ROZDZIAŁ XVI.

KRZYWE SKOŚNE.

§ 208. Krzywa skośna, jako miejsce poruszającego się punktu. Nazywamy krzywą skośną albo wichrowatą miejsce geometryczne poruszającego się według pewnego prawa punktu, o którym wtedy mówimy, że opisuje tę krzywą. Styczną do krzywej skośnej k w danym jej punkcie A nazywamy granicę położenia prostej, łączącej punkt A z innym punktem B krzywej, gdy B zbliża się nieograniczenie do A, punkt A nazywa się punktem zetknięcia stycznej t z krzywą k. Może się zdarzyć, że punkt T opisujący krzywą k przejdzie więcej niż raz jeden przez pewien punkt D; krzywa będzie miała wtedy więcej niż jedną styczną w tym punkcie; punkt taki nazywamy podwójnym, potrójnym, wogóle n-krotnym punktem krzywej skośnej .

Rzut krzywej skośnej k z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę jest oczywiście krzywą płaską k'; rzut stycznej t w punkcie A krzywej k jest styczną t' w punkcie A' krzywej k'. Rzut punktu podwójnego krzywej skośnej k jest oczywiście punktem podwójnym krzywej płaskiej k'; nie każdy jednak punkt podwójny krzywej k' jest rzutem punktu podwójnego krzywej k ; punkt podwójny i wogóle n -krotny powstanie na krzywej k' zawsze wtedy, jeżeli promień rzucający przecina dwa lub wogóle n razy krzywą k.

Każda płaszczyzna przechodząca przez styczną t nazywa się płaszczyzną styczną krzywej skośnej k . Płaszczyzna styczna ma zatem z krzywą k przynajmniej dwa nieskończenie bliskie punkty wspólne.- Śród płaszczyzn stycznych w każdym punkcie krzywej jest jedna taka, która ma z krzywą k 3 punkty nieskończenie bliskie wspólne. Przez styczną t i przez punkt C krzywej k poprowadźmy płaszczyznę; jeżeli punkt C będzie się zbliżał nieograniczenie do punktu A, , w którym t jest styczna do krzywej k , to położenie płaszczyzny tC dążyć będzie do pewnej płaszczyzny T , zwanej płaszczyzną ściśle styczną, która z krzywą k będzie miała przynajmniej trzy punkty nieskończenie bliskie wspólne.

Płaszczyzną ściśle styczną w punkcie A krzywej skośnej k nazywamy granicę położenia płaszczyzny przechodzącej przez A i dwa inne punkty B i C krzywej, gdy oba te punkty nieograniczenie zbliżą się będą do punktu A.

Możemy sobie teraz wyobrazić powstanie krzywej k w sposób następujący. Punkt T porusza się po prostej t, podczas gdy ta prosta obraca się w płaszczyźnie T dokoła punktu T, a płaszczyzna T dokoła prostej t. Jeżeli w pewnym punkcie A, podczas gdy punkt T opisujący krzywą przezeń przechodzi, nie zmienia się żaden ze zwrotów tych trzech ruchów, to punkt A nazywamy punktem zwyczajnym krzywej. Jeżeli punkt T w pewnym punkcie R zmienia na prostej t zwrot swego ruchu, podczas gdy ani prosta t ani płaszczyzna T nie zmienia zwrotu swego obrotu, to punkt R nazywa się punktem zwrotu; jeżeli prosta t doszedłszy do pewnego położenia i zmienia zwrot swego obrotu dokoła punktu T, podczas gdy ani punkt T nie zmienia zwrotu swego ruchu na prostej t, ani płaszczyzna T zwrotu swego obrotu dokoła prostej t, to prosta i nazywa się styczną przegięcia, a jej punkt zetknięcia I z krzywą k punktem przegięcia. Gdy wreszcie w pewnem położeniu R płaszczyzna T doznaje zmiany zwrotu swego obrotu dokoła prostej t, podczas gdy zarówno punkt T, jak prosta t, zachowują zwrot dotychczasowego ruchu, to płaszczyzna R nazywa się płaszczyzną zwrotu.

§ 209. Krzywizna i skręcenie krzywych skośnych. Z powyższego wynika, że wszystkie własności krzywej k w pobliżu danego jej punktu A muszą zależeć od dwóch wielkości: od ilorazu szybkości obrotu prostej t przez szybkość punktu T, czyli krzywizny k i od ilorazu szybkości obrotu płaszczyzny T przez szybkość punktu T, czyli od skręcenia τ w tym punkcie krzywej. Ujmiemy te określenia nieco ściślej.

Podobnie jak dla krzywych płaskich /§ 199/ nazwiemy krzywizną średnią krzywej K między punktem zwyczajnym A i punktem jakimkolwiek A_1 iloraz

$$K_1 = \frac{\varphi}{s};$$

gdzie s jest długością wyprostowanego łuku AA_1, a φ - kątem stycznych t i t_1 w tych punktach. Gdy punkt A_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do punktu A, to łuk s będzie malał nieograniczenie, jednocześnie atoli maleć będzie nieograniczenie kąt φ, który jest funkcją łuku s. Krzywizną rzeczywistą krzywej k w punkcie A nazywa się granica ilorazu φ/s, gdy s dąży do zera, czyli:

$$K = \lim_{s=0} \frac{\varphi}{s} = \frac{d\varphi}{ds};$$

Nieskończenie malejący łuk ds nazywamy <u>elementem</u> krzywej skośnej K ; zależny od niego nieskończenie malejący kąt $d\varphi$ nazywamy <u>kątem styczności</u>. Podobnie jak dla krzywych płaskich, krzywizna w punkcie A krzywej skośnej K jest to iloraz kąta styczności przez odpowiadający mu element krzywej w punkcie A . W punkcie zwrotu R:
$ds = 0; K = \infty$ w punkcie przegięcia I ;
$d\varphi = 0; \tau = 0.$

<u>Skręceniem średniem</u> krzywej skośnej K pomiędzy punktem zwyczajnym A i punktem jakimkolwiek A_1 nazywamy iloraz

$$\tau = \frac{\theta}{s};$$

gdzie s , jak poprzednio, jest długością wyprostowanego łuku AA_1 , a θ jest kątem płaszczyzn ściśle stycznych w punktach A i A_1 . Gdy łuk s maleć będzie nieograniczenie, to zależny od niego kąt θ również maleć będzie nieograniczenie.- <u>Skręceniem rzeczywistem</u> w punkcie A nazywamy granicę ilorazu θ/s , gdy s dąży do zera, czyli

$$\tau = \lim_{s=0} \frac{\theta(s)}{s} = \frac{d\theta}{ds};$$

Nieskończenie malejący kąt $d\theta$ nazywamy <u>kątem skręcenia;</u> możemy tedy określić skręcenie τ krzywej K w punkcie A jako iloraz kąta skręcenia przez element krzywej w punkcie A .

Przez trzy punkty A, B i C krzywej skośnej k wyznaczone jest koło, które leży w płaszczyźnie ABC; gdy punkty B i C dążyć będą nieograniczenie do punktu A , to płaszczyzna ABC dąży do płaszczyzny ściśle stycznej, koło zaś ABC dąży do koła k_1 , którego krzywizna rzeczywista $\varkappa = \frac{1}{r}$. jest ta sama, co krzywizna w punkcie A krzywej k . Koło to nazywamy <u>kołem krzywizny</u> w punkcie A ; jego środek - <u>środkiem krzywizny,</u> jego promień - <u>promieniem krzywizny</u> $r = \frac{1}{\varkappa}$.

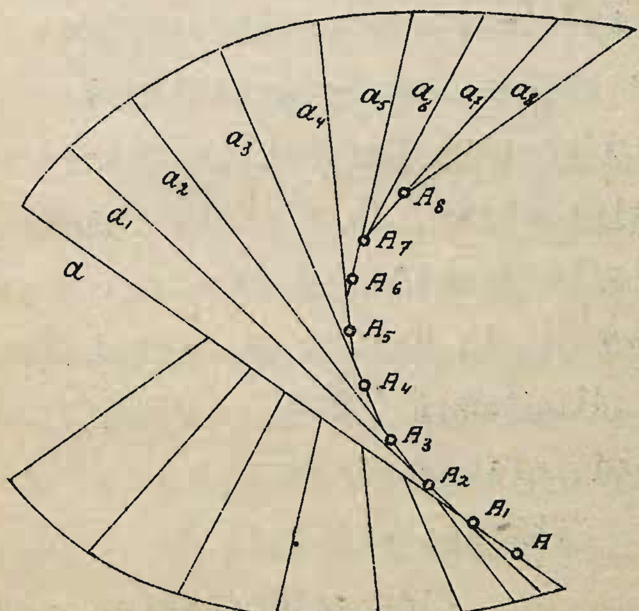
<u>§ 210.</u> <u>Normalna główna i binormalna.</u> Płaszczyzna prostopadła do stycznej t w punkcie A krzywej skośnej k nazywa się <u>płaszczyzną normalną</u> w tym punkcie. Każda prosta w tej płaszczyźnie przez punkt A przechodząca nazywa się <u>normalną.</u> Śród nich dwie są szczególnie ważne. Jedna n , leżąca w płaszczyźnie ściśle stycznej nazywa się <u>normalną</u>

główną; na niej to leży środek krzywizny; druga b, prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej, nazywa się binormalną. Trzy proste: t, n i b są wzajemnie prostopadłe i tworzą układ prostokątny spółrzędnych, szczególnie dogodny do badania własności krzywej w pobliżu punktu A. Płaszczyzna tn jest ściśle styczną, płaszczyzna bn normalną, płaszczyzna bt nazywa się płaszczyzną rektyfikacyjną.

Rzut krzywej k na płaszczyznę ściśle styczną jest krzywą o tej samej krzywiźnie w punkcie A; rzut krzywej k na płaszczyznę normalną jest krzywą, dla której punkt A jest punktem zwrotu; rzut krzywej k na płaszczyznę rektyfikacyjną jest krzywą, dla której punkt A jest punktem przegięcia.

§ 211. Powierzchnie rozwijalne. Powierzchnią prostokreślną nazywamy miejsce geometryczne prostej t, poruszającej się według pewnego prawa. Poszczególne położenia prostej t nazywają się tworzącemi powierzchni prostokreślnej. - Powierzchnie prostokreślne dzielimy na powierzchnie rozwijalne /np. stożki i walce/ i skośne, czyli wichrowate /np. hiperboloid jednopowłokowy i paraboloid hiperboliczny /§ 196/.

Powierzchnia prostokreślna nazywa się rozwijalną, jeżeli jej tworzące są styczne do krzywej skośnej k , która nazywa się krawędzią zwrotu powierzchni rozwijalnej. Weźmy na krzywej skośnej k /rys.389/ następstwo punktów $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ połączmy punkty A i A_1 , A_1 i A_2 , A_2 i A_3, ... prostemi $a, a_1, a_2, \ldots$; każda z tych prostych przecina poprzednią i następną. Kąty $(a a_1)$, $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$, ... będą miały tę własność, że każdy z nich ma z poprzednim i z następnym jedno ramię wspólne. Obróćmy płaszczyznę $(a a_1)$ dokoła a_1 tak, żeby ta płaszczyzna przy-



Rys. 389.

stała do płaszczyzny kąta $(a_1 a_2)$; w ten sposób trzy proste a, a_1 i a_2 leżeć będą w jednej płaszczyźnie; obróćmy następnie tę płaszczyznę dokoła a_2 tak, żeby przystała do płaszczyzny kąta $(a_2\, a_3)$, w ten sposób cztery proste: a, a_1, a_2 i a_3 będą leżały w jednej płaszczyźnie; obracając ją dokoła a_3 do przystania z płaszczyzną $(a_3\, a_4)$ otrzymamy 5 prostych: a, a_1, a_2, a_3 i a_4 w jednej płaszczyźnie i tak postępujmy dalej, dopóki wszystkie proste nie będą leżały w jednej płaszczyźnie. O powierzchni wielościennej $a, a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ mówimy wtedy, że została rozwinięta. — Jeżeli liczba punktów $A, A_1, A_2, \ldots$ na krzywej k zwiększać się będzie nieograniczenie, podczas gdy ich odległości $A A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots$ maleć będą nieograniczenie, to proste $a, a_1, a_2, \ldots$ zbliżać się będą do stycznych $t, t_1, t_2, \ldots$, a powierzchnia wielościenna $a\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ do powierzchni rozwijalnej, której krawędzią zwrotu będzie krzywa skośna k. Postępując z nieskończenie małemi kątami: $(t\, t_1)$, $(t_1 t_2)$, $(t_2\, t_3), \ldots$ tak samo, jak postępowaliśmy z kątami $(a\, a_1)$, $(a_1\, a_2)$, $(a_2\, a_3), \ldots$ można będzie "rozwinąć" powierzchnię rozwijalną krzywej k .

Powierzchnia rozwijalna krzywej skośnej składa się z dwóch powłok, stycznych wzajemnie we wszystkich punktach krawędzi zwrotu. W samej rzeczy, przecięcie tej powierzchni jakąkolwiek płaszczyzną nie przechodzącą przez żadną z tworzących jest krzywą płaską, posiadającą w punkcie przecięcia z krzywą skośną punkt zwrotu I rodzaju. Stąd nazwa: krawędź zwrotu, którą dajemy krzywej skośnej.

Przez rozwinięcie powierzchni wielościennej $a\ a_1\ a_2\ a_3 \dots$ żaden z odcinków $A A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., ani żaden z kątów $(a a_1)$, $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$,... nie uległ oczywiście zmianie. Podobnież przez rozwinięcie powierzchni rozwijalnej żaden z elementów, ani żaden z kątów styczności krzywej skośnej nie doznał zmiany; krzywa skośna przez takie rozwinięcie przekształca się przeto na krzywą płaską o tej samej długości i tej samej krzywiźnie w każdym z jej punktów. Jedynie skręcenie stało się dla wszystkich jej punktów równem zeru.

Jako powierzchnie rozwijalne powszechnie znane przytoczyć możemy stożki i walce, krawędź zwrotu redukuje się w tych powierzchniach do punktu właściwego dla stożków, niewłaściwego dla walców.

Jeżeli z dowolnego punktu P wyprowadzimy równolegle do stycznych $t, t_1, t_2, \ldots$ krzywej skośnej k, to utworzymy powierzchnię, która się nazywa stożkiem kierunkowym krzywej k. Płaszczyzny styczne do tego stożka są równoległe do płaszczyzn ściśle stycznych krzywej skośnej. Stożek kierunkowy krzywych płaskich redukuje się do płaszczyzny.

Powstanie krzywej skośnej możemy w inny teraz rozumieć sposób. Niechaj płaszczyzna T porusza się według pewnego prawa; prosta przecięcia dwóch położeń A i B, poruszającej się płaszczyzny dąży do pewnej granicy t, gdy położenie B zbliża się nieograniczenie do A; granicą tą jest tworząca powierzchni rozwijalnej. Punkt przecięcia trzech położeń A, B i C, poruszającej się płaszczyzny dąży również do pewnej granicy T, gdy położenia B i C zbliżają się nieograniczenie do A; granicą tą jest punkt krawędzi zwrotu T.

Powierzchnie rozwijalne są figurami wzajemnemi względem krzywych skośnych. Podczas gdy krzywą skośną uważamy za miejsce poruszającego się punktu, powierzchnię rozwijalną uważamy za obwiednię poruszającej się płaszczyzny; stycznym krzywej skośnej odpowiadają tworzące powierzchni rozwijalnej; płaszczyznom ściśle stycznym skośnych odpowiadają punkty krawędzi zwrotu powierzchni rozwijalnej.

§ 212. Linja śrubowa. Najprostszym przykładem krzywej skośnej jest linja śrubowa.

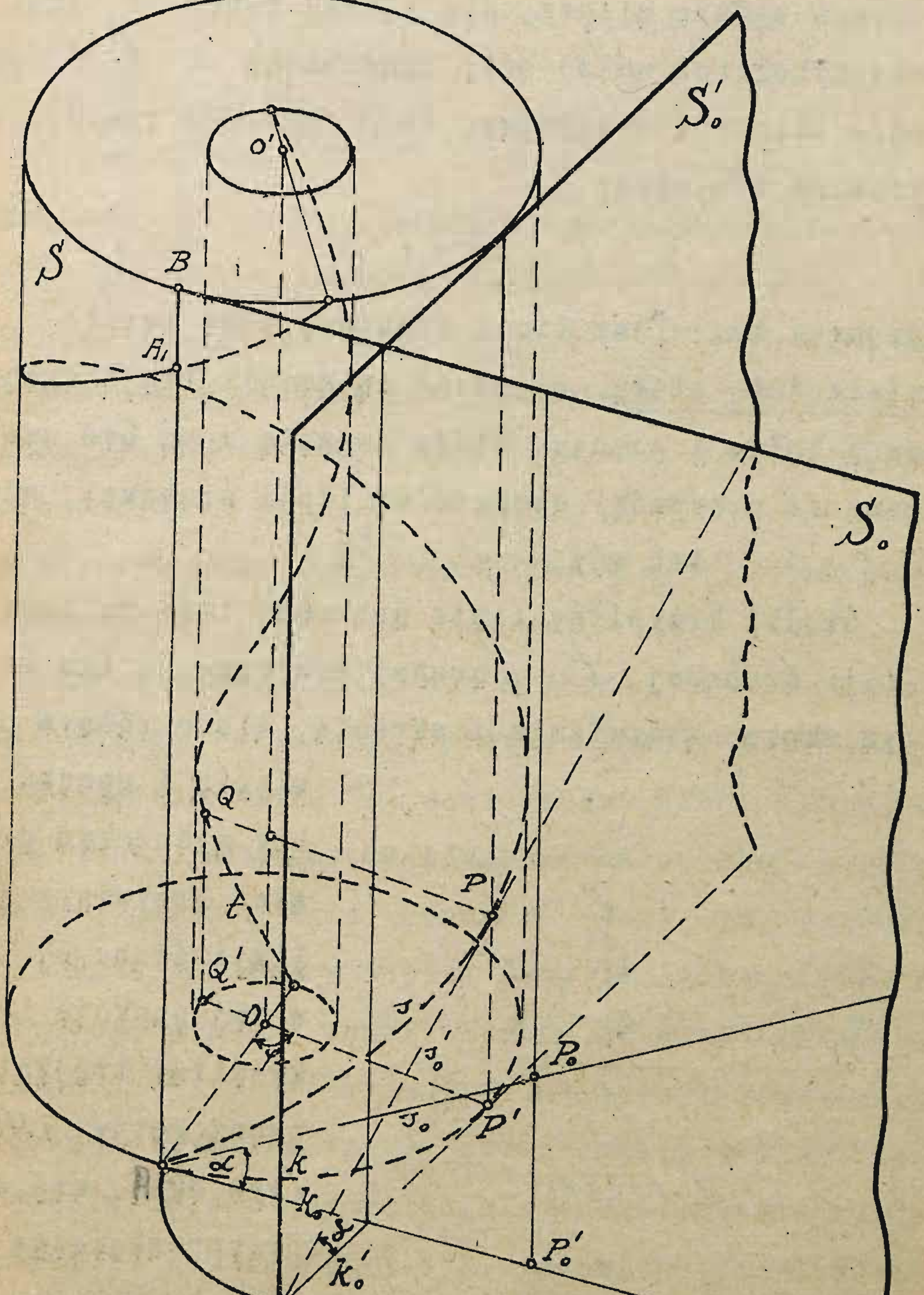
Niech będzie walec obrotowy S o osi OO' kierownicy k i promieniu r /rys. 390/. Wzdłuż tworzącej AB poprowadźmy płaszczyznę styczną S_o t.j. poprowadźmy płaszczyznę przez AB i przez styczną k_o do kierownicy k w punkcie A. Poprowadźmy przez punkt A w płaszczyźnie S_o prostą s_o nachyloną do k_o pod kątem α, poczem "nawińmy" płaszczyznę S_o na powierzchnię walca; podczas gdy k_o nawinie się na kierownicę k, prosta s_o nawinie się na powierzchnię walca, tworząc krzywą skośną, którą nazwiemy linją śrubową. Linja śrubowa jest to więc krzywa, leżąca na powierzchni walca obrotowego, która po rozwinięciu powierzchni przekształca się na prostą.- Powstanie linji śrubowej można rozumieć jeszcze inaczej. Niechaj płaszczyzna S_o wraz z wykreśloną na niej prostą s_o toczy się po powierzchni walca bez poślizgu, wtedy s_o jest styczną do powierzchni walca w coraz to nowym punkcie: miejsce geometryczne tych punktów zetknięcia na powierzchni walca jest linją śrubową. Gdy S_o toczy się po S, K_o toczy się po K, a s_o po s, przytem k_o jest wciąż styczną do k, a s_o do s; punkt A kreśli w płaszczyźnie kierownicy <u>ewolwentę koła</u> /§ 201/.

Weźmy na s_o punkt jakikolwiek P_o, którego rzutem na k_o niechaj będzie punkt P_o'; gdy S_o tocząc się po powierzchni walca obróci się o kąt φ, którego wyprostowany łuk na kierownicy $= AP_o'$, to P_o' przystanie do P', a P_o do P. W tem położeniu prosta s_o będzie styczna do s w punkcie P; długość jej między punktami P i A' będzie równa P_oA, rzut jej $A'P' = AP_o' = r\cdot\varphi$. Nachylenie stycznej s_o' do płaszczyzny kierownicy pozostanie równem α; kąt α nazywa się <u>spadkiem</u> linji śrubowej. Odcinek $P_oP_o' = PP' = z$. Z trójkąta AP_oP_o':
$z = AP_o'\cdot tg\,\alpha = r\cdot\varphi\cdot tg\,\alpha = \varphi\cdot r\; tg\,\alpha$; t.j. wzniesienie z jest proporcjonalne do kąta obrotu φ. Spółczynnik proporcjonalności $h_o = r\,tg\,\alpha$ nazywa się <u>parametrem</u> linji śrubowej, jest to wartość stałego stosunku z/φ. Na zasadzie powyższego możemy określić linję śrubową jako miejsce geometryczne

punktu poruszającego się ruchem jednostajnym na prostej z , podczas gdy z ruchem jednostajnym obraca się dokoła równoległej do niej prostej OO'. Parametr h_o jest stosunkiem tych dwóch szybkości jednostajnych. Gdy kąt φ stanie się równym 2π, to punkt P znajdzie się na tworzącej AB w punkcie A_1 . Odcinek $h = AA_1$ jest przesunięciem w kierunku osi, odpowiadającym całemu obrotowi; h nazywa się skokiem linji śrubowej. Z równania $z = h_o \varphi$ mamy, kładąc $\varphi = 2\pi$: $h = h_o \cdot 2\pi$ skąd $h_o = h/2\pi$; dlatego to h_o nazywa się też zredukowanym skokiem linji śrubowej.

Przez skok i spadek linja śrubowa nie jest jeszcze całkowicie wyznaczona, odróżniamy bowiem linje śrubowe prawo- i lewoskrętne. Linja śrubowa nazywa się prawoskrętną, jeżeli dla widza umieszczonego wzdłuż osi walca punkt P posuwając się ku dołowi obraca się w kierunku wskazówki zegara, w przeciwnym razie jest lewoskrętna.

Płaszczyzna ściśle styczna w punkcie P linji śrubowej jest nachylona pod kątem α do płaszczyzny kierownicy. W samej rzeczy, utwórzmy stożek kierunkowy linji śrubowej; w tym celu z dowolnego punktu przestrzeni należy wyprowadzić równoległe do jej stycznych; ponieważ zaś wszystkie styczne są nachylone pod tym samym kątem α do płaszczyzny kierownicy walca, więc te równoległe utworzą stożek obrotowy. Kierownicą tego stożka będzie kierownica samego walca, jeżeli wierzchołek stożka H obierzemy na osi w odległości $r \cdot tg \cdot \alpha = h$. od płaszczyzny kierownicy. Płaszczyzny styczne do tego stożka, nachylone do płaszczyzny kierownicy pod kątem α, są równoległe do płaszczyzny ściśle stycznych linji śrubowej /§ 211/. Jeżeli tedy przez styczną s_o' przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do S_o', a więc nachyloną do płaszczyzny kierownicy pod kątem α, to będzie to płaszczyzna ściśle styczna w punkcie P. Prostopadła do s_o', leżąca w tej płaszczyźnie, czyli normalna główna w punkcie P, musi zatem przecinać oś i być do niej prostopadłą. Na tej normalnej głównej leży środek krzywizny Q dla punktu P; aby wyznaczyć promień krzywizny, zauważmy, że krzywizna linji śrubowej w punkcie P, musi być ta sama, co krzywizna przecięcia walca płaszczyzną ściśle styczną, albowiem te dwie krzywe mają prócz punktu P jeszcze dwa nieskończenie mu bliskie punkty wspólne. Otóż przecięciem walca tą płasz-



Rys. 390.

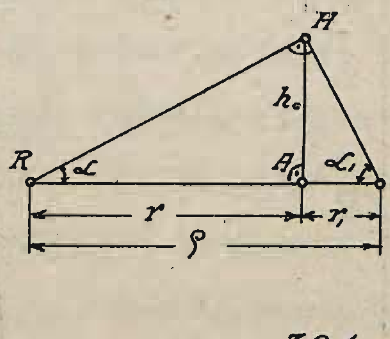
czyzną będzie elipsa, dla której punkt P jest wierzchołkiem małej osi; oznaczając a i b półosie elipsy i zważywszy, że $a = \frac{r}{\cos\alpha}$; $b = r$ znajdziemy promień krzywizny

$$\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{r}{\cos^2\alpha};$$

promień krzywizny linji śrubowej jest przeto wielkością stałą. Własność tę dzieli linja śrubowa z kołem i prostą, które zresztą mogą być uważane za przypadki szczególne linji śrubowej, gdy $\alpha = 0$ lub gdy $\alpha = \pi/2$. -

Środki krzywizny linji śrubowej leżą na innej linji śrubowej t, zwanej wzajemną, o tym samym skoku, krzywiźnie i skręcie, ale o różnym promieniu i spadku.

Aby wyznaczyć promień krzywizny ρ linji śrubowej s w jej punkcie P kreślimy trójkąt prostokątny AHR /rys.391/, którego przyprostokątna



Rys. 391.

$AR = r_1$, a kąt do niej przyległy $ARH = \alpha$;

wtedy $HR = \frac{r}{\cos\alpha}$; budując na HR trójkąt prostokątny z tym samym kątem przyległym α, otrzymamy

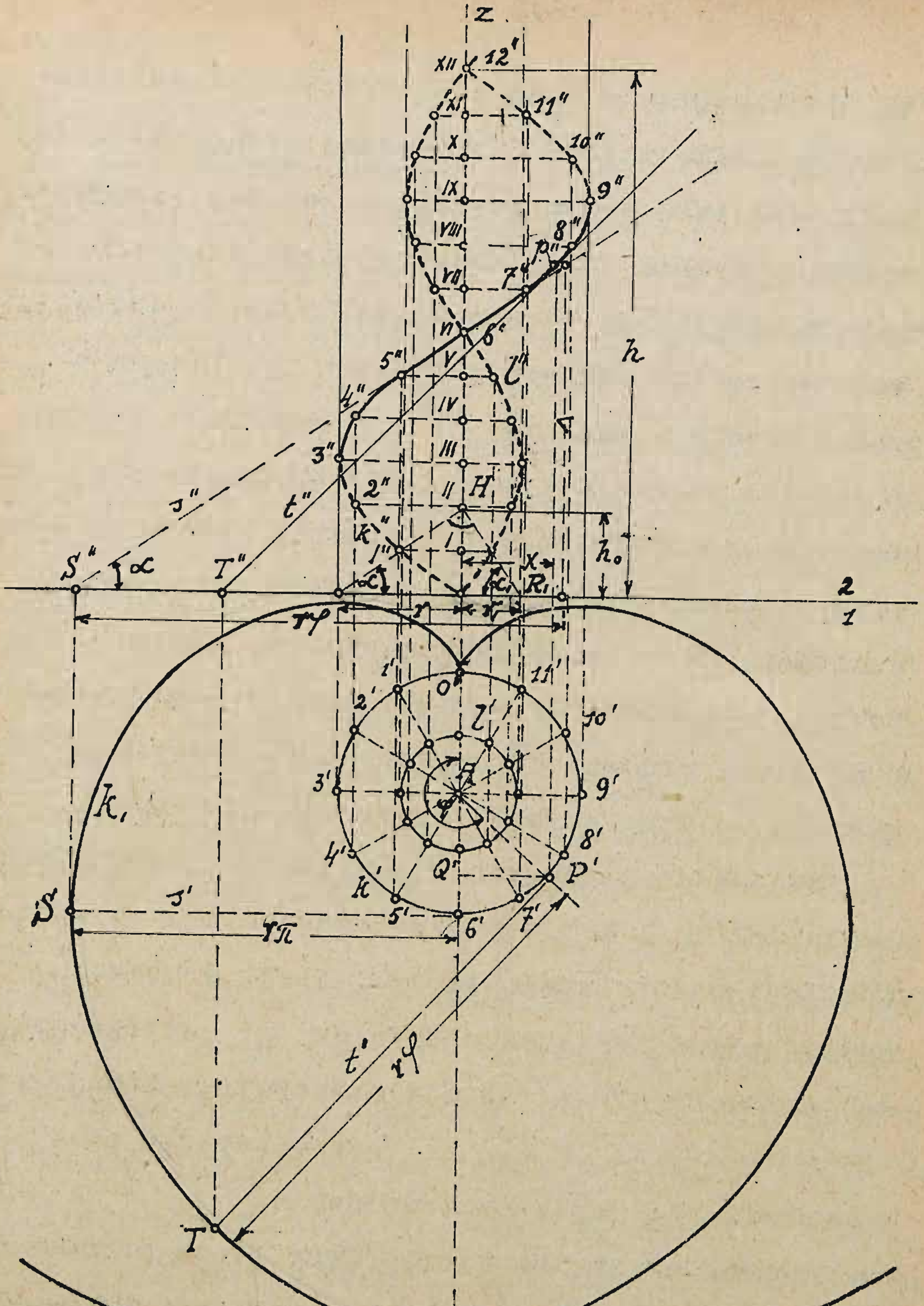
$$RR_1 = \frac{HR}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos^2\alpha} = \rho$$

Odcinek $AR_1 = r_1$ jest promieniem walca, na którym leży linja śrubowa wzajemna t, a kąt $AR_1H = \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ jest jej spadkiem; wyznaczając w ten sam sposób promień krzywizny $\frac{r_1}{\cos^2\alpha}$ tej drugiej linji śrubowej, znajdziemy ten sam co poprzednio odcinek $RR_1 = \rho$. Gdy $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $r_1 = r$; linje śrubowe wzajemne są wtedy równe i symetryczne względem wspólnej osi.

Styczne s_0 do linji śrubowej s tworzą powierzchnię rozwijalną, której krawędzią zwrotu jest s. Przecięcie tej powierzchni płaszczyzną kierownicy t.j. jakąkolwiek płaszczyzną prostopadłą do osi jest ewolwentą koła. Punkt A jest tym punktem ewolwenty, z którego wychodzą dwie jej gałęzie do siebie styczne: jest to punkt zwrotu. Na średnicy AO leży nieskończenie wiele punktów podwójnych ewolwenty /§ 201/. Gdy przetniemy powierzchnię rozwijalną prostopadle do osi na wysokości z od płaszczyzny kierownicy, to otrzymamy w przecięciu tę samą ewolwentę koła, ale obróconą o kąt $\varphi = \frac{z}{h_o}$. Punkt zwrotu A oraz punkty podwójne $D_1, D_2, \dots$ zakreślają więc linje śrubowe o tym samym skoku h. Miejsce geometryczne punktu zwrotu stanowi linję śrubową daną; ponieważ w każdym punkcie podwójnym ewolwenty koła przecinają się dwie tworzące powierzchni rozwijalnej, więc miejsce geometryczne każdego punktu podwójnego jest linją samoprzenikania tej powierzchni. Na powierzchni rozwijalnej linji śrubowej leży zatem nieskończenie wiele śrubowych samoprzenikania powierzchni o tym samym skoku i skręcie.

§ 213. Zadanie. Wykreślić rzuty prostokątne linji śrubowej prawoskrętnej, której oś jest prostopadłą do P_1, jeżeli dane są promień walca r i skok h. /rys.392/. Rzut poziomy k' linji śrubowej jest kierownicą walca. Przypuśćmy, że linja śrubowa jest kierownicą walca. Przypuśćmy, że linja śrubowa przebija P_1 w punkcie O' kierownicy. Podzielmy kierownicę na dowolną ilość, np. na 12 części równych i ponumerujmy punkty podziału, poczynając od O' w stronę przeciwną ruchowi skazówki zegara. Na taką samą ilość części równych podzielmy skok linji śrubowej, odmierzony na osi walca od punktu O'' i ponumerujmy punkty podziału, poczynając od tego punktu. Wystawiając w każdym z punktów podziału kierownicy linję rzędną i prowadząc przez odpowiedni punkt podziału skoku równoległą do osi rzutów, wyznaczymy drugie rzuty dowolnej ilości punktów linji śrubowej. Dla wyznaczenia stycznych w tych punktach wykreślmy ewolwentę kierownicy, obierając punkt zwrotu w punkcie O'. Prowadząc w każdym z punktów podziału kierownicy styczną do niej, wyznaczymy na ewolwencie k_1 punkty, które są pierwszymi śladami stycznych do śrubowych w tych jej punktach, które odpowiadają punktom podziału kierownicy; łącząc drugie rzuty punktów linji śrubowej z drugiemi rzutami odpowiednich pierwszych śladów wyznaczymy drugie rzuty szukanych stycznych.

Styczna do śrubowych w punkcie G' jest równoległa do P_2; kąt jej drugiego rzutu z osią rzutów jest przeto spadkiem α linji śrubowej. Prowadząc przez R równoległą do σ'', wyznaczymy na osi parametr AH linji śrubowej; w samej rzeczy: $AH = r\,tg.\,\alpha = h_0$. Prostopadła do RH w punkcie H wyznacza odcinek $A''R_1 = r_1$; jest to promień walca, na którym leży linja śrubowa wzajemna l o tym samym skoku, promieniu krzywizny i skręcie. Odcinek RR_1 jest promieniem krzywiz-



Rys. 392.

ny obu tych linji śrubowych.

§ 214. Zadanie. Wykreślić rzuty punktu P linji śrubowej prawoskrętnej o osi prostopadłej do P_1 oraz rzuty stycznej w tym punkcie, jeżeli dane są r, h i φ /rys.391/. Przypuśćmy znowu, że punkt, w którym linja śrubowa przebija P_1 jest punktem kierownicy najbliższym osi x_{12}. Odmierzmy w stronę przeciwną ruchowi wskazówki zegara kąt φ, którego jednym ramieniem jest $A'O'$; punkt P', w którym drugie ramię tego kąta przecina kierownicę, będzie pierwszym rzutem punktu P. W punkcie P' poprowadźmy styczną do kierownicy; odmierzmy na niej $P'T = r\cdot\varphi$; punkt T jest pierwszym śladem stycznej do śrubowej w punkcie P. Aby wyznaczyć wysokość z punktu P, odmierzmy na osi x_{12} od punktu S'' odcinek $r\cdot\varphi$; druga przyprostokątna trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna $= r\cdot\varphi$, a kąt do niej przyległy jest α będzie równa szukanej wysokości. Łącząc punkt P'' z T'', otrzymamy drugi rzut t'' stycznej t.

Na mocy powyższego wykreślenia znajdziemy łatwo równanie drugiego rzutu k'' linji śrubowej k. Obrawszy za osie spółrzędnych proste z i x, na-

my dla punktu $P''(z,x)$: $x = P'Q' = r \sin \varphi$;
z trójkątów zaś podobnych: $z : h_o = r\varphi : r$ skąd

$$z = h_o \varphi;$$

Rugując φ, otrzymamy $\frac{x}{r} = \sin \frac{z}{h_o}$; jest to równanie sinusoidy. Rzutem prostokątnym linji śrubowej na płaszczyznę równoległą do osi jest sinusoida.

Można stwierdzić łatwo, że rzutem równoległym ukośnym linji śrubowej na płaszczyznę kierownicy, t.j. na płaszczyznę prostopadłą do osi walca jest cykloida. W samej rzeczy, tworzenie linji śrubowej możemy rozumieć w ten sposób, że punkt P porusza się z szybkością stałą, na okręgu koła k, podczas gdy płaszczyzna tego koła przesuwa się również z szybkością stałą w kierunku do tej płaszczyzny prostopadłym. Jeżeli rzucimy ukośnie punkt ruchomy P na płaszczyznę P_1, to jego rzut P_v' będzie w płaszczyźnie P_1 wykonywał jednocześnie dwa ruchy jednostajne: 1/ ruch na obwodzie koła k_v', które jest rzutem ukośnym koła k z szybkością równą szybkości punktu P na tym kole, i 2/ ruch postępowy wraz z kołem k_v' z szybkością, która jest rzutem szybkości płaszczyzny koła k. Jeżeli tak zakreślony przez punkt P_v' na kole k_v' jest w danym odstępie czasu równy odcinkowi, który w tym samym czasie przebiega środek koła, to krzywa opisana przez punkt P_v' jest cykloidą zwyczajną, nastąpi to wtedy, gdy promienie rzucające punkt P są nachylone do P_1 pod kątem α. Jeżeli nachylenie promieni rzucających jest $> \alpha$, to cykloida jest skurczona, jeżeli to nachylenie jest $< \alpha$, to cykloida jest wyciągnięta.

Wyniki tego rozważania można wyrazić w następujący sposób: Cieniem linji śrubowej na płaszczyźnie kierownicy, rzuconym przez promienie równoległe, jest cykloida zwyczajna, skurczona lub wyciągnięta, zależnie od tego, czy nachylenie promieni świetlnych do płaszczyzny kierownicy jest równe, większe lub mniejsze od spadku linji śrubowej.

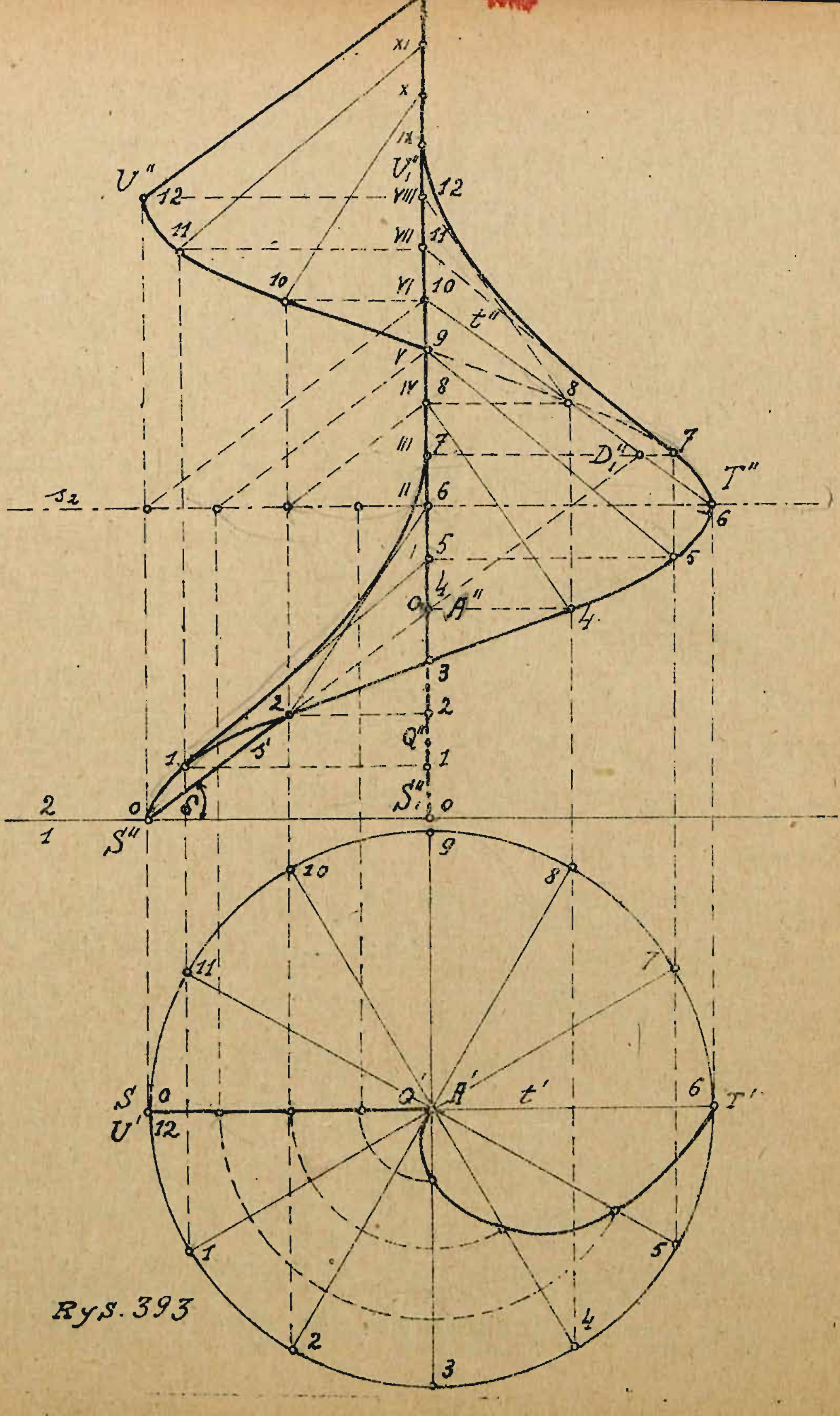
§ 215. Konoida śruby i powierzchnia śrubowa o ostrym gwincie. Powierzchnia rozwijalna linji śrubowej jest przypadkiem szczególnym powierzchni śrubowych prostokreślnych, powstałych przez ruch śrubowy prostej jakiejkolwiek. Ważne znaczenie praktyczne mają przedewszystkiem te powierzchnie prostokreślne skośne, w których tworząca przecina oś /powierzchnie śrubowe zamknięte/. Jeżeli tworzące są przytem prostopadłe do osi, to powierzchnia nazywa się konoidą śruby. Jest to powierzchnia utworzona przez normalną główną linji śrubowej, proste $1I$, $2II$, $3III$,... /rys.393/ są tworzącemi tej powierzchni. Ma ona zastosowanie w śrubach o płaskim gwincie, powstającym przez ruch śrubowy prostokąta, którego płaszczyzna przechodzi przez oś, a jeden z boków jest do niej równoległy i równa się wysokości skoku. Jeżeli tworząca przecina oś pod kątem ostrym, to utworzona przez ruch śrubowy tej prostej powierzchnia nazywa się powierzchnią śrubową o ostrym gwincie, nazwanej tak dlatego, że ma ona zastosowanie w śrubach o ostrym gwincie. Nazywamy tak figury powstałe przez ruch śrubowy trójkąta, którego płaszczyzna przechodzi przez oś, a podstawa jest do niej równoległa i równa się wysokości skoku.

Zadanie. Wykreślić rzuty prostokątne powierzchni śrubowej o ostrym gwincie i wyznaczyć przecięcie jej płaszczyzną prostopadłą do osi. Oś dzieli powierzchnie na dwie powłoki: górną i dolną; jeżeli oś jest pionową. Wykreślimy jeden skok dolnej powłoki powierzchni śrubowej o ostrym gwincie. Niechaj oś $a'a''$ /rys.393/ będzie prostopadła do P_1, a prosta $s's''$ niech będzie tworzącą powierzchni równoległą do P_2, o nachyleniu σ do P_1. Tworząca ta przecina oś a

w punkcie $A'A''$, a P przebija w punkcie $S S''$.

STU niechaj będzie jednym skokiem leżącej na powierzchni linji śrubowej; skok ten podzielmy na 12 równych części w punktach: $1, 2, 3, \ldots\ 11$, przez które prowadzimy tworzące powierzchni; tworzące te wyznaczają na osi a odcinki $0\underline{I}$, $\underline{I}\,\underline{II}$, $\underline{II}\,\underline{III}, \ldots \underline{XI}, \underline{XII}$, równe $1/12$ wysokości skoku $S_1 U_1$. Dla prostoty wykreślenia obraliśmy punkt A w jednym z punktów podziału wysokości skoku.

Każda płaszczyzna przechodząca przez oś a przecina powierzchnię według dwóch układów prostych równoległych; w tej płaszczyźnie, która jest równoległa do P_2 , proste jednego układu są równoległe do s , proste drugiego układu do t . Punkty przecięcia $D_1, D_2, \ldots$ prostych jednego układu z prostemi drugiego leżą na linjach śrubowych zwanych krawędziami samoprzenikania powierzchni; wzdłuż tych linji powłoka górna przecina powłokę dolną powierzchni. Przetnijmy powierzchnię płaszczyzną S prostopadłą do osi a . Krzywa przecięcia będzie miejscem geometrycznem punktów, w których tworzące przebijają płaszczyznę S . Otóż odległość punktu przebicia płaszczyzny S którąkolwiek tworzącą od osi jest proporcjonalna do odległości tej płaszczyz-



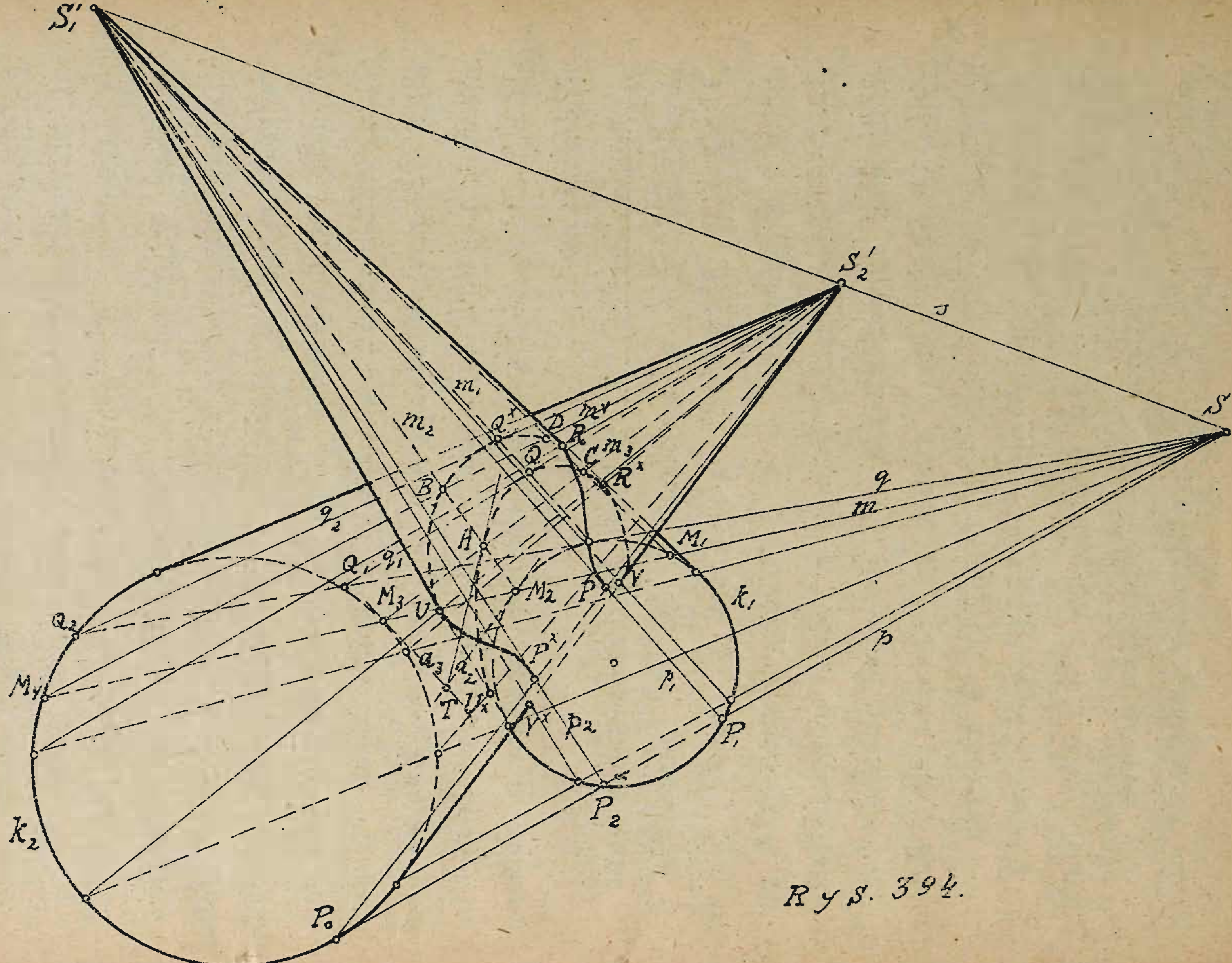
Rys. 393

ny od punktu, w którym ta tworząca przecina oś, ta zaś jest proporcjonalna do kąta φ, który odpowiada łukowi śrubowej STU pomiędzy płaszczyzną S i tworzącą. Krzywa płaska posiadająca tę własność, że odległość dowolna jej punktu od pewnego stałego punktu jej płaszczyzny jest proporcjonalna do kąta, zakreślonego przez promień wodzący tego dowolnego punktu, nazywa się spiralną Archimedesa. Tak więc: przecięcie powierzchni śrubowej o ostrym gwincie płaszczyzną prostopadłą do osi jest spiralną Archimedesa.

§ 216. Krzywa przenikania dwóch powierzchni. Jednem z najczęściej w praktyce spotykanych zagadnień jest wyznaczenie krzywej przenikania dwóch powierzchni. Metoda ogólna polega na przecinaniu obu powierzchni układem płaszczyzn pomocniczych dogodnie obranych i wyznaczeniu krzywych przecięcia tych płaszczyzn z każdą powierzchnią; punkty wspólne obu tych krzywych płaskich są zarazem wspólne obu powierzchniom, a więc należą do krzywej przenikania. Jeżeli np. jedna lub obie dane powierzchnie są stożkami lub walcami, to najlepiej za płaszczyzny pomocnicze wziąć płaszczyzny przechodzące przez oba wierzchołki; wtedy krzywa przecięcia każdej powierzchni z którąkolwiek płaszczyzną sieczną składać się będzie z dwóch prostych. Jeżeli np. danemi powierzchniami są kula i powierzchnia drugiego stopnia, posiadająca przecięcia kołowe /elipsoida, paraboloida eliptyczna, obie hyperboloidy/, to płaszczyznami pomocniczymi będą płaszczyzny przecięć kołowych i t.d.

Zadanie. Wyznaczyć rzut linji przenikania dwóch stożków, których kierownice k_1 i k_2 są kołami leżącymi w płaszczyźnie rysunku, jeżeli dane są nadto rzuty /prostokątne, ukośne lub środkowe/ wierzchołków S_1 i S_2 oraz ślad s prostej $S_1 S_2$ w płaszczyźnie rysunku /rys.394/.

Poprowadźmy pęk płaszczyzn o osi $s \equiv S_1 S_2$, ślady tych płaszczyzn będą promieniami, wychodzącemi z punktu S. Oczywiście w grę wchodzą tylko te promienie, które przecinają oba koła pomocnicze; jeżeli tedy poprowadzimy z S styczne do obu kół, to korzystać będziemy z tych tylko promieni, które znajdują się między promieniami p i q stycznemi do jednego, a siecznemi względem drugiego koła. Mogą przytem zajść 4 przypadki: 1/ Obie styczne do jednego z kół są sieczne względem drugiego koła. Mówimy wtedy, że przenikanie jest zu-

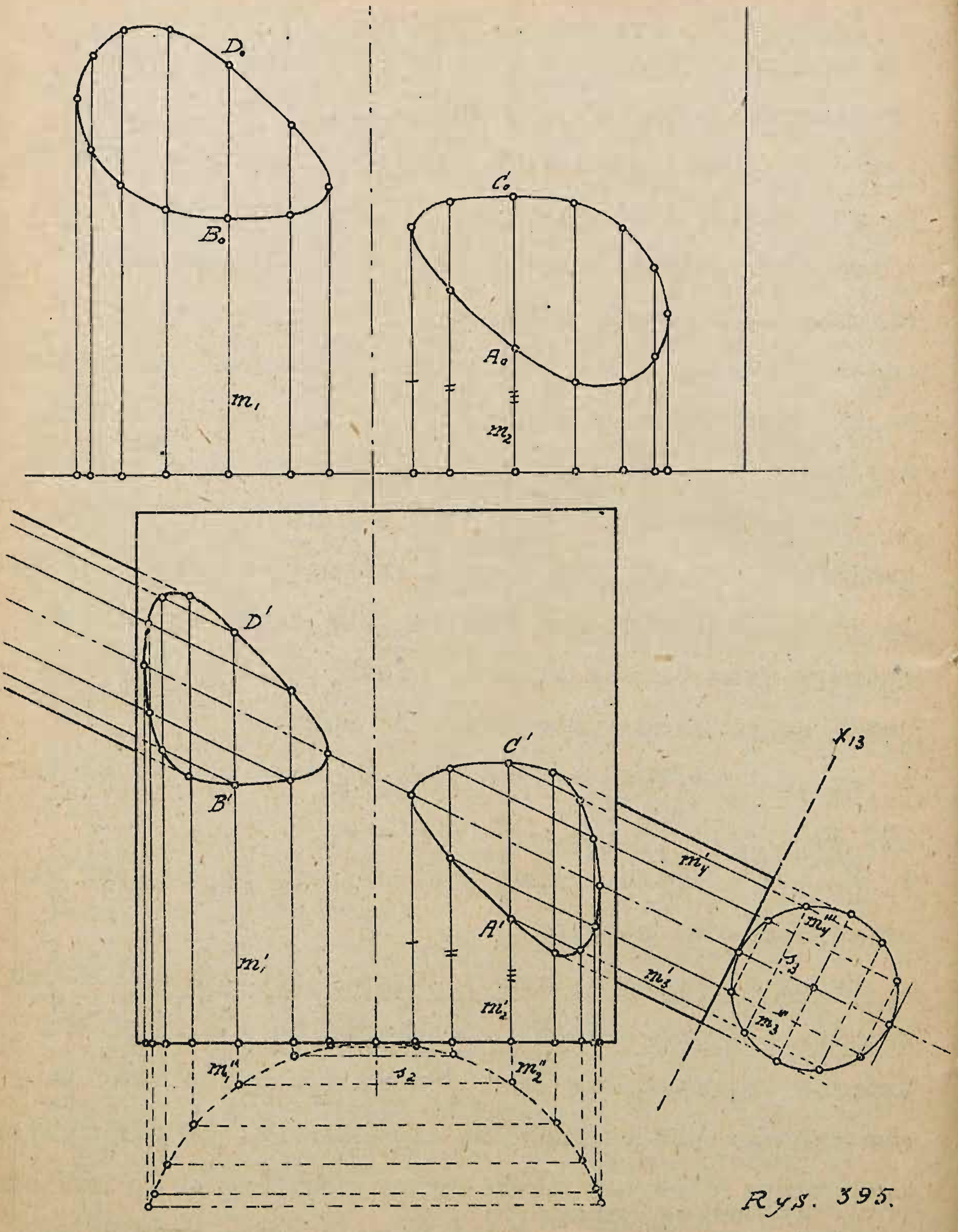

S'₁
S'₂
S
s
m₁
m₂
m
q
q₂
q₁
p
p₁
p₂
k₁
k₂
Q₂
M₄
Q₁
M₃
M₂
M₁
U
V
P
P₀
P₁
P₂
A
B
C
D
R
R^x
Q
Q^x
T
U^x
V^x
P^x

Rys. 394.

pełne; krzywa przenikania składa się z dwóch gałęzi, nie mających wspólnego punktu, 2/ jedna ze stycznych do k_1 przecina k_2, a druga jest zewnętrzną względem k_2. Wtedy mówimy, że przenikanie jest częściowe; krzywa przenikania stanowi jedną jedyną krzywą. 3/ Koła k_1 i k_2 mają jednę wspólną styczną, wychodzącą z S; krzywa przenikania posiada jeden punkt podwójny i 4/ koła k_1 i k_2 mają obie styczne, wychodzące z S wspólne; krzywa przenikania posiada dwa punkty podwójne i rozkłada się na dwie przecinające się stożkowe, leżące w różnych płaszczyznach.

Przypuśćmy np. /rys.394/, że przenikanie jest częściowe, t.j. że styczna p do k_2 przecina k_1 w punktach P i P_2, a styczna q do k_1 przenika k_2 w punktach Q_1 i Q_2. Aby wyznaczyć 4 punkty krzywej przenikania, leżące w jednej płaszczyźnie pomocniczej, prowadzimy z S promień jakikolwiek m, który niechaj będzie śladem tej płaszczyzny; oznaczmy literami M_1, M_2, M_3 i M_4 punkty, w których m przecina koła k_1 i k_2. Łącząc M_1 i M_2 z S_1', otrzymamy rzuty dwóch tworzących m_1 i m_2, według których płaszczyzna $\mathcal{S}m$ przecina stożek S_1; łącząc M_3 i M_4 z S_2', otrzymamy podobnież rzuty tworzących m_3 i m_4, według których ta sama płaszczyzna przecina stożek S; punkty A, B, C i D, według których m_1 i m_2 przecinają m_3 i m_4, są punktami linji przenikania. Aby w którymkolwiek z tak otrzymanych punktów, np. w A poprowadzić styczną do krzywej, zauważmy, że owa styczna musi leżeć w każdej z obu płaszczyzn stycznych, które można poprowadzić do stożków S_1 i S_2 w ich punkcie wspólnym A. Śladami tych płaszczyzn są styczne a_2 i a_3 do kierownic k_1 i k_2 w punktach M_2 i M_3; punkt $T \equiv a_2 a_3$ jest śladem szukanej stycznej: prosta AT jest więc jej rzutem. Dla szybkiego i dokładnego wykreślenia krzywej przenikania zaleca się przedewszystkiem wyznaczenie 1/ punktów P, P^x, Q i Q^x, w których krzywa jest styczna do tworzących p_1, p_2, q_1 i q_2, 2/ punktów R, R^x, U, U^x, V i V^x, w których krzywa jest styczna do konturu rzeczywistego obu stożków.

Zadanie. Wyznaczyć rzut krzywej przenikania dwóch walców, których osie są równoległe do P_1 /rys.395/. Zadanie to różni się od poprzedniego tylko tem, że wierzchołki obu stożków są niewłaściwe. Za płaszczyzny pomocnicze obieramy płaszczyzny równoległe do osi obu walców, t.j. do P_1. Wykreśliwszy rzuty walców na

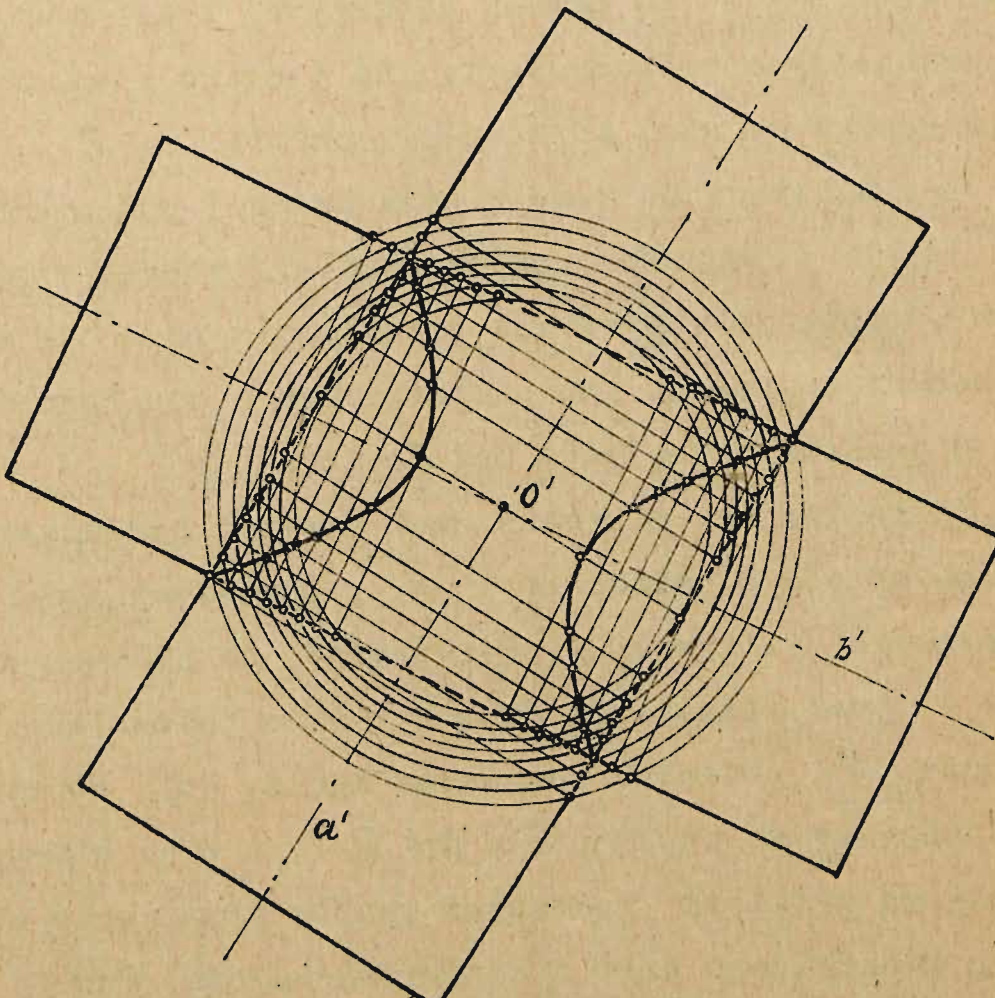


Rys. 395.

płaszczyzny P_2 i P_3 prostopadłe do P_1, wyznaczymy pierwsze rzuty tworzących m_1, m_2, m_3 i m_4, według których jakakolwiek płaszczyzna S równoległa do P_1, przecina jeden i drugi walec. Punkty A, B, C i D, w których tworzące m_1 i m_2 przecinają tworzące m_3 i m_4 należą do krzywej przenikania. Rozwinąwszy powierzchnię boczną jednego z walców wyznaczamy na niej z łatwością punkty A_0, B_0, C_0 i D_0, należące do rozwinięcia krzywej przenikania.

Jeżeli osie dwóch powierzchni obrotowych się przecinają, to krzywa ich przenikania może być wyznaczona za pomocą kul pomocniczych o wspólnym środku w punkcie przecięcia osi /metoda kul/.

Wykreślmy np. pierwszy rzut krzywej przenikania dwóch walców o osiach a i b, przecinających się w punkcie O /rys.396/. Przypuśćmy, że płaszczyzna ab jest równoległa do P_1. Kula jakakolwiek o środku O przecina oba walce według kół, których płaszczyzny są prostopadłe do P_1, a więc których rzuty są prostemi, łączącemi punkty przecięcia konturu widzialnego kuli z konturami walców. Punkty wspólne obu kołom są wspólne obu walcom, a więc należą do krzywej przenikania. Rzuty tych punktów są to oczywiście punkty przecięcia rzutów obu kół. Można łatwo okazać, że rzutem krzywej przenikania w tym przypadku jest hiperbola, dla której rzuty osi walców są średnicami sprzężonemi.



Rys. 396.

R O Z D Z I A Ł XVII.

O POWIERZCHNIACH OBROTOWYCH.

§ 217. Pojęcie ogólne o powierzchniach. Płaszczyzny styczne, styczne główne. Punkty hiperboliczne, paraboliczne i eliptyczne. Przez ruch prostej utworzyć można oczywiście tylko takie powierzchnie, na których leży nieskończenie wiele prostych, jak stożki, walce, powierzchnie rozwijalne, hiperboloid jednopowłokowy, paraboloid hiperboliczny, konoida śruby, powierzchnia śrubowa o ostrym gwincie i t.d. Wszystkie te powierzchnie obejmujemy wspólną nazwą prostokreślnych. Stanowią one przypadek szczególny powierzchni krzywokreślnych, utworzonych ogólnie przez ruch krzywej płaskiej lub skośnej, bądź niezmiennej, bądź zmieniającej swój kształt w sposób ciągły według danego prawa.

Niech będzie na powierzchni Π punkt jakikolwiek P. Połączymy go z jakimkolwiek innym punktem P_1 tej powierzchni i zbliżajmy P_1 do P na jakiejkolwiek krzywej, leżącej na powierzchni i łączącej punkty P i P_1. Granicę położenia prostej PP_1, gdy P_1 zbliża się nieograniczenie do P, nazwiemy styczną t do powierzchni w punkcie P. Jest to więc prosta, mająca z powierzchnią dwa punkty zjednoczone wspólne. Każda płaszczyzna, przechodząca przez styczną t przetnie powierzchnię według krzywej płaskiej stycznej do t w punkcie zetknięcia P.

W każdym punkcie P powierzchni Π istnieje nieskończenie wiele stycznych $t_1, t_2, t_3, \ldots$, albowiem w punkcie P przecina się nieskończenie wiele krzywych leżących na Π. Dowiedziemy, że wszystkie te styczne leżą w jednej płaszczyźnie. W samej rzeczy obierzmy dwie jakiekolwiek styczne w punkcie P: t_1, t_2 i poprowadźmy płaszczyznę $T \equiv t_1 t_2$. Przecina ona Π według krzywej stycznej zarówno do t_1, jak do t_2 w tym samym punkcie P. Punkt ten jest przeto punktem podwójnym /wzgl. punktem odosobnionym krzywej przecięcia i każda prosta $t_3, t_4, t_5 \ldots$ leżąca w płaszczyźnie T i przechodząca przez punkt P ma z tą krzywą, a więc i z powierzchnią dwa punkty zjednoczone wspólne; jest to więc styczna do powierzchni Π w punkcie P.

Płaszczyzna T, w której leżą wszystkie styczne do powierzchni Π w punkcie P, nazywa się <u>płaszczyzną styczną</u> do Π w tym punkcie.-

Prosta prostopadła do T w punkcie P nazywa się normalną do powierzchni w punkcie P.

Z pośród stycznych do powierzchni Π w punkcie P wyróżniamy dwie, zwane stycznemi głównemi, które mają już nie dwa, ale trzy zjednoczone punkty wspólne z krzywą przecięcia, a więc i z powierzchnią Π. Każda z nich jest granicą położenia siecznej, która łączy punkt podwójny P z punktem P_2 lub P_3 jednej z gałęzi krzywej przecięcia, gdy te punkty zbliżają się nieograniczenie do P. Każda płaszczyzna przechodząca przez jedną z tych stycznych przecina powierzchnię według krzywej, która w punkcie P ma punkt przegięcia.

Styczne główne mogą być albo rzeczywiste i różne /punkt P jest wtedy punktem podwójnym krzywej przecięcia/, albo rzeczywiste i zjednoczone /punkt P jest wtedy punktem zwrotu/, albo urojone sprzężone /punkt P jest wtedy punktem odosobnionym krzywej przecięcia/. W pierwszym przypadku punkt P nazywa się punktem hiperbolicznym powierzchni, w drugim - parabolicznym, w trzecim - punktem eliptycznym.

§ 218. Pojęcie ogólne o powierzchniach obrotowych. Równoleżniki i południki. Jeżeli krzywa płaska lub skośna k , sztywno związana z prostą a , obraca się dokoła niej, to powierzchnia przez ruch krzywej k utworzona nazywa się obrotowa. Prosta a nazywa się osią powierzchni. Każdy punkt P krzywej tworzącej k opisuje koło, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi a i którego środek na niej leży. Koło to nazywamy równoleżnikami.

Powierzchnie obrotowe są najpospolitsze z powierzchni spotykanych w technice i w życiu codziennym, że wspomnimy tylko niezliczone ciała otrzymane na tokarni i kole garncarskim.

Ze sposobu, w jaki powstaje powierzchnia obrotowa, wynika, że przez obrót dokoła osi a przesuwać się ona będzie sama w sobie, że zatem może ona powstać przez ruch obrotowy każdej wykreślonej na niej krzywej, która przecina wszystkie równoleżniki.- W szczególności powstanie ona przez obrót krzywej przecięcia powierzchni płaszczyzną przechodzącą przez oś. Krzywa taka nazywa się południkiem powierzchni.- Ponieważ przez obrót o 180° płaszczyzna południka powraca do swego położenia pierwotnego, przechodząc przez położenie wszystkich innych południków, więc wszystkie południki są równe i każdy z nich jest symetryczny względem osi.

Przez swoją oś i południk powierzchnia obrotowa jest wyznaczona. Przez każdy punkt powierzchni przechodzi jeden równoleżnik i jeden południk; przecinają się one pod kątem prostym, gdyż płaszczyzna każdego południka przecina każdy równoleżnik prostokątnie.

Płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej w danym jej punkcie P jest jak zawsze, wyznaczona przez dwie jakiekolwiek styczne do powierzchni w tym punkcie, a więc przez styczną do równoleżnika i styczną do południka przechodzącego przez punkt P.

Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach jednego południka są prostopadłe do płaszczyzny tego południka, albowiem przechodzą przez prostopadłe do niej styczne do równoleżnika. Płaszczyzny te powłóczą walec, rzucający powierzchnię obrotową w kierunku prostopadłym do płaszczyzny południka.

Jeżeli oś jest prostopadła do P_1, to południk, którego płaszczyzna jest równoległa do P_2, nazywa się <u>południkiem głównym.</u> Jest on konturem rzeczywistym pionowym powierzchni obrotowej; konturem widzialnym pionowym jest równy mu rzut pionowy tego południka.

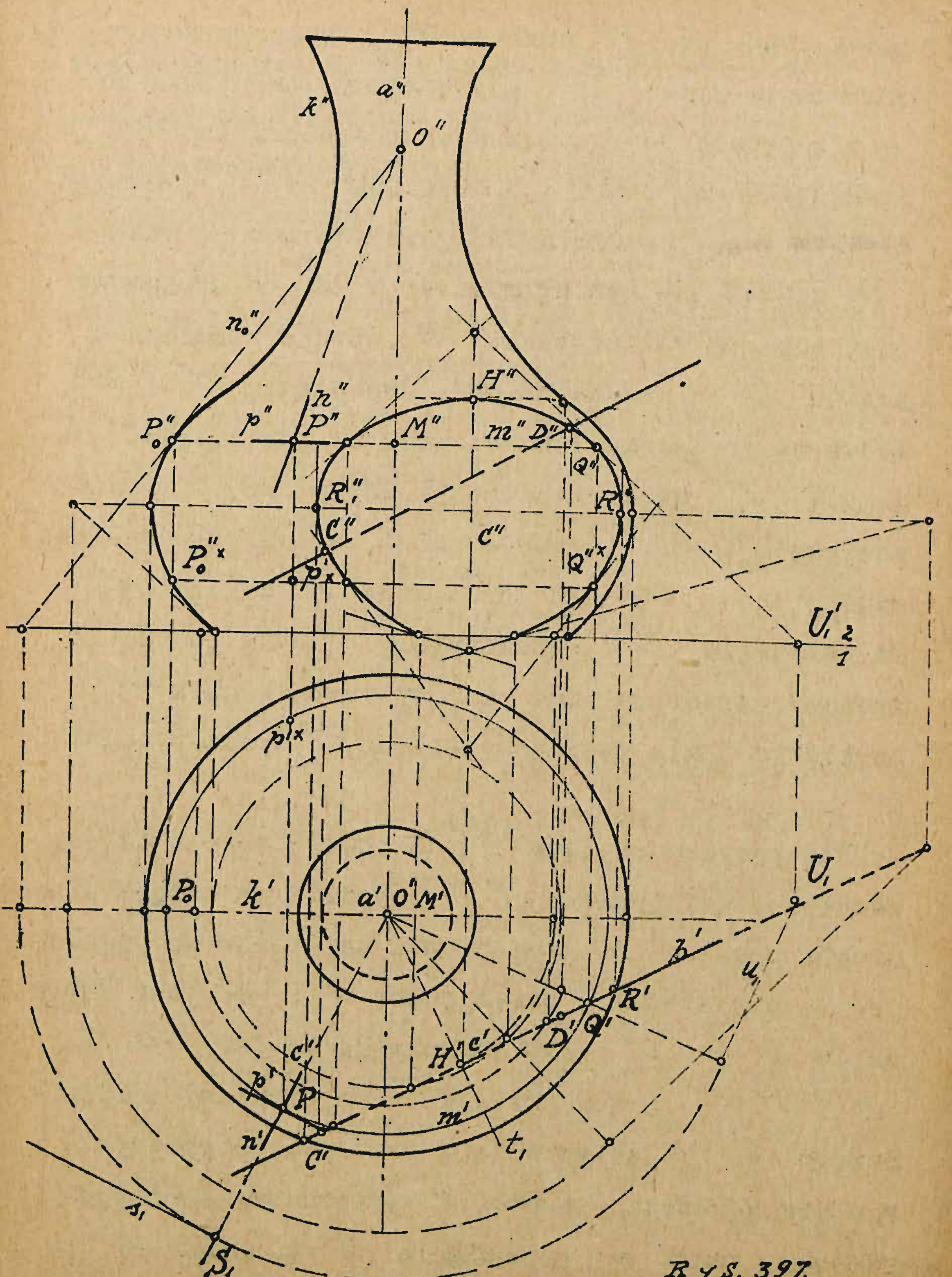
Ponieważ przez obrót dokoła osi płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej przystanie do innej płaszczyzny stycznej, a punkt zetknięcia pozostanie na tym samym równoleżniku, więc:

Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach jednego równoleżnika powłóczą naogół stożek obrotowy, którego osią jest a, a tworzącemi są styczne do południków w punktach przecięcia ich z tym równoleżnikiem.

W dwóch wypadkach atoli stożek ten wyrodnieje: 1/ gdy styczna do południka jest równoległa do osi; wtedy płaszczyzny styczne powłóczą walec a punkty zetknięcia leżą na równoleżniku maximum /równik/ lub minimum /koło szyjne/; są to kontury rzeczywiste poziome, równe zresztą konturom widzialnym poziomym; 2/ gdy styczna do południka jest prostopadła do osi, wtedy płaszczyzny styczne są zjednoczone w płaszczyźnie prostopadłej do osi.

§ 219. Rzuty punktu leżącego na powierzchni obrotowej. Zadanie. Powierzchnia obrotowa jest dana przez rzut poziomy osi prostopadłej do P_1, oraz przez rzut pionowy południka głównego /kontur pionowy/. Mając jeden rzut punktu leżącego na powierzchni wyznaczyć rzut drugi. Niech k'' /rys. 397/ będzie rzutem pionowym południka głównego, $a'a''$ rzutami osi obrotu; prócz tego dany jest jeden rzut, np. P'' punktu P, leżącego na powierzchni. Przez P'' poprowadźmy równoległą do X_{12}; będzie to rzut pionowy równoleżnika m, przechodzącego przez P. Odcinek $P_0''M''$ jest promieniem tego równoleżnika; jeżeli przeto z punktu a' zakreślimy tym promieniem koło, to otrzymamy rzut poziomy równoleżnika m. Linja rzędnych punktu P'' wyznacza na m' dwa punkty P' i P'^{x}, które są poziomemi rzutami punktów powierzchni, mających P'' za rzut pionowy. Gdyby dany był rzut poziomy P' punktu powierzchni, a należało znaleźć rzut pionowy P'', to obróciwszy P' dokoła a' do położenia P_0' i wyznaczywszy P_0'' na południku głównym, kreślimy rzut pionowy równoleżnika m, na którym linja rzędnych punktu P' wyznaczy punkt P''.

Płaszczyzna styczna S do powierzchni w tak wyznaczonym jej punkcie $P'P''$ będzie określona przez prostą poziomą p oraz prostą największego spadku n, przechodzące przez punkt P; p' jest styczną do m', p'' jest równoległą do osi X_{12}; $n' = P'M'$; aby znaleźć n'', obracamy południk punktu P do przystania z południkiem głównym i w nowem położeniu punktu P prowadzimy do niego styczną; punkt jej przecięcia O z osią a



a"
k"
O"
n₀"
H"
h"
P₀"
p"
P"
M"
m" D"
Q"
R₁"
R"
C"
C"
P₀"x
pₓ
Q"x
U₁'
2
1
p'x
P₀
k'
a' O' M'
U₁
h'
u₁
R'
D'
Q'
H'
c'
c"
p'
P
m'
n'
C'
t₁
s₁
S₁

Rys. 397.

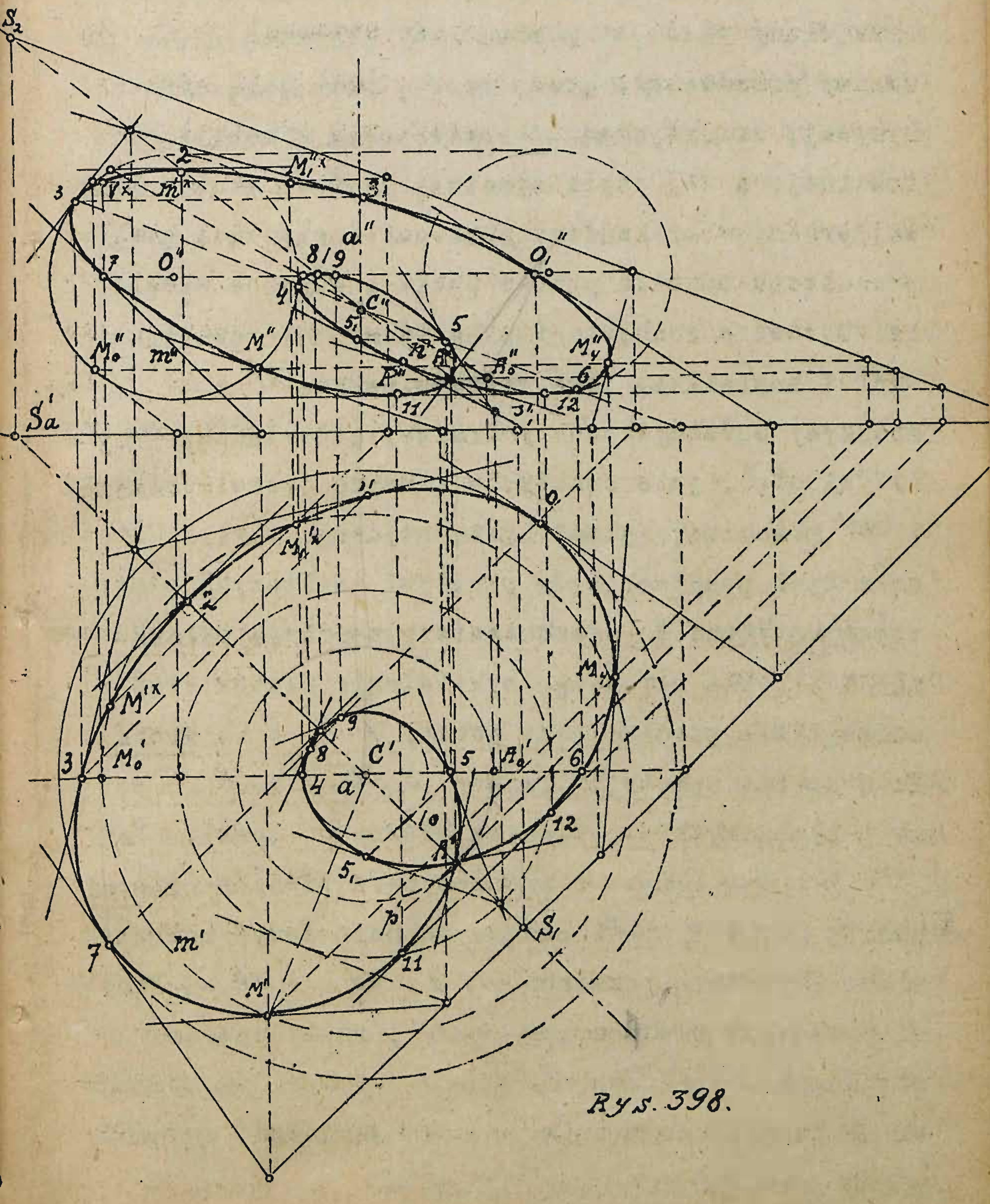
przy obrocie pozostaje bez ruchu, zatem $O''P''\equiv n''$ Ślad poziomy s_1 płaszczyzny stycznej $S=pn$ będzie styczny do koła, zakreślonego w płaszczyźnie P_1 przez ślad S_1 prostej OP i równoległy do p'.

§ 220. Punkty przebicia powierzchni obrotowej prostą. Zadanie. Wyznaczyć punkty przebicia danej powierzchni obrotowej prostą $b'b''$. Niechaj powierzchnia obrotowa będzie dana za pomocą osi $a'a''$ i południka głównego k'' /rys.397/. Wyznaczmy rzut pionowy krzywej, według której płaszczyzna B, rzucająca poziomo prostą b przecina powierzchnię.- Rzut poziomy tej krzywej przystaje do śladu poziomego płaszczyzny B t.j. do b'; biorąc na b' różne punkty Q', znajdziemy na zasadzie poprzedniego artykułu punkty Q'' należące do szukanego pionowego rzutu krzywej przecięcia. Rozwiązanie zadania znacznie zostanie ułatwione dzięki symetrji krzywej przecięcia; osią tej symetrji jest prosta c przecięcia płaszczyzny B_1, z płaszczyzną T, przechodzącą przez oś prostopadle do B_1. Rzut pionowy H'' punktu H, którego poziomy rzut $H'\equiv b't_1$, będzie najwyższym lub najniższym punktem krzywej, w którym styczna jest równoległa do P_1, a jej rzut pionowy równoległy do x_{12}; w punktach R i R'

równika styczne będą prostopadłe do X_{12}. Styczne w innym jakimkolwiek punkcie Q krzywej przecięcia znajdziemy jako przecięcie płaszczyzny B_1 z płaszczyzną styczną do powierzchni w punkcie Q; rzut pionowy tej stycznej otrzymamy przez połączenie punktu Q'' z rzutem pionowym punktu, w którym b' przecina ślad v_1 płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie Q. Rzuty pionowe punktów przebicia C i D powierzchni prostą b będą punktami, w których b'' przecina rzut pionowy krzywej przecięcia; rzuty poziome tych punktów wyznaczone zostaną na b' przez linję rzędnych punktów C'' i D''.

§ 221. Przecięcie powierzchni obrotowej płaszczyzną styczną. Zadanie.

Powierzchnię utworzoną przez obrót koła dokoła prostej zewnętrznej leżącej w jego płaszczyźnie, przeciąć płaszczyzną styczną do tej powierzchni w danym jej punkcie hiperbolicznym $A'A''$. Wyznaczyć styczne główne w punkcie A. Południkiem tej powierzchni zwanej pierścieniem kołowym są dwa koła O i O_1, symetryczne względem osi a_1a_{11} /rys.398/. Niechaj oś $a'a''$ będzie prostopadła do P_1 i niechaj dany będzie rzut poziomy A' punktu A, leżącego na powierzchni, znajdziemy A'' i wyznaczmy li-


S2
S'a
2
3
7
O"
M"1
3'1
a"
8/9
C"
O"1
4'
5
5'1
M"0
m"
M"
R"
R'"
P"
R"0
M"4
6
11
12
3'1
M'4
M'1
M'IX
M'0
3
C'
5
R'0
6
4
a
10
R'
5'1
p'
S1
7
m'
M'
11
12

Rys. 398.

nję poziomą $p'p''$ i linję największego spadku $n'n''$ oraz ślady s_1 i s_2 płaszczyzny stycznej pn. Zauważmy przedewszystkiem, że n jest osią symetrji krzywej; dzięki czemu n' jest osią symetrji prostokątnej, a n'' osią symetrji ukośnej rzutów krzywej przecięcia. Każdemu punktowi i stycznej krzywej przecięcia odpowie przeto punkt i styczna symetryczna. Obrawszy dowolnie rzut poziomy m' równoleżnika m i znalazłszy jego rzuty pionowe m'' i m''^x, wyznaczymy odrazu 4 punkty krzywej przecięcia M, M_1, M^x i M_1^x, jako punkty, w których równoleżniki m i m^x przecinają płaszczyznę styczną $s_1 s_2$. Styczne w tych punktach będą prostemi, w których płaszczyzny styczne do pierścienia przecinają płaszczyznę $s_1 s_2$. Dla szybkiego wykreślenia rzutów krzywej szczególnie pomocne będą punkty 1 i 2, które leżą na osi symetrji, punkty 3, 4, 5 i 6, leżące w płaszczyźnie południka głównego, punkty 7, 8, 9 i 10, leżące w płaszczyźnie równika oraz punkty 11 i 12 leżące na najniższym równoleżniku. Styczne w punktach 1, 2, 11 i 12 są linjami poziomemi płaszczyzny $s_1 s_2$; rzuty poziome stycznych w punktach 7, 8, 9 i 10 są stycznemi do równika względnie do koła szyjnego; wreszcie rzuty pionowe stycznych w punktach $3, 4, 5$ i 6 są stycznemi do południka głównego. Styczne do obu gałęzi krzywej, przecinających się w punkcie podwójnym $A'A''$ są stycznemi głównemi.

SPIS TREŚCI.

WSTĘP.

CZĘŚĆ I.

Rzuty prostokątne.

Rozdział I. Punkt, prosta i płaszczyzna.

Rozdział IV. Przesuwanie równoległe osi rzutów

CZĘŚĆ II.

A k s o n o m e t r j a .

Rozdział V. Aksonometrja prostokątna.

CZEŚĆ III.

P e r s p e k t y w a .

Rozdział VIII. Prosta, punkt i płaszczyzna.

Rozdział IX. Zagadnienia położenia.

Rozdział X. Zagadnienie miarowe.

Rozdział XI. Perspektywa stosowana.

CZĘŚĆ IV.

K r z y w e , s t o ż k i i p o w i e r z c h n i e d r u g i e g o s t o p n i a .

Rozdział XII. Szeregi i pęki rzutowe.

Rozdział XIV. Powierzchnie drugiego stopnia

CZĘŚĆ V.

Krzywe i powierzchnie w ogólności.

Rozdział XV. Krzywe płaskie.

Rozdział XVI. Krzywe skośne.

Rozdział XVII. O powierzchniach obrotowych.