

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

BADANIA MATEMATYCZNO- EKONOMICZNE POZA OGÓLNA TEORJĄ RÓWNOWAGI.

1. Płaskie krzywe podaży i popytu. A. Marshall.

Istnieje dużo badań matematyczno-ekonomicznych poza ogólną teorią równowagi. Właściwie powinnyby były wszystkie do niej należeć, gdyż badane stosunki ilościowe mają zawsze miejsce tylko w chwili równowagi, niektórzy uczeni rozważali je jednak oddzielnie, przypuszczając mniej lub więcej wyraźnie, że inne pierwiastki pozostają niezmiennymi. Mówiliśmy już o brakach podobnej metody; zdarza się jednak, że się otrzymuje za jej pomocą wcale nieźle przybliżone rezultaty, wówczas mianowicie, gdy pominięte wpływy nie mają większego znaczenia dla badanego stosunku.

Kilku ekonomistów posługiwało się w swych badaniach płaskimi krzywymi ⁽¹⁾ podaży i popytu. Użycie płaskiej krzywej równa się przypuszczeniu, że każdej cenie odpowiada tylko jedna żądana i jedna zaofiarowana ilość towaru. Aby to było możliwem, trzeba by było, aby inne ekonomiczne wielkości albo nie wywierały wpływu na żądane i zaofiarowane ilości danego towaru, albo pozostawały bez zmiany. Obie te hipotezy są niezgodne z zasadniczymi przypuszczeniami ekonomji abstrakcyjnej; rzut oka na system ⁽²⁾ wystarcza, by to zobaczyć. Płaskie krzywe podaży i popytu nie odpowiadają więc wymaganiom ścisłej teorii; w niektórych jednak wypadkach (np. kiedy chodzi o wymianę pomiędzy t. zw. niewspółzawodniczącymi grupami, albo o wymianę towarów na usługi osobiste, lub usług pomiędzy sobą) metoda ta daje nam dobre przybliżone rezultaty; zaleca się ona swoją prostotą i łatwością, z którą się dzięki niej otrzymują wnioski.

* * *

Jest to ta sama metoda, którą się posługiwał Cournot. Jego „prawo zbytu“ jest płaską

⁽¹⁾ Mówimy tu o krzywych, gdyż geometryczne przedstawianie kwestji było prawie wyłącznie używanem w tych badaniach; uwagi nasze jednak stosują się również do badań analitycznych, w których podaż i popyt pewnego towaru są uważane za funkcje jego tylko ceny.

krzywa popytu; funkcja kosztów produkcji nie jest właściwie krzywą podaży, ale ma do niej wielkie podobieństwo, a w niektórych wypadkach mogłaby się z nią złąć zupełnie ⁽¹⁾. Znajdujemy również podobną krzywą popytu u niemieckiego ekonomisty Mangoldt'a ⁽²⁾. W nowszych czasach metoda ta zrobiła się popularną dzięki Marshall'owi, który się nią posługiwał najpierw w swych artykułach: *The pure theory of foreign trade*.—*The pure theory of domestic values* ⁽³⁾, następnie zaś w klasycznym swem dziele — *Principles of Economics* ⁽⁴⁾.

W pierwszym z wymienionych artykułów krzywe są skonstruowane w następujący sposób: Przypuśćmy dwa kraje, które wymieniają pomiędzy sobą dwa towary. Odkładamy ilości towaru (X), wywożonego przez pierwszy na osi odciętych (fig. 5), a ilości (Y), wywożonego przez drugi, na osi rzędnych. Każdej ilości y , otrzymanej przez pierwszy odpowiada ilość x , którą się on zgadza dać za nią; łącząc ze sobą wszystkie takie punkty xy otrzymamy krzywą podaży pierwszego kraju. W ten sam sposób otrzymamy krzy-

⁽¹⁾ Por. wyżej, str. 52 i 54.

⁽²⁾ *Grundriss der Volkswirtschaftslehre*. Stuttgart, 1863.

⁽³⁾ Londyn, 1878. Dzieło to nie było nigdy w handlu księgarskim i jest niezmiernie rzadkiem. O ile wiemy, jedyny dostępny dla publiczności egzemplarz znajduje się w Goldsmiths' Library w Uniwersytecie Londyńskim [call number G. 863 (3)].

⁽⁴⁾ Londyn, 1890. Piąte wydanie — 1907.

wą podaży drugiego kraju. Punkt przecięcia tych krzywych jest punktem równowagi. Cena w chwili równowagi równa się stycznej kąta, który tworzy z osią odciętych linja, łącząca punkt przecięcia z początkiem systemu współrzędnych. Krzywe są zwykle wypukłemi w stosunku do swoich osi, ale Marshall przyjmuje istnienie wyjątków; bada on także możliwość kilkakrotnego przecięcia krzy-

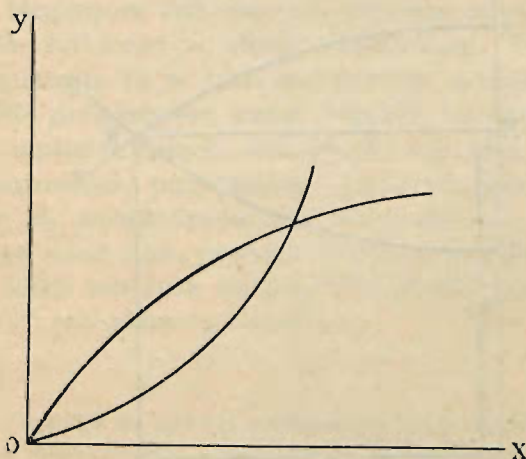


Fig. 5.

wych i warunki równowagi stałej, kwestje, które w tym samym czasie były rozważane przez Walras'a.

Gdybyśmy mieli tylko dwa produkty i dwóch wymieniających, konstrukcja ta byłaby zupełnie ścisłą, nie zaś tylko przybliżoną ⁽¹⁾; nie jest to

(¹) Ale wypadek ten nie odpowiada żadnemu rzeczy-

wypadek, rozważany przez Marshall'a: każdy z dwóch towarów przedstawia w rzeczywistości kilka innych, z którymi ma być równoważnym; następnie w każdym kraju jest on częścią całego systemu ekonomicznego. Podaż więc ich i popyt zależą od wielkości, które nie mogą być uważa-

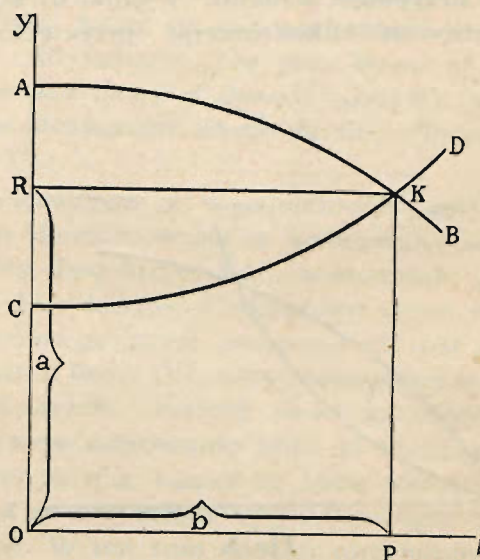


Fig. 6.

ne za niezmiennie przy zmianach wwozu i wywozu; wobec tego konstrukcja Marshall'a ma tylko wartość przybliżoną.

wistemu zjawisku i może być rozważanym tylko jako przykład, w celach dydaktycznych (np. u Pareto w *Manuel*, str. 192, fig. 17). Por. wyżej, str. 177.

W drugim artykule sposób konstrukcji krzywych jest nieco odmiennym. Odkładamy na osi rzędnych ceny, wyrażone w pieniądzach, a na osi odciętych odpowiadające im ilości żądane i zaofiarowane. W ten sposób otrzymujemy krzywą podaży i krzywą popytu, których przecięcie daje nam punkt równowagi, a więc cenę i ilość wymienioną.

Nazwijmy AB (fig. 6) krzywą popytu jednostki, KP cenę w chwili równowagi. Marshall przypuszcza, że w tych warunkach powierzchnia OAKP przedstawia sumę, którąby ta osoba wolała zapłacić raczej, niż obejść się bez ilości *b* rozważanego przedmiotu; ale otrzymuje ją za sumę *ab*, przedstawianą przez prostokąt ORKP, osiąga więc zysk, przedstawiony przez powierzchnię ARK; ten zysk nazywa Marshall „rentą spożywcę” (consumer's rent) (¹).

(¹) Kilka lat później wszczęła się żywa dysputa na temat: w jakim stopniu „consumer's rent” odpowiada osiągniętej przy kupnie czystej wygranej na użyteczności? W kwestji tej zabierali głos: Walras, Auspitz i Lieben (*Revue d'Economie politique*, 1889), profesorowie Nicholson i Edgeworth i Enrico Barone (*Economic Journal*, 1893 i 1894), wreszcie Pareto w swym *Cours* (str. 35 i nast.). Wyjaśnienia, dane przez niego, mogą, zdaje się, być uważane za ostateczne.

Jeżeli przyjmemy istnienie płaskiej krzywej popytu, pierwiastek „consumer's rent” odpowiadający nieskończenie małej ilości *dpb* towaru B ma za wyrażenie:

$$dV = (p - P) dp_b$$

gdzie *p* oznacza cenę, którą spożywcę gotowby był zapłacić.

Jeżeli $y = f(x)$ jest równaniem krzywej popytu, (a, b) współrzędnymi punktu równowagi, analityczne wyrażenie dla „consumer's rent” jest nam danem przez:

$$\int_0^b f(x) dx - ab$$

* * *

Diagramy, które znajdujemy w *Principles* są skonstruowane podług ostatniego wzoru. Mają one głównie za zadanie ilustrację wywodów tekstu, ale autor zaznacza parokrotnie, że uważa je za niezbędne dopełnienie słownych rozumowań. Mniejszą wagę przypisuje on sformułowaniom analitycznym, które, odesłane do dodatku w końcu książki, nie idą zwykle poza proste wy-

a P tą, którą płaci rzeczywiście. Odpowiadający mu przyrost użyteczności całkowitej wyraża się przez:

$$d\Phi = \left(1 - \frac{p}{p}\right) \varphi_b d\varphi_b$$

gdzie φ_b jest krańcowym stopniem użyteczności B.

Porównywając te dwa wyrażenia, znajdujemy:

$$dV = d\Phi \cdot \frac{1}{\varphi_a}$$

„Consumer's rent” jest więc proporcjonalną przyrostowi użyteczności, o ile ocena pieniądza pozostaje stałą. Teoretycznie warunek ten nie może być wypełnionym, ale w praktyce zbliżamy się doń często. Zato zyski rozmaitych osób nie mogą być nawet w przybliżeniu porównywane za pośrednictwem odpowiednich „consumer's rent”.

rażenie za pomocą symbolów określić i twierdzeń tekstu.

Jednem słowem, Marshall posługiwał się wszędzie konstrukcją przybliżoną, ale należy dodać, że czynił to z wielkim taktem i zręcznością. W połączeniu z innemi wybitnemi zaletami jego książki, dała ona doskonałe rezultaty i nie mało przyczyniła się do zrobienia tej książki jednym z najlepszych traktatów ekonomji. Użyteczność tego rodzaju badań nie jest kwestjonowaną przez nikogo, nawet przez najzaciętszych przeciwników zastosowania matematyki do naszej nauki. Ale można się zapytać, czy, ograniczając w ten sposób to zastosowanie, nie zostawia się na stronie najcenniejszej jego części ⁽¹⁾.

2. Auspitz i Lieben.

Płaskie krzywe leżą również w zasadzie ważnej pracy Auspitz'a i Lieben'a: *Untersuchungen über die Theorie des Preises* ⁽²⁾. Autorowie starają się rozwiązać następujące zagadnienie: o ile już

⁽¹⁾ Marshall sam robi pewne zastrzeżenia co do użyteczności zastosowania matematyki do ekonomji; przesadzono może nieco znaczenie jego zdania o „nieskończonych transpozycjach w formuły teorii ekonomicznych“ (*Principles*, wstęp) zdaje się jednak, że wielki ekonomista rzeczywiście niedocenia użyteczności matematyki, jako środka dokładnego określenia myśli współzależności wielkości ekonomicznych (którą można tylko mgliście wyobrazić sobie bez pomocy matematyki) i wyrażenia całokształtu stosunków, które ta myśl zawiera.

⁽²⁾ Lipsk, 1889.

istnieje prawidłowo funkcjonująca wymiana przy pośrednictwie pieniędzy, od czego zależą cena i ilość spożyta pewnego towaru, przypuszczając, że ceny i ilości innych towarów a także wartość pieniądza są nam dane i pozostają bez zmiany? Rozwiązują to zagadnienie mówiąc, że cena musi być równą jednocześnie użyteczności ostatniej spożytej i kosztom produkcji ostatniej wytworzonej jednostki danego towaru i, że, ponieważ ta równość może się zdarzyć tylko raz jeden skutek formy krzywych podaży i popytu, ilość wymieniona jest przez to samo określona. Dla udowodnienia tych twierdzeń posługują się oni konstrukcją geometryczną, którą postaraliśmy się oddać w figurze 7 i którą za chwilę wyjaśnimy. W konstrukcji tej i rozumowaniach przyjęli oni, że użyteczność każdej cząstki towaru ma za miarę sumę pieniędzy, którąby się wolało zapłacić za nią, raczej niż się zupełnie bez niej obejść; zrobili nawet sumę otrzymanych w ten sposób użyteczności indywidualnych dla obliczenia użyteczności społecznej. Nie ma potrzeby powtarzać, że taki sposób postępowania nie jest prawidłowym: już dla jednej i tej samej osoby użyteczność jest tylko wówczas proporcjonalną do ceny (maksymalnej), kiedy ocena pieniądza pozostaje niezmienną. Co zaś do użyteczności różnych osób, to są one wogóle niewspółmiernymi. Suma pieniędzy nic nam nie mówi o rzeczywistej użyteczności osiągniętej przez społeczeństwo ⁽¹⁾.

(1) Pareto w swoich badaniach przyjmuje wprawdzie (i to po dokładnem omówieniu terminów), że maximum uży-

Zobaczmy teraz konstrukcję geometryczną. Odkładamy na osi odciętych (fig. 7)⁽¹⁾ ilości (wytworzone lub spożyte) rozważanego towaru, a na osi rzędnych sumy pieniędzy. Każdej wytworzonej ilości x odpowiada suma y , którą jej produkcja kosztowała. Łącząc ze sobą szczyty otrzymanych w ten sposób rzędnych, będziemy mieli pierwszą krzywą — krzywą kosztów produkcji

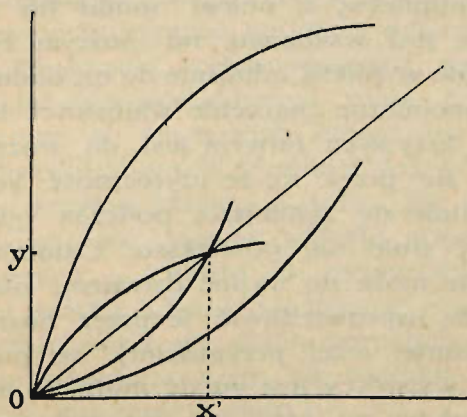


fig. 7.

(Kostenkurve); podług autorów posiada ona następujące własności: 1) zaczyna się w punkcie O;

teczności odpowiada maximum wartości w pieniądzach wytworzonych dóbr, ale nigdzie nie próbuje mierzyć jednej z tych wielkości za pomocą drugiej.

⁽¹⁾ Ma ona na celu dać przybliżone pojęcie o konstrukcji Auspitz'a i Lieben'a. Krzywe na naszym rysunku nie oddają dokładnie stosunków ilościowych opisanych w tekście.

2) stale się podnosi; 3) jest stale wklęsłą odnośnie do osi dodatnich y ; 4) zbliża się asymptotycznie do pionowej linii prostej.

Każdej spożytej ilości x odpowiada suma y , przedstawiająca całkowitą użyteczność tej ilości. W ten sam sposób, co poprzednio, otrzymamy drugą krzywą, krzywą użyteczności (Nützlichkeitskurve), która: 1) zaczyna się w O ; 2) podnosi się najpierw, a potem opada (ta ostatnia część nie jest wskazana na naszym rysunku), 3) jest stale wypukłą, odnośnie do osi dodatnich y .

Ekonomiczne znaczenie wklęsłości lub wypukłości krzywych łatwym jest do zrozumienia. Wyraża się przez to, że użyteczność kolejnych części stale się zmniejsza, podczas gdy koszt produkcji stale się powiększa. Ostatnie przypuszczenie może się wydać dziwnem; autorowie starają się usprawiedliwić je przez następujące rozumowanie: jeżeli przypuścimy, że produkcja każdego wytwórcy jest natyle małą, że nie wywiera wpływu na cenę (co jest cechą wolnego współzawodnictwa), wytwórca ten nie zatrzyma się nigdy w takim punkcie krzywej, gdzie koszt produkcji spada; te części krzywej powinnyby były, ściśle rzecz biorąc, być uważane za nieistniejące. W pierwszym przybliżeniu, żeby nie komplikować konstrukcji, można uważać krzywą za stale wklęsłą, a przyjąc potem odpowiednią poprawkę.

Krzywe podaży i popytu łatwo się wyprawadzają z powyższych; cena, po której się ofiarowuje pewną ilość x , równa się cenie kosztu ostatniej wytworzonej jednostki; ta zaś ostatnia

równa się pochodnej $\frac{dy}{dx}$ funkcji kosztów produkcji, albo trygonometrycznej stycznej kąta, który tworzy z osią x linia prosta, styczna z krzywą kosztów w punkcie, odpowiadającym odciętej x . Suma za którą się ofiarowuje ilość x (t. j. iloczyn ceny na ilość) określa się geometrycznie w sposób następujący: prowadzi się przez początek prostą, równoległą do powyżej wymienionej stycznej z krzywą w punkcie, mającym odciętą x ; rzędna y tej prostej, odpowiadająca tej samej odciętej, da nam poszukiwaną sumę. Łącząc ze sobą szczyty, w ten sposób otrzymanych rzędnych, odpowiadających wszelkim ilościom x , mamy nową krzywą, krzywą podaży. Jak i krzywa kosztów, jest ona zawsze wklęsłą odnośnie do osi dodatnich y i zbliża się asymptotycznie do pionowej prostej. Ostatnia własność oznacza, że ilość zaofiarowana nie może wzrastać nieskończenie ze wzrostem ceny, ale spotyka granicę, poza którą jest prawie stałą.

W podobny sposób otrzymuje się z krzywej użyteczności krzywą popytu. Jak i ta ostatnia, jest ona zawsze wypukłą odnośnie do osi dodatnich y , rzędne jej wzrastają najpierw, ale wkrótce przechodzą przez maximum i zaczynają się zmniejszać.

W tych warunkach krzywe podaży i popytu mogą się spotkać tylko raz jeden; ich przecięcie daje nam punkt równowagi (x' y'); cena, przy której zachodzą transakcje, równa się stycznej kąta, który tworzy z osią x linia prosta, łącząca

punkt $(x' y')$ z początkiem, równoległa do każdej z prostych, stycznych z krzywymi użyteczności i kosztów produkcji w punktach odpowiadających odciętej x' .

Konstrukcja, którą opisaliśmy łatwo pozwala na wyprowadzenie licznych wniosków, szczególnie w kwestjach handlu międzynarodowego, monopolów, podatków, etc. Wyprowadza się też łatwo za jej pomocą twierdzenie o maximum użyteczności przy wolnem współzawodnictwie.

W taki sposób otrzymane, twierdzenie to nie ma naturalnie tego znaczenia, co twierdzenie Pareto; nie jest ono ani tak ściśle, ani tak powszechnem; dotyczy tylko transakcji nad jednym przedmiotem. Ale cena i ilość wytworzona lub spożyta pewnego towaru oddziałują na inne pierwiastki życia gospodarczego i wywierają przez to na ogólną sumę użyteczności wpływ, którego Auspitz i Lieben nie wzięli pod uwagę. To nam wyjaśnia, że mogli oni pozostawić bez uwagi jeden z warunków maximum użyteczności, ten mianowicie, aby całkowity koszt przedsiębiorstwa równał się całokształtowi uzyskanych przezeń ze sprzedaży sum.

* * *

Książka Auspitz'a i Lieben'a była przedmiotem poważnych i często uzasadnionych zarzutów. Zarzucano im utożsamienie użyteczności z ceną, przyjęcie stałe wzrastającego kosztu pro-

dukcji, pomieszanie w pojęciu wytwórcy dwóch, ekonomicznie odrębnych, osób — przedsiębiorcy i dostarczyciela usług. Szczególnie mylnem jest przypuszczenie, że wartość pieniądza może pozostać stałą, pomimo znacznych zmian cen. (Marshall robi to przypuszczenie tylko dla małych zmian). To przypuszczenie jest jednak koniecznem, aby móc dać krzywym podaży i popytu, szczególnie pierwszej, formę, którą im przypisują autorowie, stanowi więc ono do pewnego stopnia jeden z zasadniczych punktów systemu ⁽¹⁾.

Wady książki są nieodłączne od metody, która wyodrębnia sztucznie niektóre części z ogólnego systemu. Zależnie od okoliczności są one mniej lub więcej uwydatnione. W najlepszym razie otrzymuje się w ten sposób przybliżone roz-

(¹) W dodatku II, autorowie starają się dowieść, że zasadnicze własności krzywych istnieją i przy zmiennej ocenie pieniądza; rozumowanie ich zawiera jednak błąd, wyjaśniony zresztą później przez samego Lieben'a w *Zeitschrift für Volkswirtschaft* etc., (Wiedeń, 1908, str. 609). Autorowie rozumowali na str. 407—408, jak gdyby iloczyn

$$\frac{d\psi(x_a, t_g \theta_a)}{d\eta} t_g \theta_a$$

musiał się zmieniać zawsze w tym samym kierunku, co i cena $t_g \theta_a$, co nie jest słusznem.

Dodatek IV zawiera próbę analitycznego rozwiązania całokształtu zagadnienia równowagi; nie może ona jednak być uważaną za zupełnie zadawalniającą. Trzeba też zauważyć, że leży ona do pewnego stopnia poza właściwym systemem Ausrpitz'a i Lieben'a.

wiązanie częściowego zagadnienia. Jeżeli się wy-
ciąga zeń wszystkie logiczne konsekwencje, wpa-
da się w sprzeczności. To się właśnie zdarzyło
naszym autorom. Nie można jednak zaprzeczyć,
że książka ich zawiera dobre przybliżone rozwią-
zania wielu poszczególnych kwestji.

3. Edgeworth. Knut Wicksell. Ogólne uwagi o zastoso- waniu płaskich krzywych.

Użycie płaskich krzywych jest bardzo roz-
powszechnionem, szczególnie wśród angielskich
i amerykańskich ekonomistów. Profesor F. Y.
Edgeworth ⁽¹⁾ posługuje się niemi często, miano-
wicie w swych studjach nad monopolem, w któ-
rych świetnie rozwinął pomysły Cournot. Jak
zaznaczyliśmy wyżej (rozdział II), w badaniu tych
kwestji rozważana metoda przedstawia wielkie
ułatwienia, a pociąga za sobą względnie małą
tylko niedokładność. Zastosowana bardzo umie-
jętnie i ostrożnie przez Edgeworth'a dała ona
rezultaty bez zarzutu, przedstawiające prawdzi-
wie cenny dobytek naukowy.

Tę samą metodę stosował i Knut Wicksell
mówiąc o incydencji podatków, którym podlega

⁽¹⁾ „International values“, *Economic Journal*, 1894; „The
pure theory of taxation“, *ibidem*, 1897; „Professor Seligman on
mathematical method“, *ibidem*, 1899; „Contribution to the theory
of railway rates“, *ibidem*, 1911—1912; „La teoria pura del mo-
nopolio“, *Giornale degli economisti*, 1897.

monopolistyczne przedsiębiorstwo (¹). W tej części swej pracy nie prześcignął on zresztą rezultatów otrzymanych już przez Cournot. Bardziej oryginalnymi są jego studia nad kapitałem, w których rozwinął w ciekawy sposób pomysły Jevons'a i Böhm-Bawerk'a. Wicksell dał swojej teorii wyraz matematyczny (²), rozważając produktywność pracy jako funkcję długości okresu produkcji. Niestety, i tutaj musimy przyjąć za niezmiennie wielkości, które z natury zagadnienia muszą się zmieniać w zależności od długości okresu produkcji. Mamy więc znowu do czynienia z płaską krzywą (produkcyjności), i ogólne zarzuty, robione tej metodzie, kiedy chodziło o przedstawienie podaży i popytu jako funkcji ceny, mogą się również stosować do prób takich jak Wicksell'a.

Wszystkie konstrukcje tego rodzaju mają tylko wartość przybliżoną i oddalają się mniej lub więcej od zupełnej ścisłości. Nie wynika stąd, aby były niepotrzebnymi: zarówno pod względem dydaktycznym jak heurystycznym mogą oddać znaczne usługi, czy to ustalając pojęcie, czy też ukazując stosunki, odkrycie których za pomocą słownego tylko rozumowania byłoby trudnem, lub nawet niemożliwem. Umiejętnie stosowane, mogą nawet dać rezultaty, nie zawierające błędów, ale ilość podobnych wypadków jest ograniczoną, a co ważniejsze, sama metoda nie

(¹) *Finanztheoretische Untersuchungen*, Jena, 1896, str. 19—21.

(²) *Über Wert, Kapital und Rente*, Jena, 1893, str. 95—105.

daje nam pod tym względem żadnej pewności. Logicznie rozwinięte, podstawowe jej twierdzenia prowadzą nas zawsze do błędu: niema nic tak niebezpiecznego, jak rozumowania dedukcyjne zastosowane do nieściśłych przesłanek; matematyka, będąca najczystsza formą dedukcji, dzieli z nią ten brak; ale jednocześnie daje nam możliwość ustrzedz się przed nim, rozważając całość kształtu systemu, zamiast tego, żeby wrywać zeń oddzielny stosunek. Główny zarzut, który można zrobić badaniom, opartym na rozważaniu funkcji jednej zmiennej, polega właśnie na tem, że nie przedstawiają one korzyści płynących z tego charakteru matematyki, a które uważamy za najcenniejszy rezultat jej zastosowania, że nie dają nam możliwości określić dokładnie warunki wygłaszanych twierdzeń, skoordynować te twierdzenia i podporządkować je ogólniejszym zasadom, że pozostawiają nas w niewiadomości, co do stopnia ich przybliżenia. To też, pomimo niewątpliwej użyteczności tych badań i wartości koncepcji ekonomicznych, które czasami dopełniają, niepodobna przypisać im tego naukowego znaczenia, co pracom Walras'a albo Pareto ⁽¹⁾.

(1) Poza pracami, o których mówiliśmy, istnieje jeszcze wielka ilość książek lub artykułów, które można zaliczyć do ekonomji matematycznej. Wiele z nich nie ma żadnej wartości, czy to wskutek fałszywego lub zbyt ciasnego pojęcia o roli matematyki w ekonomji, czy też wskutek nieznaności omawianych przedmiotów. Ale pominęliśmy i pewną ilość — może znaczną — dobrych prac, traktujących zbyt spe-

cyjne kwestji, lub posługujących się matematyką tylko w bardzo nieznaczny sposób.

Należałoby może zrobić wyjątek dla badań nad umiejscowieniem produkcji; można wymienić z prac w tym kierunku: Launhardt: *Kommerzielle Trassirung der Verkehrswege*, Lipsk, 1887 i jegoż artykuł „Die Bestimmung des zweckmässigsten Standortes einer Gewerblichen Anlage“ w *Zeitschrift der deutschen Ingenieure*, 1882, wreszcie Weber'a: *Über den Standort der Industrien*, z dodatkiem matematycznym G. Pick'a, Tubinga, 1909. Kwestja, jak widzimy zaledwie została poruszona i trudno dzisiaj jeszcze zdecydować o wartości tych badań. (Por. artykuł prof. W. Bortkiewicza w *Archiv f. Sozialwissenschaft*, 1910, I, str. 759 i następne, który wypowiada się na niekorzyść wywodów geometrycznych Weber'a-Pick'a).

ZAKOŃCZENIE.

Dochodzimy do końca naszej pracy. Zbadaliśmy ważniejsze próby zastosowania matematyki do ekonomji politycznej; chcielibyśmy jeszcze streścić w kilku słowach uwagi, które nasuwa to badanie.

Przedewszystkiem, możemy skonstatować, że matematyka była dotychczas stosowaną tylko do jednej części ekonomji abstrakcyjnej: do nauki o równowadze ekonomicznej. Pozostawia ona poza sobą wiele ważnych zagadnień, do których nie próbowano jeszcze zastosować matematyki, czy to dla tego, że z natury rzeczy nie mogą być badane inaczej jak za pomocą indukcji, czy też dlatego, że przedstawiały dotychczas nieprzewyciężone trudności dla rachunku. Tutaj należą zagadnienia, które się mniej lub więcej szczęśliwie łączy pod nazwą dynamicznych, a które mają miejsce, kiedy rozważamy

stan ekonomiczny, jako zmieniający się z biegiem czasu (¹).

Co się tyczy zagadnienia równowagi, to widzieliśmy, że środki wyrażania się i rozumowania, których nam udziela matematyka, dają nam doskonały, może jedyny, sposób wyłożenia prawidłowo całokształtu stosunków współzależności, które stanowiłyby życie gospodarcze, gdyby niektóre hypotetyczne założenia teorii były śluszne, a które w rzeczywistości przedstawiają

(¹) Pareto rozważał w swoim *Cours d'économie politique* możliwość matematycznego badania tego przedmiotu, ale nie wyszedł w tem dziele poza parę ogólnikowych uwag. Inna jego praca, krótki artykuł w *Giornale degli economisti* (1901) p. t. „Le equazioni del equilibrio dinamico” jest dotychczas jedyną próbą w tym kierunku.

Trzeba rozróżniać dwie grupy zjawisk dynamicznych: pierwsze mają miejsce, kiedy rozważamy system ekonomiczny, dążący do równowagi; zanim zostanie ona osiągnięta, przejdzie pewien okres czasu, którego długość zależy od tego, co możnaby nazwać zdolnością dostosowania się jednostek i przedsiębiorstw. Moglibyśmy badać szybkość zmian, porządek ich następstwa etc. Trudność matematycznego badania przedmiotu polega na naszej zupełnej nieznanomości stosunków ilościowych, które cechują ową zdolność dostosowania się.

Druga grupa zjawisk dynamicznych odpowiada rozwojowi ekonomicznemu. W pewnych warunkach, wysokości osiągnięte przez zmienne wielkości oddziałują na pierwiastki systemu, takie, jak forma funkcji wskaźników, współczynniki produkcji i t. d. Gdybyśmy mogli określić ilościowo tę zależność, moglibyśmy próbować matematycznego badania przedmiotu. (Tutaj właśnie należy wypadek perjo-dycznego wzrostu kapitałów, badany przez Pareto w powy-

obraz najważniejszych i najbardziej ogólnych tendencji tego życia. Wynika stąd, że tylko ekonomja matematyczna jest zawsze w stanie określić dokładnie warunki i granice twierdzeń, odnoszących się do tego przedmiotu, i dać im ścisłe udowodnienie.

Zato wielka ilość pierwiastków systemu równań równowagi i mała znajomość formy funkcji, które do nich wchodzą, sprawiają, że jest nam bardzo trudnem wyrazić w formie jawnej rozmaite stosunki, które ten system zawiera *implicit*e. To nam wyjaśnia dlaczego ekonomja matematyczna, pomimo niewątpliwej potęgi swych środków badania, dała nam dotychczas tak mało materialnie nowych twierdzeń. Nie jest jednak słusznem powiedzieć, jak to robią przeciwnicy ekonomji matematycznej, że nie pozwoliła nam odkryć „żadnej ważniejszej prawdy ekonomicznej“. Z punktu widzenia nauki, dokładne udowodnienie, koordynacja pierwiastków, określenie granic, w których twierdzenie ma wartość, są również ważne, jak materialnie nowe twierdzenia. Zarzut byłby więc uzasadnionym tylko ze

żej wspomnianym artykule; jest to zresztą wypadek najprostszy). I tym razem również, zupełna nieznamość własności stosunków, o których mowa, będzie dla nas główną przeszkodą.

Możliwość matematycznego badania zjawisk dynamicznych będzie przedewszystkiem zależała od danych, które nam dostarczy doświadczenie. Przedwczesnem by było dzisiaj wypowiadać sąd o jego użyteczności.

strony tych, których ciekawość dla kwestji ekonomicznych może być zaspokojaną przez popularne wykłady; wewnętrzny mechanizm nauki nie przedstawia dla nich ciekawości, bo nie rozumieją jego znaczenia. To też niema nadziei, aby ekonomja matematyczna stała się popularną, nawet wśród tych, których wykształcenie pozwoliłoby na czytanie prac, do niej należących.

Ale inaczej, zdaje się, powinni by byli zapatrywać się na tę rzecz sami ekonomiści. Godna tej nazwy nauka nie może istnieć bez dokładnych określeń i udowodnień. Zaniedbanie potrzebnej ścisłości w wypowiedzaniu twierdzeń było głównym powodem, dla którego ekonomja klasyczna tak łatwo padła pod ciosami przeciwników. To też wszelki postęp w tym kierunku musi być z radością witany przez tych, którzy życzą, żeby ekonomja była czemś więcej, niż zbiorem wiadomości bez wewnętrznego między niemi związku.

W przyszłości zresztą, matematyczna teoria równowagi pozwoli nam, być może, odkryć zupełnie jeszcze nieznane stosunki. Nie trzeba zapominać, że badanie naukowe stawia tu dopiero pierwsze kroki. Poszukiwania, kierowane przez ogólną teorię, będą mogły odkryć nam pewne własności funkcji, których nieznanomość jest dotychczas główną przeszkodą w zastosowaniu teorii do poszczególnych wypadków.

Ale, uznając użyteczność zastosowania matematyki, należy wystrzegać się przesady i nie sądzić, że uda się nam za jej pomocą stworzyć

jakąś astronomję społeczną, któraby pozwoliła przewidywać ilościowo zjawiska ekonomiczne. Wykazaliśmy, zdaje się, że to nie jest zadaniem ekonomji matematycznej; stara się ona tylko uchwycić w głównych zarysach ogólne stosunki pomiędzy wielkościami ekonomicznymi. I odwrotnie, tylko rozumowanie matematyczne ma środki potrzebne, aby sprostać temu zadaniu.

Ekonomja matematyczna musi zawsze pozostać bardzo abstrakcyjną; twierdzenia jej są tylko schematami, które mają wyjaśnić nam rzeczywistość, nie zaś wiernem oddaniem tej rzeczywistości. Nie będą one mogły nigdy być zastosowanymi do rozwiązywania zagadnień praktycznych. Ostatnie zdanie powinno być rozumiane, nie tylko w tym sensie, że nie możemy w nich szukać wskazówek dla naszego działania. Rolą wszelkiej nauki jest uczyć nas tego co jest, a nie tego co ma być; mechanika nie uczy nas, jak mamy budować mosty żelazne, a tylko jakim warunkom odpowiadają mosty w ten lub inny sposób budowane. Ale, jeżeli nie mamy wątpliwości co do warunków, którym ma odpowiadać budowa, odpowiedź na zagadnienie praktyczne jest nam dana przez teorię *plus* elementarne rozumowanie.

Również ekonomja teoretyczna lub stosowana, nie mówi nam nigdy jak mamy postępować, ale w najlepszym razie, jakimi będą skutki takiego lub innego sposobu postępowania. Jeżeli nie mamy żadnej wątpliwości co do naszego celu, znajomość tego, co jest, pokrywa się

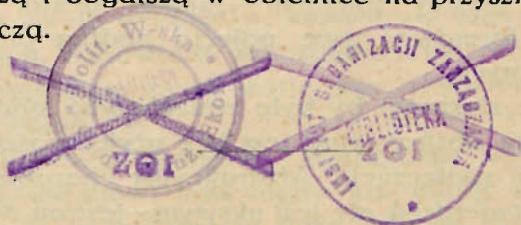
ze znajomością tego co mamy robić. Naprzykład, jeżeli dowiedzie się, że pewien ustrój ekonomiczny zapewnia maximum rzeczywistej użyteczności pewnej grupie, a celem naszym jest zapewnienie jak największej użyteczności tej właśnie grupie, narzuca się wniosek praktyczny: wybrać ten ustrój ekonomiczny. Nauka nie zmusza nas postępować w pewien sposób, ale kieruje naszym postępowaniem.

W tym to sensie powiedzieliśmy, że ekonomja matematyczna nie daje się bezpośrednio zastosować do praktyki. Twierdzenia jej są słuszne tylko w warunkach, bardzo oddalonych od rzeczywistości; pojęcia jej odbiegają od tych, któremi posługujemy się w życiu. Prawdopodobnem jest, np., że maximum użyteczności dla społeczeństwa przedstawia się wielu osobom, jako ideał, do którego należy dążyć; ale wobec tego, że przy ustroju indywidualistycznym niepodobna pominąć kwestji podziału bogactw, wątpliwem jest czy wiele z nich zgodzi się na określenie tego maximumu, dane przez Pareto. Nie jest to zresztą zarzutem — nauka niema obowiązku formować swe pojęcia podług potrzeb praktycznych.

Nie słusznem by było wnioskować stąd, że ekonomja abstrakcyjna jest bez użyteczności dla ekonomji społecznej. Abstrakcyjny charakter jej pojęć i twierdzeń nie jest ukrytym — jest on określonym w sposób, nie zostawiający miejsca dla nieporozumień, przynajmniej dla czytelników uważnych. Przejszcie od twierdzeń naukowych do wnios-

ków praktycznych nie jest niemożliwem—nie jest ono tylko prostem—wymaga pracy umysłowej i znajomości warunków życia.

Najważniejszą usługą, którą na razie oddaje praktyce ekonomja abstrakcyjna, jest oczyszczanie pola ze wszystkich teorii fałszywych, lub słusznych tylko w nieokreślonych warunkach, ukazanie komplikacji tam, gdzie się ona rzeczywiście znajduje. Jest ona doskonałym sposobem krytyki: twierdzenie nieściśle przy upraszczających przypuszczeniach, przy których ekonomja matematyczna rozważa zjawiska, nie może oczywiście być ściśle w bardziej skomplikowanych warunkach życia rzeczywistego. To krytyczne, destrukcyjne znaczenie ekonomji abstrakcyjnej było szczególnie uwydatnionem przez niektórych badaczy przedmiotu. Zdaje się nam jednak, że dając nauce środek wyrażenia całokształtu stosunków współzależności pierwiastków życia gospodarczego, określając granice i warunki twierdzeń, dając im dokładne udowodnienia, ekonomja matematyczna odegrywa znacznie ważniejszą i bogatszą w obietnice na przyszłość rolę twórczą.



SPIS RZECZY.

PRZEDMOWA DO POLSKIEGO WYDANIA. . .	Str. 5
-------------------------------------	-----------

W S T Ę P.

1. Ekonomia teoretyczna i opisowa	7
2. Teoretyczna możliwość zastosowania matematyki do ekonomji abstrakcyjnej	14
3. Ogólny charakter ekonomji matematycznej. Ekonomia i mechanika	19

ROZDZIAŁ PIERWSZY. — **Pierwsze próby.**

1. Uwagi ogólne	25
2. M. F. Canard	28
3. W. Whewell	32
4. J. H. von Thünen	39

ROZDZIAŁ DRUGI. — **Cournot.**

1. Uwagi ogólne	46
2. Prawo zbytu towarów. Teorja pojedynczego monopolisty	50
3. Monopolisci dopełniających się towarów. Ocena dzieła Cournot	58
4. Zagadnienie dwóch monopolistów	62

ROZDZIAŁ TRZECI. — **Teoria użyteczności krańcowej.**

	Str.
1. Główne zasady teorii	69
2. Czy uczucia przyjemności i przykrości dają się mierzyć?	71
3. Dupuit	74
4. H. H. Gossen	78
5. W. Stanley Jevons: teoria użyteczności	83
6. Stanley Jevons: teoria wymiany	91
7. Teoria wartości Leona Walras'a	101
8. Szkoła austriacka. — Rola matematyki w rozwoju teorii użyteczności krańcowej	109

ROZDZIAŁ CZWARTY. — **Teoria równowagi ekonomicznej.**

1. Pojęcie równowagi ekonomicznej	113
2. Rozwój teorii.—Prace Leona Walras'a, F. Y. Edgeworth'a, Irvinga Fisher'a, V. Pareto	118
3. Teoria wyborów Vilfredo Pareto	130
4. Równowaga gospodarki indywidualnej. Uwagi o ekonomicznej wartości formuł	143
5. Własności funkcji wskaźników	152
6. Prawa podaży i popytu	159

ROZDZIAŁ PIĄTY. — **Teoria równowagi ekonomicznej**
(ciąg dalszy).

1. Równowaga ogólna przy niezmiennych ilościach dóbr bezpośredniego spożycia	170
2. Równowaga produkcji. Przesłanki zagadnienia	184
3. Równowaga produkcji. Rozwiązanie, dane przez Pareto dla typów I i II	192
4. Zmienność ekonomiczna współczynników produkcji	199
5. Równowaga kapitalizacji	205
6. Uwzględnienie pominiętych warunków. Teoria pieniądza.	218

ROZDZIAŁ SZÓSTY. — **Teoria równowagi ekonomicznej**
(zakończenie).

	Str.
1. Miejsce nowej teorii w nauce. Główne zarzuty, skierowane przeciwko niej	231
2. Twierdzenie Pareto o maximum użyteczności . . .	250
3. Zastosowanie teorii równowagi do badania poszczególnych stosunków	261

ROZDZIAŁ SIÓDMY. — **Badania matematyczno-ekonomiczne poza ogólną teorią równowagi.**

1. Płaskie krzywe podaży i popytu. A. Marshall . . .	268
2. Auspitz i Lieben	275
3. Edgeworth. Knut Wicksel. Ogólne uwagi o zastosowaniu płaskich krzywych	282
ZAKOŃCZENIE	286

DOSTRZEŻONE BŁĘDY.

Str.	wiersz	zamiast	powinno być
64	3-ci z góry	$(D_1 = D_2)$	$(D_1 + D_2)$
67	1-szy „	maksymalnym	maksymalnym,
77	4-ty „	O_n	O_q
80	5-ty „	$UOqn$	UOq_n
107	4-ty „	osoby	osoby;
119	1-szy z dofu	$p_{a \cdot b} = \frac{p_{c \cdot a}}{p_{b \cdot a}}$	$p_{c \cdot b} = \frac{p_{c \cdot a}}{p_{b \cdot a}}$
144	2-gi z góry (12)	$f_x \varphi_x = f_y \varphi_y = O$	$(12) f_x \varphi_x - f_y \varphi_y = O$
198	10-ty z dofu	$\dot{z} = f(p^y)$	$\dot{z} = f(p_y)$
225	8-my „	(43) $Q' + Q'' = O$	(43) $Q' + Q'' = Q$