Przez dany punkt $A'A''$ prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do $a'a''$, wyznaczamy jej punkt przebicia prostą $a'a''$ i łączymy ten punkt z punktem $A'A''$.

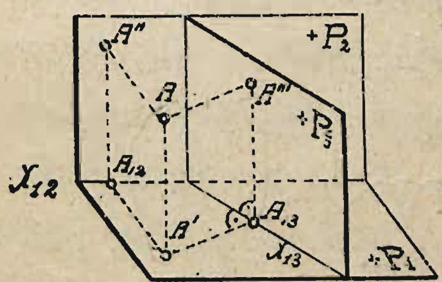
ROZDZIAŁ II.

ZMIANA PŁASZCZYZN RZUTÓW.

§18. RZUT PUNKTU NA PŁASZCZYZNĘ PROSTOPADŁĄ DO P_1 LUB P_2.

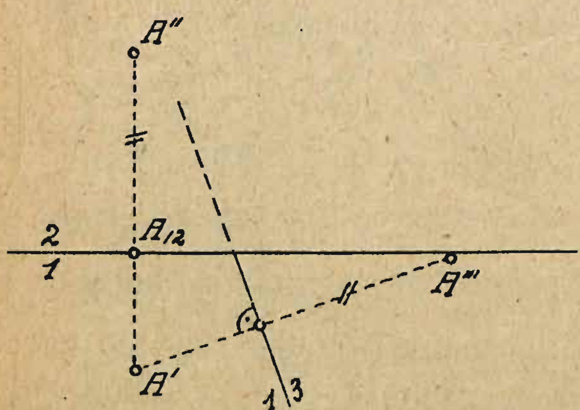
Nieraz bywa użytecznym rzut figury na płaszczyznę różną od P_1 i P_2. Często się zdarza np. że niektóre proste i płaszczyzny figury są prostopadłe do jednej lub do obu płaszczyzn rzutów, dzięki czemu rzuty niektórych prostych są zjednoczone. Wprawdzie rzuty tak położonej w przestrzeni figury zwykle łatwiej mogą być wykreślane; tym trudniej zato wyobrazić sobie figurę na podstawie tych rzutów. Z drugiej znów strony, liczne zagadnienia geometrji przestrzeni łatwo mogą być rozwiązane wykreślnie, gdy pewne części figury zajmą szczególne położenie względem płaszczyzn rzutów, gdy np. pewna płaszczyzna figury przystaje do jednej z płaszczyzn rzutów lub jest do niej równoległa, albo gdy pewna prosta jest do jednej z tych płaszczyzn prostopadła. W jednym i drugim przypadku pożądanem jest znalezienie rzutu figury na nową płaszczyznę rzutów, mającą względem tej figury pewne położenie szczególne. Ponieważ każdą figurę uważać możemy za zbiór punktów połączonych prostemi i płaszczyznami, wystarczy zatem umieć znaleźć rzut jednego punktu na nową płaszczyznę rzutów. Jak zobaczymy niebawem, można się przytem ograniczyć do płaszczyzn prostopadłych do P_1 lub P_2.

Niechaj będą dwie płaszczyzny rzutów P_1 i P_2 /Rys.59/, ich prostą przecięcia, czyli oś rzutów oznaczymy X_{12} ; jedną którąkolwiek z dwóch części, na której oś X_{12} dzieli każdą z tych płaszczyzn uważać będziemy za dodatnią, oznaczając ją $+P_1$ lub $+P_2$. Niech będzie punkt przestrzeni A, którego rzuty oznaczymy jak zwykle A' i A'' ; rzędne tego punktu będą $A_{12}A'$ i $A_{12}A''$; każdą z nich uważać będziemy za dodatnią, gdy leży na dodatniej półpłaszczyźnie rzutów; w przeciwnym razie uważać ją będziemy za ujemną.



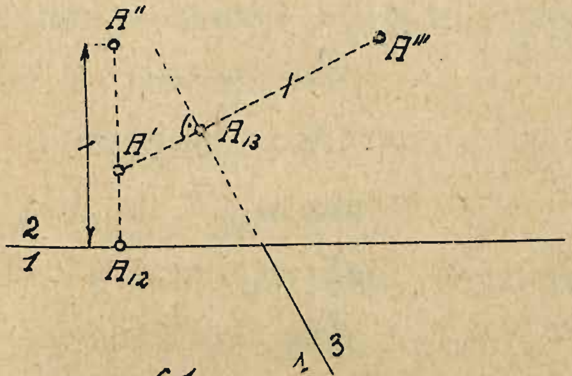
Rys. 59.

Niech będzie teraz nowa płaszczyzna rzutów P_3 prostopadła do P_1 ; jej ślad pierwszy oznaczymy X_{13} i nazwiemy krótko nową osią. Dzieli ona płaszczyznę P_3 na dwie części; oznaczmy przez $+P_3$ tę z nich, która leży po tej samej stronie P_1, co $+P_2$. Z punktu A spuśćmy prostopadłą na płaszczyznę P_3 jej spodek A''' nazwiemy trzecim rzutem punktu A. Jest oczywiste, że $A_{12}A''=A_{13}A'''$ i że ta równość jest prawdziwa nietylko co do wartości bezwzględnej, ale i co do znaku. Przytem zarówno $A_{13}A'''$ jak i $A_{13}A'$ jest $\perp$ do X_{13}. Obróćmy teraz P_3 dokoła X_{13} tak, aby ta płaszczyzna przystała do P_1 ; będzie to możliwe dwoma sposobami; po tej stronie nowej osi, po której upadnie $+P_3$ zróbmy napis „3” ; będzie to strona dodatnich trzecich rzędnych /Rys. 60, 61, 62, 63/. Oczywiście przeciwna strona nowej osi będzie przeznaczona dla dodatnich pierwszych rzędnych względem nowej osi; możemy więc tutaj umieścić napis „1”. Umieśćmy również napisy 1 i 2 po obu stronach dawnej osi X_{12}.

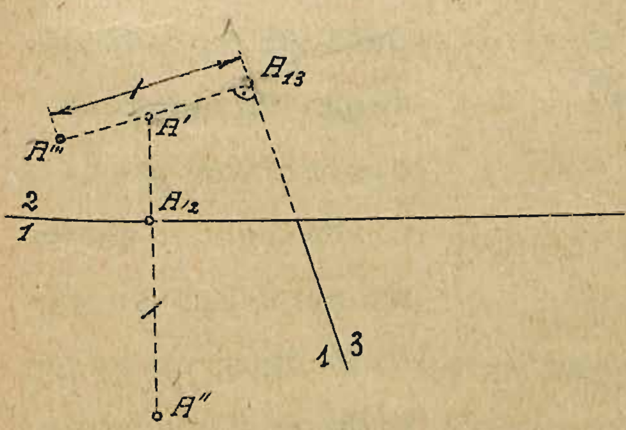


Rys. 60.

Aby zna-leźć trzeci rzut punktu A, którego rzut pierwszy A' i drugi A'' są dane, należy z punktu A' spuścić prostopadłą $A'A_{13}$ na nową oś X_{13} i na tej prostopadłej od punktu A_{13} przecięcia jej z nową osią odmierzyć co do wielkości i co do znaku odcinek $A_{13}A''' = A_{12}A''$, przytem każdy ~~z tych~~ z tych odcinków będziemy uważali za dodatni, jeżeli punkt A''', względnie A'' będzie się znajdował po tej stronie odpowiedniej osi, po której znajduje się napis 3 wzgl. 2 - za ujemny w przeciwnym razie. Rysunki 60, 61, 62 i 63 przedstawiają wykreślenia trzeciego rzutu punktu , jeżeli ten punkt znajduje się w I, II, III lub IV



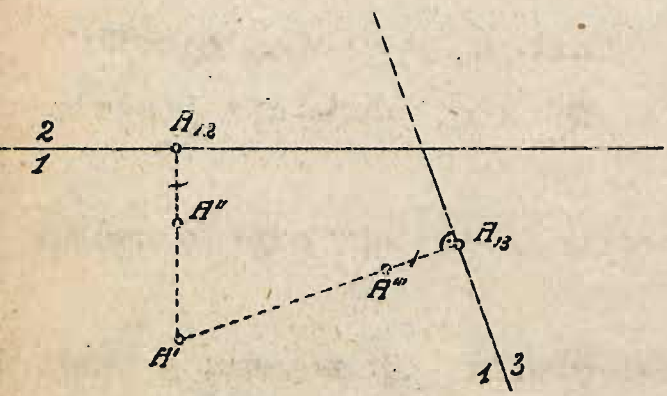
Rys. 61.



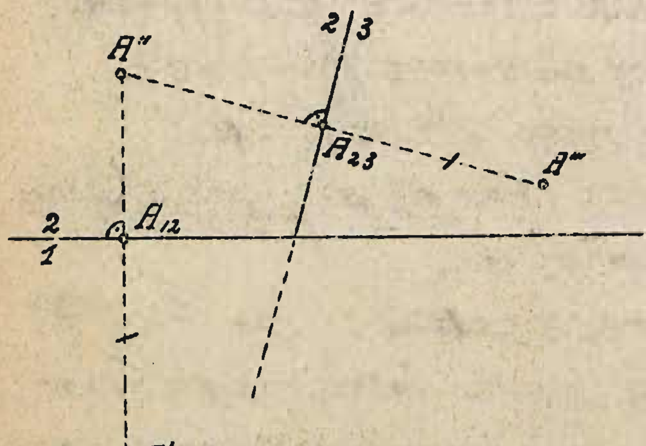
Rys. 62.

ćwiartce.

Zupełnie tak samo postępować będziemy, jeżeli nowa płaszczyzna rzutów P_3 będzie prostopadła do P_2. Oznaczmy znowu przez $+P_3$ tę część płaszczyzny P_3, która znajduje się po tej samej stronie płaszczyzny P_2 co $+P_1$. Umieśćmy napis „3" po tej stronie nowej osi X_{23}, po której ma upaść $+P_3$: będzie to strona dodatnich trzecich rzędnych, oczywiście strona przeciwna, będzie przeznaczona dla dodatnich drugich rzędnych względem nowej osi. Aby wyznaczyć trzeci rzut punktu ~~punktu~~ A, spuśćmy z punktu A prostopadłą $A''A_{23}$ na nową oś i na tej prostopadłej od punktu A_{23} przecięcia jej z nową



Rys. 63.



Rys. 64.

osią odmierzmy co do wartości bezwzględnej i co do znaku odcinek $A_{23}A''' = A_{12}A'$.

Dwa rzuty $A'A'''$ lub $A''A'''$ tak samo dobrze wyznaczają punkt A, jak dwa rzuty $A'A''$. Jeden z dwóch danych rzutów punktu A zastępujemy w ten sposób przez nowy rzut, podczas gdy inny pozostaje niezmieniony.

Wyznaczenie nowego rzutu odbywa się przeto według następującej reguły.

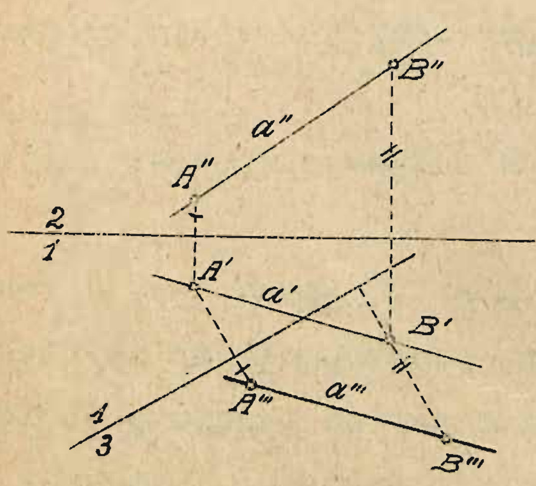
Aby otrzymać nowy rzut punktu, spuszczamy z rzutu, który nie ma uledz zmianie, prostopadłą na nową oś i na tej prostopadłej odmierzamy od punktu przecięcia z osią odcinek równy co do wartości i znaku odległości zbytecznego rzutu od dawnej osi.

Odległość nowego rzutu od nowej osi = odległości zbytecznego rzutu od dawnej osi.

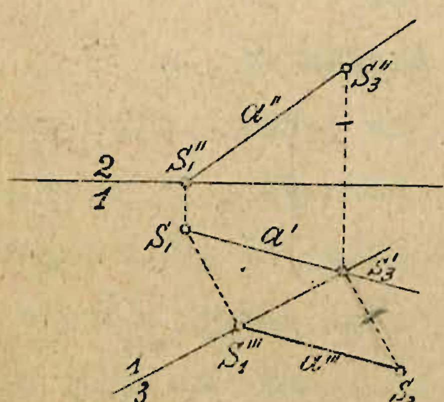
W ten sposób, dane rzuty punktu A na P_1 i P_2 możemy zastąpić rzutami jego na jedną z tych płaszczyzn np. na P_2, oraz na płaszczyznę do niej prostopadłą, przytem wyobrażamy sobie, że płaszczyzna P_3 przez obrót w jedną lub drugą stronę dokoła swego śladu na płaszczyźnie P_2 zostanie na niej rozpostartą.

§ 19. RZUT PROSTEJ I ŚLAD PŁASZCZYZNY NA NOWEJ PŁASZCZYŹNIE RZUTÓW PROSTOPADŁEJ DO P_1 LUB P_2.

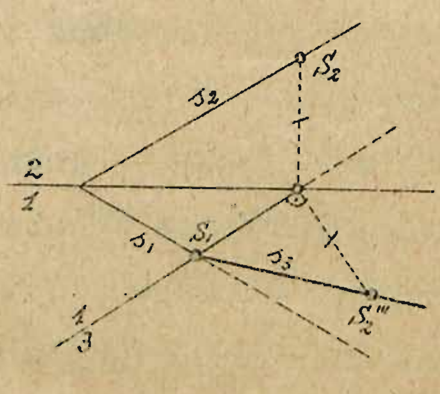
Gdy chcemy wyznaczyć trzeci rzut prostej $a'a''$, to łączymy trzecie rzuty dwóch jakichkolwiek punktów tej prostej /Rys.65/. Punktami tymi mogą być w szczególności /Rys.66/ ślad na płaszczyźnie, który ma pozostać niezmieniony, oraz ślad na nowej płaszczyźnie rzutów. Rzut tego ostatniego punktu leży oczywiście w przecięciu nowej osi z tym rzutem prostej, który nie ma uledz zmianie.



Rys. 65.



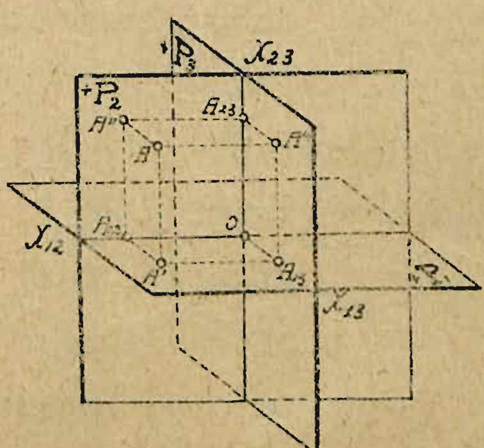
Rys. 66.



Rys. 67.

Aby wyznaczyć ślad płaszczyzny $\sigma_1 \sigma_2$ na nowej płaszczyźnie rzutów P_3 prostopadłej do P_1 lub P_2, należy znaleźć trzeci rzut prostej przecięcia płaszczyzny $\sigma_1 \sigma_2$ z P_3. W tym celu najlepiej skorzystać ze śladów S_1 i S_2 tej prostej /Rys.67/. Ślady σ_1 i σ_3 lub σ_2 i σ_3 równie dobrze wyznaczają płaszczyznę S jak ślady σ_1 i σ_2.

§ 20. PŁASZCZYZNA RZUTÓW BOCZNA. Z pośród płaszczyzn rzutów prostopadłych do P_1 lub P_2 wyróżniają się te, które są do obu tych płaszczyzn, a więc i do osi X_{12} prostopadłe. Płaszczyzny takie nazywamy bocznemi /rys.68/. Płaszczyzna boczna P_3 przecina P_1 i P_2 według prostych X_{13} i X_{23}, z których każda może uchodzić za nową oś rzutów, zależnie od tego, czy płaszczyznę P_3 rozpostrzemy na płaszczyźnie P_1 czy na płaszczyźnie P_2. Wzajemnie prostopadłe proste X_{12} X_{13} i X_{23} nazywamy czasem osiami spółrzędnych, ich punkt

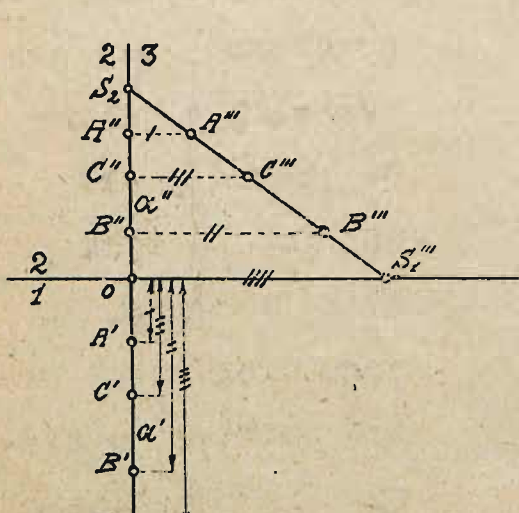


Rys. 68.

przecięcia O początkiem spółrzędnych, a pierwszą, drugą i trzecią rzędną każdego punktu - spółrzędnymi tego punktu.

Płaszczyzna rzutów boczna jest szczególnie używana wtedy, gdy w grę wchodzą płaszczyzny prostopadłe do osi. Trzecie rzuty figur, leżących w takich płaszczyznach są tym figurom równe, podczas gdy dwa pierwsze ich rzuty, leżąc na zjednoczonych śladach płaszczyzny, figur tych należycie nie wyznaczają. W szczególności korzystamy z płaszczyzny bocznej rzutów dla rozwiązania zadań, dotyczących prostych prostopadłych do osi.

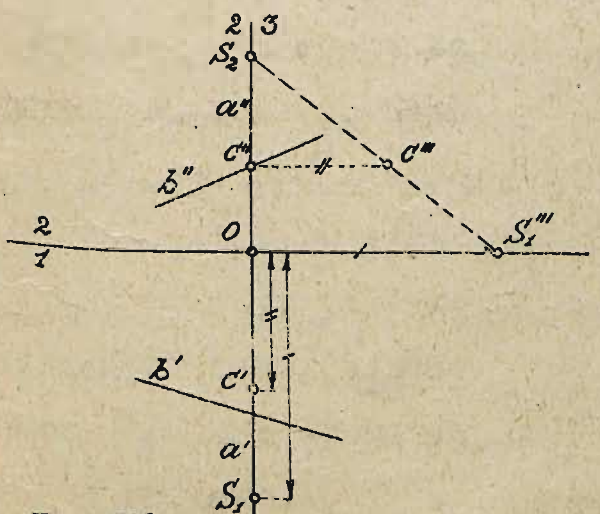
Niech będzie np. /rys.69/ prosta AB , leżąca w płaszczyźnie prostopadłej do osi, a więc nie wyznaczona przez swoje rzuty a' i a'', które leżą na zjednoczonych śladach płaszczyzny. Przypuśćmy, że dane są rzuty $A'A''$ i $B'B''$ punktów A i B tej prostej, mamy wyznaczyć pierwszy rzut C' punktu C , leżącego na tej prostej, gdy drugi jego rzut C'' jest da-



Rys. 69.

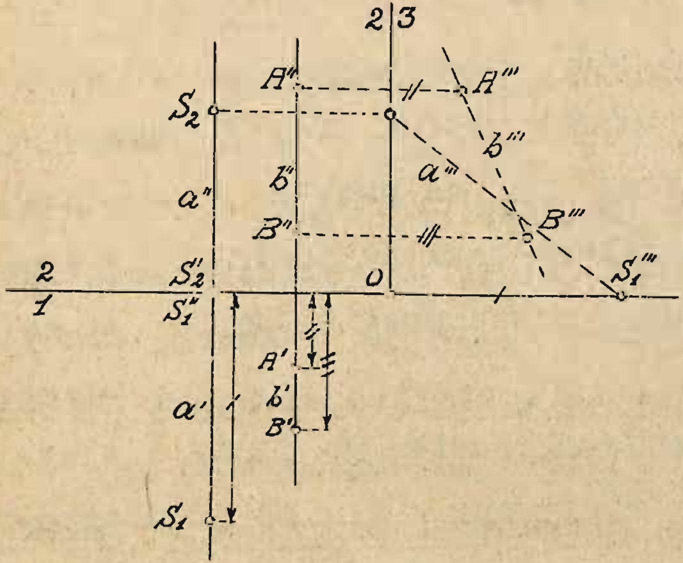
ny. Obierzmy za nową płaszczyznę rzutów, płaszczyznę, w której dana prosta leży, a za nową oś ślad X_{23} tej płaszczyzny na P_2. Wyznaczywszy zapomocą punktów A i B trzeci rzut a''' prostej a, znajdziemy trzecią rzędną $c''c'''$ punktu C; odmierzając ją zaś na a' od punktu O według zwykłej umowy znajdziemy szukany punkt C'. W szczególności znajdziemy tym sposobem ślady S_1 i S_2 prostej AB

Albo niech będą dwie proste a i b i przypuśćmy, że jedna z nich, np. a leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi i dana jest przez swoje ślady S_1 i S_2, druga zaś prosta b nie leży w takiej płaszczyźnie i dana jest przez swoje rzuty b' i b'' /rys. 70/. Proste a i b nie mogą być



Rys. 70.

równoległe; aby się przekonać, czy się przecinają zważmy, że jeżeli punkt wspólny C tych prostych istnieje, to jego drugi rzut musi być punktem, w którym się przecinają drugie rzuty prostych a i b t.j. punktem C''. Mając drugi rzut punktu C, leżącego na prostej a, musimy na zasadzie poprzedniego zadania znaleźć jego rzut pierwszy C'. Jeżeli punkt C' leży w przecięciu pierwszych rzutów a' i b', to proste a i b się przecinają. W przeciwnym razie są one skośne.

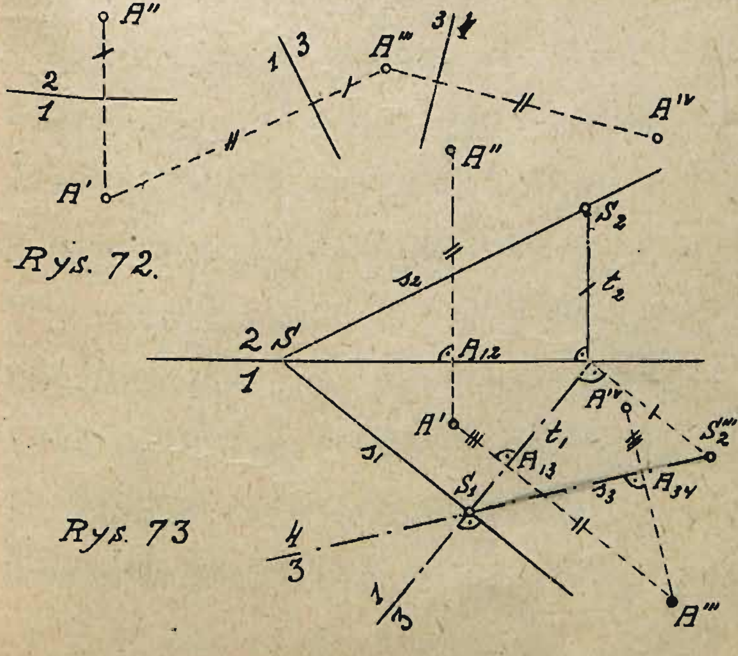


Rys. 71.

Albo jeszcze niech będą dwie proste a i b, leżące w płaszczyznach równoległych, a do osi prostopadłych /rys.71/. Proste a i b nie mogą się przecinać; aby się przekonać, czy są one równoległe, wyznaczmy ich rzuty a''' i b''' na dowolną trzecią płaszczyznę, np. na płaszczyznę boczną rzutów. Jeżeli $a''' \parallel b'''$, to $a \parallel b$, jeżeli a''' i b''' się przecinają, to a i b są skośne.

§ 21. RZUTY PUNKTU NA DOWOLNĄ PŁASZCZYZNĘ. Zmiana płaszczyzny rzutów może następować kilkakrotnie, przytem nowa płaszczyzna rzutów ma być zawsze prostopadła do poprzedniej. Tak więc P_3 ma być prostopadła do P_1 lub P_2, P_4 do P_3, P_5 do P_4 i t. d. Na rys. 72 przedstawiona jest dwukrotna zmiana płaszczyzny rzutów: $P_3 \perp P_1$ i $P_4 \perp P_3$. Znajdując rzuty punktu na płaszczyzny prostopadłe do każdorazowych płaszczyzn rzutów, można znaleźć rzut tego punktu na dowolną płaszczyznę S, której ślady s_1 i s_2 są dane, przytem wystarcza zawsze dwukrotna zmiana płaszczyzny rzutów. Rozwiążmy tedy

ZADANIE. Dane są pierwsze i drugie rzuty punktów A, B, C ...... oraz ślady s_1, s_2 płaszczyzny S; znaleźć rzuty danych punktów na płaszczyznę S, rozpostartą w płaszczyźnie rysunku. Znajdźmy np. rzut punktu A na płaszczyznę S; tak samo wyznaczymy rzuty wszystkich innych danych punktów. Poprowadźmy płaszczyznę P_3 $(t_1 \; t_2)$ prostopadłą do P_1 i do S, a więc



Rys. 72.

Rys. 73

prostopadłą do prostej ich przecięcia s_1. Jej pierwszy ślad t_1 oznaczmy przez X_{13}, będzie on prostopadły do s_1; drugi ślad t_2 będzie prostopadły do osi X_{12}. Obrawszy P_3 za nową płaszczyznę rzutów, a więc jej ślad t_1 za nową oś X_{13}, znajdźmy ślad s_3 płaszczyzny S oraz rzut A''' punktu A względem nowej osi. W nowym układzie płaszczyzn rzutów $P_1 P_3$ śladami płaszczyzny S będą proste s_1 i s_3, rzutami punktu A punkty $A' A'''$. Aby teraz znaleźć rzut punktu A na S, obieramy ją za nową płaszczyznę rzutów, a jej ślad s_3 za nową oś X_{34}, poczem znajdujemy czwarty rzut A^{IV} punktu A, spuszczając z punktu A''' prostopadłą na nową oś i odmierzając na niej od punktu A_{34} odcinek $A_{34} A^{IV}$ równy co do wartości i znaku odległości zbytecznego rzutu A' od dawnej osi X_{13}. Punkt A^{IV} jest rzutem punktu A na S, gdy ta płaszczyzna po obrocie dokoła s_3 zostanie rozpostarta na płaszczyźnie rysunku.

Chcąc na danej płaszczyźnie $s_1 s_2$ otrzymać rzuty figury danej przez swoje pierwsze i drugie rzuty, trzebaby postąpić w ten sam sposób z każdym punktem figury, np. z każdym wierzchołkiem danego wielościanu.

§ 22. RZUTY WIELOŚCIANÓW. Zmiana płaszczyzn rzutów służy częstokroć do wyrazistszego przedstawienia wielościanów, których rzuty zostały początkowo wykreślone w założeniu szczególnego położenia wielościanów względem płaszczyzn rzutów. Jak już wspominaliśmy w § 17 łatwość wykreślenia nie idzie tu w parze z łatwością odtworzenia figury w wyobraźni; rzuty wielościanu wogóle tym łatwiej wykreślić, im bardziej wyjątkowe jest jego położenie względem płaszczyzn rzutów; tym trudniej zato na zasadzie tych rzutów odtworzyć go w wyobraźni. Przez jedno- lub dwukrotną zmianę płaszczyzny rzutów, położenie wyjątkowe względem płaszczyzn rzutów zostaje zniesione.

Zanim damy odpowiedni przykład, słów kilka powiedzieć musimy o kreśleniu rzutów wielościanów. Rzut wielościanu jest wyznaczony, jeżeli znalezione są rzuty wszystkich jego wierzchołków i jeżeli o każdym wierzchołku wiadomo, z którymi z pozostałych wierzchołków łączą go wychodzące z niego krawędzie. Aby rysunek uczynić bardziej poglądowym, przypuszczamy, że wielościany są nieprzezroczyste. Jeżeli oko umieścimy na dostatecznie wielkiej odległości od płaszczyzny rzutów po dodatniej jej stronie, to jedne krawędzie, ściany i wierzchołki będą widzialne, inne będą zasłonięte; rzuty krawędzi widzialnych kreślimy linją ciągłą; rzuty krawędzi zasłoniętych - - linją przerywaną. Każda ściana ograniczona wyłącznie krawędziami widzialnemi jest widzialna, każdy wierzchołek, przez który przechodzi krawędź widzialna jest widzialny. Na każdym wielościanie istnieje linja łamana zamknięta, wogóle skośna, której bokami są krawędzie wielościanu i która odgranicza część widzialną powierzchni wielościanu od części niewidzialnej; linja ta nazywa się konturem prawdziwym; rzut zaś tej łamanej nazywa się konturem widzialnym.

Rozważania nasze ograniczymy do wielościanów wypukłych, t.j. takich, których powierzchnię dowolna prosta, na żadnej z jego ścian nie leżąca, przebija najwyżej w dwóch punktach. Proste rzucające przebijają zatem wielościan wogóle w dwóch punktach; wyjątek stanowią te proste rzucające, które przechodzą przez punkty konturu prawdziwego, stykając się w tych punktach z wielościanem. - Tworzą one graniastosłup prosty na danym wielościanie opisany; kontur widzialny jest to przecięcie tego graniastosłupa płaszczyzną rzutów. Bardzo łatwo z pośród rzutów wierzchołków i krawędzi wyróżnić te, które stanowią kontur widzialny, rzuty bowiem wszystkich innych wierzchołków i krawędzi muszą się znaleźć wewnątrz niego.

Gdy wyznaczony został kontur widzialny, znajdziemy, które krawędzie i wierzchołki są widzialne, jeżeli określimy widzialność lub niewidzialność jednego choćby wierzchołka, którego rzut znajduje się wewnątrz konturu; wszystkie bowiem krawędzie, wychodzące z wierzchołka widzialnego, nie leżącego na konturze, będą widzialne; a zatem widzialne będą też wierzchołki, do których one prowadzą; krawędzie z tych wierzchołków wychodzące będą znów widzialne i t.d. Tym sposobem, od rzutu dowolnego wierzchołka widzialnego wewnątrz konturu dojdziemy widzialnemi krawędziami do wszystkich wierzchołków konturu; pozostałe krawędzie będą niewidzialne.

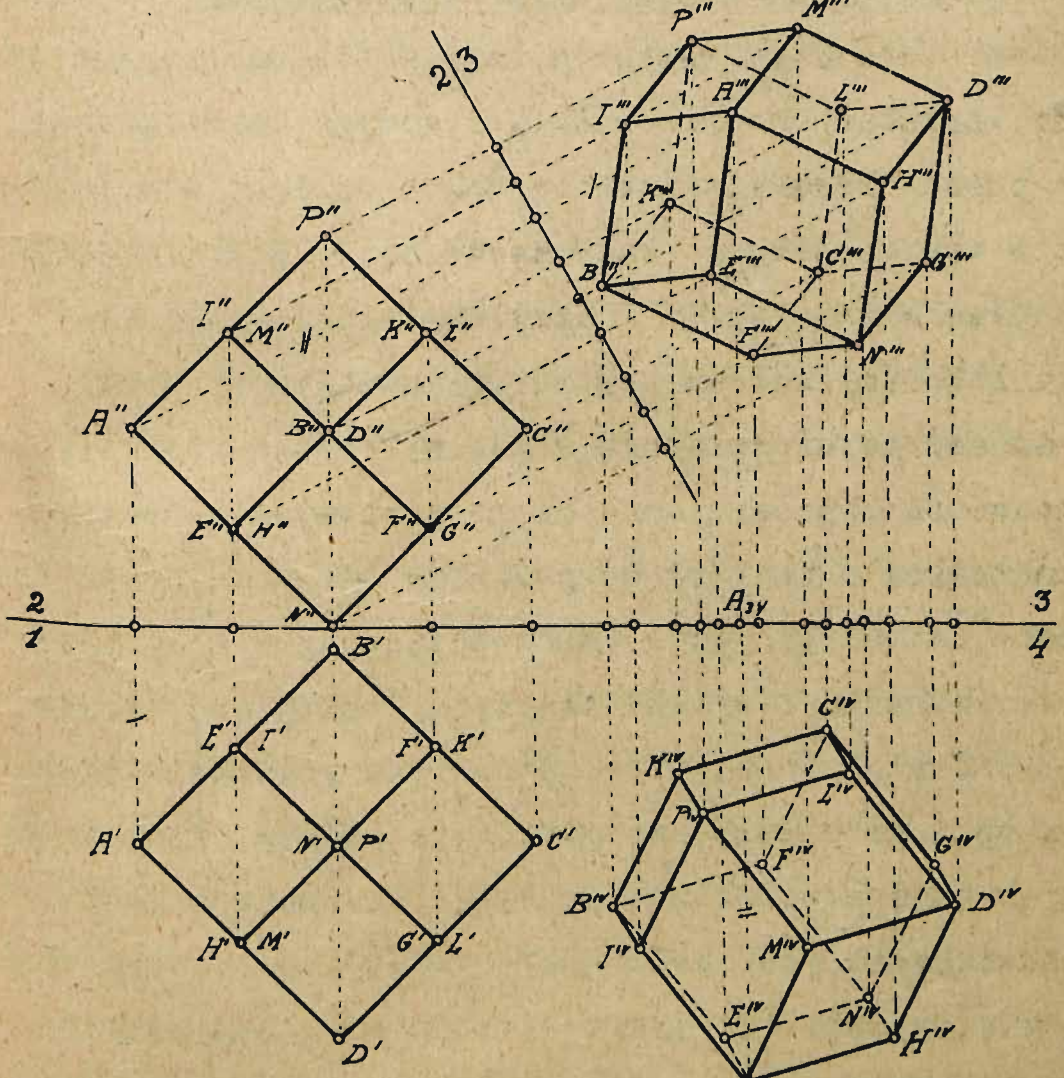
Aby znaleźć ten jeden nie leżący na konturze wierzchołek widzialny, można rozumować tak: widzialnym napewno będzie ten wierzchołek, którego odległość od płaszczyzny rzutów jest największa, nie może on być bowiem zasłonięty przez żadną ścianę wielościanu. Otóż odległość punktu od jednej płaszczyzny rzutów równa jest rzędnej tego punktu na drugiej płaszczyźnie rzutów; przeto widzialnym na jednej płaszczyźnie rzutów jest napewno ten wierzchołek, którego rzędna na drugiej płaszczyźnie rzutów jest największa.

Weźmy teraz przykład następujący:

<u>ZADANIE. Wykreślić rzuty dwunastościanu rombowego o danej osi w położeniu jakimkolwiek.</u>

Dwunastościanem rombowym nazywa się wielościan wypukły, ograniczony przez 12 płaszczyzn, przechodzących przez krawędzie sześcianu lub ośmiościanu foremnego w ten sposób, że kąty dwuścienne, które każda z tych płaszczyzn tworzy z przyległemi ścianami sześcianu lub ośmiościanu, są równe. Rzuty tego wielościanu będzie niezmiernie łatwo wykreślić, jeżeli jedna oś ośmiościanu, z którego powstaje dwunastościan rombowy, jest prostopadła do P_1 , druga prostopadła do P_2 , a trzecia równoległa do X_{12} . Wtedy rzutem dwunastościanu na każdą z płaszczyzn rzutów jest kwadrat o danej przekątnej, podzielony linjami środkowemi na cztery kwadraty /rys:74/. Każdy z 12 równych odcinków takiej figury jest rzutem dwóch krawędzi, z których jedna jest widzialna.

Aby otrzymać rzuty tego wielościanu na płaszczyzny jakiekolwiek, wprowadzamy płaszczyznę $P_3 \perp P_2$ i znajdujemy, stosując regułę § 17, trzecie rzuty wszystkich 14 wierzchołków A B C ..... M N P . Z pośród punktów A''' B''' ..... N''' P''' wybieramy najpierw te, które połączone odpowiednio utworzą wielokąt wypukły w ten sposób, że wszystkie



Rys. 74.

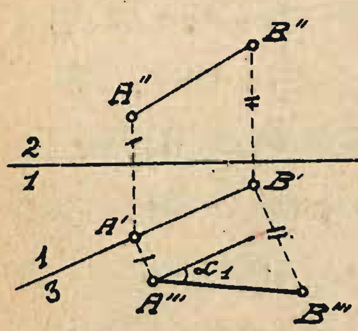
pozostałe punkty znajdą się wewnątrz niego. Wielokąt ten będzie <u>konturem widzialnym</u> na płaszczyźnie P_3 . Zauważmy teraz, że punkt A''' będzie napewno widzialny, bowiem druga rzędna punktu A , t.j. $A_{23}A''$ jest największa; łączymy tedy punkt A''' linjami ciągłemi z sąsiednimi wierzchołkami I''' M''' E''' i H'''. Punkty I''' i M''' leżą na konturze widzialnym, E''' i H''' wewnątrz niego. Te ostatnie dwa punkty łączymy znowu linjami ciągłemi z sąsiedniemi wierzchołkami B''' N''' i D''', które leżą na konturze widzialnym. Rzuty pozostałych krawędzi. jako niewidzialne, kreślimy linjami przerywanemi.

Możemy teraz wprowadzić jeszcze jedną płaszczyznę rzutów P_4 , prostopadłą do P_3 ; przytem w naszym przykładzie obraliśmy nową oś tak, aby stanowiła ona przedłużenie osi X_{12} . Postępując tak samo jak poprzednio znajdziemy 14 czwartych rzutów wierzchołków A^{IV} B^{IV} ..... N^{IV} P^{IV}. Utworzywszy znowu wielokąt wypukły, ogarniający wszystkie te punkty, znajdziemy, że z pośród punktów nie leżących na konturze, punkt M^{IV} napewno jest widzialny, gdyż jego trzecia rzędna jest największa. Łącząc ten punkt z sąsiednimi wierzchołkami A^{IV} D^{IV} i P^{IV}; punkt P^{IV} z sąsiednimi I^{IV} i L^{IV} , a ten ostatni z C^{IV} , dojdziemy w te sposób krawędziami widzialnemi do konturu. Rzuty pozostałych krawędzi są niewidzialne.

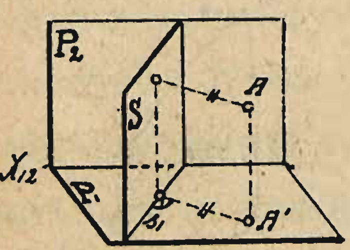
§ 23. ZASTOSOWANIE ZMIANY PŁASZCZYZN RZUTÓW DO ZADAŃ MIAROWYCH. Zadaniami miarowemi nazywamy zadania, dotyczące wielkości odcinków i kątów figur geometrycznych. Zmiana płaszczyzn rzutów jest jednym z najpotężniejszych środków, służących do rozwiązania tych zadań. Większość zadań miarowych da się mianowicie łatwo rozwiązać, jeżeli przez zmianę płaszczyzn rzutów zdołamy sprawić, by pewne części figur rozważanych miały względem nowej płaszczyzny rzutów położenie szczególne. Kilka przykładów to wyjaśni.

ZADANIE. Znaleźć kąt, który prosta łącząca punkty $A'A''$ i $B'B''$ tworzy z płaszczyzną P oraz wzajemną odległość tych punktów. Niech nową płaszczyzną rzutów P_3 będzie płaszczyzna rzucająca prostą AB na P_1; nową osią X_{13} będzie wtedy pierwszy rzut $A'B'$. Trzeci rzut $A'''B'''$ odcinka AB jest temu odcinkowi równy, albowiem prosta AB przystaje do swego trzeciego rzutu. Kątem prostej AB z P_1 będzie kąt α_1, który ta prosta tworzy ze swym pierwszym rzutem, a więc będzie to kąt prostej $A'''B'''$ z prostą $A'B'$.

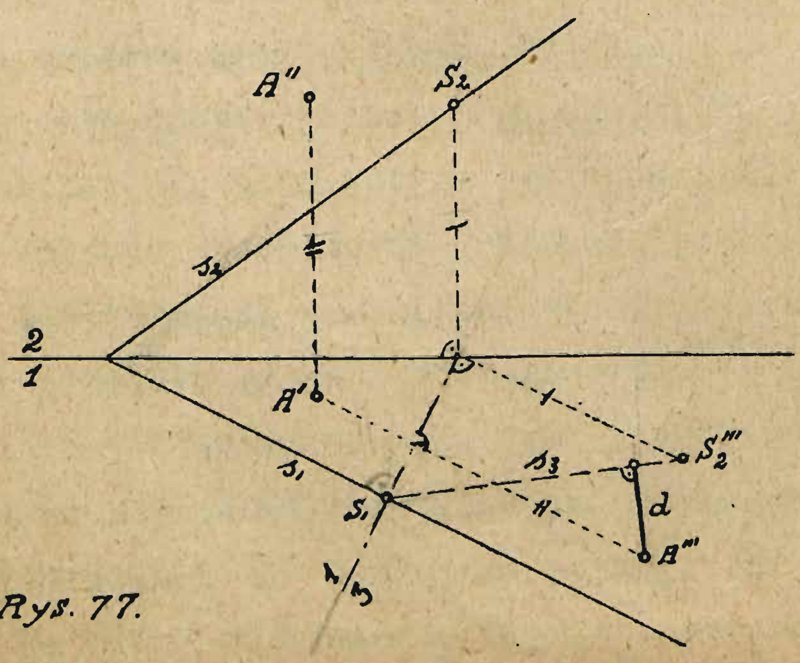
ZADANIE. Znaleźć odległość punktu $A'A''$ od płaszczyzny $s_1 s_2$. Zadanie to rozwiązuje się nader łatwo, gdy płaszczyzna S jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów np. do P /rys.76/. Odległość punktu A od płaszczyzny S jest wtedy równa odległości rzutu punktu A od śladu płaszczyzny S. Poprowadźmy



Rys. 75



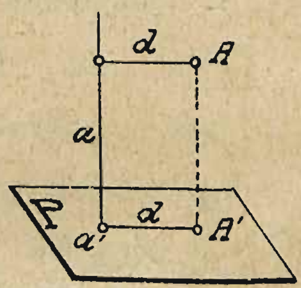
Rys. 76.



Rys. 77.

tedy nową płaszczyznę rzutów P_3, prostopadłą do P_1 i do S, a więc prostopadłą do s_1 /rys.77/; pierwszy ślad tej płaszczyzny będzie nową osią X_{13}. Znajdźmy trzeci rzut A''' punktu A oraz trzeci ślad s_3 płaszczyzny S; odległość punktu A''' od śladu s_3 będzie szukaną odległością d.

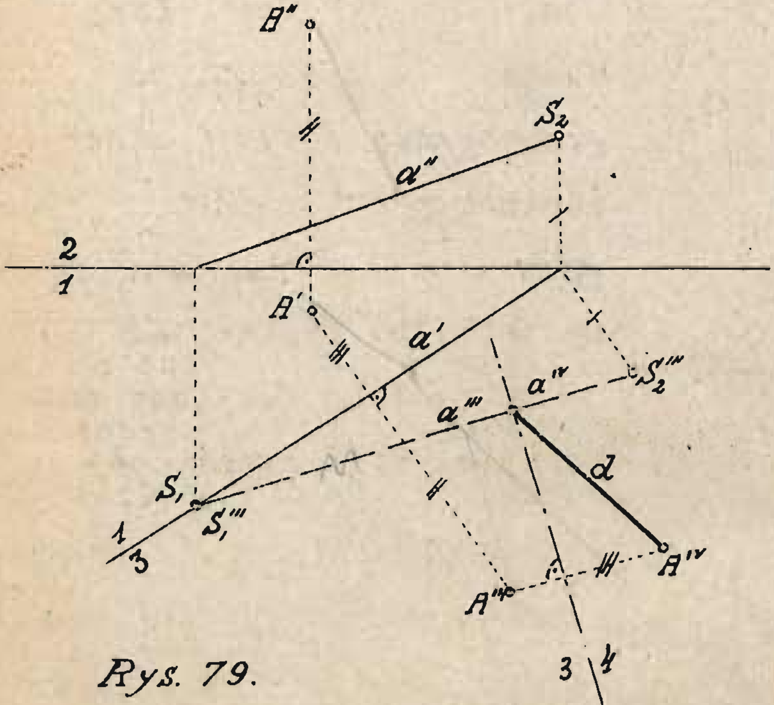
ZADANIE. Znaleźć odległość danego punktu $A'A''$ od danej prostej $a'a''$. Gdy dana prosta jest prostopadła do płaszczyzny rzutów /rys.78/, wtedy odległość punktu A od niej równa jest odległości rzutu pktu A od śladu /a zarazem rzutu/ prostej a. Otóż



Rys. 78.

przez dwukrotną zmianę płaszczyzny rzutów można sprawić, że nowa płaszczyzna rzutów P_4 będzie prostopadła do danej prostej $a'a''$. Odcinek, który łączyć będzie czwarty rzut A^{IV} punktu A z czwartym rzutem a^{IV} prostej a będzie szukaną odległością.

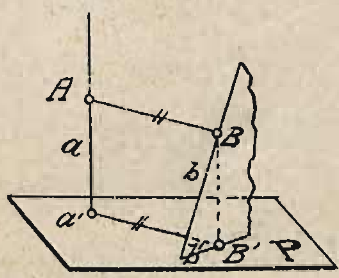
Za trzecią płaszczyznę rzut. P_3 weźmy płaszczyznę rzucającą daną prostą $a'a''$ na P_1 /rys.79/, a więc za oś X_{13} weźmy rzut a' prostej a, tak że prosta a leżeć będzie w płaszczyźnie P_3, przystając do swego trzeciego rzutu a'''. Rzut ten znajdziemy łącząc pierwszy ślad S_1 /który jest zarazem swoim trzecim rzutem S_1'''/ z trzecim rzutem drugiego śladu S_2'''. Za czwartą płaszczyznę rzutów P_4 weźmy jakąkolwiek płaszczyznę prostopadłą do a'''; oś X_{34} będzie zatem jakąkolwiek prostopadłą do a'''. Ponieważ a leży



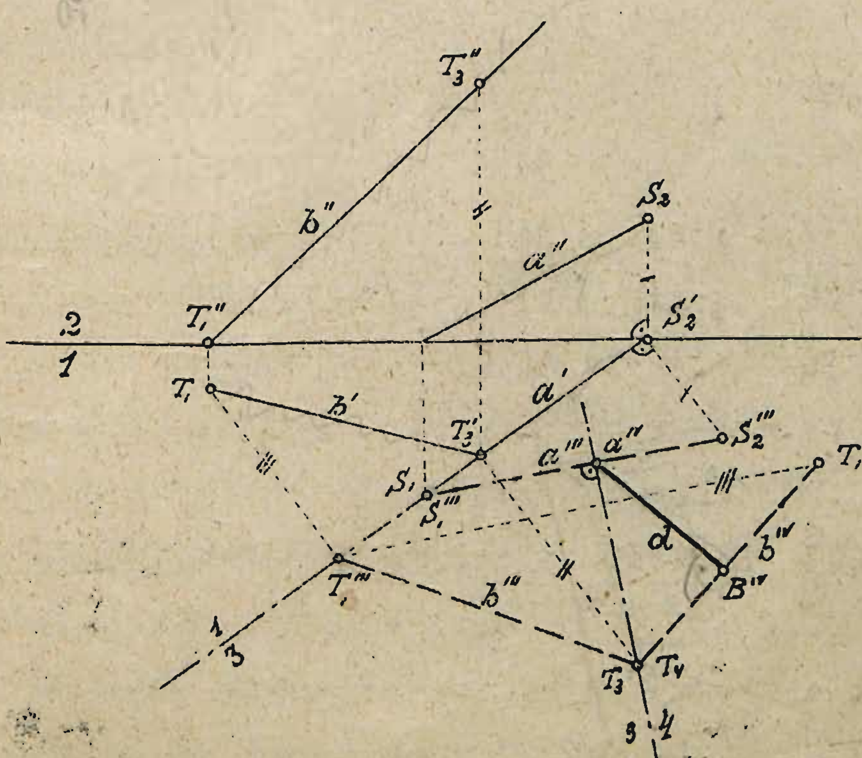
Rys. 79.

w P_3 i jest prostopadła do P_4, więc jej czwartym rzutem a^{IV} jest punkt, w którym a''' przecina oś X_{34}. Znalazłszy według znanej reguły trzeci, a później czwarty rzut punktu A, połączymy $A^{IV}a^{IV}$; będzie to szukana odległość d.

ZADANIE. Znaleźć odległość dwóch prostych skośnych $a'a''$ i $b'b''$. Odległością dwóch prostych skośnych nazywamy najkrótszy z pośród odcinków, które łączą punkt jednej prostej z punktem drugiej. - Łatwo okazać, że taki odcinek musi być prostopadły do każdej z dwóch danych prostych. Niech bowiem odcinek AB, który łączy punkt A prostej a z punktem B prostej b będzie najkrótszy. Przypuśćmy, że nie jest on prostopadły do a, wtedy odcinek prostopadłej, spuszczonej z punktu B na a byłby krótszy od AB, co przeczyłoby założeniu. Wyznaczenie od-



Rys. 80.



Rys. 81.

ległości dwóch prostych skośnych jest nader łatwe, gdy jedna z danych prostych, np. a jest prostopadła do płaszczyzny rzutów P /rys.80/.

W samej rzeczy, każdy odcinek prostopadły do a jest wtedy równoległy do płaszczyzny rzutów, tak że rzut każdego odcinka prostopadłego do a, którego jeden koniec leży na a, a drugi na b, jest temu odcinkowi równy i łączy rzut a' prostej a z tym lub owym punktem rzutu b' prostej b. Najkrótszym więc z tych odcinków będzie ten, który jest prostopadły do b'.

Niech będą dane rzuty $a'a''$ i $b'b''$ dwóch prostych skośnych a i b /rys.81/. Za trzecią płaszczyznę rzutów P_3 obieramy płaszczyznę rzucającą prostą a na P_1, osią X_{13} będzie przeto rzut a' prostej a. Wyznaczmy trzeci rzut a''' prostej a. Ponieważ ta prosta leży w płaszczyźnie P_3, więc jej pierwszy ślad S_1 jest zjednoczony ze swym trzecim rzutem S_1'''; połączywszy go z trzecim rzutem drugiego śladu S_2''' otrzymamy a'''. Aby otrzymać trzeci rzut prostej b łączymy trzecie rzuty dwóch dowolnych jej punktów. Za takie punkty możemy obrać np. ślad pierwszy T_1 i ślad trzeci T_3. Pierwszy rzut T_3' punktu T_3 jest oczywiście przecięciem rzutu b' z nową osią $X_{13} \equiv a'$. Trzeci jego rzut, czyli sam ślad T_3 otrzymamy odmierzając na prostopadłej wystawionej do X_{13} w punkcie T_3' odcinek równy co do wielkości i znaku odległości zbytecznego rzutu T_3'' od dawnej osi X_{12}. Trzeci rzut T_1''' śladu T_1 leżeć będzie na nowej osi w spodku prostopadłej, spuszczonej na nią z T_1.

Za czwartą płaszczyznę rzutów P_4 obierzmy płaszczyznę prostopadłą do a'''; nową osią X_{34} będzie jakakolwiek prostopadła do a'''. Najdogodniej poprowadzić ją przez ślad T_3 prostej b, gdyż wtedy w tym samym punkcie będzie leżał również czwarty ślad T_4 prostej b. Spuszczając z punktu T_1''' prostopadłą na nową oś X_{34} i odmierzając na niej od punktu przecięcia jej z tą osią odcinek równy co do wielkości i znaku odległości zbytecznego rzutu T_1 od dawnej osi X_{13} znajdziemy czwarty rzut T_1^{IV} śladu T_1. Prosta $T_4 T_1^{IV}$ jest czwartym rzutem b^{IV} prostej b.

Ponieważ prosta a leży w płaszczyźnie P_3 i jest prostopadła do P_4, więc jej czwarty rzut a^{IV} jest punktem, w którym a''' przecina oś X_{34}. Długość odcinka prostopadłej spuszczonej z punktu a^{IV} na prostą b^{IV} jest równa odległości prostych skośnych a i b.

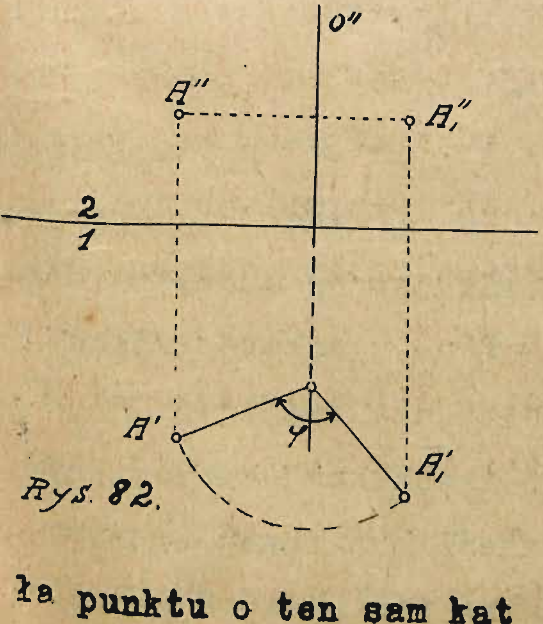
ROZDZIAŁ III.

OBROTY I KŁADY.

§ 24. Ruch obrotowy. Zmiana płaszczyzn rzutów miała na celu nadanie figurze przestrzennej innego położenia względem płaszczyzn rzutów. Cel ten może być wszakże osiągnięty inną jeszcze drogą. Zamiast zmieniać płaszczyzny rzutów, pozostawiając figurę nieruchomą w przestrzeni, możemy postąpić przeciwnie: pozostawiając bez zmiany płaszczyzny rzutów, możemy zmienić położenie figury w przestrzeni.

Wszelka zmiana położenia figury sztywnej może być dokonana zapomocą dwojakiego ruchu; przesunięcia równoległego lub obrotu dokoła osi. Przesunięciem równoległem nazywa się ruch, w którym wszystkie punkty figury zakreślają odcinki równe, równoległe i w jedną zwrócone stronę; oczywiście, rzuty wszystkich punktów figury zakreślają na płaszczyznach rzutów również odcinki równe, równoległe i w tę samą zwrócone stronę. Przez taki ruch rzuty figury nie ulegają zatem zmianie; zmienia się tylko położenie tych rzutów na płaszczyźnie rysunku. Inaczej mają się sprawy z ruchem obrotowym. Każdy punkt figury zakreśla łuk koła, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi obrotu i którego środek O leży na niej; promieniem koła, zakreślonego przez jakikolwiek punkt figury jest jego odległość od osi obrotu; wszystkie te promienie zakreślają równe kąty φ. Obrót figury jest przeto wyznaczony, gdy dana jest oś obrotu O, jego zwrot oraz wielkość kąta obrotu φ.

§25. OBRÓT FIGURY DOKOŁA OSI PROSTOPADŁEJ DO JEDNEJ Z PŁASZCZYZN RZUTÓW. Przedstawienie obrotu w rzutach prostokątnych staje się nader proste, jeżeli oś obrotu jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, gdyż wtedy rzuty wszystkich punktów figury na tę płaszczyznę obracają się dokoła rzutu osi o kąt równy kątowi obrotu φ, tak że rzut całej figury obraca się dokoła rzutu osi o kąt φ. Niech będzie np. dany punkt $A'A''$ /Rys.82/ oraz oś $O'O''$ prostopadła do P_1. Rzut poziomy O' osi jest punktem odległość punktu A od osi O jest równa i równoległa do odcinka $A'O'$. Gdy punkt A obróci się dokoła osi O o kąt φ, to rzut A obróci się dokoła punktu o ten sam kąt φ i zajmie położenie punktu



Rys. 82.

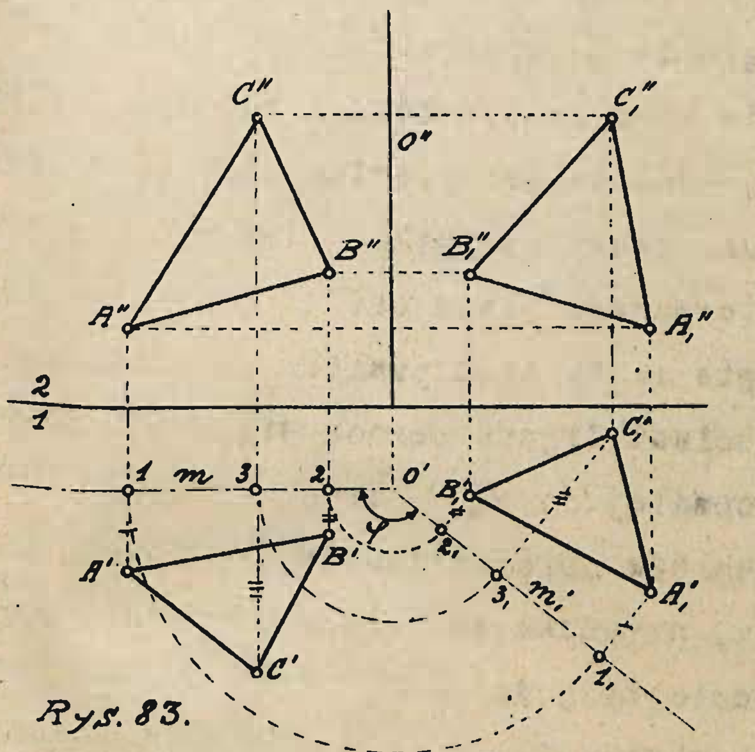
A_1'. Rzut pionowy A'' punktu A porusza się po prostej równoległej do X, bo odległość punktu A od P_1 nie ulega zmianie. Nowe położenie punktu A'' będzie tedy w punkcie A_1'' przecięcia prostopadłej do X z punktu A_1' z równoległą do X wyprowadzoną z punktu A''.

Dla znalezienia więc rzutów nowego położenia figury, obróconej o kąt φ dokoła osi prostopadłej do P_1 trzeba obrócić pierwsze rzuty wszystkich jej punktów o ten sam kąt dokoła pierwszego śladu osi O', przesuwając jednocześnie drugie rzuty tych punktów po równoległych do X_{12}. Gdy natomiast figura obraca się o kąt dany dokoła osi prostopadłej do P_2, trzeba drugie rzuty wszystkich jej punktów obrócić dokoła drugiego śladu osi O'' o kąt dany, przesuwając jednocześnie pierwsze ich rzuty po równoległych do X_{12}.

Rozwiążmy np. następujące

<u>ZADANIE. Trójkąt $A'B'C'$, $A''B''C''$ obrócić dokoła osi $O'O''$ prostopadłej do P_1 o kąt dany φ. /Rys.83/.</u>

Na mocy powyższej reguły należałoby przedewszystkiem obrócić punkty $A'B'$ i C' o kąt φ dokoła punktu O'. Aby odrazu wykreślić nowe położenie trójkata $A'B'C'$ po dokonanym obrocie jego wierzchołków, odniesiemy punkty A', B' i C' do odpowiednio obranej prostej m, znajdując rzuty tych punktów na nią oraz odległości tych rzutów od stałego punktu tej prostej. Za taką prostą najdogodniej jest obrać równoległą do X przez punkt O' poprowadzoną, a za stały punkt na niej obrany uważać sam punkt O'. Obróćmy teraz prostą m o kąt φ do położenia m_1' wraz ze znajdującemi się na niej punktami 1, 2 i 3, i z nowych położeń tych punktów 1_1, 2_1 i 3_1 wyprowadźmy odcinki $1_1A_1'$, $2_1B_1'$ i $3_1C_1'$ prostopadle do m_1' i równe odpowiednio odcinkom $1A'$, $2B'$ i $3C'$. Drugie rzuty punktów A, B i C



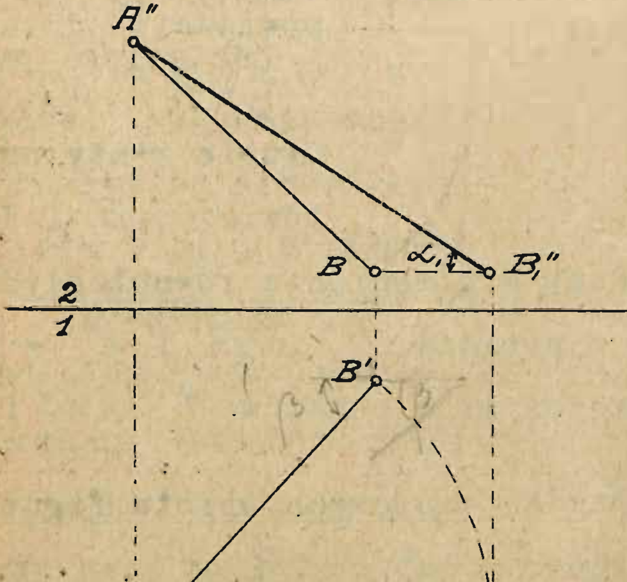
Rys. 83.

w nowym położeniu otrzymamy w przecięciu równoległych do X_{12}, wyprowadzonych z punktów A'', B'' i C'' z prostopadłymi do niej spuszczonymi z punktów A_1', B_1' i C_1'

<u>§26. Zastosowanie do zadań miarowych obrotu figur dokoła osi prostopadłej do P_1 lub do P_2.</u>

Najczęściej kąt obrotu φ nie jest dany, natomiast trzeba daną figurę obrócić dokoła danej osi o taki kąt, aby pewna prosta lub pewna płaszczyzna stała się równoległa lub przystała do jednej z płaszczyzn rzutów. Tym sposobem możemy znajdywać prawdziwą wielkość i kształt niektórych figur, gdy bowiem prosta jest równoległa do jednej z płaszczyzn rzutów lub do niej przystaje, to rzut każdego odcinka prostej na tę płaszczyznę równa się jego naturalnej wielkości, podobnież, gdy płaszczyzna jest równoległa lub przystaje do jednej z płaszczyzn rzutów, to każda figura w płaszczyźnie położona nie zmienia się w swoim rzucie co do wielkości i kształtu.

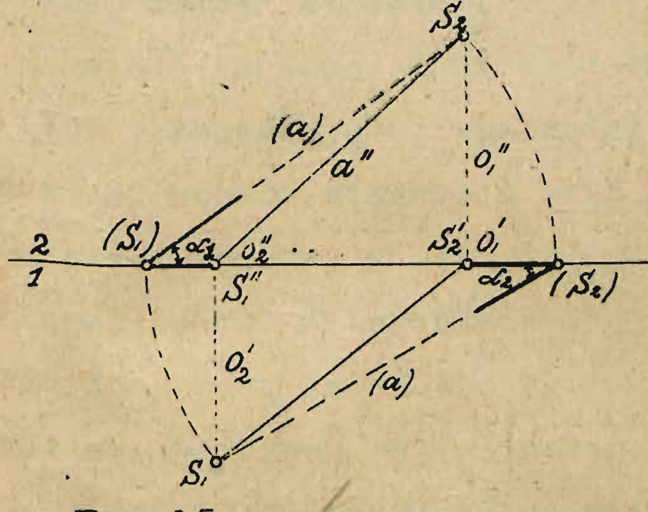
Znajdźmy np. <u>prawdziwą długość odcinka AB, którego rzuty są dane /Rys.84/</u>. Obróćmy płaszczyznę rzucającą poziomo prostą AB dokoła prostej $AA' \equiv Oo$ taki kąt, aby odcinek AB stał się równoległy do P_2. Wtedy rzut jego poziomy stanie się równoległy do X_{12}; aby więc otrzymać nowe położenie B_1' punktu B', zakreślmy z punktu A' koło promieniem $A'B'$ aż do przecięcia tego koła z prostą równoległą do X_{12} z punktu A' wyprowadzoną. Rzut pionowy punktu B będzie



Rys. 84

się posuwał po równoległej do $X_{1/2}$, nowe położenie B_1'' punktu B'' otrzymamy zatem w przecięciu tej równoległej z linją rzędnych punktu B_1'. Odcinek $A''B_1''$ będzie prawdziwą długością odcinka AB, jego zaś nachylenie do osi X będzie prawdziwą wielkością kąta α_1 prostej AB z płaszczyzną P_1.

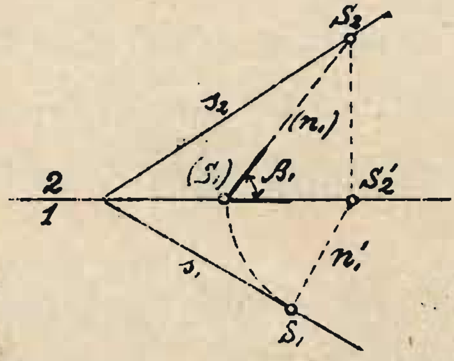
<u>**Znajdźmy jeszcze kąty α_1 i α_2 prostej a z płaszczyznami rzutów,**</u> gdy dane są ślady S_1 i S_2 prostej a /Rys.85/. W tym celu obróćmy płaszczyznę rzucającą poziomo prostą a dokoła prostej $S_2 S_2'$ rzucającej poziomo ślad S_2, aż do przystania tej płaszczyzny do P_2. Punkt S_1, opisując łuk koła o środku S_2' przeniesie się na oś X do punktu (S_1); punkt S_2, jako punkt osi obrotu nie zmieni swego miejsca. Kąt α_1 prostej a z płaszczyzną P_1 jest to kąt tej prostej ze swym rzutem a'; po dokonanym obrocie kąt ten leży na P_2 - jest to kąt prostej (a) z osią X. W ten sam sposób znajdujemy kąt α_2 prostej a z płaszczyzną P_2.



Rys. 85.

Do zadania powyższego sprowadza się

ZADANIE. Znaleźć kąty β_1 i β_2 płaszczyzny $s_1 s_2$ z płaszczyznami rzutów. /Rys.86/ Znajdźmy np. kąt β_1 płaszczyzny $s_1 s_2$ z płaszczyzną P_1. Poprowadźmy w płaszczyźnie $s_1 s_2$ prostą największego spadku n_1 i kąt tej prostej ze swym pierwszym rzutem jest



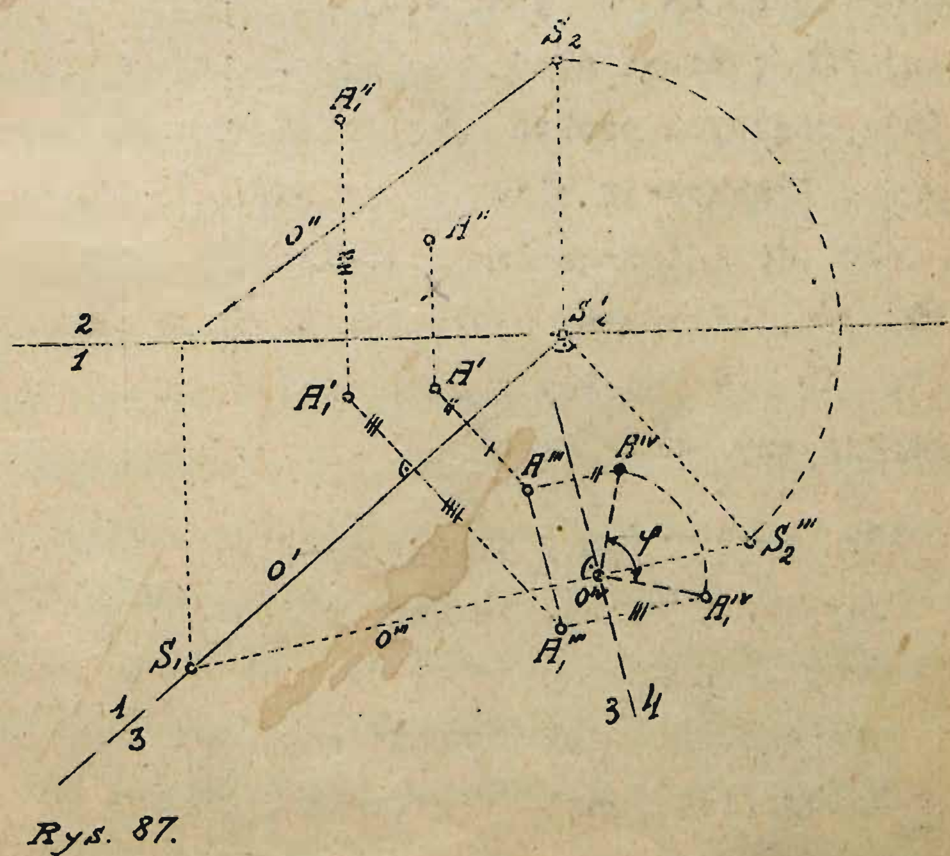
Rys. 86

kątem linjowym szukanego kąta dwuściennego. Pierwszy rzut prostej n_1' jest, jak wiadomo, prostopadły do s_1; spodek jego na s_1 jest tedy pierwszym śladem S_1 prostej n_1; drugi ślad S_2 leży na s_2 w przecięciu z linją rzędnych punktu S_2', w którym n_1' przecina oś X_{12}. Przenosząc ślad S_1 na oś X_{12} za pomocą obrotu dokoła S_2'' i łącząc tak przeniesiony punkt S_1 ze śladem S_2, otrzymamy prawdziwą wielkość $S_2'(S_1)S_2$ kąta β_1. W podobny sposób znaleźlibyśmy kąt β_2 płaszczyzny $s_1 s_2$ z P_2.

§27. Obrót figury dokoła prostej jakiejkolwiek.

Przypuśćmy teraz, że mamy obrócić figurę daną o kąt dany φ dokoła prostej jakiejkolwiek $O'O''$. Wystarcza wskazać, jak znaleść nowe położenie jednego jakiegokolwiek punktu figury, np. punktu A. Za pomocą podwójnej zmiany płaszczyzny rzutów możemy sprawić, że oś obrotu O będzie prostopadła do nowej płaszczyzny rzutów P_4; obróciwszy wtedy punkt A dokoła osi o kąt φ, znajdziemy trzeci i czwarty rzut A_1''' i A_1^{IV} punktu A w nowem jego położeniu; powracając do pierwotnych płaszczyzn rzutów znajdziemy pierwszy i drugi rzuty tego punktu.

Niech więc będzie dany /Rys.87/ punkt $A'A''$ i prosta $O'O''$, której ślady oznaczmy przez S_1 i S_2. Za trzecią płaszczyznę rzutów obierzmy płaszczyznę rzucającą prostą O poziomo, tak, że oś X_{13} przystaje do



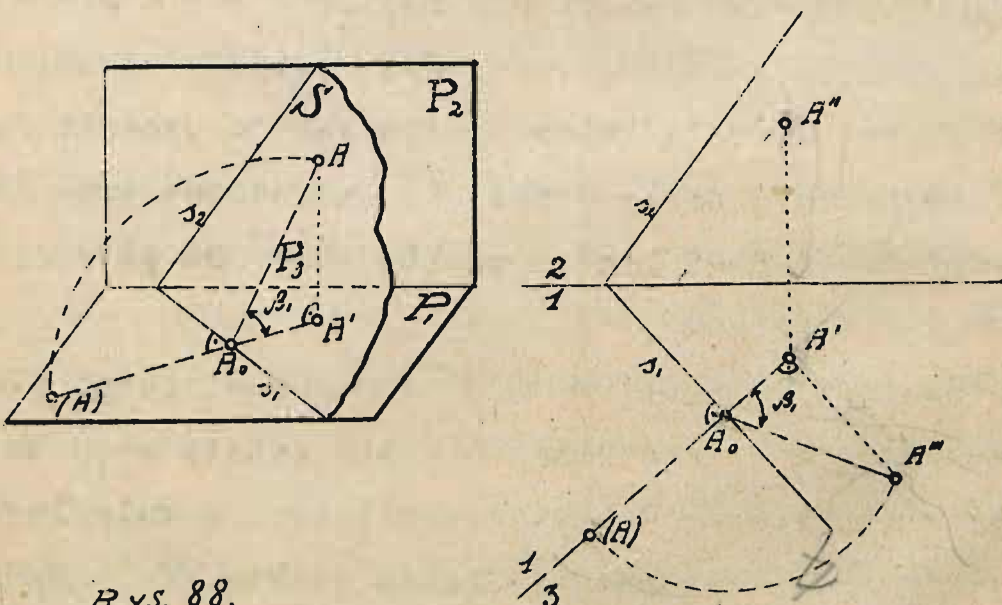
Rys. 87.

rzutu O'. Trzeci rzut O''' prostej O otrzymamy łącząc ślad S_1 z trzecim rzutem S_2''' drugiego śladu S_2 który znajdziemy, odmierzając na prostopadłej do O' w punkcie S_2' odległość drugiego śladu od zbytecznej osi X_{12}. Trzeci zaś rzut punktu A otrzymamy, odmierzając na prostopadłej spuszczonej z A' na X_{13} od punktu przecięcia jej z tą osią odległość zbytecznego rzutu A'' od dawnej osi X_{12}. Za czwartą płaszczyznę rzutów obierzmy jakąkolwiek płaszczyznę prostopadłą do O''', tak, że osią X_{34} będzie jakakolwiek prostopadła do O'''. Czwarty rzut O^{IV} prostej O będzie punktem, w którym ta nowa oś przecina O'''. Czwarty rzut A^{IV} punktu A znajdziemy odmierzając na prostopadłej do X_{34} spuszczonej z A''' odległość zbytecznego t.j. pierwszego rzutu A' tego punktu od dawnej osi, t.j. od X_{13}. Punkt A jest teraz odwzorowany zapomocą swych rzutów A''' i A^{IV}, a prosta O prostopadła do P_4 za pomocą swych rzutów O''' i O^{IV}. Jeżeli więc obrócimy A^{IV} dokoła O^{IV} o kąt φ, podczas gdy A''' przesunie się po równoległej do X_{34}, to otrzymamy rzuty A_1''' A_1^{IV} nowego położenia A_1 punktu A. Odrzućmy teraz płaszczyznę P_4, zastępując ją przez płaszczyznę P_1 prostopadłą do P_3, tak, że nową osią będzie X_{13}, a dawną, t.j. zbyteczną X_{34}. Spuszczając z A_1''' prostopadłą na X_{13} i odmierzając na niej od punktu przecięcia z X_{13} odległość zbytecznego t.j. czwartego rzutu A_1^{IV} punktu A_1 ; znajdziemy A_1''' . Zastąpmy teraz płaszczyznę P_3 przez płaszczyznę P_2 prostopadłą do P_1 , t.j. wprowadźmy nową oś X_{12} Spuszczając z A_1' prostopadłą na X_{12} i odmierzając na niej od punktu przecięcia jej z X_{12} odległość zbytecznego t.j. trzeciego rzutu A_1''' od dawnej osi, t.j. od X_{13} , otrzymamy A_1'' . Para rzutów A_1' i A'' odwzorowuje położenie punktu A po obrocie jego o kąt φ dokoła prostej O .

§28. Kłady płaszczyzn. Między obrotami figur dokoła osi jest jeden przypadek, zasługujący na szczegółowe omówienie. Jest to obrótpłaszczyzny dokoła swego śladu, jeżeli kąt obrotu jest kątem nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny rzutów lub jego spełnieniem. Po takim obrocie płaszczyzna oczywiście przystanie do jednej z płaszczyzn rzutów i figury w danej płaszczyźnie położone w naturalnym swym kształcie i wielkości ukażą się na tej płaszczyźnie rzutów. Taki obrót nazywa się kładem danej płaszczyzny na jedną z płaszczyzn rzutów.

W pewnych przypadkach szczególnych dokonywaliśmy już kładów płaszczyzn .Takim kładem było np. znalezienie rzutu punktu $A'A''$ na trzecią płaszczyznę rzutów P_3 prostopadłą do P_1 lub P_2 . Był to bowiem obrót płaszczyzny P_3 wraz z leżącym na niej punktem A''' o kąt prosty dokoła jej śladu X_{13} lub X_{23}. Pozostaje nam tutaj zbadać kład płaszczyzny nie prostopadłej do tej płaszczyzny rzutów, na którą, przez obrót dokoła odpowiedniego śladu, mamy kład wykonać.

Niech płaszczyzna S będzie dana za pomocą pierwszego swego śladu s_1 oraz rzutów $A'A''$ punktu A w niej leżącego /Rys.88/. Mamy obrócić punkt A dokoła s_1 o jeden z kątów między płaszczyznami S i P_1,



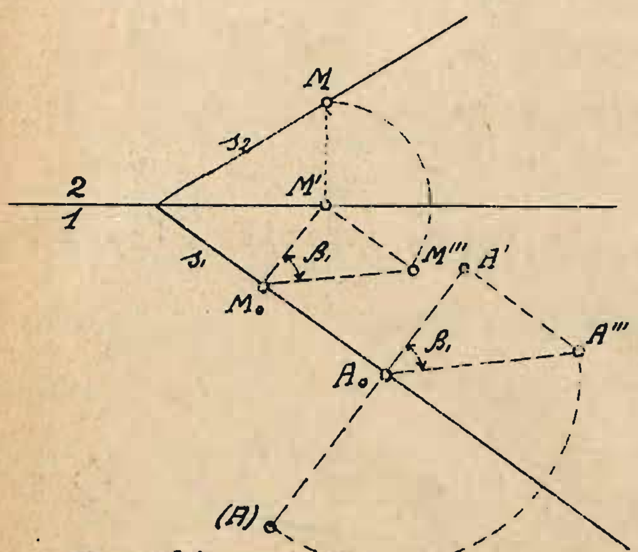
Rys. 88.

tak żeby punkt A znalazł się w płaszczyźnie P_1. Za nową płaszczyznę rzutów P_3 weźmiemy płaszczyznę, w której dokonywa się obrót punktu A, tak że nową osią X_{13} będzie prostopadła spuszczona z punktu A' na s_1.

Trzecim rzutem punktu A będzie punkt A''', otrzymany przez odmierzenie drugiej rzędnej punktu A od punktu A' na prostopadłej w nim wystawionej do X_{13}, trzecim rzutem prostej s_1, t.j. osi obrotu będzie punkt A_0, w którym X_{13} przecina s_1. Punkt A''' będzie zarazem kładem punktu A leżącego na P_3 dokoła śladu X_{13} tej płaszczyzny na P_1. Podczas gdy pierwszy rzut A' będzie się poruszał po X_{13}, trzeci rzut A''', czyli sam punkt A, obracać się będzie dokoła A_0 dopóty, dopóki nie znajdzie się w płaszczyźnie P_1, t.j. na osi X_{13}. Oba rzuty, pierwszy i trzeci punktu A będą zatem zjednoczone w punkcie /A/ w którym koło przez punkt A''' zakreślone przecina X_{13}. Punkt /A/ jest kładem punktu $A'A''$ na płaszczyznę P_1 dokoła śladu s_1.

Zauważmy, że kąt $A'A_0A''' = \beta_1$ jest kątem płaszczyzny S z płaszczyzną P_1, nie zależy więc on od obioru punktu A w płaszczyźnie S. Z kąta tego korzystamy dla wyznaczenia kładu punktu A, gdy płaszczyzna S dana jest za pomocą obu śladów s_1 i s_2, a punkt A za pomocą pierwszego swego rzutu A'. /Rys.89/. Możnaby wprawdzie znaleźć najpierw drugi rzut A'' punktu A, lepiej jednak postępować jak następuje. Obrawszy jakikolwiek punkt płaszczyzny S np. punkt M śladu s_2, wyznaczmy kąt β_1 przez kład

$M'M_0M'''$ trójkąta prostokątnego $M'M_0M$ poczem na odcinku $A'A_0$ wykreślmy trójkąt podobny do trójkąta $M'M_0M'''$. W tym celu przez A_0 kreślimy równoległą do M_0M''', a przez A' równoległą do ϑ_1; przeciwprostokątną A_0A''' otrzymanego w ten sposób trójkąta $A'A_0A'''$ odmierzamy od punktu A_0 na $A'A_0$ w jedną lub drugą stronę tego punktu.



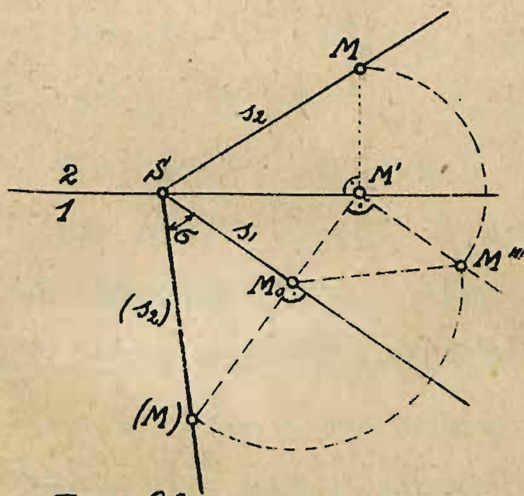
Rys. 89.

Sposobu tego użyć możemy dla rozwiązania zadania odwrotnego.

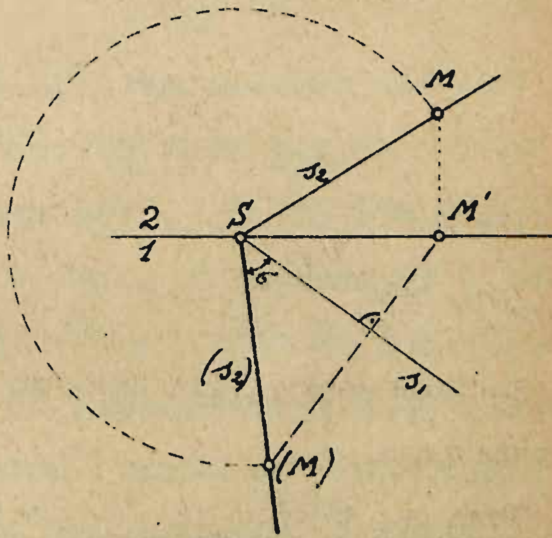
Dane są ślady ϑ_1 ϑ_2 płaszczyzny oraz kład / A / punktu A w niej leżącego; znaleść rzuty punktu A

Znajdźmy najpierw, jak poprzednio, kąt β_1, kreśląc trójkąt prostokątny $M'M_0M'''$ /Rys.89/. Z punktu / A / spuśćmy prostopadłą / A / A_0 na ślad ϑ_1 i przez punkt A_0 poprowadźmy równoległą do M_0M''' i odmierzmy na niej od punktu A_0 odległość punktu A_0 od śladu ϑ_1. Z otrzymanego tą drogą punktu A''' poprowadźmy równoległą do ϑ_1 wtedy w przecięciu jej z prostą /A/ A_0 otrzymamy rzut poziomy A' Mając poziomy znajdziemy natychmiast rzut pionowy, zważywszy, że odcinek $A'A'''$ jest drugą rzędną punktu A /na rysunku nie wyznaczono punktu A'' /.

Za pomocą powyższego wakreślenia można znaleźć kład drugiego śladu s_2 płaszczyzny $s_1 s_2$ na P_1. W tym celu wystarcza znaleźć kład dowolnego punktu M tego śladu i połączyć punkt /M/ z punktem S, który leżąc na osi obrotu s_1, nie ulega zmianie. /Rys.90/



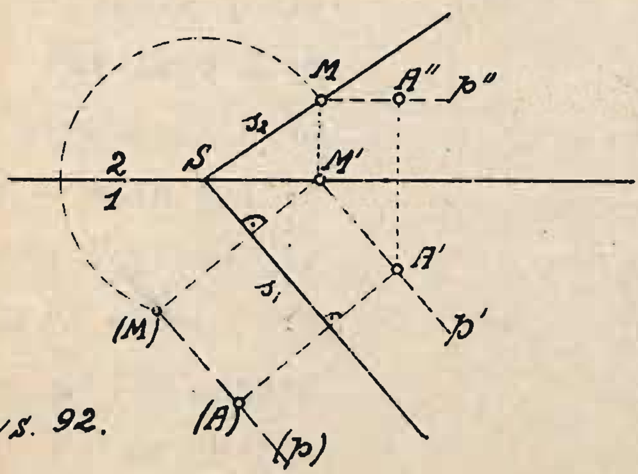
Rys. 90.



Rys. 91.

Lecz kład śladu s_2 można otrzymać jeszcze prościej /Rys. 91/. Zauważmy, że odcinek $MS = (M)S$; jeżeli tedy z punktu M' spuścimy prostopadłą na s_1, to w przecięciu tej prostopadłej z kołem zakreślonem z punktu S promieniem SM otrzymamy punkt /M/. Kąt między śladem s_1 i kładem śladu s_2 jest naturalną wielkością kąta σ między śladami.

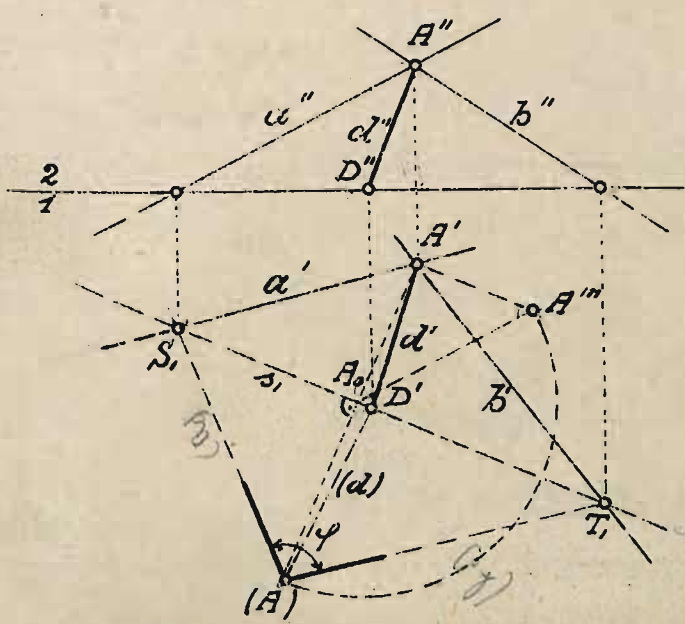
Z powyższego wynika nowy sposób kreślenia kładu punktu A leżącego w płaszczyźnie danej za pomocą śladów s_1 i s_2. Przypuśćmy, że dany jest pierwszy rzut A' punktu A. Poprowadźmy przez punkt A linję poziomą p płaszczyzny $s_1 s_2$; jej rzut pierwszy p' przechodzi przez A' równolegle do s_1; jej rzut drugi jest równoległy do x_{12}. Wyznaczywszy drugi ślad M tej prostej, znajdźmy jego kład $/M/$ na P_1. Prosta $/p/$ poprowadzona przez $/M/$ równolegle do s_1 jest kładem prostej poziomej p, na której leży punkt A. Jeżeli zatem z punktu A' spuścimy na s_1 prostopadłą, to w przecięciu jej z prostą $/p/$ otrzymamy szukany kład $/A/$.



Rys. 92.

§29. Zastosowanie kładów do zadań miarowych.

ZADANIE. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta między dwiema prostemi $a'a''$ i $b'b''$ /Rys.93/. Nie zmniejszając ogólności zagadnienia, możemy założyć, że dane proste się przecinają, gdyby bowiem było inaczej, wtedy obrawszy dowolny punkt przestrzeni A, poprowadzilibyśmy przezeń proste równoległe do danych i szukalibyśmy wielkości kąta między nimi. Wyznaczywszy pierwsze ślady S_1 i T_1 danych prostych i łącząc je prostą, znajdziemy ślad s_1 płaszczyzny tych prostych. Wykonawszy kład punktu A tej płaszczyzny na P_1 i łącząc / A / z S_1 i T_1, otrzymamy kład szukanego kąta φ.

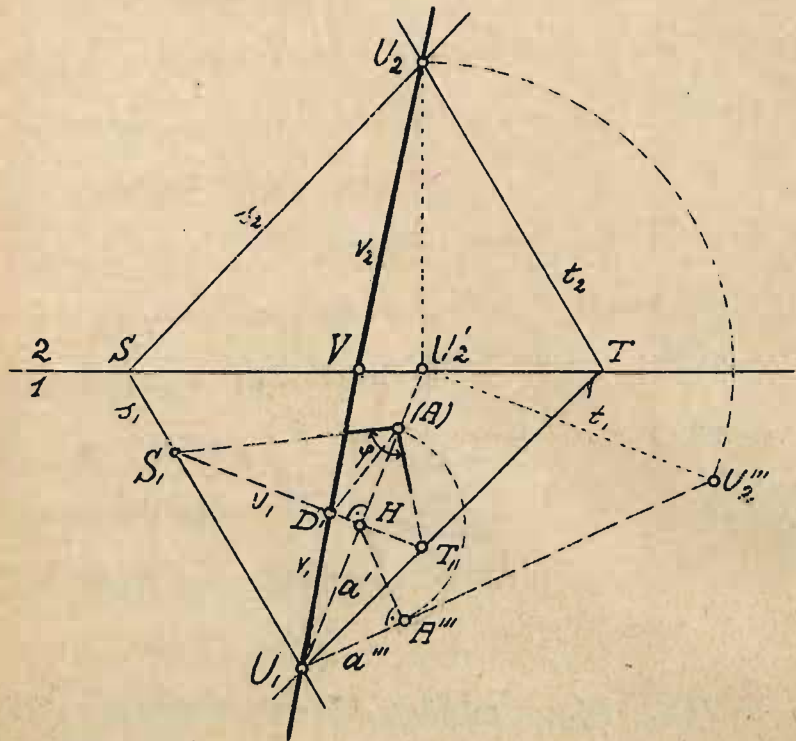


Rys. 93.

Wykreślmy przy tej sposobności rzuty dwusiecznej kąta między prostymi a i b. W tym celu dzielimy kąt φ na połowy i wyznaczamy punkt D', w którym dwusieczna / d / przecina ślad s_1 ; następnie wyznaczamy drugi rzut D'' punktu D i łączymy $A'D'$ oraz $A''D''$.

ZADANIE. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta dwuściennego między dwiema płaszczyznami $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$.

Zadanie to możnaby sprowadzić do poprzedniego, spuszczając z dowolnie obranego punktu prostopadłe na dane płaszczyzny i szukając prawdziwej wielkości kąta tych dwuch prostych. Będzie to kąt równy albo spełniający względem kąta dwuściennego danych płaszczyzn. Ale można znaleźć bezpośrednio prawdziwą wielkość kąta liniowego płaszczyzn danych. W tym celu należy przeciąć obie płaszczyzny S i T /Rys. 94/ dowolną płaszczyzną U prostopadłą do prostej przecięcia ST i wykonać kład otrzymanego w przecięciu kąta na P_1 lub P_2 dokoła odpowiedniego śladu u_1 lub u_2 płaszczyzny tego kąta. Pierwszy ślad u_1 tej płaszczyzny jest tedy jakąkolwiek prostą prostopadłą do rzutu a' prostej przecięcia płaszczyzn $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$. Niechaj ta prosta przecina ślady s_1 i t_1 w punktach S_1 i T_1. Punkt A, w którym płaszczyzna U przecina krawędź a kąta dwuściennego ST jest spodkiem prostopadłej spuszczonej z punktu $H \equiv a'u_1$ na a, t.j. wysokością trójkąta $S_1 T_1 A$. Jeżeli tedy znajdziemy trzeci rzut a''' /a zarazem kład/ prostej a na płaszczyznę P_3 rzucającą poziomo tę prostą i



Rys. 94.

obróconą dokoła swego śladu a' to odległość punktu H od prostej a'' będzie szukaną wysokością. Odmierzając ją od punktu H na a' i łącząc otrzymany w ten sposób punkt /A/ z S_1 i T_1 otrzymamy kład $S_1(A)T_1$ szukanego kąta liniowego φ.

Ślady płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego ST otrzymamy dzieląc kąt φ na połowy, wyznaczając punkt D', w którym dwusieczna kąta φ przecina U_1, łącząc punkt D z U_1 prostą v_1, która przecina oś X w punkcie V i wreszcie łącząc punkt V ze śladem U_2 prostą V_2. Płaszczyzna V_1V_2 jest jedną z dwuch płaszczyzn dwusiecznych kąta dwuściennego płaszczyzn S i T.

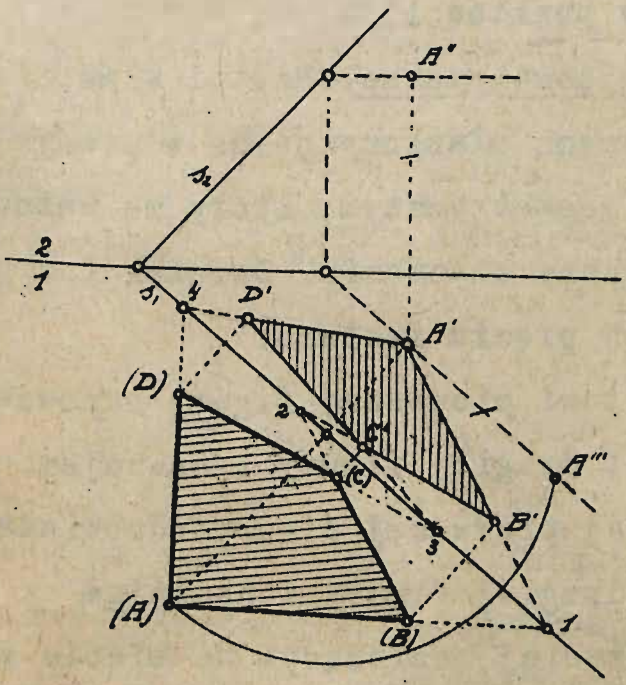
§30. Kłady figur płaskich. Przypuśćmy teraz /Rys. 95/, że w płaszczyźnie $\Delta_1\Delta_2$ dana jest figura prostokreślna jakakolwiek np. czworokąt $ABCD$ za pomocą jednego ze swych rzutów, np. poziomego $A'B'C'D'$. Znaleźlibyśmy prawdziwy kształt i wielkość tego czworokąta wyznaczając kłady wszystkich jego wierzchołków na płaszczyznę P, ale jak się to zaraz okaże, po wyznaczeniu kładu jednego z nich np. A, wyznaczenie pozostałych zostanie znakomicie uproszczone. Prze-

----

dłużmy bok $A'B'$ do przecięcia ze śladem s_1 w punkcie 1. Punkt ten przy obrocie pozostanie nieruchomy, jako punkt leżący na osi obrotu; jeżeli więc połączymy go z punktem (A), to otrzymamy kład prostej $A'1$. Spuszczając z punktu B_1 prostopadłą na s_1, otrzymamy w przecięciu z prostą $(A)1$ punkt (B). W podobny sposób znajdujemy kład punktu C; przedłużamy $B'C'$ do przecięcia z s_1 w punkcie 2, łączymy punkt 2 z punktem (B) i spuszczamy z C' prostopadłą na s_1; przecięcie tej prostopadłej z prostą $(B)2$ da nam punkt (C). Wyznaczamy jeszcze w taki sam sposób punkt (D), to jest przedłużamy $C'D'$ do przecięcia z s_1 w punkcie 3, łączymy $(C)3$ i wyznaczamy przecięcie tej prostej z prostopadłą spuszczoną z D' na s_1. Jako sprawdzian dokładności wykreślenia służyć będą proste $A'D'$ i $(A)(D)$, $A'C'$ i $(A)(C)$, $B'D'$ i $(B)(D)$ które parami winny się przecinać na osi obrotu.

Na tej samej własności rzutów i kładów figur prostokreślnych oprzeć można rozwiązanie zadania odwrotnego. Weźmy przykład następujący:

Mając ślady $s_1 s_2$ płaszczyzny oraz I rzut boku 5-kąta foremnego w niej leżącego, wykreślić rzuty tego 5-kąta /rys.96/.



Rys. 95.

Wyznaczmy naprzód kład (A) (B) danego boku A B na płaszczyznę P_1. W tym celu łączymy wyznaczony zwykłym sposobem /§28/ kład punktu A z punktem 1, w którym dany rzut A'B' przecina ślad s_1 i z punktu B' spuszczamy prostopadłą do s_1, która przetnie prostą (A) 1 w punkcie (B). Na odcinku (A)(B) kreślimy foremny 5-kąt (A)(B)(C)(D)(E) i niechaj punkty 2,3, 4 i 5 będą przecięciami boków (B)(C), (C)(D), (DE) i (E)(A) ze śladem s_1. Za pomocą tych punktów oraz prostopadłych spuszczonych z wierzchołków pięciokąta wyznaczymy wierzchołki (C)(D) i (E) I rzutu tego 5-kąta. Dla sprawdzenia dokładności wykreślenia stwierdźmy, że przekątne kładu i rzutu 5-kąta wirny się przecinać na śladzie T_1 . Wyznaczenie II rzutu 5-kąta nie sprawia żadnych trudności jeżeli skorzystamy z II rzutów punktów 1, 2, 3, 4 i 5.

§ 31. Powinowactwo geometryczne. Rzut i kład figury płaskiej na tę samą płaszczyznę są w pewnym szczególnym związku geometrycznym, który ma ważne teoretyczne i praktyczne znaczenie. Związek ten polega na następujących pięciu faktach:

1-o. Każdemu punktowi pierwszej figury odpowiada jeden jedyny punkt drugiej figury i nawzajem.

2-o. Każdej prostej pierwszej figury odpowiada jedna jedyna prosta drugiej figury i nawzajem.

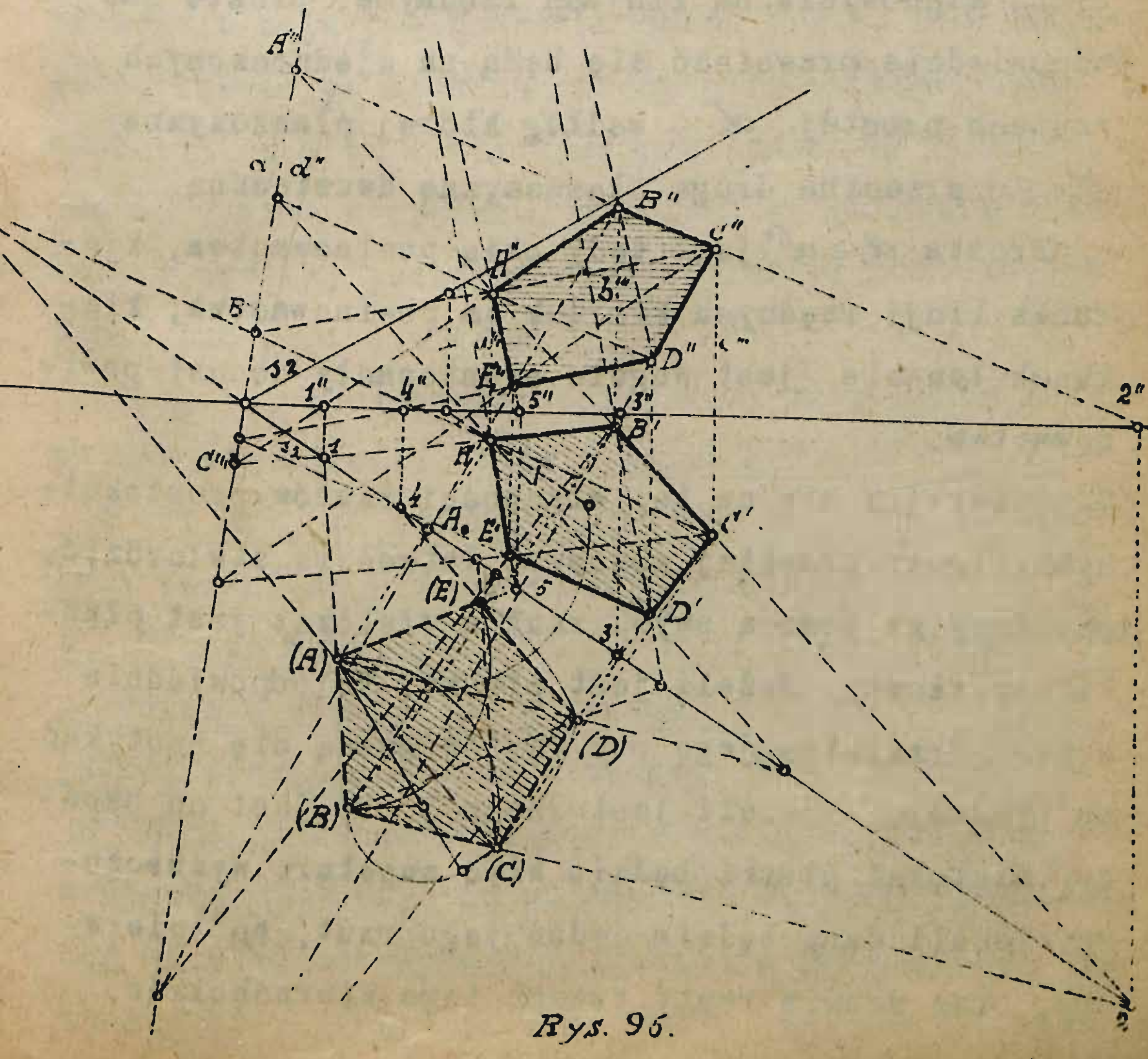
3-o. Punktowi i prostej, należącym do siebie w pierwszej figurze odpowiadają w drugiej punkt i prosta również do siebie należące.

4-o. Punkty odpowiednie leżą na prostych równoległych i

5-o. Proste odpowiednie przecinają się w punktach jednej prostej.

O dwóch figurach czyniących zadość tym pięciu warunkom mówimy, że są w powinowactwie geometrycznem. Kierunek prostych, które łączą punkty odpowiednie nazywa się kierunkiem powinowactwa, prosta, na której przecinają się proste odpowiednie nazywa się osią powinowactwa.

W naszym przykładzie /rys.96/ 5-kąty $(A)(B)(C)(D)(E)$ i $A'B'C'D'E'$ są w powinowactwie, którego osią jest ślad J_1, a kierunkiem kierunek do tej osi prostopadły. Ale na tym samym rysunku mamy jeszcze inny przykład figur w powinowactwie, mianowicie



Rys. 96.

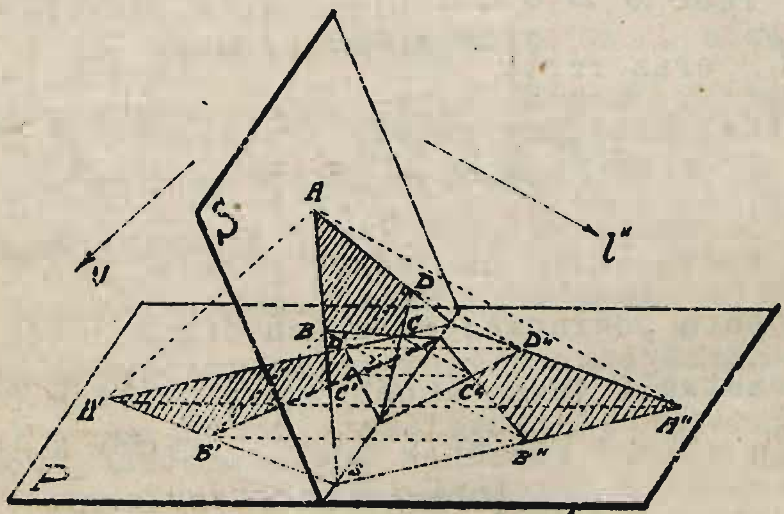
dwa rzuty $A'B'C'D'E'$ i $A''B''C''D''E''$ pięciokąta $ABCDE$. W samej rzeczy, jeżeli za punkty odpowiednie tych figur uważać będziemy dwa rzuty, np. A' i A'' tego samego punktu A, a za proste odpowiednie dwa rzuty, np. $A'B'$ i $A''B''$ tej samej prostej AB, leżącej w płaszczyźnie $\vartheta_1\vartheta_2$, to punkty odpowiednie leżeć będą na prostych równoległych, mianowicie na linjach rzędnych, proste zaś odpowiednie przecinać się będą na zjednoczonych rzutach prostej d, według której płaszczyzna $\vartheta_1\vartheta_2$ przecina drugą płaszczyznę dwusieczną.

Prosta $d'\equiv d''$ jest tedy osią powinowactwa, kierunek linji rzędnych kierunkiem powinowactwa; kierunek ten nie jest wogóle prostopadły do osi powinowactwa.

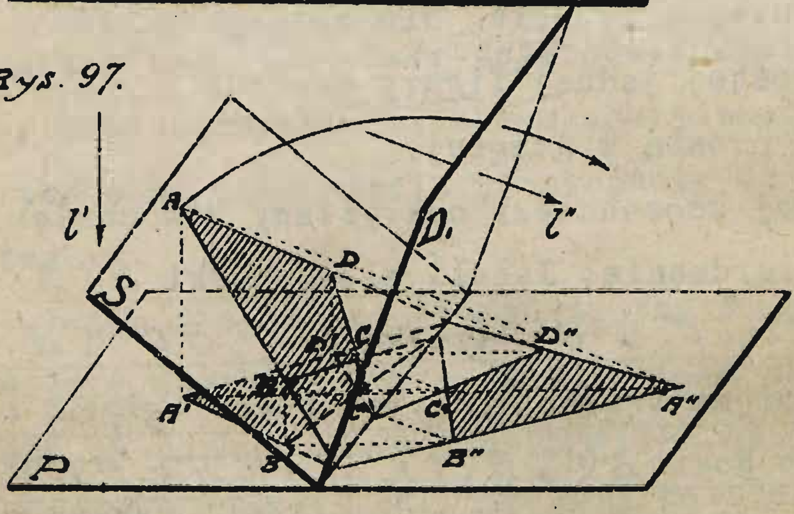
Opierając się na tej własności rzutów prostokątnych figury płaskiej możemy z łatwością stwierdzić, czy dany za pomocą swych rzutów wielokąt jest płaski czy skośny. Jeżeli jest płaski, to odpowiednie boki i przekątne jego obu rzutów muszą się spotykać na prostej, - jeżeli jest inaczej, to jest on skośny. Wielokąt płaski będzie więc zupełnie wyznaczony, jeżeli dany będzie jeden jego rzut, np. pierwszy, oraz drugie rzuty trzech jego wierzchołków;

przytem drugie rzuty pozostałych wierzchołków mogą być wyznaczone bez pomocy śladów $\mathcal{J}_1$ $\mathcal{J}_2$ płaszczyzny tego wielokąta. Niech będzie np. dany /rys.111/ rzut $A'B'C'D'E'$ pięciokąta płaskiego $ABCDE$ oraz rzuty A'' B'' i C'' trzech jego wierzchołków. Znajdźmy punkty przecięcia $A'''B'''C'''$ prostych $B'C'$ i $B''C''$, $C'A'$ i $C''A''$, $A'B'$ i $A''B''$ punkty te muszą leżeć na jednej prostej $d'd''$, która będzie osią powinowactwa dwóch figur. Otóż mając oś powinowactwa i jedną choćby parę punktów odpowiednich /a więc i kierunek powinowactwa/, możemy, jak to wynika z rysunku, dla każdego punktu i dla każdej prostej jednej figury znaleźć odpowiadający punkt lub prostą w drugiej.

Przy tej sposobności odkryliśmy mimochodem następujące twierdzenie: Jeżeli wierzchołki A' i A'', B' i B'', C' i C'' trójkątów $A'B'C'$ i $A''B''C''$ leżą parami na trzech prostych równoległych $a'''b'''$ i c''', to boki $B'C'$, $B''C''$, $C'A'$ i $C''A''$, $A'B'$ i $A''B''$ przecinają się parami w trzech punktach $A'''B'''C'''$ jednej prostej. W samej rzeczy, jeżeli $A'B'C'$ i $A''B''C''$ uważać będziemy za rzuty prostokątne trójkąta ABC, to punkty A''' B''' i C''' muszą leżeć na zjednoczonym I i II rzucie prostej d, według której płaszczyzna ABC przecina II płasz czyznę dwusieczną. Do stwierdzenia tego powrócimy jeszcze, otrzymując je jako wniosek z twierdzenia o trójkątach Desargues'a.



Rys. 97.



Rys. 98.

Figury w powinowactwie otrzymujemy zawsze, gdy tą samą figurę płaską $ABCDE$..... rzucamy równolegle na tę samą płaszczyznę rzutów P w dwóch różnych kierunkach l' i l'' /rys. 97/. W samej rzeczy rzuty

$A'B'C'D'$... i $A''B''C''D''$.... są wtedy w takim związku, że punkty odpowiednie A' i A'', B' i B''... leżą parami na prostych równoległych, według których płaszczyzny równoległe do l' i do l'', a przechodzące przez punkty A, B.... przecinają P; proste $B'C'$ i $B''C''$, $C'D'$ i $C''D''$..... przecinają proste BC, CD.... a więc i siebie wzajemnie na śladzie s płaszczyzny S.

Jeżeli kierunek l'' jest prostopadły do jednej z płaszczyzn dwusiecznych kąta dwuściennego SP, to $A''B''C''D''$.... jest kładem figury $ABCD$... na P; jeżeli w dodatku $l' \perp P$, to figury $A'B'C'D'$..... i $A''B''C''D''$... można uważać za rzut i kład figury $ABCD$.... na P /rys.98/.

Rozdział IV.

Przesuwanie równoległe osi rzutów.

§ 32. Przesuwanie figur w kierunku prostopadłym do I płaszczyzny dwusiecznej. W § 24 stwierdziliśmy już, że gdy figura doznaje przesunięcia równoległego, to oba jej rzuty zostają przesunięte równolegle, przez co zmienia się jedynie położenie tych rzutów na płaszczyźnie rysunku.