G. Przykład obliczenia ruchu układu brył o dwóch stopniach swobody.

75. Wahadło podwójne. Mechanizmy, opisane w § 122-gim tomu I-ego i w §§ poprzednich tego tomu, przedstawiają układy brył o jednym stopniu swobody; jedno przeto równanie dynamiczne wystarczało do obliczenia ich ruchu lub warunków równowagi. Obliczenie zaś ruchu brył układów o wielu stopniach swobody przedstawia wogóle bardzo znaczne trudności matematyczne; otrzymujemy bowiem stosownie do zadania dwa lub więcej wogóle jednoczesnych równań różniczkowych wyższych rzędów z tyluż niewiadomemi: z których zmienne nie zawsze dają się wyrugować i których całki nie zawsze dają się wyrazić zwykłemi funkcyami. W technice jednakże spotykamy się nieraz z takimi układami brył; w celu przeto zbadania ich ruchu, upraszczamy te układy, wprowadzając do rachunku różne założenia; stosownie do szczególnych warunków, w jakich odbywa się dany ruch.

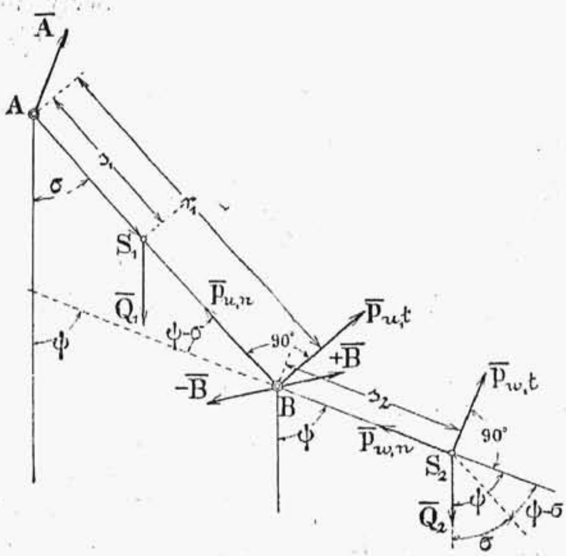
Jako przykład obliczenia ruchu takich brył obliczymy tutaj ruch tak zwanego wahadła podwójnego płaskiego. Wahadło to składa się z dwóch sztywnych brył materyalnych, z których jedna obraca się około osi nieruchomej poziomej; druga zaś około osi, sztywno związanej z bryłą pierwszą i równoległej do osi poprzedniej. W celu ułatwienia rozpatrywań ruchu tych brył, wyobrazimy je sobie w postaci figur płaskich materyalnych, poruszających się w płaszczyźnie pionowej. Jedna z tych figur obracać się przeto będzie około bieguna nieruchomege A, porówn. rys. 38-my; druga zaś około bieguna B sztywno związanego z figurą pierwszą, a więc około bieguna ruchomego; przytem przyjmiemy dla ułatwienia rachunku, że biegun ruchomy leży na przedłużeniu prostej; łączącej biegun nieruchomy A ze środkiem S_1 masy bryły pierwszej, przyjmiemy następnie, że siłami poruszającemi te bryły są ich ciężary Q_1 i Q_2.

Niech litery m_1 i m_2 oznaczają masy tych brył; S_1 i S_2 — środki ich mas; s_1 i s_2 odległość tych środków od odpowiednich tym bryłom biegunów obrotu; r_1 odległość pomiędzy biegunami obrotów; następnie litery σ i ϕ niech oznaczają kąty, jakie tworzą w pewnej chwili przedłużenia prostych s_1 i s_2 z osią pionową; a litery $\bar{A}$ i $\bar{B}$ — siły odporowe, jakie występują w biegunach obrotów A i B.

Układ ten posiada dwa stopnie swobody; znajomość bowiem kątów σ i ϕ jest niezbędną i wystarczającą do wyznaczenia położenia, a więc i ruchu tych figur na płaszczyźnie. Zadanie polega na obliczeniu ruchu tych brył, gdy je odchylimy od położenia pionowego; oraz na obliczeniu siły odporowej, występującej w nieruchomym przegubie A

i sił wewnętrznej, występującej w przegubie ruchomym B.

W zadaniu tem jest przeto sześć niewiadomych algebraicznych: cztery rzuty dwóch nieznanych sił odporowych $\bar{A}$ i $\bar{B}$ i dwa kąty, określające położenie a więc i ruch tych brył w każdej chwili. Do obliczenia tych niewiadomych mamy sześć równań algebraicznych; każdą bowiem z tych figur uważać będziemy, po przyłożeniu do niej sił odporowych $\bar{A}$ i $\bar{B}$ — za swobodną; i napiszemy dla każdej z nich po trzy równania dynamiczne w postaci skalarnej.



Rys. 38·

W celu uniknięcia zawiłych rachunków, powinniśmy się starać w ten sposób zestawić równania dynamicznie, ażeby w każde z nich wchodziła najmniejsza ilość niewiadomych. Znacznego również uproszczenia dozna obliczenie, jeżeli obliczymy np. najpierw ruch brył, a następnie siły odporowe; co osiągniemy możliwie bezpośrednio, gdy zestawimy takie dwa równania dynamiczne, któreby były wolne od sił odporowych; z nich bowiem obliczymy bezpośrednio spółrzędne położenia w funkcyi czasu; a gdy obliczymy już ruch tych brył, zestawimy następnie pozostałe cztery równania algebraiczne, w które wchodzić będą siły odporowe i starać się przytem będziemy, ażeby w każde z tych równań wchodziła również najmniejsza ilość niewiadomych.

Rozwiązanie przeto tego zadania można wykonać w następujący sposób: do bryły 1-szej przyłożymy siły odporowe $\bar{A}$ i $\bar{B}$ i uważać ją będziemy za swobodną. Jako równanie jej ruchu napiszemy równanie momentu ilości ruchu względem bieguna obranego np. w A. Oznaczywszy literą $I_{1,A}$ moment bezwładności bryły 1-ej względem bieguna A, napiszemy na zasadzie wzoru 89-go równanie to w postaci wektorowej

$$V \bar{B} \,.\, \bar{r}_1 + V \bar{Q}_1 \,.\, \bar{s}_1 = \frac{d\,(I_{1,A} \,.\, \bar{\varphi})}{dt}$$

w którem $\bar{\varphi}_1$ oznacza prędkość kątową bryły 1-szej.

W celu wyrugowania z tego wzoru siły odporowej $\bar{B}$, napiszemy równanie dynamiczne środka masy bryły 2-ej. Na bryłę tę działa siła B ze zwrotem odwrotnym poprzedniemu i siła $\bar{Q}_2$; równanie to jest następujące

$$-\bar{B}+\bar{Q}_2=m_2\bar{p}_{2,s};$$

w którem $\bar{p}_{2,s}$ oznacza przyśpieszenie środka masy bryły 2-ej. Z równania tego obliczymy wielkość $\bar{B}$, a po jej podstawieniu w równanie poprzednie, otrzymamy równanie ruchu, wolne od wielkości sił odporowych; równanie to jest następujące

$$\mathrm{V}\ (\bar{Q}_2-m_2\bar{p}_{2,s})\,.\,\bar{r}_1+\mathrm{V}\bar{Q}_1\,.\,\bar{s}_1=\frac{d(I_{1,\mathrm{A}}\,.\,\bar{\varphi}_1)}{dt}\quad\ldots\quad(167)$$

W równanie to jednakże wchodzą jednocześnie dwie dotychczas nieznane wielkości $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{p}_{2,s}$, których wartości należy wyrazić spółrzędnemi σ i φ.

W tym celu podstawimy najpierw w to równanie

$$\varphi_1=-\frac{d\sigma}{dt};$$

następnie wyobrazimy sobie wyraz $\mathrm{V}\,m_2\bar{p}_{2,s}\,.\,\bar{r}_1$, jaki posiadamy w tem równaniu, jako moment statyczny względem bieguna A wektora $m_2\bar{p}_{2,s}$, który posiada punkt przyłożenia w B. Ażeby zaś wyrazić wektor $\bar{p}_{2,s}$ wielkościami σ i ψ, należy przedewszystkiem wyrazić ruch bryły drugiej temi wielkościami. W tym celu przyjmiemy, że ruch tej bryły składa się z ruchu obrotowego około punktu B, i z ruchu postępowego, jaki ten punkt posiada, porówn. § 39-ty tomu II-go; przyśpieszenie przeto $\bar{p}_{s,2}$, składa się z przyśpieszenia $\bar{p}_w$, jakie posiada środek masy bryły drugiej podczas jej **obrotu** około bieguna B, i z przyśpieszenia $\bar{p}_u$ unoszącego, wspólnego wszystkim punktom tej bryły i równego przyśpieszeniu punktu B; czyli przyjmiemy, że

$$\bar{p}_{2,s}=\bar{p}_w+\bar{p}_u\,.$$

W celu ułatwienia rachunku rozłożymy przyśpieszenia te na normalne i styczne, porówn. rys. 38-my tak, iż

$$\bar{p}_{2,s}=(\bar{p}_{w,n}+\bar{p}_{w,t})+(\bar{p}_{u,n}+\bar{p}_{u,t}).$$

Ażeby przeto obliczyć wyraz $\mathrm{V}\,m_2\bar{p}_{2,s}\,.\,\bar{r}_1$, wyrażający moment względem bieguna w A wektora $m_2\bar{p}_{2,s}$ z punktem przyłożenia w B; wyobrazimy sobie, że te cztery składowe wektory przyłożone są do punktu B, porówn. rys. 38-my, zrzutujemy je na prostopadłą do ramienia r_1, i obliczymy moment sumy tych rzutów; po obliczeniu tych momentów i po podstawieniu ich wartości w równanie 167-me, przedstawi się to równanie w postaci następującej

$$Q_2\,.\,r_1\,.\,\sin\sigma-m_2 r_1\,.\,[p_{w,n}\,.\,\sin(\psi-\sigma)-p_{w,t}\,.\,\cos(\psi-\sigma)-p_{u,t}]+$$
$$+Q_1\,.\,s_1\,.\,\sin\sigma=-I_{1,\mathrm{A}}\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

a po podstawieniu wartości przyśpieszeń, które, odpowiednio do danych określeń, posiadają następujące wartości

$$p_{w,n} = s_2 \cdot \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2; \quad p_{w,t} = s_2 \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2};$$

$$p_{u,n} = r_1 \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2; \quad p_{u,t} = r_1 \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} \quad \ldots \quad (168)$$

otrzymamy równanie

$$Q_2 . r_1 . \sin\sigma - m_2 . r_1 . s_2 . \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 . \sin(\psi - \sigma) + m_2 . r_1 . s_2 . \frac{d^2\psi}{dt^2} . \cos(\psi - \sigma)$$

$$+ m_2 r_1^2 . \frac{d^2\sigma}{dt^2} + Q_1 . s_1 . \sin\sigma = - I_{1,A} . \frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

i wreszcie po uporządkowaniu podług pochodnych

$$(I_{1,A} + m_2 r_1^2) . \frac{d^2\sigma}{dt^2} + m_2 s_2 . r_1 . \cos(\psi - \sigma) . \frac{d^2\psi}{dt^2} - m_2 s_2 r_1 . \sin(\psi - \sigma) .$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + (m_1 s_1 + m_2 r_1) g . \sin\sigma = 0. \quad \ldots \quad (169)$$

Jest to jedno równanie ruchu tych brył, wolne od sił odporowych; drugie takież równanie zestawimy, gdy do bryły drugiej przyłożymy siłę $-\bar{B}$ i $\bar{Q}_2$ i obliczymy równanie momentów względem bieguna, obranego w B; w ten sposób bowiem otrzymamy równanie wolne od tej siły odporowej. Do tego obliczenia zastosować można równanie momentów ilości ruch w postaci jednego z równań 88-ych; ponieważ w równanie 169-te wchodzą wielkości przyśpieszeń, przeto zastosujemy pierwsze z tych równań; i w tym celu określimy przyśpieszenia punktów bryły 2-ej, jako złożone z ruchu obrotowego około punktu B i z ruchu postępowego, jaki posiada tenże punkt; przyśpieszenie przeto każdego jej punktu składa się z przyśpieszenia ruchu postępowego $\bar{p}_u$ i z przyśpieszenia, jakie powstaje podczas ruchu obrotowego; przyśpieszenie to wyobrazimy sobie w postaci przyśpieszenia dośrodkowego $\bar{p}_{w,n}$ i stycznego $\bar{p}_{w,t}$. Suma przeto momentów względem B iloczynów z mas punktów i z ich przyśpieszeń, jakie powstają podczas ruchu **postępowego**, wyrazi się wzorem

$$V\, m_2 \bar{p}_u \cdot \bar{s}_2;$$

sumę zaś momentów iloczynów z mas i przyśpieszeń oddzielnych punktów, jakie powstają podczas ruchu **obrotowego**, wyrazimy wzorem

$$I_{2,B} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt}$$

w którem φ_2 oznacza prędkość obrotową bryły drugiej, a której pochodną wyrazimy wzorem

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Równanie przeto momentów bryły 2-giej względem B jest następujące

$$V\,\bar{Q}_2 \,.\, \bar{s}_2 = V\, m_2 \bar{p} \,.\, \bar{s}_2 - I_{2,B} \,.\, \frac{d^2\bar{\psi}}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (170)$$

W celu przekształcenia tego równania na algebraiczne, rozłożymy, jak poprzednio,

$$\bar{p}_u = \bar{p}_{u,n} + \bar{p}_{u,t};$$

a po przyłożeniu tych wektorów składowych do punktu S_2, jak wymaga iloczyn wektorowy wzoru powyższego i po obliczeniu ich momentów względem B, otrzymamy zamiast poprzedniego równania — następujące

$$m_2 g \,.\, s_2 \,.\, \sin\psi = -m_2 r_1 \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 .\, s_2 \,.\, \sin(\psi - \sigma) -$$
$$- m_2 r_1 \,.\, \frac{d^2\sigma}{dt^2} \,.\, s_2 \,.\, \cos(\psi - \sigma) - I_{2,B} \,.\, \frac{d^2\psi}{dt^2};$$

i wreszcie po uporządkowaniu względem pochodnych

$$m_2 s_2 \,.\, r_1 \,.\, \cos(\psi - \sigma) \,.\, \frac{d^2\sigma}{dt^2} + I_{2,B} \,.\, \frac{d^2\psi}{dt^2} + m_2 s_2 \,.\, r_1 \,.\, \sin(\psi - \sigma) \,.\, \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 +$$
$$+ m_2 g \,.\, s_2 \,.\, \sin\psi = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (171)$$

Jest to drugie równanie dynamiczne łącznie z równ. 169-tem przedstawia dwa równania algebraiczne różniczkowe drugiego rzędu z dwiema zmiennemi σ i ψ.

Do równań tych, równ. 169-te i 171-sze, które są wolne od sił odporowych, można dojść jeszcze inną drogą; więcej bezpośrednią. W tym celu należy uważać dany układ dwóch brył za układ zmienny, w którym występują siły wewnętrzne, a między niemi i siły $\pm \bar{B}$; a że suma momentów wogóle sił wewnętrznych równa się zeru; przeto obrawszy biegun momentów w A i zestawiwszy równanie momentów obydwóch brył względem tego bieguna, otrzymamy bezpośrednio równanie ruchu wolne od sił $\pm B$ i od siły A. Do tego obliczenia zastosujemy równanie momentów w postaci równania 88-mego. Sumę momentów iloczynów z mas punktów i z ich przyśpieszeń rozbijemy na dwie sumy: na sumę momentów tych wektorów bryły pierwszej i na takąż sumę bryły drugiej. Suma tych momentów bryły pierwszej wyrazi się bezpośrednio wzorem

$$-I_{1,A} \,.\, \frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

suma zaś tych momentów bryły drugiej wymaga pewnych omówień. Przyjmijmy, jakieśmy to wyżej uczynili, że przyśpieszenie każdego z punktów tej bryły składa się z przyśpieszenia ruchu postępowego równego przyśpieszeniu punktu B, i z przyśpieszenia ruchu obrotowego, jakie każdy punkt tej bryły posiada podczas obrotu około punktu B. Sumę momentów iloczynów z tych przyśpieszeń i z mas, względem bieguna momentów, obranego w B, wyraziliśmy już prawą stroną równania 170-tego; ażeby zaś napisać wyraz momentów tych wektorów względem bieguna, obranego w A, zastosujemy wzór 38-my tomu I-go; i w tym celu wyobrazimy sobie wszystkie wektory $m_k \bar{p}_k$ bryły drugiej przyłożonemi do punktu B, a suma ich momentów lub moment ich wypadkowej, względem bieguna w A, łącznie z momentem tych wektorów względem bieguna w B jest szukaną sumą $\Sigma \mathrm{V}\, m_k \bar{p}_k \,.\, \bar{r}_k$. Zważywszy następnie, że dla bryły drugiej, w myśl równania 7-ego tego tomu

$$\Sigma (m_k \bar{p}_k)_2 = m_2 \bar{p}_{2,s};$$

otrzymamy równanie momentów całego układu względem bieguna w A

$$\mathrm{V}\, \bar{Q}_1 \,.\, \bar{s}_1 + \mathrm{V}\, \bar{Q}_2 \,.\, (\bar{r}_1 + \bar{s}_2) = - I_{1,\mathrm{A}} \,.\, \frac{d^2 \bar{\sigma}}{dt^2} + \mathrm{V}\, m_2 \bar{p}_u \,.\, \bar{s}_2 - I_{2,\mathrm{B}} \,.\, \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dt^2} +$$

$$+ \mathrm{V}\, m \bar{p}_{2,s} \,.\, \bar{r}_1 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

Drugiem równaniem wolnem od sił wewnętrznych jest równ. 170-te.

Ażeby utożsamić równ. 172-gie z jednem z poprzednich, odejmiemy od równania 172-giego rów. 167-me, a otrzymamy równ. 170-te. Ażeby obliczyć siłę odporową $\bar{A}$ i siłę wewnętrzną $\bar{B}$, wyjdziemy z założenia, że ruch brył jest już znany z poprzednich obliczeń (co do metody tej porówn. § 47-my tomu III-go); a z równań ruchu środka mas danych brył obliczymy te siły.

Równania te dla bryły 1-szej i bryły 2-giej po uczynieniu ich swobodnemi są następujące

$$\bar{A} + \bar{B} + m_1 \bar{g} = m_1 \bar{p}_{1,s};$$
$$- \bar{B} + m_2 \bar{g} = m_2 \bar{p}_{2,s};$$

z których obliczymy szukane wielkości. Z równania np. drugiego obliczymy

$$- \bar{B} = m_2 \bar{p}_{2,s} - m_2 \bar{g};$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie pierwsze, otrzymamy

$$\bar{A} = m_1 \bar{p}_{,s} + m_2 \bar{p}_{2,s} - m_1 \bar{g} - m_2 \bar{g}\,.$$

Równanie to możemy również bezpośrednio otrzymać, stosując równanie ruchu środka masy do całego układu zmiennego; wtedy bowiem napiszemy równanie

$$\bar{A} + m_1 \bar{g} + m_2 \bar{g} = m_1 \bar{p}_{1,s} + m_2 \bar{p}_{2,s};$$

które jest jednakowe z poprzedniem. Rzutując te równania na obrane osi spółrzędnych i podstawiwszy wartości przyśpieszeń w funkcyi czasu, obliczymy rzuty sił odporowych także w funkcji czasu.

76. Analiza równań ruchu. Otrzymane jednakże równania, równ. 169-te i 171-sze, nie dają się całkować, choćby tylko z tego względu, że nie można z nich wyrugować zmiennej σ lub ψ. W celu przeto zbadania choć w przybliżeniu — ruchu, wyrażonego takiemi równaniami, należy je uprościć, korzystając z pewnych szczególnych właściwości ruchu danego układu. Weźmiemy np. pod uwagę przypadek, w którym bryły dane wskutek pewnych warunków zadania odchylają się od pionu o bardzo małe kąty; a wtedy przyjąć można, że

$$\sin\sigma \cong \sigma; \quad \sin\psi \cong \psi; \quad \cos(\psi - \sigma) \cong 1;$$

oraz, wobec małych prędkości, jakie w tych warunkach występują, przyjąć jeszcze można, że

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \cong 0, \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \cong 0.$$

Po podstawieniu tych wartości w powyższe dwa równania, 169-te i 171-sze, przekształcą się one na następujące

$$(I_{1,A} + m_2 r_1^2) \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + m_2 s_2 \cdot r_1 \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + (m_1 s_1 + m_2 r_1) \cdot g \cdot \sigma = 0;$$

$$m_2 s_2 r_1 \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + I_{2,B} \cdot \frac{d^2\psi}{at^2} + m_2 g \cdot s_2 \cdot \psi = 0; \quad \ldots \quad (173)$$

które są równaniami liniowemi drugiego rzędu, jednorodnemi, z dwiema jednoczesnemi zależnie zmiennemi i ze stałymi spółczynnikami.

Dla skrócenia i większego uwydatnienia algebraicznego charakteru tych równań napiszemy je w następujący sposób

$$a \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + b \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + e \cdot \sigma = 0; \quad \ldots \quad (174)$$

$$b \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + c \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + f \cdot \psi = 0; \quad \ldots \quad (175)$$

w których

$$a = I_{1,A} + m_2 r_1^2;$$
$$b = m_2 s_2 r_1; \quad c = I_{2,B};$$
$$e = (m_1 s_1 + m_2 r_1) \cdot g; \quad f = m_2 \cdot s_2 \cdot g. \quad \ldots \quad (176)$$

Ażeby z tych równań otrzymać jedno równanie z jedną zmienną, np. ze zmienną σ, wyrugujemy zmienną ψ, i w tym celu obliczymy z równ. 174-ego

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{e}{b} \cdot \sigma - \frac{a}{b} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 175-te, otrzymamy

$$b \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} - c \cdot \frac{e}{b}\sigma - c \cdot \frac{a}{b}\frac{d^2\sigma}{dt^2} + f \cdot \psi = 0;$$

skąd

$$\psi = \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{b} \cdot \sigma + \left(\frac{c}{f} \cdot \frac{a}{b} - \frac{b}{f}\right) \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2}.$$

Po dwukrotnem zróżniczkowaniu tego równania względem t, otrzymamy

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{b} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{c}{f} \cdot \frac{a}{b} - \frac{b}{f}\right) \cdot \frac{d^4\sigma}{dt^4};$$

i wreszcie, po podstawieniu tej wartości w równ. 174-te i po uporządkowaniu, otrzymamy równanie różniczkowe linijne 4-go rzędu z jedną zmienną σ w funkcyi czasu

$$(a\,c - b^2) \cdot \frac{d^4\sigma}{dt^4} + (a\,f + c\,e) \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + e\,f \cdot \sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

Szczególną całką tego równania jest funkcya

$$\sigma = e^{\rho t}.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy równanie charakterystyczne danego równania różniczkowego, które jest jednocześnie równaniem, charakteryzującem ruch danej bryły; z równania tego bowiem będziemy mogli sądzić o rodzaju ruchu, jaki dana bryła wykonywa. Równanie to jest następujące

$$(a\,c - b^2)\,\rho^4 + (a\,f + c\,e)\,\rho^2 + e\,f = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

Cztery pierwiastki: ρ_1, ρ_2, ρ_3 i ρ_4 tego równania dają wogóle cztery szczególne całki; całka przeto ogólna danego równania różniczkowego ma postać

$$\sigma = C_1 \cdot e^{\rho_1 t} + C_2 \cdot e^{\rho_2 t} + C_3 \cdot e^{\rho_3 t} + C_4 \cdot e^{\rho_4 t} \quad . \quad . \quad . \quad (179)$$

gdzie litery C oznaczają pewne wielkości stałe, które obliczyć można z warunków ruchu początkowego.

Ażeby wyrazić drugą spółrzędną ψ w funkcji czasu; należy z równania 174-ego i 175-ego wyrugować σ. Lecz zamiast tego szczegółowego rachunku można bezpośrednio napisać równanie różniczkowe tej zmiennej, wziąwszy pod uwagę, że równanie 174-te zamieni się na 175-te, jeżeli zastąpimy w niem literę σ literą ψ, literę a literą c, i wreszcie e literą f, — i odwrotnie; możemy przeto te podstawienia zrobić również w równaniu 177-mem, i otrzymamy

$$(a\,c - b^2) \cdot \frac{d^4\psi}{dt^4} + (c\,e + a\,f) \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + e\,f \cdot \psi = 0. \quad . \quad . \quad (180)$$

Spółczynniki tego równania są takie same, jakie są w równaniu 177-em; równanie przeto charakterystyczne tego równania różniczkowego będzie również takie same, jakie było poprzednio; całka przeto równ. 180-go

$$\psi = K_1 e^{\rho_1 t} + K_2 e^{\rho_2 t} + K_3 e^{\rho_3 t} + K_4 e^{\rho_4 t}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

gdzie litery K są to pewne stałe spółczynniki. Wielkość przeto ρ dla obydwóch równań

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{-(af+ce) \pm \sqrt{(af+ce)^2 - 4(ac-b^2).ef}}{2.(ac-b^2)}}.$$

Jeżeli wartość tego pierwiastka jest urojoną, to znaczy, że mamy do czynienia z ruchem okresowym. Oznaczmy rzeczywiste czynniki takich pierwiastków literami α_1 i α_2, a wtedy

$$\rho_1 = \alpha_1 . i; \quad \rho_2 = -\alpha_1 . i; \quad \rho_3 = \alpha_2 . i; \quad \rho_4 = -\alpha_2 . i;$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$; po podstawieniu następnie tych wartości w równ. 179-te i w 181-sze, otrzymamy

$$\sigma = (C_1 . e^{\alpha_1 i.t} + C_2 . e^{-\alpha_1 i.t}) + (C_3 . e^{\alpha_2 i.t} + C_4 . e^{-\alpha_2 i.t});$$

$$\psi = (K_1 . e^{\alpha_1 i.t} + K_2 . e^{-\alpha_1 i.t}) + (K_3 . e^{\alpha_2 i.t} + K_4 . e^{-\alpha_2 i.t}). \quad (182)$$

lub też, zamieniając funkcye wykładnicze na kołowe, napiszemy te równania w postaci

$$\sigma = A_1 . \sin(\alpha_1 . t + \beta_1) + B_1 . \sin(\alpha_2 . t + \gamma_1);$$

$$\psi = A_2 . \sin(\alpha_1 . t + \beta_2) + B_2 . \sin(\alpha_2 . t + \gamma_2) . \quad . \quad (183)$$

W równaniach tych mamy osiem stałych wielkości

$$A_1, A_2, B_1, B_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2;$$

które są dotychczas nieokreślone. Z warunków ruchu początkowego określimy cztery z tych wielkości; ażeby bowiem określić ten ruch, powinny być dane w pewnej chwili dwa kąty, określające położenie wahadeł, i dwie wielkości określające ich prędkości w tem położeniu. Pozostałe zaś cztery spółczynniki obliczymy z warunku, że równania 183-cie powinny zaspakajać identycznie równanie 174-te i 175-te.

Nie wchodząc w szczegóły tego obliczenia, damy pewne wskazówki ogólne, pozwalające sądzić z równania charakterystycznego, bez obliczania jego pierwiastków, o rodzaju ruchu brył danego układu.

Jeżeli np, która z wartości ρ jest dodatnią, to wartość odpowiedniego wyrazu $e^{\rho . t}$ rośnie z biegiem czasu, a więc i wartość odpowiedniej spółrzędnej rosnąć będzie do nieskończoności; porówn. równania 179-te oraz 181-sze.

Jeżeli zaś która z wartości ρ jest odjemną, to wartość tego wyrazu z biegiem czasu maleje; nie przesądza to jednakże o wartości σ lub ψ.

Jeżeli wreszcie jeden z pierwiastków jest wielkością zespoloną postaci $(p + q\,i)$, to, wobec tego, że mamy do czynienia z układami, wykonującymi ruchy rzeczywiste, powinien istnieć drugi pierwiastek sprzężony postaci $(p - q\,i)$. W tym przeto przypadku równanie np. 179-te może być przekształcone na następujące

$$\sigma = C_1 . e^{(p+q\,i)\,t} + C_2 . e^{(p-q\,i)\,t} + C_3 . e^{(p'+q'i)\,t} + C_4 . e^{(p'-q'i)\,t} \quad \text{lub}$$

$$\sigma = e^{p\,t} . (C_1 . e^{q\,i\,.\,t} + C_1 . e^{-q\,i\,.\,t}) + e^{p't} (C_3 . e^{q'i\,.\,t} + C_4 . e^{-q'i\,.\,t});$$

lub wreszcie na następujące

$$\sigma = e^{p\,t} . [K' . \cos(q\,t) + K'' . \sin(q\,t)] + e^{p't} . [K''' . \cos(q't) + \\ + K'''' . \cos(q'\,t)].$$

Wyraz ten przedstawia ruch harmoniczny złożony; który, zależnie od tego czy p i $p' \gtreqless 0$, z biegiem czasu wzrasta lub zanika.

Jeżeli przeto równanie charakterystyczne posiada choć jeden pierwiastek dodatni, to spółrzedna ruchu, wyrażonego odnośnem równaniem różniczkowem, rośnie do nieskończoności; i do ruchu tego, ze względu na zrobione założenia, nie możemy stosować równań przybliżonych. Jeżeli zaś w danem równaniu pierwiastki rzeczywiste są odjemne, to spółrzędna danego ruchu zbliża się z biegiem czasu do wartości stałej czyli ruch zanika. Jeżeli zaś pierwiastki są zespolone, to ruch jest okresowy; a przytem jeżeli rzeczywisty wyraz tych pierwiastków jest dodatni, to ruch jest okresowy, wzmagający się do nieskończoności; jeżeli zaś wyraz ten jest odjemny, to ruch jest okresowy zanikający.

Z rodzaju przeto pierwiastków równania charakterystycznego wywnioskować można o rodzaju ruchu, wyrażonego tem równaniem.

Dla celów technicznych ważnem jest nieraz osądzić, czy ruch dany jest wzmagający się czy też zanikający, lub harmoniczny. Ważnem jest przeto módz osądzić, bez rozwiązywania równań, bezpośrednio ze spółczynników równania, czy pierwiastki jego rzeczywiste będą odjemne, lub też czy wyrazy rzeczywiste pierwiastków zespolonych będą odjemne, gdyż tylko w tych przypadkach ruch będzie wzmagający się.

W równaniach drugiego stopnia łatwo to osądzić, obliczywszy pierwiastki tego równania.

Jeżeli np. równaniu stopnia drugiego nadamy postać

$$\rho^2 + a_1\,\rho + a_2 = 0,$$

to pierwiastki jego wyrazimy wzorem

$$\rho = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2}$$

Jeżeli pierwiastki posiadają wartości urojone; to wyraz rzęczywisty powinien być odjemny, t. j. powinno być

$$a_1 > 0;$$

ażeby ruch był okresowy zanikający.

Jeżeli zaś pierwiastek posiada wartość rzeczywistą, to ażeby ruch był zanikający, powinno być

$$-\frac{a_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-a_2}<0;$$

a nastąpi to wtedy, gdy

$$a_1>0; \quad \text{oraz} \quad a_2>0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (184)$$

Gdy zaś mamy równanie wyższych stopni, sposób ten określenia pierwiastków staje się utrudniony, a nawet niemożliwy. Związki, jakim powinny podlegać spółczynniki równania n-tego stopnia, ażeby rzeczywiste pierwiastki lub też rzeczywiste wyrazy pierwiastków zespolonych były odjemne, podał Hurwitz (Math. Ann. Bd. 46, 1875, str. 273). Przytoczymy je tutaj, nie podając ich dowodzeń. W myśl tej teoryi pierwiastki rzeczywiste lub wyrazy rzeczywiste pierwiastków urojonych równ. n-tego stopnia o postaci

$$\rho^n+a_1\rho^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\rho+a_n=0;$$

będą odjemne, jeżeli: 1) każden spółczynnik $a>0$; i 2) jeżeli jednocześnie wartości każdego wyznacznika, utworzonego kolejno z następującego ogólnego wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0.$$

A więc dla $n=2$; podług tego prawidła powinno być

$$a_1>0; \qquad a_2>0; \qquad \text{oraz} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Dla $n=3$, powinno być

$$a_1>0; \qquad a_2>0; \qquad a_3>0; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\text{oraz} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Dla $n = 4$

$$a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0, \quad \text{oraz}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0.$$

i t. d.

Takie jest postępowanie analityczne, mające na celu obliczenie tak zwanych ruchów drgających brył materyalnych.

Jeżeli zaś równanie charakterystyczne wykaże, że ruch dany nie jest drgający, lecz odbywa się na stosunkowo znacznych przestrzeniach, to do obliczenia takiego ruchu należy zastosować równania ścisłe; jak w danym przykładzie równania 169-te i 171-sze, których jednakże całkowanie jest w wielu przypadkach niemożliwe, lub też przedstawia znaczne trudności. W tych przypadkach należy określić właściwości danego ruchu bezpośrednio z tych równań w ten sposób, jaki stosowaliśmy np. w § 57-mym tomu III-go do obliczenia wahadła kulistego. W wielu przypadkach można również odkryć pewne właściwości danego ruchu z równania równowartości pracy i energii kinetycznej.

77. Ruch dzwonu. Obliczenie ruchu wahadła podwójnego znajduje bezpośrednie zastosowanie w praktyce przy obliczeniu ruchu dzwonów. Bryła nazwana pierwszą, może przedstawiać dzwon; bryła druga — serce jego. Przebieg ruchu dzwonu nie jest tak prosty, jak się to pozornie zdawać może. W Kolonii np. w roku 1875-tym założono dzwon, który nie wydawał dźwięku; gdyż podczas poruszania dzwonem serce jego w ten sposób się poruszało razem z dzwonem, że nie trafiało w dzwon. Te szczególne warunki zachowania się serca i dzwonu można obliczyć z wyprowadzonych równań ruchu. W tym celu weźmiemy pod uwagę ten szczególny przypadek ruchu dzwonu, w którym serce jego i dzwon wykonują jednocześnie jednakowe ruchy, jak gdyby stanowiły jedną bryłę sztywną; i znajdziemy warunki przy jakich to zachodzi.

Równanie tego ruchu otrzymamy z równań 173-cich; gdy podstawimy w nie

$$\psi = \sigma.$$

Równania te są następujące

$$(I_{1,A} + m_2 r_1^2 + m_2 s_2 r_1) \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + (m_1 s_1 + m_2 r_1) \cdot g \cdot \sin \sigma = 0;$$

$$(I_{2,B} + m_2 s_2 \cdot r_1) \cdot \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + m_2 s_2 \cdot g \cdot \sin \sigma = 0.$$

Ażeby zaś te równania wyrażały jeden i ten sam ruch, powinny być jednakowe; wobec czego powinien zachodzić następujący związek pomiędzy jego spółczynnikami

$$\frac{I_{1,A}+m_2 r_1^2+m_2 s_2 r_1}{I_{2,B}+m_2 s_2 r_1}=\frac{m_1 s_1+m_2 r_1}{m_2 s_2}.$$

Przekształcimy następnie to równanie w ten sposób, że wprowadzimy długości wahadeł zastępczych, równ. 103-cie, tak dla dzwonu jak i dla jego serca. Podstawimy przeto w to równanie

$$\frac{I_{1,A}}{m_1 s_1}=l_1; \qquad \frac{I_{2,B}}{m_2 s_2}=l_2;$$

a otrzymamy związek powyższy w następującej postaci

$$\frac{l_1+\dfrac{m_2 r_1^2}{m_1 s_1}+\dfrac{m_2 s_2 r_1}{m_1 s_1}}{l_2+r_1}=1+\frac{m_2 r_1}{m_1 s_1};$$

skąd po przekształceniu

$$l_1-l_2+r_1=\frac{m_2 r_1}{m_1 s_1}.(l_2-s_2).$$

Jeżeli przeto zachodzi ten związek pomiędzy wielkościami, określającemi rozmieszczenie masy w dzwonie, to serce dzwonu nie trafi w dzwon.

Związek ten uprości się, jeżeli weźmiemy pod uwagę, że wielkość m_2 jest zwykle w dzwonach bardzo małą w porównaniu z wielkością m_1; i że wielkość (l_2-s_2) niewiele różni się od zera; przyjąć przeto możemy, że wartość prawej strony powyższego równania $=0$; a powyższy związek przybierze postać

$$l_1 \cong l_2+r_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (185)$$

Z równania tego wynika, że dzwon nie wyda dźwięku pomimo ruchu, jeżeli środek wahania dzwonu i serca jego wzajemnie się pokrywają.

Badania nieudanego dzwonu Kolońskiego wykazały, że

$$l_1=3{,}282 \text{ m}, \qquad l_2=2{,}629 \text{ m}, \qquad \text{a} \qquad r_1=0{,}667;$$

które to wartości czynią zadość równaniu 185-emu; słusznie przeto dzwon taki nie odpowiadał celowi. Zwrócić należy jeszcze uwagę, że niespotkanie się dzwonu z sercem zachodzi nietylko w tym przypadku, w którym dzwon i serce poruszają się jak jedna bryła, lecz i wtedy, gdy serce porusza się względem dzwona w takich granicach, które nie sięgają do powierzni dzwona. Przypadku tego jednakże rozpatrywać nie będziemy.