// PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

Tom XLV. Warszawa, dnia 11 lipca 1907 r. № 28.

Obliczenie lin drucianych.

Napisał H. Czopowski, inż.

W poprzedniej mej pracy [1]), w 1-m oddziale zatytułowanym „Obliczenie lin drucianych, pracujących na ciągnienie", obliczyłem wzór na naprężenia występujące w oddzielnych włóknach obciążonej liny; postać tego wzoru jest następująca:

$$S_k = P \cdot \mu_0 \cdot \mu_k \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

gdzie S_k *kg* oznacza naprężenie w k-tem włóknie;

μ_0 jest wielkością charakteryzującą układ i właściwości sprężyste materyału, z którego dana lina jest zbudowana; wielkość ta przedstawia się w postaci:

$$\mu_0 = \frac{1}{i^0 f^0 E^0 + i' f' E' \cos^3\beta' + i'' f'' E'' \cos^3\beta' \cos^3\beta'' + + i''' f''' E''' \cos^3\beta' \cos^3\beta'' \cos^3\beta'''} \quad \ldots \quad (2),$$

gdzie i, f, E, oznacza ilość włókien, przekrój w mm^2, oraz współczynnik sprężystości w kg/mm^2 k-tego włókna, znaki $^0, ', ''$ i t. d. odnoszą się do włókien prostych, raz skręconych lub dwa razy skręconych i t. d.

μ_k jest to wielkość charakteryzująca układ geometryczny k-tego włókna w danej linie i posiada postać:

$$\mu_k = \cos^2\beta_k' \quad \text{lub} \quad \mu_k = \cos^2\beta_k' \cos^{2''}\beta_k$$

$$\text{lub} \quad \mu_k = \cos^2\beta_k' \cdot \cos^2\beta_k'' \cdot \cos^2\beta_k''' \quad \ldots \quad (3),$$

w zależności czy rozpatrujemy włókno raz, dwa razy, czy też trzy razy skręcone.

Przy obliczeniu powyższego wzoru przyjmowałem, iż na linę w kierunku jej osi działa jedynie siła zewnętrzna P, przyjąłem następnie, że suma momentów w danym przekroju liny, wywoływanych przez naprężenia we włóknach, jest równą zeru.

Na zasadzie tych założeń wytworzyłem sobie układ sił działających w jednowymiarowej przestrzeni, t. j. w kierunku osi liny; układ ten okazał się statycznie niewyznaczalnym, dla określenia więc naprężeń zastosowałem teoryę Castigliano.

Dla uogólnienia danego zadania przypuszczam obecnie, iż na koniec liny działa nie tylko obciążenie P, lecz i pewien moment M, działający w końcowym przekroju liny.

W praktyce przypadek ten występuje, gdy np. koniec liny prowadzony jest w kierownicach.

Ten ogólniejszy sposób traktowania zadania pozwoli określić: wielkość momentu wywieranego przez linę na kierownicę; wielkość kąta, o który obróci się koniec liny, w razie, gdy będzie on swobodny; oraz odwrotnie, będziemy postawieni w możności określenia budowy liny w zależności od żądania czy dana lina ma się obracać czy też nie.

W celu rozwiązania tego zadania, będę korzystał z twierdzeń A. Castigliano o minimum pracy, jak również z twierdzeń, iż pochodna pracy podług siły daje przesunięcie danego węzła w kierunku tejże siły, oraz iż pochodna pracy podług momentu, daje kąt obrotu przekroju, w którym działa dany moment.

Biorę najpierw pod uwagę linę, posiadającą raz skręcone włókna i duszę jako włókno proste.

Przy kręceniu tej liny około jej osi, we włóknach skręconych występują pewne naprężenia ciągnące, w duszy zaś występują oprócz naprężenia ciągnącego, jeszcze naprężenia skręcające; przyjęcie do rachunku tych ostatnich naprężeń nie przedstawia pod względem teoretycznym żadnych trudności, w danym jednakże rachunku naprężeń skręcających, występujących w duszy, nie wezmę pod uwagę; rachunek więc niżej wyprowadzony, ściśle biorąc, będzie odpowiadał linie bez duszy, lub linie o duszy, której przekroje bez pracy mogą się obracać (np. przekroje duszy konopnej, dla której E a więc i G można przyjąć $=0$, w porównaniu E=20000 dla metali), rachunek ten będzie również ścisły dla lin o duszy metalowej, lecz gdy kierownice nie pozwalają tej linie się obracać.

Równania statyczne takiej liny będą następujące:

$$P - \Sigma S_k \cos\beta_k = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\text{oraz} \quad M - \Sigma S_k \sin\beta_k\, r_k = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

gdzie r_k oznacza odległość środka k-tego włókna od środka liny.

Ponieważ dla określenia k niewiadomych posiadamy tylko dwa równania, układ więc tej liny jest statycznie niewyznaczalny i w celu określenia pozostałych niewiadomych w ilości $(k-2)$ zastosuję twierdzenie o minimum pracy odkształcenia. Na zasadzie tego twierdzenia poszukujemy minimum wyrazu, w którym jest $(k-2)$ niezależnie zmiennych.

Wyraz na pracę odkształcenia danej liny posiada postać:

$$N = \frac{1}{2} \sum_1^i \frac{S_k^2\, l_k}{f_k\, E_k} \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

dla którego równania (4) i (5) odgrywają rolę równań warunkowych. Dla rozwiązania tego zadania mnożę równ. (4) przez współczynnik nieokreślony μ_1, oraz równ. (5) przez takiż współczynnik μ_2, dodaję następnie te równania do (6) i otrzymuję wyraz:

$$N = \frac{1}{2} \sum_1^i \frac{S_k^2\, l_k}{f_k\, E_k} + \mu_1 \left[P - \sum_1^i S_k \cos\beta_k \right] + + \mu_2 \left[M - \sum_1^i S_k \sin\beta_k\, r_k \right] = \text{minimum} \quad . \quad . \quad (7).$$

W tem ostatniem równaniu wszystkie S_k są niezależnie zmienne, różniczkuję więc je kolejno podług S_k i otrzymuję:

$$\frac{\partial N}{\partial S_k} = \frac{S_k\, l_k}{f_k\, E_k} - \mu_1 \cos\beta_k - \mu_2 \sin\beta_k\, r_k = 0 \quad \ldots \quad (8),$$

skąd:

$$\frac{S_k\, l_k}{f_k\, E_k} = \mu_1 \cos\beta_k + \mu_2 \sin\beta_k\, r_k \quad \ldots \quad (9).$$

Podstawiając w to ostatnie równanie kolejno: $k = 1, 2, \ldots i$, otrzymamy i takich równań, które łącznie z równ. (4) i (5) dadzą nam $(i+2)$ równań z $(i+2)$ niewiadomemi, gdyż oprócz niewiadomych S_k, posiadamy jeszcze dwie niewiadome μ_1 oraz μ_2.

Obecnie zajmę się określeniem wartości dla μ_1 i dla μ_2, w tym celu w równ. (9) podstawiam $l_k' = \frac{l}{\cos\beta_k}$ i mnożę je przez $\cos\beta_k$, otrzymuję wtedy:

$$\frac{S_k'\, l}{f_k'\, E_k'} = \mu_1 \cos^2\beta_k' + \mu_2 \sin\beta_k' \cos\beta_k'\, r_k' \quad . \quad (10),$$

następnie obiedwie strony tego ostatniego równania mnożę przez czynnik: $\cos\beta_k' \cdot f_k'\, E_k'$ i otrzymuję:

$$S_k' \cos\beta_k' \cdot l = \mu_1 \cdot \cos^3\beta_k'\, f_k'\, E_k' + + \mu_2 \sin\beta_k' \cos^2\beta_k'\, r_k'\, f_k'\, E_k' \quad . \quad . \quad (11);$$

podstawiając kolejno: $k = 1, 2, \ldots i$, otrzymamy i takich równań, a zsumowawszy je wszystkie, otrzymamy:

$$l \sum_1^i S_k' \cos\beta_k' = \mu_1 \sum_1^i \cos^3\beta_k'\, f_k'\, E_k' + + \mu_2 \sum_1^i \sin\beta_k' \cos^2\beta_k'\, r_k'\, f_k'\, E_k' \quad . \quad . \quad (12).$$

---

[1]) Por. Przegl. Techn. r. 1904: Nr. 2 (str. 13), Nr. 4 (str. 41) i Nr. 6 (str. 75); z r. 1905: Nr. 2 (str. 17) i Nr. 4 (str. 45).

Zauważymy, iż $\Sigma\, S_k . \cos \beta_k = P$, i następnie w celu skrócenia pisowni oznaczę:

$$\sum_1^i \cos^3 \beta_k' \, f_k' \, E_k' = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

oraz

$$\sum_1^i \sin \beta_k' \, . \cos^2 \beta_k' \, r_k' \, f_k' \, E_k' = B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Po uczynieniu tych podstawień równ. (12) przybierze postać:

$$P \, . \, l = \mu_1 \, . \, A + \mu_2 \, B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Uczynimy podobneż przekształcenie równ. (10), ażeby módz wprowadzić do rachunku równ. (5): w tym celu mnożymy równ. (10) przez czynnik $(\sin \beta_k \, . \, r_k \, . \, f_k \, . \, E_k)$ i następnie sumujemy wszystkie równania, które powstaną po podstawieniu: $k = 1, 2 \, .. \, i$ i otrzymamy po lewej stronie w ten sposób otrzymanego równania wyraz: $\Sigma\, S_k \sin \beta_k \, r_k$, który na zasadzie równ. (5) $= M$; podstawiwszy więc tę wartość, otrzymamy:

$$l \, M = \mu_1 \, \Sigma \sin \beta_k' \cos^2 \beta_k' \, r_k' \, f_k' \, E_k' +$$

$$+ \mu_2 \, \Sigma \sin^2 \beta_k' \cos \beta_k' \, r_k'^2 \, f_k \, E_k' \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Czynnik przy μ_1 oznaczyliśmy już przez B, czynnik zaś przy μ_2 oznaczymy obecnie przez C, t. j. przyjmiemy:

$$C = \Sigma \sin^2 \beta_k' \cos \beta_k \, r_k^2 \, f_k \, E_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

równanie więc (16) otrzyma postać:

$$l \, M = \mu_1 \, . \, B + \mu_2 \, C \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Z równań więc (15) i (18) łącznie możemy obliczyć μ_1 i μ_2, a więc z równań:

$$\mu_1 \, A + \mu_2 \, B = Pl$$

$$\mu_1 \, B + \mu_2 \, C = Ml$$

otrzymamy:

$$\mu_1 = l \begin{vmatrix} P & B \\ M & C \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = l \, \frac{P \, . \, C - M \, . \, B}{A \, . \, C - B^2} \quad (19),$$

$$\mu_2 = l \begin{vmatrix} A & P \\ B & M \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = l \, \frac{A \, . \, M - B \, . \, P}{A \, . \, C - B_2} \quad (20).$$

Po podstawieniu tych wartości w równ. (10), otrzymamy wartości dla wszystkich S_k.

Zadanie więc określenia naprężeń we włóknach liny posiadającej najwyżej rozkręcone włókna i obciążonej siłą P i momentem M — uważam w ten sposób za rozwiązane.

Przystąpię obecnie do określenia wydłużenia i kąta skręcenia tej liny.

W tym celu korzystam z twierdzenia uzasadnionego dla układów sprężystych przez Castigliano, iż pochodne pracy odkształceń podług siły lub momentu dają wydłużenie liny w kierunku tejże siły lub dają kąt skręcenia przekroju liny, leżącego w płaszczyźnie tegoż momentu. Dla przeprowadzenia tego rachunku korzystam z wzoru (6), wyrażającego pracę odkształceń przez niezależnie zmienne S_k, P, M, gdzie $k = 1, 2, \ldots i$; cząstkowa pochodna tego wyrazu podług P daje wartość μ_1, pochodna zaś podług M daje μ_2; czyli μ_1 przedstawia wartość wydłużenia liny, μ_2 zaś kąt skręcenia przekroju liny.

Postępowanie takie jednakże uważam za niezupełnie ścisłe pod względem matematycznym i wskutek tego przeprowadzę ten rachunek metodycznie.

W wyrazie 6-ym na pracę odkształcenia posiadam $(k-2)$ niezależnie zmiennych, dwie zaś zmienne są określone przez równ. (4) i (5), nazwę te dwie zmienne S_1 i S_2, z równań więc (4) i (5) mogą być określone S_1 i S_2 przez S_k, gdzie: $k = 3, 4 \, .. \, i$. Równania te (4) i (5) dadzą się napisać w następujący sposób:

$$S_1 \cos \beta_1 + S_2 \cos \beta_2 = P - \sum_3^i S_k \cos \beta_k \quad . \quad . \quad (21),$$

$$S_1 \sin \beta_1 \, r_1 + S_2 \sin \beta_2 \, r_2 = M - \sum_3^i S_k \sin \beta_k \, r_k \quad . \, (22),$$

skąd:

$$S_1 = \begin{vmatrix} (P - \sum_3^i S_k \cos \beta_k) & \cos \beta_2 \\ (M - \sum_3^i S_k \sin \beta_k \, r_k) & \sin \beta_2 \, r_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \cos . \, \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 \, r_1 & \sin \beta_2 \, r_2 \end{vmatrix} . \, (23)$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & (P - \sum_3^i S_k \cos \beta_k) \\ \sin \beta_1 \, r_1 & (M - \sum_3^i S_k \sin \beta_k \, r_k) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 \, r_1 & \sin \beta_2 \, r_2 \end{vmatrix} \quad (24).$$

Następnie równ. (6) przedstawić mogę w następujący sposób:

$$N = \frac{1}{2} \sum_3^i \frac{S_k^2 \, l_k}{f_k \, E_k} + \frac{1}{2} \, . \, \frac{S_1^2 \, l_1}{f_1 \, E_1} + \frac{1}{2} \, . \, \frac{S_2^2 \, l_2}{f_2 \, E_2} \quad . \quad . \quad (25).$$

Dla otrzymania wydłużenia liny winienem znaleźć $\frac{d\,N}{d\,P}$ i przytem winienem zauważyć, że: S_k, dla $k = 3, 4 \, .. \, i$, są funkcyami P, zaś S_1 i S_2 są funkcyami S_k dla $k = 3, 4 \, .. \, i$, jak to wskazują równ. (23) i (24); możemy więc napisać, iż pochodna

$$\lambda = \frac{d\,N}{d\,P} = \frac{\partial\,N}{\partial\,S_k} \, . \, \frac{d\,S_k}{d\,P} + \frac{\partial\,N}{\partial\,S_1} \, . \, \frac{d\,S_1}{d\,P} + \frac{\partial\,N}{\partial\,S_2} \, . \, \frac{d\,S_2}{d\,P} \quad (26),$$

gdzie: $k \geq 3$,

t. j. S_k oznaczają naprężenia w nadliczbowych prętach, mówiąc w znaczeniu pojęć statycznie niewyznaczalnych układów. Na zasadzie minimum pracy wiemy, iż: $\frac{\partial\,N}{\partial\,S_k} = 0$; a więc po wykonaniu różniczkowań otrzymamy zamiast równ. (26):

$$\lambda = \frac{d\,N}{d\,P} = \frac{S_1 \, l_1}{f_1 E_1} \, . \, \frac{d\,S_1}{d\,P} + \frac{S_2 \, l_2}{f_2 E_2} \, . \, \frac{d\,S_2}{d\,P} \, . \quad . \quad . \, (27).$$

Z równań (23) i (24) znajdę:

$$\frac{d\,S_1}{d\,P} = \frac{\sin \beta_2 \, r_2}{\begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 \, r_1 & \sin \beta_2 \, r_2 \end{vmatrix}} ; \quad \frac{d\,S_2}{dP} = - \frac{\sin \beta_1 \, r_1}{\begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 \, r_1 & \sin \beta_2 \, r_2 \end{vmatrix}} \, (28).$$

Po podstawieniu w równ. (27) tych ostatnich wyrazów oraz wartości dla S_1 i S_2 z równ. (9), otrzymamy zamiast (27):

$$\lambda = \frac{(\mu_1 \cos\beta_1 + \mu_2 \sin\beta_1 r_1) \sin\beta_2 r_2 - (\mu_1 \cos\beta_2 + \mu_2 \sin\beta_2 r_2) \sin\beta_1 r_1}{\mathrm{coc}\, \beta_1 \, . \, \sin \beta_2 \, . \, r_2 - \sin \beta_1 \, . \, \cos \beta_2 \, . \, r_1} \, (29).$$

Zauważymy w tym wzorze, iż mnożniki przy μ_2 są identyczne i z odwrotnymi znakami, a więc wyraz z czynnikiem μ_2 zamieni się na zero; zebrawszy następnie mnożniki przy μ_1 w jeden wyraz, zauważymy, iż jest on identyczny z licznikiem, tak, iż w końcu otrzymamy:

$$\lambda = \mu_1 .$$

Na zasadzie takiegoż rozumowania możemy w tenże sposób określić kąt ϑ obrotu liny i zamiast równ. (26) możemy napisać:

$$\vartheta = \frac{d\,N}{d\,M} = \frac{S_1 \, l_1}{f_1 \, E} \, . \, \frac{d\,S_1}{d\,M} + \frac{S_2 \, l_2}{t_2 \, E_2} \, . \, \frac{d\,S_2}{d\,M} \, . \quad . \, (30),$$

z równań zaś (23) i (24) otrzymamy:

$$\frac{d\,S_1}{d\,M} = - \cos \beta_2 ; \quad \frac{d\,S_2}{d\,M} = \cos \beta_1 \quad . \quad . \quad . \, (31).$$

Po podstawieniu tych wartości w równ. (30), otrzymamy analogiczny wzór do wzoru (29):

$$\vartheta = \frac{-\mu_1 \cos\beta_1 + \mu_2 \sin\beta_1 r_1) \cos\beta_2 + (\mu_1 \cos\beta_2 + \mu_2 \sin\beta_2 r_2) \cos\beta_1}{\cos \beta_1 \, . \, \sin \beta_2 \, r_2 - \sin \beta_1 \, r_1 \cos \beta_2} \, (32);$$

po uczynieniu odpowiednich skróceń otrzymamy:

$$\vartheta = \mu_2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \, (33):$$

Po uzasadnieniu więc, iż $\lambda = \mu_1$ oraz iż $\vartheta = \mu_2$, możemy z (19) i (20) napisać:

$$\lambda = l \begin{vmatrix} P & B \\ M & C \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \, (34)$$

oraz

$$\vartheta = l \begin{vmatrix} A & P \\ B & M \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \, (35).$$

(D. n.)