Drugie z tych równań wyraża moment ilości ruchu względem osi z i jest jednakowe z równaniem 2-giem równań 117-tych tomu III-go.

Ażeby wykazać, że z tych równań otrzymać można np. równanie 1-sze równań 117-tych tomu III-go, które jest wyrazem zasady równowatości pracy i energii kinetycznej; obliczmy pochodną równania drugiego, jak to wskazuje równanie, a pomnożywszy zgodnie z prawidłem, podanym w § 45-tym tego tomu, otrzymane równanie przez σ'. dt, równanie zaś pierwsze przez Θ'. dt powinniśmy otrzymać, po ich dodaniu, — zupełną różniczkę, której całka wyrazi zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej.

Z równań Lagrange'a można wyprowadzić zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej; należy tylko tak je przekształcić, ażeby wyrażały one pracę sił podczas rzeczywistego przesunięcia; w tym celu należy pomnożyć każde z tych równań przez odpowiednie jemu dq, a po ich dodaniu, otrzymamy szukane równanie. Zwrócić należy uwagę, że postępowanie to, oparte na superpozycyi przesunięć niezależnych, jest zgodne z postępowaniem, wskazanem w § 45-tym tego tomu.

W § 45 wskazaliśmy sposób znalezienia dla ruchu jednej bryły równania równowartości pracy i energii kinetycznej z równań momentów ilości ruchu; metoda zaś Lagrange'a daje sposób wyprowadzenia za pomocą obliczania cząstkowych pochodnych wyrazu energii kinetycznej równań momentów ilości ruchu; w ten sposób z jednego jedynego wyrazu energii kinetycznej danego układu i z wyrazu pracy sił przyłożonych do niego, można obliczyć równania ruchu danego układu; byleby te wielkości były wyrażone spółrzędnemi niezależnemi i to stanowi znakomitą dogodność równań Lagrange'a.

Lagrange, podając swe równania, nie opierał się na pojęciach dynamicznych, jakieśmy to starali się tutaj uczynić, i co dla nas może być pożądanem; lecz opierał się na pojęciach matematycznych; wskutek tego zakres zastosowań tego równania znacznie się rozszerza i może przekraczać granice pojęć dynamicznych i rozszerzając się do takich zjawisk fizycznych, w których pojęcia dynamiki brył nie znajdują bezpośrednio swego znaczenia.

Poleca się czytelnikowi obliczyć równania ruchu metodą Lagrange'a i znaleźć znaczenia dynamiczne oddzielnych wyrazów wahadła toczącego się, podanego w § 54-tym, oraz wahadła podwójnego, podanego w § 75-tym tego tomu.

L. Podstawy rachunku wektorowego.

101. Rodzaje wektorów. Wykłady nasze rozpoczęliśmy (tom I-szy) pojęciem o wielkościach kierunkowych, — wektorowych. Pojęcie to jesteśmy zmuszeni wprowadzić do naszych rozpatrywań przez właściwości zjawisk ruchu; których rozpatrywanie było naszem zadaniem.

Wektorem nazwaliśmy (w § 2-gim tomu I-go) pewien odcinek prostej; którego długość jest w pewnym stosunku z wielkością rozpatrywaną, a strzałka wyraża kierunek działania. W tem określeniu nie należy rozumieć, ażeby początek wektora był niezmienny w przestrzeni. Stosownie do właściwości fizycznych, jakie wyrażać mają wektory; dzielimy wektory na trzy kategorye:

1) Jeżeli pewne właściwości fizyczne (czy też kinematyczne) pewnego zjawiska wyrazić można wektorem umieszczonym w **dowolnem** miejscu przestrzeni; to wektor taki nazwiemy **przenośnym**. Przykładem tej kategoryi jest np. wektor momentu pary sił (§ 29-ty tomu I-go); — prędkość lub przyśpieszenie punktów bryły, będącej w ruchu postępowym (§ 32-gi oraz § 65-ty tomu II-go). Dla określenia położenia takiego wektora w przestrzeni, są niezbędne i wystarczające trzy **niezależne liczby**; zwane spółrzędnemi, np. dwa kąty kierunkowe prostej, na której umieszczony jest dany wektor i wielkość jego liczbowa; lub też rzuty na trzy osi. Jeżeli ten wektor ma leżeć na danej płaszczyźnie, to wystarcza dwie liczby. Mówimy przeto, że wektor przenośny posiada w przestrzeni **trzy** stopnie swobody; na danej zaś płaszczyźnie **dwa** stopnie; — (o stopniach swobody § 65-ty tomu I-go). Z tego określenia wynika, że wektory przenośne są równoważne, jeżeli proste ich działania są równoległe (np. kąty kierunkowe równe) długości równe i posiadające strzałki zgodne.

2) Jeżeli pewne właściwości fizyczne wyrazić można tylko wektorem, działającym wzdłuż jednej prostej; to wektor taki nazwiemy **przesuwnym**. Wektor przesuwny, przeniesiony na inną prostą, równoległą do niego, wyraża inne działanie i wywołuje inny skutek.

Takimi wektorami wyrażamy działanie sił, przyłożonych do danej bryły sztywnej; również — wyrażamy prędkości kątowe brył sztywnych (§ 28-my, § 62-gi tomu II-go). Wektor przesuwny w przestrzeni posiada **pięć** stopni swobody (§ 65-ty tomu I-go); — na płaszczyźnie — **trzy**.

Wektory przesuwne są równoważne, jeżeli działają wzdłuż jednej i tej samej prostej, z punktem przyłożenia w dowolnem miejscu tej prostej, długości są równe i strzałki zgodne.

3) Bywają wreszcie właściwości, które wyrazić można wektorem, przyłożonym do pewnego ściśle określonego punktu; — wektor taki nazwiemy **umiejscowionym**. Takimi wektorami wyrażamy prędkości punktów; — momenty danych sił względem pewnego bieguna; promienie wodzące punktów. Wektor umiejscowiony w przestrzeni posiada **sześć** stopni swobody (np. trzy spółrzędne punktu i trzy rzuty); na płaszczyźnie zaś **cztery** stopnie.

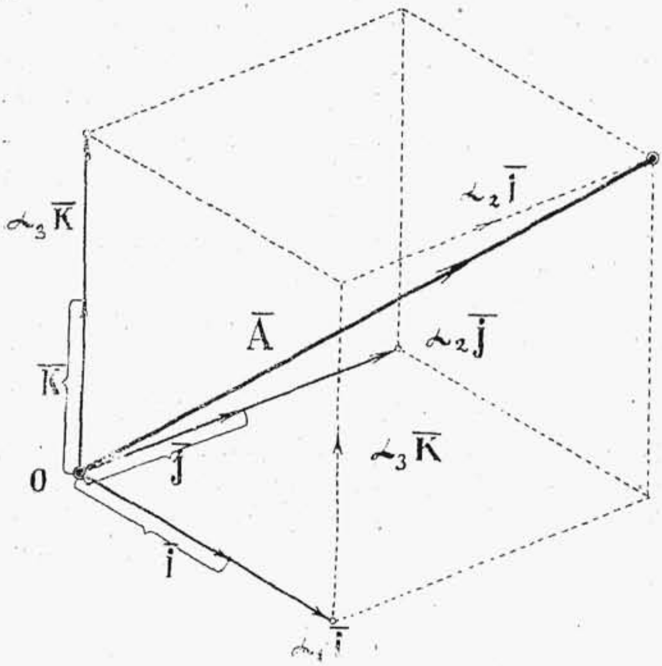
Wektory umiejscowione są równoważne, jeżeli posiadają wspólny początek, kierunek, długość i strzałki zgodne.

102. Spółrzędne wektorowe. Często bywa dogodnem stosowanie nast. spółrzędnych danego wektora. Z dowolnego punktu w przestrzeni, rys. 60-ty, wyprowadźmy **trzy wektory jednostkowe**: $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, natenczas równanie

$$\bar{A} = \alpha_1 \bar{i} + \alpha_2 \bar{j} + \alpha_3 \bar{k} \quad (255)$$

(w którem α_1, α_2, α_3 są pewne liczby) przedstawia wektor, który jest przekątnią równoległościanu, zbudowanego na trzech wektorach $\alpha_1 \bar{i}$, $\alpha_2 \bar{j}$, $\alpha_3 \bar{k}$, jak na krawędziach. W szczególnym przypadku, gdy wektory $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ są wzajemnie prostopadłe, otrzymujemy wektor $\bar{A}$, jako przekątnię prostopadłościanu; w tym przypadku napisać możemy np.

$$A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$



Rys. 60.

Wielkości α_1, α_2, α_3 są w danym razie prostopadłymi rzutami wektora $\bar{A}$ na kierunki wyznaczone przez wektory $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Jako zastosowanie tego sposobu przedstawiania wektorów wyznaczmy sumę dwóch wektorów

$$\bar{P} = \bar{A} + \bar{B} = (\alpha_1 \bar{i} + \alpha_2 \bar{j} + \alpha_3 \bar{k}) + (\beta_1 \bar{i} + \beta_2 \bar{j} + \beta_3 \bar{k}),$$

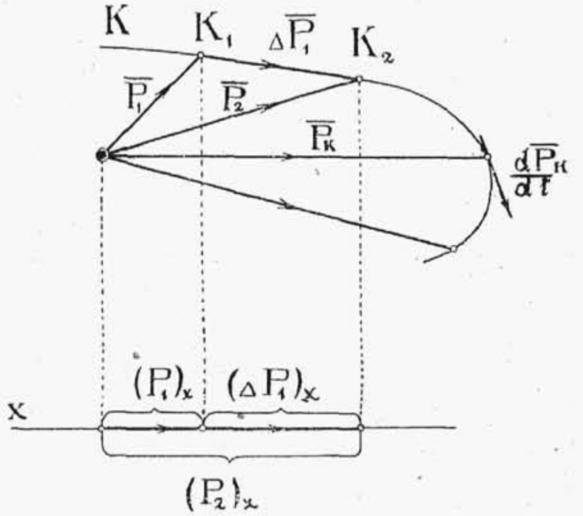
lub inaczej

$$\bar{P} = (\alpha_1 + \beta_1)\, \bar{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\, \bar{j} + (\alpha_3 + \beta_2)\, \bar{k} \quad . \; . \; . \quad (256)$$

Wyniki powyższe dają się wysłowić w sposób następujący: każdy wektor $\bar{P}$ można przedstawić jako sumę trzech wektorów, których kierunki są wskazane przez wektory jednostkowe $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$; wartość algebraiczna każdego z tych trzech jednostek wektorów równa się składowej danego wektora w kierunkach obranych.

Gdy wektor $\overline{P}$ jest sumą kilku wektorów $\overline{A}$, $\overline{B}$ . . , wtedy każda jego składowa, w kierunku obranych osi $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, jest sumą algebraiczną składowych, które otrzymamy z rozłożenia oddzielnych wektorów $\overline{A}$, $\overline{B}$ . . . w kierunkach tychże osi.

103. Przyrost i pochodna wektora. Z pojęcia różnicy (§ 7-my tomu I-go) dwóch wektorów wynika pojęcie przyrostu i pojęcie pochodnej wektora. Przyjmijmy, że wektor $\overline{P}$ obraca się podług jakiegoś prawa około swego początku, wtedy koniec jego zakreśla pewną krzywą K, rys. 61-szy. Weźmy następnie pod uwagę dwa sąsiednie położenia tego wektora np. $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, to **różnica** tych wektorów, którą oznaczamy przez $\Delta\overline{P}_1 = \overline{P}_2 - \overline{P}_1$, nazywa się **przyrostem wektora** $\overline{P}_1$, przyrost ten jest przedstawiony przez cięciwę cząstki krzywej K, zawartą pomiędzy końcami wektorów $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$.



Rys. 61.

Przypadki szczególne. Gdy długość wektora $\overline{P}_1$ nie zmienia się podczas obrotu, t. j. gdy $P_1 = P_2$, wtedy otrzymujemy trójkąt równoramienny, którego podstawą jest przyrost $\Delta\overline{P}_1$.

Gdy wektory $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ leżą na jednej prostej, wtedy $\Delta\overline{P}_1$ ma kierunek wektorów $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ i przyrost wektorowy równa się różnicy algebraicznej $(P_2 - P_1)$.

Wektor $\overline{P}$ może zatem zmieniać swoją skalarną wartość, nie zmieniając swego kierunku, co nastąpi, gdy np. wydłuży się on lub skróci się; lub też może zmieniać swoje położenie przez obrót około swego początku, nie zmieniając swej długości; lub wreszcie obydwie zmiany mogą następować jednocześnie.

Gdy kąt pomiędzy wektorami $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ mniejszym będzie, to wartość $\Delta\overline{P}_1$ będzie się zmniejszała i przechodząc do położeń nieskończenie bliskich, długość wektora $\Delta\overline{P}_1$ staje się (z pominięciem nieskończenie małych drugiego rzędu) nieskończenie małą i równą długości cząstki krzywej K; kierunek tego przyrostu jest styczny do tej krzywej, zwrot zaś zgodny z przyjętym zwrotem obrotu wektora $\overline{P}$. Jeżeli przejście wektora z położenia $\overline{P}_1$ do $\overline{P}_2$ wymagało pewnego okresu czasu, który oznaczymy przez Δt, to iloraz $\frac{\Delta \overline{P}}{\Delta t}$, lub, przechodząc do nieskończenie małych przyrostów, **iloraz** $\frac{d\overline{P}}{dt}$ nazywa się **pochodną wektora** $\overline{P}$ **względem czasu** (t).

Pochodna wektora $\overline{P}$ t. j. $\frac{d\overline{P}}{dt}$ **jest** również **wektorem**, którego kierunek wyznaczymy, wykreśliwszy krzywą, jaką zakreśla koniec wektora $\overline{P}$ podczas obrotu, wtedy bowiem **styczna** w punkcie, wyznaczonym przez koniec wektora $\overline{P}$, przedstawia **kierunek pochodnej** $\frac{d\overline{P}}{dt}$. Innemi słowy, pochodna $\frac{d\overline{P}}{dt}$ jest wektorem tego samego kierunku co przyrost $d\overline{P}$, gdyż dt jest wielkością skalarną, $d\overline{P}$ zaś jest cząstką łuku zakreślonej krzywej, i posiada kierunek stycznej.

104. Przyrost i pochodna wektora względem skalara. Określenie dodawania wektorów oraz właściwości sumy wektorów podaliśmy w § 3-cim oraz w § 5-tym tomu I-go; określenie zaś różnicy czyli odejmowania podaliśmy w § 7-mym tomu I-go. Temu sposobowi dodawania, podlegają wszystkie wektory; jak prędkości siły, momenty, prędkości wektorowe; ilości ruchu; momentów ilości ruchu i t. p. Obecnie podamy określenie pochodnej wektora względem pewnego skalara, jako zmiennej niezależnej.

Z pojęcia różnicy dwóch wektorów wynika pojęcie przyrostu i pochodnej wektora zmiennego. Przyjmijmy, że wektor $\overline{r}$ jest np. promieniem wodzącym, wyprowadzonym z punktu nieruchomego O do pewnego punktu K, poruszającego się w przestrzeni; koniec przeto tego wektora przejdzie z jednego położenia $\overline{r}_1$ do położenia $\overline{r}_2$; różnica przeto wektorów $(\overline{r}_2 - \overline{r}_1)$ wyznaczy przesunięcie punktu K; jeżeli ruch był prostolinijny; jeżeli zaś ruch był po linji krzywej, to różnica ta określi położenie i długość cięciwy; jeżeli położenia punktu będą nieskończenie bliskie, to, oznaczywszy zgodnie z symbolami rachunku różniczkowego, różnicę $(\overline{r}_2 - \overline{r}_1)$ przez $d\overline{r}$; i gdy przez dt oznaczymy okres czasu, w jakim powstał ten przyrost; — wtedy iloraz $\frac{d\overline{r}}{dt}$ nazwiemy **pochodne** wektora $\overline{r}$ względem czasu. Ponieważ $d\overline{r}$ jest cząstką drogi, jaką zakreślił punkt K, przeto $\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}$; t. j. wyraża prędkość jego w danej chwili.

Jeżeli trójkąt $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = d\bar{r}$ zrzutujemy na dowolną oś x; to otrzymamy równanie

$$(\bar{r}_2)_x - (\bar{r}_1)_x = (d\,\bar{r})_x$$

a rozdzieliwszy je przez dt, otrzymamy wzór

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_x = \frac{d\bar{r}_x}{dt} = v_x.$$

który wysłowimy: **rzut pochodnej wektora na dowolną oś równa się skalarnej pochodnej rzutu tego wektora.** Twierdzenie to wyprowadziliśmy dla przypadków rzeczywistych w § 30-tym tomu II-go dla rzutów prędkości i przyśpieszeń.

105. Znaczenia iloczynu wektorowego dwóch wektorów. W § 29-tym tomu II-go podaliśmy określenie iloczynu

$$\bar{C} = \mathrm{V}\bar{A}\,.\,\bar{B}.$$

Jeżeli wektor $\bar{A}$ będzie promieniem $\bar{r}$ wodzącym punktu ruchomego, a $\bar{B}$ wektorem prędkości kątowej, którą oznaczymy przez $\bar{\varphi}$; to wektor $\bar{C}$ będzie prędkością $\bar{v}$, jaką posiada dany punkt podczas tego obrotu t. j.

$$\bar{v} = \mathrm{V}\,\bar{r}\,.\,\bar{\varphi}.$$

Jeżeli $\bar{A}$ będzie wektorem siły; $\bar{B}$ promieniem wodzącym punktu przyłożenia siły, wyprowadzonym z obranego bieguna; $\bar{C}$ będzie wektorem momentu tej siły względem obranego bieguna

$$\bar{M} = \mathrm{V}\,\bar{P}\,.\,\bar{r};$$

porów. w § 25-tym tomu I-go.

W tenże sposób możemy wyrazić moment ilości ruchu; porów. § 23-ci tomu III-go.

Przytoczymy następujące szczególne przypadki, wynikające z tego określenia

1) Iloczyn $\mathrm{V}\bar{A}\bar{A}$, jest zawsze równy zeru, gdyż kąt $(A,A) = 0$, a zatem sinus $(A, A) = 0$. Gdy zastosujemy ten przypadek do obliczenia prędkości obrotowej pewnego punktu, to równość wektorów $\bar{r} = \bar{\varphi}$ we wzorze $\bar{v} = \mathrm{V}\,\bar{r}\bar{\varphi}$, wskazuje, że punkt ruchomy znajduje się na osi.

2) Jeżeli zmienimy porządek mnożników; to iloczyn $\mathrm{V}\bar{A}\bar{B}$ zmieni swój znak; gdyż sin $(A_1 B) = -(B_1 A)$.

106. Iloczyn wielomianów wektorowych. Moment statyczny siły $\bar{P}_k$ wyrażamy wektorowo wzorem $\bar{M}_k = \mathrm{V}\,\bar{P}_k\,\bar{r}$. Jeżeli wiele sił działa na **jeden punkt**, to napiszemy tyle równań momentów, ile jest sił; jeżeli następnie równania te dodamy wektorowo, to na zasadzie § 28-ego i równ. 22-go tomu I-go napiszemy równanie

$$\Sigma \mathrm{V} \overline{P}_k \bar{r} = \mathrm{V} (\Sigma \overline{P}_k) \bar{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (257)$$

Zastosowanie tego równania możemy uogólnić do działań na wektorach, niezależnie od tego co one przedstawiają; gdyż wynik, jaki to równanie wyraża, zależy tylko od geometrycznych stosunków pomiędzy wektorami, jakie przedstawiliśmy na rys. 37-ym tomu I-go. W ogólnem więc pojmowaniu wysłowimy wzór powyższy w sposób następujący:

suma iloczynów wektorowych, $\Sigma \mathrm{V} \overline{P}_k \bar{r}$, które posiadają wspólny mnożnik $\bar{r}$, równa się iloczynowi wektorowemu z sumy wektorowej mnożników $\overline{P}_k$ i ze wspólnego mnożnika $\bar{r}$, t. j. $= \mathrm{V} (\Sigma \overline{P}_k) \bar{r}$.

Równanie powyższe napiszemy w innej postaci, gdy po obydwóch jego stronach zamienimy porządek mnożników, oraz gdy napiszemy wpierw prawą jego stronę następnie lewą, otrzymamy wtedy równanie

$$\mathrm{V} \bar{r} (\Sigma \overline{P}_k) = \Sigma \mathrm{V} \bar{r} \overline{P}_k ;$$

wysłowienie którego pozostawiam czytelnikowi.

Ogólna postać tego równania jest następująca

$$\mathrm{V} \overline{S} (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + ..) = \mathrm{V} \overline{S} \overline{A} + \mathrm{V} \overline{S} \overline{B} + \mathrm{V} \overline{S} \overline{C} + ...$$

gdzie $\overline{S}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, przedstawiają pewne wektory.

Przekształćmy obecnie iloczyn wektorowy, gdy mnożniki składają się z sumy wielu wektorów t. j. są wielomianami; iloczyn taki ma postać następującą

$$\mathrm{V} (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \ ...) (\overline{K} + \overline{N} + \overline{P}) ;$$

w celu jego przekształcenia podstawmy $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + . = \overline{S}$, a otrzymamy

$$\mathrm{V} \overline{S} (\overline{K} + \overline{N} + \overline{P} + ...) = \mathrm{V} \overline{S} \overline{K} + \mathrm{V} \overline{S} \overline{N} + \mathrm{V} \overline{S} \overline{P} + ... ;$$

następnie podstawimy zamiast $\overline{S}$ jego właściwy wyraz i otrzymamy

$$\mathrm{V} (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + ...) \overline{K} + \mathrm{V} (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + ..) \overline{N} .... =$$
$$= \mathrm{V} \overline{A} \overline{K} + \mathrm{V} \overline{B} \overline{K} + ... + \mathrm{V} \overline{A} \overline{N} + \mathrm{V} \overline{B} \overline{N} + ... ;$$

skąd wreszcie wzór ogólny **mnożenia wektowego wielomianów wektorowych**

$$\mathrm{V}(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}..)(\overline{K} + \overline{N} + \overline{P} + .) = \mathrm{V}\overline{A}.\overline{K} + \mathrm{V}\overline{B}.\overline{K} + ... \mathrm{V}\overline{A}.\overline{N} + \mathrm{V}\overline{B}.\overline{N} + .. (258)$$

Wzór ten wysłowimy:

iloczyn wektorowy z dwóch sum wektorowych równa się sumie iloczynów wektorowych z oddzielnych dodajników.

Z tego wynika, że mnożenie wektorowe wielomianów wektorowych podlega tym samym prawidłom, jakim podlega mnożenie wielomianów algebraicznych; prawo to zwane jest prawem **rozdzielności.**

Z powyższych rozpatrywań wektorowych wynika następnie, że, jeżeli $\Sigma \bar{A}_k = 0$, to również $\Sigma \mathrm{V} \bar{A}_k \bar{S} = 0$; gdzie $\bar{A}_k$ i $\bar{S}$ oznaczają dowolne wektory; co znaczy, że każde równanie wektorowe można pomnożyć wektorowo przez pewien wektor, a równanie pozostanie w swej mocy.

Gdy jednakże zechcemy skrócić równanie, złożone z iloczynów wektorowych, przez wspólny mnożnik wektorowy, wtedy otrzymamy następujące szczególne przypadki; albo jeden z mnożników jest równy zeru, albo obydwa mnożniki są wektorami, wzajemnie równoległymi; t. j. gdy $\mathrm{V} \bar{S} \bar{A} = 0$, wtedy albo 1) $\bar{S} = 0$, albo 2) $\bar{A} = 0$, albo 3) $\bar{S} = \bar{A}$; skrócając więc takie równanie, należy mieć te przypadki na uwadze i należy zachować w tym razie podobną ostrożność, jaką zachowujemy, dzieląc algebraiczne równanie przez pewną wielkość.

Zastosowanie mnożenia wielomianu wektorowego do składania prędkości. W § 28-ym tomu II-go wyraziliśmy prędkość punktu przez iloczyn wektorowy $\bar{v} = \mathrm{V} \bar{r} \bar{\varphi}$; jeżeli zaś dany punkt ma udział w kilku obrotach około kilku osi przecinających się, § 59-ty tomu II-go, to, wyprowadziwszy promień wodzący z punktu przecięcia się tych osi do punktu ruchomego, napiszemy, wzór prędkości wypadkowej $\bar{v} = \Sigma \bar{v}_k = \Sigma \mathrm{V} \bar{r} \bar{\varphi}_k$; na zasadzie poprzedniego twierdzenia o sumie iloczynów wektorowych napiszemy ten wzór w postaci $\bar{v} = \mathrm{V} \bar{r} \Sigma \bar{\varphi}_k$, uczyniwszy $\Sigma \bar{\varphi}_k = \bar{\varphi}$, otrzymamy wzór $\bar{v} = \mathrm{V} \bar{r} \bar{\varphi}$; który jest uogólnieniem wzoru, wyprowadzenie w § 59-tym tomu II-go, drogą szczegółowych badań ruchu.

Zastosowanie do geometryi. Działania wektorowe mają również zastosowanie do geometryi. Gdy oznaczymy np. boki trójkąta przez wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$ i $\bar{c}$, to napiszemy równanie $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$; gdy pomnożymy je wektorowo przez wektor np. $\bar{a}$, wtedy otrzymamy równanie

$$\mathrm{V} \bar{a} \bar{a} + \mathrm{V} \bar{a} \bar{b} + \mathrm{V} \bar{a} \bar{c} = 0;$$

iloczyn $\mathrm{V} \bar{a} \bar{a} = 0$; suma zatem pozostałych dwóch wektorów równa się zeru, przeto ich wartości algebraiczne są wzajemnie równe, t. j.

$$a\, b \sin(a, b) = a\, c \sin(a, c),$$

po skróceniu i napisaniu w innej postaci, otrzymamy $\frac{b}{c} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(a, b)}$; jest to znane twierdzenie z trygonometryi.

107. Pochodna iloczynu wektorowego. Wektor $\bar{M}$ iloczynu wektorowego $\mathrm{V} \bar{A} \bar{B}$ jest ściśle wyznaczony przez mnożniki $\bar{A}$ i $\bar{B}$; gdy zaś wielkości mnożników będziemy zmieniać, wtedy wektor $\bar{M}$ będzie również zmieniał swą wielkość i np. nieskończenie małym przyrostom mnożników odpowiadać będą nieskończenie małe przyrosty wektora $\bar{M}$; mając to na uwadze zastosujemy określenie pochodnej iloczynu wektorowego, podane w § 29-tym tomu II-go.

Oznaczywszy przez $\overline{M}$ iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\overline{A}$ i $\overline{B}$ napiszemy $\overline{M} = \mathrm{V}\overline{A}\overline{B}$ Za niezależną zmienną przyjmiemy czas t; przyjmiemy zatem, że mnożniki wektorowe zmieniają się z czasem; w chwili więc t mnożniki przedstawione są przez wektory $\overline{A}$ i $\overline{B}$, a ich iloczyn przez wektor $\overline{M}$; po upływie zaś czasu Δt mnożniki te przybiorą wielkości $(\overline{A} + \Delta\overline{A})$, $(\overline{B} + \Delta\overline{B})$, oraz wektor ich iloczynu będzie równy $(\overline{M} + \Delta\overline{M})$; pomiędzy temi wielkościami zachodzi zależność

$$(\overline{M} + \Delta\overline{M}) = \mathrm{V}(\overline{A} + \Delta\overline{A})(\overline{B} + \Delta\overline{B}), \text{ skąd}$$

$$\Delta\overline{M} = \mathrm{V}(\overline{A} + \Delta\overline{A})(\overline{B} + \Delta\overline{B}) - \Delta\overline{A}\overline{B},$$

po przemnożeniu i skróceniu otrzymamy wzór

$$\Delta\overline{M} = \mathrm{V}\Delta\overline{A}\,.\,\overline{B} + \mathrm{V}\overline{A}\,.\,\Delta\overline{B} + \mathrm{V}\Delta\overline{A}\,.\,\Delta\overline{B}\,; \quad . \; . \; . \; (259)$$

jeżeli rozdzielimy go przez okres czasu Δt, w jaki powstały te przyrosty, i przejdziemy do granic nieskończenie małych, zważywszy przytem, że wielkość $\mathrm{V}\Delta\overline{A}\,.\,\Delta\overline{B}$, jako nieskończenie mała drugiego rzędu, wobec innych dodajników tego wzoru, może być pominiętą, otrzymamy wzór

$$\frac{d\overline{M}}{dt} = \frac{d\mathrm{V}\overline{A}\overline{B}}{dt} = \mathrm{V}\frac{d\overline{A}}{dt}\overline{B} + \mathrm{V}\overline{A}\frac{d\overline{B}}{dt}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; (260)$$

który daje prawidło różniczkowania iloczynu wektorowego; prawidło to jest, jak z tego wzoru widzimy, zgodne z prawidłem różniczkowania iloczynów algebraicznych. Zauważymy przytem, że zgodność tych prawideł jest wynikiem prawa rozdzielności, przysługującego obydwom rodzajom mnożenia.

108. Wyrażenie iloczynu wektorowego dwóch wektorów za pomocą rzutów tych wektorów na osi spółrzędnych. W tym celu obierzemy trzy wektory jednostkowe $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. wzajemnie prostopadłe i przechodzące przez obrany biegun; oznaczmy rzuty danego wektora na obrane osi przez A_x, A_y, A_z; i zróbmy takież rzuty drugiego wektora $\overline{B}$; wtedy wektor $\overline{C}$ względem obranego bieguna, przedstawimy przez wzór wektorowy

$$\overline{C} = \mathrm{V}\overline{A}\overline{B} = \mathrm{V}\,(A_x\overline{i} + A_y\overline{j} + A_z\overline{k})\,(B_x\overline{i} + B_y\overline{j} + B_z\overline{k}),$$

Wykonywamy wskazane mnożenie wielomianu podług wzoru 258-go, i, zważywszy, że

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{V}\overline{i}\overline{j} = \overline{k}, & \mathrm{V}\overline{j}\overline{k} = \overline{i}, & \mathrm{V}\overline{k}\overline{i} = \overline{j}, \\ \mathrm{V}\overline{i}\overline{i} = 0, & \mathrm{V}\overline{j}\overline{j} = 0, & \mathrm{V}\overline{k}\overline{k} = 0; \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (261)$$

oraz, że rzuty B_x, B_y i B_z promienia wodzącego są spółrzędnemi x, y, z danego punktu, otrzymamy wzór

$$\mathrm{V}\overline{A}\overline{B} = \overline{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \overline{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \overline{k}\,(A_xB_y - A_yB_x);$$

lub w postaci wyznacznika

$$V\bar{A}\bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (262)$$

Na zasadzie tego wzoru, moment np. siły $\bar{P}$, której punkt przyłożenia wyznaczony jest przez wektor $\bar{r}$, napiszemy w sposób następujący

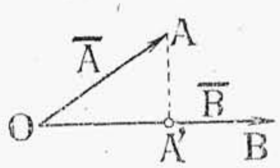
$$\bar{M} = V\bar{P}\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (263)$$

$$\text{Skąd } M_x = \begin{vmatrix} P_y & P_z \\ y & z \end{vmatrix} \text{ i t. d.,}$$

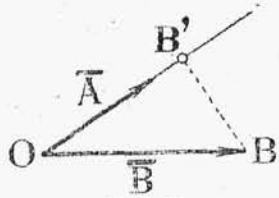
co jest zgodne z równ. 34-tem i nast. tomu I-go.

109. Iloczyn skalarny dwóch wektorów. Określenie: **iloczynem skalarnym dwóch wektorów $\bar{A}$ i $\bar{B}$ nazywamy wartość iloczynu z ich wartości bezwzględnych i z cosinusa kąta, zawartego miedzy nimi; t. j.**

$$\bar{A}\bar{B} = A \,.\, B \,.\, \cos(A, B) \quad \ldots\ldots\ldots (264)$$



Rys. 62.



Rys. 63

Wyraz ten można rozpatrywać jako iloczyn z rzutu wektora $\bar{A}$ na kierunek wektora $\bar{B}$ i z długości wektora $\bar{B}$; t. j. $\bar{A}\bar{B} = OA' \,.\, OB$, rys. 62-gi; lub też można go uważać jako iloczyn z rzutu wektora $\bar{B}$ na kierunek wektora $\bar{A}$ i z długości wektora $\bar{A}$; t. j. $\bar{A}\bar{B} = OB' \,.\, OA$; rys. 63-ci. Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest wielkością bezkierunkową, jest on wielkością liczbową. Jeżeli jeden z wektorów iloczynu tego jest siłą, drugi przesunięciem, to iloczyn taki nazwaliśmy pracą; lecz tenże iloczyn stosujemy również do innych wielkości wektorowych. Gdy np. wektorami iloczynu tego będą prędkości $\bar{v}$ punktu ruchomego, wtedy iloczyn skalarny: $\bar{v}\bar{v} = v^2$, a zatem wyraz $\frac{1}{2}\, m\bar{v}\bar{v}$ przedstawia wartość energii kinetycznej danego punktu.

Gdy jeden z wektorów iloczynu jest nieskończenie mały, wtedy otrzymamy iloczyn $\bar{A} . d\bar{B}$, — który, zastosowany do wektora siły i przesunięcia, przedstawia pracę cząstkową siły. Sumę algebraiczną wartości iloczynów $\bar{A} . d\bar{B}$ wyrazimy całką $\Sigma \bar{A} . d\bar{B}$. Gdy $d\bar{B}$ jest wektorem przesunięcia punktu przyłożenia wektora $\bar{A}$, wtedy sumę taką nazwano **całką liniową wektora $\bar{A}$ wzdłuż danej drogi**. Suma ta ma ważne znaczenie w zjawiskach wektorowo-fizycznych; a szczególnem jej zastosowaniem, jest wielkość, którą nazwaliśmy pracą danej siły wzdłuż pewnej drogi. Pojęcie więc pracy, jest szczególnym zastosowaniem ogólniejszego pojęcia matematycznego całki linjowej pewnego wektora.

Z określenia iloczynu skalarnego wynikają następujące jego właściwości matematyczne:

1) Wyraz $\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A}$; albowiem

$$\bar{A}\bar{B} = A.B.\cos(A, B), \text{ zaś}$$

$\bar{B}\bar{A} = B.A.\cos(B, A)$; a ponieważ $\cos(A, B) = \cos(B, A)$ i ponieważ wartości wektorów są te same, przeto

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A}; \qquad (265)$$

właściwość tę wysłowimy:

wartość iloczynu skalarnego nie zależy od porządku mnożników.

Mnożeniu skalarnemu przysługuje zatem prawo przemienności mnożników, które nie stosuje się do iloczynu wektorowego, § 105-ty tego tomu.

2) Gdy iloczyn $\bar{A}\bar{B} = 0$, wtedy albo $\bar{A} = 0$; albo $\bar{B} = 0$; lub $\cos(A, B) = 0$, t. j. w tym ostatnim przypadku $A \perp B$.

3) Jeżeli $\bar{i}$ jest wektorem jednostkowym, to iloczyn $\bar{A}\bar{i}$ jest wartością rzutu wektora $\bar{A}$ na kierunek wektora $\bar{i}$.

4) Jeżeli wektory $\bar{i}$ oraz $\bar{j}$ są wektorami jednostkowymi, dowolnie w przestrzeni skierowanymi, to wyraz

$$\bar{i}\bar{j} = 1 . 1 . \cos(i, j) = \cos(i, j).$$

5) Jeżeli trzy wektory jednostkowe $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — są wzajemnie prostopadłe, to zachodzą następujące zależności

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{i}\bar{j} = 0; & \bar{j}\bar{k} = 0; & \bar{k}\bar{i} = 0; \\ \bar{i}\bar{i} = 1; & \bar{j}\bar{j} = 1; & \bar{k}\bar{k} = 1. \end{array}\right\} \qquad (266)$$

6) Jeżeli zachodzą dwa równania $\bar{K}.\bar{A} = 0$, oraz $\bar{K}.\bar{B} = 0$; to z nich wynika, że kierunek wektora $\bar{K}$ jest prostopadły do kierunków wektorów $\bar{A}$ i $\bar{B}$, o ile te wektory nie równają się zeru.

Jeżeli zaś posiadamy jednocześnie trzy równania: $\bar{K}.\bar{A} = 0$, $\bar{K}.\bar{B} = 0$, $\bar{K}.\bar{C} = 0$; w których wektory $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, nie są równoległe do jednej płaszczyzny; to z tych równań wynika, że $\bar{K} = 0$; gdyż prosta nie może być prostopadłą do trzech innych prostych, nierównoległych do jednej płaszczyzny.

7) Jeżeli suma iloczynów skalarnych posiada wspólny mnożnik, to to napiszemy na zasadzie § 97-go, lub odczytamy z rys. 126-go tomu I-go.

$$\overline{A}\,.\,\overline{K}+\overline{B}\,.\,\overline{K}+\overline{C}\,.\,\overline{K}+\overline{D}\,.\,\overline{K}+\ldots=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}+\ldots)\,.\,\overline{K}\,. \quad (267)$$

t. j. suma iloczynów skalarnych ze wspólnym czynnikiem wektorowym równa się iloczynowi skalarnemu z wektora wypadkowego i z mnożnika wspólnego. Z tego równania wynika prawidło mnożenia skalarnego wielomianów wektorowych np.

$$(\overline{A}_1+\overline{B}_1+\overline{C}_1)\,.\,(\overline{A}_2+\overline{B}_2+\overline{C}_2)=\overline{A}_1\,.\,\overline{A}_2+\overline{A}_1\,.\,\overline{B}_2+\ldots\overline{B}_1\,.\,\overline{A}_2+\overline{B}_1\,.\,\overline{B}_2+ \quad (268)$$

które wypowiemy

iloczyn skalarny dwóch wielomianów wektorowych równa się sumie iloczynów skalarnych oddzielnych dodajników; t. j. zachodzi w danym razie prawo rozdzielności i łączności.

Z prawidła tego skorzystamy, gdy zechcemy np. wyrazić wartość iloczynu skalarnego dwóch wektorów przez ich rzuty na osi wzajemnie prostopadłe. Niechaj $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ będą trzy wektory jednostkowe wzajemnie prostopadłe; A_x, A_y, A_z zaś rzutami wektora $\overline{A}$ na te osi; oraz B_x, B_y, B_z takimiż rzutami innego wektora $\overline{B}$; wtedy iloczyn

$$\overline{A}\,.\,\overline{B}=(A_x\bar{i}+A_y\bar{j}+A_z\bar{k})\,.\,(B_x\bar{i}+B_y\bar{j}+B_z\bar{k});$$

a po przemnożeniu i uwzględnieniu równań 266-tych, przyjmie on postać

$$\overline{A}\,.\,\overline{B}=A_x\,.\,B_x+A_y\,.\,B_y+A_z\,.\,B_z\,.\quad .\quad .\quad . \quad (269)$$

Gdy np. $\overline{A}$ oznacza siłę; $\overline{B}$ przesunięcie $d\bar{s}$; wtedy, zważywszy, że $A_x=P_x$, i t. d.; $B_x=dx$, i t. d., wzór powyższy przekształci się na wzór $dL=\overline{P}\,.\,d\bar{s}=P_x dx+P_y dy+P_z dz$, który w § 98-ym tomu I-go otrzymaliśmy innym sposobem.

8) Iloczyn skalarny $(\alpha\overline{A})\,.\,\overline{B}=\alpha(\overline{A}\overline{B})$, gdy α oznacza wielkość skalarną; albowiem $(\alpha\overline{A})\,.\,\overline{B}=\alpha A\,.\,B\,.\cos(\alpha A,B)=\alpha\,.\,A\,.\,B\,.\cos(A,B)=$ $=\alpha\overline{A}\overline{B}$; wielkość bowiem kąta nie zależy od długości jego ramion.

9) Jeżeli $\Sigma\overline{A}_k=0$, to również $\Sigma\overline{A}_k\,.\,\overline{B}=0$, wyraz bowiem $\Sigma\overline{A}_k$ przedstawia wielobok, którego bok zamykający $=0$; iloczyn więc z wartości jego rzutu i z każdej innej wielkości równa się zeru; aby tylko mnożnik $\overline{B}$ nie posiadał wartości nieskończenie wielkiej.

Zastosowanie iloczynu skalarnego do geometryi. Dla każdego trójkąta napisać możemy równanie:

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0,$$

pomnóżmy je skalarnie przez wektor $\bar{a}$, to otrzymamy równanie

$$\bar{a}\bar{a}+\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}=0,$$

które zamienimy na skalarne, pisząc: $a^2+ab\cos(a,b)+ac\cos(a,c)=0$; następnie, po skróceniu przez a, otrzymamy równanie

$$a+b\cos(a,b)+c\cos(a,c)=0,$$

którego znaczenie geometryczne nie trudno znaleźć.

Do innego dojdziemy jeszcze wyniku, gdy napiszemy równanie trójkąta w postaci

$$\bar{a} = \bar{b} + \bar{c},$$

i pomnożymy skalarnie lewą stronę przez $\bar{a}$, prawą zaś stronę przez $\bar{b} + \bar{c}$, otrzymamy wtedy

$$\bar{a}\bar{a} = \bar{b}\bar{b} + 2\,\bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{c}.$$

Zastąpiwszy mnożenia skalarne przez algebraiczne, napiszemy

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(b, c).$$

Kąt (b, c) jest kątem zewnętrznym trójkąta; wprowadziwszy zaś do równania kąt wewnętrzny, otrzymamy znaną zależność boków trójkąta i jednego jego kąta. Czytelnik zechce na rysunku zdać sobie sprawę z tych stosunków.

110. Pochodnia iloczynu skalarnego. Określenie: **stosunek przyrostu wartości iloczynu skalarnego do przyrostu wielkości zmiennej niezależnej nazywamy pochodną iloczynu skalarnego.**

Pochodną tą wyrazimy przez pochodne mnożników, obrawszy jako niezależną zmienną czas. W tym celu nadajmy wektorom $\bar{A}$ i $\bar{B}$ przyrosty, jakie powstają w okresie czasu Δt, a napiszemy równanie

$$\lim . \frac{\Delta(\bar{A} . \bar{B})}{\Delta t} = \lim . \frac{(\bar{A} + \Delta \bar{A}) . (\bar{B} + \Delta \bar{B}) - (\bar{A}\bar{B})}{\Delta t}.$$

Po wykonaniu wskazanego mnożenia pg. wzoru 268-go i zważywszy, że iloczyn $(\Delta \bar{A} . \Delta \bar{B})$ posiada wartość nieskończenie małą drugiego rzędu, można więc go pominąć wobec wielkości pierwszego rzędu, otrzymamy

$$\frac{d(\bar{A}\bar{B})}{dt} = \bar{A} . \frac{d\bar{B}}{dt} + \bar{B} . \frac{d\bar{A}}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (270)$$

Wzór ten daje prawidło obliczenia pochodnej iloczynu skalarnego z pochodnych jego mnożników; jest ono takie same, jak dla wielkości skalarnych.

111. Iloczyn z trzech wektorów. Iloczyn z dwóch wektorów jest dwojakiego rodzaju, wektorowy i skalarny; iloczyn zaś z trzech wektorów może być trojakiego rodzaju. Gdy bowiem mamy trzy wektory $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, wtedy napisać możemy następujące iloczyny

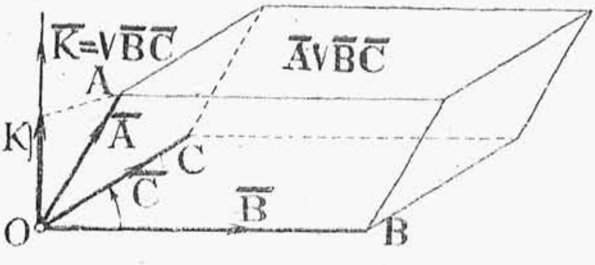
$$1)\ \bar{A} . (\bar{B}\bar{C}); \qquad 2)\ \bar{A} . \mathrm{V}\bar{B}\bar{C}; \qquad 3)\ \mathrm{V}\bar{A} . \mathrm{V}\bar{B}\bar{C},$$

które rozpatrzymy kolejno.

1) Iloczyn $\bar{A} . (\bar{B}\bar{C})$ jest iloczynem **wektora** $\bar{A}$ i **skalarnej** wielkości $(\bar{B} . \bar{C})$; przedstawia on zatem **wektor** równoległy do wektora $\bar{A}$, którego **długość** równa się długości wektora $\bar{A}$, pomnożonej przez wiel-

kość skalarną $(\bar{B} . \bar{C}) = B . C . \cos(B, C)$. Zrozumiałem jest, że wyrazy $\bar{A} . (\bar{B} . \bar{C})$; $\bar{B} . (\bar{C} . \bar{A})$ oraz $\bar{C} . (\bar{A} . \bar{B})$ przedstawiają różne wektory; iloczyn zaś $\bar{A} . (\bar{B}\bar{C}) = \bar{A} . (\bar{C}\bar{B}) = (\bar{B}\bar{C}) . \bar{A}$.

2) Wyraz $\bar{A} . \mathrm{V}\,\bar{B}\bar{C}$ jest iloczynem **skalarnym** dwóch wektorów: wektora $\bar{A}$ i wektora $\mathrm{V}\,\bar{B}\bar{C}$, jest więc on wielkością **skalarną**. Dla iloczynu tego znajdziemy znaczenie geometryczne, przyjąwszy że wektory $\bar{A}$, $\bar{B}$ i $\bar{C}$ nie leżą na jednej płaszczyźnie, i że zbiegają się w jednym punkcie. Wartość wektora $\mathrm{V}\,\bar{B}\bar{C}$, który oznaczymy przez $\bar{K}$, równa się $B . C \sin(B, C)$, jest to zatem długość, równa liczbowo wielkości pola



Rys. 64.

równoległoboku, zbudowanego na wektorach B i C; kierunek wektora $\bar{K} = \mathrm{V}\,\bar{B}\,\bar{C}$, jest prostopadły do płaszczyzny (B, C) rys. 64-ty; wzrot zaś jego wyznaczymy zgodnie z § 29-tym tomu II-go; wartość zatem iloczynu $\bar{A} . \mathrm{V}\bar{B}\bar{C}$ równa się $A . K . \cos(A, K)$; a ponieważ wartość $A . \cos(A, K)$ równa się rzutowi długości wektora $\bar{A}$ na kierunek $\bar{K}$, przeto iloczyn $A . K . \cos(A, K)$ przedstawia liczbowo objętość równoległościanu, zbudowanego na wektorach $\bar{A}$, $\bar{B}$ i $\bar{C}$, jak na krawędziach.

W statyce iloczyn ten znajduje zastosowanie, między innemi, przy obliczeniu pracy siły podczas obracania się jej około danej osi; w tym razie

$$dL = \bar{M} . d\bar{\sigma}, \text{ a ponieważ } \bar{M} = \mathrm{V}\,\bar{P}\bar{r}, \text{ przeto}$$

$$dL = d\bar{\sigma} . \mathrm{V}\,\bar{P}\bar{r}.$$

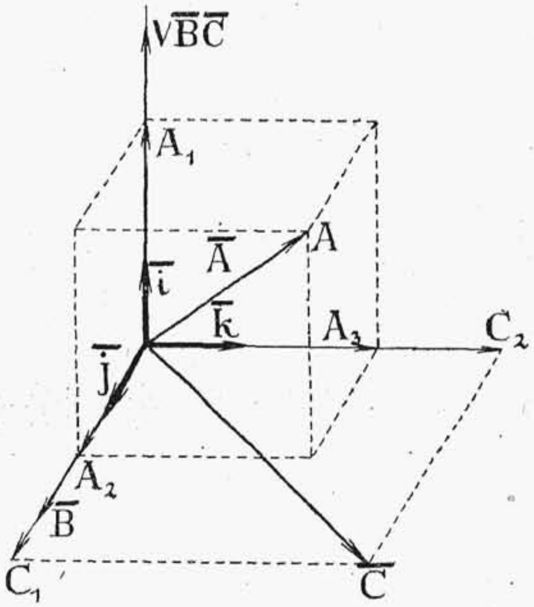
Można dowieść, że $\bar{A} . \mathrm{V}\bar{B} . \bar{C} = \bar{B} . \mathrm{V}\bar{C} . \bar{A} = \bar{C} . \mathrm{V}\bar{A} . \bar{B}$; oraz, że $\bar{A} . \mathrm{V}\bar{A} . \bar{B} = 0$.

3) Wyraz $\mathrm{V}\bar{A} . \mathrm{V}\bar{B} . \bar{C}$ jest iloczynem **wektorowym** wektora $\bar{A}$ i wektora $\mathrm{V}\,\bar{B}\,\bar{C}$, przedstawia on zatem również pewien **wektor**. Wyznaczymy położenia tego wektora **względem** wektorów danych, gdy zastąpimy działania wektorowe, wskazane przez wzór, przez skalarne, wyraziwszy wektory przez ich rzuty na układ spółrzędnych prostokątnych. W tym celu wyznaczymy położenie osi spółrzędnych przez wektory jednostkowe, rys. 65-ty, i przytem, dla ułatwienia rachunku, obieramy oś $\bar{i}$ na prostopadłej do płaszczyzny (B, C); oś $\bar{j}$ na kierunku wektora $\bar{B}$

i oś $\bar{k}$ w płaszczyźnie (B, C), a więc prostopadle do płaszczyzny (i, j). Oznaczywszy przez wskaźniki 1, 2, 3 rzuty danych wektorów na obrane osi $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ napiszemy

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k} \\ \bar{B} &= \phantom{A_1\bar{i} + {}} B_2\bar{j} \\ \bar{C} &= \phantom{A_1\bar{i} + {}} C_2\bar{j} + C_3\bar{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (271)$$

Z tych równań, uwzględniwszy przytem zależności, wyrażone przez równania 266-te, napiszemy



Rys. 65.

$$\mathrm{V}\bar{B}\bar{C} = (B_2 \cdot C_3) \cdot \mathrm{V}\bar{j} \cdot \bar{k} = \\ = B_2 \cdot C_3 \cdot \bar{i};$$

następnie

$$\mathrm{V}\bar{A} \cdot \mathrm{V}\bar{B} \cdot \bar{C} = \mathrm{V}\bar{A} \cdot (B_2 \cdot C_3)\,\bar{i} = \\ = (B_2 \cdot C_3)\ \mathrm{V}\bar{A} \cdot \bar{i},$$

podstawiwszy zamiast wektora $\bar{A}$ jego składowe, otrzymamy

$$\mathrm{V}\bar{A} \cdot \mathrm{V}\bar{B}\bar{C} = B_2C_3 \cdot \mathrm{V}\,(A_1\bar{i} + \\ + A_2\bar{j} + A_3\bar{k})\,\bar{i}$$

po przemnożeniu wektorowem. i uwzględnieniu odpowiednich prawideł tego mnożenia; otrzymamy

$$\mathrm{V}\bar{A} \cdot \mathrm{V}\,\bar{B}\bar{C} = (B_2C_3)\,(-A_2\bar{k} + \\ + A_3\bar{j}).$$

Wprowadzamy powrotnie z równań 271-szych wielkości wektorowe; w tym celu rozwiązujemy najpierw nawiasy ostatniego równania i piszemy mnożniki w następującym porządku

$$\mathrm{V}\bar{A} \cdot \mathrm{V}\bar{B}\bar{C} = (A_3C_3)\,B_2\bar{j} - (A_2B_2)\,C_2\bar{k}.$$

Z równań 271-szych podstawiamy

$$C_3\bar{k} = \bar{C} - C_2 j,$$

i otrzymamy po uporządkowaniu

$$\mathrm{V}\bar{A} \cdot \mathrm{V}\bar{B} \cdot \bar{C} = (A_2C_2 + A_3C_3)\,B_2\bar{j} - (A_2B_2)\,\bar{C} \quad \ldots \quad (272)$$

z równań 271-szych napiszemy

$$(\bar{A} \cdot \bar{C}) = A_2C_2 + A_3C_3;\ (\bar{A} \cdot \bar{B}) = A_2B_2;\ \text{oraz}\ B_2\bar{j} = \bar{B};$$

wprowadziwszy te wielkości w równanie 272-gie, otrzymamy ostatecznie

$$\mathrm{V}\bar{A} \cdot \mathrm{V}\bar{B}\bar{C} = (\bar{A}\bar{C}) \cdot \bar{B} - (\bar{A}\bar{B}) \cdot \bar{C} \quad \ldots\ldots \quad (273)$$

Wzór ten przedstawia wektor, który leży w płaszczyznie (B, C); wynik ten jest również widoczny bezpośrednio z określenia iloczynu wektorowego; szukany bowiem wektor danego iloczynu powinien być prostopadłym do wektora $V\overline{B}\overline{C}$ i wektora $\overline{A}$, rys. 65-ty, wektor zaś $V\overline{B}\overline{C}$ jest prostopadły do płaszczyzny (B, C), szukany zatem wektor leżeć powinien w tejże płaszczyźnie.

KONIEC

Warszawa, Grudzień 1921 r.