tak, iż powyższe równanie momentów przyjmie postać

$$\overline{M}_P = V \overline{M}_v \,.\, \overline{\varphi} + \frac{d^* \overline{M}_v}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (241)$$

Jest to równanie Euler'a w postaci wektorowej.

Napisawszy je w postaci

$$- V \overline{M}_v \,.\, \overline{\varphi} + \overline{M}_P = \frac{d^* \overline{M}_v}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (242)$$

znajdziemy w niem wyraz pojęć dynamicznych, na których oparliśmy poprzednie wyprowadzenie; lewa bowiem strona wyraża sumę momentu sił bezwładności, jakie powstają w bryle podczas jej obrotu około osi chwilowej $\overline{\varphi}$ i momentu sił zewnętrznych. Gdyby oś obrotu była unieruchomiona w przestrzeni, wtedy suma tych wyrazów równałaby się działaniu obracającej się bryły na łożyska osi; w danym zaś razie wyobraża ona działanie, które zmienia położenie bryły.

Równanie to utożsamimy z równaniami 239-mi, gdy zrzutujemy je na osi główne danej bryły; i w tym celu dla obliczenia rzutów wyrazu pierwszego na obrane osi spółrzędnych zastosujemy wzór 97-my tomu I-go; rzuty wyrazu drugiego napiszemy bezpośrednio; rzuty zaś wyrazu, stojącego po prawej stronie równania 242-go, obliczymy, gdy weźmiemy pod uwagę twierdzenie, wyprowadzone w § 23-cim tomu I-go, że rzut pochodnej równa się algebraicznej pochodnej rzutu tego wektora i na zasadzie tego otrzymamy trzy składowe tej pochodnej $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$ i $\frac{dN}{dt}$; gdzie literami L, M i N oznaczyliśmy rzuty wektora $\overline{M}_v$ na osi główne; w ten sposób otrzymamy równania 239-te.

K. Równania Lagrange'a.

98. Równanie statyczne. Wyobraźmy sobie, że położenie każdego punktu danego układu wyznaczone jest przez promień wodzący $\overline{r}_k$, wyprowadzony do k-tego punktu układu, z dowolnie obranego lecz stałego punktu, zwanego początkiem układu; i przyjmiemy, że położenie tego wektora w przestrzeni jest określone przez pewne **niezależne od siebie** wielkości, które oznaczymy ogólnie literami $q_1, q_2 \cdots q_s$, i nazwiemy je spółrzędnemi niezależnemi; wielkości te mogą oznaczać np. kąty, jakie tworzy dany promień wodzący z obranemi osiami układu nieruchomego; lub odległości od pewnych osi, płaszczyzn i t. p.; o te szczegóły w danym razie nie idzie, a idzie tylko o to, ażeby te wielkości były od siebie niezależne i jednoznacznie określały położenie k-tego promienia $\overline{r}_k$, a więc i odpowiedniego punktu. Takiemi spółrzędnemi są np. kąty σ i ψ w zadaniu § 74-go. Położenie przeto i wielkość promienia wodzącego wyrazić możemy wzorem ogólnym [1])

$$\bar{r}_k = \bar{f}(q_1, q_2, \ldots) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (243)$$

Jeżeli **wszystkie** zmienne, określające położenie danego promienia, otrzymają pewne przyrosty; to koniec promienia zakreśli cząstkę toru, jaką w rzeczywistości zakreśla punkt, którego położenie ten promień określa; przesunięcie to nazwiemy całkowitem lub rzeczywistem i oznaczymy je symbolem

$$d\bar{r}_k; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

jako całkowitą różniczkę promienia, będącego funkcyą, rów. 243-cie, niezależnie zmiennych. Jeżeli zaś **jednej** tylko zmiennej niezależnej, którą oznaczymy literą q_s, nadamy przyrost, a **pozostałe nie zmienimy**, co zawsze możemy uskutecznić ze względu na niezależność tych zmiennych; to przesunięcie k-tego punktu, jakie wskutek tego powstanie, nazwiemy przesunięciem cząstkowem i oznaczymy je symbolem

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot d q_s; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (245)$$

jako różniczkę cząstkową równania 243-go. Oczywistem jest, że przesunięcie cząstkowe nie jest tożsamem z przesunięciem rzeczywistem punktu; lecz jest jednem ze składowych przesunięć, na jakie, na podstawie prawa superpozycyi, wyobrazić sobie możemy każde przesunięcie rozłożone; co wyrazimy równaniem, które pod względem matematycznem jest zupełną różniczką równania 243-go

$$d\bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot d q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \cdot d q_2 + \ldots \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot d q_s \quad \ldots \quad (246)$$

Równanie to możemy zobrazować sobie w postaci wieloboku wektorowego, którego boki są cząstkowymi przyrostami wektora $\bar{r}_k$; a wektor wypadkowy — wektorem, znajdującym się po lewej stronie tegoż równania.

Mając na uwadze wzór 245-ty wyrazimy równanie równowagi sił zewnętrznych, równ. 95-te tomu I-go, równaniem wektorowem, § 109-tego tego tomu, gdzie q_s jest zmienną

$$\Sigma \bar{P}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot d q_s = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (247)$$

---

[1]) Do szczególnych wzorów tego rodzaju zaliczyć można np. następujący

$$\bar{r}_k = \bar{i} \cdot f_1(q_1, q_2, \ldots) + \bar{j} \cdot f_2(q_1, q_2, \ldots) + \bar{k} \cdot f_3(q_1, q_2, \ldots),$$

który dla określonych lecz niezależnych wartości q określa ściśle położenie k-tego punktu danego układu.

99. Równania dynamiczne Lagrange'a. Ażeby wzór, wyrażający równowagę sił, przyłożonych do układu brył materyalnych, przekształcić na wzór dynamiczny, określający ruch danego układu, zastosujemy zasadę d'Alembert'a; i w tym celu do każdego punktu danego układu wyobrazimy sobie przyłożone siły bezwładności

$$- m_k \bar{p}_k;$$

wskutek czego otrzymamy nowy układ sił: sił zewnętrznych i sił bezwładności, które są z sobą w równowadze. W celu wyrażenia tej równowagi zastosujemy wzór 247-my, podstawiwszy w niego zamiast sił $\bar{P}_k$ siły $(\bar{P}_k - m\bar{p}_k)$; a po przeniesieniu sum na przeciwne strony równania i skróceniu przez dq_s otrzymamy równanie

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left[\bar{P}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\right] = \sum_{k=1}^{k=n} \left[m_k \bar{p}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (248)$$

Zadanie obecne polega na obliczeniu sumy, znajdującej się po prawej stronie tego równania; t. j. na wyrażeniu jej skończonemi wielkościami.

Na obliczenie tej sumy podał Lagrange nadzwyczaj wytworny pod względem rachunkowym sposób; obliczył ją mianowicie z wartości energii kinetycznej, jaką pasiadają w pewnej chwili bryły danego układu; należy tylko wyrazić tę wartość spółrzędnemi niezależnemi q_s, oraz ich pochodnemi względem czasu; jeżeli zaś mamy wartość energii wyrażoną innemi spółrzędnemi (np. prostokątnemi); to należy znać związek geometryczny pomiędzy obydwoma rodzajami spółrzędnych i uważać te spółrzędne, np. spółrzędne prostokątne, za funkcye niezależnych zmiennych q_s.

Na podstawie podanych określeń — prędkość rzeczywista $\bar{v}_k$ k-tego punktu danego układu brył wyrazić można z wzoru 246-go, dzieląc go przez dt i otrzymamy

$$\bar{v}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot q'_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \cdot q'_2 + \ldots \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \cdot q'_s \quad . \; . \; , \; . \quad (249)$$

gdzie q'_1 i t. d. oznaczają pochodne $\frac{dq_1}{dt}$ i t. d.; pochodne te nazwać można **prędkościami spółrzędnych niezależnych**.

Wzór ten rozumieć można w ten sposób, że prędkość właściwa każdego punktu układu składa się z prędkości częściowych tych punktów, jakie powstają podczas kolejnych zmian spółrzędnych niezależnych q_s.

Widzimy ze wzoru 249-go, że prędkość $\bar{v}_k$ jest funkcyą linijną prędkości spółrzędnych niezależnych q'_s; wskutek czego pochodna cząstkowa prędkości właściwej $\bar{v}_k$ względem prędkości każdej niezależnie zmiennej q'_s będzie się równać pochodnej cząstkowej promienia wodzącego; co wyrazimy bardzo ważnem dla tych rozpatrywań związkiem

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q'_s} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (250)$$

Mając to na uwadze przekształcimy teraz wyraz energii kinetycznej brył danego układu, stosownie do naszych potrzeb. Wyraz ogólny energii kinetycznej wszelkiego układu punktów jest następujący

$$T = \sum_{k=1}^{k=n} [\tfrac{1}{2} m_k \bar{v}_k{}^2]; \quad , \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (251)$$

Obliczmy pochodną cząstkową tej wielkości względem prędkości spółrzędnej niezależnej q'_s; a wziąwszy pod uwagę równ. 250-te otrzymamy

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = \sum_{k=1}^{k=n} \left[m_k \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right]$$

Obliczmy następnie pochodną tego równania względem czasu, mając na uwadze, że prędkość v_k i prędkość $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$ są funkcyami czasu; pochodna ta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) = \sum \left[m_k \bar{p}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right] + \sum \left[m_k \bar{v}_k \cdot \frac{d\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\right)}{dt} \right] . \ . \quad (252)$$

Przekształcimy następnie czynnik $\frac{d\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\right)}{dt}$, stojący po prawe stronie tego równania, na zasadzie **przemienności** (1) różniczkowań na wyraz $\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\right)$; a podstawiwszy w niego $\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k$, otrzymamy wyraz tej sumy jako cząstkową pochodną energii ginetycznej względem niezałeżnie zmiennej q_s; t. j. wyraz ten może być zastąpiony przez wyraz

(1) Otrzymamy również bezpośrednio ten wynik, jeżeli zważymy że $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}$ są funkcyami zmiennych q_1, q_2, i t d.: a q są funkcyami t; przeto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \cdot \partial q_s} \cdot q_1' + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \cdot \partial q_s} \cdot q'_2 + \ldots$$

a ponieważ po obliczeniu $\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_s}$ z równania 249-go otrzymamy wzór

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_s \cdot \partial q_1} \cdot q'_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_s \cdot \partial q_2} \cdot q_2' + \ldots$$

który jest jednakowy z poprzednim; przemienność przeto różniczkowania jest i w tym razie uzasadniona.

$$\frac{\partial}{\partial q_s}\sum_{k=1}^{k=n}[\tfrac{1}{2}m_k\bar{v}_k^2];$$

lub też przez wyraz

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

A ponieważ pierwszy wyraz, stojący po prawej stronie równania 252-go, da się zastąpić przez wyraz sił z równania 248-mego; otrzymamy przeto zamiast równania 251-go następujące

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{k=1}^{k=n}\bar{P}_k\,.\,\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (253)$$

z którego obliczyć można każdy ruch bryły lub układu brył o każdej ilości stopni swobody; równań bowiem takich napiszemy tyle ile układ posiada niezależnych spółrzędnych q_s, wyznaczających jego ruch, t. j. tyle, ile dany układ posiada stopni swobody.

100. Przykład. Jako przykład stosowania równań Lagrange'a do obliczenia ruchu układów przytoczymy obliczenie ruchu punktu materyalnego ciężkiego, jaki on wykonywa po powierzchni kuli pod działaniem swego ciężaru. Ruch ten obliczyliśmy w § 56-tym tomu III-go, stosując do tego zasady szczególne dynamiki; a mianowicie zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej oraz zasadę momentów; porówn. równanie 115-te i 116-te tomu III-go. Ażeby zastosować metodę Lagrange'a do tego przykładu należy najpierw obrać spółrzędne niezależne, które określą jednoznacznie położenie danego punktu. Spółrzędnemi temi mogą być kąty Θ i σ; jakie obraliśmy w § 56-tym tomu III-go i które pokazane są na rys. 37-ym tego tomu. Prędkość przeto tego punktu wyrazimy dwoma niezależnemi prędkościami: prędkością, jaką punkt dany wykona podczas zmiany tylko kąta σ; prędkość ta wyrazi się wzorem

$$r\frac{d\sigma}{dt};$$

oraz prędkością, jaką wykona tenże punkt podczas zmiany tylko kąta Θ; prędkość ta

$$r\sin\sigma\,.\,\frac{d\Theta}{dt}.$$

Wartość przeto energii kinetycznej tego punktu wyrazimy bezpośrednio spółrzędnemi niezależnemi, zważywszy, że kierunki tych prędkości niezależnych są wzajemnie prostopadłe; a więc

$$T=\tfrac{1}{2}m\left[\left(r\,.\,\frac{d\sigma}{dt}\right)^2+\left(r\,.\,\sin\sigma\,.\,\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (254)$$

Praca cząstkowa ciężaru tego punktu podczas przesunięcia niezależnego $d\sigma$ wyrazi się wzorem $d\,(mg\,.\,r\,.\,\cos\sigma)$; podczas zaś przesunięcia $d\Theta$ równa się zeru. Stosownie przeto do równania Lagrange'a, równ. 252-gie, weźmiemy najpierw pod uwagę zmienną niezależną σ i otrzymamy

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma'} = mr^2\,.\,\sigma'; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma'}\right) = mr^2\,.\,\sigma''; \quad \frac{\partial T}{\partial \sigma} = mr^2\,.\,\sin\sigma\,.\,\cos\sigma\,.\,\Theta'^2\cdot$$

a po podstawieniu tych wyrazów w równ. 252-gie, otrzymamy

$$1) \qquad mr^2\,.\,\frac{d^2\sigma}{dt^2} - mr^2\,.\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2.\,\sin\sigma\,.\,\cos\sigma = -\,mgr\,.\,\sin\sigma,$$

gdzie wyraz po prawej stronie wyraża rozdzieloną przez $d\sigma$ pracę, jaką siła ciężkości wykona podczas przesunięcia niezależnego $d\sigma$.

Następnie obliczywszy wzór Lagrange'a dla niezależnej zmiennej Θ; otrzymamy drugie równanie dynamiczne. W tym celu podstawimy w równ. 253-cie następujące wielkości, które otrzymamy z równ. 254-go

$$\frac{\partial T}{\partial \Theta'} = mr^2\,.\,\sin^2\sigma\,.\,\Theta'; \quad \text{oraz} \ \frac{\partial T}{\partial \Theta} = 0;$$

drugie równanie ruchu jest przeto następujące

$$2) \qquad \frac{d}{dt}\left(mr^2\,.\,\sin^2\sigma\,.\,\frac{d\Theta}{dt}\right) = 0;$$

praca bowiem siły ciężkości punktu podczas przesunięcia niezależnego $d\Theta$ równa się zeru.

Łatwo spostrzedz, że równanie pierwsze wyraża moment względem osi, prostopadłej do płaszczyzny kąta σ, ilości ruchu danego punktu; gdy do działania momentu siły ciążenia dołączymy jeszcze działanie momentu siły odśrodkowej, jakiej podlega ten punkt podczas swego obrotu razem z płaszczyzną kąta σ [1]).

---

[1]) Ponieważ przyjąć można, że punkt dany posiada przyśpieszenie względne unoszące i złożone (Coriolis'a równ. 58-me tomu II-go), w myśl przeto wyjaśnienia zasady d'Alembert'a, (podanego na str. 172-ej tomu III-go, o obliczeniu poszczególnych ruchów); należy, w celu obliczenia ruchu względnego w płaszczyźnie kąta σ, przyłączyć do danego punktu jako siły działające na niego siły bezwładności $(-\,m\bar{p}_u)$ i $\left(-\,m\,.\,2\,V\bar{v}_w\,.\,\frac{d\Theta}{dt}\right)$; z których pierwsza jest siłą t. zw. odśrodkową ruchu unoszącego; druga — siłą Coriolis'a. — Moment względem osi, prostopadłej po płaszczyzny kąta σ, siły środkowej ruchu unoszącego równa się wyrazowi

$$mr\,\sin\sigma\,.\,\Theta'^2\,.\,r\,\cos\sigma\,;$$

którego działanie przyłącza się do działania momentu siły ciężkości; gdyż moment siły Coriolis'a względem tej osi równa się zeru; kierunek jej bowiem jest równoległy do tejże osi.

Drugie z tych równań wyraża moment ilości ruchu względem osi z i jest jednakowe z równaniem 2-giem równań 117-tych tomu III-go.

Ażeby wykazać, że z tych równań otrzymać można np. równanie 1-sze równań 117-tych tomu III-go, które jest wyrazem zasady równowatości pracy i energii kinetycznej; obliczmy pochodną równania drugiego, jak to wskazuje równanie, a pomnożywszy zgodnie z prawidłem, podanym w § 45-tym tego tomu, otrzymane równanie przez $\sigma' . dt$, równanie zaś pierwsze przez $\Theta' . dt$ powinniśmy otrzymać, po ich dodaniu, — zupełną różniczkę, której całka wyrazi zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej.

Z równań Lagrange'a można wyprowadzić zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej; należy tylko tak je przekształcić, ażeby wyrażały one pracę sił podczas rzeczywistego przesunięcia; w tym celu należy pomnożyć każde z tych równań przez odpowiednie jemu dq, a po ich dodaniu, otrzymamy szukane równanie. Zwrócić należy uwagę, że postępowanie to, oparte na superpozycyi przesunięć niezależnych, jest zgodne z postępowaniem, wskazanem w § 45-tym tego tomu.

W § 45 wskazaliśmy sposób znalezienia dla ruchu jednej bryły równania równowartości pracy i energii kinetycznej z równań momentów ilości ruchu; metoda zaś Lagrange'a daje sposób wyprowadzenia za pomocą obliczania cząstkowych pochodnych wyrazu energii kinetycznej równań momentów ilości ruchu; w ten sposób z jednego jedynego wyrazu energii kinetycznej danego układu i z wyrazu pracy sił przyłożonych do niego, można obliczyć równania ruchu danego układu; byleby te wielkości były wyrażone spółrzędnemi niezależnemi i to stanowi znakomitą dogodność równań Lagrange'a.

Lagrange, podając swe równania, nie opierał się na pojęciach dynamicznych, jakieśmy to starali się tutaj uczynić, i co dla nas może być pożądanem; lecz opierał się na pojęciach matematycznych; wskutek tego zakres zastosowań tego równania znacznie się rozszerza i może przekraczać granice pojęć dynamicznych i rozszerzając się do takich zjawisk fizycznych, w których pojęcia dynamiki brył nie znajdują bezpośrednio swego znaczenia.

Poleca się czytelnikowi obliczyć równania ruchu metodą Lagrange'a i znaleźć znaczenia dynamiczne oddzielnych wyrazów wahadła toczącego się, podanego w § 54-tym, oraz wahadła podwójnego, podanego w § 75-tym tego tomu.

L. Podstawy rachunku wektorowego.

101. Rodzaje wektorów. Wykłady nasze rozpoczęliśmy (tom I-szy) pojęciem o wielkościach kierunkowych, — wektorowych. Pojęcie to jesteśmy