PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

Tom XLII. *Warszawa, dnia 14 stycznia 1904 r.* № 2.

Obliczenie lin drucianych, pracujących na ciągnienie.

Napisał H. Czopowski, inżynier.

Lina składa się z włókien. Pod włóknem rozumiem tę część składową liny, która po wyjęciu z liny da się wyprostować i która zbudowana jest z materyału jednolitego. Lina i włókna pracują tylko na ciągnienie. Włókna więc w linie, pod względem materyału, bywają żelazne, stalowe lub też organiczne; pod względem zaś formy geometrycznej bywają proste, raz skręcone (podług linii śrubowej), dwa razy skręcone i t. d. Powstanie form geometrycznych włókien wymaga bliższych wyjaśnień.

Włóknem prostem w danej linie nazywam włókno posiadające geometryczną formę linii prostej.

Włóknem raz skręconem nazywam włókno, skręcone w formie zwykłej linii śrubowej. Oś cylindra, na który nawinięta jest linia śrubowa, nazywam osią włókna raz skręconego, a właściwie należy powiedzieć: osią skręcenia włókna raz skręconego; osią więc włókna raz skręconego jest linia prosta.

Jeżeli osi skręcenia włókna raz skręconego nadamy formę linii śrubowej, to przybierze to włókno formę, której nadamy nazwę linii czy też włókna dwa razy skręconego; oś więc skręcenia włókna dwa razy skręconego jest linią śrubową, czyli linią raz skręconą.

Jeżeli następnie osi linii dwa razy skręconej nadamy formę linii dwa razy skręconej, otrzymamy formę geometryczną włókna, którą nazwiemy linią czy też włóknem trzy razy skręconem; osią więc włókna trzy razy skręconego jest linia dwa razy skręcona. W ten sposób postępując, możemy tworzyć linie dowolnych skręceń.

Włókna danej liny należy rozróżnić najpierw podług materyału, z jakiego są one zrobione, a następnie podług właściwości geometrycznych, t. j. wielokrotności ich skręceń, podług wielkości średnic, długości i t. p. Pierwsze rozróżnienie wprowadza do rachunku spółczynniki naprężeń σ i sprężystości E; drugie zaś — wprowadza wielkości, które niżej podaję i dla których wprowadzam następujące oznaczenia.

Oznaczenia. Stopień skręcenia danego włókna rozróżniam zapomocą kresek przypisanych do danej wielkości, jak następuje, gdy i oznacza ilość wszystkich włókien w danej linie, to

i^0 oznacza ilość prostych włókien,
i' „ „ raz skręconych włókien,
i'' „ „ dwa razy skręconych włókien,
i''' „ „ trzy „ „ „ i t. d.;

w ten sam sposób oznaczam przez:

f—przekrój danego włókna w mm^2,
δ—średnicę „ „ „ mm,
l—długość całej liny w m,
l^0, l', l'', l''' — długości włókien w naturalnej ich wielkości (mierzone po wyprostowaniu włókien), stąd wynika np., iż $l^0 = l$,
β—kąt zawarty pomiędzy stycznemi w danym punkcie włókna i odpowiednim punkcie osi skręcenia tego włókna, mówimy więc o kątach β', β'' i β'''. Możemy również mówić, iż linia prosta jest linią śrubową, gdy $\beta' = 0$, lub też może być ona uważana np. za linię trzy razy skręconą, gdy $\beta''' = \beta'' = \beta' = 0$ i t. p.
S_k kg oznacza naprężenie w k-tem włóknie. Lina posiada S', S'', S''' i t. d. naprężenia.
$\sigma_k\, kg/mm^2 = \frac{S_k}{f_k}$, również rozróżniamy $\sigma', \sigma'', \sigma'''$ i t. d.
P kg oznacza siłę zewnętrzną, działającą na linę w kierunku jej osi.

Pomiędzy długościami oddzielnych włókien o różnych skręceniach istnieją następujące stosunki geometryczne:

$$l' = \frac{l^0}{\cos\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$l'' = \frac{\text{długość osi skręcenia}}{\cos\beta''} = \frac{l'}{\cos\beta''} = \frac{l^0}{\cos\beta' \cdot \cos\beta} \quad . \quad (2),$$

$$l''' = \frac{\text{długość osi skręcenia}}{\cos\beta'''} = \frac{l''}{\cos\beta'''} = \frac{l^0}{\cos\beta' \cdot \cos\beta'' \cdot \cos\beta'''} \quad (3).$$

Następnie oznaczam przez λ wydłużenia włókien wskutek sił występujących w danem włóknie, wydłużenie mierzy się w naturalnej wielkości po wyprostowaniu włókna. Rozróżniamy więc wogóle λ_k, w specyalnych wypadkach $\lambda^0, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ i t. d. Wydłużenie liny $\lambda = \lambda^0$.

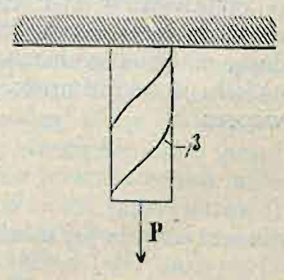
Zadanie. Obliczenie lin pracujących na ciągnienie polega na odnalezieniu funkcyi:

$$f(P, S, f, l, \beta, E) = 0.$$

Dotychczas za podstawę do obliczenia lin przyjmowano przypuszczenie (niczem nie uzasadnione), że naprężenia w linie rozkładają się równomiernie na wszystkie włókna, niezależnie od kąta β i niezależnie od różnorodności E, stąd łatwy wzór:

$$P = \Sigma S_k \text{ lub też } S_k = \frac{P}{\Sigma f} \cdot f_k.$$

Że przypuszczenie to jest teoretycznie absolutnie błędne, łatwo się o tem poglądowo przekonać, wyobraziwszy sobie np. włókno raz skręcone (rys. 1), dla którego kąt $\beta = 90^0$; widocznem jest, iż S dla takiego włókna $= 0$; jeżeli zaś uczynimy $\beta = 0$, to będzie $S = P$, a więc S jest zależnem od całego układu liny, t. j. od wszystkich wielkości matematycznych, charakteryzujących układ włókien. Jeżeli lina pracuje na zginanie, należy naturalnie wprowadzić promień krzywizny ρ, do powyższej więc funkcyi należy jeszcze wprowadzić wielkość ρ.



Rys 1.

W ostatnim wypadku, radzono sobie dotychczas w ten sposób, iż przyjmowano wzór dla włókna (drutu) prostego, które się wygina w ten sposób, iż oś obojętna wygięcia przechodzi przez oś drutu; stosowano więc wzór:

$$\sigma = 0{,}5\, E \frac{\delta}{\rho}.$$

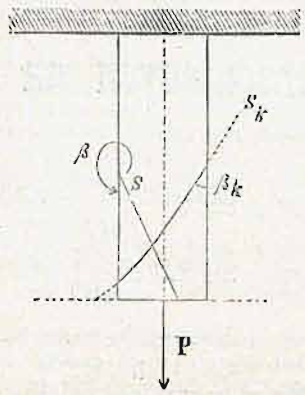
Popełniano tu błąd co najmniej podwójny. Popierwsze drut w linie nie przedstawia linii prostej a po zgięciu linii kołowej, lecz przedstawia linię śrubową wygiętą, skądże więc takie brutalne obchodzenie się z wzorami matematycznymi; podrugie, oś obojętna nie przechodzi przez oś włókna (drutu), lecz przez oś liny, należałoby więc wprowadzić do rachunku średnicę liny nie drutu; lecz ponieważ rezultaty rachunku w ostatnim razie nie byłyby nawet zbliżone do rezultatów otrzymanych z praktyki, przeto, choć zbyt lekkomyślnie, wtłoczono obrachunek lin we wzór nieodpowiedni, zamiast przyznać się do nieświadomości, i tak sprawa pozostała. Widocznie nie tylko w stosunkach społecznych bywają „kłamstwa konwencyonalne", lecz i w naukach ścisłych.

Prof. J. Hrabák w dziele swojem „Die Drahtseile"[1]) stara się ten błąd naprawić, wprowadzając do wzoru powyższego zmienną wielkość dla E. Podług tego autora E waha się pomiędzy 24000 kg/mm^2 a 4000 kg/mm^2 dla tegoż materyału, jedynie zależnie od układu drutu w linie. Pojąć tu nie mogę, w jaki sposób podobne zjawisko zmiany współczynnika E może nastąpić, bez zmiany międzycząsteczkowego układu materyału. Chociaż, przypuszczając zmienność E,

[1]) Hrabák J. Die Drahtseile. Berlin 1902. J. Springer.

rezultaty obliczeń mogą być zbliżone do rzeczywistości, w żadnym jednakże razie przypuszczenie takie nie rozwiązuje zadania zasadniczo i nie objaśnia nas o stosunku naprężeń, występujących w linie.

Obliczenie lin, posiadających włókna najwyżej raz skręcone. Przecinam daną linę (rys. 2) płaszczyzną prostopadłą do osi liny, na przekrój ten działają siły występujące we włóknach S oraz siła P. Siły te są między sobą w równowadze.



Rys. 2.

Wszystkie te siły rozkładam na składowe, prostopadłe do przekroju, t. j. w kierunku osi liny oraz na składowe, leżące w płaszczyźnie przekroju. Z równowagi sił, działających w kierunku osi liny, wypada:

$$P - \Sigma S_k \cos\beta'_k = 0 \quad . \quad (4).$$

Składowe leżące w płaszczyźnie przekroju, ze względu na symetryczność ich układu około osi liny, wzajemnie co do wielkości swych znoszą się, wywoływać jednakże one mogą momenty, obracające linę około jej osi. W praktyce momenty te zostają zwykle zniesione przez momenty wywołane przez siły występujące w przewodnikach, prowadzących kosze.

W celu więc uproszczenia rachunku i wykazania charakterystycznych stosunków, wynikających z tego rachunku, przyjąć mogę, iż suma momentów działających w danym przekroju liny $= 0$.

Dla obliczenia i niewiadomych, gdyż przyjmuję i włókien w danej linie, posiadam jedno tylko równanie (4); należy więc znaleźć resztę równań. Na drodze statycznej, równań tych już nie znajdę, znaleźć je mogę tylko zapomocą teoryi odkształceń; w tym celu stosuję teoryę Castigliana'a, twierdząc, iż naprężenia we włóknach w ten sposób się rozkładają, że mechaniczna praca odkształceń wszystkich części układu jest minimum; praca ta N równa jest podług znanego wzoru:

$$N = \frac{1}{2}\sum_{1}^{i} \frac{S_k{}^2 l_k}{f_k E_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5);$$

dla uczynienia jej minimum należy, ażeby:

$$\frac{dN}{dS_k} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6);$$

równań takich możemy otrzymać $(i-1)$, które, wraz z równaniem (4), rozwiązują zadanie.

Rozwiązanie to uskutecznić można podług ogólnych metod dla zadań na minimum z warunkowemi równaniami. W tym celu mnożymy równanie (4) przez nieokreślony dotychczas spółczynnik μ i dodajemy do niego równanie (5), powstaje wtedy wzór:

$$\mu(P - \Sigma S_k' \cos\beta_k') + \frac{1}{2}\sum \frac{S_k'^2 l_k}{f_k E_k} = \text{minimum} \quad . \quad (7);$$

różniczkując go podług S_k:

$$-\mu\cos\beta_k' + \frac{S_k' l_k'}{f_k E_k} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

skąd:

$$\mu = \frac{1}{\cos\beta_k'} \cdot \frac{S_k' l_k}{f_k E_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9);$$

ponieważ $\quad l_k' = \dfrac{l}{\cos\beta_k}$, przeto

$$\mu = \frac{1}{\cos^2\beta_k'} \cdot \frac{S_k' l}{f_k E_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

W celu wprowadzenia do rachunku równania (4), mnożę licznik i mianownik równ. (10) przez $\cos\beta_k'$:

$$\mu = \frac{1}{\cos^3\beta_k'} \cdot \frac{l \,.\, S_k' \,.\, \cos\beta_k'}{f_k E_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11);$$

na zasadzie czysto algebraicznych przemian [1]), możemy napisać:

$$\mu = l \frac{\Sigma S_k' \cos\beta_k'}{\Sigma \cos^3\beta_k' f_k E_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

a mając na uwadze równanie (4), możemy napisać:

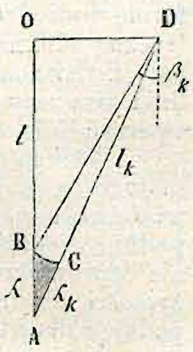
$$\mu = \frac{P \,.\, l}{\Sigma \cos^3\beta_k' f_k E_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Równanie (13) posiada wszystkie wiadome wielkości, możemy więc oznaczyć μ, a wtedy z równania (10) kolejno wszystkie S_k', podstawiając kolejno $k = 1, 2 \ldots . i$.

Nim przystąpię do poszczególnych obliczeń, przypatrzmy się bliżej wzorowi (9). Część tego wzoru: $\dfrac{S_k l_k}{f_k E_k}$ wyraża wydłużenie jednego z włókien w kierunku siły S_k, działającej na to włókno (twierdzenie to jest również widocznem, wychodząc z ogólnej zasady, iż różniczka pracy podług siły daje drogę przebytą, t. j. w danym wypadku wydłużenie), równanie więc (9) da się napisać:

$$\mu = \frac{\lambda_k}{\cos\beta_k'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Rozwińmy obecnie linię śrubową na płaszczyźnie i oznaczmy jej położenie w rozwinięciu przed i po obciążeniu liny. Trójkąt OBD jest rozwinięciem przed obciążeniem, trójkąt zaś OAD—po obciążeniu.



Rys. 3.

Trójkąt ABC (rys. 3), utworzony w ten sposób, iż uczyniono:

$$DB = DC = l_k,$$

możemy uważać za prostokątny, otrzymujemy więc z niego $\lambda = \dfrac{\lambda_k}{\cos\beta_k}$; porównywując wzór ten ze wzorem (14), przyjdziemy do wniosku, iż wielkość μ jest wydłużeniem liny w kierunku swej osi. Ponieważ μ dla danej liny i danego obciążenia jest wielkością stałą, przeto stąd wniosek:

przy obciążeniu liny przez pewną siłę, składowe wydłużeń wszystkich włókien w kierunku osi liny, są wzajemnie równe; lub też inaczej: *wydłużenie liny następuje całym jej przekrojem i wskutek tego nie może występować tarcie się wzajemne oddzielnych włókien.*

(C. d. n.)

[1]) Jeżeli wogóle: $q = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ i t. d., to również:

$$q = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}, \text{ gdyż } \begin{aligned} a_1 &= q\,b_1 \\ a_2 &= q\,b_2 \\ a_3 &= q\,b_3 \\ \Sigma a &= q\,\Sigma b, \text{ a stąd } q = \frac{\Sigma a}{\Sigma b}. \end{aligned}$$

DROGI ŻELAZNE W WARSZAWIE.

Przez Adama Świętochowskiego, inżyniera.

(Ciąg dalszy; p. № 1 r. b., str. 5).

Pomimo tych niewątpliwych objawów ciągłego rozwoju ruchu kolejowego w Warszawie, stopień, do jakiego doszedł on obecnie, jest jeszcze bardzo daleki od ruchu kolejowego dużych miast zagranicznych. Już sama liczba pociągów wskazuje, jak dalece pozostaliśmy w tyle. Porównywając np. liczbę pociągów na dobę w Warszawie w r. 1901 z liczbą pociągów kursujących w Berlinie w r. 1898 [1]), otrzymamy: w Berlinie przy 1888 tys. mieszkańców było pociągów dalekich 128, podmiejskich 314, miejskich 326 i towarowych 180 par, a w Warszawie przy 712 tysiącach mieszkańców jest po-

[1]) Por. Przegl. Techn. № 41 z r. z.