1924 Nr. 7. z dn. 10. IV. CZASOPISMO TECHNICZNE — Organ Ministerstwa Robót Publicznych i Polskiego Towarzystwa Politechnicznego. Rocznik XLII.

H. Czopowski, Prof. Politechniki Warszawskiej.

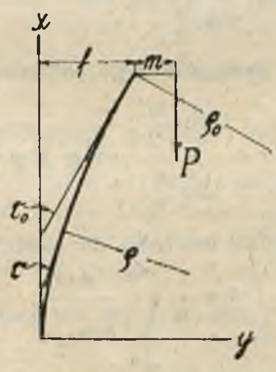
Słów kilka o wyboczeniu sprężystem.

W podręcznikach „Wytrzymałości“ oblicza się zwykle odkształcenie pręta, obciążonego mimośrodkowo wzdłuż osi, na podstawie wzoru przybliżonego $1 : \varrho = y''$ i otrzymuje się odchylenie f końca takiego pręta [1]):

$$f = m \cdot \left(\frac{1}{\cos al} - 1\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

gdzie m oznacza mimośród siły obciążającej P; $a = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$; l — długość pręta, jednym końcem umocowanego.

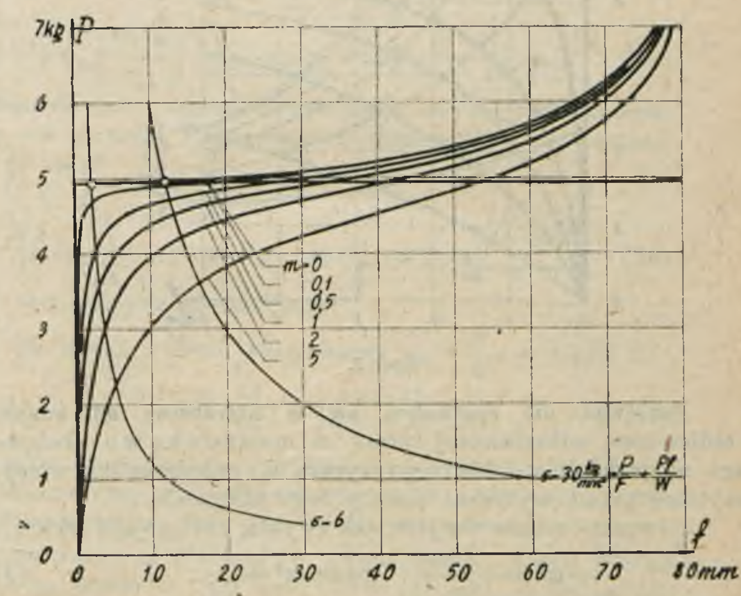
Równanie to autorzy interpretują zwykle w ten sposób, że, w razie gdy $al = \frac{\pi}{2}$, następują jakieś nagłe zmiany w odkształceniu, o których przytem w rozmaity a dosyć niejasny sposób się wyrażają, przypisując przytem odpowiedniej sile jakieś nieciągłe działanie; siłę tę szczególnie wyróżniają jako siłę, która ma wywołać odkształcenie niepomiernie nieskończenie wielkie; siłę tę nazywają siłą Eulera lub krytyczną.



Rys. 1.

Zastanawiając się jednakże nad zjawiskiem mimośrodkowego obciążenia ze stanowiska fizycznego [2]), autor niniejszego postawił wniosek, że nieciągłości w zjawisku tego odkształcenia nie należy się spodziewać, t. j. że pręt, obciążony mimośrodkowo równolegle do osi, powinien się giąć (w granicach wytrzymałości i sprężystości) z powiększaniem się siły obciążającej — bez jakiejbądź nieciągłości nawet w miejscu $P \cong P_E$.

W celu przeto ścisłego zbadania przebiegu tego wyboczenia obliczyłem odchylenie f końca pręta prostego, obciążonego mimośrodkowo równolegle do jego osi, stosując do tego wzór ścisły dla ϱ i otrzymaną w ten sposób funkcję eliptyczną wyraziłem liczbowo dla obranego pręta z różnemi mimośrodami (m) i przedstawiłem wykresy (P, f) dla różnych m na rys. 2-gim. Z wykresów tych nie widać, ażeby wartość siły P_E (pochodząca od $al = \frac{\pi}{2}$) wywoływała jakieś nieciągłe lub niepomierne odkształcenie; należy przeto sądzić, że odkształcenie to ma charakter ciągły, charakter zwykłego gięcia, rozpoczynającego się od $P = 0$, $f = 0$, i żadne „niebezpieczeństwo“ na granicy $P = P_E$ nie grozi prętowi takiemu, o ile nie przekroczymy granicy sprężystości lub wytrzymałości [1]). Do obliczenia przyjąłem pręt o przekroju 12×1 m/m, o długości 100 m/m, umocowany jednym końcem, (rys. 1).



Rys. 2.

Na skutek tego wyniku stawiam następujące wnioski, odnoszące się do sprężystego wyboczenia pręta, z obciążeniami mimośrodkowemi:

1. pręt prosty, obciążony mimośrodkowo równolegle do osi, będzie się giął w sposób ciągły; o sile więc Eulerowskiej mowy być w tym razie nie może;

2. wartość siły Eulerowskiej, przy obciążeniu mimośrodkowem, nie stoi w żadnym faktycznym związku z wytrzymałością pręta, a jedynie — w tym razie — miarodajną wielkością (przy tych samych zresztą warunkach) — jest wielkość mimośrodu;

3. jedynie słusznem obliczeniem wytrzymałości prętów obciążonych osiowo w praktyce konstrukcyjnej, jest obliczenie na podstawie znajomości mimośrodu.

Na tę sprawę zwracał już uwagę prof. Dr. M. T. Huber w *Przeglądzie Technicznym* 1907 r. w pracy pod tyt. „O wytrzymałości słupów“.

Wpływ wielkości mimośrodu na wytrzymałość pręta uwidoczniony jest na rys. 3-cim, na którym umieszczono wykresy (odkształceń) (P, f, m) z rys. 2-giego w powiększonej skali dla odkształceń z dodaniem wykresów (naprężeń) (P, f, m) z równ.:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P}{W}(f + m), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

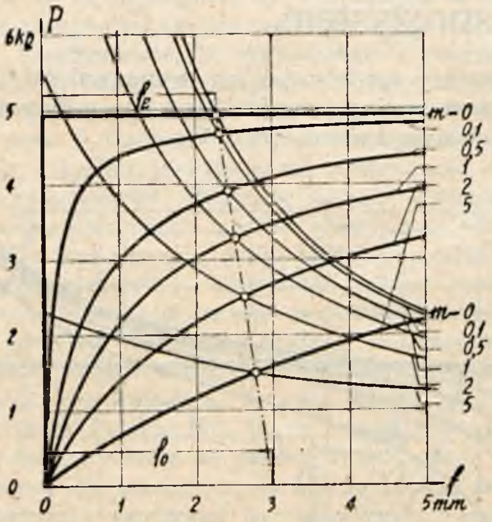
dla $\sigma = 6$ $kg/m/m^2$. Spółrzędne punktów przecięcia się odpowie-

[1]) Timoszenko: „Wytrzymałość“ str. 335: „Skoro P zaczyna się zbliżać do P_E i t. d.“. Föppl III. 1905, str. 328. Müller-Breslau: Die neueren Methoden, 1913, str. 360. — R. Mayer: Die Knickfestigkeit, 1921, str. 5, 24. — C. Bach i wielu innych.

[2]) Autor niniejszego referował w lutym b. r. tę sprawę pod tytułem: „Warunki fizyczne powstawania wyboczenia sprężystego“ na zebraniu naukowem Warszawskiego Tow. Politechnicznego.

[1]) Zwrócę tu przytem uwagę na zgodność charakteru obliczonych wykresów (rys. 2) z takimiż wykresami, otrzymanemi drogą doświadczeń przez różnych badaczy (porówn. np. rys. 405 u Timoszenki „Wytrzymałość„ na str. 336); zgodność ta stwierdza z jednej strony, że pręty, z którymi robiono doświadczenia posiadały mimośrody (inaczej zresztą w wykonaniu jest niemożliwe); z drugiej strony — przyjąwszy, że w tych prętach musiał być mimośród, wskazuje na zgodność rachunku tu proponowanego z doświadczeniami. Przyjąwszy np. w doświadczeniach Kirscha (*Zft. d. V. D. Ing.* 1905) dla pręta 1-go mimośrod $m = 1$ m/m, to wyniki jego doświadczeń są zgodne z obliczeniem.

dnich wykresów, t. j. wykresów z temi samemi odśrodkami m, wyrażają wielkości sił i odchyleń, przy których dany pręt otrzymuje dane naprężenie $\sigma = 6\ kg/m/m^2$. Jak z rys. tego sądzić można, geometryczne miejsce tych punktów (wykres obciążeń bezpiecznych) przedstawia linję zbliżoną do prostej i prawie prostopadłą do osi f [1]), co wskazuje na potrzebę znacznej zniżki z powiększeniem mimośrodu obciążenia P, w celu utrzymania tej samej wartości σ.



Rys. 3.

Ponieważ nie spotkałem się w literaturze mi znanej z obliczeniem odkształconej pręta m i m o ś r o d k o w o obciążonego na podstawie dokładnego wyrazu dla promienia krzywizny, przytoczę przeto wytyczne punkty tego obliczenia.

Równanie momentów jest, jak zwykle, następujące (rys. 1):

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha^2 (m + f - y); \quad \text{gdzie } \alpha^2 = \frac{P}{EJ} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Po zróżniczkowaniu tego równania względem $\left(\frac{1}{\varrho}\right)$, oraz y i po przemnożeniu następnie tej różnicy przez $\frac{1}{\varrho}$ i po zcałkowaniu od ϱ do ϱ_0 i od τ do τ_0, podstawiwszy przedtem $dy = ds . \sin \tau$, otrzymamy:

$$\frac{1}{2\varrho^2} = \alpha^2 (\cos \tau - \cos \tau_0) + \frac{1}{2\varrho_0^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gdzie litery ϱ i τ oznaczają promień i kąt nachylenia stycznej z osią x w dowolnym punkcie krzywej; ϱ_0 i τ_0 — w obciążonym końcu danego pręta.

Z równania 1-go dla $y = f$ mamy:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \alpha^2 . m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

po podstawieniu tej wartości w równ. 2-gie otrzymamy:

$$\frac{1}{\varrho^2} = 2\alpha^2 (\cos \tau - \cos \tau_0) + \alpha^4 m^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

skąd, podstawiwszy $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$ i zważywszy, że długość pręta pozostaje stałą $= l$ [2]) otrzymamy:

$$\int_d^l ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\cos \tau - \cos \tau_0) + \alpha^2 m^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ażeby sprowadzić tę funkcję do postaci funkcji eliptycznej pierwszego rodzaju, przedstawimy:

$$-2 \cos \tau_0 + \alpha^2 m^2 = -2 \cos \tau_0', \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

skąd

$$\frac{\sin^2 \tau_0'}{2} = \sin^2 \frac{\tau_0}{2} + \frac{\alpha^2 m^2}{4}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

po podstawieniu tej wartości w równ. 5-te, otrzymamy:

$$l = \frac{1}{2\alpha} . \frac{1}{\sin \frac{\tau_0'}{2}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\tau}{2}}{\sin^2 \frac{\tau_0'}{2}}}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Następnie wprowadzimy nową zmienną, określoną następującem równaniem:

$$\frac{\sin \frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\tau_0'}{2}} = \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

i po jej podstawieniu otrzymamy zamiast 8-go

$$l = \frac{1}{2\alpha . \sin \frac{\tau_0'}{2}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\cos \varphi} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Z 9-go dla $\tau = 0$, otrzymamy $\varphi = 0$; zaś dla $\tau = \tau_0$ otrzymamy:

$$\frac{\sin \frac{\tau_0}{2}}{\sin \frac{\tau_0'}{2}} = \sin \varphi_0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

po zróżniczkowaniu następnie 9-go, otrzymamy:

$$d\tau = \frac{2 \sin \frac{\tau_0'}{2}}{\cos \frac{\tau}{2}} . \cos \varphi . d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

a po podstawieniu tych wartości do równ. 10-go, otrzymamy:

$$l = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\tau}{2}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

po podstawieniu następnie w to równanie z 9 go wartości $\cos \frac{\tau}{2}$, otrzymamy:

$$l = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\tau_0'}{2} \sin^2 \varphi}} . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Całka ta daje się obliczyć z tablic Legendrea [1]).

Po podstawieniu następnie wartości α i po oznaczeniu wartości całki powyższej literą ε otrzymamy z 14-go:

$$P = EJ . \frac{1}{l^2} . \varepsilon^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Równanie daje związek pomiędzy (P, f, m). Ażeby przeto obliczyć związek (P, f), gdy dane jest m, obierzemy dowolną wartość niezależnej zmiennej f; ażeby z tego obliczyć całkę ε, należy wyrazić τ_0' i φ_0 zmiennemi f i m. W tym celu wyrugujemy z równ. 1-go i 4-tego promień ϱ, a otrzymamy związek

---

[1]) Równanie tej prostej można obliczyć w przybliżeniu, rugując z równ. (a) i (b) wielkość m, i zastąpiwszy następnie $\cos \alpha l$ dwoma wyrazami szeregu, na jaki rozwiniemy ten wyraz, otrzymamy rówanie prostej. Można również obliczyć punkt górny tej prostej (P_E, f_E) z niej równ (b) podstawiwszy w nim $P = P_E$; $m = 0$; punkt dalszy zaś obliczymy z warunku $m = \infty$; $P = 0$, t. j. przyjąwszy, że na koniec pręta działa para sił o momencie $(P . m) = \sigma W$; odkształcona będzie łukiem koła o promieniu ρ i długości l; z geometrycznych przeto stosunków obliczymy f_0 (rys. 3-ci); a wtedy z równania tej prostej i równ. (b) obliczymy przybliżoną wartość dopuszczalnego P dla dowolnego m.

[2]) W obliczeniach przybliżonych warunek ten zwykle jest pomijany i wskutek tego utarło się mniemanie niesłuszne, że dla obliczenia odchylenia z równania $y = f(1 - \cos \alpha l)$ nie posiadamy warunku; jeżeli jednakże uwzględnimy warunek, że długość pręta jest stała, przyjąwszy np. w postaci skończonej $\int_0^l (1 + \frac{1}{2} y'^2) dx = l$, to obliczymy odchylenie f i naprężenia; oczywiście wartości te będą przybliżone, gdyż przyjęliśmy do obliczenia $1 : \rho \cong y''$. Obliczając odkształconą jako warjację potencjału, otrzymamy równanie różniczkowe 4-go rzędu, a warunek długości pręta jest jednym z warunków obliczenia stałych.

[1]) Korzystałem do tego obliczenia z tablic, podanych w dziele L. Levy, „Précis élementaire de la theorie des fonctions elliptiques".

pomiędzy: m, f, y, τ i τ_0, a po podstawieniu odpowiadających obu wartości: $y=0$, $\tau=0$, otrzymamy równanie:

$$\alpha^4(f+m)^2=2\,\alpha^2(1-\cos\tau_0)+\alpha^4 m^2, \quad . \quad . \quad (16)$$

z którego po skróceniu przez α^2 i po przekształceniu trygonometrycznem:

$$\sin^2\frac{\tau_0}{2}=\tfrac{1}{4}\alpha^2 f(f+2\,m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

po podstawieniu tej wartości w równ. 7-me napiszemy:

$$\sin^2\frac{\tau_0'}{2}=\tfrac{1}{4}\alpha^2(f+m)^2;\ \sin\frac{\tau_0'}{2}=\tfrac{1}{2}\alpha(f+m), \quad . \quad (18)$$

z 11-go wreszcie po podstawieniu wartości z 17-go i 18-go otrzymamy:

$$\sin^2\varphi_0=\frac{f(f+2\,m)}{(f+m)^2};\ \text{inaczej}\ \cos\varphi_0=\frac{m}{f+m}, \quad . \quad (19)$$

z którego obliczymy φ_0 z wielkości obranych f i m.

Wartość $\sin\frac{\tau_0'}{2}$, wchodzącą w całkę eliptyczną (równ. 14-te) mamy już wyrażoną wielkościami f, m w równ. 18-tem skąd:

$$\sin\frac{\tau_0'}{2}=\alpha.\frac{f+m}{2}=\sqrt{\frac{P}{EJ}}.\frac{f+m}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Ponieważ jednakże w ten wyraz wchodzi również nieznana wielkość α (P bowiem jest szukane), przeto zastosujemy do obliczenia jej wartości metodę iteracji. W tym celu do obliczonej już (z równ. 19-go) wartości φ_0 i dowolnej, lecz przypuszczalnie bliskiej obranemu odchyleniu[1]), wartości kąta τ_0', wypiszemy z tablic Legendre'a wartość całki, którą przyjmiemy za pierwsze przybliżenie i oznaczymy ją literą ε_1; z tej wartości i z równ. 15-go obliczymy $\alpha_1=\varepsilon_1 : l$; a mając tę wartość, obliczymy z 20-go dokładniejszą wartość $\sin\frac{\tau_0'}{2}$. Gdy wartość $\sin\frac{\tau_0'}{2}$ ustali się, obliczymy z równ. 15-go P, odpowiadające obranej wartości f i danej m; w ten sposób obliczone zostały wykresy w rys. 2-gim 3-cim. Dla różnych celów rachunkowych potrzebne bywają wzory przybliżone, które obliczymy; ażeby n. p. obliczyć przybliżony wzór (P, f, m), rozwiniemy całkę ε (równ 15-te) w szereg do wyrazu $\sin^2\frac{\tau_0'}{2}$ włącznie.

$$\varepsilon=\int_0^{\varphi_0}\left(1+\tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\tau_0'}{2}.\sin^2\varphi\right)d\varphi=\varphi_0+\tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\tau_0'}{2}\int_0^{\varphi_0}\sin^2\varphi\,d\varphi, \quad (21)$$

$$\varepsilon=\varphi_0+\tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\tau_0'}{2}\left[-\tfrac{1}{2}\sin\varphi_0.\cos\varphi_0+\tfrac{1}{2}\varphi_0\right]; \quad . \quad . \quad (22)$$

a więc z dokładnością do $\sin^2\frac{\tau_0'}{2}$ włącznie:

$$\varepsilon^2=\varphi_0{}^2+\tfrac{1}{2}\varphi_0.\sin^2\frac{\tau_0'}{2}.(\varphi_0-\sin\varphi_0\cos\varphi_0). \quad . \quad . \quad (23)$$

Podstawimy w nie z równ. 18-go $\sin\frac{\tau_0'}{2}$, a następnie obliczymy z 15-go:

$$P=\frac{EJ}{l^2}.\left[\varphi_0{}^2+\tfrac{1}{2}\varphi_0.\frac{P}{EJ}.\frac{(f+m)^2}{4}.(\varphi_0-\sin\varphi_0\cos\varphi_0)\right]. \quad (24)$$

Przenieśmy wyrazy z P na lewą stronę równania, a otrzymamy:

$$P\left[1-\tfrac{1}{8}\varphi_0\left(\frac{f+m}{l}\right)^2(\varphi_0-\sin\varphi_0.\cos\varphi_0)\right]=\frac{EJ}{l^2}\varphi_0{}^2, \quad . \quad (25)$$

zważywszy, że drugi wyraz w nawiasach zwykle jest znacznie mniejszy od jedności, napiszemy z dokładnością do wartości wyrazu $\left(\frac{f+m}{l}\right)^2$ włącznie:

$$P=\frac{EJ}{l^2}.\varphi_0{}^2\left[1+\tfrac{1}{8}.\varphi_0.(\varphi_0-\sin\varphi_0.\cos\varphi_0).\left(\frac{f+m}{l}\right)^2\right]. \quad (26)$$

W szczególnych przypadkach:

1. dla $m=0$, z równ. 19-go mamy $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$; a więc z 26:

$$P=\frac{EJ}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[1+\tfrac{1}{8}\left(\frac{\pi f}{2\,l}\right)^2\right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

jeżeli przytem $f=0$, to $P=P_E$; siła P_E jest przeto siła, przy której rozpocząć się może wyboczenie, o ile jakiś czynnik zewnętrzny wyprowadzi dany pręt ze stanu równowagi;

2. dla $f=0$; $m\neq 0$ z równ. 19-go będzie: $\varphi_0=0$, a więc $P=0$; niema przeto w tym razie siły krytycznej, co też i z dokładnego obliczenia wynika;

3 jeżeli zaś przyjmiemy $\left(\frac{f+m}{l}\right)^2\cong 0$, to:

$$P=\frac{EJ}{l^2}\,\mathrm{ar}\cos^2\frac{m}{f+m}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

w tej postaci wzór ten jest wyprowadzony w podręcznikach bezpośrednio z warunku $1:\varrho=y''$; z niego też otrzymujemy wzór (a). Wzory przybliżone na wyboczenie mimośrodkowe rozpatruje prof. M. T. Huber w przytoczonym wyżej artykule, oraz przytacza odnośną literaturę.

[1]) Można ją obliczyć ze wzorów przybliżonych.

Prof. Dr. Otto Nadolski.

Uzdrowienie i organizacja polskich państwowych Zakładów zdrojowych.

Obok naprawy Skarbu, a właściwie równolegle z nią, drugiem, niemniej ważnem zadaniem chwili dzisiejszej, jest naprawa administracji w poszczególnych jej gałęziach, aby dotychczasowe jej braki nie sparaliżowały wyczerpujących społeczeństwo wysiłków. Ponadto czas najwyższy, aby pomyśleć o utrwaleniu warunków, któreby umożliwiły stałe utrzymanie finansowej równowagi państwowej.

Ważne w tym dziale do spełnienia zadanie przypada państwowym przedsiębiorstwom i państwowym zakładom przemysłowym. Dobre, sprawne i ekonomiczne ich funkcjonowanie przyczynić może Państwu poważne dochody, zmniejszając konieczność ciągłego uciekania się do śruby podatkowej i ciągłego obmyślania coraz to nowych podatków; złe natomiast i nieekonomiczne funkcjonowanie takich przedsiębiorstw, powiedzmy od razu, wynikające najczęściej z nieodpowiedniej organizacji, nietylko że niszczy dany majątek państwowy, ale ponadto, deficytami swemi podkopuje równowagę budżetową Państwa. Przykładem, na dużą skalę, służyć mogą nasze koleje państwowe, których wtłoczenie w ogólną administrację państwową, daje w rezultacie deficyty, które w końcu roku 1923 dochodziły do 30 miljonów złotych polskich miesięcznie, podcinając tem samem zupełnie równowagę budżetu Państwa.

W dyskusji o państwowych zakładach przemysłowych wysuwa się przedewszystkiem kwestja, czy Państwo może się zajmować wogóle prowadzeniem podobnych zakładów i przedsiębiorstw. To, co dziś określamy mianem etatyzmu państwowego, to już w okresach największej potęgi państw starożytnych, miało bez porównania szerszy zakres działania niż dziś. Wychodząc z założenia szeroko pojętego interesu publicznego, włączyli n. p. Rzymianie, budowę i utrzymanie wodociągów dla miast — do obowiązków państwa. Olbrzymie, imponujące do dziś założenia wodociągowe, sławne akwedukty, do dziś spełniające w wielu miejscach swe zadania, rozrzucone po całem terytorjum tego imperjum, budowało i utrzymywało wtedy państwo, w interesie zdrowotności miast. Z biegiem czasu, w miarę rozwoju społeczeństw, przechodziła znaczna część państwowych dawniej agend gospodarczych z rąk państwa na społeczeństwo i jego lokalne organizacje. I dziś jednak, znaczną ilość zadań gospodarczych musi spełniać nowożytne państwo, przyczem wiele z nich ma charakter wybitny przed-