

5) Dany promień, oznaczyć długość okręgu

$$XQ = r \quad 2 \cdot XS = 2 \cdot \pi r.$$

6) Dany okrąg, oznaczyć długość promienia.

$$XS = \frac{2 \pi r}{2} \quad XQ = r.$$

7) Oznaczyć w jednostkach miary powierzchnię danego koła.

Odcinam  $\overline{XI} = 1 \text{ dm}$ , to  $X7$  zawiera tyle  $\text{dm}$ , ile  $\text{dm}^2$  mieści się w kole, jakoż:

$$\overline{XI} : s = s : \overline{X7} \text{ czyli } 1 \text{ dm} : s = s : \overline{X7},$$

$$X7 = s^2 = \pi r^2 \text{ dm}^2.$$

**Wyprostowanie łuków okręgu koła.** Zadanie to przy zastosowaniu kątowniki, sposobem konstrukcyjnym, rozwiązaliśmy na rys. 3, 4, 5. Cała rzecz polega na nakreśleniu kąta  $\alpha$  i zatoczeniu jednego łuku koła. Wzory, poniżej podane wyjaśniają, jak sobie radzić należy przy wszelkich długościach łuku.

Ponieważ wyprostowane długości łuków koła są przydatne przy rozwiązywaniu innych, zawilszych zadań, to należy nam usprawiedliwić podaną konstrukcję przez wywody matematyczne.

Powołując się na rys. 3, oznaczmy:

$$\angle CSA = \lambda, \quad SAM = \varphi, \quad SMA = \psi,$$

$$\text{to: } \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad (I).$$

W trójkącie  $SAM$  na mocy związku

$$\text{tg } \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{SM - SA}{SM + SA} \text{tg } \frac{\varphi + \psi}{2}$$

i zależności

$$OM = Om = 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0,933605 \cdot r,$$

otrzymamy

$$\text{tg } \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{0,933605}{2,933605} \text{tg } \frac{\varphi + \psi}{2} \quad \dots \quad (II),$$

gdy przyjmujemy, że  $AS = r = 1$ .

Z równań I i II obliczyć możemy kąt  $\psi$ , a następnie z  $\triangle MCA'$

$$CA' = 2,933605 \text{tg } \psi \quad \dots \quad (III).$$

Naprzykład. Niech  $\angle \lambda = 45^\circ$ , to  $\frac{\varphi + \psi}{2} = 22^\circ 30'$ .

Z równania II obliczymy  $\frac{\varphi - \psi}{2} = 7^\circ 30' 34,2''$

a z powyższego  $\psi = 14^\circ 59' 25,8''$ ,

z równania zaś III

$$CA' = 0,7855356.$$

Ponieważ w rzeczywistości:

$$\text{długość łuku } 45^\circ = d = 0,7853982,$$

to wielkość błędu wyniesie:

$$b = CA' - d = + 0,0001374 = + \frac{1}{7278} \text{ promienia.}$$

Na powyższej zasadzie obliczono poniższą tablicę:

Dla kąta	Błąd $b$ w częściach promienia	Dla kąta	Błąd $b$ w częściach promienia
$5^\circ$	$+\frac{1}{333\ 333}$	$30^\circ$	$+\frac{1}{3050}$
$10^\circ$	$-\frac{1}{1\ 666\ 666}$	$35^\circ$	$+\frac{1}{2544}$
$15^\circ$	$+\frac{1}{16\ 447}$	$40^\circ$	$+\frac{1}{2770}$
$20^\circ$	$+\frac{1}{7616}$	$45^\circ$	$+\frac{1}{7278}$
$25^\circ$	$+\frac{1}{4382}$	$50^\circ$	$-\frac{1}{2435}$

Z tablicy widzimy, że wogóle im mniejszy kąt, tem mniejszy błąd, że między  $45^\circ$  i  $50^\circ$  błąd jest w części dodatnim, w części odjemnym, a więc może być nawet równy zeru (między  $46^\circ$  i  $47^\circ$ ); możemy przeto, nie popełniając wielkiego błędu, stosować podaną konstrukcję dla wszelkich wartości kąta nieprzewyższających  $50^\circ$ .

Gdyby kąt był większym, należałoby stosować tę samą metodę do dwóch kątów, stanowiących jego sumę, lub do kąta dopełniającego.

W dziełach, poświęconych „rachunkowi graficznemu”, zadanie, dotyczące się „wyprostowania łuków koła”, odgrywa bardzo ważną rolę. Praktycznem rozwiązaniem tego zadania zajmowali się bardzo wybitni inżynierowie, jak CULMANN, RANKIN, CREMONA i inni <sup>1)</sup>.

(C. d. n.)

J. St....

<sup>1)</sup> Por. Dr. L. Cremona: Zasady rachunku graficznego, opracował Józef Słowikowski. Warszawa 1902, str. 89 i nast.

## Planimetri polskie i ich wynalazcy.

(Ciąg dalszy; p. № 22 r. b., str. 263).

### Integrat Żmurki.

Znany z działalności naukowej i nauczycielskiej, profesor matematyki Uniwersytetu Lwowskiego WAWRZYNIEC ŻMURKO <sup>1)</sup>, pracował nad budową różnych przyrządów matematycznych i już w r. 1873 wysłał na wystawę w Wiedniu: konograf, elipsograf, elipso-parabolograf i cykloidograf, a w r. 1878 na wystawę w Paryżu, oprócz wymienionych, także przyrząd do kreślenia krzywej całkowitej z danej krzywej różniczkowej, wykonany u G. CORADIEGO w Zurychu. Na ten przyrząd uzyskał ŻMURKO w r. 1881 patent wynalazku na Austro-Węgry, opisy zaś ogłosił po polsku <sup>2)</sup> i niemiecku <sup>3)</sup> inż. KAROL SKIBIŃSKI, podówczas docent Politechniki Lwowskiej. „Zasady swych przyrządów konograficznych (pisze prof. Dziwiński), cykloidografu i integratora, podawał ŻMUR-

<sup>1)</sup> Ur. 1824 r. w Jaworowie, ziemi Przemyskiej, zm. 1889 r. we Lwowie. Wyczerpujący „Rys działalności naukowej i nauczycielskiej Wawrzyńca Żmurki” podał prof. Placyd Dziwiński, w tomie II *Prac Matematyczno-Fizycznych* (Warszawa 1890).

<sup>2)</sup> Wykład P. K. Skibińskiego, docenta c. k. Szkoły Politechnicznej, o integratorze d-ra Żmurki. *Kosmos*, 1884, zeszyt V, str. 185—189, z 1 tabl. rys.

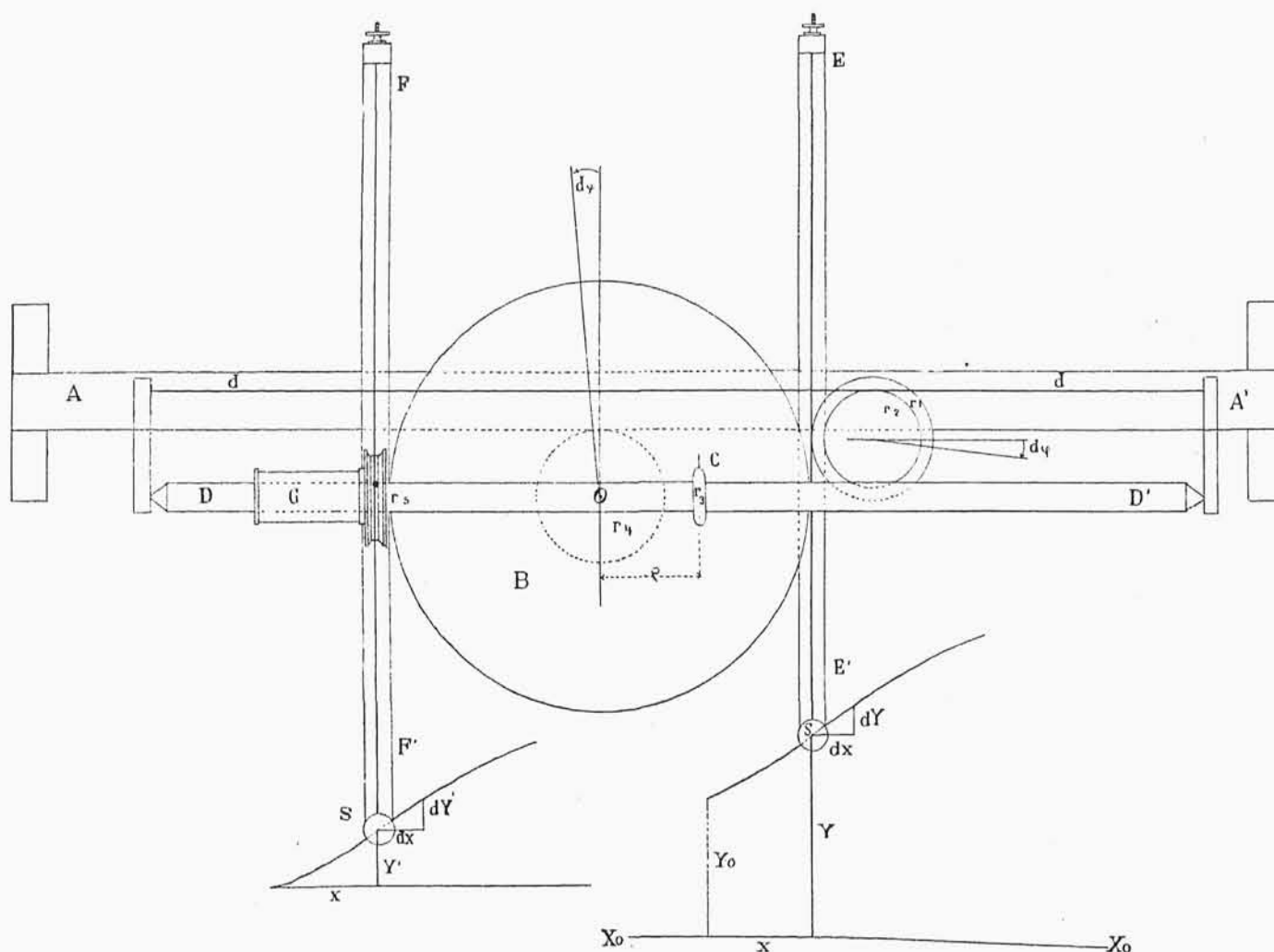
<sup>3)</sup> Der Integrator des Prof. Dr. Żmurko in seiner Wirkungsweise und praktischen Verwendung dargestellt von Karl Skibiński, Ing. u. Privatdocent an der k. k. techn. Hochschule in Lemberg. Mit 2 Tafeln und 18 Holzschnitten. Separatabdruck aus dem LIII Bande der *Denkschriften der math.-naturwissensch. Cl. der k. Akademie d. Wissenschaften*. Wien 1886. 4<sup>o</sup> str. 28.

ko już w r. 1861, w swych wykładach w Akademii technicznej we Lwowie. Dość szczegółowe sformułowanie tych pomysłów znaleźć już można w drugim tomie jego *Wykładu matematyki* <sup>4)</sup>. Wykonanie tych pomysłów i rozpowszechnienie przyrządów obmyślanych zajmowało go do końca życia. Niestety, nie doczekał się rozpowszechnienia, a przyrządy jego pozostały tylko jako modele, mianowicie przyrządy konograficzne w muzeum mechaniki przy Szkole Politechnicznej we Lwowie, cykloidograf zaś i integrator w muzeum Uniwersytetu Lwowskiego.

Integrat ŻMURKI oparty jest na tej samej zasadzie kinematycznej całkowania, co i planimetri GONELLI i OPPENHOFERA, a zasługuje na uwagę użytym przez wynalazcę systemem przemiany ruchu. Ciężki liniał  $AA'$  (rys. 22) tworzy podstawę przyrządu. Okrągła tarcza pozioma  $B$  osadzona jest na osi pionowej  $O$ . Pod tarczą, na tej samej osi, umieszczone jest koło poziome  $r_1$ , przyciśnięte do liniału  $AA'$ . Pręt  $EE'$ , ruchomy między dwiema parami rolek, ma na końcu ostrze  $s$ , służące do oprowadzania danego obwodu. Wzdłuż pręta przechodzi struna, przewinięta przez krążek  $r_1$ , której końce przyłączone są do końców pręta, tak, że przy obrocie krążka pręt  $EE'$  przesuwa się równolegle do osi  $y$ .

Drugi pręt podobny  $FF'$ , umieszczony po drugiej stronie tarczy  $B$ , ma strunę przewiniętą przez krążek pionowy  $r_2$ ,

<sup>4)</sup> Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach. Lwów, 1864, dwa tomy.



Rys. 22.

który swym obrotem nadaje prętowi takiż sam ruch, jakim jest ruch pręta  $EE'$ . Na końcu pręta  $FF'$  umocowany jest ołówek  $S$ , kreślący krzywą całkową.

Na wspólnej osi z krążkiem  $r_1$ , umieszczony jest krążek  $r_2$ , połączony z prętem  $DD'$  za pośrednictwem struny  $dd$ , przewiniętej przez krążek  $r_2$ , a końcami przymocowanej do podpór, podtrzymujących pręt  $DD'$ . Podczas obrotu krążka  $r_2$ , pręt  $DD'$  przesuwa się w kierunku równoległym do osi  $x$ . Oś pręta  $DD'$  leży na płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś pionową  $O$ . Pręt umieszczony jest między rolkami w pochewce  $G$ , połączonej stałe z krążkiem  $r_5$ . Pochewka  $G$ , nie zmieniając swego położenia, przepuszcza pręt  $DD'$ , przy jego ruchu w kierunku własnej długości. Ale przy choćby najmniejszym obrocie pręta około swej osi, obraca się pochewka  $G$ , z nią razem krążek  $r_5$  i co za tem idzie, następuje przesunięcie pręta  $FF'$  i ołówka  $S$ .

Kółko  $C$ , stałe połączone z prętem  $DD'$ , przyciśnięte jest do tarczy  $B$ .

Wszystkie opisane części umieszczone są na jednym wózku, ruchomym wzdłuż liniału  $AA'$ , wspierającym się na kółku  $r_4$  i na dwóch rolkach niewidocznych na rysunku. Przesuwanie się wózka wprawia w ruch kółko  $r_4$ , przyciskane do liniału  $AA'$  przeciwwagą przedniej części przyrządu.

Gdy ostrze  $s$  przebiega drogę  $dY$ , struna przewinięta przez krążek  $r_1$  obróci ten krążek o kąt  $d\varphi$ , któremu odpowiada na obwodzie krążka łuk:

$$r_1 d\varphi = dY,$$

$$\text{skąd: } d\varphi = \frac{dY}{r_1}.$$

Takiż sam będzie kąt obrotu krążka  $r_2$ , który to obrót przesunie pręt  $DD'$  równolegle do osi  $x$ , przez co odległość  $\rho$  między kółkiem  $C$  a punktem  $O$  powiększy się o:

$$d\rho = r_2 d\varphi = \frac{r_2}{r_1} dY \quad \dots \quad (1).$$

Podczas całego tego ruchu, krążek  $r_5$  i ołówek  $S$  pozostają w spokoju.

Gdy znów ostrze  $s$  przebiega drogę  $dx$ , wtedy cały wó-

zek przesuwa się razem z ostrzem i kółko  $r_4$  obraca się o kąt  $d\psi$ , któremu na obwodzie kółka odpowiada łuk:

$$r_4 d\psi = dx;$$

$$\text{skąd: } d\psi = \frac{dx}{r_4}.$$

Takiż sam będzie kąt obrotu tarczy  $B$ , która swym ruchem obraca kółko  $C$ . Punkt na obwodzie kółka przebiegnie drogę:

$$\rho d\psi = \rho \frac{dx}{r_4};$$

a jeżeli kąt obrotu kółka oznaczymy przez  $d\varepsilon$ , to:

$$r_3 d\varepsilon = \rho \frac{dx}{r_4},$$

$$\text{skąd: } d\varepsilon = \frac{\rho dx}{r_3 r_4}.$$

Kąt obrotu pręta  $DD'$  i krążka  $r_5$  będzie także  $d\varepsilon$ . Obrót krążka  $r_5$  przesunie pręt  $FF'$  a z nim i ołówek  $S$  na długość:

$$r_5 d\varepsilon = \frac{r_5}{r_3 r_4} \rho dx = dY' \quad \dots \quad (2).$$

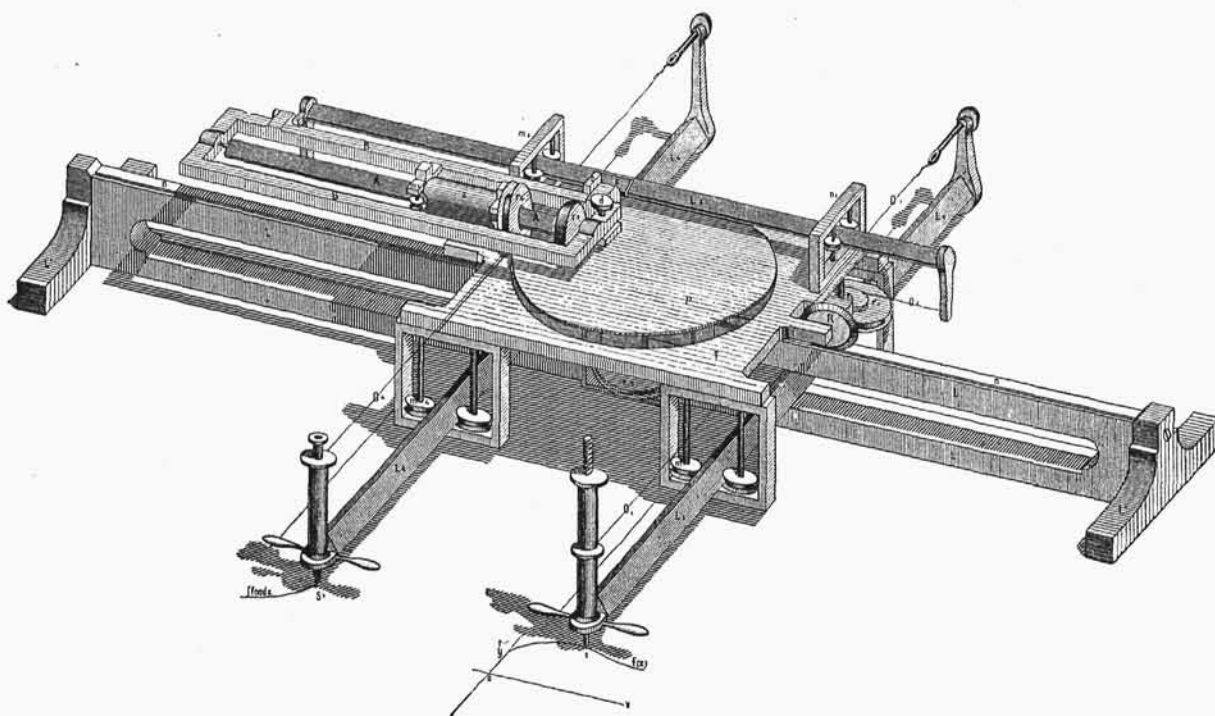
W kierunku osi  $x$  ołówek  $S$  przebiega podczas tego ruchu drogę  $dx$ . Gdy więc ostrze  $s$  przebiega drogę  $(dx, dY)$ , ołówek  $S$  kreśli element krzywej  $(dx, dY')$ .

Wróćmy teraz do równania (1). Całkując je otrzymamy:

$$\rho = \frac{r_2}{r_1} (Y + c).$$

Ponieważ  $\rho$  zależy wyłącznie od ruchu ostrza  $s$  w kierunku osi rzędnych, więc można przyjąć takie położenie osi odciętych i ostrza, przy którym  $\rho = 0$ . Kółko  $C$  znajduje się wtedy w środku tarczy  $B$ . W tem położeniu ilość stała  $c$  zostaje wyrugowana, bo dla  $\rho = 0$ ,  $Y = 0$ . Kładąc więc wartość  $\rho = \frac{r_2}{r_1} Y$  w równanie (2), otrzymamy:

$$dY' = \frac{r_2 r_5}{r_1 r_3 r_4} Y dx;$$

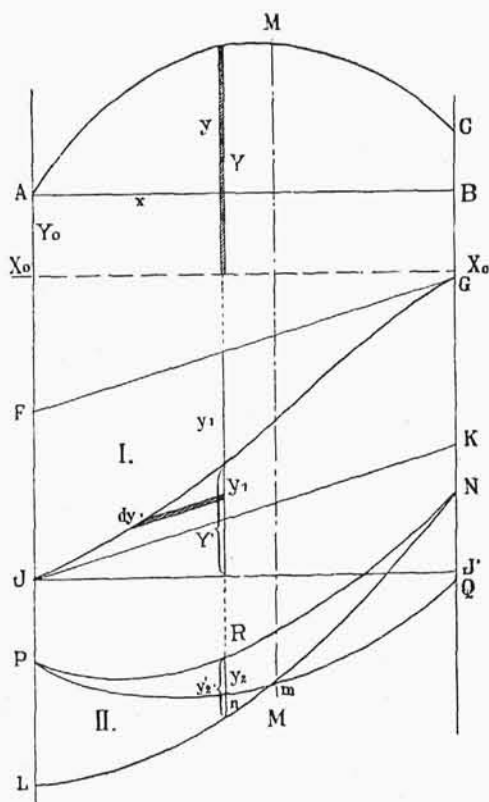


Rys. 24 (1/3 wielkości naturalnej).

a po zcałkowaniu:

$$Y' = \frac{r_2 r_3}{r_1 r_3 r_4} \int Y dx = \frac{1}{k} \int Y dx.$$

Jest to równanie krzywej, którą wykreśla ołówek *S*. Krzywa ta jest, jak widzimy, krzywą całkową względem krzywej różniczkowej  $Y = f(x)$ . Ilość stała przy całkowaniu



Rys. 23.

może być wyrugowana przez przyjęcie pewnych granic, a stała  $k = \frac{r_1 r_3 r_4}{r_2 r_3}$  zależy wyłącznie od wymiarów krążków i kółek, jest więc stałą przyrządu.

Na rys. 23  $Y dx$  oznacza element powierzchni, zawartej między daną krzywą i osią  $AB$ ,  $\int Y dx$  oznacza zatem, gdy przyjmujemy granice całkowania od  $x = 0$  do  $x = x$ , sumę wszystkich elementów powierzchni mieszczących się na długości  $x$ , czyli całą powierzchnię zawartą między pun-

ktem  $A$  a rzędną  $Y$ . Rzędna  $Y'$  krzywej całkowej  $JG$ , odpowiadająca tej samej odciętej  $x$ , pomnożona przez stałą przyrządu  $k$ , równa się wielkości tej powierzchni.

Oś odciętych przyjętą być może w dowolnej wysokości, a wtedy, przy obliczaniu powierzchni, trzeba odejmować lub dodawać powierzchnię prostokąta  $x Y_0$ . Da się to uskutecznić jednym wykreśleniem, obwodząc ostrzem od punktu  $B$  drogę  $BA$ ; wtedy ołówek integratora nakreśli prostą  $KJ$ , nachyloną do poziomu, jako całkową osi  $x$ . Prowadząc dalej ostrze po krzywej  $AMC$ , otrzymamy krzywą całkową  $JG$ . Zaczynając obwodzenie od  $A$  i prowadząc ostrze po drodze  $ABCMAB$ , otrzymalibyśmy krzywą całkową  $JG$ , razem z dwiema do siebie równoległymi jej podstawami  $FG$  i  $JK$ . Rzędne, zawarte między  $JK$  a  $JG$  odpowiadają powierzchniom prostokątnym, rzędne zawarte między  $JK$  a  $JG$  powierzchniom między  $AMC$  a  $AB$ , licząc od  $A$  do uważanej rzędnej, wreszcie rzędne zawarte między  $JG$  a  $FG$ , takimiż powierzchniom, licząc od  $BC$  do uważanej rzędnej.

Prowadząc ostrze po otrzymanej krzywej całkowej i jej podstawach w porządku:  $FG$ ,  $GJ$ ,  $JK$ , otrzymalibyśmy parabolę  $LmN$ , drugą całkową  $NRP$  i parabolę  $PmQ$ . Rzędne, zawarte między drugą całkową i jej parabolicznymi podstawami, będą proporcjonalne do momentów statycznych części powierzchni, leżących po lewej lub prawej stronie uważanej rzędnej, względem tejże rzędnej, jako osi momentów. I tak  $y_2$  jest proporcjonalne do momentu statycznego względem  $y$ , powierzchni zawartej między  $y$  i punktem  $A$  a  $y_2'$  do takiegoż momentu powierzchni zawartej między  $y$  a  $BC$ . Dla otrzymania momentów statycznych należy tylko te rzędne pomnożyć przez  $k^2$ . Rzędne  $\eta = y_2' - y_2$ , zawarte między podstawami parabolicznymi, pomnożone przez  $k^2$  wyznaczają sumę algebraiczną momentów statycznych obu powierzchni, czyli moment statyczny całej powierzchni  $AMCB$  względem  $y$ . Rzędna  $y$  na przecięciu podstaw parabolicznych w  $m$  jest równą zero, zatem pionowa  $Mm$  przechodzi przez środek ciężkości powierzchni  $AMCB$ . Prowadząc ostrze po drodze  $LmNRPmQ$ , otrzymalibyśmy trzecią całkową i połowy momentów bezwładności.

Stosowany jako planimetr, integrator służyć może do dzielenia powierzchni w dowolnym stosunku. Różne zastosowania tego przyrządu opisał szczegółowo inż. SKIBIŃSKI we wzmiankowanej rozprawie niemieckiej, z której wyjęty jest rys. 24, przedstawiający model integratora Żmurki, wykonany przez CORADI'EGO w Żurychu.

(D. n.)

Feliks Kucharzewski.