

C

Nr 20573.

Politechnika Warszawska

ROZDZIAŁ NR. 6. TOMU II.

1931 ROK

# AKADEMJA NAUK TECHNICZNYCH

Dr. STANISŁAW BEŁZECKI.  
EM. PROFESOR POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

## KILKA UWAG DOTYCZĄCYCH TEORJI PRĘTÓW KRZYWYCH.

PRACA REFEROWANA NA POSIEDZENIU  
AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH w WARSZAWIE  
D. 20 MARCA 1930 R.

WARSZAWA — 1931

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA

ZESZYT Nr. 5. TOMU II.

1931 ROK

# AKADEMJA NAUK TECHNICZNYCH

Dr. STANISŁAW BEŁZECKI.  
EM. PROFESOR POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

## KILKA UWAG DOTYCZĄCYCH TEORJI PRĘTÓW KRZYWYCH.

PRACA REFEROWANA NA POSIEDZENIU  
AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH w WARSZAWIE  
D. 20 MARCA 1930 R.

WARSZAWA — 1931

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA

10483



~~9.543~~

C. 20543

Artykuł ten poświęcam w hołdzie  
Politechnice Lwowskiej.

## Kilka uwag, dotyczących teorii prętów krzywych.

Oś pręta — odcinek łuku koła; grubość  $2e$  (w kierunku promienia  $r$ ) jest stała; szerokość w kierunku osi  $z$  jednego rzędu z grubością. Zadanie dwuwymiarowe.

### § 1. Odkształcenia i przesunięcia.

Zmienny promień  $r$  wskutek odkształcenia otrzyma przyrost  $\delta r$ , przyrost ten jest przesunięciem  $u$ .

Element linjowy  $ds = r d\varphi$  po odkształceniu będzie:

$$\delta ds = \delta r d\varphi + r \delta d\varphi.$$

Przesunięcie wywołane zmianą kąta przy zachowaniu wielkości  $r$

$$v = r \cdot \delta\varphi$$

Stosunkowe wydłużenie:

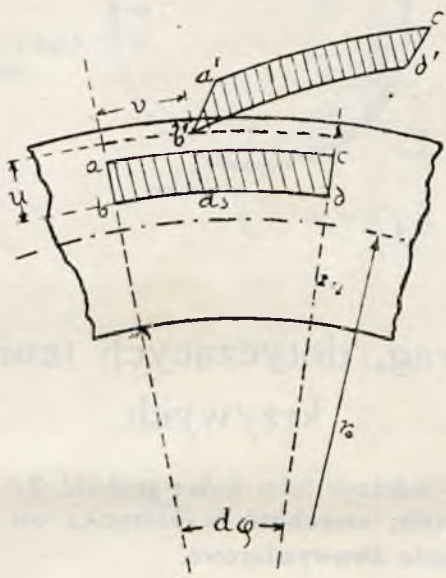
$$\frac{\delta ds}{ds} = \alpha_s = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

Zmiana kąta ( $dr, ds$ )

$$\beta' = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial s}.$$

a ponieważ wierzchołek kąta przesuwa się i przy przesunięciu  $v$  kąt się zmienia, to

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}.$$



Rys. 1.

### Przestrzenna rozszerzalność

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Naprężenie normalne do cylindrycznych powierzchni oznaczam przez  $R$ , normalne do przekroju pręta (płaszczyznami  $roz$ ) przez  $\Phi$ , styczne przez  $T$ .

Dla równowagi elementu  $dr \cdot r d\varphi$  w każdym punkcie pręta powinny być spełnione równania

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{2T}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} + \sigma g \sin \varphi = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(I)}$$

$$\frac{R - \Phi}{r} + \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \sigma g \cos \varphi = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(II)}$$

$\sigma$  — gęstość materiału,  $g$  — przyspieszenie siły ciężkości.

W ciele izotropowym:

$$\Phi = \lambda \Theta + 2\mu \left( \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)$$

$$R = \lambda \Theta + 2\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$T = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)$$

$$\Phi + R = F = 2(\lambda + \mu) \Theta$$

$\lambda$  i  $\eta$  — współczynniki Lamé'go.

Ponieważ charakterystyka ciała izotropowego jest  $\Delta\Theta = 0$ , to i  $\Delta F = 0$ , czyli

$$\Delta F = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0. \quad \dots \quad \text{(III)}$$

Trzy równania I, II i III określają trzy funkcje  $\Phi$ ,  $R$  i  $T$ .

## § 2. Historia zagadnienia.

Do roku 1881 było tylko szczególne rozwiązanie G. Lamé'go, które odpowiada  $T = 0$ . W roku 1881 prof. Gołowin (Izwiestja St. Peterburgskiego Technologicznego Instytutu 1881 r.) dał szczególne rozwiązanie dla  $T \neq 0$ . W latach 1889 (C. R. T. C. VIII Nr. 11) i 1901 (C. R. T. C. XXXII Nr. 6) Ribière dał rozwiązanie w postaci szeregów; rozwiązanie to było niepełne. W roku 1905 (C. R. 10 Avril, page 1016) dałem pełne rozwiązanie, całkując równania I, II i III. Jak się okazało, pełne rozwiązanie różni się od rozwiązania Ribière'a tylko o całki G. Lamé'go. W 4 Heft Zeit. für Math. und Ph. (4-go stycznia 1906 r.) A. Timpe ogłosił pracę pod tytułem „Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion”, w której daje pełne rozwiązanie zadania, Ribière korzystał z szeregów, które wskazał G. Lamé w swoim kursie Teorii Sprężystości. A. Timpe, jak widać z tytułu jego pracy, korzysta z własności funkcji Airy. Jeżeli funkcja  $W$  czyni zadość równaniu  $\Delta\Delta W = 0$ , to

$$R = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \dots \dots \dots \quad \text{(a)}$$

$$\Phi = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \dots \dots \dots (b)$$

$$T = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \dots \dots \dots (c)$$

dodając (a) i (b) otrzymany:

$$R + \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \Delta W = (\lambda + \mu) \cdot 2\theta.$$

Korzystając z całki równania  $\Delta \Delta W$ , danej w proc. Lond. Math. Soc. (1899) przez J. Michel'a i stosując metodę inwersji, A. Timpe otrzymuje  $\Phi$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $u$ ,  $v$ .

W roku 1926 w An. des P. et. Ch. p. Caquot, rozwiązując zadanie „Barrage en voûtes”, dochodzi do wniosku, że całki Ribière'a z moim dodatkiem nie wystarczają do rozwiązania tego zadania, a p. Mernager dodaje kilka uwag co do zadania.

### § 3. Cel tego artykułu.

1. Udowodnić, że rozwiązanie, podane w 1905 r. w C. R. 10 Avril, p. 1016, jest ogólne, 2. Wykazać mylność poglądów p.p. Caquot i Mesnager, 3. Uzupelnic wskazówki p. A. Timpe co do dowolnych stałych, kosztem których mogą być zrealizowane warunki zamocowania na oporach, 4. Dać rozwiązanie w kilku wypadkach, 5. Udowodnić, że tak zwane granice Euler'a są szczególnym wypadkiem więcej ogólnego zadania o zgięciu prętów krzywych, 6. Rozszerzyć granice stosowalności twierdzenia Betti-Maxwell'a.

### § 4. Całkowanie równań I, II, III.

Z równania I i II otrzymamy:

$$\Phi = - \int \left( \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{r} \right) r d\varphi + \psi(r);$$

$$R = - \left\{ \frac{1}{r} \int \frac{\partial T}{\partial \varphi} dr + \frac{1}{r} \int dr \int \left( \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{r} \right) r d\varphi \right\} + \frac{1}{r} \int \psi(r) dr + f(\varphi)$$

funkcja  $F = (\Phi + R)$  powinna czynić zadość równaniu III. Wypeł-

niając nad  $F$  operację  $\frac{\partial^2}{\partial r \cdot \partial \varphi} \Delta F$  otrzymamy:

$$r^1 \frac{\partial^4 T}{\partial r^4} + 10r^3 \frac{\partial^3 T}{\partial r^3} + 23r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 9r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial T}{\partial r} + 2r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 4T \right) + \frac{\partial^4 T}{\partial \varphi^4} = 0 \quad \dots \dots \dots \text{IV.}$$

Stosując drugą metodę Poisson'a, co w danym wypadku jest miarodajne, otrzymamy:

$$T = \left( A r^{m-2} + B r^m + \frac{C}{r^m} + \frac{D}{r^{m+2}} \right) \cdot \text{Sin } (m\varphi) = f(r) \text{Sin } m\varphi$$

albo

$$T = \left( A^1 r^{m-2} + B^1 r^m + \frac{C^1}{r^m} + \frac{D^1}{r^{m+2}} \right) \cdot \text{Cos } (m\varphi) = f_1(r) \text{Cos } m\varphi,$$

albo jeszcze

$$T = f(r) \text{Sin } m\varphi + f_1(r) \text{Cos } m\varphi.$$

Ponieważ te całki spełniają równanie (IV) przy dowolnem  $m$ , zatem

$$T = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[ A_m r^{m-2} + B_m r^m + \frac{C_m}{r^m} + \frac{D_m}{r^{m+2}} \right] \text{Sin } m\varphi + \sum_{m=1}^{m=\infty} f_1(r) \text{Cos } m\varphi.$$

Odpowiednie  $\Phi$  i  $R$  będą:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[ A_m r^{m-2} + \frac{m+2}{m} B_m r^m - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{C_m}{r^m} - \frac{D_m}{r^{m+2}} \right] \text{Cos } m\varphi \quad *)$$

$$R = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[ -A_m r^{m-2} - \frac{m-2}{m} B_m r^m + \frac{m+2}{m} \frac{C_m}{r^m} + \frac{D_m}{r^{m+2}} \right] \text{Cos } m\varphi$$

$$R + \Phi = F = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{4}{m} \left( B_m r^m + \frac{C_m}{r^m} \right) \cdot \text{Cos } m\varphi = 2(\lambda + \mu) \Theta.$$

$\Theta$  jest funkcją harmoniczną.

Każdy z wyrazów szeregu posiada po cztery dowolne stałe z wyjątkiem wyrazów, które odpowiadają  $m=1$ .

Te ostatnie jak i całka Lamé'go posiadają tylko po trzy dowolne stałe.

\*) Ograniczam się tylko  $f(r)$  dla skrócenia wzorów.



Otrzymane całki odpowiadają  $T \neq 0$ .

Przy  $T=0$  mamy dwie dowolne funkcje  $\psi(r)$  i  $f(\varphi)$ .

$$\Phi = \psi(r)$$

$$R = \frac{1}{r} \int \psi(r) dr.$$

Podstawivszy do III, otrzymamy:

$$3rf'(r) + 5r^2f''(r) + r^3f'''(r) = 0.$$

a zatem:

$$\Phi = C_1 + C_2 \ln r + \frac{C_3}{r^2}$$

$$R = C_1 + C_2 (\ln r - 1) - \frac{C_3}{r^2}$$

$$F = 2C_1 + C_2 (2 \ln r - 1)$$

$$f(\varphi) = C_4 + C_5 \cdot \varphi.$$

Dodając te całki do poprzednich, otrzymamy pełne rozwiązanie, które niczem się nie różni od rozwiązania J. Michel'a — A. Timpe, które jest ogólnem rozwiązaniem.

## § 5. Stosowanie.

**Zadanie 1.** Na powierzchni  $r=a$   $T=R=0$ ; na powierzchni  $r=b$  ( $b > a$ )  $R=h = \text{Const}$ ;  $T=0$ .

Na skrajnych przekrojach są spełnione warunki

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{\substack{r=r_0 \\ \varphi=\varphi_n}} = 0; \quad v_n \cos \varphi_n + u_n \sin \varphi_n = 0.$$

Pręt i jego obciążenie są symetryczne względem osi  $Y$ ;  $\varphi_n$  — kąt pochylenia skrajnych przekroi, które są oparte na płaskich podporach. Wskutek symetrii  $v$  musi być funkcją nieparzystą  $\varphi$ ,  $u$  — parzystą. Warunek

$$v_n \cdot \cos \varphi_n + u_n \cdot \sin \varphi_n = 0$$

na skutek zamiany  $\varphi_n$  na  $-\varphi_n$  nie zmienia się.

Założymy:

$$\Phi = C_1 + C_2 \ln r + \frac{C_3}{r^2} + \left( 3Br + \frac{E}{r} - \frac{D}{r^3} \right) \cos \varphi$$

$$R = C_1 + C_2 (\ln r - 1) - \frac{C_3}{r^2} + \left( Br + \frac{E}{r} + \frac{D}{r^3} \right) \cos \varphi$$

$$T = \left( Br + \frac{E}{r} + \frac{D}{r^3} \right) \sin \varphi$$

$$\Theta = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left\{ 2C_1 + C_2 (2 \ln r - 1) + 2 \left( 2Br + \frac{E}{r} \right) \cos \varphi \right\}$$

Dla spełnienia danych warunków na powierzchniach,  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $E$  i  $D$  powinny być takie

$$C_1 = C_2 \left[ \frac{b^2 \ln b - a^2 \ln a}{a^2 - b^2} + 1 \right] - \frac{hb^2}{a^2 - b^2}$$

$$C_3 = C_2 \left[ \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} (\ln b - \ln a) \right] - \frac{h \cdot a^2 b^2}{a^2 - b^2}$$

$$D = Ba^2 b^2$$

$$E = -B(a^2 + b^2)$$

a zatem:

$$\Phi = C_2 \left\{ \frac{b^2 \ln b - a^2 \ln a}{a^2 - b^2} + 1 + \ln r + \frac{a^2 b^2}{r^2 (a^2 - b^2)} \cdot \ln \frac{b}{a} \right\} -$$

$$- \frac{b^2 h}{a^2 - b^2} \left[ 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] + B \left[ 3r - \frac{a^2 + b^2}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right] \cos \varphi.$$

$$R = C_2 \left\{ \frac{b^2 \ln b - a^2 \ln a}{a^2 - b^2} + \ln r - \frac{a^2 b^2}{r^2 (a^2 + b^2)} \cdot \ln \frac{b}{a} \right\} +$$

$$+ \frac{hb^2}{a^2 - b^2} \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^2 - 1 \right] + B \left[ r - \frac{a^2 + b^2}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right] \cos \varphi.$$

$$T = B \left[ r - \frac{a^2 + b^2}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right] \sin \varphi.$$

Określimy wektory i momenty tych naprężeń

$$\Phi^R = \int_a^b \Phi dr; \quad T^R = \int_a^b T dr; \quad M^R = \int_a^b \Phi r \cdot dr$$

$$\Phi^R = B \left[ b^2 - a^2 - (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} \right] \cdot \cos \varphi + hb$$

$$TR = B \left[ b^2 - a^2 - (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} \right] \sin \varphi$$

$$MR = C_2 \left[ \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} (\ln a - \ln b)^2 + \frac{b^2 - a^2}{r} \right] + hb^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{a^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right).$$

Łatwo zrozumieć fizyczny sens zadania. Na powierzchni  $r=b$  działają naprężenia  $R=h$ , które są zrównoważone wektorami  $hb$  i momentami  $b^2 h \left( \frac{1}{2} - \frac{a^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right)$ .

Na skrajne przekroje  $\varphi = \varphi_n$  i  $\varphi = -\varphi_n$  działają pary proporcjonalne do  $C_2$ , i wektory równoległe do osi  $x$  wzajemnie zrównoważone.

Stałe  $C_2$  i  $B$  są określone warunkami

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0; \quad v_n \cos \varphi_n + u_n \sin \varphi_n = 0; \quad \left( r_0 = \frac{a+b}{2} \right)$$

Określmy  $u$  i  $v$ :

$$u = \frac{1}{2\mu} \left[ C_1 r + C_2 r (\ln r - 2) + \frac{C_3}{r} + \left( \frac{Br^2}{2} + E \ln r - \frac{D}{2r^2} \right) \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left\{ 2C_1 r + C_2 r (2 \ln r - 3) + 2(Br^2 + E \ln r) \cos \varphi \right\} + \right. \\ \left. + E \mu \frac{(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \right] + A \sin \varphi + B_1 \cos \varphi$$

$$v = \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} C_2 r \varphi + \left\{ \frac{3\lambda + 5\mu}{2(\lambda + \mu)} Br^2 + E \frac{\mu}{\lambda + \mu} (1 - \ln r) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{D}{2r^2} \right\} \sin \varphi - \frac{E(\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} (2 \sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \right] + D_1 r.$$

Założywszy:

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \left( \frac{b^2 \ln b - a^2 \ln a}{a^2 - b^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) r + \frac{\mu}{\lambda + \mu} r \ln r + \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{r} \ln \frac{b}{a} = f_1(r)$$

$$\left[ \frac{\mu - \lambda}{2(\lambda + \mu)} r^2 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} (a^2 - b^2) \ln r - \frac{a^2 b^2}{2r^2} \right] \cos \varphi -$$

$$- (a^2 + b^2) \frac{(\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) = f_2(r, \varphi)$$

$$\left\{ \frac{3\lambda + 5\mu}{2(\lambda + \mu)} r^2 - (a^2 + b^2) \frac{\mu}{\lambda + \mu} (1 - \ln r) - \frac{a^2 b^2}{2r^2} \right\} \sin \varphi + \\ + (a^2 + b^2) \frac{(\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} (2 \sin \varphi - \varphi \cos \varphi) = f_3(r, \varphi)$$

otrzymamy:

$$u = \frac{1}{2\mu} \left[ C_2 f_1(r) - \frac{hb^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{\mu r}{\lambda + \mu} - \frac{a^2}{r} \right) + B f_2(r, \varphi) \right]$$

$$v = \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} C_2 r \varphi + B f_3(r, \varphi) \right]$$

$$A = B_1 = D = 0.$$

Z warunku  $\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{\substack{r=r_0 \\ \varphi=\varphi_n}} = 0$ , otrzymamy

$$C_2 = -B f_3'(r, \varphi) \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{\varphi_n}, \text{ albo}$$

$$C_2 = -B \left\{ (3\lambda + 5\mu) \frac{(b+a)}{2} + 2\mu \frac{(a^2 + b^2)}{a+b} + \frac{8b^2 a^2}{(b+a)^3} (\lambda + \mu) \right\} \frac{\sin \varphi_n}{\varphi_n} \cdot \frac{1}{2\mu + \lambda} = B \cdot k.$$

Z warunku  $v_n \cos \varphi_n + u_n \sin \varphi_n = 0$ , otrzymamy

$$B \left\{ f_3(r, \varphi) \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \varphi=\varphi_n}} - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} k \left( \frac{a+b}{2} \right) \varphi_n + \operatorname{tng} \varphi_n \left\{ f_2(r, \varphi) \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \varphi=\varphi_n}} - r f_1(r) \Big|_{r=r_0} \right\} \right\} = \\ = \frac{hb^2}{a^2 - b^2} \left\{ \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{2a^2}{a+b} \right\} \operatorname{tng} \varphi_n.$$

Skąd określimy  $B$  w funkcji  $h$ , a zatem  $C_2$ .

Zadanie jest kompletnie rozwiązane.

Ponieważ końce pręta są całym przekrojem w kontakcie z podporą, to naprężenia w okolicy podpory — podobnie jak w zadaniu St. Venant'a — nie będą odpowiadać rzeczywistości; stosując zasadę St. Venant'a, otrzymamy ściśle rozwiązanie dla wszystkich przekroi pręta, z wyjątkiem przekroi bliskich podpór pręta.

Teoria ścisła wymagałaby w danym wypadku rozwiązania zadania Cerruti-Hertza. Ponieważ pręt i obciążenia są tu symetryczne, to dla spełnienia warunków St. Venant'a dość dwóch dowolnych

stałych. Moment względem punktu  $\varphi \left( r = \frac{b+a}{2} \right)$  osi pręta

$$M,^R = M^R - \Phi^R \frac{(a+b)}{2}$$

jest funkcją  $\varphi$ .

Poglądy wygłoszone w A. d. P. et Ch. 1926 r. — IV przez p. Caquot'a są mylne. Czwarte zadanie, o którym wspomina p. Mesnager jest nierealne: Myśl ograniczenia się do absolutnie niezmiennych podpór, wypowiedziana przez Poncelet w połowie zeszłego stulecia, zamieniona została inną, a mianowicie warunkami St. Venant'a, przy których podpora może się odkształcać. Warunki St. Venant'a są to warunki, które pozbawiają pręt wszystkich stopni swobody, jako ciała niezmiennego. Te warunki będą spełnione, jeśli we wzorach na przesunięcia dowolne stałe  $A, B, C$  (patrz A. Timpe) założymy równymi zeru. Takie założenie wyraża, że

$$\text{punkt } r = \frac{a+b}{2}, \varphi = \varphi_n$$

jest nieruchomy, a element linjowy  $dr$ , przeprowadzony przez ten punkt nie obraca się około osi równoległej do osi  $OZ$ . Swoboda drugiego końca pręta, opartego na podporze jest zależna od konstrukcji podpory. My założymy, że ten koniec jest zamocowany, t.j. że warunki

$$\left( \frac{dv}{dr} = u = v \right)_{\varphi = \varphi_n} = 0.$$

są spełnione. Pozostaje jednak pytanie, w jakim punkcie, t. j. przy jakim  $r$  one są spełnione i czy są spełnione w jednym punkcie

Zwykle zakładają, że są one spełnione w punkcie  $r = \frac{a+b}{2}$

Dla cienkich prętów takie założenie jest — prawdopodobnie — bliskie od rzeczywistości, dla prętów grubych o tym punkcie powinno decydować doświadczenie, albo rozwiązanie zadania równowagi dwóch ciał sprężystych, dotykających się wzajemnie, w danych granicach. Te warunki nazywam dla skrócenia warunkami St. Venant'a, unikając bezsensownej terminologii, zapożyczony od rosjan „zbędne ustalenia”. Terminologia ta była w Rosji źródłem dość zjadliwych

dowcipów. Zadanie o naprężeniach miejscowych (w okolicy podpory) oczekuje rozwiązania. Czy warunki St. Venant'a są spełnione w punktach

$$\varphi = \pm \varphi_n, r = \frac{a+b}{2}, \text{ czy w jednym z punktów}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq r \geq a \text{ niewiadomo.}$$

Dla prętów cienkich różnica tych założeń nie może znacznie wpływać na rezultaty; dla prętów wogóle może być wyraźną; przy obciążeniu niesymetrycznym warunki mogą być różne dla prawej i lewej podpory. Zakładając te warunki w punktach

$r = a$ , lub  $r = \frac{a+b}{2}$  możemy określić granice, w których są zawarte rzeczywiste naprężenia. Rozstrzyga tu doświadczenie.

**Zadanie 2.** Zmodyfikujemy warunki poprzedniego zadania na takie:

$R = T = 0$  przy  $r = a$ ; przy  $r = b$  i  $x = 0$ ,  $R = h_0$  zostaną nam do rozporządzenia trzy dowolne stałe  $B, E, C_2$ .

Na powierzchni  $r = b$ ;  $R = C_2 q + F \cos \varphi$ ;  $T = F \sin \varphi$ .

Rzutużąc na osie  $x$  i  $y$ , otrzymamy dla rzutu na oś  $x$ :

$$p_x = \sin \varphi (2 F \cos \varphi + C_2 q)$$

$p_x$  — nie może zmieniać znaku, to jest nie może być naprężeniem rozciągającym, a zatem powinno być:

$$2 F + C_2 q = 0.$$

Zostaną nam dwie dowolne stałe, które określimy z warunków St. Venant'a. Jest to zadanie Gołowina.

**Zadanie 3.** Dla prętów o wielkiej rozpiętości ciężar własny ( $2 e \sigma g$ \*) może wywołać naprężenia, z którymi trzeba się liczyć.

Założymy:

$$\Phi = C + (3 C' + \sigma g) r \cdot \cos \varphi$$

$$R = C + (C' + \sigma g) r \cdot \cos \varphi$$

$$T = C' r \cdot \sin \varphi$$

\*)  $2 e$  — grubość pręta  $\sigma$  — gęstość materiału.  $g$  — przyspieszenie siły ciężkości;  $2 e \sigma g$  — jednostkowy ciężar pręta.

Czynią one zadość równaniom I, II i III.

Dwie dowolne stałe określimy z warunków St. Venant'a.

**Zadanie ogólne.** W ogólnym wypadku naprężenia na powierzchni  $r = b$  mogą być zadane dowolnie. Mam na względzie tylko praktycznie ogólny wypadek obciążenia sklepień mostów kamiennych, nad którym się zatrzymam.

W mostach kamiennych sklepienie jest obciążone siłą ruchomą, między którą a sklepieniem mamy szereg pośredników, jak szyny, podkłady i różne konstrukcje nad sklepieniem. czasem ciało sypkie. Uogólniam te różne wypadki, zakładając, że pomiędzy sklepieniem a siłą skupioną (wektorem) pośrednikiem jest ciało sprężyste, ciągłe, ograniczone z jednej strony sklepieniem, z drugiej płaszczyzną równoległą do  $ZOX$ . Siła skupiona wywołuje w środowisku normalne naprężenia

$$R = \frac{C \cos \psi}{r}; \quad \Phi = T = 0 \text{ (hipoteza)}$$

$T \neq 0$  na powierzchni dotyku środowiska i sklepienia. Rzut naprężeń  $R$  na oś  $OY$ , wzięty na całej powierzchni półcyindra równoważy siłę  $P$ .

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} C \cos^2 \psi d\psi = \frac{\pi \cdot C}{2} = P.; \quad R = \frac{2P}{\pi r} \cos \psi$$

Na pryzmat  $a'b'd'$  działają siły:  $Rr'd\varphi$  i reakcja sklepienia  $R'b d\varphi$  i  $T b d\varphi$ .

Stosunek  $\frac{r' d\psi}{r d\varphi}$  jest sinus kąta między  $r'$  i  $r d\varphi$

Z warunków równowagi elementu  $a'b'd'$  (patrz rys. 2), otrzymamy:

$$T = R \cos(\varphi + \psi) \sin(\varphi + \psi) \dots \dots \dots (a)$$

$$R' = R \cos(\varphi + \psi) (\cos \psi - \sin \varphi \cos \varphi) \dots \dots \dots (b)$$

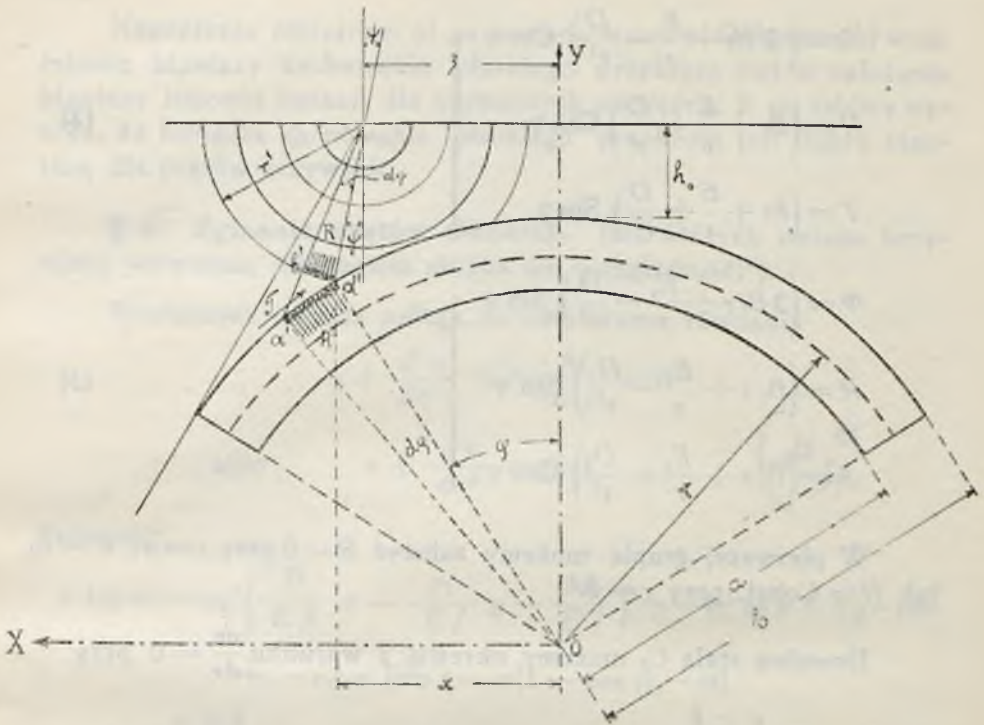
$T$  i  $R$  są równe zeru, kiedy  $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ , to jest kiedy  $r'$  jest styczną do powierzchni sklepienia. Przy  $\psi = 0$

$$T = R \sin \varphi \cos \varphi$$

$$R' = R \cos \varphi (1 - \sin \varphi \cos \varphi)$$

przy  $\varphi = \psi = 0$

$$T = 0; \quad R' = R.$$



Rys. 2.

Ponieważ

$$\begin{aligned} \xi + r' \sin \psi &= x \\ r' \cos \psi &= b (1 - \cos \varphi) + h_0 = y_1 + h_0; (y_1 + y) = b \end{aligned}$$

Wzory (a) i (b) możemy przekształcić na funkcję  $x$  i  $\xi$ . Każda z nich zawierać będzie wyrazy parzyste i nieparzyste względem  $x$  i  $\xi$ . Funkcje te czynią zadość warunkom Dirichlet'a, a zatem mogą być rozwinięte w szeregi,

$$\begin{aligned} R' &= \sum_{m=2}^{m=\infty} f(r) \sin m \varphi + \sum_{m=2}^{m=\infty} f_1(r) \cos m \varphi \\ T &= \sum_{m=2}^{m=\infty} f_2(r) \sin m \varphi + \sum_{m=2}^{m=\infty} f_3(r) \cos m \varphi \end{aligned}$$

Dla spełnienia warunków zamocowania mamy trzy grupy całek

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= C_1 + C_2 \ln r + \frac{C_3}{r^2} \\ R &= C_1 + C_2 (lur - 1) - \frac{C_3}{r^2} \\ T &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$



$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \left( 3 B r + \frac{E}{r} - \frac{D}{r^3} \right) \cos \varphi \\ R &= \left( B r + \frac{E}{r} + \frac{D}{r^3} \right) \cos \varphi \\ T &= \left( B r + \frac{E}{r} + \frac{D}{r^3} \right) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \left( 3 B_1 r + \frac{E_1}{r} - \frac{D_1}{r^3} \right) \sin \varphi \\ R &= \left( B_1 r + \frac{E_1}{r} - \frac{D_1}{r^3} \right) \sin \varphi \\ T &= \left( B_1 r + \frac{E_1}{r} + \frac{D_1}{r^3} \right) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

W pierwszej grupie możemy założyć  $R=0$  przy  $r=a$ ;  $R=0$ , lub  $R=\text{Const.}$  przy  $r=b$ .

Dowolną stałą  $C_2$  możemy określić z warunku  $\frac{dv}{dr} = 0$  przy

$$\varphi = \varphi_n, r = \frac{a+b}{2}.$$

W dwóch ostatnich grupach (2) i (3)  $T$  i  $R$  wyrażają się jednakowymi wzorami, a zatem możemy założyć  $T=R=0$  przy  $r=a$  i  $r=b$ . Dowolne stałe  $B$  i  $B_1$  określimy z warunków — przy  $\varphi = \varphi_n$  i

$r = \frac{a+b}{2}$  rzuty przesunąć na osie  $X$  i  $Y$  są równe zeru. Warunki zamocowania dwóch końców są spełnione założeniem  $A=B=C=0$

(pt. A. Timpe) dla podpory  $\varphi = -\varphi_n, r = \frac{a+b}{2}$  i wyżej przyto-

czonemi dla podpory  $\varphi = \varphi_n, r = \frac{a+b}{2}$ .

Fizyczny sens zadania jest oczywisty, kiedy określimy wektory i momenty, jak w zadaniu pierwszym.

**Ocena hipotez.** Tablica 1-sza zawiera wartości normalnych naprężeń dla wypadku Gołowina.

Naprężenia obliczone: a) za pomocą wzorów Gołowina, b) w założeniu hipotezy zachowania płaskiego przekroju i c) w założeniu hipotezy linjowej funkcji dla normalnych naprężeń. Z tej tablicy wynika, że hipoteza zachowania płaskiego przekroju jest dobrą hipotezą dla prętów krzywych.

**§ 6. Zginanie prętów cienkich.** (dla których zmianę krzywizny wywołaną ściskaniem można nie uwzględniać)\*),

Przybliżona metoda polega na całkowaniu równania

$$u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + r^2 \frac{M}{EJ} = 0$$

albo 
$$u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = f(\varphi).$$

Założymy

$$f(\varphi) = -r_0^2 \left( \frac{P}{EJ} x - \frac{H}{EJ} y - \frac{M_0}{EJ} \right) = -r_0^2 (ax - by - c) = \\ = -r_0^3 \cdot a [\sin \varphi - n(1 - \cos \varphi) - m].$$

$$r_0 = \frac{a+b}{2}.$$

$$u = \sin \varphi \left( C_1 + \int_0^\varphi f(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right) + \cos \varphi \left( C_2 - \int_0^\varphi f(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right) \\ = U \sin \varphi + V \cos \varphi.$$

$U$  i  $V$  przesunięcia w kierunku równoległym do osi  $X$  i  $Y$ .

$$\frac{du}{d\varphi} = \cos \varphi \left( C_1 + \int_0^\varphi f(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right) - \sin \varphi \left( C_2 - \int_0^\varphi f(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right)$$

przy  $\varphi = 0$ ,  $\frac{du}{d\varphi} = 0$ ;  $C_1 = 0$ ,  $u_0 = C_2$

przy  $\varphi = \varphi_n$ ,  $u_n = 0$ ;

$$\int_n^{\varphi_n} f(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0 \dots \dots \dots (*)$$

\*) Oznaczenia § 6 i następnich są niezależne od oznaczeń §§ 1—5.

(\*) Należy odróżnić  $a$ ,  $b$  i  $c$  od promieni  $a$  i  $b$ .

$$u = -\frac{Pr_0^3}{EJ} \left\{ -(m+n) + \frac{n}{2} (\mu \cos \varphi + \varphi \sin \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\varphi_n \cos \varphi + \sin \varphi - \varphi \cos) \right\} \quad \mu = 1 + \frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n}$$

Dla określenia liczb  $m$  i  $n$  mamy jedno równanie (\*), drugie otrzymamy z warunku

$$\delta \varphi_n = \int_0^{\varphi_n} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

$$u_0 = -\frac{Pr_0^3}{EJ} \left\{ -(m+n) + \frac{n}{2} \mu + \frac{\varphi_n}{2} \right\}; \quad \eta_0 = \beta W; \quad (\eta_0 = \frac{u_0}{r_0})$$

$u_0$  jest liniową funkcją  $P$ .

Całkowanie ścisłego równania

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_0} = ax - by - c \quad . \quad . \quad (**)$$

w wypadku symetrycznego pręta symetrycznie obciążonego siłą  $2P$ :

Różniczkując (\*\*), otrzymamy:

$$d\left(\frac{1}{\rho}\right) = a dx - b dy.$$

Mnożąc przez  $\frac{1}{\rho}$  i całkując w granicach  $\varphi_n$  i  $\varphi_0$

$$\frac{1}{\rho_n^2} - \frac{1}{\rho_0^2} = 2 \left| \frac{ay' + b}{\sqrt{1+y'^2}} \right|_{\varphi_0}^{\varphi_n} \quad *)$$

\*)  $EJ \cdot \frac{ay' + b}{\sqrt{1+y'^2}}$  jest wektor sił, ściskających pręt, styczny do odkształconej osi pręta.

Obierając za jednostkę siły siłę  $\frac{EJ}{r_0^2}$ , \*)

$$a = \frac{\beta}{r_0^2}; b = \frac{n\beta}{r_0^2}; c = \frac{m\beta}{r_0};$$

$$\frac{1}{\rho_n^2} - \frac{1}{\rho_0^2} = \frac{2\beta}{r_0^2} \operatorname{Sin} \varphi_n \left\{ 1 - \frac{n(1 - \operatorname{Cos} \varphi_n)}{\operatorname{Sin} \varphi_n} \right\} = \frac{2\beta\lambda}{r_0^2} \quad (***)$$

W równaniu (\*\*)  $x$  i  $y$  są współrzędne odkształconej osi:

$$\frac{1}{\hat{r}} = \frac{1}{r_0} + a(x+u) - b(y+v) - c$$

$$\text{Przy } \varphi = 0; x = u = 0; y = 0; v = v_0$$

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{r_0} - b v_0 - c = \frac{1}{r_0} (1 - m\beta - n\beta \eta_0); \quad \eta_0 = \frac{v_0}{r_0};$$

$$M_0^1 = - (H) v_0 - M_0$$

$$\text{Przy } \varphi = \varphi_n, x = l, u_n = 0, y_n = \frac{1 - \operatorname{Cos} \varphi_n}{\operatorname{Sin} \varphi_n}$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{r_0} (1 - m\beta + \beta\lambda)$$

$$\begin{aligned} M_n^1 &= -H v_0 - M_0 + P \cdot l - H \left( \frac{1 - \operatorname{Cos} \varphi_n}{\operatorname{Sin} \varphi_n} - v_0 \right) = \\ &= -M_0 + P l - H \left( \frac{1 - \operatorname{Cos} \varphi_n}{\operatorname{Sin} \varphi_n} \right) \end{aligned}$$

Podstawiony do (\*\*\*)

$$(1 - m\beta + \beta\lambda)^2 (1 - m\beta - n\beta \eta_0)^2 = 2\beta\lambda$$

Skąd otrzymamy

$$\eta_0 = \frac{\frac{1}{\beta} - m - \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} - m\right)^2 - 2m\lambda - \lambda^2}}{n}$$

\*) Dowolna siła

$$P_i = \frac{\beta_i E J i}{r_0^2}$$

Stosunek sił przy jednakowym  $r_0$

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{\beta_i J_i}{\beta_j J_j}$$

$$\frac{a \eta_0}{a \beta} = \eta_0' = \frac{n \left( \eta_0 + \frac{2m - \lambda}{n} \right) \left( \eta_0 + \frac{\lambda}{n} \right)}{2 \left\{ 1 - \beta (m + n \eta_0) \right\}}$$

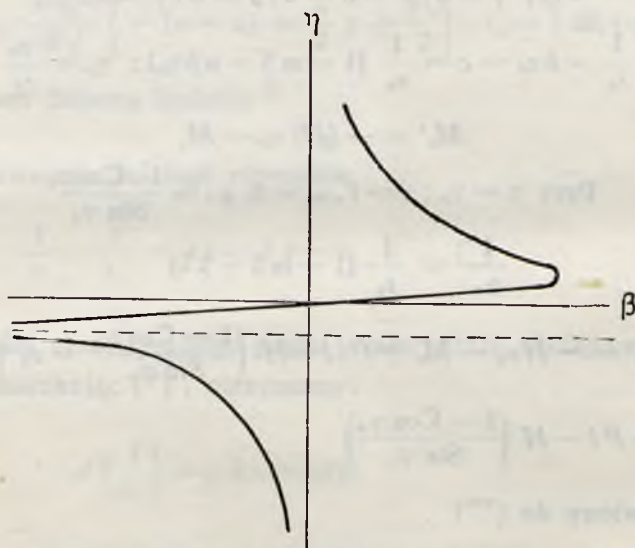
Przy  $\eta_0 = \beta = 0$

$$\eta_0' = \frac{2m\lambda - \lambda^2}{2n}$$

Przy  $\beta = \beta_1 = \frac{1}{m + \sqrt{2\lambda m - \lambda^2}}$

$$\eta_0' = \infty; \eta_0 = \left( \frac{1}{\beta} - m \right) \cdot \frac{1}{n}$$

Przy  $\beta > \beta_1; \eta_0$  urojone.



Rys. 3.

Zależność między  $\eta_0$  i  $\beta$  wyraża się algebraiczną krzywą trzeciego stopnia, krzywa ma asymptoty równoległe do osi  $x$ , dwie gałęzie w ćwiartce dodatnich i ujemnych  $\beta$  i  $\eta_0$  i punkt podwójny w nieskończoności. Krzywa w ćwiartce dodatnich  $\eta_0$  i  $\beta$  ma wierzchołek ( $\eta_0' = \infty$ ).

W przedziale  $\beta = 0$  i  $\beta = \beta_1$  krzywa bardzo mało odchyła się od prostej, Max. odchylenie w wierzchołku krzywej:

$$\frac{\sqrt{2\lambda m - \lambda^2}}{n} \cdot \left( 1 - \beta_1 \frac{\sqrt{2\lambda m - \lambda^2}}{2} \right)$$

W przybliżeniu to odchylenie mniejsze od  $\frac{\sqrt{2\lambda m - \lambda^2}}{n}$ .

Dla prętów, dla których  $\frac{\pi}{2} \geq \varphi_n \geq \frac{\pi}{4}$  różnica ta zmniejsza się z przybliżeniem  $\varphi_n$  do  $\frac{\pi}{4}$ . W przedziale  $\beta = 0$  i  $\beta = \beta_1$  można

obrać takie  $\beta$ , przy którym ta różnica nie będzie przekraczać zgóry żadnej wielkości. Krzywa ta jest podobna do tej, którą otrzymujemy eksperymentalnie przy rozciąganiu pręta. Wierzchołkowi krzywej odpowiada (Commencement de la striction, Flussgrentze)

Założymy  $\eta_{10}$  tak małe, że  $\eta_{10}^2$  można odrzucić w porównaniu z  $\eta_{10}$ , wtedy:

$$\eta_{10} = \frac{\beta (2\lambda m - \lambda^2)}{2n (1 - m\beta)}$$

$\eta_{10}$  będzie proporcjonalne do  $\beta$ , jeśli  $m\beta$  może być odrzucone w porównaniu z 1. Przy  $\eta_{10}$  nie małych ta proporcjonalność  $\eta_{10}$  do  $\beta$  jest dobrem przybliżeniem dla  $\beta$  skończonych. W innym artykule przytoczyłem, że ścisła teoria sprężystości określa stosunek szybkości fal podłużnych do szybkości fal poprzecznych jako  $\sqrt{3}$ , w założeniu, że liczba Poisson'a równa się  $1/4$ . Zöppriz i Geiger ustalili z wielu doświadczeń, że ten stosunek dla fal seismicznych na powierzchni ziemi jest równy 1,788. Ścisła proporcjonalność  $\eta_{10}$  do  $\beta$  zachodzi teoretycznie dla  $\eta_{10}$  i  $\beta$  bardzo małych w założeniu wzorowej sprężystości. Proporcjonalność nie formalna lecz o bardzo dobrem przybliżeniu może być przyjęta dla  $\eta_{10}$  i  $\beta$  nie małych. W stosowaniu do ciał realnych może ona być ustalona w dość szerokich granicach i potwierdzona eksperymentalnie.

Przy  $\beta = \beta_1 \frac{1}{\rho_0} = 0$ , to jest spłaszcza się element linjowy w wierzchołku ( $\varphi = 0$ ), według terminologii Niewęgłowskiego formuje się point mēplat.

Przy wzrastaniu  $\beta$  ponad  $\beta_1$  spłaszczeniu ulegają sąsiednie elementy do pewnej granicy  $\beta = \beta_2$ , które określamy z drugiej całki równania

$$\delta \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{M}{EI} = 0$$

Założymy

$$\frac{ay' + b}{\sqrt{1+y'^2}} = t$$

Stąd

$$y' = \frac{-ab + t\sqrt{a^2 + b^2 - t^2}}{a^2 - t^2}$$

Oznaczmy  $\frac{1}{\rho}$  przez  $\mu$ .

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\mu} = \frac{1}{a - by'} &= \frac{a^2 - t^2}{\sqrt{a^2 + b^2 - t^2} \{ a\sqrt{a^2 + b^2 - t^2} - bt \}} = \\ &= \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2 - t^2}} \end{aligned}$$

Będziemy badać zjawisko gięcia w fazie, kiedy  $\mu_0$  pozostaje równe zeru.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{a^2 + b^2} \sqrt{2\beta\lambda} + \frac{b}{a^2 + b^2} \sum_{t_0}^t \int \frac{t dt}{\sqrt{T}} \\ y &= -\frac{b}{a^2 + b^2} \sqrt{2\beta\lambda} + \frac{a}{a^2 + b^2} \sum_{t_0}^t \int \frac{t dt}{\sqrt{T}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{****}$$

$$T = 2(a^2 + b^2 - t^2)(t - b)$$

Symbolem  $\Sigma$  oznaczamy sumę całek w granicach monotonnej zmiany  $t$ .

Określimy te granice:

Założymy  $y'' > 0$

Przy  $y' = \frac{a}{b}$ ;  $\frac{d^2t}{dx^2} < 0$

$$\max. t = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Przy  $\varphi = 0$ ,  $t = b$

W razie  $y'' < 0$   $\frac{dt}{dx}$  i  $\frac{d\mu}{dx}$  są mniejsze od zera.

Całkując (\*\*\*) w granicach  $t_n - t_0$  otrzymamy z nich:

$$lb + a(f - v_0) = \sum_{t_0}^{t_n} \int \frac{t dt}{\sqrt{T}},$$

z którego określimy  $v_0$

Założymy  $t = az$

$$l\sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}^{\lambda}}{1+n^2} + \frac{n}{\sqrt{2}(1+n^2)} \left\{ \int_n^{\sqrt{1+n^2}} \frac{z dz}{\sqrt{Z}} - \int_n^{\frac{n+\lambda}{\sqrt{1+n^2}}} \frac{z dz}{\sqrt{Z}} \right\}$$

$$Z = (1+n^2 - z^2)(z-n)$$

Obierając nową zmienną  $pu$  (funk. Weierstrass'a)

$$pu = -\{3z - n\} \frac{1}{3\sqrt{4}}$$

Dla pierwiastku wielomianu otrzymamy

$$e_1 = (3\sqrt{1+n^2} + n) \frac{1}{3\sqrt{4}}$$

$$e_2 = -2n \cdot \frac{1}{3\sqrt{4}}$$

$$e_3 = (-3\sqrt{1+n^2} + n) \frac{1}{3\sqrt{4}}$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

Oznaczmy dwa okresy funkcji eliptycznych przez  $w$  i  $w_1$  i zważając że

$$pu = e_1; p(w + w_1) = e_2; pw_1 = e_3$$

$$\int_n^{\sqrt{1+n^2}} \frac{z dz}{\sqrt{Z}} - \int_n^{\frac{n+\lambda}{\sqrt{1+n^2}}} \frac{z dz}{\sqrt{Z}} = 2\sqrt{2} \left\{ \int_{w+w_1}^{w_1} \left( pu + \frac{e_2}{2} \right) du - \int_{w_1}^{w_1+v_1} \left( pu + \frac{e_2}{2} \right) du \right\}$$



$$\sin \varphi_1 = \sqrt{\frac{pu_n - e_3}{e_2 - e_3}} \quad (\varphi_1 - \text{amplituda})$$

$$e_2 > pu_n > e_3$$

ponieważ  $pu_n < e_2$ ;  $Z_n > n$

$$\sin \varphi_n + n \cos \varphi_n > n$$

$$n < \frac{\sin \varphi_n}{1 - \cos \varphi_n}$$

$$l \sqrt{a} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{1+n^2} + \frac{n \sqrt{2\sqrt{2}}}{1+n^2} \left[ \eta_1 + \sqrt{e_1 - e_3} E(\varphi) - e_1 v_1 - \frac{e_2}{2} (\omega + v_1) \right]$$

$$\eta_1 = \zeta(\omega)$$

$$lb + a(f - v_0) = \sqrt{a} (ln + f - v_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_n^{\sqrt{1+n^2}} \frac{z dz}{\sqrt{Z}} - \int_n^{\frac{n+l}{\sqrt{1+n^2}}} \frac{z dz}{\sqrt{Z}} \right\}$$

Prostrzy wzór otrzymamy korzystając z warunku

$$\int_0^l dx \sqrt{1+y'^2} = r_0 \varphi_n$$

ponieważ

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{ay' + b}{t}, \quad a dx = \frac{dy}{a - by'}$$

$$\int_0^l dx \sqrt{1+y'^2} = \int_{t_0}^{t_n} \frac{dt}{\sqrt{T}}$$

Zakładając  $t = az$ , a zatem  $z = -\sqrt[3]{4} pu + \frac{n}{3}$ , otrzymamy

$$r_0 \varphi_n = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2a}} \left( \int_n^{\sqrt{1+n^2}} du - \int_n^{\frac{n+l}{\sqrt{1+n^2}}} du \right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} \left( \omega + v_1 \right)$$

Powyżej otrzymaliśmy, że

$$n < \frac{\sin \varphi_n}{1 - \cos \varphi_n}$$

$$\text{W razie } n = \frac{\sin \varphi_n}{1 - \cos \varphi_n}, \quad \rho u = e_2; \quad u_n = w + w_1$$

$$\sqrt{a} r_0 \varphi_n = \sqrt{2} \sqrt[3]{4} w$$

$$\beta = 4 \sqrt[3]{2} \left( \frac{w}{\varphi_n} \right)^2$$

Przy takim założeniu  $\lambda = 0$ ,  $\mu_0 = 0$  i  $\mu_n = 0$ , t. j. kiedy siła  $P$  osiągnie wartość określoną liczbą  $\beta_2$  nastąpi spłaszczenie elementów linjowych na końcach pręta.

Założymy  $a = 0$ ;  $n = 1$ , to jest założymy, że pręt prosty jest ściskany siłą  $H$ ;  $t = bz$

$$e_1 = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}}; \quad e_2 = e_3 = -\frac{2}{3\sqrt[3]{4}};$$

$$\text{mod. } k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 0$$

$$\text{Okres } w = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}; \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi'}} = \frac{\pi}{2}; \quad \omega = \frac{\pi}{2\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt[3]{4}}}}$$

Ze wzoru

$$\sqrt{b} r_0 \varphi_n = \sqrt{2} \sqrt[3]{4} w = \omega \frac{\pi}{2\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt[3]{4}}}}$$

Otrzymamy

$$H = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}; \quad (L = 2l)$$

Wartość  $\beta = \beta_2$  odpowiada w pręcie prostym ściskanym sile Euler'a, przy której może powstać gięcie pręta. Przy  $\beta > \beta_2$ , druga pochodna zmienia znak  $\frac{1}{\rho} < 0$ , i równowaga jest już niestateczna.

Zachowanie znaku  $\frac{1}{\rho}$  jest warunkiem stateczności równowagi. Dla sił określonych liczbami  $\beta_1 > \beta > 0$  opór pręta przeciw działaniu sił jest sprężysty, t. j. w przybliżeniu przesunięcia  $v_0$  są proporcjonalne do sił \*)

Korzystając z przytoczonych wzorów i zmieniając  $n$  od  $n_1$ , które odpowiada  $\beta = \beta_1$  do  $n_2$ , odpowiadającego  $\beta = \beta_2$ , możemy wykreślić krzywą  $\eta_0 = f(\beta)$  dla  $\beta_2 \gg \beta \gg \beta_1$ .

Całokształt gięcia pręta wyraża się krzywą analogiczną krzywej, którą kreśli przyrząd przy rozciąganiu pręta.

Tak zwane granice Euler'a są rezultatem badania całki równania  $\delta \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{M}{EI} = 0$  jako funkcji parametrów.

$$M = -(Py + M_0).$$

Badaliśmy całkę bardziej ogólnego równania, w którym  $\frac{M}{EJ} = ax - by - c$  i otrzymaliśmy więcej ogólne rezultaty. Badanie pierwszej całki wskazało wyraźnie granice sprężystego oporu prętów.

W układach prętów o połączeniach sztywnych

$$\frac{M}{EJ} = a_1x - b_1y - c_1, **)$$

\*) Wyniki teoretyczne były sprawdzone w laboratorium optycznym Politechniki Petersburskiej.

\*\*) Dla prętów nieważkich ogólna forma momentu — jak wiadomo — jest linjowa funkcja współrzędnych, wyraźna przy zamocowanych końcach. Dla prętów wolno opartych moment zależy — ceteris paribus — od kąta pochylenia stycznej na podporach i od rodzaju podpór (ich formy i tarcia na podporach). Dla prętów prostych przy stałej odległości między podporami, musimy założyć, że długość pręta jest nieokreślona w wypadku przesunięć skończonych.

W danym wypadku:

$$\frac{1}{\rho} = a \left\{ (l-x) + y \operatorname{tg} \varphi_n \right\}.$$

$\varphi_n$  — kąt pochylenia stycznej na podporze,

$$a = \frac{P}{EJ}.$$

t. j. ma taką samą formę, lecz zamiast  $\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{M}{EJ}$  musimy całkować równanie:

$$\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{M}{EJ} + \frac{\eta}{E\omega\rho_1} \left[ \Phi + \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) \frac{M}{\rho} \right];$$

$\Phi$  — wektor,  $\omega$  — pole przekroju,  $\eta$  — liczba Poisson'a.

Stosowanie równania  $\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{M}{EJ}$  \*) do prętów o skończonej

grubości może doprowadzić do nie realnych wniosków i jest zupełnie bezwartościowe. Dla inżyniera mają wartość tylko granice sprężystego oporu prętów. Badaniu tych granic dla prętów o nie małej grubości poświęcę następny artykuł.

Określmy teraz  $\beta_2$  dla  $\varphi_n = \frac{\pi}{3.6}$  i  $\frac{\pi}{2}$  i stosunek  $\frac{\beta_1}{\beta_2}$

\*) Do jakiej grubości można stosować te równania decyduje zgoda teorii z doświadczeniem.

Ponieważ  $\frac{1}{\rho_n} = 0$ , to

$$\frac{1}{\rho_0^2} = 2a \left\{ 2 \sin \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi_n \right\};$$

a zatem:

$$y_0 \operatorname{tg} \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a} (2 \sin \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi_n) - l}$$

$$\frac{2}{a} \left\{ 2 \sin \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi_n \right\} > l^2$$

[ $l = \lambda - r \sin \varphi_n$ ;  $\lambda$  — odległość między podporami,  $r$  — promień cylindra podporowego].

$$P < \frac{PJ}{l^2} 2 \sin \varphi_n \left( 2 - \frac{1}{\cos \varphi_n} \right)$$

Przy  $\varphi_n = 0$  i  $\varphi_n = 60^\circ$ ,  $P = 0$ .

$$\varphi_n = \frac{\pi}{3.6}$$

$$\begin{aligned} n &= 2,14451 \\ k &= \sin \theta = 0,216438 \\ \theta &= 12^{\circ},499 \\ e_1 &= 1,94096 \\ pu_n = e_2 &= -0,90065 \\ e_3 &= -1,04031 \\ F &= 1,58972 \\ \sqrt{e_1 - e_3} &= 1,72663 \\ \omega &= 0,92071 \\ \varphi_n &= 0,87266 \\ \frac{\omega}{\varphi_n} &= 1,05506 \\ \left(\frac{\omega}{\varphi_n}\right)^2 &= 1,11315 \\ \beta_2 &= 5,61028 \end{aligned}$$

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} n &= 1,00000 \\ k &= \sin \theta = 0,382678 \\ \theta &= 22^{\circ},499 \\ e_1 &= 1,10090 \\ pu_n = e_2 &= -0,41998 \\ e_3 &= -0,68092 \\ F &= 1,63352 \\ \sqrt{e_1 - e_3} &= 1,33485 \\ \omega &= 1,22375 \\ \varphi_n &= 1,57080 \\ \frac{\omega}{\varphi_n} &= 0,77906 \\ \left(\frac{\omega}{\varphi_n}\right)^2 &= 0,60700 \\ \beta_2 &= 3,0598 \end{aligned}$$

$$\max. P \text{ przy } \cos \varphi_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,793; \varphi_n = 37^{\circ}32'$$

Przy takim kącie pochylenia  $P < 0,9 \frac{EJ}{l^2}$ ; przy  $\varphi_n \geq 37^{\circ}32'$  i  $P \geq 0,9 \frac{EJ}{l^2}$  równowagi być nie może, jeśli pręt jest cienki.

Tarcie na podporach zwiększa  $P$ , odchylając wypadkową od normalnej w kierunku  $P$ . Rzeczywiste  $P$  będzie zawarte w granicach

$\frac{2EJ}{l^2} > P > 0,9 \frac{EJ}{l^2}$ . Ta analiza, oparta na całkowaniu równania

$\frac{1}{\rho} + \frac{M}{EJ} = 0$ , jest miarodajna tylko dla prętów cienkich.

Te przybliżone dedukcje dadzą nam możliwość definicji pręta cienkiego przy zginaniu. Dla pręta danej grubości będziemy zwiększać  $l$  do takiej wartości przy której kąt  $\varphi_n = 37^{\circ}32'$  będzie krytycznym kątem dla równowagi pręta. Wogóle ten stosunek będzie bardzo mały. Najmniejsze tarcie na podporach zwiększa  $P$ . Obszerniej o tem w następnym artykule.

U w a g a: Wskażemy przy tej sposobności na błędy drukarskie w Exercices Le Gendre'a T. III: p. 363 zamiast  $E(\theta = 22^\circ, \varphi = 78^\circ) = 1,3107285082$  powinno być  $1,3197285082$ ; p. 380 — zamiast  $F(\theta = 44^\circ, \varphi = 80^\circ) = 1,5890649280$  powinno być  $1,5980649280$ ; p. 404 — zamiast  $F(\theta = 71^\circ, \varphi = 61^\circ) = 1,291796493$  powinno być  $1,297196493$ .

Przybliżone wartości na  $\beta_2$  (z omyłką do kilku procentów) można otrzymać w bardzo prosty sposób.

We wzorze

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(r_0 + u)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 - (r_0 + u) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}{\left[ (r_0 + u)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Założymy  $\frac{1}{\rho} = 0$  przy  $\varphi = 0$ , a ponieważ dla tego punktu  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ , to

$$r_0 + u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2}.$$

Korzystając z wyżej podanego wzoru na  $u$ , otrzymamy:

$$\beta_2 = \frac{1}{m + n - \varphi_n \left( 1 + \frac{n}{\ln \varphi_n} \right)}$$

Za pomocą tego wzoru otrzymamy

$$\begin{array}{ll} \text{przy } \varphi_n = \frac{\pi}{3.6} & \text{przy } \varphi_n = \frac{\pi}{2} \\ \beta_2 = 5,8 & \beta_2 = 2,86 \end{array}$$

Stosunek  $\frac{\beta_1}{\beta_2}$  dla  $\frac{\pi}{2} \geq \varphi_n \geq \frac{\pi}{4}$  jest blizki do 0,6.

W takim stosunku są  $\frac{\text{granica sprężystego oporu pręta}}{\text{granica oporu pręta}}$

Dla inżyniera realną wartość mają granice  $\beta_1$ , granice  $\beta_2$  są małowartościowe.

W n i o s k i. 1. Dwie metody całkowania wskazane w §§ 2 i 4 dają identyczne rezultaty, które są ogólnym rozwiązaniem dwuwymiarowego zadania dla prętów określonych jak wyżej.

2. Szczególne wypadki (zadania od 1 do 4) nie nastroczają żadnych trudności.

3. Dla spełnienia 6 warunków zamocowania końców pręta mamy dowolne stałe  $A, B, D$  ( $A, B, C$  u A. Timpe) i  $B, B^1, C_2$  w całkach G. Lamé'go i dwu całkach, które odpowiadają  $m = 1$ .

4. Hipoteza zachowania płaskiego przekroju jest dobra dla prętów o normalnej grubości.\*)

5. Twierdzenie Betti-Maxwell'a dla cienkich prętów może być stosowane w granicach  $\beta_1 > \beta > 0$ , a nawet  $\beta_1 \geq \beta > 0$ .

6. Stosowanie równania  $\delta \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{M}{EJ}$  dla prętów o skończonej grubości jest niedopuszczalne.

7. Granice  $\beta_1$  są bardziej pożądane niż granice  $\beta_2$ .

P. S. do § 6.

Pręt cienki (prosty) jest określony wzorem

$$P = E \cdot \omega \pi^2 \left( \frac{r}{l} \right)^2;$$

w założeniu:

a)  $\frac{P}{\omega} = N_3 = \text{Const.}$  ( $T_i = 0, w = -az, u = bx, v = cy$ )

b) przekroju prostokątnego  $\left( v = \frac{e}{\sqrt{3}} \right)$

$$\frac{2e}{l} = \frac{\text{grubość}}{\text{długość}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{12 N_3}{E}}$$

Dla stali zlewnej

$$\frac{2e}{l} \approx 0,03$$

\*) Normalną grubością pręta nazywamy taką, przy której normalne naprężenia w przekrojach pręta, wywołane działaniem sił na powierzchnię pręta i na jego masę, będą najmniejsze.

W innym artykule określiłem dolną granicę dla pręta  $\cong 0,05$  (dla st. zl.).

Stosując wzór  $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  do prętów  $\left(\frac{2e}{l} = 0,05\right)$  otrzymamy

$N_3$  prawie w 3 razy większym. Wogóle doświadczenie decyduje o granicach stosowalności wzorów teoretycznych. W dziedzinie, tak zwanego wyboczenia, jest dużo wzorów nic wspólnego z teorią nie mających.



Tabela porównawcza naprężeń obliczonych w/g wzoru prof. Gołowina i w/g wzorów (t) i (t') (opublikowana w 1906 r.)

$2e = 0,25 \text{ m.}$

$$\Phi = \frac{N_1}{p} = 69,266 + 196,817 \ln \frac{r}{r_1} - 127,552 \frac{r_1^2}{r^2} + \left[ -141,460 \frac{r}{r_1} + 124,303 \frac{r_1}{r} + 77,149 \frac{r_1^3}{r^3} \right] \cos \theta = A + B \cos \theta.$$

N N	M	r	$196,817 \ln \frac{r}{r_1}$	$-127,552 \frac{r_1^2}{r^2}$	A	$-141,460 \frac{r}{r_1}$	$124,303 \frac{r_1}{r}$	$77,149 \frac{r_1^3}{r^3}$	B	B Cos θ dla θ =					$\Phi = \frac{N_1}{p}$ dla θ =				
										0°	5°	10°	40°	45°	0°	5°	10°	40°	45°
0	0	1,0000	0	-127,5520	-58,286	-141,4600	124,3030	77,1490	+59,992	+59,992	+59,764	+59,081	+45,956	+42,221	+1,706	+1,478	+0,795	-12,336	-15,865
1	0,0417	1,0417	8,0957	-117,5443	-40,183	-147,3589	119,3270	68,2499	+40,218	+40,218	+49,065	+39,607	+30,809	+28,439	+0,035	-0,118	-0,576	-9,374	-11,744
2	0,0833	1,0833	15,6885	-108,7502	-23,796	-153,2436	114,7765	60,7357	+22,268	+22,268	+22,183	+21,930	+17,058	+15,746	-1,528	-1,613	-1,866	-6,738	-8,050
3	0,1250	1,1250	23,1811	-100,7817	-8,335	-159,1425	110,4914	54,1840	+5,533	+5,533	+5,512	+5,449	+4,238	+3,912	-2,802	-2,823	-2,886	-4,097	-4,423
4	0,1667	1,1667	30,3946	-93,7062	+5,954	-165,0414	106,5423	48,5794	-9,920	-9,920	-9,882	-9,769	-7,599	-7,015	-3,966	-3,928	-3,816	-1,645	-1,061
5	0,2083	1,2083	37,1896	-87,3651	+19,091	-170,9261	102,8743	43,7327	-24,319	-24,319	-24,227	-23,950	-18,629	-17,196	-5,228	-5,136	-4,859	+0,462	+1,892
6	0,2500	1,2500	43,9185	-81,6333	+31,551	-176,8250	99,4424	39,5002	-37,882	-37,882	-37,738	-37,307	-29,019	-26,787	-6,331	-6,187	-5,756	+2,532	+4,764

$$\Phi_R^x = N_0 = -\{2,5000 - 1,8386 \cos \theta\}$$

$$M_R^x = M_\theta - N_\theta \cdot r_\theta = -\{2,3473 - 1,5625 \cos \theta\} - N_\theta \cdot r_\theta$$

$$\Phi = \frac{\Phi_R^x}{2e} + \frac{M_R^x}{2e r_0} + \frac{M_R^x}{I} \cdot \frac{r_0 z}{r} \dots (t)$$

θ	0°	5°	10°	40°	45°
$\Phi_R^x$	-0,6614	-0,6684	-0,6893	-1,0916	-1,1999
$M_R^x$	-0,0407	-0,0387	-0,0330	+0,0977	+0,1075
$\frac{\Phi_R^x}{2e}$	-2,646	-2,674	-2,757	-4,366	-4,800
$\frac{M_R^x}{2e r_0}$	-0,145	-0,138	-0,117	+0,276	+0,382
$\frac{\Phi_R^x}{2e} + \frac{M_R^x}{2e r_0}$	-2,791	-2,812	-2,874	-4,090	-4,418

N N	z	r	$\frac{M_R^x}{I} \cdot \frac{r_0 z}{r}$ dla θ =					$\Phi = \frac{\Phi_R^x}{2e} + \frac{M_R^x}{2e r_0} + \frac{M_R^x}{I} \cdot \frac{r_0 z}{r}$ dla θ =				
			0°	5°	10°	40°	45°	0°	5°	10°	40°	45°
0	-0,1250	1,0000	+4,396	+4,180	+3,564	-8,392	-11,610	+1,605	+1,368	+0,690	-12,482	-16,028
1	-0,0833	1,0417	+2,812	+2,674	+2,280	-5,369	-7,428	+0,021	-0,138	-0,594	-9,459	-11,846
2	-0,0417	1,0833	+1,353	+1,287	+1,097	-2,584	-3,575	-1,437	-1,525	-1,777	-6,674	-7,985
3	0	1,1250	0	0	0	0	0	-2,791	-2,812	-2,874	-4,090	-4,418
4	0,0417	1,1667	-1,257	-1,195	-1,019	+2,399	+3,319	-4,048	-4,007	-3,893	-1,791	-1,099
5	0,0833	1,2083	-2,425	-2,305	-1,966	+4,629	+6,404	-5,216	-5,117	-4,840	+0,539	+1,986
6	0,1250	1,2500	-3,516	-3,344	-2,851	+6,713	+9,288	-6,307	-6,156	-5,725	+2,623	+4,870

$$\Phi = \frac{\Phi_R^x}{2e} + \frac{M_R^x}{I} \cdot z \dots (t')$$

N N	z	r	$\frac{M_B^x}{I} \cdot z$ dla θ =					$\Phi = \frac{\Phi_R^x}{2e} + \frac{M_R^x}{I} \cdot z$ dla θ =				
			0°	5°	10°	40°	45°	0°	5°	10°	40°	45°
0	-0,1250	1,0000	+3,907	+3,716	+3,168	-7,460	-10,320	+1,261	+1,042	+0,411	-11,826	-15,120
1	-0,0833	1,0417	+2,604	+2,476	+2,111	-4,972	-6,878	-0,042	-0,198	-0,646	-9,338	-11,678
2	-0,0417	1,0833	+1,303	+1,239	+1,056	-2,488	-3,442	-1,343	-1,435	-1,701	-6,854	-8,242
3	0	1,1250	0	0	0	0	0	-2,646	-2,674	-2,757	-4,366	-4,800
4	0,0417	1,1667	-1,303	-1,239	-1,056	+2,488	+3,442	-3,949	-3,913	-3,813	-1,878	-1,358
5	0,0833	1,2083	-2,604	-2,476	-2,111	+4,972	+6,878	-5,250	-5,150	-4,868	+0,604	+2,078
6	0,1250	1,2500	-3,907	-3,716	-3,168	+7,460	+10,320	-6,553	-6,390	-5,925	+3,094	+5,520

**UWAGA.** Największy błąd w/g wzoru (t) w porównaniu ze wzorem Gołowina jest równy 9% (N4, θ = 40°).

Największy błąd w/g wzoru (t') w porównaniu ze wzorem Gołowina jest równy 30% (N0; θ = 5°).

Dla wszystkich naprężeń mniejszych od jednostki różnic nie obliczano, ponieważ obydwa wzory (t) i (t') dają wielkie błędy, wskutek małej wielkości Φ. Jednak i w tym wypadku naprężenia obliczone w/g wzoru (t) są bliższe do obliczonych w/g ścisłego wzoru. Różnica w/g wzoru (t) stanowi, na przykład dla N0 i θ = 0°, 40%, podczas gdy różnica w/g wzoru (t') wynosi 220%.

$\phi_n$	$\psi_n$	$\sin \psi_n$	$\sin^2 \psi_n$	$\cos \psi_n$	$\sin \psi_n \cos \psi_n$	$\phi_n \sin \psi_n \cos \psi_n$	$\psi_n^2$	$2 \sin^2 \psi_n$	$\phi_n \sin \psi_n \cos \psi_n + \psi_n^2 - 2 \sin^2 \psi_n$	$\phi_n - \sin \psi_n \cos \psi_n$	$\frac{\phi_n}{2}$	$\frac{\sin^2 \phi_n}{2}$	$\phi_n$
90°	1.57089633	1.0000000	1.0000000	0	0	0	2.46740111	2.0000000	0.46740111	1.57079633	0.78298320	0.78539821	90°
85°	1.48352986	0.9961947	0.99240388	0.0571557	0.08682405	0.12880607	2.20086085	1.98480776	0.34485916	1.39670581	0.74176490	0.7361303	85°
80°	1.39626340	0.9818078	0.96984640	0.173648	0.17101010	0.23877514	1.94955148	1.93969280	0.24863382	1.22525335	0.60813170	0.6770866	80°
75°	1.30899694	0.9659258	0.93301265	0.2588190	0.2500000	0.32724924	1.71347299	1.86602530	0.17469693	1.05899694	0.65449850	0.6106555	75°
70°	1.22173048	0.9396926	0.88302218	0.3420201	0.32139376	0.39265655	1.49262537	1.76604436	0.11923756	0.90033672	0.61086530	0.5394076	70°
65°	1.13446401	0.9063078	0.82139383	0.4226183	0.38302226	0.43452507	1.28700859	1.64278766	0.07874600	0.75144175	0.56723200	0.4659208	65°
60°	1.04719755	0.8660254	0.7500000	0.5000000	0.43301270	0.45344984	1.09662271	1.50000000	0.05007455	0.61418485	0.52359880	0.3926991	60°
55°	0.95993103	0.8191521	0.67101016	0.5735764	0.46984631	0.45102008	0.92146770	1.34202032	0.03046746	0.49009478	0.47796655	0.3220617	55°
50°	0.87266463	0.7660444	0.58682402	0.6427876	0.49240384	0.42970341	0.76155356	1.17364804	0.01759893	0.38025079	0.43633230	0.2560503	50°
45°	0.78539016	0.7071068	0.4000000	0.7071068	0.39269908	0.3261685087	1.0000000	0.00954935	0.48539816	-0.0782914	0.39269910	0.1963496	45°

$$n = \frac{d}{c} = \frac{2 \sin \varphi_n (1 - \cos \varphi_n) - \varphi_n \cdot \sin^2 \varphi_n}{\varphi_n \sin \varphi_n \cos \varphi_n + \varphi_n^2 - 2 \sin^2 \varphi_n}$$

$$m = \frac{b}{c} = \frac{(1 - \cos \varphi_n) (\varphi_n - 3 \sin \varphi_n) + \varphi_n \sin^2 \varphi_n}{\varphi_n \sin \varphi_n \cos \varphi_n + \varphi_n^2 - 2 \sin^2 \varphi_n}$$

$$v = \frac{1 - \cos \varphi_n}{\sin \varphi_n}, \quad \lambda = \sin \varphi_n \cdot \left\{ 1 - \frac{n(1 - \cos \varphi_n)}{\sin \varphi_n} \right\} = \sin \varphi_n (1 - n v)$$

$\varphi_n^0$	c	d	b	$n = \frac{d}{c}$	$m = \frac{b}{c}$	v	$n v$	$1 - n v$	$\lambda$	$m^2$	$\lambda^2$	$\varphi_n^0$
90°	0.46740111	0.42920367	0.14159266	0.91827695	0.30293618	1.00000000	0.91827695	0.08172305	0.08172305	0.09177033	0.00667866	90°
85°	0.34485916	0.34648052	0.09838064	1.00470151	0.28527773	0.91633122	0.92063936	0.07936064	0.07905865	0.00625027	0.00625027	86°
80°	0.24863382	0.27343437	0.06657271	1.09974729	0.26775404	0.83909957	0.92279748	0.07720252	0.07602964	0.00578051	0.00578051	80°
75°	0.17469693	0.21054100	0.04373681	1.20517859	0.25035821	0.76732706	0.92476614	0.07523386	0.07267033	0.00528098	0.00528098	75°
70°	0.11923756	0.15778258	0.02779268	1.32326240	0.23308662	0.70020760	0.92655839	0.07344161	0.06901254	0.00476273	0.00476273	70°
65°	0.07874600	0.11472934	0.01700388	1.45695451	0.21593325	0.63707021	0.92818232	0.07181768	0.06508892	0.004662717	0.004662717	65°
60°	0.05007255	0.08062724	0.00995883	1.61020839	0.19888801	0.57735027	0.92965425	0.07034575	0.06092121	0.003955644	0.00371139	60°
55°	0.03046746	0.05448807	0.00554342	1.78840212	0.18194559	0.52056706	0.93098323	0.06901677	0.056553523	0.003310420	0.00319623	55°
50°	0.01759893	0.03518055	0.00290552	1.99901642	0.16509640	0.46630770	0.93215675	0.06784325	0.05197094	0.002725682	0.00270098	50°
45°	0.00954935	0.02151447	0.00141654	2.25297743	0.14833889	0.41421352	0.93321371	0.06678629	0.04722504	0.002200443	0.00223020	45°

$\varphi_n^0$	$\lambda_m$	$2\lambda_m$	$2\lambda_m - \lambda^2$	$2n$	$\frac{2\lambda_m - \lambda^2}{2n}$
90°	0.02475687	0.04951374	0.04283508	1.83655390	0.02332336
85°	0.02255367	0.04510734	0.03885707	2.00940302	0.01933376
80°	0.02035724	0.04071448	0.03493397	2.19949458	0.0158827
75°	0.01819361	0.03638722	0.03110624	2.41035718	0.0129052
70°	0.01608590	0.03217180	0.02740907	2.64652480	0.0103566
65°	0.01405486	0.02810972	0.02387315	2.91390902	0.0081928
60°	0.01211650	0.02423300	0.02052161	3.22041678	0.0063723
55°	0.01028633	0.02057266	0.01737643	3.57680424	0.0048581
50°	0.00858022	0.01716044	0.01445946	3.99803284	0.0036166
45°	0.00700531	0.01401062	0.01178042	4.50595486	0.0026144

$$W = -[m+n] + \frac{n}{2} \left( 1 + \frac{\varphi_n}{\lg \varphi_n} \right) + \frac{\varphi_n}{2}$$

$\varphi_n^0$	$\lg \varphi_n$	$\frac{\varphi_n}{\lg \varphi_n}$	$1 + \frac{\varphi_n}{\lg \varphi_n}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2} \left( 1 + \frac{\varphi_n}{\lg \varphi_n} \right)$	$m+n$	$\frac{\varphi_n}{2}$	$W$	$\varphi_n^0$
90°	$\infty$	0	1,0000000	0,4591385	0,4591385	1,2212131	0,7853982	0,0233236	90°
85°	11,430052	0,1297921	1,1297921	0,5023508	0,5675520	1,2899792	0,7417649	0,0193377	85°
80°	5,6712818	0,2461989	1,2461989	0,5498736	0,6852519	1,3675013	0,6981317	0,0158823	80°
75°	3,7320508	0,3507446	1,3507446	0,6025893	0,8139442	1,4555368	0,6544985	0,0129059	75°
70°	2,7474774	0,4446738	1,4446735	0,6616312	0,9558411	1,5563490	0,6108652	0,0103574	70°
65°	2,1445069	0,5290092	1,5290092	0,7284773	1,1138485	1,6728878	0,5672320	0,0081927	65°
60°	1,7320508	0,6045998	1,6045998	0,8051042	1,2918700	1,8090964	0,5235988	0,0063724	60°
55°	1,4281480	0,6721510	1,6721510	0,8942011	1,4952393	1,9703477	0,4799655	0,0048571	55°
50°	1,1917536	0,7322525	1,7322525	0,9995082	1,7314006	2,1641128	0,4363323	0,0036201	50°
45°	1,0000000	0,78539816	1,7853982	1,1264887	2,0112309	2,4013163	0,3926990	0,0026137	45°

$$\beta_1 = \frac{1}{m + \sqrt{2\lambda m - \lambda^2}}; \quad \beta_2 = \frac{1}{m + n - \varphi_n - \frac{\varphi_n \cdot n}{\lg \varphi_n}}$$

$\varphi_n^0$	$\sqrt{2\lambda m - \lambda^2}$	$m + \sqrt{2\lambda m - \lambda^2}$	$\beta_1$	$n \frac{\varphi_n}{\lg \varphi_n}$	$m + n - \varphi_n - \frac{\varphi_n \cdot n}{\lg \varphi_n}$	$\beta_2$
90°	0.2069664	0.5099026	1.9611588	0	— 0.3495832	2.8605494
85°	0.1971220	0.4823997	2.0729698	0.13040232	— 0.3239530	3.0868675
80°	0.1869060	0.4546600	2.1994457	0.27075657	— 0.2995187	3.3386897
75°	0.1763697	0.4267279	2.3434137	0.42270988	— 0.2761700	3.6209581
70°	0.1655570	0.3986436	2.5085063	0.58841972	— 0.2538012	3.9400917
65°	0.1545094	0.3704427	2.6994728	0.77074234	— 0.2323186	4.3044334
60°	0.1432537	0.3421417	2.9227656	0.97353167	— 0.2116328	4.7251654
55°	0.1318197	0.3137653	3.1870956	1.20207627	— 0.1916597	5.2175809
50°	0.1202475	0.2853439	3.5045431	1.46378477	— 0.1723366	5.8025979
45°	0.1085380	0.2568769	3.8929152	1.76946442	— 0.1535663	6.5118453

## WYDAWNICTWA AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH

Rok	Cena
1925 Mierzejewski Henryk, Polskie placówki badawcze, Warszawa 8 <sup>o</sup> , 135 + IX str. . . . .	5.50
1927 Mierzejewski Henryk, Podstawy mechaniki ciał plastycznych, Warszawa 8 <sup>o</sup> , 108 str. . . . .	8.50
1927 Grabowski Lucjan, Radiotelegraphische Bestimmung der geographischen Länge von Lemberg, Lwów 4 <sup>o</sup> , 45 str. . . . .	8.00
1928 Witoszyński Czesław, Travaux de l'Institut Aerodynamique de Varsovie, 4 <sup>o</sup> , 72 str. . . . .	6.00
1928 Grabowski Lucjan, O odwzorowaniach płaskich wiernokątnych elipsoidy obrotowej w których pewien wybrany południk odwzorowuje się jako linja prosta, Lwów, 4 <sup>o</sup> , 8 str. . . . .	2.00
1928 Groszkowski Janusz, Metoda kompensacyjna kontroli stałości fali, Warszawa, 8 <sup>o</sup> , 62 str. (Rozprawa doktorska). . . . .	5.00
1928 Roliński Józef, Badania nad asocjacją w ciekłych dielektrykach, Warszawa, 8 <sup>o</sup> , 60 str. (Rozprawa doktorska). . . . .	4.50
1928 Krupkowski Aleksander, Badania nad stopami niklu z miedzią, Warszawa, 8 <sup>o</sup> , 88 str. (Rozprawa doktorska). . . . .	7.50
1928 Burzyński Włodzimierz, Studium nad hipotezami wyężenia, Lwów, 8 <sup>o</sup> , 191 str. (Rozprawa doktorska). . . . .	9.00
1929 Grabowski Lucjan, O konwergencji południkowej w odwzorowaniu Roussilhe'owskiem elipsoidy, Lwów 4 <sup>o</sup> , 28 str. . . . .	4.50
1929 Prace Zakładu Metalurgicznego Politechniki Warszawskiej, (Broniewski i Śliwowski; Broniewski i Hackiewicz), T. I, 8 <sup>o</sup> , 108 str. . . . .	4.00
1929 Huber Maksymiljan T. Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten, Warszawa, 8 <sup>o</sup> , 165 str. . . . .	8.50
1929 Szczeniowski Bolesław, Nowa metoda wyznaczania przewodności cieplnej materiałów izolacyjnych, Warszawa, 8 <sup>o</sup> , 48 str. (Rozprawa doktorska). . . . .	3.50
1930 Jacyna Wacław, Zagadnienia budowy i eksploatacji dróg żelaznych, Warszawa 8 <sup>o</sup> , 225 str. . . . .	12.00
1930 Ziemiecka Jadwiga, Nityfikacja i żyzność gleby, Poznań 8 <sup>o</sup> 32 str.	2.00
1930 Prace Zakładu Metalurgicznego Politechniki Warszawskiej T. II, (A. Krupkowska, Mechaniczne własności miedzi), 8 <sup>o</sup> , 190 str. . .	9.50

## PRACE AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH W WARSZAWIE

Nr	Tom	Rok		Cena
1	I	1925	Broniewski Witold, Opór elektryczny i rozszerzalność metali, Warszawa, 26 str. . . . .	3.00
2	I	1925	Matakiewicz Maksymiljan, Ogólna formuła na średnią chyżość przepływu w łożyskach rzecznych i kanałowych, Lwów, 98 str. . . . .	18.00
3	I	1926	Huber Maksymiljan, Kryteria stałości równowagi i ich stosunek do statyki układów sprężystych, Lwów, 57 str. . . . .	4.00
4	I	1928	Weigel Kasper, Nowa metoda wyrównywania tryangulacyjnych sieci wieńcowych. Lwów, 22 str. . . . .	2.00
5	I	1928	Thullie Maksymiljan i Chmielowiec Alfons, Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych, Lwów, 64 str. . . . .	6.50
6	I	1928	Weigel Kasper, Badanie formuł empirycznych przy pomocy szeregów Taylora, Lwów, 16 str. . . . .	1.50
1	II	1929	Żorawski Kazimierz, Cztery przyczynki z zakresu kinematyki ciał sztywnych, Warszawa, 119 str. . . . .	8.50
2	II	1929	Bełzecki Stanisław, Równowaga sił sprężystości w belce pryzmatycznej, Warszawa, 35 str. . . . .	2.50
3	II	1931	Matakiewicz Maksymiljan, Formuła na średnią prędkość dla łożysk naturalnych i wielkich spadków. Lwów str. 24. . . . .	2.00
4	II.	1931	Matakiewicz Maksymiljan, Badania nad związkiem między prędkością średnią profilu a największą prędkością powierzchniową w łożyskach sztucznych. Lwów, str. 56. . . . .	4.00