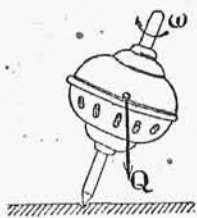


wywrócenia się; obrót ramy giroskopu będzie w tym razie taki, jak gdyby nie istniał giroskop. Wyjaśnienie takiego zachowania się ruchu ramy lub wozu, jakie stosujemy do tych dwóch przypadków, znajdzie czytelnik w przykładach o działaniu giroskopów o jednym stopniu swobody. Te dwa szczególne przypadki możemy uogólnić i wyjaśnienie to wypowiedzieć w następujący sposób: właściwości stabilizacyjne posiada jedynie giroskop o trzech stopniach swobody.

Przykłady powyższe mają na celu wskazanie metody obliczenia, jakie należy stosować przy stosowaniu giroskopu do stabilizacji przyrządów chwiejnych. Szczegóły tych badań jak np. wpływ siły odśrodkowej wozu na działanie giroskopu podczas ruchu jego po krzywym torze; wpływ oporów na ruch wozu lub statku znajdzie czytelnik u Föppl'a w VI-tym tomie na str. 220-ej; u Kleina i Somerfelda w tomie IV-tym na str. 903-ej; jak również u Routha w tomie II-gim; w szczególności zaś opis i wskazówki do obliczenia wozu jednoszynowego systemu Brennan'a podają A. Gray i J. G. Gray w dziele swoim „A Treatise on Dynamics“; w dziele tem znajdują się również liczne przykłady ruchu giroskopów.

90. Przykład. Ruch bąka. Jeżeli jeden punkt osi giroskopu swobodnego uczynimy nieruchomym w ten sposób, ażeby giroskop mógł swobodnie kręcić się około tego punktu, to po nadaniu giroskopowi obrotu około jego osi, i po ustawieniu tej osi pochyło względem pionu, otrzymamy obraz bąka, puszczonego swobodnie na płaszczyźnie o tyle chropowatej, że koniec osi jego nie będzie mógł się po niej ślizgać, weźmiemy ten szczególny przypadek pod uwagę, rys. 52-gi.



Rys. 52.

Wiemy z doświadczeń, że jeżeli ustawimy bąk niewirujący pochyło, to się on przewróci; jeżeli zaś będzie on w tem położeniu pochyłym wirował, to zachowanie się jego będzie inne. I zupełnie słusznie; gdy bowiem giroskop wirujący otrzyma ruchy dodatkowe, jak w danym razie ruch padania; to powstają wtedy momenty sił odśrodkowych, które wpływają na jego ruch.

Na dany bąk działa w tym razie siła ciężenia, której punkt przyłożenia jest w środku jego masy; oraz siła odporowa w punkcie podparcia. Ciężar bąka jest dany, siła zaś odporowa w punkcie podparcia jest nam nieznaną. Wektor momentu tych sił, jako sił zewnętrznych, działających na dany giroskop, względem bieguna obranego w punkcie podparcia, jest prostopadły do płaszczyzny (S, z) , przechodzącej przez środek masy S i oś pionową z , wystawioną w punkcie podparcia, i wektor ten pozostaje prostopadłym do tej płaszczyzny we wszystkich położeniach giroskopu,

jakie zajmuje on podczas swego ruchu. Ponieważ moment siły odporowej względem punktu podparcia równa się zeru, przeto uważać można, że w zadaniu tem znane są siły i ruch początkowy bąka, a należy obliczyć jego dalszy ruch. Ruchem początkowym bąka może być ruch wirowania, jeżeli wirujący bąk puścimy swobodnie; lub też ruch ten może być również złożony z ruchu wirowania i z prędkości osi bąka, jeżeli w chwili puszczenia bąka nadamy tej osi pewną prędkość, zwaną początkową. W celu obliczenia ruchu bąka z tych warunków, zastosujemy równanie momentu ilości ruchu

$$\bar{M}_P = \frac{d\bar{M}_v}{dt} \dots \dots \dots (209)$$

W celu uproszczenia obliczenia przyjmiemy najpierw pewne szczególne założenia co do wielkości i położenia wektora \bar{M}_v . Przyjmiemy mianowicie z pewnem przybliżeniem, że prędkość wirowania giroskopu jest tak znaczną, że prędkości dodatkowe, jakie otrzyma giroskop podczas swego ruchu, są wobec niej znikome; i następnie przyjmiemy, że wobec tak znacznej prędkości wirowania, kierunek wektora momentu ilości ruchu giroskopu pokrywa się z kierunkiem jego osi i razem z nim się porusza. Oznaczwszy wektor momentu ilości ruchu wirującego giroskopu w tym szczególnym przypadku literą \bar{N} ; (uważać go bowiem możemy za rzut na oś giroskopu właściwego wektora \bar{M}_v , który właściwie nie pokrywa się z tą osią); wyrazimy jego wielkość wzorem

$$\bar{N} = C \cdot \bar{\omega} \dots \dots \dots (210)$$

gdzie C oznacza moment bezwładności giroskopu względem jego osi; a $\bar{\omega}$ oznacza prędkość wirowania.

Odetnijmy następnie wektor \bar{N} na osi giroskopu od punktu jego oparcia, to na podstawie równania powyższego napiszemy wzór

$$\bar{M}_P = C \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt}; \dots \dots \dots (211)$$

z którego wynika, że przyrost prędkości obrotowej $\bar{\omega}$ podczas ruchu giroskopu powinien być ciągle równoległy do wektora momentu ciężaru giroskopu; t. j. że wektor $\bar{\omega}$, a z nim w myśl zrobionych założeń i wektor \bar{N} wraz z osią giroskopu, po puszczeniu go swobodnie z pewną prędkością wirowania, lecz bez dodatkowej prędkości, będzie zakreślał ruchem jednostajnym stożek prosty o osi pionowej i o półotworze równym kątowi początkowego nachylenia osi bąka. Koniec przeto wektora \bar{N} zakreśli podczas ruchu bąka koło ruchem jednostajnym, którego płaszczyzna będzie pozioma; a długość jego promienia równać się będzie wyrazowi

$$N \cdot \sin \vartheta,$$

Ponieważ wartość pochodnej wektora \bar{N} wyraża się prędkością końca jego, jaka powstaje podczas jego obrotu około osi pionowej, przeto na podstawie równania 209-go i przyjętych uproszczeń napiszemy równanie

$$Q \cdot s \cdot \sin \vartheta = N \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt};$$

w którym s oznacza odległość środka ciężkości bąka od punktu podparcia; Q ciężar jego, a $\frac{d\psi}{dt}$ prędkość obrotową osi giroskopu około osi pionowej; t. j. prędkość, zwaną precesyjną. Z równania tego obliczymy prędkość ruchu precesyjnego

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Q \cdot s}{N}; \quad \dots \quad (212)$$

Z wzoru tego wynika, że wartość prędkości precesyjnej jest dla danego bąka przy danych założeniach stałą; dla różnych zaś bąków różnie ona z wartością iloczynu $Q \cdot s$.

Okres czasu $T_{0,p}$ (czas obiegu precesyjnego), w jakim oś bąka zakreśli jeden obieg, obliczymy z wzoru

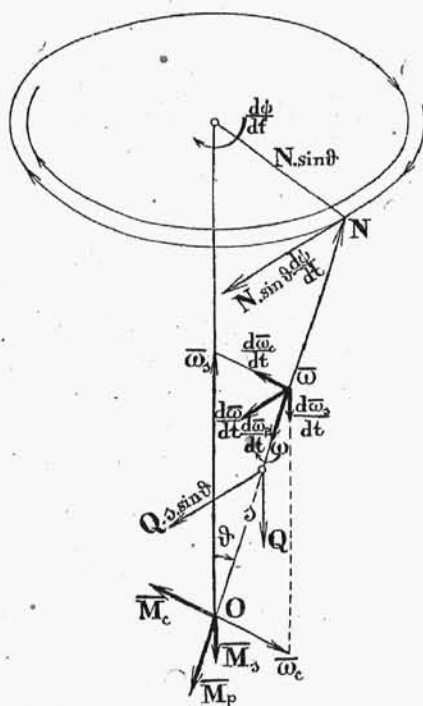
$$2\pi = \frac{d\psi}{dt} \cdot T_{0,p};$$

z którego po podstawieniu prędkości precesyjnej otrzymamy

$$T_{0,p} = 2\pi \cdot \frac{N}{Q \cdot s} \quad \dots \quad (213)$$

Ponieważ wartość N jest bardzo wielka, ze względu na znaczną wartość prędkości wirowania, okres przeto tego obiegu może być tak długi, że go z łatwością na zegarku odczytać możemy; a wtedy będziemy mogli z tej wartości obliczyć wielkość N dla danego ruchu bąka; lub też, jeżeli moment bezwładności bąka względem jego osi jest znany, będziemy mogli obliczyć jego prędkość wirowania, którą w inny sposób podczas ruchu bąka trudno zmierzyć.

Zbadajmy teraz, jaki wpływ na dany ruch bąka wywierają siły, a wła-



Rys. 53.

ściwie momenty siły tarcia i oporu powietrza, jakiego doznaje bąk podczas swego wirowania. Tarcie powstaje przy zetknięciu się osi bąka z podstawą, na której wiruje; zbadajmy przeto warunki fizyczne, w jakich odbywa się to zetknięcie. Choćby koniec osi materialnej bąka, który wspiera się na podstawie, był nawet nadzwyczaj ostry; musi on jednakże posiadać powierzchnię kulistą, która, znalazłszy pewne zagłębienie w podstawie, obraca się w tem zagłębieniu jak w łożysku, i wywołuje tarcie.

Podporządkowując występujące siły tarcia pod określenia, wyłożone § 134-tym i 136-tym tomu I-go, rozróżnimy w tym przypadku tarcie czopowe i tarcie storcowe. Jeżeliby giroskop stał pionowo, mielibyśmy tylko tarcie storcowe; gdyby zaś znajdował się w położeniu poziomem, wystąpiłoby tylko tarcie czopowe; gdy zaś wirujący giroskop jest nachylony względem pionu, to występują jednocześnie obydwie rodzaje tarcia; które wyobrazimy sobie powstałe w ten sposób, że tarcie czopowe jest wywołane składową poziomą wirowania; tarcie zaś storcowe wywołane jest składową pionową tegoż wirowania. Tarcia te wywołują momenty, których wektory \vec{M}_c i \vec{M}_s (czopowy i storcowy), rys. 53-ci, są równoległe do osi poziomej i pionowej, a zwroty posiadają przeciwne zwrotom odpowiednich składowych prędkości wirowania. Z równania przeto 209-go i 211-ego, w których przez \vec{M}_p rozumiemy będziemy w danym razie \vec{M}_c i \vec{M}_s wynika, że moment \vec{M}_c wywołuje ruch osi bąka w kierunku środka stożka, jaki zakreśliła ta oś pod działaniem momentu siły ciężkości; a \vec{M}_s wywołuje zmniejszenie się składowej pionowej prędkości wirowania.

Następnie — tarcie powietrza, jakie powstaje podczas wirowania bąka, wywołuje moment sił, którego wektor \vec{M}_p jest skierowany wzdłuż osi wirowania ze zwrotem przeciwnym zwrotowi tegoż wirowania; moment ten przeto wstrzymuje wirowanie bąka.

Wszystkie przeto te opory łącznie z jednoczesnem działaniem momentu siły ciężkości bąka nadają taki ruch jego osi, że zakreśla ona w przestrzeni powierzchnię stożkową; o otworze ciągle się zmniejszającym; i że wielkość prędkości wirowania stale się zmniejsza. Jeżeli dla zobrazowania sobie tego ruchu weźmiemy pod uwagę ruch dowolnego punktu osi giroskopu; to punkt ten zakreśli w przestrzeni krzywą, której rzut na płaszczyznę poziomą przedstawi pewnego rodzaju krzywą spiralną, zbliżającą się do punktu podparcia bąka; krótko mówiąc oś wirującego bąka, obracając się około osi pionowej, dąży do położenia pionowego; a osiągnąwszy to położenie lub też jemu blizkie, zacznie tracić do reszty swą energię kinetyczną na pracę tarcia storcowego i na pracę oporu powietrza, aż dojdzie do tego stanu prędkości wirowania, że najmniejsze odchylenie osi jego od pionu spowoduje jego przewrócenie się.

Przy jakiej minimalnej prędkości wirowania bąk się przewróci,

wzory powyższe nie dają nam wskazówek; gdyż wskutek przyjętych skróceń, nie zupełnie ujmują one zachodzące stosunki kinetyczne wirującego bąka; do obliczenia przeto tej prędkości należy zrobić założenia, które więcej odpowiadają w rzeczywistości zachodzącym warunkom fizycznym. Do przeprowadzenia tego nowego rachunku skłania nas jeszcze ta okoliczność, że wzór 211-ty wyraża ruch, który zaprzecza zasadom dynamiki, bo chociaż pobieżne spostrzeganie wskazuje, że oś bąka zakreśla rzeczywiście stożek około osi pionowej i przybiera ona z czasem kierunek pionowy; lecz przy bliższej obserwacji dostrzedz można, że ruch ten nie jest ruchem jednostajnym; a posiada pewne drgania poprzeczne do powyższego ruchu; jak również — pewne drgania w kierunku swego toru; a o drganiach tych równanie 211-te nie mówi. Wyniki powyższe są przytem sprzeczne z zasadą zachowania energii; bąk bowiem otrzymuje pewien ruch obrotowy około osi z ; a więc — i nową energię kinetyczną, która powstaje bez nakładu pracy mechanicznej; ciężar bowiem w myśl opisu danego ruchu nie wykonuje pracy; środek bowiem ciężkości w myśl tych rozważań zakreśla koło poziome, gdy nie uwzględniamy tarcia; a nawet ciężar ten wykonuje pracę odjemną, jeżeli przyjmiemy pod uwagę, że oś jego zbliża się do osi pionowej. Niezgodności te są wynikiem niezupełnie zgodnych z rzeczywistością i przytem nawet sprzecznych z sobą założeń; bąk bowiem, nabywając obroty dodatkowe, np. obrót około osi z , obraca się właściwie około osi wypadkowej tych obrotów, której kierunek nie pokrywa się z kierunkiem osi bąka; jakieżmy to w danym rachunku przyjęli; a więc wskutek tego i kierunek wektora \vec{M}_v nie może pokrywać się z tą osią.

Wobec tych sprzeczności, przyjmijmy teraz do obliczenia ruchu bąka założenia, które dalej idą w swej dokładności, niż poprzednie, choć nie zupełnie jeszcze czynią zadość ściślemu ujęciu zjawiska; chociaż bowiem przyjmijmy, że oś chwilowego obrotu, t. j. oś wypadkowego obrotu bąka tworzy z nią pewien kąt, lecz w celu uniknięcia zawilego rachunku, przyjmijmy, że kierunek wektora momentu ilości ruchu pokrywa się jak poprzednio z osią giroskopu; co nie jest zgodne z rzeczywistością, a nawet nie jest w zgodzie z pierwszym założeniem; i na podstawie tych założeń przeprowadzimy najpierw jakościowe rozpatrywanie, a następnie obliczenie ruchu bąka, które już ze znacznym przybliżeniem będzie zgodne z rzeczywistym ruchem; sił jednakże oporowych w tym obliczeniu nie uwzględnimy.

W chwili puszczenia wirującego bąka swobodnie, t. j. bez żadnej dodatkowej prędkości, jest on pod działaniem tylko momentu siły ciężarzenia; wskutek czego po upływie czasu Δt pochyli się jego oś o pewien kąt, wskutek czego koniec wektora \vec{N} , który w danym obliczeniu wyobrażamy sobie ściśle związanym z osią bąka; nabędzie pewnej prędkości;

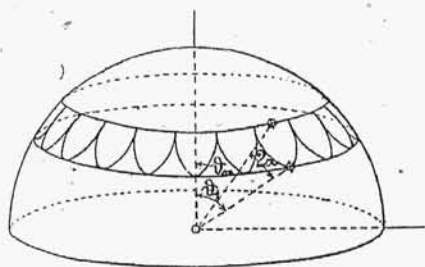
wektor tej prędkości z odwrotnym znakiem wyraża moment sił odśrodkowych, jakie powstały wskutek zmiany osi właściwego obrotu bąka; oś ta bowiem wskutek nowego obrotu, jakiego doznał bąk, pochylając się, nie pokrywa się już z osią jego symetrii; wektor przeto tego działania jest styczny do południka, jaki zakreśla koniec wektora \vec{N} podczas pochylania się bąka; a zwrot ma przeciwny zwrotowi prędkości końca tego wektora; moment przeto sił odśrodkowych, jaki wskutek tego powstał, dąży do obrócenia bąka około osi, którą wyobrazimy sobie przeprowadzoną przez punkt jego podparcia równoległą do kierunku pomienionego wektora; t. j. moment ten w następnym okresie czasu Δt przesunie koniec wektora \vec{N} po równoleżniku ze zwrotem dodatnim, Powstały stąd nowy wektor prędkości końca wektora \vec{N} z odwrotnym znakiem, wyraża wektor działania momentu nowych sił odśrodkowych; które w trzecim okresie czasu Δt przeciwdziałać będzie momentowi siły ciężkości podniesie oś bąka po południku ku górze. Ruch więc osi bąka składa się z trzech kolejnych ruchów:

- 1) z ruchu po kole biegunowym ku dołowi, który powstaje wskutek ciężaru bąka;
- 2) z ruchu po równoleżniku ze zwrotem dodatnim i
- 3) z ruchu po kole biegunowym ku górze.

Lecz ruchy w naturze nie odbywają się skokami i w danym więc razie otrzymamy obraz ruchu osi bąka, więcej zbliżony do ruchu rzeczywistego, jeżeli okresy czasu Δt wyobrazimy sobie podzielone na nieskończenie wiele małych okresów dt , i gdy weźmiemy pod uwagę, że działania momentów sił odśrodkowych są proporcjonalne do wielkości prędkości końca wektora \vec{N} . W celu szczegółowszego zobrazowania ruchu bąka, obierzemy jeden punkt jego osi, który nazwiemy wierzchołkiem bąka, i opiszemy na zasadzie powyższych rozważań ruch tego wierzchołka, jakiego on dozna po puszczeniu bąka swobodnie. Jeżeli bąk nie otrzymał prędkości początkowej, oprócz prędkości wirowania, to wierzchołek jego wskutek ciężaru bąka, zacznie opuszczać się po kole biegunowym, prostopadle do równoleżnika, na którym się znajdował w chwili puszczenia i z prędkością szybko wzrastającą. Z powstaniem jednakże i wzrostem tej prędkości powstaje i wzrasta proporcjonalnie do tej prędkości działanie sił odśrodkowych, które nadaje wierzchołkowi temu ruch w kierunku poziomym, t. j. po równoleżniku; z chwilą powstania tego ruchu powstaje nowe działanie giroskopowe, dążące do podniesienia wierzchołka bąka ku górze; które przy znacznym wzroście prędkości poziomej może go nawet podnieść; podniesienie to jednakże zgodnie z zasadą zachowania energii, może sięgnąć tylko do wysokości równoleżnika, z którego wyszedł. W ten sposób wierzchołek nieprzewracającego się bąka zakreśli

tor, zawarty pomiędzy dwoma równoleżnikami; tor ten przedstawiliśmy na rys. 54-tym w sposób dosyć przesadny, ażeby lepiej go unaocznąć.

Przebieg tego ruchu jest zgodny z zasadą zachowania energii; praca bowiem ciężaru bąka, podczas jego pochylenia się, idzie na energię kinetyczną, jaką on otrzymuje podczas jego upadania i podczas ruchu osi jego po równoleżniku; w najniższym



Rys 54.

położeniu posiada znaczną prędkość po równoleżniku; wskutek czego powstaje znaczne działanie momentu sił odśrodkowych, które dążą do podniesienia bąka; gdy zaś wierzchołek podniesie się na wysokość równoleżnika, z którego wyszedł; wtedy nie posiada on już żadnej prędkości; jeżeli jej nie posiadał początkowo; niema więc tu żadnego działania ubocznego, i tor wierzchołka w tym miejscu jest prostopadły do równoleżnika; tor zaś ten w najniższym położeniu jest styczny. Otóż to podnoszenie się i opuszczanie się wierzchołka bąka z jednoczesnem posuwaniem się po równoleżniku, jest tem drganiem, które spostrzegać się wogóle daje w wirującym i puszczonej swobodnie bąku; oraz jest tym ruchem osi bąka, który przedstawia się jako ruch obrotowy około osi pionowej z .

Jeżeli oś wirującego bąka przy puszczeniu go otrzyma pewną prędkość; to ruch jego osi będzie inny. Jeżeli np. nadamy wierzchołków prędkość początkową po równoleżniku, to tor wierzchołka będzie styczny również do równoleżnika górnego; wskutek czego postać tego toru znacznie się zmieni; zmieni się ona przytem i ze zmianą zwrotu tej prędkości i jej wielkości; powstawać bowiem będą działania różne, zgodne lub przeciwnie z działaniem momentu siły ciężkości.

W celu obliczenia ruchu bąka na podstawie tych ściślejszych założeń zastosujemy trzy wzajemnie prostopadłe osi spólrzędnych (ξ , η , ζ); rys. 55-ty; z których ζ pokrywa się z osią bąka, oś η jest do niej prostopadła i leży w płaszczyźnie, zwanej **biegunową**; i przechodzącej przez oś giroskopu ζ i oś pionową z , wyprowadzoną z punktu podparcia bąka; a oś ξ przyjmujemy prostopadłe do płaszczyzny tych dwóch osi. Przyjmujemy następnie, że osi te są sztywno związane z płaszczyzną biegunową, i razem z nią **obracają** się około osi pionowej z . Położenie tego układu **ruchomego**, a wraz z nim i położenie bąka względem przestrzeni kinetycznej określimy:

- 1) przez kąt ϑ , jaki tworzy oś bąka ζ z osią nieruchomą z ;
- 2) przez kąt ϕ jaki tworzy płaszczyzna biegunowa, z płaszczyzną nieruchomo obraną i przechodzącą przez oś z ;

3) przez kąt, jaki tworzy płaszczyzna, przechodząca przez oś bąka i obracająca się razem z nim około jego osi ζ , z płaszczyzną biegunową.

Pierwsze dwa kąty określają położenie osi bąka względem przestrzeni kinetycznej; kąt zaś trzeci określa położenie bąka, jako bryły względem płaszczyzny biegunowej. Ponieważ przeprowadzenie bąka z pewnego położenia do nieskończenie blizkiego może być osiągnięte przez powiększenie tych trzech kątów o nieskończenie małe przyrosty; chwilowy przeto stan prędkości bąka zostaje określony przez trzy pochodnie tych kątów względem

czasu; właściwą przeto jego prędkość obrotową $\bar{\varphi}$ w pewnej chwili wyrazimy wzorem

$$\bar{\varphi} = \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\phi}{dt} + \bar{\omega}; \quad (214)$$

w którym trzy wektory prędkości składowych posiadają kolejno kierunki osi ξ , osi η i osi ζ . Literą $\bar{\omega}$ oznaczyliśmy w tem równaniu prędkość obrotową bąka **względem** płaszczyzny biegunowej.

Lecz chwilową prędkość $\bar{\varphi}$ możemy również wyrazić równaniem

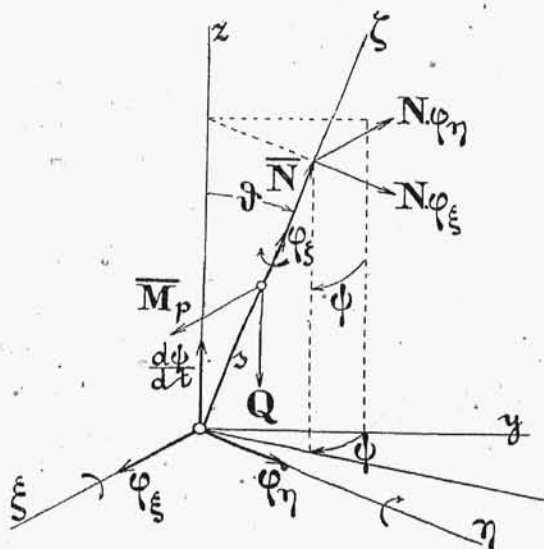
$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_\xi + \bar{\varphi}_\eta + \bar{\varphi}_\zeta; \quad (215)$$

w którym trzy składowe prędkości są rzutami prędkości chwilowej $\bar{\varphi}$ na trzy obrane osi w tem ich położeniu, w jakim one znajdują się w danej chwili.

Z tych dwóch równań znajdziemy związki kinematyczne, jakie zachodzą pomiędzy składowymi prędkościami równania 214-ego i takimiż składowymi równania 215-go. Związki te bowiem będą nam potrzebne do obliczenia jednych składowych; gdy dane będą drugie. W celu znalezienia tych związków, zrzutujemy te dwa równania kolejno na osi np. ξ , η i ζ i przyrównamy wartości tych rzutów jednego równania do wartości rzutów drugiego równania, rzuty te bowiem przedstawiają rzut jednego i tego samego wektora $\bar{\varphi}$ na obraną oś; a więc otrzymamy

$$\varphi_\xi = \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \varphi_\eta = - \frac{d\phi}{dt} \cdot \sin \vartheta; \quad \varphi_\zeta = \frac{d\phi}{dt} \cdot \cos \vartheta. \quad (216)$$

Przyjęte tu wielkości mają tylko na celu określenie położenia bąka i jego stanu chwilowej prędkości; a właściwe zestawienie równań dynamicznych i obliczenie ruchu bąka nastąpi dopiero teraz.



Rys. 55.

Ażeby rozpatrywania jakościowe, przytoczone poprzednio, ująć rachunkiem, należy na podstawie równania 93-ciego, przyrównać działania momentów sił odśrodkowych do iloczynów z odnośnych momentów bezwładności bąka i z przyspieszeń kątowych; a więc działanie, jakie powstaje np. podczas pochylania się wierzchołka bąka daje następujące równanie, porówn. rys. 55-ty:

$$N \cdot \varphi_{\xi} = A \cdot \frac{d\varphi_{\eta}}{dt}; \quad (217)$$

gdzie A oznacza moment bezwładności bąka względem osi η .

Działanie zaś, równoległe do osi ξ , jakie powstaje wskutek ruchu końca wektora N , łączy się z działaniem momentu siły ciężkości i daje równanie, rys. 55-ty

$$N \cdot \varphi_{\eta} + Q \cdot s \cdot \sin \vartheta = A \cdot \frac{d\varphi_{\xi}}{dt} \quad (218)$$

W celu przeprowadzenia dalszych obliczeń wyrugujemy z tych dwóch równań np. φ_{η} ; a w tym celu scałkujemy równanie 217-te i podstawimy z niego wartość φ_{η} w równanie 218-te; a przyjąwszy, że w chwili $t = 0$

$$\vartheta = \vartheta_0; \quad \text{oraz} \quad \varphi_{\eta} = 0,$$

i zważywszy, że $\varphi_{\xi} = \frac{d\vartheta}{dt}$; całka równania 217-go jest następująca

$$- N \cdot (\vartheta - \vartheta_0) = A \cdot \varphi_{\eta}; \quad \text{z którego}$$

$$\varphi_{\eta} = -\frac{N}{A} \cdot (\vartheta - \vartheta_0) \quad (219)$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie 218-te i zastąpieniu, przy niewielkim kącie odchylenia, $\sin \vartheta$ wartością łuku ϑ ; otrzymamy

$$-\frac{N^2}{A} \cdot \vartheta + \frac{N^2}{A} \cdot \vartheta_0 + Q \cdot s \cdot \vartheta = A \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2};$$

a po rozdzieleniu przez A i po uporządkowaniu otrzymamy równanie ruchu osi bąka w płaszczyźnie (ζ, z) , t. j. w płaszczyźnie biegunowej

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \left(\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A} \right) \cdot \vartheta - \frac{N^2}{A^2} \cdot \vartheta_0 = 0 \quad (220)$$

Równanie to jest równaniem różniczkowem drugiego rzędu linijne ze stałymi współczynnikami i stałym wyrazem.

W celu pozbycia się wyrazu stałego wprowadzimy do rachunku nową zmienną ε , określoną z równaniem

$$\vartheta = \frac{\frac{N^2}{A^2}}{\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A}} \cdot \vartheta_0 + \varepsilon; \quad \dots \quad (221)$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie 220-te otrzymamy równanie różniczkowe bez stałego wyrazu, które bezpośrednio będziemy mogli scałkować

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \left(\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A} \right) \cdot \varepsilon = 0. \quad \dots \quad (222)$$

Jeżeli bąk nie ma się przewrócić, to kąt ε nie powinien się powiększać z biegiem czasu; a to nastąpi gdy

$$\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A} > 0; \quad \dots \quad (223)$$

wtedy bowiem równanie 222-gie wyrazi ruch harmoniczny; wierzchołek przeto bąka wykona również ruch harmoniczny. Nierówność przeto 223-cia jest warunkiem stabilizacyi bąka; t. j. warunkiem, przy zachowaniu którego bąk będzie się wahał około pewnego położenia równowagi. lecz się nie przewróci.

Wahania te odbywać się będą około równoleżnika, wyznaczonego pierwszym wyrazem, znajdującym się po prawej stronie równania 221-go, gdyż on jest wielkością stałą, do której odchylenia $\pm \varepsilon$ się dołączają. Największe przeto odchylenie t. j. amplitudę nutacyi, którą oznaczymy literą a , wyznaczymy z różnicy dwóch kątów

$$a = \frac{\frac{N^2}{A^2}}{\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A}} \cdot \vartheta_0 - \vartheta_0 = \frac{\frac{Q \cdot s}{A}}{\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A}} \cdot \vartheta_0;$$

a że wartość $\frac{Q \cdot s}{A}$ wobec wartości $\frac{N^2}{A^2}$ powinna być bardzo mała; (ażeby, stosownie do wzoru 223-go, zabezpieczyć bąk od przewrócenia się), przeto pominiemy tę wartość i otrzymamy z dostatecznem przybliżeniem

$$a \cong \left(\frac{Q \cdot s}{N^2} \right) \cdot \vartheta_0 \quad \dots \quad (224)$$

Odchylenie tóż jest przeto bardzo małe, i o tyle będzie mniejsze, o ile bąk więcej zabezpieczony jest od upadku. Wierzchołek przeto

bąka określa pewną krzywą okresową, zawartą pomiędzy równoleżnikami, określonymi kątami

$$\vartheta_0 \text{ i } (\vartheta_0 + 2 \cdot \frac{Q \cdot s}{N^2} \cdot \vartheta_0 \dots \dots \dots (225)$$

Równaniem ruchu harmonicznego wierzchołka bąka jest cała równania 222-go; która ma postać, porówn. § 8-my III-go tomu,

$$\varepsilon = \alpha \cdot \cos \left(\frac{N}{A} \cdot t + \beta \right);$$

gdzie α i β są wielkości stałe; które obliczymy z następujących początkowych warunków ruchu

$$\text{dla } t = 0; \quad \varepsilon = -\alpha; \quad \text{oraz} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0;$$

po podstawieniu otrzymamy przeto

$$\beta = 0; \quad \alpha = -\alpha,$$

i wreszcie po podstawieniu tych wartości oraz wartości α z równania 224-tego

$$\varepsilon = -\frac{Q \cdot s \cdot A}{N^2} \cdot \vartheta_0 \cdot \cos \left(\frac{N}{A} \cdot t \right) \dots \dots \dots (226)$$

Okres T_n podwójnego wahnięcia wierzchołka bąka obliczymy ze wzoru 101-go tomu III-go, utożsamiając równ. 222-gie z równaniem 95-tym tomu III-ego a więc

$$T_n = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{N^2}{A^2} - \frac{Q \cdot s}{A}}} \cong 2\pi \cdot \frac{A}{N} \dots \dots \dots (227)$$

Ażeby obliczyć prędkość $\frac{d\psi}{dt}$, z jaką obraca się płaszczyzna biegunowa około osi z , rys. 55-ty, t. j. prędkość precesyi, należy wartość φ_η z równ. 216-ego podstawić do równ. 219-go, a otrzymamy szukaną prędkość precesyi

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{N}{A} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\sin \vartheta} \cong \frac{N}{A} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta};$$

w celu wyrażenia tej prędkości w funkcyi czasu podstawimy w to równanie

$$\vartheta = \vartheta_0 + a + \varepsilon,$$

a zważywszy, że wartość $(a + \varepsilon)$, jako bardzo małą w porównaniu z wartością ϑ_0 , pominiemy ją w mianowniku, otrzymamy

$$\frac{d\psi}{dt} \cong \frac{N}{A} \cdot \frac{(a + \varepsilon)}{\vartheta_0};$$

a po podstawieniu wartości a i ε z równania 224-go i 226-go otrzymamy

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Q \cdot s}{N} \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{N}{A} \cdot t \right) \right] \dots \dots \dots (228)$$

Obrót przeto płaszczyzny biegunowej około osi pionowej, t. j. prędkość precesyi jest złożona z prędkości stałej, która równa się wartości, obliczonej poprzednio w pierwszym przybliżeniu, równanie 212-te; oraz z ruchu okresowego; wyraz przeto drugi w tych nawiasach, odgrywa rolę poprawki, która wynika z dokładniejszych założeń.

Z równania tego jeszcze wynika, że wartość prędkości precesyi waha się pomiędzy zerem i wartością $2 \cdot \frac{Q \cdot s}{N}$; a wyraz 212-ty daje tylko średnią prędkość.

Dla $t=0$; oraz dla $t=2\pi \cdot \frac{A}{N}$; prędkość $\frac{d\psi}{dt} = 0$; okres przeto T_p całkowitej zmiany ruchu precesyjnego.

$$T_p \cong 2\pi \cdot \frac{A}{N}; \dots \dots \dots (229)$$

i jest równy okresowi T_n , równ. 227-me, podwójnego wahnięcia nutacyjnego. Wynik ten jest bezpośrednio zrozumiały; nutacja bowiem jest w związku dynamicznym z precesją. Jeżeli np. w pewnej chwili prędkość precesyi $= 0$, to nie powstaje w danej chwili działanie, którego by wektor był styczny do równoleżnika; w tej więc chwili nutacja musi być także $= 0$, o ile bąk nie otrzymał tej prędkości z zewnątrz. Okresy przeto zmian ruchów precesyi i nutacyi w danych warunkach muszą również występować jednocześnie.

Kąt ϕ_a , jaki tworzą z sobą płaszczyzny biegunowe, przechodzące przez dwa po sobie następujące miejsca, w których $\frac{d\psi}{dt} = 0$, obliczymy z równ. 228-go; gdy je scałkujemy pomiędzy granicami

$$t=0 \quad \text{ i } \quad t=2\pi \cdot \frac{A}{N};$$

kąt ten, po wykonaniu tych działań

$$\phi_a = 2\pi \cdot Q \cdot s \cdot \frac{A}{N^2} \dots \dots \dots (230)$$

Ruch więc wierzchołka bąka składa się z dwóch ruchów; z ruchu wahadłowego w płaszczyźnie biegunowej (ruch nutacyjny równ. 226-te) i z obrotu tej płaszczyzny około pionu z prędkością zmienną okresową, lecz zawsze jednozwnrotną; równ. 228-me.

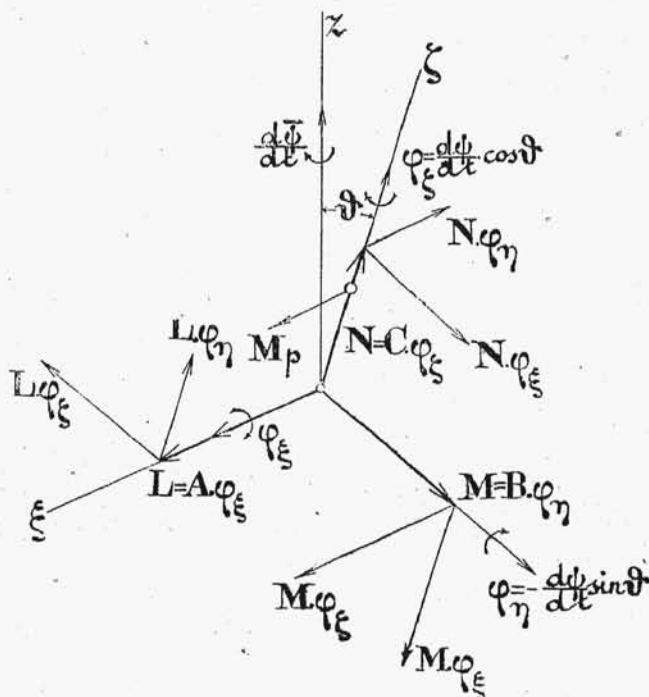
Z tych obliczeń, opartych na założeniu, że wektor momentu ilości ruchu bąka pokrywa się w każdej chwili z jego osią, wynika; że koniec tego wektora zakreśla pewien łuk w płaszczyźnie biegunowej, co jest

sprzeczne z równaniem momentu, równ. 209-te, które wyraża, że przyrost tego wektora powinien być równoległy do wektora momentu sił zewnętrznych, t. j. prostopadły do płaszczyzny biegunowej. Unikniemy tej sprzeczności, jeżeli przyjmiemy najogólniejszy przypadek, który ściśle odpowiada zachodzącym w rzeczywistości warunkom, że moment ilości ruchu i oś chwilowego obrotu bąka tworzą pewne kąty z jego osią.

91. Dokładne równania dynamiczne ruchu bąka. W celu obliczenia ruchu bąka na podstawie tych najogólniejszych założeń, oznaczmy jak poprzednio rzuty wektora chwilowej prędkości obrotu bąka na osi ξ , η , ζ literami φ_ξ , φ_η i φ_ζ ; oraz oznaczmy literami L , M , N rzuty na te osi wektora momentu \bar{M}_v ilości ruchu, jaką on posiada w danej chwili; a w celu obliczenia prędkości końca tego wektora wyobraźmy sobie, że wektor \bar{M}_v obraca się kolejno około tych osi współrzędnych, zamiast około jednej φ , co jest zgodne z prawem superpozycji ruchów; przy tem wyobraźmy sobie, że zamiast wektora \bar{M}_v obracać będziemy trzy jego składowe \bar{L} , \bar{M} , \bar{N} ; prędkości bowiem końców tych trzech wektorów będą składowymi prędkości końca wektora \bar{M}_v . Obrót przeto około osi ξ da wektory prędkości końców składowych M i N , których wyrazy są

$$M \cdot \varphi_\xi \quad \text{ i } \quad N \cdot \varphi_\xi ;$$

porówn. rys. 56-ty; obrót zaś tych składowych około osi η i następnie około osi ζ da nowe wektory tych prędkości; razem więc otrzymamy sześć składowych wektorów prędkości końca wektora \bar{M}_v ; wektory te są pokazane na rys. 56-tym; odwróciwszy następnie ich zwroty otrzymamy sześć momentów sił odśrodkowych, które łącznie z momentami sił



Rys. 56.

zewewnętrznych wywołują przyspieszenia obrotowe bąka około każdej z osi współrzędnych. Zestawiając kolejno wzory momentów względem osi ξ , η i ζ , otrzymamy następujące równania dynamiczne

$$\begin{aligned} N \cdot \varphi_{\eta} - M \cdot \varphi_{\zeta} + Q s \cdot \sin \vartheta &= \frac{dL}{dt}; \\ L \cdot \varphi_{\zeta} - N \cdot \varphi_{\xi} &= \frac{dM}{dt}; \\ M \cdot \varphi_{\xi} - L \cdot \varphi_{\eta} &= \frac{dN}{dt}. \end{aligned} \quad (231)$$

Po podstawieniu w te równania

$$L = \varphi_{\xi} \cdot A \quad M = \varphi_{\eta} \cdot A; \quad N = (\varphi_{\zeta} + \omega) C;$$

otrzymamy trzy równania różniczkowe, jednocześnie, z trzema zmiennymi φ_{ξ} , φ_{η} , φ_{ζ} , oraz ze zmienną ϑ .

Równania te są następujące:

$$\begin{aligned} (\varphi_{\zeta} + \omega) \cdot \varphi_{\eta} \cdot C - \varphi_{\eta} \cdot \varphi_{\zeta} \cdot A + Q \cdot s \cdot \sin \vartheta &= \frac{d\varphi_{\xi}}{dt} \cdot A; \\ \varphi_{\xi} \cdot \varphi_{\zeta} \cdot A - (\varphi_{\zeta} + \omega) \cdot \varphi_{\xi} \cdot C &= \frac{d\varphi_{\eta}}{dt} \cdot A; \\ 0 &= \frac{d(\varphi_{\zeta} + \omega)}{dt} \cdot C \end{aligned} \quad (232)$$

Podstawimy następnie wartości zmiennych φ_{ξ} , φ_{η} i φ_{ζ} z równań 216-tych i otrzymamy

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + (C \cdot \omega_0 - A \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \cos \vartheta) \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \sin \vartheta &= Q \cdot s \cdot \sin \vartheta; \\ A \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d\vartheta}{dt} \cdot (2 A \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \cos \vartheta - C \cdot \omega_0) &= Q; \\ \frac{d\phi}{dt} \cdot \cos \vartheta + \omega &= \omega_0 \end{aligned} \quad (233)$$

w których ω_0 oznacza bezwzględną prędkość wirowania w chwili puszczenia bąka. W pierwsze dwa równania wchodzi tylko zmienne ϕ i ϑ i zmienna niezależna t , wobec tego z tych równań obliczyć można ruch osi bąka; a wtedy z trzeciego — prędkość jego względną ω ; prędkość bowiem jego bezwzględna, t. j. względem przestrzeni kinetycznej jest podług tego równania stała i równa prędkości początkowego wirowania. Całki jednakże tych równań nie dadzą się wyrazić funkcjami znanymi; analiza przeto powyższych równań dynamicznych polegać może tylko na wprowadzeniu różnych skrótów, podobnych do skrótów, jakie stosowaliśmy w § 43-cim lub w § 57-mym tomu III-go; oraz jakie stosowaliśmy przy obliczaniu wahadeł;

a skrócenia te doprowadzą nas do równań poprzednio tutaj wyprowadzonych; opartych bezpośrednio na założeniach, upraszczających obliczenie.

92. Inne równania dynamiczne ruchu bąka. Zamiast powyższych trzech równań momentów ilości ruchu, określających ruch bąka, można również napisać inne równania dynamiczne; możemy np. napisać jedno równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, (które można również otrzymać jako jedną z pierwszych całek powyższych równań momentów; stosując do tego pravidła, podane w § 45-tym); oraz dwa równania momentów względem odpowiednio obranych osi; jedno np. względem osi pionowej z , a drugie względem osi bąka; moment bowiem siły ciężkości względem tych osi = 0. Równanie energii kinetycznej napiszemy na zasadzie wzoru 83-ciego i otrzymamy

$$d \left[\frac{1}{2} A (\varphi_z^2 + \varphi_\eta^2) + \frac{1}{2} C (\varphi_z + \omega)^2 \right] = d (Q \cdot s \cdot \cos \vartheta);$$

a po podstawieniu odpowiednich wartości z równań 216-tych i po scałkowaniu otrzymamy

$$1) \quad \frac{1}{2} A \left[\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cdot \sin^2 \vartheta \right] + \frac{1}{2} C \cdot \omega_0^2 + Q \cdot s \cos \vartheta = K_1,$$

gdzie K_1 jest stałą, obliczalną z warunków ruchu początkowego.

Równanie momentu ilości ruchu względem osi z , napiszemy; zważywszy, że moment ilości ruchu względem osi z jest rzutem na tę oś wektora momentu ilości ruchu bąka; lub też jest sumą rzutów na tę oś trzech jego składowych L , M , N ; równanie to jest następujące; rys. 56-ty

$$\frac{d}{dt} [-M \cdot \sin \vartheta + N \cdot \cos \vartheta] = 0;$$

a po podstawieniu w nie wartości z równ. 216-tych, i po scałkowaniu otrzymamy

$$2) \quad C \cdot \omega_0 \cdot \cos \vartheta + A \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \vartheta = K_2;$$

w którym K_2 obliczymy z warunków ruchu początkowego.

Trzecie równanie ma wyrażać moment ilości ruchu względem osi bąka; jest ono następujące

$$\frac{d}{dt} [C (\varphi_z + \omega)] = 0;$$

lub po scałkowaniu

$$3) \quad (\varphi_z + \omega) = \omega_0.$$

Te trzy równania możemy otrzymać również z równań 233-cich drogą algebraicznych przekształceń, stosując do tego twierdzenie z § 45-tego.