równa jednostce długości, nabytą zostaje po upływie jednostki czasu; ale w ciągu jednostki czasu schodzi się z prędkością średnią i jest równa połowie prędkości albo połowie jednostki długości.

Równanie to otrzymaćby można prędzej z równania pierwszego. Siła pomnożona przez czas jest równa iloczynowi z masy przez prędkość nabytą, czas jest równy drodze podzielonej przez prędkość średnią, czyli przez połowę prędkości nabytej; wynika stąd warunek, że siła pomnożona przez drogę jest równa iloczynowi z masy przez połowę kwadratu z prędkości nabytej. Wydaje się jednak lepszym bezpośredni wywód wzoru Leibnitz'a, nie przechodząc przez wzór Kartezyusz'a, uwydatniający ich wzajemną niezależność. Każdy z tych wzorów może i powinien doprowadzać do drugiego, gdyż oba są tylko różnymi sposobami wyrażenia jednego zjawiska, ale żaden nie jest i nie powinien wydawać się podporządkowanym drugiemu.

Równanie Leibnitz'a, czyli równanie sił żywych, nie odgrywa tej samej roli co równanie Kartezyusz'a, jako punkt wyjścia mechaniki analitycznej. Nie wystarcza ono do wyrażenia ruchu, chyba w przypadku gdy ruch ten możliwy jest w jednym tylko kierunku. Ale za to równanie Leibnitz'a uwydatnia rzecz, ku której umysł nasz, pociągany jej jasnością, podąża chętniej, a mianowicie pracę, pojętą jako źródło rozwijającego się przed nami ruchu. Ponieważ siły natury stosują się do prawa odległości i ich działanie mierzy się raczej długością przebytej drogi aniżeli czasem trwania przebiegu, przeto pojęcie pracy ma niezaprzeczoną wyższość nad wszelkiem innem; jest ono równocześnie przystępniejsze i lepiej odpowiadające rzeczywistościom fizycznym.

Podwójna nazwa utworzona na oznaczenie masy żywej nie powinna budzić żadnych wątpliwości. Stąd że się spotyka we wzorach raz prędkość w pierwszej potędze (ilość ruchu) a drugi raz prędkość w drugiej potędze (siła żywa), nie wynika wcale abyśmy mieli przed sobą dwie różne istoty rzeczy. Masa w jeden tylko sposób posiadać może prędkość. Potęga, z jaką prędkość wchodzi do wzorów, pochodzi jedynie z działania algebraicznego, przez które należało przechodzić, aby związać ze sobą prędkość, przyśpieszenie i siłę, — działania, które oczywiście jest różnem w odniesieniu do czasu lub do przestrzeni. Wyniki końcowe nie mają znaczenia konkretnego, są to ilości czysto liczbowe, wynikające z porównania różnych czynników z właściwemi im jednostkami.

III.

Ze znanej książki Mach'a wyciągnąć można następujący szkic rozwoju zasad mechaniki.

Doświadczenia Galileusza dały wyniki następujące:

t	v	s
1	$1g$	$1 . 1 . \frac{g}{2}$
2	$2g$	$2 . 2 . \frac{g}{2}$
3	$3g$	$3 . 3 . \frac{g}{2}$
. . .	. . .	. . .
t	tg	$t . t . \frac{g}{2}$

Z tablicy powyższej wypadają dwa prawa:

$$v = gt , \qquad s = \frac{1}{2} gt^2$$

i trzecie po wyrugowaniu t:

$$gs = \frac{1}{2} v^2 .$$

Przypadek zrządził, że związek między prędkością a czasem odkryty został pierwszy i dlatego równanie $v = gt$ przez długi czas poczytywane było za pierwotne, a równanie $s = \frac{1}{2} gt^2$ za bezpośrednio po niem następujące, podczas gdy związek $gs = \frac{1}{2} v^2$ wydawał się oddalonym wnioskiem. Wprowadzenie pojęcia masy m i siły p, przyczem $p = mg$, dało, po pomnożeniu trzech powyższych równań przez m, trzy zasadnicze równania mechaniki:

$$mv = pt , \qquad ms = \frac{1}{2} pt^2 , \qquad ps = \frac{1}{2} mv^2 .$$

Pojęcia siły i ilości ruchu wydały się z konieczności pierwotniejszemi od pojęć pracy i siły żywej, i nie należy się dziwić, że przy spotykaniu pojęcia pracy starano się zastępować je przez pojęcia historycznie starsze. Tem się objaśniają długie polemiki zwolenników Kartezyusz'a ze zwolennikami Leibnitz'a, zamknięte dopiero przez d'Alembert'a.

Szkic ten wykazuje najpierw doświadczalny początek umów, wyrażonych przez zasadnicze równania mechaniki. Możliwą jest mechanika, w którejby pracę i energię przedstawiały dwie strony równania:

$$mps = \frac{1}{2} m^2 v^2 ,$$

zamiast przyjmowanych dotąd:

$$ps = \frac{1}{2} mv^2$$

i do którejby wchodziło pojęcie iloczynu cynetycznego ms wzięte bezpośrednio z drugiego z zasadniczych trzech równań. Ta nowa mechanika opierałaby się na nowych umowach, które może okazałyby się dogodniejszemi w niektórych przypadkach. W każdym razie umowy te nie wynikałyby bezpośrednio z doświadczenia. Równanie $ps = \frac{1}{2} mv^2$ sprawdza się doświadczalnie i daje np. przy spadku ciężarów P i $2P$, wykonywujących jedną i tęż samą pracę ps, wysokości h i $\frac{h}{2}$, podczas gdy z równania $mps = \frac{1}{2} m^2 v^2$, wypadają przy pracy mps wysokości h i $\frac{h}{4}$. Według pojęć dotychczasowych, przy każdem uderzeniu centralnem mas nieodkształcalnych zachodzi zawsze strata energii, możliwa do sprawdzenia doświadczalnie, gdy tymczasem nowe pojęcia dają zupełnie inny wynik analityczny.

Szkic przytoczony wykazuje dalej, że dążenie do zastępowania pojęcia energii, pojęciem ilości ruchu, uwidocznione zamianą iloczynu $\frac{1}{2} mv^2$ na iloczyn $\frac{1}{2} m^2 v^2$, t. j. połową kwadratu z mv, odegrało już swą rolę w historycznym rozwoju mechaniki. Dziś dążenie to tem trudniej daje się usprawiedliwić, że równanie $ps = \frac{1}{2} mv^2$ jest podstawą całej prawie mechaniki stosowanej a pojęcie energii wytworzyło systemat, ogólniejszy od nauki Newton'a i dotąd panujący w nauce.

Jakiekolwiek jednak mogą być dalsze losy nowych pojęć, należy się uznanie autorowi za ich ogłoszenie, pobudzające do głębszego wnikania w genezę historyczną zasad mechaniki.

Feliks Kucharzewski.

Przyczynek do artykułu inż. H. Majlerta: „Kilka uwag o określeniach pojęć pracy i energii w mechanice".

Na początku swego artykułu autor stawia w wątpliwość wzór: $\int P . ds . \cos (P, v)$, który wyraża pracę, i zapytuje: „czy nie należałoby zamiast siły P wprowadzić jaką jej funkcyę? Odpowiedź na to nasuwa się, że potrzeby tej nie widzimy, lecz wolno tworzyć dowolne funkcye z $(P, \alpha$ i $s)$, funkcye te jednakże nie będą wyrażały „pracy", rozumiejąc pod pracą taką funkcyę z $(P, \alpha$ i $s)$, któraby odpowiadała pojęciom zachowania energii, zamienności jej w inne postacie i t. p., taką funkcyą jest tylko jedna jedyna $\int P . ds . \cos (P, v)$ i *tę funkcyę* nazwaliśmy pracą, a nie ilość *„osobistego zmęczenia"*, jak to chce wykazać autor pod koniec swego artykułu.

Stronę słabą dzisiejszego pojęcia pracy widzi autor w tem, że po zderzeniu się ciał niesprężystych, energia kinetyczna układu zmniejsza się, lecz właśnie ten przykład jest poparciem dzisiejszych pojęć energetycznych.

Cóż nam natomiast daje autor? Daje nam wyraz $\frac{m^2 . v^2}{2}$ który ma zastępować dzisiejszą funkcyę $\frac{m . v^2}{2}$, a podług tego wyrazu energia kinetyczna układu po zderzeniu się ciał niesprężystych *powiększa się*, i to powiększa się o pokaźną wartość $m_1 . m_2 . v_1 . v_2$, wskazuje więc nam autor na stałe źródło energii, o jakiem nikt nie marzył!

Taki rezultat rachunku uwalnia nas w zupełności od rzeczowego rozbioru wywodów autora, gdyż jest przyjęta przez nauki ściśle metoda dowodzeń, że gdy wywody z przyjętych założeń doprowadzają nas do „perpetuum mobile", to dane założenia są błędne [1]. Błędem też u autora jest antropomorficzne pojmowanie pracy, a w ra-

[1] Ten sposób dowodzenia jest podstawą wielu twierdzeń w termodynamice (prawo Carnot'a, prawo przesunięcia temperatury topliwości i parowania przy osmotycznem ciśnieniu i t. d.)

chunku jest błąd przyjęcia siły, która nie daje przyśpieszenia, co wynika ze swej strony z mylnego pojmowania bezwładności materyi. Bezwładność materyi jest to jej ta właściwość, że *pozostaje* ona w stanie *spoczynku* lub w stanie *ruchu* jednostajnego, — dopóki siły przyłożone nie zmienią tego stanu. Jeżeli więc dane ciało posiada pewną prędkość v, to jest ono w stanie przebyć nieskończenie długą drogę *bez udziału* sił zewnętrznych, wyraz więc przytoczony przez autora $\mathfrak{L} = m \,.\, s$ jako miara przesunięcia, nie jest miarą żadnych czynników mechanicznych.

Autor powiada (str. 537): „Aby dokonać pewnego przesunięcia masy, $\mathfrak{L} = ms$, należy użyć pewnej siły (a nie przyśpieszenia)“, w tem pojmowaniu streszcza się cały błąd, autor wyobraża sobie „bezwładność“ jako „opór“, który *ciągle* trzeba przezwyciężać, ażeby ciało miało np. stałą prędkość v; gdy tymczasem prawo bezwładności głosi, że gdy pewne ciało ma określoną prędkość, to w tej prędkości ono pozostanie i nie potrzeba żadnych sił dla jej podtrzymania. Pojmowanie bezwładności jako oporu, zmusiło autora do wykoncypowania „siły bez przyśpieszenia“!

Z tego wszystkiego możemy tylko przyznać autorowi, że jest różnica pomiędzy pojęciami uznanemi przez dzisiejszą naukę, a pojęciami przedstawionemi w powyższym artykule, lecz ta różnica upadnie, skoro autor przyzna materyi jej właściwości dynamiczne streszczone w prawach NEWTON'A.

„Mechanik“ stworzyć można tyle, na wiele założeń zdobyć się może umysł ludzki i wszystkie te „mechaniki“ budowane na podstawach matematycznych mogą być bez zarzutu pod względem swej logiczności i ścisłości, lecz wyniki ich rachunku będą tylko o tyle zgodne z rzeczywistością, o ile założenia, na których zostały one zbudowane, były w zgodzie z właściwościami świata nas otaczającego, w przeciwnym bowiem razie, dojdziemy do sprzeczności ze zjawiskami tegoż świata. *H. Czopowski*, inż.

Odpowiedź na powyższe uwagi.

I. Odpowiedź na uwagi inż. F. Kucharzewskiego.

Dając wyjaśnienia na uwagi krytyczne inż. F. KUCHARZEWSKIEGO, zaznaczam, iż opieram się w punkcie drugim na nowszych poglądach, wyłożonych w artykule inż. KUCHARZEWSKIEGO.

1) Oddaję pierwszeństwo wzorowi, wyrażającemu siłę ruchu wirowego układu dwóch punktów, a nie wzorowi energii cynetycznej tegoż układu, z przyczyn niżej wyłożonych.

Punktem równowartym układu (M), poruszającego się postępowo z prędkością v, jest punkt materyalny, przypadający z centrem masy układu, ożywiony tąż prędkością v, a którego masa i siła ruchu równa jest odpowiednio masie (M) i sile ruchu (Mv) samego układu. Energia więc ruchu punktu równowartego równą jest energii cynetycznej układu.

Podobnież punktem równowartym rozważanego układu dwóch punktów ($M = m_1 + m_2$), wirującego z prędkością kątową ω około osi stałej, jest punkt, wirujący około tejże osi z tąż prędkością kątową ω, a którego masa i siła ruchu równa jest odpowiednio masie (M) i sile ruchu wirowego $[Mv = \omega\,(m_1 r_1 + m_2 r_2)]$ samego układu. I tu więc także energie cynetyczne: układu i punktu równowartego muszą być sobie równe.

Wzór siły ruchu wirowego układu dwóch punktów: $Mv = (m_1 r_1 + m_2 r_2)\,\omega = m_1 v_1 + m_2 v_2$, wyrażający wielkość wynikowej układu dwóch wektorów równoległych jednego prądu, jest w zupełności uzasadniony.

Wzór zaś energii ruchu układu $\Sigma \dfrac{m_i v_i^2}{2} = \dfrac{M v_c^2}{2} + \dfrac{\omega^2 I}{2}$, będący sumą arytmetyczną iloczynów z masy przez kwadrat prędkości, a więc będący sumą ilości nieposiadających kierunku, został wprowadzony do mechaniki bez należytego umotywowania.

2) Stosując poglądy i rozumowania FREYCINET'A, postaram się wyprowadzić wyrażenia analityczne pojęć wysiłku i energii ruchu w razie siły stałej P. Otóż przyjmując, że:

a) droga przebieżona jest proporcyonalną do prędkości średniej, która jest połową prędkości nabytej po przebieżeniu drogi;

b) siła pomnożona przez czas jest iloczynem z masy przez prędkość nabytą; i

c) czas jest równy drodze podzielonej przez prędkość średnią; rozważymy przypadek uderzenia dwóch punktów materyalnych: m_1, m_2, biegnących wzdłuż jednej prostej i ożywionych prędkościami: v_1, v_2. Uważając je jako masy doskonale sztywne i niesprężyste, możemy napisać wyrażenie siły ruchu układu dwóch punktów po dokonanem uderzeniu:

$$m_1 v_1 + m_1 v_2 = (m_1 + m_2)\, v = Mv \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)},$$

skąd
$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} \quad \ldots\ldots \quad \text{(b)}.$$

Lecz Mv, uwzględniając co wyżej powiedziano, możemy wyrazić jak następuje:

$$Mv = Pt = P\,\frac{s}{\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{Ps}{\frac{1}{2}\left[\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M}\right]} = \frac{MPs}{\left[\frac{Mv}{2}\right]} \quad \ldots \quad \text{(c)}.$$

a stąd wynika:
$$\frac{M^2 v^2}{2} = MPs \;{}^{1)} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{c}_1)$$

t. j. otrzymujemy wynik identyczny ze wzorem:

$$\frac{m^2 v^2}{2} = P\mathfrak{L} \quad \ldots\ldots \quad (25^{\mathrm{b}}),$$

będącym szczególnym przypadkiem wzorów ogólnych:

$$E = m^2\,\frac{(v^2 - v_1^{\,2})}{2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

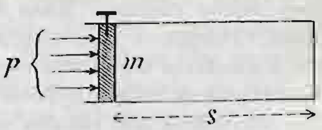
i
$$T = m \int_{s_1}^{s} P\,ds \cos(P, v) \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)},$$

do których w przyczynku moim doszedłem dwiema drogami [2]).

Wobec tożsamości rezultatów, otrzymanych trzema różnemi drogami, zdaje mi się, iż pojęcia moje: wysiłku i energii może zasługują na bliższe rozważanie.

Zastanowimy się jeszcze nad wzorem pracy przyjętym w nauce: $\int_{s_1}^{s} P\,ds \cos(P, v)$.

Wyobraźmy sobie rurkę poziomą, z której wypompowano powietrze, zamkniętą z jednego końca i zaopatrzoną w tłok o masie m, szczelnie przystający lecz mogący się swobodnie, bez tarcia, poruszać w rurce, wewnątrz doskonale gładkiej. Tłok ten, przed rozpoczę-



ciem doświadczenia, trzymany w położeniu początkowem za pomocą śrubki mikrometrycznej, ponosi stale ze strony zewnętrznej ciśnienie P atmosfery. Z chwilą odśrubowania śrubki, tłok, pod działaniem ciśnienia atmosfery, przebiegnie drogę s i uderzy o dno rurki z prędkością nabytą v.

Ponieważ ciśnienie P na tłok jest stałe i tworzy kąt $\alpha = 0$ z kierunkiem ruchu, przeto praca wyrazi się: Ps, którą możemy przyrównać do energii nabytej:

$$Ps = \frac{mv^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(d)},$$

skąd prędkość końcowa:

$$v = \sqrt{\frac{2\,Ps}{m}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(e)}.$$

Gdyby przekrój rurki równał się 1 dm^2, całkowite ciśnienie na tłok byłoby:

$$P = 10\,333 \times (0{,}10)^2 = 103{,}33\ kg \quad \ldots \quad \text{(f)}.$$

a praca, po przejściu drogi s, byłaby:

$$Ps = [103{,}33\ s]\ kg \times mtr \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{d}_1)$$

i prędkość nabyta:

$$v = \sqrt{\frac{206{,}33\ s}{m} \cdot \frac{mtr}{1''}} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{e}_1).$$

Widzimy, że prędkość v zależna jest od masy m tłoka, praca zaś Ps jest od niej w zupełności niezależną, t. j. że praca siły P przy przebywaniu tejże drogi s jest jednaką, niezależnie zupełnie od

---

[1]) Nie skracam czynnika M, wchodzącego w liczniku i mianowniku prawej strony wzoru (c) na tej samej zasadzie, na jakiej pozostawiamy takiż czynnik wspólny we wzorze przyjętym w cynetyce: $Ps = mps = \dfrac{mv^2}{2}$; opuszczając bowiem go, otrzymalibyśmy: $ps = \dfrac{v^2}{2}$, t. j. wzór cynematyki.

[2]) Można jeszcze w następny sposób dojść do wyrażenia analitycznego: wysiłku i energii ruchu, w razie działania siły stałej. Punktowi materyalnemu swobodnemu m, podległemu działaniu siły stałej $P = mp$, odpowiadają w każdej chwili:

prędkość: $v = pt = \sqrt{2\,ps}$

i siła ruchu: $mv = m\sqrt{2\,ps} = \sqrt{2\,m^2 ps} = \sqrt{2\,(mp)(ms)} = \sqrt{2\,Pms}$,

skąd wynika, że: $\dfrac{m^2 v^2}{2} = P\,(ms) = P\mathfrak{L} \quad \ldots\ldots \quad (25^{\mathrm{b}})$.