PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

Tom XLIII. *Warszawa, dnia 20 lipca 1905 r.* **№ 29.**

Prawa mechaniczne spadania i utrzymywania ciał w powietrzu.

Napisał **H. Czopowski**, inż.

Zadanie I. Na ciało swobodnie spadające w powietrzu i posiadające prędkość w danym momencie $= v_0$, zaczyna działać strumień powietrza w kierunku odwrotnym jego spadkowi; należy: 1) obliczyć prędkość, jaką posiadać będzie dane ciało po przejściu drogi x; 2) znaleźć miejsce, w którem ciało dane zostanie zatrzymane w swym biegu; 3) oznaczyć warunki, w jakich zatrzymanie się (zawiśnięcie) ciała może nastąpić i 4) oznaczyć energię, t. j. pracę na sekundę, jaką trzeba zużyć, ażeby dane ciało módz zatrzymać.

Oznaczenia (por. rys.):

G kg oznacza ciężar spadającego ciała,

A — powierzchnia rzutu poziomego tego ciała w m^2,

a — przekrój poziomy strumienia powietrza w m^2,

v_0 — prędkość spadającego ciała, w chwili, gdy strumień powietrza zaczął nań działać, w m/sek.,

v_x — prędkość tegoż ciała w odległości x od miejsca, w którem posiadało prędkość v_0, w m/sek.,

k — największa prędkość, jaką dane ciało *mogłoby* otrzymać przy swobodnem spadaniu w powietrzu,

c — prędkość strumienia powietrza, działającego na dane ciało, w m/sek.,

$g = 9,81$ m/sek.,

$\gamma = 1,293$ kg/m^3, ciężar właściwy powietrza,

R ciśnienie, jakie wywiera strumień powietrza na płaszczyznę, pionowo umieszczoną względem kierunku tegoż strumienia, w kg; przyjmuję, iż: $R = m \cdot c$, gdzie:

m, oznaczając masę uderzającego powietrza, jest:

$$m = \frac{\gamma \cdot a \cdot c}{g} \cdot \frac{\psi}{2},$$

(ψ spółczynnik zależny od kształtu uderzanej przez strumień powierzchni), a więc inaczej:

$$R = \left(\frac{\psi}{2}\right) \cdot \frac{\gamma}{g} ac^2 \text{ (por. „Technik" str. 306);}$$

jeżeli zaś płaszczyzna posiada prędkość v_x w kierunku przeciwnym strumieniowi, to w takim razie:

$$R = \frac{\psi \cdot \gamma}{2 \cdot g} \cdot a \cdot (c + v_x)^2.$$

Chcąc rozwiązać powyższe zadanie, uważam, iż mowa w niem jest o początkowej prędkości v_0, końcowej v_x i o siłach G i R, które na dane ciała działają; dla połączenia więc tych wielkości w równanie, stosuję twierdzenie z energii kinetycznej, iż różnica energii kinetycznych, jaka powstaje przy przejściu pewnego ciała, będącego w ruchu, z jednego położenia do drugiego, równa jest pracy wszystkich sił, działających na to ciało; w naszym wypadku różnica tej energii $= \frac{1}{2}\frac{G}{g} v_x^2 - \frac{1}{2}\frac{G}{g} v_0^2$, praca zaś, jaką wykonywa dane ciało (por. rys.) =

$$\int_0^x \left[G - \frac{\psi\gamma}{2g}(A-a)v_x^2 - a\frac{\psi\gamma}{2g}(v_x+c)^2\right] . dx,$$

a więc:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} v_x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} v_0^2 =$$

$$= \int_0^x \left[G - \frac{\psi\gamma}{2g}(A-a)v_x^2 - a\frac{\psi\gamma}{2g}(v_x+c)^2\right] dx \quad . \quad (1).$$

W celu scałkowania tego równania, różniczkuję je podług x, dzielę przez G i oznaczam dla skrócenia pisowni:

$$\frac{\psi\gamma}{2gG} = \frac{1}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

po przeprowadzeniu tych działań otrzymuję:

$$1 - \frac{A-a}{\rho} v_x^2 - \frac{a}{\rho}(v_x+c)^2 = \frac{1}{g} v_x \frac{dv_x}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

mnożę to ostatnie przez ρ i rozwiązuję podług dx:

$$\frac{g}{\rho} dx = \frac{v_x \, dv_x}{(\rho - ac^2) - 2acv_x - Av_x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

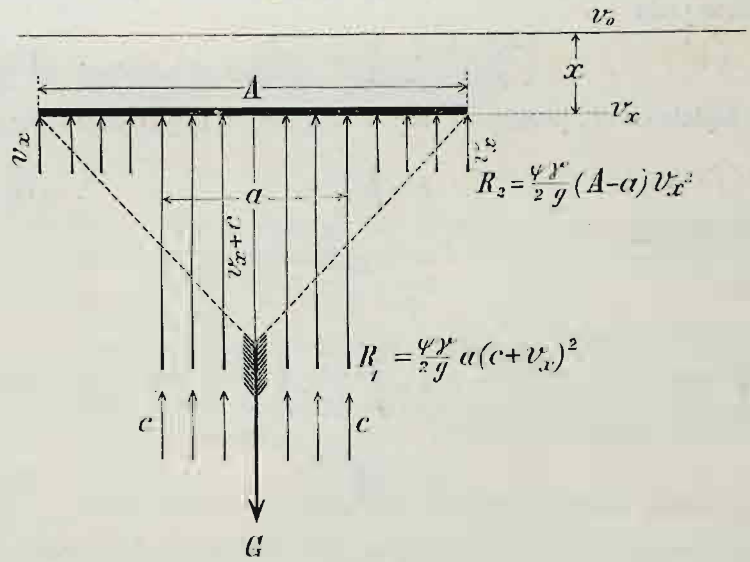
Scałkowanie wyrazu powyższego uskuteczniam podług wzoru (21), zamieszczonego w „Techniku" str. 76, t. I; we wzorze tym:

$$(a) = \rho - ac^2; \; (b) = -ac; \; (c) = -A; \; \alpha = 0; \; \beta = 1 \quad . \quad (5),$$

po podstawieniu:

$$\frac{g}{\rho} x = -\frac{1}{2A} ln[(\rho - ac^2) - 2acv_x - Av_x^2] -$$

$$-\frac{ac}{A}\int \frac{dv_x}{(\rho - ac^2) - 2acv_x - Av_x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$



Całkę, znajdującą się po prawej stronie tego ostatniego równania, rozwiązuję podług wzoru (20), zamieszczonego w temże miejscu „Technika", a więc:

$$-\frac{ac}{A}\int \frac{dv_x}{(\rho - ac^2) - 2acv_x - Av_x^2} =$$

$$= -\frac{ac}{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{-a^2c^2 - A(\rho - ac^2)}} \cdot \text{artg} \frac{-(ac + Av_x)}{\sqrt{-a^2c^2 - A(\rho - ac^2)}} \quad (7).$$

Podstawiam tę ostatnią całkę w (6), przenoszę A na lewą stronę równania i otrzymuję:

$$\frac{Ag}{\rho} x = \frac{1}{2} ln\left[\frac{1}{(\rho - ac^2) - 2acv_x - Av_x^2}\right] -$$

$$-\frac{ac}{\sqrt{-a^2c^2 - A(\rho - ac^2)}} \cdot \text{artg}\left[\frac{-(ac + Av_x)}{\sqrt{-a^2c^2 - A(\rho - ac^2)}}\right] + B \quad (8).$$

Stałą wielkość B oznaczymy, gdy przyjmiemy pod uwagę, iż dla $x = 0$ jest $v_x = v_0$; po oznaczeniu w ten sposób wielkości B i podstawieniu w (8):

$$\frac{Ag}{\rho} x = \frac{1}{2} ln\left[\frac{(\rho - ac^2) - 2acv_0 - Av_0^2}{(\rho - ac^2) - 2acv_x - Av_x^2}\right] - \frac{ac}{\sqrt{-a^2c^2 - A(\rho - ac^2)}} \cdot \left[\text{artg}\frac{-(ac + Av_x)}{\sqrt{-a^2c^2 - A(\rho - ac^2)}} - \text{artg}\frac{-(ac + Av_0)}{\sqrt{-a^2c^2 - A(\rho - ac^2)}}\right] \quad (9).$$

W celu dalszego uproszczenia tego wzoru, obydwa wyrazy na arcus możemy połączyć w jeden na zasadzie wzoru (6) str. 63 t. I „Technika"; przytem dla skrócenia pisowni oznaczam:

$$-a^2c^2 - A(\rho - ac^2) = p \quad .\ .\ .\ .\ (10)$$

i otrzymuję:

$$\operatorname{artg}\frac{-(ac+Av_x)}{\sqrt{p}} - \operatorname{artg}\frac{-(ac+Av_0)}{\sqrt{p}} =$$

$$= \operatorname{artg}\frac{A\,\dfrac{v_0-v_x}{\sqrt{p}}}{1+\dfrac{(ac+Av_x)(ac+Av_0)}{p}}$$

$$= \operatorname{artg}\frac{A\,.\,\sqrt{p}\,(v_0-v_x)}{p+(ac+Av_x)(ac+Av_0)} \quad .\ .\ .\ (11)$$

Podstawiając to ostatnie równanie w (9), otrzymuję:

$$\frac{Ag}{\rho}x = \frac{1}{2}\,ln\left[\frac{(\rho-ac^2)-2acv_0-Av_0^2}{(\rho-ac^2)-2acv_x-Av_x^2}\right] -$$

$$-\frac{ac}{\sqrt{p}}\operatorname{artg}\left[\frac{A\sqrt{p}\,(v_0-v_x)}{p+(ac+Av_x)(ac+Av_0)}\right] \quad .\ .\ (12)$$

t. j. wzór, który daje nam zupełną odpowiedź na pierwszą część postawionego zadania: dla każdego x możemy obliczyć v_x lub też odwrotnie.

Nim przystąpię do rozwiązania drugiej części zadania, obliczę wielkość k, gdyż będzie ona nam potrzebną.

Podług określenia tej wielkości

$$k = \text{limes}\,[v_x]_{x=\infty}\,;$$

gdy przytem $v_0 = 0$ i $c = 0$, po podstawieniu tych wartości w (12):

$$\left[\frac{Ag}{\rho}x\right]_{x=\infty} = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{\rho}{\rho - Ak^2} \quad .\ .\ .\ .\ (13);$$

x będzie $=\infty$, jeżeli $\rho - Ak^2 = 0$, a więc z tego ostatniego:

$$k = \sqrt{\frac{\rho}{A}} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (14);$$

z równ. (2):

$$\rho = \frac{2gG}{\psi\gamma}\,;$$

po podstawieniu:

$$k = \sqrt{\frac{2g}{\psi\gamma}}\,.\sqrt{\frac{G}{A}} \quad .\ .\ .\ .\ (15).$$

Wogóle oznaczać będę:

$$k = \beta\sqrt{\frac{G}{A}} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (16),$$

gdzie

$$\beta = \sqrt{\frac{2g}{\psi\gamma}}\,;$$

np. dla: $g=9{,}81$, $\gamma=1{,}293$, $\psi=2$; wypada $\beta=2{,}75$.

Przystępuję do drugiej części zadania: odległość punktu, w którym spadający przedmiot zostanie zatrzymany, od punktu, w którym zaczął działać strumień powietrza, oznaczam przez x_0; zrozumiałem więc jest, iż dla $v_x=0$, gdy $x=x_0$; podstawiając te wartości w (12), otrzymamy wzór dla x_0. Dla przykładu wezmę wypadek, gdy $v_0=k$; a więc w (12) podstawiam:

$$v_x=0;\quad v_0=k=\beta\sqrt{\frac{G}{A}};\quad \rho=Ak^2=\beta^2G;\quad p=A(ac^2-\beta^2G)-a^2c^2$$

i otrzymuję:

$$\frac{Ag}{\beta^2G}x_0 = \frac{1}{2}\,ln\left[\frac{(\beta^2G-ac^2)-2ac\beta\sqrt{\dfrac{G}{A}}-\beta^2G}{(\beta^2G-ac^2)}\right] -$$

$$-\frac{ac}{\sqrt{p}}\operatorname{artg}\left[\frac{A\,.\,\sqrt{p}\,\beta\sqrt{\dfrac{G}{A}}}{p+ac\left(ac+A\beta\sqrt{\dfrac{G}{A}}\right)}\right] \quad .\ .\ (17).$$

Po uproszczeniu:

$$\frac{Ag}{\beta^2G}x_0 = \frac{1}{2}\,ln\left[\frac{c+2\beta\sqrt{\dfrac{G}{A}}}{ac^2-\beta^2G}\,.\,ac\right] -$$

$$-\frac{ac}{\sqrt{p}}\operatorname{artg}\left[\frac{\sqrt{p}\,\beta\sqrt{\dfrac{G}{A}}}{(ac^2-\beta^2G)+ac\beta\sqrt{\dfrac{G}{A}}}\right] \quad .\ .\ .\ (18).$$

Jeżeli wogóle przedmiot spadający ma być *zatrzymany* w swym ruchu, x_0 powinno mieć wartość rzeczywistą i dodatnią; mając ten warunek na uwadze, otrzymamy odpowiedź na trzecią część naszego zadania; z powyższego bowiem warunku wynika, iż powinno być:

$$ac^2 - \beta^2G > 0 \quad \text{a więc} \quad c > \beta\sqrt{\frac{G}{a}} \quad .\ .\ (19);$$

warunek ten *wystarcza*, ażeby spadające ciało było zatrzymane przez strumień powietrza, którego prędkość$=c$ i przekrój$=a$.

Wyprowadzę obecnie wzór, gdy $a=A$, t. j. gdy przekrój strumienia równy jest powierzchni rzutu poziomego danego ciała; a więc podstawiam: $a=A$; łącznie z poprzedniemi przypuszczeniami, że:

$$v_x=0,\qquad v_0=k=\beta\sqrt{\frac{G}{A}}\,,$$

otrzymuję

$$p = -A\beta^2G,$$

skąd

$$\sqrt{p} = i\beta\sqrt{AG},$$

gdzie

$$i = \sqrt{-1};$$

po podstawieniu w (18):

$$\frac{Ag}{\beta^2G}x_0 = \frac{1}{2}\,ln\left[\frac{c+2\beta\sqrt{\dfrac{G}{A}}}{Ac^2-\beta^2G}\,Ac\right] -$$

$$-\frac{Ac}{i\beta\sqrt{AG}}\operatorname{artg}\left[\frac{i\beta^2\,.\,\sqrt{AG}\,.\sqrt{\dfrac{G}{A}}}{(Ac^2-\beta^2G)+Ac\beta\sqrt{\dfrac{G}{A}}}\right] \quad .\ .\ (20);$$

wprowadzając do rachunku wielkość k i rozdzieliwszy liczniki i mianowniki przez A, po uporządkowaniu otrzymamy:

$$\frac{Ag}{k^2\left(\dfrac{A}{G}\right)G}\,.\,x_0 = \frac{1}{2}\,ln\left[\frac{c+2k}{c^2-k^2}\,.\,c\right] -$$

$$-\frac{c}{ik}\operatorname{artg}\left[\frac{ik^2}{(c^2-k^2)+ck}\right] \quad .\ .\ .\ .\ (21).$$

Funkcya urojona, ze względu na swój skład, daje rzeczywiste wielkości; mogę ją więc zamienić na funkcyę hyperboliczną lub logarytmiczną; dla jednolitości funkcyi wprowadzam funkcyę logarytmiczną i otrzymuję [1]):

$$\frac{2\,.\,g}{k^2}\,.\,x_0 = ln\left[\frac{c+2k}{c^2-k^2}\,.\,c\right] - \frac{c}{k}\,ln\left[\frac{c+k}{c(c+k)-2k^2}\,.\,c\right] \quad (22).$$

---

[1]) Podług „Technika", str. 68, wzór (15):

$$\operatorname{artg}\left[i\,\frac{k^2}{(c^2-k^2)+ck}\right] = \frac{i}{2}\,ln\left[\frac{1+\dfrac{k^2}{(c^2-k^2)+ck}}{1-\dfrac{k^2}{(c^2-k^2)+ck}}\right] \quad .\ .\ (24)$$

$$= \frac{i}{2}\,ln\left[\frac{c\,(c+k)}{c\,(c+k)-2k^2}\right] \quad .\ .\ (25);$$

dzielę obie strony równania przez (i) i otrzymuję:

$$\frac{1}{i}\operatorname{artg}\left[i\,\frac{k^2}{(c^2-k^2)+ck}\right] = \frac{1}{2}\,ln\left[\frac{c\,(c+k)}{c(c+k)-2k^2}\right] \quad .\ .\ (26).$$

W danym wypadku wystarcza uczynić

$$c > k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

ażeby x_0 przybrało skończoną i rzeczywistą wartość (dla $c = k$, $x_0 = \infty$).

Ażeby otrzymać pewien obraz, z jaką prędkością x_0 oddala się od ∞ i zbliża się do wielkości skończonych, przy zmiennym stosunku $\frac{c}{k}$, przeprowadzę przykład cyfrowy; w tym celu piszę: $c = \eta \,.\, k$, gdzie $\eta > 1$; dla różnych wielkości η obliczyłem w następnej tablicy wartości dla prawej strony równania. Wprowadzając wartość η w równanie (22), otrzymuję z niego:

$$\frac{2g}{k^2} \,.\, x_0 = ln\left[\frac{\eta^2 + 2\eta}{\eta^2 - 1}\right] - \eta \, ln\left[\frac{\eta^2 + \eta}{\eta^2 + \eta - 2}\right] \quad . \quad (27).$$

Na zasadzie tego ostatniego wzoru obliczyłem następującą tablicę:

dla $\frac{c}{k} = \eta =$	1,00	1,01	1,10	1,50	2,00	5,00	10,00	20,00
$\frac{2g}{k^2}\, x_0 =$	∞	0,868	0,572	0,292	0,169	0,030	0,012	0,008
$\frac{g}{k}\, t_0 =$	∞	2,107	1,006	0,571	0,203	0,035	0,009	0,002 [1]

Weźmy przykład, w którym: $k = 5{,}00$ *m*/sek., to:

dla $\eta =$	1,00	1,01	1,10	1,50	2,00	5,00	11,00	20,00
$x_0 =$	∞	1,106	0,726	0,370	0,214	0,038	0,015	0,010 *m*
$t_0 =$	∞	1,075	0,503	0,286	0,102	0,018	0,005	0,001 sek.

[1]) to obliczyłem z wzoru (44), w końcu niniejszej pracy.

Jak widzimy z tej tablicy, x_0 przybiera, przy małej wartości η, wartość skończoną; a więc np. przy przewyżce c nad k o 1% otrzymujemy dla x_0 wielkość pod względem praktycznego wykonania zupełnie możliwą.

W celu obliczenia energii, jaka potrzebna jest do wytworzenia strumienia powietrza, wychodzę z ogólnego wzoru:

$$E = \frac{m \,.\, c^2}{2},$$

gdzie

$$m = \frac{\gamma\, ac}{g} \,.\, \left(\frac{\psi}{2}\right);$$

po podstawieniu:

$$E = \frac{\psi}{2} \,.\, \frac{\gamma\, ac^3}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Dla wypadku, gdy $v_0 = k$, $a = A$, $c = \eta\, k$:

$$E = \frac{1}{2} \; \frac{\psi \gamma A}{2g} \eta^3 k^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29);$$

a po podstawieniu z (15) $k^2 = \frac{2g}{\psi\gamma} \,.\, \frac{G}{A}$:

$$E = \frac{G \,.\, k}{2} \,.\, \eta^3 \; kgm/\text{sek.} \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Wielkość więc pracy mechanicznej na sekundę strumienia, zatrzymującego przedmiot spadający, jest wielkością zmienną dla tegoż przedmiotu i zależną od stosunku $\frac{c}{k}$; stosunek zaś ten zależny jest od miejsca, w jakiem spadający przedmiot ma się zatrzymać, lub od czasu, kiedy ma się zatrzymać. (D. n.).

Oświetlenie elektryczne wozów i pociągów dróg żelaznych.

Napisał **Edwin Hauswald**, profesor Politechniki we Lwowie.

(Ciąg dalszy do str. 336 w № 27 r. b.).

Pozostaje teraz do rozpatrzenia zachowanie się układu podczas używania lamp. Połączenia zmieniają się wówczas z powodu przestawienia przełącznika na „jasno", w sposób przedstawiony na rys. 22. Przerwane są teraz połączenia między przewodem I_a i oporami p_1, S_{III}, tudzież śrubką elektromagnesu. Baterya G_2 dołączoną jest na ładowanie jak poprzednio, baterya zaś G_1 jako wyrównawcza bezpośrednio do lamp.

Zacznijmy znowu od tego stanu, w którym się układ znajduje podczas stania pociągu. W takim razie zmiennik C łączy obie baterye równolegle przez opór S_{II} widełkami po prawej ręce leżącemi. Podczas jazdy nastąpi podobnie jak już opisano włączenie prądnicy przez lewe widełki zmiennika C, a przy pełnej jeździe zasila prądnica baterye G_2 przez opór S_{II}, lampy przez opór S_I i przez zwoje regulatora drogą $p_1 \ldots S_{III}$. Regulator tak pracuje, aby przez nawinięcie p_1 przechodziło stale 4,5 amp.; główną część prądu dla lamp dostarcza prądnica, podczas gdy baterya wyrównawcza dodaje tylko nieznaczną część, np. $\frac{1}{5}$ całego zapotrzebowania lamp. Na rys. 21 i 22 podane są liczby wskazujące ile amperów przechodzi przez główne odgałęzienia w pewnym określonym przypadku.

W tym systemie odbywa się więc podczas jazdy zasilanie lamp przeważnie wprost z prądnicy, przy równoczesnem ładowaniu drugiej bateryi; unika się więc straty energii przez transformowanie prądu w płytach akumulatorów i zachowuje się prawie całą pojemność obu bateryi jako zapas na przestanki lub też w razie nieprzewidzianych zaburzeń.

Na rys. 23 podane są połączenia wszystkich części układu, potrzebne przy montowaniu.

Dick podaje w jednym ze swoich opisów następujące obliczenie napięcia prądów, krążących w poszczególnych odgałęzieniach, dla wagonu drogi żel. Aussig-Teplitz, oświetlonego 22-ma lampami po 8 świec, których zużycie prądu wynosi 2,5 wattów na 1 świecę Hefner'a przy napięciu normalnem 35 v. Każda baterya ma 18 ogniw i 40 amp.-godz. pojemności przy rozbrajaniu prądem 7 amp. Lampy te zużywają więc prądu $\frac{22 \,.\, 8 \,.\, 2{,}5}{35} = \mathbf{12{,}6}$ amp.

Teraz można obliczyć prąd płynący wprost z prądnicy do lamp przez opory $p_1 = 0{,}6\ \Omega$, $S_{III} = 1{,}17\ \Omega$ i przez opór $S_I = 1{,}45\ \Omega$. Spad napięcia wynosi przy stałym prądzie $i = 4{,}5$ amp. i oporze $p_1 + S_{III} = 1{,}77$,

$$4{,}5 \,.\, 1{,}77 \cong 8 \text{ v.}$$

Przy tym samym spadzie 8 v. przejść może przez opór, przed lampy włączony (S_I), prąd $i_1 = \frac{8 \text{ v.}}{1{,}45\ \Omega} = 5{,}5$ amp. Oba prądy $4{,}5 + 5{,}5 = \mathbf{10}$ amp. idą więc z prądnicy do lamp; potrzebne jeszcze do uzupełnienia $i_a = 12{,}6 - 10 = 2{,}6$ amp. pochodzi z bateryi G_1; obciążenie jej jest więc bardzo nieznaczne, co przyczynia się do utrzymania wysokiej stałości napięcia.

Prąd zużyty przez lampy $I = i + i_1 + i_a$,

gdzie $i = 4{,}5$ amp. jest prądem regulatora,

$i_1 = 5{,}5$ „ „ „ przez opór S_I,

i_a „ „ bateryi G_1.

Gdy oznaczymy przez e_a napięcie bateryi G_1,

przez r_a jej opór wewnętrzny,

a przez e_l napięcie w sieci lamp,

to mamy $e_l = e_a - i_a\, r_a$.

Napięcie e_l można praktycznie uważać za stałe, bo $i_a\, r_a$ jest bardzo małe głównie z powodu małości oporu wewnętrznego akumulatorów Stałość napięcia lamp będzie więc dzięki zastosowaniu tej bateryi nawet wtedy zapewnioną, gdy napięcie biegunowe prądnicy zmieniać się będzie w granicach od 36 do 45 v., co nastąpić może podczas samoczynnego odłączania, względnie dołączania silnicy do sieci.

Prąd ładujący baterye G_2 zależyć będzie od jej przeciwnapięcia i od oporu w obwodzie, który możemy sobie wyobrazić całkowicie skupiony w $S_{II} = 0{,}2$. Jeżeliby więc np.