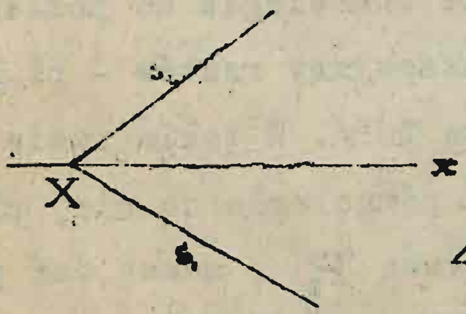
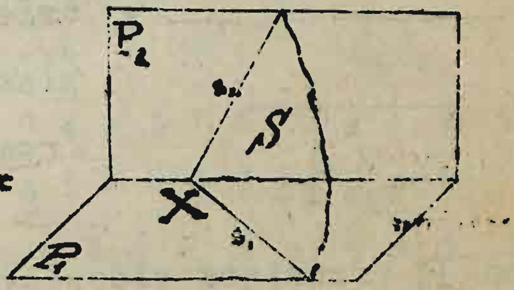
N.6. <u>Płaszczyzna i proste w niej leżące.</u>

Płaszczyzna jest zawsze wyznaczona: 1/ przez 2 przecinające się proste, 2/ przez 2 równoległe proste, 3/ przez 3 punkty, nie leżące na jednej prostej. Stąd wnosimy, że rzuty jednego z trzech rodzajów wymienionych elementów w zupełności odwzorowują płaszczyznę. Najdogodniej jest odwzorować płaszczyznę za pomocą jej śladów na płaszczyznach rzutów /rys.35^a/ - wtedy bowiem mamy na rysunku tylko dwie proste, mianowicie



rys 35b

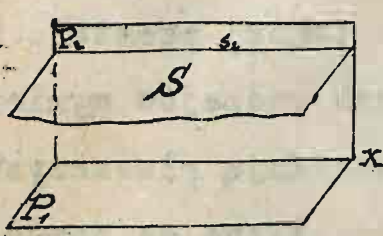


rys 35a

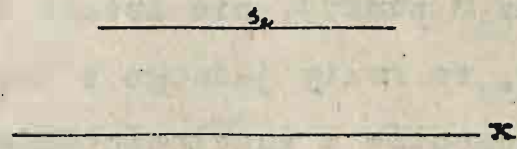
ślady płaszczyzny /rys.35^b/; w przeciwnym razie musielibyśmy mieć trzy - /jeśli 3 punkty/, lub cztery proste /jeśli 2 proste jakiekolwiek inne, niż ślady/. Rozpatrzmy teraz szczególne położenie płaszczyzny danej względem płaszczyzn rzutów.

1/ J e ż e l i p ł a s z c z y z n a j e s t r ó w n o l e g ł a d o p o z i o m e j /pionowej/

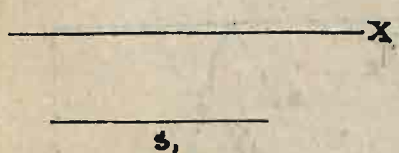
płaszczyzny rzutów, to posiada jeden tylko ślad pionowy /poziomy/, równoległy do osi x.



rys 36a



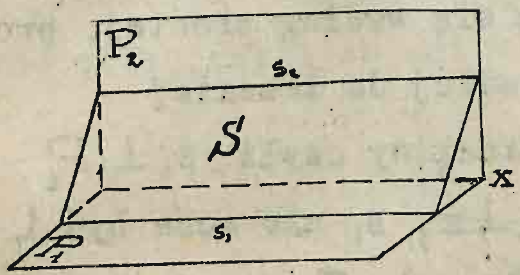
rys 36 b



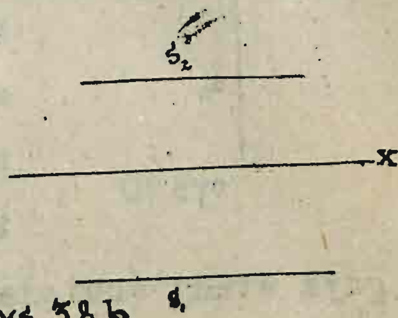
rys 37

Rzeczywiście, niech pł. S będzie równoległa do poziomej płaszczyzny rzutów - pł. $S \parallel$ pł. P_1 /rys. 36ª/. W takim razie pł. S i równoległa do niej płaszczyzna P_1 przecięte płaszczyzną P_2, muszą dać proste s_2 i x równoległe, czyli: $s_2 \parallel x$. Ponieważ pł. $S \parallel$ pł. P_1, więc ślad poziomy pł. S leży w nieskończoności. Rysunek więc 36ᵇ przedstawia ślady płaszczyzny, równoległej do poziomej płaszczyzny rzutów. Oczywiście, rzecz będzie się miała analogicznie dla pł. S, równoległej do P_2 /rys. 37/.

2/. Jeżeli płaszczyzna jest równoległa do osi rzutów, to jej obа rzuty są również do osi rzutów równoległe.



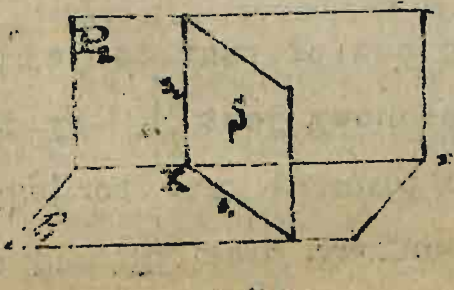
rys 38a



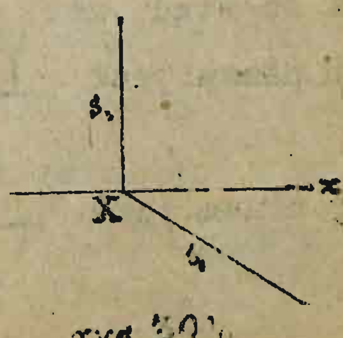
rys 38b

Ponieważ pł. $S \parallel x$, więc ślady jej poziomy i pionowy przecinają się z osią x w nieskończoności, czyli są do niej równoległe /rys.38[a] i 38[b]/.

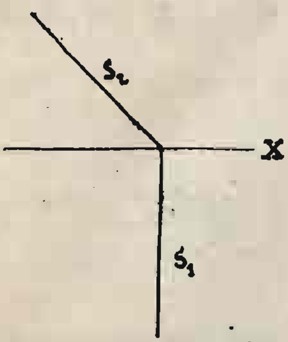
3/ Jeżeli płaszczyzna jest prostopadła do poziomej /pionowej/ płaszczyzny rzutów, to jej ślad pionowy /poziomy/ jest prostopadły do osi rzutów, zaś ślad poziomy /pionowy/ jest nachylony pod kątem do tejże osi.



rys 39a



rys 39b


rys 40

Dana jest pł. $S \perp$ pł. P_1
Ponieważ pł. $P_2 \perp$ pł. P_1
więc te dwie płaszczyzny prostopadłe do trzeciej, przecinają się według prostej, prostopadłej do trzeciej płaszczyzny czyli $s_2 \perp P_1$ i $s_2 \perp x$; s_1 nie może być $\perp$-łe do x, gdyż wtedy musiałaby być pł. $S \perp x$ czegośmy nie założyli. Odwzorowaniem zatym rys.39a jest rys. 39 b. Analogicznie przedstawia się sprawa, jeśli płaszczyzna jest prostopadła do pionowej płaszczyzny rzutów / rys.40/.

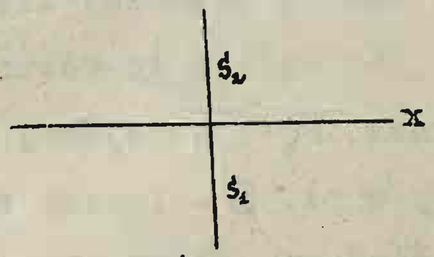
Kąt $\widehat{s_1 X x_2}$ jest kątem libjowym kąta dwuściennego $\widehat{S s_2 P_2}$ ponieważ pł. P_1 jest jednocześnie prostopadła do obu ścian S i P_2 danego kąta.

4/ J e ż e l i p ł a s z c z y z n a j e s t p r o s t o p a d ł a d o o s i r z u t ó w, t o o b a j e j ś l a d y s ą p r o s t o p a d ł e d o t e j ż e o s i /rys.41/.

Wynika to stąd, że:

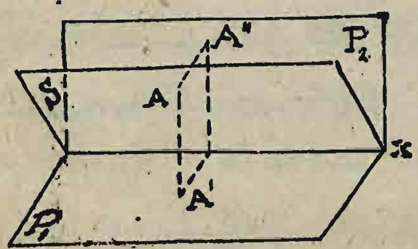
jeżeli płasz.jest $\perp$ -ła do poz.pł.rzut.to jej ślad pionowy jest $\perp$ -ły do osi

jeżeli płasz.jest $\perp$ -ła do pion.pł.rzut.to jej ślad poziomy jest $\perp$ -ły do osi więc jeżeli płasz. jest ⊥ -ła do poziomej i pionowej pł. rzutów, to jej ślad pionowy i poziomy są ⊥ -ł do osi c.b.d.d. , gdyż płaszczyzna, prostopadła do obu płaszczyzn rzutów, jest prostopadła do linji ich przecięcia, czyli do osi x .

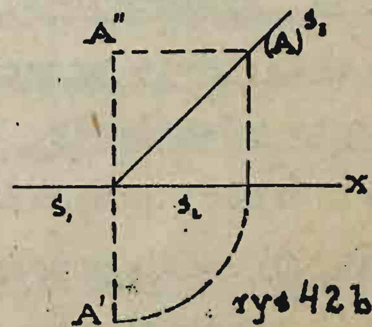


rys 41

3/ jeśli płaszczyzna przechodzi przez oś /rys.42a/, to oba jej ślady oczywiście znajdują się na osi i



rys 42a



rys 42b

płaszczyzny nie wyznaczają - należy więc jeszcze znaleźć rzuty jakiegoś punktu, znajdującego się na niej. Niech tym punktem będzie p. A /rys.42b/, a jego rzutami punkty A' i A" , które /rys.42b/ już wyznaną

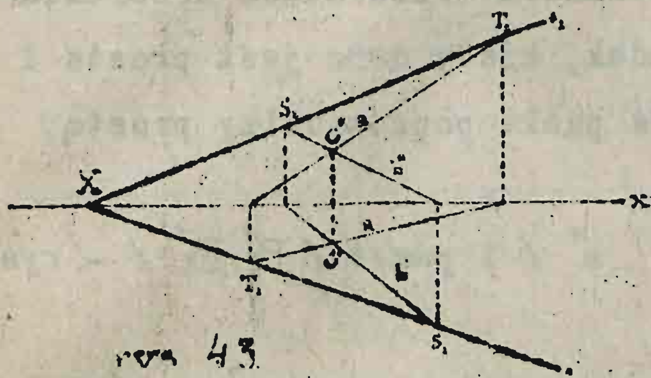
czają położenie płaszczyzny; aby się jednak przekonać, w której ćwiartce płaszczyzna się znajduje, prowadzimy jeszcze trzecią płaszczyznę rzutów, prostopadłą do dwuch poprzednich, a przytym taką, że leżą w niej rzędne p. A. Jeżeli dokonamy kładu tej płaszczyzny na pł. P_2, to będzie to równoważne dokonaniu kładu p. A na płasz. P_2; otrzymamy w takim razie punkt $/A/$, który leży w pł. S - łącząc więc p. $/A/$ z p. O, otrzymamy ślad pł. S na trzeciej płaszczyźnie rzutów, który nazwiemy s_3.
Ślad ten daje dokładne pojęcie o położeniu pł. względem obu płaszczyzn rzutów P_1 i P_2.

Zadanie VI. Wyznaczyć ślady płaszczyzny, przechodzącej: 1/ przez dwie przecinające się proste, 2/ przez dwie proste równoległe, 3/ przez prostą i punkt.

Przypadek trzeci powyższego zadania sprowadza się z łatwością do dwóch poprzednich, jeśli bowiem przez punkt dany poprowadzimy prostą, przecinającą się, lub równoległą do danej, to płaszczyzna żądana musi oczywiście przechodzić przez obie te proste.

1/ Dane są dwie proste przez swoje rzuty: $/a', a''/$ i $/b', b''/$, przecinające się w punkcie $/c', c''/$ - rys. 43. Znajdźmy naprzód znanym sposobem ślady obu prostych: T_1 i T_2 - prostej a, oraz S_1 i S_2

prostej b .



rys. 43

Ponieważ żądana płaszczyzna ma przechodzić przez obie proste a i b więc, oczywiście musi przechodzić przez każdą z nich:

jeśli płasz.przechodzi przez prostą a , to jej ślad poziomy przechodzi przez T_1 ,a pionowy przez T_2 .

jeśli płasz.przechodzi przez prostą b ,to jej ślad poziomy przechodzi przez S_1 ,a pionowy przez S_2

Jeśli płasz.przechodzi przez proste a i b , to jej ślad poziomy przechodzi przez T_1 i S_1 ,a pionowy przez T_2 i S_2 .

A stąd wynika sposób rozwiązania zadania: przez ślady T_1 i S_1 prowadzimy prostą, która będzie śladem poziomym płaszczyzny - s_1 , przez ślady T_2 i S_2 - prostą będącą śladem pionowym pł.- s_2 .

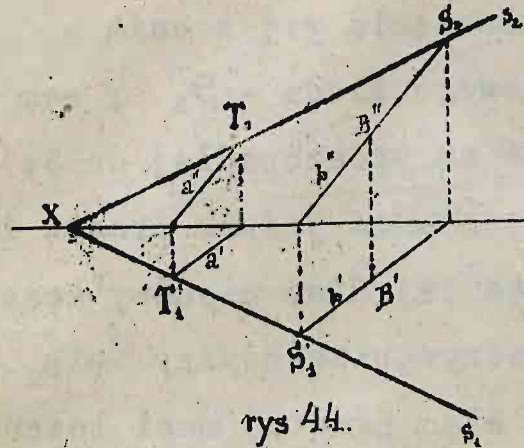
Obe te ślady muszą się przeciąć w punkcie X , <u>położonym na osi</u>, gdyż ślady płaszczyzny wychodzą z jednego punktu na osi. (Zadosyćuczynienie ostatniemu warunkowi jest sprawdzaniem dokładności kreślenia/.

2/ Rozpatrzmy przypadek, kiedy dana jest prosta i punkt, przyczym przez punkt poprowadzimy prostą, <u>równoległą</u> do danej.

Dana jest prosta / a', a'' / i punkt / B',B'' / - rys. 44.

Jeżeli przez p. B poprowadzimy prostą b , równoległą do a , to jej rzuty muszą być równoległe do odpowiednich rzutów prostej a - stąd wniosek, że prowadząc przez p. $B' - b' \parallel a'$ i przez p. $B'' - b'' \parallel a''$ otrzymamy rzuty b' i b'' prostej b . Znajdźmy teraz ślady T_1 i T_2 prostej a/ oraz ślady S_1 i S_2 prostej b ; na mocy poprzedniego rozumowania, wystarczy połączyć ze sobą jednoimienne ślady, aby otrzymać ślady żądanej płaszczyzny, które muszą się przeciąć w jednym punkcie na osi.

Jeżeli prosta leży w danej płaszczyźnie, to ślady tej prostej muszą leżeć na śladach płaszczyzny, i nawzajem, jeśli ślady prostej leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny, to ta prosta leży w danej płaszczyźnie. /rys. 45/. Jeżeli powyższe spostrzeżenie przyjmiemy pod uwagę, to łatwo będzie rozwiązać Zadanie VII: Mając jeden rzut prostej, leżącej

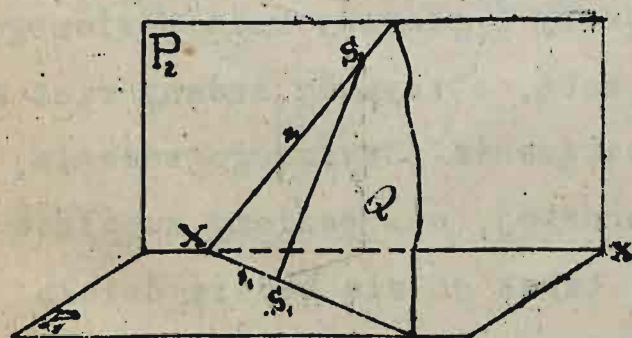


rys 44.

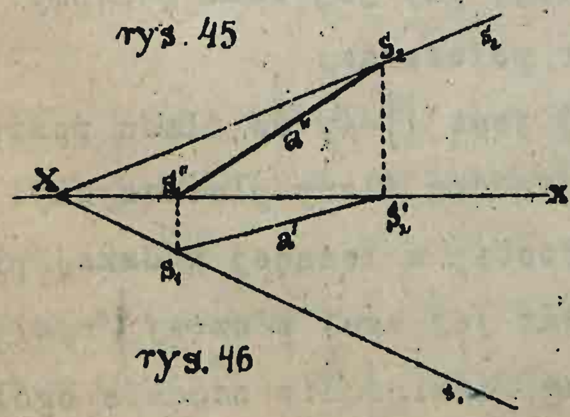
w danej płaszczyźnie, znaleść jej rzut drugi.

Dana jest przez swoje ślady s_1 i s_2 płaszczyzna /rys.46/ i rzut a' prostej, w niej leżącej; należy znaleść drugi rzut tej prostej.

Ponieważ dana prosta leży w danej płaszczyźnie, więc poziomy ślad tej prostej musi leżeć na poziomym śladzie płaszczyzny - s_1 -, ale jednocześnie musi się znajdować na poziomym rzucie prostej - a' - więc leży w punkcie przecięcia się prostych s_1 i a' czyli w p. S_1; mając ślad poziomy znajdujemy.



rys. 45

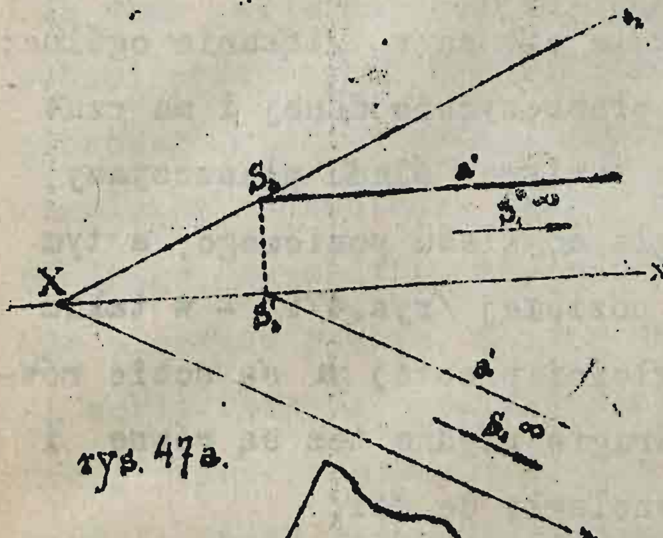


rys. 46

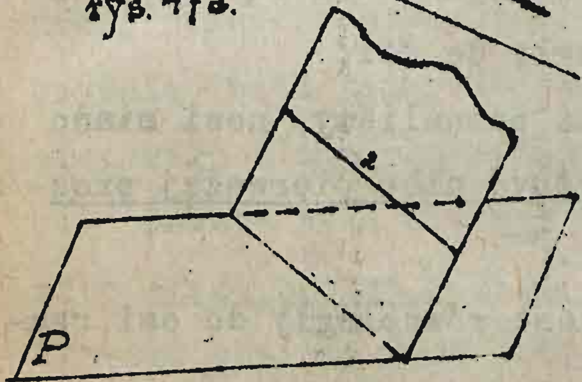
znanym sposobem jego rzut pionowy - S_1''. Przedłużając następnie rzut a' do przecięcia się z osią x, znajdujemy poziomy rzut pionowego śladu - S_2' ; sam ślad pionowy musi leżeć gdzieś na prostopadłej do osi x, podniesionej z p. S_2' - ponieważ jednak prosta leży w płaszczyźnie danej, więc jej ślad pionowy może leżeć tylko na śladzie pionowym płaszczyzny - s_2. Stąd wniosek, że pionowy ślad prostej musi leżeć w p. S_2 przecięcia się wykreślonej prostopadłej ze śladem pionowym płaszczyzny.

Mamy więc teraz dane 2 punkty pionowego rzutu prostej: jej ślad pionowy i pionowy rzut poziomego śladu - łącząc je ze sobą, otrzymamy żądany rzut a''. Jak widzieliśmy z rozwiązania powyższego zadania, braliśmy jeden rzut prostej, np. poziomy, zupełnie dowolnie. Rozpatrzmy teraz co się będzie działo z pionowym rzutem prostej, gdy jej rzut poziomy zajmie pewne szczególne położenia:

1) rzut poziomy prostej jest $\|$-ły do śladu poziomego płaszczyzny. Dane są dwa ślady płaszczyzny: s_1 s_2 i poziomy rzut prostej a leżącej w danej pł. $a' \| s_1$; należy znaleść jej rzut pionowy /rys.47a/ Rozwiążmy zadanie podług rozwiązania zadania ogólnego: należy rzut a' przedłużyć aż do przecięcia



rys. 47a.



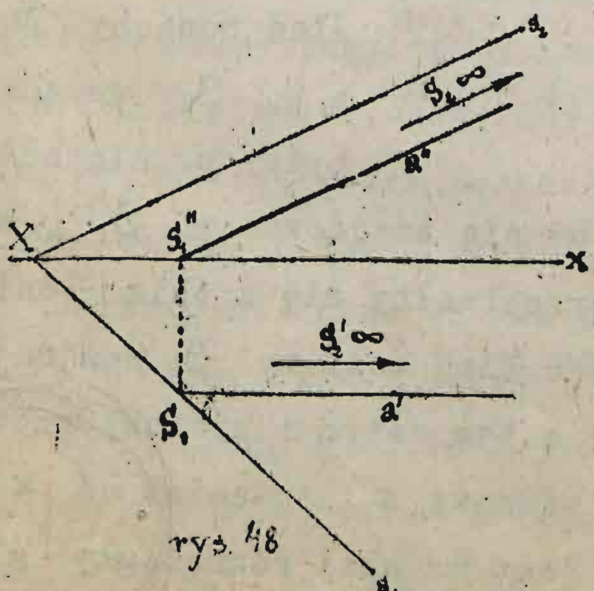
rys 47 b.

się z osią x w p. S_2' i z tego punktu wystawić prostopadłą do niej - w przecięciu ze śladem pionowym płaszczyzny - s_2 otrzymamy ślad pionowy prostej S_2; następnie, należałoby przedłużyć rzut a' aż do przecięcia się ze śladem s_1 i w tym punkcie przecięcia otrzymalibyśmy ślad poziomy S_1; z p. S_1 spuścilibyśmy prostopadłą do osi x i w jej spodku by się znajdował p. S_1'', w którym rzut pionowy a'' przecinałby się z osią. Ponieważ jednak $a' \parallel s_1$, więc ślad poziomy S_1 znajduje się w nieskończoności, a tym samym i pionowy rzut jego - S_1'' - czyli, rzut pionowy a'' przecina oś x w nieskończoności, więc jest do niej równoległy: $a'' \parallel x$

Przeprowadźmy teraz rozważanie, dotyczące żądanej prostej, bez powoływania się na ro[zw]iązanie ogólne: Jeżeli prosta leży w płaszczyźnie danej i ma rzut poziomy równoległy do takiegoż śladu płaszczyzny, to sama jest równoległa do śladu poziomego, a tym samym do płaszczyzny poziomej /rys.47b/ - w takim razie, pierwsze odległości prostej a są sobie równe; stąd wynika, że drugie rzędne też są równe i rzut pionowy jest równoległy do osi.

Prosta, której rzuty teraz poznaliśmy, nosi miano prostej poziomej płaszczyzny, albo pierwszej prostej głównej płaszczyzny.

2/ rzut poziomy prostej jest równoległy do osi rzutów.

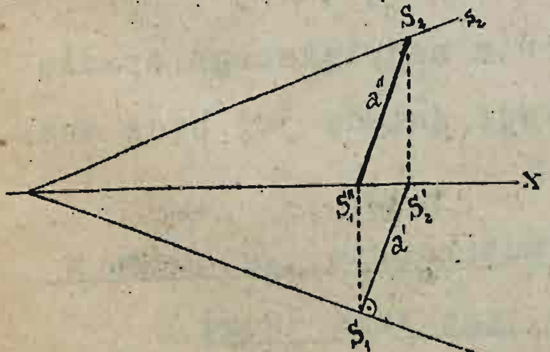


rys. 48

Dane są oba ślady płaszczyzny: s_1 i s_2 /albo, jak się przeważnie mówi, dana jest płaszczyzna $/s_1, s_2/$ oraz poziomy rzut prostej leżącej w danej płaszczyźnie, równoległy do osi: $a' \| x$ /rys.48/

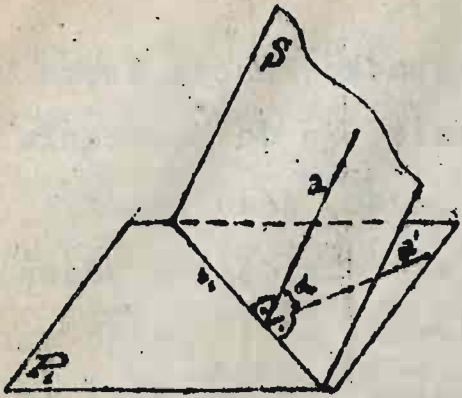
Należy znaleść jej rzut pionowy.
Tak samo jak w poprzednim przypadku, można dwoma sposobami przeprowadzić rozumowanie, co do położenia pionowego rzutu prostej. Pomijając, jako bardziej mechaniczne, rozważanie oparte na rozwiązaniu zadania ogólnego, zauważymy, że, ponieważ $a' \parallel x$ więc wszystkie pierwsze rzędne, a tym samym, drugie odległości są sobie równe i prosta żądana jest równoległa do pionowej płaszczyzny rzutów, ale leży ona w danej płaszczyźnie, więc jej rzut pionowy jest równoległy do pionowego śladu płaszczyzny $a'' \parallel s_2$.
Taka prosta zwie się prostą frontową płaszczyzny, albo drugą prostą główną płaszczyzny.

3/ rzut poziomy jest prostopadły do śladu poziomego płaszczyzny /rys.49a/.



rys. 49a

Dana jest płaszczyzna $/s_1, s_2/$ i rzut poziomy prostej a, leżącej w danej płaszczyźnie, prostopadły do śladu poziomego: $a' \perp s_1$. Ponieważ a' przecina się zarówno ze śladem s_1, jak i z osią x, więc znanym sposobem znajdujemy rzut pionowy prostej - a'' - nie zaj-



rys. 49 b.

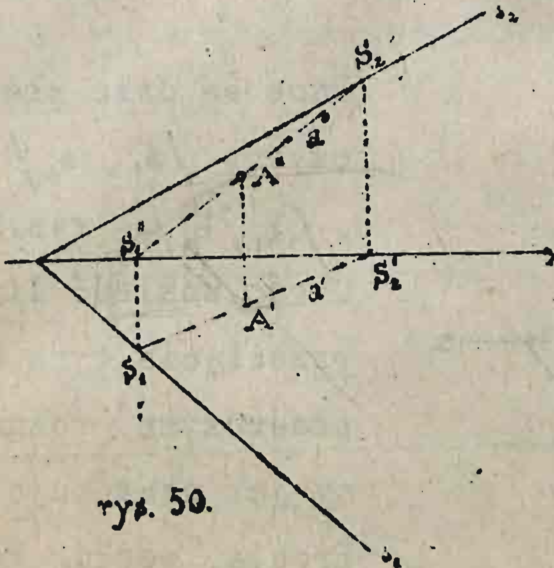
mującej żadnego szczególnego położenia. Zastanówmy się jednak jaka prosta na płaszczyźnie odwzorowuje się, jak na rys.49a ? Ponieważ rzut $a' \perp s_1$ więc sama prosta $a \perp s_1$ /rys.49b. Kąt $\hat{\alpha}$ jaki tworzą te dwie ~~proste~~ jest największym z kątów, jaki proste płaszczyzny S mogą tworzyć z pł. P_1 i dlatego prosta a na pł. S zwie się <u>prostą największego spadku</u>.

Oba ramiona kąta $\hat{\alpha}$ są prostopadłe do s_1 , zatym kąt $\hat{\alpha}$ jest kątem linjowym kąta dwuściennego, zawartego między płaszczyznami S i P_1 .

Oczywiście może istnieć prosta największego spadku względem płaszczyzny pionowej; ślady jej będą analogiczne do poprzednich.

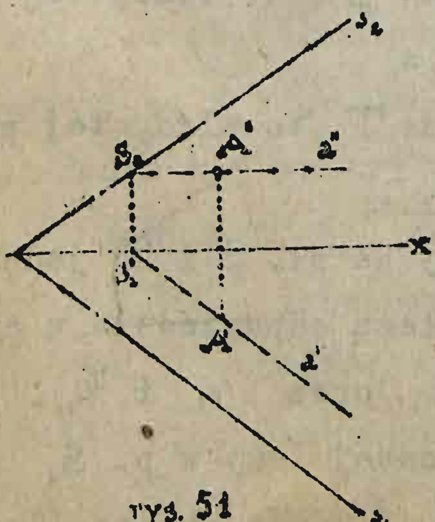
<u>Zadanie VIII</u>. <u>Mając jeden rzut punktu, leżącego w płaszczyźnie danej, znaleźć jego rzut drugi</u>.

Jeżeli punkt leży na płaszczyźnie, to leży na <u>wszystkich</u> prostych, przez ten punkt na płaszczyźnie poprowadzonych. Chcąc więc rozwiązać powyższe zadanie, poprowadzimy przez dany rzut np.poziomy /rys.50/ - A' dowolną prostą, waobrażającą rzut poziomy prostej, przez p. A przechodzącej; niech tym rzutem będzie a. Znalazłszy pionowy rzut prostej - a", znajdziemy żądany drugi rzut punktu - A" - w przecięciu rzutu a" z prostopadłą do osi x, podniesioną z p. A'.

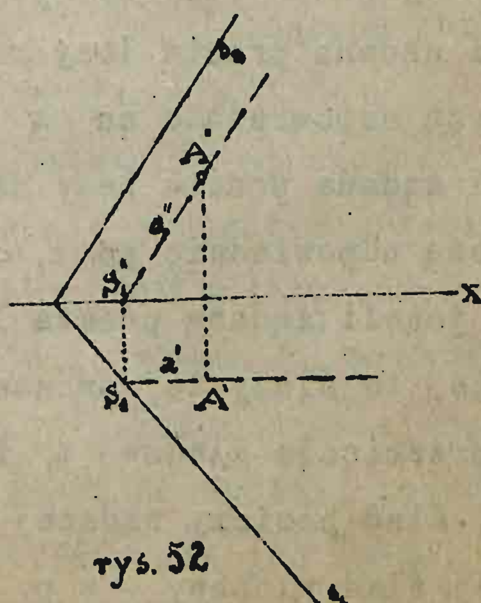


rys. 50.

Zwykle przez p. A na danej płaszczyźnie prowadzimy nie byle jaką prostą, lecz jedną z prostych <u>głównych</u> płaszczyzny: poziomą /rys.51/ lub frontową /rys.52/

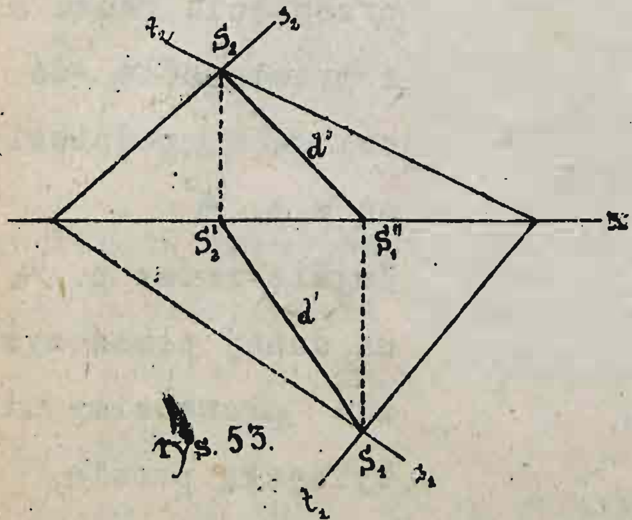


rys. 51



rys. 52

<u>Zadanie IX</u>. <u>Znaleść linję przecięcia dwuch płaszczyzn danych</u>. Rozwiążmy naprzód przypadek najpros[illegible], jeśli odpowiednie ślady płaszczyzny przecinają s[illegible] wogóle i w granicach rysunku.



rys.53.

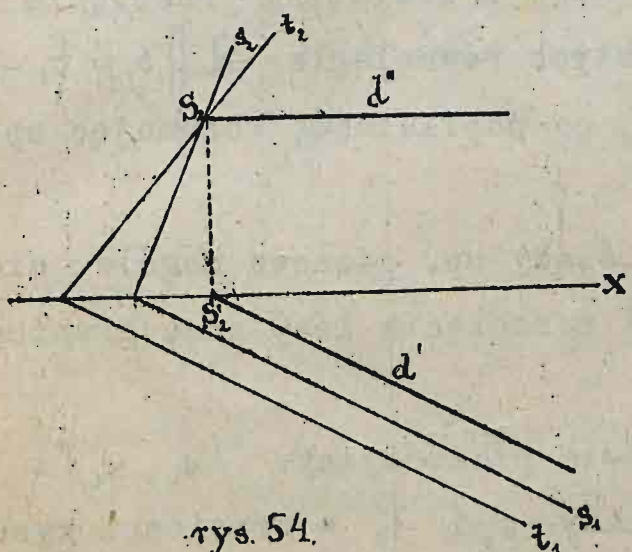
Dane są dwie płaszczyzny $/s_1, s_2/$ i $/t_1, t_2/$ - rys.53. Chcąc znaleść linję przecięcia tych dwóch płaszczyzn, rozumujemy jak następuje: Prosta, według której przecinają się obie płaszczyzny, oczywiście leży na każdej z nich. Otóż,

jeżeli żądana prosta leży na pł. S, to ślady tej prostej leżą odpowiednio na s_1 i s_2.

jeżeli żądana prosta leży na pł. T, to ślady tej prostej leżą odpowiednio na t_1 i t_2.

Więc, jeżeli żądana prosta leży na pł. S i T jednocześnie, to ślady tej prostej leżą odpowiednio w punktach przecięcia śladów s_1 i t_1 oraz s_2 i t_2. Czyli, ślad poziomy żądanej prostej leży w p. S_1. zaś tej ślad pionowy - w p. S_2. Mając oba te ślady

odnajdujemy znanym sposobem rzuty prostej przecięcia płaszczyzn S i T - d' i d''.
Może się jednak zdarzyć, że ślady płaszczyzn się nie przecinają w skończonej odległości, czyli są do siebie równoległe.



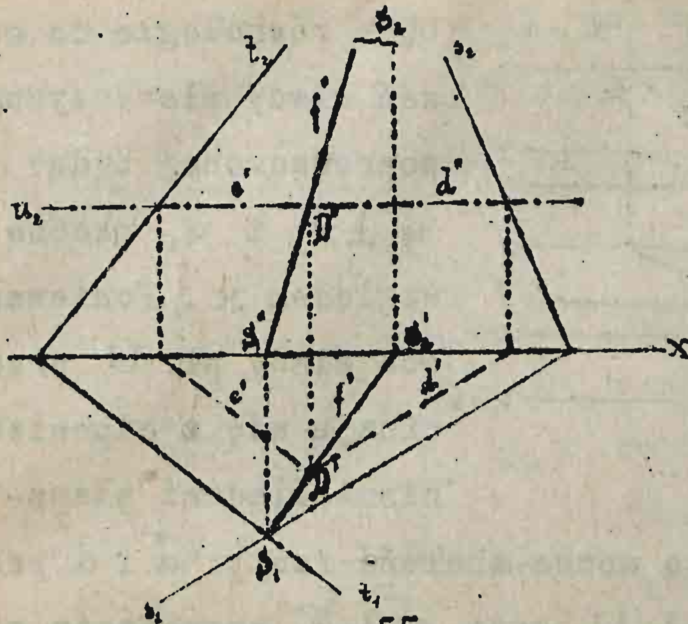
rys. 54.

Dane są dwie płaszczyzny $/s_1, s_2/$ i $/t_1, t_2/$ takie że /rys.54/ $s_1 \parallel t_1$ /przecinają się w nieskończoności/ Znajdujemy naprzód ślad pionowy żądanej prostej - S_2 leżący w punkcie przecięcia się śladów płaszczyzn: s_2 i t_2.
Opuszczając z tego punktu prostopadłą, znajdziemy p. S_2'. Punkt ten należy połączyć z punktem przecięcia się śladów s_1 i t_1, leżącym, jak założyliśmy, w nieskończoności - prowadzimy więc przez S_2' prostą $d' \parallel s_1 \parallel t_1$ - będącą rz[illegible]ziomym prostej żądanej.
Z punktu S_1, leżącego w nieskończoności, opuszczamy na oś x prostopadłą; w takim razie jej spodek znajduje się również w nieskończoności; łączymy ten spodek z

p. S_2 - czyli przez ten punkt prowadzimy $d'' \| x$ i otrzymujemy rzut pionowy żądanej prostej. Jak widzimy jest to prosta pozioma obu płaszczyzn. Ponieważ płaszczyzny przechodziły przez dwie równoległe proste - $s_1 \| t_1$, więc i linja ich przecięcia musi być do tych prostych równoległa: $d \| s_1 \| t_1$ - otrzymaliśmy to samo, co poprzednio, rozumując sposobem krótszym.

Przypuśćmy teraz, że ślady np. pionowe wogóle się przecinają, ale punkt przecięcia leży poza granicami rysunku.

Niech np. dane będą dwie płaszczyzny: $/s_1, s_2/$ i $/t_1, t_2/$ - rys.55. Slady s_2 i t_2 w granicach rysunku się nie przecinają, więc np. S_2 znaleść nie można natomiast znajdujemy p. S_1, należący do żądanej prostej. Jeżeli więc odnajdziemy jeszcze jeden punkt leżący na niej, to zadanie będzie rozwiązane. W tym celu przecinamy obie dane płaszczyzny trzecią - U - równoległą do poziomej pł. rzutów; w takim razie będzie istniał tylko jeden jej ślad, pionowy - u_2. Znajdźmy teraz linje przecięcia się dwóch płaszczyzn danych z płaszczyzną U :pł. $U \|$ pł. P_1 więc linje przecięcia tych płaszczyzn równoległych z trzecią płaszczyzną S, są do siebie równoległe. Czyli,



ryp. 55.

$d' \| s_1$

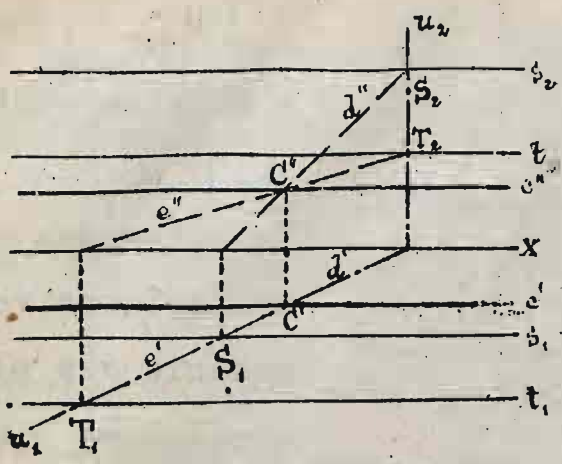
a w takim razie

$d'' \| x$.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla pł.T przekonamy się że musi być:

$e' \| t_1$ i $e'' \| x$

Obie te proste, d i e, leżą w płaszczyźnie T , a ponieważ nie są do siebie równoległe, więc się przecinają w punkcie /D', D'' /; ale ponieważ prosta d leży w płaszczyźnie S , a prosta e - w płaszczyźnie T , więc punkt ich przecięcia należy do prostej, wspólnej dla obu płaszczyzn danych - czyli do prostej ich przecięcia. Mamy więc teraz rzuty dwóch punktów, należących do żądanej prostej: łącząc jednoimienne rzuty, otrzymamy rzuty f' i f'' tej prostej. Jeżeli wreszcie obie płaszczyzny są równoległe do osi x , to również niepodobna znaleść bezpośrednio linji ich przecięcia. Przecinamy więc dane płaszczyzny: pł. $S \| x$ i pł. $T \| x$ trzecią płaszczyzną $U \perp P_1$ - rys. 56 - ślady płaszczyzn danych s_1 i s_2 oraz t_1 i t_2

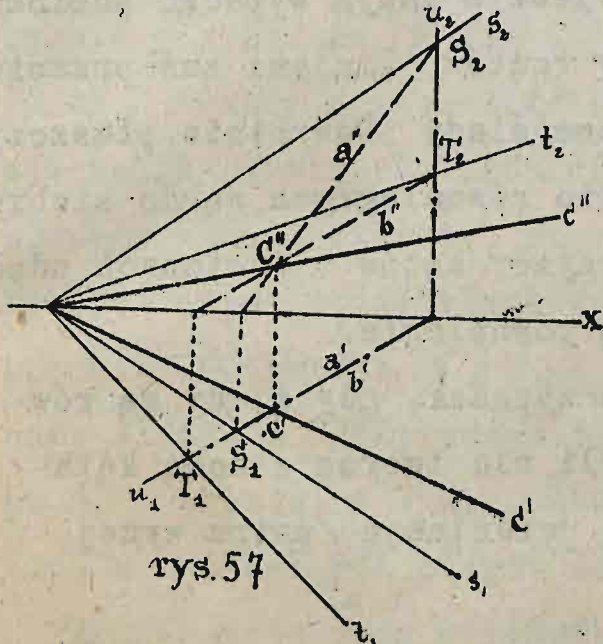


rys. 56

będą równoległe do osi, zaś ślady płaszczyzny poprowadzonej będą: $u_2 \perp x$ i u_1 skośne względem x. Ponieważ oba ślady pł. U przecinają się z odpowiedniemi śladami płaszczyzn S i T, przeto można znaleść rzuty: d' i d'' przecięcia się pł. S z pł. U oraz e' i e'' przecięcia się pł. T z pł. U. Obie te proste znajdują się w pł. U i nie są do siebie równoległe, więc przecinają się w p. $/C', C''/$, który leży jednocześnie na pł. S, i na pł. T zatym jest jednym z punktów linji ich przecięcia. Płaszczyzny S i T są równol[illegible] osi x - linja ich przecięcia musi być również [illegible] osi x równoległa. Wystarczy przeto przez punkty C' i C'' poprowadzić proste, równoległe do osi x, aby otrzymać rzuty c' i c'' żądanej prostej.

Przypuśćmy nakoniec przypadek, gdy ślady płaszczyzn danych spotykają się w jednym punkcie na osi.

Ponieważ jeden punkt linji przecięcia dwóch płaszczyzn /p. X / jest już dany, więc, dla znalezienia drugiego punktu tej prostej, posługujemy się metodą przecięcia płaszczyzn $/s_1, s_2/$ i $/t_1, t_2/$ trzecią płaszczyzną $/u_1, u_2/$ prostopadłą do pł. P_1 /rys.57/.



rys.57

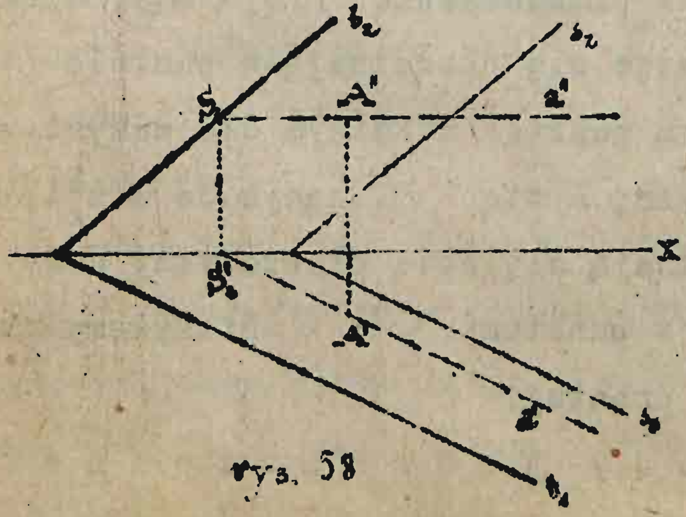
Jeżeli punktami przecięcia pł. pomocniczej z pł. $/s_1, s_2/$ są punkty S_1 i S_2, to linją przecięcia tych płaszczyzn będzie, jak wiadomo, prosta $/a', a''/$; jeżeli punktami przecięcia pł. pomocniczej z pł. $/t_1, t_2/$ są punkty T_1 i T_2, to linja przecięcia tych płaszczyzn będzie prosta $/b', b''/$.

Obie te proste leżą w płaszczyźnie $/u_1, u_2/$, a że nie są równoległe, więc się przecinają w punkcie $/C', C''/$, będącym punkte.. wspólnym dla wszystkich trzech płaszczyzn, a więc ...żącym do linji, według której przecinają się obie płaszczyzny dane. Łącząc zatem p. X z punktami C' i C'' otrzymamy rzuty c' i c'' żądanej prostej.

<u>TWIERDZENIE V.</u> Ś l a d y j e d n o i m i e n n e

d w u c h p ł a s z c z y z n r ó w n o l e g.-
ł y c h s ą d o s i e b i e r ó w n o l e g ł e. Wynika to stąd, że linje przecięcia dwóch płaszczyzn równoległych przez trzecią są do siebie równoległe: tą trzecią płaszczyzną jest w danym wypadku pozioma, lub pionowa płaszczyzny rzutów, linjami zaś przecięcia - poziome lub pionowe ślady. Odwrotnie płaszczyzny o śladach odpowiednio równoległych są do siebie równoległe, gdyż płaszczyzny kątów o ramionach odpowiednio równoległych są równoległe.
Wyjątek stanowi titaj przypadek, gdy ślady są równoległe do osi x , czyli nie tworzą z sobą kąta - płaszczyzny wtedy się przecinają /patrz wyżej str.65./

<u>Zadanie IX.</u> <u>Przez punkt dany przeprowadzić płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny danej.</u>



rys. 58

Dana jest płaszczyzna/ s_1, s_2 / i punkt /A',A''/przez który należy poprowadzić płaszczyznę równoległą do danej /rys.58/.
Ponieważ płaszczyżądana ma być rów-

noległa do danej, więc jej ślady muszą być odpowiednio równoległe do śladów płaszczyzny danej Stąd wynika, że jeśli znajdziemy jeden punkt, należący do śladów żądanej płaszczyzny, to zadanie będzie rozwiązane. W tym celu prowadzimy przez punkt / A', A'' / prostą równoległą do jakiejkolwiek prostej w płaszczyźnie danej, np. do jej śladu poziomego - s_1; wiadomo, że rzuty prostych równoległych są odpowiednio równoległe - prowadzimy więc przez p. A' prostą $a' \parallel s_1$, ponieważ zaś rzut pionowy śladu s_1 leży oczywiście na osi więc przez p. A'' - prostą $a'' \parallel x$. Skutkiem tego, prosta / a', a'' / jest równoległa do samej płaszczyzny / s_1, s_2 / - więc leży w płaszczyźnie żądanej. Znalazłszy pionowy ślad tej prostej - S_2 - mamy już punkt, który musi leżeć na pionowym śladzie płaszczyzny. Prowadzimy tedy przez ten punkt prostą $t_2 \parallel s_2$, a przez punkt X przecięcia się t_2 z osią x - prostą $t_1 \parallel s_1$; proste t_1 i t_2 będą właśnie śladami każdej płaszczyzny.

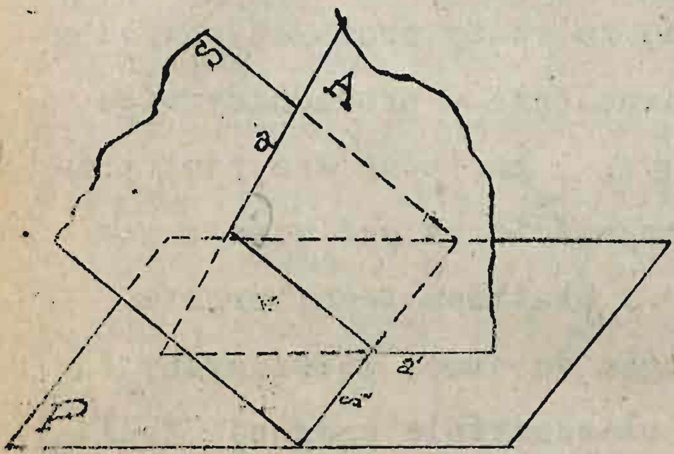
<u>TWIERDZENIE VI.</u> J e ż e l i p r o s t a j e s t p r o s t o p a d ł a d o p ł a s z c z y z n y, t o r z u t y p r o s t e j s ą o d p o w i e d-

n i o p r o s t o p a d ł e d o ś l a d ó w p ł a s z c z y z n y.

Dane jest, że prosta a⊥-ła pł. S /rys.59/.

Niech rzutem prostej a na pł. P będzie prosta a' ,zaś śladem na tęż płaszczyznę płaszczyzny S - prosta s_1.

Należy dowieść, że a' ⊥ s_1 . Poprowadźmy przez prostą a płaszczyznę rzucającą A ,o której można powiedzieć, że: pł A ⊥ pł.P , jako płaszcz. rzucająca i pł. A ⊥ pł. S , bo przechodzi przez a ⊥ pł. S wskutek tego, pł. A jest prostopadła do linji



rys 59

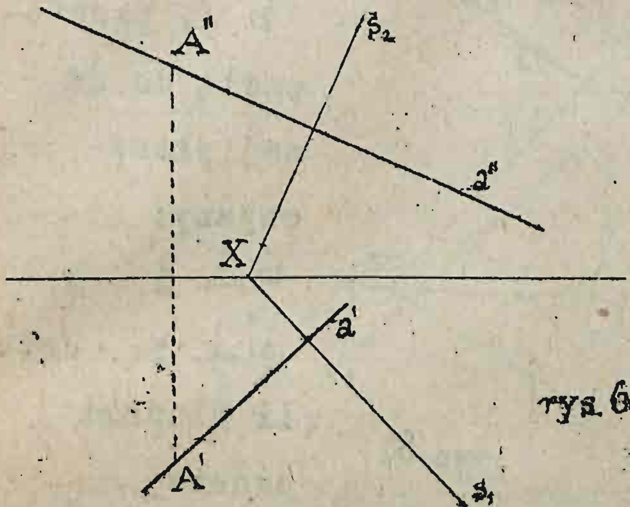
przecięcia tych dwuch płaszczyzn: P i S ,czyli: pł.A⊥s_1 więc, odwrotnie, s_1⊥ pł.A,a zatym s_1 jest ⊥ -ła do wszystkich prostych, w tej płaszczyźnie położonych, a zatym s_1 ⊥ a_1' c.b.d.d.

W podobny sposób dowieść można, iż rzut pionowy prostej musi być ⊥ -ły do pionowego śladu płaszczyzny.

Opierając się na tem twierdzeniu,rozwiążemy

<u>Zadanie XI. Z danego punktu opuścić prostą, prostopadłą</u> do danej płaszczyzny.

Dana jest płaszczyzna / s_1, s_2 / i punkt /A', A"/, z którego należy opuścić na tę płaszczyznę prostopadłą. /rys.60/



rys.60

Ponieważ żądana prosta ma przechodzić przez dany punkt, więc jej rzuty muszą przechodzić odpowiednio przez rzuty punktu A' i A"

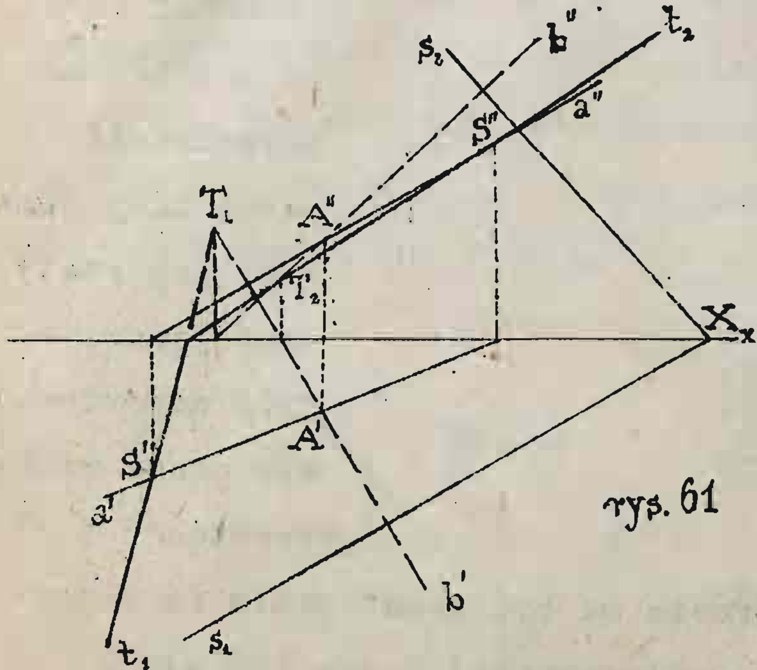
Ponieważ żądana prosta ma być prostopadła do danej płaszczyzny, więc rzuty prostej muszą być odpowiednio prostopadłe do śladów płaszczyzny s_1 i s_2

Prowadząc więc przez p. A' prostą a' ⊥ s_1 i przez p. A" - prostą a" ‖ s_2, otrzymamy rzuty żądanej prostej.

<u>Zadanie XII. Przez daną prostą poprowadzić płaszczyczyznę, prostopadłą do danej płaszczyzny.</u>

Dana jest płaszczyzna / s_1, s_2 / i prosta / a', a"/ przez którą należy poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej /rys. 61/

Znalazłszy odrazu ślady danej prostej S_1 i S_2 - obieramy na niej dowolny punkt -/A', A"/ i prowadzimy przezeń

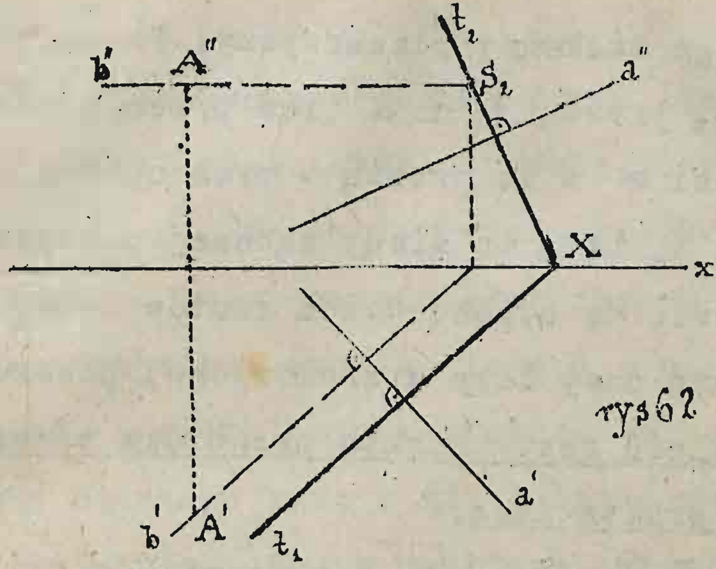


rys. 61

prostą / b', b'' /, prostopadłą do danej płaszczyzny: $b' \perp s_1$ i $b'' \perp s_2$. Jeżeli śladami prostej / b', b'' / są punkty T_1 i T_2, to, łącząc je odpowiednio ze śladami S_1 i S_2 prostej / a', a'' /, znajdziemy ślady t_1 i t_2 płaszczyzny, która będzie właśnie żądaną, przechodząc bowiem przez proste / a', a'' / i / b', b'' /, zadosyćczyni pierwszemu warunkowi zadania oczywiście /poprowadzona jest przez daną prostą/, drugiemu zaś - dlatego, że przechodzi przez prostą / b', b'' / $\perp$ -łą do pł. / s_1, s_2 /, więc jest tym samym $\perp$ -ła do płaszczyzny danej.

<u>Zadanie XIII</u>. <u>Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do danej prostej.</u>

Dana jest prosta / a', a'' / i punkt /A', A''/ przez który należy poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do



rys 62

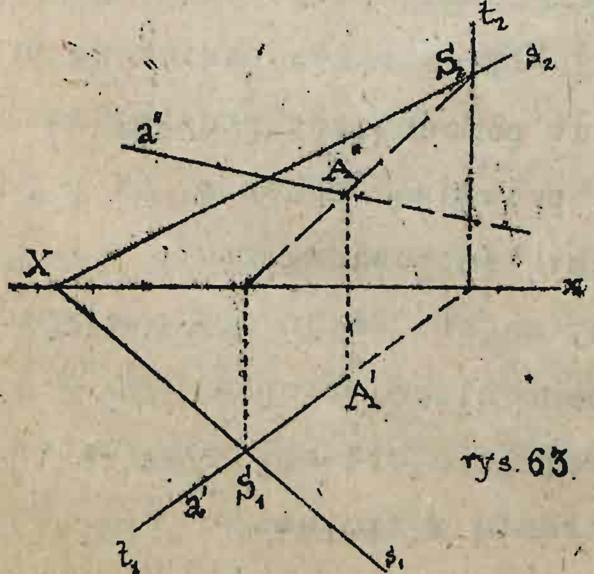
prostej ... nej /rys. Wiedząc, ślady żądan... płaszczyzny muszą być ⊥ ... do rzutów danej prostej, wystarczy znaleźć jeden punkt śladów tej płaszczyzny aby je wykreślić.
W tym celu, prowadzimy przez punkt /A', A''/ dowolną prostą żądanej płaszczyzny, np. równoległą do śladu poziomego / jeszcze nieznanego / tej płaszczyzny. Ponieważ ślad ten musi być ⊥-ły do rzutu poziomego prostej - a', więc poziomy rzut pomocniczej prostej musi być również ⊥-ły do a'; prowadząc przez p. A' prostą b' ⊥ a' - otrzymujemy ten poziomy rzut.
Rzut pionowy śladu leży na osi, więc aby otrzymać pionowy rzut prostej pomocniczej prowadzimy b'' ∥ x. Podnosząc z punktu przecięcia się osi x z rzutem ... prostopadłą aż do spotkania z rzutem b'' w p. S_2 otrzymujemy ślad pionowy prostej / b', b'' / należą...

do śladu pionowego szukanej płaszczyzny. Prowadzimy więc przez p. S_2 prostą $t_2 \perp a''$, zaś przez p. X przecięcia się osi x z tą prostą - prostopadłą $t_1 \perp a'$. Proste t_1 i t_2 będą to ślady żądanej płaszczyzny, gdyż są prostopadłe do odpowiednich rzutów danej prostej, punkt zaś dany leży w znalezionej płaszczyźnie

Zadanie XIV. Znaleść rzuty punktu przebicia płaszczyzny danej przez prostą daną.

Dana jest płaszczyzna / s_1, s_2 / i prosta /a', a'' /. Należy znaleść rzuty punktu, w którym prosta ta przebija daną płaszczyznę /rys.63/.

W tym celu przecinamy płaszczyznę daną płaszczyzną pomocniczą, w którejby leżała prosta dana; niech np. tą płaszczyzną będzie płaszczyzna rzucająca daną prostą na pł. poziomą - P_1 Ślad poziomy płaszczyzny pomocniczej musi przystawać do rzutu poziomego prostej - a' : jest nim t_1 ; ślad pionowy jest $\perp$ -ły do osi, gdyż pł. pomocnicza



rys.63

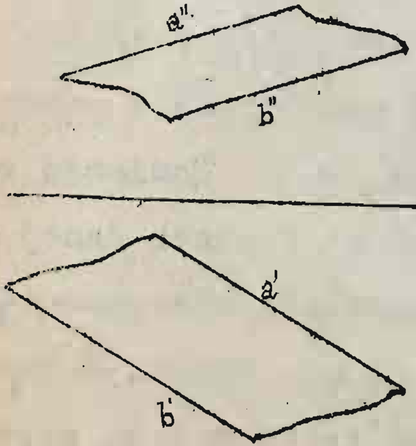
jest $\perp$ -ła do pł. P_1 i $t_2 \perp x$.

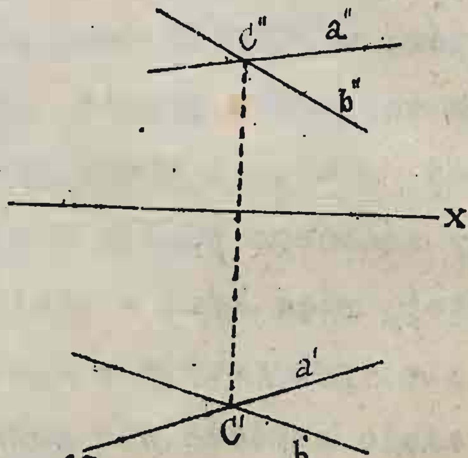
Znanym sposobem wykreślamy teraz linję / b', b'' / , według której przecinają się obie płaszczyzny: / s_1, s_2 / i / t_1, t_2 /. Prosta ta będzie miejscem geometrycznym punktów, w których dana płaszczyzna jest przebita przez wszystkie proste, leżące w płaszczyźnie pomocniczej, a więc i przez prostą / a', a'' /. Ponieważ zaś rzuty żądanego punktu muszą leżeć na rzutach danej prostej, więc leżą w punktach odpowiedniego przecięcia się tych rzutów z rzutami b' i b''. Punktu A' bezpośrednio znaleść nie można, gdyż rzuty a' i b' przystają do siebie - wystawiamy więc ze znalezionego p. A'' prostą, prostopadłą do osi x - w przecięciu z $a' \equiv b'$ znajdziemy p. A'.

Część prostej / a', a'' /, począwszy od p. / A', A'' / na lewo, kreskujemy gdyż prosta od tego punktu staje się niewidzialną, kryjąc się poza płaszczyznę.

Wszystkie powyżej rozwiązane zagadnienia i dowiedzione twierdzenia były oparte na odwzorowaniu płaszczyzny i prostej z pomocą __śladów__; w znacznej jednak większości wypadków ślady leżą poza granicami rysunku i dlatego technik niechętnie posługuje się tą metodą odwzorowania tworów gieometrycznych, jakkolwiek jest ona bardzo wygodna.

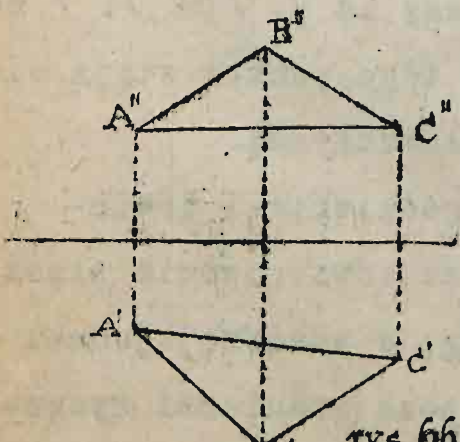
Otóż płaszczyznę najczęściej odwzorowuje się rzutami leżących w niej: 1/ dwuch prostych równoległych /rys.64/, 2/ dwuch przecinających się prostych /rys.65/





rys.64. rys 65.

3/ trzech punktów, których jednoimienne rzuty często łączymy ze sobą prostemi /rys.66/.



rys,66

Zasadniczej różnicy między temi trzema odwzorowaniami niema, gdyż dwie proste $\parallel$ przecinają się w ∞, zaś trzy punkty połączone dają znów przecinające się proste.

Postarajmy się teraz w tych nowych odwzorowaniach rozwiązać dawne zagadnienia, a mianowicie:

Zadanie VII[a]. Mając jeden rzut prostej, leżącej w danej płaszczyźnie znaleść jej rzut drugi.

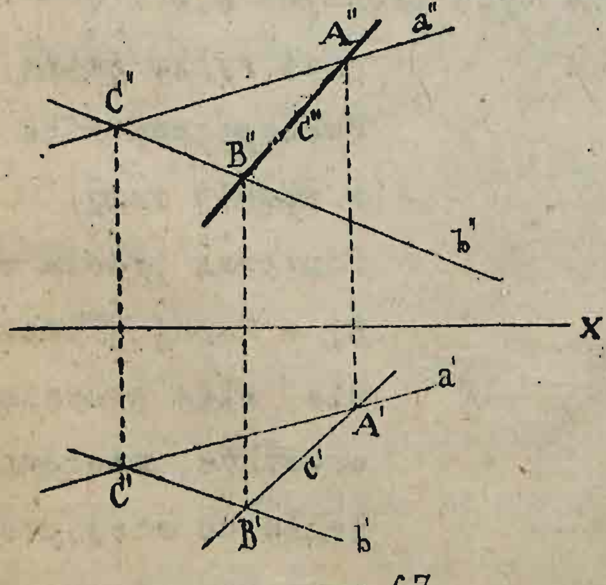
Dana płaszczyzna jest odwzorowana przez dwie przecinające się w p. / C', C''/ proste: / a', a'' / i / b', b'' / i rzut poziomy prostej - c' ; należy znaleść rzut pionowy tejże prostej.

Mogą tu zachodzić dwa przypadki: albo rzut c' nie przechodzi przez punkt C' wspólny rzutom a' i b' /rys.67/ albo przezeń przechodzi /rys.68/.

Rozpatrzmy koleino oba przypadki:

1/ prosta c' nie przechodzi przez punkt C'.

Jeżeli prosta c leży w danej płaszczyźnie, to musi przecinać ona wszystkie nierównoległe do niej proste,



rys. 67

leżące w tej płaszczyźnie, więc również proste a i b. Jeżeli prosta c przecina prostą a, to poziomym rzutem punktu przecięcia tych prostych jest punkt przecięcia poziomych rzutów tych prostych, czyli p. A' przecięcia prostych a' i b'.

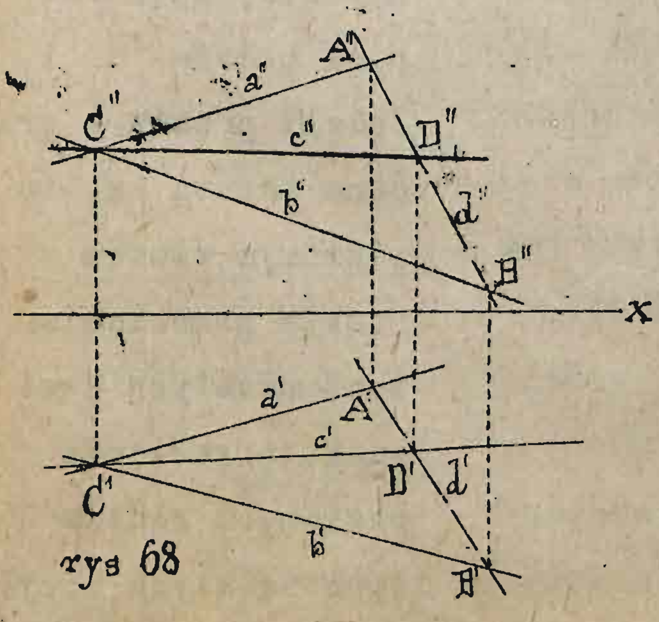
Wystawiając z p. A' prostopadłą do osi x i przedłużając ją do przecięcia się z pionowym rzutem a", otrzymujemy pionowy rzut A" punktu przecięcia prostych a i c, który oczywiście należy do pionowego rzutu prostej c.

Rozumując w podobny sposób dla prostych c i b, otrzymamy p. B", będący pionowym rzutem punktu ich przecięcia, a więc należący również do pionowego tzutu prostej c.

Łącząc rzuty A" i B", otrzymujemy żądany rzut .

2/ prosta c' przechodzi przez punkt C'.

W tym wypadku metoda poprzednia zawodzi, gdyż rzut pionowy punktów przecięcia tych prostych a, b i c jest tylko jeden.



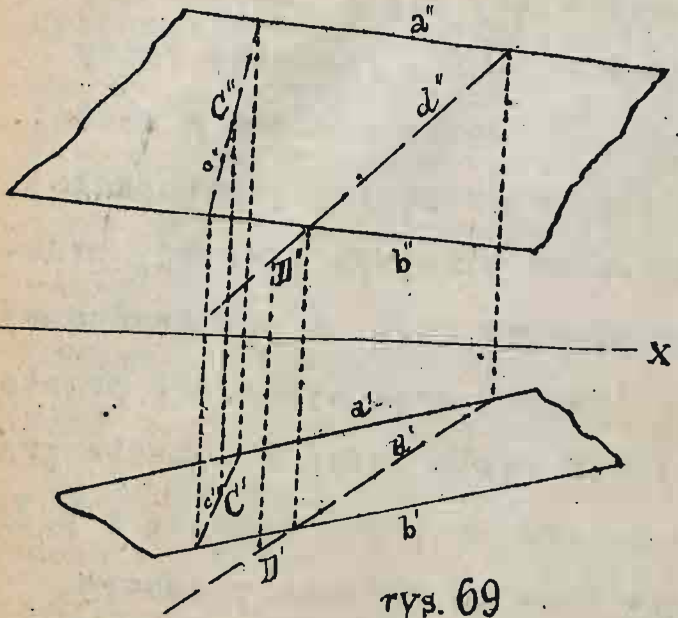
rys 68

Postępujemy więc w sposób inny: Ponieważ prosta c leży w danej płaszczyźnie, więc przecina wszelkie, nierównoległe do niej, proste w tej płaszczyźnie, np. prostą d. Kreślimy więc dowolny rzut poziomy d', przecinający się z rzutami a',c', b' w odpowiednich punktach A', D', B'. Ponieważ rzuty pionowe A'' i B'' punktów A i B można znaleść w każdej chwili, jako przecięcia się odpowiedniej prostopadłej do osi x z odpowiednim rzutem pionowym prostej, przedto, łącząc je, otrzymamy pionowy rzut d'' poprowadzonej prostej. Pionowy rzut D'' punktu przecięcia się prostej c z prostą d musi w takim razie leżeć w punkcie przecięcia d'' z prostopadłą do osi x, podniesioną z p. D'. Punkty D'' i C'' leżą oczywiście na żądanym pionowym rzucie, więc, łącząc je ze sobą otrzymamy prostą c'' — żądaną.

<u>Zadanie VIII^a. Mając jeden rzut punktu, leżącego w danej płaszczyźnie, znaleść jego rzut drugi.</u>

Płaszczyzna dana jest odwzorowana przez dwie proste równoległe: / a', a'' / i / b', b'' /. Jeżeli dany jest rzut poziomy punktu - C' - to należy znaleść jego rzut pionowy - rys.69.

Jeżeli przez punkt C na płaszczyźnie danej przeprowadzić jakąkolwiek prostą, to jej rzut poziomy musi przechodzić przez rzut poziomy punktu C-C'. Niech rzutem tej prostej będzie c'. Opierając się na rozwiązaniu poprzedniego zadania, znajdujemy pionowy rzut tejże prostej - c'', w punkcie przecięcia



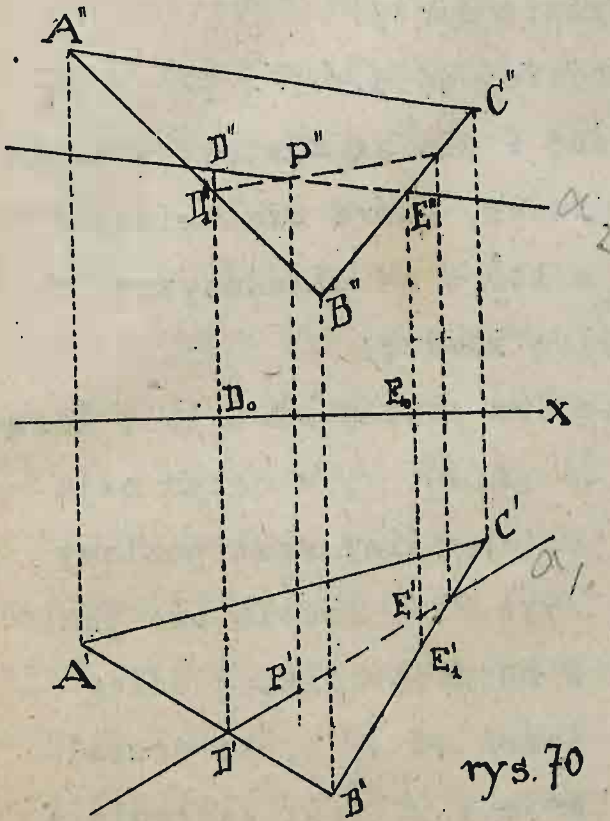
rys. 69

się z nią prostopadłej, podniesionej do osi x z p. C'. Oczywiście, rzut punktu może leżeć zewnątrz rzutów prostych równoległych, wyznaczających płaszczyznę - p. D' - postępowanie jednak będzie wówczas takie samo, jak poprzednio

<u>Zadanie XIV^a^.</u> <u>Znaleść punkt przebicia płaszczyzny danej przez prostą daną.</u>

Dana jest płaszczyzna odwzorowana przez rzuty △ - ta ABC i prosta / a', a" / /rys.70/. Metoda postępowania przy rozwiązywaniu będzie taka sama, jak w wypadku gdy płaszczyzna jest odwzorowana z pomocą śladów: prowadzimy mianowicie przez prostą daną a płaszczyznę pomocniczą, np. rzucającą tę prostą poziomo.

W tym celu zakładamy, że rzut a' prostej a jest jednocześnie poziomym rzutem b' prostej b , leżącej w płaszczyźnie danego △ ta. Aby znaleść



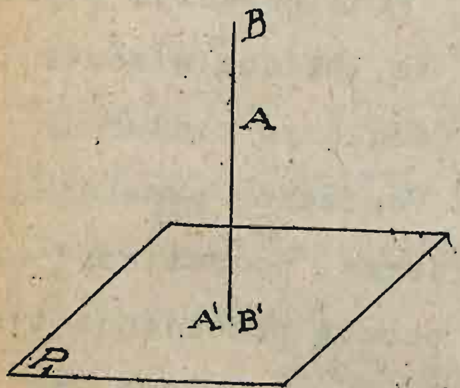
rys. 70

rzut pionowy prostej b, należy, jak wiadomo, z punktów przecięcia rzutu b' z bokami A'B' i B'C' podnieść prostopadłe do osi x, a odpowiednie punkty przecięć tych prostopadłych z bokami A"B" i B"C" połączyć z prostą, będącą właśnie szukanym rzutem b". Ponieważ prosta /b', b"/ leży jednocześnie w rzucającej płaszcz. pomocniczej i danej płaszcz Δ - ta, więc jest prostą przecięcia tych 2-ch płaszczyzn. Proste /a', a"/ i /b', b"/ leżą w jednej płaszczyźnie, więc przecinają się w punkcie, którego rzut pionowy - P_2'' - znajdujemy bezpośrednio w punkcie przecięcia rzutów a" i b", rzut zaś poziomy - P' - opuszczając z punktu P" prostopadłą do osi x do przecięcia się z poziomym rzutem a' = b'.

Punkt / P', P'' / jest właśnie żądanym, gdyż leży na prostej danej i w płaszczyźnie danej.

Oczywiście, części prostej od p./ P', P'' / są zasłonięte przez płaszczyznę i nie są dlatego widzialne, chcąc się jednak dowiedzieć, które mianowicie części prostej są przed, a które za płaszczyzną, wyprowadzamy następującą ogólną zasadę:

Przypuśćmy, że dane są dwa punkty A i B, leżące na jednej prostopadłej do pł. P_1, a zatym mające wspólny rzut poziomy /rys.71/. Jeżeli oko jest w bardzo wielkiej odległości od P_1, to oczywiście p. A jest zasłonięty przez p. B więc ten z punktów o wspólnym jednym rzucie jest widzialny, który jest na większej odległości od płaszczyzny, czyli ten, który ma większą drugą rzędną.

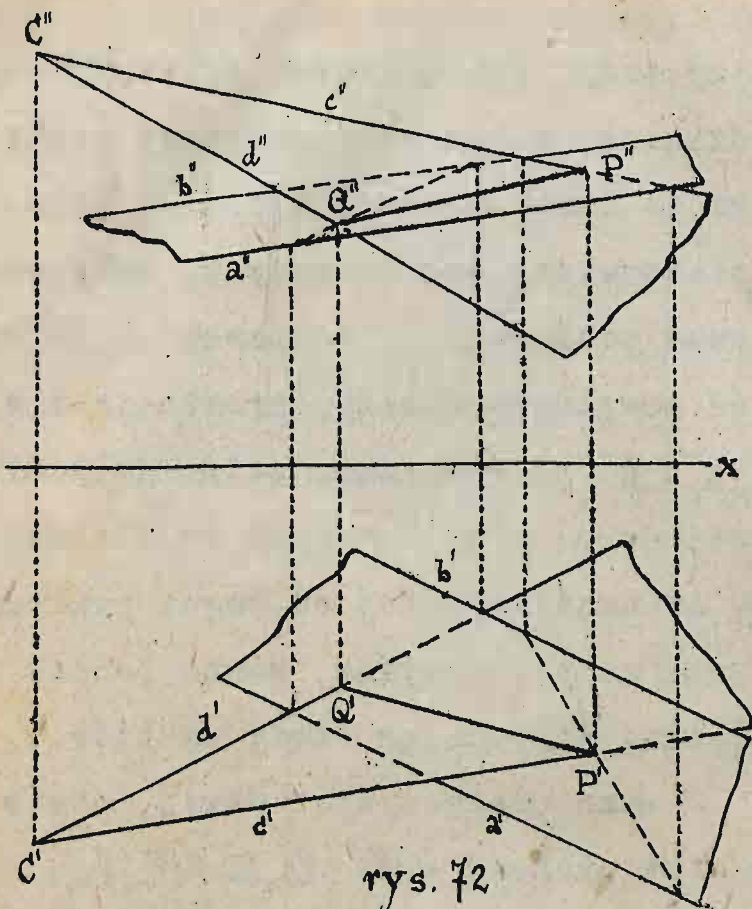


rys. 71

Rozstrzygnijmy tedy, które części prostej na rys.70 są widzialne; w tym celu rozważmy rzuty p. D, należącego do danej prostej i p. D_1, należącego do danej płaszczyzny tak dobranych, żeby posiadały wspólny rzut poziomy D'. Ponieważ $D_0D'' > D_0D_1''$ więc w myśl powyższej zasady, prosta jest w tym punkcie <u>p r z e d</u> płaszczyzną, zatym całkowicie od strony lewej do p. $/P_1', P''/$ jest widzialna. Zrozumiałym jest, że część prostej od tegoż punktu na prawo skryta jest za płaszczyzną, można jednak dojść do tego wniosku, rozważając rzuty punktów: E, na prostej i E_1 - na płaszczyźnie danej, posiadających wspólny rzut pionowy - E'': $E_0E' < E_0E_1'$. więc punkt E prostej, a skutkiem tego część prostej na prawo od p./P', P'' / jest za płaszczyzną. Oczywiście, te części prostej, które są już poza oznaczonemi granicami płaszczyzny znów stają się widzialne.

<u>Zadanie IX^a. Znaleść linje przecięcia dwóch płaszczyzn danych.</u>

Dana jest płaszczyzna ab przez dwie proste równoległe i płaszczyzna cd - przez dwie przecinające się proste /rys.72/.



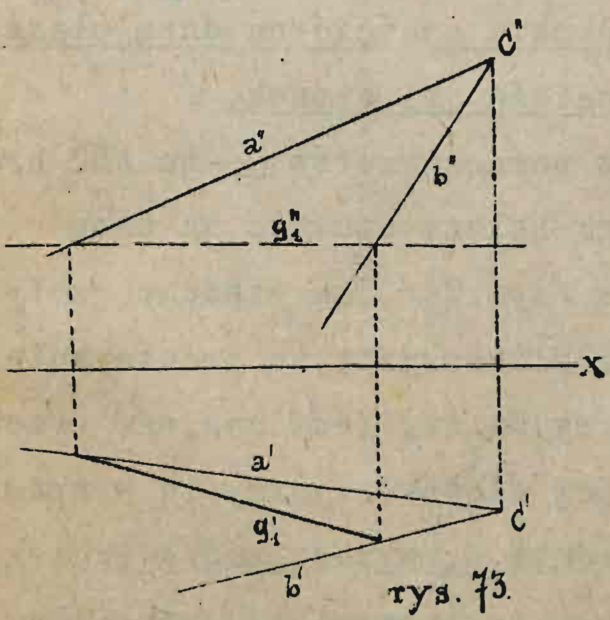
rys. 72

Metoda rozwiązania jest bardzo prosta: znajdujemy naprzód punkt przebicia płaszcz. ab. przez prostą / c', c" /, prowadząc płaszczyznę rzucającą tę prostę np. pionowo-punktem tym jest p. / P', P" /; następnie znajdujemy punkt przebicia pł. ab przez punkt prostą / d', d" /, prostą /   /, prowadząc płaszczyznę, rzucającą tę prostą np. poziomo.

Punktem tym jest p.. / Q', Q" /. Oba te punkty należą: do pł. ab - oczywiście, do pł. zaś cd dlatego, że leżą na dwóch prostych, na płaszczyźnie tej znajdujących się. Wobec tego punkty te muszą należeć do linji przecięcia się danych płaszczyzn; prowadząc zatym przez jednoimienne rzuty punktów proste, otrzymamy rzuty żądanej linji, która oczywiście będzie się zawierała między prostemi, ograniczającemi płaszczyznę. Ponieważ punkt / C', C'' / przecięcia się prostych, wyznaczających płaszcz. cd znajduje się na znacznej odległości od prostych, wyznaczających pł. ab, więc w tym wypadku jest oczywistym, które części płaszczyzn są widzialne.

Zadanie XV. Mając daną płaszczyznę za pomocą rzutów prostych, znaleść kierunki śladów tej płaszczyzny.

Dana jest płaszczyzna ab za pomocą dwuch przecinających się prostych /rys.73/; aby znaleść kierunek naprzód śladu poziomego, wystarczy znaleść którąkolwiek z pierwszych prostych głównych /poziomych/ płaszczyzny, gdyż, jak wiadomo są one równoległe do śladu poziomego płaszczyzny. Rzut pionowy



rys. 73

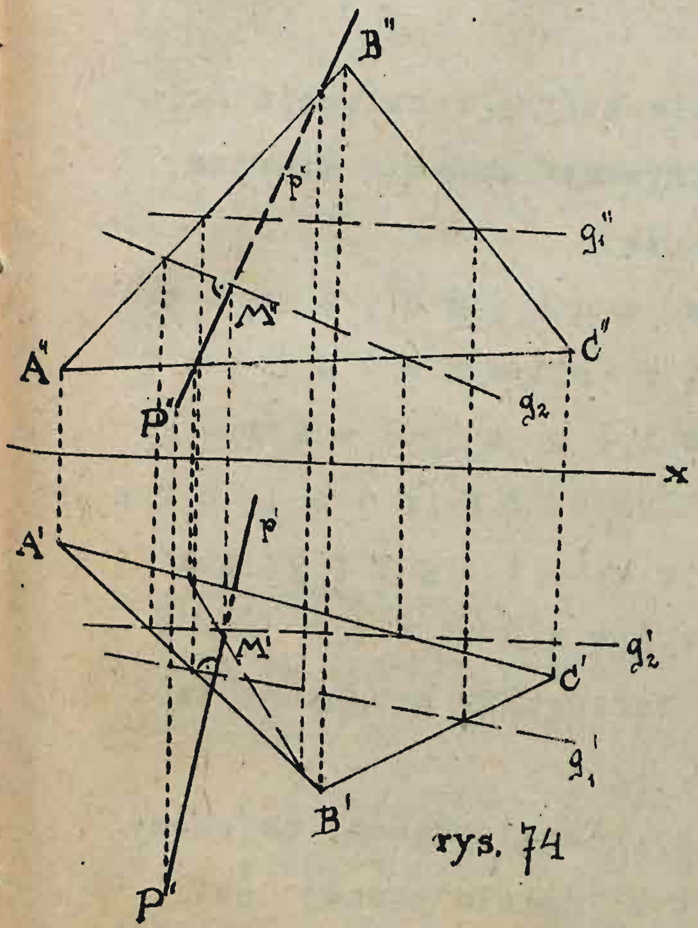
takiej prostej jest równoległy do osi x ;prowadząc

więc g d z i e k o l w i e k prostą $g_1'' \parallel x$, otrzymamy rzut pionowy prostej poziomej.
Rzut poziomy g_1' otrzymamy, łącząc odpowiednie punkty przecięcia rzutów a' i b' z prostopadłemi do osi opuszczonemi z punktów przecięcia się rzutów a'' i b'' z rzutem g_1''. Proste równoległe mają jednoimienne rzuty równoległe, zatym g_1' jest równoległe do poziomego śladu płaszczyzny, a więc wskazuje jego kierunek. Analogicznie prowadząc drugą prostą główną /frontową/ płaszczyzny, znaleść można kierunek śladu pionowego.

<u>Zadanie XI</u>

Zadanie XI^a. Z danego punktu opuścić na daną płaszczyznę prostopadłą i znaleść jej spodek.

Dana jest płaszczyzna z pomocą rzutów $\triangle$-ta ABC oraz punkt /P',P''/, z którego należy opuścić na daną płaszczyznę prostopadłą /rys.74/. Jak wiadomo, rzuty prostej, prostopadłej do płaszczyzny, są prostopadłe do śladów jej płaszczyzny. Należy tedy znaleść przedewszystkiem kierunki jej śladów; czynimy to w sposób już znany i kreślimy prostą g_2, wyrażającą kierunek śladu pionowego - oraz g_1 wyrażającą kierunek śladu poziomego. Opuszczając odpowiednio z punktów P' i P'' prostopadłe na g_1 i g_2 otrzymamy rzuty żądanej prostej: p' i p''. Aby znaleść spodek znalezionej prostopadłej, rozwiązujemy zagadnienie: mając daną płaszczyznę ABC i prostą /p', p''/ znaleść punkt przebicia tej płaszczyzny przez tę prostą. Rozwiązawszy to zadanie znanym sposobem bez prowadzenia płaszczyzny pomocniczej



rys. 74

rzutującej daną prostą, jak w tym wypadku, pionowo, znajdujemy żądany punkt: / M', M"/. Ponieważ rzut poziomy P' znajduje się na znacznej odległości od poziomego rzutu △ -ta A'B'C' więc oczywistym jest, które części prostej (p', p") są widzialne.

Zadania miarowe.

Pod nazwą zadań miarowych rozumiemy zadania, w których mając dane rzuty / względ. ślady / odcinków i kątów, znajdujemy ich wielkości naturalne. Umiejąc zaś znajdywać wielkości naturalne wspomnianych elementów, potrafimy tym samym rozwiązywać zagadnienia miarowe,