KOMISJA WYDAWNICZA
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

LINJE WPŁYWOWE

WYKŁADY
prof. STANISŁAWA KUNICKIEGO
na Wydziale Inżynierji Lądowej
Politechniki Warszawskiej.

WYDANO WESPÓŁ Z KOŁEM INŻYNIERJI LĄDOWEJ
SŁ. POL. WARSZ.

BSP

№ 208.

WARSZAWA, 1928.

W zakresie statyki budowli oddawna dawał się odczuć brak odpowiedniego podręcznika, traktującego obszerniej o oznaczaniu linij wpływowych. Wydawnictwo niniejsze w znacznym stopniu zapełnia istniejącą lukę, to też poczuwamy się do miłego obowiązku złożenia

WP. prof. dr. inż. Stanisławowi Kunickiemu serdecznego podziękowania za przychylne potraktowanie sprawy wydania niniejszego skryptu i bezinteresowny trud przy opracowaniu doń rękopisu.

Koło Inżynierji Lądowej St. Pol. Warsz.

Kom. Wyd. Tow. Br. Pom. St. Pol Warsz.

Drukarnia i Litografja „SATURN", Warszawa, Marszałkowska 91. Telefon 20 44.

ROZDZIAŁ I.

§ 1. OGÓLNE WŁASNOŚCI LINJI WPŁYWOWYCH.

W pierwszej części Statyki Budowlanej zapoznaliśmy się z różnemi funkcjami obciążeń (P), jak naprzykład z reakcjami A' i B' lub V_a i H_a podpór belki lub łuku z siłami tnącemi czyli poprzecznemi V_k w danym przekroju belki lub łuku, z momentami M_k zginającemi w danym przekroju belki lub w danym punkcie danego przekroju łuku, z reakcjami w prętach kratownic (S). Oprócz tego funkcjami obciążeń są ugięcia w danym punkcie belki lub łuku, lub przesunięcia węzłów kratownic. Wszystkie te funkcje obciążeń są funkcjami linjowemi względem obciążeń, t.j. obciążenia wchodzą w te funkcje w pierwszej potędze. Na mocy zasady niezależności działania sił wartość danej funkcji obciążeń od działania kilku obciążeń równa się sumie wartości tej funkcji od każdego poszczególnego obciążenia.

Funkcje obciążeń dalej będziemy oznaczali literą (F).

Weźmy obciążenie równe jedności $(P=1)$ i przesuwajmy to obciążenie wzdłuż rozpatrywanego dźwigara lub belki, zachowując stałe równoległość linji działania obciążenia. Dla każdego poszczególnego położenia obciążenia $(P=1)$ obliczmy wartość danej funkcji (F) obciążeń /którą jako zależną od jednostkowego obciążenia oznaczymy literą F'/.

/Zwykle obciążenia przyjmuje się jako pionowe, mogące się przesuwać po linji poziomej; lecz w poszczególnych wypadkach określenia linji wpływowych mogą być wymagane i obciążenia poziome, przesuwające się wzdłuż linji pionowych, jak np. w wypadku działania wiatru lub wogóle dla obciążeń równoległych między sobą, przesuwających się wzdłuż linji prostopadłej do linji obciążeń, i t.p./.-

Obliczone wartości F', odpowiadające każdemu poszczególnemu położeniu jednostkowemu obciążenia, będziem odkładać w postaci rzędnych od poziomej osi odciętych, równoległej do linji przesunięcia obciążeń. Rzędne te (η) będą odpowiadać punktom rzutowym obciążenia na oś odciętych, czyli będą leżeć pod tym położeniem obciążenia, dla którego obliczona została wartość (F) odłożona w postaci rzędnej.

Linja, która powstanie od połączenia końców tych rzędnych, czyli linja, będąca geometrycznem miejscem końców tych rzędnych, nazywa się l i n j ą w p ł y w o w ą rozpatrywanej funkcji (F) obciążeń, ponieważ ta linja p r z e d s t a w i a w y k r e ś l n i e w p ł y w położenia obciążenia /równego jedności/ na wartość (F) rozpatrywanej funkcji.

Jeśli na belkę lub dźwigar działa w danym punkcie obciążenie równe P jednostek ciężaru, to wartość funkcji (F) będzie:

$$F = P\eta$$

gdzie (η) jest rzędna linji wpływowej pod miejscem położenia siły P.

Jeśli działa na dźwigar cały układ obciążeń, np. $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$, to:

$$F = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + \ldots\ldots + P_n\eta_n$$

gdzie rzędne η odpowiadają położeniom obciążeń P na dźwigarze.

Rzędne η - oczywiście, przedstawiają pewne w s p ó ł c z y n n i k i , niezależne od wielkości obciążenia P , ale zależne o d p o ł o ż e n i a t e g o o b c i ą ż e n i a na dźwigarze i od rodzaju funkcji (F).

F - jest linjową funkcją obciążeń /sił/ P i nie zawiera w sobie wyrazów, niezależnych od P. W zależności od rodzaju funkcji F współczynniki η mogą być l i c z b a m i o d e r w a n e m i /jak naprzykład w funkcjach wyrażających r e a k c j e p o d p ó r , lub s i ł y t n ą c e/, lub też przedstawiać pewne w i e l k o ś c i l i n j o w e /t.j. mierzone w miarach długości/, jak naprzykład w funkcjach, wyrażających momenty / η - są to ramiona momentów/.

Współczynniki η mogą być dodatnie, lub ujemne.

W poszczególnym wypadku, kiedy:

$$P_1 = 1;\ P_2 = 1;\ P_3 = 1; \ldots\ldots P_n = 1,$$

funkcja F otrzymuje wartość F'

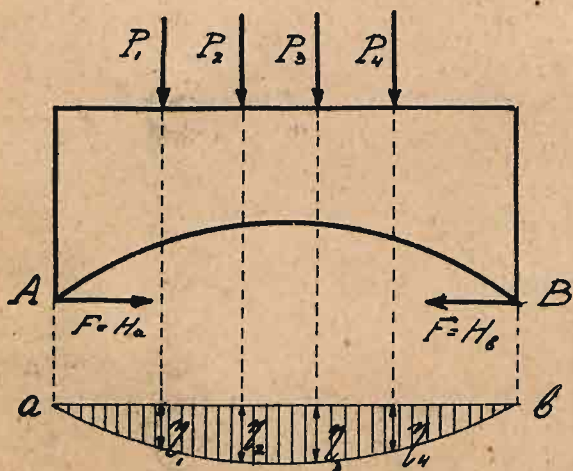
$$F' = 1 \times \eta_1 + 1 \times \eta_2 + 1 \times \eta_3 + \ldots + 1 \times \eta_n,$$

albo

$$F' = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots \eta_n$$

Pole, zawarte między linją wpływową i osią odciętych (ab) przedstawia **p o l e w p ł y w u f u n k c j i F o b c i ą ż e ń .**

Jeśli linja wpływowa jest wiadoma, to możemy znaleźć wartość funkcji F , odpowiadającą każdemu układowi obciążeń /rys.1/.



Rys. 1

Dlatego należy na linji wpływowej zmierzyć rzędne odpowiadające każdemu z obciążeń danego układu i wziąść sumę algebraiczną iloczynów tych rzędnych przez odpowiednie obciążenia. Suma ta przedstawi poszukiwaną wartość funkcji F

$$F = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + P_4\eta_4 + \ldots$$

/rys.1/.

Samo współczynniki (η) r o z p a t r y w ane jako wielkości zmienne są funkcjami odciętej (x), t.j. funkcjami położenia obciążenia, przesuwającego się wzdłuż dźwigaru. Przytem dla jednego rodzaju funkcji F' wielkości y będą linjowemi funkcjami x t.j. będą się zmieniać według prawa linji prostej /jak, naprzykład, w linjach wpływowych reakcji podpór belek prostych, lub łuków trójprzegubowych w linjach wpływowych siły tnącej, lub momentu zginającego w danym przekroju belki prostej/.

Dla innego rodzaju funkcji F' wartości y będą zależne od x^2, x^3 i nawet x^4, t.j. będą się zmieniać według prawa linji krzywej /jak, naprzykład, w linjach wpływowych ugięcia prostej belki w danym punkcie, albo w linjach wpływowych reakcji podporowych łuków dwuprzegubowych lub łuków bezprzegubowych i w ogóle w linjach wpływowych różnych funkcji, tyczących się statycznie niewyznaczalnych dźwigarów x/.

----

x/ Naprzykład pozioma składowa reakcji podporowej /rozpór/ łuku bezprzegubowego paraboliczn-

Dla przykładu rozpatrzymy niektóre linje wpływowe, tyczące się belki, zamocowanej jednym końcem w ścianę /rys.3/. Takiego rodzaju belka, przedstawia, jak wiadomo, dźwigar statycznie wyznaczalny. W samej rzeczy reakcja A' podpory A /przedstawiająca pewną funkcję F - obciążeń/ i moment zamocowania M_{a} /przedstawiający

---

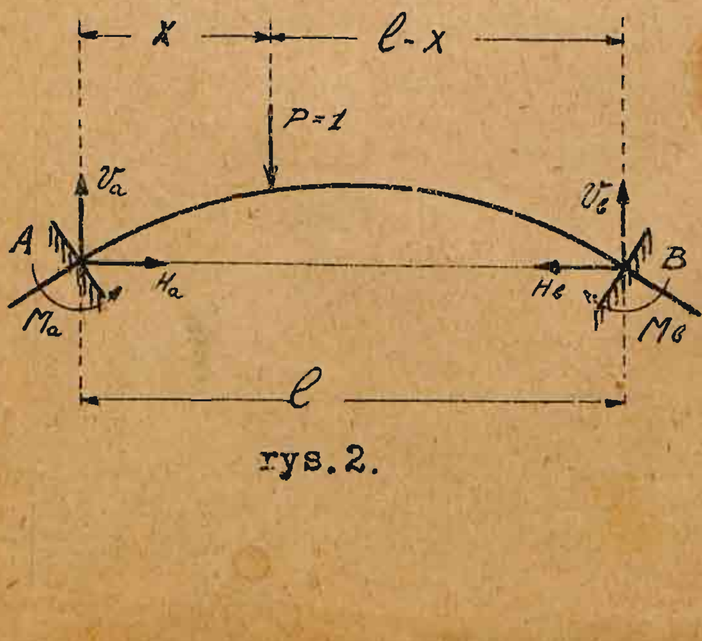
go /rys.2/, jak wiadomo, określa się ze wzoru:

$$F = H = \frac{15}{4} P \frac{(l-x)^2 x^2}{l^3 f(1+\mu)} \quad \text{gdzie} \quad \mu = \frac{45}{4} \frac{J}{\Omega f^2}$$

Przy $P=1$, mamy:

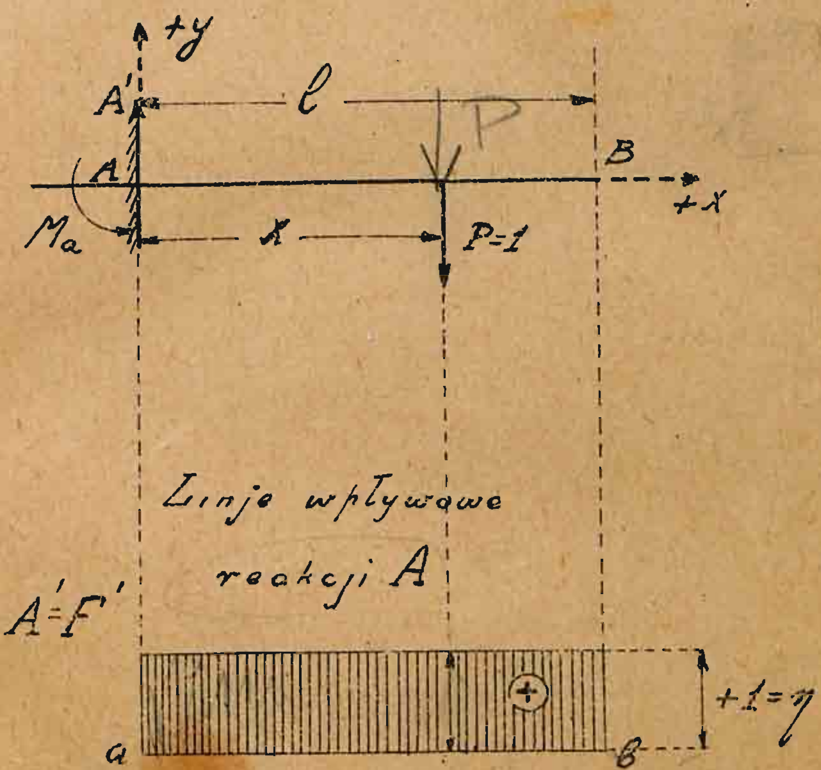
$$F' = H' = \frac{15}{4} \frac{(l-x)^2 x^2}{l^3 f(1+\mu)} = \eta$$

gdzie η zależy od x^4.



rys.2.

inną fukcję $/F_2$ - obciążeń/ - mogą być określone z warunków równowagi płaskiego układu sił,



rys. 3. : 4

t.j. że z równań:

$$\Sigma Y = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

a mianowicie:

$$A' - P = 0 \qquad M_a + Px = 0$$

$$A' - P = 0 \quad \ldots\ldots \quad /1/$$
$$M_o + Px = 0 \quad \ldots\ldots \quad /2/$$

Trzeci warunek równowagi płaskiego układu sił $\sum X = 0$ staje się tożsamością, ponieważ obciążająca siła P jest prostopadła do osi belki, którą przyjęliśmy za oś odciętych.

Z równań /1/ i /2/ otrzymujemy:

$$F_1 = A' = +P, \qquad F_2 = M_o = -Px$$

Przy $P = 1$

$$F_1' = A' = +1 \qquad F_2' = M_o' = -1x$$

Funkcja F_1', t.j. linja wpływowa dla reakcji podpory, przedstawi się wykreślnie jako linja równoległa do osi odciętych i mająca rzędną $y = +1$ /rys.4/. Rzędna ta jest liczba oderwana /t.j. ma wymiar zerowy/.

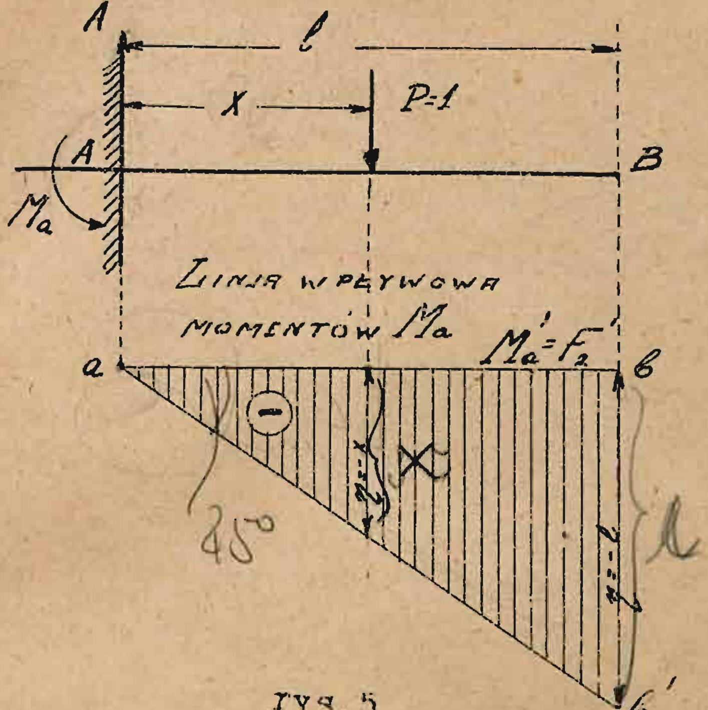
Przedstawmy wykreślnie funkcję F_2', t.j. linję wpływową dla momentu zamocowania belki na podporze.

Przy $x = 0$; $F_2' = 0$

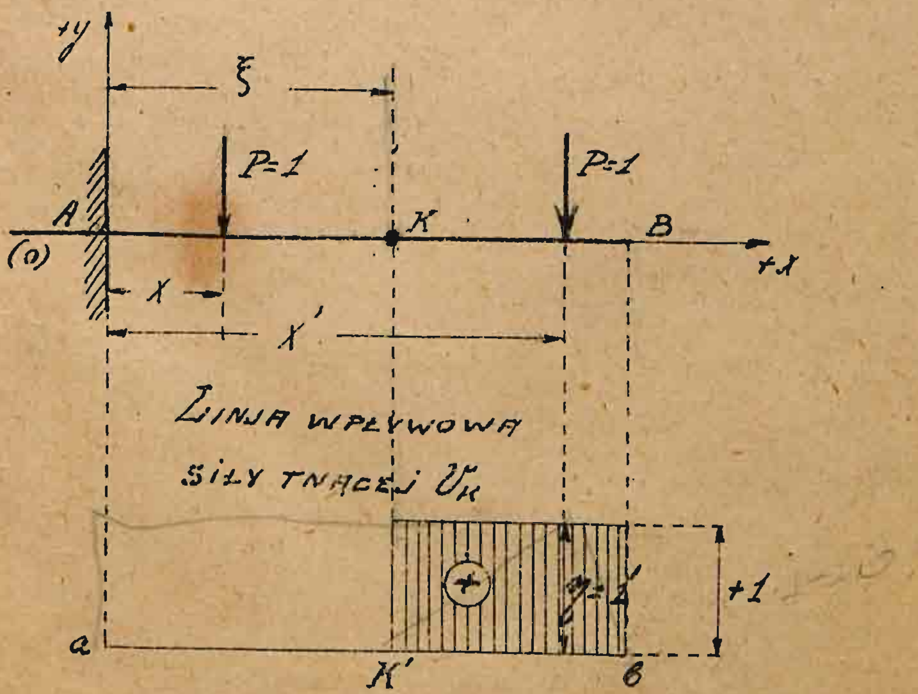
Przy $x = x_1$; $F_2' = -1x_1 = -x_1$

Przy $x = l$; $F_2' = -1l = -l$

Rzędne tej linji zmieniają się według prawa linji prostej, przyczem przedstawiają wielkości linjowe /t.j. pewne długości/ /rys.5/.


A'
l
X
P=1
A
B
M_a
Linja wpływowa
momentów M_a
$M_a' = F_2'$
a
b
b'
45°
X
l

rys. 5.


+y
ξ
P=1
P=1
A
K
B
(0)
+x
X
X'
Linja wpływowa
siły tnącej V_K
a
K'
b
+1

rys. 6.

Narysujmy linję wpływową siły tnącej (V_k) /poprzecznej/ w danym przekroju (K) belki, znajdującym się w odległości (ξ) od podpory /rys.6/.

Z określenia siły poprzecznej w danym przekroju belki, - że jest to suma algebraiczna wszystkich sił działających na odcinek belki od podpory /lub od końca belki/ do danego przekroju, - mamy:

1/ w wypadku kiedy obciążenie znajduje się na belce z lewej strony przekroju K /rys.6/:

$$F_3 = V_\xi = A - P$$

a przy

$$P = 1 \qquad F_3' = V_\xi' = A' - 1$$

Ponieważ z warunku równowagi $\sum Y = 0$, mamy $A' = 1$, więc

$$F_3' = +1 - 1 = 0;$$

czyli obciążenie belki, stojące z lewej strony przekroju K nie wpływa na siłę poprzeczną w tym przekroju.

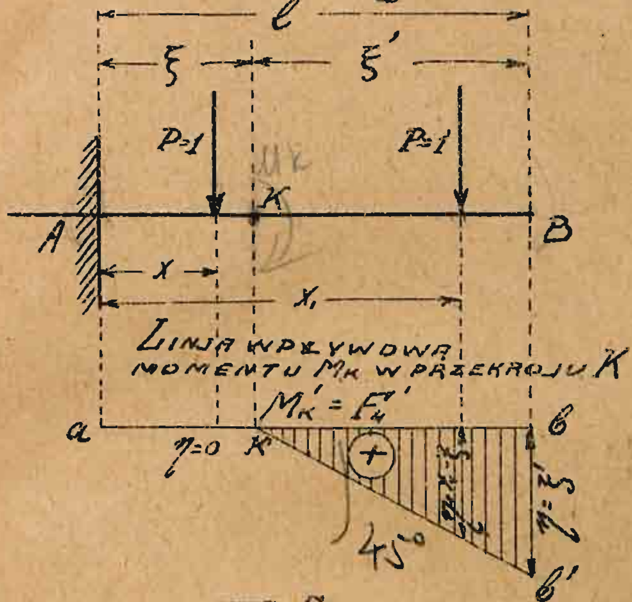
2/ W wypadku, kiedy obciążenie znajduje się z prawej strony przekroju K /rys.6/:

$$F_3 = V_\xi = A,$$

a przy

$$P = 1 \qquad F_3' = V_\xi' = +1$$

Rozpatrzmy teraz linję wpływową momentu zginającego w danym przekroju K belki, znajdującym się na odległości ξ od podpory /rys.7/.



rys. 7.

Siła P, znajdująca się z prawej strony przekroju K daje moment w tym przekroju: $F_4 = M_k = P(x_1 - \xi)$

Przy $P=1$ otrzymamy:

$$F_4' = M_k' = 1(x_1 - \xi) ; \quad \eta = x_1 - \xi$$

Przy $x_1 = \xi$; $F_4' = 0$; $\eta = 0$

Przy $x_1 = l$; $F_4' = 1(l - \xi)$,

Oznaczając $(l - \xi)$ przez ξ' możemy przedstawić wykreślnie funkcję F_4'.

Kiedy obciążenie $P=1$ znajduje się na lewo od przekroju K, to na odcinek (BK) belki /rozpatrywanej jako dźwigar nieważki/ żadne siły zewnętrzne nie działają, wskutek czego moment zginający M_k - w przekroju K równy jest zeru.

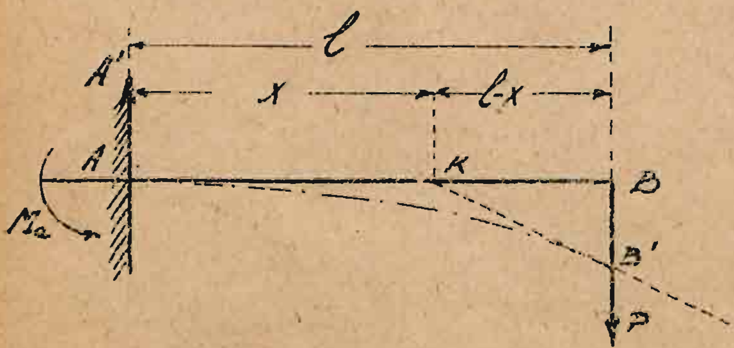
Linja wpływowa momentu M_k zmienia się, w zależności od zmiany x, - według prawa linji prostej.

Rzędne η linji wpływowej - przedstawiają wartości linjowe /t.j. ramiona momentów/.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia linji wpływowej ugięcia końca belki, zamocowanej końcem w ścianę /rys.8/.

Jak wiadomo równanie odkształconej /ugiętej/ osi belki jest:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M$$



rys.8.

gdzie M jest zmienna wartość momentu zginającego belkę $M=P(l-x)$

Przy stałym momencie bezwładności (J) pola poprzecznego przekroju belki, mamy:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{EJ}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C$$

$$y=\frac{P}{EJ}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+C_1x+C_2$$

Przy $x=0$; $\frac{dy}{dx}=0$ skąd $C_1=0$

Oprócz tego przy $x=0$; $y=0$ skąd $C_2=0$

Wskutek tego, zrównanie odkształconej /linji ugięcia/ ma postać:

$$y=\frac{P}{EJ}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

albo

$$y=\frac{P}{6EJ}\left(3lx^2-x^3\right) \quad \ldots\ldots /1/$$

Tangens kąta zawartego między osią X odciętych i styczną do linji ugięcia belki jest:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{2EJ}\left(2lx-x^2\right)$$

Przy $x=l$

$$y_{(l)}=\frac{Pl^3}{3EJ} \quad \ldots\ldots /2/$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}=\frac{Pl^2}{2EJ} \quad \ldots\ldots /3/$$

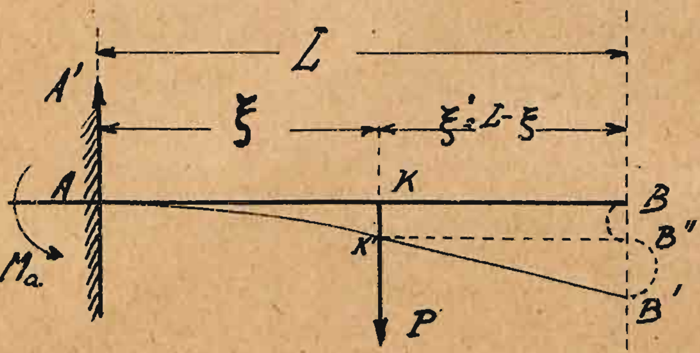
Rozpatrzmy wypadek, kiedy obciążenie P znajduje się w punkcie K - w odległości ξ od podpory A na belce o długości L /rys.9/ i określmy ugięcie się belki w jej końcu t.j. w punkcie B od

---

tego obciążenia.

Na mocy wyprowadzonego wzoru /2/, podstawiwszy ξ zamiast l, mamy:

$$y = \frac{P\xi^3}{3EJ} \quad \ldots . /4/$$



rys.9.

Jest to ugięcie belki w punkcie K Żeby otrzymać ugięcie w punkcie B należy dodać do ugięcia $(\overline{KK'})$ w punkcie K obniżenie się $(\overline{B''B'})$ punktu B /patrz rys.9/ względem punktu K', zależne od nachylenia się do poziomu stycznej do linji ugięcia w punkcie (K).

Tangens kąta nachylenia się do poziomu stycznej do linji ugięcia w punkcie (K) na mocy wzoru /3/ jest równy:

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{P\xi^2}{2EJ} \quad \ldots\ldots /5/$$

Odległość zaś pozioma między punktami K i B stanowi: $(L-\xi)$. Wskutek czego, ugięcie punktu (B) od siły P, przyłożonej w punkcie K, będzie:

$$y_{(6)} = \frac{P\xi^3}{3EJ} + \frac{P\xi^2(L-\xi)}{2EJ} \qquad \ldots /6/$$

Biorąc za nawias $\frac{P}{6EJ}$, otrzymamy:

$$y_{(6)} = \frac{P}{6EJ}\left\{3L\xi^2 - \xi^3\right\} \qquad \ldots /7/$$

a przy $P=1$

$$y'_{(6)} = \frac{1}{6EJ}\left\{3L\xi^2 - \xi^3\right\} \qquad \ldots /8/$$

Z drugiej strony, na mocy równania linji ugięcia /1/ mamy, podstawiwszy $x=\xi$, że ugięcie belki w p. K, wywołane siłą równą jedności, przyłożoną w punkcie B, równa się tej samej wielkości (y'_{6}), t.j. ugięciu w p. B, wywołanemu siłą równą jedności, przyłożoną w p. (K) x/.

---

x/ To twierdzenie potwierdza się na zasadzie ogólniejszego twierdzenia o w z a j e m n o ś c i p r z e s u n i ę ć, wypływającego z zasady pracy wirtualnej i z twierdzenia Betti /patrz część Kursu, tyczącą się odkształceń i dźwigarów statycznie niewyznaczalnych/.

Czyli, że linja ugięcia belki zamocowanej końcem w ścianie od siły równej jedności, przyłożonej w końcu belki, j e s t z a r a z e m l i n j ą w p ł y w o w ą - u g i ę c i a k o ń c a b e l k i.

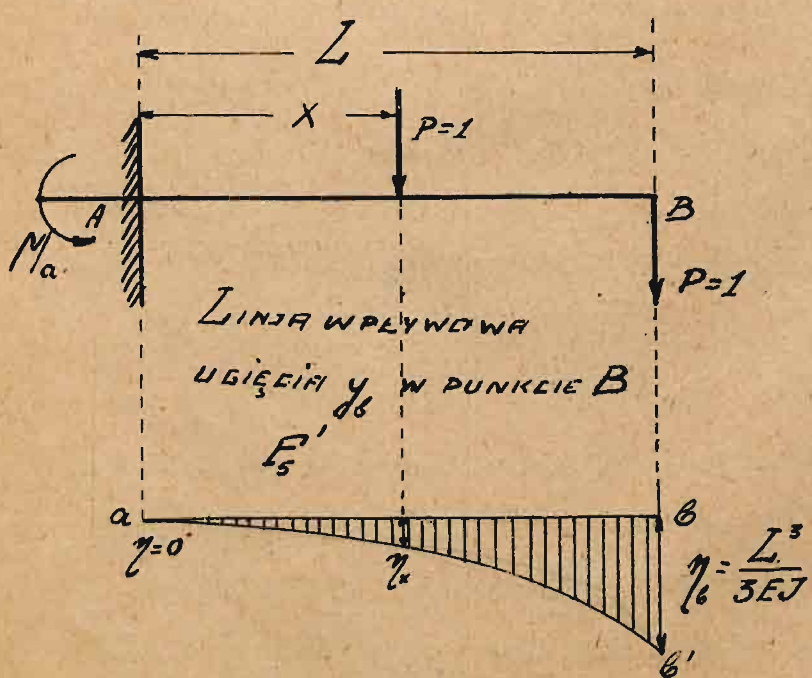
Rzędne tej linji wpływowej znajdą się, po podstawieniu odpowiednich x , z równania:

$$y'_{(b)} = F'_5 = \frac{1}{6EJ}\left(3L\xi^2 - \xi^3\right) \qquad \ldots\ldots /9/$$

Przy $x = 0$; $\eta = 0$

Przy $x = L$; $\eta = \frac{L^3}{3EJ}$

rys.10.



rys.10.

Z powyższego widać, że linja wpływowa dla ugięcia /sprężystego odkształcenia/ końca danej statycznie, wyznaczalnej belki jest linją krzywą /równanie trzeciej potęgi względem x /. W statycznie niewyznaczalnych dźwigarach, gdzie określenie statycznie niewyznaczalnych wartości /parametrów/ opiera się na równaniach, odpowiadających warunkom odkształceń dźwigarów, - jest naturalnem, że linje wpływowe tych parametrów otrzymują się w postaci linji krzywych lub składają się z prostych linji w połączeniu z krzywemi.

Wskutek tego, wygląd linji wpływowej daje możność odrazu odróżnić dźwigary statycznie wyznaczalne od dźwigarów statycznie niewyznaczalnych. W pierwszej kategorji linje wpływowe /za wyjątkiem linji wpływowych odkształceń/ składają się z linji prostych, w drugiej kategorji - z linji krzywych, lub krzywych w połączeniu z prostemi.

§ 2. SKALA LINJI WPŁYWOWYCH.

M i e r n i k l i c z b w p ł y w o - w y c h a l b o j e d n o ś ć l i n j i w p ł y w o w y c h.

D z i e l n i k a l b o m n o ż n i k l i c z b w p ł y w o w y c h.

W y p a d e k s z c z e g ó l n y.

Z a s t o s o w a n i e l i n j i w p ł y w o w e j p r z y o b c i ą ż e - n i u p a r ą s i ł.-

-----

Rzędne linji wpływowych mogą być odłożone w dowolnej skali. Jednakże jeśli te rzędne będą zmierzone wprost według skali rysunku, to rezultat obliczenia podług linji wpływowej wartości rozpatrywanej funkcji obciążeń nie będzie prawdziwy, o i l e n i e u w z g l ę d n i m y m i e r n i k a, t.j. j e d n o ś c i, k t ó r ą p o - w i n n y b y ć m i e r z o n e r z ę d - n e d a n e j l i n j i w p ł y w o - w e j.

Naprzykład, jeśli w linji wpływowej re- akcji podporowej belki zamocowanej jednym końcem /patrz § 1/ rzędna η na podporze była odłożona w postaci odcinka wielkości 10 mm. i wszystkie rzędne były mierzone w milimetrach, to dla otrzymania rzeczywistego znaczenia funkcji F należy rozdzielić otrzymany rezultat przez 10 t.j. przez liczbę wyrażającą j e d n o ś ć w skali rysunku, gdyż rzędna η na podporze $\eta = +1$ /liczba oderwana/ przedstawia rzeczywistą wartość, odpowiadającą rozpatrywanej linji wpływowej.

Dla tego też przy rysowaniu linji wpływowej należy, dla uniknięcia pomyłek, robić napis: jaka wielkość przyjęta jest za jedność.

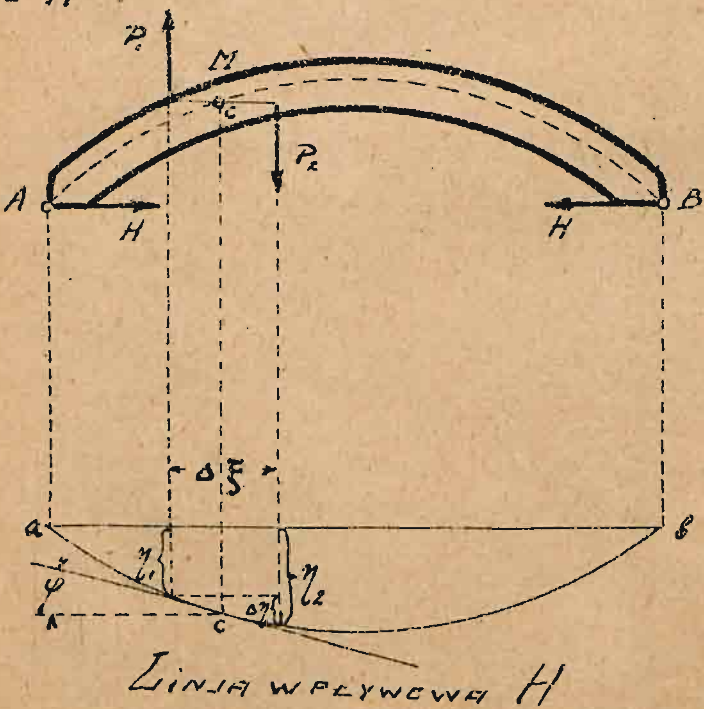
W innych wypadkach zamiast d z i e l n i k a , odpowiadającego jednostce linji wpływowej, potrzeba jest posiłkować się m n o ż n i k i e m , przez który mnożą się rzędne linji wpływowej, wymierzone według skali.

Ciężary skupione, odpowiadające odcinkowi linji wpływowej, ograniczonemu linją prostą, mogą, w celu skrócenia obliczeń, być zastąpione przez jedną wypadkową ich, przechodzącą przez środek ciężkości wspomnianego układu ciężarów skupionych. Wielkość tej wypadkowej mnoży się przez odpowiednią do niej rzędną linji wpływowej.

t. j. wykonuje się jedno mnożenie zamiast kilku.

Rozpatrzmy następny wypadek szczególny użytkowania linji wpływowej.

Dany dźwigar /rys.11/, naprzykład łuk dwuprzegubowy paraboliczny, obciążony jest w danym punkcie parą sił o momencie M. Należy znaleźć wartość pewnej funkcji F obciążeń /naprzykład poziomej składowej reakcji H podpory łuku/, wywołanej tem obciążeniem, korzystając z linji wpływowej funkcji H.



rys. 11.

Nazwijmy siły pary sił literami P_1 i P_2, przyczem $P_1 = -P_2$.

W takim razie, mnożąc siły te przez odpowiednie rzędne linji wpływowej, otrzymamy wartość funkcji

$$F = H = -P_1\eta_1 + P_2\eta_2$$

Ale

$$\eta_2 = \eta_1 + \Delta\eta$$

/patrz rys.11/.

Skąd:

$$F = H = -P_1\eta_1 + P_2(\eta + \Delta\eta)$$

Jeśli, zamiast P_2 , podstawić równą jemu wielkość P_1 , to otrzymamy:

$$F = H = P_1\Delta\eta$$

Pomnóżmy i rozdzielmy otrzymany wyraz przez $\Delta\xi$, t.j. przez poziomą odległość między siłami P_1 i P_2 , t.j. przez ramię pary sił.

$$F = H = P\Delta\xi \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} = M\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}$$

Jak wiadomo, bez zmiany warunków równowagi, mamy prawo zastąpić parę sił inną, ale mającą ten sam moment, a mianowicie zbliżając siły przy odpowiedniem ich powiększeniu, możemy napisać:

$$M = P_1\Delta\xi = Pd\xi$$

Skąd otrzymamy:

$$F = H = M\frac{d\eta}{d\xi} = M \cdot tg\varphi$$

Czyli wartość funkcji F równa się momentowi pary sił pomnożonemu przez tg. kąta stycznej do linji wpływowej w danym punkcie z poziomą.

Dla obliczenia wskazanej wartości funkcji F należy jeszcze przyjąć pod uwagę d z i e l n i k l i c z b w p ł y w o w y c h , t.j. tak nazwaną j e d n o s t k ę l i n j i w p ł y w o w e j .

Przyjmijmy skalę rysunku dźwigara 1:300; rzędne linji wpływowej reakcji poziomej H łuku przyjęte $2\,cm = 1$; moment pary sił wyrażony w tono-metrach.

Rzędna długości jednego centymetra odmierzonej na rysunku przedstawia 1/2 jedności.

Odcięta o długości 1 cm. wymierzona na rysunku odpowiada rzeczywistej długości 300 cm., t.j. 3 metrów.

Jeśliby po wymierzeniu na rysunku $tg\,\varphi$ okazał się równym jedności, t.j.

$$tg\,\varphi = 1 = \frac{1}{1},$$

to rzeczywista jego wartość byłaby:

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

t.j. d z i e l n i k , albo j e d n o s t k a l i n j i wpływowej równa się 6.

Zatem iloczyn $M\,tg\,\varphi$ powinien być podzielony przez 6, przyczem H otrzyma się w tonach.

§ 3. FORMA LINJI WPŁYWOWEJ PRZY POŚREDNIEM OBCIĄŻENIU.

W dźwigarach mamy najczęściej do czynienia z obciążeniem pośredniem, t.j. z ciężarami przenoszonemi na główny dźwigar tylko w pewnych punktach, zwanych punktami węzłowemi, przez beleczki podłużne i poprzeczne.

Na rysunku /12/ pokazana jest część głównego dźwigara z węzłami m i $(m-1)$, w których postawione są poprzeczne belki z leżącą na nich podłużną belką. Na podłużną belkę działa obciążenie P w odległości x od węzła m ; odległość między sąsiedniemi węzłami, czyli długość przedziału jest d .

Wskutek tego, że belkę podłużną rozpatrujemy jak belkę prostą, t.j. rozciętą w punktach węzłowych, ciężar P odda się, jak wiadomo, na poprzeczne belki, jako podpory belki podłużnej, w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do odległości tego ciężaru od belek poprzecznych.

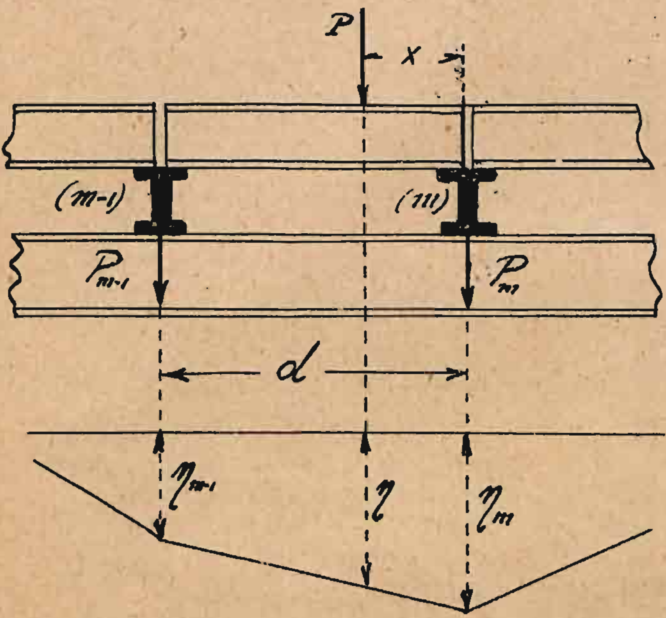
Czyli:

$$P_{m-1} = P\frac{x}{d}$$

i

$$P_m = P\frac{(d-x)}{d}$$

gdzie P_{m-1} jest to część ciężaru P, która się przeniesie na węzeł $(m-1)$, a P_m jest część ciężaru P która się przeniesie na węzeł m.



rys.12.

Nazwijmy rzędną rozpatrywanej linji wpływowej /jakiejś funkcji obciążeń/, znajdującą się pod ciężarem P przez (η), a rzędne tejże linji wpływowej pod ciężarami P_{m-1} i P_m przez η_{m-1} i η_m, to wskutek znaczenia linji wpływowej oraz tej okoliczności, że przy pośredniem oddaniu siły, łączny wpływ składowych P_{m-1} i P_m musi być równy wpływowi ich wypadkowej P, otrzymujemy następującą zależność:

$$P\eta = P_{m-1}\eta_{m-1} + P_m\eta_m$$

Wprowadzając do tego równania powyższe wyrazy P_{m-1} i P_m, znajdziemy:

$$\eta = P\frac{x}{d}\eta_{m-1} + P\frac{(d-x)}{d}\eta_m$$

Skracając to równanie przez P, mamy ostatecznie:

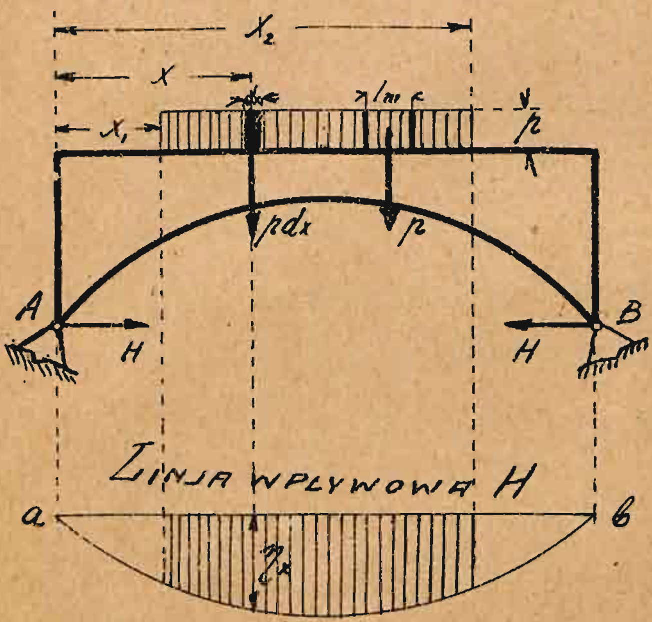
$$\eta = \eta_{m-1}\frac{x}{d} + \eta_m\frac{d-x}{d}$$

Z tego widać, że η jest linjową funkcją (x), czyli, że l i n j a   w p ł y w o w a   m i ę d z y   d w o m a   w ę z ł o w e m i   p u n k t a m i /m i ę d z y   d w i e m a   b e l k a m i   p o p r z e c z n e m i/   j e s t   l i n j ą   p r o s t ą.

§ 4. ZASTOSOWANIE LINJI WPŁYWOWYCH PRZY OBCIĄŻENIU CIĄGŁEM.

Załóżmy, że odcinek $(x_2 - x_1)$ rozpatrywanego dźwigara /rys.13/ jest obciążony ciągłem obciążeniem równomiernie rozłożonem na tem odcinku tak, że na jednostkę długości odcinka przypada (p) jednostek ciężaru. Pewnej rzędnej η danej linji wpływowej odpowiada odcięta x. W takim razie wpływ elementarnego obciążenia pdx rozpatrywanego jako nieskończenie mały ciężar skupiony, wyrazi się przez iloczyn:

$$p\,dx\cdot\eta_x = dF$$



rys.13.

a wpływ całego obciążenia ciągłego wyrazi się sumą wpływów elementarnych obciążeń, t.j. przez całkę:

$$\int_{x_1}^{x_2} p\,\eta_x\,dx = F.$$

Ponieważ p jest wartością stałą, zatem:

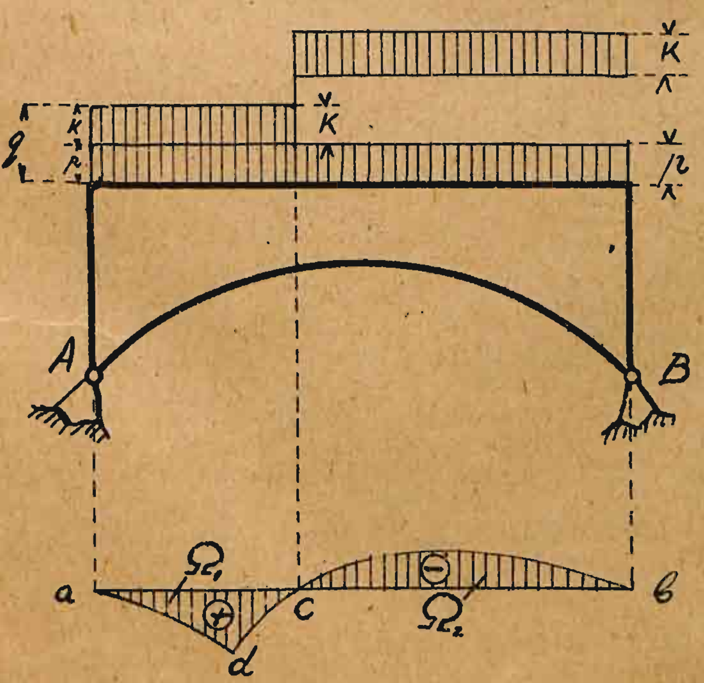
$$F = p\int_{x_1}^{x_2}\eta_x\,dx = p\,\Omega$$

gdzie Ω przedstawia część pola, ograniczonego linją wpływową, zakreskowaną na rys.13.

Jak już wskazano w § 1-ym, rzędne η mogą mieć różne znaki.

Punkty, w których linja wpływowa przecina oś odciętych (ab), nazywają się p u n k t a m i zerowemi, albo punktami rozdziału obciążeń. Te punkty dzielą oś odciętych (ab) na odcinki, odpowiadające dodatnim lub ujemnym rzędnym linji wpływowej; te punkty zerowe dzielą także pole wpływowe /czyli pole ograniczone linją wpływową i osią odciętych/ na pola z dodatniemi i ujemnemi rzędnemi.

Na rys.14 przedstawiona jest linja wpływowa (adceb), w której odcinkowi (ac) osi odciętych odpowiadają dodatnie rzędne linji wpływowej, a odcinkowi (cb) - odpowiadają ujemne rzędne linji wpływowej; pole (adc) - jest to dodatnie pole wpływu, a pole (ceb) jest to ujemne pole wpływu.



rys.14.

Jeśli obciążenie ciągłe, mające wartość

(q) jednostek ciężaru na jednostkę długości, składa się z dwóch części, a mianowicie: 1/ ze stałego /nieruchomego/ obciążenia po (p) jednostek ciężaru na jednostkę długości, 2/ z obciążenia czasowego /ruchomego/ po (k) jednostek ciężaru na jednostkę długości, to max. F i min. F /największe i najmniejsze wartości rozpatrywanej funkcji F obciążeń danego dźwigara/ będą zależeć od odpowiedniego ustawienia na dźwigarze obciążenia ruchomego K.

Oczywiście, przy położeniu ruchomego obciążenia K tylko na odcinku dźwigara, odpowiadającym dodatnim rzędnym linji wpływowej (ac) otrzymamy /max. F/. Zaś dla otrzymania /min. F/ trzeba obciążyć dźwigar obciążeniem ruchomem tylko na odcinku, odpowiadającym ujemnym rzędnym linji wpływowej (cb).

Jeśli oznaczymy dodatnie pole wpływowe przez Ω_1, a ujemne pole wpływowe przez Ω_2, to obciążywszy dźwigar, jak wskazano powyżej, otrzymamy:

$$\max F = (p+k)\Omega_1 - p\Omega_2$$
$$\min F = p\Omega_1 - (p+k)\Omega_2$$

albo zastępując $(p+k)$ przez q, mamy:

$$\max F = q\Omega_1 - p\Omega_2$$

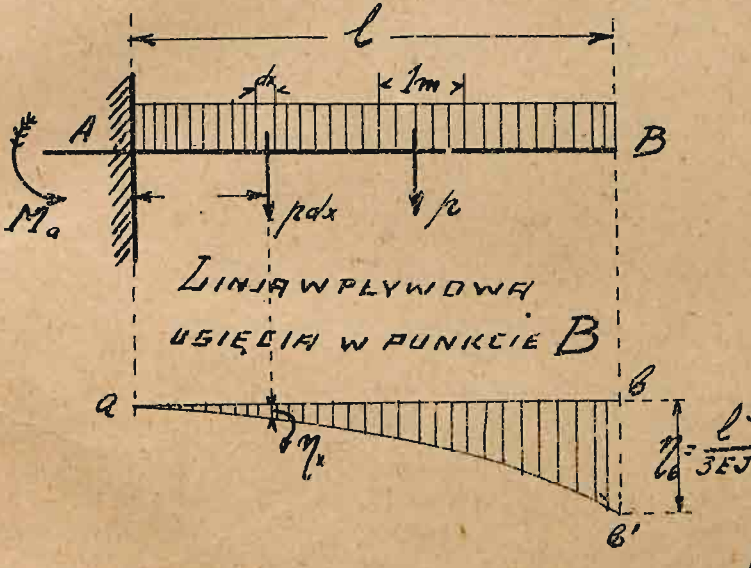
i

$$\min F = p\Omega_1 - q\Omega_2 = -(q\Omega_2 - p\Omega_1)$$

Wartość funkcji F zależna tylko od stałego /nieruchomego/ ciągłego obciążenia, określa się jak następuje:

$$F = p\,(\Omega_1 - \Omega_2)$$

Dla przykładu /rys.15/ wyznaczmy za pomocą linji wpływowej ugięcie końca B belki zamocowanej jednym końcem A w ścianę od obciążenia ciągłego $\left(p\ \frac{t}{m}\right)$, pokrywającego



rys.15.

całą belkę o długości l /patrz § 1/

$$F = \int_0^l p\,\eta_x\,dx = p\int_0^l \eta_x\,dx = p\,\Omega$$

$$\eta_x = y_x = \frac{1}{6EJ}\left\{3lx^2 - x^3\right\}$$

strzałka ugięcia w p. B

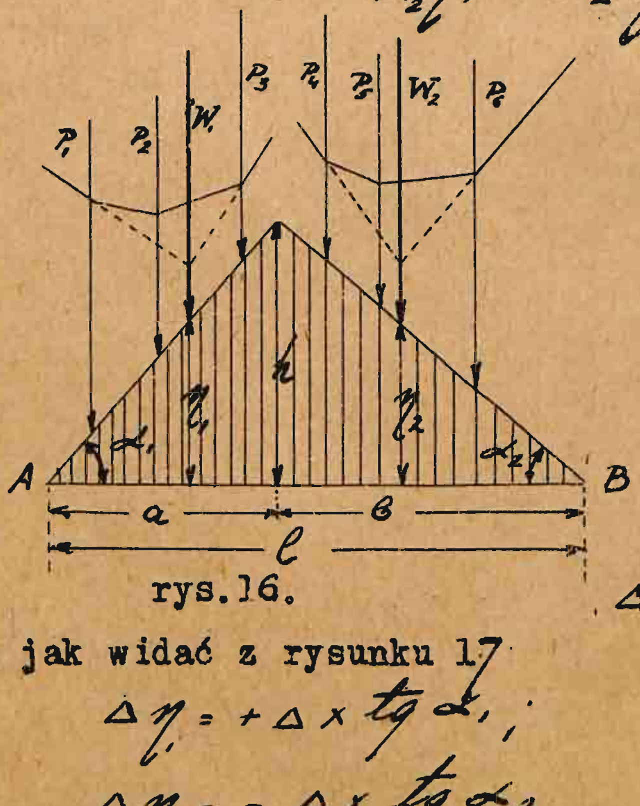
$$\underline{B} = F = \frac{p}{6EJ}\int_0^l (3lx^2 - x^3)\,dx = \frac{pl^4}{8EJ}$$

§ 5. USTAWIENIE ZESPOŁU CIĘŻARÓW DLA OTRZYMANIA max. F ZA POMOCĄ LINJI WPŁYWOWEJ.

Rozpatrzmy najpierw linję wpływową, mającą formę trójkąta /rys.16/ i układ ciężarów, niezmiennie między sobą związanych, czyli znajdujących się w stałych odległościach wzajemnych, sprowadzających się do wypadkowych W_1 i W_2, znajdujących się naprzeciw boków AC i CB linji wpływowej.

Funkcja F obciążeń oczywiście /rys.16/ będzie:

$$F = W_2\eta_1 + W_2\eta_2$$



rys.16.

Przesuńmy układ obciążeń na prawo, na małą odległość Δx /rys.17/. Wtedy funkcja F otrzyma przyrost:

$$\Delta F = W_1\Delta\eta_1 + W_2\Delta\eta_2$$

ale, jak widać z rysunku 17

$$\Delta\eta_1 = +\Delta x\, tg\,\alpha_1;$$

$$\Delta\eta_2 = -\Delta x\, tg\,\alpha_2,$$

skąd.

$$\Delta F = (W_1\, tg\,\alpha_1 - W_2\, tg\,\alpha_2)\Delta x$$

Ponieważ z tegoż rysunku widać, że

$$tg\,\alpha_1 = \frac{h}{a} \quad \text{i} \quad tg\,\alpha_2 = \frac{h}{b}$$

więc $W_1 tg\,\alpha_1 - W_2 tg\,\alpha_2$ można napisać w formie:

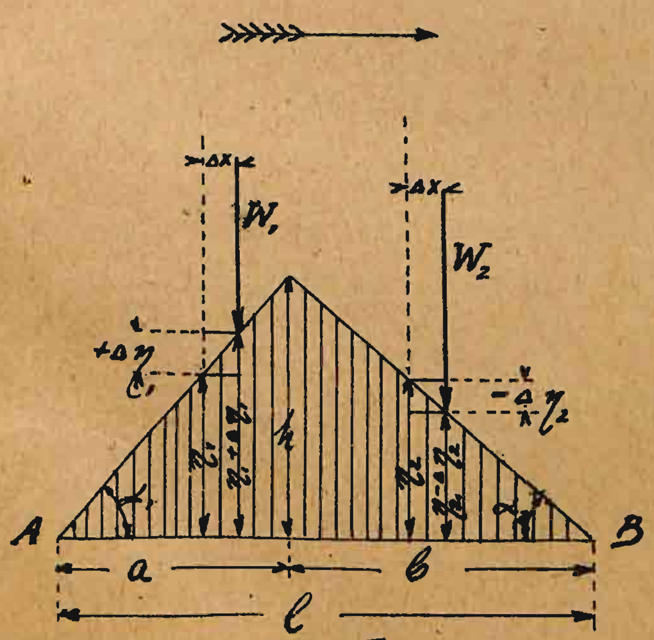
$$\frac{W_1 h}{a} - \frac{W_2 h}{b} = h\left(\frac{W_1}{a} - \frac{W_2}{b}\right)$$

Jeśli

$$\frac{W_1}{a} > \frac{W_2}{b}$$

to

$$\Delta F > 0$$



rys. 17

czyli wartość funkcji F będzie wzrastała w miarę przesuwania zespołu ciężarów na prawo, póki jeden z ciężarów, położonych na lewo od wierzchołka (C) trójkąta linji wpływowej nie przejdzie na prawą stronę.

Wtedy forma i wartość funkcji F się zmieni, lecz wówczas, w zależności od odpowiedniej wartości przechodzącego przez wierzchołek linji wpływowej ciężaru P, możemy otrzymać:

$$\frac{W_1 - P_4}{a} < \frac{W_2 + P_4}{b}$$

czyli znak nierówności może się zmienić.

W takim razie nowa funkcja F obciążeń będzie się zmniejszała przy przesuwaniu zespołu ciężarów na prawo.

Początek tego zmniejszania się funkcji F nastąpi przy położeniu ciężaru P_4 w wierzchołku /C/ linji wpływowej.

Przesuńmy teraz zespół ciężarów z pierwotnego położenia /rys.16/ na małą odległość ΔX na lewo /rys 18/

Wtedy przyrost funkcji F będzie:

$$\Delta_2 F = -W_1 \Delta \eta_1 + W_2 \Delta \eta_2$$

albo, ponieważ

$$-\Delta \eta_1 = -\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \Delta X$$ /zmniejszenie rzędnej η_1/,

$$\Delta \eta_2 = +\operatorname{tg} \alpha_2 \Delta X$$ /POWIĘKSZENIE RZĘDNEJ η_2/

to $$\Delta F = (-W_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + W_2 \operatorname{tg} \alpha_2) \Delta X$$

czyli ten przyrost zmieni swój znak w porównaniu z przyrostem $\Delta_1 F$.

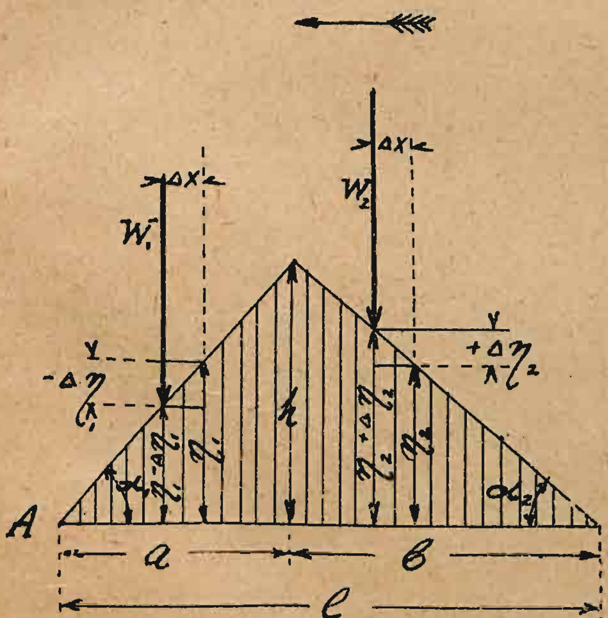
Jak poprzednio, możemy napisać:

$$\Delta_2 F = \left(-\frac{W_1 h}{a} + \frac{W_2 h}{b}\right)\Delta x$$

albo

$$\Delta_2 F = \left(\frac{W_2}{b} - \frac{W_1}{a}\right) h \Delta x < 0$$

jeśli, jak było założone: $\frac{W_1}{a} > \frac{W_2}{b}$



rys. 18

t.j. przesuwając zespół ciężarów na lewo będziemy z m n i e j - s z a l i wartość funkcji F.

To dowodzi jasno, że dla osiągnięcia /max. F/ należy przesuwać zespół ciężarów n a p r a w o .

Ale przesuwanie ciężarów na prawo należy prowadzić tylko dopóty, póki nie okaże się, że przyrost funkcji F_1 nie stanie się u j e m n y m, czyli póki nie nastąpi nierówność:

$$\frac{W_1'}{a} < \frac{W_2'}{b}$$

gdzie W_1' i W_2' są to nowe wartości wypadkowych ciężarów, odpowiadających bokom AC i CB linji wpływowej, które się okażą przy przejściu jednego lub więcej ciężarów P z lewej strony linji wpływowej przez wierzchołek jej C na prawą stronę.

Oczywiście /max. F_1 / będzie odpowiadać warunkowi:

$$\frac{W_1'}{a} = \frac{W_2'}{b}$$

przyczem jeden z ciężarów będzie się znajdować na pionie, przechodzącym przez wierzchołek C .

Jeśli ten ciężar oznaczyć przez P_c, a $(W_1'-P_c)$ przez W_a, zaś W_2' - przez W_b, to możemy napisać, jako warunki /max F_1/:

1/ jeden z najcięższych ciężarów P_c należy postawić w punkcie C;

2/ $$\frac{W_a + P_c}{a} = \frac{W_b}{b}$$

albo

$$\frac{W_a + P_c}{W_b} = \frac{a}{b}$$

skąd także:

$$\frac{W_b}{\Sigma P} = \frac{b}{l}$$

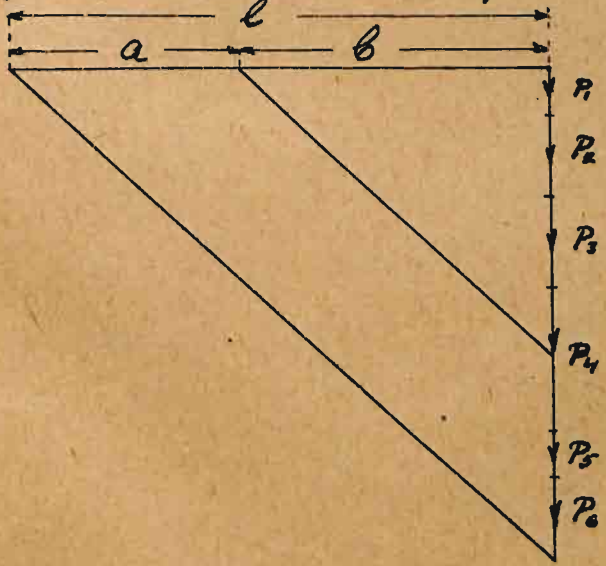
gdzie

$$l = a + b$$

a

$$\Sigma P = W_a + P_c + W_b$$

Warunki te można przedstawić wykreślnie w ten sposób, że plan sił /rys.19/ dzieli się na dwie części proporcjonalne do odległości a i b punktu C od punktów A i B. Na rys.16 poszukiwany ciężar okazał się P_4.

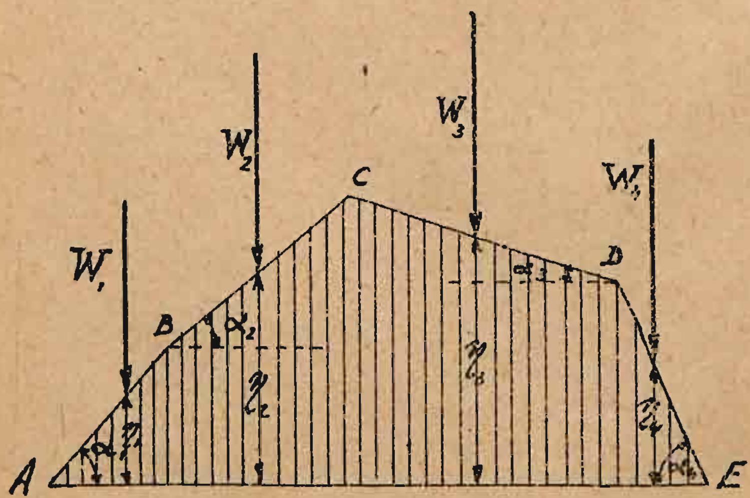


rys.19.

Z powyższego wypada że dla linji wpływowej, mającej formę trójkątną, największość funkcji F obciążeń odpowiada warunkom $\frac{W_1}{a} = \frac{W_2}{b}$ czyli równości obciążeń na jednostkę długości prawej i lewej części dźwigara, przy warunku, żeby jeden z najcięższych ciężarów znajdował się w punkcie C, t.j. w wierzchołku linji wpływowej.

Oczywiście przy wszystkich przesuwaniach na prawo i na lewo zespołu ciężarów zakładamy, że ani jeden z tych ciężarów nie schodzi z dźwigara. O ileby to miało miejsce, to należy zmienić stosownie wartości W_1 i W_2 i nanowo przeprowadzić powyższe badanie.

Naturalnie przed próbami z przesuwaniem lub przed sprawdzeniem powyższych warunków /max. F/ -należy odrazu postawić najcięższą część zespołu ciężarów względem linji wpływowej tak, żeby największy ciężar odpowiadał największej rzędnej linji wpływowej.



rys.20.

Jeśli linja wpływowa ma formę w i e l o b o k u, t.j. j e s t l i n j ą ł a m a -

ną /rys.20/, to dla określenia położenia zespołu ciężarów, odpowiadającego /max. F/, możemy zastosować powyższy sposób badania przyrostów tej funkcji t.j. ΔF przy przesuwaniu zespołu ciężarów w prawo i w lewo. Jeśli w obu wypadkach przyrost funkcji F okaże się u j e m n y m

$$\Delta F < 0$$

to położenie zespołu ciężarów na dźwigarze odpowiada /max. F/.

Badanie tych przyrostów można wykonać wykreślnie.

Widocznem jest mianowicie, że przy przesunięciu na odległość Δx zespołu ciężarów przyrosty $\Delta \eta$ rzędnych η linji wpływowej otrzymujemy d o d a t n i e na tych bokach linji wpływowej, które wznoszą się do góry /w kierunku przesunięcia/ od osi odciętych, lub wogóle odchylają się od osi odciętych /czyli stanowią z nią k ą t y o s t r e/. Natomiast przyrosty $\Delta \eta$ otrzymujemy u j e m n e na tych bokach linji wpływowej, które /w kierunku przesunięcia/ nachylają się /spadają na dół/ do osi odciętych /czyli stanowią z nią k ą t y r o z w a r t e/.

Przyrosty te $\Delta \eta$, mnożone przez odpowiednie wypadkowe ciężarów, t.j. wielkości

$$W\Delta\eta = W\Delta \times tg\,\alpha$$

możemy odkładać w pewnej skali jedne za drugiemi uwzględniając znaki /+/ i /—/, zaczynając od przyjętej osi odciętych, - w formie rzędnych, np. dodatnie do góry, a ujemne na dół, i otrzymać w ten sposób odcinek, przedstawiający wypadkowy przyrost funkcji F, t.j.

$$\sum W\Delta\eta$$

Zamiast samych przyrostów możemy rozpatrywać wielkości do nich proporcjonalne, a mianowicie:

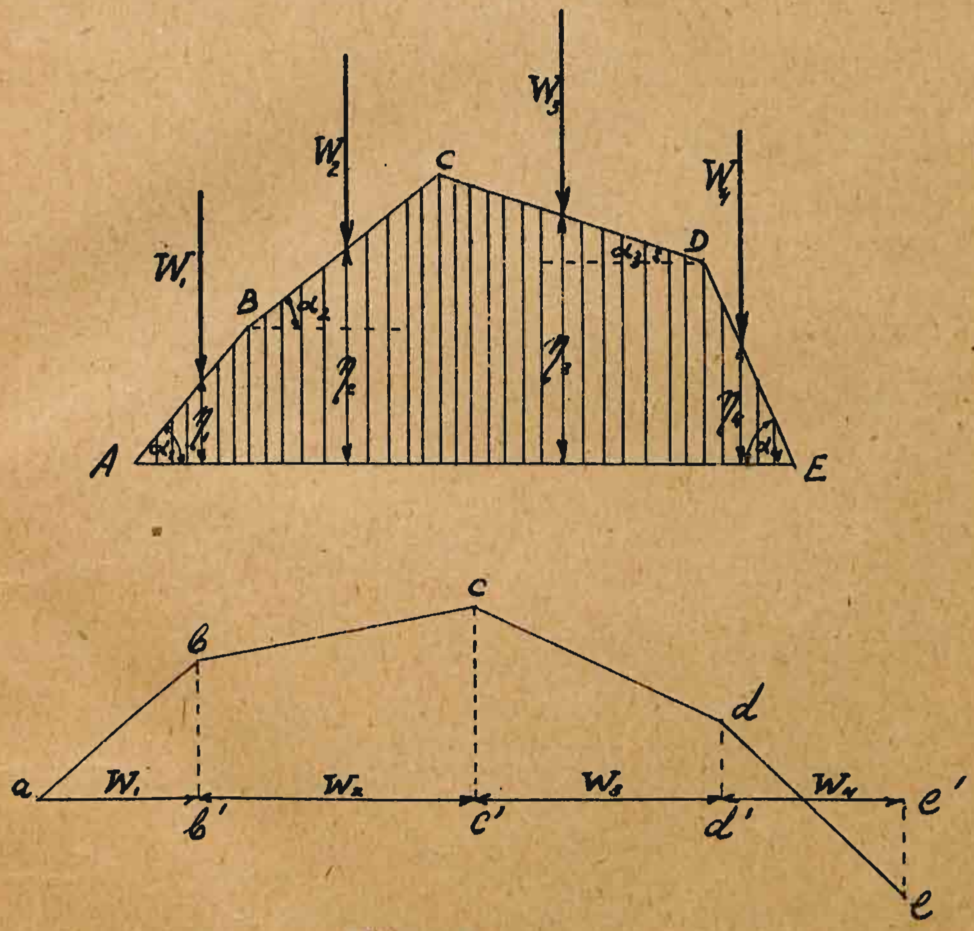
$$W\,tg\,\alpha$$

i otrzymać:

$$\sum W\,tg\,\alpha = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Znak tej wartości$(\sum W\,tg\,\alpha)$pokaże, czy funkcja F przy danym przesunięciu zespołu ciężarów zmniejsza się, czy powiększa.

W tym celu, rysujemy linję poziomą, którą przyjmujemy za oś odciętych; na tej osi odkładamy jedne za drugiemi wypadkowe ciężarów, odpowiadających każdemu bokowi linji wpływowej /rys.21/. Z początkowego punktu a odłożonej w ten sposób pierwszej wypadkowej, przeprowadzamy równoległą ab do pierwszego boku AB linji wpływowej do przecięcia się tej równoległej, która formuje z osią odciętych kąt α_1 z pionem przechodzącym przez koniec b' odcinka W_1. W ten sposób otrzymujemy rzędną bb' równą $W_1 tg\alpha_1$.



Rys. 21

Z końca tej rzędnej rysujemy równoległą do następnego boku BC linji wpływowej do przecięcia z pionem przechodzącym przez koniec c' odcinka W_2, w ten sposób otrzymamy rzędną (cc'), która przedstawia sumę:

$$W_1 tg\alpha_1 + W_2 tg\alpha_2$$

Postępując dalej w ten sam sposób, znajdziemy, że odcinek pionowy $(e-e')$ przedstawia poszukiwaną sumę:

$$W_1 tg\alpha_1 + W_2 tg\alpha_2 - W_3 tg\alpha_3 - W_4 tg\alpha_4$$

czyli wielobok linji równoległych do boków danej linji wpływowej, rzuty boków którego na oś odciętych przedstawiają odpowiednie wypadkowe (W) obciążeń, daje nam odcinek pionowy, przedstawiający wartość proporcjonalną do przyrostu funkcji F obciążeń:

$$\overline{ee'} = \Sigma W tg\alpha$$

Jeśli odcinek $(\overline{ee'})$ otrzyma się niżej osi odciętych, to przyrost funkcji F jest ujemny; w przeciwnym razie - dodatni.

Przy ujemnym odcinku $(\overline{ee'})$ funkcja F będzie się zmniejszać przy przesuwaniu zespołu ciężarów na prawo /rys. 2//.

Należy zatem spróbować przesunięcia zespołu ciężarów n a l e w o . Jeśli i przy tem przesunięciu otrzymamy wskazanym powyżej sposobem wykreślnym odcinek ujemny, to znaczy, że wartość funkcji F jest maximum.

Ciężary, które mogą się znajdować w wierzchołkach wieloboku linji wpływowej, należy, przy przesuwaniu zespołu ciężarów n a p r a w o, dodać do wypadkowych (W), odpowiadających odnośnym p r a w y m bokom linji wpływowej; zaś przy przesuwaniu n a l e w o dodać do wypadkowych (W), odpowiadających odnośnym lewym bokom linji wpływowej.

Naturalnie najcięższą część zespołu ciężarów /np. pociągu/ należy odrazu tak postawić względem linji wpływowej, żeby najcięższe ciężary odpowiadały największym rzędnym linji wpływowej.

§ 6. WYZNACZENIE WARTOŚCI OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO, ZASTĘPUJĄCEGO ZESPÓŁ CIĘŻARÓW SKUPIONYCH, ZA POMOCĄ LINJI WPŁYWOWEJ.

Zastosowanie linji wpływowych może znacznie ułatwić wyznaczenie wartości r ó w n o - z n a c z n e g o o b c i ą ż e n i a c i ą g ł e g o /K jednostek ciężaru na metr bieżący dźwigara/, wywołującego taką samą wartość /max$F$/, lub /min.F/ danej funkcji obciążeń, jak obciążenie danym zespołem ciężarów skupionych /np. pociągiem/.

Przedstawmy sobie /rys.21/, że odcinkowi AC linji wpływowej odpowiada takie ustawienie zespołu ciężarów skupionych P_1, P_2, P_3 i t.d., przy którem funkcja F otrzymuje wartość /max. F/. Wyznaczmy wielkość K ciągłego obciążenia na metr bieżący dźwigara na odcinku AC, wywołującego tę samą wartość /max. F/.

Na mocy wskazówek /§ 4/ o stosowaniu linji wpływowych przy obciążeniu ciągłem, możemy napisać, jeśli odcinkowi AC linji wpływowej odpowiada dodatnie pole wpływowe Ω:

$$max\, F = max \sum P\eta = K\Omega$$

skąd

$$K = \frac{max \sum P\eta}{\Omega} \left(\frac{ton}{metr}\right)$$

Wartość K jest tem większą, im mniejsze jest Ω i im większe $\sum P\eta$

Dla niektórych linji wpływowych /np. dla linji wpływowej momentu zginającego w danym przekroju belki prostej, lub dla reakcji podpory belki prostej/ Ω jest funkcją rozpiętości dźwigara. Stąd wynika, że w tych wypadkach dla dźwigarów małej rozpiętości otrzymujemy K większe niż dla dźwigarów dużej rozpiętości.

Dla poszczególnych form linji wpływowych Winkler wyprowadził z ogólnego wzoru:

$$K = \frac{\max \Sigma P\eta}{\Omega}$$

wzory, dające p r z y b l i ż o n e wartości ciągłych równoznacznych obciążeń K.

Z powyższego wynika, że sposób linji wpływowych nie tylko sam przez się ułatwia obliczenia dźwigarów b e z p o ś r e d n i o od o b c i ą ż e n i a r u c h o m e g o z e s p o ł u c i ę ż a r ó w s k u p i o n y c h, zamiast używanego często przy obliczeniach wyobrażalnego /fikcyjnego/ obciążenia ciągłego/, lecz ponadto daje jeszcze możność łatwego obliczenia samej wartości tego zastępczego obciążenia ciągłego dla różnego rodzaju dźwigarów i dla rozmaitych funkcji obciążeń.

§7. ROZMAITE SPOSOBY WYZNACZENIA /t.j. OBLICZENIA RZĘDNYCH/ LINJI WPŁYWOWYCH.

Do wyznaczenia linji wpływowych, szczególnie w wypadkach więcej skomplikowanych, należy wybierać najprostsze sposoby, najłatwiej prowadzące do celu.

Z tych sposobów wskażemy:

1/ Sposób Ritter'a, czyli statycznych momentów;

2/ wykreślanie sposobem Cremon'y reakcji w prętach kratowego dźwigara od siły jednostkowej, przyczepianej po kolei w każdym węźle kratownicy;

3/ rozpatrywanie równowagi oddzielnych węzłów kratownicy, rzutując wszystkie siły, schodzące się w węźle, na odpowiednio wybrane osie;

4/ zastosowanie, jako zasadniczej, linji wpływu reakcji podpory belki prostej;

5/ zastosowanie, jako zasadniczej, linji wpływu momentu zginającego w danym przekroju belki prostej;

6/ zastosowanie, jako zasadniczej, linji wpływu siły poprzecznej w danym przekroju belki prostej;

7/ zastosowanie równania pracy wirtualnej /pracy przesunięcia/.