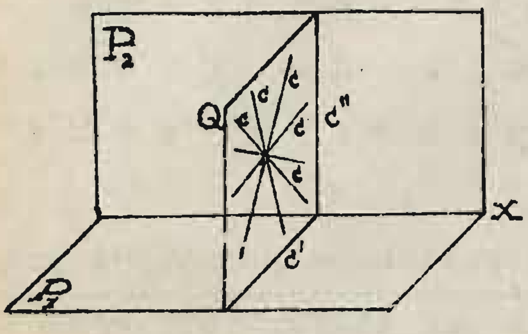
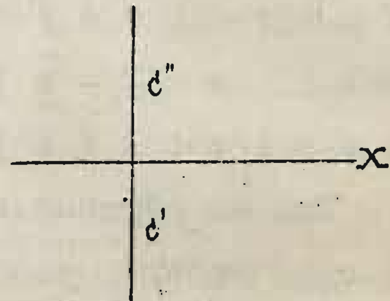
Z powyższego rozważania wynika, że: p u n k t , k t ó r e g o r z u t y s ą s y m e t r y - c z n e w z g l ę d e m o s i , l e ż y w p i e r w s z e j p ł a s z c z y ź n i e d w u - s i e c z n e j ; p u n k t , k t ó r e g o r z u t y p r z y s t a j ą d o s i e b i e , l e ż y w 2 - e j p ł a s z c z y ź n i e d w u s i e c z n e j .

Nr. 4. <u>Wyznaczenie położenia prostej w przestrzeni</u>. Prosta, podobnie jak punkt, jest wyznaczona w przestrzeni przez swoje dwa rzuty: poziomy i pionowy. Jeżeli mianowicie 2 punkty w przestrzeni dano przez swe rzuty, połączymy, to otrzymamy prostą, której rzutami będą łącznice rzutów jednoimiennych tych punktów. Stąd wynika, że rzutami linji prostej są również proste i że każda prosta może być odwzorowana przez swoje rzuty; a zatym, odwrotnie, każde dwie jakiekolwiek proste wogóle wyznaczają położenie prostej w przestrzeni, jeżeli jedną z nich przyjąć za rzut poziomy a drugą - za pionowy.

Wyjątek stanowi tutaj przypadek, gdy dwie płaszczyzny rzucające, poprowadzone przez rzuty prostej przystaną do siebie, czyli będą tworzyły jedną [illegible] płaszczyznę /rys. 16a/, jednocześnie prostopadłą do obu płaszczyzn rzutów, a więc prostopadłą do linji



rys. 16 a

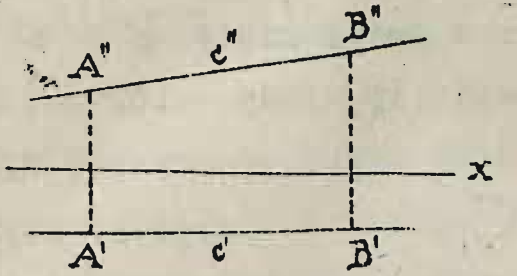


rys. 16 b

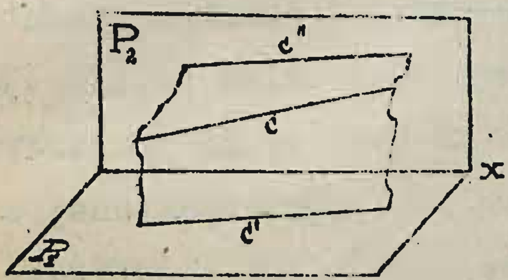
ich przecięcia osi x. Wypadek ten ma miejsce, gdy oba rzuty leżą na jednej prostej prostopadłej do osi /rys.16 b./. Wtedy prosta nie jest wyznaczoną, bowiem takim rzutom odpowiadają wszystkie proste w płaszczyźnie Q /rys.16 a/.

Pominąwszy ten wyjątek, przypuśćmy, że dana jest prosta c przez swoje rzuty: c' i c" /rys.17 a/; chcąc ją odtworzyć w przestrzeni, dokonywamy znanej już konstrukcji przestrzennej i otrzymujemy jedną prostą -c w przestrzeni /rys.17 b./.

Jeżeli jakiś punkt leży na prostej, to jego rzuty leżą oczywiście na rzutach tej prostej. Można zatym, mając jeden rzut punktu, leżącego na prostej, znaleźć jego rzut drugi. Niech np. dana będzie prosta c przez swoje rzuty /rys.17 a./ i jeden rzut punktu A, le-



rys. 17 a

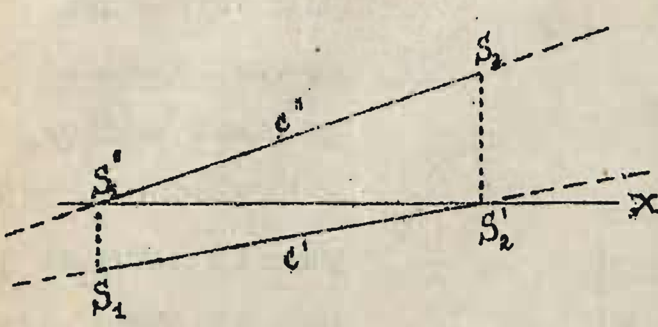


rys. 17 b

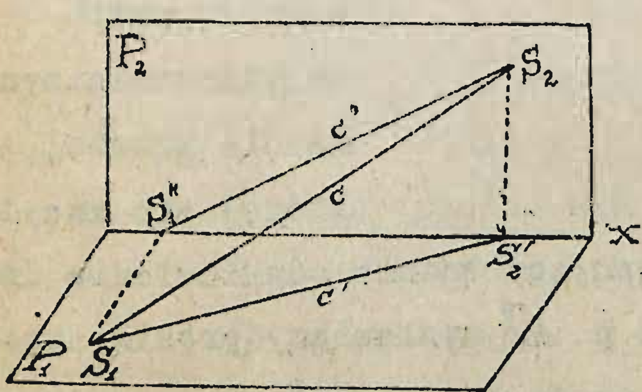
żącego na tej prostej, np. rzut pionowy - A'', chcemy znaleźć jego rzut poziomy. Jak wiadomo, rzuty punktu leżą na jednej prostej, prostopadłej do osi, a rzut punktu leży na jednoimiennym rzucie prostej, na której się znajduje. Stąd wynika następujący sposób odnalezienia drugiego rzutu punktu: z p. A'' wystawiamy prostą, prostopadłą do osi x, aż do przecięcia się z rzutem poziomym prostej w punkcie A', który będzie właśnie żądanym rzutem poziomym punktu A. Jednym z ważniejszych punktów każdej prostej jest jej ślad, zarówno poziomy, jak pionowy /ślady mają nomenklaturę analogiczną do nomenklatury rzutów/; należy zatem umieć rozwiązać następujące

<u>Zadanie I. Mając rzuty prostej, znaleźć jej ślady.</u>

Dana jest prosta **c** przez swoje rzuty c' i c'' /rys.18 a/. Należy znaleść jej ślady, albo ściślej, rzuty jej śladów.



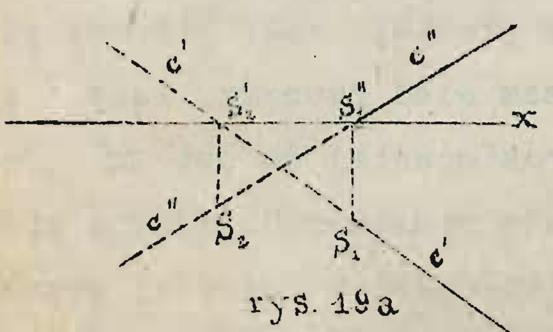
rys. 18 a



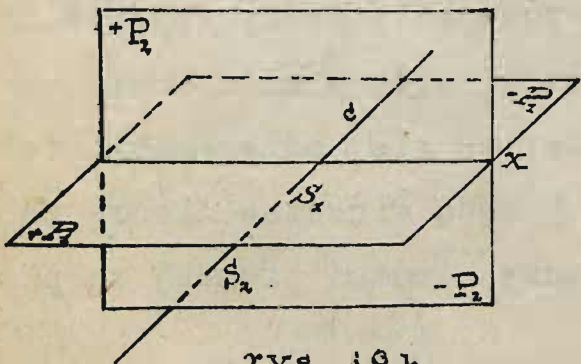
rys. 18 b

Znajdźmy naprzód pionowy rzut poziomego śladu. Ślad poziomy leży na płaszczyźnie poziomej, zatym jego rzut pionowy musi leżeć na osi; ślad poziomy leży na samej prostej, więc jego rzut pionowy musi leżeć na rzucie pionowym prostej; z tych dwuch przesłanek wynika, że pionowy rzut poziomego śladu leży w punkcie przecięcia się osi **x** z pionowym rzutem danej prostej. Chcąc znaleść jego rzut poziomy, postępujemy w sposób już znany, a mianowicie, z pionowego rzutu poziomego śladu wystawiamy prostopadłą do osi **x** aż do przecięcia się z poziomym rzutem prostej - punkt przecięcia będzie poziomym rzutem poziomego śladu, a ponieważ ten ostatni leży na poziomej płaszczyźnie rzutów, więc zarazem samym poziomym śladem. Podobne rozumowanie przeprowadzamy dla rzutów pionowego śladu. Ponieważ ślad pionowy leży na płaszczyźnie pionowej, więc jego rzut poziomy leży na osi, w punkcie przecięcia się jej z rzutem poziomym prostej; rzut pionowy pionowego śladu, a zarazem sam ślad pionowy, leży w punkcie przecięcia się prostopadłej do osi x ,podniesionej z poziomego rzutu pionowego śladu, z pionowym rzutem prostej. Że tak jest w istocie, przekonywa nas jeszcze rysunek perspektywiczny /rys.18 b/, który jeszcze mówi, że jeżeli widz znajduje się w I ćwiartce, w nieskończonej od niej odległości, to tylko te części prostej c będą widoczne, które znajdują się w I ćwiartce między śladami prostej na płaszczyznach rzutów.

W rzutach naznaczamy to w ten sposób, że rzuty widocznych części prostej wyciągamy linją całkowitą, - niewidocznych zaś - krskowaną /rys.18 a/. Rozpoznanie w rzutach, które części prostej są widzialne, a które nie, polega na następującym rozważaniu: widoczne są te części prostej, które się znajdują w I ćwiartce, czyli te, których wszystkie punkty mają rzuty poziopod osią, a pionowe nad osią; z rozmaitych położeń poszczególnych punktów części prostych można wywnioskować, przez jakie ćwiartki przechodzi dana prosta. Znajdźmy jeszcze ślady prostej o rzutach, przedstawionych na rys.19 a i wywnioskujemy, przez które ćwiartki przechodzi ta prosta.



rys. 19 a

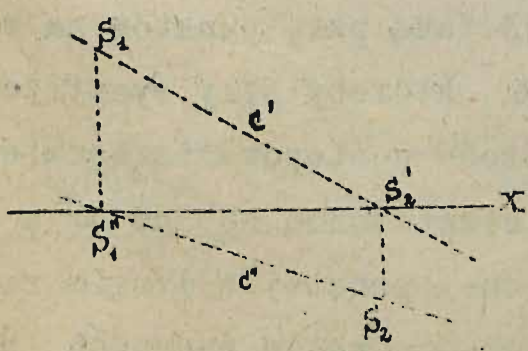


rys. 19 b

Rzut pionowy poziomego śladu leży w punkcie przecięcia osi x z c'' w punkcie S_1'' ; sam ślad poziomy w punkcie przecięcia $S_1S_1'' \perp x$ z c' - w punkcie S_1. Rzut poziomy pionowego śladu otrzymamy w punkcie przecięcia osi x z c' - w p. S_2' ; sam ślad pionowy - w punkcie przecięcia $S_2S_2' \perp x$ z c'' - w p. S_2. Punkty pierwszych części rzutów prostej /od strony lewej rysunku do S_2' i S_2 / mają rzuty poziome nad osią, pionowe pod nią - zatym ta część prostej leży w III ćw. i nie jest widzialna - rzuty kreskujemy; punkty drugich części rzutów /od S_2' do S_1 i od S_2 do S_1'' / mają oba rzuty pod osią - więc ta część prostej leży w IV i znów nie jest widzialna; ale punkty trzecich części tych samych rzutów /od S_1'' i S_1 na prawo/ mają rzuty poziome pod osią, a pionowe nad nią - więc ta część prostej leży w I ćw. i jest widzialna. Czyli,nasza prosta przechodzi przez ćwiartki: I, IV i III, jak na to wskazuje rys. 19 b.

<u>Zadanie II</u> /odwrotne/. <u>Mając ślady prostej, znaleść jej rzuty.</u>

Zadanie to rozwiązać się daje w sposób już znany, zważywszy, że ślady prostej - są to punkty, na niej położone, więc zadanie dane sprowadza się do prostszego: mając rzuty dwuch punktów, znaleść rzuty prostej przez te punkty przechodzącej. /Należy połączyć ze sobą jednoimienne rzuty punktów - ryś.20/ Ponieważ żaden punkt prostej o rzutach c' i c'' nie posiada rzutu poziomego pod osią z jednoczesnym rzutem pionowym nad osią, więc prosta jest całkowicie niewidzialna i przechodzi przez ćwiartki: II, III i IV.

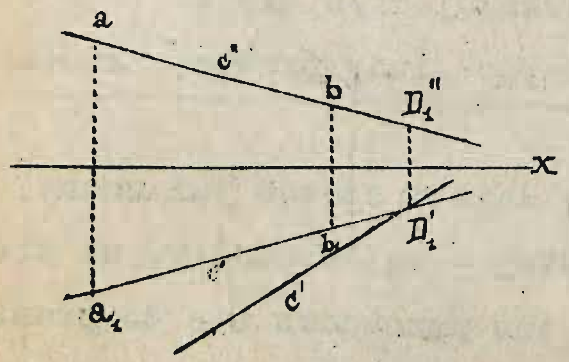


rys. 20

Nie mniej może ważną rolę od śladów

prostej grają te jej punkty, w których prosta przebija płaszczyznę dwusieczną /I lub II/. Stąd

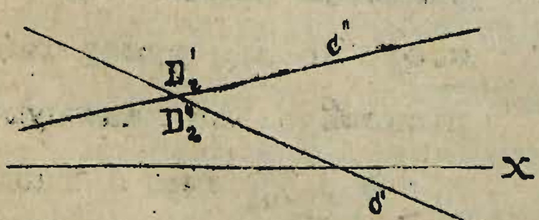
Zadanie III. Znaleść punkty, w których prosta dana przebija obie płaszczyzny dwusieczne.



rys. 21

Dana jest prosta przez swoje rzuty c' i c''. Należy znaleść punkty, w których przebija ona: 1/ I płaszczyznę dwusieczną i 2/ II płaszczyznę dwusieczną. Rozpatrzmy oba przypadki: 1/ punkt, leżący na I płaszczyźnie dwusiecznej, posiada oba rzuty położone symetrycznie względem osi x, muszą zaś one leżeć na odpowiednich rzutach prostej; należy zatem na rzutach c' i c'' odnaleść taką parę punktów na wspólnej prostopadłej do x któreby były symetryczne względem osi x. Metoda postępowania będzie taka że wykreślimy prostą, symetryczną np. do c'' a punkt przecięcia się wykreślonej prostej z drugim rzutem c' będzie jednym z dwuch punktów żądanych, bowiem będzie on symetryczny do odpowiedniego punktu, położonego na c''.

Chcąc to uczynić, obieramy na c'' 2 dowolne punkty, np. a i b /rys.21/ kreślimy punkty symetryczne do nich względem osi x - są niemi punkty a_1 i b_1 ; łącząc a_1 i b_1 , otrzymamy prostą, symetryczną do c'' . W punkcie przecięcia się c' z wykreśloną prostą $-D_1'$ wystawiamy prostopadłą do osi x aż do przecięcia się z c'' w p. D_1'' . Ponieważ punkty D_1' i D_1'' są położone symetrycznie względem osi x /bo oba leżą na prostych symetrycznych/, więc są one rzutami punktu przebicia I pł. dwusiecznej przez prostą daną. 2/ jeszcze prościej rozwiążemy drugi przypadek: żądany punkt musi leżeć na II pł. dwusiecznej, więc jego oba rzuty powinny tworzyć jeden punkt, położony jednocześnie na poziomym rzucie prostej, a więc znajdujący się w punkcie ich przecięcia /rys.22/ - /na rysunku tym nie zaznaczamy części niewidzialnych prostej/.

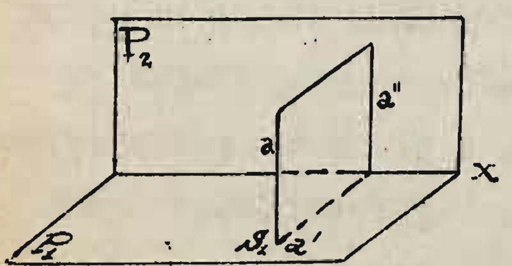


rys. 22

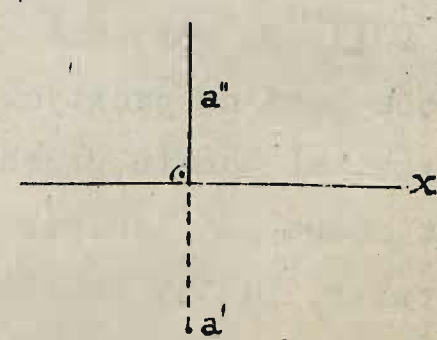
Dana jest prosta przez swoje rzuty c' i c'' ; chcąc znaleść rzuty punktu przebicia II płaszczyzny dwusiecznej przez tę prostą, przedłużamy oba rzuty aż do przecięcia się wzajemnego w punkcie, który jest jednocześnie poziomym i pionowym rzutem żądanego punktu - D_2', D_2''

Rozpatrzmy teraz rzuty prostej w pewnych szczególnych jej położeniach, a mianowicie:

1/. Rzuty prostej, prostopadłej do jednej z płaszczyzn rzutów.

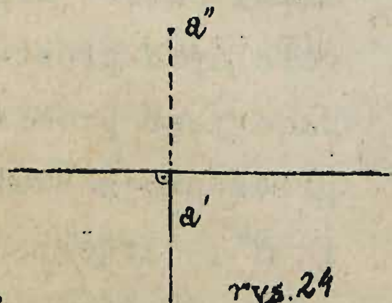


rys. 23 a



rys. 23 b

Dana jest prosta a, prostopadła do poziomej płaszczyzny rzutów - $a \perp P_1$ /rys.23 a/. W takim razie jej rzut na P_1 jest to punkt - a', będący zarazem poziomym śladem tej prostej. Co się tyczy rzutu pionowego, to zauważymy, że: $a \perp P_1$ więc i rzut prostej a na pł. P_2 jest prostopadły do P_1 :



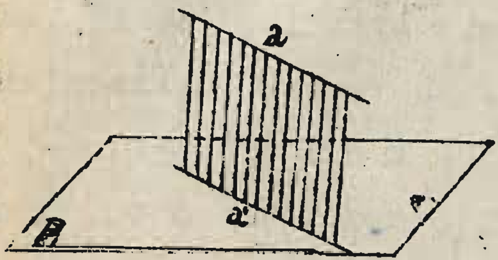
rys.24

$a'' \perp P_1$ ponieważ zaś oś x leży na pł. P_1 więc $a'' \perp x$. Po dokonaniu kładu pł. P_1 na pł. P_2, otrzymamy odwzorowanie danej prostej, jak na rys. 23 b.; oczywiście, gdyby prosta była $\perp P_2$ do P_2, to rzuty jej by były analogiczne do rzutów poprzednich /rys.24/; stąd wynika, że j e ż e l i p r o s t a j e s t p r o s t o p a d ł a d o p o z i o m e j /pionowej/ p ł a s z c z y z n y r z u t ó w , t o j e j p o z i o m y /pionowy/ r z u t z a m i e n i a s i ę n a p u n k t , z a ś j e j r z u t p i o n o w y /poziomy/ j e s t p r o s t o p a d ł y d o o s i .

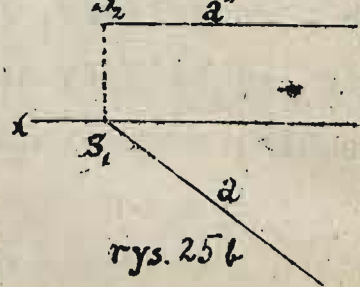
Co się tyczy śladów takiej prostej, to jak już zauważyliśmy, jeden z rzutów jest zarazem jednoimiennym śladem, drugi zaś nie istnieje, bowiem prosta, prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, jest równoległa oczywiście do drugiej, więc się z nią nie przecina /przecina się w nieskończoności/.

2/ Rzuty prostej, równoległej do jednej z płaszczyzn rzutów. Dana jest prosta a równoległa do poziomej płaszczyzny rzutów - $a \parallel P_1$ /rys.25 a/, w takim razie a znajduje się wszędzie na jednakowej odległości od P_1, czyli rzuty wszystkich punktów prostej a sąą jednakowo odległe od płaszczyzny P_1, więc $a' \parallel a$.

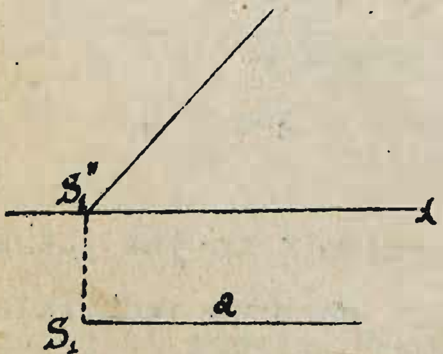
Stąd wynika, że wszystkie pierwsze odległości



rys. 25a



rys. 25 b



punktów prostej a są sobie równe, a ponieważ pierwszym odległościom równe są drugie rzędne, więc są one jednakowo odległe od osi x, zatym rzut pionowy jest równoległy do osi x:

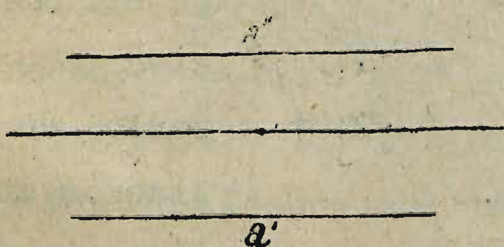
$a'' \parallel x$.

Odwzorowanie takiej prostej przedstawione na rys. 25 b.

Analogicznie dla prostej, równoległej do pionowej pł. rzutów, otrzymujemy jej odwzorowanie, jak na rys 26. Stąd wynika, że: j e ż e l i p r o s t a jest równoległa do poziomej /pionowej/ płaszcz. rzutów, to jej rzut pionowy /poziomy/ będzie równoległy do osi x zaś rzut poziomy /pionowy/ jakikolwiek.

Co się tyczy śladów takiej prostej, to ślad poziomy /pionowy/ nie istnieje, bo prosta jest równoległa do poziomej /pionowej/ płaszczyzny rzutów, zaś ślad drugi wogóle istnieje i znajdujemy go znanym sposobem.

3/ Rzuty prostej, równoległej do obu płaszczyzn rzutów.

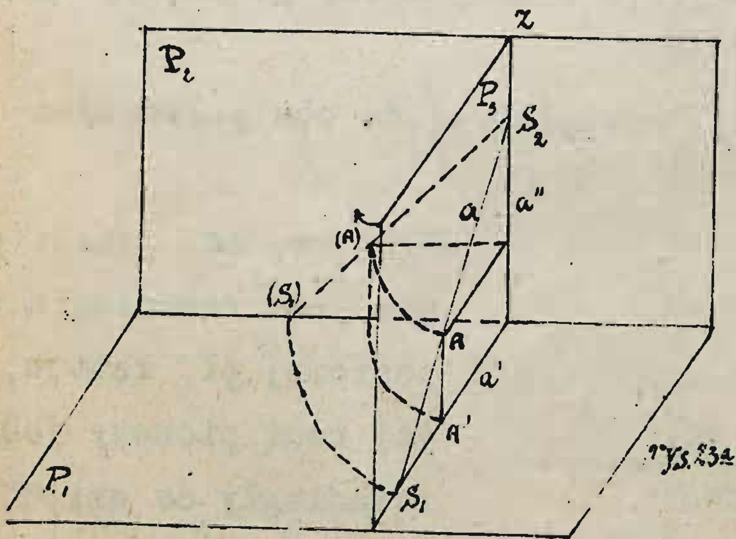


rys 27

Wiadomo, że: jeżeli prosta jest równoległa do poziomej pł. rzutów, to jej rzut pionowy jest równoległy do osi. Jeżeli prosta jest równoległa do pionowej pł. rzutów, to jej rzut poziomy jest równoległy do osi .

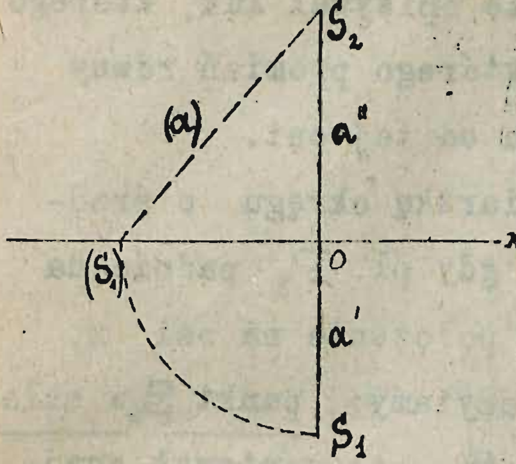
Więc, jeżeli prosta jest równoległa do obu pł. rzutów to jej rzut pionowy i poziomy jest równoległy osi x. Stąd wynika, że chcąc nakreślić rzut prostej równoległej do obu płaszczyzn rzutów, należy je nakreślić równolegle do osi x . Ponieważ prosta dana jest jednocześnie równoległa do P_1 i P_2 , więc jest równoległa ich przecięcia - x . Czyli: j e ż e l i p r o s t a j e s t r ó w n o l e g ł a d o o s i r z u t ó w , t o j e j r z u t y s ą r ó w n o l e g ł e d o t e j ż e o s i /rys.27/.

4/ Rzuty prostej, prostopadłej do osi.



rys.23a

Jak wiadomo, rzut prostej, leżącej w płaszczyźnie, prostopadłej do osi x , a więc prostopadłej do obu płaszczyzn rzutów, nie wyznaczają położenia tej prostej w przestrzeni; jeśli jednak na tej prostej weźmiemy dwa jakiekolwiek punkty i znajdziemy ich rzuty, to ponieważ rzuty punktów, leżących na prostej, leżą na jednoimiennych rzutach



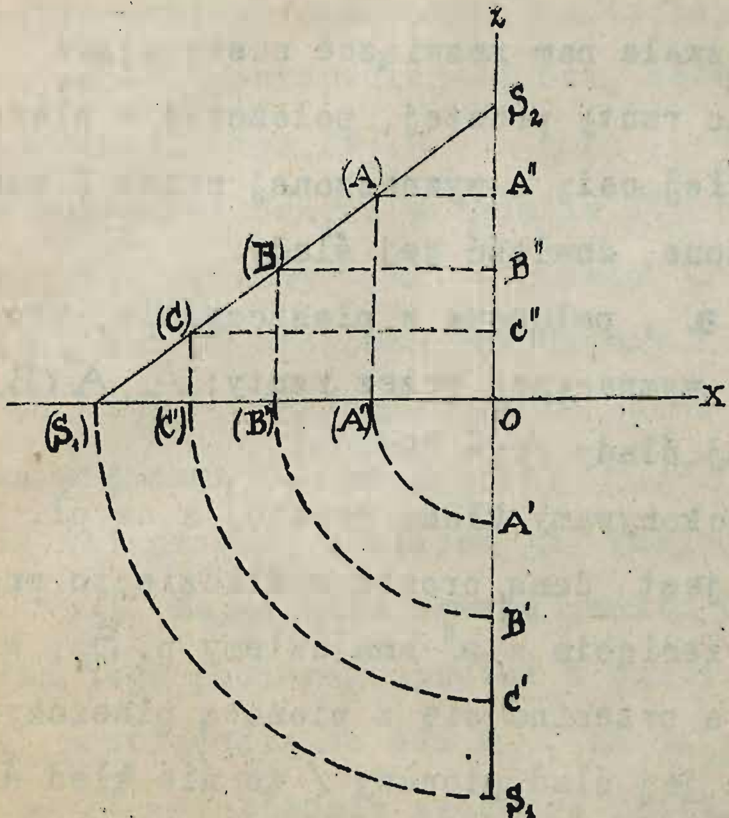
rys 28 b

prostej więc będą one wyznaczały położenie tej prostej w przestrzeni. Ponieważ ślady prostej leżą na niej, więc można je obrać dla wyznaczenia położenia prostej, prostopadłej do osi x.

Dana jest płaszcz P_3, prostopadła do osi x (rys. 28ᵃ/ i na niej jakaś prosta a. Rzuty jej a' i a'' leżą na śladach pł. P_3 i nie wyznaczają położenia prostej a w pł. P_3; aby położenie to było wyznaczone, trzeba, żeby były dane rzuty 3-ch jej punktów nap. śladów S_1 i S_2.

Aby unaocznić położenie prostej a względem obu płaszczyzn rzutów uciekamy się do często używanej metody kładów. Mianowicie, obracamy pł. P_3 np. dokoła osi Oz dopóty, aż pł. P_3 przystanie do pł. P_2. W takim razie położenie wszystkich punktów i linji, znajdujących się na pł. P_3 nie ulegnie zmianie i ujrzymy je teraz w swoim naturalnym położeniu w płaszczyźnie papieru. Podczas tego obrotu każdy

punkt płaszczyzny P_3 będzie opisywał łuk, którego środek leży na osi Oz, a którego promień równy jest odległości tego punktu od tej osi.
Tak więc, p. S_1 opisze ćwiartkę okręgu o środku O, a promieniu OS_1 i gdy pł. P_3 padnie na pł P_2, punkt S_1 zajmie położenie na osi x, które oznaczymy $/S_1/$ i czytamy: punkt S_1 w kładzie. Co się tyczy punktu S_2, to, ponieważ znajduje się na osi obrotu Oz, więc przez cały czas obrotu nie zmieni swego położenia i pozostanie na rzucie a''. Jeżeli teraz połączymy punkty $/S_1/$ i S_2, to otrzymamy kład prostej a - /a/ - który nam dokładnie ilustruje położenie tej prostej w płaszczyźnie P_3.
Odwzorowanie powyższych czynności jest rys. 28^b.
Przypuśćmy teraz, że położenie prostej, leżącej w płaszczyźnie, prostopadłej do osi x, jest wyznaczone nie przez jej ślady, lecz przez dwa jakiekolwiek inne punkty, leżące na tej prostej, a chcemy znów dokonać kładu tej prostej na pł. P_2.
Niech temi dwoma punktami będą punkty o rzutach: A', A'' i B', B'' /rys.29/. Przeprowadźmy naprzód rozumowanie na rys.28^a - przestrzennym. np. dla punktu



rys 29.

A. Kiedy pł. P_3 obracając się dokoła osi Oz, dąży do przystania z pł. P_2, rzut poziomy punktu A - opisuje część okręgu o promieniu OA' i środku O; i gdy pł. P_3 przystanie do pł. P_2, p. A' przybierze położenie /A'/. Co się tyczy ruchu p. A", to zauważymy, że podczas obrotu, odległość p. A od płaszczyzn rzutów się nie zmienia i w każdej chwili można ją znaleść, wystawiając z końcowego położenia p. A'-/A'/ prostopadłą aż do przecięcia się z równoległą do osi, poprowadzoną przez p. A"; stąd wniosek, że p. A" przesuwa się podczas obrotu po prostej równoległej do osi x. Tak samo będą się poruszały rzuty punktu B. Odwzorowaniem tych czynności w rzutach jest rys.29.

Metoda kładów pozwala nam rozwiązać następujące Zadanie IV. Mając rzuty prostej, położonej w płaszczyźnie prostopadłej osi, a wyznaczonej przez 2 punkty, na niej położone, znaleźć jej ślady.

Dana jest prosta a , położona w płaszczyźnie, prostopadłej do osi, wyznaczona przez rzuty: A', A'' i B', B''. Chcemy znaleźć jej ślady /rys.29/.

Znanym sposobem dokonywamy kładu prostej a na pł. P_2 . Jeżeli /a/ jest daną prostą w kładzie, to przedłużając ją do przecięcia z a'' znajdziemy p. S_2, w którym dana prosta przecina się z pionową płaszczyzną rzutów, a więc jej ślad pionowy / że nie kład śladu, wnosimy stąd, iż p. S_2 leży na osi obrotu Oz/. Przedłużając prostą /a/ do przecięcia się z osią x, otrzymamy kład punktu, w którym prosta a przecina się z poziomą płaszczyzną rzutów, czyli kład poziomego śladu :/S_1/ .

Chcąc otrzymać sam ślad poziomy, należy z p. O promieniem O/S_1/ zatoczyć łuk okręgu aż do przecięcia się z rzutem poziomym a' w punkcie S_1, będącym śladem poziomym danej prostej.

Zadanie V. Mając jeden rzut punktu, położonego na prostej, prostopadłej do osi, znaleźć jego rzut drugi.

Zadanie to należy również rozwiązać za pomocą metody kładów, zwykły sposób bowiem zawodzi, gdyż wszystkie rzuty punktów, położonych na takiej prostej, leżą na jednej prostopadłej do osi, będącej rzutem prostej danej. (rys.29).

Do warunków, danych w zadaniu IV, przybywa jeszcze rzut np. pionowy - C'' - punktu C, leżącego na prostej a. Znanym sposobem znajdujemy kład prostej a na pł. P_2 -/a/. Analogicznie do ruchu rzutów A'' i B'', porusza się rzut C'' po prostej $C''/C/\|x$. W przecięciu się tej prostej z kładem /a/ znajduje się kład punktu C - /C/. Mając kład samego punktu C, łatwo wykreślić kład jego poziomego rzutu: z punktu /C/ opuszczamy prostą, prostopadłą do osi x, aż do przecięcia się z nią w p. /C'/ - kładzie żądanego rzutu. Zakreślając z p.C łuk okręgu o promieniu $O/C'/$, znajdziemy w przecięciu się jego z rzutem a' punkt C', będący rzutem poziomym punktu C.

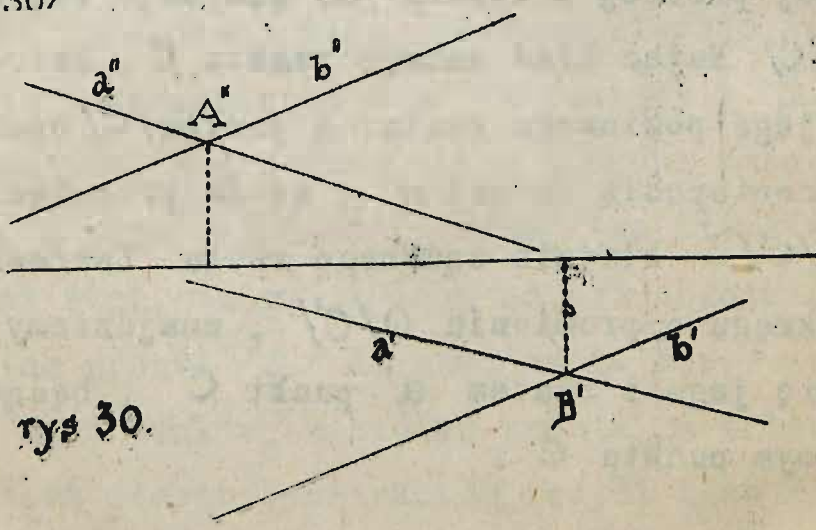
N.5. <u>Wyznaczenie rzutów dwuch prostych w przestrzeni.</u>

Jak wiadomo, dwie proste w przestrzeni mogą zajmować względem siebie trzy położenia: 1/ albo nie mają wcale punktu wspólnego i wtedy noszą miano <u>wichrowatych</u> /albo skośnych/, 2/albo mają punkt wspólny w skończonej odległości i wtedy się <u>przecinają</u>, 3/ albo mają punkt wspólny w nieskończoności i wtedy są <u>równoległe</u>.

Rozpatrzmy rzuty prostych we wszystkich trzech przypadkach.

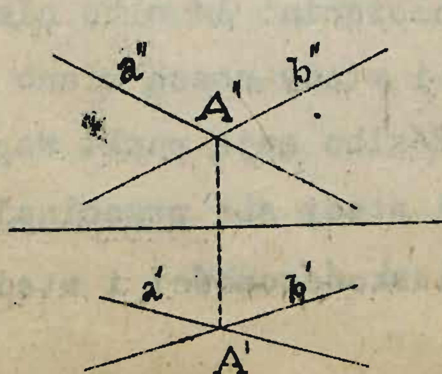
1/ Rzuty prostych wichrowatych.

Jeżeli proste nie mają wcale punktu wspólnego, to ich rzuty przecinają się w taki sposób, że punkty przecięcia się jednoimiennych rzutów prostych nie są rzutami tego samego punktu w przestrzeni, a więc nie mogą leżeć na jednej prostej prostopadłej do osi. /rys.30/



rys 30.

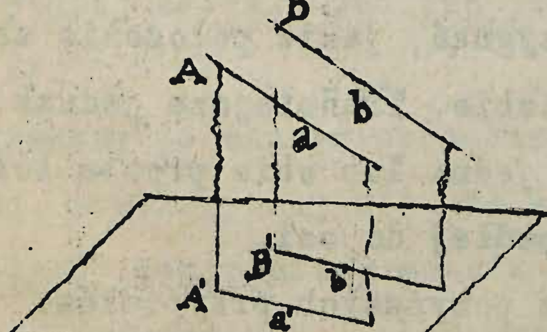
2/ Rzuty dwóch przecinających się prostych



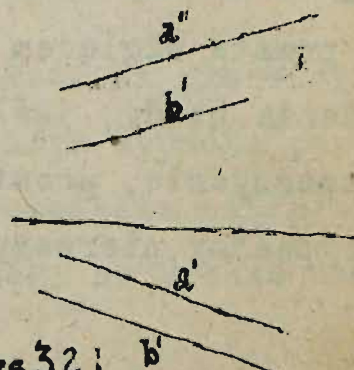
rys 31

Jeżeli dwie proste się przecinają to posiadają punkt wspólny w punkcie przecięcia się, a jego rzuty - w odpowiednich punktach przecięć jednoimiennych rzutów prostych, które muszą leżeć na jednej prostej, prostopadłej do osi /gdyż odwzorowują jeden punkt/. Więc, j e ż e l i d w i e p r o s t e p r z e c i n a j ą s i ę, t o i c h j e d n o i m i e n n e r z u t y p r z e c i n a j ą s i ę w p u n k t a c h, z n a j d u j ą c y c h s i ę n a p r o s t o p a d ł e j d o o s i r z u t ó w /rys.31/

3/ Rzuty dwuch prostych równoległych.



rys 32a



rys 32b

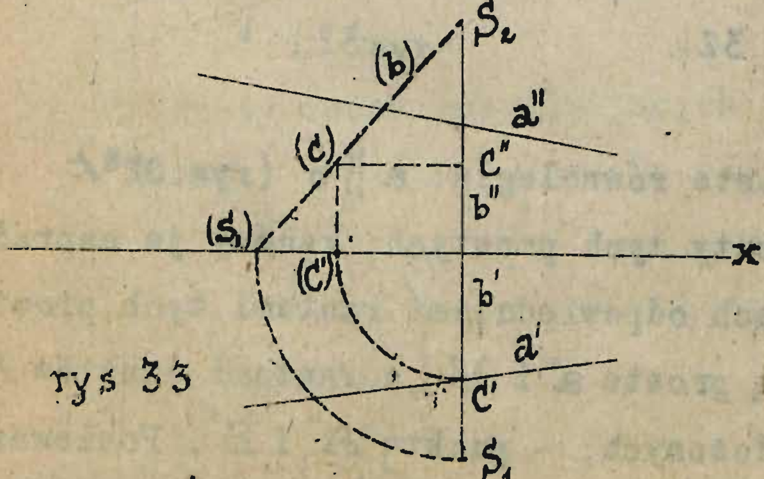
Dane są dwie proste równoległe: $a \parallel b$ /rys.32a/.
Chcąc znaleźć rzuty tych prostych, rzućmy je naprzód na pł. P_1. Niech odpowiedniemi rzutami tych prostych na pł. P_1 będą proste a' i b', a rzutami punktów A i B, na nich położonych, - punkty A' i B'. Ponieważ $AA' \perp P_1$ i $BB' \perp P_1$ więc $AA' \parallel BB'$. Przez proste:

a i AA', b i BB' prowadzimy dwie płaszczyzny rzucające: Q i R, które będą do siebie równoległe, ponieważ: $a \parallel b$ i $AA' \parallel BB'$, a w takim razie i linje, według których te dwie równoległe płaszczyzny przecinają się z trzecią, są do siebie równoległe, czyli $a' \parallel b'$. W podobny sposób można dowieść, że i rzuty pionowe tych prostych są do siebie równoległe.

Więc, jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, to ich jednoimienne rzuty są również do siebie równoległe /rys.32b/.

Widzimy więc, że, mając rzuty dwóch prostych, można wogóle odrazu rozstrzygnąć, jakie położenie zajmują te proste względem siebie. Trudniejsze jednak jest zadanie wtedy, jeśli jedna lub obie proste leżą w płaszczyźnie, prostopadłej do osi.

Przypuśćmy pierwszy z powyższych przypadków.



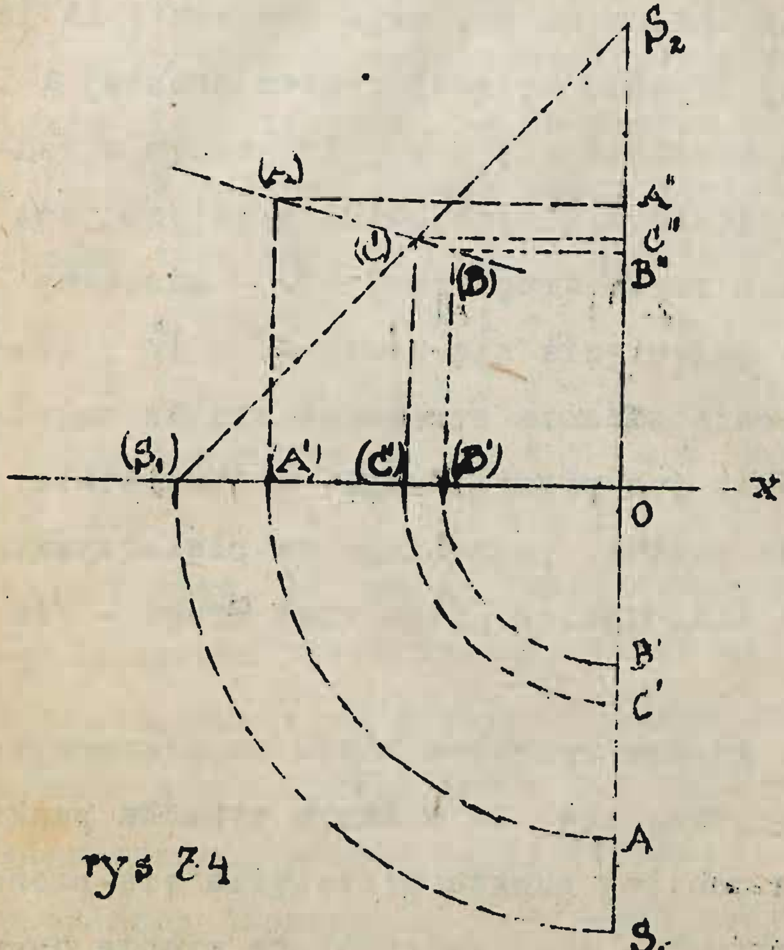
rys 33

Dana jest przez swoje rzuty a' i a'' prosta a i druga prosta leżąca w płaszczyźnie, prostopadłej do osi, dana przez ślady

S_1 i S_2 /rys.33/. Bezpośrednio niepodobna się przekonać, czy te dwie proste się przecinają, bowiem wszystkie punkty, leżące na a, mają swe rzuty na jednej prostopadłej do osi, będącej rzutem prostej a. Jeżeli prosta a przecina się z b, to jednym z rzutów punktu przecięcia się tych dwóch prostych jest p. C' - a w takim razie drugi rzut - C'' - musiałby leżeć w punkcie przecięcia się rzutu a'' z b''; widzimy więc, że całe zadanie sprowadza się do zagadnienia, poprzednio już rozwiązanego, a mianowicie: mając jeden rzut punktu, położonego na płaszczyźnie, prostopadłej do osi, znaleźć jego rzut drugi - /zadanie V/.

Rozwiązawszy je znanym sposobem kładu na płaszczyznę pionową, przekonywamy się, że w danym wypadku punkt C'' wypadł nam poniżej punktu przecięcia się pionowych rzutów prostych - stąd wniosek, że proste dane się nie przecinają.

Rozważmy teraz drugi przypadek - obie proste leżą w płaszczyźnie, prostopadłej do osi rzutów, więc ich rzuty leżą na jednej prostej, prostopadłej do osi, przyczym jedna prosta dana jest przez swe ślady - S_1 i S_2 - rys.34, druga zaś - przez rzuty punktów, na niej położonych - A', A'' i B', B''. Bezpośrednio nie można się przekonać, czy proste się przecinają



rys 24

czy są równoległe - dokonywamy więc znanym sposobem kładu i widzimy, że proste w kładzie się przecięły w p. /C/ - ponieważ zaś obie leżą w jednej płaszczyźnie, więc przecinają się i w rzeczywistości. Chcąc znaleźć rzuty punktu przecięcia, powracamy z kładu do rzutów, prowadząc~~ych~~ przez p. /C/ prostą /C/C''$\parallel$x w punkcie przecięcia się z rzutem pionowym prostych znajdujemy p. C'' - rzut pionowy punktu przecięcia. Kład rzutu poziomego znajduje się w spadku prostopadłej /C//C'/$\perp$x sam zaś rzut poziomy - C' - w punkcie przecięcia się rzutu poziomego prostych z łukiem okręgu, zatoczonego promieniem O/C'/ z punktu O