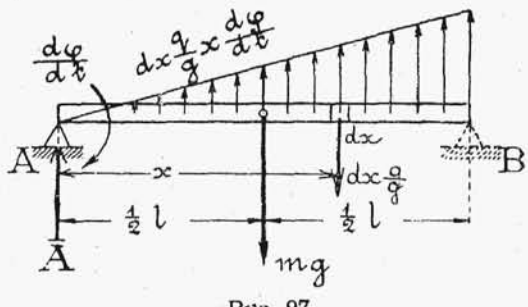
pod działaniem tylko sił stycznych i siły ciężkości. Wykres tego obciążenia przedstawiliśmy na rys. 27-ym. Siłę odporową A obliczymy z warunku równowagi sił przyłożonych do danej belki. Równanie to jest następujące

$$A + \int_0^l \frac{q \cdot dx}{g} \cdot x \frac{d\varphi}{dt} - mg = 0;$$

z którego obliczymy

$$A = mg - \tfrac{1}{2} ml \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$



Rys. 27.

a po podstawieniu z równania ruchu, z równ. 126-tego, — wartość przyśpieszenia otrzymamy

$$A = mg\left(1 - \frac{ml^2}{4 I_A}\right).$$

Jeżeli wyobrazimy sobie belkę w postaci pręta, co w wielu przypadkach będzię zgodne z rzeczywistością, to, ponieważ

$$I_A = \tfrac{1}{3} m l^2;$$

otrzymamy

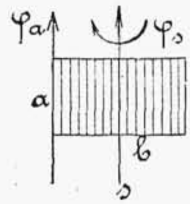
$$A = \tfrac{1}{4} mg.$$

Siła więc odporowa jednej podpory, w chwili usunięcia drugiej, stanowi tylko połowę wartości siły odporowej belki, wspartej na obydwóch podporach.

W rozwiązaniu tego zadania można pominąć metodę d'Alembert'a, a natomiast zastosować równanie dynamiczne ruchu środka masy. Obliczywszy bowiem z równania dynamicznego momentów przyśpieszenie tego środka, obliczymy z równania ruchu środka masy siły nieznane, wywołujące ten ruch, t. j. jak w danym przykładzie siłę odporową; postępowanie to jest przeto takie same, jakie stosowaliśmy do obliczenia sił odporowych brył nieswobodnych; a mianowicie wpierw obliczaliśmy ruch, a następnie siły — odporowe.

57. Obliczenie ruchu początkowego bryły w chwili nagłej zmiany ruchu. Prostokąt materyalny o bokach a i b, rys. 28-my, obraca się z prędkością stałą φ_s około osi pionowej s; przechodzącej przez środek masy i równoległej do boku a; nagle oś ta zostaje usunięta, a prostokąt zostaje zmuszony obracać się około osi innej, przechodzącej np. przez bok a; obliczyć prędkość φ_a, jaką otrzyma prostokąt w chwili rozpoczęcia obrotu około nowej osi.

W celu zastosowania do tego zadania wyłożonych zasad dynamiki, wyobrazimy sobie; że unieruchomienie boku a zostało wywołane pewnemi siłami, przyłożonemi do niego; symbolem φ_s oznaczymy prędkość początkową ruchu tego prostokąta; w ten sposób mamy obliczyć ruch bryły, na którą działają siły i której ruch początkowy jest φ_s. Obrawszy oś a za oś momentów, napiszemy równanie dynamiczne momentów względem tej osi



Rys. 28.

$$\frac{dM_v}{dt} = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (127)$$

W myśl bowiem przyjętych założeń, moment siły ciężkości i momenty sił, przyłożonych do boku a, względem obranej osi momentów, równa się zeru. Pomimo przeto zmiany ruchu prostokąta moment ilości jego ruchu względem osi a, nie doznaje w tych warunkach żadnej zmiany; lecz z tego nie wynika, że i prędkość obrotowa się nie zmienia. W celu obliczenia prędkości φ_a scałkujemy równanie 127-me i otrzymamy

$$M_v - M_{v,0} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (128)$$

w którem M_v oznacza moment, względem osi a, ilości ruchu prostokąta, obracającego się około tejże osi; a $M_{v,0}$ moment względem tejże osi a ilości ruchu prostokąta, obracającego się około osi s [1]).

Moment M_v na zasadzie odnośnych wzorów, wzór 68-my,

$$M_v = I_a \cdot \varphi_a;$$

gdzie I_a oznacza moment bezwładności prostokąta względem osi a.

Moment ilości ruchu względem osi a prostokąta, obracającego się około osi s, obliczymy z wzoru 69-tego; moment ten w danym przykładzie

$$M_{v,0} = I_s \cdot \varphi_s.$$

Mamy przeto z równania 128-go

$$I_a \cdot \varphi_a - I_s \cdot \varphi_s = 0;$$

skąd

$$\varphi_a = \frac{I_s}{I_a} \cdot \varphi_s;$$

lub po podstawieniu dla danego przykładu

$$I_a = I_s + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3} m b^2; \qquad \text{oraz} \qquad I_s = \tfrac{1}{12} m b^2$$

otrzymamy

$$\varphi_a = \tfrac{1}{4} \varphi_s.$$

[1]) Należy bowiem rozróżniać oś obrotu od osi, względem której obliczamy momenty; nacośmy już zwracali uwagę w przypisku na str. 60-tej tego tomu.

W chwili przeto unieruchomienia boku a, prostokąt dany obraca się około tego boku z chwilową prędkością, równą $\frac{1}{4}$ prędkości, jaką posiadał podczas obrotu około osi s. Dalszy ruch tego prostokąta zależy od warunków fizycznych, w jakich ten prostokąt znajdować się będzie. Jeżeli oś obrotu a zostaje fizycznie utrzymaną, to prostokąt obracać się będzie około tej osi ze stałą prędkością φ_a. Jeżeli zaś w tej chwili po zmianie obrotu oś a zostanie usunięta; to powstanie ruch swobodny prostokąta z początkową prędkością $\bar{\varphi}_a$; obliczenie tego ruchu może być wykonane w tenże sposób, w jaki obliczyliśmy ruch pręta w § 52-gim.

W przykładzie powyższym na dany prostokąt działały siły, które nie dawały momentu względem osi obrotu a; obliczmy teraz ruch, jaki otrzyma ten prostokąt, jeżeli będą na niego działały siły, dające moment względem osi a.

Obliczenie tego ruchu zmieni się w ten sposób; że zamiast równania 127-mego, otrzymamy w tym przypadku równanie dynamiczne momentów względem osi a o następującej postaci

$$\frac{dM_v}{dt} = M_P\,;$$

w którem M_P oznacza moment sił zewnętrznych, działających na prostokąt. Całka tego równania jest następująca

$$M_v - M_{v,0} = \int_0^{\Delta t} M_P\,.\,dt\,;$$

w którym Δt oznacza okres czasu, w którym działa moment sił zewnętrznych. Ponieważ jednakże okres ten w przypadkach **nagłych** zmian ruchu jest znikomy; przeto i wartość tej całki posiada wartość znikomą; jeżeli M_P posiada wartość skończoną.

Wyrażając się matematycznie powiemy, że wartość całki powyższej jest nieskończenie małą w porównaniu z różnicą wartości momentów ilości ruchu i może być z tego powodu pominiętą.

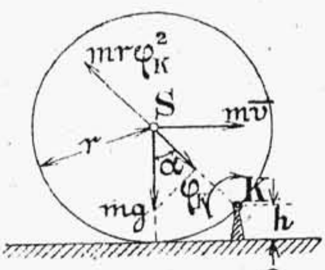
Poglądowo unaocznimy sobie ten wniosek w następujący sposób: siły zewnętrzne, działające na pewną bryłę, podczas działania na nią sił chwilowych, nie mają czasu do wywołania znaczniejszej zmiany ruchu tej bryły; zmiana przeto ruchu takiej bryły pochodzić może tylko od działania sił chwilowych, które, w myśl danego ich określenia, są tak wielkie, że w przeciągu znikomo krótkiego czasu wywołują znaczne zmiany ruchu. Wogóle przeto powiedzieć możemy, że w obliczeniu ruchu, wywołanego siłami chwilowemi, działanie sił skończonych może być pominięte.

58. Przykład nagłej zmiany ruchu. Krążek materyalny ślizga się po płaszczyźnie poziomej ruchem postępowym jednostajnym w kierunku prostopadłym do swej osi; w pewnem miejscu swej drogi trafia on na przeszkodę materyalną o wysokości h; około której się obróci. Jaką prędkość postępową powinien mieć ten krążek, ażeby, obróciwszy się około punktu zetknięcia się z przeszkodą,—przetoczył się przez tę przeszkodę, rys. 29-ty.

Ażeby krążek dany mógł przetoczyć się przez tę przeszkodę, powinien unieść się na wysokość h; energia jego kinetyczna przeto, w chwili obrotu około punktu zetnięcia się z przeszkodą, powinna być większą a przynajmniej równą pracy ciężkości walca, jaką on wykona, przy podniesieniu się; t. j. powinna być

$$\tfrac{1}{2} I_K \cdot \varphi_K^2 \geqq mgh;$$

gdzie φ_K oznacza prędkość początkową obrotu krążka około punktu zetknięcia się jego z przeszkodą. Prędkość tę obliczymy jako obrót początkowy nagłej zmiany ruchu danego walca; § poprzedni.



Rys. 29.

Równość momentów ilości ruchu po i przed uderzeniem względem bieguna, obranego w K, wyrazimy równaniem

$$I_K \cdot \varphi_K - mv \cdot (r - h) = 0; \quad . \quad (129)$$

a po podstawieniu z tego równania wartości φ_K w poprzednią nierówność, otrzymamy szukany warunek

$$v \geqq \frac{1}{r-h} \cdot \sqrt{2 \frac{I_K}{m} \cdot g \cdot h.}$$

Ażeby obliczyć siłę odporową, jaka występuje w punkcie zetknięcia się krążka z przeszkodą, zastosujemy równanie ruchu środka masy. Jeżeli w obliczeniu tem nieuwzględnimy siły tarcia, to siła odporowa występuje normalnie do obwodu krążka, t. j. występuje wzdłuż promienia KS; oznaczmy tę siłę literą $\bar{N}$ ze zwrotem ku środkowi krążka, a napiszemy równanie ruchu środka masy

$$\bar{N} + m\bar{g} = m \frac{d\bar{v}_s}{dt}.$$

Zrzutujmy to równanie na normalną KS, a otrzymamy

$$mg \cdot \cos\alpha - N = m\, r\, \varphi_K^2;$$

skąd, po podstawieniu odnośnych wartości, obliczymy siłę odporową N.

Zadanie. Obliczyć wysokość przeszkody, przy której krążek po uderzeniu oddzieli się od niej, jeżeli nie był do niej przymocowany.

Odpowiedź:

$$h \leqq r \cdot \frac{I_K}{2\,mr^2 + I_K}.$$

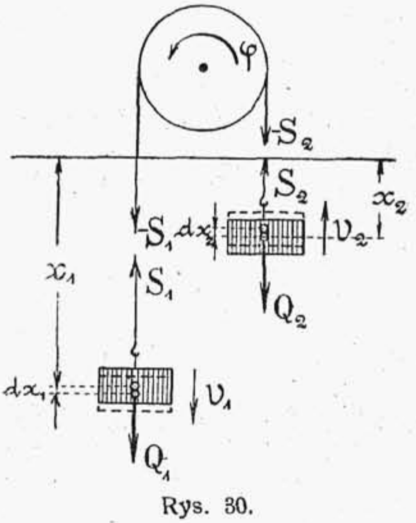
Zadanie. Obliczyć tę siłę odporową, stosując do tego metodę d'Alembert'a.

59. Przyrząd Atwood'a. Przez krążek materyalny, obracający się około osi poziomej nieruchomej, przerzucona jest nić nierozciągliwa, na której końcach przyczepiono ciężarki Q_1 i Q_2; obliczyć ruch np. **ciężarka** Q_1, **nieuwzględniając** oporów, jakie powstają podczas ruchu, i nie uwzględniając masy nici; rys. 86-ty.

Ciężar Q_1 przedstawia bryłę o jednym stopniu swobody; gdyż np. odległość x_1 środka jego od początkowego jego położenia określa położenie ciężaru; jedno przeto równanie wystarczy do obliczenia tego ruchu.

Do rozwiązania tego zadania nie można zastosować bezpośrednio wzorów, wyprowadzonych dla ruchu brył pojedyńczych; posiadamy bowiem w danym przykładzie trzy bryły, które są połączone z sobą nicią i których ruchy są wzajemnie uzależnione.

Jeżeli wogóle nicią giętką połączone są dane bryły, na które działają siły zewnętrzne, to w nici takiej występują tylko siły ciągnące. Ażeby te siły unaocznić, wyobraźmy sobie, że nić jest przecięta w dowolnem miejscu i do jej końców przyczepione są dwie siły takie, które nie zmieniają chwilowego stanu ruchu lub też spoczynku tych brył; siły te są miarą naprężenia nici, jakie występuje podczas jej rozciągania. Naprężenia te, na zasadzie prawa wzajemnego działania, są wzajemnie równe; co do zwrotów przeciwne i działają wzdłuż jednej prostej. Każdy przeto układ, złożony z wielu brył materyalnych, połączonych z sobą nićmi, rozdzielić można na oddzielne bryły; gdy wyobrazimy sobie nici poprzecinane, a natomiast przyłożone do ich końców siły ich naprężeń. Po takim rozdzieleniu danego układu na bryły pojedyncze można już do każdej z nich zastosować równania dynamiczne. Jeżeli zastosujemy np. równania równowartości pracy i energii kinetycznej, to otrzymamy tyle równań algebraicznych, z ilu brył złożony jest dany układ. Jeżeli równania te dodamy z sobą, to suma cząstkowych prac naprężeń w tej samej nici będzie równa zeru i wypadnie z wyrazu ogólnej sumy, a pozostanie w równaniu tylko suma cząstkowych prac sił zewnętrznych, przyłożonych do całego układu, oraz przyrosty energii kinetycznej każdej bryły **oddzielnej**.



Rys. 30.

W celu zastosowania tych ogólnych uwag do danego przykładu;

przesuńmy ciężar Q_1 na wysokość dx_1, a równanie równowartości pracy i energii kinetycznej dla całego układu będzie następujące

$$Q_1 \cdot dx_1 - Q_2 \cdot dx_2 = d\left(\tfrac{1}{2} I_s \varphi^2 + \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2\right); \quad . \quad (130)$$

w którem φ oznacza prędkość obrotową krążka w dowolnej chwili; v_1 i v_2 oznaczają prędkości ruchu postępowego odnośnych ciężarków; a I_s — moment bezwładności krążka względem osi, przechodzącej przez środek jego masy.

Wskutek nierozciągliwości nici mamy związki

$$dx_2 = dx_1; \quad \text{a więc i} \quad v_2 = v_1; \quad \text{oraz} \quad v_1 = r\varphi;$$

a po podstawieniu tych wartości w równanie pracy i po scałkowaniu tego równania dla warunków początkowych

$$t = 0; \quad x_1 = 0; \quad v_1 = 0;$$

otrzymamy równanie ruchu, dające związek pomiędzy prędkością bryły Q_1 i jej położeniem; równanie to jest następujące

$$x_1 (m_1 - m_2) = \frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{I_s}{r^2} + m_1 + m_2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

skąd

$$v_1 = \sqrt{2 g x_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{\frac{I_s}{r_2} + m_1 + m_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

Z równania tego wynika, że prędkość ciężaru Q_1 jest mniejszą na tych samych wysokościach, niż prędkość swobodnie spadającej bryły. Wynik ten można wytłómaczyć sobie fizycznie tem; że siła ciężkości bryły Q_1 wywołuje ruch nietylko swojej masy, lecz i—masy ciężaru Q_2, oraz — masy krążka; lub inaczej wyrażając się, że praca ciężaru Q_1 idzie nie tylko na powiększenie swej własnej energii kinetycznej, lecz i na pracę podniesienia ciężaru Q_2, — na powiększenie jego energii kinetycznej oraz energii krążka; co też wyraża równanie 130-te.

Ażeby np. ruch ciężaru Q_1 był jednakowy z ruchem swobodnie spadającej bryły; powinno być jednocześnie

$$m_2 = 0; \quad \text{oraz} \quad I_s = 0;$$

wtedy bowiem praca ciężaru Q_1 pójdzie tylko na powiększenie jego własnej energii kinetycznej; i wtedy też po podstawieniu tych wartości w równ. 132-gie otrzymamy $v_1 = \sqrt{2 g x_1}$.

Ażeby obliczyć przyśpieszenie ciężaru Q_1; można zastosować równanie dynamiczne momentów; lub też, co prościej będzie, mając już równanie 132-gie, można wziąść pochodną prędkości względem czasu, a otrzymamy to przyśpieszenie

$$p_1 = g \frac{m_1 - m_2}{\frac{I_s}{r_2} + m_1 + m_2}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (133)$$

lub też, zważywszy, że ruch ciężaru danego jest jednostajnie przyśpieszony, można utożsamić równanie 132-gie z równaniem ruchu jednostajnie przyśpieszonego

$$v = \sqrt{2\, p\, x},$$

i bezpośrednio napisać wyraz tego przyśpieszenia.

Zadanie obliczenia naprężenia nici, na której zawieszony jest ciężar Q_1; należy do grupy zadań, w których obliczamy siły ze znanego ruchu bryły.

W celu tego obliczenia napiszemy równanie dynamiczne ruchu środka bryły Q_1

$$(Q_1 - S_1) = m_1 p_1;$$

z którego obliczymy naprężenie S_1, po podstawieniu z równania 133-go wartości przyśpieszenia. Naprężenie to

$$S_1 = m_1 g \cdot \frac{\frac{I_s}{r^2} + 2\, m_2}{\frac{I_s}{r^2} + m_1 + m_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (134)$$

Sprawdźmy słuszność tego wzoru dla pewnych szczególnych przypadków. Jeżeli np.

$$m_2 = 0; \qquad \text{oraz} \qquad I_s = 0; \qquad \text{to} \qquad S_1 = 0;$$

i rzeczywiście; w tym przypadku ciężar Q_1 swobodnie spada; przyśpieszenie więc jego $= g$; a w nici naprężenie nie występuje.

Jeżeli zaś

$$m_1 = m_2.$$

to otrzymamy

$$p_1 = 0; \qquad \text{oraz} \qquad S_1 = m_1 g;$$

niezależnie od wartości I_s i r; co jest bezpośrednio zrozumiałem; następuje bowiem w tym wypadku równowaga ciężarów; naprężenie przeto nici równa się zawieszonemu na niej ciężarowi. Niezależność w tym przypadku naprężenia S_1 od I_s i r objaśnia się tem, że w przypadku równowagi ciężarów krążek pozostaje w spoczynku lub w obrocie jednostajnym; masa przeto jego pozostaje bez wpływu na rozkład sił, gdyż nie otrzymuje przyśpieszenia obrotowego.

Zauważyć następnie należy, że naprężenie S_2, jakie występuje podczas ruchu brył i krążka, w części nici, zwieszającej się po drugiej stronie krążka, nie jest równe S_1, jakby to się zdawać mogło. Naprężenie to powinno być mniejsze od S_1; siła bowiem S_1 porusza ciężar Q_2 oraz obraca krążek; siła zaś S_2 dźwiga tylko ciężar Q_2 i nadaje mu ruch. Siłę S_2 obliczymy z równania ruchu ciężaru Q_2; równanie to jest następujące

$$Q_2 - S_2 = - m_2 \frac{d v_2}{d t};$$

a po podstawieniu $v_2 = v_1$ oraz — odnośnej wartości przyśpieszenia, obliczymy z tego wzoru szukane naprężenie

$$S_2 = m_2 g \cdot \frac{\frac{I_s}{r^2} + 2 m_1}{\frac{I_s}{r^2} + m_1 + m_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Siły S_1 i S_2, przyłożone z odwrotnymi zwrotami do końców nici przewieszonych przez krążek, wywołują obrót tego krążka. Obrót ten obliczyć można np. z równania dynamicznego momentów, zestawionego dla ruchu krążka; ruch ten jednakże jest już znany ze znanej wartości p_1; gdyż $r \cdot \frac{d \varphi}{d t} = p_1$; obliczenie to może być przeto sprawdzeniem prawidłowości naszego rachunku. Równanie momentu sił, działających na krążek, względem osi obrotu, jest następujące

$$S_1 \cdot r - S_2 \cdot r = \frac{d (I_s \varphi)}{d t};$$

z którego, po podstawieniu wartości S_1 i S_2 otrzymamy wzór 133-ci.

Jeżeli obrót krążka ma być wywołany tarciem, występującem pomiędzy nicią a krążkiem; to siły, występujące w końcach nici, powinny odpowiadać warunkowi, wyrażonemu równaniem 131-szem tomu I-ego; t. j. powinien zachodzić związek

$$S_1 \leqq S_2 \cdot e^{\mu \alpha}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

w przeciwnym bowiem razie nastąpi ślizganie się nici po obwodzie krążka; i wyniki obliczenia powyższego nie będą się stosowały do tego przypadku.

Po podstawieniu we wzór 136-ty wartości naprężeń z równań 134-ego i 135-ego otrzymamy związek, jaki powinien zachodzić pomiędzy wielkościami mas poruszających się ciężarów, ażeby wywołać tarcie pomiędzy nicią a krążkiem; stosunek ten jest następujący

$$m_1 \leqq m_2 \cdot e^{\mu \alpha}; \text{ lub inaczej } Q_1 \leqq Q_2 \cdot e^{\mu \alpha}.$$

Wynik ten stanie się bezpośrednio zrozumiałym, gdy zważymy, że stosownie do wzoru 134-ego i 135-ego naprężenia w niciach są proporcyonalne do zawieszonych ciężarów.

Nie trudno pod względem praktycznym uczynić zadość powyższej nierówności; jeżeli można dowolnie powiększać wielkość μ lub α. W szczególnych zaś przypadkach, gdy wartości μ i α nie możemy powiększyć, wypadnie dla wywołania obrotu krążka zastosować inny sposób zaczepienia pomiędzy krążkiem i nicią; wypadnie np. zastąpić nić łańcuchem, a koło uczynić zębatem.

60. Obliczenie ruchu brył układu materyalnego. Każdy mechanizm jest złożony wogóle z brył materyalnych, które stykają się wzajemnie, lub też połączone są ze sobą cięgnami, bryły te są przeto nieswobodne; a o ich stopniach swobody będziemy mówić w tenże sposób, w jaki mówiliśmy o ilości stopni swobody w § 31-szym tomu II-go. Jeżeli np. dla określenia położenia brył danego układu wystarcza znajomość jednej spółrzędnej, to mówimy, że dany układ posiada jeden stopień swobody; i t. p.

Na części danego mechanizmu, t. j. na każdą bryłę, z jakich złożony jest dany mechanizm, działają wogóle siły zewnętrzne i siły odporowe, pochodzące od innych brył. Jeżeli te części połączone są z sobą np. cięgnami, to ruchy ich podczas działania w cięgnach sił ciągnących mogą być obliczone w sposób podany w paragrafie poprzednim; w razie zaś jeżeli te części bezpośrednio się stykają pewnemi cząstkami swych pól, które dla uproszczenia rachunku przyjmujemy za punkty geometryczne, to w celu obliczenia ich ruchu, wyobrazimy sobie, że do każdej z takich brył przyłożone są siły odporowe, pochodzące od brył sąsiednich i zestawimy dla każdej bryły równanie dynamiczne, np. równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. Równań takich otrzymamy tyle, z ilu brył składa się dany mechanizm. Do każdego z tych równań wchodzą wyrazy pracy sił zewnętrznych, wyrazy pracy sił odporowych i wyraz przyrostu energii kinetycznej danej bryły. Jeżeli następnie równania te dodamy, to otrzymamy sumy wyrazów prac sił zewnętrznych; sumę wyrazów prac sił odporowych i sumę przyrostów energii kinetycznych oddzielnych części.

Przy pewnych szczególnych warunkach fizycznych, str. 187-ma tomu I-go, suma prac sił odporowych może równać się zeru; a wtedy równanie pracy będzie wolne od wielkości sił odporowych; i przedstawi związek pomiędzy siłami zewnętrznemi i spółrzędnemi ruchu danego układu.

Warunki, przy których suma prac sił odporowych, występujących pomiędzy bryłami, równa się zeru, są następujące:

1) przesunięcia brył powinny być przystosowane do warunków ru-

chu danego układu brył; przesunięcia te nazwaliśmy możliwemi; wtedy bowiem przesunięcia sił odporowych są prostopadłe do kierunku sił;

2) siły tarcia, występujące pomiędzy oddzielnemi bryłami; powinny być tak małe, żeby można było ich nie uwzględniać;

3) powierzchnie zetknięć się brył nie powinny zmieniać swej geometrycznej postaci podczas ruchu.

Jeżeli dany układ czyni zadość tym warunkom, to **praca sił zewnętrznych podczas przesunięcia możliwego danych brył równa się sumie przyrostów energii kinetycznej oddzielnych brył tego układu.**

Stosowanie tego twierdzenia szczególniej się nadaje do obliczenia ruchu złożonych mechanizmów o jednym stopniu swobody, gdy nieuwzględniamy oporów; daje ono bowiem bezpośrednio szukane równanie ruchu.

Zwrócić tutaj należy uwagę na okoliczność, że twierdzenie, wygłoszone w § 121-szym tomu I-go o warunkach równowagi sił, działających na układ złożony, jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia o ruchu brył. Z określenia bowiem równowagi sił wynika, § 32-gi tomu I-go, że podczas równowagi sił, przyrost energii kinetycznej danego układu równa się zeru. Jeżeli przeto na mechanizmy, opisane w § 122-gim tomu I-go, działają siły, które się nie równoważą; to części tych mechanizmów będą w ruchu; a równanie ich ruchu otrzymamy, gdy przyrównamy sumę prac przystosowanych do sumy przyrostów energii kinetycznych, poruszających się części danego mechanizmu.

W pewnych jednakże szczególnych przypadkach można stosować równanie równowartości pracy sił zewnętrznych i energii kinetycznej; chociaż siły wewnętrzne wykonują pewną pracę. Przypadki te zachodzą, jeżeli podczas pewnego okresu czasu, w którym bryły są w ruchu; suma prac sił wewnętrznych równa się zeru; pomimo, że w oddzielnych okresach tego ruchu suma tych prac **nie** jest równą zeru; przyrost przeto energii kinetycznej, który powstał **w całym okresie czasu**, równa się w tym razie tylko pracy sił zewnętrznych.

Przykładem takich układów są układy, złożone z brył sprężystych, lub też z brył połączonych cięgnami sprężystemi. Jeżeli taki układ po odkształceniu wywołanem siłami zewnętrznemi, powróci do swej pierwotnej postaci, to suma prac, jakie wykonały, siły wewnętrzne w ciągu tego okresu, równa się zeru; suma przeto prac sił zewnętrznych równa się w tym razie przyrostowi energii kinetycznej, powstałemu w tym okresie; pomimo, że siły wewnętrzne wykonywały podczas ruchu brył pewne prace.

Podczas np. uderzenia się brył sprężystych, powstaje najpierw praca odjemna sił wewnętrznych; a następnie, podczas powracania ich do pierwotnych postaci, powstaje praca taka dodatnia tych sił, iż suma tych prac w ciągu całego okresu może być w ciągu całego okresu może być uważaną za równą zeru.

61. Obliczenie ruchu układu brył o jednym stopniu swobody. Obliczmy np. ruch ciężaru Q, przymocowanego do śruby sposobem, wskazanym na rysunku 149-ym i podanym na str. 198-ej tomu I-go. Zachowawszy oznaczenia, wskazane w tym przykładzie, napiszemy równanie równowartości pracy i energii kinetycznej

$$PR \,.\, d\sigma - Q \,.\, dx = d\left(\tfrac{1}{2}\, mv^2 + \tfrac{1}{2}\, I \,.\, \dot{\varphi}^2\right);$$

w którem v oznacza prędkość postępową, $\dot{\varphi}$ prędkość obrotową śruby, a I moment bezwładności względem osi obrotu wszystkich obracających się części mechanizmu.

Podstawiwszy w powyższe równanie

$$d\sigma = \frac{2\pi}{h} \,.\, dx; \quad \text{oraz} \quad \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{h} \,.\, v;$$

otrzymamy, po scałkowaniu przy początkowych warunkach $t = 0$; $x = 0$; $\dot{\varphi} = 0$; $v = 0$, równanie ruchu

$$R\,\frac{2\pi}{h} \,.\, x - Q \,.\, x = \tfrac{1}{2}\, mv^2 + \tfrac{1}{2}\, I\, \frac{4\pi^2}{h^2} \,.\, v^2;$$

z którego

$$v = \sqrt{2\,x \,.\, \frac{P \,.\, \frac{2\pi R}{h} - Q}{m + I \,.\, \frac{4\pi^2}{h^2}}}.$$

Łatwo spostrzedz z tego wzoru, że ruch ciężaru jest ruchem jednostajnie przyśpieszonym. W szczególnych przypadkach, jeżeli

$$P \,.\, \frac{2\pi R}{h} - Q = 0;$$

to zachodzi stan równowagi; otrzymamy bowiem $v = 0$ dla wszelkich wartości x. Jeżeli zaś

$$P \,.\, \frac{2\pi R}{h} - Q > 0;$$

to $v > 0$; czyli ruch odbywa się zgodnie ze wzrotem rosnącego x; t. j. ku górze; w przeciwnym razie, jeżeli wyraz powyższy jest odjemny, to v otrzyma wartości rzeczywiste tylko dla $x < 0$; t. j, ruch ciężaru będzie ku dołowi.