POCZĄTKI GEOMETRJI

PRZEZ

ZYGMUNTA STRASZEWICZA

profesora Politechniki Warszawskiej

NAKŁADEM S-KI AKC.
POLSKA SKŁADNICA POMOCY SZKOLNYCH
NOWY ŚWIAT 33 — MARSZAŁKOWSKA 143.
WARSZAWA
1921.

POCZĄTKI GEOMETRJI

PRZEZ

ZYGMUNTA STRASZEWICZA

profesora Politechniki Warszawskiej

NAKŁADEM S-KI AKC.
POLSKA SKŁADNICA POMOCY SZKOLNYCH
NOWY ŚWIAT 33 — MARSZAŁKOWSKA 143.
WARSZAWA
1921.

Druk L. Bogusławskiego, Warszawa.

Spis Rzeczy

Przedmowa autora

W r. 1912 w numerze kwietniowym czasopisma „Wektor“ ukazał się mój artykuł p. t. „Szkic propedeutyki geometrji“. Charakteryzowałem w nim w następujących słowach cel i metody propedeutyki:

„Należy odróżniać propedeutykę od elementarnego kursu geometrji, jaki bywa wykładany w szkołach ludowych, rzemieślniczych i t. d. W takim kursie elementarnym trzeba liczyć się bardzo ściśle z przyszłemi potrzebami praktycznemi uczniów, trzeba dać im pewien całokształt wiedzy geometrycznej, zawierający wiadomości najniezbędniejsze dla rolnika i rzemieślnika. Propedeutyka oczywiście może istnieć tylko w tych szkołach, w których po niej następuje kurs systematyczny geometrji, kurs ten uwzględnia, lub powinien uwzględniać, w dostatecznej mierze wymagania, które stawia szkole życie praktyczne, a zatem propedeutyka może wcale nie liczyć się z takiemi wymaganiami.

Nie jest również rzeczą konieczną ani nawet wskazaną wzorować się w propedeutyce na tradycyjnym kursie systematycznym, opartym na Elementach Euklidesa. Zasadniczo odmienne zadanie powinno być rozwiązane w zasadniczo odmienny sposób, a zadaniem tem jest nie udzielenie uczniowi pewnych określonych wiadomości, lecz stopniowe kształcenie jego władz umysłowych, wszczepianie w jego organizm umysłowy pewnych prostych pojęć i skojarzeń pojęciowych, odgrywających w geometrji rolę zasadniczą, wreszcie wzbudzenie w nim zamiłowania do tej gałęzi nauki.

W początkach nauki uczeń jeszcze nie jest zdolny do myślenia pojęciami ogólnemi, a przytem wyobraźnia jego jest jeszcze bardzo słaba; dla tego też przedmiotem poznawania może być dla niego tylko figura konkretna, narysowana, a środkiem poznawania — dostrzeganie bezpośrednie zmysłowe. Stąd wynika, że w pierwszem stadjum nauki główną rolę powinno odgrywać doświadczenie czyli rysunek. Uczeń rysuje figurę, czyniącą zadość warunkom dokładnie określonym w zadaniu, i spostrzega, że figura ta posiada pewną właściwość nieoczekiwaną. Z czasem uczeń przyzwyczai się do pojęć ogólnych. Gdy będzie mowa o trójkącie, to już będzie myślał nie o trójkącie konkretnym, wykreślonym na papierze, lecz o określonym rodzaju figur, posiadających pewne własności wspólne. Zrozumie on przytem, że własności figur można wykrywać zapomocą rozumowania, a jednocześnie rozwinie się jego wyobraźnia przestrzenna".

Dziełko niniejsze jest wykonaniem programu, naszkicowanego w owym artykule, z pewnemi zmianami, które nawinęły się podczas pracy. Składa się ono z trzech części. W części pierwszej uczeń nabiera wprawy w działaniach wykreślnych, ale nie jest to tylko nauka kreślenia. Chodzi tu o inne cele, dalsze. Przedewszystkiem uczeń przyswaja sobie najprostsze pojęcia geometryczne, jak punkt, linja prosta, linja krzywa, styczna, proste równoległe, prostopadłe i t. d., powtóre przekonywa się, że w tworach geometrycznych zachodzi pewna piękna prawidłowość, co powinno zaostrzyć jego ciekawość i wzbudzić chęć do bliższego poznania tej prawidłowości. Część druga, poświęcona symetrji osiowej i środkowej, już ma charakter bardziej oderwany i logiczny. Uczeń poznaje tu przeważnie drogą rozumowania główne właściwości najprostszych figur, mianowicie trójkąta, kwadratu, prostokąta, równoległoboku, okręgu i t. d. Część ostatnia dotyczy geometrji przestrzeni. Aby zachować jednolitość metody, aby i tu własny rysunek ucznia był głównym środkiem kształcenia, trzeba było wprowadzić pewien rodzaj odwzorowywania płaskiego przestrzeni. Uważam, że najodpowiedniejsze do tego celu są rzuty równoległe ukośne. Są one łatwiejsze od rzutów prostokątnych, jeżeli nie wychodzi się po za pewne rozsądnie zakreślone granice, a do tego dają obrazy plastyczne, przemawiajace żywo do wyobraźni, co nie tylko ułatwia nauczanie, ale dostarcza uczniom pewnego zadowolenia estetycznego. Uczeń wykreśla rzuty prostopadłościanu, czworościanu, pryzmatu, dzieli je na części, wykreśla siatki i w ten sposób poznaje najważniejsze właściwości figur, złożonych z punktów, płaszczyzn i prostych.

Starałem się, aby wymagania, stawiane wyobraźni ucznia, wzrastały stopniowo, a zatem paragrafy końcowe są pod tym względem najtrudniejsze. Dotyczy to zwłaszcza par. 37, w którym obok rzutu ukośnego wprowadzam rzut prostokątny, skutkiem czego powstaje odwzorowanie płaskie, określające utwór przestrzenny całkowicie. Jeszcze trudniejsze są paragrafy 38, 39 i 40, w których jest mowa o perspektywie. Mogą one stanowić próbę całej metody. Jeżeli uczniowie istotnie zrozumieją, jak w głównych rysach powstaje perspektywa obrazu, to można będzie uważać, że cel nauki został całkowicie osiągnięty.

Każdy paragraf składa się z krótkiego wyjaśnienia, które ma dać nauczyciel, oraz pewnej liczby pytań, rozszerzających zakres udzielonej wiedzy, i zadań. Na pytania uczniowie powinni odpowiedzieć możliwie samodzielnie, zadania mają rozwiązać wykreślnie. Kreślenie jest tu rzeczą podstawową i wymaga szczególnych starań ze strony nauczyciela. Uważałbym za pożądane, jakkolwiek niekonieczne, aby wszystkie rysunki były robione w klasie pod okiem nauczyciela. Jednocześnie nauczyciel powinien konferować z poszczególnymi uczniami, kontrolować ich robotę, dawać wskazówki praktyczne, pomagać w zrozumieniu zadania.

Kreślić należy w zeszycie, zrobionym z grubszego papieru, tak aby można było wycierać gumą. Każdy uczeń powinien posiadać najważniejsze przyrządy rysunkowe, a mianowicie dobry ołówek Nr. 4, dwie ekierki i dwa cyrkle, jeden z ołówkiem do kreślenia okręgów i drugi z ostremi końcami do odmierzania. Dostatecznem będzie wykonywać rysunki w ołówku, i nie trzeba zapominać, że samo kreślenie jest tu nie celem, lecz środkiem do nabycia wiedzy geometrycznej. Swoją drogą uważam za rzecz bardzo ważną, aby uczniowie utrzymywali swe przyrządy starannie, kreślili dokładnie i czysto. Są to warunki niezbędne, aby kreślenie było pracą przyjemną i zajmowało niezbyt wiele czasu, a do tego spełnienie ich będzie miało niewątpliwie dodatnie skutki wychowawcze.

Warszawa w grudniu 1920.

I. Działania wykreślne

1. Przykładam ekierkę do tablicy i prowadzę kredę wzdłuż brzegu. Tym sposobem otrzymuję na tablicy *linję prostą*. Mogę ją przedłużyć w jednym i drugim kierunku aż do brzegów tablicy; mógłbym przedłużyć ją jeszcze dalej, gdyby tablica była większa. Brzeg ekierki jest również linją prostą. Widzimy tu naokoło wiele linji prostych. Tak więc brzegi tablicy są linjami prostemi. Ściana łączy się z podłogą według linji prostej, inaczej mówiąc, linją przecięcia ściany i podłogi jest prosta. To samo można powiedzieć o ścianie i suficie. Nić dobrze wyciągnięta tworzy linję prostą i t. d.

Niektóre proste nazywamy *pionowemi*, lub krótko *pionami*. Najdokładniej otrzymamy pion w sposób następujący: bierzemy kawałek sznura i w jednym jego końcu uwiązujemy jakiś ciężarek, np. kawałek ołowiu. Taki sznur z ciężarkiem na końcu stanowi przyrząd bardzo użyteczny. Nazywa się on zwykle również *pionem* albo *ołowianką*. Posługują się nim wciąż rzemieślnicy, a zwłaszcza murarze i cieśle. Gdy trzymamy nieruchomo wolny koniec, i ciężarek się nie buja, to sznur tworzy właśnie linję prostą pionową. Pionową także jest linja przecięcia dwóch ścian, wiele linji pionowych widzimy także w oknach i drzwiach.

Prócz pionowych odróżniamy jeszcze proste *poziome*. Poziomą np. jest linja przecięcia ściany z podłogą, lub ściany z sufitem. Również w oknach i drzwiach widzimy wiele linji poziomych.

Przykład 1. Czy można narysować na ścianie prostą pionową i prostą poziomą?

Prz. 2. Czy można narysować na podłodze prostą poziomą i prostą pionową?

Na podłodze nie można narysować prostej pionowej, natomiast każda prosta, narysowana na podłodze, jest pozioma.

Prz. 3. Czy można narysować na tablicy pochyłej prostą poziomą i pionową?

Prz. 4. Czy można narysować linję prostą na powierzchni rury?

Prz. 5. Czy można narysować linję prostą na powierzchni globusa lub kuli?

2. Rysuję teraz na tablicy od ręki inną linję. Każdy widzi, że nie jest ona prosta; nazywamy ją *linją krzywą*. Linje krzywe posiadają najrozmaitsze kształty i nazwy odróżniające. Kreślę np. linję krzywą zapomocą cyrkla. Nazywa się ona *okręgiem koła*, lub krótko *kołem*. Linję tę spotykamy na każdym kroku Tak np. kołem jest obrzeże szklanki, talerza, lub wazonu. Każdy zna koło wozu lub roweru, koło młyńskie, koła pasowe w fabrykach i t. d., wszystko to jednak są przedmioty, a nie linje, a dopiero brzeg takiego przedmiotu jest linją.

Trzymajmy nieruchomo końce ciężkiego sznura, albo lepiej łańcuszka, tak aby ten zwisał swobodnie; utworzy on linję krzywą, która pod względem kształtu różni się bardzo od koła. Krzywa taka nazywa się *łańcuchową*. Druty telegraficzne, rozwieszone na słupach, tworzą linje łańcuchowe.

Każdy widział, jak woda wytryska z sikawki lub węża, którym się polewa ulicę. Jeżeli strumień wybiega pochyło, to tworzy on w powietrzu linję krzywą, która zowie się *parabolą*. Taki strumień składa się z kropelek wodnych, i każda kropla, wypadłszy z otworu sikawki, obiega całą tę linię aż do ziemi. Inaczej mówiąc kropla zatacza w powietrzu parabolę.

Prz. 1. Czy można na globusie narysować okrąg koła?

Można. Okręgami są linje, zwane *równoleżnikami* i *południkami*. Równoleżniki są różne, pod względem wymiarów, jedne większe inne mniejsze. Największy równoleżnik, czyli *równik*, jest co do wymiarów równy południkowi. Koła większego od równika lub południka na globusie nie można nakreślić. Największe koło możnaby otrzymać w sposób następujący: zawiązujemy na globusie nić tak, aby była dobrze wyprężona. Nić taka posiada właśnie kształt największego koła, jakie na globusie jest możliwe. Jeżeli powierzchnia globusa jest bardzo gładka, to bywa trudno umocować na niej nić.

Prz. 2. Czy można kreślić koła na powierzchni rury?

Można, ale tylko jednej wielkości.

Prz. 3. Rzucamy w górę jakiś ciężki mały przedmiot, np. kulkę ołowianą lub kamień, wogóle mówiąc, pocisk. Jaką drogę obiegnie pocisk?

Pocisk, rzucony pionowo w górę, obiega linję prostą, a rzucony ukośnie, obiega parabolę, jak kropla wody w strumieniu, wytryskującym z sikawki. Kropla ta jest także pociskiem.

3. Znaczę na tablicy kredą punkt. Aby go odróżnić od innych punktów, które możnaby tak samo odznaczyć na tablicy, piszę obok niego literę A; będziemy go nazywali „punktem A". Podobnie nazywamy pewną wieś Dąbrową, aby ją odróżnić od wsi innych. Przykładam teraz ekierkę do tablicy w taki sposób, aby brzeg przeszedł przez punkt A, i kreślę linję prostą. Mówimy, że ta prosta przechodzi przez punkt A, lub że punkt A leży na tej prostej. Ustawiwszy inaczej ekierkę, mogę przez A przeprowadzić drugą prostą, potem trzecią i t. d. Można przez punkt przeprowadzić ile chcąc prostych, dowolną liczbę prostych.

Obieram teraz na tablicy dwa punkty A i B i przykładam tak ekierkę, aby prosta przeszła przez obydwa. Będziemy ją nazywali prostą AB, część zaś jej, zawartą między punktami A i B, *odcinkiem* AB. Wykreślam jeszcze część okręgu koła, albo *łuk kołowy*, pomiędzy punktami A i B. Przyłożywszy do A i B końce łańcuszka, moglibyśmy otrzymać linję łańcuchową, prowadzącą od A do B. Wogóle można pomiędzy A i B przeprowadzić bardzo wiele najrozmaitszych linji krzywych.

Wyobraźmy sobie, że z punktu A wyszła mucha i dąży do punktu B. Jeżeli pragnie ona dojść do B jak najprędzej, to powinna wędrować nie po żadnej z tych krzywych, lecz po prostej AB. Gdyby obrała inną drogę, to wędrówka jej trwałaby dłużej. Mucha może tego nie rozumieć, bo stworzenie to nie odznacza się rozumem, ale ludzie, budując drogę pomiędzy dwoma miastami, starają się, aby biegła ona wzdłuż linji prostej, bo wówczas podróżny najprędzej przejdzie z jednego miasta do drugiego. Jeżeli droga zbacza od linji prostej, omijając skały, parowy lub bagna, to podróżny powiada, że musi nakładać drogi. Droga prosta jest zawsze najkrótsza. Gdy zaciągamy sznur do bielizny pomiędzy dwoma hakami, to sznura wyjdzie najmniej, gdy jest należycie wyciągnięty, czyli gdy tworzy linję prostą.

Prz. 1. Na placu, porosłym murawą, pragniemy wygracować ścieżkę, przebiegającą pomiędzy punktami A i B, położonymi na obwodzie placu. Jak to uczynić?

Naturalnie ścieżka powinna być prosta. Wbijamy w A i B krótkie mocne kołki i do jednego z nich przywiązujemy koniec długiego sznura. Sznur przeprowadzamy przez plac, wyprężamy należycie i drugi koniec przywiązujemy do drugiego kołka. W ten sposób otrzymamy linję prostą, wzdłuż której należy gracować.

Prz. 2. Od przystani, położonej nad jeziorem, odbija łódka i płynie do gospody, stojącej na przeciwległym brzegu. Jak powinien kierować łódką sternik, aby jak najprędzej dojechać do celu?

Łódka powinna dążyć linją prostą, którą można w myśli poprowadzić od przystani do gospody, czyli powinna w każdej chwili stanowić jakby odcinek tej prostej. Łatwo zrozumieć, że dla sternika dziób łódki powinien wciąż wskazywać na gospodę.

Prz. 3. Objaśnić, jak strzelec powinien trzymać strzelbę, aby trafić w cel?

Kula jest pociskiem i biegnie po paraboli, jeżeli jednak odległość od celu jest niewielka, to część paraboli (łuk paraboli), zawarta między strzelcem i celem, jest słabo skrzywiona, bardzo mało różni się od prostej, i można ją w przybliżeniu uważać za prostą. Uważamy więc, że kula biegnie linją prostą, stanowiącą przedłużenie rury strzelby. Kula trafi w cel, jeżeli owa prosta przez cel przechodzi. Strzelec powinien tak ustawić strzelbę, aby muszka zasłaniała mu cel, gdy patrzy jednem okiem przez wycięcie celownika. Jeżeli cel jest odległy, to wówczas paraboliczna droga kuli odchyla się znacznie od linji prostej, i strzelec powinien mierzyć w punkt, położony po nad celem.

Prz. 4. Czy druty telegraficzne silniej zwisają w zimie, czy w lecie?

Wiadomo, że drut kurczy się pod wpływem zimna, a wydłuża po ogrzaniu. W lecie drut, przebiegający pomiędzy dwoma słupami, jest dłuższy i zwisa silniej. Gdyby drut wyprężyć w lecie zbyt silnie, tak aby utworzył linję prostą, to pękł by on z nastaniem mrozu, nie mogąc się kurczyć.

4. Obieram na tablicy trzy punkty A, B i C, a następnie wykreślam proste AB, BC i CA. Otrzymałem trzy proste, i każdy z obranych punktów jest połączony z dwoma pozostałemi.

Obieram jeszcze czwarty punkt D i łączę go z każdym z trzech pierwszych punktów, t. j. wykreślam proste DA, DB i DC. Teraz każdy z czterech obranych punktów jest połączony z każdym z pozostałych, i wszystkich prostych jest sześć.

Gdybyśmy obrali jeszcze piąty punkt E i połączyli go z każdym z poprzednich, to otrzymalibyśmy cztery nowe proste, i wszystkich prostych byłoby 10. Tak samo znajdziemy, że pomiędzy sześcioma punktami można przeprowadzic 15 prostych i t. d.

Jeżeli mamy trzy punkty A, B i C, ale C leży na prostej AB, to wówczas oczywiście możemy pomiędzy temi punktami przeprowadzić tylko jedną prostą. Można powiedzieć, że w tym razie proste BC i CA leżą na prostej AB, lub że te trzy proste leżą razem.

Prz. 1. Obliczyć bez rysunku, ile można przeprowadzić prostych pomiędzy dziesięcioma punktami. Odp. 45.

Prz. 2. Mamy cztery punkty, ale trzy z nich leżą na jednej prostej. Ile można pomiędzy temi punktami przeprowadzić prostych? Tu dwie proste leżą na trzeciej a więc będzie o dwie mniej prostych różnych, niż w przypadku ogólnym, t. j. gdy żadna trójka nie leży na jednej prostej.

Prz. 3. Mamy 11 punktów, z których dwie trójki leżą na prostych. Ile można pomiędzy temi wszystkiemi punktami przeprowadzić prostych różnych. Odp. 51.

Prz. 4. Nakreślić plan ogrodu, w którym powinno być 10 prostych alei, na każdej alei po 3 fontanny, a wszystkich fontann powinno być 9. Fontanny można oznaczyć małemi kółkami lub krzyżykami, a aleje linjami prostemi.

Rozumie się, jedna fontanna może należeć do kilku alei, a więc stać na ich zbiegu. Każdy powinien sam głowę łamać, jak rozstawić fontanny, ale jeżeli kto na żaden sposób nie będzie mógł nic wymyśleć, to niechaj zrobi tak: Niech ustawi na jednej prostej w jednakowych odstępach trzy fontanny, i oznaczy je cyframi 1, 2 i 3. Wprost naprzeciwko nich, również na jednej prostej w równych odstępach, powinny stanąć fontanny 4, 5 i 6. Fontannę 7 należy umieścić na zbiegu aleji 16 i 34, fontannę 8 na zbiegu 24 i 36 i wreszcie 9 na zbiegu 14 i 35. Jest jeszcze inny rozkład, ładniejszy.

5. Przeprowadzam na tablicy dwie linje proste. Linje te się przecinają. Punkt przecięcia leży na jednej i na drugiej, jest ich punktem wspólnym. Kreślę teraz dwie inne proste. Te nowe proste się nie przecinają; nie przecięłyby się nawet wtedy, gdybym każdą z nich przedłużył aż do brzegów tablicy. Gdyby jednak tablica była większa, to po odpowiedniem przedłużeniu i te proste by się przecięły.

Mogę jednak wykreślić takie dwie proste, które by się nie przecięły, gdybym je nie wiem jak przedłużył. Nazywamy takie proste *równoległemi*. Równoległemi są przeciwległe brzegi tablicy, równoległemi są szyny kolejowe, jeżeli je uważać za linje, równoległe są także dwie proste pionowe.

Kreślę teraz trzy proste, dobierając je tak, aby przecięły się w obrębie tablicy. Przy jednej z nich piszę literę *a*, i będziemy ją nazywali prostą *a*, drugą nazwiemy prostą *b*, trzecią prostą *c*. Podobnie nadajemy rzekom dla odróżnienia rozmaite nazwy; jedną nazywami Wartą, drugą Narwią, trzecią Dunajcem. Punkt przecięcia prostych *a* i *b* będziemy nazywali punktem *ab*; prócz niego mamy tu również punkty *bc* i *ca*. Razem trzy punkty przecięcia. Prowadzę jeszcze czwartą prostą *d*; przecina ona każdą z trzech poprzednich, i powstają trzy nowe punkty przecięcia *da*, *db* i *dc*. Razem więc mamy sześć punktów. Gdybym wykreślił jeszcze piątą prostą, to przybyłyby cztery nowe punkty, i wypadłoby wszystkiego dziesięć punktów przecięcia. Tak samo znajdziemy, że sześć prostych przecina się w 15 punktach i t. d.

Jeżeli mamy trzy proste *a*, *b* i *c*, ale *c* przechodzi przez punkt *ab*, to wówczas oczywiście istnieje tylko jeden punkt przecięcia. Można powiedzieć, że w tym razie punkty *bc* i *ca* leżą na punkcie *ab*, lub że te trzy punkty leżą razem.

Prz. 1. Wiemy, że dwie proste pionowe są zawsze równoległe. Czy również i dwie proste poziome muszą być równoległe?

Prz. 2. Czy prosta pionowa może być równoległa do prostej poziomej?

Prz. 3. Czy na powierzchni rury (cylindra) można nakreślić dwie proste równoległe?

Prz. 4. Obliczyć bez rysunku, w ilu punktach przecina się 12 prostych. Odp. 66.

Prz. 5. Mamy cztery proste, ale trzy z nich przechodzą przez jeden punkt. Ile jest wszystkiego punktów przecięcia?

Prz. 6. Mamy 10 prostych, z których dwie trójki przechodzą każda przez jeden punkt. Ile jest wszystkiego punktów przecięcia? Odp. 41.

6. Niżej podane przykłady należy wykreślać z największą starannością. Ołówek powinien być dobrze zaostrzony, aby kreślone linje były ostre i wyraźne; trzeba go trzymać nie pochyło, lecz prawie prostopadle do papieru. Punkt znaczy się na papierze lekkiem nakłuciem igły, lub końca cyrkla. Nakłuwając należy trzymać igłę prostopadle do papieru i starać się o jaknajwiększą dokładność. Jeżeli np. znaczymy punkt przecięcia dwóch prostych, to należy koniec igły dokładnie ustawić na tym punkcie. Gdy mamy przez taki punkt przeprowadzić prostą, to naprzód przykładamy ekierkę, a następnie próbujemy, czy ołówek przystawiony do brzegu ekierki, zapada w nakłucie; inaczej kreślona prosta może przejść obok punktu.

Kto będzie się trzymał tych wskazówek i utrzymywał rysunek czysto, temu kreślenie sprawi przyjemność; będzie to dla niego raczej rozrywka niż praca. Brudas i niedbaluch namęczy się, namartwi, straci masę czasu, a pomimo to rysunki jego będą niedokładne i brzydkie.

Prz. 1. Przez punkt S poprowadzić trzy proste *a*, *b* i *c*; na pierwszej obrać punkty A_1 i A_2, na drugiej B_1 i B_2, wreszcie na trzeciej C_1 i C_2. Następnie wyznaczyć trzy punkty przecięcia (1) prostych A_1B_1 i A_2B_2, (2) prostych B_1C_1 i B_2C_2, (3) prostych C_1A_1 i C_2A_2.

Próba dokładności. Jeżeli cały rysunek będzie zrobiony dokładnie, to trzy wyznaczone punkty będą leżały na jednej prostej linji.

Należy tak dobrać te punkty i proste, aby cały rysunek zmieścił się na papierze i nie zajmował zbyt wiele miejsca. W tym celu najlepiej jest naprzód wykonać go na brudno na kawałku niepotrzebnego papieru, od ręki, ale starannie. Gdyby przytem szukane punkty przecięcia wypadły zbyt daleko, to trzeba zrobić nową próbę, zmieniając stosownie położenia punktów A_1, A_2, B_1 i t. d. Dopiero mając gotowy szkic udany, można przystąpić do roboty na czysto. Uwaga ta dotyczy i dalszych zadań.

Prz. 2. Na prostej *s* obrać trzy punkty A, B i C; przez pierwszy poprowadzić proste a_1 i a_2, przez drugi proste b_1 i b_2, wreszcie przez trzeci proste c_1 i c_2. Następnie wykreślić trzy proste, łączące (1) punkty a_1b_1 i a_2b_2, (2) punkty b_1c_1 i b_2c_2, (3) punkty c_1a_1 i c_2a_2. *Próba dokładności.* Te trzy proste powinny przejść przez jeden punkt

Prz. 3. Przez punkt O poprowadzić dwie proste *a* i *b*, a przez inny punkt P trzy proste. Prosta *a* przetnie owe trzy proste odpowiednio w punktach A_1, A_2, A_3, a prosta *b* w punktach B_1, B_2, B_3. Wyznaczyć punkt M, w którym przecinają się proste A_1B_2, i A_2B_1, a także punkt N, w którym przecinają się proste A_2B_3 i A_3B_2. *Próba:* punkty M, N, O powinny leżeć na jednej prostej.

Prz. 4. Na prostej *o* obrać dwa punkty A i B, a na innej prostej *p* trzy punkty. Punkt A łączy się z owemi trzema punktami odpowiednio zapomocą prostych a_1, a_2, a_3, a punkt B zapomocą prostych b_1, b_2, b_3. Wykreślić prostą *m*, która łączy punkty a_1b_2 i a_2b_1, a także prostą *n*, łączącą punkty a_2b_3 i a_3b_2. *Próba:* proste *m*, *n* i *o* powinny przejść przez jeden punkt.

Prz. 5. Nakreślić okrąg koła i obrać na nim sześć punktów A, B, C, D, E, F. Te punkty niekoniecznie mają leżeć w jednakowych odstępach, lub następować po sobie w porządku wymienionym. Następnie wyznaczyć trzy punkty przecięcia (1) prostych AB i DE, (2) prostych BC i EF, (3) prostych CD i FA. *Próba:* punkty te powinny leżeć na jednej prostej. Odkrył to blisko trzysta lat temu (w r. 1639) szesnastoletni chłopiec Blaise Pascal, i dlatego też ową prostą matematycy nazywają *linją Pascala*. Pascal dzieckiem nauczył się geometrji bez niczyjej pomocy, a w wieku dojrzałym był nietylko znakomitym matematykiem, lecz i jednym z największych pisarzów Francji.

Prz. 6. Wykreślić trzy okręgi w ten sposób, aby każdy z nich przecinał dwa pozostałe, i przeprowadzić trzy proste, łączące punkty przecięcia (1) pierwszego okręgu z drugim, (2) drugiego z trzecim, (3) trzeciego z pierwszym. *Próba:* te trzy proste powinny przejść przez jeden punkt.

7. Kreślę na tablicy okrąg koła. Ten punkt, w którym tkwiło nieruchome ostrze cyrkla, nazywa się *środkiem koła*, a każda prosta, przechodząca przez środek, *średnicą*. Obieram na zewnątrz koła punkt A i prowadzę przezeń średnicę, t. j. łączę go ze środkiem. Widzimy, że średnica przecina okrąg w dwóch punktach, posiada z nim dwa punkty wspólne. Ustawiam znowu ekierkę w taki sposób, aby brzeg jej przystawał do średnicy, i obracam ją zwolna około punktu A. Linja brzegu przecina wciąż okrąg, ale w miarę oddalania się jej od średnicy, punkty przecięcia leżą coraz bliżej jeden od drugiego, zbliżają się do siebie, gdy ekierka się obraca. Wreszcie punkty te się spotkały. Zatrzymuję w tem położeniu ekierkę i kreślę prostą. Prosta taka zowie się *styczną do koła*. Ponieważ punkty przecięcia się zeszły, zatem styczna posiada z okręgiem tylko jeden punkt wspólny. Możemy również powiedzieć, że dwa punkty wspólne leżą teraz jeden na drugiem, albo leżą razem. Ów punkt wspólny nazywa się *punktem zetknięcia* prostej z kołem.

Oczywiście przez A można poprowadzić jeszcze drugą styczną do koła po drugiej stronie średnicy. Każda prosta, przechodząca przez A pomiędzy stycznemi, przecina okrąg w dwóch punktach. Inne proste, przechodzące przez A, lecz nie leżące pomiędzy stycznemi, nie przecinają wcale okręgu.

Gdy nawiniemy część sznura na koło, np. na obręcz, którą bawią się dzieci, a pozostałą część wyprężymy, to ta druga część tworzy prostą, styczną do koła. Pasy na kołach pasowych, jeżeli są dobrze wyprężone, tworzą styczne do tych kół, szyna jest styczna do koła wagonu i t. d.

Bardzo jest łatwo wykreślić dokładnie prostą, przechodzącą przez dany punkt A i styczną do koła, zwłaszcza jeżeli A nie leży na okręgu. Jeżeli A leży na okręgu, to sprawa jest trudniejsza, ale i w tym razie przy staranności można osiągnąć niezłą dokładność. W przyszłości poznamy sposób ułatwiający to działanie.

Prz. 1. Nakreślić okrąg i przeprowadzić doń sześć stycznych *a, b, c, d, e, f*; następnie wykreślić trzy proste, łączące (1) punkty *ab* i *de*, (2) punkty *bc* i *ef*, (3) *cd* i *fa*. *Próba:* proste owe przejdą przez jeden punkt.

Tę właściwość koła odkrył francuz Brianchon; dlatego to ów punkt zowie się *punktem Brianchona.*

Prz. 2. Na okręgu obrać punkt, napisać przy nim dwie litery A, B i przeprowadzić w nim styczną. Prócz tego obrać na okręgu jeszcze cztery punkty C, D, E, F. Wreszcie wyznaczyć trzy punkty przecięcia (1) prostych AB (t. j. nakreślonej stycznej) i DE, (2) prostych BC i EF, (3) prostych CD i FA. *Próba:* te trzy punkty leżą na jednej prostej.

Należy przykład ten porównać z przykładem 5 w paragrafie poprzedzającym. Każdy zrozumie, że w przykładach tych mamy jedno i to samo zadanie; cała różnica polega na tem, że tam punkty A i B leżały z osobna, a tu leżą razem.

Prz. 3. W dwóch punktach okręgu nakreślić styczne; przy jednym z nich napisać litery A, B, przy drugim C, D. Prócz tego obrać na okręgu jeszcze dwa punkty E, F i wyznaczyć trzy punkty przecięcia (1) prostych AB i DE, (2) prostych BC i EF, (3) prostych CD i FA. *Próba:* wszystkie trzy punkty leżą na jednej prostej.

Prz. 4. W obranym punkcie okręgu wykreślić styczną i napisać przy niej dwie litery *a* i *b*. Prócz tego przeprowadzić jeszcze cztery styczne *c, d, e, f*, wreszcie wykreślić trzy proste, łączące (1) punkty *ab* (t. i. obrany punkt zetknięcia) i *de*, (2) *bc* i *ef*, (3) punkty *cd* i *fa*. *Próba:* te trzy proste przechodzą przez jeden punkt.

Przykład ten różni się od 1 w par. niniejszem tem tylko, że tam styczne *a* i *b* leżały z osobna, a tu leżą razem.

Prz. 5. W dwóch punktach okręgu nakreślić styczne; przy jednej napisać litery *a, b*, przy drugiej *c, d*. Prócz tego nakreślić jeszcze dwie styczne *e, f*, i przeprowadzić trzy proste, łączące (1) punkty *ab* i *de*, (2) punkty *bc* i *ef*, (3) punkty *cd* i *fa*. *Próba:* wszystkie te trzy proste przechodzą przez jeden punkt.

Prz. 6. Wykreślić koło i obrać nazewnątrz niego punkt P. Przez P poprowadzić dwie proste *a* i *b*, przecinające okrąg; pierwsza przetnie go w punktach A_1, A_2, druga w B_1, B_2. Dalej wyznaczyć punkty przecięcia (1) prostych A_1B_1 i A_2B_2, (2) prostych A_1B_2 i A_2B_1, wreszcie połączyć te punkty linją prostą; przetnie ona okrąg w punktach M i N. *Próba:* styczne w punktach M i N przejdą przez punkt P.

Prz. 7. Wykreślić koło oraz przecinającą je prostą *p*. Na *p* obrać dwa punkty A i B nazewnątrz koła. Z pierwszego wychodzą styczne a_1, a_2, z drugiego b_1, b_2. Dalej wyznaczyć proste, łączące (1) punkty a_1 b_1 i a_2 b_2, (2) punkty a_1 b_2 i a_2 b_1. Przetną się one w punkcie, z którego wychodzą styczne *m* i *n*. *Próba:* punkty zetknięcia stycznych *m* i *n* leżą na prostej *p*.

8. W przykładach tego paragrafu trzeba będzie zapomocą cyrkla odmierzać na linji prostej, albo na okręgu żądane długości. Należy uważać przytem, aby ustawiać ostrze cyrkla dokładnie na linji, a nie z boku. Wszelkie uchybienie pod tym względem odbija się silnie na dokładności rysunku.

Prz. 1. Wykreślić dwie proste *a* i *b* i oznaczyć ich punkt przecięcia cyfrą 0. Odmierzyć od tego punktu na każdej prostej po 10 równych odcinków (odcinki na jednej prostej niekoniecznie mają być takie same, jak na drugiej), i punkty podziału oznaczyć cyframi 1, 2, 3... 10. Wreszcie połączyć linjami prostemi punkt 1 prostej *a* z punktem 10 prostej *b*, punkt 2 prostej *a* z punktem 9 prostej *b*, punkt 3 pr. *a* z punktem 8 pr. *b* i t. d.

Po skończeniu każdy zobaczy, że te wszystkie proste są styczne do pewnej linji krzywej; mówi się, że ta krzywa jest ich *obwiednią*. W tym razie obwiednią jest znana już nam parabola.

Prz. 2. Drabina, stojąca na podłodze i oparta o ścianę, zaczyna się zsuwać. Łatwo pojąć, że linja drabiny pozostaje wciąż styczną do pewnej linji, czyli że istnieje obwiednia wszystkich położeń drabiny. Wykreślić tyle położeń drabiny, aby owa obwiednia zarysowała się wyraźnie.

Rysujemy to wszystko w bocznym widoku, a więc podłogę będzie wyobrażała prosta pozioma, a ścianę prosta pionowa. Można je łatwo wykreślić przy pomocy ekierki. Również i drabina będzie wygladała, jako odcinek prostej Należy się starać, aby wykreślone proste były jednostajnie rozłożone, podobnie jak proste w poprzednim przykładzie, bo inaczej rysunek będzie nieładny. Obwiednią jest w tym razie linja, zwana *astroidą* czyli *krzywą gwiaździstą*. Nazwa pochodzi stąd, że z czterech gałęzi tej krzywej tworzy się rodzaj gwiazdy o czterech rogach.

Prz. 3. Wykreślić dwie proste *a* i *b* i obrać pomiędzy niemi punkt M. Poprowadzić następnie przez M prostą, która przetnie proste *a* i *b* odpowiednio w punktach A_1 i B_1, wreszcie odmierzyć na tej prostej w stronę punktu M odcinek B_1 M_1 równy A_1 M. Tak samo poprowadzić przez M drugą prostą A_2 B_2 i w powyższy sposób wyznaczyć punkt M_2 i t. d. Wyznaczyć tych punktów M_1 M_2, M_3 i t. d. tyle, aby wyraźnie zarysowała się linja krzywa, na której leżą.

I tu należy się starać, aby wyznaczone punkty krzywej leżały w odstępach mniej więcej jednakowych. Do wyznaczenia dalszych punktów można używać M_1 lub M_2 i t d. zupełnie tak samo jak punktu M. Krzywa, którą tu otrzymujemy, nazywa się *hiperbolą*.

Prz. 4. Nakreślić okrąg i styczną do niego w obranym punkcie O. Na tej stycznej, poczynając od O, odmierzyć pewną liczbę równych odcinków, a punkty podziału oznaczyć literami A_1, A_2, A_3 i t. d. Również na okręgu, znowu od O, odmierzyć tę samą liczbę takich samych odcinków i punkty podziału oznaczyć literami B_1, B_2, B_3 i t. d. Koło powinno być dość duże, a odmierzone odcinki tak małe, aby łuk OB_1 prawie nie różnił się od odcinka prostej. Następnie wziąć w cyrkiel długość OA_1 i z punktu B_1 (inaczej mówiąc, z B_1 *promieniem* OA_1) zatoczyć łuk, położony nazewnątrz okręgu. Tak samo z punktu B_2 promieniem OA_2 zatoczyć łuk, tak samo z B_3 promieniem OA_3 i t. d.

Owe łuki połączą się i utworzą razem linję krzywą, która nazywa się *rozwijającą koła*. Nazwa ta ma uzasadnienie następujące. Wyobraźmy sobie, że na koło nawinięta jest nić, i że koniec jej znajduje się właśnie w O. Weźmy teraz za ten koniec i odwijajmy nić, utrzymując ją w naprężeniu. W takim razie koniec zatoczy właśnie taką krzywą.

Prz. 5. Poprowadzić styczną do koła i odmierzyć na niej i na okręgu równe odcinki zupełnie tak samo, jak w przykładzie poprzedzającym. Następnie zatoczyć łuki (1) z punktu A_1 promieniem OB_1, (2) z punktu A_2 promieniem OB_2, (3) z punktu A_3 promieniem OB_3 i t. d.

Zobaczymy, że te wszystkie łuki są styczne do pewnej krzywej, czyli że istnieje obwiednia tych łuków. Obwiednia ta nazywa się *cykloidą*. Gdyby narysowane koło toczyło się po stycznej, to punkt O zataczałby właśnie tę cykloidę.

Weźmy wewnątrz koła jakiś punkt M. Gdy koło się toczy (wyobrażamy go sobie, jako krążek), to i ten punkt M zatacza pewną linję, tak zw. *cykloidę skróconą*. Można ją narysowac tak samo, jak poprzednio, tylko że z punków O, A_1, A_2 i t. d. należy zataczać łuki odpowiednio promieniami MO, MB_1, MB_2 i t. d. Jeżeli punkt M obierzemy nie wewnątrz, lecz nazewnątrz koła (możemy i tu uważać, że jest on złączony z toczącem się kołem) to wypadnie tak zw. *cykloida wydłużona*. Jest to ładna krzywa, tworząca rodzaj pętlicy.

9. W kreśleniu geometrycznem wypada często dzielić odcinki na dwie, trzy lub więcej równych części. Można to uczynić prędko i dokładnie w sposób następujący.

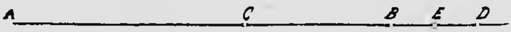

Fig. 1.

Przypuśćmy, że mam podzielić odcinek AB na dwie równe części, czyli wyznaczyć środek tego odcinka. W tym celu stawiam jedno ostrze cyrkla w punkcie A, a drugiem usiłuję trafić w szukany środek. Wydaję mi się, że tym środkiem jest punkt C, a więc tu ustawiam drugie ostrze. Robię teraz próbę; obracam cyrkiel około drugiego ostrza tak, aby pierwsze znalazło się znowu na naszej prostej, po stronie punktu B. Gdyby istotnie punkt C był szukanym środkiem, to pierwsze ostrze przypadłoby dokładnie w B.

Ale w tym razie omyliłem się; odcinek AC jest większy od połowy, a skutkiem tego pierwsze ostrze stanie w punkcie D, poza punktem B; a więc otrzymałem nadmiar BD. Pozostawiam drugie ostrze w C i zmniejszam rozwartość cyrkla tak, aby pierwsze stanęło w środku nadmiaru BD. Robię drugą próbę; przenoszę znowu jedno ostrze do A i probuję, czy odległość pomiędzy ostrzami jest równa połowie odcinka AB, a gdyby wypadł nadmiar, to podzielę go znowu na połowę i t. d. Przy którejś próbie ostrze może stanąć nie na B, lecz przed tym punktem; zamiast nadmiaru otrzymujemy niedomiar. W takim razie powiększamy rozwartość cyrkla, stawiając ostrze w środku owego niedomiaru. Po kilku takich próbach znajdziemy dokładnie środek odcinka AB. Najczęściej już druga próba prowadzi do celu, a nieraz nawet pierwsza.

W zupełnie podobny sposób dzielimy odcinek na trzy równe części. Rozumie się, w tym razie nadmiar lub niedomiar dzielimy nie na pół, lecz również na trzy części.

Gdy potrzeba podzielić odcinek na cztery równe części, to dzielimy go naprzód na pół, a następnie każdą połowę znowu na pół. Na pięć części dzieli się podobnie, jak na trzy; aby podzielić na sześć części, dzielimy naprzód na trzy, a dalej każdą część na połowę i t. d.

10. W następnych przykładach będziemy używali kilku nowych nazw, które trzeba naprzód wyjaśnić.

Obieram na tablicy trzy punkty A, B, C i łączę linjami prostemi A z B, B z C i C z A. Powstaje tym sposobem figura, zwana *trójkątem*. Punkty A, B, C zowią się *wierzchołkami* trójkąta, a proste AB, BC i CA jego *bokami*. Często jednak bokami nazywamy nie całe proste, lecz tylko odcinki ich, zawarte pomiędzy wierzchołkami.

Obieram teraz cztery punkty A, B, C, D i łączę je prostemi AB, BC, CD, DA. Otrzymana figura zowie się *czworokątem*, obrane punkty wierzchołkami, a przeprowadzone proste bokami. Prócz tego proste (często również odcinki) AC i BD nazywają się *przekątniami*. Podobnie powstaje pięciokąt, sześciokąt i t. d.

Prz. 1. W trójkącie podzielić na pół każdy bok, i połączyć środek z przeciwległym wierzchołkiem. Otrzymane proste zowią się *środkowemi* trójkąta. *Próba*: wszystkie trzy środkowe przejdą przez jeden punkt. Należy jeszcze sprawdzić, że część każdej środkowej, zawarta pomiędzy owym punktem wspólnym a wierzchołkiem, jest dwa razy większa od części pozostałej.

Ten punkt przecięcia środkowych nazywa się *środkiem ciężkości* trójkąta. Posiada on różne ciekawe właściwości. Jedną z nich można okazać w sposób następujący. Wycinamy dość duży trójkąt z cienkiej blachy, z deseczki lub sztywnego kartonu, i przyczepiamy doń w jakimkolwiek punkcie, położonym wewnątrz lub na obwodzie, koniec nici. Drugi koniec nici umocowujemy w jakimś punkcie nieruchomym tak, aby trójkąt zawisł w powietrzu. Zauważymy, że po pewnych wahaniach ustawi się on w położeniu pionowem, a ów środek ciężkości znajdzie się na linji prostej, stanowiącej przedłużenie nici. Jeżeli natomist przyczepimy nić w samym środku ciężkości, to będzie można ustawić trójkąt w położeniu poziomem, a także w jakimkolwiek ukośnem.

Prz. 2. Wykreślić czworokąt ABCD, oraz jego przekątnie. Następnie połączyć linjami prostemi (1) środki boków AB i CD, (2) środki boków BC i DA, (3) środki przekątni AC i BD. *Próba:* Wszystkie proste przejdą przez jeden punkt.

Prz. 3. Na odcinku AB wyznaczyć tak punkt C, aby część AC była dwa razy większa od części CB.

Prz. 4. Na odcinku AB wyznaczyć tak punkt C, aby część AC była trzy razy mniejsza od części CB.

Prz. 5. Na prostej AB po stronie punktu B wyznaczyć tak punkt C, aby odcinek AC był pięć razy większy od ćwierci odcinka AB, innemi słowy, aby AC było równe $^5/_4$ AB.

Prz. 6. Wykreślić trójkąt ABC i na bokach jego wyznaczyć trzy punkty, a mianowicie: (1) na boku AB punkt C_1 tak, aby $AC_1 = C_1B$, (2) na boku BC punkt A_1 tak, aby $CA_1 = 3\,A_1B$, (3) na boku CA punkt B_1 tak, aby $CB_1 = 3\,B_1A$. Wreszcie połączyć linjani prostemi wyznaczone punkty z przeciwległemi wierzchołkami trójkąta. *Próba:* owe trzy proste przejdą przez jeden punkt.

Prz. 7. Na bokach AB, BC, CA trójkąta wyznaczyć odpowiednio punkty C_1, A_1, B_1 tak, aby $AB = 3\,AC_1$, $BA_1 = 2\,BC$, $CA = 2\,CB_1$; z nich punkt A_1 leży nazewnątrz odcinka BC po stronie punktu C. *Próba:* owe trzy punkty leżą na jednej prostej.

11. Wiemy już, że prosta, przechodząca przez środek koła, zowie się *średnicą*. (par. 7). Tak samo nazywa się często odcinek tej prostej, zawarty wewnątrz koła, a część średnicy, zawartą pomiędzy środkiem i punktem okręgu, nazywamy *promieniem*. Oczywiście promień jest równy połowie średnicy. Dla każdego jest rzeczą jasną, że wszystkie promienie jednego i tego samego koła są równe, a także wszystkie średnice są równe.

Biorę teraz na okręgu dwa punkty A, B i łączę je linją prostą. Ten odcinek A B nazywa się *cięciwą*, a część okręgu, zawarta pomiędzy punktami A i B, jak już wiemy, nazywa się *łukiem* koła. Nazwy te są dobrane bardzo trafnie, bo podobieństwo do łuku, z którego strzelali dawni łucznicy, i do jego cięciwy jest oczywiste.

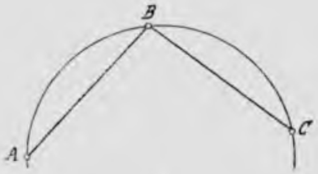

Fig. 2.

Wyznaczam jeszcze na okręgu trzeci punkt C w taki sposób, aby cięciwa BC była równa AB. W takim razie i łuk BC jest równy łukowi AB. Znaczenie tego powiedzenia jest następujące. Wyobraźmy sobie, że odcięto część koła, zawartą pomiędzy cięciwą BC a okręgiem, i przyłożono ją do części AB w taki sposób, że cięciwa BC przystała do cięciwy AB. W takim razie i łuk BC przystanie całkowicie do łuku AB.

Przypuśćmy teraz, że mamy łuk AC podzielić na dwie części równe. W tym celu potrzeba wyznaczyć taki punkt B, aby cięciwy A B i B C były równe. Inaczej mówiąc, gdy umieszczę jedno ostrze cyrkla w A i drugie w B, a następnie obrócę cyrkiel około B, to pierwsze ostrze znajdzie się w C. Punkt B zowie się *środkiem łuku* AC. Naturalnie ten środek łuku należy odróżniać od środka koła. Środek łuku wyznacza się zapomocą szeregu prób, podobnie jak środek odcinka. Każdy teraz już sam się domyśli, jak można podzielić łuk A B na większą liczbę części np. na trzy. Do tego trzeba na owym łuku wyznaczyć takie dwa punkty C i D, aby cięciwy A C, C D i D B były równe. Daje się to również uczynić zapomocą szeregu prób.

Prz. 1. Łuk A B podzielić na pół i środek łuku połączyć ze środkiem koła. Sprawdzić następnie, że otrzymany promień podzielił także na pół cięciwę AB.

Prz. 2. Łuk A B podzielić na trzy równe części i punkty podziału połączyć ze środkiem koła. Sprawdzić następnie, czy otrzymane promienie podzieliły cięciwę A B na równe części.

Prz. 3. W końcach cięciwy A B poprowadzić styczne do koła i ich punkt przecięcia połączyć ze środkiem koła. Następnie sprawdzić, że otrzymana prosta przechodzi przez środek łuku A B oraz przez środek cięciwy A B.

Prz. 4. Nakreślić dwa koła (niekoniecznie jednakowe) i oznaczyć punkty przecięcia okręgów literami A i B. Połączyć następnie linją prostą środki kół i sprawdzić, że ta prosta dzieli na pół obydwa łuki A B, a także cięciwę AB.

12. Zobaczymy teraz, jak można dzielić na równe części nie łuk koła, lecz cały okrąg. Przedewszystkiem jest rzeczą jasną dla każdego, że średnica dzieli okrąg na dwie równe części. Gdy każdą z tych połówek podzielimy w sposób znany znowu na pół, to cały okrąg podzieli się na cztery równe części, następnie możemy go podzielić na osiem części i t. d.

Szczególnie łatwo okrąg daje się podzielić na sześć równych części. Czynność ta opiera się na pewnej ciekawej i ważnej właściwości okręgu. Zataczam koło, a następnie, nie zmieniając rozwartości cyrkla, stawiam jedno jego ostrze w punkcie A na okręgu, a drugie również na okręgu w punkcie B, zatem cięciwa AB jest równa promieniowi. W takim razie łuk AB jest dokładnie równy szóstej części okręgu. Istotnie, gdy odmierzę, poczynając od punktu A, sześć takich cięciw, to ostrze cyrkla znowu powróci do punktu A.

Gdyśmy podzielili okrąg na sześć równych części, to znacząc co drugi punkt podziału, otrzymamy podział na trzy równe części. Na pięć części dzielić okrąg jest trudniej. Można to uskutecznić zapomocą szeregu prób, jak przy podziale łuku.

Na okręgu obieram trzy punkty A, B, C i łączę je linjami prostemi; otrzymuję więc trójkąt, którego wszystkie wierzchołki leżą na okręgu. Mówimy, że trójkąt taki jest *wpisany* w koło. Jeżeli łuki AB, BC, CA są równe, innemi słowy jeżeli wierzchołki dzielą okrąg na trzy równe części, to trójkąt nazywa się *foremnym*. Oczywiście w trójkącie foremnym wszystkie boki są równe; dlatego też trójkąt taki zowie się także *równobocznym*.

Podobnie czworokąt nazywamy wpisanym w koło, jeżeli wszystkie cztery wierzchołki leżą na okręgu. Jeżeli przytem łuki, oparte na bokach, są równe, t. j. jeżeli wierzchołki dzielą okrąg na cztery równe części, to czworokąt nazywa się foremnym lub *kwadratem*.

Może być również pięciokąt, wpisany w koło i pięciokąt foremny i t. d.

Prz. 1. Wpisać w koło trójkąt foremny i w wierzchołkach poprowadzić styczne; otrzymamy wówczas nowy trójkąt, utworzony przez te trzy styczne, oraz trzy mniejsze trójkąty; bokami każdego z tych ostatnich są dwie styczne i cięciwa. Sprawdzić, że wszystkie te trójkąty są równoboczne.

Prz. 2. Wykreślić sześciokąt foremny ABCDEF, wpisany w koło. Przedłużyć następnie każdy bok w obydwie strony aż do przecięcia z dwoma bokami nieprzyległymi, a więc przedłużyć bok AB do przecięcia z bokami CD i EF, a bok BC do przecięcia z bokami DE i FA i t. d. Utworzą się dwa duże trójkąty, leżące jeden na drugim; wykreślony sześciokąt jest ich częścią wspólną. Prócz tego powstanie sześć mniejszych trójkątów. Sprawdzić, że te wszystkie trójkąty są równoboczne.

Ile razy bok dużego trójkąta jest większy od promienia?

Prz. 3. Podzielić okrąg na sześć równych części i w punktach podziału przeprowadzić styczne. Próba: w powstałym sześciokącie boki powinny być równe, i wszystkie wierzchołki powinny leżeć na nowym, większym okręgu, zatoczonym z dawnego środka. Mówimy, że sześciokąt ten jest opisany na kole pierwszem.

Prz. 4. Wykreślić kwadrat, wpisany w koło, a następnie inny kwadrat, którego bokiem jest przekątnia poprzedniego. Ile razy przekątnia drugiego kwadratu jest większa od boku pierwszego?

Prz. 5. Wykreślić kwadrat, wpisany w koło, a następnie inny kwadrat, którego przekątnią jest bok pierwszego.

Prz. 6. Wykreślić foremny pięciokąt, wpisany w koło; następnie przedłużyć każdy bok jego, aż do przecięcia z dwoma innemi nieprzyległemi. Powstanie ciekawa figura, złożona z pięciu odcinków. Wyszedłszy z któregoś punktu jednego z tych odcinków, można obejść jednym ciągłem wszystkie odcinki i powrócić do punktu wyjścia. Dawniej nazywano ją pentagrammą i używano do różnych gusel i czarów.

13. Już dawniej, w paragrafje 5, była mowa o linjach równoległych, teraz zobaczymy, jak się linje takie wykreśla.

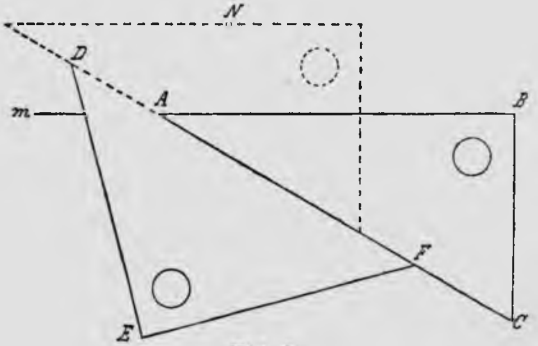

Fig. 3.

Mam tu prostą *m* i punkt N, a pragnę przez N poprowadzić prostą równoległą do *m* (fig. 3). W tym celu ustawiam ekierkę ABC w taki sposób, aby bok AB dokładnie przystawał do prostej *m*. Następnie ustawiam drugą ekierkę DEF tak, aby jej bok DF przystał do boku AC. Przyciskam teraz mocno drugą ekierkę do tablicy lub papieru szeroko rozstawionemi palcami, aby się nie poruszała, a pierwszą przesuwam lekko, bez przyciskania, przyczem bok AC powinien wciąż przystawać do DF. Oczywiście podczas tego przesuwania bok AB będzie pozostawał równoległym do prostej *m*. Gdy bok ten dojdzie do punktu N, to prowadzę wzdłuż niego kredę i otrzymuję prostą szukaną.

Prz. 1 Wykreślić czworokąt, w którym każde dwa boki przeciwległe są równoległe. Czworokąt taki zowie się *równoległobokiem*. Sprawdzić, że punkt przecięcia przekątni jest środkiem każdej z nich.

Prz. 2. Wykreślić w kole dwie cięciwy równoległe AB i CD. Sprawdzić, że cięciwy AC i BD są równe, a więc i łuki oparte na nich są równe. Wyznaczyć następnie punkt przecięcia prostych AC, BD i połączyć go ze środkiem koła. *Próba*: Ostatnia prosta przejdzie przez środki cięciw równoległych.

Prz. 3. Wykreślić dwie proste *m* i *n*, przecinające się w punkcie O. Następnie odmierzyć na prostej *m*, poczynając od O, kilka (6 do 10) równych odcinków OA_1, A_1B_1, B_1C_1, i t. d. Przez punkty podziału poprowadzić proste równoległe; przetną one prostą *n* w punktach A_2, B_2, C_2 i t. d. *Próba:* odcinki OA_2, A_2B_2, A_2B_2 i t. d. powinny być równe.

Prz. 4. Korzystając z tego, co było w przykładzie poprzedzającym, podzielić odcinek AB na pięć równych części.

Prz. 5. Wykreślić czworokąt ABCD, w którym boki AB i CD są równoległe, a dwa pozostałe nierównoległe. Czworokąt taki zowie się *trapezem*. Połączyć następnie punkt przecięcia boków nierównoległych z punktem przecięcia przekątni. *Próba:* otrzymana prosta podzieli na pół każdy z boków równoległych.

14. Kreślę prostą *a* i obieram nazewnątrz punkt B. Wyobraźmy sobie, że prosta *a* jest narysowana na równym gruncie, a w punkcie B stoi człowiek, który pragnie dostać się do *a*. Ponieważ miejscowość jest równa, przeto może on uczynić rozmaicie. Może podążyć drogą BD, albo BE, albo BF i t. d. Każda z tych dróg doprowadzi go do *a*, ale każdy rozumie, że najprędzej się dochodzi drogą BC. Mówimy, że prosta BC jest *prostopadła* do prostej *a*, jak również, że prosta *a* jest prostopadła do BC.

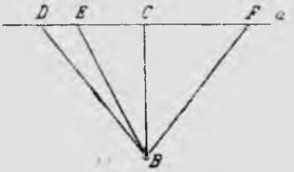

Fig. 4.

Widzimy naokoło siebie wiele linij prostych, z których jedne są prostopadłe do drugich. Tak np. górny brzeg tablicy jest prostopadły do brzegów bocznych, linja przecięcia dwóch ścian jest prostopadła do linji przecięcia ściany z podłogą. Wogóle mówiąc, prosta pionowa jest prostopadła do prostej poziomej.

Ekierka jest trójkątem, w którym dwa boki są prostopadłe jeden do drugiego; boki te zowią się *przyprostokątnemi*, a bok trzeci *przeciwprostokątną*. Przy pomocy ekierek można dokładnie przeprowadzać prostopadłe do danych prostych. Mam np. poprowadzić prostopadłą przez punkt N do prostej *m*. (fig. 5). W tym celu ustawiam ekierkę ABC w taki sposób, aby jej przyprostokątna BC przystała do prostej *m*, i do niej przystawiam ekierkę DEF tak, aby przystały do siebie obydwie przeciwprostokątne. Następnie drugą z tych ekierek utrzymuję nieruchomo, a pierwszą przesuwam w taki sbosób, aby przeciwprostokątne wciąż przystawały do siebie. Oczywiście bok AB będzie wciąż pozostawał prostopadłym do prostej *m*. Gdy bok ten przejdzie przez punkt N, to mogę już dokładnie wykreślić prostą szukaną.

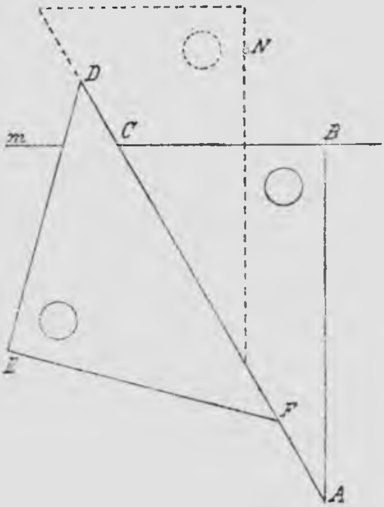

Fig. 5.

Nieraz się mówi o odległości punktu od prostej, np. punktu B od prostej *a*. Znaczenie tego powiedzenia jest następujące. Prowadzimy z B prostopadłą do *a*; punkt przecięcia, albo *spodek* prostopadłej, oznaczmy przez C. Mierzymy następnie odcinek BC. Wypadnie, dajmy na to, 15 centymetrów. W takim razie powiemy, że owa odległość wynosi 15 centymetrów. Nieraz mówimy o odcinku BC, jako o odlełości punktu B od prostej *a*, nie-kłopocząc się o to, ile to będzie centymetrów.

Prz. 1. W trójkącie ABC przez każdy wierzchołek poprowadzić prostą prostopadłą do przeciwległego boku. Proste takie zowią się *wysokościami* trójkąta. *Próba:* wszystkie trzy wysokości przejdą przez jeden punkt.

Prz. 2. W trójkącie ABC przez środek każdego boku poprowadzić prostopadłą do tego boku. *Próba:* te wszystkie prostopadłe przejdą przez jeden punkt. Punkt ten jest jednakowo odległy od wszystkich wierzchołków, można więc nakreślić zeń okrąg, przechodzący przez wszystkie wierzchołki, czyli tak zwany okrąg, *opisany* na trójkącie.

Prz. 3. Wykreślić czworokąt, w którym każde dwa boki przyległe są prostopadłe jeden do drugiego, i przeprowadzić przekątnie. Taki czworokąt nazywa się *prostokątem*. W prostokącie dwa boki przeciwległe są oczywiście równoległe, a więc należy on do tych czworokątów, które nazwaliśmy równoległobokami. *Próba:* przekątnie są równe, a ich punkt przecięcia jest jednakowo odległy od wierzchołków

Prz. 4. Wykreślić trójkąt prostokątny i połączyć wierzchołek, w którym schodzą się przyprostokątne, ze środkiem przeciwprostokątnej. *Próba:* otrzymany odcinek jest równy połowie przeciwprostokątnej.

Prz. 5. Ze środka okręgu poprowadzić prostopadłą do stycznej. Łatwo zrozumieć, że ta prostopadła przejdzie przez punkt zetknięcia, bo ze wszystkich punktów stycznej punkt zetknięcia jest najbliższy do środka. Odległość stycznej od środka jest oczywiście równa promieniowi.

Prz. 6. Punkt A okręgu połączyć z końcami średnicy BC; sprawdzić, że proste AB i AC są do siebie prostopadłe.

Prz. 7. Wykreślić dwie proste x, y, prostopadłe jedna do drugiej i przecinające się w punkcie O. Poprowadzić następnie sześć prostych a_1, a_2, $a_3 \ldots a_6$ prostopadłych do prostej x i położonych po jednej stronie prostej y; przetną one prostą x w punktach A_1, $A_2 \ldots A_6$. Obrać na prostej x, po tej samej stronie, punkt F, zatoczyć z niego łuk promieniem równym OA_1 i znaleźć jego punkty przecięcia z prostą a_1; tak samo zatoczyć z F łuk promieniem OA_2 i wyznaczyć jego punkty przecięcia z a_2 i t. d. Otrzymamy w ten sposób dwanaście punktów paraboli. Na tej samej krzywej leży również środek odcinka OF. Prosta x nazywa się *osią* paraboli, prosta y *kierownicą*, punkt F *ogniskiem*. Łatwo zauważyć, że każdy punkt paraboli leży w jednakowych odległościach od ogniska i kierownicy.

II. Symetrja

15. Widzimy tu starorzymskie malowidło ścienne, znalezione w Pompei. Starożytny malarz wyobraził na niem piękny ornament bronzowy, w który powtykane są z boków gałązki wawrzynu, a na dwóch słupkach, przypominających lichtarze, stoją dwa pawie.

Można byłoby przeprowadzić prostą pionową, dzielącą ten rysunek na dwie połowy, prawą i lewą, z których

Fig. 6.

jedna jest jakby powtórzeniem drugiej. Gdyby prawa część była już namalowana (na papierze), ale farba jeszcze nie zaschła, to zgiąwszy papier według owej prostej pionowej, moglibyśmy odrazu otrzymać lewą część jako odcisk prawej. Mówimy, że rysunek jest *symetryczny* względem wspomnianej prostej, i że ta prosta jest jego *osią symetrji*.

Zresztą symetrja nie jest tu całkowita. Łatwo zauważyć, że pawie nie są jednakowe, a przyjrzawszy się bliżej, dostrzeżemy, że i gałązki wawrzynu prawej strony różnią się nieco od gałązek lewej. Te drobne odstępstwa od symetrji są umyślne. Malarz pragnął w ten sposób wzmocnić przeciwieństwo pomiędzy sztywną ramą metalową, dziełem ręki ludzkiej, a wytworami natury, jak pawie i wawrzyn.

Z symetrją spotykamy się bardzo często. Liść bywa często symetryczny względem środkowego nerwu, chociaż symetrja jest w tym razie zwykle nie kompletna i nie dokładna. Dokładniejszą symetrję posiadają dzieła ręki ludzkiej. Np. drzwi podwójne są symetryczne względem linji środkowej; toż samo dotyczy okna.

Prz. 1. Wskazać oś symetrji w trójkącie równoramiennym, t. j. takim, w którym dwa boki są równe.

Prz. 2 Ile jest osi symetrji w trójkącie równobocznym?

Prz. 3. Ile jest osi symetrji w kwadracie?

Prz. 4 Ile jest osi symetrji w kole?

Prz. 5. Figura składa się z dwóch kół; wyznaczyć oś symetrji.

Prz. 6. Figura składa się z dwóch kół jednakowych; ile jest osi symetrji?

Prz. 7. Na obiciu pokojowem są wyobrażeni dwaj rycerze w pełnem uzbrojeniu symetryczni względem prostej. Czy trzymają oni miecze i tarcze we właściwych rękach?

16. Kreślę prostą s, która będzie osią symetrji, oraz inną prostą x prostopadłą do s. Ich punkt przecięcia oznaczam literą S. Następnie obieram na x po różnych stronach punktu S takie dwa punkty A_1 i A_2, aby odległości A_1S i A_2S były równe. Punkty A_1 i A_2 nazywają się *symetrycznemi* względem osi s, a prosta x, prostopadła do osi, nazywa się *promieniem* symetrji.

O takich punktach, jak A_1 i A_2, mówi się również, że *odpowiadają sobie w symetrji*. Gdy na prostej x weźmiemy jakiś inny punkt B_1, to z łatwością znajdziemy odpowiadający mu punkt B_2. Każdemu punktowi promienia x odpowiada inny punkt tego promienia. Jeżeli zegniemy papier według osi symetrji, to punkt A_2 przystanie do A_1, punkt B_2 do B_1 i t. d. Przystaną do siebie każde dwa odpowiadające sobie punkty.

Wyjątkowe stanowisko na promieniu x zajmuje punkt S. Ponieważ leży on na osi symetrji, przeto nie można dlań znaleźć punktu odpowiadającego, albo raczej punkt ten leży razem z S. Gdy zegniemy papier według osi symetrji, to punkt S. nie przystanie do żadnego innego punktu promienia x. Można powiedzieć, że przystanie on do samego siebie. Mówimy, że punkt S odpowiada sam sobie, nazywamy go też *punktem podwójnym* promienia x. *Wszystkie punkty osi symetrji odpowiadają samym sobie*, są punktami podwójnemi.

Niech będzie znowu oś symetrji s i jakaś prosta a_1. Obieram na a_1 dwa punkty M_1, N_1 i wyznaczam odpowiadające im M_2, N_2. Następnie prowadzę prostą a_2 przez te punkty M_2 i N_2. Proste a_1 i a_2 nazywają się *symetrycznemi* względem osi s. Mówimy również, że prosta a_2 odpowiada prostej a_1 lub odwrotnie. Jest dla każdego oczywistem, że proste symetryczne spotykają się na osi symetrji; ten punkt przecięcia musi przecież odpowiadać sam sobie.

Prz. 1. Jakie proste odpowiadają samym sobie w symetrji? Odp. Promienie symetrji i oś. Pomiędzy promieniem i osią zachodzi jednak ważna różnica. Gdy każdy punkt osi odpowiada sam sobie, to na promieniu istnieje tylko jeden punkt taki.

Prz. 2. Jeżeli prosta a_1 jest równoległa do osi symetrji, to gdzie jest punkt przecięcia symetrycznej prostej a_2 z osią?

Prz. 3. Wykreślić oś symetrji s, trójkąt $A_1 B_1 C_1$ i symetryczny doń trójkąt $A_2 B_2 C_2$.

Trójkąt $A_2 B_2 C_2$ daje się wykreślić rozmaitemi sposobami. Można wyznaczyć w znany sposób oddzielnie wierzchołki A_2, B_2, C_2 i następnie wykreślić boki. Próba: odpowiadające sobie boki powinny spotykać się na osi. Inny sposób, dogodniejszy: wyznaczamy naprzód tylko jeden wierzchołek trójkąta symetrycznego, np. A_2. Łącząc go z punktem, w którym bok $A_1 B_1$ przecina oś, otrzymamy bok $A_2 B_2$; w podobny sposób wykreślamy bok $A_2 C_2$; prowadząc następnie prostopadłe do osi z punktów B_1 i C_1, otrzymamy B_2 i C_2. Próba: proste $B_1 C_1$ i $B_2 C_2$ powinny przeciąć się na osi. Jeszcze inaczej: wyznaczamy wierzchołki A_2, B_2 i prowadzimy proste $A_2 C_2$ i $B_2 C_2$; w ich przecięciu leży wierzchołek C_2. Odległości punktów C_1 i C_2 od osi powinny być równe.

Prz. 4. Jeden z trójkątów symetrycznych jest ruchomy. Czy można przesunąć go tak (nie odwracając na drugą stronę), aby przystał dokładnie do drugiego? Czy jest to możliwe, gdy obydwa trójkąty są równoboczne, i czy wówczas przystaną wierzchołki odpowiadające sobie? *)

Prz. 5. Trójkąty symetryczne są narysowane na papierze, którego strona odwrotna jest czarna. Gdy je wytniemy, to czy można będzie doprowadzić do dokładnego przystania (1) strony białe, (2) strony czarne, (3) stronę białą jednego z czarną drugiego?

Prz. 6. Czy można wyciąć w arkuszu papieru trójkąt, odwrócić go na drugą stronę i wstawić dokładnie w powstały otwór? W jakich razach jest to możliwe?

Prz. 7. Pragniemy tak odwrócić tablicę, aby obecny prawy brzeg znalazł się po lewej stronie i odwrotnie. Jakie przeróbki należy wykonać?

Prz. 8. Pragniemy drzwi (pojedyncze) od klasy odwrócić w taki sposób, aby strona zewnętrzna znalazła się wewnątrz. Jakie przeróbki są do tego potrzebne?

Prz. 9. Wiadomo, że mech porasta na drzewach od północy. Gdy w lesie pragniesz iść na wschód, to po której stronie powinieneś mieć pnie umszone?

Prz. 10. Chłopiec leży na wznak na trawie, wyciągnąwszy nogi na zachód, i widzi na niebie klucz żórawi, lecący od lewej ręki do prawej. W którą stronę świata lecą żórawie?

Prz. 11. Wykreślić dwa trójkąty symetryczne i ich środkowe; sprawdzić, czy te środkowe odpowiadają sobie, a także, czy odpowiadają sobie środki ciężkości trójkątów.

Prz 12. Wykreślić oś symetrji, czworokąt $A_1B_1C_1D_1$ i odpowiadający mu czworokąt $A_2B_2C_2D_2$.

Gdy wyznaczymy w znany sposób wierzchołki A_2, B_2, to trzy boki pozostałe można wykreślić, posługując się tą okolicznością, że odpowiednie proste spotykają się na osi.

Prz. 13. Wykreślić dwa koła symetryczne oraz wpisane w nie sześciokąty foremne.

Prz. 14. W ogrodzie są urządzone dwa klomby okrągłe i symetryczne względem ścieżki. Naokoło jednego biegnie chłopiec w kierunku ruchu wskazówki zegara, naokoło drugiego biegnie inny chłopiec, przyczem obaj przebiegają w każdej chwili przez odpowiadające sobie punkty. Czy drugi chłopiec obiega swój klomb w kierunku ruchu wskazówki zegara, czy w odwrotnym?

Prz. 15. Dwa jednakowe zegarki położono tarczami jeden na drugim. Czy wskazówki obracają się w zgodnych kierunkach, czy w odwrotnych? Jeżeli przystają, dajmy na to, godziny trzecie, to czy przystają i inne odpowiednie?

---

*) Uczeń powinien starać się rozwiązywać tego rodzaju zadania w wyobraźni, ale jeżeli to jest zbyt trudne, to należy uciec się do doświadczenia.

17. Dajmy na to, że na równym gruncie jest przeprowadzona prosta ścieżka; na fig. 7 wyobraża ją prosta *s*. Przypuśćmy dalej, że w punkcie A stoi człowiek; ma on dojść do ścieżki, a stamtąd do danego punktu B. A więc pójdzie naprzód do jakiegokolwiek punktu C, położonego na ścieżce, a stamtąd do punktu B. Ale dajmy na to, że człowiekowi zależy na tem, aby droga, którą ma przebyć, była jak najkrótsza. Którędy powinien on pójść w takim razie, czyli do którego punktu ścieżki powinien się skierować. Łatwo zrozumieć, że obrany pierwotnie punkt C nie jest dobry. W tym celu wyznaczmy punkt A' symetryczny do A względem ścieżki. Drogi AC i A'C są równe, a więc pójść z A do C, a stąd do B jest to to samo, co pójść z A' przez C do B. Ale droga A'CB jest łamana, a więc dłuższa od prostej. Najkrótsza jest droga prosta, która przecina linję ścieżki w D, a więc i z A należy pójść do D, a stamtąd do B. Droga ADB jest najkrótsza.

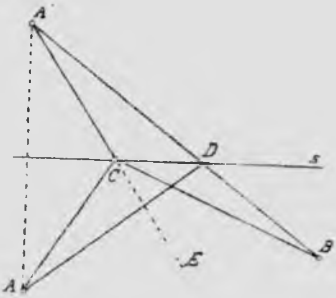

Fig. 7.

A teraz zupełnie inna sprawa. Przypuśćmy, że prosta *s* wyobraża nie ścieżkę, lecz bandę bilardu, i że w A leży kula bilardowa. Uderzamy ją w kierunku bandy. Kula potoczy się po linji prostej, odbije się od bandy i znowu pójdzie po prostej. Otóż doświadczenie wykazuje, że ta druga prosta zawsze przechodzi przez symetryczny punkt A'. Jeżeli np. kula, wyszedłszy z A, uderzyła bandę w C, to po odbiciu pójdzie w kierunku CE; gdyby kula uderzyła w D, to poszłaby w kierunku DB. Jeżeli zatem kula po odbiciu w D doszła do B, to można powiedzieć, że obrała ona najkrótszą drogę.

Albo jeszcze przypuśćmy, że prosta *s* wyobraża zwierciadło (właściwie przekrój zwierciadła), a w punkcie A znajduje się płomień świecy. Promienie światła, które wydaje świeca, padają na zwierciadło i zostają odeń odbite; doświadczenie wskazuje, że linje wszystkich promieni odbitych przechodzą przez punkt A' symetryczny do A względem zwierciadła. Tak np. promień AC pójdzie po odbiciu wzdłuż linji CE, promień AD według DB i t. d. Gdy te promienie odbite padają na oko ludzkie, to człowiek ma wrażenie, że wszystkie one wychodzą z punktu A', jak gdyby tam znajdował się płomień; innemi słowy widzi on odbicie płomienia w zwierciadle.

Prz. 1. Proste x i y na fig. 8 wyobrażają brzegi jeziora, a około punktu A znajduje się mała wysepka. Od wysepki odbija łódka, która ma dobić naprzód do brzegu x, następnie do y i wreszcie ma powrócić do A. Jak powinien kierować sternik, aby cała droga była jak najkrótsza?

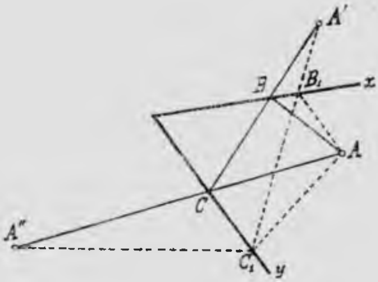

Fig. 8.

Niechaj A' odpowiada punktowi A względem osi symetrji x, a także niechaj A" odpowiada punktowi A' względem y. Łączymy A z A" i w przecięciu z y otrzymujemy punkt C; łączymy następnie C z A' i w przecięciu z x otrzymujemy B. Droga ABCA jest najkrótsza, bo jest ona równa odcinkowi A"A. Gdyby sternik obrał inną drogę, np. AB_1C_1A, to byłaby ona równa drodze $A''C_1A$, a więc byłaby dłuższa.

Prz. 2. Proste x i y na fig. 9 wyobrażają bandy bilardu, a punkty A i B kule. W jakim kierunku należy uderzyć kulę A, aby ta odbiła się po kolei od band x i y i trafiła w kulę B?

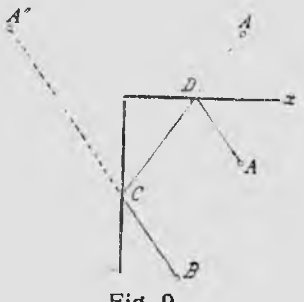

Fig. 9.

Punkt A' jest symetryczny do A względem x, i A" do A' względem y. Prowadząc prostą A"B, otrzymamy punkt C, w którym kula powinna uderzyć bandę y, a prowadząc A'C, znajdziemy punkt D, w którym kula uderzy bandę x.

Prz. 3. Proste równoległe s_1 i s_2 wyobrażają zwierciadła; pomiędzy niemi znajduje się płomień świecy A. W zwierciadle s_1 tworzy się odbicie A_1 i w zwierciadle s_2 odbicie A_2. Lecz A_1 odbija się znowu w s_2, tworząc odbicie A'_2 i A_2 w s_1, tworząc odbicie A_1'. Dalej A_1' i A_2' odbijają się znowu w s_2 i s_1, tworząc odbicia A_2'' i A_1'' i t. d. Wykreślić cały szereg tych kolejnych odbić, o ile pozwalają granice rysunku. Warto także ustawić równolegle dwa lustra i pomiędzy niemi zapalić świecę, aby zobaczyć te szeregi płomieni coraz dalszych i coraz słabszych

Prz. 4. Proste s_1, s_2 prostopadłe do siebie wyobrażają zwierciadła, pomiędzy niemi stoi świeca. Wykreślić wszystkie odbicia płomienia.

Odp. Tu są wszystkiego trzy odbicia. Naprzód powstaną odbicia A_1 i A_2 w zwierciadłach s_1 i s_2; dalej A_1 odbije się w s_2 i A_2 w s_1, ale powstałe odbicia leżą razem.

Prz. 5. Z punktu O zatoczyć koło, obrać na okręgu punkty P i Q w taki sposób, aby łuk PQ był szóstą częścią okręgu, i połączyć te punkty z O. Przypuśćmy, że proste OP i OQ wyobrażają zwierciadła, i że w punkcie A, obranym na okręgu pomiędzy P i Q, znajduje się płomień świecy. Wyznaczyć wszystkie odbicia.

Odp. Będzie pięć odbić różnych i wszystkie leżą na okręgu.

18. Prowadzę oś symetrji s i znajduję punkty symetryczne A_1, A_2. Niechaj S oznacza punkt przecięcia promienia A_1A_2 z osią. Wiemy już, że odpowiada on sam sobie; jest on także środkiem odcinka A_1A_2.

Postępuję teraz odwrotnie. Obieram jakiekolwiek dwa punkty A_1, A_2. Możemy uważać, że są one symetryczne względem pewnej osi. Oś tę można wykreślić bardzo łatwo. W tym celu wyznaczam środek S odcinka A_1A_2 i w tym środku wznoszę prostopadłą do prostej A_1A_2. Będzie to właśnie szukana oś symetrji s. Biorę jeszcze na osi jakikolwiek inny punkt B i łączę go z A_1 i A_2. Odcinki BA_1 i BA_2 są symetryczne, a więc równe; innemi słowy punkt B jest jednakowo odległy od A_1 i A_2. Toż samo dotyczy wszystkich innych punktów osi. W geometrji mówi się tak: *oś s jest miejscem geometrycznem punktów jednakowo odległych od A_1 i A_2.* Będziemy także nazywali tę oś *środkową prostopadłą* odcinka A_1A_2. Z drugiej strony, jeżeli jakiś punkt znajduje się w równych odległościach od A_1 i A_2, to z pewnością należy on do owego miejsca geometrycznego, czyli leży na środkowej prostopadłej odcinka A_1A_2. Wynikają stąd różne ważne wnioski.

Tak np. kreślę koło i prowadzę w niem jakąkolwiek cięciwę A_1A_2. Środek koła O jest jednakowo odległy od A_1 i A_2, a więc leży na środkowej prostopadłej odcinka A_1A_2. Gdy poprowadzimy przez O prostopadłą do cięciwy A_1A_2, to przejdzie ona przez środek tej cięciwy; albo gdy połączymy O ze środkiem cięciwy A_1A_2, to ta prosta będzie prostopadła do cięciwy. Można sprawdzić na rysunku, że tak jest istotnie.

Prz. 1. Obrać trzy punkty A, B, C (nie na jednej prostej) i wyznaczyć taki punkt O, aby okrąg, zatoczony z O promieniem OA, przeszedł również przez B i C. Innemi słowy wykreślić okrąg, przechodzący przez wszystkie trzy obrane punkty.

Oczywiście szukany punkt O musi być jednakowo odległy od A, B i C, a więc leży na średnich prostopadłych odcinków AB i BC

Prz. 2. W paragrafie 14, prz. 2, przekonaliśmy się, że prostopadłe, poprowadzone w środkach boków trójkąta, przechodzą przez jeden punkt. Okazać, że jest to koniecznem następstwem tego, co tylko co poznaliśmy.

Prz. 3. Narysować prostą *a* i obrać dwa punkty: punkt A na *a* i punkt B na zewnątrz. Następnie wykreślić okrąg, przechodzący przez punkty A, B i styczny do prostej *a*, naturalnie w punkcie A.

Gdy znajdziemy środek okręgu, to już sprawa będzie łatwa. Otóż ten środek leży na prostopadłej środkowej odcinka AB, oraz na prostopadłej w A do *a*, bo wiemy z par. 14 prz. 5, że prostopadła ze środka do stycznej przechodzi przez punkt zetknięcia.

Prz. 4. Jeżeli w trójkącie ABC dwa boki np. AB i AC są równe, to trójkąt taki nazywa się *równoramiennym*, a owe równe boki *ramionami*. Czy w trójkącie takim środkowa, przechodząca przez wierzchołek A (t. j. wierzchołek, w którym schodzą się ramiona), różni się od wysokości?

Prz. 5. Na fig. 10 widzimy czworokąt, w którym równe są przyległe boki AB i BC oraz AD i DC. Taki czworokąt zowie się *deltoidą*. Ta dziwna nazwa pochodzi stąd, że każda z dwóch części figury, t. j. ABC i ACD, jest podobna do litery greckiej, która nazywa się *delta* i wymawia się jak nasze D. Sprawdzić, że w deltoidzie przekątnie są do siebie prostopadłe, i że przekątnia BD dzieli na pół przekątnię AC.

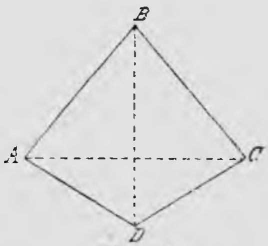

Fig. 10.

Można się o tem przekonać i bez sprawdzania na rysunku. Wierzchołek B jest jednakowo odległy od A i C, leży więc na środkowej prostopadłej odcinka AC. Toż samo dotyczy wierzchołka D, a więc tą środkową prostopadłą jest przekątnia BD.

Jeżeli wszystkie boki deltoidy są równe, to deltoida zowie się *rombem* lub *ukośnikiem*, a więc w rombie również przekątnie są do siebie prostopadłe i dzielą się na pół. Toż samo dotyczy kwadratu, bo kwadrat jest robem, w którym przyległe boki są do siebie prostopadłe. Czy taką samą własność posiada także równoległobok, albo prostokąt?

19. Jeżeli dwie proste nie są równoległe, to mówimy, że jedna „tworzy kąt z drugą".Tak np. na fig. 11 prosta *b* tworzy kąt z *a*. Te proste zowią się *ramionami* lub *bokami* kąta, a ich punkt przecięcia O *wierzchołkiem*. Zamiast pisać „kąt, który prosta b tworzy z a“, lub „kąt, który tworzą proste a i b“, albo wreszcie „kąt pomiędzy prostemi a i b“, piszemy w skróceniu „kąt (ab).“ Na fig. 11 widzimy różne kąty. Prócz kąta (ab) mamy tam jeszcze kąt (ac), i ten drugi jest ostrzejszy lub mniejszy od pierwszego. Dalej mamy kąt (ad); w nim boki są prostopadłe jeden do drugiego. Taki kąt nazywamy *prostym*. Obydwa poprzednio wspomniane kąty (ab) i (ac) są mniejsze od prostego; takie kąty zowią się *ostremi*. Wreszcie widzimy tam jeszcze kąt (ae) większy od (ad), czyli od prostego; taki kąt zowie się *rozwartym*.

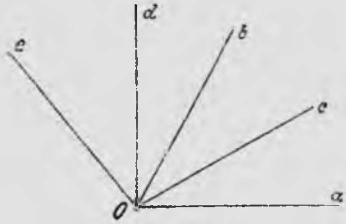

Fig. 11.

Te wszystkie kąty, o których była mowa, posiadają wspólne ramię a oraz wspólny wierzchołek O. Teraz kreślę dwa kąty (a_1b_1) i (a_2b_2), położone zupełnie odrębnie. Jakże teraz sprawdzić, który jest większy? Sposób, który w pierwszej chwili przychodzi na myśl, byłby taki: wycinamy z papieru kąt pierwszy i nakładamy na drugi tak, aby przystały do siebie wierzchołki, i aby ramię a_1 przystało do a_2; jeżeli teraz ramię b_1 znajdzie się na zewnątrz kąta (a_2b_2), to kąt pierwszy jest większy, jeżeli wewnątrz to mniejszy, a jeżeli ramię b_1 przystanie dokładnie do b_2, to powiemy, że obydwa kąty są równe.

Ale taki sposób byłby wielce niedogodny, zrobimy więc inaczej. Zatoczmy z wierzchołka kąta (a_1b_1) łuk koła, który przetnie ramiona w punktach A_1 i B_1; następnie tym samym promieniem zataczamy łuk z wierzchołka kąta (a_2b_2); przetnie on ramiona w punktach A_2, B_2. Możemy teraz z łatwością porównać łuki A_1B_1 i A_2B_2. Jeżeli pierwszy jest większy, to oczywiście kąt (a_1b_1) jest większy niż (a_2b_2), jeżeli pierwszy jest mniejszy, to i kąt (a_1b_1) jest mniejszy, wreszcie jeżeli łuki są równe, to i kąty są równe

Jak długości wyrażamy w centymetrach, a ciężary ciał w gramach, tak kąty wyrażamy w stopniach. Zobaczymy zaraz, co to jest stopień. Wiemy, w jaki sposób można podzielić okrąg koła na połowę, na cztery równe części, na sześć równych części i t. d. Wyobraźmy sobie, że podzielono okrąg na 360 równych części. Nie jest to sprawa łatwa. Aby podział był jako tako dokładny, to promień koła powinien być duży, co najmniej jakie 25 centymetrów, i trzeba przytem postępować bardzo starannie. Wyobraźmy sobie dalej, że te wszystkie punkty podziału połączono ze środkiem; tym sposobem powstanie 360 bardzo małych równych kątów, posiadających wspólny wierzchołek w środku koła. Otóż taki mały kąt zowie się stopniem. Łatwo dojść, że kąt prosty zawiera 90 stopni. Pisze się 90^0.

Prz. 1. O ile stopni obraca się mała wskazówka zegara na godzinę i duża na minutę?

Prz. 2. Jaki kąt tworzą wskazówki zegara o wpół do dziesiątej?

Prz. 3. Jaki kąt tworzy przekątnia kwadratu z bokiem? Wyznaczyć również sumę kątów trójkąta, utworzonego przez połówki przekątni i jeden bok kwadratu.

Prz. 4. Wykreślić kąt, zawierający 60^0, następnie 105^0 i 75^0.

60 jest szóstą częścią 360, a więc trzeba wyznaczyć szóstą część okręgu i punkty podziału połączyć ze środkiem. 105^0 jest sumą 60^0 i 45^0.

Prz. 5. Zbudować trójkąt, w którym dwa kąty mają po 60^0; sprawdzić następnie, że wszystkie boki są równe.

Prz. 6. Zbudować trójkąt, w którym jeden kąt ma 60^0, a drugi 30^0; sprawdzić, że trzeci kąt jest prosty.

Prz. 7. Zbudować trójkąt z kątami 30^0 i 120^0; sprawdzić, że jest to trójkąt równoramienny.

20. Kreślę oś symetrji s oraz dwie proste a_1 i b_1. Następnie wyznaczam prostą a_2, symetryczną do a_1 i b_2, symetryczną do b_1. Gdybyśmy zgięli figurę według osi symetrji, to proste a_1, b_1 przystały by odpowiednio do a_2, b_2. Z tego wynika, że kąty $(a_1 b_1)$ i $(a_2 b_2)$ są równe. Wogóle kąty, odpowiadające sobie w symetrji są równe.

Oś symetrji odpowiada samej sobie, a zatem kąt $(a_1 s)$ odpowiada kątowi $(s a_2)$, i kąty te są równe. Z tego widać, że prosta s dzieli kąt $(a_1 a_2)$ na dwie równe części. Nazywa się ona także *dwusieczną* kąta $(a_1 a_2)$.

Wykreślmy znowu dwie proste AB i CD, przecinające się w punkcie O. Powstały aż cztery kąty, posiadające wspólny wierzchołek O. Mamy więc naprzód kąt, utworzony przez części OA i OC. Mówi się krótko kąt AOC, przyczem litera, oznaczająca wierzchołek, powinna stać w środku. Dalej mamy kąty COB, BOD i DOA. Gdyby dodać liczby stopni, zawartych we wszystkich tych kątach, to naturalnie wypadłoby 360°, albo 4 razy po 90°. Z tego wynika, że wszystkie te cztery kąty razem są równe czterem kątom prostym.

Zwróćmy teraz uwagę na kąty AOC i COB. Leżą one po jednej stronie prostej AB i posiadają wspólne ramię OC; jeden z nich jest ostry, drugi rozwarty. Takie kąty zowią się *przyległemi*. Widzimy tu jeszcze trzy pary kątów przyległych, a mianowicie: COB i BOD, BOD i DOA, DOA i AOC. Odrazu widać, że dwa kąty przyległe mają razem 180°, lub są równe dwom kątom prostym. Zwrócimy jeszcze uwagę na kąty AOC i BOD; zowią się one przeciwległemi. Oczywiście kąty przeciwległe są równe. Jest tu jeszcze inna para kątów przeciwległych, a mianowicie COB i DOA.

Jeżeli dwie proste są do siebie prostopadłe, to wszystkie cztery utworzone kąty są proste.

Prz. 1. Wykreślić koło, obrać na okręgu trzy punkty A, B, M, i połączyć punkt M z A i B. Kąt AMB nazywa się *wpisanym* w koło; mówi się także, że jest on *oparty* na łuku AB lub na cięciwie AB. Wykreślić jeszcze inny kąt wpisany ANB, oparty na tym samym łuku tak, aby punkty M i N leżały po jednej stronie cięciwy AB, i sprawdzić, który kąt jest większy.

Prz. 2. Wykreślić trójkąt ABC i zbadać, ile stopni zawierają wszystkie trzy kąty razem.

Można zrobić tak: budujemy naprzód kąt równy kątowi BAC, przy nim kąt równy ABC tak, aby obydwa miały wspólny wierzchołek i wspólne ramię; wreszcie przy drugim budujemy tak samo BCA. Wypadnie, że suma wszystkich trzech kątów jest równa 180°, czyli dwom prostym.

Prz. 3. Nakreślić dwie proste równoległe *a*, *b* i trzecią *c*, przecinającą dwie pierwsze. Wyznaczyć następnie sumę kątów, położonych pomiędzy *a* i *b*, po jednej stronie prostej *c*.

180° lub dwa proste.

Prz. 4. Wykreślić czworokąt i wyznaczyć sumę kątów jego.

Cztery proste, albo 360°.

Prz. 5. Okazać, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta, zawartego pomiędzy ramionami, jest prostopadła do podstawy, i że kąty u podstawy są równe.

21. Dwusieczną kąta można wykreślić bardzo łatwo. Mamy np kąt (*ab*), którego wierzchołkiem jest punkt O. Z tego wierzchołka zataczamy okrąg, który przetnie ramiona w punktach A i B. Łuk AB dzielimy na pół i punkt podziału łączymy z O. Ta prosta jest oczywiście dwusieczną.

Dwusieczna posiada pewne ważne właściwości, które mamy właśnie poznać. Kreślę znowu dwie proste AB i CD, przecinające się w O, i wyznaczam dwusieczną OM kąta AOC. Naturalnie ta prosta OM, albo raczej jej część, położona za wierzchołkiem O, jest także dwusieczną kąta przeciwległego BOD.

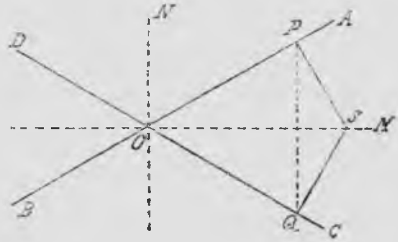

Fig. 12.

Proste AB i CD są symetryczne względem dwusiecznej OM, gdy więc poprowadzimy promień symetrji, przecinający owe proste w punktach P i Q to te punkty są również i symetryczne. Połączmy je z jakimkolwiek punktem osi np. S. Odcinki PS i QS są symetryczne, a więc równe, i tworzą równe kąty z prostemi AB i CD. Jeżeli prosta PS jest prostopadła do AB, to i prosta QS jest prostopadła do CD, a z tego wynika, że punkt S, jak każdy inny punkt dwusiecznej, jest jednakowo odległy od prostych AB i CD. Mówi się, że *dwusieczna kąta jest miejscem geometrycznem punktów, jednakowo odległych od ramion.*

Możemy jeszcze przeprowadzić dwusieczną ON kątów AOD i BOC, przyległych do AOC. Ta nowa dwusieczna jest również osią symetrji dla danych prostych oraz miejscem geometrycznem punktów jednakowo od nich odległych. Nieraz odróżniamy te dwie dwusieczne, nazywając jedną z nich *wewnętrzną*, a drugą *zewnętrzną.* Tak np. dwusieczna OM jest wewnętrzną dla kątów AOC i BOD, a zewnętrzną dla kątów AOD i BOC, natomiast dwusieczna ON jest zewnętrzną dla dwóch pierwszych, a wewnętrzną dla dwóch pozostałych.

Suma kątów przyległych COA i AOD jest równa 180°, a ponieważ kąt pomiędzy dwusiecznemi, t. j. MON, obejmuje połowę każdego z nich, jest więc oczywiście równy połowie 180°, czyli 90°. Innemi słowy dwusieczne wewnętrzna i zewnętrzna kąta są do siebie prostopadłe.

Niech będą jeszcze dwie proste równoległe *a* i *b*. Oczywiście są one symetryczne do pewnej osi, która leży pomiędzy niemi i jest do nich równoległa. Możemy ją wykreślić w sposób następujący. Prowadzimy prostą prostopadłą do *a* i *b*; przetnie ona te proste w punktach A i B. Wyznaczamy następnie środek C odcinka AB i prowadzimy przezeń równoległą *c* do *a* i *b*; będzie to szukana oś. Zobaczymy później, że nie jest wcale rzeczą konieczną, aby prosta pomocnicza AB była prostopadła do prostych danych.

Oczywiście każdy punkt prostej *c* jest tak samo odległy od *a*, jak i od *b*, możemy więc powiedzieć, że prosta *c* jest miejscem geometrycznem punktów jednakowo odległych od *a* i *b*. Dajmy na to, że odległość ta wynosi 8 cm. W takim razie można również powiedzieć, że proste *a* i *b* stanowią miejsce geometryczne punktów, położonych w odległości 8 cm od *c*.

Prz. 1. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, których odległość od danego punktu jest równa danej liczbie centymetrów lub długości danego odcinka?

Prz. 2. Obrać trzy odcinki, a następnie zbudować taki trójkąt, aby jego boki były równe tym odcinkom.

Prz. 3. Obrać dwa punkty A,B oraz prostą *c* i wykreślić okrąg, którego środek leży na *c*, i który przechodzi przez A i B.

Prz. 4. Wykreślić danym promieniem okrąg, którego środek leży na danej prostej, i który przechodzi przez dany punkt.

Będą dwa takie okręgi, i należy wykreślić obydwa.

Prz. 5. Wykreślić trójkąt ABC i wszystkie dwusieczne jego kątów.

Przez każdy wierzchołek przejdą dwie dwusieczne, a więc wszystkich będzie sześć. Przetną się one jeszcze w czterech punktach, po trzy w każdym. W jednym z nich przetną się wszystkie dwusieczne wewnętrzne, w każdym z pozostałych jedna wewnętrzna i dwie zewnętrzne. Łatwo zrozumieć, że inaczej być nie może. Zwróćmy np. uwagę na dwie dwusieczne wewnętrzne, wychodzące z wierzchołków A i B. Ich punkt przecięcia oznaczmy przez O. Ten punkt O leży na dwusiecznej AO, a więc jest jednakowo odległy od boków AB i CA. Lecz leży on również na dwusiecznej BO, jest więc jednakowo odległy od AB i BC. Z tego wynika, że jest on jednakowo odległy od boków CA i BC, leży więc na dwusiecznej wewnętrznej kąta ACB, czyli że wszystkie trzy dwusieczne wewnętrzne przechodzą przez jeden punkt O. Zupełnie tak samo można okazać, że przez każdy punkt przecięcia dwusiecznej wewnętrznej z zewnętrzną przechodzi jeszcze druga zewnętrzna.

Prz. 6. Obrać trzy proste i wykreślić wszystkie koła, z których każde styka się ze wszystkiemi trzema.

Kół takich jest cztery. Jedno leży wewnątrz trójkąta, utworzonego przez obrane proste i nazywa się *kołem wpisanem*, trzy inne leżą nazewnątrz i zowią się *zawpisanemi*.

Prz. 7. Wykreślić dwie proste równoległe i trzecią *sieczną*, t. j. przecinającą tamte. Wykreślić następnie wszystkie koła, styczne do wszystkich trzech.

Prz. 8. Wykreślić koło, styczne do dwóch danych prostych i posiadające środek na trzeciej danej prostej.

Będą dwa takie koła.

Prz. 9. Dane są proste a i b. Wykreślić danym promieniem koła, posiadające środek na a i styczne do b.

Są dwa takie koła.

22. Poznamy teraz inny rodzaj symetrji, mianowicie *symetrję względem punktu* lub *środka*. Obieram naprzód pewien punkt S; będziemy go nazywali *środkiem symetrji* a każdą prostą, przechodzącą przez środek, *promieniem symetrji*. Prowadzę taki promieniem symetrji i obieram na nim jakikolwiek punkt A_1. Następnie odmierzam na tym promieniu po odwrotnej stronie środka S długość SA_2 równą A_1S. Otóż te punkty A_1 i A_2 nazywają się symetrycznemi względem środka S. Gdyby odcinek SA_2 był ruchomy, jak wskazówka zegara, i gdybyśmy go obrócili o pół obrotu, czyli o dwa kąty proste około S, to punkt A_2 przystałby do punku A_1.

Wyobraźmy sobie jakiś rysunek, albo figurę, i środek symetrji S. Możemy dla każdego punktu tej figury wyznaczyć punkt symetryczny względem S. Wówczas powstanie druga figura, symetryczna do pierwszej. Gdybyśmy obrócili tę drugą figurę około S o pół obrotu, to każdy jej punkt przystałby do symetrycznego, i cała ta figura druga przystałaby do pierwszej. Z tego możemy wyciągnąć dwa ważne wnioski, po pierwsze, że linji prostej jednej figury odpowiada prosta drugiej, po wtóre, że kąty symetryczne są równe. Wynika z tego również, że okręgowi odpowiada okrąg o jednakowym promieniu.

Z symetrją środkową spotykamy się nie tak często, jak z symetrją osiową.

Figurami symetrycznemi względem środka są zwykle rozety na sufitach, malowidła na talerzach, niekiedy desenie na firankach i t. d. Płaski kwiat, posiadający parzystą liczbę listków, jak np. kwiat bzu, jest w przybliżeniu symetryczny względem środka.

Prz. 1. Na suficie są wymalowane dwa różnobarwne motyle, symetryczne względem środka; które skrzydło jednego odpowiada prawemu skrzydłu drugiego?

Prz. 2. Dwaj łyżwiarze zataczają jednakowe koła na lodzie, pozostając wciąż w symetrji względem kołka, wbitego w lód. Czy krążą oni w tym samym kierunku, czy w odwrotnych?

Prz. 3. Która godzina odpowiada drugiej w symetrji środkowej na zegarze, a która piątej?

Prz. 4. Mamy dwa trójkąty symetryczne względem osi, czy można tak przesunąć jeden z nich (nie odwracając na drugą stronę), aby stał się symetrycznym do drugiego względem środka?

Prz. 5. Mamy narysowane dwa jednakowe koła; gdzie leży dla nich środek symetrji?

23. W symetrji środkowej każdemu punktowi odpowiada inny punkt, położony na tym samym promieniu po odwrotnej stronie środka. Oczywiście istnieje tu tylko jeden punkt, odpowiadający samemu sobie, a mianowicie środek. Z tego można wyciągnąć pewien bardzo ważny wniosek.

Niech będą dwie proste a_1 i a_2, symetryczne względem środka S. Gdy poprowadzimy przez S jakikolwiek promień, to przetnie on je w punktach symetrycznych. Gdyby proste a_1 i a_2 się przecinały, to punkt przecięcia oczywiście odpowiadałby sam sobie, lecz to jest niemożliwe, bo poza środkiem symetrji punktów takich niema. A więc proste symetryczne przecinać się nie mogą, t. j. są równoległe. Jest to właśnie ten ważny wniosek, o który chodziło.

Wyjątkowe stanowisko zajmują proste, przechodzące przez środek, czyli promienie symetrji. Punktom, leżącym na takiej prostej, odpowiadają inne punkty tejże samej prostej, a więc promień symetrji odpowiada samemu sobie.

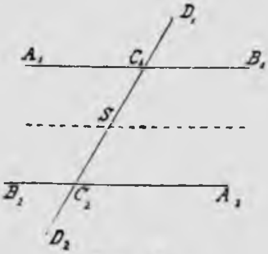

Fig. 13.

Obieramy środek symetrji S, i niech będą dwie proste symetryczne $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$. Wiemy już, że są one równoległe. Przeprowadźmy jakikolwiek promień symetrji, np. $D_1 D_2$. Przetnie on owe proste w symetrycznych punktach C_1 i C_2, a więc S jest środkiem odcinka C_1C_2, zawartego pomiędzy równoległemi.

Prosta D_1D_2, zwana nieraz *sieczną* albo *poprzeczną*, tworzy z równoległemi ośm kątów; cztery z nich mają wierzchołek w C_1, a cztery w C_2. Często wypada porównywać jakiś kąt jednej czwórki z jakimś kątem drugiej. Takie pary kątów posiadają pewne nazwy, bardzo łatwe do zapamiętania, Tak więc kąty, leżące pomiędzy równoległemi, zowią się *wewnętrznemi*, a kąty leżące nazewnątrz, *zewnętrznemi*. Dalej kąty, leżące po jednej stronie siecznej D_1D_2, nazywamy *jednostronnemi*, a kąty, leżące po różnych stronach, *naprzemianległemi*. Wreszcie dwa kąty jednostronne, z których jeden leży wewnątrz, a drugi nazewnątrz równoległych, nazywają się *odpowiedniemi*. Tak np. kąty A_1C_1S i $B_2C_2D_2$ są odpowiednie. Nazwa ta jest niezupełnie właściwa, bo te kąty nie odpowiadają sobie w symetrji.

Gdy weźmiemy którykolwiek kąt pierwszej czwórki (t. j. położony u wierzchołka C_1) i którykolwiek kąt drugiej (czyli położony u wierzchołka C_2), to jedno z dwojga, albo kąty te są równe, albo spełniają się do dwóch prostych, to znaczy są w sumie równe dwom prostym, czyli 180^0. Weźmy np. kąty A_1C_1S i A_2C_2S, czyli kąty wewnętrzne naprzemianległe. Oczywiście odpowiadają one sobie w symetrji, są więc równe. Toż samo dotyczy kątów zewnętrznych naprzemianległych, jak np. $A_1C_1D_1$ i $A_2C_2D_2$. Równe są także kąty odpowiednie, jak $D_1C_1B_1$ i SC_2A_2, bo pierwszy z nich jest równy A_1C_1S, a ten jest równy drugiemu. Weźmy teraz kąty A_1C_1S i B_2C_2S, czyli wewnętrzne jednostronne; spełniają się one do 180^0, bo drugi spełnia się z A_2C_2S, jako przyległym, a ten jest równy pierwszemu. Toż samo dotyczy zewnętrznych jednostronnych, jak np. $A_1C_1D_1$ i $B_2C_2D_2$

Warto jeszcze zauważyć rzecz następującą. Poprowadźmy promień symetrji równoległy do danych prostych. Jest to oczywiście dla nich oś symetrji, a każdy punkt tego promienia może być obrany za środek symetrji dla tych prostych.

Prz. 1. Wiemy już, że w równoległoboku punkt przecięcia przekątni jest środkiem każdej z nich. Przekonaliśmy się o tem za pomocą próby. Dowieść teraz, że wynika to z nauki o równoległych, którą poznaliśmy w tym paragrafie.

Wykreślmy równoległobok ABCD oraz jego przekątnię AC i wyznaczmy jej środek S. Ten punkt S jest oczywiście środkiem symetrji zarówno dla prostych AB i CD, jak i dla BC i DA, czyli jest środkiem symetrji figury, w której prostej AB odpowiada CD, a prostej BC odpowiada DA. Punkt B leży w przecięciu prostych, którym odpowiadają proste, przechodzące przez D; z tego wynika, że punktowi B odpowiada D; a zatem przekątnia BD, jako promień, przechodzi przez środek S i dzieli się w nim na pół. Toż samo, rzecz prosta, zachodzi w rombie, prostokącie i kwadracie.

Prz. 2. Dowieść, że w równoległeboku kąty przeciwległe są równe, a dwa kąty przyległe (leżące przy jednym boku) są w sumie równe dwom prostym.

Prz. 3. Wykreślić koło i obrać jakikolwiek punkt A_1 wewnątrz koła lub nazewnątrz; wyznaczyć następnie punkt symetryczny A_2 względem środka, ale niewolno przytem używać cyrkla, ani pary ekierek; nie wolno więc odmierzać zapomocą cyrkla równych odcinków lub równych łuków, nie wolno dzielić odcinka lub łuku na części równe, nie wolno wreszcie przy pomocy pary ekierek przeprowadzać prostych równoległych lub prostopadłych. Wolno więc tylko przeprowadzać linje proste przy pomocy jednej ekierki lub linjału. Takie rozwiązanie zadania nazywa się *rozwiązaniem linjowem*, albo *konstrukcją linjową*.

Szukany punkt A_2 musi leżeć na promieniu symetrji A_1O, gdzie O oznacza środek koła. Gdybyśmy mieli prawo używać cyrkla, to odrazu odmierzylibyśmy od O odcinek równy A_1O, i zadanie byłoby rozwiązane, ale to jest niedozwolone. Zrobimy więc tak: prowadzimy przez A_1 dowolną prostą, przecinającą okrąg, dajmy na to, w punktach M_1 i N_1; odpowiadające im punkty M_2, N_2 znajdziemy z łatwością, bo leżą również na okręgu; prosta $M_2 N_2$ przejdzie przez szukany punkt A_2.

Prz. 4. Obrać środek symetrji S i wykreślić dwie pary prostych symetrycznych a_1, a_2 i b_1, b_2. Poprowadzić następnie jakąkolwiek prostą c_1 i przy pomocy konstrukcji linjowej wyznaczyć symetryczną do niej prostą c_2.

Prz. 5. Wykreślić równoległobok ABCD, przeprowadzić przez wierzchołek A dowolną prostą i przy pomocy konstrukcji linjowej wykreślić symetryczną do niej względem punktu przecięcia przekątni.

Prz. 6. Wykreślić koło i obrać nazewnątrz niego punkt A; wykreślić następnie zapomocą konstrukcji liniowej równoległobok, opisany na kole i posiadający jeden wierzchołek w A.

Mówimy, że równoległobok jest opisany na kole, jeżeli wszystkie jego boki są styczne. Przeprowadzenie stycznej z danego punktu do koła jest konstrukcją linjową, bo można je uskutecznić dokładnie przy pomocy jednej ekierki. Sprawdzić jeszcze, że wszystkie boki tego równoległoboku są równe, a więc jest to romb.

Prz. 7. Wykreślić równoległobok ABCD, obrać nazewnątrz punkt E i wykreślić zapomocą konstrukcji linjowej drugi równoległobok, opisany na pierwszym i posiadający jeden wierzchołek w E.

Opisanym nazywa się taki równoległobok, którego boki przechodzą przez wierzchołki danego.

24. Wiemy już, że suma kątów trójkąta jest równa dwom prostym; stwierdziliśmy to zapomocą próby. Jest to prawda bardzo ważna; zobaczymy, że wynika ona z nauki o linjach równoległych, którą poznaliśmy w paragrafie poprzedzającym.

Kreślę trójkąt ABC; kąty jego będziemy nazywali *wewnętrznemi*, a kąt przyległy do któregokolwiek z wewnętrznych nazwiemy *zewnętrznym*. Tak np. kąt BCD, przyległy do wewnętrznego BCA, jest zewnętrzny. Prowadzę teraz prostą CE równolegle do AB. Dzieli ona kąt zewnętrzny na dwie części. Jedna z nich BCE jest równa wewnętrznemu kątowi ABC, bo są to kąty wewnętrzne naprzemianległe, druga ECD jest znowu równa wewnętrznemu kątowi CAB, bo są to kąty odpowiednie Z tego wynika, że cały kąt zewnętrzny jest równy sumie dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych.

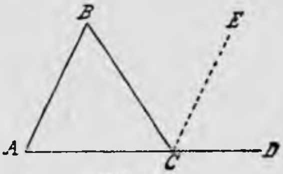

Fig. 14.

Gdy dołączymy do kąta zewnętrznego jeszcze trzeci kąt wewnętrzny, kąt BCA, przyległy do zewnętrznego, to otrzymamy w sumie 180°, albo dwa proste, a więc suma wszystkich kątów wewnętrznych jest równa dwom prostym.

Prz. 1. Ile stopni zawiera kąt trójkąta foremnego czyli równobocznego?

Prz. 2. Jaka jest suma kątów ostrych trójkąta prostokątnego?

Prz. 3. W trójkącie równoramiennym kąt u wierzchołka jest prosty; ile stopni zawiera każdy z kątów pozostałych?

Prz. 4. Wykreślić trójkąt ABC, przedłużyć bok AB poza B, bok BC za C i bok CA za A; utworzą się tym sposobem trzy kąty zewnętrzne. Wyznaczyć ich sumę.

Prz. 5. Wyznaczyć sumę kątów czworokąta.

Gdy w czworokącie przeprowadzimy przekątnię, to podzieli się on na dwa trójkąty; ponieważ suma kątów każdego trójkąta jest równa dwom prostym, przeto suma kątów czworokąta wynosi cztery proste.

Prz. 6. Wyznaczyć sumy kątów pięciokąta, sześciokąta i dziesięciokąta.

Prz. 7. Ile stopni zawiera każdy kąt foremnego pięciokąta, sześciokąta i dziesięciokąta? Naturalnie w foremnym wielokącie wszystkie kąty są równe.

Prz. 8. Posadzka ma być ułożona z płyt trójkątnych równobocznych; narysować wzór takiej posadzki. Następnie należy trójkąty, wyobrażające płyty, pociągnąć farbami w taki sposób, aby dwie przyległe płyty miały zawsze barwy odmienne. Za przyległe uważamy tylko takie dwie płyty, które mają wspólny bok, a więc nie są przyległemi płyty, posiadające tylko wspólny wierzchołek. Tak samo należy kolorować wzory posadzek w następnych przykładach, przyczem liczba użytych farb powinna być zawsze jak najmniejsza; w tym razie np. wystarczą dwie farby. Ciekawą jest rzeczą, że z jakichkolwiek płyt jest ułożona posadzka, to zawsze potrzeba nie więcej od czterech farb, aby pokolorować ją w wyżej wskazany sposób. To samo dotyczy kolorowania map geograficznych. Przypuśćmy, że mamy mapę jakiegoś kraju, podzieloną na powiaty; otóż można zawsze przy pomocy czterech farb pokolorować ją tak, aby każde dwa sąsiednie powiaty były pociągnięte odmiennemi farbami.

Zauważymy, że w jednym wierzchołku zbiega się aż sześć płyt. Z góry można było przewidzieć, że tak być musi. Suma wszystkich kątów, zbiegających się w jednym wierzchołku, musi być równa 360°, a każdy kąt trójkąta równobocznego zawiera 60°, potrzeba więc sześciu płyt do utworzenia posadzki naokoło wierzchołka.

Prz. 9. Wykreślić wzór posadzki, złożonej z sześciokątów foremnych, i pokolorować go w sposób, wskazany w przykładzie poprzedzającym. Przed przystąpieniem do pracy należy przewidzieć, ile płyt będzie się zbiegało w jednym wierzchołku.

Prz. 10. Czy można ułożyć posadzkę z foremnych pięciokątów, albo ośmiokątów?

Prz. 11. Płyty posadzki mają kształt trójkątów równoramiennych, w których kąty wierzchołkowe wynoszą 72°. Wykreślić wzór posadzki i pokolorować.

Kąt 72° można łatwo zbudować na tej zasadzie, że jest to piąta część 360°.

Prz. 12. Płyty mają kształt trójkątów równoramiennych, w których kąty wierzchołkowe wynoszą 36°. Wykreślić wzór posadzki i pokolorować.

25. Zataczam koło i obieram w niem średnicę AB, a prócz tego na okręgu jakikolwiek punkt C. Gdy połączymy punkt C z A i B, to powstanie trójkąt, wpisany w koło; jednym z boków jego jest średnica. Połączmy jeszcze wierzchołek C ze środkiem koła O. Powstają skutkiem tego dwa trójkąty równoramienne AOC i BOC. Wierzchołki ich leżą w O, a podstawami są boki AC i BC.

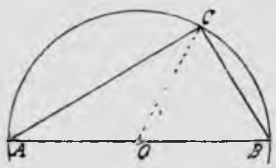

Fig. 15.

Ponieważ w trójkątach równoramiennych kąty u podstawy są równe, przeto kąt CAO jest równy ACO, i kąt CBO kątowi BCO, a zatem kąty, położone u wierzchołków A i B są w sumie równe kątowi u wierzchołka C. Lecz wszystkie te trzy kąty razem są równe dwom prostym, a więc sam kąt C jest prosty. Wypowiemy to tak: kąt, wpisany w koło i oparty na średnicy, jest prosty, albo, że z punktów okręgu widać średnicę pod kątem prostym. Mówi się jeszcze, że miejscem geometrycznem punktów, z których dany odcinek widać pod kątem prostym, jest okrąg, zatoczony na tym odcinku, jako na średnicy.

Prz. 1. Wykreślić koło i obrać nazewnątrz punkt A. Wyznaczyć następnie punkty zetknięcia stycznych, poprowadzonych z punktu A.

Możnaby w tym celu wykreślić te styczne i poprowadzić do nich ze środka prostopadłe. Spodki tych prostopadłych są punktami szukanemi. Ale ładniej będzie zastosować właściwość kąta wpisanego, którą tylko co poznaliśmy.

Prz. 2. Nakreślić dwa odcinki dłuższy i krótszy; następnie zbudować trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna jest równa pierwszemu, a jedna z przyprostokątnych drugiemu.

Prz. 3. Obrać przeciwprostokątną i jeden kąt ostry trójkąta prostokątnego; następnie zbudować ten trójkąt.

Prz. 4. Zbudować trójkąt prostokątny, obrawszy naprzód przeciwprostokątną oraz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej, czyli wysokość, odpowiadającą temu wierzchołkowi.

III. Geometrja przestrzeni

26. Każdy odróżnia powierzchnię przedmiotu lub ciała od jego wnętrza. Często powierzchnia różni się od wnętrza barwą. Tak np. powierzchnia jabłka jest rumiana, a wnętrze białe. Powierzchnia ściany może być np. różowa, a we wnętrzu znaleźlibyśmy naprzód warstwę szarawą wapna a następnie czerwoną cegłę. Ale powierzchnie różnią się nietylko barwą, ale i kształtem, i nas tu obchodzą właśnie kształty powierzchni. Inna jest np. pod względem kształtu powierzchnia ściany, a inna powierzchnia globusa, jeszcze inne są powierzchnie prostej rury, albo okrągłej kolumny, blaszanego lejka, jajka i t. d. Powierzchnia ściany, przednia powierzchnia tablicy, albo górna powierzchnia stołu nazywa się *powierzchnią płaską*, albo *płaszczyzną*. Wszystkie inne powierzchnie zowią się *krzywemi*. Do krzywych więc należy powierzchnia kuli, czyli *kulista*, powierzchnia rury, czyli *walcowa* (albo *cylindryczna*), powierzchnia lejka, czyli *stożkowa* i t. d.

Do ulubionych, jakkolwiek niezupełnie bezpiecznych zabawek dziecinnych należy następująca. Rozżarza się w piecu koniec kijka, a następnie macha się szybko tym kijkiem. Wówczas powstaje w powietrzu piękna linja ognista. Każdy niewątpliwie tej sztuki próbował. Owa linja ognista tworzy drogę, którą obiega rozżarzony koniec kijka, czyli punkt ruchomy. Trwa ona tylko chwilkę, jedno mgnienie oka, ale w każdym razie ta zabawa wskazuje, że można uważać linję za drogę lub ślad punktu ruchomego. W podobny sposób najczęściej otrzymujemy linje. Gdy kreślę linję na tablicy, to punktem ruchomym jest koniec kredy, który pozostawia po sobie biały ślad; na papierze linja powstaje skutkiem ruchu końca ołówka.

Jak ruchomy punkt zatacza linję, tak ruchoma linja zatacza powierzchnię. Gdy dwóch chłopców weźmie za końce sznura, przeznaczonego do skakania, i szybko obraca nim w powietrzu, to wyraźnie widać zatoczoną powierzchnię w postaci wrzeciona, albo wydłużonej beczułki. Nieraz dobrze jest uważać powierzchnię za ślad linji ruchomej, otwiera to nam odrazu oczy na różne właściwości tej powierzchni. Tak np. gdy okrąg koła obraca się około średnicy, to powstaje powierzchnia kulista. Podczas ruchu owa średnica pozostaje nieruchomą, pozostaje również w spoczynku środek okręgu, gdyż należy on do tej nieruchomej średnicy. Nazywa się on także środkiem powierzchni kulistej, albo środkiem kuli. Wszystkie punkty ruchomego okręgu są jednakowo odległe od środka, i również wszystkie punkty powierzchni kulistej są jednakowo odległe od środka. Każda prosta, przechodząca przez środek kuli, zowie się jej *średnicą*; tak samo nazywa się odcinek jej, zawarty wewnątrz kuli. Oczywiście wszystkie średnice są równe, i każda z nich dzieli się na pół w środku kuli. Połowa średnicy, albo odcinek, zawarty pomiędzy środkiem i powierzchnią, nazywa się *promieniem kuli*.

Uważamy zwykle, że ziemia ma powierzchnię kulistą, i globus, który ma wyobrażać ziemię, jest dokładną kulą. Jest to tylko w przybliżeniu słuszne, bo ziemia różni się nieco od kuli. Równik jest dokładnem kołem o promieniu 6377 kilometrów, i środek równika nazywa się także środkiem ziemi. Ale odległości innych punktów powierzchni od tego środka są mniejsze. Najmniejsza jest odległość bieguna; wynosi ona wszystkiego 6356 kilometrów. Gdy odejmiemy tę drugą liczbę od pierwszej, to wypadnie 21 klm. W porównaniu z olbrzymiemi rozmiarami ziemi różnica ta jest niewielka. Gdyby zrobić globus, dokładnie naśladujący kształt ziemi, to na oko niemożnaby wcale dostrzedz, że nie jest to kula.

Tak zwana kula ziemska różni się od prawdziwej kuli jeszcze i dlatego, że powierzchnia ziemi nie jest gładka. Istnieją na niej wyniosłości i wgłębienia. Ale te wyniosłości mają wszystkiego po parę, najwyżej po kilka kilometrów, co stanowi bardzo mało w stosunku do wymiarów ziemi. Są to tylko niewielkie chropowatości, które nie zmieniają wyraźnie kształtu powierzchni.

Kreślę teraz dwie proste a i b, przecinające się w punkcie C. Wyobraźmy sobie, że prosta b obraca się około prostej *a*, która pozostaje nieruchomą. Prosta *b* zatacza podczas tego ruchu powierzchnię, o której już była wzmianka, a mianowicie *powierzchnię stożkową*. Prosta *a* zowię się *osią* tej powierzchni, punkt C *wierzchołkiem*, a prosta *b tworzącą*. Jeżeli prosta *b* jest równoległa do osi *a*, to zatacza ona podczas ruchu powierzchnię walcową. Powierzchnia taka oczywiście wierzchołka nie posiada.

Powierzchnię walcową można otrzymać i w inny sposób. Mam tu prostokąt AA_1B_1B, wycięty z papieru. Zwijam go tak, aby bok AB przystał do boku A_1B_1, mianowicie wierzchołek A do A_1 i wierzchołek B do B_1. Widzimy, że utworzyła się powierzchnia walcowa Zauważymy tu następującą rzecz ciekawą. Powierzchnia walcowa posiada dwie strony, zewnętrzną i wewnętrzną; moglibyśmy jedną z nich pomalować na czerwono, a drugą pozostawić białą. Gdyby mucha siedziała w jakimkolwiek punkcie po stronie zewnętrznej i chciała przejść po papierze do jakiegoś punktu na stronie wewnętrznej, to musiała by przeleźć przez brzeg papieru. Robię teraz tak: prostuję naprzód papier, a następnie skręcam jedną część prostokąta względem drugiej o pół obrotu, i zwijam znowu tak, aby bok AB przystał do boku A_1B_1, ale teraz wierzchołek A przystaje do B_1, i wierzchołek B do A_1. Wytworzyła się znowu powierzchnia, ale nie jest to już powierzchnia walcowa. Łatwo sprawdzić, że ta nowa powierzchnia posiada tylko jedną stronę. Gdybyśmy zaczęli zaciągać ją czerwoną farbą, to ostatecznie cała stałaby się czerwoną. Od jednego punktu do drugiego można tu dostać się zawsze, nie przechodząc przez brzeg.

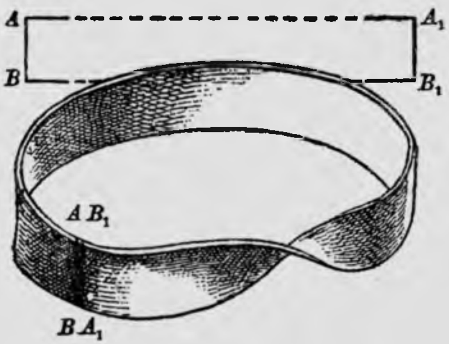

Fig. 16.

Prz. 1. Czy można utworzyć powierzchnię stożkową, zginając odpowiednio kartkę papieru, lub kawałek blachy?

Prz. 2. Czy można utworzyć z kartki papieru powierzchnię kulistą? Nie wolno przytem, ani marszczyć, ani wycinać papieru.

Prz. 3. W ilu punktach może przecinać się z linją prostą każda z powierzchni, które poznaliśmy, t. j. płaszczyzna, powierzchnia walcowa, powierzchnia stożkowa i wreszcie powierzchnia kulista?

Prz. 4. Wykonać następujące trzy proste doświadczenia. (1). Wyciąć z papieru prostokąt AA_1B_1B, wykreślić na nim linję środkową, t. j. połączyć środki boków AB i A_1B_1 i skleić brzegi AB i A_1B_1 tak, aby wierzchołek A przystał do A_1 i wierzchołek B do B_1; utworzy się więc powierzchnia walcowa, czyli obrączka. Wreszcie przeciąć papier według owej linji środkowej. Łatwo przewidzieć, że utworzą się dwie jednakowe, odrębne obrączki, podobne do pierwotnej, ale dwa razy węższe. (2) Takie same doświadczenie, jak poprzedzające, lecz przed sklejeniem skręcić jedną część prostokąta względem drugiej o pół obrotu tak, aby wierzchołek A przystał do B_1 i wierzchołek B do A_1. (3) Toż samo, ale przed sklejeniem obrócić jedną część prostokąta względem drugiej o cały obrót, a więc znowu A przystanie do A_1 i B do B_1. Za każdym razem trzeba starać się przewidzieć, co się otrzyma po rozcięciu, jak przewidzieliśmy to w doświadczeniu (1), a następnie sprawdzić, czy te przewidywania były słuszne.

27. Ze wszystkich powierzchni najważniejsza jest obecnie dla nas powierzchnia płaska, czyli płaszczyzna, bo najwięcej będziemy z nią mieli do czynienia w dalszym ciągu. Płaską więc jest powierzchnia tablicy, ale każdy rozumie, że jest to tylko część płaszczyzny, że możnaby ją przynajmniej w wyobraźni dowolnie poszerzyć we wszystkie strony. Z pośród płaszczyzn, które można przeprowadzić lub wyobrazić, wyróżniamy *płaszczyzny poziome* i *pionowe*. Poziomą jest np. płaszczyzna podłogi, lub sufitu, a także powierzchnia spokojnej wody w stawie, pionowemi są płaszczyzny ścian, drzwi, okien.

Obierzmy w płaszczyźnie tablicy dwa punkty A i B i połączmy je linją prostą; oczywiście cała ta prosta leży w płaszczyźnie tablicy. Możemy również powiedzieć, że płaszczyzna tablicy przechodzi przez prostą AB. Zróbmy teraz inaczej. Obierzmy punkt A przed tablicą, oraz punkt B za tablicą i wyobraźmy sobie, że przeprowadzono prostą AB. Oczywiście prosta ta musi przejść z jednej strony płaszczyzny na drugą, a więc musi ją przeciąć. Innemi słowy prosta AB posiada z płaszczyzną tablicy jeden punkt wspólny. Mówiąc to, mamy na myśli samą powierzchnię, a nie całą tablicę. Z tablicą prosta AB ma cały odcinek wspólny.

Dajmy na to, że ten drut (może być także pręt drewniany, lub nawet ołówek) wyobraża linję prostą. Ustawiam go tak, że nie przecina on płaszczyzny tablicy. Ggybyśmy jednak wydłużyli dostatecznie drut i tablicę, to przecięcie by nastąpiło. Możliwe jest jednak takie położenie drutu, że nie przeciąłby on tablicy nawet po największem wydłużeniu. Mówimy wówczas, że drut jest równoległy do tablicy, lub prosta do płaszczyzny. Przykładów równoległości prostych i płaszczyzn mamy naokoło bardzo wiele. Dwa brzegi tablicy są równoległe do podłogi, prosta, narysowana na jednej ścianie, jest równoległa do ściany przeciwległej i t. d.

Prz. 1. Czy powierzchnia wody w stawie jest dokładną płaszczyzną?

Prz. 2. Ile płaszczyzn poziomych przechodzi przez dany punkt?

Prz. 3. Jak są położone wszystkie proste poziome, przechodzące przez dany punkt?

Odp. Wszystkie leżą w jednej płaszczyźnie poziomej.

Prz. 4. Przez jaką prostą można poprowadzić płaszczyznę poziomą?

Prz. 5. Przez jaką prostą można poprowadzić płaszczyznę pionową?

Odp. Przez każdą prostą przechodzi jedna płaszczyzna pionowa, jeżeli jednak prosta jest pionowa, to każda płaszczyzna, przez nią przechodząca, jest pionowa. Tak np. prosta, łącząca zawiasy drzwi, jest pionowa. Płaszczyzna drzwi przechodzi przez nią, dlatego też płaszczyzna ta pozostaje pionową, jakkolwiek obrócimy drzwi około linji zawias.

Prz. 6, Czy płaszczyzna, przechodząca przez prostą poziomą, jest zawsze pozioma?

28. Obierzmy przed płaszczyzną punkt A. Niech tym punktem będzie zakończenie kredy, którą trzymam nieruchomo. Można od tego punktu A dostać się do tablicy różnemi drogami prostemi, ale wśród tych dróg jest jedna najkrótsza. Mówimy, że jest ona prostopadła do tablicy, i również prosta, na której ta droga leży, zowie się *prostopadłą do płaszczyzny tablicy*, a płaszczyzna tablicy nazywa się prostopadłą do tej prostej. Można znaleźć tu w najbliższem otoczeniu niemało przykładów prostopadłości prostych i płaszczyzn. Linja przecięcia dwóch ścian jest prostopadła do podłogi i do sufitu; wogóle każda prosta pionowa jest prostopadła do każdej płaszczyzny poziomej. Wbijając gwóźdź, ustawiamy go prostopadle do ściany lub deski i t. d. Warto także zrobić doświadczenie następujące. Opieramy koniec prostego drutu lub długiej szpilki o zwierciadło. Zobaczymy, że drut i jego odbicie są nachylone do siebie pod pewnym kątem, gdy jednak ustawimy drut prostopadle do płaszczyzny zwierciadła, to spostrzeżemy wyraźnie, że odbicie stanowi przedłużenie drutu, że odbicie i drut leżą na jednej prostej.

Ustawiam teraz drut prostopadle do płaszczyzny tablicy i przez punkt przecięcia, czyli przez *spodek prostopadłej*, prowadzę na tablicy prostą. Tworzy ona z drutem pewien kąt, i łatwo jest spostrzedz, że kąt ten jest prosty, że drut i prosta są do siebie prostopadłe. Wogóle prosta, prostopadła do płaszczyzny, jest prostopadła do wszystkich prostych, położonych w tej płaszczyźnie. Tak np. prosta pionowa jest prostopadła do każdej płaszczyzny poziomej, a więc jest prostopadła i do każdej prostej poziomej, bo każda prosta pozioma leży w jakiejś płaszczyźnie poziomej. Jest to rzecz całkiem oczywista, ale możnaby się o tem przekonać w sposób następujący. Linja zawias jest prostopadła do podłogi, a dolny brzeg drzwi możemy uważać za prostą, leżącą na podłodze; jest ona oczywiście prostopadła do bocznego brzegu drzwi, a więc i do linji zawias Gdy drzwi się obracają, to ta prosta zmienia wciąż położenie, ale wciąż leży w płaszczyźnie podłogi i nie przestaje być prostopadłą do linji zawias.

Obierzmy znowu jakiś punkt A i poprowadźmy przezeń prostopadłą do płaszczyzny tablicy. Punkt przecięcia oznaczmy literą B. Zmierzmy teraz odcinek AB. Dajmy na to, że wypadło 35 cm. W takim razie mówimy, że odległość punktu A od płaszczyzny wynosi 35 cm. Oczywiście jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to odległości wszystkich jej punktów są równe.

Prz. 1. Mamy kąt prosty, utworzony z prostych *a* i *b*; kąt ten obraca się około boku *a*. Jaką powierzchnię zatacza bok *b*?

Prz. 2. Przez jeden punkt przechodzi prosta pozioma i prosta pionowa. Jaką płaszczyznę zatoczy pierwsza, obracając się około drugiej, i jaką zatoczy druga, obracając się około pierwszej?

Prz. 3. Mamy prostą *a* i na niej punkt B. Jak są położone wszystkie proste prostopadłe do *a* w punkcie B?

Prz. 4. Prosta *a* przecina płaszczyznę tablicy w punkcie B, lecz nie jest do niej prostopadła. Czy można w płaszczyźnie tablicy poprowadzić prostą prostopadłą do *a*?

29. Wyobraźmy sobie dwie jakiekolwiek płaszczyzny. Płaszczyzny te się przecinają według linji prostej, lub przecięłyby się, gdyby je dostatecznie przedłużyć. Tak np. płaszczyzna podłogi przecina się z płaszczyzną każdej ściany, przecinają się płaszczyzny dwóch ścian przyległych i t. d. Tablica nie dochodzi do podłogi, a więc nie ma tu przecięcia, gdybyśmy jednak rozszerzyli tablicę ku dołowi, to przecięcie by nastąpiło. Ale mogą być takie dwie płaszczyzny, że przecięcie pomiędzy niemi nie nastąpi, gdyby je nawet niewiem jak przedłużać. Mówimy, że *płaszczyzny* takie są *równoległe.* Tak np. równoległe są płaszczyzny przeciwległych ścian pokoju, równoległe są płaszczyzny sufitu i podłogi i t. d. Dwie płaszczyzny poziome są zawsze równoległe.

Wyobraźmy sobie dwie jakiekolwiek płaszczyzny równoległe, powiedzmy, pierwszą i drugą, i przeprowadźmy na pierwszej linję prostą. Leży ona całkowicie na płaszczyźnie pierwszej, a więc nie może nigdzie spotkać się z drugą, innemi słowy jest do niej równoległa. Prosta, leżąca w jednej z płaszczyzn równoległych, jest równoległa do drugiej.

Jeszcze ważne jest inne położenie dwóch płaszczyzn, a mianowicie, gdy jedna z nich jest prostopadła do drugiej. Przykładów prostopadłości płaszczyzn mamy naokoło bardzo wiele. Dwie przyległe ściany są prostopadłe jedna do drugiej, sufit i podłoga są prostopadłe do każdej ze ścian, każda płaszczyzna pozioma jest prostopadła do każdej płaszczyzny pionowej i t. d. Wyobraźmy sobie płaszczyznę jakąkolwiek i prostopadłą do niej prostą. Łatwo zrozumieć, że każda inna płaszczyzna, przechodząca przez ową prostą, jest prostopadła do pierwszej. Tak np. linja zawias jest prostopadła do podłogi, i płaszczyzna drzwi, przechodząca wciąż przez tę linję, pozostaje zawsze prostopadłą do podłogi.

Prz. 1. Czy dwie płaszczyzny pionowe muszą być równoległe?

Prz. 2. Mamy płaszczyznę i punkt. Ile możnaby przeprowadzić przez ten punkt płaszczyzn równoległych do płaszczyzny, a ile prostopadłych?

Prz. 3. Mamy płaszczyznę i prostą. Ile jest płaszczyzn, przechodzących przez prostą i prostopadłych do płaszczyzny danej?

30. Gdy nakreślimy na płaszczyźnie jakiś rysunek lub figurę, to figura ta nazywa się *płaską*. Do figur płaskich należą trójkąt, równoległobok, kwadrat, koło i t. d. Poznaliśmy w dwóch pierwszych częściach niemało takich figur, a także różne ich własności. Wielce użyteczny był nam w tem rysunek. Nieraz dość jest narysować na papierze, t. j. na płaszczyźnie, figurę płaską, aby niektóre jej właściwości odrazu wyszły na jaw. Teraz mamy do czynienia z figurami, które nie mieszczą się w płaszczyźnie, jak np. figura, złożona z dwóch płaszczyzn, albo z płaszczyzny i prostopadłej do niej prostej. Są to tak zwane *figury przestrzenne*. Byłoby dobrze przy badaniu figur przestrzennych także korzystać z rysunku. Nie mamy wprawdzie możności wykreślić na papierze figury przestrzennej bezpośrednio, jak wykreślaliśmy figury płaskie, ale można wykreślić jej wyobrażenie płaskie, lub obraz. Z takiemi wyobrażeniami płaskiemi figur przestrzennych spotykamy się na każdym kroku. Są to fotografje, ilustracje w książkach, obrazy ścienne i t. d. Musimy więc nauczyć się kreślić dokładnie takie wyobrażenia płaskie przy pomocy ekierek i cyrkla, a będziemy mogli i teraz posługiwać się rysunkiem.

Obrazami płaskiemi przedmiotów są także ich cienie. Wprawdzie cień daje nam tylko zarysy zewnętrzne, czyli sylwetkę przedmiotu, ale za to najłatwiej w tym razie zrozumieć, jak taki obraz powstaje. Wyobraźmy sobie, że w ciemnym pokoju zapalono elektryczną lampę łukową bez klosza. Wydaje ona jaskrawe, rażące światło, a przedmioty rzucają ostre wyraźne cienie. Połóżmy np. na stole arkusz białego papieru i trzymajmy nad nim ekierkę. Na papierze utworzy się wyraźny cień w postaci trójkąta. Aby na przyszłość łatwiej było się porozumiewać wprowadzimy tu pewne nowe nazwy. Nazwiemy cień *obrazem*, albo *rzutem* ekierki, a ekierkę *oryginałem* tego obrazu; promienie światła, padające na ekierkę, albo raczej proste, wzdłuż których te promienie idą, będziemy nazywali *promieniami rzucającemi*, a papier, albo raczej jego płaszczyznę *płaszczyzną rzutów*, albo *tłem*. Wszystkie promienie rzucające wychodzą tu z lampy lub, ściślej mówiąc, z małego zagłębienia w górnym węglu, zwanego kraterem. Łatwo zrozumieć, że rzutem punktu jest punkt; tak np. rzutem wierzchołka ekierki jest wierzchołek cienia. Gdy przeprowadzimy w myśli przez wierzchołek ekierki promień rzucający, t. j. gdy połączymy z nim krater, który można uważać za punkt, to w przecięciu tego promienia z tłem znajduje się właśnie rzut wierzchołka. Stąd można już zdać sobie sprawę z tego, jak powstaje rzut ekierki, lub wogóle rzut figury. Naturalnie rzutem linji prostej jest linja prosta, np. rzutem boku ekierki jest bok cienia.

Prz. 1. Jaką powierzchnię tworzą wszystkie promienie rzucające linji prostej?
Prz. 2. Czy rzutem odcinka prostej może być punkt, i kiedy to bywa?
Prz. 3. Czy rzutem kąta prostego jest zwykle kąt prosty?
Prz. 4. Czy rzutem kąta może być prosta?
Prz. 5. Czy rzutem koła jest zwykle koło?
Prz. 6. Czy rzutem okręgu może być linja prosta?

31. Będziemy uważali na przyszłość, że promienie rzucające nie wychodzą z jednego punktu, jak w przypadku poprzedzającym, lecz są równoległe. Promienie słońca są równoległe, a więc cienie, które powstają w świetle słonecznem, należą właśnie do tego rodzaju rzutów, którym będziemy się teraz posługiwali. Rzuty takie zowią *równoległemi*. Chodzi teraz o to, aby nauczyć się wykreślać rzuty równoległe figur.

Biorę kwadrat, wycięty z kartonu. Wierzchołki jego oznaczmy literami A, B, C i D. Tłem będzie tablica. Ustawiam kwadrat w taki sposób, aby boki AB i DC były prostopadłe do tła, a AD i BC równoległe. Zauważymy, że płaszczyzna kwadratu jest przytem prostopadła do tła. Przyjmiemy, że promienie rzucające idą ukośnie do tła, a mianowicie, że padają z prawej strony z góry. W takim razie obraz kwadratu, albo rzut równoległy ukośny, będzie taki, jak na fig. 17. Przyjrzyjmy się mu dobrze, aby zdać sobie sprawę dokładnie, w jaki sposób został utworzony.

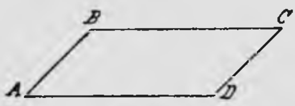

Fig. 17.

Zauważymy przedewszystkiem, że rzuty boków równoległych np. AD i BC, jak również AB i DC są równoległe. Wogóle rzuty prostych równoległych są równoległe. Jest to pierwsze bardzo ważne prawidło, o którem dobrze pamiętać należy Z niego wynika, że rzut kwadratu jest równoległobokiem.

Dalej widzimy, że rzuty boków AD i BC, równoległych do tła, są równe oryginałom. Powiemy, że odcinki równoległe do tła, nie podlegają skróceniu, i to jest drugie ważne prawidło.

Boki AB i DC prostopadłe do tła są w rzucie skrócone, mianowicie rzut jest dwa razy krótszy od oryginału; powiemy, że *skrócenie* wynosi $^1/_2$.

Wreszcie spostrzeżenie ostatnie. Dotyczy ono kątów kwadratu, np. kąta BAD. Jeden bok jego AD jest równoległy do tła, drugi AB prostopadły. Widzimy, że rzutem tego kąta prostego nie jest kąt prosty, lecz kąt ostry, równy 45°. Powiemy, że *wypaczenie* wynosi 45°.

Jeżeli promienie rzucające są równoległe, to rzut kwadratu jest zawsze równoległobokiem, ale wygląd tego równoległoboku zależy od tego, w jakim kierunku idą promienie. Gdyby promienie padały nie z prawej strony z góry, lecz z lewej strony z góry, to rzut tego samego kwadratu byłby taki, jak na fig. 18.

Fig. 18.

Od kierunku promieni zależy również skrócenie odcinków prostopadłych do tła, oraz wypaczenie kątów prostych. Przy tym kierunku promieni rzucających, który obraliśmy, pierwsze jest równe $^1/_2$, a drugie 45°. Obraliśmy taki właśnie kierunek, aby ułatwić sobie wykonanie rysunków, gdyż można łatwo dzielić na pół odcinki i wykreślać kąty 45°. I w przyszłości, gdy nie będzie wyraźnie wskazane skrócenie i wypaczenie, to należy tak je właśnie obierać. Do wykreślenia kąta 45° można posługiwać się ekierką w postaci trójkąta prostokątnego równoramiennego. Ale są w użyciu i inne kierunki promieni rzucających. Nieraz obiera się taki kierunek, aby skrócenie było równe $^1/_3$, a wypaczenie 30°. Trudniej jest wówczas wykreślać rzuty, ale obrazy są plastyczniejsze.

Prz. 1. Wykreślić rzut szachownicy, ustawionej w takiem położeniu względem tła, jak kwadrat na fig. 17.

W szachownicy każdy bok kwadratu jest podzielony na 8 części. Aby sobie ułatwić sprawę, można bok podzielić tylko na 4 części. Ile wówczas wypadnie pól, ile jest pól w szachownicy zwykłej, i ile byłoby pól, gdyby podzielić bok na 10 części?

Prz. 2. Wykreślić rzut prostokąta, w którym jeden bok jest półtora raza dłuższy od drugiego.

Prz. 3. Wykreślić rzut kwadratu, którego jedna przekątnia jest prostopadła do tła.

Gdy połączymy środki boków kwadratu, to otrzymamy inny kwadrat mniejszy, którego przekątnie są prostopadłe do boków większego. Należy naprzód wykreślić rzut tego małego kwadratu.

Prz. 4. Wykreślić rzut kwadratu, jak na fig. 17, obrać następnie na boku AB dowolny punkt M i wyznaczyć prawdziwą długość odcinka MC.

Mając rzut kwadratu, możemy z łatwością wykreślić ten kwadrat na stronie w prawdziwej wielkości, na tym rysunku znajdziemy, gdzie leży punkt M i długość MC.

Prz. 5. Wykreślić rzut równobocznego trójkąta i jego trzech wysokości.

Wykreślamy naprzód równoboczny trójkąt ABC i jego wysokość AD. Ustawiamy płaszczyznę trójkąta prostopadle, a podstawę BC równolegle do tła. Wówczas znajdziemy z łatwością rzuty podstawy i wysokości.

Prz. 6. Wykreślić rzut sześciokąta foremnego.

Wykreślamy sześciokąt foremny ABCDEF i wyznaczamy środki M i N przeciwległych boków AB i ED. Odcinek MN jest oczywiście prostopadły do przekątni CF. Możemy wyznaczyć łatwo rzuty odcinków MN i CF,- a wówczas i wierzchołki sześciokąta.

32. Przykłady paragrafu poprzedzającego objaśniają dostatecznie, jak się wykreśla rzuty figur płaskich, ale nam chodzi nie o figury płaskie, lecz o figury przestrzenne, i teraz właśnie do tego przejdziemy. Zaczniemy od figury, zwanej *prostopadłościanem*. Prostopadłościanem jest np. przedmiot, zrobiony z kartonu, który trzymam w ręku. Przyjrzyjmy się mu dobrze, bo będziemy mieli z niem niemało roboty. Powierzchnię jego tworzy sześć prostokątów; nazywamy je *ścianami* prostopadłościanu. Zwróćmy uwagę na jedną ze ścian, np. na tę, na której piszę literę A. Powiemy krótko ścianę A. Jedna ze ścian pozostałych jest równoległa do ściany A, nazwiemy ją *ścianą przeciwległą* do ściany A. Pozostają jeszcze cztery ściany; wszystkie one przecinają się ze ścianą A i są do niej prostopadłe. Nazwiemy je ścianami *przyległemi* do A. Linja przecięcia dwóch ścian przyległych zowie się *krawędzią* prostopadłościanu. Każda krawędź jest bokiem dwóch prostokątów. Wierzchołek prostokąta A jest zarazem wierzchołkiem dwóch innych prostokątów. W punkcie tym zbiegają się trzy krawędzie i trzy ściany; nazywa się on *wierzchołkiem*

prostopadłościanu. Zwróćmy uwagę na jeden z wierzchołków. Jak powiedziano, zbiegają się w nim trzy ściany; trzy ściany pozostałe zbiegają się w innym wierzchołku. Takie dwa wierzchołki zowią się *przeciwległemi*. Prosta, łącząca dwa wierzchołki przeciwległe, nazywa się przekątnią prostopadłościanu.

Prostopadłościan jest bardzo ważną i często spotykaną figurą. Bardzo wiele przedmiotów codziennego użytku ma przynajmniej w ogólnych zarysach postać prostopadłościanu, jak np. pudełka, komody, szafy, biurka i t. d. Mówimy w ogólnych zarysach, bo istnieją pewne drobne różnice. Tak np. szafa byłaby dokładnym prostopadłościanem, gdyby odrzucić gzymsy i nogi. Prostopadłościanami są najczęściej domy, a przynajmniej byłyby po usunięciu dachów, również poszególne pokoje mają w ogólnych zarysach postać prostopadłościanów.

Może być taki prostopadłościan, w którym wszystkie krawędzie są równe. Nazywamy go *sześcianem*. Oczywiście w sześcianie wszystkie ściany są jednakowemi kwadratami.

Prz. 1. Ile prostopadłościan ma krawędzi, ile wierzchołków i ile przekątni?

Prz. 2. Ile jest krawędzi równoległych do krawędzi danej?

Prz. 3. Prócz przekątni prostopadłościanu istnieją jeszcze przekątnie ścian. Ile jest takich przekątni?

33. Na fig. 19 widzimy rzut sześcianu, którego dwie ściany ABCD i EFGH są równoległe do tła. Wszystkie krawędzie tych ścian są równoległe do tła, a więc nie doznają skrócenia, i w rzucie otrzymaliśmy dwa kwadraty równe kwadratom oryginału. Cztery krawędzie AE, BF, CG i DH są oczywiście prostopadłe do tła, a więc występują w skróceniu. Jeżeli sześcian jest nieprzezroczysty, to widzimy go tylko z jednej strony, a mianowicie widzimy trzy ściany, zbiegające się w wierzchołku C. Trzy inne ściany, zbiegające się w E, są niewidoczne, Te niewidoczne krawędzie zaznaczono na rysunku linjami przerywanemi,

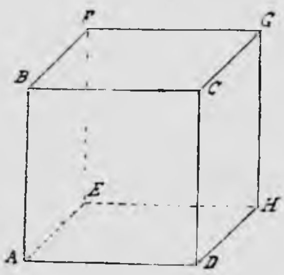

Fig. 19.

i tak samo będziemy czynili w dalszym ciągu. Tak wyglądałby sześcian, gdyby był szklany.

Przy pomocy tego rzutu możemy wyjaśnić sobie pewną ważną sprawę. Jeżeli dwie linje proste leżą w jednej płaszczyźnie, to jedno z dwojga, albo się przecinają (po dostatecznem przedłużeniu), albo są równoległe. Ale mogą być dwie proste, nie leżące w jednej płaszczyźnie. Zwróćmy uwagę np. na krawędzie AB i FG. Każdy widzi, że żadna płaszczyzna nie może przechodzić przez obydwie. Takie dwie proste nazywają się *wichrowatemi*. Oczywiście proste wichrowate nie są równoległe; również nie przetną się one, gdyby je, nie wiem jak, przedłużyć.

Prz. 1. Które krawędzie są wichrowate względem AB?

Prz. 2. Czy mogą być wichrowate dwie proste pionowe, lub dwie proste poziome?

Prz. 3. Ile jest krawędzi sześcianu, wichrowatych względem jednej przekątni?

Prz. 4. Wykreślić rzut sześcianu, a następnie wyznaczyć długość jego przekątni.

Wszystkie cztery przekątnie sześcianu są równe, a więc wystarcza wyznaczyć długość jednej. Połączmy wierzchołki B z D oraz F z H. Otrzymamy czworokąt BFHD, który jest oczywiście prostokątem. Możemy go łatwo wykreślić w wielkości prawdziwej, gdyż mamy wszystkie jego boki. Przekątnie tego prostokąta są przekątniami sześcianu.

Prz. 5. W wierzchołku A prostopadłościanu schodzą się krawędzie AB, AD i AE; druga z nich jest półtora raza dłuższa od pierwszej, a trzecia stanowi trzy czwarte pierwszej. Wykreślić rzut takiego prostopadłościanu i wyznaczyć długości przekątni.

Prz. 6. Dowieść, że w sześcianie wszystkie cztery przekątnie przechodzą przez jeden punkt, i że ten punkt dzieli każdą z nich na pół.

Przeprowadźmy w sześcianie, wyobrażonym na fig. 19, przekątnię BH i oznaczmy jej środek literą M. Przeprowadźmy następnie inną którąkolwiek przekątnię, np. FD. Oczywiście BH i FD są również przekątniami prostokąta BFHD, a zatem przekątnia FD przechodzi przez punkt M i dzieli się w nim na pół. Toż samo dotyczy pozostałych przekątni. Ten punkt M zowie się środkiem sześcianu.

Czy tak samo jest w każdym prostopadłościanie?

Prz. 7. Połączyć wierzchołek G sześcianu (fig. 19) ze środkiem M krawędzi CD i wyznaczyć punkt przecięcia prostej GM z płaszczyzną ściany AEHD.

Należy to zadanie dobrze zrozumieć, bo sprawa jest bardzo ważna. Proste GM i HD się przecinaja, bo leżą w jednej płaszczyźnie i nie są równoległe. Ten punkt przecięcia leży również w płaszczyźnie AEHD, jest to więc punkt szukany. Oczywiście leży on poza obrębem sześcianu.

Prz. 8. Połączyć wierzchołek F ze środkiem M krawędzi CD i wyznaczyć punkt przecięcia prostej FM z płaszczyzną AEHD.

Prz. 9. Połączyć wierzchołek F ze środkiem M ściany CGHD, a następnie wyznaczyć punkt przecięcia prostej FM z płaszczyzną AEHD.

Łatwo zrozumieć, że prosta FM jest położona w płaszczyźnie prostokąta, którego jednym bokiem jest FE, a drugim równoległa przez M do FE.

34. Wykreślam w rzutach dwie płaszczyzny równoległe. Pierwszą oznaczam jedną literą F_1, drugą literą F_2. Obrałem je prostopadle do tła tylko dlatego, aby ułatwić sobie rysunek. Prócz tego kreślę jeszcze trzecią płaszczyznę G, którą obrałem równolegle do tła. Płaszczyzna G przecina płaszczyznę F_1 według prostej A_1B_1 i płaszczyznę F_2 według A_2B_2. Te dwie proste leżą w jednej płaszczyźnie, mianowicie w płaszczyźnie G, a więc jedno z dwojga, albo się przecinają po dostatecznem przedłużeniu, albo są równoległe. Lecz przecinać się nie mogą; gdyby się przecięły, to punkt przecięcia leżałby jednocześnie w płaszczyźnie F_1 i w F_2, co jest niemożliwe, gdyż te płaszczyzny są równoległe. Z tego wynika, że proste A_1B_1 i A_2B_2 muszą być równoległe. Powiemy wogóle, że płaszczyzna przecina płaszczyzny równoległe wegług prostych równoległych.

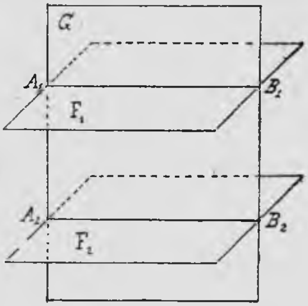

Fig. 20.

Prz. 1. Wykreślić rzuty dwóch płaszczyzn równoległych oraz trzeciej, przecinającej tamte; wszystkie trzy powinny być prostopadłe do tła. Prócz tego wykreślić proste przecięcia.

W tych wszystkich zadaniach należy pilnie odróżniać linje widoczne od n ewidocznych.

Prz. 2. Wykreślić sześcian, jak na fig. 19, i przeciąć go płaszczyzną na dwie części; powinna ona przeciąć jedynie krawędź AB i trzy inne do niej równoległe, ale nie powinna być prostopadła do nich.

Prz. 3. Na krawędziach FG, BC i CD sześcianu (fig. 19) obrać odpowiednio punkty L, M, N i wyznaczyć przecięcie płaszczyzny trójkąta LMN ze ścianami FGHE i CDHG.

Prz. 4. Przeciąć sześcian płaszczyzną, przecinającą jedynie krawędzie, zbiegające się w wierzchołku A; następnie wykreślić trójkąt przekroju w wielkości prawdziwej.

Należy wyznaczyć długości wszystkich boków, a następnie wykreślić trójkąt.

Prz. 5. Wykreślić w sześcianie, fig. 19, dwie płaszczyzny, jedną, przechodzącą przez krawędzie AB i HG, i drugą, przechodzącą przez EF i DC. Płaszczyzny takie zowią się *płaszczyznami przekątnemi* sześcianu. Wyznaczyć następnie prostą przecięcia tych płaszczyzn oraz dowieść, że jest ona równoległa do krawędzi AB i przechodzi przez środek sześcianu. Ile jest w sześcianie płaszczyzn przekątnych?

Prz. 6. W sześcianie, fig. 19, wyznaczyć prostą przecięcia dwóch płaszczyzn przekątnych, z których jedna przechodzi przez krawędzie AB i HG, a druga przez BF i DH.

Prz. 7. W sześcianie, fig. 19, wyznaczyć środki L, M, N krawędzi AB, BF i FG oraz przecięcie płaszczyzny trójkąta LMN z powierzchnią sześcianu.

Trzeba wiedzieć, że płaszczyzna ta przejdze przez środki wszystkich krawędzi, tworzących kontur czyli obwód rzutu. Otrzymuje się w przekroju sześciokąt foremny.

Prz. 8. Podzielić sześcian na ośm równych sześcianów; następnie wyjąć jeden z sześcianów górnych przednich i narysować oddzielnie to, co pozostanie z sześcianu dużego, ale już nie rysować płaszczyzn dzielących.

Tu każda krawędź zostanie podzielona na pół; na ile sześcianów podzieli się sześcian duży, gdy każdą krawędź podzielimy na 3 części, na 5, na 10 części.

Prz. 9. Obrać krawędź sześcianu i wykreślić w wielkości prawdziwej przekrój jego płaszczyzną przekątną, przez nią przechodzącą.

Naturalnie jest to prostokąt; można łatwo wyznaczyć wszystkie boki jego.

Prz. 10. Wykreślić rzut sześcianu, którego jedna płaszczyzna przekątna jest równoległa do tła.

Wykreślamy naprzód prostokąt np. BFHD (fig. 19); następnie łatwo już będzie wykreślić przekątnie ścian ABCD i FEHG.

Prz. 11. Ma być zrobiony sześcian z kartonu, ma się rozumieć, próżny wewnątrz. Możnaby w tym celu wyciąć z kartonu sześć ścian i następnie je skleić. Ale w ten sposób byłoby zbyt wiele klejenia, mielibyśmy aż 12 sklejeń na krawędziach. Wyciąć tak karton, aby liczba sklejeń była jak najmniejsza. Tak wycięty karton zowie się *siatką* sześcianu. Zamiast wycinać karton dostatecznie będzie wyrysować siatkę.

35. Ściany sześcianu zamykają go całkowicie. Odgradzają one to, co jest wewnątrz, powiedzmy przestrzeń wewnętrzną, od przestrzeni zewnętrznej. Chcąc z przestrzeni zewnętrznej przeniknąć do wewnętrznej, trzeba koniecznie przebić jedną ze ścian. Z tych względów nazywamy sześcian *bryłą*. Bryłą jest również kula. Powierzchnia kuli okala ją całkowicie. I tu mamy przestrzeń wewnętrzną, odgraniczoną kompletnie od przestrzeni zewnętrznej. Pomiędzy temi dwiema bryłami zachodzi ta rzucająca się w oczy różnica, że powierzchnia pierwszej składa się z płaszczyzn, albo raczej ze ścian płaskich, gdy tymczasem powierzchnia drugiej jest krzywa. Są i inne bryły o powierzchni, złożonej ze ścian płaskich. Nazywamy je wszystkie *wielościanami*.

Wielościan musi mieć co najmniej cztery ściany. Aby się o tem przekonać, należy wziąć trzy kawałki kartonu i spróbować utworzyć z nich bryłę, innemi słowy odgraniczyć kompletnie przestrzeń wewnętrzną od zewnętrznej, czyli zamknąć przestrzeń w trzech ścianach. Każdy przekona się odrazu, że to jest niemożliwe; natomiast można utworzyć bryłę o czterech ścianach, czyli *czworościan*.

Rzut takiej bryły mamy na fig. 21. Widzimy, że wszystkie cztery ściany są trójkątami. Czworościan posiada również cztery wierzchołki, i każdemu wierzchołkowi odpowiada jedna, *przeciwległa*, ściana. Tak np. ściana ABC jest przeciwległą do wierzchołka D, ściana BCD do wierzchołka A i t. d. Na figurze przeprowadzono prostopadłą DE z wierzchołka D do ściany ABC. Prostopadła ta zowie się *wysokością* czworościanu. Ponieważ w czworościanie są cztery wierzchołki, a więc są i cztery wysokości. Każda krawędź czworościanu przecina się ze wszystkiemi innemi krawędziami prócz jednej, inaczej mówiąc, każdej krawędzi odpowiada tylko jedna krawędź wichrowata. Tak np. krawędzi AB odpowiada CD, krawędzi BC odpowiada AD, i t. d.

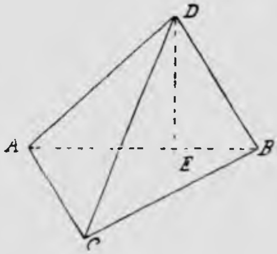

Fig. 21

Ściany czworościanu są zawsze trójkątami; inaczej być nie może, ale te trójkąty mogą mieć bardzo rozmaite kształty, a zatem i czworościany bywają najrozmaitszych kształtów. Jeżeli wszystkie ściany są trójkątami równobocznemi, to czworościan nazywa się foremnym. Na fig. 23 widzimy rzut czworościanu foremnego. Jedna z jego ścian, mianowicie ABC, jest prostopadła do tła, a zatem wysokość DE jest równoległa do tła i nie podlega skróceniu. Trzeba jeszcze wiedzieć, że spodek tej wysokości znajduje się w środku ciężkości trójkąta ABC. Pamiętającotem, zrozumiemy łatwo, jak się wykreśla rzut czworościanu foremnego.

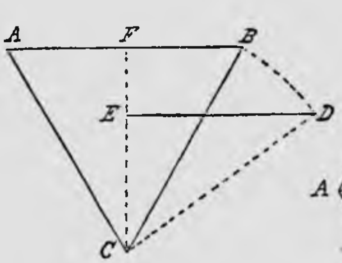

Fig 22.

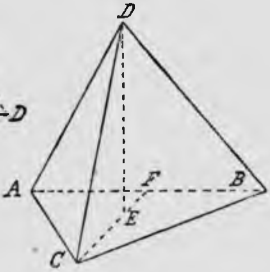

Fig. 23.

Przedewszystkiem wykreślamy trójkąt równoboczny ABC w prawdziwej wielkości. Uczyniono to na fig. 22. Następnie wykreślamy rzut tego trójkąta, ustawiwszy bok AB równolegle do tła, a wysokość CF prostopadle do tła. Dalej wznosimy prostopadłą w punkcie E do ściany ABC. Rzut jej jest oczywiście prostopadły do rzutu krawędzi AB. Trzeba jeszcze tylko wyznaczyć długość wysokości ED, bo wówczas znajdziemy wierzchołek D. W tym celu zwrócimy uwagę na trójkąt prostokątny CDE. W nim szukana wysokość jest przyprostokątną; druga przyprostokątna CE jest równa $^2/_3$ wysokości CF, a przeciwprostokątna CD jest krawędzią czworościanu. Możemy więc z łatwością trójkąt ten wykreślić w wielkości prawdziwej. Uczyniono to właśnie na fig. 22. Gbyby na tej figurze trójkąt CDE obrócił się o 90° około CE, i gdybyśmy następnie połączyli punkt D z A, B i C, to otrzymalibyśmy nasz czworościan, stojący na płaszczyźnie papieru.

Prz. 1. Ile czworościan posiada krawędzi?

Prz. 2. Wykreślić czworościan foremny i podzielić go płaszczyzną na dwa czworościany równe.

Prz. 3. Wykreślić rzut jakiegokolwiek czworościanu, jak na fig. 21. Następnie obrać na ścianie ACD punkt M oraz na BCD punkt N i wyznaczyć punkt przecięcia prostej MN z płaszczyzną ściany ABC.

Należy tu postąpić w sposób następujący: Łączymy punkty M i N z wierzchołkiem D. Prosta DM przetnie krawędź AC w punkcie M', i prosta DN przetnie krawędź BC w N'. Proste

MN i M'N' leżą w jednej płaszczyźnie a więc się przecinają (jeżeli nie są równoległe), i punkt przecięcia jest szukanym.

Prz. 4. Od czworościanu foremnego odciąć czworościan mniejszy płaszczyzną równoległą do jednej ściany i wyznaczyć punkt przecięcia wysokości z ową płaszczyzną. Następnie narysować oddzielnie bryłę, która pozostanie po odcięciu. Bryła taka zowie się *pniem*.

Prz. 5. Wykreślić czworościan jakikolwiek; obrać na jego trzech krawędziach trzy punkty i wyznaczyć linję przecięcia płaszczyzny, przechodzącej przez te trzy punkty, z płaszczyzną, zawierającą trzy krawędzie pozostałe.

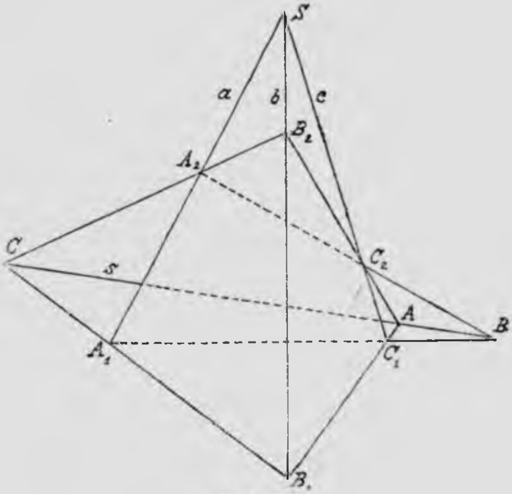

Fig. 24.

Jest to zadanie proste, ale bardzo ciekawe. Rozwiązanie jego mamy na fig. 24. Wierzchołki czworościanu oznaczono tam literami S, A_1, B_1 i C_1. Na krawędziach SA_1, SB_1, SC_1 obrano punkty A_2, B_2, C_2, i teraz chodzi o wyznaczenie linii przecięcia płaszczyzny $A_2B_2C_2$ z płaszczyzną ściany $A_1B_1C_1$. Proste A_1B_1 i A_2B_2 leżą obydwie w płaszczyźnie SA_1B_1, a więc się przecinają, i ich punkt przecięcia C jest jednym z punktów prostej szukanej. Innym punktem tej prostej jest punkt B, w którym przecinają się proste A_1C_1 i A_2C_2, a zatem prosta CB lub *s* jest szukaną. Na tej samej prostej musi również leżeć punkt A, w którym przecinają się proste B_1C_1 i B_2C_2.

Warto zatrzymać się jeszcze nad tą ciekawą figurą i zbadać ją dokładniej. Zobaczmy, w jaki sposób ona powstała. Z punktu S poprowadziliśmy trzy dowolne proste *a*, *b*, *c* i obraliśmy na nich odpowiednio punkty A_1, B_1, C_1. Połączywszy te punkty, możemy w każdym razie uważać otrzymaną figurę płaską, za rzut czworościanu. Dalej na prostych *a*, *b*, *c* obraliśmy znowu dowolnie punkty A_2, B_2, C_2 i widzimy, że punkty przecięcia odpowiednich prostych np. A_1 B_1 i A_2B_2 leżą na jednej prostej. Prawidło to zowie się twierdzeniem lub teorematem Desargues'a, gdyż odkrył je Desargues inżynier i matematyk francuski blizko trzysta lat temu. Przekonaliśmy się już dawniej przy pomocy próby (par. 6, prz. 1), że jest ono słuszne.

Prz. 6. Wykreślić trzy proste *a*, *b* i *c*, wychodzące z punktu S i obracać trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej prostej. Wykreślić następnie trójkąt, którego wierzchołki leżą na prostych *a*, *b*, *c*, i boki przechodzą przez punkty A, B, C.

Naprzód narysujemy trójkąt, którego wierzchołki leżą na *a*, *b*, *c*, i dwa boki przechodzą przez A, B. To jest sprawa łatwa. Trzeci bok tego trójkąta przetnie prostą AB, dajmy na to w punkcie C'. Można trójkątów takich zbudować ile chcąc, i zawsze trzeci bok przejdzie przez ten sam punkt C'. Również trzeci bok szukanego trójkąta przejdzie przez C'. Warto zauważyć, że rozwiązaliśmy zadanie zapomocą konstrukcji linjowej.

Prz. 7. Na równem polu mamy przeprowadzić linję prostą przez dane punkty A i B, ale pomiędzy temi punktami rośnie wysokie, grube drzewo, nie można więc rozpiąć sznura. Jak postąpić?

Gdy będziemy mieli jeszcze jeden punkt szukanej prostej, np. po stronie punktu B, to będziemy mogli przeprowadzić tę prostą po tej stronie drzewa. Można taki punkt otrzymać przy pomocy twierdzenia Desargues'a. Mianowicie przeprowadzamy na gruncie trzy proste *a*, *b*, *c*, przechodzące przez jeden punkt S, następnie budujemy dwa trójkąty; wierzchołki każdego z nich powinny leżeć na *a*, *b*, *c*, i dwa boki powinny przechodzić przez A i B. Wówczas trzecie boki przetną się w punkcie, położonym na prostej AB.

Prz. 8. Dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ położone są tak, że odpowiednie boki przecinają się w punktach A, B, C, położonych na prostej *s*; dowieść, że odpowiednie wierzchołki leżą na prostych, wychodzących z jednego punktu.

Jest to drugie twierdzenie Desargues'a, znamy je również z prz. 2, par. 6. Rzuca się odrazu w oczy, że pomiędzy niem i pierwszem twierdzeniem zachodzi ścisły związek, dowiedziemy też je przy pomocy tej samej figury (24). Możemy uważać, że $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są rzutami dwóch trójkątów, których płaszczyzny przecinają się według prostej *s*. Boki A_1B_1 i A_2B_2 przecinają się w punkcie C, a więc leżą w jednej płaszczyźnie, i w tej samej płaszczyźnie leżą proste A_1A_2 i B_1B_2, czyli *a* i *b*. Z tego wynika, że proste te się przecinają, dajmy na to, w punkcie S. Tak samo zupełnie okażemy, że każda z tych prostych przecina prostą C_1C_2, czyli *c*, a zatem ów punkt S musi leżeć w tym samym punkcie, w którym płaszczyzna prostych *a* i *b* przecina prostą *c*; innemi słowy przez punkt S przechodzą wszystkie trzy proste *a*, *b* i *c*.

Prz. 9. Obrać trzy punkty, leżące na jednej prostej, oraz trzy proste, nie przechodzące przez jeden punkt, i wykreślić trójkąt, którego boki przechodzą przez obrane punkty, a wierzchołki leżą na obranych prostych.

Kto dobrze zrozumiał rozwiązanie w przykł. 6, ten rozwiąże łatwo i to zadanie.

Prz. 10. Mamy narysowane dwie proste *b* i *c* nie równoległe, ale nieprzecinające się w obrębie rysunku; przecięłyby się dopiero wtedy, gdyby je przedłużyć po za rysunek. Prócz tego mamy jeszcze punkt A_1. Poprowadzić przez A_1 prostą, która po-przedłużeniu przeszłaby przez punkt przecięcia prostych b i c, czyli przez punkt bc.

Należy naprzód wykreślić trójkąt $A_1B_1C_1$, którego wierzchołki B_1, C_1 leżą na prostych b, c, a następnie inny trójkąt, $A_2B_2C_2$, którego wierzchołki B_2, C_2 leżą również na b, c, i którego boki przecinają się z odpowiednimi bokami pierwszego na linji prostej. Rozwiązanie jest linjowe.

Prz. 11. Wykreślić rzut czworościanu, jak na fig. 21; następnie obrać na ścianach ABD, BCD i ACD odpowiednio punkty L, M, N i wyznaczyć prostą przecięcia płaszczyzny LMN z ABC.

Prz. 12. Wykreślić czworościan, obrać, jak w prz. poprzedzającym, punkty L, M, N i wyznaczyć punkty przecięcia płaszczyzny LMN z krawędziami AD, BD i CD.

Rozwiązawszy to zadanie, warto je porównać z przykładem 6.

Prz. 13. Wykreślić siatkę czworościanu foremnego.

36. Na fig. 25 widzimy jeszcze inną bryłę, czyli wielościan. Bryła taka zowie się *graniastosłupem trójkątnym*, lub krócej *pryzmatem*. Jeżeli pryzmat jest zrobiony ze szkła, i padają nań promienie słoneczne, to promienie te rozszczepiają się na promienie kolorowe, o barwach tęczy. Niewątpliwie każdy widział, a może i sam robił to piękne doświadczenie. Przypatrzmy się dokładniej tej bryle. Widzimy tu przedewszystkiem dwie równoległe ściany trójkątne $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$; nazywamy je *podstawami* pryzmatu. Trzy pozostałe ściany czworokątne zowią się ścianami *bocznemi*. Ściany boczne przecinają się według trzech prostych, albo krawędzi A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, zwanych krawędziami bocznemi. Każda krawędź boczna jest równoległa do przeciwległej ściany bocznej, np. krawędź A_1A_2 jest równoległa do ściany $B_1B_2C_2C_1$. Z tego wynika odrazu, że wszystkie trzy krawędzie boczne są równoległe. Weźmy np. krawędzie A_1A_2 i B_1B_2. Leżą one w jednej płaszczyźnie, a mianowicie płaszczyźnie $A_1A_2B_2B_1$, a więc albo się przecinają po dostatecznem przedłużeniu, albo są równoległe. Lecz przecinać się te proste nie mogą, bo ich punkt przecięcia byłby również punktem przecięcia płaszczyzny $B_1C_1C_2B_2$ z równoległą do niej prostą A_1A_2; a więc owe krawędzie są równoległe.

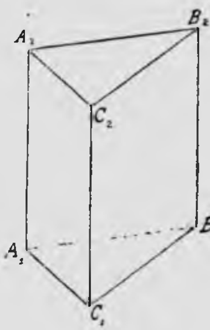

Fig. 25.

Ponieważ płaszczyzny podstaw są równoległe, zatem ściany boczne przecinają je według prostych równoległych, inaczej mówiąc, boki trójkąta $A_2B_2C_2$ są odpowiednio równoległe do boków trójkąta $A_1B_1C_1$. Zwróćmy jeszcze uwagę na jedną ze ścian bocznych np. $A_1A_2B_2B_1$. Jest to czworokąt, w którym boki przeciwległe są równoległe, a więc jest to równoległobok, i przeciwległe boki jego są równe. Tak więc po pierwsze wszystkie trzy boczne krawędzie są równe, i po drugie odpowiednie boki trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są równe, a za tem i trójkąty są równe.

Jeżeli z któregokolwiek punktu jednej podstawy poprowadzimy prostopadłą do drugiej, to ta prostopadła, albo raczej jej odcinek, zawarty pomiędzy podstawami, nazywa się *wysokością* pryzmatu. Jeżeli krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, to pryzmat nazywa się *prostym*. W pryzmacie prostym każdą krawędź boczną można uważać za wysokość.

Prz. 1. Ile pryzmat posiada ścian, ile krawędzi i wierzchołków?

Prz. 2. Wykreślić pryzmat, jak na fig. 25, obrać na dwóch ścianach bocznych punkty M, N i wyznaczyć punkty przecięcia prostej MN z płaszczyznami podstaw.

Prz. 3. Wykreślić pryzmat, obrać na krawędziach bocznych punkty L, M, N i wyznaczyć proste przecięcia płaszczyzny LMN z podstawami.

Prz. 4. Dowieść twierdzenie następujące: jeżeli wierzchołki dwóch trójkątów (w jednej płaszczyźnie) leżą odpowiednio na trzech prostych równoległych, to ich odpowiednie boki przecinają się na linji prostej. Należy także porównać to twierdzenie z pierwszem twierdzeniem Desargues'a (par. 35 prz. 5) i wyjaśnić sobie dobrze, na czem polega różnica pomiędzy niemi.

Prz. 5 Przeciąć pryzmat płaszczyzną pomiędzy podstawami i następnie wykreślić każdą część oddzielnie. Każda z otrzymanych części zowie się pryzmatem *ściętym*.

Prz. 6. Podzielić pryzmat dwiema płaszczyznami na trzy czworościany i następnie wykreślić każdy z tych czworościanów oddzielnie.

37. Wyobraźmy sobie, że tłem jest płaszczyzna, że jest to np. tablica, zawieszona na ścianie, i niechaj będzie jeszcze płaszczyzna pozioma, a więc prostopadła do tła. Na tej płaszczyźnie poziomej przeprowadzimy w wyobraźni dwie proste, jedną x równoległą do tła, drugą y prostopadłą do tła. Należy wyobrazić to sobie z całą jasnością. Ową płaszczyznę poziomą będziemy nazywali płaszczyzną xy; mamy ją wyobrażoną na fig. 26. Widzimy tam jeszcze punkt A i prostopadłą, poprowadzoną z tego punktu do płaszczyzny *xy*. A′ jest spodkiem tej prostopadłej, czyli jej punktem przecięcia z płaszczyzną *xy*. Nazywamy ten punkt A′ *rzutem prostokątnym* punktu A na płaszczyznę *xy*, a odcinek A′A *rzędną punktu* A. Mamy tam jeszcze inny punkt B, jego rzut prostokątny B′, i rzędną B′B.

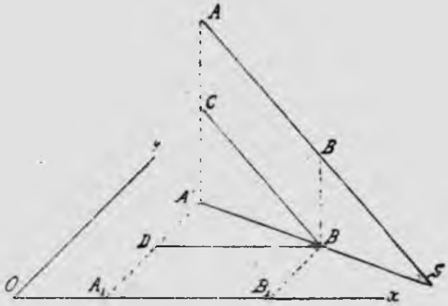

Fig. 26.

Naturalnie na fig. 26 odcinek AB jest wyobrażony w skróceniu. W wielkości prawdziwej, bez skrócenia, wypadają tylko odcinki równoległe do tła, a odcinek AB nie jest równoległy. Pragniemy wyznaczyć prawdziwą długość tego odcinka. W tym celu zwróćmy uwagę na trapez AA′B′B. Jego boki równoległe AA′ i BB′ występują tu bez skrócenia; prócz tego wiemy, że są one prostopadłe do boku A′B′. Gdybyśmy więc znali prawdziwą długość tego ostatniego, to moglibyśmy wykreślić ów trapez.

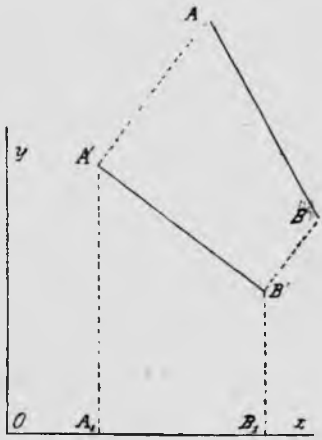

Fig. 27.

Prowadzimy w płaszczyźne *xy* z punktów A′ i B′ prostopadłe $A'A_1$ i $B'B_1$ do prostej *x*, czyli równoległe do prostej *y*. Odcinki te są prostopadłe do tła, a więc skrócenie ich jest znane, a mianowicie równe połowie. Ich długości prawdziwe są dwa razy większe od tych, które występują na fig. 26. Widzimy teraz, że odcinek A′B′ jest bokiem prostokątnego trapezu $A'A_1B_1B'$, który możemy wykreślić, bo bok A_1B_1 mamy tu bez skrócenia. Uczyniono to na fig. 27, gdzie A′B′ występuje już w wielkości prawdziwej. Na tej samej figurze wykreślono również trapez AA'B'B w wielkości prawdziwej i w ten sposób wyznaczono prawdziwą długość odcinka AB.

Do tego samego można dojść w sposób krótszy. W tym celu prowadzimy na fig. 26 przez punkt B' równoległą do prostej x. Przetnie ona prostą $A'A_1$ w punkcie D. Trójkąt A'DB' jest prostokątny, a mianowicie kąt A'DB' jest prosty; przyprostokątną DB' mamy tu bez skrócenia, a skrócenie przyprostokątnej A'D jest równe połowie. Możemy więc ten trójkąt wykreślić w wielkości prawdziwej, i uczyniono to na fig. 28. Następnie prowadzimy (fig. 26) przez punkt B' równoległą B'C do AB.

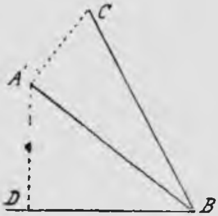

Fig. 28.

Czworokąt ABB'C jest równoległobokiem, a więc odcinek CB' jest równy szukanemu odcinkowi AB. Lecz ten odcinek CB' jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym A'B'C, który możemy wykreślić w wielkości prawdziwej, bo znamy już teraz przyprostokątną A'B', a druga przyprostokątna A'C występuje bez skrócenia. Uczyniono też to na fig. 28, otrzymując znowu prawdziwą długość odcinka CB' lub AB.

Powróćmy jeszcze do fig. 26. Prosta A'B', łącząca rzuty prostokątne punktów A i B, zowie się *rzutem prostokątnym prostej* AB. Ten rzut prostokątny spotyka się z prostą AB w punkcie S, w którym prosta AB przecina płaszczyznę xy. Punkt S nazywa się *śladem* prostej AB na płaszczyźnie xy. Kąt, który prosta tworzy ze swym rzutem prostokątnym, czyli kąt ASA', w prawdziwej wielkości, nazywamy *kątem nachylenia* prostej AB względem płaszczyzny xy. Mówi się również, że prosta AB tworzy z płaszczyzną xy ten kąt nachylenia. Mamy go w wielkości prawdziwej na fig. 28, gdyż jest on oczywiście równy kątowi A'B'C. Płaszczyzna trapezu AA'B'B, czyli płaszczyzna, przechodząca przez prostą i jej rzut prostokątny, zowie się *płaszczyzną rzucającą* prostej AB. Oczywiście ta płaszczyzna rzucająca jest prostopadła do płaszczyzny xy.

Prz. I. Obrać punkty A, B oraz ich rzuty prostokątne, a następnie wyznaczyć na prostej AB w taki sposób punkt C, aby prawdziwa długość odcinka AC była równa 30 milimetrom.

Należy wyznaczyć długość odcinka AB, na figurze pomocniczej odmierzyć 30 mm i wyznaczyć długość rzutu prostokątnego odcinka AC.

Prz. 2. Obrać trzy punkty A, B, C i ich rzuty prostokątne; następnie wyznaczyć prostą przecięcia płaszczyzny ABC z płaszczyzną xy. Ta prosta zowie się *śladem płaszczyzny* ABC i oznacza się zwykle literą s.

Należy zwrócić uwagę na to, że na śladzie s leżą ślady wszystkich trzech prostych AB, BC i CA.

Prz. 3. Obrać punkty A, B, C i ich rzuty prostokątne; następnie zbudować trójkąt ABC w wielkości naturalnej.

Rozwiążemy zadanie łatwo, wyznaczywszy naprzód długości boków.

Prz. 4. Wykreślić prosty pryzmat oraz jego siatkę.

Prz. 5. Wykreślić jakikolwiek czworościan oraz jego siatkę.

Trzeba tu jeszcze obrać wysokość; wówczas można będzie wyznaczyć wszystkie krawędzie.

Prz. 6. Obrać trzy punkty A, B, C oraz ich rzuty prostokątne; następnie obrawszy w płaszczyźnie A B C jeszcze jeden punkt D, wyznaczyć jego rzut prostokątny i rzędną.

Połączywszy D z A, otrzymamy z łatwością rzut prostokątny prostej AD.

Prz. 7. Obrawszy punkty A, B, C oraz ich rzuty prostokątne, wyznaczyć środek ciężkości trójkąta ABC, a także jego rzut prostokątny i rzędną.

Prz. 8. Obrać punkty A, B, C oraz ich rzuty prostokątne i wyznaczyć środek koła opisanego na trójkącie ABC.

W tym razie należy napród zbudować trójkąt ABC w prawdziwej wielkości na rysunku ubocznym, wyznaczyć tam środek koła opisanego, a następnie znaleźć ten punkt na rysunku głównym.

Prz. 9. Mamy dane proste a i b w rzutach ukośnych oraz ich rzuty prostokątne a', b' na płaszczyznę xy. Jak poznać, czy proste a, b w przestrzeni się przecinają, czy nie?

Prz. 10. Obrać punkty A,B,C i ich rzuty prostokątne, a także jakąkolwiek prostą d i jej rzut prostokątny d', następnie wyznaczyć punkt przecięcia prostej d i płaszczyzny ABC.

Trzeba wyznaczyć w płaszczyźnie ABC taką prostą e, której rzut prostokątny e' leży na d'. Oczywiście proste d i e się przecinają.

Prz. 11. Obrać dwie wichrowate proste a, b i ich rzuty prostokątne, a także punkt C i jego rzut prostokątny. Następnie poprowadzić przez C prostą, przecinającą a i b.

Wyznaczamy punkt przecięcia D prostej b z płaszczyzną przechodzącą przez a i C. Prosta CD będzie oczywiście szukaną.

Prz. 12. Obrać ślady s_1, s_2 dwóch płaszczyzn, a prócz tego punkty A_1,A_2 wraz z ich rzutami prostokątnemi; pierwszy z tych punktów należy do pierwszej płaszczyzny, drugi do drugiej. Wyznaczyć prostą przecięcia płaszczyzn.

Trzeba znaleźć dwa punkty tej prostej. Jednym jest punkt przecięcia śladów, drugi trzeba wyznaczyć.

Prz. 13. Obrać prostą *a* i punkt B oraz ich rzuty prostokątne; następnie wyznaczyć prostą, przechodzącą przez B, przecinającą *a* i równoległą do płaszczyzny *xy*.

Prostą równoległą do płaszczyzny *xy* poznamy po tem, że rzędne wszystkich jej punktów są równe, albo że jej rzut ukośny jest równoległy do prostokątnego.

Prz. 14. Obrać proste wichrowate *a* i *b* oraz ich rzuty prostokątne. Następnie wyznaczyć prostą, przecinającą każdą z tych prostych i prostopadłą do płaszczyzny *xy*.

Prz. 15. Mamy dwie proste wichrowate *a*, *b*. Jak można przeprowadzić przez *b* płaszczyznę równoległą do *a*?

Obieramy na *b* jakikolwiek punkt C i prowadzimy przezeń prostą *d* równoległą do *a*. Płaszczyzna, przechodząca przez *b* i *d* jest szukaną.

38. Gdy słońce świeci, to promienie jego padają na powierzchnię kamienia. Część tych promieni zostaje pochłonięta przez kamień, a część zostaje odbita od powierzchni i rozchodzi się na wszystkie strony. Gdy takie odbite promienie przenikną do oka ludzkiego, to człowiek widzi kamień. Gdy więc patrzę na kamień, to od każdego punktu jego powierzchni idzie do mego oka taki odbity promień światła. Wszystkie te promienie razem tworzą wiązkę, lub pęk linji prostych, zbiegających się w jednym punkcie, a mianowicie w mem oku. Wyobraźmy sobie teraz, że pomiędzy kamień i oko wstawiono taflę szklaną. Płaszczyzna tafli przetnie wszystkie promienie pęka. Gdyby każdy promień pozostawił na tafli ślad trwały, to powstałby na niej rysunek, a mianowicie obraz płaski kamienia. Moglibyśmy usunąć kamień, i obraz wywierał by na oko wrażenie takie same lub przynajmniej podobne do tego, jakie poprzednio wywierał oryginał. Złudzenie byłoby kompletne, gdyby nadać obrazowi odpowiednie zabarwienie. W ten właśnie sposób powstają obrazy olejne, akwarele i t. d.

Na fig. 29 widzimy ciekawy rysunek, pochodzący z przed 400 lat. Wyobraża on ówczesnego malarza, który robi portret jakiegoś niemłodego już pana. Pan ten rozsiadł się we wspaniałym fotelu oparł się dobrze o poręcze i usiłuje pozostawać nieruchomym. Malarz ma przed sobą dziwny przyrząd. Jest to stolik, oparty na czterech nogach, zakończonych ostrzami. Te ostrza wgłębiają się w drewnianą podłogę, a więc stół jest dobrze zabezpieczony przed przypadkowem przesunięciem. Na jednym brzegu stołu, pomiędzy malarzem a portretowaną osobą, widzimy mocno osadzoną pionową taflę szklaną w ramach, na drugim brzegu jest urządzony rodzaj przesuwalnego statywu. Na końcu statywu jest umocowana mała płytka z otworem, przez który patrzy prawem okiem malarz, a je-

Fig. 29.

dnocześnie ostrym pędzelkiem, umaczanym w tuszu, kreśli na szkle portret. Można powiedzieć, że utrwala on na szkle ślady promieni światła, idących od oryginału do oka. Później przeniesie otrzymany rysunek na płótno i wykończy farbami.

Rysunek na fig. 30 wyobraża inny sposób. Malarz ma tu namalować krajobraz, który widać z okna. W oknie jest tu ustawiona siatka, zrobiona z wyprężonych nici. Na stole leży płótno, na którem węglem nakreślono taką samą siatkę. Malarz spogląda na krajobraz przez siatkę, i aby oko jego nie zmieniało położenia, trzyma je wciąż tuż przy ostrem zakończeniu sztaby, umocowanej w położeniu pionowem na stole. Jednocześnie kreśli zarysy krajobrazu na płótnie. Jeżeli pewien szczegół, dajmy na to szczyt skały, widzi na przecięciu dwóch nici siatki okiennej, to zaznaczy go na przecięciu dwóch odpowiednich linij na płótnie.

Fig. 30.

Tak wykreślano „perspektywę obrazów" dawniej; dziś sposoby te nie są używane, bo malarze dzisiejsi i bez takich przyrządów umieją kreślić dobre perspektywy, posługując się pewnemi prostemi prawidłami.

Po tych wyjaśnieniach już każdy zapewne rozumie, że obraz jest także rodzajem rzutu. Różni się on tem od znanego nam już teraz dobrze rzutu ukośnego, że promienie rzucające są nie równoległe, lecz schodzą się wszystkie w jednym punkcie, w tym punkcie, w którym malarz trzyma oko, gdy patrzy na oryginał. Punkt ten zowie się *środkiem rzutów*, a sam rzut, czyli obraz, nazywamy *rzutem centralnym*, *rzutem perspektywicznym*, albo krócej *perspektywą*. Jeżeli środek rzutów obrano bardzo daleko od tła i oryginał jest niewielki, to promienie rzucające są prawie równoległe, i rzut centralny prawie nie różni się od ukośnego.

Prz. 1. Jakim rzutem jest fotografja, i czem różni się na od obrazu zwykłego, np. od portretu, który robi malarz na fig. 29?

Prz. 2. Jakim rzutem jest cień od lampy łukowej.

39. Najczęściej płaszczyzna tła jest pionowa; po jednej stronie tła jest środek rzutów, a po drugiej oryginał, t. j. ten przedmiot, którego rzut mamy wykreślić. Na fig. 31 *T* oznacza właśnie płaszcczyznę tła, a punkt O jest środkiem rzutów. Z O prowadzimy prostopadłą do *T* i w przecięciu otrzymujemy punkt O′, który jest rzutem prostokątnym środka O na płaszczyznę tła. Malarze nazywają ten punkt *punktem oka*. Weźmy jakąś prostą a_1, która przecina płaszczyznę tła w punkcie S_1; zowie się on śladem tej prostej. Pragniemy teraz wyznaczyć rzut centralny prostej a_1. Sprawa jest prosta. Trzeba przez prostą a_1 oraz środek O poprowadzić płaszczyznę; w przecięciu jej z tłem otrzymamy szukany rzut. W tym celu poprowadźmy naprzód przez O prostą OQ równoległą do a_1; leży ona oczywiście w owej płaszczyźnie, i jej punkt przecięcia Q z tłem leży na szukanym rzucie. Prócz tego wiemy, że ten rzut przejdzie przez ślad S_1. A zatem jest nim prosta S_1Q. Weźmy jeszcze inną prostą a_2, równoległą do a_1 i posiadającą ślad S_2 Znajdziemy jak poprzednio, że rzutem centralnym tej prostej a_2 jest S_2Q. Widzimy, że rzuty centralne czyli obrazy dwóch prostych równoległych a_1 i a_2 nie są równoległe, lecz przecinają się w punkcie Q. Punkt ten nazywa się zwykle *punktem zbiegu* owych prostych. Trzeba to dobrze zrozumieć, bo rzecz jest ważna. To jest główna różnica pomiędzy rzutami centralnemi a rzutami równoległemi, które poznaliśmy poprzednio, bo tam rzuty prostych równoległych są zawsze równoległe.

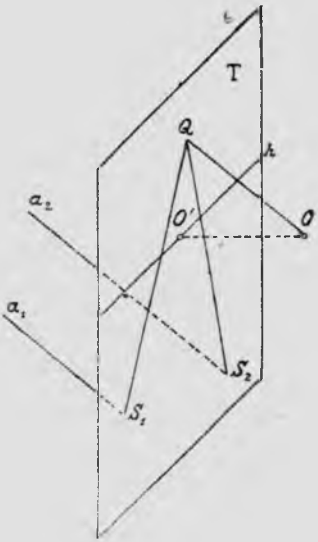

Fig. 31.

Ale i rzuty centralne prostych równoległych są w pewnym przypadku równoległe; tak jest w tym razie, gdy owe proste są równoległe do płaszczyzny tła. Trzeba sobie tylko dobrze wyobrazić tło, środek rzutów oraz dwie proste równoległe i równoległe do tła; a wówczas rzecz ta stanie się oczywistą. Równie łatwo każdy zrozumie, że rzuty centralne wszystkich prostych prostopadłych do tła przechodzą przez punkt oka O'. Wyobraźmy sobie jeszcze płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez środek rzutów O. Nazywa się ona *płaszczyzną horyzontu*. Płaszczyzna horyzontu przecina tło według prostej poziomej *h*, zwanej *horyzontem*. Horyzont przechodzi oczywiście przez punkt oka O' i odgrywa ważną rolę, bo na nim leżą punkty zbiegu wszystkich prostych poziomych.

Na fig. 32 mamy rzut centralny sześcianu. Widzimy tu przedewszystkiem horyzont i na nim punkt oka O'. Sześcian ustawiono w taki sposób, że ściana ABCD oraz przeciwległa są równoległe do tła, a krawędzie AE, BF i t. d. są prostopadłe do tła. Zwróćmy uwagę na krawędzie AB, DC, HG, i EF, są one równoległe w oryginale, a przytem równoległe do tła, a zatem ich rzuty są także równoległe. Toż samo dotyczy krawędzi AD, BC, FG i EH. Krawędzie AE, BF, CG, DH są prostopadłe, do tła i rzuty ich zbiegają się w punkcie oka O'. Zwróćmy

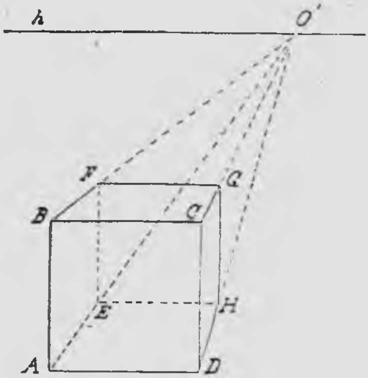

Fig. 32.

jeszcze uwagę na proste DE i CF, czyli na przekątnie dwóch ścian przeciwległych. W oryginale są one poziome i równoległe. Gdybyśmy je przeprowadzili w rzucie, to znaleźlibyśmy, że zbiegają się na horyzoncie. Toż samo dotyczy przekątni AH i BG. Przekątnie AF i DG są także w oryginale równoległe, ale nie poziome; dla tego też w rzucie ich punkt zbiegu nie leży na horyzoncie, o czem można przekonać się z łatwością. Toż samo dotyczy prostych BE i CH.

Prz. 1. Gdzie leżą rzuty punktów, należących do tła?

Prz. 2. Gdzie leżą rzuty punktów, należących do płaszczyzny horyzontu?

Prz. 3. Dwie proste leżą w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek rzutów. Jak są położone ich rzuty?

Prz. 4. Obrać horyzont i wykreślić w perspektywie trójkąt ABC, położony w płaszczyźnie poziomej; następnie wykreślić inny trójkąt, którego boki przechodzą przez wierzchołki trójkąta ABC i są odpowiednio równoległe do jego przeciwległych boków.

Każdy wykreślony trójkąt może być uważany za rzut centralny trójkąta ABC. Należy prócz tego pamiętać, że punkty zbiegu prostych poziomych leżą na horyzoncie.

Prz. 5. Obrać horyzont, jak również punkt oka i wykreślić perspektywę kwadratu ABCD, który leży w płaszczyźnie poziomej i którego boki AD i BC są prostopadłe do tła. Następnie zbudować inny kwadrat, którego boki przechodzą przez wierzchołki kwadratu ABCD, i są prostopadłe do odpowiednich przekątni jego.

Boki AD i BC przejdą po przedłożeniu przez punkt oka, a boki AB i DC powinny być równoległe do horyzontu. Należy sprawdzić, że punkty zbiegu przekątni leżą w równych odległościach od punktu oka. Odległość ta jest równa także odległości środka rzutów od tła.

Prz. 6. Wykreślić perspektywę poziomej szachownicy, której dwa boki są prostopadłe do tła.

Należy tu skorzystać z tej okoliczności, że odpowiednie przekątnie małych kwadratów są równoległe. Wykreśliwszy więc pierwszy kwadrat, możemy następnie wykreślić dowolną liczbę następnych.

40. Na fig. 33 widzimy perspektywę krajobrazu. Warto się obrazkowi temu dobrze przypatrzyć. Jest to rów-

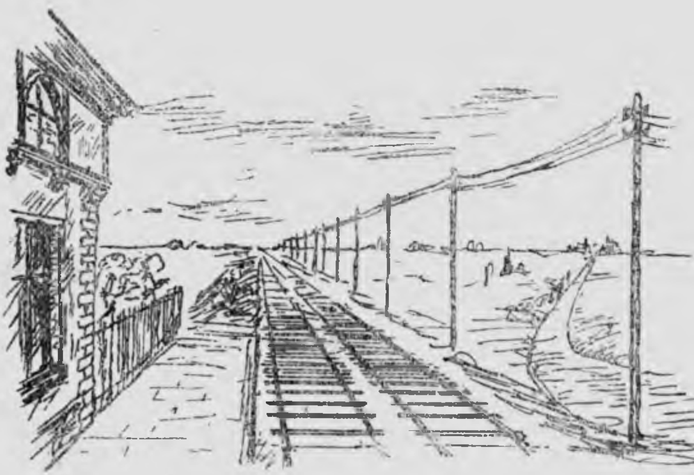

Fig. 33.

nina, i linję horyzontu widać wyraźnie na granicy pomiędzy ziemią i sklepieniem niebieskiem. Mamy tu wiele linij równoległych. Naprzód szyny kolejowe oraz równoległe do nich druty telegraficzne, gzymsy domu i żerdzie płotu, wszystko to posiada punkt zbiegu na horyzoncie. Dalej widzimy pokłady kolejowe, są one równoległe do horyzontu, a więc oryginały były równoległe do tła, a z tego wynika, że szyny (oryginały) były prostopadłe do tła, a zatem punkt zbiegu szyn jest zarazem punktem oka. Słupy telegraficzne, jako pionowe, a więc równoległe do tła, są i w rzucie równoległe. Widzimy je w coraz silniejszem skróceniu ze wzrostem ogległości.

Na fig. 33 horyzont jest zaznaczony wyraźnie. Tak samo bywa np. na krajobrazach morskich, na których linja, oddzielająca niebo od wody jest zawsze horyzontem. W wielu innych przypadkach można horyzont łatwo wyznaczyć. Przypuśćmy np. że obraz przedstawia wnętrze kościoła. Mamy tam różne linje poziome równoległe, jak np. linje posadzki kamiennej, gzymsy, ramy okien, linje ławek, linje przecięcia ścian z posadzką i sufitem i t. d. Punkty zbiegu tych wszystkich prostych leżą na horyzoncie, trzeba więc przedłużyć dwie z nich odpowiednie aż do punktu przecięcia i przez ten punkt przeprowadzić prostą poziomą. To właśnie będzie horyzont. Jeżeli na obrazie niema żadnych prostych równoległych poziomych, to sprawa jest trudniejsza, ale i wówczas można przynajmniej w przybliżeniu zdać sobie sprawę, gdzie znajduje się horyzont, trzeba tylko pamiętać, że przedmiot, położony nad płaszczyzną horyzontu, jest zwrócony do nas powierzchnią dolną, a przedmiot, położony pod tą płaszczyzną, zwraca się do nas po wierzchnią górną. Przypuśćmy np., że na obrazie jest człowiek, zwrócony twarzą do widza i trzymający głowę prosto. Jeżeli głowa ta znajduje się nad horyzontem, to widzimy dolną stronę podbródka i nozdrza, jeżeli pod horyzontem, to widać gorną powierzchnię głowy i górną powierzchnię nosa.

Uważaliśmy dotychczas, że tłem jest płaszczyzna pionowa, niekiedy jednak, chociaż rzadko, bywa inaczej. Niekiedy np. malarz ma przyozdobić sufit sali obrazem; w takim razie tłem jest płaszczyzna sufitu, czyli płaszczyzna pozioma, środek rzutów leży niżej od niej, a oryginał wyżej. Innemi słowy malarz wyobraża sobie, że gdzieś w górze, nad sufitem, dzieje się jakaś scena, i on tworzy rzut jej na płaszczyznę sufitu. Środek rzutów obiera się nad podłogą, na wysokości oka widza i nie wprost pod obrazem, lecz z boku. Wrażenie, jakie wywiera takie malowidło sufitowe, ogromnie zależy od stanowiska widza. Powinien on umieścić się w pobliżu środka rzutów, bo inaczej wrażenie to będzie zupełnie fałszywe. Jeżeli np. malowidło wyobraża postać ludzką, to łatwo zrozumieć, że trzeba stanąć po stronie głowy, a nie nóg.

Jedno z najpiękniejszych malowideł sufitowych wykonał mistrz włoski Paweł Veronese (właściwie Caliari), który żył i tworzył w XVI wieku. Znajduje się ono na suficie olbrzymiej sali (Sala del Maggior Consiglio) w pałacu dożów w Wenecji i wyobraża alegorycznie chwałę rzeczypospolitej weneckiej. Podany tu szkic (fig. 34) daje tylko odległe wyobrażenie o piękności tego arcydzieła, ale chodzi tu jedynie o zrozumienie tego rodzaju perspektywy. Treść obrazu jest następująca. W górnej części wśród kolumn i posągów zasiadła na tronie wspaniała dama, wyobrażająca Wenecję. Skrzydlaty geniusz kładzie jej wieniec na skronie, a kilka postaci alegorycznych tworzy jej świtę. Niżej na galerji zajęły miejsca damy weneckie oraz senatorowie, a na dole widać lud i rycerstwo. Gdy trzymamy ten szkic pionowo przed oczami, to robi on dziwne wrażenie; wydaje się, że wszystko to leży na ziemi. Tak wygląda zwłaszcza balustrada oraz kolumny. Należy ustawić książkę poziomo nad oczami tak, aby skrzydlate geniusze były po stronie oczu, i patrzeć z dołu. Wówczas dopiero ujrzymy, że wszystko pnie się pionowo w górę, jak w rzeczywistości. Gdy przypatrzymy się uważnie balustradzie i kolumnom, to przekonamy się, że rzuty prostych pionowych nie są tu równoległe. Zbiegają się one poza granicami obrazu po stronie geniuszów. Tak też być powinno, bo proste pionowe są tu prostopadłe do tła. Punkt oka leży właśnie w zbiegu prostych pionowych, a więc po za obrazem.

Tłem może być nie tylko płaszczyzna, ale także jakaś powierzchnia krzywa. Tak np. w panoramie tłem jest powierzchnia walca czyli cylindra. Wyobraźmy sobie krajobraz, i przypuśćmy, że wśród niego na wzgórzu rozpięto na odpowiednich stalugach płótno, nadając mu postać cylindra o osi pionowej. Płótno podzieliło cały krajobraz na dwie części, wewnętrzną stosunkowo bardzo małą,

Fig. 34.

i zewnętrzną. Na osi cylindra obrano środek rzutów i wykonano rzut centralny części zewnętrznej na stronę wewnętrzną powierzchni cylindrycznej. Po skończeniu płótno przeniesiono do miasta i rozpięto w odpowiednim budynku, a wewnątrz urządzono tak zw. *fałszywy teren*, naśladujący kompletnie tę część wzgórza, która leżała wewnątrz cylindra. Gdy teraz widz umieści się w pobliżu środka rzutów, to przy stosownem oświetleniu będzie miał zupełne złudzenie. Będzie mu się wydawało, że stoi na wzgórzu i widzi naokoło rozciągający się krajobraz. W dobrych panoramach nie można wcale dostrzedz granicy pomiędzy fałszywym terenem i płótnem, pomiędzy rzeczywistością i malowidłem.

W praktyce malarz, tworzący panoramę, postępuje inaczej. Z natury zdejmuje on tylko szkice i według nich odtwarza krajobraz na płótnie, rozpiętem w sali, przeznaczonej na panoramę.