można będzie wejść na dach rotundy, okolony galeryą, i z tak znacznej wysokości oglądać cudną panoramę dolnej części miasta, Pragi i Zawiśla.

*Ed. Zaremba.*

---

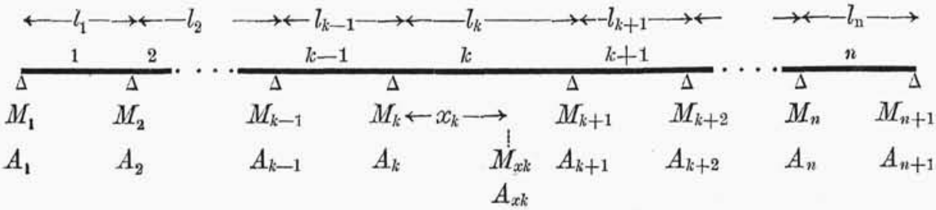
# Belka wieloprzęsłowa na podporach sprężystych.

obliczył

H. Czopowski, inżynier.

---

*Oznaczenia.* W rozwiązaniu zadania niniejszego posiłkować się będę następującemi oznaczeniami:




Cyfry oznaczają numer porządkowy przęseł.

$n$ oznacza ogólną ilość wszystkich przęseł belki wieloprzęsłowej.

$k$ „ dowolne przęsło.

$l$ „ jego rozpiętość. Porządkowy numer przęsła przypisuje się na dole litery $l$.

$M$ i $A$ oznaczają momenty lub siły poprzeczne, działające w przekrojach belki na podporach z lewej strony danego przęsła, którego numer porządkowy oznacza przypisana cyfra.

$M_x$ i $A_x$ oznaczają momenty lub siły poprzeczne, występujące w przekroju w odległości $x$, licząc od lewej podpory danego przęsła ku prawej; numer porządkowy tego przęsła przypisuje się u dołu, np. $M_{xk}$ i t. d.

$(M)$, $(A)$, $(A_1)$, t. j. wszystkie wyżej wymienione oznaczenia, ujęte w nawiasy, posiadają też same znaczenia, jak wyżej, lecz dla belki jednoprzęsłowej, i swobodnie końcami wspartej; np. $(M)_{xk}$ oznacza moment w przekroju belki, z końcami swobodnie wspartymi, o rozpiętości $l_k$ w odległości $x$ od lewego punktu oporu: jasnem jest, iż ilości $(M)$ i $(A)$ ze wszystkiemi oznaczeniami dają się obliczyć z równań statycznych i dlatego pozostawiam je w mojem obliczeniu w matematycznie nierozwiniętej formie.

Przez gotyckie $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{A}$ oznaczam pewną funkcyę $(M)$ lub $(A)$, której bliższe oznaczenie w każdym wypadku objaśnię; ilości te również dadzą się obliczyć z równań statycznych.

*Obliczenie.* Znany wzór Clapeyron'a:

$$M_k \, . \, l_k + 2\, M_{k+1}\,(l_k + l_{k+1}) + M_{k+2} \, . \, l_{k+1} = \mathfrak{M},$$

gdzie $\mathfrak{M}$ jest ilością statycznie obliczalną i zależną od obliczenia i systemu belki; równanie to daje nam sposób obliczenia belki wieloprzęsłowej na podporach stałych, nieruchomych. W praktyce, ściśle biorąc, tak idealnych podpór nie posiadamy, gdyż wszelkie podpory pod wpływem obciążenia belki deformują się, punkty więc podparcia zmieniają swe położenie pionowe.

W zadaniu niniejszem postawiłem sobie warunek, iż podpory ulegają prawu sprężystości, t. j. że skrócają się lub przedłużają w stosunku prostym do sił w nich występujących.

Oznaczywszy przez $\Delta h_k$ odległość punktów oporu w kierunku pionowym przed i po obciążeniu, warunek wyżej wymieniony wyrazimy w formie

$$\Delta h_k = A_k \,.\, \alpha_k,$$

gdzie $\alpha_k$ oznacza ilość stałą dla danej podpory i zależną od jej kształtu i materyału.

Przed wyprowadzeniem równania dla belki ciągłej, znajdującej się w wyżej wymienionych warunkach, postaram się dać *a priori* pewne charakterystyczne szczegóły tego równania.

1) Podstawiwszy w szukanem i dotychczas nieznanem równaniu $\alpha_1 = \alpha_k = \alpha_n = 0$, powinniśmy otrzymać równanie Clapeyron'a, gdyż spółczynniki $\alpha$ równe zeru oznaczają, iż podpory są stałe i niesprężyste.

2) Podstawiając zaś $\alpha_k = \infty$, możemy dowolnie pozbywać się punktów podpór, końce więc np. belki nadwieszanej możemy uważać jako znajdujące się na podporach o sprężystości nieskończenie wielkiej.

3) W równaniu Clapeyron'a $k$ znajduje się w granicach:

$$1 \leq k \leq n-1,$$

gdyż podstawiając $k = n$, otrzymamy ilość $M_{n+2}$, która naturze zadania nie odpowiada; w ten sposób otrzymać możemy z wzoru Clapeyron'a tylko $n-1$ równań, posiadamy zaś $n+1$ niewiadomych, brakujące więc dwa równania dopełniamy, znanymi skądinąd, momentami w dwóch krańcowych oporach, a zależącymi od sposobu umocowania końców belki.

Gdy więc dla belki na stałych podporach sposób umocowania końców winien nam dawać dwa równania—dla tejże belki na sprężystych podporach liczba tych równań będzie większą, gdyż sposób umocowania końców w tym razie może wywoływać nietylko momenty w krańcowych przekrojach, jak to się dzieje przy podporach stałych, lecz może jeszcze wywołać siły oporowe, które ze swej strony wywołują zmianę w wysokościach krańcowych podpór, występują więc w tym razie dwa jeszcze czynniki, niezależne od sił obciążających belkę; te dwa czynniki wyrażać się muszą w dwóch nowych równaniach; *dla belki wieloprzęsłowej na podporach sprężystych powinny być zatem 4 równania dodatkowe*, czyli zapomocą mającego się wyprowadzić równania powinno się zestawić tylko $n-3$ równań, brakujące zaś 4 równania muszą być wyprowadzone z warunków, charakteryzujących umocowanie końców belki.

4) Wzór Clapeyron'a jest sumą trzech momentów w przekrojach trzech po sobie następujących podpór, moment bowiem w przekroju danej podpory, np. $(k+1)$, składa się oprócz z momentów, wywieranych przez siły działające na belkę, jeszcze z momentów, występujących w przekrojach dwu sąsiednich podpór; przypuściwszy, jak nasze zadanie tego wymaga, iż podpory te są sprężyste, wtedy ów moment $M_k + 1$ będzie zależny nietylko od momentów $M_k$ i $M_{k+2}$ w przekrojach podpór sąsiednich, lecz i od zmiany wysokości tych podpór (jak to już wyżej powiedzieliśmy); zmiana ta znów ze swej strony zależną jest, oprócz ilości już wprowadzonych do rachunku, jeszcze od momentów, występujących w przekrojach następnych podpór, czyli od $M_{k-1}$ i $M_{k+3}$, t. j. gdy wzór Clapeyron'a jest funkcyą ilości $M_k$, $M_{k+1}$, $M_{k+2}$, w równanie dla belki wieloprzęsłowej

na podporach sprężystych muszą wejść jeszcze dwa sąsiednie momenty, to jest $M_{k+1}$ i $M_{k+3}$; równanie to przytem musi być również funkcyą linijną momentów, gdyż przedstawia sumę momentów, znajdującą się w równowadze; równanie to więc będzie posiadało kształt następujący:

$$a M_{k-1} + b M_k + c M_{k+1} + f M_{k+2} + g M_{k+3} + C = 0 ;$$

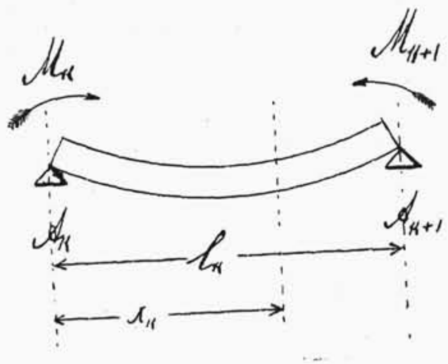
widocznem więc jest stąd, iż: $2 \leqq k \leqq n - 2$, czyli iż przy kolejnem podstawianiu $k = 2 - 3 - 4$ i t. d. $n - 2$, otrzymamy tylko $n - 3$ równań dla $n + 1$ niewiadomych, cośmy już powiedziell w punkcie poprzednim.

O ilościach $a, b, c, f, g$ można powiedzieć, iż są one funkcyami ilości, charakteryzujących układ geometryczny, jak również sprężystość systemu, t. j. muszą one być funkcyą $(l, \alpha, I, E)$, $C$ zaś funkcyą sił obciążających belkę, oraz wymiarów geometrycznych, charakteryzujących ich układ.

Po skreśleniu tych charakterystycznych własności szukanego równania, przystąpię do jego obliczenia; w tym celu przedstawmy sobie cały szereg belek, *swobodnie* końcami wspartymi, o rozpiętościach równych rozpiętościom odnośnych przęseł belki wieloprzęsłowej i o identycznem z nią obciążeniu; w tym wypadku wszystkie $M_k = 0$, $A_k = 0$, $(M_{xk})$ i $(A_{xk})$ dadzą się z łatwością obliczyć na zasadzie metod statycznych; ilości te przyjmuję więc jako wiadome i zostawię je, jak już powiedziałem, w formie matematycznie nierozwiniętej.

Przypomnijmy sobie obecnie zadanie obliczenia $M$ w danym przekroju belki *swobodnie* końcami wspartej, na której końce działają momenty $M_k$ i $M_{k+1}$ (rys. 1).

Rys. 1.




W danym wypadku:

$$M_{xk} = M_k + A_k \, . \, X_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

podstawiając $X_k = l_k$, otrzymamy $M_{xk}$, $M_{xk} = M_{k+1}$, rozwiązując więc to równanie względem $A_k$, otrzymamy:

$$A_k = \frac{- M_k + M_{k+1}}{l_k},$$

wstawiając wartość tę w równanie (1), otrzymamy:

$$M_{xk} = + M_k \, . \, \frac{l_k - X_k}{l_k} + M_{k+1} \, . \, \frac{X_k}{l_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Jeżeli na belkę tę działać będą jeszcze siły zewnętrzne, to moment w przekroju $x$ będzie się składał z momentów, wywołanych działaniem momentów w przekrojach krańcowych, oraz z momentu, wywołanego działaniem owych sił zewnętrznych, t. j.

$$M_{xk} = + M_k \cdot \frac{l_k - X_k}{l_k} + M_{k+1} \cdot \frac{X_k}{l_k} + (M_{xk}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

dla innej belki o rozpiętości $l_{k+1}$, na lewy koniec której działa moment $M_{k+1}$, na prawy zaś $M_{k+2}$, otrzymamy tak samo:

$$M_{xk+1} = + M_{k+1} \cdot \frac{l_{k+1} - X_{k+1}}{l_{k+1}} + M_{k+2} \cdot \frac{X_{k+1}}{l_{k+1}} + (M_{xk+1}) \quad . \quad . \quad (4).$$

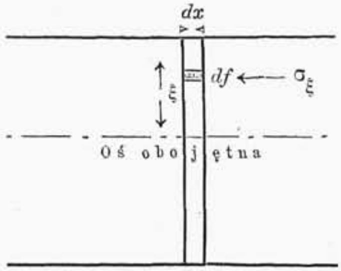
Praca deformacyjna zaś, jaką wykonywa belka $k$ i $k+1$, równa się, podług znanych wzorów:

$$\mathfrak{L}_k = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} \frac{M_{xk}^2}{I_k E_k} dx \; ^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\mathfrak{L}_{k+1} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{k+1}} \frac{M_{xk+1}^2}{I_{k+1} E_{k+1}} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

---

[1]) Wzór ten łatwo wyprowadzić w sposób następujący: daną belkę przecinamy dwoma nieskończenie blisko siebie leżącemi płaszczyznami prostopadle do osi belki, w odległości $x$ od pewnego punktu belki; z pryzmy w ten sposób powstałej wycinamy nieskończenie małą pryzmę, w odległości $\xi$ od osi obojętnej belki, na jednostkę kwadrato-




wą której w kierunku jej osi działa naprężenie $\sigma_\xi$; sprowadziwszy w ten sposób zadanie nasze do działania siły na pryzmę, zastosujemy znany wzór o pracy deformacyjnej pryzmy o przekroju $F$, długości $l$, w kierunku osi której działa siła $P$:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2 . l}{F . E},$$

w naszem zastosowaniu:

$$P = \sigma_\xi . df; \quad l = dx; \quad F = df;$$

praca zaś wszystkich tych pryzm w danym przekroju będzie elementarną pracą deformacyjną belki w danym przekroju i będzie równą:

$$d\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \int \frac{\sigma_\xi^2 . df^2}{df . E} . dx,$$

podług wiadomego wzoru $\sigma_\xi = \frac{M_x}{IE} . \xi$, podstawiając w poprzedni wzór i zauważywszy, iż wszystkie funkcye $(x)$ dla danego przekroju są ilościami stałemi, oraz że $\int df . \xi^2 = I$, otrzymamy:

$$d\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2 \, dx}{I_x . E_x};$$

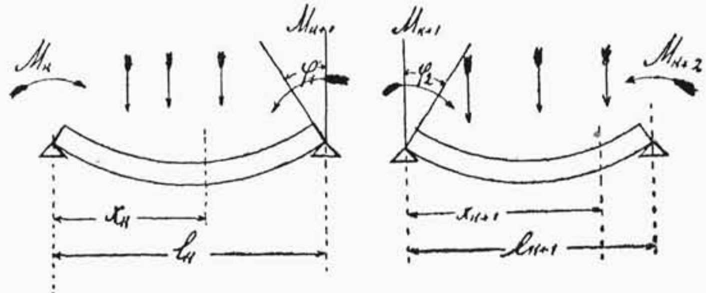
stąd:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \int \frac{M_x^2}{I_x . E_x} . dx.$$

gdzie $\mathfrak{L}$ oznacza pracę deformacyjną, *I*—momenty bezwładności, *E*—spółczynniki sprężystości danego przęsła belki.

Równania (3) i (4) przedstawiają momenty dwu różnych belek.

Rys. 2.




Oznaczywszy przez $\varphi_1$ i przez $\varphi_2$ kąty, jakie zawierają krańcowe przekroje z pionową, idącą przez punkt oporu, jak to wskazuje rysunek, to podług znanych wzorów otrzymamy:

$$\varphi_1 = \frac{d\mathfrak{L}_k}{d\,M_{k+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\varphi_2 = \frac{d\mathfrak{L}_{k+1}}{d\,M_{k+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Jeżeli $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$, otrzymamy belkę ciągłą i równanie to po podstawieniu odpowiednich wielkości, zamiast $\varphi_1$ i $\varphi_2$, wykaże stosunek trzech po sobie następujących momentów, t. j. da nam znany już wzór Clapeyron'a.

W zadaniu zaś naszem przypuszczamy, iż podpory zdeformowały się i zatrzymawszy oznaczenia $\Delta h_k$, $\Delta h_{k+1}$, $\Delta h_{k+2}$, wyżej już omawiane, otrzymamy kąt $\varphi_3$, który jest zawarty pomiędzy przekrojami belek nad podporą $k+1$ i który powstał li tylko wskutek opuszczenia się podpór. (*C. d. n.*)

---

# Instalacye elektryczne na wystawie hygienicznej

## w Warszawie.

(Tab. VII).

---

Początkowo oświetlenie wystawy miało być uskutecznionem w ten sposób, że grono przemysłowców warszawskich miało dostarczyć wystawie maszyny parowej i kotłów, oraz potrzebnych rekwizytów elektrycznych; ponieważ jednak w początku roku bieżącego zawiązaną została spółka, w celu dostarczania prądu elektrycznego jako siły i do oświetlania, pod firmą M. Lutosławski i S-ka, więc biuro techniczne pp. Olszewicz i Kern, porozumiawszy się z powyższą firmą co do dostarczania potrzebnej ilości energii elektrycznej na plac wystawy, zaproponowało wzmiankowanym przemysłowcom, aby zamiast kłopotliwego ustawiania całego kompletu maszyn, złożyli taką sumę, za jaką dałoby się wykonać przeniesienie siły z odległej o 1200 *m* stacyi pierwotnej na plac wystawy i zainstalować