POLITECHNIKA WARSZAWSKA.

1625.
912.

T. B. P.
BIBLIOTEKA
P. W.

Geometrja Wykreślna

BKC
172

WYKŁADY
prof. Garlickiego

dla I kursu Chemji Politechniki Warszawskiej

515.

KOŁO CHEMIKÓW STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
BIBLIOTEKA

№ Wyd. 113.

WARSZAWA
NAKŁADEM „KOMISJI WYDAWNICZEJ" TOW. BR. POM. STUD. POL. WARSZ.
ROK AKAD. 1921/22.

1625.

BIBLIOTEKA WYDZ. CHEMICZNEGO P.W.

Arch 82

BIBLIOTEKA WYDZIAŁU CHEMICZNEGO
Politechniki Warszawskiej

~~912~~ 82

POLITECHNIKA WARSZAWSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA

nP. 3032

BZ09PK/011-33

GIEOMETRJA WYKREŚLNA.

Nr.I. Zadania i cele gieometrji wykreślnej.

Rozwiązać t e o r e t y c z n i e zadanie gieometryczne – znaczy to sprowadzić je do zadań, poprzednio już rozwiązanych. Drogą kolejnych redukcji dochodzimy do kilku najprostszych zadań, zwanych zasadniczemi, od których wszystkie inne są uzależnione. Te zasadnicze zadania są następujące:

1) przez dwa punkty poprowadzić prostą,

2) znaleść punkt przecięcia się 2-ch prostych na płaszczyźnie,

3) wykreślić koło, mając jego promień i środek,

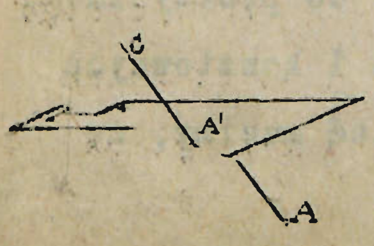
4) przez trzy punkty poprowadzić płaszczyznę,

5) znaleść linję przecięcia się dwuch płaszczyzn.

P r a k t y c z n e rozwiązanie zadań gieometrycznych zależy od tego jedynie, czy umiemy praktycznie rozwiązać zadania zasadnicze.

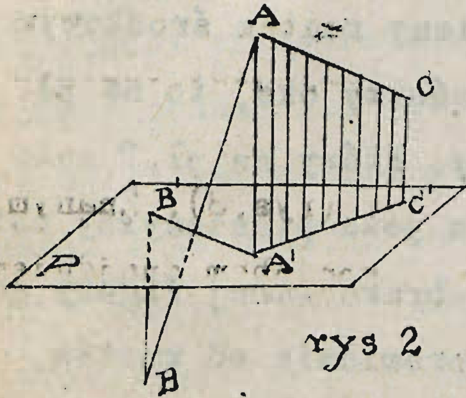
Otóż 3 pierwsze zadania dają się z łatwością rozwiązać przy pomocy ołówka, cyrkla i linjału, jednak 2 pozostałe zagadnienie wymagałyby do praktycznego rozwiązania niezmiernie misternych i kosztownych przyrządów. Jednym słowem powiedzieć musimy, że kreślić na płaszczyźnie potrafimy, w przestrzeni zaś - nie. Można jednak użyć pewnych wybiegów, które nam pozwolą o d w z o r o w a ć w ten sposób figury przestrzenne, żebyśmy mogli z całą ścisłością poznać ich wymiary, rozwiązywać zadania przestrzenne, wreszcie odtworzyć te figury w wyobraźni. I to właśnie ma na celu gieometrja wykreślna. Już w starożytności znano niektóre z tych sposobów; w średniowieczu posługiwano się dla tych celów perspektywą, w czasach nowożytnych dokonywano coraz to nowych w tym kierunku ulepszeń, aż wreszcie w roku 1795 matematyk francuski Gaspard Monge wydał dzieło "Geometrie descriptive", w którym częściowo już przedtym znane metody w jedną całość naukową połączył i matematycznie uzasadnił.

Nr.2. Metoda rzutów;rzuty punktu,prostej i kąta. Wyobraźmy sobie w przestrzeni dowolną stałą płaszczyznę P (rys.1) i również dowolny,stały punkt C, nie leżący na tej płaszczyźnie. Płaszczyznę P nazywamy płaszczyzną rzutów,punkt C - środkiem rzutów. Jeżeli teraz chcemy wyznaczyć położenie dowolnego punktu A w przestrzeni, łączymy punkt A ze środkiem rzutów prostą,



punkt przebicia pł. P przez prostą. AC nazywamy rzutem środkowym punktu A. Ponieważ każdą figurę uważać można jako zbiór punktów, więc znalazłszy rzuty środkowe wszystkich punktów tej figury, otrzymamy na pł. P figurę płaską, którą nazwiemy rzutem środkowym danej figury. Jeśli w p.C umieścimy oko, to na pł. P otrzymamy obraz danej figury, który na pł.P można to utrwalić, poczym figurę z poza płaszczyzny cofnąć - wtedy oko nie zauważy braku samej figury, gdyż będą je dochodziły te same promienie od rzutów, które do niego przedtem dochodziły od oryginała. Na rzutach środkowych polega teorja perspektywy; mamy tutaj złudzenie rzeczywistości, ale zupełną zmianę wymiarów przedmiotu, co nie jest dogodne dla celów technicznych Przypuszczamy więc, że punkt C oddala się od pł. P; w takim razie promienie idące od C, zbliżają się do położeń od siebie równoległych i, gdy p.C znajdzie się w nieskończoności, promienie staną się do siebie równoległe, rzuty zaś w ten sposób otrzymane, noszą miano rzutów równoległych, przyczem są prostokątne, jeżeli są wszystkie prostopadłe do pł. P. Stąd wynika następujące określenie: r z u t e m p r o s t o k ą t n y m d a n e g o p u n k t u n a p ł a s z c z y z n ę d a n ą n a z y w a m y s p o d e k p r o s t o p a d ł e j z tego punktu na tę płaszczyznę spuszczonej.

Przypuśćmy, że stałą płaszczyznę P w przestrzeni obierzemy za płaszczyznę rzutów (rys.2). Chcąc znaleźć rzut na tę płaszczyznę punktu A prowadzimy AA' ⊥ P, a spodek tej prostopadłej - A' będzie rzutem prostokątnym p.A.

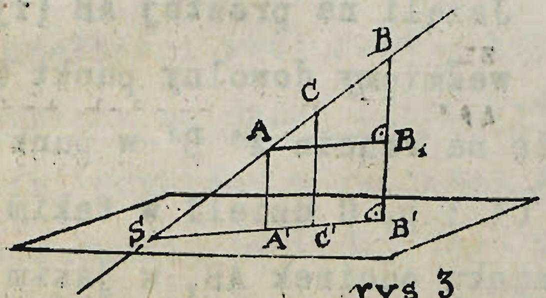


rys 2

W podobny sposób można znaleźć rzut punktu C, którym będzie C'. Łącząc punkty A i C, otrzymamy odcinek AC i postaramy się znaleźć rzut tego odcinka na pł.P. Oczywiście rzutem tym będzie miejsce geometryczne rzutów wszystkich punktów odcinka AC, które leżą w płaszczyźnie prostopadłej do P, poprowadzonej przez AC i zwanej <u>płaszczyzną rzucającą.</u> Płaszczyzna ta przecina się z pł.P. Według prostej, łączącej rzuty końców odcinka AC, czyli według A' C', które będzie właśnie żądanym rzutem odcinka. Więc rzutem prostokątnym odcinka jest odcinek, łączący rzuty końców odcinka danego. Opierając się na tym, dojdziemy do wniosku, że rzutem odcinka AB, przecinającego płaszczyznę P, jest A'B' i t.d.

Łatwo teraz dowieść będzie następujące:

TWIERDZENIE I. R z u t o d c i n k a j e s t w o g ó l e k r ó t s z y o d s a m e g o o d c i n k a (od swego oryginału)



rys 3

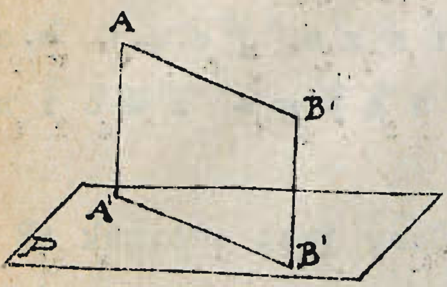
Dany jest odcinek AB i płaszczyzna rzutów P (rys.3). Znanym już sposobem znajdujemy rzut A'B' i na płaszczyźnie rzucającej A'A BB' prowadzimy $AB_1 \parallel A'B'$. W takim razie utworzy nam się $\triangle AB_1B$, prostokątny u wierzchołka B_1. Wiadomo, że w $\triangle$-cie prostokątnym przyprostokątna jest krótsza od przeciwpeostokątnej, czyli: $AB_1 < AB$ ale $AB_1 = A'B'$, więc $A'B' < AB$

c.b.d.d.

W szczególnym przypadku, jeśli prosta dana jest równoległa do płaszczyzny rzutów r z u t o d c i n k a r ó w n y j e s t o r y g i n a ł o w i.

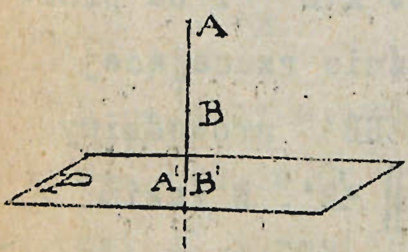
Rzeczywiście jeśli na płaszczyznę P (Rys.4) rzucimy $AB \parallel P$ to płaszczyzna rzucająca $A'ABB'$ będzie prostokątem, a stąd wnosimy, że $AB = A'B'$

c.b.d.d.



rys.4

Jeżeli wreszcie prosta dana jest $\perp$-ła do płaszczyzny rzutów P (rys.5) - AB $\perp$ P, to jej rzutem jest oczywiście punkt (A' B',). Jeżeli na prostej AB (rys.3) weźmiemy dowolny punkt C, to jego rzut leży oczywiście na rzucie A' B' w punkcie C' ; p. C dzieli w takim stosunku odcinek AB, w jakim dzieli rzut punktu - C' - rzut odcinka - A'B'. Jeżeli prostą AB przedłużymy aż do przecięcia się z pł.P w punkcie S, to ten punkt jest <u>śladem</u> danej prostej. Więc *śladem danej prostej na płaszczyźnie danej jest punkt przecięcia tej płaszczyzny przez tę prostą.*



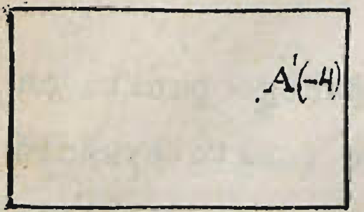
rys. 5

Ponieważ ślad prostej leży na płaszczyźnie P , więc <u>ślad jest jednocześnie swoim własnym rzutem.</u>

Nr. 3. Rzuty na dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny.

Jak wiadomo, chcąc znaleźć rzut danego punktu na płaszczyznę rzutów, należy z tego punktu spuścić na tę płaszczyznę prostopadłą, a jej spodek będzie rzutem punktu; stąd widzimy, że punkt wyznacza w zupełności swój rzut - czyli, każdemu punktowi odpowiada na danej płaszczyźnie jeden rzut.

Ale, gdybyśmy mając rzut punktu, chcieli znaleźć sam punkt, to byśmy tego uczynić nie mogli: należałoby z rzutu punktu na płaszczyźnie wystawić prostopadłą do niej i gdzieś na tej linji musiałby leżeć punkt żądany; ale w którym miejscu, z której strony płaszczyzny i na jakiej od niej odległości, o tym rzut punktu nie daje pojęcia, więc samemu rzutowi na jedną płaszczyznę odpowiada nieskończoność punktów, leżących na jednej prostej. Możnaby, obrawszy jednostkę długości, zmierzyć odległość punktu od płaszczyzny, a umówiwszy się oznaczyć odległości ponad płaszczyzną znakiem + (plus), a pod płaszczyzną - (minus), pisać te liczby, oznaczające odległości, wraz ze znakami, obok rzutu. Tak np. niech płaszczyzna papieru będzie płaszczyzną rzutów (rys. 10), a punkt A'(- 4) rzutem

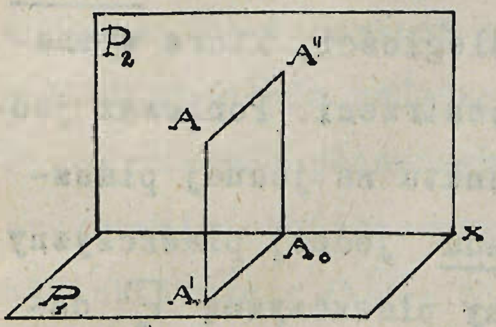


rys.10

jakiegoś punktu A. Chcąc go znaleźć w przestrzeni, należy z punktu A' wystawić prostą, prostopadłą do P i na tej prostej odmierzyć 4 jednostki długości pod płaszczyzną P. Ta metoda rzutów, podająca, obok samego rzutu, wskaźnik co do ofległości punktu od płaszczyzny, zwie się metodą rzutów cechowanych i ma zastosowanie w topografji.

Oczywiście, rzut odcinka na jedną płaszczyznę również nie wyznacza w zupełności położenia tego odcinka w przestrzeni, będzie on bowiem leżał gdzieś na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rzutów poprowadzonej przez dany rzut - odcinków zaś takich może być nieskończenie wiele (Wyjątek w tym wypadku stanowi rzut prostej, prostopadłej do płaszczyzny rzutów, którym jest punkt - wyznacza on bowiem w zupełności położenie tej prostej).

Aby za pomocą rzutów prostokątnych wyznaczyć położenie punktów lub prostych, używamy zwykle metody rzutów na dwie płaszczyzny prostopadłe. Wyobraźmy sobie mianowicie, że do znanej już płaszczyzny P_1 (rys.11), którą nazwiemy poziomą płaszczyzną rzutów,

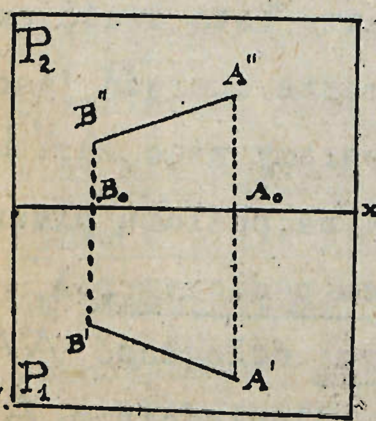


rys 11

wystawiliśmy drugą prostopadłą do niej płaszczyznę P_2 - pionową płaszczyzną rzutów; obie te płaszczyzny przecinają się według prostej x, zwanej osią.

Przypuśćmy teraz, że dany jest jakiś punkt A, leżący wewnątrz kąta dwuściennego $P_1 x P_2$ - w takim razie można znaleźć jego rzuty na obie płaszczyzny; wystawiamy więc $AA' \perp P_1$ i $AA'' \perp P_2$; A' jest rzutem p.A na poziomą płaszczyznę rzutów i nazywa się rzutem poziomym p.A, A'' zaś jest jego rzutem pionowym; odległość AA' zwie się pierwszą, a AA'' drugą odległością p. A od płaszczyzn rzutów. Teraz przez AA' i AA'' prowadzimy płaszczyznę $AA'A_0A''$ o której twierdzimy, że 1) jest prostopadła do pł. P_1 - bo $AA' \perp P_1$ i 2) jest prostopadła so pł. P_2 - bo $AA'' \perp P_2$ z tego wynika, że pł. $AA'A_0A''$ jest prostopadła również dla linji przecięcia się płaszczyzn P_1 i P_2 pł $AA'A_0A'' \perp x$, a więc odwrotnie, x jest prostopadłe do tej płaszczyzny, a zatym $x \perp A_0A'$ i $x \perp A_0A''$ inaczej mówiąc: kąt $A'A_0x = d$ i kąt $A''A_0x = d$.

Czworobok $AA'A_0A''$ jest prostokątem, mamy więc $A_0A'' \parallel AA'$ i $A_0A' \parallel AA''$. Widzimy tedy, że na płaszczyznach rzutów mamy obie odległości, które wyznaczają położenie punktu w przestrzeni. Ponieważ jednak chcemy mieć oba rzuty punktu na jednej płaszczyźnie, więc dokonywamy kładu jednej płaszczyzny na drugą. Mianowicie obracamy płaszczyznę P_1 dokoła osi x dopóty, dopóki nie przystanie do P_2 (rys. 12) wszystkie punkty i linje, które się na niej znajdowały, nie ulegną zmianie położenia i ujrzymy je teraz w naturalnym kształcie na płaszczyźnie rysunku. Oba rzuty punktu, które mamy przed sobą w zupełności wyznaczają położenie punktu w przestrzeni. Gdybyśmy chcieli go wskrzesić, należałoby z powrotem pł. P_1 doprowadzić do prostopadłości z P_2, obracając pł. P_1 dokoła osi x; następnie z p. A' wystawić prostopadłą do pł. P_1 z p. A'' - prostopadłą do P_2 te dwie prostopadłe będą leżały w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do x, punkt ich przecięcia będzie to punkt



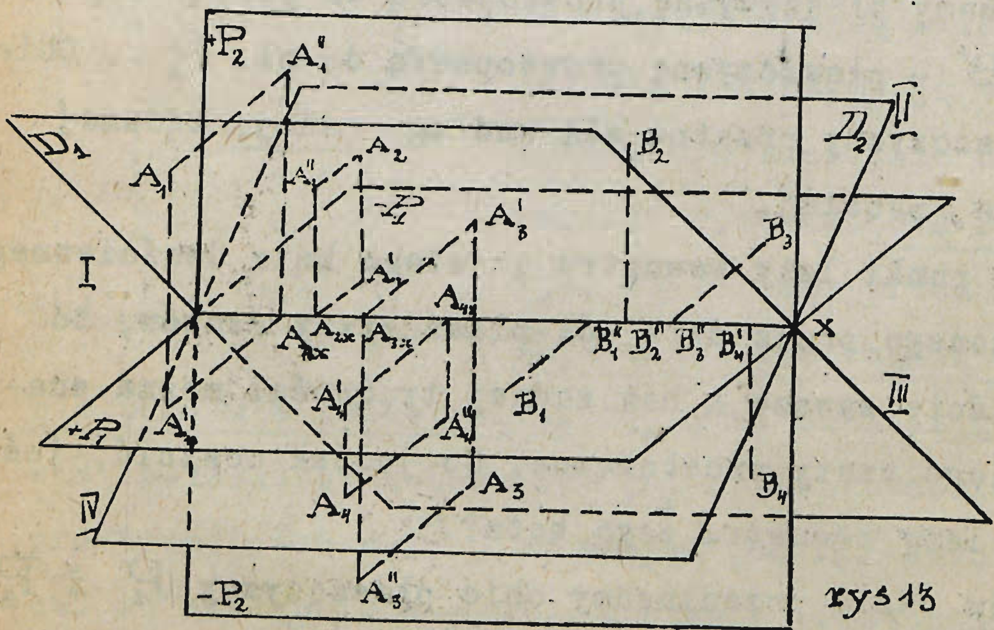
r. 12

żądany, przyczym tylko jeden, bo dwie proste, leżące w jednej płaszczyźnie przecinają się w jednym punkcie. W zupełnie podobny sposób znajdujemy rzuty odcinka na dwie płaszczyzny. Niech po doprowadzeniu do przystania obu płaszczyzn (rys.12) rzutem poziomym odcinka będzie $A'B'$, a jego rzutem pioniwym $A''B''$. Chcąc wskrzesić ten odcinek, którego rzuty są dane, obracamy płaszczyznę P_1 dokoła osi x dopóty, aż stanie się pł. $P_1 \perp P_2$ następnie przez rzut $A'B'$ przesuwamy płaszczyznę, prostopadłą do pł. P_1 i przez $A''B''$ - płaszczyznę prostopadłą do pł. P_2. Obie te płaszczyzny przetną się według jednej, żądanej właśnie, prostej.

Jeżeli punkt leży wewnątrz prostego kąta dwuściennego utworzonego przez dwie pół-płaszczyzny rzutów, to oczywiście zawsze i bez żadnej trudności można znaleźć jego rzuty prostokątne. Co jednak uczynić, jeśli punkt leży zewnątrz tego kąta?.

W takim razie przedłużamy obie płaszczyzny P_1 i P_2 za i pod oś x; cała przestrzeń podzielona zostanie na 4 kąty dwuścienne, noszące miano ćwiartek (rys.13) Kąt dwuścienny, zawarty między połowami płaszczyzny poziomej przed osią i pł. pionowej nad osią, zwie się 1 ćwiartką - zawarty między pł. poziomą za osią i

pionową nad osią zwie się II ćwiartką; _ między pł. poziomą za osią i pionową pod osią zwie się III ćwiartką; - między pł.poziomą przed osią i pionową nad osią zwie się IV ćwiartką.
Umówiono się dalej odległości od płaszczyzn przed osią i nad osią uważać za dodatnie; odległości zaś od płaszczyzn za osią i pod osią - za ujemne. Stąd też pochodzi oznaczenie półpłaszczyzn znakami plus (+) i minus (-)

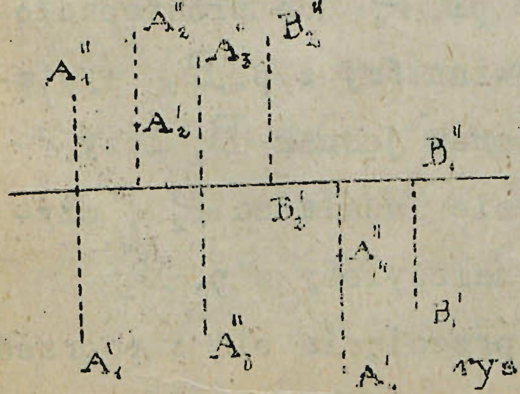


rys 13

Przyjmując powyższą umowę, zauważymy, że:
punkt położony w I ćwiartce (A_1) ma pierwszą odległość (A_1A_1') dodatnią, drugą (A_1A_1'') dodatnią

punkt położony w II ćwiartce (A_2) ma pierwszą odległość (A_2A_2') ujemną, drugą (A_2A_2'') dodatnią, punkt położony w III ćwiartce (A_3) ma pierwszą odległość (A_3A_3') ujemną, drugą (A_3A_3'') ujemną punkt położony w IV ćwiartce (A_4) ma pierwszą odległość ($A_4\,A_4'$) dodatnią, drugą ($A_4\,A_4''$) ujemną. Jeżeli teraz, jak zwykle przez odległości każdego punktu poprowadzimy płaszczyznę, to wartość tych odległości otrzymamy na płaszczyznach: poziomej i pionowej. Chcąc teraz otrzymać odwzorowanie punktów na jednej płaszczyźnie, obracamy płaszczyznę poziomą dokoła osi X dopóty, aż jedna płaszczyzna przystanie do drugiej; obracamy mianowicie w tym kierunku, żeby $+P_1$ padło na $-P_2$.

W tym razie rzuty punktów, leżących we wszystkich czterech ćwiartkach odwzorują się, jak wskazuje rys.14.



rys.14

Z rysunków 13 i 14 widzimy, że: punkt leżący w 1 ćw. ma rzut poziomy A_1' pod osią, pionowy A_1'' nad osią.

punkt leżący w II ćw. ma rzut poziomy A'_2 nad osią, pionowy A''_2 nad osią; punkt leżący w III ćw. ma rzut poziomy A'_3 nad osią, pionowy A''_3 pod osią.

punkt leżący w ćw.IV, ma rzut poziomy A'_4 pod osią pionowy A''_4 pod osią.

A więc, odwrotnie, jeżeli dany będzie punkt, którego np.rzut poziomy jest nad osią, a pionowy pod osią, to będziemy mogli twierdzić z całą pewnością, że punkt ten znajduje się w III ćwiartce. Należy przytym podkreślić, że rzuty jednego punktu muszą się znajdować na jednej prostej, prostopadłej do osi. Należy teraz rozważyć kilka szczególnych przypadków położeń rzutów punktu i odpowiadających im położeń punktu w przestrzeni. Jeżeli jeden rzut punktu np. poziomy leży na osi - B'_2 rys.14 - a rzut pionowy np. nad osią - B''_2 - to, aby znaleźć punkt B w przestrzeni, doprowadzamy pł. P_1 do prostopadłości z pł. P_2 ; następnie powinniśmy z p. B'_2 wystawić prostopadłą do P_1 ponieważ jednak B'_2 leży na osi, więc prostopadła będzie lażała na P_2 , czyli będzie nią $B'_2B''_2$; potym należyłoby z p. B''_2 wystawić prostopadłą aż do przecięcia się z poprzednią

prostopadłą, a punkt ich przecięcia byłby żądanym. Ponieważ jednak leży na , więc jest jednocześnie żądanym punktem , który leży na płaszczyźnie pionowej . Stąd wniosek:
punkt którego jeden rzut leży na osi, znajduje się na jednej z płaszczyzn rzutów.

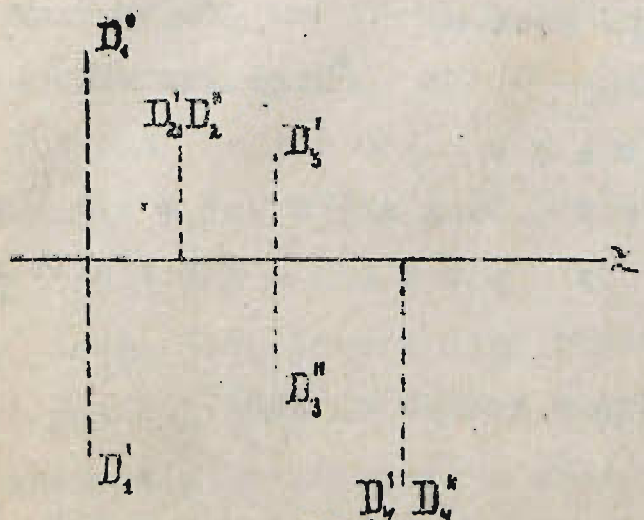
Tak np. punkt, którego rzutem są punkty /rys.14/ leży na .

Jeżeli oba rzuty punktu leżą na osi, to punkt oczywiście również musi leżeć na osi.

Rozpatrzmy przypadek, kiedy rzędne punktów /rzędnemi punktu nazywamy odcinki na płaszczyznach rzutów, wyrażające obie odległości punktu/ są obie równe /rys.15 - punkty D'_3, D''_3 / - to jest kiedy rzuty punktu są symetryczne względem osi rzutów, co jest możliwym tylko wtedy, jeżeli punkt leży w płaszczyźnie dwusiecznej prostego kąta dwuściennego, utworzonego przez płaszczyzny rzutów. Takich płaszczyzn dwusiecznych może być dwie: dzieląca na połowy ćwiartki I i III - pierwsza płaszczyzna dwusieczna

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
BIBLIOTEKA WYDZIAŁU CHEM

/pł. D_1 rys.13/ i dzieląca na połowy ćwiartki II i IV - druga płaszczyzna dwusieczna /pł. D_2 rys.13/.



rys 15

Otóż przypomniawszy sobie nasze spostrzeżenie co do stosunku między położeniami rzutów punktu wzgiędem osi a położeniem punktu w przestrzeni, zauważymy, że: punkt D_1 o rzutach D_1' i D_{21}'' leży w I płaszczyźnie dwusiecznej I ćwiartki; punkt D_3 i leży w I płaszczyźnie dwusiecznej III ćwiartki. Jeżeli punkt będzie leżał w II płaszcz. dwusiecznej, to tym samym będzie się znajdował w II lub IV ćwiartce, a zatym jego rzuty muszą leżeć oba nad /w II ćw./ lub pod /w IV ćw./ osią, ponieważ zaś powinny być na tej samej odległości od osi, więc znajdują się w jednym punkcie - D_2' i D_2'' są więc rzutami p. D_2 leżącego w II pł. dwusiecznej II ćwiartki /rys.15/; D_4' i D_4'' wyobrażają rzuty p. D_4, położonego w II pł. dwusiecznej IV ćw.

Z powyższego rozważania wynika, że: p u n k t , k t ó r e g o r z u t y s ą s y m e t r y - c z n e w z g l ę d e m o s i , l e ż y w p i e r w s z e j p ł a s z c z y ź n i e d w u - s i e c z n e j ; p u n k t , k t ó r e g o r z u t y p r z y s t a j ą d o s i e b i e , l e ż y w 2 - e j p ł a s z c z y ź n i e d w u s i e c z n e j .

Nr. 4. Wyznaczenie położenia prostej w przestrzeni. Prosta, podobnie jak punkt, jest wyznaczona w przestrzeni przez swoje dwa rzuty: poziomy i pionowy. Jeżeli mianowicie 2 punkty w przestrzeni dano przez swe rzuty, połączymy, to otrzymamy prostą, której rzutami będą łącznice rzutów jednoimiennych tych punktów. Stąd wynika, że rzutami linji prostej są również proste i że każda prosta może być odwzorowana przez swoje rzuty; a zatyn, odwrotnie, każde dwie jakiekolwiek proste wogóle wyznaczają położenie prostej w przestrzeni, jeżeli jedną z nich przyjąć za rzut poziomy a drugą - za pionowy.

Wyjątek stanowi tutaj przypadek, gdy dwie płasz[illegible]zny rzucające, poprowadzone prz[illegible] rzuty prostej przystaną do siebie, czyli bę[illegible]orzyły [illegible]dną

[illegible]