Jeżeli zaś równanie momentów dane jest w postaci trzech równań skalarnych; w postaci np. trzech równań momentów względem trzech osi prostokątnych; które to równania mogą być uważane za rzuty równania wektorowego momentów na trzy osi; to, ażeby z nich otrzymać równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, należy każde z nich pomnożyć przez różniczkę kąta obrotu danej bryły około każdej z trzech osi, a po dodaniu tych równań otrzymamy różniczkę zupełną, która będzie szukanem równaniem równowartości pracy i energii kinetycznej. Równanie to bowiem będzie wyrazem analitycznym iloczynu skalarnego dwóch wektorów. W szczególnym przypadku, jeżeli bryła obraca się około osi nieruchomej i posiada w pewnej chwili prędkość $\frac{d\sigma}{dt}$, to wystarczy pomnożyć równanie momentów przez wielkość $d\sigma$; ażeby otrzymać równanie równowartości pracy i energii kinetycznej.

Równanie przeto równowartości pracy i energii kinetycznej, zastosowane do ruchu bryły sztywnej, może być uważane jako jedno z trzech równań algebraicznych, jakiemi wyrazić można każde równanie wektorowe. Równanie zaś równowartości pracy i energii kinetycznej, zastosowane do układów zmiennych, jest niezależne od równania momentów, wyraża ono bowiem nowe właściwości danego układu, a mianowicie właściwości sił wewnętrznych.

D. Obliczenie ruchu obrotowego bryły materyalnej.

46. Ruch bryły, obracającej się około osi nieruchomej. Jeżeli bryła materyalna może tylko obracać się około osi, nieruchomej w przestrzeni, to posiada jeden tylko stopień swobody ruchu; jedno przeto równanie algebraiczne wystarczy do obliczenia jej ruchu. Równaniem tem może być tak dobrze równanie momentu ilości ruchu, jak też równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Jeżeli zastosujemy równanie momentu ilości ruchu, to obliczymy momenty sił i moment ilości ruchu danej bryły względem osi obrotu; momenty bowiem sił odporowych, występujących w łożyskach danej osi, równają się w tym razie zeru; a jedynie momenty sił, przyłożonych do bryły, wejdą do obliczenia.

Położenie w przestrzeni bryły, obracającej się około osi nieruchomej, określimy kątem σ, jaki tworzy płaszczyzna, sztywno związana z bryłą i przechodząca przez oś obrotu, — z inną płaszczyzną, przechodzącą również przez tę oś, lecz pozostającą nieruchomą w przestrzeni. Oznaczywszy chwilową prędkość literą φ; moment bezwładności bryły względem osi obrotu literą I_0; to równanie momentu ilości ruchu względem osi obrotu, zgodnie ze wzorami 89-tym i 68-mym tej części, jest następujące:

$$M_{P,\varphi} = \frac{d(I_0 \cdot \varphi)}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

w którem $M_{P,\varphi}$ oznacza moment, względem osi obrotu, sił zewnętrznych, działających na tę bryłę; a iloczyn $I_0 \cdot \varphi$ jest momentem ilości ruchu tej bryły, por. równ. 68-me. Jeżeli bryła podczas obrotu nie zmienia swego położenia **względem osi obrotu**, t. j. jeżeli jest sztywnie z nią związana, to wartość jej momentu bezwładości I_0 nie zależy od czasu; i równanie powyższe przekształci się w tym razie na następujące

$$M_{P,\varphi} = I_0 \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

Wzór ten wyraża, że moment sił zewnętrznych względem osi obrotu, równa się iloczynowi z momentu bezwładności bryły względem osi obrotu i z wartości przyśpieszenia kątowego. Zachodzi przeto w tym wzorze ten sam związek pomiędzy **momentem sił, a wywołanem przyśpieszeniem kątowem**; jaki zachodzi pomiędzy **siłą** a wywołanem **przyśpieszeniem** punktu materyalnego, na który działa dana siła; porówn. wzór 7 my tomu III-go. Wzór przeto 93-ci różni się od wzoru 7-mego tylko tem, że wielkość masy jest zastąpiona w przypadku ruchu obrotowego wielkością momentu bezwładności; przyśpieszenie linijne — przyśpieszeniem obrotowem, a siła momentem.

47. Moment sił zewnętrznych równa się zeru. W szczególnym przypadku, jeżeli wartość momentu, względem osi obrotu, sił zewnętrznych równa się zeru; to otrzymamy równanie

$$0 = \frac{d(I_0 \cdot \varphi)}{dt},$$

z któreg otrzymamy $\varphi = \varphi_0$; gdy literą φ_0 oznaczymy prędkość początkową danej bryły.

Do tychże wyników dojdziemy również, stosując równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Jeżeli bowiem podczas przesunięcia możliwego praca sił zewnętrznych, działających na bryłę, obracającą się około osi, równa się zeru, to bryła dana podczas ruchu nie otrzyma żadnego przyrostu energii kinetycznej, i wartość jej, a więc i prędkość obrotowa, pozostanie podczas obrotu bryły stałą; a więc równą energii kinetycznej ruchu początkowego, o ile moment bezwładności pozostaje stałym. Analitycznie wyrazimy to następującemi równaniami; równanie pracy jest w tym razie

$$0 = d\,(\tfrac{1}{2}\, I_0 \cdot \varphi^2);$$

z którego, po scałkowaniu otrzymamy

$$\tfrac{1}{2}\, I_0 \,.\, \varphi^2 - \tfrac{1}{2}\, I_0 \,.\, \varphi_0^{\,2} = 0; \qquad \text{i wreszcie} \qquad \varphi = \varphi_0 .$$

Gdy np. na bryłę materyalną, obracającą się około osi pionowej, działają np. **tylko** siły ciążenia wtedy, po nadaniu jej pewnej prędkości obrotowej będzie się ona obracała około tej osi ruchem jednostajnym. Będzie się ona również obracała ruchem jednostajnym około każdej innej osi, gdy oś ta przechodzić będzie przez jej środek ciężkości; praca bowiem sił ciężkości podczas tego obrotu lub moment tych sił względem takiej osi równa się zeru.

Jeżeli zaś bryła podczas swego obrotu zmienia położenie względem osi obrotu, np. zbliża się lub oddala się od osi: lub też zmienia swą postać wskutek jakichbądź choćby nieznanych sił wewnętrznych; to z powyższego równania momentów otrzymamy związek

$$I \,.\, \varphi - I_0\, \varphi_0 = 0;$$

w którym I oznacza wartość momentu bezwładności w chwili; w której prędkość obrotowa równa się wartości φ; czyli prędkość obrotowa φ jest w tym razie zmienną pomimo tego, że na bryłę nie działają siły zewnętrzne, któreby zmieniały jej ruch. Gdy np. gimnastyk, obracający się swobodnie z pewną prędkością około drążka gimnastycznego, przyciągnie swój korpus do tego drążka, wtedy nabędzie on wskutek tego większej prędkości obrotowej, zmniejszy się bowiem jego moment bezwładności względem osi obrotu; ażeby obliczyć tę prędkość, należy znać zmienność momentu bezwładności bryły, jako funkcyę czasu lub jako funkcyę położenia. Zwrócić jeszcze należy uwagę czytelnika, że w razie stosowania równania równowartości pracy i energii kinetycznej do ruchu brył, które zmieniają układ swych punktów wskutek sił wewnętrznych, należy wprowadzić do tego równania wartość pracy tych sił, t. j. należy zastosować równ. 21-sze.

48. Moment sił zewnętrznych jest wielkością stałą. Jeżeli wartość momentu sił zewnętrznych M_P jest podczas ruchu wielkością stałą, to obrót bryły jest jednostajnie przyśpieszony; a równania ruchu tej bryły pod względem matematycznym będą te same, jakie otrzymaliśmy w § 5-tym tomu III-go dla ruchu punktu materyalnego; należy tylko w tych równaniach zastąpić zmienną x zmienną σ; prędkość v prędkością kątową φ; wartość m wartością I_0; a P wartością M_P.

Przykładem ruchu obrotowego, wywołanego danemi siłami, może być wał i osadzone na nim koło; gdy bowiem na wał nawiniemy linę i do jej końca przyczepimy siłę stałą P, to moment jej względem osi będzie posiadał wartość stałą.

Moment sił zewnętrznych wględem osi obrotu jest w danym razie $P \, . \, r$, momenty bowiem sił odporowych względem tej osi równają się zeru; a sił odporowych w tym razie nie uwzględnimy; równanie przeto ruchu wału wraz z kołem jest następujące

$$P \, . \, r = I_0 \, . \, \frac{d\varphi}{dt} \, ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (94)$$

w którem I_0 oznacza w danym razie moment bezwładności względem osi obrotu: wała, koła i wogóle wszystkich brył materyalnych, związanych z wałem i obracających się razem z nim pod działaniem momentu siły P. Z równania tego wynika

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{P \, . \, r}{I_0} \, ; \text{ a po scałkowaniu}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{P \, . \, r}{I_0}\right) . \, t;$$

i następnie, po powtórnem scałkowaniu

$$\sigma = \varphi_0 \, t + \tfrac{1}{2} \, . \left(\frac{P \, . \, r}{I_0}\right) . \, t^2;$$

jeżeli przyjmiemy warunki ruchu początkowego, dla $t = 0$; $\varphi = \varphi_0$; oraz $\sigma = 0$.

Równanie momentów daje związek pomiędzy **spółrzędnemi** bryły, a **czasem**; inaczej powiedziawszy pomiędzy **położeniem** bryły a **czasem**; jeżeli zaś zechcemy obliczyć związek pomiędzy tą prędkością a położeniem bryły, t. j. związek np. pomiędzy wielkościami φ i σ; to postąpimy w ten sposób, w jaki postąpiliśmy w dynamicie punktu, § 5-ty tomu III-go; a mianowicie wyrugujemy z równania powyższego zmienną t, podstawiwszy np. $dt = \frac{d\sigma}{\varphi}$; a otrzymamy po scałkowaniu szukany związek. Do tego samego wyniku dojdziemy również, jeżeli w myśl § 45-tego pomnożymy równanie momentów przez $d\sigma$; lub też jeżeli bezpośrednio zastosujemy równanie równowartości pracy i energii kinetycznej; jakieśmy to już wskazali w dynamicie punktu, § 11-ty. Dla powyższego przykładu napiszemy następujące równanie pracy zważywszy, że praca sił odporowych równa się zeru

$$P \, . \, dx = d \left(\tfrac{1}{2} \, I_0 \, . \, \varphi^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (95)$$

w którem dx oznacza rzut przesunięcia na kierunek siły P; a wyraz w nawiasach jest wyrazem energii kinetycznej, obliczonym z rów. 78-go, Po scałkowaniu tego równania, przyjąwszy dla $x = 0$; $\varphi = \varphi_0$ otrzymamy

$$P \, . \, x = \tfrac{1}{2} \, I_0 \left(\varphi^2 - \varphi_0^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (96)$$

We wzorze tym wielkość x, wyrażająca długość odwiniętej nici, może być uważana za spółrzędną położenia bryły. Jeżeli zaś zechcemy zastosować jako spółrzędną położenia kąt obrotu bryły, jak to było poprzednio, to podstawimy w powyższy wzór $x = \sigma \,.\, r$. Łatwo się przekonać, że pochodna równania 96-ego jest równaniem momentów; równanie bowiem pracy jest pierwszą całką równania momentów; cośmy już dowiedli § 45-tym dla ogólnego przypadku.

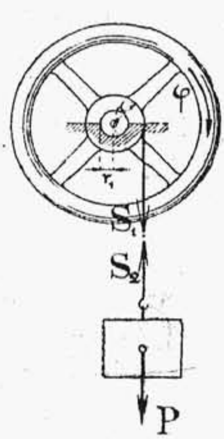
Jeżeli dla obliczenia ruchu danego wału zechcemy uwzględnić siły oporowe np. tarcie czopów w łożyskach wała; to przyjąwszy, że tarcie, występujące na obwodzie czopa, równa się wartości wyrazu $\mu\,(P+Q)$; gdzie Q oznacza ciężar wału i jego obciążenia; napiszemy w tym razie równanie momentów

$$P \,.\, r - \mu\,(P+Q)\,r_1 = I_0 \,.\, \frac{d\varphi}{dt};$$

w którem r_1 oznacza promień czopa, czyli ramię siły tarcia. Z równania tego obliczyć można drogą całkowania prędkość kątową oraz kąt obrotu wału w każdej chwili.

Inny będzie jednakże ruch danej bryły, jeżeli siła ciągnąca będzie ciężarem P bryły materyalnej, przyczepionej do liny. Chociaż bowiem wskutek tej zmiany wielkość siły, działającej na wał, nie zmieni się, obrót jego jednakże będzie inny; moment bowiem siły P wywołuje w danym razie zmianę ilości ruchu nie tylko masy wału, lecz i masy ciężaru; lub inaczej wyrażając się, — praca tej siły wywołuje wzrost energii kinetycznej nietylko wału, koła, lecz i masy ciężaru.

Należy przeto w tym razie wprowadzić do rachunku moment ilości ruchu lub też energię kinetyczną nietylko wału i koła, lecz i ciężaru jako bryły materyalnej, poruszającej się pod działaniem danej siły ciężkości. Ażeby to pojmowanie ująć rachunkiem, wyobrazimy sobie linę, na której zawieszony jest ciężar P, przeciętą, a do jej końców przyłożone dwie równe siły S_1 i S_2, rys. 20-ty; w ten sposób zadanie to rozpadnie się na dwa zadania: na zadanie obliczenia ruchu obrotowego, wywołanego siłą S_1 i na zadanie — ruchu bryły, na którą działają siły P i S_2. Do rozwiązania tych zadań możemy stosować znane równania dynamiczne; a wyraziwszy ruch każdej z tych brył siłami S_1 i S_2 i siłą P; możemy z tych równań wyrugować siły S_1 i S_2; są one bowiem na zasadzie prawa wzajemnego działania wzajemnie równe.



Rys. 20.

W celu obliczenia ruchu wału obracającego się, napiszemy tak jak poprzednio równanie momentów

$$S_1 \,.\, r = I_0 \,.\, \frac{d\varphi}{dt} \,.$$

W celu zaś obliczenia ruchu bryły, napiszemy równanie ruchu środka jej masy, oznaczywszy jego prędkość literą v

$$P - S_2 = m \frac{dv}{dt} \,,$$

a zważywszy, że na zasadzie prawa wzajemnego działania

$$S_1 = S_2 \,;$$

otrzymamy z powyższych równań równanie

$$\frac{1}{r} \,.\, I_0 \frac{d\varphi}{dt} = P - m \frac{dv}{dt} \,;$$

a po podstawieniu $\frac{dv}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}$, otrzymamy

$$P \,.\, r = (I_0 + mr^2) \,.\, \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

z którego obliczymy ruch wału w każdej chwili t.

Równanie to można również bezpośrednio otrzymać, wziąwszy pod uwagę, że równanie momentów pozostaje wogóle w mocy tak dla układów zmiennych, jak i dla niezmiennych; a to ze względu, o którym już poprzednio mówiliśmy, że w obydwóch przypadkach suma momentów sił wewnętrznych, występujących pomiędzy punktami danego układu równa się zeru. Dany przeto układ dwóch brył uważać można za zmienny układ punktów; a sumę momentów ilości jego ruchu, możemy podzielić na dwie sumy: na sumę momentów ilości ruchu wału wraz ze sztywno połączonemi z nim bryłami i na sumę momentów ilości ruchu punktów materyalnych ciężaru, na jakie wyobrazimy go sobie rozłożonym.

Moment ilości ruchu wału wraz ze sztywno połączonemi z nim bryłami względem osi obrotu wyrazimy jak poprzednio iloczynem $I_0 \,.\, \varphi$; a moment ilości ruchu ciężaru, zważywszy, że jego ruch jest postępowy, wyrazimy iloczynem z ilości ruchu środka masy i z długości odpowiedniego ramienia, wzór 67-my. Jeżeli ciężar jest swobodnie zawieszony, to środek jego znajduje się na przedłużeniu osi liny; ramię przeto (do środka liny) ilości jego ruchu jest r; a równanie momentów w tym razie jest następujące

$$P \,.\, r = I_0 \,.\, \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d(mv \,.\, r)}{dt} \,;$$

gdzie m jest masą danego ciężaru, a v jego prędkością postępową. Równanie to jest jednakowe z równaniem poprzedniem; wielkość r bowiem jest stałą; a że $v = r \cdot \varphi$; przeto równanie to przekształci się na następujące

$$P \cdot r = (I_0 + m r^2) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (98)$$

które jest jednakowe z równaniem 95-em, wyprowadzonem w inny sposób. Z równania 96-go otrzymamy równanie 92-gie, gdy podstawimy w nie $m = 0$; co jest zgodne z fizycznem pojmowaniem danego zjawiska.

Chcąc ściślej ująć rachunkiem warunki fizyczne danego zadania, należałoby wziąć jeszcze pod uwagę ilość ruchu odwijającej się liny lub jej energię kinetyczną; lecz w praktyce masa lin bywa wobec innych części mechanizmu tak małą, że wpływ jej jest niewielki na przebieg ruchu; wobec czego nie uwzględniamy jej masy w rachunku.

Chcąc zastosować do obliczenia powyższego przykładu równanie równowartości pracy i energii kinetycznej, zważymy, że suma prac sił wewnętrznych, występujących pomiędzy bryłami, równa się w danym razie zeru; równanie przeto pracy całego układu jest następujące

$$P \cdot dx = d(\tfrac{1}{2} I_0 \cdot \varphi^2 + \tfrac{1}{2} m v^2), \quad \ldots \ldots \quad (99)$$

w którem wartość w nawiasach wyraża przyrost energii kinetycznej wału, koła i ciężaru. W energetycznym sposobie pojmowania zjawisk ruchu wysłowimy to równanie: praca cząstkowa sił zewnętrznych idzie na powiększenie energii kinetycznej ruchu obrotowego i na powiększenie energii kinetycznej ruchu postępowego.

Z równania 99-tego otrzymamy równanie momentów, t. j. w danym przypadku — równ. 98-me; gdy wykonamy wskazane w równaniu 99-tem różniczkowanie i rozdzielimy je następnie przez wyraz $\varphi \cdot dt$, t. j., gdy wykonamy działanie odwrotne temu, zapomocą którego otrzymać można z równania momentów równanie pracy. Przy tem przekształceniu wziąść należy pod uwagę, że

$$dx = r \cdot \varphi\, dt; \quad \text{i} \quad v = r\, \varphi.$$

Po zróżniczkowaniu i podstawieniu tych wartości, otrzymamy

$$P\, r\, \varphi \cdot dt = I_0 \cdot \varphi \cdot d\varphi + m\, r\, \varphi \cdot r \cdot d\varphi;$$

i wreszcie otrzymamy równanie momentów

$$P \cdot r = I_0 \frac{d\varphi}{dt} + m\, r^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Obliczymy obecnie naprężenie nici, do której przyczepiony jest ciężar P. Naprężenie to unaocznimy sobie, gdy nić przetniemy; wtedy bowiem, ażeby nic nie zmienić w danym układzie brył, wypadnie do jej końców przyłożyć siły S_1 i S_2, rys. 20-ty, których wartości są wzajemnie równe, lecz znaki przeciwne. Bezpośrednio jest zrozumiałem, że w szczególnym przypadku, w którym ciężar P wisi na nici w spoczynku, naprężenie nici jest równe ciężarowi P; wrazie zaś, gdy nić spada swobodnie razem z ciężarem nie obracając wału, naprężenie jej, gdy nie uwzględnimy jej masy, równa się zeru. Lecz w danym razie siła np. S_2 łącznie z siłą ciężkości P wywołuje ruch masy zawieszonego ciężaru; ażeby przeto obliczyć to naprężenie, należy wziąść pod uwagę znany już ruch danego ciężaru i z ruchu tego obliczyć siłę, wywołującą ten ruch. Na daną przeto bryłę działa siła ciągnienia S_2 i siła ciężkości P, rys. 20-ty; pod działaniem tych sił masa ciężaru otrzymuje przyśpieszenie, które oznaczymy literą p_c; i które obliczyć można z równania ruchu. Równanie przeto dynamiczne ruchu środka masy tej bryły jest następujące

$$(P - S_2) = m \cdot p_c, \quad \text{z którego mamy}$$

$$S_2 = P - m p_c, \quad \text{lub} \quad S_2 = m (g - p_c).$$

Z równania tego wynika, że wartość S_2 zmniejsza się z powiększeniem przyśpieszenia p_c bryły; a w przypadku $p_c = g$, $S_2 = 0$.

Wartość przyśpieszenia p_c obliczymy z równania 97-ego, wziąwszy pod uwagę, że

$$p_c = r \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

po podstawieniu zatem tej wartości w równanie powyższe otrzymamy

$$S_2 = P \cdot \left(1 - \frac{m r^2}{I_0 + m r^2}\right).$$

Z równania tego wynika, że wartość S_2 zmniejsza się ze zmniejszeniem się wartości I_0; a w szczególnych przypadkach, jeżeli

$$I_0 = 0; \quad \text{otrzymamy} \quad S_2 = 0;$$

jeżeli zaś

$$I_0 = \infty; \quad \text{otrzymamy} \quad S_2 = P.$$

Pozostawia się czytelnikowi znalezienie znaczenia fizycznego tych przypadków.

W celu unaocznienia sobie ilościowych stosunków, jakie zachodzą w tym ruchu, przyjmiemy, dla uproszczenia obliczenia, że na wale niema koła; a wtedy moment bezwładności wała, który wyobrazimy sobie w postaci walca o masie m_w

$$I_0 = \tfrac{1}{2} m_w \cdot r^2;$$

a zatem

$$S_2 = P\left(1 - \frac{m}{\frac{1}{2} m_w + m}\right).$$

Przyjąwszy jeszcze, że np. $m_w = m$, otrzymamy

$$S_2 = \tfrac{1}{3} P,$$

t. j. naprężenie nici w danych warunkach równa się $^1/_3$ przyczepionego do niej ciężaru.

49. Moment sił zewnętrznych jest zmienny. Rozpatrywaliśmy dotychczas dwa przypadki ruchu obrotowego bryły około osi nieruchomej, wywołane danemi siłami: obrót **jednostajny**, który zachodzi, gdy moment, względem osi obrotu, sił, przyłożonych do bryły, równa się zeru; — lub gdy ich praca przystosowana równa się zeru; i obrót **jednostajnie przyśpieszony**, gdy moment ten podczas ruchu jest wielkością stałą. Wogóle zaś, jeżeli moment sił jest zmienny (w zależności od czasu lub od położenia bryły), to **przyśpieszenie** obrotowe jest również **zmienne**.

Przykładem zmiennego obrotu około osi nieruchomej może być ruch bryły, obracającej się np. około osi poziomej przed działaniem własnego ciężaru, czyli ruch t. zw. **wahadła bryłowego pospolitego.**

W celu określenia położenia takiego wahadła w przestrzeni, przeprowadzimy przez środek jego masy i przez oś obrotu płaszczyznę, sztywno związaną z tem wahadłem i razem z niem obracającą się; a kąt σ, jaki tworzy ta płaszczyzna z drugą płaszczyzną nieruchomą, przechodzącą przez oś zawieszenia, wyznacza położenie wahadła w przestrzeni; płaszczyznę nieruchomą obierzemy pionowo; przekrój takiego wahadła, prostopadle do osi zawieszenia, przedstawia rys. 21-szy.

Przyjmiemy następnie, że na bryłę, w ten sposób zawieszoną, działa tylko siła ciążenia oraz siły odporowe osi obrotu; i że oporów powietrza i tarcia, jakie występują podczas obrotu bryły, w danem obliczeniu nie uwzględnimy.

W celu napisania równania momentów, wyobrazimy sobie, że siły ciężkości oddzielnych punktów danej bryły przyczepione są do tychże punktów; suma ich przeto momentów równa się momentowi siły ciężkości, przyczepionej do środka masy; moment zaś sił odporowych osi zawieszenia względem tejże osi równa się zeru. Oznaczywszy literą s odległości środka ciężkości od osi obrotu, literą I_0 moment bezwładności bryły względem osi zawieszenia; napiszemy równanie momentów na zasadzie równania 89-tego; rys. 21-szy

$$m g \, . \, s \, . \sin \sigma = \frac{d\,(I_0 \varphi)}{d t}\,;$$

a podstawiwszy w nie, stosownie do przyjętych oznaczeń na rys. 21-szym

$$\frac{d\varphi}{d t} = -\frac{d^2 \sigma}{d t^2};$$

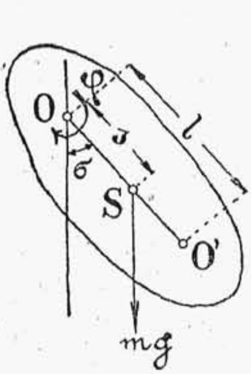
otrzymamy równanie ruchu

$$I_0 \cdot \frac{d^2 \sigma}{d t^2} + m g \, . \, s \, . \sin \sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, jednakowe pod względem algebraicznym z równaniem 95-tem tomu III-go; gdy podstawimy w równanie 95-te tomu III-go

$$\frac{g}{l} = \frac{m g \, . \, s}{I_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Wyniki przeto obliczeń, otrzymane z równania 95-gó tomu III-go, mogą być bezpośrednio zastosowane do danego wahadła, gdy w odpowiednie wzory podstawimy wielkości, wskazane wzorem 101-ym. Okres np. podwójnego wahnięcia wahadła bryłowego obliczymy, przy tychże zastrzeżeniach, jakieśmy tam czynili, bezpośrednio ze wzoru 101-go tomu III-go; gdy podstawimy w niego wartości, wskazane równaniem 58-mem tomu III-go; okres ten



Rys. 21.

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I_0}{m g \, . \, s}} \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Przyjąć przeto można, że wielkość obliczona z równ. 101-go

$$l = \frac{I_0}{m \, . \, s}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

wyraża długość wahadła matematycznego, które wykonywa przy jednakowych warunkach początkowych taki sam ruch, jaki wykonywa wahadło bryłowe o momencie bezwładności I_0, masie m i którego środek ciężkości znajduje się na odległości s od osi zawieszenia. Z tych względów wahadło matematyczne o wskazanej długości l, nazywają wahadłem zastępczem danego wahadła bryłowego.

Jeżeli na prostopadłej, opuszczonej ze środka masy na oś zawieszenia O, odetniemy od punktu O ku temu środkowi długość l, to otrzymamy punkt O' rys. 21-szy, zwany **środkiem wahań danej bryły względem danej osi zawieszenia.**

Ruch przeto tego środka, t. j. prędkość obrotowa i przyśpieszenie obrotowe jest w każdej chwili takie same, jakie posiada dana bryła w tejże chwili. Środek wahań ma jeszcze tę właściwość, że jeżeli przeprowadzimy przez niego oś równoległą do osi zawieszenia, przechodzącej przez O, i zawiesimy na niej daną bryłę zamiast na osi O; to ruch tego nowego wahadła, t. j. prędkość i przyśpieszenie kątowe w każdej chwili, a więc i okresy wahnięć około tej nowej osi są takie same, jakie były, gdy bryła obracała się około osi O. W celu tego dowiedzenia obliczymy długość wahadła zastępczego tego nowego wahadła; a w tym celu przekształcimy wzór 103-ci, podstawiwszy w niego, na zasadzie równania 53-go tego tomu

$$I_0 = m \cdot s^2 + I_S;$$

gdzie I_S oznacza moment bezwładności wahadła względem osi, przechodzącej przez środek jego masy i równoległej do osi zawieszenia. Po podstawieniu tej wartości w równ. 103-cie otrzymamy

$$l = s + \frac{I_s}{m \cdot s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Obliczymy teraz długość l' wahadła zastępczego, zawieszonego na osi O'. Odległość środka masy od tej nowej osi zawieszenia równa się $(l - s)$; na podstawie przeto równania 104-go napiszemy

$$l' = (l - s) + \frac{I_S}{m(l - s)}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

obliczymy następnie wartość I_S z równania 104-ego, a po podstawieniu jej w równ. 105-te, otrzymamy

$$l' = l;$$

czyli ruch wahadła około osi O' będzie taki sam, jaki był około osi O przy jednakowych warunkach ruchu początkowego. Do tegoż wniosku dojdziemy również bezpośrednio, jeżeli równanie 104-te napiszemy w postaci

$$s(l - s) - \frac{I_S}{m};$$

z równania tego bowiem wynika, że wielkości $(l - s)$ i s mogą się wzajemnie zastąpić, a równanie to nie zmieni się.

Przytoczymy jeszcze następujące właściwości ruchu wahadła bryłowego: z równania 104-go wynika, że dla $s = 0$ i dla $s = \infty$; wartość $l = \infty$; a z nią i $T = \infty$. I rzeczywiście, jeżeli oś zawieszenia przeprowadzimy przez środek masy, t. j. jeżeli $s = 0$, to bryła pozostawać będzie w spoczynku lub obracać się będzie ciągle z jednym zwrotem, co odpowiada nieskończenie długiemu okresowi wahnięcia. Gdy następnie przesuwać będziemy oś zawieszenia od środka masy do ∞; okresy wahnięć T będą otrzymywały różne wartości od $-\infty$ do $+\infty$; a na podstawie ciągłości funkcyi matematycznych wywnioskujemy, że pomiędzy temi wartościami powinny być jakieś wartości najmniejsze; które będą odpowiadały ściśle określonemu położeniu osi zawieszenia wahadła. Postawimy sobie teraz zadanie znalezienia położenia takiej osi, na której bryła zawieszona wykona wahnięcia w najkrótszym czasie. W celu uproszczenia rozpatrywań ograniczmy na razie to zadanie warunkiem, że szukana oś ma być równoległą do pewnej prostej, danej w przestrzeni.

Okres wtedy wahnięć będzie najkrótszy, gdy długość l wahadła zastępczego będzie najkrótszą; przy zmiennej przeto odległości s wartość l powinna być najmniejszą; co nastąpi dla wartości, którą oznaczymy literą s_1 i którą obliczymy z równania

$$\frac{dl}{ds}=0;$$

z równania przeto 104-go, po jego zróżniczkowaniu mamy

$$1-\frac{1}{s_1^2}\cdot\frac{I_s}{m}=0,$$

z którego

$$s_1=\sqrt{\frac{I_s}{m}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (106)$$

Oś przeto zawieszenia, przeprowadzona równolegle do danej osi na wskazanej odległości s_1 od środka masy, jest osią, około której dana bryła wykona wahanie o najmniejszych okresach. Jeżeli następnie zmieniać będziemy kierunek osi, do której oś zawieszenia ma być równoległą, to zmieniać się będzie również wartość I_s momentu bezwładności danej bryły względem osi, a z nią zmieniać się będzie również wartość s_1 stosownie do równ. 106-go; a więc i okres T. Ze wszystkich wartości I_s najmniejszą jest wartość momentu bezwładności względem osi, przechodzącej przez wielką średnicę elipsoidy bezwładności, zbudowanej w środku masy danej bryły. Wartość przeto T będzie bezwzględnie najmniejszą, gdy bryłę daną zawiesimy na osi równoległej do kierunku wielkiej średnicy elipsoidy bezwładności, zbudowanej w środku jej masy na odległości, obliczonej ze wzoru 106-go. Geometrycznem miejscem tych osi jest walec o przekroju kołowym, którego promień obliczymy z równ. 106-go, a osią tego walca jest wielka średnica elipsoidy.

Do obliczenia równania ruchu wahadła bryłowego można również zastosować równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Równanie to jest następujące

$$mg\,.\,d\,(s\,.\,\cos\sigma)=d\left[\tfrac{1}{2}I_0\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right]; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (107)$$

z którego można obliczyć żądane związki.

O tożsamości tego równania z równaniem 100-em, przekonamy się, wykonawszy wskazane w tem równaniu różniczkowanie i rozdzieliwszy je przez $d\sigma$.

E. Obliczenie ruchu płaskiego brył materyalnych.

50. Warunki powstawania ruchu płaskiego brył materyalnych. Ruch płaski bryły określimy w § 32-gim tomu II-go jako ruch, w którym punkty