ROZWIĄZANIA ZADAŃ
z CYNEMATYKI
ze zbiorku prof. Straszewicza

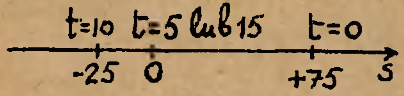
cena
1 zł. 25 gr.

listopad
1924

Warszawa.
Drukarnia i Litografja „Saturn", Marszałkowska 91. Telefon 20-41.
1924

Równania ruchu. Szybkość linjowa. Zad. 1–14.

Zad. 1. $s=t^2-20t+75$. Gdy $t=0$, $s=75$; $s=0$, gdy $t=10\pm\sqrt{100-75}=5$ lub 15, czyli punkt biegł początkowo w lewo. Zmiana kierunku nastąpiła, gdy $\frac{ds}{dt}=2t-20=0$, $t=10$, $s=-25$.



Potem punkt biegł w prawo i 2 raz przeszedł przez 0, gdy $t=15$.

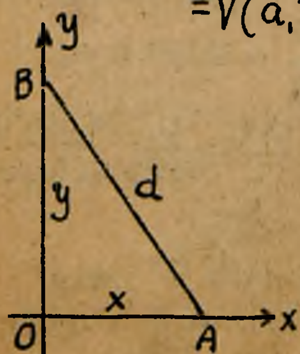
Zad. 2. $s=t^3-3t^2-24t+5$; $\frac{ds}{dt}=3t^2-6t-24=0$, $t^2-2t-8=0$, $t=4$ lub -2. Położenie pun. w chwilach zwrotu: $s_1=f(4)=-75$, $s_2=f(-2)=33$. Odległość pomiędzy punktami zwrotu $=75+33=108$.

Zad. 3. $s=a\sin(\alpha+\omega t)$. Gdy $t=0$, $s=a\sin\alpha$; $s=0$, gdy $\sin(\alpha+\omega t)=0$, $\alpha+\omega t=n\pi$, $t=\frac{n\pi-\alpha}{\omega}$; po raz pierwszy od pocz. rachuby czasu $s=0$, gdy $t=\frac{\pi-\alpha}{\omega}$. Kierunek ruchu się zmienia, gdy $\frac{ds}{dt}=a\omega\cos(\alpha+\omega t)=0$, $\alpha+\omega t=n\pi+\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha}{\omega}$. Pomiędzy dwiema następującemi po sobie zmianami, odpow. np. $n=k$ i $n=k+1$, upł. czas

$$t=\frac{(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha}{\omega}-\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha}{\omega}=\frac{\pi}{\omega}.$$

Zad. 4. Punkty się spotkają, gdy $t^2+15t-25=18t+15$, $t^2-3t-40=0$, $t=8$ lub -5. Nastąpi to w miejscach $s_1=f(8)=159$, $s_2=f(-5)=-75$.

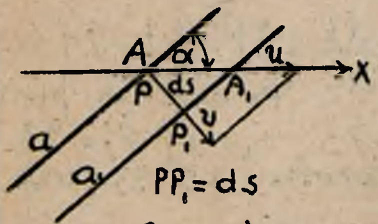
Zad. 5. W chwili t odległość $d=AB=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(a_1t+b_1)^2+(a_2t+b_2)^2}$; osiąga minimum wraz z wielkością podpierw. t.j., gdy $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=(a_1t+b_1)a_1+(a_2t+b_2)a_2=0$,



$t=-\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2}$. Po podstaw. tego do wzoru na d, otrzymamy $d_{min}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$.

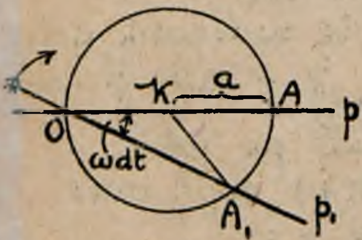
Zad. 6. $s = 2t^3 - 18t^2 + 50t - 50$. Chwili przejścia przez początek toru odpowiada $s = 0$, $t^3 - 9t^2 + 25t - 25 = 0$. Pierwiastkiem tego równania – jedynym rzeczywistym – jest 5 (dzielnik wyrazu wolnego). Szybkość $\frac{ds}{dt} = 6t^2 - 36t + 50$ i $= 20$, gdy $t = 5$.

Zad. 7. Po czasie dt prosta a przesunie się o ds do położ. a_1; $\frac{ds}{dt} = v$, $AA_1 = dx = \frac{ds}{\sin\alpha}$,



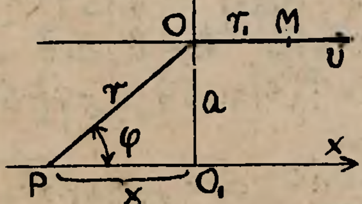
zaś szybkość szukana $u = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{\sin\alpha . dt} = \frac{v}{\sin\alpha}$.

Zad. 8. W pewnej chwili p przechodzi przez środek koła K. Po czasie dt obróci się o kąt ωdt do położenia p_1.



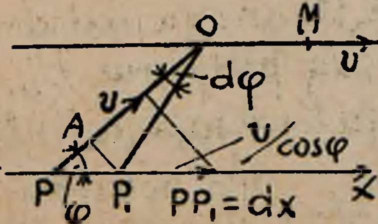
$\measuredangle AKA_1$ jako środkowy $= 2\omega dt$. Punkt A przebył drogę elementarną $ds = \smile AA_1 = 2a\omega dt$, $v = \frac{ds}{dt} = 2a\omega$.

Zad. 9. 1ʸ sposób. $x = -a\,\mathrm{cotg}\varphi$ (minus, bo $x<0$, zaś $a.\mathrm{cotg}\varphi > 0$); $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$; $r + r_1 = \mathrm{Const.}$; $dr = -dr_1 = -v\,dt$; $r\sin\varphi = a$;



rys. do spos. 1

$r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{dr}{dt} = \frac{a}{\sin\varphi}.\cos\varphi.\frac{d\varphi}{dt} - v\sin\varphi = 0$;



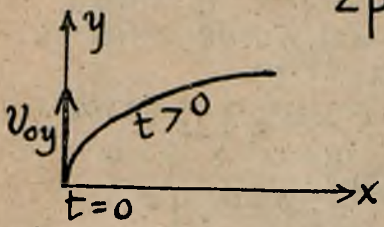
rys. do spos. 2

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v\sin^2\varphi}{a\cos\varphi}$; $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\sin^2\varphi}.\frac{v\sin^2\varphi}{a\cos\varphi} = \frac{v}{\cos\varphi}$.

2ⁱ sposób. Po czasie dt punkt P przesunie się do P_1, sznur zajmie położenie P_1O; $PP_1 = dx$; $\measuredangle OP_1x = \varphi + d\varphi$; $\measuredangle POP_1 = d\varphi$;

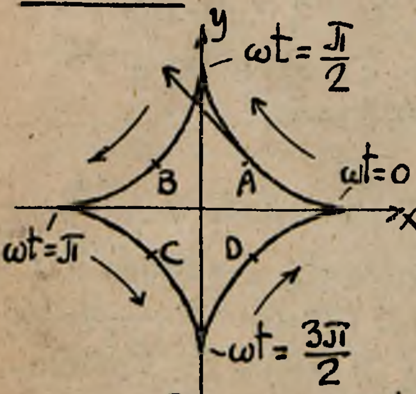
$OA = OP_1 \cos d\varphi \cong OP_1$ czyli PA jest co do wielkości przesunięciem sznura $= v\,dt$; $PA = PP_1 \cos\varphi$, $v\,dt = dx\cos\varphi$, szybkość szukana $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v}{\cos\varphi}$.

Zad. 10. $x = \dfrac{a^2t^2}{2p}$, $y = at$; stąd $y^2 = a^2t^2 = 2px$, czyli torem jest parabola symetr. wzgl. Ox.



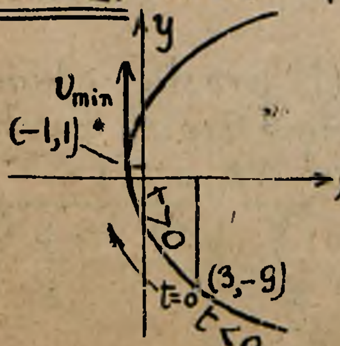
$v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a^2t}{p}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt} = a$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \dfrac{a}{p}\sqrt{a^2t^2 + p^2}$. Gdy $t = 0$, $x = y = 0$, $v_{ox} = 0$, $v_o = v_{oy} = a$.

Zad. 11. $x = a\cos^3\omega t$, $y = a\sin^3\omega t$; $x^{2/3} = a^{2/3}\cos^2\omega t$, $y^{2/3} = a^{2/3}\sin^2\omega t$; stąd równanie toru $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ - astroida.



$v_x = \dfrac{dx}{dt} = -3a\omega\cos^2\omega t\sin\omega t$, $v_y = \dfrac{dy}{dt} = 3a\omega\sin^2\omega t\cos\omega t$; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3a\omega\sin\omega t\cos\omega t = \dfrac{3}{2}a\omega\sin 2\omega t$. Z tego wzoru wynika, że w ostrzach krzywej v zmienia znak. Pochodzi to stąd, że element ds zmienia w tych punktach kierunek, zaś $v = \dfrac{ds}{dt}$. Jeśli chodzi o wartość bezwzgl. v, to osiąga maximum w punktach A, B, C, D, w których $\sin 2\omega t = 1, -1, 1, -1$; $2\omega t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}$; $\omega t = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$; $|x| = |y| = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Zad. 12. $x = t^2 - 4t + 3$, $y = 5t - 9$; $t = \dfrac{9+y}{5}$, $x = \dfrac{(9+y)^2}{25} - \dfrac{4(9+y)}{5} + 3$, $25x = y^2 - 2y - 24$, $x = \dfrac{1}{25}(y-1)^2 - 1$; torem jest parabola z wierzchołkiem w punkcie $(-1, 1)$.



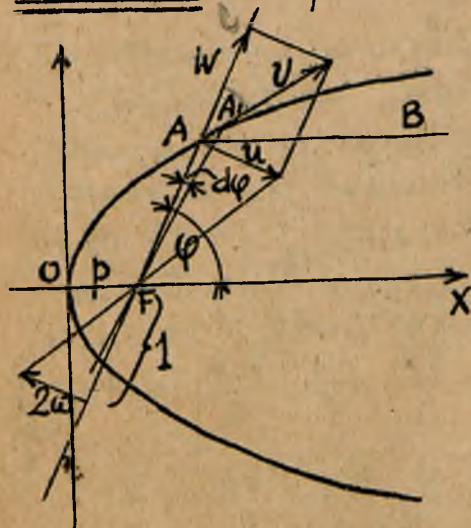
$v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2t - 4$, $v_y = \dfrac{dy}{dt} = 5$, $v = \sqrt{(2t-4)^2 + 25} = \sqrt{4t^2 - 16t + 41}$ i osiąga minimum wraz z trójmianem $4t^2-16t+41$ czyli, gdy $8t-16=0$, $t=2$, $x=-1$, $y=1$, $v_x=0$, $v_{min}=v_y=5$.

Zad. 13. $v_x=\frac{ac}{y}$, $v_y=\frac{c\sqrt{y^2-a^2}}{y}$; $v=\frac{c}{y}\sqrt{a^2+y^2-a^2}=c$ – ruch jednostajny.

$\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}=\frac{v_x}{v_y}=\frac{dx}{dy}=\frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}}$. Całkując to równ. różniczkowe, znajdz. równ. toru.

$a\,dy=\sqrt{y^2-a^2}\,dx$; $\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}=\frac{dx}{a}$; za pomocą podstawienia $\sqrt{y^2-a^2}=z-y$ znajdziemy $\lg(y+\sqrt{y^2-a^2})=-\frac{x}{a}+C$; $x=0$, $y=a$, $\lg a=C$, $y+\sqrt{y^2-a^2}=ae^{-x/a}$ ... (1) Biorąc odwrotności obu stron, otrzym. $\frac{1}{y+\sqrt{y^2-a^2}}=\frac{1}{a}e^{x/a}$, stąd $y-\sqrt{y^2-a^2}=ae^{x/a}$. Dodając do (1), otrzym. $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ czyli równanie łańcuchowej.

Zad. 14. 1-y sposób. Równanie paraboli $r=\frac{2p}{1-\cos\varphi}=\frac{p}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$. Prowadz. średnicę AB (równoległe do Ox) $\angle(AC,v)=\angle(v,AB)=\frac{\varphi}{2}$. Rozkładamy szybkość bezwzględną v na prostopadłą do AF szybk. unoszenia u i szybk. wzgl. W

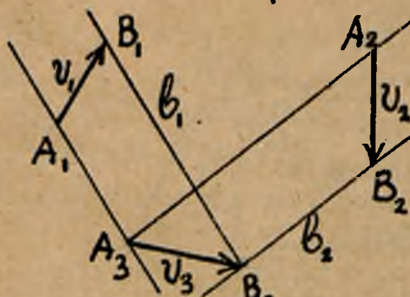


$v\cos(v,u)=v\cos(90°-\frac{\varphi}{2})=v\sin\frac{\varphi}{2}=u$; $v=\frac{u}{\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{2\omega r}{\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{2\omega p}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$.

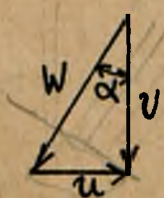
2-i sposób. Po czasie dt prosta obróci się o kąt $d\varphi=2\omega dt$. Punkt A przejdzie drogę elementarną $AA_1=ds=\sqrt{(dr)^2+(r\,d\varphi)^2}=\sqrt{\left(\frac{-p\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}d\varphi}{\sin^4\frac{\varphi}{2}}\right)^2+\left(\frac{p\,d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)^2}=\frac{p\,d\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}=\frac{2p\omega dt}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$ i stąd $v=\frac{ds}{dt}=\frac{2p\omega}{\sin^3\varphi/2}$.

Równoległobok szybkości. Zad. 15–20.

Zad. 15. Rozważamy ruch A_1 i A_2 względ. A_3. Szybkość punktu A_3 będzie dla A_1 i A_2 szybk. unoszenia. Szybkość względna A_1 wzgl. A_3 musi leżeć na A_1A_3, zaś koniec szybkości unoszenia na prostej $b_1 \parallel A_1A_3$. Szybkość względna A_2 wzgl. A_3 musi leżeć na A_2A_3, zaś koniec szybkości unoszenia na prostej $b_2 \parallel A_2A_3$. Proste b_1 i b_2 wyznacz. p. B_3; $v_3 = A_3B_3$.

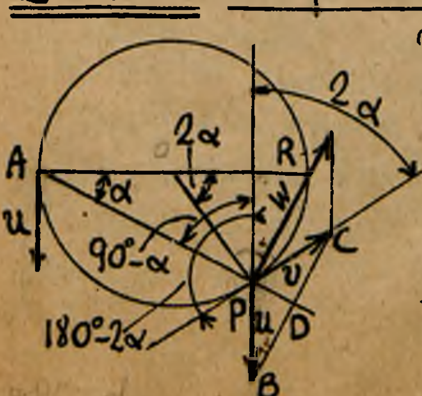


Zad. 16. Rozważamy ruch cząstek wody względem idącego. Pionowa szybkość bezwzględna v jest wypadkową poziomej unoszenia u i względnej W, zatem laska parasola powinna być nachylona ku przodowi pod kątem do pionu $= \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{v}$.



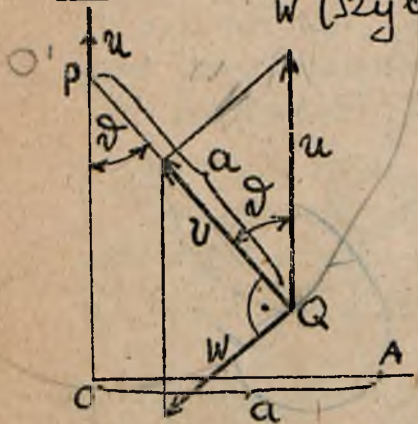
Zad. 17. Miarą ilości deszczu, który wpada do wagonu na sekundę jest szybkość względna W cząstek wody wzgl. wagonu. Z rys. zad. 16 widać, że gdy wagon porusza się, $W > v$ czyli podczas ruchu więcej wody wpada do wagonu, niż podczas postoju.

Zad. 18. 1y sposób. Rozważane punkty stanowią układ płaski sztywny. Odległość AP jest stała. Torem względnym jest okrąg koła o promieniu AP, zatem szybkość względna $\perp AP$ czyli przechodzi przez R.



2i sposób. Rozważamy ruch p. P wzgl. p. A. Szybkości bezwzględne tych punktów są równe: $u = v$. Rozkładamy v na szybkość unoszenia u i względną W. ΔPCB jest równoramienny. $\measuredangle CPB = 180° - 2\alpha$; $\measuredangle BPD = 90° - \alpha$ czyli $= \measuredangle CPD$, zatem $CB \perp AP$, $W \perp AP$ i przechodzi przez R.

Zad. 19. Ponieważ odległość $PQ = a = $ Const., więc W (szybkość względna Q względem P) $\perp PQ$ i: $W = -u \sin\vartheta$. Z drugiej strony $W = a\frac{d\vartheta}{dt}$, gdzie $a\,d\vartheta$ jest drogą elementarną punktu Q w ruchu względnym.



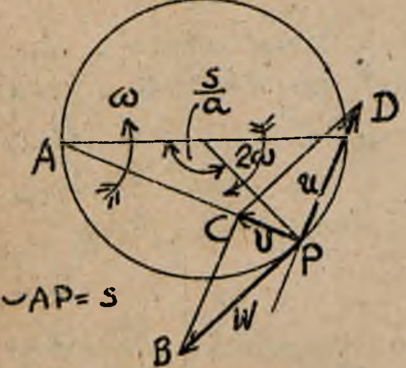
$a\frac{d\vartheta}{dt} = -u\sin\vartheta$; $\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = -\frac{u}{a}dt$;

$$\int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \int\frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}} = \int\frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,tg\frac{\vartheta}{2}} =$$

$$= lg\, tg\frac{\vartheta}{2} = -\frac{ut}{a} + C;\ t = 0,\ \vartheta = 90°,$$

$lg 1 = C = 0$; $tg\frac{\vartheta}{2} = e^{-ut/a}$; $\vartheta = 2\,arc\,tg\, e^{-ut/a}$.

Zad. 20. $AP = 2a\sin\left(\frac{s}{2a}\right)$. Szybkość unoszenia $u = AP \cdot \omega = 2a\omega\sin\left(\frac{s}{2a}\right)$. Szybk. względna $W = 2a\omega = PB$. $\measuredangle(AP, W) = \frac{s}{2a}$, $BC = PB\sin\left(\frac{s}{2a}\right) = 2a\omega\sin\left(\frac{s}{2a}\right)$ czyli $= u$, zatem druga przyprostokątna PC jest szybkością bezwzgl. v punktu P co do wielkości i kierunku. v jest stale skierowane ku A, czyli torem bezwzględnym punktu P jest prosta PA. Widoczne to jest z tego, że kierunek AP nie ulega zmianie: w ruchu unoszenia punkt P na sekundę zakreśla kąt wpisany ω, zaś w ruchu względnym zakr. w kier. przeciwnym kąt środkowy 2ω, czyli wpisany także $= \omega$.

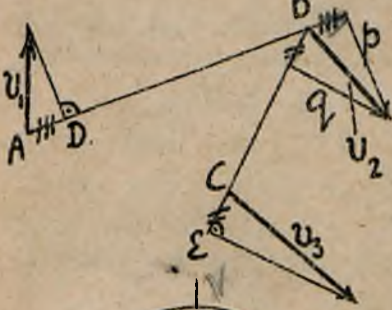


$\smile AP = s$

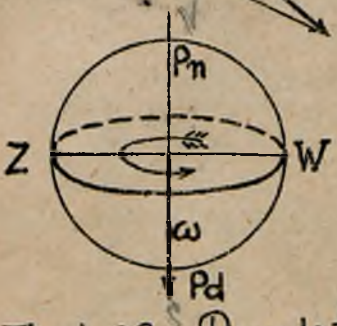
$v = W\cdot\cos\left(\frac{s}{2a}\right) = 2a\omega\cos\left(\frac{s}{2a}\right)$.

Pole szybkości. Ruch obrotowy. Zad. 21-24.

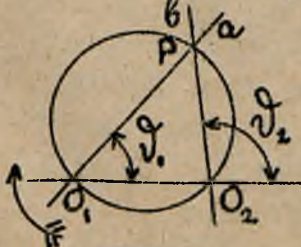
Zad. 21. Rzut szybkości punktu B na AB będzie = = AD, na BC zaś = CE, zatem koniec szybkości p. B leży na przecięciu się prostych: $p \perp AB$ i $q \perp BC$.



Zad. 22. W ciągu doby ziemia obraca się o kąt pełny, zatem szybkość kątowa $\omega = \dfrac{2\pi}{24.60.60} \cong 0{,}00007$. Wektor ω ma kierunek taki, że patrząc z jego końca w stronę początku widać obrót w kierunku ruchu wskazówek zegara. Kula ziemska obraca się z zachodu na wschód, przeto wektor ω zwrócony jest w stronę południa.

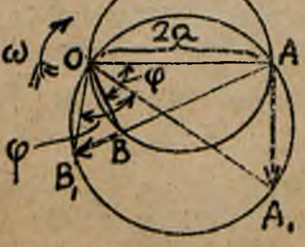


Zad. 23. Punkt przecięcia prostych a i b obiega okrąg koła (P, O_1, O_2), zatem $\measuredangle O_1PO_2 = $ Const.; $\omega = \dfrac{d\vartheta_1}{dt}$, $\alpha = \dfrac{d\vartheta_2}{dt}$; $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \measuredangle O_1PO_2 = \vartheta_1 + \text{Const.}$; $\dfrac{d\vartheta_2}{dt} = \dfrac{d\vartheta_1}{dt}$, czyli $\alpha = \omega$.



Zad. 24. Część 1^a. Okrąg obraca się około środka. Szybkości wszystkich punktów są jednakowe = $a\omega$.
$OA_1 = \sqrt{a^2 + a^2\omega^2} = a\sqrt{1+\omega^2} = $ Const., zatem linja przewodnia jest okrąg koła o środku w O i prom. $a\sqrt{1+\omega^2}$.

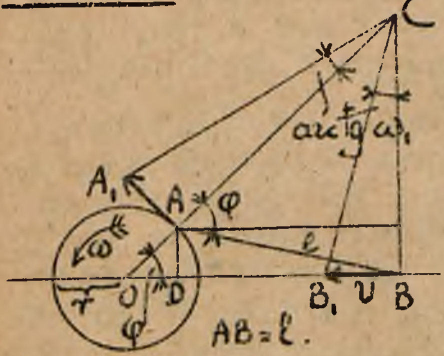
Część 2^a. Okrąg obraca się około p. O, leżącego na okręgu. Punkt A czyli drugi koniec średnicy, przechodzącej przez O, posiada szybkość $AA_1 = 2a\omega$; $OA_1 = 2a\sqrt{1+\omega^2}$; $\text{tg}\, AOA_1 = \omega$. Inny punkt B ($\measuredangle AOB = \varphi$) posia-



da szybkość $BB_1 = OB\cdot\omega = 2a\omega\cos\varphi$; $\operatorname{tg} BOB_1 = \omega$, $\measuredangle BOB_1 = \measuredangle AOA_1$, czyli $\measuredangle A_1OB_1 = \measuredangle AOB = \varphi$.
$OB_1 = 2a\sqrt{1+\omega^2}\cos\varphi = OA_1\cos\varphi$, zatem B_1 leży na okręgu, którego średnica $= OA_1$ t.j. promień $= a\sqrt{1+\omega^2}$.

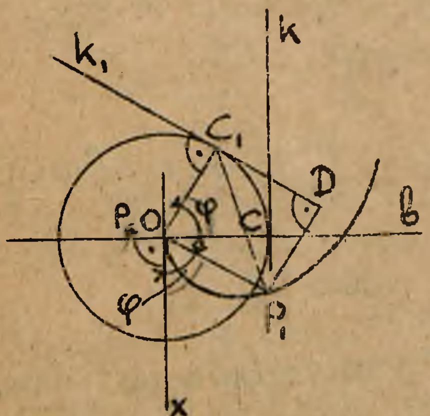
Środek chwilowy. Tory punktów układu. Zad. 25-28.

Zad. 25. Środek chwilowy C leży na przecięciu normalnych do toru p. A i p. B.



Szybkość kątowa układu dokoła środka chwilowego niech $= \omega_1$. Szybkości liniowe wszyst. punkt. układu widać z C pod kątem $\operatorname{arctg}\omega_1$.
$\measuredangle B_1CB = \measuredangle A_1CA$; $\frac{AA_1}{AC} = \frac{BB_1}{BC}$;
$BB_1 = v = AA_1 \cdot \frac{BC}{AC} = r\omega\frac{BC}{AC}$; $BC = OB\operatorname{tg}\varphi = (OD+DB)\operatorname{tg}\varphi = (r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi})\operatorname{tg}\varphi$; $AC = \frac{BD}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$, stąd $v = \frac{r\omega\sin\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}(r\cos\varphi + \sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi})$.

Zad. 26. Położ. początkowe prostej $k \perp b$. Środk. chwilowym jest w tej chwili p. C. Chodzi o ten punkt P układu, który w dan. chwili znajduje się w O. W położeniu k_1 środk. chwilowym jest p. C_1, p. C znalazł się w D, p. P w P_1, C_1P_1 jest normalną do toru p. P.

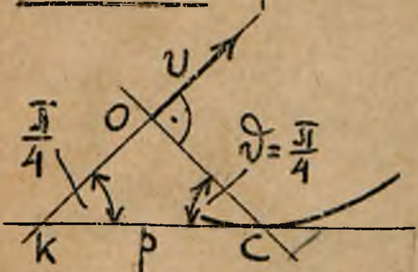


$P_1D = OC = OC_1 = a$, $\measuredangle P_1Px = \varphi$, promień wodzący $\rho = PP_1 = C_1D = \smile CC_1 = a\varphi$, zatem torem p. P jest spirala Archimedesa.

Zad. 27. Krzywa ruch. środ. chwilowych reduk. się do tego właśnie punktu. Szybkość względna punktu, który nie należąc do układu, podąża za środkiem chwilowym i zawsze zajmuje to samo położenie jest $= 0$, bo torem względnym jest punkt. Szybkość bezwzględna $=$ szybk. względnej $= 0$. Stąd wynika, że tor bezwzględny t.j. linja stała środk.

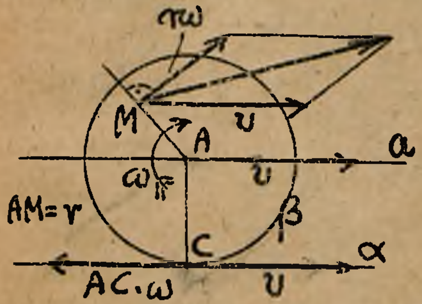
chwilowych także redukuje się do tegoż punktu, czyli środek chwilowy układu zajmuje stałe położenie na płaszczyźnie nieruchomej.

Zad. 28. Spiralna logar. S o równ. $r = ae^{\varphi}$ toczy się po prostej p. Środkiem chwil. jest p. C. $\measuredangle(CO, p) = \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{r}{r'} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Szybkość bieguna $v \perp OC$ czyli stale tworzy z p kąt 45°. Wynika stąd, że torem punktu O jest prosta k.

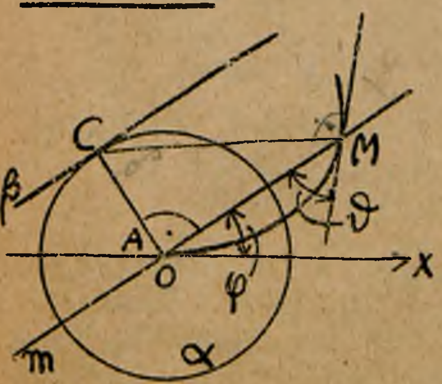


Wyznaczanie linji środków. Obwiednie. Zad. 29–33.

Zad. 29. Punkt M posiada szybkość $r\omega$ względem A i szybkość unoszenia v. Środek chwilowy ma szybkość bezwzględną = 0. Jest nim punkt, dla którego szybkość $= v$ i jest odwrotnie do v skierowana, mianowicie p. C, jeśli $AC\cdot\omega = v$, $AC = \frac{v}{\omega}$. Ponieważ $AC =$ const., więc linja stała środków chwilowych jest prosta $\alpha \parallel a$, zaś ruchomą koło β o środku w A i promieniu AC.

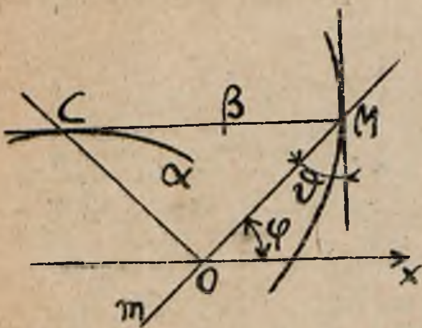


Zad. 30. $OM = r = a\varphi$. Szybkość tego punktu A układu, który w danej chwili znajduje się w O leży na prostej m (§29 książki). Zatem środek chwil. C leży na $CO \perp m$ i na normalnej CM do toru p. M. $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r}{r'} = \frac{a\varphi}{a} = \varphi$; $CO = OM\operatorname{tg}(90° - \vartheta) = r\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{a\varphi}{\varphi} = a =$ const., czyli krzywą stałą α środk. chwil. jest koło o śr. w O i promieniu $= a$, krzywą ruchomą — prosta $\beta \parallel m$.

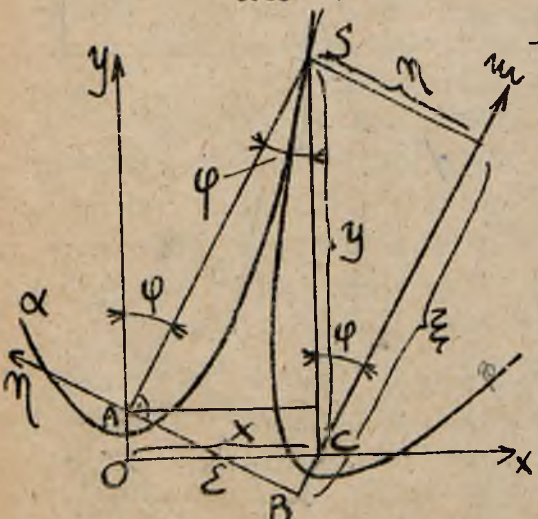


Zad. 31. $OM = r = ae^{\varphi}$; $\measuredangle\vartheta = 45°$ (patrz zad. 28). Środek chwilowy C leży na $CO \perp m$ i na

normalnej CM do toru p. M (patrz zad. 30). $\sphericalangle CMO = \sphericalangle MCO = 45°$; $CO = OM = ae^{\varphi}$, zatem krzywa stała α środków chwil. jest spiralna logar., odchylona od danej o $90°$. Ponieważ $\sphericalangle CMO = 45° = \text{const.}$, przeto w układzie ruchomym t.j. związanym z m krzywą środków chwilowych β jest prosta CM.



<u>Zad. 32.</u> $AO = BC = d$. Środek chwilowy S leży na $AS \perp AB$ i na $CS \perp Ox$.



<u>1y sposób.</u> x, y są to współrz. p. S w układzie nieruchom. xOy, zaś ξ, η w układzie ruchom. $\xi B \eta$. $\sphericalangle(B\xi, CS) = \varphi$.

$d = AO = y - x\cot g\varphi \ldots (1)$

$d = BC = \dfrac{x}{\sin\varphi} - y\cos\varphi \ldots (2)$

$y - x\cot g\varphi = \dfrac{x}{\sin\varphi} - y\cos\varphi$;

stąd $\sin\varphi = \dfrac{x}{y}$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y}$

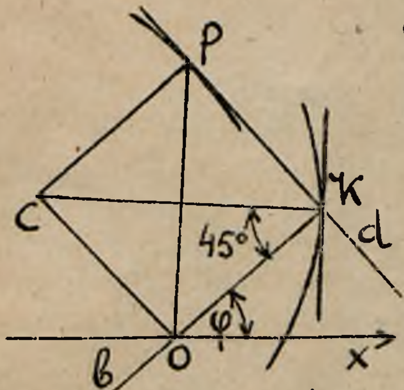
(można to także wykazać, wychodząc z równości $AS = CS$)

Podstawiamy $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ do równ. (2): $y - \sqrt{y^2 - x^2} = d$, $y^2 - x^2 = y^2 - 2yd + d^2$, $x^2 = d(2y - d)$, czyli krzywą stałą środk. chwil. jest parabola α, symetryczna wzgl. Oy, której ogniskiem jest A, kierownicą Ox. Analogicznie $d = BC = \xi - \eta\cot g\varphi$, $d = AO = \dfrac{\eta}{\sin\varphi} - \xi\cos\varphi$; stąd $\sin\varphi = \dfrac{\eta}{\xi}$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}{\xi}$, wreszcie $\eta^2 = d(2\xi - d)$, czyli krzywą ruchomą jest parabola β, symetryczna wzgl. $B\xi$, której ogniskiem jest C, kierownicą $B\eta$.

<u>2 sposób.</u> Wychodząc z równości $\Delta OA\varepsilon = \Delta \varepsilon CB$, łatwo dowieść, iż ΔASC jest równoramienny, czyli, że $AS = SC = \rho$, zatem punkty krzywej stałej α są w jednakowej odległości od punktu A i od prostej Ox, zaś punkty krzywej ruchomej β są w takiej samej odległości od punktu C i prostej $B\eta$. Temi krzywemi są zatem jednakowe parabole.

Rzutując łamaną ASC na Oy lub na $B\xi$, otrzym. $\rho\cos\varphi = \rho - d$, $\rho = \dfrac{d}{1-\cos\varphi}$ czyli równanie biegunowe paraboli.

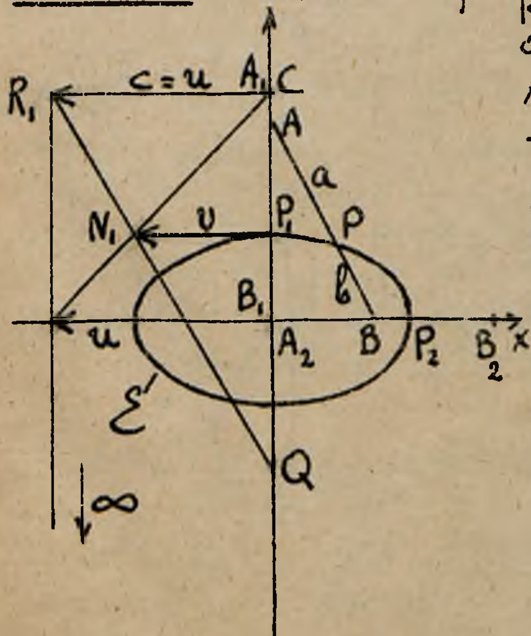
Zad. 33. Środk. chwilowym jest p. C. $\sphericalangle CKO = 45°$ (patrz zad. 28.) Normalna CP z C do d jest zarazem normalną obwiedni boku d. Czworobok $OCPK$ jest kwadratem. Promień wodzący OP punktu P obwiedni jest nachylony do stycznej d obwiedni pod stałym kątem $45°$, zatem obwiednia jest także spiralną logarytmiczną.



$OK = \rho = ae^{\varphi}$, zaś $OP = \rho_1 = OK\sqrt{2} = a\sqrt{2}e^{\varphi}$.

Krzywizny torów. Koło przegięć. Zad. 34–37.

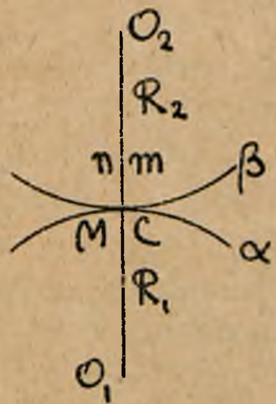
Zad. 34. Elipsa $\mathcal{E}$ jest torem punktu P prostej, której p. A porusza się po osi y, i B po x. W położeniu A_1B_1 środ. chwil. C znajduje się w A_1. Chodzi o środek krzywizny toru punktu P_1. Ponieważ nie zależy on od szybkości, więc szybkość punktu P_1 zakład. dowolnie. A_1N_1 jest przewodnią prostej A_1B_1, zaś u jest szybkością punktu B_1. Torem p. B_1 jest prosta, zatem środek krzywizny toru znajduje się w ∞. Wnosimy stąd, że t.zw. szybkość środka chwilowego $c \neq u$.



Wyobraźmy sobie (§36 książki) nie należącą do układu prostą, której jeden punkt zamocow. w P_1 i która jest stale do toru punktu P_1 normalna, czyli przechodzi wciąż przez środek chwilowy układu. c jest szybkością tego punktu prostej, który obecnie zajmuje to samo położenie, co środ. chwilowy.

R_1N_1 jest przewodnią tej prostej wyobrażalnej, p. Q jest jej środkiem chwilowym, czyli środkiem krzywizny toru punktu P_1. $QP_1 = \rho_1$; $A_1P_1 = a$; $\frac{u}{v} = \frac{a+\rho_1}{\rho_1} = \frac{a+b}{a}$, $\frac{a}{\rho_1} = \frac{b}{a}$, $\rho_1 = \frac{a^2}{b}$. Analogicznie rozpatrując położenie A_2B_2, otrzymamy dla toru punktu P_2 promień krzywizny $\rho_2 = \frac{b^2}{a}$.

Zad. 35. 1y sposób. Środek krzywizny leży w środku chwilowym nie należącej do układu prostej n, której jeden punkt zamocowano w O_2 i która jest wciąż normalna do toru punktu O_2 (§36 książki i zad. 34). Wyobraźmy sobie inną prostą m, której jeden punkt M stale znajduje się w środku chwilowym C układu i która jest stale normalna do krzywych α i β.

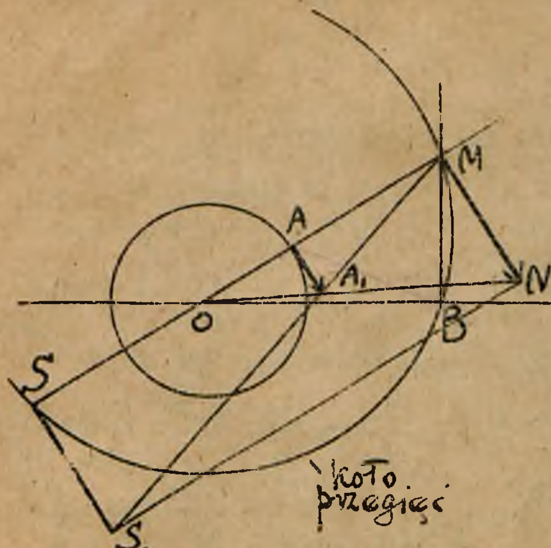


Ta prosta m w każdej chwili przechodzi przez środki krzywizny tych linij; w danej chwili – przez O_1 i O_2. Środkiem chwilowym prostej m jest punkt O_1. W ruchu względem β środkiem chwilowym jest punkt O_2, zatem szybkość punktu O_2 względem M jest = 0. Wnosimy stąd, że proste n i m posiadają wspólny środek chwilowy, czyli punkt O_1 jest środkiem chwilowym prostej n, a przez to środkiem krzywizny toru punktu O_2.

2i sposób. Wiadomo (§35 książki), iż $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{c}{\omega}$, gdzie c jest szybkością środka chwilowego, ω – szybkością kątową układu dokoła środka chwilowego. Wzór Savarego (§37 książki) podaje $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\cos\vartheta = \frac{c}{\omega}$, gdzie p jest odległością punktu, zaś q odległością środka krzywizny tego punktu od środka chwilowego. W dan. wypadku $\vartheta = 0$, zatem $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, ale $p = R_2$, stąd $\frac{1}{q} = \frac{1}{R_1}$ i $q = R_1$

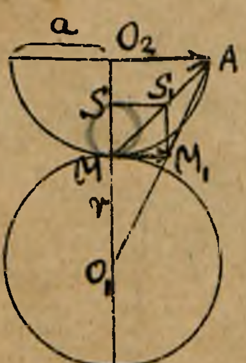
c.b.d.d.

Zad. 36. Środek chwilowy C znajduje się obecnie w p. M (patrz zad. 25). Koło przegięć przechodzi przez M i przez B, ponieważ torem p. B jest prosta. Musimy wyznaczyć jeszcze jeden punkt koła przegięć. Niech szybkość p. A będzie $v = AA_1$. Punkt O jest środ. krzywizny toru punktu A, MN jest cięciwą koła r równoległą do AA_1 (OA_1 jest przewodnią prostej OA)!



Prowadząc $NS_1 \parallel MA$ i $SS_1 \perp AM$ (§37 książki), otrzymamy punkt S układu, którego szybkość w danej chwili = MN, którego środek krzywizny toru leży w ∞, który zatem przechodzi przez przegięcie swego toru i leży także na szukanym kole przegięć.

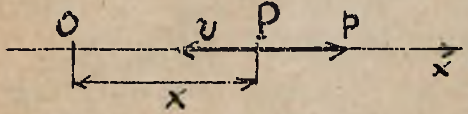
Zad. 37. Koło przegięć jest styczne do okręgów w punkcie M. Wyznaczmy drugi punkt wspólny koła przegięć z prostą O_1O_2. Niech szybkość kątowa układu względem M będzie = 1. Szybkość p. O_2 układu $= O_2A$, AM jest przewodnią prostej O_2M układu, zaś AO_1 przewodnią prostej O_2O_1 (nie należącej do układu). Szybkość środka chwilowego $MM_1 = c$ znajdziemy z podobieństwa



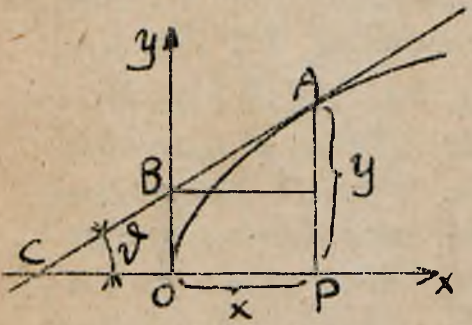
trójkątów: $\frac{c}{O_2A} = \frac{r}{a+r}$, $c = \frac{ar}{a+r}$. Prowadząc $M_1S_1 \parallel MO$ i $S_1S \perp MO$ znajdziemy p. S układu, którego szybkość SS_1 także = c. Punkt S leży na kole przegięć (patrz zad. 36); średnica koła przegięć jest $MS = SS_1 = \frac{ar}{a+r}$. Aby równowaga była trwała, $\frac{ar}{a+r} > \frac{5}{8}a$, gdzie $\frac{5}{8}a$ jest odległością środka ciężkości półkuli od punktu M. $\frac{r}{a+r} > \frac{5}{8}$, $8r > 5a+5r$, $3r > 5a$, $r > \frac{5}{3}a$.

Wyznaczanie przyspieszeń. Zad. 38-40.

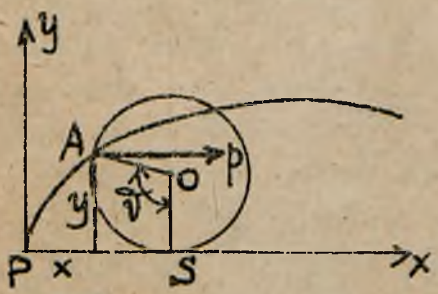
Zad. 38. Obier. kier. w prawo za dodatni. $v = \frac{dx}{dt} = -\alpha x^n$. Przyspieszenie $p = \frac{dv}{dt} = -n\alpha x^{n-1}\cdot\frac{dx}{dt} = -n\cdot\alpha\cdot x^{n-1}\cdot(-\alpha x^n) = n\alpha^2 x^{2n-1} > 0$ zatem odwrócone od O.



Zad. 39. $y^2 = 4px$; $2y\frac{dy}{dx} = 4p$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$; $tg\vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$; $BO = Y = y - x\cdot tg\vartheta = y - \frac{2px}{y} = y - \frac{y}{2} = \frac{y}{2}$; $CO = \frac{BO}{tg\vartheta} = \frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2p} = \frac{y^2}{4p} = x$, co zresztą wiadomo z geom. analit. Szybkość p. B $= \frac{dY}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{y}\cdot\frac{dx}{dt} = v = Const$, stąd szybkość p. C $= \frac{dx}{dt} = \frac{vy}{p}$ zaś przyspieszenie $= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v}{p}\frac{dy}{dt} = \frac{v}{p}\cdot\frac{2p}{y}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{v}{p}\cdot\frac{2p}{y}\cdot\frac{vy}{p} = 2v^2/p$.



Zad. 40. $x = a(\vartheta - \sin\vartheta)$, $y = a(1-\cos\vartheta)$; $\frac{dy}{dt} = \sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$; $\frac{d^2y}{dt^2} = 0 = \sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ stąd $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\cot g\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$; $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\Big/\frac{d\vartheta}{dt} = -\cot g\vartheta\cdot\frac{d\vartheta}{dt}$; $\lg\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) = -\lg\sin\vartheta + \lg C = \lg\frac{C}{\sin\vartheta}$; $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{\sin\vartheta}$. Następnie $\frac{dx}{dt} = a\frac{d\vartheta}{dt}(1-\cos\vartheta)$; $\frac{d^2x}{dt^2} = p = a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + a\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - a\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = a\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + a(1-\cos\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} =$



$= a\sin\vartheta \dfrac{c^2}{\sin^2\vartheta} - a(1-\cos\vartheta)\cdot \cot g\,\vartheta \cdot \dfrac{c^2}{\sin^2\vartheta} = ac^2 \dfrac{1-\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}$;

$\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$, $p = p_0 = ac^2$ czyli $p = p_0 \dfrac{1-\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}$.

Ruch jednostajnie przyspieszony. Zad. 41–46.

Zad. 41. $\dfrac{p_1 t_1^2}{2} + v t_2 + \dfrac{p_2 t_3^2}{2} = 3{,}25 \dots (1)$ $v = p_1 t_1 \dots (2)$

$v = p_2 t_3 \dots (3)$. z (2) i (3) $p_2 = \dfrac{p_1 t_1}{t_3}$ co podst. do (1):

$\dfrac{p_1 t_1^2}{2} + p_1 t_1 t_2 + \dfrac{p_1 t_1 t_3^2}{2 t_3} = 3{,}25$; $p_1 t_1^2 + 2 p_1 t_1 t_2 + p_1 t_1 t_3 = 6{,}5$;

$p_1 = \dfrac{6{,}5}{t_1^2 + 2 t_1 t_2 + t_1 t_3} = \dfrac{6{,}5}{1^2 + 2.1.2{,}5 + 1.0{,}5} = 1\ \mathrm{km/min^2} = 3600\ \mathrm{km/godz^2}$.

$v = p_1 t_1 = 1\ \mathrm{km/min} = 60\ \mathrm{km/godz}$. i $p_2 = \dfrac{v}{t_3} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2\ \mathrm{km/min^2} =$
$= 7200\ \mathrm{km/godz^2}$.

Zad. 42. $v_1 = v_0 + p t_1$; $v_2 = v_0 + p t_2$; $t_2 - t_1 = t = \dfrac{v_2 - v_1}{p}$.

Odległość pom. przystankami

$s = v_1 t + \dfrac{p}{2}\cdot t^2 = v_1 \cdot \dfrac{v_2 - v_1}{p} + \dfrac{p}{2}\cdot\dfrac{(v_2 - v_1)^2}{p^2} = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2p}$.

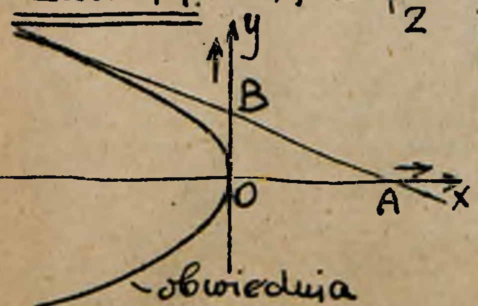
Zad. 43. $v_1 t + \dfrac{p_1 t^2}{2} = v_2 t + \dfrac{p_2 t^2}{2}$; $2(v_2 - v_1) + (p_2 - p_1)t = 0$;

$t = \dfrac{2(v_1 - v_2)}{p_2 - p_1}$. Odległość mety od startu $s = v_1 t + \dfrac{p_1}{2} t^2 =$

$= \dfrac{2v_1(v_1 - v_2)}{p_2 - p_1} + \dfrac{2p_1(v_1 - v_2)^2}{(p_2 - p_1)^2} = \dfrac{2v_1(v_1 - v_2)(p_2 - p_1) + 2p_1(v_1 - v_2)^2}{(p_2 - p_1)^2} =$

$= \dfrac{2(v_1 - v_2)(v_1 p_2 - v_2 p_1)}{(p_2 - p_1)^2}$.

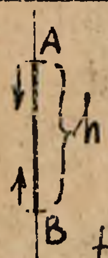
Zad. 44. $OA = \dfrac{pt^2}{2}$, $OB = vt$. Odciukowe równ. prostej AB jest $\dfrac{2x}{pt^2} + \dfrac{y}{vt} = 1$;



$2vx + pty - pt^2 v = 0$. spółrzędne punktów obwiedni spełniają to równanie czyli $f(x,y,t) = 0$ i $\dfrac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} = 0$ czyli $py - 2pvt = 0$.

Rozwiązując układ, otrzymamy $t=\frac{y}{2v}$;
$2vx+\frac{py^2}{8v^2}-\frac{pvy^2}{4v^2}=0$; $8v^2x+2py^2-py^2=0$ lub
$y^2=-\frac{8v^2}{p}x$: parabola symetryczna wzgl. Ox.

Zad. 45. Punkt A spadł do B po czasie t.



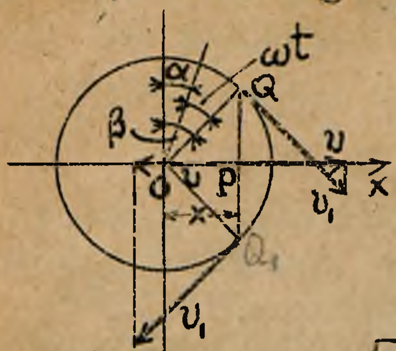
$h=\frac{gt^2}{2}$, $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Punkt B, rzucony w górę z szybkością x, podniósł się na połowę wysokości w czasie $\frac{t}{2}$ i wrócił do B znów po upływie czasu $\frac{t}{2}$ z tą samą szybkością.
$x=g\cdot\frac{t}{2}=\frac{g}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{gh}{2}}$.

Zad. 46. Spotkanie nastąpiło po t_1 sek. od drugiego wystrzału. Pocisk pierwszy wznosił się do najwyższego punktu przez $\frac{v_0}{g}$ sek. następnie do chwili spotkania spadał τ sek.
$\frac{v_0}{g}+\tau=t+t_1$ ...(1). Wysokość rzutu pierwszego pocisku $=\frac{v_0^2}{2g}$ zaś droga powrotna do spotkania $=\frac{1}{2}g\tau^2$. Drugi pocisk wzniósł się o $v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$, zatem $\frac{v_0^2}{2g}=\frac{1}{2}g\tau^2+v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$ ...(2)
Wyznacz. z (1) $\tau=t+t_1-\frac{v_0}{g}$ i podst. do (2):
$v_0^2=g^2\tau^2+2v_0gt_1-g^2t_1^2$; $v_0^2=(gt+gt_1-v_0)^2+2v_0gt_1-g^2t_1^2=g^2t^2+g^2t_1^2+v_0^2+2g^2tt_1-2gtv_0-2gt_1v_0+2v_0gt_1-g^2t_1^2$; $g^2t^2+2g^2tt_1-2gtv_0=0$; $gt+2gt_1-2v_0=0$; $t_1=\frac{v_0}{g}-\frac{t}{2}$.

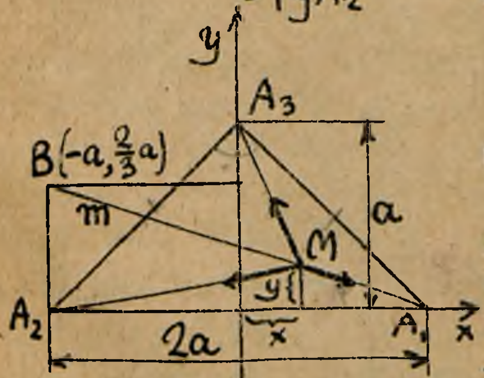
Ruch prosty harmoniczny. Zad. 47-48.

Zad. 47. 1-y sposób. $x=a\sin(\omega t+\alpha)$; $\frac{dx}{dt}=a\omega\cos(\omega t+\alpha)=$
$=\pm a\omega\sqrt{1-\sin^2(\omega t+\alpha)}=\pm a\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pm\omega\sqrt{a^2-x^2}$.

2' sposób. Wychodzimy z określenia ruchu harmonicznego. Punkt Q posiada szybkość $v_1 = a\omega$, zaś punkt P szybkość $v = v_1\cos\beta = a\omega\cos\beta$; $\sin\beta = \frac{x}{a}$; $\cos\beta = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; $v = \omega\sqrt{a^2-x^2}$. Gdy punkt Q znajdzie się w Q_1, szybkość punktu P wynosi $v = -\omega\sqrt{a^2-x^2}$. Piszemy zatem $v = \pm\omega\sqrt{a^2-x^2}$.



Zad. 48. Przyspieszenie p_{A_1} posiada składowe: $p_{xA_1} = k^2 \cdot MA_1\cos\varphi = k^2(a-x)$ oraz $p_{yA_1} = -k^2 \cdot MA_1\sin\varphi = -k^2 y$; przysp. p_{A_2} - składowe: $p_{xA_2} = -k^2(a+x)$, $p_{yA_2} = -k^2 y$; przysp. p_{A_3} - skł.: $p_{xA_3} = -k^2 x$, $p_{yA_3} = k^2(a-y)$. Przyspieszenie całkowite:



$p_x = k^2(a-x) - k^2(a+x) - k^2x = -3k^2x$;

$p_y = -k^2y - k^2y + k^2(a-y) = -3k^2y + k^2a$;

$\frac{d^2x}{dt^2} = -3k^2x$; $x = A\cos(k\sqrt{3}t+\alpha)$, $\frac{dx}{dt} = -Ak\sqrt{3}\sin(k\sqrt{3}t+\alpha)$;

$\frac{d^2y}{dt^2} = -3k^2y + k^2a = -3k^2\left(y-\frac{a}{3}\right) = \frac{d^2\left(y-\frac{a}{3}\right)}{dt^2}$, $y-\frac{a}{3} = B\cos(k\sqrt{3}t+\beta)$, $\frac{dy}{dt} = -Bk\sqrt{3}\sin(k\sqrt{3}+\beta)$

$t=0$: $x=a$, $A\cos\alpha = a$; $y=0$, $B\cos\beta = -\frac{a}{3}$;

$v_x = 0$, $-Ak\sqrt{3}\sin\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0$, $\alpha = 0$;

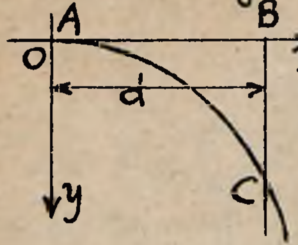
$v_y = 0$, $-Bk\sqrt{3}\sin\beta = 0$, $\sin\beta = 0$, $\beta = 0$;

stąd $A = a$, $B = -a/3$. $x = a\cos k\sqrt{3}t$, $y = \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\cos k\sqrt{3}t$. Rugując t, otrzymamy równanie toru $x+3y = a$ (równanie linji środkowej m). Dla $\cos k\sqrt{3}t = 1$ lub -1, $k\sqrt{3}t = 0$ lub π, $x = a$ lub $-a$, zatem półokres $T/2 = \pi/k\sqrt{3}$, okres $T = 2\pi/k\sqrt{3}$.

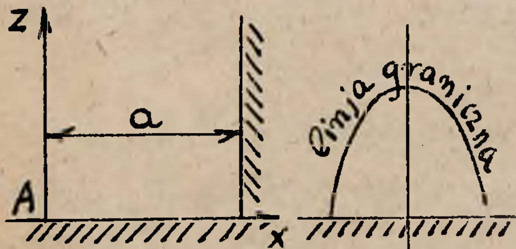
Ruch pocisku w próżni. Zad. 49-53.

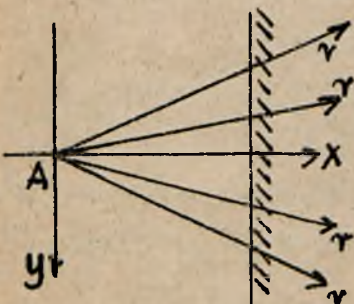
Zad. 49. $x_A = v_0 t$, $y_A = gt^2/2$; $x_B = 0$, $y_B = gt^2/2$.

Z równań tych wynika, że punkty A i B znajdują się stale na jednym poziomie, zatem spotkają się, gdy $x_A = d$, czyli po upływie czasu $t = d/v_0$.



<u>Zad. 50.</u> Przesuwamy przez pion Az szereg płaszczyzn pionowych z Ar. Równania parametryczne toru w jednej z tych płaszcz. są: $r = v_0 t \cos\alpha$, $z = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2$, skąd, po wyrugowaniu t, otrzym. $z = r\,tg\,\alpha - \frac{gr^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\alpha)$ lub $gr^2 tg^2\alpha - 2v_0^2 r\,tg\,\alpha + 2v_0^2 z + gr^2 = 0$

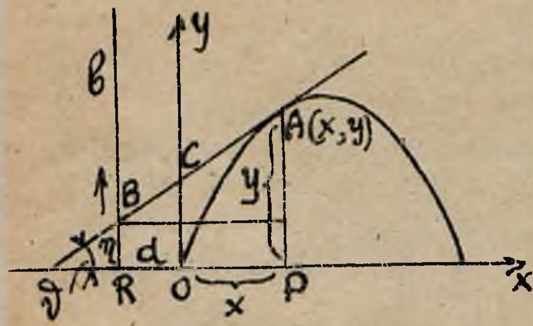




Punkt (z, r) będzie niedosięgalny, jeśli wyróżnik W tego równania będzie < 0. Linja graniczna pomiędzy dosięgalnemi i niedosięgalnemi punktami płaszczyzny z Ar będzie miała równanie $W = 0$, czyli $v_0^4 r^2 - (2v_0^2 z + gr^2) gr^2 = 0$; $g^2 r^2 + 2v_0^2 gz = v_0^4$. Jest to równanie rodziny jednakowych parabol, symetrycznych względem Az. Te parabole tworzą paraboloid $g^2(x^2 + y^2) + 2v_0^2 gz = v_0^4$. Szukaną linja graniczna na płaszczyźnie ściany będzie przecięcie paraboloidu ze ścianą, której równ.: $x = a$. $g^2 a^2 + g^2 y^2 + 2v_0^2 gz = v_0^4$; $y^2 = -\frac{2v_0^2}{g} z + \frac{v_0^4}{g^2} - a^2$: parabola, której parametr $p = \frac{v_0^2}{g}$, współrzędne wierzchołka: $y_0 = 0$, $z_0 = \frac{v_0^4 - a^2 g^2}{2v_0^2 g}$, odległość ogniska od poziomu $= z_0 - p/2 = -a^2 g/2v_0^2$ (minus oznacza, że ognisko znajduje się pod poziomem).

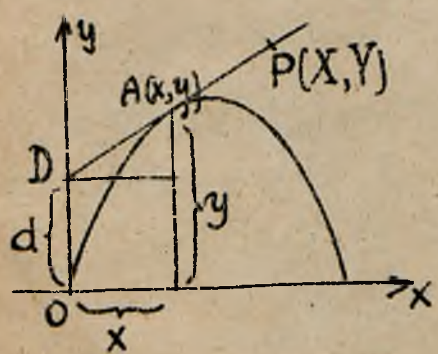
<u>Zad. 51.</u> Dowiedziemy tego dla pionu B i punktu B: $x = v_0 . t . \cos\alpha$, $y = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2$; $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$. $BR = \eta =$

$= y - (d+x)\cdot tg\,\vartheta$; $tg\,\vartheta = dy/dx = dy/dt : dx/dt = v_y/v_x$;



$\eta = y - \frac{v_y}{v_x}(d+x) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} - \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}(v_0 t\cos\alpha + d) = \frac{gt^2}{2} + d\cdot g\cdot t - d\cdot v_0 \sin\alpha$. Stąd $\frac{d^2\eta}{dt^2} = g$ czyli punkt B porusza się z przyspieszeniem ziemskiem.

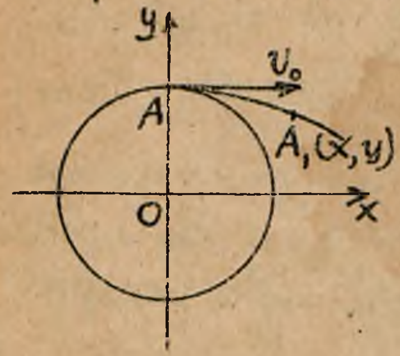
<u>Zad. 52.</u> $y = x\,tg\,\alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ (patrz zad. 50).



Równanie stycznej z p. (0,d) jest: $Y - \frac{dy}{dx}\cdot X = d$ lub $Y - \frac{v_y}{v_x} X = d$, gdzie $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$, $v_x = v_0\cos\alpha$. Chodzi o szczególny punkt stycznej mianowicie o punkt zetknięcia z krzywą, zatem $Y = y$, $X = x$ i otrzymujemy $y - \frac{v_y}{v_x}\cdot x = d$ (co jest wprost z rysunku widoczne), czyli $x\,tg\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} - \frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}\,x = d$. Podstawiamy $x = v_0 t\cos\alpha$ i rozwiązujemy równanie względem t: $v_0 t\cos\alpha\cdot tg\,\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot v_0^2 t^2\cos^2\alpha - \frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}\cdot v_0 t\cos\alpha = d$; $v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} - v_0\sin\alpha\cdot t + gt^2 = d$; $t^2 = \frac{2d}{g}$, $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ nie zależy od α c.b.d.d.

<u>Zad. 53.</u> <u>1^y sposób.</u> $x = v_0 t$, $y = -gt^2/2 + a$, $x^2 + y^2 > a^2$, $v_0^2 t^2 + g^2 t^4/4 - agt^2 + a^2 > a^2$, $4v_0^2 + g^2t^2 - 4ag > 0$, $4v_0^2 + g^2t^2 > 4ag$, zaś w chwili $t = 0$, $4v_0^2 > 4ag$ czyli $v_0 > \sqrt{ag}$.

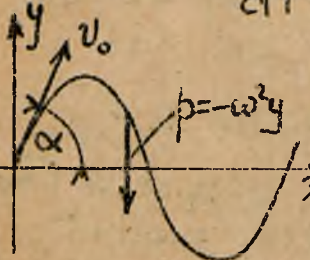
2' sposób. Równanie toru pocisku: $x = v_0 t$, $y = -\frac{gt^2}{2} + a$; $t = \frac{x}{v_0}$, $y = -\frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_0^2} + a$; parametr paraboli toru $= \frac{v_0^2}{g}$. Promień kuli powinien być mniejszy od promienia krzywizny paraboli w wierzchołku, który, jak wiadomo, równa się parametrowi, zatem



$$a < \frac{v_0^2}{g},\quad v_0^2 > ag,\quad v_0 > \sqrt{ag}.$$

Przykłady różne. Zad. 54–55.

Zad. 54. $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$; $x = At + B$, $\frac{dx}{dt} = A$; $t = 0$, $x = 0$, $B = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha = A$, zatem $x = v_0 t\cos\alpha$.

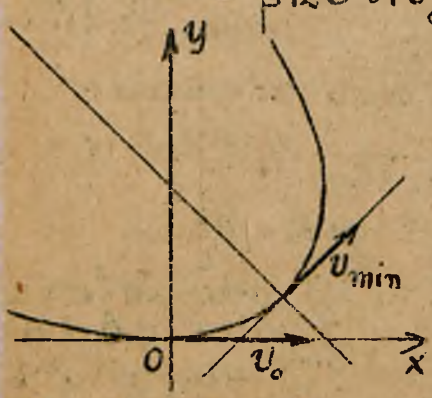


$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$; $y = C\sin(\omega t + \gamma)$, $\frac{dy}{dt} = C\omega\cos(\omega t + \gamma)$; $t = 0$, $y = 0$, $\sin\gamma = 0$, $\gamma = 0$, $\frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha = C\omega$, stąd

$$C = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega},$$ zatem

$$y = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\sin\omega t$$ (sinusoida).

Zad. 55. Liczymy czas od chwili, gdy punkt przebiegał przez O. $\frac{d^2x}{dt^2} = -a$, $x = -\frac{at^2}{2} + Bt + C$, $v_x = \frac{dx}{dt} = -at + B$; $t = 0$, $x = 0$, $C = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0 = B$, zatem $v_x = v_0 - at$.



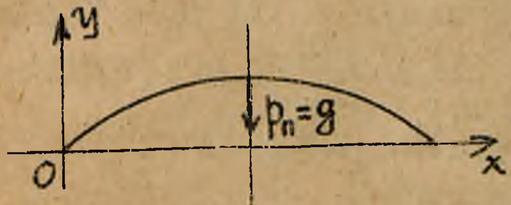
$\frac{d^2y}{dt^2} = a$; $y = \frac{at^2}{2} + Dt + \mathcal{E}$, $v_y = \frac{dy}{dt} = at + D$; $t = 0$, $y = 0$, $\mathcal{E} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0 = D$, $v_y = at$.

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - 2v_0at + 2a^2t^2$; v^2 osiąga minimum wraz z v: $\frac{d(v^2)}{dt} = -2v_0a + 4a^2t = 0$, $t = \frac{v_0}{2a}$; $x = -\frac{a}{2}\cdot\frac{v_0^2}{4a^2} + v_0\cdot\frac{v_0}{2a} = \frac{3v_0^2}{8a}$; $y = \frac{a}{2}\cdot\frac{v_0^2}{4a^2} = v_0^2/8a$. Równanie toru:

$x = v_0 t - at^2/2$, $y = at^2/2$ stąd $x + y = v_0 t$, $(x+y)^2 = v_0^2 t^2$ lub $(x+y)^2 = 2v_0^2/a \cdot y$ – parabola styczna do osi x, której oś symetrii tworzy z Ox kąt 135° (patrz Kurs geometrii analitycznej).

Przyspieszenie styczne i normalne. Zad. 56–58.

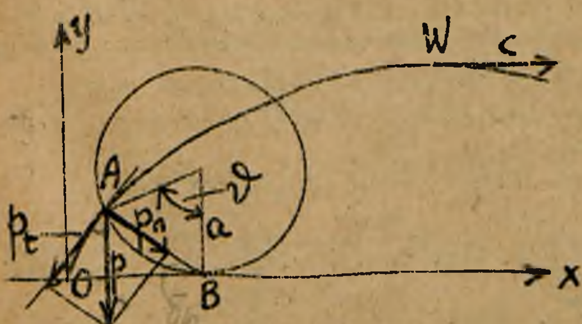
Zad. 56. 1-y sposób. W punkcie najwyższym pocisk przestaje się wznosić: $v_y = 0$, $v = v_x = v_0 \cos\alpha$.



Przyspieszenie normalne $p_n = g = \frac{v^2}{\rho}$ stąd $\rho = \frac{v^2}{p_n} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$.

2-i sposób. Równanie toru $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. Parametr paraboli toru $p = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$, zaś promień krzywizny w wierzchołku paraboli = parametrowi: $\rho = p = v_0^2\cos^2\alpha/g$.

Zad. 57. $x = a(\vartheta - \sin\vartheta)$, $y = a(1 - \cos\vartheta)$; $p_t = \frac{dv}{dt} = -p\cos\frac{\vartheta}{2}$ (minus ponieważ ma kierunek odwrotny do szybkości)

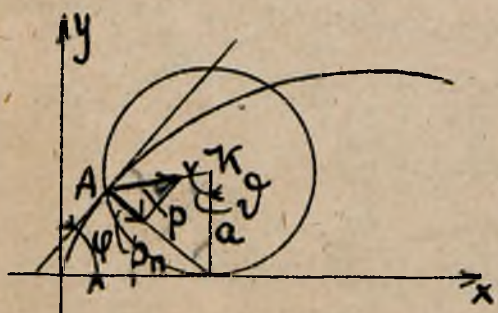


$p_n = \frac{v^2}{\rho} = p\sin\frac{\vartheta}{2}$. $\rho = 2AB = 4a\sin\frac{\vartheta}{2}$, zatem $v^2 = \rho \cdot p\sin\frac{\vartheta}{2} = 4ap\sin^2\frac{\vartheta}{2}$. Dzielimy równanie $\frac{dv}{dt} = -p\cos\frac{\vartheta}{2}$ przez ostatnio otrzymane:

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt} = -\frac{\cos\vartheta/2}{4a\sin^2\vartheta/2}, \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{4a\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\frac{dt}{d\vartheta}d\vartheta = -\frac{\cos\vartheta/2}{2a\sin^2\vartheta/2 \cdot d\vartheta/dt}\cdot d\frac{\vartheta}{2}.$$

Z drugiej strony $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, zatem $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}=2a\sin^2\frac{\vartheta}{2}\frac{d\vartheta}{dt}=$ stałej k, czyli $\frac{dv}{v^2}=-\frac{1}{k}\cos\frac{\vartheta}{2}d\frac{\vartheta}{2}$, stąd $\frac{1}{v}=\frac{\sin\vartheta/2}{k}$, $v=\frac{k}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$. W wierzchołku $\vartheta=\pi$, $v=k=c$, zatem $v=\frac{c}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$. Przyspieszenie $p=\frac{p_n}{\sin\frac{\vartheta}{2}}=\frac{v^2}{\rho\sin\frac{\vartheta}{2}}=\frac{c^2}{\rho\sin^3\frac{\vartheta}{2}}$ i $\rho=4a\sin\frac{\vartheta}{2}$, $\sin\frac{\vartheta}{2}=\frac{\rho}{4a}$, $p=\frac{64a^3c^2}{\rho^4}$.

Zad. 58. $\frac{d\varphi}{dt}=\omega=$ const. Jaka sama jest szybkość obrotu normalnej do toru, zatem

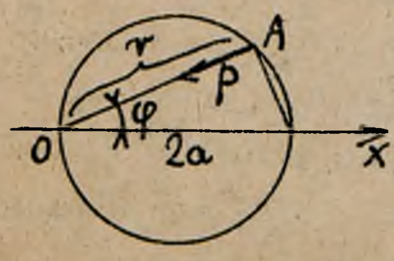


$v=\frac{ds}{dt}=\rho\frac{d\varphi}{dt}=\omega\rho$, gdzie promień krzywizny $\rho=$ $=4a\sin\frac{\vartheta}{2}$.

$\vartheta=180°-2\varphi$, $\frac{d\vartheta}{dt}=$ const. czyli koło obraca się ze stałą szybkością. Wiadomo, że w takim razie przyspieszenie p skierowane jest do środka K koła. Przyspieszenie normalne $p_n=\frac{v^2}{\rho}=\omega^2\rho$, zaś przyspieszenie całkowite $p=\frac{p_n}{\sin\frac{\vartheta}{2}}=\frac{\omega^2\rho}{\sin\vartheta/2}=4a\omega^2$.

Przyspieszenia w układzie biegunowym. Zad. 59-61.

Zad. 59. Obieramy O za biegun, średnicę za oś

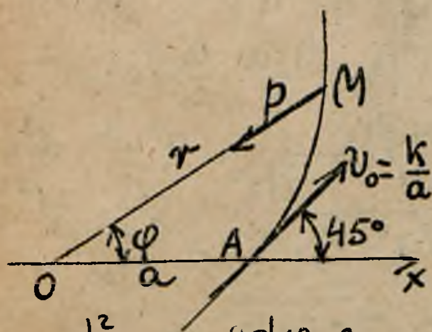


biegunową. $r=2a\cos\varphi$; $p_\varphi=$ $=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=0$, zatem $r^2\frac{d\varphi}{dt}=$ stałej C, $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{C}{r^2}$. Całkowite przysp. $p=p_r=\frac{d^2r}{dt^2}-$ $-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{c^2}{r^3}$.

$\frac{dr}{dt}=-2a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=-2a\sin\varphi\cdot\frac{c}{r^2}$; $\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{c}{r^2}2a\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}+$ $+2a\sin\varphi\frac{2cr}{r^4}\cdot\frac{dr}{dt}=-\frac{c}{r^2}\cdot r\cdot\frac{c}{r^2}-\frac{4ac}{r^3}\sin\varphi\cdot 2a\sin\varphi\cdot\frac{c}{r^2}=$

$= -\frac{c^2}{r^3} - \frac{8a^2c^2}{r^5}\sin^2\varphi = -\frac{c^2}{r^3} - \frac{8a^2c^2}{r^5}\cdot\frac{4a^2-r^2}{4a^2}$; $p =$
$= -\frac{c^2}{r^3} - \frac{8a^2c^2 - 2r^2c^2}{r^5} - \frac{c^2}{r^3} = \frac{-c^2r^2 - 8a^2c^2 + 2r^2c^2 - c^2r^2}{r^5} = -\frac{8a^2c^2}{r^5}$.
Minus wskazuje, że przysp. p skierow. jest do p. O.

Zad. 60. $p_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$, zatem $r^2\frac{d\varphi}{dt}$ = stałej c,



$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$. Wyznaczamy stałą c:
$v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r}$; w punkcie A $r=a$, $v_\varphi = \frac{v_0}{\sqrt2} = \frac{k}{a\sqrt2} = \frac{c}{a}$, stąd $C=\frac{k}{\sqrt2}$ i
$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{\sqrt2\, r^2}$. Następnie $p = p_r =$
$= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{k^2}{2r^3} = -\frac{k^2}{r^3}$ (minus bo jest skier. do p. O)
$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k^2}{2r^3}$; rozwiązujemy to równ. różniczkowe:
$\frac{dr}{dt} = u$, $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = u^2$, $d(u^2) = dz = 2u\,du =$
$= 2\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}dt = 2\frac{d^2r}{dt^2}\cdot dr = -\frac{k^2}{r^3}dr$; $\frac{dz}{dr} = -\frac{k^2}{r^3}$; $z =$
$= -k^2\int\frac{dr}{r^3} + D = \frac{k^2}{2r^2} + D$. Wyznaczamy stałą D:
$v_r = \frac{dr}{dt}$, $v_r^2 = u^2 = z = \frac{k^2}{2r^2} + D$; w punkcie A: $r=a$, $v_r = \frac{k}{a\sqrt2}$, $v_r^2 = \frac{k^2}{2a^2} =$
$= \frac{k^2}{2a^2} + D$, $D=0$, zatem $z = \frac{k^2}{2r^2} = u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$. stąd
$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{\sqrt2\, r}$; $r\,dr = \frac{k}{\sqrt2}dt$; $\frac{r^2}{2} = \frac{kt}{\sqrt2} + \mathcal{E}$; $r^2 = kt\sqrt2 + F$;
$t=0$, $r=a$, $F = a^2$, zatem $r^2 = kt\sqrt2 + a^2$.
$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{\sqrt2\, r^2} = \frac{k}{2kt + a^2\sqrt2}$; $d\varphi = \frac{k\,dt}{2kt+a^2\sqrt2} = \frac12\cdot\frac{2k\,dt}{2kt+a^2\sqrt2}$;
$\varphi = \frac12 \lg(2kt + a^2\sqrt2) + G$; $t=0$, $\varphi=0$, $G = -\frac12\lg a^2\sqrt2$,
$\varphi = \frac12\lg\frac{2kt+a^2\sqrt2}{a^2\sqrt2} = \frac12\lg\frac{kt\sqrt2+a^2}{a^2} = \frac12\lg\frac{r^2}{a^2} = \lg\frac{r}{a}$; $\frac{r}{a} =$
$= e^\varphi$, $r = ae^\varphi$ – spirala logarytmiczna.

Zad. 61. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dr^2 + (r\,d\varphi)^2}}{dt} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} =$

$= aω$, ale $\frac{dφ}{dt} = \frac{rω}{a}$, zatem $aω = \frac{rω}{a}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dφ}\right)^2}$;
$a^4 = r^4 + r^2\left(\frac{dr}{dφ}\right)^2$; $\frac{dr}{dφ} = \sqrt{\frac{a^4-r^4}{r^2}}$; $\frac{r\,dr}{\sqrt{a^4-r^4}} = dφ$;
$\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2} = φ+φ_0$; $\frac{r^2}{a^2} = \sin 2(φ+φ_0) = \sin(2φ+α)$; $r^2 = a^2\sin(2φ+α)$ równanie lemniskaty.

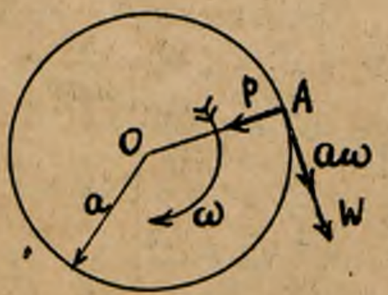
$p_φ = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dφ}{dt}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{r^3ω}{a}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{ω}{a}\cdot 3r^2\frac{dr}{dt}$;

$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{a^4-r^4}}{r}\cdot\frac{dφ}{dt} = \sqrt{a^4-r^4}\cdot\frac{ω}{a}$; $p_φ = \frac{3rω}{a}\cdot\frac{ω}{a}\sqrt{a^4-r^4} =$
$= \frac{3rω^2}{a^2}\sqrt{a^4-r^4}$; $p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dφ}{dt}\right)^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r^3ω^2}{a^2}$; $\frac{d^2r}{dt^2} =$
$= \frac{ω}{a}\cdot\frac{-4r^3}{2\sqrt{a^4-r^4}}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{-2ωr^3}{a\sqrt{a^4-r^4}}\cdot\sqrt{a^4-r^4}\cdot\frac{ω}{a} = -\frac{2ω^2r^3}{a^2}$;

$p_r = \frac{-2ω^2r^3}{a^2} - \frac{ω^2r^3}{a^2} = -\frac{3ω^2r^3}{a^2}$; $p = \sqrt{p_r^2 + p_φ^2} =$
$= \frac{3rω^2}{a^2}\sqrt{a^4-r^4+r^4} = 3rω^2$.

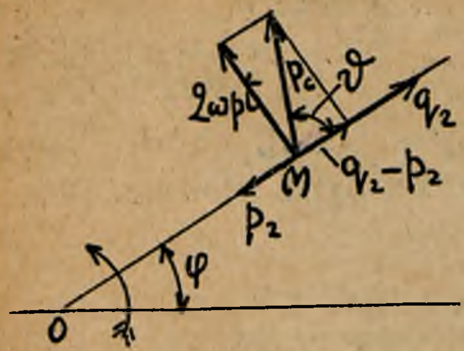
Przyśpieszenie w ruchu względnym. Zad. 62–65.

Zad. 62. Szybkość unoszenia jest stała i przyśpieszenie unoszenia (normalne) $p_2 = aω^2$ (składowa styczna $= 0$). Podobnie szybkość względna W jest stała i przyśpieszenie względne (normalne) $q_2 = \frac{W^2}{a}$ (składowa styczna $= 0$). Przyśpieszenie Coriolisa $p_1 + q_1 = 2ωW$. Wszystkie te składowe mają ten sam kierunek ku O, zatem przyśp. bezwzględne $p = aω^2 + \frac{W^2}{a} + 2ωW = (aω + 2W)ω + \frac{W^2}{a}$.



Zad. 63. W chwili t przyśpieszenie względne $q_2 = p$; $OM = r = \frac{p}{2}\cdot t^2$. Przyśp. unoszenia $p_2 = rω^2 = \frac{pt^2ω^2}{2}$ i posiada kierunek odwrotny (składowa styczna $= 0$, bo $dφ/dt = 0$).

Przyspieszenie Coriolisa $= 2\omega W = 2\omega pt$ i jest $\perp OM$ (zwrócone w tę stronę, co szybkość unoszenia).

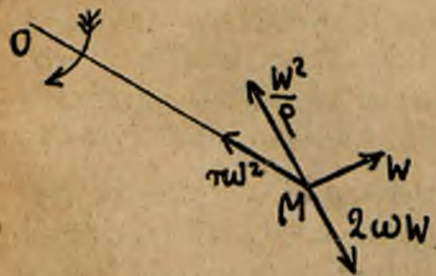


$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{2\omega pt}{p - p\frac{t^2\omega^2}{2}} = \frac{4\omega t}{2-t^2\omega^2};$$

$\vartheta = 45^\circ$, $\mathrm{tg}\,\vartheta = 1$, $\omega^2t^2 + 4\omega t - 2 = 0$, $\omega t = -2+\sqrt{6}$; wówczas przyspieszenie bezwzględne

$$p_c = \frac{2\omega pt}{\sin\vartheta} = 2\omega pt\sqrt{2} = 2p\sqrt{2}(\sqrt{6}-2) = 4p(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

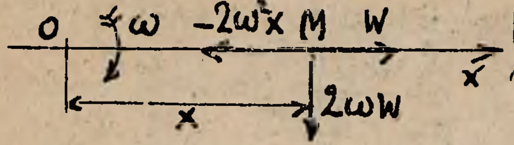
Zad. 64. Przysp. unoszenia $= r\omega^2$ (składowa styczna $= 0$); względne $= \frac{W^2}{\rho}$, gdzie ρ jest promieniem krzywizny toru punktu M (składowa styczna przysp. względnego także $= 0$); przysp. Coriolisa $= 2\omega W$, jest $\perp W$ i zwrócone w tę stronę, w którą dąży koniec szybkości W, gdy układ S obraca się dokoła M z szybkością ω.



Aby przyspieszenie bezwzględne było skierowane stale ku O, musi istnieć równość $\frac{W^2}{\rho} = 2\omega W$, $\rho = \frac{W}{2\omega} = \mathrm{Const.}$ czyli torem względnym powinien być położony dowolnie okrąg koła o promieniu $\frac{W}{2a}$.

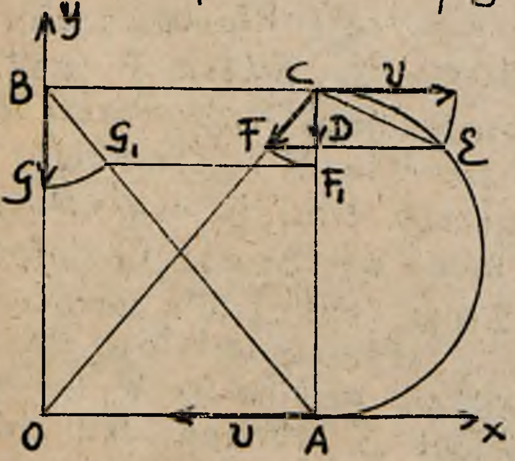
W przypadku szczególnym przyspieszenia: względne i Coriolisa leżą na MO. Wtedy $W \perp MO$ i torem względnym jest okrąg koła, zakreślony z O promieniem OM.

Zad. 65. $x = a\sin(\omega t + \alpha)$. Przyspieszenie względne $= -\omega^2 x$ (kierunek ku O ujemny). Przyspieszenie unoszenia także $= -\omega^2 x$. Szybkość względna punktu $M = W = \omega\sqrt{a^2-x^2}$ (patrz zad. 47), zatem przyspieszenie Coriolisa $= 2\omega W =$ $= 2\omega^2\sqrt{a^2-x^2}$, jest $\perp$ do szybkości względnej i zwrócone na dół. Przyspieszenie bezwzględne $p = 2\omega^2\sqrt{x^2+a^2-x^2} =$ $= 2a\omega^2 =$ Const., zatem koniec przyspieszenia bezwzględnego zatacza dokoła M okrąg o promieniu $2a\omega^2$.

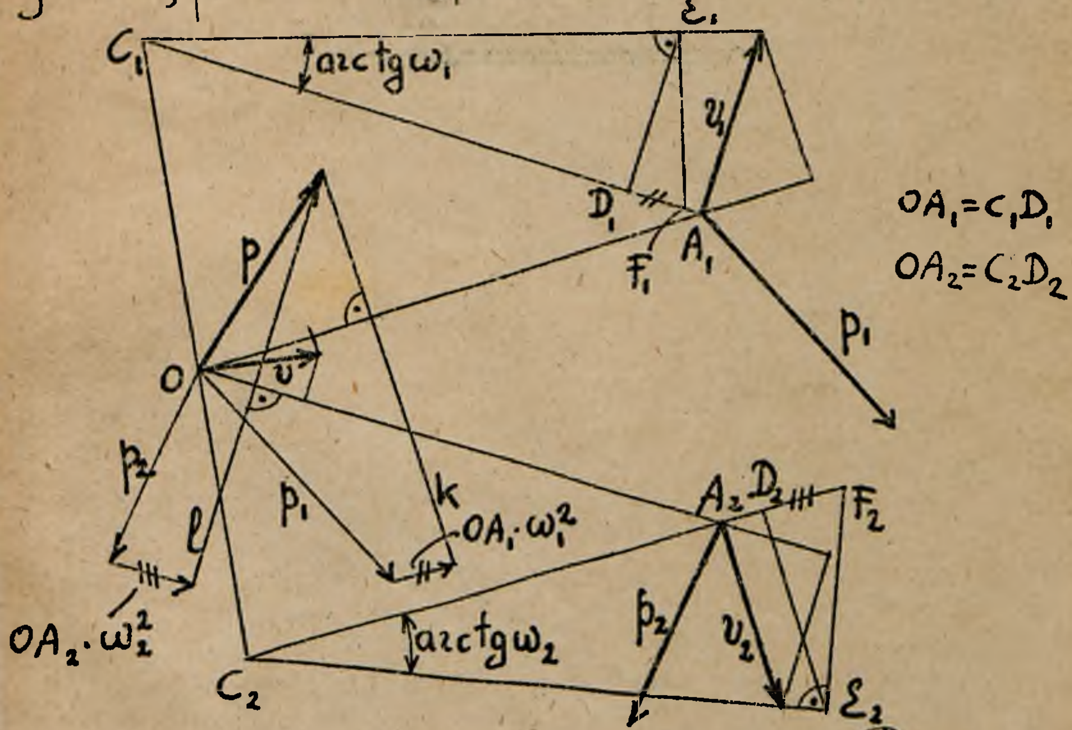


Pole przyspieszeń. Zad. 66-67.

Zad. 66. Punkt A jest środkiem przyspieszeń, ponieważ jego przyspieszenie =0. Wyznaczymy przyspieszenie środka chwilowego C (jest ono skierowane według wspólnej normalnej do krzywych środków, w danym wypadku ku O - patrz §66 książki). W tym celu rozważmy ruch punktu C względem A. Przyspieszenie unoszenia =0, czyli przyspieszenie względne jest przyspieszeniem całkowitem. Szybkość bezwzgl.=0, zatem szybkość względna jest równa szybkości unoszenia i odwrotnie skierowana. Przyspieszenie względne normalne $= \frac{v^2}{CA}$. Wyznaczamy je wykreślnie jako rzut CD cięciwy $CE = v$ na średnicę półkola CEA. Prowadząc $DF \perp CA$, znajdziemy przyspieszenie względne styczne = DF czyli przyspieszenie całkowite = CF. Przez środek przyspieszeń A i przyspieszenie CF punktu C pole przyspieszeń jest wyznaczone. Przyspieszenie BG punktu B leży na prostej Oy, koniec jego G wyznaczamy, korzystając ze znanej własności $F_1G_1 \parallel BC$.



Zad. 67. Każda ze sztab stanowi odrębny układ płaski. Wyznaczamy szybkość v przegubu, korzystając ze znanego twierdzenia (patrz zad. 21). Punkt C_1 (na przecięciu normalnych A_1C_1 i OC_1) jest środkiem chwilowym sztaby OA_1, punkt C_2 (podobnie wyznaczony) jest



środkiem chwilowym sztaby OA_2. Przegub O w danej chwili obraca się jednocześnie dokoła C_1 i C_2. Sztaba OA_1 obraca się dokoła swego środka chwilowego z szybkością kątową $\omega_1 = \frac{v_1}{C_1A_1} = \frac{v}{OC_1}$ i sztaba OA_2 dokoła C_2 z szybk. $\omega_2 = \frac{v_2}{C_2A_2} = \frac{v}{OC_2}$. Rozważamy ruch p. O względem A_1, czyli względem układu, który posiada ruch postępowy i porusza się tak jak A_1. Przysp. Coriolisa = 0, przysp. unoszenia = p_1. Przyspiesz. względne normalne $= OA_1\cdot\omega_1^2$ wyznaczamy za pomocą konstrukcji geometrycznej: w $\Delta C_1\mathcal{E}_1F_1$ mamy $D_1\mathcal{E}_1 = C_1D_1\cdot\omega_1$, $D_1F_1 = D_1\mathcal{E}_1\cdot\omega_1 = C_1D_1\cdot\omega_1^2 = OA_1\cdot\omega_1^2$. Przyspieszenie względne styczne jest nieznane co do wielkości. Koniec przyspieszenia bezwzględnego leży na prostej k prostopadłej do $0A_1$. Podobnie, rozważając ruch punktu O względem A_2, znajdziemy, że koniec przyspieszenia bezwzględnego leży na prostej l, prostopadłej do $0A_2$.