punkt 6 leży na ścianie WAB ostr.oraz na mn i mq gran
" 7 " " WAD " " " pq i mq "
" 8 " " WCD " " " np i pq "
" 9 " " WBC " " " mn i np "

Odszukajmy teraz takie pary punktów, które leżą na jednej i tej samej ścianie graniastosłupa oraz ostrosłupa. Widzimy nap.że punkty 1 i 6 leżą na WAB oraz na mq; 6 i 2 - na WAB oraz na mn.i t.d. W ten sposób znajdujemy zamknięty wielokąt wichrowaty: 1-6-2-9-3-8-4-7-1.

Drugi wielokąt przenikania znajduje się na podstawach naszych brył i będzie się na P_2 odwzorowywał w postaci odcinka prostej. Widzimy więc,że w tym wypadku ma również miejsce przenikanie zupełne.

§ 9. RZUTY KOŁA.

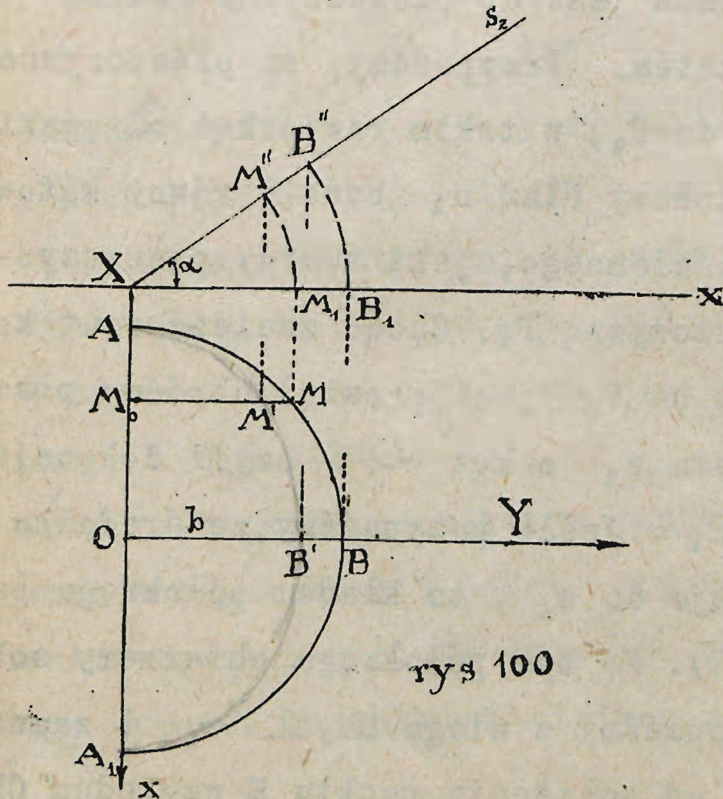
Jedyną linją krzywą, dotąd rozważaną jest okrąg koła. Jest to jak wiadomo, miejsce geometryczne punktów, jednakowo odległych od jednego punktu stałego.

<u>Zadanie XXXIV</u>. <u>Znaleźć rzut prostokątny okręgu koła</u>. Nie mamy, oczywiście, na myśli rzutów ciała, leżącego w płaszczyźnie prostopadłej, lub równoległej do płaszczyzn rzutów, w pierwszym bowiem

wypadku otrzymalibyśmy w rzucie - prostą, w drugim koło równe danemu; przypuszczamy natomiast, że płaszczyzna koła nachylona jest do płaszczyzny rzutów pod pewnym danym kątem. Przypuśćmy, że płaszczyzna koła jest $\perp$ -ła do P_2, w takim razie kąt $\hat{\alpha}$,jaki tworzy z osią x pionowy ślad s_2 będzie równy kątowi linjowemu kąta dwuściennego, jaki tworzy płaszczyzna koła -S- z płaszczyzną P_1. Chcąc znaleźć rzut koła na pł. P_1 (rzut na P_2 jest prostą),obróćmy płaszczyz. S dokoła śladu s_2 o kąt α - czyli dokonajmy kładu pł S na pł.P_1 . Jeśli przypuśćmy,że średnica koła = 2a, przystaje do s_2 , to kładem półokręgu będzie ABA_1 (rys.100). Na tym półokręgu obierzemy sobie dowolny punkt M; opuśćmy z niego $MM_0 \perp s_1$ i zauważymy, że zależnie od położenia punktu M względem OB, czyli zależnie od wielkości odcinka OM_0 , odcinek MM_0 zmienia swą wartość, począwszy MM_0 = a, gdy punkt M leży w B, do MM_0 = 0 , gdy p. M leży w A. Jeżeli za początek układu spółrzędnych prostokątnych obierzemy p. O, za osi spółrzędnych proste OA i OB, to punkt M będzie wyznaczony przez dwie swe spółrzędne: MM_0= Y i OM_0 - X.

Przypuśćmy teraz, że powracamy z kładu pł. S do jej normalnego położenia: w takim razie p. B_1

zakreśla łuk okręgu koła o środku O i promieniu OB



rys 100

w przecięciu się tego łuku ze śladem s_2 znajdujemy rzut pionowy B" punktu B w jego pierwotnym położeniu. Prowadząc linję rzędną znajdujemy rzut poziomy B'-tegoż punktu. Podobnie wykreślić można rzuty M' i M" pierwotnego położenia punktu M.

Zauważymy, że OB' $<$ OB i $M_oM' < M_oM$ - czyli że rzuty tych samych pubktów okręgu bliższe są średnicy w normalnym położeniu, niż w kładzie.

Oznaczymy: XB" = a i rzut tego odcinka na prostą OB - OB' = b, widzimy, że: b = aCos α , czyli

$\cos\alpha = \frac{b}{a}$.......(1). Podobnież oznaczymy:
$M_0M = \cancel{X}M'' = Y$, zaś $M_0M' = y$. W takim razie
$y = Y\cos\alpha$ lub, podstawiając wartość (1):

$$y = \frac{b}{a}Y \text{----------} (2)$$

Stąd wynika, że aby otrzymać rzut jakiegokolwiek punktu koła, trzeba z odpowiedniego punktu średnicy wystawić do niej prostopadłą, przedłużyć ją do przecięcia z okręgiem koła i zmniejszyć tę półcięciwę w pewnym stałym stosunku - $\frac{b}{a}$. Łącząc rzuty szeregu takich punktów linją ciągłą, otrzymamy przybliżony rzut koła. Chcąc przekonać się, jaką krzywą jest rzut koła, piszemy równanie koła, odnośnie do obranego układu spółrzędnych:

$$x^2 + Y^2 = a^2$$

przenosząc Y na jedną stronę: $Y^2 = a^2 - x^2$ ----------(3)
ale z (2) mamy: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}Y^2$ podstawiając zamiast Y wartość (3):

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

po otworzeniu nawiasów i sprowadzeniu do wspólnego mianownika: $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$ inaczej:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

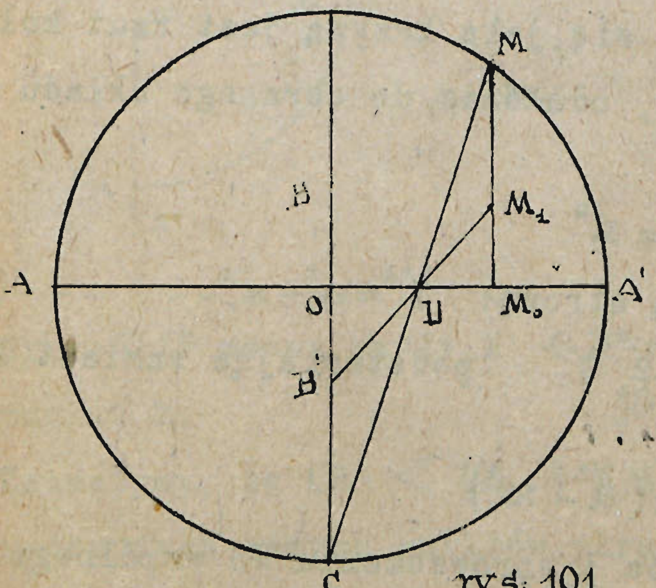
dzieląc obie strony przez a^2b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Otrzymaliśmy równanie elipsy, więc prostokątnym rzutem koła jest elipsa.

Opierając się na tym, że rzutem koła jest elipsa, otrzymujemy następujący sposób jej wykreślania: na odcinku AA', jak na średnicy, wykreślamy okrąg koła (rys.101), następnie prowadzimy szereg półcięciw, prostopadłych do AA' i zmniejszamy je w pewnym stałym stosunku. Otrzymane w ten sposób punkty półcięciw łączymy krzywą, która będzie szukaną elipsą.

Końce średnicy poziomej (A i A') oraz końce skróconej średnicy pionowej (B i B') nazywamy wierzchołkami elipsy.



rys. 101

Odcinek AA' zwie się osią wielką, zaś BB' - osią małą elipsy. Koło wykreślone na osi wielkiej, jak na średnicy nosi miano koła wielkiego - na osi małej koła małego.

Elipsę wykreślić można jeszcze w ten sposób, że poszukujemy punktów elipsy, odpowiadających szeregowi punktów na kole, wykreślonym na AA'.

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć punkt elipsy, odpowiadający punktowi M koła. W tym celu łączymy p.M z krańcem C pionowej średnicy koła, prowadzimy przez punkt D przecięcia średnicy AA' z CM i przez wierzchołek elipsy B' prostą, która w p.M_1 przecięcia się MM_0 da nam szukany punkt elipsy.

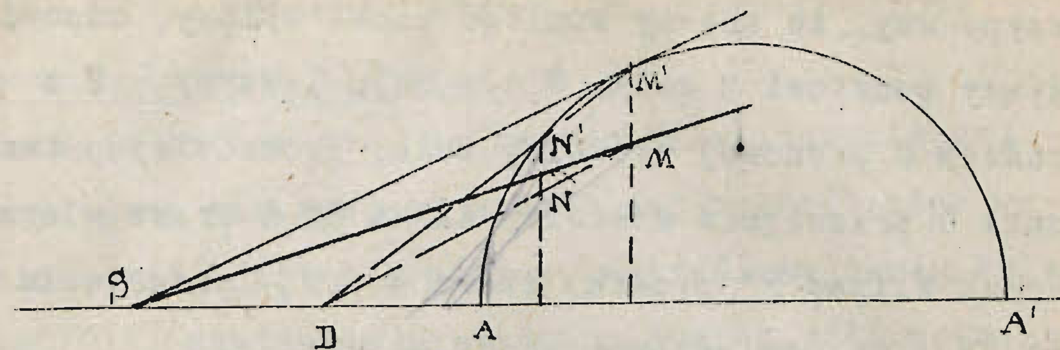
Ponieważ elipsa ma dwie osi symetrji - AA' i BB' - więc, mając jeden punkt elipsy (np.M), można znaleźć 2 symetryczne do niego, które znów dadzą nowy punkt elipsy, jako symetryczny do nich. Za pomocą więc jednej konstrukcji znaleźć można cztery punkty elipsy.

Jeszcze inny sposób wykreślania elipsy da nam rozwiązanie następującego zagadnienia:

Zadanie XXXV. Poprowadzić styczną do elipsy w danym jej punkcie.

W warunkach zadania wystarczy mieć daną: oś wielką (więc koło wielkie), oraz ten punkt elipsy, przez który ma przechodzić żądana styczna - gdyż tym sposobem elipsa jest wyznaczona w zupełności. Mamy tedy daną oś AA' i punkt elipsy M (rys.102) - chcemy poprowadzić styczną do elipsy w punkcie M.

W tym celu wykreślamy na osi AA' ko[illegible] [illegible]ielkie i znajdujemy na nim punkt M',odpowiadający p.M elipsy.



rys. 102

Zauważmy teraz, iż ponieważ nasza elipsa może być uważana, jako rzut koła wielkiego, więc dwie te krzywe znajdują się w powinowactwie geometrycznym, przyczem osią powinowactwa jest prosta AA' i ponieważ dalej styczna do koła jest to granica położenia prostej, która łączy dwa nieskończenie zbliżające się punkty koła, więc styczne do koła i elipsy, przeprowadzone w odpowiadających sobie wzajemnie punktach również znajdują się w powinowactwie, o tej samej, co poprzednio, osi powinowactwa.

Stąd wynika, iż, jeśli w p.M' poprowadzimy styczną do koła i przedłużymy ją do przecięcia z przedłużoną AA' w p. S, to przez ten punkt przechodzić również musi styczna do elipsy w p.M. Łącząc tedy punkty S i M - otrzymamy żądaną styczną. Szereg stycznych poprowadzonych w ten sposób w kilku punktach krzywej, którą chcemy wykreślić, niezmiernie ułatwia jej wykreślenie.

Opierając się na tym, iż koło i elipsa znajdują się w powinowactwie, możemy wykreślać poszczególne jej punkty, jeśli jeden z punktów elipsy jest dany.

Przypuśćmy, że dany jest punkt M, należący do elipsy, obieramy na kole wielkim p. N' i znajdujemy odpowiadający mu punkt elipsy w sposób następujący: łączymy punkty M' i N', przedłużamy M'N' do przecięcia się z osią wielką w p.D, łączymy punkty D i M - w przecięciu się z DM z prostópadłą do osi, opuszczoną na nią z p. N' znajdujemy szukany punkt N, należący do elipsy.-

Wiemy już, że, zmniejszając szereg równoległych cięciw koła w pewnym stosunku, znajdujemy punkty, należące do elipsy; teraz dowiedziemy.

<u>TWIERDZENIE VIII. P o w i ę k s z a j ą c r ó w n o l e g ł e c i ę c i w y k o ł a w s t a ł y m s t o s u n k u o t r z y m a m y p u n k t y e l i p s y.</u>

Napiszemy równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Wiemy, że jeśli suma kwadratów dwuch wielkości = 1, to można przyjąć że:

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2\varphi$$

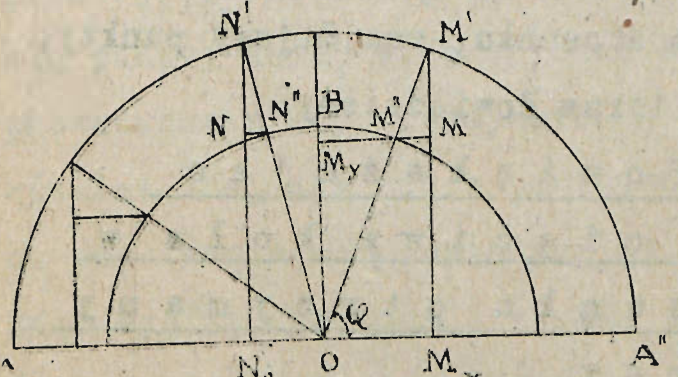
$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\varphi$$

Czyli $\quad x = \pm a \cos\varphi$

$\qquad\quad y = \pm b \sin\varphi$

równania te nazywamy <u>parametrycznemi równaniami elipsy</u>; podwójny znak, otrzymany po wyciągnięciu pierwiastków, zawdzięczamy symetrji elipsy.

Nakreślamy teraz dwa spółśrodkowe koła o promieniach, równych odpowiednio połowie wielkiej (czyli a) i małej osi elipsy _-b-_ (rys.103), oraz znajdźmy dwa ich punkty - M' i M'', nachylone do osi AA' pod kątem φ. Jeśli za początek układu spółrzędnych obierzemy p. O, za kierunki dodatni osi - proste OA' i OB, to, ponieważ spółrzędne p.M ($MM_x \perp AA'$ i $MM_y \perp OB$) mają



rys. 103

własności: $x = OM_x = OM' \cdot \cos\varphi = a\cos\varphi$

$\qquad\qquad y = OM_y = OM'' \cdot \sin\varphi = b\sin\varphi$

więc p.M należy do elipsy.

Widzimy tedy, że punkt M otrzymać można, zmniejszając odcinek $M'M_x$ w stosunku $\frac{a}{b}$, lub też, powiększając odcinek $M''M_y$ w stosunku $\frac{b}{a}$ c.b.d.d.
Najdogodniejszym sposobem kreślenia punktów elipsy jest sposób użyty przez nas przy dowodzeniu powyższego twierdzenia.
Mianowicie obieramy na kole wielkim i małym elipsy 2 punkty N' i N" leżące na jednej prostej, przechodzącej przez p.O, następnie prowadzimy $N'N_o \perp AA'$, a przez p.N" - równoległą do AA' - w przecięciu tych dwóch prostych otrzymujemy szukany p.N, należący do elipsy.

§ 10. S t o ż e k.

Powierzchnią stożkową nazywamy powierzchnię, powstałą z ruchu prostej - (tworzącej) - która przechodzi przez jeden punkt stały - (wierzchołek, środek) - a ślizga się po jakiejkolwiek krzywej (kierownicy).
Teraz zajmiemy się stożkami (kołowemi - 2-go rzędu) których kierownicą jest koło i rozwiążemy
Zadanie XXXVI. Wykreślić rzuty prostego stożka kołowego o podstawie, spoczywającej w P_1.

Do rozwiązania tego zadanie wystarczy mieć daną kierownicę i wierzchołek stożka.
Ponieważ oś stożka prostego jest $\perp$ -ła do podsta-