsy w takich punktach K i L, że

$$\frac{MK}{ML} = \frac{a^2}{b^2};$$

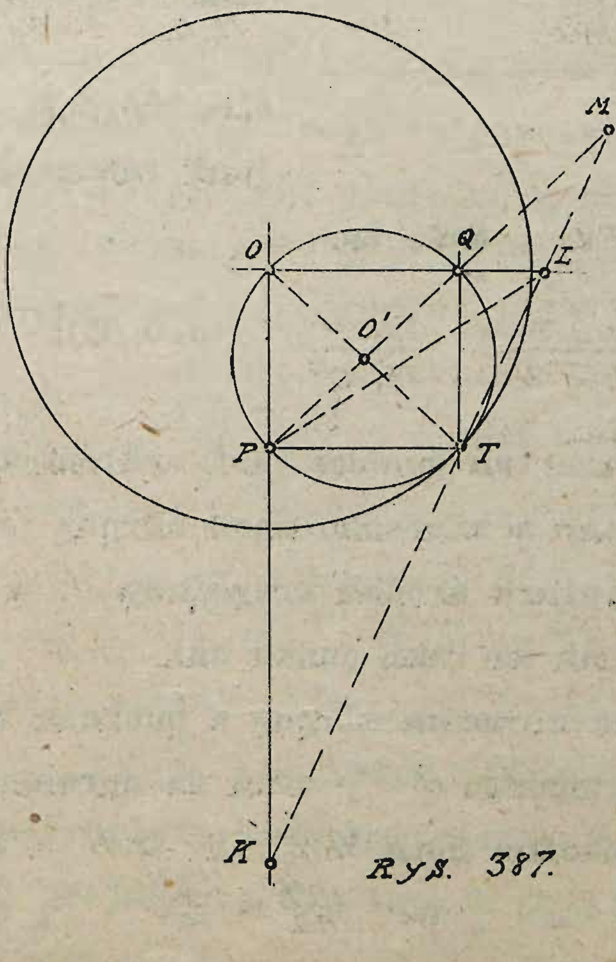
Niech elipsa będzie opisaną przez punkt M sztywno związany z kołem O', toczącym się wewnątrz dwa razy większego koła O /rys.384/. Wyznaczmy osie, łącząc $O'M$ i prowadząc OP i OQ. Prosta MT będzie normalną do elipsy w punkcie M. Oznaczmy literami K i L punkty, w których ta normalna przecina osie OP i OQ. Trzeba dowieść, że:

$$\frac{MK}{ML} = \frac{MP^2}{MQ^2}.$$

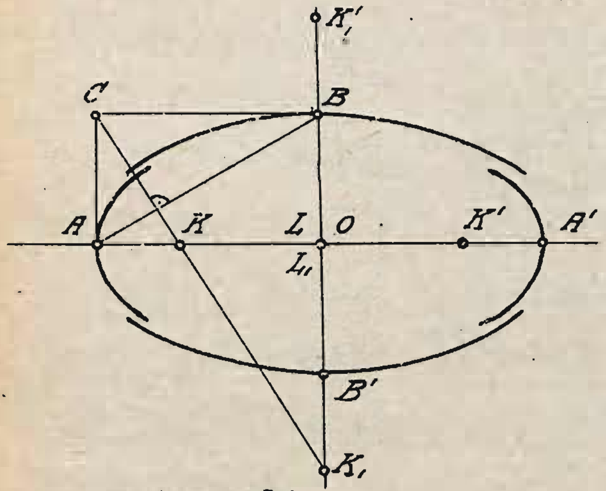
Zauważmy, że czworokąt $OPTQ$ jest prostokątem, tak że $QT \parallel PK$. Pola trójkątów MKP



Rys. 386.



Rys. 387.



Rys. 388.

i MLP o wspólnym wierzchołku P, i podstawach MK i ML, leżących na tej samej prostej, mają się jak te podstawy:

$$\frac{MK}{ML} = \frac{\Delta MKP}{\Delta MLP}$$

Ale trójkąt MLP jest równoważny z trójkątem MTQ, tak, że:

$$\frac{MK}{ML} = \frac{\Delta MKP}{\Delta MTQ} = \frac{MP^2}{MQ^2}$$ c.b.d.d.

Na twierdzeniu tem oparte jest wykreślanie środków krzywizny w wierzchołkach elipsy /rys.388/.

Znajdźmy najpierw środek krzywizny K w wierzchołku A. Jest to taki punkt osi AA', w którym ją przecina normalna elipsy w punkcie nieskończenie bliskim punktu A; otóż ta normalna, jak każda inna, przecina osie AA' i BB' w takich punktach K i L, że: $\frac{AK}{AL} = \frac{b^2}{a^2}$; ale

$AL = AO = a$;

skąd

$$AK = \frac{b^2}{a};$$

Szukając środka krzywizny K_1 w wierzchołku B, znajdziemy:

$$\frac{BK_1}{BL_1} = \frac{a^2}{b^2}; \quad \text{ale} \quad BL_1 = BO = b;$$

skąd

$$BK_1 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Punkty K i K_1 znajdziemy w przecięciu obu osi z prostopadłą spuszczoną na cięciwę AB z punktu C, w którym się przecinają styczne w wierzchołkach A i B; w samej rzeczy, z trójkątów podobnych AOB i CAK mamy:

$$\frac{AK}{AC} = \frac{OB}{OA}; \quad \frac{AK}{b} = \frac{b}{a}; \quad AK = \frac{b^2}{a}.$$

z trójkątów zaś AOB i CBK_1

$$\frac{BK_1}{BC} = \frac{OA}{OB}; \quad \frac{BK_1}{a} = \frac{a}{b}; \quad BK_1 = \frac{a^2}{b}.$$

Wyznaczywszy punkty K' i K_1' symetryczne z punktami K i K_1 względem osi AA' i BB' i wykreśliwszy cztery koła krzywizny, możemy w wielu razach obejść się bez innych punktów lub stycznych elipsy.