ROZDZIAŁ XII.

Prawa Ohma i Kirchhoffa dla prądów stałych.

Prądy stałe są niezmienne w czasie, a siła ich na całej długości przewodnika nierozgałęzionego jest jedna i ta sama; wszystkie więc, poprzednio wyprowadzone wzory, mogą być zastosowane wprost do prądów stałych, przyczem znaczki t można opuścić, ponieważ odpowiednie wielkości są niezmienne w czasie.

Dla przypomnienia zestawimy wzory praw zasadniczych.

P r a w o O h m a:

rys. 85 . . . . $i = \frac{e}{r}$, ... (1)

rys. 86 . . . . $i = \frac{e}{\Sigma r}$, ... (2)

rys. 87 . . . . $i = \frac{e + \Sigma E}{r}$, ... (3)

rys. 88 . . . . $i = \frac{\Sigma E}{\Sigma r}$ . . . . (4)

P r a w a K i r c h h o f f a:

według prawa pierwszego:

$\Sigma i = o$, ... (5)

według prawa drugiego:

$\Sigma i \,.\, r = \Sigma E$. . . . . (6)

Chcąc ułatwić zastosowanie tych praw w praktyce, podaję niżej szereg przykładów.

1. **Opór pojedyńczy.** Obliczyć siłę prądu w napowietrznym przewodniku tramwajowym o przekroju 50 mm^2, przy spadku napięcia, wynoszącym 12 woltów na długości jednego kilometra.

Dla rozwiązania tego zagadnienia znajdziemy przedewszystkim, na podstawie wzoru podanego w rozdziale V, opór drutu. Opór właściwy drutów tramwajowych, wyrabianych z miedzi, przyjmiemy $\frac{1}{57}$.

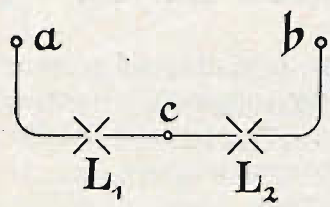
Przy przekroju 50 mm^2 opór takiego drutu wyniesie:

$$\frac{1}{57} \cdot \frac{1000}{50} = 0{,}351\ \Omega\,.$$

Spadek napięcia na długości jednego kilometra stanowi 12 woltów, to znaczy, że różnica potencjałów pomiędzy dwoma punktami drutu, znajdującemi się na odległości jednego kilometra, wynosi 12 woltów; wobec tego prąd obliczyć należy na podstawie równania (1) prawa Ohma:

$$i = \frac{12}{0{,}351} = 34{,}2 \text{ ampera.}$$

2. **Dwa opory połączone w szereg.** Obwód składa się z dwuch lampek żarowych L_1 i L_2 (rys. 91); lampka L_1 ma nitkę węglową, której opór wynosi 200 Ω, lampka zaś L_2 posiada nitkę metalową o oporze 750 Ω. Napięcie pomiędzy punktami a i b równa się 220 woltom. Należy określić prąd, przepływający przez lampki, i napięcie, istniejące na poszczególnych lampkach, t. j. między punktami a i c i c i b.



Rys. 91.

Stosując wzór (2) prawa Ohma, znajdziemy: [1]

$$i = \frac{220}{200 + 750} = 0{,}2315 \text{ amp.}$$

Po przekształceniu wzoru (1) otrzymamy:

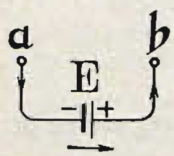
$$e = i \,.\, r.$$

Zastosujmy ten wzór do poszczególnych części obwodu. Oznaczmy napięcie pomiędzy punktami a i c, przez e_1, a pomiędzy punktami c i b przez e_2; mając na uwadze, że prąd w obwodzie nierozgałęzionym jest wszędzie ten sam, otrzymamy:

$$e_1 = 0{,}2315 \,.\, 200 = 46{,}3 \; V.$$
$$e_2 = 0{,}2315 \,.\, 750 = 173{,}7 \; V.$$

220

3. **Przewodnik, w którym kierunek siły elektromotorycznej jest zgodny z kierunkiem prądu.** Pomiędzy końcówkami a i b (rys. 92) mamy napięcie 6 woltów, powstające pod wpływem szeregu sił elektromotorycznych, z których jedną mamy w cząstce obwodu ab. Przyjmujemy końcówkę a za dodatnią a b za ujemną, t. j. że w a potencjał jest wyższy, a w b niższy. Napięcie więc zwrócone jest od a do b, ponieważ dodatni kierunek napięcia zawsze przyjmujemy [2]) od tego miejsca, gdzie potencjał jest wyższy, do tego miejsca, gdzie potencjał — niższy. Siła elektromotoryczna ogniwa galwanicznego, włączonego pomiędzy końcówkami a i b, wynosi 1,5 wolta i jest zwrócona od a do b, a całkowity opór cząstki obwodu ab — 5 Ω. Według powyższych danych mamy obliczyć siłę prądu.



Rys. 92.

W tym przypadku posiłkujemy się wzorem (3) prawa Ohma, zakładając, że prąd płynie od a do b.

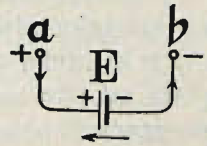
$$i = \frac{6 + 1{,}5}{5} = 1{,}5 \text{ amp.}$$

---

[1]) Opór przewodników łączących pomijamy, jako bardzo mały w porównaniu do oporu lamp.
[2]) Patrz rozdział III.

Siłę prądu i otrzymaliśmy dodatnią, prąd więc płynie rzeczywiście od a do b.

4. **Przewodnik, w którym kierunek siły elektromotorycznej jest przeciwny kierunkowi prądu.** Tak samo jak w przykładzie poprzednim na końcówkach a, b (rys. 93), mamy napięcie, równe 6 woltom. Końcówka a jest dodatnia, a b ujemna. Ogniwo galwaniczne włączyliśmy teraz w ten sposób, że siła elektromotoryczna tego ogniwa jest zwrócona od b do a. Wielkość tej siły elektromotorycznej równa się 2,5 wolta, a całkowity opór pomiędzy punktami a i b — 5 Ω.



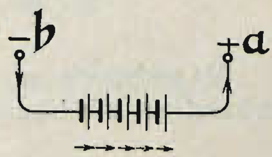
Rys. 93.

W celu obliczenia siły prądu zakładamy, że prąd płynie od a do b, i na podstawie wzoru (3) prawa Ohma otrzymujemy:

$$i = \frac{6 - 2{,}5}{5} = 0{,}7 \text{ amp.}$$

I w tym przypadku otrzymaliśmy siłę prądu dodatnią, zatem prąd płynie rzeczywiście od a do b.

5 **Przewodnik, w którym mamy kilka sił elektromotorycznych, skierowanych w jedną stronę.** Na końcówkach a, b mamy napięcie 6 woltów, skierowane od a do b, a — plus, b — minus (rys. 94). Pięć ogniw galwanicznych włączyliśmy w ten sposób, że wszystkie siły elektromotoryczne skierowane są od b do a. Siła elektromotoryczna każdego ogniwa wynosi 2 wolty, a opór całkowity części obwodu pomiędzy punktami a i b — 8 Ω.



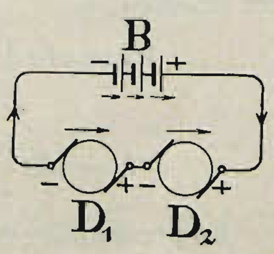
Rys. 94.

W celu obliczenia siły prądu zakładamy, że prąd płynie od a do b, t. j. w kierunku napięcia na końcówkach a, b. Według wzoru (3) prawa Ohma:

$$i = \frac{6 - 5 \cdot 2}{8} = -\ 0{,}5 \text{ amp.}$$

Wynik obliczenia wskazuje, że prąd, wynoszący pół ampera, płynie w kierunku odwrotnym do kierunku, który założyliśmy.

6. **Obwód zamknięty z kilku siłami elektrycznemi.** W obwodzie (rys. 95) mamy baterję akumulatorów B, składającą się z 60 ogniw, połączonych w szereg w ten sposób, że siły elektromotoryczne poszczególnych ogniw są zwrócone w jedną stronę, pozatem są dwie prądnice (dynamomaszyny) D_1 i D_2, które wytwarzają siły elektromotoryczne w kierunkach, wskazanych na rysunku. Siła elektromotoryczna każdego ogniwa baterji wynosi 2,5 V, a opór wewnętrzny 0,001 Ω. Siły elektromotoryczne prądnic 120 V i 60 V, a ich opory wewnętrzne 0,2 Ω i 0,3 Ω. Opór przewodników, łączących między sobą poszczególne przyrządy w rozważanym obwodzie stanowi 0,04 Ω.



Rys. 95.

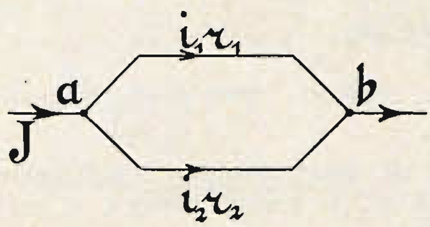
W celu obliczenia siły prądu w takim obwodzie przyjmiemy dowolnie, że prąd ten płynie np. w kierunku ruchu wskazówek zegara.

Według wzoru (4) prawa Ohma:

$$i = \frac{2{,}5 \,.\, 60 - 60 - 120}{0{,}001 \,.\, 60 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4} = -50 \text{ amp.}$$

Prąd otrzymaliśmy ujemny, co świadczy o tem, że w rzeczywistości prąd płynie w kierunku odwrotnym do założonego i wskazanego na rysunku. Prąd płynie tu w kierunku sił elektromotorycznych prądnic, ponieważ suma tych sił jest większa od siły elektromotorycznej całej baterji, stanowiącej sumę sił elektromotorycznych poszczególnych ogniw.

7. Rozgałęzienie na dwa prądy. Mając część obwodu (rys. 96), w której znajduje się rozgałęzienie na dwa przewody, można łatwo na podstawie praw Kirchhofa i Ohma znaleźć wyrażenia matematyczne dla prądów i_1 i i_2, przepływających w poszczególnych gałęziach.



Rys. 96.

Oznaczmy przez J prąd przed rozgałęzieniem, a przez r_1 i r_2 opory rozgałęzień.

Na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa, według wzoru (5) możemy dla punktu a napisać:

$$J - i_1 - i_2 = 0.$$

Na podstawie zaś drugiego prawa Kirchhoffa według wzoru (6), dla obwodu zamkniętego, składającego się z oporów r_1 i r_2, wypada:

$$i_1 \,.\, r_1 - i_2 \,.\, r_2 = 0.$$

Rozwiązując powyższe dwa równania, otrzymamy:

$$i_1 = J \,.\, \frac{r_2}{r_1 + r_2}; \qquad i_2 = J \,.\, \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

Z tych wzorów wynika, że:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Prądy rozgałęzione są odwrotnie proporcjonalne do oporów tych gałęzi, w których przepływają.

P r z y k ł a d l i c z b o w y:

$$J = 100 \text{ amp.}, \quad r_1 = 1\ \Omega, \quad r_2 = 99\ \Omega.$$

$$i_1 = 100 \frac{99}{99 + 1} = 99 \text{ amp.}; \qquad i_2 = 100 \frac{1}{99 + 1} = 1 \text{ amp.}$$

Po przewodniku o małym oporze płynie 0,99 całego prądu, a po przewodniku o dużym oporze zaledwie 0,01 całego prądu.

8. Opór wypadkowy przewodników rozgałęzionych. W punkcie a (rys. 97) przewodnik rozgałęzia się na kilka przewodników, połączonych równolegle. Opory tych przewodników są $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_n$. Oznaczmy prąd przed rozgałęzieniem przez J, a prądy w poszczególnych gałęziach przez i_1, i_2, i_3 . . . . . . i_n.

Znajdźmy opór, jaki miałby jeden przewodnik, który, włączony pomiędzy punktami a i b zamiast wszystkich oporów równoległych, przepuściłby w tych samych warunkach cały prąd J.

Gdy napięcie pomiędzy punktami a i b jest e, wtedy na zasadzie prawa Ohma dla poszczególnych przewodników mamy:

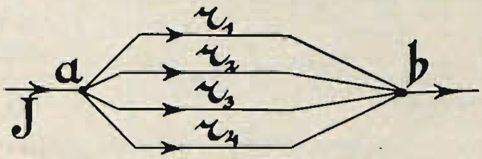
$$i_1 = \frac{e}{r_1},$$

$$i_2 = \frac{e}{r_2},$$

$$i_3 = \frac{e}{r_3},$$

. . . .

$$i_n = \frac{e}{r_n}.$$



Rys. 97.

Dodając te równania, otrzymamy:

$$J = e \, . \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \ldots\ldots + \frac{1}{r_n} \right).$$

Oznaczmy przewodnictwo poszczególnych gałęzi przez: k_1, k_2, k_3 . . . . . k_n, wtedy będziemy mieli:

$$J = e \, . \left(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots . + k_n \right).$$

Sumę poszczególnych przewodnictw nazwiemy **przewodnictwem wypadkowym.** Oznaczmy to przewodnictwo przez K, wtedy:

$$J = e \, . \, K,$$

gdzie:

$$K = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots . + k_n.$$

Przewodnictwo wypadkowe szeregu równolegle połączonych przewodników równa się sumie przewodnictw przewodników poszczególnych.

Opór wypadkowy R jest odwrotnością przewodnictwa, więc:

$$R = \frac{1}{K}.$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots . + \frac{1}{r_n}}.$$

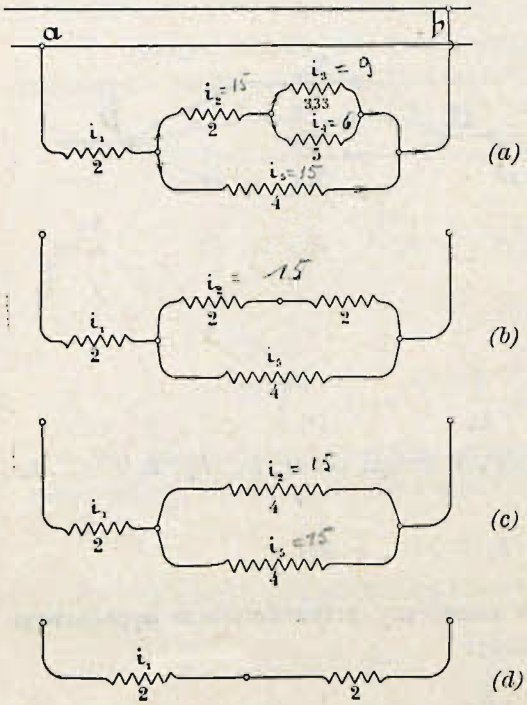
W przypadku szczególnym, gdy mamy tylko dwa równoległe przewodniki:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{r_1 \, . \, r_2}{r_1 + r_2}.$$

A gdy mamy n przewodników o jednakowym oporze r, połączonych równolegle, to:

$$R = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{r}} = \frac{r}{n}.$$

9. **Obliczyć prądy w układzie przewodów rozgałęzionych.** Pomiędzy punktami a i b (rys. 98 a) istnieje napięcie 120 V. Wielkości poszczególnych oporów wskazane są na rysunku. W celu obliczenia siły prądów i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, zastępujemy dany układ przewodników stopniowo coraz prostszym.



Rys. 98.

Przedewszystkim łączymy opory: 3,33 Ω i 5 Ω w jeden wypadkowy według wzoru § poprzedniego: $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

$$\frac{1}{3{,}33} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}.$$

Zastępczy opór wynosi więc 2 Ω (rys. 98 b). Dalej z dwuch oporów 2 Ω i 2 Ω, połączonych w szereg, wyliczamy opór wypadkowy:

$$2\,\Omega + 2\,\Omega = 4\,\Omega.$$

W ten sposób mamy już układ wskazany na rys. 98 c. Łącząc razem dwa równoległe opory 4 Ω i 4 Ω, znajdziemy:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

czyli opór wypadkowy 2 Ω i w ten sposób przejdziemy do układu na rys. 98 d. Prąd i_1 w tym układzie przewodów znajdziemy ze wzoru:

$$i_1 = \frac{120}{2+2} = 30 \text{ amp.}$$

Prądy i_2 i i_5 (rys. 98 c) będą:

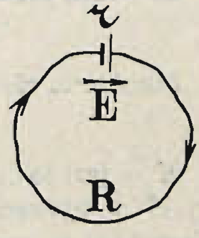
$$i_2 = i_5 = \frac{30}{4+4} \cdot 4 = 15 \text{ amp.}$$

Prądy i_3 i i_4 (rys. 98 a) wypadną:

$$i_3 = \frac{15}{3{,}33+5} \cdot 5 = 9 \text{ amp.}$$

$$i_4 = \frac{15}{3{,}33+5} \cdot 3{,}33 = 6 \text{ amp.}$$

10. Moc maksymalna w obwodzie zewnętrznym. Mamy obwód (rys. 99), składający się z jednego ogniwa galwanicznego i drutu, łączącego pomiędzy sobą jego końcówki. Oznaczmy przez r opór wewnętrzny ogniwa, przez R opór drutu, stanowiącego, tak zwany, obwód zewnętrzny, przez E siłę elektromotoryczną ogniwa.



Rys. 99.

Należy wyznaczyć, jaki ma być opór R w stosunku do r, aby ilość ciepła, wydzielającego się w obwodzie zewnętrznym, była maksymalna. Że taki opór być musi, wynika to z następującego rozumowania: Moc prądu, równoważna ilości ciepła, wywiązującej się w jednostce czasu w obwodzie zewnętrznym przy sile prądu i, jest:

$$i^2 \,.\, R.$$

Dla obwodu zamkniętego (rys. 99), według wzoru (4) prawa Ohma:

$$i = \frac{E}{r + R}.$$

Po podstawieniu tego wyrazu we wzór poprzedni, otrzymamy:

$$\frac{E^2 \,.\, R}{(r + R)^2}, \text{ albo } \frac{E^2}{\left(\frac{r}{R} + 1\right)^2 .\, R}.$$

Te dwa wyrażenia mocy prądu wskazują, że przy $R = 0$ i przy $R = \infty$, moc ta będzie zerem, istnieje przeto pewna wartość oporu R, przy której powyższa moc będzie maksymalna.

Tę wartość oporu R, przy której omawiana moc stanie się maksymalną, znajdziemy, wyznaczając pochodną powyższego wyrazu względem R i przyrównywając tę pochodną do zera.

Pochodna wyrazu:

$$\frac{E^2 \,.\, R}{(r + R)^2}$$

względem R będzie:

$$\frac{E^2}{(r + R)^2} - \frac{2 \,.\, E^2 \,.\, R}{(r + R)^3}.$$

Pochodna ta ma być równa zeru, a więc:

$$\frac{E^2}{(r + R)^2} - \frac{2 \,.\, E^2 \,.\, R}{(r + R)^3} = 0,$$

lub:

$$(r + R) - 2\,R = 0,$$

skąd:

$$r = R.$$

Wynik tych rozważań matematycznych wskazuje, że w obwodzie zewnętrznym ilość ciepła maksymalna wytworzy się wtedy, gdy opór obwodu zewnętrznego równać się będzie oporowi obwodu wewnętrznego.

Należy jednak zwrócić uwagę jeszcze na jeden szczegół. Rozważając wspomniane urządzenie jako przyrząd ogrzewający i przypuszczając, że tylko ciepło obwodu zewnętrznego może być zużytkowane, przekonamy się łatwo, że tego rodzaju urządzenie nie będzie bardzo oszczędne.

Ze wzoru prawa Ohma wynika, że.

$$E = i \,.\, r + i \,.\, R.$$

Mnożąc to równanie przez i, otrzymamy:

$$E \,.\, i = i^2 \,.\, r + i^2 \,.\, R.$$

$E \,.\, i$ jest to cała moc prądu, dostarczona przez ogniwo galwaniczne. Z tej mocy $i^2 \,.\, r$ wytwarza ciepło wewnątrz ogniwa, a $i^2 \,.\, R$ w obwodzie zewnętrznym. Ponieważ zaś w przypadku rozważanym:

$$r = R,$$

przeto

$$i^2 \,.\, r = i^2 \,.\, R$$

i

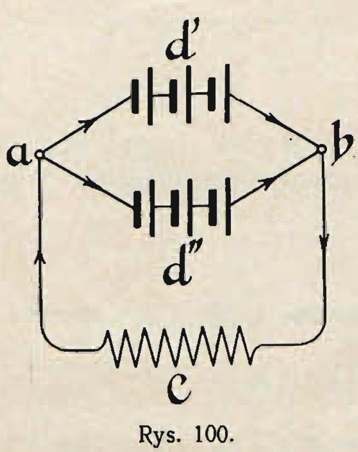
$$i^2 \,.\, R = \frac{E \,.\, i}{2}.$$

Stosunek energji pożytecznej, otrzymanej z tego przyrządu, do ilości energji dostarczonej do przyrządu nazywamy jego sprawnością. Gdy moc prądu jest stała, stosunek energji równa się stosunkowi mocy i wtedy sprawność rozważanego urządzenia będzie:

$$\eta = \frac{i^2 \,.\, R}{E \,.\, i} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Dla urządzeń elektrycznych o prądach silnych jest to sprawność mała.

11. **Prąd w obwodzie baterji ogniw.** Obliczmy prąd w części zewnętrznej obwodu, zasilanego z baterji ogniw galwanicznych (rys. 100). Baterja utworzona jest z m równoległych grup ogniw. Każda grupa składa się z n ogniw, połączonych w szereg. Na rysunku są wskazane dwie grupy równoległe, po trzy ogniwa w każdej grupie, połączone w szereg. Wszystkie ogniwa są jednakowe. Opór każdego ogniwa wynosi r omów, a siła elektromotoryczna — E woltów. Opór obwodu zewnętrznego jest R. Opory drutów, łączących pomiędzy sobą poszczególne ogniwa, włączone są do oporu ogniw.



Rys. 100.

Oznaczmy prądy w poszczególnych grupach ogniw przez $i_1, i_2, i_3, \ldots . i_m$, a prąd w części zewnętrznej obwodu przez J. Dla każdego obwodu zamkniętego $acbd'a$, $acbd''a$ i t. d. możemy według drugiego prawa Kirchhoffa ułożyć równania następujące:

$$JR + i_1 \,.\, n \,.\, r = n \,.\, E,$$
$$JR + i_2 \,.\, n \,.\, r = n \,.\, E,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$JR + i_m \,.\, n \,.\, r = n \,.\, E,$$

a dodając je, otrzymamy:

$$m \,.\, JR + n \,.\, r \,.\, (i_1 + i_2 + \ldots + i_m) = m \,.\, n \,.\, E.$$

Na zasadzie pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$J = i_1 + i_2 + \ldots + i_m,$$

a więc:

$$m \,.\, J \,.\, R + n \,.\, r \,.\, J = m \,.\, n \,.\, E,$$

skąd:

$$J = \frac{n \,.\, E}{R + \frac{n \,.\, r}{m}}.$$

Jeżeli baterję stanowi tylko jedna grupa, utworzona z n ogniw, połączonych w szereg, wtedy: $m = 1$, a

$$J = \frac{n \,.\, E}{R + n \,.\, r}.$$

Baterja, składająca się z m ogniw, połączonych równolegle, jak widać z ogólnego wzoru, wytworzy prąd:

$$J = \frac{E}{R + \frac{r}{m}}.$$

W tym przypadku w ogólnym wzorze $n = 1$.

12. **Warunek największości prądu.** Załóżmy, że mamy utworzyć baterję z pewnej liczby ogniw, którą oznaczymy przez p. Trzeba określić, na ile grup równoległych należy podzielić całą liczbę ogniw, aby w danym obwodzie zewnętrznym acb (rys. 100) otrzymać prąd najsilniejszy.

Jeżeli utworzymy m grup po n ogniw w każdej grupie, to:

$$p = m \,.\, n,$$

stąd:

$$m = \frac{p}{n}.$$

W poprzednim przykładzie wyprowadziliśmy wzór:

$$J = \frac{n \,.\, E}{R + \frac{n \,.\, r}{m}}.$$

Rugując w tym wzorze m, przez podstawienie na miejsce m wyrazu $\frac{p}{n}$, otrzymamy:

$$J = \frac{n \,.\, E}{R + \frac{n^2 \,.\, r}{p}}.$$

W celu określenia warunków, w których prąd będzie największy, znajdujemy pochodną tego wyrazu względem n i zakładamy, że ta pochodna równa się zeru:

$$\frac{dJ}{dn} = \frac{E}{R + \frac{n^2 . r}{p}} - \frac{2 . E . n^2 . \frac{r}{p}}{\left(R + \frac{n^2 . r}{p}\right)^2} = 0,$$

albo:

$$R + \frac{n^2 . r}{p} - \frac{2 . n^2 . r}{p} = 0,$$

skąd:

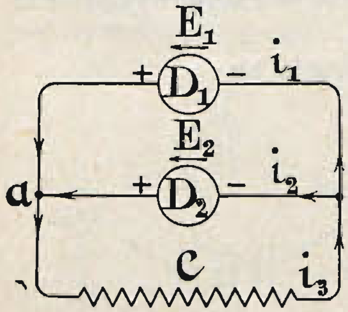
$$R = \frac{n^2 . r}{p} = \frac{n . r}{m}.$$

Wyraz $\frac{n . r}{m}$ stanowi opór wewnętrzny baterji; mamy tu m oporów równoległych, z których każdy składa się z n oporów, połączonych w szereg, a każdy ze składowych oporów wynosi r omów.

Na podstawie otrzymanych powyżej wyników, warunek największości prądu, przepływającego przez dany opór z baterji, można wyrazić w sposób następujący: **ogniwa powinny być połączone ze sobą w ten sposób, aby opór wewnętrzny baterji równał się danemu oporowi zewnętrznemu.**

Zwykle można osiągnąć ten warunek tylko w przybliżeniu, ponieważ przez zmianę układu ogniw nie można otrzymać ciągłej zmiany oporu wewnętrznego baterji w dowolnych granicach.

13. **Połączenie równoległe dwuch różnych źródeł prądu.** Mamy obwód (rys. 101), utworzony z dwuch źródeł prądu: D_1 i D_2 i przewodnika acb. Kierunki sił elektromotorycznych źródeł prądu wskazane są na rysunku. Siła elektromotoryczna $E_1 = 120\ V$, a $E_2 = 100\ V$. Nadto znane są także opory części poszczególnych obwodu, mianowicie opór części aD_1b wynosi 0,2 Ω, części aD_2b — 0,5 Ω, a części acb — 2 Ω. Według tych danych obliczymy wielkości i kierunki prądów w poszczególnych częściach obwodu.



Rys. 101.

Części obwodu nierozgałęzionych mamy tutaj trzy: aD_1b, aD_2b i acb. W każdej więc z nich będzie płynął inny prąd; oznaczymy te prądy w tejże kolei przez i_1, i_2, i_3 i przyjmiemy zupełnie dowolne kierunki prądów, wskazane na rysunku.

Według pierwszego prawa Kirchhoffa układamy równanie:

$$i_3 - i_1 - i_2 = 0,$$

a według drugiego prawa Kirchhoffa dwa równania: jedno dla obwodu aD_1bca:

$$0{,}2 . i_1 + 2 . i_3 = 120,$$

a drugie dla obwodu aD_2bca:

$$0{,}5 . i_2 + 2 . i_3 = 100.$$

Rugując za pomocą pierwszego równania z dwuch następnych wielkość i_3, otrzymamy:

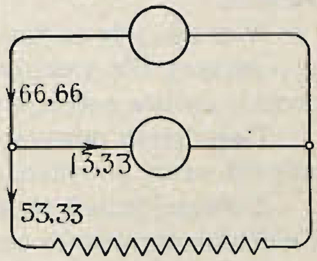
$$2{,}2 \,.\, i_1 + 2 \,.\, i_2 = 120,$$
$$2{,}5 \,.\, i_2 + 2 \,.\, i_1 = 100.$$

Z tych dwuch równań otrzymujemy:

$$i_1 = 66{,}66 \; A,$$
$$i_2 = -13{,}33 \; A,$$

a według równania pierwszego:

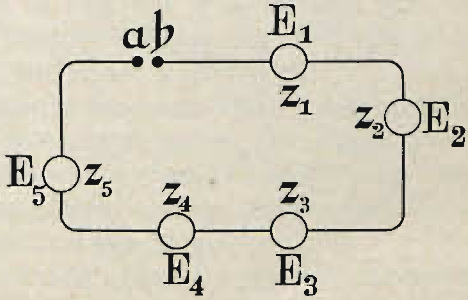
$$i_3 = i_1 + i_2 = 66{,}66 - 13{,}33 = 53{,}33 \; A.$$



Rys. 102.

Znak minus przed liczbą, wyrażającą siłę prądu i_2, oznacza, że prąd ten płynie w kierunku odwrotnym względem założonego poprzednio. Rzeczywiście istniejący układ prądów wskazany jest na rysunku 102.

14. Napięcie w miejscu przerwania obwodu. Rozważmy obwód (rys. 103), składający się z szeregu przyrządów z_1, z_2 i t. d., w których istnieją siły elektromotoryczne, i drutów, łączących te przyrządy ze sobą. Oznaczmy przez E_1, E_2 i t. d. siły elektromotoryczne, a przez R cały opór obwodu.



Rys. 103.

Gdy końce drutów a i b zetkniemy, obwód będzie zamknięty; wtedy końce a i b będą stanowiły jeden punkt obwodu, różnica więc potencjałów między niemi, czyli napięcie, oczywiście równać się będzie zeru.

Przedstawmy sobie następnie, że końce drutów a i b zostały połączone ze sobą oporem dodatkowym r. Wtedy w obwodzie popłynie prąd, którego siłę wyznaczymy na zasadzie prawa Ohma ze wzoru:

$$i = \frac{\Sigma E}{r + R}.$$

Napięcie na końcach a i b oznaczmy przez e. Według prawa Ohma:

$$e = i \,.\, r,$$

albo:

$$e = r \,.\, \frac{\Sigma E}{r + R} = \frac{\Sigma E}{1 + \frac{R}{r}}.$$

Przerwać obwód, znaczy to uczynić opór $r = \infty$, wtedy z powyższego równania wypada:

$$e = \Sigma E.$$

Napięcie między końcami przewodników w miejscu, gdzie przerywamy obwód, równa się sumie algebraicznej sił elektromotorycznych czynnych w tym obwodzie.

Więc np., gdy za pomocą przerywacza gasimy lampkę, zasilaną prądem prądnicy, mającej siłę elektromotoryczną 120 *V*, pomiędzy kontaktami przerywacza powstaje różnica potencjałów, wynosząca 120 *V*.

Twierdzenie powyższe stosuje się do przerwy w dowolnym miejscu obwodu, ponieważ wzory powyższe nie zależą zupełnie od tego, gdzie jest przerwa.

Z drugiej jednak strony twierdzenie to jest ścisłe tylko wtedy, gdy wielkość sił elektromotorycznych nie zależy od siły prądu.

W przeciwnym razie należy to uwzględnić, wyrażając siły elektromotoryczne w zależności od prądów i zakładając siłę prądu równą zeru; wtedy możemy zupełnie ściśle powiedzieć, że napięcie w przerwie równa się sumie algebraicznej sił elektromotorycznych, działających w chwili, gdy prąd zmniejszy się do zera.

ROZDZIAŁ XIII.

Prawo Ohma dla prądów zmiennych.

Mówiąc o prądach zmiennych, będę miał na myśli prądy zmienne okresowo, według prawa sinusoidy, [1]) o sile jednakowej na całej nierozgałęzionej części obwodu.

Dla tego rodzaju prądów prawa Ohma, podane dla sił prądów i napięć w pewnej chwili, stosują się we wszystkich swoich postaciach bez zastrzeżeń.

W praktyce jednak, jak to zobaczymy w rozdziale o pomiarach, wielkości **czynne** prądów i napięć wskazują przyrządy miernicze; konieczną więc jest rzeczą znaleźć wzory, wyrażające związki pomiędzy wielkościami czynnemi.

Chcąc ułatwić czytelnikowi zapoznanie się z temi związkami i dać mu możność głębszego ujęcia samego przedmiotu, będę posługiwał się równolegle dwoma metodami, stosowanemi przy prądach zmiennych: wykreślną i analityczną. Aby zaś nie przerywać właściwego wykładu, przesunąłem szereg zasadniczych wyjaśnień, dotyczących metody wykreślnej do rozdziału ostatniego. [2])

Przy prądach zmiennych należy rozważyć szczegółowo wpływ dwuch nowych czynników, o których nie było mowy przy prądach stałych, a mianowicie samoindukcji i pojemności.

Przy prądach stałych oba te czynniki nie mają żadnego znaczenia, gdyż pole magnetyczne jest również stałe, a pojemność przewodników nie odgrywa tu żadnej roli, — prąd stały przez idealny izolator nie przepływa.

Dla uwydatnienia wpływu poszczególnych czynników na przebieg prądu zmiennego, rozważymy przedewszystkim kolejno kilka prostych przypadków.

1. **Przewodnik posiada tylko opór omiczny.** Załóżmy przedewszystkim, że przewodnik nie posiada ani samoindukcji, ani pojemności, lecz tylko opór omiczny (rys. 104); wtedy wzór dla prądu w pewnej chwili według prawa Ohma będzie:

---

[1]) W rzeczywistości prądy zmienne mniej lub więcej odbiegają od prawa zmienności sinusoidalnej, zwykle jednak odchylenia są nie wielkie, wobec czego można posiłkować się wynikami rozumowań, opartych na założeniu ścisłej zgodności zmiany prądu z prawem sinusoidy. W przypadkach wyjątkowych należy uciec się do rozkładu prądów niesinusoidalnie zmiennych na kilka prądów sinusoidalnie zmiennych o różnych okresach i różnej wartości maksymalnej.

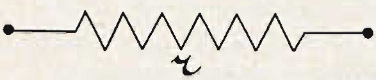
[2]) Czytelnicy, nieobeznani ze sposobem wykreślnego przedstawiania zjawisk sinusoidalnie zmiennych, powinni zapoznać się z nim przed przystąpieniem do czytania tego rozdziału.

$$i_t = \frac{e_t}{r},$$

a więc:

$$e_t = i_t \,.\, r.$$

Załóżmy następnie, że prąd zmienia się według prawa sinusoidy, a więc siła jego w danej chwili wyrazi się wzorem:



$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T},$$

Rys. 104.

gdzie $\bar{i}$ oznacza maksymalną wartość siły prądu, T — okres zmienności.

Podstawiając wyrażenie powyższe we wzór na e_t, otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \,.\, r \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Ponieważ $\bar{i} \,.\, r$ jest wielkością stałą, z tego więc wzoru wynika, że i napięcie będzie się zmieniało według prawa sinusoidy, a wielkość maksymalną osiągnie przy $t = \frac{T}{4}$, gdyż wówczas:

$$\frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Maximum napięcia wynosi:

$$\bar{e} = \bar{i} \,.\, r.$$

Wprowadzając zamiast maksymalnych wielkości czynne [1]) prądu i napięcia e i i, otrzymamy:

$$\sqrt{2}\, e = \sqrt{2}\, i \,.\, r,$$

a więc:

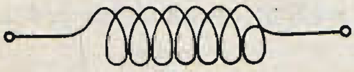
$$e = i \,.\, r,$$

czyli:

$$i = \frac{e}{r}.$$

W tym przypadku prawo Ohma dla wielkości czynnych prądu zmiennego pozostaje takie samo, jak przy prądzie stałym.

2. Przewodnik posiada tylko samoindukcję. Załóżmy, że mamy przewodnik, który nie posiada ani oporu omicznego, ani pojemności, lecz tylko samoindukcję (rys 105); spółczynnik samindukcji niech będzie L.



L

Rys. 105.

W tym przypadku zastosujemy prawo Ohma w postaci, uwzględniającej siły elektromotoryczne w obwodzie, a mianowicie mamy tu siłę elektromotoryczną samoindukcji, którą oznaczymy przez E_s.

[1]) Patrz rozdział I.

Prawo Ohma dla siły prądu w danej chwili jest następujące:

$$i_t = \frac{e_t + E_{st}}{r},$$

albo:

$$e_t + E_{st} = i_t \,.\, r,$$

ponieważ jednak założyliśmy, że $r = 0$, więc:

$$e_t + E_{st} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Z rozdziału zaś VIII wiemy, że:

$$E_{st} = -L \,.\, \frac{d\,i_t}{d\,t}.$$

Załóżmy, że prąd zmienia się według prawa sinusoidy:

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Otrzymamy wtedy:

$$\frac{d\,i_t}{d\,t} = \bar{i} \,.\, \frac{2\pi}{T} \,.\, \cos\frac{2\pi t}{T},$$

$$E_{st} = -L \,.\, \bar{i} \,.\, \frac{2\pi}{T} \,.\, \cos\frac{2\pi t}{T}$$

Ponieważ:

$$-\cos\frac{2\pi t}{T} = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right),$$

więc:

$$E_{st} = L \,.\, \bar{i} \,.\, \frac{2\pi}{T} \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Wielkość $\frac{2}{T}$ nazywamy **liczbą zmian prądu na sekundę**, ponieważ $\frac{1}{T}$ jest liczbą okresów zmienności prądu na sekundę, a w ciągu jednego okresu kierunek prądu zmienia się dwa razy.

Jeżeli $\frac{2}{T}$ oznaczymy przez z, to:

$$E_{st} = \bar{i} \,.\, z\,\pi\,L \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Podstawiając wyraz powyższy we wzór (a), otrzymamy dla napięcia na końcach przewodnika, wyrażenie następujące:

$$e_t = -\bar{i} \,.\, z\,\pi\,L \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right),$$

albo, mając na względzie, że:

$$-\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right),$$

otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \,.\, z\,\pi\,L \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie zmienia się sinusoidalnie, zmienność jednak napięcia jest przesunięta w fazie względem zmienności prądu o ćwierć okresu naprzód, cały bowiem okres odpowiada 2π. Przy $t = 0$:

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

przeto napięcie będzie wtedy maksymalne i z powyższego wynika, że:

$$\bar{e} = \bar{i} \,.\, z\pi L,$$

skąd:

$$\bar{i} = \frac{\bar{e}}{z\pi L}.$$

Wprowadzając zamiast maksymalnych, wielkości czynne prądu i napięcia, otrzymamy:

$$i \,.\, \sqrt{2} = \frac{e \,.\, \sqrt{2}}{z\pi L},$$

albo:

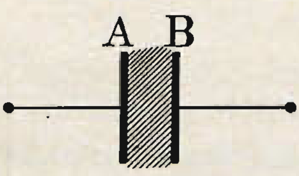
$$i = \frac{e}{z\pi L}.$$

Wyraz $z\pi L$ nazywamy **oporem indukcyjnym** [1]) przewodnika. Opór ten zależy od własności indukcyjnych przewodnika, wyrażonych przez spółczynnik L, i od własności prądu zmiennego. Opór indukcyjny jest **wprost proporcjonalny do liczby zmian prądu na sekundę.** Nadto wielkość tego oporu zależy od postaci krzywej prądu, albowiem podany tu wzór stosuje się ściśle tylko do prądu sinusoidalnie zmiennego.

W celu skrócenia wzoru oznaczamy niekiedy $z\pi$ przez a [2]), wtedy:

$$i = \frac{e}{aL}.$$

3. Przewodnik posiada tylko pojemność. Rozważmy prąd zmienny, przepływający przez warstwę izolatora idealnego pomiędzy płytkami A i B (rys. 106).



Rys. 106.

Pojemność utworzonego w ten sposób kondensatora niech będzie C. Przewodniki, doprowadzające prąd, nie mają ani samoindukcji, ani oporu omicznego.

Z rozdziału IX wiadomo, że prąd, płynący w danej chwili przez kondensator, wyrazi się wzorem:

$$i_t = C \,.\, \frac{de_t}{dt}.$$

Załóżmy, jak poprzednio, że prąd ten będzie sinusoidalnie zmienny, że więc:

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

---

[1]) Opór indukcyjny nazywamy także *zawadą*, a stosując wyrazy, przyjęte w wielu obcych językach, możnaby go nazwać *induktancją*, albo *reaktancją*.

[2]) W języku francuskim $a = \frac{2\pi}{T} = z\pi$ nazywa się „pulsation"

Podstawiając ten wzór w równanie poprzednie, otrzymamy:

$$\bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} = C \,.\, \frac{d e_t}{d t},$$

skąd:

$$d e_t = \frac{1}{C} \,.\, \bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} \, d t.$$

Po zcałkowaniu zaś będziemy mieli: [1])

$$e_t = -\frac{1}{C} \,.\, \bar{i} \,.\, \frac{T}{2\pi} \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Oznaczając $\frac{2}{T}$ przez z i mając na względzie, że:

$$-\cos \frac{2\pi t}{T} = \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right),$$

otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \,.\, \frac{1}{z\pi C} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie zmienia się również sinusoidalnie, ale jest ono przesunięte w fazie względem prądu o ćwierć okresu wstecz.

Przy $t = 0$:

$$\sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

przeto w tej chwili napięcie będzie maksymalne. Bezwzględna jego wartość niezależnie od znaku wyrazi się wzorem:

$$\bar{e} = \frac{\bar{i}}{z\pi C}.$$

Wprowadzając zaś wielkości czynne zamiast maksymalnych, znajdziemy:

$$e = \frac{i}{z\pi C}.$$

Lub też, sprowadzając ten wzór do zwykłej postaci prawa Ohma, otrzymamy:

$$i = \frac{e}{\frac{1}{z\pi C}},$$

oznaczając $z\pi$ przez a, będzie:

$$i = \frac{e}{\frac{1}{aC}},$$

albo:

$$i = e \,.\, z\pi C = e \,.\, aC.$$

---

[1]) Stałą całkowania zakładamy = 0, ponieważ w ten sposób otrzymane wzory odpowiadają przypadkom najczęściej spotykanym w praktyce.

Wyraz $\frac{1}{z \pi C}$ nazywamy **oporem kondensatora**, albo **oporem pojemności.** [1])

Opór ten zależy od związanych z pojemnością własności drogi prądu, która w tym razie częściowo przechodzi przez izolator, a nadto od rodzaju samego prądu: od liczby zmian na sekundę i od postaci krzywej prądu.

Opór pojemności jest tym **mniejszy**, im **większa** jest liczba zmian prądu na sekundę, odwrotnie jak przy oporze indukcyjnym, rozważanym poprzednio.

4. Zestawienie powyższych trzech przypadków. We wszystkich trzech przypadkach, rozważanych powyżej, przyjmowaliśmy dla prądu prawo zmienności sinusoidalnej, wyrażonej wzorem:

$$i_t = \bar{i} \, . \sin \frac{2 \pi t}{T} \, .$$

Przy takim prądzie otrzymywaliśmy wzory dla napięć różne:

W pierwszym przypadku, gdy przewodnik posiadał tylko opór omiczny:

$$e_t = \bar{i} \, . \, r \, . \sin \frac{2 \pi t}{T} \, .$$

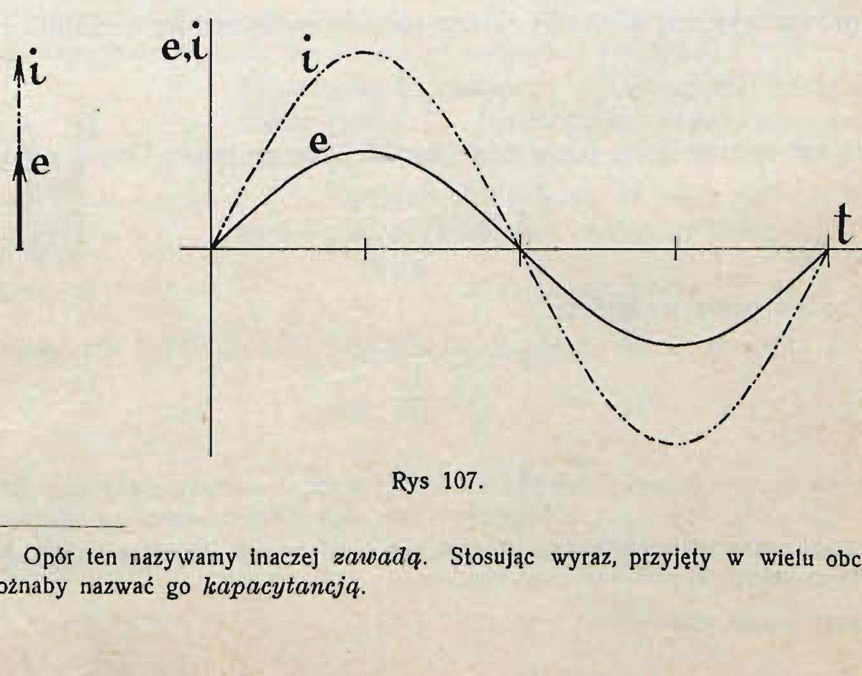
Gdy miał tylko samoindukcję:

$$e_t = \bar{i} \, . \, z \pi L \, . \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) .$$

Przy samej zaś tylko pojemności:

$$e_t = \bar{i} \, . \, \frac{1}{z \pi C} \, . \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) .$$

Wzory prądów i napięć możemy wyrazić za pomocą wykresów, odkładając czas na odciętych, a na rzędnych napięcie i siłę prądu.

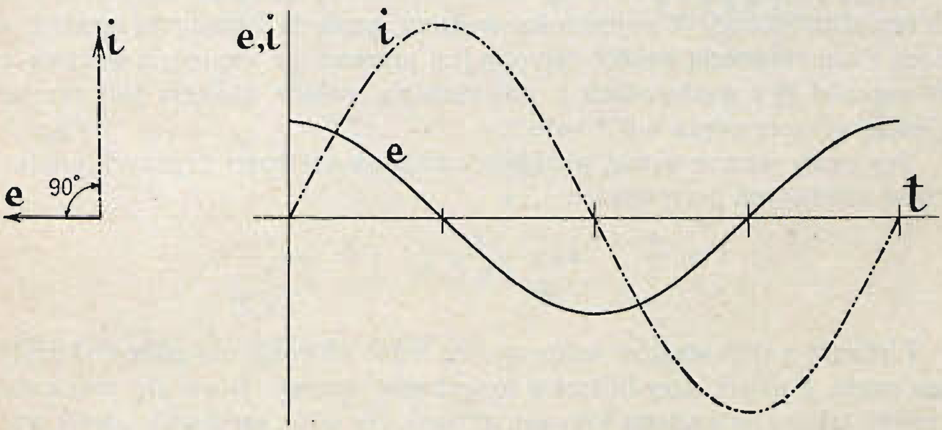


Rys 107.

[1]) Opór ten nazywamy inaczej *zawadą*. Stosując wyraz, przyjęty w wielu obcych językach, możnaby nazwać go *kapacytancją*.

Rysunek 107 stosuje się do pierwszego przypadku, gdy mamy do czynienia tylko z oporem omicznym, wtedy krzywe posiadają **fazy zgodne**.

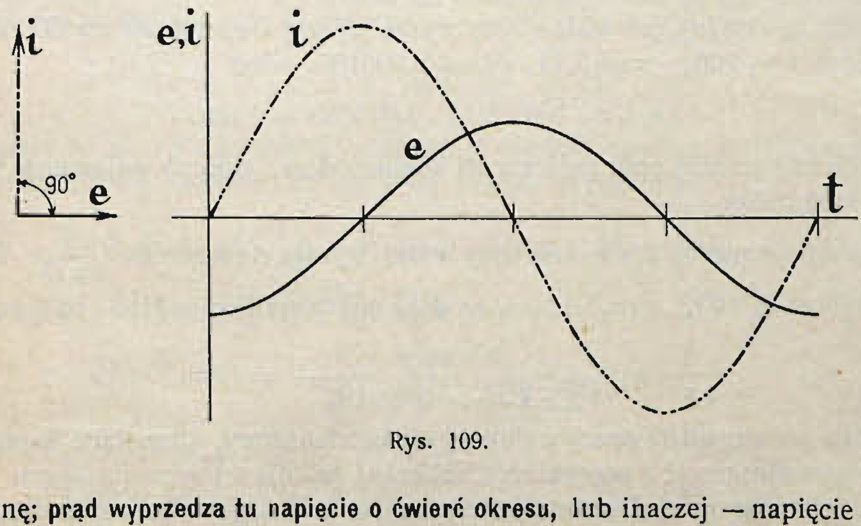
Rysunek 108 dotyczy przewodnika z samoindukcją. Krzywe prądu i napięcia są tu przesunięte jedna względem drugiej o ćwierć okresu i **napięcie wyprzedza prąd**.



Rys. 108.

To samo możemy wyrazić inaczej, mówiąc, że prąd spóźnia się względem napięcia o ćwierć okresu.

Rysunek 109 stosuje się do prądu w kondensatorze. Mamy tu znowu różnicę faz, wynoszącą ćwierć okresu, lecz krzywa napięcia jest przesunięta w przeciwną stronę; **prąd wyprzedza tu napięcie o ćwierć okresu**, lub inaczej — napięcie spóźnia się względem prądu o ćwierć okresu.



Rys. 109.

We wzorach matematycznych różnica faz uwydatnia się wyraźnie przez dodawanie i odejmowanie od $\frac{2\pi t}{T}$ kąta $\frac{\pi}{2}$.

Omawiane tu własności prądów zmiennych można też przedstawić za pomocą wektorów, obracających się w ten sposób, że jeden pełny obrót każdego wektora odbywa się w ciągu jednego okresu trwania prądu. [1])

Stosownie do układu krzywych na rys. 107, 108 i 109, odpowiednie wektory przedstawiają się tak, jak to wskazano obok na tych samych rysunkach.

Mając na względzie powyższy układ wektorów, mówimy nieraz, że w obwodach bez samoindukcji i pojemności wektory napięcia i prądu są zgodne; w obwodach z samoindukcją wektor napięcia jest przesunięty względem wektora prądu o 90^0 naprzód, [2]) a w obwodach z pojemnością wektor napięcia jest przesunięty względem wektora prądu o 90^0 wstecz.

Zestawmy jeszcze wzory, wyrażające związek wielkości czynnych prądu i napięcia w rozmaitych przypadkach:

$$i = \frac{e}{r}, \quad i = \frac{e}{z \pi L}, \quad i = \frac{e}{\dfrac{1}{z \pi C}}.$$

Pierwszy z tych wzorów wskazuje, że opór obwodu nie zależy od szybkości zmian prądu, a nawet przy bliższem rozważeniu sprawy łatwo się przekonać, że nie zależy także i od kształtu krzywej, słowem, że wzór zachowuje swoją ważność dla wszelkich prądów zmiennych.

Dwa wzory następne dotyczą ściśle tylko prądów sinusoidalnych, a wielkość oporu zależy od szybkości zmian prądu. Wszystkie wyrazy oporów przy podstawieniu odpowiednich jednostek dają oczywiście wyniki wyrażone w omach.

P r z y k ł a d y. Obliczmy opór indukcyjny przewodnika dla prądu sinusoidalnie zmiennego, który zmienia swój kierunek 100 razy na sekundę. Spółczynnik samoindukcji przewodnika wynosi 0,003185 henry.

Opór indukcyjny, jak widzieliśmy wyżej, wyraża się wzorem: $z \pi L$. W przykładzie tym $z = 100$, $\pi = 3{,}14$, $L = 0{,}003185$, więc:

$$z \pi L = 100 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}003185 = 1 \text{ om}.$$

Obliczmy jeszcze opór pojemności kondensatora, którego pojemność wynosi 3185 mikrofaradów.

Opór pojemności, jak widzieliśmy wyżej, wyraża się wzorem: $\frac{1}{z \pi C}$. W przykładzie tym $z = 100$, $\pi = 3{,}14$, $C = 3185$ mikrofaradów $= 3185 \,.\, 10^{-6}$ faradów, więc:

$$\frac{1}{z \pi C} = \frac{1}{100 \,.\, 3{,}14 \,.\, 3185 \,.\, 10^{-6}} = 1 \text{ om}.$$

Mając na względzie opory indukcyjne i kondensatory, stosowane w praktyce, możemy wywnioskować z powyższych obliczeń, że, dla otrzymania oporu indukcyjnego, wynoszącego jeden om, należy zastosować przewodnik o małym spółczynniku samoindukcji, — a dla otrzymania oporu pojemności, wynoszącego jeden om, wypada użyć kondensator o bardzo dużej pojemności.

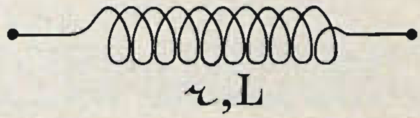
---

[1]) O wektorach, w zastosowaniu do rozważania prądów zmiennych, patrz rozdział XL. Obrót wektorów zakładamy wszędzie odwrotny do ruchu wskazówek zegara.

[2]) Naprzód, rozumie się, w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara.

5. Przewodnik z oporem omicznym i samoindukcją. Gdy przewodnik posiada jednocześnie opór i samoindukcję (rys. 110), to na zasadzie prawa Ohma prąd w chwili t będzie:

$$i_t = \frac{e_t + E_{st}}{r},$$



Rys. 110.

stąd:

$$e_t = i_t \,.\, r - E_{st}.$$

Lecz:

$$E_{st} = -L \,.\, \frac{d\,i_t}{d\,t},$$

zatem:

$$e_t = i_t \,.\, r + L \,.\, \frac{d\,i_t}{d\,t}.$$

Gdy prąd jest sinusoidalnie zmienny,

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin \frac{2\,\pi\,t}{T},$$

$$\frac{d\,i_t}{d\,t} = \bar{i} \,.\, \frac{2\,\pi}{T} \,.\, \cos \frac{2\,\pi\,t}{T} = \bar{i} \,.\, z \,.\, \pi \,.\, \cos \frac{2\,\pi\,t}{T},$$

więc:

$$e_t = \bar{i} \,.\, r \,.\, \sin \frac{2\,\pi\,t}{T} + \bar{i} \,.\, z\,\pi\,L \,.\, \cos \frac{2\,\pi\,t}{T} \;\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie, w zależności od czasu, wyraża się krzywą, której rzędne są sumą sinusoidy i cosinusoidy; suma ta tworzy zawsze sinusoidę, którą można wyrazić za pomocą wzoru:

$$e_t = A \,.\, \sin \left(\frac{2\,\pi\,t}{T} + \varphi \right) \;\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Czynniki A i φ możemy wyznaczyć w sposób następujący: Z powyższego równania, po przekształceniu sinusa sumy kątów, otrzymamy:

$$e_t = A \,.\, \sin \frac{2\,\pi\,t}{T} \,.\, \cos \varphi + A \,.\, \cos \frac{2\,\pi\,t}{T} \,.\, \sin \varphi \;\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Zestawiając równania (a) i (c), będziemy mieli:

$$A \,.\, \cos \varphi = \bar{i} \,.\, r,$$

$$A \,.\, \sin \varphi = \bar{i} \,.\, z\,\pi\,L.$$

Jeżeli uwzględnimy, że:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tang} \varphi,$$

to z powyższych dwuch równań wynika, że:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{z\,\pi\,L}{r},$$

a następnie:

$$A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = (\bar{i} \,.\, r)^2 + \bar{i}^2 \,.\, (z\,\pi\,L)^2.$$

Ponieważ:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

więc:

$$A = i \,.\, \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}.$$

Podstawiając ten wyraz dla A w równaniu (b), otrzymamy dla napięcia na końcówkach przewodnika wzór następujący:

$$e_t = \bar{i} \,.\, \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2} \,.\, \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(d)}$$

albo:

$$e_t = \bar{e} \,.\, \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi \right).$$

Z tego wzoru widzimy, że napięcie zmienia się sinusoidalnie i wyprzedza prąd o kąt φ, który stanowi różnicę faz pomiędzy prądem i napięciem.

Zakładając w równaniu (d):

$$\sin \left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi \right) = 1,$$

otrzymamy wartość maksymalną wielkości napięcia:

$$\bar{e} = \bar{i} \,.\, \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

lub też czynne napięcie:

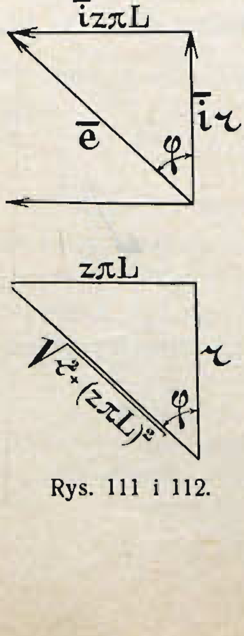
$$e = i \,.\, \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

skąd:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}}.$$

$\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}$ stanowi **całkowity opór przewodnika dla prądu zmiennego.** Wyraz ten inaczej nazywamy impendancją lub zawadą elektryczną.

Do tego samego wyniku można dojść jeszcze inną drogą.



Rys. 111 i 112.

Zwróćmy się do wzoru (a), wyrażającego napięcie e_t. Sinusoidę wypadkową, przedstawiającą zmienność napięcia e_t, możemy otrzymać, dodając wektory sinusoid składowych, przyczem należy mieć na względzie, że cosinusoida jest sinusoidą przesuniętą o ćwierć okresu naprzód. Na rys. 111 widzimy układ odpowiednich wektorów.

Z trójkąta prostokątnego wynika, że:

$$\bar{e} = \bar{i} \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

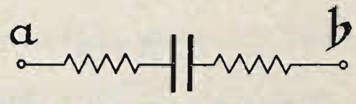
$$\text{tang}\, \varphi = \frac{z \pi L}{r}.$$

Układ wektorów wskazuje, że napięcie wyprzedza prąd o kąt φ. Kąt ten jest tym większy, im większy jest opór indukcyjny w porównaniu do oporu omicznego.

Wielkości czynne napięcia i prądu są $\sqrt{2}$ razy mniejsze od maksymalnych, więc oczywiście ten sam trójkąt tylko w innej skali może być zastosowany do wielkości czynnych.

Podobny trójkąt (rys. 112) może służyć również do wyznaczenia oporu wypadkowego z oporów składowych.

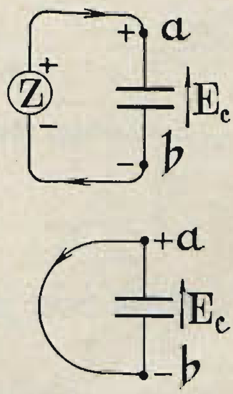
6. Kondensator włączony w obwód za pomocą przewodników, posiadających opór omiczny. Obwód składa się z kondensatora o pojemności C i z przewodników, doprowadzających prąd, których opór omiczny wynosi r omów, samoindukcji nie uwzględniamy (rys. 113).



Rys. 113.

W celu zastosowania prawa Ohma w rozważanym przypadku, należy uprzytomnić sobie, że kondensator jest przyrządem, w którym odbywają się przemiany energji. [1]) Kondensator, połączony ze źródłem prądu o stałym napięciu, ładuje się (rys. 114), otrzymując pewną ilość energji. Stosownie do tego, co mówiliśmy o siłach elektromotorycznych w rozdziale IV, jest w nim wtedy czynna siła elektromotoryczna E_c, zwrócona przeciw prądowi.

Gdy okładki kondensatora naładowanego połączymy między sobą za pomocą drutu (rys. 115), prąd będzie przebiegał zgodnie z siłą elektromotoryczną E_c i kondensator będzie się wyładowywał, przetwarzając zawartą w nim energję na ciepło Joule'a.



Rys. 114 i 115.

Z powyższego rozumowania widzimy, że siła elektromotoryczna kondensatora jest odwrotna względem napięcia, o ile kierunek tegoż przyjmiemy od końcówki o wyższym potencjale do końcówki o potencjale niższym (od a do b wewnątrz kondensatora).

Wielkość siły elektromotorycznej E_c przyjmujemy za równą napięciu na końcówkach, ponieważ zakładamy, że przemiana energji w kondensatorze da się całkowicie wyrazić za pomocą siły elektromotorycznej E_c.

Mając te uwagi na względzie, wróćmy do obwodu, wskazanego na rys. 113. Załóżmy, że w obwodzie przebiega prąd sinusoidalny:

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} \,.$$

Wtedy napięcie, istniejące na okładkach kondensatora, jak wiemy z przykładu 3 w niniejszym rozdziale, wynosi:

$$e_t' = \bar{i} \,.\, \frac{1}{2\pi C} \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Wobec tego siła elektromotoryczna kondensatora będzie:

$$E_{ct} = - e_t' ,$$

$$E_{ct} = \bar{i} \,.\, \frac{1}{2\pi C} \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T} \,.$$

[1]) Patrz rozdział XXI.

Uwzględniając istnienie tej siły elektromotorycznej w kondensatorze, prąd w obwodzie ab (rys. 113), według prawa Ohma, wyrażamy wzorem:

$$i_t = \frac{e_t + E_{ct}}{r},$$

stąd:

$$e_t = i_t \cdot r - E_{ct}.$$

Podstawiając we wzór powyższy wyrazy dla i_t i E_{ct}, otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} - \bar{i} \cdot \frac{1}{z\pi C} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie, w zależności od czasu, wyraża się krzywą, której rzędne są sumą sinusoidy i cosinusoidy; taka suma tworzy zawsze sinusoidę, którą można wyrazić wzorem:

$$e_t = A \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

lub:

$$e_t = A \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \cos \varphi + A \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \sin \varphi \quad . \; . \; . \quad \text{(c)}$$

Zestawiając równania (a) i (c), będziemy mieli:

$$A \cdot \cos \varphi = \bar{i} \cdot r,$$

$$A \cdot \sin \varphi = -\bar{i} \cdot \frac{1}{z\pi C}.$$

Z tych dwuch równań otrzymujemy:

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{1}{r \cdot z\pi C},$$

$$A^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \bar{i}^2 \cdot \left[r^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2\right].$$

a ponieważ:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

więc:

$$A = \bar{i} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2}.$$

Podstawiając ten wyraz na A w równanie (b), otrzymamy dla napięcia na końcówkach ab wzór:

$$e_t = \bar{i} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right).\ ^{1)}$$

Z tego wzoru widzimy, że napięcie na końcówkach ab zmienia się sinusoidalnie, spóźnia się jednak względem prądu o kąt φ, który stanowi różnicę faz pomiędzy prądem i napięciem.

---

[1]) Uwzględniamy tu, że kąt φ wypada ujemny.

Wielkość czynna napięcia będzie:

$$e = i \, . \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z \pi C}\right)^2}.$$

Prąd zaś:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z \pi C}\right)^2}}.$$

$\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z \pi C}\right)^2}$ stanowi całkowity opór obwodu dla prądu zmiennego; opór ten składa się z oporu omicznego i oporu pojemności.

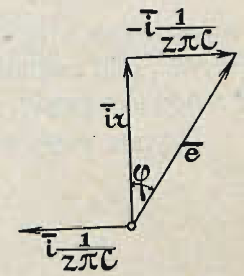
Do tego samego wyniku można dojść drogą dodawania wielkości sinusoidalnie zmiennych przy pomocy wektorów.

Zwróćmy się do wzoru (a). Wektor sinusoidy, wyrażającej napięcie e_t, otrzymamy, odejmując wektor cosinusoidy od wektora odpowiedniej sinusoidy.

Na rys. 116 widzimy układ wektorów i wynik odejmowania. Z trójkąta prostokątnego otrzymujemy:

$$\bar{e} = \bar{i} \, . \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z \pi C}\right)^2},$$

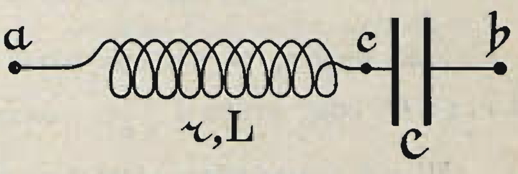
$$\text{tang}\, \varphi = - \frac{1}{r \, . \, z \pi C}.$$



Rys. 116.

Ten sam trójkąt może służyć w innej odpowiedniej skali do wyznaczenia związku pomiędzy wielkościami czynnemi lub też oporami.

7. **Kondensator, włączony w szereg z przewodnikiem, posiadającym opór omiczny i samoindukcyjny.** Zwojnica o oporze omicznym r i spółczynniku samoindukcji L włączona jest w szereg z kondensatorem o pojemności C (rys. 117).



Rys. 117.

W obwodzie tym są czynne dwie siły elektromotoryczne E_s i E_c, przeto prąd, według prawa Ohma, wyrazi się wzorem:

$$i_t = \frac{e_t + E_{st} + E_{ct}}{r},$$

stąd:

$$e_t = i_t \, . \, r - E_{st} - E_{ct}.$$

Zakładając, że prąd jest zmienny sinusoidalnie, otrzymamy dla sił elektromotorycznych wzory następujące:

$$E_{st} = - \bar{i} \, . \, z \pi L \, . \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

$$E_{ct} = \bar{i} \, . \, \frac{1}{z \pi C} \, . \cos \frac{2 \pi t}{T}.$$

Wprowadzając wyrażenia dla E_{st} i E_{ct} w równanie dla e_t, otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \, . \, r \, . \, \sin \frac{2\pi t}{T} + \bar{i} \left(z\pi L - \frac{1}{z\pi C} \right) . \cos \frac{2\pi t}{T} .$$

Postępując podobnie jak w dwuch poprzednich przypadkach, możemy przekształcić powyższe wyrażenie. Wówczas otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \, . \sqrt{r^2 + \left(z\pi L - \frac{1}{z\pi C} \right)^2} \, . \, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right),$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{z\pi L - \frac{1}{z\pi C}}{r} .$$

Z wyrazu powyższego widzimy, że napięcie zmienia się sinusoidalnie. Kąt φ może być tu dodatni lub ujemny, zależnie od znaku różnicy: $z\pi L - \frac{1}{z\pi C}$. Gdy w wyrazie tym przeważa wpływ samoindukcji, φ jest dodatni, i napięcie wyprzedza prąd, gdy natomiast, przeważa pojemność, φ jest ujemny — napięcie opóźnia się względem prądu.

Czynna wielkość prądu wyraża się wzorem:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + \left(z\pi L - \frac{1}{z\pi C} \right)^2}} .$$

Mianownik tego wzoru stanowi wypadkowy opór obwodu.

Chcąc rozwiązać zagadnienie powyższe za pomocą dodawania wektorów, należy wzór e_t przedstawić w sposób następujący:

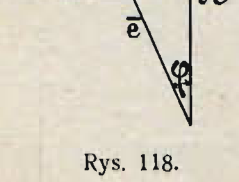
$$e_t = \bar{i} \, . \, r \, . \, \sin \frac{2\pi t}{T} + \bar{i} \, . \, z\pi L \, . \, \cos \frac{2\pi t}{T} - \bar{i} \, . \, \frac{1}{z\pi C} \, . \, \cos \frac{2\pi t}{T} .$$

Stąd wynika, że dla otrzymania wektora $\bar{e}$, należy dodać wektory $\bar{i} \, . \, r$ i $\bar{i} \, . \, z\pi L$ i odjąć wektor $i \frac{1}{z\pi C}$, uwzględniając ich kierunki.

Na rys. 118 widzimy układ tych wektorów. Wypadkowy wektor $\bar{e}$ da się łatwo wyznaczyć z trójkąta prostokątnego, również jak i kąt φ:

$$\bar{e} = \bar{i} \sqrt{r^2 + \left(z\pi L - \frac{1}{z\pi C} \right)^2},$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{z\pi L \quad \frac{1}{z\pi C}}{r} .$$



Rys. 118.

Ten sam trójkąt w innej skali pozwala wyznaczyć wielkość czynną napięcia na końcówkach obwodu i opór wypadkowy.

8. Rezonans napięć. Przy rozważaniu obwodu (rys. 117), składającego się ze zwojnicy z oporem omicznym i samoindukcją, oraz z kondensatora, na szczególną uwagę zasługuje jeszcze przypadek, gdy wpływy samoindukcji i pojemności na przebieg prądu wzajemnie się znoszą.

Dostatecznie jest spojrzeć na wyprowadzone poprzednio równania dla i i tang φ, ażeby się przekonać, że przy:

$$z\pi L = \frac{1}{z\pi C},$$

$$i = \frac{e}{r}, \text{ a tang } \varphi = 0.$$

Obwód zachowuje się w ten sposób, jak gdyby zawierał tylko opór omiczny — r.

Taki przypadek nazywamy **rezonansem napięć**. Siły elektromotoryczne samoindukcji i pojemności, które zawsze mają kierunki przeciwne,[1]) tym razem są co do wielkości równe, a więc w równaniu prądu wzajemnie się znoszą.

Przy danych L i C rezonans zachodzi tylko przy dokładnie określonej częstości zmian prądu, czyniącej zadość wyżej podanemu równaniu.

Z tego równania wynika, że:

$$z = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}.$$

$$z = \frac{2}{T}, \text{ więc:}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}.$$

Wzór ten wyraża długość okresu zmienności prądu, przy której następuje rezonans.

W praktyce elektrotechnicznej duże znaczenie w przypadku rezonansu mają napięcia, jakie powstają pomiędzy punktami a i c, a także c i b (rys. 117).

Z tego, co było powiedziane w §§ 5 i 6 rozdziału niniejszego, wynika, że:

$$e_{ac} = i \cdot \sqrt{r^2 + (z\pi L)^2},$$

$$e_{cb} = i \cdot \frac{1}{z\pi C}.$$

Napięcia te przy odpowiednich warunkach mogą osiągnąć znaczne wartości przy niewielkim napięciu na końcówkach ab.

P r z y k ł a d. Mamy obwód (rys. 117), w którym $r = 5\ \Omega$, $L = 1{,}5$ henry, $C = 2$ mikrofarady, a $i = 10$ amperów.

W tych warunkach rezonans zachodzić będzie, gdy: [2])

$$z = \frac{1}{3{,}14}\sqrt{\frac{1}{1{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 184.$$

---

[1]) Widzimy to ze wzorów, przytoczonych w § 7 niniejszego rozdziału.

[2]) Pojemność wyrażamy tu w faradach.

Całkowity opór zwojnicy ac jest wtedy:

$$\sqrt{r^2 + (2\pi L)^2} = 865\ \Omega.$$

Opór kondensatora będzie prawie taki sam, gdyż $2\pi L = \frac{1}{2\pi C}$, wpływ zaś oporu omicznego — r jest bardzo mały.

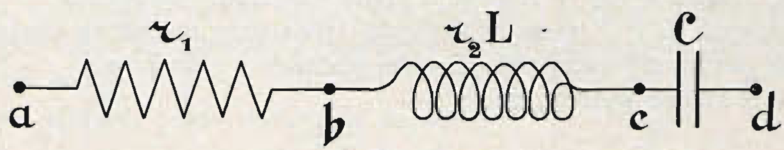
Na podstawie wyników tych obliczeń napięcie na końcówkach całego obwodu będzie:

$$e_{ab} = 10 \times 5 = 50\ V,$$

napięcie zaś na zwojnicy i na kondensatorze:

$$e_{cb} \text{ prawie } = e_{ac} = 10 \times 865 = 8650\ V.$$

9. Połączenie szeregowe różnych oporów. Część obwodu ad (rys. 119) składa się z oporu omicznego pomiędzy punktami a i b, oporu z samoindukcją



Rys. 119.

pomiędzy b i c i kondensatora pomiędzy punktami c i d. Opór omiczny w części ab jest r_1, a w części bc — r_2, spółczynnik samoindukcji L i pojemność kondensatora C.

Ponieważ prąd w danym przypadku nigdzie się nie rozgałęzia, siła jego pomiędzy końcówkami a i d w każdej chwili wszędzie jest jednakowa. Stąd wynika, że również wartość czynna prądu będzie wszędzie jednakowa i nie będzie różnicy faz pomiędzy prądami w rozmaitych miejscach.

Oznaczmy przez V z odpowiedniemi znaczkami potencjały w różnych punktach obwodu, a przez e — napięcia.

Mając na względzie wielkości w danej chwili t, możemy napisać równanie następujące: [1])

$$(V_{at} - V_{bt}) + (V_{bt} - V_{ct}) + (V_{ct} - V_{dt}) = (V_{at} - V_{dt}),$$

lub:

$$e_{abt} + e_{bct} + e_{cdt} = e_{adt}.$$

Z powyższych równań wynika, że, chcąc otrzymać napięcie czynne e_{ad}, należy dodać geometrycznie napięcia czynne e_{ab}, e_{bc} i e_{cd}.

Na rys. 120 wskazany jest układ wektorów, wyrażających składowe napięcia i prąd i, a na rys. 121 — dodawanie tych wektorów. Wypadkowy wektor $\overline{BC}$ wyraża napięcie e_{ad}.

[1]) Usuwając nawiasy, łatwo się przekonamy, że lewa strona równania równa się prawej.

Z trójkąta ABC mamy:

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}.$$

Z wywodów w paragrafach poprzednich wiemy, że:

$$e_{ab} = i \, . \, r_1 ,$$

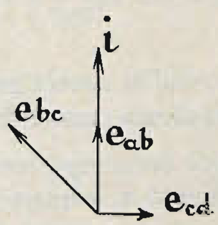
$$e_{cd} = i \, . \, \frac{1}{z \pi C} ;$$

rzut wektora e_{bc} na kierunek wektora prądu równa się:

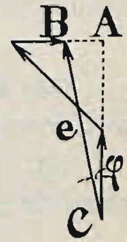
$$i \, . \, r_2 ,$$

rzut zaś tego samego wektora na kierunek prostopadły do wektora prądu równa się:

$$i \, . \, z \pi L .$$



Rys. 120.



Rys. 121.

Mając to na uwadze, łatwo spostrzeżemy z rys. 121, że:

$$\overline{AB} \text{ wyraża } i \, . \, z \pi L - i \, . \, \frac{1}{z \pi C}$$

i $\quad \overline{AC}$ wyraża $i \, . \, r_1 + i \, . \, r_2$,

więc:

$$e_{ad} = \sqrt{\left(i \, . \, r_1 + i \, . \, r_2\right)^2 + \left(i \, . \, z \pi L - i \, . \, \frac{1}{z \pi C}\right)^2},$$

lub:

$$e_{ad} = i \, . \sqrt{\left(r_1 + r_2\right)^2 + \left(z \pi L - \frac{1}{z \pi C}\right)^2}$$

Różnica faz pomiędzy e_{ad} i i wyraża się kątem φ. Według rys. 121:

$$\text{tang } \varphi = \frac{z \pi L - \frac{1}{z \pi C}}{r_1 + r_2} .$$

Na podstawie tego przykładu łatwo ułożyć wzór ogólny dla obwodu, składającego się z dowolnej liczby różnych oporów, połączonych w szereg.

Załóżmy, że w pewnym obwodzie nierozgałęzionym istnieje szereg oporów omicznych: r_1, $r_2 \ldots r_n$, oporów indukcyjnych ze spółczynnikami L_1, $L_2 \ldots L_n$ i pojemności: C_1, $C_2 \ldots C_n$.

Z powyższego przykładu widzimy, że wektory, wyrażające iloczyny: $i \, . \, r$ skierowane są wszystkie zgodnie z wektorem prądu, natomiast iloczyny $i \, . \, z \pi L$ i $i \, . \, \frac{1}{z \pi C}$ skierowane są do niego prostopadle, lecz w strony przeciwne, na rys 121 $i \, . \, z \pi L$ w lewo, a $i \, . \, \frac{1}{z \pi C}$ w prawo.

Przy takim układzie wektorów, napięcie na końcach obwodu będzie:

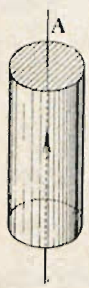
$$e = i\sqrt{(\Sigma\, r)^2 + \left(z\pi\,\Sigma\, L - \frac{1}{z\pi}\sum\frac{1}{C}\right)^2}.$$

Kąt, wyrażający różnicę faz pomiędzy napięciem e i prądem i, obliczymy według wzoru:

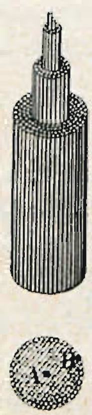
$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{z\pi\,.\,\Sigma\, L - \frac{1}{z\pi}\sum\frac{1}{C}}{\Sigma\, r}.$$

Gdy w obwodzie niema pojemności, należy zamiast C podstawić nieskończoność, jeżeli zaś niema samoindukcji, to zamiast L zero.

10. Opór omiczny przewodników dla prądów szybkozmiennych. Jeżeli mamy do czynienia z prądami, których kierunki zmieniają się miljony, tysiące, a nawet chociażby tylko setki razy na sekundę, to łatwo spostrzegamy wpływ siły elektromotorycznej samoindukcji powstającej wewnątrz przewodnika z prądem, na rozkład siły prądu w przekroju poprzecznym tego przewodnika.



Rys. 122.



Rys. 123.

Rozważmy przewodnik znacznej grubości, w którym przebiega prąd o sile stopniowo wzrastającej. W tych warunkach, jak wiemy, powstaje w przewodniku siła elektromotoryczna samoindukcji przeciwna prądowi. Ta siła elektromotoryczna w przekroju poprzecznym przewodnika nie jest wszędzie jednakowa. Największa siła elektromotoryczna samoindukcji działa wzdłuż osi A przewodnika, najmniejsza zaś na obwodzie.

Stwierdzić to można, opierając się np. na wyobrażeniu o indukcji, jako o skutku przecinania przewodników przez linje magnetyczne.

Przewodnik o przekroju pełnym (rys. 122) można przedstawić sobie jako wiązkę oddzielnych drutów (rys. 123), w których płyną prądy składowe, stanowiące razem prąd pełnego przewodnika.

W każdym z poszczególnych drutów powstawać będzie siła elektromotoryczna indukcji pod wpływem własnych linji magnetycznych i linij drutów otaczających.

Jeżeli założymy, że wszystkie prądy składowe są siły jednakowej, to najsilniejsze działanie indukcyjne będzie na drut A, znajdujący się w środku, ponieważ średnia odległość tego drutu od innych jest najmniejsza.

Pod wpływem takiego rozkładu sił elektromotorycznych indukcji, gęstość prądu (siła prądu przypadająca na 1 cm^2 przekroju drutu) będzie oczywiście niejednakowa w całym przekroju. W pobliżu powierzchni drutu gęstość będzie największa.

Skupienie się prądu w pobliżu powierzchni przewodników spostrzegł pierwszy lord Kelvin. Nazywa on to zjawisko „skin-offect", co w tłomaczeniu dosłownem znaczy **działanie naskórkowe**.

Pod wpływem tej własności prądów szybko zmiennych, opór omiczny przewodników dla takich prądów nie da się obliczyć według wzoru:

$$r = \rho \frac{l}{q}.$$ [1]

W tym przypadku uwzględnić należy, że gęstość prądu jest różna w różnych miejscach przekroju. Zwykle opór obliczony według powyższego wzoru należy pomnożyć przez spółczynnik większy od jedności.

W tablicy poniższej podany jest ów spółczynnik a dla drutów miedzianych przy różnej wartości stosunku $\frac{d^2}{T}$. [2]

$\frac{d^2}{T}$	a	$\frac{d^2}{T}$	a
0	1,0000	1620	1,8628
20	1,0000	2000	2,0430
80	1,0001	2420	2,2190
180	1,0258	2880	2,3937
320	1,0805	5120	3,0956
500	1,1747	8000	3,7940
720	1,3180	18000	5.5732
980	1,4920	32000	7,3250
1280	1,6778		

Przy $\frac{d^2}{T} > 32000$ opór omiczny drutu okrągłego równy jest oporowi rury, której średnica zewnętrzna równa się średnicy drutu pełnego, a grubość ścianki wynosi $6{,}38 \sqrt{T}$ *cm*.

Dla uniknięcia działania naskórkowego, przewodniki dla prądów bardzo szybko zmiennych (np. w przyrządach do telegrafji bez drutu) wykonywane są z tasiemek metalowych, lub też plecione z cienkich drucików w ten sposób, by działania indukcyjne jednych drucików na drugie nawzajem się znosiły.

Gdy chodzi o prądy bardzo silne i duże przekroje przewodów, to nawet w razie stosowania prądów o normalnym okresie $^1/_{50}$ sek., należy mieć na względzie omawiane zjawisko. Wtedy zamiast grubych sztab o pełnym przekroju stosują się rury, albo grupy cienkich pasków miedzianych.

Przewodniki żelazne, posiadające wielką przenikliwość magnetyczną, wykazują w znacznie wyższym stopniu omawiane własności. Z tego względu przy prądach zmiennych należy unikać ich stosowania.

---

[1] Patrz str. 22.

[2] d — średnica drutu w *cm*, T okres zmienności prądu w sekundach. Liczby podane są według tablicy znajdującej się w książce: „Leçons sur l'électricité" Er. Gerard.