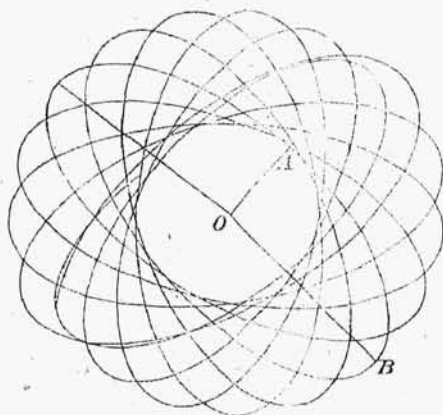
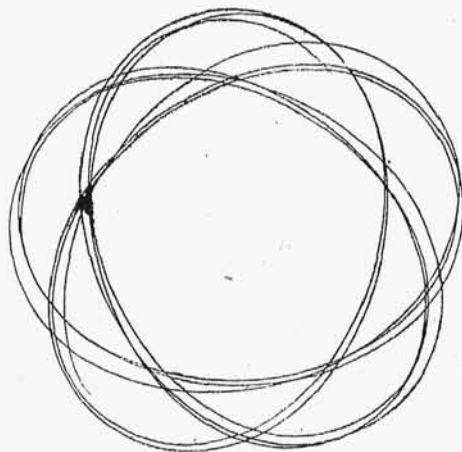


gdy jednocześnie elipsa jest w ruchu. Rys. 42-gi i 43-ci są rzutami toru punktu wahadła kulistego na płaszczyznę poziomą, a powstanie tego toru można sobie wyobrazić w ten sposób, że punkt ruchomy, (t. j. rzut punktu właściwego), zakresła elipsę, która obraca się około swego środka.



Rys. 42.



Rys. 43.

Szczegółowsze badania tego ruchu wykazują, że punkt styka się z tem samym kołem, ograniczającym jego ruch w różnych odstępach. Jeżeli zatem stosunek wielkości takiego odstępu do obwodu tegoż koła jest wymierny, to punkt po przejściu pewnej ilości razy około środka, powróci do miejsca wyjścia; gdy zaś stosunek ten jest niewymierny, wtedy punkt ruchomy nigdy nie wróci do swego pierwotnego położenia; a tor będzie w tym razie krzywą niezamkniętą, która po upływie nieskończonego długiego czasu, wypełni swemi punktami całe pole pomiędzy kołami, ograniczającemi tor. Rys. 39-ty przedstawia tor punktu ruchomego w widoku. Rysunki zaś 42-gi i 43-ci są odbitkami zdjęć fotograficznych ruchu, odbywającego się w rzeczywistości <sup>1)</sup>.

**58. Właściwości ruchu wahadła kulistego, zbliżonego do wahadła stożkowego.** Znajomość ruchu wahadła kulistego potrzebną nam jest przy badaniu ruchu regulatorów; rozpatrzmy przeto jeszcze pewne jego właściwości. Rozpatrywania, które mamy teraz przedsięwziąć różnią się pod względem teoretycznym od poprzednich tem, że obecnie za podstawę wźmiemy szczególny ruch po kole w płaszczyźnie poziomej,

<sup>1)</sup> Rys. 40, 43 i 44 są wzięte z dzieła „The Dynamics, by Arthur Gordon Webster. 1912“.

ruch, którego powstanie warunkuje równ. 89-te. Zbadamy ten ruch w tym przypadku, gdy jego początkowa prędkość niezupełnie odpowiada warunkom ruchu po kole, wskazanym przez równ. 89-te. Ruch taki wywołamy, gdy wahadło, poruszające się po kole poziomem, odchylimy nieco, np. słabem uderzeniem, z położenia, w którym się znajduje chwilowo; wtedy wahadło dane zejdzie z toru kołowego i zakresi jakiś inny tor, przypuszczalnie zbliżony do koła, lecz dotychczas nam nieznanym. Wyznaczenie tego toru, oraz ruchu po nim jest obecnie naszym zadaniem. Do tych badań zastosujemy spólrzędną  $\sigma$  punktu ruchomego i w celu napisania równania ruchu, wyrażonego tą spólrzędną i czasem podstawimy w równanie pracy, równ. 115-te

$$z = r \cos \sigma; \text{ oraz } v^2 = \left( r \sin \sigma \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\sigma}{dt} \right)^2;$$

gdzie  $v$  jest wyrażone sumą prędkości unoszącej, oraz prędkości względnej ruchu na płaszczyźnie biegunowej. Po podstawieniu tych wartości otrzymamy równanie pracy w następującej postaci

$$gr \cos \sigma = \frac{1}{2} r^2 \left( \sin \sigma \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + K,$$

w którym  $K$  zastępuje wyrazy stałe powyższego równania. Ażeby  $\sigma$  wyrazić funkcją  $t$ , należy wyrazić  $\frac{d\theta}{dt}$  zmienną  $\sigma$ ; a w tym celu skorzystamy z równania momentu ilości ruchu, które napiszemy w postaci

$$m(r \sin \sigma)^2 \frac{d\theta}{dt} = M_0,$$

obliczymy z niego  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{M_0}{m r^2 \sin^2 \sigma}$  i podstawimy w powyższe równanie pracy; a otrzymamy je w postaci

$$gr \cos \sigma = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{M_0}{m r^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \sigma} + \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + K.$$

Zrózniczkujemy to równanie względem czasu, a po skróceniu przez wspólny czynnik  $\frac{d\sigma}{dt}$ , otrzymamy

$$-gr \sin \sigma = -r^2 \left( \frac{M_0}{m r^2} \right)^2 \frac{\cos \sigma}{\sin^3 \sigma} + r^2 \frac{d^2 \sigma}{dt^2};$$

skąd po uporządkowaniu

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \left[ \frac{g}{r} \sin \sigma - \left( \frac{M_0}{mr^2} \right)^2 \frac{\cos \sigma}{\sin^3 \sigma} \right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Równanie to moglibyśmy również wyprowadzić z równania dynamicznego tego ruchu, zrzutowawszy je na trzy osi:  $z$ ,  $h$  i na oś prostopadłą do płaszczyzny biegunowej, a po wyrugowaniu z tych równań  $N$  i  $\frac{d\theta}{dt}$  otrzy-

malibyśmy powyższe równanie ruchu.

Równanie 130-te jest jednym z równań ruchu wahadła kulistego. Zbadajmy obecnie, mając za podstawę to ogólne równanie, czy jest możliwem, ażeby powstał ruch kołowy punktu; a gdy okaże się to możliwem, znajdziemy warunki ruchu początkowego, przy których powstaje ten ruch. W przypadku ruchu kołowego kąt  $\sigma = \sigma_c =$  stałej wielkości, a zatem po podstawieniu tej wartości w rów. 130-te, otrzymamy z niego

$$M_0 = \pm m \sqrt{\frac{gr^3 \sin^4 \sigma_c}{\cos \sigma_c}} \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

a więc dla każdego kąta  $\sigma_c$  można obliczyć wartość  $M_0$  momentu początkowej ilości ruchu, przy której ruch wahadła będzie stożkowy. Pozostawia się czytelnikowi utożsamieć ten warunek z warunkiem, wyrażonym równ. 89-em.

Przyjmijmy teraz, że ruch wahadła wskutek jakichś fizycznych warunków odbiega od ruchu kołowego i że ta różnica jest nieznaczną i obliczmy ten ruch. W tym celu oznaczmy różnicę kątów pomiędzy położeniem rzeczywistym wahadła, a stożkowym przez  $\Delta \sigma$ ; kąt wahadła stożkowego przez  $\sigma_c$ ; to kąt właściwego ruchu  $\sigma = \sigma_c + \Delta \sigma$ .

Zmienną wielkością podczas tego ruchu jest  $\Delta \sigma$ , jeżeli zatem obliczymy związek pomiędzy  $\Delta \sigma$  i czasem  $t$ , to będziemy mogli obliczyć również właściwe odchylenie  $\sigma$  w zależności od  $t$ . Ażeby obliczyć ten związek podstawmy w równanie ogólne ruchu kulistego, równ. 130-te, wartość  $\sigma = \sigma_c + \Delta \sigma$ ; i przyjmijmy, że  $\Delta \sigma$  jest wielkością tak małą w porównaniu z  $\sigma$ , że wyższe jej potęgi oprócz pierwszej, mogą być rachunkiem nie uwzględnione.

Równanie 130-te napiszemy w postaci ogólnej

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} + F(\sigma) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

po podstawieniu w nie  $\sigma = \sigma_c + \Delta \sigma$ , otrzymamy

$$\frac{d^2 (\sigma_c + \Delta \sigma)}{dt^2} + F(\sigma_c + \Delta \sigma) = 0.$$

Różniczkowanie, wskazane w tem równaniu, zastosujemy do oddzielnych składników sumy; a funkcję  $F(\sigma_c + \Delta \sigma)$  rozwiniemy w szereg Taylora

$$F(\sigma_c + \Delta \sigma) = F(\sigma_c) + \Delta \sigma \cdot \frac{dF(\sigma_c)}{d\sigma_c}, \dots (134)$$

w którym uwzględnimy tylko wyraz pierwszej potęgi wielkości  $\Delta \sigma$ . Po podstawieniu tych wartości i uwzględnieniu; że

$$\frac{d^2 \sigma_c}{dt^2} = 0; \text{ oraz } F(\sigma_c) = 0;$$

otrzymamy szukane równanie

$$\frac{d^2(\Delta \sigma)}{dt^2} + \Delta \sigma \cdot \frac{dF(\sigma_c)}{d\sigma_c} = 0 \dots (135)$$

Zastosujmy ten wzór do naszego przykładu i podstawimy w nie, po ułożeniu równ. 133-go z 131-szem

$$F(\sigma) = \frac{g}{r} \sin \sigma - \left( \frac{M_0}{mr^2} \right)^2 \cdot \frac{\cos \sigma}{\sin^3 \sigma}; \text{ skąd}$$

$$\left. \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=\sigma_c} = \frac{g}{r} \cos \sigma_0 = \left( \frac{M_0}{mr^2} \right)^2 \cdot \frac{1 + 2 \cos^2 \sigma_c}{\sin^4 \sigma_c};$$

a otrzymamy po podstawieniu  $M_0$  z równ. 132-go, szukany związek

$$\frac{d^2(\Delta \sigma)}{dt^2} + \Delta \sigma \cdot k = 0, \text{ w którym} \dots (136)$$

$$k = \frac{g}{r} \cdot \frac{1}{\cos \sigma_c} (1 + 3 \cos^2 \sigma_c) \dots (137)$$

Jest to równanie różniczkowe, którego właściwości matematyczne zbadaliśmy w § 7-ym, oraz 48-mym. Równanie to przedstawiać może, zależnie od znaku wartości  $k$ , dwojakiego rodzaju ruch: ruch okresowy, gdy całka jego jest funkcją okresową (trygonometryczną), lub też ruch nieokresowy, gdy całka jest funkcją wykładniczą. Gdy  $k > 0$ ;  $\Delta \sigma$  waha się pomiędzy pewnemi stałemi wartościami  $\pm \Delta \sigma'$ ; a przypadek ten wyraża, że tor, jaki zakresła wahadło, wyprowadzone nieco z położenia  $\sigma_c$ , wije się około obwodu koła po obydwu jego stronach; gdy zaś  $k < 0$  wartość  $\Delta \sigma$  z biegiem czasu stale się powiększa; punkt przeto, zeszedłszy z toru kołowego, nigdy na niego nie wróci.

Ze wzoru 137-go odczytamy, że wartość  $k$  nie może być dla wahadła kulistego odjemną, gdyż w myśl poprzednich badań tego ruchu

musi być zawsze  $\sigma_c < 90^\circ$ ; zmiany zatem wielkości  $\Delta \sigma$  są w ruchu wahadła kulistego okresowe.

Ruch ten uwidocznimy sobie w sposób następujący. Umieścimy się w płaszczyźnie biegunowej wahadła i z nią razem obracamy się około osi pionowej, a ruch danego punktu przedstawi się jako ruch wahadła płaskiego, którego położenie równowagi jest nachylony względem pionu pod kątem  $\sigma_c$ .

Z właściwości tych dwóch ruchów sądzić można o ruchu złożonym; a więc oznaczwszy okres podwójnego wachnięcia w płaszczyźnie biegunowej literą  $T_w$ , napiszemy, po utożsamieniu równ. 135-tego z równ. np. 18-tem, i na zasadzie wyprowadzonego już wzoru 25-go

$$T_w = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \sqrt{\frac{\cos \sigma_c}{1 + 3 \cos^2 \sigma_c}}. \quad (138)$$

okres zaś  $T_0$  pełnego obiegu wahadła stożkowego napiszemy z równ. § 40-tego

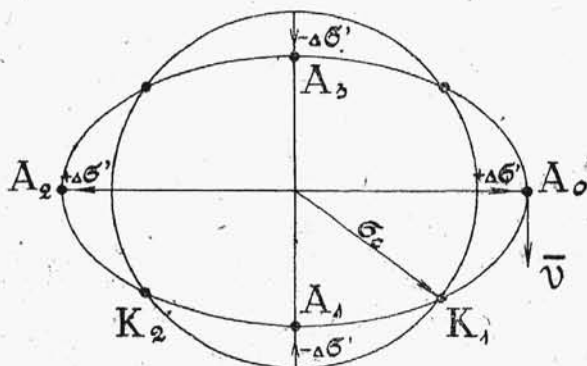
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \sqrt{\cos \sigma_c};$$

a zależność tych dwóch okresów wyrazimy wzorem

$$T_w = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \sigma_c}}.$$

Jeżeli kąt  $\sigma_c$  jest bliski zera, to

$$T_w \cong \frac{1}{2} T_0;$$



Rys. 44.

a z tego stosunku wynika, że podczas np. połowy podwójnego wachnięcia punktu w płaszczyźnie biegunowej, płaszczyzna ta obróci się o ćwierć pełnego obrotu t. j. o  $90^\circ$ . W ten sposób wahadło podczas pełnego obrotu płaszczyzny biegunowej przecnie stożek w czterech symetrycznych miejscach.

Rzut toru takiego punktu

na płaszczyznę poziomą ma postać w przybliżeniu, wskazaną na rys. 44-ym; na którym nakreślone koło przedstawia rzut toru punktu podczas ruchu stożkowego; a literami  $\Delta \sigma'$  oznaczono największe odchylenia wahadła od tego ruchu. Punkt  $A_0$  oznacza rzut właściwego punktu w po-

czątkowem jego odchyleniu;  $A_1$  — po zrobieniu połowy podwójnego wahnięcia;  $A_2$  zaś po zrobieniu pełnego podwójnego wahnięcia. Punkty  $K_1$  i  $K_2$  są rzutami punktu, gdy wahadło przechodzi przez położenia równowagi.

Z powiększeniem jednakże kąta  $\sigma_c$ , okres podwójnego wahnięcia punktu w płaszczyźnie biegunowej się powiększa; czyli punkt ruchomy przy większych kątach  $\sigma_c$  wolniej się waha, t. j. gdy punkt robi np. połowę podwójnego wahnięcia, wtedy płaszczyzna biegunowa obróci się o kąt większy niż  $90^\circ$ ; wskutek czego miejsca  $K_1$  i  $A_2$ , rys. 44-ty, w których wahadło przecina stożek z powiększeniem kąta  $\sigma_c$  posuwają się po kole w kierunku zgodnym z obrotem płaszczyzny biegunowej; i w ten sposób otrzymamy postać toru, wskazaną np. na rys. 41-szym. Dla granicznej wartości  $\sigma_c = 90^\circ$ ;  $T_0 = T_w$ .

Jeżeli stosunek  $\frac{T_0}{T_w}$  jest współmierny, co następuje tylko przy

szczególnych wartościach kąta odchylenia  $\sigma_c$ , to punkt ruchomy powróci po pewnym czasie do miejsca wyjścia, i ponowi tę samą drogę; w przeciwnym razie zakreślać on będzie ciągle nowe tory, którymi wypełni część powierzchni kuli, zawartą pomiędzy kołami, wyznaczonemi przez kąty środkowe  $(\sigma_c + \Delta \sigma')$  i  $(\sigma_c - \Delta \sigma')$ .

W powyższym przybliżonym rachunku przyjęliśmy, że  $\Delta \sigma$  jest małą wielkością w porównaniu z kątem  $\sigma_c$ ; dokładniejszego jednakże jej określenia nie daliśmy wskutek tego, że do tego należałoby przeprowadzić rachunek ścisły; gdyż wtedy dopiero, że wzorów otrzymanych tą drogą, ustalibyśmy można stopień dokładności; a tego staraliśmy się uniknąć, ze względu na trudności rachunkowe. Należy jednakże choć ogólnikowo ocenić, o ile postępowanie nasze rachunkowe zbliża się do dokładnych wartości. Dokładnie, np.  $\sin 55^\circ \cong 0,81915$  (wzięte z tablic), a wzór przybliżony, który stosowaliśmy w powyższym rachunku, wzór 132-gi da wartość po rozłożeniu np.:

$$\sin 55^\circ = \sin (50^\circ + 5^\circ) \cong \sin 50^\circ + (\text{dłuk } 5^\circ) \cdot \cos 50^\circ = 0,82216;$$

zachodzi przeto nieznaczna różnica 0,4% pomiędzy wartością dokładną, a przybliżoną. Jeżeli przeto pomiędzy temi wartościami zachodzi tak mała różnica, to i wartości ich funkcyi nie mogą stosunkowo wiele różnić się między sobą; równanie przeto 133-cie i na jego podstawie wyprowadzone równ. 135-te, z dostateczną dokładnością wyrażają właściwości kinematyczne danego ruchu, co też zostało stwierdzone doświadczeniami.

**59. Rodzaje ruchu, wyrażonego linijnem równaniem różniczkowem drugiego rzędu.** Spotykaliśmy się w rozpatrywaniach poprzednich z ró-

wnaniem ruchu o postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Równanie to wyraża dwojakiego rodzaju ruch, zależnie od znaku współczynnika  $k$ .

1) w przypadku  $k > 0$ , równanie to wyraża ruch harmonijny (okresowy) około pewnego środka; wyraz bowiem  $\frac{d^2x}{dt^2}$  uważać można za iloczyn z masy (w danej postaci tego wyrazu = 1) i przyspieszenia punktu; a wyraz  $kx$  — za siłę, działającą na dany punkt; powyższe przeto równanie, napisane w postaci

$$-kx = \frac{d^2x}{dt^2},$$

uważać można za równanie dynamiczne siły ( $-kx$ ), zwróconej ciągle ku środkowi, tak dla dodatnich wartości  $x$ , jak i dla ujemnych; ruch przeto tego punktu będzie opóźniony, gdy punkt oddala się od środka przyciągania, a będzie przyspieszony, gdy zbliża się on do tego środka. Inny będzie ruch w przypadku:

2) gdy  $k < 0$ , wtedy bowiem zwrot siły ( $kx$ ) i przyspieszenia  $\frac{d^2x}{dt^2}$  posiadają zwroty zgodne, ruch przeto takiego punktu jest ciągle przyspieszony. W przypadku zaś

3) gdy  $k = 0$ , siła działająca na punkt  $= 0$ ; ruch zatem jest jednostajny.

Jeżeli więc w równaniu ruchu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0;$$

$k > 0$ , to ruch jest harmonijny; jeżeli;

$k < 0$ , to ruch jest ciągle przyspieszony i jednozrotny - nieokresowy, jeżeli zaś;

$k = 0$ , to ruch jest jednostajnie przyspieszony.

Te same wnioski odnoszą się do przypadku, w którym wyraz  $kx$  zastąpimy wyrazem ogólniejszym  $f(x)$ . Wyraz ten możemy również uważać za wyraz siły i powiemy: jeżeli w równaniu ruchu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0,$$

dla wartości  $x$ , zawartych np. między granicami  $x_1$  i  $x_2$ , wartość  $f(x) > 0$ , to ruch w położeniach punktu, określonych temi granicami, jest opóź-



niony, gdy oddala się od środka; jeżeli zaś  $f(x) < 0$ , to jest on ciągle przyspieszony, w przypadku zaś, gdy  $f(x) = 0$ , to jest od jednostajny.

Jeżeli mamy równanie o postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (139)$$

to, przyjąwszy dwa ostatnie wyrazy za wyrazy sił, napiszemy je w postaci

$$-c \frac{dx}{dt} - kx = \frac{d^2x}{dt^2},$$

z którego wynika, że siła  $c \frac{dx}{dt}$  podczas ruchu punktu zmienia swój znak ze zmianą zwrotu prędkości. Jeżeli  $c > 0$ , to siła  $c \frac{dx}{dt}$  wstrzymuje jego ruch; ruch przeto punktu będzie ciągle tą siłą przytłumiany; lecz punkt pomimo tego nie zatrzyma się, gdyż wtedy siła  $c \frac{dx}{dt}$  byłaby  $= 0$ ; a siła  $kx$  wywołałaby ruch; może więc tylko następować, asymptotyczne wygasanie prędkości i siły  $kx$ .

Jeżeli zaś  $c < 0$ , to strzałka siły  $c \frac{dx}{dt}$  jest zgodną ze strzałką prędkości, punkt przeto pod działaniem tej siły, jest ciągle przyspieszony. Algebraiczna analiza równ. 34-go, podana w § 9-tym tego tomu, doprowadziła nas do wniosku, że o ile pierwiastki równania

$$m\rho^2 + c\rho + k = 0; \quad \rho = -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - k},$$

są urojone, to ruch jest harmoniczny. Przypadek ten wcale nie zachodzi, jeżeli  $k < 0$ , t. j. jeżeli siła odpycha dany punkt od środka, jeżeli zaś  $k > 0$ , to może nastąpić ruch harmoniczny przy pewnym stosunku wartości  $c$  i  $k$ ; Jeżeli ten przypadek zachodzi i przytem  $c$  jest dodatnie, to ruch jest harmoniczny przytłumiony, porów. równ. 43-cie; jeżeli zaś wartość  $c$  jest odjemną, to łatwo odczytać z równ. 43-go, że ruch jest harmoniczny wymuszony. Jeżeli zaś pierwiastki równania powyższego są rzeczywiste, to ruch jest nieokresowy. Przypadek ten następuje zawsze, gdy  $k < 0$ ; a dla pewnych tylko stosunków wartości  $c$  i  $k$ ; gdy  $k > 0$ .

Z wniosków tych korzystać będziemy przy badaniu właściwości ruchu na podstawie równania dynamicznego.