ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Z

CYNEMATYKI

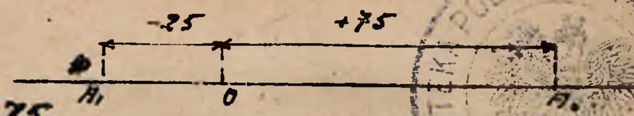
WARSZAWA,

1922

Zadanie 1

$s = t^2 - 20t + 75$

gdy $t=0$ to $s=75$

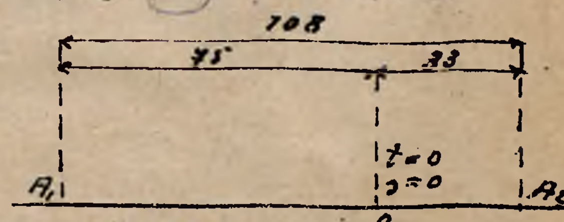


punkt A. gdy $s=0$, to $t^2-20t+75=0$; $t_1=15$; $t_2=5$ a więc punkt przechodził przez początek toru 2 razy. Kierunek ruchu uległ zmianie w max. lub min. drogi znajdziemy, że

$\frac{ds}{dt} = 2t-20=0$; $t=10$ $s=100-200+75=-25$; $\frac{d^2s}{dt^2}=2>0$

a więc punkt ruchomy osiągnął max. ? minimum

Zadanie 2



$s = t^3 - 3t^2 - 24t + 5$

$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t - 24 = 0$

$t_1 = 4$; $t_2 = -2$

dla $t_1 = 4$; $s_1 = -75$; dla $t_2 = -2$; $s_2 = 33$;

$s_2 - s_1 = 33 + 75 = 108$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$; dla $t_1 = 4$

$\frac{d^2s}{dt^2} > 0$ min; dla $t_2 = -2$ $\frac{d^2s}{dt^2} < 0$ max;

Zadanie 3

$t=0$; $s=0$; $s=a\sin(\alpha+\omega t)$; $s=a\sin\alpha$,

$a\sin(\alpha+\omega t)=0$; $\sin(\alpha+\omega t)=0$; $\alpha+\omega t=0$; $t=-\frac{\alpha}{\omega}$

$\sin(\alpha+\omega t)=0$; $\alpha+\omega t=\pi$; $t=\frac{\pi-\alpha}{\omega}$ /pierwszy raz od początku rachuby czasu.

Punkty zwrotu : $\frac{ds}{dt}=a\cos(\alpha+\omega t)\omega=0$; $\alpha+\omega t=\frac{\pi}{2}$

$\cos(\alpha+\omega t)=0$, lub $\alpha+\omega t=\frac{3\pi}{2}$ czyli $\alpha+\omega t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$s=a\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=a\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ gdy k parzyste, to $s=a$

gdy k nie parzyste, to $s=-a$;

$\frac{d^2s}{dt^2}=-a\omega^2\sin(\alpha+\omega t)$ - dla punktów zwrotu będzie

$\frac{d^2s}{dt^2}=-a\omega^2\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=-a\omega^2\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

gdy k parzyste to $\frac{d^2 s}{dt^2} = -a\omega^2 < 0$ max. gdy k nieparzyste to $\frac{d^2 s}{dt^2} = a\omega^2 > 0$ min.

pomiędzy dwoma zmianami upłynie

$$\left.\begin{array}{l}(4n+3)\frac{\pi}{2} = \alpha + \omega t_1 \\ (4n+1)\frac{\pi}{2} = \alpha + \omega t_2\end{array}\right\} - \quad \pi = \omega(t'-t_2)$$

$T = t_1 - t_2 = \frac{\pi}{2}$ sekund.
$15 + 25 - 25 = 15$

Zadanie 4

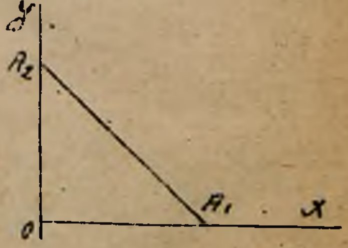
$s = t^2 + 15t - 25$

$s = 18t + 15$

$t^2 - 3t - 40 = 0$ $\quad t_1 = -5;\ t_2 = 8;$

$s_1 = -75$ dla $t_1 = -5$ $\quad s_2 = 159$ dla $t_2 = 8$.

Zadanie 5



$$\left.\begin{array}{l}x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2\end{array}\right\} A_1A_2 = l$$

$l^2 = x^2 + y^2 = \Delta A_1 0 A_2$; $l = +\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{d(l^2)}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d(l^2)}{dt} = 2(a_1 t + b_1)a_1 + 2(a_2 t + b_2)a_2; \quad t\ \text{min.} = -\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

W chwili odległej o t minut od początku rachuby czasu odległość l będzie minimum $l_{min} = \sqrt{x^2+y^2} =$

$$= \sqrt{(a_1 t_{min} + b_1)^2 + (a_2 t_{min} + b_2)^2} = \sqrt{\frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{a_1^2 + a_2^2}}$$

Najmniejsza odległość pomiędzy punktami ruchomymi jest

$$l\ \text{min} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Zadanie 6

$s = 2t^3 - 18t^2 + 50t - 50$; $v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 36t + 50$

gdy $s = 0$; $t^3 - 9t^2 + 25t - 25 = 0$; $t = \frac{-9}{3} - t_1$; $t = t_1 + 3$

$(t_1+3)^3 - 9(t_1+3)^2 + 25(t_1+3) - 25 = 0$; $t_1^3 - 2t_1 - 4 = 0$;

$t_1 = u + w$; $(u+w)^3 - 2(u+w) - 4 = 0$; $uw = \frac{2}{3}$; $3uw - 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l}u^3 + w^3 = 4 \\ u^3w^3 = \frac{8}{27}\end{array}\right\} y^2 - 4y + \frac{8}{27} = 0;\ y = 2 \pm \frac{10}{3\sqrt{3}}$$

$$u^3 = 2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}\ ;\quad w^3 = 2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

$$u = 1 + a\sqrt{3}\ ;\quad u^3 = 1 + 3a\sqrt{3} + 9a^2 + 3\sqrt{3}a^3 = 2 + \frac{w\sqrt{3}}{9}$$

$1 + 9a^2 = 2;\ 9a^2 = 1;\ a = \pm\frac{1}{3}$ podstawiając do:

$$3(a^3 + a)\begin{cases} dla\ +\frac{1}{3} & \frac{10}{9} \\ \ \ \text{"}\ \ \ \frac{1}{3} & -\frac{10}{9} \end{cases}$$ zatem $a = \frac{1}{3}$

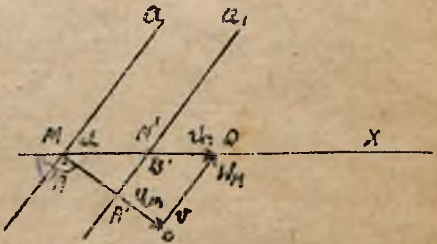
zakładając W $= 1 + b\sqrt{3}$ otrzymujemy $b = -\frac{1}{3}$

$$\left.\begin{aligned} u &= 1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \\ w &= 1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \end{aligned}\right\}\ t_1 = u + w = 2\ ;\quad t = t_1 + 3 = 5$$

A więc $t = 5$, gdy punkt przechodził przez początek

toru: $v = 6t^2 - 36t + 50 = 20$

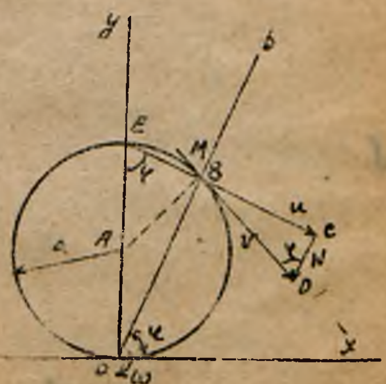
Zadanie 7.



Proste a i x w danej chwili przecinają się w punkcie B, tak, że punkt A prostej a znajduje się w punkcie B prostej x. Po dt sekundach punkt A znajdzie się w A, a nowy punkt przecięcia znajdzie się w punkcie B prostej X. Nienależący do ruchomej prostej a, lecz podążający za punktem przecięcia ruchomy punkt M przebiegł przez ten czas drogę BB'. Ponieważ BA' = Vdt

to $BB' = \frac{AA'}{\sin\alpha} = \frac{v\,dt}{\sin\alpha}$ stąd szybkość punktu $M = v_a = \frac{v}{\sin\alpha}$

Zadanie 8.

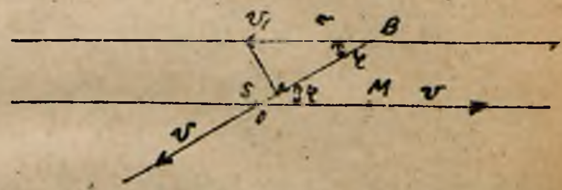


Rozpatrujemy ruch, nie należącego do ruchomej prostej b, lecz wciąż podążającego za punktem przecięcia b z okręgiem ruchomego punktu H względem prostej b. Torem bezwzględnym M, jest okrąg, zatem szukana szybkość bezwzględna V BO jest prostopadłą do promienia AB koła. Torem względnym M jest prosta b, szybkość względna na kierunek tej prostej. Szybkość unoszenia u jest prostopadłą do OB

z Δ BCO $\quad v = BO = \dfrac{BC}{\sin\varphi} = \dfrac{OB\,\omega}{\sin\varphi}$

z Δ OBE $\quad OB = OE \sin\varphi = 2a \sin\varphi$

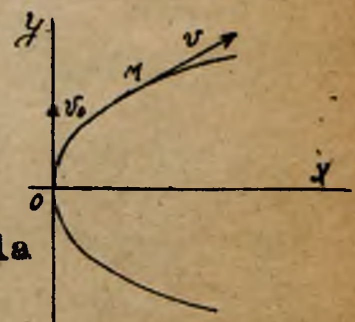
czyli $BO = v = \dfrac{2a\sin\varphi}{\sin\varphi}\,\omega = 2a\omega\ ;\ \underline{v = 2a\omega}$



Zadanie 9.

Punkt S sznura, który w danej chwili styka się z blokiem /przypada w O/ posiada tą samą szybkość co punkt H, to jest V skierowaną wzdłuż PS. Szybkość punktów S i P sznura dają rzuty na prostą SP równe, więc:

$$v = v_1 \cos\varphi \ ;\ \underline{v_1 = \frac{v}{\cos\varphi}}$$



Zadanie 10

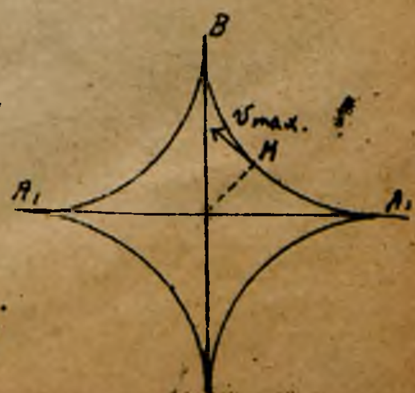
$$x = \frac{a^2 t^2}{2p}\ ;\ y = at$$

Rugując t otrzymujemy równanie toru

$t = \dfrac{y}{a}\ ;\ x = \dfrac{a^2 y^2}{a^2 2p}\ ;\ y^2 = 2px$ /parabola styczna do osi y/. W celu wyznaczenia szybkości bierzemy $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a^2 t}{p} = v_x$

i $\dfrac{dy}{dt} = a = v_y\ ;\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \dfrac{a}{p}\sqrt{a^2t^2 + p^2}$

gdy t = o mamy $\left.\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = a \end{cases}\right\} v_0 = a\ ;\ y = 0$



Zadanie 11

$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3\omega t \\ y = a\sin^3\omega t \end{array}\right\}$ rugując t otrzymamy równanie toru

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

/astrojda/

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2\omega t \sin\omega t\cdot\omega ;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 3a\omega \cos\omega t \sin^2\omega t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{3}{2} a\omega \sin 2\omega t$$

$$v_{max} = \frac{3}{2} a\omega \quad \text{bo} \quad \sin 2\omega t_{max} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\omega t &= 1 \\ 2\omega t &= \frac{\pi}{2} \\ \omega t &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\}$$

A stąd: $x = a\cos^3\frac{3\pi}{4} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$,

$= \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $y = a\sin^3\frac{3\pi}{4} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Zadanie 12

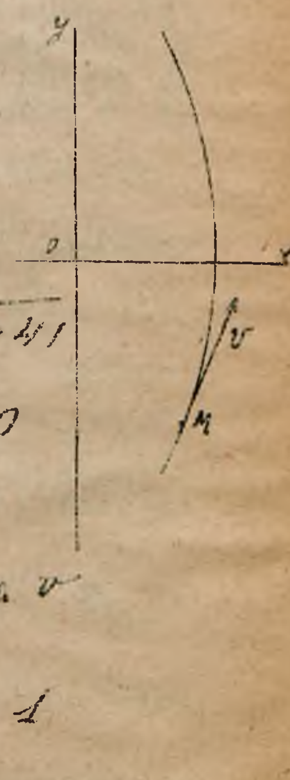
Znajdujemy równanie toru: $y = 5t - 9$

$x = t^2 - 4t + 3$ rugując t otrzymamy

$y^2 - 25x - 2y - 24 = 0$ parabola, obliczamy szybkość: $v_x = \frac{dx}{dt} = 2t - 4$;

$v_y = \frac{dy}{dt} = 5$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4t^2 - 16t + 41}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4t^2 - 16t + 41}}\cdot(8t - 16)$; $\frac{dv}{dt} = 0$



~~gdy~~

gdy $8t - 16 = 0$ stąd $t = 2$ a więc minimum v zachodzi przy t = 2

$v_{min} = 5$ wówczas $x = -1$; a $y = 1$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{v_x}{v_m} = 0; \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{v_y}{v_m} = 1; \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}$$ szybkość jest prostopadła do osi X

Zadanie 13 $v_x = \frac{ac}{y}$, $v_y = \frac{c\sqrt{y^2 - a^2}}{y}$; $v = \sqrt{\frac{c^2 y^2}{y^2}}$

$v = c$; $\frac{dx}{dt} = \frac{ac}{y}$; $\frac{dy}{dt} = \frac{c\sqrt{y^2 - a^2}}{y}$;

$y\,dy = c\sqrt{y^2 - a^2}\,dt$; $\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = c\,dt$

Załóżmy, że $y^2 - a^2 = u$, to $2y\,dy = du$

gdy $t = 0$, to $x = 0$; $y = a$ i $c_1 = 0$

$\sqrt{y^2 - a^2} = ct$; $y^2 = a^2 + c^2t^2$

$\frac{dx}{dt} = \frac{ac}{y}$; $dx = \frac{ac\,dt}{\pm\sqrt{a^2 + c^2t^2}}$; $v = ct$; $dv = c\,dt$;

$dx = \frac{a\,dv}{\pm\sqrt{a^2 + v^2}}$ $x = a\,l(v \pm \sqrt{a^2+v^2}) + a\,l\,c_2$; gdy $t = 0$;

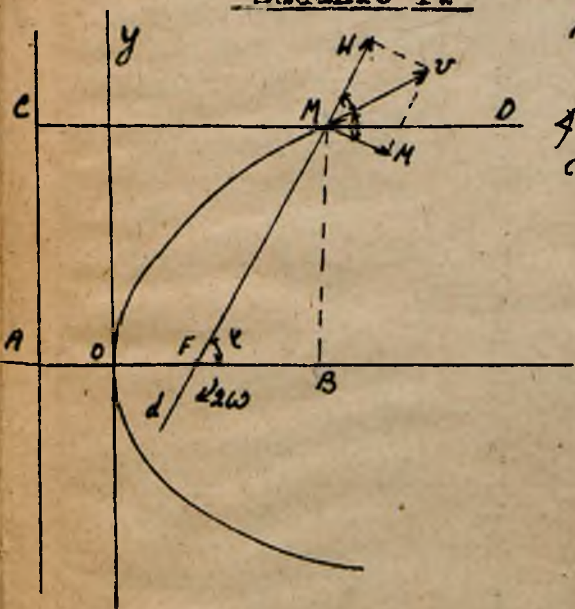
$v = ct = 0$; $x = 0$; $c_2 = \frac{1}{a}$; $x = a\,l\,\frac{ct \pm \sqrt{a^2+c^2t^2}}{a}$.

$\frac{x}{a} = l\,\frac{ct + \sqrt{a^2+c^2t^2}}{a}$; $\left\{\begin{array}{l} a e^{\frac{x}{a}} = ct + \sqrt{a^2+c^2t^2} \\ -a e^{-\frac{x}{a}} = ct - \sqrt{a^2+c^2t^2} \end{array}\right\} + 2ct = ae^{\frac{x}{a}} - ae^{-\frac{x}{a}}$

$2\sqrt{y^2 - a^2} = a(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$ ostatecznie otrzymamy

$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ torem punktu jest łańcuchowa o parametrze a.

Zadanie 14



$AO = OF = p$; $AF = 2p$; $FM = r$

$\sphericalangle MFB = \sphericalangle\varphi$; $FM = CM$ /własność parab./

$CM = AB = AF + FB = 2p + r\cos\varphi$

$CM = 2p + r\cos\varphi = r$

$r = 2p + r\cos\varphi$ /równ. parab. biegun./

$2p = r(1 - \cos\varphi)$; $r = \frac{2p}{1 - \cos\varphi} = \frac{p}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$

Rozkładamy szybkość bezwzględną V punktu ruchomego M na względną W i unoszenia U; $U = 2\omega r$

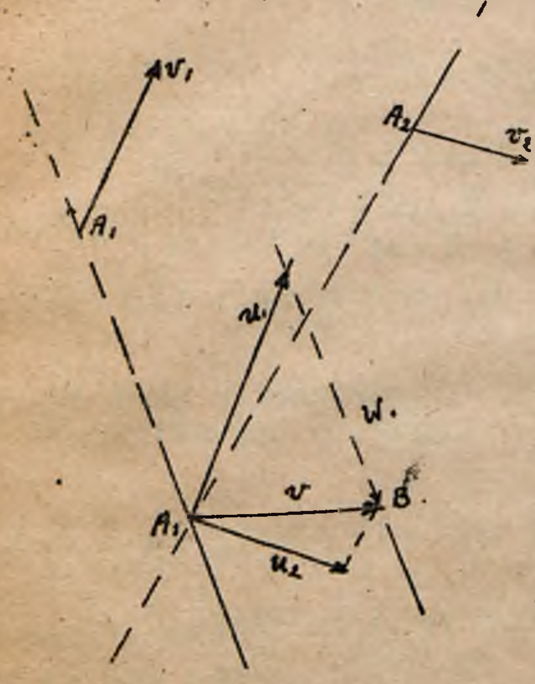
styczna do paraboli dzieli kąt między promieniami wodzącym a średnicą na połowy

$\sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(v, MO) = \sphericalangle\frac{\varphi}{2}$; zaś $\sphericalangle(v,u) = 90 - \frac{\varphi}{2}$

$v = \frac{u}{\cos(90 - \frac{\varphi}{2})} = \frac{u}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\omega r}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\omega p}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$

Zadanie 15*

Aby ruchy okrętów A i A nie dały się zauważyć, torem okrętu A względem A i torem okrętu A względem A winny być odpowiednie proste AA i AA, czyli szybkości względne tych okrętów A i A winny leżeć na prostych AA i AA. Odwrotnie rozpatrzając ruch okrętu A względem A i A otrzymamy jako szybkości względne wektory, leżące odpowiednio na prostych AA i AA czyli W i W; niezmienne co do wielkości szybkości unoszenia będą odpowiednio

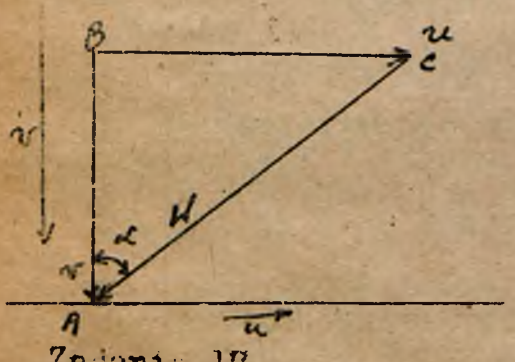


$$u_1 \neq v_1 \quad i \quad u_2 \neq v_2$$

Miejscem geometrycznym wektora v, którego jedna składowa jest U, a druga jest równoległa do kierunku AA, jest prosta równoległa do AA i poprowadzona przez koniec wektora U. Podobnie znajdziemy drugie miejsce geometryczne. W ich przecięciu leży punkt B koniec szukanej szybkości: $AB = v$

Zadanie 16 z $\triangle ABC$ ... $u = v\,tg\,\alpha$; $tg\,\alpha = \frac{u}{v}$

$$\alpha = arctg\,\frac{u}{v}$$



Najskuteczniejsza osłona zachodzi wtedy, gdy kierunek laski zgodny jest z kierunkiem szybkości względnej deszczu względem przedmiotu ruchomego. Rozkładamy szybkość bezwzględną V deszczu na dwie składowe.

Zadanie 17

Ilość deszczu zależy od szybkości jego względem [illegible]. Ponieważ [illegible] względna W jako przeciwprostokątna jest większa od przyprostokątnej V zatem [illegible] deszczu w czasie biegu jest większa niż w czasie [illegible]

Zadanie 18

Jeżeli szybkość punktu A oznaczymy przez U, to szybkość bezwzględna dowolnego punktu B tarczy równa co do wielkości szybkości A może być rozłożona na dwie składowe, z których U jest szybkością unoszenia. Wtedy W będzie szybkością względną. Należy dowieść że

$\measuredangle BEF = \measuredangle DBC$

$\measuredangle BEF = \measuredangle \alpha$; bo $BE = BF$; więc:

$\measuredangle FBE = 180 - 2\alpha = \measuredangle AOB$

$\measuredangle BOC = 180 - \measuredangle AOB = 180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$

/kąt między styczną a cięciwą/

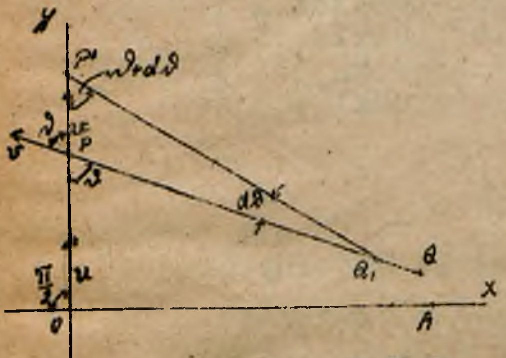
$\measuredangle CBF = \frac{1}{2}\measuredangle BOC = \alpha$

i zatem $\measuredangle OBC = \measuredangle OBF - \measuredangle CBF$; $\measuredangle OBF = 2\alpha$

jako zewnętrzny dla $\triangle BEF$; $\measuredangle OBC = 2\alpha - \alpha = \underline{\alpha}$

c.b.d.d.

Zadanie 19



$OA = a = PQ = P_1Q_1$ Przypuśćmy, że w chwili t punkt P znajduje się w P/na osi /a Q w punkcie Q. Szybkość V w myśl założenia skierowana jest wzdłuż ar. Po nast. dt sek. punkt Q przeniesie się do Q, zaś P do P_1 odległego od P o Udt/ $PP_1 = udt$/ Jeżeli w pierwszej chwili t.j. t szybkość U i V tworzyły kąt ϑ to po dt sek. kąt ten wzrośnie do $\vartheta + d\vartheta$; $\measuredangle OPQ$ jest zewnętrzny w $\triangle QPP_1$ więc:

$$\measuredangle P_1QP = \measuredangle OPQ - \measuredangle PP_1Q_1 = \vartheta - (\vartheta + d\vartheta) = -d\vartheta;$$

$$z\ \triangle PP_1Q: \quad \frac{PP_1}{PQ_1} = \frac{\sin(P_1QP)}{\sin(P_1PQ)} = \frac{u\,dt}{a};$$

$$-\frac{u}{a}dt = \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}; \quad -\frac{u}{a}t + c = \int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}$$

ostatecznie: $-\frac{u}{a}t + c = l\left(tg\frac{\vartheta}{2}\right)$; gdy $t = 0$;

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad tg\frac{\vartheta}{2} = tg\frac{\pi}{4} = 1, \quad l\,tg\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = l.1 = 0$$

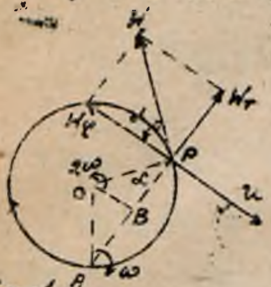
więc $c = 0$; $-\frac{u}{a}t = l\left(tg\frac{\vartheta}{2}\right)$; $tg\frac{\vartheta}{2} = e^{-\frac{u}{a}t}$

$$\frac{\vartheta}{2} = arc\,tg\,e^{-\frac{u}{a}t}.$$

Zadanie 20 $\quad \sphericalangle AB = s\,;\; OA = a$

na punktu P $\;W = 2a\omega$; szybkość unosz. $u = AP \cdot \omega$ szybkość względ_

$\sphericalangle AP = \sphericalangle POA \cdot OA\,;\; \sphericalangle POA = \frac{\sphericalangle AP}{OA} = \frac{s}{a}$ spuśćmy z O pro_
stopadłą do AP. OB jest wy_
sokością $w \triangle AOP$. $z \triangle AOB$



$AB = AO \sin(AOB) = a \sin\frac{s}{2a}$

$AP = 2AB = 2a \sin\frac{s}{2a}\,;$

$u = 2a \sin\left(\frac{s}{2a}\right)\omega$

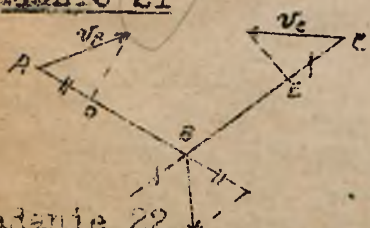
$\sphericalangle OPB = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2a} = \sphericalangle \alpha$

Rozkładamy W na W_r i W_φ $\begin{cases} W_r = W \cos(90-\alpha) = 2a\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{2a}\right) \\ W_\varphi = \omega \cos\alpha = 2a\omega \sin\left(\frac{s}{2a}\right). \end{cases}$

Szybkość bezwzględną otrzymamy dodając W i U, lub W_r, W_φ i u. Lecz W_φ i u zniosą się zatem szyb. bezwzględ. $= W_r$ jest skierowaną do punktu A. Torem punktu P jest linja prosta AB.

$$v_p = 2a\omega \cos\left(\frac{s}{2a}\right)$$

Zadanie 21



Rzuty szybkości punktów A i B na AB jak również punktów B i C na BC muszą być równe. Mając rzuty v_B na dwa różne kierunki znajdu_
jemy V_B

Zadanie 22

Stosujemy wzór $\omega = \frac{\vartheta}{t}\,;\; \vartheta = 2\pi$ dla jednego obrotu ziemi dookoła osi, który trwa 24 godziny. Stąd bezpośrednio już: $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}00007$

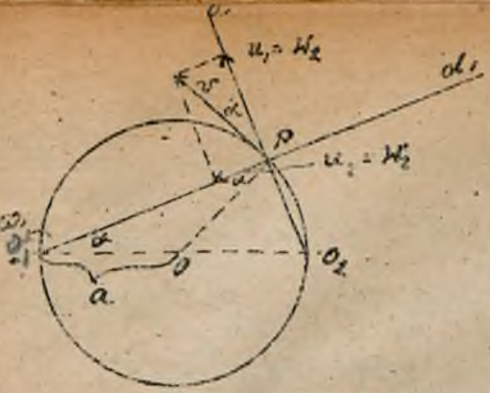
ω jest zwrócone do S, bo ruch ziemi jest przeciwny do ruchu wskazówki zegara.

Zadanie 23

Rozpatrujemy ruch punktu P jako względny, względem ru_
chomej prostej d, znajdziemy jako szybkość unoszenia

$u_1\,;\; u_1 = \omega_1 O_1 P \quad z \triangle O_1 O_2 P \ldots O_1P = 2a\cos\alpha\,;$

$u_1 = \omega_1 2a \cos\alpha.$



Podobnież: $w_2^1 = \omega_2 \cdot O_2 P$

$O_2 P = 2a \sin\alpha$

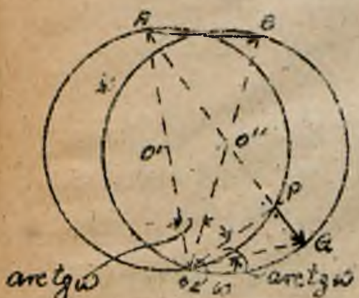
$u_2 = \omega_2 \, 2a \sin\alpha = 2a\omega_2 \sin\alpha$

Szybkość bezwzględna punktu P jest prostopadła do OP. Szybkość względna jest skierowana wzdłuż OP.

$v = \dfrac{u_1}{\cos\alpha}\,;\quad v = \dfrac{u_2}{\sin\alpha}$

$$\frac{u_1}{\cos\alpha} = \frac{u_2}{\sin\alpha}\,;\quad \frac{2a\omega_1\cos\alpha}{2a\omega_2\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,;\quad \underline{\omega_1 = \omega_2 = \omega}$$

Zadanie 24



Szybkość $v = a\omega = PQ$

z $\triangle QOP$; $OQ = \sqrt{a^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + a^2\omega^2} = a\sqrt{1+\omega^2}$

Gdy O leży w środku linją przewodnią szybkości V jest okrąg o promieniu:

$$a\sqrt{1+\omega^2}$$

Zadanie 25

$OA = r\,;\quad AB = e$

Graficznie znajdujemy szybkość B odkładając na prostej AB odcinek BD = AC, które to odcinki są odpowiednio rzutami szybkości punktów A i B na prostą AB je łączącą. Szybkość punktu A: $V = r\omega$. Oznaczając kąt OAB przez α możemy napisać:

$AC = AE\cos(CAE) = v\cos(\alpha - 90) = v\omega\sin\alpha$;

$BD = AC = r\omega\sin\alpha$;

$BF = w = \dfrac{BD}{\cos(FBD)} = \dfrac{BD}{\cos\beta}$ stąd

$w = \dfrac{r\omega\sin\alpha}{\cos\beta}$, z $\triangle AOB$:

$\alpha = \pi - (\beta + \varphi)$ stąd $\sin\alpha = \sin\beta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\beta$

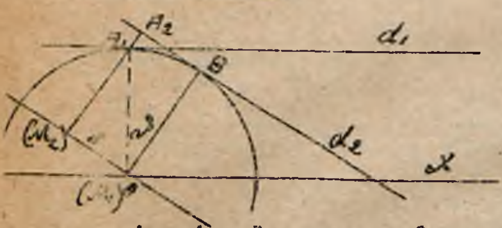
z ∢ AOB: $\frac{r}{\sin\beta} = \frac{l}{\sin\varphi}$; $\sin\beta = \frac{r\sin\varphi}{l}$

$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$; zatem

$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi}{l}\left(r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\right)$ ostatecznie

$$W = \frac{r\omega\sin\varphi\left(r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\right)}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

Zadanie 26



Ruchomy punkt znajduje się na prostej wystawionej z punktu A ruchomej prostej d w odległości równej promieniowi. Gdy punkt zetknięcia prostej d z okręgiem dojdzie do punktu B, to jest gdy promienie łączące O z punktami zetknięcia utworzą kąt ϑ, punkt A znajdzie się w odległości W takiej samej odległości od O znajdzie się punkt /czyli / zaś promień wodzący równoległy zawsze do prostej ruchomej utworzy z pierwotnym położeniem kąt

Równanie ruchu punktu będzie $z = a\vartheta$

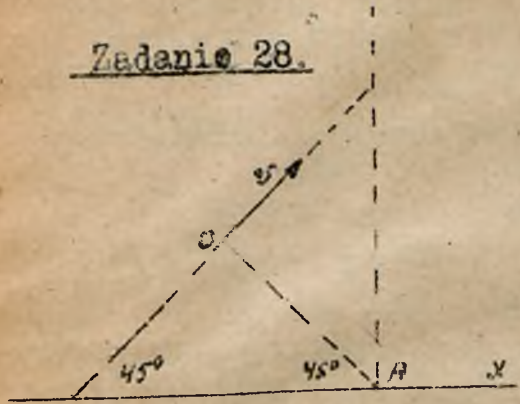
/spiralna Archimedesa/.

Zadanie 27.

Niech będzie punkt podążający wciąż za punktem C środkiem chwilowym. Jego torem względem układu ruchomego jest krzywa ruchoma środków chwilowych torem bezwzględnym jest krzywa stała.

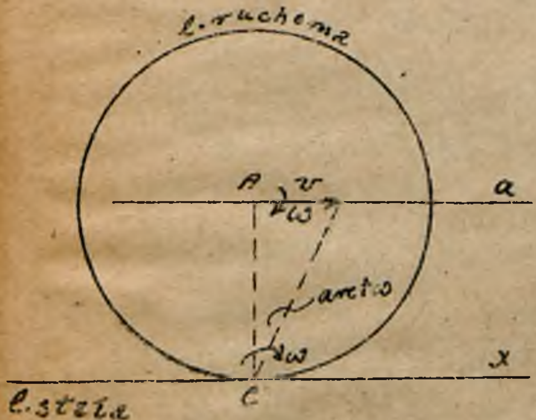
Szybkość względna i bezwzględna są sobie równe. W danym wypadku tor ruchomy redukuje się do punktu, zatem szybkości względna i bezwzględna = 0, więc i tor stały redukuje się do punktu czyli że środek chwilowy zajmuje stałe położenie na płaszczyźnie nieruchomej.

Zadanie 28.



Ponieważ prosta X jest styczna do spiralnej, to na zasadzie własności spiralnej logarytmicznej tworzy ona z promieniem OA kąt 45°.
Szybkość bieguna O jest prostopadłą do AO /bo A jest środkiem chwilowym/ zatem szybkość ta tworzy z prostą X kąt stały 45°.
Jeżeli kierunek szybkości jest niezmienny to torem jest linja prosta tworząca z osią X kąt 45°.

Zadanie 29



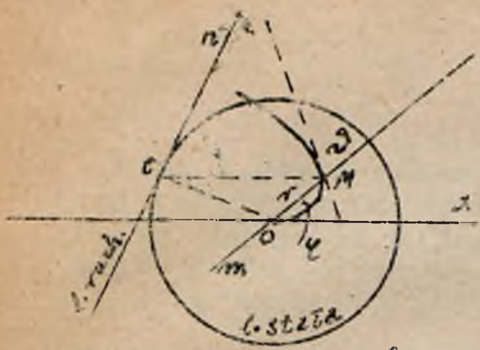
Mamy ruch postępowy z szybkością v/stałą/ i obrotowy z szybkością kątową W/stałą/.
Ponieważ szybkość punktu A tj. v jest stała, więc odległość punktu A od środka chwilowego

$r = \frac{v}{\omega}$ /const/.

Ponieważ punkt A zajmuje coraz to inne położenie prostej a, środek chwilowy c zajmować będzie coraz to inne położenie na prostej X, równoległej do a, i od niej odległej o $\frac{v}{\omega}$

Prostą x jest linja stała środków chwilowych. Ponieważ odległość ruchomego punktu A od środka chwilowego C jest stałą i równa się $\frac{v}{\omega}$ zatem linją ruchomą środków chwilowych jest koło o środku A i promieniu $\frac{v}{\omega}$

Zadanie 30



$r = OM; \; r = a\varphi.$

kąt ϑ między styczną a promieniem wodzącym dla spiralnej jest taki, że jego tangens $tg\,\vartheta = t$

Przyczem równania parametryczne spiralnej są:

$r = at \quad i \quad \varphi = t.$

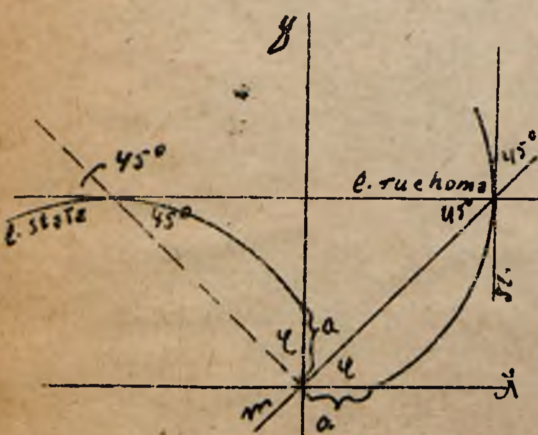
więc $tg\,\vartheta = \varphi$ z $\triangle\, COM$

$$OC = OM\, cotg\,\vartheta = r\, cotg\,\vartheta = \frac{a\varphi}{\varphi} = a$$

Tak więc środek chwilowy C jest w stałej odległości od nieruchomego punktu O, linją więc stałą środków chwilowych będzie koło o promieniu $a = oc$. Ponieważ odległość środka c od prostej ruchomej jest stała zatem linją ruchomą środków chwilowych będzie prosta równoległa do prostej m w odległości oc.

Zadanie 31

$r = a\,e^{\varphi}; \; OM = r$



Kąt między styczną i promieniem wodzącym dla spiralnej logarytmicznej $=45^{\circ}$; zatem

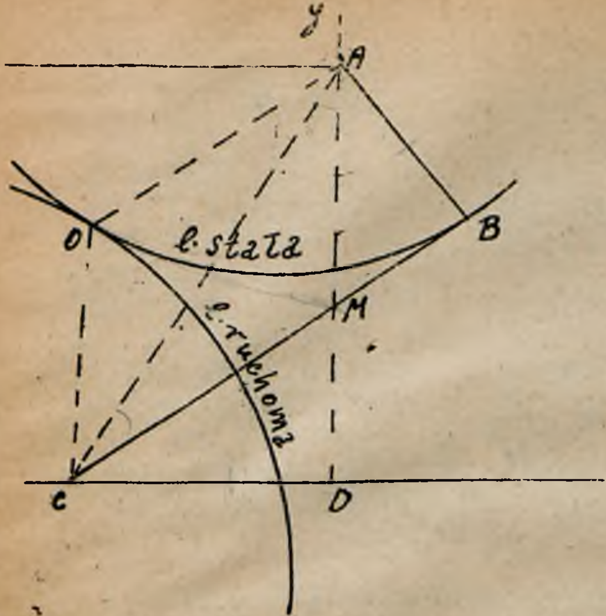
$\sphericalangle MCO = \sphericalangle CMO = 45^{\circ}$

trójkąt MCO jest równoramienny OC OM AC, a więc linją stałą będzie taka sama spiralna logarytmiczna o osi biegunowej y prostopadłej do osi X. Prosta MC/normalna do spiralnej/ tworząca z prostą m/promieniem wodzącym/ stały kąt 45°, przechodzi wciąż przez środek chwilowy C; jest więc ona linją ruchomą środków chwilowych.

Zadanie 32

$\sphericalangle ABC = \frac{\pi}{2}, \; AD = DC = a$

O środek chwilowy. Obieramy AD za



oś y, łączymy A z C

$\triangle ACB = \triangle ACD$, gdyż

$AD = BC$; AC wspólna przeciwprostokątna, a stąd wynika, że

$AB = CD$; $\triangle AMB =$

$= \triangle ACB - \triangle ACM$;

$\triangle CMD = \triangle ACD - \triangle ACM$

ponieważ $\triangle ACB = \triangle ACD$

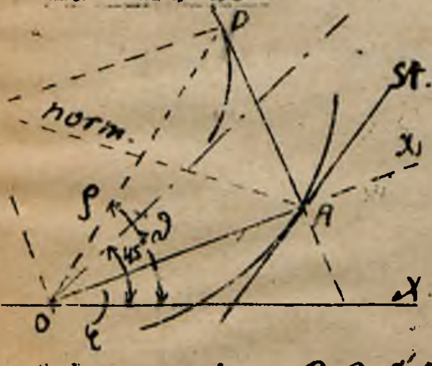
więc $\triangle AMB = \triangle CMD$,

a stąd $AM = CM$

lub $OC = MO$

Czyli że krzywą stałą będzie parabola o ognisku A, kierownicy X, a krzywą ruchomą będzie parabola o ognisku C i kierownicy AB.

Zadanie 30



$$r = a e^{\varphi}; \quad \overline{OA} = r,$$

Po znalezieniu środka chwilowego C spuszczamy zeń prostopadłą na drugi bok kąta prostego. Ponieważ wspólna normalna do ruchomej krzywej i jej obwiedni przechodzi przez środek chwilowy, więc punkt p spodek prostopadłej C p na AB należy do szukanej obwiedni.

W kwadracie $AOCP$: $\rho = OP = CA = r\sqrt{2}$

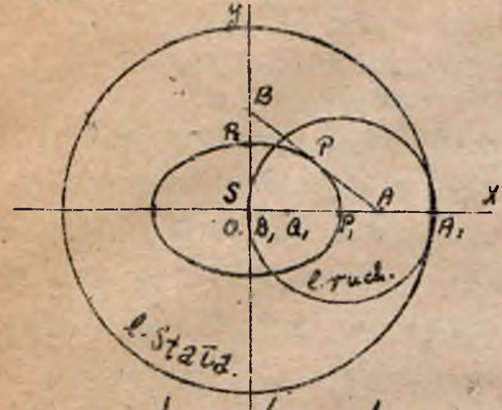
Zatem równanie obwiedni we współrzędnych biegunowych będzie dla osi X i bieguna O: $\rho = r\sqrt{2} =$

$$= \sqrt{2}\, a e^{\varphi} = a\sqrt{2}\, e^{\varphi} = a\sqrt{2}\, e^{\theta - \frac{\pi}{4}}$$

Dla osi X tworzącej z osią X kąt 45° równanie to wyrazi się wzorem $\rho = a\sqrt{2}\, e^{\theta}$

Szukana obwiednia jest spiralna logarytmiczna o prametrze $a\sqrt{2}$ i osi biegunowej OX.

Zadanie 34.



$BP = a;\ PA = b$

Elipsa jest torem punktu P. W tym ruchu/Cardana/ linją stałą środków chwilowych jest okrąg koła o promieniu równym długości odcinka AB prostej, a linją ruchomą jest okrąg o promieniu dwa razy mniejszym. Oznaczając odległość P A p b, zaś odległość punktu Q od A przez q otrzymamy na zasadzie wzoru Savarego

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{d};\ \text{bo } \cos\vartheta = 1$$

Celem przegięć jest koło ruchome środków chwilowych, a

$$d = a + b;\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b};\ q = \frac{ab+b^2}{a}$$

więc szukamy promień krzywizn; $\rho_1 = O_1P_1 = QA_1 - P_1A_1 = \frac{b^2}{a};$

analogicznie $\rho_2 = \frac{a^2}{b}$

Zadanie 35

Ze wzoru Savarego mamy dla tora punktu P zależność

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{d} \quad \ldots\ldots \quad 1$$

gdzie przez P oznaczamy CO R, a przez q odległość punktu C od punktu Q, zaś d średnica koła przegięć. Ale

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{d}\ \text{stąd i z (1)}$$

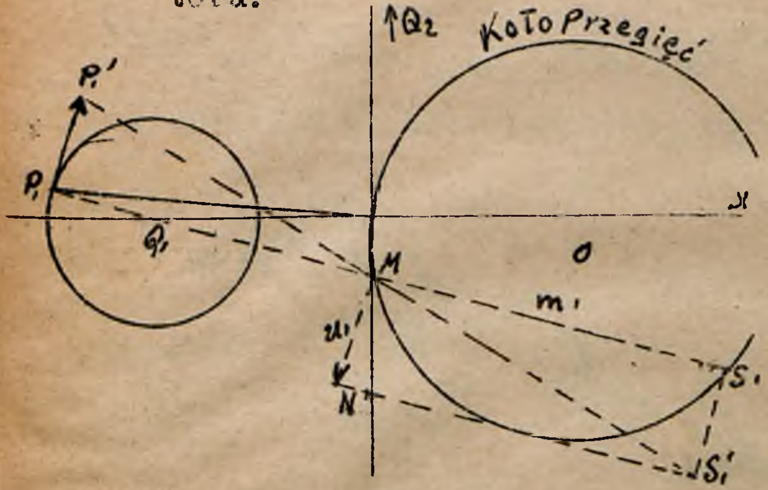
mamy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};$$

$$q_1 = R_1;\ \rho = QQ_2 = R_1 + R_2$$

Zadanie 36

Szukane koło przegięć musi przejść przez środek chwilowy M i przez punkt P, gdyż torem P jest linja prosta / $\rho = \infty$ /. Znajdujemy jeszcze punkt S układu leżący na P M , który to punkt S w chwili obecnej przechodzi przez przegięcie nowego toru.



Nadajemy punktowi P szybkość P P, dowolną co do wielkości

$M N_1 \perp P_1 M$

P_1 łączę z Q przecięcie P_1' Q z M N daje N, N, S, II do $P_1'M$; P_1' łączę z M przecięcie P_1' M z N, S, daje S, ZS, opuszczam prostopadłą na P_1 M i spadek jej jest szukanym punktem koła przegięć. Mając trzy punkty P_2 M, i S, łatwo już wykreślić koło przegięć.

Zadanie 37

Aby równowaga była trwałą, koło przegięć winno obejmować środek ciężkości S półkuli. Średnica tego koła powinna być większa od d :

$$a - \frac{3}{8}a = \frac{5}{8}a$$

czyli $d > \frac{5}{8}d$;

ze wzoru :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad R_1 = a;$$

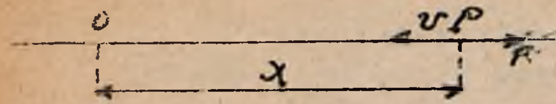
$$R_2 = R;$$

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{R} = \frac{a+R}{aR};$$

$$d = \frac{aR}{a+R} > \frac{5}{8}a$$

$$R > \frac{5}{3}a$$

Zadanie 38



$$v = \alpha x^{n} = \frac{dx}{dt}$$

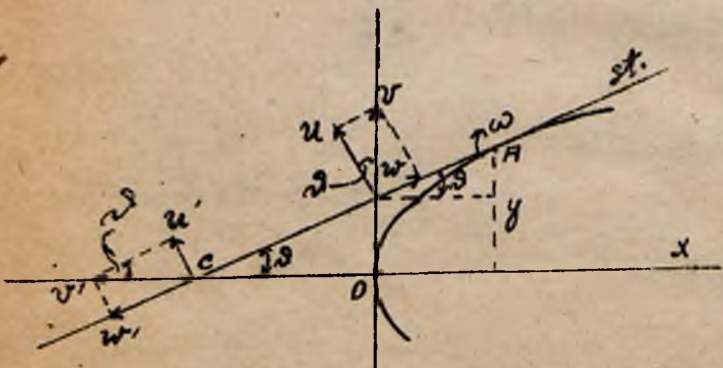
$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$p = \alpha n x^{n-1} \cdot \alpha \cdot x^{n}; \quad p = n\alpha^{2} \cdot x^{2n-1},$$

przyśpieszenie to jest odwrócone od O, bo $p > 0$.

Zadanie 39

$$y^{2} = 4px$$



Punkty B i C są to punkty nienależące do ruchomej prostej, podążające za przecięciem się tej prostej odpowiednio z osiami x i y, wobec tego szybkości ich skierowane odpowiednio wzdłuż osi y i x będą miały składowe: względną skierowaną wzdłuż stycznej i unoszenia prostopadłą do niej. Więc: $u = v \cos\vartheta$ dla punktu B; $u' = v' \sin\vartheta$ dla punktu C. Pomiędzy u i u' istnieje zależność:

$$u : u' = AB : AC$$

skąd $u' = u\,\frac{AC}{AB} = u\,\frac{y\cos\vartheta}{x\sin\vartheta} =$

$$= u\,\frac{y}{x}\operatorname{cotg}\vartheta, \quad a \quad v' = v\,\frac{y}{x}\operatorname{ctg}^{2}\vartheta$$

Równanie paraboli można przedstawić:

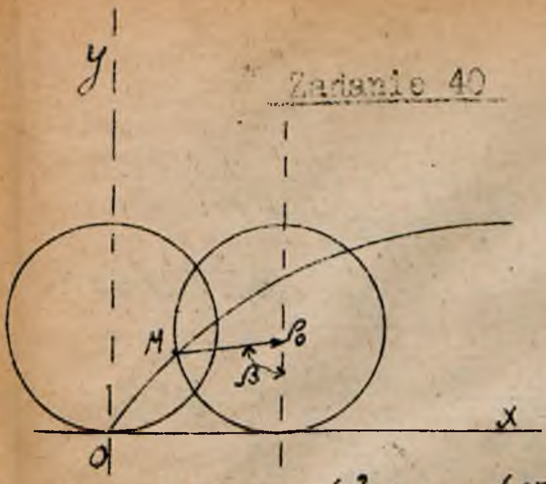
$$y = 2p^{1/2}x^{1/2} \quad \text{zaś} \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{p^{1/2}}{x^{1/2}}$$

skąd $\operatorname{ctg}^{2}\vartheta = \frac{x}{p}$ czyli $v' = v\,\frac{y}{p} = \frac{2v\,x^{1/2}}{p^{1/2}}$

przyśpieszenie $q = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2v}{p^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot$

$$\cdot \frac{2v\,x^{1/2}}{p^{1/2}} = \frac{2v^{2}}{p}.$$

Zadanie 40



$$x = a(\beta - \sin\beta)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos\beta)\frac{d\beta}{dt}$$

$$p_x = a\left[\sin\beta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + (1-\cos\beta)\frac{d^2\beta}{dt^2}\right] \quad (1)$$

$$y = a(1-\cos\beta); \; v_y = a\sin\beta\frac{d\beta}{dt}$$

$$p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = a\left[\cos\beta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \sin\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}\right] (2)$$

Z warunków zadania $P_y = 0$ czyli :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 ctg\beta \; (3)$$

Wstawiając /3/ w /1/ mamy:

$$p_x = a\left[\sin\beta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - (1-\cos\beta)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right]$$

z rownania/3/

$$p_x = \frac{a}{\sin\beta}(1-\cos\beta)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \ldots (4)$$

mamy $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = -\frac{d^2\beta}{dt^2}tg\beta \cdot (5)$ oznaczając $\frac{d\beta}{dt} = p$

mamy $\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\beta}\cdot p$ podstawiając w /5/

$$p^2 + p\frac{dp}{d\beta}tg\beta = 0; \; p + \frac{dp}{d\beta}tg\beta = 0; \; \frac{d\beta}{tg\beta} = -\frac{dp}{p}$$

całkując otrzymamy $lp = -\int\frac{\cos\beta\, d\beta}{\sin\beta} = l\frac{c}{\sin\beta};$

$$\frac{c}{\sin\beta} = \frac{d\beta}{dt},$$

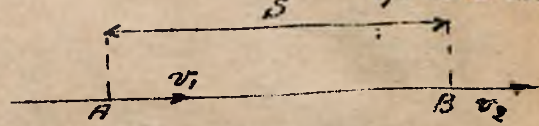
wstawiając w /4/ $\quad p_x = \frac{a(1-\cos\beta)c^2}{\sin^3\beta}$

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad to \quad p_x = p_0 = ac^2$$

zatem przyspieszenie:

$$p_y = \frac{a\,p_0(1-\cos\beta)}{\sin^3\beta}\cdot\frac{p_0}{a} = \frac{p_0(1-\cos\beta)}{\sin^3\beta}$$

Rys. do zad. 42



Zadanie 41

W punkcie A szybkość jest = 0. W punkcie B szybkość:

$$v = p t_1 = \frac{p}{60}; \quad s_1 = \frac{1}{2} p t_1^2 = \frac{p}{7200};$$

$$s_2 = v t_2 = \frac{p}{1440}; \quad v = q t_3 = \frac{q}{120}; \quad q = \frac{120}{60} p = 2p;$$

$$s_3 = \tfrac{1}{2} q t_3^2 = \frac{p}{14400}; \quad s_1 + s_2 + s_3 = 3,25$$

$$\frac{p}{7200} + \frac{p}{14400} + \frac{p}{1440} = 3,25; \quad p = 3600\ \mathrm{km/godz}^2$$

$$q = 2p = 7200\ \mathrm{km/godz}^2; \quad v = \frac{p}{60} = 60\ \mathrm{km/godz}$$

Zadanie 42

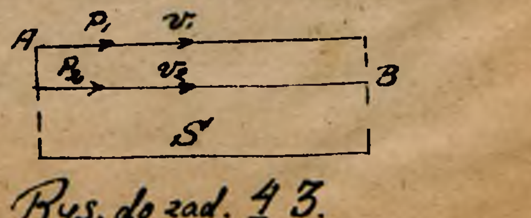
Oznaczając przez t czas przejścia od A do B mamy, że $v_2 = v_1 + pt$ zaś

zaś: $AB = s = v_1 t + \frac{1}{2} p t^2,$

ale $t = \dfrac{v_2 - v_1}{p}$

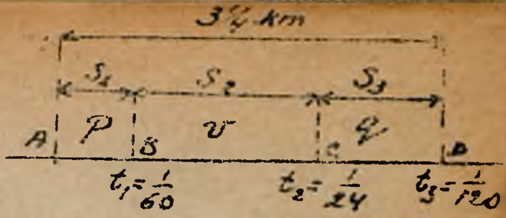
więc po wstawieniu $s = v_1 \dfrac{v_2 - v_1}{p} + \dfrac{1}{2} p \dfrac{(v_2 - v_1)^2}{p^2} =$

$$= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2p}.$$



Rys. do zad. 43.

Zadanie 43



Obydwie łodki w tym samym czasie przebyły tę samą drogę, więc:

$$s_1 = s_2$$

czyli:

$$v_1 t + \frac{1}{2} p_1 t^2 = v_2 t + \frac{1}{2} p_2 t^2$$

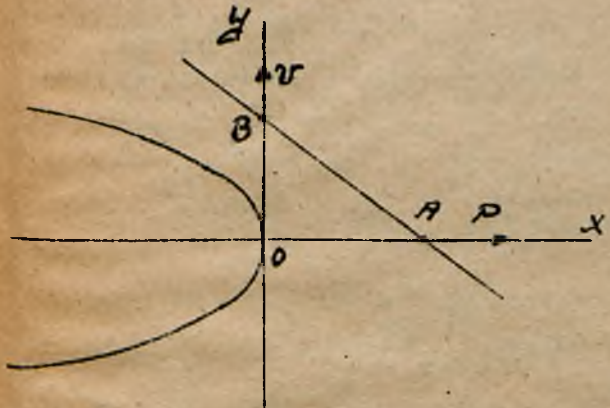
$$(v_1 - v_2) t = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) t^2 ; \quad t \neq 0$$

podzielmy

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) t ; \quad t = \frac{2(v_1 - v_2)}{p_2 - p_1}$$

$$s_1 = v_1 t + \frac{1}{2} p_1 t^2 = \frac{2(v_1 - v_2)(v_1 p_2 - v_2 p_1)}{(p_1 - p_2)^2} = s_2$$

Zadanie 44



Po t sekundach:

$$AO = \frac{1}{2} p t^2 ; \quad OB = vt$$

zatem równanie prostej AB będzie

$$f(xyt) = \frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} - 1 = 0 ; \quad \frac{2x}{pt^2} + \frac{y}{vt} - 1 = 0$$

Dla znalezienia obwiedni przyrównywujemy do zera pochodną względem t :

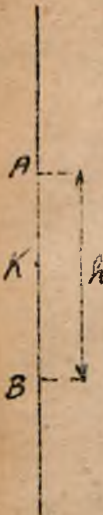
$$\frac{dx}{dt} = 0 = -\frac{2x}{p} \cdot \frac{2}{t^3} - \frac{y}{vt^2} ; \quad -\frac{4x}{pt^3} - \frac{y}{vt^2} = 0 ; \quad t = -\frac{4vx}{py}$$

podstawiając wartość t w równanie pierwotne

$$\frac{2x}{p} \cdot \frac{p^2 y^2}{16 v^2 x^2} - \frac{y p y}{4 v v x} - 1 = 0 ;$$

$$y^2 = \frac{8v^2}{p} x$$

Zadanie 45



Dla punktu A mamy: $h=\frac{1}{2}gt^2$

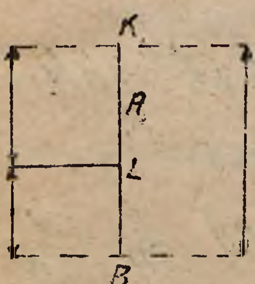
skąd: $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$; w tym samym czasie punkt B wzniósłszy się w górę do punktu K powrócił do B. Czas wznoszenia się = czasowi spadania, a szybkość końcowa = szybkości początkowej, więc czas na przebycie BK w jedną stronę:

$$t_1=\frac{1}{2}t;\quad t_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

stąd:

$$v_0=gt_1=g\sqrt{\frac{h}{2g}}=\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

Zadanie 46



Przypuśćmy, że spotkanie nastąpiło po następnych t_1 sekundach, czyli po t_1 od drugiego wystrzału. Pocisk pierwszy wzniósł się był do najwyższego punktu K i zdążył opaść do punktu spotkania L. Czas wznoszenia się wyliczamy ze wzoru:

$$v_{t'}=0=v_0-gt_1'$$

gdzie $v_{t'}$ jest szybkością końcową w punkcie K. Wysokość wzniesienia

$$h=BK=v_0t'-\frac{1}{2}gt'^2;\quad h=gt'^2-\frac{1}{2}gt'^2$$

Pociskowi A pozostaje zatem na spadanie do L czas równy $t+t_1-\frac{v_0}{g}$ opadnie więc

więc $h'=KL=\frac{1}{2}g\left(t+t_1-\frac{v_0}{g}\right)^2$; $BL=BK-KL=h-h'=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2}\left(t+t_1-\frac{v_0}{g}\right)^2$

z drugiej strony BL jest wysokością wzniesienia drugiego pocisku, równe:

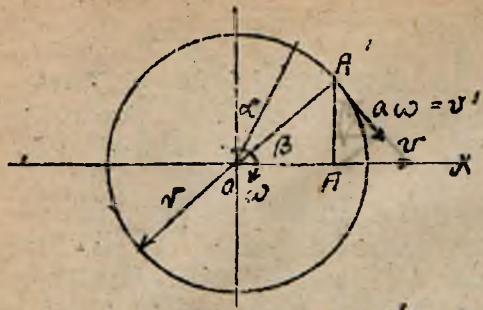
$$h_2=v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$$

skąd: $\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2}\left(t+t_1-\frac{v_0}{g}\right)^2=v_0t-\frac{1}{2}gt_1^2$

skąd obliczamy $t_1=\frac{2v_0-gt}{2g}$.

spotkanie nastąpi po t sekundach od drugiego wystrzału.

Zadanie 47



Ruch punktu A można zidenty[illegible] [illegible]ać z ruchem rzutu końca odcinka znajdującego [illegible] ruchu obrotowym. Z figury

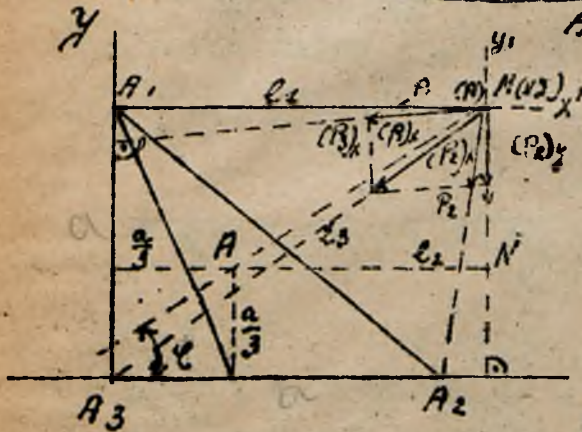
$v = v' \sin\beta$; $v = a\omega \sin\beta$;

że zaś $\cos\beta = \frac{x}{a}$ to

$\sin\beta = \frac{\pm 1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

zatem $v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2}$

Zadanie 48



$A_1A_3 = A_2A_3 = a$; $A_1M = \ell_1$, $A_2M_2 = \ell_2$; $A_3M = \ell_3$

Oznaczamy przez:

$$p_1 = \kappa^2\ell_1 ;\ p_2 = \kappa^2\ell_2 ;\ p_3 = \kappa^2\ell_3$$

przyspieszenia udzielone ruchomemu punktowi M przez wierzchołki A A i A [illegible]. Rzuty tych przyspieszeń [illegible] osi X i Y będą [illegible]

$(P_1)_x ; (P_2)_x ; (P_3)_x ; (P_1)_y ; (P_2)_y ; (P_3)_y$.

Z podobieństwa trójkątów napiszemy:

$$\frac{(P_1)_x}{-x} = \frac{p_1}{\ell_1} ;\ (P_1)_x = -x\kappa^2 ;\ \frac{(P_1)_y}{a-y} = \frac{p_1}{\ell_1} ;\ (p_1)_y = (a-y)\kappa^2$$

analogicznie znajdziemy, że

$$(P_2)_x = (a-x)\kappa^2 ;\ (P_2)_y = -y\kappa^2 ;\ (P_3)_x = x\kappa^2 ;\ (P_3)_y = -y\kappa^2$$

oznaczając przez p przyspieszenie wypadkowe będziemy mieli

$$p_x = (P_1)_x + (P_2)_x + (P_3)_x = -x\kappa^2 + (a-x)\kappa^2 - x\kappa^2 =$$

$$= (a-3x)\kappa^2$$

$$p_y = (a-y)\kappa^2 - y\kappa^2 - y\kappa^2 = \kappa^2(a-3y)$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 3\kappa^2\sqrt{\left(\frac{a}{3} - x\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - y\right)^2} \quad \ldots (1)$$

Oznaczając przez φ kąt pomiędzy p a x mamy

$$\cos\varphi = \frac{p_x}{p} = \frac{NA}{AM} = \frac{\left(\frac{a}{3} - x\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{3} - x\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - y\right)^2}} \quad \ldots 2$$

Ze wzorów /1/ i /2/ wynika, że przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do odległości punktu ruchomego od stałego punktu $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$ jest wciąż skierowane do punktu A. Ruch jest więc prosty harmoniczny, punkt A zaś jego środkiem. Zatem torem punktu jest linja prosta a, przechodzące przez A. Że zaś punkt znajdował się w spoczynku w punkcie A więc torem będzie prosta AA. Okres wahań wyrazi się wzorem: $t = \frac{2\pi}{\omega}$ gdzie -

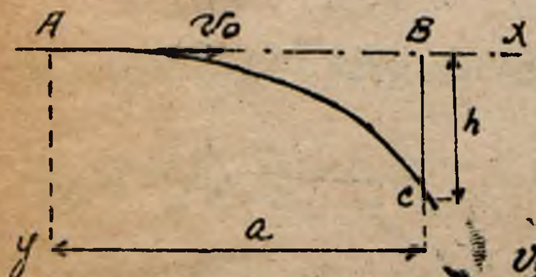
współczynnik proporcjonalności $= 3k^2$ zatem $\omega = k\sqrt{3}$

i okres wahań $t = \frac{2\pi}{k\sqrt{3}}$

Aplitudą podwójnemu odcinkowi

$$A, A = 2\sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{5}$$

Zadanie 49



Dla punktu A:

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = g$$

stąd całkując dwa razy i wstawiając warunki początkowe otrzymamy:

$$v_x = const. = v_0; \quad x = v_0 t + \overset{0}{const} = v_0 t$$

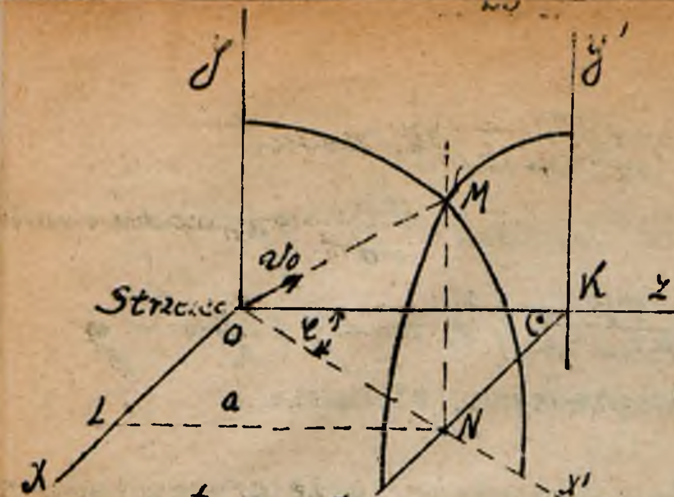
$$v_y = gt + const = gt; \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + \overset{0}{const} = \frac{1}{2}gt^2$$

Dla punktu B $y = \frac{1}{2}gt^2$ /spadek swobodny/. Ze wzorów na y widzimy, że po upływie jednakowych okresów czasu punkty A i B znajdują się na tym samym poziomie. Ponieważ nadto punkt A posiada szybkość poziomą w kierunku do B więc po upływie t sekund równych $\frac{a}{v_0}$ spotkają się w punkcie C leżącym poniżej pierwotnego poziomu O

$$h = \frac{1}{2}g\left(\frac{a}{v_0}\right)^2 = \frac{a^2 g}{2v_0^2}$$

Zadanie 50

Szukane miejsce geometryczne utworzą punkty przecięcia płaszczyzny ściany z parabolami bezpieczeństwa płasz_



czyzn przechodzących przez Oy, a tworzących z płaszczyzną yOz kąty φ różne. Tak więc punkt M o płaszczyźnie yOz zadość czynić musi paraboli bezpieczeństwa:

$$g^2x_2^2+2v_0^2gy-v_0^4=0$$

z △ KON; $KO=ON\cos\varphi$; $a=x_1\cos\varphi$; $x_1=\frac{a}{\cos\varphi}$

z △ KON: $KN=OK\,tg\,\varphi$;

$x=a\,tg\,\varphi$; $tg\,\varphi=\frac{x}{a}$; $\frac{1}{\cos^2\varphi}=1+tg^2\varphi=1+\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2}$

$$\frac{g^2a^2(a^2+x^2)}{a^2}+2v_0^2gy=v_0^4;\quad x^2=\frac{v_0^4-g^2a^2}{g^2}-\frac{2v_0^2gy}{g^2}=\frac{v_0^4-a^2g^2}{g^2}-\frac{2v_0^2}{g}y$$

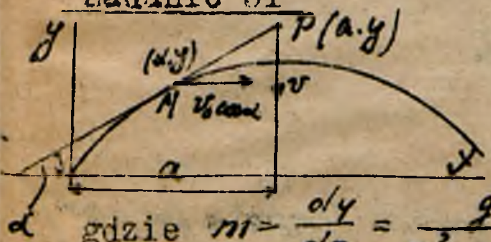
Szukanem miejscem geometrycznym jest parabola o parametrze $p=\frac{v_0^2}{2}$ wierzchołek jej znajduje się na wysokości y_0

$$x=0;\quad y_0=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{ga^2}{2v_0^2}$$

ognisko leży na wysokości $y_0-\frac{p}{2}=-\frac{a^2g^2}{2v_0^2g}$

czyli pod poziomem strzelca na głębokości $-\frac{a^2g}{2v_0^2}$

Zadanie 51



Równanie toru pocisku jest

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2+x\,tg\,\alpha$$

Poprowadźmy styczną w punkcie M(x, y), równanie jej jest $y-y_1=m(x-x_1)$

gdzie $m=\frac{dy}{dx}=\frac{gx}{v^2\cos^2\alpha}+tg\,\alpha$ czyli po podstawieniu

$$y=y_1-\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x_1^2+\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}xx_1$$

ponieważ zaś punkt M leży na paraboli, zatem czyni zadość jej równaniu czyli

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_1^2+\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\quad-\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\alpha_2}+x\,tg\,\alpha;\ \text{dla } x=a$$

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_1^2+\frac{ga}{v_0^2\cos^2\alpha}x_1-\frac{ga^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+a\,tg\,\alpha$$

oznaczając przez V wysokość punktu P po pionie, mamy:

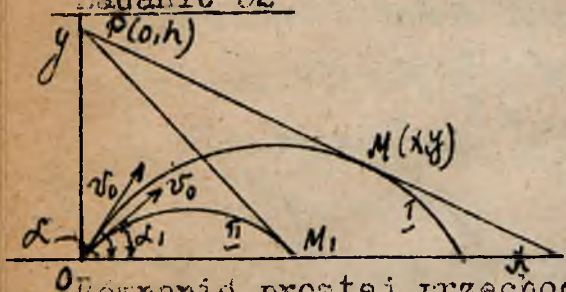
$$v = \frac{dy}{dt} = \left(-\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}\, x_1 + \frac{g a}{v_0^2 \cos^2\alpha}\right) v_0 \cos\alpha,$$

to składowa pozioma szybkości pocisku $\frac{dx_1}{dt} = v_0 \cos\alpha = const$

$$p = \frac{d^2y}{dt^2} = \left(-v_0 \cos\alpha \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}\right)(v_0 \cos\alpha), \quad p = -g$$

A więc punkt P posiada przyspieszenie ziemskie.

Zadanie 52



Należy dowieść, że czas przebiegu pocisku nie zależy od kąta. Prowadzimy z punktu P styczną do toru pocisku, którego równanie

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha$$

lub

$$y = a x^2 + b x$$

Równanie prostej przechodzącej przez P/oh/ jest $y = mx + h$ w przecięciu z parabolą mamy

$$x = \frac{m - b \pm \sqrt{(m-b)^2 - 4ah}}{2a}$$

Aby prosta była styczna trzeba by $(m-b)^2 - 4ah = 0$

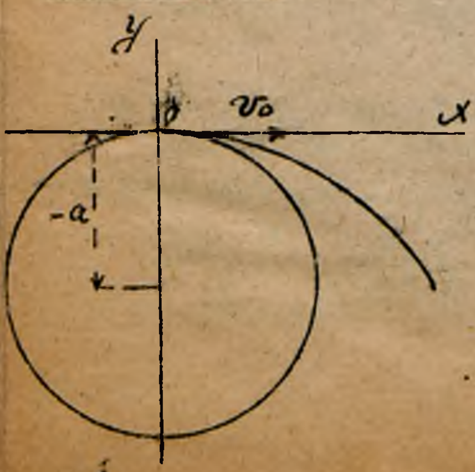
czyli $m - b = \pm 2\sqrt{-ah}$

czyli $x = \frac{m-b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{2h v_0^2 \cos^2\alpha}{g}}$; $x = \pm v_0 \cos\alpha \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Ponieważ jednym z równań ruchu jest $x = v_0 t \cos\alpha$ skąd $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ i pocisk dojdzie do M po upływie czasu $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

widzimy, że czas nie zależy od α.

Zadanie 53



Równanie toru pocisku będzie $(\alpha = 0°)$

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2} x^2 \ldots\ldots (1)$$

$$y^2 + 2ay + x^2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

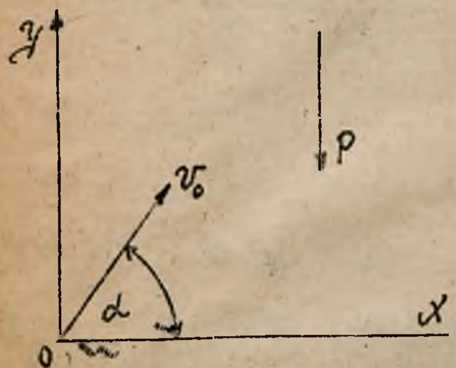
Aby pocisk nie dotknął powierzchni kuli linje powyższe nie powinny się spotkać w punktach rzeczywistych, czyli układ ich równań powinien dać odpowiedzi urojone.

Z rozwiązania układu równań /1/ i /2/ otrzymamy wartość na $x = \frac{2v_0}{g}\sqrt{ag - v_0^2}$

aby odpowiedź była urojona trzeba by $ag - v_0^2 < 0$
czyli

$$v_0 > \sqrt{ag}$$

Zadanie 54



$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \ldots (1) \quad p = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

z (1) $v_x = v_0 \cos\alpha;\ x = v_0 \cos\alpha\, t$

z (2) $y = A \sin(Bt + C)$

rozwiązanie ogólne dla I otrzymamy wartość = w dla C = 0

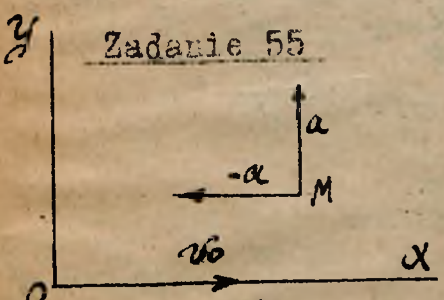
więc $\frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + c)$

stąd $A = \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega}$; $y = \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega} \sin(\ldots$

Równanie toru wyznaczymy rugując t z obu równań $(x\ i\ y)$ $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$
otrzymamy sinusoidę:

$$x = v_0 \cos\alpha\, t;\quad y = \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega} \sin(\omega t)$$

Zadanie 55



$$\frac{d^2x}{dt^2} = a;\ x = -\frac{at^2}{2} + C_1 t + B_1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a;\ y = \frac{at^2}{2} + C_2 t + B_2$$

Przypuśćmy, że gdy punkt przebiegł przez początek układu, to $t=0$; $\frac{dx}{dt} = C_1 = v_0$; $\frac{dy}{dt} = C_2 = 0$

Zatem $\frac{dx}{dt} = v_x = -at + v_0$, a $v_y = at$ i $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{u}$

$x = -\frac{at^2}{2} + v_0 t + B$; $x = -\frac{at^2}{2} + v_0 t$

gdyż $B_1 = 0$, dla $t=0$; $x=0$ tak samo $B_2 = 0$ przy $y=0$

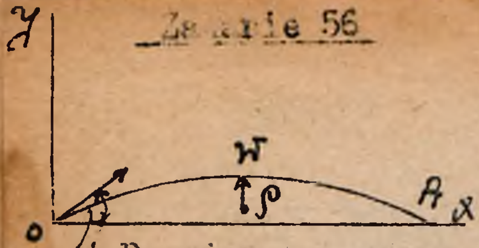
Minimum V znajdziemy przy minimum wartości podpierwiastkowej u a więc

$$\frac{du}{dt} = 4a^2 t - 2av_0 = 0;\ t = \frac{2av_0}{4a^2} = \frac{v_0}{2a}.$$

odpowiadające położenie punktu będzie:

$$x = -\frac{at^2}{2} + v_0 t = \frac{3v_0^2}{8a} \quad i \quad y = \frac{v_0^2}{8a}$$

Zadanie 56



$x^2 = 2py$; $y = \frac{x^2}{2p}$; $y' = \frac{x}{p}$; $y'' = \frac{1}{p}$.

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{p}} = \frac{(p^2+x^2)^{3/2}\,p}{p^{3/2}}; \quad \text{dla } x=0 \quad \rho = p$$

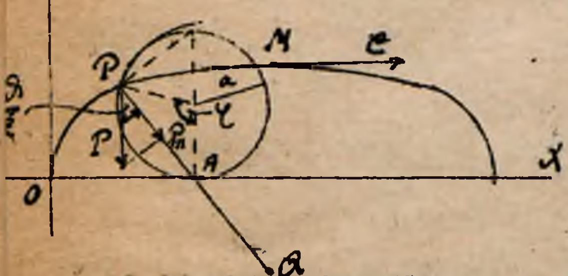
Promień krzywizny paraboli w wierzchołku = ~~...~~ parametrowi /środek krzywizny w ognisku/. Ponieważ równanie toru pocisku jest

$$y = -\frac{g x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\,tg\,\alpha; \quad \text{stąd} \quad x^2 = -\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\,y + \frac{x\,tg\,\alpha\,2v_0^2\cos^2\alpha}{g}$$

parametr naszej paraboli tj. promień krzywizny w wierzchołku

$$= \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}.$$

Zadanie 57



$PQ = \rho$ dane $(PQ = 2PA)$

Promień krzywizny cykloidy = podwójnemu odcinkowi PA normalnej będzie zatem $\rho = 4a\sin\frac{\vartheta}{2}$

Z warunków zadania $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

więc $v_x = C$ /dane/ z równań cykloidy określamy $v_x = c = a(1-\cos\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$

stąd $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{2a\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$, $v_y = \frac{dy}{dt} = c\,ctg\frac{\vartheta}{2}$

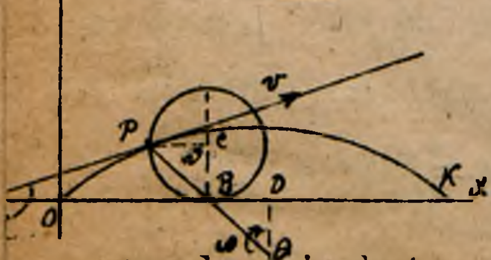
stąd obliczamy $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{c}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$

ze wzoru wiadomo, że $p_n = \frac{c^2}{\rho\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$

z rysunku zaś $p = \frac{p_n}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$ zatem $p = \frac{c^2}{\rho\sin^3\frac{\vartheta}{2}}$

ponieważ zaś $\rho = 4a\sin\frac{\vartheta}{2}$ więc $\frac{\vartheta}{2} = \frac{\rho}{4a}$ i $p = \frac{64a^3c^3}{\rho^4}$

Zadanie 58



Ponieważ styczna obraca się z szybkością kątów, to i normalna obraca się z tą samą szybkością ω

zatem $v = 4a\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot\omega$

i ponieważ przez punkt Q środek krzywizny toru punktu P przechodzą obie normalne nieskończenie bliskie: ze wzoru:

$$p_n = 4a\omega^2 \sin\frac{\vartheta}{2}$$

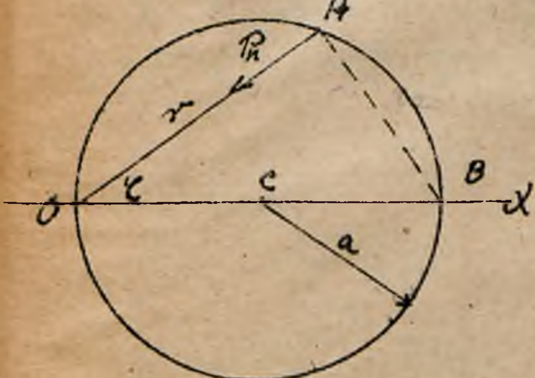
z rysunku widać, że $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}$ stąd

$\omega = -\frac{1}{2}\frac{d\vartheta}{dt}$; $\frac{d\vartheta}{dt} = -2\omega$

korzystając z tego piszemy $p_t = \frac{dv}{dt} = 4a\omega\cos\frac{\vartheta}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{d\vartheta}{dt} =$

$= -4a\omega^2\cos\frac{\vartheta}{2}$; $p = \sqrt{p_n^2 + p_t^2} = \sqrt{16a^2\omega^4\left(\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)} = \underline{4a\omega^2}$

Zadanie 59



$p = p_r$ zaś $p_\varphi = 0$ ponieważ przyspieszenie stale skierowane do O:

$p_\varphi = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$

zatem: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$

Równanie toru jest $r = 2a\cos\varphi$

stąd $\frac{dr}{d\varphi} = -2a\sin\varphi$

przyspieszenie: $p = p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$

$\frac{dr}{dt} = -\frac{c}{2a}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$; $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{c^2}{2ar^2}\cdot\frac{\cos^3\varphi + 2\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}{\cos^4\varphi} =$

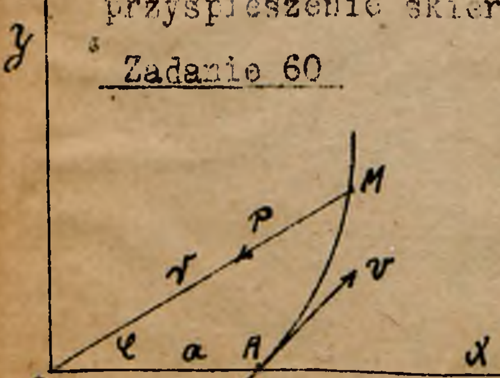
$= -\frac{c^2}{2ar^2}\cdot\frac{1+\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}$ zaś $p = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1+\sin^2\varphi}{2a\cos^3\varphi} + \frac{1}{r}\right)$

Z równania toru: $\cos\varphi = \frac{r}{2a}$ zatem $\sin^2\varphi = \frac{4a^2 - r^2}{4a^2}$

zatem $p = -\frac{8c^2a^2}{r^5}$

przyspieszenie skierowane do O.

Zadanie 60



$p = -\frac{K^2}{r^3}$; $r = OM$; $v = \frac{K}{a}$; $a = O$

$p_\varphi = 0$; $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$

Szybkość punktu ma dwie składowe v_r i v_φ

W początku ruchu $t = 0$; $v_r = \frac{K}{a\sqrt{2}}$

zaś $r = a$ więc $v_\varphi = \frac{K}{a\sqrt{2}}$

zatem $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{K}{\sqrt{2}\,r^2}$; $p = p_r = -\frac{K^3}{r^3}$

$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{K^2}{2r^3}$

Zakładając $s = \frac{dr}{dt}$ mamy:

$d(s^2)$; d^2r dr ; $-K^2$ dr = $d(s^2)$

z tego wyniku po scałkowaniu, $s^2 = \frac{k^2}{2r^2} + C$

stąd $s = \sqrt{\frac{k^2}{2r^2} + C} = \frac{dr}{dt}$ W począt-

ku ruchu czasu $t = 0$, $r = a$, $v_r = \frac{k}{a\sqrt{2}}$ stąd $s = \frac{k}{a\sqrt{2}}$

$C_1 = 0$ i $s = \frac{k}{r\sqrt{2}}$, $r\,dr = \frac{k}{\sqrt{2}}dt$

$\frac{r^2}{2} = \frac{k}{\sqrt{2}}t + C_2$; $r^2 = kt\sqrt{2} + a^2$

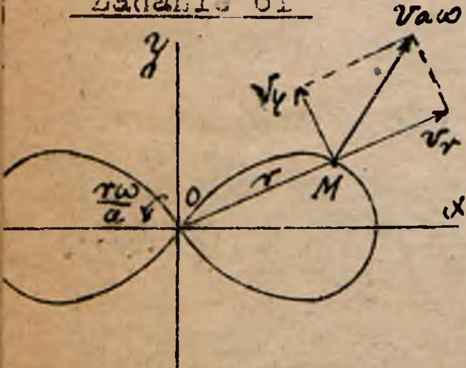
$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{2kt + a^2\sqrt{2}}$; $\frac{d\varphi}{k} = \frac{dt}{2kt + a^2\sqrt{2}}$

po scałkowaniu otrzymamy $\varphi = \frac{1}{2}\ell(2kt + a^2\sqrt{2}) + C_3$

~~stąd~~ dla $t = 0$; $\varphi = 0$ skąd $\varphi = \frac{1}{2}\ell\left(\frac{r}{a}\right)^2$; $\varphi = \ell\left(\frac{r}{a}\right)$; $\frac{r}{a} = e^{\varphi}$

ostatecznie $r = ae^{\varphi}$ spiralną logarytmiczną.

Zadanie 61



Ruch punktu M rozpatrujemy [illegible] towy dookoła 0 z szybkością [illegible] $= \frac{r\omega}{a}$ i postępowy wzdłuż promienia wodzącego r z szybkością

$v_r = \frac{dr}{dt} = ?$ $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r\omega}{a}$,

$v_\varphi = \frac{r\,d\varphi}{dt} = \frac{r^2\omega}{a}$

$v_r = \sqrt{v^2 - v_\varphi^2} = \frac{\omega}{a}\sqrt{a^2 - r^4} = \frac{dr}{dt}$

ponieważ

$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{\sqrt{a^4 - r^4}}$; $d\varphi = \frac{r\,dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}$

po scałkowaniu

$\varphi + C = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{r^2}{a^2}\right)$; $r = a\sqrt{\sin 2(\varphi + c)}$

otrzymaliśmy równanie lemniskaty

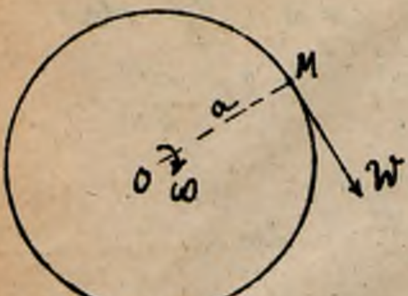
$\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{a}(a^4 - r^4)^{\frac{1}{2}}$; $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{2r^3\omega^2}{a^2}$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r\omega}{a}$

$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{\omega^2}{a^2}\sqrt{a^4 - r^4}$; $p_r = \frac{3r\omega^2 r^2}{a^2}$,

$p_\varphi = \frac{3r\omega^2}{a^2} \cdot \sqrt{a^4 - r^4}$; $p = \sqrt{p_\varphi^2 + p_r^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{3r\omega^2}{a^2}\right)^2 (r^4 + a^4 - r^4)} = 3\omega^2 r$

Zadanie 62.

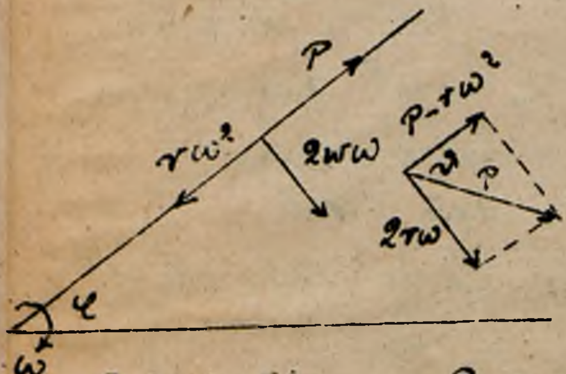


Przyspieszenie bezwzględne p posiada trzy składowe: 1° przyspieszenie unoszenia: $p_u = a\omega^2$ skierowane jest pro do środka tarczy, 2° przyspieszenie względne $p_w = \frac{w^2}{a}$ składowa styczna $= 0$ skierowana do środka tarczy, 3° przyspieszenie Coriolisa:

$p_c = 2\omega w$ /zwrócone w kierunku ruchu unoszenia koroa szybkości czyli do środka/, zatem przyspieszenie bezwzględne:

$$p = p_u + p_w + p_c = (a\omega + 2w)\omega + \frac{w^2}{a}$$

Zadanie 63.



Przyspieszenie względne = P

" unoszenia = $\frac{pt^2}{2}\omega^2$

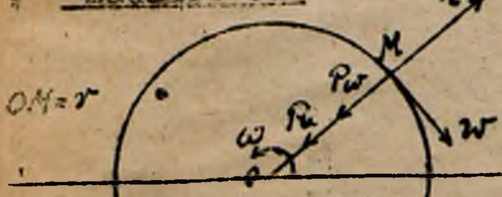
" Coriolisa = $2pt\omega$

$$tg\,\vartheta = \frac{2pt\omega}{p\left(1 - \frac{t^2\omega^2}{2}\right)} = 1;\ bo\ \vartheta = 45°$$

$$2t\omega = 1 - \frac{t^2\omega^2}{2};\quad t\omega = -2 \pm \sqrt{6}$$

$$p = 2p\,t\omega\sqrt{2} = -4p(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})$$

Zadanie 64



Ponieważ szybkość w ruchu względnym jest stała punkt M może posiadać tylko przyspieszenie dośrodkowe, prostopadłe do w. Przyspieszenie Coriolisa 2ωw, skierowane również prostopadle do w. Więc przyspieszenia względne i Coriolisa dodają się algebraicznie. Przyspieszenie unoszenia jest skierowane wzdłuż promienia wodzącego /do O/, chcąc więc żeby suma wszystkich trzech przyspieszeń była skierowana wzdłuż promienia wodzącego żądać należy, by: 1° obie składowe P_w i P_c były skierowane wzdłuż promienia wodzącego 2° albo by składowe te były skierowane przeciwnie i były równe co do wielkości. Gdy mamy wypadek pierwszy to:

$$kąt\,(r,w) = \frac{\pi}{2};\quad tg\,(r,w) = \infty = r\frac{d\varphi}{dr};$$

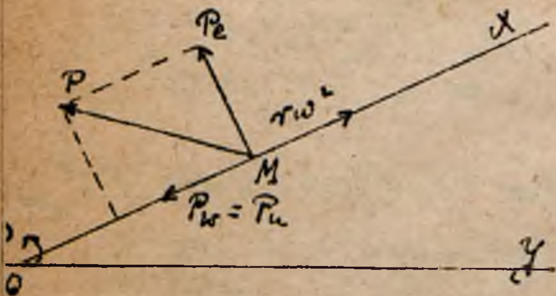
stąd $\frac{dr}{r\,d\varphi}=0;\quad \frac{1}{r}\neq 0;\quad \frac{dr}{d\varphi}=0;\quad r=\text{const}$

Tor względny jest okręg o środku O i promieniu OM dowolnym. W drugim wypadku

$$p_c = 2\omega w;\quad p_w = \frac{w^2}{\rho}\quad \text{zatem}\quad 2w\bar{\omega} = \frac{w^2}{\rho}\quad \text{stąd}$$

const tor względny jest okrąg koła o promieniu $r = \frac{w}{2\omega}$

Zadanie 65



$t = \frac{2\pi}{\omega}$; 2α;

Szybkość względna punktu M ze wzorów na ruch harmoniczny

$w = a\omega \cos(\omega t + \alpha)$,
$OM = r = a \sin(\omega t + \alpha)$

zaś przyspieszenie względne p_w skierowane do środka ruchu harmonicznego O: $p_u = r\omega^2$ Przyspieszenie Coriolisa prostopadłe do szybkości względnej:

$p_c = 2\bar{\omega} w$; stąd $p_r = 2r\omega^2$; $p_\varphi = 2w\bar{\omega}$

$p_r = 2a\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$; $p_\varphi = 2a\,\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$

stąd

$$p = \sqrt{p_r^2 + p_\varphi^2} = 2a\omega^2$$

Widzimy, że z upływem czasu koniec przyspieszenia bezwzględnego zatacza względem punktu M okrąg koła o promieniu = 2 a ω^2.

Koniec