K' belki podłużnej, leżącej ponad tym wierzchołkiem.

ROZDZIAŁ IV.

LINJE WPŁYWOWE ŁUKÓW TRÓJPRZEGUBOWYCH.

§1. LINJA WPŁYWOWA POZIOMEJ SKŁADOWEJ REAKCJI PODPOROWEJ ŁUKU.

Jak wiadomo z I-ej Części Statyki pozioma składowa H reakcji podporowej łuku trójprzegubowego /rys.35/ wyraża się w następujący sposób:

$$H = \frac{M_{o,c}}{f},$$

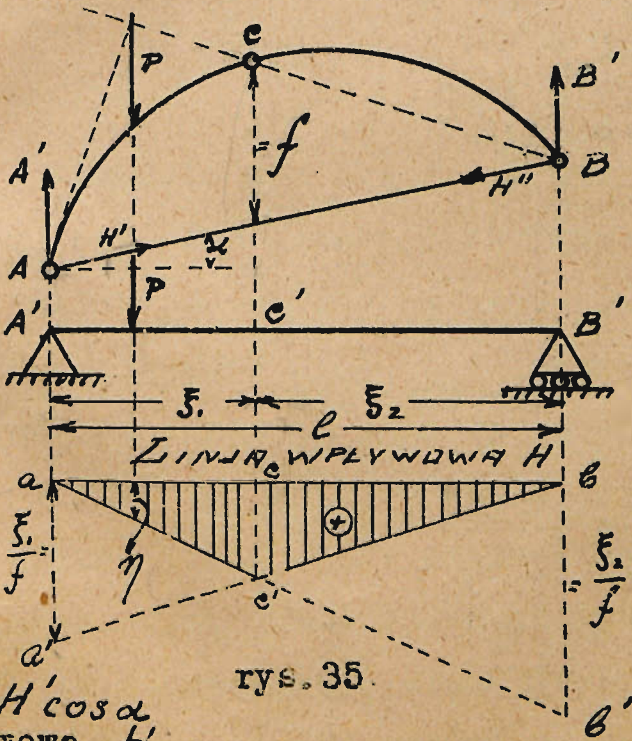
gdzie $M_{o,c}$ - jest to moment zginający belki prostej $A'B'$ w przekroju jej, leżącym na pionie, przechodzącym przez środkowy przegub C, obciążonej temi samemi ciężarami, co i łuk; f - strzałka wzniesienia środkowego przegubu nad prostą AB.

Ponieważ zaś linję wpływową momentu zginającego belkę prostą w danym przekroju umiemy już wyznaczyć, więc chodziłoby tylko o podzielenie rzędnych wspomnianej linji wpływowej przez f.

Wskutek tego, jeśli oznaczymy przez ξ_1 i ξ_2 odległości środkowego przegubu C od podpór A i

B, to odkładając od osi odciętych ab na pionie przechodzącym przez punkt A odcinek $\overline{aa'} = \frac{\xi_1}{f}$ /zamiast odcinka ξ_1, który należałoby odłożyć, gdybyśmy wyznaczali linję wpływową momentu zginającego belkę prostą $A'B'$ w przekroju C'/ i łącząc punkt a' z punktem b, a punkt c' /przecięcia prostej $a'b$ z pionem przechodzącym przez średni przegub C/ z punktem a, otrzymamy poszukiwaną linję wpływową funkcji H.

Trójkąt $(ac'b)$ przedstawia linję wpływową H.



rys. 35

$H = H' \cos\alpha$

Rzędne tej linji są to wartości oderwane.

Przy obciążeniu łuku ciężarem P otrzymamy /rys. 35/ wartość H :

$$H = P\eta$$

gdzie η przedstawi liczbowy spółczynnik przy sile P.

Odcinek $\overline{aa'} = \frac{\xi_1}{f}$ przedstawia liczbę oderwaną, jakiś ułamek.

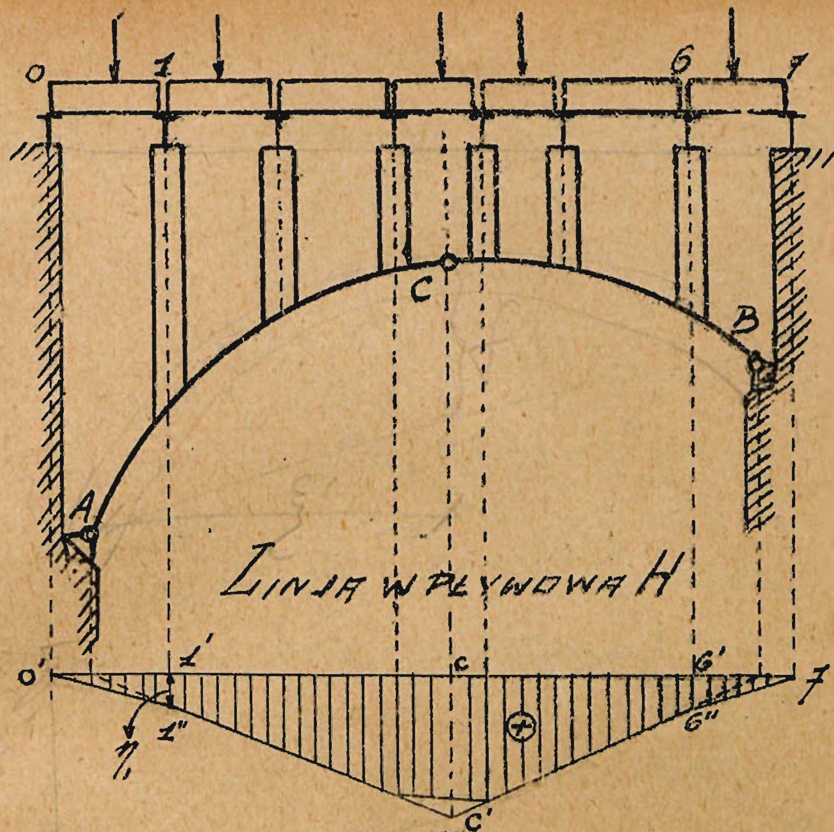
Jedność, którą należy przyjąć za miarę rzędnych η, oczywiście przedstawi odcinek równy:

$$\overline{aa_0} = \frac{\overline{aa'} \cdot f}{\xi_1} = 1$$

Przy pośredniem obciążeniu /rys.36/ linja wpływowa poziomej składowej H reakcji podporowej łuku pozostaje bez zmiany, jeśli punkty węzłowe /t.j. osie poprzecznych belek/ znajdują się na pionach, przechodzących przez punkty przegubowe A, B i G łuku.

W przeciwnym wypadku /t.j. jeśli punkty węzłowe nie znajdują się na pionach, przechodzących przez przeguby, czyli osie poprzecznych belek nie odpowiadają przegubom/, to otrzymuje się linja wpływowa, pokazana na rys.36.

Jak wiadomo z §3-I/ogólne własności linji wpływowych/ linja wpływowa między dwoma punktami węzłowemi /między dwoma poprzecznemi belkami/ jest linją prostą.



rys. 36.

§ 2. LINJA WPŁYWOWA MOMENTU STATYCZNEGO SIŁ ZEWNĘTRZNYCH W DANYM PUNKCIE DANEGO PRZEKROJU ŁUKU TRÓJPRZEGUBOWEGO.

Weźmy /rys. 37/ w danym przekroju (mn) łuku trójprzegubowego ABC punkt K i wyznaczmy względem tego punktu moment statyczny sił zewnętrznych, działających na lewą część łuku od podpory A do przekroju (mn).

Moment ten M_k będzie równy:

$$M_k = M_{(o,k)} - H \cdot y_k$$

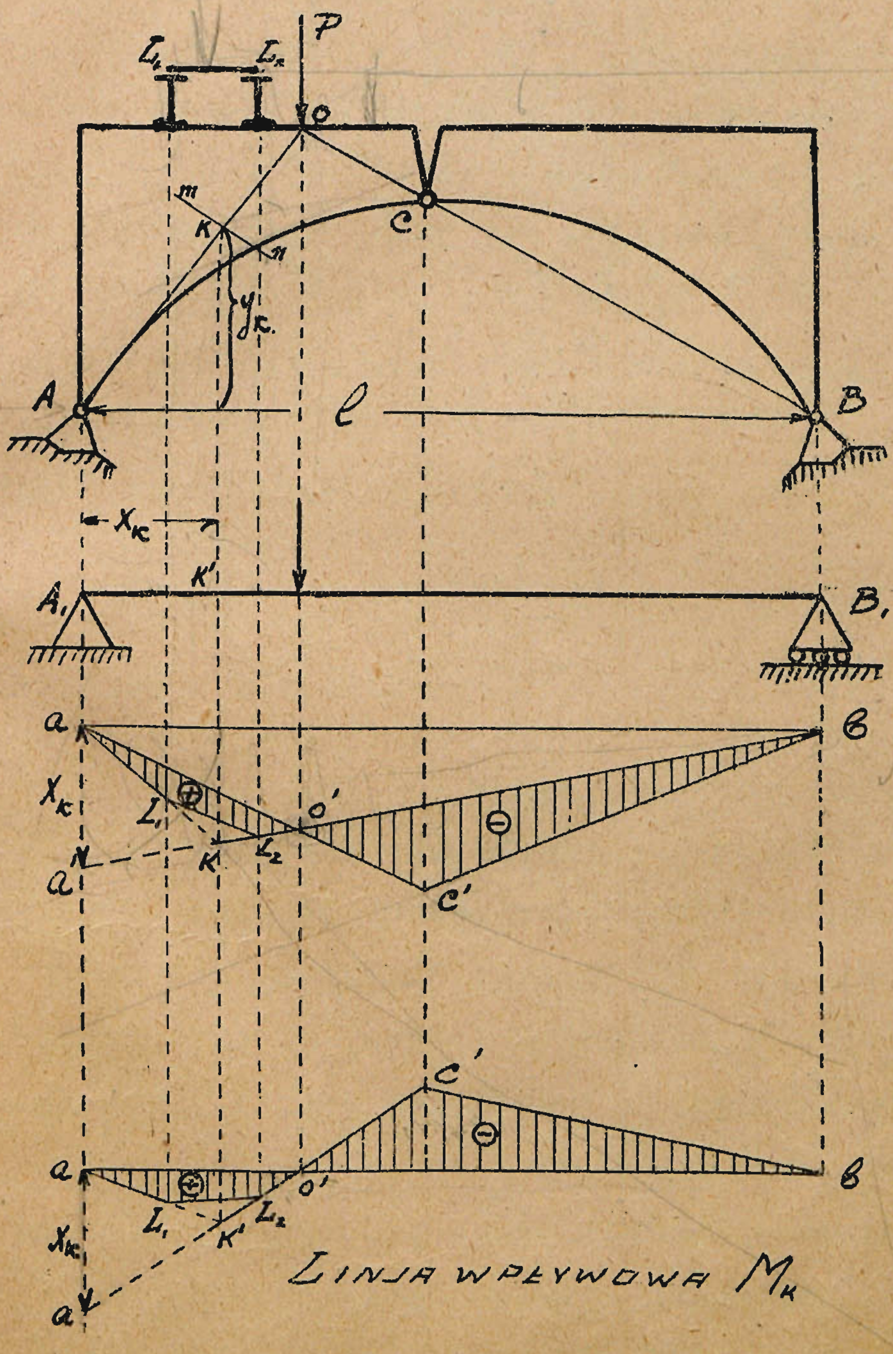
gdzie $M_{(o,k)}$ przedstawia moment w przekroju k' prostej belki AB o rozpiętości l równej rozpiętości rozpatrywanego łuku trójprzegubowego, mającej jednakowe z łukiem obciążenie. Przekrój k' leży na pionie przechodzącym przez punkt K.

Wyraz $(-Hy_k)$ przedstawia moment względem punktu K poziomej składowej reakcji podpory A.

Mając powyższy wzór dla M_k możemy wyznaczyć odpowiednią linję wpływową, gdyż linję wpływową momentu $M_{o,k}$ w danym przekroju prostej belki już umiemy wyznaczyć; oprócz tego umiemy wyznaczyć linję wpływową poziomej składowej H reakcji podpory łuku trójprzegubowego.

Żeby otrzymać linję wpływową funkcji (Hy_k) należałoby tylko rzędne linji wpływowej H pomnożyć przez stałą dla danego punktu K wartość y_k.

Pozatem od rzędnych linji wpływowej $M_{o,k}$ przedstawiającej pewien trójkąt z wierzchołkiem, leżącym na pionie, przechodzącym przez punkt K, należałoby odjąć rzędne także trójkątnej linji wpływowej funkcji (Hy_k), mającej wierzchołek a pionie, przechodzącym przez średni przegub C łuku.



rys. 37.

Pierwszy z wspomnianych trójkątów zbudować bardzo łatwo, odkładając na pionie, przechodzącym przez punkt A , od osi odciętych odcinek X_k i postępując jak wiadomo z poprzedniego.

Co zaś do drugiego trójkąta, którego rzędne przedstawiają wartości η linji wpływowej funkcji $(-H.y_k)$, to ten trójkąt ma wierzchołki a, b i c , leżące na pionach, przechodzących przez punkty A, B i C , więc dla wyznaczenia tego trójkąta dostatecznie byłoby znaleźć drugi punkt dla jednego z jego boków.

Ten punkt łatwo znaleźć będzie, to punkt zerowy funkcji M_k , t.j. znajdzie się z warunku:

$$0 = M_k = M_{(o,k)} - H.y_k = \eta_o$$

Należy zatem znaleźć takie położenie siły P na dźwigarze łuku trójprzegubowego, żeby przytem położeniu siły P , moment statyczny sił zewnętrznych, działających z lewej strony rozpatrywanego przekroju, był względem punktu K równym zeru.

W tym celu łączymy punkt podporowy A z punktem K , względem którego określamy moment, prostą linją i przedłużamy takową aż do przecięcia z prostą łączącą punkty przegubowe B i C .

Jeśli w punkcie przecięcia O tych prostych postawimy ciężar P, to takowy ciężar wywoła w punkcie K moment:

$$M_k = 0$$

W rzeczy samej, jedyną siłą zewnętrzną, działającą na lewą część łuku od A do K będzie pochyła reakcja podpory A, która przechodzi przez punkt K, więc daje względem tego punktu ramię momentu = 0.

Zatem znalezione położenie siły P określa punkt zerowy linji wpływowej, który leży na pionie przechodzącym przez punkt /0/.

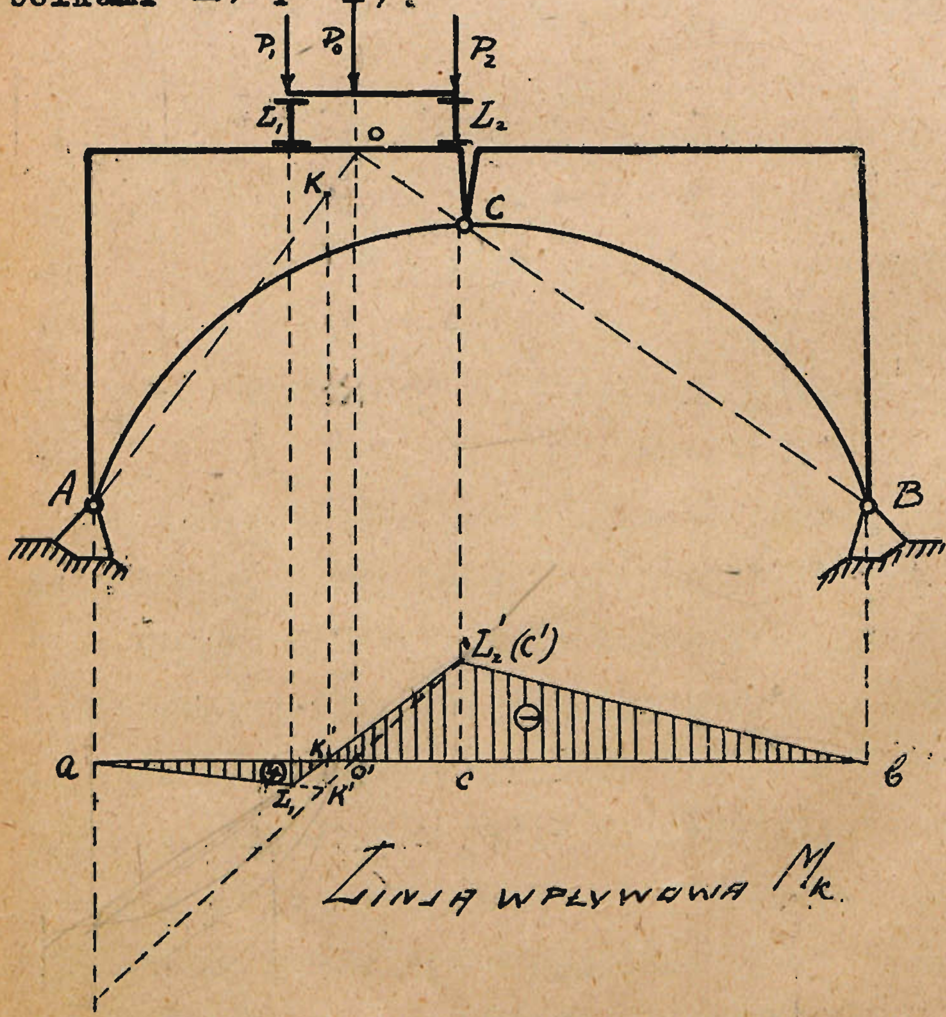
Dwa punkty a i o' określają położenie jednego boku drugiego trójkąta $(a o' c)$ i dają zaraz drugi bok tego trójkąta cb.

W ten sposób otrzymuje się zakreskowane pole wpływu /rys.37/, którego część $(a k' o')$ jest dodatnia, a pozostała część ujemna.

Przy pośredniem oddaniu sił, jeśli punkt K znajduje się między dwoma węzłami /t.j. dwoma poprzecznemi belkami/ L_1 i L_2, to linja wpływowa /na mocy ogólnych jej własności przy p o - ś r e d n i e m oddaniu siły /patrz §3-RI/ musi być prostą, wskutek czego odcina się trójkąt $(L_1' K' L_2')$.

Rzędne linji wpływowej mogą być odłożone od poziomej osi odciętych (ab), jak pokazuje dolny wykres /rys.37/.

Na rys.38 pokazany jest szczególny wypadek, kiedy punkty K i O znajdują się w tym samym przedziale między dwoma węzłami /dwoma poprzecznemi belkami L_1 i L_2/.

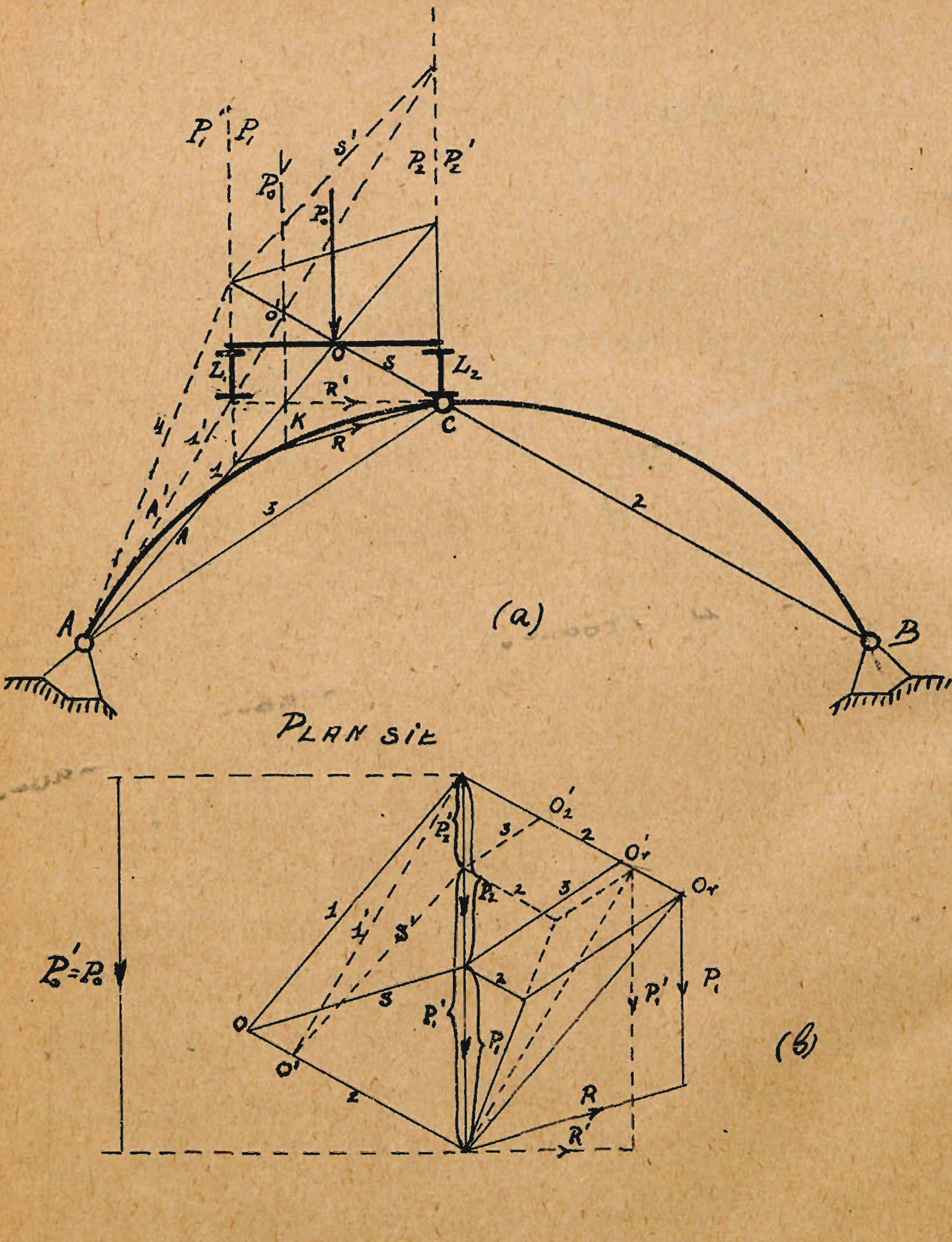


rys. 38.

Ten wypadek zdarza się w przedziale, do którego należy środkowy przegub C. W tym szczególnym wypadku punkt Z_2' łączy się z punktem C' i punkt O nie jest punktem zerowym.

Rys.39 objaśnia ten szczególny wypadek i pokazuje, że przy położeniu siły P_0 w punkcie O, jeśli siła ta rozłoży się /wskutek pośredniego oddania siły/ na dwie składowe P_2 i P_1, przechodzące przez węzły /poprzeczne belki/ Z_2 i Z_1, to wypadkowa R_1 siły A /reakcji podpory A/ i siły P_1 nie przejdzie przez punkt K, a zatem nie da względem tego punktu momentu, równego zeru. To znaczy, że w tym wypadku punkt O nie będzie punktem zerowym linji wpływowej M_k przy pośredniem oddaniu siły.

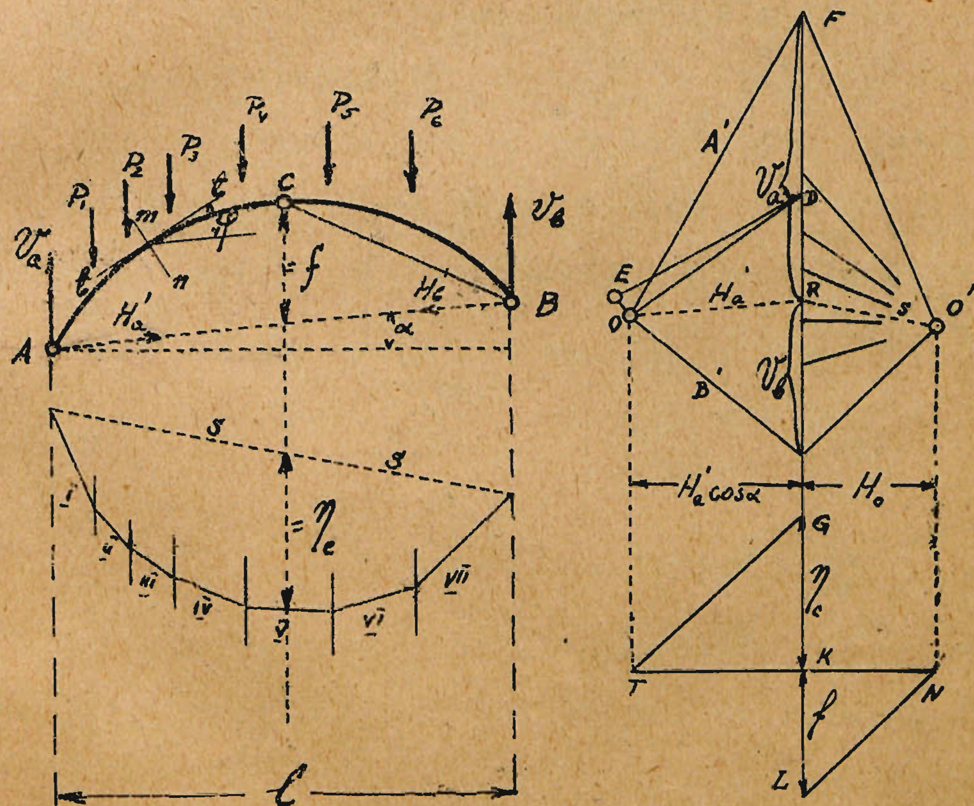
Natomiast, jeśli siłę P_0 przeniesiemy do nowego położenia P_0', przechodzącego przez nowy punkt O' i potem rozłożymy na dwie składowe P_2' i P_1', przechodzące przez węzły Z_2 i Z_1, to przy tym nowym położeniu siły P_0', otrzymamy, jak pokazano na rys.39 linjami punktowanemi wypadkową R', sił A' i P_1', przechodzącą przez punkt K, czyli punkt O' będzie punktem zerowym linji wpływowej M_k przy pośredniem oddaniu siły.



Rys. 39

§ 3. LINJA WPŁYWOWA DLA POPRZECZNEJ SIŁY W DANYM PRZEKROJU ŁUKU TRÓJPRZEGUBOWEGO.

Dla wyznaczenia linji wpływowej siły poprzecznej Q w danym przekroju (mn) łuku trójprzegubowego /rys.40/ należy znaleźć analityczny wyraz tej siły Q.



rys.40.

W tym celu dla łuku trójprzegubowego, obciążonego siłami $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ i P_6, określmy reakcje podporowe /rys.40/.

Pionowe składowe reakcji podporowych w łuku trójprzegubowym są, jak wiadomo, te same co w belce prostej o tej samej rozpiętości co łuk przy jednakowem obciążeniu.

Te pionowe składowe określamy za pomocą planu sił i wieloboku sznurowego i otrzymujemy w planie sił odcinki $RF = V_a$ i $JR = V_b$ /rys.40/.

Co zaś do składowych reakcji podpór $H_a' = -H_b'$ idących po linji AB, to określenie takowych otrzymamy, przyrównując do zera sumę momentów wszystkich sił, działających na lewą część łuku względem średniego przegubu, t.j. punktu C, a mianowicie:

$$-H_a' \cos\alpha \cdot f + M_{(o,c)} = 0$$

Skąd

$$H_a' \cos\alpha = \frac{M_{(o,c)}}{f}$$

gdzie $M_{o,c}$ jest moment zginający w przekroju C belki prostej o rozpiętości l, obciążonej temi samemi siłami, co łuk.

Ponieważ zaś:

$$M_{o,c} = \eta_c \cdot H_o$$

gdzie H_o - jest to odległość biegunowa planu sił, to mamy:

$$H_a = H_a' \cos\alpha = \frac{\eta_c \cdot H_o}{f}$$

Zatem możemy wykreślnie znaleźć:

$$H_{a_1} = H'_{a_1} \cdot \cos\alpha$$

z proporcji:

$$H_a : \eta_c = H_o : f$$

Mianowicie na przedłużeniu planu sił odłóżmy odcinki pionowe:

η_c i f, t.j. GK i KL

a na poziomej KN odcinek $\overline{KN} = H_o$

Prowadząc z punktu G, GT równoległe do LN, otrzymamy odcinek $TK = H_a = H'_a \cos\alpha$.

Jeśli w planie sił przeprowadzimy przez punkt R, t.j. przez punkt, działący plan sił, prostą RO równoległą do AB do przecięcia w punkcie O z pionem, przechodzącym przez punkt T, to otrzymamy:

$$\overline{RO} = H'_a$$

Łącząc punkt O z punktami F i J, otrzymamy wypadkowe A' i B' reakcji podpór A i B łuku trójprzegubowego.

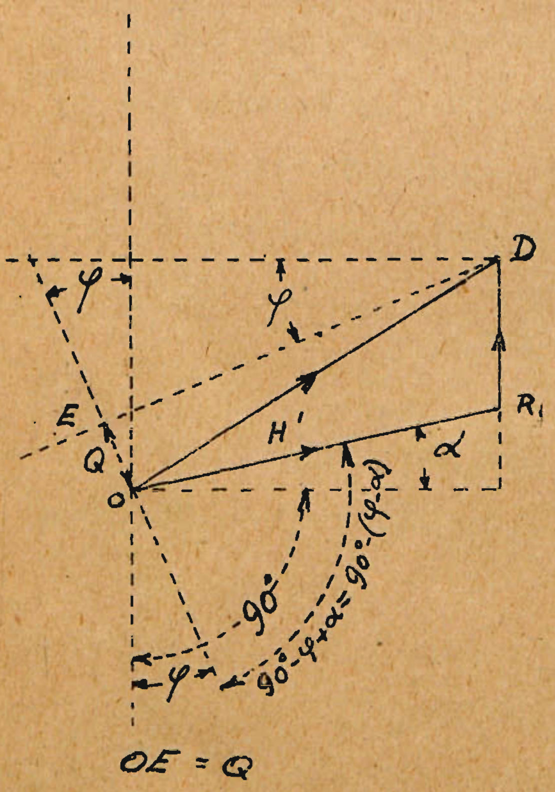
Przeprowadzając przez punkt O i przez końce odcinków, przedstawiających siły P, obciążające łuk, proste, otrzymujemy wypadkowe sił działających na odpowiednie części łuku. Na przekrój $(m.m)$ łuku, leżący między siłami P_2 i P_3 działa wypadkowa OD.

Rozłóżmy tę wypadkową OD na dwie składowe: jedną OE równoległą do przekroju $(m\,n)$ i drugą ED prostopadłą do przekroju $(m.n)$

Składowa OE przedstawi siłę poprzeczną czyli tnącą łuk w przekroju $(m.n)$

$$OE = Q_{(m.n.)}$$

Dla napisania analitycznego wyrazu dla siły poprzecznej $Q_{(m.n)}$ rozpatrzmy rysunek 41, przedstawiający w powiększonej skali część rysunku 40. Z tego rys.41 widać, że rzut wypadkowej OD na linję OE równa się sumie rzutów składowych OR i RD tej wypadkowej na tę samą linję OE.



rys.41.

Ponieważ zaś:

$$\overline{RD} = V_a - P_1 - P_2 \text{, a}$$

$$\overline{OR} = H'$$

i

$$\overline{OE} = \overline{RD} \cos\varphi - \overline{OR} \sin(\varphi-\alpha)$$

więc

$$OE = Q = (V_a - P_1 - P_2)\cos\varphi - H'\sin(\varphi-\alpha)$$

ale

$$(V_a - P_1 - P_2)$$

jest to siła poprzeczna $V_{(0,k)}$ w przekroju K prostej belki, mając rozpiętość l i obciążonej temi samemi siłami / P_1 P_2 P_3 i t.d./, co i łuk.

Skąd otrzymamy

$$Q = V_{(0,k)}\cos\varphi - H'\sin(\varphi-\alpha)$$

Podstawiając zamiast H' jego wartość $\frac{H}{\cos\alpha}$ mamy:

$$Q_k = V_{(0,k)}\cos\varphi - \frac{H\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}$$

albo

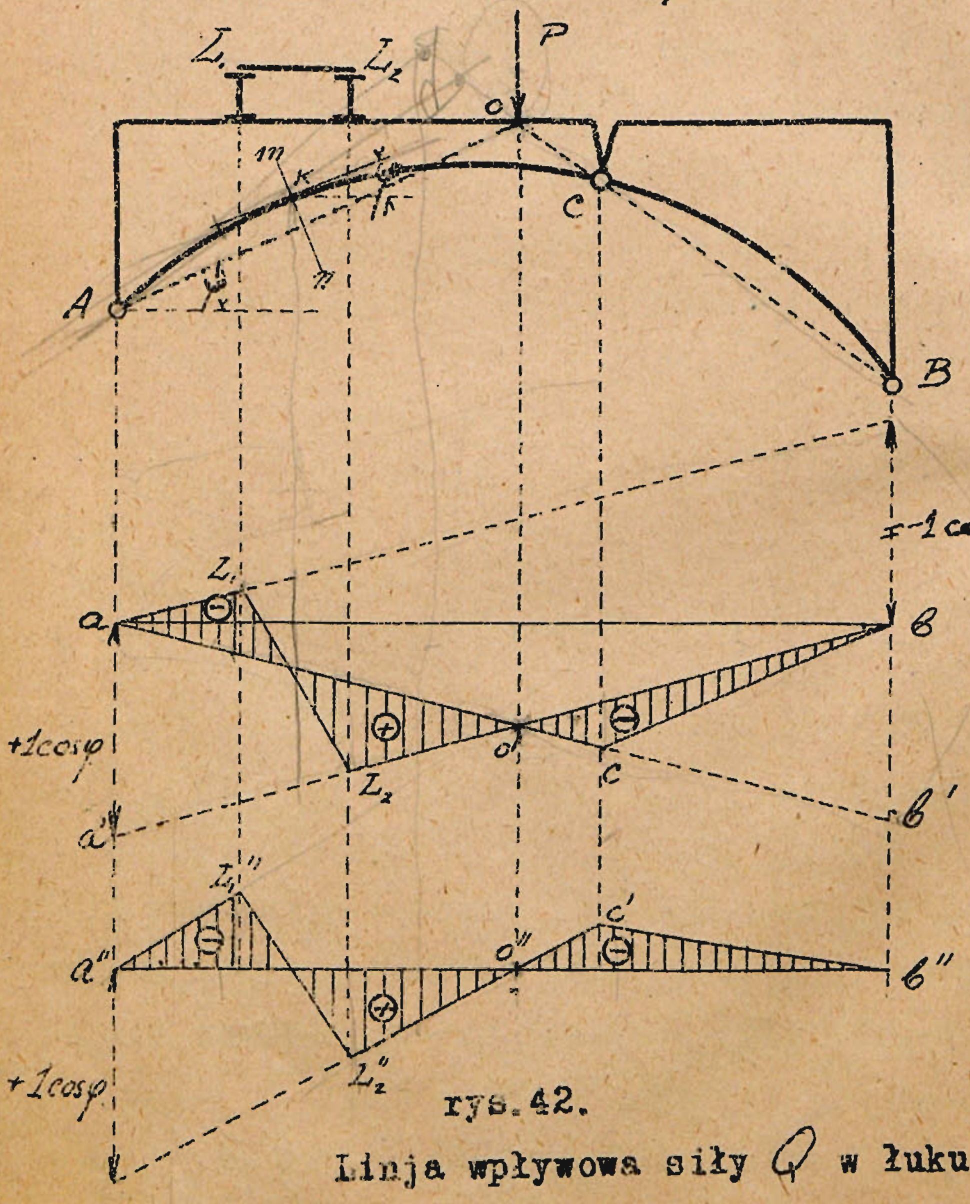
$$Q_k = V_{(0k)}\cos\varphi - H\sin(\varphi-\alpha)\sec.\alpha \quad /1/$$

Przy $\alpha = 0$

$$Q_k = V_{(0k)}\cos\varphi - H\sin\varphi \quad /2/$$

Powyższy wzór /1/ daje możność wyznaczyć linję wpływową poprzecznej siły w danym przekroju łuku trójprzegubowego, ponieważ umiemy budować linje wpływowe V_{ok} i H.

Przyjmijmy /rys.42/ poziomą prostą (ab) za oś odciętych i odłóżmy na pionach, przechodzących przez podpory A i B łuku odcinki: $\overline{aa'} = +1\cos\varphi$ i $\overline{bb'} = -1\cos\varphi$, oraz przeprowadźmy proste (ab') i (ba'). Punkty przecięcia tych prostych z pionami, przechodzącemi przez węzłowe punkty Z_1 i Z_2 łuku, połączmy prostą (Z_1', Z_2')



rys.42.

Linja wpływowa siły Q w łuku trójprzegubowym.

Łamana linja $(a L_1' L_2' b)$ przedstawia, jak wiadomo z powyższego, linję wpływową funkcji:

$V_{(o,k)} \cos\varphi$

Dla otrzymania pola wpływowego funkcji Q_k potrzeba, jak widać z wzoru /1/, odjąć od pola wpływowego funkcji $V_{(o,k)} \cos\varphi$ pole wpływowe funkcji $H \sec\alpha (\sin\varphi - \alpha)$. To ostatnie pole przedstawia trójkąt, otrzymujący się z pola wpływowego H przez pomnożenie rzędnych tego pola przez $[\sec\alpha \cdot \sin(\varphi-\alpha)]$. Dwa wierzchołki tego trójkątnego pola leżą w punktach a i b, trzeci zaś wierzchołek znajduje się na pionie, przechodzącym przez środek średniego przegubu C łuku. Wskutek tego dla zbudowania trójkąta $(a c b)$ dostatecznie znaleźć jeden punkt, leżący na jednym z boków tego trójkąta. Taki punkt może być znaleziony dla boku (ac) tego trójkąta, a mianowicie punkt O', leżący na przecięciu się prostej $(L_2 b)$ z pionem przechodzącym przez punkt O. Punkt zaś O otrzymuje się jako p u n k t z e r o w y dla siły poprzecznej Q_k, jest to taki punkt, że postawiona w niem siła P nie wywołuje w danym przekroju K łuku siły poprzecznej, czyli że od tej siły P otrzymujemy $Q_k = 0$

Dla znalezienia tego punktu (O) przeprowadzamy przez podporowy punkt (A) łuku linję (AO), prostopadłą do przekroju (mkn) /w którym szukamy siły poprzecznej/ aż do przecięcia się tej linji AO z linją BC, przechodzącą przez punkt podporowy B i przez środek środkowego przegubu C. Siła P postawiona w punkcie (O) wywołuje, jak wiadomo, reakcje podpór AO i BCO. Zatem jedyną siłą zewnętrzną, działającą na część łuku od podpory A do przekroju (m,k,n) jest reakcja lewej podpory (A,O), skierowana prostopadle do przekroju (m,k,n) t.j. dająca w tym przekroju siłę poprzeczną $Q_k = O$. Skąd widać, że punkt O', leżący na pionie, przechodzącym przez punkt O, jest punktem zerowym linji wpływowej Q_k.

Łącząc punkt O' z punktem a i przedłużając linję (ao) do przecięcia się w punkcie c z pionem przechodzącym przez środek przegubu C i łącząc punkt c z punktem b, otrzymamy poszukiwane pole wpływowe funkcji $H \sec\alpha \cdot \sin(\varphi-\alpha)$

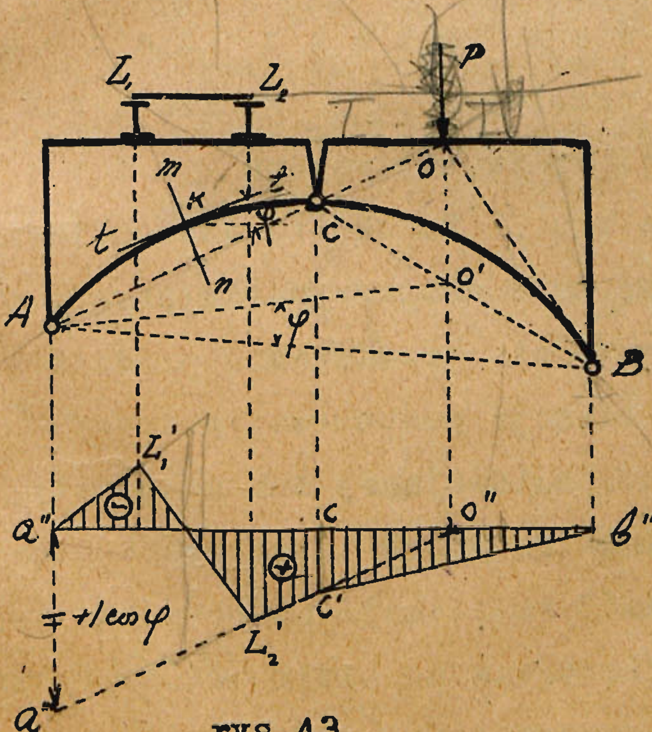
Zakreskowane /na rys.42/ pole przedstawia różnicę pól wpływowych funkcji $V_{(ok)}\cos\alpha$ i $H\sec\alpha \cdot \sin(\varphi-\alpha)$ t.j. poszukiwane pole wpływowe.

Rzędne tego pola dogodniej jest odkładać od poziomej linji $(a'b'')$ i wtedy pole wpływowe funkcji Q

otrzymuje formę, wskazaną na dolnym wykresie /rys.42/.

Należy zauważyć, że wskazane na tym rysunku 42 pole wpływowe siły poprzecznej Q_K ma dwa punkty zerowe i składa się z dwóch pól ujemnych i jednego pola dodatniego.

W wypadku szczególnym /rys.43/, kiedy punkt przecięcia się prostych AO i BC otrzymuje się z prawej strony środkowego przegubu C, możemy wyznaczyć linję wpływową Q_K, korzystając z ogólnego sposobu, użytego przy zbudowaniu linji wpływowej na rys.42. Mianowicie z punktu a'' prostej poziomej $a''b''$ odkładamy na pionie odcinek $a''a''' = +1\cos\varphi$, z punktu O przeprowadzamy



rys.43.

Linja wpływowa siły poprzecznej Q_K łuku trójprzegubowego, w szczególnym przypadku.

pion do przecięcia się z prostą $a''b''$ w punkcie O''; przez punkty O'' i a'' przeprowadzamy prostą do przecięcia się w punkcie C' z pionem, przechodzącym przez środek przegubu C i łączymy punkt C' z punktem b''. Zbudowanie pozostałej części linji wpływowej nie przedstawia żadnych trudności.

Otrzymana na rys.43 linja wpływowa Q_k ma t y l k o j e d e n p u n k t z e r o w y, a mianowicie na prostej $(Z_1'Z_2')$. Punktowi zaś O odpowiada w linji wpływowej rzędna n i e r ó w n a z e r u. Ta okoliczność objaśnia się w ten sposób, że w danym wypadku prosta AO' prostopadła do (m,kn) nie przedstawia przez się linji działania reakcji podporowej podpory A łuku od siły P, obciążającej łuk na pionie, przechodzącym przez punkt O. W rzeczy samej, z rysunku 43 widać, że reakcja podpory A jest w tym wypadku skierowana po linji (ACO), a ta prosta stanowi z przekrojem (m,kn) łuku kąt nie prosty, tylko ostry.