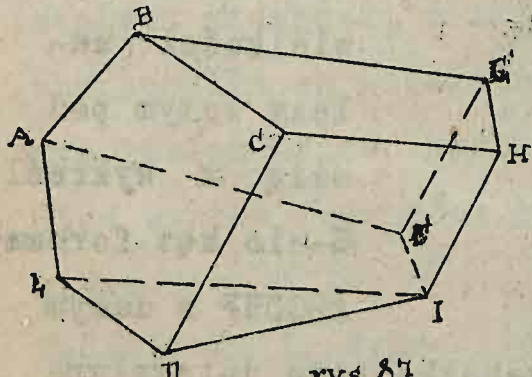
$A'B'$ i $A''B''$ oraz $B'C'$ i $B''C''$,znajdujemy punkty 1 i 2, należące do osi powinowactwa, łącząc je ze sobą otrzymamy ową oś - s.
Przedłużając do przecięcia się z s bok $C'D'$, otrzymamy punkt 3, przez który musi przechodzić odpowiedni rzut pionowy tegoż boku; ponieważ jeden punkt rzutu pionowego boku CD mianowicie wierzchołek C'' jest dany, więc łącząc p.3 z C'' , otrzymujemy prostą na której musi leżeć pionowy rzut boku CD; pionowy rzut p. D znajduje się na prostopadłej do osi, podniesipnej z punktu D' ; rzut tedy D'' znajduje się w punkcie przecięcia wykreślonych prostych. W podobny sposób wykreślimy rzut E''. Otrzymaliśmy w ten sposób, łącząc dane i znalezione wierzchołki,żądany pionowy rzut; sprawdzeniem dokładności kreślenia jest spotkanie się na osi powinowactwa przedłużenia boku, znalezionego wprost przez połączenie wykreślonych wierzchołków z przedłużeniem odpowiedniego boku / w danym wypadku przedłużeń boków $D'E'$ i $D''E''$ /

§ 8. Rzuty wielościanów.

Wielościanem w y p u k ł y m nazywamy taki wielościan, który jakakolwiek prosta przebija n a j w y ż e j w d w ó c h p u n k t a c h.
Wielościan, który jakaś prosta może przebić ...ccej

niż 2 razy zwie się **n i e w y p u k ł y m.**

Oczywistym jest, że każdy wielościan niewypukły można podzielić na części, będące wielkościanami wypukłemi i dla tego będziemy rozważali tutaj wyłącznie wielościany wypukłe. Aby znaleźć rzut wielościanu, należy znaleźć rzuty jego wszystkich wierzchołków, tak, żeby zewnątrz nie znajdował się żaden pozostały rzut wierzchołków, otrzymamy wielokąt, który zwie się **k o n t u r e m w i d z i a l n y m** np. ABOHIDE /rys.87/. Co się tyczy widzialności pozostałych krawędzi, to



rys 87

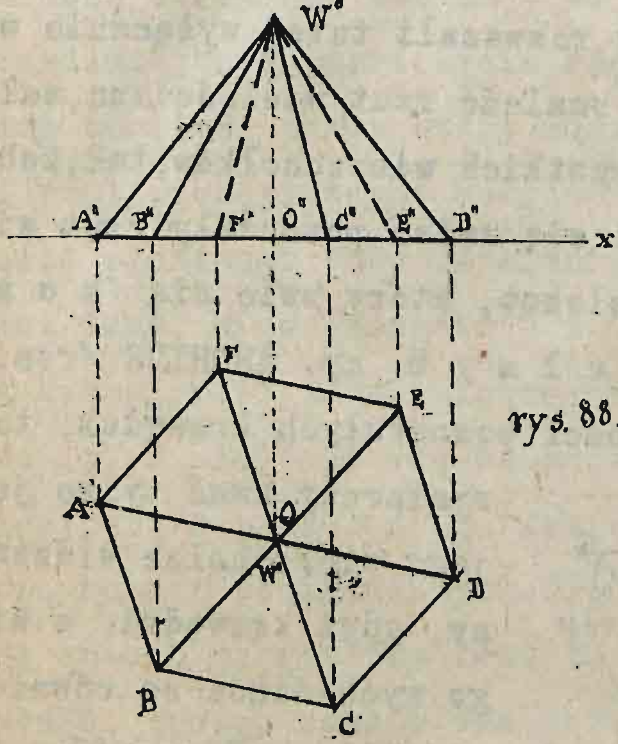
wystarczy znać tylko jeden jego wierzchołek widzialny, gdyż krawędzi, z niego wychodzące są również widzialne. Przypuśćmy tedy, że wiemy, iż wierzchołek C jest widzialny; w takim razie są widzialne krawędzie CB, CD i CH. Pozostałe /oprócz konturu/ krawędzie będą już wtedy niewidzialne.

Zapoznawszy się z temi zasadniczemi własnościami wielościanu, rozwiążemy szereg zadań, dotyczących się wielościanów.

<u>Zadanie XXV. Mając wysokość i bok podstawy ostrosłupa foremnego, którego podstawa spoczywa na jednej z</u>

płaszczyzn rzutów, znaleźć jego rzuty.

Przypuśćmy, że dany jest ostrosłup sześciokątny.



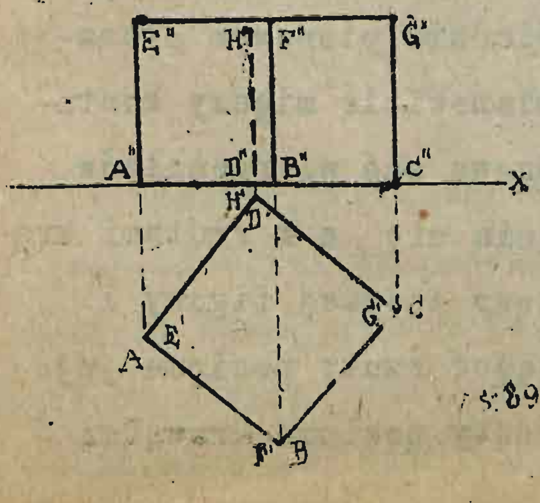
rys. 88

Ponieważ podstawa jego spoczywa np. na poziomej płaszczyźnie rzutów, więc na rysunku przedstawia się w swym naturalnym kształcie i wielkości: należy zatym pod osią x wykreślić 6-cio kąt foremny ABCDEF o danym boku /rys.88/. Spodek wierzchołka tego ostrosłupa leży oczywiście w środku wielokąta; punkt więc W' jest rzutem poziomym wierzchołka - ten sam jednak punkt jest środkiem podstawy wielokąta -O.

Kontur ABCDEF jest zawsze widzialny, ponieważ zaś wierzchołek W jest n a d płaszczyzną poziomą,więc krawędźi: OA,OB .... są również widzialne.

Jak założyliśmy, podstawa ostrosłupa leży na poziomej płaszczyźnie rzutów, zatym jej rzut pionowy musi się znajdywać na osi, prowadzimy tedy z wierzchołków podstawy i jej środka prostopadłe do osi x, których spodki stanowią ich rzuty pionowe A",B",.... O" Ponieważ w danym ostrosłupie wysokość jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, tym samym do płaszczyzny poziomej, więc jej rzut pionowy przedstawia się w swej naturalnej wielkości i kształcie; należy tedy z p. O" wystawić prostopadłą do osi x i na niej odmierzyć żądaną wysokość do p. W". Łącząc punkty A",B",.... z p. W otrzymamy rzut pionowy. Widzialnym jest kontur W"A"D"; co się tyczy widzialności pozostałych krawędzi, to należy sobie uprzytomnić, które wierzchołki są widzialne, jeżeli staniemy przed poziomym rzutem ostrosłupa - okazuje się, iż punkty B i C. Stąd wynika, że prócz konturu są jeszcze widzialne krawędzie W"B" i W"C".

Zadanie XXVI. Wykreślić rzuty sześcianu o danej krawędzi, przy założeniu, że jego podstawa spoczywa na jednej z płaszczyzn rzutów.



r. 89

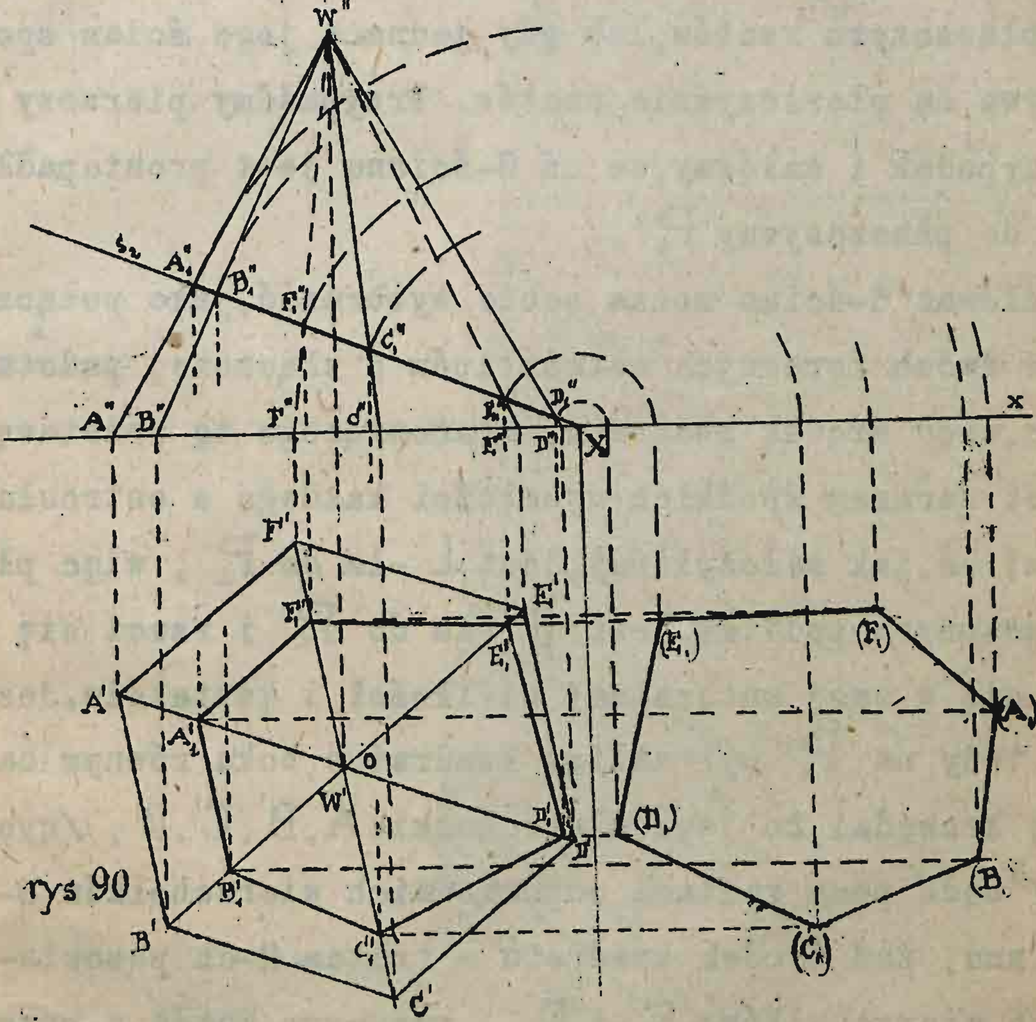
Ponieważ bokami 6-cianu są kwadraty o danej krawędzi, więc należy na poziomej np. płaszczyźnie rzutów wykreślić taki kwadrat, który będzie przedstawiał podstawę ABCD w jej naturalnym kształcie i wielkości /rys.89/, a jednocześnie, ponieważ <u>wszystkie</u> krawędzi są wzajemnie do siebie prostopadłe, będzie poziomym rzutem $E'F'G'H'$ górnej podstawy sześcianu.

Rzut pionowy dolnej podstawy $A''B''C''D''$ leży, analogicznie do poprzedniego zadania, na osi x, rzut zaś górnej podstawy $E''F''G''H''$ w odległości krawędzi sześcianu od osi. Widzialność poszczególnych krawędzi rozstrzyga się analogicznie do poprzedniego zadania

<u>Zadanie XXVII. Dany wielościan przeciąć płaszczyzną prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów</u>.

Kreślimy w sposób już znany rzuty np.ostrosłupa foremnego 6-kątnego, którego podstawa spoczywa na poziomej płaszczyźnie rzutów /rys.90/ oraz ślady pł. np.prostopadłej do pionowej. Mamy więc: ostrosłup WABCDEF i płaszcz. $S \perp P_2$; chcemy znaleźć rzuty i kształt figury, utworzonej przez przecięcie się ostrosłupa z płaszczyzną S . Rzut pionowy tej figury musi leżeć na śladzie pionowym płaszczyzny- s_2- zawarty jest mianowicie między konturami ostrosłupa, rzuty pionowe zaś wierzchołków posiada w punktach przecięcia się s z rzutami krawędzi. Mając już rzut pionowy żądanej figury i proste, na których muszą leżeć rzuty poziome jej wierzchołków mianowicie, rzuty poziome krawędzi -

znajdujemy szukany rzut poziomy $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'F_1'$.



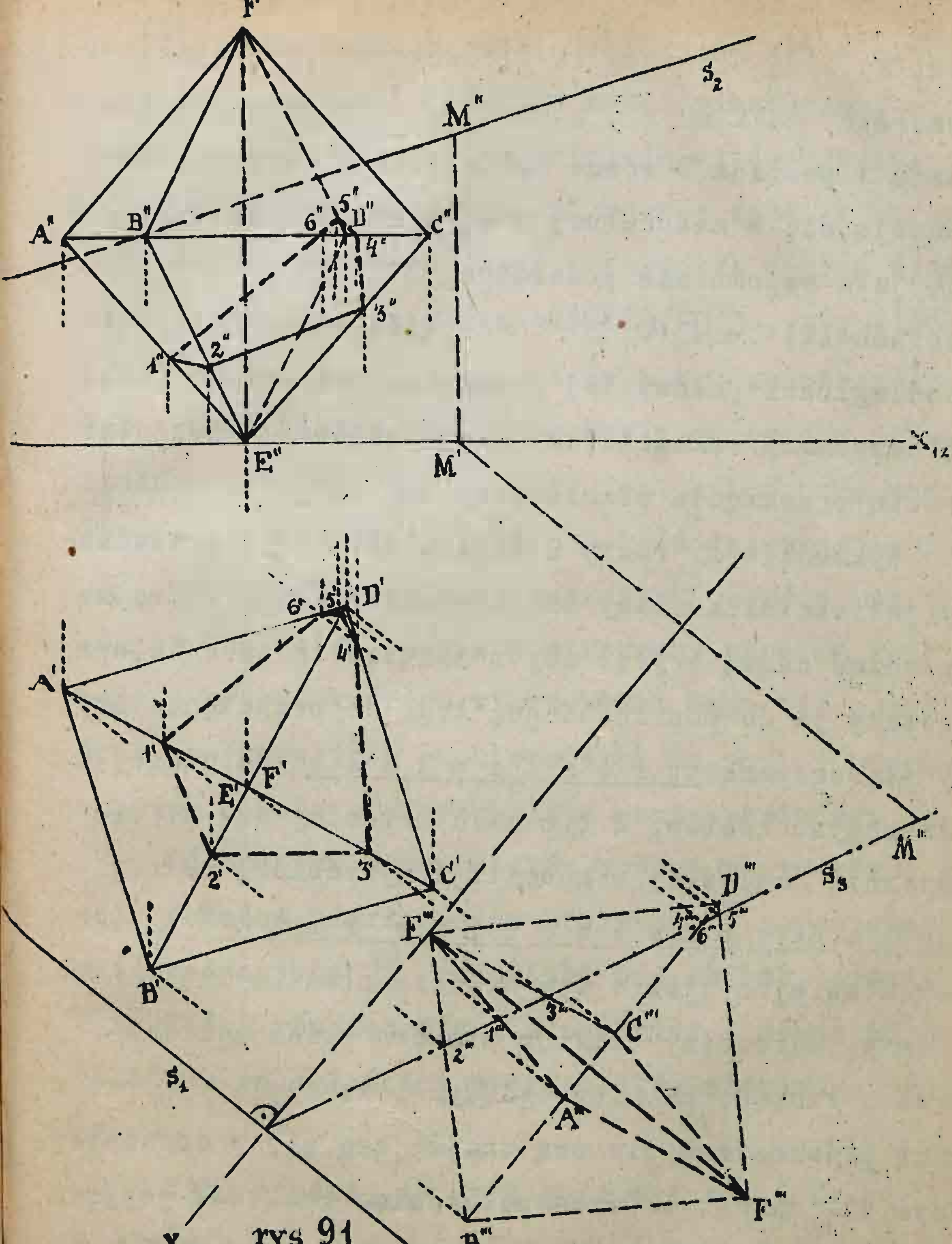
rys 90

Aby znaleźć prawdziwą wielkość znalezionego w rzutach sześciokąta, posługujemy się metodą kładu płaszczyzny danej, wraz z leżącą w niej figurą np. na poziomą płaszczyznę rzutów; otrzymujemy w ten sposób naturalną wielkość i kształt wielokąta $(A_1)(B_1)(C_1)\dots(F_1)$

Zadanie XXVIII. Ośmiościan o danej krawędzi przeciąć jakąkolwiek płaszczyzną.

Wykreślmy naprzód rzuty ośmiościanu o danej krawędzi; najdogodniejszym do wykresu będzie takie jego położenie, gdy 8-ścian ma oś prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutów, lub gdy jedna z jego ścian spoczywa na płaszczyźnie rzutów. Przypuśćmy pierwszy przypadek i załóżmy, że oś 8-ścianu jest prostopadła np. do płaszczyzny P_1.

Ponieważ 8-ścian można sobie wyobrazić, jako połączenie dwóch foremnych ostrosłupów o złączonej podstawie, więc środek kwadratu, stanowiącego tę podstawę, jest zarazem spodkiem wysokości każdego z ostrosłupów; oś, jak założyliśmy, jest $\perp$-ła do P_1, więc pł. złączonych podstaw jest $\parallel$-ła do P_1 i rzuci się na nią w swej naturalnej wielkości i kształcie. Jeżeli tedy na P_1 wykreślimy kwadrat o boku równym danej krawędzi, to jego wierzchołki: A', B', C', D', /rys. 91/ będą poza rzutami odpowiednich wierzchołków 8-ścianu, zaś środek kwadratu - rzutem 2-ch pozostałych wierzchołków: E' i F', przyczym każda z przekątnych jest rzutem 4-ch bocznych krawędzi 8-ścianu. Chcąc wykreślić rzut pionowy załóżmy, iż wierzchołek E spoczywa na P_1, w takim razie jego rzut pionowy znajduje się na osi rzutów, wysokość zaś 8-ścianu


F"
S2
M"
A"
B"
6"
5"
D"
C"
4"
3"
1"
2"
E"
M'
X12
6'
5'
D'
4'
A'
1'
E'
F'
2'
3'
C'
B'
M"'
S3
D"'
E"'
4"'
5"'
6"'
3"'
C"'
1"'
2"'
A"'
S1
F"'
B"'
X13

rys 91

jest do niej prostopadła i równa się przekątnej kwadratu $A'B'C'D'$, gdyż 8-ścian jest bryłą foremną i posiada 3 równe sobie osie, z których dwie rzucają się w naturalnej swej wielkości na P_1 właśnie jako wspomniane przekątne.
Wierzchołki A'', B'', C'', D'' oczywiście znajdują się w odległości połowy tej przekątnej od osi $X_{1,2}$ - oś tę oznaczamy wskaźnikiem 12 /jeden,dwa/, gdyż jest prostą przecięcia płaszczyzny P_1 i P_2

Wykreśliwszy rzuty 8-ścianu AB....F , prowadzimy jakiekolwiek ślady płaszczyzny S_1, S_2 która ma przeciąć naszą bryłę. Aby rozwiązać to zadanie, sprowadzamy je do poprzedniego, t.j. do przecięcia bryły płaszczyzną <u>p r o s t o p a d ł ą</u> do jednej z płaszczyzn rzutów. W tym celu zwrócimy się do niezmiernie doniosłej w geometrji wykreślnej metody <u>z m i a n y p ł a s z c z y z n r z u t ó w</u> i, pozostawiając, jak w tym wypadku płaszczyznę P_1 bez zmiany, odrzucimy całkiem pionową płaszczyznę P_2 wraz z rzutem, na niej będącym i zastąpimy ją przez inną płaszczyznę pionową znajdującą się w dogodniejszym dla danego zadania położeniu. Ponieważ jedynym warunkiem, obowiązującym do poprowadzenia nowej płaszczyzny pionowej, jest tylko jej prostopadłość do P_1, więc każda prosta, znajdująca się w niej, może być uważana, jako ślad nowej płaszczyzny pionowej, dokoła którego obrócimy ją aż do przystania z P_1. Ponieważ chcemy rozpatrywane zadanie sprowadzić do poprzedniego, więc należy tak dobrać ślad nowej płaszczyzny, którą nazwiemy P_3, aby ślad danej płaszczyzny, s_1, był do niego prostopadły. Zadosyćuczyniwszy temu warunkowi, otrzymamy jednocześnie nową oś x_{13} - gdyż jest ona prostą przecięcia płaszczyzn P_1 i P_3. Dokoła tej nowej osi x_{13} obracamy nową płaszczyznę P_3 dopóty, aż przystanie ona do P_1 - wtedy otrzymamy na niej rzut naszej bryły, którego wierzchołki będą się oczywiście znajdowały na prostopadłych do x_{13}, opuszczonych na nią z wierzchołków rzutu poziomego.

Odległości wierzchołków nowego rzutu równe są odległościom wierzchołków bryły od P_1, ponieważ zaś płaszczyzna P_1 pozostała bez zmiany, więc te odległości również się nie zmieniły i równe są poprzednim odległościom wierzchołków pionowego rzutu od x_{12}.

Stąd wynika, że, a b y z m i e n i ć p ł a s z c z y z n ę r z u t ó w n a l e ż y z w i e r z c h o ł k ó w r z u t u n i e z m i e n i o n e g o o p u ś c i ć p r o s t o p a d ł e na nową oś i na przedłużeniu tych prostopadłych odmierzyć począwszy od nowej osi odpowiednie odległości od dawnej osi wierzchołków zbytecznego rzutu.

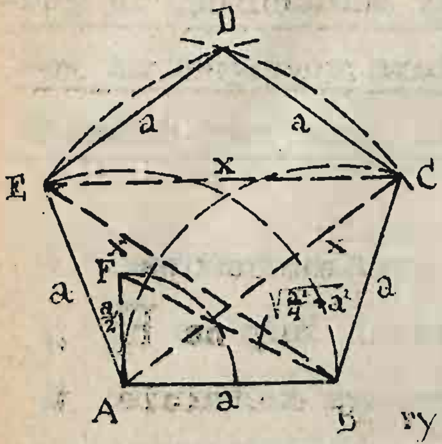
Aby jeszcze w naszem zadaniu znaleźć ślad danej płaszczyzny (s_1, s_2) na P_3 obieramy na s_2 dowolny rzut M'' jakiegoś punktu M, znajdujemy jego rzut poziomy M' - oczywiście będący na osi - i, w myśl powyższej zasady, na przedłużeniu prostopadłej $M'M''' \perp x_{13}$ odmierzamy od osi x_{13} odcinek, równy $M'M''$; otrzymamy punkt M''', należący do śladu danej płaszczyzny na P_3. Ponieważ jeszcze jeden punkt tego śladu był już dany - punkt przecięcia s_1 z x_{13} - więc, łącząc je ze sobą, znajdujemy ślad s_3. Mamy wtedy przeciąć bryłę, daną przez dwa rzuty: $A'B' \ldots F'$ i $A'''B''' \ldots F'''$ płaszczyzną, daną przez ślady: s_1, s_3, przyczym płaszczyzna (s_1, s_3) jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, mianowicie do P_3; zrobić to potrafimy - otrzymujemy dwa rzuty figury, według której przecina się bryła dana z płaszczyzną daną: $1'''2''' \ldots 5'''$ oraz $1'2' \ldots 5'$ - mając zaś rzut poziomy, możemy z łatwością znaleźć rzut pionowy na P_2: $1''2'' \ldots 5''$.

Zadanie XXIX. Przebić jakąkolwiek prostą foremny 5-kątny graniastosłup prosty przy założeniu, że jedna ze ścian bocznych graniastosłupa spoczywa na poziomej płaszczyźnie rzutów, jeśli dana jest krawędź podstawy i krawędź boczna.

Wykreślimy naprzód poziomy rzut graniastosłupa: ponieważ jedna z jego ścian bocznych leży na P_1, więc możemy ją wykreślić w naturalnym kształcie i wielkości, jako prostokąt ABFG, o wymiarach, danych w warunkach zadania /rys.93/. Co się tyczy rzutów pozostałych wierzchołków graniastosłupa, to muszą one leżeć na przedłużeniach AB i FG, gdyż dany graniastosłup jest prostym. Aby znaleźć te rzuty obracamy w wyobraźni 5-kąt foremny, będący podstawą graniastosłupa, dokoła jego boku AB, aż przystanie on do P_1, przedstawiając się w swej naturalnej wielkości i kształcie. Innemi słowy, budujemy na odcinku AB, jako na boku, 5-kąt foremny.

Należy sobie w tym celu uprzytomnić, jak na odcinku a, jako na boku /rys.92/, zbudować 5-kąt foremny ? Przypuśćmy, że jest nim figura AB....E, przeprowadźmy przekątne AC, BE, EC i zauważmy, że są one sobie równe i, przypuśćmy, równe x.

Przez przeprowadzenie przekątnych utworzył się 1 kąt



rys. 92.

ABCE, który jest wpisany w koło, opisane na 5-kącie / gdyż wierzchołki A,B,E,C, leżą na tym kole/. W takim razie możemy tu zastosować twierdzenie Ptolomeusza i napisać:

AC.BE = AE.BC + AB.EC, lub też, podstawiając wartości:

$$x^2 = ax + a^2 \; ; \quad \text{skąd} \quad x^2 - ax - a^2 = 0$$

rozwiązując względem x:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \; ---------- (1)$$

/znak minus przed pierwiastkiem odrzucamy, gdyż $\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} > \frac{a}{2}$, mielibyśmy zatym na x wartość ujemną/.

Ze wzoru /1/ wynika, że przekątna 5-kąta foremnego równa jest sumie: połowy jego boku i przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne równe są odpowiednio połowie boku 5-kąta i całemu bokowi.

Wykreślamy naprzód wspomniany trójkąt ABF i, dodając do jego przeciwprostokątnej FB odcinek, równy

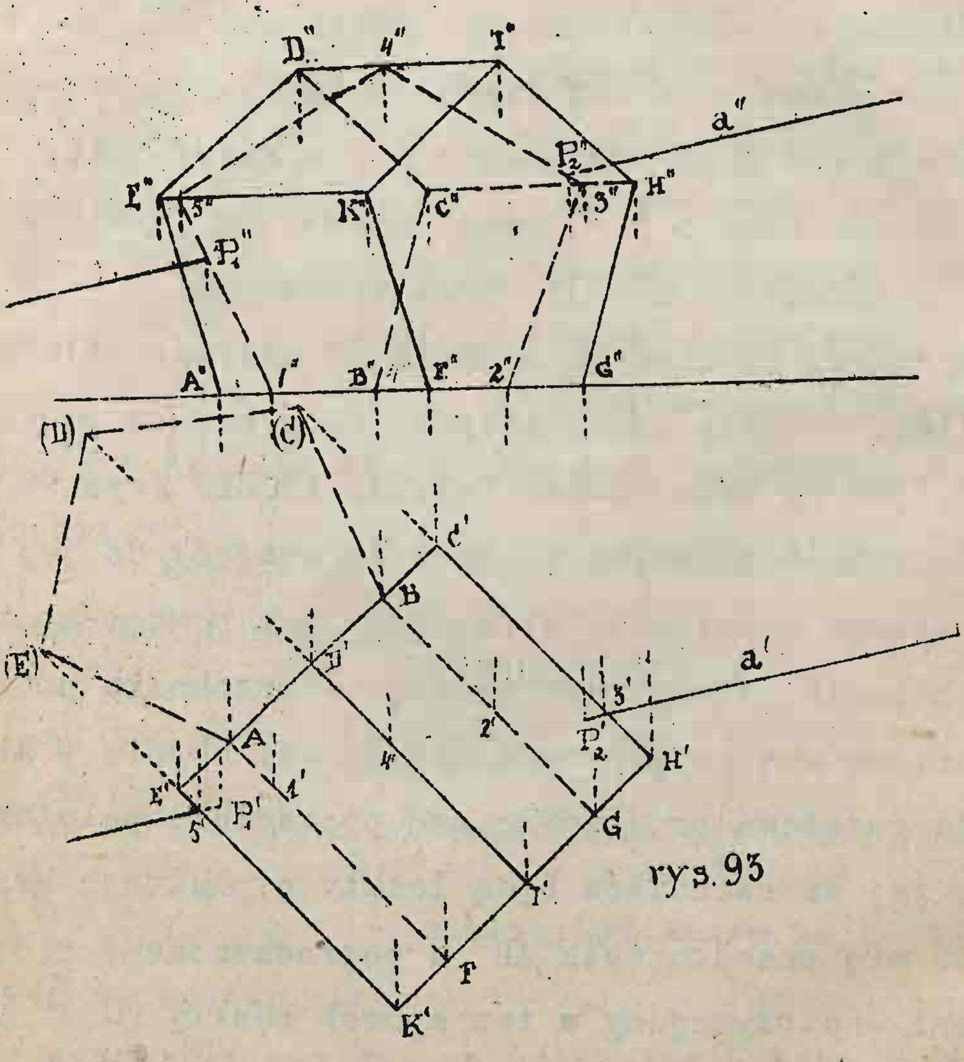
$\frac{a}{2}$ znajdujemy przekątną x.

Mając tedy bok 5-kąta-a- i jego przekątną x, z łatwością znajdziemy wierzchołki pozostałe 5-kąta w punktach przecięcia się łuków, zatoczonych; z wierzchołków A i B promieniem = x : D ; z wierzchołka A promieniem = x i B , promieniem = a : C ; z wierzchołka A promieniem = a i B promieniem = x : E.

Wróćmy teraz do naszego zadania i, nie wykreślając już linji i łuków pomocniczych, budujemy na odcinku AB, jak na boku, 5-kąt foremny ABCDEF /rys.93/. Po otrzymaniu podstawy w kładzie, wracamy do jej naturalnego położenia, obracając ją z powrotem dookoła boku AB. Wtedy rzut każdego wierzchołka podstawy porusza się po prostopadłej do osi obrotu - AB - a, gdy podstawa przybierze swe poprzednie położenie, rzuty jej wierzchołków będą leżały w punktach przecięcia się przedłużenia AB z poprowadzonemi prostopadłemi - otrzymujemy w ten sposób punkty C', D', E' - a, ponieważ dany graniastosłup jest prosty, więc również H', I', K'.

Te same punkty moglibyśmy znaleźć po wykreśleniu wierzchołka /C/, na podstawie symetrji.

Wykreślmy teraz rzut pionowy: rzuty A'', B'', F'' i G'' leżą na osi, gdyż, w myśl założenia, wierzchołki A, B, F, G leżą na P_1. Co się tyczy pierwszych odległości pozostałych punktów, - od czego bezpośrednio



rys. 93

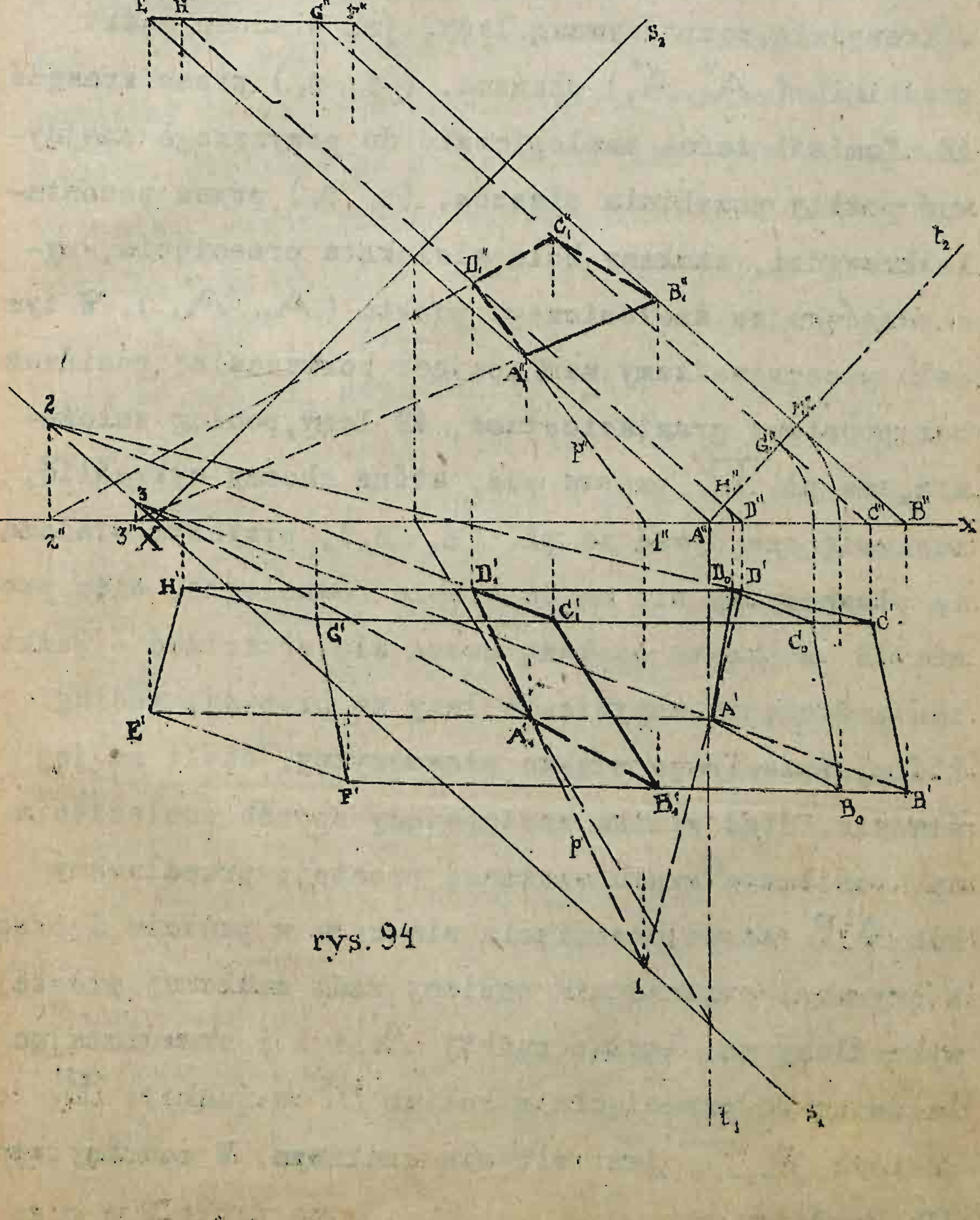
są uzależnione rzuty pionowe - to są one oczywiście odpowiednio równe: $(E)E'$, $(D)D'$, $(C)C'$. Mając zaś rzut podstawy $A''B''\ldots E''$ wykreślimy, jako mu równy rzut $F''G''\ldots K''$.

Wykreśliwszy w ten sposób oba rzuty graniastosłupa, prowadzimy jakąkolwiek prostą / a', a'' / i znaj

dziemy punkty przebicia graniastosłupa przez tę prostą.
W tym celu prowadzimy przez daną prostą pomocniczą płaszczyznę rzucającą np. poziomo - jej śladem poziomym jest w takim razie prosta a' ; znanym sposobem znajdujemy poziomy - $1'2'....5'$ rzut wielokąta, według którego przecina się bryła z płaszczyzną pomocniczą a, prowadząc linje rzędne wierzchołków tego wielokąta, znajdujemy jego rzut pionowy $1''2''......5''$. Jeżeli teraz również znanym sposobem wyznaczymy punkty $/P_1', P_1''/$ i $/P_2', P_2''/$, / w których prosta / a', a'' / przebija wielokąt pomocniczy, to zadanie będzie rozwiązane, gdyż punkty te znajdują się jednocześnie na prostej danej i na powierzchni bryły danej. Jeśli umówimy się przedstawiać części prostej; skryte <u>za</u> bryłą, linją kreskowaną, a znajdujących się <u>w</u> bryle nie oznaczać wcale, to otrzymamy rzuty rozwiązania, jak na rys.93.

<u>Zadanie XXX.</u> <u>Graniastosłup dany przeciąć jakąkolwiek płaszczyzną.</u>

Przypuśćmy, że dany jest graniastosłup 4-kątny taki, że jego podstawa spoczywa na poz,pł.rzutów, zaś krawędzi boczne są równoległe do pion.pł.rzutów; ~~tów~~; gdyby tak nawet nie było, to, zmieniając odpowiednio płaszczyzny rzutów, możnaby doprowadzić do powyższych warunków każdy graniastosłup. Ponieważ krawędzie boczne są || -łe do P_2, więc ich rzuty poziome są || -łe do osi x, zaś pionowe odwzorowują się w swym naturalnym kształcie i wielkości, przyczym są nachylone do osi x pod takim kątem, jaki tworzą z płasz. P_1, krawędzi boczne. Wykreśliwszy tedy kolejno: postawę graniastosłupa ABCD na pł. P_1, jego rzut pionowy $A''B''...H''$ oraz rzut poziomy $A'B'...H'$ /rys.94/, prowadzimy ślady $s_1 s_2$ jakiejkolwiek płaszczyzny i postaramy się znaleźć wielokąt jej przecięcia z danym graniastosłupem. Można to uczynić w ten sposób, że znajdziemy kolejno punkty przebicia płaszczyzny / s_1, s_2 / przez każdą z krawędzi graniastosłupa; łącząc otrzymane w ten sposób punkty, znajdziemy żądany wielokąt przecięcia. Postąpimy jednak inaczej: znajdźmy mianowicie punkt przebicia płaszcz. / s_1, s_2/ przez jedną tylko krawędź danego graniastosłupa, np. przez krawędź AE. W tym celu prowadzimy płaszczyznę, rzucającą AE powiedzmy pionowo /ślad pionowy przystaje do rzutu pionowego prostej $A''E''$, ślad ~~pionowy~~ poziomy jest $\perp$ -ły do osi x/ i znajdujemy prostą, według

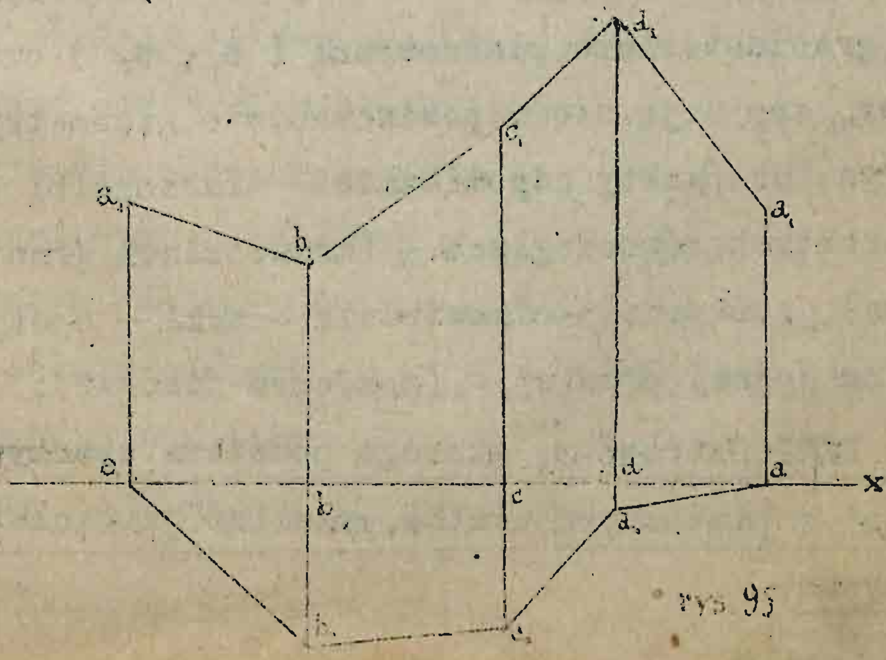

E"
H"
G"
F"
S_2
C_1"
D_1"
B_1"
A_1"
t_2
2
3
2"
3"
X
1"
A"
D"
C"
B"
x
H'
D_1'
C_1'
D_0
D'
G'
C_0
C'
E'
A_1'
A'
F'
B_1'
B_0
B'
p'
1
t_1
S_1

rys. 94

której przecina się przeprowadzona płaszcz. z płasz. daną / s_1, s_2 /: znajdziemy w ten sposób, znanym sposobem prostą / p', p'' /W punkcie przecięcia się jej z krawędzią rozpatrywaną leży, jak wiadomo punkt przebicia (A_1', A_1'') płaszcz. (s_1, s_2) przez krawędź AE. Zamiast teraz analogicznie do powyższego znajdywać punkty przebicia płaszcz. (s_1, s_2) przez pozostałe krawędzi, szukamy boku wielokąta przecięcia, wychodzącego ze znalezionego punktu (A_1', A_1''). W tym celu przeprowadzamy następujące rozważanie: ponieważ bok podstawy graniastosłupa, AB leży, podług założenia, na pł. P_1 prosta zaś, którą chcemy wykreślić, musi się znajdywać na pł. (s_1, s_2), przyczym wiadomo, iż płaszczyzny nie są do siebie równoległe, więc prosta AB z prostą szukaną muszą się przecinać - punkt zaś przecięcia oczywiście leży na prostej, według której przecinają się te płaszczyzny, czyli na jej śladzie. Stąd wynika następujący sposób znalezienia np. poziomego rzutu szukanej prostej: przedłużamy bok $A'B'$ aż do przecięcia się z s_1 w punkcie 1, przez który musi przechodzić poziomy rzut szukanej prostej; wykreślamy go, łącząc punkty A_1' i 1 i przedłużając łącznicę do przecięcia z bokiem BF' w punkcie B_1' : odcinek $A_1'B_1'$ jest właśnie szukanym. W podobny sposób kreślimy bok $B_1'C_1'$, znajdując punkt 2 w prze

cięciu się s_1 z BC; analogicznie otrzymujemy bok $C_1'D_1'$; co się tyczy boku $A_1'D_1'$, to można go wykreślić, łącząc wprost punkty A_1' i D_1', przyczym sprawdzeniemdokładności kreślenia, będzie spotkanie się $A_1'D_1'$ z AD na śladzie s_1 w punkcie 4. Przechodzimy teraz do wykreślenia rzutu pionowego przecięcia. Otrzymać go można w dwojaki sposób: albo prowadząc linje rzędne wierzchołków poziomego rzutu wielokąta przecięcia, albo też, znajdując pionowe rzuty 1", 2", ... punktów 1 i 2,... Punkty 1", 2",.. leżą na osi x, gdyż punkty 1,2,.... znajdujące się na śladzie s_1, leżą, tym samym na płaszcz. P_1.
Rzuty pionowe boków wielokąta przecięcia muszą, oczywiście, przechodzić przez te punkty, i ponieważ jeden wierzchołek pionowego rzutu przecięcia - A_1'' - już mamy, więc wykreślenie całego pionowego rzutu $A_1''B_1''C_1''D_1''$ nie przedstawia żadnych trudności.
Postaramy się jeszcze znaleźć rozwinięcie bocznej powierzchni graniastosłupa.
Będą je stanowiły 4 ~~równoległoboki~~?, dla wykreślenia których potrzebne są po 3 elementy każdego z nich: mianowicie, obie podstawy i wysokość. Ponieważ nasze położenie graniastosłupa jest takie, że jego boczne krawędzi rzucają się na pion.pł. rzutów w

swej naturalnej wielkości, zaś podstawę rzuca się również w naturalnej wielkości na poz. pł. rzutów, więc dwie pierwsze wielkości, niezbędne do zbudowania żądanych równoległoboków, mamy dane wprost z rysunku. Aby znaleźć teraz wysokość równoległoboków, przetnijmy nasz graniastosłup płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi, przechodzącą np. przez wierzchołek A. W tym celu przez p. A prowadzimy ślady płaszczyzny pomocniczej: $t_1 \perp A'E'$ (już zresztą poprowadzone przedtym w innym celu) i $t_2 \perp A''E''$. Odcinki śladów t_1 i t_2, zawarte między konturem graniastosłupa, są rzutami przecięcia prostopadłego. Boki otrzymanego w ten sposób przecięcia prostopadłego są szukanemi wysokościami. Aby je otrzymać w naturalnej wielkości obrócimy płaszczyznę (t_1, t_2) dokoła śladu t_1 aż do przystania z P_1 t.j. dokonamy kładu pł. (t_1, t_2) na pł P_1, co przyjdzie z największą łatwością, gdyż równoległe do osi x, poprowadzone z wierzchołków poziomego rzutu wielokąta są już, jako rzuty krawędzi graniastosłupa wykreślone. Otrzymamy w ten sposób czworobok $AB_oC_oD_o$, który będzie właśnie szukaną prawdziwą wielkością przekroju prostopadłego. Boki czworokąta są to 4 wysokości równoległoboków. Ponieważ wszystkie boki prostopadłego przecięcia graniastosłupa są prostopadłe do jego krawędzi, te zaś ostatnie są do siebie równoległe, więc na rozwinięciu bocznej powierzchni należy obwód tego przecięcia wykreślić na jednej prostej. Przypuśćmy, żeśmy graniastosłup przecięli według krawędzi AE. Od dowolnego tedy punktu prostej xy (rys.95) odmierzamy odcinki: $ab = A_0B_0$; $bc = B_0C_0$; $cd = C_0D_0$ i $da = D_0A$. Wystawiając teraz w punktach: a, b, ... prostopadłe do xy, otrzymamy proste, na których muszą się znajdować krawędzie graniastosłupa. Zamiast jednak wykreślać rozwinięcie całej powierzchni bocznej graniastosłupa, wykreślimy tylko rozwinięcie powierzchni tej jego części, która jest zawarta między podstawą dolną a wielokątem przecięcia graniastosłupa przez płaszcz. (S_1 , S_2). W tym celu odmierzymy od p. a na wstawionej prostopadłej odcinek $aa_1 = A''A''_1$



rys 95

w górę; od p. b w ten sam sposób odmierzamy bb_1 równe odcinkowi krawędzi $B_1''F_1''$, zawartemu między śladem t_2 a punktem B_1''. Analogicznie znajdujemy punkty: c_1 i d_1 wreszcie odmierzamy raz jeszcze odcinek aa_1'. Łącząc punkty: a_1, b_1, ... a_1, otrzymamy rozwinięcie obwodu wielokąta przecięcia graniastosłupa płaszczyzną (s_1, s_2). Odmierzając pod prostą xy od tych samych, co poprzednio, punktów odcinki, równe odcinkom krawędzi, zawartym między t_2 a dolną podstawą graniastosłupa, otrzymamy rozwinięcie obwodu tej dolnej podstawy, po połączeniu ze sobą wyznaczonych w powyższy sposób punktów. Gdybyśmy chcieli znaleźć rozwinięcie całej bocznej powierzchni, to należałoby nad prostą xy odmierzać odcinki krawędzi, zawarte między t_2 a górną podstawą graniastosłupa.

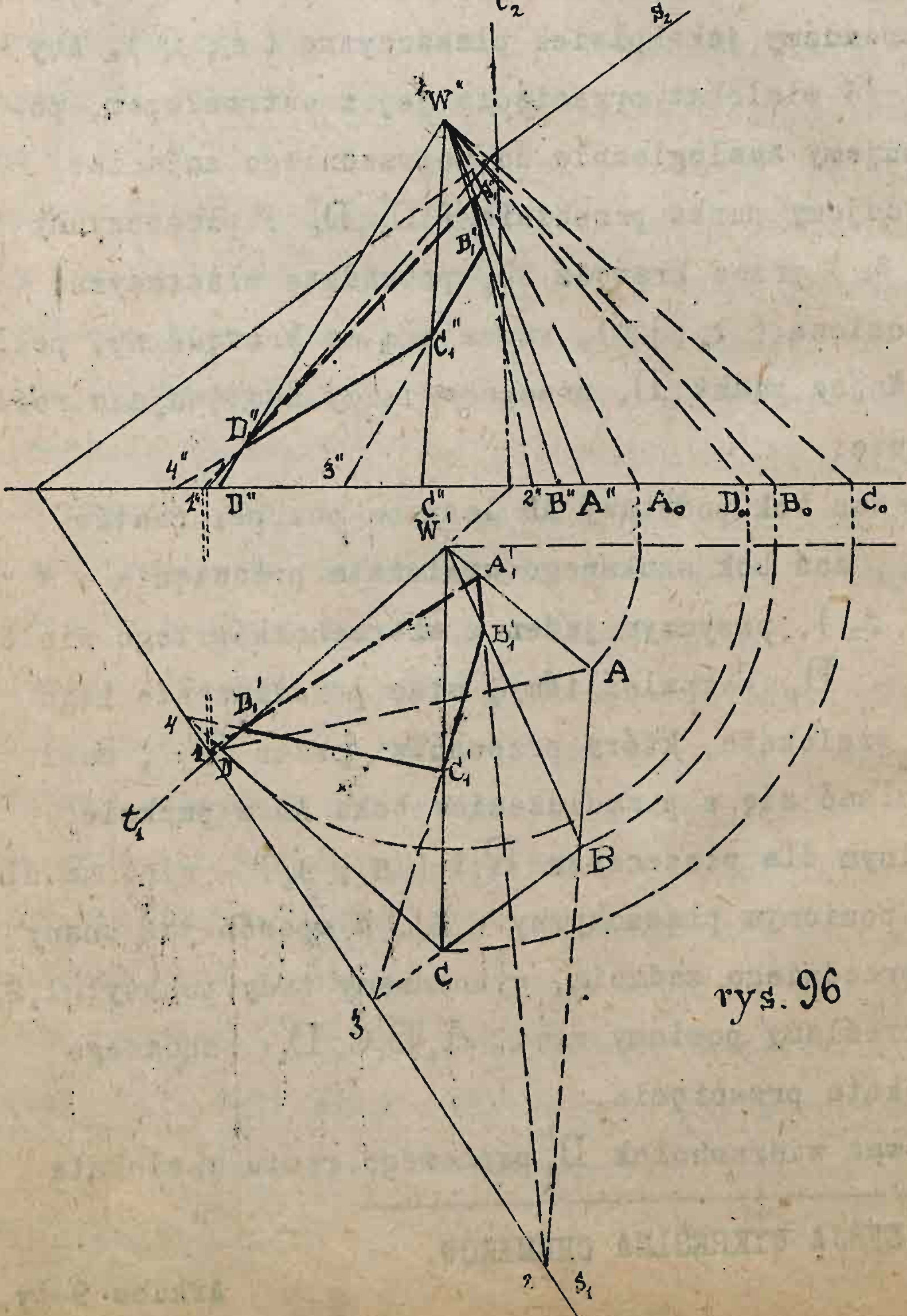
Zauważmy jeszcze, że poziome rzuty: wielokąta przecięcia graniastosłupa płaszczyzną (s_1, s_2) oraz podstawy, znajdują się w powinowactwie gieometrycznym, gdyż ich punkty odpowiednie - wierzchołki - leżą na prostych równoległych - (krawędziach graniastosłupa), zaś proste odpowiednie - boki - spotykają się na jednej prostej -, (poziomym śladzie).

Zadanie XXXI. Ostrosłup, którego podstawa spoczywa na jednej z płaszczyzn rzutów, przeciąć jakąkolwiek płaszczyzną.

Przypuśćmy, że dany jest ostrosłup 4-kątny o podstawie, spoczywającej na P_1, niech jego rzutem poziomym będzie W'ABCD, pionowym - $W''A''B''C''D''$ (rys.96) Poprowadźmy jakąkolwiek płaszczyznę (s_1, s_2). Aby znaleźć wielokąt przecięcia jej z ostrosłupem, postępujemy analogicznie do poprzedniego zadania: znajdujemy punkt przebicia (D_1', D_1'') płaszczyzny (s_1, s_2) przez krawędź WD, prowadząc płaszczyznę pomocniczą (t_1, t_2), rzucającą tę krawędź np. poziomo. Mając punkt D_1' przeprowadzamy następujące rozumowanie:

Ponieważ bok podstawy AD leży na poz.pł. rzutów P_1, zaś bok szukanego wielokąta przecięcia - w pł. (s_1, s_2), przyczym jeden z wierzchołków tego wielokąta - D_1' - znaleźliśmy, więc przedłużenie tego boku wielokąta, który przechodzi przez D_1', musi przecinać się z przedłużeniem boku AD w punkcie, wspólnym dla płaszczyzn P_1 i (s_1, s_2) - więc na śladzie poziomym płaszczyzny - s_1. W sposób już znany z poprzedniego zadania, wyznaczamy tedy punkty: 1,2.. i wykreślamy poziomy rzut $A_1'B_1'C_1'D_1'$ żądanego wielokąta przecięcia.

Ponieważ wierzchołek D_1' pionowego rzutu wielokąta



rys. 96

Ponieważ wierzchołek D_1' pionowego rzutu wielokąta znaleźliśmy poprzednio, więc znajdując punkty 1",2", z łatwością wykreślimy cały rzut pionowy $A_1''B_1''C_1''D_1''$ Zauważmy teraz, iż podstawa naszego ostrosłupa ABCD oraz poziomy rzut wielokąta przecięcia - $A_1'B_1'C_1'D_1'$ pozostają ze sobą w pewnym związku, a mianowicie:

1/ odpowiednie boki tych figur - np. $A_1'B_1'$ i AB - spotykają się na jednej prostej /s_1/.

2/ odpowiednie ich punkty - np. A_1' i A - leżą na prostych, wychodzących z jednego punktu /W_1/.

Widzimy, że jest to zależność, bardziej ogólna, niż powinowactwo geometryczne. Nosi ona miano kolineacji środkowej i polega na czterech następujących właściwościach:

1) każdemu punktowi jednej figury odpowiada jeden i tylko jeden punkt drugiej.
2) każdej prostej jednej figury, odpowiada jedna i tylko jedna prosta drugiej.
3) punkty odpowiednie tych figur leżą na prostych, wychodzących z jednego punktu,
4) proste odpowiednie tych figur spotykają się w punktach, leżących na jednej prostej.

Punkt, z którego wychodzą wspomniane proste, zwie się środkiem kolineacji (w danym wypadku p. W').

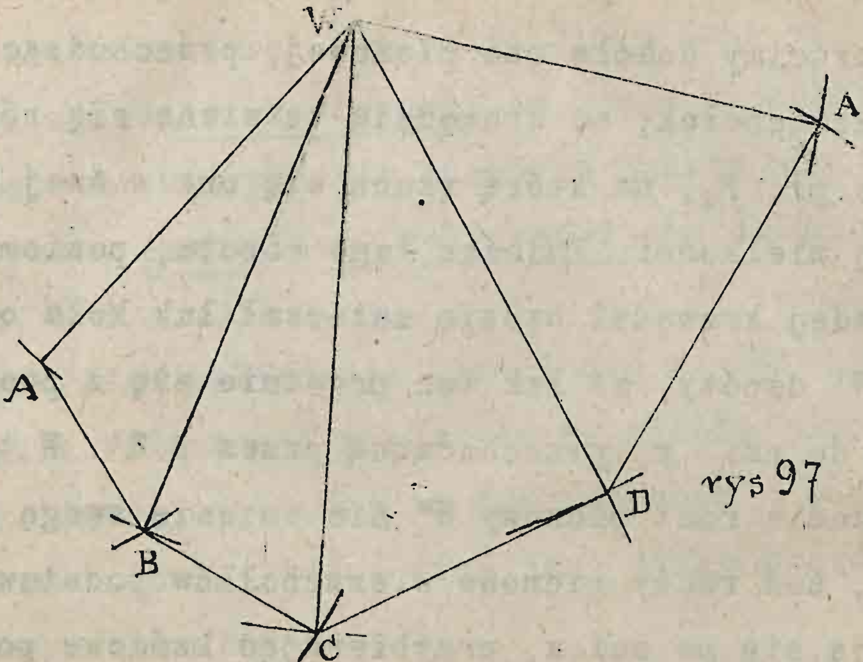
Prosta, na której spotykają się proste odpowiednie, nosi miano <u>osi kolineacji</u> (w danym wypadku s_1).
Proste na których się znajdują punkty odpowiednie, nazywamy <u>promieniami kolineacji</u> (w danym wypadku W'A, W'B,.....)
Gdy środek kolineacji oddali się w ∞, wtedy promienie kolineacji stają się do siebie równoległe i kolineacja przechodzi tym sposobem w powinowactwo gieometryczne, które więc jest tylko szczególnym przypadkiem kolineacji.
Z powyższych spostrzeżeń wynika, że, zarówno w przypadku kolineacji, jak powinowactwa, wystarcza znać tylko: środek i oś kolineacji (ewentualnie kierunek promieni i oś powinowactwa), aby, znając jedną figurę i jeden punkt drugiej, wykreślić tę drugą figurę.
Wróćmy jeszcze do naszego zadania i znajdźmy rozwinięcie powierzchni bocznej ostrosłupa, która oczywiście będzie się składała z trójkątów o wspólnym wierzchołku. Podstawy tych Δ-tów są już dane w zadaniu, gdyż podstawa ostrosłupa, spoczywając na P_1, przedstawia się w swej naturalnej wielkości. Należy tedy znaleźć prawdziwe długości krawędzi bocznych, które będą właśnie szukanemi

bokami △△-ów. W tym celu każdą z krawędzi bocznych obrócimy dokoła osi pionowej, przechodzącej przez wierzchołek, aż krawędzie te staną się równoległe do pł. P_2, na którą rzucą się one w swej naturalnej wielkości. Podczas tego obrotu, poziomy rzut każdej krawędzi będzie zataczał łuk koła o środku W' dopóty, aż łuk ten przetnie się z peostą || -łą do osi x, przechodzącą przez p.W'. W tym samym czasie rzut pionowy W" nie zmienią swego położenia, zaś rzuty pionowe wierzchołków podstawy poruszają się po osi x, przybierając końcowe położenia w punktach B''_o , C''_o ....., Prawdziwemi tedy długościami krawędzi są odcinki $W''B''_o$, $W''C''_o$...

Mając więc trzy boki każdego z △△-ów, tworzących boczną powierzchnię, wykreślamy ją w ten sposób, iż, obrawszy dowolny punkt W, wykreślamy przy nim, jak przy wierzchołku szereg△△-ów, z których każdy sąsiedni ma jeden bok wspólny z poprzednim. Otrzymujemy w ten sposób rozwinięcie bocznej powierzchni WAB.... D)rys.97).

Zadanie XXXII. Znaleźć wielokąt przenikania dwuch graniastosłupów.

Jeżeli krawędzie jednego wielościanu przebijają ściany drugiego i nawzajem,to mówimy, że wielo-



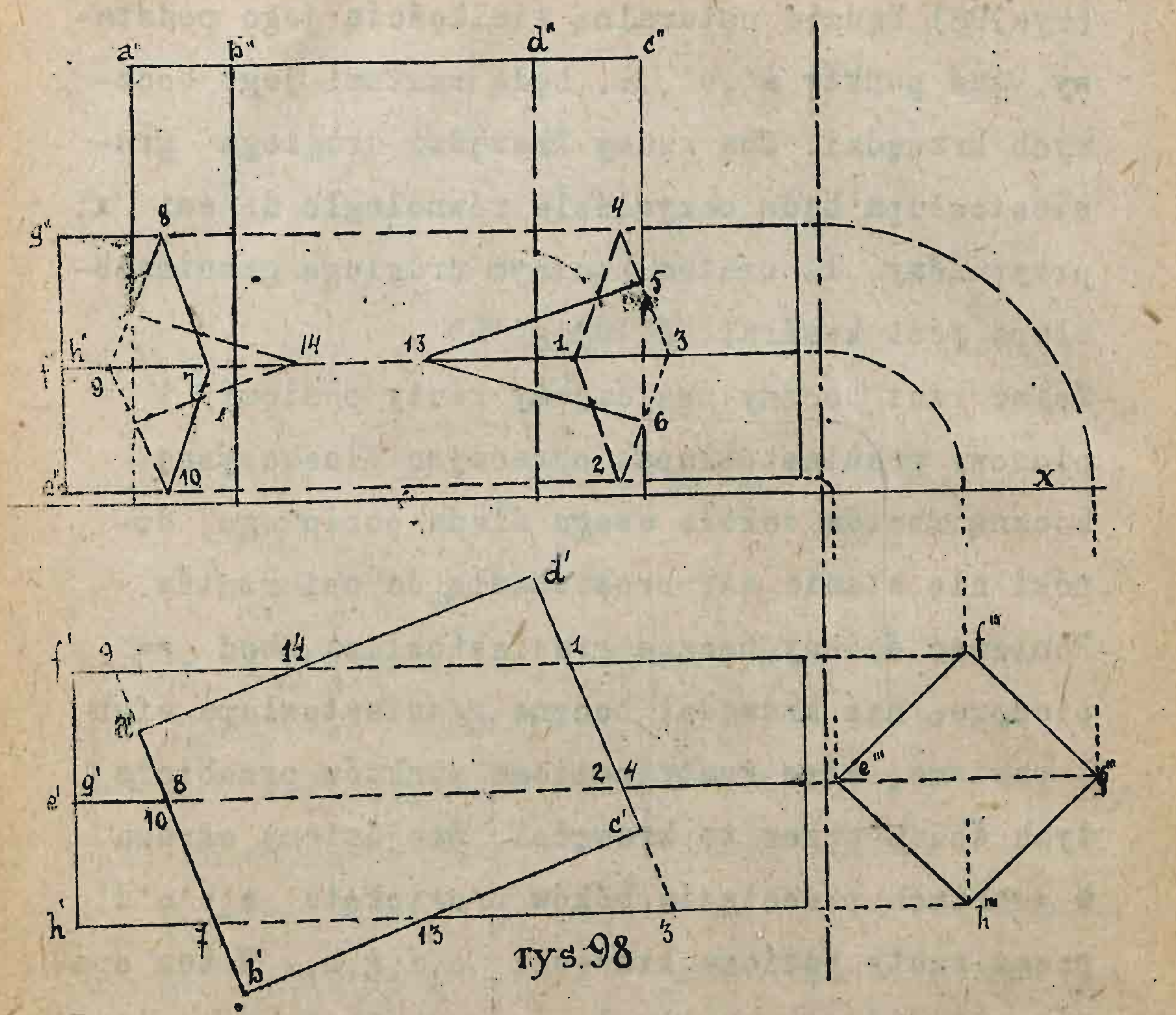
rys 97

ściany te się przenikają, przyczym przenikanie może zachodzić częściowe lub zupełne, zależnie od tego, czy wszystkie ściany wielościanów są wzajemnie przez krawędzi przebite: Łącząc ze sobą w odpowiedni sposób te punkty przebicia odcinkami prostej, otrzymamy wielokąt przenikania, jeden - w wypadku przenikania częściowego, lub dwa - jeśli przenikanie jest zupełne. Widzimy więc, że znajdywanie wielokątów przenikania sprowadza się do wyznaczenia punktów przebicia ścian jednego wielościanu przez krawędzi drugiego.

Przypuśćmy, że dane są 2 graniastosłupy 4-kątne, pierwszy - o osi pionowej, drugi o osi równoległej do osi rzutów. Rzut poziomy pierwszego - a'b'c'd' (rys.98) będzie naturalną wielkością jego podstawy, zaś punkty a',b',... będą rzutami jego bocznych krawędzi. Oba rzuty krawędzi drugiego graniastosłupa będą oczywiście równoległe do osi x; przypuśćmy, iż rzutem bocznym drugiego graniastosłupa jest kwadrat f"'d"'g"'h"'.

Mając rzut boczny znajdujemy rzuty poziomy i pionowy graniastosłupa, obracając płaszczyznę boczną rzutów dokoła swego śladu poziomego, dopóki nie stanie się prostopadłą do osi rzutów. Ponieważ ściany boczne graniastosłupa abcd są pionowe, zaś krawędzi boczne graniastosłupa efgh - poziome, więc rzuty poziome punktów przebicia tych ścian przez te krawędzi znajdziemy odrazu w punktach przecięcia boków prostokąta a'b'c'd' przez rzuty poziome krawędzi e,f,g,h,. W ten sposób znajdujemy punkty: 1 - w punkcie przecięcia d'c' z f' (dla prostoty znaczki u góry przy cyfrach opuszczamy), 2 - w przecięciu d'c' z e', 4 - w przecięciu d'c' z g' (punkty 2 i 4 przystają do siebie, gdyż rzuty e' i g' również do siebie przystają).

Przedłużając c'd' do przecięcia się z h',otrzymujemy punkt 3, który już leży poza ścianą gra-



rys.98

niastosłupa. Wreszcie w przecięciu c'b' z h' wyznaczamy punkt 13, a w przecięciu a'd' z f' punkt 14. Prowadząc linje rzędnych znajdziemy pionowe rzuty znalezionych punktów. Chcąc znaleźć wielokąt przenikania, połączymy ze sobą otrzymane punkty, przyczym łączyć można tylko takie punkty, które leżą na jednej i tej samej ścianie tak jednego, jak drugiego wielościanu. Tak więc ponieważ:

na ścianie ed (i jej przedłużeniu) leżą punkty:

			1,2,3,4,3
"	"	fg	1,4,3
"	"	fe	1,2,3.

łączymy ze sobą punkty: 1 i 4, 1 i 2, 3 i 4, 3 i 2. Jednak punkt 3 leży już poza ścianą cd, więc odcinki prostych 34 i 32, począwszy od krawędzi c, nie należą do wielokąta przenikania. Znalezionemi więc teraz bokami tego wielokąta są odcinki: 45, 41, 21, 26.

Ponieważ:

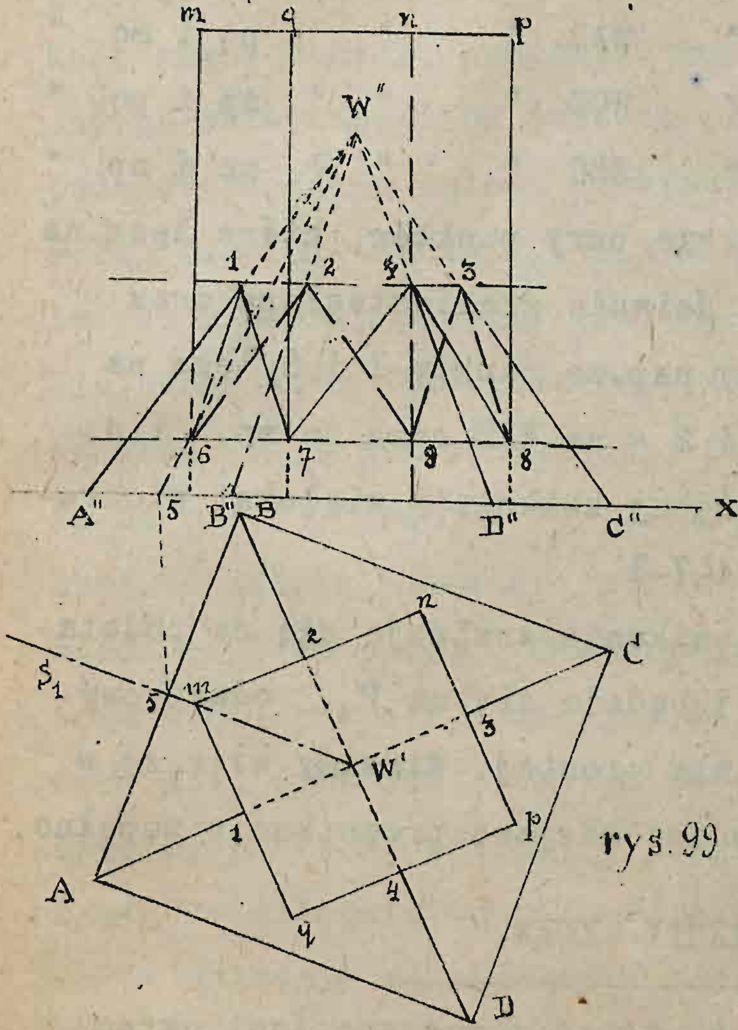
na	ścianie	bc	leżą	punkty:	13, 5, 6
"	"	hg	"	"	13, 5
"	"	he	"	"	13, 6

łączymy punkty: 5 i 13 oraz 6 i 13.

Otrzymaliśmy tedy wichrowaty wielokąt przenikania 1-4-5-13-6-2. Analogicznie otrzymamy również drugi wielokąt:7-8-11-14-12-10. Co się tyczy widzialności boków wielokątów, to przyjmiemy za zasadę, że widzialnym jest tylko taki odcinek, który łączy dwa widzialne punkty; jeśli choć jeden z tych punktów widzialnym nie jest, to odcinek również staje się niewidzialnym. Ponieważ w danym wypadku otrzymaliśmy 2 wielokąty przenikania, więc przenikanie jest zupełnem.

Zadanie XXXIII. Znaleźć wielokąt przenikania ostrosłupa z graniastosłupem o wspólnej osi.

Przypuśćmy że obie bryły mają oś wspólną pionową, przyczym obie mają za podstawy nierówne kwadraty o bokach, nachylonych do siebie pod kątem 45°. W takim razie ich rzuty przedstawiają się, jak na rys.99. Ponieważ ściana mq graniastosłupa jest pionowa, więc tzut poziomy punktu jej przebicia przez krawędź ostrosłupa WA znajdziemy bezpośrednio w punkcie 1. Prowadząc linję rzędną, znajdujemy rzut pionowy tego punktu. Dzięki symetrji obu wielościanów względem wspólnej osi, punkty 2,4,3 - leżeć będą na prostej równoległej do osi x, poprowadzonej przez punkt 1. Chcąc znaleźć punkty, w których krawędzi graniastosłupa przebijają ściany ostrosłupa, poprowadzimy przez jedną z tych krawędzi, np. przez m płaszczyznę pomocniczą jakąkolwiek; płaszczyzny rzucającej prowadzić w tym wypadku nie można, gdyż $m \perp P_1$. Za taką płaszczyznę pomocniczą najlepiej obrać płaszczyznę S przechodzącą przez wierzchołek W ostrosłupa i krawędź m. W przecięciu jej śladu s_1 z AB otrzymamy jeden z wierzchołków wielokąta przenikania, będącego na podstawie - 5. Znajdujemy rzut pionowy punktu 5 i, łącząc go z W", otrzymamy w punkcie przecięcia tej łącznicy z krawędzią m



rys.99

punkt 6. Korzystając znowu z symetrji obu wielościanów względem wspólnej osi, wyznaczymy punkty 7, 9, 8 prowadząc przez p.6 równoległą do osi x. Aby się dowiedzieć, które ze znalezionych punktów należy ze sobą połączyć, aby otrzymać wielokąt przenikania, układamy następującą tabelkę:

punkt 1 leży:na ścianach WAB i WAD ostrosł.oraz na mq graniast.

"	2	"	"	"	WAB i WBC	" mn	"
"	3	"	"	"	WBC i WCD	" np	"
"	4	"	"	"	WCD i WAD	" pq	"

punkt 6 leży na ścianie WAB ostr. oraz na mn i mq gran
" 7 " " WAD " " " pq i mq "
" 8 " " WCD " " " np i pq "
" 9 " " WBC " " " mn i np "

Odszukajmy teraz takie pary punktów, które leżą na jednej i tej samej ścianie graniastosłupa oraz ostrosłupa. Widzimy nap. że punkty 1 i 6 leżą na WAB oraz na mq; 6 i 2 - na WAB oraz na mn. i t.d. W ten sposób znajdujemy zamknięty wielokąt wichrowaty: 1-6-2-9-3-8-4-7-1.

Drugi wielokąt przenikania znajduje się na podstawach naszych brył i będzie się na P_2 odwzorowywał w postaci odcinka prostej. Widzimy więc, że w tym wypadku ma również miejsce przenikanie zupełne.

§ 9. RZUTY KOŁA.

Jedyną linją krzywą, dotąd rozważaną jest okrąg koła. Jest to jak wiadomo, miejsce geometryczne punktów, jednakowo odległych od jednego punktu stałego.

Zadanie XXXIV. Znaleźć rzut prostokątny okręgu koła. Nie mamy, oczywiście, na myśli rzutów ciała, leżącego w płaszczyźnie prostopadłej, lub równoległej do płaszczyzn rzutów, w pierwszym bowiem