

Obliczenie lin drucianych, pracujących na wale.¹⁾

Napisał H. Czopowski, inżynier.

W celu obliczenia naprężeń, występujących w przekrojach włókien liny nawiniętej na wał, wyobrażam sobie pewien jej przekrój przed i po nawinięciu na wał, i uważam, iż włókna leżące po stronie wału powinny się skrócić, po stronie zaś przeciwnej wydłużyć, zachodzi więc tu to samo zjawisko co przy belkach jednolitych. Inaczej nie mogę sobie wyobrazić zginania liny, jak tylko przez skracanie się jednej części włókien i jednocześnie wydłużanie się drugiej ich części.

Przyrównanie to przyjmuję za podstawę do obrachunku, który niżej przytoczę.

Dla obliczenia biorę pod uwagę dwa nieskończenie blisko siebie leżące przekroje, będące na odległości między sobą dl (rys. 1), przekroje te oznaczone są na rysunku przez I i II; oddzielnie przedstawiony jest przekrój II danej liny i oznaczony na rysunku głoseką A; na tym ostatnim przekroju widzimy przekrój k -tego włókna, oznaczony głoseką B, oś ciężkości przekroju tego włókna jest oddalona o y_k od osi liny; na przekroju tego włókna oznaczony jest głoseką C pewien jego element; odległość tego elementu od osi włókna oznaczam przez η .

Ażeby części liny dl zawartej, jak rysunek wskazuje, pomiędzy przekrojami I i II, nadać kształt kolisty, należy położenie przekroju II przyprowadzić do położenia oznaczonego przez IV, część prosta dl będzie stanowiła wtedy element łuku. Dla zmiany tego położenia, element C powinien wydłużyć się o długość KM ; z geometrycznego stosunku wynika:

$$\overline{KM} = (y_k + \eta) d\varphi \quad (35).$$

Wyraz ten możemy również napisać w następujący sposób:

$$\overline{KM} = y_k d\varphi + \eta d\varphi \quad (36).$$

We wzorze tym zauważymy, iż $y_k \cdot d\varphi$ oznacza wydłużenie osi k -tego włókna, $\eta \cdot d\varphi$ zaś, przyjmując η jako zmienną wielkość, charakteryzuje zgięcie tegoż włókna; ażeby więc przejść z położenia II do IV, należy najpierw dane włókno wyciągnąć i doprowadzić do położenia III, a następnie zgiąć i doprowadzić do położenia IV; uczyniwszy te uwagi, które będą nam potrzebne do wyjaśnienia dalszego obrachunku, powracam do stosunków geometrycznych, wyrażonych na rysunku i zestawiam następujące równanie:

$$(R + r) d\varphi = dl \quad (37).$$

Pozbywając się wartości $d\varphi$ z równań (35) i (37), napisać możemy:

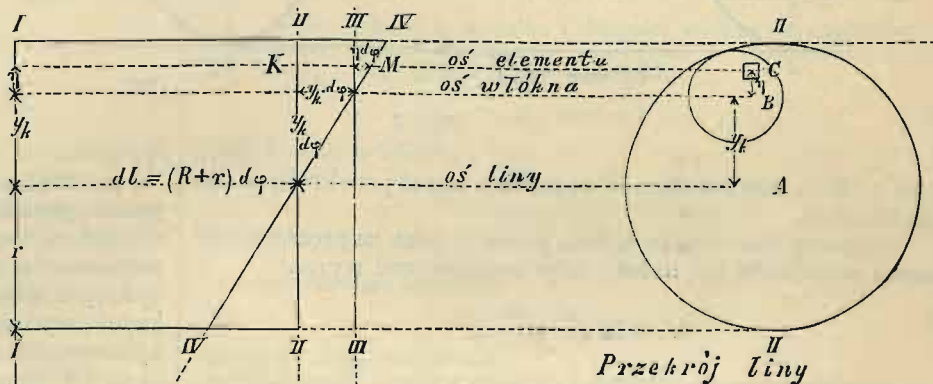
$$\overline{KM} = (y_k + \eta) \cdot \frac{dl}{R + r} \quad (38).$$

Posiadając wielkość wydłużenia \overline{KM} danego elementu, możemy obliczyć naprężenie, jakie w tym ostatnim występować winno wskutek danego wydłużenia; w tym celu korzystam ze wzorów (31) i (32) (por. Przegl. Techn. r. b., № 4, str. 42); należy tylko podstawić w nie zamiast $\mu = \overline{KM}$; $l = dl$; $\mu_k = \mu_\eta$; $S_k = S_\eta$, t. j. naprężenie w elemencie; ponieważ element C uważać mogę jako przekrój oddzielnego włókna, jasne jest, iż kąt β będzie identyczny z kątem skręcenia danego

włókna, t. j. $\beta_\eta = \beta_k$, a stąd znowóż $\mu_\eta = \mu_k$, tak samo $E_k = E_\eta = E_k$ (por. Przegl. Techn. r. b., № 2, str. 13 określenie β), podstawiając te wartości w równanie (32), otrzymamy:

$$\overline{KM} = \frac{1}{\mu_k} \cdot \frac{S_\eta \cdot dl}{f_\eta E_k} \quad (39).$$

Przyrównując \overline{KM} z wzoru (38) i (39), otrzymamy:



Rys. 1.

$$(y_k + \eta) \cdot \frac{dl}{R + r} = \frac{1}{\mu_k} \cdot \frac{S_\eta}{f_\eta} \cdot \frac{dl}{E_k} \quad (40),$$

skracać obie strony na dl , rozwiązuję ten ostatni wzór podług S_η :

$$\frac{S_\eta}{f_\eta} = \sigma_\eta = \mu_k \cdot E_k (y_k + \eta) \cdot \frac{1}{R + r} \quad (41).$$

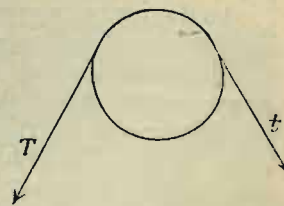
σ_η oznacza więc wielkość naprężenia występującego w elemencie, znajdującym się na odległości η od osi k -tego włókna; ponieważ zaś do obliczeń statycznych potrzebne są tylko naprężenia maksymalne, przeto należy uczynić:

$$\eta = \pm \frac{\delta}{2} \quad (42);$$

(δ oznacza średnicę włókna); σ_η wtedy będzie oznaczać maksymalne naprężenie w k -tem włóknie, które zostało wywołane nawinięciem liny na wał, naprężenie to oznaczę przez σ_k jako naprężenie włókna; dla rozróżnienia zaś od σ_k , wywołanego przez obciążenie w kierunku osi liny i wyrażonego przez wzór (33) oznaczę pierwsze naprężenie przez σ_{kw} , jako naprężenie włókna na wale, drugie zaś przez σ_{ko} , t. j. obciążenie w kierunku osi liny. Podstawiając te oznaczenia w (41), napiszemy:

$$\sigma_{kw} = \mu_k \cdot E_k \cdot \left(y_k + \frac{\delta}{2} \right) \cdot \frac{1}{R + r} \quad (43).$$

W tym ostatnim wzorze można zauważyć, iż wyraz $E_k \cdot \frac{\delta/2}{R + r}$ jest wzorem wyprowadzonym przez REULEAUX'a dla specjalnego wypadku, gdy drut zginany jest przed zgięciem prosty, a ponieważ w danym wypadku drut zginany (t. j. włókno liny) nie był prostym, lecz posiadał pewien stopień skręcenia, przeto występuje w powyższym wzorze jeszcze współczynnik μ_k , który właśnie charakteryzuje to położenie



Rys. 2.

¹⁾ Por. №№ 2, 4 i 6 Przegl. Techn. z r. b., H. Czopowski: „Obliczenie lin drucianych pracujących na ciągnięciu”.

drutu; przytem zauważę, iż część całkowitego naprężenia σ_{kw} , wyrażona przez wyraz $\mu_k \cdot E_k \cdot \frac{\delta/2}{R+r}$ jest wielkością stałą w każdym przekroju danego włókna, gdy tymczasem druga część naprężenia wyrażona przez: $\mu_k \cdot E_k \cdot \frac{y_k}{R+r}$, zależna jest od y_k ; a że y_k jest zmienne dla każdego przekroju tegoż włókna, przeto wniosek: naprężenie w pewnym prze-

możemy przeprowadzić koło, na kole tem znajdować się będzie element włókna, a więc położenie elementów jest identyczne z przytoczonym przykładem drutu prostego na kole; siły T i t odpowiadają naprężeniom σ_c i $(\sigma_c + d\sigma_c)$. Stosuję obecnie przytoczony wniosek, iż jeżeli $t=0$, to i $T=0$, t. j. jeżeli znajdzie się przekrój na długości włókna, w którym $\sigma_c=0$, to również $\sigma_c + d\sigma_c=0$, a więc naprężenia σ_c we wszystkich przekrojach włókna mają dążność przyrównać się do zera.

Z wzoru (44) zauważymy, iż dla $y_k = 0$ będzie $\sigma_c = 0$, na mocy więc wniosku wyżej przytoczonego, przekrój, leżący obok przekroju, dla którego $y_k = 0$, będzie posiadać naprężenie również równe zeru, to ostatnie znowuż wywoła ze swej strony w dalszych przekrojach naprężenia równe zeru; postępując w ten sposób, przychodzimy do wniosku, iż naprężenia σ_c mają dążność zrównania się z zerem, lub też przybrania jakiejś stałej wielkości dla wszystkich przekrojów danego włókna.

Siła więc $d\sigma_c$, działająca na każdy przekrój włókna, wywołuje jego przesunięcie. Wobec tego wniosku nasuwa

się pytanie, czy długość włókna pomiędzy pewnymi punktami przed zgięciem liny jest identyczną z długością po jej zgięciu, czy też różną; w pierwszym bowiem wypadku naprężenie σ_c przybrałoby ostatecznie wielkość zera, w drugim zaś wypadku byłoby różne od zera i wielkość jego odpowiadałaby wielkości wydłużenia lub skrócenia danego włókna, przytem byłaby stałą we wszystkich przekrojach włókna.

Oznaczę ten ostatni wyraz przez σ_c jako naprężenie ciągnące i zanalizuję go, należy więc zanalizować wyraz:

$$\sigma_c = \mu_k E_k \frac{y_k}{R+r} \quad (44).$$

Przebiegając po długości danego włókna (liny zgiętej), σ_c w każdym przekroju tego włókna posiada inną wartość. Każdy więc przekrój włókna podlega ciśnieniu (lub ciągnięciu) dwóch sił, które występują w sąsiednich, nieskończenie blisko siebie leżących przekrojach, i które nie są wzajemnie równe; różnica tych sił, która da się wyrazić przez wzór:

$$d\sigma_c = \mu_k E_k \frac{dy_k}{R+r} \quad (45),$$

posiada dążność przesunięcia danego przekroju włókna, o ile nie występują inne siły utrzymujące równowagę z $d\sigma_c$; takimi siłami mogą być siły tarcia, występujące pomiędzy danym włóknom a sąsiednimi włóknami; przychodzimy więc do pytania bardzo dla nas ważnego, czy siły $d\sigma_c$ powodują przesunięcie się włókna czy też nie; gdyż w pierwszym wypadku wyraz (44) dla σ_c straciłby swoje znaczenie, wskutek zmiany warunków, dla których został zestawiony, w drugim zaś wypadku utrzymałby się w sile, i wzór (43), dawałby nam wielkości naprężeń.

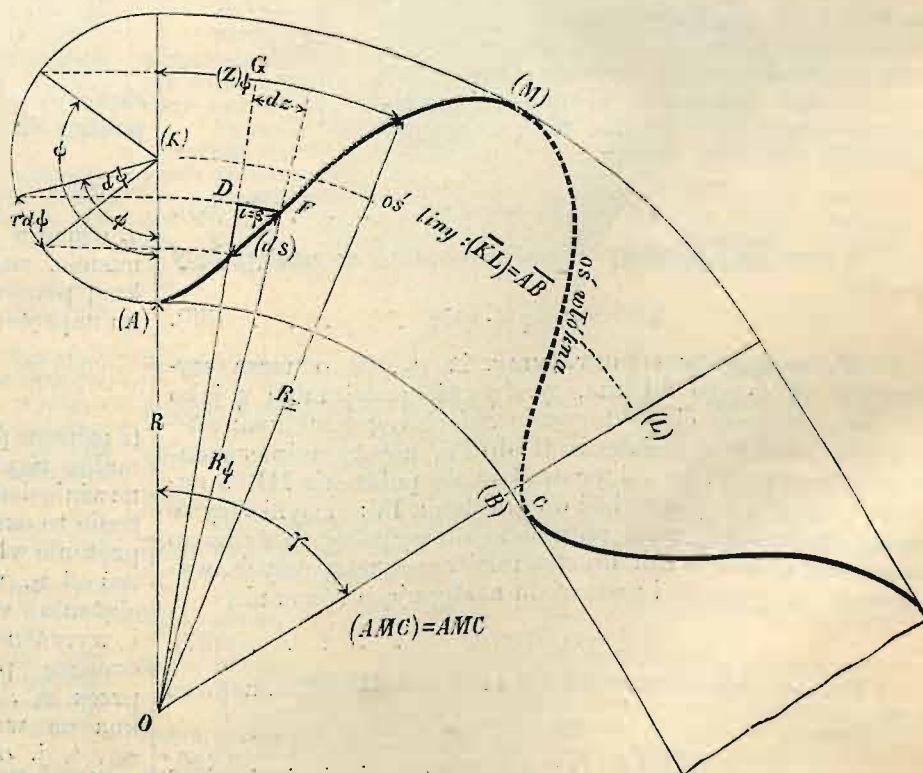
Analogiczny wypadek zmiany naprężeń w kolejno po sobie następujących przekrojach włókna, jest nam znany w praktyce i w teorii, i następuje on, gdy jakiegobądź włókno proste nawiniemy na koło i obciążymy końce tego włókna różnymi siłami, wtedy naprężenia w przekrojach końcowych takiego włókna są różne, a wszystkie przekroje pośrednie posiadają również różne naprężenia. Różnica tych dwóch krańcowych naprężeń $T-t$ (rys. 2) winna być w równowadze z siłą tarcia, jaka występuje pomiędzy włóknom a kołem, jeżeli nie następuje przesunięcie się włókna po kole; jeżeli zaś siła $T-t$ jest większa od tarcia włókna o koło, następuje przesunięcie się, a właściwie ślizgnięcie się włókna. Matematycznie da się wyrazić ten stosunek podług znanego wzoru¹⁾:

$$T = t \cdot e^{\mu \alpha} \quad (46).$$

Z tego wzoru wyciągnę wniosek, iż jeżeli $t=0$, to i $T=0$. Zastosuję ten przykład do włókien liny drucianej, przez trzy punkty nieskończenie blisko siebie leżące na osi włókna,

się pytanie, czy długość włókna pomiędzy pewnymi punktami przed zgięciem liny jest identyczną z długością po jej zgięciu, czy też różną; w pierwszym bowiem wypadku naprężenie σ_c przybrałoby ostatecznie wielkość zera, w drugim zaś wypadku byłoby różne od zera i wielkość jego odpowiadałaby wielkości wydłużenia lub skrócenia danego włókna, przytem byłaby stałą we wszystkich przekrojach włókna.

Dla dania odpowiedzi na to pytanie wyobraźmy sobie najpierw linę z duszą i włóknami raz skróconymi, jest to najprostszy przykład liny drucianej; chcąc obserwować geometryczne zmiany takiej liny podczas zgięcia, uprzytomnijmy



Rys. 4.

sobie, iż geometrycznie linę taką da się przedstawić jako cylinder prosty o podstawie kolistej, średnica koła równa jest sumie średnic duszy i włókna, samo zaś włókno przedstawia się jako pewna linia wykreślona na danym cylindrze.

Wogóle, o linii jaką przyjąć musi włókno wyciągnięte na pewnej powierzchni, można powiedzieć, iż jest ona najkrótszą linią jaką można wykreślić na danej powierzchni. Twierdzenie to, jak również ogólne prawa takich linii wyprowadził matematycznie dr. WILHELM SCHELL w dziele „Theorie der Bewegung und der Kräfte“ (tom II, str. 349 oraz

¹⁾ Por. np. podręcznik niemiecki „Hütte“, wyd. 18-te (1902 r.), t. I, str. 220.

tom I, str. 414). Najkrótszą linią w danym wypadku jest linia śrubowa; geometryczne jej prawa są znane czytelnikowi, a więc stosownie do oznaczeń, już przyjętych i pomieszczo-nych również na rys. 3, możemy wypisać następujące równa-
nia, które wynikają z czysto geometrycznych stosunków:

$$ds = r \cdot d\phi \cdot \frac{1}{\sin \beta} \quad (47),$$

skąd $s_{\phi} = \int_0^{\phi} r \cdot d\phi \cdot \frac{1}{\sin \beta} = \frac{r \cdot \phi}{\sin \beta} \quad (48);$

dla $\phi = 2\pi$ $s_{2\pi} = \frac{2\pi r}{\sin \phi} \quad (49),$

Następnie: $dz = r d\phi \frac{1}{\tan \beta} \quad (50),$

$$z_{\phi} = \int_0^{\phi} r \cdot d\phi \cdot \frac{1}{\tan \beta} = \frac{r \cdot \phi}{\tan \beta} \quad (51);$$

dla $\phi = 2\pi$ $z_{2\pi} = \overline{AB} = \frac{2\pi r}{\tan \beta} \quad (52);$

s oznacza w danym wypadku długość włókna, z—odległość pewnego punktu włókna, licząc po linii prostej cylindra.

Wyobraźmy sobie obecnie rzeczony cylinder zgięty jak pokazuje rys. 4, przybierze on w danym wypadku kształt pierścienia; na powierzchni tego pierścienia włókno wyciągnięte wykreśli nam, jakem to wyżej zaznaczył, linię najkrótszą; oznaczenie tej krzywej analitycznie przedstawia pewną zawilżość, a szczególnie jej zrektyfikowanie¹⁾; pominię więc ogólne traktowanie tej kwestyi, a będę jedynie starać się rozstrzygnąć pytanie, czy długość włókna AMC (rys. 3) na cylindrze jest większa lub też mniejsza od długości włókna (AMC) wyciągniętego na pierścieniu (rys. 4). W tym

celu nakładam włókno AMC na pierścień w ten sposób, ażeby w każdym punkcie włókna kierunek jego zawierał stały kąt i z kierunkiem największego koła pierścienia (rys. 4), w danym więc wypadku, analogicznie do przykładu poprzedniego (rys. 3), otrzymamy z geometrycznego stosunku, wyrażonego na rys. 4:

$$(ds) = r d\phi \cdot \frac{1}{\sin i} \quad (57),$$

skąd: $(s_{\phi}) = \int_0^{\phi} \frac{r \cdot d\phi}{\sin i} = \frac{r \phi}{\sin i} \quad (58);$

dla $\phi = 2\pi$ $(AMB) = (s_{2\pi}) = s_{2\pi} = AMB = \frac{2\pi r}{\sin i} \quad (59),$

gdyż przyjmuję długość włókna $s_{2\pi}$ na cylindrze i $(s_{2\pi})$ na pierścieniu za identyczne.

(D. n.).

¹⁾ Dla obliczenia kształtu i długości włókna wyciągniętego na powierzchni pierścienia, należy skorzystać z twierdzenia Clairaut (W. Schell, I, str. 437), podług którego

$$R_{\phi} \cdot \cos i = k \quad (53),$$

gdzie k stała wielkość, a więc:

$$ds = \frac{r \cdot d\phi}{\sin i_{\phi}} = \frac{r \cdot d\phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{R_{\phi}}\right)^2}} \quad (54),$$

z geometrycznego stosunku

$$R_{\phi} = R + r - r \cdot \cos \phi \quad (55),$$

należałoby więc zcałkować:

$$s = r \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{(R + r - r \cos \phi)^2}}} \quad (56).$$

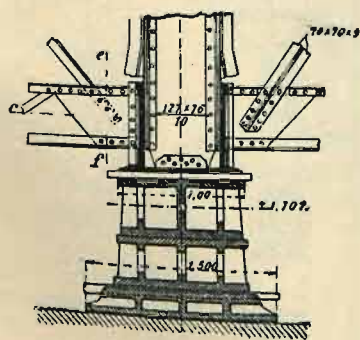
Most Troicki na rz. Newie w Petersburgu.

(Ciąg dalszy; p. № 33 r. b., str. 435).

Siodelka (poduszki) oporowe. Dźwigary w prześle środkowym są oparte na siodełkach częścią z żelaza lanego

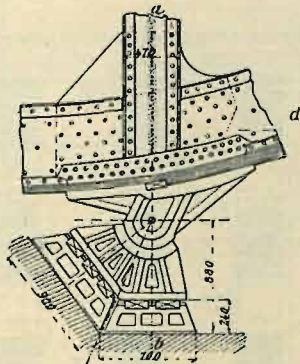
Rys. 3-6 Siodelka prześła środkowego.

Przecięcie poprzeczne ab.



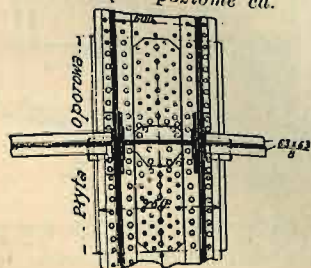
Rys. 3.

Widok siodełka dźwigara skrajnego.



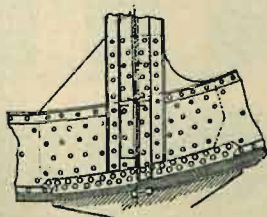
Rys. 4.

Przecięcie poziome cd.



Rys. 5.

Przecięcie pionowe ef.

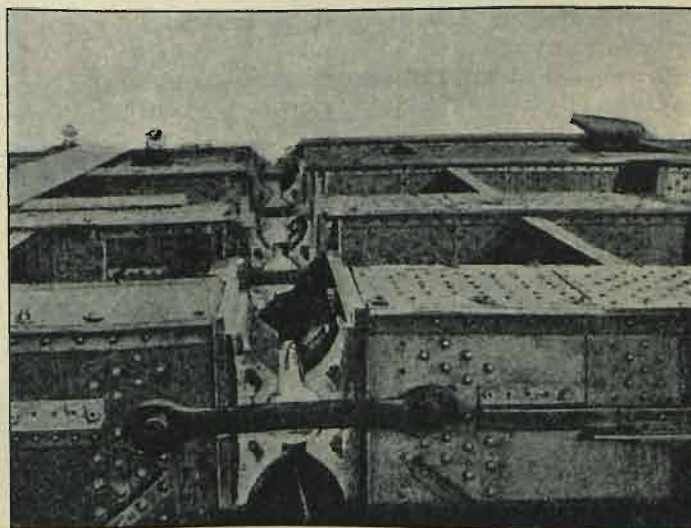


Rys. 6.

a częścią ze stali lanej zbudowanych (rys. 3, 4, 5 i 6 w tekście). Każde siodełko składa się z części dolnej z żelaza lane-

go, złożonej z dwóch sztuk i przytwierdzonej do muru, oraz z części górnej, na której spoczywa płyta wierzchnia przymocowana do blach dźwigara. Te dwie ostatnie części są ze stali lanej i tworzą przegub. Część górna siodełka spoczywa na płycie dolnej zapomocą klinów ze stali kutej, którymi można nastawić do właściwego położenia osi teoretyczne przegubów.

Przegub kluczowy prześła środkowego.



Rys. 7.

Dwie oddzielne połowy łuku dźwigara w wierzchołku połączone są przegubowo, t. j. zakończone są opornikami ze stali lanej, opartymi na osi stalowej (rys. 13 do 19 na tab. XLIV)¹⁾.

¹⁾ Tabl. XLIV dołącz. do № 33 r. b.