32. Elipsoida bezwładności danej bryły materyalnej. W celu unaocznienia geometrycznego wielkości momentów bezwładności względem różnych osi l, przechodzących przez pewien punkt, wyrazimy równanie 57-me geometrycznie. W tym celu na każdej osi l odetniemy od początku układu długość

$$\rho = \pm \frac{\lambda^2}{\sqrt{I_l}};$$

gdcie λ^2 oznacza dowolnie obrany, lecz stały dla danego zadania, spółczynnik proporcyonalności. Przeprowadźmy przez obrany biegun 0 nieskończenie wiele osi l i na każdej z nich odetnijmy odcinek ρ określony przez ten wzór; to otrzymamy pęk promieni, wychodzących z jednego punktu, których końce utworzą pewną powierzchnię. Zadaniem naszem jest orzec, jaką będzie ta powierzchnia.

W tym celu podstawmy do wzoru 57-mego

$$I_l = \frac{\lambda^4}{\rho^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

i oznaczywszy literami x, y, z, **spółrzędne końców promienia** ρ; zastąpimy w otrzymanem równaniu iloczyny

$$\rho \, . \cos(x, l), \qquad \rho \, . \cos(y, l), \qquad \rho \, . \cos(z, l),$$

wartościami spółrzędnych x, y, z a otrzymamy równanie

$$I_x \, . \, x^2 + I_y \, . \, y^2 + I_z \, . \, z^2 - 2 I_{1,2} \, . \, xy - 2 I_{2,3} \, . \, yz - 2 I_{1,3} \, . \, xz = \lambda^4; \quad . \quad (60)$$

ktore przedstawia powierzchnię drugiego stopnia. Ażeby określić postać tej powierzchni, zważymy, że wszystkie jej punkty leżą wogóle w skończoności; wartości bowiem I_l — a więc i wartości ρ względem wszystkich osi przechodzących przez obrany biegun są wogóle wielkościami skończonemi. W szczególnym tylko przypadku, gdy punkty materyalne są rozłożone wzdłuż osi, przechodzącej przez początek układu spółrzędnych, wtedy względem tej osi $I_l = 0$; a $\rho = \pm\infty$; z czego wynika, że wogóle wszystkie punkty powierzchni, utworzonej przez końce promieni ρ leżą w skończoności, a w szczególnym tylko przypadku układu punktów materyalnych leżą dwa jej punkty w nieskończoności. Ze znanych powierzchni drugiego stopnia odpowiada tym warunkom tylko elipsoida wraz ze swemi odmianami, w jakie przejść może w szczególnych przypadkach; a więc przedstawiać również może elipsoidę obrotową, kulę lub walec.

Wogóle przeto powiedzieć możemy: że każdy punkt w przestrzeni może być środkiem elipsoidy, posiadającej taką właściwość, że moment bezwładności danej bryły względem dowolnej osi, przechodzącej przez ten punkt, obliczymy ze wzoru $I_l = \frac{\lambda^4}{\rho^2}$; w którym ρ jest długością odcinka, utworzonego na tej osi przez środek elipsoidy i jej powierzchnię. Elipsoida ta daje obraz geometryczny zmienności momentów bezwładności danej bryły względem osi, przechodzących przez dany biegun. Elipsoidę tę nazwano elipsoidą bezwładności danej bryły w obranym biegunie.

Dla danej bryły i dla danego bieguna, możemy zawsze zbudować jedną tylko elipsoidę bezwładności, niezależnie od położenia obranych osi spółrzędnych x, y i z; moment bowiem bezwładności względem każdej osi posiada, na zasadzie danego określenia, jedną tylko wartość; a więc i końce odcinków ρ, wyznaczą jedną tylko elipsoidę. Zmieniając przeto położenie osi spółrzędnych x, y, z, a nie zmieniając ich początku i położenia bryły w przestrzeni, otrzymamy równania drugiego stopnia różnych postaci; które jednakże przedstawiać będą jedną i tę samą elipsoidę.

Gdy obierzemy osi spółrzędnych wzdłuż głównych średnic tej elipsoidy i oznaczywszy spółrzędne końców odcinków ρ literami ξ, η, ζ, wtedy równanie elipsoidy względem tych osi powinno mieć postać

$$\frac{\xi}{\rho_1^2}+\frac{\eta^2}{\rho_2^2}+\frac{\zeta^2}{\rho_3^2}=1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

w którem ρ_1, ρ_2, ρ_3 oznaczają długości głównych półśrednic elipsoidy. Oznaczywszy literami A, B, C wartość momentów bezwładności względem **osi głównych danej** elipsoidy, napiszemy na podstawie określenia wyrażonego wzorem 59-tym

$$\rho_1=\frac{\lambda^2}{\sqrt{A}}; \rho_2=\frac{\lambda^2}{\sqrt{B}}; \rho_3=\frac{\lambda^2}{\sqrt{C}};$$

a po podstawieniu tych wartości w równ. 61-sze, otrzymamy równanie elipsoidy, odniesione do osi głównych, w następującej postaci

$$A.\xi^2+B.\eta^2+C.\zeta^2=\lambda^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Z porównania tego równania z równaniem elipsoidy, odniesionej do dowolnych osi spółrzędnych x, y, z, równ. 60-te, posiadających wspólny początek z osiami ξ, η, ζ wynika, że wartość momentów **odśrodkowych**, względem każdej pary płaszczyzn, przechodzących przez osi główne elipsoidy, są równe zeru; i odwrotnie, jeżeli dla każdej pary płaszczyzn, przechodzących przez obrane osi spółrzędnych, momenty odśrodkowe równają się zeru, to proste przecięcia się tych płaszczyzn są osiami głównemi elipsoidy, gdyż wtedy równanie ogólne 57-me przekształci się na 62-gie; t. j. na równanie symetryczne. Osi główne elipsoidy bezwładności nazywają się **głównemi osiami bezwładności danej bryły w danym biegunie**, a płaszczyzny, przechodzące przez te osi, — głównemi płaszczyznami bezwładności. Elipsoida bezwładności, zbudowana dla środka masy danej bryły, nazywa się **elipsoidą środkową.**

Znając położenie osi głównych danej bryły dla obranego bieguna, obliczymy z równ. 57-go moment jej bezwładności względem dowolnej osi przechodzącej przez ten punkt, gdy jej kąty kierunkowe będą znane; wzór ten jest następujący

$$I_l = A \, . \cos^2(\xi, l) + B \, . \cos^2(\eta, l) + C \, . \cos^2(\zeta, l) \quad . \; . \; . \quad (63)$$

33. Właściwości momentów bezwładności brył materyalnych. 1) W każdym punkcie przestrzeni wyznaczyć można takie **położenie** trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych, że względem każdej pary tych płaszczyzn **momenty odśrodkowe** danej bryły będą równe zeru. Zanikanie więc momentów odśrodkowych zachodzi nietylko względem płaszczyzn, z których jedna jest płaszczyzną symetryi danej bryły, jakieśmy to już poprzednio zauważyli, lecz dla każdej bryły można je znaleść.

2) Jeżeli w pewnym punkcie przestrzeni znajdziemy trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, względem których trzy momenty odśrodkowe równają się zeru, to proste przecięcia się tych płaszczyzn są głównemi osiami bezwładności; gdyż wtedy równanie elipsoidy, odniesione do tych prostych jak do osi spółrzędnych, będzie równaniem symetrycznem. Jeżeli przeto dana bryła posiada np. trzy płaszczyzny symetryi, to proste przecięcia się tych płaszczyzn są osiami głównemi; przypadek ten zachodzi np. w prostopadłościanie.

3) Ze zmianą położenia bieguna bezwładności, kierunki osi głównych wogóle się zmieniają. Jeżeli bowiem momenty odśrodkowe względem każdej pary z trzech głównych płaszczyzn równają się zeru, to nie będą one wogóle równe zeru względem innych trzech płaszczyzn do nich równoległych, porówn. wzór 56-ty; płaszczyzny te przeto nie będą już płaszczyznami głównemi.

4) Gdy względem dwóch par z trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn (1-sza, 2-ga, 3-cia) momenty odśrodkowe równają się zeru; np. jeżeli

$$I_{1,3} = 0, \qquad \text{oraz} \qquad I_{2,3} = 0,$$

to prosta przecięcia się płaszczyzn 1-ej i 2-giej jest jedną z osi głównych. W tym bowiem przypadku w równaniu ogólnem elipsoidy, równ. 60-te, wypadną dwa iloczyny spółrzędnych i otrzymamy równanie z iloczynem tylko dwóch spółrzędnych; względem więc trzeciej spółrzędnej będzie to równanie symetryczne, odpowiednia przeto tej spółrzędnej oś jest osią główną elipsoidy.

5) Jeżeli płaszczyzny główne przechodzą przez **środek masy** danej bryły, to dla biegunów, leżących na każdej z tych płaszczyzn, jedna z osi głównych jest do niej prostopadłą, pozostałe zaś dwie osi leżą w tej

płaszczyźnie; równoległe bowiem przesunięcie dwóch płaszczyzn głównych, gdy trzecia przechodzi przez środek masy, nie zmienia wartości momentów odśrodkowych względem każdej z przesuniętych płaszczyzn i pozostałej; a ponieważ wartości momentów odśrodkowych równały się zeru, pozostaną i po przesunięciu tych płaszczyzn równe zeru, § 30-ty.

6) Z pomiędzy różnych położeń osi bezwładności, przechodzących przez obrany biegun w przestrzeni, wyznaczyć można położenie dwóch wzajemnie postopadłych osi, względem których momenty bezwładności danej bryły są największe i najmniejsze. Oś, względem której moment bezwładności jest **najmniejszy**, przechodzi przez wielką średnicę elipsoidy.

7) Jeżeli wartości momentów bezwładności danej bryły względem **dwóch osi głównych** są wzajemnie równe, to momenty jej bezwładności względem wszystkich prostych, leżących w płaszczyźnie tych osi i przechodzących przez obrany biegun, są wzajemnie równe, elipsoida bowiem jest w tym razie elipsoidą **obrotową.**

8) Jeżeli wartości momentów bezwładności danej bryły względem **trzech** osi głównych, przechodzących przez obrany biegun, są wzajemnie równe, to momenty bezwładności danej bryły względem wszystkich innych osi, przechodzących przez ten biegun są wzajemnie równe. W danym bowiem razie elipsoida przekształca się w kulę; promienie zatem wodzące, a więc i momenty bezwładności względem tych promieni, są wzajemnie równe. Np. dla kuli, lub sześcianu elipsoida bezwładności zbudowana w środku ciężkości przekształca się w kulę; momenty przeto bezwładności tych brył względem wszystkich osi, przechodzących przez środek, są wzajemnie równe.

34. Punkt bezwładności na danej prostej. Gdy na danej prostej znajdziemy taki punkt, w którym zbudowana elipsoida danej bryły posiada jedną średnicę główną na tej prostej; wtedy punkt taki nazwiemy **punktem bezwładności na danej prostej.** Zadanie obecne polega na określeniu położenia, w jakiem powinna znajdować się taka prosta względem bryły, ażeby znajdował się na niej punkt bezwładności, a następnie — na wyznaczeniu położenia tego punktu. Obierzmy na danej prostej dowolny punkt O, jako początek spółrzędnych i przeprowadźmy przez niego trzy wzajemnie prostopadłe osi x, y, z, obrawszy tę prostą za oś z. Następnie na tejże prostej obierzmy inny punkt O', na odległości dotychczas nie oznaczonej z_0 od O i przeprowadźmy przez niego inny układ prostokątnych osi (x', y', z'); obrawszy oś z' również na tej prostej. W ten sposób mamy dwa układy współrzędnych, których początki oraz osi z i z' leżą na danej prostej; płaszczyzny zaś (x, y) oraz (x', y') są wzajemnie równoległe; położenie zatem k-tego punktu bryły określić można spółrzędnemi (x_k, y_k, z_k) lub (x'_k, y'_k, z'_k). Oznaczywszy kąt pomiędzy osiami

x i x' przez α; napiszemy następujące zależności geometryczne pomiędzy spółrzędnemi

$$x'_k = x_k \cos\alpha + y_k \sin\alpha;$$
$$y'_k = - x_k \sin\alpha + y_k \cos\alpha;$$
$$z'_k = z_k - z_0.$$

Jeżeli np. punkt O' jest punktem bezwładności danej prostej, t. j. jeżeli x', y', z' są osiami głównemi w punkcie O' to powinny zachodzić następujące zależności

$$1)\ \Sigma\,(m_k x'_k z'_k) = 0;$$
$$2)\ \Sigma\,(m_k y'_k z'_k) = 0;$$
$$3)\ \Sigma\,(m_k x'_k y'_k) = 0.$$

Podstawiwszy w te równania wartości spółrzędnych (x'_k, y'_k, z'_k) z poprzednich równań, otrzymamy trzy równania z dwiema niewiadomemi α i z_0, które określają położenie szukanego bieguna; równania te są następujące

$$1)\ \cos\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k x_k z_k) + \sin\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k y_k z_k) - z_0\,[\cos\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k x_k) + \sin\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k y_k)] = 0$$

$$2)\ -\sin\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k x_k z_k) + \cos\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k y_k z_k) - z_0\,[-\sin\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k x_k) + \cos\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k y_k)] = 0;$$

$$3)\ \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\,.\,\Sigma\,[m_k\,(y^2_k - x^2_k)] + \cos 2\alpha\,.\,\Sigma\,(m_k x_k y_k) = 0.$$

Ażeby dwie niewiadome α i z_0 mogły zaspakajać trzy powyższe równania, powinny zachować pewne szczególne zależności pomiędzy spółczynnikami tych niewiadomych.

W celu wyznaczenia tych zależności wyrugujemy α z pierwszych dwóch równań i w tym celu 1-sze równanie pomnożymy przez $\sin\alpha$, drugie przez $\cos\alpha$ i dodamy je z sobą; następnie 1-sze pomnożymy przez $\cos\alpha$, drugie przez $\sin\alpha$ i także dodamy je z sobą; z 3-ciego zaś bezpośrednio obliczamy $\operatorname{tg} 2\alpha$; po tych przekształceniach otrzymamy następujące trzy równania

$$1)\ z_0 = \frac{\Sigma\,(m_k y_k z_k)}{\Sigma\,(m_k y_k)};$$

$$2)\ z_0 = \frac{\Sigma\,(m_k x_k z_k)}{\Sigma\,(m_k x_k)};$$

$$3)\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\Sigma\,(m_k x_k y_k)}{\Sigma\,[m_k\,(x^2_k - y^2_k)]} \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

Ażeby wartość z_0 zaspakajała dwa pierwsze równania, powinno być

$$\frac{\Sigma(m_k y_k z_k)}{\Sigma(m_k y_k)} = \frac{\Sigma(m_k x_k z_k)}{\Sigma(m_k x_k)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

Równanie to wyraża właśnie warunek, który powinien być spełniony, ażeby na obranej osi znajdował się punkt bezwładności. Nie każda więc prosta posiada punkt bezwładności dla danej bryły; lecz tylko proste, znajdujące się w szczególnych położeniach względem danej bryły, posiadają takie punkty.

Odległość punktu bezwładności danej prostej (jeżeli on istnieje), od obranego początku 0 spółrzędnych obliczymy z równ. 1-go lub 2-go a położenie dwóch pozostałych osi głównych obliczymy z równ. 3-go.

Rozpatrzymy pewne szczególne przypadki:

1) Jeżeli jednocześnie

$$\Sigma(m_k x_k z_k) = 0; \quad \text{oraz} \quad \Sigma(m_k y_k z_k) = 0; \quad \text{a}$$

$$\Sigma(m_k x_k) \gtreqless 0 \text{ i } \Sigma(m_k y_k) \gtreqless 0;$$

$$\text{to } z_0 = 0;$$

t. j. obrany początek układu jest punktem bezwładności danej prostej; czyli prosta ta jest jedną z osi głównych danej bryły w tym punkcie.

2) Jeżeli jednocześnie

$$\Sigma(m_k x_k z_k) = 0; \quad \Sigma)m_k y_k z_k) = 0; \quad \text{oraz}$$

$$\Sigma(m_k x_k) = 0; \quad \Sigma(m_k y_k) = 0;$$

t. j. jeżeli oś ta przechodzi przez środek masy, to z_0 przybiera każdą dowolną wartość; czyli dana prosta jest osią główną dla każdego swego punktu; a ponieważ wartość kąta α jest niezależna od wartości z_0, gdyż w równ. 3-cie nie wchodzi wartość z_0, przeto kierunki pozostałych dwóch osi dla tych punktów nie zmieniają się w przestrzeni i pozostają równoległymi do osi głównych w środku masy. Wszystkie przeto punkty na osi głównej elipsoidy bezwładności są punktami bezwładności dla danej bryły.

3) Jeżeli $\quad \Sigma(m_k x_k) = 0;$ oraz $\Sigma(m_k y_k) = 0;$ a

$$\Sigma(m_k x_k z_k) \gtreqless 0; \text{ oraz } \Sigma(m_k y_k z_k) \gtreqless 0;$$

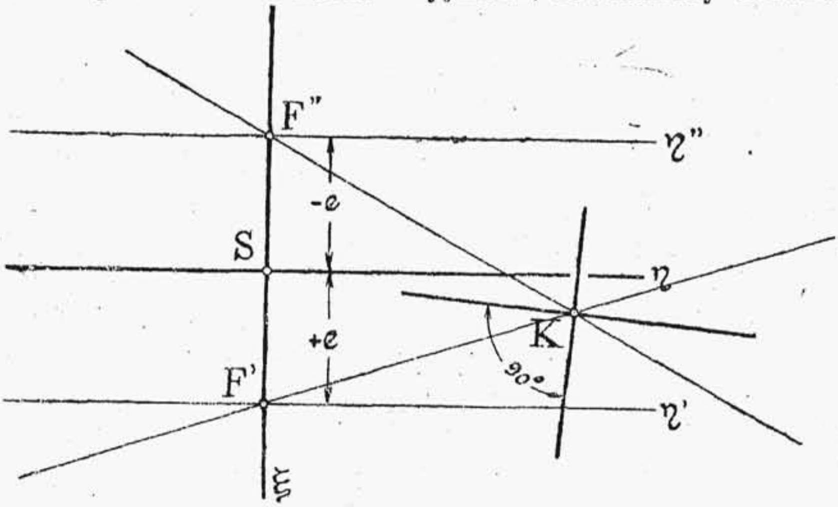
$$\text{wtedy } z_0 = \infty.$$

Osi, przechodzące przez środek masy, a nie będące osiami głównemi, posiadają punkty bezwładności w nieskończoności.

4) Jeżeli dana prosta jest równoległą do jednej z głównych osi, przechodzących przez środek masy; to jej biegun bezwładności pokrywa się z rzutem prostopadłym środka masy na tę prostą; płaszczyzna bowiem

rzutująca jest w danym razie płaszczyzną główną elipsoidy w środku masy; a dana prosta jest osią główną elipsoidy dla punktu przecięcia się danej prostej z tą płaszczyzną; przypadek 5-ty paragrafu poprzedniego.

35. Ogniska bezwładności. Przyjmiemi, że momenty bezwładności



Rys 14.

A, B, C danej bryły względem osi głównych ξ η, ζ w środku masy: posiadają wartości

$$A > B > C;$$

wtedy moment bezwładności I_l względem esi η', przeprowadzonej w płaszczyźnie (ξ, η) równolegle do osi η na odległości e od niej; (rys. 14-ty przedstawia płaszczyznę ξ, η), wyrazi się stosownie do równania 55-ego wzorem

$$I_{\eta'} = B + e^2 m.$$

Przy założeniu, że $A > B$, wartość e możemy zawsze tak dobrać, ażeby

$$B + e^2 m = A;$$

wtedy punkty F' i F'', leżące na osi ξ w odległości

$$e = \pm \sqrt{\frac{A-B}{m}};$$

od środka masy, posiadają tę szczególną właściwość, że momenty bezwładności danej bryły względem osi ξ i η', przechodzących przez te punkty, są wzajemnie równe; elipsoida zatem bezwładności danej bryły, zbudowana w tych punktach, posiada dwie główne średnice wzajemnie równe. Punkty te nazwano ogniskami bezwładności danej bryły na płaszczyźnie głównej (ξ, η). Znajomość położenia tych ognisk daje możność wyznaczenia osi głównych w każdym punkcie danej płaszczyzny (ξ, η). Momenty bowiem bezwładności względem osi, przeprowadzonych przez dowolny punkt K tej płaszczyzny i przez obydwa ogniska bezwładności są wzajemnie równe; proste przeto, połowiące kąty zewnętrzne i wewnętrzne, jakie one tworzą, są osiami głównemi w tym punkcie, rys. 14-ty.

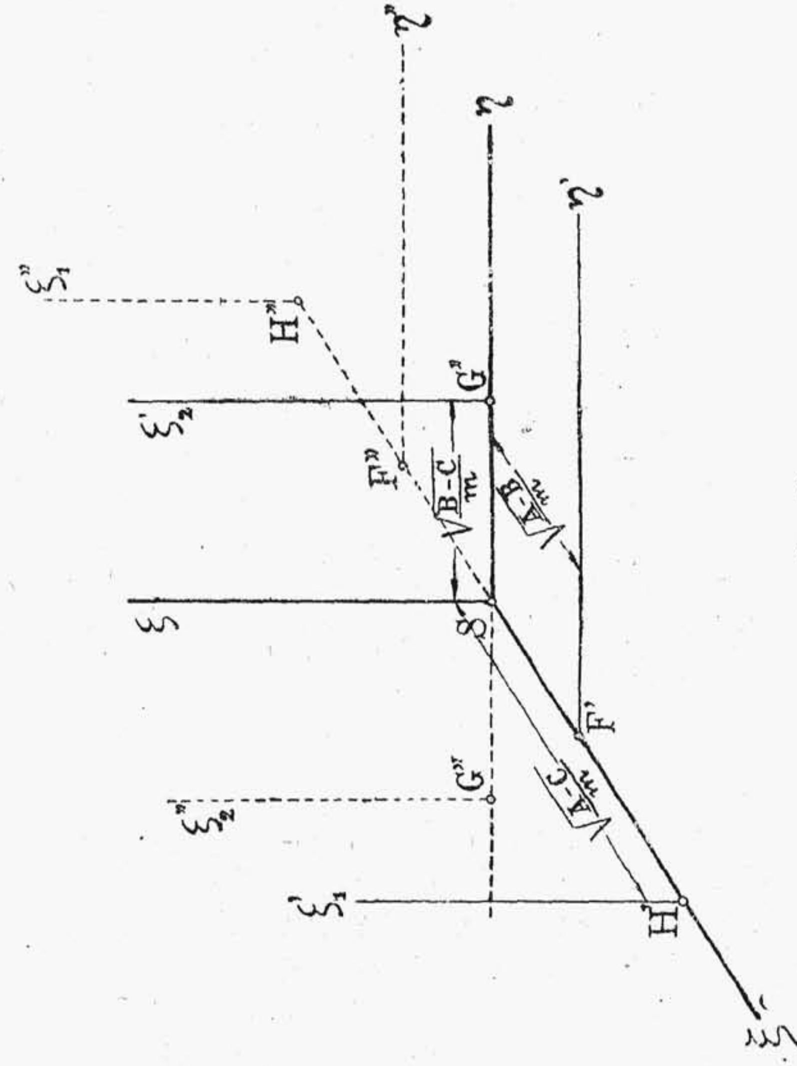
Jasnem jest, że ogniska bezwładności mogą leżeć tylko na osi, względem której moment bezwładności jest większy od momentu względem drugiej osi; oddalając bowiem pewną oś od środka masy, moment bezwładności względem niej zawsze powiększa się i mniejsze wartości momentów możemy przez to zawsze dowolnie powiększyć.

Jeżeli więc $A > B > C$, to możemy na osi ξ znaleźć jeszcze takie bieguny H' i H'', rys, 15-szy, przez które przeprowadzimy osi ζ'_1 i ζ''_1 równolegle do ζ; względem których momenty bezwładności równać się będą wartości A; odległości tych osi od osi ζ równając się

$$\pm\sqrt{\frac{A-C}{m}}.$$

Ponieważ stosownie do założenia $B > C$, przeto w płaszczyźnie (η, ζ) przeprowadzić można również na odległości $= \pm\sqrt{\frac{B-C}{m}}$ od osi ζ i równolegle do niej takie osi ζ'_2 i ζ''_2, względem których momenty bezwładności danej bryły równają się B. Wnioski te wypowiemy: przyjmując, że $A > B > C$ znajdziemy na osi ξ dwie pary ognisk bezwładności; jedna z tych par (F' i F'') wyznacza główne osi bezwładności względem biegunów, leżących na płaszczyźnie (ξ, η); druga zaś H' i H'' wyznacza te osi względem biegunów leżących na płaszczyźnie (ξ, ζ). Na osi η znajdziemy tylko jedną parę ognisk, gdyż moment bezwładności B względem tej osi jest większy tylko od momentu C względem osi ζ. Znajomość położenia trzech par tych ognisk pozwala wyznaczyć położenie osi głównych względem biegunów, leżących na każdej z trzech płaszczyzn głównych, przechodzących przez dany środek.

W szczególnym przypadku, jeżeli $B = C$ i, jak poprzednio, $A > B$, to ogniska G' i G'' pokrywają się ze środkiem masy, ognisko zaś H' pokrywa się z F' a H'' z F''; osi zatem η' i ξ', względem których momenty bezwładności równają się A, zbiegają się w jednym punkcie na osi ξ, względem której moment bezwładności także równa się A; otrzymujemy zatem w jednym punkcie na osi ξ w odległości $\sqrt{\frac{A-C}{m}}$ od środka masy trzy wzajemnie prostopadłe osi, względem których momenty bezwładności są równe wartości A. Wniosek ten wypowiemy w następujący sposób: gdy elipsoida bezwładności pewnej bryły, zbudowana w środku jej masy, posiada dwie osi główne wzajemnie równe, i gdy względem tych osi momenty bezwładności są mniejsze od mo-



Rys. 15.

mentu względem osi trzeciej; wtedy na osi trzeciej znajdziemy dwa ogniska, względem których elipsoida bezwładności stanie się kulą; ogniska te nazywają ogniskami równych momentów bezwładności; zatem: dwa ogniska równych momentów bezwładności posiadają bryły, których elipsoida bezwładności w środku masy posiada dwie średnice wzajemnie równe; a trzecią mniejszą od każdej z nich. Bryły zatem obrotowe mogą posiadać ogniska równych momentów na osi obrotu, gdy średnica elipsoidy, leżąca na tej osi, jest mniejszą od pozostałych średnic; t.j. gdy elipsoida bezwładności jest spłaszczona.

36. Przykład. Wyznaczyć elipsoidę bezwładności punktu materyalnego względem bieguna, dowolnie obranego w przestrzeni.

Przez dany biegun przeprowadzamy pęk osi bezwładności i względem każdej z nich obliczymy moment bezwładności danego punktu; moment ten $= mh_n^2$, gdy literą m oznaczymy masę punktu materyalnego i literą h_n odległość jego od n-tej osi, przeprowadzonej przez biegun. Odetnijmy na tych osiach watości $\rho = \pm \frac{\lambda^2}{\sqrt{mh_n^2}}$; a końce tych odcinków wyznaczają powierzchnię szukanej elipsoidy.

Rozpatrzmy następnie pewne szczególne przypadki położenia osi, przechodzących przez obrany biegun:

1) gdy oś przechodzi przez obrany biegun i dany punkt materyalny, to moment bezwładności danego punktu względem tej osi $= 0$, $\rho = \infty$ a więc oś tą przecina elipsoidę w ∞, t. j. elipsoida w danym razie przekształca się na walec; którego oś przechodzi przez dany punkt materyalny oraz obrany biegun; a ponieważ w danym przekładzie dla obranego bieguna jedną tylko taką oś znajdziemy, przeto oś ta jest największą osią elipsoidy. W celu wyznaczenia dwóch pozostałych osi przeprowadźmy przez dany biegun pęk osi prostopadłych do osi walca, a ponieważ momenty bezwładności względem tych osi są wzajemnie równe, przeto i odnośne promienie wodzące elipsoidy są wzajemnie równe. Wnioski te wysłowimy: elipsoida bezwładności punktu materyalnego, względem dowolnie obranego bieguna w przestrzeni, przekształca się w walec, którego oś przechodzi przed dany punkt materyalny i przez obrany biegun, którego przekrój jest kołowy, o promieniu $= \frac{\lambda^2}{l\sqrt{m}}$; gdy literą l oznaczymy odległość danego punktu materyalnego od bieguna. Zbudowawszy taki walec, możemy wyznaczyć moment bezwładności danego punktu materyalnego względem dowolnej osi; przechodzącej przez obrany biegun. Jasnem jest, że ze zmianą położenia bieguna zmienia się położenie osi walca i promień jego przekroju przy tej samej wartości λ. Gdy w szczególnym przypadku obierzemy biegun w danym punkcie materyalnym, wtedy promień przekroju walca przybierze wartość $= \infty$, t. j. cała jego powłoka odsunie się od nieskończoności tak, iż długość każdego promienia wodzącego, przechodzącego przez dany punkt $= \infty$, momenty zatem bezwładności danego punktu względem każdej osi, przechodzącej przez niego równają się zeru; co również wynika bezpośrednio z postawionych warunków zadania.

37. Przykład. Znaleźć szczególne właściwości elipsoidy bezwładności dwóch punktów materyalnych, względem różnych biegunów, dowolnie obieranych w przestrzeni.

Gdy obierzemy biegun nie na prostej, łączącej dane punkty, wtedy momenty ich bezwładności względem wszystkich osi, przechodzących przez taki biegun, posiadają wartości skończone; a końce odnośnych promieni ρ wyznaczają elipsoidę o skończonej wielkości średnic. Dla szczególnych położeń biegunów, gdy obierzemy je np. na prostej łączącej dwa dane punkty, wtedy elipsoidy względem tych biegunów przekształcą się w walce o przekrojach kołowych i wspólnej osi, przechodzącej przez dane punkty; promienie tych przekrojów zależą od odległości obranego bieguna od danych punktów materyalnych.

Przeprowadźmy przez biegun, nie leżący na prostej łączącej dane punkty, i przez dwa dane punkty płaszczyzną, a będzie ona płaszczyzną symetryi danego układu punktów (po obydwóch bowiem stronach tej płaszczyzny niema punktów, jest to więc szczególny przypadek symetryi); jedna więc z osi głównych szukanej elipsoidy dla dowolnego punktu tej płaszczyzny, jest prostopadłą do niej, a moment bezwładności względem tej osi równa się sumie iloczynów z mas danych punktów i kwadratów ich odległości od obranego bieguna; dwie pozostałe osi leżą w tej płaszczyźnie. Łatwo spostrzedz, że te wnioski stosują się również do prostego odcinka materyalnego.

38. Przykład. Znaleźć szczególne właściwości elipsoidy bezwładności trzech materyalnych punktów względem biegunów, dowolnie obieranych w przestrzeni.

W danym razie elipsoida bezwładności posiada dla wszelkich biegunów skończone wymiary. W szczególnym przypadku, gdy biegun obierzemy w płaszczyźnie trzech punktów; wtedy jedna z osi głównych jest prostopadłą do tej płaszczyzny.

Do określenia właściwości elipsoid bezwładności więcej złożonych układów punktów należy wogóle stosować metody ogólne, wyłożone w poprzednich paragrafach.

39. Układy płaskie punktów materyalnych. Szczególnym przypadkiem układów punktów materyalnych są układy na płaszczyźnie. Fizycznie układy takie przedstawić sobie możemy w postaci bardzo cienkich płyt materyalnych płaskich. To, cośmy powiedzieli o momentach bezwładności brył, stosuje się w zupełności do płaskich układów punktów; zachodzą tylko pewne szczególne ich właściwości, wynikające ze szczególnego sposobu rozmieszczenia punktów; właściwości te są następujące:

1) płaszczyznę układu płaskiego uważać można za jego płaszczyznę symetryi; jedna przeto z osi głównych bezwładności dla każdego punktu

tej płaszczyzny jest prostopadłą do niej, dwie zaś pozostałe leżą na tej płaszczyźnie; wobec czego mówimy w tym razie tylko o dwóch osiach bezwładności.

2) przeprowadźmy przez obrany punkt w płaszczyźnie danego układu dwie prostopadłe osi spółrzędnych x i y i prostopadle do niej oś z; to zachodzą następujące równania

$$I_x = \Sigma(m_k y_k^2); \quad I_y = \Sigma(m_k x_k^2); \quad I_z = \Sigma m_k(x_k^2 + y_k^2);$$

z których wynika, że

$$I_z = I_x + I_y,$$

czyli suma momentów bezwładności figury płaskiej, względem dwóch osi, wzajemnie prostopadłych, równa się momentowi bezwładności względem ich punktu przecięcia się.

2) Jeżeli około pewnego bieguna, na płaszczyźnie układu, obracać będziemy prostą l, to moment bezwładności I_l danego układu względem tej prostej obliczymy z wzoru 57-mego podstawiwszy w niego $\cos(z, l) = 0$; a więc

$$I_l = \cos^2(x,l) \,.\, I_x + \cos^2(y,l) \,.\, I_y - 2\cos(x,l) \,.\, \cos(y,l) \,.\, I_{1,2}.$$

4) Odłożywszy na każdej z tych osi promień $\rho = \pm\frac{\lambda^2}{\sqrt{I_l}}$, por. § 32-gi, otrzymamy jako geometryczne miejsce końców tych promieni elipsę, której równanie jest następujące

$$x^2 \,.\, I_x + y^2 \,.\, I_y - 2xy \,.\, I_{1,2} = \lambda^4.$$

5) Osi główne elipsy w danym biegunie płaszczyzny układu, nazywają się osiami głównemi w tym biegunie. Dla każdego punktu płaszczyzny kierunki tych osi się zmieniają. Momenty bezwładności względem osi leżących w płaszczyźnie układu i przechodzących przez środek jego masy, oznaczać będziemy literami A i B. Równanie elipsy bezwładności w środku masy, odniesione do osi głównych bezwładności jest następujące

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{B}}\right)^2} = 1.$$

Na osi η, gdy $B < A$, znajdziemy parę ognisk, dla których elipsa bezwładności przekształca się w koło bezwładności; znajomość położenia tych ognisk pozwala wyznaczyć główne osi bezwładności dla dowolnego bieguna, leżącego na płaszczyźnie układu.

Jeżeli oś l nie leży w płaszczyźnie układu, wtedy dla obliczenia momentu bezwładności względem tej osi, należy zastosować elipsoidę bezwładności w danym biegunie.

Warunki, pozwalające określić, czy na danej osi w płaszczyźnie układu znajduje się biegun bezwładności, znajdziemy w następujący sposób. Obierzmy na danej osi punkt O jako początek układu spółrzędnych; daną oś obierzmy za oś y, prostopadłą do niej za oś x. Na osi y w odległości y_0 obierzmy punkt O' jako początek drugiego układu osi (x', y'), przyjmując daną oś za y'; a zależność spółrzędnych tych układów wyrazi się następującemi równaniami

$$x' = x; \quad y' = y - y_0;$$

Jeżeli O' ma być punktem głównym, to powinno zachodzić równanie

$$\Sigma (m_k x'_k y'_k) = 0;$$

lub inaczej

$$\Sigma [m_k x_k (y_k - y_0)] = 0,$$

skąd otrzymamy

$$y_0 = \frac{\Sigma (m_k x_k y_k)}{\Sigma (m_k x_k)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (66)$$

Ponieważ jest tu jedno równanie z jedną niewiadomą y_0, przeto **każda prosta, leżąca w płaszczyźnie układu płaskiego punktów materyalnych posiada punkt bezwładności**; odległość tego punktu od obranego początku obliczymy z równania 65-ego. Szczególne przypadki tego równania obliczyć można jak poprzednio.

40. Uogólnienie twierdzeń o właściwościach momentów. W następującem rozpatrywaniu nazywać będziemy wogóle momentem danego układu punktów materyalnych iloczyn algebraiczny, wektorowy lub skalarny z dwóch długości i z wielkości masy i czasu; lub też — sumę takich iloczynów. A więc przez tę nazwę rozumieć będziemy: momenty bezwładności punktów i brył materyalnych względem płaszczyzn, osi lub biegunów,—momeny ich odśrodkowe;—momenty ilości ruchu i wreszcie — energię kinetyczną. Dla każdego z tych momentów dowiedliśmy, że wartość jego względem dowolnej płaszczyzny, osi lub dowolnego bieguna, składa się z wielkości dwóch takich samych momentów, z których jeden jest momentem, względem tychże płaszczyzn, osi lub biegunów środka masy danego układu:gdy w tym środku wyobrazimy sobie skupioną całą masę danego układu; drugi zaś jest takim samym momentem względem płaszczyzny lub osi; przechodzących przez ten środek lub względem bieguna, obranego w tym środku; porówn. wzory: 30-sty; 34-ty; 53-ci; 55-ty; 56 ty.

Tożsamość tych twierdzeń jest wynikiem tej wspólnej właściwości funkcyi matematycznych, określających te momenty, że funkcye te są drugiego stopnia pod względem wymiaru długości. Wzory określające te momanty są

$$\Sigma (m_k x_k^2); \quad \Sigma (m_k x_k y_k); \quad \Sigma (\mathrm{V}\, m_k \bar{v}_k \,.\, \bar{r}_k); \quad \text{oraz } \Sigma (\tfrac{1}{2} m_k v_k^2).$$

Jeżeli zastąpimy w tych wzorach daną długość sumą dwóch innych długości, z których jedna jest wielkością zmienną, odniesioną do środka masy; np. x'_k, y'_k, $\bar{r}'_k$, $\bar{v}'_k$; a druga wielkością stałą, określającą położenie lub ruch środka masy, np. wielkością x_s, y_s, $\bar{r}_s$ lub $\bar{v}_s$; to po wykonaniu odpowiednich działań matematycznych, wskazanych wyrazem, określającym dany moment, otrzymamy trojakiego rodzaju wyrazy:

1) wyrazy typu

$$\Sigma(m_k\, x'^2_k);\quad \Sigma(m_k\, x'_k\, y'_k);\quad \Sigma(\mathrm{V}\,\Sigma m_k\, \bar{v}'_k\, \bar{r}'_k)\ \text{oraz}\ \Sigma(\tfrac{1}{2} m_k\, v'^2_k);$$

które są takiemi samemi funkcyami, jak poprzednie, tylko — nowych zmiennych; t. j. wyrażają te same momenty innemi tylko zmiennemi;

2) wyrazy, będące iloczynami lub drugiemi potęgami wyłącznie ze stałych długości, które można wynieść przed znak sumy; a sumę mas wszystkich punktów zastąpić masą całego układu; są to wyrazy nast.:

$$m x_s^2;\quad m x_s\, y_s;\quad \mathrm{V}\, m \bar{v}_s\, \bar{r}_s;\quad \text{oraz}\ \tfrac{1}{2} m v_s^2;$$

i wreszcie otrzymamy wyrazy;

3) będące iloczynami ze stałych długości i ze zmiennych długości. Stałe wielkości wyniesiemy przed znak sumy, a sumy będą równe zeru; gdyż są sumami iloczynów z mas i z odległości od środka masy lub z ich pochodnych. Jeżeli bowiem określimy położenie środka masy wyrazem

$$m x_s = \Sigma(m_k\, x_k);$$

to z tego wynika, że

$$\Sigma(m_k\, x'_k) = 0;$$

a więc i

$$\Sigma\left(m_k \frac{dx'_k}{dt}\right) = 0;\quad \text{i t. p.}$$

wyrazy przeto tego rodzaju wypadną ze wzorów.

W tem właśnie określeniu środka masy leży uproszczenie podanych przekształceń.

B. Kinetyka brył materyalnych.

41. Ilość ruchu i moment ilości ruchu bryły materyalnej. Określenia ilości ruchu i momentu ilości ruchu pewnej bryły materyalnej są te same, jakie daliśmy w §§ 2-gim i 4-tym dla dowolnego układu punktów materyalnych; a mianowicie:

ilością ruchu danej bryły materyalnej nazwiemy sumę wektorową ilości ruchu oddzielnych jej punktów, a

momentem jej ilości ruchu nazwiemy sumę wektorową momentów ilości ruchu tych punktów względem obranego bieguna.