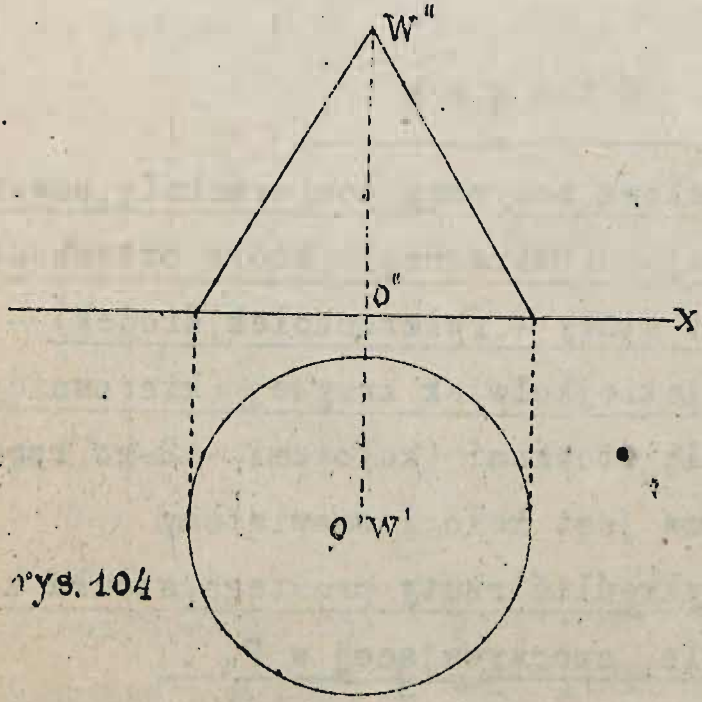
Widzimy tedy, że punkt M otrzymać można, zmniejszając odcinek $M'M_x$ w stosunku $\frac{a}{b}$, lub też, powiększając odcinek $M''M_y$ w stosunku $\frac{b}{a}$ c.b.d.d.
Najdogodniejszym sposobem kreślenia punktów elipsy jest sposób użyty przez nas przy dowodzeniu powyższego twierdzenia.
Mianowicie obieramy na kole wielkim i małym elipsy 2 punkty N' i N" leżące na jednej prostej, przechodzącej przez p.O, następnie prowadzimy $N'N_0 \perp AA'$, a przez p.N" - równoległą do AA' - w przecięciu tych dwóch prostych otrzymujemy szukany p.N, należący do elipsy.

§ 10. Stożek.

Powierzchnią stożkową nazywamy powierzchnię, powstałą z ruchu prostej - (tworzącej) - która przechodzi przez jeden punkt stały - (wierzchołek, środek) - a ślizga się po jakiejkolwiek krzywej (kierownicy).
Teraz zajmiemy się stożkami (kołowemi - 2-go rzędu) których kierownicą jest koło i rozwiążemy
Zadanie XXXVI. Wykreślić rzuty prostego stożka kołowego o podstawie, spoczywającej w P_1.

Do rozwiązania tego zadanie wystarczy mieć daną kierownicę i wierzchołek stożka.
Ponieważ oś stożka prostego jest $\perp$ -ła do podsta-

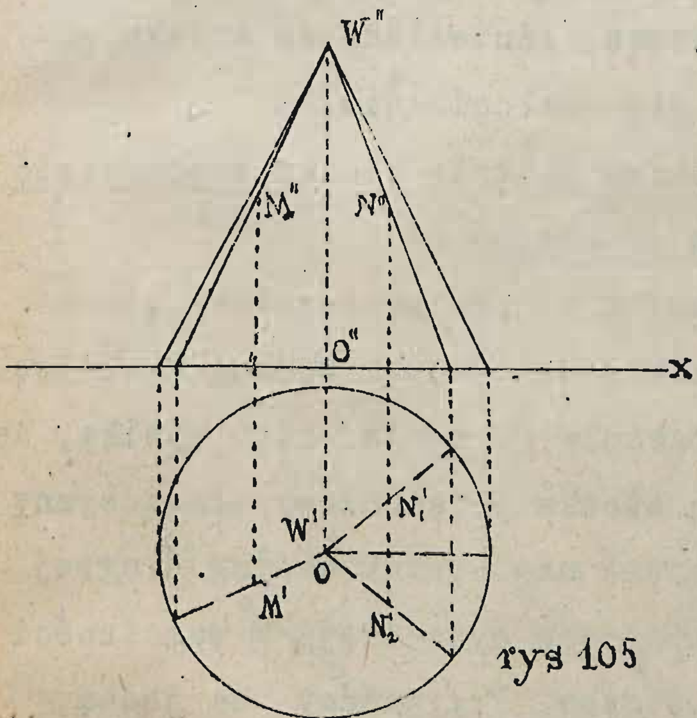
wy, więc jego rzutem poziomym będzie kierownica, której rzut pionowy znajdziemy na osi, prowadząc prostopadle do niej styczne do kierownicy,(rys.104). Poziomym rzutem wierzchołka stożka (W') będzie środek koła, które jest kierownicą naszego stożka (O), pionowy rzut wierzchołka (W") stożka znajdziemy, mając wysokość jego. Co się tyczy widzialności pewnej części stożka, to należy wykreślić tylko jego kontur widzialny, którym w rzucie poziomym jest oczywiście kierownica, w rzucie pionowym konturem widzialnym będą: rzut kierownicy oraz dwie tworzące przechodzące przez koniec pionowego rzutu kierownicy. Gdyby był dany stożek pochyły, to rzut poziomy wierzchołka nie leżałby w środku koła, będącego kierownicą.



rys. 104

Zadanie XXXVII. Mając jeden z rzutów punktu, leżącego na bocznej powierzchni stożka, znaleźć jego drugi rzut.

Przypuśćmy, że dany jest prosty stożek kołowy o kierownicy,leżącej w P_1 i poziomy rzut M' punktu leżącego na bocznej powierzchni tego stożka (rys. 105)



rys 105

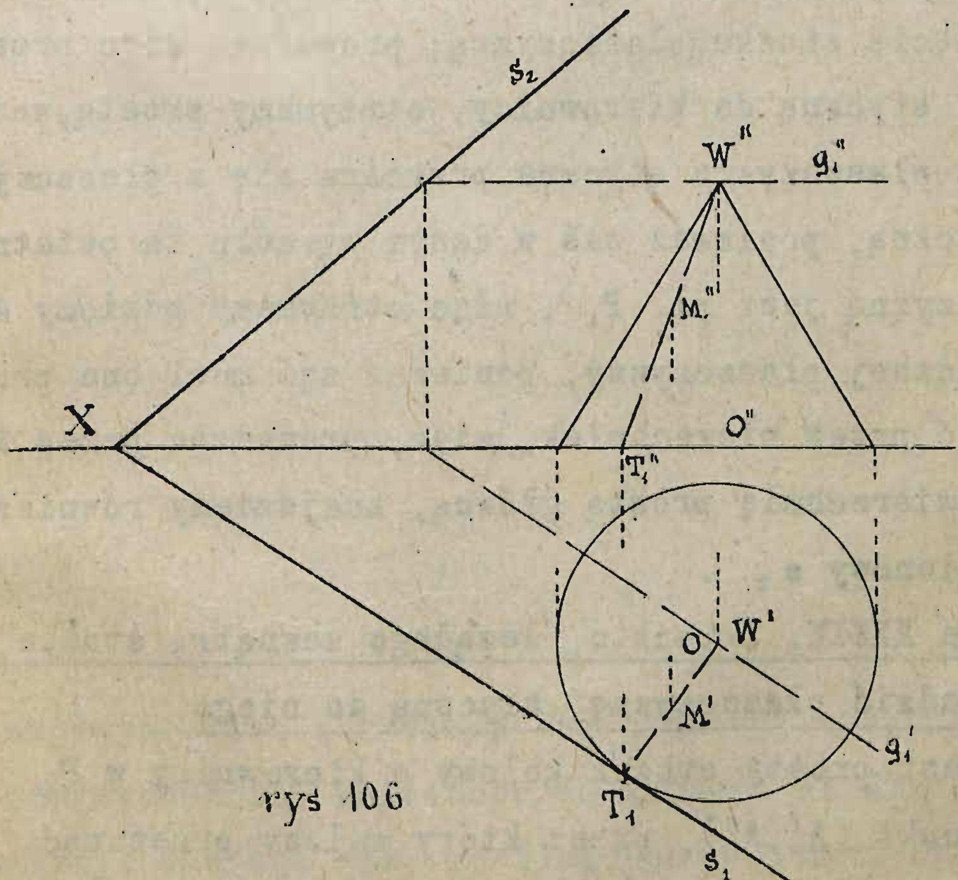
Aby znaleźć rzut pionowy punktu M prowadzimy tę tworzącą stożka, na której leży p.M; rzutem poziomym tej tworzącej będzie oczywiście, prosta, łącząca punkty W' i M'; punkt przecięcia się W'M' z kierownicą leżącą w danym wypadku w P , będzie więc śladem poziomym S_1 prostej W M', możemy tedy znaleźć rzut pionowy naszej tworzącej, na którym leży szukany pionowy rzut M" Gdyby, mając dany pionowy-wy rzut N" punktu, należało znaleźć rzut poziomy, postępowanie byłoby analogiczne.

Zauważmy jeszcze, że jednemu rzutowi pionowemu N" odpowiadają dwa rzuty poziome (N'_1 ,N'_2) dlatego, że p.N" jest rzutem dwuch punktów, położonych symetrycznie, z których jeden znajduje się na widzialnej, a drugi na niewidzialnej części powierzchni stożka. Zadanie powyższe, odniesione do stożka pochyłego, rozwiązuje się analogicznie.

Zadanie XXXVIII. W danym punkcie stożka poprowadzić płaszczyznę, styczną do niego.

Jeżeli przez wierzchołek stożka przesuniemy płaszczyznę, to albo przetnie ona stożek według 2-ch tworzących, albo nie przetnie go wcale. Stąd wynika, że jeśli przez tworzącą stożka przesuniemy płaszczyznę sieczną, to przetnie ona nam stożek według drugiej tworzącej - a więc tworzące wyznaczają w zupełności płaszczyznę sieczną stożka. Przypuśćmy, że jedna z powyższych tworzących zbliża się nieograniczenie do drugiej - w takim razie, płaszczyzna przez nie wyznaczona, zbliża się do położenia granicznego, którym jest płaszczyzna styczna i, gdy obie tworzące przystaną do siebie, płaszczyzna nasza będzie posiadała jedną prostą wspólną ze stożkiem - czyli, stanie się do niego styczną. Jeśli przytniemy stożek płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołek, to przetnie go ona według krzywej, do której styczną jest prosta przecięcia płaszczyzny siecznej z płaszczyzną, styczną do stożka.

Przystąpmy teraz do rozwiązania naszego zadania i przypuśćmy, że dany jest prosty stożek o kierownicy, leżącej w P_1 (rys.106); mając np. pionowy



rys 106

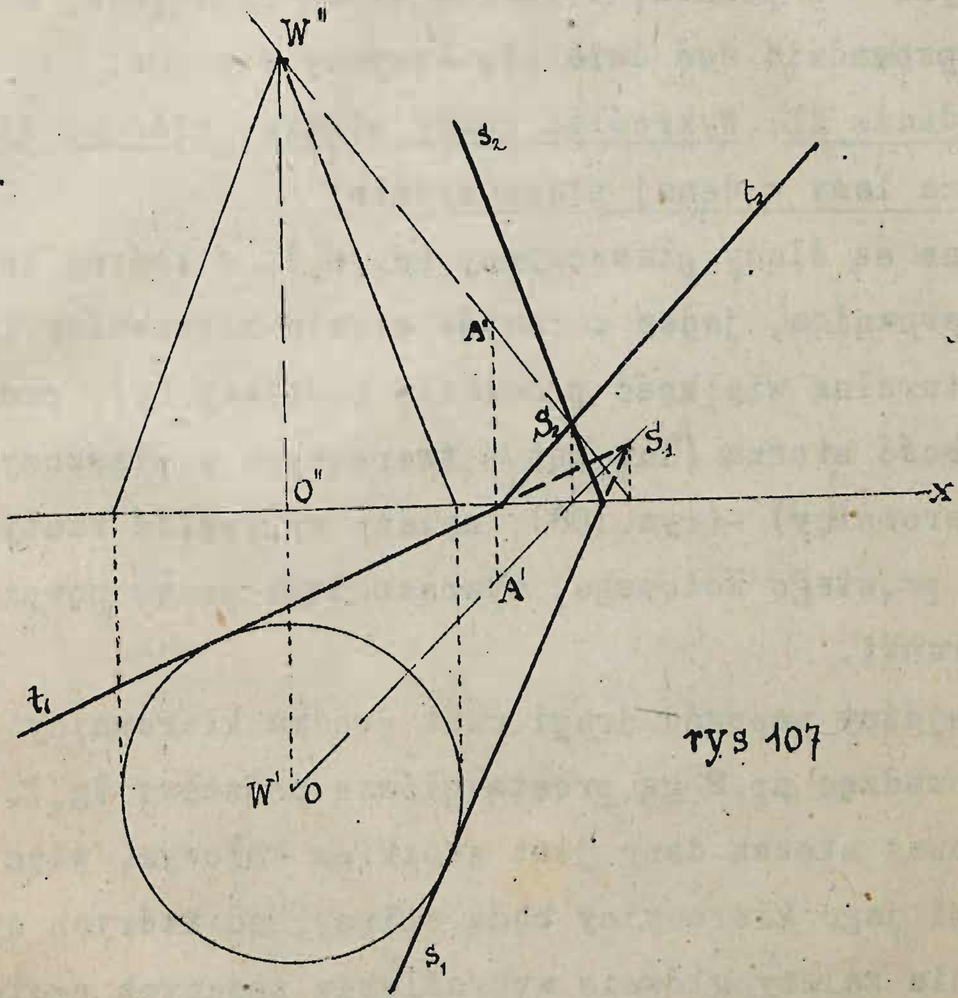
rzut M" punktu, przez który należy przesunąć płaszczyznę styczną i przypuszczając, iż p.M leży na widzialnej części powierzchni stożkowej, znajdziemy poziomy rzut punktu M', po prowadzeniu odpowiedniej tworzącej - WT.

Kierownicę stożka można uważać, jako krzywą, według której przecina się stożek z płaszcz.P_1 ; otóż linja przecięcia płaszczyzny siecznej z płaszczyzną styczną do stożka jest styczną do krzywej, otrzymanej z przecięcia stożka płaszczyzną; prowadząc więc przez p. T_1 styczną do kierownicy, otrzymamy prostą, według której płaszczyzna styczna przecina się z płaszczyzną sieczną, ponieważ zaś w danym wypadku tą ostatnią płaszczyzną jest pł. P_1 , więc otrzymamy poziomy ślad s_1 żądanej płaszczyzny; ponieważ zaś musi ona przechodzić przez wierzchołek, więc, prowadząc przez W np. powierzchnię prostą główną, znajdziemy również ślad pionowy s_2 .

Zadanie XXXIX. Z punktu, leżącego zewnątrz stożka, poprowadzić płaszczyznę, styczną do niego.

Dany jest prosty stożek kołowy o kierownicy w P_1 oraz punkt (A',A"), przez który należy przesunąć płaszczyznę styczną do stożka (rys.107).

Jeżeli przez wierzchołek (W',W") i punkt (A',A") poprowadzimy prostą (A'W',A"W") to musi ona oczy wiście, leżeć w szukanej płaszczyźnie stycznej;



rys 107

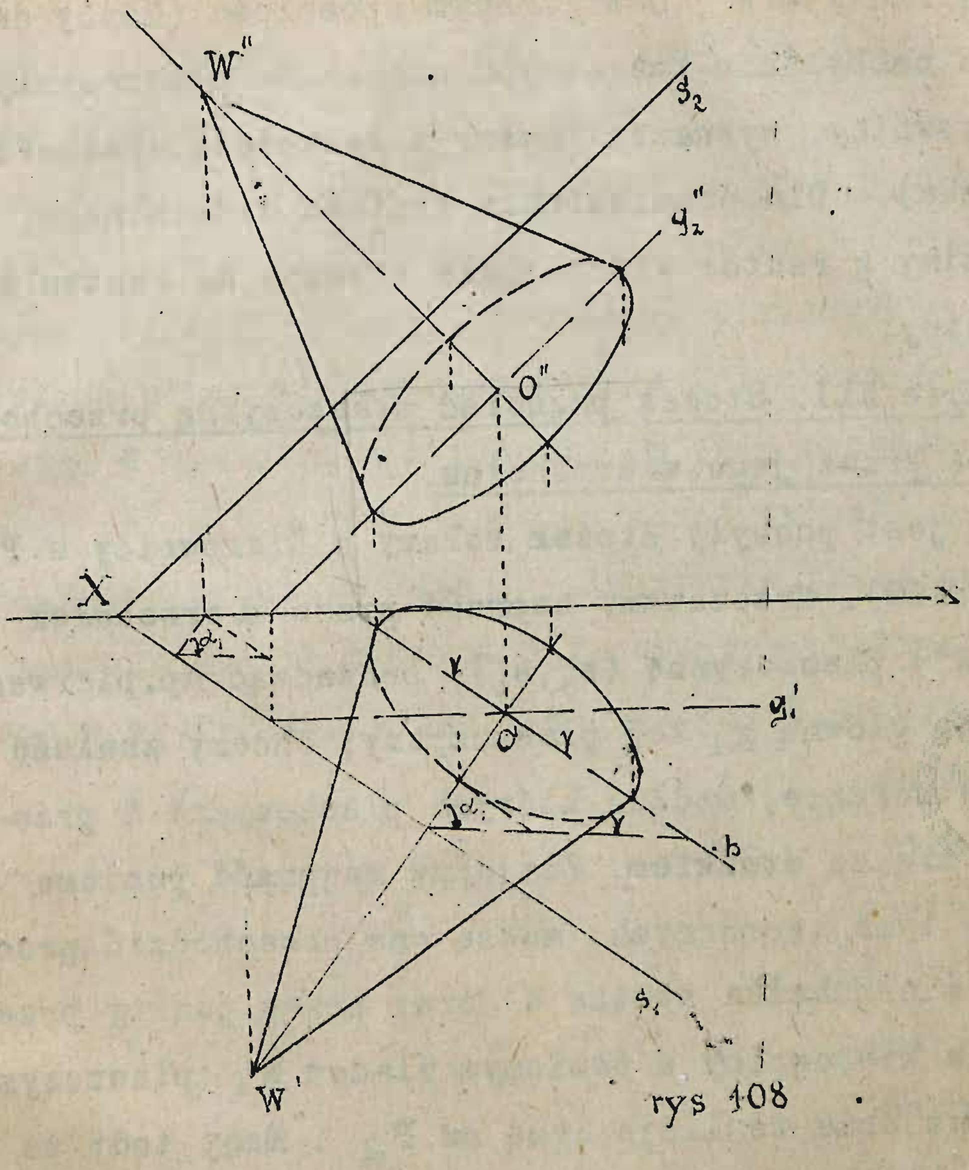
znajdując więc oba ślady tej prostej, znajdziemy po jednym punkcie, należącym do każdego ze śladów płaszczyzny; wiedząc zaś, że ślad poziomy musi być styczny do kierownicy, z łatwością rozwiążemy zadanie - przyczym, ponieważ z punktu leżącego zewnątrz krzywe

2-go rzędu, można poprowadzić do niej dwie styczne, otrzymamy ślady (s_1,s_2) i (t_1,t_2) dwuch płaszczyzn. Czyli - z punktu, leżącego zewnątrz stożka, można poprowadzić doń dwie płaszczyzny styczne.

<u>Zadanie XL</u>. <u>Wykreślić rzuty stożka, którego kierownica leży w danej płaszczyźnie.</u>

Dane są ślady płaszczyzny (s_1,s_2), w której leży kierownica, jeden z rzutów stożka kierownicy (np.O') naturalna wielkość promienia podstawy (r), oraz wysokość stożka (lub kąt α tworzących z płaszczyzną kierownicy) -(rys.108), należy wykreślić rzuty stożka prostego kołowego, wyznaczonego przez powyższe warunki.

Znajdźmy naprzód drugi rzut środka kierownicy - O" - prowadząc np.2-gą prostą główną podstawy (g_2). Ponieważ stożek dany jest stożkiem kołowym, więc rzutami jego kierownicy będą elipsy, od których wykreślenia zależy głównie wykreślenie żądanych rzutów. Równoległa do śladów średnica kierownicy nie zmienia swej wielkości więc, odmierzając od p.O' w obie strony na prostej, || -ej do s_1, odcinki, równe r, otrzymamy wielką oś elipsy. Chcąc wykreślić oś małą, należy, w sposób znany, nakreślić prostą największego spadku (patrz str.58) i na niej wyznaczyć rzut średnicy 2 r.



rys 108

Budujemy

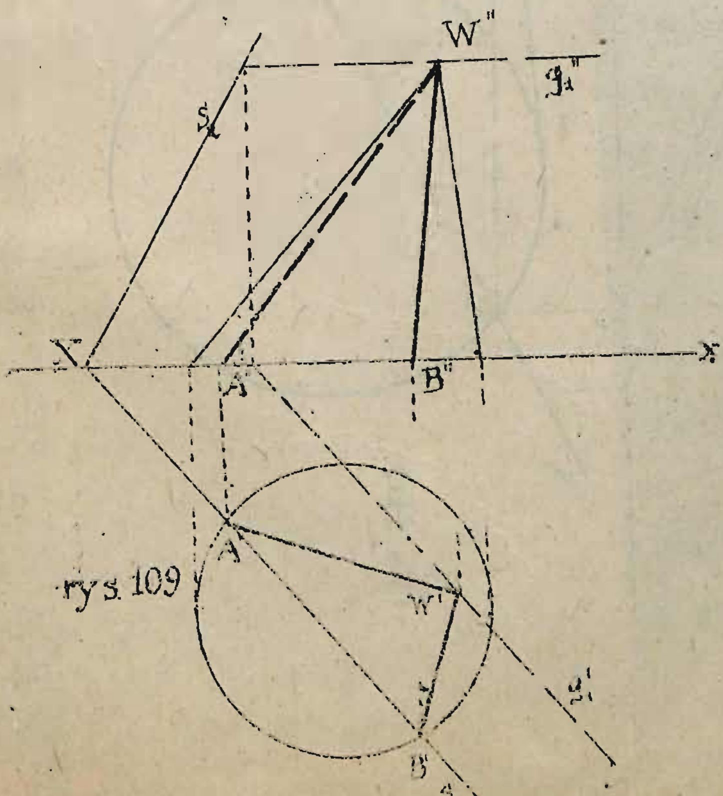
tedy △ prostokątny O'ab i znajdujemy rzut odcinka r, odmierzonego od p.b na przeciwprostokątnej ab na przyprostokątną O'a. Mając obie osi elipsy, wykreślamy ją - znając zaś wysokość stożka, wykreślamy rzuty O'W', O"W" znanym sposobem. (Gdyby dane było nachylenie tworzących stożka do płaszczyzny kierownicy, wyznaczylibyśmy z łatwością wysokość stożka). Dla odnalezienia konturu widzialnego, prowadzimy z rzutów wierzchołka styczne do rzutów kierownicy.

<u>Zadanie XLI. Stożek przeciąć płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek.</u>

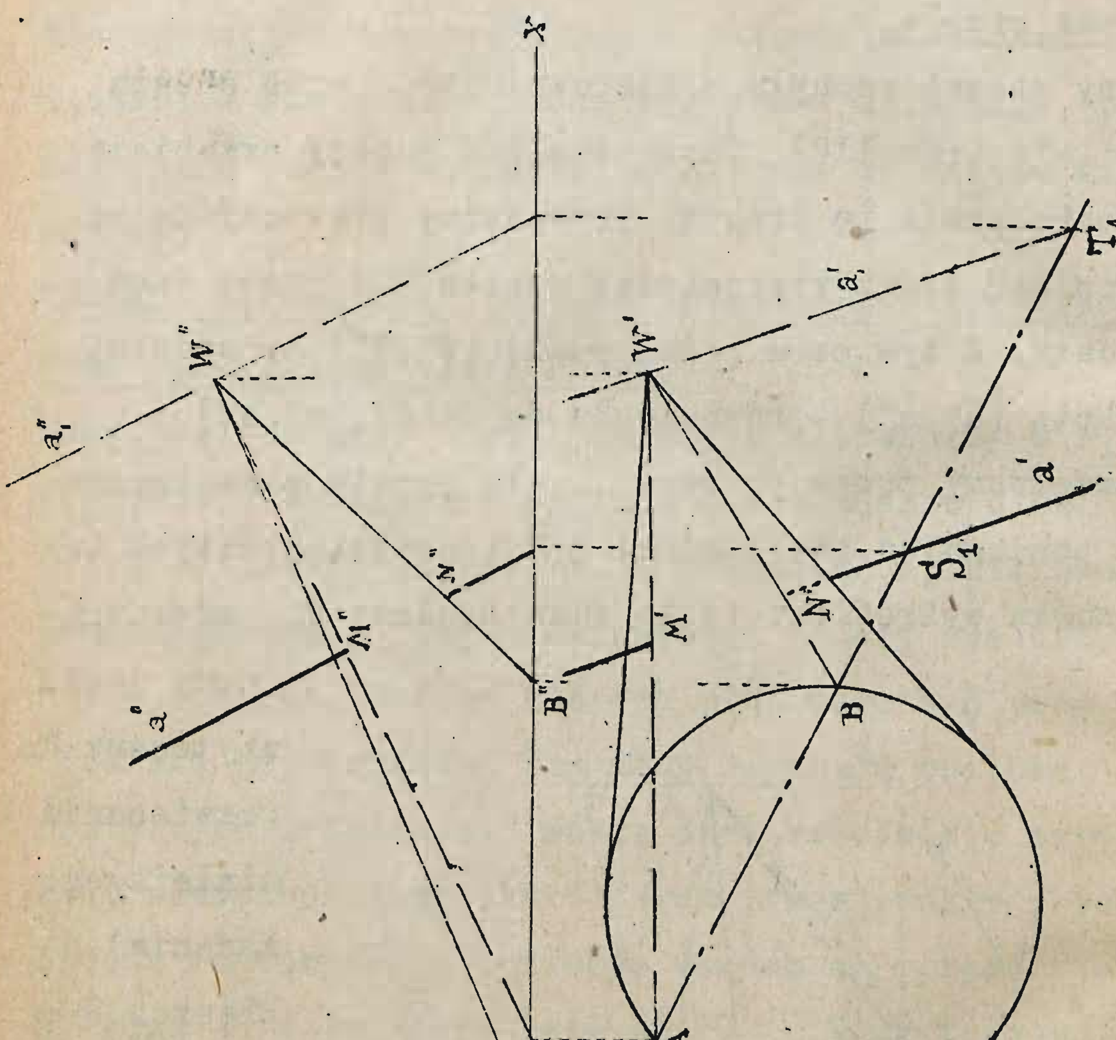
Dany jest pochyły stożek kołowy o kierownicy w P_1 (rys.109). Przesuwamy naprzód przez wierzchołek (W',W") płaszczyznę (s_1,s_2), prowadząc np.pierwszą prostą główną g_1 tej płaszczyzny; chcemy znaleźć dwie tworzące, według których płaszczyzna S przecina się ze stożkiem. Znajdźmy najprzód poziome rzuty tych tworzących; muszą one przechodzić przez rzut wierzchołka stożka W' oraz przez punkty przecięcia kierownicy z poziomym śladem s_1 płaszczyzny S, gdyż obie te linje leżą na P_1 . Mamy tedy po 2 punkty (A' i W', B' i W'), należące do poziomych rzutów szukanych tworzących - możemy zatym je wykreślić; otrzymamy jako odpowiedź, odciski (A'W',A"W") oraz (B'W',B"W"), przyczym pionowy rzut pierwszego z nich jest niewidzialny.

Zadanie XLII. Wyznaczyć punkty przebicia stożka przez prostą.

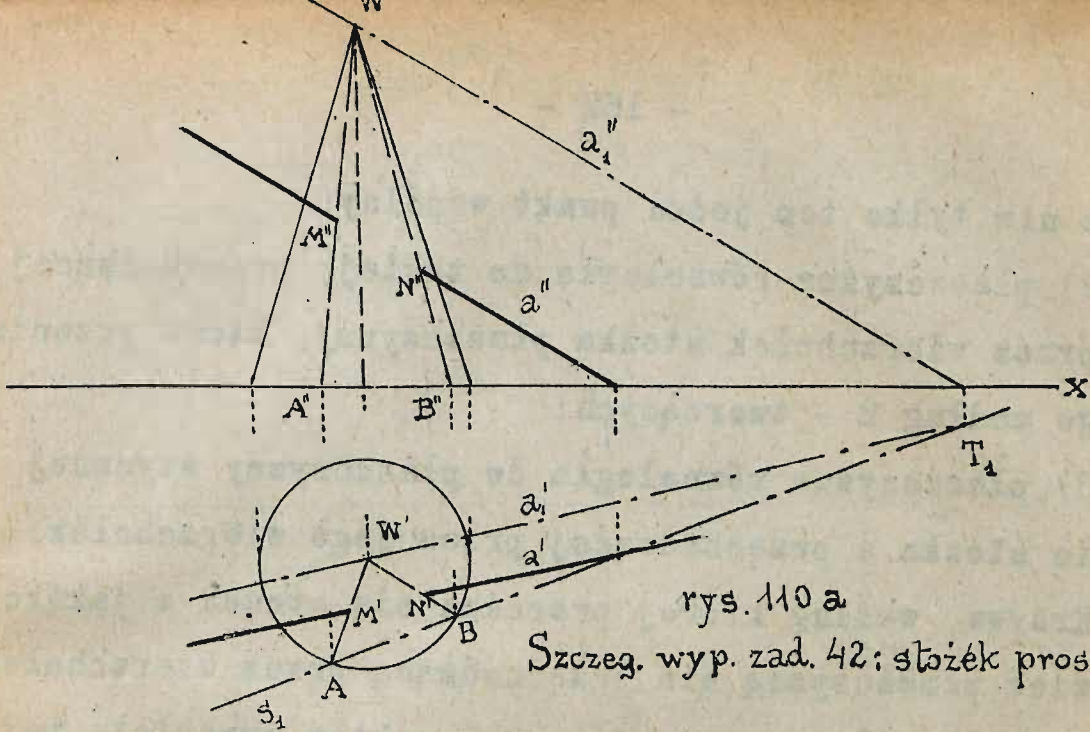
Dany stożek pochyły o kierownicy wP_1 oraz prosta (a',a") (rys.110). Chcąc znaleźć punkty przebicia stożka przez tę prostą, prowadzimy płaszczyznę pomocniczą przez wierzchołek stożka W i przez daną prostą. W tym celu przez punkt (W',W") prowadzimy prostą (a_1',a_1'') - równoległą do danej (a',a") i przesuwamy przez te dwie || -łe proste płaszczyznę S, posługując się śladami S_1T_1 naszych prostych (na rysunku wykreślamy tylko ślad poziomy S_1 ,gdyż pionowy jest zbyteczny do rozwiązania niniejszego zadania). Płaszcz S przecina nasz stożek według dwuch tworzących, gdyż przechodzi przez jego wierzchołek;



rys.109



rys 110



rys. 110 a

Szczeg. wyp. zad. 42: stożek prosty

znajdujemy je w rzutach - będą to proste (W'A,W"A") i (W'B,W"B"). Punkty przecięcia (M',M") i (N',N") prostej (a',a") z temi tworzącemi będą właśnie szukanemi punktami przebicia - gdyż leżą jednocześnie na prostej danej i na powierzchni stożkowej, ponieważ obie tworzące do tej powierzchni należą.

Zadanie XLIII. Przeciąć stożek jakąkolwiek płaszczyzną, nieprzechodzącą przez wierzchołek.

Wszystkie płaszczyzny, jakie mogą przecinać stożek, nie przechodzęc przez jego wierzchołek, podzielimy na trzy grupy:

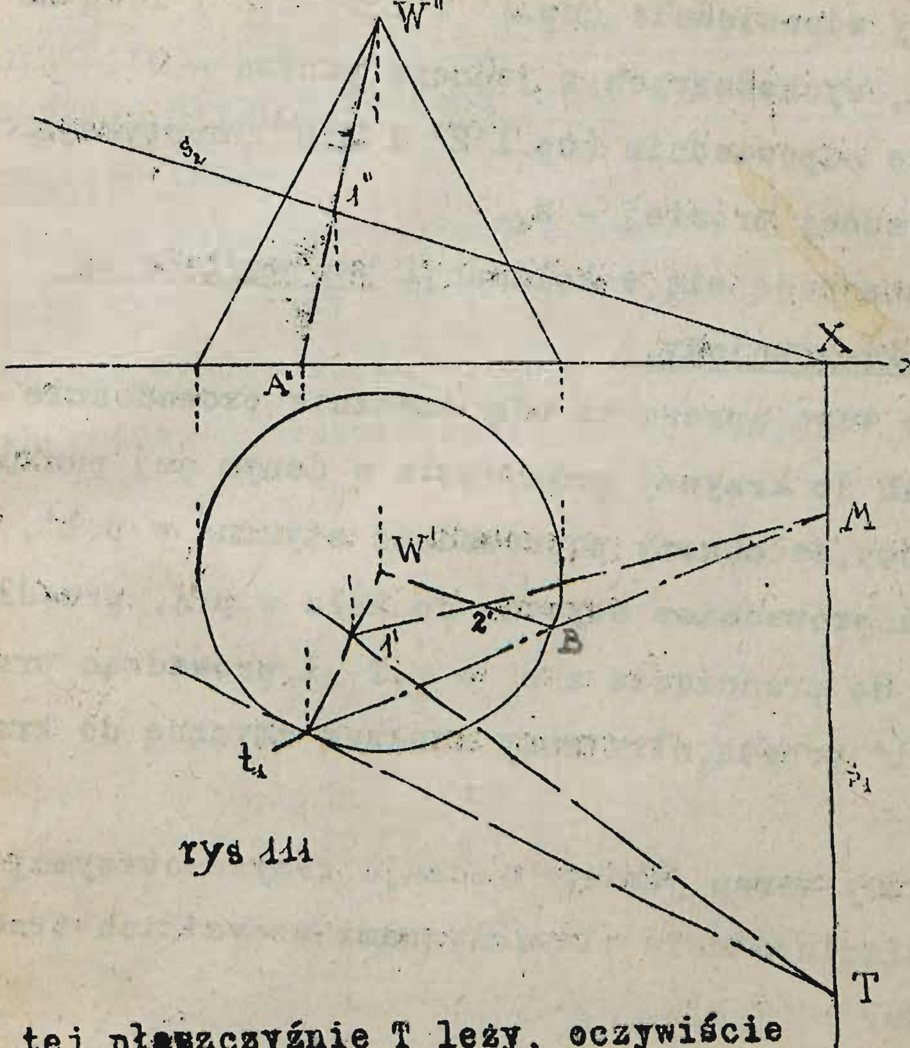
1) płaszczyzna, równoległa do takiej płaszczyzny, przechodzącej przez wierzchołek stożka, która ma

z nim tylko ten jeden punkt wspólny.

2) płaszczyzna równoległa do takiej, przechodzącej przez wierzchołek stożka płaszczyzny, która przecina go według 2 - tworzących:

3), płaszczyzna równoległa do płaszczyzny stycznej do stożka a przechodzącej przez jego wierzchołek.

Krzywa, według której przecina się stożek z jakąkolwiek płaszczyzną nie przechodzącą przez wierzchołek jest to miejsce geometryczne punktów przebicia tej płaszczyzny przez tworzące stożka. Opierając się na tym określeniu, dojdziemy do wniosku, że, aby znaleźć rzuty krzywej przecięcia, należy postępować w następujący sposób: przypuśćmy, że dany jest prosty stożek kołowy, o kierownicy w P_1, który należy przeciąć płaszczyzną (s_1, s_2) nieprzechodzącą przez wierzchołek (rys.111), a prostopadłą przytym do pł. P_2. Prowadzimy tedy jakąkolwiek tworzącą WA- punkt jej przebicia 1 z płaszczyzną S da nam jeden z punktów krzywej szukanej. Prowadząc podobnie dostateczną liczbę tworzących, możemy znaleźć szereg punktów, które nam wyznaczą krzywą szukaną. Można jednak postąpić w inny jeszcze sposób: przeprowadźmy, mianowicie przez tworzącą WA jakąkolwiek płaszczyznę T - w takim razie znajdziemy natychmiast drugą tworzącą WB, leżącą w pł. T;



rys 111

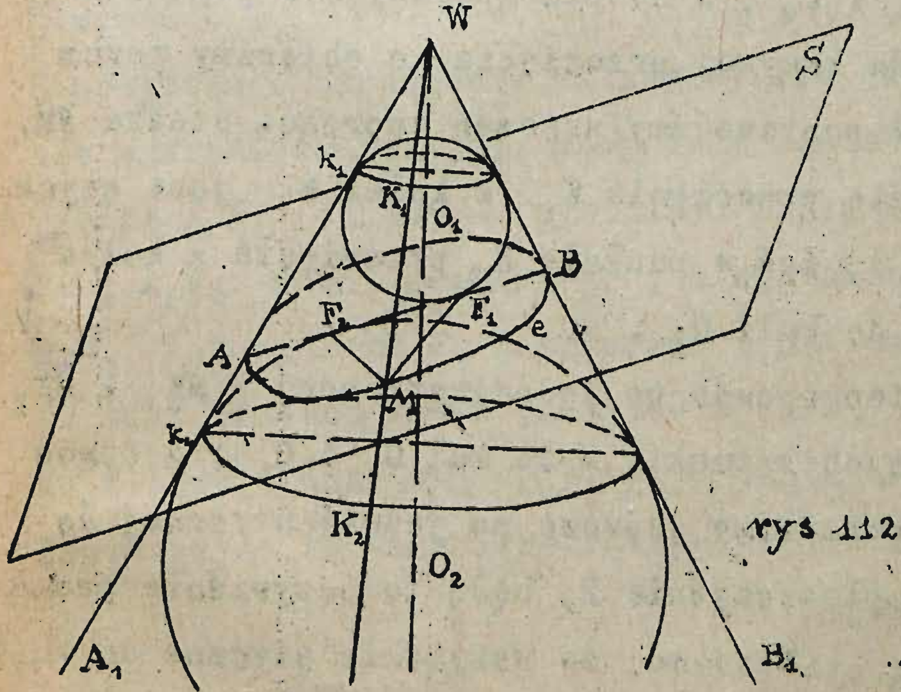
w tej płaszczyźnie T leży, oczywiście prosta 1M, łącząca ~~płaszcz.~~ punkt 1 ze śladem s_1 pł.S, na prostej zaś 1M musi się znajdywać punkt przebicia pł.S przez tworzącą WB, który znajdziemy w punkcie 2 przecięcia się prostych WB z 1M. W podobny sposób znajdziemy szereg punktów, należących do szukanej krzywej. Zauważmy, że kierownica i rzut poziomy krzywej przecięcia mają następujące własności:

1) punkty odpowiednie (np.A' i 1;B' i 2') leżą na prostych, wychodzących z jednego punktu - W'.
2) proste odpowiednie (np.1'2' i A'B') spotykają się na jednej prostej - s_1.
a więc znajdują się w kolinacji <u>bez względu na kształt kierownicy.</u>
Skutkiem tego upraszcza się znacznie prowadzenie stycznych do krzywej przecięcia w danym jej punkcie; przypuśćmy, że chcemy poprowadzić styczną w p.1', w tym celu prowadzimy styczną do koła w p.A', przedłużamy ją do przecięcia z s_1 w p.T i, prowadząc przez p. T i 1' prostą, otrzymamy szukaną styczną do krzywej.
Rozpatrzmy teraz jakiego rodzaju krzywe otrzymujemy w przecięciu stożka płaszczyznami wszystkich trzech rodzajów.
Przecinając stożek płaszczyzną 1-go rodzaju otrzymamy krzywą zamkniętą, nie posiadającą żadnego punktu, jest to, jak później dowiedziemy, - <u>elipsa.</u>
Krzywa przecięcia stożka przez płaszczyznę drugiego rodzaju jest krzywą, posiadającą dwa punkty w nieskończoności, złożoną zatym z dwóch gałęzi: będzie to <u>hyperbola.</u>
Wreszcie przy przecięciu stożka płaszczyzną trzeciego rodzaju otrzymujemy krzywą mającą jeden punkt

w nieskończoności, będzie to parabola.

TWIERDZENIE IX. Przecięcie stożka obrotowego jakąkolwiek płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołek jest krzywą drugiego rzędu.

Twierdzenia tego dowiedziemy sposobem D a n d e l i n'a, przyczym ograniczymy się tylko do przecięcia stożka płaszczyzną pierwszego rodzaju, gdyż dowody dla wszystkich trzech rodzajów płaszczyzn są analogiczne.



rys 112

Dany jest tedy prosty stożek kołowy, rys. 112; przetnijmy go płaszczyzną S, zakładając, że jest to płaszczyzna 1-go rodzaju, następnie przesuńmy przez wierzchołek W płaszczyznę prostopadłą do pł. S i przypuśćmy, że jest nią płaszczyzna rysunku. W takim razie przetnie ona stożek według tworzących WA i BW, zaś pł. S - według prostej AB. Wpiszmy teraz w $\triangle$ WAB koło o środka O_1 i przypuśćmy, że punktem jego styczności z bokiem AB jest p.F_1 ; wykreślmy jeszcze koło zawpisane o środka O_2 , które będzie styczne do AB w punkcie F_2 . Otrzymaną w ten sposób figurę płaską obracamy dokoła osi WO; kąt $\widehat{AWB}$, obracając się dokoła swej dwusiecznej, opisuje powierzchnię stożkową, koła O_1 i O_2 w ten kąt wpisane, a obracający się dokoła swych średnic, opisują dwie kule, styczne do powierzchni stożka według kół k_1 i k_2 , a do płaszczyzny S w punktach F_1 względ. F_2 . Na krzywej przecięcia e obierzmy teraz dowolny p.M i poprowadźmy przezeń tworzącą stożka WM, który w punkcie przecięcia K_1 z kołem k_1 jest styczna do kuli O_1 , zaś w punkcie K_2 przecięcia z kołem k_2 - styczna do kuli O_2 .

Otrzymany w ten sposób po jednej stycznej - MK_1 i MK_2 - wyprowadzonych z punktu M do kul O_1 i O_2 ; z tegoż punktu M wyprowadzimy jeszcze po jednej stycznej do tychże kul w płaszczyźnie S, będą to oczywiście proste MF_1 i MF_2 . Wiadomo, że wszystkie styczne do kuli wyprowadzone z tego samego punktu zewnętrznego są równe, możemy zatym napisać:

$$MF_1 = MK_1$$

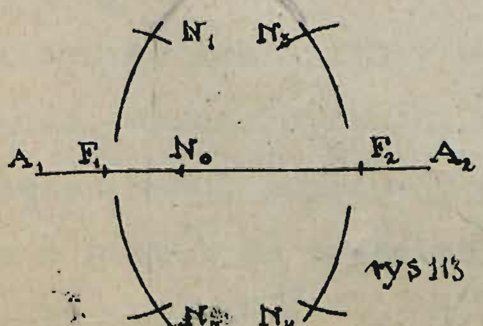
$$MF_2 = MK_2$$ dodając stronami otrzymamy:

$$MF_1 + MF_2 = MK_1 + MK_2 = K_1K_2$$

Otóż K_1K_2 jest jedną z tworzących stożka ściętego o podstawach k_1 i k_2, wszystkie tworzące stożka ściętego są sobie równe. Każdy punkt M krzywej przecięcia posiada zatym tę własność, że <u>s u m a o d l e g ł o ś c i j e g o o d d w u c h p u n k t ó w s t a ł y c h F_1 i F_2 r ó w n a j e s t p e w n e j w i e l k o ś c i s t a ł e j.</u> Ale własność ta jest charakterystyczną dla punktów elipsy, której ogniskami są stałe punkty F_1 i F_2, a wielką osią jest stała długość K_1K_2.

Z powyższego określenia elipsy wynika następujący sposób wykreślenia elipsy: mamy dane ogniska F_1 i F_2 oraz oś wielką A_1A_2 elipsy - (rys.113). Obierzmy na osi wielkiej A_1A_2 dowolny punkt N_0, z ogniska F_1 promieniem A_1N_0, a z ogniska F_2 promieniem A_2N_0 zatoczmy łuk; te łuki przetną się w punktach N_1 i N_2 - należących do elipsy, gdyż: $N_1F_1 + N_1F_2 = A_1N_0 + A_2N_0 = A_1A_2$

Powtarzając tę samą konstrukcję względem F_2 otrzymamy jeszcze 2 punkty elipsy N_3 i N_4. Obierając na osi wielkiej między ogniskami jakikolwiek inny punkt, otrzymamy 4 inne



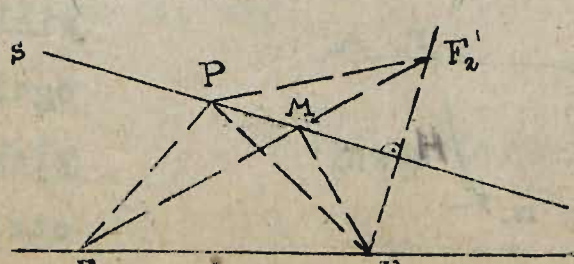
rys 113

punkty elipsy. W ten sposób możemy wyznaczyć dostateczną do wykreślenia liczbę punktów elipsy.

Zadanie XLIV. Mając ogniska elipsy oraz styczną do niej, wyznaczyć punkt styczności elipsy ze styczną.

Styczną do krzywej w danym jej punkcie nazywamy granicą położenia siecznej, której drugi punkt przecięcia z krzywą nieskończenie zbliża się do pierwszego. Styczna posiada tedy z krzywą 2 punkty wspólne, które do siebie przystają, czyli, jak często mówimy, jeden punkt wspólny. Stąd wnosimy, że wszystkie leżące poza punktem styczności, punkty stycznej, leżą zewnątrz elipsy, a więc suma odległości każdego z tych punktów od ognisk jest większa od wielkiej osi elipsy.

Jeśli więc mamy dane ogniska F_1 i F_2 oraz styczną s do elipsy (rys.114), to, obierając na niej dowolny punkt P i łącząc go z ogniskami, można powiedzieć



rys 114

o nim, że suma PF_1 i PF_2 wogóle jest większa, niż suma odległości od ognisk szukanego punktu styczności. Przeprowadźmy teraz $F_2H \perp s$ i na przedłużeniu F_2H wyznaczmy punkt F_2' symetryczny do punktu F_2 względem prostej s.

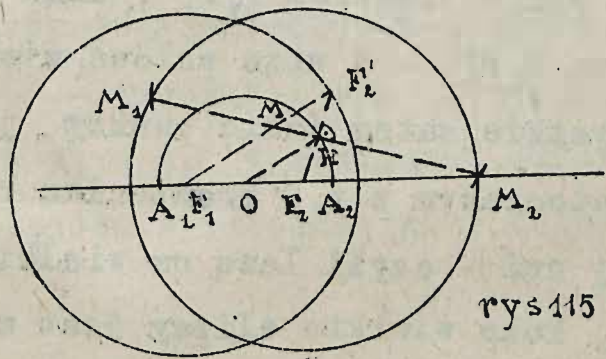
Łącząc otrzymany p.F_2' z p.P, otrzymamy $\triangle F_2PF_2'$ który będzie $\triangle$-tem równoramiennym, gdyż PH jest jednocześnie wysokością i środkową tegoż $\triangle$-ta; wskutek tego, $PF_2 = PF_2'$ i, zamiast sumy $PF_1 + PF_2$ możemy napisać sumę $PF_1 + PF_2'$. Dla każdego punktu stycznej, z wyjątkiem punktu styczności, suma ta będzie większą od wielkiej osi, stąd wniosek, że aby znaleźć punkt styczności, należy na prostej s tak dobrać punkt P, aby suma PF_1 i PF_2' była najmneijszą - suma ta jest wogóle linją łamaną, najktótszą zaś odległością między dwoma punktami jest linja prosta. Szukany punkt styczności będzie zatym leżał w punkcie przecięcia M prostej s z łącznicą F_1F_2' .

Stąd wynika następujący sposób rozwiązania naszego zadania; wyznaczmy punkt symetryczny jednego z ognisk względem danej stycznej. Łączymy go z drugim ogniskiem i w punkcie przecięcia tej łącznicy jest ze styczną znajdujemy punkt szukany.

Ponieważ wspomniana łącznica jest długością wielkiej osi elipsy, więc, gdyby była dana wielka oś elipsy i punkt elipsy, a należałoby poprowadzić w tym punkcie styczną do elipsy, postąpilibyśmy w sposób następujący: prowadzimy przez dany punkt i ognisko prostą, odmierzamy na niej, od ogniska, odcinek, równy wielkiej osi elipsy; otrzymany punkt krańcowy łączymy z drugim ogniskiem i do otrzymanej w ten sposób prostej prowadzimy przez dany punkt elipsy prostopadłą: będzie to szukana styczna.
Z trójkąta F_2MF_2' wnosimy, że styczna do elipsy jest dwusieczną pomiędzy jednym promieniem wodzącym MF_2 i przedłużeniem drugiego MF_1.

<u>Zadanie XLV.</u> <u>Wykreślić elipsę, opierając się na własnościach krzywej ogniskowych.</u>

Dana jest oś wielka A_1A_2 elipsy, oraz jej ogniska F_1 i F_2 (rys,115). Elipsę wykreślimy, prowadząc do niej styczne i wyznaczając na nich punkty styczności, jak to wynika ~~jak~~ z poprzedniego zadania, miejscem geometrycznym punktów takich, jak p.F_2' jest okrąg koła, zakreślony z ogniska F_1 promieniem, równym wielkiej osi elipsy. Wykreślamy tedy z p.F_1, jak ze środka, owo koło, i obieramy na nim dowolny punkt F_2'. Aby przeprowadzić styczną, należy wystawić ze środka odcinka F_2F_2' prostopadłą – czynimy to, nie wy-



rys 115

kreślając samego odcinka, przyczym potrzebne do konstrukcji koła najdogodniej zakreślać promieniem, równym wielkiej osi elipsy, wtedy całe wykreślenie da się uskutecznić jednym otwarciem cyrkla i będzie względem obu ognisk symetrycznem. Wyznaczenie dowolnego punktu elipsy M oraz stycznej w tym punkcie wymaga poprowadzenia jednego koła o środku F_2' i dwuch prostych M_1M_2 i F_1F_2' .

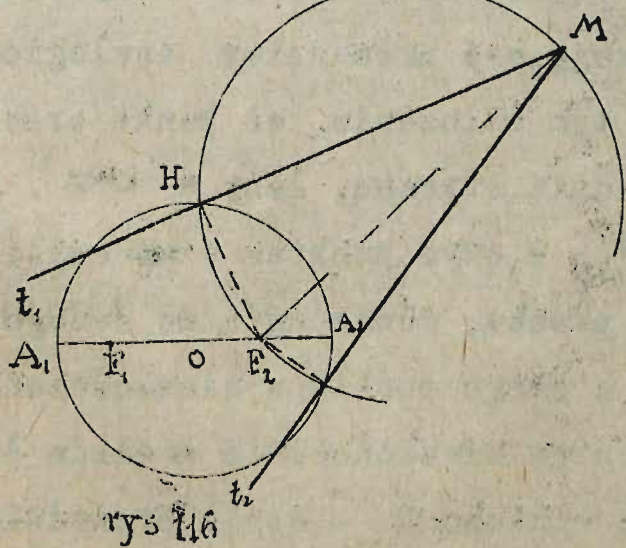
Połączmy punkt H (rzut ogniska na styczną do elipsy) ze środkiem elipsy - O i uważajmy otrzymane w ten sposób △△-ty: △ $F_1F_2F_2'$ i △ OF_2H. Posiadają one: kąt $\widehat{F_1F_2F_2'}$ swpólny, boki: F_1F_2 i OF_2 oraz F'_2F_2 i HF_2 w stosunku 2:1, gdyż p.O jest środkiem boku F_1F_2, zaś p.H - środkiem F_2F_2'; skąd wynika, że OH jest połową F_2F_2' - a więc połową wielkiej osi elipsy. Wszystkie zatem takie punkty, jak p.H leżą na kole, zatoczonym z p.O promieniem równym połowie wielkiej osi - czyli leżą na wielkim kole elipsy. Inaczej, koło wielkie elipsy jest miejscem gieometrycznym rzutów ogniska na styczne do elipsy. Stąd wynika praktyczny sposób kreślenia elipsy, jako <u>obwiedni</u> ramienia kąta prostego, którego drugie ramię przechodzi przez punkt stały F_2 a wierzchołek porusza się po okręgu koła.

<u>Zadanie XLVI.</u> <u>Z punktu zewnętrznego elipsy poprowadzić do niej styczną.</u>

Dane są ogniska (F_1, F_2) i wielka oś (A_1A_2) elipsy, oraz punkt zewnętrzny M, przez który należy poprowadzić styczną (rys.116).

Jak wiadomo, rzut ogniska na styczną do elipsy musi leżeć na jej wielkim kole - wykreślamy je tedy; wiadomo również, iż styczna oraz łącznica ogniska z punktem przecięcia stycznej i wielkiego koła są wzajemnie prostopadłe - czyli z tego ostatniego punktu widać odcinek F_2M pod kątem prostym. Z tych dwuch warunków wynika już sposób rozwiązania zadania: na odcinku F_2M jak na średnicy, wykreślamy koło; punkty jego przecięcia z kołem wielkim elipsy - H i H' - łączymy z p.M a otrzymane w ten sposób proste t_1 i t_2 są szukanemi stycznemi.

W danym wypadku wprowadziliśmy do elipsy dwie



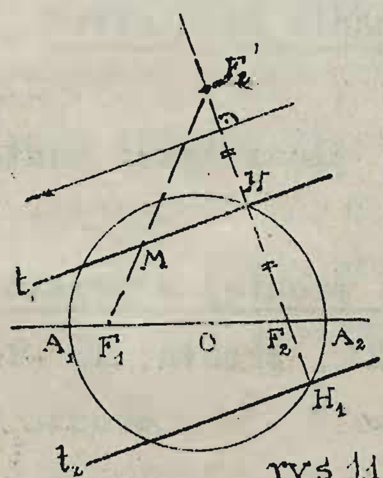
rys 116

styczne - jest to jednak zależne od wzajemnego położenia obu kół względem siebie; gdy przecinają się one w dwuch punktach - punkt leży zewnątrz elipsy i można wyprowadzić z niego dwie styczne, gdy są do siebie styczne - punkt leży na elipsie i można z niego wyprowadzić tylko jedną styczną; gdy wreszcie nie przecinają się wcale - punkt leży wewnątrz elipsy i stycznej nie można poprowadzić wcale.

Zadanie XLVII. Poprowadzić styczną do elipsy w danym kierunku.

Zadanie to tem różni się od poprzedniego, że punkt M leży w nieskończoności.

Wykreślmy jak poprzednio, wielkie koło elipsy (rys. 117), konstrukcję zaś prowadzimy analogicznie do poprzedniej w tym założeniu, że punkt przez który chcemy poprowadzić styczną, leży w ∞. Łączymy tedy ognisko F_2 z owym punktem w ∞ czyli prowadzimy przezeń prostą, równoległą do danego kierunku, następnie z owego punktu w nieskończoności zataczamy promieniem nieskończenie wielkim łuk, przechodzący przez ognisko F_2 - czyli prowadzimy przez p. F_2 prostą, prostopadłą do obranego kierunku, wreszcie punkty przecięcia H i H_1 z naszym łukiem zakreślonym z punktu leżącego w ∞, łączymy z owym punktem, czyli prowadzimy proste, równoległe do danego kierunku. Otrzymujemy w ten sposób dwie szukane styczne



rys 117

t_1 i t_2. Chcąc znaleźć punkt styczności elipsy np. ze styczną t_1, przedłużamy prostą HH_1, odmierzamy na niej, począwszy od p.H odcinek $HF_2' = HF_2$, łączymy p. F_2' z ogniskiem F_1 i w punkcie M przecięcia się stycznej t_1 z łącznicą $F_2' F_1$ otrzymujemy szukany punkt styczności M.

-------ooo000ooo-------

SPIS RZECZY

§ 1. Zadania i pole gieometrji wykreślnej 3-4

§ 2. Metoda rzutów; rzuty, punktyuprostej i kąta 4-9

§ 3. Rzuty na dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny 9-19
rzuty cechowane - 10, płaszczyzny rzutów - 11
ćwiartki - 13

§ 4. Wyznaczenie położenia prostej w przestrzeni 19-37
znajdywanie śladów - 21, prosta, ⊥ -ła do P - 28, prosta ‖ -ła do P - 31, prosta ⊥ -ła do x - 33, kłady - 33

§ 5. Wyznaczenie rzutów dwuch prostych w przestrzeni 37-43
wzajemne położenie 2-ch prostych - 37, rzuty 2-ch prostych; wichrowatych - 38, przecinających się - 38, równoległych - 39, leżących z pł. ⊥ -łej do x - 40

§ 6. Płaszczyzna i proste w niej leżące 43-83
ślady płaszczyzny: ‖ -łej do P - 43, ‖ -łej do x - 44, ⊥ -łej do P - 45, ⊥ -łej do x - 47
przechodzącej przez x - 47, wyznaczonej przez 2 przecinające się, lub równoległe proste - 48

rzuty prostej, leżącej w danej płaszczyź-
nie - 50, proste główne płaszczyzny - 54
rzuty punktu leżącego w danej pł. - 56
linja przecięcia 2-ch płaszczyzn - 58, płasz-
czyzny równoległe - 64, prosta ⊥-ła do płasz.
- 65, przebicie płaszczyzny przez prostą - 70
odwzorowanie płaszczyzny przy pomocy 2-ch
prostych - 72, prosta - 73 i punkt - 75, leżą-
ce w płaszcz. danej, przebicie płaszcz. przez
prostą - 76, linja przecięcia 2-ch płaszczyzn
- 79, kierunki śladów - 81, prosta ⊥-ła do
płaszczyzny - 82.

§ 7. Zadania miarowe 83-106
określenie - 83, wielkość prawdziwa: odcinka - 84
kąta nachylenia prostej do P - 88, figury, leżą-
cej w pł. ⊥-łej do P - 90, kład punktu danego
przez 2 rzuty i 1 ślad płaszcz. - 93, rzuty punk-
tu danego przez jego kład i 2 ślady pł. - 95
kąt między śladami - 97, kład punktu danego
przez 1 rzut i 2 ślady płaszcz. - 99, kład
figury, danej przez 1 rzut i 2 ślady płasz. - 100
powinowactwo gieometryczne - 103

§ 8. Rzuty wielościanów 106-140
wypukłość - 106 kontur widzialny - 107, rzuty

ostrosłupa foremnego - 107 ,rzuty 6-ścianu - 109 ,przecięcie wielościanu:płaszczyzną ⊥ -łą do - P - 110 ,jakąkolwiek płaszcz. - 112, zmiana płaszczyzn rzutów - 114 ,przebicie wielościanu przez prostą - 117 ,rozwinięcie bocznej powierzchni graniastosłupa - 126, kolineacja środkowa - 131, rozwinięcie bocznej powierzchni ostrosłupa - 132, przenikanie:2-ch graniastosłupów - 135 współosiowych graniastosłupa i ostrosłupa - 138

§ 9. Rzuty koła 140-149

rzut prostokątny koła - 140, elipsa wykreślona jako rzut koła - 144, styczna do elipsy w danym jej punkcie - 145, wykreślenie elipsy przy pomocy 2-ch kół współśrodkowych - 148

§ 10. Stożek 149-175

określenie - 149, rzuty stożka o kierownicy w P-149 rzuty punktów powierzchni stożkowej-151,płaszczyzna styczna do stożka - 152, rzuty stożka o kierownicy w jakiejkolwiek płaszcz.- 156, przecięcie stożka płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek - 158, przebicie stożka przez prostą - 159, przecięcie stożka płaszczyzną,nieprzechodzącą przez wierzchołek - 161, sposób wykreślenia elipsy,danej przez

ogniska i oś wielką - 167, wyznaczenie punktu styczności prostej do elipsy - 165, sposób wykreśl.elipsy oparty na własnościach krzywej ogniskowych - 170 styczna do elipsy, poprowadzona z punktu zewnętrznego - 172, styczna do elipsy, poprowadzona w danym kierunku - 174.

-------+++++++------