Jeżeli zastąpimy w tych wzorach daną długość sumą dwóch innych długości, z których jedna jest wielkością zmienną, odniesioną do środka masy; np. x'_k, y'_k, $\bar{r}'_k$, $\bar{v}'_k$; a druga wielkością stałą, określającą położenie lub ruch środka masy, np. wielkością x_s, y_s, $\bar{r}_s$ lub $\bar{v}_s$; to po wykonaniu odpowiednich działań matematycznych, wskazanych wyrazem, określającym dany moment, otrzymamy trojakiego rodzaju wyrazy:

1) wyrazy typu

$$\Sigma(m_k\, x'^2_k);\quad \Sigma(m_k\, x'_k\, y'_k);\quad \Sigma(\mathrm{V}\,\Sigma m_k\, \bar{v}'_k\, \bar{r}'_k)\ \text{oraz}\ \Sigma(\tfrac{1}{2} m_k\, v'^2_k);$$

które są takiemi samemi funkcyami, jak poprzednie, tylko — nowych zmiennych; t. j. wyrażają te same momenty innemi tylko zmiennemi;

2) wyrazy, będące iloczynami lub drugiemi potęgami wyłącznie ze stałych długości, które można wynieść przed znak sumy; a sumę mas wszystkich punktów zastąpić masą całego układu; są to wyrazy nast.:

$$m x_s^2;\quad m x_s\, y_s;\quad \mathrm{V}\, m \bar{v}_s\, \bar{r}_s;\quad \text{oraz}\ \tfrac{1}{2} m v_s^2;$$

i wreszcie otrzymamy wyrazy;

3) będące iloczynami ze stałych długości i ze zmiennych długości. Stałe wielkości wyniesiemy przed znak sumy, a sumy będą równe zeru; gdyż są sumami iloczynów z mas i z odległości od środka masy lub z ich pochodnych. Jeżeli bowiem określimy położenie środka masy wyrazem

$$m x_s = \Sigma(m_k\, x_k);$$

to z tego wynika, że

$$\Sigma(m_k\, x'_k) = 0;$$

a więc i

$$\Sigma\left(m_k \frac{d x'_k}{d t}\right) = 0;\quad \text{i t. p.}$$

wyrazy przeto tego rodzaju wypadną ze wzorów.

W tem właśnie określeniu środka masy leży uproszczenie podanych przekształceń.

B. Kinetyka brył materyalnych.

41. Ilość ruchu i moment ilości ruchu bryły materyalnej. Określenia ilości ruchu i momentu ilości ruchu pewnej bryły materyalnej są te same, jakie daliśmy w §§ 2-gim i 4-tym dla dowolnego układu punktów materyalnych; a mianowicie:

ilością ruchu danej bryły materyalnej nazwiemy sumę wektorową ilości ruchu oddzielnych jej punktów, a

momentem jej ilości ruchu nazwiemy sumę wektorową momentów ilości ruchu tych punktów względem obranego bieguna.

Z określenia momentu ilości ruchu nie należy wnioskować, że moment ten równa się momentowi ilości ruchu środka masy; jest to bowiem słuszne, jak to niebawem zobaczymy, tylko dla pewnego szczególnego przypadku; wogóle zaś przypadek ten nie zachodzi; i wogóle, w celu obliczenia momentu ilości ruchu danej bryły należy postępować w tenże sposób, w jaki postępowaliśmy przy obliczaniu momentu sił, działających na daną bryłę; t. j. należy najpierw obliczyć wektory momentów ilości ruchu oddzielnych punktów, na jakie wyobrażamy sobie rozłożoną daną bryłę, następnie należy dodać te wektory; a ich wypadkowa będzie momentem ilości danej bryły.

W § 2-gim tomu III-go podaliśmy znaczenie fizyczne ilości ruchu punktu materyalnego; wyobrażając sobie, że ilość ruchu danego punktu materyalnego może być uważana za miarę uderzenia, jakie udzielone zostało danemu punktowi; lub też za miarę działania chwilowego pewnej siły. Pojęcia te, odnoszące się do punktu materyalnego, można również zastosować do ruchu bryły, wyobraziwszy ją sobie złożoną z bardzo wielu punktów materyalnych. Wektor przeto ilości ruchu danej bryły materyalnej, odniesiony do pewnego punktu przekształceń, porówn. § 57-my tomu I-go, wyraża wypadkową wszystkich sił chwilowych, nadających punktom danej bryły posiadane przez nich prędkości; a wektor momentu ilości ruchu danej bryły wyraża moment wypadkowy momentów tych sił, względem bieguna, obranego w punkcie przekształceń. Jeżeli np. uderzymy bryłę materyalną, mogącą obracać się około pewnego punktu nieruchomego, to mamy do czynienia z siłą uderzenia i z jej momentem; miarą przeto uderzenia jest suma ilości ruchu wszystkich punktów, której wielkość równa się w myśl § 2-ego ilości ruchu środka masy; oraz sumie momentów ilości ruchu wszystkich jej punktów, którą nazwaliśmy momentem ilości ruchu danej bryły.

Jeżeli przeto mamy np. dany wektor momentu ilości ruchu pewnej bryły materyalnej względem bieguna, około którego bryła się obraca, to należy wyobrazić sobie w płaszczyźnie, prostopadłej do tego wektora i przechodzącej przez punkt nieruchomy, siłę uderzającą, która wywołała dany stan prędkości punktów tej bryły; a stan ten, jeżeli bryła obraca się około punktu nieruchomego, określić można wektorem $\overline{\varphi}$ prędkości obrotowej, jaką posiada bryła bezpośrednio po uderzeniu.

W rozpatrywaniach przeto ruchu takiej bryły i czynników, wywołujących jej ruch, będziemy mieli do czynienia z dwoma wektorami; z wektorem momentu ilości ruchu $\overline{M}_v$, który jest wyrazem czynników fizycznych, działających na tę bryłę i z wektorem $\overline{\varphi}$ prędkości obrotowej danej bryły, który można uważać za wyraz skutku działania tych czynników; dwa te wektory są od siebie zależne; zajmiemy się przeto obliczeniem tej zależności. Zanim jednakże do tego przystąpimy, zwróčimy uwagę na tę okoliczność, że do wyrażenia tej zależności wypadnie zastosować właściwości rozmieszczenia mas punktów danej bryły względem obranego bieguna momentów; każdy bowiem punkt danej bryły jest punktem przełożenia wektora jego ilości ruchu; wypadkowa przeto ich momentów zależy od rozmieszczenia geometrycznego tych punktów względem bieguna momentów i od wielkości ich mas.

Ilość ruchu danej bryły można obliczyć w tenże sposób, w jaki obliczyliśmy tę ilość dla dowolnego układu punktów, por. wzór 4-ty; powtórzymy przeto tutaj twierdzenie, podane w § 2-gim, że **ilość ruchu bryły materyalnej równa się ilości ruchu środka jej masy**, gdy wyobrazimy sobie w tym środku skupioną całą masę danej bryły; twierdzenie to wyrazimy wzorem takim samym jak poprzednio

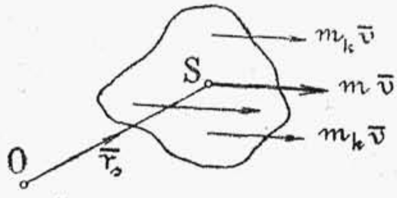
$$\Sigma(m_k \bar{v}_k) = m \bar{v}_s'.$$

Wektor momentu ilości ruchu **bryły** materyalnej da się wyrazić wielkościami, określającemi ruch danej bryły i wielkościami, wyrażającemi rozmieszczenie mas jej punktów; gdy tymczasem wektor momentu zmiennego układu punktów może być wyrażony tylko sumą ilości ruchu oddzielnych punktów, t. j. złożoną z tylu składników, ile było punktów w danym układzie. Ponieważ ruch punktów bryły materyalnej da się wyrazić **wogóle** dwoma wektorami $\bar{v}$ i $\bar{\varphi}$; t. j. — wektorem prędkości dowolnego jej punktu i wektorem prędkości kątowej; porówn. wzór 35-ty, podany na str. 73-ej tomu II-go, przeto i moment jej ilości ruchu powinien dać się wyrazić temi wielkościami.

Zajmiemy się obecnie obliczeniem wzoru momentu ilości ruchu danej bryły materyalnej, wyrażonego wielkościami określającemi jej ruch, i w tym celu, ażeby zadanie sobie ułatwić, obliczymy go najpierw dla pewnych szczególnych przypadków ruchu.

1) Gdy bryła jest w ruchu postępowym z prędkością $\bar{v}$, to moment jej ilości ruchu względem dowolnie obranego bieguna wyrazimy wzorem ogólnym

$$\bar{M}_v = \Sigma\,[\mathrm{V}\, m_k\, \bar{v} \,.\, \bar{r}_k].$$



Rys. 16.

Ponieważ w tym przypadku ruchu wektory ilości ruchu mogą być uważane za przecinające się w jednym punkcie — w nieskończoności; suma przeto ich momentów równa się momentowi ich wypadkowej: a że długości tych wektorów są proporcyonalne do mas, to wypadkowa ich, podobnie jak wypadkowa sił ciężkości oddzielnych punktów, przechodzi przez środek masy danej bryły; i równa się wielkości $m\bar{v}$; przeto, jeżeli bryła jest w ruchu postępowym, to

$$\bar{M}_v = \mathrm{V}\, m\bar{v}_s \,.\, r_s\,; \qquad (67)$$

gdzie r_s jest promieniem wodzącym, wyprowadzonym z obranego bieguna, do środka masy danej bryły.

Wniosek ten wypowiemy: **moment, względem dowolnie obranego bieguna, ilości ruchu bryły, będącej w ruchu postępowym, równa się momentowi ilości ruchu środka jej masy względem tegoż bieguna**, gdy wyobrazimy sobie całą masę skupioną w tym środku.

W szczególnym przypadku, gdy biegun momentów obierzemy w środku masy, to

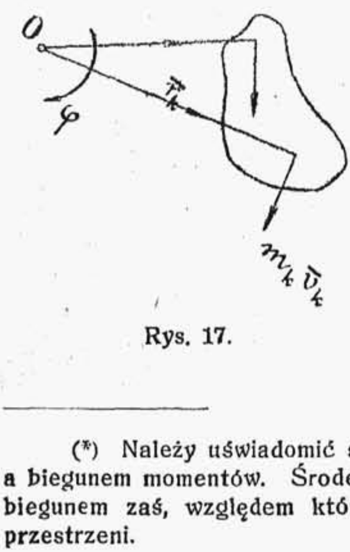
$$\bar{M}_v = 0;$$

moment względem bieguna obranego w środku masy, ilości ruchu bryły, poruszającej się ruchem postępowym, jest w każdej chwili równy zeru

2) Weźmy teraz pod uwagę układ sztywny punktów, leżących na płaszczyźnie i przyjmijmy, że układ ten znajduje się w ruchu dowolnym w swojej płaszczyźnie; czyli weźmy pod uwagę figurę płaską materyalną, poruszającą się w swej płaszczyźnie.

Podczas ruchu takiego układu suma wektorowa momentów ilości ruchów oddzielnych jego punktów zamienia się na sumę algebraiczną; prędkości bowiem oraz ilości ruchu oddzielnych punktów leżą w jednej płaszczyźnie; wektory przeto $\bar{M}_{vk}$, leżą na wspólnej prostopadłej, wystawionej w obranym biegunie.

Wiemy z kinematyki, że każdy ruch płaski może być wywołany przez obrót około środka chwilowego obrotu porówn. § 34-ty tomu II-ego. Gdy obierzemy biegun momentów w **środku chwilowego obrotu** (*) i oznaczymy prędkość kątową obrotu chwilowego literą φ, wtedy



Rys. 17.

$$v_k = r_k \,.\, \varphi,$$

gdzie r_k oznacza w tym razie prostopadłą odległość bieguna momentów od kierunku ilości ruchu k-tego punktu.

(*) Należy uświadomić sobie różnicę pomiędzy środkiem chwilowego obrotu a biegunem momentów. Środek chwilowego obrotu określa chwilowy ruch bryły; biegunem zaś, względem którego obliczamy momenty, może być dowolny punkt przestrzeni.

Po podstawieniu tej wartości w ogólny wzór momentu ilości ruchu, otrzymamy jego wartość

$$M_{v,0} = \Sigma\ (m_k r_k \varphi \,.\, r_k) = \varphi \,.\, \Sigma\ (m_k r_k{}^2);$$

skąd wreszcie

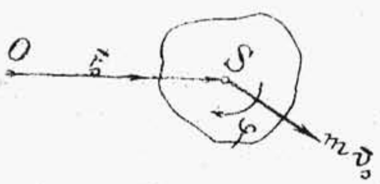
$$M_{v,0} = I_0 \,.\, \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

gdzie I_0 oznacza moment bezwładności danego układu względem **środka chwilowego obrotu**. Wzór ten wysłowimy: **moment ilości ruchu figury płaskiej materyalnej względem bieguna, obranego w środku chwilowego obrotu, równa się iloczynowi z prędkości kątowej i z momentu bezwładności danej figury względem tegoż bieguna.**

Jeżeli zaś biegun momentu ilości ruchu obierzemy w **dowolnym punkcie** na płaszczyźnie danej figury, **nie w środku** chwilowego obrodu; to wartość tego momentu obliczymy, wyobraziwszy sobie na zasadzie §. 39-tego tomu II-ego; że ruch chwilowy figury danej jest złożony z ruchu postępowogo o prędkości $\bar{v}_s$, jaką posiada w danej chwili np. środek masy tego układu i z ruchu obrotowego o prędkości φ około tego środka; moment przeto ilości ruchu każdego punktu składa się z sumy momentów obydwóch składowych tego ruchu; zważywszy następnie, że ruch punktów, wywołany obrotem figury około środka masy, jest ruchem względnym, który określiliśmy w § 13-tym tego tomu; możemy zastosować bezpośrednio do obliczenia momentu ilości ruchu danej figury twierdzenie, podane w wzorze 30-tym tego tomu; wypowiemy je: **moment ilości ruchu układu płaskiego względem bieguna, dowolnie obranego na płaszczyźnie tego układu, składa się: z momentu ilości ruchu postępowego względem obranego bieguna,** moment ten jest wyrażony równaniem 67-ym, **i z momentu ilości ruchu obrotowego, względem bieguna, obranego w środku masy;** moment [ten wyrażony jest wzorem 42-gim; **całkowity przeto moment:** *)

$$\bar{M}_v = I_s \,.\, \bar{\varphi} + \mathrm{V}\ m\bar{v}_s \,.\, \bar{r}_s \quad . \; : \; . \; . \; . \; . \; . \quad (69)$$

W szczególnym przypadku, w którym **środek** masy figury płaskiej pozostaje **w spoczynku**, wartości momentów jej ilości ruchu względem **wszystkich biegunów są jednakowe;** równe są bowiem wyrazowi $I_s \,.\, \varphi$. Do wniosku tego dojdziemy również drogą bezpośredniego rozumowania, wziąwszy pod uwagę twierdzenie, że suma wektorów ilości ruchu każdej bryły materyalnej równa się we-



Rys. 18.

*) Czytelnik zechce sobie uprzytomnić położenie tych wektorów względem płaszczyzny figury, jak również wyprowadzić ten wzór na podstawie § 58-mego tomu I-go.

ktorowi ilości ruchu środka masy; jeżeli zaś suma ta równa się zeru, jak w przypadku przytoczonym, to układ tych wektorów sprowadzić można do **pary wektorów,** których momenty na zasadzie § 115-tego tomu I-go, są jednakowe do wszystkich biegunów; uogólnić do przestrzeni.

W szczególnym przypadku, który rozpatrywaliśmy poprzednio, jeżeli biegun momentu pokrywa się z biegunem chwilowego obrotu; to, zważywszy, że w tym przypadku

$$\bar{r}_s \perp \bar{v}_s; \quad \text{a więc} \quad v_s = r_s \cdot \varphi;$$

wyraz momentu ilości ruchu jest następujący

$$M_v = mr_s{}^2 \cdot \varphi + I_s \cdot \varphi;$$

a zważywszy jeszcze, że zgodnie z równaniem 55-em

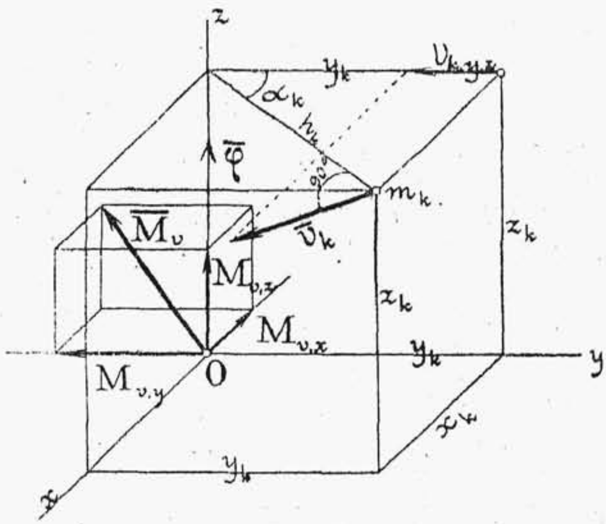
$$mr_s{}^2 + I_s = I_0;$$

otrzymamy wzór 68-my, wyprowadzony bezpośrednio do tego przypadku.

3) Jeżeli bryła materyalna obraca się około osi, to moment ilości ruchu względem osi obliczymy w tenże sposób, w jaki to uczyniliśmy dla figury płaskiej, że moment jej ilości ruchu **względem osi obrotu** równa się iloczynowi z momentu bezwładności tej bryły względem osi obrotu i z prędkości obrotowej; i wzór tego momentu będzie jednakowy ze wzorem 68-mym z tą tylko różnicą, że I_0 oznaczać będzie moment bezwładności **danej bryły względem osi obrotu.**

4) Wyznaczmy teraz położenie i wielkość wektora momentu ilości ruchu bryły, obracającej się około pewnej osi, względem **bieguna** obranego na tejże osi. W celu tego obliczenia zastosujemy układ spółrzędnych (x, y, z), którego początek obierzmy w danym biegunie O na danej osi; i przyjmiemy kierunek osi obrotu φ za oś z, a osi x i y prostopadle do niej; zresztą — dowolnie. Na rysunku 19-tym pokazany jest biegun momentów O i oś obrotu φ; oraz jeden punkt m_k danej bryły.

Wyobrazimy sobie następnie, że szukany wektor $\overline{M}_v$ jest zrzutowany na obrane osi spółrzędnych; a rzuty



Rys. 19.

jego, które oznaczymy literami $M_{v,x}$, $M_{v,y}$ i $M_{v,z}$, uważać będziemy stosownie do § 3-go tomu II go, za momenty ilości ruchu danej bryły względem osi x, y, z; a obliczywszy te momenty, wyznaczymy z nich położenie właściwego momentu względem obranego bieguna i obliczymy jego wielkości; porówn. §§ 47-my i 48-my tomu I go; w których postępowaliśmy w tenże sposób; przy obliczeniu momentu siły względem bieguna.

Ażeby przeto obliczyć np. $M_{v,x}$, zrzutujmy wektory ilości ruchu każdego punktu danej bryły na płaszczyznę (y, z), i obliczmy momenty tych rzutów względem początku spółrzędnych. Oznaczywszy odległości k-tego punktu od osi obrotu literami h_k; wyrazimy wartość prędkości jego wzorem $h_k \varphi$. Oznaczywszy następnie kąt, jaki tworzy promień h_k z płaszczyzną (y, z) literą α_k, wyrazimy rzut $v_{k,y,z}$ prędkości v_k na płaszczyznę (y, z) wzorem

$$v_{k,y,z} = (h_k \varphi) \,.\, \sin \alpha_k \,;$$

kierunek bowiem prędkości v_k tworzy z płaszczyzną (y, z) kąt $(90 - \alpha_k)$; a zważywszy, że

$$h_k \,.\, \sin \alpha_k = x_k \,;$$

wyrazimy rzut na płaszczyznę (y, z) wektora ilości ruchu tego punktu wzorem

$$m_k \, x_k \, \varphi \,;$$

a moment jego względem bieguna, obranego w przecięciu się osi x z płaszczyzną (y, z) wzorem

$$-(m_k \, x_k \, \varphi) \,.\, z_k \,;$$

z_k jest bowiem w tym razie ramieniem tego rzutu; a więc

$$M_{v,x} = -\varphi \, \Sigma \, (m_k \, x_k \, z_k) \,;$$

lub inaczej

$$M_{v,x} = -\varphi \,.\, I_{1,3} \,; \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

gdzie $I_{1,3}$ oznacza moment odśrodkowy danej bryły względem płaszczyzn 1-ej i 3-ej; porówn. § 26-ty tego tomu.

W tenże sposób obliczymy moment ilości ruchu względem osi y

$$M_{v,y} = -\varphi \,.\, I_{2,3} \,; \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

lub też otrzymamy ten wzór bezpośrednio, gdy zastąpimy w nim x literą y; wskaźnik 1 wskaźnikiem 2.

Moment względem osi z obliczymy bezpośrednio z wzoru 68-go i otrzymamy

$$M_{v,z} = \varphi \,.\, I_z \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Moment przeto ilości ruchu względem bieguna O, obranego na osi obrotu bryły, obracającej się około osi z; wyrazimy wzorem wektorowym

$$\overline{M}_v = \overline{M}_{v,x} + \overline{M}_{v,y} + \overline{M}_{v,z}.$$

Ze wzoru tego wynika, że kierunek wektora M_v, t. j. kierunek wektora momentu ilości ruchu bryły, obracającej się około danej osi względem bieguna obranego na tej osi, **nie pokrywa** się **wogóle** z kierunkiem tejże osi obrotu, jakby to pozornie zdawać się mogło. Wniosek ten zresztą unaocznimy sobie bezpośrednio, jeżeli zbudujemy wektor momentu pojedynczego punktu materyalnego względem bieguna obranego na osi, około której ten punkt się obraca, porówn. rys. 19-ty. W szczególnem tylko położeniu bryły, jakie ona zajmuje względem osi obrotu, kierunki te pokrywać się mogą; a to nastąpi tylko wtedy, gdy jednocześnie wartości

$$I_{1,3} = 0; \qquad \text{oraz} \qquad I_{2,3} = 0.$$

Wniosek ten wypowiemy:

kierunek wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego na osi obrotu pewnej bryły materyalnej, nie pokrywa się wogóle z osią obrotu; pokrywa się zaś tylko wtedy z kierunkiem tej osi, jeżeli oś ta jest jedną z osi głównych elipsoidy bezwładności, zbudowanej w obranym biegunie momentów.

Z powyższych warunków wynika jeszcze wniosek; jeżeli w szczególnym przypadku bryła posiada takie położenie względem osi obrotu, że na tej osi znajduje się biegun bezwładności (§ 34-ty tego tomu); to kierunek momentu ilości ruchu **względem tego bieguna**, ale tylko względem tego bieguna, pokrywa się z kierunkiem osi obrotu.

5) W ogólniejszym przypadku ruchu, jeżeli kierunek osi obrotu nie pokrywa się z żadną z osi obranego już układu spółrzędnych, to w celu obliczenia wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego na tej osi, rozłożymy wektor prędkości obrotowej $\bar{\varphi}$ w kierunkach osi spółrzędnych; dany przeto obrót $\bar{\varphi}$ będziemy uważali za złożony z trzech obrotów $\bar{\varphi}_x$, $\bar{\varphi}_y$, $\bar{\varphi}_z$; i obliczenie momentu ilości ruchu sprowadzimy do poprzedniego przypadku.

Wyznaczywszy kierunki obranych osi spółrzędnych wektorami jednostkowymi *) $\bar{i}, \bar{k}, \bar{l}$, a momenty ilości ruchu względem bieguna, obranego w początku układu, powstające podczas kolejnych obrotów około tych osi literami $(\bar{M}_v)_1$, $(\bar{M}_v)_2$ i $(\bar{M}_v)_3$; napiszemy na zasadzie wzorów 70-go, 71-go i 72-go; stosując je kolejno do tych przypadków

$$\left.\begin{aligned} (\bar{M}_v)_1 &= + \varphi_x I_x \,.\, \bar{i} - \varphi_x I_{1,2} \,.\, \bar{l} - \varphi_x I_{1,3} \,.\, \bar{k}; \\ (\bar{M}_v)_2 &= - \varphi_y I_{1,2} \,.\, \bar{i} + \varphi_y I_y \,.\, \bar{l} - \varphi_y I_{2,3} \,.\, \bar{k}; \\ (\bar{M}_v)_3 &= - \varphi_z I_{1,3} \,.\, \bar{i} - \varphi_z I_{2,3} \,.\, \bar{l} + \varphi_z I_z \,.\, \bar{k}. \end{aligned}\right\} \quad . \;.\; . \quad (73)$$

---

*) Wektory $\bar{i}, \bar{k}, \bar{l}$ są to trzy wektory, wzajemnie prostopadłe, wychodzące z jednego punktu i posiadające długość $= 1$. Każdy przeto wektor, którego początek leży w punkcie wyjścia tych wektorów $\bar{A} = A_x \,.\, \bar{i} + A_y \,.\, \bar{k} + A_z \,.\, \bar{l}$; gdzie A_x, A_y, A_z oznaczają rzuty wektora na osi x, y, z lub też, co na jedno wychodzi, na osi $\bar{i}, \bar{k}, \bar{l}$.

A ponieważ $\bar{M}_v = (\bar{M}_v)_1 + (\bar{M}_v)_2 + (\bar{M}_v)_3$, przeto rzuty $\bar{M}_v$ na osi x, y i z równają się

$$\left.\begin{aligned} M_{v,x} &= + \varphi_x \cdot I_x - \varphi_y \cdot I_{1,2} - \varphi_z \cdot I_{1,3}; \\ M_{v,y} &= - \varphi_x \cdot I_{1,2} + \varphi_y \cdot I_y - \varphi_z \cdot I_{2,3}; \\ M_{v,z} &= - \varphi_x \cdot I_{1,3} - \varphi_y \cdot I_{2,3} + \varphi_z \cdot I_z . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Wzory te znacznie się uproszczą, jeżeli obierzemy główne osi elipsoidy bezwładności, zbudowanej dla obranego bieguna momentów, za osi spółrzędnych; momenty bowiem odśrodkowe będą równe zeru. Jeżeli przeto literami ξ, η i ζ oznaczymy osi główne danej bryły w obranym biegunie, to z powyższych równań wynika, że

$$\left.\begin{aligned} \bar{M}_{v,\xi} &= \bar{\varphi}_\xi \cdot I_\xi ; \\ \bar{M}_{v,\eta} &= \bar{\varphi}_\eta \cdot I_\eta ; \\ \bar{M}_{v,\zeta} &= \bar{\varphi}_\zeta \cdot I_\zeta . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

skąd

$$\bar{M}_v = \bar{\varphi}_\xi \cdot I_\xi + \bar{\varphi}_\eta \cdot I_\eta + \bar{\varphi}_\zeta \cdot I_\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

lub analitycznie

$$M_v^2 = (\varphi_\xi \cdot I_\xi)^2 + (\varphi_\eta \cdot I_\eta)^2 + (\varphi_\zeta \cdot I_\zeta)^2 ;$$

i t. d.

Równania te pozwalają wyznaczyć wektor $\bar{M}_v$, gdy dane jest położenie wektora $\bar{\varphi}$ i położenie bryły w przestrzeni; t. j. gdy znane jest położenie wektora $\bar{\varphi}$ względem trzech głównych osi elipsoidy i momenty bezwładności względem tych osi. I odwrotnie, za pomocą powyższych równań wyznaczyć można wektor $\bar{\varphi}$, gdy znane jest położenie wektora $\bar{M}_v$ względem osi głównych danej bryły oraz momenty jej bezwładności względem tych osi; wektor ten wyznaczymy z równań 75-tych

$$\bar{\varphi}_\xi = \frac{\bar{M}_{v,\xi}}{I_\xi} ; \quad \bar{\varphi}_\eta = \frac{\bar{M}_{v,\eta}}{I_\eta} ; \quad \bar{\varphi}_\zeta = \frac{\bar{M}_{v,\zeta}}{I_\zeta} ;$$

skąd

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{M}_{v,\xi}}{I_\xi} + \frac{\bar{M}_{v,\eta}}{I_\eta} + \frac{\bar{M}_{v,\zeta}}{I_\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

42. Energia kinetyczna bryły materyalnej. Określenie energii kinetycznej bryły jest takie same, jakie podaliśmy w § 5-ym wogóle dla układów punktów materyalnych. Ponieważ w danym razie układem punktów jest sztywna bryła materyalna, przeto gdy znany jest jej ruch; t. j. gdy są znane np. wektory $\bar{v}_A$ i $\bar{\varphi}$, wzór 35-ty str. 73-cia tomu II-ego; wtedy prędkość każdego jej punktu jest już ściśle temi wielkościami określona; a więc i energia kinetyczna może być wyrażoną temi wielkościami. Zadaniem naszem jest obecnie obliczenie energii kinetycznej danej bryły, gdy dany jest jej ruch.

W tym celu obliczymy najpierw te wartości dla pewnych szczególnych przypadków ruchu:

1) jeżeli np. bryła pozostaje w spoczynku, to jej energia kinetyczna

$$T = 0;$$

prędkości bowiem wszystkich punktów są równe zeru;

2) gdy zaś bryła jest w ruchu postępowym z prędkością chwilową $\bar{v}$; natenczas

$$T = \Sigma (\tfrac{1}{2} m_k v^2);$$

skąd

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2;$$

gdzie $m = \Sigma m_k$ oznacza masę całej bryły;

3) gdy bryła obraca się w danej chwili około pewnej osi z prędkością kątową φ i gdy h_k oznaczają odległości jej punktów od osi obrotu, to

$$v_k = h_k \,.\, \varphi; \quad \text{a więc}$$

$$T = \Sigma [\tfrac{1}{2} m_k (h_k \,.\, \varphi)^2] = \tfrac{1}{2} \varphi^2 \,.\, \Sigma (m_k h_k^2);$$

i wreszcie

$$T = \tfrac{1}{2} I_\varphi \,.\, \varphi^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

gdzie litera I_φ oznacza moment bezwładności danej bryły względem osi obrotu.

4) w razie zaś swobodnego ruchu bryły, energię jej kinetyczną obliczymy, gdy wyobrazimy sobie, że ruch chwilowy złożony jest np. z prędkości postępowej $\bar{v}_s$ środka jej masy i z prędkości obrotowej $\bar{\varphi}$ około osi, przechodzącej przez ten środek; a zważywszy, że prędkości, które powstają wskutek obrotu bryły, są prędkościami względnemi określonemi w § 13-tym, napiszemy wzór energii kinetycznej danej bryły z wzoru 34-ego.

$$T = \tfrac{1}{2} m v_s^2 + \tfrac{1}{2} I_s \,.\, \varphi^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

gdzie I_s oznacza moment bezwładności bryły względem osi chwilowego obrotu, przechodzącej przez środek jej masy.

Wzór ten wysłowimy: **energia kinetyczna** bryły materyalnej **równa się sumie** algebraicznej dwóch składników; z których jeden wyraża **energię kinetyczną środka masy**; gdy wyobrazimy sobie skupioną w nim całą masę; drugi zaś wyraża **energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły** około osi, przechodzącej przez ten środek. Energię kinetyczną np. walca o przekroju kołowym, toczącym się po płaszczyźnie z prędkością postępową v_s wyrazimy wzorem

$$T = \tfrac{1}{2} m v_s^2 + \tfrac{1}{2} I_s \,.\, \varphi^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

Wzór ten da się jeszcze przekształcić ze względu, że mamy w danym przypadku warunek toczenia się; który wyrazimy wzorem

$$v_s = r \,.\, \varphi;$$

gdy literą r oznaczymy promień przekroju walca; a po podstawieniu wartości φ z tego równania w poprzednie, otrzymamy

$$T = \tfrac{1}{2} m v_s^2 + \tfrac{1}{2} I_s \left(\frac{v_s}{r}\right)^2; \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (81)$$

a ponieważ moment bezwładności walca pełnego względem jego osi, § 22-gi,

$$I_s = \tfrac{1}{2} m r^2;$$

przeto

$$T = \tfrac{1}{2} m v_s^2 + \tfrac{1}{2} \frac{v_s^2}{r^2} \cdot \tfrac{1}{2} m r^2$$

i wreszcie, po uproszczeniu tego wzoru, wyraz energii kinetycznej toczącego się walca jest następujący

$$T = \tfrac{3}{4} m v_s^2.$$

43. Związek matematyczny pomiędzy wyrazem momentu ilości ruchu a wyrazem energii kinetycznej[1]. Ponieważ moment ilości ruchu i energia kinetyczna danej bryły materyalnej jest ściśle określona wielkościami określającemi ruch bryły, przeto pomiędzy wyrazem momentu i wyrazem energii zachodzić powinien pewien związek matematyczny; związek ten znajdziemy w następujący sposób.

Energię kinetyczną punktu k-tego, którą oznaczamy literą T_k, wyrazimy iloczynem skalarnym dwóch wektorów; § 5-ty,

$$T_k = \tfrac{1}{2} m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k;$$

lub inaczej na zasadzie wzoru 18-go tomu II-go,

$$T_k = \tfrac{1}{2} m_k \bar{v}_k \cdot \mathrm{V}\, \bar{r}_k \cdot \bar{\varphi};$$

gdzie $\bar{r}_k$ oznaczają promienie wodzące, wyprowadzone z dowolnego bieguna obranego na osi obrotu do punktów danej bryły.

Wyraz ten przekształcimy na zasadzie odpowiedniego prawidła rachunku wektorowego na następujący

$$T_k = \tfrac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot \mathrm{V}\, m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k;$$

a ponieważ

$$\mathrm{V}\, m_k \bar{v}_k \cdot \bar{r}_k = \bar{M}_{v,k};$$

przeto

$$T_k = \tfrac{1}{2} \bar{\varphi}\, \bar{M}_k;$$

---

[1]) Obliczenia w tym § wymagają znajomości przekształceń iloczynów wektorowych.

po dodaniu takich wartości, zestawionych dla wszystkich punktów danej bryły, otrzymamy, że

$$T = \tfrac{1}{2}\bar{\varphi}\,.\,\bar{M}_v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Wzór ten wysłowimy: **wartość energii kinetycznej bryły materyalnej równa się połowie iloczynu skalarnego z wektora prędkości obrotu i z wektora momentu ilości ruchu względem bieguna dowolnie obranego na osi obrotu.**

Związek ten przekształcimy jeszcze na inny, przydatny często do przekształceń analitycznych. Zrzutujmy mianowicie wektory $\bar{\varphi}$ i $\bar{M}_v$ na trzy wzajemnie prostopadłe osi, a na zasadzie wzoru wektorowego; napiszemy równanie 82-gie w postaci algebraicznej

$$T = \tfrac{1}{2}\varphi_x\,.\,M_{v,x} + \tfrac{1}{2}\varphi_y\,.\,M_{v,y} + \tfrac{1}{2}\varphi_z\,.\,M_{v,z}; \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

Wartości momentów względem osi spółrzędnych podstawimy w to równanie z równań 74-ch, i otrzymamy

$$T = \tfrac{1}{2}\varphi_x^2\,.\,I_x + \tfrac{1}{2}\varphi_y^2\,.\,I_y + \tfrac{1}{2}\varphi_z^2\,.\,I_z - \tfrac{1}{2}\,.\,2\varphi_x\,.\,\varphi_y\,.\,I_{1,2}$$
$$- \tfrac{1}{2}\,.\,2\varphi_y\,.\,\varphi_z\,.\,I_{2,3} - \tfrac{1}{2}\,.\,2\varphi_z\,.\,\varphi_x\,.\,I_{3,1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Określiwszy przeto chwilowy obrót bryły wielkościami φ_x, φ_y, φ_z, i znając jej momenty bezwładności i odśrodkowe względem osi spółrzędnych x, y, z, obliczymy z wzoru 84-go jej energię kinetyczną.

Z równania tego, po jego zróżniczkowaniu cząstkowem względem zmiennych φ_x, φ_y, φ_z, otrzymamy

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_x} = \varphi_x\,.\,I_x - \varphi_y\,.\,I_{1,2} - \varphi_z\,.\,I_{3,1};$$

a po uwzględnieniu wzoru 74-go otrzymamy równanie

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_x} = M_{v,x}.$$

W tenże sposób otrzymamy związki pomiędzy rzutem momentu ilości ruchu danej bryły na obrane osi a pochodną cząstkową energii kinetycznej względem rzutu prędkości obrotu na tę oś; przeto mamy wogóle

$$M_{v,x} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_x}; \; M_{v,y} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_y}; \; M_{v,z} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Jeżeli osi rzutów obierzemy w kierunkach osi głównych (ξ, η, ζ) środkowej elipsoidy bezwładności danej bryły, to po podstawieniu w równanie 83-cie.

$$M_{v,\xi} = \varphi_\xi\; I_\xi, \text{ i t. d.};$$

otrzymamy

$$T = \tfrac{1}{2}\varphi_\xi^2\,.\,I_\xi + \tfrac{1}{2}\varphi_\eta^2\,.\,I_\eta + \tfrac{1}{2}\varphi_\zeta^2\,.\,I_\zeta; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

skąd, jak poprzednio, otrzymamy związki

$$M_{v,\xi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_\xi}; \qquad M_{v,\eta} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_\eta}; \qquad M_{v,\zeta} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_\zeta}.$$

które są również szczególnym przypadkiem równań 85-ych.

C. Równania dynamiczne ruchu brył materyalnych.

44. Równania dynamiczne. Ponieważ bryłę materyalną uważać można za układ punktów materyalnych, pomiędzy którymi występują siły wewnętrzne czyniące zadość prawu wzajemnego działania, równania przeto dynamiczne ruchu środka masy, oraz równania momentów, wyprowadzone w §§ 9-ym i 10-tym dla układów zmiennych, można bezpośrednio stosować do ruchu brył sztywnych; równania te przeto są następujące: równanie ruchu środka masy

$$\Sigma \bar{P}_k = \frac{d(m\bar{v}_s)}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (87)$$

następnie, jako równanie momentu ilości ruchu rzeczywistego może być zastosowane jedno z równań, podanych w § 10-tym tego tomu; są one bowiem jednakowe, różnią się jedynie swą postacią; równania te są następujące

$$\Sigma \mathrm{V} \bar{P}_k . \bar{r}_k = \Sigma \mathrm{V} m_k \bar{p}_k . \bar{r}_k; \text{ lub } \Sigma \mathrm{V} \bar{P}_k . \bar{r}_k = \frac{d}{dt} \Sigma \mathrm{V} m_k \bar{r}_k . \bar{r}_k \text{ lub} \; . \; . \quad (89)$$

$$\Sigma \mathrm{V} \bar{P}_k . \bar{r}_k = \frac{d\bar{M}_v}{dt}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (89)$$

równanie zaś momentu, ilości ruchu względnego względem bieguna, obranego w środku masy, napiszemy z równania 35-tego;

$$\Sigma \mathrm{V} \bar{P}_k . \bar{r}'_k = \frac{d}{dt} \Sigma \mathrm{V} m_k \bar{v}'_k \bar{r}'_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (90)$$

Równanie 21-sze, t. j. równanie równowartości pracy i energii kinetycznej w zastosowaniu do brył sztywnych znacznie się upraszcza; suma bowiem prac sił wewnętrznych, jakie występują pomiędzy punktami sztywnej bryły materyalnej równa się zeru; cośmy dowiedli w § 119-tym tomu I-go; równanie to przeto dla ruchu brył sztywnych jest następujące

$$d \Sigma L_P = d \Sigma (\tfrac{1}{2} m_k v_k{}^2). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (91)$$

Z równań tych obliczyć można ruch każdej bryły, który jest wywołany działaniem danych sił zewnętrznych; a ogólniej, mówiąc, równania te dają związek **pomiędzy siłami**, działającemi na bryłę, a jej **ruchem**.

Z równania ruchu środka masy, równ. 87-me, obliczyć można podług metod, wyłożonych w tomie III-cim, ruch środka masy, jako punktu materyalnego o masie równej masie całej bryły. Znajomość ruchu środka masy danej bryły ma w tym razie o tyle praktyczniejsze znaczenie, niż miało w układzie zmiennym punktów, że położenie bryły w przestrzeni jest już przez znajomość położenia tego środka do pewnego stopnia wyznaczone; do zupełnie przeto ścisłego określenia jej ruchu brak tylko znajomości ruchu względnego tej bryły względem środka masy, który obliczyć można z równania 90-ego. Z sześciu przeto niewiadowych, jakie określają wogóle ruch bryły swobodnej, trzy można obliczyć z równania ruchu środka masy; a pozostałe trzy z równania momentu ilości ruchu względnego, Z tego bowiem równania obliczyć można wektor $\overline{M'}_v$, — lub jego rzuty na dowolne osi lub na osi główne danej bryły; a następnie, znając ten wektor, wyznaczyć można wektor $\overline{\varphi}$ chwilowego obrotu, do czego zastosować należy równania 74-te lub 77-me; a wektor $\overline{\varphi}$ łącznie z obliczoną już prędkością v_s określi jednoznacznie ruch chwilowy danej bryły. Taka jest ogólna metoda obliczenia ruchu bryły, wywołanego działaniem danych sił.

Dla obliczenia przeto ruchu bryły swobodnej mamy dwa równania wektorowe, równ. 87-me i np. równ. 90-te; te dwa równania wektorowe zastąpić można wogóle sześcioma równaniami skalarnemi, z których obliczyć można sześć niewiadomych w funkcyi czasu; niewiadomemi temi mogą być np. sześć spółrzędnych, określających położenie bryły, swobodnej w przestrzeni. Dwa przeto równania wektorowe lub sześć równań skalarnych, które otrzymamy drogą rzutowania, wystarcza zupełnie do obliczenia ruchu bryły swobodnej; gdy dane są siły na nią działające. W zadaniach technicznych jednakże niewiadomemi bywają zwykle: częściowo siły (np. nieznane siły odporowe) i częściowo spółrzędne ruchu lub też związki pomiędzy temi spółrzędnemi, porówn. § 60-ty tomu I-go; gdy bryła jest nieswobodną. Z tych rozpatrywań widzimy, że równanie równowartości pracy i energii kinetycznej jako równanie siódme staje się do obliczenia ruchu bryły zbytecznem; nasuwa się przeto wniosek, że to równanie, nie mogąc stać w sprzeczności z równaniem momentów, musi być wynikiem algebraicznych przekształceń tych równań; czego też bezpośrednio dowiedziemy w paragrafie następnym.

Obliczenie ruchu bryły z powyższych równań znacznie się uprości; wyrazy bowiem momentów ilości ruchu oraz energii kinetycznej brył sztywnych dają się wyrazić wzorami o skończonej postaci; t. j. dają się wyrazić funkcyami wielkości, określających chwilowy ruch danej bryły; wzory te obliczyliśmy już w §§ 41-szym i 42-gim tego tomu i będziemy je stosować do poszczególnych przypadków ruchu brył.

Zanim przeto przystąpimy do rozwiązania każdego zadania z dynamikami brył, **powinniśmy przedewszystkiem obrać spółrzędne, określające położenie a więc i ruch danej bryły**; i następnie temi spółrzędnemi wyrazić momenty ilości ruchu lub energię kinetyczną, poruszającej się bryły.

Spółrzędne te oczywiście mogą w rachunku występować jako niewiadome lub jako znane wielkości; zaznaczyć przytem należy, że od wyboru tych spółrzędnych zależy prędszy lub przejrzystszy sposób przeprowadzenia całego rachunku i — przedstawienia jego wyników.

45. Związek pomiędzy równaniem dynamicznem momentów i równaniem pracy *). W równaniu momentów wyraziliśmy sztywność bryły, stałością w danej chwili wielkości φ dla wszystkich punków danej bryły; równanie przeto momentów i równanie pracy wyrażają te same właściwości bryły sztywnej i wskutek tego jedno z tych równań powinno być wynikiem drugiego. W celu tego dowiedzenia rozpatrzmy równania ruchu bryły, obracającej się około dowolnego punktu. Równanie momentów tego ruchu względem bieguna, obranego w środku obrotu, wyrazimy równaniem; równ. 88-me

$$\Sigma\,[\mathrm{V}\bar{P}_k\,.\,\bar{r}_k] = \Sigma\,[\mathrm{V}\,m_k\bar{p}_k\,.\,\bar{r}_k].$$

Wyobraźmy sobie następnie, że bryłę daną obróciliśmy około osi chwilowego obrotu o kąt $\bar{\varphi}\,.\,dt$; i pomnóżmy powyższe równanie skalarnie przez tę wielkość, a otrzymamy

$$\Sigma\,(\mathrm{V}\bar{P}_k\,.\,\bar{r}_k)\,.\,\bar{\varphi}\,.\,dt = \Sigma\,(\mathrm{V}\,m_k\bar{p}_k\,.\,\bar{r}_k)\,.\,\bar{\varphi}\,.\,dt.$$

Przekształćmy następnie te iloczyny skalarne podług odpowiedniego prawidła, a otrzymamy

$$\Sigma\,[\bar{P}_k\,.\,\mathrm{V}\bar{r}_k\,.\,\bar{\varphi}\,.\,dt] = \Sigma\,[m_k\bar{p}_k\,.\,\mathrm{V}\,\bar{r}_k\bar{\varphi}\,.\,dt].$$

Wektor $\mathrm{V}\,\bar{r}_k\bar{\varphi}\,.\,dt$ wyraża cząstkę drogi, jaką punkt k-ty zakreśla podczas obrotu bryły; cząstkę tę oznaczymy wektorem $d\bar{s}_k$; a po podstawieniu tego wyrazu w równanie powyższe napiszemy je w następujący sposób

$$\Sigma\,(\bar{P}_k\,.\,d\bar{s}_k) = \Sigma\left[m_k\bar{p}_k\,.\,\frac{d\bar{s}_k}{dt}\right]dt;$$

lub po podstawieniu $\bar{p}_k = \dfrac{d\bar{v}_k}{dt}$ otrzymamy

$$\Sigma\,(\bar{P}_k\,.\,d\bar{s}_k) = \frac{d}{dt}\,\Sigma\tfrac{1}{2}\,(m_k\,\bar{v}_k{}^2);$$

a więc równanie pracy sił podczas ruchu kulistego bryły sztywnej jest wynikiem przekształceń algebraicznych równania momentów; nie wnosi ono nam przeto żadnych nowych właściwości ruchu.

---

*) Obliczenia tutaj stosowane wymagają znajomości przekształceń iloczynów wektorowych.

Jeżeli zaś równanie momentów dane jest w postaci trzech równań skalarnych; w postaci np. trzech równań momentów względem trzech osi prostokątnych; które to równania mogą być uważane za rzuty równania wektorowego momentów na trzy osi; to, ażeby z nich otrzymać równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, należy każde z nich pomnożyć przez różniczkę kąta obrotu danej bryły około każdej z trzech osi, a po dodaniu tych równań otrzymamy różniczkę zupełną, która będzie szukanem równaniem równowartości pracy i energii kinetycznej. Równanie to bowiem będzie wyrazem analitycznym iloczynu skalarnego dwóch wektorów. W szczególnym przypadku, jeżeli bryła obraca się około osi nieruchomej i posiada w pewnej chwili prędkość $\frac{d\sigma}{dt}$, to wystarczy pomnożyć równanie momentów przez wielkość $d\sigma$; ażeby otrzymać równanie równowartości pracy i energii kinetycznej.

Równanie przeto równowartości pracy i energii kinetycznej, zastosowane do ruchu bryły sztywnej, może być uważane jako jedno z trzech równań algebraicznych, jakiemi wyrazić można każde równanie wektorowe. Równanie zaś równowartości pracy i energii kinetycznej, zastosowane do układów zmiennych, jest niezależne od równania momentów, wyraża ono bowiem nowe właściwości danego układu, a mianowicie właściwości sił wewnętrznych.

D. Obliczenie ruchu obrotowego bryły materyalnej.

46. Ruch bryły, obracającej się około osi nieruchomej. Jeżeli bryła materyalna może tylko obracać się około osi, nieruchomej w przestrzeni, to posiada jeden tylko stopień swobody ruchu; jedno przeto równanie algebraiczne wystarczy do obliczenia jej ruchu. Równaniem tem może być tak dobrze równanie momentu ilości ruchu, jak też równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Jeżeli zastosujemy równanie momentu ilości ruchu, to obliczymy momenty sił i moment ilości ruchu danej bryły względem osi obrotu; momenty bowiem sił odporowych, występujących w łożyskach danej osi, równają się w tym razie zeru; a jedynie momenty sił, przyłożonych do bryły, wejdą do obliczenia.

Położenie w przestrzeni bryły, obracającej się około osi nieruchomej, określimy kątem σ, jaki tworzy płaszczyzna, sztywno związana z bryłą i przechodząca przez oś obrotu, — z inną płaszczyzną, przechodzącą również przez tę oś, lecz pozostającą nieruchomą w przestrzeni. Oznaczywszy chwilową prędkość literą φ; moment bezwładności bryły względem osi obrotu literą I_0; to równanie momentu ilości ruchu wzglę-