

# PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

## TREŚĆ:

Nowszy rozwój mechaniki ciał plastycznych (d. c. n.), nap. H. Mierzejewski, Profesor Politechniki Warszawskiej.  
Kanał obwodowy i porty rzeczne w Warszawie, nap. inż. T. Tillinger.  
Żywic sztuczne i wytwarzane z nich masy plastyczne (d. n.), nap. Dr. J. H. Frydlender.  
Nagroda za wydajność w kolejnictwie, nap. inż. R. Nagel.  
Przegląd pism technicznych.  
Nekrologja.  
Kronika.  
Bibliografja.

## SOMMAIRE:

Progrès récents de la mécanique du corps plastique (à suivre), par M. H. Mierzejewski, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Varsovie.  
Le canal autour de ville de Varsovie et les ports projetés et en construction à Varsovie, par M. T. Tillinger, Ingénieur.  
Les résines artificielles et leurs applications industrielles (à suivre), par M. J. H. Frydlender, Dr.  
Sur la réduction du nombre d'employés des chemins de fer et l'augmentation des primes par M. R. Nagel, Ingénieur.  
Revue documentaire.  
Nécrologie.  
Informations diverses.  
Bibliographie.

## Nowszy rozwój mechaniki ciał plastycznych.<sup>1)</sup>

Napisal prof. H. Mierzejewski, Warszawa.

Teorie plastyczności, będące w ostatnich czasach przedmiotem ożywionych badań teoretycznych i doświadczalnych, są traktowane dotychczas wyłącznie z fenomenologicznego punktu widzenia. Struktura fizyczna materiału plastycznego tylko pośrednio jest uwzględniana w mechanice ciała plastycznego. Pomimo że specjaliści zdają sobie doskonale sprawę ze znaczenia, jakie miałyby nawiązanie bezpośredniej łączności pomiędzy dwoma odmiennymi stanowiskami, brak danych doświadczalnych z jednej strony, zaś trudności matematyczne z drugiej, przesuwają próby należytego postawienia mechaniki ciała quasi-izotropowego ku dalszej przyszłości. To też, o ile jest mowa nie o poszczególnych zagadnieniach związanych ze zjawiskami plastyczności w metalach (np. odkształcenia pojedynczych kryształów metalowych, struktura włóknista, fluktuacje naprężeń lokalnych na pograniczu kryształów, podłoże fizyczne zjawiska stwardnienia), a o ogólnych rozstrząsaniach, dotyczących różnorodnych układów naprężeń i odkształceń w ciałach sprężysto-plastycznych, musimy pozostawać na klasycznym gruncie makroskopowego traktowania zjawisk fizycznych, chociaż zdawalibyśmy sobie sprawę z ujemnej strony tego stanowiska.

Punktem wyjścia teorii plastyczności jest należyte sformułowanie t. zw. warunku plastyczności, który w przypadkach złożonego układu naprężeń odgrywa tę samą rolę, co granica plastyczności w próbie rozciągania lub ściskania. Określając starannie warunki plastyczności, stwarzamy pojęcie ciała plastycznego, a temu tworowi myślowemu przypisujemy pewne wyidealizowane własności fizyczne, wzorowane, dodajmy od siebie, na własnościach metali plastycznych. Ustalenie warunku plastyczności ogranicza zakres zagadnienia, przeciwstawiając mechanikę ciał

plastycznych teorjom równowagi i ruchu ciał sypkich, półpłynnych oraz cieczy bardzo lepkich. Przy określaniu warunku plastyczności, posługujemy się różnymi hipotezami wytrzymałościowymi, polegającymi na tem, że wytrzymałość przy złożonym układzie naprężeń uzależniamy w ten czy inny sposób od spójników, jakie nam dają zasadnicze próby na rozciąganie i ściskanie.

Nie będziemy, dla braku miejsca, omawiać tych różnych hipotez wytrzymałościowych, jakkolwiek jest to zagadnienie podstawowe dla teorii plastyczności. Niektóre z tych hipotez posiadają obecnie tylko historyczne znaczenie. Własnościami metali plastycznych, jak np. miękkiej stali, odpowiada dobrze hipoteza największego naprężenia stycznego (prawo J. Guesta) w swej postaci klasycznej, lub zmodyfikowanej nieco przez A. Becker'a, na podstawie znanych doświadczeń wykonanych w uniwersytecie w Illinois. Otrzymałe na podstawie tych hipotez wartości naprężeń krytycznych niewiele różnią się od tych, jakie nam daje energetyczny warunek plastyczności, zaproponowany przed laty przez Beltrami'ego (1885), a który nieco później został, najzupełniej niezależnie od Beltrami'ego, podany i uzasadniony przez M. T. Hubera. Energetyczny warunek plastyczności stał się podstawą ważnej metody matematycznej rozwiązywania zagadnień z zakresu teorii plastyczności<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Zdając sobie sprawę z doniosłej roli potencjału sił sprężystych w zastosowaniach teorii sprężystości, znakomity włoski uczony Eugenjusz Beltrami pierwszy wypowiedział myśl, że o wytrzymałości ciała stałego decyduje przede wszystkim praca odkształcenia. Rozprawa Beltrami'ego: Sulla condizione di resistenza dei corpi elastici, zamieszczona w Rendiconti Istituto Lombardo, 11, 18, 1885 jest mi nieznaną, ale z cytatu o tej pracy wnioskuję, że Beltrami nie ustrzegł się przed błędem, polegającym na tem, że za miarę wyteżenia materiału przyjął on całkowitą właściwą pracę odkształcenia, a nie właściwą pracę odkształcenia postaciowego, jak to uczynił prof. Huber. O pracy tego ostatniego patrz: A. i L. Föppl. Drang und Zwang. Tom I, str. 47.

<sup>1)</sup> Artykuł niniejszy jest oparty na obszerniejszej pracy autora, przygotowanej do druku, a traktującej teorii plastyczności w ujęciu matematycznym.

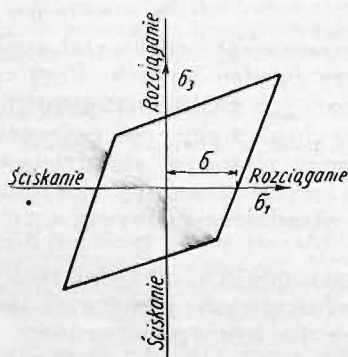




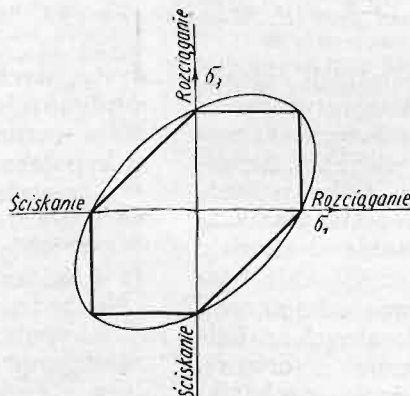
Ze względu na zastosowania, jest rzeczą pożądaną przyjmować hipotezy najprostsze, sprawdzające jednak dane doświadczalne z dostatecznym przybliżeniem. Dla jasnego orjentowania się w hipotezach roboczych, jest rzeczą celową posługiwać się wykreślnym przedstawianiem układów naprężeń krytycznych, jak np. obwiedniami Mohr'a w zagadnieniu dwuwymiarowym<sup>3)</sup>. Poniżej podajemy jedną z takich metod poglądowych.

Jak wiadomo, układ naprężeń w danym punkcie ciała jest w zupełności określony przez kierunki i wartości naprężeń głównych. Niech w trójwymiarowym układzie naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  oznaczają naprężenia główne, uszeregowane poczynając od największego naprężenia rozciągającego (dodatniego), a kończąc na największym ściskającym (ujemnym). Przypomnijmy sobie, że w przypadku, gdy  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , największe naprężenie styczne (ścinające), zachodzi w płaszczyznach, tworzących kąt  $\pi/4$  z kierunkiem pierwszego i trzeciego naprężenia głównego, stanowiąc połowę różnicy pomiędzy temi naprężeniami:  $\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$ .

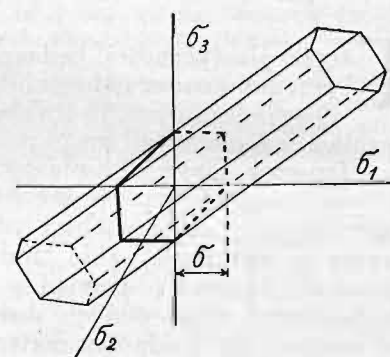
O tej wartości największego naprężenia stycznego należy stale pamiętać przy rozpatrywaniu diagramów, ilustrujących różne hipotezy wytrzymałościowe.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

W układzie współrzędnych prostokątnych  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  każdy punkt w zasadzie charakteryzuje pewien układ naprężeń; nie wszystkie jednak punkty posiadają konkretne znaczenie fizyczne. Odkształcenie plastyczne nastąpi, gdy zespół wartości naprężeń normalnych osiągnie wartości krytyczne:

$$\sigma_1 \Rightarrow (\sigma_1)_k; \sigma_2 \Rightarrow (\sigma_2)_k; \sigma_3 \Rightarrow (\sigma_3)_k \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Warunkowi plastyczności, czyli tej czy innej hipotezie roboczej, odpowiada pewna określona powierzchnia. Jeśli punkt znajduje się wewnątrz obszaru, ograniczonego tą powierzchnią, mamy do czynienia z układem naprężeń, pozostających poniżej granicy plastyczności, którym odpowiadają odkształcenia sprężyste, w znacznej mierze odwracalne.

Gdy mamy do czynienia z dwuwymiarowym układem naprężeń, granicą dopuszczalnych naprężeń normalnych jest pewien obwód zamknięty. Jeśli przyjęlibyśmy hipotezę największego naprężenia rozciągają-

cego lub ściskającego, polem naprężeń podkrytycznych byłby kwadrat, ograniczony przez proste  $\sigma_1 = \pm \sigma$  i  $\sigma_2 = \pm \sigma$ . Hipotezę St. Venant'a, że o wytrzymałości decyduje wydłużenie właściwe materiału, ilustruje romb (rys. 1). Hipotezę Hubera przedstawia elipsa (rys. 2), zaś sześciobok wpisany w tę elipsę odpowiada hipotezie Guest'a.

Byłoby rzeczą ciekawą i ważną porównać na podstawie tych diagramów omawiane hipotezy w świetle badań doświadczalnych; nie pozwala nam jednak na to brak miejsca. Okazałoby się przytem, że zaproponowane przez Mohr'a pominięcie wpływu pośredniego naprężenia głównego  $\sigma_2$  i sprowadzenie tym sposobem zagadnienia wytrzymałości metali plastycznych do zależności w układzie dwuwymiarowym, było posunięciem zbyt śmiałym. W rzeczywistości dopiero przedstawienie powierzchni naprężeń krytycznych w przestrzeni trójwymiarowej, daje właściwy pogląd na różnorodne hipotezy wytrzymałościowe.

Rys. 3 zapoznaje nas z przedstawieniem hipotezy największego naprężenia stycznego, jako miary wytrzymałości materiału. Obszar naprężeń, pozostających poniżej granicy plastyczności, jest sześciokątnym pryzmatem prawidłowym, którego oś jest jednakowo po-

chylona względem trzech osi współrzędnych. Bokami tego pryzmatu są płaszczyzny:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma; \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma; \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma \quad . \quad . \quad (2)$$

Jeśli przejść do hipotezy Hubera i Hencky'ego, to pryzmat należałoby zastąpić walcem kołowym, opisanym około pryzmatu. Równanie tego walca kołowego jest następujące:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 = \sigma^2 \quad . \quad . \quad (3)$$

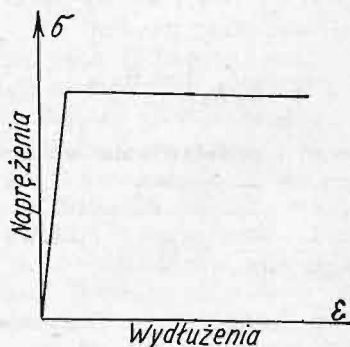
Istnieje różnica w sformułowaniu warunku plastyczności przez Hubera i Hencky'ego, jest ona wszakże raczej natury formalnej. Huber uważa mianowicie, że jeśli  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 > 0$ , czyli jeśli mamy do czynienia z rozszerzeniem objętościowym materiału, np. przy wszechstronnym rozciąganiu, wówczas miarą wyężenia jest całkowita właściwa praca odkształcenia, a nie właściwa praca odkształcenia postaciowego. W pierwszym oktancie dodatnim, gdy  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$ , należałoby wówczas zastąpić walec kołowy półelipsoidą obrotową. Huberowi szło mianowicie o to, by w hipotezie swej uwzględnić możliwość pęknięcia przy wszechstronnym jednorodnym rozciąganiu, czego nie daje hipoteza największego naprężenia ścinającego (por. rys. 3). Hencky potraktował tę sprawę formal-

<sup>3)</sup> Otto Mohr. Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik. Berlin 1914.



nie, usuwając a priori wpływ pęknięcia z teorii plastyczności. Oparł się on na znanych doświadczeniach Griffith'a<sup>4)</sup> i Joffe'go, które wykazały, że powstrzymanie powstawania pęknięć przesunęło granicę wytrzymałości „technicznej” ku t. zw. fizycznej, przewyższającej kilkaset razy pierwszą.

Ze względu na różnorodność własności metali plastycznych i stosownie do charakteru zagadnień matematycznych, w teorii plastyczności nie poprzestajemy na jednej z omawianych hipotez, a stosujemy bądź jedną, bądź drugą. Jest to stanowisko słuszne, jeśli uwzględnimy, że teoria plastyczności ujmuję zjawiska ze strony makroskopowej, czyli do pewnego stopnia przybliżonej. Najczęściej przyjmujemy, że dla ciała plastycznego  $\tau_{max} = k$ , pomijając przytem zjawiska stwardniania. Granicę



Rys. 4.

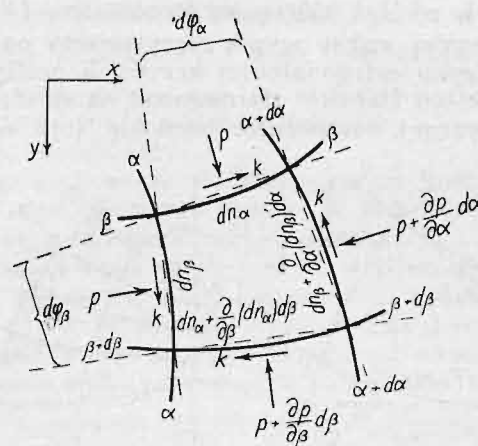
sprężystości utożsamiamy z granicą plastyczności, tak iż diagram rozciągania w tych warunkach przedstawiłby się w kształcie jak na rys. 4. Po dojściu do granicy plastyczności, materiał wyciągał się pod stałym obciążeniem (Prandtl). Tak wyidealizowany materiał nazywamy ciałem szczególnie plastycznym.

### Układ krzywych poślizgowych.

Na podstawie warunku plastyczności, mamy teraz ustalić trajektorie naprężeń głównych, tak normalnych, jak i stycznych, w obszarze zgniecionym plastycznie. Boussinesq<sup>5)</sup>, jeszcze w r. 1871, ustalił równania różniczkowe linii izostatycznych, czyli trajektorij głównych naprężeń normalnych dla ciała szczególnie plastycznego, odpowiadającego warunkowi Tresca — St. Venant — Guest:  $\tau_{max} = \text{const}$ . Nie straciły one po dziś dzień swego zasadniczego znaczenia. Ale wyniki ważniejsze z punktu widzenia łączności pomiędzy badaniami teoretycznymi i doświadczalnymi otrzymał Hencky<sup>6)</sup>, znajdując nader proste i ciekawe własności geometryczno-różniczkowe krzywych poślizgowych dla ciała szczególnie plastycznego.

Punktem wyjścia rozumowań Hencky'ego był pogląd, że najwłaściwszym układem współrzędnych, dopasowanym najlepiej do charakteru zagadnienia, jest układ krzywych poślizgowych, przecinających się ortogonalnie. Układ powyższy można otrzymać z układu trajektorij izostatycznych Boussinesq'a. Tworzą go mianowicie przecinające się izogonalnie pod kątem 45° trajektorie Boussinesq'a. Własności krzywych poślizgowych Hencky otrzymał bezpośrednio na podstawie warunków równowagi elementu płaszczyzny, ograniczonego krzywymi poślizgowymi (rys. 5).

Układ naprężeń w danym przypadku jest niezmiernie prosty. Naprężenia normalne sprowadzają się do t. zw. ciśnienia hydrostatycznego, zaś naprężenia styczne dla ciała szczególnie plastycznego w chwili przekraczania granicy plastyczności posiadają wartość  $\tau_{max} = k$ . Przy układaniu równań równowagi



Rys. 5.

należy baczyc na to, że każdemu naprężeniu stycznemu odpowiadają dwie składowe: jedna z powodu zmiany kierunku, druga zaś z powodu zmiany długości elementu krzywoliniowego.

Wprowadzamy dwie funkcje  $h_\alpha$  i  $h_\beta$  współrzędnych punktu, określone w sposób następujący:

$$h_\alpha = |\text{grad } \alpha| = \frac{d\alpha}{dn_\alpha}; \quad h_\beta = |\text{grad } \beta| = \frac{d\beta}{dn_\beta} \quad (1)$$

Oznaczmy teraz kąty  $d\varphi_\alpha$  i  $d\varphi_\beta$  w zależności od funkcji  $h_\alpha$  i  $h_\beta$ . Mamy, odrzucając wyższe potęgi małych wielkości:

$$d\varphi_\alpha = \frac{\partial \ln h_\alpha}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dn_\beta} = h_\beta \frac{\partial \ln h_\alpha}{\partial \beta} = h_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) \cdot d\alpha \quad (2)$$

$$d\varphi_\beta = \frac{\partial \ln h_\beta}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dn_\alpha} = h_\alpha \frac{\partial \ln h_\beta}{\partial \alpha} = h_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) \cdot d\beta \quad (3)$$

W kierunku wzrastających wartości parametru  $\alpha$  mamy:

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} (p dn_\beta) + p dn_\alpha d\varphi_\beta - k dn_\beta d\varphi_\alpha - k \frac{\partial}{\partial \beta} (dn_\alpha) d\beta = 0.$$

Po wprowadzeniu wartości  $dn_\alpha$ ,  $dn_\beta$ ,  $d\varphi_\alpha$  i  $d\varphi_\beta$  z równań poprzednich, otrzymujemy:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{p}{h_\beta} \right) - p \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) + 2k \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) \right] d\alpha d\beta = 0.$$

Po wykonaniu różniczkowania, wzory upraszczają się. Otrzymujemy:

$$\text{dla kierunku } dn_\alpha \dots \frac{\partial p}{\partial \alpha} + 2kh_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\text{dla kierunku } dn_\beta \dots \frac{\partial p}{\partial \beta} + 2kh_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) = 0 \quad (5)$$

Po pomnożeniu pierwszego równania przez  $d\alpha$ , drugiego przez  $d\beta$  i zcałkowaniu wzdłuż krzywych  $\beta$  i  $\alpha$ , otrzymamy:

$$p_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} = 2k \left[ \varphi_\alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (6)$$

$$p_{\beta_2} - p_{\beta_1} = 2k \left[ \varphi_\beta \right]_{\beta_1}^{\beta_2} \quad (7)$$

<sup>4)</sup> A. A. Griffith. The Theory of Rupture. Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics. Delft. 1925.

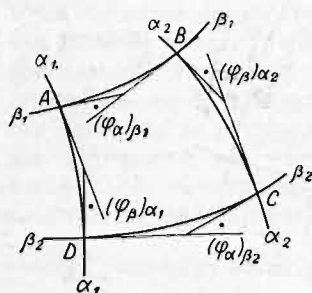
<sup>5)</sup> Boussinesq. C. R. 74, 1872, 242—245. Zwraca uwagę fakt, że w rozprawach Akademii paryskiej z tych czasów stale był uwzględniany dział plastykostatyki i plastykodynamiki.

<sup>6)</sup> H. Hencky. Ueber einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. ZAMM, 3, 1923, 241.

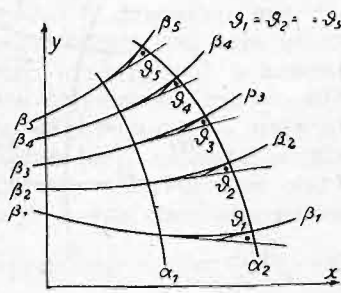


Wynika stąd ważne prawo: Przy posuwaniu się wzdłuż jednej z krzywych poślizgowych, średnie ciśnienie hydrostatyczne  $p$  wzrasta o wartość, równą iloczynowi współczynnika wytrzymałości  $2k$ , odpowiadającego granicy plastyczności, przez kąt, wyrażony w mierze teoretycznej, o jaki obróci się styczna do krzywej poślizgowej, wzdłuż której poruszamy się.

Niemniej ważny wynik otrzymujemy na podstawie warunku ortogonalności krzywych poślizgowych. Warunek ten Hencky sformułował na drodze czysto geometrycznej, rozpatrując ośmiokąt (rys. 6), utwo-



Rys. 6.



Rys. 7.

rzony przez styczne do krzywych poślizgowych w punktach ABCD. Na mocy znanych twierdzeń z geometrii elementarnej, mamy:

$$-(\varphi_\alpha)_{\beta_1} + \frac{\pi}{2} + (\varphi_\beta)_{\alpha_2} + \frac{\pi}{2} + (\varphi_\alpha)_{\beta_2} + \frac{\pi}{2} - \\ - (\varphi_\beta)_{\alpha_1} + \frac{\pi}{2} = 2\pi,$$

skąd znowu  $[\varphi_\beta]_{\alpha_1}^{\alpha_2} + [\varphi_\alpha]_{\beta_1}^{\beta_2} = 0$ , i wreszcie po przejściu do nieskończenie małych:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_\beta) d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_\alpha) d\beta = 0 \quad \dots (8)$$

Po wprowadzeniu wartości  $d\varphi_\alpha$  i  $d\varphi_\beta$  z wzorów (2, 3) mamy:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ h_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ h_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) \right] = 0,$$

skąd na podstawie wzorów (4, 5) wynika:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ h_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ h_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_\alpha) = 0 \quad \dots (9)$$

Po zcałkowaniu ostatnich wzorów, otrzymujemy:

$$[\varphi_\beta]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0 \quad ; \quad [\varphi_\alpha]_{\beta_1}^{\beta_2} = 0 \quad \dots (10)$$

Układ krzywych poślizgowych  $\alpha$  i  $\beta$  posiada tę własność, że kąt pomiędzy stycznymi do dwóch dowolnych krzywych tego samego pęku w punktach przecięcia ich przez krzywą poślizgową z drugiego pęku nie zmienia się. Własność powyższa jest niezależna

od wielkości odstępów pomiędzy krzywymi poślizgowymi (rys. 7).

Aby zapoznać się bliżej z charakterem krzywych poślizgowych, wprowadźmy do wzorów promienie krzywizny  $R_\alpha$  i  $R_\beta$  krzywych  $\alpha$  i  $\beta$ . Mamy:

$$d\varphi_\alpha = \frac{d\alpha}{h_\alpha R_\alpha} \quad i \quad d\varphi_\beta = \frac{d\beta}{h_\beta R_\beta}.$$

Ponieważ  $\frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_\beta) = 0$  oraz  $\frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_\alpha) = 0$ , przeto

$$\text{mamy: } \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta R_\beta} \right) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha R_\alpha} \right) = 0.$$

Po wykonaniu różniczkowań i podstawieniu we wzory wyrażeń (2, 3), otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left( \frac{1}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \frac{d\varphi_\beta}{dn_\beta} = 0;$$

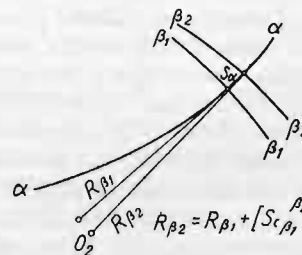
$$\frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{1}{R_\beta} \right) + \frac{1}{R_\beta} \frac{d\varphi_\alpha}{dn_\alpha} = 0,$$

skąd wreszcie  $\frac{\partial R_\beta}{\partial n_\beta} = 1$  ;  $\frac{\partial R_\alpha}{\partial n_\alpha} = 1$ . Wzory powyż-

sze zyskują na jasności, jeśli zastąpić  $dn_\alpha$  przez  $ds_\beta$  i  $dn_\beta$  przez  $ds_\alpha$ . Wynik ostateczny będzie:

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = 1. \quad \dots (11)$$

czyli, że: Promień krzywizny ( $R_\beta$ ) krzywych, należących do jednego pęku ( $\beta$ ), w punktach przecięcia się ich z dowolną krzywą, należącą do drugiego pęku ( $\alpha$ ), zwiększa się przy posuwaniu się po ostatniej krzywej ( $\alpha$ ) o długość przebieganego łuku krzywej  $[\alpha]_{\beta_1}^{\beta_2}$  (rys. 8).



Rys. 8.

Omawiane własności geometryczne układów krzywych poślizgowych pozwoliły wytlomaczyć pewne zaobserwowane zdawna układy t. zw. linii Lüders'a i Hartmann'a<sup>7)</sup>.

(D. c. n.).

<sup>7)</sup> L. Hartmann. Distribution des deformations dans les métaux soumis à des efforts. Paryż 1896; także C. R. 118, 1894, 520 i 738.