ROZDZIAŁ IV.

TEORJA RÓWNOWAGI EKONOMICZNEJ.

1. Pojęcie równowagi ekonomicznej.

Pojęcie równowagi ekonomicznej, chociaż dosyć trudne do ścisłego określenia, nie wywoła jednak zapewne nieporozumień. Każdy zdaje sobie sprawę z tego, że nie ma się tu na myśli zupełnego braku zmian, bezwzględnej nieruchomości. Życie gospodarcze polega zasadniczo na wytwarzaniu, wymianie, spożywaniu, towarów lub usług, to też stan ekonomiczny jest określony w najelementarniejszy sposób przez to, że pewna ilość każdej rzeczy zostaje wytwarzaną, wymienianą, spożywaną w ciągu jednostki czasu ([1]).

([1]) Oczywistem jest, że te procesy zachodzą z przerwami — jeżeli jednak rozważamy całe społeczeństwo, możemy je uważać za ciągłe. Może nam być wygodnem dla rozumowań matematycznych przenieść tę ciągłość i na zjawiska indywidualne. Rozumowanie, podobne jak na str. 87, wykaże nam, że mamy prawo to uczynić.

Stan taki utrzymuje się, jeżeli się nie zmieniają rzeczone ilości. Możemy więc określić równowagę ekonomiczną, jako stan, któryby się utrzymywał nieskończenie, gdyby nie zachodziły zmiany w pierwiastkach życia gospodarczego (ilość ludności, usposobienia, warunki produkcji i t. d.). Utrzymywałby się on dlatego, że zmiany możliwe sprzeczne są z życzeniami tych, którzy mogliby je wywołać, a zmiany pożądane nie są pozwolone przez warunki ekonomiczne. Dopóki równowaga ekonomiczna nie jest osiągniętą, zmiany ostatniego rodzaju mogą zachodzić; wynika stąd, że siły ekonomiczne dążą zawsze ku powyżej wymienionemu stanowi równowagi ([1]).

Zauważyliśmy już ([2]), że podobny stan nie może się nigdy urzeczywistnić; trzebaby było dla tego, aby ludzie mogli natychmiastowo dostosowywać swe czynności do zmian ekonomicznych; ponieważ zaś takie dostosowanie się jest zawsze bardzo wolnem, równowaga jest zawsze naruszoną, zanim zostanie osiągniętą. A jednak

---

([1]) Naukowe pojęcie równowagi, rozważane tutaj, nie ma naturalnie nic wspólnego z koncepcją równowagi czynników społecznych, którą niektórzy socjologowie zalecają społeczeństwu, jako ideał do osiągnięcia. U nas jest to pojęcie określone, wyraz rzeczywistych dążeń — tam jest to dosyć mgliste wypowiedzenie życzeń, mówiące, że dla dobra społeczeństwa nie należy dopuszczać, aby jeden z czynników społecznych miał bezwzględną przewagę nad innymi. Dwa te pojęcia równowagi nie są wcale sprzeczne ze sobą; nie mają wogóle, oprócz nazwy, żadnych punktów stycznych.

([2]) Wstęp, str. 17.

żadna teorja ekonomiczna nie mogła się obejść bez tego pojęcia.

Są jednak głębokie różnice w naukowem znaczeniu tegoż pojęcia u dawnych ekonomistów i w teorji, którą mamy tu badać. Pierwsi nie badali warunków, które muszą być wypełnione, aby równowaga mogła być osiągniętą; wprost przypuszczali, że są już zgóry wypełnione, i badali tylko jakiś poszczególny stosunek, istniejący w chwili równowagi. Ostatnia była dla nich wypadkiem normalnym, przeciętnym, w którym okoliczności przypadkowe, mogące nas odeń oddalić w tym lub tamtym kierunku, wzajemnie się neutralizują. A za okoliczności przypadkowe uważali oni naogół wszystkie czynniki, których nie brali pod uwagę.

Metoda taka ma wielkie wady. Daje ona naogół rezultaty logicznie nieścisłe, przywiązuje przesadne znaczenie pewnemu stosunkowi, nie ważniejszemu od innych, nie pozwala wreszcie widzieć związku rozmaitych stosunków pomiędzy sobą i z całokształtem zjawisk ekonomicznych.

Dla teorji zaś matematycznej równowaga polega właśnie na całokształcie stosunków współzależności wielkości ekonomicznych. Teorja ta stanowi naukowe rozwinięcie myśli napozór prostej i pospolitej, którą wyrazimy w sposób przybliżony (nie można wyrazić jej ściśle bez pomocy pojęć matematycznych) jak następuje: ceny towarów i ich ilości wytworzone i spożyte, dochodzą do wysokości niezbędnych, aby z jednej strony zostały zaspokojone potrzeby spożywców, w zależności od ich środków, z drugiej zaś dostarczyciele materjałów i usług produkcyjnych otrzymali wynagrodzenie, któreby ich skłoniło do zaofiarowania właśnie potrzebnych ilości. Wszystkie ceny i ilości są uważane za system wielkości wzajemnie działających jedne na drugie. Teorja stara się wyrazić w szeregu równań całokształt warunków, które przypuszcza równowaga tego systemu.

Stosunki zachodzące w chwili równowagi urzeczywistniłyby się w przybliżeniu, gdyby pewne hypotezy teorji były słusznemi; w rzeczywistości dają nam one mniej lub więcej wierny obraz dążeń, czyli tendencji [1] życia gospodarczego. Na tem polega wartość naukowa pojęcia równowagi ekonomicznej: niepodobna nam zbadać ciągle zmieniających się stosunków rzeczywistości; wszystko, co możemy zrobić, jeżeli chcemy wprowadzić trochę porządku do chaosu zjawisk ekonomicznych, jest właściwie badać ich tendencje, mające pewien charakter stałości. Nauka

---

[1] Nie łatwem jest określić, szczególnie zaś ściśle ograniczyć, to pojęcie. Trzeba wystrzegać się pomieszania tendencji teoretycznych, o których mówimy, z dążeniami rozwoju gospodarczego. Pierwsze zawsze mają miejsce, kiedy są dane pierwiastki systemu szukającego równowagi. Drugie znajdują się tylko, o ile przypuścimy regularne zmiany tych pierwiastków; nie mają więc one tak silnie zaznaczonego charakteru powszechności i konieczności, jak poprzednie. Ostatnia okoliczność pozwala nam właśnie (a nawet zmusza nas) do rozdzielenia w teorji tych dwóch grup tendencji, które w praktyce mogą często krzyżować się i zlewać (porówn. niżej, Rozdz. V, 2 i Rozdz. VI, 1).

o równowadze daje nam najważniejszą część tego badania, uczy nas ona mianowicie jakie tendencje istnieją i nawet, do pewnego stopnia, z jaką siłą się przejawiają. Jest ona niezbędną podstawą do studjów nad innem zagadnieniem: w jaki sposób dążenia te działają, rozwijają się, zmieniają, zagadnienia, które możemy nazwać dynamicznem ([1]).

([1]) Powyższy wykład może nasunąć myśl, że stan równowagi wyraża zawsze dążenia ekonomiczne. Dzieje się tak naogół, jeśli przypuścimy, że pierwiastki (warunki zadania) pozostają bez zmiany. Jeżeli te pierwiastki mogą zmieniać się, możemy poszukiwać warunków ich równowagi, ale te ostatnie nie odpowiadają zwykle żadnym rzeczywistym dążeniom, równowaga tego rodzaju nie różni się więc niczem od innego poszczególnego wypadku. Studja nad nią mogą czasami przedstawiać wartość naukową, np. gdy jest to jedyny wypadek pewnej kategorji zjawisk, nadający się do ścisłego zbadania. Ale są to oczywiście studja drugorzędnego znaczenia w porównaniu z temi, gdzie równowaga jest idealnym urzeczywistnieniem dążeń gospodarczych.

Drugim ciekawym wypadkiem jest równowaga niestała; nie mówimy tutaj o równowadze często naruszanej, wskutek zmiany pierwiastków systemu — w tem znaczeniu równowaga ekonomiczna byłaby zawsze bardzo niestałą. Powiemy, że system wielkości ekonomicznych jest w położeniu równowagi niestałej, skoro po odchyleniu się (przypadkowem) od tego położenie nie wraca doń, ale jeszcze bardziej się oddala. Taki wypadek ma miejsce, kiedy z jednej strony, zmienne wielkości osiągnęły wysokość odpowiadającą warunkom równowagi, ale jednocześnie możliwemi są jeszcze zmiany zgodne z życzeniami osób biorących udział w tranzakcjach. Równowaga niestała nie jest więc wyrazem dążeń ekonomicznych; badanie jej może być jednak użytecznem, ponieważ pozwala lepiej określić własności równowagi stałej.

Pojęcie wzajemnej zależności zjawisk ekonomicznych jest myślą przewodnią matematycznej teorji równowagi. I odwrotnie, tylko matematyczna ekonomja mogła myśl tę należycie rozwinąć, bo ona jedynie rozporządza narzędziem badania, które jej pozwala wziąć jednocześnie pod uwagę liczne pierwiastki; trudnem już jest streścić w niesymbolicznej mowie wielką ilość warunków równowagi; byłoby zupełnem niepodobieństwem posługiwać się takiem streszczeniem w dalszych rozumowaniach. Zastosowanie matematyki, które się nam dotychczas przedstawiało jako rzecz możliwa i użyteczna robi się tutaj niezbędnem. I nawet, gdyby było dowiedzionem, że z formuł charakteryzujących równowagę nie można wyprowadzić wniosków, dających się zastosować do zjawisk konkretnych (przypuszczenie, które naszem zdaniem zupełnie nie zgodnem jest z prawdą), wynikłoby z tego tylko, że niepodobna jest znaleźć teorji, któraby była jednocześnie i zupełnie prawidłową i dającą się rozwinąć; formuły te pozostałyby jednak jedynem zupełnie prawidłowem uogólnieniem tychże zjawisk konkretnych.

2. Rozwój teorji. Prace Leona Walras'a F. Y. Edgeworth'a Irvinga Fisher'a, V. Pareto.

Leon Walras dał nam pierwsze rozwiązanie całokształtu zagadnienia równowagi ekonomicznej. „Badać wymianę, powiada on (1), znaczy to

---

(1) *Eléments*, 1889, str. 20.

poszukiwać stosunków zachodzących pomiędzy wielkościami, któremi są; cena, istotna podaż, istotny popyt, ilość, użyteczność"... Widzieliśmy, jak rozwiązywał zagadnienie w najprostszym wypadku: wymiany dwóch przedmiotów pomiędzy dwiema osobami. Zagadnieniem, które się następnie nasuwa, jest problemat wymiany jakiejkolwiek ilości towarów pomiędzy wielką ilością wymieniających; jest to najogólniejszy wypadek wymiany prostej, która ma miejsce wówczas, gdy ogólne ilości przedmiotów nie podlegają zmianie podczas tranzakcji. Przejście do tego wypadku jest bardzo łatwem dla tego, kto uchwycił zasady teorji; podstawa rozumowania może być zawsze, naszem zdaniem przedstawiona w następujący sposób: ceny osiągają tę wysokość, która pozwala na ustalenie się równowagi na rynku; są one więc określone przez całokształt warunków równowagi. Walras nigdzie wyraźnie nie formułuje poprzedniego zdania; ten punkt widzenia jest nawet nieco zaciemnionym w jego wykładzie, wskutek teorji wartości, opartej na *rzadkości* przedmiotów; jest to jednak zasadniczy punkt dla zrozumienia jego rozumowań, szczególnie tych, które dotyczą teorji produkcji ([1]).

([1]) Zaznaczymy, że nazwa „twierdzenie o równowadze" (théorème de l'équilibre) jest użytą przez Walras'a dla oznaczenia jednego tylko z warunków równowagi ogólnej, a mianowicie twierdzenia o współzależności cen:

$$p_{a.b} = \frac{p_{c.a}}{p_{b\ a}} ; \ldots$$

W zagadnieniu, do którego przechodzimy, zarówno jak i w poprzedniem, chodzi o znalezienie systemu równań w liczbie odpowiadającej ilości niewiadomych. Znajdziemy taki system rozważając stosunki pomiędzy ceną, podażą i popytem. Zadanie matematyczne, które mamy rozwiązać, tak może być sformułowanem: pewna ilość osób przyniosła na rynek *m* towarów; jaka ilość każdego z tych towarów została wymienioną na każdy z innych i przy jakich cenach zachodziły tranzakcje? ([1]).

Mamy więc do znalezienia: $m\ (m-1)$ cen i $m\ (m-1)$ częściowych ilości towarów, czyli $2\ m\ (m-1)$ niewiadomych. Mamy również $2m\ (m-1)$ równań, a mianowicie: 1) $(m-1)$ formy

$$(1)\quad D_{a.b} + D_{a.c} + \ldots\ldots = D_{b.a} \cdot p_{b.a} + D_{c.a} \cdot p_{c.a} + \ldots$$

. . . .

wyrażających, że popyt całkowity na pewien przedmiot równa się sumie ilości żądanych innych przedmiotów, które się otrzymuje wzamian za pierwszy, mnożonych każda na cenę odpowiedniego towaru w pierwszym. W notowaniach Walras'a, jak łatwo się domyślić, $D_{a.b}$ oznacza: ilość *a*, którego się żąda, dając wzamian *b*; $D_{c.a}$ będzie: ilość *c*, którego się żąda, dając wzamian *a*, i t. d.). Równań tej formy jest właściwie *m*, ale jedno z nich wynika ze wszystkich innych, może więc być pominiętem.

([1]) Można łatwo zmienić szczegóły zadania, szukać np., ilości wymienionych przez każdą jednostkę i t. p.

2) $(m-1)^2$ równań formy

$$
\text{(II)}\quad
\begin{aligned}
p_{a.b} &= \frac{1}{p_{b.a}}\,;\ p_{c.b} = \frac{p_{c.a}}{p_{b.a}} \ldots\ldots \\
p_{a.c} &= \frac{1}{p_{b.a}}\,;\ p_{b.c} = \frac{p_{b.a}}{p_{c.a}} \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

. . . .

3) Wreszcie $m\ (m-1)$ równań, które nam dają częściowy popyt na każdy z towarów (to jest ilość żądaną wzamian za jeden tylko z innych) w zależności od cen, formy

$$
\text{(III)}\quad
\begin{aligned}
D_{b.a} &= F_{b.a}\,(p_{b.a},\ p_{c.a},\ p_{d.a} \ldots\ldots) \\
D_{a.b} &= F_{a.b}\,(p_{a.b},\ p_{c.b},\ p_{d.b} \ldots\ldots)
\end{aligned}
$$

. . . .

Główną cechą rozważanego wypadku jest właśnie zależność popytu od wszystkich cen, nie zaś od jednej tylko, jak przy dwu towarach.

To rozwiązanie (¹) mogłoby być uważanem za wystarczające. Lepiej jest jednak wprowadzić doń dwie zmiany; dotychczas przypuszczaliśmy, że towary się wymieniają jedne na drugie; dla każdej częściowej wymiany mamy wówczas dwie ceny i dwie ilości wymienione. Prawdopodobnie *rzadkości* (użyteczności intensywne) nie staną odrazu na jednym poziomie we wszystkich wymianach, będziemy więc mieli serję arbitraży i rów-

---

(¹) *Eléments*, 1889, str. 132—133 i 139—140.

nowaga ustali się tylko bardzo powoli [1]. W praktyce, *rzadkości* mogą osiągnąć jeden poziom tylko wówczas, gdy jeden z towarów odegrywa rolę pieniądza. Wówczas wszystkie ceny są wyrażone w tym towarze i jest ich tylko $(m-l)$; niema również częściowych, a tylko całkowite ilości wymienione. Musimy więc zmniejszyć w odpowiedni sposób liczbę naszych równań.

Powtóre, zarówno jak w wypadku, gdy mieliśmy dwa towary, autor stara się oprzeć funkcje popytu na użyteczności przedmiotów. Robi to w ten sam sposób, co uprzednio, wychodząc z twierdzenia o maximum użyteczności. Będziemy więc mieli dla osoby (1):

$$\varphi_{b.1}(q_{b.1}+y_1)=p_b\cdot\varphi_{a.1}(q_{a.1}+x_1)$$

$$\varphi_{c.1}(q_{c.1}+z_1)=p_c\,\varphi_{a.1}(q_{a.1}+x_1)$$

. . . .

ogółem $(m-l)$ równań. Ściśle biorąc, *rzadkość* każdego przedmiotu jest funkcją nietylko ilości tego przedmiotu, ale i wszystkich posiadanych:

$$\varphi(q_{b.1}+y_1\,,\ q_{a.1}+x_1\,,\ q_{c.1}+z_1,\ldots\ldots)$$

[1] Schumpeter (*Das Wesen und der Hauptinhalt der Theoretischen Nationaloekonomie*, str. 273—5) wywnioskował z tych faktów logiczną konieczność pieniądza, określonego jako każdy przedmiot, który się nabywa nie dla jego użyteczności, ale w celu dalszej wymiany. Naszem zdaniem, arbitraże mogą mieć miejsce i bez udziału takiego przedmiotu: nabywa się towar *a* wzamian za *b*, dopóki to jest korzystnem; następnie, o ile się widzi, że przy istniejącej cenie korzystną jest wymiana *a* na *c*, przystępuje się do niej i t. d. Niema tutaj logicznej konieczności wprowadzenia pojęcia pieniędza.

ale wzięcie pod uwagę tej okoliczności nie zmieniłoby ogólnej formy analitycznego [1] rozwiązania danego przez Walras'a.

Mamy oprócz tego równanie

$$x_1 + y_1 p_b + z_1 p_c + \ldots\ldots = O$$

które można nazwać równaniem bilansu jednostki, a które wyraża równoważność oddanych i otrzymanych ilości towarów. Rozwiązując te równania w stosunku do x_1, y_1, $z_1 \ldots\ldots$ otrzymamy:

$$y_1 = F_{b.1}(p_b\,,\ p_c\,,\ \ldots\ldots)$$
$$z_1 = F_{c.1}(p_b\,,\ p_c\,,\ \ldots\ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 = -(yp_b + z_1 p_c\ \ldots\ldots)$$

to jest popyt lub podaż (ta ostatnia zawsze uważana za ujemny popyt) wszystkich towarów ze strony jednostki (1). Dodając ilości żądane lub zaofiarowane przez wszystkie jednostki i pisząc

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = X$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = Y$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

otrzymamy

$$\text{(IV)} \quad \begin{aligned} Y &= F_b\,(p_b\,,\ p_c\,,\ \ldots\ldots) = O \\ Z &= F_c\,(p_b\,,\ p_c\,,\ \ldots\ldots) = O \end{aligned}$$

(oczywistem bowiem jest, że istotny popyt całkowity każdego towaru musi się równać istotnej

---

[1] Przeciwnie rozwiązanie geometryczne Walras'a musi z tego powodu być odrzuconem. (*Eléments*, 1900, 1—szy annexe).

podaży, ponieważ zaś ma odmienny znak, suma ich musi się równać (O). Mogłoby się wydawać, że równań (IV) jest *m*, ale można dowieść, że jedno z nich, np.

$$X = F_a(p_b, p_c \ldots\ldots) = O$$

które można też napisać

$$X = -(Yp_b + Zp_c + \ldots\ldots) = O$$

wynika ze wszystkich innych. Dlatego też opuściliśmy je. Pozostaje nam *(m—1)* równań. Równania (IV) zastępują poprzedni system. „Tak więc, kończy autor (¹), określiłyby się matematycznie (*m—1*) cen (*m—1*) towarów w *m* — tym, wziętym za pieniądz, przez potrójny warunek: 1) aby każdy z wymieniających otrzymywał największe możliwe zadowolenie swych potrzeb, jakoże stosunki *rzadkości* muszą być proporcjonalne do cen; 2) aby każdy otrzymywał w stosunku do tego co daje, lub dawał w stosunku do tego, co otrzymuje, przyczem dla każdego towaru jest tylko jedna cena, ta, przy której istotna podaż całkowita równa się istotnemu całkowitemu popytowi; 3) aby nie było już miejsca dla dalszych arbitraży".

Zbadajmy nieco bliżej pierwszy warunek. Widzieliśmy przed chwilą, że można określić równowagę ekonomiczną, rozważając tylko funkcje podaży i popytu i nie wprowadzając wcale pojęć zadowolenia lub użyteczności. Ostatnie mają

(¹) *Eléments*, 1889, str. 147.

znaczenie, ponieważ, jak przypuszczamy, akreślają powyższe funkcje: nie trzeba jednak zapominać, iż w zasadzie naszego rozumowania leży nie dająca się dowieść hypoteza, że zadowolenie (użyteczność) może być mierzonem. Przypuśćmy teraz, że moglibyśmy poznać z doświadczenia formę tych funkcji, podczas gdy rachunek użyteczności nie mógłby nam jej dać. W takim razie korzystnemby było badać równowagę ekonomiczną, wychodząc wprost z tych empirycznych funkcji i zostawiając narazie bez uwagi ich stosunki z użytecznością. W rzeczywistości doświadczenie nic prawie nam nie mówi o formie funkcji podaży i popytu; dowiemy się może więcej badając użyteczność; w takim razie powinniśmy to zrobić. Trzeba jednak pamiętać, że hypoteza hedonistyczna, na której opiera się teorja użyteczności krańcowej, nie jest niezbędną dla teorji równowagi ekonomicznej. Ta ostatnia mogłaby doskonale istnieć, gdybyśmy przypuścili, że ludzie nie dążą do największego zadowolenia, a kierują się jakąś inną zasadą, bylebyśmy mogli, wychodząc z tej zasady, otrzymać funkcje podaży i popytu formy

$$f_b\,(p_b\,,\ p_c\,,\ \ldots .) = 0$$

Oczywistem jest zresztą, że, aby taka teorja, mogła nam tłumaczyć zjawiska ekonomiczne, zasada, o której mowa, musiałaby być rzeczywiście główną dźwignią naszych czynności, a główne przynajmniej cechy funkcji musiałyby nam być znanemi; ale narazie mowa tylko o możliwości teoretycznej.

Względy, które skłoniły Walras'a do wprowadzenia pojęcia użyteczności, są prawdopodobnie następujące:

1) Otrzymuje się w ten sposób przyczynę wartości.

2) Doprowadza się analizę ekonomiczną, aż do ostatnich czynników, dostępnych naszemu badaniu.

3) Tłómaczy się formę funkcji podaży i popytu i otrzymuje się o nich wiadomości, których nie daje doświadczenie.

4) Ma się możność dowiedzenia, że ilość równań jest dokładnie tą samą, co i ilość niewiadomych. Rzeczywiście, z chwilą kiedy się przyjmuje, że użyteczność towarów odegrywa jakąś rolę w wymianie, trzeba wyjaśnić stosunki jej do funkcji podaży i popytu; inaczej nie wiemy, czy obok wymienionych warunków niema jeszcze innych, którym nasz system musi również zadośćuczynić — w takim zaś razie moglibyśmy mieć zadużo równań.

5) Wprowadza się pierwiastek, który pozwoli sądzić o wartości rezultatów tranzakcji ekonomicznych.

Pierwszy z tych względów powinien być odrzuconym; ostatni może być zachowanym tylko z nadzwyczajną ostrożnością. Zapewne, jest bardzo pożądanem, aby nasza nauka mogła nam dawać jak najwięcej wskazówek praktycznych; nie powinniśmy jednak przepuszczać w tym celu najlżejszej nawet nieścisłości. Twierdzenia ekonomji abstrakcyjnej nie mogą być żywcem przeniesione do praktyki; chcąc je tam gwałtem zastosować, narażamy się na poważne błędy; Walras, między innymi, nie zawsze umiał ich uniknąć. Co zaś do innych racji, to są one uzasadnione, ale zobaczymy, że można mieć te same korzyści, rozważając rzecz z innego punktu widzenia.

* * *

Ważnym postępem było ujęcie użyteczności pewnej rzeczy jako funkcję, nietylko jej ilości, ale ilości i innych przedmiotów przez jednostkę posiadanych. Po raz pierwszy zostało to dokonanem przez prof. F. Y. Edgeworth'a w jego pracy *Mathematical Psychics* (1); przed nim rozważano tylko poszczególne wypadki tej zależności — przedmioty dopełniające się i współzawodniczące (2). Edgeworth uogólnił te pojęcia i nadał im bardzo ładną formę matematyczną. Nazwijmy x, y, ilości dwuch przedmiotów posiadanych przez jednostkę; funkcja $P = F(x, y)$ wyraża całkowitą użyteczność, którą dostarczają swemu właścicielowi; częściowe pochodne:

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$$

dają nam stopnie użyteczności obu przedmiotów; łatwo zobaczyć, że każda z nich może być jed-

---

(1) Londyn, 1884.

(2) Już Gossen, a potem Menger w *Grundsätze* etc.

nocześnie funkcją x i y. Jasnem jest również że nie można mówić naogół o użyteczności x lub y, niezależnej od całego ekonomicznego systemu.

W tej samej pracy wprowadził Edgeworth bardzo ważne pojęcie „krzywej obojętności" *(indifference-curve)*, którą określa w sposób następujący: odłóżmy na osiach systemu współrzędnych ilości x i y dwuch przedmiotów. Użyteczność ich spożycia jest funkcją tych ilości i może być przedstawiona przez pionową rzędną systemu. Nazwiemy krzywą obojętności geometryczne miejsce punktów (x, y), posiadających pionową rzędną tej samej wielkości, inaczej mówiąc, odpowiadających kombinacjom które dają to samo zadowolenie. Analitycznie, równanie krzywej obojętności będzie się przedstawiało:

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy = 0$$

[gdzie jak powyżej $P = F(x, y)$].

Jak widzimy, w rozumowaniach swoich przyjmuje Edgeworth, że użyteczność może byś mierzoną; powiada to zresztą wyraźnie.

Przeciwnie, Irving Fisher dojrzał kruchość tej podstawy i starał się zaradzić jej dając użyteczności objektywne określenie; jego punkt widzenia zbliża się bardzo do teorji wyborów, ale uczony amerykański nie potrafił dać jeszcze ostatecznego rozwiązania trudności.

W drugiej części jego pracy (¹) znajdujemy

(¹) *Mathematical investigation into the theory of value and prices.* 1892.

ciekawą próbę geometrycznego określenia warunków równowagi, przypuszczając, zgodnie z Ergeworth'em, że użyteczność krańcowa pewnej rzeczy jest funkcją ilości wielu przedmiotów. Niektóre pierwiastki jego rozumowania zostały podjęte przez Pareto w tekście jego *Manuel;* nagół jednak, zdaje się, że geometryczne rozwiązanie bardziej skomplikowanych wypadków będzie zawsze niższem od analitycznego.

Vilfredo Pareto w pierwszych swych pracach (1) stoi na punkcie hypotezy hedonistycznej; traktuje użyteczność (ophélimité — tłómaczymy polskiem użyteczność, przypominając uwagę ze str. 70, raczej niż próbować sklecić na poczekaniu odpowiedniejszy termin), jako posiadającą charakter ilościowy, robiąc jednak zastrzeżenia co do istnienia funkcji użyteczności całkowitej.

Dopiero około 1900 r. uczony ten zaczyna rozwijać, naprzód w artykułach w *Giornale degli economisti,* potem w *Manuale della Economia politica* (2). i w *Manuel d'économie politique,* (3) nieco zmienionem francuskiem tłómaczeniu tejże książki, nową teorję, którą nazywa teorją wyborów i która może korzystnie zastąpić hypotezę hedonistyczną.

---

(1) *Cours d'économie politique.* Lozanna, 1896—7 i artykuły w *Giornale degli economisti, 1892—7.*

(2) Medjolan, 1906.

(3) Paryż, 1909.

3. Teorja wyborów Vilfredo Pareto [1].

Oznaczmy przez x i y ilości dwóch dóbr ekonomicznych, które są do rozporządzenia [2] pewnej jednostki. Przypuśćmy, nie wdając się we względy, które kierują jej wyborem, że jest jej obojętnem posiadać kombinacje (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) . . . . (x_n, y_n). Odłóżmy ilości x_1, x_2, x_3 . . . .

---

(1) O tym przedmiocie: *Manuel d'économie politique*, appendice, str. 539 — 557 i passim; artykuł „Economie mathématique" w *Encyclopédie des sciences mathématiques* t. I, vol. 4, str. 591 i nast.; wreszcie artykuł Boninsegni w *Giornale degli Economisti*, 1902, str. 106—134.

(2) Mówimy wyraźnie: które są do rozporządzenia, nie zaś spożyte, lub mające być spożytemi; pozwala to nam nie brać pod uwagę przedmiotów bezużytecznych lub przykrych (szkodliwych), tych *„disutilities"* i *„discomodities"* Jevons'a, ani też porządku, w którym się odbywa spożycie, ponieważ każdy ułoży ten porządek w najodpowiedniejszy dla siebie sposób. (Pareto, *Manuel*, str. 249).

Ilości dóbr ekonomicznych mogą być rozważane, już to w sposób bezwzględny, już to odniesione do pewnego okresu czasu; ostatni punkt widzenia jest prawidłowszym; to też, kiedy będziemy mówili o ilościach spożytych, wytworzonych, wymienionych etc., trzeba zawsze rozumieć: „w ciągu jednostki czasu", np. roku.

Oczywistem jest wreszcie, że w liczbie dóbr ekonomicznych, które wogóle mogą być przedmiotami lub usługami kapitałów (w najszerszem tego słowa znaczeniu, zob. V, 2,) należy pomieścić też wszystkie formy pracy (wzgl. spoczynek), usługi *kapitałów osobistych.*

na osi odciętych, a y_1, y_2, y_3 . . . . . na osi rzędnych; punkty $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$ . . . . . oznaczają kombinacje „obojętne"; powiększając ich liczbę i interpolując, otrzymamy ciągłą krzywą (fig. 4),

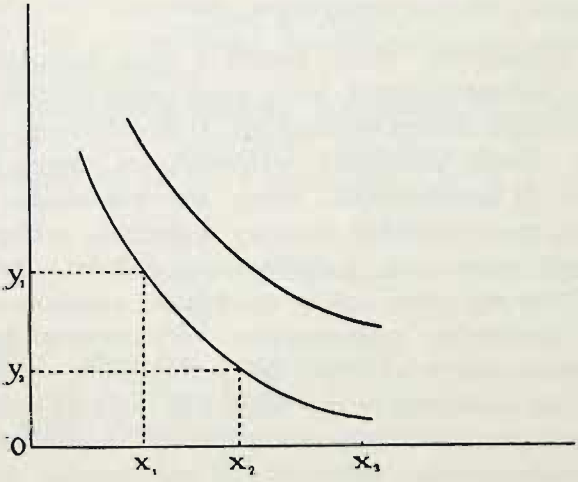

Fig. 4.

zupełnie identyczną z linją obojętności Edgeworth'a, z tą tylko różnicą, że nie robiliśmy dla niej przypuszczenia, iż użyteczność lub zadowolenie jest zasadą, która kieruje wyborem. Zachowamy nazwę linji obojętności dla tych nowych krzywych.

Zamiast tego, aby przedstawiać rzecz geometrycznie moglibyśmy szukać analitycznego stosunku, który charakteryzuje linję obojętności. Byłoby to równanie formy:

$$(1)\ f_1\ (x,\ y) = O$$

Wychodząc z innych kombinacji x_1', y_1', albo x_1'', y_1'', i t. d, znajdziemy inne linje obojętności i inne równania podobne do (1), np.:

$$f_2\ (x,'\ y')=O$$

$$f_3\ (x,''\ y'')=O.$$

Obdarzmy teraz każdą z tych linji obojętności wskaźnikiem J, który musi odpowiadać następującym dwóm warunkom: 1) kombinacje obojętne muszą posiadać wskaźnik tej samej wielkości; 2) kombinacja, którą się przekłada nad drugą, musi posiadać większy wskaźnik, niż tamta. W tych granicach wskaźniki są zupełnie dowolne. Możemy więc sobie wyobrazić nieskończoną ilość systemów wskaźników. Wybierzmy którykolwiek z nich; możemy go przedstawić geometrycznie, odkładając na pionowej rzędnej wartości wskaźników, odpowiadających kolejnym linjom obojętności. Interpolując raz jeszcze, otrzymamy równanie powierzchni:

$$(2)\ f\ (x,\ y,\ J)=O$$

Jeżeli w tym równaniu nadamy J poszczególne wartości, otrzymamy równania linji jednego poziomu, których projekcje na płaszczyznę $x\ y$ są właśnie linjami obojętności.

Możemy napisać równanie (2) w ten sposób:

$$(3)\ J=\varphi\ (x,\ y)$$

Charakteryzuje ono jeden z systemów wskaźników; inne wyprowadzą się zeń, jeśli napiszemy

$$(4)\ J=F\ [\varphi\ (x,\ y)]$$

pod warunkiem, że F jest wzrastającą funkcją φ.

Możemy rozciągnąć te uwagi na jakąkolwiek ilości przedmiotów; dla geometrycznego ich przedstawienia środki geometrji Euklidesa nie są już coprawda wystarczającemi; musielibyśmy się uciec do notowań odpowiadających wielowymiarowej przestrzeni. Analitycznie nie sprawia to żadnej różnicy.

Jeżeli przechodzimy od pewnej kombinacji: $x, y, z, \ldots\ldots$ do innej : $x + dx, y, z, \ldots\ldots,$ wskaźnik J wzrasta o wielkość:

$$(5) \quad \frac{\partial J}{\partial x} dx = F' \cdot \varphi_x \, dx$$

gdzie F' oznacza pochodną F w stosunku do $\varphi\,(x, y, z)$, a φ_x pochodną φ w stosunku do x.

Jeżeli zróżniczkujemy równanie $J = F\,[\varphi\,(x, y, z, \ldots\ldots)]$, przypuszczając, że J pozostaje stałem, otrzymamy

$$(6) \quad O = F' \cdot \varphi_x \, dx + F' \cdot \varphi_y \, dy + F' \cdot \varphi_z \, dz + \ldots$$

$$(7) \quad O = \varphi_x \, dx + \varphi_y \, dy + \varphi_z \, dz + \ldots$$

które to równanie charakteryzuje grupę *obojętnych* kombinacji ilościowych.

Możemy wyprowadzić z doświadczenia równanie równoważne z (7).

Przypuśćmy, że ktoś posiada kombinację (x, y) i że może otrzymywać jeden z tych przedmiotów wzamian za drugi w stosunku p_y (równym $-\frac{\partial x}{\partial y}$).

Jest wielkość p_y, przy której dana jednostka daje

x a żąda y; przy innej daje y, a żąda x; jest wreszcie wielkość p_y, przy której nie nastąpi żadna zmiana. Oznaczmy ją przez r_y.

Doświadczenie poucza nas, że wielkość r_y jest funkcją ilości posiadanych przedmiotów; teoretycznie, wielokrotne doświadczenia mogłyby pozwolić nam odkryć jej formę; w praktyce nie jest to możliwem; otrzymujemy jednak pewne wiadomości o formie tej funkcji.

Napiszmy więc

$$r_y = f(x, y)$$

Jeżeli damy x przyrost dodatni d_1x, to y otrzyma przyrost ujemny dy, takiej wielkości, że

$$d_1x + dy \cdot r_y = 0 \text{ (}^1\text{)}. \tag{8}$$

(¹) Na pierwszy rzut oka równanie to mogłoby wydać się identycznem z równaniem bilansu w razie dwuch towarów (zob. niżej, równ. 21), ale w rzeczywistości istnieje pomiędzy niemi tylko zewnętrzne podobieństwo. Równanie bilansu powiada nam tylko, że pewna ilość jednego z wymienionych towarów może być *warunkowo* sprowadzoną do pewnej ilości drugiego. Równanie (8) wyraża zupełną równoważność tych ilości, jako że jedna z nich może bez różnicy zastąpić drugą. Dlatego też współczynniki formy r_y, lub te, które z nich możemy wyprowadzić, mogą być uważane za *wskaźniki elementarne* wyborów; służą one nietylko po to, aby zrobić równemi wielkość dx i iloczyn $dy \cdot r_y$, ale też dają określone znaczenie ekonomiczne tej równości. Dzięki temu będziemy mogli dać potem stałej całkowania znaczenie funkcji—wskaźnika wyborów.

Matematycznie, równania (8) i (21) różnią się charakterem funkcji, które są współczynnikami dx, dy, . . . W ostat-

Również, o ile przypuścimy, że jednostka przechodzi od kombinacji x, z do $x + d_2x$, $z + dz$, będziemy mieli:

$$d_2x + dz \,.\, r_z = O$$

Wogóle jeżeli jednostka przechodzi od kombinacji $x, y, z, \ldots$ do $x+dx, y+dy, z+dz, \ldots$ mamy

$$(9) \qquad dx + r_y\, dy + r_z\, dz + \ldots\ldots = O$$

(r_y, r_z, ... są funkcjami wszystkich zmiennych x, y, z...).

Równanie to może być całkowalnem natychmiast, lub zostać niem po pomnożeniu jego członków na pewien współczynnik ([1]). W obu wypadkach może być przedstawionem pod formą:

$$\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy + \varphi_z\, dz + \ldots\ldots = O$$

identyczną z równaniem (7).

---

niem równaniu są to często wielkości stałe, ale mogłyby być też i funkcje zmiennych x, y, etc. Tylko w tym ostatnim razie są to funkcje zupełnie odmienne od r_y, r_z .....

([1]) Równanie (9) może nie być wcale całkowalnem, wówczas równanie (10) nie istnieje i niema funkcji ogólnej, której pochodnemiby były r_y, r_z.... Wypadek tego rodzaju ma miejsce, o ile porządek, w którym odbywa się spożycie, wpływa na decyzję co do wyboru. Został on zbadanym przez Pareto (*Manuel*, str. 547—557). Zaznaczmy zresztą, że równanie (9), które zawsze istnieje, wystarcza zupełnie teorji równowagi ekonomicznej.

Jeżeli przypuścimy, że wskaźniki nasze są wskaźnikami użyteczności, wynika z tego, że w omawianym wypadku nie istnieje funkcja wyrażająca użyteczność całkowitą. Tę

Całkując je otrzymamy

(10) $J = \psi\,(x, y, z, \ldots)$

lub wogóle: $J = F\,[\psi(x, y, z, \ldots)]$

J jest stałą całkowania, która przedstawiona pod formą (10) nazywa się jak wiadomo całką równania (7) lub (9). Jeżeli rozważamy wszystkie wielkości $x, y, z, \ldots$ jako niezależne zmienne, J będzie ich funkcją; jest to funkcja — wskaźnik wyborów; widzimy, że może ich być nieskończoność, bo nie wiemy jaką formę nadać $F\,(\psi)$. Jeżeli zaś nadamy J wielkość dowolną, otrzymamy równanie charakteryzujące grupę kombinacji obojętnych.

Można więc otrzymać równania, które, jak zobaczymy, wystarczają dla zbudowania teorji równowagi ekonomicznej, nie używając pojęć użyteczności, zadowolenia, etc., a rozważając jedynie empiryczny fakt obojętności wyborów. Jedynym warunkiem jest znajomość stosunków r_y, r_z (to jest granicy stosunków $\frac{\Delta' x}{\Delta y}$, $\frac{\Delta'' x}{\Delta z}$, w chwili, gdy wybór pomiędzy kombinacją $x, y, z \ldots$ i $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z, \ldots$ jest nam obojętnym) w zależności od $x, y, z \ldots$ Praktycznie jest to niemożli-

---

możliwość rozważał już Pareto w swym *Cours d'économie politique*.

O ile $x, y, z \ldots$ oznaczają ilości posiadane (a nie koniecznie spożywane) wypadek ten ma, zdaje się, bardzo małe znaczenie.

wem, ale dopóki nie mamy zamiaru wdawać się w rachunki liczbowe, wystarcza nam możliwość teoretyczna.

Postarajmy się teraz zbadać stosunek nowej teorji do kwestji użyteczności i jej miary, tudzież wogóle do hypotezy hedonistycznej. Dotychczas nie robiliśmy żadnego przypuszczenia co do zasady, która kieruje wyborem przedmiotów; wydaje się nam jednak, że nie byłoby użytecznem brać pod uwagę w naszych badaniach wszelką działalność ludzką, niezależnie od motywu, który nią kieruje. Nie byłoby to niemożliwem, najogólniejsze formuły równowagi istniałyby w dalszym ciągu, ale prawie opróżnione z treści. Nie moglibyśmy nic twierdzić o formie funkcji; wątpliwem jest nawet, czy zastąpienie funkcji nieciągłych przez ciągłe mogłoby jeszcze być uważane za uprawnione. Żeby być zdolną do wyjaśnienia zjawisk, ekonomja abstrakcyjna musi się ograniczyć do badania działalności wypływającej z jednego, określonego dążenia. Mamy dwa sposoby dla wybrania ostatniego. Możemy wyjść z doświadczenia, badać czynności normalne, przeciętne, i określić wspólne im cechy zasadnicze; to określenie odegra wówczas rolę zasady, której szukamy. Albo też możemy wybrać *a priori* naszą zasadę i rozważać tylko takie czynności, które z tego źródła wypływają; tak postępowali dotychczas zwolennicy ekonomji abstrakcyjnej. Teoretycznie, zasada powyższa mogłaby być jakąkolwiek: egoizmem, altruizmem, ascetyzmem, i t. d.; oczywistem jest jednak, że trzeba, aby była dostatecznie powszechną i natyle określoną, aby mogła służyć do wyprowadzania użytecznych wniosków.

Praktycznie, obie drogi powyższe nie są tak rozbieżne, jakby się mogło zdawać. Najlepszym sposobem znalezienia doświadczalnie określenia czynności, które mamy rozważać, jest oddać nasze doświadczenie pod kierunek apriorystycznego poglądu; wówczas, dla udowodnienia, że wzięte pod uwagę postępki są mniej więcej jedynemi, które się powtarzają normalnie, prawidłowo, tudzież dla obliczenia możliwych wyjątków, mamy połączone środki indukcji i dedukcji. Taką może być, naszem zdaniem rola hypotezy hedonistycznej w nowej teorji; znaczenie jej jest już nie pierwszorzędnem, a z czasem mogłoby jeszcze znacznie zmaleć.

Wybory przedmiotów, wynikające z dążenia do uzyskania największej użyteczności są objektywnie cechowane tem, że wolimy zawsze większą ilość użytecznego przedmiotu od mniejszej; ponieważ rozważamy przedmioty, któremi się rozporządza (nie zaś koniecznie spożywa), wszystkie mogą być uważane za użyteczne; wynika stąd, że jeśli w pewnej kombinacji ilość pewnego przedmiotu jest większą, niż w innej, ilości zaś pozostałych przedmiotów są w obu jednakowe, to wybraną będzie pierwsza kombinacja. Używając naszych notowań, powiemy, że wskaźnik wyborów wzrasta z ilością przedmiotów i wyrazimy to symbolicznie.

$$\frac{\partial J}{\partial x} > O\ ; \ \frac{\partial J}{\partial y} > O\ ; \text{ i t. d.}$$

$$(\text{albo } \varphi_x > O\ ;\ \varphi_y > O\ ;\ \ldots)$$

O ile nam wiadomo, nie było prób ścisłego zbadania do jakiego stopnia akta wyboru w ten sposób określone mogą być uważane za normalne, przeciętne, prawidłowo powtarzające się; nie wiemy nic określonego o wyjątkach. Codzienne doświadczenie, pewne, choć nie dosyć subtelne, poucza nas, że w ten sposób postępuje większość osób w ogromnej większości wypadków. Wydaje się to nam wystarczającem dla usprawiedliwienia badań, opartych na tej zasadzie, ale nie daje prawa twierdzić, że to badanie jest wystarczającą teorją wszystkich normalnych, prawidłowo powtarzających się czynności ekonomicznych. Nikt zresztą, o ile wiemy, nie posunął się aż do tego twierdzenia.

Tak więc, aby zbudować teorję równowagi ekonomicznej nie jesteśmy zmuszeni do robienia żadnej hypotezy co do motywów, które kierują naszemi decyzjami w czynnościach ekonomicznych; trzeba nam jednak zrobić pewne przypuszczenie, co do własności funkcji — wskaźników wyboru(1). Własności te są nam w pewnym stopniu dane

(1) Znajomość tych własności jest więc jedynym koniecznym warunkiem zastosowania matematyki do ekonomji; wynika stąd, że ostatnie jest zupełnie niezależnem od hypotez robionych dla wyjaśnienia tych własności.

przez doświadczenie, a dla otrzymania i wyjaśnienia ich wygodnem nam jest przyjąć wpływ wyłączny określonego czynnika psychologicznego, mianowicie (w dzisiejszym stanie naszych wiadomości) — dążenia do jak największej korzyści osobistej, czyli do największej użyteczności. Oto więc w jaki sposób pojęcie to wchodzi do nowej teorji.

Teraz, jeżeli przypuścimy, że użyteczność może być całkowicie traktowaną jako wielkość, to będzie ona jednym, ale nie jedynym, ze wskaźników wyboru. Rozmaite ilości użyteczności, odpowiadające rozmaitym kombinacjom przedmiotów, tworzyłyby jeden z wielu możliwych systemów funkcji — wskaźników. Wynika stąd, że nawet teoretycznie nie jest możliwym żaden numeryczny rachunek użyteczności (1) (nawet ze ścisłością do dowolnego stałego współczynnika).

Wszystkie inne systemy wskaźników są również w pewnym stopniu wskaźnikami użyteczności: jednocześnie wzrastają i przechodzą przez maximum: mogą też jeszcze podlegać innym wspólnym warunkom.

Jeżeli uważamy, że użyteczność nie może być traktowana jako wielkość, a posiada tylko nieokreślony charakter ilościowy, to wszystkie systemy wskaźników są w jednakowym stopniu wskaźnikami użyteczności. Rozróżnienia te nie

---

(1) Co do niektórych wyjątków, zob. Pareto, *Manuel*, str. 545 i nast.

mają wielkiego znaczenia w studjach nad równowagą; dzięki powyżej wymienionej wspólności niektórych cech wskaźników, możemy się w tych studjach posługiwać jakimbądź ich systemem. Mogłyby zato mieć znaczenie w badaniu kwestji dynamicznych.

* * *

Teorja wyborów jest ważną jako podstawa logiczna ekonomji abstrakcyjnej. Pozwala nam ona zastąpić trudną do ścisłego sformułowania pierwszą tezę tej nauki przez proste określenie matematyczne [1] i obejść się bez wszelkiej hypotezy co do miary użyteczności. Przedstawia ona wszystkie korzyści teorji hedonistycznej, a jednocześnie może się rozwijać i doskonalić: gdybyśmy kiedyś, dzięki lepszej znajomości zjawisk, mogli wziąć pod uwagę szerszą kategorję faktów, niż to robimy obecnie, przejście dokonałoby się przez prostą zmianę paru stosunków, bez przewracania wszystkich formuł równowagi ekonomicznej [2].

* * *

Otrzymaliśmy w ten sposób zadowalniające wyrażenie matematyczne dla ekonomicznych dą-

---

(1) Porównaj wstęp, str. 12.

(2) Rozumowanie str. 86 o prawidłowości zastąpienia funkcji nie ciągłych przez ciągłe może być uproszczonem dzięki wprowadzonym wyżej pojęciom. Rzeczywiście, jeżeli nie można mówić o społecznej lub przeciętnej użyteczności,

żeń. Działalność z nich wypływająca podlega pewnym ograniczeniom, które naogół dają się dosyć łatwo przedstawić pod formą matematyczną.

V. Pareto ([1]) odróżnia dwie kategorje ograniczeń; pierwszą stanowią pewne stosunki pomiędzy wielkościami ekonomicznemi, które z natury rzeczy, albo też wskutek warunków technicznych lub społecznych działalności gospodarczej, muszą mieć miejsce czy to stale, czy też w chwili równowagi; ograniczenia te oddawna już są znane

---

to doskonale można sobie przedstawić zbiorowe linje obojętności. Przypuśćmy pewną ilość osób o bardzo zbliżonych gustach; nakreślmy, jak powyżej linje obojętności, odkładając na nie wszystkie kombinacje, wybór pomiędzy któremi jest uważanym za obojętny przez całość grupy; dajmy, jak poprzednio wskaźnik każdej z tych linji; (o ile mamy *n* przedmiotów będą to oczywiście nie linje, ale wogóle funkcje obojętności).

Dzieląc ilości przedmiotów na liczbę osób, otrzymamy linję obojętności przeciętnej istoty; ponieważ wszyscy członkowie grupy mało się różnią pomiędzy sobą, gusta tej istoty idealnej mało się będą odchylały od gustów którejbądź z rzeczywistych jednostek. Postępki jednostek, które z tych usposobień wynikają, będą przedstawiały, wskutek nie ciągłości, pewne odchylenia od teoretycznych czynności przeciętnej osoby; ale jeżeli rozważamy całą grupę, to uchylenia te prawdopodobnie się zrównoważą. Wynika stąd, że możemy w naszych badaniach zastąpić rzeczywiste osoby przez istoty idealne, których uczucia i działalność podlegają ściśle prawu ciągłości, gdyż rezultaty działalności obu tych kategorji będą mniej więcej te same, o ile chodzi o całokształt zjawiska.

([1]) *Manuel*, str. 175—176. W tem dziele autor określa ograniczenia słowem „obstacles". W późniejszej swej *Economie mathématique* (str. 601, 620, 623) przyjął on termin „liasons", zapewne aby zbliżyć się do terminologji mechaniki.

ekonomistom; do drugiej kategorji należą warunki, ograniczające wybór drogi, którą można przejść z jednego stanu do drugiego: te ostatnie zostały zbadane w systematyczny sposób dopiero przez samego Pareto. Wzięcie ich pod uwagę (np., że ceny muszą być stałe dla wszystkich kolejnie sprzedanych przedmiotów, lub zmienne w pewien określony sposób, i t. d.) jest bardzo ważnem dla ogólnej teorji ekonomicznej i musi być poczytanem za ważną zasługę ekonomji matematycznej.

4. Równowaga gospodarki indywidualnej. Uwagi o ekonomicznej wartości formuł.

Przypuśćmy, że chcemy określić ilości dwuch towarów na których zatrzyma się ktoś, mający do wyboru kilka kombinacji. Ostatnie są nam dane przez równanie:

$$(11) \qquad f(x,y) = 0$$

przedstawiające *drogę*, którą ta osoba może dążyć, inaczej całokształt ograniczeń, którym jej działalność podlega. Wskaźniki (użyteczności) są nam dane przez równanie (3) $I = \varphi(x,y)$; przypuśćmy że wzrastają wzdłuż *drogi* (11), zaczynając od pewnego punktu x_0, y_0. Jednostka, o której mowa, będzie się więc posuwała wzdłuż drogi, aż do chwili gdy ta robi się styczną z linją poziomu powierzchni (3); wówczas, ponieważ wskaźnik sąsiedniego punktu jest równym temu, na którym się znajduje, osobnik nie ma żadnej racji posuwać się dalej. Łatwe rozumowanie wykazuje, że w tym punkcie musi mieć miejsce stosunek

$$(12) \qquad f_x \, \varphi_x = f_y \, \varphi_y = 0$$

który wraz z równaniem (11) daje nam dwa równania dla określenia dwuch niewiadomych.

Jeżeli zamiast dwuch, osobnik ma do wyboru m przedmiotów, całokształt ograniczeń jest nam danym przez równanie

$$(13) \qquad f(x, y, z, \ldots) = 0$$

Ze sposobu, w który określiliśmy elementarne wskaźniki [str. 134 równania (8) i (9)], oczywistem jest, że w chwili równowagi musimy mieć:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_x} \; ; \; \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\varphi_z}{\varphi_x} \; ; \text{ i t. d.}$$

W równaniu (13) wszystkie zmienne, oprócz jednej, są niezależne; możemy więc napisać:

$$f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + f_y = 0 \; ; \; f_x \frac{\partial x}{\partial z} + f_z = 0 \; ; \text{ i t. d.}$$

Kombinując te dwie grupy równań, otrzymamy:

$$(14) \quad \varphi_x = \frac{f_x}{f_y} \varphi_y = \frac{f_x}{f_z} \varphi_z = \ldots\ldots\ldots = \frac{f_x}{f_v} \varphi_v$$

Wraz z równaniem (13) mamy m równań dla określenia tyluż niewiadomych.

(Symbole f_x, f_y, $\varphi_x \ldots$ oznaczają, jak łatwo się domyślić, pochodne odpowiednich funkcji w stosunku do x, do $y, \ldots$).

Należy zauważyć, że twierdzenie o równowadze gospodarki indywidualnej polega zarówno na równaniach (13), jak i (14), nie zaś tylko na samych (14).

Równania nasze dają najogólniejszą formułę zjawiska i zawierają w sobie jako wypadki poszczególne formuły Jevons'a, Walras'a i inne podobne. Możemy te ostatnie wyprowadzić z pierwszych, dając stosunkom

$$\frac{f_x}{f_y}\ ;\ \frac{f_x}{f_z}\ ;\ .\ .\ .\ .\ .$$

znaczenie ceny x wyrażonej w y, x w z, i t. d. Możemy zresztą uogólnić pojęcie ceny i określić

$$p_y = \frac{f_y}{f_x}\ ;\ p_z = \frac{f_x}{f_z}\ ;\ .\ .\ .\ .\ .$$

* * *

Otrzymaliśmy ogólne rozwiązanie matematycznego zagadnienia równowagi gospodarki indywidualnej. Zatrzymajmy się teraz, aby zbadać jego wartość ekonomiczną; skorzystamy z tego dla zrobienia paru ogólniejszych uwag o znaczeniu dla ekonomji formuł matematycznych.

Równania (13) - (14) mówią nam przedewszystkiem, że rezultat (mianowicie ilości rozmaitych przedmiotów, które wybiera osobnik) określonym jest jednoznacznie przez warunki, które, jak przypuszczamy, muszą być wypełnione; warunki te są więc wystarczające; wszystkie inne, którym zjawisko musiałoby podlegać, mogą być tylko poszczególną formą tych pierwszych. W rozważanym wypadku okoliczność ta jest prawie oczywistą, ale w bardziej skomplikowanych zagadnieniach, do których przejdziemy, trudnemby było twierdzić bez pomocy rozumowania matematycznego, że tak jest. To też możliwość udowodnienia, że pewien rezultat jest określonym jednoznacznie i wyjaśnienia warunków, w których to ma miejsce, musi być poczytywaną za poważną usługę, którą matematyka oddaje ekonomji (1).

Pomimo tego, wydaje się nam, że wartości formuł ekonomicznych należy szukać głównie w ich zawartości, nie zaś w kwestjach formalnych. Pod tym względem formuły przedstawiają podwójną wyższość nad zwyczajnem, słownem, wypowiedzeniem (2) warunku równowagi.

1) Wypowiadają one warunki, które muszą być wypełnione, aby był także wypełnionym

(1) Należy się jednak zastrzedz przed możliwem nieporozumieniem: Okoliczność, że rezultat jest określonym w pewnych warunkach, nie mówi nam nic a nic o słuszności samych tych warunków.

(2) To ostatnie, zresztą, byłoby bardzo nieokreślonem. Stojąc ściśle na stanowisku teorji wyborów, moglibyśmy tylko powiedzieć, że każdy, biorąc pod uwagę warunki, w których może otrzymywać różne przedmioty, określa ich ilości w sposób dla siebie najodpowiedniejszy. Coś bardziej wyraźnego możemy otrzymać tylko robiąc jakieś przypuszczenie co do motywów, kierujących jego decyzją: tak właśnie robiła teorja użyteczności krańcowej, która, jak widzieliśmy, może się ostatecznie obejść bez pomocy matematyki.

pierwszy, zasadniczy; 2) przedstawiają one rozwinięcie punktu wyjścia i mogą służyć do dalszych wniosków.

Zbadajmy to bliżej.

Formuły (11)-(12) lub (13)-(14) wypowiadają w sposób określony warunki równowagi (indywidualnej); mówią one wyraźnie to, co zasadniczy warunek zawiera tylko *implicite*; przedstawiają one więc uogólnienie stosunków, które mają miejsce w chwili równowagi. Na tem polega ich wartość naukowa. Aby ją ocenić, musimy zapytać siebie: 1) czy wyrażają one wszystkie obchodzące nas w danym wypadku stosunki? 2) czy dają się one rozwinąć?

Weźmijmy dla porównania przykład z mechaniki, ten sam, który cytuje Pareto. Przypuśćmy ważki punkt, znajdujący się na powierzchni wklęsłej i orjentowanej w dół, której formuła jest $J=\varphi(x, y)$, przyczem J oznacza wysokość poniżej poziomej płaszczyzny xy; punkt ten może dążyć drogą, której projekcja na tę że płaszczyznę ma za równanie $f(x, y)=O$. Równania identyczne z (11) i (12) określą punkt, gdzie ma miejsce równowaga. Na razie wiedzieliśmy, że na zasadzie prawa ciężkości punkt nasz będzie zniżał się, aż do chwili, kiedy droga jego jest styczną z linją poziomu; równania powyższe określają dokładniej ten warunek, dają nam one ogólną formułę zjawisk (położenia), mających miejsce w chwili równowagi; ale tu jest koniec uogólnień, do których możemy dojść, wychodząc z powyższych przesłanek; ponieważ powierzchnia i droga mogą być jakiemikolwiek, wszystkie warunki, które muszą być niezmiennie wypełnione, są najzupełniej scharakteryzowane przez równania (11)-(12). W zagadnieniu równowagi ekonomicznej rzecz może się przedstawiać nieco inaczej. Funkcje $J = \varphi(x, y, z, \ldots\ldots)$ i $f(x, y, z \ldots\ldots) = O$ nie są jakiekolwiek; są one określone przez całokształt warunków psychologicznych, społecznych, technicznych życia ekonomicznego. Mogą więc posiadać pewne ogólne własności, które, wyrażone w formie jawnej, pokazałyby nam, że istnieją jeszcze inne stosunki pomiędzy badanemi wielkościami. Tak np. z tego, że φ_x i φ_y są zawsze dodatnie, wynika, że f_x i f_y muszą mieć zawsze ten sam znak.

Wiemy dotychczas bardzo mało o ogólnych własnościach funkcji takich jak (3) lub (11). Doświadczenie tylko mogłoby poinformować nas o nich, ale odpowiednie obserwacje są niezmiernie trudnemi. Na razie nie możemy więc twierdzić, że równania (13)-(14) uogólniają wszystkie stosunki, które niezmiennie muszą mieć miejsce w chwili równowagi gospodarki indywidualnej. W każdym razie przedstawiają one bardziej ogólne twierdzenia, niż te, któreby można było otrzymać bez pomocy matematyki.

Wartość naukowa pewnego twierdzenia nie zależy wyłącznie od jego ogólności; trzeba jeszcze, aby zeń można było wyprowadzić twierdzenia mniej ogólne, odpowiadające pewnym grupom zjawisk. W danym wypadku moglibyśmy się zapytać, jakie poszczególne stosunki odpowiadają punktowi równowagi, jeżeli mamy do czynienia z dobrami ekonomicznemi tej lub innej kategorji (np. dobra niezależne, dopełniające się, współzawodniczące, i t. d., przedmioty zbytku, pierwszej potrzeby, i t. d., przedmioty o spożyciu stałem lub elastycznem, i t. d., i t. d.), albo przetwarzającemi się jedne w drugie w ten lub inny sposób (np. wymiana lub produkcja, ceny stałe lub zmienne, etc.) i t. d.

Teoretycznie każdej z tych grup zjawisk odpowiadają dodatkowe własności funkcji, lub wogóle zasadniczych stosunków. Biorąc pod uwagę te dodatkowe własności przy układaniu równań takich jak (13)-(14) moglibyśmy może otrzymać nowe stosunki, charakteryzujące równowagę dla rozważanej kategorji zjawisk. Niestety, napotykamy przy określaniu dodatkowych własności funkcji te same trudności co powyżej; w wielu wypadkach jest ono w dzisiejszym stanie nauki zupełnie niemożliwem; w innych stawiamy dopiero pierwsze kroki. To też tylko wyjątkowo możemy przejść od formuł ogólnych do twierdzeń, odpowiadających poszczególnym kategorjom. Brak ten jest tem dotkliwszym, że są to właśnie twierdzenia o ograniczonym zakresie, które dotychczas stanowiły główną zawartość nauki; to też dedukcje matematyczne nie zawsze będą mogły być porównywane z twierdzeniami, otrzymanemi w inny sposób, ani służyć jako probierz wartości tych ostatnich.

Zato, ile razy będziemy mogli wyprowadzić wnioski z ogólnej formuły przez stopniowe określanie wchodzących do tej formuły wyrażeń matematycznych, korzyść naukowa tego będzie bardzo wielką, nawet gdyby wnioski, w ten sposób otrzymane, nie były zupełnie nieznanemi. Związuje się je w ten sposób z ogólniejszemi twierdzeniami, co jest jednem z głównych zadań wszelkiej nauki; daje się im ściśle udowodnienie, co również jest ważnem. Ale największą może korzyść otrzymujemy dzięki temu, że, wiedząc w jaki sposób zostały otrzymane te twierdzenia, jakie własności zostały dla tego przyznanemi funkcjom, czy wogóle stosunkom zasadniczej formuły, możemy zdać sobie sprawę ze stopnia ogólności wygłaszanych twierdzeń i z warunków, w których tylko są one słusznemi. Zdaje się, że to bardzo ważne zadanie nie mogłoby nigdy być rozwiązanem bez pomocy matematycznego rozumowania, bo ono jedynie może wziąć pod uwagę tak wielką ilość warunków, jaką przypuszcza istnienie równowagi ekonomicznej.

Powyższe rozumowania wskazują nam, między innemi, co należy myśleć o zarzucie robionym czasami ekonomji matematycznej, że się posługuje pojęciami, które mają tylko odległy związek z tem, co zajmuje ekonomistę. Wszystkie te pojęcia zostały jednak wyprowadzone z rzeczywistości; tylko w formułach ogólnych muszą one być bardzo abstrakcyjnemi, a ponieważ nie zawsze możemy przejść do twierdzeń o bardziej ograniczonym zakresie, pojęcia te pozostają abstrakcyjnemi. Fakt ten, niewątpliwie pożałowania godny, należy, jak widzimy, przypisać głównie ograniczoności naszych obecnych wiadomości, nie zaś jakiejś zasadniczej wadzie metody matematycznej.

Powyższe uwagi w części tylko stosują się do badanej przed chwilą kwestji równowagi gospodarki indywidualnej; przytoczyliśmy je jednak w tem miejscu, gdyż w dalszym ciągu będziemy się często na nie powoływali.

* * *

Zapytajmy teraz, jakiem jest miejsce naszego twierdzenia o równowadze gospodarki indywidualnej w całokształcie badań, które ekonomja poświęca temu przedmiotowi? Całkowite, nawet teoretyczne, studjum tego rodzaju musi się składać z dwóch części:

1) Zbadania, jakiemi są główne grupy zjawisk, charakteryzujące w rozmaitych wypadkach dążenia jednostki i ograniczenia, którym jej działalność podlega.

2) Zbadania skutków, które z nich wynikają dla określenia równowagi.

Oczywistem jest, że nawet w najdoskonalszym stanie teorja równowagi może podjąć się tylko drugiego zadania. Okoliczność ta powtórzy się we wszystkich wypadkach, które będziemy rozważali. Pierwiastki zagadnienia wszędzie muszą być danemi teorji równowagi, kwestje ich istnienia i zgodności z faktami — uprzednio rozstrzygniętemi niezależnie od niej. Ale, raz w posiadaniu tych pierwiastków teorja nasza, lepiej od każdej innej, pozwoli określić ich skutki.

* * *

Wartość naukowa pewnego twierdzenia zależy jeszcze od możności użycia go w dalszych rozumowaniach. Zobaczymy, mówiąc o prawach podaży i popytu i o zagadnieniu równowagi ogólnej, o ile formuły (13)-(14) stoją pod tym względem wyżej od słownego sformułowania tych samych stosunków, takiego np., jakie nam dała teorja użyteczności krańcowej.

5. Własności funkcji — wskaźników.

Powiedzieliśmy, że mało mamy dotychczas wiadomości o własnościach funkcji, które wchodzą do naszych formuł. Postaramy się tu streścić to, co wiemy o tym przedmiocie.

Co się tyczy funkcji formy $J = \varphi\,(x, y, z \ldots.)$, mamy z doświadczenia stosunki:

$$(15) \quad \varphi_x > O\ ;\ \varphi_y > O\ ;\ \varphi_z > O\ ;\ \ldots\ldots \text{(}^1\text{)}.$$

Dla znalezienia innych własności tych funkcji wygodnem nam będzie rozważać linje obojętności. W razie dwóch dóbr linja taka ma za równanie.

$$\varphi\,(x, y) = O$$

---

[1] Ponieważ przypuściliśmy, że x, y, z oznaczają ilości posiadane, możemy przyjąć, że stosunki (15) mają miejsce powszechnie. Gdyby była mowa o ilościach, które dla jakiejbądź przyczyny *muszą* być spożyte, moglibyśmy mieć

Doświadczenie poucza nas, że powiększenie ilości jednego z dóbr musi być zrównoważonem przez zmniejszenie drugiego; wynika stąd:

$$(16) \qquad \frac{dy}{dx} < 0$$

Naogół wzdłuż linji obojętności, w miarę wzrostu x trzeba coraz większej ilości odpowiedniego dobra, aby zrównoważyć pewne zmniejszenie y, skąd

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

(ujemna wielkość $\frac{dy}{dx}$ wzrasta, co znaczy, że jej bezwzględna wielkość zmniejsza się w miarę wzrostu x).

Jeżeli porównamy dwie sąsiednie linje obojętności i nazwiemy δ_y *przemienność* (variation) pochodnej $\frac{dy}{dx}$ równolegle do osi x, a δ_{y}, tę samą przemienność równolegle do osi y, będziemy mieli:

$\varphi_x = 0$, albo $\varphi_x < 0$. Matematyczna ekonomja może więc doskonale uwzględnić ten wypadek, jak to zresztą zrobili już Auspitz i Lieben i inni. Naszem zdaniem nie jest to potrzebnem.

Z nierówności (15) moglibyśmy wyprowadzić nierówność (16) i odwrotnie, gdyż wzdłuż linji obojętności

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

Zdaje się jednak, że lepiej brać stosunki te wprost z doświadczenia, które je daje bezpośrednio.

$$(17) \qquad \partial_x \frac{dy}{dx} > 0 \; ; \quad \partial_y \frac{dy}{dx} < 0$$

To znaczy, że jeżeli przechodzimy do sąsiedniej linji w miejscu, gdzie ilość x jest większą, a ilość y nie zmieniła się, ujemny stosunek $\frac{dy}{dx}$ wzrasta (bezwzględna wielkość jego spada).

Nierówności (17) nie mają powszechnej wartości; w jednym przynajmniej wypadku nie sprawdzają się one; wówczas mianowicie, gdy chodzi o dwa dobra współzawodniczące, z których jedno jest wyższem od drugiego (z dwóch dóbr, mogących jednakowo zaspokoić tę samą potrzebę, za wyższe uważa się to, które lepiej (zupełniej, przyjemniej) ją zaspakaja).

Nierówności (17) są równoważne z następującemi:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_x}{\varphi_y} > 0 \; ; \quad -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_x}{\varphi_y} < 0$$

które rozwinięte dadzą nam

$$(18) \qquad \begin{aligned} \varphi_{xx} \cdot \varphi_y - \varphi_{xy} \cdot \varphi_x &< 0 \\ \varphi_{yy} \cdot \varphi_x - \varphi_{xy} \cdot \varphi_y &< 0 \end{aligned}$$

symbole φ_{xx}, φ_{yy}, φ_{xy}, ... oznaczają drugie pochodne w stosunku do x, do y, do x i y, i t. d.

Z (18) otrzymujemy w razie, gdy $\varphi_{xy} = 0$

$$(19) \qquad \varphi_{xx} < 0 \; ; \quad \varphi_{yy} < 0 \; ; \ldots$$

Jest to druga własność wskaźników, odpowiadająca postulatowi zmniejszenia się intensywności zadowolenia (stopnia użyteczności). Teoretycy użyteczności krańcowej przypuszczali, że ten postulat ma powszechne zastosowanie; w nowszych pracach poddano w wątpliwość tę powszechność. Rachunek poucza nas o jednym tylko poszczególnym wypadku, bardzo ważnym zresztą, gdy wskaźniki elementarne pewnego przedmiotu zależą tylko od ilości tegoż przedmiotu, czyli o wypadku dóbr o niezależnym spożyciu; możnaby dodać doń wypadek dóbr współzawodniczących (dla których $\varphi_{xy} < 0$), o ile dla tych ostatnich są wypełnionemi nierówności (17). Analiza psychologiczna, w razie gdybyśmy przypuścili, że dążenie do własnej korzyści jest jedyną sprężyną czynności ekonomicznych, jest w gruncie rzeczy również niezdolną do całkowitego rozwiązania tej kwestji; co zaś do doświadczenia, to trzeba pamiętać, że nie znamy wielkości φ_x, φ_y, ale tylko ich stosunki. Gdybyśmy mogli skonstatować, że stosunek $\frac{\varphi_x}{\varphi_x}$ zmniejsza się zawsze z powiększeniem x, kiedy możemy uważać φ_y za mniej więcej stałą, moglibyśmy stąd wywnioskować, że nierówność $\varphi_{xx} < 0$ jest powszechną. Przybliżone obserwacje potwierdzają to w większości wypadków, ale spotykamy także wyjątki; ostatnie należy przeważnie przypisać nie ciągłemu przyrostowi ilości spożywanych, tudzież potrzebie rozporządzania pewną, nieraz dość znaczną, ilością początkową dobra dla otrzymania pożytecznego rezultatu. Wyjątki te są zresztą zawsze ograniczone do pewnego zakresu;

dla wszystkich przedmiotów i we wszystkich użyciach przychodzi chwila, kiedy mamy $\varphi_{xx} < O$.

Klasyfikacja dóbr ekonomicznych pod względem ich stosunku do spożycia może być bardzo łatwo dokonaną za pomocą symbolów matematycznych. Dobra niezależne, na których użyteczność nie wpływa wcale spożycie innych przedmiotów, mają

$$\varphi_{xy} = O$$

Dobra dopełniające się, które muszą być spożywane w pewnej kombinacji, aby dać użyteczny rezultat,

$$\varphi_{xy} > O.$$

Wreszcie dobra współzawodniczące:

$$\varphi_{xy} < O.$$

Najbardziej typowe wypadki tych zależności były znane już oddawna. Menger i jego szkoła obszernie je badali. Matematyka, pozwalając nam rozważać pochodne φ_x, φ_y, ... jako funkcje ilości licznych dóbr, rozszerza i uogólnia te pojęcia zależności. Dzięki niej możemy rozważać wypadki bardziej skomplikowane, które nie dają się zamknąć w powyższych kategorjach, np. przedmioty, dla których mamy, zależnie od okoliczności

$$\varphi_{xy} > O \text{ lub } \varphi_{xy} < O$$

przedmioty te nie są wyjątkowe; można ich wyliczyć niemało w codziennem naszem spożyciu; najważniejszym ich przykładem są czynniki produkcji, które do pewnego stopnia mogą siebie zastępować, ale naogół muszą współpracować, aby dać pewien użyteczny rezultat.

Aby dobrze zrozumieć tego rodzaju wypadki, koniecznem jest brać pod uwagę wzajemną zależność wszystkich części systemu ekonomicznego.

W omawianych przed chwilą wypadkach symbole dają nam system notowań, którego wygoda i prostota jaskrawo odbija od uciążliwych wypowiedzeń słownych tych samych stosunków. To też uznano za stosowne używać tych symboli nawet w pracach bardzo mało matematycznych; nie ulega jednak wątpliwości, że zastosowanie matematyki nie byłoby uprawnionem, gdyby mogło oddawać tylko tego rodzaju usługi. To też w nowszych pracach matematycznych widzimy silne dążenie do rozwijania tych elementarnych formuł.

* * *

Równanie (13)—$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0$ daje nam drogę, którą może dążyć jednostka, inaczej mówiąc — całokształt ograniczeń, którym jej działalność podlega. Ograniczenia polegają na rozmaitych technicznych i społecznych warunkach, którym podlega działalność ekonomiczna; są one niezliczone; ale jeśli stajemy na stanowisku oddzielnej jednostki, to przedstawiają się jej one w sposób bardzo prosty pod formą konieczności oddawania pewnej ilości dóbr ekonomicznych (przedmiotów posiadanych, lub własnej pracy) wzamian za inne, w proporcji niezależnej od jej woli. Jeżeli damy jak uprzednio nazwę ceny [1] stosunkom

$$\frac{f_y}{f_x}, \frac{f_z}{f_x}, \ldots.$$

możemy rozróżniać dwie główne formy równania (13).

1) Ceny są stałe (dla wszystkich kolejno wymienianych przedmiotów, lub części przedmiotu); wówczas równanie ma formę:

$$x + yp_y + zp_z + \ldots.. = C$$

lub oznaczając przez x_o, y_o, z_o,.. początkowo posiadane ilości przedmiotów:

$$(20) \quad x - x_o + p_y(y - y_o) + p_z(z - z_o) + \ldots. = O$$

jest to równanie bilansu dochodów i wydatków jednostki przy cenach stałych. Prawie wszystkie badania nad równowagą wymiany ograniczają się do tego wypadku, dlatego też równanie (20)

---

(1) Teoretycznie moglibyśmy rozważać ceny wszystkich towarów jednego w drugim, ale jest wygodniej i bardziej zgodnem z rzeczywistością, porównywać je wszystkie do jednego, wziętego za wspólną miarę wartości, spełniającego więc jedną z funkcji pieniądza.

Kiedy więc będziemy mówili o cenach towarów, trzeba będzie zawsze rozumieć, że są wyrażone wszystkie w jednym z nich, który zależnie od okoliczności będziemy określali przez litery *x*, lub *a*. Niema przytem znaczenia, czy ten towar spełnia jednocześnie inne funkcje pieniądza — t. j. służy za pośrednika przy wymianie i ubezpiecza ją (por. niżej rozdz. V, 6).

ma dla nas ważne znaczenie. Jeżeli przypuścimy że i współczynniki produkcji ([1]) są stałe, otrzymamy podobne równania dla produkcji; jest to wypadek zbadany przez Leona Walras'a.

2) Ceny zależą od ilości wymienionych x, y, z.... Wówczas dla bilansu mamy tylko równanie różniczkowe

$$(21) \qquad dx + p_y\, dy + p_z\, dz + \ldots = 0$$

Jeżeli jest ono całkowalnem (co ma zawsze miejsce gdy p_y zależy tylko od y, p_z od z, i t. d). będziemy mieli, niezależnie od porządku tranzakcji, równanie

$$f\,(x,\; y,\; z, \ldots) = 0$$

Jeżeli (21) nie jest całkowalnem, będziemy mieli takie równanie tylko o tyle, o ile określimy zgóry porządek tranzakcji.

Widzimy, że i tutaj rozmaite formy stosunków matematycznych dosyć dobrze odpowiadają klasyfikacji ekonomicznej.

6. Prawa podaży i popytu.

Zagadnienie praw podaży i popytu przedstawia się w sposób następujący: przypuśćmy osobę, której gusta (wyrażone przez funkcje—wskaźniki wyborów) i środki (wyrażone przez równanie bilansu) są nam znane; danemi są również początkowe ceny wszystkich towarów; zapytamy, jakim będzie skutek zmiany jednej z tych cen na

---

([1]) Zobacz niżej, rozdział V, 2.

ilości żądane lub zaofiarowane przez rozważaną osobę.

Dwa punkty zasługują na uwagę: 1) mówimy o ilościach istotnie żądanych lub zaofiarowanych przy pewnej cenie — pojęcie to jest najzupełniej określonem; 2) rozważamy nietylko podaż i popyt towaru, którego cena się zmienia, ale też i innych, bo naogół wszystkie zależą od wszystkich cen. Tylko metoda matematyczna pozwala traktować ten przedmiot w sposób całkowity i prawidłowy. Co prawda nie wszyscy matematycy to robili, ale nie powinno to nas dziwić, gdyż widzieliśmy, że ekonomja matematyczna tylko stopniowo dochodziła do zrozumienia potęgi swych własnych środków; pierwsze szkoły były zupełnie opanowane przez ogólny pogląd, dostosowany do niematematycznego punktu widzenia. Także i geometryczne przedstawienie stosunków mało sprzyjało rozważaniu funkcji kilku zmiennych.

Pierwszy Walras bardzo prawidłowo ujął istniejącą zależność; między innemi, dowiódł on, że nawet kiedy mamy tylko dwa towary, ilość zaofiarowana może, zaczynając od pewnego punktu, zmniejszać się wraz ze wzrostem ceny. Twierdzenie to wywołało wówczas pewną opozycję, dzisiaj jednak nie jest już poważnie kwestjonowanem ([1]). Walras, chociaż wyjaśnił ogólną za-

([1]) Możliwość zniżającej się krzywej podaży i jej skutek — kilkakrotne przecięcie krzywych podaży i popytu, były znane w tym samym czasie, niezależnie od Walras'a prof. Marshall'owi, który mówi o tem w swoim artykule: *The pure theory of foreign trade* (Zobacz niżej rozdz. VII, 1).

leżność pomiędzy funkcjami użyteczności i podaży lub popytu, nie próbował jednak zbadać bliżej zachodzące pomiędzy niemi stosunki.

Próby tego rodzaju zostały dokonane przez niemieckich uczonych Launhardt'a ([1]) i Auspitz'a i Lieben'a ([2]), którzy niestety zawsze rozważali podaż i popyt pewnego towaru jako funkcję jego jedynie ceny.

Launhardt badał głównie konsekwencje poszczególnej formy funkcji użyteczności [$f(x) = ax - a' x^2$]; badania takie mogą dać ciekawe wyniki tylko o tyle, o ile rzeczywiste funkcje użyteczności zbliżają się często do rozważanej formy. Nie ma to jednak miejsca dla funkcji rozważanej przez Launhardt'a, to też badanie jego ma tylko wartość przykładu.

Auspitz i Lieben, dzięki konstrukcji bardzo ciekawej, ale nie zupełnie odpowiadającej rzeczywistości, potrafili przedstawić krzywą popytu jako pochodną krzywej użyteczności, krzywą zaś podaży, jako pochodną krzywej kosztów produkcji. Ich rozumowania zostały ostro skrytykowane przez Walras'a; pewnem jest, że nie są one zupełnie prawidłowemi; posiadają nawet dosyć poważne wady jeżeli rozważamy ogólny wypadek ([3]). W niektórych poszczególnych wypadkach dają nam jednak dobre przybliżenia.

([1]) *Mathematische Begründung der Volkswirtschaftslehre.* Lipsk 1885.

([2]) *Untersuchungen über die Theorie des Preises.* Lipsk 1889.

([3]) Zobacz niżej, rozd. VII, 2.

Można zrobić tę samą uwagę o wielu innych uczonych, czasami bardzo wybitnych, którzy badali tę kwestję; prawie wszyscy przyjęli, że wartość pieniądza pozostaje bez zmiany, przynajmniej dla małych zmian ceny (symbolicznie $\frac{\partial m}{\partial p_y} = 0$); można dowieść [1] że przypuszczenie to, logicznie rozwinięte, doprowadza nas do wniosków niemożliwych do przyjęcia; rezultaty otrzymane w ten sposób nie mogą być więc uważane za zupełnie dokładne.

Zagadnienie praw podaży i popytu zostało po raz pierwszy zbadanem w całości, bez sztucznych uproszczeń, przez Vilfredo Pareto [2].

Nie możemy tutaj przytaczać całego jego rozumowania; podamy tylko jego przesłanki i wyniki.

Przypuśćmy, że ceny są stałe, to znaczy, że wszystkie kolejne przedmioty, lub części przedmiotu podzielnego, wymieniają się w tym samym stosunku (nie potrzeba chyba dodawać, że nie ma tu mowy o jakichś niezmiennych cenach). W tym wypadku, jak widzieliśmy, równanie bilansu ma formę (20).

Oznaczając $\varphi_x = m$ (będzie to więc wskaźnik elementarny towaru przyjętego za wspólną miarę

---

(1) P a r e t o, *Manuel*, str. 585.

(2) *Manuel*, str. 579 i następne. Zasadnicze formuły zostały już wyprowadzone przez niego w r. 1892, w *Giornale degli Economisti*.

wartości), napiszemy równania (14) w sposób następujący:

(22) $\varphi_x = m; \quad \varphi_y = p_y\, m; \quad \varphi_z = p_z\, m; \ldots\ldots$

wraz z równaniem (20):

$$x - x_0 + p_y(y - y_0) + p_z(z - z_0) + \ldots\ldots = 0$$

mamy system równań, określający równowagę gospodarki indywidualnej. Rozwiązanie tych równań dałoby nam ilości $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, i t. d., żądane lub ofiarowane przez daną osobę, przy cenach p_y, p_z, ... Jeżeli cena p_y zmieni się w p'_y, będziemy mieli nowy wypadek równowagi, określony przez te same równania, w których p_y zostało zastąpionem przez p'_y; ich rozwiązanie dałoby nam nową serję ilości $(x - x_0)$, ..., dla podaży lub popytu jednostki.

Przypuśćmy że cena wzrosła o dp. Szukajmy wartości pochodnych

$$\frac{\partial m}{\partial p_y}, \ \frac{\partial y}{\partial p_y}, \ \frac{\partial z}{\partial p_y}, \ldots\ldots$$

pod warunkiem, aby równania (20) i (22) były identycznie wypełnionemi.

Otrzymamy jako rezultat:

$$\frac{\partial m}{\partial p_y} = -\frac{(y - y_0)\,R + m.\,M_{3\cdot 1}}{M.}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = \frac{-(y - y_0) + m\left(\frac{M.\,H_{2\cdot 2}}{R.\,R_2} - \frac{M_{3\cdot 1}}{R}\right)}{M}\,.\,R_2$$

$$\frac{\partial z}{\partial p_y} = \frac{-(y - y_0) + m\left(\frac{M.\,H_{2\cdot 3}}{R.\,R_3} - \frac{M_{3\cdot 1}}{R}\right)}{M}\,.\,R_3$$

gdzie R — przedstawia wyznacznik:

$$R = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \dots \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \dots \\ \varphi_{xz} & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$R_1, R_2, R_3, \dots$ wyznaczniki, którebyśmy otrzymali zastępując pierwszą, drugą, etc. kolumny R przez $1 - p_y - p_z - \dots$, $H_{1\cdot 2}$ i wogóle $H_{i.n}$ — wyznaczniki, otrzymane wypuszczając w R pierwiastek linji *i*, kolumny *n*, wzięte ze znakiem, jaki powinneby były mieć w rozwinięciu R; M — wyznacznik:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & p_y & p_z & \dots \\ 1 & \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \dots \\ p_y & \varphi_{xy} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \dots \\ p_z & \varphi_{xz} & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

a $M_{i.n}$ etc. — wyznaczniki otrzymane z M w ten sam sposób, co $H_{i.n}$ z R.

Widzimy jak niezmiernie skomplikowanemi są formuły Pareto; co ważniejsza, niepodobna nam powiedzieć nic określonego o własnościach pochodnych $\frac{\partial m}{\partial p_y}$, $\frac{\partial y}{\partial p_y}$, ... To odpowiada rzeczywistości ekonomicznej, która, będąc wynikiem licznych i bardzo rozmaitych wpływów, rzadko tylko przedstawia proste stosunki. Jedną z korzyści zastosowania matematyki jest właśnie wykazanie komplikacji tam, gdzie się ona rzeczywiście znajduje; jednocześnie, metoda ta wskazuje nam w jakich warunkach możemy otrzymać prostsze stosunki. Tak np., mówimy stale, że podaż wzrasta, a popyt zmniejsza się ze wzrostem ceny. Wypowiedziane w sposób tak bezwzględny twierdzenie to nie jest słusznem; przynajmniej dopuszcza wyjątki, może nawet liczne. Określając dokładnie pewne warunki, otrzymujemy wypadki, w których twierdzenie to jest zupełnie ścisłem. Zdaje się, że nie ma potrzeby nastawać na wartość naukową takiej dokładności, która robi się możliwą tylko dzięki zastosowaniu matematyki.

Niestety, jakeśmy już to mówili, nie jesteśmy obecnie w stanie wyczerpać pod tym względem przedmiotu, a jest nawet wątpliwem, czy wogóle można to będzie kiedyś zrobić. W rozważanym wypadku, np., możemy, do pewnego stopnia, powiedzieć w jaki sposób będą się zmieniały popyt i podaż, kiedy przypiszemy funkcjom pewne własności; ale niepodobna nam dać ogólnego określenia wypadków, w których podaż lub popyt zmieniają się w tym samym, (względnie odwrotnym kierunku) co cena. Dalej, nawet w pierwszym razie nie umiemy określić, jakiem jest względne znaczenie rozważanego wypadku. Są to niewątpliwie poważne luki i trudno dzisiaj powiedzieć w jakiej mierze mogą zostać wypełnione.

Oto parę przykładów rezultatów, otrzymanych, robiąc dodatkowe przypuszczenia. Rozważamy dobra ekonomiczne, dla których

$$\varphi_{xy} = 0; \quad \varphi_{yz} = 0; \quad \varphi_{xz} = 0; \; . \; . \; . \; . \quad [1]$$

wówczas formuły przyjmują formę uproszczoną:

$$\frac{\partial m}{\partial p_y} = -\frac{y - y_0 + \frac{\varphi_y}{\varphi_{yy}}}{T}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} + -\frac{-(y - y_0)\, p_y + m\left(T - \frac{p_y^2}{\varphi_{yy}}\right.}{T\, \varphi_{yy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p_y} = \frac{\partial m}{\partial p_y} \cdot \frac{p_z}{\varphi_{zz}}$$

gdzie

$$T = \frac{M}{R} = \frac{1}{\varphi_{xx}} + \frac{p_y^2}{\varphi_{yy}} + \frac{p_z^2}{\varphi_{zz}} + \; . \; . \; . \; . \; .$$

Możemy mieć dwa główne wypadki:

1) Towar jest żądanym — różnica $(y - y_0)$, jest dodatnią; wówczas mamy zawsze $\frac{\partial y}{\partial p_y} < 0$, co znaczy, że popyt zmniejsza się ze wzrostem ceny. Pochodna $\frac{\partial m}{\partial p_y}$ ma zawsze ten sam znak

---

[1] Teoretycznie wypadek ten musi być bardzo rzadkim, mógłby mieć miejsce, gdybyśmy rozważali równowagę części systemu w ciągu okresu czasu, podczas którego możemy zaabstrahować od wielkiej ilości przedmiotów; znaczenie tego wypadku polega głównie na tem, że otrzymane wyniki mają wartość jeszcze i wówczas, gdy wielkości φ_{yz}, φ_{xy}, ... , chociaż nierówne 0, są bardzo małe; to zaś ostatnie przypuszczenie nie ogranicza się do wyjątków.

co i pochodna $\frac{\partial [p_y (y - y_o])}{\partial p_y}$, która, jak łatwo ujrzeć, przedstawia zmianę sumy wydanej na kupno danego towaru; przeciwnie, pochodna $\frac{\partial z}{\partial p_y}$ ma zawsze znak odmienny od $\frac{\partial m}{\partial p_y}$.

2) Towar jest zaofiarowanym i mamy $(y - y_o) < O$; w tym razie niepodobna nam ustalić znaku pochodnej $\frac{\partial y}{\partial p_y}$; za to wiemy, że $\frac{\partial m}{\partial p_y}$ jest zawsze ujemną, a $\frac{\partial z}{\partial p_y}$ — dodatnią; wreszcie mamy zawsze $\frac{\partial [p_y (y - y_o)]}{\partial p_y} > O$, co znaczy, że suma otrzymana ze sprzedaży wzrasta zawsze z podniesiem się ceny.

Te same naogół stosunki mają miejsce jeżeli, zamiast dóbr wyłącznie niezależnego spożycia, rozważamy takie, z których część jest cechowaną przez nierówności:

$$\varphi_{xy} > O \qquad \varphi_{zy} > O \; \ldots\ldots$$

ale gdybyśmy mieli produkta, dla których

$$\varphi_{yz} < O; \text{ etc.}$$

niektóre z nich mogłyby zostać odwrócone; moglibyśmy mieć np. $\frac{\partial y}{\partial p_y} > O$, gdy y jest żądanem. (1)

---

(1) Pareto *Economie mathématique*, str. 631.

Jaką jest wartość podobnych wniosków? Czy nie są one w sprzeczności ze wszystkiem, co wiemy? Zapewne, nietrudnem jest teoretycznie wyobrazić sobie wypadki, w których popyt wzrasta pomimo wzrostu ceny, teorja musi być więc zdolną do uwzględnienia ich. Ale czy mają miejsce w rzeczywistości (i w hypotezie statycznej!) inaczej jak wyjątkowo? jakiem jest ich względne znaczenie? Oto są pytania, na które nam teorja nie odpowiada. Na tym przykładzie widać doskonale jednocześnie potęgę i słabość ekonomji matematycznej. Otrzymaliśmy najogólniejszą formułę, obejmującą aż bardzo rzadkie wypadki, ale trudno nam przejść od niej do wypadków poszczególnych, trudno nawet, za jej tylko pomocą, odgraniczyć prawidło od wyjątku.

* * *

Zagadnieniem pokrewnem poprzedniemu, jest badanie ogólnych stosunków pomiędzy formami funkcji — wskaźników i formami funkcji podaży i popytu. Ta lub inna własność nadana jednym nakłada pewne warunki, które muszą być wypełnione przez drugie; rachunek może je do pewnego stopnia określić. Nie możemy tutaj wchodzić w szczegóły tego rodzaju badań; czytelnik znajdzie przykłady ich w artykule Pareto o ekonomji matematycznej. ([1]) Poszukiwania te, o ile zostaną rozwinięte, mogą oddać poważne

---

([1]) Str. 594 — 595 i 614 — 620.

usługi ekonomji politycznej. Rzeczywiście, doświadczenie codzienne mało mówi nam o własnościach powyższych funkcji; systematyczne obserwacje są prawie niemożliwemi; rachunki, o których mówimy, mogą nam pozwolić sprawdzać jedne za pomocą drugich wyniki doświadczeń urywkowych. Otwiera się tutaj obszerne i niewyzyskane jeszcze pole pracy dla ekonomji matematycznej.

* * *

Matematyka daje nam więc jedyny środek prawidłowego badania kwestji podaży i popytu. Rezultaty dotychczasowych poszukiwań nie są jeszcze zbyt wielkie, ale mamy prawo spodziewać się postępu na tej drodze, podczas gdy bez pomocy rachunku niepodobnaby nam było nigdy prawidłowo uchwycić zachodzące stosunki. Matematycy wiele błądzili i niewiele tymczasem dokonali; bądź co bądź, oni jedni zbadali kwestję w sposób ścisły i otrzymali jakiekolwiek dokładne rezultaty.