PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

Tom XLIV. Warszawa, dnia 22 lutego 1906 r. № 8.

Z TEORYI SPRĘŻYSTOŚCI.

Napisał H. Czopowski, inż

Z powodu artykułu inż. K. Grabowskiego: „Praca odkształceń zeskładów żelaznobetonowych przy zginaniu"[1]) pozwolę sobie wyrazić kilka myśli, tyczących się podstaw, obranych przez autora tego artykułu dla przeprowadzenia rachunku; autor w swej pracy zaznacza, iż zaczerpnął te podstawy z teoryi pomieszczonych w dziełach prof. H. Müllera-Breslau, uwagi więc moje stosować się będą również do tego źródła.

Do obliczania systemów statycznie niewyznaczalnych posiadamy dwie metody, mające charakter ogólny, teoryę przesunięć wyobrażalnych (jak je trafnie nazwał p. K. G.) i teoryę najmniejszości pracy. Pod względem zasadniczym teorye te są równoznaczne: gdy pierwsza z nich głosi, iż np. różniczka (ściślej mówiąc waryacya) pewnej funkcyi równą jest zeru, t. j. $\delta U = 0$, druga teorya podchwytuje znaczenie tej różniczki i twierdzi, iż funkcya U = minimum, — ażeby zaś to minimum wyprowadzić, należy znowuż wziąć $\delta U = 0$.

Wzajemny stosunek tych dwóch twierdzeń jest ten sam, jaki mamy w dynamice pomiędzy tak zwanem drugiem równaniem Lagrange'a i równaniem Hamilton'a. Obiedwie wyłuszczone teorye podają nam tę samą myśl, lecz tylko w innem oświetleniu; zastosowanie tej lub innej z tych teoryi zależy właśnie od oświetlenia, w jakiem nam się przedstawi dane zagadnienie; niepowinniśmy więc uprzedzać się do jednej z tych teoryi na niekorzyść drugiej, lecz korzystać z nich stosownie do potrzeb, ułatwiając sobie w ten sposób rachunek. Uprzedzenie to spotkałem w literaturze niemieckiej na niekorzyść zasady minimum pracy, którą uzasadnił i wprowadził do teoryi sprężystości Castigliano. We wszystkich zagadnieniach gdzie z łatwością przychodzi ująć nam pracę w matematyczną formę, nadaje się do zastosowania teorya minimum pracy.

Ze zbyteczną konsekwencyą stosuje prof. Müller-Breslau teoryę przesunięć wyobrażalnych do wypadków, w których z łatwością otrzymamy rezultaty, stosując teoryę Castigliano; szczególniej ta różnica uwydatnia się przy obliczeniach zeskładów różnorodnych, dla których otrzymujemy wzory nadzwyczaj złożone (złożoność ta jednakże nie przeszkodziła inż. K. G. do doprowadzenia rachunku do założonego celu). Mojem zdaniem, dzisiejsza teorya sprężystości znajduje się jeszcze w średniowiecznych powijakach. Najpierw jest ona zamknięta w oddzielną przegródkę, odłączającą ją od rodziny nauk przyrodniczych, nie poddając jej ogólnym prawom energetyki. Początek już zrobiono, twierdzenie Lagrange'a o przesunięciach wyobrażalnych, jak również twierdzenie Hamilton'a o minimum pracy, znalazły już swoje miejsce w dziedzinie sprężystości, lecz jakże niechętnie są te metody stosowane, szczególniej do zeskładów ciągłych (jednolitych lub różnorodnych), gdzie jednak mogą być stosowane z wielką korzyścią. Przytem zauważę, iż spotykane przeze mnie w podręcznikach „dowodzenia" twierdzeń o przesunięciach wyobrażalnych, są nieścisłe, dużo w tych dowodzeniach się zamilcza i prześlizgnąwszy się pomiędzy trudnościami wygłasza się prędko ostateczne twierdzenie.

Do tego sposobu dowodzenia zaliczam wykład prof. H. Müller-Breslau'a w dziele „Die neuren Methoden i t. d.", gdzie na str. 21 w twierdzeniu wygłoszonem wspomina: „niewiadome X są niezależne", nie poparłszy tego poprzednio żadnem wyjaśnieniem; jest to twierdzenie, które występuje w równaniach Maxwell'a (tamże, str. 23) tylko w innej formie zewnętrznej. Jest w tem dowodzeniu coś niedopowiedzianego, coś milcząco przyjętego do rachunku.

Pomijając te niedokładności, zobaczmy w jaki sposób dzisiejsza teorya sprężystości oblicza naprężenia, występujące w pewnym punkcie ciała sprężystego, na które działają pewne siły. Teorya ta uczy nas, iż w obranym punkcie występuje 9 sił (niewiadomych), pomiędzy któremi zestawić można 6 równań równowagi, następnie występuje 6 odkształceń, wynikających wskutek sprężystości ciała; na zasadzie tej ostatniej własności możemy zestawić 6 równań pomiędzy odkształceniami i naprężeniami; następnie ze stosunku geometrycznego pomiędzy przesunięciami i odkształceniami możemy zestawić 6 równań; razem więc posiadamy 18 zmiennych (niewiadomych) i 18 równań; bez trudności dają się te równania zredukować do 15-tu z 15-tu niewiadomemi, lecz dalsze uproszczenia są niemożliwe. Do powyższych równań dochodzą jeszcze równania wyrażające warunki krańcowe. W ten sposób zadanie w zasadzie jest rozwiązane; należy tutaj podziwiać wielkość tego gmachu i misterność jego wykonania.

Z żalem musimy jednakże wyznać, iż powyższe równania nie mają żadnego praktycznego zastosowania, ze względu na trudność całkowania, jaką się w nich spotyka. Zdaniem mojem, powyższy sposób traktowania zadania nie odpowiada dzisiejszym poglądom energetycznym; a może i stąd pochodzą wspomniane trudności analityczne. Każdemu, kto przejął się dzisiejszemi pojęciami energetycznemi, nasuwa się pierwsza myśl zreformowania powyższego rachunku przez przejście od pojęcia siły do pojęcia pracy. Jakże ten rachunek przeprowadzić?

W odpowiedzi na to pytanie pozwolę sobie wypowiedzieć swoje przypuszczenie, oparte na osobistej intuicyi.

Wychodzę z założenia, iż energię sprężystą mierzy się wzorem $\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V$, gdzie V oznacza objętość rozpatrywanego ciała, σ zaś jest wielkością charakteryzującą tę energię i bynajmniej nie oznacza ani naprężenia ciągnącego, ani cisnącego, ani przesuwającego, — jest to charakterystyka danej energii, jak temperatura w energii cieplnej lub prędkość v w energii kinetycznej i t. p.; z energią kinetyczną energia sprężysta posiada nawet podobieństwo wyrazu energii: $\frac{1}{2}v^2 . m$.

Gdy na pewne ciało sprężyste działają siły lub momenty, to działanie to polega na udzieleniu wszystkim cząstkom danego ciała energii sprężystej; każda więc cząstka będzie posiadała: $\frac{1}{2} . \frac{\sigma^2}{E} . dV$ energii sprężystej, cała zaś energia danego ciała będzie równą: $A = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma^2}{E} . dV$, gdzie E może być funkcyą spółrzędnych, lub też wielkością stałą, zależnie od tego, o ile dane ciało jest pod względem sprężystości różnorodnem lub też jednorodnem; dla każdego więc ciała funkcya ta jest z góry oznaczona, zadanie zaś polega na odnalezieniu funkcyi $\sigma = f(x, y, z)$, jeżeli przez x, y, z oznaczymy współrzędne punktu rozpatrywanego.

W celu oznaczenia tej ostatniej funkcyi, uogólniam zasadę minimum pracy i twierdzę iż w danym wypadku: $\frac{1}{2}\int \frac{\sigma^2}{E} dV$ = minimum; jako ograniczenie poszukiwanej funkcyi, należy wprowadzić do rachunku tę okoliczność, iż uogólnione naprężenia σ są w równowadze z siłami działającemi (zewnętrznemi); równowaga ta znajdzie swój wyraz w pewnych równaniach, wiążących siły działające z naprężeniami. Te ostatnie równania wraz z powyższym wyrazem na minimum, oznaczą nam funkcyę: $\sigma = f(x, y, z)$. Tak się przedstawia, w mojem widzeniu, przyszła droga rozwiązywania zagadnień z dziedziny sprężystości. Możemy w tym przebiegu rachunku zamienić zasadę minimum pracy na zasadę przesunięć wyobrażalnych, lecz w takim razie tę ostatnią zasadę należałoby przeistoczyć, gdyż, mojem zdaniem, nie odpowiada ona dzisiaj

[1]) Por. Przegl. Techn. №№ 16—47 r. z.

w zastosowaniu do sprężystości swojemu celowi, brak jej ogólności, brak jej rzutności.

Mając na uwadze wygłoszone tu ogólne pojęcia o energii sprężystej, postaram się naszkicować rozwiązanie zadania, postawionego w wyżej przytoczonej pracy inż. K. Grabowskiego; zastosowanie to nie może mieć tak ogólnego zakresu, jaki ja powyższym wyjaśnieniom nadałem, lecz w każdym razie pozwoli nam mieć przybliżony obraz przyszłej teoryi sprężystości, jakim ja go widzę, na tle dzisiejszych pojęć energetycznych.

Do obliczenia przyjmę jako wiadome następujące wzory i twierdzenia, tyczące się teoryi sprężystości.

1) Praca odkształcenia graniastosłupa [1]):

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{P^2\,dx}{E F} = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma^2 \,.\, F \,.\, dx}{E} = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{E} \,.\, V.$$

2) Różniczka pracy podług siły daje wydłużenie w kierunku tejże siły.

3) Naprężenia w systemie występują takie, iż cała praca odkształcenia jest minimum (twierdzenie Castigliano).

Obserwując część I — II zeskładu żelaznobetonowego (por. rys. 5 Przegl. Techn. r. z. № 21, str. 255) wyobrażam sobie (jak to czyni p. K. Grabowski) tę część jako zbiór pryzmacików o przekrojach: dB_c, dB_f i dF; na przekroje tych pryzmatów działają naprężenia r_c, r_f i ρ; praca odkształcenia, każdego z pryzmacików, na zasadzie wyżej wyłuszczonego twierdzenia, będzie równa:

$$\frac{r_c^2}{2\,\varepsilon_c} \,.\, dV_c, \qquad \frac{r_t^2}{2\,\varepsilon_t} \,.\, dV_t \quad \text{oraz} \quad \frac{\rho^2}{2\,E}\,dv,$$

stosownie do tego, czy rozpatrujemy pryzmacik betonowy czy też żelazny.

Cała więc praca rozpatrywanego przekroju:

$$A = \Sigma \text{ (prac oddzielnych).}$$

Zamieniając sumę na całkę, gdzie funkcya jest ciągłą i pozostawiając znak sumy, gdzie funkcya ulega przerwie, otrzymamy wyprowadzone przez inż. K. Grabowskiego równanie (21) [2]).

Z tego ostatniego równania otrzymamy bezpośrednio równania (35)[3]) lub (29) [4]), gdy podstawimy odpowiednie wyrazy za r_c, r_t i ρ, wyprowadzone przez inż. K. Grabowskiego, lub też wyprowadzone przeze mnie na innej drodze i pomieszczone w dalszym ciągu niniejszego artykułu. Statycznie niewyznaczalnemi wielkościami są tutaj: r_c, r_t i ρ; dla ich oznaczenia autor powyższej pracy zastosował twierdzenie Navier'a, lecz również dobrze można zastosować jedną z teoryi sprężystości o systemach statycznie niewyznaczalnych, jak to niżej wykażę. W ten sposób rachunek zasadniczo jest ukończony, niema już więcej w danem zadaniu wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Ponieważ autor zastosował w swoim rachunku twierdzenie Navier'a, stosowanie więc dalsze teoryi sprężystości, w celu obliczenia pracy odkształceń, jest, mojem zdaniem, zbyteczne, co też wykazuje powyższe wyjaśnienie.

Równanie (§ 11) [5]): $\int \frac{M}{\varepsilon_c I_0} \,.\, \frac{\partial M}{\partial M_1} \,.\, dx = 0$, jest prostem zastosowaniem minimum pracy i nie wymaga żadnych uprzednich przygotowawczych rachunków, gdyż praca zginanego pręta: $A = \int \frac{M^2}{\varepsilon \,.\, I}\,dx$. Również obliczenie δ_m w § 7 [6]) jest bezpośrednim wynikiem wyżej wyłuszczonego twierdzenia drugiego.

Zdaniem mojem, zastosowanie twierdzenia Castigliano w danem zadaniu uprościłoby niepomiernie rachunek analityczny i nadałoby wzorom matematycznym większą przejrzystość.

W myśl przytoczonego wyżej poglądu na przebieg rachunku, wyprowadzę wzory dla r_c, r_t i ρ, stosując teoryę najmniejszości pracy i pomijając twierdzenie Navier'a.

[1]) Por. Podręcznik niemiecki „Hütte"; wyd. 18-te, Berlin 1902, cz. I, str. 348.
[2]) Por. Przegl. Techn. № 21 r. z., str. 256.
[3]) Por. Przegl. Techn. № 22 r. z., str. 293.
[4]) Por. Przegl. Techn. № 23 r. z., str. 287.
[5]) Por. Przegl. Techn. № 24 r. z., str. 294.
[6]) Por. Przegl. Techn. № 23 r. z., str. 285.

W tym celu obieram osie rzędnych tak, ażeby $\varphi = 90^0$, t. j. ażeby Q działało w kierunku osi Y (rys. 2, Przegl. Techn. r. z. № 16 str. 195); na dany więc przekrój działa siła N i moment M. Przez σ i E oznaczam naprężenia i współczynniki sprężystości w danej cząstce przekroju, σ i E mogą więc oznaczać: r_c, r_t, ρ względnie: ε_c, ε_t i E; ponieważ zeskład przekroju jest nam znany, przeto ε jest znaną funkcyą zmiennej y, σ zaś jest niezmienną funkcyą y; na odnalezieniu tej funkcyi polega niniejsze zadanie. Jako zasadę rozwiązania zadania stawiam twierdzenie, iż praca odkształcenia w danym przekroju ma być minimum; w postaci matematycznej myśl ta wyraża się za pomocą następującego równania:

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\sigma^2}{\varepsilon} \,.\, \Delta f \,.\, \Delta n = \text{minimum} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

gdzie Δf oznacza cząstkę przekroju, Δn zaś wysokość pryzmatu.

Warunki dalsze, którym σ jako funkcya zmiennej y winna odpowiadać, dają następujące równania statyczne:

$$M - \Sigma\,\sigma \,.\, y \,.\, \Delta f = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$N - \Sigma\,\sigma \,.\, \Delta f = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Rozwiązanie zadania powyższego należy właściwie do rachunku waryacyjnego, lecz ze względu na prostotę funkcyi możemy je traktować jako zwykłe zadanie na minimum z równaniami warunkowemi; w celu rozwiązania mnożę każde z równań warunkowych przez nieokreślone współczynniki p i q, dodaję wszystkie trzy równania i po zróżniczkowaniu sumy podług niezależnie zmiennej σ otrzymuję:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \,.\, \Delta f \,.\, \Delta n - p \,.\, y \,.\, \Delta f - q \,.\, \Delta f = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

skąd

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\Delta n}\,(p \,.\, y + q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Podstawiam tę wielkość w (2) i (3) i otrzymuję:

$$M - \frac{1}{\Delta n}\,\Sigma\,\varepsilon \,.\, p \,.\, y^2 \,.\, df - \frac{1}{\Delta n}\,\Sigma\,\varepsilon \,.\, q \,.\, y \,.\, df = 0 \quad . \quad (6)$$

$$N - \frac{1}{\Delta n}\,\Sigma\,\varepsilon \,.\, p \,.\, y\,df - \frac{1}{\Delta n}\,\Sigma\,\varepsilon \,.\, q \,.\, df = 0 \quad . \quad . \quad (7)$$

Ponieważ p i q są wielkości stałe, chociaż dotychczas nieoznaczone, możemy więc wynieść je przed znak Σ, wyrazy zaś pod znakiem Σ możemy rozbić na grupy przekrojów betonowych i żelaznych.

Zamiast więc znaków Σ oznaczyć możemy:

$$\Sigma\,\varepsilon \,.\, y^2 \,.\, df = \varepsilon_c \int y_{bc}^2 \,.\, dB_c + E\int y_f^2 \,.\, dF + $$
$$+ \varepsilon_f \,.\, \int y_{bt}^2 \,.\, dB + \ldots = \varepsilon_c \,.\, I_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$\Sigma\,\varepsilon \,.\, y \,.\, df = \varepsilon_c \int y_b \,.\, dB_c + E\int y_f \,.\, dF +$$
$$+ \varepsilon_f \int y_{bt} \,.\, dB_t + \ldots = \varepsilon_c \,.\, S_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$\Sigma\,\varepsilon \,.\, df = \varepsilon_c \int dB_c + E\int dF + \varepsilon_t \,.\, \int dB_t + \ldots = \varepsilon_c \,.\, \Omega \,. \quad (10).$$

Podstawiając te oznaczenia w (6) i (7), otrzymamy:

$$M - \frac{1}{\Delta n} \,.\, p \,.\, \varepsilon_c \,.\, I_x - \frac{1}{\Delta n} \,.\, q \,.\, \varepsilon_c \,.\, S_x = 0 \,. \quad . \quad (11),$$

$$N - \frac{1}{\Delta n} \,.\, p \,.\, \varepsilon_c \;\; S_y - \frac{1}{\Delta n} \,.\, q \,.\, \varepsilon_c \,.\, \Omega = 0. \quad . \quad (12).$$

Z tych ostatnich dwóch równań oznaczymy:

$$p = \frac{\Delta n}{\varepsilon_c} \,.\, \begin{vmatrix} M & S_x \\ N & \Omega \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} I_x & S_x \\ S_x & \Omega \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

$$q = \frac{\Delta n}{\varepsilon_c} \,.\, \begin{vmatrix} I_x & M \\ S_x & N \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} I_x & S_x \\ S_x & \Omega \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Podstawiając te wartości w równanie (5) i rozumiejąc kolejno pod σ naprężenia w różnych częściach danego zeskładu, otrzymamy równania 10-te, wyprowadzone przez inż. Grabowskiego na innej drodze [7]). Przypuszczenie Navier'a zostało postawione i sprawdzone dla belek jednolitych, stosowanie zaś tego przypuszczenia dla zeskładów różnorodnych wymaga nowego potwierdzenia.

Wyżej przytoczone przeze mnie dowodzenie pozwala na sprawdzenie tego przypuszczenia, zarówno dla belek jedno-

[7]) Por. Przegl. Techn., № 18 r. z., str. 220.

litych jak i różnorodnych; przytem zauważę, iż tego dowodzenia nie spotkałem w literaturze technicznej, pozwolę więc sobie zaliczyć je do osobistych moich zdobyczy.

Zakończając powyższe uwagi o stronie teoretycznej pracy inż. K. Grabowskiego, uważam, iż wyprowadzone przez niego wzory oznaczone numerami 5 [1]), 10 [2]), 29 [3]), 32 [4]) z odpowiedniemi objaśnieniami powinny wejść do podręczników technicznych, jako wzory nadające się do praktycznego zastosowania.

W powyższy sposób wyłożoną metodę obliczenia zastosuję jeszcze do prętów jednolitych jak również do zeskładów różnorodnych, pracujących na skręcenie. W tym celu oznaczam przez:

M_d — moment pary sił, działający w płaszczyznie skręcenia;

τ_ρ — naprężenie przesuwające w punkcie danego przekroju, oddalonym od środka ciężkości tegoż przekroju o ρ;

G_ρ — współczynnik sprężystości na przesuwanie w punkcie, w którym rozpatrujemy τ_ρ.

Na zasadzie równowagi momentów powinno być:

$$M_d - \int \tau_\rho \, . \, df \, . \, \rho = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Praca pręta całego o długości h przedstawi się przez wzór:

$$A = \frac{1}{2} \sum \frac{\tau_\rho^{\,2}}{G_\rho} \, . \, \Delta f \, . \, h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Mnożę poprzednie równanie przez współczynnik p, dodaję je do równania pracy i różniczkując podług τ_ρ, otrzymam:

$$\frac{\tau_\rho}{G_\rho} \, . \, \Delta f \, . \, h - p \, . \, df \, . \, \rho = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

skąd:

$$\tau_\rho = p \, . \, \frac{G_\rho \, . \, \rho}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Podstawiam τ_ρ w równanie na moment, wtedy:

$$M_d - \frac{p}{h} \int G_\rho \, . \, \rho^2 \, . \, df = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

stąd:

$$p = \frac{M_d}{\int G_\rho \, . \, \rho^2 df} \, . \, h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Podstawiamy w równanie (18) i otrzymujemy:

$$\tau_\rho = \frac{M_d}{\int G_\rho \, . \, \rho^2 \, . \, df} \, . \, G_\rho \, . \, \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21);$$

jeżeli G_ρ jest wielkością stałą, t. j. $G_\rho = G$, to

$$\tau_\rho = \frac{M_d}{I_p} \, . \, \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

gdzie $\int \rho^2 df = I_p$.

Podstawiając ten ostatni wyraz w (16), otrzymamy:

$$A = \frac{1}{2} \sum \frac{M^2}{I^2} \rho^2 \frac{1}{G} \Delta f \, . \, h = \frac{1}{2} \, \frac{M^2 \, . \, h}{I^2 \, . \, G} \Sigma \rho^2 \Delta f = \frac{1}{2} \, . \, \frac{h \, . \, M}{G I} \quad (23).$$

Za pomocą równania (21) możemy obliczyć naprężenia we wszystkich punktach przekroju skręconego pręta, nie stawiając żadnych przypuszczeń *apriorystycznych* co do *rozkładu* naprężeń, ani też ograniczeń co do *jednorodności* materyału.

Poruszywszy temat skręconego pręta, pozwolę sobie zająć uwagę czytelnika oryginalnym rezultatem pod względem rachunkowym, jaki otrzymałem z następujących rozumowań. Pręt pracujący na skręcenie uważać będę jako zwój drutów, przebiegających śrubowo w koło osi pręta. Przekrój drutu oznaczam przez Δf, kąt pochylenia skrętu względem płaszczyzny przekroju oznaczam przez φ, naprężenie w drucie działające równolegle do stycznej skrętu, t. j. działające w kierunku osi drutu — przez σ_ρ, następnie przez ρ oznaczam odległość środka drutu od osi pręta, t. j. od osi zwoju, l oznacza rzeczywistą długość drutu, h - wysokość pręta (z natury zadania h jest dane), φ przyjmuję dla wszystkich drutów za kąt stały, choć dotychczas nieoznaczony; z tych dwóch wielkości wynika, iż $l = \frac{h}{\sin \varphi}$, t. j. jest wielkością stałą.

[1]) Por. Przegl. Techn. № 18 r. z., str. 219.
[2]) Por. Przegl. Techn. № 18 r. z., str. 220.
[3]) Por. Przegl. Techn. № 23 r. z., str. 287.
[4]) Por. Przegl. Techn. № 23 r. z., str. 287.

Z równowagi sił wypada:

$$M_d - \Sigma (\sigma_\rho \, . \, \Delta f) \, . \cos . \, \varphi \, . \, \rho = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

gdzie $\sigma_\rho \, . \, \Delta f$ przedstawia siłę w kierunku osi drutu, mnożnik $\cos \varphi$ zamienia tę siłę na rzut tejże siły na przekrój pręta, mnożnik zaś ρ wyraża ramię momentu. Równanie (24) jest analogiczne do (15).

Wyraz pracy takiego pręta jest następujący:

$$A = \frac{1}{2} \sum \frac{\sigma_\rho^{\,2} \, . \, \Delta f \, . \, l}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

t. j. suma prac oddzielnych drutów, gdy każdy z nich obciążony siłą $\sigma_\rho \, . \, \Delta f$. Podstawię więc w (25): $l = \frac{h}{\sin \varphi}$ i otrzymam:

$$A = \frac{h}{2} \sum \frac{\sigma_\rho^{\,2} \, \Delta f}{E \, . \sin \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Postawię sobie teraz zadanie oznaczenia σ_ρ w każdym drucie; jest to zadanie statycznie niewyznaczalne i rozwiążę je za pomocą teoryi Castigliano [5]); w tym celu mnożę (24) przez współczynnik p, po dodaniu z (26) różniczkuję podług σ_ρ i otrzymuję:

$$h \, . \, \frac{\sigma_\rho \, . \, \Delta f}{E \, . \, s \, \varphi} - p \, . \, \Delta f \, . \cos \varphi \, . \, \rho = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

skąd

$$\sigma_\rho = p \, . \, \frac{\cos \varphi \, . \, \sin \varphi}{h} \, . \, \rho \, . \, E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Podstawiam tę ostatnią wartość w (24) i otrzymuję:

$$M_d - p \, . \, \frac{\cos^2 \varphi \, . \, \sin \varphi}{h} \, . \, E \, . \, \Sigma (\Delta f \, . \, \rho^2) = 0 . \quad . \quad . \quad (29)$$

skąd

$$p = \frac{h \, . \, M_d}{\cos^2 \varphi \, . \, \sin \varphi \, . \, E \, . \, \Sigma (\Delta f \, . \, \rho^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Podstawiam w (28):

$$\sigma_\rho = \frac{h \, . \, M_d}{\cos^2 \varphi \, . \, \sin \varphi \, . \, E \, . \, \Sigma (\Delta f \, . \, \rho^2)} \, . \, \frac{\cos \varphi \, . \, \sin \varphi}{h} \, . \, \rho E \quad (31);$$

po skróceniu.

$$\sigma_\rho = \frac{M_d}{\cos \varphi \, . \, \Sigma (\Delta f \, . \, \rho^2)} \, . \, \rho \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32);$$

Porównywając to ostatnie równanie z (22), widzimy wielką analogię w rozkładzie naprężeń w przekroju obydwóch prętów: mianowicie naprężenia rosną w stosunku do działającego momentu i w stosunku do odległości od środka przekroju; jest pewna tylko różnica w mianownikach, które charakteryzują układ geometryczny obydwóch prętów.

Wyraz $\Sigma (\Delta f \, . \, \rho^2)$ oznaczę przez I_s i znaczenie dla σ_ρ z (32) podstawię w (26); otrzymam w ten sposób wyraz dla pracy, jaką wykonywa nasz pręt podczas działania M_d:

$$A = \frac{h}{2} \, . \, \frac{1}{E} \sum \frac{M_d^2}{\cos^2 \varphi \, . \, I_s^2} \, . \, \rho^2 \, . \, \frac{\Delta f}{\sin \varphi} \quad . \quad . \quad (33);$$

po skróceniu:

$$A = \frac{h}{2} \, . \, \frac{1}{E} \, . \, \frac{M_d^2}{I_s^2} \, . \, \frac{\Sigma \rho^2 \, . \, \Delta f}{\cos^2 \varphi \, . \sin \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (34);$$

ponieważ: $\Sigma \rho^2 \, . \, \Delta f = I_s$:

$$A = \frac{h \, . \, M_d^2}{2 \, E \, . \, I_s \, . \cos^2 \varphi \, . \sin \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

W całem tem zadaniu φ pozostało nieoznaczone i można mu nadać dowolną wielkość; ja wyszukam taką wielkość dla φ, ażeby praca skręcenia była minimum; w tym celu należy ażeby:

$$\frac{d \, A}{d \, \varphi} = 0,$$

co będzie wypełnione gdy:

$$\frac{d \, (\cos^2 \varphi \, . \sin \varphi)}{d \, \varphi} = 0;$$

po zróżniczkowaniu tego wyrazu:

$$-2 \cos \varphi \, . \sin^2 \varphi + \cos^3 \varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (36),$$

[5]) Por. „Obliczenie lin drucianych" inż. H. Czopowskiego, jako zastosowanie w podobnym wypadku teoryi Castigliano. (Przegl. Techn. z r. 1904, №№ 2, 4, 6).

skąd
$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{2},$$
z czego wynika, iż również powinno być $\sin^2\varphi = \frac{1}{3}$, $\cos^2\varphi = \frac{2}{3}$, oraz: $\varphi = 35^0\,15'$; podstawiwszy te znaczenia w (35), otrzymam:
$$A_m = \frac{h\,.\,M_d^2}{2 I_s\,.\,E\,.\,\frac{2}{3}\,.\,\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38).$$
Skoro porównamy ten ostatni wyraz z (23), t. j. z wyrazem pracy pręta ciągłego pracującego na skręcenie, to praca tego ostatniego będzie identyczną z pracą pręta złożonego, gdy h i M_d będą równe, następnie gdy $I_p = I_s$ i jeżeli
$$G = E\,.\,\frac{2}{3}\,.\,\frac{1}{\sqrt{3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39);$$
po wykonaniu działań otrzymamy z ostatniego wzoru $G = E\,.\,0{,}385$, co się w zupełności zgadza z rezultatami doświadczeń (por C. Bach. Elasticität u. Festigkeit, str. 288, oraz „Hütte", wyd. 18-te, cz. I, str. 348).

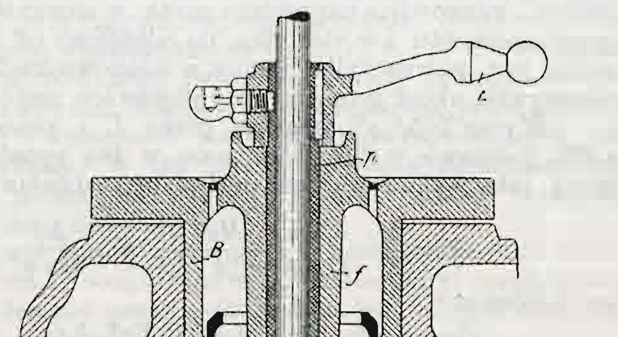
Ten ostatni rezultat liczbowy jest dla mnie zaciekawiającym; czy to prosty zbieg liczb, iż współczynnik sprężystości w ten sposób skręconego zwoju drutów jest równy liczbowo współczynnikowi sprężystości na przesuwanie pręta ciągłego, czy też może uważać ten rezultat jako pewne światło na rozkład naprężeń, występujących w pręcie ciągłym, pracującym na skręcenie?

Teorya sprężystości uczy nas, iż:
$$G = \frac{m}{2(m+1)}\,E,$$
gdzie m jest liczbą zdobytą na drodze doświadczeń i równą $\frac{10}{3}$, gdy tymczasem liczba ta wypada również z powyższego rachunku; bowiem podstawiając znalezioną wartość
$$\frac{2}{3\,.\sqrt{3}} = \frac{2}{2(m+1)} \quad \text{otrzymamy również } m = \frac{10}{3}.$$
Że m dla różnych materyałów jest różne, w powyższym zaś rachunku jest ono stałem, nie będzie to zarzutem przeciwko możności obliczenia m na drodze teoretycznej, gdyż różne materyały posiadają różne stopnie sprężystości, a przyjęty przeze mnie układ jest idealnie sprężysty; do tej doskonałości sprężystej zbliżają się metale, dla których znaleziono $m = \frac{10}{3}$. Nie chcę przez to powiedzieć, iż otrzymany rezultat jest wynikiem jakichś ogólniejszych praw, rządzących rozkładem naprężeń, lecz zaznaczam, iż powyższa argumentacya nie zaprzecza tej możliwości.

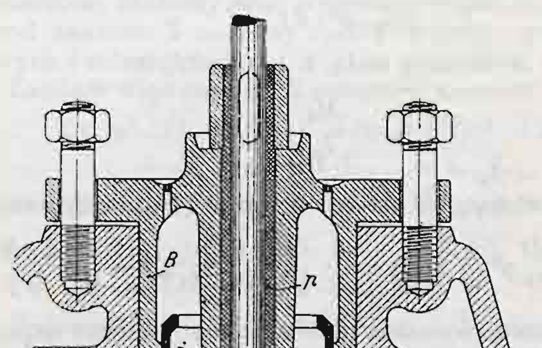
Silnik gazowy Mees'a.[1]

Sposoby regulowania sprawności w silnikach wybuchowych dają się podzielić na trzy zasadniczo odrębne grupy:

Pierwszy i najstarszy sposób polega na opuszczaniu pewnej ilości wybuchów odpowiednio do zmian obciążenia. Za sposobem tym przemawia oprócz prostoty konstrukcyjnej przedewszystkiem ta okoliczność, że skład mieszaniny palnej i stopień jej zgęszczania pozostaje bez zmiany przy wszystkich obciążeniach silnika, a zatem proces termiczny odbywa się zawsze w jednakowo korzystnych warunkach. Zalety te muszą być jednak okupione znaczną nierównością biegu maszyny i koła zamachowe wypadają nadzwyczaj ciężkie; wskutek tego sposób ten znajduje obecnie zastosowanie przeważnie tylko w silnikach powozowych, a w stałych — coraz rzadziej i tylko dla nieznacznych wielkości.



Rys. 1.



Rys. 2.

Regulowanie t. zw. precyzyjne, daje się osiągnąć jednym z dwóch następujących sposobów: albo przez zmienianie ilości doprowadzanego gazu palnego lub cieczy, przyczem ilość wsysanego powietrza pozostaje bez zmiany, albo też przez dławienie (n. Drosselung) gotowej mieszaniny palnej, przyczem skład jej nie ulega zmianie. Każdy z tych dwóch sposobów ma swoje wady i zalety. Za pierwszym (regulowanie jakościowe) przemawia wzgląd, że stopień zgęszczania ładunku prawie nie zmniejsza się ze spadkiem obciążenia,— zato z drugiej strony słabe mieszaniny trudno się zapalają, wskutek czego przy nieznacznem obciążeniu bieg silnika staje się nieprawidłowym i często całe ładunki uchodzą na zewnątrz niespalone. Tak więc teoretyczna doskonałość cyklu, uwarunkowana silnem zgęszczaniem, nie tylko nie przynosi w tym wypadku żadnej korzyści pod względem wyzyskania paliwa, lecz przeciwnie, poniżej pewnej oznaczonej granicy silnik wyłącznie w ten sposób regulowany wogóle biedz nie może.

Z tego też powodu w nowszych konstrukcyach silników gazowych znajduje coraz częściej zastosowanie drugi z wymienionych sposobów: regulowanie ilości wsysanej mieszani-

[1]) Por. „Die Gasmaschine, Bauart Mees, mit vereinigter Mischungs- und Füllungs-Regelung", v. Fr. Freytag (Zeitschrift d. Ver. deutscher Ingenieure 1905, № 24).