I tak na przykład uzależniliśmy ciężar dźwigarów od wysokości i ilości przedziałów, nie uwzględniając natomiast wpływu ich długości na ciężar belek pomostu itp.

Gdybyśmy jednak chcieli uwzględnić wszystkie czynniki, które wpływają na ciężar zarówno dźwigarów jak i całych przęseł, to nie moglibyśmy w należyty sposób rozwiązać tego zadania. Rozwiązanie to byłoby bowiem skomplikowane i praktycznie niewykonalne, gdyż trzeba byłoby wprowadzić do niego wiele wątpliwych czynników, tak że dokładność końcowych wyników budziłaby wiele zastrzeżeń.

Rozdział IV

LINIE WPŁYWOWE

A. Budowa linii wpływowych najczęściej stosowanych kratownic w budowie mostów

1. Pojęcie linii wpływowej

Teoria linii wpływowych (linii wpływu) należy właściwie do statyki budowli. Ponieważ jednak linie wpływowe są podstawą obliczania mostów, a w kursie statyki budowli nie zawsze poświęca się liniom wpływowym dostatecznie wiele uwagi i miejsca, rzeczą pożyteczną dla czytelników tej książki będzie systematyczny przegląd linii wpływowych elementów kratownic najczęściej stosowanych w budowie mostów.

Linią wpływową dowolnej wielkości statycznej (siły, momentu, naprężenia, odkształcenia) nazywamy wykres, którego każda rzędna wyraża wartość tej wielkości statycznej, wywołaną przez obciążenie ruchome $P = 1$, w chwili gdy obciążenie $P = 1$ znajdzie się ponad tą rzędną.

Linią wpływową siły osiowej w danym pręcie kratownicy jest więc wykres, którego każda rzędna daje wielkość siły osiowej w tym pręcie kratownicy, wywołaną przez obciążenie kratownicy jedną tylko siłą ruchomą $P = 1$, ustawioną ponad tą rzędną.

Linia wpływowa jest więc wykresem siły w pręcie wywołanej przez obciążenie $P = 1$ jako funkcji położenia tej siły na moście.

Ponieważ obciążenie w kratownicach jest przeważnie węzłowe, dlatego siła $P = 1$ przesuwając się kolejno od jednego węzła kratownicy do następnego przenosi się według prawa dźwigni na sąsiednie węzły kratownicy po linii prostej.

Jeżeli siła $P = 1$ nie przesuwa się po belkach podłużnych, które przez poprzecznice węzłowe przenoszą siłę $P = 1$ na węzły kratownicy, lecz bezpośrednio po danym pręcie kratownicy, to charakter linii wpływowej elementów kratownicy pozostanie ten sam, gdyż i ten pręt będzie przenosić siłę $P = 1$ na sąsiednie węzły kratownicy wzdłuż linii prostej, ale przy tym pod działaniem tej siły nastąpi dodatkowe ugięcie tego pręta pomiędzy sąsiednimi węzłami.

Powstaną wówczas tak zwane miejscowe momenty zginające, które w obliczeniach sił i przekrojów odpowiednich prętów kratownicy powinny być zawsze uwzględniane.

Przypadek powyższy zachodzi zazwyczaj w mostach drogowych z jazdą górą, gdy jazda odbywa się po nawierzchni ułożonej na belkach jezdni i na pasach górnych dźwigarów głównych lub w mostach kolejowych o średniej rozpiętości z jazdą górą, bez belek jezdni, czyli mostownice ułożone są bezpośrednio na pasach górnych dźwigarów głównych.

Pasy dolne kratownic mostów z jazdą dołem, zarówno drogowych jak i kolejowych, przeważnie nie podlegają bezpośredniemu działaniu obciążenia ani stałego, ani ruchomego.

Przy stosowaniu metody przecięć do obliczenia rzędnych linii wpływowych rozpatruje się tę część odciętą kratownicy, na którą działa tylko jedna siła zewnętrzna.

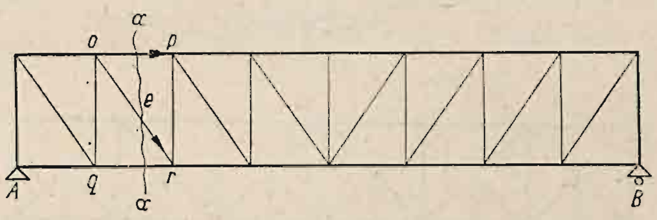
Przy jednej sile $P = 1$ działającej na dany dźwigar otrzymamy trzy siły zewnętrzne: dwie reakcje podpór i jedną siłę $P = 1$.

Rozpatrując część kratownicy, na którą działa tylko jedna siła zewnętrzna, można ustalić czy pręt, w którym szukamy siły, jest ściskany czy też rozciągany.

Tak np. siła $P = 1$ działająca w lewej odciętej części kratownicy (rys. 137) przed przekrojem $\alpha - \alpha$ daje w prawej części reakcję B, skierowaną do góry.

Aby utrzymać tę część kratownicy w równowadze, musimy zaczepić do odcinka er krzyżulca or siłę, która działając w jego osi będzie w rzucie pionowym skierowana w dół, a więc ku węzłowi; przy tym położeniu siły krzyżulec or jest ściskany.

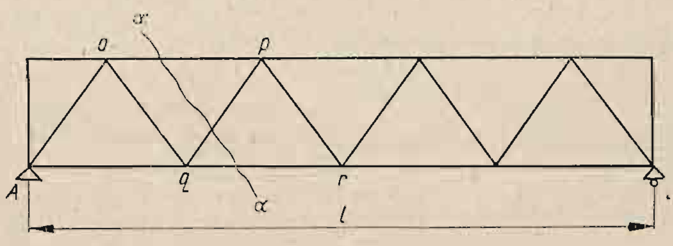
Rozumując w ten sposób dojdziemy do wniosku, że siła $P = 1$, znajdująca się z prawej strony przekroju $\alpha - \alpha$, będzie pręt or rozciągać.



Rys. 137

Aby znaleźć siły w prętach pasów op i qr rozpatrujemy prawą odciętą część kratownicy.

Jeżeli siła $P = 1$ znajduje się na lewej części kratownicy przed przekrojem $\alpha - \alpha$, moment reakcji podpory B względem bieguna r jest lewoskrętny. Aby utrzymać prawą część kratownicy w równowadze, do odcinka pasa należy zaczepić siłę osiową, która daje moment prawoskrętny, tj. siłę skierowaną ku węzłowi, co wskazuje na to, że pręt op jest ściskany.



Rys. 138

Ze statyki i wytrzymałości materiałów wiadomo, że w belce swobodnie podpartej na dwóch podporach pas górny jest zawsze ściskany, pas dolny zawsze rozciągany.

Stosując metodę przecięć musimy zwrócić uwagę, że siła $P = 1$ może się przesuwać do takiego węzła odciętej części, który z resztą odciętej rozpatrywanej części kratownicy stanowi układ niezmienny.

W kracie krzyżulcowej (rys. 138) mostu z jazdą górą i przecięciu kratownicy po linii $\alpha - \alpha$ siła $P = 1$ może przesuwać się do węzłów o i p, a w mostach z jazdą dołem do węzłów q i r.

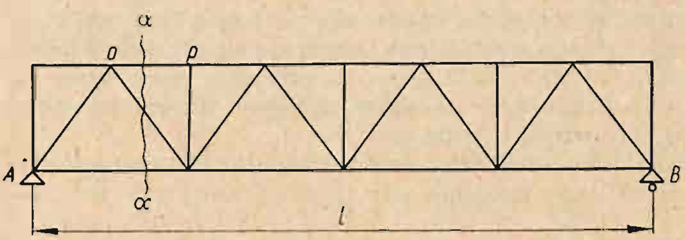
W kratownicy z jazdą górą, krzyżulcowej wzmocnionej dodatkowymi słupkami (rys. 139), krańcowymi węzłami dwóch części kratownicy rozciętej przekrojem $\alpha-\alpha$ są węzły o i p.

Oba te węzły są niezmiennie związane z częściami kratownicy: węzeł o z lewą częścią kratownicy, węzeł p z prawą jej częścią. W kratownicy z jazdą dołem krzyżulcowej z dodatkowymi wieszakami (rys. 140) węzeł o' należy do lewej odciętej części i jest z nią związany dwoma prętami qo' i oo', węzeł zaś r — do prawej odciętej części kratownicy i siła $P=1$ może się przesuwać po lewej części kratownicy od podpory A do węzła o' oraz po prawej części kratownicy od podpory B do węzła r.

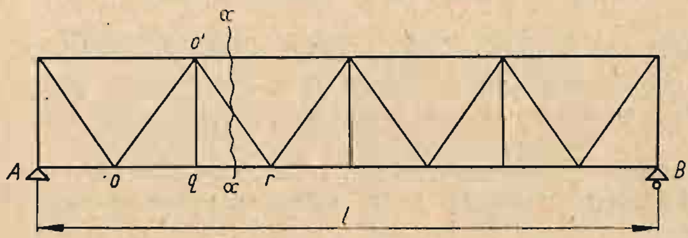
W kratownicach z jazdą dołem, wzmocnionych dodatkowymi słupkami i półkrzyżulcami (rys. 141) oraz ze wzmocnieniem dolnym, siła $P = 1$ może się przesuwać po częściach kratownicy Ar i Bq, przy jej przecięciu po $\alpha-\alpha$.

Przy przecięciu $\alpha_1-\alpha_1$ odcinkami kratownicy, po których może się przesuwać siła $P = 1$, są Ap i Bq.

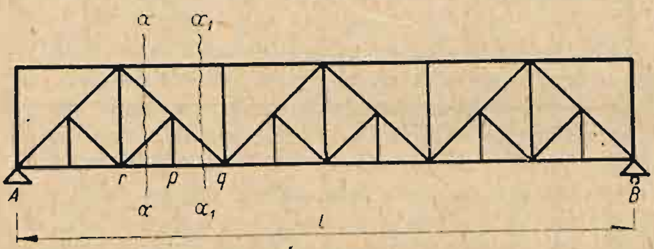
W kratownicy o wzmocnieniu górnym (rys. 142), przeciętej po $\alpha-\alpha$, siła $P = 1$ może się przesuwać od podpory A do węzła p i od podpory B do węzła r, w kratownicy zaś przeciętej po $\alpha_1-\alpha_1$ — od podpory A do węzła p oraz od podpory B do węzła r.



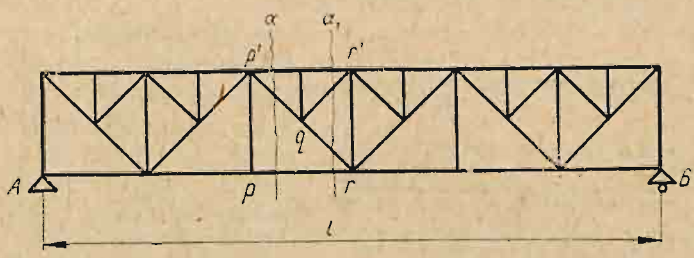
Rys. 139



Rys. 140



Rys. 141



Rys. 142

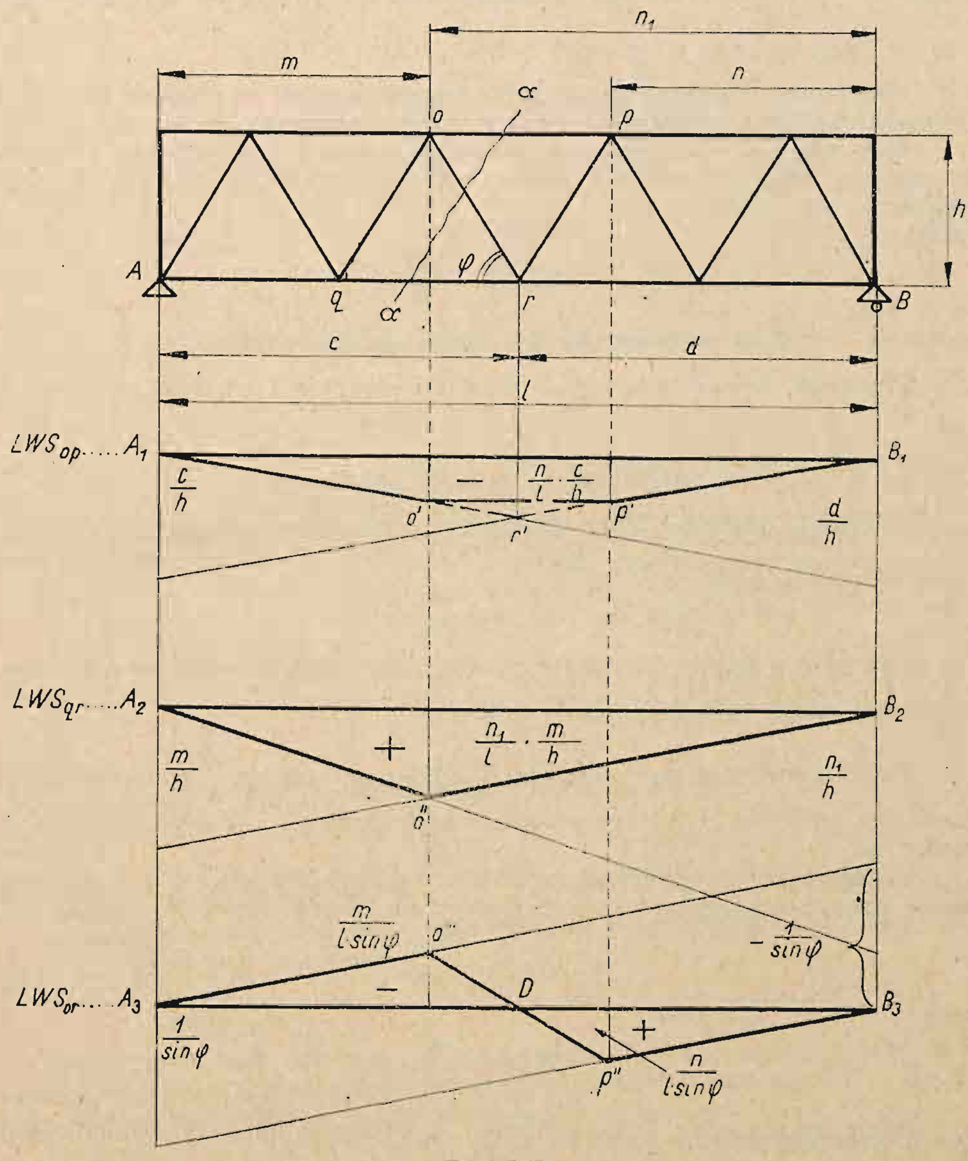
Przy tym przekroju siła $P = 1$ nie może dochodzić od węzła podporowego A do węzła r, gdyż $pp'r'r$ jest figurą zmienną, jako czworobok.

Należy zwrócić uwagę, że rzędne linii wpływowych nie zawsze są kreślone w jednej i tej samej skali, nawet dla danej kratownicy, ażeby rysunki nie zajmowały zbyt dużo miejsca.

Kształt i charakter linii wpływowej powinien być należycie uwydatniony, a na charakterystycznych rzędnych powinny być podane wymiary.

2. Linie wpływowe sił w elementach kratownic

a. Kratownica z jazdą górą, krzyżulcowa równoboczna z pasami równoległymi (rys. 143).



Rys. 143

Oznaczenia sił w prętach kratownicy:

S_{op} — siła w pręcie górnym,
S_{qr} — siła w pręcie dolnym,
S_{or} — siła w krzyżulcu.

Linię wpływową sił w prętach pasa górnego op, pasa dolnego qr i w krzyżulcu or otrzymamy z warunków równowagi odciętej części kratownicy: $\Sigma M = 0$ i $\Sigma Y = 0$, tj. suma momentów statycznych wszystkich sił działających na odciętą część kratownicy względem dowolnego punktu $= 0$ oraz suma rzutów na oś pionową wszystkich sił działających na odciętą część kratownicy $= 0$.

1. Pas górny, pręt op

Siłę w pręcie op otrzymamy, jeżeli względem węzła r weźmiemy momenty wszystkich sił zewnętrznych i sił w prętach przeciętych po $\alpha - \alpha$.

Gdy siła $P = 1$ znajduje się pomiędzy podporą A i węzłem o, równanie momentów względem węzła r prawej odciętej części kratownicy jest następujce: $- Bd - S_{op}h = 0$,
skąd

$$S_{op} = -\frac{Bd}{h},$$

gdzie B — reakcja podpory, B i h — wysokość kratownicy.

Ponieważ $B = \frac{x}{l}$, gdzie x — odległość siły $P = 1$ od lewej podpory A, to

$$S_{op} = -\frac{xd}{lh},$$

— jest to równanie linii prostej względem zmiennej x, z którego pod punktem o przy $x = m$ otrzymujemy rzędną:

$$S_{op} = -\frac{md}{lh}.$$

Siła więc w pasie górnym zmienia się liniowo i równa się reakcji B, pomnożonej przez współczynnik $\frac{d}{h}$.

Jeśli na poziomie pod punktem B_1 odkładamy rzędną $\frac{d}{h}$, to łącząc koniec rzędnej z punktem A_1 otrzymamy linię wpływową siły pasa górnego na odcinku m.

Rozpatrując lewą odciętą część kratownicy, gdy siła $P = 1$ znajduje się na prawej odciętej części w odległości z od prawej połowy B, otrzymamy:

$$S_{op} = -\frac{zc}{lh};$$

przy $z = n$

$$S_{op} = -\frac{nc}{lh}.$$

Odkładamy rzędną $\frac{c}{h}$ pod punktem A_1 i łącząc koniec tej rzędnej z punktem B_1 otrzymamy linię wpływową na odcinku n.

Na odcinku Bp siła S_{op} zmienia się wzdłuż linii prostej.

Pomiędzy punktami o i p zmiana siły odbywa się również wzdłuż prostej, tj. linii $o'p'$.

W wyniku linię wpływową dla siły w pręcie op otrzymamy w postaci czworoboku $A_1B_1p'o'A_1$.

2. Pas dolny, pręt qr

Przy przecięciu kratownicy linią $\alpha - \alpha$ określamy dla pręta qr pasa dolnego sumę momentów sił względem węzła o pasa górnego.

Siła $P = 1$ może przesuwać się zarówno od podpory B jak i od podpory A do węzła o, przeto przy sile $P = 1$ znajdującej się z prawej strony otrzymamy równanie momentów na lewej odciętej części kratownicy:

$$Am - S_{qr}\, h = 0,$$

skąd

$$S_{qr} = + \frac{Am}{h}$$

ponieważ reakcja $A = \frac{z}{l}$,

to.

$$S_{qr} = \frac{mz}{lh};$$

przy $z = n_1$ siła w pasie dolnym określi się wzorem

$$S_{qr} = \frac{n_1 m}{lh}.$$

Pod punktem A_2 odkładamy rzędną $\frac{m}{h}$ i koniec rzędnej łączymy z puntem B_2; otrzymamy wówczas linię zmiany siły w pasie dolnym qr, gdy $P = 1$ przechodzi od punktu $z = 0$ do punktu $z = n_1$.

Rozpatrując prawą odciętą część kratownicy przy przesuwaniu się siły $P = 1$ od $x = 0$ do $x = m$ otrzymamy równanie momentów:

$$- Bn_1 + S_{qr}\, h = 0,$$

skąd

$$S_{qr} = \frac{Bn_1}{h};$$

przy $x = m$ siła w pręcie pasa dolnego ma wielkość

$$S_{qr} = \frac{m\, n_1}{lh};$$

tj. wielkość określoną wyżej.

Linią wpływową siły w pręcie pasa dolnego qr jest trójkąt $+ A_2 B_2 O'' A_2$ z wierzchołkiem pod węzłem o.

3. Krzyżulec or

Aby znaleźć linię wpływową dla krzyżulca or, rozpatrujemy prawą lub lewą odciętą część kratownicy i piszemy równanie równowagi $\Sigma Y = 0$, tj. suma rzutów wszystkich sił na oś pionową równa się zeru.

Gdy siła $P = 1$ znajduje się w prawej części, to dla równowagi lewej części mamy równanie:

$$- A + S_{or} \sin \varphi = 0,$$

skąd

$$S_{or} = + \frac{A}{\sin \varphi}, \text{ przy } A = \frac{z}{l}.$$

Powyższe równanie liniowe istnieje w granicach od $z = 0$ do $z = n$, a więc na pionie pod A_3 należy odłożyć rzędną $\frac{1}{\sin\varphi}$ i koniec rzędnej połączyć z B_3; pod węzłem p otrzymamy rzędną

$$+\frac{n}{l\sin\varphi}.$$

Jeżeli siła $P = 1$ znajduje się na lewej odciętej części kratownicy, to równanie $\Sigma Y = 0$ dla prawej części jest

$$-B - S_{or}\sin\varphi = 0;$$

skąd

$$S_{or} = -\frac{B}{\sin\varphi},$$

gdzie $B = \frac{x}{l}$, przy x w granicach od zera do m. Aby otrzymać rzędną w odległości $x = m$, od podpory A należy na pionie pod B_3 odłożyć rzędną

$$-\frac{1}{\sin\varphi}$$

koniec rzędnej połączyć z A_3, wtedy pod punktem o otrzymamy odcinek $-\frac{m}{l\sin\varphi}$.

Pomiędzy punktem o''' i p'' siły w krzyżulcu zmieniają się po linii prostej, tak że łącząc punkty o''' i p'' prostą, otrzymamy linię wpływu w krzyżulcu or w postaci dwóch trójkątów $-A_3\,o'''\,D\,A_3$ i $+B_3\,p''\,D\,B_3$.

Prawy trójkąt jest ze znakiem $+$, tj. obciążenie działające na odcinku DB_3 rozciąga krzyżulec, natomiast lewy trójkąt jest ujemny i obciążenie na odcinku A_3D ściska krzyżulec.

b. Kratownica z jazdą górą krzyżulcowa równoboczna o pasach równoległych i z dodatkowymi słupkami (rys. 144).

1. Pas górny, pręt *op*

Linia wpływowa siły w pręcie op na części kratownicy $A'o$ i $B'p$ będzie taka sama jak na rys. 143, na odcinku zaś przedziału op zmieni swój kształt, gdyż siła zewnętrzna $P = 1$, znajdując się nad słupkiem sr, przenosi się przez słupek na węzeł r i działając na krzyżulce or i rp będzie je rozciągać.

Przeniesione do punktów o i p siły w krzyżulcach dadzą składowe poziome, które dodatkowo ścisną pas górny op.

Siłę rozciągającą krzyżulce or i rp otrzymamy z równowagi węzła r, rzutując wszystkie siły na oś pionową:

$$2\,S_{or}\sin\varphi - 1 = 0.$$

skąd

$$S_{or} = \frac{1}{2\sin\varphi}.$$

Składowa pozioma tej siły będzie:

$$S_{op} = -S_{or}\cos\varphi = -\frac{1}{2\,tg\,\varphi};$$

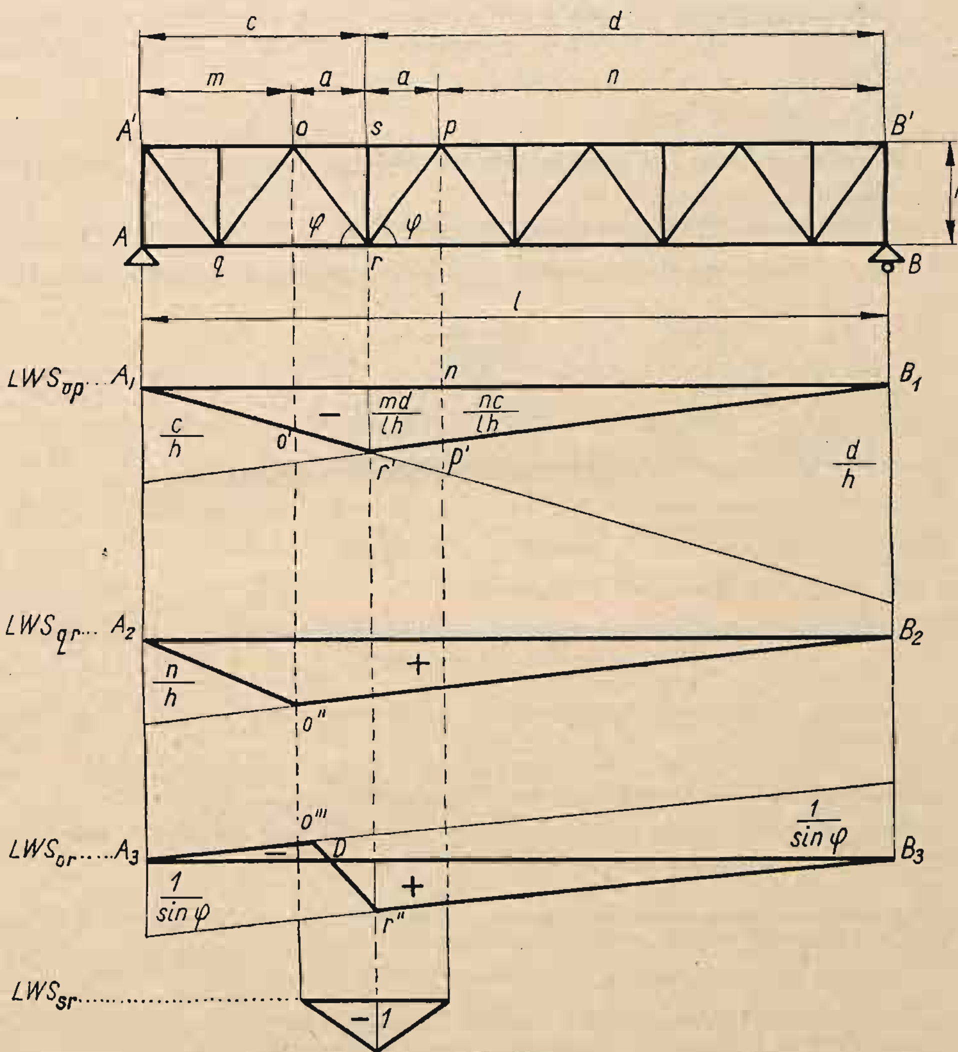
ponieważ $tg\,\varphi = \frac{h}{a}$,

to
$$S_{op} = -\frac{a}{2h}.$$

Jeżeli siła $P = 1$ stanie nad słupkiem sr, to siła w pasie op wyrazi się rzędną linii wpływowej

$$\frac{md + nc}{2\,lh} + \frac{a}{2\,h} = \frac{md + nc + la}{2\,lh} = \frac{md + nc + da + ca}{2\,lh} =$$

$$= \frac{(m + a)\,d + (n + a)\,c}{2\,lh} = \frac{dc}{lh}.$$



Rys. 144

Gdybyśmy wzięli równanie momentów względem węzła r, to rzędna linii wpływowej siły w pasie op pod węzłem r równałaby się $\frac{dc}{l\,h}$ i pod węzłami o i p byłyby rzędne:

$$\frac{md}{lh} \text{ i } \frac{nc}{lh}.$$

Widzimy więc, że budowa tej linii wpływowej jest taka sama, jak w przypadku kratownicy bez słupka, tylko bez ścięcia trójkąta $o'r'p'$.

Rzędną linii wpływowej pasa górnego op pod węzłem r możemy otrzymać bezpośrednio, gdyż siła $P = 1$ może przesuwać się na prawej części kratownicy od podpory B aż do węzła s, połączenie zaś punktu o' z r' tworzy dalszy ciąg linii $A_1\, r'$.

2. Pas dolny, pręt qr

Dodatkowe słupki nie mają wpływu na siły w pasie dolnym i dlatego linia wpływowa siły w pręcie qr pozostaje bez zmian w kształcie trójkąta $+ A_2B_2o''A_2$.

3. Krzyżulec or

W krzyżulcach or i pr powstaje dodatkowe rozciąganie $\frac{1}{2\sin\varphi}$ jako wpływ siły w słupku na węzeł r, zatem rozciągnie zwiększy się o wielkość $\frac{1}{2\sin\varphi}$.

Bez dodatkowego słupka rzędna linii wpływowej pod węzłem r równałaby się

$$\frac{n-m}{2\,l\sin\varphi};$$

dodając $\frac{1}{2\sin\varphi}$, gdy mamy słupek, tj. gdy siła $P = 1$ działa bezpośrednio przez słupek na węzeł r, otrzymamy rzędną linii wpływowej

$$\frac{n-m}{2\,l\sin\varphi} + \frac{1}{2\sin\varphi} = \frac{n-m+1}{2\,l\sin\varphi} = \frac{n+a}{l\sin\varphi}$$

— jest to rzędna linii B_3D pod węzłem r.

Linia wpływowa siły w krzyżulcu or ma zatem kształt dwóch trójkątów:

$$-A_3\,o'''\,DA_3 \text{ i } +DB_3\,r''\,D.$$

To samo otrzymamy bezpośrednio, przesuwając siłę $P = 1$ od podpory B do węzła s.

4. Słupek drugorzędny sr

Linią wpływową siły w słupku drugorzędnym jest trójkąt o podstawie $2a$ i wysokość równej 1.

c. Kratownica z jazdą dołem krzyżulcowa równoboczna z pasem górnym krzywym i dolnym prostym z dodatkowymi wieszakami (rys. 145)

1. Pas górny, pręt op

Rozpatrując prawą odciętą część kratownicy przy sile $P = 1$, znajdującej się na lewej części od przekroju $\alpha - \alpha$, otrzymamy równanie:

$$-B\,d - S_{op}\,h_1 = 0, \text{ skąd } S_{op} = -\frac{B\,d}{h_1};$$

ponieważ $B = \frac{x}{l}$,

to

$$S_{op} = -\frac{d\,x}{l\,h_1};$$

przy $x = c$ siła w pręcie op równa się

$$S_{op} = -\frac{cd}{lh_1}.$$

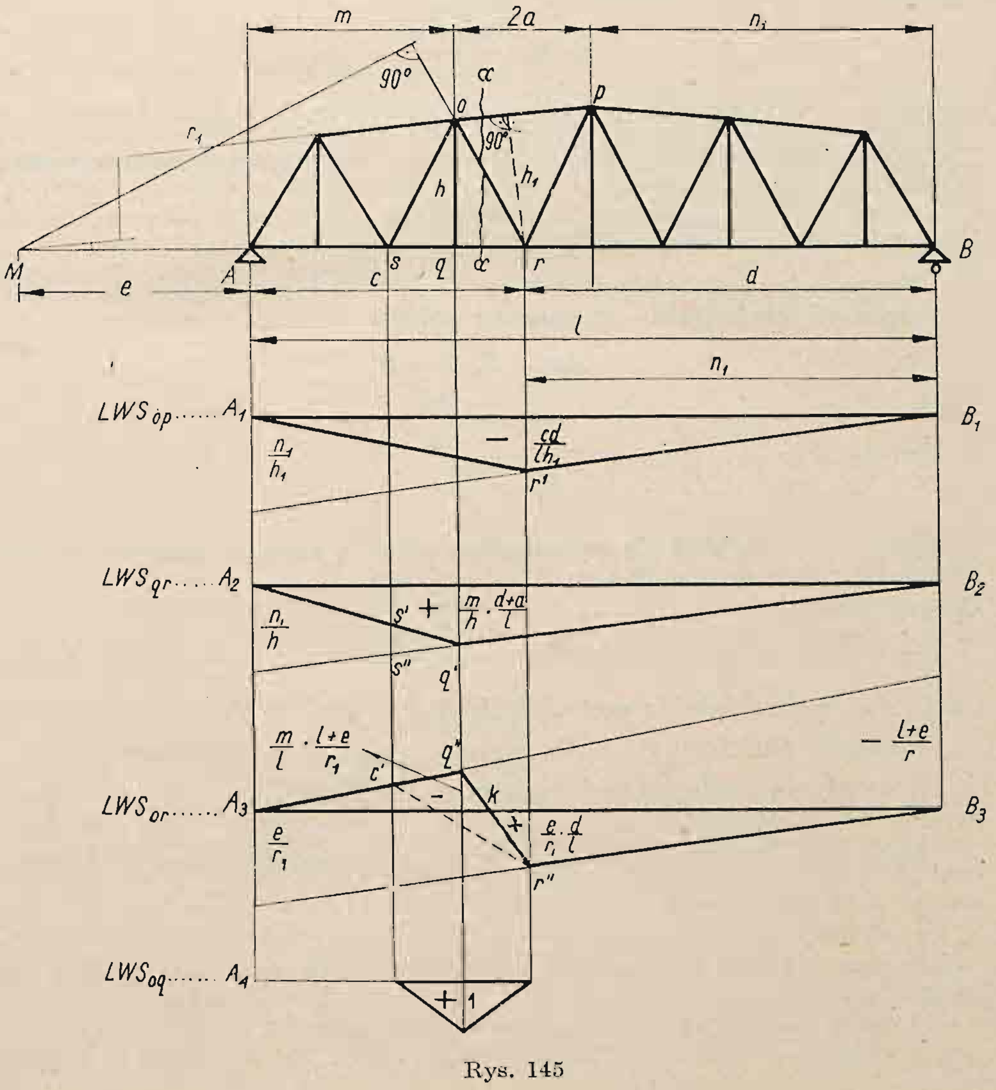
Rozpatrując lewą odciętą część kratownicy, gdy siła $P = 1$ znajduje się na prawej części od przekroju $\alpha - \alpha$, otrzymamy równanie:

$$A\,c + S_{op}\,h_1 = 0,$$

skąd

$$S_{op} = -\frac{Ac}{h_1};$$

przy $A = \frac{z}{l}$ siła $S_{op} = -\frac{cd}{lh_1}$.



Rys. 145

Przy $z = d$ siła w pręcie op pasa górnego będzie równa

$$S_{op} = -\frac{cd}{lh_1}$$

i linia wpływowa siły w pręcie op ma kształt trójkąta $-A_1\,r_1\,B_1$ o wysokości $\frac{cd}{lh_1}$, z wierzchołkiem położonym pod węzłem r.

2. Pas dolny, pręt qr

Rozumując jak poprzednio i biorąc momenty względem węzła o możemy napisać równanie równowagi prawej odciętej części kratownicy przy sile $P = 1$, znajdującej się na lewej części:

$$-B\,(d + a) + S_{qr}\,h = 0,$$

skąd

$$S_{qr} = \frac{B\,(d + a)}{h}.$$

ponieważ $B = \frac{x}{l}$ (x może się zmieniać od zera do m, tj. dochodzić do węzła q, gdyż poza węzłem q pręt qr jest już przecięty), siła w pasie dolnym w węźle q wyniesie:

$$S_{qr} = \frac{m\,(d + a)}{lh}.$$

Rozpatrując lewą odciętą część przy sile $P = 1$, znajdującej się na prawej części od przekroju $\alpha - \alpha$, możemy napisać równanie równowagi:

$$Am - S_{qr}\,h = 0,$$

skąd

$$S_{qr} = \frac{Am}{h};$$

ponieważ $A = \frac{z}{l}$,

to

$$S_{qr} = \frac{mz}{lh};$$

przekrój $\alpha - \alpha$ znajduje się poza węzłem r oraz z może się zmieniać w granicach od $z = 0$ do $z = d + a$;
stąd otrzymamy:

$$S_{qr} = \frac{m\,(d + a)}{lh}$$

i linia A_2s' w przedłużeniu przetnie linię B_2s' w punkcie q'.

Pomiędzy punktami q' i s' siła w pasie zmienia się po linii prostej.

Z wymiarów rzędnych pod węzłami r i s widzimy, że rzędne te są proporcjonalne do odciętych m i c, a więc linia $q'\,s'$ jest przedłużeniem linii $A_2\,s'$.

Linia wpływowa siły w pręcie qr pasa dolnego jest trójkątem $+ A_2\,q'B_2$.

3. Krzyżulec or

W prawej części dźwigara (od przekroju $\alpha - \alpha$) siła $P = 1$ porusza się od podpory B w lewo do węzła r.

Z równowagi sił lewej odciętej części otrzymamy:

$$+ S_{or}\,r_1 - Ae = 0,$$

skąd

$$S_{or} = \frac{Ae}{r_1},$$

ponieważ $A = \frac{z}{l}$,

to

$$S_{or} = \frac{ez}{lr_1},$$

które jest równaniem liniowym względem z; przy $z = d$ siła w krzyżulcu

$$S_{or} = + \frac{ed}{lr_1}.$$

Aby otrzymać rzędną linii wpływowej pod węzłem r, odkładamy pod lewą podporą (punkt A_3) $+ \frac{e}{r_1}$ i koniec rzędnej łączymy z prawą podporą (punkt B_3).

Pod węzłem r otrzymamy rzędną $+ \frac{ed}{lr_1}$.

Znak plus wskazuje, że na tym prawym odcinku linii wpływowej siły zewnętrzne rozciągają krzyżulec or.

Jeżeli siła $P = 1$ znajduje się na lewym odcinku dźwigara, to może ona poruszać się tylko w granicach od $x = 0$ do $x = m$.

Równanie równowagi wszystkich sił na prawej odciętej części względem bieguna M wyraża się wzorem:

$$- B\,(l + e) - S_{or}\, r_1 = 0,$$

skąd

$$S_{or} = - \frac{B\,(l + e)}{r_1};$$

ponieważ $B = \frac{x}{l}$,

to

$$S_{or} = - \frac{x\,(l + e)}{lr_1}.$$

Jest to również równanie liniowe względem zmiennej x. Linię prostą tego równania otrzymamy, jeżeli pod punktem B_3 odłożymy rzędną $\frac{1 + e}{r_1}$ połączymy punkt A_3 z końcem tej rzędnej.

Przy $x = m$ siła w krzyżulcu będzie:

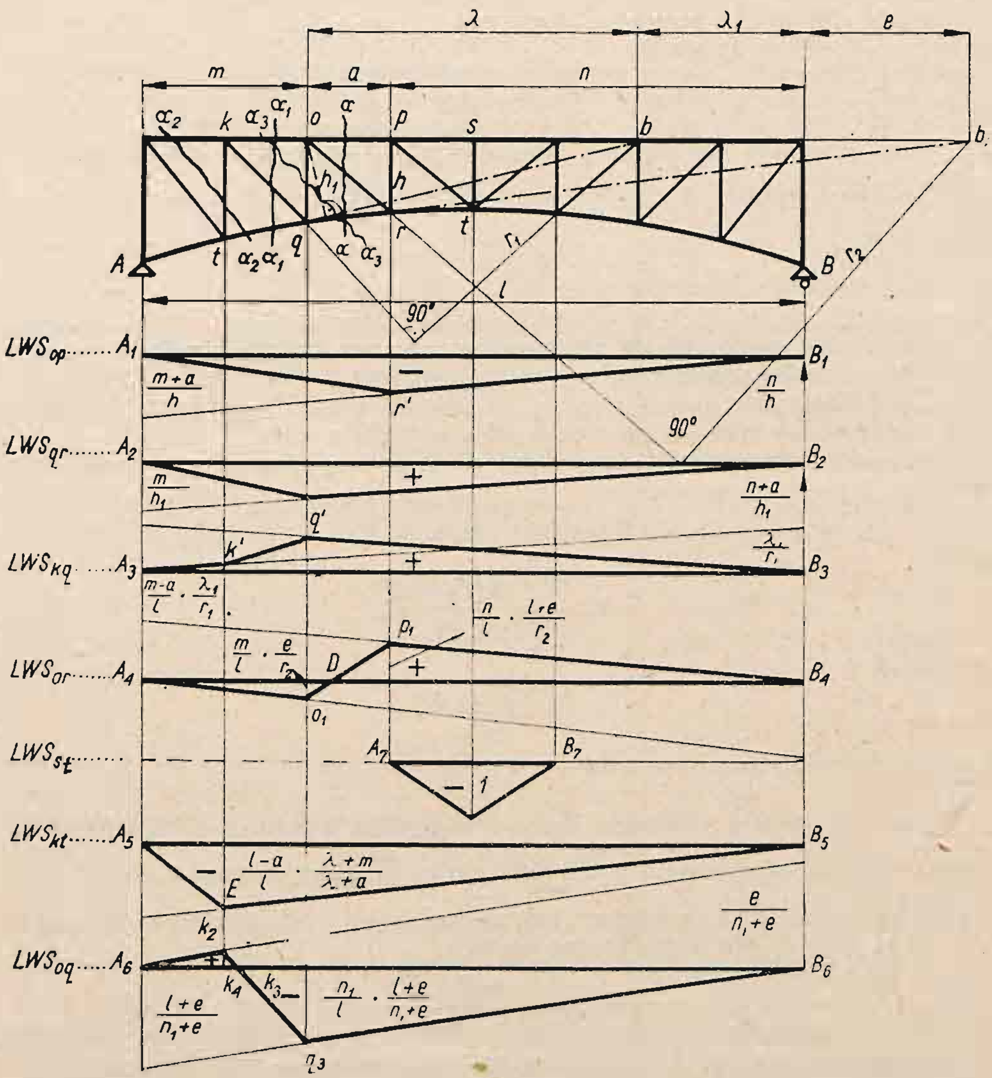
$$S_{or} = - \frac{m\,(l + e)}{lr_1}.$$

Pomiędzy węzłami r i o siła zewnętrzna przechodzi przez belki podłużne na węzły r i o według prawa dźwigni, a zatem wzdłuż linii prostej; łącząc punkty r'' i q'' otrzymamy kształt linii wpływowej siły w krzyżulcu ro w postaci dwóch trójkątów $= + A_3\, q''\, k$ i $- kr''B_3$.

Gdyby wieszaka oq nie było, linię wpływową siły w krzyżulcu otrzymalibyśmy w kształcie obwodu $A_3\, c'r''B_3$.

Przy dźwigarze wyżej rozpatrzonym, lecz odwróconym, tj. przy pasie górnym prostym, i pasie dolnym krzywym, a więc w moście z jazdą górą, linie wpływowe zmieniłyby tylko znaki: plusy na minusy i minusy na plusy. Części kratownicy, których obciążenie przy jeździe dołem wywoływało w krzyżulcach rozciąganie, przy jeździe górą powoduje ściskanie, a zamiast ściskania — rozciąganie.

d. Kratownica z jazdą górą, prostokątna z pasem dolnym wklęsłym i górnym prostym (rys. 146)



Rys. 146

1. Pasy górny i dolny

Linie wpływowe siły w pasach otrzymamy z równań momentów względem węzła r dla pasa górnego przedziału op oraz względem węzła o dla pasa dolnego przedziału qr.

Linie wpływowe sił w pasach — wyjaśnień nie wymagają.

2. Krzyżulce

Linie wpływowe sił w krzyżulcach będą dwojakiego rodzaju: jednego znaku dla tych krzyżulców, które punkt Rittera b (punkt przecięcia przedłużenia pasa dolnego w przedziale, w którym znajduje się rozpatrywany krzyżulec, z poziomym pasem górnym) mają w granicach pomiędzy podporami dźwigara i podwójnego znaku, jeżeli punkt Rittera b_1 położony jest na zewnątrz dźwigara.

a) Krzyżulec kq

Punkt Rittera znajduje się w punkcie b pomiędzy podporami dźwigara. Siła $P = 1$ znajduje się na prawej odciętej części kratownicy. Równanie równowagi sił dla lewej części jest następujące:

$$- S_{kq}\, r_1 + A\,(m + \lambda) = 0,$$

skąd
$$S_{kq} = + \frac{A\,(m + \lambda)}{r_1} = \frac{z}{l} \cdot \frac{(m + \lambda)}{r_1}$$

— jest to równanie prostej z rzędną nad podporą A równą $\frac{m + \lambda}{r_1}$.

Gdy siła $P = 1$ znajduje się na lewej odciętej części kratownicy, to równanie sił prawej części będzie:

$$- B\lambda_1 + S_{kq}\, r_1 = 0,$$

skąd
$$S_{kq} = + \frac{B\lambda_1}{r_1} = + \frac{x}{l} \cdot \frac{\lambda_1}{r_1}$$

— jest to równanie prostej z rzędną (nad podporą B) równą $\frac{\lambda_1}{r_1}$. Wielkość z może się zmieniać w granicach od 0 do $z = (n + a)$, x zaś zmienia się od zera do $(m - a)$.

Pomiędzy węzłami k i o siła $P = 1$ przenosi się na węzły według prawa dźwigni, a więc wzdłuż prostej $k'q'$, która łączy wierzchołki rzędnych $+ \frac{n + a}{l} \cdot \frac{m + \lambda_1}{r_1}$ i $+ \frac{m - a}{l} \cdot \frac{\lambda_1}{r_1}$.

Kształt linii wpływowej w krzyżulcu kq jest $+A_3\, k_1^1\, q^1\, B_3$.

b) Krzyżulec or

Punkt Rittera znajduje się w b_1, to jest poza obrębem rozpiętości dźwigara.

Równanie równowagi sił jest następujące:

$$- S_{or}\, r_2 + A\,(l + e) = 0,$$

skąd
$$S_{or} = + A\,\frac{l + e}{r_2} = + \frac{z}{l} \cdot \frac{l + e}{r_2} \quad \text{i}$$

$$+ S_{or}\, r_2 + Be = 0,$$

skąd
$$S_{or} = - B\,\frac{e}{r_2} = - \frac{x}{l} \cdot \frac{e}{r_2}\,.$$

Otrzymaliśmy dwa równania linii prostych z rzędnymi:

nad podporą A równą $+\frac{l+e}{r_2}$ i pod podporą B równą $-\frac{e}{r_2}$.

Pierwsza jako linia wpływowa w granicach od $z = 0$ do $z = n$, druga — od $x = 0$ do $x = m$.

Rzędne pod węzłami p i o są $\frac{n}{l} \cdot \frac{l+e}{r_2}$ i $\frac{m}{l} \cdot \frac{e}{r_2}$.

Połączenie linią prostą wierzchołków tych rzędnych określa ostatecznie linię wpływową siły w krzyżulcu or w postaci dwóch trójkątów $-A_4\, 0_1\, D$ i $+ Dp_1B_4$.

3. Linie wpływowe sił w słupkach kt i oq

Linie wpływowe sił w słupkach są dwojakiego rodzaju: jednego znaku, jeżeli punkt Rittera znajduje się pomiędzy podporami dźwigara i dwóch znaków, jeżeli punkt ten znajduje się poza granicami dźwigara.

a) Słupek kt

Rozpatrując lewą część dźwigara odciętą przekrojem $\alpha_2 - \alpha_2$, gdy siła $P = 1$ znajduje się na prawej części kratownicy w odległości z od prawej podpory B, otrzymamy równanie równowagi momentów sił względem bieguna b:

$$+ S_{kt}\,(\lambda + a) + A\,(\lambda + m) = 0,$$

skąd

$$S_{kt} = -A\,\frac{\lambda + m}{\lambda + a} = -\frac{z}{l} \cdot \frac{\lambda + m}{\lambda + a}.$$

Przy rozpatrywaniu prawej części kratownicy od przekroju $\alpha_2 - \alpha_2$, gdy siła $P = 1$ znajduje się na lewej części w odległości x od lewej podpory A, otrzymamy równanie równowagi sił względem bieguna b:

$$- S_{kt}\,(\lambda + a) - B\,\lambda_1 = 0,$$

czyli

$$S_{kt} = -B\,\frac{\lambda_1}{\lambda + a} = -\frac{x}{l} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda + a};$$

przy $z = l$ i $x = l$, siła

$$S_{kt} = -\frac{\lambda + m}{\lambda + a};\quad S_{kt} = -\frac{\lambda_1}{\lambda + a},$$

a więc pod podporą A należy odłożyć rzędną $-\frac{\lambda + m}{\lambda + a}$ i pod podporą B rzędną $-\frac{\lambda_1}{\lambda + a}$. Pierwsza z tych rzędnych kształtuje linię wpływową w granicach od zera do $l - a$, druga zaś równa się zeru przy $x = 0$.

Rzędna linii pod słupkiem kt jest równa $-\frac{(l - a)\,(\lambda + m)}{l\,(\lambda + a)}$. Połączenie końca tej rzędnej z podporami da zarys linii wpływowej siły w słupku kt w postaci trójkąta $- A_5\, EB_5$.

b) Słupek oq

Punkt Rittera b_1 znajduje się poza granicami kratownicy w odległości e od podpory B.

Przyjmując, że $(n + a) = n_1$, równanie równowagi sił części lewej i prawej kratownicy będzie następujące:

$$S_{oq}(n_1 + e) + A(l + e) = 0,$$

skąd

$$S_{oq} = -A\frac{l + e}{n_1 + e} = -\frac{z}{l}\cdot\frac{l + e}{n_1 + e}$$

oraz

$$-S_{oq}(n_1 + e) + Be = 0,$$

skąd

$$S_{oq} = B\frac{e}{n_1 + e} = \frac{x}{l}\cdot\frac{e}{n_1 + e};$$

przeto pod podporą A należy odłożyć rzędną $-\frac{l + e}{n_1 + e}$, nad podporą zaś B rzędną $+\frac{e}{n_1 + e}$ i końce tych rzędnych połączyć z punktami B_6 i A_6.

Pierwsza z tych linii kształtuje linię wpływową od B_6 do węzła o, druga zaś od A_6 do węzła k.

Rzędne pod węzłami o i k są: $-\frac{n_1}{l}\cdot\frac{l + e}{n_1 + e}$ i $+\frac{a}{l}\cdot\frac{e}{n_1 + e}$.

Połączenie końców tych rzędnych daje ostateczny kształt linii wpływowej siły w słupku oq w postaci dwóch trójkątów: $+ A_6k_3k_4$ i $- k_4q_3B_6$.

e. Kratownica z jazdą górą krzyżulcowa z pasem dolnym krzywym, pasem górnym prostym i ze wzmocnieniem górnym (rys. 147)

1. Pas górny, pręty op i pr

Z równowagi sił lewej i prawej odciętej części kratownicy (przecięcie $\alpha-\alpha$) otrzymamy równania:

przy sile $P = 1$, znajdującej się na prawej części kratownicy

$$S_{op}h + Am_1 = 0,$$

skąd

$$S_{op} = -A\frac{m_1}{h} = -\frac{z}{l}\cdot\frac{m_1}{h};$$

przy $z = l$

$$S_{op} = -\frac{m_1}{h};$$

przy sile $P = 1$, znajdującej się na lewej części kratownicy

$$-S_{op}h - Bn_1 = 0,$$

skąd

$$S_{op} = -B\frac{n_1}{h} = -\frac{x}{l}\cdot\frac{n_1}{h};$$

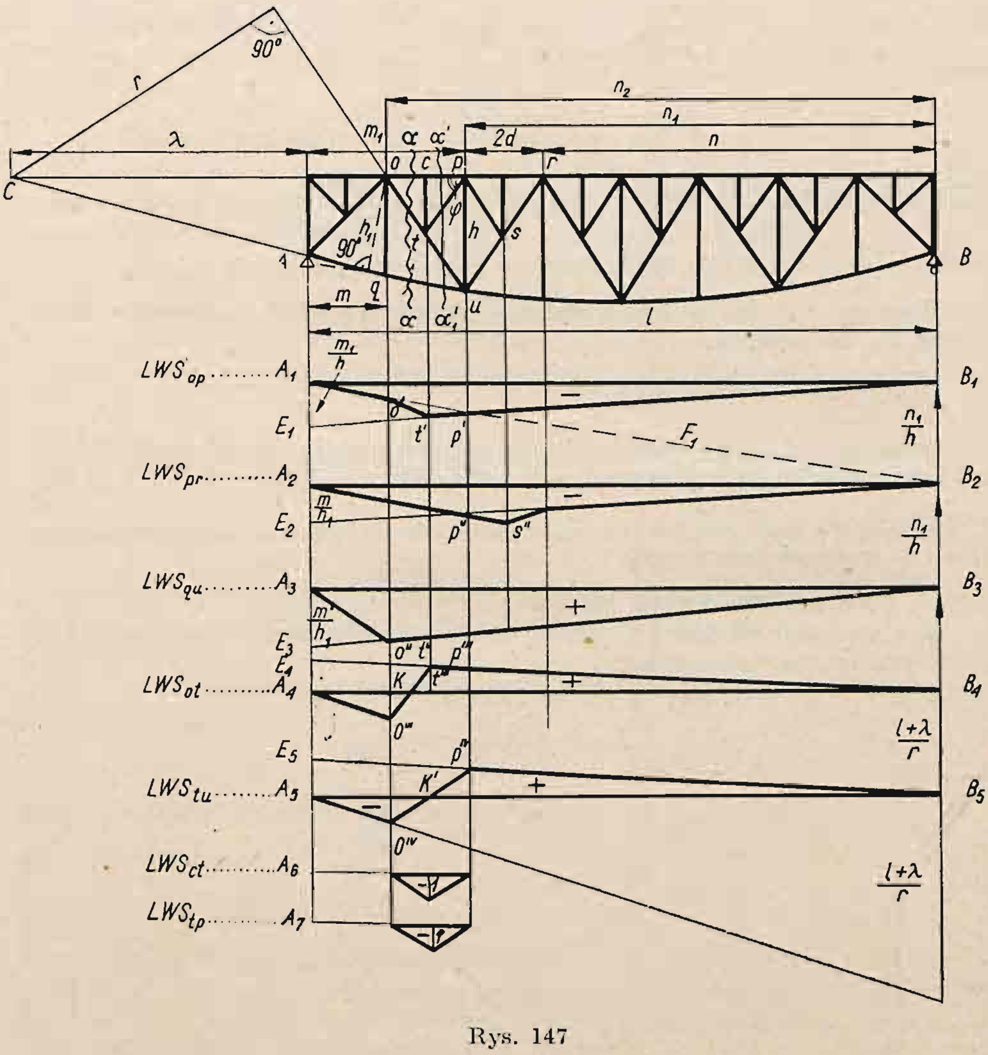
przy $x = l$

$$S_{op} = -\frac{n_1}{h}.$$

Odkładamy te rzędne pod punktami A_1 i B_1 i końce tych rzędnych łączymy odpowiednio z punktami B_1 i A_1. Otrzymamy dwie proste A_1F_1

i B_1 E_1 przecinające się pod węzłem p w punkcie p'; ponieważ z zmienia się w granicach od zera do $n_1 + d$ i x — od zera do m, to linie B_1 p' przedłużamy do punktu t' i punkt t' łączymy z o' zamykając w ten sposób linię wpływową w postaci wieloboku — $A_1 o' t' B_1$.

W podobny sposób otrzymamy linię wpływową dla pręta pasa górnego pr w postaci czworoboku A_2 $p''s''B_2$.



Rys. 147

2. Pas dolny, pręt qu

Równanie równowagi sił lewej odciętej części kratownicy, gdy siła $P = 1$ znajduje się na prawej części, uwzględniając momenty sił względem węzła o określa się wzorami:

$$- S_{qu} h_1 + A m = 0,$$

skąd

$$S_{qu} = A \frac{m}{h_1} = \frac{z}{l} \cdot \frac{m}{h_1}.$$

Z równowagi prawej odciętej części kratownicy przy sile $P = 1$ znajdującej się na lewej odciętej części kratownicy i uwzględniając momenty sił względem węzła o, wprowadzamy równanie:

$$S_{qu}\, h_1 - B\, n_2 = 0,$$

skąd

$$S_{qu} = B\frac{n_2}{h_1} = \frac{x}{l}\cdot\frac{n_2}{h_1}.$$

Z równań tych dwóch linii prostych, przy $x = z = l$, otrzymamy rzędne $\frac{m}{h_1}$ i $\frac{n_2}{h_1}$, które odkładamy pod punktami A_3 i B_3, a łącząc końce rzędnych z B_3 i A_3 przeprowadzamy proste B_3E_3 i A_3F_3.

Linia A_3o'' kształtuje linie wpływowe na odcinku A_3o'', gdyż odcięta x może mieć największą wartość m, linia zaś B_3E_3 — na odcinku $B_3\,t''$, gdyż może osiągać największą wartość n.

Pomiędzy punktami p''' i o'' jest odcinek prosty, który leży na linii B_3E_3, a więc linia wpływowa siły w pasie dolnym w pręcie u jest trójkątem $+\ A_3o''B_3$.

3. Krzyżulec *ou*, górna część *ot*

Z równowagi sił lewej odciętej części kratownicy względem punktu b (przecięcie się prętów op i qu), gdy siła $P = 1$ znajduje się na prawej części kratownicy, otrzymamy:

$$S_{ou}\, r - A\,\lambda = 0,$$

skąd

$$S_{ou} = A\,\frac{\lambda}{r} = \frac{z}{l}\cdot\frac{\lambda}{r}.$$

Dla prawej części kratownicy przy sile $P = 1$, znajdującej się na lewej odciętej części kratownicy, możemy napisać równanie:

$$-\,S_{ou}\, r - B(l + \lambda) = 0,$$

skąd

$$S_{ou} = -\,B\,\frac{l+\lambda}{r} = -\,\frac{x}{l}\cdot\frac{l+\lambda}{r}.$$

Proste B_4E_4 i $A_4\,o'''$ kształtują linię wpływową: pierwsza na odcinku B_4t''', druga zaś na odcinku A_4o'''.

Połączenie punktów o''' i t''' prostą zamyka linię wpływową siły w krzyżulcu ot, składającą się z dwóch trójkątów: $-\ A_4\,o'''K$ i $+\ kt'''B_4$.

Aby określić siłę w dolnej części tu krzyżulca ou, przecinamy kratownicę po linii $\alpha_1 - \alpha_1$ czyli przecinamy cztery pręty. Nie trudno zauważyć, że jeżeli nie ma siły zewnętrznej na odcinku op, to nie ma również i siły w półkrzyżulcu tp.

Z równowagi węzła t i z równania rzutów na oś pionową wynika, że siła w słupku równa się zeru; z równowagi zaś węzła o i z równania rzutów na oś prostopadłą do ou wynika, że i w półkrzyżulcu ot siła równa się zeru.

Siła $P = 1$ na prawej odciętej części kratownicy może przesunąć się (przy przecięciu dźwigara po $\alpha_1 - \alpha_1$) tylko do węzła p. Poza węzeł p siła $P = 1$ przesuwać się nie może, gdyż odcięty element pasa górnego od węzła p do przekroju $\alpha_1 - \alpha_1$ nie utrzyma żadnej siły pionowej, zakładając, że ten element jest połączony przegubowo w węźle p.

Również siła $P = 1$ może przesunąć się na lewą odciętą część kratownicy tylko do węzła o, gdyż poza tym węzłem cała część konstrukcji pomiędzy węzłem o i przekrojem $\alpha_1 - \alpha_1$ nie może utrzymywać żadnej siły pionowej przy założeniu, że ta część kratownicy jest połączona w węźle o za pomocą przegubu.

Powyższe rozważanie wskazuje na skrajne znaczenie odciętych x i z w równaniach równowagi, które otrzymaliśmy dla siły w górnym odcinku ot krzyżulca ou.

Równania dla górnego odcinka ot służą również i dla dolnego odcinka tu krzyżulca ou.

Siła znajdująca się pomiędzy węzłami o i p przenosi się na te węzły według prawa dźwigni, tj. wzdłuż linii prostej, która łączy punkty o^{IV} i p^{IV}.

Linia wpływowa siły w pręcie tu ma kształt dwóch trójkątów:

$$- A_5 \, o^{IV} k' \quad \text{i} \quad + k' p^{IV} B_5$$

f. Kratownica z jazdą dołem prostokątna, z pasem górnym krzywym, dolnym prostym i ze wzmocnieniem górnym (rys. 148)

1) Pas dolny, pręt qs

Z równowagi sił lewej części kratownicy odciętej przekrojem $\alpha - \alpha$, przy sile $P = 1$ znajdującej się na prawej odciętej otrzymamy:

$$- S_{qs} h + Am = 0,$$

skąd

$$S_{qs} = A \frac{m}{h} = \frac{z}{l} \cdot \frac{m}{h}. \tag{12}$$

Jeżeli siła $P = 1$ obciąża lewą odciętą część kratownicy, to równanie równowagi sił prawej odciętej części względem węzła o jest następujące:

$$S_{qs} h - Bn = 0,$$

skąd

$$S_{qs} = B \frac{n}{h} = \frac{x}{l} \cdot \frac{n}{h}. \tag{13}$$

Równanie (12) jest słuszne w granicach $z = 0$ i $z = n_1$, równanie zaś (14) może być brane pod rozwagę w granicach $x = 0$ i $x = m$; rzędne więc linii wpływowej pod węzłami q i s są: $\frac{m}{l} \frac{n}{h}$ i $\frac{m}{l} \cdot \frac{n_1}{h}$.

Odkładając odpowiednie wielkości pod węzłami q i s otrzymamy odcinki linii prostych określonych równaniami (12) i (13); odcinki te, przy $z = x = l$, są rzędnymi linii wpływowej pod podporami A i B.

Ponieważ odkładanie tych odcinków w jednej i tej samej skali wymaga dużo miejsca, przeto odkładamy tylko rzędne pod węzłami q i s.

Połączenie końca rzędnej q z punktami A_1 i B_1 określi całość linii wpływowej w postaci trójkąta $+A_1 q' B_1$.

Nie trudno przekonać się, że linia $q's'$ leży na linii $B_1 E_1$.

2) Pas górny, pręt op

Z równowagi sił na lewej odciętej części kratownicy (przecięcie $\alpha - \alpha$) przy sile $P = 1$ znajdującej się na prawej części wyprowadzamy równanie momentów względem węzła s

$$S_{op} h_1 + A m_1 = 0,$$

skąd

$$S_{op} = -A\frac{m}{h_1} = -\frac{z}{l}\cdot\frac{m_1}{h_1}.$$

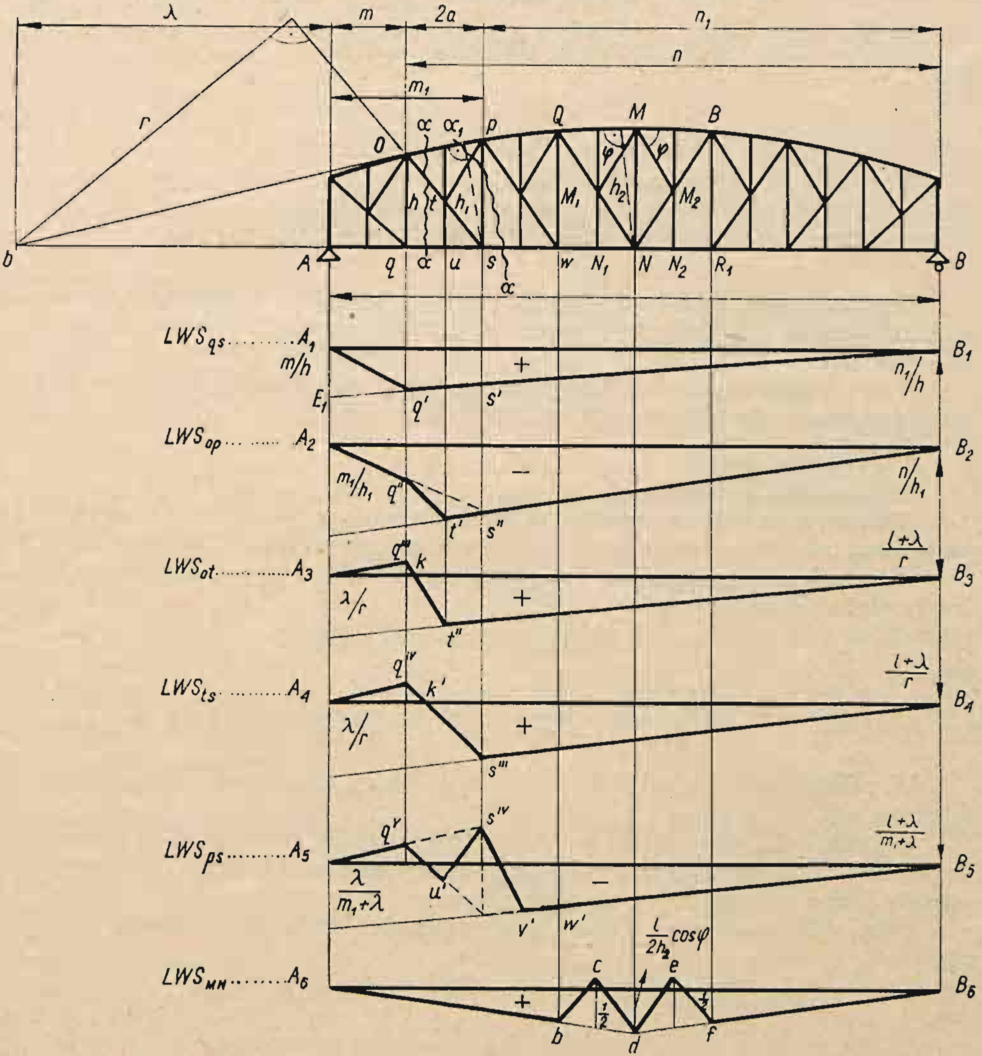
Dla prawej odciętej części kratownicy przy sile $P = 1$ położonej na lewej części otrzymamy równanie:

$$-S_{op}h_1 - Bn_1 = 0,$$

skąd

$$S_{op} = -B\frac{n_1}{h_1} = -\frac{x}{l}\cdot\frac{n_1}{h_1}.$$

Są to równania analogiczne do poprzednich równań, wyprowadzonych wyżej dla pasa dolnego; granice dla x i z są te same co i poprzednie.



Rys. 148

Rzędne pod węzłami q i s są: $\frac{n_1 m}{l h_1}$ i $\frac{m_1 n_1}{l h_1}$.

Odkładając te rzędne pod punktami q i s łączymy je z punktami A_2, B_2 i przedłużając linię $s'' B_2$ do punktu t' pod węzłem u oraz łącząc punkty q'' i t' otrzymamy linię wpływową siły w pręcie op pasa górnego, w postaci czworoboku — $A_2 q'' t' B_2$.

3. Krzyżulec os, odcinek górny ot

Moment sił bierzemy względem punktu b przecięcia się prętów op i qs (przekrój α—α).

Równania równowagi są:

$$S_{ot} r - A\lambda = 0,$$

skąd

$$S_{ot} = A\frac{\lambda}{r} = \frac{z\,\lambda}{l\,r} \qquad [14]$$

$$-S_{ot} r - B(l + \lambda) = 0,$$

skąd

$$S_{ot} = -B\frac{l+\lambda}{r} = -\frac{x}{l}\cdot\frac{l+\lambda}{r}. \qquad [15]$$

Przy $x = m$ i $z = n$ otrzymamy

$$S_{ot} = \frac{n\,\lambda}{l\,r} \quad \text{i} \quad S_{ot} = -\frac{m}{l}\cdot\frac{l+\lambda}{r}.$$

Równania (14) i (15) są równaniami linii prostych, a więc górny odcinek ot krzyżulca os ma linię wpływową w postaci dwóch trójkątów $-A_3 q''' K$ i $+ K t'' B_3$.

Dla dolnego odcinka ts krzyżulca os, jak w przypadku opisanym w p. e, linię wpływową będą stanowić dwa trójkąty $A_4 q^{IV} K'$ i $K' s''' B_4$.

4. Słupek ps

Kratownica przecięta po α_1—α_1.

Rozpatrujemy lewą odciętą część kratownicy; siła $P = 1$ znajduje się na prawej odciętej części i może się przesuwać od punktu B do punktu w.

Warunek równowagi lewej odciętej części kratownicy względem bieguna b określa się równaniem

$$-S_{ps}(m_1 + \lambda) - A\lambda = 0,$$

skąd

$$S_{ps} = -A\frac{\lambda}{m_1+\lambda} = -\frac{z}{l}\cdot\frac{\lambda}{m_1+\lambda}.$$

W półkrzyżulcu tp siła równa się zeru, jeżeli siła $P = 1$ znajduje się na odcinku sB.

W półkrzyżulcu tym siła powstaje tylko wtedy, gdy siła $P = 1$ znajduje się pomiędzy węzłami q i s, tj. gdy powstaje siła w wieszaku ut, co się udowadnia jak w przypadku kratownicy opisanej w p. e.

Warunek równowagi prawej odciętej części kratownicy określa się równaniem

$$S_{ps}(m_1 + \lambda) - B(l + \lambda) = 0,$$

skąd

$$S = B\frac{l+\lambda}{m_1+\lambda} = \frac{x}{l}\cdot\frac{l+\lambda}{m_1+\lambda}.$$

Ostatnie równanie jest słuszne w granicach $x = 0$ i $x = m$, gdyż tylko przy znajdowaniu się w tych granicach siły $P = 1$ nie istnieje siła w wieszaku ut, a zatem w półkrzyżulcu tp.

Z tych dwóch równań otrzymamy dwa odcinki linii wpływowej:

$$A_{5q}{}^{V} \text{ i } B_5 w'.$$

Jeżeli siłę $P = 1$ ustawimy w węźle s, czyli odcięta $x = m$, to otrzymamy rzędną $\frac{m_1}{l} \cdot \frac{(l + \lambda)}{m_1 \lambda}$, której wierzchołek s^{IV} znajduje się na linii $A_5\, q^V$ pod węzłem s.

Z równowagi węzła s wynika, że dla dowolnego położenia siły $P = 1$ na przęśle z wyjątkiem przedziałów $u - s - W$ siła w słupku $S_{ps} = S_{ts} \sin \varphi$, a więc kształt linii wpływowej siły w słupku ps jest identyczny, lecz o przeciwnym znaku niż siły w krzyżulcu ts. Natomiast dla położenia siły $P = 1$ w węźle s siła w słupku $S_{ps} = 1 - S_{ts} \sin \varphi$. Dla otrzymania linii wpływowej siły w słupku ps należy do linii wpływu siły ts, pomnożonej przez $-\sin \varphi$, dodać trójkąt o wysokości $+1$ w węźle s, o podstawie równej uv. Kształt linii wpływowej siły w słupku ps otrzymamy $A_5\, q^V u' s^{IV} v' B_5$.

5. Słupek środkowy MN

Linię wpływową siły w słupku środkowym MN wyprowadzimy z równań równowagi węzła M, rzutując siły na oś pionową.

Jeżeli oznaczymy siłę w słupku przez S_{MN}, a siłę w pasach MQ i MR przez S_M^Q i S_M^R, to przy sile $P = 1$, znajdującej się w węźle N, możemy napisać:

$$S_{MN} = (S_M^Q + S_M^R) \cos \varphi.$$

Przez φ oznaczyliśmy kąt, który tworzą pasy MQ i MR ze słupkiem MN;

ponieważ $$S_M^Q = S_M^R,$$

to $$S_{MN} = 2 S_M^Q \cos \varphi; \qquad S_M^Q = S_M^R = -\frac{l}{4h_2},$$

skąd

$$S_{MN} = \frac{l}{2h_2} \cos \varphi.$$

Siły w prętach $M\, M_1$ i $M\, M_2$ równają się zeru, gdy $P = 1$ znajduje się w węźle N_1.

Dzięki wzmocnieniu górnemu siła $P = 1$ ustawiona w węźle N_1 przez wieszak $M_1 N_1$ i półkrzyżulec $M_1\, Q$ i $M_1 M$ przenosi się na węzły Q i M po połowie, tj. po $P = \frac{1}{2}$.

Siła $P = \frac{1}{2}$ w węźle M wywoła w pasach MQ i MR siły, z których każda równa się

$$S = -\frac{l}{8h_2},$$

siła zaś $P = \frac{1}{2}$ w węźle Q wywoła w prętach QM i MR siły:

$$S_M^Q = -\frac{l + 2a}{8\, h_2} \quad \text{i} \quad S_M^R = -\frac{l - 2a}{8\, h_2}.$$

Po przesunięciu siły $P = 1$ na węzły Q i M wzmocnienie możemy odrzucić i napisać równanie równowagi węzła M.

Siła $P = \frac{1}{2}$ w węźle M wywoła siły w pasie górnym

$$S_M^Q = -\frac{l}{8h_2} \quad \text{i} \quad S_M^R = -\frac{l}{8h_2},$$

a siła $P = \frac{1}{2}$ w węźle Q wywoła siły w pasie górnym

$$S_M^Q = -\frac{l}{8h_2} \quad \text{i} \quad S_M^R = -\frac{l}{8h_2}$$

możemy więc napisać równanie:

$$S_{MN} = +\frac{1}{2} - \left(\frac{l}{4h_2} + \frac{l-4a}{4h_2}\right) \cos\varphi$$

skąd

$$S_{MN} = -\frac{1}{2} + \frac{(l-2a)}{2h_2} \cos\varphi.$$

Gdy siła $P = 1$ ustawi się na węźle N_2, to siły w pasach będą:

$$S_M^Q = -\frac{l-ha}{h_2}; \quad S_M^R = \frac{l-ha}{4h_2} \quad \text{i} \quad S_{MN} = +\frac{(l-ha)}{2h_2} \cos\varphi.$$

Gdyby nie było wzmocnienia górnego, to siła w słupku MN zmieniałaby się liniowo od zera pod punktami A i B do znaczenia $\frac{1}{2h_2}$ cos φ pod węzłem N.

Istnienie wzmocnienia sprawia, że pod węzłami N i N_2 trzeba od odpowiedniej rzędnej odjąć $\frac{1}{2}$.

Da to w wyniku dwa trójkąty o podstawie $2a$ i cała linia wpływowa siły w środkowym słupku MN przedstawi się w postaci pięciu trójkątów A_6 $b\ c\ d\ e\ f\ B_6$.

g. Kratownica z jazdą dołem, prostokątna z pasem górnym krzywym, dolnym prostym i ze wzmocnieniem dolnym (rys. 149)

1. Pas dolny, pręt ef

Kratownica przecięta po $\alpha-\alpha$. Siła $P = 1$ znajduje się na prawej odciętej części kratownicy i może przesuwać się do węzła f czyli $z = n_1$.

Z równowagi momentu sił znajdujących się na lewej odciętej części kratownicy względem węzła c otrzymamy:

$$-S_{ef}h + Am = 0,$$

skąd

$$S_{ef} = A\frac{m}{h} = \frac{z}{l}\frac{m}{h}.$$

Z równowagi momentu sił na prawej odciętej części kratownicy względem tego samego węzła c i przy sile $P = 1$, znajdującej się na lewej odciętej części, otrzymamy

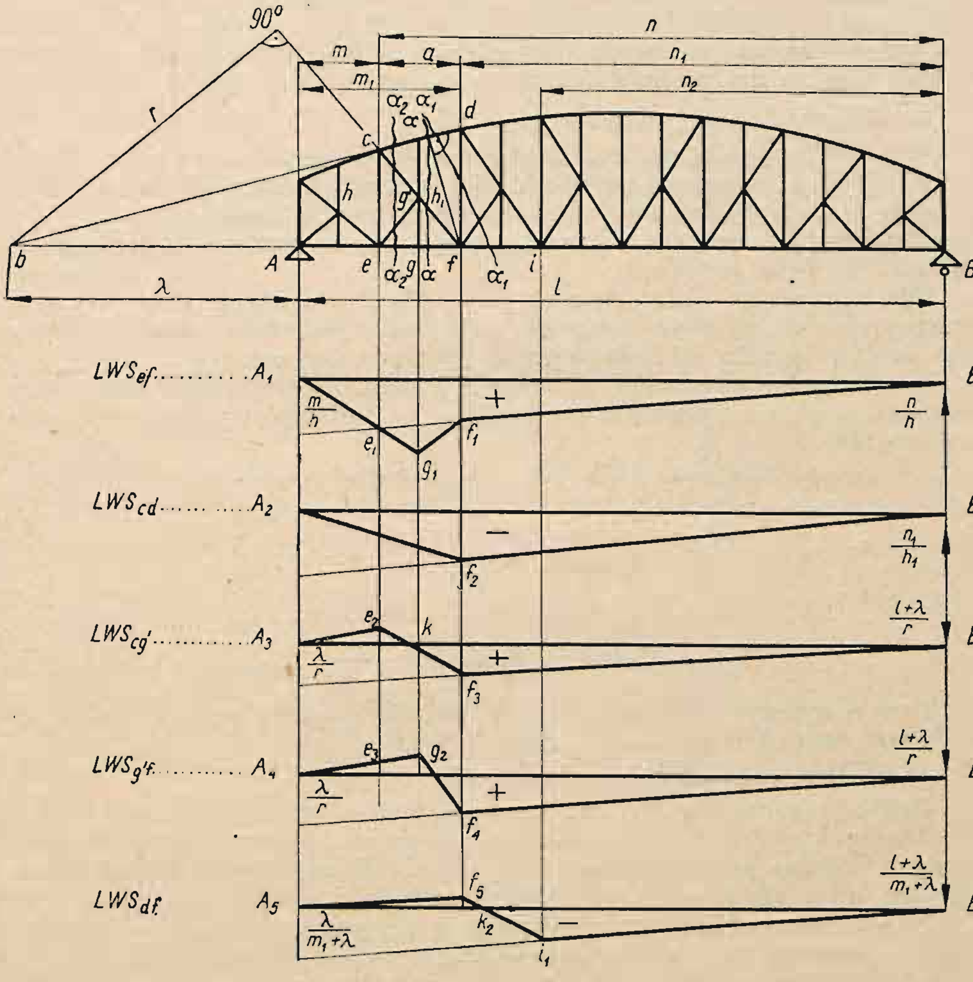
$$-S_{ef}h + Bn = 0,$$

skąd

$$S_{ef} = B\frac{n}{h} = \frac{x}{l}\frac{n}{h}.$$

Siła $P = 1$ może przesunąć się do węzła g, czyli $x = m_2$.

Z równań powyższych określimy rzędne pod punktami A i B; przy $z = l$ i $x = l$ będą one odpowiednio $\frac{m}{h}$ i $\frac{n}{h}$.



Rys. 149

Linia wpływowa zbudowana według tych rzędnych i granicznych wartości dla x i z stanowi czworobok $+ A_1 g_1 f_1 B_1$. Nie trudno zauważyć, że punkty e_1 i g_1 końców rzędnych pod węzłami e i g leżą na prostej określonej równaniem $S_{ef} = \frac{x}{l} \cdot \frac{n}{h}$.

2. Pas górny, pręt cd

Z równania momentów sił, działających raz na lewej i drugi raz na prawej odciętej części kratownicy względem węzła f przy przekroju $\alpha-\alpha$, wyprowadzamy dwa równania:

$$+S_{cd}\,h_1 + Am_1 = 0 \text{ i } -S_{cd}\,h_1 - Bn_1 = 0,$$

skąd

$$S_{cd} = -A\frac{m_1}{h_1} = -\frac{z}{l}\cdot\frac{m_1}{h_1}; \quad \text{przy } z = l \text{ siła } S_{cd} = -\frac{m_1}{h_1},$$

$$S_{cd} = -B\frac{m_1}{h_1} = -\frac{x}{l}\cdot\frac{n_1}{h_1}; \quad \text{przy } x = l \text{ siła } S_{cd} = -\frac{n_1}{h_1}.$$

Wykreślona na podstawie tych równań linia wpływowa siły w pręcie cd pasa górnego ma postać trójkąta — $A_2\, f_2 B_2$.

3. Krzyżulec cf, górna część cg^1

Przekrojem $\alpha_2-\alpha_2$ dzielimy dźwigar na dwie części.

Siła $P = 1$ na prawej odciętej części kratownicy może dochodzić tylko do węzła f, na lewej zaś odciętej części kratownicy do węzła e.

Pomiędzy węzłami siła ta może przenosić się na węzły e i f tylko przez odpowiednie belki podłużne.

Siła w pręcie eg^1 równa się zeru, jeżeli siła $P = 1$ znajduje się poza granicami przedziału ef, gdyż wtedy siła w wieszaku jest równa zeru i z równowagi węzła g^1 wynika, że i siła w pręcie eg^1 równa jest zeru.

Z równowagi momentów sił lewej i prawej odciętej części kratownicy względem punktu b (przecięcie się pasów cd i ef) otrzymamy dwa następujące równania:

$$S_{cg^1}r - A\lambda = 0 \text{ i } -S_{cg^1}r - B(l+\lambda) = 0,$$

skąd

$$S_{cg^1} = +A\frac{\lambda}{r} = +\frac{z}{l}\frac{\lambda}{r} \quad \text{i} \quad S_{cg^1} = -B\frac{l+\lambda}{r} = -\frac{x}{l}\cdot\frac{l+\lambda}{r};$$

przy $z = l$ i $x = l$

$$S_{cg^1} = \frac{\lambda}{r} \quad \text{i} \quad S_{cg^1} = \frac{l+\lambda}{r}.$$

Przy powyższych danych linia wpływowa siły w górnej części krzyżulca cg^1 ma kształt dwóch trójkątów: — $A_3 e_2 k$ i $kf_3 B_3$.

4. Dolna część $g'f$ krzyżulca cf

Dzielimy kratownicę na dwie części po linii $\alpha-\alpha$.

Analogiczne jak w p. 3 rozważania doprowadzą do wyżej podanych równań. Różnica polega tylko na tym, że największa odcięta x będzie równa $(m+a)$, gdyż siła $P = 1$ może się przesunąć do węzła g, zachowując przy równowadze lewej odciętej części kratownicy niezmienność układu. W wyniku punkt e_3 przesunie się o wielkość przedziału a, to jest do punktu g_2.

Linia wpływowa siły w dolnej części gf krzyżulca cf ma kształt dwóch trójkątów: — $A_4\, g_2\, f_4$ i $+\, g_2 f_4\, B_4$.

5. Slupek df

Przekrojem $\alpha_1-\alpha_1$ dzielimy dźwigar na dwa odcinki.

Równania równowagi momentów sił na tych dwóch odcinkach na każdym względem punktu b (przecięcie się prętów cd i ef) są następujące:

Lewa część kratownicy:

$$-S_{df}(m_1+\lambda) - A\lambda = 0,$$

skąd

$$S_{df} = -A\frac{\lambda}{m_1+\lambda} = -\frac{z}{l}\cdot\frac{\lambda}{m_1+\lambda}.$$

Prawa część

$$S_{df}(m_1+\lambda) - B(l+\lambda) = 0,$$

skąd

$$S_{df} = B\frac{l+\lambda}{m_1+\lambda} = \frac{x}{l}\cdot\frac{l+\lambda}{m_1+\lambda}.$$

Odcięta x może zmieniać się od zera do m_1, odcięta z — od zera do n_2. Końce rzędnych siły S_{df} przy tych znaczeniach x i z, połączone prostą, zamkną linię wpływową, gdyż pomiędzy węzłami f i i belka podłużna przeniesie siłę $P = 1$ według prawa dźwigni, tj. wzdłuż linii prostej.

Linię wpływową siły w słupku df otrzymamy w postaci dwóch trójkątów: $+A_5f_5k_2$ i $k_2i_1B_5$.

h. Kratownica z jazdą górą półkrzyżulcowa z pasami równoległymi (rys. 150)

1. Pas górny, pręt bc i pas dolny pręt $b'c'$

Kratownica przecięta po $\alpha-\alpha$.

Równania równowagi momentu względem węzła b': dla lewej części kratownicy

$$S_{bc}h + Am = 0, \qquad \text{skąd} \qquad S_{bc} = -A\frac{m}{h} = -\frac{z}{l}\cdot\frac{m}{h};$$

dla prawej części

$$-S_{bc}h - Bn = 0, \qquad \text{skąd} \qquad S_{bc} = -B\frac{n}{h} = -\frac{x}{l}\cdot\frac{n}{h}.$$

Odcięta z zmienia się od zera do $(n-a)$, odcięta zaś x od zera do m. Rzędne siły S_{bc} przy tych znaczeniach odciętych są:

$$-\frac{n-a}{l}\cdot\frac{m}{h} \text{ i } -\frac{m}{l}\cdot\frac{n}{h}.$$

Końce tych rzędnych leżą na prostej według równania $S_{bc} = -\frac{z\,m}{l\,h}$, czyli że linią wpływową siły w pasie górnym bc jest trójkąt — $A_1b_1B_1$.

Linię wpływową siły w pasie dolnym $b'c'$ otrzymamy w kształcie trójkąta $+A_2b_2B_2$, lecz ze znakiem $+$, gdyż równanie równowagi wyprowadzamy względem węzła b.

2. Krzyżulec cw

Kratownica przecięta po $\alpha_1-\alpha_1$.

Z równowagi sił otrzymamy

$$-A - S'_{cw}\sin\varphi + S''_{c'w}\sin\varphi = 0. \qquad [16]$$

Z równowagi węzła w wynika, że

$$S'_{cw}\cos\varphi + S''_{c'w}\cos\varphi = 0,$$

a przeto

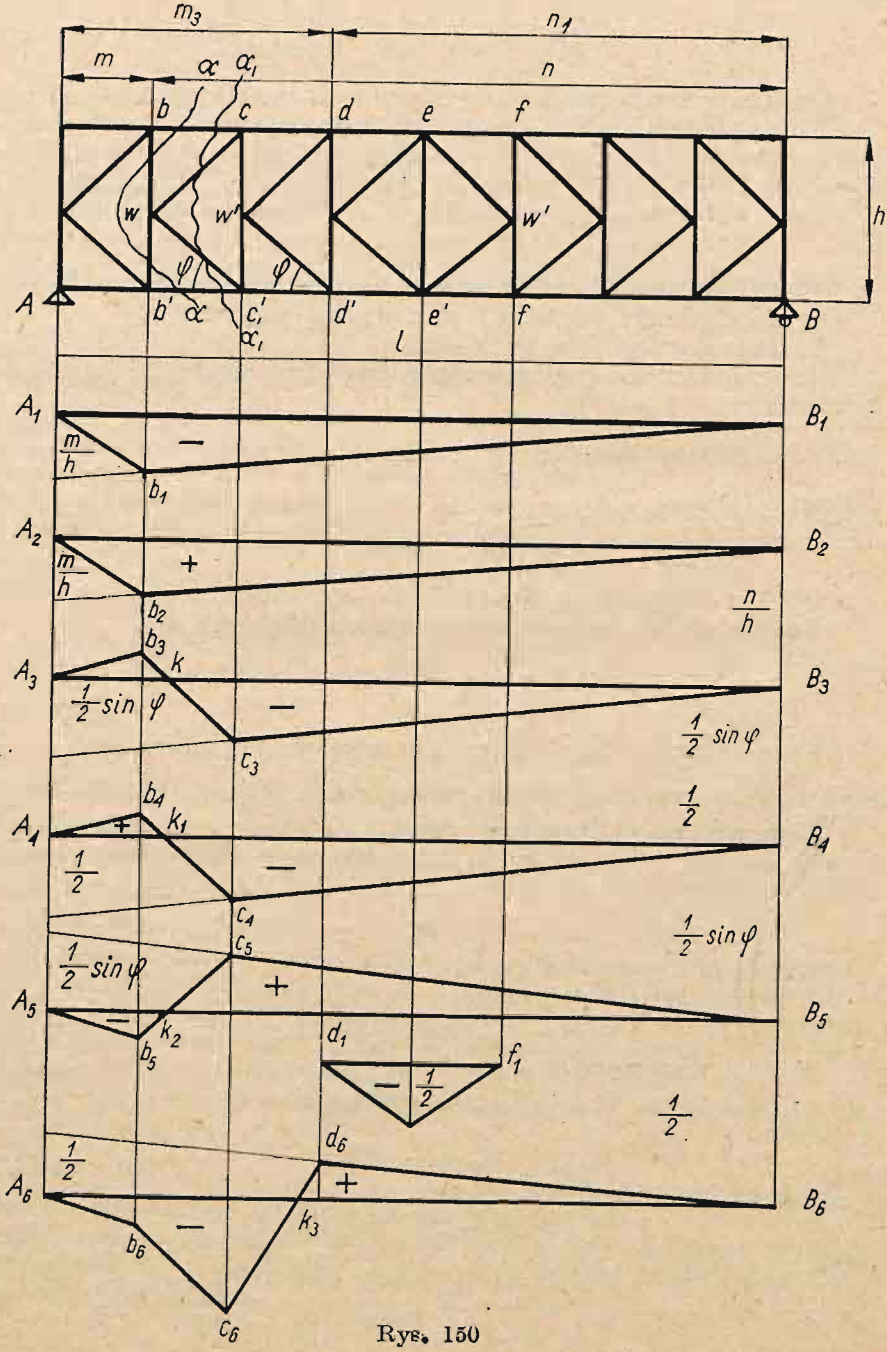
$$S'_{cw} = -S''_{c'w}$$

i równanie (16) przyjmuje postać

$$-A - 2S'_{cw}\sin\varphi = 0, \qquad [17]$$

skąd

$$S'_{cw} = -A\frac{1}{2\sin\varphi} = -\frac{z}{l}\frac{1}{2\sin\varphi}.$$


m3
n1
m
α
α1
n
b
c
d
e
f
h
w
w'
w'
φ
φ
A
b'
α
c'
α1
d'
e'
f
B
l
LWSbc
A1
B1
m/h
−
b1
LWSb'c'
A2
B2
m/h
+
b2
n/h
b3
k
LWScw
A3
B3
1/2 sin φ
−
c3
1/2 sin φ
b4
1/2
k1
LWSw'c'
A4
+
B4
1/2
−
c4
1/2 sin φ
c5
1/2 sin φ
+
LWSwc'
A5
−
B5
k2
d1
LWSee'
b5
f1
− 1/2
LWScw'
1/2
d6
1/2
+
A6
B6
k3
−
b6
c6

Rys. 150

Warunek równowagi prawej części kratownicy określa się równaniem:

$$-B + S'_{cw} \sin\varphi - S''_{c'w} \sin\varphi = 0;$$

ponieważ

$$S'_{cw} = -S''_{c'w},$$

to

$$S'_{cw} = B \frac{1}{2 \sin\varphi} = \frac{x}{l} \frac{1}{2 \sin\varphi}.$$

Nad podporami odpowiednie rzędne są: $-\dfrac{1}{2 \sin\varphi}$ i $+\dfrac{1}{2 \sin\varphi}$. Długość odciętych zmienia się w granicach dla z od zera do $(n-a)$, dla x od zera do m.

Na podstawie tych wielkości kreślimy linię wpływową w kształcie dwóch trójkątów:

$$+A_3 b_3 k \text{ i } -kc_3 B_3.$$

3. Słupek $w'c'$

Oznaczamy siły w krzyżulcach cw i wc' przez S'_k i S''_k.

Z równowagi węzła c', rzutując siły na oś pionową, otrzymamy:

$$-S_{w'c'} - S''_k \sin\varphi = 0,$$

skąd

$$S_{w'c'} = -S''_k \sin\varphi = -\frac{1}{2}\frac{x}{l} \text{ i } S'_{w'c'} = +\frac{1}{2}\frac{z}{l}.$$

Linia wpływowa siły w dolnej części słupka będzie tego samego kształtu co i w krzyżulcu cw, z tym że na pionowych liniach pod podporami należy odkładać zamiast rzędnych

$$\frac{1}{2 \sin\varphi} \text{ rzędne } \frac{1}{2 \sin\varphi} \sin\varphi = \frac{1}{2}.$$

Linia wpływowa w słupku $w'c'$ ma kształt dwóch trójkątów:

$$+A_4 b_4 k_1 \text{ i } -k_1 c_4 B_4.$$

4. Krzyżulec wc'

W sposób jak wyżej otrzymamy linię wpływową siły w krzyżulcu wc' w postaci dwóch trójkątów:

$$-A_5 b_5 k_2 \text{ i } +k_2 c_5 B_5.$$

Różnica w porównaniu z krzyżulcem cw wyrazi się tylko w znakach: plusy przejdą w minusy, a minusy w plusy.

5. Słupek cw'

Siły w krzyżulcach, jak poprzednio, oznaczamy przez S'_k i S''_k.

Z równowagi węzła c, rzutując siły na oś pionową (o ile siła $P = 1$ znajduje się poza przedziałami bc i cd), otrzymamy:

$$S_{cw'} + S'_k \sin\varphi = 0,$$

skąd

$$S_{cw'} = -S'_k \sin\varphi.$$

Jeżeli siła $P = 1$ znajduje się na prawej odciętej części dźwigara, to

$$S'_k = -\frac{z}{l}\frac{1}{2 \sin\varphi};$$

przy z zmieniającym się w granicach od zera do długości odcinka Bd', tj. do węzła d i stąd $S_{cw'} = +\dfrac{z}{l}\dfrac{1}{2}$.

Przy sile $P = 1$, znajdującej się na lewej odciętej części kratownicy w granicach Ab', równanie równowagi wypadnie:

$$S_{cw'} + S'_k \sin\varphi = 0,$$

skąd

$$S_{cw'} = -S'_k \sin\varphi = -\frac{x}{l}\frac{1}{2\sin\varphi}\cdot\sin\varphi = -\frac{1}{2}\frac{x}{l}.$$

Zatem na odcinkach Ab' i Bd' będziemy mieć odcinki prostych, wyrażonych równaniami: $S_{cw'} = +\frac{1}{2}\frac{z}{l}$ i $S'_{cw'} = -\frac{1}{2}\frac{x}{l}$.

Nad węzłami b' i d' otrzymamy rzędne: $-\frac{1}{2}\frac{m}{l}$ i $\frac{1}{2}\frac{n}{l}$.

Jeżeli siła $P = 1$ przesunie się na węzel c, to z równania równowagi węzła c wyrazi się wzorem:

$$S'_{cw'} + 1 + S'_k \sin\varphi = 0.$$

$$S'_{cw'} = -1 - S'_k \sin\varphi;$$

ponieważ

$$S'_k = -\frac{1}{2\sin\varphi}\cdot\frac{z}{l}\sin\varphi = -\frac{1}{2}\frac{z}{l},$$

to

$$S'_{cw'} = -1 + \frac{1}{2}\frac{z}{l}.$$

Pod węzłem c otrzymaliśmy z równania $S_{cw'} = +\frac{1}{2}\frac{z}{l}$ rzędną $\frac{1}{2}\frac{n_1 + a}{l}$; odejmując od tej rzędnej 1, otrzymamy punkt c_6. Punkt c_6 łączymy z rzędnymi linii wpływowej pod węzłami b i d, gdyż pomiędzy tymi punktami siła $P = 1$ przenosi się według prawa dźwigni.

Linia wpływowa siły w słupku cw' przyjmuje postać:

$$-A_6 b_6 c_6 k_3 \quad \text{i} \quad +k_3 d_6 B_6$$

6. Słupek ee'

Siły w krzyżulcach S'_k i S''_k.

Siłę w słupku ee' znajdziemy z równowagi sił w węźle e', rzutując siły prętów schodzących się w tym węźle na oś pionową:

$$S'_k \sin\varphi + S''_k \sin\varphi + S'_{ee'} = 0,$$

skąd

$$S'_{ee'} = -(S'_k + S''_k)\sin\varphi.$$

Linią wpływową siły S'_k na odcinku Ad' jest linia prosta określona równaniem:

$$S'_k = -\frac{1}{2\sin\varphi}\frac{x}{l}$$

i pod węzłem d' jej rzędna jest $-\frac{1}{2\sin\varphi}\frac{m_3}{l}$.

Linią wpływową S''_k na odcinku Ad' jest prosta określona równaniem:

$$S''_k = \frac{1}{2\sin\varphi}\frac{x}{l}$$

i pod węzłem d' jej rzędna jest $+\frac{1}{2\sin\varphi}\frac{m_3}{l}$; stąd pod węzłem d' siła $S'_{ee'} = 0$.

W ten sam sposób otrzymamy, że pod węzłem f siła $S_{ee'} = 0$ i na odcinkach Ad' i fB rzędne dla siły $S'_{ee'}$ są równe zeru. Pod węzłem e siły S'_k i S''_k obliczamy ze wzorów:

$$S'_k = \frac{1}{2 \sin \varphi} \frac{x}{l} = \frac{1}{2 \sin \varphi} \frac{l}{2l} = \frac{1}{4 \sin \varphi}.$$

Pod tymże węzłem

$$S''_k = \frac{1}{4 \sin \varphi}$$

siła $S'_{ee'}$ wyrazi się wzorem

$$S'_{ee'} = -(S'_k + S''_k) \sin \varphi = -\frac{1}{2}.$$

Linią wpływową siły w słupku ee' jest trójkąt o podstawie $d_1 f_1 = 2a$ i wysokości $-\frac{1}{2}$.

W kratownicy z jazdą dołem półkrzyżulcowej z pasami równoległymi linie wpływowe sił w obu pasach i wszystkich krzyżulcach pozostają te same co w kratownicy z jazdą górą.

W tym przypadku linia wpływowa w słupku dolnym będzie tego samego kształtu co w słupku kratownicy z jazdą górą, z tą różnicą, że siła $P = 1$ w węźle pod słupkiem będzie słupek rozciągać, czyli linię wpływową należy odłożyć w dół ze znakiem plus. Słupek środkowy będzie rozciągany, a nie ściskany.

Linia wpływowa sił w słupku podporowym kratownicy z jazdą górą będzie taka sama jak reakcja podpory belki swobodnie podpartej, tj. będzie to linia prosta z rzędną równą jedności pod podporą. W kratownicy z jazdą dołem linia wpływowa siły w słupku podporowym jest ścięta od podpory do najbliższego węzła kratownicy, gdyż siła $P = 1$ przenosi się w tych granicach według prawa dźwigni bezpośrednio na podporę, nie działając na słupek.

i. Kratownica z jazdą górą, krzyżulcowa podwójna z pasami równoległymi, o układzie statycznie wyznaczalnym zwanym układem Dietza (rys. 151)

Kratownica z podwójnymi krzyżulcami należy do układu wewnętrznie statycznie wyznaczalnego, jak zresztą wszystkie kratownice o kracie wielokrotnej, w których krzyżulce tak są ułożone, że idąc od węzła o_1 ku węzłowi *3* i posuwając się dalej wzdłuż krzyżulców można przejść nieprzerwanym ruchem postępowym przez wszystkie krzyżulce kratownicy i powrócić do węzła wyjściowego o_1.

Z równowagi węzłów *1* i o oczywiście możemy znaleźć siły w prętach $o-o_1$, $o-2$, o_1-1 i $1-3$.

Mając te siły możemy następnie z równowagi sił w węźle o znaleźć siły w prętach $o-3$ i $o-2$.

Z równowagi dalszych węzłów ustalimy, że z czterech prętów każdego węzła siły w dwóch z nich są wiadome, w dwóch zaś drugich obliczymy z równań statyki: $\Sigma X = 0$ i $\Sigma Y = 0$.

1. Linie wpływowe sił w krzyżulcach

Pochylenie wszystkich krzyżulców do pasów jest jednakowe pod kątem φ.

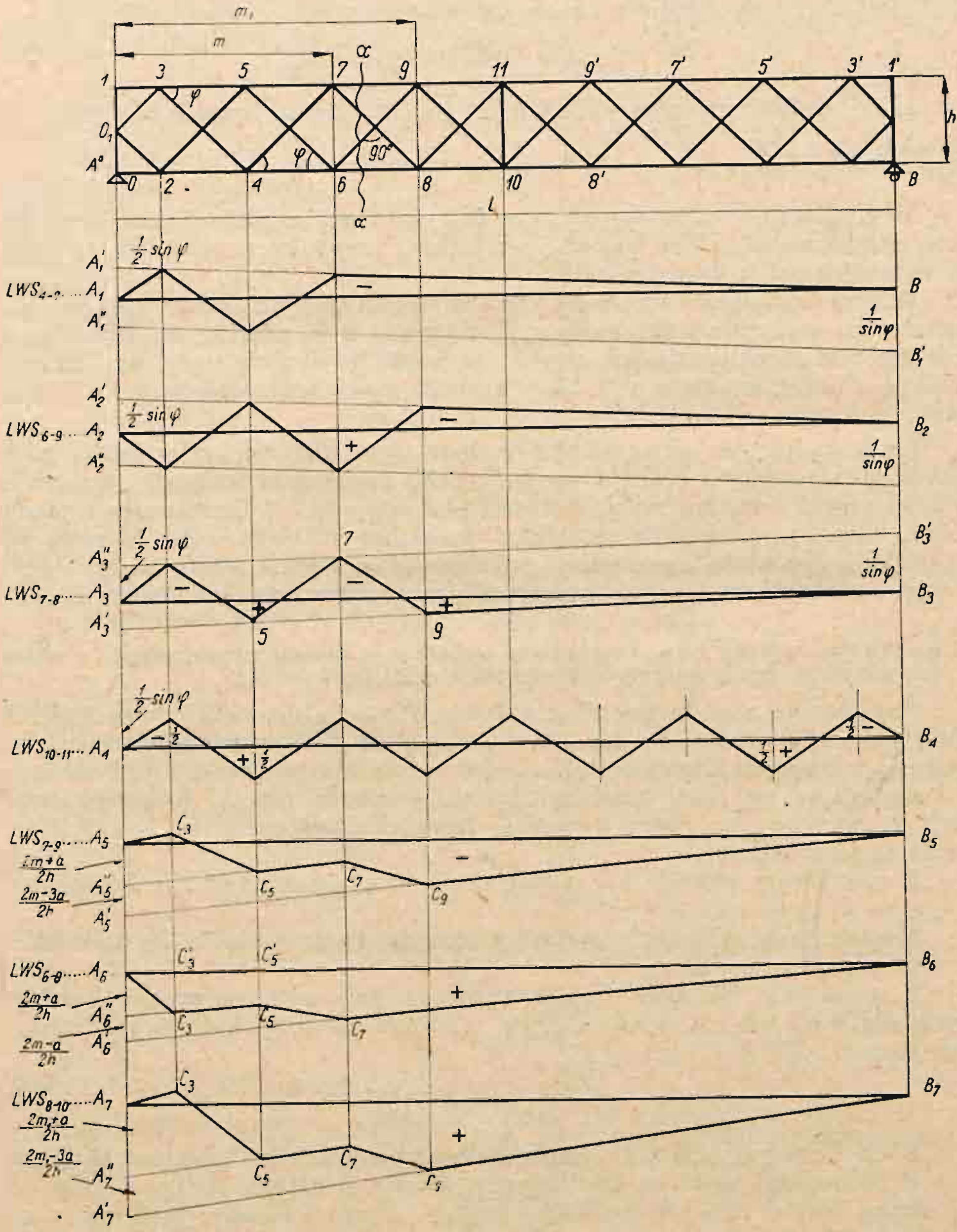
Z równowagi węzła o_1 znajdujemy, że siły w krzyżulcach o_1-3 i o_1-2 są równe, lecz o różnych znakach: pręt o_1-3 jest ściskany, pręt zaś o_1-2 rozciągany.

Jeżeli przez A oznaczamy reakcję podpory A, to siły w prętach o_1-3 i o_1-2 będą równe

$$S_{0_1-3} = -\frac{A}{2\sin\varphi} \text{ i } S_{0_1-2} = +\frac{A}{2\sin\varphi}.$$

Z równowagi węzła 3, rzutując siły na oś pionową, otrzymamy równanie:

$$S_{0_1-3}\sin\varphi + S_{3-4}\sin\varphi = 0,$$



Rys. 151

czyli

$$S_{3-4} = -S_{0_1-3} = +\frac{A}{2\sin\varphi}.$$

Posuwając się tak dalej otrzymamy:

$$S_{4-7} = -S_{3-4} = -\frac{A}{2\sin\varphi};$$

$$S_{2-5} = -S_{0_1-2} = -\frac{A}{2\sin\varphi};$$

$$S_{5-6} = +\frac{A}{2\sin\varphi};$$

$$S_{6-9} = -\frac{A}{2\sin\varphi};$$

$$S_{9-10} = +\frac{A}{2\sin\varphi}.$$

Z równowagi węzła *7* przy sile $P = 1$ znajdującej się w węźle *7* otrzymamy

$$S_{4-7}\sin\varphi + S_{7-8}\sin\varphi + 1 = 0,$$

ponieważ

$$S_{4-7} = -\frac{A}{2\sin\varphi};$$

to

$$S_{7-8} = \frac{A}{2\sin\varphi} - \frac{1}{\sin\varphi} \text{ i } S_{8-11} = \frac{1}{\sin\varphi} - \frac{A}{2\sin\varphi}.$$

Jeżeli siła $P = 1$ znajduje się w węźle *3*, to

$$-S_{0_1-3}\sin\varphi - S_{3-4}\sin\varphi - 1 = 0;$$

ponieważ

$$S_{0_1-3} = \frac{A}{2\sin\varphi},$$

to

$$S_{3-4} = \frac{A}{2\sin\varphi} - \frac{1}{\sin\varphi}$$

i analogicznie

$$S_{4-7} = \frac{1}{\sin\varphi} - \frac{A}{2\sin\varphi}.$$

Aby otrzymać rzędną linii wpływowej siły w pręcie *4 — 7*, należy odłożyć na linii pionowej nad podporą A powyżej linii A_1B_1 rzędną $\frac{1}{2\sin\varphi}$ i łącząc jej koniec A_1' z końcem B_1 linią $A_1'B_1$ otrzymamy wtedy linię wpływową $-\frac{A}{2\sin\varphi}$.

Odkładając rzędną $+\frac{1}{2\sin\varphi}$ pod linią A_1B_1, pod podporą A i przeprowadzając z końca tej rzędnej linię równoległą do $A_1'B_1$ otrzymamy sumę rzędnych między liniami $A_1'B_1$ i $A_1''B_1'$ równą $1/\sin\varphi$.

Ponieważ górny odcinek rzędnej wynosi $A/2\sin\varphi$, to i dolny odcinek wyniesie $1/\sin\varphi - A/2\sin\varphi$.

Dla siły w krzyżulcu *6 — 9* otrzymamy linię wpływową, przedstawioną na rys. 151.

2. Linia wpływowa siły w krzyżulcu *7 — 8*

Dopóki siła $P = 1$ znajduje się z prawej strony od węzła 9, to siła w krzyżulcu *7 — 8* będzie równa sile w krzyżulcu *0₁-3*, lecz z odwrotnym znakiem

$$S_{7-8} = -S_{0_1-3} = +\frac{A}{2\sin\varphi}.$$

Jeżeli siła $P = 1$ stanie nad węzłem *3* i *7*, to

$$S_{7-8} = \frac{A}{2\sin\varphi} - \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Gdy siła $P = 1$ stanie nad węzłem *5*, to

$$S_{7-8} = +\frac{A}{2\sin\varphi}.$$

Pod linią poziomą A_3B_3, pod podporą A, odkładamy rzędną $\frac{1}{2}\sin\varphi$ i łącząc koniec jej A_3 z punktem B_3 otrzymamy linię wpływową wielkości $+\frac{A}{2\sin\varphi}$.

Nad linią A_3B_3, nad podporą A, odkładamy również rzędną $\frac{1}{2}\sin\varphi$ i z końca jej A_3'' prowadzimy linię równoległą $A_3''B_3'$.

Odległość pomiędzy tymi liniami mierzona pionowo daje wszędzie wielkość $1/\sin\varphi$.

Odległość zaś pomiędzy $A_3''B_3'$ i A_3B_3, licząc wzdłuż pionu, daje wielkość

$$-\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{A}{2\sin\varphi}\right).$$

Pod węzłami *3* i *7* linia wpływowa będzie dochodzić do linii $A_3''B_3'$, w pozostałych węzłach będzie przechodzić przez linię $A_3'B_3$.

Pomiędzy węzłami *3, 5, 7* i *9* punkty górne należy łączyć z punktami dolnymi, stosując prawo dźwigni prostej.

3. Linia wpływowa w słupku środkowym *10—11*

Jeżeli siła $P = 1$ znajduje się z prawej strony słupka, np. w węźle *3*, to siła w krzyżulcu *8—11* równa się

$$S_{8-11} = \frac{1}{\sin\varphi} - \frac{A}{2\sin\varphi},$$

siła zaś w krzyżulcu *11—8*

$$S_{11-8} = \frac{B}{2\sin\varphi}.$$

Z równowagi węzła *11*, rzutując siły na oś pionową, mamy:

$$-S_{10-11} - S_{8-11}\sin\varphi - S_{11-8}'\sin\varphi = 0,$$

$$S_{10-11} = -\sin\varphi\,(S_{8-11} + S_{11-8}') =$$

$$= -\sin\varphi\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{A}{2\sin\varphi} - \frac{B}{2\sin\varphi}\right) = -\left(1 - \frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Jeżeli siła $P = 1$ przesunie się do węzła *5*, to siła w krzyżulcu

$$S_{8-11} = \frac{A}{2 \sin \varphi},$$

siła zaś w krzyżulcu S_{11-8}' będzie miała wielkość $- \frac{B}{2 \sin \varphi}$.

Z równowagi węzła *11* otrzymamy:

$$-S_{10-11} - S_{8-11} \sin \varphi - S_{11-8}' \sin \varphi = 0,$$

czyli

$$S_{10-11} = - \sin \varphi \,(S_{8-11} + S_{11-8}') = + \frac{A + B}{2} = + \frac{1}{2}.$$

Gdy siła $P = 1$ przejdzie do węzła *7*, to $S_{10-11} = - \frac{1}{2}$ itd.

Przeto linia wpływowa siły w słupku *10—11* będzie przechodzić pod węzłami z plus na minus rzędnymi równymi na przemian to $+ \frac{1}{2}$, to $- \frac{1}{2}$.

4. Linia wpływowa siły w pasie górnym, pręt *7—9*

Aby wykreślić linię wpływową siły w pasie górnym, np. w przedziale *7—9*, kratownicę przecinamy po $\alpha - \alpha$.

Z równowagi sił w lewej odciętej części kratownicy, biorąc momenty sił względem węzła *6*, otrzymamy momenty siły tylko w dwóch prętach: *7—9* i *7—8*.

Ponieważ siłę w pręcie *7—8* obliczymy na podstawie linii wpływowej sił w krzyżulcach, przeto niewiadomą pozostanie tylko jedna siła w pręcie *7—9* którą znajdziemy z równowagi momentów sił względem węzła *6*.

Gdy siła $P = 1$ znajduje się na prawej odciętej części dźwigara między węzłami *1'* i *9*, to siła w krzyżulcu *7—8* równa się $S_{7-8} = + \frac{A}{2 \sin \varphi}$.

Równanie momentu względem punktu *6* wyraża się wzorem

$$S_{7-9}\, h + S_{7-8}\, r + A m = 0,$$

gdzie $r = a \sin \varphi$,

m — odległość podpory A do węzła *7*;

stąd

$$S_{7-9} = - \frac{A}{2\,h} (2m + a) = - \frac{x\,(2m + a)}{2\,h\,l};$$

granicą dla x są węzły *o* i *1'* $\div$ *9*.

Siła S_{7-9} zmienia się według równania linii prostej, którą otrzymamy, odkładając na rzędnej pod podporą A wielkość $\frac{2m + a}{2\,h}$ i łącząc wierzchołek tej rzędnej z punktem B_5.

Gdy siła $P = 1$ znajduje się nad węzłem *3*, to równanie równowagi jest:

$$S_{7-9}\, h + A m - 1 \left(m - \frac{a}{2}\right) + S_{7-8}\, a \sin \varphi = 0;$$

ponieważ

$$S_{7-8} = - \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{A}{2 \sin \varphi},$$

to

$$S_{7-9} = -\frac{A\,(2m + a)}{2\,h} + \frac{2m + a}{2\,h} = -\frac{x\,(2m + a)}{2\,l\,h} + \frac{2m + a}{2\,h}.$$

Przy $x = l$ siła $S_{7-9} = 0$.

Dalszą zmianę wielkości siły S_{7-9} otrzymamy, jeżeli od linii $B_5A'_5$ odejmiemy $\frac{2m + a}{2\,h}$, tj. przeprowadzimy z punktu A_5 do punktu *3* linię równoległą do A'_5B_5; dalej następuje zmiana, gdyż wielkość siły S_{7-8} zmienia swą wielkość przy przejściu siły $P = 1$ do węzła *5*.

Wielkość siły S_{7-9} przy sile $P = 1$ w węźle 5 obliczamy ze wzorów:

$$S_{7-8} = +\frac{A}{2\sin\varphi};$$

$$S_{7-9} = -\frac{A\,(2m + a)}{2\,h} + \frac{2m - 3a}{2\,h} = -\frac{x\,(2m + a)}{2\,h\,l} + \frac{2m - 3a}{2\,h}.$$

Pierwszy wyraz tej wielkości S_{7-9} to rzędna linii $B_5A'_5$ pod węzłem *5*; drugi wyraz $\frac{2m - 3a}{2\,h}$, który należy odjąć od tej rzędnej, otrzymamy przeprowadzając linię równoległą do linii A'_5B_5 przez punkt c, położony na linii $A_5A'_5$ w ten sposób, że odcinek cA'_5 równa się rzędnej $\frac{2m - 3a}{2\,h}$; na pionie pod węzłem *5* otrzymamy punkt c_5, który określa siłę S_{7-9} w tym węźle.

Ustawiając następnie siłę $P = 1$ w węźle *7* otrzymamy:

$$S_{7-8} = -\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{A}{\sin\varphi}$$

wielkość siły

$$S_{7-9} = -\frac{A\,(2m + a)}{2\,h} + \frac{a}{h},$$

a więc od rzędnej linii $A'_5\ B_5$ pod węzłem *7* należy odjąć wielkość $\frac{a}{h}$.

Przy $m = 2{,}5a$, wielkość $\frac{2m - 3a}{2\,h} = \frac{a}{h}$ i stąd wynika, że punkt rzędnej linii wpływowej pod węzłem *7* będzie leżeć na przedłużeniu linii cc_5, tj. w punkcie c_7.

Łącząc rzędne pod węzłami liniami prostymi według ogólnych zasad, otrzymamy linię wpływową S_{7-9} w postaci wieloboku $A_5\ c_3\ c_5\ c_7\ c_9\ B_5$.

5. Linia wpływowa siły S_{6-8} w pasie dolnym, w przedziale *6—8*

Kratownica jest przecięta po linii $\alpha - \alpha$.

Momenty sił działających w lewej odciętej części dźwigara bierzemy względem węzła *7*.

Gdy siła $P = 1$ znajduje się między węzłami *1'* i *9*, to równanie równowagi określi się wzorem:

$$S_{6-8}\,h + Am - S_{6-9}\,a\sin\varphi = 0;$$

ponieważ jednak

$$S_{6-9} = -\frac{A}{2\sin\varphi},$$

to

$$S_{6-8} = \frac{Am}{h} + \frac{Aa}{2h} = \frac{A}{2h}(2m + a).$$

Jeżeli siła $P = 1$ stanie nad węzłem *3*, to równanie momentu sił względem węzła *7* jest:

$$-S_{6-8}\,h + Am - S_{6-9}\,a\,sin\,\varphi - 1\left(m - \frac{a}{2}\right) = 0;$$

ponieważ

$$S_{6-9} = -\frac{A}{2\sin\varphi},$$

to

$$S_{6-8} = \frac{A(2m + a)}{2h} - \frac{2m - a}{2h}.$$

Jeżeli siła $P = 1$ przesunie się do węzła *5*, to

$$S_{6-9} = \frac{1}{\sin\varphi} - \frac{A}{2\sin\varphi}$$

równanie równowagi momentów będzie:

$$-S_{6-8}\,h + Am - S_{6-9}\,a\sin\varphi - 1\left(m - \frac{3}{2}a\right) = 0,$$

skąd

$$S_{6-8} = \frac{A(2m + a)}{2h} - \frac{2m - a}{2h}.$$

Jeżeli siła $P = 1$ przesunie się do węzła *7*, równanie momentów będzie następujące:

$$-S_{6-8}\,h + Am - S_{6-9}\,a\sin\varphi = 0;$$

ponieważ

$$S_{6-9} = -\frac{A}{2\sin\varphi},$$

to

$$S_{6-8} = \frac{A(2m + a)}{2h}.$$

Na podstawie powyższych wzorów otrzymamy linię wpływową w pasie dolnym w przedziale *6—8*.

Na pionie $A_6A'_6$ pod węzłem A odkładamy wielkość rzędnej $\frac{2m + a}{2h}$ i łącząc koniec jej A'_6 z punktem B_6 otrzymamy linię zmiany wielkości

$$A\,\frac{2m + a}{2h}.$$

Odkładając na pionie od punktu A'_6 wielkość $\frac{2m - a}{2h}$, otrzymamy punkt c_1, przez który prowadzimy równoległą do A'_6B_6. Linia ta odcina na rzędnych $\frac{A\,(2m+a)}{2\,h}$ wielkości $\frac{2m-a}{2\,h}$, tak że odcinki $c_3\,c'_3$ i $c_5\,c'_5$ dadzą wielkości rzędnych $\frac{A\,(2m+a)}{2\,h}-\frac{2m-a}{2\,h}$, tj. rzędne linii wpływowych pod węzłami *3* i *5*.

Zatem cała linia wpływowa jest linią łamaną, tworzącą wielobok $A_6\ c_3\ c_5\ c_7\ B_6$.

6. Linia wpływowa siły S_{8-10} w pasie dolnym, w przedziale *8—10*

Rozważając, jak przy obliczeniu elementów wpływu siły w przedziale pasa dolnego *6—8*, i oznaczając przez m odległość podpory A do węzła *8* otrzymamy następujące dane.

Siła $P=1$ znajduje się na odcinku B—*11*

$$S_{6-8}=A\,\frac{2m_1+a}{2\,h}.$$

Siła $P=1$ znajduje się na węźle *9*

$$S_{6-8}=A\,\frac{2m_1+a}{2\,h}.$$

Siła $P=1$ znajduje się na węźle *3*

$$S_{6-8}=A\,\frac{2m_1+a}{2\,h}-\frac{2m_1+a}{2\,h}.$$

Siła $P=1$ znajduje się na węźle *5*

$$S_{6-8}=A\,\frac{2m_1+a}{2\,h}-\frac{2m_1-3a}{2\,h}.$$

Siła $P=1$ znajduje się na węźle *7*

$$S_{6-8}=A\,\frac{2m_1+a}{2\,h}-\frac{2m_1-3a}{2\,h}.$$

Zależnie od położenia siły $P=1$ reakcja podpory A zmienia się, wskutek czego dwa pierwsze wyrazy siły S_{6-8} i dwa ostatnie znaczenia tejże siły S_{6-8}, choć mają jednakowe wyrażenia ogólne, liczbowo są różne.

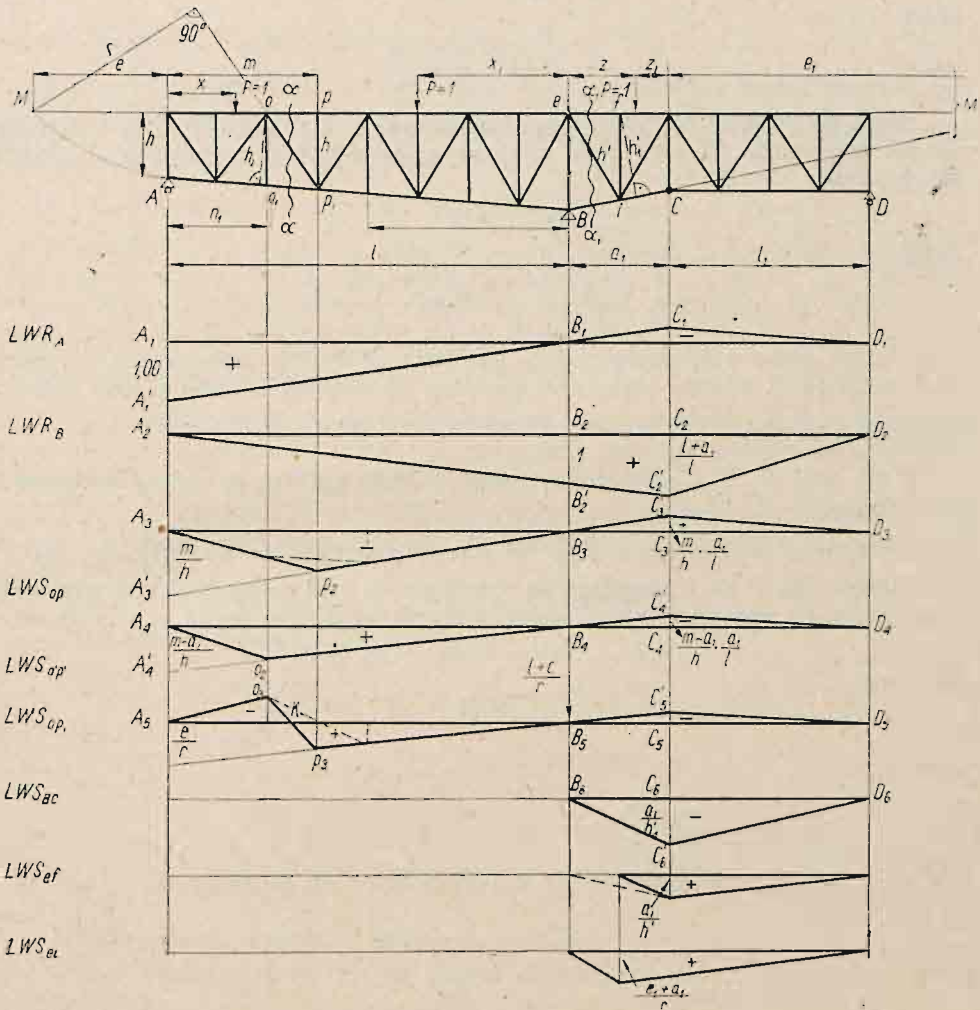
Budowanie linii wpływowej od węzła B do węzła *9* i od węzła A do węzła *3* jest wykonane jak w p. 5.

Aby otrzymać punkty linii wpływowej w węźle *5* i *7*, należy od punktu A'_7 na rzędnej $A'_7\,A'_7$ odłożyć wielkość $\frac{2m-3a}{2\,h}$ oraz przez punkt c przeprowadzić linię równoległą do przecięcia się jej z rzędnymi $c_5\,c'_5$ i $c_7\,c'_7$ i punkty te połączyć odcinkami prostymi; linia wpływowa kształtuje się w postaci wieloboku $A_7\ c_3\ c_5\ c_7\ c_9\ B_7$.

k. Kratownica z jazdą górą, krzyżulcowa jednowspornikowa (rys. 152)

1. Linia wpływowa reakcji podpory A

Jeżeli siła $P=1$ znajduje się między podporami A i B, to linia wpływowa reakcji A jest taka, jak dla belki swobodnie podpartej na dwóch podporach, a więc pod podporą A odkładamy rzędną $A_1 A_1' = 1$ i koniec rzędnej łączymy z podporą B. Otrzymaną prostą przedłużamy dalej do końca wspornika i koniec rzędnej tej linii, odcięty nad przegubem C, łączymy z podporą D belki zawieszonej. Linię wpływową reakcji podpory A otrzymamy w postaci 2-ch trójkątów: $+A_1 A_1' B_1$ i $B_1 C_1' D_1$.



Rys. 152

Rzędna linii wpływowej pod siłą $P = 1$ w odległości z od podpory B

$$\text{jest } y = \frac{z}{l}.$$

Z równowagi układu i momentu względem podpory B wypada, że

$$Al + Pz = 0,$$

skąd

$$A = -\frac{Pz}{l} = -\frac{z}{l}.$$

Wykazuje to, że linia wpływowa $B_1 C_1$ jest linią prostą i dalszym przedłużeniem linii $A_1' B_1$.

2. Linia wpływowa reakcji podpory B

Z równowagi sił zewnętrznych otrzymamy:

$$Bl - Px = 0,$$

skąd

$$B = P\frac{x}{l} = \frac{x}{l}.$$

Nad podporą B, tj. przy $x = l$, reakcja $B = 1$. Gdy siła $P = 1$ znajduje się na wsporniku, to równanie równowagi sił względem podpory A określa się wzorem:

$$-Bl + P(l + z) = 0,$$

czyli

$$B = \frac{l + z}{l}P = \frac{l + z}{l}.$$

Zatem linia wpływowa reakcji podpory B będzie linią prostą z rzędną nad podporą A równą zeru, nad podporą B równą jedności i nad końcem wspornika równą $\frac{l + a_1}{l}$.

Cała linia $A_2 B_2' C_2'$ jest linią prostą, a linią wpływową reakcji podpory B jest trójkąt $+ A_2 C_2' D_2$.

3. Linia wpływowa siły w pasie górnym w przedziale op

Jeżeli siła $P = 1$ znajduje się w odległości x od podpory A, to z równania momentów sił zewnętrznych i wewnętrznych względem węzła p_1 otrzymamy:

$$S_{op}h + Am - P(m - x) = 0;$$

ponieważ

$$A = \frac{P(l - x)}{l},$$

to

$$S_{op} = -\frac{Px(l - m)}{lh} = -\frac{x(l - m)}{lh}.$$

Gdy siła $P = 1$ znajduje się w odległości x od podpory B, to

$$S_{op}h + Am = 0$$

oraz

$$A = \frac{Px}{l},$$

skąd

$$S_{op} = -\frac{Px\,m}{l\,h} = -\frac{mx}{l\,h}.$$

Ponieważ przekrój $\alpha - \alpha$ może być wzięty bezpośrednio z prawej lub z lewej strony od słupka h, przeto x może być równe m lub $l - m$ i stąd wierzchołek linii wpływowej znajdzie się pod węzłem p.

Przy sile $P = 1$, znajdującej się na wsporniku w odległości z od podpory B, otrzymamy równanie:

$$S_{op}h + Am = 0;$$

ponieważ

$$A = -\frac{Pz}{l} = -\frac{z}{l},$$

to

$$S_{op} = \frac{mz}{lh}$$

i jest równaniem prostej jako dalszy ciąg linii $A'_3\, B_3$.

Linię $A'_3\, B_3$ przedłużamy do końca wspornika i łącząc koniec rzędnej $\frac{ma_1}{lh}$ z końcem belki zawieszonej otrzymamy linię wpływową siły w pręcie pasa górnego w postaci dwóch trójkątów: $-A_3\, p_2\, B_3$ i $+ B_3\, C'_3\, D_3$.

4. Linia wpływowa siły w pasie dolnym, w pręcie $o_1\, p_1$

Podobnie jak dla górnego pasa linia wpływowa w pręcie $o_1\, p_1$ pasa dolnego składa się z dwóch trójkatów: $+ A_4\, o_2\, B_4$ i $- B_3\, C'_4\, D_4$, z tym że przy obliczaniu momentów względem bieguna o zamiast h winno być brane ramię h_1 i że znaki zmienią się na odwrotne.

5. Linia wpływowa siły w krzyżulcu op_1

Przedłużając pręt op_1 do przecięcia się jego z przedłużeniem pręta op pasa górnego otrzymamy punkt M, względem którego należy układać równania równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych.

Odległość bieguna M od podpory A oznaczamy przez e, ramię zaś siły S_{op_1} w krzyżulcu względem bieguna M — przez r. Inne wielkości oznaczone są na rys. 152.

Siła $P = 1$ znajduje się w odległości x od podpory A.

Równanie równowagi określi się wzorem:

$$S_{op}\, r + P\,(e + x) - Ae = 0;$$

ponieważ

$$A = \frac{l-x}{l} P = \frac{l-x}{l},$$

to

$$S_{op1} = -P\frac{x\,(l+e)}{lr} = -\frac{x\,(l+e)}{lr}. \qquad [18]$$

Największe znaczenie x jest n_1.

Siła $P = 1$ znajduje się na prawo od przekroju $\alpha - \alpha$ w odległości x do podpory B.

Równanie równowagi określi się wzorem:

$$S_{op1}r - A\,e = 0;$$

ponieważ

$$A = P\frac{x_1}{l} = +\frac{x_1}{l},$$

to

$$S_{op} = P\frac{x_1 e}{lr} = \frac{x_1\, e}{lr}. \qquad [19]$$

Siła $P = 1$ znajduje się na wsporniku.

Równanie momentów sił względem bieguna M wyrazi się wzorem:

$$S_{op}r - A\,e = 0;$$

ponieważ

$$A = -P\frac{z}{l} = -\frac{z}{l},$$

to

$$S_{op1} = -P\frac{z\,e}{lr} = -\frac{z\,e}{lr};\qquad [20]$$

długość z znajduje się w granicach 0 i a_1, x zaś zmienia się od zera do $(l - m)$.

Na podstawie równań (9), (10), i (11) budujemy linię wpływową z 3-ch trójkątów $-A_5\,o_3\,K$, $+Kp_3\,B_5$ i $-B_5\,c_5\,D_5$ według ogólnych zasad.

6. Pas górny, pręt ef

Moment siły $P = 1$ położonej na końcu wspornika i siły w pręcie ef względem węzła i:

$$-S_{ef}\,h_1 + Pa_1 = 0,$$

skąd

$$S_{ef} = P\frac{a_1}{h_1} = \frac{a_1}{h_1}.$$

7. Pas dolny, pręt Bi

Moment siły $P = 1$ i siły w pręcie względem węzła e:

$$-S_{Bi}\,h_1' + P\,(a_1 - z) = 0,$$

skąd

$$S_{Bi} = -P\cdot\frac{a_1 - z}{h_1'}.$$

8. Krzyżulec ei

Moment sił względem bieguna M_1:

$$-S_{ei}\,r - P\,(e_1 + z_1) = 0,$$

skąd

$$S_{ei} = -P\frac{e_1 + z_1}{r} = -\frac{e_1 + z_1}{r}.$$

Na podstawie tych równań stopnia pierwszego otrzymamy linie wpływowe.

Gdyby nie było dodatkowych słupków, to nastąpiłaby tylko pewna zmiana w linii wpływowej pasa górnego i krzyżulca.

W linii wpływowej pasa górnego byłoby ścięcie wierzchołka, jak pokazane na rys. 148 przerywaną linią, a w linii wpływowej krzyżulca punkt p_3 przesunąłby się o jeden przedział.

W liniach wpływowych sił w pręcie pasa górnego i krzyżulca wspornika punkty zerowe lewe przesunęłyby się również o jeden przedział w lewo.

l. Kratownica z jazdą dołem prostokątna dwuwspornikowa z pasem górnym krzywym i dolnym prostym (rys. 153)

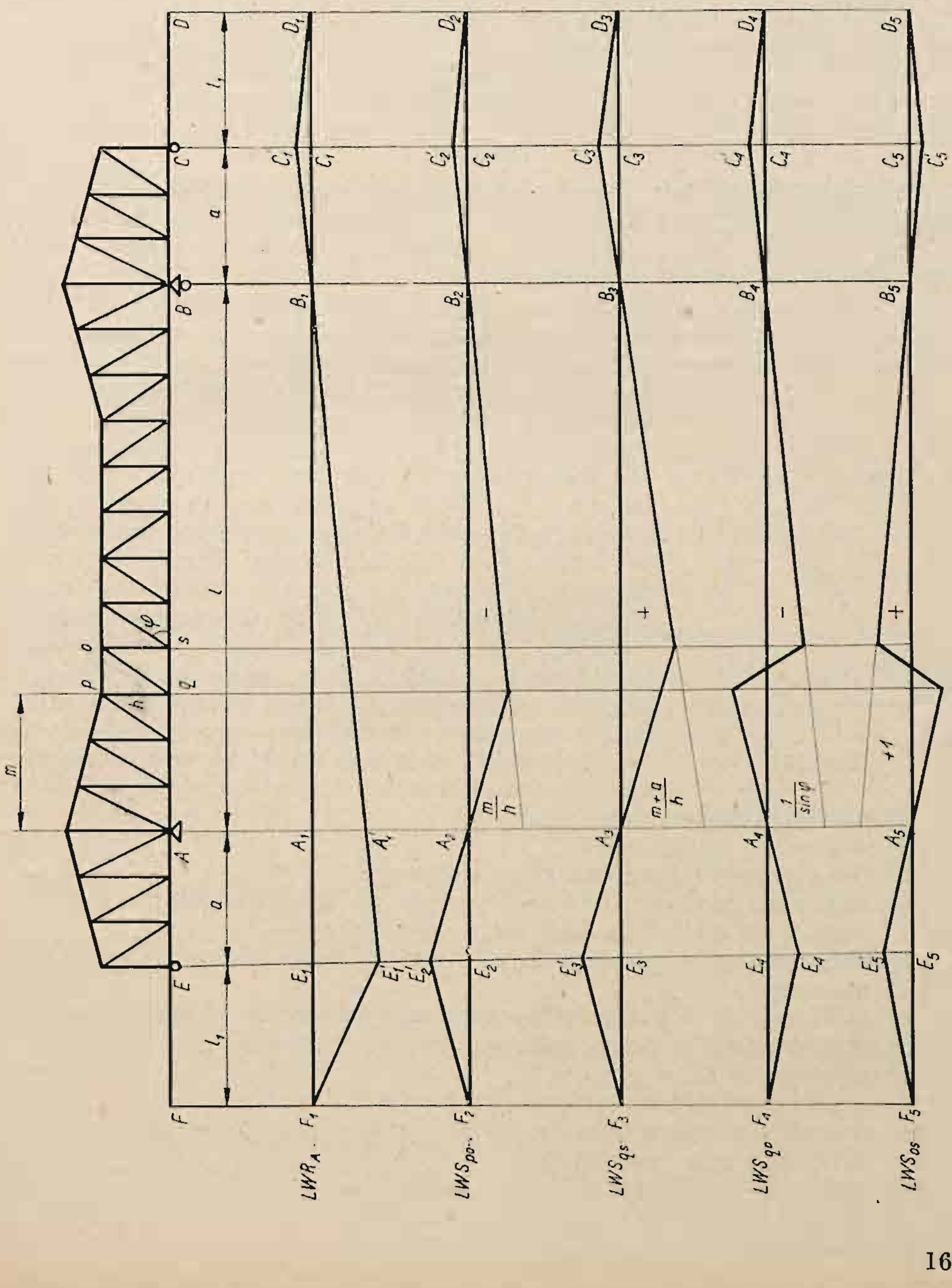
Linie wpływowe reakcji podpór A i B

Rozumując jak przy rozpatrywaniu belki jednowspornikowej otrzymamy, że linia wpływowa dla reakcji A w granicach rozpiętości $FEAB$ będzie taka sama jak w belce jednowspornikowej dla reakcji B.

W granicach rozpiętości $ABCD$ linia wpływowa reakcji A będzie taka sama jak reakcji A belki jednowspornikowej.

Linie wpływowe sil prętów pasa górnego, pasa dolnego i krzyżulców w granicach rozpiętości $ABCD$ są budowane według podstaw budowy linii wpływowych tychże prętów dźwigara jednowspornikowego.

Linie wpływowe dla prętów przęsła AB wyznaczamy jak dla zwykłego przęsła swobodnie podpartego AB, następnie przedłużamy je do końców obu wsporników E i C i otrzymane pod wspornikami rzędne łączymy z punktami zerowymi F i D pod podporami przęseł zawieszonych.



Rys. 153