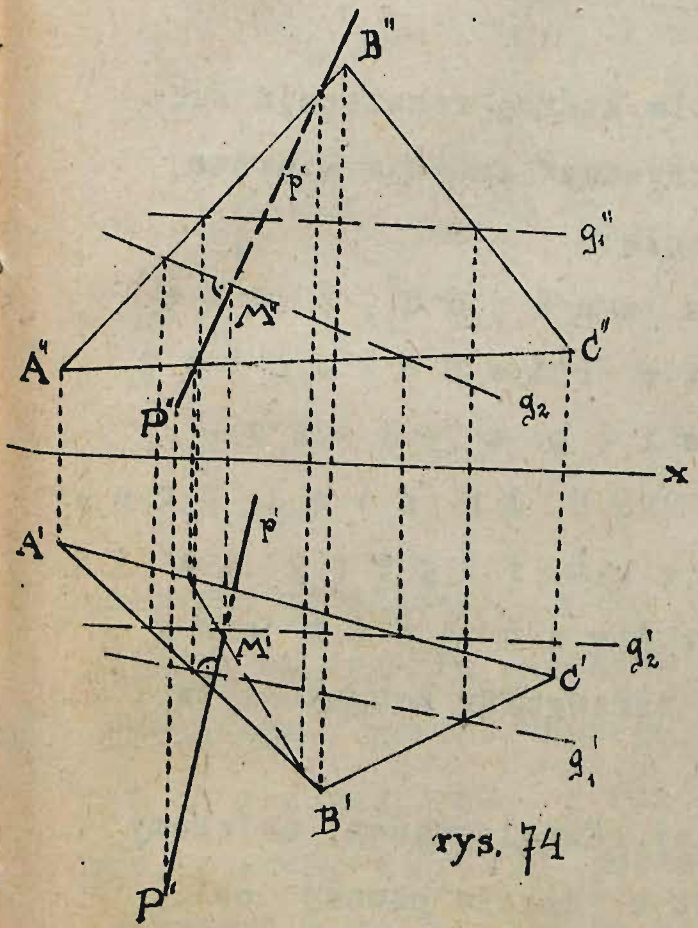
tej płaszczyzny przez tę prostą. Rozwiązawszy to zadanie znanym sposobem bez prowadzenia płaszczyzny pomocniczej



rys. 74

rzutującej daną prostą, jak w tym wypadku, pionowo, znajdujemy żądany punkt: / M', M" /. Ponieważ rzut poziomy P' znajduje się na znacznej odległości od poziomego rzutu △-ta A'B'C' więc oczywistym jest, które części prostej (p', p") są widzialne.

Zadania miarowe.

Pod nazwą zadań miarowych rozumiemy zadania, w których mając dane rzuty / względ. ślady / odcinków i kątów, znajdujemy ich wielkości naturalne. Umiejąc zaś znajdywać wielkości naturalne wspomnianych elementów, potrafimy tym samym rozwiązywać zagadnienia miarowe, dotyczące figur płaskich.

Rozwiążmy naprzód następujące

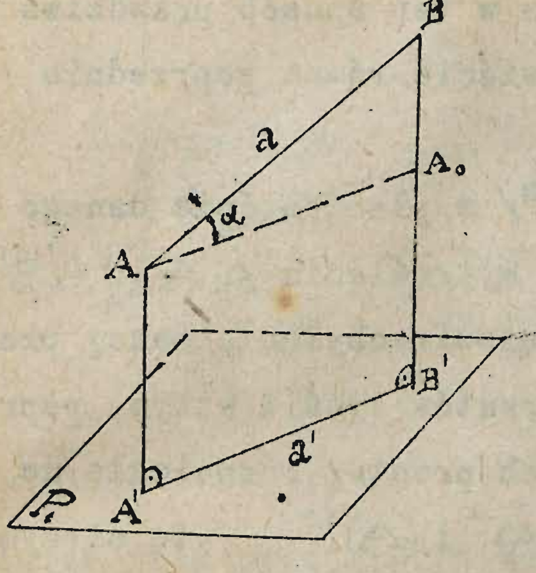
Zadanie XVI. Znaleść prawdziwą wielkość odcinka, danego przez rzuty.

Ogólną zasadą, na podstawie której rozwiązuje się wszystkie /więc i rozpatrywane/ zadanie miarowe, jest następujące rozważanie:

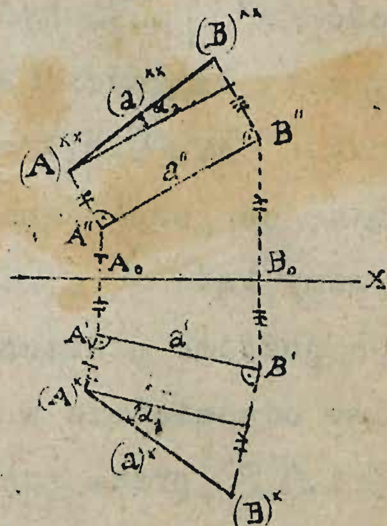
J e ż e l i f i g u r a z n a j d u j e s i ę w p ł a s z c z y ź n i e r ó w n o l e g ł e j d o k t ó r e j k o l w i e k z p ł a s z c z y z n r z u t ó w, l u b d o n i e j p r z y s t a j ą c e j, t o r z u t f i g u r y n a t ę p ł a s z c z y z n ę r ó w n y j e s t o r y g i n a ł o w i /patrz szczególny przypadek tw.I i tw.IV/.

Aby doprowadzić do takiej równoległości, uciekamy się do metody o b r o t u dokoła pewnej osi.

Tak więc chcąc rozwiązać nasze zadanie, przeprowadźmy rozumowanie na przestrzennym rys.75^a: jeżeli trapez $A'ABB'$ rzucający odcinek AB na pł. P_1 obrócimy dokoła rzutu a', jak dokoła osi, to trapez ten, padając na pł. P_1, da na tej płaszczyźnie, jako jeden ze swych boków prawdziwą długość a odcinka AB. Ponieważ kąty $\widehat{AA'B'}$ i $\widehat{BB'A'}$ są proste, rzut a' i



rys. 75 a

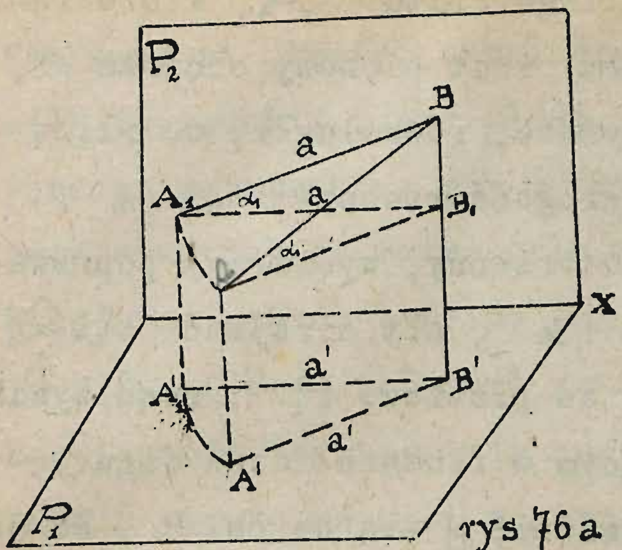


rys. 75 b

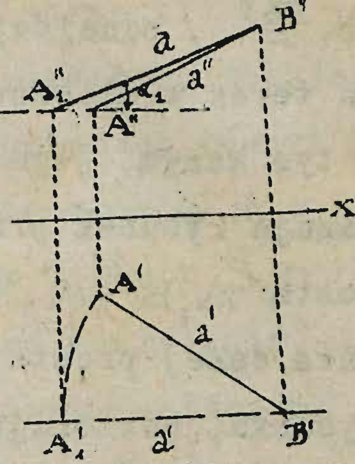
pierwsze odległości AA' i BB', równe drugim rzędnym, są dane na rysunku płąskim, będącym odwzorowaniem poprzedniego - przestrzennego, więc powyższa konstrukcja da się odwzorować w rzutach: wystawiamy, mianowicie, z krańców A' i B' poziomego rzutu a' odcinka prostopadłe do tego rzutu /rys.75^b/ i na nich odmierzamy odpowiednio drugie odległości A_oA'' i B_oB'' - otrzymujemy punkty $(A)^x$ i $(B)^x$; łączymy je ze sobą i wykreślamy w ten sposób kład na poziomą płaszczyznę rzutów, kład trapezu, rzucającego poziomo dany odcinek. W takim razie bok $(A)^x(B)^x$ jest żądaną długością $(a)^x$ odcinka. Oczywiście, analogiczną konstrukcję dokonać można z trapezem, rzucającym dany odcinek pionowo, a otrzymana w ten sposób prawdziwa długość /a/^{xx} musi być oczywiście równa poprzednio otrzymanej długości $(a)^{x}$.

Prowadząc $AA_o \| P_2$ /rys.75^a/ w płaszczyźnie danego trapezu, co jest równoważne wykreśleniu $AA_o \| A'B'$ otrzymamy kąt $\widehat{\alpha_1}$, równy kątowi nachylenia danej prostej do poziomej płaszczyzny rzutów; jeśli zatym, poprowadzimy odpowiednio w rzutach proste, równoległe do $A'B'$ i $A''B''$ przez punkty $(A)^{x}$ i $(A)^{xx}$, to otrzymamy rzeczywiście wartości $\widehat{\alpha_1}$ i $\widehat{\alpha_2}$ kątów nachylenia danej prostej do płaszczyzny rzutów.

Powyższe zadanie XVI można rozwiązać jeszcze innym, prostszym do wykreślenia sposobem. Mianowicie, zamiast obracać trapez rzucający dokoła jednego z rzutów odcinka, obracamy go, jak około osi, dokoła jednej z odległości któregokolwiek punktu odcinka od P_1 np. dokoła BB' /rys.76^a/ dopóty, aż stanie się płaszczyzna trapezu $A'ABB'$ równoległa do pł. P_2, czyli, aż przybierze położenie pł. $A'_1A_1BB' \|$ pł. P_2. W takim razie, w myśl wypowiedzianej zasady rzut pionowy będzie długością prawdziwą odcinka. Aby odwzorować ten obrót, zauważmy, iż podczas wspomnianego ruchu każdy punkt figury danej opisuje część okręgu, którego płasz-



rys 76a

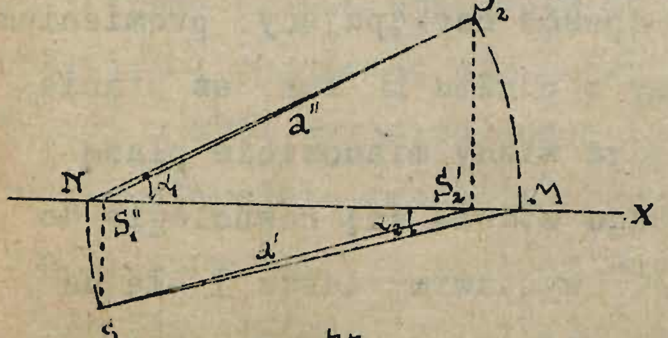


rys. 76b

czyzna jest prostopadła do osi obrotu, środek - leży na niej, zaś promień - równy jest odległości od tejże osi rozpatrywanego punktu.

Tak więc, p.A opisuje część okręgu o środku B_1 ($AB_1 \perp BB_1$); p. A' - o środku B'. W tym samym czasie ponieważ p.A obraca się w płaszcz. $\perp$ -łej do osi obrotu a $\parallel$ -łej do płaszcz. P_1, ~~w końcowym położeniu~~, rzut pionowy p.A posuwa się po równoległej do osi, przez ten rzut poprowadzonej. W rzutach czynności te przedstawiają się w sposób następujący: promieniem równym $A'B' = a'$ zataczamy z punktu B' łuk, aż stanie się $A'_1B' (= a') \parallel x$, gdyż wtedy mianowicie płaszczyzna trapezu rzucającego stanie się równoległa do pł. P_2. Jeżeli z p. A'_1 wystawimy teraz $\perp$-łą do osi x, to w punkcie przecięcia się jej z prostą, równoległą do osi x, po której porusza się rzut A''

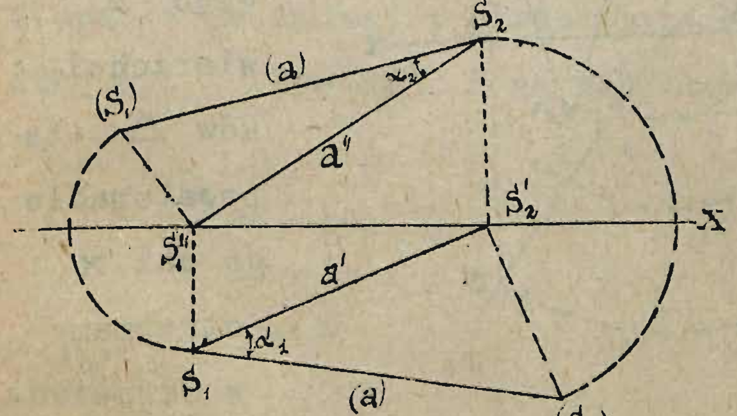
otrzymamy nowe położenie tego rzutu - A_1'' które łącząc z p. B'' , odnajdujemy rzut pionowy odcinka AB, leżącego teraz w płaszczyźnie, równoległej do pł. P_2 , a więc, tym samym, jego długość rzeczywistą - a .
Jak wskazuje rysunek przestrzenny, wystarczy poprowadzić prostą $A_1B_1 \| A_1'B' \| x$, aby otrzymać kąt $\hat{\alpha}_1$, nachylenia danej prostej do płaszcz. P_1 ; stąd wynika, że, na rysunku, odwzorującym w rzutach dane figury, należy przez p. A_1'' poprowadzić $\|$-łą do osi x , co już jest zrobione, a kąt α_1 , zawarty między tą równoległą a prostą $A_1''B''$ jest szukanym. Widzimy więc, że bardzo prostym sposobem rozwiązaliśmy bardzo ważne
<u>Zadanie XVII</u>. <u>Znaleść rzeczywistą wartość kąta nachylenia prostej do którejkolwiek płaszczyzny rzutów</u>, dające się jednak rozwiązać w sposób znacznie prostszy, jeżeli mamy dane ślady prostej. Mianowicie, przypuśćmy, że dane są rzuty a' i a'' odcinka, którego kąty nachylenia do płaszczyzn rzutów chcemy znaleść /rys. 77/. Znajdźmy naprzód ślady S_1 i S_2 danego odcinka i wykreślmy metodą drugą wartość rzeczywistą odcinka a na poziomej i pionowej płaszczyźnie rzutów.



rys. 77

Ponieważ na prostej obraliśmy teraz nie dwa jakiekolwiek jej punkty, lecz ślady, więc konstrukcja będzie jeszcze prostsza: z p. S_1'' promieniem równym $S_1'' S_2$ zataczamy łuk do przecięcia się z osią x w p.M. W podobny sposób otrzymujemy p.N; kąty $\widehat{S_2NM} = \alpha_1$ i $\widehat{S_1MN} = \alpha_2$ będą żądanemi kątami nachylenia.

Rozwiązanie tego zadania sposobem pierwszym, prowadzenie prostopadłych, nie nastręcza również żadnych trudności - oczywistym jest z rysunku 78, że kąty α_1 i α_2 są szukanemi.



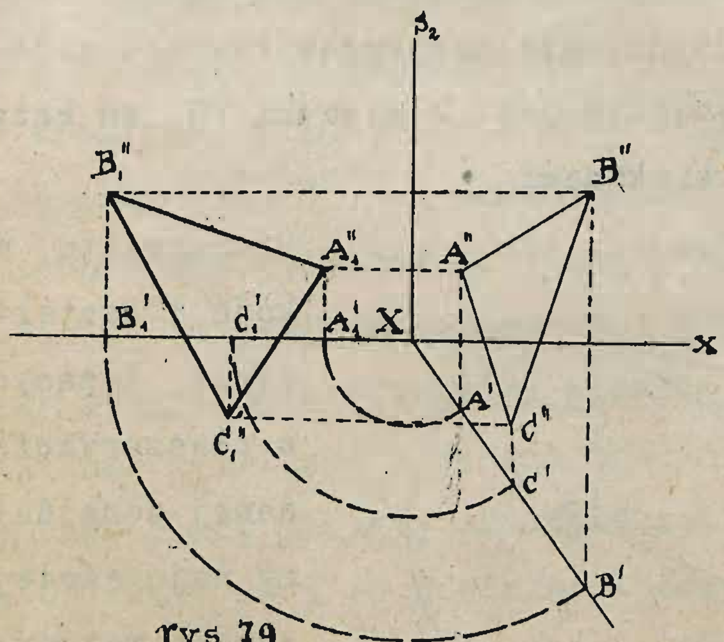
rys. 78

Rzeczywistą wielkość i kształt figur, leżących w płaszczyźnie danej odnajdujemy najczęściej z pomocą metody <u>k ł a d u</u> płaszczyzny danej na jedną z płaszczyzn rzutów, obracając daną płaszczyznę dokoła jej śladu na odpowiedniej płaszczyźnie.

Najprostszy przypadek obrotu zachodzi, gdy płaszczyzna dana jest $\perp$-ła do jednej z płaszczyzn rzutów; np.

Zadanie XVIII. Znaleść prawdziwą wielkość i kształt figury, leżącej w płaszczyźnie ⊥-łej do poziomej płaszczyzny rzutów.

W płaszczyźnie $(s_1, s_2) \perp P_1$, a danej przez ślady, leży trójkąt, którego rzutem pionowym jest $\triangle A''B''C''$ /rys.79/ - rzut poziomy tego $\triangle$-ta leży na śladzie poziomym płaszczyzny - s_1; prowadząc więc z wierzchołków $\triangle$-ta prostopadłe do osi x otrzymamy w odpowiednich punktach przecięcie się ich ze śladem s_1 rzuty poziome tych wierzchołków - zatym i $\triangle$-ta.

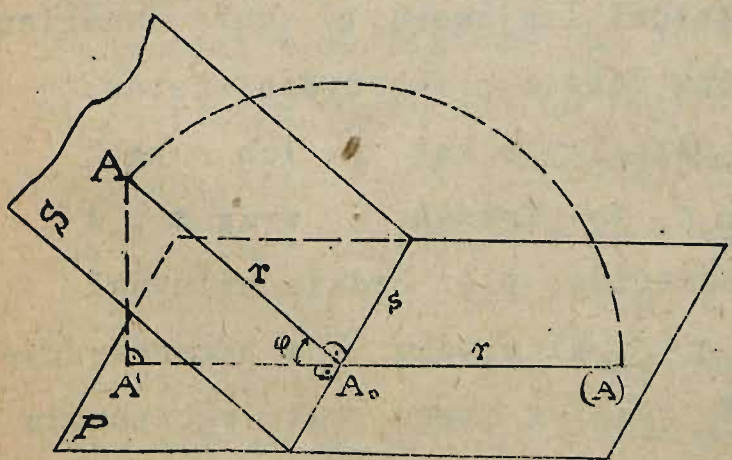


rys 79

Chcąc teraz znaleść kład tego $\triangle$-ta np.- na pł. P_2 obracamy pł. $V\ s_1, s_2$ / dokoła śladu s_2. Wszystkie punkty śladu s_1 będą się poruszały po łukach kół, o tymże środku X i o promieniu, równym odległości od p. X rozpatrywanych punktów. Stąd wynika, że, po dokonaniu obrotu, punkty A', B' i C' przyjmą położenia: A_1', B_1' i C_1'.

W tym samym czasie punkty A'', B'' i C'' przesuwają się po równoległych do osi x, a ponieważ w końcowym położeniu muszą leżeć na odpowiednich prostopadłych do osi, podniesionych z punktów A_1', B_1' i C_1', więc ostatecznie żądane położenie wierzchołków Δ-ta w kładzie będzie w punktach przecięcia się wspomnianych prostych, czyli w punktach: A_1'', B_1'' i C_1''.

Tak będzie w przypadku szczególnym, rozpatrzmy jednak przypadek ogólny, gdy płaszczyzna dana nie jest prostopadła do żadnej z płaszczyzn rzutów. Mamy tedy daną pł. S /Rys:80/ i na niej dowolny punkt A, chcemy zaś dokonać kładu pł.- S na pł.P i znaleść wtedy położenie p. A. Wykreślmy naprzód rzut punktu A na pł. P; z tego punktu opuśćmy $A'A_0 \perp s$ gdzie s jest śladem



rys. 80

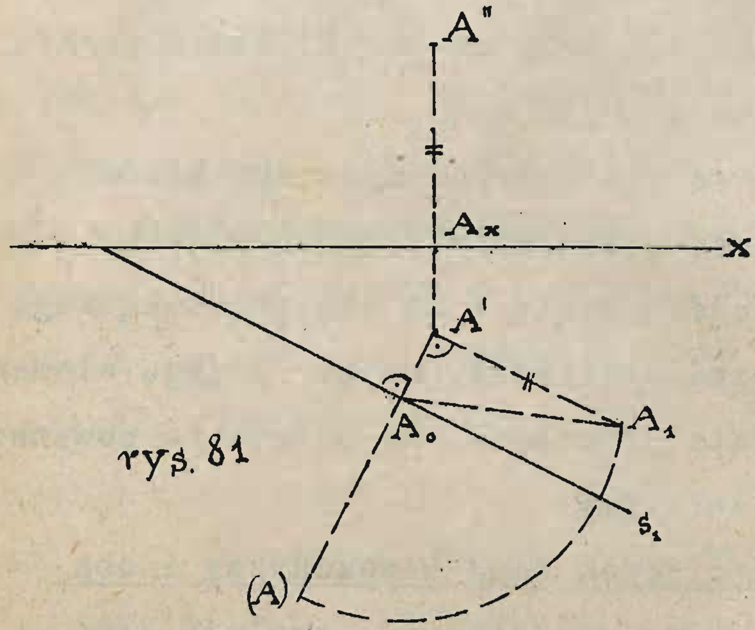
pł. S na pł P. Ponieważ $AA' \perp A'A_o$ więc łącząc punkty A i A_o, otrzymamy prostokątny $\Delta AA'A_o$, w którym bok $A'A_o$ jest rzutem boku AA_o. Na mocy twierdzenia o trzech prostopadłych, $AA_o \perp s$, widzimy więc, że oba ramiona kąta $\hat{\varphi}$ są prostopadłe do krawędzi s kąta dwuściennego $\widehat{SsP}$, zatem kąt $\hat{\varphi}$ jest kątem linjowym wspomnianego dwuściennego. Z powyższego wynika, że elementy Δ -ta $AA'A_o$ mają następujące własności: 1/ przy-prostokątna AA' równa jest pierwszej odległości /drugiej rzędnej/ punktu A, 2/ przyprostokątna $A'A_o$ równa jest odległości rzutu A' od śladu s płaszczyzny danej, 3/ przeciwprostokątna AA_o równa jest odległości p.A od śladu s płaszczyzny danej, 4/ kąt $\widehat{AA'A_o}$ równy jest prostemu, 5/kąt $\widehat{AA_oA'}$ równy jest kątowi linjowemu $\hat{\varphi}$ kąta dwuściennego między płaszczyzną daną a płaszczyzną rzutów. Jeżeli teraz pł. S obrócimy o kąt $\hat{\varphi}$ lub o kąt spełniający $/180^o - \varphi/$, to płaszcz. S wraz z p.A padnie na pł P; jednocześnie, p.A będzie opisywał łuk koła o promieniu $r = A_oA$ i środku A_o w płaszczyźnie prostopadłej do pł. P, wskutek czego rzut tego punktu A' musi się poruszać po prostopadłej do s, czyli po $A'A_o$ i jej przedłużeniu. Kład punktu A znajduje się w punkcie przebicia pł. P. przez zatoczony łuk, czyli w punkcie (A) przecięcia się tego łuku z przedłużeniem prostej $A'A_o$. Do tegoż wniosku można dojść w inny sposób: ponieważ $AA_o \perp s$ więc ta prostopadłość musi zachodzić również wtedy, gdy p. A, wraz z płaszczem S leży na pł: P. czyli p./A/ leży na przedłużeniu $A'A_o \perp s$.

Widzimy tedy, że do znalezienia żądanego kładu /A/ niezbędnym jest posiadanie promienia $AA_o = r$ który można znaleść jedynie z $\triangle$-ta prostokątnego $AA'A_o$ który można wykreślić, mając 2 jego elementy /nie licząc kąta prostego/. Na podstawie powyższego rozważania rozwiążemy:

Zadanie XIX. Mając jeden ślad płaszczyzny i oba rzuty punktu, na niej położonego, znaleść kład tego punktu na jedną z płaszczyzn rzutów.

Dany jest ślad poziomy s_1 płaszczyzny i rzuty A' i A'' punktu, leżącego na tej płaszczyźnie (rys 81) - płaszczyzna jest tym sposobem wyznaczona w zupełności. Całe zagadnienie sprowadza się do odnalezienia promienia obrotu punktu A dokoła śladu s_1 w płaszczyźnie, do niego prostopadłej, jeśli chodzi nam o kład na poziomą płaszczyznę rzutów.

Kiedy punkt A obraca się we wspomnianej płaszczyźnie, jego rzut A, porusza się po prostopadłej do osi obrotu, czyli po $A'A_o$; gdy punkt A padnie na płaszczyznę P_1, wtedy będzie on sam swoim poziomym rzutem i, skutkiem tego, p. A w kładzie znajduje się na przedłużeniu prostopadłej $A'A_0$ w odległości równej oczywiście temu promieniowi obrotu, który chcemy znaleść. Jak wynika z rozważania, przeprowadzonego na rysunku przestrzennym, promień ten równy jest



rys. 81

przeciwprostokątnej $\triangle$-ta prostokątnego o jednej prostokątnej, równej odległości rzutu punktu od jednoimiennego śladu płaszczyzny - odległością tą jest $A'A_0$ - a drugiej równej drugiej rzędnej punktu; jeśli więc z p. A' wystawimy prostą $\perp$-łą do $A'A_0$/co jest równoważne poprowadzeniu przez p. A' prostej, $\|$-ej do s_1 / i na niej odmierzymy $A'A_1 = A''A_x$, to odcinki $A'A_0$ i $A'A_1$ będą temi przyprostokątnemi; wykreśliwszy przeciwkoprostokątną A_0A_1 otrzymamy szukany promień, który odmierzamy od p. A_0 na przedłużenie odcinka $A'A_0$

i znajdujemy żądany punkt /A/. Analogicznie postępowalibyśmy, chcąc znaleść kład punktu A na pionową płaszczyznę rzutów.

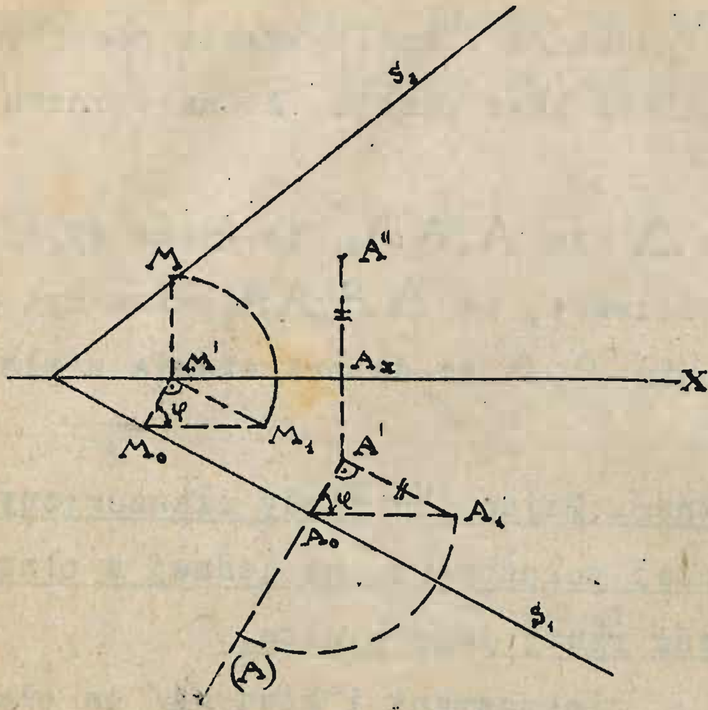
Co się tyczy budowy $\triangle$ -ta $A_0A'A_1$, to można wyjaśnić konstrukcję, przypuściwszy, że $\triangle A_0A'A_1$ (patrz Rys.80) obraca się dokoła boku A_0A' aż do przystania z płaszczyzną .

<u>Zadanie XX. /odwrotne/. Mając oba ślady płaszczyzny i kład punktu, na niej położonego, na jednej z płaszczyzn rzutów, znaleść rzuty tego punktu.</u>

Dane są ślady s_1 i s_2 płaszczyzny i kład /A/ na płasz. poziomą punktu, w niej leżącego /rys.82/. Jeśli zdołamy zbudować ów zasadniczy dla tego rodzaju zagadnień $\triangle$ prostokątny $A_0A'A_1$ /rys.80/, to zadanie rozwiążemy, gdyż wówczas będziemy mieli rzut-poziomy punktu i jego drugą odległość.

Przeciwprostokątną tego $\triangle$ -ta będzie odcinek, równy $A_0(A)$ gdyż jest to odległość punktu A od osi obrotu s_1 ; przyprostokątna równa odległości p. A' od s_1 musi się znajdować na przedłużeniu prostopadłej $A_0(A)$

Ponieważ niepodobna jest znaleść obecnie żadnej z dwóch przyprostokątnych zasadniczego $\triangle$ -ta, więc znajdziemy jeden z jego ostrych kątów, równy w tym wypadku, jak wiemy, kątowi nachylenia płaszczyzny

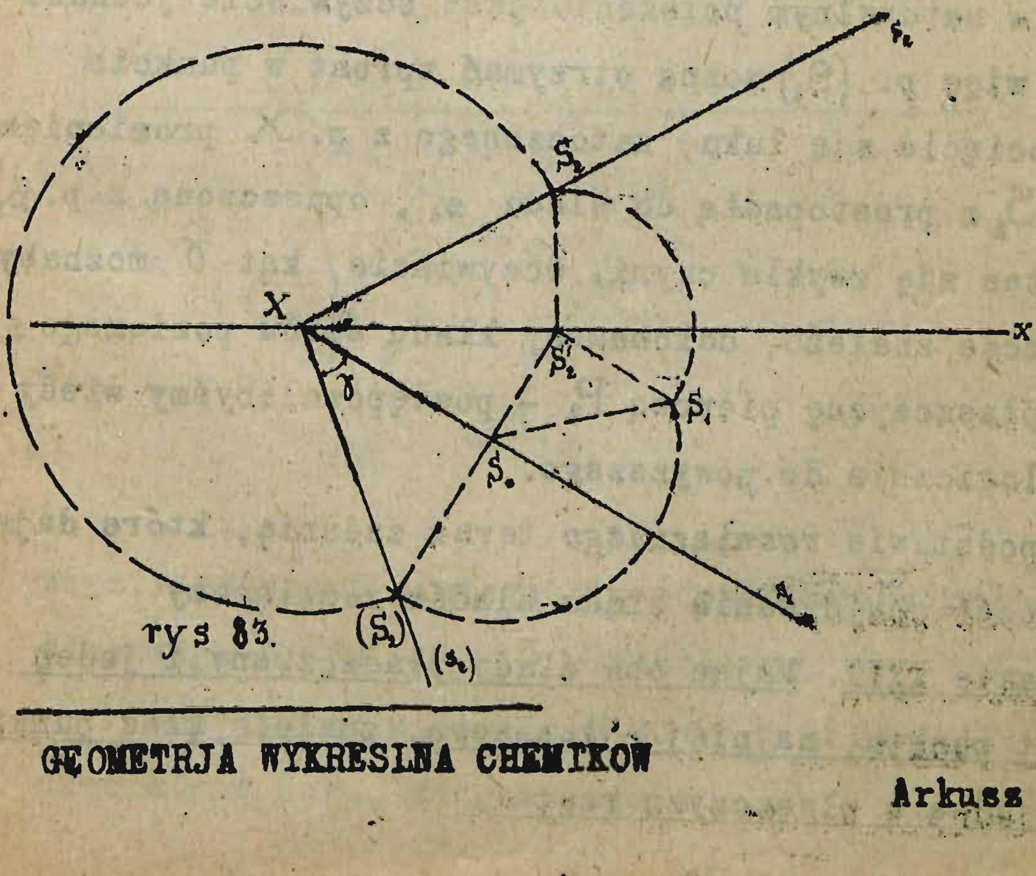


rys. 82.

($-s_1$, s_2) do płaszcz. P_1 W tym celu wykreślmy Δ zasadniczy dla jednego z innych punktów płaszcz. (s_1, s_2) n.p. dla p. M, należącego do pionowego śladu s_2 danej płaszczyzny; jego rzut poziomy leży na osi x ~~w~~ punkcie M' i wykreślenie Δ-ta $M_0M'M_1$ nie przedstawia żadnych trudności. Kąt nachylenia płaszczyzny danej do płaszczyzny rzutów jest oczywiście jednakowy we wszystkich Δ-tach zasadniczych dla punktów płaszczyzny / s_1, s_2 / więc kąt $\hat{\varphi}$ jest kątem szukanym. Wykreśliwszy jego wartość przy punkcie A_0 /co się da uskutecznić, prowadząc $A_0A_1 \parallel M_0M_1$ /budujemy Δ $A_0A'A_1$. Po podniesieniu z p. A' prostopadłej do osi x i odmierzeniu na niej od punktu A_x odcinka, równego A_0A_1, znajdziemy żądane rzuty A' i A''.

Zadanie XXI. Znaleść kąt, zawarty między śladami płaszczyzny w jego naturalnej wielkości.

Dana jest płaszczyzna / s_1, s_2 / /Rys.83./. Chcąc znaleść kąt, zawarty między prostemi s_1 i s_2 wystarczy znaleść kład śladu np. pionowego s_2 na płaszcz. P_1 gdyż podczas obrotu dokoła s_1 ta ostatnia prosta oczywiście swego położenia nie zmienia. W tym celu obierzmy na śladzie pionowym s_2 płaszczyzny dowolny punkt S_2 i znajdźmy znanym sposobem jego kład /S_2/ na poziomej



rys 83.

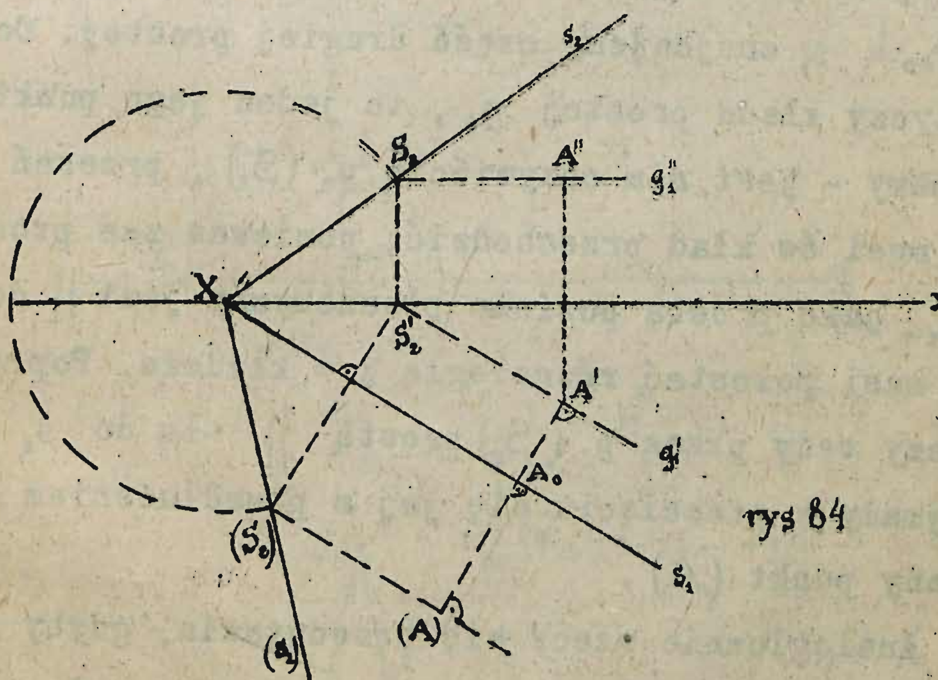
płaszczyźnie rzutów. Ponieważ p. S_2 znajduje się na pionowym śladzie płaszczyzny, więc jego kład (S_2) musi się znajdować na kładzie pionowego śladu płaszczyzny. Punkt X, należący również do pionowego śladu płaszczyzny nie zmieni swego położenia podczas obrotu, gdyż należy jednocześnie do s_1. Mamy tedy dwa punkty - X i (S_2) poziomego składu śladu pionowego; łącząc je ze sobą prostą (s_2) otrzymamy szukany kład. Kąt $\hat{\gamma}$ zawarty między prostemi s_1 i (s_2) jest właśnie kątem żądanym.

Ponieważ odległość p. S_2 od X zarówno w kładzie, jak w naturalnym położeniu jest oczywiście jednakowa, więc p. (S_2) można otrzymać wprost w punkcie przecięcia się łuku, zatoczonego z p. X promieniem XS_2 z prostopadłą do śladu s_1, opuszczoną z p. S_2' co też się zwykle czyni. Oczywiście, kąt $\hat{\gamma}$ możnaby jeszcze znaleźć, dokonawszy kładu śladu poziomego s_1 na płaszczyznę pionową P_2 - postępowalibyśmy wtedy analogicznie do powyższego.

Na podstawie rozwiązanego teraz zadania, które daje możność znajdywania kładu śladów rozwiążemy

Zadanie XXII. Mając oba ślady płaszczyzny i jeden rzut punktu, na niej położonego, znaleźć kład punktu na jedną z płaszczyzn rzutów.

Dana jest przez ślady s_1 i s_2 płaszczyzna i rzut pionowy A'' punktu, na niej położonego /rys.84/ Znajdźmy naprzód rzut poziomy tego punktu; w tym celu przez p. A prowadźmy prostą poziomą płaszczyzny (g_1', g_1'') i znanym sposobem odszukajmy rzut A'. Ponieważ do poprzedniej konstrukcji potrzebny był p. S_2,



rys 84

więc korzystamy z niego dla odnalezienia kładu pionowego śladu - (s_2) - płaszczyzny.

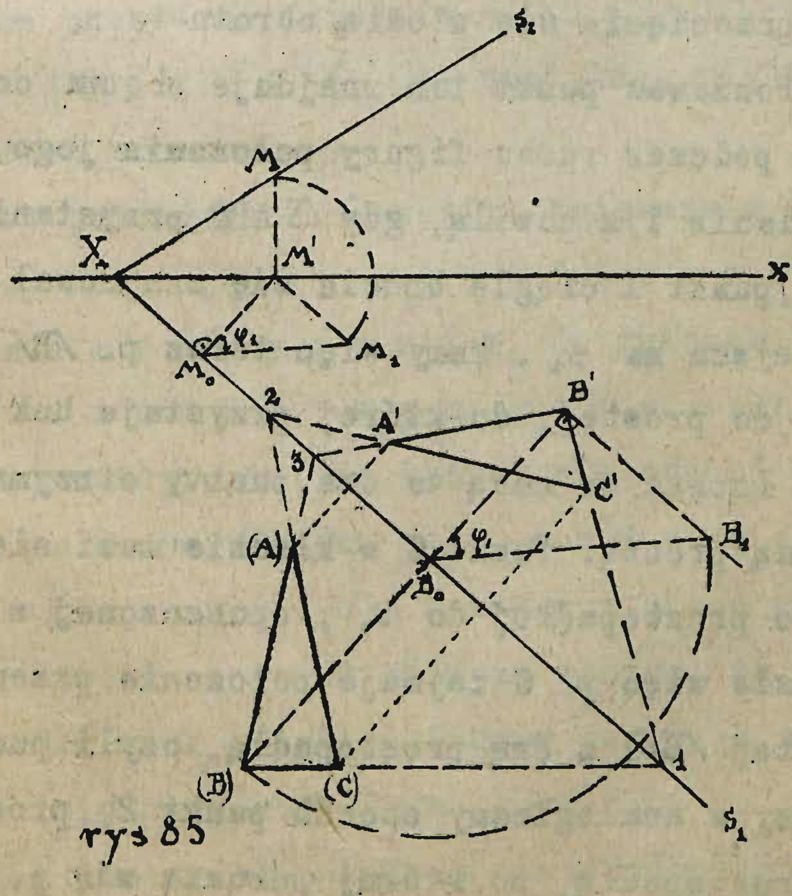
Znajdujemy mianowicie p. (S_2), jako punkt przecięcia się łuku, zatoczonego z p. X promieniem

$X\ S_2$ z prostopadłą do osi obrotu - s_1 -, opuszczoną do niej z p. S_2'. Łącząc punkty X i (S_2), otrzymamy, jak wiadomo, szukany kład (s). Ponieważ punkt A leżał na prostej poziomej g_1 płaszczyzny, w naturalnym położeniu figury, więc się musi na nim znajdować i wtedy, gdy będziemy rozpatrywali jej kład; że zaś kład punktu A leży również na prostopadłej do osi obrotu s_1, opuszczonej z p. A', więc się znajduje w przecięciu obu tych prostych. Kreśląc $A'A_0 \perp s_1$ znajdujemy część drugiej prostej. Co się tyczy kładu prostej g_1, to jeden jego punkt już mamy - jest nim oczywiście p. (S_2), przezeń więc musi ów kład przechodzić; ponieważ zaś prosta g_1, jako prosta pozioma płaszczyzny jest $\parallel$ do s_1 więc musi pozostać równoległą i w kładzie. Poprowadziwszy tedy przez p. (S_2) prostą $\parallel$-łą do s_1, otrzymamy w przecięciu się jej z przedłużeniem $A'A_0$ szukany punkt (A).

Analogicznie rzecz się przedstawia, gdyby chodziło o znalezienie kładu p. A na pionową płaszczyznę rzutów.

Zadanie XXIII. Mając ślady płaszczyzny i jeden rzut figury, w tej płaszczyźnie leżącej; znaleźć kład tej figury na jedną z płaszczyzn rzutów.

Dana jest płaszczyzna (s_1, s_2) i $\Delta A'B'C'$ będący rzutem poziomym Δ-ta, leżącego w tej płaszczyźnie /rys.85/. Chcąc znaleźć kład jego np. na płaszczyznę poziomą, możnaby znajdować kolejno kłady wierzchołków Δ - ta - postąpimy jednak nieco odmiennie.



rys 85

Naprzód znajdźmy kład /B/ punktu B: prowadzimy $B'B_0 \perp s_1$ i $B'B_1 \parallel B'B_0$; ponieważ drugiej odległości p.B nie znamy, więc wykreślamy przy wierzchołku B kąt $\widehat{\varphi_1}$, znaleziony z $\triangle$-ta zasadniczego punktu M. W przecięciu łuku, zatoczonego z punktu B_0 promieniem B_0B_1 z przedłużeniem prostopadłej $B'B_0$ znajdujemy p. /B/.

Zamiast teraz znajdywać kład p. C, przedłużamy ślad $B'C'$ do przecięcia się z osią obrotu - s_1 - w punkcie 1. Ponieważ punkt ten znajduje się na osi obrotu, więc podczas ruchu figury położenie jego nie ulega zmianie i z chwilą, gdy $\triangle$ ABC przystanie do pł. P_1 ,punkt 1 ciągle będzie się znajdował w tym samym miejscu na s_1. Mamy więc teraz p. /B/ i p. 1, należące do prostej, do której przystaje bok BC w kładzie. Łącząc ze sobą te dwa punkty otrzymamy wspomnianą prostą. Punkt C w kładzie musi się poruszać po prostopadłej do s_1 , opuszczonej z p. C' - w kładzie więc p. C zajmuje położenie przecięcia się prostej /B/1 z ową prostopadłą, czyli punkt /C/. Znalazłszy w analogiczny sposób punkt 2, prostą /C/2 i prostopadłą, po której porusza się p. A, znajdziemy kład /A/ trzeciego wierzchołka $\triangle$-ta. Tym sposobem znaleźliśmy kład samego $\triangle$-ta ABC.

Ponieważ, jak wynika z poprzednich rozważań, bok /A/ /B/ musi dać w przecięciu z s_1 punkt 3, więc zadosyćuczynienie temu warunkowi może być sprawdzana nemdokładności określenia.

Zauważymy teraz, że $\triangle A'B'C'$ i $\triangle (A)(B)(C)$ mają następujące cechy charakterystyczne:

1/ ich punkty odpowiednie - A' i (A), B' i (B), C' i (C) - leżą na prostych do siebie równoległych /gdyż $\perp$ -łych do s_1/

2/ ich proste odpowiednie - $A'B'$ i $(A)(B)$, $A'C'$ i $(A)(C)$, $B'C'$ i $(B)(C)$ - spotykają się na tej samej prostej - s_1

Figury posiadające elementy, związane w sposób powyższy nazywają się s p o w i n o w a c o n e m i g i e o m e t r y c z n i e, ów związek zwie się p o w i n o w a c t w e m g e o m e t r y c z n y m, zaś prosta, do której się odnosi powinowactwo /w danym wypadku s_1/ - o s i ą p o w i n o w a c t w a g i e o m e t r y c z n e g o.

Z powyższego określenia wynika, że dwa rzuty jakiejkolwiek płaskiej figury znajdują się w powinowactwie gieometrycznym, gdyż:

1/ ich punkty odpowiednie - wierzchołki - leżą na prostych wzajemnie równoległych - prostopadłych do osi;

2/ proste odpowiednie - boki - spotykają się na jednej prostej, co wynika z następującego rozważania: przedłużając odpowiednio rzuty boku danej figury do wzajemnego przecięcia, otrzymamy punkt, będący jednocześnie poziomym i pionowym rzutem pewnego punktu rozpatrywanego boku, a więc rzut punktu przebicia przez tę prostą drugiej płaszczyzny dwusiecznej; punkty spotkania się rzutów pozostałych prostych są oczywiście również rzutami punktów przebicia przez te boki drugiej płaszczyzny dwusiecznej, więc muszą leżeć na prostej przecięcia płaszczyzny figury z drugą płaszczyzną dwusieczną, oczywiście jednej.

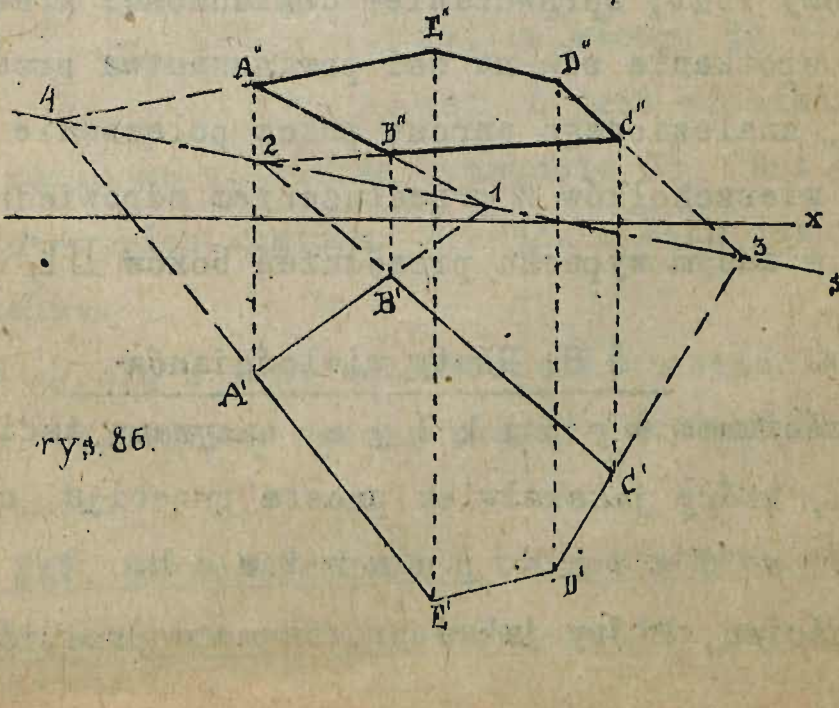
Spostrzeżenie to uogólnił Desargues, uważając proste równoległe za szczególny przypadek przecinających się i wypowiedział dotyczące się gieometrji rzutowej.

TWIERDZENIE VII. Jeżeli wierzchołki jakichkolwiek dwuch trójkątów leżą na prostych, wychodzących z jednego punktu, to odpowiednie boki tych trójkątów spotykają się w trzech punktach leżących na jednej prostej.

Na podstawie powyższych rozważań, rozwiążemy następujące

Zadanie XXIV. Mając poziomy /pionowy/ rzut wielokąta płaskiego i pionowe /poziome/ rzuty trzech jego wierzchołków, znaleźć rzut pionowy /poziomy/ tego wielokąta.

Dany jest poziomy rzut $A'B'C'D'E'$ pięciokąta i pionowe rzuty A'', B'', C'' trzech jego wierzchołków /rys.86/. Chcąc znaleźć rzut pionowy wielokąta, opieramy się na zasadzie powinowactwa. W tym celu znajdujemy rzuty pionowe $A''B''$ i $B''C''$ dwuch boków pięciokąta, łącząc punkty A'' z B'' i B'' z C''; przedłużając odpowiednio do punktów przecięcia się boki



rys. 86.

$A'B'$ i $A''B''$ oraz $B'C'$ i $B''C''$,znajdujemy punkty 1 i 2, należące do osi powinowactwa, łącząc je ze sobą otrzymamy ową oś – s.
Przedłużając do przecięcia się z s bok $C'D'$, otrzymamy punkt 3, przez który musi przechodzić odpowiedni rzut pionowy tegoż boku; ponieważ jeden punkt rzutu pionowego boku CD mianowicie wierzchołek C'' jest dany, więc łącząc p.3 z C'' , otrzymujemy prostą na której musi leżeć pionowy rzut boku CD; pionowy rzut p. D znajduje się na prostopadłej do osi, podniesipnej z punktu D' ; rzut tedy D'' znajduje się w punkcie przecięcia wykreślonych prostych. W podobny sposób wykreślimy rzut E''. Otrzymaliśmy w ten sposób, łącząc dane i znalezione wierzchołki,żądany pionowy rzut; sprawdzeniem dokładności kreślenia jest spotkanie się na osi powinowactwa przedłużenia boku, znalezionego wprost przez połączenie wykreślonych wierzchołków z przedłużeniem odpowiedniego boku / w danym wypadku przedłużeń boków $D'E'$ i $D''E''$ /

§ 8. Rzuty wielościanów.

Wielościanem w y p u k ł y m nazywamy taki wielościan, który jakakolwiek prosta przebija n a j w y ż e j w d w ó c h p u n k t a c h.
Wielościan, który jakaś prosta może przebić więcej