93. Ruch precesyjny i nutacyjny. Obrót płaszczyzny, przechodzącej przez oś bąka i pionową z, nazwaliśmy ruchem precesyjnym; jeżeli ten obrót jest jednostajny i oś giroskopu tworzy z pionową, podczas ruchu, kąt stały, to ruch taki nazwano ruchem **precesyjnym** jednostajnym; jeżeli zaś oś ta podczas ruchu bąka zmienia kąt nachylenia względem pionu, to ruch ten nazywają pozornie precesyjnym, a składowy ruch osi bąka jaki wykonywa ta oś w płaszczyznie biegunowej, — ruchem **nutacyjnym**; miarą ruchu precesyjnego jest prędkość $\frac{d\psi}{dt}$, miarą zaś ruchu nutacyjnego jest prędkość $\frac{d\vartheta}{dt}$; nazwy te wzięte są z astronomii, gdzie są stosowane przy opisie ruchu kuli ziemskiej. Stosując te nazwy do ruchu bąka powiemy, że bąk ciężki, wsparty jednym punktem swej osi, wykonywa wogóle ruch precesyjny połączony z nutacyjnym.

Nasuwa się teraz pytanie, czy dany bąk może wykonać i przy jakich warunkach może wykonać ruch precesyjny jednostajny, t. j. ruch, w którym oś bąka zakreśla stożek prosty o półotworze ϑ_0.

W pierwszej chwili puszczenia bąka, bez nadania osi jego pewnej prędkości, oś ta pod działaniem momentu siły ciężkości bąka stara się pochylić; jeżeli zaś chcemy, ażeby ta oś nie pochyliła się, jak tego wymaga dane zadanie, należy zrównoważyć moment siły ciężkości innym momentem, np. momentem działania giroskopowego, które bąk powinien posiadać w chwili puszczenia go; ażeby przeto powstał ruch precesyjny jednostajny, należy bąkowi udzielić oprócz prędkości wirowania, jeszcze pewnej prędkości precesyjnej $\left(+\frac{d\psi}{dt}\right)$, wtedy bowiem powstanie działanie, równoległe, lecz przeciwne zwrotowi momentu siły ciężkości. Prędkość tę obliczymy z warunku równowagi momentu siły ciążenia i działania giroskopowego; równanie to jest następujące, porówn. rys. 56-ty lub równanie pierwsze równań 231-ych

$$N_0 \cdot \varphi_{\eta_0} - M_0 \cdot \varphi_{\zeta_0} + Q \cdot s \cdot \sin \vartheta_0 = 0;$$

w którem wskaźniki zero oznaczają, że wielkości, zaopatrzone nimi, odnoszą się do odpowiednich wielkości w początku ruchu.

Po podstawieniu odnośnych wartości z równań 216-tych, oraz po skróceniu przez sin ϑ, otrzymamy równanie

$$(C - A) \cdot \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0^2 \cdot \cos \vartheta_0 + C \cdot \omega_0 \cdot \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 - Q \cdot s = 0; \quad . \quad . \quad (234)$$

Z równania tego obliczymy np. prędkość $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$, jaką należy nadać osi bąka w chwili jego puszczenia; gdy dane będzie nachylenie ϑ_0 osi bąka i jego prędkość wirowania ω_0 względem płaszczyzny biegunowej oraz — momenty bezwładności A i C.

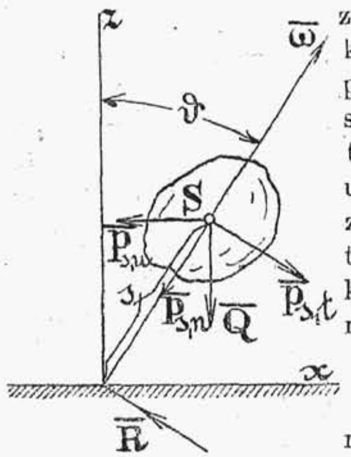
Lecz wartość obliczona z tego równania zapewnia nam zrównoważenie momentu ciężaru bąka momentem sił odśrodkowych tylko w chwili puszczenia bąka; t. j. zachowanie warunków ruchu początkowego, wyrażonych powyższem równaniem, zapewnia nam precesyę jednostajną tylko w chwili puszczania bąka; czy jednak ten ruch pozostanie takim w dalszym swym przebiegu, równanie powyższe nie zapewnia tego. Ażeby zbadać jaki ruch wykona bąk przy określonym z powyższego równania ruchu początkowym; należałoby obliczyć $\frac{d\vartheta}{dt}$ w funkcyi czasu i w wartościach początkowych warunków ruchu; a po podstawieniu wartości prędkości początkowej z powyższego równania, powinniśmy otrzymać, o ile ruch ten będzie precesyjny jednostajny, że $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$.

Postępowanie to zastąpimy jednakże następującym rozumowaniem, na mocy którego dojdziemy do pewnych przypuszczeń, określających dalszy ruch bąka. Ponieważ w chwili puszczenia bąka moment siły ciężkości jest zrównoważony momentem sił odśrodkowych bąka, przeto oś jego już się nie pochyli, jak to było poprzednio, i w okresie czasu Δt wykona taki ruch, jaki wykona giroskop wirujący z pewną prędkością początkową, na który nie działają siły zewnętrzne; a że ruchem takim jest ruch precesyjny jednostajny, wierzchołek przeto zakreśli w pierwszej chwili ruchem jednostajnym cząstkę koła; a że w następnej chwili zajdzie ten sam stosunek pomiędzy obydwoma rodzajami momentów, gdyż oś bąka zachowa prędkość nadaną, i ten stosnnek będzie ciągle się powtarzał; ruch przeto bąka będzie przy tych warunkach początkowych ciągle precesyjnym jednostajnym.

94. Siła odporowa punktu podparcia bąka. Przyjęliśmy w poprzednim przykładzie, że koniec osi bąka spoczywa na płaszczyźnie o tyle chropowatej, że koniec ten nie może się ślizgać po tej płaszczyźnie. Zadanie obecne polega na obliczeniu siły, jaką należy przyłożyć do końca osi bąka, gdybyśmy usunęli płaszczyznę podparcia, czyli należy obliczyć siłę odporową podstawy bąka. Oznaczmy siłę tę literą $\bar{R}$ nieznaną co do kierunku i wielkości, o której tylko wiemy, że przechodzi ona przez punkt podparcia bąka. Ponieważ uważamy, że ruch bąka jest nam już znany, przeto obliczymy siły nań działające z równania ruchu środka jego masy; równanie to jest następujące

$$\bar{R} + \bar{Q} = m\bar{p}_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

Obliczyliśmy, że ruch środka masy bąka jest złożony z ruchu w płaszczyźnie biegunowej, który uważać będziemy za względny i z obrotu w tej płaszczyźnie, który uważać będziemy za ruch unoszący; przyśpieszenia przeto punktów jego składają się z przyśpieszeń tych dwóch ruchów, § 74-ty tomu II-go. W celu ich obliczenia obierzmy układ spółrzędnych w płaszczyźnie biegunowej z początkiem w punkcie podparcia bąka; oś x tego układu obierzemy poziomo; oś z pionowo ku górze i oś y pionowo do nich, a napiszemy równanie 235-te w postaci algebraicznej



Rys. 57.

$$R_x = m\,p_{s,x}; \quad R_z - Q = m\,p_{s,z}\,. \qquad (236)$$

Oznaczmy literami $p_{s,t}$ i $p_{s,n}$ przyśpieszenia styczne i normalne ruchu względnego środka masy; t. j. przyśpieszenia ruchu po kole, leżącym w płaszczyźnie biegunowej, literą zaś $p_{s,u}$ — przyśpieszenie unoszące, t. j. przyśpieszenie ruchu po kole poziomem, to rzuty przyśpieszenia środka masy na osi wyrazimy sumą rzutów tych składowych na osi x, y, z; wyrazy tych rzutów odczytamy z rys. 57-go

$$p_{s,x} = p_{s,t}\,.\cos\vartheta - p_{s,n}\,.\sin\vartheta - p_{s,u}\,;$$

$$p_{s,z} = -\,p_{s,t}\,.\sin\vartheta - p_{s,n}\,.\cos\vartheta\,; \quad \ldots\ldots \qquad (237)$$

wartości zaś przyśpieszeń składowych wyrazimy wzorami

$$p_{s,t} = s\,.\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\,; \quad p_{s,n} = s\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2; \quad \text{oraz} \quad p_{s,u} = s\,.\sin\vartheta\,.\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2;$$

a po podstawieniu tych wartości w równania 237-me otrzymamy

$$p_{s,x} = s\,.\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\cos\vartheta - s\,.\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.\sin\vartheta - s\,.\sin\vartheta\,.\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2;$$

$$p_{s,z} = -\,s\,.\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.\sin\vartheta - s\,.\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.\cos\vartheta\,.$$

W tych wzorach uwzględniliśmy tylko jedną składową przyśpieszenia unoszącego, — przyśpieszenie dośrodkowe; chcąc jednakże być zupełnie ścisłym, należałoby jeszcze uwzględnić przyśpieszenie styczne tego ruchu i przyśpieszenie złożone (Coriolisa), lecz rachunku tego tutaj nie podamy.

Jeżeli bąk jest w ruchu precesyjnym jednostajnym, to przyśpienia względne odpadają, a pozostanie tylko przyśpieszenie unoszące jako dośrodkowe; w tym razie przeto składowa pionowa siły odporowej równa się ciężarowi bąka; a składowa pozioma $R_x = -\,mp_u$.

Wartości pochodnych ϑ i ψ obliczyliśmy już w funkcyi czasu w § poprzednim z rożnym stopniem dokładności; możemy przeto je bezpośrednio zastosować do obliczenia siły odporowej; a przytem, zważywszy, że odchylenia osi bąka od kąta ϑ_0 są niewielkie; możemy podstawić w tych wzorach $\cos\vartheta = \cos\vartheta_0$; oraz $\sin\vartheta = \sin\vartheta_0$, co znacznie uprości obliczenie.

Uwzględnienie w tym obliczeniu wszystkich szczegółów kinetycznych, np. przyśpieszenie Coriolis'a, nie ma znaczenia dla celów praktycznych; gdyż w rzeczywistości ruch bąka odbywa się niezupełnie w tych warunkach fizycznych; jakie przyjęliśmy do obliczenia; rachunki przeto nasze posiadają i tak tylko przybliżony charakter.

95. Równania dynamiczne Euler'a. Przytoczone obliczenia ruchu giroskopów i wogóle ruchu kulistego brył materyalnych są ujęte w ogólną postać algebraiczną przez tak zwane równania Euler'a. Równania te wyrażają znaną już nam zasadę momentu ilości ruchu, równ. 89-te, możnaby je przeto otrzymać z tego równania drogą algebraicznych przekształceń.

Do zestawienia jednakże tych równań zastosujemy w tem miejscu pojęcie momentu sił odśrodkowych, które stosowaliśmy w poprzednich rozpatrywaniach i w tym celu wyobrazimy sobie układ osi prostokątnych, przechodzących przez punkt, około którego bryła się obraca, i ściśle związanych z daną bryłą. Osi te mogłyby być obrane dowolnie w danej bryle; obierzmy je jednakże, ze względu na uproszczenia rachunkowe, jakie stąd wynikają, w kierunkach osi głównych elipsoidy bezwładności, zbudowanej w punkcie, około którego bryła dana się kręci.

Oznaczmy jak poprzednio prędkość chwilowego obrotu bryły wektorem $\bar{\varphi}$; a literami ξ, η i ζ osi główne elipsoidy bezwładności, które są jednocześnie osiami spółrzędnych; literami zaś φ_ξ, φ_η i φ_ζ — rzuty tej prędkości na obrane osi; jeżeli następnie oznaczymy literami A, B i C wartości momentów bezwładności danej bryły względem obranych osi spółrzędnych, to rzuty L, M, N wektora momentu, stosownie do równań 75-ty tego tomu, ilości ruchu $\bar{M}_v$ danej bryły na te osi wyrazimy wzorami

$$L = A \cdot \varphi_\xi; \quad M = B \cdot \varphi_\eta; \quad N = C \cdot \varphi_\zeta \quad . \; . \; . \; . \quad (238)$$

Obracając następnie z prędkościami φ_ξ, φ_η i φ_ζ daną bryłę kolejno około obranych osi $\bar{\varphi}$, otrzymamy, rys. 58-my, sześć wektorów działań giroskopowych, t. j. sześć składowych wektorów momentu sił odśrodkowych, które łącznie z rzutami wektora momentu sił zewnętrznych, działających na daną bryłę, równają się, równ. 93-cie, iloczynowi z odnośnych momentów bezwładności i z przyśpieszeń kątowych.

Zestawiając te równania kolejno dla każdej osi oddzielnie, otrzymamy trzy równania, zwane równaniami Euler'a

$$N \, . \, \varphi_{\eta} - M \, . \, \varphi_{\zeta} + M_{P, \xi} = \frac{dL}{dt};$$

$$L \, . \, \varphi_{\zeta} - N \, . \, \varphi_{\xi} + M_{P, \eta} = \frac{dM}{dt};$$

$$M \, . \, \varphi_{\xi} - L \, . \, \varphi_{\eta} + M_{P, \zeta} = \frac{dN}{dt}.$$

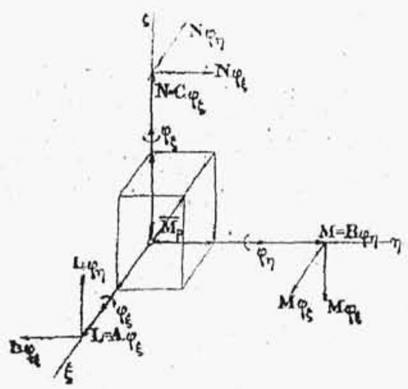
Podstawiwszy następnie z równań 238-mych odnośne wartości rzutów wektora momentów ilości ruchu, otrzymamy po zgrupowaniu wyrazów

$$A \, . \, \frac{d\varphi_{\xi}}{dt} + (B - C) \, . \, \varphi_{\eta} \, . \, \varphi_{\zeta} = M_{P, \xi};$$

$$B \, . \, \frac{d\varphi_{\eta}}{dt} + (C - A) \, . \, \varphi_{\xi} \, . \, \varphi_{\zeta} = M_{P, \eta};$$

$$C \, . \, \frac{d\varphi_{\zeta}}{dt} + (A - B) \, . \, \varphi_{\xi} \, . \, \varphi_{\eta} = M_{P, \zeta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (239)$$

W równania te wchodzą jak i w poprzednim przypadku trzy zmienne φ_{ξ}, φ_{η} i φ_{ζ} oraz spółrzędne, określające położenie wektora momentu sił zewnętrznych względem przestrzeni nieruchomej (kinetycznej). Ażeby przeto módz scałkować te równania, należy wogóle zmienne φ_{ξ}, φ_{η} i φ_{ζ} wyrazić spółrzędnemi układu nieruchomego; a wtedy otrzymamy wogóle trzy jednoczesne równania różniczkowe z trzema zmiennemi zależnemi od czasu, które po scałkowaniu dadzą związki pomiędzy spółrzędnemi położenia bryły i czasem.



Rys. 58.

Postępowanie to jednakże chociaż jest zupełnie słuszne i ścisłe, napotyka wogóle na tak znaczne trudności matematyczne, że zmuszeni jesteśmy i w tym razie uciekać się do różnych uproszczeń, polegających na usuwaniu z rachunku pewnych wyrazów, których wartości wywierają mały wpływ na przebieg zjawiska ruchu, a niepomiernie upraszczają obliczenia.

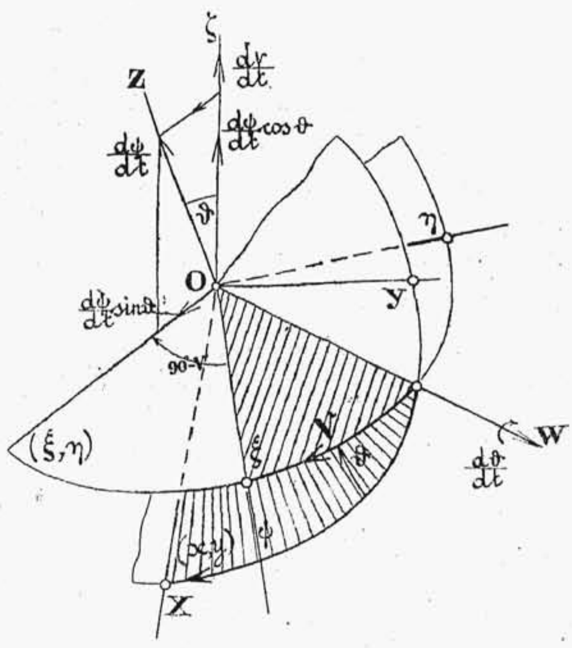
W celu zakończenia sposobu obliczenia ruchu, podanego przez Euler'a, który dla metodycznego postępowania jest niezbędny, podamy układ spółrzędnych, stosowany przez Euler'a i damy związek kinetyczny pomiędzy zmiennemi φ_ξ, φ_η i φ_ζ z jednej strony, a spółrzędnemi, wyznaczającemi położenie bryły w przestrzeni kinetycznej, z drugiej strony; związki te nazwiemy równaniami geometrycznemi Euler'a.

96. Równania geometryczne Euler'a. W celu określenia położenia układu osi ξ, η, ζ, sztywno związanych z kręcącą się bryłą i razem z nią poruszających się względem przestrzeni nieruchomej (kinetycznej), przeprowadźmy przez punkt obrotu osi nieruchome (x, y, z) wzajemnie prostopadłe; i oznaczmy prostą przecięcia się płaszczyzny (x, y) z płaszczyzną (ξ, η) literą W; tę prostą nazwiemy linią węzłów; a położenie ruchomego układu (ξ, η, ζ) względem układu nieruchomego (x, y, z) wyznaczą następujące kąty, zwane kątami Euler'a:

1) kąt ϑ, jaki tworzy płaszczyzna (ξ, η) z płaszczyzną (x, y); kąt ten równa się kątowi, jaki tworzy oś z z osią ζ; jako kąt pomiędzy prostopadłemi do tych płaszczyzn;

2) kąt ψ, jaki tworzy oś x z linią wezłów:

3) kąt ν, jaki tworzy oś ξ z prostą W. Kąt ϑ wyznacza zatem położenie płaszczyzny (ξ, η) względem płaszczyzny (x,y); kąt ψ wyznacza położenie linii węzłów na płaszczyźnie x, y; kąt zaś ν wyznacza położenie osi ξ na płaszczyźnie (ξ, η); a więc wyznacza również położenie osi η. W ten sposób te trzy kąty ϑ, ψ, ν wyznaczają położenie osi (ξ, η, ζ) względem osi $(x, y$ i $z)$; w przypuszczeniu, że początki tych układów są wspólne.



Rys. 59

Ażeby przeprowadzić bryłę materyalną, sztywno związaną z układem spółrzędnych (ξ, η, ζ), z położenia określonego kątami

$$\vartheta, \quad \psi, \quad \nu;$$

do położenia nieskończenie blizkiego; określonego kątami

$$(\vartheta + \Delta\vartheta); \quad (\psi + \Delta\psi); \quad (\nu + \Delta\nu);$$

należy dany układ obrócić około pewnej osi; lecz na zasadzie prawa superpozycyi ruchów; można zastąpić ten obrót trzema innemi obrotami;

a mianowicie obrotem około osi z o kąt $\Delta\psi$; następnie około osi W o kąt $\Delta\vartheta$ i wreszcie około osi ζ o kąt $\Delta\nu$. Prędkość przeto chwilowego obrotu, z jaką przeprowadzamy daną bryłę wraz z układem (ξ, η, ζ) z jednego położenia do drugiego nieskończenie blizkiego, składa się z trzech prędkości składowych

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}; \quad \frac{d\bar{\psi}}{dt}; \quad \frac{d\bar{\nu}}{dt};$$

o kierunkach osi W, z i ζ, rys. 59-ty; których wypadkowa jest prędkością właściwą $\bar{\varphi}$. Ponieważ suma algebraiczna rzutów tych wektorów na dowolną oś, jest rzutem prędkości właściwej $\bar{\varphi}$ na tę oś, rzuty przeto φ_ξ, φ_η, φ_ζ tej prędkości obliczymy jako sumy rzutów tych trzech składowych wektorów na każdą z osi ξ, η i ζ. W celu ułatwienia tego obliczenia, rozłożymy prędkość $\frac{d\psi}{dt}$ w kierunku osi ζ i w kierunku osi pomocniczej, prostopadłej do niej i leżącej w płaszczyźnie kąta ϑ. Wartości tych składowych są następujące: w kierunku osi ζ

$$\frac{d\psi}{dt} \,.\, \cos\vartheta;$$

i w kierunku osi pomocniczej

$$\frac{d\psi}{dt} \,.\, \sin\vartheta;$$

zamiast przeto rzutować trzy wektory składowe na każdą z osi ξ, η i ζ; rzutować będziemy na nie cztery wektory składowe.

Sumy tych rzutów na te osi są następujące

$$\varphi_\xi = -\frac{d\psi}{dt} \,.\, \sin\vartheta \,.\, \sin\nu + \frac{d\vartheta}{dt} \,.\, \cos\nu;$$

$$\varphi_\eta = \frac{d\psi}{dt} \,.\, \sin\vartheta \,.\, \cos\nu + \frac{d\vartheta}{dt} \,.\, \sin\nu;$$

$$\varphi_\zeta = \frac{d\psi}{dt} \,.\, \cos\vartheta + \frac{d\nu}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (240)$$

Wartości te, podstawione w równania dynamiczne Euler'a, równ. 239-te, zamieniają je na równania różniczkowe ze zmiennemi ϑ, ψ i ν; równania te po scałkowaniu dadzą równanie ruchu danej bryły; należy tylko rzuty wektora momentu sił zewnętrznych wyrazić również temi spółrzędnemi, co nie przedstawia wogóle trudności.

Równania te można również zastosować do obliczenia ruchu, przytoczonych wyżej przykładów ruchu giroskopów.

97. Inny sposób obliczenia równań dynamicznych Euler'a. Równanie dynamiczne momentów

$$\bar{M}_P = \frac{d\bar{M}_v}{dt};$$

określa zupełnie ruch około punktu nieruchomego bryły materyalnej, pozostającej pod działaniem sił zewnętrznych; bezpośrednie jednakże zastosowanie tego równania, do obliczenia ruchu takiej bryły, jest niedogodnem z tego względu, że obliczenie pochodnej momentu ilości ruchu, czego wymaga to równanie, jest pod względem rachunkowym zbyt złożone; bo chociaż z równań 74-tych tego tomu, które wyrażają rzuty wektora momentu ilości ruchu na osi nieruchome, możnaby obliczyć rzuty tej pochodnej, a z nich i samą pochodną, gdyby momenty I były wielkościami niezależnemi od czasu; lecz wielkości te są funkcyami czasu, i ta okoliczność sprawia właśnie trudności obliczenia pochodnej momentu ilości ruchu.

Obliczenie obrotu bryły około osi nieruchomej, któreśmy przeprowadzili w § 46-tym i 79-tym nie przedstawiało tych trudności; wartość bowiem momentu bezwładności I_φ była w tym razie niezmienną; a wartości momentów odśrodkowych $I_{2,3}$ i t. d. uczyniliśmy stałemi, przyjąwszy, że płaszczyzny spółrzędnych, względem których je obliczamy, obracają się razem z bryłą. W ogólnym przeto przypadku, w którym wzajemne położenie osi chwilowego obrotu względem bryły zmienia się, unikniemy tych trudności, jeżeli ruch bryły odniesiemy do układu spółrzędnych, sztywno związanych z daną bryłą i poruszających się z nią razem; względem bowiem tych osi wszystkie I będą wielkościami stałemi. W celu zastosowania tego sposobu przekształcimy równanie momentów w ten sposób, że przyrost wektora $\bar{M}_v$ wyobrazimy sobie złożony z dwóch przyrostów: z przyrostu, jakiego on doznaje, poruszając się razem z bryłą i z przyrostu jakiego on doznaje, zmieniając swe położenie w samej bryle. Prędkość przeto jego końca składać się będzie z obrotu, jaki wykonywa bryła, jest to prędkość unosząca; tę prędkość wyrazimy wzorem wektorowym:

$$\mathrm{V}\,\bar{M}_v\,.\,\bar{\varphi}$$

gdzie $\bar{\varphi}$ oznacza chwilową prędkość bryły; i — z prędkości względnej, z jaką porusza się ten koniec w samej bryle; prędkość tę oznaczymy symbolicznie

$$\frac{d^*\bar{M}_v}{dt}$$

tak, iż powyższe równanie momentów przyjmie postać

$$\bar{M}_p = \mathrm{V}\,\bar{M}_v\,.\,\bar{\varphi} + \frac{d^*\bar{M}_v}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (241)$$

Jest to równanie Euler'a w postaci wektorowej.

Napisawszy je w postaci

$$-\mathrm{V}\,\bar{M}_v\,.\,\bar{\varphi} + \bar{M}_p = \frac{d^*\bar{M}_v}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (242)$$

znajdziemy w niem wyraz pojęć dynamicznych, na których oparliśmy poprzednie wyprowadzenie; lewa bowiem strona wyraża sumę momentu sił bezwładności, jakie powstają w bryle podczas jej obrotu około osi chwilowej $\bar{\varphi}$ i momentu sił zewnętrznych. Gdyby oś obrotu była unieruchomiona w przestrzeni, wtedy suma tych wyrazów równałaby się działaniu obracającej się bryły na łożyska osi; w danym zaś razie wyobraża ona działanie, które zmienia położenie bryły.

Równanie to utożsamimy z równaniami 239-mi, gdy zrzutujemy je na osi główne danej bryły; i w tym celu dla obliczenia rzutów wyrazu pierwszego na obrane osi spółrzędnych zastosujemy wzór 97-my tomu I-go; rzuty wyrazu drugiego napiszemy bezpośrednio; rzuty zaś wyrazu, stojącego po prawej stronie równania 242-go, obliczymy, gdy weźmiemy pod uwagę twierdzenie, wyprowadzone w § 23-cim tomu I-go, że rzut pochodnej równa się algebraicznej pochodnej rzutu tego wektora i na zasadzie tego otrzymamy trzy składowe tej pochodnej $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$ i $\frac{dN}{dt}$; gdzie literami L, M i N oznaczyliśmy rzuty wektora $\bar{M}_v$ na osi główne; w ten sposób otrzymamy równania 239-te.

K. Równania Lagrange'a.

98. Równanie statyczne. Wyobraźmy sobie, że położenie każdego punktu danego układu wyznaczone jest przez promień wodzący $\bar{r}_k$, wyprowadzony do k-tego punktu układu, z dowolnie obranego lecz stałego punktu, zwanego początkiem układu; i przyjmiemy, że położenie tego wektora w przestrzeni jest określone przez pewne **niezależne od siebie** wielkości, które oznaczymy ogólnie literami $q_1, q_2 \cdots q_s$, i nazwiemy je spółrzędnemi niezależnemi; wielkości te mogą oznaczać np. kąty, jakie tworzy dany promień wodzący z obranemi osiami układu nieruchomego; lub odległości od pewnych osi, płaszczyzn i t. p.; o te szczegóły w danym razie nie idzie, a idzie tylko o to, ażeby te wielkości były od siebie niezależne i jednoznacznie określały położenie k-tego promienia $\bar{r}_k$, a więc i odpo-