KOMISJA WYDAWNICZA
Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej.

Geometrja Wykreślna

WEDŁUG WYKŁADÓW
Prof. ST. GARLICKIEGO

WYDANIE IV.

Rok akad. 1923/24.
№ wyd. 173.

WARSZAWA
Skład Główny Komisji Wydawniczej: Politechnika — Polna 3. Telefon 88-60.
Drukarnia i Litografja „SATURN" Marszałkowska 91. Telefon 20-44.

Niniejszym mamy zaszczyt złożyć serdeczne podziękowanie J.W.Panu prof. Stanisławowi GARLICKIEMU za przychylne stanowisko w sprawie niniejszego IV wydania "Geometrji Wykreślnej" oraz wydatną pomoc, jaką przez przejrzenie i poprawienie wydania poprzedniego był łaskaw okazać.

Komisja Wydawnicza

T-wa Bratniej Pomocy Stud. Pol. Warsz.

W S T Ę P.

§1. Geometrja wykreślna jest to nauka, która uczy, jak odwzorowywać na płaszczyźnie dane figury przestrzenne i jak na mocy tych odwzorowań rozwiązywać za pomocą rysunku zagadnienia tych figur dotyczące.

Sposobów odwzorowania figur przestrzennych na płaszczyźnie możnaby pomyśleć bardzo wiele; dla zastosowań praktycznych będą jednak brane w rachubę takie tylko odwzorowania, których konstrukcja w wyobraźni nie jest zbyt trudna. Odwzorowanie takie otrzymamy przedewszystkiem przez naśladowanie procesu naszego widzenia; odnośna metoda geometrji wykreślnej nazywa się metodą rzutów środkowych lub perspektywą. Wszystkie w praktyce stosowane metody wykreślne są z nią pokrewne.

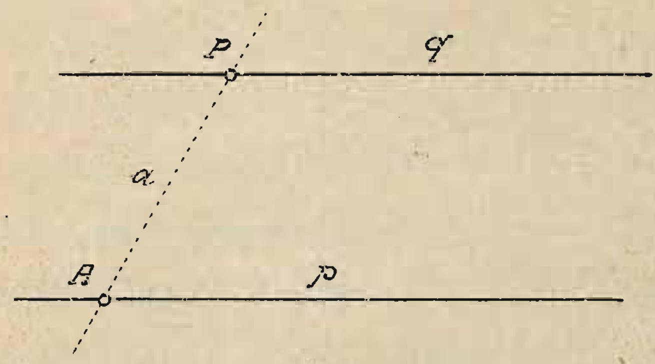
§2. ELEMENTY NIEWŁAŚCIWE. Zanim się zwrócimy do wykładu poszczególnych metod wykreślnych, wprowadzimy do słownictwa geometrycznego pewne terminy, które w znacznym stopniu uproszczą nasz wykład. Mam na myśli elementy niewłaściwe.

Dwa punkty zawsze wyznaczają prostą. Istnieje bowiem zawsze prosta i tylko jedna, która łączy dwa jakiekolwiek punkty. Natomiast dwie proste na płaszczyźnie nie zawsze wyznaczają punkt, nie zawsze bowiem istnieje punkt ich przecięcia. Na zasadzie V postulatu Euklidesa przez każdy punkt płaszczyzny można poprowadzić jedną i tylko jedną prostą, która danej prostej nie przecina; prostą tę zwiemy równoległą do danej prostej, lub też prostą o tym samym kierunku. Dwie proste na płaszczyźnie mają zatem albo punkt wspólny albo wspólny kierunek. Powstaje teraz pytanie, czy nie możnaby pojęcia "punkt" rozszerzyć w taki sposób, aby wyjątek spowodowany przez możliwość prostych równoległych został usunięty?

Na pytanie to damy odpowiedź twierdzącą. Będziemy odtąd mianowicie przez słowo "punkt" rozumieć nie tylko punkty w dotychczasowem znaczeniu, t.j. punkty właściwe, ale i "kierunki" wszystkich możliwych prostych, t.j, punkty niewłaściwe. Możemy wtedy powiedzieć:

"Dwie proste na płaszczyźnie zawsze mają jeden i tylko jeden punkt wspólny: właściwy albo niewłaściwy".

Na każdej prostej mamy zatem nieskończenie wiele punktów właściwych i jeden punkt niewłaściwy, t.j. jej kierunek. Z chwilą, gdy prosta jest dana, dany jest oczywiście jej kierunek, t.j. punkt niewłaściwy; na każdej prostej danej jest on tedy zawsze dany, czego nie można powiedzieć o żadnym punkcie właściwym tej prostej. Punkt niewłaściwy możnaby więc nazywać punktem absolutnym danej prostej; często jednak wolimy go nazywać punktem w nieskończoności, a to na zasadzie następującego rozważania.



Rys. 1.

Niech będzie dana prosta p i punkt P na niej nie leżący /Rys.1/. Każdemu punktowi A prostej p odpowiada jedna i tylko jedna prosta a przechodząca przez P, czyli, jak mówimy, rzucająca punkt A z punktu P. Gdy punkt A porusza się na prostej p, to prosta rzucająca a obraca sie dokoła punktu P. Im dalej punkt A będzie się znajdował od pierwotnego swego położenia na prostej p, tem bardziej prosta a będzie się zbliżała do położenia równoległego q. Nawzajem im bardziej prosta a, obracając się dokoła punktu P, z jednej lub drugiej strony zbliża się do położenia równoległego q, tym bardziej punkt A oddala się od pierwotnego swego położenia. Gdy zatem prosta a stanie się równoległą do p, t.j. gdy punkt A przestanie być punktem właściwym prostej p, możemy powiedzieć, że znajduje się on dalej od każdego punktu właściwego prostej p , t.j. w nieskończoności.

Każda prosta posiada zatem jeden punkt w nieskończoności /punkt niewłaściwy, absolutny, kierunek/; należałoby więc prostą uważać za linję zamkniętą.

Tak samo rzeczy się mają z płaszczyznami: dwie płaszczyzny albo się przecinają według prostej, albo są równoległe. Podobnie, jak o prostych równoległych mówimy, że mają wspólny kierunek, tak o płaszczyznach równoległych powiemy, że mają wspólne ustawienie. Jeżeli teraz rozszerzymy pojęcie "prosta" przez dołączenie do prostych w dotychczasowym rozumieniu, t.j. do prostych właściwych, wszystkich możliwych ustawień, to zastąpiwszy słowo "ustawienie" przez słowa "prosta niewłaściwa" powiemy:

"Dwie płaszczyzny zawsze mają jedną i tylko jedną prostą wspólną: właściwą lub niewłaściwą".

Na każdej płaszczyźnie mamy nieskończenie wiele prostych właściwych i jedną prostą niewłaściwą, t.j. ustawienie płaszczyzny. Z chwilą, gdy płaszczyzna jest dana, dane jest oczywiście jej ustawienie, t.j. prosta niewłaściwa; na każdej płaszczyźnie jest ona przeto zawsze dana; możnaby ją nazwać prostą absolutną płaszczyzny. Często wolimy ją nazywać prostą w nieskończoności, leżą na niej bowiem wszystkie punkty w nieskończoności tej płaszczyzny.

Punkt właściwy wraz z punktem niewłaściwym wyznaczają prostą równie dobrze, jak dwa punkty właściwe. Połączyć punkt właściwy A z punktem niewłaściwym prostej b znaczy to przez punkt A poprowadzić równoległą do prostej b.

Dwa punkty niewłaściwe wyznaczają prostą niewłaściwą, albowiem dwa kierunki wyznaczają ustawienie. W samej rzeczy, jeżeli obierzemy dowolny punkt przestrzeni i poprowadzimy przezeń proste w obranych kierunkach, to te dwie proste wyznaczają płaszczyznę, której ustawienie nie zależy od obranego punktu, lecz zależy jedynie od kierunków prostych przez ten punkt przechodzących.

Prosta właściwa a i punkt niewłaściwy prostej b /albo punkt właściwy A i prosta niewłaściwa płaszczyzny B /wyznaczają płaszczyznę równie dobrze, jak każda inna prosta i punkt na niej nie leżący. Będzie to płaszczyzna przechodząca przez prostą a równolegle do prostej b /albo płaszczyzna przechodząca przez punkt A równolegle do płaszczyzny B /.

Każde dwie proste niewłaściwe mają punkt niewłaściwy wspólny, t.j. dwa ustawienia wyznaczają kierunek. W samej rzeczy, obierzmy znowu dowolny punkt przestrzeni i poprowadźmy dwie płaszczyzny o danych ustawieniach; kierunek prostej przecięcia tych płaszczyzn nie zależy od obranego punktu, lecz zależy jedynie od ustawień płaszczyzn przez ten punkt przechodzących. Ogół prostych niewłaściwych ma zatem tę własność, że każde dwie z pośród nich mają punkt niewłaściwy wspólny. Ale własność taką mogą mieć tylko proste, leżące w jednej płaszczyźnie, a więc

"Wszystkie proste niewłaściwe leżą w jednej płaszczyźnie". Płaszczyzna ta nazywa się niewłaściwą, albo absolutną, albo płaszczyzną w nieskończoności."

Teorja elementów niewłaściwych da się streścić w następujących słowach:

„Śród płaszczyzn wyróżniona jest jedna przez to, że jest zawsze dana. Nazywa się ona płaszczyzną niewłaściwą; wszystkie inne płaszczyzny nazywamy właściwemi. Proste i punkty tej płaszczyzny nazywamy niewłaściwemi. Wszystkie inne proste i punkty nazywamy właściwemi".

"Równoległemi nazywamy dwie płaszczyzny właściwe, które mają prostą niewłaściwą wspólną, lub dwie proste właściwe, które mają punkt niewłaściwy wspólny. Określenia te nie mają zastosowania, gdy jedna z dwuch płaszczyzn, lub gdy jedna albo obie proste są niewłaściwe".

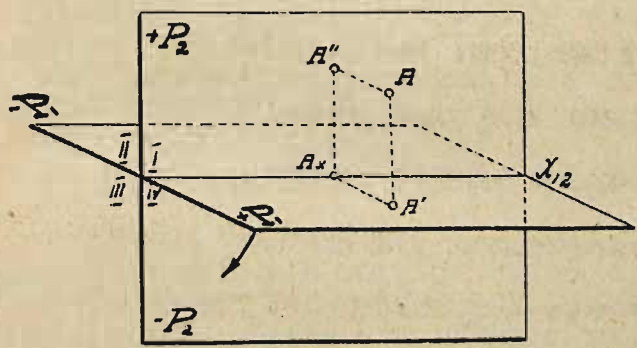
Wprowadzenie do geometrji elementów niewłaściwych, upraszcza wysłowienie wielu twierdzeń i ułatwia dowodzenia przez usunięcie w wielu razach przypadków szczególnych, które inaczej osobno musiałyby być rozważane

CZĘŚĆ I.

RZUTY PROSTOKĄTNE.

ROZDZIAŁ I. PUNKT, PROSTA I PŁASZCZYZNA.

§3. RZUTY PUNKTÓW WŁAŚCIWYCH. Niech będą dwie płaszczyzny prostopadłe P_1 i P_2 /rys.2/, prosta X_{12} niech będzie ich linją przecięcia. P_1 nazywa się pierwszą płaszczyzną rzutów, P_2 drugą płaszczyzną rzutów; prosta X_{12} osią rzutów. Co do położenia płaszczyzn P_1 i P_2 w przestrzeni nie potrzeba robić żadnej umowy;



Rys. 2.

często jednak wyobrażamy sobie, że P_1 jest poziomą, P_2 zaś pionową i nazywamy wtedy: P_1 - poziomą płaszczyzną rzutów, a P_2 pionową płaszczyzną rzutów.

Z danego punktu właściwego A przestrzeni spuszczamy prostopadłe AA' na P_1 i AA'' na P_2 ; pun

A' nazywa się pierwszym rzutem punktu A /wzgl. rzutem poziomym/, odległość $A'A$ nazywa się pierwszą odległością punktu A ; punkt A'' nazywa się drugim rzutem punktu A /wzgl. rzutem pionowym/, odległość $A''A$ nazywa się drugą odległością punktu A .

Przez proste $A'A$ i $A''A$ poprowadźmy płaszczyznę, która przetnie oś X_{12} w punkcie A_x ; płaszczyzna ta będzie prostopadła do X_{12} , albowiem jest ona prostopadła zarówno do P_1 jak i do P_2 . Oś rzutów będzie zatem prostopadła do każdej prostej w płaszczyźnie $A'AA''$, a więc $X_{12} \perp A_xA'$ i $X_{12} \perp A_xA''$. Odcinek A_xA' nazywa się pierwszą rzędną punktu A ; odcinek A_xA'' nazywa się jego drugą rzędną. Ponieważ czworokąt $A'AA''A_x$ jest prostokątem, więc mamy:

"Pierwsza rzędna punktu A równa się drugiej jego odległości; druga rzędna punktu A równa się pierwszej jego odległości. Równość ta będzie dotyczyła nietylko wartości bezwzględnej, ale i znaku, jeżeli zrobimy co do znaków umowę następującą: Oś rzutów dzieli każdą płaszczyznę rzutów na dwie części; jedną którąkolwiek z dwóch części płaszczyzny P_1 /np. tę, która leży przed P_2 / nazwijmy pierwszą płaszczyzną dodatnią $+P_1$; jedną którąkolwiek z dwóch części płaszczyzny P /np. tę, która leży nad płaszczyzną

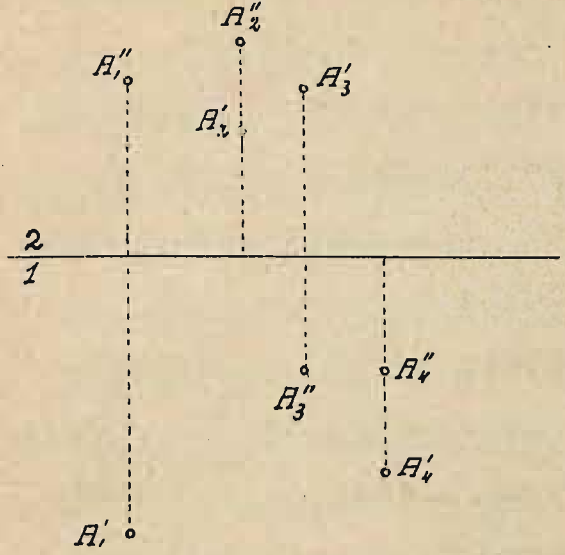
P_1 / nazwijmy drugą półpłaszczyzną dodatnią $+P_2$, pozostałe części nazwijmy pierwszą i drugą półpłaszczyzną ujemną $-P_1$ i $-P_2$. Rzędne leżące na $+P_1$ i $+P_2$ uważajmy za dodatnie, rzędne leżące na $-P_1$ i $-P_2$ za ujemne. Podobną umowę zawieramy co do pierwszych i drugich odległości. Za dodatnie uważać będziemy pierwsze odległości punktów, leżących po tej stronie płaszczyzny P_1, po której leży $+P_2$ /nad płaszczyzną P_1 / oraz drugie odległości punktów, leżących po tej stronie płaszczyzny P_2, po której leży $+P_1$ /przed P_2 /.Za ujemne uważać będziemy pierwsze odległości punktów leżących *po* tej stronie płaszczyzny P_1, po której leży $-P_2$ /pod P_1 oraz drugie odległości punktów, leżących po tej stronie płaszczyzny P_2, po której leży $-P_1$ /za P_2 /.

Dwie płaszczyzny rzutów dzielą przestrzeń na cztery ćwiartki: 1-sza pomiędzy $+P_1$ i $+P_2$, druga między $-P_1$ i $+P_2$, *trzecia między $-P_1$ i $-P_2$ /* czwarta między $+P_1$ i $-P_2$. Każdemu punktowi przestrzeni A odpowiada para punktów, które są jego rzutami; jeden z nich A' znajduje się na P_1, drugi A'' na P_2. Jeżeli teraz, obracając jedną z płaszczyzn rzutów dokoła osi X_{12}, rozpostrzemy ją na drugiej tak, aby $+P_1$ przystała do $-P_2$, przy czem oczywiście $-P_1$ przystanie do $+P_2$, to obydwe te punkty A' i A'' znajdą się w jednej płaszczyźnie, którą obierzemy za płaszczyznę rysunku. Ponieważ $X_{12} \perp A_x A'$ i $X_{12} \perp A_x A''$, więc punkty A' i A'' będą leżały na wspólnej prostopadłej do osi rzutów. Tak więc punkt przestrzeni A będzie odwzorowany na płaszczyźnie rysunku przez parę punktów A' i A'', leżących na prostopadłej do osi X_{12}. Prostopadła $A'A''$ nazywa się linją rzędnych punktu A.

Nawzajem, każdej parze punktów $A'A''$, leżących w płaszczyźnie rysunku na prostopadłej do X_{12}, odpowiada jeden jedyny punkt przestrzeni A. W samej rzeczy, sprowadźmy płaszczyznę P_1, wraz z leżącym na niej punktem A' do pierwotnego położenia względem P_2, t.j. uczyńmy $P_1 \perp P_2$. W punkcie A' wystawimy prostopadłą do P_1, w punkcie A'' prostopadłą do P_2; te dwie prostopadłe przecinają się w punkcie A, gdyż leżą obydwie w płaszczyźnie, wyznaczonej przez $A_x A'$ i $A_x A''$, a więc prostopadłej do X_{12}.

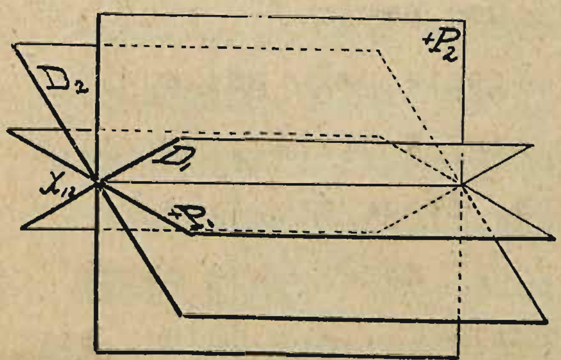
Jeżeli punkt A' leży w pierwszej ćwiartce /Rys.3/, to obydwie rzędne są dodatnie, /rzut poziomy leży pod osią,/ mówiąc ogólnie, po tej stronie osi, po której zrobiliśmy napis 1; rzut pionowy nad nią, a więc po tej stronie osi, gdzie widnieje napis 2. Jeżeli punkt A_2 leży w drugiej ćwiartce, to pierwsza rzędna jest ujemna, druga dodatnia; po dokonanym kładzie płaszczyzny P_1 na P_2 będą zatem obydwa rzuty nad osią X_{12}. Punkt A_3 znajdujący się w trzeciej ćwiartce, będzie miał obydwie rzędne ujemne;

rzut poziomy będzie więc nad osią x_{12} , rzut pionowy pod nią. Punkt A_4 znajdujący się w czwartej ćwiartce będzie miał pierwszą rzędną ujemną dodatnią, drugą dodatnią ujemną; obydwa rzuty będą więc pod osią x_{12} .



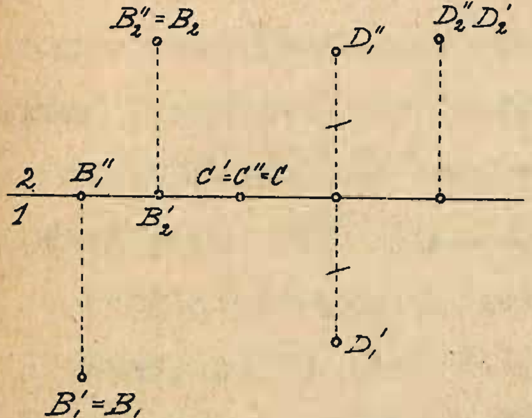
Rys. 3.

Godne uwagi są punkty, których rzuty mają pewne szczególne położenia względem osi rzutów. Jeżeli drugi rzut B_1'' leży na osi /Rys.5/, to punkt B_1 leży w płaszczyźnie P_1 i przystaje do swego pierwszego rzutu B_1' ; jeżeli pierwszy rzut B_2' leży na osi, to punkt B_2 leży w płaszczyźnie P_2 i przystaje do swego drugiego rzutu B_2'' , jeżeli oba rzuty C' i C'' są zjednoczone w tym samym punkcie osi, to i punkt C jest z nimi zjednoczony. Gdy obydwie rzędne punktu D są równe, równe są odległości punktu D od obu płaszczyzn rzutów; punkt D znajduje się przeto



Rys. 4.

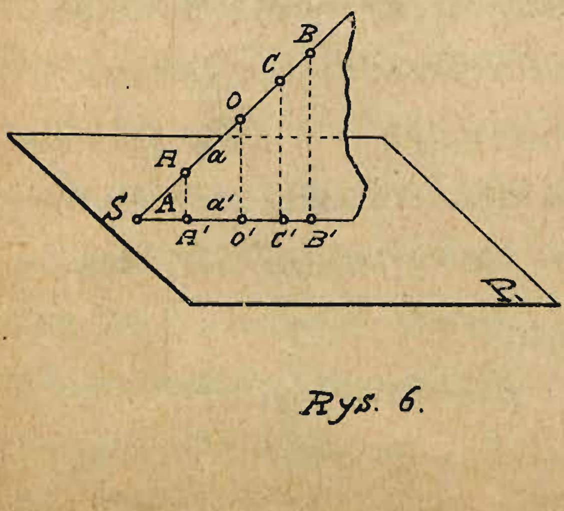
na jednej z dwóch płaszczyzn dwusiecznych D_1 i D_2 kątów dwuściennych między płaszczyznami rzutów.



Rys. 5.

Płaszczyznę D_1, przechodzącą przez ćwiartkę pierwszą i trzecią, /Rys.4/ nazywamy pierwszą płaszczyzną dwusieczną; rzuty punktu D_1 w niej leżącego są symetryczne względem osi. Płaszczyzna D_2, przechodząca przez ćwiartkę drugą i czwartą nazywa się drugą płaszczyzną dwusieczną; rzuty punktu D_2 w niej leżącego przystają do siebie. Dlatego też niekiedy płaszczyznę D_2 nazywa się płaszczyzną spółrzutową.

§4. RZUTY PROSTEJ. Rzutem środkowym prostej jest wogóle prosta. Prosta zawsze wyznacza swój rzut, natomiast rzut wogóle nie wyznacza prostej w przestrzeni. Gdy prosta przechodzi przez środek rzutów, to jej rzut jest punktem; w tym i tylko w tym przypadku rzut prostej wyznacza ją w przestrzeni.



Rys. 6.

Te same wyniki otrzymamy, gdy środkiem rzutów jest punkt niewłaściwy jakikolwiek, a więc i wtedy, gdy proste rzucające są prostopadłe do płaszczyzny rzutów. Niech A' i B' będą rzutami prostokątnemi punktów A i B na płaszczyznę rzutów P_1. /rys.6/.

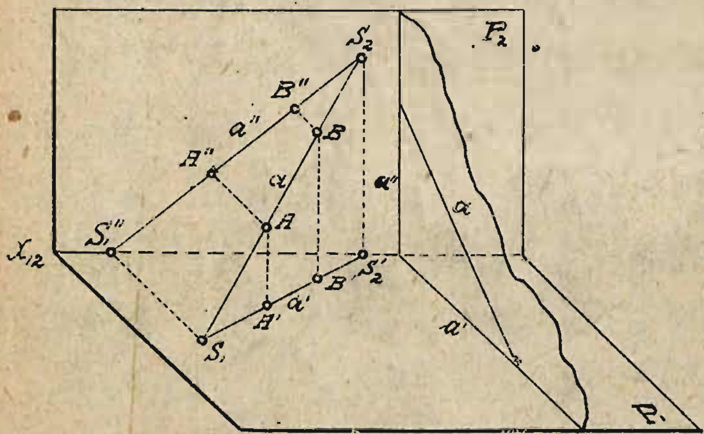
Rzuty wszystkich punktów prostej AB będą leżały na prostej $A'B'$, która jest linją przecięcia płaszczyzny P_1 z płaszczyzną A przechodzą przez AB prostopadłe do P_1. Płaszczyzna A nazywa się płaszczyzną rzucającą prostą AB. Każda prosta przestrzeni a ma jeden jedyny rzut a' na płaszczyznie P_1, a więc każda prosta wyznacza swój rzut. Natomiast rzut a' nie wyznacza wogóle prostej w przestrzeni, gdyż każda prosta leżąca w płaszczyźnie A ma ten sam rzut a'. Rzutem prostokątnym prostej jest wogóle prosta; wyjątek stanowi prostopadła do P_1, której rzutem jest punkt; w tym przypadku zresztą rzut wyznacza prostą. Jeżeli punkt leży na prostej, to jego rzut leży na rzucie prostej. Na prostej $AB \equiv a$ weźmy dowolnie punkt C; rzut jego C' leży na rzucie $A'B' \equiv a'$. Proste rzucające równoległe AA', BB' i CC' wyznaczają na prostych a i a' odcinki proporcjonalne; mamy więc:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

czyli: punkt C dzieli odcinek AB w tym samym stosunku, w jakim rzut punktu C dzieli rzut odcinka AB. Równość tych dwóch stosunków dotyczy nietylko wartości bezwzględnej, ale i znaku, jakiekolwiek zwroty prostych a i a' uznalibyśmy za dodatnie.

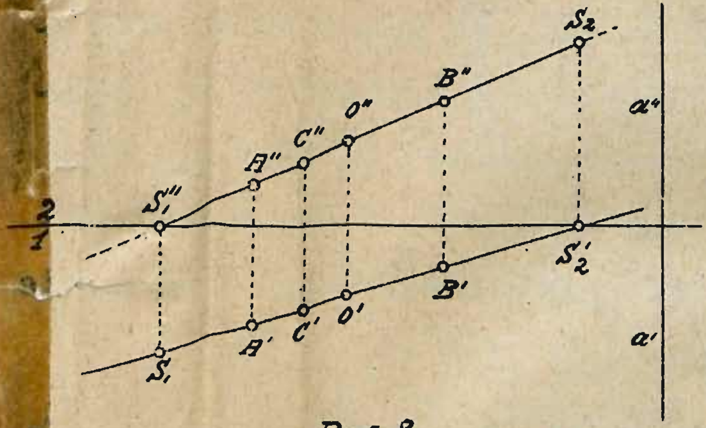
Punkt S, w którym prosta a przebija płaszczyznę rzutów nazywamy śladem prostej a na tej płaszczyźnie. Punkt ten jest oczywiście zjednoczony z własnym swoim rzutem S'.

Weźmy teraz dwie prostopadłe płaszczyzny rzutów P_1 i P_2, przecinające się według osi X_{12} /Rys.7/



Rys. 7.

i rzućmy prostą a na każdą z tych płaszczyzn. W tym celu obierzmy na prostej a dwa punkty jakiekolwiek A i B, rzućmy każdy z nich na obie płaszczyzny rzutów i połączmy ze sobą rzuty A' i B' oraz A'' i B''. Prosta $a' \equiv A'B'$ nazywa się pierwszym /poziomym/ rzutem prostej a, prosta $a'' \equiv A''B''$ nazywa się jej drugim /pionowym/ rzutem. Po rozpostarciu płaszczyzn P_1 i P_2 na płaszczyźnie rysunku otrzymamy w niej dwie proste a' i a'' /Rys.8/. Przypuśćmy, że żadna z nich nie jest prostopadłą do osi x , Powiadam, że takie dwie pr...



Rys. 8.

uważane: pierws... za rzut pierwszy, dru- ga a'' za rzut d... prostej właściw... , wyznaczają tę pr... W samej rzeczy spro- wadźmy płaszczyz... wraz z leżącą w niej prostą a' do pierws- nego jej położenia względem P , a następnie prz... i a'' poprowadźmy płaszczyzny A_1 i A_2 prostopadł... odpowiednie do P_1 i do P_2 ; przecięcie płaszczyz... A_1 i A_2 będzie prostą a .

Dwie proste płaszczyzny rysunku, z których je... jest prostopadła do osi, nie mogą być rzutami pr... Jeżeli bowiem jeden rzut prostej a , np. a', j... ...opadły do x , to drugi jej rzut a'' przysta... do ...szego, gdyż płaszczyzna A_1 rzucająca prost... a ...me, t.j. prostopadle do P_1 , rzuca ją równ... ...wo, t.j. prostopadle do P_2 . Jeżeli obie pr... a'' są prostopadłe do osi x_{12} ale nie są zje... ...e płaszczyzny rzucające A_1 i A_2 będą równo- ... wyznaczają wtedy prostą w nieskończo- ...

ności, a mianowicie ustawienie płaszczyzn prostopadłych do osi. Jeżeli obie proste a' i a'' są zjednoczone na prostopadłej do osi, to płaszczyzny rzucające A_1 i A_2 będą zjednoczone w płaszczyźnie prostopadłej do osi. Każda prosta tej płaszczyzny będzie miała te same rzuty a' i a'', w tym więc przypadku prosta a nie jest przez swoje rzuty należycie wyznaczoną.

§5. RZUTY PUNKTU LEŻĄCEGO NA PROSTEJ DANEJ.

Każdy punkt, leżący na prostej ma swoje rzuty na odpowiednich rzutach prostej. Nawzajem, gdy pierwszy rzut punktu leży na pierwszym rzucie prostej, a jego drugi rzut na drugim rzucie prostej, to punkt i prosta, przez te rzuty wyznaczone należą do siebie. Możemy tedy rozwiązać następujące

ZADANIE: Na jednym z rzutów prostej dany jest odpowiedni rzut punktu na niej leżącego; wyznaczyć drugi rzut tego punktu. Niechaj będzie dana prosta a', a'' /Rys. 8/; na jednym z jej rzutów, np. na niech będzie prócz tego dany rzut C' punktu C.

Drugi rzut C'' punktu C musi leżeć na prostej oraz na linji rzędnych punktu C. Jeżeli tedy z punktu C' spuścimy prostopadłą na oś x_{12}, to przecięcie jej z prostą a'' otrzymamy szukany rzut C

Gdy dane są rzuty dwóch punktów A i B

możemy wyznaczyć rzuty punktu C, dzielącego odcinek AB w stosunku danym: $m:n$. Połączmy $A'B'$ i $A''B''$; na prostej $a'\equiv A'B'$ wyznaczmy punkt C', który dzieli odcinek $A'B'$ w danym stosunku; linja rzędnych przechodząca przez C' przetnie $a''\equiv A''B''$ w punkcie C''. W szczególności rzutami środka O odcinka AB będą środki O' i O'' rzutów tego odcinka.

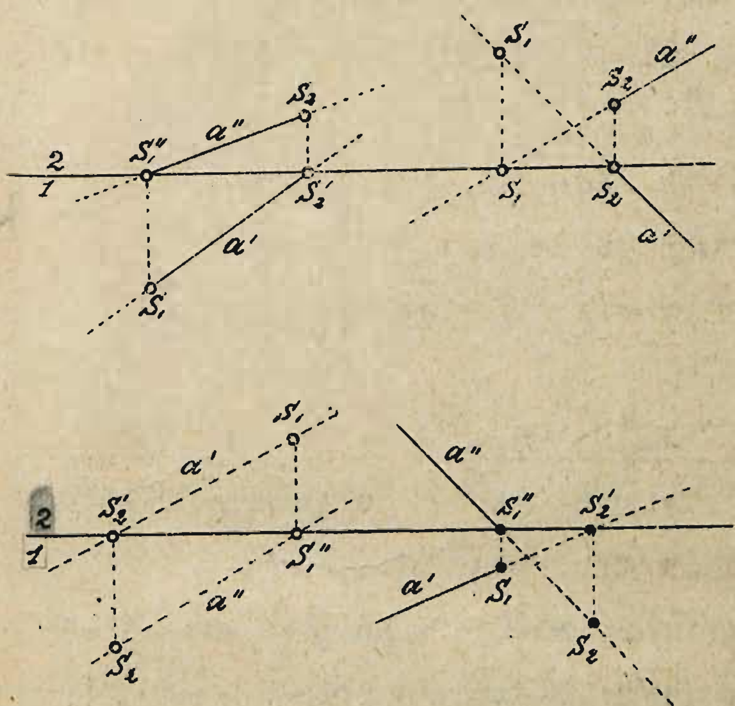
§6. ŚLADY PROSTEJ. Z pośród punktów prostej ważne szczególnie te jej punkty, które leżą na płaszczyznach rzutów, t.j. punkty, w których ta prosta przebija płaszczyzny P_1 i P_2, albo **ślady.** Punkt przebicia prostej a z płaszczyzną P_1 nazywa się **pierwszym, albo poziomym jej śladem** S_1; punkt przebicia prostej a z płaszczyzną P_2 nazywa się **drugim, albo pionowym jej śladem** S_2 /Rys.7/.

ZADANIE. Mając rzuty a' i a'' prostej a wyznaczyć jej ślady S_1 i S_2.

Ślad poziomy S_1 leży na P_1 /Rys.7 i 8/, jego rzut pionowy S_1'' leży zatem na osi; z drugiej strony musi on leżeć na rzucie pionowym a'' prostej a; będzie to więc punkt przecięcia rzutu pionowego prostej z osią. Mając już rzut pionowy punktu leżącego na prostej a znajdziemy jego rzut poziomy, czyli sam ślad S_1 w przecięciu rzutu poziomego a' z linją rzędnych wyprowadzoną z punktu S_1''. W podobny sposób znajdziemy pionowy S_2. Jego rzut poziomy S_2' leżeć musi na osi X bo S_2 leży na P_2 / oraz na rzucie poziomym a' /bo S_2 leży na a /; będzie to więc punkt przecięcia rzutu poziomego a' z osią X_{12}. Prostopadła wystawiona w tym punkcie do osi wyznacza na rzucie pionowym rzut pionowy tego śladu, który jest z nim zre- tą zjednoczony.-

Rozwiązanie powyższe zawodzi, gdy rzuty a' i a'' są zjednoczone na prostopadłej do X_{12}; wtedy zres jak wiemy, rzuty prostej nie wyznaczają jej w przestrzeni.

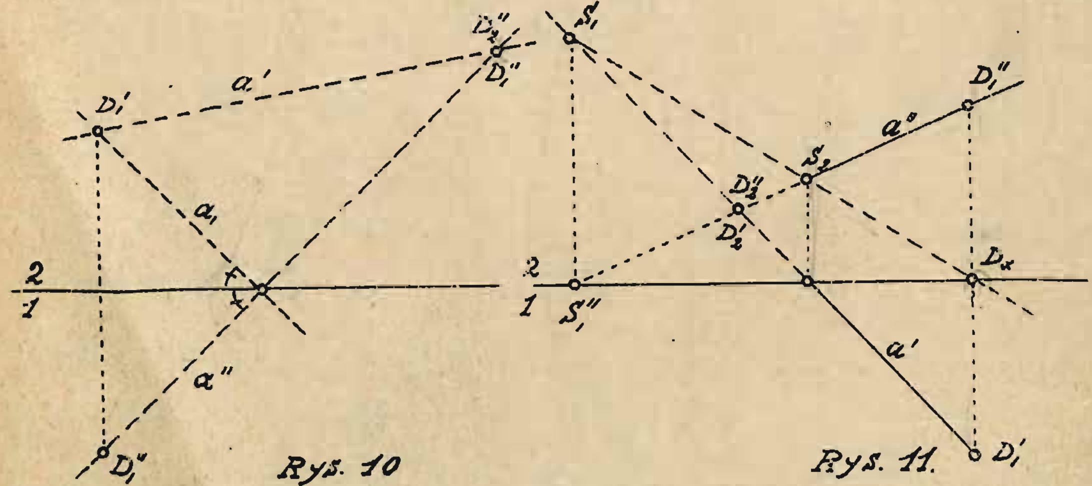
ZADANIE ODWROTNE: "Mając ślady S_1 i S_2 prostej wykreślić jej rzuty a' i a''", jest przypadkiem szczególnym wyznaczenia rzutów prostej przez rzutyty jej dwóch punktów jakichkolwiek. Ślad poziomy S_1 /rzutnia/ jest własnym swym rzutem poziomym S_1'; rzut pionowy S_1'' tego śladu jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej na oś z punktu S_1. Ślad pionowy S_2 jest własnym swym rzutem pionowym S_2''; jego rzut poziomy S_2' jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej na oś z punktu S_2. Prosta łącząca rzuty poziome S_1' i S_2' punktów S_1 i S_2 jest rzutem poziomym a' prostej a, prosta łącząca rzuty pionowe S_1'' i S_2'' tych punktów jest jej rzutem pionowym a''. Uwydatnić wykreślanie linią ciągłą te części rzutów prostej, które znajdu się na $+P_1$ i $+P_2$ po dodatniej stronie płaszczyzn P_1 i P_2, kreślimy natomiast linją przerywaną pozostałe ich części. Po dokonanym bowiem kładzie płaszczyzny P_1 na P_2, $+P_1$ przykrywa $-P_2$ a $+P_2$ przykrywa $-P_1$ gdyby płaszczyzny rzutów były nieprzezroczyste, to po rozpostarciu płaszczyzn P_1 i P_2 na płaszczyznę rysunku pozostałyby widoczne tylko te części rzutów, które znajdują się na $+P_1$ i $+P_2$ po dodatniej stronie płaszczyzn P_1 i P_2. Linją ciągłą należy zatem wykreślić te tylko części rzutów prostej, na których leżą rzuty punktów I ćwiartki /rys. 9/.



Rys. 9.

§ 7. Punkty, w których prosta przebija płaszczyzny dwusieczne. Oprócz śladów ważne też są punkty przecięcia prostej z płaszczyznami dwusiecznemi D_1 i D_2. Aby wyznaczyć punkt D_1, w którym prosta a przebija

D /Rys.10/, należy na rzutach a' i a'' prostej a znaleść dwa punkty D_1' i D_1'' symetryczne względem osi x_{12}. W tym celu wyznaczamy prostą symetryczną do jednego z rzutów prostej; niech np. a_1 będzie symetryczną z a''.



Rys. 10 Rys. 11.

Punkt przecięcia prostych a_1 i a' będzie rzutem poziomym D_1' szukanego punktu; prostopadła do osi z niego wyprowadzona wyznaczy na a'' rzut pionowy D_1'' punktu D.

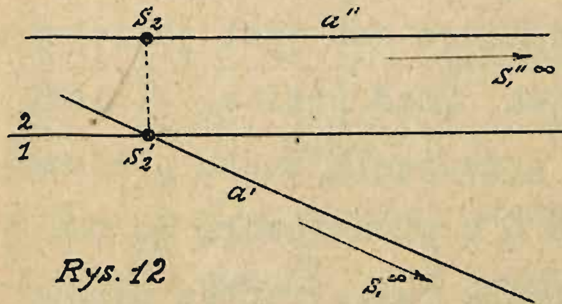
Jeżeli ślady S_1 i S_2 prostej a są znane /rys.11/, to prosta $S_1 S_2$ przecina oś w punkcie D_x, który wyznacza linję rzędnych punktu D_1, a więc i oba jego rzuty D_1' i D_1''. Za pomocą trójkątów podobnych można bowiem łatwo okazać, że $D_x D_1' = D_x D_1''$.

Aby wyznaczyć punkt D_2 /rys.10 i 11/, w którym a przebija D_2 t.j., którego rzuty przystają do siebie

/§3/, wystarczy znaleźć punkt przecięcia $D_2' D_2''$ rzutów a' i a''.

§ 8. POŁOŻENIA SZCZEGÓLNE PROSTYCH WZGLĘDEM PŁASZCZYZN RZUTÓW.

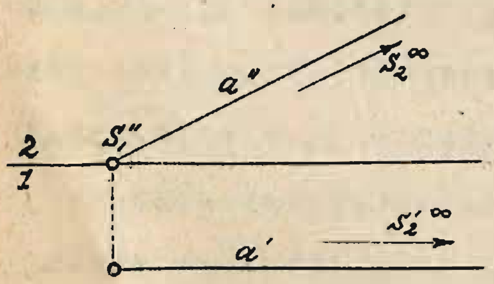
1. Prosta równoległa do pierwszej płaszczyzny rzutów, czyli prosta pozioma /rys.12/. Pierwsze odległości wszystkich punktów prostej a są równe; równe są zatem wszystkie drugie rzędne tych punktów; rzut pionowy a'' jest przeto równoległy do osi.



Rys. 12

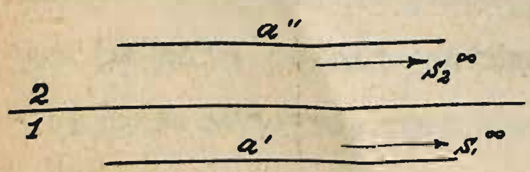
Rzut poziomy a' jest równoległy do prostej a, położenie jego względem osi jest jakiekolwiek. Ślad pionowy S_2 leży w przecięciu rzutu pionowego a'' z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie przecięcia osi z rzutem poziomym a'. Ślad poziomy S_1 jest w nieskończoności, gdyż prosta a jest równoległa do P_1. Wynika to zresztą również z wykreślenia. Punkt S_1'', w którym rzut pionowy a'' przecina oś, jest punktem niewłaściwym osi; linja rzędnych tego punktu jest prostą, która go łączy z innym punktem niewłaściwym, mianowicie z kierunkiem prostopadłym do osi; jest to więc prosta niewłaściwa. Przecięcie prostej niewłaściwej z rzutem poziomym a' będie za tym punktem niewłaściwym tego rzutu.

2. Prosta równoległa do drugiej płaszczyzny rzutów, czyli prosta czołowa /rys.13/. Drugie odległości wszystkich punktów prostej a są równe; równe są zatem wszystkie pierwsze rzędne tych punktów; rzut poziomy a' jest przeto równoległy do osi. Rzut pionowy a'' jest równoległy do prostej a, położenie jego względem osi jest jakiekolwiek. Ślad poziomy S_1 leży w przecięciu rzutu poziomego a z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie przecięcia osi z rzutem pionowym a''. Ślad pionowy S_2 jest w nieskończoności.



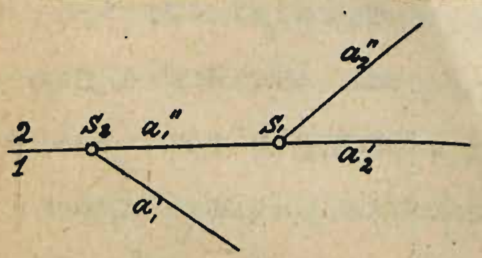
Rys. 13.

3. Prosta równoległa do osi, /rys.14/ jest równoległa do obu płaszczyzn rzutów; jest więc ona zarazem poziomą i czołową; obydwa jej rzuty są równoległe do osi. Ślady S_1 i S_2 są zjednoczone w punkcie niewłaściwym osi.



Rys. 14

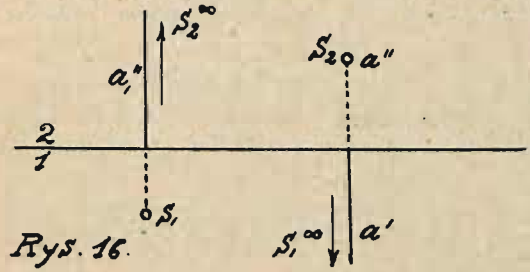
4. Prosta, leżąca w jednej z płaszczyzn rzutów./rys. 15/. Prosta leżąca w płaszczyźnie P_1 przystaje do swego pierwszego rzutu, drugi zaś rzut leży na osi; ślad pierwszy jest niewyznaczony,



Rys. 15.

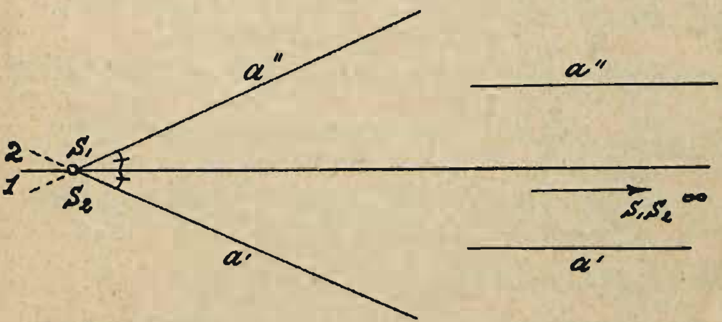
drugi leży na osi. Prosta leżąca w płaszczyźnie P_2 przystaje do swego drugiego rzutu, pierwszy zaś rzut leży na osi; ślad pierwszy leży na osi, drugi jest niewyznaczony.

<u>5. Prosta, prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów</u> /rys.16/. Jeżeli prosta jest prostopadła do P_1 , to pierwszy jej rzut jest punktem, drugi jest prostopadły do osi, pierwszy ślad przystaje do pierwszego rzutu, drugi jest w nieskończoności. Jeżeli prosta jest prostopadła do P_2 , to drugi jej rzut jest punktem, pierwszy jest prostopadły do osi; drugi ślad przystaje do drugiego rzutu, pierwszy jest w nieskończoności.



Rys. 16.

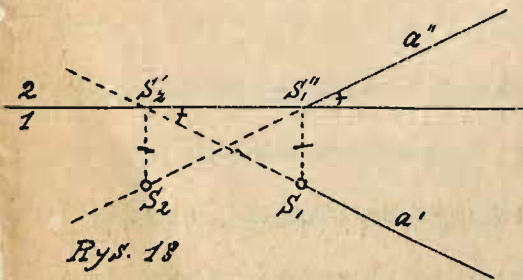
<u>6. Prosta leżąca w pierwszej płaszczyźnie dwusiecznej</u> /rys.17/. Rzuty wszystkich punktów takiej prostej są symetryczne względem osi; rzuty prostej muszą być zatem również symetryczne względem osi t.j. muszą tworzyć z nią równe kąty i spotykać ją w tym samym punkcie, w którym oba ślady prostej są zjednoczone. Jeżeli rzuty prostej są równoległe do osi,



Rys. 17.

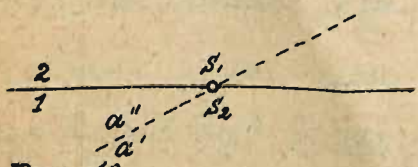
to są na równych od niej odległościach.

7. Prosta, równoległa do pierwszej płaszczyzny dwusiecznej /rys.18/. Aby prosta a była równoległa do D_1 potrzeba i wystarcza, aby punkt przebicia jej z tą płaszczyzną, a więc i oba jego rzuty leżały w nieskończoności. Ale rzut poziomy tego punktu jest przecięciem rzutu poziomego a' z prostą a_1 symetryczną do rzutu pionowego a''; potrzeba więc i wystarcza, aby a' była równoległą do a_1, t.j. aby a' i a'' były nachylone do osi pod tym samym kątem, nie przecinając się na niej. Ślady są zawsze po tej samej stronie osi i na tej samej od niej odległości.



Rys. 18

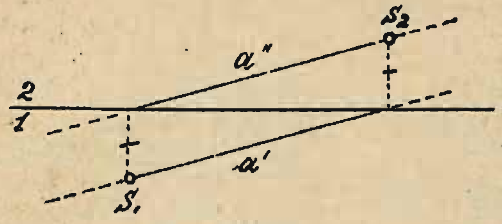
8. Prosta leżąca w drugiej płaszczyźnie dwusiecznej /rys.19/ Rzuty każdego punktu takiej prostej przystają do siebie, rzuty więc prostej również do siebie przystają. Ślady są zjednoczone w punkcie, w którym zjednoczone rzuty przecinają oś.



Rys. 19.

9. Prosta równoległa do drugiej płaszczyzny dwusiecznej. /rys.20/. Aby prosta a była równoległa do D_2 potrzeba i wystarcza, aby punkt przebicia jej z tą płaszczyzną leżał w nieskończoności. Ale oba rzuty tego

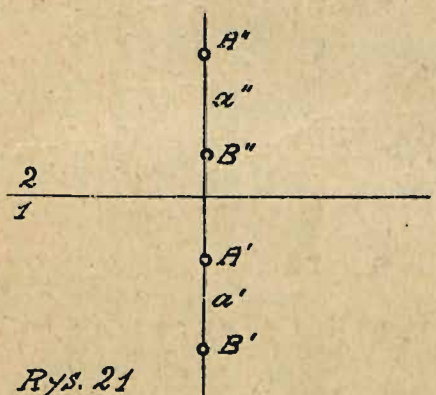
punktu są zjednoczone w punkcie przecięcia obu rzutów



Rys. 20

prostej; potrzeba więc i wystarcza, aby rzuty a' i a'' były równoległe. Ślady są zawsze po przeciwnych stronach osi i na tej samej od niej odległości.

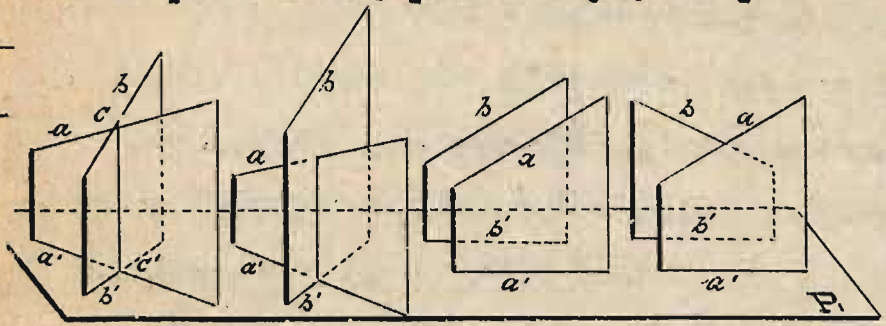
10. Prosta leżąca w płaszczyźnie prostopadłej do osi /rys.21/. Oba rzuty a' i a'' są zjednoczone na prostopadłej do osi; prosta a nie jest wyznaczona należycie przez swoje rzuty. Dla wyznaczenia prostej mogą być wtedy dane rzuty dwóch jej punktów A i B. Wyznaczenie śladów takiej prostej oraz rzutów punktu na niej leżącego wymaga zastosowania rzutu na nową płaszczyznę rzutów o czem będzie mowa w rozdziale następnym.



Rys. 21

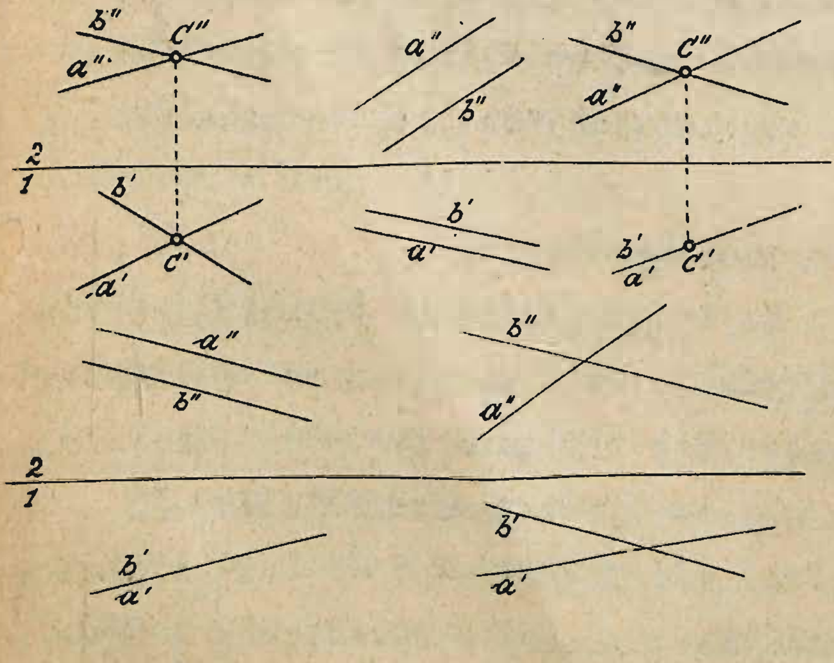
§ 9. WZGLĘDNE POŁOŻENIE DWÓCH PROSTYCH W PRZESTRZENI.

Dwie proste w przestrzeni a i b mogą mieć położenie względne trojakie: mogą się one przecinać, t.j. mieć punkt właściwy wspólny, mogą być równoległe, t.j. mieć punkt niewłaściwy wspólny, albo mogą być skośne, t.j. nie mieć żadnego punktu wspólnego. Niech będą dwie proste a i b. Rzućmy je prostokątnie na dowolną płaszczyznę rzutów P_1. Jeżeli te proste się przecinają, to przecinają się również ich rzuty, i to w punkcie, który jest rzutem punktu przecięcia prostych.



Rys. 22

Ale jeżeli rzuty dwóch prostych się przecinają, to nie wynika stąd jeszcze, by te proste się przecinały. Jeżeli proste są równoległe, to równoległe są też ich rzuty, bo punkt przecięcia tych rzutów jest rzutem punktu w nieskończoności. Ale jeżeli rzuty dwóch prostych są równoległe, to nie wynika stąd jeszcze, by proste miały być równoległe /rys. 22/.



Rys. 23.

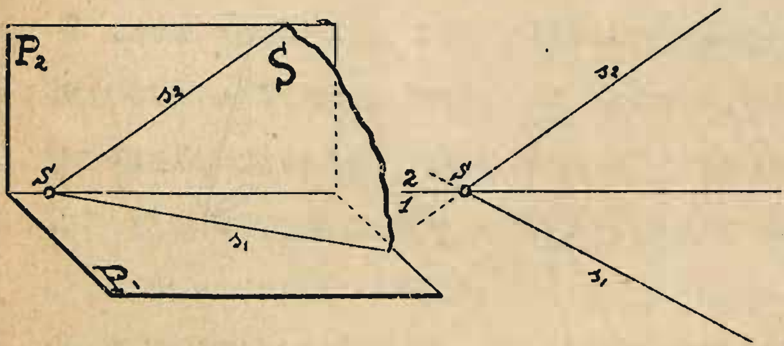
Rzućmy teraz dane proste na dwie prostopadłe płaszczyzny rzutów P_1 i P_2 /rys. 23/ i przypuśćmy, że żadna z tych prostych nie leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi. Aby te proste się przecinały, potrzeba i wystarcza, aby punkt przecięcia pierwszych rzutów i punkt przecięcia drugich rzutów leżały na wspólnej prostopadłej do osi. Proste będą równoległe, jeżeli mają punkt wspólny w nieskończoności t.j. jeżeli oba rzuty tego punktu są w nieskończoności; aby więc proste były równoległe, potrzeba i wystarcza, aby zarówno pierwsze rzuty, jak i drugie były równoległe. Może się zdarzyć, że pierwsze lub drugie rzuty dwóch prostych przystają do siebie. Wtedy proste leżą w tej samej płaszczyźnie rzucającej i będą się przecinały albo będą równoległe, zależy od tego, czy drugie ich rzuty się przecinają albo czy są równoległe. Jeżeli punkt przecięcia pierwszych rzutów i punkt przecięcia drugich rzutów nie leżą na wspólnej prostopadłej do osi, to proste są skośne.

Jeżeli jedna z dwóch prostych, np. a , jest prostopadła do P_1 , to druga prosta b przecina ją wtedy i tylko wtedy, gdy jej pierwszy rzut b' przechodzi przez pierwszy ślad $S_1' = a'$ prostej a . Tak samo mają się rzeczy, gdy a jest prostopadła do P_2 .

Jeżeli jedna lub obie proste a i b leżą w płaszczyznach prostopadłych do osi, to określenie względne położenia tych prostych wymaga zastosowania nowej płaszczyzny rzutów /Rozdział II/.

§ 10. ODWZOROWANIE PŁASZCZYZNY ZA POMOCĄ ŚLADÓW.

Płaszczyzna jest wyznaczona przez trzy swoje punkty, nie leżące na jednej prostej, lub też przez dwie swoje proste przecinające się lub równoległe. Pierwszy sposób wyznaczenia sprowadza się do drugiego przez połączenie dwóch danych punktów prostą i połączenie jakiegokolwiek punktu tej prostej /właściwego lub niewłaściwego/ z trzecim danym punktem. Dla wyznaczenia płaszczyzny trzeba będzie zatem wogóle aż czterech rzutów



Rys. 24.

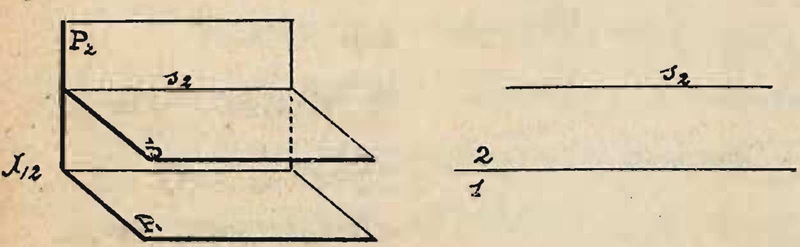
prostych: dwóch rzutów poziomych a' i b' i dwóch pionowych a'' i b'', przytem punkt przecięcia C' rzutów poziomych i punkt przecięcia C'' rzutów pionowych winny leżeć na wspólnej prostopadłej do osi. Jeżeli jednak dane proste weźmiemy na płaszczyznach rzutów, to dwa z tych czterech rzutów będą leżały na osi; do wyznaczenia płaszczyzny wystarczą wtedy dwa pozostałe rzuty, które zresztą są zjednoczone z samemi prostemi. Proste te nazywamy **śladami** płaszczyzny;

są to linje przecięcia danej płaszczyzny S z płaszczyznami rzutów. Prostą przecięcia płaszczyzn S i P_1 nazywamy pierwszym śladem lub śladem poziomym s_1 płaszczyzny S; prostą przecięcia płaszczyzn S i P_2 nazywamy drugim śladem lub śladem pionowym s_2 płaszczyzny S. Ślady s_1 i s_2 przecinają się oczywiście zawsze na osi, albowiem trzy proste s_1, s_2 i x_{12} przecięcia płaszczyzn S, P_1 i P_2 spotykają się w jednym punkcie S, który jest wspólny tym płaszczyznom. Z każdego śladu jest widoczną ta jego część, która leży na dodatniej półpłaszczyźnie rzutów, a więc pierwszy ślad kreślimy linją ciągłą tylko pod osią, drugi tylko nad osią /rys.24/.

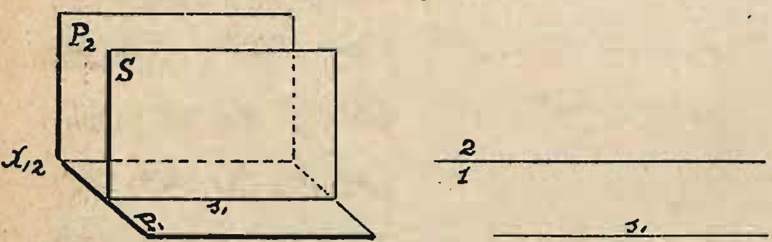
§ 11. POŁOŻENIA SZCZEGÓLNE PŁASZCZYZN WZGLĘDEM PŁASZCZYZN RZUTÓW.

1. Płaszczyzna równoległa do jednej z płaszczyzn rzutów /rys.25i26. Przypuśćmy najpierw, że $S \parallel P_1$ t.j. że S jest płaszczyzną poziomą; przecina ona płaszczyznę P_1 w nieskończoności; drugi ślad s_2 jest równoległy do osi, albowiem dwie płaszczyzny równoległe P_1 i S przecięte płaszczyzną P_2, wyznaczają z nią proste x_{12} i s_2 równoległe. Podobnież, gdy $S \parallel P_2$ t.j. gdy S jest płaszczyzną frontową, to s_2 jest prostą w nieskończoności, s_1 zaś jest prostą równoległą do osi.

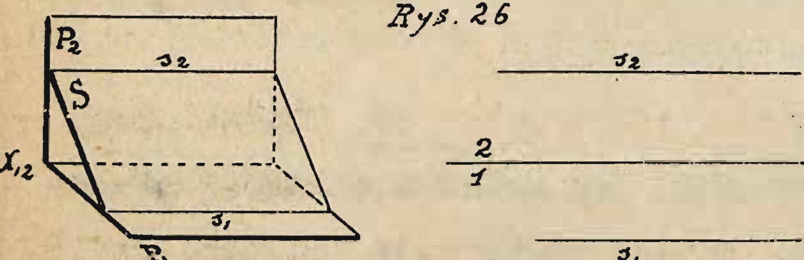
2. Płaszczyzna równoległa do osi. Przecina ona oś w nieskończoności, ślady jej muszą być zatem równoległe do osi /rys.27/.



Rys. 25

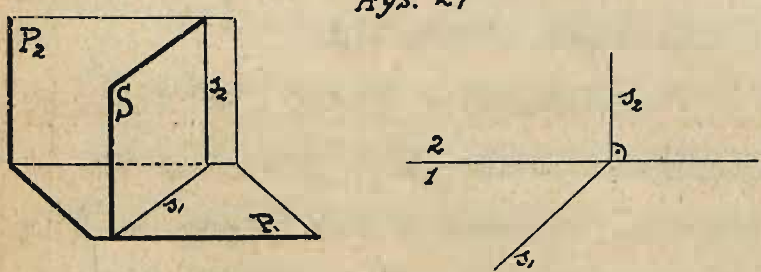


Rys. 26

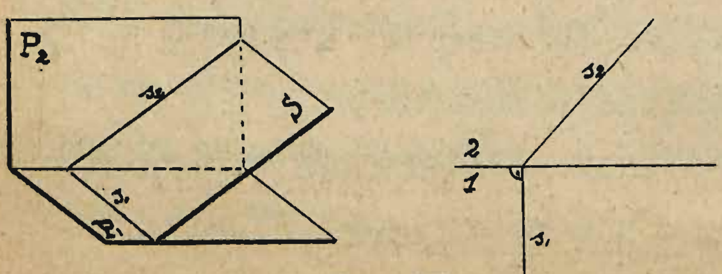


Rys. 27

3. Płaszczyzna prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów /rys.28 i 29/.

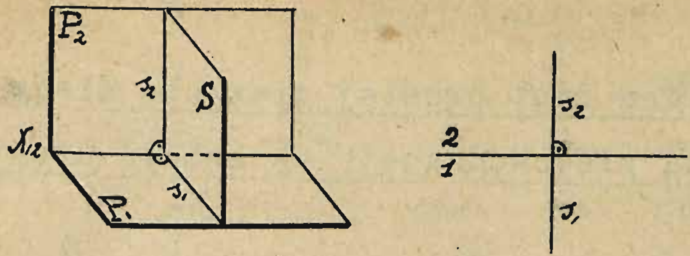


Rys. 28.

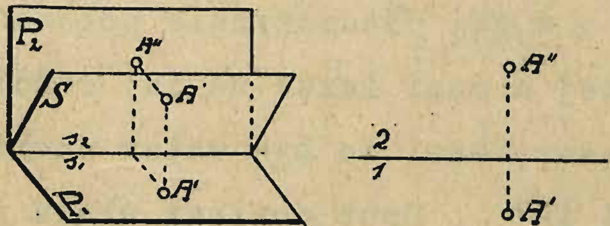


Rys. 29.

W samej rzeczy, jeżeli $S \perp P$, to s_2 jest przecięciem dwóch płaszczyzn S i P_2, które są prostopadłe do P_1; s_2 jest tedy również prostopadłą do P_1, a więc i do osi x_{12}, która leży w płaszczyźnie P_1. Po-



Rys. 30



Rys. 31

dobnież znajdziemy, że gdy $S \perp P_2$ to $s_1 \perp X$.

<u>4. Płaszczyzna prostopadła do obu płaszczyzn rzutów, t.j. do osi</u> /rys.30/. Obydwa ślady są prostopadłe do osi, stanowiąc jedną prostą.

<u>5. Płaszczyzna przechodząca przez oś.</u> Obydwa ślady są zjednoczone na osi. Aby położenie takiej płaszczyzny wyznaczyć, należy mieć rzuty jakiegokolwiek punktu A w niej leżącego. /rys.31/

§12. RZUTY PROSTEJ, LEŻĄCEJ W DANEJ PŁASZCZYZNIE.

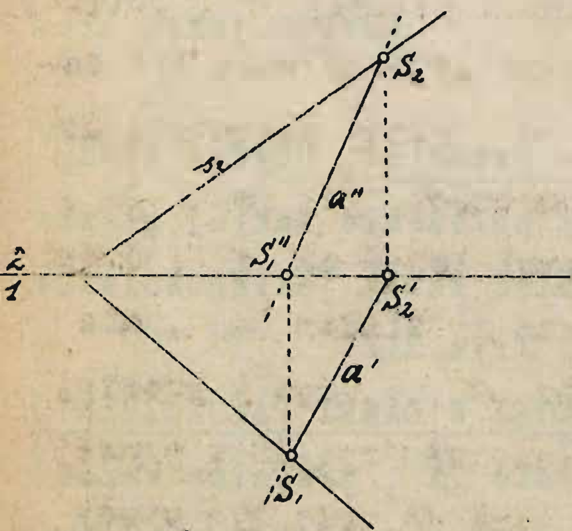
Prosta, leżąca w płaszczyźnie S, przecina każdą prostą tej płaszczyzny, a więc i jej ślady s_1 i s_2. Punkty przecięcia prostej ze śladami płaszczyzny są zarazem punktami, w których prosta przebija płaszczyzny rzutów, są to więc jej ślady S_1 i S_2. Mamy tedy twierdzenie;

<u>JEŻELI PROSTA a LEŻY W PŁASZCZYŹNIE S TO ŚLADY PROSTEJ S_1 i S_2 LEZA NA ODPOWIEDNICH SLADACH PŁASZ-</u>

CZYZNY.

Zadanie. Mając jeden rzut prostej oraz oba ślady płaszczyzny przez nią przechodzącej, wyznaczyć drugi rzut prostej.

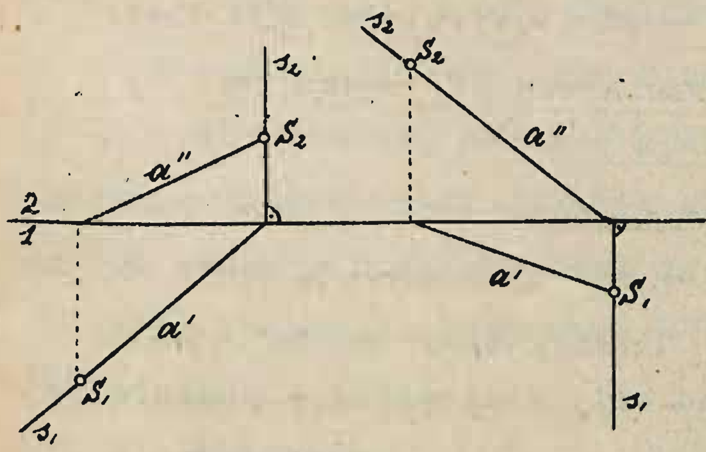
Niech będzie dana płaszczyzna $s_1 s_2$, oraz jeden z rzutów np. a' prostej a w tej płaszczyźnie położonej. Ponieważ ślad S_1 prostej a musi leżeć na jej rzucie i na śladzie s_1 płaszczyzny, musi to być zatem punkt przecięcia prostych a' i s_1 . Rzut poziomy śladu pionowego S_2' musi leżeć na rzucie poziomym a' i na osi; jest to zatem punkt przecięcia rzutu z osią. Wystawiając w tym punkcie prostopadłą do osi, znajdziemy w przecięciu tej prostopadłej ze śladem s_2 punkt S_2 , który jest śladem pionowym prostej a . Łącząc S_2 z leżącym na osi drugim rzutem śladu S_1 , otrzymamy szukany rzut pionowy a'' .



Rys. 32

W jednym przypadku rzut a' nie może być dany dowolnie, wtedy mianowicie, gdy ślad s_2 jest prostopadły do osi, t.j. gdy $s_1 s_2 \perp P_1$.

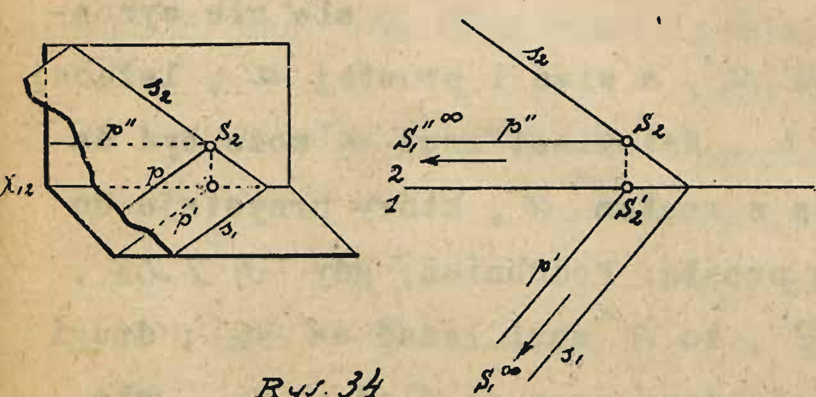
/rys.33/. Pierwszy rzut każdej prostej w takiej płaszczyźnie położonej leży na śladzie s_1, płaszczyzna $s_1 s_2$ jest bowiem wówczas płaszczyzną rzucającą tę prostą na P_1. Rzut a' jest więc wtedy dany wraz ze śladem s_1, ale nie wyznacza drugiego rzutu a'', a więc i prostej a, leżącej w płaszczyźnie $s_1 s_2$. Natomiast rzut a'' może być dany dowolnie i wraz z rzutem a', który przystaje do s_1, wyznacza tę prostą. Podobnież, gdy $s_1 \perp x_{12}$, t.j. gdy $s_1 s_2 \perp P_2$, to a'' musi leżeć na s_2; drugi rzut jest więc wtedy dany wraz ze śladem s_2, ale nie wyznacza pierwszego rzutu a', a więc i prostej a w płaszczyźnie $s_1 s_2$ położonej /rys.33 z prawej strony/. Natomiast pierwszy rzut a' może być wtedy dany dowolnie i wraz z drugim rzutem a'', który przystaje do s_2, wyznacza tę prostą.



Rys. 33

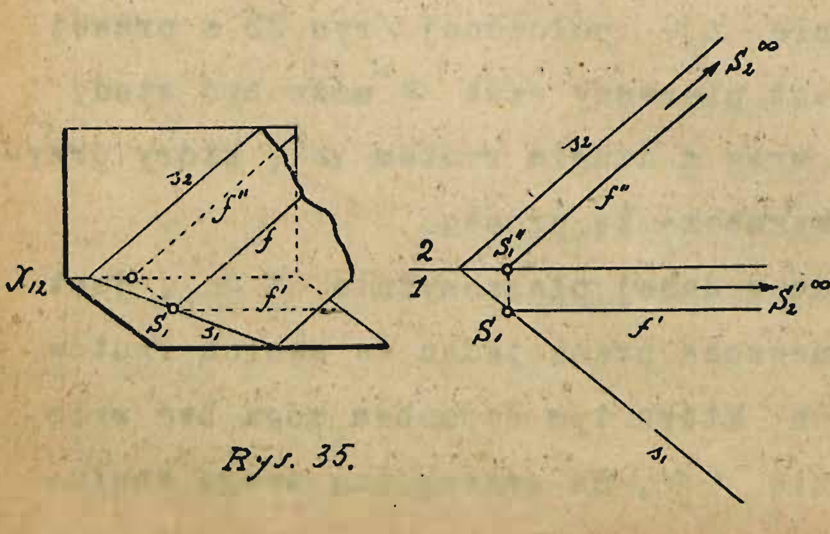
Prosta, leżąca w danej płaszczyźnie $s_1 s_2$, jest więc wogóle wyznaczona przez jeden ze swoich rzutów. Z pośród prostych, które tym sposobem mogą być wzięte na płaszczyźnie $s_1 s_2$, na szczególną uwagę zasługują te, których jeden z rzutów jest równoległy lub prostopadły do odpowiedniego śladu płaszczyzny.

1/. Gdy rzut poziomy p' jest równoległy do s_1, prosta p nazywa się linją poziomą płaszczyzny $s_1 s_2$ lub jej pierwszą prostą główną. Ślad S_1 jest punktem niewłaściwym; takim jest też jego rzut pionowy S_1'' na osi. Ślad S_2 otrzymany w przecięciu śladu s_2 płaszczyzny z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie jej przecięcia z rzutem p'; rzut p'' który łączy S_2 z S_1'' jest równoległy do osi; prosta p jest więc równoległa do P_1 i do śladu s_1.



Rys. 34

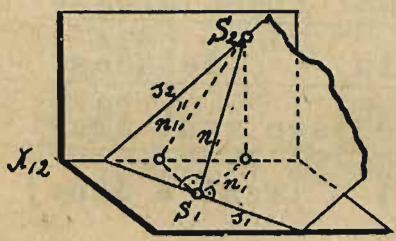
2/. Gdy rzut pionowy f'' jest równoległy do s_2 /rys.35/, prosta f nazywa się linją czołową płaszczyzny $s_1 s_2$ lub jej drugą prostą

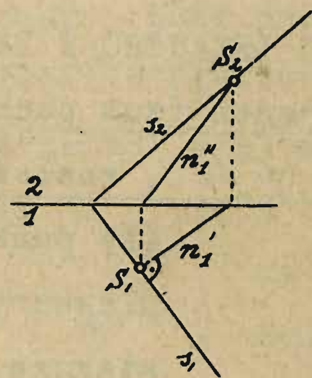


Rys. 35.

główną. Ślad S_2 jest punktem niewłaściwym; takim jest też jego rzut poziomy S_2' na osi. Slad S_1 otrzymamy w przecięciu śladu s_1 płaszczyzny z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie jej przecięcia z rzutem f''; rzut f', który łączy S_1 z S_2' jest równoległy do osi; prosta f jest więc równoległa do P_2 i do śladu s_2.

3/. Gdy rzut poziomy n_1' jest $\perp$ do s_1 /rys.36/, prosta n_1 nazywa się pierwszą linją spadową. Na zasadzie twierdzenia o trzech prostopadłych prosta ta jest

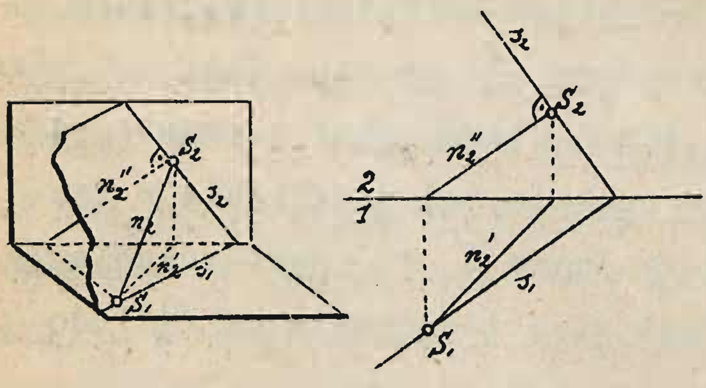




Rys. 36

prostopadła do śladu s_1, a więc i do wszystkich linji poziomych płaszczyzny $s_1 s_2$. Kąt każdej z tych prostych ze swym rzutem poziomym jest kątem linjowym kąta dwuściennego $(S P_1)$. Każda inna prosta płaszczyzny tworzy ze swych rzutów poziomych kąt mniejszy od kąta dwuściennego $(S P_1)$, co tłomaczy nazwę tych prostych.

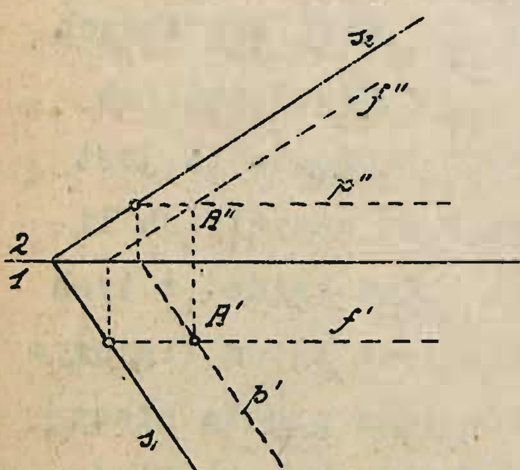
4/. Prosta, której rzut pionowy n_2'' jest prostopadły do s_2 /rys 37/ nazywa się drugą linją spadową. Jest ona prostopadła do śladu s_2, a więc i do wszystkich linji czołowych płaszczyzny $s_1 s_2$. Kąt, który każda z tych prostych tworzy z płaszczyzną P_2, jest większy od kąta, który tworzy z tą płaszczyzną każda inna prosta płaszczyzny $s_1 s_2$.



Rys. 37.

§13. RZUTY PUNKTU LEŻĄCEGO W DANEJ PŁASZCZYŹNIE.

ZADANIE. Mając jeden rzut punktu A, leżącego w danej płaszczyźnie $s_1 s_2$, znaleść jego rzut drugi.

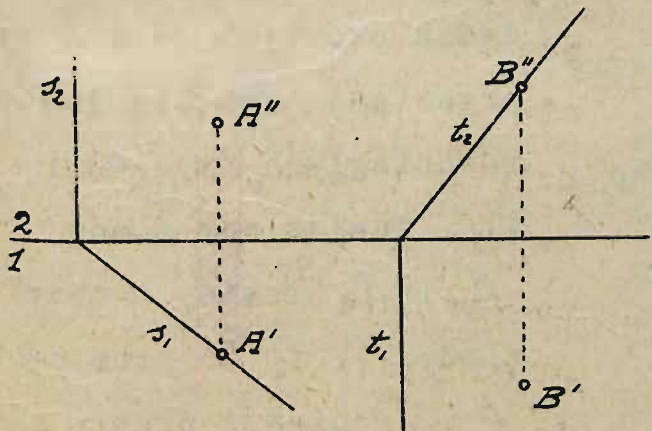


Rys. 38

Aby punkt A leżał w danej płaszczyźnie, potrzeba i wystarcza, aby leżał na jakiejkolwiek prostej tej płaszczyzny. Przypuśćmy, że płaszczyzna dana $s_1 s_2$ nie jest prostopadła do P_1, to jest, że s_2 nie jest $\perp X$, i niechaj będzie dany rzut A' punktu A, leżącego w płaszczyźnie $s_1 s_2$. Poprowadźmy przez A' dowolną prostą a' nie prostopadłą do osi i uważajmy ją za rzut pierwszy prostej a, leżącej w płaszczyźnie $s_1 s_2$ i przechodzącej przez punkt szukany.

Wyznaczywszy drugi rzut a'' prostej a, /§11/ znajdziemy drugi rzut A'' punktu A w przecięciu linji rzędnych punktu A' z rzutem a''. Za prostą pomocniczą a' najlepiej wziąć prostą równoległą do śladu s_1 lub do osi X_{12}; prosta a jest wtedy linją poziomą $p'p''$, lub czołową $f'f''$ płaszczyzny $s_1 s_2$ /rys.38/.

Gdyby ślad s_2 był prostopadły do osi, to płaszczyzna $s_1 s_2$ byłaby płaszczyzną rzucającą wszystkie proste w niej leżące, a więc na jej śladzie s_1 leżałyby wszystkie pierwsze rzuty punktów w niej leżących. Aby więc punkt A leżał w płaszczyźnie $s_1 s_2$ prostopadłej do P_1, potrzeba i wystarcza, aby jego rzut A' leżał na śladzie s_1 /rys.39 z lewej strony/. Punkt A' nie mógłby być więc dany dowolnie i musiałby leżeć na s_1 wtedy jednak drugi rzut A'' nie byłby przez s_1, s_2 i A' należycie wyznaczony, wszystkie bowiem punkty prostej prostopadłej do P_2 w punkcie



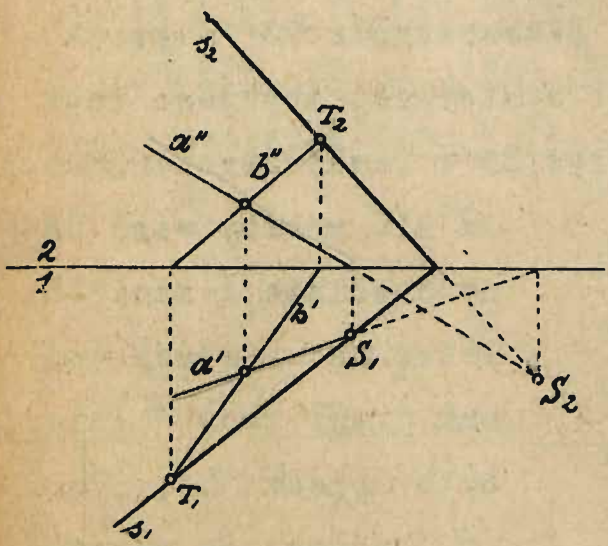
Rys. 39.

A leżałyby w płaszczyźnie $s_1 s_2$, mając ten sam rzut pierwszy A'. Natomiast rzut A'' wyznacza punkt A; jego rzut pierwszy A' jest wtedy punktem, w którym linja rzędnych punktu A'' przecina ślad s_1 .

Podobnie, aby punkt B leżał w płaszczyźnie t_1t_2 prostopadłej do P_2 potrzeba i wystarcza, aby rzut B'' leżał na śladzie t_2 ; rzut B'' nie wyznacza wtedy punktu B ; wyznaczy go natomiast rzut B' /rys.39 z prawej strony/.

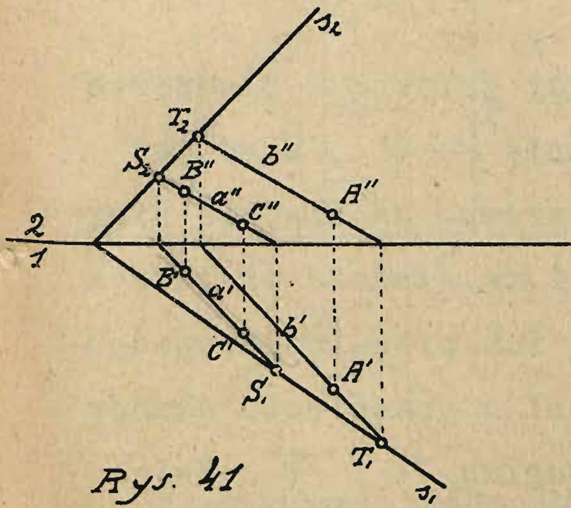
§14. ŚLADY PŁASZCZYZNY PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DANE PROSTE I PUNKTY.

ZADANIE. Wyznaczyć ślady płaszczyzny, przechodzącej przez dwie proste przecinające się lub równoległe. Niech będą dane rzuty $a'a''$ i $b'b''$ dwóch prostych a i b przecinających się lub równoległych /rys.40 i 41/. Znajdziemy ślady S_1 i S_2 prostej a oraz ślady T_1 i T_2 prostej b . Ponieważ płaszczyzna szukana ma przechodzić przez obie proste dane, więc jej ślad pierwszy s_1 musi przejść przez oba ślady pierwsze S_1 i T_1 prostych a i b , a jej ślad drugi s_2 - przez oba ślady drugie S_2 i T_2 tych prostych. Łącząc tedy S_1 i T_1 oraz S i T_2 otrzymamy



Rys. 40

ślady s_1 i s_2 szukanej płaszczyzny; winny one spotkać się na osi, co stanowi sprawdzenie dokładności wykreślenia.



Rys. 41

Do tego zadania sprowadza się wyznaczenie śladów płaszczyzny przechodzącej przez prostą daną i punkt na niej nie leżący lub przez trzy punkty dane, nie leżące na jednej prostej. Niech będzie np. dana prosta $a'a''$ oraz punkt $A'A''$; obrawszy na $a'a''$ punkt jakikolwiek $B'B''$ i połączywszy $A'B'$ i $A''B''$ mamy poprowadzić płaszczyznę przez dwie przecinające się proste $a'a''$ i $A'B'$, $A''B''$. Najdogodniej będzie zresztą połączyć punkt $A'A''$ z punktem niewłaściwym prostej $a'a''$, t.j. przez punkt $A'A''$ poprowadzić równoległą do $a'a''$.

Gdy mamy trzy punkty $A'A''$, $B'B''$ i $C'C''$ /rys.41/ nie leżące na jednej prostej, łączymy dwa z tych punktów, np. $B'B''$ i $C'C''$ prostą $a'a''$, przez co sprowadzamy ten przypadek do poprzedniego.

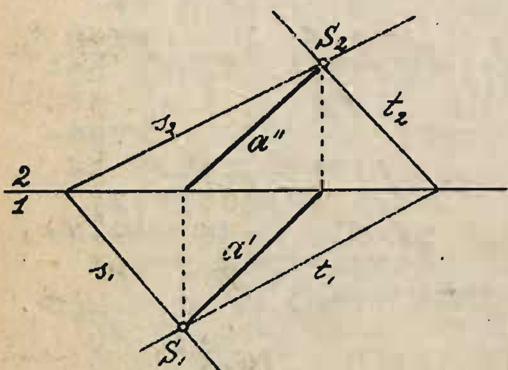
§15. PROSTA PRZECIĘCIA DWÓCH PŁASZCZYZN.

ZADANIE. Wyznaczyć rzuty prostej przecięcia płaszczyzn danych $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$.

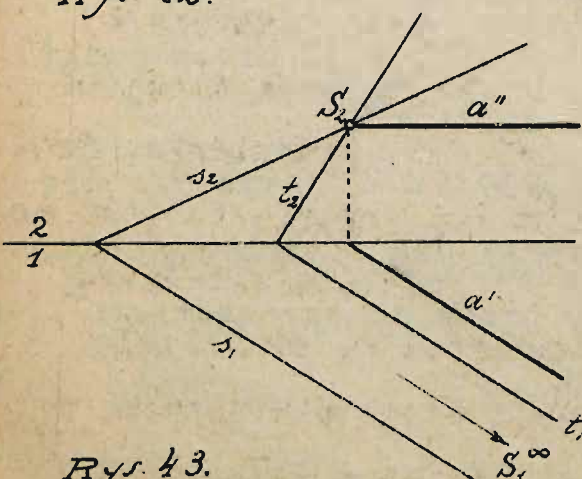
Ponieważ prosta szukana leży zarówno w płaszczyźnie $s_1 s_2$, jak i w płaszczyźnie $t_1 t_2$, więc jej ślad pierwszy S_1 musi leżeć zarówno na śladzie pierwszym s_1 płaszczyzny S, jak i na śladzie pierwszym t_1 płaszczyzny T, a więc w ich przecięciu; podobnież ślad drugi S_2 będzie leżał w przecięciu śladów drugich s_2 i t_2. Mając zaś ślady prostej a, znajdziemy jej rzuty a' i a'' /rys.42/.

Rozważmy teraz przypadki szczególne tego zadania w których zastosowanie powyższego sposoburozwiązania mogłoby nastręczać pewne trudności.

1/. Jedna para śladów odpowiednich np. s_1 i t_1 są to proste równoległe /rys.43/. Slad S_2 znajduje się w przecięciu śladów s_2 i t_2; ślad S_1

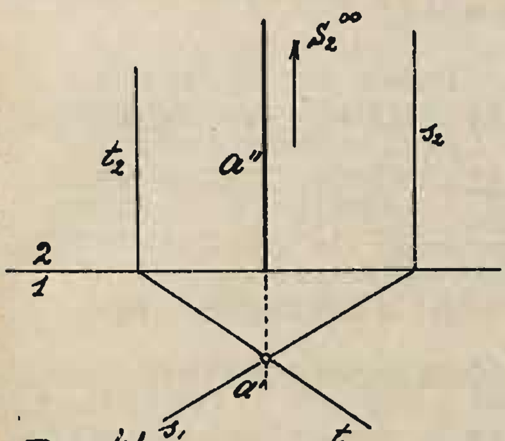


Rys. 42.



Rys. 43.

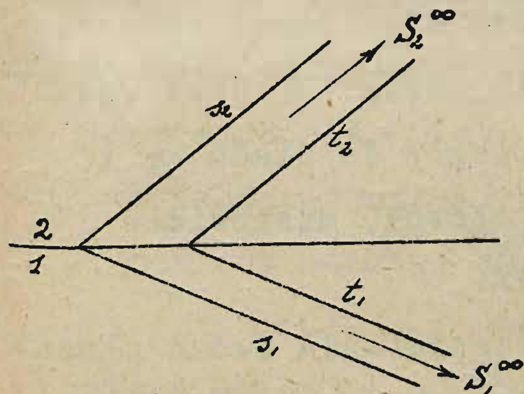
jest punktem niewłaściwym śladów s_1 i t_1. Prosta a jest linją poziomą obu płaszczyzn; jej rzut a' jest równoległy do s_1 i t_1, rzut a'' jest równoległy do osi.



Rys. 44

W szczególności, gdy ślady należące do jednej płaszczyzny rzutów, są prostopadłe do osi /rys. 44/, to prosta przecięcia jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów.

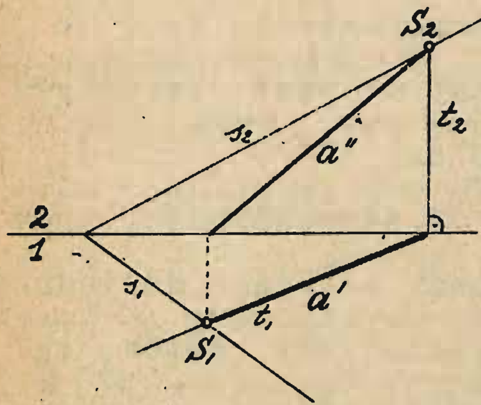
2/. Obie pary śladów odpowiednich: s_1 i t_1 oraz s_2 i t_2 są to proste równoległe. Oba ślady S_1 i S_2 prostej przecięcia są punktami niewłaściwemi, jest to zatem prosta niewłaściwa, a płaszczyzny S i T są równoległe /rys.45/. Nawzajem, dwie płaszczyzny równoległe mają ślady odpowiednio równoległe. Prosta ich przecięcia jest bowiem prostą niewłaściwą, a więc ślady odpowiednie płaszczyzn są równoległe.



Rys. 45.

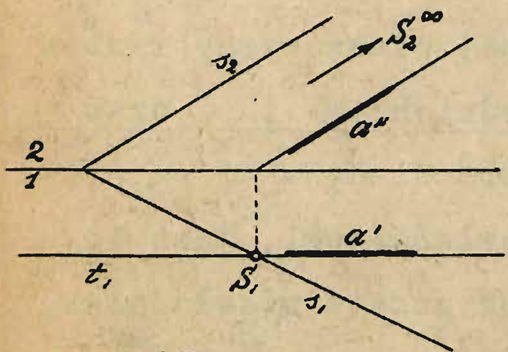
3/. Jeden ze śladów jednej z dwóch płaszczyzn, np. t_2, jest prostopadły do osi. Jeden z rzutów prostej przecięcia, mianowicie a' leży na t_1, płaszczyzna T

jest bowiem płaszczyzną rzucającą poziomo prostą a /rys.46/.



Rys. 46.

4/. Jeden ze śladów np. t_1 jest równoległy do x, drugi t_2 jest w nieskończoności.



Rys. 47

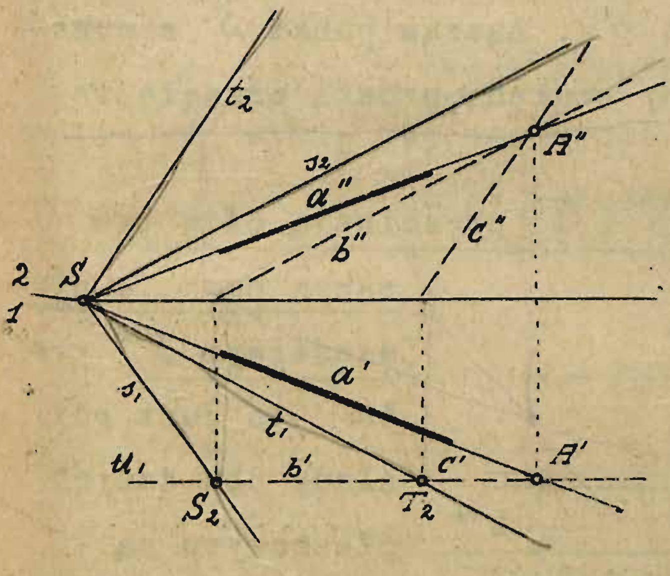
Slad S_1 jest przecięciem śladów s_1 i t_1; ślad S_2 jest punktem niewłaściwym prostej s_2. Jeden rzut a' prostej przecięcia przystaje do t_1, jest więc równoległy do osi, drugi a'' jest równoległy do śladu s_2; prosta przecięcia jest prostą główną, mianowicie czołową płaszczyzny S./rys.47/.

Sposób ogólny rozwiązania zagadnienia dwóch płaszczyzn zawodzi w tych razach, gdy ślady obu płaszczyzn przecinają się w tym samym punkcie osi, lub gdy jedna z dwóch płaszczyzn przechodzi przez oś, lub wreszcie gdy jeden lub oba punkty przecięcia śladów odpowiednich leżą poza granicami przeznaczonej na rysunek części płaszczyzny. Wtedy uciekamy się do trzeciej płaszczyzny pomocniczej U, opierając się na następującej zasadzie:

Trzy płaszczyzny S, T i U, nie przechodzące przez jedną prostą, przecinają się po dwie, według trzech prostych a, b i c, spotykających się w jednym punkcie A.

Za płaszczyznę pomocniczą U obieramy najchętniej płaszczyznę prostopadłą lub równoległą do jednej z płaszczyzn rzutów /Przyp.3 i 4/.

5/. Przypuśćmy najpierw, że płaszczyzny S i T przecinają oś w tym samym właściwym punkcie S /rys.48/. Punkt ten jest więc wspólny obu płaszczyznom i należy do szukanej prostej przecięcia a. Aby tę prostą wyznaczyć wystarczy zatem znaleźć rzuty jeszcze

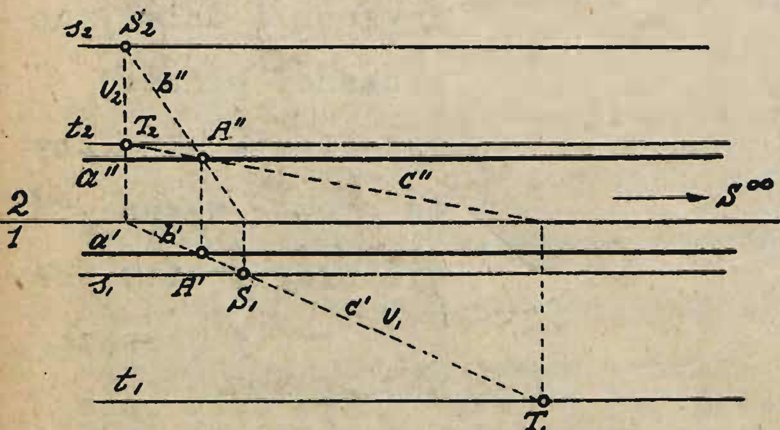


Rys. 48.

jednego jakiegokolwiek jej punktu. W tym celu obie płaszczyzny dane przecinamy dowolną płaszczyzną pomocniczą U. Niechaj tą płaszczyzną będzie np. płaszczyzna równoległa do P_2; jej ślad pierwszy u_1

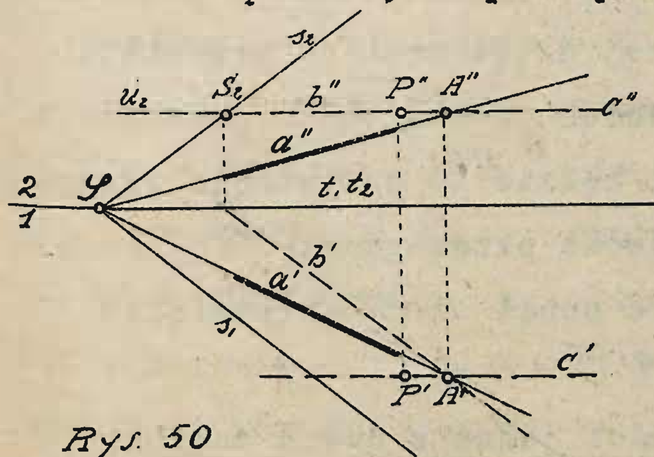
jest równoległy do osi; drugi ślad u_2 jest w nieskończoności. Trzy proste $SU \equiv b$, $TU \equiv c$; i $ST \equiv a$ przecinają się w jednym punkcie A ; punkt ten leży oczywiście na a i może być wyznaczony jako przecięcie prostych b i c . Wyznaczamy tedy rzuty $b'b''$ prostej przecięcia płaszczyzn S i U oraz rzuty $c'c''$ prostej przecięcia płaszczyzn T i U /przyp.4/. Pierwsze rzuty tych prostych są zjednoczone na u_1 ; drugie przecinają się w punkcie A'' ; spuszczając z A'' prostopadłą do osi, znajdujemy na wspólnym pierwszym rzucie obu prostych punkt A' . Łącząc punkt S z punktem $A'A''$, otrzymujemy szukaną prostą przecięcia $a'a''$.

6/. Gdy płaszczyzny S i T przecinają oś w tym samym punkcie niewłaściwym S^∞ /rys 49/, to jest gdy ślady obu danych płaszczyzn są równoległe do osi, musimy obrać inną płaszczyznę pomocniczą U . Niechaj nią będzie np. płaszczyzna pro-



Rys. 49

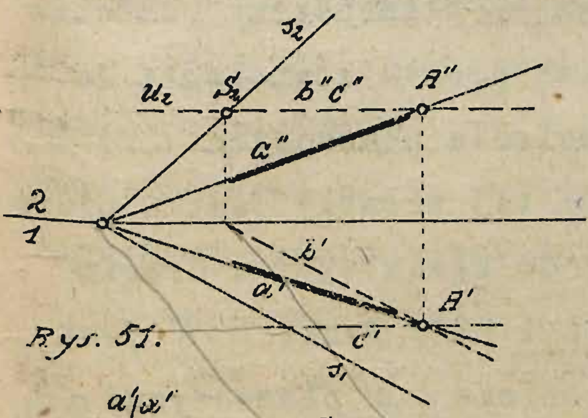
stopadła do P_1. Znajdziemy rzuty $b'b''$ i $c'c''$ prostych przecięcia płaszczyzn S i U oraz T i U. Punkt $A'A''$ przecięcia prostych b i c łączymy z punktem S^{∞} t.j. przez A' i przez A'' prowadzimy równoległe do osi; będą to rzuty a' i a'' prostej przecięcia płaszczyzn S i T.



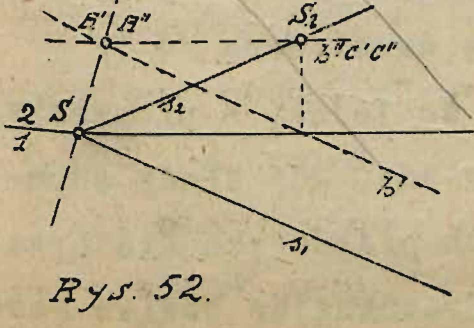
Rys. 50

7/ Gdy jedna z dwuch płaszczyzn np. T przechodzi przez oś, wtedy jej położenie jest wyznaczone przez rzuty punktu P w niej leżącego /§ 11-5 rys.31/.

Płaszczyzna taka ma z każdą inną płaszczyzną $S \equiv s_1 s_2$ /rys.50/ wspólny punkt $\mathcal{S}$ na osi; aby wyznaczyć prostą przecięcia płaszczyzn S i T, poprowadźmy przez punkt $P'P''$ płaszczyznę pomocniczą U równoległą do P_1. Jej pierwszy ślad będzie w nieskończoności-



Rys. 51.

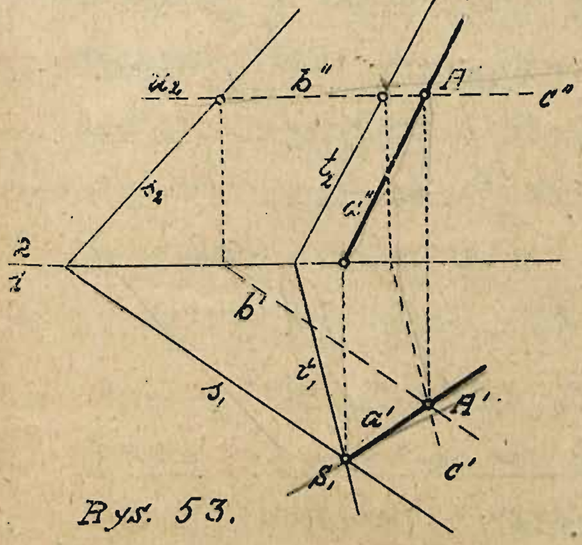


Rys. 52.

ci; drugi u_2 jest prostą poprowadzoną z punktu P'' równolegle do osi. Wyznaczmy prostą $b'b''$ przecięcia płaszczyzn S i U; będzie to linja pozioma płaszczyzny S, której drugi rzut b'' przystaje do u_2. Wyznaczmy również prostą $c'c''$ przecięcia płaszczyzn T i U; będzie to oczywiście równoległa do osi, poprowadzona przez punkt P'. Pozostaje wreszcie wyznaczyć punkt $A'A''$ przecięcia b i c i połączyć $A\mathcal{S}$.

8/ Gdy w szczególności jedna z dwóch danych płaszczyzn jest I lub II płaszczyzną dwusieczną, t.j. gdy punkt P jest dany jako para punktów symetrycznych względem osi, względnie jako para punktów zjednoczonych, - śladem u_2 płaszczyzny pomocniczej U może być jakakolwiek prosta równoległa do osi; rzut c'' prostej c przecięcia płaszczyzn T i U przystaje do u_2, a rzut c' tej prostej jest w pierwszym przypadku symetryczny do śladu u_2, w drugim przystaje do niego /rys, 51 i 52/. Punkt $A'A''$ jest punktem, w którym prosta pozioma $b'b''$ płaszczyzny $s_1 s_2$ przebija I wzgl. II płaszczyznę dwusieczną./§ 7/

9/ Płaszczyzna U równoległa do jednej z płaszczyzn rzutów może być zastosowaną i wtedy, gdy ślady odpowiednie np. drugie, dwóch danych płaszczyzn nie przecinają się w obrębie rysunku. Przecinając bowiem dane płaszczyzny S i T płaszczyzną U, znajdziemy dwie proste b i c /Rys. 53/, których punkt przecięcia A leży na prostej a; łącząc ten punkt ze śladem s_1, otrzymamy prostą a.



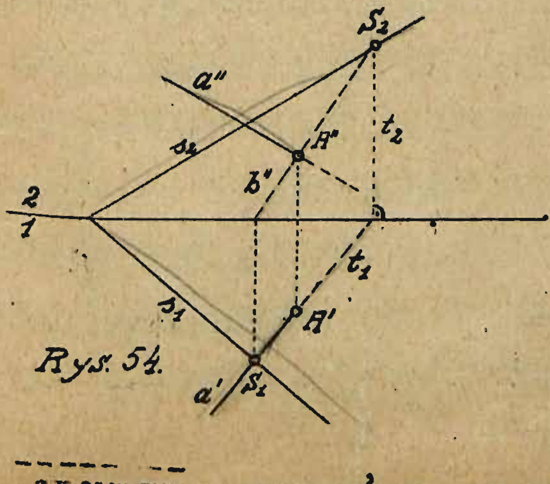
Rys. 53.

Gdyby punkt S_1 leżał również poza obrębem rysunku, należałoby poprowadzić drugą płaszczyznę pomocniczą V i za jej pomocą znaleźć drugi punkt B wspólny obu danym płaszczyznom.

§ 16. PUNKT PRZEBICIA PŁASZCZYZNY PROSTĄ.

ZADANIE. Wyznaczyć rzuty punktu, w którym dana prosta $a'a''$ przebija daną płaszczyznę $s_1 s_2$.

Przypuszczając, że rzuty prostej a nie leżą na wspólnej prostopadłej do osi, poprowadźmy przez prostą a dowolną płaszczyznę rzucającą. Jej ślad pierwszy t_1 przystaje do pierwszego rzutu a' danej prostej, drugi ślad t_2 jest prostopadły do osi. Wykreślmy

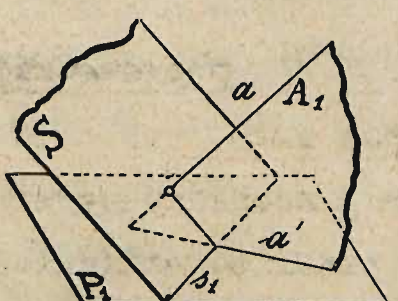


Rys. 54.

rzuty prostej b przecięcia płaszczyzn $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$. Proste a i b muszą się przeciąć, albowiem leżą w tej samej płaszczyźnie $t_1 t_2$; ich punkt przecięcia A będzie punktem wspólnym prostej a i płaszczyzny $s_1 s_2$, to jest szukanym punktem przebicia. Jego rzut drugi A'' będzie punktem przecięcia rzutów b'' i a'' ; rzut pierwszy A' znajdziemy na linji rzędnych punktu A'' w przecięciu jej ze wspólnym pierwszym rzutem prostych a i b .

§ 17. PROSTE I PŁASZCZYZNY PROSTOPADŁE.

TWIERDZENIE. Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to rzut prostej jest prostopadły do śladu płaszczyzny. Niech będzie płaszczyzna rzutów P_1 i płaszczyzna jakakolwiek S , której śladem jest prosta s_1 ; niech będzie nadto prosta a prostopadła do płaszczyzny S . Rzućmy prostą a prostokątnie na P_1 , t.j. przez a



Rys. 55.

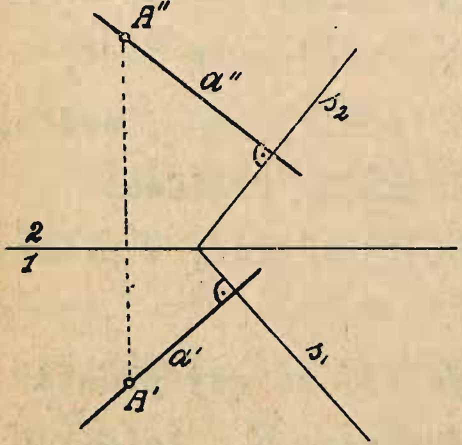
poprowadźmy płaszczyznę A_1, prostopadłą do P_1; jej ślad a' jest rzutem prostej a; trzeba okazać, że $a' \perp s_1$. W samej rzeczy, płaszczyzna A_1 jest prostopadła do dwóch płaszczyzn P_1 i S, jest więc ona prostopadła i do prostej s_1, według której te płaszczyzny się przecinają. Ponieważ $s_1 \perp A_1$, więc $s_1 \perp a'$, gdyż a' leży w płaszczyźnie A_1, c.b.d.o.

Z twierdzenia powyższego wynika, że gdy prosta a jest prostopadła do płaszczyzny S, to $a' \perp s_1$ i $a'' \perp s_2$. Nawzajem, jeżeli oba rzuty prostej a są prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny S, to $a \perp S$. Każda bowiem z płaszczyzn rzucających prostą a, jest prostopadła do odpowiedniego śladu, a więc i do płaszczyzny S; linja ich przecięcia, t.j. prosta a jest więc również prostopadła do S.

<u>**ZADANIE.** Przez punkt $A'A''$ poprowadzić prostą prostopadłą do płaszczyzny $s_1 s_2$.</u>

Jeżeli prosta szukana przechodzi przez punkt A, to rzuty jej przechodzą przez odpowiednie rzuty punktu A, prócz tego rzuty te mają być prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny. Prowadzimy zatem przez A' rzut a' prostopadły do s_1, a przez A'' rzut a'' prostopadły do s_2.

Płaszczyzna prostopadła do pierwszej płaszczyzny dwusiecznej ma ślady symetryczne. Wsamej rzeczy,

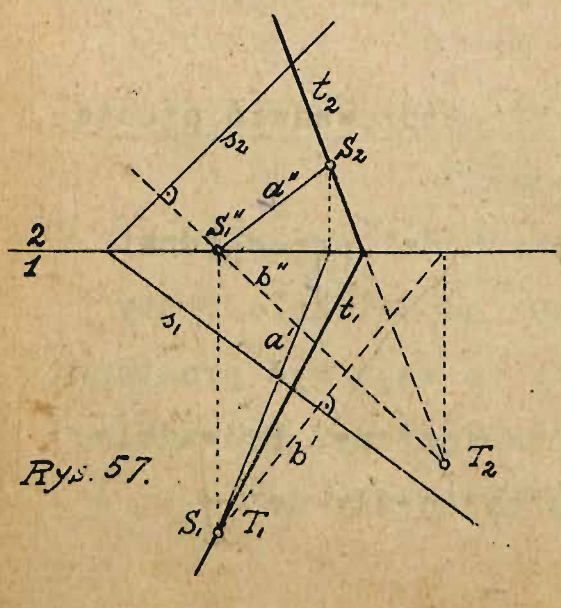


Rys. 56

płaszczyzna prostopadła do D_1 jest prostopadła do jakiejkolwiek prostej d_1 tej płaszczyzny. Ale rzuty prostej d_1 są symetryczne względem osi, a więc i ślady płaszczyzny do niej prostopadłej są względem osi symetryczne.

Tak samo okażemy, że płaszczyzna prostopadła do II pł. dwusiecznej ma ślady zjednoczone.

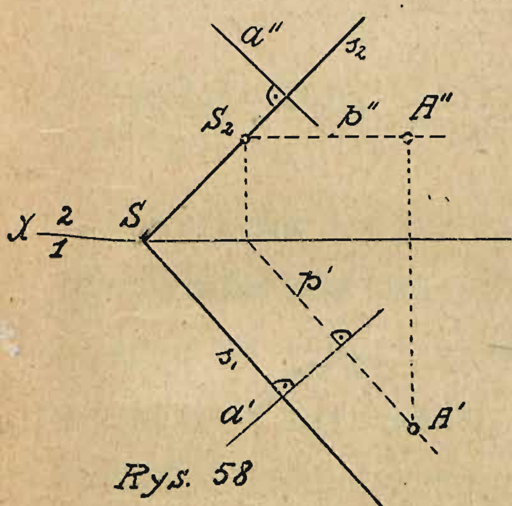
ZADANIE. Przez daną prostą $a'a''$ poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danej $s_1 s_2$ /Rys. 57/



Rys. 57.

Znajdźmy ślady S_1 i S_2 prostej $a'a''$; z jakiegokolwiek punktu tej prostej, np. ze śladu S_1, spuśćmy prostopadłą $b'b''$ na płaszczyznę $s_1 s_2$; pierwszy ślad tej prostej T_1 przystaje do S_1; znajdźmy drugi ślad T_2. Płaszczyzn której ślad pionowy t_2 łączy S_2 i T_2, a ślad poziomy t_1 przechodzi przez $S_1 T_1$, jest szukaną, albowiem przechodzi ona przez prostą a i jest prostopadłą do płaszczyzny $s_1 s_2$ /gdyż przechodzi przez prostą b do niej prostopadłą/.

<u>ZADANIE. Przez punkt dany $A'A''$ poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej danej $a'a''$.</u> /Rys.58/. Ślady szukanej płaszczyzny są prostopadłe do odpowiednich rzutów prostej a. Poprowadźmy przez punkt A jedną z prostych główn. szukanej płaszczyzny, np. linję poziomą p. Jej pierwszy rzut p' jest równoległy do śladu s_1 szukanej płaszczyzny, a więc prostopadły do a'; drugi rzut p'' jest równoległy do osi. Wyznaczmy ślad S_2 prostej p, poprowadźmy przezeń ślad s_2 szukanej płaszczyzny prostopadle do a'', a z punktu $s_2 x = S$ ślad s_1 prostopadły do a'.



Rys. 58

Do powyższego zadania sprowadza się następujące: <u>Przez dany punkt $A'A''$ poprowadzić prostą przecinającą daną prostą $a'a''$ i prostopadłą do niej.</u>

Przez dany punkt $A'A''$ prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do $a'a''$, wyznaczamy jej punkt przebicia prostą $a'a''$ i łączymy ten punkt z punktem $A'A''$.

ROZDZIAŁ II.

ZMIANA PŁASZCZYZN RZUTÓW.

§18. RZUT PUNKTU NA PŁASZCZYZNĘ PROSTOPADŁĄ DO P_1 LUB P_2.

Nieraz bywa użytecznym rzut figury na płaszczyznę różną od P_1 i P_2. Często się zdarza np. że niektóre proste i płaszczyzny figury są prostopadłe do jednej lub do obu płaszczyzn rzutów, dzięki czemu rzuty niektórych prostych są zjednoczone. Wprawdzie rzuty tak położonej w przestrzeni figury zwykle łatwiej mogą być wykreślane; tym trudniej zato wyobrazić sobie figurę na podstawie tych rzutów. Z drugiej znów strony, liczne zagadnienia geometrji przestrzeni łatwo mogą być rozwiązane wykreślnie, gdy pewne części figury zajmą szczególne położenie względem płaszczyzn rzutów, gdy np. pewna płaszczyzna figury przystaje do jednej z płaszczyzn rzutów lub jest do niej równoleg-