C. Ruch punktu bez oporów po danym torze.

39. Ruch bez oporów punktu ciężkiego po krzywej w płaszczyźnie poziomej. Na drut, zwinięty w postaci koła o promieniu r, nawleczona jest bryła materyalna o ciężarze Q, której nadano, np. uderzeniem, pewną prędkość początkową v_0, stycznie do obwodu koła. Obliczyć ruch bryły, gdy koło znajduje się w płaszczyźnie poziomej i gdy nie uwzględnimy tarcia pomiędzy bryłą a drutem.

Na bryłę działa siła ciążenia Q i siła odporu N, która sprowadza daną bryłę z toru prostolinijnego, jakiby wykonała pod działaniem siły ciążenia, na tor kołowy. Siła odporowa wobec nieuwzględnienia tarcia leży w płaszczyźnie normalnej do toru, przeprowadzonej w miejscu, w którem badamy ruch bryły; położenie zaś jej w tej płaszczyźnie jest nam nieznane, jak również i jej wielkość. Rys. 26-ty przedstawia płaszczyznę normalną do koła. Równanie dynamiczne ruchu tego punktu jest następujące

$$\bar{Q} + \bar{N} = m\bar{p};$$

Rzut tego równania na styczną do toru daje równanie $O = mp_t$; z którego wynika, że ruch po torze odbywa się jednostajnie z prędkością stałą v_0, równą prędkości początkowej danego punktu. Do tegoż wniosku dojdziemy, zastosowawszy, zamiast równania rzutów na styczną do toru, zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej, która daje pierwszą całkę równania siły stycznej.

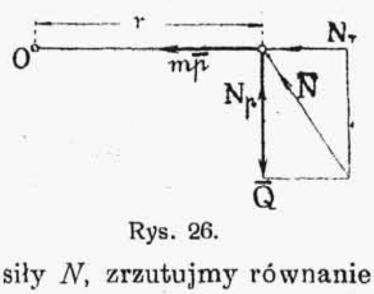
Praca bowiem sił w danym razie $= 0$; z czego wynika, że energia kinetyczna punktu, t. j. prędkość punktu pozostaje podczas ruchu niezmienną.

Ponieważ ruch jest jednostajny po kole, przeto przyśpieszenie jego
$p_n = \frac{v^2_0}{r}$; $p_t = 0$.

W celu obliczenia siły normalnej zrzutujmy powyższe równanie dynamiczne na promień koła, a otrzymamy

$$N_r = m\,\frac{v^2_0}{r};$$

gdzie N_r oznacza rzut siły odporowej N na kierunek promienia, ze zwrotem dodatnim ku środkowi koła.



Rys. 26.

Ażeby obliczyć drugi rzut siły N, zrzutujmy równanie dynamiczne na oś pionową, a otrzymamy

$$Q - N_p = 0;$$

rzut bowiem przyśpieszenia na pionową $= 0$. Siła przeto odporowa

$$\bar{N} = \bar{N}_p + \bar{N}_r;$$

i można ją uważać za złożoną z dwóch sił: z siły pionowej, równoważącej ciężar punktu, i z siły, wywołującej przyśpieszenie p. Okres T obiegu punktu $T = \frac{2\pi r}{v_0}$.

Pozostawia się czytelnikowi zastosowanie tych rozpatrywań do przypadku, w którym drut ma postać krzywej dowolnej, leżącej w płaszczyźnie poziomej.

40. Wahadło matematyczne stożkowe. Do jednego końca nici nierozciągliwej przymocowany jest punkt materyalny o ciężarze mg; drugi zaś jej koniec jest umocowany nieruchomo w przestrzeni rys. 27-my. Obliczyć prędkość v_0 jaką należy nadać temu punktowi, ażeby zakreślił on koło poziome o promieniu r, którego środek znajduje się na pionowej, przeprowadzonej przez punkt umocowania nici. Długość nici oznaczymy literą l, a jej naprężenie literą S.

Kierunek szukanej prędkości w myśl jej określenia jest styczny do koła, a wielkość jej obliczymy z równania dynamicznego, zważywszy, że na dany punkt działa ciężar punktu i naprężenie nici S, a zatem mamy równanie dynamicze

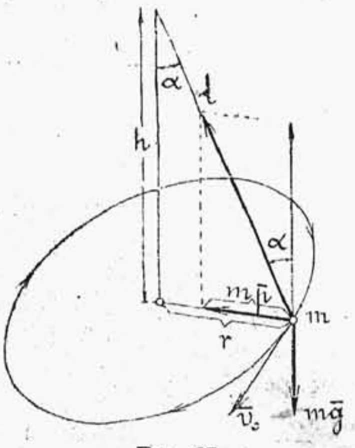
$$m\bar{g} + \bar{S} = m\bar{p} \quad \dots\dots\dots \quad (88)$$

Podczas tego ruchu praca siły ciążenia i praca naprężenia nici równa się zeru; przeto energia kinetyczna punktu pozostaje podczas ruchu stałą; a punkt poruszać się będzie po kole jednostajnem; z czego wynika, że przyśpieszenie punktu jest skierowane po promieniu koła i $= \frac{v_0^2}{r}$. Zrzutujmy równanie dynamiczne danego ruchu (równ. 88-me) na promień wodzący danego punktu, a otrzymamy równanie

$$S \sin\alpha = m\frac{v_0^2}{r},$$

w które wchodzą dwie niewiadome S i v_0; ażeby je obliczyć, zrzutujmy równanie dynamiczne jeszcze na oś pionową, a otrzymamy równanie

$$mg - S\cos\alpha = 0.$$



Rys. 27.

Z tych dwóch równań wyrugujemy S, dzieląc np. jedno przez drugie, i obliczymy wartość prędkości szukanej, przy której punkt zakreśli koło, a zatem

$$v_0 = \pm\sqrt{r g \operatorname{tg} \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (89)$$

Równanie rzutów równania dynamicznego na trzecią oś, np. na styczną do koła, wskaże nam, że rzut przyśpieszenia równa się zeru, ruch przeto punktu jest jednostajny; cośmy zresztą już wywnioskowali z zasady pracy.

Równanie 89-em możemy otrzymać bezpośrednio, gdy obierzemy oś rzutów w ten sposób, ażeby rzut naprężenia nici na tę oś równał się zeru, a rzut przyśpieszenia posiadał skończoną wartość. Osią taką jest prosta, leżąca w płaszczyźnie biegunowej i prostopadła do kierunku nici; rzut na tę oś daje równanie

$$mg \sin \alpha = mp \cos \alpha,$$

z którego po podstawieniu $p = \frac{v^2_0}{r}$, otrzymamy równ. 89-te.

W celu zbadania właściwości tego ruchu; podstawmy w równ. 89-te, $v_0 = r\varphi$ i obliczmy φ;

$$\varphi = \pm\sqrt{g \frac{\operatorname{tg} \alpha}{r}}.$$

Z równania tego wynika, że dla $r = 0$, $\alpha = 0$, oraz $\varphi = \sqrt{\frac{0}{0}}$; t. j. φ otrzymuje w tym przypadku wartość nieoznaczoną. Ażeby ją obliczyć wyrazimy zmienne α i r wspólną zmienną, w tym celu podstawimy $r = h \operatorname{tg} \alpha$ i otrzymamy

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

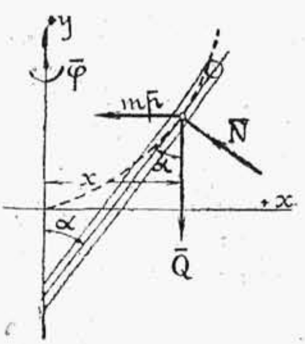
Dla $\alpha = 0$, $h = h_{max.} = l$; a $\varphi = \varphi_{min.}$, czyli

$$\varphi_{min.} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Prędkość przeto obrotowa powinna mieć conajmniej wartość, wskazaną tym wzorem, jeżeli ma powstać możność odchylenia wahadła. Jeżeli zaś prędkość obrotowa φ jest mniejszą, to wahadło pozostaje w położeniu pionowem nawet po odchyleniu. Powiększając przeto prędkość obrotową od zera do $\varphi_{min.}$, wahadło nie może doznać żadnych odchyleń. Prędkość $\varphi_{min.}$ nazwiemy prędkością krytyczną; po przekroczeniu bowiem tej prędkości punkt będzie w **ruchu nietrwałym.**

Czas obiegu T obliczymy równ. $2\pi r = v_0 T$, a po podstawieniu wartości dla v_0, $T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \operatorname{tg} \alpha}}$.

41. Przykład. W rurce, obracającej się około osi pionowej, z prędkością stałą φ, rys. 28-my, której wewnętrzne ścianki są zupełnie gładkie, umieszczono punkt materyalny o ciężarze $m\bar{g}$ (np. w postaci kulki); znaleść miejsce w tej rurce, w którem kulka ta, podczas obrotu rurki, pozostawać będzie w spoczynku względem rurki. Kąt, jaki tworzy oś rurki z osią obrotu, oznaczono literą α.



Rys. 28.

Na daną kulkę działa siła ciężkości i siła normalna; siły te wywołują przyśpieszenie punktu, które ma być skierowane po promieniu x koła, jakie on zakreśla; równa się więc $m\frac{v^2}{x}$. Równanie dynamiczne tego ruchu jest przeto następujące

$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (90)$$

Zrzutujmy to równanie na oś rurki; rzut bowiem siły odporowej równa się w tym razie zeru; a otrzymamy równanie

$$mg\cos\alpha = mx\varphi^2\sin\alpha;$$

z którego obliczymy położenie punktu ruchomego, odpowiadające postawionym warunkom

$$x = \frac{g}{\varphi^2}\operatorname{cotg}\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (91)$$

Zadanie jest rozwiązane!

Z równania tego wynika, że przy stałych wielkościach g i φ, x zależy od kąta α. Zmieniając przeto kąt α, rurka będzie zmieniać swe położenia, a oś jej będzie styczną do pewnej krzywej. Krzywa ta będzie miała taką właściwość, że punkt ruchomy w każdem jej miejscu będzie pozostawał w spoczynku lub w ruchu jednostajnym podczas jej obrotu ze stałą prędkością φ.

W celu obliczenia równania tej krzywej przeprowadzimy osi x i y, rys. 28-my, a zważywszy, że oś rurki jest styczną do szukanej krzywej, napiszemy $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\alpha$; a po podstawieniu tej wartości w równ. 91-sze, otrzymamy

$$x = \frac{g}{\varphi^2}\frac{dy}{dx};$$

skąd po oddzieleniu zmiennych i po scałkowaniu, otrzymamy równanie szukanej krzywej

$$x^2 = \left(\frac{2g}{\varphi^2}\right)y + C.$$

Jest to równanie paraboli, a C jest stałą, zależną od wyboru położenia początku osi spółrzędnych.

Zadanie to zmieńmy następnie w ten sposób, że punkt dany umieśćmy w dowolnem miejscu rurki, które określimy odległością a od osi obrotu; i obliczymy siłę S, działającą wzdłuż osi rurki, jaką trzeba przyłożyć do niego, ażeby utrzymać go w spoczynku w danem miejscu rurki.

Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące

$$\bar{S} + m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p}.$$

Zrzutujmy to równanie na oś rurki (dlaczego na tę oś?); a otrzymamy

$$S + mg\cos\alpha = ma\varphi^2 \sin\alpha; \quad \text{skąd} \quad S = m(a\varphi^2 \sin\alpha - g\cos\alpha).$$

Pozostawia się czytelnikowi zbadać, dla jakich wartości a, przy stałych φ i α, wartość S jest dodatnią, równą zeru, lub odjemną.

42. Ruch bez oporów punktu ciężkiego po prostej pochyłej. Na punkt, zsuwający się bez tarcia po prostej, nachylonej względem poziomu, rys. 29-ty działa ciężar $m\bar{g}$ oraz siła odporowa toru $\bar{N}$; siły te wywołują przyśpieszenie $\bar{p}$ punktu, które jest skierowane wzdłuż toru, (normalne bowiem przyśpieszenie $= 0$), ze zwrotem dodatnim ku dołowi. Równanie zatem dynamiczne tego ruchu w postaci wektorowej jest następujące

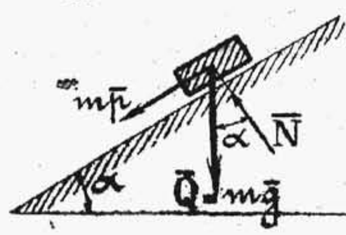
$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

Ażeby obliczyć przyśpieszenie p najdogodniej będzie dla rachunku zrzutować trójkąt wektorów, przedstawiony przez powyższe równanie dynamiczne, na kierunek toru, niewiadoma bowiem N nie wejdzie wtedy do równania tych rzutów; równanie przeto rzutów jest następujące

$$mg\sin\alpha = mp; \quad \text{lub} \quad mg\sin\alpha = m\frac{d^2s}{dt^2};$$

gdzie s oznacza długość drogi. Podstawmy w równanie powyższe zgodnie z określeniem $p = \dfrac{dv}{dt}$, a po scałkowaniu i rozwiązaniu względem v, otrzymamy

$$mv = mg\sin\alpha \,.\, t + C.$$



Rys. 29.

Przyjmijmy, że dla $t = 0$; $v = 0$, a po skróceniu przez m otrzymamy $v = g\sin\alpha \,.\, t$.

W celu obliczenia związku pomiędzy drogą s i czasem t, podstawimy w równanie poprzednie

$v = \frac{ds}{dt}$; a przyjąwszy, dla $t=0$; $s=0$, napiszemy całkę tego równania

$$s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (93)$$

Równania te pozwalają obliczyć prędkość i położenie punktu ruchomego w chwili t. Równanie, wykazujące zależność pomiędzy s i v, obliczymy, gdy z równania prędkości wyrugujemy zmienną t i podstawimy jej wartość w równanie drogi; równanie to jest następujące

$$s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \left(\frac{v}{g \sin \alpha} \right)^2; \text{ skąd } s = \frac{v^2}{2 g \sin \alpha}.$$

Siłę normalną N obliczymy, gdy rzutujemy równanie dynamiczne na kierunek tejże siły; równanie tych rzutów jest następujące

$$mg \cos \alpha - N = O; \text{ skąd } N = mg \cos \alpha.$$

Równanie ruchu danego punktu można również otrzymać bezpośrednio, stosując zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej. W tym celu zróbmy nieskończenie małe przesunięcie ds punktu ruchomego, które jest zgodne z warunkami danego ruchu, rys. 30-ty, a otrzymamy równanie

$$mg \sin \alpha \,.\, ds = d\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right);$$

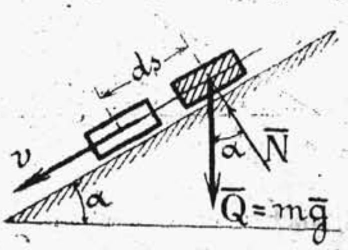
scałkujemy je od 0 do s i od 0 do v, a otrzymamy równanie ruchu w postaci

$$g \sin \alpha \,.\, s = \tfrac{1}{2} v^2,$$

wykazujące zależność pomiędzy położeniem punktu na torze i jego prędkością.

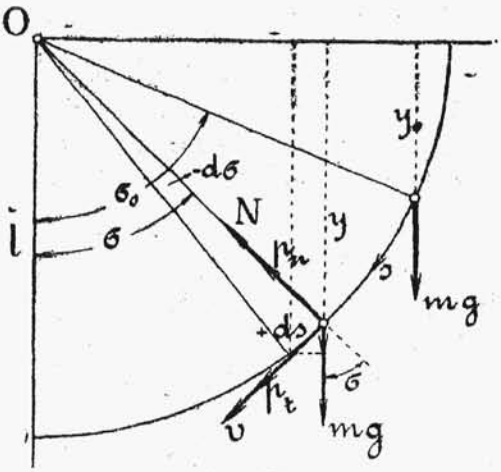
Związek pomiędzy czasem i drogą, lub prędkością i czasem znajdziemy z równania dynamicznego, jakieśmy to uczynili poprzednio; lub też obliczymy go z równania pracy; gdy podstawimy w nie v lub ds z równania $v = \frac{ds}{dt}$.

43. Wahadło matematyczne płaskie. Punkt materyalny pod działaniem swego ciężaru ślizga się bez oporu po obwodzie koła, umieszczonego w płaszczyźnie pionowej. Obliczyć równania ruchu tego punktu i zbadać jego właściwości.



Rys. 30.

Ruch ten wywołać można jeszcze w inny sposób. Można np. punkt materyalny przyczepić do jednego końca nici nierozciągliwej, której ciężaru i masy nie uwzględniamy, a drugi jej koniec unieruchomić w przestrzeni; odchyliwszy wtedy dany punkt od położenia pionowego i puściwszy go swobodnie, (lub nadawszy mu początkową prędkość w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia), otrzymamy ruch punktu po kole. Możemy również wyobrazić sobie tor w postaci koła materyalnego, po którym ślizga się punkt ruchomy pod działaniem swego ciężaru. W tych obydwóch przypadkach punkt materyalny, wyprowadzony z położenia równowagi, powracać będzie do tegoż położenia z pewną prędkością, która uniesie go, zgodnie z prawem bezwładności, na przeciwną stronę tego położenia; i w ten sposób powstanie ruch punktu, zwany wahadłowym. Położenie punktu na kole określimy kątem σ, jaki tworzy promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła, z kierunkiem pionowym, rys. 31-szy.



Rys. 31.

Na punkt dany działa przeto siła ciążenia oraz siła odporowa $\bar{N}$, jak w poprzednim przykładzie; siły te wywołują przyśpieszenie $\bar{p}$.

Równanie zatem dynamiczne danego ruchu jest następujące

$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p}.$$

W celu obliczenia równań ruchu zrzutujmy to równanie na styczną do toru, siła bowiem normalna, która jest nieznaną, zrzutuje się wtedy jako zero; a otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy przyśpieszeniem stycznem p_t i spółrzędną σ; równanie to jest następujące

$$mg \sin \sigma = mp_t; \quad \text{lub inaczej} \quad g \sin \sigma = \frac{dv}{dt} \quad . \; . \; . \quad (94)$$

Gdy podstawimy w to równanie

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{l d\sigma}{dt}; \text{ oraz } \frac{dv}{dt} = -l\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

przybierze ono postać

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right) . \sin \sigma = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (95)$$

Jest to równanie w postaci różniczkowej ruchu danego punktu.

Pierwszą całkę równania ruchu można otrzymać z tego równania drogą odpowiednich przekształceń algebraicznych; lecz można je również otrzymać, stosując zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej. W tym celu nadajmy danemu punktowi przesunięcie przystosowane ds, rys. 31-szy; a napiszemy równanie pracy

$$mg \sin \sigma \,.\, ds = d\,(\tfrac{1}{2}\, mv^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

z przyjętego na rys. 31-szym sposobu liczenia kąta σ wynika, że $ds = - l d\sigma$; (z powiększeniem bowiem s kąt σ maleje), a po podstawieniu tej wartości w równanie pracy (równ. 96-te), otrzymamy je w postaci

$$- mgl \sin \sigma \,.\, d\sigma = d\,(\tfrac{1}{2}\, mv^2) \quad \ldots\ldots \quad (97)$$

a po scałkowaniu od σ_0 (miejsce puszczenia punktu) do σ i od 0 do v, otrzymamy

$$mgl \Big| \cos\sigma \Big|_{\sigma_0}^{\sigma} = \Big| \tfrac{1}{2}\, mv^2 \Big|_0^v ; \text{ skąd}$$

$$v = \sqrt{2\, gl\, (\cos \sigma - \cos \sigma_0)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

Z równania tego obliczyć można prędkość punktu w każdem jego położeniu σ.

Ażeby otrzymać równanie ruchu w skończonej postaci podstawimy w równ. 98-me $v = - l \dfrac{d\sigma}{dt}$; a po rozwiązaniu jego względem dt, otrzymamy

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos \sigma - \cos \sigma_0}};$$

skąd wreszcie

$$t = - \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos \sigma - \cos \sigma_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

Pozostaje obecnie wykonać wskazane w tem równaniu całkowanie. Lecz całka wyrazu po prawej stronie nie daje się wyrazić zwykłemi funkcyami algebraicznemi; stanowi ona bowiem funkcyę t. zw. eliptyczną, której wartość obliczyć można za pomocą rozwinięcia jej w szeregi, lub ze specyalnie, na podstawie tych szeregów, zestawionych tablic w tenże sposób, w jaki znajdujemy wartości funkcyi logarytmicznych lub trygonometrycznych. Całkowanie przeto wzoru powyższego wykonamy z pewnem przybliżeniem; w tym celu przekształcimy daną funkcyę w szereg, i zadowolnijmy się tylko pierwszymi wyrazami tego szeregu; przyjmiemy przeto

$$\cos \sigma_0 = 1 - \tfrac{1}{2}\, \sigma_0^2 ; \quad \text{oraz} \quad \cos \sigma = 1 - \tfrac{1}{2}\, \sigma^2 ;$$

a po podstawieniu tych wartości w powyższe równanie, otrzymamy

$$\int_0^t dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}};$$

a po scałkowaniu podług wzoru 32-go, podanego w „Techniku" na str. 77-ej

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\text{arc sin}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)\right]_{\sigma_0}^{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Jest to równanie, wykazujące związek pomiędzy czasem t i położeniem punktu, wyznaczonem przez kąt σ; i jest równaniem ruchu w skończonej postaci, gdy kąt odchylenia jest mały.

Jeżeli oznaczymy literą T okres podwójnego wahnięcia, to czas, potrzebny do przejścia punktu od $\sigma = \sigma_0$ do $\sigma = 0$, jest ćwiercią tego okresu; przeto obliczymy z powyższego wzoru

$$\tfrac{1}{4}\, T = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[\text{arc sin}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)\right]_{+\sigma_0}^{0};$$

a po wykonaniu działań

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

44. Przypadek szczególny ruchu wahadłowego. W szczególnym przypadku całka równania 99-ego daje się wyrazić znanemi funkcyami; ten szczególny przypadek następuje, gdy $\sigma_0 = 180^0$, t. j. gdy dany punkt puszczony jest z najwyższego miejsca na kole t. j. z jego wierzchołka; po podstawieniu bowiem w równ. 99-te wartości $\sigma_0 = 180^0$-te przekształci się ono w nast.

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \int \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \cos\sigma}} + C;$$

a po podstawieniu $1 + \cos\sigma = 2\cos^2\dfrac{\sigma}{2}$, otrzymamy wyraz, którego całkę podaje wzór 62-gi, zamieszczony w „Techniku" na str. 79. Całka ta jest nast.

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int \frac{d\frac{\sigma}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}} = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \text{lgn}\ tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{4}\right) + C.$$

Czas w danym razie zaczniemy liczyć od chwili, w której punkt ruchomy znajduje się w miejscu najniższem na kole; a więc gdy $\sigma = 0$;

wtedy $t = 0$; a po podstawieniu tych wartości w równanie powyższe, otrzymamy

$$0 = -\sqrt{\frac{l}{g}} . \lg n \, tg \frac{\pi}{4} + C; \text{ skąd } C = 0; \text{ a więc}$$

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} . \lg n \, tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{4}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Ażeby obliczyć np. okres czasu, w jakim punkt dany podniesie się z miejsca najniższego na kole do jego wierzchołka, należy podstawić w równ. powyższe $\sigma = -\pi$; gdyż w myśl przyjętego w tem rozpatrywaniu zwrotu ruchu, należy wyobrazić sobie, że punkt przebiega po kole ze zwrotem, zgodnym z obrotem wskazówki zegara. Po tem podstawieniu otrzymamy

$$t = \infty.$$

Wynik ten wytłomaczymy sobie fizycznie w następujący sposób. Punkt dany dobiega do wierzchołka koła z prędkością, zbliżającą się do zera; dla przejścia przeto cząstek łuku koła, znajdujących się w blizkości wierzchołka koła, wymaga bezmiernie długiego okresu czasu, zbliżającego się do ∞. I rzeczywiście np. dla $\sigma = -179^0$; $t \cong 1{,}8\sqrt{l}$, t. j. posiada jeszcze skończoną wartość.

Wynik rów. 102-go nie jest w zgodzie z równ. 100-em, co jest zupełnie słuszne, gdyż rów. 100-ne wyprowadziliśmy, czyniąc założenie, że kąt odchylenia jest bardzo mały, nie może być przeto stosowany do tego wręcz przeciwnego przypadku.

45. Dokładność wzoru przybliżonego. Jaką dokładność posiada wzór przybliżony, nie możebnem jest powiedzieć, dopóki nie znamy wzoru ścisłego; dla praktycznych jednakże celów, należy choć ocenić, w jakich granicach wzór przybliżony wyraża rzeczywistą zależność zmiennych. Ocenę tę uskutecznimy w powyższym przypadku drogą dynamicznych rozważań. W tym celu weźmy pod uwagę równanie pracy, równ. 96-te, które wzięliśmy za podstawę do naszych obliczeń. Wyraz

$$-\, mgl \sin \sigma . d\sigma,$$

przedstawia pracę cząstkową siły ciążenia wzdłuż przesunięcia $-l.d\sigma$; lecz zamiast tego wyrazu ścisłego przyjęliśmy do rachunku wyraz przybliżony

$$-\, mgl\sigma . d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

zastąpiliśmy bowiem w rów. 99-em $\cos \sigma$ wartością $(1 - \frac{1}{2}\sigma^2)$, co jest równoważne z przyrównaniem $\sin \sigma$ do długości łuku σ. Porównywując te dwa wzory pracy cząstkowej, dokładny 97-my i przybliżony 103-ci, zauważymy, żeśmy zamiast właściwej wartości $mg \sin \sigma$ siły, przyśpieszającej dany punkt, przyjęli do rachunku wartość przybliżoną $mg\sigma$, która jest większą od poprzedniej; gdyż $\sigma > \sin \sigma$.

Większa siła wywołuje większe przyśpieszenie punktu, lub też inaczej się wyrażając, większa siła podczas przesunięcia punktu materyalnego sprawia większy przyrost jego energii kinetycznej, niż siła mniejsza, podczas tego samego przesunięcia. Prędkości zatem, obliczone z równania, opartego na równości siły $mg\sigma$, są większe, niż w rzeczywistości występują; a różnica ich jest tem większa, o ile σ różni się od $\sin \sigma$. Zbliżając np. wartości σ do zera, różnica ta zbliża się również do zera; a dla $\sigma = \frac{\pi}{2} = 1.57$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, różnica ta jest bardzo znaczna; a więc i okresy wahnięć, obliczone ze wzoru przybliżonego, o wiele różnić się będą od okresów rzeczywistych. Dla $\sigma > \frac{\pi}{2}$, wartość σ rośnie, wartości zaś $\sin \sigma$ maleją, a więc, gdy $\sigma > \frac{\pi}{2}$, zachodzi rozbieżność pomiędzy zmiennością tych wartości, przyjmujemy bowiem w rachunku przybliżonym, że siła przyśpieszająca wzrasta proporcyonalnie do kąta odchylenia, a w rzeczywistości, blizko kąta $\sigma = \frac{\pi}{2}$, pozostaje ona prawie stałą; a dla $\sigma > \frac{\pi}{2}$, maleje. Największa różnica zachodzi dla $\sigma = \pi$; wtedy bowiem $\sin \sigma = \sin \pi = 0$, a $\sigma = 3{,}14$. Dla odchyleń zatem $\sigma > \frac{\pi}{2}$ wzór przybliżony zupełnie się nie nadaje.

Potwierdzenie, wypowiedzianych wniosków, znajdziemy w następującym zestawieniu liczb, w którem σ_0 oznacza kąt początkowego odchylenia wahadła; F zaś spółczynnik wzoru $T = F\sqrt{\frac{l}{g}}$, odpowiadający rzeczywistemu wahnięciu wahadła i obliczony ze wzorów ścisłych; a więc dla

$\sigma_0 =$	0^0	5^0	10^0	20^0	40^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0
$F =$	6,2832	6,2860	6,2952	6,3212	6,4800	6,7432	7,4164	8,6260	11,0724	∞

gdy tymczasem we wzorze przybliżonym

$$F = 2\pi = 6{,}2832,$$

dla wszystkich kątów odchylenia. Widzimy z tego zestawienia, że różnica okresów wahnięć, np. dla $\sigma_0 = 40^0$, stanowi 3%; dla 90^0 około 20%, a dla większych kątów odchylenia znacznie rośnie.

46. Dokładniejszy sposób obliczenia ruchu wahadłowego. Przybliżenie, z jakiem chcemy obliczyć szukane wartości, może być dowolne; gdyż zależy ono od ilości wyrazów, jakie weźmiemy do rachunku, przy rozwinięciu funkcyi trygonometrycznej w szereg.

W celu uniknięcia długich szeregów możliwem jest również stosowanie innych skróceń, które prędzej prowadzą do wzorów dosyć dokładnych. Zastosujemy np. skrócenia następujące, z których częściowo korzystaliśmy już w przykładach § 142 i następnych tomu I-go, a mianowicie, gdy ξ jest wielkością mniejszą od jedności, to mamy

$$(1-\xi^2)^{-1/2} = (1+\xi^2)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}\xi^2.$$

Ażeby wyraz pod pierwiastkiem rów. 99-ego sprowadzić do tej postaci, podstawimy w niego $\cos\sigma = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma}{2}$; oraz $\cos\sigma_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma_0}{2}$; a otrzymamy

$$\int\frac{d\sigma}{\sqrt{\cos\sigma-\cos\sigma_0}} = \int\frac{d\sigma}{\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\sigma_0}{2}-\sin^2\frac{\sigma}{2}\right)}} = \int\frac{d\sigma}{\sqrt{2}\sin\frac{\sigma_0}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\sigma}{2}}{\sin^2\frac{\sigma^0}{2}}}}.$$

Wprowadzimy następnie nową zmienną ψ, określoną równaniem

$$\frac{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)} = \sin\psi,$$

i wyrazimy tę całkę funkcyą tej zmiennej. Ażeby wyrazić $d\sigma$ zmienną ψ, zróżniczkujemy powyższe równanie i otrzymamy

$$\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right).\,d\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \cos\psi\,.\,\sin\left(\frac{\sigma_0}{2}\right).\,d\psi; \text{ skąd}$$

$$d\sigma = \frac{2\cos\psi\,.\,\sin\frac{\sigma_0}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}}\,d\psi;$$

podstawiwszy w nie

$$\cos\frac{\sigma}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\sigma}{2}} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\sigma^2_0}{2}\,.\,\sin^2\psi};$$