

ROZDZIAŁ III.

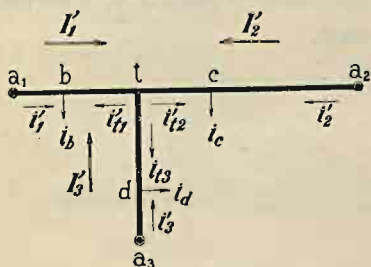
Rozpływ prądów i spadki napięcia w sieciach.

§ II. Sieć o jednym punkcie węzłowym.

Przy obliczaniu sieci elektrycznych przypuszczamy, że:

Wszystkie punkty zasilające mają napięcie jednakowe i stałe.

Już przy budowie torów zasilających trzeba pamiętać o tej zasadzie i wyznaczać takie przekroje, aby spadki napięcia we wszystkich torach zasilających były jednakowe. Przy bardzo zmiennych obciążeniach wypada nawet wprowadzać do torów oporniki regulacyjne. W elektrowni napięcie maszyn reguluje się w ten sposób, aby we wszystkich punktach zasilających napięcie było jednakowe i stałe, albo żeby przynajmniej średnie napięcie punktów zasilających było stałe.



Rys. 38.

Jeżeli jest mowa o „punktach zasilających” bez bliższego określenia ich, to należy je uważać zawsze za punkty o napięciu jednakowym i stałym.

Rys. 38 przedstawia najprostszą sieć elektryczną, zasilaną z trzech punktów: a_1, a_2, a_3 o jednakowym napięciu i złożoną z trzech boków, związanych jednym punktem węzłowym t . Gdybyśmy znali spadek napięcia w punkcie węzłowym t , zadanie rozwiązałibyśmy z łatwością. Mielibyśmy bowiem trzy tory zamknięte o różnych napięciach na krańcach, jak w §§ 9 i 10. Lecz spadek napięcia w punkcie t w porównaniu z punktami zasilającymi a_1, a_2, a_3 musimy dopiero obliczyć.

Przyjmijmy na chwilę, że punkt t jest punktem zasilającym o takim samym napięciu, jak a_1, a_2, a_3 . Obliczenie rozpływu prądów nie przedstawia żadnej trudności. Z punktów a_1, a_2, a_3 wypłyną prądy i'_1, i'_2, i'_3 , a z punktu t prądy i'_t, i'_t, i'_t . Ponieważ jednak punkt t nie jest zasilającym, przeto nie wyda z siebie żadnego prądu, a suma prądów:

$$i'_1 + i'_2 + i'_3$$

musi dopłynąć do sieci dodatkowo z punktów zasilających a_1, a_2, a_3 . Te prądy dodatkowe oznaczmy literami I'_1, I'_2, I'_3 . Otrzymujemy równanie:

$$i'_{t_1} + i'_{t_2} + i'_{t_3} = I'_1 + I'_2 + I'_3.$$

Równanie to możemy wyprowadzić w inny sposób. Boki $a_1 t, a_2 t, a_3 t$ mogą być uważane za tory, zasilane z obu krańców napięciami różnymi. Prądy, płynące w tych bokach, równają się sumie algebraicznej umyślonych prądów składowych i wyrównawczych. Oznaczmy prądy składowe, wypływające z punktu t , przez $i'_{t_1}, i'_{t_2}, i'_{t_3}$, a prądy wyrównawcze, płynące do punktu t , przez I'_1, I'_2, I'_3 .

Na podstawie 1-go prawa Kirchhoffa suma prądów rzeczywistych, spotykających się w punkcie t , musi się równać zeru, a więc:

$$(I'_1 - i'_{t_1}) + (I'_2 - i'_{t_2}) + (I'_3 - i'_{t_3}) = 0, \quad (a)$$

czyli:

$$\underbrace{I'_1 + I'_2 + I'_3}_{\text{wyrównawcze}} - \underbrace{i'_{t_1} - i'_{t_2} - i'_{t_3}}_{\text{składowe}} = 0. \quad (b)$$

Prądy wyrównawcze równają się ilorazowi różnicy napięć przez oporność toru. W tym przypadku różnicą napięć jest spadek napięcia od punktów zasilających a do punktu węzłowego t .

$$I'_1 = \frac{\Delta E_{at}}{R_{a_1 t}} \quad I'_2 = \frac{\Delta E_{at}}{R_{a_2 t}} \quad I'_3 = \frac{\Delta E_{at}}{R_{a_3 t}}.$$

Wprowadźmy, zamiast oporności R , przewodności torów G :

$$G_{a_1 t} = \frac{1}{R_{a_1 t}} \quad G_{a_2 t} = \frac{1}{R_{a_2 t}} \quad G_{a_3 t} = \frac{1}{R_{a_3 t}},$$

a otrzymamy dla prądów wyrównawczych następujące wyrazy:

$$I'_1 = \Delta E_{at} G_{a_1 t} \quad I'_2 = \Delta E_{at} G_{a_2 t} \quad I'_3 = \Delta E_{at} G_{a_3 t}. \quad (c)$$

Podstawiając te wyrazy do równania (b), otrzymujemy:

$$\underbrace{\Delta E_{at} (G_{a_1 t} + G_{a_2 t} + G_{a_3 t})}_{\text{wyrównawcze}} - \underbrace{i'_{t_1} - i'_{t_2} - i'_{t_3}}_{\text{składowe}} = 0. \quad (d)$$

Przewodności boków sieci są nam znane, prądy składowe możemy obliczyć, spadek napięcia ΔE_{at} znajdziemy z równania (d), a znalazłszy spadek, obliczymy prądy wyrównawcze. Sumując algebraicznie prądy składowe z wyrównawczymi, otrzymamy w końcu prądy rzeczywiste.

Wróćmy jeszcze do rys. 38 i przypuśćmy, że, oprócz podanych na rysunku odbiorów prądu, jest jeszcze prąd i_t , przyłożony w samym

punkcie węzłowym t . Wówczas, do równania (a) trzeba będzie prąd ten wprowadzić ze znakiem minus (odbiór prądu).

$$(I'_1 - i'_{t_1}) + (I'_2 - i'_{t_2}) + (I'_3 - i'_{t_3}) - i_t = 0. \quad (e)$$

Ostateczne równanie (d) będzie następujące:

$$\underbrace{\Delta E_{at} (G_{a_1t} + G_{a_2t} + G_{a_3t})}_{\text{wyrównawcze}} - \underbrace{i'_{t_1} - i'_{t_2} - i'_{t_3}}_{\text{składowe}} - \underbrace{i_t}_{\text{odbiór}} = 0. \quad (27)$$

Przykład 11. Obliczyć rozptyw prądów i największy spadek napięcia w sieci, podanej na rys. 39.

Obliczamy przewodności boków sieci:

$$G_{a_1t} = \frac{57 \cdot 25}{2 \cdot 60} = 11,87 \, \Omega^{-1}, \quad G_{a_2t} = \frac{57 \cdot 35}{2 \cdot 120} = 8,31 \, \Omega^{-1},$$

$$G_{a_3t} = \frac{57 \cdot 35}{2 \cdot 80} = 12,47 \, \Omega^{-1}.$$

Obliczamy prądy składowe, wypływające z punktu węzłowego t :

$$i'_{t_1} = 0,$$

$$i'_{t_2} = \frac{15 \cdot 40 + 3 \cdot 90}{120} = 7,25 \, A,$$

$$i'_{t_3} = \frac{10 \cdot 50}{80} = 6,25 \, A.$$

Układamy równanie na wzór (27):

$$\underbrace{\Delta E_{at} (11,87 + 8,31 + 12,47)}_{\text{wyrównawcze}} - \underbrace{7,25 - 6,25}_{\text{składowe}} - \underbrace{5}_{\text{odbiór}} = 0.$$

Z równania tego wynika:

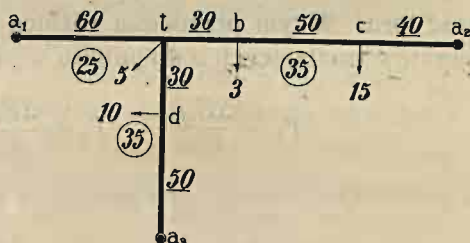
$$\Delta E_{at} = 0,567 \, V.$$

Obliczamy prądy wyrównawcze:

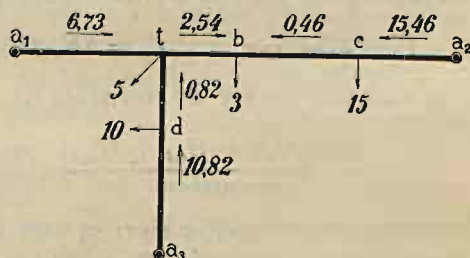
$$I'_1 = 0,567 \cdot 11,87 = 6,73 \, A,$$

$$I'_2 = 0,567 \cdot 8,31 = 4,71 \, A,$$

$$I'_3 = 0,567 \cdot 12,47 = 7,07 \, A.$$



Rys. 39.



Rys. 40.

Dodając algebraicznie prądy składowe z wyrównawczemi, ustalamy rozptyw prądów rzeczywistych (rys. 40). Sprawdzamy, czy suma zbiegających się prądów w punkcie t równa się zeru:

$$+ 6,73 - 2,54 + 0,82 - 5 = + 0,01 \approx 0.$$

Uchybienie bardzo nieznaczne.

Największy spadek napięcia będzie w punkcie spływu prądów, a więc w punkcie b . Obliczamy spadek ten od strony punktu a_2 :

$$\Delta E_{a_2b} = \frac{2}{57.35} (15,46 \cdot 90 - 15.50) = 0,643 \text{ V}.$$

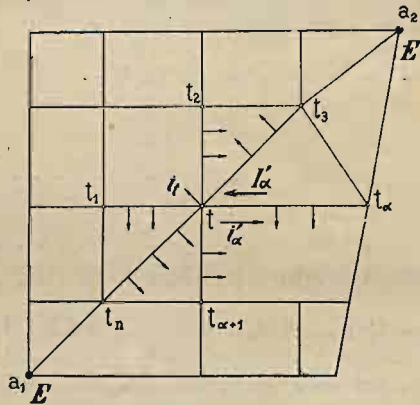
Ten sam spadek, obliczony od strony przeciwnej, wyniesie:

$$\Delta E_{ab} = \Delta E_{at} + \Delta E_{tb} = 0,567 + \frac{2}{57.35} (2,54 \cdot 30) = 0,643 \text{ V},$$

a więc zgodność zupełna.

§ 12. Sieć o wielu punktach węzłowych.

Metoda, którą posługiwaliśmy się przy obliczaniu sieci o jednym punkcie węzłowym, może być zastosowana do każdej sieci bez wyjątku. Rys. 41 przedstawia sieć o dowolnym kształcie, zasilaną z punktów zasilających: a_1, a_2, \dots o jednakowych napięciach E . Wybieramy dowolny punkt węzłowy t , w którym zbiega się n boków sieci (na rysunku — sześć boków): $t_1 t, t_2 t, \dots, t_\alpha t, \dots, t_n t$. Obliczymy rzeczywisty prąd i_α , który dopływa do punktu t po dowolnym boku $t_\alpha t$. Prąd rzeczywisty składa się, jak wiadomo, z dwóch prądów umyślonych: wyrównawczego I'_α i składowego i'_α .



Rys. 41.

1) Prąd wyrównawczy I'_α równa się iloczynowi różnicy napięć przez przewodność boku. Przypuśćmy, że napięcie E_{t_α} (w punkcie węzłowym t_α) jest większe od napięcia E_t (w punkcie t):

$$E_{t_\alpha} > E_t.$$

W tym przypadku prąd płynąć będzie do punktu t i wyrazi się wzorem:

$$I'_\alpha = (E_{t_\alpha} - E_t) G_{tt_\alpha}. \quad (a)$$

Oznaczamy spadek napięcia w punkcie t_α względem punktu zasilającego przez ΔE_{t_α} , a spadek w punkcie t — przez ΔE_t :

$$E_{t_\alpha} = E - \Delta E_{t_\alpha} \quad E_t = E - \Delta E_t.$$

Odejmując jedno równanie od drugiego, otrzymujemy:

$$E_{t_\alpha} - E_t = \Delta E_t - \Delta E_{t_\alpha}. \quad (b)$$

Wreszcie podstawiamy do równania (a) różnicę spadków napięcia z równania (b), zamiast napięć, i znajdujemy wartość prądu wyrównawczego:

$$I'_\alpha = \Delta E_t G_{u_\alpha} - \Delta E_{t_\alpha} G_{u_\alpha}. \quad (c)$$

2) Prąd składowy i'_α ma kierunek odwrotny, a wartość tego prądu da się z łatwością obliczyć wg wzoru (18).

Tak więc cały prąd rzeczywisty, dopływający do punktu węzłowego t po boku t_α , wyrazi się wzorem ogólnym:

$$i_\alpha = I'_\alpha - i'_\alpha = \Delta E_t G_{u_\alpha} - \Delta E_{t_\alpha} G_{u_\alpha} - i'_\alpha. \quad (28)$$

Wzór ten możemy zastosować do wszystkich boków sieci.

Zestawmy i zsumujmy wszystkie prądy, spotykające się w punkcie t :

po boku	tt ₁	dopływa	prąd	$i_1 = \Delta E_t G_{u_1} - \Delta E_{t_1} G_{u_1} - i'_1$
"	"	tt ₂	"	"	$i_2 = \Delta E_t G_{u_2} - \Delta E_{t_2} G_{u_2} - i'_2$
:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:
"	"	tt _α	"	"	$i_\alpha = \Delta E_t G_{u_\alpha} - \Delta E_{t_\alpha} G_{u_\alpha} - i'_\alpha$
:	:	:	:	:	:
"	"	tt _n	"	"	$i_n = \Delta E_t G_{u_n} - \Delta E_{t_n} G_{u_n} - i'_n$
odbiór prądu w punkcie t					$- i_t = - i_t$

$$\begin{aligned}
 i_1 + i_2 + \dots + i_\alpha + \dots + i_n - i_t &= \Delta E_t (G_{u_1} + G_{u_2} + \dots + G_{u_\alpha} + \dots + G_{u_n}) - \\
 &- (\Delta E_{t_1} G_{u_1} + \Delta E_{t_2} G_{u_2} + \dots + \Delta E_{t_\alpha} G_{u_\alpha} + \dots + \Delta E_{t_n} G_{u_n}) - \\
 &- (i'_1 + i'_2 + \dots + i'_\alpha + \dots + i'_n) - i_t.
 \end{aligned}$$

Zgodnie z 1-em prawem Kirchhoffa, suma tych prądów musi się równać zero, czyli

$$\underbrace{\Delta E_t \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} G_{u_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \Delta E_{t_\alpha} G_{u_\alpha}}_{\text{wyrównawcze}} - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} i'_\alpha - i_t}_{\text{składowe odbiór}} = 0. \quad (29)$$

Dla każdego punktu węzłowego sieci można ułożyć równanie wg wzoru (29). Ponieważ niewiadomymi w tych równaniach będą spadki

napięcia w punktach węzłowych, przeto liczba równań zgodzi się z liczbą niewiadomych i rozwiązanie nie przedstawi trudności. Po ustaleniu spadków napięcia obliczymy prądy w poszczególnych bokach sieci wg wzoru (28).

Przykład 12. Obliczyć rozpiętą prądów i największy spadek napięcia w sieci, podanej na rys. 42.

Sieć obejmuje dwa punkty zasilające: O_I , O_{II} i pięć punktów węzłowych: 1, 2, 3, 4 i 5. Przystępujemy do układania równań. Aby uniknąć błędów, zestawiamy wszystkie wielkości dane i obliczone w jednej tabeli.

Zaczynamy od punktu węzłowego „1”. Wpisujemy „1” do kolumny 1-ej. W punkcie węzłowym „1” zbiegają się boki: 12, 13, 14 i 10_I. Wpisujemy je do kolumny 2-giej. Gdyby w punkcie „1” był odbiór prądu, dopisałibyśmy jeszcze wyraz „odbior”, jak to uczyniliśmy przy punkcie węzłowym „2” i „3”. Bok „12” ma przekrój 16 mm² (zapisujemy to do kolumny 3-ej) i długość 50 m (zapisujemy do kolumny 4-ej). Obliczamy przewodność boku „12”:

$$G_{12} = \frac{57 \cdot 16}{2 \cdot 50} = 9,1 \Omega^{-1}.$$

Wynik wpisujemy do kolumny 5-ej. Przewodności wszystkich boków, zbiegających się w punkcie węzłowym 1-ym, dodajemy ze sobą:

$$\sum G = 9,1 + 20,4 + 7,1 + 40,7 = 77,3 \Omega^{-1},$$

a sumę wpisujemy do kolumny 6-ej.

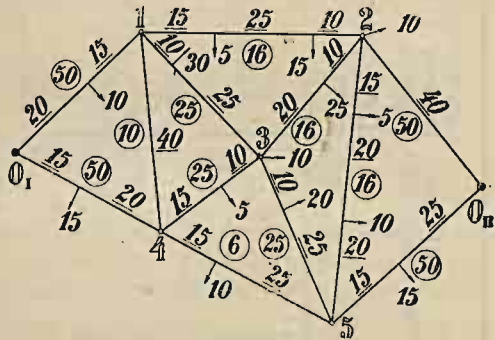
Rozpoczynamy obliczanie prądów składowych, wypływających z punktu węzłowego „1”. W tym celu sumujemy momenty prądów, odbieranych na boku „12” względem krańca przeciwnielego, czyli względem punktu „2”:

$$\sum i l = 15 \cdot 10 + 5 \cdot 35 = 325.$$

Liczbę znaną wpisujemy do kolumny 7-ej. Ażeby otrzymać prąd składowy, dzielimy tę liczbę przez długość boku „12” — czyli przez 50:

$$i' = \frac{325}{50} = 6,5 \text{ A}.$$

W kolumnie 8-ej wpisujemy „- 6,5”, przyczem znak minus oznacza kierunek prądu względem punktu węzłowego „1” (odpływ prądu). Wreszcie, dodajemy wszystkie prądy składowe, wypływające z punktu węzłowego, a gdyby był odbiór prądu, to i ten wliczyłibyśmy również:



Rys. 42.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkt węzłowy	Bok lub odbiór	Przekrój s	Długość l	Przewodność		Suma momentów $\sum i l$	Prąd składowy lub odbiór i'	Suma prądów składowych i odbioru $\sum i' + \text{odb.}$	Różnica napięć na krańcach ΔE	Prąd wyrównawczy $I' = \Delta E \cdot G$	Prąd rzeczywisty i
				$G = \frac{ks}{2l}$	$\sum G$						
				Ω^{-1}	Ω^{-1}						
		mm^2	m			Am	A	A	V	A	A
1	12	16	50	9,1	77,3	325	6,5	-33,64	-0,2335	-2,12	-8,62
	13	25	35	20,4		750	21,43		-0,4950	-10,10	-31,53
	14	10	40	7,1		0	-		+0,1955	+1,39	+1,39
	10i	50	35	40,7		200	5,71		+1,0928	+44,47	+38,76
2	20ii	50	40	35,6	68,2	0	-	-47,44	+1,3263	+47,21	+47,21
	25	16	55	8,3		400	7,27		+0,2502	+2,08	-5,19
	23	16	30	15,2		500	16,67		-0,2615	-3,97	-20,64
	21i odbiór	16	50	9,1		675	13,5		+0,2335	+2,12	-11,38
3	32	16	30	15,2	84,5	250	8,33	-44,19	+0,2615	+3,97	-4,36
	35	25	35	20,4		500	14,29		+0,5117	+10,44	-3,85
	34	25	25	28,5		75	3,0		+0,6905	+19,68	+16,68
	31i odbiór	25	35	20,4		300	8,57		+0,4950	+10,10	+1,53
4	41	10	40	7,1	80,6	0	-	-14,68	-0,1955	-1,39	-1,39
	43	25	25	28,5		50	2,0		-0,6905	-19,68	-21,68
	45	6	40	4,3		250	6,25		-0,1788	-0,77	-7,02
	40i	50	35	40,7		225	6,43		+0,8973	+36,52	+30,09
5	52	16	55	8,3	68,6	425	7,73	-26,56	-0,2502	-2,08	-9,81
	50ii	50	40	35,6		375	9,37		+1,0761	+38,31	+28,94
	54	6	40	4,3		150	3,75		+0,1788	+0,77	-2,98
	53	25	35	20,4		200	5,71		-0,5117	-10,44	-16,15

$$\sum i' + \text{odbiór} = -6,5 - 21,43 - 5,71 = -33,64.$$

Znalezioną sumę wpisujemy do kolumny 9-ej.

Po wypełnieniu pierwszych 9-ciu kolumn dla punktu 1-go powtarzamy ten sam rachunek dla punktu 2-go, 3-go, 4-go i 5-go. W tabeli każdy bok powtarza się dwukrotnie; np. bok między 1-ym a 2-im punktem węzłowym występuje raz jako „12“, a drugi raz jako „21“. To też i odpowiednie liczby w kolumnach 3-ej, 4-ej, 5-ej powtarzają się dwukrotnie. W kolumnie zaś 8-ej prądy składowe tego samego boku, obliczone dla obu krańców, muszą w sumie równać się obciążeniu boku. Np. dla boku 12 wzgl. 21 suma prądów składowych wynosi: $6,5 + 13,5 = 20 \text{ A}$, a obciążenie boku: $5 + 15 = 20 \text{ A}$.

Liczby, objęte tabelą w pierwszych dziewięciu kolumnach, wystarczą do ułożenia równań. Oznaczamy niewiadome spadki napięcia w punktach węzłowych 1, 2, ... 5 względem punktów zasilających przez $\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_5$. Dla punktu węzłowego „1“, wzorując się na równaniu (29), otrzymamy:

$$\underbrace{\frac{\Delta E_1 \cdot 77,3}{\alpha=n}}_{\alpha=1} - \underbrace{\frac{\Delta E_2 \cdot 9,1}{\alpha=n}}_{\alpha=1} - \underbrace{\frac{\Delta E_3 \cdot 20,4}{\alpha=n}}_{\alpha=1} - \underbrace{\frac{\Delta E_4 \cdot 7,1}{\alpha=n}}_{\alpha=1} - \underbrace{\frac{0 \cdot 40,7}{\alpha=n}}_{\alpha=1} - \frac{33,64}{\alpha=n} = 0. \quad (1)$$

$$\Delta E_t \sum_{\alpha=1} G_{t\alpha} - \sum_{\alpha=1} \Delta E_{t\alpha} \cdot G_{t\alpha} - \sum_{\alpha=1} i'_{\alpha} - i_t.$$

Jeden z członów tego równania, mianowicie $0 \cdot 40,7$, równa się zeru, ponieważ spadek napięcia w punkcie zasilającym równa się zeru. Człon ten należałoby pominąć zostawiamy go jednak celowo, gdyż przy rozwiązywaniu równań sposobem wykreślnym będzie nam jeszcze potrzebny.

W ten sposób ułożone równania dla pięciu punktów węzłowych będą następujące:

$$77,3 \Delta E_1 - 9,1 \Delta E_2 - 20,4 \Delta E_3 - 7,1 \Delta E_4 - 40,7 \cdot 0 - 33,64 = 0 \quad (1)$$

$$- 9,1 \Delta E_1 + 68,2 \Delta E_2 - 15,2 \Delta E_3 - 8,3 \Delta E_5 - 35,6 \cdot 0 - 47,44 = 0 \quad (2)$$

$$- 20,4 \Delta E_1 - 15,2 \Delta E_2 + 84,5 \Delta E_3 - 28,5 \Delta E_4 - 20,4 \Delta E_5 - 44,19 = 0 \quad (3)$$

$$- 7,1 \Delta E_1 - 28,5 \Delta E_3 + 80,6 \Delta E_4 - 4,3 \Delta E_5 - 40,7 \cdot 0 - 14,68 = 0 \quad (4)$$

$$- 8,3 \Delta E_2 - 20,4 \Delta E_3 - 4,3 \Delta E_4 + 68,6 \Delta E_5 - 35,6 \cdot 0 - 26,56 = 0 \quad (5)$$

Po rozwiązaniu tych równań znajdujemy następujące spadki napięcia:

$$\Delta E_1 = 1,0928 \text{ V}; \quad \Delta E_2 = 1,3263 \text{ V}; \quad \Delta E_3 = 1,5878 \text{ V};$$

$$\Delta E_4 = 0,8973 \text{ V}; \quad \Delta E_5 = 1,0761 \text{ V}.$$

Aby znaleźć prądy wyrównawcze, obliczamy różnicę napięć, panujących na krańcach każdego boku (rys. 43). Przy każdym punkcie węzłowym będziemy obliczali tę różnicę, odejmując od spadku napięcia danego punktu węzłowego spadek napięcia punktu przeciwległego. Np. dla boku „12“, licząc od punktu węzłowego „1“, różnica ta wyniesie:

$$\Delta E = 1,0928 - 1,3263 = -0,2335 \text{ V}.$$

Znalezione liczby wpisujemy do kolumny 10-ej.

Znak minus mówi, że prąd odpływa z punktu węzłowego „1”. Prądy rzeczywiste wpisujemy do kolumny ostatniej.

Na rys. 44 podany jest rozptyw prądów rzeczywistych. Punkty a, b, c, d, e są punktami spływu. Obliczamy panujące w nich spadki napięcia:

$$\Delta E_a = \Delta E_2 + \Delta E_{2a} = 1,3263 + 11,38 \frac{2,10}{57,16} \approx 1,576 \text{ V}$$

$$\Delta E_b = \Delta E_2 + \Delta E_{2b} = 1,3263 + 20,64 \frac{2,10}{57,16} \approx 1,780 \text{ V}$$

$$\Delta E_c = \Delta E_5 + \Delta E_{5c} = 1,0761 + 9,81 \frac{2,20}{57,16} \approx 1,506 \text{ V}$$

$$\Delta E_d = \Delta E_5 + \Delta E_{5d} = 1,0761 + 16,15 \frac{2,25}{57,25} \approx 1,643 \text{ V}$$

$$\Delta E_e = \Delta E_5 + \Delta E_{5e} = 1,0761 + 2,98 \frac{2,25}{57,6} \approx 1,512 \text{ V}.$$

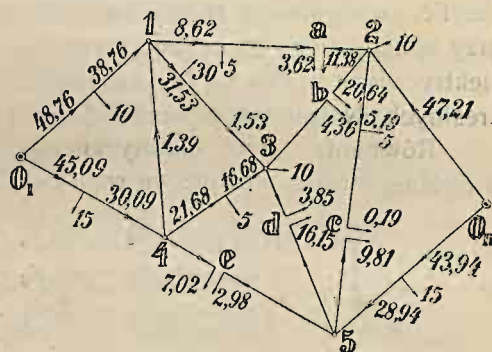
Z porównania tych liczb widać, że punktem największego spadku w sieci jest punkt b . Dla sprawdzenia obliczmy ten spadek od strony punktu „3”:

$$\Delta E_{\max} = \Delta E_b = \Delta E_3 + \Delta E_{3b} = 1,5878 + 4,36 \frac{2,20}{57,16} = 1,780 \text{ V}$$

i otrzymujemy ten sam wynik, co poprzednio.

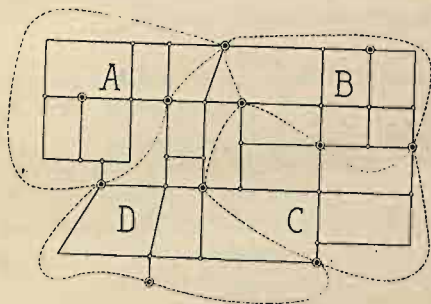
Obliczanie rozptywu prądów sprowadza się do rozwiązania tylu równań i z tyłoma niewiadomymi, ile jest punktów węzłowych w sieci. Nieraz jednak zadanie się upraszcza przez to, że równania dadzą się podzielić na grupy, nie mające ze sobą wspólnych niewiadomych. Naturalnie, łatwiej jest rozwiązać 7 równań z siedmioma niewiadomymi a następnie 5 równań z innymi pięcioma niewiadomymi, niż rozwiązywać naraz 12 równań. Możliwość podziału równań na grupy zależy od rozmieszczenia punktów zasilających. Punkty te bowiem mają napięcie jednakowe.

Boki, zbiegające się w jednym punkcie zasilającym, możemy poodcinać od punktu i każdy zasilac osobno, a w rozptywie prądów nie będzie żadnej zmiany.



Rys. 44.

Jeżeli po odcięciu boków od wspólnych punktów zasilających sieć rozpadnie się na części niezależne, to każdą taką część możemy przy obliczaniu rozplywu prądów traktować osobno.



Rys. 44a.

Sieć można podzielić na części, prowadząc linie graniczne przez punkty zasilające tak, aby linie te nie przecinały żadnego boku sieci. Np. sieć na rys. 44-a, obejmująca 22 punkty węzłowe, dzieli się na cztery okręgi niezależne: 1) A o 6-ciu punktach węzłowych,

2) B—o 5-ciu, 3) C—o 5-ciu i 4) D—o 6-ciu punktach.

§ 13. Rozwiązywanie równań sposobem wykreślnym.

Powszechnie znany sposób rozwiązywania równań 1-go stopnia przez stopniowe rugowanie niewiadomych drogą rachunkową nie daje dobrych wyników przy większej liczbie niewiadomych. Łatwo się można omylić, szczególnie w znaku, a co gorsza, pomyłka uwidoczni się dopiero przy końcu całego znużającego rachunku. To też do rozwiązywania sieci elektrycznych używa się innych metod, zarówno rachunkowych, jak wykreślnych. Najprędzej prowadzi do celu metoda wykreślna.

Równania sieci elektrycznej o trzech punktach węzłowych w ogólnej formie, ułożone wg wzoru (29), są następujące:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{10} \cdot 0 - A_1 = 0 & (1) \\ -a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{20} \cdot 0 - A_2 = 0 & (2) \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - a_{30} \cdot 0 - A_3 = 0. & (3) \end{cases}$$

Niewiadome x_1, x_2, x_3 są spadkami napięcia, które oznaczaliśmy dotychczas przez $\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3$. Spółczynniki a_{12}, a_{13} i t. d. wyrażają przewodność boków „12“, „13“, a spółczynniki a_{10}, a_{20}, a_{30} wyrażają przewodność boków „10“, „20“, „30“, które łączą punkty węzłowe z zasilającymi (porównaj z równaniami przykładu 12-go). Przewodności te oznaczaliśmy dotychczas literą G . Spółczynniki a_{11}, a_{22}, a_{33} są to sumy przewodności wszystkich boków, zbiegających się w punkcie węzłowym „1“, „2“, „3“; wielkości te oznaczaliśmy przez ΣG (w tablicy kolumna 6-ta). Wreszcie, człony liczbowe A_1, A_2, A_3 są to odbiory w punk-

tach węzłowych sieci prądów wyrównawczych czyli sumy prądów składowych wraz z miejscowymi odbiorami, które oznaczaliśmy przez $\Sigma i' + \text{odbiór}$ (w tablicy kolumna 9-ta).

Równania sieci elektrycznych mają dwie właściwości: 1) że są to równania symetryczne, innymi słowy, że współczynniki o wskaźnikach z jednakowymi cyframi są sobie równe:

$$a_{12} = a_{21} \quad a_{13} = a_{31} \quad a_{23} = a_{32}; \quad (a)$$

właściwość ta pochodzi stąd, że a_{12} i a_{21} jest przewodnością tego samego boku, łączącego punkty węzłowe „1” z „2”; 2) współczynniki dodatnie: a_{11}, a_{22}, a_{33} są sumą wszystkich pozostałych współczynników ujemnych odpowiedniego równania:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} + a_{13} + a_{10} \\ a_{22} &= a_{21} + a_{23} + a_{20} \\ a_{33} &= a_{31} + a_{32} + a_{30}, \end{aligned} \quad (b)$$

co wpływa wprost z istoty równania (29).

Metoda wykreślna opiera się na stopniowym rugowaniu niewiadomych, wykonaniem w sposób swoisty. Przeprowadzimy ten rachunek najpierw drogą analityczną. Przedewszystkiem w równaniu (1) zmienimy oznaczenia współczynników i członów liczbowego:

$$a_{11} = b_{11} \quad a_{12} = b_{12} \quad a_{13} = b_{13} \quad a_{10} = b_{10} \quad A_1 = B_1, \quad (c)$$

a to dla pewnej analogji z następnymi równaniami przekształconymi. Tak więc, równania nasze są następujące:

$$\begin{cases} b_{11} x_1 - b_{12} x_2 - b_{13} x_3 - b_{10} \cdot 0 - B_1 = 0 & (1) \\ -a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - a_{23} x_3 - a_{20} \cdot 0 - A_2 = 0 & (2) \\ -a_{31} x_1 - a_{32} x_2 + a_{33} x_3 - a_{30} \cdot 0 - A_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

1. Chcąc wyrugować pierwszą niewiadomą x_1 , dodajemy do równania (2) równanie (1), pomnożone przez $\frac{a_{21}}{b_{11}}$, a następnie dodajemy do równania (3) równanie (1), pomnożone przez $\frac{a_{31}}{b_{11}}$:

$$(2) + (1) \frac{a_{21}}{b_{11}} \quad (3) + (1) \frac{a_{31}}{b_{11}}.$$

W ten sposób otrzymujemy dwa równania z dwiema niewiadomymi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(a_{22} - b_{12} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) x_2 - \left(a_{23} + b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) x_3 - \\ \quad - \left(a_{20} + b_{10} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) \cdot 0 - \left(A_2 + B_1 \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left(a_{32} + b_{12} \frac{a_{31}}{b_{11}} \right) x_2 + \left(a_{33} - b_{13} \frac{a_{31}}{b_{11}} \right) x_3 - \\ \quad - \left(a_{30} + b_{10} \frac{a_{31}}{b_{11}} \right) \cdot 0 - \left(A_3 + B_1 \frac{a_{31}}{b_{11}} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (3')$$

Można łatwo dowieść, że wyprowadzone w ten sposób równania mają te same właściwości, co równania zasadnicze: 1) są równaniami symetrycznymi:

$$a_{23} + b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}} = a_{32} + b_{12} \frac{a_{31}}{b_{11}}, \quad (d)$$

gdyż

$$a_{23} = a_{32} \quad b_{13} = b_{31} = a_{31} \quad b_{12} = a_{12} = a_{21};$$

2) współczynnik dodatni równa się sumie współczynników ujemnych, a więc np. w równaniu (2'):

$$\left(a_{22} - b_{12} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) = \left(a_{23} + b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) + \left(a_{20} + b_{10} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right). \quad (e)$$

Ażeby tego dowieść, rozpatrujemy sumę:

$$\left(a_{23} + b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) + \left(a_{20} + b_{10} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right).$$

Suma ta nie zmieni się, gdy dodamy do niej i odejmiemy tę samą wartość a_{21} :

$$\begin{aligned} & \left(a_{23} + b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) + \left(a_{20} + b_{10} \frac{a_{21}}{b_{11}} \right) + a_{21} - a_{21} \frac{b_{11}}{b_{11}} = \\ & = \frac{a_{21} + a_{23} + a_{20}}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{b_{11}} \underbrace{(b_{11} - b_{13} - b_{10})}_{b_{12}} = \\ & = a_{22} - b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}}, \end{aligned}$$

czego należało dowieść. Tę samą wzajemną zależność współczynników można byłoby dowieść i dla równania (3').

Wróćmy do naszych równań (2') i (3') i wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} b_{12} \frac{a_{21}}{b_{11}} &= a'_{22} & b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}} &= a'_{23} & b_{10} \frac{a_{21}}{b_{11}} &= a'_{20} & B_1 \frac{a_{21}}{b_{11}} &= A_{12}, \\ b_{12} \frac{a_{31}}{b_{11}} &= a'_{32} & b_{13} \frac{a_{31}}{b_{11}} &= a'_{33} & b_{10} \frac{a_{31}}{b_{11}} &= a'_{30} & B_1 \frac{a_{31}}{b_{11}} &= A_{13}. \end{aligned} \quad (f)$$

Wartości a'_{23} , a'_{20} , a'_{32} , a'_{30} będziemy nazywali przyrostami współczynników liczbowych albo przyrostami przewodności, a A_{12} , A_{13} — przyrostami członów liczbowych albo przyrostami obciążenia punktów węzłowych. Równania będą następujące:

$$\begin{cases} (a_{22} - a'_{22})x_2 - (a_{23} + a'_{23})x_3 - (a_{20} + a'_{20}) \cdot 0 - (A_2 + A_{12}) = 0 & (2') \\ -(a_{32} + a'_{32})x_2 + (a_{33} - a'_{33})x_3 - (a_{30} + a'_{30}) \cdot 0 - (A_3 + A_{13}) = 0 & (3') \end{cases}$$

Dla jeszcze większego uproszczenia równania (2') wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$a_{22} - a'_{22} = b_{22} \quad a_{23} + a'_{23} = b_{23} \quad a_{20} + a'_{20} = b_{20} \quad A_2 + A_{12} = B_2 \quad (g)$$

Równania przybiorą następującą postać:

$$\begin{cases} b_{22}x_2 - b_{23}x_3 - b_{20} \cdot 0 - B_2 = 0 & (2'') \\ -(a_{32} + a'_{32})x_2 + (a_{33} - a'_{33})x_3 - (a_{30} + a'_{30}) \cdot 0 - (A_3 + A_{13}) = 0 & (3') \end{cases}$$

2. Dla wyeliminowania następnej niewiadomej x_2 dodajemy do równania (3') równanie (2''), pomnożone przez $\frac{a_{32} + a'_{32}}{b_{22}}$:

$$(3') + (2'') \frac{a_{32} + a'_{32}}{b_{22}}$$

i otrzymujemy jedno równanie z jedną niewiadomą:

$$\begin{aligned} \left[a_{33} - a'_{33} - \frac{b_{23}(a_{32} + a'_{32})}{b_{22}} \right] x_3 - \left[a_{30} + a'_{30} + \frac{b_{20}(a_{32} + a'_{32})}{b_{22}} \right] \cdot 0 - \\ - \left[A_3 + A_{13} + \frac{B_2(a_{32} + a'_{32})}{b_{22}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3''')$$

w którym oba współczynniki liczbowe (przy x_3 i przy 0) będą sobie równe zgodnie z dowiedzioną poprzednio zasadą, że współczynnik dodatni równa się sumie współczynników ujemnych.

Oznaczwszy nowe przyrosty literami pojedynczemi:

$$\frac{b_{23}(a_{32} + a'_{32})}{b_{22}} = a''_{33} \quad \frac{b_{20}(a_{32} + a'_{32})}{b_{22}} = a''_{30}$$

$$\frac{B_2(a_{32} + a'_{32})}{b_{22}} = A_{23}, \quad (h)$$

otrzymamy równanie:

$$(a_{33} - a'_{33} - a''_{33})x_3 - (a_{30} + a'_{30} + a''_{30}) \cdot 0 - (A_3 + A_{13} + A_{23}) = 0. \quad (3'')$$

Wreszcie wprowadzamy nowe oznaczenia:

$$a_{33} - a'_{33} - a''_{33} = b_{33} \quad a_{30} + a'_{30} + a''_{30} = b_{30} \quad A_3 + A_{13} + A_{23} = B_3 \quad (i)$$

i doprowadzamy równanie do formy ostatecznej:

$$b_{33}x_3 - b_{30} \cdot 0 - B_3 = 0. \quad (3''')$$

3. Z równania tego wypływa niewiadoma x_3 :

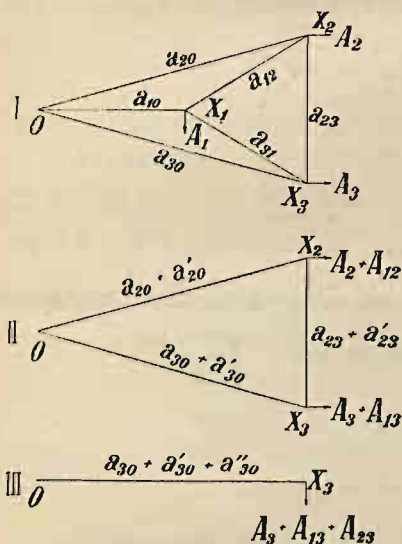
$$x_3 = \frac{B_3}{b_{33}}. \quad (j)$$

4. Po znalezieniu x_3 cofamy się do równania (2') i znajdujemy następną niewiadomą:

$$x_2 = \frac{B_2 + b_{23}x_3}{b_{22}}. \quad (k)$$

5. Wreszcie, cofamy się do równania (1) i wyprowadzamy ostatnią niewiadomą:

$$x_1 = \frac{B_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3}{b_{11}}. \quad (l)$$



Rys. 45.

Zadanie jest już rozwiązane.

Mimochodem zaznaczmy, że powyższe operacje matematyczne mają swoją treść elektryczną. Równania przekształcone odznaczają się temi samymi właściwościami, co zasadnicze równania sieci, a zatem możemy je uważać za równania pewnych umyślonych sieci elektrycznych. Rugowanie niewiadomej—to usuwanie z sieci jednego z punktów węzłowych. Przy tej operacji odpada pewna liczba boków, przewodność boków pozostałych otrzymuje przyrosty, otrzymują również przyrosty odbiory prądów w pozostałych punktach węzłowych. Jedynie tylko spadki napięcia punktów węzłowych nie ulegają zmianie. W miarę rugowania coraz to nowych niewiadomych, sieć przekształca się i upraszcza coraz bardziej, aż wreszcie przybiera postać toru otwartego.

Sieć o trzech punktach węzłowych na rys. 45-I odpowiada zasadniczym równaniom: (1) (2) (3). Po usunięciu punktu węzłowego „1” otrzymujemy sieć umyślną o dwóch punktach węzłowych (rys. 45-II) z odbiorami prądów: 1) $A_2 + A_{12}$, 2) $A_3 + A_{13}$ i z trzema bokami o przewodności: 1) $a_{20} + a'_{20}$ 2) $a_{30} + a'_{30}$ 3) $a_{23} + a'_{23}$. Sieci tej odpowiadają równania: (2') (3'). Wreszcie, po usunięciu punktu węzłowego „2”, otrzymujemy tor otwarty (rys. 45-III) o przewodności $a_{30} + a'_{30} + a'_{30}$ z odbiorem prądu $A_3 + A_{13} + A_{23}$. Tor ten ilustruje równanie (3'') z jedną niewiadomą.

Bieg obliczania i kolejność działań będą w metodzie wykreślnej takie same, jak w poprzednim obliczeniu analitycznym. Wykres buduje się (rys. 46, 47, 48) na dwóch liniach poziomych, które będziemy nazywali: górnym poziomem (RR) i dolnym poziomem (SS). Skala wykresu zależy od trzech czynników: 1) od odległości h (mm), którą wyznaczymy między górnym a dolnym poziomem, 2) od skali przewodności $1 \Omega^{-1} = g$ (mm) i 3) od skali natężenia prądu $1 A = i$ (mm).

1. Z trzech równań zasadniczych do wykresu (rys. 46) wprowadzamy tylko równanie pierwsze:

$$b_{11}x_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{10} \cdot 0 - B_1 = 0. \quad (1)$$

Na poziomie górnym odkładamy przewodności poszczególnych boków sieci, w przyjętej skali, jedną za drugą:

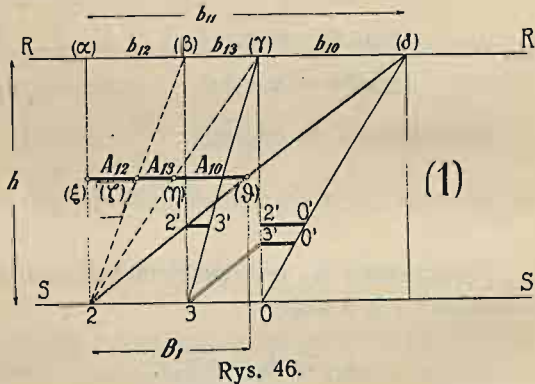
$$\alpha\beta = b_{12}$$

$$\beta\gamma = b_{13}$$

$$\gamma\delta = b_{10}.$$

Suma tych odcinków da nam wartość współczynnika dodatniego:

$$\alpha\delta = b_{11}.$$



Rys. 46.

Z punktów α, β, γ i δ opuszczamy pionowo na poziom dolny. Utworzyły się trzy prostokąty, z których pierwszy oznaczmy liczbą 2 (od wskaźnika b_{12}), drugi — liczbą 3 (od wskaźnika b_{13}), a ostatni — liczbą 0 (od wskaźnika b_{10}). Cyfry te stawiamy w prostokątach przy dolnych wierzchołkach lewych. Z wierzchołka 2 prowadzimy do punktów β i γ promienie: $2\beta, 2\gamma$ (linje w postaci kreskek) i do ostatniego punktu δ — tak zwany promień główny 2δ (linja podwójna). Następ-

nie, kreślimy w prostokątach przekątne: $\beta\gamma$, $O\delta$ (linje pełne), a wreszcie prowadzimy z wierzchołka β prostą $\beta\beta'$ (linja podwójna), równoległą do promienia głównego.

Cała ta konstrukcja zmierza do znalezienia przyrostów. Promień główny, wychodzący z punktu β , przecina pion następny w punkcie β' , linja zaś równoległa do promienia głównego, a wychodząca z punktu β , przecina pion następny w punkcie β' . Przyrosty współczynników liczbowych dla równania drugiego znajdziemy na poziomie punktu β' , a przyrost dla równania trzeciego — na poziomie punktu β' . Przyrostami temi będą odcinki poziome (linje grube): $\overline{\beta'\beta'}$, $\overline{\beta'O'}$, $\overline{\beta'O'}$, zawarte między lewym bokiem prostokąta a przekątną. Z lewej strony każdego odcinka postawiliśmy cyfrę, oznaczającą poziom odcinka, a więc β' lub β' , z prawej zaś strony — cyfrę β' lub O' , odpowiadającą wierzchołkowi, z którego wychodzi przekątna. Oznaczenia są tak dobrane, że odpowiadają wskaźnikom przyrostów, czyli:

$$\overline{\beta'\beta'} = a'_{23} \quad \overline{\beta'O'} = a'_{20} \quad \overline{\beta'O'} = a'_{30}.$$

Trzeba tylko dowieść, że znalezione odcinki rzeczywiście dają wartość przyrostów. W tym celu zwracamy się do wykresu i układamy równania, wynikające z podobieństwa trójkątów:

$$\begin{aligned} \Delta \beta\gamma\beta &\sim \Delta \beta'\beta'\beta & b_{13} : \overline{\beta'\beta'} &= h : \overline{\beta'\beta} \\ \Delta \alpha\delta\beta &\sim \Delta \beta\beta'\beta' & b_{11} : b_{12} &= h : \overline{\beta'\beta}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że odcinek:

$$\overline{\beta'\beta'} = b_{13} \frac{b_{12}}{b_{11}}.$$

Spółczynnik b_{12} jest przewodnością boku sieci między punktem węzłowym 1 i 2, a więc:

$$b_{12} = b_{21} = a_{21}, \quad \overline{\beta'\beta'} = b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}}.$$

Porównujemy ten wyraz ze wzorem (f) i widzimy, że jest identyczny z oznaczeniem przyrostu a'_{23} :

$$\overline{\beta'\beta'} = b_{13} \frac{a_{21}}{b_{11}} = a'_{23},$$

czego chcieliśmy dowieść. W ten sam sposób dowiedlibyśmy, że:

$$\overline{2'O'} = b_{10} \frac{a_{21}}{b_{11}} = a'_{20} \quad \overline{3'O'} = b_{10} \frac{a_{31}}{b_{11}} = a'_{30}.$$

Chcąc znaleźć sposobem wykreślnym przyrosty członów liczbowych: A_{12} i A_{13} , odkładamy na dolnym poziomie od wierzchołka 2 odcinek równy (w przyjętej skali) wartości B_1 i przenosimy go w górę tak, aby się opierał o pion 2α i promień główny 2δ . W ten sposób otrzymujemy odcinek $\overline{\xi\vartheta} = B_1$. Promienie 2β i 2γ przecinają go na trzy części $\overline{\xi\zeta} = A_{12}$, $\overline{\zeta\eta} = A_{13}$ i $\overline{\eta\vartheta} = A_{10}$. Odcinki te są proporcjonalne do wartości b_{12} , b_{13} , b_{10} i otrzymały te same wskaźniki.

Należy teraz dowieść, że odcinki $\overline{\xi\zeta}$ i $\overline{\zeta\eta}$ rzeczywiście mają tę samą wartość, którą we wzorach (f) oznaczyliśmy literami A_{12} i A_{13} . Z podobieństwa trójkątów: $\Delta\alpha\beta 2 \sim \Delta\xi\zeta 2$ i z podobieństwa $\Delta\alpha\delta 2 \sim \Delta\xi\vartheta 2$ wynika, że:

$$b_{11} : B_1 = b_{12} : \overline{\xi\zeta},$$

stąd odcinek:

$$\overline{\xi\zeta} = B_1 \frac{b_{12}}{b_{11}}.$$

Spółczynnik b_{12} jest przewodnością boku sieci między punktami węzłowymi 1, 2, a więc:

$$b_{12} = b_{21} = a_{21}, \quad \overline{\xi\zeta} = B_1 \frac{a_{21}}{b_{11}}.$$

Porównujemy ten wyraz ze wzorem (r) i widzimy, że jest identyczny z oznaczeniem przyrostu A_{12} :

$$\overline{\xi\zeta} = B_1 \frac{a_{21}}{b_{11}} = A_{12},$$

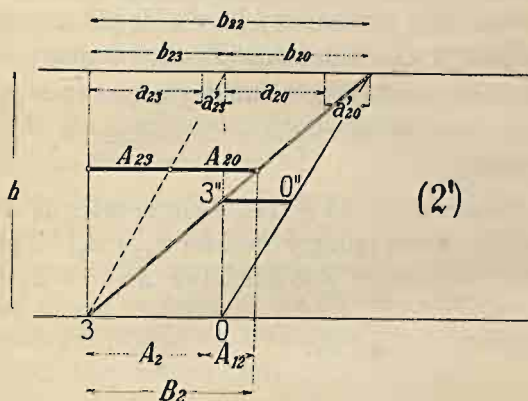
czego chcieliśmy dowieść. W ten sposób dowiedlibyśmy również, że:

$$\overline{\zeta\eta} = B_1 \frac{a_{31}}{b_{11}} = A_{13}.$$

Przy likwidowaniu punktu węzłowego 1 obciążenie tego punktu (B_1 amperów), jak widać z wykresu, rozbiliśmy na trzy części: A_{12} , A_{13} i A_{10} . Prąd A_{12} przełożyliśmy, jak mówią wskaźniki, z punktu 1 do punktu 2 (patrz równanie 2'), a prąd A_{13} przełożyliśmy z punktu 1 do punktu 3 (patrz równanie 3'). Wartość zaś A_{10} nie wchodzi do równań, ale przez analogję można powiedzieć, że jest to prąd, przełożony z punktu 1 do 0, czyli do punktu zasilającego. I rzeczywiście, prąd, wypływający wprost z punktu zasilającego, nie ma żadnego wpływu na spadek napięcia, ani na rozptył prądów w sieci i dlatego już nas nie obchodzi.

2. Przechodzimy do równań przekształconych (2') i (3'). Do wykresu (rys. 47) wprowadzamy tylko pierwsze z tych równań:

$$b_{22} x_2 - b_{23} x_3 - b_{20} \cdot 0 - B_2 = 0. \quad (2')$$



Rys. 47.

Aby ustalić wartości współczynników b_{23} i b_{20} , dodajemy do współczynników równania (2): a_{23} , a_{20} przyrosty a'_{23} i a'_{20} , znalezione w poprzednim wykresie:

$$b_{23} = a_{23} + a'_{23}$$

$$b_{20} = a_{20} + a'_{20},$$

a dla znalezienia członu B_2 dodajemy do

wartości A_2 z równania (2) przyrost A_{12} z wykresu poprzedniego:

$$B_2 = A_2 + A_{12}.$$

Wykres będziemy budowali w ten sam sposób, co poprzednio. Na górnym poziomie odłożymy przewodności boków sieci umyślonej: b_{23} , b_{20} , opuszczimy pion, poprowadzimy promień i przekątną. Znajdziemy jeden jedyny przyrost przewodności:

$$\overline{3''0''} = a''_{30}.$$

Wartość prądu B_2 wprowadzamy między pion a promień główny i znajdujemy prąd A_{23} , który mamy przenieść z punktu 2 do punktu 3.

3. Trzecie równanie, dwukrotnie przekształcone, w ostatecznej formie jest następujące:

$$b_{33} x_3 - b_{30} \cdot 0 - B_3 = 0. \quad (3'')$$

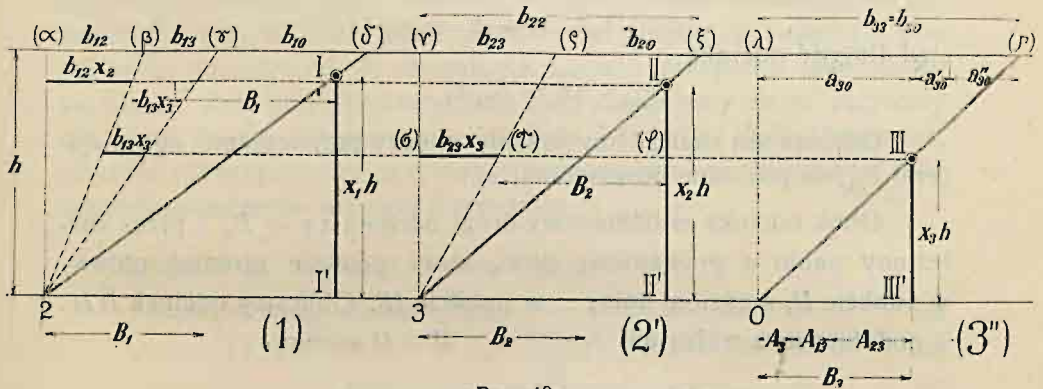
Oba współczynniki b_{33} i b_{30} muszą być jednakowe i równe współczynnikowi a_{30} wraz z przyrostami a'_{30} i a''_{30} :

$$b_{30} = a_{30} + a'_{30} + a''_{30},$$

a człon liczbowy B_3 wyrazi się sumą:

$$B_3 = A_3 + A_{13} + A_{23}.$$

Budujemy wykres równania (3''). Na górnym poziomie (rys. 48—3'') odkładamy odcinek $\lambda_\mu = b_{30}$, kreślimy promień główny $O\mu$, na dolnym poziomie odkładamy odcinek $\overline{OIII'} = B_3$, wreszcie w punkcie III' wstawiamy pion do przecięcia się z promieniem głównym w punkcie III .



Rys. 48.

Obliczmy wartość odcinka $\overline{III III'}$. Z podobieństwa trójkątów: $\triangle \lambda_\mu O \sim \triangle III' O III$ wynika, że

$$b_{33} : B_3 = h : \overline{III III'}$$

$$\overline{III III'} = \frac{B_3 h}{b_{33}}, \quad (m)$$

a że zgodnie z równaniem (j)

$$x_3 = \frac{B_3}{b_{33}},$$

przeko odcinek

$$\overline{III III'} = x_3 h.$$

Odstęp h między górnym a dolnym poziomem jest wielkością stałą, a więc znaleziony odcinek $\overline{III III'}$ wyraża niewiadomą x_3 . Chcąc otrzymać spadek napięcia x_3 w woltach, należy liczbę milimetrów długości odcinka $\overline{III III'}$ podzielić przez v , gdzie:

$$v = \frac{i h}{g} \quad (30)$$

(porówn. ze wzorem m), gdzie i jest liczbą mm , odpowiadającą 1 amperowi, a g ... liczbą mm , odpowiadającą $1 \Omega^{-1}$.

4. Po znalezieniu niewiadomej x_3 cofamy się do wykresu poprzedniego (rys. 48—2₂) i kreślimy linię poziomą przez punkt III wykresu poprzedniego. Linję tę będziemy nazywali poziomem 3-ciej niewiadomej. Na tym poziomie znajdujemy odcinek $\sigma\tau$. Obliczmy jego długość. Z podobieństwa trójkątów $\triangle \nu\rho\beta \sim \triangle \sigma\tau\beta$ wynika:

$$b_{23} : \sigma\tau = h : x_3 h,$$

stąd długość odcinka:

$$\sigma\tau = b_{23} x_3.$$

Odcinek ten znaleźliśmy właśnie między promieniami, ogarniającymi b_{23} , na poziomie niewiadomej x_3 .

Obok odcinka $\sigma\tau$ odkładamy drugi odcinek $\tau\varphi = B_2$ i przez znaleziony punkt φ prowadzimy pion, który przetnie promień główny w punkcie II , a poziom dolny — w punkcie II' . Obliczmy odcinek $II II'$. Z podobieństwa trójkątów $\triangle \nu\xi\beta \sim \triangle II'\beta II$ wynika:

$$b_{22} : (b_{23} x_3 + B_2) = h : II II',$$

stąd

$$II II' = \frac{(b_{23} x_3 + B_2) h}{b_{22}}, \quad (n)$$

a ponieważ wg wzoru (k):

$$x_2 = \frac{B_2 + b_{23} x_3}{b_{22}},$$

przeto odcinek:

$$II II' = x_2 h.$$

W ten sposób znaleźliśmy niewiadomą x_2 .

5. Wracamy do wykresu pierwszego (rys. 48! 1) i kreślimy w nim poziomy znalezionych dotychczas niewiadomych: x_3 i x_2 . Na poziomie niewiadomej x_2 , między promieniami odcinka b_{12} znajdujemy odcinek, równający się iloczynowi $b_{12} x_2$. Na poziomie zaś niewiadomej x_3 , między promieniami odcinka b_{13} znajdujemy odcinek, równający się iloczynowi $b_{13} x_3$. Na poziomie ostatnio znalezionej niewiadomej x_2 dodajemy oba odcinki i wartość B_1 :

$$b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + B_1$$

i przez znaleziony kraniec odcinka sumarycznego prowadzimy pion $I I'$ od punktu przecięcia się z promieniem głównym do przecięcia poziomu dolnego. Znaleziony odcinek

$$II' = x_1 h$$

jest miarą ostatniej niewiadomej x_1 .

Zadanie jest już rozwiązane.

W ogólnym naszym przykładzie wszystkie trzy niewiadome wchodziły do wszystkich trzech równań. W języku elektrotechnicznym powiedzielibyśmy, że każdy punkt węzłowy był połączony bokami z obu punktami pozostałymi. W normalnych sieciach przypadek taki rzadko się zdarza. Zato przy przekształcaniu sieci znajdujemy nieraz przyrosty dla takich boków, których w sieci nie było. Nie trzeba się tem kłopotać, gdyż sieci przekształcone są tylko sieciami umyślnymi i mogą mieć inne zupełnie połączenia, niż sieci rzeczywiste.

Przykład 13. Rozwiązać równanie z przykładu (12):

$$77,3x_1 - 9,1x_2 - 20,4x_3 - 7,1x_4 - 40,7 \cdot 0 - 33,64 = 0 \quad (1)$$

$$- 9,1x_1 + 68,2x_2 - 15,2x_3 - 8,3x_5 - 35,6 \cdot 0 - 47,44 = 0 \quad (2)$$

$$- 20,4x_1 - 15,2x_2 + 84,5x_3 - 28,5x_4 - 20,4x_5 - 44,19 = 0 \quad (3)$$

$$- 7,1x_1 - 28,5x_3 + 80,6x_4 - 4,3x_5 - 40,7 \cdot 0 - 14,68 = 0 \quad (4)$$

$$- 8,3x_2 - 20,4x_3 - 4,3x_4 + 68,6x_5 - 35,6 \cdot 0 - 26,56 = 0 \quad (5)$$

Przyjmujemy następującą skalę:

$$h = 50 \text{ mm}, \quad 1 A = 1 \text{ mm}, \quad 1 \Omega^{-1} = 1 \text{ mm}, \quad 1 V = \frac{1,50}{1} = 50 \text{ mm}.$$

Dla uniknięcia błędów układamy tabelę. W kolumnie 1-ej zapisujemy ~~№№~~ równania, a w kolumnie 2-ej — wszystkie współczynniki i człony liczbowe, zaczerpnięte wprost z równań.

1. Budujemy wykres równania pierwszego (rys. 49). Odkładamy przewodności, kreślimy pion, promień i przekątnę. Prowadzimy przez punkty 3 i 4 linie równoległe do promienia głównego i znajdujemy punkty 2', 3', i 4'. Na wysokości punktu 2' znajdujemy przyrosty dla współczynników równania (2):

$$a'_{23} \quad a'_{24} \quad a'_{25},$$

na poziomie punktu 3' — przyrosty dla równania (3):

$$a'_{34} \quad a'_{35}$$

i wreszcie na poziomie punktu 4' — przyrost dla równania (4):

$$a'_{45}.$$

Przyrosty te wpisujemy do kolumny 4-ej. Wprowadzwszy odcinek, równy prądowi B_1 , między pion a promień główny, znajdujemy przyrosty: A_{12} , A_{13} , A_{14} i wpisujemy je do kolumny 5-ej.

1	2	3	4	5
Nr. równania	Spółczynniki równań zasadniczych	Spółczynniki równań przekształconych	Przyrosty przewodności	Przyrosty prądów
1	$a_{12} = 9,1$ $a_{13} = 20,4$ $a_{14} = 7,1$ $a_{10} = 40,7$ $A_1 = 33,64$	$b_{12} = a_{12}$ $b_{13} = a_{13}$ $b_{11} = a_{14}$ $b_{10} = a_{10}$ $B_1 = A_1$	a'_{23} a'_{24} a'_{20} a'_{34} a'_{30} a'_{40}	A_{12} A_{13} A_{14}
2'	$a_{23} = 15,2$ $a_{25} = 8,3$ $a_{20} = 35,6$ $A_2 = 47,44$	$b_{23} = a_{23} + a'_{23}$ $b_{24} = a'_{24}$ $b_{25} = a_{25}$ $b_{20} = a_{20} + a'_{20}$ $B_2 = A_2 + A_{12}$	a''_{31} a''_{35} a''_{30} a''_{45} a''_{40} a''_{50}	A_{23} A_{24} A_{25}
3''	$a_{34} = 28,5$ $a_{35} = 20,4$ $A_3 = 44,19$	$b_{34} = a_{34} + a'_{34} + a''_{34}$ $b_{35} = a_{35} + a'_{35}$ $b_{30} = a'_{30} + a''_{30}$ $B_3 = A_3 + A_{13} + A_{23}$	a'''_{45} a'''_{40} a'''_{50}	A_{34} A_{35}
4'''	$a_{45} = 4,3$ $a_{40} = 40,7$ $A_4 = 14,68$	$b_{45} = a_{45} + a''_{45} + a'''_{45}$ $b_{40} = a_{40} + a'_{40} + a''_{40} + a'''_{40}$ $B_4 = A_4 + A_{14} + A_{24} + A_{34}$	a^{IV}_{50}	A_{45}
5 ^{IV}	$a_{50} = 35,6$ $A_5 = 26,56$	$b_{50} = a_{50} + a'_{50} + a''_{50} + a^{IV}_{50}$ $B_5 = A_5 + A_{25} + A_{35} + A_{45}$		

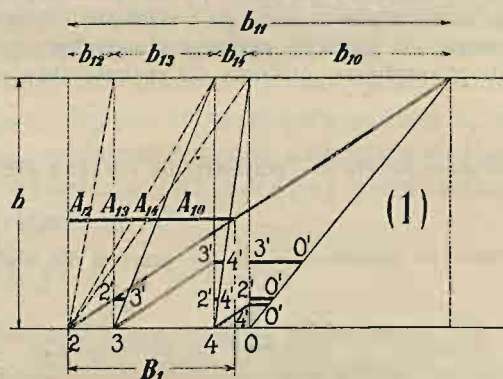
2. Przechodzimy do równania drugiego. Przedewszystkiem ustalamy współczynniki liczbowe. W równaniu zasadniczym mamy: a_{23} , a_{25} i a_{20} ; wykres pierwszy dał nam przyrosty: a'_{23} , a'_{24} i a'_{20} , a więc w sumie otrzymamy:

$$b_{23} = a_{23} + a'_{23},$$

$$b_{24} = a'_{24}, \quad b_{25} = a_{25},$$

$$b_{20} = a_{20} + a'_{20}.$$

W przykładzie niniejszym otrzymaliśmy przyrost a'_{24} , pomimo, że sieć rzeczywista nie ma boku 24 (rys. 42). Będziemy sobie wyobrażali, że po zniesieniu punktu węzłowego 1 utworzył się w sieci umyślony nowy bok, łączący punkty 2 i 4.



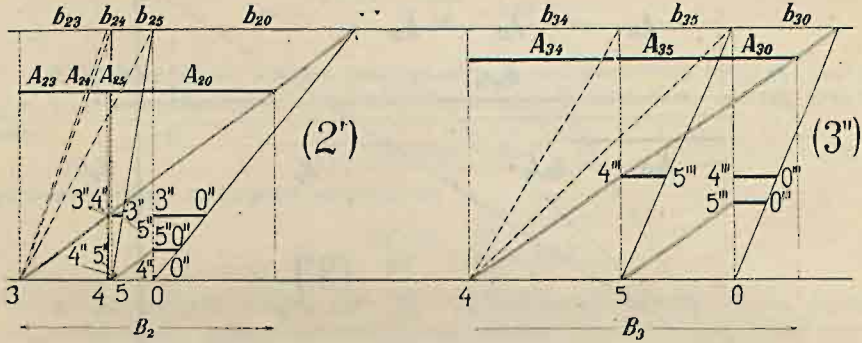
Rys. 49.

Obliczamy obciążenie punktu 2 w sieci umyślonej:

$$B_2 = A_2 + A_{12}.$$

Obliczenia współczynników i członu liczbowego zapisujemy do tabeli w kolumnie 3-ej. Budujemy wykres (rys. 50—2') i znajdujemy przyrosty:

$$a''_{34}, a''_{35}, a''_{30}, a''_{45}, a''_{40}, a''_{50}, A_{23}, A_{24} \text{ i } A_{25}.$$



Rys. 50.

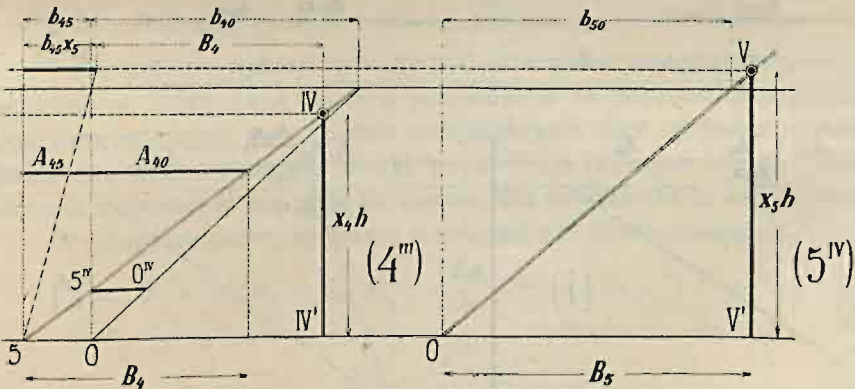
3. Przechodzimy do równania trzeciego. Obliczamy współczynniki i człon liczbowy:

$$b_{34} = a_{34} + a'_{34} + a''_{34} \quad b_{35} = a_{35} + a'_{35} \quad b_{30} = a'_{30} + a''_{30} \quad B_3 = A_3 + A_{13} + A_{23}.$$

Znow tworzy stę w naszej sieci umyślonej nowa komunikacja między punktem węzłowym 3 a punktem zasilającym 0.

Budujemy wykres (rys. 50—3'') i znajdujemy przyrosty:

$$a'''_{45}, a'''_{40}, a'''_{50}, A_{34}, A_{35}.$$



Rys. 51.

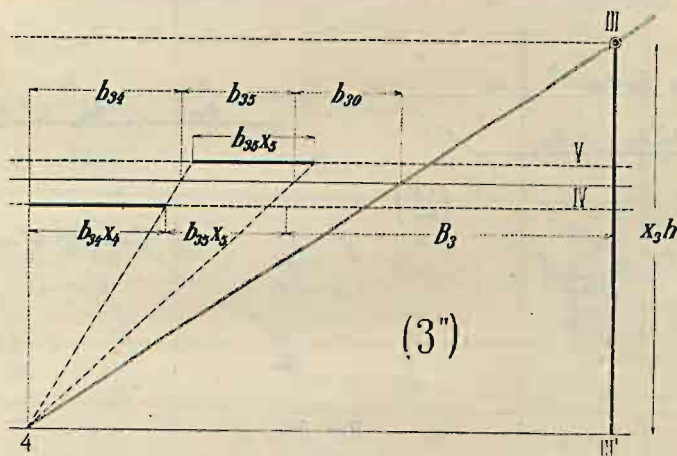
4. W równaniu czwartym występują następujące wartości liczbowe:

$$b_{45} = a_{45} + a'_{45} + a''_{45} + a'''_{45} \quad b_{40} = a_{40} + a'_{40} + a''_{40} + a'''_{40} \quad B_4 = A_4 + A_{14} + A_{24} + A_{34}.$$

Z wykresu (rys. 51 — 4''') znajdujemy przyrosty:

$$\alpha IV_{50} \text{ i } A_{45}.$$

5. W ostatniem wreszcie równaniu współczynnik i człon liczbowy wyrażają się sumą:

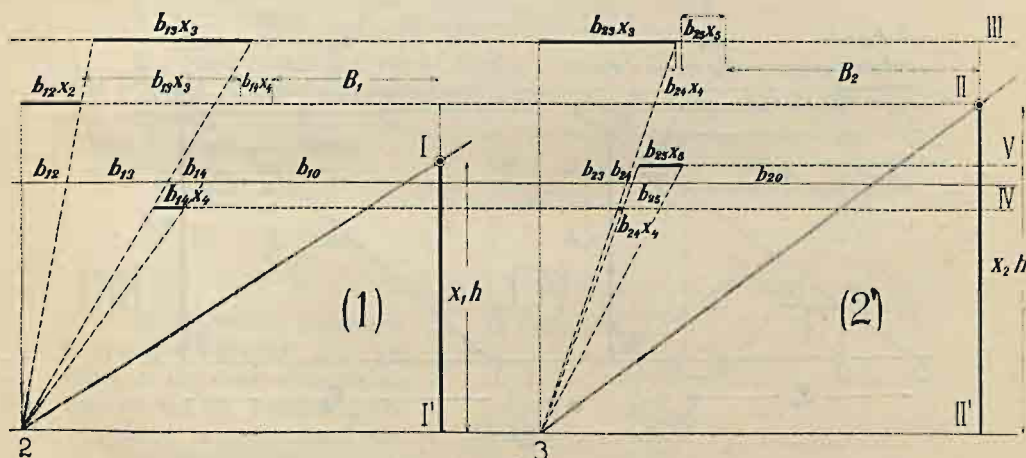


Rys. 52.

$$b_{50} = \alpha_{50} + \alpha''_{50} + \alpha'''_{50} + \alpha IV_{50} \quad B_3 = A_5 + A_{25} + A_{35} + A_{45}.$$

Z wykresu tego równania (rys. 51 — 5IV) znajdujemy niewiadomą α_5 :

$$x_5 = \frac{VV'}{50} = \frac{54 \text{ mm}}{50} = 1,08 \text{ V}.$$



Rys. 53.

6. Cofamy się do wykresu poprzedniego (rys. 51 — 4''), znajdujemy iloczyn $b_{45} x_5$, dodajemy na tym samym poziomie odcinek B_4 :

$$b_{45} x_5 + B_4,$$

opuszczamy pion i znajdujemy niewiadomą:

$$x_4 = \frac{IV \text{ IV}'}{50} = \frac{45,5}{50} = 0,91 \text{ V}.$$

7. Cofamy się do wykresu trzeciego (rys. 52-3''), znajdujemy iloczyny: $b_{34} x_4$, $b_{35} x_5$ i na poziomie ostatnio znalezionej niewiadomej x_4 odkładamy odcinek równy sumie:

$$b_{34} x_4 + b_{35} x_5 + B_3,$$

opuszczamy pion i znajdujemy niewiadomą:

$$x_3 = \frac{III \text{ III}'}{50} = \frac{80}{50} = 1,6 \text{ V}.$$

8. Na wykresie drugim (rys. 53 — 2') znajdujemy iloczyny: $b_{23} x_3$, $b_{24} x_4$, $b_{25} x_5$, dodajemy je wraz z wartością B_2 na poziomie niewiadomej x_3 , opuszczamy pion i znajdujemy niewiadomą:

$$x_2 = \frac{II \text{ II}'}{50} = \frac{67}{50} = 1,34 \text{ V}.$$

9. Z pierwszego wreszcie wykresu (rys. 53 — 1) po dodaniu

$$b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + b_{14} x_4 + B_1$$

znajdujemy ostatnią niewiadomą:

$$x_1 = \frac{I \text{ I}'}{50} = \frac{55}{50} = 1,1 \text{ V}.$$

§ 14. Rozwiązanie równań sposobem rachunkowym.

Poza metodą wykreślną może być stosowana następująca metoda rachunkowa, która ma tę zaletę w porównaniu ze stopniowym rugowaniem niewiadomych, że w trakcie rozwiązywania daje możliwość sprawdzenia rachunku. Pomimo nawet popełnienia jakiegoś błędu, praca, włożona w rachunek, nie idzie na marne, lecz zawsze zbliża nas do celu.

Wyobraźmy sobie, że mamy n równań z n niewiadomymi:

$$a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - \dots - a_{1n} x_n - A_1 = 0 \quad (1)$$

$$- a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - a_{23} x_3 - \dots - a_{2n} x_n - A_2 = 0 \quad (2)$$

$$- a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - a_{n3} x_3 - \dots + a_{nn} x_n - A_n = 0. \quad (n)$$

*) Człony: $a_{10} \cdot 0$, $a_{20} \cdot 0$, ... $a_{n0} \cdot 0$ w metodzie rachunkowej są zbędne i dlatego je opuszczamy.

Od tej chwili przypuszczamy, że wartości naszych niewiadomych są następujące:

$$v_1, \quad v_2 + \Delta v_2, \quad v_3 \quad . \quad . \quad v_n.$$

Przez wprowadzenie poprawki Δv_2 chyb N_2 zrówna się z zerem, inne zaś chyby ulegną mniejszej lub większej zmianie. Nowe chyby będą następujące:

$$N'_1 = N_1 - a_{12} \Delta v_2; \quad N'_2 = 0; \quad N'_3 = N_3 - a_{32} \Delta v_2; \dots \quad N'_n = N_n - a_{n2} \Delta v_2.$$

Przystępujemy do obliczania poprawki następnej. Przypuśćmy, że ze wszystkich chybów największą wartość bezwzględną ma N'_5 . Zwracamy się do równania (5) i na tej samej podstawie, jak wyżej, obliczamy poprawkę:

$$\Delta' v_5 = - \frac{N'_5}{a_{55}}.$$

• Odtąd wartości naszych niewiadomych będą następujące:

$$v_1; \quad v_2 + \Delta v_2; \quad v_3; \quad v_4; \quad v_5 + \Delta' v_5; \quad . \quad . \quad v_n;$$

a nowe chyby wyniosą:

$$N''_1 = N'_1 - a_{15} \Delta' v_5; \quad N''_2 = -a_{25} \Delta' v_5; \quad N''_3 = N'_3 - a_{35} \Delta' v_5; \dots \\ N''_5 = 0; \dots N''_n = N'_n - a_{n5} \Delta' v_5.$$

Wyzbyliśmy się chybu w równaniu (5), a zato zpowrotem ukazał się chyb w równaniu (2). Pozornie, niewiele się poprawiło, lecz chyb w równaniu (2) bądź co bądź w porównaniu ze stanem pierwotnym zmaleł. Powtarzając nadal ten rachunek i wracając kilkakrotnie do tego samego równania, spostrzeżemy stałe zmniejszanie się chybów i poprawek. Im dłużej będziemy prowadzili rachunek, tem dokładniejsze otrzymamy wyniki. Z chwilą, gdy poprawki zbliżają się do zera w granicach żądanej dokładności, obliczanie kończymy.

Chcąc przyspieszyć tempo obrachunku, możemy korygować po dwa równania naraz. Przypuśćmy więc, że z chybów: $N_1, N_2, N_3, \dots, N_7, \dots, N_n$ największą wartość bezwzględną mają chyby: N_2 i N_7 . Zwracamy się więc do równań: (2) i (7) i obliczamy poprawki: $\Delta v_2, \Delta v_7$ dla niewiadomych: x_2, x_7 . Poprawki możemy znajdować tylko dla tych niewiadomych, które w naszych równaniach mają największe współczynniki liczbowe. W równaniu (2) największym współczynnikiem jest a_{22} , a w równaniu (7) ... a_{77} . Poprawki obliczamy w ten sposób, aby oba chyby: N_2 i N_7 naraz zeszyły do zera. Zestawiamy równania:

$$\begin{aligned} a_{22} \Delta v_2 - a_{21} \Delta v_7 &= -N_2 & (2) \\ -a_{12} \Delta v_2 + a_{11} \Delta v_7 &= -N_7 & (7) \end{aligned} \quad (32)$$

i znajdujemy z nich żądane wartości: Δv_2 i Δv_7 . Po wprowadzeniu tych poprawek chyby będą następujące:

$$\begin{aligned} N'_1 &= N_1 - a_{12} \Delta v_2 - a_{17} \Delta v_7; & N'_2 &= 0; & N'_3 &= N_3 - a_{32} \Delta v_2 - a_{37} \Delta v_7; \dots \\ N'_7 &= 0; \dots & N'_n &= N_n - a_{n2} \Delta v_2 - a_{n7} \Delta v_7. \end{aligned}$$

Z chybów tych znów wybieramy dwa największe, zestawiamy nowe dwa równania i t. d.

Wybieranie za każdym razem chybów największych ma na celu przyspieszenie całej akcji. Przy obliczaniu po dwie poprawki naraz trzeba niekiedy od tej zasady odstępować. Wróćmy do naszego przykładu, w którym największemi były chyby: N_2 i N_7 . Przypuśćmy teraz, że jedna z zasadniczych niewiadomych np. x_2 nie wchodzi do równania (7). Wówczas, trzeba odłożyć równanie (7) do następnego razu, a zwrócić się do innego równania. Przypuśćmy, że następnym chybem największym jest N_3 . Wówczas sprawdzamy, czy do równania (2) wchodzi x_3 i naodwrot, czy do równania (5) wchodzi x_2 i, jeżeli tak, to sprzęgamy oba te równania i obliczamy poprawki Δv_2 i Δv_3 .

Poprawki należy obliczać tylko dla tych niewiadomych, które wchodzi do odpowiednich równań z największym współczynnikiem.

Niezachowanie tej zasady wprowadza rachunek na błędne tory i zamiast zbliżyć, oddala od celu.

Przykład 14. Rozwiązać równania z przykładu (13) z dokładnością do 0,0001 V.

$$77,3 x_1 - 9,1 x_2 - 20,4 x_3 - 7,1 x_4 - 33,64 = 0 \quad (1)$$

$$- 9,1 x_1 + 68,2 x_2 - 15,2 x_3 - 8,3 x_4 - 47,44 = 0 \quad (2)$$

$$- 20,4 x_1 - 15,2 x_2 + 84,5 x_3 - 28,5 x_4 - 20,4 x_5 - 44,19 = 0 \quad (3)$$

$$- 7,1 x_1 - 28,5 x_2 + 80,6 x_3 - 4,3 x_4 - 14,68 = 0 \quad (4)$$

$$- 8,3 x_2 - 20,4 x_3 - 4,3 x_4 + 68,6 x_5 - 26,56 = 0 \quad (5)$$

Równania te rozwiązaliśmy wykreślnie (przykład 13), w niewielkiej skali, z dokładnością mniej więcej do 0,1 V i otrzymaliśmy następujące wyniki:

$$x_1 = 1,1 \text{ V} \quad x_2 = 1,34 \text{ V} \quad x_3 = 1,6 \text{ V} \quad x_4 = 0,91 \text{ V} \quad x_5 = 1,08 \text{ V}.$$

Podstawiamy te wartości do naszych równań i otrzymujemy chyby:

$$N_1 = +0,095 \quad N_2 = +0,654 \quad N_3 = +0,235 \quad N_4 = +0,612 \quad N_5 = -0,147.$$

Gdybyśmy poprzestali na wynikach rozwiązania wykreślnego, suma prądów w punktach węzłowych równałaby się, zamiast zeru, liczbom powyższym, wyrażo-

nym w amperach. Dla praktyki w wielu przypadkach byłaby to dokładność wystarczająca. W przykładzie niniejszym żądamy dokładności większej. Można byłoby ją osiągnąć przez zastosowanie wykresów o większej skali, tym razem jednak zastosujemy metodę rachunkową.

Chyby o największej wartości bezwzględnej są to: N_2 i N_4 . Nie należy ich jednak niweczyć naraz, gdyż do równania (2) nie wchodzi x_1 i odwrotnie do równania (4) nie wchodzi x_2 . Następnym chybem co do wartości jest N_3 . Równania (2) i (3) mogą być sprzężone ze sobą, a więc rugujemy z nich chyby naraz:

$$68,2 \Delta x_2 - 15,2 \Delta x_3 = -0,654 \quad (2)$$

$$-15,2 \Delta x_2 + 84,5 \Delta x_3 = -0,235. \quad (3)$$

Z równań tych znajdujemy poprawki:

$$\Delta x_2 = -0,0106 \quad \Delta x_3 = -0,0047.$$

Teoretycznie biorąc, chyby w równaniu (2) i (3) pod wpływem tych poprawek powinny spaść do zera. Ponieważ jednak poprawki obliczyliśmy z ograniczoną liczbą znaków dziesiętnych, z dokładnością do 0,0001, przeto chyby w rzeczywistości będą się nieco różniły od zera i dlatego lepiej je obliczyć.

Nowe chyby:

$$N'_1 = +0,095 - 9,1(-0,0106) - 20,4(-0,0047) = +0,28644$$

$$N'_2 = +0,654 + 68,2(-0,0106) - 15,2(-0,0047) = +0,00252 \text{ (zamiast zera!)} \\ \text{i t. d.}$$

$$N'_3 = -0,00103 \text{ (zamiast zera!)} \quad N'_4 = +0,74595 \quad N'_5 = -0,05902.$$

I znów wybieramy z tych chybów dwa o największej wartości bezwzględnej: N'_4 , N'_1 , układamy równania:

$$77,3 \Delta' x_1 - 7,1 \Delta' x_4 = -0,28644 \quad (1)$$

$$-7,1 \Delta' x_1 + 80,6 \Delta' x_4 = -0,74595 \quad (4)$$

i znajdujemy z nich nowe poprawki:

$$\Delta' x_1 = -0,0046 \quad \Delta' x_4 = -0,0097.$$

W ten sam sposób prowadzimy obrachunek dalej, notując w tabeli dla uniknięcia pomyłek, znalezione poprawki i chyby. Poleca się od czasu do czasu sprawdzać rachunek, aby wyeliminować popełnione błędy. W przykładzie niniejszym po znalezieniu np. ośmiu par poprawek obliczamy dla sprawdzenia wartość niewiadomych w tym momencie:

$$x_1 = 1,1 - 0,0046 - 0,0016 - 0,0006 = 1,0932$$

$$x_2 = 1,34 - 0,0106 - 0,0017 - 0,0008 = 1,3269$$

i t. d. (patrz tab.), następnie podstawiamy te wartości do równań i otrzymujemy chyby, które, jak widać z tabeli, różnią się nieco od obliczonych poprzednio. Drobne błędy rachunkowe w ten sposób zostają usunięte i rachunek można prowadzić

C H Y B Y					P O P R A W K I				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
+ 0,095	+ 0,654	+ 0,235	+ 0,612	- 0,147	1,1	1,34	1,60	0,91	1,08
+ 0,28644	+ 0,00252	- 0,00103	+ 0,74595	- 0,05902	- 0,0046	- 0,0106	- 0,0047	- 0,0097	
- 0,00027	+ 0,04438	+ 0,36926	- 0,00321	- 0,01731					
+ 0,11108	- 0,00012	- 0,00205	+ 0,13074	+ 0,09268	- 0,0016	- 0,0017	- 0,0047	- 0,0018	- 0,0019
+ 0,00018	+ 0,01444	+ 0,08189	- 0,00298	+ 0,10042					
+ 0,02874	+ 0,05149	+ 0,00235	+ 0,04509	- 0,00136			- 0,0014		
+ 0,04010	+ 0,00005	- 0,00239	+ 0,05079	+ 0,00936	- 0,0006	- 0,0008	- 0,0002	- 0,0007	- 0,0003
- 0,00131	+ 0,00551	+ 0,02980	- 0,00137	+ 0,01237					
+ 0,00685	+ 0,01408	+ 0,00212	+ 0,01135	- 0,00005	1,0932	1,3269	1,5886	0,8978	1,0778
+ 0,00775	+ 0,01400	+ 0,00212	+ 0,01132	+ 0,09583					
+ 0,01591	+ 0,03253	- 0,00108	+ 0,02917	+ 0,00109			- 0,0004		- 0,0015
+ 0,02250	- 0,00005	- 0,00193	+ 0,03202	+ 0,00728		- 0,0005	- 0,0001	- 0,0004	
+ 0,00115	+ 0,00268	+ 0,01559	+ 0,00191	+ 0,00900	- 0,0008				- 0,0002
+ 0,00297	+ 0,00738	+ 0,00277	+ 0,00747	- 0,00064		- 0,0002			
- 0,00405	+ 0,00829	+ 0,00766	+ 0,00012	- 0,00021	- 0,0001			- 0,0001	
- 0,00110	+ 0,00299	+ 0,00073	+ 0,00297	+ 0,00266		- 0,0001	- 0,0001		
- 0,00216	+ 0,00299	+ 0,00073	+ 0,00403	+ 0,00266	1,0928	1,3263	1,5878	0,8973	1,0761

dalej. Po osiągnięciu żądanej dokładności rachunek przerywamy. Wyniki są następujące:

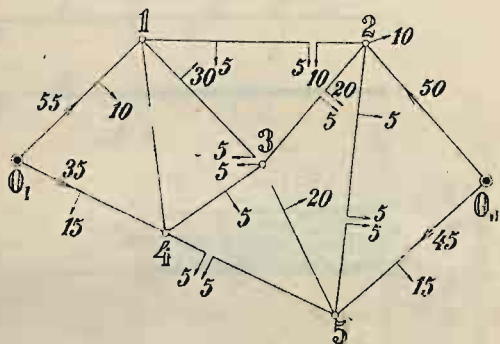
$$x_1 = 1,0928 \text{ V} \quad x_2 = 1,3263 \text{ V} \quad x_3 = 1,5878 \text{ V} \quad x_4 = 0,8973 \text{ V} \quad x_5 = 1,0761 \text{ V}.$$

W przykładzie niniejszym mieliśmy pracę ułatwioną przez poprzednie rozwiązanie równań drogą wykreślną. Gdyby nam wypadło rozwiązywać równania bez tej pomocy, zaczęlibyśmy od oszacowania wartości niewiadomych.

W tym celu zwracamy się do sieci elektrycznej (rys. 42), z której pochodzą nasze równania, i układamy przypuszczalny rozpyływ prądów. Bierzemy np. za zasadę, że w każdej drodze, od jednego punktu zasilającego do drugiego, obciążenia dzielą się na oba punkty po równu. Na drodze $0_I \neq 0_{II}$ suma odbiorów wynosi:

$$10 + 5 + 15 + 10 = 40 A.$$

Przypuszczamy, że z obu krańców popłynie po 20 A, i przecinamy bok sieci (rys. 54) w punkcie spływu prądów. W ten sam sposób rozumując, przecinamy inne drogi ($0_I 1 3 2 0_{II}$, $0_I 4 5 0_{II}$, $0_I 4 3 5 0_{II}$, $0_I 1 4 0_I$, $0_{II} 2 5 0_{II}$, $0_I 4 3 2 0_{II}$) w punkcie spływu prądów i otrzymujemy w końcu cztery rozgałęzione tory otwarte. Spadki napięcia w punktach węzłowych będą wówczas następujące :



Rys. 54.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{57 \cdot 50} (55 \cdot 35 - 10 \cdot 15) = 1,24 \text{ V} & x_2 &= \frac{2}{57 \cdot 50} 50 \cdot 40 = 1,4 \text{ V} \\ x_4 &= \frac{2}{57 \cdot 50} (35 \cdot 35 - 15 \cdot 20) = 0,65 \text{ V} & x_3 &= x_4 + \frac{2}{57 \cdot 25} (15 \cdot 25 - 5 \cdot 10) = 1,1 \text{ V} \\ x_5 &= \frac{2}{57 \cdot 50} (45 \cdot 40 - 15 \cdot 15) = 1,1 \text{ V}. \end{aligned}$$

Liczby te byłyby podstawą do obliczenia pierwszych chybów.

§ 15. Stopniowe upraszczanie sieci.

Odnajdowanie rozplywu prądów zapomocą rozwiązywania równań wymaga, szczególnie przy metodzie rachunkowej, dużego nakładu pracy. W wielu przypadkach można dojść do celu innym sposobem, mniej nużącym, przez stopniowe upraszczanie sieci.

Metoda ta opiera się przede wszystkim na przekładaniu obciążenia z jednego punktu do drugiego. Objasnimy to na przykładzie. Rys. 55 przedstawia tor (a_1, a_2), o jednostajnym przekroju, zasilany na krańcach napięciem jednakowym i obciążony w dwóch punktach b i c prądami i_b, i_c . Sposobem wykreślnym ustaliliśmy wartości prądów zasilających: i_1, i_2 , zbudowaliśmy wykres prądów przewodowych: $d, d', e, e', f, f', g, g'$ i wykres spadków napięcia a', b', c', a_2 . Wyobraźmy sobie, że dla ustalenia rozplywu prądów chcemy uprościć tor w ten sposób, aby miał odbiór prądu w jednym tylko punkcie c . Odcinek c, a_2 , po którym

plynie prąd przewodowy i_2 , pozostawimy bez zmiany, natomiast odcinek a_1c zastąpimy innym odcinkiem ac (na rys. linja gruba) o tej samej przewodności, lecz z obciążeniem $i_c + i_{bc}$, skupionym w punkcie c . Umysłony prąd i_{bc} musi być tak dobrany, aby spadek napięcia w punkcie c pozostał ten sam, co dawniej, gdyż

tylko w tym przypadku prąd przewodowy w drugim odcinku ca_2 nie ulegnie zmianie.

Zachodzi pytanie, jaka będzie wartość umysłonych prądów: i_{bc} , I . Zadanie to rozwiążemy wykreślnie. Zaczynamy od wykresu spadków napięcia. Wykres ten dla umysłonej części toru ac będzie trójkątem $a_1c'e'$. Prowadzimy promień oh równoległe do boku a_1c' (linje grube) i znajdujemy odcinek hf , równy całemu odbiorowi w punkcie $c \dots i_c + i_{bc}$. A więc, odcinek he ilustruje wartość prądu i_{bc} , a odcinek gh — prąd I .

Takie przekształcenie toru nazywamy przekładaniem obciążenia z punktu b

do c . Mówimy, że prąd i_b przełożylłmy do punktu c , przyczem wartość tego prądu musiała być zmniejszona do i_{bc} . Prąd umysłony i_{bc} nazywamy prądem przełożonym. Ponieważ zasadą tego przekładania jest utrzymanie nadal w punkcie c tego samego spadku napięcia, przeto momenty prądu pierwotnego i_b i prądu przełożonego i_{bc} względem punktu zasilającego a_1 muszą być sobie równe:

$$i_b l_{a,b} = i_{bc} l_{a,c},$$

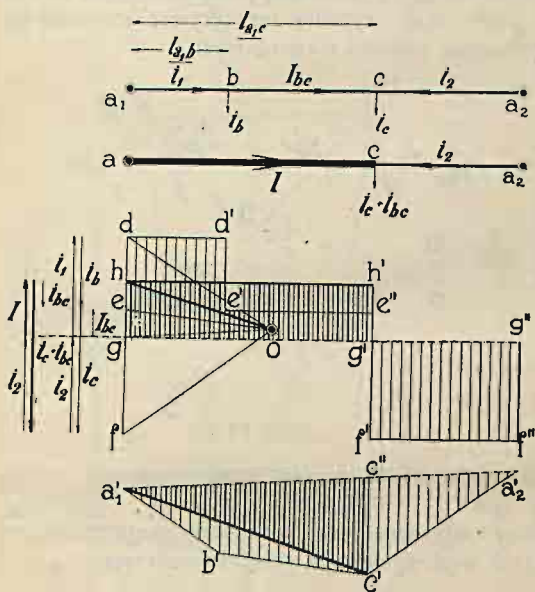
stąd prąd przełożony

$$i_{bc} = i_b \frac{l_{a,b}}{l_{a,c}}. \quad (33)$$

Do tego samego wyniku doprowadzi nas wykres prądów przewodowych na rys. 55. Na wykresie tym wszystkie trzy wieloboki: $dd'e'e''g'g$, $g'g'f''f'$, $hh'g'g$ mają powierzchnie o jednakowym obszarze, gdyż powierzchnie te są obrazem spadku napięcia w punkcie c (patrz § 8). Stąd wniosek, że powierzchnie prostokątów: $dd'e'e$, $hh'e''e$ są sobie równe czyli:

$$i_b l_{a,b} = i_{bc} l_{a,c}.$$

Obliczmy wartość drugiego prądu umysłonego I . Jest to prąd, który, z chwilą



Rys. 55.

przełożenia odbioru i_b z punktu b do c , płynie po całym odcinku a_1c . Poprzednio w punkcie c spływały się dwa prądy I_{bc} , i_z , tworząc w sumie prąd i_c :

$$I_{bc} + i_z = i_c,$$

obecnie spływają się prądy I , i_z , dając w sumie $i_c + i_{bc}$:

$$I + i_z = i_c + i_{bc},$$

stąd wniosek, że

$$\boxed{I = I_{bc} + i_{bc}}. \quad (34)$$

To samo mówi wykres prądów przewodowych:

$$h_g = \overline{eg} + \overline{he}.$$

Umyślony prąd I będziemy nazywali prądem sumarycznym.

Drugą właściwością omawianej metody jest łączenie dwóch gałęzi, zasilanych z dwóch punktów, w jedną gałąź, zasilaną z jednego punktu umyślnego. Objaśnimy to na przykładzie. Rys. 56 przedstawia najprostszą sieć o przekroju jednostajnym, zasilaną z trzech punktów: a_1 , a_2 , a_3 i obciążoną w jednym punkcie węzłowym t — prądem i . Prądy zasilania oznaczyliśmy literami: I_1 , I_2 , I_3 . Dla uproszczenia sieci chcemy obie gałęzie a_1t i a_3t zastąpić jednym odcinkiem umyślnym at (na rys. linia gruba) o tym samym przekroju, przez który płynąłby prąd $I_1 + I_3$. Odcinek zaś ta_2 ma pozostać bez zmiany z tym samym prądem I_2 i z tym samym spadkiem napięcia w punkcie t .

Z tego wynika, że przewodność odcinka umyślnego at musi się równać sumie przewodności obu gałęzi, połączonych równolegle:

$$\frac{1}{R_{at}} = \frac{1}{R_{a_1t}} + \frac{1}{R_{a_3t}}.$$

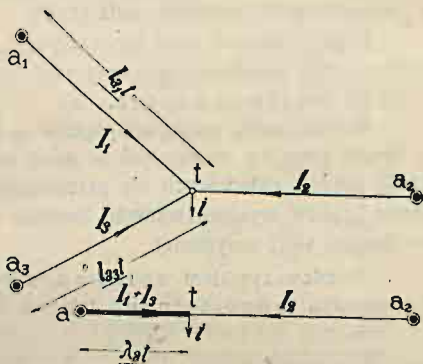
Ponieważ [mamy do czynienia z jednakowymi przekrojami], przeło możemy podstawić, zamiast oporności, długości odcinków:

$$\frac{1}{\lambda_{at}} = \frac{1}{\lambda_{a_1t}} + \frac{1}{\lambda_{a_3t}}.$$

Stąd długość równoważna λ_{at} dwóch gałęzi: a_1t , a_3t wyrazi się wzorem:

$$\boxed{\lambda_{at} = \frac{\lambda_{a_1t} \lambda_{a_3t}}{\lambda_{a_1t} + \lambda_{a_3t}}}. \quad (35)$$

Po tym wstępie możemy już przejść do samej metody. Rozumujemy w sposób następujący. Przypuszczamy najpierw, że wszystkie punkty węzłowe są punktami zasilającymi i znajdujemy rozpyły prądów składowych. Ponieważ punkty węzłowe w rzeczywistości nie wydają z siebie żadnego prądu, przeło prądy te, które jakoby



Rys. 56.

z nich wypływały, trzeba doprowadzić z punktów zasilających. Te prądy dodatkowe nazwalismy wyrównawczymi. Możemy sobie zatem wyobrazić, że sieć nasza rozszepcza się na dwie sieci, geometrycznie jednakowe, z których:

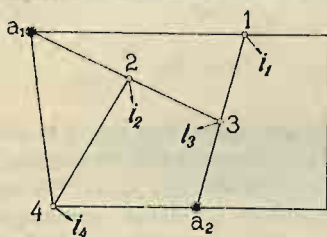
1) jedna ma rzeczywiste odbiory prądów, a jest zasilana we wszystkich punktach węzłowych, a

2) druga ma odbiory prądu, skupione w punktach węzłowych, i jest zasilana w rzeczywistych punktach zasilających.

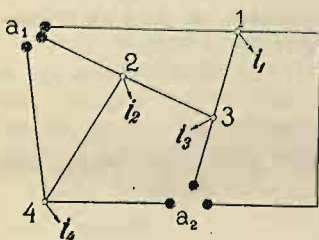
Prądy, które w sieci pierwszej były zasilaniem, w drugiej sieci będą odbiorem. Pierwszą sieć umyśloną nazwiemy siecią prądów składowych, drugą — siecią prądów wyrównawczych.

Po obliczeniu rozplywu prądów w każdej sieci z osobna, nakładamy jedną sieć na drugą, łączymy zpowrotem w jedną całość, a prądy obu sieci sumujemy. Obliczenie prądów składowych nie przedstawia trudności. Chodzi tylko o obliczenie rozplywu prądów wyrównawczych. Zadanie to rozwiązujemy przez stopniowe upraszczanie drugiej sieci umyślonej.

Przedewszystkiem sprowadzamy długości wszystkich boków do przekroju jednostajnego tak, jak to już czyniliśmy w wykreślnem obliczaniu spadków napięcia (patrz przykład 7).



Rys. 57.



Rys. 58.

Następnie, rozłączamy przewody, schodzące się w punktach zasilających, w ten sposób, jak-gdyby każdy z tych przewodów miał swój własny punkt zasilający (rys. 57—rys. 58). Wreszcie, całą sieć prostujemy nakształt pnia rozgałęzionego (rys. 59).

Zaczynamy sieć stopniowo zwijać. W tym celu łączymy gałęzie $a_1 4$, $a_2 4$ (rys. 59) w jeden odcinek umyślony $a 4$ (rys. 60). Następnie przekładamy odbiór prądu i_4 z punktu 4 do 2. Odbiór w punkcie 2 wyniesie: $i_2 + i_4$ (rys. 61). Teraz łączymy umyśloną gałąź $a 2$ z rzeczywistą gałęzią $a, 2$ w jeden odcinek umyślony $a 2$ (rys. 62). Czynności te powtarzamy dopóty, dopóki nie sprowadzimy całej naszej sieci do toru nierozgałęzionego aa_1 (rys. 63), obciążonego w jednym tylko punkcie 1. Zwijanie sieci ukończono. Obliczamy prądy zasilania: 1) prąd $I_{a,1}$ w rzeczywistej części toru i 2) prąd sumaryczny I — w umyślonej części toru.

Przystępujemy do czynności odwrotnej — do odwijania sieci. Umyślony odcinek $a 1$ zastępujemy zpowrotem dwoma odcinkami: umyślnym $a 1$ i rzeczywistym $a_2 1$. Odnajdujemy prąd w odcinku rzeczywistym. Następnie przekładamy zpowrotem część prądu z punktu 1 do 3 i tak rozwijamy sieć coraz dalej i dalej, aż wrócimy do sieci rozwinętej (rys. 59). Rozplyw prądów wyrównawczych jest już ustalony.

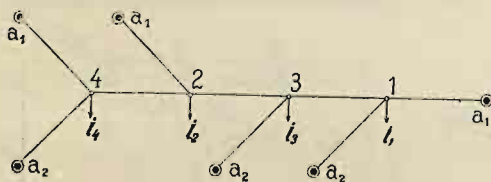
Po dodaniu prądów wyrównawczych ze składowymi zadanie będzie ukończono.

Przykład 15. Obliczyć rozplyw prądów w sieci z rys. 64.

A. Sieć prądów składowych (rys. 65). Obliczamy prądy składowe. Po boku $a_1, 2$ popłyną prądy:

$$\text{od } a_1 \dots \frac{18,75 \cdot 20}{60} = 6,25 \text{ A}$$

$$\text{od } 2 \dots \frac{18,75 \cdot 40}{60} = 12,5 \text{ A},$$



Rys. 59.

a po boku $a_2, 2$:

$$\text{od } a_2 \dots \frac{56,16 \cdot \frac{17,5}{35}}{\frac{17,5}{35} + \frac{80}{50}} = 18,37 \text{ A}$$

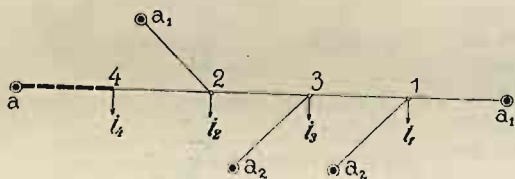
$$\text{od } 2 \dots \frac{56,16 \cdot \frac{80}{50}}{\frac{17,5}{35} + \frac{80}{50}} = 42,79 \text{ A}.$$

B. Sieć prądów wyrównawczych (rys. 66).

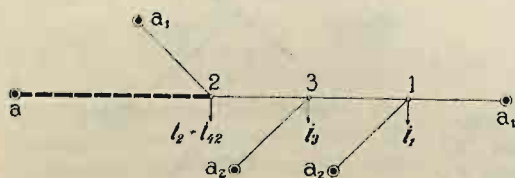
1. Sprowadzamy długości wszystkich boków do jednakowego przekroju ... 35 mm^2 :

$$l_{1a_2} = 100 \frac{35}{50} = 70 \text{ m}$$

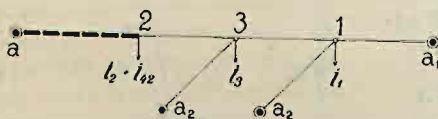
$$l_{2a_2} = 17,5 + 80 \frac{35}{50} = 73,5 \text{ m}.$$



Rys. 60.



Rys. 61.



Rys. 62.

2. Rozłączamy przewody przy punktach zasilających i przedstawiamy sieć w postaci pnia rozgałęzionego (rys. 67 - I).

3. Rozpoczynamy związanie sieci. Gałęzie: $a_2, 1, a_1, 1$ łączymy w jedną gałąź umyślną $a, 1$ (rys. 67 - II) o długości równoważnej:

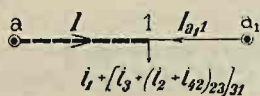
$$\lambda_{a1} = \frac{70 \cdot 90}{70 + 90} = 39,4 \text{ m}.$$

Przekładamy obciążenie z punktu 1 do 2 (rys. 67 - III):

$$i_{12} = 56,18 \frac{39,4}{39,4 + 28} = 32,84 \text{ A}$$

i otrzymujemy całkowite obciążenie w punkcie 2:

$$55,29 + 32,84 = 88,13 \text{ A}.$$



Rys. 63.

Wreszcie zastępujemy gałęzie $a_1 2$ i a_2 jedną gałęzią umyśloną a_2 o długości równoważnej (rys. 67 — IV):

$$\lambda_{a_2} = \frac{73,5 \cdot 67,4}{73,5 + 67,4} = 35,2 \text{ m.}$$

4. Obliczamy prąd rzeczywisty, wypływający z punktu a_1 (rys. 67 — IV):

$$\frac{88,13 \cdot 35,2}{85,2 + 60} = 32,58 \text{ A}$$

i prąd sumaryczny, wypływający z umyślonego punktu a :

$$\frac{88,13 \cdot 60}{35,2 + 60} = 55,55 \text{ A.}$$

5. Zaczynamy rozwijać ścieżę zpowrotem. Odcinek a_2 rozszczepiamy na dwie gałęzie (rys. 68 — III): 1) rzeczywistą $a_2 2$ o długości 73,5 m i 2) umyśloną $a_2 \dots 67,4$ m. Prądy w tych gałęziach będą odwrotnie proporcjonalne do długości i wyniosą:

$$55,55 \frac{67,4}{73,5 + 67,4} = 26,57 \text{ A,}$$

$$55,55 \frac{73,5}{73,5 + 67,4} = 28,98 \text{ A.}$$

Przy dalszym rozwijaniu sieci przykładamy prąd 32,84 A z punktu 2 zpowrotem do punktu 1. W punkcie 2 pozostanie tylko (rys. 68-II):

$$88,13 - 32,84 = 55,29 \text{ A,}$$

a w punkcie 1 prąd przełożony wróci do dawnej swej wartości ... 56,18 A. W odcinku 12 popłynie prąd rzeczywisty:

$$55,29 - 26,57 - 32,58 = -3,86 \text{ A}$$

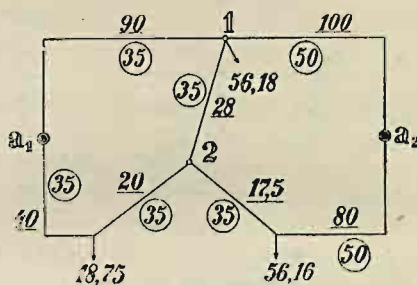
w kierunku od 2 do 1, a w odcinku a_1 — prąd umyślony:

$$56,18 - 3,86 = 52,32 \text{ A.}$$

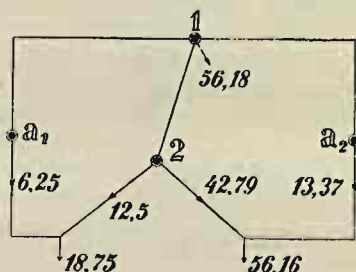
Wreszcie rozszczepiamy odcinek umyślony a_1 zpowrotem na dwie gałęzie rzeczywiste (rys. 68 — I): $a_2 1$, $a_1 1$. Prądy w tych gałęziach wyniosą:

$$52,32 \frac{90}{90 + 70} = 29,43 \text{ A}$$

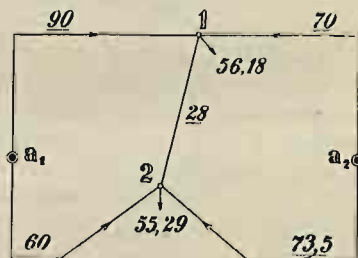
$$52,32 \frac{70}{90 + 70} = 22,89 \text{ A.}$$



Rys. 64.



Rys. 65.



Rys. 66.

Rozpływ prądów wyrównawczych jest już ustalony i trzeba tylko pień rozgałęziony (rys. 68 — I) przelinczyć zpowrotem w sieć zamkniętą (rys. 69).

C. Sieć rzeczywista. Nakładamy sieć prądów składowych (rys. 65) na sieć prądów wyrównawczych (rys. 69), prądy dodajemy algebracnie i otrzymujemy rozpływ prądów rzeczywistych (rys. 70).

Sprawdzamy spadki napięcia w punktach splywu prądów. W punkcie węzłowym 1:

$$\Delta E_{a,1} = \frac{2}{57,35} 22,89 \cdot 90 \approx 2,06 \text{ V}$$

$$\Delta E_{a,1} = \frac{2}{57,50} 29,42 \cdot 100 \approx 2,06 \text{ V}$$

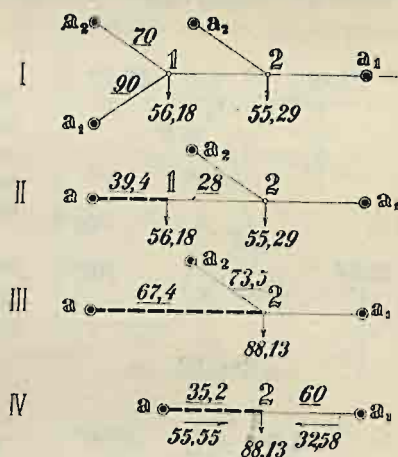
W punkcie odbioru x:

$$\Delta E_{a,x} = \frac{2}{57,35} (38,83 \cdot 77,5 - 18,75 \cdot 37,5 - 3,86 \cdot 17,5) \approx 2,24 \text{ V}$$

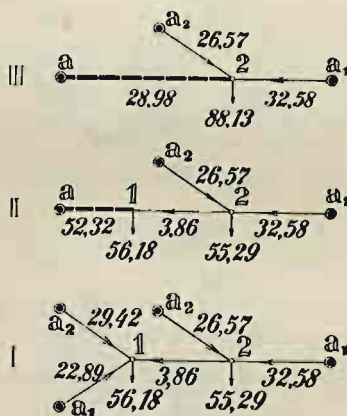
$$\Delta E_{a,x} = \frac{2}{57,50} 39,94 \cdot 80 \approx 2,24 \text{ V}$$

Przez cały czas obliczania rozplywu prądów powyższą metodą mamy przed oczyma sieć i operujemy wielkościami elektrycznymi. Przy rozwiązywaniu zaś równań, a szczególnie przy rachunkowym rozwiązywaniu, odbiegamy od pojęć elektrycznych. Co się zaś tyczy wykreślnego rozwiązywania równań, to właściwie nie jest ono niczem innym, jak również stopniowem upraszczaniem sieci. Również przekładamy obciążenia z jednego punktu do drugiego, kasujemy punkty i sprowadzamy całą sieć do jednego toru. Różnica jest tylko ta, że w obliczeniu wykreślnem następuje od razu całkowite przeinaczenie sieci, że opiera się ono na motywach matematycznych, oderwanych i że wreszcie nie podlega naszym obserwacjom. Tu zaś przekształcamy sieć tylko częściowo, opieramy się na rozumowaniach wyłącznie elektrycznych i cały czas śledzimy zmiany, zachodzące w sieci.

Nie wszystkie jednak sieci można rozwiązać powyższą metodą. Gdy po odcięciu od punktów zasilających, sieć nie nabiera kształtu pnia rozgałęzionego, lecz zawiera oka czyli zamknięte w sobie wieloboki, wówczas metoda ta zawodzi i trzeba bądź przekształcać te wieloboki, bądź uciec się do metody ogólnej: do układania równań.



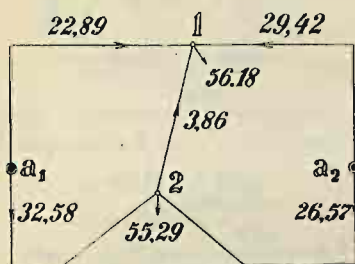
Rys. 67.



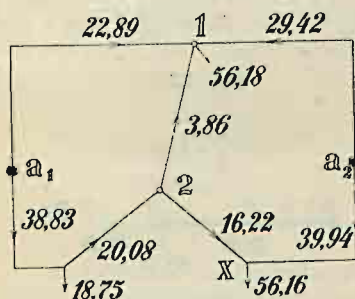
Rys. 68.

§ 16. Przekształcanie trójkąta w gwiazdę.

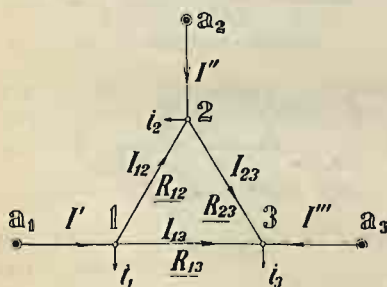
Rys. 71 przedstawia najprostszą sieć, zawierającą zamknięty w sobie trójkąt 123, a rys. 72 przedstawia tę samą sieć przekształconą w gwiazdę. Zadanie polega na obliczeniu oporności dla umyślonych boków gwiazdy:



Rys. 69.



Rys. 70.



Rys. 71.

$$R_1, R_2, R_3,$$

przy których napięcia w punktach 1, 2 i 3 pozostałyby te same, co w układzie trójkątowym. Innymi słowy, zamierzamy przekształcić trójkąt w gwiazdę, nie zmieniając prądów zasilających: I' , I'' i I''' .

Oznaczamy napięcia punktów węzłowych literami... E_1 , E_2 i E_3 , a umyślnego punktu gwiazdowego... E_0 . Przyjmujemy, zresztą zupełnie dowolnie, że

$$E_1 > E_0 > E_2 > E_3$$

i, opierając się na tem przypuszczeniu, oznaczamy kierunek prądów, płynących po bokach trójkąta: I_{12} , I_{23} , I_{13} i kierunek prądów w umyślonych promieniach gwiazdy: I_1 , I_2 i I_3 .

Prądy w układzie trójkątowym wyrażą się następującymi równaniami:

$$\left. \begin{aligned} I_{12} &= \frac{E_1 - E_2}{R_{12}} & I_{23} &= \frac{E_2 - E_3}{R_{23}} \\ I_{13} &= \frac{E_1 - E_3}{R_{13}} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} I' &= i_1 + I_{12} + I_{13} \\ I'' &= i_2 + I_{23} - I_{12} \\ I''' &= i_3 - I_{23} - I_{13} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

a w układzie gwiazdowym — równaniami:

$$\left. \begin{aligned} I' &= i_1 + I_1 & I'' &= i_2 - I_2 \\ I''' &= i_3 - I_3 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Z zestawienia równań (b) i (c) wynika:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_{12} + I_{13} & I_2 &= I_{12} - I_{23} \\ I_3 &= I_{23} + I_{13} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Rozpatrując układ gwiazdowy (rys. 72), otrzymamy dla różnicy napięć $E_1 - E_2$ i $E_1 - E_3$ następujące równania:

$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2$$

$$E_1 - E_3 = I_1 R_1 + I_3 R_3.$$

Podstawiawszy do tych równań, zamiast prądów I_1, I_2, I_3 , ich wartość ze wzorów (d), otrzymamy:

$$E_1 - E_2 = (I_{12} + I_{13}) R_1 + (I_{12} - I_{23}) R_2, \quad E_1 - E_3 = (I_{12} + I_{13}) R_1 + (I_{23} + I_{13}) R_3,$$

a podstawiawszy, zamiast prądów I_{12}, I_{23}, I_{13} , ich wartości ze wzorów (a), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} E_1 - E_2 &= \left(\frac{E_1 - E_2}{R_{12}} + \frac{E_1 - E_3}{R_{13}} \right) R_1 + \left(\frac{E_1 - E_2}{R_{12}} - \frac{E_2 - E_3}{R_{23}} \right) R_2 \\ E_1 - E_3 &= \left(\frac{E_1 - E_2}{R_{12}} + \frac{E_1 - E_3}{R_{13}} \right) R_1 + \left(\frac{E_2 - E_3}{R_{23}} + \frac{E_1 - E_3}{R_{13}} \right) R_3 \end{aligned} \right\}$$

Otwieramy nawiasy i szeregujemy człony względem E_1, E_2 i E_3 :

$$\left. \begin{aligned} E_1 \left(\frac{R_1}{R_{12}} + \frac{R_1}{R_{13}} + \frac{R_2}{R_{12}} - 1 \right) + E_2 \left(1 - \frac{R_1}{R_{12}} - \frac{R_2}{R_{12}} - \frac{R_2}{R_{23}} \right) + E_3 \left(\frac{R_2}{R_{23}} - \frac{R_1}{R_{13}} \right) &= 0 \\ E_1 \left(\frac{R_1}{R_{12}} + \frac{R_1}{R_{13}} + \frac{R_3}{R_{13}} - 1 \right) + E_2 \left(\frac{R_3}{R_{23}} - \frac{R_1}{R_{12}} \right) + E_3 \left(1 - \frac{R_1}{R_{13}} - \frac{R_3}{R_{13}} - \frac{R_3}{R_{23}} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Tak więc, napięcia w punktach 1, 2, 3 będą te same w układzie trójkątowym i gwiazdowym, gdy równania (e) będą spełnione. Równania te muszą być spełnione przy dowolnych napięciach E_1, E_2 i E_3 . Wobec tego w równaniach (e) wszystkie współczynniki napięć E_1, E_2 i E_3 muszą równać się zeru:

$$\frac{R_1}{R_{12}} + \frac{R_1}{R_{13}} + \frac{R_2}{R_{12}} - 1 = 0 \quad (f)$$

$$1 - \frac{R_1}{R_{12}} - \frac{R_2}{R_{12}} - \frac{R_2}{R_{23}} = 0 \quad (g)$$

$$\frac{R_2}{R_{23}} - \frac{R_1}{R_{13}} = 0 \quad (h)$$

$$\frac{R_3}{R_{23}} - \frac{R_1}{R_{12}} = 0 \quad (k)$$

$$\frac{R_1}{R_{12}} + \frac{R_1}{R_{13}} + \frac{R_3}{R_{13}} - 1 = 0 \quad (i)$$

$$1 - \frac{R_1}{R_{13}} - \frac{R_3}{R_{13}} - \frac{R_3}{R_{23}} = 0 \quad (l)$$

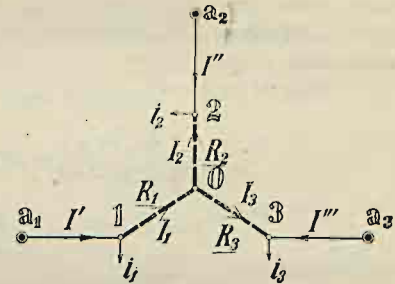
Z równań tych znajdujemy oporności dla umyślonych promieni gwiazdowych:

$$\left[R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \right] \quad \left[R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \right] \quad \left[R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \right] \quad (36)$$

Przy jednostajnym przekroju oporności są proporcjonalne do długości, a więc długości umyślonych promieni wyrażą się następującymi wzorami:

$$\left[\lambda_1 = \frac{l_{12} l_{13}}{l_{12} + l_{23} + l_{13}} \right] \quad \left[\lambda_2 = \frac{l_{12} l_{23}}{l_{12} + l_{23} + l_{13}} \right] \quad \left[\lambda_3 = \frac{l_{13} l_{23}}{l_{12} + l_{23} + l_{13}} \right] \quad (37)$$

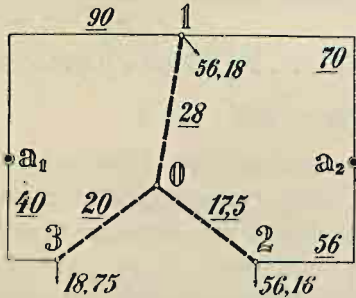
Trójkąty, zawarte w sieciach, a obciążone wyłącznie tylko w wierzchołkach, można, nie zmieniając napięć w wierzchołkach, przekształcić w gwiaz-



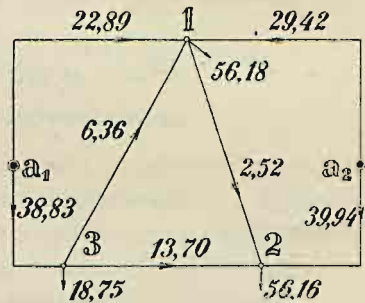
Rys. 72.

rzeczywistych, znaleziony w przykładzie 15-ym (rys. 70), jest jednocześnie rozpięciem prądów wyrównawczych dla obecnej sieci, przekształconej w gwiazdę.

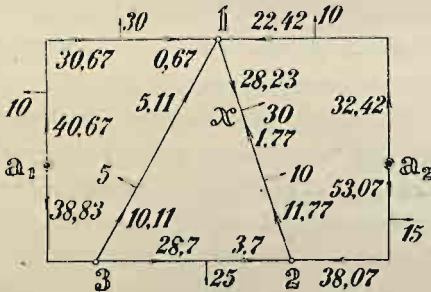
4. Gwiazdę 0123 (rys. 76) przekształcamy zpowrotem w trójkąt (rys. 77). Prądy zasilające w odcinkach $a_1 1$, a_3 , $a_2 1$, $a_2 2$ pozostaną te same, co w układzie



Rys. 76.



Rys. 77.



Rys. 78.

gwiazdowym (rys. 70). Aby ustalić prądy, które płyną po bokach trójkąta, obliczamy spadki napięcia w wierzchołkach trójkąta:

$$\Delta E_{a1} = \frac{2}{57 \cdot 35} 22,89 \cdot 90 = 2,066 \text{ V}$$

$$\Delta E_{a2} = \frac{2}{57 \cdot 35} 39,94 \cdot 56 = 2,243 \text{ V}$$

$$\Delta E_{a3} = \frac{2}{57 \cdot 35} 38,83 \cdot 40 = 1,556 \text{ V}$$

Po bokach trójkąta będą płynęły prądy:

$$I_{12} = (2,243 - 2,066) \frac{57,35}{2,70} = 2,52 \text{ A}$$

$$I_{31} = (2,066 - 1,556) \frac{57,35}{2,80} = 6,36 \text{ A}$$

$$I_{32} = (2,243 - 1,556) \frac{57,35}{2,50} = 13,70 \text{ A}$$

Sprawdzamy rachunek wg 1-go prawa Kirchhoffa:

$$(1) \quad + 22,89 + 6,36 + 29,42 - 2,52 - 56,18 = - 0,03 \text{ A}$$

$$(2) \quad + 13,70 + 2,52 + 39,94 - 56,16 = 0$$

$$(3) \quad + 38,83 - 6,36 - 13,70 - 18,75 = - 0,02 \text{ A}$$

Uchybienia nieznaczne.

C. Sieć rzeczywista. Nakładamy sieć prądów składowych (rys. 74) na sieć prądów wyrównawczych (rys. 77), prądy dodajemy algebraicznie i otrzymujemy rozptyw prądów rzeczywistych (rys. 78).

Obliczamy spadek napięcia w punkcie spływu x :

$$\Delta E'_{ax} = \Delta E_{a1} + \frac{2}{57.35} 28,23 \cdot 20 = 2,066 + 0,566 = 2,632 \text{ V}$$

$$\Delta E_{ax} = \Delta E_{a2} + \frac{2}{57.35} (11,77 \cdot 30 + 1,77 \cdot 20) = 2,243 + 0,389 = 2,632 \text{ V.}$$