

T A B L E A U XL.

Tensions observées dans le rail S sous la marche des trains et leur rapport aux tensions sous charge au repos d'après le calcul.

Locomotive Pu 29.

Année 1934.

Arête extérieure du champignon au droit de la traverse 13.

$D = 8740 \text{ kg/cm}$

Vitesse km/h	Epreuve n°	Roues porteuses				Roues motrices								Roue porteuse d'arrière		Roues du tender							
		1		2		1		2		3		4		kg/cm ²	%	1		2		3		4	
		kg/cm ²	%	kg/cm ²	%	kg/cm ²	%	kg/cm ²	%	kg/cm ²	%	kg/cm ²	%			kg/cm ²	%	kg/cm ²	%	kg/cm ²	%	kg/cm ²	%
0	—	552	100	312	100	795	100	719	100	741	100	930	100	995	100	de 591 à 624	100	de 568 à 572	100	de 560 à 585	100	de 729 à 761	100
9,0	858	737	134	368	118	971	122	837	116	737	99	1004	108	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
31,7	856	703	127	301	96	737	93	—	—	703	95	670	72	636	64	670	113	502	89	737	132	703	97
64,7	854	234	42	—	—	938	118	—	—	737	99	870	94	603	61	368	61	469	82	333	58	301	41
103,5	852	636	115	636	204	1506	190	870	121	703	95	—	—	—	—	402	64	—	—	201	34	234	31

Conclusions.

1. En comparant les tensions observées dans le rail sous la marche des trains aux tensions sous charge au repos pour en juger de l'effet dynamique des roues, le calcul des tensions sous charge au repos peut être fait en considérant le rail comme poutre sur assise élastique continue, vu que la différence des tensions dans ce cas et dans le cas de rail reposant sur appuis élastiques isolés n'est pas grande, indifféremment qu'il soit chargé d'un seul poids ou d'un système de poids. La supposition d'assise élastique continue conduit en résultat du calcul à une tension de 5% de moins au maximum, ce qui donne une certaine réserve de sûreté dans l'appréciation des tensions observées d'après les tensions calculées au repos.
2. Les tensions observées dans le rail sous des locomotives conduisant les trains à des vitesses jusqu'à 110 km/h en ligne droite et horizontale, s'approchent en général des tensions sous charges au repos d'après le calcul.
3. A des vitesses de 80 à 110 km/h les tensions observées dans le rail sous chaque roue motrice prise séparément déclinent des tensions calculées sous charge au repos pour la plupart davantage qu'à des vitesses inférieures.
4. Les fortes tensions dans le rail souvent ne sont pas accompagnées d'un abaissement qui leur correspondrait en valeur et parfois même cet abaissement est moins grand que l'abaissement sous charge au repos d'après le calcul.
5. A des vitesses de 80 à 110 km/h les écarts de tension observés dans le rail sous chaque roue prise séparément dépassent de 45%, et à des vitesses inférieures, de 35% les plus grands écarts d'abaissement qu'on n'a observés.
6. Les observations indiquées aux nos 4 et 5 attestent que le travail du rail dépend non seulement des forces verticales, mais d'autres encore, notamment des forces latérales et des forces de torsion, et permettent de se rendre compte de l'ensemble de ces forces en ligne droite et horizontale.

V. Mouvements longitudinaux du rail.

1. Causes du phénomène.

Les photographies d'une marque sur pellicule sensible ayant un mouvement vertical ont démontré qu'au passage des trains cette marque ne gardait pas sa position sur ligne verticale, mais qu'elle s'écartait de cette ligne dans la direction de la longueur du rail. Par suite de la flexion sous charge, les sections transversales du rail s'inclinent, il est donc tout naturel que les points situés à une certaine distance de l'axe neutre s'éloignent de la

verticale que devrait suivre leur position de repos ¹⁾. Cependant des déplacements élastiques longitudinaux du rail ont été observés aussi sur son axe neutre, dont les points se déplacent dans la direction de la longueur du rail d'une quantité ne dépassant pas la différence entre la longueur d'une partie de la ligne élastique et la longueur de la corde qui lui correspond, c'est-à-dire d'une longueur qui dans ce cas est de plusieurs fois inférieure à la précision avec laquelle elle pourrait être mesurée.

Ces observations ont fait conclure, que les déplacements longitudinaux du rail, dont la figure 74 donne un exemple d'après mesurage sous comparateur, proviennent de la réaction élastique du rail et de ses appuis sous l'action des forces tangentielles au cercle de roulement des roues motrices des locomotives.

Pour se rendre compte de ce phénomène, il fut indispensable d'étudier le travail du rail soumis en voie courante aux efforts longitudinaux, et de déterminer en premier lieu l'élasticité de l'appui du rail dans la direction de ces efforts.

Vu l'impossibilité de mesurer directement les efforts longitudinaux exercés sur le rail pendant la marche des trains, il devint indispensable de déterminer ce genre d'élasticité sous l'action d'autres forces connues.

2. Observation des déplacements longitudinaux du rail sous pression de presses hydrauliques.

Afin d'obtenir des données expérimentales sur les déplacements du rail sous l'action d'une force axiale connue, on a enlevé les éclisses des joints des deux rails dans la voie du tronçon d'essai de Włochy du côté de Varsovie et à leur place on a fixé aux rails des sabots, entre lesquels on a inséré des presses hydrauliques munies de manomètres (fig. 65).

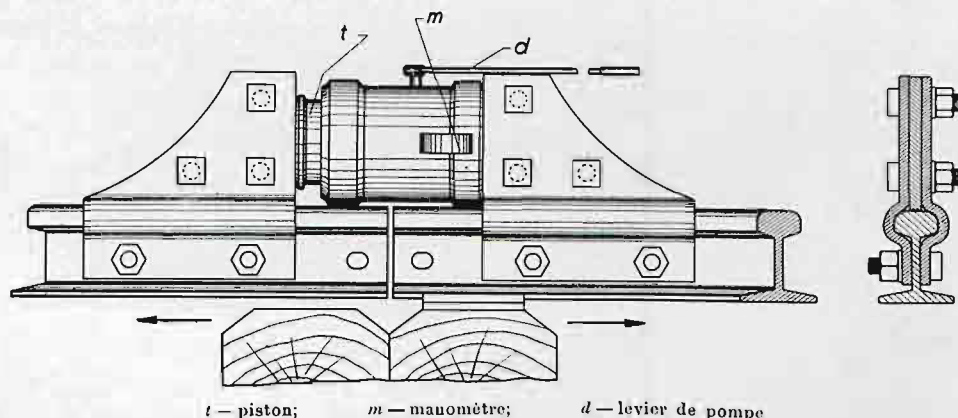
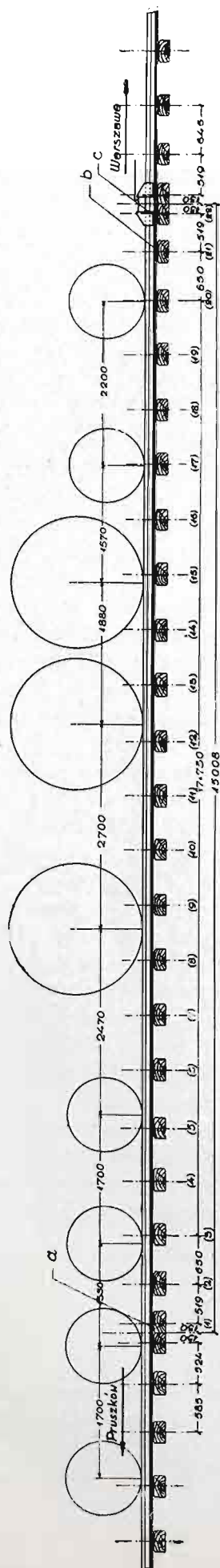


Fig. 63. Disposition pour soumettre le rail à une pression dans la direction de sa longueur.

¹⁾ Les points situés à une certaine distance de l'axe neutre, par exemple au bord du patin, s'éloigneront en deux directions de leur position en état de repos et le maximum de ces écartements aura lieu à une distance de $\frac{\pi}{4} L_s = 0,7854 L_s$ avant et après l'abaissement maximum, à savoir aux endroits où l'angle de la tangente à l'axe neutre déformée sous la charge du premier essieu de la locomotive, ou sous un essieu suffisamment éloigné des autres, atteindra sa valeur maximum. Comme cela a été calculé ci-dessus (page 92), ce maximum est pour la superstructure observée:

$$\max \operatorname{tg} \nu = \frac{G}{Cb_s I_s^2} \eta' = 0,00229$$

Un point du bord du patin situé à 7 cm au-dessous de l'axe neutre s'écartera de sa position en état de repos pas plus de $0,00229 \times 70 = 0,1603$ mm, ce qui après être grandi quatre fois revient à 0,641 mm sur pellicule sensible. Cet écartement maximum aura lieu à une distance de $0,7854 \times 97,5 = 76,6$ cm avant et après l'abaissement maximum. A l'endroit de l'écartement maximum avant le passage de la roue il se formera un noeud si la vitesse du déroulement de la pellicule n'est pas suffisant.



a, c — plaques d'appui et éclisses enlevées; b — plaque d'appui enlevée.

Numérotage des appuis dans les formules.

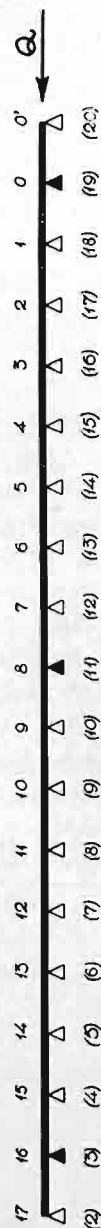


Fig. 65. Numérotage des traverses dans les formules des déplacements axiaux.

Les sabots furent fixés aux rails avec des boulons passant par les trous extérieurs des joints et par des trous supplémentaires qu'on avait parforés. Des traverses 22 et 21 ayant un écartement inférieur à celui des traverses intermédiaires on a ôté les tirefonds et les plaques d'appui, ce qui faisait que le dernier appui du rail fut la traverse 20. Une locomotive du type Ok 22 conduisant un train, fut placée sur le tronçon d'essai de manière qu'elle s'avavançait jusqu'à la traverse 20.

On a enlevé ensuite les éclisses des joints du côté de Pruszków ainsi que les tirefonds et les plaques d'appui de la traverse 1 (fig. 64). De cette manière les rails d'essai ont pris la forme de deux poutres sur 19 appuis ayant un écartement égal, à l'exception de la travée entre les traverses 2 et 3. L'écartement de ces traverses, plus petit de quelques centimètres, n'a pas pu être modifié sous charge, ce qui ne pouvait nullement diminuer la précision des calculs. La charge des rails les plaçait à peu près dans les mêmes conditions qu'ils se trouvaient au passage des trains, et les empêchait de se soulever pendant qu'ils étaient poussés par l'action des presses.

L'appareil de pression fut appliqué symétriquement aux deux rails et on veillait à ce que la pression sur chaque rail soit égale pour atteindre un déplacement uniforme des traverses. On a dû se contenter d'une certaine excentricité de la pression exercée sur chaque rail, vu qu'il serait difficile d'appliquer des sabots d'une autre construction.

Pour observer les déplacements longitudinaux du rail et de ses appuis on a choisi des points (fig. 65) au droit des traverses: 19 (appui n° 0)¹⁾, 11 (appui n° 8) et 5 (appui n° 16)¹⁾.

Les déplacements du rail furent observés au moyen de deux appareils, en deux points à la fois, choisis sur l'axe neutre au droit du milieu de l'appui, et en certains cas aussi les déplacements de la traverse.

Jusqu'à 30 atm. la pression fut augmentée de 5 à 5 atm., puis jusqu'à 100 atm. de 10 à 10 atm. Après avoir atteint cette limite on réduisait la pression dans le même ordre.

1) Une seule observation a été faite au droit de la traverse 20 (appui n° 0'), mais on ne l'a pas répétée à cause des inconvénients d'ordre pratique.

Légende aux figures 66 et 67.

K — point terminal du diagramme

OS_1 — redressement de la ligne brisée de l'accroissement de pression

$(O) (S_2)$ — " " " du décroissement de pression

OS_2 — " " " " rapportée à l'origine des coordonnées

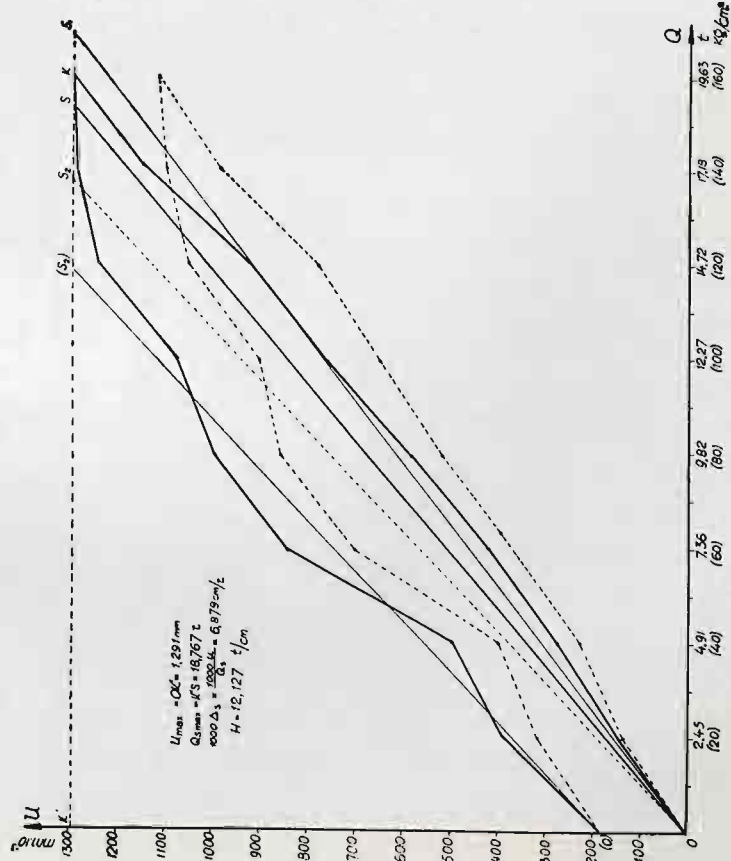
Q — effort de la presse (entre parenthèses pression sur le piston en kg/cm^2)

u_i — déplacement de l'appui i

$u_{S \text{ max}}, Q_{S \text{ max}}$ — coordonnées du point S

Δu_S — déplacement par unité d'effort correspondant à la ligne OS

H — coefficient de l'appui axial du rail.

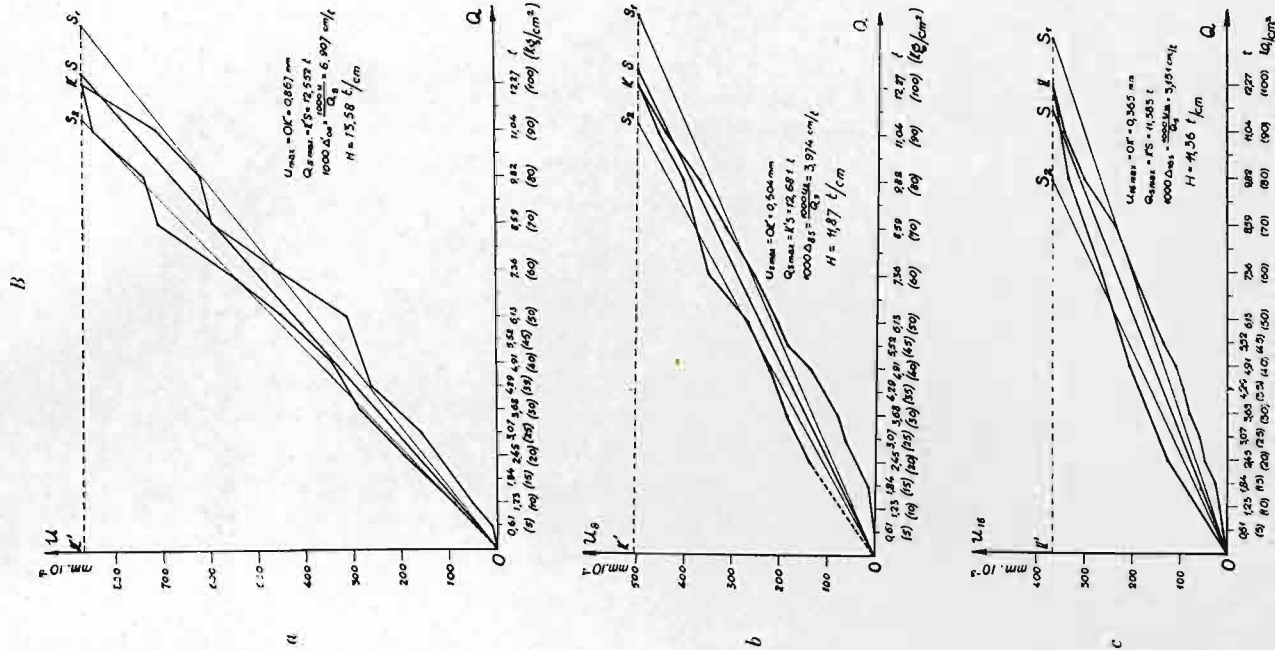


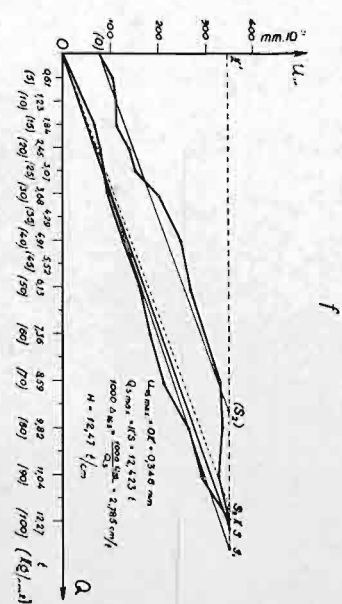
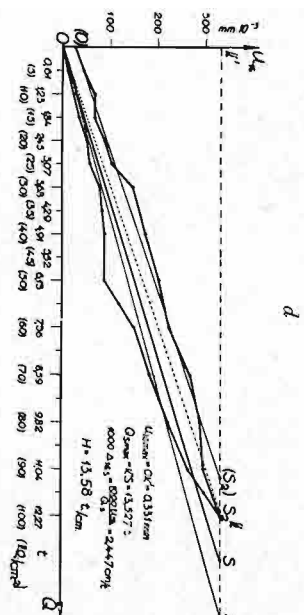
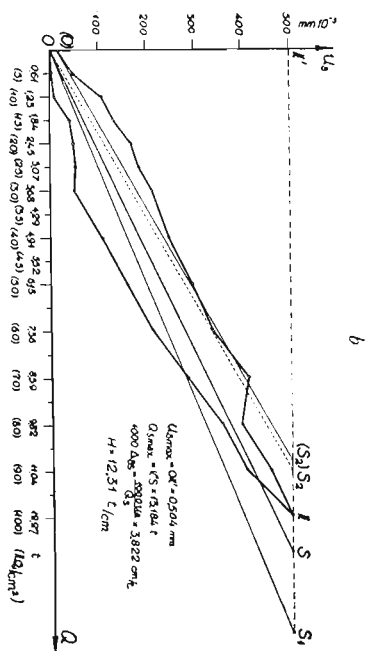
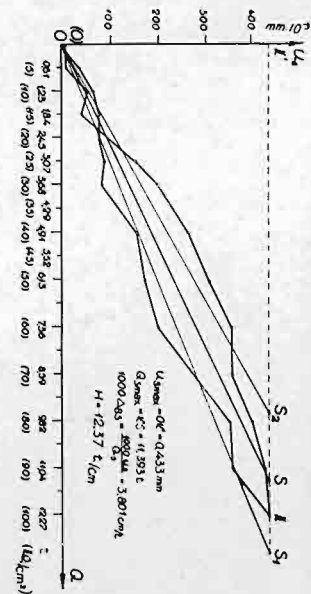
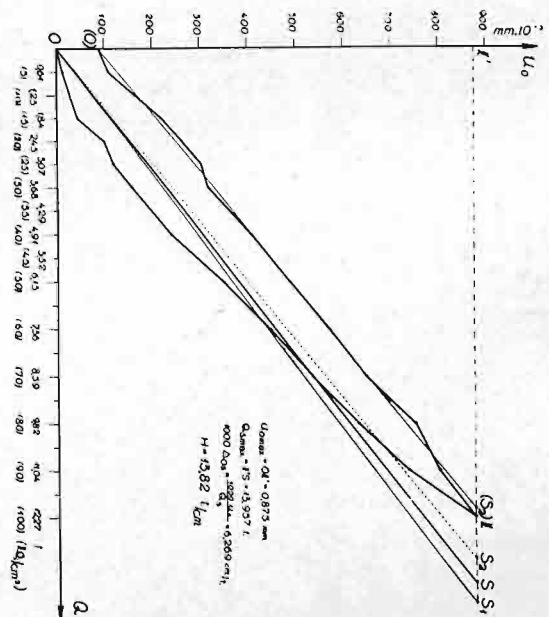
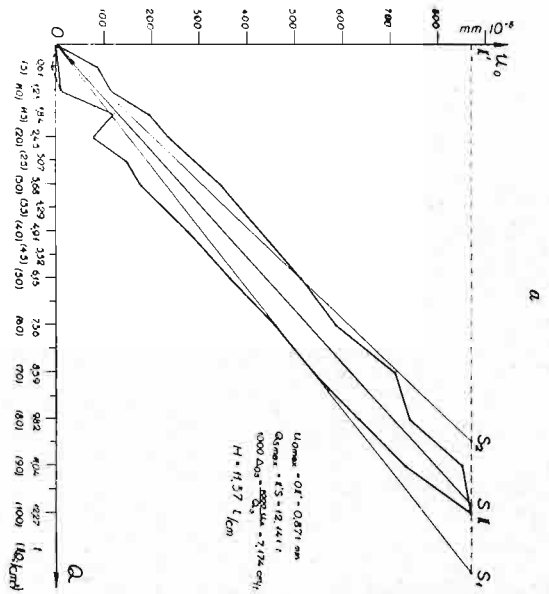
A. Déplacements axiaux de l'appui 0' (traverse 20) d'après l'épreuve n° 608 du 22.XI.1933.

La ligne brisée répond aux déplacements de la traverse.

- B. Déplacements axiaux d'après les observations du 17.VIII.1934.
- a. Appui 0' (traverse 20) épreuve n° 914 (simultanément n° 919)
 - b. Appui 8 (traverse 11) épreuve n° 919 (simultanément n° 914)
 - c. Appui 16 (traverse 3) épreuve n° 917 (simultanément n° —)

Fig. 66. Déplacements axiaux en fonction de l'effort axial d'après les observations.





Déplacements axiaux d'après les observations du 7.IX.36.

- a. Appui 0 (traverse 19). Epreuve n° 974 (épreuve simultanée n° 981).
 b. Appui 8 (traverse 11). Epreuve n° 981 (épreuve simultanée n° 974).
 c. Appui 0 (traverse 19). Epreuve n° 976 (épreuve simultanée n° 983).
 d. Appui 16 (traverse 3). Epreuve n° 983 (épreuve simultanée n° 976).
 e. Appui 8 (traverse 11). Epreuve n° 978 (épreuve simultanée n° 985).
 f. Appui 16 (traverse 3). Epreuve n° 985 (épreuve simultanée n° 978).

Fig. 67. Déplacements axiaux en fonction de l'effort axial d'après les observations.

T A B L E A U X L I.

Déplacements axiaux d'un rail desséré au joint sous pression d'une presse.

Effort axial		Déplacements axiaux du rail en mm au droit des appuis nos									
kg/cm ² du piston	t	16	0'	8	0	8	0	16	8	16	
0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
5	0,61	8	11	0	(-8)	2	15	10	55	—	
10	1,23	16	53	6	10	8	—	25	65	42	
15	1,84	25	—	11	122	41	45	55	78	66	
20	2,45	48	—	39	78	48	99	51	79	78	
25	3,07	58	160	65	146	51	118	58	88	88	
30	3,68	79	211	79	177	50	157	78	85	94	
35	4,29	92	263	109	—	—	—	—	—	127	
40	4,91	107	—	138	280	109	239	88	156	162	
45	5,52	153	—	189	—	—	—	—	—	—	
50	6,13	155	317	210	367	160	350	88	174	162	
60	7,36	196	460	258	461	215	447	151	202	185	
70	8,59	234	595	321	542	284	555	185	278	207	
80	9,82	299	621	377	659	356	630	222	351	260	
90	11,04	341	725	447	735	407	735	265	356	288	
100	12,27	365	867	504	871	504	875	351	455	346	
90	11,04	—	845	459	855	457	800	297	425	525	
80	9,82	352	737	407	745	397	750	290	399	352	
70	8,59	—	707	—	712	412	648	268	357	527	
60	7,36	265	571	355	588	358	575	224	357	296	
50	6,13	—	454	270	515	295	489	202	309	268	
40	4,91	204	546	224	—	246	407	174	265	248	
30	3,68	—	289	187	346	212	515	147	201	198	
25	3,07	—	—	—	—	185	302	104	155	155	
20	2,45	124	195	159	259	169	260	88	92	157	
15	1,84	—	—	—	195	154	219	69	40	111	
10	1,23	—	90	—	115	106	162	69	55	111	
5	0,61	—	—	—	88	48	109	44	8	105	
0	0,0	—	—	—	—	15	87	26	7	77	
Epreuve n°		917	914	919	974	981	976	985	978	985	
Date		17.VIII.1934				7.IX.1934					

Effort axial		Déplacements axiaux du rail au droit de l'appui 0' mm
kg/cm ² du piston	t	
0	0	0,000
20	2,45	0,142
40	4,91	0,272
60	7,36	0,418
80	9,82	0,582
100	12,27	0,759
120	14,72	0,922
140	17,18	1,142
160	19,65	1,291
140	17,18	1,284
120	14,72	1,257
100	12,27	1,072
80	9,82	0,992
60	7,36	0,840
40	4,91	0,494
20	2,45	0,586
0	0	0,180
Epreuve n°		608
Date		22.XI.33

Remarque: Les épreuves simultanées sont réunies par une accolade.

Les résultats des mesurages sont indiqués dans le tableau XLI ainsi qu'en forme de diagrammes sur figures 66 et 67. On voit d'après ces diagrammes que les déplacements du rail étaient élastiques, quoique sur certains diagrammes le point observé ne retournait pas strictement à sa position initiale, comme s'il s'attardait graduellement sur son chemin de retour. Il faut remarquer de plus, que pendant que la pression augmente, la courbe de pression est convexe vers le bas, tandis que pendant que la pression diminue cette courbe est convexe vers le haut. Les valeurs moyennes des déplacements pendant ces deux périodes approchent de la ligne droite, ce qui prouve que les déplacements changent approximativement en raison des pressions ¹⁾.

¹⁾ Pour calculer le rapport moyen entre les pressions et les déplacements on mesurait l'aire entre la courbe de pression et l'axe des déplacements et l'on admettait que l'hypoténuse d'un triangle ayant la même aire représentait ce rapport.

Entre les hypoténuses de deux triangles qu'on avait obtenus d'après les diagrammes des déplacements correspondant à l'accroissement et au décroissement de la pression, on menait une ligne moyenne et on admettait que sa direction répondrait à une valeur du déplacement par unité de pression $\Delta = \frac{du}{dQ}$ qui, étant supposée constante, donnerait pour chaque valeur Q de pression entre 0 et Q maximum, des déplacements répondant le mieux aux déplacements réels.

Puisque l'aire entre la courbe des déplacements et son abscisse $\Pi = \int_0^{u_{\max}} Q du$ est une grandeur proportionnelle au travail élastique nécessaire pour accomplir le déplacement u_{\max} , le remplacement de cette courbe par une droite de la manière indiquée ci-dessus ne change pas la valeur de ce travail.

3. Calcul du coefficient de l'appui axial des rails.

a. Rail sur appuis élastiques.

Suivant les résultats des observations que nous venons de décrire et la théorie d'une poutre sur appuis élastiques chargée dans la direction de son axe, on a calculé le coefficient de l'appui axial des rails de la manière suivante.

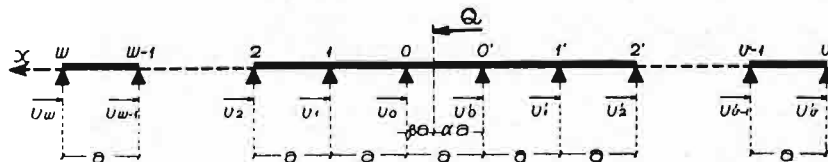


Fig. 68. Schéma d'une poutre sous charge axiale.

Les réactions horizontales U_i, U_i' des points d'appui i, i' d'une poutre sur nombre d'appuis élastiques équidistants, chargée dans une de ses travées OO' d'une charge axiale Q (fig. 68), sont¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} U_i &= -Q \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{\alpha(1+s^{2\nu+3}) + \beta s(1+s^{2\nu+1})}{1-s^{2\nu+2w+4}} \cdot (s^i + s^{2w-i+1}) \\ U_i' &= -Q \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{\alpha s(1+s^{2w+1}) + \beta(1+s^{2w+3})}{1-s^{2\nu+2w+4}} \cdot (s^i + s^{2\nu-i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Le déplacement u du point d'attache de l'effort axial Q est:

$$u = \frac{1}{H} (Q m \alpha \beta - U_0 \alpha - U_0' \beta) \quad (27)$$

et le déplacement du point d'appui i :

$$u_i = -\frac{U_i}{H} \quad (28)$$

$$s = 1 + \frac{m}{2} - \sqrt{m + \frac{m^2}{4}} \quad (29)$$

$$m = \frac{H a}{E A} \quad (30)$$

a écartement des appuis en cm.

H coefficient de l'appui axial des rails en kg/cm.

E coefficient de l'élasticité de la matière de la poutre en kg/cm².

A section transversale de la poutre,

βa et αa distances du point d'attache de la force axiale Q aux points d'appui dans la travée OO' ,

w et ν nombre d'appuis à gauche et à droite de la travée OO' .

En appliquant les formules (26) et (27) au cas d'un rail sur 19 appuis ainsi qu'au point du rail au droit des appuis dont on a observé les déplacements (fig. 65), vu que dans ce cas:

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1; \quad \nu = 0; \quad w = 17$$

¹⁾ L. Karasiński. Charge axiale d'une poutre reposant sur appuis élastiques équidistants. Chaire et laboratoire de la résistance des matériaux de l'Ecole Polytechnique de Varsovie. Varsovie 1933, II partie (en polonais).

on obtient:

$$u = u_0' = \frac{Q}{H} \cdot (1-s) \frac{1+s^{37}}{1-s^{38}} \quad (31)$$

$$u_i = \frac{Q}{H} \cdot (1-s) s^{i+1} \cdot \frac{1+s^{35-2i}}{1-s^{38}} \quad (32)$$

La formule (32) donne les déplacements par unité de charge au droit des appuis 0, 8 et 16:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{u_0}{Q} = \frac{1}{H} (1-s) s \cdot \frac{1+s^{35}}{1-s^{38}} \\ \Delta_8 &= \frac{u_8}{Q} = \frac{1}{H} (1-s) s^9 \cdot \frac{1+s^{19}}{1-s^{38}} \\ \Delta_{16} &= \frac{u_{16}}{Q} = \frac{1}{H} (1-s) s^{17} \cdot \frac{1+s^3}{1-s^{38}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Vu la relation compliquée entre les déplacements et le coefficient de l'appui axial des rails, on a calculé dans le tableau XLII, au droit des appuis observés, les valeurs des déplacements par unité de charge correspondantes à certaines valeurs du coefficient H , et d'après ce calcul on a tracé des diagrammes de la relation cherchée (fig. 69). Ces diagrammes ont permis de trouver la valeur approximative du coefficient H d'après les déplacements observés et puis la valeur exacte de ce coefficient par essais d'après les formules (33).

T A B L E A U XLII.

Déplacements axiaux Δ du rail par unité de charge en fonction du coefficient H de l'appui axial des traverses.

H t/cm	s	$\mu_0 = \frac{1+s^{35}}{1-s^{38}}$	$1000 \Delta_0 = \frac{1000}{H} (1-s) s \mu_0$ cm/t	$\mu_8 = \frac{1+s^{19}}{1-s^{38}}$	$1000 \Delta_8 = \frac{1000}{H} (1-s) s^9 \mu_8$ cm/t	$\mu_{16} = \frac{1+s^3}{1-s^{38}}$	$1000 \Delta_{16} = \frac{1000}{H} (1-s) s^{17} \mu_{16}$ cm/t
∞	$-0, \infty$	—	0	—	0	—	0
385,3	0,61470	1,0000	0,6147	1,0001	0,01253	1,2323	0,00032
143,3	0,74206	1,0000	1,3357	1,0035	0,12324	1,4086	0,01590
119,2	0,76160	1,0001	1,5234	1,0057	0,17340	1,4418	0,02814
57,6	0,82720	1,0020	2,4866	1,0280	0,55936	1,5676	0,1869
39,7	0,85430	1,0066	3,1560	1,0528	0,93650	1,6276	0,4107
33,8	0,86480	1,0103	3,4948	1,0676	1,1554	1,6539	0,5600
22,25	0,88875	1,0277	4,5668	1,1191	1,9338	1,7215	1,1592
19,87	0,89449	1,0352	4,9169	1,1366	2,2127	1,7409	1,3891
18,58	0,89781	1,0403	5,1369	1,1481	2,3931	1,7528	1,5423
17,31	0,90116	1,0461	5,3828	1,1606	2,5973	1,7656	1,7184
15,75	0,90550	1,0533	5,7334	1,1788	2,8946	1,7835	1,9795
13,82	0,91120	1,0698	6,2640	1,2060	3,3551	1,8093	2,3919
12,42	0,91561	1,0836	6,7400	1,2304	3,7770	1,8318	2,7780
11,73	0,91789	1,0920	7,0164	1,2444	4,0296	1,8446	3,0102
11,42	0,91892	1,0960	7,1507	1,2509	4,1496	1,8505	3,1211
9,08	0,92736	1,1361	8,4286	1,3133	5,3306	1,9060	4,2312
7,23	0,93493	1,1870	9,9879	1,3863	6,8097	1,9700	5,6490
5,89	0,94110	1,2434	11,7016	1,4611	8,4614	2,0363	7,2564

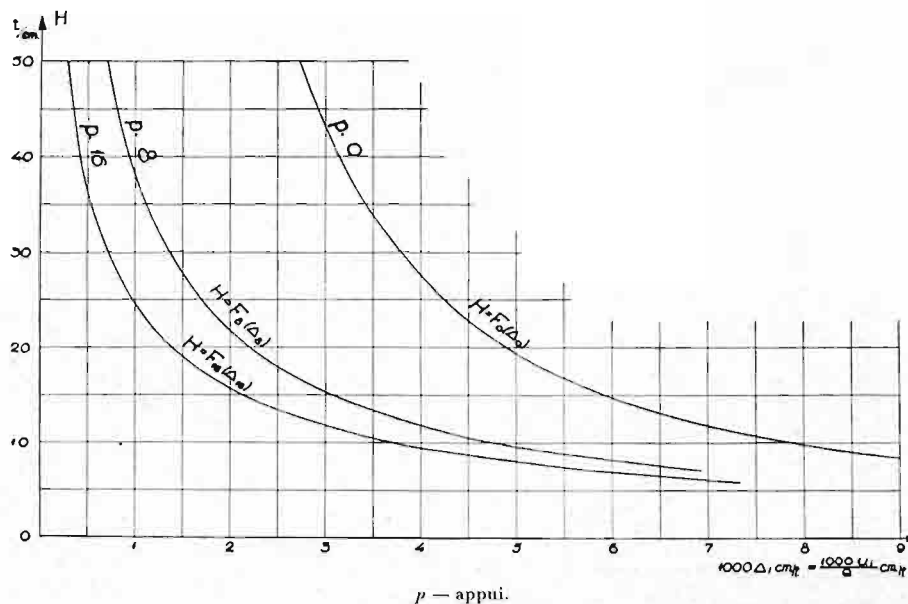


Fig. 69. Diagramme du coefficient H en fonction des déplacements axiaux des appuis 0, 8 et 16.

TABLEAU XLIII.

Coefficient de l'appui axial du rail d'après ses déplacements.

Date		17.8.1934			7.9.1934						22.11.33
Epreuve n°		917	914	919	974	981	976	983	978	985	608
Appui n°		16	0'	8	0	8	0	16	8	16	0'
Déplacement maximum u_{\max} mm		0,365	0,867	0,504	0,871	0,504	0,875	0,331	0,433	0,346	1,291
Abcisses correspondantes à u_{\max} , la ligne brisée étant remplacée par une ligne droite	Pression croissante $Q_{s_1} = \frac{2 F_1}{u_{\max}}$	13,466	13,791	14,092	13 865	15,288	14,558	14,895	13,288	12,957	20,681
	Pression décroissante $Q_{s_2} = \frac{2 F_2}{u_{\max}}$	9,699	11,319	11,270	10,405	10,754	12,031	11,202	9,497	9,259	14,501
Abcisse, la ligne droite étant rapportée à l'origine des coordonnées Q_{s_2}		9,699	11,319	11,270	10,405	11,080	13,556	12,153	9,497	11,895	16,855
Abcisse moyenne $Q_s = \frac{1}{2} (Q_{s_1} + Q_{s_2})$ t		11,583	12,552	12,681	12,141	13,184	13,957	13,527	11,393	12,423	18,767
Déplacement moyen par unité de charge $1000 \Delta = \frac{1000 u_{\max}}{Q_s}$ cm/t		3,151	6,907	3,974	7,174	3,822	6,269	2,447	3,801	2,785	6,879
Coefficient H d'après le déplacement moyen en t/cm		11,36	13,58	11,87	11,37	12,31	13,82	13,58	12,37	12,47	12,127*)
Moyenne du coefficient H t/cm		12,52									

*) Avec cette épreuve le coefficient H fut calculé d'après la formule $H = \frac{a}{EA\Delta^2 + a\Delta}$ vu que les éclisses au joint du côté de Pruszków sont restées sur place.

Le tableau XLIII contient les résultats du calcul du coefficient de l'appui axial des rails d'après les déplacements observés. La valeur moyenne de ce coefficient fut trouvée

$$H = 12,52 \text{ t/cm.}$$

On remarquera que la valeur de ce coefficient n'est pas bien différente de la valeur du coefficient de l'appui vertical des traverses $D \approx 10 \text{ t/cm.}$

b. Le rail lié à son assise.

Les calculs des déformations élastiques et du travail du rail sous une charge verticale, appuyés de l'observation, ont prouvé que le rail sur appuis isolés peut être remplacé dans ces calculs par une poutre sur assise continue en conservant une précision suffisante des résultats.

On a cru intéressant de se rendre compte avec quel degré de précision pourrait-on appliquer la même méthode de calcul pour déterminer les déformations et le travail du rail sollicité par des efforts axiaux.

Profitant des équations établies par M. Karasiński¹⁾ on a admis que le rail est lié sur toute sa longueur à l'assise, dans laquelle l'effort axial Q appliqué au rail évoque une réaction élastique — hu par unité de longueur, u étant le déplacement axial et h le coefficient de l'appui axial des rails en kg/cm^2 .

L'effort Q étant appliqué au centre d'une des parois d'about d'une poutre de longueur b , le déplacement axial de cette poutre par unité de charge à une distance x du point d'application de la charge Q est:

$$\Delta = \frac{u}{Q} = \frac{n}{h} \cdot \frac{e^{n(b-x)} + e^{-n(b-x)}}{e^{nb} - e^{-nb}} = \frac{n}{h} \cdot \frac{\text{coth } n(b-x)}{\text{sinh } nb} \quad (34)$$

$$n = \sqrt{\frac{h}{EA}}$$

Voulant définir h d'après un déplacement connu $\Delta = \frac{u}{Q}$, on peut résoudre l'équation (34) à l'aide d'un graphique ou par approximation graduelle, comme on l'avait fait ci-dessus par rapport à l'équation (33). On calcule d'abord le multiplicateur

$$\varphi = \frac{\text{coth } n(b-x)}{\text{sinh } nb}$$

pour une certaine valeur de h , puis on vérifie sa valeur à l'aide de l'équation:

$$h = \left(\frac{Q}{u} \right)^2 \cdot \frac{\varphi^2}{EA} = \frac{\varphi^2}{\Delta^2 EA}$$

Dans le tableau XLIV on a réuni les valeurs du coefficient h correspondantes aux valeurs de Δ_{si} d'après les observations (tableau XLIII ligne 9). Dans la dernière colonne du tableau XLIV on a comparé le coefficient h en kg/cm^2 , multiplié par l'écartement des traverses a , au coefficient H en kg/cm . Comme on le voit, le coefficient de l'appui axial des rails en cas de rail d'un côté infiniment long lié à son assise, mettant ce coefficient égal au produit $ah = H$, est pour différents appuis en moyenne de 7,6% plus grand, que si l'on faisait son calcul pour un rail reposant sur appuis isolés.

¹⁾ L. Karasiński. Charge axiale d'une poutre liée à son assise élastique. Przegląd Techniczny 1935, p. 202. (en polonais).

T A B L E A U XLIV.

Coefficient de l'appui axial du rail d'après ses déplacements.

Appui n°	Epreuve n°	Déplacement par unité de charge Δ_s cm/t (Tableau XLIII)	Coefficient h kg/cm ²	Coefficient H kg/cm (Tableau XLIII)	Rapport $\frac{ah}{H}$
16	917	$10^{-3} \cdot 3,151$	166,9	11 360	1,073
{ 0'	{ 914	. 6,907	203,9	13 580	1,096
{ 8	{ 919	. 3,974	173,2	11 870	1,065
{ 0	{ 974	. 7,174	168,8	11 370	1,084
{ 8	{ 981	. 3,822	179,45	12 310	1,064
{ 0	{ 976	. 6,269	205,9	13 820	1,088
{ 16	{ 983	. 2,447	200,6	13 580	1,078
{ 8	{ 978	. 3,801	180,35	12 370	1,064
{ 16	{ 985	. 2,785	182,8	12 470	1,070
M o y e n n e			184,7	12 520	1,076

Considérant le rail comme poutre des deux côtés infiniment longue sur appuis isolés, on trouve les déplacements par unité de charge d'après les formules générales (26) et (27) posant $v = w = \infty$.

On obtient alors:

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{au droit des supports} \\
 &\quad \text{du côté gauche:} \quad \Delta_i = - \frac{U_i}{Q H} = \frac{1}{H} \cdot \frac{1-s}{1+s} (\alpha + \beta s) s^i = \vartheta s^i \\
 &\text{au droit des supports} \\
 &\quad \text{du côté droit:} \quad \Delta_i' = - \frac{U_i'}{Q H} = \frac{1}{H} \cdot \frac{1-s}{1+s} (\alpha s + \beta) s^i = \vartheta' s^i \\
 &\text{au point d'application} \\
 &\quad \text{de la charge:} \quad \Delta = \frac{u}{Q} = \frac{1}{H} \cdot \frac{1-s}{1+s} (\alpha + \beta s) (\alpha s + \beta) s^{-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Si la même poutre est liée à son assise élastique, le déplacement par unité de charge d'un point situé à une distance x du côté gauche, au droit du point d'application de la charge, est

$$\Delta_x = \frac{n}{2h} e^{-nx} \quad (36)$$

En comparant les formules, il est facile de se convaincre que les coefficients de l'appui axial des rails ne diffèrent d'après ces deux modes de calcul que d'environ 0,2%.

Il suit de là que dans le cas de longueur infinie d'une poutre on peut admettre, sans craindre une différence notable du résultat, qu'elle repose soit sur appuis isolés, soit sur assise continue.

4. Réaction d'une voie sollicitée par des efforts axiaux.

L'observation d'une paire de rails en voie courante sous l'action d'un effort axial connu nous a permis de calculer la valeur du coefficient de l'appui axial des rails, mais elle n'a pas donné l'explication, auquel des deux cas de longueur et de charge s'approche un rail relié aux rails voisins au moyen d'éclisses, notamment s'il doit être considéré

comme poutre infiniment longue ou bien comme membre isolé d'une file de poutres. Pour éclaircir ce doute on a organisé des observations spéciales sur les déplacements longitudinaux des rails, sous l'action de presses hydrauliques, de la même manière que nous l'avons décrit ci-dessus (page 115), mais avec éclisses serrées aux joints de la paire de rails du tronçon d'essai et des rails voisins du côté de Pruszków. Les presses agissaient de l'autre bout des rails du côté de Varsovie où on a ôté les éclisses. On a observé les déplacements de la traverse 20 (appui n° 0') la plus éloignée du joint, et de la traverse 3 (appui n° 16) à proximité du joint.

On a comparé les déplacements élastiques observés des rails aux déplacements calculés dans deux suppositions suivantes: a) rails considérés comme poutres d'un côté infiniment longues, sollicités au bout d'un effort axial Q , et b) rails isolés pareillement sollicités.

Dans la première supposition (fig. 68 et 65) on a trouvé le déplacement de la traverse 20 (appui n° 0') d'après les formules (26) et (27) en posant $w = \infty$, $v = 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$:

$$u = u_0' = \frac{Q}{H} (1 - s)$$

et le déplacement de la traverse i :

$$u_i = \frac{Q}{H} (1 - s) s^{i+1}$$

i variant entre 0 et ∞

d'où le déplacement par unité de charge:

$$\Delta = \Delta_0' = \frac{1}{H} (1 - s) \quad (37)$$

$$\Delta_i = \frac{1}{H} (1 - s) s^{i+1} = \Delta (1 - H\Delta)^{i+1} \quad (38)$$

$$s = 1 + \frac{m}{2} - \sqrt{m + \frac{m^2}{4}} \quad (29)$$

$$m = \frac{H a}{E A} \quad (30)$$

En substituant les valeurs (29) et (30) dans l'équation (37) du déplacement par unité de charge, on trouve:

$$H = \frac{a}{E A \Delta^2 + a \Delta} \quad (39)$$

Connaissant $\Delta = \Delta_0'$ d'après le déplacement observé de l'appui 0' et admettant le cas de poutre d'un côté infiniment longue, on trouve H d'après l'équation (39) et Δ_{16} d'après l'équation (38), ce qui permet de le comparer au déplacement de Δ_{16} (traverse 3) d'après l'observation.

Envisageant le rail d'après l'autre supposition comme poutre isolée sur 19 appuis, non liée des deux bouts avec les rails voisins, on a trouvé le coefficient H correspondant au déplacement observé Δ du support 0' au moyen de l'équation (31) page 119 en se servant de la méthode d'approximation graduelle par essais, vu la forme complexe de cette équation. En substituant la valeur trouvée de H dans la troisième des équations (33) on a trouvé le déplacement Δ_{16} qu'on a pu comparer, comme précédemment, au déplacement observé simultanément avec Δ .

TABLEAU XLV.

Déplacement axiaux des traverses d'après l'observation et d'après le calcul.

Sollicitation du rail	Déplacements par unité de charge de l'appui 0' Δ'_0 cm/t	H t/cm	Déplacements par unité de charge de l'appui 16 Δ_{16} cm/t
D'après l'observation	$6,585 \cdot 10^{-3}$	—	$1,524 \cdot 10^{-3}$
Poutre sur 19 appuis	$6,585 \cdot 10^{-3}$	14,62	$2,215 \cdot 10^{-3}$
Poutre infiniment longue	$6,585 \cdot 10^{-3}$	13,185	$1,407 \cdot 10^{-3}$

Le tableau XLV contient les valeurs du déplacement de l'appui 0' et du déplacement simultané du support 16 d'après les observations faites sous l'action d'un effort axial $Q=12,27$ t ainsi que les déplacements de l'appui 16 calculés d'après le déplacement Δ'_0 dans les deux suppositions du travail des rails.

En comparant les déplacements calculés du support 16 à ses déplacements observés, on parvient à conclure que les rails bien liés aux joints au moyen d'éclisses travaillent sous le rapport des déplacements axiaux des supports à peu près comme s'ils formaient une poutre continue infiniment longue.

5. Ligne d'influence des déplacements d'un rail sous l'action d'une seule force axiale.

a. Rail infiniment long.

Tenant compte des résultats d'observations exposées au chapitre précédent, on a construit la ligne d'influence des déplacements axiaux du rail en le considérant comme poutre des deux côtés infiniment longue sur appuis élastiques équidistants ayant un coefficient $H=12,52$ t/cm (tableau XLIII), à travées d'une longueur de $a=73$ cm. De plus, comme précédemment:

$$E=2150000 \text{ kg/cm}^2; \quad A=54,23 \text{ cm}^2.$$

Les déplacements du rail furent calculés par unité de charge $Q=1$ appliquée au milieu d'une travée ($\alpha=\beta=\frac{1}{2}$). D'après le principe de réciprocité, ces déplacements donnent les ordonnées de la ligne d'influence des déplacements axiaux d'un point situé au milieu de la travée.

D'après les équations générales (26) et (27), posant $\nu=\omega=\infty$, on obtient les formules suivantes des déplacements par unité de charge:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_i &= \frac{-U_i}{QH} = \frac{1}{H} \cdot \frac{1-s}{1+s} (\alpha + \beta s) s^i \\ \Delta'_i &= \frac{-U'_i}{QH} = \frac{1}{H} \cdot \frac{1-s}{1+s} (\alpha s + \beta) s^i \\ \Delta &= \frac{u}{Q} = \frac{1}{Hs} \cdot \frac{1-s}{1+s} (\alpha s + \beta) (\alpha + \beta s) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Vu que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ on a :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_i &= \Delta'_i = \frac{1}{2H} (1-s) s^i \\ \Delta &= \frac{1}{4Hs} (1-s)(1+s) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Les déplacements dans une travée i , $(i+1)$ changent linéairement de Δ_i à Δ_{i+1} et dans la travée O, O' de Δ_0 à Δ et de Δ à $\Delta'_0 = \Delta_0$. Par conséquent les équations (40) permettent de calculer la ligne d'influence toute entière.

Les résultats des calculs sont indiqués dans le tableau XLVI et sur fig. 70.

b. Rail sur 22 appuis.

Vu que la résistance du joint aux efforts axiaux n'est pas toujours suffisamment sûre, on a fait des calculs supplémentaires permettant d'apprécier l'influence d'un desserrage considérable des boulons d'éclisses et des tirefonds. Notamment, on a calculé les déplacements du rail considéré comme poutre sur 22 appuis équidistants chargée dans la travée du milieu. D'après le principe de réciprocité ces déplacements donnent les ordonnées de la ligne d'influence des déplacements du milieu de la travée médiane d'un rail à joints desserrés.

D'après les équations (26) et (27), posant $\nu = \omega = 10$
 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, et puisque

$$\Delta_i = \Delta'_i = - \frac{U_i}{QH}$$

$$\Delta_i = \frac{1}{2H} \cdot \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{1+s+s^{22}+s^{23}}{1-s^{44}} (s^i + s^{21-i})$$

D'après l'équation (27), vu que $U_i = U'_i$

$$Hu = \frac{Qa}{4EA} H - U_0$$

$$\Delta = \frac{a}{4EA} + \Delta_0$$

$$\text{Marquant } \vartheta = \frac{1}{2H} \cdot \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{1+s+s^{22}+s^{23}}{1-s^{44}}$$

on trouve:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \vartheta (1 + s^{21}) + \frac{a}{4EA} \\ \Delta_i &= \vartheta (s^i + s^{21-i}) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

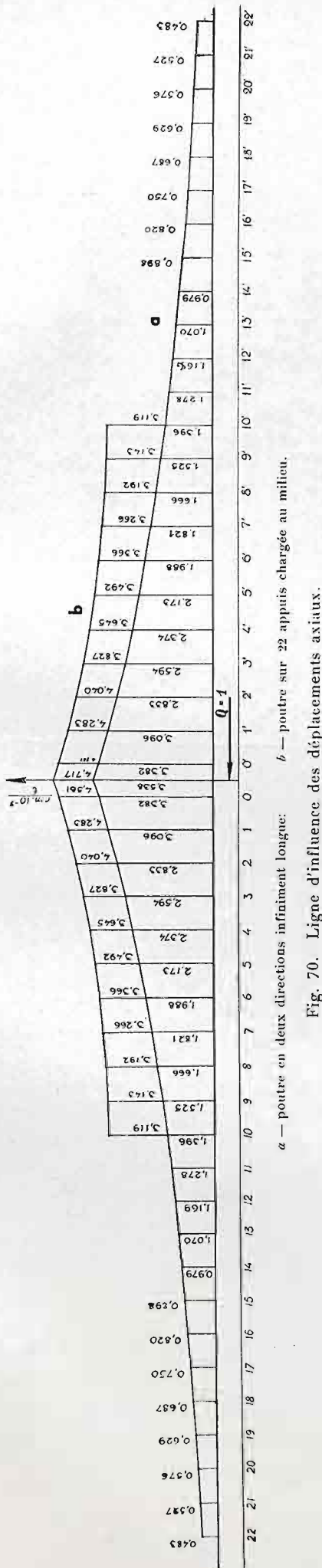


Fig. 70. Ligne d'influence des déplacements axiaux.
 a — poutre en deux directions infiniment longue;
 b — poutre sur 22 appuis chargée au milieu.

T A B L E A U XLVI.

Lignes d'influence des déplacements axiaux du rail.

$H = 12,52 \text{ t/cm.}$ $a = 73 \text{ cm.}$ $E = 2,15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2.$ $A = 54,23 \text{ cm}^2.$

Grandeurs auxiliaires

$$s = 1 + \frac{a}{2EA} H -$$

$$- \sqrt{\frac{a}{EA} H + \left(\frac{a}{2EA}\right)^2 H^2} =$$

$$= 0,91530$$

$$s = 0,91530$$

$$s^2 = 0,83775$$

$$s^3 = 0,76680$$

$$s^4 = 0,70185$$

$$s^5 = 0,64240$$

$$s^6 = 0,58798$$

$$s^7 = 0,53820$$

$$s^8 = 0,49260$$

$$s^9 = 0,45086$$

$$s^{10} = 0,41267$$

$$s^{11} = 0,37771$$

$$s^{12} = 0,34572$$

$$s^{13} = 0,31642$$

$$s^{14} = 0,28963$$

$$s^{15} = 0,26510$$

$$s^{16} = 0,24264$$

$$s^{17} = 0,22193$$

$$s^{18} = 0,20325$$

$$s^{19} = 0,18606$$

$$s^{20} = 0,17030$$

$$s^{21} = 0,15587$$

$$s^{22} = 0,14267$$

$$s^{23} = 0,13059$$

$$s^{44} = 0,02035$$

$$1 + s = 1,91530$$

$$1 - s = 0,08470$$

Rails infiniment long.

$$\Delta = \frac{1}{4 H s} (1-s) (1+s) = 0,003538 \text{ cm/t}$$

$$\Delta_i = \frac{1}{2 H} (1-s) \cdot s^i = 0,03382 \cdot (0,91530)^i$$

$$i=0, 1, 2, \dots, \infty$$

Milieu
de la travée¹⁾

O—O'

Appuis

0 ou 0'

1 " 1'

2 " 2'

3 " 3'

4 " 4'

5 " 5'

6 " 6'

7 " 7'

8 " 8'

9 " 9'

10 " 10'

11 " 11'

12 " 12'

13 " 13'

14 " 14'

15 " 15'

16 " 16'

17 " 17'

18 " 18'

19 " 19'

20 " 20'

21 " 21'

22 " 22'

Abcisses de la ligne
d'influence

$$\Delta = 0,003538$$

$$\Delta_0 = 0,003382$$

$$\Delta_1 = 3096$$

$$\Delta_2 = 2833$$

$$\Delta_3 = 2594$$

$$\Delta_4 = 2374$$

$$\Delta_5 = 2173$$

$$\Delta_6 = 1988$$

$$\Delta_7 = 1821$$

$$\Delta_8 = 1666$$

$$\Delta_9 = 1525$$

$$\Delta_{10} = 1396$$

$$\Delta_{11} = 1278$$

$$\Delta_{12} = 1169$$

$$\Delta_{13} = 1070$$

$$\Delta_{14} = 979$$

$$\Delta_{15} = 898$$

$$\Delta_{16} = 820$$

$$\Delta_{17} = 750$$

$$\Delta_{18} = 687$$

$$\Delta_{19} = 629$$

$$\Delta_{20} = 576$$

$$\Delta_{21} = 527$$

$$\Delta_{22} = 483$$

Rail sur 22 appuis équidistants.

$$\Phi = \frac{1}{2 H} \cdot \frac{1-s}{1+s} \cdot \frac{1+s+s^2+s^3}{1-s^{22}} = 0,0039456 \text{ cm/t}$$

$$\frac{a}{4EA} = 0,00015653 \text{ cm/t}$$

$$\Delta = \Phi (1+s^{21}) + \frac{a}{4EA}$$

$$\Delta_i = \Phi (s^i + s^{21-i}) \quad i=1, 2, 3, \dots, 10$$

Milieu
de la travée

O—O'

Appuis

0 ou 0'

1 " 1'

2 " 2'

3 " 3'

4 " 4'

5 " 5'

6 " 6'

7 " 7'

8 " 8'

9 " 9'

10 " 10'

Abcisses de la ligne
d'influence

$$\Delta = 0,004717$$

$$\Delta_0 = 0,004561$$

$$\Delta_1 = 4283$$

$$\Delta_2 = 4040$$

$$\Delta_3 = 3827$$

$$\Delta_4 = 3645$$

$$\Delta_5 = 3492$$

$$\Delta_6 = 3366$$

$$\Delta_7 = 3266$$

$$\Delta_8 = 3192$$

$$\Delta_9 = 3143$$

$$\Delta_{10} = 3119$$

¹⁾ Ces valeurs peuvent être admises
avec erreur insignifiante pour un point
quelconque d'un rail infiniment long.

¹⁾ Ces valeurs peuvent être admises avec erreur insignifiante pour un point quelconque d'un rail infiniment long.

Le tableau XLVI contient les résultats du calcul d'après les équations (41).

La ligne d'influence dans le cas présent, de même que dans le cas précédent, est indiquée sur fig. 70. Elle a la propriété de se rapporter exclusivement aux travées médianes du rail.

Les données expérimentales obtenues, ainsi que les calculs exécutés, permettent de définir: ou les déplacements axiaux correspondants aux forces tangentielles au cercle de roulement des roues motrices des locomotives, pendant le mouvement desquelles l'observation a été faite, dans le but de les comparer aux déplacements observés, ou bien les forces tangentielles correspondantes aux déplacements observés pour les comparer aux forces tangentielles produites par ces locomotives. Pour mettre au clair le phénomène étudié des déplacements élastiques axiaux du rail on a appliqué les deux méthodes de comparaison que nous venons d'indiquer, en se fondant sur le travail des locomotives types Ok 22 et Pt 31.

6. Diagramme des déplacements d'après les forces tangentielles.

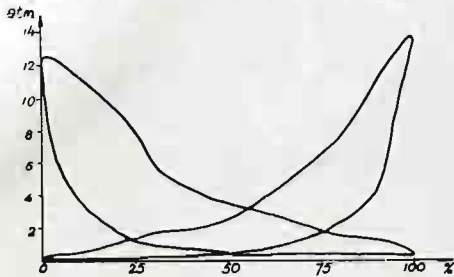
La locomotive Pt 31 conduisait pendant les observations un train de 300 t de poids à une vitesse uniforme et à une admission d'à peu près 30%. L'effort de traction ainsi que sa variation pendant un tour des roues motrices ont pu être calculées avec une précision suffisante d'après les diagrammes de l'indicateur correspondants à l'admission donnée.

Locomotive Pt 31 (Mikado 1-4-1)

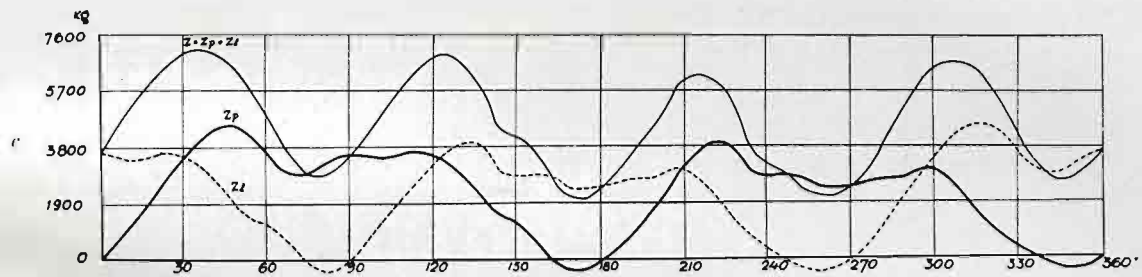
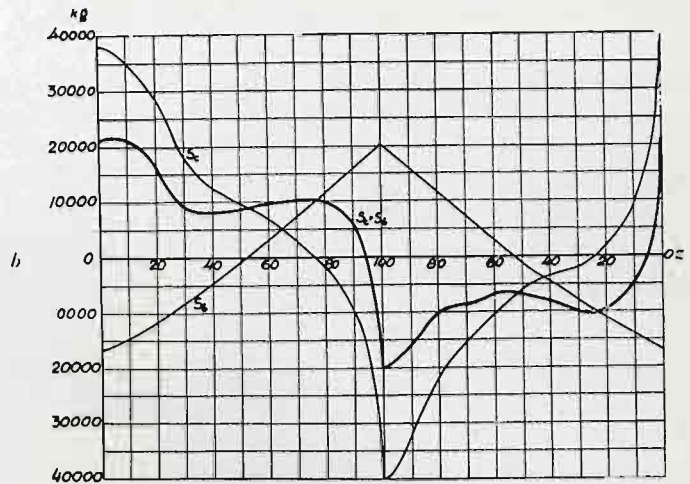
Admission $\varepsilon = 0,27$

Vitesse $V = 100$ km/h

a



b

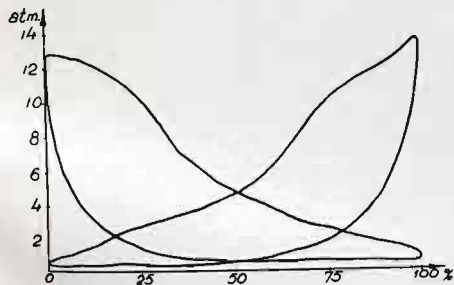


Locomotive Pt 31

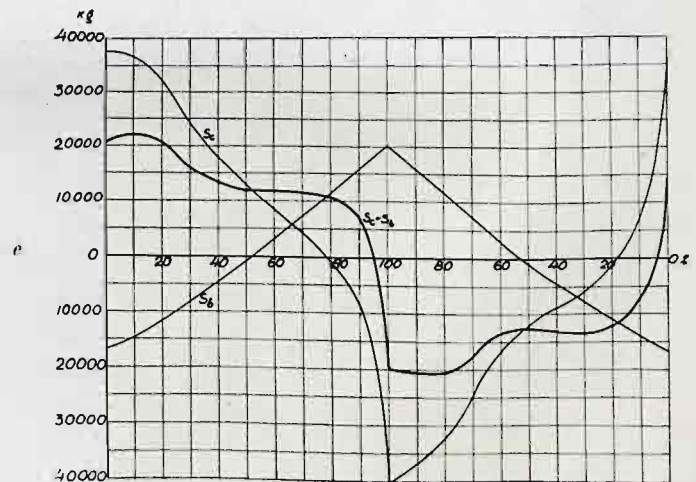
Admission $\varepsilon = 0,38$

Vitesse $V = 100$ km/h

d



e



a, d — diagrammes d'indicateur;
c, f — diagrammes de l'effort de traction du cercle de roulement
des roues motrices;
b, e — diagrammes des efforts de traction à la crosse du piston.

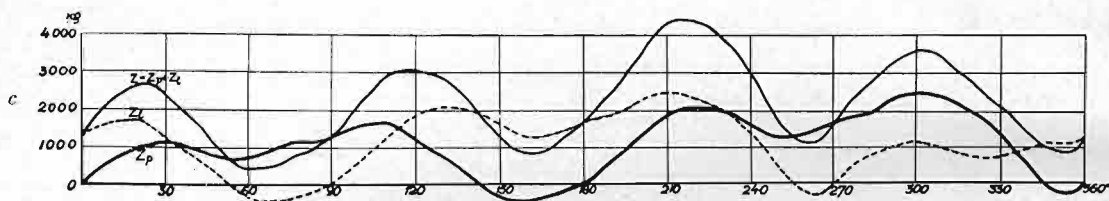
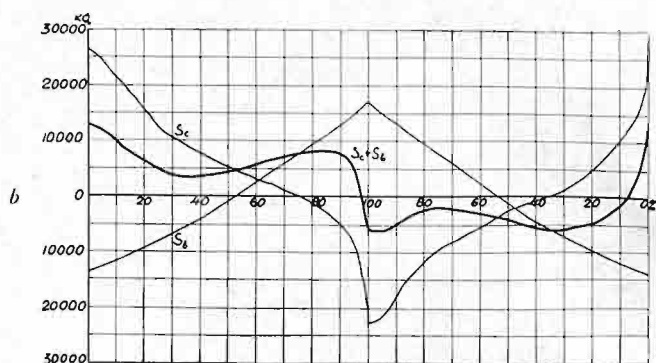
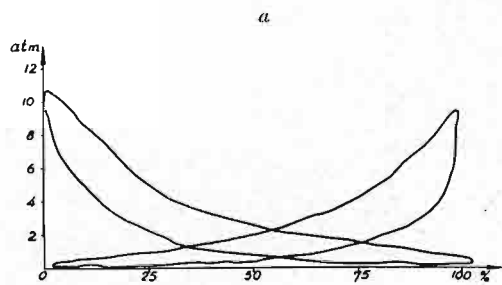
S_c — pression de la vapeur;
 S_b — inertie des masses non-équilibrées;
 Z_p, Z_l — effort de traction des cylindres de droite et de gauche;
 Z — effort de traction.

Fig. 71. Diagrammes de l'effort de traction d'après les diagrammes de l'indicateur.

Locomotive Ok 22 (Ten wheel 2-3-0)

Admission $\varepsilon = 0,2$

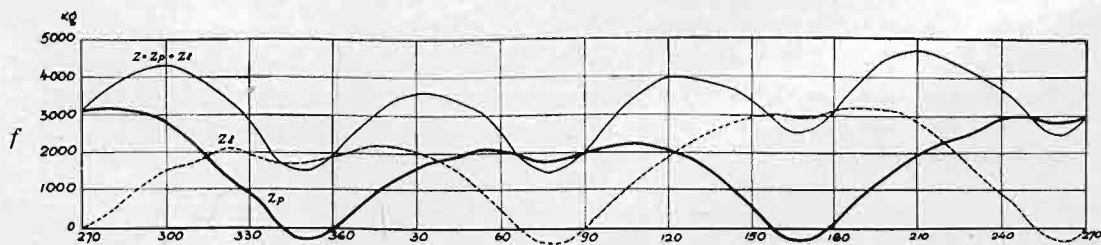
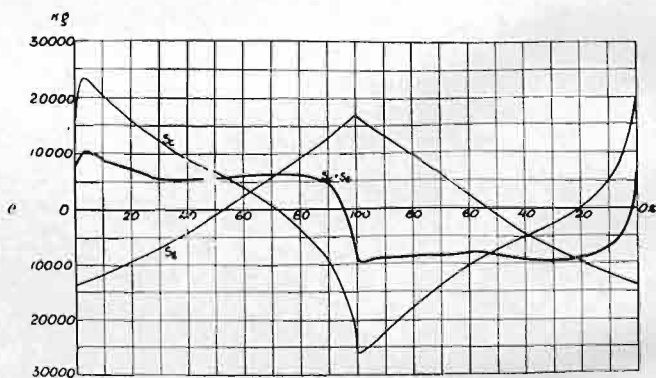
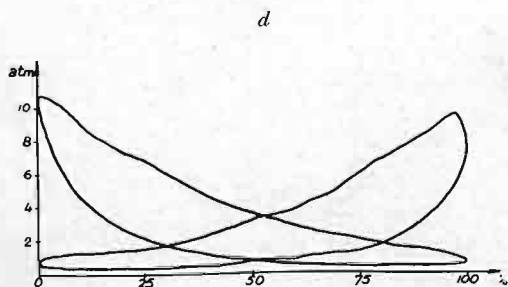
Vitesse $V = 100$ km/h



Locomotive Ok 22 (Ten wheel 2-3-0)

Admission $\varepsilon = 0,3$

Vitesse $V = 100$ km/h



a, d — diagrammes d'indicateur;

c, f — diagrammes de l'effort de traction du cercle de roulement des roues motrices;

b, e — diagrammes des efforts de traction à la crosse du piston.

S_c — pression de la vapeur;

S_b — inertie des masses non-équilibrées;

Z_p, Z_l — effort de traction des cylindres de droite et de gauche;

Z — effort de traction.

Fig. 72. Diagrammes de l'effort de traction d'après les diagrammes de l'indicateur.

Ces calculs ¹⁾ et leurs résultats en forme de diagrammes se rapportant aux locomotives Pt 31 et Ok 22 sont représentés sur fig. 71 et 72.

En profitant de ces données et en appliquant la ligne d'influence des déplacements axiaux du rail (fig. 73 a) considéré comme poutre infiniment longue dans les deux directions, on a construit le diagramme théorique des déplacements axiaux (fig. 73 d) sous la locomotive Pt 31 marchant à la vitesse de $V = 100$ km/h avec admission $\varepsilon = 27\%$ ²⁾. On a tenu compte de la variation de l'effort tangents au cercle de roulement des roues motrices exclusivement sous l'action du cylindre situé d'un seul côté de la locomotive, supposant que l'effort de l'autre cylindre n'est transmis que partiellement par l'intermédiaire de l'essieu travaillant à torsion.

7. Diagramme des forces tangentielles et l'effort de traction moyen d'après les déplacements.

Z_p étant l'effort de traction d'un seul cylindre, égal à la somme des forces tangentes au cercle de roulement de n roues motrices d'un côté de la locomotive, $\Sigma \Delta_x$ la somme des déplacements par unité de charge que produisent ces forces au point x du rail

¹⁾ La pression de vapeur pour chaque position du piston fut calculée d'après le diagramme de l'indicateur et l'équation:

$$S_c = p_0' \frac{\pi}{4} (d^2 - d_2^2) - p_0'' \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2)$$

p_0', p_0'' pression de la vapeur du côté de la crosse du piston et du côté opposé,
 d diamètre du piston,
 d_2, d_1 diamètres de la tige du piston.

On a ajouté à la pression de la vapeur la résultante horizontale de l'inertie des masses non-équilibrées en mouvement rectiligne alternatif d'après l'équation

$$S_b = \frac{Q}{g} r \omega^2 \left(\cos \alpha + \frac{r}{l} \cos 2 \alpha \right)$$

Q étant le poids des masses non-équilibrées en mouvement rectiligne alternatif,
 $g = 9,81$ m/sec²,
 ω vitesse angulaire de la roue motrice,
 α angle de la manivelle,
 r bras de la manivelle,
 l longueur de la bielle motrice.

On a réduit la somme des forces $S_c + S_b$ au cercle de roulement de la roue motrice en la multipliant par

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \cdot \frac{r}{R}$$

par conséquent, l'effort moteur d'un seul cylindre Z_p mesuré au cercle de roulement de la roue motrice:

$$Z_p = \frac{(S_c + S_b) \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \cdot \frac{r}{R}$$

β angle de la bielle motrice,
 R rayon de la roue motrice.

Le diagramme de variation de l'effort de traction de la locomotive entière fut trouvé en déplaçant les diagrammes de l'effort de traction des deux cylindres d'un quart du tour de roue l'un de l'autre. La période de variation de l'effort de traction en unités de voie parcourue, égale à la circonférence de la roue motrice, est: dans la locomotive Pt 31 de 5810 mm et dans la locomotive Ok 22 de 5500 mm.

²⁾ On a admis d'abord que l'effort de traction Z_p d'un cylindre de la locomotive, réparti également sur toutes les roues motrices d'un côté de la locomotive, est invariable et égal au maximum trouvé d'après le diagramme fig. 73 c.

Ayant construit ensuite à l'aide de la ligne d'influence le diagramme des déplacements axiaux du milieu d'une des travées du rail produits par un système de ces efforts se mouvant le long du rail (fig. 73 a et 73 b), on a varié l'effort de traction Z_p suivant la fig. 73 c. Dans ce but on a tracé à une échelle convenable, sous le diagramme b , un diagramme de variation c et, en multipliant graduellement les ordonnées du diagramme b par le rapport des ordonnées correspondantes du diagramme c à l'ordonnée maximum, on a obtenu le diagramme des déplacements axiaux d'un point du rail, répondant aux conditions posées.

- a. Diagrammes des déplacements axiaux produits par chaque roue motrice sous l'action de l'effort de traction maximum
 $Z = 4,50 t$
- b. Diagramme sommaire d'après les quatre z diagrammes précédents.
- c. Diagramme de l'effort de traction d'après l'inducteur
 $s = 27\%$ $V = 100 \text{ km/h}$
- d. Diagramme des déplacements axiaux d'après le diagramme b , tenant compte des oscillations de l'effort de traction selon le diagramme $72/f$
$$\frac{z}{x} = \frac{u_d}{u_b} \frac{Z}{Z_{\max}}$$

$$\frac{1}{x} \frac{u}{x} = p_n$$

a. Diagramme des déplacements
axiaux d'après l'épreuve n° 808
du 26.VII.1934; locomotive Pt31,
 $V = 65$ km/h.

b. Diagramme des déplacements
axiaux d'après l'épreuve n° 810
du 26.VII.1934; locomotive Pt31
 $V = 34$ km/h

et admettant que l'effort Z_p est également réparti sur toutes les n roues motrices, on trouve le déplacement longitudinal au point x :

$$u_x = \frac{Z_p}{n} \Sigma \Delta_x$$

$$Z_p = \frac{n u_x}{\Sigma \Delta_x} \quad (42)$$

Le coefficient $\Sigma \Delta_x$ est facile à trouver pour chaque position de la locomotive en sommant les ordonnées de la ligne d'influence, déplacées une après l'autre à une distance égale à l'écartement des roues motrices. Par suite, connaissant $\Sigma \Delta_x$ et ayant u_x d'après l'observation, on peut trouver d'après l'équation (42) l'effort de traction Z_p correspondant à chaque position de la locomotive.

Les observations d'après lesquelles furent obtenus les diagrammes des déplacements longitudinaux u_x , ont été faites pendant le mouvement des trains d'essai conduits par les locomotives des types Ok 22 et Pt 31. On a observé des points sur l'axe neutre du rail et d'après leurs déplacements longitudinaux, mesurés avec grande précision sur pellicule sensible au moyen d'un comparateur, on a tracé des diagrammes de ces mouvements.

Deux diagrammes des déplacements longitudinaux sous la marche d'une locomotive type Pt 31 sont représentés sur fig. 74. D'après un de ces diagrammes (n° 808 fig. 75 a) obtenu à une vitesse de marche de 65 km/h, on a tracé sur fig. 75 c un diagramme correspondant de la somme Q des forces tangentes au cercle de roulement des roues motrices c'est-à-dire un diagramme de l'effort de traction Z_p ¹⁾.

Pour plus de précision, on a évalué d'après le diagramme 75 c l'effort moyen de Q sur une longueur de trois périodes $\lambda = \pi d$. Ces périodes répondent exactement aux périodes de variation de l'effort Q qui se font remarquer sur le diagramme fig. 75.

La valeur de Q_s qu'on a obtenu d'après ce mesurage est:

$$Q_s = \frac{\int_0^{3\lambda} Q d\lambda}{3\lambda} = 3,65 t.$$

L'effort de traction de la locomotive entière au moment de son passage par le tronçon d'essai, calculé d'après les déplacements longitudinaux du rail, aura la valeur moyenne:

$$Z = 2 Q_s = 7,3 t.$$

¹⁾ Pour tracer le diagramme de la somme des forces tangentielles au cercle de roulement des roues motrices, on s'est servi de l'équation (42) transformée comme suit:

$$Z_p = \frac{u_x}{\frac{\Sigma \Delta_x}{n \Delta}} = \frac{u_x}{\Delta \varphi} \quad (42 a)$$

Le diagramme du coefficient $\varphi = \frac{\Sigma \Delta_x}{n \Delta}$ (fig. 75 b) fut obtenu d'après le diagramme fig. 73 b admettant comme unité l'ordonnée $4 u = 4 \times 0,04323 = 0,17292$ mm $\left(\frac{\Sigma \Delta_x}{n \Delta} = \frac{u_x}{n u} = \frac{u_x}{0,17292} \right)$.

Le diagramme du coefficient φ , de même que le diagramme 73 b, furent tracés en supposant le rail comme poutre infiniment longue en deux directions. Tenant compte que cette supposition n'est pas strictement exacte et admettant une certaine influence des joints, on a posé dans l'équation (42 a) $\Delta = 0,004$ cm par tonne comme valeur approximativement moyenne des deux: $\Delta = 0,00354$ cm par tonne en cas de poutre infiniment longue et $\Delta = 0,00472$ cm par tonne en cas de rails entièrement desserrés aux joints, dans les deux cas $H = 12,52$ t. Le diagramme de φ fut mis en accord avec le diagramme des déplacements longitudinaux b d'après le temps du passage des roues, indiqué sur la pellicule, après quoi on a déterminé la force $Q = Z_p$ en substituant les ordonnées des deux diagrammes dans l'équation

$$Q = \frac{u_x \text{ mm}}{0,04 \text{ mm/t}}$$

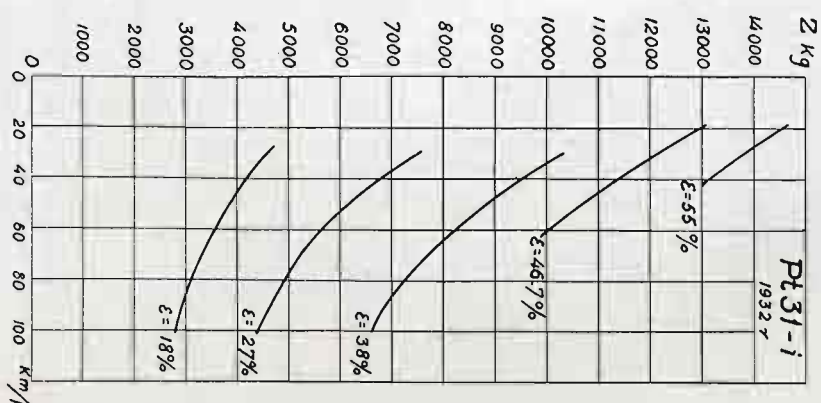


Fig. 76. Effort de traction moyen en fonction de la vitesse et de l'admission.

Le diagramme de l'effort de traction de la locomotive Pt31 en fonction de la vitesse et de l'admission (fig. 76), obtenu d'après des observations spéciales sur le rendement des locomotives, montre que l'effort de traction de 7,3 t de cette machine, marchant à une vitesse de 65 km/h, correspond à une admission $\varepsilon = 36\%$. Lors des parcours d'essai de la locomotive Pt31 cette admission fut réellement appliquée.

8. Comparaison des résultats.

En comparant les diagrammes des déplacements longitudinaux du rail ainsi que les diagrammes de l'effort qui les a occasionnés, aux diagrammes de l'effort de traction de la locomotive et de son effort sur le rail, comme poutre sur appuis élastiques chargée dans la direction de son axe, on remarque dans les deux groupes de diagrammes, nonobstant certaines différences dans les détails, une parfaite similitude de variation et de périodicité. Le même ordre de grandeur des déplacements longitudinaux d'après la théorie et d'après l'observation ainsi que la conformité de l'effort de traction calculé d'après les déplacements à l'effort que développait la locomotive au cours des observations, attestent la justesse des déductions théoriques qu'on a admises et des formules établies sur leur base, ce qui permet de s'en servir à l'étude d'autres phénomènes ayant rapport aux mouvements longitudinaux des rails.

9. Tensions que produisent les forces axiales.

Les équations suivantes expriment les tensions d'une poutre sur appuis élastiques équidistants que produisent les forces axiales:

dans la travée i , $i-1$:
$$N_i = \frac{-U_i + U_{i-1}}{m A}$$

dans la travée i' , $i'-1$:
$$N_{i'} = \frac{+U_{i'} - U_{i'-1}}{m A}$$

dans la travée O , O'

section O , q :
$$N_0 = \frac{-U_1 + U_0}{m A} + \frac{U_0}{A}$$

section q , O' :
$$N_0' = \frac{-U_0' + U_1'}{m A} - \frac{U_0'}{A}$$

Pour une poutre en deux directions infiniment longue ces équations prennent la forme suivante:

travée $i-1$, i :
$$N_i = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{\alpha + \beta s}{1 + s} \cdot s^i$$

travée $i'-1$, i' :
$$N_{i'} = +\frac{Q}{A} \cdot \frac{\alpha s + \beta}{1 + s} \cdot s^i$$

section O , q de la travée O , O' :
$$N_0 = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{\alpha + \beta s}{1 + s}$$

section q , O' de la travée O , O' :
$$N_0' = +\frac{Q}{A} \cdot \frac{\alpha s + \beta}{1 + s} = N_0 + \frac{Q}{A}$$

$$\text{Si } \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$N_i = - \frac{Q}{2A} \cdot s^i \quad i = 0 \dots \infty \quad (45)$$

$$N'_i = + \frac{Q}{2A} \cdot s^i$$

Les équations (45) permettent de calculer les ordonnées de la ligne d'influence des tensions de même que celles de la ligne d'influence des déplacements. Les valeurs de ces ordonnées sont indiquées dans le tableau XLVII. La ligne d'influence des tensions est représentée sur fig. 77.

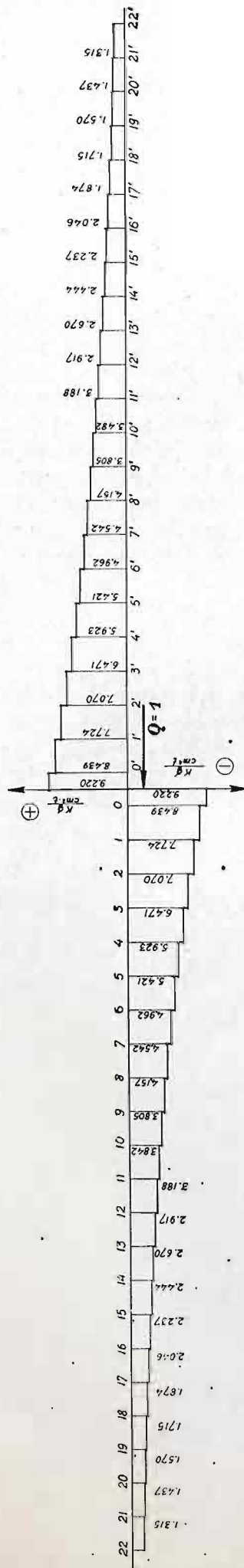
Comme on le voit d'après le diagramme, les tensions du rail sous l'action des forces tangentes au cercle de roulement de la roue ne dépassent pas 10 kg par cm² et par tonne de la force axiale et, étant petites, peuvent être négligées dans la majorité des cas.

T A B L E A U XLVII.

Ligne d'influence des tensions au milieu d'une des travées d'un rail infiniment long¹⁾.

Travée	Abscisses de la ligne d'influence kg/cm ²
Tronçon q, 0' de la travée 0, 0'	
0', 1'	N _{0'} ' = 9,220
1', 2'	N _{1'} ' = 8,439
2', 3'	N _{2'} ' = 7,724
3', 4'	N _{3'} ' = 7,070
4', 5'	N _{4'} ' = 6,471
5', 6'	N _{5'} ' = 5,923
6', 7'	N _{6'} ' = 5,421
7', 8'	N _{7'} ' = 4,962
8', 9'	N _{8'} ' = 4,542
9', 10'	N _{9'} ' = 4,157
10', 11'	N _{10'} ' = 3,805
11', 12'	N _{11'} ' = 3,482
12', 13'	N _{12'} ' = 3,188
13', 14'	N _{13'} ' = 2,917
14', 15'	N _{14'} ' = 2,670
15', 16'	N _{15'} ' = 2,444
16', 17'	N _{16'} ' = 2,237
17', 18'	N _{17'} ' = 2,046
18', 19'	N _{18'} ' = 1,874
19', 20'	N _{19'} ' = 1,715
20', 21'	N _{20'} ' = 1,570
21', 22'	N _{21'} ' = 1,437
	N _{22'} ' = 1,315

Fig. 77. Ligne d'influence des tensions dans le rail sous l'action de l'effort axial.



¹⁾ Avec erreur insignifiante, ligne d'influence des tensions dans un point arbitraire d'un rail infiniment long.

$$A = 54,23 \text{ cm}^2 \quad \frac{1}{2A} = 0,0092200 \frac{1}{\text{cm}^2} \quad s = 0,91530$$

N_i tension dans la travée $i - 1, i$

N'_i " " " " $i' - 1, i'$

$$N'_i = -N_i + \frac{Q}{2A} s^i \quad \left| \begin{array}{l} - \text{compression} \\ + \text{traction} \end{array} \right.$$

Effort $Q = 1. \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty$

Conclusions.

Les résultats des recherches sur les mouvements longitudinaux des rails permettent de constater ce qui suit:

1. Les forces axiales agissant sur le rail grâce à l'adhérence des roues motrices des locomotives, évoquent une réaction élastique des rails dans la direction de l'axe de la voie ainsi que de leurs appuis; il suit de là que les variations de l'effort de traction produisent des oscillations axiales des rails et de leurs supports.
2. Les oscillations axiales du rail qu'on a observées, ayant une période correspondante à la période des variations de la pression de vapeur dans un des cylindres, semblent indiquer que le cylindre situé de l'autre côté de la locomotive n'a pas une influence marquée sur les oscillations du rail du côté opposé.
3. La valeur du coefficient de l'appui axial des traverses, trouvée d'après les observations $H = 12,5 \text{ t/cm}$, se rapproche de la valeur du coefficient D de l'appui vertical des traverses.
4. Les rails en voie courante présentent une réaction aux forces axiales s'approchant à celle d'une poutre sur nombre infini d'appuis élastiques.
5. Les tensions dans les rails occasionnées par les forces tangentes au cercle de roulement des roues motrices, ne dépassent pas 10 kg par cm^2 et tonne de la force axiale.

Résumé.

Les recherches expérimentales sur les déformations élastiques et le travail de la superstructure des chemins de fer dont nous donnons la description ci-dessus, furent organisées dans le but de comparer l'effet sur la voie de quelques types modernes de locomotives à grande vitesse pour trains lourds de voyageurs. La méthode photographique perfectionnée, appliquée pour enregistrer les déplacements des points choisis en différentes parties de la superstructure, permet de mesurer les déformations élastiques de même que les tensions en ces points avec grande précision, en évitant certains défauts des autres méthodes connues.

En observant les effets que produit la charge sur les appuis du rail, on a mesuré le coefficient de l'assise des traverses d'après l'enfoncement élastique de l'ensemble des traverses en voie courante ainsi que des traverses chargées isolément. On a constaté une grande différence dans la valeur des coefficients de l'assise établis d'après ces deux méthodes et on a contrôlé ce résultat en appliquant au calcul la théorie de l'élasticité.

L'observation de l'abaissement élastique du rail sous charge en mouvement a fait voir les variations de la pression des roues des locomotives et des tenders à des vitesses allant jusqu'à 110 km/h et apprécier l'influence qu'exercent sur cette pression les particularités de construction de ces machines ainsi que la vitesse de leur mouvement. Une analyse des variations périodiques de la pression des roues ainsi que des oscillations libres des roues, des ressorts et des rails servit à expliquer les phénomènes observés.

L'observation simultanée, à différentes vitesses, des tensions et des abaisséments du rail a permis d'apprécier, en plus des efforts verticaux sous charge au repos, la valeur d'autres efforts sollicitant le rail et les limites de leurs variations dont on doit tenir compte dans les calculs de la superstructure. L'ensemble des recherches sur les variations de la pression verticale des roues et des tensions en différents points de la section du rail conduisit à formuler quelques indications importantes sur la construction des locomotives mises à l'étude et sur l'entretien de leurs bandages, visant à réduire la fatigue des rails.

L'application de différentes méthodes de calcul de la superstructure au cas observé de chargement de la voie permet de comparer les résultats du calcul et de juger du degré de précision qu'offraient ces méthodes.

En observant les abaisséments du rail et de ses appuis sous charge mobile on a constaté dans la direction de l'axe de la voie leurs déplacements élastiques dont les périodes de variation correspondaient aux variations des forces tangentes au cercle de roulement des roues motrices des locomotives. Croyant qu'il serait utile d'étudier ce phénomène en détail, on a comparé les résultats de l'observation des déplacements en question aux déplacements d'après la théorie d'une poutre sur appuis élastiques chargée dans la direction de son axe, et on a déterminé le coefficient de l'appui axial du rail.

Les conclusions détaillées résultant de chaque groupe d'observations suivent à la fin des chapitres qui les traitent.

Les recherches que nous venons de décrire ne se rapportent qu'à quelques phénomènes essentiels pour l'étude de la superstructure sollicitée par des trains en marche dans les limites d'un rail continu en ligne droite horizontale. On a jugé qu'il serait important de mettre en clarté ces phénomènes, observés dans les conditions modernes d'exploitation, pour suivre les recherches sur un terrain aussi vaste et aussi difficile.



Ce mémoire a été l'objet d'un compte rendu aux séances de l'Académie des Sciences Techniques à Varsovie, section des Ponts et Chaussées, le 12, 19 et 24 juin 1936.

Errata

Page 23, Tableau V, Septembre 1934:

colonne „Tirefond“, trois dernières lignes,

lire: 9,896, $D_w' = 9,896$, $C = 3,17$

dernière ligne au dessous du Tableau V,

lire: $C = \frac{D'}{aw}$; $aw = 0,89 \cdot 3510 = 3124$.