H. Ruch bryły materyalnej obracającej się około osi nieruchomej.

78. Położenie wektora momentu ilości ruchu bryły, obracającej się około osi nieruchomej, względem bieguna, obranego na tej osi. W § 41-ym № 4 obliczyliśmy położenie wektora $\overline{M}_v$ momentu ilości ruchu danej bryły względem bieguna, obranego na osi obrotu, ze znanego położenia wektora prędkości obrotowej w danej chwili i ze znanego położenia bryły względem osi; zadajemy sobie teraz pytanie: jakim zmianom ulegnie ten wektor podczas obrotu bryły około osi nieruchomej. W celu rozwiązania tego zadania uprzytomnijmy sobie, że wektor momentu ilości ruchu danej bryły jest sumą wektorów momentów ilości ruchu oddzielnych punktów, na jakie wyobrażamy sobie bryłę rozłożoną; a przyjdziemy do wniosku, że wektor ten obraca się razem z bryłą; wszystkie bowiem wektory ilości ruchu oddzielnych punktów i ich ramiona obracają się razem z bryłą.

Jeżeli prędkość obrotowa bryły jest stałą, to wektory ilości ruchu oddzielnych punktów nie zmieniają swych długości i położenia względem bryły; a że promienie wodzące również się nie zmieniają podczas obrotu, wielkość przeto $\overline{M}_v$ przy tych warunkach również się nie zmienia; wniosek ten wysłowimy: jeżeli bryła materyalna obraca się około osi nieruchomej ruchem jednostajnym, to koniec wektora $\overline{M}_v$ zakreśla również ruchem jednostajnym koło, którego płaszczyzna jest prostopadłą do osi obrotu. Jeżeli zaś prędkość obrotowa jest zmienną to, ponieważ prędkości oddzielnych punktów zmieniają jednocześnie swe wielkości proporcyonalnie do tej prędkości, długość wektora $\overline{M}_v$ zmienia również swą długość; podczas przeto niejednostajnego obrotu bryły materyalnej około osi nieruchomej, wektor $\overline{M}_v$ zachowuje kierunek poprzedni względem bryły, koniec jego jednakże zakreśla pewną krzywą, leżącą na powierzchni stożka obrotowego.

Wektor przeto $\frac{d\overline{M}_v}{dt}$ bryły, obracającej się około osi nieruchomej, możemy wyobrazić sobie jako wektor prędkości, z jaką przebiega koniec wektora $\overline{M}_v$ momentu ilości ruchu podczas obrotu bryły. Prędkość tę wyrazić można w następujący sposób: jeżeli obrót jest jednostajny, — wektorem stycznym, do koła, jakie zakreśla koniec wektora momentu ilości ruchu podczas obrotu bryły; którego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny (M_v, φ); a wartość jego równa się iloczynowi

$$M_v \,.\, \sin\alpha \,.\, \varphi\,;$$

promień bowiem tego koła wyrazimy wzorem

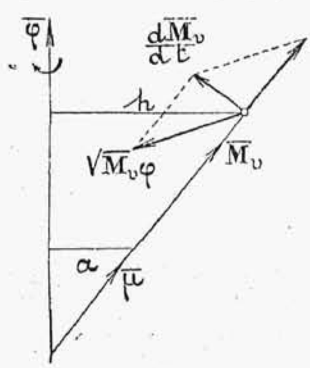
$$M_v \,.\, \sin\alpha:$$

w którym litera α oznacza kąt, jaki tworzy kierunek wektora momentu ilości ruchu z osią obrotu. Wektorowo wyrazimy prędkość, z jaką porusza się koniec wektora momentu ilości ruchu podczas jednostajnego obrotu w taki sam sposób, w jaki wyraziliśmy prędkość punktu, którego promień wodzący oznaczyliśmy literą r, porów. wzór 18-ty § 28-go tomu II-go; napiszemy przeto dla obrotu jednostajnego bryły

$$\frac{d\overline{M}_v}{dt} = \mathrm{V}\,\overline{M}\,.\,\overline{\varphi},$$

wektor bowiem $\overline{M}_v$ może być uważany za promień wodzący punktu, który wyobrazimy sobie umieszczonym na końcu tego wektora.

Jeżeli zaś prędkość obrotowa jest zmienną, to promień wodzący $\overline{M}_v$ nie tylko obraca się razem z bryłą, lecz i jednocześnie zmienia swą długość proporcyonalnie do prędkości obrotowej.



Rys. 39.

Ażeby przeto obliczyć całkowitą prędkość końca wektora M_v, należy w tym razie przyjąć na zasadzie prawa superpozycyi ruchów, że prędkość ta składa się z dwóch prędkości: z prędkości, jaka powstaje podczas obrotu przy stałej jego długości; i z prędkości, jaka powstaje wskutek wydłużenia się promienia wodzącego. Pochodna przeto wektora $\overline{M}_v$ składa się w tym razie z wektora, określanego wzorem poprzednim i z wektora, którego kierunek pokrywa się z kierunkiem wektora $\overline{M}_v$ a długość jego równa się wyrazowi $\frac{d\overline{M}_v}{dt}$; pochodne te są przedstawione na rysunku 39-tym.

Jeżeli literą $\overline{\mu}$ oznaczymy wektor jednostkowy o kierunku wektora $\overline{M}_v$, to całkowitą pochodną wektora momentu ilości ruchu, gdy obrót jest zmienny, wyrazimy wzorem

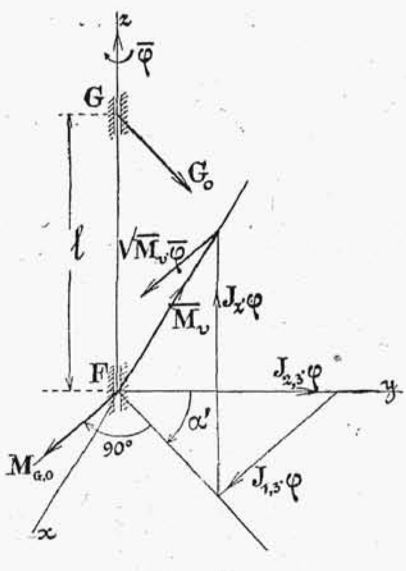
$$\frac{d\overline{M}_v}{dt} = \mathrm{V}\,\overline{M}_v\,.\,\overline{\varphi} + \frac{dM_v}{dt}\,.\,\overline{\mu}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(186)$$

W szczególnym przypadku, który rozpatrywaliśmy poprzednio i w którym długość wektora $\overline{M}_v$ była stałą, wyraz drugi prawej strony tego równania wypadnie, i otrzymamy wzór, wyprowadzony bezpośrednio dla tego przypadku.

Zwrócić tu należy uwagę, że wzór 186-ty jest wyprowadzony dla przypadku, w którym oś obrotu jest nieruchomą w przestrzeni i w bryle, a bryła obraca się około niej nie zmieniając swego położenia względem tej osi.

79. Siły odporowe łożysk osi obrotu. Jeżeli oś, około której bryła materyalna się obraca, ma pozostawać nieruchomą; to powinna być unieruchomioną za pomocą przyłożenia do niej pewnych sił; zadanie obecne polega na obliczeniu tych sił.

W mechanizmach wogóle oś obrotu przedstawia się w postaci wału materyalnego, wspierającego się swymi końcami, zwanymi czopami, na łożyskach; łożyska te powinny dać możność obracania się czopom i powinny zabezpieczać wał od przesunięcia się wzdłuż swej osi, jak również — od wypadnięcia z tych łożysk. Czopy stykają się z łożyskami częścią swych powierzchni, na które działają siły odporowe łożyska; chociaż siły te są rozłożone na powierzchniach zetknięć, przyjmiemy jednakże do obliczeń, że są one skupione w pewnych punktach tych powierzchni,—w punktach, określonych ustrojem fizycznym czopów i łożysk. Dla utrzymania osi wału w nieruchomem położeniu w przestrzeni, jeżeli nie uwzględniamy tarcia w łożyskach, wystarczają wogóle trzy siły odporowe; dwie z nich są prostopadłe do osi wału, a trzecia działa wzdłuż osi wału. Wyobrazimy sobie, że siły te są przyłożone do geometrycznej osi wału zadanie przeto polega na obliczeniu tych sił, t. j. na wyznaczeniu ich położenia i ich wielkości.



Rys. 40.

Ponieważ ruch obrotowy, wywołany siłami zewnętrznemi jest nam znany z równania dynamicznegó ruchu; przeto zadanie obliczenia sił odporowych łożysk danej osi zalicza się do zadań, w których dany jest ruch bryły, a należy obliczyć siły, wywołujące ten ruch; chociaż bowiem siły obracające bryłę są dane; lecz oprócz nich działają na bryłę jeszcze inne siły, — siły odporowe, które należy dołączyć do sił zewnętrznych, działających na bryłę, ażeby módz uważać ją za swobodną.

Weźmy najpierw przypadek, w którym niema sił zewnętrznych, obracających bryłę; a dana jest tylko prędkość kątowa w początku ruchu danej bryły. Z poprzednich rozpatrywań wiemy już, że w tym razie bryła obracać się będzie ze stałą prędkością kątową. Siły odporowe, które są prostopadłe do osi, oznaczymy w ogólnym przypadku obrotu bryły literami $\overline{F}$ i $\overline{G}$, a w danym szczególnym przypadku, w którym obrót jest jednostajny, oznaczymy temiż literami, lecz ze wskaźnikami zero. Siły te obliczymy z równań momentów ilości ruchu względem biegunów, obieranych kolejno w punktach podparcia; w ten sposób bowiem do równań będą wchodziły pojedyńczo siły niewiadome. Zwrócić tu należy uwagę, że w tenże sposób postępowaliśmy w statyce przy obliczeniu sił odporowych belek.

W danym przypadku równanie momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego w punkcie F, jest, zgodnie z równaniem dynamicznem 89-tem, następujące

$$\overline{M}_{G,0} = \frac{d\overline{M}_v}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (187)$$

w którem $\overline{M}_{G,0}$ oznacza wektor momentu siły odporowej G_0 względem bieguna, obranego w F. Z równania tego wynika, że wektor ten jest prostopadły do płaszczyzny (M_v, φ), i że posiada zwrot zgodny ze zwrotem obrotu tej płaszczyzny, siła przeto G_0 leży w tej płaszczyźnie, obraca się razem z nią i wywołuje moment dodatni względem bieguna F, jak pokazuje rys. 40-ty. Ażeby przeto obliczyć wartość tego momentu, należy wyznaczyć najpierw położenie i wielkość wektora $\overline{M}_v$. W tym celu obierzemy układ prostokątny osi spółrzędnych (x, y, z) z początkiem w obranym biegunie i z osią wzdłuż osi obrotu i z osiami x i y dowolnie obranemi w płaszczyźnie, prostopadłej do osi z; rys. 40-ty.

Rzuty wektora tego momenty ilości ruchu na osi spółrzędnych, zgodnie ze wzorami 70-tym, 71-szym i 72-gim, są kolejno równe wartościom

$$-I_{1,3}\,.\,\varphi; \quad -I_{2,3}\,.\,\varphi; \quad I_z\,.\,\varphi \quad \ldots\ldots \quad (188)$$

Wartości te dla uwidocznienia rysunku odłożono na dodatnich osiach x i y. Przypadek ten będzie zgodny z rzeczywistością, jeżeli momenty odśrodkowe bryły są odjemne; co nastąpi gdy np. bryła znajdzie się w całości lub odpowiednią częścią w ósemce $(-x, -y, +z)$.

Długość promienia koła, zakreślonego końcem wektora $\overline{M}_v$, wyrazimy przeto wzorem

$$h = \varphi\,.\,\sqrt{I^2_{1,3} + I^2_{2,3}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

a wartość momentu względem F siły G_0 wyrazimy iloczynem z promienia koła i prędkości φ; t. j. wzorem

$$M_{G,0} = \varphi^2\,.\,\sqrt{I^2_{1,3} + I^2_{2,3}}; \quad \ldots\ldots \quad (190)$$

zwrot zaś jego strzałki jest zgodny ze zwrotem prędkości punktów obracającej się bryły. Siła przeto

$$G_0 = \frac{1}{l}\,.\,\varphi^2\sqrt{I^2_{1,3} + I^2_{2,3}}.$$

Położenie płaszczyzny (M_v, φ), w której działa siła G_0, wyznacza kąt α', rys. 40-ty, który obliczymy z wzoru

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{-I_{2,3}}{-I_{1,3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (191)$$

Obliczmy teraz siły odporowe łożysk, gdy na bryłę **działają siły** zewnętrzne, zmieniające jej prędkość obrotową. Sposób tego obliczenia jest zasadniczo taki sam, jaki stosowaliśmy poprzednio; zachodzą tylko zmiany formalne; a mianowicie, równanie momentów, t. j. równ. 187-me, zmieni się o tyle, że będzie po lewej jego stronie wyraz momentu sił zewnętrznych, z prawej zaś wyraz pochodnej długości wektora momentu ilości ruchu, zgodnie z wzorem 186-ym paragrafu poprzedniego. Oznaczywszy siły odporowe w tym ogólnym przypadku literami $\overline{F}$ i $\overline{G}$ (bez wskaźników); napiszemy równanie momentów względem bieguna, obranego w punkcie F, w sposób następujący

$$\Sigma\, \overline{M}_{P,k} + \overline{M}_G = V\, \overline{M}_v \cdot \bar{\varphi} + \frac{dM}{dt}_v \cdot \bar{\mu}; \quad \ldots\ldots \quad (192)$$

z którego wyznaczyć można drogą rzutowania jego na osi spółrzędnych szukany moment $\overline{M}_G$; a następnie siłę $\overline{G}$.

W celu jednakże unaocznienia sobie wpływu **poszczególnych** czynników na powstawanie sił odporowych; wyobrazimy sobie, że każda z sił odporowych złożona jest z dwojakiego rodzaju składowych; ze składowych, wywołanych:

1) działaniami **tych** składowych sił zewnętrznych, które nie wpływają na ruch obrotowy bryły, a jedynie wywołują siły odporowe łożysk; te siły odporowe nazwiemy **statycznemi**; i

2) działaniami sił bezwładności, jakie powstają w punktach danej bryły podczas jej obrotu; t. j. działaniami sił odśrodkowych i stycznych; te składowe sił odporowych nazwiemy **kinetycznemi**. Siły odporowe kinetyczne podzielimy jeszcze w celu ułatwienia rozpatrywań na dwojakiego rodzaju składowe; na siły odporowe, wywołane siłami bezwładności odśrodkowemi i na siły odporowe, wywołane siałami bezwładności stycznemi. Wypadkowe sił odporowych statycznych i kinetycznych będą właściwemi siłami odporowemi każdego z łożysk.

Ażeby wyznaczyć składowe sił zewnętrznych, które nie wpływają na ruch bryły, a wywołują siły odporowe statyczne, przekształcimy dany układ sił zewnętrznych w sposób, wskazany w § 57-mym tomu I-go na inny, — prostszy; więcej dogodny dla naszych rozpatrywań. W tym celu obierzemy biegun przekształceń sił na osi obrotu, — w ogóle w dowolnem jej miejscu, i wyznaczymy wypadkową $\overline{R}$ wszystkich sił zewnętrznych oraz ich moment wypadkowy $\overline{M}$ względem tegoż bieguna; następnie wektor tego momentu rozłożymy na dwie składowe, na składową wzdłuż osi obrotu, którą oznaczymy literą $\overline{M}_\varphi$ i na składową prostopadłą do niej, którą oznaczymy literą $\overline{M}_{x,y}$, jako rzut właściwego wektora momentu sił zewnętrznych na płaszczyznę (x, y), prostopadłą do osi i przeprowadzoną przez obrany biegun przekształceń. Siła $\overline{R}$

i moment, wyrażony wektorem $\bar{M}_{x,y}$, nie wpływają na ruch obrotowy bryły, a wywołują jedynie siły odporowe, — nazwane poprzednio statycznemi. Jeżeli biegun przekształceń obierzemy w jednym z łożysk np. w F; to, oznaczywszy prostopadłą składową mementu sił względem tego bieguna literą $M_{x,y,F}$; otrzymamy wielkość siły odporowej, którą oznaczymy literą G_s, ze wzoru

$$M_{x,y,F} + G_s \cdot l = 0;$$

o kierunku prostopadłym do płaszczyzny $(\bar{M}_{x,y,F}, \bar{\varphi})$.

Oliczenie tych sił odporowych może być również wykonane sposobem analitycznym, stosowanym np. w przykładzie 1-szym, podanym w § 49-tym tomu I-go.

W tenże sposób przekształcimy układy sił **odśrodkowych i stycznych** na ich wypadkowe i na ich momenty wypadkowe, względem dowolnie obranego bieguna O, rys. 41-szy. Siła odśrodkowa k-tego punktu, którą oznaczymy literą $\bar{B}_{k,0}$, wyraża się wzorem

$$\bar{B}_{k,0} = m_k \bar{h}_k \cdot \varphi^2.$$

w którem litery h_k oznaczają odległości punktów bryły od osi obrotu. Wypadkową przeto $\bar{B}_0$ tych sił wyrazimy wzorem

$$\bar{B}_0 = \Sigma (m_k \bar{h}_k \cdot \varphi^2);$$

a zważywszy, że

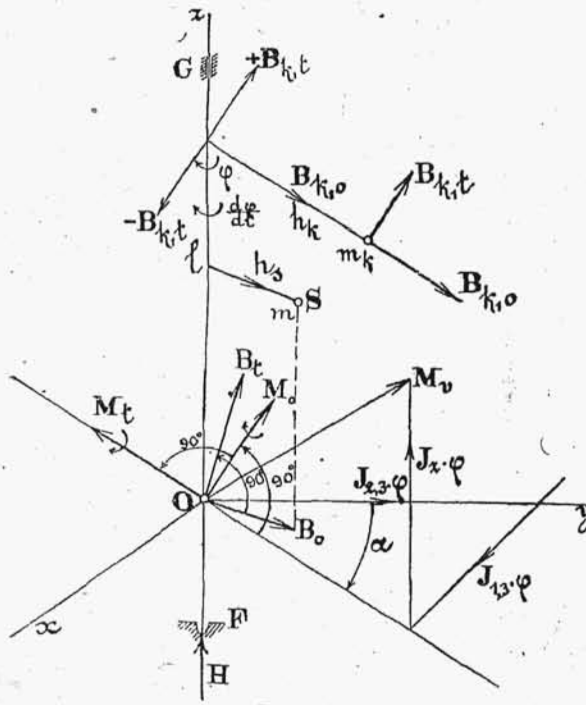
$$\Sigma (m_k \bar{h}_k) = m \bar{h}_s,$$

i że wartość φ jest w każdej chwili wartością stałą dla wszystkich punktów danej bryły wyrazimy tę wypadkową wzorem

$$\bar{B}_0 = m \bar{h}_s \cdot \varphi^2; \quad . \quad (193)$$

z punktem przyłożenia w obranym punkcie przekształceń.

Ze wzoru tego wyznaczyć można wektor wypadkowej sił odśrodkowych ze znanej prędkości obrotowej bryły oraz wielkości i kierunku wektora $\bar{h}_s$; który jest znany, jeżeli znane jest położenie bryły względem osi obrotu.



Rys. 41.

Wypadkową sił bezwładności **stycznych** obliczymy z wypadkowej sił odśrodkowych, zważywszy, że kierunek siły stycznej każdego punktu danej bryły jest prostopadły do kierunku siły odśrodkowej tegoż punktu; a wielkości obydwóch tych sił są w każdej chwili do siebie proporcyonalne; wartość bowiem bezwzględna siły stycznej k-tego punktu, którą oznaczymy literą $B_{k,t}$,

$$B_{k,t} = m h_k \frac{d\varphi}{dt};$$

wieloboki przeto tych sił są do siebie podobne; a kierunki ich boków wzajemnie prostopadłe; wypadkowe przeto tych sił są również do siebie proporcyonalne i prostopadłe. Wartość zatem wypadkowej sił stycznych, którą oznaczymy literą B_t, obliczymy bezpośrednio z wzoru 193-go, podstawiając zamiast czynnika φ^2 czynnik $\frac{d\varphi}{dt}$ i otrzymamy

$$B_t = m h_s . \frac{d\varphi}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (194)$$

Kierunek tej wypadkowej jest prostopadły do kierunku wektora h_s, a zwrot jej jest przeciwny zwrotowi prędkości środka masy. Ze wzoru przeto 193-ciego i 194 tego obliczyć można wypadkowe sił bezwładności; porówn. rys. 41-szy.

W celu obliczenia momentu sił odśrodkowych wystawimy w obranym biegunie przekształceń wektory momentów sił odśrodkowych oddzielnych punktów, a wypadkowa ich będzie momentem sił odśrodkowych. Wektor tego momentu musi być prostopadły do osi; wszystkie bowiem składowe wektory są do niej prostopadłe. Drogą przeto tych poszczególnych obliczeń można znaleźć szukany wektor; pominiemy jednakże te obliczenia; natomiast skorzystamy bezpośrednio z równania momentów ilości ruchu; t. j. z równania 25-go. W tym celu weźmiemy pod uwagę twierdzenie ogólne o momentach sił bezwładności, wyrażone równaniem 84-tem; i otrzymamy, że moment sił odśrodkowych

$$\bar{M}_0 = -\mathrm{V}\bar{M}_v . \bar{\varphi};$$

a wartość jego

$$M_0 = \varphi^2 \sqrt{I^2_{1,3} + I^2_{2,3}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195)$$

zwrot zaś jest przeciwny zwrotowi prędkości końca wektora M_v; porówn. rys. 41-szy.

Wektory momentów sił stycznych oddzielnych punktów danej bryły są pochylone względem osi obrotu; wypadkowy ich przeto wektor jest wogóle również pochylony względem tej osi. Ponieważ dla obliczenia sił odporowych wystarcza znajomość tylko tej składowej wektora momentu, która wywołuje siły odporowe (ten sposób rozumowania stosowaliśmy przy obliczeniem sił odporowych statycznych), zajmiemy się przeto bezpośrednio obliczeniem tylko tej składowej. W tym celu przekształcimy dany układ sił odśrodkowych na inny, jemu równoważny, w ten sposób, że przeprowadzimy przez każdy punkt danej bryły płaszczyzny, prostopadłe do osi; a w punktach przecięcia się tych płaszczyzn z osią obrotu przyłożymy po dwie siły $\pm B_{k,t}$, rys. 41-szy, równoważące się, równoległe i równe siłom stycznym odpowiednich punktów; w ten sposób zamiast sił z punktami przyłożenia w oddzielnych punktach bryły, otrzymamy układ par sił, $(B_{k,t}, -B_{k,t})$ i układ oddzielnych sił $+B_{k,t}$ z punktami przyłożenia na osi i równych siłom stycznym oddzielnych punktów danej brył. Momenty par tych sił nie wpływają na odpory łożysk; w pojęciach bowiem d'Alembert'a równoważą się one z momentem, względem osi, sił zewnętrznych; a równanie ich równowagi jest równaniem ruchu danej bryły. Siły zaś, przyłożone do osi, wywołują odpory w łożyskach i nie wpływają na ruch bryły. Siły te, jak każdy układ sił sprowadzić można do siły wypadkowej $\overline{B}_t$, którą już wyznaczyliśmy poprzednio i do ich momentu $\overline{M}_t$, który obecnie obliczymy w następujący sposób. Siły styczne oddzielnych punktów, które przecinają oś, są prostopadłe do sił odśrodkowych tychże punktów i prostopadłe do osi obrotu; wektory przeto momentów każdej z nich są prostopadłe do takichże wektorów sił odśrodkowych; wypadkowy przeto moment tych sił jest prostopadły do wektora momentu sił odśrodkowych względem tegoż bieguna; a ponieważ wartości sił stycznych są proporcyonalne do wartości sił odśrodkowych tychże punktów, a ramiona ich względem obranego bieguna są wspólne, wartość przeto momentu sił stycznych, prostopadłego do osi obrotu, jest proporcyonalna do takiegoż momentu sił odśrodkowych; obliczymy go przeto z równania 196-go i wyrazimy wzorem

$$M_t = \frac{d\varphi}{dt} \sqrt{I^2_{1,3} + I^2_{2,3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

Siłę wreszcie odporową sztorca osi, oznaczoną na rys. 41-szym literą H, która jest wywołana tylko składowemi sił zewnętrznych w kierunku osi; obliczymy z równania

$$\Sigma P_{k,z} + H = 0;$$

wszystkie bowiem siły bezwładności są prostopadłe do osi obrotu i nie posiadają rzutów na tę oś.

Działania przeto sił bezwładności bryły, obracającej się około danej osi sprowadzić można, porówn. rys. 41-szy:

1) do dwóch sił $\overline{B}_0$ i $\overline{B}_t$, przyłożonych do obranego punktu przekształceń i wyrażonych wzorami 193-cim i 194-tym; z których siła odśrodkowa $\overline{B}_0$

jest równoległa do prostopadłej opuszczonej ze środka masy bryły na oś obrotu; siła zaś styczna $\overline{B}_t$ jest do niej prostopadła, i posiada zwrot przeciwny zwrotowi, jaki posiada w danej chwili przyśpieszenie środka masy;

2) do działania momentów sił odśrodkowych i stycznych. Wektor $\overline{M}_0$ momentu sił odśrodkowych jest prostopadły do płaszczyzny (M_v, φ) i posiada wielkość, wyrażoną wzorem 195-tym, a zwrot przeciwny zwrotowi prędkości końca wektora $\overline{M}_v$. Wektor zaś $\overline{M}_t$ momentu sił stycznych, wywołujących tylko siły odporowe łożysk, jest prostopadły do poprzedniego i wartość jego wyraża wzór 196-ty; a zwrot jest przeciwny zwrotowi dodatnich przyrostów rzutu wektora $\overline{M}_v$ na płaszczyznę prostopadłą do osi.

Wypadkowe sił bezwładności i wektory ich momentów są przedstawione na rys. 41-szym dla punktu przekształceń O, dowolnie obranego na osi obrotu. Po takiem przekształceniu sił bezwładności, obliczenie sił odporowych sprowadza się do obliczenia sił odporowych pręta, podpartego w punktach F i G, na który działają dwie siły prostopadłe do niego, przyłożone w pewnym punkcie na jego osi,—i dwa momenty.

Obliczenie sił odporowych uprości się wogóle, gdy obierzemy biegun przekształceń sił i biegun momentów w jednem z łożysk osi; wtedy bowiem otrzymamy bezpośrednio siły odporowe, jakie występują w łożysku drugiem. Dla obliczenia np. siły odporowej w G obierzemy biegun w F; a z równań

$$G_0 \cdot l + M_0 = 0; \qquad G' \cdot l + M_t = 0;$$

obliczymy wartości sił odporowych; zważywszy przytem, że siła G_0 leży w płaszczyźnie (M_v, φ); siła zaś G' w płaszczyźnie prostopadłej do niej.

W szczególnym przypadku, jeżeli oś obrotu posiada punkt bezwładności dla danej bryły (warunki, przy których to następuje, podane są w § 34-tym), to momenty sił odśrodkowych względem bieguna, obranego w tym punkcie zanikają; wartości bowiem momentów odśrodkowych $I_{1,3}$ oraz $I_{2,3}$ danej bryły względem układu osi spółrzędnych, przeprowadzonych przez ten punkt, w myśl danego określenia równają się zeru. Jeżeli przeto oś obrotu posiada punkt bezwładności dla danej bryły, to w tym tylko szczególnym przypadku działanie sił bezwładności sprowadza się go działania tylko dwóch sił: siły odśrodkowej i siły stycznej z punktami przyłożenia w punkcie bezwładności.

W myśl przeto twierdzenia podanego w § 33-cim tego tomu dla przypadku 4-go, siły bezwładności bryły, obracającej się około osi, równoległych do jednej z osi głównych, wystawionych w środku masy tej bryły, sprowadzić można do siły wypadkowej z punktem przyłożenia w punkcie bezwładności. Tejże właściwości podlegają również siły bezwładności; gdy np. bryła dana jest symetryczną względem płaszczyzny, a oś obrotu jest prostopadłą do tej płaszczyzny. Do tego wniosku w tym przypadku łatwo również dojść bezpośrednio; siły bowiem ośrodkowe są w tym razie symetryczne względem płaszczyzny symetryi; wypadkowa ich przeto leżeć musi w tej płaszczyźnie; a wypadkowa sił stycznych musi być do niej prostopadłą.

Z tychże powodów, w myśl § 39-tego, suma momentów sił bezwładności figury płaskiej materyalnej, obracającej się około osi, leżącej w płaszczyźnie tej figury względem bieguna, obranego w rzucie środka masy na oś obrotu, równa się zeru. Jeżeli przeto na bryłę taką nie działają siły zewnętrzne, lub też działają siły posiadające wypadkową, przechodzącą przez punkt bezwładności, to w celu unieruchomienia takiej osi wystarczy podeprzeć ją tylko w punkcie bezwładności; występująca bowiem siła odporowa równoważyć się będzie z siłami bezwładności.

Jeżeli oś, posiadająca punkt bezwładności, przechodzi przez środek masy, to nie tylko suma momentów sił bezwładności względem bieguna, obranego w tym punkcie, zniknie, lecz i siły bezwładności tak styczne jak i odśrodkowe znikną, porów. wzory 193-ci i 194-ty; i to zachodzi nie tylko względem bieguna przekształceń, obranego w punkcie bezwładności, lecz również, — na podstawie twierdzenia, dowiedzionego w § 34-tym dla przypadku 2-go,—względem każdego innego bieguna obranego na tej osi; czyli w danym przypadku siły bezwładności, jak i ich momenty, wzajemnie się równoważą i nie działają na oś obrotu; a bryła raz obrócona około takiej osi, obracać się będzie bez jej podtrzymywania; oś taką nazwano **osią swobodną** danej bryły.

Ponieważ oś, która posiada punkt bezwładności dla danej bryły i przechodzi przez środek jej masy, jest jedną z osi głównych elipsoidy środkowej tej bryły; przeto każda bryła materyalna posiada trzy osi swobodne; które pokrywają się z kierunkami średnic głównych środkowej elipsojdy bezwładności.

Niezmienność obrotu około osi głównej należy uważać jako szczególny wyraz bezwładności materyi.

I. Ruch kulisty bryły materyalnej bez udziału sił zewnętrznych lecz z prędkością początkową.

80. Zadanie. Jeżeli środek masy pewnej bryły materyalnej unieruchomimy w przestrzeni w ten sposób, że bryła będzie mogła swobodnie się kręcić około tego punktu i jeżeli następnie nadamy jej pewien ruch początkowy, to bryła ta wykonywać będzie pewien ściśle określony ruch kulisty, który mamy obliczyć; zakładając, że na daną bryłę po nadaniu jej ruchu początkowego nie działają żadne siły zewnętrzne; a jeżeli działają, to—tylko takie, które nie dają momentu względem bieguna, obra-