WYDAWNICTWA NAUKOWE
„KOMISJI WYDAWNICZEJ"
TOWARZYSTWA BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

MECHANIKA
TEORETYCZNA

DLA

INŻYNIERÓW, TECHNIKÓW I STUDJUJĄCYCH

INŻ. H. CZOPOWSKIEGO
PROF. POLIT. WARSZ.

TOM IV.

DYNAMIKA UKŁADÓW

WYDANIE DRUGIE.

Z ZAPOMOGI MINISTERSTWA
WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO.

WARSZAWA — 1922.

SPÓŁKA AKC. ZAKŁADÓW GRAFICZNYCH „DRUKARNIA POLSKA" SZPITALNA Nr. 12.

KLISZE WYKONANO W ZAKŁADZIE FOTOCHEMIGRAFICZNYM
ROMANA SAWICKIEGO, WSPÓLNA Nr. 45.

Dynamika układów.

I. Dynamika układów punktów materyalnych.

A. Kinetyka układu punktów materyalnych.

1. **Określenie układu punktów materyalnych.** Układem punktów materyalnych nazywamy zbiór punktów, którym przypisujemy pewne masy. Jeżeli każdy z takich punktów może być dowolnie przesunięty, **niezależnie** od położenia innych punktów, to układ taki nazwiemy układem punktów **niezależnych.** Jeżeli zaś przesunięcie choćby jednego z punktów danego układu pociąga za sobą ściśle określone przesunięcie innych punktów tegoż układu, to układ taki nazwiemy układem punktów **zależnych.**

Układy zależne nazwiemy **zmiennemi,** gdy odległości pomiędzy punktami się zmieniają; nazwiemy zaś **niezmiennemi,** gdy te odległości nie zmieniają się podczas ruchu punktów.

Przykładem układu zmiennego punktów zależnych jest układ planetarny; planety bowiem, gdy wyobrazimy je sobie w postaci punktów materyalnych, wzajemnie się przyciągają, i przesunięcie się jednej z nich wpływa na położenie innych; a przytem odległości ich wzajemnie się zmieniają

Układem niezmiennym jest każda bryła sztywna; w myśl bowiem danego określenia bryły, odległości pomiędzy punktami, na jakie wyobrażamy sobie rozłożoną tę bryłę, pozostają podczas jej ruchu niezmienionemi.

W naszych rozpatrywaniach będziemy mieli do czynienia wyłącznie z układami zmiennymi i niezmiennymi punktów zależnych; przytem układy zmienne będziemy krótko nazywali układami punktów, a układy niezmienne bryłami.

2. Ilość ruchu układu punktów materyalnych. Określenie. Sumę wektorową ilości ruchu punktów danego układu nazywamy ilością ruchu tego punktu. Jeżeli literą m_k oznaczymy masę k — tego punktu danego układu, a literą $\bar{v}_k$ prędkość tego punktu; to ilość ruchu, w myśl danego określenia wyrazimy wzorem

$$\Sigma\,(m_k \bar{v}_k) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Wzór ten przedstawimy sobie geometrycznie w postaci wieloboku, w ogóle niezamkniętego, którego boki są wektorami ilości ruchu oddzielnych punktów. Jeżeli masy punktów są wielkościami o skończonych wartościach, to i wielobok posiadać będzie boki o skończonych długościach; jeżeli zaś masy punktów będą nieskończenie małe, a ilość takich punktów będzie nieskończenie wielka, to wielobok ten zamieni się w linię krzywą. Bok zamykający taki wielobok lub cięciwa linii krzywej, jest wektorem wypadkowym tej sumy i przedstawia ilość ruchu danego układu.

Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem wektora ilości ruchu danego układu punktów. Jeżeli znane są wielkości mas i prędkości każdego z punktów danego układu, to łatwo wyznaczyć ten wektor drogą geometryczną lub analityczną. Wektor ten jednakże, jak to zaraz wskażemy, jest w pewnym związku z ruchem środka masy danego układu tak, iż będziemy mogli go wyznaczyć z ruchu tego środka. Ażeby ten związek znaleźć, zastosujemy określenie środka masy jego punktu geometrycznego, którego położenie wyznacza koniec wektora $\bar{r}_s$, określonego wzorem *

$$m\bar{r}_s = \Sigma\,(m_k \,.\, \bar{r}_k) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Zadaniem naszem obecnie jest znalezienie związku, jaki zachodzi pomiędzy ruchem środka masy i ruchem jego oddzielnych punktów. Jeżeli zmienimy położenie wszystkich lub niektórych punktów danego układu, to zmieniają się również położenia odnośnych wektorów wodzących; przesuńmy więc niektóre lub wszystkie punkty danego układu, i oznaczmy promienie wodzące $\bar{r}_k$, wyznaczające nowe położenia tych punktów dla odróżnienia od poprzednich literami z gwiazdkami, to położenie środka masy tego nowego układu wyznaczymy z równania 2-go

$$m\,\bar{r}_s{}^* = \Sigma\,(m_k\;\bar{r}_k{}^*) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

---

* Wzór ten otrzymamy z równania 43-go, 44-go i 45-go, str. 111-ta tomu I-go, gdy zsumujemy wektorowo te równania; przyjmując, że spółrzędne x_k, y_k i z_k są wektorami; oznaczywszy $\bar{x}_k + \bar{y}_k + \bar{z}_k$ przez $\bar{r}_k$ i podstawiwszy $P_k = m_k \,.\, g$ otrzymamy wzór 2-gi.

Ażeby otrzymać związek pomiędzy przesunięciami oddzielnych punktów, a przesunięciami środka układu odejmijmy od tego równania poprzednie, a otrzymamy

$$m(\bar{r}_s{}^* - \bar{r}_s) = \Sigma m_k (\bar{r}_k{}^* - \bar{r}_k);$$

w którem różnica $(\bar{r}_s{}^* - \bar{r}_s)$ oraz różnica $(\bar{r}_k{}^* - \bar{r}_k)$ wyrażają przesunięcie środka masy i przesunięcia oddzielnych punktów tego układu, § 7 oraz rys. 12-ty tomu I-ego. Przyjmijmy następnie, że te przesunięcia są nieskończenie małe, i rozdzielmy je przez okres czasu *dt*, w którym te przesunięcia zostały wykonane, przyjmując, że zostały jednocześnie; a otrzymamy związek pomiędzy prędkością środka masy a prędkościami oddzielnych punktów danego układu. Związek ten wyrazi się równaniem

$$m\bar{v}_s = \Sigma(m_k \bar{v}_k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Równanie to wysłowimy: **ilości ruchu każdego układu punktów** (zależnych lub niezależnych, zmiennych lub niezmiennych) **równa się ilości ruchu jego środka masy;** gdy wyobrazimy sobie w tym środku skupione masy wszystkich punktów danego układu.

W szczególnych przypadkach, gdy np. punkty wykonują pewne ruchy, a środek masy tego układu pozostaje w spoczynku, wtedy ilość jego ruchu równa się zeru; ilość przeto ruchu np. bryły materyalnej, obracającej się około każdej osi, byle przechodzącej przez środek jej masy, lub też inaczej: bryły nakreślającej ruch kulisty, równa się podczas tego ruchu zeru.

Gdy przeto ilość ruchu równa się zeru, to z tego nie wynika, że ilości ruchu oddzielnych punktów równają się zeru, lecz wynika tylko, że suma tych ilości równa się zeru; oddzielne zaś punkty układu mogą być w ruchu, t. j. mogą posiadać pewne ilości ruchu.

3. Pochodna względem czasu ilości ruchu układu punktów materyalnych. Przeprowadźmy następnie punkty danego układu do innego położenia z prędkościami różnemi od poprzednich i oznaczmy te nowe prędkości dla odróżnienia od poprzednich literami z gwiazdkami, a napiszemy na zasadzie poprzedniego równania związek pomiędzy temi nowemi prędkościami w następujący sposób

$$m\bar{v}_s{}^* = \Sigma(m_k \bar{v}_k{}^*); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Odejmijmy od tego równania poprzednie i rozdzielmy to nowe równanie przez okres czasu *dt*, w jakim wykonano tę zmianę prędkości, a otrzymamy równanie

$$m\frac{d\bar{v}_s}{dt} = \Sigma\left(m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt}\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

lub inaczej

$$m\bar{p}_s = \Sigma(m_k \bar{p}_k) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

gdzie litery $\bar{p}$ oznaczają przyśpieszenia odnośnych punktów.

Równanie 4-te wyraża związek pomiędzy prędkością środka układu a prędkościami oddzielnych jego punktów; równanie zaś 7-me wyraża związek pomiędzy przyśpieszeniami tychże punktów.

Zaznaczyć należy, że związki te, wyrażone równaniami 4-tem i 7-em nie wynikają z żadnych praw fizycznych, lecz są bezpośrednim wynikiem określenia położenia środka masy, wyrażonego równaniem 2-giem. Równania te otrzymać również można z równania 2-go, biorąc bezpośrednio pierwszą, a następnie drugą jego pochodną; otrzymać je również można biorąc pochodne pierwszą i drugą równań środka ciężkości, wyrażonych równaniami 43, 44 i 45-tym tomu I-go i skorzystawszy z równań kinematycznych 24-tych i 30-tych tomu II-go.

4. Moment ilości ruchu układu punktów materyalnych. Mając na uwadze określenie momentu ilości ruchu punktu materyalnego, podane w § 23-cim tomu III-go; damy teraz określenie nast.: **sumę wektorową momentów ilości ruchu punktów danego układu względem dowolnie obranego bieguna, nazywamy momentem ilości ruchu danego układu względem tego bieguna.** Oznaczmy moment ilości ruchu danego układu literą $\bar{M}_v$, a wyrazimy powyższe określenie wzorem

$$\bar{M}_v = \Sigma \, \mathrm{V} \, m_k \bar{v}_k \, . \, \bar{r}_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

W tenże sposób, w jaki określiliśmy moment ilości ruchu względem bieguna, określimy również moment względem osi, stosując do tego określenie, dane w teoryi momentów sił (§ 80-ty tomu I-ego); w tym celu należy tylko wektorowi siły nadać znaczenie wektora ilości ruchu, mając to na uwadze, wypowiemy określenie: momentem ilości ruchu układu punktów materyalnych względem osi nazywamy sumę momentów rzutów wektorów ich ilości ruchu na płaszczyznę, prostopadłą do osi, względem bieguna, obranego w przecięciu się danej osi z tą płaszczyzną.

Z twierdzenia, podanego w § 44-ym tomu I-ego wynika, że moment ilości ruchu względem osi równa się rzutowi na nią wektora momentu ilości ruchu względem dowolnie obranego bieguna na tejże osi.

5. Energia kinetyczna układu punktów materyalnych. Mając na uwadze określenie energii kinetycznej punktu materyalnego, podane w § 184-tym tomu I-szego, damy nast. określenie: **Sumę algebraiczną energii kinetycznych wszystkich punktów danego układu nazywamy jego energią kinetyczną.**

Oznaczywszy literami m_k i v_k masę i prędkość k — tego punktu danego układu, a literą T jego energię kinetyczną; wyrazimy powyższe określenie wzorem algebraicznym;*)

$$T = \Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k v_k{}^2\right); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

B. Równania dynamiczne układu punktów materyalnych.

6. **Siły wewnętrzne.** Układem zmiennym punktów nazwaliśmy zbiór punktów materyalnych, pomiędzy którymi odległości się zmieniają. W szczególnym przypadku takiego układu, gdy zmiana ta wywołana jest siłami, występującemi pomiędzy oddzielnymi punktami, to układ taki nazwaliśmy układem zmiennym punktów zależnych i nazywać go będziemy krótko układem punktów materyalnych; a siły, które działają pomiędzy punktami, nazwiemy **siłami wewnętrznemi.**

Magnes np. i kawałek żelaza mogą być uważane za układ dwóch punktów materyalnych, pomiędzy którymi występują siły wewnętrzne; układ ten przytem podlegać jeszcze może siłom zewnętrznym, np. sile ciążenia ziemskiego.

Różnica pomiędzy siłami wewnętrznemi a zewnętrznemi (czynnemi) jest względną; istotnej różnicy niema, jedna i ta sama bowiem siła może być w pewnych warunkach uważaną za zewnętrzną, w innych zaś za zewnętrzną. Prędkość np. pary w cylindrze parowym należy uważać za siłę wewnętrzną, gdy bierzemy pod uwagę tłok i cylinder jako jeden układ, złożony z dwóch brył; należy zaś uważać ją za siłę zewnętrzną, gdy rozpatrujemy ruch tylko tłoka, wywołany tą prężnością.

7. **Prawo wzajemnego działania.** Spostrzeżenia i pomiary ruchów brył materyalnych doprowadziły Newtona do stwierdzenia t. zw. prawa wzajemnego działania. Prawo to oparte jest na tem spostrzeżeniu, że żadna bryła materyalna nie zmieni stanu swego ruchu; ażeby inna bryła materyalna nie zmieniła **jednocześnie** także swego ruchu. Jeżeli np.

---

*) Lub też wzorem wektorowym

$$T = \Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k \overline{v}_k{}^2\right);$$

w którym druga potęga wektora prędkości oznacza mnożenie skalarne i zastępuje iloczyn $\overline{v}_k \,.\, \overline{v}_k$).

Wogóle symbol $\overline{A} \,.\, \overline{B}$ nazywa się w rachunku wektorowym **iloczynem skalarnym dwóch wektorów** i wartość jego $= A \,.\, B \cos(A, B)$; a więc $\overline{v} \,.\, \overline{v} = v^2$.— Jeżeli jeden z tych wektorów wyraża siłę $\overline{P}$, drugi przesunięcie $\overline{ds}$; to $\overline{P} . \overline{ds}$ wyraża pracę cząstkową.

tłok cylindra parowego wykonywa pewien ruch, to jednocześnie cylinder wraz ze sztywno z nim połączonymi bryłami, a więc ewentualnie i z ziemią wykonywa także ruch (względem przestrzeni kinematycznej),— ruch przeciwny ruchowi tłoka. Zjawisko to możnaby stwierdzić doświadczalnie, zawiesiwszy np. lokomotywę na łańcuchach; wtedy bowiem zobaczylibyśmy, po puszczeniu pary do cylindrów, że podczas poruszania się tłoków, porusza się i cały korpus lokomotywy. Jeżeli dwie takie bryły wyobrazimy sobie w postaci punktów materyalnych, to zmiany ich prędkości dają się wyrazić wzorem matematycznym, stwierdzonym drogą pośrednich lub bezpośrednich pomiarów; wzór ten jest nast.

$$m_1 \frac{d\bar{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\bar{v}_2}{dt} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

w którym m_1 i m_2 oznaczają pewne spółczynniki, odnoszące się do poruszających się punktów materyalnych. Zmierzywszy doświadczalnie przyśpieszenie dwóch takich brył, obliczyć można stosunek spółczynników m_1 i m_2, a z zestawienia takich spółczynników dla różnych brył przekonamy się, że liczbowo ich wartości są te same, które znaleźć można drogą innych doświadczeń, wskazanych w § 1-szym tomu III-go; liczby te nazwaliśmy tam masami danych brył. Zjawisko przeto wzajemnego działania brył materyalnych daje możność obliczenia stosunku wartości mas różnych brył, i odwrotnie, daje możność obliczenia stosunku ich przyśpieszeń, jeżeli ich masy są już określone z innych doświadczeń.

Mając na uwadze określenie siły, jako iloczynu z masy i przyśpieszenia, prawo wzajemnego działania wypowiedzieć można w następujący sposób: **siły wewnętrzne, występujące pomiędzy dwoma materyalnymi punktami danego układu, występują wzdłuż prostych łączących te punkty; są wzajemnie równe, a zwroty posiadają przeciwne.**

Gdy scałkujemy rów. 10-te, wtedy otrzymamy równanie

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = \text{stałej wielkości.}$$

Stałą wielkość obliczymy z początkowych warunków ruchu; jeżeli np. obydwa punkty były w początku ruchu w spoczynku (np. armata i pocisk), to równanie powyższe otrzyma postać

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = 0.$$

W równanie to wchodzą wyrazy prędkości, które łatwo zmierzyć z doświadczeń; równanie powyższe przeto stosowane być może do obliczeń mas, jeżeli zmierzymy ich prędkości; jeżeli zaś wielkości mas są już obliczone inną drogą i prędkości są znane, to służyć one mogą do sprawdzenia doświadczalnie słuszności prawa wzajemnego działania.

Ażeby wyrazić prawo wzajemnego działania równaniami, należy wyrazić, że nietylko suma dwóch takich sił, występujących pomiędzy dwoma punktami równa się zeru, jakieśmy to wyrazili równaniem 10-tem, lecz i że suma ich momentów równa się zeru. Sama bowiem suma dwóch sił, przyrównana do zera, nie wyraża jeszcze, że te siły działają wzdłuż jednej i tej samej prostej, a dopiero równanie tej sumy łącznie z równaniem sumy tych sił wyraża jednoznacznie prawo wzajemnego działania.

Jeżeli oznaczymy numery porządkowe dwóch punktów danego układu, literą i oraz literą k; to prawo wzajemnego działania wyrazimy dwoma równaniami wektorowemi

$$\overline{W}_{i_1k} + \overline{W}_{k_1i} = 0; \text{ oraz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$Mom\,(W_{i_1k}) + Mom\,(W_{k_1i}) = 0; \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

względem dowolnie obranego bieguna.

8. Równanie dynamiczne. Równaniami dynamicznemi ruchu punktów materyalnych nazywamy równania, wykazujące związek pomiędzy **siłami**, działającemi na dany układ punktów, a **ruchami** jego punktów, wywołanymi temi siłami. W dynamice punktu równaniem takiem podaliśmy równanie dynamiczne siły w postaci

$$\overline{P} = \frac{d(m\overline{v})}{dt}.$$

W celu wyprowadzenia twierdzeń dynamiki układu punktów z twierdzeń dynamiki punktu pojedyńczego, przyjmiemy:

1) że każdy punkt danego układu podlega prawu bezwładności, wskutek czego ruch jego obliczymy ze wzoru

$$\overline{R}_k = \frac{d(m_k \overline{v}_k)}{dt};$$

w którym $\overline{R}_k$ oznacza wypadkową wszystkich sił tak wewnętrznych jak i zewnętrznych, działających na dany punkt i wywołujących przyśpieszenie $\frac{d\overline{v}_k}{dt}$; a litery m_k i $\overline{v}_k$ oznaczają jego masę i prędkość;

2) że pomiędzy tymi punktami występują siły, podlegające prawu wzajemnego działania, których właściwości wyrażają równania 11-te i 12-te.

9. Równanie dynamiczne ruchu środka masy układu punktów. Na podstawie powyższego można uważać, że na każdy punkt danego układu punktów materyalnych działają wogóle siły zewnętrzne oraz siły wewnętrzne, pochodzące od innych punktów danego układu. Oznaczmy, jakieśmy to już uczynili w statyce w § 32-gim tomu I-go, literą $\bar{P}_k$ siłę zewnętrzną, przyłożoną do k-tego punktu danego układu lub ich wypadkową, jeżeli kilka sił na niego działa; a literą $W_{k,i}$ siłę wewnętrzną, jaka pochodzi od i-tego punktu i działa na punkt k-ty, to równanie dynamiczne ruchu k-tego punktu, w myśl określenia siły jest następujące

$$\bar{P}_k + \Sigma \bar{W}_{k,i} = \frac{d(m_k \bar{v}_k)}{dt}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

gdzie i oznacza cyfry kolejne $1, 2, 3 \ldots n$; jeżeli n oznacza ilość wszystkich punktów danego układu. Ażeby wyrugować z rachunku siły wewnętrzne, napiszemy dla każdego punktu takie równanie, jakieśmy to czynili w statyce i zważywszy, że siły wewnętrzne na zasadzie prawa wzajemnego działania wzajemnie się znoszą, t. j. wziąwszy pod uwagę rów. 11-te otrzymamy po dodaniu tych równań, **równanie wolne od sił wewnętrznych** w następującej postaci

$$\Sigma \bar{P}_k = \frac{\Sigma\, d(m_k \bar{v}_k)}{dt};$$

lub też w postaci

$$\Sigma \bar{P}_k = \frac{d\, \Sigma\, (m_k \bar{v}_k)}{dt};$$

a wziąwszy pod uwagę równ. 4-te; otrzymamy równanie

$$\Sigma \bar{P}_k = \frac{d\,(m\, \bar{v}_s)}{dt}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Równanie to, które co do swej postaci jest jednakowe z równaniem dynamicznem punktu pojedyńczego wypowiedzieć można w następujący sposób:

środek masy każdego układu punktów materyalnych, pomiędzy którymi występują siły wewnętrzne, porusza się jak punkt swobodny, którego masa równa się sumie mas wszystkich punktów danego układu, i na który działają siły równe i równoległe do sił, przyłożonych do oddzielnych punktów danego układu.

Takie pojmowanie równania 14-tego nadaje pojęciu punktu o **masie skończonej** i dynamice takiego punktu pewną **rzeczywistość**.

Równanie 14-te daje związek pomiędzy siłami zewnętrznemi (czynnemi), działającemi na dany układ, a zmianą prędkości jego **środka masy**, t. j. daje możność obliczenia ruchu środka masy danego układu, gdy dane są siły, działające na dany układ i warunki ruchu początkowego; jednakże oddzielnych punktów danego układu z równania tego nieobliczymy. W szczególnym przypadku, gdy

$$\Sigma \bar{P}_k = 0;$$

wtedy po scałkowaniu rów. 14-go, mamy

$$\Sigma (m_k \bar{v}_k) = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (15)$$

prrzyjmując, że suma ilości ruchu danego układu w początku ruchu była równa zeru. Jeżeli np. mamy zbiór punktów materyalnych, na które nie działają siły zewnętrzne, które jednakże wzajemnie się przyciągają lub odpychają podług jakichbądź praw i jeżeli w pewnej chwili punkty te były w spoczynku, to wskutek działania sił wewnętrznych otrzymują one w każdej chwili takie prędkości, że suma wektorowa ich ilości ruchu utworzy wielobok zamknięty; lub też, mając na uwadze rów. 14-te, wyrazimy to zjawisko nieco inaczej: ruch punktów takiego układu będzie taki, że środek jego masy (jako punkt geometryczny), będzie pozostawał w spoczynku.

Przykładem takiego układu punktów służyć może pocisk pękający, wskutek sił wewnętrznych, którego części przyjmiemy za punkty materyalne o różnych masach i różnych prędkościach. Jeżeli bomba w chwili wybuchu pozostawała w spoczynku, to ruch jej części w chwili wybuchu będzie taki, że suma ich ilości ruchu uczyni zadość równaniu 15-temu.

Przebieg takiego ruchu wysłowić możemy w następujący sposób: jeżeli na dany układ punktów materyalnych nie działają siły zewnętrzne, a tylko wewnętrzne, to ilość ruchu danego układu podczas ruchu punktów zostaje zachowaną; lub inaczej, — to ilość ruchu środka masy tego układu zostaje zachowaną.

10. Równanie dynamiczne momentów. W celu zupełnego wyrażenia właściwości wzajemnego działania sił wewnętrznych, jakie występują w układach punktów materyalnych; należy jeszcze zastosować do obliczenia ruchu punktów każdego układu równanie momentów sił wewnętrznych, t. j. równ. 12-te. W tym celu weźmiemy pod uwagę równanie 13-te, które wyraża, że suma sił zewnętrznych i suma sił wewnętrznych, działających na k-ty punkt danego układu, równa się wektorowi $m_k \bar{p}_k$, który w ten sposób jest wektorem wypadkowym tych sił, a ponieważ wszystkie te wektory przecinają się w jednym punkcie, to możemy do nich zastosować twierdzenie, § 28-my tomu I-go, że suma momentów względem dowolnie obranego bieguna wektorów składowych równa się momentowi wektora wypadkowego, suma przeto momentów sił zewnętrznych i wewnętrznych względem dowolnie obranego bieguna równa się momentowi wektora $m_k \bar{p}_k$. Wniosek ten wyrazimy równaniem

$$\mathrm{V}\,\bar{P}_k \,.\, \bar{r}_k + \Sigma\,\mathrm{V}\,\bar{W}_{k,i} \,.\, \bar{r}_k = \mathrm{V}\,m_k \bar{p}_k \,.\, \bar{r}_k\,;$$

gdzie $i = 1, 2, 3 \ldots n$.

Jeżeli zestawimy takie równania dla każdego punktu danego układu i dodamy te równania, to otrzymamy równanie

$$\Sigma\,\mathrm{V}\,\bar{P}_k \,.\, \bar{r}_k = \Sigma\,\mathrm{V}\,m_k \bar{p}_k \,.\, \bar{r}_k\,; \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

momenty bowiem sił wewnętrznych, występujących pomiędzy dwoma punktami, parami się znoszą, jak to wyraża równanie 12-te.

Wniosek ten wysłowimy w następujący sposób: **suma momentów sił, działających na pewien układ punktów materyalnych, względem dowolnie obranego bieguna, równa się sumie momentów wektorów, z których każdy jest m_k-krotnym wektorem przyśpieszenia każdego punktu.**

Wzór 16-ty wyrazimy jeszcze w innej postaci, która bywa nieraz przydatniejszą do rozpatrywania ruchu punktów, można ją bowiem łatwiej unaocznić sobie geometrycznie. W tym celu zastosujemy do obliczenia ruchu punktu pojęcie momentu jego ilości ruchu, któreśmy już zastosowali w dynamice punktu; w § 24-tym w równ. 70-tem tomu III-go.

Jeżeli literami $\bar{M}_{v,k}$ oznaczymy, jakieśmy to już uczynili w § 24 ym tomu III-go, moment ilości ruchu k-tego punktu, względem dowolnie obranego bieguna, to zgodnie z równaniem 70-tem tomu III-go napiszemy dla każdego punktu danego układu równanie dynamiczne postaci następującej

$$\mathrm{V}\,\bar{P}_k \,.\, \bar{r}_k + \Sigma\,\mathrm{V}\,\bar{W}_k \,.\, \bar{r}_{k,i} = \frac{d\,\bar{M}_{v,k}}{d\,t}\,;$$

a po dodaniu ich otrzymamy

$$\Sigma\,\mathrm{V}\,\bar{P}_k \,.\, \bar{r}_k = \frac{d\bar{M}_v}{d\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

gdzie $\bar{M}_v$ oznacza wektor momentu ilości ruchu całego układu, określony w § 4-tym. W celu geometrycznego unaocznienia sobie tego równania, można skorzystać z rys. 7-ego tomu III-go. Równanie 17-te napisać również można w innej postaci, — w postaci szczegółowej, stosując dotego określenie momentu ilości ruchu, wyrażone równaniem 8-mem tego tomu; równanie to jest nast.:

$$\Sigma\,\mathrm{V}\,\bar{P}_k \,.\, \bar{r}_k = \frac{d}{dt}\,\Sigma\,\mathrm{V}\,m_k \bar{v}_k \,.\, \bar{r}_k \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Zwrócić tu należy uwagę, że wzory 16-ty, 17-ty i 18-ty, chociaż różnią się swą postacią, są jednakowe, są bowiem wynikiem jednej i tej samej właściwości układu punktów: że suma momentów sił wewnętrznych równa się zeru. Z postaci wzoru 17-tego wynika, że związek pomiędzy wektorem momentu wypadkowego sił zewnętrznych względem dowolnego bieguna i wektorem momentu względem tegoż bieguna ilości ruchu danego układu punktów, jest taki sam, jaki istnieje dla pojedyńczego punktu, równ. 70-te tomu III-go. Związek ten jest również taki sam, jaki istnieje dla siły, działającej na pewien punkt i jego ilości ruchu, gdy wektor siły i wektor ilości ruchu przyjmiemy za wektor momentu sił i za wektor momentu ilości ruchu. Wysłowienie przeto tego równania zechce czytelnik powtórzyć z § 24-go tomu III-go.

W szczególnym przypadku, jeżeli względem pewnego bieguna

$$\Sigma \overline{M}_{P_1 k} = 0; \quad \text{to} \quad \frac{d\overline{M}_v}{dt} = 0$$

t. j. jeżeli suma momentów sił zewnętrznych względem pewnego bieguna równa się zeru, to wektor momentu ilości ruchu tego układu względem tegoż bieguna jest podczas ruchu punktów wektorem stałym. Jeżeli przytem jeszcze zachodzi warunek, że i

$$\Sigma \overline{P}_k = 0; \text{ to również } \frac{d(m\,\overline{v}_s)}{dt} = 0;$$

t. j. środek masy danego układu w tych warunkach pozostaje w spoczynku lub w ruchu jednostajnym i prostolinijnym. Z tego jednakże nie należy wnioskować, ażeby punkty takiego układu pozostały w spoczynku, mogą one bowiem się poruszać, lecz tylko **w ten sposób**, że środek ich masy pozostawać będzie w spoczynku lub w ruchu prostolinijnym i jednostajnym z prędkością taką, jaką posiadał ten środek na początku ruchu; i że suma momentów ilości ruchu tych punktów będzie wektorem stałym i nieruchomym w przestrzeni, równym momentowi ilości ruchu początkowego.

Równanie 14-te i równanie 18-te, chociaż dają pewne właściwości ruchów oddzielnych punktów danego układu zmiennego, nie wystarczają jednakże do obliczenia ich ruchu; do tego bowiem należy znać siły wewnętrzne, które wywołują ruchy oddzielnych punktów. Równaniem, w które wchodzą wielkości sił wewnętrznych, jest równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, które obecnie wyprowadzimy.

11. Równanie dynamiczne równowartości pracy i energii kinetycznej. Na str. 153-ciej tomu I-go dowiedliśmy twierdzenie, że praca cząstkowa siły, przyłożonej do punktu materyalnego, równa się przyrostowi energii kinetycznej tegoż punktu. Praca przeto cząstkowa sił zewnętrznych i suma prac cząstkowych sił wewnętrznych, działających np. na

k-ty punkt danego układu równa się przyrostowi jego energii kinetycznej; twierdzenie to wyrazimy wzorem

$$dL_{P,k} + \Sigma dL_{W,k,i} = d(\tfrac{1}{2} m_k v_k^2);$$

gdzie $i = 1, 2 \ldots n$; a $dL_{W,k,i}$ oznacza pracę cząstkową siły $W_{k,i}$, przyłożonej do k-tego punktu.

Napiszmy dla każdego punktu danego układu takie równanie i dodajmy je, a otrzymamy

$$\Sigma dL_{P,k} + \Sigma\Sigma dL_{W,k,i} = d\Sigma(\tfrac{1}{2} m_k v_k^2); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

gdzie k oraz i równają się kolejno: 1, 2, 3... n; a podwójny znak sumy oznacza, że należy najpierw sumować wartości prac, przyjmując wielkość i zmienną, przy stałej wielkości k; a następnie — zmieniając wielkość k, przyjmując i stałem.

Pierwszy wyraz równania 19-ego można obliczyć, jeżeli są znane siły zewnętrzne i przesunięcia punktów, do których są one przyłożone. Drugi wyraz przedstawia sumę prac wszystkich sił wewnętrznych, jakie występują pomiędzy punktami. W sumie tej znajdują się parami prace sił, występujących wzdłuż prostych, łączących dwa punkty danego układu; pytanie przeto powstaje; czy suma prac takich dwóch sił równa się zeru, jak to było z ich momentami; czy też posiadają pewne skończone wartości. Na str. 184-ej tomu I-go wykazaliśmy, że jeżeli odległości pomiędzy punktami podczas działania sił nie zmieniają się, to suma wartości prac dwóch takich sił równa się zeru; lecz w układach zmiennych, które na razie rozpatrujemy, odległości te zmieniają się, praca przeto dwóch sił, występujących pomiędzy punktami np. k-tym a i-tym posiada wogóle pewną wartość, którą wyrazimy wzorem wektorowym

$$W_{k,i} \cdot dr_{k,i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

gdzie $\delta r_{k,i}$ oznacza rzut przesunięcia na kierunek siły $W_{k,i}$. Równanie przeto 19-te napiszemy w ogólnej postaci

$$dL_P + dL_W = d\Sigma(\tfrac{1}{2} m_k v_k^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

i wypowiemy je

praca cząstkowa sił zewnętrznych, działających na punkty pewnego układu, łącznie z pracą sił wewnętrznych, występujących pomiędzy tymi punktami, równa się przyrostowi energii kinetycznej danego układu.

Jeżeli siły działają pewien skończony okres czasu, to wartość pracy sił zewnętrznych i wewnętrznych, jak również wartość przyrostu energii kinetycznej posiada wogóle wartości skończone; twierdzenie powyższe wypowiemy w tym razie w następujący sposób: praca sił zewnętrznych łącznie z pracą sił wewnętrznych równa się przyrostowi energii kinetycznej danego układu.

Jeżeli oznaczymy początek i koniec okresu działania sił literami t_0 i t; a prędkości k-tego punktu w tych chwilach literami $v_{k,0}$ i v_k; to wyrazimy to twierdzenie wzorem

$$L_P \Big|_{t_0}^{t} + L_W \Big|_{t_0}^{t} = \Sigma(\tfrac{1}{2} m_k v_k^2) - \Sigma(\tfrac{1}{2} m_k v_{k,0}^2) \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

w którym L_P i L_W oznaczają sumy prac sił zewnętrznych i wewnętrznych przez te siły w okresie czasu $(t-t_0)$.

12. Zastosowanie metody d'Alembert'a do obliczenia równań dynamicznych. Metoda ta, którą wyłożyliśmy w tomie III-cim na str. 172-ej, dla ruchu jednego punktu, polega na tem, że do punktu materyalnego, będącego w ruchu zmiennym, wyobrażamy sobie przyłożoną pewną siłę, zwaną siłą bezwładności i określoną wzorem

$$\bar{B} = (-m\bar{p}),$$

która **równoważy siły**, działające na dany punkt, — tak zewnętrzne jak i wewnętrzne. Jeżeli przeto wyobrazimy sobie do każdego punktu danego układu przyłożoną taką siłę, to wszystkie te punkty pozostaną w spoczynku, lub w ruchu jednostajnym i prostolinijnym. W ten sposób na każdy punkt danego układu działać będą wogóle następujące siły: siły zewnętrzne, siły wewnętrzne i siły bezwładności, wyżej określone; a punkty danego układu znajdować się będą w równowadze. Ponieważ siły wewnętrzne, występujące pomiędzy punktami danego układu, wzajemnie się równoważą, przeto dojdziemy do wniosku: **siły zewnętrzne i siły bezwładności punktów danego układu pozostają w każdej chwili w równowadze.** Warunki tej równowagi warazić można wszystkimi znanymi sposobami. Jeżeli wyrazimy je np. sumą sił i sumą ich momentów; porówn. wzory 25-te na str. 46-tej tomu I-go, to otrzymamy następujące równania

$$\Sigma\bar{P}_k + \Sigma\bar{B}_k = 0;$$

$$\Sigma\bar{M}_{P,k} + \Sigma\bar{M}_{B,k} = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

w których wektory $\bar{M}_{B,k}$ oznaczają wektory momentów sił bezwładności, względem dowolnie obranego bieguna.

Wyrazimy obecnie sumę sił bezwładności i sumę ich momentów przyśpieszeniami punktów, do których wyobrażamy sobie te siły przyłożonemi. Z określenia siły bezwładności wynika, że

$$\Sigma\bar{B}_k = \Sigma(-m_k\bar{p}_k);$$

a na zasadzie wzoru 7-ego wyrazimy tę sumę wzorem

$$\Sigma \bar{B}_k = (-m\bar{p}_s); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

który wysłowimy: **suma sił bezwładności punktów danego układu równa się sile bezwładności środka jego masy,** gdy w tym środku wyobrazimy sobie skupienie masy wszystkich punktów.

Przekształćmy następnie w podobny sposób sumę momentów sił bezwładności. Moment siły bezwładności k-tego punktu wyrazić możemy wzorem 172-gim tomu III-go

$$\bar{M}_{B,k} = \left(-\frac{d}{dt} \mathrm{V}\, m_k\, \bar{v}_k\, \bar{r}_k\right);$$

a po zestawieniu takich wzorów dla każdego punktu i po dodaniu ich otrzymamy równanie

$$\Sigma \bar{M}_{B,k} = -\frac{d}{dt} \Sigma \mathrm{V}\, m_k\, \bar{v}_k \, . \, \bar{r}_k .$$

Wziąwszy następnie pod uwagę określenie ilości ruchu układu, napiszemy ten wzór w postaci

$$\Sigma \bar{M}_{B,k} = -\frac{d\bar{M}_v}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Równanie to wysłowimy: **suma momentów sił bezwładności danego układu punktów równa się pochodnej względem czasu z odwrotnym znakiem wektora momentu ilości ruchu tegoż układu.**

Po zastąpieniu następnie w równaniach 23-cich sum sił bezwładności i ich momentów wzorami 24-tym i 25-tym, otrzymamy równania dynamiczne 14-te i 17-te.

Zastosujemy wreszcie do wyrażenia równowagi sił, przyłożonych do oddzielnych punktów, zasadę pracy wyobrażalnej. W tym celu zastosujemy równ. 173-cie, tomu III-go, podane na str. 174-ej, wyrażające pracę siły bezwładności wielkościami kinetycznemi, a otrzymamy równanie 21-sze togo tomu, t. j. równanie równowartości pracy sił zewnętrznych z jednej strony i energii kinetycznej z drugiej strony.

Metoda d'Alembert'a przeto nie daje nowych równań dynamicznych, lecz jedynie, nadając wyrazom kinetycznym znaczenia statyczne, pozwala sprowadzić zadania z dynamiki do zadań ze statyki; co nieraz ułatwia zestawienie równań ruchu, lub też unaocznia działanie sił bezwładności, powstających podczas ruchu punktów.