C. Kinetyka ruchu względnego.

13. Określenie ruchu względnego względem środka masy. W wielu razach dla uproszczenia rachunku lub dla unaocznienia sobie ruchu punktów danego układu przyjmujemy, że prędkość każdego punktu danego układu składa się z dwóch prędkości: z prędkości równej prędkości $\bar{v}_s$, jaką posiada w danej chwili środek masy całego układu i z prędkości $\bar{v}'_k$, określonej ze wzoru

$$\bar{v}_k = \bar{v}_s + \bar{v}'_k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

W celu unaocznienia sobie prędkości $\bar{v}'_k$, wyobrazimy sobie całą przestrzeń razem ze znajdującemi się w niej punktami, w ruchu postępowym z prędkością $\bar{v}_s$; prędkość wtedy względną punktów danego układu względem tej przestrzeni wyrazimy wektorem $\bar{v}'_k$, określonym wzorem powyższym; dlatego też prędkość $\bar{v}_s$ uważać będziemy jako prędkość unosząca, a prędkość $\bar{v}'_k$ jako względną, względem przestrzeni, poruszającej się ruchem **postępowym** z prędkością środka masy. Zobaczymy z następujących przykładów, że łatwiej nieraz obliczyć kolejno wielkości $\bar{v}_s$ i $\bar{v}'_k$, i następnie obliczyć prędkości właściwe; niż obliczyć je bezpośrednio; porówn. treść zakończenia § 51-go tomu II-ego.

Słusznem będzie mniemanie, że każdy ruch można rozłożyć na najrozmaitsze ruchy składowe; a obliczywszy każdy z nich, można wytworzyć sobie całokształt ruchu rzeczywistego; i rzeczywiście rozkłady takie bywają stosowane; przytoczony tu jednak rozkład znajduje najczęściej zastosowanie w naszych przykładach.

14. Ilość ruchu względnego danego układu punktów materyalnych. Na zasadzie określenia ruchu względnego wyrazimy ilość ruchu k-tego punktu wzorem

$$m_k \bar{v}_k = m_k \bar{v}_s + m_k \bar{v}'_k; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

a ilość ruchu całego układu wzorem

$$\Sigma (m_k \bar{v}_k) = m \bar{v}_s + \Sigma (m_k \bar{v}'_k); \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

a ponieważ na zasadzie równ. 4-ego $\Sigma (m_k \bar{v}_k) = m \bar{v}_s$, przeto

$$\Sigma (m_k \bar{v}'_k) = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Jeżeli sumę tę nazwiemy **ilością ruchu względnego** danego układu, to wynik ten wysłowimy: **ilość ruchu względnego każdego układu punktów materyalnych równa się w każdej chwili zeru.** Wynik ten oczywiście stosuje się tylko do przypadku, w którym przestrzeń, względem której odnosimy ruch względny, jest w ruchu postępowym z prędkością, jaką posiada w danej chwili środek masy danego układu.

15. Moment ilości ruchu względnego. Momentem ilości ruchu względnego danego układu punktów materyalnych nazwiemy sumę momentów ilości ruchu względnego oddzielnych jego punktów względem obranego bieguna.

Określenie to wyrazimy wzorem

$$\bar{M}_v' = \Sigma \, \mathrm{V} \, m_k \bar{v}_k' . \bar{r}_k,$$

w którym $\bar{M}_v'$ oznacza moment ilości ruchu względnego; $\bar{r}_k$ — promień wodzący, wyprowadzony z dowolnego bieguna do k-tego punktu; $\bar{v}'_k$ — jego prędkość względną, wyżej określoną.

Z określenia tego momentu wynika następująca jego właściwość. Ponieważ, stosownie do równania 29-go, $\Sigma (m_k \bar{v}'_k) = 0$, przeto układ wektorów $m_k \bar{v}'_k$ daje się przekształcić wogóle na parę wektorów w taki sam sposób, w jaki przekształciliśmy układ wektorów sił, których $\Sigma \bar{P}_k = 0$, — na parę sił. W § 29-tym tomu I-go dowiedliśmy, że wielkość momentu pary sił nie zależy od położenia bieguna; dla danego przeto przypadku wypowiemy to twierdzenie w sposób następujący: **moment ilości ruchu względnego każdego układu punktów materyalnych jest wielkością stałą,** względem każdego bieguna, obranego dowolnie w przestrzeni.

Znajdźmy teraz związek pomiędzy momentem ilości ruchu rzeczywistego, a momentem ilości ruchu względnego, względem jednego i tego samego bieguna.

Ponieważ ilość ruchu każdego punktu składa się z dwóch wektorów, rów. 27-me, moment przeto ilości ruchu każdego punktu wyrazić można sumą momentów jego wektorów składowych; moment przeto ilości ruchu całego układu wyrazić można sumą momentów wektorów $m_k \bar{v}_s$ i sumą momentów $m_k \bar{v}'_k$, — ilości ruchu względnego wszystkich punktów danego układu.

Wektory $(m_k \bar{v}_s)$ są wzajemnie równoległe, suma przeto ich momentów równa się momentowi ich wypadkowej, która, podobnie jak wypadkowa sił równoległych, t. j. wogóle, jak wypadkowa wzajemnie równoległych wektorów, proporcyonalnych do mas, — posiada punkt przyłożenia w środku masy i równa się wyrazowi $m \bar{v}_s$; — moment przeto tej wypadkowej wyrazimy wzorem wektorowym

$$\mathrm{V} \, m \bar{v}_s . \bar{r}_s ;$$

w którym $\bar{r}_s$ oznacza promień wodzący, wyprowadzony z obranego bieguna do środka masy danego układu.

Ponieważ moment ilości ruchu względnego nie zależy od położenia obranego bieguna, obierzemy go przeto w środku masy danego układu i wyrazimy ten moment wzorem

$$\Sigma \, \mathrm{V} \, m_k \bar{v}'_k . \bar{r}'_k,$$

w którym litery $\bar{r}'_k$ oznaczają promienie wodzące, wyprowadzone **ze środka** masy układu do wszystkich punktów danego układu. Moment przeto ilości ruchu danego układu punktów materyalnych, względem dowolnie obranego bieguna, wyrazić można wzorem

$$\Sigma \mathrm{V}\, m_k \bar{v}_k \,.\, \bar{r}_k = \mathrm{V}\, m \bar{v}_s \,.\, \bar{r}_s + \Sigma \mathrm{V}\, m_k \bar{v}'_k \,.\, \bar{r}'_k \quad . \; . \; . \; . \quad (30)$$

który wysłowimy: **wektor momentu ilości ruchu danego układu punktów materyalnych względem dowolnego bieguna, można wyrazić sumą dwóch wektorów: wektora momentu ilości ruchu środka masy tego układu względem obranego bieguna i wektora momentu ilości ruchu względnego bieguna, obranego w środku masy.**

W szczególnym przypadku, gdy obierzemy biegun momentów w środku masy układu, wtedy moment ilości ruchu **rzeczywistego** względem bieguna, obranego w środku masy, równa się momentowi ilości ruchu **względnego** względem tegoż bieguna, obranego w tym środku, równa się zeru. Twierdzenie to wyrazimy wzorem

$$\Sigma \mathrm{V}\, m_k \bar{v}_k \,.\, \bar{r}'_k = \Sigma \mathrm{V}\, m_k \bar{v}'_k \,.\, \bar{r}'_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Wzór ten otrzymamy również bezpośrednio z równania 30-tego po podstawieniu w nie $r_s = 0$.

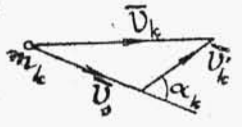
Równanie to wyrazimy: **moment ilości ruchu rzeczywistego względem bieguna, obranego w środku masy, równa się momentowi ruchu względnego względem tegoż bieguna.**

16. Energia kinetyczna ruchu względnego. Energię kinetyczną ruchu względnego danego układu punktów materyalnych oznaczymy literą T' i określimy ją wzorem

$$T' = \Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k v'^2_k\right); \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

w którym litery v'_k oznaczają prędkości względne, określone wzorem 26-tym.

Obliczymy teraz związek, jaki zachodzi pomiędzy wyrazem energii kinetycznej ruchu rzeczywistego a wyrazem energii kinetycznej ruchu względnego.



Rys. 1.

Wektory wzoru 26-go tworzą trójkąt, rys. 1-szy, z którego odczytamy, że

$$v_k^2 = v_s^2 + v'^2_k + 2 v_s \,.\, v'_k \,.\, \cos \alpha_k;$$

gdzie α_k oznacza kąt, zawarty pomiędzy kierunkami prędkości v_s i v'_k. Pomnożywszy to równanie przez $\frac{1}{2} m_k$ i zestawiwszy takie równania dla wszystkich punktów, otrzymamy po ich dodaniu

$$\Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k v_k^2\right) = \Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k v_s^2\right) + \Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k v'^2_k\right) + \Sigma\left(m_k v_s \,.\, v'_k \,.\, \cos \alpha_k\right) \quad . \quad (33)$$

ПР.1121

W trzecim wyrazie, znajdującym się po prawej stronie tego równania, wyniesiemy przed znak sumy wartość stałą v_s jako wspólny mnożnik i napiszemy ten wyraz w postaci

$$v_s \,.\, \Sigma (m_k \, v'_k \,.\, \cos \alpha_k).$$

Wartość sumy tego wyrazu jest sumą rzutów ilości ruchu względnego punktów tego układu na kierunek prędkości v_s; a ponieważ suma ilości ruchu względnego, porówn. wzór 29-ty, równa się zeru, przeto i suma ich rzutów równa się zeru; a więc wartość tego wyrazu z równania 33-go znika.

Równanie przeto 33-cie przekształci się na następujące

$$\Sigma (\tfrac{1}{2} m_k v_k^2) = \tfrac{1}{2} m v_s^2 + \Sigma (\tfrac{1}{2} m_k v'^2_k) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Równanie to wyraża szukany związek, który wysłowimy: **energia kinetyczna danego układu punktów materyalnych równa się sumie dwóch energii: energii kinetycznej środka masy układu**, gdy w tym środku wyobrazimy sobie skupione masy wszystkich punktów danego układu, — **i energii kinetycznej ruchu względnego tych punktów.**

D. Równania dynamiczne ruchu względnego.

17. Równanie dynamiczne momentów. Równania te mają na celu wyrażenie związków pomiędzy siłami, działającemi na dany układ, a ruchem **względnym**, jaki określiliśmy w § 13-tym; w szczególności zaś mają na celu wyrażenie związków pomiędzy **momentem sił zewnętrznych a momentem ilości ruchu względnego**, lub też związku pomiędzy pracą tych sił a energią kinetyczną ruchu względnego danego układu punktów.

Równanie dynamiczne momentów, t. j. równanie 18-te pozostaje w mocy dla dowolnego bieguna momentów; jeżeli przeto obierzemy go **w środku masy** danego układu i weźmiemy pod uwagę równ. 31-sze, wyrażające, że moment ilości ruchu właściwego względem bieguna, obranego w środku masy, równa się momentowi względem tegoż bieguna ilości ruchu względnego, to napiszemy bezpośrednio szukane równanie

$$\Sigma \,\mathrm{V} \bar{P}_k \,\bar{r}'_k = \frac{d}{dt} \Sigma \,\mathrm{V}\, m_k \bar{v}'_k \,.\, \bar{r}'_k \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Z porównania tego równania z równaniem 18-tem wynika, że są one jednakowe tak dla ruchu rzeczywistego, jak i względnego, określonego w § 13-tym, jeżeli **biegun** momentów obierzemy **w środku** masy danego układu.

18. Równanie równowartości pracy względnej i energii kinetycznej ruchu względnego. Znajdźmy teraz związek pomiędzy **pracą względną sił, a energią kinetyczną ruchu względnego.** Energię kinetyczną ruchu względnego określiliśmy wzorem 32-gim; określenie zaś pracy względnej jest następujące: **pracą względną danej siły nazywamy iloczyn z siły i z rzutu przesunięcia względnego** $d\bar{s}'_k$ **na kierunek siły,** czyli pracą względną nazwiemy pracę, jaką dana siła wykona podczas względnego przesunięcia jej punktu przyłożenia. Określenie to wyrazimy iloczynem skalarnym następującym wzorem

$$dL'_{P_1 k} = P_k \,.\, ds'_k \,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

w którym $dL'_{P_1 k}$ oznacza wartość pracy, nazwanej względną, siły przyłożonej do k-tego punktu, a ds'_k — rzut przesunięcia względnego tegoż punktu na kierunek siły.

Obliczmy teraz związek pomiędzy pracą rzeczywistą siły, a pracą względną tejże siły. Rzut przesunięcia względnego na każdą oś, a więc i na kierunek siły, równa się różnicy algebraicznej rzutu przesunięcia właściwego i unoszącego. Gdy podstawimy tę różnicę w iloczyn, wyrażający pracę względną, t. j. we wzór 36-ty, wtedy otrzymamy różnicę dwóch wyrazów, z których jeden jest wartością pracy rzeczywistej; drugi zaś jest iloczynem z siły i z rzutu przesunięcia unoszącego na kierunek tej siły.

Jeżeli napiszemy takie równanie dla każdego z punktów i następnie dodamy je, to otrzymamy wzór

$$dL'_P = dL_P - \dot{R}_k \,.\, ds_u \,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

gdzie ds_u oznacza rzut przesunięcia unoszącego na kierunek siły wypadkowej, wzór ten daje związek pomiędzy sumą prac względnych, a sumą prac rzeczywistych sił, przyłożonych do punktów danego układu.

W układach punktów materyalnych występują jeszcze siły wewnętrzne, których pracę właściwą obliczymy ze wzoru 20-go, pracę zaś względną tych sił obliczymy ze wzoru 37-go, gdy wektorom sił działających nadamy znaczenie sił wewnętrznych; a ponieważ suma tych sił wewnętrznych każdego układu punktów materyalnych równa się zeru, przeto drugi wyraz, stojący po prawej stronie tego równania, równa się w tym razie zeru; otrzymamy przeto równanie

$$dL'_W = dL_W \,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

gdzie dL'_W oznacza pracę względną sił wewnętrznych. Równanie to wysłowimy: **praca względna sił wewnętrznych każdego układu punktów materyalnych równa się pracy rzeczywistej tych sił.**

Sumę przeto względnych prac sił zewnętrznych i wewnętrznych danego układu punktów wyrazimy wzorem

$$dL'_P + dL'_W = dL_P - R_k \, . \, ds_u + dL_W \, .$$

Zastąpimy w tem równaniu, stosownie do równania 21-go, sumę prac sił zewnętrznych i wewnętrznych przyrostem energii kinetycznej całego układu, a otrzymamy równanie następujące

$$dL'_P + dL'_W = d\Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k v_k^2\right) - (\Sigma P_k) \, . \, ds_u \, .$$

Podstawimy następnie

$$R_k \, . \, ds_u = d\left(\tfrac{1}{2} m \, v_s^2\right);$$

siłę bowiem R wyobrazić sobie można przyłożoną do środka masy układu, w którym wyobrazimy sobie skupione masy wszystkich punktów.

Po tem podstawieniu otrzymamy, wziąwszy przytem pod uwagę równ. 16-te,

$$dL'_P + dL'_W = d\Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k v'^2_k\right) \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

Równanie to, które co do swej postaci jest jednakowe z równaniem 21-szem, zestawionem dla ruchu rzeczywistego, wysłowimy: **praca względna sił zewnętrznych, przyłożonych do punktów pewnego układu, łącznie z pracą (względną lub rzeczywistą) sił wewnętrznych równa się przyrostowi energii kinetycznej ruchu względnego punktów danego układu.**

Równanie 35-te i 37-me daje związek pomiędzy spółrzędnemi punktów względem środka masy i prędkościami względnemi; stosować je przeto można do obliczenia ruchu względnego, t. j. do obliczenia np. prędkości $\bar{v}'_k$; a że z równania 14-go obliczyć można prędkość $\bar{v}_s$ środka masy, przeto z tych dwóch prędkości obliczyć można prędkości właściwe; a następnie tory danych punktów i inne właściwości kinematyczne ruchu punktów danego układu.

Tożsamość równań dynamicznych ruchu względnego z takiemiż równaniami ruchu rzeczywistego jest wynikiem danego określenia ruchu względnego; dla innych ruchów względnych równania te wogóle się zmienią, nie mogą być przeto stosowane.

19. Przykład. Obliczyć ruch dwóch punktów materyalnych o masach m_1 i m_2, związanych z sobą nicią sprężystą i wyrzuconych w polu ciążenia ziemskiego, przyjąwszy, że nić podczas ruchu punktów pracuje na ciągnienie.

Jeżeli długość nici w stanie nierozciągniętym $= l$, a w stanie rozciągniętym w pewnej chwili $= r$; to w nici występuje naprężenie S, proporcyonalne do wydłużenia; wartość tego naprężenia wyrazimy wzorem

$$S = k \, . \, (r - l);$$

gdzie k oznacza spółczynnik proporcyonalności, właściwy danej nici. Układ dany złożony jest przeto z dwóch punktów materyalnych, masy bowiem nici, w celu ułatwienia obliczeń, nie uwzględnimy; na punkty te działają siły wewnętrze $\pm S$ i siły zewnętrzne, równe ciężarom tych punktów.

W myśl wypowiedzianego twierdzenia o ruchu środka masy równ. 14-te, środek ten o masie $(m_1 + m_2)$ porusza się tak, jak gdyby na niego działała tylko siła ciążenia $(m_1 + m_2)\,\bar{g}$. Środek ten przeto stosownie do obliczenia, podanego § 5-tym tomu III-go, zakreśla parabolę, którą wyznaczymy z początkowej jego prędkości.

W celu zaś obliczenia prędkości każdego z punktów, obliczymy najpierw ich ruchy względne i w tym celu wyobrazimy sobie stosownie do określeń, danych w § 13-tym tego tomu, że każda z tych prędkości złożona jest z prędkości unoszącej, równej prędkości środka masy i z prędkości względnej. Prędkość unoszącą w pewnej chwili obliczymy z ruchu środka masy; a prędkości względne obliczymy z równań ruchu względnego. Równanie ilości ruchu względnego danego układu jest, zgodnie z równ. 29-tem i z warunkami początkowymi, następujące

$$m_1\bar{v}'_1 + m_2\bar{v}'_2 = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

a równanie momentów tego ruchu, zgodnie z równ. 35-tem, jest nast.

$$\frac{d}{dt}\Sigma\, \mathrm{V} m_k\bar{v}'_k \,.\, \bar{r}'_k = 0;$$

moment bowiem sił zewnętrznych względem bieguna, obranego w środku masy, równa się zeru. Równanie to po scałkowaniu przyjmie postać następującą

$$\mathrm{V}\, m_1\bar{v}'_1 \,.\, \bar{r}'_1 + \mathrm{V}\, m_2\bar{v}'_2 \,.\, \bar{r}'_2 = \mathrm{V}\, m_1\bar{v}'_{1,0} \,.\, \bar{r}'_{1,0} + \mathrm{V}\, m_2\bar{v}'_{2,0} \,.\, \bar{r}'_{2,0} \quad . \quad . \quad (41)$$

Z równania 40-go wynika, że wektory ilości ruchów względnych obydwóch punktów tworzą w każdej chwili podczas ruchu parę wektorów, nie mogą bowiem tworzyć dwóch równoważących się wektorów, gdyż moment ich, jak wskazuje równ. 41-sze, nie jest równy zeru. Ponieważ wektory te tworzą jedną płaszczyznę, chwilowy przeto ruch względny tych punktów jest płaski, z czego wynika, że kierunki wektorów momentów ilości tego ruchu każdego z tych punktów względem bieguna, obranego na tej płaszczyźnie, wzajemnie się pokrywają. Z równania zaś 41-go wynika, że kierunki te nie zmieniają się podczas ruchu punktów; płaszczyzna przeto ruchu względnego tych punktów pozostaje podczas ruchu punktów do siebie równoległą. Właściwy zatem ruch tych punktów składa się z ruchu względnego, który odbywa się w płaszczyźnie, prostopadłej do wektora momentu początkowej ilości ruchu względnego i z ruchu postępowego o chwilowej prędkości $\bar{v}_s$. Zwrócić tu należy uwagę, że właściwości te stosują się do ruchu dowolnych dwóch punktów, pomiędzy którymi występują dowolnie zmienne siły przyciągające lub odpychające; doszliśmy bowiem do określenia tych właściwości, nie korzystając z właściwości sił, występujących pomiędzy tymi punktami. Wniosek ten przeto stosuje się również np. do dwóch punktów materyalnych, związanych nicią nierozciągliwą.

Ażeby obliczyć ruchy szczegółowe punktów danego w tem zadaniu układu, należy zastosować równanie równowartości pracy i energii kinetycznej ruchu względnego, równ. 39-te; w równanie to bowiem wchodzą wyrazy sił wewnętrznych. W tym celu obliczymy najpierw wartości pracy względnej sił wewnętrznych i takąż pracę sił zewnętrznych. Pracę względną sił zewnętrznych wyrazimy w myśl danego określenia, wzorem 36-tym

$$dL'_P = m_1\bar{g} \, . \, d\bar{r}'_1 + m_2\bar{g} \, . \, d\bar{r}'_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

A ponieważ promienie wodzące wyprowadzone są ze środka masy układu; przeto mamy związek

$$m_1\bar{r}'_1 + m_2\bar{r}_2' = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

z którego wynika, że

$$m_1 d\bar{r}'_1 + m_2 d\bar{r}'_2 = 0;$$

po podstawieniu tego wzoru w równanie 42-gie, otrzymamy, że praca względna sił ciężkości punktów danego układu równa się zeru. Wartość przeto pracy względnej sił wewnętrznych równa się przyrostowi energii kinetycznej ruchu względnego, co wyrazimy równaniem następującem

$$-S \, . \, dr'_1 - S \, . \, dr'_2 = d\left(\tfrac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \tfrac{1}{2} m_2 v'^2_2\right) \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Po wyrugowaniu z równania 40-go, 41-go 43-go, i 44-go, dwóch niewiadomych, np. niewiadomych $\bar{v}'_2$ i $\bar{r}'_2$, otrzymamy dwa równania z dwiema zmiennemi $\bar{v}'_1$ i $\bar{r}'_1$, z których obliczymy ruch względny punktu 1-szego; — w tenże sposób obliczyć można ruch punktu 2-go. Po przeprowadzeniu tego rachunku zobaczymy, że ruch tych punktów wyraża się wogóle funkcyą eliptyczną.

W szczególnym przypadku danego zadania, w którym przyjąć można, że długość l jest tak małą wobec długości r, że można wartość jej pominąć, równania te znacznie się uproszczą, otrzymamy bowiem zamiast funkcyi eliptycznych funkcye algebraiczne. Po obliczeniu np. z równ. 40-go i 43-go $\bar{v}'_2$ i $\bar{r}'_2$ i po podstawieniu tych wielkości do równania momentów, t. j. do równ. 41-go, otrzymamy

$$\mathrm{V}\, m_1\bar{v}'_1 \, . \, \bar{r}'_1 = \mathrm{V}\, m_1\bar{v}'_{1,0} \, \bar{r}'_{1,0}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

a następnie po podstawieniu tychże wartości, wyrażonych tylko algebraicznie, do równania pracy, t. j. po podstawieniu w równ. 44-te wartości

$$r'_2 = \frac{m_1}{m_2} r'_1; \quad \text{oraz} \quad v'_2 = \frac{m_1}{m_2} . v'_1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

otrzymamy, po skreśleniu wspólnego mnożnika, następujące równanie

$$-k\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) r'_1 . dr'_1 = d(\tfrac{1}{2} m_1 v'^2_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Z równania 45-go i 47-go obliczyć można ruch względny punktu 1-go w tenże sposób, w jaki obliczyliśmy przykład, podany w § 29-tym, tomu III-go z równ. 79-go i 78-go. Wykonania tego obliczenia unikniemy, jeżeli zważymy, że równanie 47-me wyraża równowartość pracy siły, która przyciąga punkt materyalny m_1 do środka masy proporcyonalnie do odległości tego punktu od środka; a ruch taki już obliczyliśmy w § 16 ym tomu III-go. Ruch przeto każdego punktu układu danego składa się z dwóch ruchów:

1) z ruchu po elipsie, leżącej w płaszczyźnie, określonej kierunkami prędkości względnych w początku ruchu, i której środek pokrywa się ze środkiem mas danych punktów. Obydwie te elipsy są określone wektorami początkowych położeń punktów i ich prędkości względnych jak to było opisane w § 16-tym tomu III-go; — i

2) z ruchu postępowego tej płaszczyzny o prędkości $\bar{v}_S$, stycznej do paraboli, określonej początkową prędkością środka mas tych punktów.

Jeżeli dane są prędkości początkowe $\bar{v}_{1,0}$ i $\bar{v}_{2,0}$ danych punktów, to odpowiednie im prędkości względne obliczymy z następujących wzorów, wynikających z określenia ruchu względnego

$$\bar{v}'_{1,0} = \bar{v}_{1,0} - \bar{v}_{S,0};$$

a ponieważ

$$\bar{v}_{S,0} = \frac{m_1 \bar{v}_{1,0} + m_2 \bar{v}_{2,0}}{m_1 + m_2},$$

przeto

$$\bar{v}'_{1,0} = \frac{m_2}{m_1+m_2} . (\bar{v}_{1,0} - \bar{v}_{2,0});$$

w tenże sposób, zastąpiwszy wskaźnik 2 wskaźnikiem 1 i odwrotnie, otrzymamy

$$\bar{v}'_{2,0} = \frac{m_1}{m_1+m_2} (\bar{v}_{2,0} - \bar{v}_{1,0});$$

prędkości te oraz wektory $\bar{r}'_{1,0}$ i $\bar{r}'_{2,0}$ wyznaczają elipsy, po których te punkty się poruszają, — stosownie do wzoru 61-szego tomu III-go.

Z równań tych obliczyć można również np. prędkości początkowe dla przypadku, w którym punkty te zakreślają koła zamiast elips; lub też — w którym poruszać się one będą po jednej elipsie, a nie po dwóch oddzielnych elipsach, i t. p.

W szczególnym przypadku, w którym np.

$$m_1\bar{v}_{1,0} + m_2\bar{v}_{2,0} = 0;$$

t. j. w którym prędkości początkowe są odwrotnie proporcyonalne do mas, kierunki ich równoległe a zwroty przeciwne; środek masy tych punktów nie otrzyma prędkości początkowej; ruch przeto tego środka będzie taki, jaki jest ruch punktu materyalnego upuszczonego bez prędkości początkowej, t. j. ruch unoszący tych punktów będzie pionowy, postępowy i jednostajnie przyśpieszony. Dla tego przypadku otrzymamy ze wzorów powyższych, że

$$\bar{v}'_{1,0} = \bar{v}_{1,0}; \text{ oraz } \bar{v}'_{2,0} = \bar{v}_{2,0},$$

t. j. że początkowe prędkości względne tych punktów równają się przy tych warunkach ruchu początkowego prędkościom rzeczywistym; co również wynika z tego ogólnego warunku, że w chwili, w której płaszczyzna nie posiada prędkości unoszącej, prędkości w tej płaszczyźnie, t. j. względne, równe są prędkościom rzeczywistym.

Zbadajmy teraz znaczenie fizyczne siły, działającej na punkt 1-szy wartość tej siły, stosownie do równania 47-mego, wyraża się wzorem

$$k\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \cdot r'_1;$$

wartość zaś siły, działającej na punkt drugi, — wyrazem

$$k\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \cdot r'_2;$$

pozornie siły te są różne, lecz po uwzględnieniu związku 46-go otrzymamy, że obydwie te siły wyrażają się jednym wzorem $k\,(r'_1 + r'_2)$; są one przeto równe naprężeniu nici; co też i ze stanowiska fizycznego jest zrozumiałe.

Obliczmy teraz ruchy punktów, jakie one wykonują od chwili, w której siła przyciągania, występująca pomiędzy punktami, przestanie działać (np. od chwili, w której nić łącząca pęknie lub też stanie się $r = < l$). Od chwili, w której siła przyciągania przestaje działać, punkty wykonują ruch tylko pod działaniem sił ciążenia; t. j. każdy z nich zakreśli parabolę z taką początkową prędkością, jaką on posiadał w chwili, w której siła przyciągania przestała działać. Obliczmy teraz jaki ruch wykona środek masy tych dwóch punktów. W myśl przytoczonych w § 15-tym obliczeń, punkty zakreślają parabolę, których płaszczyzny są pionowe i przechodzą przez kierunki początkowych prędkości $\bar{c}_{1,0}$ i $\bar{c}_{2,0}$, jakie punkty posiadają w chwili, w której siła przyciągania przestała działać. W celu obliczenia ruchu środka masy tych punktów obierzemy dla ułatwienia rozpatrywań początek układu spółrzędnych w tem miejscu przestrzeni, w którem znajdował się ten środek w chwili, w której siła przyciągania przestała działać; i wyprowadźmy z niego promienie wodzące $\bar{\rho}_1$ i $\bar{\rho}_2$ do poruszających się swobodnie punktów; a równania ruchu tych punktów, zgodnie z równ 56-tem tomu III-go, są następujące

$$\bar{\rho}_1 = \bar{c}_{1,0}\, t + \tfrac{1}{2}\bar{g}\,.\,t^2$$

$$\bar{\rho}_2 = \bar{c}_{2,0}\, t + \tfrac{1}{2}\bar{g}\, t^2;$$

W celu obliczenia promienia wodzącego środka masy tych punktów oznaczmy promień wodzący tego środka literą $\bar{\rho}_S$; i napiszmy stosownie do określenia środka masy

$$\bar{\rho}_S = \frac{m_1\bar{\rho}_1 + m_2\bar{\rho}_2}{m_1 + m_2}.$$

Podstawny w to równanie wielkości pomieni wodzących, obliczone w poprzednich równaniach, a otrzymamy po uproszczeniu

$$\bar{\rho}_S = \frac{m_1\bar{c}_{1,0} + m_2\bar{c}_{2,0}}{m_1 + m_2}\,.\,t + \tfrac{1}{2}\bar{g}\,.\,t^2;$$

zważywszy następnie, że na zasadzie równania 4-go

$$m_1\bar{c}_{1,0} + m_2\bar{c}_{2,0} = (m_1 + m_2)\,\bar{c}_{S,0},$$

otrzymamy szukane równanie ruchu

$$\bar{\rho}_S = \bar{c}_{S,0}\,.\,t + \tfrac{1}{2}\bar{g}\,.\,t^2;$$

z którego wynika, że środek masy porusza się w ten sposób, w jaki porusza się punkt materyalny, poddany sile ciążenia i wyrzucony z prędkością początkową $\bar{c}_{S,0}$. Lecz prędkość $\bar{c}_{S,0}$ jest prędkością tego środka, który podkreślał parabolę, określoną prędkością $\bar{v}_{S,0}$; środek ten przeto zakreśla, po przestaniu działania siły wewnętrznej, tę samą parabolę, jaką zakreślał podczas działania tej siły. Siła przeto przyciągania nie wpływa na ruch środka masy, lecz na ruch jego mają wpływ tylko siły zewnętrzne, działające na punkty danego układu.

Wniosek ten może być uważany za szczególny przypadek twierdzenia, któreśmy już dowiedli ogólnie, że siły wewnętrzne, jakie występują pomiędzy punktami danego układu, nie wpływają na ruch ich środka masy, gdy rozszerzymy to twierdzenie do przypadku, w którym wartości tych sił stają się zerami.

Wniosek ten możemy uogólnić do wszelkich układów punktów materyalnych, i jeżeli np. przyjmiemy, że środek masy pocisku armatniego, wyrzuconego pod pewnym kątem względem poziomu, zakreśla parabolę, to po rozpęknięciu się tego pocisku wskutek sił wewnętrznych, środek mas wszyskich jego cząstek, na które dany pocisk się rozpryśnie, zakreślać będzie tę samą parabolę, i taką samą prędkością, z jakąby zakreślał środek pocisku całkowitego; i gdyby jakieś siły wewnętrzne znów skupiły te szczątki w jedną masę, to środek tej masy znalazłby się znów na tej samej paraboli w tem jej miejscu, w którem znajdowałby się w danej chwili, poruszając się z pociskiem nierozerwanym.

20. Przykład. Pomiędzy dwoma punktami materyalnymi działają siły proporcyonalne do mas tych punktów i odwrotnie proporcyonalne do ich wzajemnej odległości; obliczyć ich ruchy, przyjąwszy, że żadne siły zewnętrzne nie działają na te punkty.

Z równania ilości ruchu środka masy

$$\frac{d[(m_1+m_2)\bar{v}]}{dt}=0,$$

wynika, że środek ten porusza się ze stałą prędkością, jaką on posiadał w początku ruchu; t. j. ruch tego środka będzie prostolinijny i jednostajny lub też środek ten będzie pozostawał w spoczynku.

Równanie momentów ilości ruchu względnego jest jednakowe z równaniem poprzedniego przykładu; moment bowiem sił zewnętrznych w tym razie jest również równy zeru jak poprzednio, chociaż z innych względów; ruch przeto tych punktów składa się z ruchu na płaszczyźnie, poruszającej się ruchem postępowym lub też pozostającej w spoczynku.

Równanie energii kinetycznej ruchu względnego różni się od poprzedniego wartością pracy siły przyciągającej, jest ona bowiem w tym razie inną; równanie to jest następujące

$$-k.\frac{m_1.m_2}{(r'_1+r'_2)^2}.d(r'_1+r'_2)=d(\tfrac{1}{2}m_1 v'^2_1+\tfrac{1}{2}m_2 v'^2_2);$$

po podstawieniu wartości r'_2 i v'_2, wyrażonych równaniami 46-temi, które i w tym razie pozostaje w mocy, otrzymamy po odpowiedniem skróceniu

$$\left[-k.\frac{m_1 m_2}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2}\right]\frac{1}{r'^2_1}.dr'_1=d(\tfrac{1}{2}m_1 v'^2_1);$$

a po oznaczeniu wyrazu

$$\frac{m_2}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2} \quad \text{literą} \quad m'_2$$

otrzymamy równanie

$$-k \,.\, m_1 \,.\, m'_2 \,.\, \frac{1}{r'^2_1} \,.\, dr'_1 = d\left(\tfrac{1}{2} m_1 v'^2_1\right).$$

Lewa strona tego równania wyraża pracę siły, działającej na punkt m_1; proporcyonalnej do iloczynu mas m_1 i m'_2, który należy wyobrazić sobie umieszczoną w środku masy danych punktów, i — odwrotnie proporcyonalnej do odległości punktu m_1 od tego środka; prawa zaś strona tego równania wyraża przyrost energii kinetycznej ruchu względnego punktu m_1, na który działa ta siła. Ponieważ środek masy pozostaje we względnym spoczynku, przeto ruch względny danego punktu m_1 jest taki, jakiby ten punkt wykonał, gdyby był przyciągany do nieruchomego środka podług prawa, podanego w tem zadaniu, t. j. podług prawa Newton'a i gdyby w tym środku była skupiona masa m'_2. Na zasadzie obliczeń wykonanych w § 29-tym tomu III-go i zważywszy, że ruch względny obydwóch punktów odbywa się w jednej płaszczyźnie, dojdziemy do wniosku, że ruch względny dwóch takich punktów odbywać się będzie w jednej płaszczyźnie po pewnych stożkowych o wspólnem ognisku, pokrywającem się z nieruchomym w tej płaszczyźnie środkiem masy tych punktów.

Siłę, która przyciąga każdy z tych punktów, można obliczyć również drogą bezpośrednią; a mianowicie siła np. S_1, która przyciąga punkt m_1, w myśl danego określenia

$$S_1 = k \,.\, m_1 \,.\, m_2 \,.\, \frac{1}{(r'_1 + r'_2)^2};$$

a po podstawieniu w ten wyraz

$$r'_2 = r'_1 \,.\, \frac{m_1}{m_2},$$

otrzymamy wyraz wielkości tej siły

$$S_1 = k \,.\, \frac{m_1 \,.\, m_2}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2} \,.\, \frac{1}{r'^2_1},$$

który jest jednakowy z wyrazem poprzednio obliczonym.

W szczególnym przypadku, w którym np. masa m_2 jest bardzo wielka w porównaniu z m_1, środk masy obydwóch punktów leży blizko środka masy punktu m_2; wskutek czego przyjąć można z pewnem przybliżeniem, że punkt ten pozostaje w spoczynku na danej płaszczyźnie i jest środkiem przyciągającym.

Z pewnem przybliżeniem przykład ten zastosować można do obliczenia ruchu planet. Przyjąć bowiem można z pewnem przybliżeniem, że np. słońce i ziemia przedstawiają dwa punkty materyalne, które w myśl hypotezy Newton'a przyciągają się według prawa, wypowiedzianego w tym przykładzie. Słońce i ziemia przeto zakreślają linie stożkowe (elipsy), których ogniska, ściśle mówiąc, leżą w środku mas obydwóch tych planet; z przybliżeniem zaś przyjąć można, ze względu na znaczną wielkość masy słońca, w stosunku do masy ziemi, leżą one w środku słońca tak, iż ziemia tylko zakreśla około słońca pewną linję stożkową; stożkowa ta, jak pomiary wykazują, jest elipsą. Utożsamienie jednakże zjawisk ruchu tych dwóch przykładów nie jest ścisłe z tego względu, że w rzeczywistości mamy cały układ planet i gwiazd, które wzajemnie na siebie działają; wyniki przeto powyższe, oparte na przyciąganiu się dwóch tylko punktów, muszą się mniej lub więcej zmienić, zależnie od czynników, wywołujących te zmiany. Wyniki te zmieniają się jeszcze wskutek niczem nieuzasadnionego założenia, któreśmy przyjęli w tem zadaniu, a jak w danym przypadku nawet niesłusznego, że planety wyobrażamy sobie w postaci punktów materyalnych, na które działają siły przyciągające. Lecz o tych uzupełnieniach tego rachunku nie będziemy mówić w tem miejscu.

W obydwu tutaj przytoczonych przykładach ruch względny danych punktów sprowadził się do ruchu środkowego, w którym środek pozostaje w spoczynku względnym; w układach jednakże, złożonych z wielu punktów materyalnych, pomiędzy którymi występują siły wewnętrzne, przypadek ten nie zachodzi i obliczenie ruchu punktów takich układów nie daje się przeprowadzić z całą ścisłością ze względu na trudności matematyczne.

Zadanie. Obliczyć i opisać ruch dwóch punktów materyalnych, związanych z sobą nicią nierozciągliwą. Zadanie to różni się od poprzednich tem, że nie dane są w tem zadaniu siły wewnętrzne, natomiast dany jest geometryczny warunek stałej odległości pomiędzy tymi punktami. Dla wykończenia przeto tego zadania wypadnie obliczyć jeszcze siły wewnętrzne, jakie występują pomiędzy punktami, które obliczyć można po obliczeniu ruchu punktów.