Warunki fizyczne powstawania wyboczenia sprężystego.

PRZEZ

H. CZOPOWSKIEGO.

PRACA REFEROWANA NA 34-tem POSIEDZENIU NAUKOWEM W. T. P. d. 16/II—1924 r.

Jeżeli pręt sprężysty, ustawiony np. pionowo i obciążony wzdłuż swej osi, odchylimy nieco z tego położenia w jaki bądź sposób, np. siłą uboczoną (pomocniczą) i następnie pozostawimy go samemu sobie, usunąwszy uprzednio siłę uboczną, to może nastąpić dwojakiego rodzaju zjawisko: albo pręt, pod działaniem sił, na niego działających, powróci do pierwotnego położenia, lub też odchylać się będzie dalej *pomimo usunięcia* siły ubocznej*). W przypadku, gdy pręt, po usunięciu siły odchylającej, powróci do pierwotnego położenia, mówimy, że pręt znajduje się w równowadze stałej; w drugim zaś przypadku — gdy pręt będzie się dalej odchylał — mówimy, że jest on w równowadze niestałej; w ten sposób określa się zwykle zjawisko „wyboczenia". Który z tych przypadków będzie miał miejsce w danym przykładzie, zależy od wielkości siły obciążającej, przy zresztą tych samych warunkach fizycznych.

Dla pewnych wartości sił obciążających równowaga bywa stałą, dla innych — niestałą; zmieniając np. w sposób ciągły wielkość siły obciążającej, natrafimy na taką jej wielkość, że najdrobniejsze jej powiększenie wytworzy równowagę np. niestałą; — a zmniejszenie — stałą. Wartość tej siły nazywają krytyczną i oznaczają literą P_{kr}.

Charakterystyczną stroną tego zjawiska jest to, iż wyboczenie może nastąpić dopiero po przekroczeniu przez siłę obciążającą ściśle określonej wartości $P = P_{kr}$; gdy tymczasem w ogóle układy sprężyste ujawniają odkształcenia jednocześnie z rozpoczęciem działania siły odkształcającej. Charakterystyczną cechą wyboczenia sprężystego jest jeszcze ta okoliczność, że rodzaj równowagi przy przekroczeniu siły $P = P_{kr}$ zmienia się nie wskutek zmiany położenia bryły lub gieometrycznej postaci jej podpory, jak to bywa w wielu innych przykładach, lecz jedynie wskutek zmiany wartości siły obciążającej. Clebsch**) obliczając od-

---

*) Rozpatrywać będziemy to zjawisko ze strony tylko statycznej; o drganiu przeto mówić nie będziemy.

**) Theorię d. el. str. 221.

kształcenia, powstające przy wyboczeniu, zaznacza, że spotykamy się tutaj z „przypadkiem godnym uwagi", że odchylenie takiego pręta nie nastąpi, jeżeli siła obciążające P jest mniejsza od pewnej ściśle określonej wartości P_{kr}.

Stwierdzić tu przeto należy, że w zjawisku wyboczenia zachodzi pewna nieciągłość właściwości statycznych przy przejściu wartości siły $P = P_{kr}$; rodzaj bowiem rónowagi pręta zmienia się nagle.

W celu „wyjaśnienia" sobie tej nieciągłości, szukano analogji w zjawiskach równowagi sztywnych układów punktów. Föppl np. porównywa zjawisko wyboczenia bądź ze zwykłym przykładem bryły, będącej w położeniu równowagi niestałej, bądź też, wychodzi z innych właściwości zjawiska wyboczenia*). Jeden z angielskich autorów**) przytacza pewien model mechaniczny, który ma służyć do zilustrowania zachodzących w wyboczeniu stosunków.

Przykłady te jednakże niedostatecznie ujmują warunki wyboczenia i nie dają tych korzyści czy to naukowych, czy też dydaktycznych (na te ostatnie kładzie autor niniejszego szczególny nacisk), jakie powinny dawać tego rodzaju analogje.

Zadanie, jakie sobie tutaj postawiłem, polega na znalezieniu takiego modelu mechanicznego, któryby posiadał właściwości podobne do zjawiska wyboczenia mianowicie, ażeby w nim następowała zmiana rodzaju równowagi nie przez zmianę układu, lecz tylko przez zmianę wartości siły; i w którym moglibyśmy widzieć wzajemne działanie czynników, wywołujących tę nagłą zmianę rodzaju równowagi; ażeby następnie porównać te warunki z takimiż warunkami wyboczenia sprężystego; i w ten sposób módz dać odpowiedź na pytanie: jakie warunki fizyczne powodowują wyboczenie sprężyste.

W tym celu weźmy pod uwagę przykład, znany w elementarnej mechanice, mianowicie, weźmy pod rozpatrywanie punkt materjalny ciężki, który jest przyczepiony do jednego końca nici nierozciągliwej, której drugi koniec jest umocowany do punktu nieruchomego w przestrzeni (t. zw. wahadło matematyczne). Punkt ten zawieszony spokojnie przyjmie położenie pionowe; gdy zaś odchylimy go od pionu i nadamy mu obrót około osi pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia, wtedy położenie jego równowagi (względnej) będzie odchylone od pionu i będzie wyznaczone przez pewien kąt α, jaki utworzy nić z pionem; oczywistem jest, że kąt α pozostaje w zależności od prędkości obrotowej φ.

Związek między temi wielkościami (α, φ) znajdziemy sposobem elementarnym z warunków równowagi (względnej) danego punktu i w tym celu przyłożymy do niego siłę bezwładności $m x \varphi^2$, ciężar $m g$ i naprężenie nici S; suma rzutów tych sił na prostopadłą do kierunku nici da bezpośrednio nast. równanie równowagi

$$m x \varphi^2 \,.\, \cos\alpha - mg \,.\, \sin\alpha = 0; \quad . \; . \quad . \; . \; . \qquad (1)$$

*) „Drang u. Zwang" 1920. II str. 322.

**) Southwell. Phil. Trans. Roy Soc. London. Ser. A vol. 213. 1913 str. 187; (jest w odbitce i znajduje się w Biblj. Uniwers. Warsz.: sygn. 19 . 21. $^6/_1$).

a po podstawieniu w to równanie $x = l \cdot \sin\alpha$, gdzie x jest postopadłą odległością punktu od osi obrotu, napiszemy równanie

$$\sin\alpha \cdot (l\varphi^2 \cos\alpha - g) = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

z którego otrzymamy dwie odpowiedzi:

$$1) \quad \sin\alpha = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$2) \quad l\varphi^2 \cdot \cos\alpha - g = 0; \text{ skąd } \cos\alpha = \frac{g}{l\,\varphi^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Pierwsza odpowiedź wskazuje, że przy $\alpha = 0$, zachodzi równowaga niezależnie od prędkości φ, t. j. niezależnie od czynnika, wywołującego odchylenie wahadła; druga zaś odpowiedź daje związek między odchyleniem α i prędkością φ; godnym w tym przykładzie uwagi dla naszych rozpatrywań jest ten wynik, że odchylenie rozpocząć się może dopiero przy $\varphi^2 \geqq \frac{g}{l}$, t. j. rozpocząć się może od skończonej wartości φ; jak to było w wyboczeniu z siłą P_{kr}; dla mniejszych wartości $\varphi^2 < \frac{g}{l}$, odchylenia nie otrzymamy, choć wyprowadzimy ten punkt z położenia równowagi.

Patrząc na ten wynik z matematycznego stanowiska, widzimy w tym razie zwykły przypadek funkcji dwuch zmiennych, z których jedna przyrównana do zera nie daje dla drugiej zmiennej wartości zera; funkcje takie przedstawiają się przez wykresy nie przechodzące przez początek układu osi. Fizycznie zaś biorąc tę sprawę, zjawisko to uderza swą nieciągłością, odchylenie bowiem nie następuje jednocześnie z rozpoczęciem obrotu, gdyż np. dla $\varphi = o$, α=urojone; lecz dopiero po przekroczeniu pewnej wartości dla φ. Przykład ten należy uważać za analogiczny do wyboczenia.

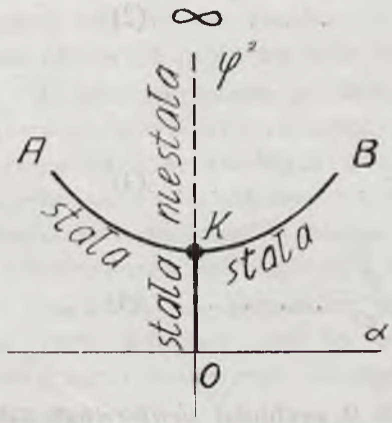
Analogja ta dalej sięgnie, jeżeli rozpatrzymy rodzaje równowagi, w jakich znajdaje się dany punkt. W celu obliczenia *rodzaju* równowagi naszego wahadła, zastosujemy twierdzenie Dirichlet'a: że równowaga jest stałą, gdy wartość funkcji sił w danem położeniu równowagi jest największą t. j. gdy druga pochodna funkcji siła względem niezależnej zmiennej i dla jej wartości, odpowiadającej położeniu równowagi, posiadać będzie znak ujemny.

Pierwszą pochodną tej funkcji przedstawia już równanie 2-gie; drugą zaś pochodne obliczymy przez obliczenie pochodnej tego równania względem α; pochodna ta

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = l\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,\varphi^2 - g \cdot \cos\alpha. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Dla punktów prostej $\alpha = 0$, wykresu (α, φ^2), rys 1-szy; gdy:

$l\varphi^2 - g < 0$; t. j. gdy $\varphi^2 < \frac{g}{l}$; wyraz $\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}$ posiada znak ujemny i to jest



Rys 1.

max; dla wartości więc $0 < \varphi^2 < \frac{g}{l}$, punkt dany znajduje się w równowadze stałej. Dla przypadku zaś, gdy $\frac{g}{l} < \varphi^2 < \infty$, punkt dany znajduje się w równowadze niestałej, gdyż druga pochodna ma znak dodatni i najdrobniejsze w tym razie odchylenie za pomocą siły ubocznej z położenia pionowego spowoduje *po usunięciu tej siły* dalsze jego odchylenie. W razie zaś jeżeli punkt dany znajduje się w równowadze przy pewnej skończonej wartości α, to po podstawieniu z równania 4-go: $l\varphi^2 = \frac{g}{\cos \alpha}$ do równania 5-go otrzymamy

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 \alpha^2} = - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

co wyraża; że punkty na gałęzi AB dla wszystkich $o < \alpha < \frac{\pi}{2}$ wyrażają równowagę stałą. Analogja przeto tego modelu z prętem, obciążonym osiowo, zachodzi bardzo daleko; pręt bowiem obciążony idealnie środkowo pozostanie prostym przy wszelkich wartościach siły P od 0 do ∞; zmienia on jedynie przy pewnej wartości $P = P_{kr}$ rodzaj równowagi: przy $P < P_{kr}$ będzie on w równowadze stałej, przy $P > P_{kr}$ — w równowadze niestałej.

Analogja przebiegu zjawiska wyboczenia i położenia tego wahadła pochodzi z podobieństwa układów sił, jakie występują w obydwóch przypadkach. Ażeby to podobieństwo uwidocznić, wyobraźmy sobie w przykładzie z wahadłem strzałki wszystkich sił odwrócone w przeciwną stronę i zamiast nici wyobraźmy sobie pręt sztywny, a otrzymany układ sił nie zmieni naszego rachunku i będzie ten układ sił podobny do układu sił, występujących przy wyboczeniu; punkt bowiem dany będzie przyciągany do położenia pionowego siłą zależną od odchylenia (jak pręt siłą sprężystości), a ciężar punktu będzie go odciągał od tego położenia (jak obciążenie pionowe w pręcie); otrzymujemy przeto układ sił, który jest podobny do sił, działających na pręt obciążony osiowo; — stąd ta analogja.

Zbadajmy teraz warunki statyczne danego wahadła, przy których następuje zmiana rodzaju równowagi. W tym celu weźmy pod uwagę punkt naszego modelu, zawieszony idealnie pionowo; nie dozna on w tem położeniu odchylenia przy największej prędkości φ, siła bowiem odśrodkowa, mogąca go odchylić, nie wystąpi w tem położeniu; odchylmy następnie ten pukt siłą np. poziomą równą ΔH o kąt $\Delta\alpha$, któremu odpowiada rzędna Δx, wtedy powstanie siła odśrodkowa

$m \,.\, \Delta x \,.\, \varphi^2$; odchylenie pod dzłałaniem prędkości φ po usunięciu siły ΔH nastąpi tylko wtedy, gdy będzie siła $m \,.\, \Delta x \,.\, \varphi^2 > \Delta H$, t. j. gdy siła odśrodkowa stanie się większą od siły pomocniczej odchylającej$= \Delta H$. Ponieważ ΔH i Δx są wielkościami nieskończenie małemi tegoż rzędu, otrzymamy przeto dla φ pewną skończoną wartość, z powiększeniem której po usunięciu siły ΔH może nastąpić odchylenie; na podstawie tych rozpatrywań statycznych powiemy poglądowo, że prędkość φ od 0 do φ_{kr} idzie na wywołanie sił odśrodkowych, zmniejszających siłę uboczną ΔH przy tem samem odchyleniu, a po zrównaniu się z nią przewyżka jej idzie na właściwe odchylanie wahadła. Prędkość przeto krytyczna jest to taka wielkość prędkości, która wywołuje siłę odśrodkową równą sile ubocznej, która odchyliła dany punkt, z powiększeniem której przeto rozpoczyna się odchylenie dalsze pomimo usunięcia siły ΔH.

Takież same stosunki statyczne zachodzą przy wyboczeniu omawianych prętów sprężystych, obciążonych osiowo. Przez odchylenie bowiem końca pręta od położenia pionowego o Δf siłą uboczną poziomą ΔH, — wywołamy moment $P \,.\, \Delta f$, a odchylenie dalsze może nastąpić wtedy, gdy $P \,.\, \Delta f > \Delta H \,.\, l$. Ponieważ ΔH i Δf są wielkościami nieskończenie małemi tego samego rzędu (Δf przyjmujemy proporcjonalne do siły ΔH), siła przeto P_{kr} musi być wielkością skończoną.

Siłą przeto krytyczną wyboczenia jest to ta siła, której moment stanie się równy momentowi siły ubocznej ΔH.

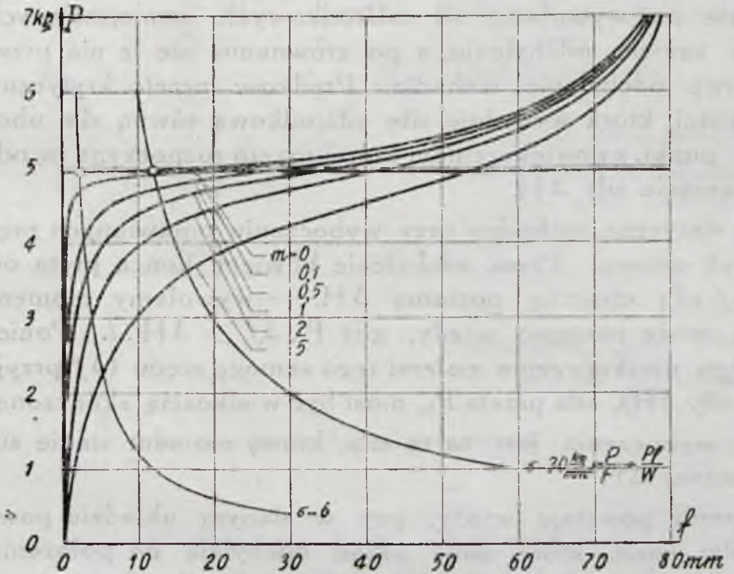
Zjawisko więc wyboczenia powstaje wtedy, gdy w danym układzie powstają dwojakiego rodzaju siły: jedne, które dany układ odchylają od położenia równowagi; np. siła odśrodkowa w wahadle; lub moment P. siły obciążającej pręt; drugie, które sprowadzają dany układ do położenia równowagi; np. składowa ciężaru wahadła; lub siły sprężystości w pręcie.

Z takiem pojmowaniem zjawiska wyboczenia zgadza się również pojęcie „stopni stateczności", wyprowadzone przez Sommerfelda (Zft. d. Ver. D. Ing. 1905 st. 1321) na podstawie dynamicznego zachowania się pręta pod obciążeniem, zbliżającem się do krytycznego; — w statycznych zaś rozpatrywaniach, tutaj przedstawionych, stopnie te wyrażą się wartością różnicy obydwóch momentów.

Na podstawie takiego pojmowania siły krytycznej, możemy postawić wniosek, że gdy punkt zewieszenia naszego wahadła umocujemy nieco z boku osi obrotowej, — t. j. mimośrodkowo, to odchylenie rozpocznie się jednocześnie z rozpoczęciem obrotu; występuje tu bowiem z początkiem obrotu siła odśrodkowa o prędkości przeto krytycznej, w znaczeniu tu stosowanem, mowy być nie może. Podobnego też przebiegu zjawiska należy sią spodziewać w przykładzie z prętem mimośrodkowo obciążonym.

W niektórych jednakże podręcznikach Nauki o Wytrzymałości spotykamy się z tego rodzaju postępowaniem, że autorzy dla obliczenia siły P_{kr} przyjmują, że mimośród istnieje od początku obciążenia; obliczają na tej zasadzie odchylenie pręta i otrzymują dla pewnej wartości P, jak się wyrażają, niepomiernie wielkie odkształcenia. Wynik ten byłby przeto sprzeczny z przedstawionem tutaj pojmowaniem wyboczenia. Ażeby bliżej tę sprawę zbadać, obliczyłem bezpośrednio związek (P, f) dla pręta z różnymi mimośrodami, stosując do tego dokładny wzór dla promienia krzywizny w przypuszczeniu, że sprzeczność, jaka wynika z tego rozumowania z wynikami obliczeń pochodzi z rozszerzeniu zakresu stosowalności, wzoru, opartego na przybliżonym wyrazie promienia krzywizny.

W danym przykładzie przyjąłem do obliczenia pręt o przekroju prostokątnym 12 × 1 m/m, długości 100 m/m i obliczyłem związek (P, f), przyjmując ścisły wyraz dla promienia krzywizny. Obliczenie to zrobiłem dla mimośrodów od m = 5,0 do 0,1 m/m. Do obliczeń liczbowych stosowałem odpowiednie tablice; obliczenie to pomieściłem w „Czasopiśmie technicznem" Nr. 7 1924 r.



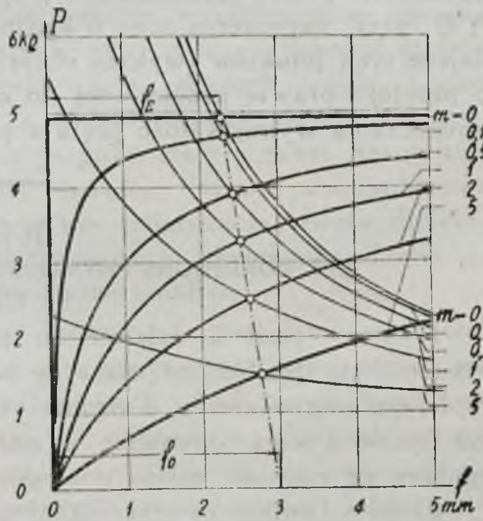
Rys. 2.

Wykresy obliczeń przedstawiłem na rys. 2-gim, z których wynika, że siła P wcale się nie zbliża asymptotycznie do siły Eulerowskiej $P_{kr} = 4{,}946$ kg.; jak się mówi w podręcznikach; ani też nie posiada żadnej granicznej wartości; a przeciwnie, przekracza wartość siły Eulerowskiej bez jakiej bądź nieciągłości odkształceń, i odchylenie przy tem przejściu nie rośnie niepomiernie, a rośnie z powiększeniem się siły obciążającej w sposób mniej lub więcej szybki, lecz w sposób ciągły. A więc wyniki tego ścisłego obliczenia są zgodne z wyłożonem tu pojmowaniem zjawiska wyboczenia. Jeżeli przeto istnieje mimośród obciążenia, — o sile Euler'a mowy być nie może. Mistycznie też brzmi wniosek, oparty na obliczeniach przybliżonych, a przytaczany przez różnych autorów; że obciążenie pręta, wspartego na dwóch podporach, siłą poprzeczną i osiową, nie wpływa na wartość siły krytycznej. Jeżeli siła poprzeczna i podłużna są skończone, to mamy zwykłe gięcie. Jeżeli zaś siła poprzeczna jest nieskończenie małą, a siła podłużna rośnie, to otrzymamy zwykły przypadek wyboczenia; a więc i zwykłą w tym razie wartość siły wyboczenia; niema więc w tym wyniku nic wybitnego.

Na podstawie takiego pojmowania zjawiska, wyboczenia możemy dać odpowiedź na dosyć ogólne pytanie, jakim warunkom gieometrycznym i fizycznym powinien odpowiadać układ prętów sztywnych i układ sił na niego działających, ażeby dany układ w całości doznał wyboczenia; inaczej — jaki powinien być układ prętów, któryby, będąc w równowadze pod działaniem danych sił zewnętrznych, ze zmianą, proporcjonalną wartości wszystkich sił, znajdował się w różnych rodzajach równowagi. W danym razie nie idzie o wyboczenie poszczególnych prętów, przyjmujemy je bowiem sztywnymi, lecz idzie o warunki wyboczenia danego układu jako całości.

W celu dania odpowiedzi wyobraźmy sobie gieometrycznie zmienny układ prętów, połączonych przegubowo. Pomimo tego, że układ taki jest gieometrycznie zmienny, możemy go obciążyć szczególnym układem sił, pod działaniem których będzie on pozostawał w równowadze; oczywistem jest, że dany układ prętów pod działaniem takich sił będzie pozostawał w równowadze i wtedy, gdy wszystkie te siły powiększać będziemy lub zmniejszać proporcjonalnie. Jeżeli następnie układ taki wyprowadzimy np. dowolną siłą uboczną z tego położenia, to powstaną momenty sił zewnętrznych, które po usunięciu siły ubocznej, albo sprowadzą dany układ do pierwotnego położenia, lub go oddalać będą od tego położenia, to zależy od rodzaju równowagi sił; przyjmijmy następnie, że wartość funkcji danych sił nie jest max., t. j. że równowaga wytworzona jest nie stałą. Przyjmijmy następnie, że odkształcenia kątów pomiędzy prętami, spotykającymi się w węzłach, są sprężyste; wtedy powstałe momenty sił zewnętrznych, gdy układ nie przedstawia max. pracy, nie zawsze wywołają dalszą zmianę układu; powstałe bowiem momenty obciążenia znajdą sprzeciw w odkształceniu w momentach, powstałych w węzłach sprężystych.

Następnie zwrócić należy uwagę, że momenty, występujące w węzłach sprężystych przy danem odkształceniu są wielkościami stałemi, momenty zaś sił zewnętrznych przy temże odchyleniu od położenia równowagi mogą się zmieniać, zależnie od spółczynnika proporcjonalności, wspólnego dla wszystkich sił obciążających; przy pewnych przeto wartościach tego spółczynnika układ taki, odchylony z położenia równowagi, może powrócić do położenia równowagi, przy innych zaś wykona dalsze odchylenie.



Rys. 3.

Wartość spółczynnika od którego rozpocznie się odchylenie nazwać możemy spółczynnikiem krytycznym. Spółczynnik ten odpowiada sile krytycznej (lub prędkości krytycznej). Wszystkie przeto linje ciśnień (o ile przyjmiemy że są nierozciągliwe i nieścisłowe), mogą być uważane za układy gieometryczne zmienne ze sprężystymi węzłami; a obciążone siłami, mającemi wartość funkcji sił nie maximum, — posiadać muszą spółczynniki krytyczne.

Pręt prosty, wyżej rozpatrywany, może być również uważany za układ złożony z pewnej ilości nieskończenie małych prętów (w tym razie ścisliwych lub sztywnych), połączonych z sobą węzłami sprężystymi i tworzących linję prostą; żadne obciążenie wzdłuż osi takiego układanie nie wyprowadzi go z postaci prostolinijnej; uboczne odchylenie jednakże przy pewnej wielkości siły obciążającej, może wywołać wyboczenie. Wyrazem momentów w tym razie występujących w węzłach jest wielkości J i E; wyrazem zaś momentów sił zewnętrznych są wielkości P i l.

W takich warunkach znajduje się również np. rura o przekroju kołowym, o cienkich ściankach, poddana zewnętrznemu ciśnieniu np. hydraulicznemu; rura taka posiada też ciśnienie krytyczne t. j. spółczynnik krytyczny.

W związku z obliczeniem i wykresem (P, f), zrobionym dla obciążeń danego pręta z rozmaitymi mimośrodami, rys. 2 gi i 3-ci, zauważę, że przebieg gieometryczny wykresów tych jest podobny do wykresów, sporządzonych na podstawie doświadczeń, podawanych np. u Timoszenki *) lub u R. Meyera **). Z tego podobieństwa wynika; że w tych doświadczeniach występowały mimośrody, i gdy np. ze wzoru ścisłego obliczyłem mimośród dla jednego z podanych przez Kirscha ***) doświadczeń, to otrzymałem wartości odchyleń, wymierzone z doświadczeń. Obliczenie, przytoczone zaprzecza przeto twierdzeniu, że te wykresy empiryczne zbliżają się asymptotycznie do granicy Eoulerowskiej, jak głoszą niektórzy autorzy; należały przeto przyjąć, że przebieg ich jest taki, jaki wypada z obliczenia i jaki, jest przedstawiony na rys 2-im.

Na rys. 3-cim, który jest rys. 2-gim w powiększonej skali, naniosłem jeszcze wykresy (P, f) z równania

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P}{W} (f + m)$$

dla $\sigma = 6$ kg./mm.^{2} i dla tych samych m i wymiarów pręta, jakie stosowałem poprzednio; punkty przecięcia się tych wykresów z poprzednimi, dają związek (P, f) przy naprężeniu $\sigma = 6$ kg./mm.^{2}; jak widzimy z rysunku, gieometryczne miejsce tych punktów (wykres obciążeń bezpiecznych) przedstawia linję, zbliżoną do prostej i prawie prostopadłą do osi f; co wskazuje z jako szybkością spada dopuszczalna wytrzymałość pręta z powiększeniem mimośrodu.

RÉSUMÉ.

LES CONDITIONS PHYSIQUES DE L'EXISTENCE DE FLAMBEMENT.

H. CZOPOWSKI.

L'auteur tend à éclairer au point de vue physique les conditions de l'éxistence de flambement; dans ce bût il analyse la stabilité relative du pendule simple, qui tourne autour d'un axe vertical passant par le point de suspension et d'où l'angle d'écart commence à partir d'une certaine valeur finie de la vitesse angulaire de rotation, valeur analogue à la force d'Euler.

Ensuite l'auteur montre l'analogie par rapport au changement des conditions de stabilité et l'existence du point de bifurcation fig. 1.

Le travail est completé par le calcul numerique des déformations de la barre sumise à l'effort de compression avec une excentricité *(m)* donnée. Le calcul, executé par la formule exacte du rayon de courbure, demontre que la deformation de barre se produit d'une manière tout à fait continue et que cette continuité est conservée même pendant le passage de la valeur de force par la limite d'Euler, fig. 2 et 3, résultat contraire aux opinions, enoncées dans beaucoup des traités speciaux.

---

*) Timoszenko. Wytrzymałość, str. 336.

**) Rudolf Meyet. Der Knickfestigkeit, st. 126.

***) Zft. d. V. D. Ing. 1905.