F. O uderzeniu się brył materyalnych.

62. Siły chwilowe. Jeżeli bryła materyalna po zetknięciu się z inną bryłą zmieni nagle, t. j. w krótkim okresie czasu stan swego ruchu, to powiadamy, że bryła ta doznała uderzenia. Ponieważ, każdą zmianę prędkości punktów materyalnych przypisujemy siłom; przyjmujemy przeto i w tym razie, że począwszy od chwili zetknięcia się brył do chwili ich rozejścia się, występują w punktach czy też polach ich zetknięcia się pewne siły. Przyjmujemy przeto, że bryła materyalna, uderzając w inną bryłę, doznaje działania pewnej siły, pochodzącej od bryły uderzonej; a ponieważ i bryła uderzona zmienia jednocześnie stan swego ruchu, powiadamy przeto, że doznaje ona również pewnego działania, pochodzącego od bryły uderzającej.

Siły te, w myśl prawa fizycznego wzajemnego działania, o którem mówiliśmy w. § 7-mym tego tomu, są co do swych wielkości wzajemnie równe, działają wzdłuż jednej prostej i zwroty mają przeciwne. Dwie takie siły odpowiadają przeto warunkom równowagi, które wyraziliśmy ich sumą i sumą ich momentów; porówn. wzory 11-ty i 12-ty. Ponieważ zmiana ilości ruchu, jaka zachodzi w bryle wskutek uderzenia jest dosyć znaczną w porównaniu z czasem, w jakim ona powstała, przeto wnioskujemy, że siły, jakie powstają podczas uderzenia się brył, muszą być bardzo wielkie. Ażeby wyrobić sobie przybliżony obraz wielkości tych sił; przyjmiemy np., że bryła o masie 10 *kg* po jej uderzeniu nabyła prędkości 1 *m* na sek., a okres zetknięcia się tych brył, t. j. okres uderzenia wynosi 0,001 sekundy. Jeżeli przyjmiemy następnie, z pewnem przybliżeniem, że siła ta podczas uderzenia jest stałą; to z równania

$$P = \frac{d\,(m\,v)}{d\,t};$$

po jego scałkowaniu otrzymamy

$$P \,.\, \Delta\, t = m\,v; \quad \text{i wreszcie} \quad P = \frac{m\,v}{\Delta\, t};$$

gdzie $\Delta\, t$ oznaczacza okres czasu, podczas którego bryły były w zetknięciu; a po podstawieniu przyjętych wartości otrzymamy

$$P = \frac{\frac{10}{g} \,.\, 1}{0{,}001} \cong 1000\ kg.$$

Jest to siła dosyć znaczna w porównaniu np. z ciężarem danej bryły; a będzie ona większą, jeżeli okres uderzenia będzie krótszy. Zrozumiałem przeto powinno być teraz ze stanowiska fizycznego, dlaczego np. gwódź nawet pod słabem uderzeniem młotka zagłębi się w deskę;

lub też dlaczego wytrzymałość bryły, w którą uderzymy młotkiem, może być bardzo łatwo przekroczoną; i o tyle łatwiej o ile uderzenie jest krótsze.

Z określenia uderzenia wynika jeszcze inny bardzo ważny wniosek, do którego doszliśmy już w § 57-mym przy obliczeniu nagłych zmian ruchu.

Jeżeli na bryłę, poddaną uderzeniu, działają podczas tego uderzenia siły zewnętrzne, o wielkościach nieznacznych w porównaniu z siłą chwilową, jaka powstaje podczas uderzenia; to działanie tych sił podczas uderzenia możemy pominąć; wobec bowiem znacznych zmian w ruchu brył, jakie wywołują siły uderzenia; zmiany ruchu, wywołane siłami ciągłemi w tymże okresie czasu, są tak nieznaczne, że można je pominąć. Wniosek ten byłby zupełnie ścisły, gdyby okres uderzenia trwał nieskończenie krótko; wtedy bowiem siła uderzenia $P = \infty$; a wszystkie inne siły, o skończonych wartościach, byłyby nieskończenie małemi w porównaniu z siłą uderzenia, t. j. nie wywołałyby żadnej zmiany ruchu. W świecie jednakże fizycznym nie mamy takich uderzeń ($\Delta t = 0$); przeto wniosek ten posiada tylko względną wartość; dla praktycznych jednakże celów pozostawać może w swej mocy. Wniosek ten wysłowimy: **działania sił ciągłych, przyłożonych do bryły, mogą być pominięte przy obliczaniu ruchu, wywołanego siłami chwilowemi.** Przy obliczaniu np. prędkości piłki, jaką ona otrzyma, w chwili odbicia się o ścianę, ciężaru tej piłki można nie uwzględniać, uwzględnimy go jednakże przy obliczeniu jej przed i po odbiciu się jej od ściany.

63. Przebieg uderzenia się brył. W przebiegu uderzenia się brył należy rozróżnić dwa okresy. Piewszy okres rozpoczyna się w chwili, w której bryły zetkną się w jednym punkcie, i okres ten trwa tak długo, dopóki bryły wskutek wzajemnego nacisku nie wyrównają swych prędkości. W chwili tego wyrównania bryły nie oddziaływają już na siebie; nie zmieniają stanu swego ruchu, ani też nie odkształcają się. Od tej chwili zaczyna się okres drugi uderzenia, którego przebieg zależy od fizycznych właściwości, uderzających się brył. W okresie tym zachodzi powrót odkształconych brył do pierwotnej postaci; które, zależnie od ich fizycznych właściwości, bądź powracają zupełnie do swych pierwotnych postaci podczas stykania; bądź powracają tylko częściowo; bądź wreszcie wcale nie zmieniają swojej odkształconej postaci. Bryły, które po uderzeniu się powracają do pierwotnej postaci, nazywają zupełnie sprężystemi; inne zaś niezupełnie sprężystemi lub niesprężystemi.

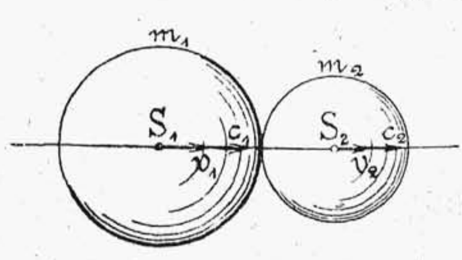
Badania nasze dotyczą zmian, jakie zachodzą w ruchu uderzających się brył od początku pierwszego okresu, t. j. od chwili zetknięcia się brył do chwili, w której wyrównają się ich prędkości, lub też do chwili ich rozejścia się.

W celu obliczenia ruchu uderzających się brył będziemy uważali je jako zmienny układ punktów, w którym działają tylko siły wewnętrzne, co do których już wiemy; że suma ich oraz suma ich momentów równa się zeru, a praca ich ze względu na odkształcalność brył, wogóle nie jest równa zeru; może ona być jednakże równą zeru w tym tylko szczególnym przypadku, o którym wspominaliśmy w końcu § 59-tego; t. j. w przypadku, w którym obydwie bryły w końcu drugiego okresu przybiorą pierwotną postać, i w tym tylko przypadku można będzie stosować do obliczeń ruchu zasadę zachowania energii kinetycznej. Jeżeli zaś obydwie bryły w końcu drugiego okresu nie zupełnie powrócą do pierwotnej postaci, wtedy do rachunku wprowadzimy wyraz pracy sił wewnętrznych, której wielkość jednakże będzie można obliczyć tylko drogą doświadczeń.

64. Określenia sposobów uderzenia się brył. Dwie bryły podczas uderzenia się stykają się z sobą cząstkami swych odkształconych powierzchni; dla uproszczenia jednakże rozpatrywań, przyjmiemy te cząstki jako punkty geometryczne, leżące na nieodkształconych powierzchniach uderzających się brył i nazwiemy je **punktami uderzeń**, a normalne do powierzchni odnośnych brył, wystawione w tych punktach nazwiemy **osiami uderzeń**. Na podstawie tych określeń przyjąć można, że osie uderzeń dwóch brył podczas ich uderzenia się wzajemnie się pokrywają.

Jeżeli środek masy bryły leży na jej osi uderzeń, to uderzenie takie nazwiemy **środkowem**, w przeciwnym razie **mimośrodkowem**; jeżeli zaś kierunek prędkości punktu uderzenia pokrywa się z kierunkiem osi uderzenia, to uderzenie takie nazwiemy **prostem**, w przeciwnym razie **ukośnem**. Uderzenie np. kuli o ścianę jest zawsze środkowem, środek bowiem kuli i jej punkt uderzenia leżą na osi uderzenia, lecz nie zawsze jest ono proste, nie zawsze bowiem kierunek prędkości punktu uderzenia pokrywa się z kierunkiem osi uderzenia.

65. Uderzenie się brył proste i środkowe. Rozpatrzmy najprostszy przykład uderzenia się brył — prostego i środkowego. W tym celu weźmy pod uwagę dwie kule, o masach m_1 i m_2, poruszające się ruchem postępowym z prędkościami c_1 i c_2 w ten sposób, że środki ich pozostają podczas ruchu na jednej prostej. Przyjmiemy dla ujednostajnienia rachunku, że zwroty tych prędkoś-



Rys. 31.

ści są z sobą zgodne; uderzenie się kul nastąpi wtedy, gdy jedna z nich dogoni drugą, t. j. gdy $c_1 > c_2$; uderzenie takie, w myśl danych określeń, jest środkowe i proste; zadanie polega na obliczeniu prędkości v_1 i v_2, tych kul jakie one posiadać będą po wzajemnem się uderzeniu. Zadanie w ten sposób postawione rozpada się na dwa zadania: na zadanie, polegające na obliczeniu prędkości, jakie posiadać będą kule w chwili wyrównania swych prędkości, t. j. w chwili, w której przestają na siebie oddziaływać; i — na zadanie, polegające na obliczeniu prędkości w chwili ich rozejścia się. Zadanie pierwsze odpowiada przypadkowi, w którym kule są z materyału niesprężystego; zadanie zaś drugie, gdy kule te są z materyału sprężystego.

Prędkości, które mamy obliczyć v_1 i v_2, przyjmiemy za dodatnie, gdy zwroty mają zgodne z prędkościami c_1 i c_2. Ponieważ przyjmujemy wogóle, że podczas działania sił chwilowych, nie uwzględnia się działania sił ciągłych, równanie przeto ilości ruchu, § 9-ty, punktów tych brył w dowolnej chwili podczas ich stykania się jest następujące

$$\frac{d\Sigma(m_k \bar{v}_k)}{dt} = 0,$$

gdzie litery v_k oznaczają prędkość punktów obydwóch brył; z równania tego po jego scałkowaniu otrzymamy

$$\Sigma(m_k \bar{v}_k) = \text{stałej} \quad \dots\dots\dots \quad (137)$$

Sumę tę wyobrazimy sobie rozdzieloną na dwie sumy; z których jedna będzie obejmować sumę ilości ruchu jednej kuli; drugą zaś takąż sumę iloczynów kuli drugiej; a ponieważ przyjmiemy w tym przykładzie, że ruchy obydwóch kul są postępowe, suma przeto $\Sigma(m_k v_k)$ dla każdej bryły będzie równą iloczynowi z jej masy i wspólnej tym punktom prędkości. Równanie przeto 137-me przekształci się na następujące

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2 \quad \dots\dots\dots \quad (138)$$

Równanie to pozostaje w swej mocy dla prędkości brył w każdej chwili podczas ich stykania się; pozostają przeto w mocy tak dla uderzeń sprężystych, jak i niesprężystych; siły bowiem wewnętrzne, chociaż podczas stykania się brył, zmieniają swe wielkości, lecz zmieniają je jednocześnie w ten sposób, że wartości ich w każdej chwili są wzajemnie równe, niezależnie od tego, czy bryły są sprężyste czy niesprężyste.

66. Uderzenie się środkowe i proste brył niesprężystych. Jeżeli fizyczne właściwości uderzających się kul są tego rodzaju, że obydwie kule posiadają tylko pierwszy okres, t. j. że po nabyciu wspólnej prędkości, nie powracają do pierwotnej postaci, wtedy

$$v_1 = v_2 = v,$$

a po podstawieniu tych wartości w równanie 138-me otrzymamy

$$v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

Z równania tego obliczymy przeto prędkość wspólną, jaką posiadają kule niesprężyste, po ich połączeniu się.

W szczególnym przypadku, w którym

$$m_1 = m_2 = m,$$

prędkość po uderzeniu się kul

$$v = \frac{c_1 + c_2}{2},$$

t. j. prędkość wspólna jest w danym przypadku średnią arytmetyczną wielkością prędkości początkowych. Jeżeli zaś prędkości początkowe są równe, lecz posiadają zwroty przeciwne; t. j. jeżeli prędkość jednej bryły jest dodatnią, drugiej zaś odjemną; to po podstawieniu w równ. 139-te

$$m_2 = m_1; \; c_2 = -c_1;$$

otrzymamy dla tego przypadku

$$v = 0;$$

t. j. dwie kule niesprężyste o równych masach i prędkościach równych lecz przeciwnych, po uderzeniu się pozostaną w spoczynku.

Wyników tych można było spodziewać się ze względu na symetryczność warunków danego zjawiska.

67. **Stracona energia kinetyczna.** Wynik tego ostatniego przypadku zwrócić powinien uwagę naszą na tę okoliczność, że po takiem uderzeniu się, ginie energia kinetyczna, jaką posiadały bryły przed ich uderzeniem się; wartość bowiem tej energii w danym przypadku przed uderzeniem wyraża się wzorem

$$2 \,.\, \tfrac{1}{2} m_1 c^2_1;$$

po uderzeniu się zaś wartość ta równa się zeru. Na okoliczność tę zwróciliśmy już uwagę w początku tych rozpatrywań; zaznaczając, że siły wewnętrzne wykonują pracę; stracona przeto energia kinetyczna idzie właśnie na pracę odkształcenia brył uderzających się i na energie fizyczne, np. ciepło, powstające wskutek uderzenia. Znając przeto wogóle prędkość, a więc i energię kinetyczną brył przed i po ich uderzeniu się, obliczyć możemy ze straconej energii pracę sił wewnętrznych. W celu tego obliczenia uważać będziemy, jak poprzednio, obydwie uderzające się bryły jako jeden układ punktów i zastosujemy do tego obliczenia równanie 22-gie, t. j. równanie równowartości pracy i energii kinetycznej; a ponieważ podczas uderzenia się brył nie uwzględniamy sił zewnętrznych; przeto wartość straconej energii kinetycznej, w pierwszym okresie uderzenia, którą oznaczymy literą T_s, wyrazimy wzorem

$$T_s = \Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k c_k^2\right) - \Sigma\left(\tfrac{1}{2} m_k v_k^2\right).$$

W przypadku, gdy bryły poruszają się ruchem postępowym; jak to było w przytoczonym przykładzie, przekształci się to równanie na następujące

$$T_s = \left(\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2\right) - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2;$$

a po podstawieniu wartości v z równania 139-ego i po uporządkowaniu wyrazów, otrzymamy

$$T_s = \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Energia ta, jakieśmy to już powiedzieli, idzie na prace odkształcenia bryły i na energie fizyczne, pojawiające się podczas uderzenia się brył materyalnych.

W szczególnych przypadkach

1) jeżeli $m_1 = m_2$, oraz $c_1 = c_2 = c$, to

$$v = c; \text{ oraz } T_s = 0.$$

Wynik ten jest bezpośrednio zrozumiały z tego względu, że bryły posiadające jednakowe prędkości, nie uderzą się, nie nastąpi przeto straty energii;

2) jeżeli $c_2 = 0$; oraz $m_2 = \infty$: to

$$v = 0, \text{ a } T_s = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2.$$

Przypadek ten zachodzi, gdy np. kafarem (m_1) zabijamy pal w ziemię ($m_2 = \infty$). Energia stracona idzie w danym razie na przezwyciężenie sił oporowych, jakie stawia ziemia wbijanemu palowi. Opór ten, który oznaczymy literą W i przyjmiemy za stały, obliczymy z równania pracy

$$-W \,.\, s = -\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2,$$

w którym s oznacza zagłębienie się pala, jakie powstaje wskutek uderzenia kafarem. Jeżeli zmierzymy to zagłębienie w jakimś szczególnym przypadku, to dla tego przypadku

$$W = \frac{Qh}{s}:$$

gdzie litera Q oznacza ciężar kafara, h — wysokość, z której on spada, a wyraz energii straconej $\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2$ zastąpiony jest wyrazem Qh. Dla praktycznych celów bierze się w rachubę tylko część tej siły W, jaką obliczymy z tego wzoru; przebieg bowiem fizyczny zabijania pali nie jest zupełnie zgodny z uderzeniem niesprężystem, jakieśmy tu przyjęli; nie cała przeto energia kinetyczna kafara idzie na pogłębienie pala;

3) przyjmijmy następnie przypadek, w którym

$$m_2 = \infty, \text{ a } c_2 \gtreqless 0.$$

Przykładem tego przypadku jest uderzenie bryłą, np. kawałkiem gliny w wagon, będący w biegu. Po podstawieniu tych wartości we wzór 139-ty i 140-ty, otrzymamy

$$v = c_2; \quad T_s = \tfrac{1}{2} m_1 (c_1 - c_2)^2.$$

Wyjaśnienie fizyczne tego zjawiska zechce czytelnik sobie unaocznić.

68. Uderzenie się środkowe i proste brył sprężystych. W poprzednim paragrafie rozpatrywaliśmy przypadek, w którym bryły materyalne po odkształceniu się poruszają się ze wspólną prędkością v. Obecnie rozpatrzmy przypadek, w którym bryły jeszcze podczas stykania się przybierają zupełnie lub niezupełnie pierwotne postaci. Zjawisko to wyrazimy matematycznie w ten sposób, że stracona na odkształcenie brył energia kinetyczna zupełnie lub niezupełnie powraca. Jeżeli energia ta zupełnie powraca, to nie mamy żadnej straty; energia przeto brył po uderzeniu się równa się w tym razie energii przed uderzeniem; inaczej mówiąc, zachodzi w tym razie zachowanie energii, które wyrazimy równaniem

$$1) \quad \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2.$$

Równanie to, łącznie z równaniem zachowania ilości ruchu, które pozostaje w mocy dla wszelkich uderzeń, t. j. równanie to łącznie z równaniem

$$2) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2,$$

daje możność obliczenia obydwóch niewiadomych v_1 oraz v_2.

Sposób tego obliczenia uprościmy sobie, gdy napiszemy powyższe równania w następujący sposób

$$m_1 (v_1^2 - c_1^2) = - m_2 (v_2^2 - c_2^2);$$

$$m_1 (v_1 - c_1) = - m_2 (v_2 - c_2);$$

a po rozdzieleniu pierwszego przez drugie, otrzymamy równanie 1-go stopnia

$$v_1 + c_1 = v_2 + c_2,$$

które łącznie z równaniem ilości ruchu przedstawia dwa równania pierwszego stopnia. Z tych dwóch równań obliczymy bezpośrednio

$$v_1 = \frac{c_1 (m_1 - m_2) + 2 m_2 c_2}{m_1 + m_2}; \quad \ldots \ldots \quad (141)$$

lub inaczej w innem zgrupoweniu

$$v_1 = \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2) + m_2 (c_2 - c_1)}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots \quad (142)$$

Niewiadomą v_2 obliczymy, zastępując w tym wzorze v_1 przez v_2, m_1 przez m_2, c_1 przez c_2 i — odwrotnie; podstawienia takie możemy uczynić, gdyż i równania 1-sze i 2-gie nie zmienią swych postaci; — po zrobieniu tych podstawień, a więc bezpośrednio z równania 141-ego

$$v_2 = \frac{c_2 (m_2 - m_1) + 2 m_1 c_1}{m_1 + m_2},$$

lub w innej postaci

$$v_2 = \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2) + m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}. \quad \ldots\ldots \quad (143)$$

Szczególne przypadki:

1) Przyjmijmy

$$m_1 = m_2 = m,$$

wtedy z wzorów powyższych obliczymy

$$v_1 = c_2; \quad v_2 = c_1;$$

t. j. gdy masy uderzających się brył są równe, to ciała po uderzeniu się zamieniają swe prędkości.

Jeżeli przyjmiemy następnie oprócz tego, że

$$m_1 = m_2, \text{ jeszcze że } c_2 = 0,$$

wtedy

$$v_1 = 0, \text{ oraz } v_2 = c_1,$$

co wyraża, że gdy jedna bryła przed uderzeniem jest w spoczynku, to przy równych masach po uderzeniu otrzyma ona prędkość bryły uderzającej, a bryła uderzająca pozostanie w spoczynku, co jest w zgodzie z poprzednim wnioskiem.

Wynik ten wytłómaczymy sobie fizycznie w następujący sposób. Bryła pierwsza, uderzając bryłę drugą, będącą np. w spoczynku, nadaje jej pewnej prędkości i zmniejsza wskutek tego swoją prędkość; co wyraża równanie zachowania ilości ruchu; przebieg ten trwa aż do chwili wyrównania się ich prędkości; od tej chwili zaczyna się okres drugi, polegający na tem, że bryły, powracając do pierwotnych postaci, wzajemnie się odpychają; co ze swej strony wywołuje ponowne zmniejszenie się prędkości bryły pierwszej, a powiększenie się prędkości bryły drugiej.

2) Przyjmijmy następnie, że $m_2 = \infty$, wtedy ze wzoru 142-go

$$v_1 = \frac{\infty}{\infty} = 2c_2 - c_1;$$

a jeżeli przyjmiemy jeszcze, że $c_2 = 0$; wtedy $v_1 = -c_1$.
Wysłowienie tego wniosku, oraz unaocznienie sobie fizyczne tego przypadku pozostawia się czytelnikowi.

69. Uderzenie się środkowe i proste brył niezupełnie sprężystych. W drugim okresie uderzenia się brył powraca często, zależnie od właściwości fizycznych uderzających się brył, pewna część energii straconej w pierwszym okresie; oznaczywszy tę część literą η, wyrazimy wielkość powracającej energii wyrazem $T_s . \eta$; straconą przeto energię podczas obydwóch okresów uderzeń wyrazimy wzorem

$$T_s(1-\eta);$$

wartość tej energii powinna być równą różnicy energii przed i po uderzeniu; na zasadzie tego mamy równanie

$$T_0 - T = T_s(1-\eta); \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (144)$$

w którem T_0 i T oznaczają wartości energii kinetycznych przed i po uderzeniu.

Równanie to może być również uważane za bezpośredni wynik równania 22-go, po podstawieniu w nie

$$L_P = 0; \quad L_W = -T_s . (1-\eta);$$

wtedy bowiem otrzymamy równanie

$$-T_s(1-\eta) = T - T_0;$$

które jest jednakowe z równaniem 144-tem.

Dla przypadku uderzających się brył prosto i środkowo, t. j. gdy ruch ich jest postępowym, podstawimy w równanie 144-te

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2;$$

$$T_0 = \tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2;$$

oraz wartość T_s z równania 140-ego, a otrzymamy równanie, które łącznie z równaniem zachowania ilości ruchu; t. j. z równaniem 138-mem, przedstawia dwa równania z dwiema niewiadomemi v_1 i v_2. Z równań tych obliczymy

$$v_1 = \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2) + \sqrt{\eta} . m_2 (c_2 - c_1)}{m_1 + m_2}$$

oraz

$$v_2 = \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2) + \sqrt{\eta} . m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} \quad . \; . \; . \; . \quad (145)$$