70. Wyznaczenie spółczynnika η. Spółczynnik η wyznaczymy liczbowo, gdy wykonamy choć jedno doświadczenie z materyałami, dla których chcemy go wyznaczyć, a wtedy spółczynnik ten będzie można stosować do innych przypadków uderzeń brył z tychże materyałów. Doświadczenie takie należy wykonać w warunkach najdogodniejszych dla pomiarów. W tym celu przyjmiemy np. $m_2 = \infty$ oraz $c_2 = 0$, wtedy otrzymamy z równania 145-ego

$$v_1 = -\sqrt{\eta} \,.\, c_1;$$

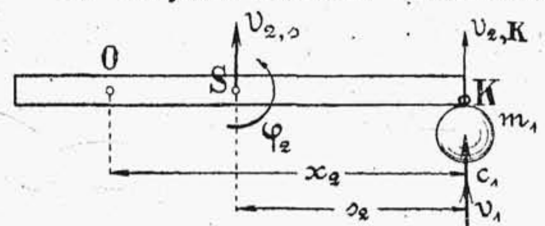
przypadek ten ma miejsce, gdy np. daną kulą uderzymy w dużą nieruchomą masę; wtedy odbije się ta kula z prędkością wskazaną tym wzorem. Jeżeli prędkość v_1 i c_1 zmierzymy, to obliczymy spółczynnik η dla danego materyału.

W doświadczeniu tem unikniemy mierzenia prędkości i zastąpimy mierzeniem innej więcej dostępnej dla pomiaru wielkości. Mianowicie, upuściwszy kulę ze znanej wysokości h na płytę poziomą, obliczymy prędkość kuli w chwili uderzenia ze wzoru $c_1 = \sqrt{2gh}$. Kula ta po odbiciu się uniesie się do wysokości h', którą łatwo zmierzyć; prędkość przeto w chwili odbicia się obliczymy z wzoru $v = \sqrt{2gh'}$. Podstawiwszy te wielkości w równanie powyższe i pominąwszy znak odjemny; otrzymamy

$$\sqrt{2gh'} = \sqrt{\eta} \,.\, \sqrt{2gh}; \qquad \text{skąd} \qquad \eta = \frac{h'}{h}.$$

Doświadczalnie znaleziono dla uderzenia kuli o bandę bilardu $\eta = 0{,}55$. Kula z kości słoniowej, upuszczona na płytę marmurową, podnosi się do $\frac{2}{3}$ pierwotnej wysokości, czyli $\eta = \frac{2}{3}$. W przypadku uderzenia się kości słoniowej o kość słoniową $\eta = (\frac{8}{9})^2$; — stali o korek $\eta = (\frac{5}{9})^2$; — szkła o szkło $\eta = (\frac{15}{16})^2$; i wreszcie z określenia wynika dla ciał niesprężystych $\eta = 0$, a dla ciał zupełnie sprężystych $\eta = 1$.

71. Przykład uderzenia mimośrodkowego prostego. Na stole doskonale gładkim spoczywa pręt materyalny; w dowolne miejsce jego osi i prostopadle do niej uderza kula o masie m_1; będąca w chwili uderzenia w ruchu postępowym, równoległym, do płaszczyzny stołu; rys. 32-gi; obliczyć ruch pręta i kuli po uderzeniu.



Rys. 32.

Kula w danym razie doznaje uderzenia środkowego i prostego; pręt zaś również prostego lecz mimośrodkowego. Prędkość kuli przed uderzeniem oznaczymy literą c_1, prędkość jej po uderzeniu literą v_1. Ruch pręta po uderzeniu określimy jego prędkością obrotową φ_2 i prędkością $v_{2, K}$ jaką posiada punkt zetknięcia się K pręta z bryłą; dwie bowiem te wielkości określają stan ruchu pręta.

Obliczmy najpierw ruch, w jakim znajdować się będzie kula, oraz pręt w końcu pierwszego okresu uderzenia; t. j. w chwili, gdy prędkości punktów zetknięcia się kuli i pręta wyrównają się. Ruch ten będzie jednakowy z ruchem, jakiby dane bryły posiadały, gdyby były zupełnie niesprężyste.

W danym razie może być zastosowane nie tylko równanie zachochowania ilości ruchu, lecz również równanie zachowania momentu ilości ruchu; równanie zaś zachowania energii nie może być stosowane, ze względu na pracę sił wewnętrznych, jaka powstaje wskutek niesprężystości uderzenia. Oznaczmy literą $v_{2, S}$ prędkość środka masy pręta, to równanie zachowania ilości ruchu obydwóch brył jest następujące

$$1) \quad m_1 v_1 + m_2 v_{2, S} = m_1 c_1;$$

równanie zaś momentów względem bieguna, obranego np. w środku masy pręta, jest następujące

$$2) \quad m_1 v_1 \cdot s_2 + \varphi_2 I_{2, S} = m_1 c_1 s_2,$$

w którem s_2 oznacza odległość punktu uderzenia od środka masy pręta, a $I_{2, S}$ — moment bezwładności pręta względem osi, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do płaszczyzny ruchu.

W tych dwóch równaniach dynamicznych niewiadomemi są wielkości

$$v_1, \; v_{2, K}, \; v_{2, S}, \; \varphi_2;$$

pomiędzy któremi zachodzi jeszcze związek kinetyczny, porówn. równanie 34-te na str. 56-tej tomu II-go:

$$3) \quad v_{2, K} = v_{2, S} + s_2 \cdot \varphi_2,$$

oraz zachodzi związek, wyrażający warunek wyrównania się prędkości punktów zetknięcia się obydwóch brył; warunek ten wyrazimy równaniem

$$4) \quad v_1 = v_{2, K}.$$

Z tych przeto czterech równań obliczyć można cztery niewiadome. Wyrugujmy z tych równań np. wielkości $v_{2, S}$, oraz $v_{2, K}$; w tym celu podstawimy ich wartości z równ. 3 i 4-tego w równanie 1-sze ilości ruchu a otrzymamy równ.

$$m_1 v_1 + m_2 (v_1 - s_2 \varphi_2) = m_1 c_1,$$

a po uporządkowaniu otrzymamy równanie

$$(m_1 + m_2) \cdot v_1 - m_2 s_2 \cdot \varphi_2 = m_1 c_1,$$

które łącznie z równaniem momentów, t. j. z równaniem 2-giem przedstawia dwa równania z dwiema niewiadomemi: v_1 i φ_2.

Ażeby obliczyć z tych dwóch równań v_1, pomnóżmy powyższe równanie przez I_s, równanie zaś 2-gie przez $m_2 s_1$, a po dodaniu otrzymamy:

$$v_1 = \frac{I_{2,S} + m_2 s_2^2}{(m_1 + m_2) I_{2,S} + m_1 m_2 s_2^2} \cdot m_1 c_1 .$$

W podobny sposób obliczymy

$$\varphi_2 = \frac{m_1 m_2 s_2}{(m_1 + m_2) I_{2,S} + m_1 m_2 s_2^2} \cdot c_1 .$$

Z równań tych obliczymy prędkość kuli i prędkość obrotową pręta po ich uderzeniu się. Prędkość środka pręta po uderzeniu obliczymy z równ. 3-go uwzględniwszy równ. 4-te. Poleca się czytelnikowi wyznaczenie bieguna chwilowego obrotu pręta.

Jeżeli uderzenie posiada drugi okres, t. j. jeżeli kula i pręt są np. zupełnie lub niezupełnie sprężyste, to równanie 4-te przestaje być w mocy, natomiast nabiera mocy równanie zachowania energii kinetycznej. Do obliczenia przeto ruchów brył zupełnie sprężystych, jakie one posiadają po uderzeniu się, mamy trzy przytoczone równania i równanie zachowania energii, które jest następujące

$$4') \quad \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + (\tfrac{1}{2} m_2 v_{2,S}^2 + \tfrac{1}{2} I_{2,S} \varphi_2^2) = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 \quad . \; . \; . \quad (146)$$

Zadanie przeto dynamiczne obliczenia ruchu brył, jeżeli są one sprężyste, jest już rozwiązane; pozostają tylko przekształcenia algebraiczne, mające na celu obliczenia szukanych niewiadomych.

Można uniknąć tych, zresztą dosyć żmudnych obliczeń, jeżeli sprowadzimy równania powyższe do postaci równań, wyrażających uderzenie środkowe; wtedy bowiem będziemy mogli skorzystać z równań 145-tych. W tym celu obierzemy jako niewiadome: prędkość v_1 oraz $v_{2,K}$ i wyrazimy $v_{2,S}$ wielkością $v_{2,K}$; co osiągniemy, rugując np. v_1 z równania 1-go i 2-go; w tym celu pomnożymy równanie 1-sze przez s_2 i odejmiemy je od 2-go, a otrzymamy

$$\varphi_2 = \frac{m_2 s_2}{I_{2,S}} \cdot v_{2,S} ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (147)$$

po podstawieniu następnie tej wartości w równanie 3-cie, otrzymamy

$$v_{2,K} = v_{2,S} \cdot \left(1 + \frac{m_2 s_2^2}{I_{2,S}} \right);$$

skąd

$$v_{2,S} = v_{2,K} \cdot \frac{I_S}{I_{2,S} + m_2 s_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (148)$$

Podstawimy następnie tę wartość w równanie 1-sze i otrzymamy

$$m_1 v_1 + m_2 \frac{I_{2,S}}{I_{2,S} + m_2 s_2^2} \cdot v_{2,K} = m_1 c_1.$$

Oznaczmy wyraz

$$m_2 \frac{I_{2,S}}{I_{2,S} + m_2 s_2^2} \quad \text{literą } m_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

a po podstawieniu w równanie poprzednie, otrzymamy równanie

$$m_1 v_1 + m_2' v_{2,K} = m_1 c_1.$$

Jest to równanie jednakowe pod względem swej algebraicznej postaci z równaniem 2-giem § 68-go, gdy zastąpimy w tem ostatniem literę m_2 literą m_2', określoną wzorem 149-tym.

Sprowadźmy teraz równanie 146-te do postaci równania 1-go § 68-go. W tym celu podstawmy z równania 147-go wartość φ_2 w równanie 146-te, a otrzymamy

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v^2_{2,S} \cdot \left(1 + \frac{m_2 s_2^2}{I_{2,S}}\right) = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2;$$

wyraziwszy następnie $v_{2,S}$ zmienną $v_{2,K}$ z równania 148-go, otrzymamy równanie zachowania energii kinetycznej w następującej postaci

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \frac{I_{2,S}}{I_{2,S} + m_2 s_2^2} \cdot v_{2,K}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2.$$

Zastosujmy podstawienie, wyrażone wzorem 149-tym, a otrzymamy równanie

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2' v_{2,K}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

które co do swej postaci jest jednakowe z równaniem 1-szem § 68-go.

Z równania przeto 142-go i 143-go lub z równań 146-tych, podstawiając w nie zamiast m_2 wielkość m_2', określoną wzorem 149-tym, obliczymy bezpośrednio prędkości v_1 i $v_{2,K}$, tak dla uderzenia sprężystego jak i dla uderzenia niezupełnie sprężystego.

Wielkości m_2' możemy nadać pewne fizyczne znaczenie; mianowicie możemy tę wielkość uważać za masę pewnej bryły, która środkowo uderza się z bryłą m_1 i która po uderzeniu posiada taką samą prędkość postępową, jaką posiada po uderzeniu punkt zetknięcia się z kulą. Wielkość masy takiej bryły nazywają masą zastępczą danej bryły dla danego uderzenia.

W celu wytworzenia sobie dokładnego obrazu ruchu bryły obracającej się po uderzeniu, wyznaczymy jeszcze położenie bieguna chwilowego jej obrotu, jaki ona posiada po uderzeniu.

Oznaczywszy literą x_2 odległość tego bieguna od punktu zetknięcia się brył, rys. 32-gi i wziąwszy pod uwagę, że kąt obrotu, a więc i prędkość chwilowego obrotu jest jednakową w danej chwili dla wszystkich biegunów, porów. tom II-gi str. 56-ta oraz wzór 35-ty na str. 73-ciej tomu II-go, napiszemy równ.:

$$v_{2,s} = (x_2 - s_2) \cdot \varphi_2 ;$$

a podstawiwszy w nie z równ. 147-ego wartość φ_2, otrzymamy

$$x_2 = s_2 + \frac{I_{2,s}}{m_2 s_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

lub też inaczej, zważywszy, że moment bezwładności $I_{2,0}$ pręta względem bieguna obrotu

$$I_{2,0} = I_{2,s} + m_2 \cdot s_2^2 ,$$

napiszmy

$$x_2 = \frac{I_{2,0}}{m_2 s_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

Z równania 151-ego wynika, że $x_2 > s_2$, t. j. że biegun chwilowego obrotu i punkt uderzenia leżą po przeciwnych stronach środka masy. Z tegoż równania wynika też, że położenie tego bieguna nie zależy od sprężystości uderzających się brył; równanie bowiem 147-me jest wynikiem równania 1-go i 2-go, t. j. równania dynamicznego ilości ruchu i jego momentu, w które nie wchodzą siły wewnętrzne, a więc i — spółczynnik sprężystości; z czego znów wynika, że położenie bieguna chwilowego obrotu po uderzeniu bryły (wogóle mimośrodkowem) nie zależy od stopnia jej sprężystości, ani też od masy i prędkości bryły uderzającej, a jedynie zależy od położenia punktu uderzenia względem środka masy bryły uderzonej. Właściwość tę można wytłómaczyć sobie fizycznie w następujący sposób. Wyobraźmy sobie, że do punktu uderzenia danego pręta przyłożona jest siła P, która zastępuje działanie uderzającej kuli. Moment tej siły względem środka masy wywołuje obrót, którego prędkość rośnie z powiększeniem siły działającej, a to w myśl równania momentów, równanie 89-te, które po scałkowaniu otrzyma postać

$$\int_0^{\Delta t} P \cdot s_2 \cdot dt = I_{2,s} \cdot \varphi_2 .$$

Zgodnie zaś z równaniem ruchu środka masy, prędkość tego środka rośnie również proporcyonalnie do wielkości siły P, gdyż pg równ. 87-mego

$$m_2 v_{2,s} = \int_0^{\Delta t} P \cdot dt ;$$

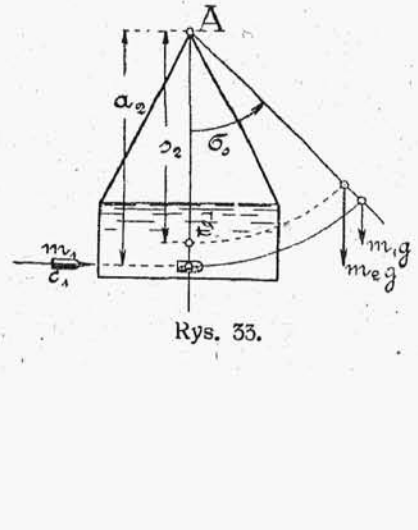
a więc rośnie razem z wartością prędkości punktu K; która składa się z prędkości środka masy i prędkości obrotu.

Z proporcyonalności przeto prędkości punktów K i S danej bryły wynika, że w każdej chwili, podczas uderzenia, bryła dana obraca się około jednego i tego samego bieguna z różną tylko prędkością, zależną od wielkości siły i uderzenia.

Z porównania wzoru 151-ego z wzorem 104-ym wynika, że związek, jaki zachodzi pomiędzy punktem uderzenia a środkiem masy i biegunem chwilowego obrotu, jest taki sam, jaki zachodzi pomiędzy osią obrotu, środkiem masy i środkiem wahania. Z tego porównania wynika, że jeżeli dany pręt uderzymy prostopadle do jego osi w kierunku punktu O, to punkt K będzie wtedy biegunem chwilowego obrotu.

Biegun ten czy też oś, przechodząca przez ten biegun i prostopadła do płaszczyzny ruchu, ma bardzo ważne znaczenie fizyczne. Punkty bowiem bryły, leżące na tej osi, pozostają w spoczynku podczas uderzenia bryły. Jeżeli przeto chcemy, ażeby np. uderzenia, jakim podlegają pewne obracające się części maszyn, nie odziaływały szkodliwie na osi obrotu, należy dobrać taki stosunek odległości punktu uderzenia i osi obrotu od środka masy, jaki wskazuje równ. 151-sze; należy nadać tym częściom maszyn, za pomocą odpowiednich obciążeń, takie masy i takie momenty bezwładności, ażeby wielkości ich zaspakajały równ. 151-sze. Odnalezienie tego środka jest w wielu razach bardzo ważne, np. przy pracy ręcznej młotem; każdemu bowiem uderzeniu młota odpowiada pewne położenie osi chwilowego obrotu; a jeżeli ta oś wypadnie nie w miejscu, w którem robotnik trzyma młot, to odczuje on silne uderzenie w rękę; praktyczne przeto władanie młotem polega również na uchwyceniu młota w miejscu, przez które przechodzi oś chwilowego obrotu.

W zadaniu powyższem jedna bryła się obracała, druga zaś była w ruchu postępowym; lecz sposób obliczenia, podany tu, może być zastosowany do przypadku, w którym obydwie bryły się obracają i w pewnej chwili wzajemnie się uderzają. Przy obliczeniu tego rodzaju przykładów znacznem uproszczeniem rachunkowem jest zastosowanie pojęcia masy zastępczej; możemy bowiem wtedy zadanie uderzenia się mimośrodkowego brył różnego stopnia sprężystości sprowadzić do takiegoż uderzenia środkowego.



Rys. 33.

72. Przyrząd Robins'a. Przyrząd ten jest przykładem uderzenia mimośrodkowego prostego, niesprężystego i przeznaczony jest do mierzenia prędkości pocisków; prędkość ta bowiem jest tak znaczna, że bezpośrednio jej mierzyć nie można. Przyrząd ten składa się ze skrzynki, która napełniona jest materyą, stawiającą znaczny opór przenikającej kuli. Skrzynka ta zawieszona jest za pomocą pewnej konstrukcyi na osi poziomej, około której może się wahać jak zwykłe wahadło.

Pocisk dany, którego prędkość mamy obliczyć, skierowany jest poziomo i wpada do skrzynki, a wskutek oporu, jaki spotyka w nagromadzonej materyi, zatrzyma się w niej. Przyjmiemy dla uproszczenia rachunku, że zatrzyma się on w miejscu, znajdującem się w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś obrotu i środek masy skrzynki. Skrzynka zawieszona pionowo odchyli się wskutek uderzenia od tego położenia o kąt, który oznaczymy literą σ_0. Oznaczmy nieznaną prędkość pocisku, który uważamy za punkt materyalny, literą c_1; odległość kierunku tej prędkości od osi obrotu literą a_2 oraz literą m_1 jego masę; oznaczmy następnie moment bezwładności skrzynki wraz z zawartością i z konstrukcyą względem osi obrotu — literą $I_{2,A}$; masę jej literą m_2 i prędkość obrotową w chwili uderzenia literą φ_2; to wyrazimy równość momentów ilości ruchu po uderzeniu i przed uderzeniem względem bieguna, obranego w punkcie obrotu następującym wzorem

$$m_1\, a_2\, \varphi_2 \,.\, a_2 + \varphi_2\, I_{2,A} = m_1\, c_1 \,.\, a_2\,;$$

z którego

$$c_1 = \frac{I_{2,A} + m_1\, a_2^2}{m_1\, a_2} \,.\, \varphi_2 \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (153)$$

Z równania tego obliczymy prędkość pocisku, gdy zmierzymy prędkość obrotu wahadła w chwili uderzenia się z kulą; i w ten sposób zadanie zostaje rozwiązane.

Ponieważ jednakże bezpośrednie zmierzenie prędkości φ_2 przedstawia pewne trudności techniczne; zmierzymy przeto kąt największego odchylenia σ_0, którego wielkość jest w ścisłym związku z prędkością początkową. W celu znalezienia tego związku, zastosujemy równanie równowartości pracy i energii kinetycznej; a zważywszy, że poruszająca się bryła po uderzeniu składa się ze skrzynki wraz z zawartością, z konstrukcyą zawieszenia i z kuli, napiszemy równanie

$$-\,(m_2\, g\, s_2 + m_1\, g\, a_2)\,(1 - \cos \sigma_0) = -\,\tfrac{1}{2}\,(I_{2,A} + m_2\, a_2^2)\, \varphi_2^2\,;$$

z którego obliczymy, po odpowiedniem przekształceniu funkcyi trygonometrycznej

$$\varphi_2 = 2 \sin \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{g\,(m_2\, s_2 + m_1\, a_2)}{I_{2,A} + m_1\, a_2^2}}\,;$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 153-cie, otrzymamy wartość prędkości kuli, wyrażoną wartością kąta odchylenia σ_0

$$c_1 = 2 \sin \frac{\sigma_0}{2} \cdot \frac{1}{m_1\, a_2} \sqrt{g\,(m_2\, s_2 + m_1\, a_2)\,(I_{2,A} + m_1\, a_2^2)} \quad . \qquad (154)$$

Ze względów praktycznych starają się zwykle trafić kulą w skrzynkę w tem miejscu, ażeby oś wahadła nia doznała uderzenia. Wyznaczenie położenia takiego punktu jest możliwem, na zasadzie wzorów wyżej obliczonych, gdy przyjmiemy, że wahadło jest symetryczne względem płaszczyzny pionowej, w której porusza się środek jego masy. Ażeby przeto powyższy warunek zachować, należy, ażeby wielkość a_2 jako odległość kierunku prędkości kuli od osi obrotu, odpowiadała równaniu 152-emu; t. j. ażeby

$$a_2 = \frac{I_{2,A}}{m_2\, s_2}.$$

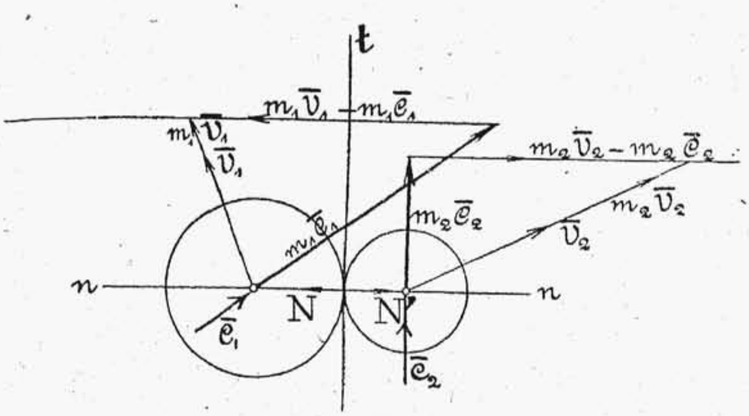
Znając wartość a_2, możemy z tego równania oraz z równania 154-go wyrugować $I_{2,A}$; i otrzymamy dla danego przypadku

$$c_1 = 2 \sin \frac{\sigma_0}{2} \cdot \frac{m_2\, s_2 + m_1\, a_2}{m_1} \sqrt{\frac{g}{a_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

73. Uderzenie środkowe ukośne. Przykładem tego rodzaju uderzenia jest uderzenie się dwóch kul, poruszających się ruchem postępowym w ten sposób, że ich środki pozostają w jednej płaszczyźnie. Kule te podczas uderzenia się uważać będziemy, jak poprzednio, za jeden układ zmienny, na który nie działają siły zewnętrzne, lecz tylko wewnętrzne.

Jeżeli literami $\bar{c}_1$ i $\bar{v}_1$ oznaczymy prędkości przed i po uderzeniu 1-szej kuli o masie m_1; a literami $\bar{c}_2$ i $\bar{v}_2$ takież prędkości drugiej kuli o masie m_2, rys. 34-ty, to równanie zachowania ilości ruchu jest następujące

$$m_1\, \bar{v}_1 + m_2\, \bar{v}_2 = m_1\, \bar{c}_1 + m_2\, \bar{c}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$



Rys. 34.

Równanie to posiada cztery skalarne niewiadome; przedstawia zaś tylko dwa równania skalarne; każdą bowiem z prędkości wyrazić można dwiema skalarnemi wielkościami; a równanie samo dwoma równaniami skalarnemi. Nie wszystkie jednakże właściwości danego uderzenia wyrażone są powyższemi równaniami; z fizycznych bowiem warunków jest jeszcze znany kierunek siły chwilowej, działającej na każdą bryłę; a więc znany jest kierunek przyrostu ilości ruchu każdej z kul.

Oznaczmy siłę, działającą podczas zetknięcia się kul, literami $\bar{N}$ i $\bar{N}'$, a napiszemy

$$\bar{N} = \frac{d\,(m_1\,\bar{v}_1)}{dt}, \quad \text{oraz} \quad \bar{N}' = \frac{d\,(m_2\,\bar{v}_2)}{dt}.$$

Równania te możemy bezpośrednio scałkować, kierunki bowiem wektorów prędkości podczas uderzenia nie zmieniają się. Oznaczywszy literą Δt okres czasu, w jakim te kule działają na siebie, napiszemy całki tych równań

$$\int_0^{\Delta t} \bar{N}\,.\,dt = m_1\,\bar{v}_1 - m_1\,\bar{c}_1, \quad \text{oraz}$$

$$\int_0^{\Delta t} \bar{N}'\,.\,dt = m_2\,\bar{v}_2 - m_2\,\bar{c}_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (157)$$

Ponieważ kierunki sił N są znane, pokrywają się one bowiem z osią uderzenia, przeto przyrosty ilości ruchu każdej z kul są równoległe do tej osi. Ażeby wyrazić tę właściwość skalarnie, weźmiemy pod uwagę, że rzuty tych przyrostów na prostopadłą do osi uderzeń, t. j. na styczną t, rys. 34-ty, do powierzchni stykających się kul, równają się zeru. Zaopatrzywszy te rzuty wskaźnikami t, napiszemy równania tych rzutów

$$1)\quad m_1 v_{1,\,t} - m_2 c_{1,\,t} = 0;$$

$$2)\quad m_2 v_{2,\,t} - m_2 c_{2,\,t} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (158)$$

Rzuty zaś tych równań na oś uderzenia, t. j. na normalną do powierzchi zetknięć da równanie algebraiczne

$$m_1 v_{1,\,n} - m_1 c_{1,\,n} = m_2 v_{2,\,n} - m_2 c_{2,\,n}\,,$$

które napiszemy w następującej postaci

$$3)\quad m_1 v_{1,\,n} + m_2 v_{2,\,n} = m_1 c_{1,\,n} + m_2 c_{2,\,n}\,; \;.\;.\; (159)$$

gdzie wskaźniki n oznaczają rzuty odpowiednich wektorów na oś uderzenia. Mamy przeto trzy równania skalarne z czterema niewiadomemi. Równanie czwarte otrzymamy, gdy uwzględnimy stopień sprężystości kul; w przypadku zupełnej sprężystości równaniem tem jest równanie zachowania energii kinetycznej

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2.$$

Równanie to po podstawieniu

$$v_1{}^2 = v_{1,n}{}^2 + v_{1,t}{}^2; \qquad v_2{}^2 = v_{2,n}{}^2 + v_{2,t}{}^2;$$

$$c_1{}^2 = c_{1,n}{}^2 + c_{1,t}{}^2; \qquad c_2{}^2 = c_{2,n}{}^2 + c_{2,t}{}^2;$$

i po uwzględnieniu równań 158-mych, przekształci się na następujące

$$4) \quad \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,n}{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,n}{}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_{1,n}{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_{2,n}{}^2 \; . \qquad (160)$$

Te cztery równania rozwiązują nasze zadanie. W celu unaocznienia sobie właściwości ruchu tych kul, porównamy równania 159-te i 160-te z równaniami § 68-go i przyjdziemy do wniosku, że rzuty na oś uderzenia prędkości środków tych kul są takie same, jakieby kule posiadały, gdyby uderzały się prosto z prędkościami, równemi rzutom na tę oś właściwych prędkości. W celu przeto obliczenia rzutów na oś uderzenia nieznanych prędkości, jakie powstają po uderzeniu, stosować można wszystkie wzory, wyprowadzone dla uderzenia prostego sprężystego lub nie zupełnie sprężystego; a następnie ażeby otrzymać właściwe prędkości, należy dodać do nich wektorowo prędkości styczne, obliczone z równań 1-go i 2-go.

Dla przykładu obliczmy ruch kuli nie zupełnie sprężystej, jaki ona otrzyma po ukośnem uderzeniu się o ścianę nieruchomą, gdy ruch jej przed uderzeniem był postępowy. Jeżeli kulę uderzającą nazwiemy bryłą pierwszą, ścianę zaś — bryłą drugą, to masę i prędkości kuli uderzającej oznaczymy literami m_1, $\bar{c}_1$ i $\bar{v}_1$, a te wielkości dla ściany — literami m_2 i c_2. W danym przypadku mamy

$$m_2 = \infty; \qquad c_2 = 0.$$

Prędkość normalną, jaką kula posiada po uderzeniu, obliczymy bezpośrednio z równania 145-go

$$v_{1,n} = -\sqrt{\eta} \, . \, c_{1,n};$$

z równań zaś 158-mych

$$v_{1,t} = c_{1,t}; \qquad (161)$$

przeto

$$v_1 = \sqrt{\eta \, . \, c_{1\,n}{}^2 + c_{1,t}{}^2}$$

Kąt, jaki tworzy kierunek prędkości c_1 z osią uderzeń, oznaczymy literą α_1 i nazwiemy go kątem uderzenia; kąt zaś, jaki tworzy kierunek prędkości v_1 z tą samą osią, oznaczymy literą β_1 i nazwiemy go kątem odbicia; kąty te przyjmiemy za dodatnie, jeżeli leżą po jednej stronie osi uderzenia. Kąt odbicia obliczymy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{v_{1,t}}{-v_{1,n}} = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \frac{c_{1,t}}{c_{1,n}},$$

z którego wynika, że kąt odbicia leży po przeciwnej stronie osi uderzenia i powiększa się ze zmniejszeniem się sprężystości brył.

W przypadku uderzenia zupełnie sprężystego $\eta = 1$; a wtedy

$$v_{1,n} = - c_{1,n}\,; \quad \text{a że} \quad v_{1,t} = c_{1,t}\,;$$

przeto w tym przypadku

$$\operatorname{tg} \beta_1 = - \frac{c_{1,t}}{c_{1,n}} = - \operatorname{tg} \alpha_1\,;$$

z czego wynika, że kąt odbicia się kuli zupełnie sprężystej o ścianę nieruchomą równa się kątowi uderzenia ze znakiem przeciwnym.

W przypadku uderzenia zupełnie niesprężystego: $\eta = 0$, a więc

$$v_{1,n} = 0\,; \quad v_{1,t} = c_{1,t}\,; \quad \text{oraz}$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = - \infty\,; \quad \text{a więc} \quad \beta_1 = - 90^0.$$

Ze wzorów tych wynika, że kula niesprężysta uderzona ukośnie o ścianę nieruchomą, nie odbije się od niej; lecz będzie miała dążność do poślizgnięcia się po niej; posiada bowiem po uderzeniu prędkość styczną.

74. Uderzenie się brył z uwzględnieniem tarcia. Poślizgnięcie się bryły, wyżej opisanej, wzdłuż ściany, wywołuje siłę tarcia pomiędzy bryłą a ścianą; pojawienie się przeto tej siły wpływa na ruch bryły, jaki powstaje po uderzeniu. Wogóle w przypadku ukośnego uderzenia się dwóch brył, prędkości ich styczne $v_{1,t}$ i $v_{2,t}$ posiadają różne wartości; punkty przeto ich zetknięć doznają pewnego względnego przesunięcia się; a przesunięcie to jest powodem powstania siły tarcia. Chociaż siła tarcia działa w tym razie bardzo krótko, wartość jej jednakże może być bardzo znaczną; siła bowiem normalna, pochodząca od uderzenia się brył, jest właśnie wskutek krótkotrwałości uderzenia bardzo znaczną.

W zadaniu powyższem nie uwzględniliśmy siły tarcia; dla ściślejszego jednakże wyrażenia ruchu brył materyalnych po ich uderzeniu się, należy wprowadzić tę siłę do obliczeń. Dla przykładu obliczmy ruch po uderzeniu się jej o ścianę nieruchomą z uwzględnieniem tarcia.

W danym razie oprócz siły N działa jeszcze, podczas zetknięcia się kuli ze ścianą, siła tarcia W, która, działając stycznie do kuli, wywołuje ruch tego środka. Ruch kuli przed uderzeniem określimy prędkością $\bar{c}$ środka jej masy i prędkością obrotową $\bar{\omega}$; po uderzeniu określimy prędkością $\bar{v}$ tegoż środka i prędkością obrotową $\bar{\varphi}$ około tego środka; ażeby przeto określić ruch kuli po uderzeniu, należy obliczyć wielkości $\bar{v}$ i φ.

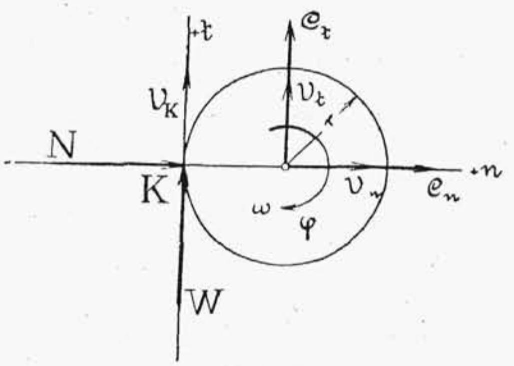
Na kulę podczas uderzenia działają przeto dwie siły: siła $\bar{N}$ normalna do powierzchni zetknięć i siła $\bar{W}$ styczna do tej powierzchni; rys. 35-ty.

Równanie przeto dynamiczne ruchu środka masy kuli jest następujące

$$(\bar{N}+\bar{W}) = \frac{d\,(m\bar{v})}{dt};$$

skąd stosownie do przyjętych oznaczeń

$$\int (\bar{N}+\bar{W})\,dt = m\bar{v} - m\bar{c};$$



Rys. 35.

Rzuty tego równania na oś uderzenia n i na oś styczną t, dają dwa równania algebraiczne

$$\int_0^{\Delta t} N\,.\,dt = mv_n - mc_n;$$

$$\int_0^{\Delta t} W\,.\,dt = mv_t - mc_t. \quad (162)$$

Podstawmy następnie w to równanie wartość

$$W = \mu\,N;$$

a po wyrugowaniu z obydwóch powyższych równań wyrazu $\int_0^{\Delta t} N\,.\,dt$, otrzymamy związek

$$\mu\,(mv_n - mc_n) = mv_t - mc_t; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (163)$$

który jest zresztą bezpośrednio zrozumiałym; jest on bowiem zastosowaniem równania $\mu N = W$ do sił chwilowych; które się mierzą przyrostami ilości ruchu.

Ażeby wprowadzić do rachunku stopień sprężystości materyału podczas uderzenia, należy zastosować zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej i rachunek w ten sposób przeprowadzić, aby módz skorzystać z wzorów, wyprowadzonych w poprzednich rozpatrywaniach dla uderzenia prostego i środkowego; znacznie to bowiem ułatwi obliczenie. W celu zastosowania równania dynamicznego pracy przyjmiemy, że kierunek wypadkowej sił sprężystości, t. j. sił wewnętrznych, jakie powstają podczas zetknięcia się kuli ze ścianą, jest prostopadły do ściany; wobec czego praca siły tarcia idzie na zmniejszenie prędkości stycznej; praca zaś sił sprężystości, t. j. sił wewnętrznych idzie za zmniejszenie prędkości normalnej. Dla obliczenia przeto zmian prędkości normalnych, czy to uwzględniając tarcie, czy też nie uwzględniając go, równania 145-te pozostaną w swej mocy. W danym przeto przykładzie v_n obliczymy z tych równań, podstawiając w nie, zgodnie z warunkiem danego zadania, $m_2 = \infty$, oraz $c_2 = 0$; i otrzymamy

$$v_n = -\sqrt{\eta} \,.\, c_n; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (164)$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie 162-gie, otrzymamy

$$v_t = c_t - \mu\,(1 + \sqrt{\eta})\, c_n. \quad \ldots \ldots \quad (165)$$

Trzeciem równaniem skalarnem jest równanie momentów; rys. 35-ty

$$W \,.\, r = \frac{d\,(I_s\,\varphi)}{dt};$$

w którym φ oznacza prędkość obrotową kuli w dowolnej chwili podczas uderzenia.

Z równania tego napiszemy

$$\int_0^{\Delta t} W \,.\, r \,.\, dt = I_s\,\varphi - I_s\,\omega;$$

po podstawieniu w nie z równania 162-ego

$$\int_0^{\Delta t} W \,.\, dt = m v_t - m c_t;$$

a przyjąwszy, że podczas uderzenia r jest stałe, otrzymamy

$$rm\,(v_t - c_t) = I_s\,(\varphi - \omega);$$

po podstawieniu zaś z poprzedniego wartości v_t, otrzymamy

$$-\mu\,(1 + \sqrt{\eta})\, rmc_n = I_s\,(\varphi - \omega);$$

skąd

$$\varphi = \omega - \mu\,(1 + \sqrt{\eta})\,\frac{rm}{I_s} \cdot c_n \quad \ldots \ldots \quad (166)$$

Kąt odbicia się kuli obliczymy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_t}{v_n} = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \frac{c_t}{c_n} + \mu\,\frac{1 + \sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta}}.$$

Ażeby wzory te zastosować do szczególnych przypadków, należy zwrócić uwagę na zachodzące w rzeczywistości zwroty prędkości i sił; i — zaopatrzyć je znakami odpowiadającymi, przyjętym znakom na rys. 35-tym.

Ważny wpływ wywiera na ruch kuli po uderzeniu zwrot siły tarcia; który należy ściśle określić przed napisaniem równania momentów. Zwrot tej siły jest zawsze przeciwny zwrotowi prędkości **punktu zetknięcia** się kuli z płaszczyzną; ażeby przeto określić zwrot siły tarcia, jaka wystąpi podczas uderzenia, należy zbadać jaki zwrot posiada prędkość tego punktu w chwili uderzenia. Prędkość tego punktu składa się z prędkości ruchu postępowego kuli i prędkości, wynikającej z jej obrotu około środka. Prędkość tę stosownie do przyjętych na rys. 35-tym oznaczeń wyrazimy wzorem

$$v_K = c_t + \omega \,.\, r;$$

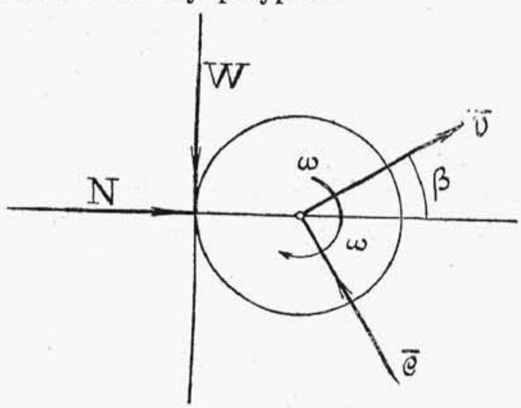
w którym r oznacza promień kuli, a c_t rzut prędkości środka masy kuli na styczną do niej w punkcie K; od znaku przeto wyrazu, stojącego po prawej stronie tego równania, zależy zwrot siły tarcia, a więc i jej momentu. Jeżeli ω jest dodatnią wielkością, zgodnie z przyjętemi oznaczeniami na rys. 35-tym: t. j. jeżeli zwrot prędkości punktu, jaka powstaje podczas obrotu kuli, zgodny jest ze zwrotem rzutu na styczną prędkości tegoż punktu, jaka powstaje podczas ruchu postępowego kuli; to przy wszelkich wartościach tych prędkości, wartość wyrazu

$$c_t + \omega \,.\, r > 0.$$

Jeżeli zaś zwrot obrotu będzie przeciwny zwrotowi tego rzutu, to znak prędkości ω będzie odjemny; i dla pewnych wartości może nastąpić przypadek, w którym

$$c_t - \omega \,.\, r < 0;$$

a wtedy siła tarcia wywoła obrót kuli o zwrocie przeciwnym w stosunku do poprzedniego. Przy obliczaniu przeto — z uwzględnieniem tarcia — ruchu kuli, jaki ona posiadać będzie po uderzeniu się, należy rozróżnić te trzy przypadki.



Rys. 36.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, w którym

$$c_t + \omega \,.\, r > 0;$$

a kula uderza w ścianę w sposób, jaki wskazuje rys. 36-ty. Równania ruchu kuli, które oparte są na znakowaniu, podanem na rys. 35-tym, po uderzeniu się o ścianę, otrzymamy po podstawieniu w powyższe wzory

$$c_n = -c_n; \quad \text{oraz} \quad \mu = -\mu;$$

przeto mamy

$$v_n = \sqrt{\eta} \,.\, c_n;$$
$$v_t = c_t - \mu\,(1 + \sqrt{\eta}) \,.\, c_n;$$
$$\varphi = \omega - \mu\,(1 + \sqrt{\eta})\,\frac{r\,m}{I_s} \,.\, c_n$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \frac{c_t}{c_n} - \mu \,.\, \frac{1 + \sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta}}.$$

Z wzorów tych wynika, że wartość prędkości obrotowej φ po uderzeniu oraz kąta odbicia jest mniejsza od takichże wartości, gdy nie uwzględnimy tarcia; co się tłomaczy tem, że siła tarcia działa w danym razie przeciw początkowej prędkości stycznej c_t; wskutek czego prędkość tę zmniejsza oraz wywołuje moment przeciwny obrotowi kuli. Przyjęty warunek $c_t + \omega \,.\, r > 0$ zachodzi również wtedy, gdy obrót kuli jest przeciwny, przyjętemu w obliczeniu powyższem, i gdy wartość bezwględna prędkości tego obrotu

$$\omega < \frac{c_t}{r}.$$

Równania ruchu po uderzeniu w przypadku, w którym początkowa prędkość obrotu jest przeciwną wskazanemu na rys. 36-tym obrotowi, otrzymamy z wzorów powyższych po podstawieniu w nie: $\omega = -\omega$. Ruch takiej kuli po uderzeniu różni się od ruchu kuli w poprzednim uderzeniu tem, że prędkość obrotowa kuli po uderzeniu zwiększa się. Co jest również bezpośrednio zrozumiałem, w danym bowiem razie siła tarcia wywołuje moment, którego zwrot jest zgodny ze zwrotem obrotu początkowego.

Dla przypadku, w którym

$$c_t - \omega \,.\, r < 0;$$

otrzymamy odnośne wzory ruchu po uderzeniu; gdy podstawimy we wzory 166-te; porówn. rys. 37-my

$$c_n = -c_n; \qquad \omega = -\omega \text{ oraz } \mu = -\mu;$$

mamy przeto dla tego przypadku

$$v_n = \sqrt{\eta} \,.\, c_n; \qquad v_t = c_t + \mu\,(1 + \sqrt{\eta}) \,.\, c_n$$

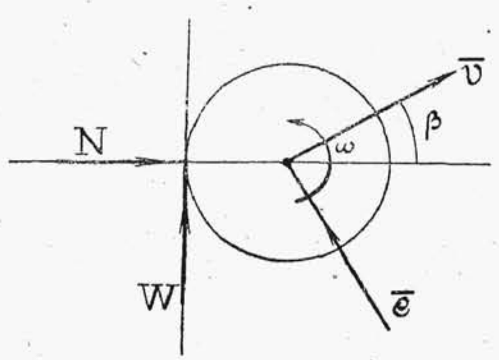
$$\varphi = -\omega + \mu\,(1 + \sqrt{\eta}) \,.\, \frac{r m}{I_s} \,.\, c_n.$$

Wypowiedzenie tych wzorów, porównanie z poprzednimi oraz bezpośrednie objaśnienie dynamiczne pozostawia się czytelnikowi.

W trzecim przypadku, gdy

$$c_t + \omega\, r = 0;$$

przesunięcie punktów zetknięcia się nie zachodzi; tarcie przeto nie występuje i do obliczenia ruchu w tym przypadku stosować można bezpośreenio wzory na uderzenie bez tarcia; lub też we wzory powyższe należy podstawić $\mu = 0$.



Rys. 37.