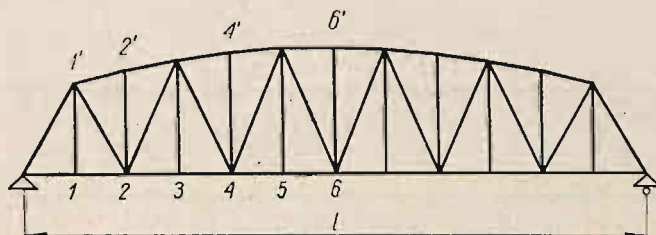


Smukłość krzyżulców w połowie ich długości wyboeczeniowej w płaszczyźnie dźwigara i smukłość w kierunku prostopadłym przy całkowitej długości wyboeczeniowej danych krzyżulców są często jednakowe, chociaż czasem w drugim przypadku smukłość ich jest nieco mniejsza.



Rys. 129

Pas górny ściskany nad słupkami wysokimi, które nie są przecięte krzyżulcami, lepiej jest łamać w taki sposób, aby kąt wewnętrzny pomiędzy pasami był mniejszy od  $180^\circ$  (rys. 129). Wtedy słupki 22', 44', 66' są rozciągane i nie wymagają tej sztywności w płaszczyźnie dźwigara, jaką musiałyby mieć, gdyby były ściskane choćby nawet niewielką siłą.

### Rozdział III

## WŁASNOŚCI RÓŻNYCH UKŁADÓW BELEK KRATOWYCH

### 1. Najkorzystniejsza wysokość dźwigarów kratowych

Zastanówmy się obecnie, jaka powinna być wysokość np. dźwigara o kracie prostokątnej i pasach równoległych przy danej ilości przedziałów  $m$ , ich długości  $a$ , a zatem przy rozpiętości teoretycznej kratownicy  $l = m \cdot a$  i przy dopuszczalnym naprężeniu stali  $k \text{ T/m}^2$ .

Oznaczmy siły w dowolnym przedziale  $cd$  w pasie górnym, w pasie dolnym, w krzyżulcu i słupku odpowiednio przez  $S_g, S_d, S_k$  i  $S_s$ , współczynniki zaś konstrukcyjne dla prętów pasów i kraty wewnętrznej — odpowiednio przez  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  i  $\varphi_4$ , kąt pochylenia krzyżulca do pasa przez  $\alpha$ , obciążenie stałe przez  $p \text{ T/mb}$ , obciążenie ruchome przez  $q \text{ T/mb}$ , obciążenie stałe i ruchome łącznie przez  $p + q = g \text{ T/mb}$ , oraz wysokość dźwigara na całej jego długości przez  $h$ .

Objętości poszczególnych prętów kraty i najkorzystniejsza wysokość dźwigarów będą następujące.

#### 1. Objętość prętów pasa górnego

Dla siły w przecie pasa górnego w przedziale  $cd$  otrzymamy pole linii wpływu (rys. 130):

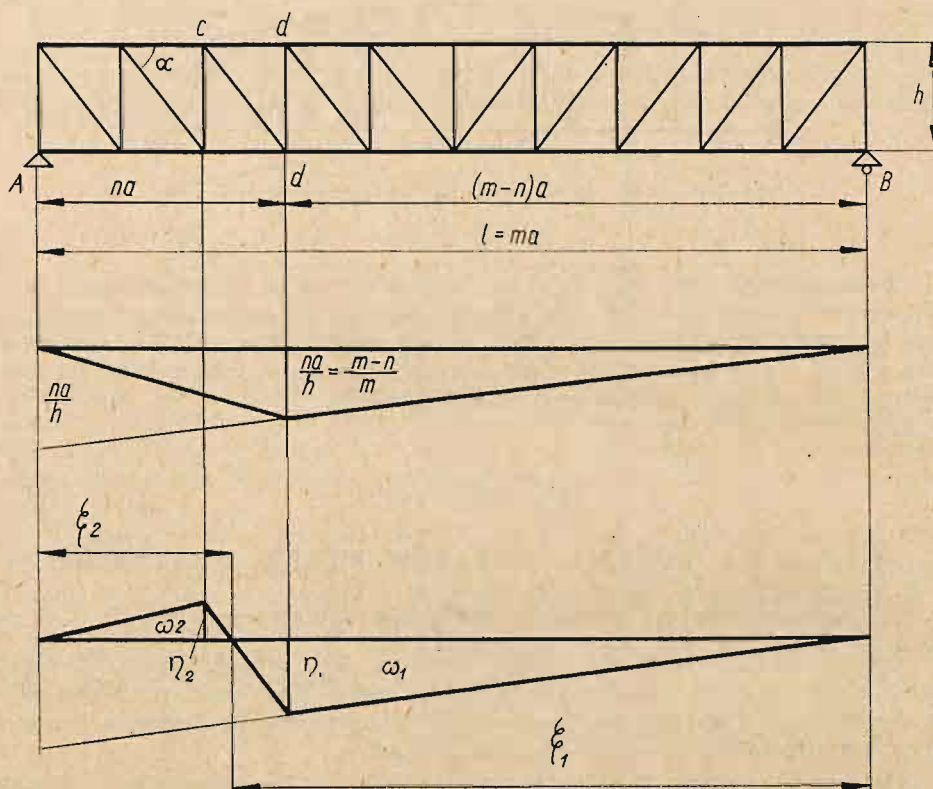
$$W = \frac{(m - n) n a^2}{2 h}$$

Objętość rzeczywista tego pręta wynosi:

$$V_g = \frac{(m - n) n a^3}{2 h k} g \varphi_1.$$

Przy parzystej liczbie przedziałów objętość wszystkich prętów pasa górnego będzie:

$$V_g = 2 \sum_{n=1}^{n=m/2} \frac{(m-n) n a^3 g \varphi_1}{2 h k} = \frac{a^3 g \varphi_1}{h k} \sum_{n=1}^{n=m/2} (m-n) n;$$



Rys. 130

ponieważ

$$\sum_{n=1}^{n=m/2} (m-n) n = m (1 + 2 + 3 + \dots + \frac{m}{2}) - \left[ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{m^2 (m+2)}{8} - \frac{m(m+2)(m-1)}{24} = \frac{m(m+2)(2m-1)}{24},$$

to

$$V_g = \frac{m(m+2)(2m-1) a^3 g \varphi_1}{24 k} \cdot \frac{1}{h} = \frac{A}{h}.$$

## 2. Objętość prętów pasa dolnego

W taki sam sposób możemy obliczyć objętość pasa dolnego, tylko sumę należy przyjąć od  $n = 1$  do  $n = \frac{m}{2} - 1$ .

Wówczas otrzymamy:

$$V_d = \frac{m(m-2)(2m+1)a^3 g q_2}{24 k} \cdot \frac{1}{h} = \frac{B}{h}.$$

### 3. Objętość krzyżulec

Pola poszczególnych odcinków linii wpływowej (rys. 130) dla krzyżulca cd będą:

$$\omega_1 = \frac{\xi_1 \eta_1}{2} \quad \text{i} \quad \omega_2 = \frac{\xi_2 \eta_2}{2},$$

gdzie

$$\eta_1 = \frac{m-n}{m \sin \alpha} \quad \text{i} \quad \eta_2 = \frac{n-1}{m \sin \alpha}.$$

Z własności linii wpływowej wynika, że

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{n-1}{m-n},$$

a więc

$$\omega_1 = \frac{(m-n)^2 a}{2(m-1) \sin \alpha} \quad \text{i} \quad \omega_2 = \frac{(n-1)^2 a}{2(m-1) \sin \alpha};$$

różnica tych pól wyniesie:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{a(m-2n+1)}{2 \sin \alpha}.$$

Siła w krzyżulec

$$S_k = \frac{a(m-2n+1)p}{2 \sin \alpha} + \frac{a(m-n)^2 \cdot q}{2(m-1) \sin \alpha},$$

jego objętość

$$V_k = \left[ a(m-2n+1)p + \frac{a(m-n)^2 q}{m-1} \right] \cdot \frac{a^2 + h^2}{2 h k} q_3.$$

Objętość wszystkich krzyżulec dźwigara:

$$V_k = \sum_{n=1}^{n=m/2} V_k;$$

$$V_k = \frac{(a^2 + h^2) a p q_3}{h k} \cdot \sum_{n=1}^{n=m/2} (m-2n+1) + \frac{(a^2 + h^2) a q q_3}{h k (m-1)} \cdot \sum_{n=1}^{n=m/2} (m-n)^2;$$

ponieważ

$$\sum_{n=1}^{n=m/2} (m-2n+1) = \frac{m^2}{4},$$

to

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n=m/2} (m-n)^2 &= \sum_{n=1}^{n=m/2} (m^2 - 2mn + n^2) = \frac{m^3}{2} - 2m(1+2+\dots+ \\ &+ \frac{m}{2}) + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} m(m-1)(7m-2), \end{aligned}$$



to

$$V_k = \frac{(a^2 + h^2) a p q_3}{h k} \cdot \frac{m^2}{4} + \frac{(a^2 + h^2) a q q_3 m (7m - 2)}{24 h k} =$$

$$= \frac{a^2 + h^2}{h} \cdot \frac{m a}{4 k} \cdot \left[ \frac{6mp + (7m - 2)q}{6} \right] q_3 = C \frac{a^2 + h^2}{h}.$$

#### 4. Objętość słupków

Dla słupków otrzymamy to samo wyrażenie co i dla krzyżuleców, tylko zamiast  $1/\sin \alpha$  należy wstawić 1, współczynnik konstrukcyjny  $q_4$  oraz długość słupków  $h$  równą wysokości dźwigara.

Zatem objętość słupków określa się ze wzoru:

$$V_s = \frac{m a}{4 k} \left[ \frac{6mp + (7m - 2)q}{6} \right] q_4 h = Dh.$$

#### 5. Objętość prętów całego dźwigara

Objętość wszystkich prętów dźwigara wyniesie:

$$V_e = \frac{A}{h} + \frac{B}{h} + C \frac{a^2 + h^2}{h} + Dh. \quad [1]$$

#### 6. Najkorzystniejsza wysokość dźwigara

Najmniejszą objętość wszystkich prętów dźwigara otrzymamy wówczas, gdy

$$\frac{d V_e}{d h} = -\frac{A}{h^2} - \frac{B}{h^2} - \frac{Ca^2}{h^2} + C + D = 0,$$

skąd

$$h = \sqrt{\frac{A + B + Ca}{C + D}}.$$

Po wstawieniu do tego wzoru zamiast  $A, B, C, D$  ich wielkości i po odpowiednich przeróbkach otrzymamy wzór:

$$h = \frac{l}{m} \sqrt{\frac{g[(m+2)(2m-1)q_1 + (m-2)(2m+1)q_2] + [6mp + (7m-2)q]q_3}{[6mp + (7m-2)q](q_3 + q_4)}}. \quad [2]$$

#### 7. Najkorzystniejszy stosunek wysokości dźwigara do jego rozpiętości

Zakładając, że  $\frac{p}{q} = \alpha$ , a  $g = p + q = (1 + \alpha)q$ ,

otrzymamy wzór:

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{(1+\alpha)[(m+2)(2m-1)q_1 + (m-2)(2m+1)q_2] + (6m\alpha + 7m-2)q_3}{(6m\alpha + 7m-2)(q_3 + q_4)}}. \quad [3]$$

Jak wynika z tego wzoru, stosunek najkorzystniejszej wysokości dźwigara do jego rozpiętości zależy od współczynników konstrukcyjnych prętów dźwigara, od stosunku obciążenia stałego do obciążenia ruchomego oraz od ilości przedziałów danego dźwigara: im większa jest liczba przedziałów, tj. im gęstsza jest krata, tym mniejsza powinna być wysokość dźwigara, i odwrotnie.

## 2. Obliczanie teoretycznego ciężaru dźwigarów kratowych

Wzór (1) może służyć do obliczania teoretycznego ciężaru dźwigarów. Całkowity ciężar własny przęsła mostu  $p$  składa się z trzech elementów: z ciężaru części przejazdowej  $F$  T/mb, z ciężaru tężników  $p_1$  T/mb i z ciężaru dźwigarów  $p_2$  T/mb.

Zatem całkowity ciężar własny 1 mb przęsła mostu można obliczyć na podstawie wzoru:

$$p = (F + p_1 + p_2) \text{ T/mb.}$$

Ciężar tężników możemy wyrazić jako pewną część ciężaru samych dźwigarów, tj.  $p_1 = \alpha p_2$ .

Zwykle współczynnik  $\alpha$  mieści się w granicach  $0,09 \div 0,12$ , czyli średnio 0,10.

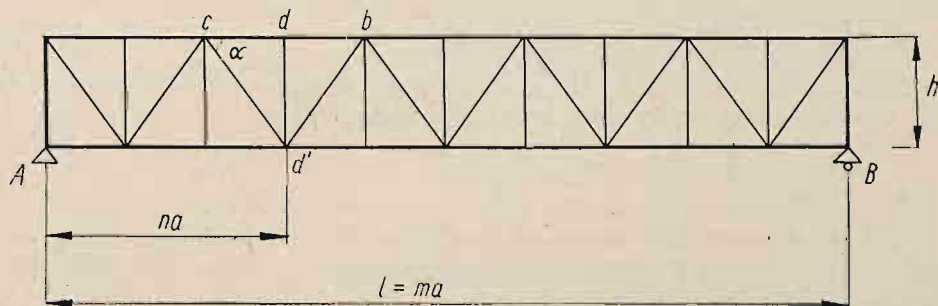
Jeżeli ciężar właściwy materiału, z którego wykonujemy dźwigary, oznaczmy przez  $\gamma$ , to

$$p_2 l = \gamma V_c = \gamma \left( \frac{A}{h} + \frac{B}{h} + C \frac{a^2 + h^2}{h} + D h \right):$$

wprowadzając do tego wzoru zamiast  $A, B, C, D$  ich wielkości już obliczone, zamiast  $p$  jego składowe części  $F + p_2 (1 + \alpha) = F + 1,1 p_2$  oraz zamiast  $q_1, q_2, q_3, q_4$  średni współczynnik konstrukcyjny dla całego dźwigara  $q$ , to po rozwiązaniu liniowego równania dla  $p_2$  otrzymamy następujące wyrażenie:

$$p_2 = \frac{2 F [a^2 (2 m^2 + 3 m - 2) + 6 m h^2] + q [a^2 (4 m^2 + 7 m - 6) + 2 h^2 (7 m - 2)]}{\frac{24 h k}{q \gamma} - 2,2 [a^2 (2 m^2 + 3 m - 2) + 6 m h^2]}.$$

Wzór ten uwzględnia nie tylko wszystkie wielkości, które mają wpływ na ciężar dźwigarów, jak ciężar części przejazdowej, ciężar tężników, rozpiętość dźwigara, dopuszczalne naprężenie, ciężar właściwy materiału dźwigara-



Rys. 131

rów, współczynnik konstrukcyjny dźwigara, wysokość dźwigara — lecz również i liczbę przedziałów kratownic. Zachowując te same oznaczenia co przy rozpatrywaniu dźwigara z kratą prostokątną i postępując analogicznie otrzymamy dla dźwigara z kratą krzyżulcową, z dodatkowymi słupkami oraz wieszakami i o pasach równoległych (rys. 131) następujący wzór:

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2 [(m^2 - 4) q_1 + (m^2 + 2) q_2 q + [6 m p + (7 m - 2) q] q_3]}{[6 m p + (7 m - 2) q] q_3 + [F_s \left(1 - \frac{2}{m}\right) + F_w] \frac{12 k}{a}}}. \quad [4]$$

we wzorze tym  $F_s$  i  $F_w$  oznaczają przekroje słupków i wieszaków, które zawsze możemy obliczyć z góry.

Przekroje słupków przy jeździe górą i przekroje wieszaków przy jeździe dołem będą zależeć przeważnie od największych reakcji belek poprzecznych, przekroje zaś słupków przy jeździe dołem i wieszaków przy jeździe górą określamy na podstawie wymagań konstrukcyjnych.

Ciężar dźwigarów o układzie podanym na rys. 131 obliczamy w podobny sposób jak ciężar dźwigarów o kracie prostokątnej. Ciężar dźwigarów tego typu wynosi:

$$p = \frac{2F[(2m^2 + 3m - 4)a + 3mh^2] + [(4m^2 + 7m - 10)a^2]q + \frac{12hk}{a\varphi} \left[ F_s \left( 1 - \frac{2}{m} \right) + F_w \right]}{\frac{24hk}{\gamma\varphi} - 2,2[2a^2(2m^2 + 3m - 4) + 3mh^2]}. \quad [5]$$

W podanych wzorach można przyjmować następujące współczynniki konstrukcyjne dźwigarów kratowych: dla pasa ściskanego  $\varphi_1 = 1,5 \div 1,6$ , dla pasa rozciąganego  $\varphi_2 = 1,25 \div 1,35$ , dla krzyżulców  $\varphi_3 = 1,3 \div 1,4$  i dla słupków  $\varphi_4 = 1,7 \div 2,0$ .

Średni współczynnik konstrukcyjny, który występuje we wzorach określających ciężar dźwigarów, można przyjmować w granicach  $\varphi = 1,75 \div 2,00$  zależnie od rozpiętości dźwigarów, przy czym dla mniejszych rozpiętości dźwigarów współczynnik konstrukcyjny jest większy, dla większych zaś rozpiętości dźwigarów — odpowiednio mniejszy.

### 3. Własności dźwigarów parabolicznych

Rozpatrzmy dźwigar w kracie prostokątnej z dolnym pasem prostym i górnym pasem wielobocznym, którego węzły znajdują się na paraboli.

Rozpiętość dźwigara oznaczamy przez  $l$ , jego wysokość pośrodku rozpiętości — przez  $h$ .

#### 1. Siły w prętach pasa prostego

Przy osiach współrzędnych, podanych na rysunku 132, równanie paraboli, na której leżą węzły pasa krzywego, będzie:

$$y = \frac{4h}{l^2} x(l - x). \quad [6]$$

Linia wpływowa dla pręta pasa prostego w przedziale pomiędzy węzłami  $n - 1$  i  $n$  będzie trójkąt z wierzchołkiem pod węzłem  $n - 1$  o podstawie  $l$

i wysokości 
$$h_{n-1} = \frac{x_1(l - x_1)}{l y_{n-1}}.$$

Wstawiając zamiast  $y_{n-1}$  jego wartość z równania (6)

$$y_{n-1} = \frac{4h}{l^2} x_1(l - x_1),$$

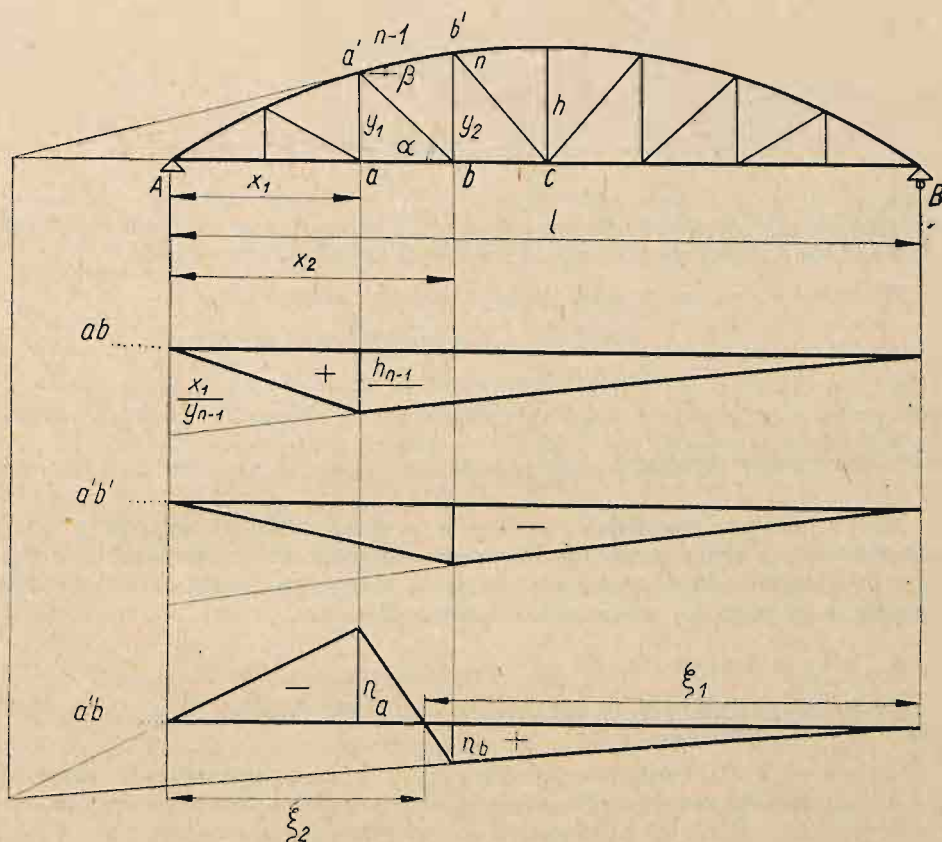
otrzymamy:

$$h_{n-1} = \frac{l}{4h}.$$

Widzimy zatem, że wysokość trójkąta linii wpływowej jest wielkością stałą i niezależną od położenia węzła.



Pole linii wpływowej  $F = \frac{l^2}{8h}$  pomnożone przez obciążenie stałe  $p$  i ruchome  $q$ , czyli przez obciążenie sumaryczne  $p + q = g$ , określa siłę w przecie pasa prostego pomiędzy węzłami  $n - 1$  i  $n$  równą  $S_d = \frac{g l^2}{8h}$ .



Rys. 132

Jak z tego wynika, siła ta jest wielkością stałą dla wszystkich prętów pasa prostego.

Stąd więc wynika pierwsza własność dźwigara parabolicznego: w pasie prostym siły od obciążenia równomiernego rozłożonego na całej rozpiętości dźwigara parabolicznego we wszystkich przedziałach pasa prostego są sobie równe.

## 2. Siły w prętach pasa parabolicznego

Linia wpływową dla pręta pasa krzywego w tym samym przedziale będzie trójkąt z wierzchołkiem pod węzłem  $n$ .

Wysokość tego trójkąta określa wzór:

$$h_n = - \frac{(x_1 + a) x_2}{l y_n \cos \beta},$$

jeżeli przez  $\beta$  oznaczymy kąt pochylenia pręta  $a' - b'$  do poziomemu.

Wstawiając do wzoru dla  $h_n$  zamiast  $y_n$  jego wartość z równania (6) otrzymamy:

$$h_n = -\frac{l}{4 h \cos \beta}.$$

Sila pasa w tym przecie wyniesie:

$$S_y = -\frac{g l^2}{8 h \cdot \cos \beta}$$

rzut zaś tej siły na pas prosty poziomy:

$$S_y \cos \beta = -\frac{g l^2}{8 h},$$

tj. równa się sile w przedziale pasa dolnego z odwrotnym znakiem i jest równą wielkością stałą, niezależną od położenia przedziału w przęśle.

Wzór dla  $S_y$  można przekształcić w sposób następujący:

$$S_y = -\frac{g l^2}{8 h \cos \beta} = -\frac{g l m a}{8 h \cos \beta} = -\frac{g l m a_1}{8 h},$$

jeżeli przez  $a$  oznaczymy długość przedziału  $a - b$  pasa krzywego, przez  $m$  liczbę przedziałów dźwigara i  $\frac{a}{\cos \beta} = a_1$ .

Możemy zatem stwierdzić, że siły w prętach pasa górnego przy obciążeniu równomiernym, rozłożonym na całej długości dźwigara parabolicznego, są proporcjonalne do długości prętów pasa krzywego i wzrastają począwszy od środków rozpiętości w kierunku podpór dźwigara.

### 3. Siły w krzyżulcach

Linia wpływowa siły w krzyżulcach  $a'b$  tworzy dwa trójkąty z wierzchołkami pod węzłami  $a$  i  $b$ .

Wysokość tych trójkątów znajdziemy z równowagi węzła  $b$  przy sile  $P = 1$ , zaczepionej raz w węźle  $a$  i drugi raz w węźle  $b$ , oraz z równania rzutów wszystkich sił na oś poziomą.

Oznaczmy przez  $S_a^a$  i  $S_b^a$  odpowiednio siłę w prętach przedziałów pasa dolnego  $ab$  i  $bc$ , jeśli siła  $P = 1$  zaczepiona jest w węźle  $a$ , przez  $S_a^b$  i  $S_b^b$  siły w tych samych prętach, jeśli siła  $P = 1$  zaczepiona jest w węźle  $b$ ; zatem możemy napisać:

$$\eta_a \cos \alpha + S_a^a - S_b^a = 0 \quad \text{i} \quad \eta_b \cos \alpha + S_a^b + S_b^b = 0.$$

ponieważ

$$S_a^a = \frac{l}{4 h}; \quad S_b^b = \frac{l}{4 h}; \quad S_b^a = \frac{l x_1}{4 h (x_1 + a)} \quad \text{i} \quad S_a^b = \frac{l x_2}{4 h (x_2 + a)},$$

to

$$\eta_a \cos \alpha = S_b^a - S_a^a = \frac{l x_1}{4 h (x_1 + a)} - \frac{l}{4 h} = -\frac{a l}{4 h (x_1 + a)}$$

oraz

$$\eta_b \cos \alpha = S_b^b - S_a^b = \frac{l}{4 h} - \frac{l x_2}{4 h (x_2 + a)} = \frac{a l}{4 h (x_2 + a)}.$$



Podstawy trójkątów linii wpływowej otrzymamy z równania:

$$\frac{\xi_1 y_1}{x_1} = \frac{\xi_2 y_2}{x_2} \quad \text{lub} \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{x_1 + a}{x_2 + a};$$

na podstawie tych wzorów możemy określić:

$$\xi_1 = \frac{l(x_1 + a)}{l + a} \quad \text{i} \quad \xi_2 = \frac{l(x_2 + a)}{l + a}.$$

Pola trójkątów linii wpływowej będą:

$$F_1 = -\frac{a l^2}{8 h (l + a) \cos \alpha} \quad \text{i} \quad F_2 = \frac{a l^2}{8 h (l + a) \cos \alpha}.$$

Mając na względzie, że  $\frac{a}{\cos \alpha} = z$  jest długością krzyżuleca i mnożąc odpowiednio pola linii wpływowej przez obciążenie ruchome  $q$ , otrzymujemy siłę w krzyżulecu:

$$S_z = \frac{q l^2}{8 h (l + a)} z.$$

Zatem siły w krzyżulcach są proporcjonalne do ich długości przy obciążeniu odpowiednich odcinków linii wpływowej.

Siły w krzyżulcach od obciążenia stałego, równomiernie rozłożonego na całej długości dźwigara, równają się zero, gdyż  $F_1 + F_2 = 0$ .

#### 4. Siły w słupkach

Z równowagi węzła dolnego i z rzutu na oś pionową, przy obciążeniu równomiernym na całej długości dźwigara, wynika, że siła w słupku  $N = g a$ , tj. że słupki są rozciągane i pracują jako wieszaki na obciążenie węzłowe.

#### 4. Własności dźwigarów hiperbolicznych

Rozpatrzmy dźwigar o dolnym pasie prostym i górnym pasie krzywym, zakładając, że przy najniekorzystniejszym obciążeniu równomiernym krzyżulec nie są ściskane.

Zachowamy wszystkie oznaczenia, jakie były wprowadzone przy rozpatrywaniu własności dźwigarów parabolicznych.

Mamy zatem

$$\frac{\xi_1 y_1}{x_1} = \frac{\xi_2 y_2}{x_2} \quad \text{lub} \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{x_1 y_2}{x_2 y_1};$$

z postawionego warunku otrzymamy:

$$(F_1 + F_2) p + F_1 \cdot q = 0,$$

$$F_1 (p + q) + F_2 p = 0 \quad \text{i} \quad F_1 + \mu F_2 = 0,$$

gdzie

$$\mu = \frac{p}{p + q}.$$

Na tej podstawie możemy napisać równania:

$$\frac{\xi_1 \eta_a}{2} + n \frac{\xi_2 \eta_b}{2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = -\mu \frac{\eta_b}{\eta_a} = \frac{x_1 y_2}{x_2 y_1},$$

czyli

$$x_1 y_2 \eta_a + \mu x_2 y_1 \eta_b = 0.$$

[7]

Mając wartości

$$\eta_a = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{x_1}{ly_1 y_2} [x_2 y_1 - y_2 (x_2 + a)]$$

oraz

$$\eta_b = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{x_2}{ly_1 y_2} [(x_1 + a) y_1 - x_1 y_2],$$

podstawiamy je do równania (7) i dzieląc równanie przez  $x_1^2 y_1^2 (x_2 + a)$  otrzymamy wzór następujący:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{y_1}\right) \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\mu x_2 - x_1}{x_2 + a} = \mu \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \cdot \frac{x_1 + a}{x_2 + a} \quad [8]$$

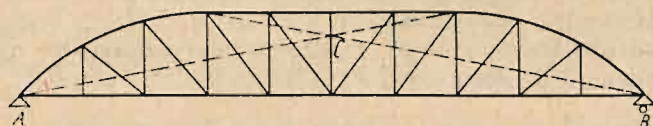
Równanie to jest równaniem hiperboli.

Mając np.  $y_1$  możemy znaleźć  $y_2$ , a mając  $y_2$  możemy obliczyć  $y_3$  itd.

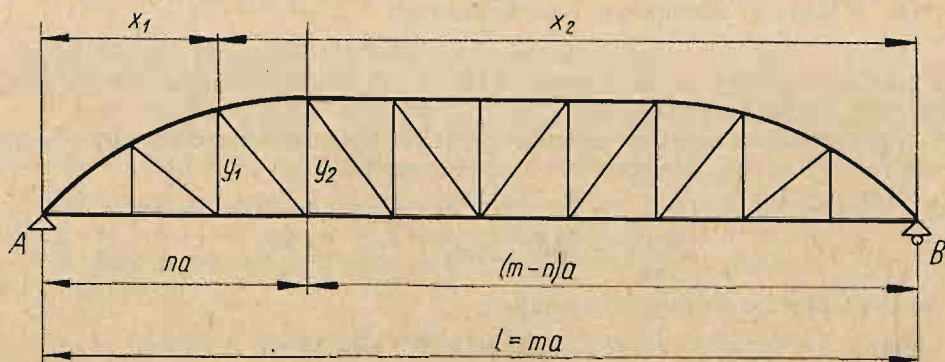
Krzywa wykreślona według tego równania biegnąc od jednego końca daje nam linię  $AB$  (rys. 133), biegnąc zaś od drugiego końca daje nam linię odwróconą  $BA$ .

Aby dźwigar całkowicie mógł spełnić postawione przez nas warunki, powinien mieć pas krzywy według linii  $ACB$ .

Krzywa taka nie wygląda estetycznie i dlatego wierzchołki dwóch krzywych łączy się prostą i otrzymuje się wtedy dźwigar, którego boczne węzły leżą na hiperbolach, środkowe zaś na linii równoległej do pasa prostego. Jest rzeczą oczywistą, że w środkowej części takiego dźwigara otrzymujemy krzyżulce ściskano-rozciągane.



Rys. 133



Rys. 134

Przy wprowadzaniu wzoru (8) nie wprowadziliśmy żadnych ograniczeń ani warunków. Pola linii wpływowej zostały dokładnie obliczone. Obecnie wprowadzimy warunek, że mamy do czynienia z obciążeniem tylko węzłowym, tzn. że punkt zerowy  $C$  linii wpływowej leży pośrodku przedziału.

Jeżeli zamiast  $x_1, x_2, y_1, y_2$  podstawimy ich wielkości, wyrażone przez  $m, n, a$  (rys. 134 i 132) czyli:

$$x_1 = (n - 1) a, \quad x_2 = (m - n + 1) a$$

$$y_1 = y_{n-1} \quad \text{i} \quad y_2 = y_n,$$

to otrzymamy:

$$\eta_a = \frac{(n-1)a}{m \cos \alpha y_{n-1} y_n} [(m-n)y_{n-1} - y_n(m-n+1)].$$

$$\eta_b = \frac{(m-n)a}{m \cos \alpha y_{n-1} y_n} \cdot [n y_{n-1} - y_n(n-1)].$$

Suma rzędnych linii wpływowej pola ujemnego równa się:

$$\frac{\eta_a}{(n-1)a} [a + 2a + 3a + \dots + (n-1)a] = \frac{1}{2} \eta_a \cdot n.$$

Suma rzędnych linii wpływowej pola dodatniego wyniesie:

$$\frac{\eta_b}{(m-n)a} [a + 2a + 3a + \dots + (m-n)a] = \frac{1}{2} \eta_b (m-n+1).$$

Przy obciążeniu pola ujemnego linii wpływowej ruchomym ciężarem węzłowym  $q$  a i obu pól linii wpływowej ciężarem stałym węzłowym  $pa$  otrzymamy — po wstawieniu do sum zamiast  $\eta_a$  i  $\eta_b$  ich wielkości — następujące równania:

$$n(n-1)(p+q)[(m-n)y_{n-1} - y_n(m-n+1)] + (m-n+1)(m-n)p \cdot [n y_{n-1} - (n-1)y_n] = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{y_n}{y_{n-1}} &= \frac{(m-n)n[(p+q)(n-1) + p(m-n+1)]}{(n-1)[(p+q)n(m-n+1) + p(m-n)(m-n+1)]} = \\ &= \frac{n(m-n)}{(n-1)(m-n+1)} \cdot \frac{p m + q(n-1)}{p m + q n}. \end{aligned} \quad [9]$$

Wstawiając do ostatniego wzoru zamiast  $n$ ,  $n-1$  i  $m$  odpowiednio wielkości  $\frac{x_n}{a}$ ,  $\frac{x_{n-1}}{a}$ ,  $\frac{l}{a}$  i wprowadzając stosunek  $\frac{q}{p} = \beta$ , otrzymamy równanie (9) w postaci:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{x_n(l-x_n)}{x_{n-1}(l-x_{n-1})} \cdot \frac{l+\beta x_{n-1}}{l+\beta x_n}$$

lub

$$\frac{y_n}{x_n} \cdot \frac{l+\beta x_n}{l-x_n} = \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \cdot \frac{l+\beta x_{n-1}}{l-x_{n-1}}.$$

Z ostatniego równania wynika, że wypisane stosunki są wielkością stałą, a zatem

$$\frac{y_n}{x_n} \cdot \frac{l+\beta x_n}{l-x_n} = \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \cdot \frac{l+\beta x_{n-1}}{l-x_{n-1}} = \frac{y_{n-2}}{x_{n-2}} \cdot \frac{l+\beta x_{n-2}}{l-x_{n-2}} = C. \quad [10]$$

Zarówno równanie (8) jak i równanie (10) może posłużyć do obliczenia wysokości wszystkich słupków dźwigara hiperbolicznego, jeżeli przyjmiemy odpowiednią wysokość jednego słupka.

Zwykle obliczamy wysokość pierwszego słupka w kratownicy wychodząc z założenia, że u góry tego słupka będzie umieszczona rozpórka ramownicy. Zatem wysokość jego zależna jest od wysokości skrajni budowli, wysokości belki poprzecznej, wysokości rozpórki i położenia środków ciężkości pasa górnego i dolnego kratownicy.

Ażeby krzyżulce w końcowych krzywych częściach dźwigara nie były ściskane wskutek przyjętego niezupełnie odpowiedniego obciążenia stałego,



należy przy obliczaniu wysokości słupków przyjąć zwiększone obciążenie ruchome np. o  $20 \div 25\%$ .

Należy zaznaczyć, że różnice w wysokościach słupków dźwigara otrzymane ze wzorów (8) i (10) są niewielkie.

### 5. Najkorzystniejsze pochylenie krzyżulew dźwigarów o kracie zastrzałowej

Wprowadzimy następujące oznaczenia (rys. 135):

$\alpha$  — kąt pochylenia krzyżulca do pasa,

$l$  — długość pasa,

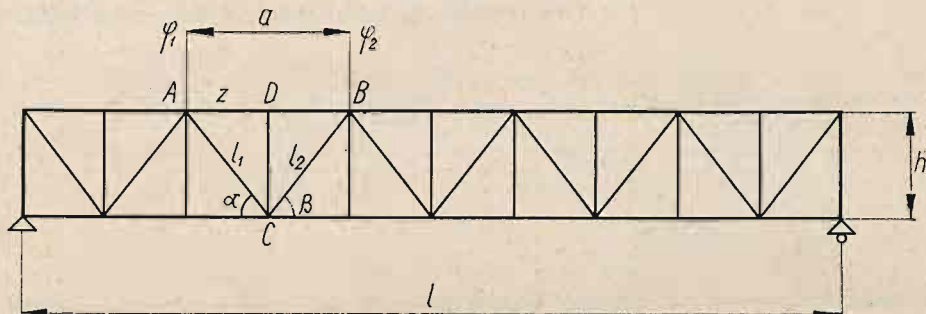
$\varphi$  — współczynnik konstrukcyjny krzyżulca  $AC$ ,

$\beta$ ,  $l_2$  i  $\varphi_2$  — odpowiednie wielkości krzyżulca  $CB$ ,

$h$  — wysokość dźwigara,

$a$  — długość przedziału,

$z$  — odległość od węzła  $A$  do prostopadłej  $CD$ .



Rys. 135

Rozpatrzmy dźwigar o pasach równoległych.

Największą siłę poprzeczną w przedziale  $AB$  oznaczmy przez  $Q$ ; wtedy możemy napisać, że przy dopuszczalnym naprężeniu stali  $k$  rzeczywiste objętości obu krzyżulew będą:

$$\frac{Q l_1^2 \varphi_1}{h k} \text{ i } \frac{Q l_2^2 \varphi_2}{h k}.$$

Objętości ich zaś na 1 mb dźwigara wyniosą:

$$V = \frac{Q l_1^2 \varphi_1}{a h k} \text{ i } V_2 = \frac{Q l_2^2 \varphi_2}{a h k}.$$

Rozpatrując wielkości  $a$  i  $z$ , od których zależą kąty  $\alpha$  i  $\beta$  pochylenia krzyżulew do pasa jako zmienne wielkości i wyrażając  $l_1$  i  $l_2$  przez  $a$ ,  $h$  i  $z$ , otrzymamy wzór określający objętość kraty na 1 mb dźwigara:

$$V = \frac{Q (h^2 + z^2) \varphi_1}{a h k} + \frac{Q [(a - z)^2 + h^2] \varphi_2}{a h k}.$$

Najmniejsza objętość  $V$  powinna odpowiadać:

$$\frac{dV}{da} = 0 \text{ i } \frac{dV}{dz} = 0;$$

z pierwszego równania otrzymamy, że

$$z^2 = \frac{a^2 q_2}{q_1 + q_2} - h^2,$$

z drugiego zaś

$$a = \frac{1}{q_2} z (q_1 + q_2)$$

i stąd znajdziemy, że

$$z = h \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \quad \text{ i } \quad a = \frac{(q_1 + q_2)}{\sqrt{q_1 q_2}}.$$

Ponieważ  $a - z = h \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$ , zatem  $\operatorname{tg} \alpha = h \sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$  i  $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$ ,  
a więc

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1$ , czyli  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ , tj.  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , z czego wynika, że najkorzystniejsze pochylenie krzyżuleców schodzących się w jednym węźle jest pod kątem prostym.

## 6. Najkorzystniejsze pochylenie krzyżuleców do pasa w kracie prostokątnej

Rozpatrzmy dźwigar o pasach równoległych, którego wysokość równa się  $h$ . Natomiast przez  $l_1$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  i  $a$  oznaczmy odpowiednio długość krzyżulca, współczynniki konstrukcyjne krzyżulca i słupka oraz zmienną długość przedziału

Załóżmy, że największa siła poprzeczna w przedziale równa się  $Q$ ; wówczas rzeczywista objętość kraty na 1 mb dźwigara wypadnie:

$$V = \frac{Q l_1^2 q_1}{h a} + \frac{Q h q_2}{a}.$$

Wstawiając do tego wzoru  $l_1^2 = h^2 + a^2$  i przyrównując

$$\frac{dV}{da} = 0$$

otrzymamy:

$$a = h \sqrt{\frac{q_1 + q_2}{q_1}} \quad \text{ lub } \quad a = h \sqrt{1 + \mu}, \quad \text{ jeżeli przez } \mu \text{ oznaczmy stosunek } \frac{q_2}{q_1}$$

Przyjmując  $\mu$  w granicach  $1 \div 4$  otrzymamy kąt  $\alpha$  w granicach  $35 \div 24^\circ$ . Jak widzimy, najkorzystniejsze pochylenie zastrzałów z punktu widzenia najmniejszej objętości kraty na 1 mb dźwigara dalekie jest od  $45^\circ$  i zależy od współczynników konstrukcyjnych  $q_1$  i  $q_2$  krzyżuleców i słupków.

## 7. Porównanie kraty krzyżulcowej z prostokątną

Rozpatrzmy kratę prostokątną i kratę krzyżulcową dźwigara o pasach równoległych i o jednakowej wysokości  $h$  i jednakowym przedziale  $a$ . Ponadto załóżmy, że współczynniki konstrukcyjne, zarówno w słupkach jak i w krzyżulcach kraty prostokątnej i krzyżulcowej, są jednakowe i równe  $q$ .

Jeżeli siła poprzeczna w rozpatrywanym przedziale jest  $Q$  i dopuszczalne naprężenie stali  $k$ , to objętość kraty prostokątnej równa się:

$$\frac{Q h q}{k} = \frac{Q (h^2 + a^2) q}{h k} = \frac{Q}{k} q \left( 2 h + \frac{a^2}{h} \right).$$

Ponieważ objętość kraty krzyżulcowej równa się  $2 Q \frac{\left( h^2 + \frac{a^2}{4} \right) q}{k h}$ , to różnica pomiędzy objętością kraty prostokątnej a objętością kraty krzyżulcowej wyniesie:

$$\frac{Q q}{k} \left( 2 h + \frac{a^2}{h} \right) - \frac{2 Q \left( h^2 + \frac{a^2}{4} \right) q}{k h} = Q \frac{a^2 q}{2 h k}.$$

Przy tych założeniach krata krzyżulcowa okazuje się pod względem objętości bardziej korzystna od kraty prostokątnej.

### 8. Krata półkrzyżulcowa

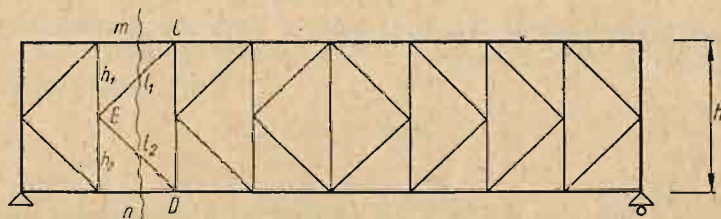
W dźwigarach z kratą półkrzyżulcową rozpatrzmy dwa zagadnienia:

1) jak należy dzielić słupek, czyli gdzie powinien się znajdować węzeł środkowy, aby objętość 1 mb kraty wypadła jak najmniejsza;

2) jaki powinien być stosunek przedziału do wysokości dźwigara, aby również objętość 1 mb kraty była jak najmniejsza.

Oznaczmy przez  $S_1$  — siłę w krzyżulcu  $CE$ ,  $\alpha$  — kąt jego pochylenia do poziomu,  $l_1$  — długość krzyżulca i  $q$  — jego współczynnik konstrukcyjny, przez  $S_2$ ,  $\beta_1$ ,  $l_2$ ,  $q_2$  te same wielkości dla krzyżulca  $ED$  oraz przez  $S_3$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $q_3$  siłę w dolnej części słupka, wysokość górnej i dolnej części słupka oraz jego współczynnik konstrukcyjny.

Siła poprzeczna po lewej stronie przekroju  $mn$  (rys. 136) równa się  $Q$  i jest skierowana do góry. Wówczas z równowagi lewej odciętej części dźwi-



Rys. 136

gara i z rzutu wszystkich sił na oś pionową oraz z równowagi węzła i z rzutów na oś poziomą otrzymamy dwa równania, które po wstawieniu zamiast wielkości trygonometrycznych ich stosunków liniowych otrzymamy wielkość sił:

$$S_1 = -\frac{Q l_1}{h} \quad \text{i} \quad S_2 = \frac{Q l_2}{h}.$$

Z równowagi węzła  $D$  i z rzutu na oś pionową otrzymamy:

$$S_3 = -\frac{Q h_2}{h}.$$



Zakładając, że siła  $S_3$  w całym słupku jest jednakowa oraz podstawiając zamiast  $l_1^2$  i  $l_2^2$  ich wielkości  $a$  i  $h_2$  otrzymamy następującą objętość kraty przy dopuszczalnym naprężeniu  $k$ :

$$V = \left\{ [(h-h_2)^2 + a] q_1 + (h^2 + a^2) q_2 + h h_2 q_3 \right\} \frac{Q}{h k}.$$

Przyjmując, że przedział  $a$  jest wielkością stałą, dla min  $V$  możemy napisać równanie:

$$\frac{dV}{dh_2} = 2 h_2 (q_1 + q_2) - h (2q_1 - q_3) = 0,$$

z którego możemy określić:

$$h_2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{2q_1 - q_3}{q_1 + q_2}.$$

Przyjmując zaś, że

$$q_1 = 1,5 q_3 \quad \text{i} \quad \frac{q_3}{q_2} = \mu,$$

otrzymamy:

$$h_2 = \frac{h}{2} \cdot \frac{2\mu}{1,5\mu + 1}.$$

Dla  $\mu$  w granicach  $1 \div 4$  stosunek  $\frac{h_2}{h}$  wypadnie w granicach  $0,40 \div 0,57$ .

Zwykle przyjmujemy, że stosunek ten jest równy 0,5 i na tej podstawie węzeł wewnętrzny umieszczamy pośrodku słupka.

Zakładając zaś, że:  $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ , otrzymamy rozwiązanie drugiego zagadnienia z równania:

$$\frac{dV}{da} = \frac{d}{da} \left\{ \left[ \left( h - \frac{h}{2} \right)^2 + a^2 \right] q_1 + \left( \frac{h}{4} + a^2 \right) q_2 + \frac{h}{2} q_3 \right\} \frac{Q}{h k} = 0,$$

z którego możemy określić długość przedziału za pomocą wzoru:

$$a = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{q_1 + q_2 + 2q_3}{q_1 + q_2}}. \quad [11]$$

Po wstawieniu do wzoru (11)  $q_1 = 1,5 q_3$  i  $\frac{q_3}{q_2} = \mu$  otrzymamy ostateczny wzór na długość przedziału:

$$a = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{3,5\mu + 1}{1,5\mu + 1}}.$$

Przy wielkości  $\mu$  w granicach  $1 \div 4$  stosunek  $\frac{a}{h}$  wypada w granicach  $0,67 \div 0,73$ , a więc można przyjąć długość przedziału  $a = 0,7 h$ .

## 9. Uwagi ogólne

Rozpatrzyliśmy warunki, które należy spełnić, aby otrzymać najmniejszą objętość dźwigara, lecz nie wprowadziliśmy całego szeregu czynników niewątpliwie wpływających na zmniejszenie lub zwiększenie całkowitego ciężaru przesła.

I tak na przykład uzależniliśmy ciężar dźwigarów od wysokości i ilości przedziałów, nie uwzględniając natomiast wpływu ich długości na ciężar belek pomostu itp.

Gdybyśmy jednak chcieli uwzględnić wszystkie czynniki, które wpływają na ciężar zarówno dźwigarów jak i całych przęseł, to nie moglibyśmy w należyty sposób rozwiązać tego zadania. Rozwiązanie to byłoby bowiem skomplikowane i praktycznie niewykonalne, gdyż trzeba byłoby wprowadzić do niego wiele wątpliwych czynników, tak że dokładność końcowych wyników budziłaby wiele zastrzeżeń.

## Rozdział IV

### LINIE WPLYWOWE

#### A. Budowa linii wpływowych najczęściej stosowanych kratownic w budowie mostów

##### 1. Pojęcie linii wpływowej

Teoria linii wpływowych (linii wpływu) należy właściwie do statyki budowli. Ponieważ jednak linie wpływowe są podstawą obliczania mostów, a w kursie statyki budowli nie zawsze poświęca się liniom wpływowym dostatecznie wiele uwagi i miejsca, rzeczą pożyteczną dla czytelników tej książki będzie systematyczny przegląd linii wpływowych elementów kratownic najczęściej stosowanych w budowie mostów.

Linia wpływową dowolnej wielkości statycznej (siły, momentu, naprężenia, odkształcenia) nazywamy wykres, którego każda rzędna wyraża wartość tej wielkości statycznej, wywołaną przez obciążenie ruchome  $P = 1$ , w chwili gdy obciążenie  $P = 1$  znajdzie się ponad tą rzędną.

Linia wpływową siły osiowej w danym przęcie kratownicy jest więc wykres, którego każda rzędna daje wielkość siły osiowej w tym przęcie kratownicy, wywołaną przez obciążenie kratownicy jedną tylko siłą ruchomą  $P = 1$ , ustawioną ponad tą rzędną.

Linia wpływowa jest więc wykresem siły w przęcie wywołanej przez obciążenie  $P = 1$  jako funkcji położenia tej siły na moście.

Ponieważ obciążenie w kratownicach jest przeważnie węzłowe, dlatego siła  $P = 1$  przesuując się kolejno od jednego węzła kratownicy do następnego przenosi się według prawa dźwigni na sąsiednie węzły kratownicy po linii prostej.

Jeżeli siła  $P = 1$  nie przesuwa się po belkach podłużnych, które przez poprzecznice węzłowe przenoszą siłę  $P = 1$  na węzły kratownicy, lecz bezpośrednio po danym przęcie kratownicy, to charakter linii wpływowej elementów kratownicy pozostanie ten sam, gdyż i ten pręt będzie przenosić siłę  $P = 1$  na sąsiednie węzły kratownicy wzdłuż linii prostej, ale przy tym pod działaniem tej siły nastąpi dodatkowe ugięcie tego pręta pomiędzy sąsiednimi węzłami.

Powstaną wówczas tak zwane miejscowe momenty zginające, które w obliczeniach sił i przekrojów odpowiednich prętów kratownicy powinny być zawsze uwzględniane.

Przypadek powyższy zachodzi zazwyczaj w mostach drogowych z jazdą górą, gdy jazda odbywa się po nawierzchni ułożonej na belkach jezdni i na pasach górnych dźwigarów głównych lub w mostach kolejowych o średniej