Okres wtedy wahnięć będzie najkrótszy, gdy długość $l$ wahadła zastępczego będzie najkrótszą; przy zmiennej przeto odległości $s$ wartość $l$ powinna być najmniejszą; co nastąpi dla wartości, którą oznaczymy literą $s_1$ i którą obliczymy z równania

$$\frac{dl}{ds}=0;$$

z równania przeto 104-go, po jego zróżniczkowaniu mamy

$$1-\frac{1}{s_1^2}\cdot\frac{I_s}{m}=0,$$

z którego

$$s_1=\sqrt{\frac{I_s}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

Oś przeto zawieszenia, przeprowadzona równolegle do danej osi na wskazanej odległości $s_1$ od środka masy, jest osią, około której dana bryła wykona wahanie o najmniejszych okresach. Jeżeli następnie zmieniać będziemy kierunek osi, do której oś zawieszenia ma być równoległą, to zmieniać się będzie również wartość $I_s$ momentu bezwładności danej bryły względem osi, a z nią zmieniać się będzie również wartość $s_1$ stosownie do równ. 106-go; a więc i okres $T$. Ze wszystkich wartości $I_s$ najmniejszą jest wartość momentu bezwładności względem osi, przechodzącej przez wielką średnicę elipsoidy bezwładności, zbudowanej w środku masy danej bryły. Wartość przeto $T$ będzie bezwzględnie najmniejszą, gdy bryłę daną zawiesimy na osi równoległej do kierunku wielkiej średnicy elipsoidy bezwładności, zbudowanej w środku jej masy na odległości, obliczonej ze wzoru 106-go. Geometrycznem miejscem tych osi jest walec o przekroju kołowym, którego promień obliczymy z równ. 106-go, a osią tego walca jest wielka średnica elipsoidy.

Do obliczenia równania ruchu wahadła bryłowego można również zastosować równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Równanie to jest następujące

$$mg\,.\,d\,(s\,.\cos\sigma)=d\left[\tfrac{1}{2}I_0\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right]; \quad \ldots\ldots \quad (107)$$

z którego można obliczyć żądane związki.

O tożsamości tego równania z równaniem 100-em, przekonamy się, wykonawszy wskazane w tem równaniu różniczkowanie i rozdzieliwszy je przez $d\sigma$.

## E. Obliczenie ruchu płaskiego brył materyalnych.

**50. Warunki powstawania ruchu płaskiego brył materyalnych.** Ruch płaski bryły określimy w § 32-gim tomu II-go jako ruch, w którym punkty danej bryły zakreślają tory płaskie, leżące w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny, zwanej płaszczyzną danego ruchu. Jeżeli bryła jest nieswobodna, to znajdować się ona będzie w ruchu płaskim, jeżeli np. trzy jej punkty, nie leżące na jednej prostej, pozostawać będą podczas ruchu na trzech wzajemnie równoległych płaszczyznach; i ruch taki powstanie pod działaniem dowolnie skierowanych sił. Ruch płaski powstaje przeto, gdy np. dana bryła obraca się około osi, pozostającej w spoczynku; przykłady tego ruchu rozpatrywaliśmy poprzednio; lub też ruch ten powstaje, gdy np. bryła obraca się około osi, poruszającej się z prędkością prostopadłą do tej osi; z tego rodzaju ruchem mamy najczęściej do czynienia w technice. Jeżeli zaś bryła jest swobodna, to ruch płaski powstanie wtedy, gdy ruch początkowy oraz siły, działające na bryłę, odpowiadać będą pewnym ściśle określonym warunkom; oraz gdy rozmieszczenie cząstek mas danej bryły podlegać będzie pewnym szczególnym rozmieszczeniom. Warunki powstawania ruchu płaskiego bryły swobodnej wskazać możemy dopiero w rozdziale następnym; a obecnie przystąpimy do obliczenia ruchu czy to brył, zmuszonych danymi warunkami fizycznymi wykonywać ruch płaski; czy też figur materyalnych płaskich swobodnych lub nieswobodnych, poruszających się w swych płaszczyznach pod działaniem sił zewnętrznych.

**51. Równania dynamiczne ruchu płaskiego.** Ruch płaski swobodny posiada trzy stopnie swobody; położenie bowiem bryły, a więc i ruch jej, jest określony trzema wielkościami skalarnemi; trzy przeto równania skalarne wystarczą do wyrażenia tych wielkości w funkcyi czasu. Szczególnym przypadkiem ruchu płaskiego brył jest ruch figury płaskiej w swej płaszczyźnie; i do ruchu figur płaskich sprowadzić można ruch płaski brył; i odwrotnie, z ruchu figury płaskiej, którą postawimy w pewnym geometrycznym związku z bryłą właściwą, można odtworzyć ruch płaski samej bryły. W rozpatrywaniach przeto następnych będziemy mówili o ruchu figur płaskich w ich płaszczyźnie, rozumiejąc przez to wogóle ruch płaski brył.

Spółrzędnemi, wyznaczającemi położenie figury płaskiej w jej płaszczyźnie, mogą być spółrzędne, np. środka jej masy i kąt, jaki tworzy prosta, sztywno połączona z tą figurą, z inną prostą, nieruchomo leżącą w płaszczyźnie tejże figury; wielkościami określającemi ruch danej figury płaskiej może być prędkość środka jej masy i prędkość obrotowa. Równaniami dynamicznemi mogą być w tym razie dwa równania skalarne ruchu środka masy i jedno równanie momentu ilości ruchu, które może być również zastąpione równaniem równowartości pracy i energii kinetycznej; te trzy przeto równania wystarczają do obliczenia ruchu bryły płaskiej. Oznaczmy literami $x_s$ i $y_s$ spółrzędne prostokątne środka masy danej figury; a literą $\sigma$ kąt, jaki tworzy z osią np. $x$ dowolna prosta, sztywno związana z poruszającą się figurą; a równanie ruchu środka masy w postaci wektorowej będzie następujące

$$\Sigma \overline{P_k} = m\overline{p}_s; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (108)$$

w postaci zaś skalarnej, wyrażone spółrzędnemi prostokątnemi, jest następujące

$$\Sigma P_{k,x} = \frac{d(mv_{s,x})}{dt}$$

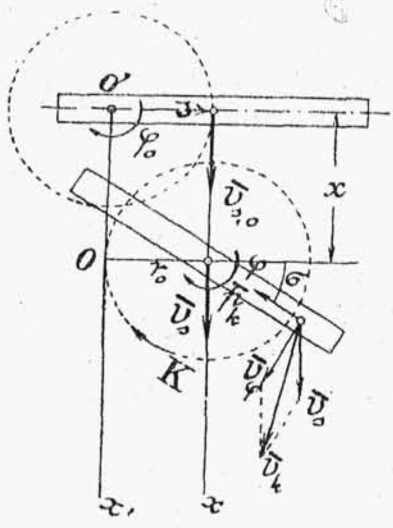
$$\Sigma P_{k,y} = \frac{d(mv_{s,y})}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (109)$$

Trzeciem równaniem dynamicznem tego ruchu może być równanie ruchu względnego, t. j. równ. 90-te; gdy biegun momentów obierzemy w środku masy; i gdy wyraz momentu ilości ruchu obliczymy ze wzoru 68 go. Równanie to jest następujące

$$\Sigma \mathrm{V}\, \overline{P}_k \cdot \overline{r}'_k = \frac{d(I_s \cdot \varphi)}{dt}; \quad \ldots \ldots \quad (110)$$

w którem $I_s$ oznacza moment bezwładności figury materyalnej płaskiej względem bieguna, obranego w środku masy; litera zaś $\varphi$ oznacza prędkość chwilowego obrotu. Zwrócić przytem należy uwagę, że wogóle ruch względny układów sztywnych względem przestrzeni, poruszającej się ruchem postępowym z prędkością równą prędkości środka masy, jest ruchem obrotowym około osi, przechodzącej przez środek masy.

Równania 109-te oraz równie 110-te są trzema równaniami skalarnemi, z których obliczyć można np. trzy spółrzędne położenia danej bryły w funkcyi czasu, gdy dane będą siły, działające na tę bryłę; i odwrotnie, obliczyć można pewne siły, gdy dany jest ruch.



Rys. 22.

## 52. Obliczenie ruchu swobodnego figury materyalnej płaskiej, poruszającej się w swej płaszczyźnie, bez udziału sił zewnętrznych lecz z początkową prędkością.

Figurę płaską obierzemy w postaci np. pręta materyalnego, obracającego się około osi $O'$, rys. 22-gi, przechodzącej przez pewien punkt jego osi, z prędkością $n$ obrotów na minutę; w pewnem położeniu tego pręta, oś obrotu zostaje nagle usuniętą; zadanie polega na obliczeniu dalszego ruchu tego pręta, przy założeniu, że siły, działające na niego, są zrównoważone.

Stosownie do warunków zadania ciężar pręta jest zrównoważony siłami odporowemi płaszczyzny, po jakiej on się ślizga; siła przeto ciężkości pręta nie wpływa na jego ruch; a że dla uproszczenia rachunku pominiemy siły oporowe, występujące podczas ruchu pręta, przeto z chwilą uwolnienia pręta od osi, około której był on zmuszony się obracać, otrzymuje on ruch płaski o znanym ruchu początkowym. Równanie ruchu środka masy tego pręta jest w tym razie następujące

$$0 = m \frac{d\bar{v}_s}{dt};$$ skąd po scałkowaniu otrzymamy

$$\bar{v}_s = \bar{v}_{s,o}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

gdzie $\bar{v}_{s,o}$ oznacza prędkość początkową środka masy, a $\bar{v}_s$ prędkość jego w dowolnej chwili. Prędkość początkowa jest nam znaną; kierunek bowiem jej pokrywa się z kierunkiem stycznej do koła, jakie zakreślał środek pręta podczas obrotu przymusowego w chwili, w której tę oś usunięto; wartość tej prędkości obliczymy z równania

$$v_{s,o} = \varphi_o \cdot s;$$

w którem początkowa prędkość obrotowa

$$\varphi_o = \frac{2\pi n}{60};$$

a litera $s$ oznacza odległość środka pręta od osi obrotu. Z równania 109-go wynika, że środek pręta, porusza się ruchem prostolinijnym i jednostajnym, którego kierunek wyznaczony jest kierunkiem jego prędkości początkowej.

Równanie momentu ilości ruchu danego pręta względem bieguna obranego w środku masy jest stosownie do równ. 100-go następujące

$$0 = \frac{d(J_s \cdot \varphi)}{dt};$$

z którego wobec niezmiennego momentu bezwładności pręta podczas jego ruchu otrzymamy

$$\varphi = \varphi_o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Z równania tego wynika, że pręt obraca się około środka swej masy ruchem jednostajnym.

Środek przeto pręta zakreśla w tych warunkach tor prostolinijny ruchem jednostajnym, a pręt obraca się około tego środka ze stałą prędkością, równą prędkości początkowej danego obrotu.

Prędkość przeto $\bar{v}_k$ $k$-tego punktu składa się w myśl § 54-go tomu

II-go, z prędkości $v_{\varphi, k,}$ wynikającej z obrotu pręta i z prędkości postępowej $v_{s,}$ równej prędkości środka masy; t. j.

$$\bar{v}_k = \bar{v}_s + \bar{v}_{\varphi, k}; \qquad \text{gdzie} \qquad \bar{v}_{\varphi, k} = V\, \bar{r}_k \,.\, \bar{\varphi}.$$

Położenie przeto pręta na płaszczyźnie, po upływie czasu $t$ od chwili puszczenia go swobodnie, obliczymy z równania 111-go i 112-go po ich scałkowaniu. Oznaczywszy literą $x$ spółrzędną środka pręta, a literą $\sigma$—kąt, o jaki pręt się obrócił; napiszemy

$$x = v_{s, o} \,.\, t; \qquad \text{oraz} \qquad \sigma = \varphi_o \,.\, t.$$

Zadanie powyższe jest przeto rozwiązane; pozostaje tylko zbadać drogą analizy matematycznej właściwości kinematyczne tego ruchu. Ruch danego pręta, jako ruch płaski, może być zastąpiony wogóle ruchem toczenia się pewnej krzywej, sztywno związanej z danym prętem, po innej—nieruchomej; leżącej w danej płaszczyźnie, porów. § 40-ty tomu II-go. Ażeby tę krzywą obliczyć dla danego przypadku, obliczymy, stosownie do § 54-go tomu II-go, odległość $r_o$ bieguna chwilowego obrotu od środka masy pręta; wielkość ta

$$r_0 = \frac{v_s}{\varphi} = \frac{v_{s, o}}{\varphi_o} = s;$$

jest przeto wielkością stałą; bieguny zatem chwilowych obrotów leżą na stałych odległościach od kierunku prędkości środka masy; czyli tor środków chwilowych obrotów jest linją prostą równoległą do toru, jaki zakreśla środek masy; a krzywa ruchoma jest kołem o promieniu $r_o = s$, zakreślonem ze środka masy; koło to jest oznaczone na rys. 22-gim literą $K$; tor zaś nieruchomy literą $x'$. Ruch przeto danego pręta można wywołać toczeniem się koła o promieniu $s$ sztywno związanego z prętem, po prostej równoległej do kierunku prędkości początkowej środka masy. W celu obliczenia przyśpieszeń punktów danego pręta weźmiemy pod uwagę, że pręt posiada ruch obrotowy i postępowy; przyśpieszenie przeto każdego jego punktu w myśl § 74-go tomu II-go, składa się z przyśpieszeń, wywołanych tymi ruchami. W danym przykładzie każdy punkt danego pręta posiada tylko jedno przyśpieszenie dośrodkowe $= r_k \,.\, \varphi_o^2$; przyśpieszenia bowiem ruchu postępowego i przyśpieszenia obrotowego stycznego w tym razie niema.

Inny jednakże będzie ruch tego pręta, gdy puścimy go w sposób wyżej wskazany, lecz w płaszczyźnie pionowej i gdy uwzględnimy jego ciężar. Równania dynamiczne tego ruchu są następujące

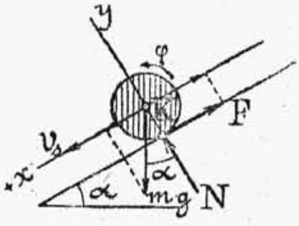
$$m\bar{g} = \frac{d(m\,\bar{v}_s)}{dt}; \qquad \text{oraz } 0 = \frac{d\,(I_s \,.\, \varphi)}{dt}.$$

Równanie pierwsze stosownie do obliczeń, podanych na str. 47-ej tomu II-ego, wyraża, że środek masy zakreśla parabolę; rys. 12-ty tomu III-go; z równania zaś momentu ilości ruchu wynika, że pręt obraca się około tego środka, jak poprzednio, ruchem jednostajnym; moment bowiem siły ciążenia, która działa na ten pręt względem bieguna, obranego w środku masy, równa się zeru.

Zaznaczyć należy, że wywody te odnoszą się tylko do ruchu pręta czy też wogóle do bryły, która wykonuje z jakichbądź powodów ruch płaski; w przeciwnym zaś razie ruch bryły będzie inny, o czem będziemy mówić w odpowiednim rozdziale o ruchu bryły swobodnej.

W rozwiązaniu danego zadania jak i każdego innego należy rozróżnić część dynamiczną; mającą na celu zestawienie równań dynamicznych ruchu i — część kinematyczną, mającą na celu przekształcenie ruchu, wyrażonego równaniami dynamicznemi, na inne ruchy, więcej naoczne; takie też postępowanie rozróżniono w rozwiązaniu zadania powyższego.

**53. Obliczenie ruchu walca toczącego się.** Obliczyć ruch walca o przekroju kołowym, toczącego się wskutek swej ciężkości po płaszczyźnie pochyłej w ten sposób, że oś jego pozostaje podczas ruchu poziomą, rys. 23-ci. Do wyznaczenia położenia tego walca wystarcza jedna tylko spółrzędna skalarna, którą może być np. odległość jego osi od początkowego jej położenia; kąt bowiem obrotu, o jaki obrócił się walec podczas tego ruchu, obliczyć można z warunku toczenia się, który wyraża się równaniem $v_s = r \cdot \varphi$, po jego scałkowaniu.




Rys. 23.

Ażeby do obliczenia ruchu danego walca zastosować równania, odnoszące się do ruchu bryły swobodnej, należy uczynić go swobodnym *); w tym celu przyłożymy do niego siłę odporową $N$, prostopadłą do płaszczyzny, po której się toczy, i — siłę $F$ styczną do walca, która wywołuje toczenie się jego; gdyby bowiem jej nie było, walec ślizgałby się po tej płaszczyźnie, a nie toczył się, jak tego wymaga zadanie. Na walec przeto działają siły $N$ i $F$ nieznane co do wielkości, znane jednakże co do kierunków; i działa na niego jeszcze znana siła jego ciężkości.

W celu zastosowania równania 88-mego, wyobrazimy sobie ruch tego walca, jako ruch złożony: z ruchu obrotowego około środka masy i z ruchu postępowego. Obrawszy biegun momentów w środku masy;

*) W tenże sposób postępowaliśmy w ogóle w statyce i w dynamice punktu.

napiszemy równanie dynamiczne momentów ilości ruchu względnego, stosownie do równania 90-go

$$F \cdot r = \frac{d(I_s \cdot \varphi)}{dt}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (113)$$

w którem $r$ oznacza promień walca; jest to równanie ruchu względnego danego walca, w którem jest jedna niewiadoma $F$.

Siłę $F$ obliczymy z równania dynamicznego środka masy, równ, 88-me

$$m\bar{g} + \bar{F} + \bar{N} = \frac{d(m\bar{v}_s)}{dt}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (114)$$

po zrzutowaniu jego na kierunek osi $x$, np. na równoległą do płaszczyzny, otrzymamy równanie skalarne

$$mg \cdot \sin\alpha - F = m\frac{dv_s}{dt};$$

$$\text{a ponieważ} \quad v_s = r\varphi, \quad \text{a} \quad \frac{dv_s}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

przeto, po podstawie tych wartości

$$F = mg \cdot \sin\alpha - mr \cdot \frac{d\varphi}{dt}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (115)$$

Po podstawieniu następnie tej wartości w równ. 113-te; otrzymamy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr \cdot \sin\alpha}{mr^2 + I_s}; \text{ lub inaczej } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr \cdot \sin\alpha}{I_K}; \quad . \; . \quad (116)$$

gdzie $I_K$ oznacza moment bezwładności walca względem osi, stykającej się z płaszczyzną. Z równania tego obliczyć można prędkość i położenie danego walca jako funkcyę czasu. Ponieważ w równaniu 114-em wartość, stojąca po prawej jego stronie, jest niezależną od czasu; przeto obrót walca jest jednostajnie przyśpieszony; a więc również i ruch jego postępowy, gdyż $p_s = r\frac{d\varphi}{dt}$.

Po scałkowaniu równania 116-go otrzymamy prędkość obrotową w funkcyi czasu; a po powtórnem scałkowaniu, otrzymamy kąt obrotu w funkcyi czasu; z czego możemy obliczyć jego położenie w każdej chwili.

Jeżeli zaś zechcemy obliczyć te wielkości w funkcyi np. spółrzędnej środka masy, to z równania 116-go wyrugujemy czas podstawiając w nie $dt = \frac{d\sigma}{\varphi}$, jakieśmy to wykonali w § 5-tym tomu III-go lub też zastosujemy bezpośrednio równanie równowartości pracy i energii kinetycznej w nast. sposób.

Podczas toczenia się walca, pracę wykonuje tylko siła ciężkości; wartości bowiem prac sił $N$ i $F$ równają się podczas tego ruchu zeru. Energię kinetyczną walca toczącego się wyrazimy wzorem 79-tym § 42 go; równanie przeto równowartości pracy i energii kinetycznej jest w danym razie następujące

$$Q \cdot ds \cdot \sin \alpha = d \tfrac{1}{2} (I_s \varphi^2 + m v_s^2);$$

w którem $ds$ oznacza przesunięcie, jakie zakreślił środek masy. Z równania tego obliczyć można prędkość obrotową lub prędkość środka masy, jako funkcyę spółrzędnej tego środka.

W ten sposób zadanie obliczenia ruchu walca jest rozwiązane; pozostaje tylko analiza otrzymanych równań. W tym celu scałkujemy równanie pracy i zastąpimy wyraz $s \cdot \sin \alpha$ wysokością $h$ spadu środka walca.

Jeżeli początkowa prędkość środka masy walca równała się zeru; to po podstawieniu w powyższe równanie $\varphi = \frac{v_s}{r}$, otrzymamy

$$m g h = \tfrac{1}{2} \left( \frac{I_s}{r^2} + m \right) \cdot v_s^2; \text{ skąd}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{2 m g h}{\frac{I_s}{r^2} + m}}.$$

Z równania tego obliczymy prędkość środka walca po opuszczeniu się jego środka na wysokość $h$.

Dla walca np. pełnego

$$I_s = \tfrac{1}{2} m r^2; \quad \text{przeto}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{2 g h}{\frac{1}{2} + 1}} = \sqrt{\tfrac{2}{3} \cdot 2 g h}.$$

Zważywszy następnie, że prędkość $v_s^*$ bryły, spadającej po płaszczyźnie ruchem postępowym, wyraża się wzorem

$$v_s^* = \sqrt{2 g h};$$

przyjdziemy do wiosku, że środek walca, spadającego ruchem postępowym, spada prędzej niż środek walca, toczącego się i — że prędkość środka toczącego się walca zależy od wartości jego momentu bezwładności w ten sposób, że z powiększeniem się wartości $\frac{I_s}{r^2}$ przy tej samej wartości masy, prędkość środka walca zmniejsza się. Jeżeli np. po płaszczyźnie pochyłej puszczone będą z jednakowych wysokości kula, walec i obręcz, zrobione z mas o jednakowych wielkościach; to najpierw stoczy się kula, następnie walec, a wreszcie obręcz, która będzie o tyle wolniej spadała, o ile średnica jej będzie większą. Wartość przeto prędkości środka masy brył o różnych postaciach, lecz o równych wartościach mas, zmienia się pomiędzy prędkością ruchu postępowego a wartością $\sqrt{\frac{1}{2}.2gh}$; największa bowiem wartość $\frac{I_s}{r^2}$ bryły, zrobionej z danej masy, posiada pierścień, o promieniu możliwie wielkim; w krańcowym przeto przypadku, który zachodzi, gdy $r=\infty$; $I_s = mr^2$; a $\frac{I_s}{r^2} = m$.

Siłę $F$ obliczymy z równania 115-go po podstawieniu w nie z równ. 116-go wartości przyśpieszenia; siła ta

$$F = mg\,.\sin\alpha\,.\left(1 - \frac{mr^2}{I_K}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Po zrzutowaniu wreszcie równania 114-go na oś pionową, obliczymy siłę odporową

$$N = mg\cos\alpha.$$

W równaniu 117-tem wyraz $mg$ sin $\alpha$ wyraża składową siły ciężkości, nadającą walcowi ruch postępowy; gdyby środek walca pozostawał w spoczynku, siła $F$ byłaby równa tej składowej; a że jest on w ruchu, przeto siła $F$ powinna być mniejszą od tej składowej; co też wyraża czynnik w nawiasach równania 117-go, którego wartość jest mniejszą od jedności.

Dla walca pełnego

$$I_K = I_s + mr^2 = \tfrac{3}{2}mr^2;$$

przeto dla tego przypadku

$$F = \tfrac{1}{3}mg\,.\sin\alpha.$$

Z równania tego wynika, że trzecia część składowej siły ciężkości danego walca idzie na nadanie bryle przyśpieszenia postępowego, a $\frac{2}{3}$ na wywołanie jego ruchu obrotowego.

Jeżeli siła $F$ wywołana jest np. tarciem $W$, jakie występuje pomiędzy powierzchnią walca a płaszczyzną; to toczenie się walca może nastąpić tylko wtedy, gdy

$$W \geqq F;$$

w przeciwnym bowiem razie walec będzie się ślizgał po płaszczyźnie, a nie toczył, i zadanie będzie inne. Po podstawieniu w tę nierówność wartości $W = \mu.N$; oraz wartości $N$ z równ. poprzedniego i $F$ z równania 115-go; obliczymy kąt nachylenia płaszczyzny, przy którym dana bryła będzie się toczyć, a nie ślizgać; równanie to jest następujące

$$\mu \,.\, mg \cos\alpha \geqq mg \sin\alpha \,.\left(1 - \frac{mr^2}{I_k}\right); \text{ skąd}$$

$$tg\,\alpha \leqq \frac{\mu}{1 - \dfrac{mr^2}{I_k}}$$

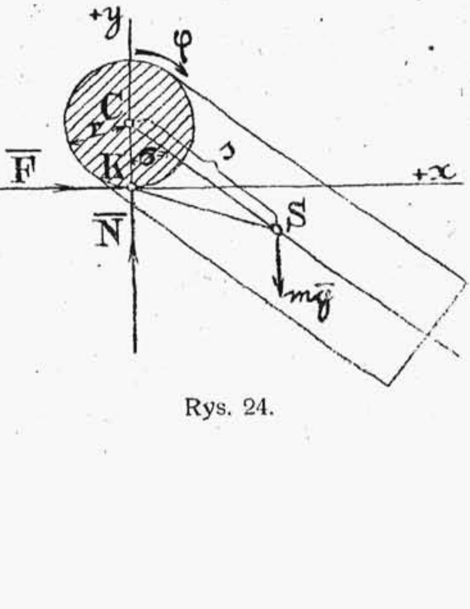
Walec np. pełny toczyć się będzie po płaszczyźnie pochyłej, gdy kąt jej nachylenia $\alpha$ względem poziomu odpowiada warunkowi $tg \leqq 3\mu$.

Jeżeli zaś będzie $tg\,\alpha > 3\mu$, to walec ten będzie się ślizgał; ruch przeto jego nie będzie odpowiadał warunkom, postawionym w danem zadaniu.

Szczególnym przypadkiem powyższego przykładu można uważać kulę dosyć lekką, umieszczoną na pionowo bijącym strumieniu wody. Strumień bowiem wody, uderzając w kulę, wywołuje siłę $F$, zwróconą pionowo ku górze. W przypadku $mg - F = 0$, środek kuli będzie pozostawał w spoczynku; t. j. kula zawiśnie w powietrzu; a jeżeli uderzenie to będzie mimośrodkowe, to kula obracać się będzie około swego środka wskutek momentu, jaki wywoła siła $F$; w przypadku zaś gdy strumień ten uderza kulę środkowo, kula wtedy nie otrzyma obrotu i zawiśnie w zupełnym spoczynku.

W ogólniejszym zakresie otrzymamy podobne zjawisko, gdy wyobrazimy sobie płaszczyznę, po której toczy się kula; poruszającą się ruchem postępowym ku górze we własnej płaszczyźnie; a przy warunku $W \geqq F$, toczący się walec, czy też tocząca się kula może być nawet uniesiona siłą tarcia ku górze, obracając się jednocześnie około osi poziomej,

**54. Obliczenie ruchu toczącego się wahadła.** Bryła materyalna połączona jest w jedną całość z walcem, który może toczyć się po płaszczyźnie o tyle chropowatej, że walec nie będzie się ślizgał, rys. 24-ty; obliczyć ruch bryły bez uwzględnienia oporów; gdy płaszczyzna, po której walec się toczy jest poziomą, a bryła jest w początku ruchu odchyloną od położenia równowagi.



Rys. 24.

Ponieważ ruch tej bryły, którego płaszczyzna jest prostopadłą do osi walca, jest płaski; ruch przeto tej bryły może być określony ruchem koła, jakie otrzymamy z przecięcia się walca z płaszczyzną ruchu po prostej, którą otrzymamy z przecięcia się płaszczyzny toczenia się z płaszczyzną ruchu, rys. 24-ty. Położenie danej bryły określa spółrzędna położenia punktu styczności koła z prostą, po której się ono toczy; i — kąt odchylenia $\sigma$, jaki tworzy z pionową prosta np. $CS$, łącząca środek koła z rzutem środka bryły na płaszczyznę ruchu; a ponieważ spółrzędna punktu zetknięcia się jest zależną od wielkości $\sigma$, wskutek danego w zadaniu warunku — toczenia się; jedna przeto z tych spółrzędnych, np. spółrzędna $\sigma$ wystarcza do określenia położenia bryły; i jedno równanie dynamiczne wystarczy do określenia jej ruchu. Jako równanie dynamiczne obierzemy np. równanie równowartości pracy i energii kinetycznej; gdyż równanie, to będąc wolne od sił odporowych, wyrazi bezpośrednio ruch danego wahadła.

Na bryłę daną działa siła odporowa $N$, występująca w punkcie styczności; — siła styczna do walca $F$, wywołująca jego toczenie się i siły ciążenia, których wypadkowa przechodzi przez środek masy całego układu. Ruch chwilowy bryły jest ruchem obrotowym około punktu zetknięcia się koła z prostą, po której się toczy; energię przeto kinetyczną danej bryły wyrazimy wzorem

$$\tfrac{1}{2} I_K \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2;$$

w którym $I_K$ oznacza moment bezwładności całej bryły względem bieguna chwilowego obrotu $K$; a $\frac{d\sigma}{dt}$ oznacza prędkość kątową jej obrotu około tegoż bieguna. Równanie przeto dynamiczne równowartości pracy i energii kinetycznej otrzymamy w tenże sposób, w jaki otrzymaliśmy równ. 107-me dla wahadła pospolitego. W tym celu potoczymy dane wahadło do nieskończenie blizkiego położenia i napiszemy

$$m\,g\,.\,d(s\,.\cos\sigma) = d\left[\tfrac{1}{2} I_K\,.\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (118)$$

Przyjąwszy początkowe warunki ruchu

$$\text{dla } \sigma = \sigma_0; \quad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right) = 0\,;$$

otrzymamy z tego równania, po jego scałkowaniu, równanie

$$mgs\,.\,(\cos\sigma - \cos\sigma_0) = \tfrac{1}{2} I_K\,.\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (119)$$

Z równania tego można obliczyć prędkość kątową w każdem położeniu $\sigma$ danej bryły; rozwiązując zaś je względem $dt$ i całkując, otrzymamy związek pomiędzy $\sigma$ i $t$. Przy tem całkowaniu należy wziąść pod uwagę, że $I_K$ jest w tym przykładzie wielkością zmienną, zależną od kąta $\sigma$; mamy bowiem

$$I_K = I_s + m \,.\, KS^2;$$

a po podstawieniu wielkości $KS$

$$I_K = I_s + m\,(r^2 + s^2 - 2\,r\,.\,s\,.\cos\sigma).$$

Obliczywszy ruch bryły, możemy z pozostałych równań jej ruchu, t. j. z równań ruchu środka masy obliczyć siły odporowe $N$ i $F$; jakieśmy to już w poprzednich przykładach okazali. Funkcye jednakże, jakie otrzymamy z całkowania równania 119-go są eliptyczne; badanie przeto ruchu tej bryły jest w tej postaci równań nieprzystępne. Ażeby jednakże wytworzyć sobie choć przybliżony obraz tego ruchu przyjmiemy, że odchylenie $\sigma$ jest tak małą wielkością, że drugie potęgi wartości tego kąta można pominąć; wobec czego podstawimy w powyższe wzory $\cos\sigma = 1$ i otrzymamy wartość momentu bezwładności

$$I_K \cong I_s + m\,(r - s)^2;$$

która jest przy tem założeniu wielkością stałą; równanie przeto 118-te będzie jednakowe z równaniem 107-mem, str. 82-ga, wyprowadzonem dla wahadła pospolitego; z równania przeto 102-ego obliczymy wartość okresu podwójnego wahnięcia, t. j. obliczymy okres czasu, w którym dane wahadło powróci do położenia, z którego zostało puszczone. Dla przypadku $r = 0$; wahadło toczące się zamieni się na wahadło pospolite, obracające się około osi, czy też punktu nieruchomego; po podstawieniu też w równ. dla $I_K$ $r = 0$; otrzymamy wzór 107-my.

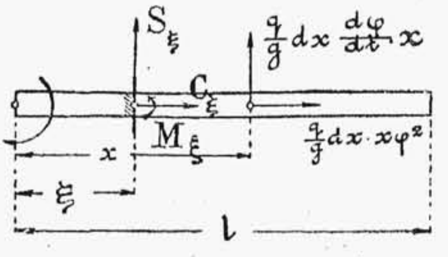
**55. Obliczenie sił wewnętrznych poruszającej się bryły materyalnej.** Pręt cienki o stałym przekroju obraca się w płaszczyźnie poziomej około punktu stałego, obranego na jego osi, rys. 25-ty; obliczyć największe naprężenie ciągnące, ścinające i gnące.

W zadaniu tem mamy dany ruch bryły materyalnej, a poszukujemy sił wewnętrznych, występujących w pewnych jej przekrojach. Ażeby unaocznić sobie te siły, sprowadzimy to zadanie do zadania statycznego, i w tym celu zastosujemy metodę d'Alembert'a, podaną w § 71-szym tomu III-go. W myśl tej metody wyobrazimy sobie, że do każdego punktu tego pręta przyłożone są siły bezwładności; a natomiast przyjmiemy, że pręt pozostaje w spoczynku. Siłami temi są w danym razie siły odśrodkowe działające wzdłuż promieni, wyprowadzonych z punktu obrotu do oddzielnych punktów pręta, oraz siły styczne prostopadłe do tych promieni.

Zakładając znaczną długość pręta w porównaniu z jego przekrojem przyjąć można, że siły odśrodkowe wywołują ciągnienie pręta wzdłuż jego osi; a siły styczne są prostopadłe do osi i wywołują gięcie pręta.

Oznaczywszy literą $q$ ciężar jednostki długości danego pręta, wyrazimy ciężar jego cząstki, odległej na $x$ od punktu obrotu, wzorem

$$q \,.\, dx;$$



Rys. 25.

siłę przeto odśrodkową, którą należy wyobrazić sobie przyłożoną do tej cząstki, wyrazimy wzorem

$$\frac{q \,.\, dx}{g} \,.\, x \varphi^2.$$

Jeżeli następnie wyobrazimy sobie pręt, przecięty w miejscu $\xi$, to należy przyjąć, że na ten przekrój działają wszystkie siły odśrodkowe punktów, leżących od $\xi$ do $l$. Siłę przeto $C_\xi$, ciągnącą pręt w przekroju $\xi$ wzdłuż jego osi w chwili w której pręt posiada prędkość $\varphi$, obliczymy jako sumę wszystkich sił odśrodkowych z równania następującego

$$C_\xi = \int_\xi^l \frac{q \,.\, dx}{g} \,.\, x \varphi^2;$$

a po całkowaniu

$$C_\xi = \tfrac{1}{2} \frac{q}{g} \,.\, (l^2 - \xi^2) \,.\, \varphi^2 \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \qquad (120)$$

Jeżeli przyjmiemy w danem zadaniu, że prędkość $\varphi$ jest zmienną i np. rośnie razem z czasem to naprężenie ciągnące rośnie również proporcyonalnie do wartości czasu w drugiej potędze. Ażeby przeto nie przekroczyć wytrzymałości materyału, prędkość obrotu można powiększać tylko do pewnych granic.

Siłę tnącą $S_\xi$ w przekroju $\varphi$ obliczymy ze wzoru

$$S_\xi = \int_\xi^l \frac{q \,.\, dx}{g} \,.\, x \frac{d\varphi}{dt};$$

a po scałkowaniu, zważywszy, że przyśpieszenie kątowe jest w danej chwili dla wszystkich punktów jednakowe, otrzymamy

$$S_\xi = \tfrac{1}{2} \frac{q}{g} \,.\, (l^2 - \xi^2) \,.\, \frac{d\varphi}{dt} \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \qquad (121)$$

Moment gnący $M_\xi$, jaki występuje w przekroju $\xi$, obliczymy jako sumę momentów sił stycznych, występujących w przekrojach od $\xi$ do $l$; moment ten przeto wyrazimy wzorem

$$M_\xi = \int_\xi^l \frac{q \,.\, dx}{g} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \,.\, (x - \xi);$$

a po scałkowaniu wzorem

$$M_{\xi} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{q}{g} \cdot (2\,l^3 - 3\,l^2\,\xi + \xi^3) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (122)$$

Wartości przeto sił tnących, jak również wartość momentu gnącego danego pręta, jest proporcyonalna do wielkości przyśpieszenia kątowego; ażeby przeto nie przekroczyć wytrzymałości materyału na ścinanie lub na gięcie, przyśpieszenie to powinno posiadać określoną granicę. Często się też zdarza, że pręt podczas nagłej zmiany ruchu złamie się; zjawisko takie tem się tłumaczy, że w chwili nagłej zmiany ruchu nadajemy prętowi w bardzo krótkim okresie czasu znaczną prędkością; t. j. nadajemy mu znaczne przyśpieszenie. W pręcie zaś, obracającym się np. ruchem jednostajnym, nie powstają ani siły ścinające ani momenty gnące.

Siły ciągnące powstają przy wszelkim obrocie pręta; i są one stałe lub zmienne, zależnie od tego czy obrót jest jednostajny czy też zmienny.

W zadaniu powyższem przyjęliśmy, że wielkość przekroju pręta jest bardzo mała w porównaniu z jego długością; i uczyniliśmy to w celu uproszczenia rozpatrywań. Inaczej jednakże przedstawi się rozkład sił bezwładności, gdy wymiary przekroju pręta będą znaczniejsze; wtedy nie można będzie przyjąć, że kierunki np. sił odśrodkowych pokrywają się z kierunkiem osi pręta, jakieśmy to uczynili i, że kierunki sił stycznych są równoległe do przekrojów. Do spotykanych jednakże w praktyce przykładów można stosować przyjęte założenia.

W zadaniu powyższem dany był ruch bryły; a z ruchu tego obliczyliśmy siły wewnętrzne; jeżeli zaś zamiast ruchu są dane np. siły zewnętrzne, wywołujące ruch; to w celu obliczenia sił wewnętrznych, należy najpierw obliczyć ruch danej bryły w pewnej chwili lub w pewnem jej położeniu; a następnie obliczyć jej siły wewnętrzne, jakie występują w tejże chwili.

Jeżeli dane są siły zewnętrzne, działające na daną bryłę, to siły wewnętrzne zależą również bezpośrednio od tych sił; gdyż w danym razie siły wewnętrzne (występujące w przekroju), w myśl metody d'Alembert'a, powinny równoważyć się nietylko z siłami bezwładności, jak to było w przykładzie powyższym, lecz i z siłami zewnętrznemi. Uważać przeto można, na zasadzie superpozycyi sił, że wogóle siły wewnętrzne bryły, będącej w ruchu, składają się:

1) z sił, wywołanych ruchem bryły; siły te nazwiemy kinetycznemi; i

2) z sił, wywołanych działaniem sił zewnętrznych; siły te nazwiemy statycznemi. W powyższym przykładzie, w którym nie uwzględnialiśmy sił zewnętrznych, mieliśmy do czynienia tylko z siłami wewnętrznemi kinetycznemi. Siły wewnętrzne statyczne, o ile one występują, obliczymy zwykłymi metodami, podawanemi w statyce; a suma tych

obydwóch rodzajów sił jest wyrazem naprężeń, występujących w danym przekroju i jest miarodajną dla wytrzymałości tej bryły.

**Przykład.** Pręt materyalny, zawieszony swobodnie na osi poziomej, obraca się pod działaniem swego ciężaru, rys. 82-gi; obliczyć naprężenia, jakie występują w przekrojach tego pręta.

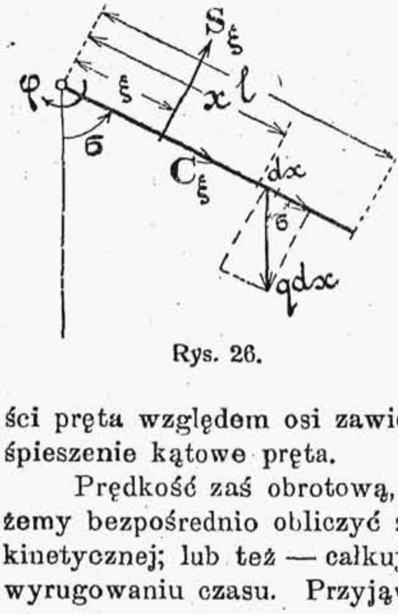
Naprężenia w przekroju $\xi$, zgodnie z równaniem 120-em, 121-em i 122-em są następującem

$$C_\xi = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \cdot (l^2 - \xi^2) \cdot \varphi^2 + \int_\xi^l q \cdot dx \cdot \cos\sigma \,; \qquad (123)$$

$$S_\xi = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \cdot (l^2 - \xi^2) \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \int_\xi^l q \cdot dx \cdot \sin\sigma \,; \qquad (124)$$

$$M_\xi = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{q}{g} \cdot (2l^3 - 3l^2 \cdot \xi + \xi^3) \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \int_\xi^l q \cdot dx \cdot \sin\sigma \cdot (x - \xi) \,. \qquad (125)$$

Drugie wyrazy, znajdujące się po prawej stronie tych równań, w postaci całek, wyrażają naprężenia, nazwane statycznemi; które w przykładzie poprzednim nie występowały.




Rys. 26.

W równaniach tych siły wewnętrzne i ich momenty wyrażone są przyśpieszeniem obrotowem i prędkością obrotową pręta; wielkości te jednak możemy wyrazić siłami, wywołującemi dany ruch i w tym celu napiszemy np. równanie momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego w środku obrotu. Równanie to jest następujące

$$mg \cdot \sin\sigma \cdot \tfrac{1}{2} l = \frac{d(I_A \cdot \varphi)}{dt} \,;$$

w którem $I_A$ oznacza moment bezwładności pręta względem osi zawieszenia. Z równania tego obliczymy przyśpieszenie kątowe pręta.

Prędkość zaś obrotową, potrzebną do obliczenia siły ciągnącej, możemy bezpośrednio obliczyć z równania równowartości pracy i energii kinetycznej; lub też — całkując równanie momentów, po odpowiedniem wyrugowaniu czasu. Przyjąwszy np. dla

$$\sigma = \sigma_0 \,; \quad \varphi = 0 \,;$$

równanie równowartości pracy i energii kinetycznej po jego scałkowaniu będzie następujące

$$\tfrac{1}{2} I_A \cdot \varphi^2 = mg\,(\cos\sigma - \cos\sigma_0).$$

Po podstawieniu z tych równań wartości przyśpieszenia i prędkości w równania 123-cie, 124-te i 125-te i po scałkowaniu tych równań;

otrzymamy wartości sił wewnętrznych w zależności od położenia pręta $\sigma$ i od położenia przekroju $\xi$.

Dla pręta materyalnego

$$I_A = \tfrac{1}{3} m l^2 = \tfrac{1}{3} \frac{q}{g} l^3;$$

po podstawieniu przeto tej wartości we wzory 124-ty i 125-ty i po skróceniu otrzymamy

$$S_\xi = -\frac{q}{4l} \,.\, \sin\sigma \,.\, (l-\xi)(l-3\xi);$$

$$M_\xi = \frac{q}{4l} \,.\, \sin\sigma \,.\, (l-\xi)^2 \,.\, \xi.$$

Z równań tych wynika:

1) że wielkość momentu gnącego i wielkość siły ścinającej w przekroju danego pręta nie zależy od początkowych warunków ruchu; a tylko od kąta nachylenia pręta względem osi pionowej. Wynik ten stanie się bezpośrednio zrozumiałym, gdy zważymy, że siły styczne a więc i ich moment zależy od przyśpieszenia kątowego, a nie od prędkości; prędkość przeto początkowa, którą dodaje się na zasadzie prawa superpozycyi z prędkością nabytą, nie wpływa na wielkości tych naprężeń;

2) ze największe wartości momentu gnącego i sił ścinających w każdym przekroju pręta występują w chwili puszczenia pręta; gdyż wtedy sin $\sigma$ a więc $M_\xi$ i $S_\xi$ są największe. Wynik ten jest bezpośrednio zrozumiałym z tego względu, że przyśpieszenie kątowe w początkowem położeniu pręta jest największe;

3) największy moment gnący w danem położeniu pręta znajduje się na odległości $\frac{1}{3}$ jego długości, licząc od osi zawieszenia; gdyż $M_\xi$ stanie się największością, gdy $\xi = \frac{1}{3} l$, przekrój ten przeto jest przekrojem niebezpiecznym na gięcie.

Położenie przekroju niebezpiecznego, pracującego na ciągnienie, obliczymy z równ. 123-ciego; przekrój ten znajduję się, przy danem położeniu pręta, przy osi obrotu; przy zmiennem zaś położeniu wystąpi największe naprężenie w pionowem położeniu pręta; ze zmniejszeniem się bowiem wartości $\xi$ i $\sigma$, wartości obydwóch wyrazów równania tego powiększają się.

Zwrócić należy jeszcze uwagę, że sposoby, tutaj wskazane, obliczenia sił wewnętrznych i ich momentów dają możność ich obliczenia w odniesieniu do pewnego punktu, obranego w płaszczyźnie danego przekroju; nie dają zaś możności obliczenia tych sił, jakie występują w oddzielnych cząstkach tego przekroju; siły te bowiem zależą od fizycznych właściwości materyału, z którego pręt jest zrobiony; i można je obliczyć dopiero po przyjęciu jakiegoś założenia, określającego fizyczne właściwości danej materyi; założeniem tem jest dla ciał sprężystych t. zw. prawo Hook'a.

**56. Obliczenie ruchu początkowego i sił wewnętrznych, jakie występują w bryle, w chwili nagłego wyprowadzenia jej z równowagi.** Przykładem tego może być następujące zadanie. Belka ciężka o przekroju bardzo małym w porównaniu z jej długością i o ciężarze $q$ na jednostkę długości, oparta jest swobodnie na dwóch poziomych podporach $A$ i $B$, rys. 27-my. W pewnej chwili jedna z podpór np. $B$ zostaje **nagle** usunięta; obliczyć ruch początkowy belki **w chwili** tego **usunięcia**; oraz — siłę odporową, jaka występuje **w tejże chwili** w pozostałej podporze.

W chwili usunięcia podpory, na belkę działa jej ciężar, którego moment wywołuje obrót belki około pozostałego punktu podparcia. Z warunków zadania wynika, że belka nie będzie posiadała prędkości początkowej; a jedynie tylko przyśpieszenie, które mamy przedewszystkiem obliczyć. Równanie dynamiczne momentów względem bieguna obranego w pozostałym punkcie podparcia, jest następujące

$$mg \cdot \frac{l}{2} = \frac{d(I_A \cdot \varphi)}{dt}; \text{ skąd}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{2I_A}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (126)$$

gdzie $I_A$ oznacza moment bezwładności belki względem bieguna, obranego w punkcie podparcia $A$. Z przyśpieszenia kątowego, wyrażonego tem równaniem, możemy obliczyć naprężenia w przekrojach belki, jakieśmy to wyżej uczynili, lub — siłę odporową $A$, jak tego wymaga dane zadanie. W tym celu unaocznimy sobie metodą d'Alembert'a siły bezwładności, jakie występują w belce w chwili usunięcia podpory i przyłożymy do jej cząstek siły bezwładności, jakie powstają w chwili usunięcia podpory $B$. Oznaczymy literą $x$ odległość pewnej cząstki belki od punktu obrotu i wyobrazimy sobie, że do tej cząstki przyłożona jest siła bezwładności styczna z kierunkiem ku górze, i o wielkości, wyrażonej wzorem

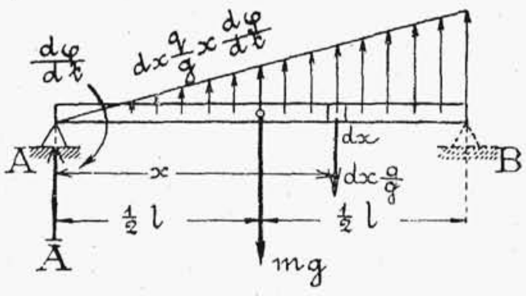
$$\frac{q}{g} \cdot dx \cdot x \cdot \frac{d\varphi}{dt}:$$

przyłóżmy następnie ciężar belki w środku jej masy, a otrzymamy obraz sił bezwładności, będących w równowadze z siłami odporowemi i z ciężarem belki w chwili usunięcia podpory $B$. Zwrócić jeszcze należy uwagę, że ponieważ prędkość obrotowa w chwili usunięcia podpory równa się zeru, przeto siły odśrodkowe nie występują i belka pozostaje pod działaniem tylko sił stycznych i siły ciężkości. Wykres tego obciążenia przedstawiliśmy na rys. 27-ym. Siłę odporową $A$ obliczymy z warunku równowagi sił przyłożonych do danej belki. Równanie to jest następujące

$$A + \int_0^l \frac{q \cdot dx}{g} \cdot x \frac{d\varphi}{dt} - mg = 0;$$

z którego obliczymy

$$A = mg - \tfrac{1}{2}\, ml \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$



Rys. 27.

a po podstawieniu z równania ruchu, z równ. 126-tego, — wartość przyśpieszenia otrzymamy

$$A = mg\left(1 - \frac{ml^2}{4 I_A}\right).$$

Jeżeli wyobrazimy sobie belkę w postaci pręta, co w wielu przypadkach będzie zgodne z rzeczywistością, to, ponieważ

$$I_A = \tfrac{1}{3}\, m\, l^2;$$

otrzymamy

$$A = \tfrac{1}{4}\, mg.$$

Siła więc odporowa jednej podpory, w chwili usunięcia drugiej, stanowi tylko połowę wartości siły odporowej belki, wspartej na obydwóch podporach.

W rozwiązaniu tego zadania można pominąć metodę d'Alembert'a, a natomiast zastosować równanie dynamiczne ruchu środka masy. Obliczywszy bowiem z równania dynamicznego momentów przyśpieszenie tego środka, obliczymy z równania ruchu środka masy siły nieznane, wywołujące ten ruch, t. j. jak w danym przykładzie siłę odporową; postępowanie to jest przeto takie same, jakie stosowaliśmy do obliczenia sił odporowych brył nieswobodnych; a mianowicie wpierw obliczaliśmy ruch, a następnie siły — odporowe.

**57. Obliczenie ruchu początkowego bryły w chwili nagłej zmiany ruchu.** Prostokąt materyalny o bokach $a$ i $b$, rys. 28-my, obraca się z prędkością stałą $\varphi_s$ około osi pionowej $s$; przechodzącej przez środek masy i równoległej do boku $a$; nagle oś ta zostaje usunięta, a prostokąt zostaje zmuszony obracać się około osi innej, przechodzącej np. przez bok $a$; obliczyć prędkość $\varphi_a$, jaką otrzyma prostokąt w chwili rozpoczęcia obrotu około nowej osi.