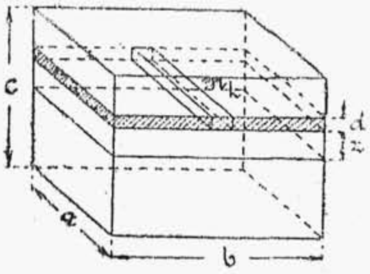
II. Dynamika brył materyalnych.

A. Geometrya mas.

21. Moment bezwładności bryły materyalnej względem płaszczyzny. Iloczyn z masy punktu i z kwadratu jego odległości od danej płaszczyzny nazywamy momentem bezwładności danego punktu względem danej płaszczyzny.

Jeżeli bryłę materyalną uważać będziemy jako zbiór nieskończenie wielu punktów sztywno z sobą związanych, to **sumę iloczynów z mas punktów i z kwadratów ich odległości od obranej płaszczyzny nazwiemy momentem bezwładności bryły względem tej płaszczyzny.**

Oznaczywszy masę k-ego punktu bryły literą m_k, odległość jego od obranej płaszczyzny literą z_k, i wreszcie moment bezwładności bryły względem tej płaszczyzny literą I_p (inertia), to wyrazimy powyższe określenie wzorem



Rys. 2.

$$I_p = \Sigma (m_k \,.\, z_k^2) \,. \quad . \quad . \quad (48)$$

Przykład. Obliczyć moment bezwładności prostopadłościanu o krawędziach a, b, c, względem płaszczyzny, przechodzącej przez jego środek i równoległej do ściany a, b; rys. 2-gi. Na zasadzie określenia piszemy $I_p = \Sigma (m_k \,.\, z_k^2)$. Literą m_k oznaczamy masę nieskończenie małego prostopadłościanu; literą zaś z_k jego odległość od płaszczyzny, względem której obliczyć mamy moment bezwładności.

Sumowanie iloczynów wykonywamy w ten sposób, że zsumujemy je najpierw dla stałej odległości z i otzymamy moment bezwładności nieskończenie cienkiej warstwy o podstawie $a\,b$ i wysokości $d\,z$. Moment przeto bezwłądności masy całego prostopadłościanu otrzymamy, podstawiając we wzór ogólny

$$m_k = a\, b \,.\, d z \,.\, \mu,$$

gdzie μ oznacza gęstość masy prostopadłościanu; a zatem

$$I_p = \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} a \,.\, b \,.\, dz \,.\, \mu \,.\, z^2 = a\, b\, \mu \,. \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} z^2 \,.\, dz\,;$$

a po scałkowaniu

$$I_p = a\,b\,\mu \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \tfrac{1}{3}\,ab\mu \left[\frac{c^3}{8} - \left(-\frac{c^3}{8}\right)\right],$$

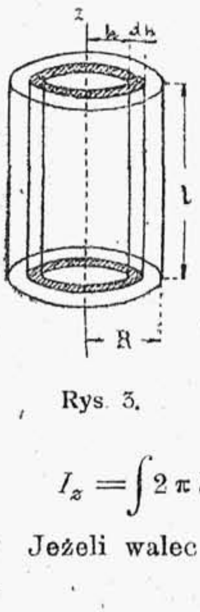
skąd wreszcie

$$I_p = \tfrac{1}{12}\,a\,b\,\mu\,c^3.$$

W innej postaci wyrazimy ten wzór, gdy podstawimy iloczyn $abc\mu = m$, gdzie m oznacza masę bryły, wzór ten jest następujący

$$I_p = \tfrac{1}{12}\,m\,c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

22. Moment bezwładności bryły materyalnej względem osi. Momentem bezwładności bryły materyalnej względem osi nazywamy **sumę iloczynów z mas oddzielnych jej punktów i z kwadratów ich odległości od danej osi.**



Rys. 3.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności walca prostego, o podstawie kołowej, względem jego osi.

Oznaczywszy promień podstawy walca przez R wysokość jego przez l, oś przez z, a moment bezwładności względem tej osi przez I_z; a napiszemy wzór stosownie do postawionego określenia

$$I_z = \Sigma\,(m_k \,.\, h_k^2);$$

w którym h_k oznacza odległość cząstki m_k od osi z.

Dodajmy najpierw iloczyny, w których odległość h_k jest stałą, a otrzymamy iloczyn z masy walca wydrążonego o promieniu h_k i o grubości powłoki dh.

Oznaczmy masę tej warstwy m_k, a napiszemy

$$m_k = 2\,\pi\,h \,.\, dh \,.\, l \,.\, \mu; \text{ zatem}$$

$$I_z = \int 2\,\pi\,h \,.\, dh \,.\, l \,.\, \mu \,.\, h^2 = \pi \,.\, \mu \,.\, l \int h^3 \,.\, dh = 2\,\pi\,l\,\mu \left[\frac{h^4}{4}\right].$$

Jeżeli walec jest pełny, to granice zmiennej h są zero i R; wtedy

$$I_z = 2\,\pi\,l\,\mu\,\frac{R^4}{4} = \tfrac{1}{2}\,\pi\,l\,R^4\mu;$$

lub podstawiwszy $\pi R^2 l \mu = m$, mamy

$$I_z = \tfrac{1}{2}\,m\,R^2.$$

23. Moment bezwładności bryły materyalnej względem bieguna. Momentem bezwładności bryły względem bieguna nazywamy sumę iloczynów z mas oddzielnych punktów i z kwadratów ich odległości od obranego bieguna, zwanego biegunem bezwładności.

Oznaczając ten rodzaj momentu bezwładności literą I_b (biegunowy), a literą r_k odległość cząstki masy m_k od tego bieguna, wyrazimy to określenie w następujący sposób

$$I_b = \Sigma (m_k r^2_k).$$

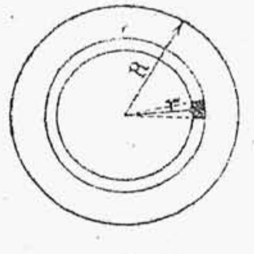
Przykład. Obliczyć moment bezwładności kuli o promieniu R względem bieguna, obranego w jej środku. Jako cząstkę masy przyjmiemy masę kuli wydrążonej o promieniu r i o grubości powłoki dr; zatem

$$m_k = 4\pi r^2 \,.\, dr \,.\, \mu,$$

a po podstawieniu w ogólny wzór otrzymamy

$$I_b = \int_0^R 4\pi r^2 \,.\, dr \,.\, \mu \,.\, r^2 = 4\pi\mu \int_0^R r^4 \,.\, dr$$

$$I_b = \tfrac{4}{5}\pi\mu \,.\, R^5.$$



Rys. 4.

Ponieważ masa kuli $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu$, a więc mamy

$$I_b = \tfrac{3}{5} m R^2.$$

24. Wymiary momentów bezwładności. Wyrazy wszystkich momentów tutaj przytoczonych są sumą dodajników, z których każdy jest iloczynem z masy i z kwadratu odległości; a więc wymiar momentów bezwładności wyrazimy wzorem $M L^2$.

Mając na uwadze ten wymiar, możemy w wielu razach przewidzieć postać wyrazu momentu danej bryły i pominąć w ten sbosób rachunek szczegółowy. Wyraz momentu np. kuli musi mieć postać $\alpha m R^2$, gdzie α jest pewną liczbą, którą obliczyć można tylko, wykonawszy odpowiedni rachunek; długość zaś jaka powinna być w tym wyrazie, może być tylko promieniem kuli. W tenże sposób napiszemy wyraz momentu bezwładności walca względem jego osi, jest nim wyraz $\beta m R^2$.

Należy zauważyć, że wogóle do wzoru momentu bezwładności wejdą te wymiary bryły, które są prostopadłe do osi czy też do płaszczyzny bezwładności. Z uwag tych korzystać można w celu sprawdzenia wykonanego rachunku, lub w celu przypomienia sobie odpowiednich wzorów.

Przy stosowaniu momentów bezwładności do obliczeń, spotykamy się w wielu podręcznikach z wielkością, zwaną promieniem bezwładności. Wielkość tę określimy w następujący sposób: **promieniem bezwładności k danej bryły nazywamy wielkość, czyniącą zadość następującemu równaniu**

$$m \,.\, k^2 = I; \qquad \qquad (50)$$

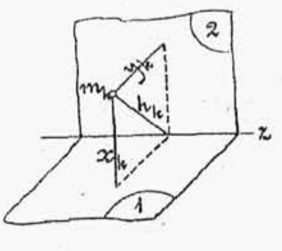
w którem I oznacza moment bezwładności danej bryły względem płaszczyzny osi lub bieguna, a m masę tej bryły. Promień bezwładności np.

prostopadłościanu względem płaszczyzny, przechodzącej przed jego środek i prostopadłej do krawędzi c, obliczymy ze wzoru 49-go

$$m k^2 = \tfrac{1}{12} m c^2; \quad \text{skąd } k = \frac{c}{\sqrt{12}}.$$

Z określenia tej wielkości wynika, że wielkość k posiada wymiar długości. Wyraz przeto $m k^2$ można sobie przedstawić jako moment bezwładności względem płaszczyzny, osi lub bieguna, punktu o masie m, którego odległość od tej płaszczyzny, osi lub bieguna, równa się k jednostkom długości. W jakiem zaś miejscu przestrzeni ma być ten punkt umieszczony, to dla określenia tej wielkości jest obojętne.

25. Wzajemna zależność momentów bezwładności. Pomiędzy wartościami momentów bezwładności zachodzi zależność geometryczna, wynikająca bezpośrednio z ich określeń. Zależność ta pozwala z wartości momentów bezwładności jednego rodzaju — obliczyć momenty bezwładności innego rodzaju.



Rys. 5.

1) Zależność momentów względem płaszczyzn i względem osi. Niechaj x_k i y_k oznaczają odległości k-tego punktu w przestrzeni od dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, wtedy odległość h_k tego punktu od osi przecięcia się tych płaszczyzn wyrazi się wzorem

$$h_k{}^2 = x_k{}^2 + y_k{}^2.$$

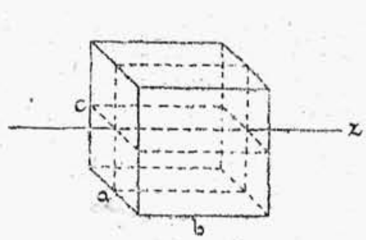
Napiszmy takie równanie kolejno dla każdego z punktów i pomnóżmy je przez masy odpowiednich punktów, to po dodaniu tych wszystkich iloczynów otrzymamy

$$\Sigma(m_k h_k{}^2) = \Sigma(m_k x_k{}^2) + \Sigma(m_k y_k{}^2); \quad \text{lub inaczej}$$

$$I_z = I_1 + I_2$$

gdzie I_z oznacza moment bezwładności względem osi z, zaś I_1 i I_2 takież momenty względem dwóch prostopadłych płaszczyzn, przechodzących przez oś z.

Równanie to wypowiemy: moment bezwładności pewnej bryły względem osi równa się sumie jej momentów bezwładności względem dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, dowolnie przeprowadzonych przez tę oś.



Rys. 6.

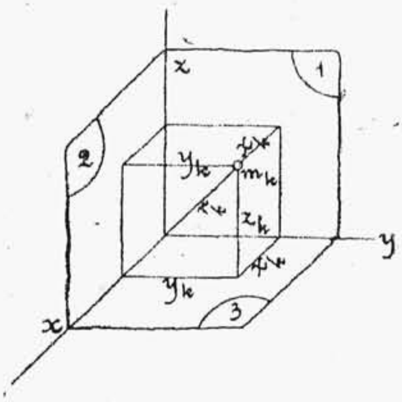
Przykład. Obliczyć moment bezwładności prostopadłościanu względem osi z, przechodzącej przez środem ciężkości i równoległej do krawędzi b, rys. 6-ty; znając momenty bezwładności względem płaszczyzn, przechodzących przez środek masy i równoległych do ścian (a, b) i (c, b) i przechodzących przez oś z. Z poprzedniego

$$I_1 = \tfrac{1}{12} m c^2;\ I_2 = \tfrac{1}{12} m a^2 \quad \text{a więc}$$

$$I_z = \tfrac{1}{12} m (c^2 + a^2).$$

2) Zależność momentów względem płaszczyzn i względem bieguna. Przeprowadźmy przez dowolny punkt przestrzeni trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, rys. 7-my, i niechaj x_k, y_k i z_k oznaczają odległości od nich k-tego punktu danej bryły, a r_k jego odległość od punktu ich przecięcia się, t. j. od obranego bieguna, a napiszemy

$$r_k{}^2 = x_k{}^2 + y_k{}^2 + z_k{}^2.$$



Rys. 7.

Mnożąc powyższe równanie przez m_k i biorąc sumę wszystkich iloczynów, jak uczynilismy poprzednio, otrzymamy wzór

$$\Sigma (m_k r_k{}^2) = \Sigma (m_k x_k{}^2) + \Sigma (m_k y_k{}^2) + \Sigma (m_k z_k{}^2); \quad \text{lub inaczej}$$

$$I_b = I_1 + I_2 + I_3; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (51)$$

Wzór ten wysłowimy: moment bezwładności danej bryły względem bieguna równa się sumie momentów bezwładności tej bryły względem trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, przechodzących przez ten biegun.

Moment np. bezwładności prostopadłościanu względem jego środka ciężkości równa się

$$I_b = \tfrac{1}{12} m (a^2 + b^2 + c^2).$$

Jeżeli w powyższem równaniu 51-em zgrupujemy wyrazy w sposób następujący

$$\Sigma (m_k r_k{}^2) = \Sigma m_k (x_k{}^2 + y_k{}^2) + \Sigma (m_k z_k{}^2)$$

i weźmiemy sumę wszystkich iloczynów, to otrzymamy wzór, który wypowiemy: **suma momentu bezwładności danej bryły materyalnej względem osi oraz momentu bezwładności względem płaszczyzny, prostopadłej do tej osi, równa się momentowi bezwładności danej bryły względem punktu przecięcia się tej osi z daną płaszczyzną.**

Przykład. Znając moment bezwładności kuli względem jej środka, obliczyć:

1) moment jej bezwładności względem średnicy;

2) moment bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez jej środek.

Dany więc jest moment $I_b = \frac{2}{5} m R^2$; należy obliczyć I_z oraz I_p.

Dla innej bryły zadanie to byłoby nieokreślone, lecz dla kuli jest ono możliwem; momenty bowiem bezwładności kuli względem wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez środek, są wzajemnie równe, a zatem napiszemy

$$I_b = 3 I_p; \quad \text{skąd} \quad I_p = \tfrac{1}{5} m R^2.$$

Wzór zaś momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek kuli

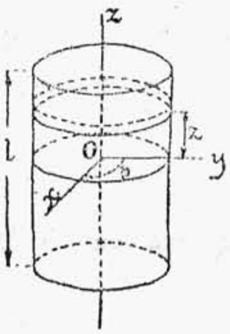
$$I_z = 2 I_p; \quad \text{a zatem}$$

$$I_z = \tfrac{2}{5} m R^2.$$

Przykład. Dany jest walec prosty o wysokości l i o podstawie kołowej, której promień R.

1) obliczyć jego moment bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez jego oś.

Suma momentów bezwładności względem dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, przechodzących przez oś walca, równa się momentowi względem tej osi, co napiszemy



Rys. 8.

$$2 I_p = \tfrac{1}{2} m R^2; \quad \text{a więc} \quad I_p = \tfrac{1}{4} m R^2;$$

2) obliczyć I_s względem osi przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do podstawy.

W tym celu obliczymy najpierw momenty bezwładności danego walca względem płaszczyzny, przechodzącej przez jego oś i przez oś x, oraz moment bezwładności względem płaszczyzny równoległej do podstawy i przechodzącej przez środek walca, a następnie obliczymy moment względem osi ich przecięcia się.

Moment bezwładności względem płaszczyzny (x, y), rys. 8-my, obliczymy w następujący sposób

$$I_s = \Sigma m_k z_k^2; \quad \text{podstawiając} \quad m_k = \pi R^2 \,.\, dz \,.\, \mu,$$

otrzymamy

$$I_s = \pi \mu R^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} z^2 dz = \pi \mu R^2 \left[\frac{l^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \quad \text{i wreszcie} \quad I_s = \tfrac{1}{12} m l^2;$$

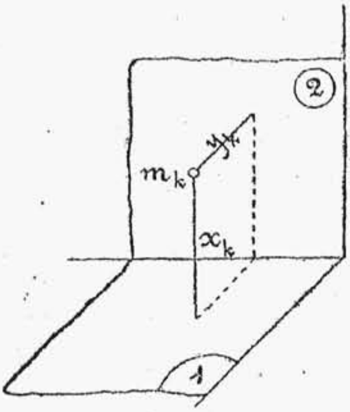
podstawiwszy tę wartość w równanie

$$I_x = I_2 + I_3;\ \text{otrzymamy}\ I_x = \tfrac{1}{4} m (R^2 + \tfrac{1}{3} l^2).$$

3) Obliczyć moment bezwładności walca względem środka ciężkości

$$I_b = I_1 + I_2 + I_3 = 2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot m R^2 + \tfrac{1}{12} m l^2 = \tfrac{1}{2} m (R^2 + \tfrac{1}{6} l^2).$$

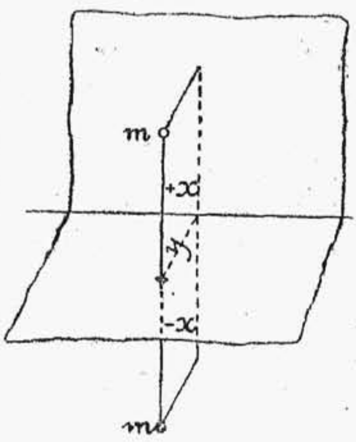
26. Momenty odśrodkowe bryły materyalnej. Iloczyn z masy punktu materyalnego i z odległości jego od dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn nazywamy momentem odśrodkowym tego punktu względem danych płaszczyzn. Sumę takich iloczynów, odnoszących się do wszystkich punktów danej bryły, nazywamy momentem odśrodkowym danej bryły względem dwóch płaszczyzn. Oznaczywszy ten moment literą $I_{1,2}$, rys. 9-ty, wyrazimy to określenie algebraicznie



Rys. 9.

$$I_{1,2} = \Sigma (m_k\, x_k\, y_k);$$

gdzie liczby 1 i 2 wskazują na płaszczyzny, względem których obliczamy momenty. Wielkość momentu odśrodkowego różni się od momentów bezwładności tem, że wartość jego może być dodatnią lub odjemną; gdyż składniki tej sumy mogą być ze znakami różnymi. Dla pewnych przeto szczególnych położeń bryły względem danych płaszczyzn moment odśrodkowy może być równy zeru. Przypadek ten zachodzi np. gdy jedna z płaszczyzn momentu odśrodkowego jest płaszczyzną symetryi danej bryły; wtedy bowiem momenty odśrodkowe dwóch punktów symetrycznych względem płaszczyzny symetryi i względem każdej innej do niej prostopadłej, posiadają wartości wzajemnie równe lecz ze znakami przeciwnymi, rys. 10-ty, suma ich przeto równa się zeru. Jeżeli przeto bryła dana jest np. symetryczną względem pewnej płaszczyzny, to jej moment odśrodkowy względem płaszczyzn, z których jedna jest płaszczyzną symetryi, a druga dowolną, lecz do niej prostopadłą, równa się zeru.



Rys. 10.

Przykłady. 1) Moment odśrodkowy prostopadłościanu względem płaszczyzn, z których jedna przechodzi przez środek ciężkości i jest równoległą do jednej ze ścian; druga zaś jest dowolna, lecz prostopadła do pierwszej, równa się zeru.

2) Moment odśrodkowy kuli względem wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez jej środek, równa się zeru.

3) Moment odśrodkowy stożka prostego o podstawie eliptycznej, względem płaszczyzn, z których jedna przechodzi przez jedną z osi głównych podstawy i przez oś stożka, a druga jest dowolna, lecz do niej prostopadła, równa się zeru.

Nie wynika jednakże z wniosku powyższego, żeby dla brył niesymetrycznych nie można było znaleźć położenia dwóch takich płaszczyzn, względem których jej moment odśrodkowy byłby równy zeru. Okażemy obecnie, że płaszczyzny takie istnieją dla każdej bryły, a następnie okażemy w jaki sposób je odnaleźć. W tym celu wyobraźmy sobie przestrzeń rozdzieloną dwiema wzajemnie prostopadłemi płaszczyznami na cztery części i umieszczajmy kolejno daną bryłę w każdej z tych części; wtedy momenty odśrodkowe bryły, umieszczonej w ćwiartce, w której spółrzędne są ($+x$ i $+y$), posiadają wartości dodatnie; momenty zaś odśrodkowe bryły, umieszczonej w ćwiartce, w której punkty wyznaczone są spółrzędnemi ($+x$ i $-y$), posiadają wartości odjemne. Przy częściowem położeniu bryły w jednej i drugiej ćwiartce dodajniki będą dądatnie i odjemne. Wobec ciągłości położeń bryły w przestrzeni nastąpi ciągłość wartości sumy momentów odśrodkowych punktów tej bryły; znaleźć przeto można takie położenia bryły, w których momenty jej odśrodkowe względem tych płaszczyzn równać się będą zeru, lub też odwrotnie, można zawsze znaleźć takie położenie dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn względem danej bryły, że jej moment odśrodkowy względem tych płaszczyzn będzie równy zeru. Nietylko przeto momenty odśrodkowe brył, posiadających płaszczyzny symetryi, równają się zeru, lecz wogóle dla każdej bryły znaleźć można takie pary płaszczyzn, względem których momenty te równają się zeru; płaszczyzny takie nazywają też płaszczyznami symetryi dynamicznej. Sposób znalezienia położeń takich płaszczyzn podamy w następnych paragrafach.

27. Momenty bezwładności brył materyalnych względem płaszczyzn wzajemnie równoległych. Zadanie to polega na obliczeniu momentu bezwładności bryły względem pewnej płaszczyzny, która jest równoległą do innej płaszczyzny, względem której moment bezwładności jest nam znany. Niech I' oznacza moment bezwładności pewnej bryły względem danej płaszczyzny; x'_k odległości punktów danaj bryły od tej płaszczyzny; wtedy moment bezwładności I tejże bryły względem innej płaszczyzny, przeprowadzonej równolegle do pierwszej na odległości e, wyrazi wzór

$$I = \Sigma m_k (x'_k + e)^2 = \Sigma (m_k x'^2_k) + 2e\,\Sigma (m_k x'_k) + e^2 \Sigma m_k .$$

Na zasadzie wzoru 44-go tomu I-go, po podstawieniu $P_k = m_k g$

$$\Sigma(m_k x'_k) = m x'_s; \text{ oraz } \Sigma m_k = m;$$

gdzie x'_s oznacza odległość środka masy od danej płaszczyzny; przeto, po podstawieniu tych wartości we wzór poprzedni, otrzymamy

$$I = I' + 2 e m x'_s + m \, . \, e^2; \quad \ldots \ldots \quad (52)$$

w szczególnym przypadku, gdy płaszczyzna, względem której moment bezwładności przechodzi przez środek masy, wtedy $x'_s = 0$; i wzór powyższy przekształci się na następujący

$$I = I_s + m e^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

gdzie I_s oznacza moment bezwładności danej bryły względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek masy.

28. Momenty bezwładności brył materyalnych względem osi równoległych. Ponieważ wielkość momentu bezwładności bryły względem osi zależy od położenia bryły względem tych osi, przeto w celu obliczenia momentu bezwładności dla każdej z osi, należałoby przeprowadzić nowy rachunek, ażeby zaś tego uniknąć, zestawimy pewne zależności matematyczne pomiędzy wartościami momentów bezwładności względem różnych osi.

Znajdźmy najpierw zależność pomiędzy wartościami momentów bezwładności danej bryły względem dwóch wzajemnie równoległych osi. Niechaj I'_z oznacza moment bezwładności danej bryły względem osi z', I_z zaś niech oznacza moment bezwładności względem osi z, równoległej do pierwszej i znajdującej się od niej na odległości e, rys. 11-ty; m_k niech oznacza masę jednego z punktów rozpatrywanej bryły; to moment bezwładności tego punktu względem osi z' jest $m_k h'^2_k$, względem zaś osi z $m_k h_k^2$. Wprowadziwszy do rachunku kąt α_k, jaki tworzy promień h'_k z płaszczyzną osi (z, z'), napiszemy

$$h_k^2 = h'^2_k + e^2 - 2 h'_k e \, . \cos \alpha_k .$$

Ponieważ $h'_k \cos \alpha_k$ jest spółrzędną y_k, odniesioną do układu osi x, y, z', rys. 11-ty, rozpatrywanego punktu, gdyż $h'_k \cos \alpha_k = y_k$, to napiszemy

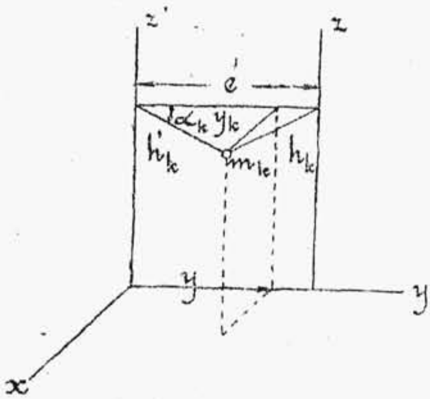
$$h_k^2 = h'^2_k + e^2 - 2 e y_k .$$

Pomnóżmy to równanie przez m_k i napiszmy takież równanie dla każdego punktu, to po ich dodaniu otrzymamy

$$\Sigma m_k h_k^2 = \Sigma m_k h'^2_k + \Sigma m_k e^2 - 2 \Sigma m_k e y_k .$$

Wartości stałe wyniesiemy przed znak sumy, oraz oznaczymy Σm_k literą m, a otrzymamy

$$I_z = I_z' + me^2 - 2e\,\Sigma m_k\, y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$



Rys. 11.

Wyraz $\Sigma m_k\, y_k$ przedstawia sumę momentów statycznych bryły względem osi x i może być zastąpiony wyrazem my_s, wzór 43-ci tomu I-go, w którym y_s oznacza spółrzędną środka masy danej bryły.

W szczególnym przypadku, jeżeli środek masy leży na osi z', to $y_s = 0$, a równanie powyższe przekształci się na następujące

$$I_z = I_s + me^2; \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

który wysłowimy:

moment bezwładności danej bryły względem dowolnej osi równa się sumie dwóch wyrazów, z których jeden jest momentem bezwładności tejże bryły względem osi, do niej równoległej i przechodzącej przez środek masy, drugi zaś jest iloczynem z masy bryły i kwadratu odległości tych osi.

Ze wzoru powyższego można obliczyć moment bezwładności danej bryły względem dowolnej osi w przestrzeni, gdy znaną będzie wartość momentu bezwładności względem osi równoległej do niej i przechodzącej przez środek masy.

Zadanie. Znając moment bezwładności prostopadłościanu względem osi, przechodzącej przez środek jego masy i równoległej do krawędzi c; obliczyć moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez krawędź c. Odpowiedź: $I_c = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$.

29. Szczególne wartości momentów bezwładności względem osi. Ze wzoru 53-go wynika, że najmniejszym momentem bezwładności danej bryły względem różnych osi, wzajemnie równoległych, jest moment bezwładności danej bryły względem osi, przechodzącej przez środek masy.

Chcąc więc wyznaczyć położenie osi, względem której moment bezwładności danej bryły jest bezwzględnie najmiejszy, należy szukać jej pomiędzy osiami, przechodzącemi przez środek jej masy.

O wartościach przeto momentu bezwładności danej bryły względem różnych osi powiedzieć możemy co następuje:

1) że jest ona w każdym razie dodatnią; z określenia bowiem momentu bezwładności wynika, że wszystkie dodajniki sumy, która tworzy moment bezwładności, są dodatnie;

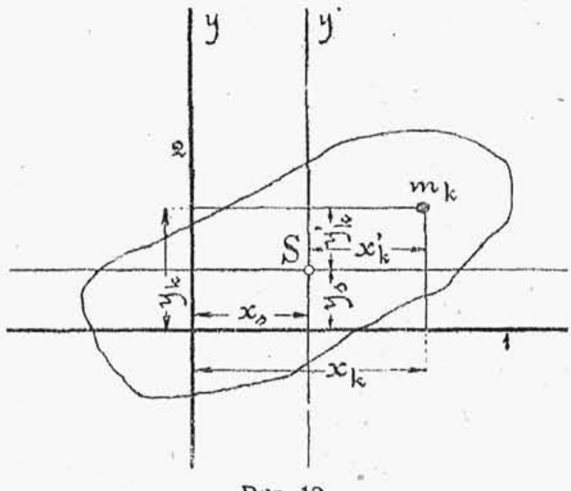
2) moment bezwładności względem osi może być tylko w tym razie równy zeru, gdy punkty materyalne leżą wzdłuż osi; moment bezwładności np. odcinka materyalnego względem osi, przechodzącej przez niego, równa się zeru; lecz moment bezwładności tegoż odcinka względem jakiejkolwiek innej osi posiada wartość skończoną;

3) moment bezwładności bryły, której punkty są rozmieszczone w przestrzeni, posiada zawsze wartość dodatnią względem każdej osi;

4) największą wartość momentu bezwładności posiada dana bryła względem osi, leżącej w nieskończoności; lub też gdy bryła lub niektóre jej punkty leżą w nieskończoności, a oś bezwładności leży w skończoności. Możemy więc powiedzieć, że wogóle dla przypadków, spotykanych w praktyce

$$0 < I_z < \infty.$$

5) najmniejszą wartość momentu bezwładności posiada dana bryła względem pewnej osi, która przechodzi przez środek ciężkości.



Rys. 12.

30. Momenty odśrodkowe bryły materyalnej względem płaszczyzn równoległych. Dany jest moment odśrodkowy $I'_{1,2}$ pewnej bryły względem dwóch płaszczyzn 1' i 2', przechodzących przez środek S masy danej bryły, rys. 12-ty; obliczyć moment odśrodkowy $I_{1,2}$ względem płaszczyzn 1 i 2, przeprowadzonych równolegle do poprzednich na odległościach x_s i y_s od środka.

Oznaczywszy literami x_k i y_k odległości punktów bryły od płaszczyzn 1-ej i 2-ej (na rys. 13-tym pokazane są ślady tych płaszczyzn), i temiż literami, lecz z kreskami, odległości od płaszczyzn 1' i 2', napiszemy następujący wzór momentu odśrodkowego względem płaszczyzn 1-szej i 2-ej

$$I_{1,2} = \Sigma\, (m_k x_k y_k);$$

a ponieważ

$$x_k = x'_k + x_s \quad \text{i} \quad y_k = y'_k + y_s$$

przeto po podstawieniu otrzymamy

$$I_{1,2} = \Sigma\, m_k\, (x_s + x'_k)\, (y_s + y'_k);$$

$$I_{1,2} = x_s\, y_s \,.\, \Sigma\, m_k + x_s \,.\, \Sigma\, (m_k x'_k) + y_s \,.\, \Sigma\, (m_k y'_k) + \Sigma\, (m_k x'_k y'_k).$$

Podstawmy $\Sigma\, m_k = m$, a zważywszy, że płaszczyzny 1′ i 2′ przechodzą przez środek masy, mamy związki

$$\Sigma\,(m_k x'_k) = 0; \quad \Sigma\,(m_k y'_k) = 0,$$

oznaczywszy następnie sumę

$$\Sigma\,(m_k x'_k y'_k) \text{ literą } I'_{1,2};$$

napiszemy

$$I_{1,2} = I'_{1,2} + m\, x_s y_s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Wzór ten wysłowimy: moment odśrodkowy danej bryły względem dwóch wzajemnie prostopadłych dowolnie obranych płaszczyzn równa się sumie dwóch wyrazów, z których jeden jest jej momentem odśrodkowym, względem płaszczyzn równoległych do poprzednich i przechodzących przez środek masy; drugi zaś jest iloczynem z mamy danej bryły i z odległości jej środka od tych płaszczyzn.

Z tego twierdzenia wynika:

1) jeżeli moment odśrodkowy danej bryły względem dwóch płaszczyzn, przechodzących przez środek masy, równa się zeru, to moment ten, względem dwóch innych płaszczyzn, lecz równoległych do pierwszych, posiada wartość równą iloczynowi $m\, x_s y_s$;

2) ponieważ wielkości x_s i y_s można zawsze tak dobrać, ażeby suma $(I'_{1,2} + m\, x_s y_s)$ równała się zeru; przeto można zawsze znaleźć takie położenie dwóch płaszczyzn, równoległych do danych płaszczyzn, względem których moment odśrodkowy równać się będzie zeru;

3) wartość momentu odśrodkowego, względem dwóch płaszczyzn, przechodzących przez środek masy nie zmieni się, gdy jedną z tych płaszczyzn przesuniemy równolegle; wtedy bowiem jeden z mnożników x_s lub y_s równa się zeru.

31. Momenty bezwładności bryły materyalnej względem osi, przecinających się w jednym punkcie. Zadanie to ma na celu wyrazić moment bezwładności bryły względem dowolnie obranej osi przez jej momenty bezwładności względem osi spółrzędnych, posiadających początek na tej prostej.

Przeprowadźmy przez początek układu osi spółrzędnych x, y i z prostą l, rys, 13-ty, i oznaczmy jej kąty kierunkowe, jakie ona tworzy z osiami x, y, z, literami (x, l), (y, l) i (z, l). Jeżeli punkt K jest jednym z punktów bryły, to jego moment bezwładności względem osi l wyrazimy wzorem

$$m_k \,.\, \overline{KL}^2;$$

gdzie KL jest odległością tego punktu od osi l, a m_k — oznacza masę danego punktu. Wyraźmy następnie tę odległość spółrzędnemi x_k, y_k i z_k danego punktu. W tym celu z rysunku 13-go odczytamy

$$KL^2 = OK^2 - OL^2; \quad \text{oraz}$$
$$OK^2 = x_k{}^2 + y_k{}^2 + z_k{}^2;$$

odcinek zaś OL równa się sumie rzutów spółrzędnych x_k, y_k i z_k na prostą l; napiszemy przeto

$$OL = x_k \,.\, \cos(x, l) + y_k \,.\, \cos(y, l) + z_k \,.\, \cos(z, l).$$

Podstawmy te wartości w wyraz dla KL, a otrzymamy

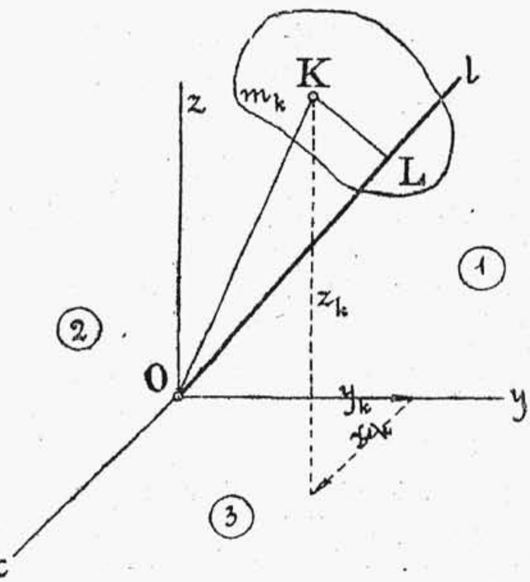
$$KL^2 = (x_k{}^2 + y_k{}^2 + z_k{}^2) - \\ - [x_k \,.\, \cos(x, l) + y_k \,.\, \cos(y, l) + \\ + z_k \,.\, \cos(z, l)]^2;$$

po przemnożeniu tego wyrazu przez m_k i po dodaniu takich wyrazów, zestawionych dla wszystkich punktów danej bryły, otrzymamy wyraz momentu bezwładności danej bryły względem obranej osi l.

W celu wykonania tego obliczenia pomnóżmy pierwszy wyraz równania powyższego przez

$\cos^2(x, l) + \cos^2(y, l) + \cos^2(z, l)$; a otrzymamy

$$KL^2 = (x_k{}^2 + y_k{}^2 + z_k{}^2) \,.\, [\cos^2(x, l) + \cos^2(y, l) + \cos^2(z, l)] - [x_k \cos(x, l) + y_k \cos(y, l) + z_k \cos(z, l)]^2.$$



Rys. 13.

Po przemnożeniu otrzymamy

$$KL^2 = (x_k{}^2 + y_k{}^2 + z_k{}^2) \,.\, \cos^2(x, l) + (x_k{}^2 + y_k{}^2 + z_k{}^2) \,.\, \cos^2(y, l) + (x_k{}^2 + y_k{}^2 + z_k{}^2) \,.\, \cos^2(z, l) - [x_k{}^2 \,.\, \cos^2(x, l) + 2x_k y_k \,.\, \cos(x, l) \,.\, \cos(y, l) + y_k{}^2 \,.\, \cos^2(y, l) + 2x_k z_k \,.\, \cos(x, l) \,.\, \cos(z, l) + 2y_k z_k \,.\, \cos(y, l) \,.\, \cos(z, l) + \\ + z_k{}^2 \,.\, \cos^2(z, l)].$$

Następnie łączymy wyrazy w ten sposób, ażeby otrzymać wyrazy momentów bezwładności względem obranych osi spółrzędnych x, y, z; i otrzymamy

$$KL^2 = (y_k{}^2 + z_k{}^2) \,.\, \cos^2(x, l) + (x_k{}^2 + z_k{}^2) \,.\, \cos^2(y, l) + (x_k{}^2 + y_k{}^2) \,.\, \cos^2(z, l) - 2x_k y_k \,.\, \cos(x, l) \,.\, \cos(y, l) - 2z_k x_k \,.\, \cos(x, l) \,.\, \cos(z, l) - 2y_k z_k \cos(y, l) \,.\, \cos(z, l).$$

Pomnóżmy teraz to równanie przez m_k, a wyraz $m_k \cdot KL^2$ wyrazi moment bezwładności punktu K względem osi l; wyraz zaś $(y_k{}^2+z_k{}^2)\, m_k$ — moment bezwładności tegoż punktu względem osi x i t. d. Zestawimy takie równania dla każdego punktu bryły, następnie zsumujemy je, a zważywszy, że wielkości $\cos(x, l)$ i t. d. jako niezależne od spółrzędnych punktów danej bryły, mogą być wyniesione przed znak Σ, otrzymamy, zważywszy przedtem: że

$$\Sigma m_k (x_k{}^2 + y_k{}^2) = I_z \text{ i t. d.}; \quad \text{oraz} \quad \Sigma (m_k x_k y_k) = I_{1,2} \text{ i t. d.},$$

następujące równanie

$$I_l = \cos^2(x, l) \cdot I_x + \cos^2(y, l) \cdot I_y + \cos^2(z, l) \cdot I_z - 2\cos(x, l) \cdot \cos(y, l) \cdot I_{1,2}$$
$$- 2\cos(y, l)\cos(z, l) \cdot I_{2,3} - 2\cos(x, l)\cos(z, l) \cdot I_{1,3} \quad . \quad . \quad (57)$$

Wzór ten daje możność obliczenia momentu bezwładności I_l danej bryły względem osi l z momentów bezwładności tej bryły względem trzech wzajemnie prostopadłych osi, przechodzących przez jeden punkt danej osi, oraz z trzech momentów odśrodkowych tejże bryły względem płaszczyzn, wyznaczonych przez te osi współrzędnych; a więc dla obliczenia momentu bezwładności danej bryły względem dowolnie obranej osi potrzebna jest znajomość sześciu niezależnych wielkości. W najogólniejszym więc przypadku dla wyznaczenia momentu bezwładności danej bryły musimy wykonać nie więcej jak sześć całkowań; w szczególnych przypadkach może być mniej, niektóre bowiem z tych momentów, zależnie od położenia osi spółrzędnych x, y i z — względem bryły, mogą być wzajemnie równe lub też równe zeru.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności prostopadłościanu względem osi l, przechodzącej przez jego przekątnię.

W tym celu przeprowadzimy przez środek masy prostopadłościanu równolegle do krawędzi prostopadłościanu (a, b, c) trzy wzajemnie prostopadłe osi x, y i z, a napiszemy na podstawie poprzednich rachunków

$$I_x = \tfrac{1}{12} m (b^2 + c^2); \quad I_y = \tfrac{1}{12} m (a^2 + c^2); \quad I_z = \tfrac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Ponieważ płaszczyzny (x, y) oraz (y, z) są płaszczyznami symetryi, przeto $I_{1,2} = 0$; $I_{2,3} = 0$ oraz $I_{1,3} = 0$.

Wzór więc 57-my dla danego przypadku przybierze postać

$$I_l = \cos^2(x, l) \cdot I_x + \cos^2(y, l) \cdot I_y + \cos^2(z, l) \cdot I_z \quad . \quad . \quad (58)$$

Ze stosunków geometrycznych, zachodzących w prostopadłościanie, wynika, że dla danego przypadku, gdy l jest przekątnią $\cos^2(x, l) = \frac{a}{a^2+b^2+c^2}$; i t. d.; po podstawieniu przeto tych wartości we wzór powyższy, otrzymamy

$$I_l = \tfrac{1}{6} m \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$