musi być prostą $L_1'' L_2''$, a nie łamaną $L_1''K'L_2''$ / § 3 . rys./.

ROZDZIAŁ III.

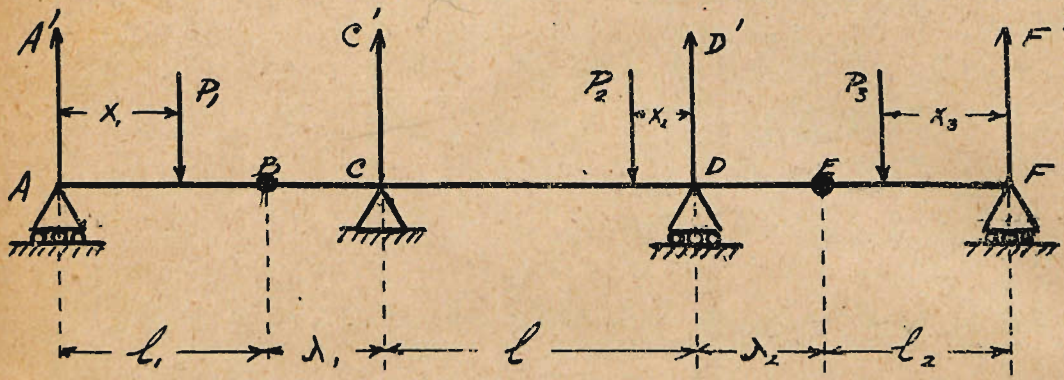
LINJE WPŁYWOWE BELEK WSPORNIKOWYCH.

§ 1. OGÓLNE UWAGI.

Belki wspornikowe używają się zwykle w konstrukcjach w połączeniu z belkami prostemi, opierającemi się na końce wsporników t.j. zwykle mamy do czynienia z kompleksem belek wspornikowych i prostych.

Linje wpływowe dla belek prostych są już nam znane, pozostaje rozpatrzyć linje wpływowe dla belek wspornikowych, uwzględniając działanie belek prostych na połączone z niemi belki wspornikowe.

Rozpatrzmy /rys.28/ belkę wspornikową $(BCDE)$, leżącą na podporach C i D i mającą zwieszające się części, czyli wsporniki /konsole/ BC i DE, na końce których opierają się /lub są przywieszone przegubowo/ belki proste AB i EF. Ciężary, leżące na belkach prostych AB i EF oczywiście będą działać na belkę wspornikową, wywołując w punktach B i E odpowiednie ciśnienia /naciski/, oddające się belce wspornikowej $(BCDE)$

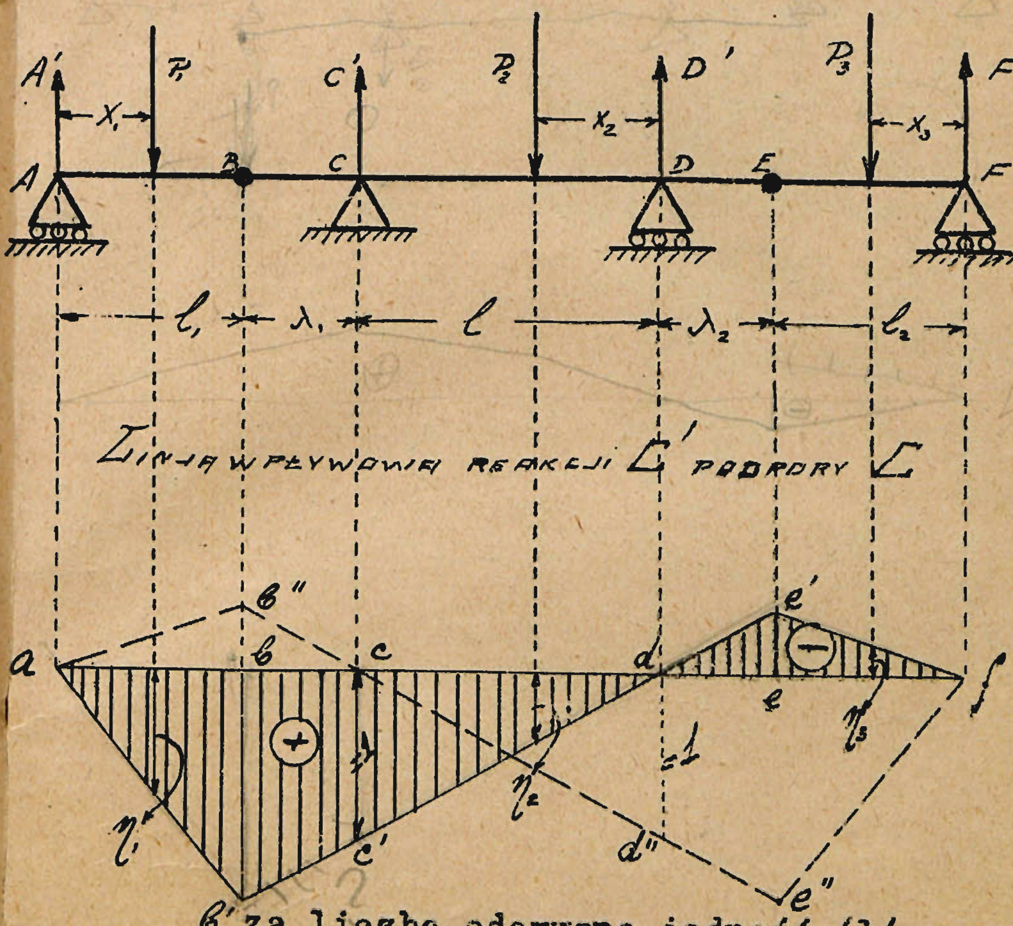


rys.28

Wskutek tego, o b c i ą ż e n i e   b e l e k   p r o s t y c h   w y w i e r a   w p ł y w   n a   f u n k c j e   w p ł y w o w e   b e l k i   w s p o r n i k o w e j ,   p o ł ą c z o n e j   z   t e m i   p r o s t e m i   b e l k a m i .

§ 2. LINJA WPŁYWOWA REAKCJI PODPORY BELKI WSPORNIKOWEJ.

Rozpatrzmy zespół belki wspornikowej $BCDE$ /rys.29/ i dwóch belek prostych AB i EF, na który działają ciężary: P_1 między punktami A i B ; P_2 - między punktami B i E, i P_3 - między punktami E i F .



za liczbę oderwaną jedność /1/

przyjmuje się odcinek $\overline{cc'} = 1$

rys.29

Naciski belek prostych na końce B i E wsporników stanowią, jak wiadomo:

$$\frac{P_1 x_1}{l_1} \quad \text{i} \quad \frac{P_3 x_3}{l_3}$$

Dla określenia reakcji podpory (C) należy napisać równanie momentów wszystkich sił działających na belkę wspornikową BE względem punktu (D), t.j. napisać trzecie równanie równowagi płaskiego układu sił: $\sum M = 0$, przyjmując za biegun momentów punkt (D):

$$0 = C'l - P_1 \frac{x_1}{l_1}(l+\lambda_1) - P_2 x_2 + P_3 \frac{x_3}{l_2}\lambda_2$$

skąd znajdziemy reakcję C' podpory (C), a mianowicie:

$$C' = P_1 \frac{(l+\lambda_1)}{l} \cdot \frac{x_1}{l_1} + P_2 \frac{x_2}{l} + P_3 \frac{x_3}{l_2} \cdot \frac{\lambda_2}{l}$$

Widzimy zatem, że funkcja C' ma formę:

$$C' = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3$$

gdzie

$$\eta_1 = \frac{l+\lambda_1}{l} \cdot \frac{x_1}{l_1},$$

$$\eta_2 = \frac{x_2}{l},$$

$$\eta_3 = -\frac{\lambda_2}{l} \cdot \frac{x_2}{l_2},$$

Odłóżmy od osi odciętych af na pionie, przechodzącym przez podporę (C), odcinek $cc' = 1$ /liczba oderwana/ i przeprowadźmy prostą dc', która przetnie piony, przechodzące przez punkty B i E w punktach b' i e'; nakoniec połączmy prostemi linjami punkt (a) z punktem (b') i punkt (f) z punktem (e').

Łamana linja $(a\,b'd\,e'f)$ przedstawia poszukiwaną linję wpływową reakcji C' podpory (C) belki wspornikowej.

W rzeczy samej, z podobieństwa trójkątów łatwo znajdziemy:

$$\overline{bb'} = \overline{cc'}\,\frac{(l+\lambda_1)}{l} = 1\,\frac{(l+\lambda_1)}{l};$$

$$\overline{ee'} = -\overline{cc'}\,\frac{\lambda_2}{l} = -1\,\frac{\lambda_2}{l};$$

Wskutek tego pod ciężarami P_1 P_2 i P_3 otrzymamy odpowiednio, następujące rzędne:

$$\eta_1 = \overline{bb'} \cdot \frac{x_1}{l_1} = \frac{(l+\lambda_1)}{l} \cdot \frac{x_1}{l_1};$$

$$\eta_2 = \overline{cc'} \cdot \frac{x_2}{l} = \frac{x_2}{l}$$

$$\eta_3 = \overline{ee'} \cdot \frac{x_3}{l} = -\frac{\lambda_2}{l} \cdot \frac{x_3}{l_2}$$

Ciężary, działające na dany zespół belek między punktami (A) i (D) wywołują d o d a t n i ą /t.j. skierowaną do góry/ reakcję C' podpory (C); ciężary zaś działające na dany zespół belek z prawej strony podpory (D), wywołują u j e m n ą /t.j. skierowaną na dół/ reakcję C' podpory (C). Stosownie do tego rzędne linji wpływowej na odcinku od a do d mają znak $(+)$, a na odcinku od d do f znak $(-)$, jak widać na rys.29.

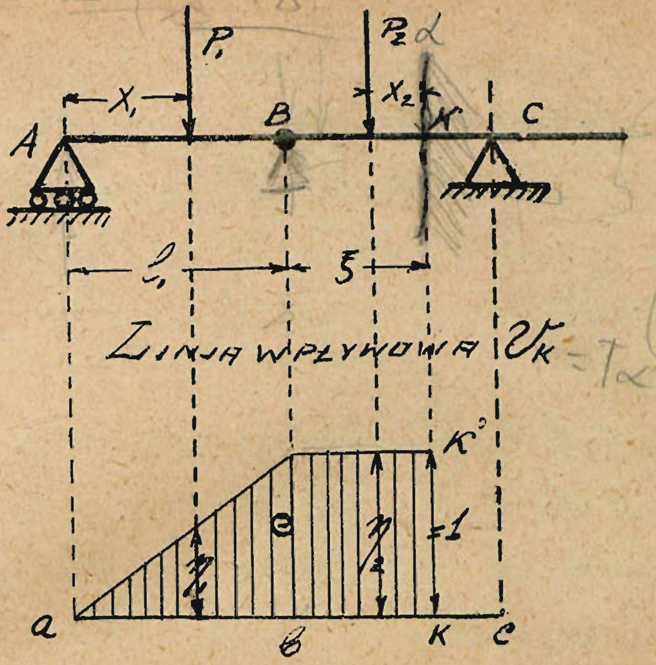
W ten sam sposób wyznaczymy linję wpływową reakcji D' podpory (D), pokazaną na rys.29 linją punktowaną $(a\,b''c\,d'e''f)$.

Odcinki tych linji wpływowych, zawarte między podporami (C) i (D) odpowiadają linjom wpływowym reakcji C' i D' belki prostej CD, która by się otrzymała, zakładając, że $l_1=l_2=0$ i $\lambda_1=\lambda_2=0$.

§ 3. LINJA WPŁYWOWA SIŁY POPRZECZNEJ W DANYM PRZEKROJU WSPORNIKA.

Dla przekroju K wspornika BC belki wspornikowej /rys.30/ mamy wyznaczyć linję wpływową siły poprzecznej.

Siła poprzeczna /czyli siła tnąca/ w przekroju K wspornika jest to suma wszystkich sił /czyli wypadkowa/ działających na odcinek wspornika od jego końca B do rozpatrywanego przekroju K. Te siły składają się z sił bezpośrednio działających na odcinek BK wspornika i z nacisku oddającego na wspornik w punkcie B od obciążenia belki prostej AB.



rys. 30.

Załóżmy /rys. 30/, że na belkę prostą AB działa tylko jeden ciężar P_1, znajdujący się w odległości x_1 od podpory A i że bezpośrednio na wspornik BC działa tylko jeden ciężar w odległości x_2 od rozpatrywanego przekroju K wspornika.

W takim razie nacisk na koniec B wspornika od obciążenia belki prostej AB ma wartość:
$$\frac{P_1 x_1}{l_1}$$

Siła zaś poprzeczna V_k w przekroju K wspornika równa się:

$$V_k = -\frac{P_1 x_1}{l_1} - P_2$$

Znak $(-)$ zależy od tego, że siła jest skierowana na dół.

Odłóżmy od przyjętej osi odciętych (ac) na pionie, przechodzącym przez przekrój K odcinek $\overline{KK'}=1$ i przez koniec tego odcinka przeprowadźmy prostą równoległą do osi odciętych do przecięcia się tej prostej z pionem, przechodzącym przez koniec B wspornika i połączmy punkt b' z punktem a prostą.

Łamana linja $ab'k'$ jest poszukiwaną linją wpływową poprzecznej siły w przekroju K wspornika, co łatwo dowieść, porównując η z obliczenia i z rysunku. Wszystkie jej rzędne są ujemne.

§ 4. LINJA WPŁYWOWA MOMENTU ZGINAJĄCEGO W DANYM PRZEKROJU WSPORNIKA.

W wypadku obciążenia takiego samego, jak na rysunku 30, znajdziemy, że ciężary P_1 i P_2 wywołają w przekroju K wspornika, znajdującem się w odległości ξ od końca wspornika, następujący moment zginający M_k /rys:31/:

$$M_k = -P_1 \frac{x_1}{l_1} \cdot \xi - P_2 x_2$$

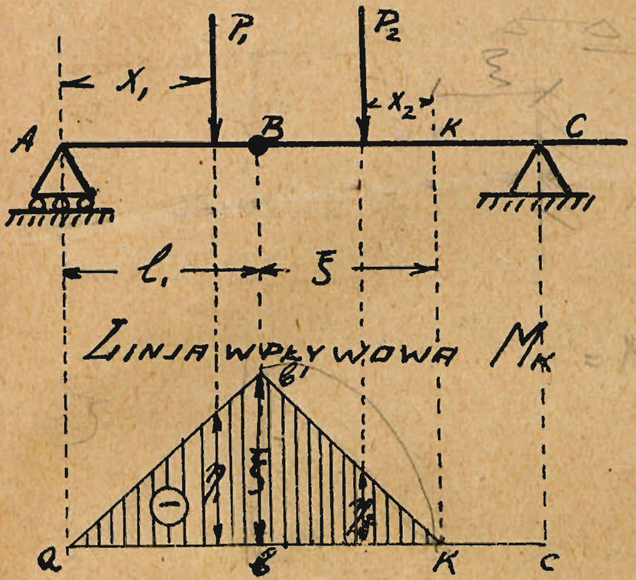
czyli

$$M_k = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2$$

gdzie:

$$\eta_1 = -\frac{x_1}{l_1} \xi \, ; \quad \eta_2 = -x_2 \, ;$$

Znak $(-)$ zależy od tego, że momenty sił P odpowiadają obrotowi w kierunku odwrotnym do kierunku strzałki zegarka.



rys. 31.

Pierwszy wyraz tego równania przedstawia moment nacisku $\frac{P_1 x_1}{l_1}$ względem punktu K, wywieranego przez belkę prostą AB na koniec wspornika B.

Linja wpływowa M_K otrzymuje się, odkładając od dowolnie przyjętej osi odciętych /równoległej do osi belki AB i wspornika BC/ na pionie przechodzącym przez przekrój K odcinek $bb' = \xi$ i łącząc punkt b' /koniec tego odcinka/ z punktami a i k.

W takim razie pod ciężarem P_1 otrzymujemy rzędną linji wpływowej:

$$y_1 = -\xi \frac{x_1}{l_1}$$

pod ciężarem P_2 - rzędną

$$y_2 = -x_2$$

gdzie ξ - jest to odległość danego przekroju K od końca wspornika.

Wszystkie rzędne tej linji wpływowej są ujemne.

§ 5. LINJA WPŁYWOWA SIŁY POPRZECZNEJ W DANYM PRZEKROJU BELKI WSPORNIKOWEJ MIĘDZY JEJ PODPORAMI.

Przedstawmy sobie, /rys.32/, że na belkę wspornikową działa tylko jeden ciężar postawiony n a p r a w o od danego przekroju K. - W tym wypadku siła poprzeczna w przekroju K równa się

$$V_k = C',$$

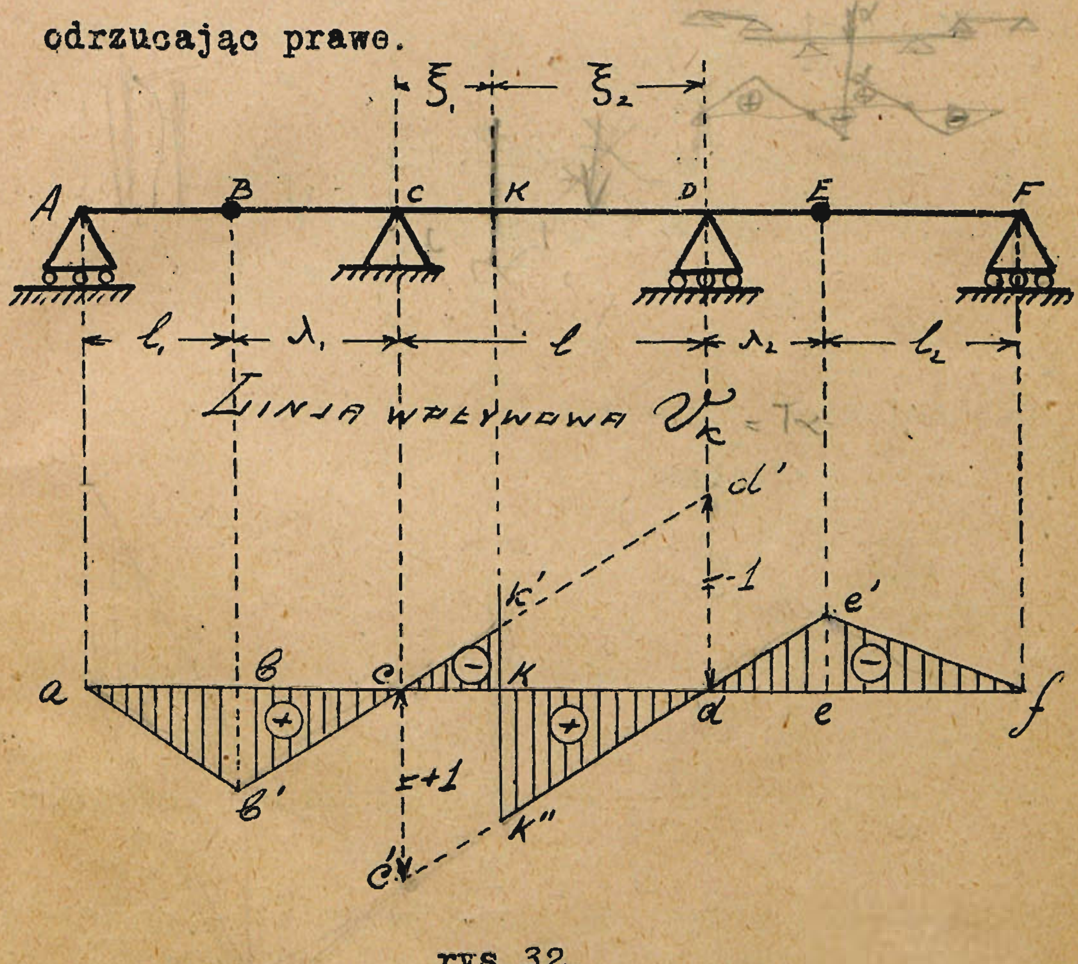
ponieważ z lewej strony przekroju K działa tylko jedna siła zewnętrzna, a mianowicie reakcja C' podpory C.

Jeśli zaś, odwrotnie, na belkę działa tylko jeden ciężar n a l e w o od danego przekroju K, w takim wypadku siła poprzeczna w przekroju K jest:

$$V_k = -D'$$

ponieważ z prawej strony przekroju K na belkę działa tylko jedna siła zewnętrzna, a mianowicie reakcja D' prawej podpory D.

W wyrazie siły poprzecznej V_k reakcja prawej podpory wchodzi ze znakiem ujemnym /-/, gdyż wyznaczamy linję wpływową dla siły poprzecznej, działającej na l e w y odcinek zespołu belek od A do K, czyli rozpatrujemy zawsze dla sił poprzecznych l e w e odcinki, odrzucając prawe.



rys. 32.

UWAGA: Odcinek $\overline{cc'} = \overline{dd'} = 1 =$ = jedności /liczba oderwana/.

Wychodząc zaś od prawego odcinka, żeby przejść do lewego - musimy zmienić znak siły poprzecznej.

W samej rzeczy, przypuśćmy, że na lewo od przekroju K działa na wspornikową belkę ciężar P, wtedy, na mocy określenia siły poprzecznej, możemy napisać:

$$V_k = C' - P$$

Z warunków równowagi belki mamy:

$$\sum Y = 0 = C' + D' - P$$

skąd

$$C' = -D' + P$$

Podstawiając, zamiast C' jego wartość do wzoru na V_k, otrzymamy:

$$V_k = -D' + P - P = -D'$$

co należało dowieść.

Do tegoż rezultatu doszlibyśmy i w tym wypadku, gdyby ciężar P, znajdujący się po lewej stronie przekroju K, działał na belkę prostą AB.

Z powyższego widać, że część linji wpływowej V_k, znajdująca się z lewej strony przekroju K jest identyczna z linją wpływową reakcji podpory D, przy zmianie znaku takowej, t.j. z linją wpływową $(-D')$, a część linji wpływowej V_k, znajdująca się z prawej strony przekroju K jest identyczna z linją wpływową $(+C')$ reakcji podpory (C).

Zatem, korzystając ze znanych nam z powyższego linji wpływowych C' i D' wyznaczona została /na rys. 32/ linja wpływowa V_k.

§ 6. LINJA WPŁYWOWA MOMENTU ZGINAJĄCEGO W DANYM PRZEKROJU BELKI WSPORNIKOWEJ MIĘDZY JEJ PODPORAMI.

W zależności od tego, czy obciążenie na belce położone jest tylko z prawej strony rozpatrywanego przekroju K, czy tylko z lewej strony tegoż przekroju, moment zginający M_k w przekroju K otrzymamy:

$$M_k = C'\xi_1 ;$$

albo odpowiednio:

$$M_k = D'\xi_2 .$$

W każdym z tych dwóch wypadków rozpatrujemy, w celach najłatwiejszego znalezienia momentu zginającego w przekroju K, tę część belki, na którą działa tylko jedna siła zewnętrzna, którą jest reakcja podpory.

Ponieważ zaś zginający moment określamy zawsze dla l e w e g o o d c i n k a b e l k i lub dla l e w e j c z ę ś c i z e s p o ł u b e l e k, więc, biorąc moment zginający dla prawej części, musimy zmienić znak.

Moment reakcji D' względem punktu K, jako dający obrót w kierunku odwrotnym do kierunku strzałki zegara, byłby ujemnym:

$$M'_k = -D'\xi_2,$$

ale ponieważ bierzemy zawsze moment zginający d l a l e w e g o o d c i n k a b e l k i, i mamy oprócz tego

$$M_k + M'_k = 0,$$

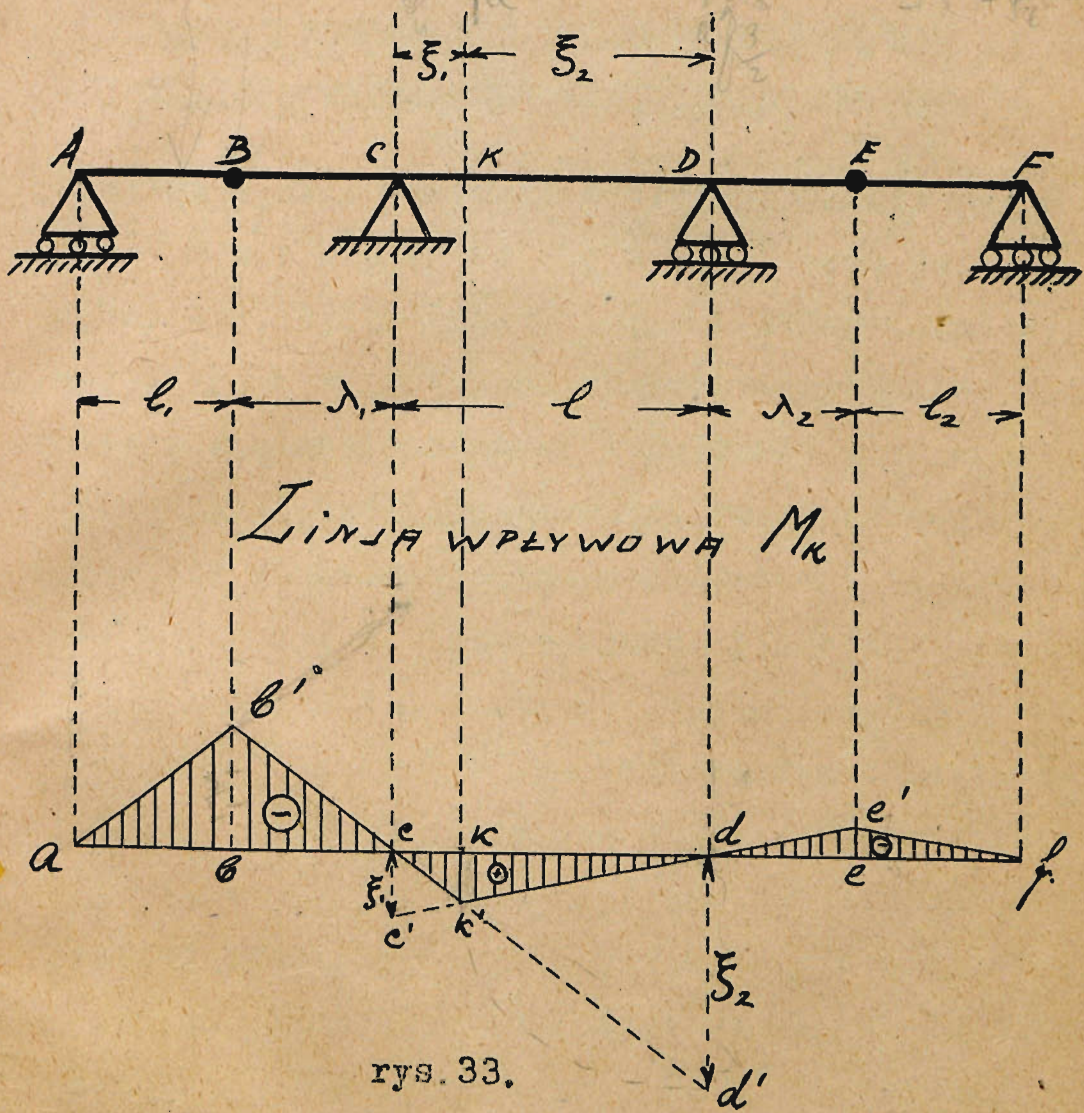
to otrzymamy:

$$M_k = -M'_k = D'\xi_2.$$

chyba na lewo

Zatem, rzędne linji wpływowej M_k na prawo od przekroju K równe są rzędnym linji wpływowej reakcji podpory D, pomnożonym przez linjową wartość ξ_1, a rzędne tejże linji wpływowej M_k na lewo od przekroju K są równe rzędnym linji wpływowej reakcji podpory C, pomnożonym przez linjową wartość ξ_2.

Na mocy tej uwagi została wyprowadzona /na rys.33/ linja wpływowa M_k, przedstawiająca łamaną linję $(a\,b\,c'\,k\,d'\,e\,f)$



rys. 33.

UWAGA: 1/ Stosunek $\frac{\overline{ck}}{\overline{cc'}} = 1$

2/ Rzędne η linji wpływowej M_K są to wartości linjowe /ramiona momentów/.

§ 7. LINJA WPŁYWOWA MOMENTU ZGINAJĄCEGO W DANYM PRZEKROJU BELKI WSPORNIKOWEJ MIĘDZY JEJ PODPORAMI PRZY POŚREDNIEM OBCIĄŻENIU.

W tym wypadku najpierw rysujemy linję wpływową M_k, jak przy b e z p o ś r e d n i e m obciążeniu /patrz §6-III i rys.33/. Potem, zastosowując twierdzenie dowiedzione wyżej w §3-I o tem, że linja wpływowa między dwoma sąsiedniemi węzłami /czyli poprzecznemi belkami/ musi być linją prostą, ścinamy prostemi linjami odpowiednie wierzchołki linji wpływowej, narysowanej d l a b e z p o ś r e d n i e g o o b c i ą ż e n i a.

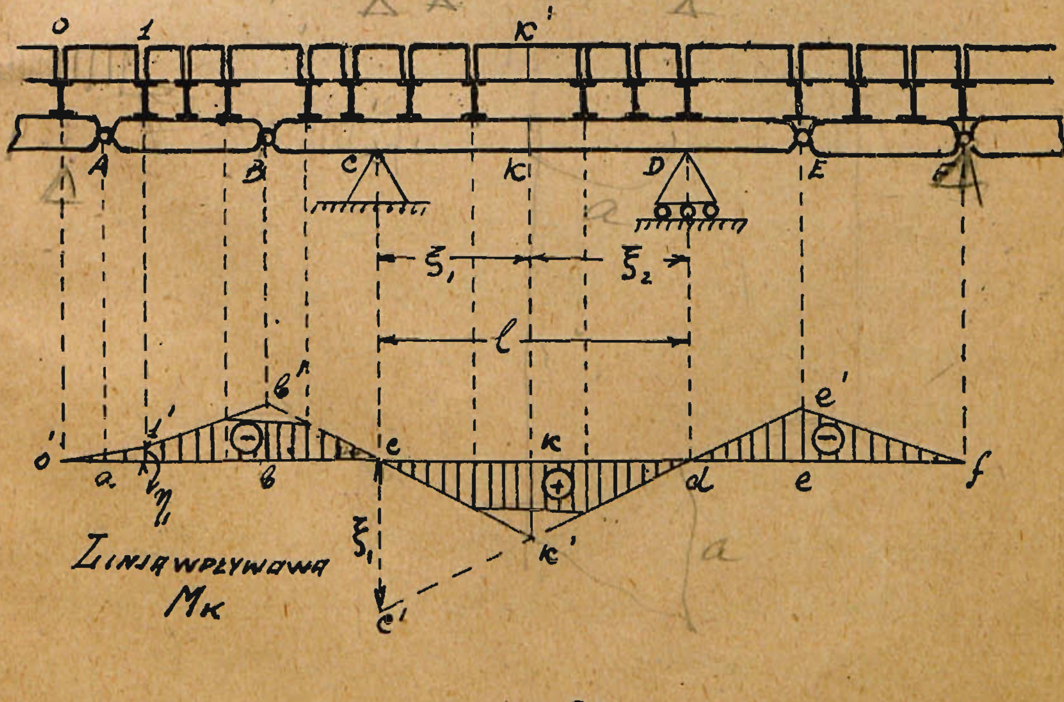
Na rys.34 wyznaczona jest w ten sposób linja wpływowa momentu M_k w przekroju K belki wspornikowej, leżącem między jej podporami C i D i znajdującem się między dwoma poprzecznemi belkami /czyli między dwoma węzłowemi punktami/. Oprócz tego przeguby A i B, oraz podpora C znajdują się każdy między dwoma węzłami.

Ciężar, znajdujący się w punkcie zerowym /0/ oczywiście nie działa na belkę prostą AB, wskutek czego nie wywołuje w przekroju K belki wspornikowej żadnego zginającego momentu, co odpowiada rzędnej linji wpływowej równej zeru $(y=0)$

. Ciężar zaś, równy jedności, przesunięty do węzła 1-go /1-sza poprzeczna belka/, oczywiście działa na prostą belkę *AB*, ponieważ poprzeczna belka N.1 leży na tej prostej belce i wywoła moment zginający w przekroju *K* belki wspornikowej, równy:

$$M_k = 1\eta_1$$

Między węzłami /0/ i /1/ linja wpływowa jest prostą. W ten sam sposób objaśnia się ścięcie kątów linji wpływowej przy wierzchołkach b' i k'.



rys. 34.

Biały trójkąt przy wierzchołku *K'* przedstawia linję wpływową dla momentu zginającego w przekroju

K' belki podłużnej, leżącej ponad tym wierzchołkiem.

ROZDZIAŁ IV.

LINJE WPŁYWOWE ŁUKÓW TRÓJPRZEGUBOWYCH.

§1. LINJA WPŁYWOWA POZIOMEJ SKŁADOWEJ REAKCJI PODPOROWEJ ŁUKU.

Jak wiadomo z I-ej Części Statyki pozioma składowa H reakcji podporowej łuku trójprzegubowego /rys.35/ wyraża się w następujący sposób:

$$H = \frac{M_{o,c}}{f},$$

gdzie $M_{o,c}$ - jest to moment zginający belki prostej $A'B'$ w przekroju jej, leżącym na pionie, przechodzącym przez środkowy przegub C, obciążonej temi samemi ciężarami, co i łuk; f - strzałka wzniesienia środkowego przegubu nad prostą AB.

Ponieważ zaś linję wpływową momentu zginającego belkę prostą w danym przekroju umiemy już wyznaczyć, więc chodziłoby tylko o podzielenie rzędnych wspomnianej linji wpływowej przez f.

Wskutek tego, jeśli oznaczymy przez ξ_1 i ξ_2 odległości środkowego przegubu C od podpór A i