O przyśpieszeniu Coriolisa.

Twierdzenie Coriolisa o przyśpieszeniu w ruchu względnym należy do trudniejszych części mechaniki. Znane dowody jego zarówno syntetyczne [1]) jak i analityczne są długie i niełatwe i, co ważniejsza, posiadają tę spólną wadę, że nie uwydatniają w dostatecznej mierze właściwej treści twierdzenia. Potrzeba zużyć dużo pracy, aby śród szczegółów rozumowania lub rachunku wykryć nić przewodnią i tym samym zrozumieć należycie pochodzenie przyśpieszenia Coriolisowskiego. Z tych względów w elementarnych wykładach mechaniki twierdzenie Coriolisa bywa zazwyczaj pomijane, chociaż odgrywa ono rolę ważną zarówno w teorji jak w zastosowaniach.

Niżej podany prosty dowód nie posiada, jak sądzę, wskazanej wady i nadaje się całkowicie do wykładu elementarnego.

Składa się on z dwuch części; w pierwszej wyjaśnimy, skąd pochodzi przyśpieszenie Coriolisa, w drugiej wyznaczymy je pod względem wielkości i kierunku.

Wyobraźmy sobie układ sztywny S, poruszający się jakkolwiek, i nienależący do niego punkt M, który przypada w coraz innym punkcie układu S, czyli, krócej mówiąc, zajmuje coraz inny punkt tego układu. Powiemy, że punkt M porusza się względem układu S. Te wszystkie punkty układu S, które zajmuje z kolei punkt M, leżą na pewnej linji, którą nazwiemy t o r e m w z g l ę d n y m punktu M, miejsce zaś gieometryczne punktów przestrzeni nieruchomej (lub raczej innego układu Σ, uznanego przez nas za nieruchomy), które zajmuje z kolei punkt M, nazwiemy t o r e m b e z w z g l ę d n y m tego punktu.

---

[1]) Por. np. uproszczony dowód Ekholma według referatu p. Wł. Gorczyńskiego, wygłoszonego na posiedzeniu Koła mat.-fizycznego w Warszawie i ogłoszonego drukiem w Sprawozdaniach z r. 1909 № II.

Wiadomo, że prędkość bezwzględna punktu M, wynikająca z ruchu tego punktu na torze bezwzględnym, posiada dwie składowe, a mianowicie prędkość względną v, wynikającą z ruchu na torze względnym, i prędkość unoszenia u, czyli prędkość tego punktu A układu S, który obecnie zajmuje punkt M.

Przypuśćmy, że od tej chwili, gdy punkt M przebiegał przez punkt A, upłynęło dt sekund. W ciągu tego czasu punkt M dojdzie do nowego, nieskończenie blizkiego, punktu A_1 toru względnego, a jednocześnie obydwie prędkości składowe v i u ulegną pewnym zmianom, czyli otrzymają pewne przyrosty. Zadanie nasze będzie w pierwszej linji polegało na zbadaniu tych przyrostów. Znajdziemy, że każda z prędkości składowych otrzymuje dwa przyrosty, a zatym prędkość bezwzględna otrzyma cztery przyrosty i tyleż składowych będzie miało przyśpieszenie.

1) W ciągu czasu dt element AA_1 toru względnego, który właśnie przebiega punkt M, zmieni kierunek w przestrzeni nieruchomej dzięki ruchowi układu S, czyli ruchowi unoszenia. Skutkiem tego prędkość względna v ulegnie pewnej zmianie, czyli otrzyma przyrost, który oznaczmy przez dv_1. Wypada zaznaczyć z naciskiem, że dv_1 oznacza przyrost gieometryczny, nie zaś algiebraiczny. Chcąc znaleźć, jaka będzie prędkość względna po otrzymaniu tego przyrostu, należy v i dv_1 dodać gieometrycznie, t. j. wyznaczyć wypadkową tych dwuch składowych. Ta sama uwaga dotyczy także przyrostów następnych. Gdyby ruch układu S był postępowy, to element AA_1 nie zmieniałby kierunku w przestrzeni, i w takim razie przyrost dv_1 byłby równy zeru.

2) Łatwo zrozumieć, że prędkość względna otrzyma jeszcze inny przyrost dv_2, niezależny od ruchu unoszenia. Obserwator, należący do układu S i nie odczuwający ruchu unoszenia, dostrzegłby jedynie ten przyrost dv_2. Powstanie przyrostu dv_2 przypisać należy temu, że prędkość względna zmieni się w ciągu dt sekund pod względem wielkości, i że tor względny posiada w punkcie A pewną krzywiznę. Przyrost dv_2 jest równy zeru tylko w tym razie, gdy prędkość względna jest stała pod względem wielkości, a torem względnym jest linja prosta.

3) W ciągu dt sek. punkt M dojdzie do nowego punktu A_1 układu S, lecz prędkość tego punktu A_1 już w początku okresu dt różniła się, dajmy na to, o du_1 od prędkości punktu A. Jest rzeczą oczywistą, że składowa u musi otrzymać przyrost du_1. Otrzymałaby go ona nawet w tym razie, gdyby prędkości punktów A i A_1 w czasie dt nie uległy zmianie. Jeżeli prędkości wszystkich punktów układu S są jednakowe, t. j. jeżeli ruch unoszenia jest postępowy, to $du_1=0$.

4) W ciągu dt sekund prędkość punktu A_1 ulegnie zmianie, czyli otrzyma pewien przyrost du_2. Oczywiście składowa u musi otrzymać jeszcze i ten przyrost du_2. Ponieważ punkty A i A_1 są nieskończenie blizkie, przeto prędkości ich otrzymają przyrosty, różniące się o nieskończenie małą rzędu wyższego, i możemy uważać, że du_2 jest to przyrost, który otrzymuje punkt A w ciągu dt sek.

Z rozważań powyższych widać, że bezwzględna prędkość punktu M w ciągu dt sek. otrzyma cztery przyrosty dv_1, dv_2, du_1 i du_2. Aby otrzymać prędkość bezwzględną w końcu okresu dt, trzeba do poprzedniej prędkości bezwzględnej dodać gieometrycznie te cztery przyrosty, albo ich wypadkową. Stąd wynika. że przyśpieszenie bezwzględne punktu M posiada cztery składowe, zgodne pod względem kierunków z przyrostami dv_1, dv_2, du_1 i du_2, zaś pod względem wielkości odpowiednio równe $\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \frac{du_1}{dt}$ i $\frac{du_2}{dt}$. Chodzi teraz o to, jak można te różne składowe wyznaczyć.

Składowa $\frac{dv_2}{dt}$, zwana przyśpieszeniem względnym, nie zależy od ruchu unoszenia. Takie właśnie przyśpieszenie posiadałby punkt M, gdyby układ S był nieruchomy. Jeżeli znamy ruch względny punktu M, to tym samym znamy i przyśpieszenie względne.

Składowa $\frac{du_2}{dt}$, czyli przyśpieszenie unoszenia, jest to poprostu przyśpieszenie punktu A. Jeżeli ruch układu S jest znany, to tym samym jest znane i przyśpieszenie każdego punktu tego układu, a więc i przyśpieszenie punktu A.

Pozostaje wyznaczyć składowe $\frac{dv_1}{dt}$ i $\frac{du_1}{dt}$. Będziemy przytym korzystali z twierdzenia, które jest już całkowicie oczywiste. Widzieliśmy mianowicie, że przyrosty dv_1 i du_1 są równe zeru, jeżeli ruch układu S jest postępowy. Toż samo dotyczy oczywiście i składowych $\frac{dv_1}{dt}$ i $\frac{du_1}{dt}$. Jeżeli zatym nadamy układowi S jakiś nowy ruch postępowy, to składowe $\frac{dv_1}{dt}$ i $\frac{du_1}{dt}$ nie ulegną zmianom.

Składowe te wyznaczymy naprzód dla pewnego przypadku szczególnego. Przypuścimy mianowicie, że układ S jest płaski i porusza się w swej płaszczyźnie, i że w tej samej płaszczyźnie porusza się i punkt M. Ruch układu S jest, jak wiadomo, obrotowy; obecną prędkość kątową tego ruchu oznaczmy przez ω.

W rozważanej przez nas chwili punkt M zajmuje punkt A układu S. Nadajmy układowi S nowy ruch postępowy, którego prędkość jest równa i odwrotna do prędkości punktu A. Nie wpłynie to, jak wiemy, na składowe przyśpieszenia, które pragniemy wyznaczyć, lecz prędkość punktu A (prędkość unoszenia) stanie się równą zeru; innemi słowy, punkt ten zostanie środkiem obrotu, i tak będzie trwało przez cały okres dt.

Odcinek, wyobrażający prędkość względną v, ma w danej chwili początek w punkcie A i przechodzi przez ten punkt A_1 układu S, który ma zająć punkt M po upływie dt sekund. Odcinek ten obróci się w ciągu dt sekund około punktu A o nieskończenie mały kąt ωdt, a jego koniec zatoczy nieskończenie mały łuk $v\omega dt$. Oczywiście będzie to właśnie przyrost, który otrzymuje prędkość v skutkiem zmiany kierunku elementu AA_1. Tak więc $dv_1 = v\omega dt$, a zatym $\frac{dv_1}{dt} = v\omega$. Przyśpieszenie to ma kierunek owego nieskończenie krótkiego łuku, zatoczonego przez koniec v, a zatym jest prostopadłe do v i zwrócone w tę stronę, w którą porusza się koniec odcinka v dzięki ruchowi obrotowemu dokoła punktu A. Prędkość punktu A jest równa zeru, zaś prędkość punktu A_1 jest równa $AA_1\omega$, skierowana prostopadle do AA_1, czyli do v, i zwrócona w tę stronę, w którą biegnie koniec odcinka v dzięki ruchowi obrotowemu dokoła punktu A. O tyle właśnie prędkość punktu A_1 przewyższa prędkość punktu A, a zatym $du_1 = AA_1 . \omega$. Lecz oczywiście $AA_1 = vdt$, a zatym $du_1 = v\omega dt$ i $\frac{du_1}{dt} = v\omega$. Przyśpieszenie to ma kierunek prędkości punktu A_1, a więc jest prostopadłe do v i zwrócone w stronę, w którą biegnie koniec odcinka v dzięki ruchowi obrotowemu dokoła punktu A.

Widzimy, że obydwie składowe przyśpieszenia bezwzględnego $\frac{dv_1}{dt}$ i $\frac{du_1}{dt}$ są równe pod względem wielkości i zgodne pod względem kierunku. Wypadkowa ich jest równa $2v\omega$ i posiada wyżej określony kierunek składowych. Ta wypadkowa $2v\omega$ nazywa się przyśpieszeniem Coriolisa. Wyznaczyliśmy je dla ruchu płaskiego, pozostaje jeszcze rozważyć przypadek ogólny.

Przypuśćmy więc, że układ S porusza się jakkolwiek. W każdym razie ruch jego jest śrubowy, a zatym obraca się on z pewną prędkością kątową ω dokoła osi chwilowej h i prócz tego posiada ruch postępowy w kierunku tejże prostej; prędkość tego ruchu postępowego (równoległą do h) oznaczmy literą w. Kąt, który prędkość względna v punktu M tworzy z osią chwilową h, oznaczmy literą ϑ.

Przeprowadźmy przez obecne położenie punktu M płaszczyznę P, prostopadłą do osi h, i rozłóżmy prędkość względną v na dwie składowe, z których jedna ma być równoległa do osi h, druga zaś ma leżeć w płaszczyźnie P. Pierwsza z nich jest równa $v\cos\vartheta$, druga $v\sin\vartheta$. Nadajmy teraz układowi S nowy ruch postępowy, którego prędkość pod względem wielkości i kierunku ma być zgodna ze składową $v\cos\vartheta$. Skutkiem tego punkt M utraci tę składową $v\cos\vartheta$ prędkości względnej i zachowa tylko składową $v\sin\vartheta$, położoną w płaszczyźnie P.

Obecnie prędkość ruchu postępowego układu S jest równa $w+v\cos\vartheta$, ale ruch postępowy nie wywiera wpływu na przyśpieszenia $\frac{dv_1}{dt}$ i $\frac{du_1}{dt}$, a zatym możemy uważać, że układ S jedynie obraca się dokoła osi h, t. j. posiada ruch płaski w płaszczyźnie P (lub równoległej do P).

Tym sposobem sprowadziliśmy dane zagadnienie do poprzedzającego. W płaszczyźnie P odbywa się ruch układu S, a mianowicie układ ten obraca się z prędkością kątową ω; w tejże płaszczyźnie porusza się punkt M z prędkością względną $v\sin\vartheta$. Obydwie składowe $\frac{dv_1}{dt}$ i $\frac{du_1}{dt}$ dają razem przyśpieszenie Coriolisa; jest ono równe pod względem wielkości $2v\omega\sin\vartheta$, leży w płaszczyźnie P i idzie prostopadle do $v\sin\vartheta$ w stronę, w którą biegnie koniec odcinka $v\sin\vartheta$ dzięki ruchowi obrotowemu dokoła A.

Z. Straszewicz.