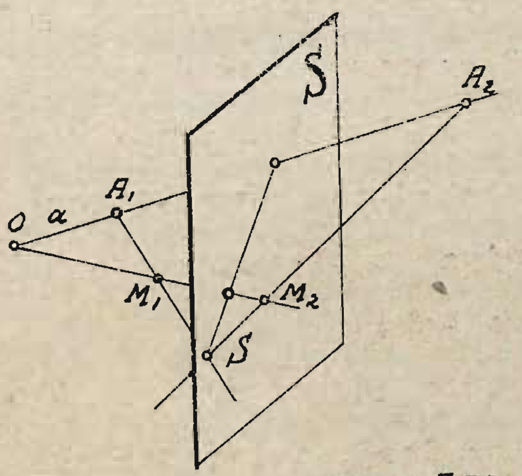
5 prowadzimy koło Steinera i z jego pomocą wyznaczamy proste podwójne dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku 5, których proste a_1', b_1', c_1' i a_2', b_2', c_2'. są równoległe do prostych a_1, b_1, c_1 i a_2, b_2, c_2.

Znalazłszy kierunki I^∞ i J^∞ prowadzimy styczne w tych kierunkach do stożkowej; łącząc każdy z tych punktów niewłaściwych I^∞ i J^∞ z punktami 3, 4 i 5 otrzymamy dwa pęki rzutowe, których środek perspektywy O jest punktem przecięcia obu stycznych szukanych, t.j. środkiem stożkowej. Proste i i j, poprowadzone przez punkt O w kierunkach I^∞ i J^∞ są asymptotami, dwusieczne a i b kątów między niemi są osiami stożkowej.

ROZDZIAŁ XIV.

POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

§ 185. Kolineacja środkowa dwóch układów przestrzennych. Niech będzie płaszczyzna S, którą nazywać będziemy płaszczyzną kolineacji, punkt O który nazwiemy środkiem kolineacji i dwa punkty A_1 i A_2, leżące na dowolnej prostej a, wychodzącej z punktu O /lub dwie płaszczyzny A_1 i A_2, przecinając się według prostej, leżącej w płaszczyźnie S /rys.350/. Dane powyższe wyznaczają dwa układy /dwie figury/ przestrzenne F_1 i F_2 w ten sposób, że:



rys. 350.

1/ każdemu punktowi, prostej lub płaszczyźnie układu F_1 odpowiada jeden jedyny punkt, prosta lub płaszczyzna układu F_2 i nawzajem.

2/ Punktowi, prostej i płaszczyźnie, należącym do siebie w jednym układzie, odpowiada punkt, prosta i płaszczyzna drugiego układu, które również do siebie należą.

3/ Punkty odpowiednie leżą parami na prostych, przechodzących przez środek kolineacji O.

4/ Płaszczyzny odpowiednie przecinają się parami według prostych, leżących w płaszczyźnie kolineacji S.

5/ Proste odpowiednie leżą parami w płaszczyznach, przechodzących przez środek kolineacji O i przecinają się parami w punktach leżących w płaszczyźnie S i

6/ Każde dwa szeregi odpowiednich punktów, każde dwa pęki odpowiednich płaszczyzn lub prostych są rzutowe.

Środek kolineacji oraz wszystkie punkty płaszczyzny kolineacji, - płaszczyzna kolineacji oraz wszystkie płaszczyzny, przechodzące przez środek kolineacji, proste, przechodzące przez środek kolineacji oraz proste leżące w płaszczyźnie kolineacji, odpowiadają same sobie.

Płaszczyzna R_1, która odpowiada w I układzie płaszczyźnie niewłaściwej, zaliczonej do II układu (R_2^∞) oraz płaszczyzna Q_2, która odpowiada w II układzie płaszczyźnie niewłaściwej, zaliczonej do I układu (Q_1^∞) - nazywają się <u>płaszczyznami wzajemnemi</u>; są one równoległe do płaszczyzny kolineacji S i mają tę własność, że odległość jednej z nich od środka kolineacji O i odległość drugiej od płaszczyzny kolineacji S są odcinkami równej długości i przeciwnego zwrotu. Kolineacja środkowa w przestrzeni może być wyznaczona przez swój środek O, płaszczyznę S i jedną z płaszczyzn wzajemnych R_1 lub Q_2. Jeżeli płaszczyzny wzajemne R_1 i Q_2 są zjednoczone /w równej odległości między środkiem i płaszczyzną kolineacji/, to kolineacja nazywa się inwolucyjną; w takiej kolineacji każdemu punktowi, płaszczyźnie lub prostej odpowiada ten sam punkt, płaszczyzna lub prosta, niezależnie od tego, do którego układu tamten punkt, tamtą płaszczyznę lub prostą zaliczymy.

Kolineacja środkowa w przestrzeni ma zastosowanie w płaskorzeźbie perspektywicznej i w teatralnej sztuce dekoracyjnej.

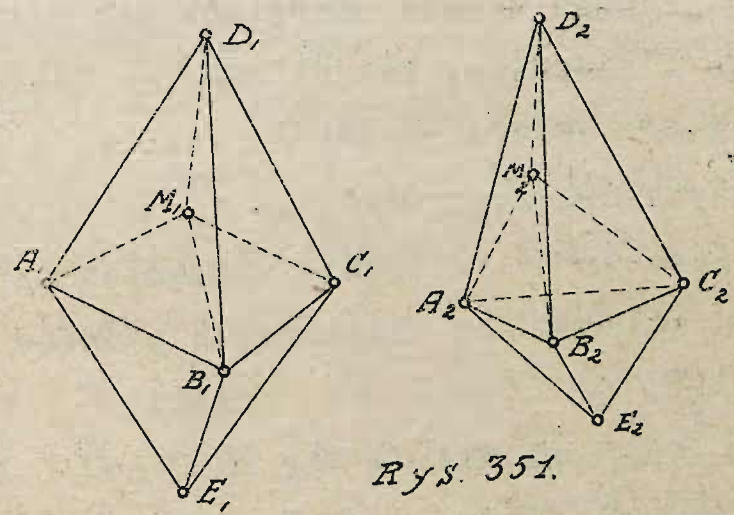
<u>§ 186.</u> <u>Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych.</u> Z dwóch układów przestrzennych F_1 i F_2, które są w kolineacji środkowej, przesuńmy jeden w dowolny sposób. Z 6-ciu warunków, którym czyniły zadość te układy, niektóre, mianowicie 3, 4 i 5 nie będą wogóle w nowem położeniu układów spełnione, natomiast pierwsze dwa i ostatni pozostaną w swej mocy. O układach takich mówimy wciąż jeszcze, że są <u>w kolineacji,</u> która jednak nie będzie już wogóle środkową; mówimy wtedy, że układy F_1 i F_2 są w kolineacji <u>ogólnej.</u>

Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych jest wyznaczona przez 5 par punktów lub 5 par płaszczyzn odpowiednich z tem zastrzeżeniem, żeby żadne 4 z tych punktów w żadnym układzie nie leżały w jednej płaszczyźnie /a więc także żadne 3 na jednej prostej/ wzgl. żeby żadne 4 z tych płaszczyzn w żadnym układzie nie przechodziły przez jeden punkt /a więc także żadne 3 przez jedną prostą/.

W samej rzeczy, jeżeli np. punktom A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 układu F_1 odpowiadają punkty A_2, B_2, C_2, D_2 i E_2 układu F_2, to dla każdego punktu przestrzeni M_1, zaliczonego do układu F_1, znajdziemy punkt odpowiedni M_2 w układzie F_2 w sposób następujący: Poprowadźmy przez punkt M_1 i prostą B_1C_1 płaszczyznę $B_1C_1M_1$, którą oznaczymy literą T_1, prosta B_1C_1 będzie osią czwórki płaszczyzn $B_1C_1A_1$, $B_1C_1D_1$, $B_1C_1E_1$ i $B_1C_1M_1 \equiv T_1$ możemy więc wyznaczyć płaszczyznę T_2, która z płaszczyznami $B_2C_2A_2$, $B_2C_2D_2$, $B_2C_2E_2$ tworzy ten sam dwustosunek; poprowadźmy następnie w układzie F_1 płaszczyzny $C_1A_1M_1 \equiv U_1$ i $A_1B_1M_1 \equiv V_1$ i wyznaczmy w taki sam sposób płaszczyzny U_2 i V_2 układu F_2; punkt przecięcia płaszczyzn T_2, U_2 i V_2 będzie szukanym punktem M_2.

§ 187. Korelacja dwóch układów przestrzennych.

Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych naprowadza nas na nowy związek geometryczny dwóch układów przestrzennych, zwany korelacją, a polegający na następujących własnościach:



Rys. 351.

1/ każdemu punktowi układu F_1 odpowiada jedna jedyna płaszczyzna układu F_2 ; każdej płaszczyźnie układu F_1 odpowiada jedna jedyna płaszczyzna układu F_2 i nawzajem.

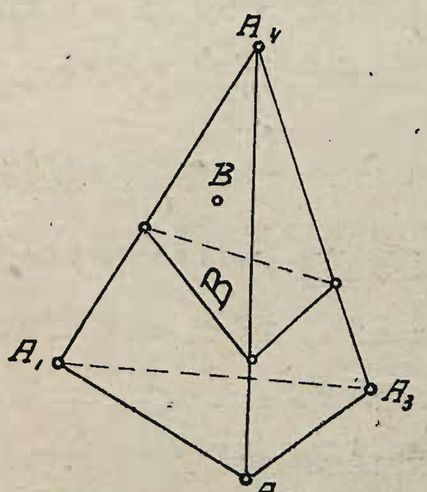
2/ punktowi i płaszczyźnie, należącym do siebie w jednym układzie odpowiadają płaszczyzna i punkt drugiego układu, które również do siebie należą;

stąd wynika, że każdej prostej jednego układu /która łączy dwa jego punkty/ odpowiada prosta drugiego układu /która jest przecięciem odpowiednich tamtym punktom płaszczyzn/,

3/ każdej czwórce punktów jednego układu odpowiada czwórka płaszczyzn drugiego, która jest z tamtą rzutowa i nawzajem; wogóle każdemu szeregowi punktów jednego układu odpowiada pęk płaszczyzn drugiego i nawzajem; każdej czwórce /pękowi/ prostych jednego układu odpowiada rzutowa z nią czwórka prostych drugiego układu.

"Kolineacja" taka będzie wyznaczona przez założenie odpowiedniości wzajemnej 5 punktów jakichkolwiek A_1, B_1, C_1, D_1 i E_1 układu F_1 z 5 płaszczyznami drugiego układu A_2, B_2, C_2, D_2 i E_2 z tem zastrzeżeniem, żeby z tych 5 punktów żadne 4 nie leżały w jednej płaszczyźnie, ani żeby z tych 5 płaszczyzn żadne 4 nie przechodziły przez jeden punkt.

§ 188. Układ biegunowy przestrzenny. Niech będzie czworościan $A_1 A_2 A_3 A_4$ /którego ściany oznaczymy literami: $\mathcal{A}_1 \equiv A_2 A_3 A_4$, $\mathcal{A}_2 \equiv A_3 A_4 A_1$, $\mathcal{A}_3 \equiv A_4 A_1 A_2$ i $\mathcal{A}_4 \equiv A_1 A_2 A_3$, punkt jakikolwiek B, nie leżący na żadnej ze ścian /a więc i na żadnej z krawędzi/ i płaszczyzna B , nie przechodząca przez żaden z wierzchołków /a więc i przez żadną z krawędzi/ czworościanu $A_1 A_2 A_3 A_4$ /rys. 352/. Na mocy poprzedniego artykułu odpowiedniość punktów $A_1 A_2 A_3 A_4$ i B płaszczyznom A_1, A_2, A_3, A_4 i B wyznacza korelację dwóch układów przestrzennych. Korelacja ta ma tę własność, że każdemu punktowi odpowiada zawsze ta sama płaszczyzna i każdej płaszczyźnie ten sam punkt /a więc i każdej prostej ta sama prosta/ niezależnie od tego, do którego układu tamten punkt, tamtą płaszczyznę /tamtą prostą/ zaliczymy.



Rys. 352.

Własności tej dowieść można w podobny sposób, jak dowiedliśmy analogicznej własności układu biegunowego płaskiego. /§ 145/.

Te dwa układy korelacyjne można przeto uważać za jeden jedyny układ przestrzenny, w którym zachodzi wzajemne podporządkowanie punktów płaszczyznom i płaszczyzn punktom. Układ taki nazywa się biegunowym, płaszczyzna podporządkowana punktowi nazywa się jego płaszczyzną biegunową, punkt podporządkowany płaszczyźnie tej biegunem.

Ponieważ punktowi i płaszczyźnie, należącym do siebie, podporządkowane są płaszczyzna i punkt również do siebie należące, więc mamy twierdzenia:

Jeżeli punkt C leży w płaszczyźnie biegunowej punktu B, to płaszczyzna biegunowa punktu C przechodzi przez punkt B.

Jeżeli płaszczyzna C przechodzi przez biegun płaszczyzny B, to biegun płaszczyzny C leży w płaszczyźnie B.

Stąd wynika:

1/ płaszczyzną biegunową punktu przecięcia 3 płaszczyzn A, B i C jest płaszczyzna poprowadzona przez ich bieguny A, B i C i nawzajem, biegunem płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty A, B i C jest punkt przecięcia ich płaszczyzn biegunowych A, B i C,

2/ Bieguny płaszczyzn, przechodzących przez jedną prostą leżą na drugiej i nawzajem:

płaszczyzny biegunowe punktów, leżących na jednej prostej, przechodzą przez drugą.

Dwie proste, mające tę własność, że bieguny płaszczyzn przechodzących przez jedną z nich leżą na drugiej nazywają się prostemi wzajemnie biegunowemi.

Dwie płaszczyzny mające tę własność, że biegun jednej z nich leży na drugiej, nazywają się płaszczyznami /biegunowo/ sprzężonemi. Dwa punkty, z których jeden leży w płaszczy-źnie biegunowej drugiego, nazywają się punktami /biegunowo/ sprzężonemi; dwie proste, z których każda przecina biegunową drugiej, nazywają się prostemi /biegunowo/ sprzężonemi.

Układ biegunowy przestrzenny wyznacza w każdej płaszczyźnie pewien układ biegunowy płaski, a dokoła każdego punktu pewien układ biegunowy wiązki.

Tak np. biegunową punktu M , leżącego w płaszczyźnie P jest w tej płaszczyźnie ślad m płaszczyzny biegunowej M punktu M , biegunem prostej m , leżącej w płaszczyźnie P jest w tej płaszczyźnie ślad M prostej z nią biegunowej n

Układ biegunowy przestrzenny wyznacza na każdej prostej pewną inwolucję punktów /zwaną inwolucją biegunową na prostej/ i dokoła każdej prostej pewną inwolucję płaszczyzn /zwaną inwolucją biegunową dokoła tej prostej/. Niechaj będzie np. na podstawie m szereg punktów $m(K_1, L_1, M_1, \dots)$; płaszczyzny biegunowe tych punktów przechodzą wszystkie przez prostą biegunową n, tworząc dokoła niej pęk płaszczyźn $n(K_2, L_2, M_2, \dots)$ rzutowy z szeregiem $m(K_1, L_1, M_1, \dots)$, jeżeli przecięcia tych płaszczyzn z podstawą m oznaczymy literami $K_2, L_2, M_2 \dots$, to szeregi $m(K_1, L_1, M_1, \dots)$ i $m(K_2, L_2, M_2, \dots)$ będą rzutowe. Otóż każde dwa punkty odpowiednie tych szeregów, np. K_1 i K_2 odpowiadają sobie podwójnie, - jeżeli bowiem zaliczymy punkt K_2 do I szeregu, to punkt odpowiedni znajdziemy w przecięciu podstawy m z płaszczyzną biegunową punktu K_2, która musi przejść przez punkt K_1, gdyż płaszczyzna biegunowa punktu K_1 przechodzi przez punkt K_2.

§ 189. Czworościany biegunowe. Czworościan $A_1 A_2 A_3 A_4$ ma tę osobliwość, że 1/ każdy wierzchołek jest biegunem przeciwległej ściany, 2/ przeciwległe krawędzie, np. $A_1 A_2$ i $A_3 A_4$ są prostemi wzajemnie biegunowemi i 3/ każde dwa wierzchołki, każde dwie ściany i każde dwie krawędzie nieprzeciwległe są sprzężone. Czworościan taki nazywamy biegunowym. Czworościanów biegunowych jest nieskończenie wiele. Dla otrzymania któregokolwiek z nich postępujemy jak następuje: Obieramy dowolny punkt M i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową $\mathcal{M}$, w płaszczyźnie $\mathcal{M}$ obieramy dowolny punkt N i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową $\mathcal{N}$, na mocy poprzedniego artykułu musi ona przejść przez punkt M; na prostej przecięcia płaszczyzn $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ obieramy dowolny punkt P i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową $\mathcal{P}$, która musi przejść przez prostą MN; przez punkty M, N i P prowadzimy wreszcie płaszczyznę Q której biegunem będzie punkt przecięcia płaszczyzn $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ i $\mathcal{P}$. Czworościan $MNPQ$ będzie biegunowy. Oczywiście ten sam układ biegunowy przestrzenny, który określiliśmy zapomocą czworościanu biegunowego $A_1 A_2 A_3 A_4$ punktu B i jego płaszczyzny biegunowej $\mathcal{B}$, można określić zapomocą każdego innego czworościanu biegunowego $MNPQ$ jakiegokolwiek punktu R i jego płaszczyzny biegunowej $\mathcal{R}$.

§ 190. Trzy rodzaje układów biegunowych przestrzennych. Niech będzie układ biegunowy wyznaczony przez czworościan biegunowy $A_1A_2A_3A_4$ oraz płaszczyznę biegunową B dowolnego punktu $\hat{B}$, przytem punkt B nie leży na żadnej ze ścian, a płaszczyzna B nie przechodzi przez żaden z wierzchołków tego czworościanu. Nastręczają się dwa pytania:

1/ Czy i w jakich warunkach mogą istnieć rzeczywiste punkty i płaszczyzny sprzężone same ze sobą t.j. punkty leżące we własnych płaszczyznach biegunowych i płaszczyzny przechodzące przez własne bieguny ?

2/ Jeżeli takie punkty i płaszczyzny istnieją, to czy mogą istnieć rzeczywiste proste sprzężone same ze sobą, t.j. przystające do własnych prostych biegunowych, których każdy punkt byłby zatem sprzężony sam ze sobą ?

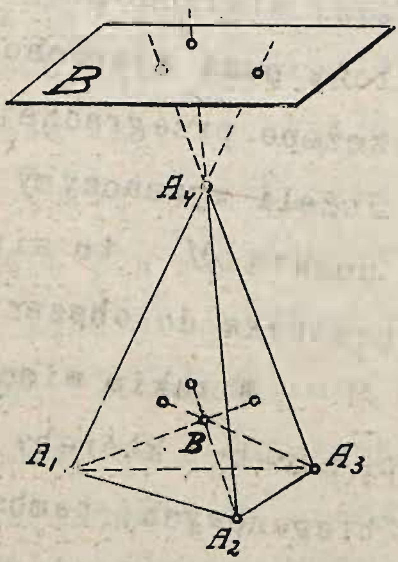
Aby na te pytania odpowiedzieć, zauważmy, że czworościan biegunowy $A_1A_2A_3A_4$ dzieli przestrzeń na 8 obszarów, z których jeden tylko bywa skończony /nazywa on się objętością czworościanu/, cztery mają z tą objętością po jednej ścianie wspólnej, a 3 mają z nią dwie przeciwległe krawędzie wspólne. Ponieważ punkt B nie leży na żadnej ścianie czworościanu, więc może on należeć tylko do jednego obszaru, ponieważ płaszczyzna B nie przechodzi przez żaden wierzchołek, więc może ona tylko dla jednego obszaru pozostać obcą. Przypuśćmy np. że punkt B leży wewnątrz objętości czworościanu /co zresztą przez obiór odpowiedniego czworościanu biegunowego zawsze można sprawić/. Położenie płaszczyzny B względem obszaru, w którym znajduje się punkt, może być trojakie:

1/ Płaszczyzna B nie przecina żadnej krawędzi czworościanu między jego wierzchołkami /rys.353/. Na każdej krawędzi inwolucja biegunowa jest wtedy eliptyczna, gdyż ślad każdej krawędzi na płaszczyźnie, łączącej punkt B z przeciwległą jej krawędzią, leży zawsze między wierzchołkami, a ślad jej na płaszczyźnie B leży poza wierzchołkami, tak, że te dwa punkty sprzężone przegradzają wierzchołki na każdej krawędzi. Jeżeli wyznaczymy płaszczyznę biegunową dowolnego punktu M, to się pokaże, że ta płaszczyzna nie przenika do obszaru, w którym się znajduje punkt M. W takim więc układzie biegunowym nie istnieją punkty, którebyby leżały we własnych płaszczyznach biegunowych, tembardziej nie istnieją proste, przystające do własnych prostych

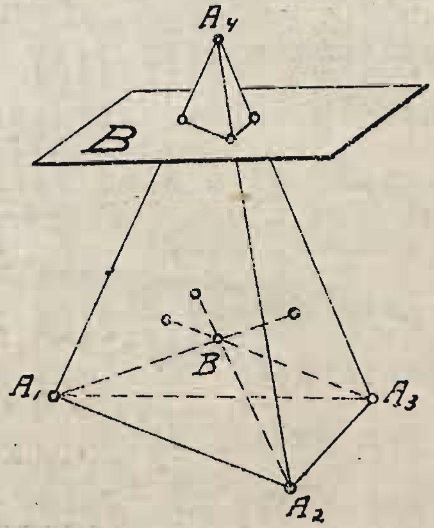
----

biegunowych. Na wszystkich płaszczyznach i dokoła wszystkich punktów układ biegunowy /płaski lub wiązki/ jest jednostajny, - na wszystkich i dokoła wszystkich prostych inwolucja biegunowa jest eliptyczna.

2/ Płaszczyzna *B* przecina 3 krawędzie czworościanu, wychodzące z jednego wierzchołka /rys.354/.



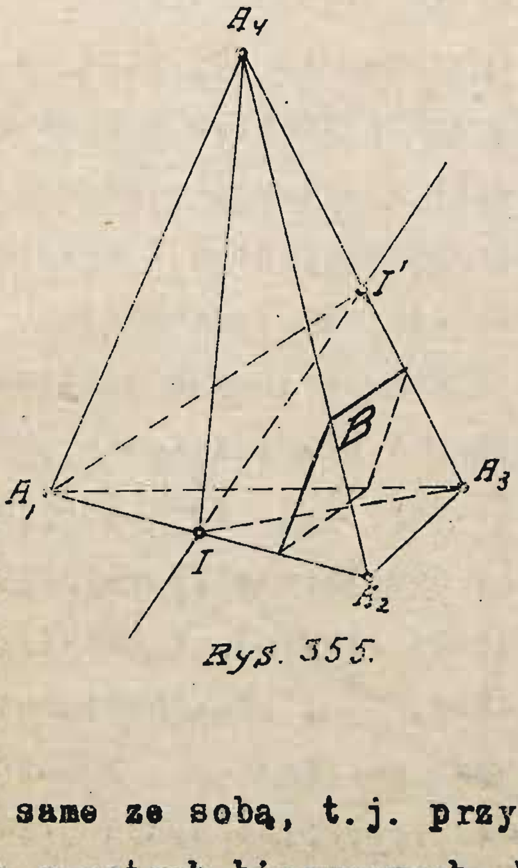
Rys. 353



Rys. 354.

Na tych trzech krawędziach inwolucja biegunowa jest hiperboliczna, na trzech pozostałych - eliptyczna. Na pierwszych trzech krawędziach istnieją przeto po dwa rzeczywiste punkty podwójne, t.j. sprzężone same ze sobą. Istnieją wtedy zatem punkty rzeczywiste leżące we własnych płaszczyznach biegunowych, natomiast nie istnieją proste rzeczywiste, któreby były własnemi swemi biegunowemi. W samej rzeczy, zauważmy, że na ścianie $A_1A_2A_3$ układ biegunowy przestrzenny wyznacza biegunowość płaską jednostajną; gdyby istniała prosta, która jest własną swoją prostą biegunową, to jej ślad na płaszczyźnie $A_1A_2A_3$ byłby punktem sprzężonym z samym sobą, a taki punkt w układzie jednostajnym nie istnieje. W jednych płaszczyznach i dokoła jednych punktów biegunowość jest jednostajna, - w innych płaszczyznach i dokoła innych punktów może ona być niejednostajna. W płaszczyznach przechodzących przez własne bieguny, t.j. sprzężonych z samemi sobą, staje się ona inwolucją eliptyczną prostych sprzężonych dokoła bieguna. W samej rzeczy, w każdej płaszczyźnie $\mathcal{M}$, przechodzącej przez własny biegun M, biegunowe $a, b, c ...$ punktów $A, B, C, ...$ tej płaszczyzny przechodzą przez punkt M, tak że w płaszczyźnie $\mathcal{M}$ dokoła punktu M istnieje inwolucja prostych sprzężonych $a, MA; b, MB; c, MC, ...$ Inwolucja ta jest eliptyczna, gdyż w przeciwnym razie istniałyby proste sprzężone same ze sobą: byłyby to proste podwójne tej inwolucji.

3/ Płaszczyzna $\mathcal{B}$ przecina 4 krawędzie czworościanu biegunowego /rys. 355/, np. A_1A_2, A_3A_4, A_1A_3, A_2A_4. Na tych czterech krawędziach inwolucja biegunowa jest hiperboliczna, na pozostałych dwóch - eliptyczna. Podobnie jak w przypadku drugim, istnieją więc i tutaj punkty leżące we własnych płaszczyznach biegunowych, ale oprócz tego istnieją także proste sprzężone same ze sobą, t.j. przystające do własnych swych prostych biegunowych. W samej rzeczy, niech punkt I będzie jednym z punktów podwójnych inwolucji biegunowej na krawędzi A_1A_2, a punkt I'



Rys. 355.

niechaj będzie jednym z punktów podwójnych inwolucji biegunowej na krawędzi przeciwległej $A_3 A_4$, tak że punkty I i I' są punktami sprzężonemi z samemi sobą i leżą na prostych wzajemnie biegunowych A_1A_2 i A_3A_4. Płaszczyzna IA_3A_4 jest płaszczyzną biegunową punktu I /gdyż punkt I jest samosprzężony i leży na prostej A_1A_2/, podobnież płaszczyzna $I'A_1A_2$ jest płaszczyzną biegunową punktu I; prosta II' jest prostą przecięcia tych dwóch płaszczyzn i zarazem łączy ich bieguny, jest to zatem prosta sprzężona sama ze sobą. We wszystkich płaszczyznach i dokoła wszystkich punktów biegunowość jest niejednostajna z wyjątkiem płaszczyzn i punktów samosprzężonych, gdzie biegunowość staje się hiperboliczną inwolucją biegunową dokoła bieguna w płaszczyźnie biegunowej. Proste podwójne tej inwolucji są prostemi samosprzężonemi, z każdego więc punktu samosprzężonego wychodzą i w każdej płaszczyźnie samosprzężonej leżą dwie proste samosprzężone.

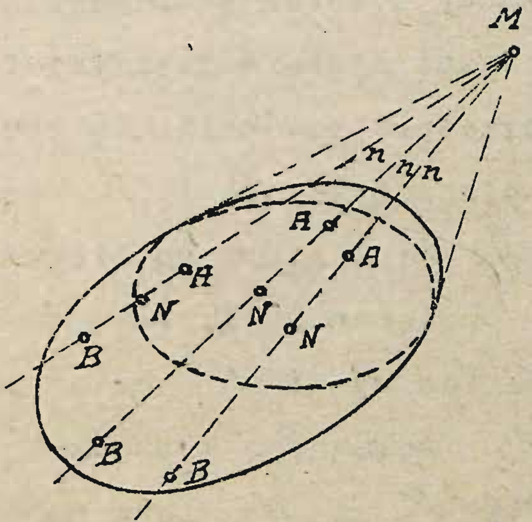
§ 191. Powierzchnie drugiego stopnia. Ogół punktów, płaszczyzn i prostych, rzeczywistych i urojonych które w danym przestrzennym układzie biegunowym są samosprzężone, nazywamy powierzchnią drugiego stopnia. Punkty samosprzężone nazywamy punktami tej powierzchni, przechodzące przez nie własne ich płaszczyzny biegunowe nazywamy płaszczyznami stycznemi do tej powierzchni w tych punktach; proste samosprzężone nazywamy tworzącemi powierzchni. Punkty powierzchni są to więc punkty podwójne inwolucji biegunowej na jakiejkolwiek prostej rzeczywistej, płaszczyzny styczne do tej powierzchni są to płaszczyzny podwójne inwolucji biegunowej dokoła jakiejkolwiek prostej rzeczywistej. Na każdej prostej rzeczywistej leżą dwa punkty powierzchni drugiego stopnia /rzeczywiste, urojone, sprzężone lub zjednoczone/, w których ta prosta "przebija" powierzchnię, przez każdą prostą rzeczywistą przechodzą dwie płaszczyzny styczne /rzeczywiste, urojone, sprzężone lub zjednoczone/. Wyrażamy to krótko mówiąc, że powierzchnie drugiego stopnia są powierzchniami drugiego rzędu i drugiej klasy. Prosta nazywa się sieczną, zewnętrzną lub styczną zależnie od tego, czy inwolucja biegunowa na niej jest hiperboliczna, eliptyczna lub paraboliczna t.j. czy przebija ona powierzchnię w dwóch punktach rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. W każdej płaszczyźnie P dany układ biegunowy przestrzenny wyznacza pewien układ biegunowy płaski: jednostajny, niejednostajny lub zwyrodniały /inwolucję biegunową/. Stożkowa tego układu płaskiego /urojona, rzeczywista lub zwyrodniała/ jest przecięciem powierzchni drugiego stopnia płaszczyzną P_2 . Każda płaszczyzna "przecina" powierzchnię drugiego stopnia według stożkowej. Płaszczyzna nazywa się zewnętrzną, sieczną lub styczną, zależnie od tego, czy układ biegunowy tej płaszczyzny jest jednostajny lub zwyrodniały t.j. czy przecina ona powierzchnię według stożkowej urojonej, rzeczywistej lub zwyrodniałej /dwie proste urojone sprzężone lub rzeczywiste/. Wszystkie styczne do powierzchni w danym jej punkcie leżą w płaszczyźnie stycznej i stanowią inwolucję biegunową dokoła punktu zetknięcia. Dokoła każdego punktu P dany układ biegunowy przestrzenny wyznacza pewien układ biegunowy wiązki: jednostajny, niejednostajny lub zwyrodniały. Stożek tej biegunowości /urojony, rzeczywisty lub zwyrodniały/ nazywamy stożkiem opisanym na powierzchni z punktu P . Z każdego punktu można opisać na powierzchni drugiego stopnia stożek drugiego stopnia. Punkt nazywa się wewnętrznym, zewnętrznym lub leżącym na powierzchni, zależnie od tego, czy układ biegunowy wiązki dokoła niego jest jednostajny, niejednostajny lub zwyrodniały, t.j.

czy stożek z niego na powierzchni opisany jest urojony, rzeczywisty lub zwyrodniały /dwie proste urojone, sprzężone lub rzeczywiste/.

Miejsce geometryczne punktów zetknięcia tego stożka z powierzchnią drugiego stopnia jest stożkową. W samej rzeczy, punkty zetknięcia płaszczyzn stycznych wyprowadzonych z punktu M, t.j. ich bieguny, leżą w płaszczyźnie biegunowej M tego punktu /§ 187/, ogół tych punktów zetknięcia stanowi zatem stożkową, według której płaszczyzna M przecina powierzchnię. Nawzajem płaszczyzny styczne w punktach stożkowej, leżącej na powierzchni, przecinają się w biegunie M płaszczyzny tej stożkowej, powłócząc stożek drugiego stopnia, opisany na powierzchni.

Zarówno kontur rzeczywisty, jak i kontur widzialny rzeczywistej powierzchni drugiego stopnia jest stożkową. Pierwszy jest miejscem punktów zetknięcia powierzchni ze stożkiem opisanym na niej ze środka rzutów, drugi jest przecięciem tego stożka płaszczyzną rzutów; ponieważ stożek ten jest drugiego stopnia, więc jego przecięcie jest stożkową.

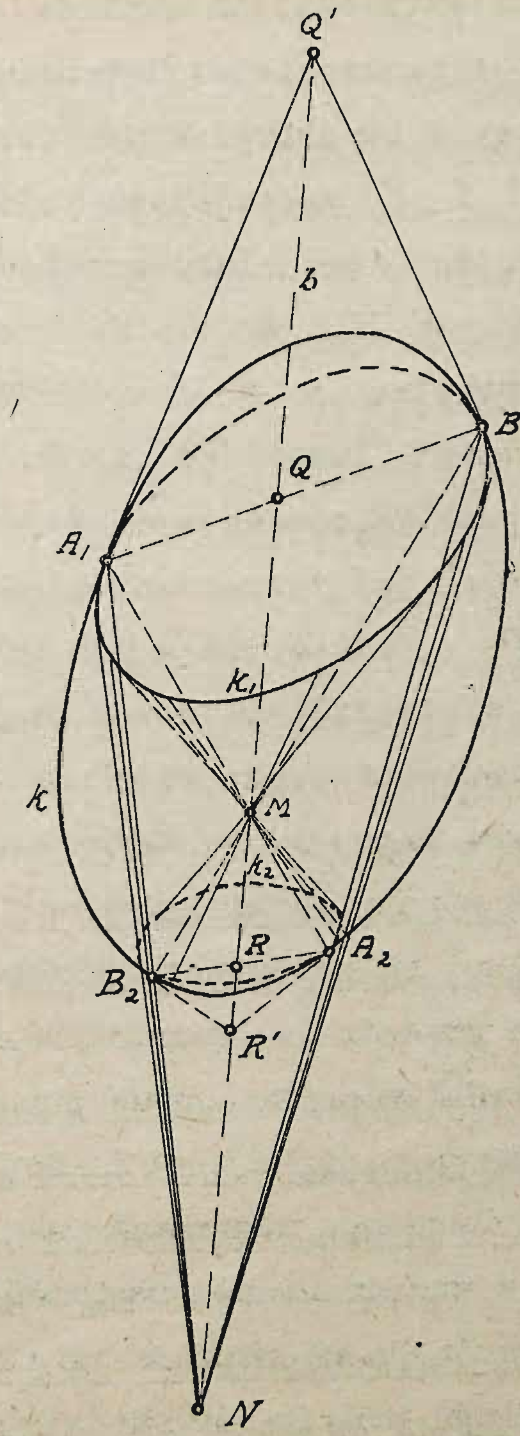
Płaszczyzna biegunowa jest miejscem geometrycznem punktów sprzężonych harmonicznie z biegunem względem punktów, w których sieczne, wychodzące z tego bieguna-na przebijają powierzchnię. Wyprowadźmy z bieguna M sieczną n , która przebija powierzchnię w punktach A i B , a płaszczyznę biegunową M w punkcie N /rys. 356/. Punkty A i B są punktami podwójnemi inwolucji biegunowej na siecznej n , a punkty M i N są w tej inwolucji sprzężone, bo punkt N leży w płaszczyźnie biegunowej punktu M . Otóż wiadomo /§ 145/, że punkty podwójne inwolucji hiperbolicznej przegradzają harmonicznie każdą parę punktów sprzężonych.



Rys. 356.

Jeżeli więc z danego punktu M poprowadzimy 3 jakiekolwiek sieczne n, n, n nie leżące w jednej płaszczyźnie /rys. 356/ i na każdej z nich wyznaczymy punkt N sprzężony harmonicznie z punktem M wtedy punktów A i B , w których ta sieczna przebija powierzchnię, to NNN będzie płaszczyzną biegunowowąwą punktu M .

<u>Przez każde dwa przecięcia płaskie powierzchni drugiego stopnia przechodzą dwa stożki drugiego stopnia.</u> Niechaj dwie płaszczyzny Q i R przecinają powierzchnię drugiego stopnia według stożkowych k_1 i k_2 /rys.357/, niechaj Q' i R' będą biegunami płaszczyzn Q i R ; połączmy te punkty prostą p , która niechaj przebija płaszczyzny Q i R w punktach Q i R . Przez prostą p poprowadźmy dowolną płaszczyznę sieczną P /np. płaszczyznę konturu rzeczywistego powierzchni/, która przetnie powierzchnię według stożkowej k , a płaszczyzny Q i R według prostych A_1B_1 i A_2B_2 , które są biegunowemi punktów Q' i R' względem stożkowej k . Wykreślmy punkty przekątne M i N czworokąta zupełnego $A_1B_1A_2B_2$ wpisanego w stożkową; na zasadzie § 178 punkty M i N leżą na prostej $Q'R' \equiv p$. Powiadam, że punkty M i N są stałemi punktami tej prostej, t.j. nie zależą od płaszczyzny P , tak że gdy płaszczyzna sieczna P obraca się dokoła prostej p , punkty te nie zmieniają swego położenia. W samej rzeczy punkty te są: 1/ sprzężone w inwolucji biegunowej da-



Rys. 357.

nej przez dwie pary stałych punktów Q, Q' i R, R', 2/ sprzężone harmonicznie względem punktów Q i R /t.j. sprzężone w inwolucji hiperbolicznej, której punkty Q i R są punktami podwójnemi/, co wynika z własności czworoboku zupełnego o bokach A_1A_2, A_2B_1, B_1B_2 i B_2A_1, którego MN jest jedną przekątną, a A_1B_1 i A_2B_2 są dwiema innemi przekątnemi. Punkty M i N są przeto wspólną parą punktów sprzężonych dwóch inwolucji i jako takie mogą być wyznaczone niezależnie od płaszczyzny P. Znalezione w ten sposób punkty M i N są wierzchołkami dwóch stożków, z których każdy przechodzi przez stożkową k_1 i k_2.

Z twierdzenia tego wynika ważny wniosek, że przecięcia powierzchni drugiego stopnia płaszczyznami równoległemi są stożkowemi podobnemi, - są to bowiem zarazem przecięcia równoległe stożka drugiego stopnia. Jeżeli więc np. pewne przecięcie powierzchni drugiego stopnia jest kołem, to wszystkie przecięcia do niego równoległe są kołami.

Twierdzeniem wzajemnem do powyższego będzie: Krzywa przenikania dwóch stożków opisanych na powierzchni drugiego stopnia składa się z dwóch stożkowych.

§ 192. Środek, średnice, osie, stożek asymptotyczny. Biegun płaszczyzny niewłaściwej nazywa się środkiem powierzchni drugiego stopnia; płaszczyzna biegunowa każdego punktu niewłaściwego nazywa się płaszczyzną średnicową; prosta biegunowa każdej prostej niewłaściwej nazywa się średnicą. Wszystkie płaszczyzny średnicowe i średnice przechodzą przez środek, albowiem bieguny tych płaszczyzn i biegunowe tych prostych leżą w płaszczyźnie biegunowej środka, t.j. w płaszczyźnie niewłaściwej. Odcinek siecznej, zawarty pomiędzy punktami przebicia powierzchni nazywa się cięciwą i gdy nie zachodzi obawa dwuznaczności, to cięciwę leżącą na średnicy nazywamy poprostu średnicą. Środek powierzchni jest zarazem środkiem każdego przecięcia powierzchni płaszczyzną średnicową i środkiem każdej średnicy.

Jeżeli wierzchołkiem czworościanu biegunowego jest środek powierzchni, to krawędzie tego czworościanu wychodzące ze środka, są średnicami sprzężonemi. Cięciwy równoległe do jednej z trzech średnic sprzężonych są płaszczyznami dwóch pozostałych przecięte na połowy: płaszczyzny sieczne równoległe do dwóch średnic sprzężonych są przez trzecią przebite w środkach stożkowych przecięcia. Płaszczyzny styczne w końcach jednej z 3-ch średnic sprzężonych są równoległe do płaszczyzny dwóch pozostałych średnic. Każde dwie średnice sprzężone powierzchni są zarazem średnicami sprzężonemi stożkowej, według której płaszczyzna tych średnic przecina powierzchnię.

Można dowieść, że w powierzchniach 2-go stopnia o środku właściwym istnieje zawsze układ trzech średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych /dowód musi tutaj być pominięty/; każdą z tych trzech średnic nazywamy osią powierzchni; punkty, w których oś przebija powierzchnię nazywamy wierzchołkami. Płaszczyzna dwóch którychkolwiek osi jest dla powierzchni płaszczyzną symetrji prostokątnej; każda z osi jest osią symetrji prostokątnej. Jeżeli przecięcie prostopadłe do jednej z osi jest kołem, to wszystkie przecięcia do niej prostopadłe są kołami i powierzchnia nazywa się obrotową; wszystkie średnice prostopadłe do osi obrotu są osiami tej powierzchni.

Stożek opisany na powierzchni drugiego stopnia z jej środka nazywa się stożkiem asymptotycznym tej powierzchni, z którą posiada wspólne osie. Stożkowe zetknięcia tego stożka z powierzchnią leżą w płaszczyźnie niewłaściwej. Każde dwie tworzące tego stożka są asymptotami stożkowej, według której płaszczyzna tych tworzących przecina powierzchnię.

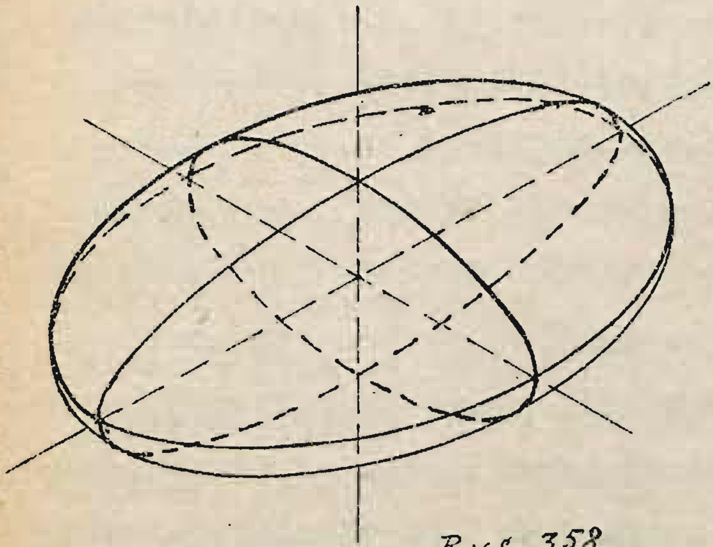
§ 193. Klasyfikacja powierzchni drugiego stopnia. W § 190 odróżniliśmy 3 rodzaje układów biegunowych przestrzennych zależnie od tego, czy istnieją punkty, płaszczyzny i proste samosprzężone.- Na tej zasadzie dzielimy powierzchnie drugiego stopnia na urojone, krzywokreślne i prostokreślne. Druga zasada klasyfikacji polega na zachowaniu się tych powierzchni względem płaszczyzny niewłaściwej, która może dla tych powierzchni być zewnętrzną /elipsoidy/, sieczną /hiperboloidy/ lub styczną /paraboloidy/.

§ 194. Powierzchnie urojone odpowiadają układom biegunowym I rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu, leżącego wewnątrz czworościanu biegunowego, nie przecina żadnej jego krawędzi. Wszystkie punkty tej powierzchni i wszystkie płaszczyzny do niej styczne są urojone. Każdy /rzeczywisty/ punkt jest względem tej powierzchni wewnętrznym; każda płaszczyzna i prosta - zewnętrzną. Środek, średnica i osie są tutaj, jak zresztą zawsze, rzeczywiste.- Ponieważ płaszczyzna niewłaściwa jest względem tej powierzchni zewnętrzną, możemy przeto powierzchnię urojoną uważać za elipsoidę.

§ 195. Powierzchnie krzywokreślne odpowiadają układom biegunowym II rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu, leżącego wewnątrz czworościanu biegunowego przecina trzy jego krawędzie. Punkty samosprzężone stanowią punkty tej powierzchni, płaszczyzny samosprzężone są styczne do niej; istnieją zatem tutaj zarówno rzeczywiste jak i urojone punkty leżące na powierzchni i płaszczyzny styczne do niej. Natomiast nie istnieją w tych układach rzeczywiste proste samosprzężone, t.j. rzeczywiste tworzące powierzchni. Z pośród prostych rzeczywistych jedne są zewnętrzne względem powierzchni /jeżeli inwolucja biegunowa jest na nich eliptyczna/, inne są sieczne /gdy inwolucja biegunowa jest na nich hiperboliczna/, jeszcze inne są styczne do powierzchni /gdy inwolucja biegunowa jest na niej paraboliczna/. Przez sieczną nie można poprowadzić do powierzchni rzeczywistej płaszczyzny stycznej /bo inwolucja biegunowa dokoła siecznej jest eliptyczna/; przez prostą zewnętrzną przechodzą dwie płaszczyzny styczne /bo inwolucja dokoła niej jest hiperboliczna; płaszczyzny te zostaną zjednoczone, gdy prosta zewnętrzna stanie się styczną. Styczne do powierzchni w którymkolwiek jej punkcie leżą wszystkie w płaszczyźnie stycznej i stanowią dokoła punktu zetknięcia eliptyczną inwolucję prostych sprzężonych. Z pośród rzeczywistych punktów, nie leżących na powierzchni, jedne są wewnętrzne /jeżeli układ biegunowy wiązki dokoła nich jest jednostajny/, inne zewnętrzne /gdy ten układ jest niejednostajny/. Z każdego punktu zewnętrznego można opisać na powierzchni rzeczywisty stożek drugiego stopnia; natomiast stożek opisany z punktu wewnętrznego jest urojony.

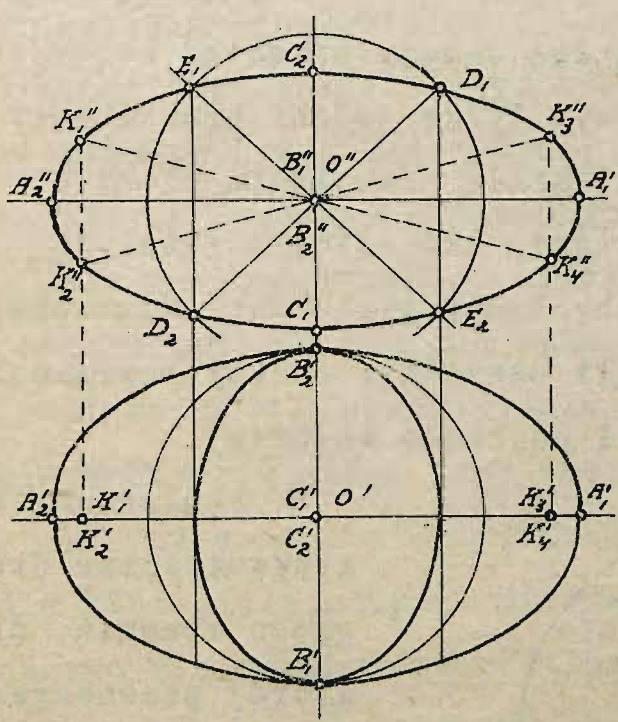
Z pośród rzeczywistych płaszczyzn, które nie są styczne do powierzchni, jedne są zewnętrzne /jeżeli układ biegunowy płaski jest na nich jednostajny/, inne są sieczne /gdy ten układ jest na nich niejednostajny/. Każda płaszczyzna sieczna przecina powierzchnię według stożkowej rzeczywistej; płaszczyzna zewnętrzna powierzchni nie przecina lub raczej przecina ją według stożkowej urojonej. Płaszczyzna biegunowa punktu zewnętrznego jest sieczną; płaszczyzna biegunowa punktu wewnętrznego jest zewnętrzną.

a/ Powierzchnia drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa jest zewnętrzną, t.j. której środek jest punktem wewnętrznym, nazywa się elipsoidem. Wszystkie średnice, a więc i osie są siecznemi, wszystkie wierzchołki są rzeczywiste, wszystkie przecięcia płaskie elipsoidu są elipsami - rzeczywistemi lub urojonemi; stożek asymptotyczny jest urojony. Odróżniamy elipsoidy trójosiowe /jeżeli cięciwy osiowe są nierówne/, obrotowe /jeżeli dwie cięciwy osiowe są równe/, a wśród nich elipsoid spłaszczony, wydłużony i kulę, zależnie od tego, czy oś obrotu jest krótsza, dłuższa lub równa każdej z dwóch osi równych.



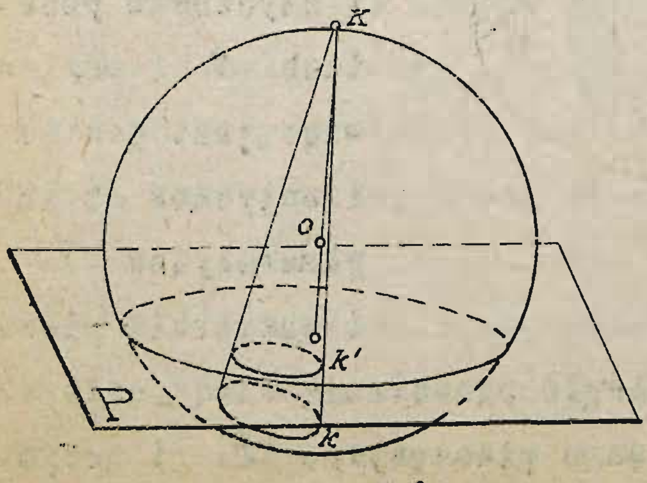
Rys. 358.

W elipsoidzie trójosiowym istnieją dwa ustawienia, których płaszczyzny przecinają powierzchnię według kół. Niechaj będą dane w rzutach prostokątnych /rys.359/ trzy osie A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 elipsoidu i przypuśćmy, że $A_1A_2 > B_1B_2 > C_1C_2$. Ze środka O zakreślmy kulę o średnicy równej średniej osi B_1B_2; jej pionowy kontur rzeczywisty będzie kołem, przecinającem kontur pionowy elipsoidu w punktach D_1, D_2, E_1 i E_2, leżących na średnicach D_1D_2 i E_1E_2, przez każdą z tych średnic i oś B_1B_2 poprowadźmy płaszczyzny D i E. -



Rys. 359.

Przecięcie kuli płaszczyzną D jest kołem, a przecięcie elipsoidu tą samą płaszczyzną jest elipsą, która z tym kołem ma wspólne punkty D_1, D_2, B_1 i B_2 i styczne w punktach B_1 i B_2, a więc jest z niem identyczna /§ 163/; płaszczyzna D i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe przecinają więc powierzchnię według kół; tak samo płaszczyzna E i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe. Dotyczy to nie-tylko płaszczyzn siecznych, ale i zewnętrznych /koła urojone/ i w szczególności stycznych /inwolucja prostokątna prostych sprzężonych/, których punkty zetknięcia z powierzchnią nazywają się punktami kołowemi powierzchni i mogą być otrzymane w przecięciu elipsy $B_1 B_2 C_1 C_2$ średnicą sprzężoną bądź ze średnicą $D_1 D_2$ /punkty K_1 i K_4 /, bądź ze średnicą $E_1 E_2$ /punkty K_2 i K_3 /. W elipsoidzie trójosiowym istnieją dwa układy przecięć kołowych, w elipsoidzie obrotowym tylko jeden, prostopadły do osi obrotu, w kuli każde przecięcie płaskie jest kołem. W elipsoidzie trójosiowym istnieją 4 punkty kołowe, w obrotowym tylko dwa /wierzchołki osi obrotu/, w kuli wszystkie punkty powierzchni są wierzchołkami i punktami kołowemi.



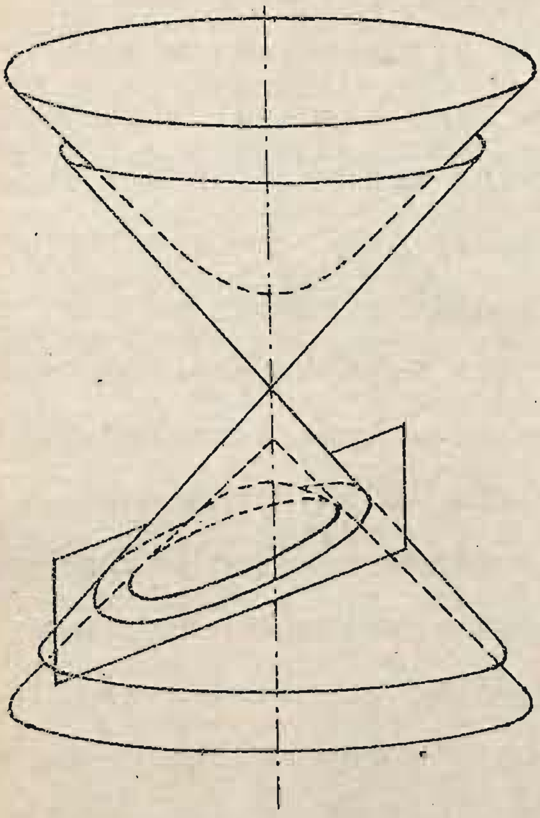
Rys. 360

b/ Powierzchnia krzywokreślna drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa jest sieczną, t.j. której środek jest punktem zewnętrz-

BIBLJOTEKA S. P. W.

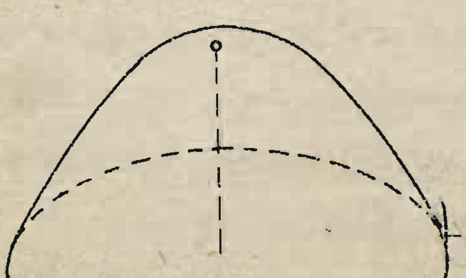
nym, nazywa się hiperboloidem dwupowłokowym. - Z każdych trzech średnio sprzężonych, a więc i z trzech osi, tylko jedna jest sieczną; hiperboloid dwupowłokowy posiada tylko dwa wierzchołki rzeczywiste. Stożek asymptotyczny jest rzeczywisty. - Każde przecięcie powierzchni płaszczyzną jest podobne do przecięcia stożka asymptotycznego tą samą płaszczyzną, gdyż pierwsze z tych przecięć jest zarazem przecięciem stożka, który przechodzi przez przecięcia hiperboloidu płaszczyzną niewłaściwą i który jest przesuniętym równolegle stożkiem asymptotycznym. Stąd wynika, że płaszczyzna, która przecina stożek asymptotyczny według koła, przecina w ten sam sposób i hiperboloid dwupowłokowy. Powierzchnia ta posiada zatem wogóle 4 punkty kołowe, które w hiperboloidzie obrotowym zostaną zjednoczone w dwóch jego wierzchołkach.

c/ Powierzchnia krzywokreślna drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa jest styczną, nazywa się paraboloidem eliptycznym. Z trzech osi tylko jedna jest właściwą. Każde przecięcie paraboloidu eliptycznego jest elipsą, z wyjątkiem przecięć równoległych do osi, które są parabolami. - Paraboloid eliptyczny posiada jeden wierzchołek,



Rys. 361.

dwa układy przecięć kołowych i dwa punkty kołowe, które wyznaczyć można podobnie jak dla elipsoidu, t.j. za pomocą kuli podwójnie stycznej. Szczególnym przypadkiem paraboloidu eliptycznego jest <u>paraboloid obrotowy,</u> którego dwa punkty kołowe zjednoczone są w wierzchołku.

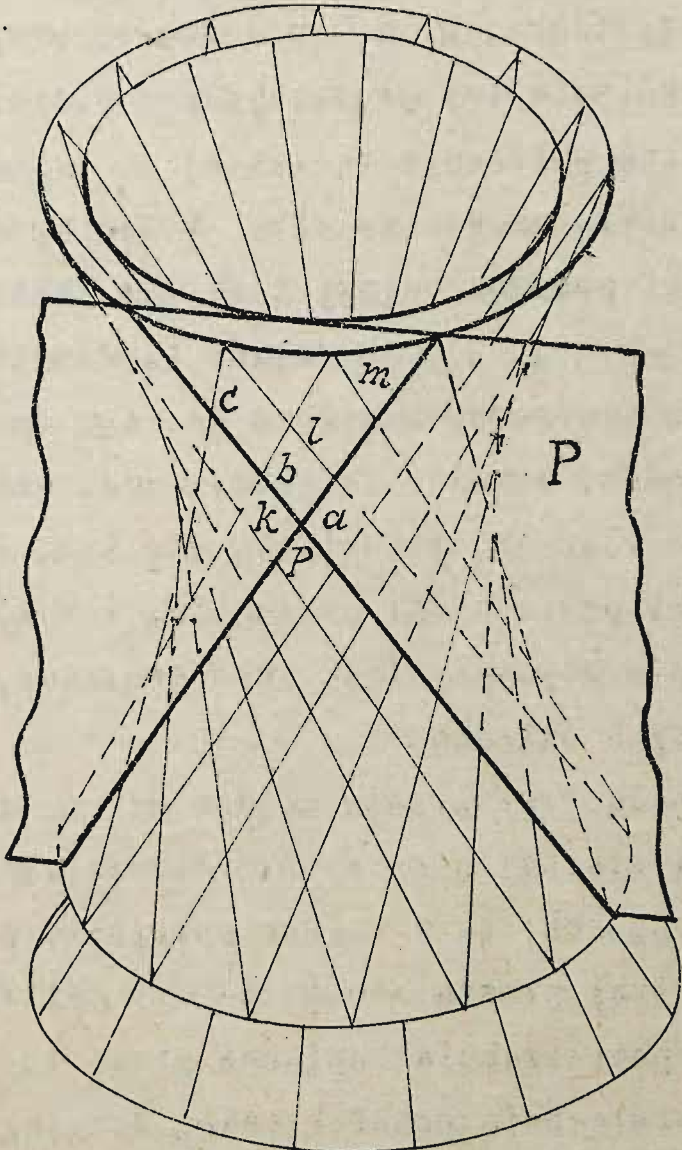


Rys. 362.

<u>§ 196. Powierzchnie prostokreślne</u> odpowiadają układom biegunowym III rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu leżącego wewnątrz czworo-

ścianu biegunowego przecina 4 jego krawędzie. Jak widzieliśmy w § 190 istnieją wówczas nietylko punkty i płaszczyzny, ale i proste samosprzężone, zwane tworzącemi powierzchni. Każdy punkt takiej prostej jest punktem powierzchni, każda płaszczyzna, przechodząca przez taką prostą, jest styczną do powierzchni. Z pośród innych prostych przestrzeni jedne są styczne, inne zewnętrzne lub sieczne, zależnie od tego, czy inwolucja biegunowa jest na nich paraboliczna, eliptyczna lub hiperboliczna. W przeciwieństwie do powierzchni krzywokreślnych przez prostą zewnętrzną nie można przeprowadzić płaszczyzny stycznej rzeczywistej, a przez sieczną przechodzą dwie takie płaszczyzny. Wszystkie punkty przestrzeni, nie leżące na powierzchni, są względem niej zewnętrzne, t.j. z każdego punktu można opisać na powierzchni rzeczywisty stożek drugiego stopnia; wszystkie płaszczyzny, które nie są styczne, są sieczne, t.j. każda z nich przecina powierzchnię według stożkowej rzeczywistej.

Niechaj prosta a /rys.363/ będzie tworzącą powierzchni prostokreślnej. Wszystkie punkty tej prostej leżą na powierzchni, gdyż ich płaszczyzny biegunowe przechodzą przez nie; wszystkie płaszczyzny, przechodzące przez tą prostą są styczne do powierzchni, gdyż ich bieguny leżą w nich. Poprowadźmy przez tworzącą a jakąkolwiek płaszczyznę P. Przetnie ona powierzchnię według stożkowej; ponieważ zaś prosta a wchodzi w skład tego przecięcia, więc ową stożkową mogą być tylko dwie przecinające się proste: jedną z nich jest prosta a, drugą niechaj będzie prosta k, przecinająca prostą a w pewnym punkcie P, który jest punktem zetknięcia płaszczyzny P z powierzchnią. Prosta k jest tworzącą powierzchni; gdy płaszczyzna P obracać się będzie dokoła prostej a, tworząca k opisywać będzie powierzchnię, przecinając tworzącą a w coraz to nowym punkcie P_a zetknięcia tej płaszczyzny z powierzchnią. Poszczególne położenia tworzącej k: k, l, m... są wszystkie skośne ze sobą, bo gdyby dwie którekolwiek z tych prostych np. k i l, się przecinały, to ponieważ każda z nich przecina prostą a, więc wszystkie 3 proste a, k i l leżałyby w płaszczyźnie P, która w ten sposób przecinałaby powierzchnię drugiego stopnia według 3 prostych, co niemożliwe /byłaby to bowiem krzywa 3 rzędu/. Jeżeli płasz-


m
c
l
b
k
a
P
P
l

czyznę P obracać będziemy dokoła prostej k , to tworząca a opisywać będzie powierzchnię, przecinając tworzącą k w coraz to nowym punkcie P_k zetknięcia tej płaszczyzny z powierzchnią; poszczególne położenia tworzącej a: $a, b, c, \ldots$ będą wszystkie skośne ze sobą. W ten sposób na powierzchni prostokreślnej leżą dwa układy tworzących $k, l, m, \ldots; a, b, c, \ldots$ mające tę własność, że każde dwie tworzące, należące do tego samego układu, są skośne, a każde dwie tworzące, należące do układów różnych, przecinają się tak, że przez każdy punkt powierzchni przechodzą i w każdej płaszczyźnie stycznej leżą dwie tworzące, należące do różnych układów.

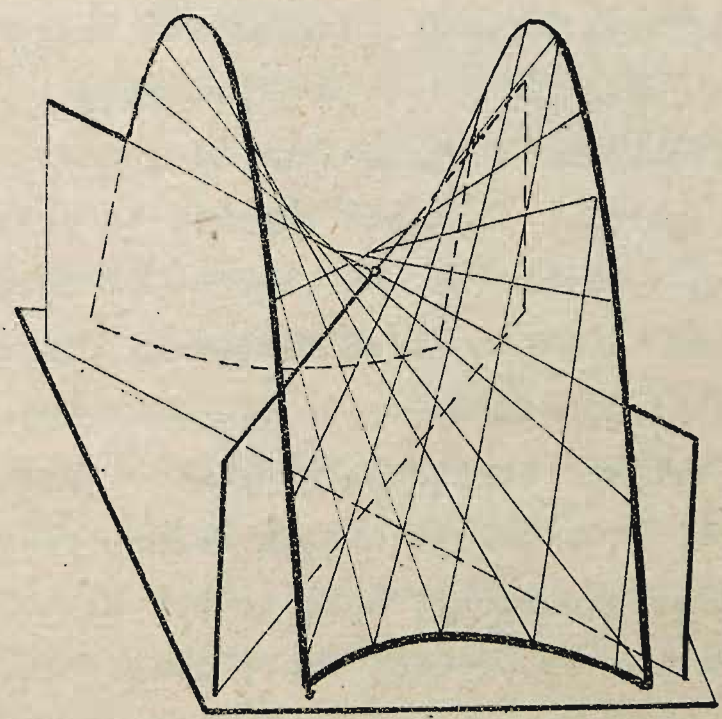
Niech będą trzy proste skośne a, b i c /kierownice/ i niechaj prosta k /tworząca/ porusza się w ten sposób, że w każdem położeniu przecina wszystkie trzy proste a, b i c /ślizgając się po nich/; powierzchnia opisana przez tworzącą k będzie powierzchnią prostokreślną drugiego stopnia. Jeżeli obierzemy trzy dowolne położenia tworzącej k: k, l i m , o których wiemy, że są skośne, i będziemy poruszali tak prostą a , aby ona w każdem położeniu przecinała wszystkie trzy proste k, l i m, to tworząca a opisze tę samą powierzchnię prostokreślną. Powierzchnię prostokreślną można przeto utworzyć przez "ślizganie" prostej a po trzech prostych wzajemnie skośnych: k; l i m.

Na każdych dwóch tworzących tego samego układu, np. na tworzących a i b, tworzące drugiego układu $k, l, m, \ldots$ wyznaczają szeregi rzutowe. - W samej rzeczy, przez którąkolwiek tworzącą c pierwszego układu oraz przez wszystkie przecinające ją tworzące drugiego układu: $k, l, m, \ldots$ wyznaczony jest pęk płaszczyzn o osi c, który na tworzących a i b daje dwa szeregi perspektywiczne, a więc rzutowe. Powierzchnię prostokreślną drugiego stopnia można przeto utworzyć, łącząc odpowiednie punkty dwóch szeregów rzutowych o podstawach skośnych.

Nawzajem dokoła każdych dwóch tworzących pierwszego układu, np. dokoła tworzących a i b, tworzące drugiego układu: $k, l, m, \ldots$ wyznaczają pęki płaszczyzn rzutowe. W samej rzeczy na którejkolwiek tworzącej c pierwszego układu przez wszystkie przecinające ją tworzące drugiego układu: $k, l, m, \ldots$ wyznaczony jest szereg punktów o podstawie c, któ ry wraz z tworzącemi a i b wyznacza dwa pęki płaszczyzn perspektywiczne. Powierzchnię prostokreślną można więc jeszcze utworzyć przez przecinanie się odpowiednich płaszczyzn dwóch rzutowych pęków płaszczyzn o osiach skośnych.

a/ Powierzchnia prostokreślna drugiego stopnia nazywa się hiperboloidem jednopowłokowym, jeśli płaszczyzna niewłaściwa jest względem niej sieczną /rys.363/. Hiperboloid jednopowłokowy utworzony zostanie przez "ślizganie" prostej a po trzech prostych skośnych $k, l, m, \ldots$ nie równoległych do jednej płaszczyzny. W samej rzeczy prosta, która łączy punkty niewłaściwe prostych k i l, nie przecina wówczas prostej m, żadna przeto prosta niewłaściwa nie może być tworzącą, skąd wynika, że płaszczyzna niewłaściwa nie może być styczną do powierzchni. Hiperboloid jednopowłokowy można utworzyć, łącząc odpowiednie punkty dwóch szeregów rzutowych niepodobnych o podstawach skośnych, - gdyby bowiem szeregi te były podobne, to ich punkty niewłaściwe odpowiadałyby sobie wzajemnie, tak że prosta niewłaściwa byłaby tworzącą, a więc płaszczyzna niewłaściwa byłaby styczną. Z pośród trzech średnic sprzężonych, a więc i z pośród trzech osi, dwie są siecznemi; stożek asymptotyczny jest rzeczywisty, każda jego tworząca jest równoległa do jednej z tworzących hiperboloidu każdego układu. Tak samo jak w powierzchniach krzywokreślnych istnieją i tutaj dwa układy przecięć kołowych; płaszczyzny przecinające hiperboloid według kół przecinają jego stożek asymptotyczny według kół spółśrodkowych. Wszystkie 4 punkty kołowe są wszakże urojone, albowiem średnica sprzężona z dwiema wzajemnie prostopadłemi średnicami przecięcia kołowego, przechodzącego przez środek powierzchni, nie przebija powierzchni w punktach rzeczywistych. Hiperboloid jednopowłokowy stanie się obrotowy, jeżeli oba układy przecięć kołowych zostaną zjednoczone, powierzchnia taka może być utworzona przez obrót prostej a dokoła nieprzecinającej jej osi o, a jej stożek asymptotyczny powstanie przez obrót prostej równoległej do a i przecinającej oś w spodku wspólnej prostopadłej do prostej a i osi o.

b/ Powierzchnia prostokreślna drugiego stopnia nazywa się paraboloidem hiperbolicznym, jeżeli płaszczyzna niewłaściwa jest do niej styczną /rys. 364/. Jak każda płaszczyzna styczna ma wtedy płaszczyzna niewłaściwa dwie tworzące wspólne z powierzchnią, każda z innego układu. Ponieważ wszystkie tworzące właściwe I układu przecinają tę z tych tworzących niewłaściwych, która należy do II układu, a wszystkie tworzące II układu przecinają tę z nich, która należy do I układu, więc tworzące każdego układu mają wspólne ustawienie. Paraboloid hiperboliczny może przeto być utworzony przez ruch prostej, ślizgającej się po trzech prostych równoległych do jednej płaszczyzny, wszystkie położenia tej tworzącej będą równoległe do innej płaszczyzny. Paraboloid hiperboliczny utworzyć można jeszcze, łącząc punkty odpowiednie dwóch szeregów podobnych /albo równych/ o podstawach skośnych; w samej rzeczy prosta, łącząca ich punkty niewłaściwe, jest wówczas tworzącą, a przechodząca przez nią płaszczyzna niewłaściwa jest styczną. Z trzech osi tylko jedna pozostaje właściwą. Płaszczyzny, przechodzące przez tę oś w danych dwóch ustawieniach są zwyrodniałym stożkiem asymptotycznym tej powierzchni. Każde przecięcie paraboloidu hiperbolicznego jest hiperbolą, z wyjątkiem przecięć równoległych do osi, które są parabolami. Paraboloid hiperboliczny jest jedyną powierzchnią drugiego stopnia, która nie po-



Rys. 364.

siada przecięć kołowych i która zatem nie może być obrotową.

§ 197. Powierzchnie drugiego stopnia zwyrodniałe. Układ biegunowy przestrzenny określiliśmy zapomocą czworościanu biegunowego $A_1 A_2 A_3 A_4$ i płaszczyzny biegunowej B punktu jakiegokolwiek B z tem zastrzeżeniem, że punkt B nie leży w żadnej ze ścian, a płaszczyzna B nie przechodzi przez żaden z wierzchołków czworościanu $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Odrzućmy teraz te zastrzeżenia.

Przypuśćmy najpierw, że płaszczyzna biegunowa B punktu jakiegokolwiek B przechodzi przez jeden z wierzchołków czworościanu biegunowego np. przez A_4, układy biegunowe płaskie na ścianach zawierających wierzchołek A_4 będą zwyrodniałe, na ścianie zaś $A_1A_2A_3$ układ biegunowy płaski może być albo jednostajny, albo niejednostajny.- Płaszczyzna biegunowa każdego punktu M przechodzi przez A_4, natomiast biegun każdej płaszczyzny M jest nieoznaczony, może to być mianowicie dowolny punkt pewnej prostej m, przechodzącej przez A_4. W ten sposób układ biegunowy przestrzenny staje się układem biegunowym wiązki dokoła punktu A_4; zależnie od tego, czy ten układ będzie jednostajny lub niejednostajny, powierzchnia tego układu będzie stożkiem urojonym lub rzeczywistym. Gdy płaszczyzna B przechodzi przez dwa wierzchołki czworościanu biegunowego A_4 i A_1, to jest przez krawędź A_4A_1, stożek ten zniekształca się do dwóch płaszczyzn urojonych sprzężonych lub rzeczywistych, przecinających się według krawędzi A_4A_1.

Stożek urojony lub rzeczywisty oraz dwie płaszczyzny urojone, sprzężone lub rzeczywiste stanowią powierzchnię drugiego rzędu /bo każda prosta przebija ją w dwóch punktach/ i klasy zerowej /bo przez dowolną prostą nie można wogóle do niej wyprowadzić żadnej płaszczyzny stycznej/.

Przypuśćmy następnie, że biegun B jakiejkolwiek danej płaszczyzny B leży na jednej ze ścian czworościanu biegunowego, np. na ścianie $A_1 A_2 A_3$. Układ biegunowy przestrzenny staje się wtedy układem biegunowym płaskim na tej ścianie; zależnie od tego, czy ten układ jest jednostajny czy niejednostajny, powierzchnia tej biegunowości jest stożkową urojoną lub rzeczywistą. Gdy punkt B leży na jednej z krawędzi czworościanu biegunowego, np. na $A_4 A_1$, to stożkowa zniekształca się do dwóch punktów urojonych sprzężonych lub rzeczywistych, leżących na tej krawędzi. Stożkowa urojona lub rzeczywista oraz dwa punkty urojone sprzężone lub rzeczywiste stanowią powierzchnię drugiej klasy /bo przez każdą prostą można do niej przeprowadzić dwie płaszczyzny styczne/ i rzędu zerowego /bo dana prosta wogóle jej nie przebija/.

Streszczając powyższe możemy podzielić powierzchnie drugiego stopnia jak następuje:

I. POWIERZCHNIE DRUGIEGO RZĘDU I DRUGIEJ KLASY.

Powierzchnie krzywokreślne.

1. Powierzchnia /elipsoid/ urojona.
2. Elipsoid rzeczywisty.
3. Hiperboloid dwupowłokowy.
4. Paraboloid eliptyczny.

Powierzchnie prostokreślne.

5. Hiperboloid jednopowłokowy.
6. Paraboloid hiperboliczny.

II. POWIERZCHNIE DRUGIEGO RZĘDU I KLASY ZEROWEJ.

7. Stożek urojony.
8. 2 płaszczyzny urojone sprzężone.
9. Stożek rzeczywisty.
10. Dwie płaszczyzny rzeczywiste.

III. POWIERZCHNIE DRUGIEJ KLASY I RZĘDU ZEROWEGO.

11. Stożkowa urojona.
12. Dwa punkty urojone sprzężone.
13. Stożkowa rzeczywista.
14. Dwa punkty rzeczywiste.