

ROZDZIAŁ I.

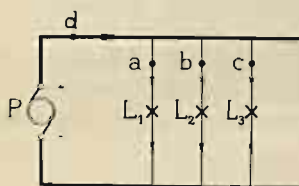
Spadek napięcia w torach otwartych.

§ 1. Wiadomości wstępne.

Urządzenia elektryczne składają się z trzech części zasadniczych: 1) źródła prądu, 2) przewodów i 3) odbiornika prądu. Źróżłami prądu są zazwyczaj prądnice; w małych instalacjach mogą być ogniwa galwaniczne lub termoelektryczne. Odbiornikami prądu są silniki elektryczne, lampy, ogrzewacze, kąpiele galwaniczne, przyrządy elektromedyczne, urządzenia sygnałowe i t. d. Ogniwa akumulatorowe zmieniają swą czynność naprzemian: podczas ładowania są odbiornikami prądu, podczas wyładowania — źródłami. Transformatory, przetwornice i prostowniki są jednocześnie źródłami prądu dla obwodu wtórnego, a odbiornikami — dla pierwotnego.

Przewody elektryczne łączą źródła z odbiornikami i przesyłają prąd od jednych do drugich. Zarówno źródła, jak i odbiorniki, mogą być połączone między sobą bądź w szereg, bądź równolegle. W pierwszym przypadku natężenie prądu we wszystkich źródłach i odbiornikach jest jednakowe, a napięcia mogą być różne, w układzie zaś równoległym przeciwnie — natężenie prądu może być rozmaite, a napięcia są jednakowe. W układzie szeregowym zachodzi ścisła zależność każdego odbiornika od pozostałych: otrzymują prąd i wyzbywają się prądu tylko jednocześnie, wszystkie razem. Wtrącenie do obwodu nowego odbiornika wymaga odpowiedniego podwyższenia napięcia. Natomiast w układzie równoległym każdy odbiornik można włączyć i wyłączyć z obwodu niezależnie od innych. Wprowadzenie nowych odbior-

ników nie wymaga żadnych zmian, gdyż źródło prądu o stałym napięciu wydaje prąd to większy, to mniejszy, zależnie od liczby i wielkości włączonych odbiorników. Układ równoległy ma niezaprzeczoną wyższość nad szeregowym.

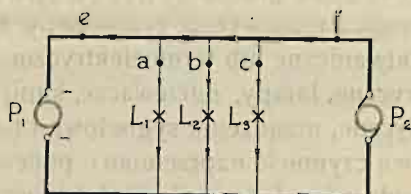


Rys. 1.

Rys. 1 przedstawia układ połączenia równoległego trzech lamp: L_1 , L_2 i L_3 z prądnicą P . Są to trzy obwody prądu, skojarzone w jedną całość. Przerywając przewód w punktach a , b i c , gasimy lampy L_1 , L_2 i L_3 , każdą z osobna, a przerywając w punkcie d , gasimy wszystkie trzy lampy naraz. W punktach a , b i c przerywalimy obwody pojedyncze, a w punkcie d przerwalimy obwód skojarzony.

Na rys. 2 te same trzy lampy: L_1 , L_2 i L_3 są zasilane z dwóch prądnic: P_1 i P_2 , ustawionych po obu stronach przewodów. Prąd dopływa do lamp zarówno z jednej strony, jak i z drugiej. Ażeby zgasić wszystkie lampy naraz, nie wystarczy teraz przerwa w jednym punkcie; trzeba przerwać obwód prądu przynajmniej w dwóch punktach naraz: e i f .

Podobny układ połączeń można osiągnąć również przy jednej tylkoprądnicy (rys. 3). I w tym układzie przerwa obwodu w jednym punkcie (np. w e) nie zgasi jeszcze lamp, gdyż prąd dopłyne od strony przeciwnej. Dopiero przerwa z obu stron lamp (np. w punktach e i f) pozbawie prądu.

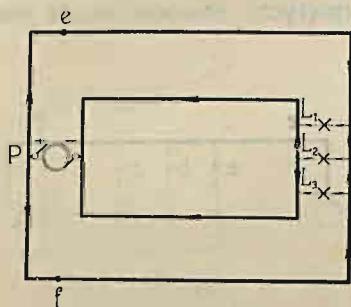


Rys. 2.

Układy połączeń na rys. 1, 2 i 3 składają się z dwóch połów symetrycznych, z których jedna prąd doprowadza do odbiorników, a druga — odprowadza. Pierwszą nazywamy przewodem dodatnim (+) lub dosyłowym, drugą — przewodem ujemnym (—) lub odsyłowym. Przewód ujemny stale towarzyszy przewodowi dodatniemu i biegnie obok niego tak, jak jedna szyna kolejowa obok drugiej. Przez podobieństwo do toru kolejowego będziemy nazywali oba przewody wspólnego obwodu, a więc dodatni i ujemny razem, **torom elektrycznym**.

Rysunki układów połączeń znacznie się uproszczą, gdy zamiast obu połów symetrycznych, będziemy rysowali tylko jedną — dodatnią. Możemy sobie przytem wyobrażać, że druga połowa (ujemna) została

nałożona na pierwszą i stała się przez to niewidoczną. A zatem, będziemy oznaczali liniami nie przewody pojedyncze, lecz tory elektryczne. Rys. 1 otrzyma postać rysunku 4, rys. 2 — rys. 5 i rys. 3 — rys. 6.



Rys. 3.

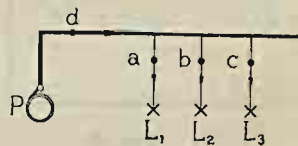
Rysując każdy przewód osobną linią, oznaczamy strzałkami kierunek obiegu prądu (czyli zwrot prądu). Przy zasilaniu prąd dopływa przewodem dodatnim, a odpływa — ujemnym. Przy odbiorze zaś odwrotnie, prąd odpływa przewodem dodatnim, a dopływa — ujemnym.

Rysując cały tor w postaci jednej linii, oznaczamy strzałkami kierunek prądu, płynącego w przewodzie dodatnim. A więc przy zasilaniu

strzałka będzie zwrócona do toru, przy odbiorze — od toru. Zasilanie jest doprowadzeniem energii do toru, odbiór zaś jest odprowadzeniem energii od toru. A zatem strzałki na torach idą zawsze z kierunkiem przepływu energii od źródła do odbiornika (czyli wskazują zwrot energii).

W dalszych przesłankach będziemy nieraz mówili, iż „po torze płynie prąd w tym lub innym kierunku” albo, że „w pewnym punkcie toru mamy dopływ lub odpływ prądu”. Wyrażenia te nie są ściśle. Należy je rozumieć w ten sposób, że „po przewodzie dodatnim toru płynie prąd w tym lub innym kierunku” a „w biegunie dodatnim pewnego punktu toru mamy odpływ lub dopływ prądu” albo też, że „po torze płynie energia w tym lub innym kierunku” a „w punkcie toru mamy dopływ energii lub odpływ”.

Punkt, przez który tor elektryczny jest zasilany energią, nazywa się punktem zasilającym, a punkt przyłączenia odbiornika — punktem odbiorczym.

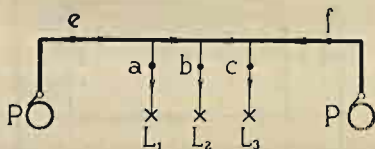


Rys. 4.

Tor elektryczny, doprowadzający energię do odbiorników z jednej tylko strony, jak na rys. 1 lub 4, nazywamy otwartym, a — doprowadzający z obu stron, jak na rys. 2, 3 lub 5 i 6, nazywamy zamkniętym. Zamknięty tor elektryczny w kształcie pierścienia, otrzymujący energię z obu stron z jednego tylko punktu, zwie się okrężnym. Należy odróżniać „zamknięte i otwarte tory” od „obwodów otwartych i zamkniętych”. Mówiąc o torze otwartym lub zamkniętym zwracamy uwagę na

sposób doprowadzenia energii, bez względu na to, czy w danym momencie obwody są pozamykane, czy pootwierane. Mówiąc zaś o obwodach zamkniętych lub otwartych, zwracamy uwagę na obecność prądu lub na brak prądu. Prąd bowiem płynie tylko w obwodzie zamkniętym. Zarówno w torach otwartych, jak zamkniętych, obwody prądu mogą być zapomocą wyłączników pootwierane lub pozamykane.

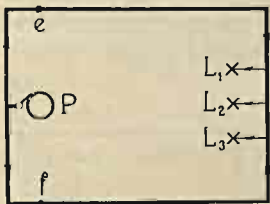
Tory na rys 1, 2 i 3 składały się z dwóch przewodów, a więc były dwuprzewodowe. Zarówno przy prądzie stałym, jak zmiennym, bywają tory trójprzewodowe, czteroprzewodowe i wogóle wieleprzewodowe (patrz rozdz. VIII i X).



Rys 5.

Tory, złożone z przewodów jednakowych pod względem materiału, przekroju i długości, nazywają się symetrycznymi, tory zaś z przewodników niejednakowych — niesymetrycznymi. Tory elektryczne tramwajowe składają się zazwyczaj na jednym biegunie z brązowych przewodów jezdnych, a na drugim — z szyn stalowych, a więc należą do kategorii torów niesymetrycznych.

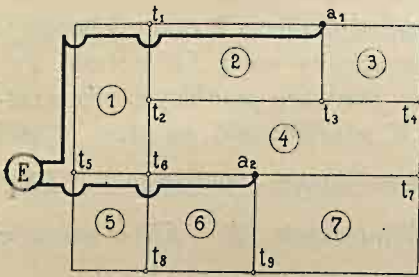
Przewody elektryczne, zawieszone na wspólnych słupach lub ułożone we wspólnym kanale lub rowie, nazywamy linią elektryczną. Mówimy np., że wzdłuż linii kolejowej biegnie linia telegrafowa. Zależnie od liczby torów elektrycznych rozróżniamy linie jednotorowe, dwutorowe i wogóle wielotorowe. Kierunek linii elektrycznej nazywamy szlakiem (trasą). Linie elektryczne, prowadzące prąd na znaczne odległości (dziesiątki kilometrów), nazywają się dalekośnościami.



Rys. 6.

Tory elektryczne zarówno otwarte, jak zamknięte, mogą być nierozgałęzione (rys. 4, 5, 6) i rozgałęzione (rys. 85). W torach rozgałęzionych rozróżniamy tor główny czyli pień i tory poboczne czyli gałęzie. Punkty rozgałęzienia, w których schodzą się conajmniej trzy tory, nazywamy punktami węzłowymi. Rozgałęzione tory zamknięte tworzą sieci elektryczne. Bokami sieci nazywamy odcinki toru, zawarte między dwoma sąsiednimi punktami węzłowymi. Wielobok zamknięty w sieci elektrycznej nazywa się okiem.

Sieci elektryczne (np. sieci miejskie) otrzymują prąd zazwyczaj za pośrednictwem kilku punktów zasilających. Tory, prowadzące prąd od źródła do punktów zasilających, nazywają się torami zasilającymi, wszystkie zaś inne tory w sieci, prowadzące prąd od punktów zasilających do odbiorników, nazywają się torami rozsyłowymi.



Rys. 7.

Sieć na rys. 7 składa się z 7 ok, z 17 boków rozsyłowych i zawiera 9 punktów węzłowych (t_1, t_2, \dots, t_9), 2 punkty zasilające (a_1, a_2) i 2 tory zasilające (Ea_1, Ea_2).

Jednym z zadań projektowania przewodów elektrycznych jest obliczenie przekroju. Są rozmaite względy, którymi trzeba się kierować przy wyznaczaniu przekroju. Przedewszyst-

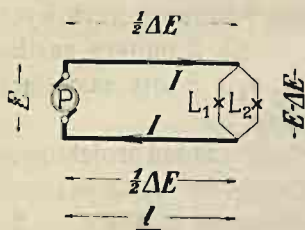
kiem, przewód powinien być zdalny pod względem technicznym i powinien utrzymywać na całej swej długości napięcie możliwie jednakowe i stałe. Powtóre, wymagamy od przewodu bezpieczeństwa ogniowego i życiowego, ażeby nie nagrzewał się nadmiernie pod wpływem prądu, i nie pękał przy zmianach obciążenia mechanicznego. Wreszcie, wchodzi w grę względy ekonomiczne, ażeby przewody przesyłały energię elektryczną jak najtaniej. Tak więc przewody należy obliczać: 1) na spadek napięcia, 2) na nagrzewanie, 3) na wytrzymałość mechaniczną i 4) na gospodarność.

Umiejętność obliczania przewodów datuje się od roku 1881, gdy sir William Thomson wydał pierwsze dzieło na ten temat. Thomson omawiał jednak tylko tory otwarte. Obliczanie sieci elektrycznych pozostało jeszcze zadaniem nierozwiązanym. Praktyka wyprzedzała teorię. Pierwsze sieci budowano nie na podstawie rachunku, lecz na podstawie pomiarów, dokonywanych na małych modelach sieci. Jeszcze w 1892 r. patentowano przyrząd do modelowania sieci elektrycznych. W tym czasie jednak sprawa analitycznego obliczania sieci była już na ukończeniu, choć uważana była jeszcze za tajemnicę firmową.

§ 2. Tor obciążony w jednym punkcie.

W przewodach pod wpływem prądu następuje pewien spadek napięcia tak, że napięcie u odbiornika zawsze jest nieco niższe, niż napięcie u źródła. Weźmy przykład najprostszy (rys. 8). Prądnicą P wy-

syła prąd o napięciu E woltów i natężeniu I amperów do dwóch lamp żarowych L_1 i L_2 . Odległość od źródła do odbiorników... l metrów. Na tej długości biegną dwa przewody: 1) dodatni czyli dosyłowy i 2) ujemny czyli odsyłowy. Oba te przewody są przekroju jednostajnego s i wykonane z jednakowego materiału o przewodności właściwej $k \Omega^{-1}$ na $1 m$ długości i $1 mm^2$ przekroju.



Rys. 8.

Spadek napięcia w obu przewodach razem oznaczamy przez ΔE woltów. Panujące na krańcach prądnicy napięcie całkowite E rozkłada się na trzy części (rys. 8): 1) w jednym przewodzie... $\frac{1}{2} \Delta E$, 2) w odbiornikach... $E - \Delta E$ i wreszcie 3) w drugim przewodzie... $\frac{1}{2} \Delta E$.

$$E = \frac{1}{2} \Delta E + (E - \Delta E) + \frac{1}{2} \Delta E.$$

Z tych trzech części, tylko część druga t. j. $E - \Delta E$ jest napięciem pożytecznym, zużytkowanym do palenia lamp, natomiast pierwsza część i trzecia, czyli $\frac{1}{2} \Delta E + \frac{1}{2} \Delta E$ są napięciem straconem.

Tablica I. Przewodność właściwa.

Tworzywo.	Przewodność właściwa k przy $20^\circ C$	Spółczynnik cieplny oporności
	$\frac{m}{\Omega mm^2}$	
Miedź miękka wzorowa wg przep. międzynarodowych	1:0,01724 \approx 58	0,00393
Miedź twarda rynkowa . .	1:0,0176 \approx 56,8	0,0039
Miedź rynkowa dopuszczal- na wg przep. niemieckich	1:0,01784 \approx 56	0,004
Glin miękki wzorowy wg przep. międzynarodowych	1:0,0289 \approx 34,6	} 0,0037 do 0,0039
Glin twardy rynkowy . . .	1:0,0295 \approx 33,9	
Bronz	56,4 do 17,7	0,004
Żelazo	8,3 do 7,2	0,0048 do 0,0057
Stal	6,25 do 4,35	0,0045 do 0,0052

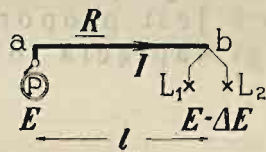
Rys. 9 przedstawia ten sam obwód prądu w formie uproszczonej. Mówimy, że w torze elektrycznym ab , którego oporność elektryczna (a więc oporność obu przewodów razem) wynosi R omów, następuje spadek napięcia ΔE woltów.

Zgodnie z prawem Ohma:

$$\Delta E = I R;$$

podstawiając wartość oporności R :

$$R = \frac{2 l}{k s},$$



Rys. 9,

otrzymamy wzór na obliczenie spadku napięcia:

$$\Delta E = \frac{2 I l}{k s}. \quad (1)$$

Rozpatrzmy, jak będzie się zmieniało napięcie na krańcu toru w punkcie b przy obciążeniu zmiennem;

1) gdy będą się paliły obie lampy L_1 i L_2 , obciążenie będzie największe ... I_{\max} i spadek napięcia będzie największy ... ΔE_{\max} (patrz wzór 1), a napięcie w punkcie odbioru prądu b wyniesie:

$$E - \Delta E_{\max},$$

2) po wyłączeniu jednej z lamp obciążenie zmniejszy się do połowy ($\frac{1}{2} I_{\max}$), spadek napięcia również ($\frac{1}{2} \Delta E_{\max}$), a napięcie robocze wyniesie:

$$E - \frac{1}{2} \Delta E_{\max},$$

3) wreszcie po wyłączeniu obu lamp napięcie w punkcie b będzie takie, jak w prądnicy t. j.

$$E.$$

Im większe obciążenie, tem niższe jest napięcie robocze.

Spadek napięcia wywołuje w lampach nie tylko zmniejszenie się liczby woltów, ale również zmniejszenie się liczby amperów. Moc prądu (czyli liczba watów) P , pobierana przez odbiornik o stałej oporności, jest proporcjonalna do drugiej potęgi napięcia roboczego:

$$P_1 = E_1 I_1 = E_1 \frac{E_1}{R}, \quad P_2 = E_2 \frac{E_2}{R}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1^2}{E_2^2}.$$

Światłość lamp elektrycznych zmienia się jeszcze w szybszym tempie, niż zapotrzebowanie mocy prądu. Światłość żarówek węglowych jest proporcjonalna mniej więcej do 6-ej potęgi napięcia roboczego:

$$\frac{J_1}{J_2} \approx \frac{E_1^6}{E_2^6}, \quad (2)$$

a żarówek metalowych zarówno próżniowych, jak nagazowanych, mniej więcej do 4-ej potęgi napięcia:

$$\frac{J_1}{J_2} \approx \frac{E_1^4}{E_2^4}. \quad (3)$$

Ujmując rzecz procentowo, możemy z pewnem przybliżeniem powiedzieć, że przy spadku napięcia o

$$p \%,$$

moc, pobierana przez odbiornik, zmniejsza się o

$$2 p \%,$$

światłość żarówek węglowych o

$$6 p \%,$$

a światłość żarówek metalowych o

$$4 p \%.$$

Zmienność napięcia jest szczególnie dotkliwa w urządzeniach oświetleniowych. Gdy w sąsiedztwie zapalą naraz kilka lamp lub puszcza w ruch silnik elektryczny (np. silnik dźwigu osobowego), zaraz odbija się to na światłości lamp. Wymagania równomiernego oświetlenia bywają ostrzejsze i słabsze, zależnie od warunków miejscowych. W warunkach normalnych można dopuścić 12 do 16% wahania światłości, co przy lampach metalowych odpowiada dopuszczalnym spadkom napięcia

$$3\% \text{ do } 4\%.$$

W urządzeniach silnikowych wahania napięcia nie odgrywają tak ważnej roli. Zwalnianie biegu daje się odczuwać dopiero przy większych

spadkach napięcia. Wobec tego w sieciach, przeznaczonych do zasilania wyłącznie silników, można dopuścić większe wahania napięcia roboczego w granicach:

$$5\% \text{ do } 10\%.$$

Wyznaczywszy pewien odsetek p dopuszczalnego wahan napięcia, tem samem określiliśmy już wielkość dopuszczalnego (dowolnego) spadku napięcia ΔE_{dzw} :

$$\Delta E_{dzw} = \frac{p}{100} E. \quad (4)$$

Jest to punkt wyjścia do obliczenia przekroju. Z równania (1) wynika, że dla osiągnięcia spadku napięcia ΔE_{dzw} niezbędny jest przekrój:

$$s = \frac{2 I l}{k \Delta E_{dzw}}.$$

Im większy dopuszczamy spadek napięcia, tem przekroje są mniejsze i odwrotnie. Sieć o małych przekrojach jest wrażliwa na zmiany obciążenia, daje znaczne wahania napięcia roboczego i światła. Sieć taką nazywamy sztywną, nieelastyczną, niesprężystą.

Przykład 1. Budynek odległy od elektrowni o 100 m należy oświetlić 103-ma żarówkami 25-cio świecowymi, z których każda pobiera 0,25 A. Napięcie w elektrowni 120 V. Obliczyć przekrój przewodnika miedzianego o przewodności właściwej $k = 57 \frac{m}{\Omega mm^2}$ na 3% dopuszczalnego spadku napięcia i obliczyć wahania światłości żarówek.

$$E = 120 \text{ V} \quad I = 103 \cdot 0,25 \text{ A} \quad l = 100 \text{ m} \quad k = 57 \frac{m}{\Omega mm^2} \quad p = 3\%$$

Dopuszczalny spadek napięcia wynosi:

$$\Delta E_{dzw} = \frac{3}{100} 120 = 3,6 \text{ V}.$$

Przekrój przewodnika:

$$s = \frac{2 \cdot 103 \cdot 0,25 \cdot 100}{57 \cdot 3,6} = 25 \text{ mm}^2.$$

Napięcie na krańcu linii waha się w granicach od 120 V do

$$120 - 3,6 = 116,4 \text{ V}.$$

Światłość żarówki przy 120 V wynosi 25 świec, a przy 116,4 —

$$25 \left(\frac{116,4}{120} \right)^4 = 22,13 \text{ świec},$$

a więc wahanie światłości dochodzi do:

$$\frac{25 - 22,13}{25} = 11,5\%.$$

§ 3. Tor obciążony w wielu punktach.

Rys. 10 przedstawia tor obciążony w trzech punktach odbiorczych: b , c , z . Prądy odbierane oznaczono literami: i_b , i_c , i_z , a prąd zasilania — literą: i_a . Ustalenie rozplywu prądu nie przedstawia żadnej trudności. W odcinku ab płynie prąd:

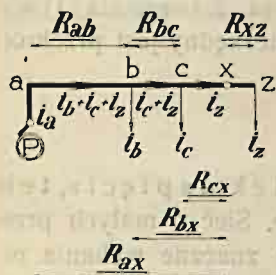
$$i_b + i_c + i_z.$$

w odcinku bc — prąd:

$$i_c + i_z,$$

wreszcie w odcinku krańcowym cz — prąd:

$$i_z.$$



Rys. 10.

Zadanie nasze polega na obliczeniu spadku napięcia ΔE_{ax} od punktu zasilania a do dowolnego punktu toru x . Spadek ten, zgodnie z prawem Ohma, równa się sumie iloczynów prądów przez oporności odcinków:

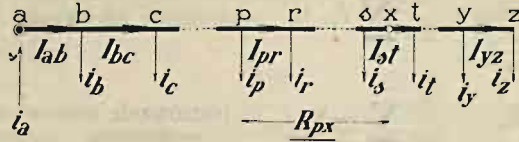
$$\Delta E_{ax} = \underbrace{(i_b + i_c + i_z)}_{i_a} R_{ab} + (i_c + i_z) R_{bc} + i_z R_{cz} \quad (a)$$

W zasadzie moglibyśmy już na tym wzorze poprzestać. Dogodniej jednak będzie, gdy nadamy mu inną formę. W tym celu rozumujemy w sposób następujący. Gdyby na całym odcinku ax płynął prąd zasilania i_a , to spadek napięcia do punktu x wyniósłby $i_a R_{ax}$. Ponieważ jednak na odcinku bx płynie prąd zmniejszony o wielkość i_b , a pozatem na odcinku cx płynie prąd zmniejszony jeszcze o wielkość i_c , przeto od poprzedniego iloczynu $i_a R_{ax}$ wypadnie odjąć iloczyny: $i_b R_{bx}$, $i_c R_{cx}$. A zatem:

$$\Delta E_{ax} = i_a R_{ax} - i_b R_{bx} - i_c R_{cx} \quad (b)$$

Ze wzoru tego wynika, że spadek napięcia jest algebraiczną sumą iloczynów prądów przez oporności. Prąd zasilania występuje ze znakiem $+$, a prądy odbierane ze znakiem $-$. Do każdego iloczynu wchodzi oporność od punktu przyłożenia prądu do punktu x , dla którego obliczamy spadek napięcia. Innymi słowy, są to iloczyny prą-

dów przez oporności ramion tych prądów względem punktu x . W mechanice iloczyny sił przez ramiona nazywają się momentami sił. Przez podobieństwo będziemy nazywali iloczyny prądów przez oporności ramion momentami prądów.



Rys. 11.

Przejdźmy do przykładu ogólnego. Tor ax (rys. 11) jest zasilany w punkcie a i zaopatrzony w odbiory prądu w punktach: $b, c, \dots, p, r, \dots, y, z$. Prądy zasilania i prądy odbierane są następujące:

$$i_a, i_b, \dots \text{ogólnie } i_p, \dots, i_s,$$

a prądy przewodowe w poszczególnych odcinkach toru —

$$I_{ab}, \dots \text{ogólnie } I_{pr}, \dots, I_{yz}.$$

Spadek napięcia na dowolnym odcinku toru ax równa się sumie iloczynów prądów przewodowych przez oporności odpowiednich odcinków:

$$\Delta E_{ax} = I_{ab} R_{ab} + I_{bc} R_{bc} + \dots + I_{pr} R_{pr} + \dots + I_{st} R_{sx}$$

czyli

$$\Delta E_{ax} = \sum_a^x I_{pr} R_{pr} \quad (\text{sumowanie odcinkami}). \quad (5)$$

Wprowadzając momenty prądu, powiemy, że:

Spadek napięcia ΔE_{ax} na torze od punktu zasilającego (a) do dowolnego punktu (x) równa się sumie algebraicznej momentów prądów (przyłożonych na tym odcinku) względem punktu (x), przyczem prądy zasilania wchodzi z znakiem plus (+), a prądy odbierane — ze znakiem minus (—).

$$\Delta E_{ax} = + i_a R_{ax} - i_b R_{bx} - i_c R_{cx} - \dots - i_p R_{px} - \dots - i_s R_{sx}$$

czyli

$$\left| \Delta E_{ax} = \sum_a^x \pm i_p R_{px} \right| \quad (\text{sumowanie momentami; } + \text{ zasilanie, } - \text{ odbiór}) \quad (6)$$

Gdy tor na całej swej długości ma przekrój jednostajny s , wówczas możemy podstawić, zamiast oporności R_{pr} i R_{px} , ich wartości:

$$R_{pr} = \frac{2 l_{pr}}{k s}, \quad R_{px} = \frac{2 l_{px}}{k s}$$

i zarówno we wzorze (5), jak (6) wyprowadzić za nawias wyraz $\frac{2}{k s}$

$$\Delta E_{ax} = \frac{2}{k s} \sum_a^x I_{pr} l_{pr} \quad (\text{sumowanie odcinkami}) \quad (7)$$

$$\Delta E'_{ax} = \frac{2}{k s} \sum_a^x \pm i_p l_{px} \quad (\text{sumowanie momentami; } + \text{ zasilanie, } - \text{ odbiór}). \quad (8)$$

W tym przypadku momentami prądu będziemy nazywali iloczyny prądu przez długość ramienia.

Przykład 2. Napięcie w punkcie zasilającym a (rys. 15) ... 220 V. Przewody miedziane o przekroju 16 mm². Obliczyć napięcie w punktach odbiorczych b, c, z i obliczyć dla żarówki 16-świecowej o oporności 2418 Ω , włączanej kolejno do tych trzech punktów, 1) światłość, 2) natężenie prądu, 3) moc prądu i 4) pobór mocy na 1 świecę.

$$i_b = 10 A, \quad i_c = 20 A, \quad i_z = 15 A,$$

$$l_{ab} = 80 m, \quad l_{bc} = 60 m, \quad l_{cz} = 40 m,$$

$$k = 57 \frac{n}{\Omega mm^2}, \quad s = 16 mm^2.$$

Prąd zasilania i_a równa się sumie prądów odbieranych $i_a = 10 + 20 + 15 = 45 A$. Spadek napięcia ΔE obliczymy wg wzoru (8):

$$\Delta E_{ab} = \frac{2}{57 \cdot 16} 45 \cdot 80 = 7,9 V,$$

$$\Delta E_{ac} = \frac{2}{57 \cdot 16} \{ 45(80 + 60) - 10 \cdot 60 \} = 12,5 V,$$

$$\Delta E_{az} = \frac{2}{57 \cdot 16} \{ 45(80 + 60 + 40) - 10(60 + 40) - 20 \cdot 40 \} = 13,8 V.$$

W punkcie b napięcie wynosi:

$$220 - 7,9 = 212,1 V.$$

Światłość żarówki 16-to świecowej —

$$16 \left(\frac{212,1}{220} \right)^4 = 13,82 \text{ świec.}$$

prąd, czerpany przez żarówkę,

$$\frac{212,1}{2418} = 0,088 A,$$

pobór mocy —

$$212,1 \cdot 0,088 = 18,6 W,$$

a pobór mocy na 1 świecę —

$$\frac{18,6}{13,82} = 1,33 \text{ W/}\dot{s}\text{w.}$$

Obliczywszy te same wielkości dla punktów odbiorczych c i z , dochodzimy do następujących wyników:

w punkcie odbiorczym:	a	b	c	z
panuje napięcie w V	220	212,1	207,5	206,2
żarówka wykazuje światłość w $\dot{s}\text{w.}$	16	13,82	12,66	12,35
„ czerpie prąd w A	0,091	0,088	0,086	0,085
„ pobiera moc w W	20	18,6	17,8	17,6
„ „ „ w W na 1 $\dot{s}\text{w.}$	1,25	1,33	1,40	1,43

Z zestawienia tych liczb widać, że im dalej od punktu zasilającego założona jest żarówka, tem ciemniej się pali i jakkolwiek mniej pobiera mocy, to jednak ekonomja żarówki jest coraz gorsza, czyli pobór watów na świecę jest coraz większy. Porównując początek toru z końcem, widzimy, że przy spadku napięcia o 6,3% pobór mocy przez żarówkę spada o 12%, światłość zaś żarówki spada jeszcze bardziej, o 23%.

Wróćmy do rys. 10. Wzór (a) możemy przekształcić jeszcze w inny sposób:

$$\Delta E_{ax} = i_b R_{ab} + i_c \frac{(R_{ab} + R_{bc})}{R_{ac}} + i_z \frac{(R_{ab} + R_{bc} + R_{cz})}{R_{ax}},$$

czyli:

$$\Delta E_{ax} = i_b R_{ab} + i_c R_{ac} + i_z R_{ax}. \quad (c)$$

Jest to również suma momentów, lecz ułożonych względem punktu zasilania a . Co się tyczy punktu x , dla którego obliczamy spadek napięcia, to w tym przypadku uważamy go poniekąd za krańcowy punkt odbiorczy, z którego odpływa prąd i_x . Pozostały odcinek toru xz uważamy za nieistniejący.

Biorąc rzecz ogólnie (rys. 11), powiemy, że spadek napięcia od punktu a do x można wyrazić sumą momentów prądów odbieranych względem punktu zasilania a :

$$\Delta E_{ax} = i_b R_{ab} + i_c R_{ac} + \dots + i_p R_{ap} + \dots + i_s R_{as} + (i_t + \dots + i_y + i_n) R_{ax},$$

czyli:

$$\Delta E_{ax} = \sum_a^x i_p R_{ap} \quad (\text{sumowanie momentami}), \quad (9)$$

a przy jednostajnym przekroju s :

$$\Delta E_{ax} = \frac{2}{k s} \sum_a^x i_p l_{ap} \quad (\text{sumowanie momentami}), \quad (10)$$

przyczem jako prąd, odbierany w punkcie x , należy rozumieć sumę prądów, odpływających poza punkt x .

Tak np. na rys. 15 spadek napięcia do krańcowego punktu z wyniesie:

$$\Delta E_{az} = \frac{2}{57 \cdot 16} \{ 10 \cdot 80 + 20 (80 + 60) + 15 (80 + 60 + 40) \} = 13,8 \text{ V.}$$

§ 4. Obliczanie sposobem wykreślnym.

Rys. 12 przedstawia tor az o długości l_{az} metrów, złożony z dwóch przewodów o przewodności $k \frac{m}{\Omega \text{ mm}^2}$ i przekroju $s \text{ mm}^2$. Tor otrzymuje

prąd w punkcie zasilającym a , a na krańcu w punkcie z obciążony jest prądem i amperów. Chcąc obliczyć spadek napięcia sposobem wykreślnym, rysujemy na boku pomocniczy trójkąt

$b_1 d_1 c_1$, w którym podstawa $\overline{d_1 c_1}$ przedstawiałaby w dowolnej skali prąd i , a wysokość $\overline{b_1 e_1}$ równałaby się w dowolnej skali iloczynowi $\frac{1}{2} k s$

$$\overline{d_1 c_1} = i \quad \overline{b_1 e_1} = \frac{1}{2} k s.$$

Odcinek \overline{be} jest rzutem toru az , a więc w przyjętej przez nas skali ilustruje długość toru l_{az}

$$\overline{be} = l_{az}.$$

Prowadzimy przez punkt b prostą bc równoległą do $b_1 c_1$ i prostą bd równoległą do $b_1 d_1$. Trójkąt bcd jest wykresem spadków napięcia. Rzędne, zawarte między bokami bc i bd , ilustrują spadek napięcia w odpowiednich punktach toru. Np. rzędna \overline{fg} przedstawia spadek napięcia w punkcie x :

$$\overline{fg} = \Delta E_{ax}.$$

Dowodzenie jest bardzo proste. Z podobieństwa trójkątów: $b_1 c_1 d_1$, bfg wynika, że:

$$\overline{b_1 e_1} : \overline{bh} = \overline{c_1 d_1} : \overline{fg}$$

czyli

$$\left(\frac{1}{2} k s\right) : l_{ax} = i : \bar{f}g$$

stąd

$$\bar{f}g = \frac{2 i l_{ax}}{k s} = \Delta E_{ax}.$$

Przechodzimy do toru (o przekroju jednostajnym), obciążonego w dwóch punktach (rys. 13): b i z . Na boku kreślimy trójkąt pomocniczy; podstawą będzie linja pionowa ce ,

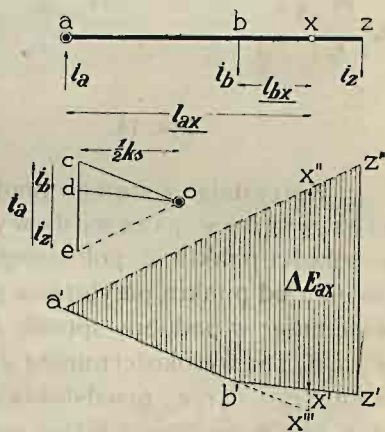
$$\bar{cd} = i_b \quad \bar{de} = i_z \quad ec = i_a,$$

zwana szeregiem prądowym, a wierzchołkiem będzie punkt o , postawiony w dowolnem miejscu, byleby w odległości, równej iloczynowi:

$$\frac{1}{2} k s.$$

Punkt o nazywamy biegunem.

Rozpoczynamy budowę wykresu spadków napięcia. Równolegle do promienia oc kreślimy bok $a'b'$, równolegle do promienia od kreślimy bok $b'z'$ i wreszcie równolegle do promienia oe — bok $a'z'$. Rozumujemy przytem w sposób następujący. Punkt c w szeregu prądowym leży na granicy między prądami: i_a, i_b , to też bok, równoległy do promienia punktu c , musi ciągnąć się od punktu przyłożenia prądu i_a do punktu przyłożenia prądu i_b . Punkt d w szeregu prądowym znajduje się na granicy między i_b, i_z a więc bok, równoległy do promienia punktu d , będzie się ciągnął od i_b do i_z . Wreszcie punkt e leży między prądami i_z, i_a , wobec czego bok, równoległy do promienia punktu e , będzie się ciągnął od i_z do i_a .



Rys. 13.

Zbudowany wielobok sznurowy $a'b'z'z''$ jest wykresem spadków napięcia. Rzędne, zawarte w tym wieloboku, równają się spadkom napięcia w odpowiednich punktach toru. Np. rzędna $x''x'$ przedstawia spadek napięcia w punkcie x :

$$x''x' = \Delta E_{ax}.$$

Dowodzenie jest następujące. Z podobieństwa trójkątów: $o c e$, $a' x'' x''$ wynika, że

$$\overline{x'' x''} = \frac{2 i_a l_{ax}}{k s},$$

a z podobieństwa trójkątów: $o c d$, $b' x''' x'$ wynika, że

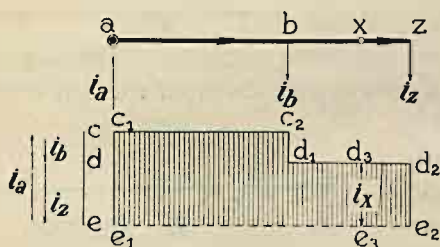
$$\overline{x' x'''} = \frac{2 i_b l_{bx}}{k s}.$$

Stąd różnica tych odcinków:

$$\overline{x'' x'} = \overline{x'' x'''} - \overline{x' x'''} = \frac{2}{k s} (i_a l_{ax} - i_b l_{bx}) = \Delta E_{ax}.$$

Co się tyczy skali, to przyjąwszy do wykresu:

$$1 \text{ amper} = i \text{ mm} \quad 1 \text{ metr} = l \text{ mm} \quad 1 \text{ m } \Omega^{-1} = c \text{ mm},$$



Rys. 14.

otrzymamy spadki napięcia, czyli

$$\frac{\text{ampery} \times \text{metry}}{\text{m } \Omega^{-1}}$$

w skali: 1 wolt = v mm, przy-
czem

$$v = \frac{i \cdot l}{c}. \quad (11)$$

Korzystając z szeregu prądowego, można zbudować jeszcze wykres prądów przewodowych (rys. 14). W tym celu kreślimy na wysokości punktu c , położonego między i_a , i_b , linię poziomą $c_1 c_2$ na odcinku od punktu przyłożenia prądu i_a do punktu przyłożenia prądu i_b . Rozumując w podobny sposób, kreślimy na wysokości punktu d poziomą $d_1 d_2$ i na wysokości punktu e poziomą $e_1 e_2$. Rzędne, zawarte w wieloboku $c_1 c_2 d_1 d_2 e_2 e_1$, przedstawiają prądy przewodowe dla każdego punktu toru. Np. w punkcie x płynie prąd $i_x = d_3 e_3 = i_x$.

Przykład 3. Tor z przykładu 2-go. Obliczyć sposobem wykreślnym spadek napięcia w punktach odbiorczych: b , c , z . (rys. 15).

$$k = 57 \frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2} \quad s = 16 \text{ mm}^2$$

Przyjmujemy następującą skalę:

$$1 \text{ A} = 1 \text{ mm} \quad 1 \text{ m} = 0,5 \text{ mm} \quad 1 \text{ m } \Omega^{-1} = 0,1 \text{ mm}.$$

Kreślimy szereg prądowy dg . Odległość biegunowa wyniesie:

$$\frac{1}{2} ks = \frac{1}{2} 57 \cdot 16 m \Omega^{-1} = 456 m \Omega^{-1},$$

a w przyjętej skali 45,6 mm.

Budujemy wykres prądów przewodowych $dd_1, e_1, e_2, f_1, f_2, g, g$ i wykres spadków napięcia $a'z''z'c'b'$. Skala napięciowa: 1 wolt = v mm.

$$v = \frac{1 \cdot 0,5}{0,1} = 5 \text{ mm}.$$

Mierzymy rzędne na wykresie spadków napięcia:

$$\overline{b'b'} = 39,5 \text{ mm},$$

$$\overline{c''c'} = 62,5 \text{ mm},$$

$$\overline{z''z'} = 69 \text{ mm}.$$

Spadki napięcia w punktach odbiorczych wynoszą:

$$\Delta E_{ab} = \frac{1}{5} 39,5 = 7,9 \text{ V}$$

$$\Delta E_{ac} = \frac{1}{5} 62,5 = 12,5 \text{ V}$$

$$\Delta E_{az} = \frac{1}{5} 69 = 13,8 \text{ V}.$$

Przykład 4. Obliczyć spadek napięcia na krańcu toru az (rys. 16).

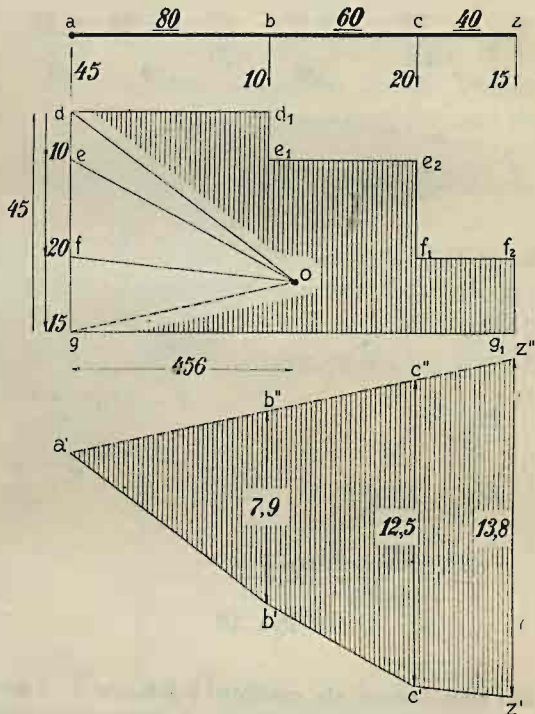
$$k = 57 \frac{m}{\Omega \text{ mm}^2} \quad s_{ac} = 25 \text{ mm}^2$$

$$s_{cz} = 10 \text{ mm}^2.$$

Obliczenie rachunkowe poprowadzimy osobno dla odcinka o przekroju 25 mm^2 , a osobno dla 10 mm^2 :

$$\Delta E_{ac} = \frac{2}{57 \cdot 25} (45 \cdot 100 - 10 \cdot 20) \approx 6 \text{ V}$$

$$\Delta E_{cz} = \frac{2}{57 \cdot 10} (35 \cdot 100 - 20 \cdot 60 - 15 \cdot 20) \approx 7 \text{ V}.$$



Rys. 15.

Spadek napięcia ΔE_{cz} moglibyśmy obliczyć w inny sposób:

$$\Delta E_{cz} = \Delta E_{ce} = \frac{2}{57 \cdot 10} (35 \cdot 80 - 20 \cdot 40) \approx 7 \text{ V}.$$

Spadek napięcia na całym torze wyniesie:

$$\Delta E_{az} = \Delta E_{ac} + \Delta E_{cz} \approx 6 + 7 = 13 \text{ V}.$$

Obliczenie wykreślne. Wziąwszy tę samą skalę, co w przykładzie poprzednim, kreślimy szereg prądowy i stawiamy dwa bieguny: 1) o_{25} dla przekroju 25 mm^2 na odległości:

$$\frac{1}{2} 57 \cdot 25 = 712,5 \frac{\text{m}}{\Omega}$$

(w skali... $71,25 \text{ mm}$) i 2) o_{10} dla przekroju 10 mm^2 na odległości:

$$\frac{1}{2} 57 \cdot 10 = 285 \frac{\text{m}}{\Omega}$$

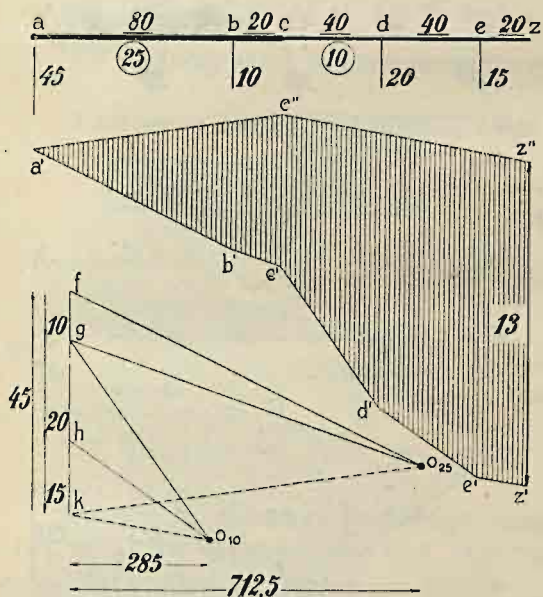
(w skali... $28,5 \text{ mm}$). Przy kreśleniu wieloboku sznurowego kierujemy się promieniami bieguna o_{25} dla odcinków toru o przekroju 25 mm^2 , a promieniami bieguna o_{10} dla odcinków o przekroju 10 mm^2 :

$$a' b' \parallel f o_{25} \quad b' c' \parallel g o_{25}$$

$$c' d' \parallel g o_{10} \quad d' e' \parallel h o_{10}$$

$$a' c'' \parallel k o_{25} \quad c'' z'' \parallel k o_{10}$$

$$e' z' \parallel k o_{10}.$$



Rys. 16.

Odcinek krańcowy ez jest bez prądu, a więc spadek napięcia na tym odcinku jest wielkością stałą i równa się spadkowi w punkcie e . Przy budowaniu wykresu trzeba o tem pamiętać. Do promienia $k o_{10}$ będą równoległe dwa boki: $c' z'$ i $e' z'$ tak, jak gdyby droga od c do e prowadziła najpierw od c do z , a później zpowrotem od z do e .

Rzędna krańcowa $z'' z' = 65 \text{ mm}$; wobec tego spadek napięcia:

$$\Delta E_{az} = \frac{1}{5} 65 = 13 \text{ V}.$$

Spadek napięcia wzrasta początkowo dość prędko, po odbiorze w punkcie b — wzrasta słabiej, a po zmniejszeniu przekroju w punkcie c — znów wzrasta w szybkim tempie.

Na wykresie 16-tym linia przerywana $a'c''z''$ załamuje się w punkcie c'' . Wykres byłby bardziej wyrazisty, gdyby jedna linia była na całej długości prosta i pozioma. Można to osiągnąć z łatwością, stawiając bieguny na poziomie podnóża lub wierzchołka szeregu prądowego. Np. na rys. 16 kresła $a'c''z''$ byłaby linią poziomą, gdybyśmy postawili bieguny o_{25} i o_{10} na jednym poziomie z punktem k .

§ 5. Tor niesymetryczny.

Gdy jeden z przewodów różni się od drugiego materiałem, długością lub przekrojem, wówczas wypada obliczać spadek napięcia osobno dla każdego przewodu.

Oporność i spadek napięcia, liczone dla obu przewodów razem, a więc liczone dla toru, znaczyliśmy literami wielkimi: $R, \Delta E$. Te same wielkości dla pojedynczych przewodów będziemy oznaczali literami małymi: $r, \Delta e$.

Spadek napięcia w przewodzie pojedynczym będziemy obliczali wg prawidła następującego.

Spadek napięcia Δe_{ax} na pojedynczym przewodzie od punktu zasilającego (a) do dowolnego punktu (x) równa się sumie algebraicznej momentów prądów (przyłożonych na tym odcinku) względem punktu (x), przyczem prądy dopływowe wchodzić ze znakiem plus (+), a prądy odpływowe — ze znakiem minus (—),

czyli

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_{ax} &= \sum_a^x \pm i_p r_{px} \\ \text{a dla jednostajnego przekroju } s &= \\ \Delta e_{ax} &= \frac{1}{ks} \sum_a^x \pm i_p l_{px} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(sumowanie momentami;} \\ \text{+ dopływ, — odpływ)} \end{array} \quad (12)$$

Prawidło powyższe dla przewodów pojedynczych różni się od poprzedniego prawidła tem, że wchodzi tu w grę kierunki prądów (dopływ, odpływ), a nie kierunki przepływu energii (zasilanie, odbiór). Wzór zaś (12) różni się od wzorów (6) i (8) tem, że zamiast oporności dwuprzewodowych (R_{px}), wchodzi oporności jednoprzewodowe (r_{px}) albo, że zamiast spółczynnika liczbowego 2, wchodzi spółczynnik 1.

Obliczony w powyższy sposób spadek napięcia dla przewodu dodatniego Δe_{ax}^+ wypadnie dodatni, a dla przewodu ujemnego Δe_{ax}^- , wo-

bec odwrotnych znaków, wypadnie ujemny. To znaczy, że w przewodzie dodatnim powstaje spadek napięcia, a w przewodzie ujemnym na drodze od a do x — wzrost napięcia. Jeżeli teraz w przewodzie ujemnym będziemy śledzili napięcie na drodze powrotnej (czyli w kierunku obiegu prądu) od x do a , to zamiast wzrostu napięcia Δe_{ax}^- , otrzymamy spadek napięcia Δe_{xa}^- .

$$\Delta e_{ax}^- = - \Delta e_{xa}^-.$$

A zatem:

Spadek napięcia ΔE_{ax} dla całego toru równa się sumie spadków napięcia na obu przewodach, przyczem spadki te mają być liczone zawsze w kierunku obiegu prądu (w przewodzie dodatnim — od a do x , a w przewodzie ujemnym — od x do a).

$$\Delta E_{ax} = \Delta e_{ax}^+ + \Delta e_{xa}^-.$$

Przy metodzie wykreślnej wypadnie również obliczać spadki napięcia osobno dla każdego przewodu. Budowa wykresu zresztą pozostanie taka sama, jak w § 4, jedynie tylko odległość biegunowa będzie dwa razy większa, niż poprzednio, i zamiast $\frac{1}{2} ks$, wyniesie —

$$k \cdot s$$

Przykład 5. Obliczyć spadek napięcia na końcu elektrycznego toru tramwajowego (rys. 17). Przewód jezdny, brązowy o przewodności $57 \frac{m}{\Omega mm^2}$ i przekroju $100 mm^2$, dwie szyny stalowe o przewodności $5 \frac{m}{\Omega mm^2}$ i przekroju $2 \times 4000 mm^2$.

$$k^+ = 57 \frac{m}{\Omega mm^2} \quad s^+ = 100 mm^2 \quad k^- = 5 \frac{m}{\Omega mm^2} \quad s^- = 8000 mm^2.$$

Rozwiązanie rachunkowe. Spadek napięcia w przewodzie jezdnym:

$$\Delta e_{as}^+ = \frac{1}{57 \cdot 100} \{ 110 \cdot 1900 - 50 \cdot 1200 - 40 \cdot 800 \} = 20,53 V,$$

a w szynach:

$$\Delta e_{as}^- = \frac{1}{5 \cdot 8000} \{ -110 \cdot 1900 + 50 \cdot 1200 + 40 \cdot 800 \} = -2,68 V.$$

Spadek napięcia w całym torze elektrycznym, liczony w kierunku prądu, wynosi:

$$\Delta E_{as} = \Delta e_{as}^+ + \Delta e_{as}^- = \Delta e_{as}^+ - \Delta e_{sa}^- = 20,53 - (-2,68) = 23,21 V.$$

Rozwiązanie wykreślne. Bierzemy następującą skalę:

$$1A = 0,2 \text{ mm}$$

$$1m = 0,05 \text{ mm}$$

$$1m\Omega^{-1} = 0,0025 \text{ mm}$$

Kreślimy szereg prądowy de . Odległość biegunowa dla przewodu jezdnego wyniesie:

$$k^+ s^+ = 57 \cdot 100 = 5700 \text{ m}\Omega^{-1}$$

(w skali... 14,25 mm), a dla szyn —

$$k^- s^- = 5 \cdot 8000 = 40000 \text{ m}\Omega^{-1}$$

(w skali... 100 mm).

Wykresy spadku napięcia będą przylegały jeden do drugiego i utworzą jedną całość, gdy bieguny o_+ , o_- ustawimy na poziomie podnóża szeregu prądowego e ; jeden biegun z jednej strony szeregu, drugi — z drugiej. Nakreślenie wieloboków sznurowych nie nastreczy żadnych trudności. Skala napięciowa będzie następująca:

$$1V = \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,0025} = 4 \text{ mm},$$

a spadki wyniosą:

$$\Delta e_{as}^+ = \frac{z \cdot z''}{4} \approx \frac{82}{4} \approx 20,5 \text{ V (ściślej 20,53)}$$

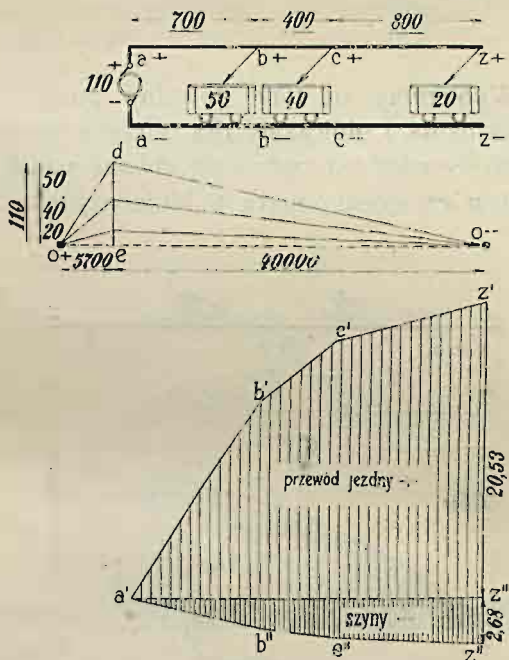
$$\Delta e_{za}^- = \frac{z''' \cdot z''}{4} \approx \frac{11}{4} \approx 2,75 \text{ V (ściślej 2,68)}$$

razem

$$\Delta E_{as} \approx 20,5 + 2,75 \approx 23,25 \text{ V (ściślej 23,21)}.$$

§ 6. Obciążenie rozłożone równomiernie.

W przykładach poprzednich obciążenie było zawsze skupione w jednym lub w kilku punktach. Obecnie przejdziemy do obciążenia równomiernie rozłożonego wzdłuż całego toru. Przy projektowaniu sieci elektrycznych przyjmuje się nieraz taki właśnie rozkład obciążenia, gdy brak ścisłych danych nie pozwala na wyznaczenie punktów odbioru, ani na ustalenie wartości prądów odbieranych.



Rys. 17.

Rys. 18 przedstawia tor az , zasilany w punkcie a prądem i_a , obciążony równomiernie po α amperów na każdy metr długości toru. Zasilanie musi się równać odbiorom:

$$i_a = \alpha l_{az}. \quad (a)$$

Wybieramy na torze dowolny punkt t w odległości x od punktu zasilania i obliczamy dla odcinka at spadek napięcia ΔE_{at} wg wzoru (8). Spadek ten będzie się równał sumie algebraicznej momentów prądów względem punktu t . Moment prądu zasilania równa się iloczynowi:

$$i_a x,$$

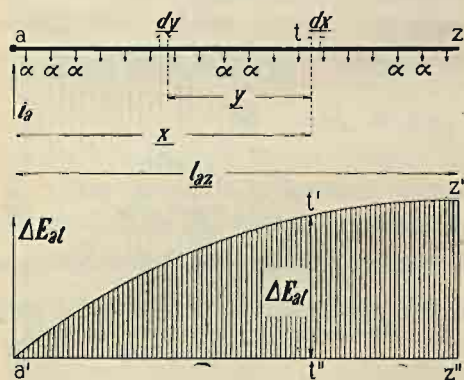
moment zaś nieskończenie małego prądu:

$$\alpha dy,$$

odbieranego w odległości y od punktu t na nieskończenie małym odcinku dy , równa się iloczynowi:

$$(\alpha dy) y.$$

Wobec tego spadek napięcia ΔE_{at} wyrazi się wzorem:



Rys. 18.

$$\Delta E_{at} = \frac{2}{ks} \left\{ i_a x - \int_{y=0}^{y=x} (\alpha dy) y \right\} = \frac{2}{ks} \left\{ i_a x - \alpha \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=x} \right\}$$

$$\Delta E_{at} = \frac{2}{ks} \left(i_a x - \frac{1}{2} \alpha x^2 \right). \quad (13)$$

Kresa $a't'z'$ (rys. 18) przedstawia spadki napięcia dla każdego punktu toru elektrycznego. Np. rzędna $t't''$ ilustruje spadek napięcia w punkcie t . Wzór (13) jest równaniem krzywej $a't'z'$. Jak widać z równania, krzywa jest parabolą. Zachodzi pytanie, w którym punkcie znajduje się wierzchołek tej paraboli. U wierzchołka paraboli wielkość ΔE_{at} osiągnie maximum. Maximum znajdziemy przez zrównanie z zerem funkcji pochodnej:

$$\frac{d\Delta E_{at}}{dx} = \frac{2}{ks} (i_a - \alpha x) = 0.$$

Wierzchołek paraboli wypada przy odciętej x , dla której

$$i_a = \alpha x.$$

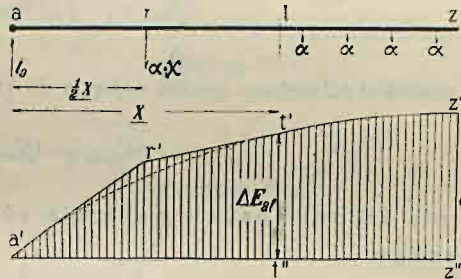
Porównyując to równanie ze wzorem (a), widzimy, że w tym przypadku

$$x = l_{as},$$

a zatem wierzchołek paraboli wypada na krańcu obciążenia rozłożonego równomiernie.

Na rys. 19 przerysowano z rysunku poprzedniego z tą jednak różnicą, że obciążenie, rozłożone na odcinku at , skupiono w jednym punkcie środkowym r . Obliczmy spadek napięcia w punkcie t :

$$\Delta E_{at} = \frac{2}{ks} \left[i_a x - (\alpha x) \frac{1}{2} x \right].$$



Rys. 19.

Otrzymujemy równanie identyczne ze wzorem (13). Stąd wyprowadzamy wniosek, że

Spadek napięcia na krańcu (t) dowolnego odcinka toru (at), obciążonego równomiernie, jest taki, jak gdyby cały równomierny odbiór prądu na tym odcinku był skupiony w jednym punkcie środkowym (r).

Przez skupienie obciążenia rozłożonego zmienia się jednak wykres spadku napięcia na całym tym odcinku. Widać to z rysunku 19. Zamiast łuku parabolicznego $a't'$, otrzymujemy linię łamaną $a'r't'$, złożoną z dwóch stycznych: $a'r'$ i $r't'$. Jedynie tylko rzędna krańcowa na tym odcinku $t't''$ nie ulega zmianie. Trzeba o tem pamiętać, gdyż bezkrytyczne stosowanie powyższego pravidła prowadzi do pomyłek.

Przy sposobności obliczymy dla całego toru średni spadek napięcia ΔE_{sr} . W tym celu wypadnie nam splanimetrować na rys. 19 pole $a't'z'z''t''$ i zastąpić je prostokątem równowartym o tej samej podstawie $a'z''$. Wysokość prostokąta będzie średnim spadkiem napięcia ΔE_{sr} . Obliczenie to wykonamy rachunkowo:

$$\Delta E_{sr} = \frac{1}{l_{as}} \int_a^z \Delta E_{at} dx.$$

Zależność zmiennego spadku napięcia ΔE_{at} od zmiennej długości x wyraża wzór (13), a więc:

$$\begin{aligned} \int_a^x \Delta E_{at} dx &= \frac{2}{ks} \int_a^x \left(i_a x - \frac{1}{2} \alpha x^2 \right) dx = \frac{2}{ks} \left[\frac{1}{2} i_a x^2 - \frac{1}{6} \alpha x^3 \right]_a^{l_{az}} = \\ &= \frac{2}{ks} \left[\frac{1}{2} i_a l_{az}^2 - \frac{1}{6} (\alpha l_{az}) l_{az}^2 \right] = \frac{2}{3} \frac{i_a l_{az}^2}{ks}. \end{aligned}$$

A zatem średni spadek napięcia wynosi:

$$\Delta E_{sr} = \frac{1}{l_{az}} \int_a^x \Delta E_{at} dx = \frac{2}{3} \frac{i_a l_{az}}{ks},$$

a ponieważ największy spadek napięcia do końca toru z wyraża się wzorem:

$$\Delta E_{\max} = \Delta E_{az} = \frac{i_a l_{az}}{ks},$$

przeto średni spadek napięcia równa się $\frac{2}{3}$ spadku największego:

$$\Delta E_{sr} = \frac{2}{3} \Delta E_{\max}.$$

Metoda wykreślna polega na zbudowaniu paraboli. Na rys. 20 podany jest tor az , obciążony równomiernie na całej długości. Ażeby znaleźć 10 punktów paraboli, ilustrującej spadki napięcia naszego toru, dzielimy tor na 10 równych części: \overline{OI} , \overline{II} , \overline{III} i t.d. Nakreśliwszy szeregi prądowy wo , dzielimy go również na 10 równych części: $\overline{O1}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$ i t.d. Na wysokości wierzchołka w naszego szeregu prądowego stawiamy biegun o_1 w odległości równej, jak zwykle, $\frac{1}{2} ks$. Dla wykreślenia paraboli przedłużamy promień oo_1 , na przedłużeniu odkładamy jeszcze raz długość promienia oo_1 i znajdujemy w ten sposób nowy biegun pomocniczy o_1'

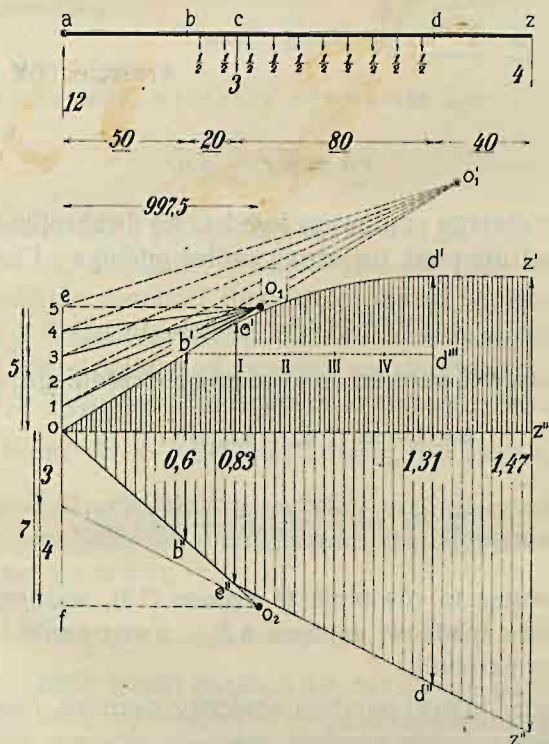
$$o_1 o_1' = oo_1.$$

Chcąc znaleźć punkt paraboli dla dowolnego punktu toru np. dla punktu VI , prowadzimy promień z bieguna pomocniczego o_1' do odpowiedniego punktu w szeregu prądowym, w naszym przykładzie do punktu 6, i równolegle do tego promienia $o_1'6$ kreślimy przez punkt wyjścia naszej paraboli o linię prostą ou . Punkt przecięcia się tej linii z prostą ou , wystawioną w punkcie VI , czyli punkt VI_1 , będzie szukany punktem paraboli.

prostej i przejdzie w parabolę dopiero przy odcinku z obciążeniem rozłożonym.

Przy projektowaniu sieci spotykamy się nieraz z obciążeniem częściowo skupionem (fabryki, instytucje większe), a częściowo rozłożonym (drobne instalacje, przeważnie oświetleniowe). Obliczając wykresnie sieć o takim obciążeniu mieszanem, będziemy budowali jeden wykres z przypuszczeniem, że tor podlega tylko obciążeniu skupionemu, a drugi — że podlega tylko obciążeniu równomiernemu. Przy odpowiednim ustawieniu biegunów (rys. 21) oba wykresy będą przylegały do siebie, tworząc jedną całość.

Przykład 6. Tor z rys. 21 ma obciążenie skupione w punktach c i l' obciążenie rozłożone równomiernie na odcinku bd' po $0,05 A$ na metr biezący. Przewody miedziane o przekroju $35 mm^2$. Obliczyć spadki napięcia w punktach: b, c, d, z .



Rys. 21.

Prąd zasilania wynosi:

$$3 + 4 + 0,05 \cdot 100 = 12 A.$$

Rozwiązanie rachunkowe.

$$\Delta E_{ab} = \frac{2}{57 \cdot 35} 12 \cdot 50 = 0,60 \text{ V},$$

$$\Delta E_{ac} = \frac{2}{57 \cdot 35} (12 \cdot 70 - 1 \cdot 10) = 0,83 \text{ V},$$

$$\Delta E_{ad} = \frac{2}{57 \cdot 35} (12 \cdot 150 - 3 \cdot 80 - 5 \cdot 50) = 1,31 \text{ V},$$

$$\Delta E_{as} = \frac{2}{57 \cdot 35} (12 \cdot 190 - 3 \cdot 120 - 5 \cdot 90) = 1,47 \text{ V}.$$

Rozwiązanie wykresne. Skala: $1A = 5 \text{ mm}$, $1m = 0,5 \text{ mm}$,
 $1m\Omega^{-1} = 0,04 \text{ mm}$,

$$1V = \frac{5 \cdot 0,5}{0,04} = 62,5 \text{ mm}.$$

Odległość biegunowa:

$$\frac{1}{2} k s = \frac{1}{2} 57 \cdot 35 = 997,5 \text{ m } \Omega^{-1},$$

czyli w skali ... 39,9 mm.

Obciążenie skupione. Kreślimy szereg prądowy of , stawiamy biegun o_2 i budujemy wielobok sznurowy $o c' z'' z'''$. Rzędne tego wieloboku są obrazem spadków napięcia, wywołanych wyłącznie obciążeniem skupionem.

Obciążenie rozłożone. Kreślimy szereg prądowy eo , stawiamy biegun o_1 i biegun pomocniczy o'_1 . Kreślimy pierwszy bok wieloboku ob' . (Punkt b' jest punktem wyjścia paraboli). Dzielimy odcinek poziomy $\overline{b'd''}$, przypuśćmy, na 5 równych części: $\overline{b'I}$, \overline{III} i t. d. i również na 5 części dzielimy szereg prądowy oe . Budujemy łuk paraboli $b'd'$ w sposób opisany wyżej, wreszcie zamykamy wykres bokami $d'z'$ i oz''' , równoległymi do promienia poziomego o_1e .

Całkowite spadki napięcia wynoszą:

$$\Delta E_{ab} = \frac{\overline{b'b''}}{62,5} = \frac{37}{62,5} = 0,595 \text{ (ściślej } 0,6) \text{ V},$$

$$\Delta E_{ac} = \frac{\overline{c'c''}}{62,5} = \frac{52}{62,5} = 0,83 \text{ V},$$

$$\Delta E_{ad} = \frac{\overline{d'd''}}{62,5} = \frac{82}{62,5} = 1,31 \text{ V},$$

$$\Delta E_{as} = \frac{\overline{z'z''}}{62,5} = \frac{92}{62,5} = 1,47 \text{ V}.$$

ROZDZIAŁ II.

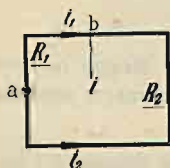
Rozpływ prądu i spadki napięcia w torach zamkniętych.

§ 7. Tor okrężny, obciążony w jednym punkcie.

Rys. 22 przedstawia tor okrężny $ab a$, zasilany w punkcie a , z odbiorem prądu i w punkcie b . Między punktami a i b są dwie drogi elektryczne o oporności R_1 i R_2 i po obu popłyną prądy: i_1 , i_2 . Zadanie polega na obliczeniu tych prądów.

Dla rozwiązania zadania sposobem rachunkowym oprzemy się na dwóch pewnikach:

1) suma algebraiczna prądów, spotykających się w punkcie b , musi się równać zero (1-e prawo Kirchoffa):



$$i_1 + i_2 - i = 0 \quad (a)$$

2) w punkcie b może panować tylko jedno napięcie, a więc spadki napięcia na obu drogach elektrycznych muszą być jednakowe:

Rys. 22.

$$i_1 R_1 = i_2 R_2. \quad (b)$$

Z równań (a) i (b) wynika, że

$$i_1 = \frac{i R_2}{R_1 + R_2} \quad i_2 = \frac{i R_1}{R_1 + R_2} \quad (14)$$

Zadanie jest już rozwiązane. Jak widać z równań, większy prąd dopływa od strony mniejszej oporności, mniejszy prąd — od strony większej oporności.

Przetnijmy tor okrężny (rys. 22) w punkcie zasilającym a i wyprostujmy go, jak podaje rys. 23. Otrzymamy, zamiast okrężnego, zwykajny tor zamknięty, zasilany na obu krańcach a_1 i a_2 prądami o jednakowych napięciach. Rozpływ prądu nie ulegnie żadnej zmianie, innymi słowy, prądy zasilania i_1 , i_2 pozostaną te same i dadzą się obliczyć wg podanych wyżej wzorów (14).

Do wzorów tych możemy dojść drogą innego jeszcze rozumowania. Przyjmijmy na chwilę, że tor $a_1 a_2$ (rys. 23) jest zasilany tylko z jednego krańca a_1 i obliczmy spadek napięcia dla drugiego krańca a_2 :

$$\Delta E_{a_1 a_2} = i_1 (R_1 + R_2) - i R_2.$$

Ponieważ jednak punkt a_2 ma w rzeczywistości to samo napięcie, co punkt a_1 , przeto spadek napięcia $\Delta E_{a_1 a_2} = 0$, a więc:

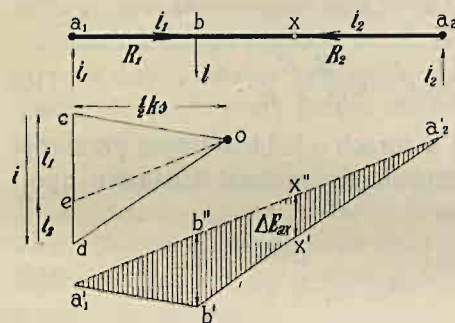
$$i_1 (R_1 + R_2) - i R_2 = 0.$$

W podobny sposób, obliczając spadek napięcia dla krańca a_1 , otrzymamy równanie:

$$i_2 (R_1 + R_2) - i R_1 = 0.$$

Z równań tych bezpośrednio wypływają wzory (14).

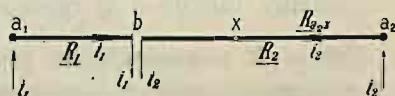
W punkcie odbioru prądu b spływają się prądy przewodowe z dwóch stron. Punkt ten nazywamy punktem spływu prądów. Prąd odbierany i składa się jakby z dwóch prądów, z których i_1 dopływa z punktu a_1 , a i_2 — z punktu a_2 . Gdy przetniemy tor (rys. 24) w punkcie b , a prąd



Rys. 23.

i rozszczepimy na części składowe tak, aby na lewy odcinek przypadł prąd i_1 , a na prawy — i_2 , to w przewodach nie zajdą żadne zmiany ani w rozplywie prądu, ani w spadkach napięcia. Nic się nie zmieni, czy części rozciętego toru rozsuniemy, czy też zpowrotem zetkniemy je w punkcie b . W ten sposób tor zamknięty możemy rozpatrywać jako zespół dwóch torów otwartych.

Obliczenie spadku napięcia w torach zamkniętych sprowadza się do ustalenia rozplywu prądu. Gdy rozplyw prądu jest ustalony, rozcinamy tory w punktach spływu i rozpatrujemy otrzymane w ten sposób tory otwarte, każdy z osobna. W naszym przykładzie spadek napięcia w dowolnym punkcie x (rys. 24) na torze otwartym po stronie prawej da się przedstawić wyrazem:



Rys. 24.

$$\Delta E_{a_2 x} = i_2 R_{a_2 x}.$$

W torach otwartych największy spadek napięcia panuje na krańcu, w torach zaś zamkniętych — w punktach spływu.

W naszym przykładzie największy spadek wypadnie w punkcie b . Obliczmy ten spadek, rozpatrując tor otwarty $a_1 b$ (rys. 24):

$$\Delta E_{a_1 b} = i_1 R_1 = \frac{i R_2}{R_1 + R_2} R_1.$$

a teraz obliczmy spadek w punkcie b , rozpatrując tor otwarty $a_2 b$:

$$\Delta E_{a_2 b} = i_2 R_2 = \frac{i R_1}{R_1 + R_2} R_2.$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy, jak było do przewidzenia, tę samą wartość:

$$\Delta E_{max} = \Delta E_{a_1 b} = \Delta E_{a_2 b} = i \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (15)$$

Przy ustalaniu rozptywu prądu w torach o jednostajnym przekroju można wzory (14) przekształcić, podstawiając, zamiast stosunku oporności, stosunek długości torów, a więc:

$$i_1 = \frac{i l_2}{l_1 + l_2} \quad i_2 = \frac{i l_1}{l_1 + l_2} \quad (16)$$

Podobne wzory mieliśmy już w mechanice. Wróćmy do rys. 23 i przypuśćmy, że przedstawia on nie tor elektryczny, lecz belkę sztywną $a_1 a_2$, podpartą w punktach a_1 i a_2 , a obciążoną siłą i w punkcie b . Siły odporu i_1, i_2 wyrażą się temi samymi wzorami (16), które wprowadziliśmy dla prądów zasilania.

Przechodzimy do obliczenia rozptywu prądu sposobem wykreślnym. Tor $a_1 a_2$ na rys. 23 ma przekrój jednostajny, a więc długości odcinków są proporcjonalne do oporności. Kreślimy szereg prądowy (rys. 23), który w tym przykładzie składa się z jednego odcinka:

$$\overline{cd} = i.$$

Stawiamy biegun o w odstępie $\frac{1}{2} ks$. Budujemy wielobok sznurowy: bok $a'_1 b'$ równoległe do promienia oc i bok $b' a'_2$ równoległe do od . Chcąc wielobok zamknąć, trzeba sobie uprzytomnić, że wielobok ten ma być obrazem spadków napięcia. Rzędne, zawarte w wieloboku, muszą być proporcjonalne do odpowiednich spadków. Na obu krańcach toru spadki równają się zeru, a więc i rzędne muszą się równać zeru. Stąd wniosek, że boki, zamykającym wielobok, będzie prosta, łącząca punkt a'_1 z punktem a'_2 .

Nakreśliwszy ostatni bok $a'_1 a'_2$, cofamy się do szeregu prądowego i prowadzimy promień oe równoległe do boku $a'_1 a'_2$. Znajdujemy

punkt e , który dzieli odcinek cd na dwa odcinki: ce i ed . Odcinki te dają nam wartości prądów zasilania i_1, i_2 . Trzeba tylko ustalić, który z tych odcinków jest prądem i_1 , a który prądem i_2 .

W tym celu zwracamy się do szeregu prądowego $ce - ed - dc$. Wybieramy jeden z punktów krańcowych, przypuśćmy c , i widzimy, że punkt ten w szeregu prądowym znajduje się na granicy między odcinkami dc, ce . Przechodzimy do wieloboku sznurowego i śledzimy bok równoległy do promienia punktu c . Bokiem tym jest bok $a'_1 b'$, który ciągnie się od punktu przyłożenia prądu i_1 (punkt a_1) do punktu przyłożenia prądu i (punkt b). Z zestawienia tego wynika, że odcinki dc i ce odpowiadają prądom i, i_1 . Ponieważ wiemy, że odcinek dc równa się prądowi i , przeto dochodzimy do wniosku, że odcinek ce równa się prądowi i_1 .

Zadanie jest już rozwiązane, rozptyw prądu ustalony, a jednocześnie uwidocznił się spadek napięcia w każdym punkcie toru, jako rzędne wieloboku sznurowego. Tak np. rzędna $x''x'$ jest obrazem spadku napięcia w punkcie x , a rzędna $b''b'$ — największego spadku napięcia w punkcie spływu.

Należałoby jeszcze dowieść, że wyniki rozwiązania wykreślnego odpowiadają rzeczywistości. W tym celu sprawdzimy, czy znalezione prądy zasilania i_1, i_2 odpowiadają dwom równaniom, które ułożyliśmy na początku rozwiązania rachunkowego:

$$i_1 + i_2 - i = 0, \quad (a)$$

$$i_1 R_1 = i_2 R_2. \quad (b)$$

Ponieważ odcinki ce i ed , przedstawiające prądy i_1, i_2 , w sumie dają odcinek cd , równający się prądowi i , przeto pierwsze równanie jest spełnione. Ażeby sprawdzić równanie drugie, rozpatrujemy podobieństwo trójkątów:

$$\Delta a'_1 b'' b' \sim \Delta o e c,$$

$$\Delta a'_2 b' b'' \sim \Delta o d e.$$

Z podobieństwa tych trójkątów wynika proporcjonalność podstaw i wysokości:

$$\overline{b'' b'} : \overline{a_1 b} = \overline{ce} : \left(\frac{1}{2} ks\right),$$

$$\overline{b'' b'} : \overline{b a_2} = \overline{ed} : \left(\frac{1}{2} ks\right),$$

stąd wynika, że:

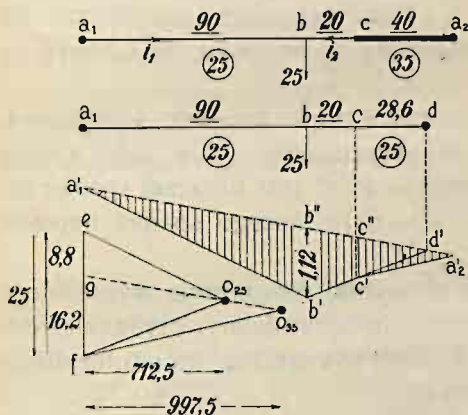
$$\overline{ce} \cdot \overline{a_1 b} = \overline{ed} \cdot \overline{b a_2}.$$

Ponieważ długości toru $\overline{a_1 b}$ i $\overline{b a_2}$ przy jednostajnym przekroju są proporcjonalne do oporności R_1 i R_2 , a odcinki \overline{ce} i \overline{ed} są obrazem prądów i_1 , i_2 , przeto otrzymujemy:

$$i_1 R_1 = i_2 R_2,$$

czego właśnie należało dowieść.

Przykład 7. Tor $a_1 a_2$ (rys. 25) jest zasilany jednakowymi napięciami z obu krańców. Przewody miedziane o przekroju: 25 mm^2 na odcinku $a_1 c$ i 35 mm^2 na odcinku $c a_2$. Ustalić rozptyw prądu i największy spadek napięcia.



Rys. 25.

Odcinek $c a_2$ różni się przekrojem od pozostałej części toru. Dla uproszczenia zadania sprowadzimy cały tor do przekroju jednostajnego 25 mm^2 . W tym celu zastąpimy odcinek $c a_2$ o długości 40 m i przekroju 35 mm^2 innym odcinkiem $c d$ (rys. 25) o przekroju 25 mm^2 i długości takiej, aby oporność nie uległa zmianie. Długość ta wyniesie:

$$40 \frac{25}{35} \approx 28,6 \text{ m}.$$

Rozwiązanie rachunkowe. Prądy zasilania dadzą się obliczyć wg wzoru (16):

$$i_1 = \frac{25(20 + 28,6)}{90 + 20 + 28,6} \approx 8,8 \text{ A}, \quad i_2 = \frac{25 \cdot 90}{90 + 20 + 28,6} \approx 16,2 \text{ A},$$

a największy spadek napięcia w punkcie spływu b wg wzoru (1):

$$\Delta E_{\max} = \Delta E_{a,b} = \frac{2 \cdot 8,8 \cdot 90}{57 \cdot 25} = 1,1 \text{ V}.$$

Rozwiązanie wykreślne. Bierzemy następującą skalę:

$$1 \text{ A} = 1 \text{ mm}, \quad 1 \text{ m} = 0,5 \text{ mm}, \quad 1 \text{ m } \Omega^{-1} = 0,04 \text{ mm}.$$

Kreślimy szereg prądowy:

$$\overline{ef} = 25 \text{ A},$$

stawiamy biegun o_{25} w odległości:

$$\frac{1}{2} 57 \cdot 25 = 712,5 \text{ m } \Omega^{-1}$$

rysujemy bok $a_1' b' \parallel \overline{ef}$ i bok $b' d' \parallel \overline{fo_{25}}$, wreszcie zamykamy wielobok linją

$a_1' d'$. Promień $o_{35} g$, równoległy do boku $a_1' d'$, przecina szereg prądowy w punkcie g . Długości odcinków $\overline{eg} \approx 9 \text{ mm}$, $\overline{gf} \approx 16 \text{ mm}$ dają nam w odpowiedniej skali liczby amperów:

$$i_1 = \overline{eg} = 9 \text{ A}, \quad i_2 = \overline{gf} = 16 \text{ A},$$

a długość rzędnej $\overline{b'b''} = 14 \text{ mm}$ przedstawia największy spadek napięcia w punkcie b . Co się tyczy skali napięciowej, to ta wynosi:

$$1 \text{ V} = \frac{1 \cdot 0,5}{0,04} = 12,5 \text{ mm},$$

a więc największy spadek napięcia:

$$\Delta E_{ab} = \frac{14}{12,5} \approx 1,12 \text{ V}.$$

Zadanie jest już rozwiązane; chcąc jednak przystosować wykres spadku napięcia do rzeczywistej długości toru $a_1 a_2$, przedłużamy bok $a_1' d'$ do punktu a'_2 , rzutujemy punkt c na prostą $b' d'$, a punkt a_2 na przedłużenie $a_1' d'$ i znalezione w ten sposób punkty c' , a'_2 łączymy ze sobą prostą. Otrzymujemy wielobok $a'_1 a'_2 c' b'$, który jest wykresem spadków napięcia, przystosowanym do rzeczywistej długości toru $a_1 a_2$.

Do tego samego wyniku możemy dojść inną drogą. Obliczamy dla odcinka $c a_2$ o przekroju 35 mm^2 odległość biegunową:

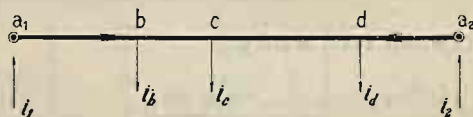
$$\frac{1}{2} 57 \cdot 35 = 997,5 \text{ m } \Omega^{-1}.$$

Biegun o_{35} stawiamy na przedłużeniu promienia $g o_{35}$ na obliczonej odległości od szeregu prądowego. Kreślimy promień $o_{35} f$ i równolegle do niego bok $c' a'_2$.

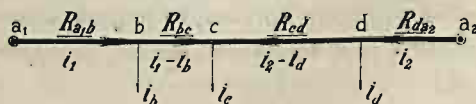
§ 8. Tor okrężny, obciążony w wielu punktach.

Rys. 26 przedstawia tor okrężny, przecięty w punkcie zasilania a i wyprostowany. Rozpływ prądów i spadki napięcia nie ulegną zmianie, jeżeli tylko napięcia na obu krańcach toru będą jednako-

Zadanie polega na ustaleniu kierunku i wartości prądu we wszystkich czterech odcinkach toru. Przy jednym punkcie odbiorczym kierunek prądów przewodowych był od razu wiadomy, obecnie wiadomy jest kierunek tylko w dwóch krańcowych odcinkach $a_1 b$ i $a_2 d$, mianowicie prąd musi płynąć od punktów zasilających do odbiorczych (rys. 26). W odcinkach zaś wewnętrznych



Rys. 26.



Rys. 27.

nie można ustalić kierunku prądu, dopóki niewiadome są wartości prądów zasilania i_1, i_2 . Nie wiadomo, czy punktem spływu prądów będzie punkt b, c czy d .

Przystępujemy do obliczenia rachunkowego. Przypuśćmy, że punktem spływu prądów będzie punkt c . W odcinku bc płynąłby wówczas prąd $i_1 - i_b$ (rys. 27), a w odcinku cd ... prąd $i_2 - i_d$. Dla dalszego obliczenia oprzemy się na tych samych dwóch zasadach, co przy torze, obciążonym w jednym punkcie:

1) suma algebraiczna prądów, spotykających się w punkcie c , musi się równać zeru:

$$(i_1 - i_b) + (i_2 - i_d) - i_c = 0; \quad (a)$$

2) w punkcie c może panować tylko jedno napięcie, a więc spadki z obu stron muszą być sobie równe:

$$i_1 R_{a,b} + (i_1 - i_b) R_{b,c} = (i_2 - i_d) R_{c,d} + i_2 R_{d,a_2}. \quad (b)$$

Wyprowadźmy z równania (a) wielkość i_1 , podstawmy znaleziony wyraz do równania (b), a otrzymamy równanie następujące:

$$\begin{aligned} i_b R_{a,b} + i_c \underbrace{(R_{a,b} + R_{b,c})}_{R_{a,c}} + i_d \underbrace{(R_{a,b} + R_{b,c} + R_{c,d})}_{R_{a,d}} = \\ = i_2 \underbrace{(R_{a,b} + R_{b,c} + R_{c,d} + R_{d,a_2})}_{R_{a,a_2}}, \end{aligned}$$

czyli:

$$i_b R_{a,b} + i_c R_{a,c} + i_d R_{a,d} = i_2 R_{a,a_2}.$$

W podobny sposób wyprowadzimy drugie równanie:

$$i_d R_{d,a_2} + i_c R_{c,a_2} + i_b R_{b,a_2} = i_1 R_{a,a_2},$$

a z równań tych wzory:

$$i_1 = \frac{i_d R_{d,a_2} + i_c R_{c,a_2} + i_b R_{b,a_2}}{R_{a,a_2}} \quad i_2 = \frac{i_b R_{a,b} + i_c R_{a,c} + i_d R_{a,d}}{R_{a,a_2}}. \quad (17)$$

Jakkolwiek wzory te wyprowadziliśmy, przypuszczając, że punkt c będzie punktem spływu, to jednak wzory te są ważne ogólnie i otrzymalibyśmy je w tej samej formie, przyjmując za punkt spływu punkt b lub d .

Jeszcze prędzej prowadzi do celu inne rozumowanie, które stosowaliśmy już do toru o jednym punkcie odbiorczym. Zapomnijmy na chwilę, że punkt a_2 jest punktem zasilającym i obliczmy dla niego spadek napięcia w porównaniu z punktem a_1 :

$$\Delta E_{a_1, a_2} = i_1 R_{a_1, a_2} - i_b R_{ba_2} - i_c R_{ca_2} - i_d R_{da_2}.$$

Ponieważ jednak punkt a_2 jest punktem zasilającym o tem samym napięciu, co punkt a_1 , przeto spadek napięcia $\Delta E_{a_1, a_2}$ równa się zeru:

$$i_1 R_{a_1, a_2} - i_b R_{ba_2} - i_c R_{ca_2} - i_d R_{da_2} = 0.$$

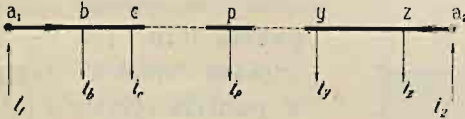
W podobny sposób otrzymamy równanie:

$$i_2 R_{a_1, a_2} - i_b R_{a, b} - i_c R_{a, c} - i_d R_{a, d} = 0,$$

a z równań tych—wzory (17).

Przechodzimy do przykładu ogólnego. Tor (rys. 28) $a_1 a_2$ jest zasilany na krańcach, a obciążony w punktach:

$b, c \dots p \dots y, z$



Rys. 28.

prądami: $i_b, i_c \dots$ ogólnie $i_p \dots i_y, i_z$.

Dla torów takich, które są zasilane na obu krańcach z punktów o jednakowym napięciu:

Prąd zasilania jednego krańca toru znajdziemy przez zrównanie z zerem wyrazu, przedstawiającego spadek napięcia od tegoż krańca do krańca przeciwnego.

Wzory (17) uogólnione przybiorą postać następującą:

$$\left[i_1 = \frac{\sum_{a_1}^{a_2} i_p R_{pa_2}}{R_{a_1, a_2}} \right] \quad \left[i_2 = \frac{\sum_{a_1}^{a_2} i_p R_{pa_1}}{R_{a_1, a_2}} \right] \quad (18)$$

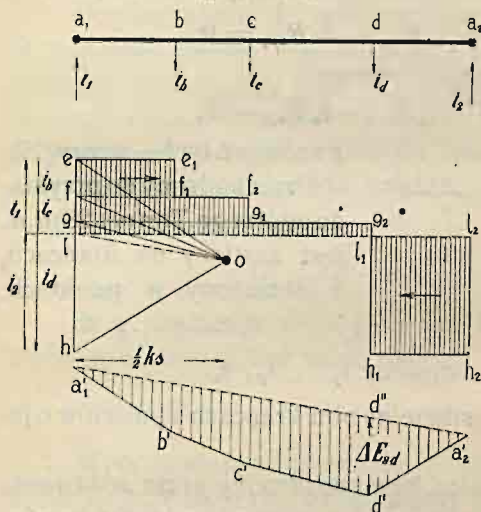
Dla torów o przekroju jednostajnym można wprowadzić, zamiast stosunku oporności, stosunek długości odcinków:

$$\left[i_1 = \frac{\sum_{a_1}^{a_2} i_p l_{pa_2}}{l_{a_1, a_2}} \right] \quad \left[i_2 = \frac{\sum_{a_1}^{a_2} i_p l_{pa_1}}{l_{a_1, a_2}} \right] \quad (19)$$

Z chwilą ustalenia rozplywu prądów, tor zamknięty można rozpatrywać, jako zespół dwóch torów otwartych. Spadek napięcia oblicza się, jak w torach otwartych. Największy spadek napięcia wypada w punkcie splywu, gdyż punkt ten jest jakby krańcem, przylegających do siebie torów otwartych.

Obliczenie wykreślne. Tor $a_1 a_2$ na rys. 29 ma przekrój jednostajny, a więc długości są proporcjonalne do oporności. Kreślimy szereg prądowy: $efgh$, stawiamy biegun o , budujemy wielobok sznurowy:

$a_1'b' \parallel oe$, $b'c' \parallel of$, $c'd' \parallel og$, $d'a'_2 \parallel oh$, zamykamy wielobok linią $a_1'a'_2$ i prowadzimy promień $ol \parallel a_1'a'_2$. Punkt l dzieli szereg prądowy na dwa odcinki: $el = i_1$, $lh = i_2$.



Rys. 29.

Zadanie jest już rozwiązane: prądy zasilania są wyznaczone, a rzędne wieloboku sznurowego podają spadki napięcia dla każdego punktu toru. Tak np. największy spadek napięcia w punkcie spływu d przedstawia rzędna $a''a'$.

Zbudujemy jeszcze wykres prądów przewodowych. Na wysokości punktu e , leżącego między i_1 , i_b , kreślimy linię poziomą ee_1 od punktu przyłożenia prądu i_1 (a_1) do punktu przyłożenia prądu $i_b(b)$. Rozumując

w ten sposób, kreślimy następnie poziome: f_1f_2 , g_1g_2 , h_1h_2 , ll_2 . W ten sposób powstaje wielobok $ee_1f_1f_2g_1g_2h_1h_2l_2l$, którego rzędne przedstawiają prądy przewodowe dla każdego punktu toru. Wielobok ten przecina linia średnicowa ll_2 . Rzędne nad tą linią dają prądy, płynące od punktu a_1 , rzędne zaś pod tą linią — prądy, płynące w przeciwną stronę od punktu a_2 . Linia średnicowa przecina bok g_2h_1 w punkcie l_1 na dwa odcinki: g_2l_1 i l_1h_1 , które przedstawiają prądy, płynące z obu stron do punktu d .

Mimochodem zaznaczmy, że obie części wieloboku: 1) $ee_1f_1f_2g_1g_2l_1l$ 2) $l_1l_2h_2h_1$, oddzielone od siebie linią średnicową ll_2 , pod względem obszaru (pola) są sobie równe. Obszar bowiem każdej połowy mierzy się iloczynem prądów przewodowych (rzędne) przez oporności (odcięte), a więc ilustruje spadek napięcia toru od punktu zasilającego a do punktu spływu d . Spadki napięcia od a_1 do d i od a_2 do d są sobie równe, a więc i obszary obu części wieloboku muszą być także równowarte.

Przykład 8. Tor a_1a_2 (rys. 30) jest zasilany z obu krańców prądami o jednakowym napięciu. Obciążenie skupione: $3A$ w punkcie c i równomiernie rozłożone na odcinku bd po $0,05A$ na metr bieżący. Przewody miedziane o przekroju $35mm^2$. Obliczyć rozptyw prądów i największy spadek napięcia.

Rozwiązanie rachunkowe. Spadek napięcia w punkcie a_2 równa się zeru;

głości cd . Chcąc dostosować się do zbudowanej już linii sznurowej, stawiamy biegun o na poziomie podnóża szeregu prądowego.

Sprawdzamy linię sznurową. Bok $a'b'$ jest linią prostą, równoległą do promienia of . Linia $b'd'$ jest krzywą, załamana w punkcie c' . Styczna w punkcie b' jest równoległa do promienia of , styczna w punkcie c' z lewej strony jest równoległa do og , a z prawej — do oh , wreszcie styczna w punkcie d' jest linią poziomą, równoległą do ol .

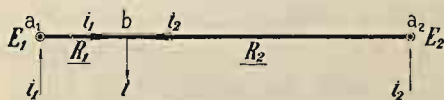
Zamykamy wielobok sznurowy cięciwą $a'a''$, prowadzimy promień om równoległy do tej cięciwy i znajdujemy punkt m , który dzieli szereg prądowy fl na dwa odcinki: $\overline{fm} = i_1 \approx 4,3 A$ i $\overline{ml} = i_2 \approx 3,7 A$.

Budujemy wykres prądów przewodowych: na poziomie f — bok ff_1 , na długości odcinka bc , obciążonego równomiernie — prosta ukośna f_1g_1 , pod punktem c — spad 3-amperowy — g_1h_1 , następnie znów prosta ukośna h_1l_1 , pozioma l_1l_2 i wreszcie ostatnia pozioma mm_1 . Znajdujemy punkt przecięcia m_2 . Rzutujemy ten punkt na tor a_1a_2 i znajdujemy punkt spływu — e . Na wykresie spadków napięcia odpowiednia rzędna daje największy spadek napięcia:

$$\Delta E_{\max} = \Delta E_{ee} = \frac{18,5}{62,5} \approx 0,3 V.$$

§ 9. Tor, zasilany na krańcach napięciami różnymi, a obciążony w jednym punkcie.

Dotychczas rozpatrywaliśmy tory określone lub, co na jedno wychodzi tory zasilane na obu krańcach napięciami jednakowymi. Przechodzimy do torów, zasilanych napięciami różnymi. Rys. 31 przedstawia najprostsz przykład takiego toru. Przypuśćmy, że napięcie E_1 (w punkcie a_1) jest większe od napięcia E_2 . W lewym odcinku prąd płynąć będzie od



Rys. 31.

a_1 do b . Co się zaś tyczy drugiego odcinka, to prąd może w nim płynąć zarówno od punktu zasilającego a_2 , jak i do tego punktu. Zależy to od różnicy napięć $E_1 - E_2$.

Obliczenie rachunkowe. Przypuśćmy, że punktem spływu będzie punkt b i że punkt zasilający a_1 wysyła prąd i_1 , a punkt $a_2 \dots i_2$. Przy rachunku opierać się będziemy na tych samych dwóch zasadach, co poprzednio, a mianowicie:

1) suma prądów, spotykających się w punkcie b , musi się równać zeru:

$$i_1 + i_2 - i = 0 \quad (a)$$

2) w punkcie b może panować tylko jedno napięcie:

$$E_1 - i_1 R_1 = E_2 - i_2 R_2. \quad (b)$$

Z równań (a) i (b) wynika, że

$$i_1 = \frac{i R_2}{R_1 + R_2} + \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \quad i_2 = \frac{i R_1}{R_1 + R_2} - \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}. \quad (20)$$

Do wzorów tych dojdziemy drogą innego rozumowania. Obliczmy spadek napięcia w punkcie a_2 względem punktu a_1 :

$$\Delta E_{a_1, a_2} = i_1 (R_1 + R_2) - i R_2.$$

Spadek ten, a raczej różnica napięć, jest nam znana i wynosi $E_1 - E_2$:

$$i_1 (R_1 + R_2) - i R_2 = E_1 - E_2.$$

W podobny sposób wyprowadzimy równanie:

$$i_2 (R_1 + R_2) - i R_1 = E_2 - E_1,$$

a z równań tych — wzory (20).

Przyjrzyjmy się bliżej tym wzorom. Każdy z nich składa się z dwóch członów, przyczem człon drugi w obu wzorach jest jednakowy i występuje raz ze znakiem plus (+), raz ze znakiem minus (—). Oznaczmy człony literami:

$$\frac{i R_2}{R_1 + R_2} = i'_1 \quad \frac{i R_1}{R_1 + R_2} = i'_2 \quad (21)$$

$$\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = I'_{12}, \quad (22)$$

a wzory nasze (20) przybiorą następującą postać uproszczoną:

$$i_1 = i'_1 + I'_{12} \quad i_2 = i'_2 - I'_{12}. \quad (23)$$

Porównajmy pierwsze człony naszych wzorów, które oznaczyliśmy literami i'_1 , i'_2 z wyrazami wzorów (14). Wyrazy są identyczne, a więc wartości i'_1 , i'_2 są to prądy, któreby wypływały z punktów a_1 , a_2 , gdyby napięcia w tych punktach były jednakowe. Przy niejednakowych napięciach, jak widać ze wzorów (23), prąd, wypływający z punktu a_1 , jest większy o wartość I'_{12} , a prąd z punktu a_2 jest mniejszy o tę samą wartość I'_{12} . Wartość I'_{12} możemy sobie wyobrazić w postaci prądu, który zjawia się obok prądów i'_1 i i'_2 z chwilą, gdy występuje różnica napięć. Co się tyczy prądu I'_{12} , to z równań (23) wynika, że ma on ten sam kierunek, co prąd i'_1 , a odwrotny, niż prąd i'_2 . Innymi słowy,

Przykład 9. Tor $a_1 a_2$ (rys. 33) taki sam, jak w przykładzie 7-ym, lecz o napięciu w punkcie a_1 większym od napięcia w punkcie a_2 o 1 volt. Obliczyć rozptyw prądów i największy spadek napięcia:

$$E_1 - E_2 = 1 V; \quad I_{ed} = 40 \frac{25}{35} = 28,6 m.$$

Rozwiązanie rachunkowe. Prądy składowe wynoszą:

$$i'_1 = \frac{25(20 + 28,6)}{90 + 20 + 28,6} \approx 8,8 A,$$

$$i'_2 = \frac{25 \cdot 90}{90 + 20 + 28,6} \approx 16,2 A,$$

prąd wyrównawczy:

$$I_{12} = \frac{1}{\frac{2}{57 \cdot 25} (90 + 20 + 28,6)} \approx 5,1 A,$$

prądy rzeczywiste:

$$i_1 = 8,8 + 5,1 = 13,9 A, \quad i_2 = 16,2 - 5,1 = 11,1 A,$$

a największy spadek napięcia w punkcie spływu b:

$$\Delta E_{\max} = \Delta E_{a,b} = \frac{2 \cdot 13,9 \cdot 90}{57 \cdot 25} = 1,76 V.$$

Rozwiązanie wykreślne. Skala:

$$1 A = 1 mm; \quad 1 m = 0,5 mm;$$

$$1 m \Omega^{-1} = 0,04 mm;$$

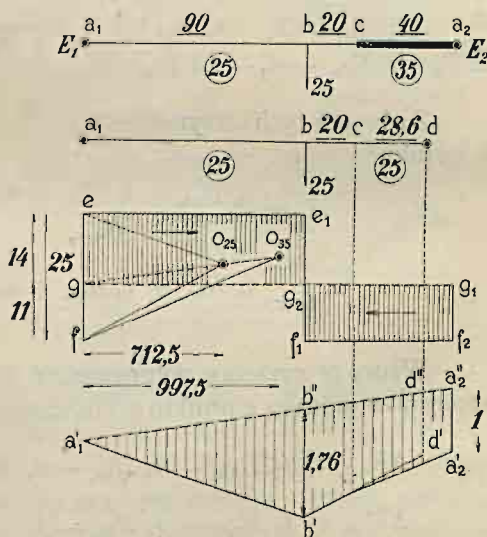
$$V = 12,5 mm.$$

Nakreśliwszy szereg prądowy ef , promienie $o_{25}e$, $o_{25}f$, boki $a'_1 b'$, $b' d'$, odkładamy różnicę napięć $\overline{d'' d'} = 1V(12,5 mm)$, zamykamy wielobok linią $a'_1 d''$ i prowadzimy promień $o_{25}g$, równoległy do boku $a'_1 d''$. Zadanie jest już rozwiązane:

$$i_1 = \overline{eg} \approx 14 A,$$

$$i_2 = \overline{gf} \approx 11 A,$$

$$\Delta E_{a,b} = \overline{b' b''} = 1,76 V.$$

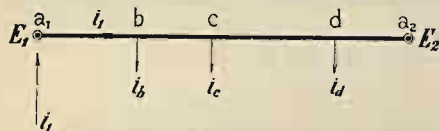


Rys. 33.

Na rys. 33 przystosowaliśmy wykres spadków napięcia do rzeczywistych przekrojów toru tak, jak w przykładzie 7, i zbudowaliśmy wykres prądów przewodowych.

§ 10. Tor, zasilany na krańcach napięciami różnymi, a obciążony w wielu punktach.

Rys. 34 przedstawia tor, obciążony w kilku punktach, a zasilany na krańcach napięciami różnymi. Napięcie E_1 jest większe od napięcia E_2 . Wobec tego nie ulega wątpliwości, że w odcinku $a_1 b$ prąd popłynie od punktu zasilającego. Kierunek prądu w pozostałych odcinkach jest niewiadomy. Jakkolwiek punkt a_2 nazywamy punktem „zasilającym”



Rys. 34.

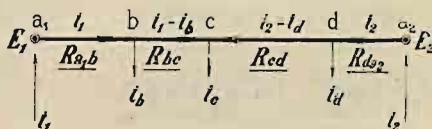
i zdawałoby się, że prąd z tego punktu powinien płynąć od a_2 do d , to jednak przy większej różnicy napięć $E_1 - E_2$ prąd popłynie przez ten punkt a_2 w odwrotnym kierunku, a więc zpo-

wrotem przez punkt zasilający np. do sąsiedniego toru rozsyłowego.

Obliczenie rachunkowe. Przypuśćmy, że punktem spływu będzie punkt c . W odcinku bc (rys. 35) płynąłby wówczas prąd $i_1 - i_b$, a w odcinku cd prąd $i_2 - i_d$. Opierając się znów na tych samych zasadach, co poprzednio, wyprowadzimy dwa równania:

$$(i_1 - i_b) + (i_2 - i_d) - i_c = 0 \quad (a)$$

$$E_1 - [i_1 R_{a_1 b} + (i_1 - i_b) R_{bc}] = E_2 - [i_2 R_{da_2} + (i_2 - i_d) R_{cd}]. \quad (b)$$



Rys. 35.

Z równań tych otrzymujemy w wyniku:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{i_b R_{ba_2} + i_c R_{ca_2} + i_d R_{da_2}}{R_{a_1 a_2}} + \frac{E_1 - E_2}{R_{a_1 a_2}} \\ i_2 &= \frac{i_b R_{ba_1} + i_c R_{ca_1} + i_d R_{da_1}}{R_{a_1 a_2}} - \frac{E_1 - E_2}{R_{a_1 a_2}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Wzory te możemy wyprowadzić wprost przez obliczenie spadku napięcia w jednym z punktów krańcowych względem drugiego:

$$\Delta E_{a_1 a_2} = i_1 R_{a_1 a_2} - i_b R_{ba_2} - i_c R_{ca_2} - i_d R_{da_2} = E_1 - E_2$$

$$\Delta E_{a_2 a_1} = i_2 R_{a_2 a_1} - i_b R_{ba_1} - i_c R_{ca_1} - i_d R_{da_1} = E_2 - E_1.$$

Wzory (24) składają się z dwóch członów, z których pierwszy jest wartością prądu zasilania przy równych napięciach na krańcach, a drugi jest ilorazem różnicy napięć przez całą oporność toru. Powtarza się to

samo, co mieliśmy przy jednym punkcie odbiorczym. Wzory (24) sprowadzają się do uproszczonego wzoru (23):

$$i_1 = i'_1 + I'_{12} \quad i_2 = i'_2 - I'_{12},$$

gdzie i'_1, i'_2 — będą umyślonymi prądami składowymi:

$$i'_1 = \frac{i_b R_{ba_2} + i_c R_{ca_2} + i_d R_{da_2}}{R_{a_1 a_2}} \quad i'_2 = \frac{i_b R_{ba_1} + i_c R_{ca_1} + i_d R_{da_1}}{R_{a_1 a_2}}, \quad (25)$$

a wielkość I'_{12} — umyślonym prądem wyrównawczym:

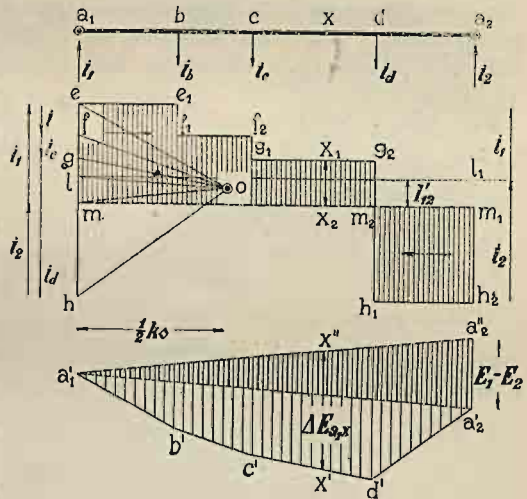
$$I'_{12} = \frac{E_1 - E_2}{R_{a_1 a_2}}. \quad (26)$$

Uogólniając te wyniki, powiemy, że:

Rzeczywiste prądy przewodowe równają się sumie algebraicznej umyślonych prądów składowych i umyślonego prądu wyrównawczego;

składowymi nazywamy prądy, które płynęłyby, gdyby napięcie na obu krańcach toru było jednakowe; w odcinkach krańcowych prądy te mają kierunek dośrodkowy, a ich wartość oblicza się wg wzoru (18);

prąd wyrównawczy płynie od krańca o wyższym napięciu do krańca o niższym napięciu i równa się ilorazowi różnicy napięć na krańcach przez oporność całego toru.



Rys. 36.

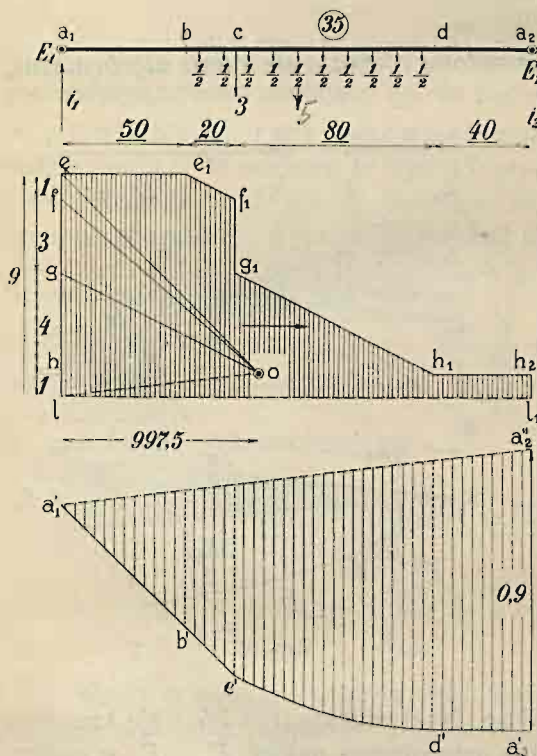
Obliczenie wykresne. Nakreśliwszy (rys. 36) linię sznurową $a'_1 b' c' d' a'_2$, odkładamy daną nam różnicę napięć $E_1 - E_2$ w postaci boku $a''_2 a'_2$ oraz zamykamy wielobok linią $a'_1 a''_2$. Promień om , równoległy do linii $a'_1 a''_2$, przecina szereg prądowy na dwa odcinki: $em = i_1$, $mh = i_2$. Rzędne wieloboku sznurowego przedstawiają spadki napięcia, a więc np. rzędna $x'' x' = \Delta E_{a,x}$. Obok szeregu prądowego zbudowano wykres prądów przewodowych. Z wykresu tego znajdujemy dla dowolnego punktu x wartość prądu przewodowego w postaci odcinka $x_1 x_2$.

i kierunek od a_1 do x (patrz—strzałki na wykresie). Wykres ten wskazuje również, że punktem spływu jest punkt d .

Gdyby napięcia na krańcach były jednakowe, wówczas wielobok zamykałby się linią $a'_1 a'_2$, a prądy zasilania równałyby się odcinkom \overline{el} i \overline{lh} . Odcinki te przedstawiają zatem wartości prądów składowych: i'_1, i'_2 , a odcinek \overline{lm} przedstawia wartość prądu wyrównawczego I'_{12} . W wieloboku sznurowym przekątna $a'_1 a'_2$ przecina rzędne na dwie części. Dolne odcinki ilustrują spadki napięcia, wywołane prądami składowymi, górne — prądem wyrównawczym.

W przykładzie powyższym na ostatnim odcinku $a_2 d$ płynął prąd o kierunku dośrodkowym od a_2 do d . Gdyby różnica napięć $E_1 - E_2$

była o tyle większa, że w wieloboku sznurowym bok $a''_2 a'_1$ miałby pochyłość promienia oh , wówczas w odcinku toru $a_2 d$ wcale nie byłoby prądu. Wreszcie, gdyby ta różnica była jeszcze większa, promień om wypadłby poniżej promienia oh , przecinałby przedłużenie szeregu prądowego, a więc w odcinku $a_2 d$ płynąłby prąd odśrodkowy od d do a_2 . Oznaczałoby to, że prąd wypływa z odcinka $d a_2$ do sąsiedniego toru, zasilanego również z punktu a_2 . W tym przypadku tor $a_1 a_2$ otrzymywałby prąd tylko z punktu a_1 , a więc byłby torem jakby otwartym.



Rys. 37.

Przykład 10. Tor $a_1 a_2$ (rys. 37) taki sam, jak w przykładzie 8, lecz o napięciu w punkcie a_1 , większym od napięcia a_2 o 0,9 wolta.

Obliczyć rozptyw prądów i największy spadek napięcia.

Rozwiązanie rachunkowe. Prądy składowe:

$$i'_1 = \frac{3 \cdot 120 + 5 \cdot 90}{190} = 4,25 \text{ A},$$

$$i'_2 = \frac{5 \cdot 100 + 3 \cdot 70}{190} = 3,75 \text{ A},$$

prąd wyrównawczy:

$$I'_{12} = \frac{0,9}{\frac{2 \cdot 190}{57 \cdot 35}} = 4,7 \text{ A},$$

prądy rzeczywiste:

$$i_1 = 4,25 + 4,7 = 8,95 \text{ A},$$

$$i_2 = 3,75 - 4,7 = -0,95 \text{ A}.$$

Prąd i_2 wypadł ujemny, to znaczy, że ma kierunek od d do a_2 . Innymi słowy, w punkcie a_2 odbywa się nie zasilanie, lecz odbiór prądu. Tor w tym przypadku jest jakby otwarty, a więc największy spadek napięcia panuje na krańcu w punkcie a_2 i wynosi, zgodnie z warunkami zadania, $0,9 \text{ V}$.

Rozwiązanie wykresłne. Skala:

$$1 \text{ A} = 5 \text{ mm}, \quad 1 \text{ m} = 0,5 \text{ mm}, \quad 1 \text{ m } \Omega^{-1} = 0,04 \text{ mm}, \quad 1 \text{ V} = 62,5 \text{ mm}.$$

Nakreśliwszy, jak w zadaniu 8, linię sznurową $a'_1 b' c' d' a'_2$, odkładamy różnicę napięć $\overline{a''_2 a'_2} = 0,9 \text{ V}$, zamykamy wielobok linią $a'_1 a''_2$, prowadzimy promień $o l \parallel a'_1 a''_2$ i znajdujemy punkt l na przecięciu promienia z przedłużeniem szeregu prądowego eh . Stąd wniosek, że prąd, przyłożony w punkcie a_2 o wartości odcinka \overline{hl} , będzie odbiorem prądu, a nie zasilaniem.

$$i_1 = \overline{el} \approx 9 \text{ A}, \quad i_2 = \overline{lh} \approx -1 \text{ A}.$$