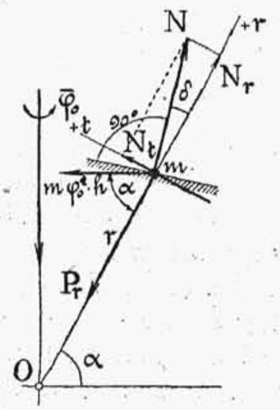
w miejscu K_3' i t. d.; linia przeto łącząca punkty K_0, K_1', K_3', i t. d. przedstawia bezwzględny tor danego punktu. Widzimy z tego, że dany punkt zakreśla tor bezwzględny wogóle niezamknięty, a zamknięty tylko przy szczególnych odchyleniach, dla których okresy wahnięć są współmiernie z wielkością $\frac{2\pi r}{\varphi_0}$. Z powiększeniem odchylenia σ_0, okresy wahnięć się powiększają; a w blizkości $\sigma_0 = 180^0$ okres połowy wahnięcia zbliża się do ∞, § 44-ty; punkt przeto zakreśla w tym razie spiralę, biorącą początek w biegunie obrotu koła, a kończącą się na obwodzie koła zakreślonego z bieguna O promieniem $2r$. Ilość zwojów tej spirali ze zbliżaniem odchylenia σ_0 do 180^0, nadzwyczaj prędko się zwiększa, t. j. ze zbliżeniem początkowego położenia punktu ruchomego do bieguna obrotu; a prędkość bezwzględna punktu zbliża się do bardzo małej prędkości $(l_0\varphi_0)$, (l_0 bowiem jest bardzo małe); do prędkości

$$\lim.\ v_b = 2r\varphi_0 + r\varphi_0 + r\varphi_0\sqrt{2(\cos 0^0 - \cos 180^0)} = 2r\varphi_0 + 2r\varphi_0 = 4r\varphi_0.$$

70. Wpływ dziennego obrotu ziemi na kształt jej powierzchni i na ciężar brył materyalnych, znajdujących się na niej. Wszystkie bryły materyalne, znajdujące się w spoczynku na powierzchni ziemi, są w stanie równowagi względnej; — zestawmy warunki tej równowagi. Na każdą taką bryłę działa siła przyciągania ziemskiego, której kierunek zlewa się z promieniem wodzącym danej bryły, wyprowadzonym ze środka przyciągania; siłę tę oznaczymy literą P_r, rys. 53-ci, oraz siła odporowa N powierzchni, na której bryła dana spoczywa. Bryła, pozostająca w spoczynku względem ziemi posiada tylko przyśpieszenie unoszące, które wyrazimy wzorem

$$\bar{p}_u = \varphi_0{}^2\bar{h};$$



Rys. 53.

w którym h jest promieniem równoleżnika, na którym bryła w danej chwili się znajduje, φ_0 — prędkość kątowa dziennego obrotu ziemi. Równanie równowagi względnej jest w tym razie następujące

$$\bar{P}_r + \bar{N} = m\varphi_0{}^2\bar{h}.$$

z którego wynika, że kierunek siły odporowej $\bar{N}$, nie zlewa się z kierunkiem promienia wodzącego, lecz tworzy z nim pewien kąt; z czego znów wynika, że powierzchnia bryły ziemskiej, utworzona np. przez powierzchnię wody spokojnej, nie może być kulistą; wszystkie bowiem jej cząstki są prostopadłe do kierunku, nie zlewającego się z kierunkiem promienia. Kierunek siły odporowej N jest kierunkiem t. zw. pionowym, t. j. kierunkiem, jaki przybierze nić zawieszona spokojnie z przymocowanym do jej końca ciężarem; kierunek zatem t. zw. pionowy nie przechodzi przez środek przyciągania ziemi, lecz go mija. Siła N jest również tą siłą, która uzewnętrznia się przy ważeniu brył materyalnych; bryły bowiem, które ważymy, są w równowadze względnej; ciężar przeto bryły równa się iloczynowi mg_α, w którem g_α oznacza przyśpieszenie ziemskie na szerokości geograficznej α.

W celu obliczenia siły N oraz kąta δ, o jaki odchyla się pion od promienia wodzącego; zrzutujmy na kierunek tego promienia wodzącego wielobok wektorowy, przedstawiony przez powyższe równanie; oraz na prostopadłą do tego promienia, a otrzymamy równania, rys. 53-ci

$$-P_r + N_r = -m\varphi_0^2 r\cos^2\alpha, \text{ oraz } N_t = m\varphi_0^2 r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha;$$

w których h zastąpiono wyrazem $r\cos\alpha$. Z tych równań obliczymy

$$N_r = P_r - m\varphi_0^2 r \cdot \cos^2\alpha; \text{ oraz}$$

$$N_t = m\varphi_0^2 r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (168)$$

Zmierzenie wielkości siły P_r przyciągania ziemskiego nie jest bezpośrednio możliwem; dla pomiarów bowiem są tylko przystępne wielkości siły odporowej N; gdy jednakże dla jednego miejsca powierzchni ziemi określimy siłę odporową N, wtedy obliczymy za pomocą powyższych równań siłę P_r, która jest stałą wielkością dla wszystkich miejsc powierzchni ziemi. Z ruchu wahadła obliczono, że na równiku przyśpieszenie $g_e = 9{,}780$ m./sek². (e-ekwator); a zatem $N_e = mg_e$; ażeby z tej wielkości obliczyć siłę P_r, podstawimy w równ. 168-me

$$N_r = mg_e; \text{ oraz } N_t = 0;$$

a otrzymamy

$$mg_e = P_r - m\varphi_0^2 \cdot r; \text{ skąd } P_r = mg_e + m\varphi_0^2 \cdot r,$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 168-me i po uproszczeniu, otrzymamy

$$N_r = mg_e + m\varphi_0^2 r \cdot \sin^2\alpha; \text{ oraz}$$

$$N_t = m\varphi_0^2 r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

Z równań tych obliczymy odchylenie δ kierunku t. zw. **pionowego** od **promienia wodzącego**, gdy przyjmiemy, stosownie do pomiarów, średnią długość promienia $r = 6{,}37 \times 10^6\, m$; oraz czas obrotu dziennego $= 23\,h\; 56\,m\; 4\,s = 86\,164$; skąd

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}73 \times 10^{-4}; \text{ oraz } \varphi_0^2 r = 0{,}034 \quad . \; . \; . \quad (169)$$

Po podstawieniu tych wartości w równania powyższe, obliczymy kąt δ z następującego wzoru; rys. 53-ci

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{N_t}{N_r} = \frac{0{,}034 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{9{,}780 + 0{,}034 \cdot \sin\alpha} \quad . \; . \; . \; . \quad (170)$$

Ze wzoru tego wynika, że δ zależy tylko od szerokości geograficznej, o ile przyjmiemy, że długość promienia jest stałą wielkością dla wszystkich miejsc powierzchni ziemi.

Największą wartość δ obliczymy ze wzoru powyższego drogą, wskazaną odnośnym rachunkiem różniczkowym, i otrzymamy, że

$$\delta_{max.} \text{ jest dla } \alpha = 44^0 52';$$

podstawiwszy następnie wartość tego kąta we wzór powyższy, obliczymy wartość $\delta_{max.}$. Obliczenie to wykonamy z przybliżeniem, nieprzekraczającem jednakże granic dokładności, posiadanych pomiarów; i w tym celu przyjmiemy $\alpha = 45^0$, a drugi dodajnik w mianowniku równ. 170-ego, przyjmiemy równy zeru; przyjmiemy również, że $9{,}78 \cong 10$; wtedy

$$\operatorname{tg} \delta_{max.} = \delta_{max.} = \frac{0{,}034 \times 0{,}5}{10} = 0{,}0017 \text{ sek.}$$

Z tego wynika, że odchylenie to jest tak małe, iż dla celów praktycznych przyjąć można $\delta = 0$, a $N_r \cong N$; t. i. przyjąć można $\varphi_0^2 r = 0$.

Ponieważ N wyraża ciężar bryły materyalnej w danem miejscu powierzchni; przeto $N = mg_\alpha$, a po podstawieniu tej wartości w powyższe równanie dla siły N_r, otrzymamy związek pomiędzy wartościami przyśpieszenia ziemskiego w różnych miejscach powierzchni ziemi; — związek ten jest wyrażony następującem równaniem

$$g_\alpha = g_e + \varphi_0^2 r \,.\, \sin^2 \alpha.$$

Równanie to pozwala obliczyć przyśpieszenie na danej szerokości geograficznej α, ze znanego przyśpieszenia na równiku. Największa wartość g_α zachodzi dla $\alpha = 90^0$, t. j. znajduje się ona na biegunie; zaś najmniejsza wartość g_α zachodzi dla $\alpha = 0$; t. j. na równiku.

Z tych wyników obliczymy obecnie stosunek ciężarów jednej i tej samej bryły materyalnej, gdy ją umieścimy raz na biegunie i drugi raz na równiku; stosunek ten jest nast.

$$\frac{g_{max.}}{g_{min.}} = \frac{g_e + \varphi_0^2 r}{g_e} = 1 + \frac{\varphi^2 r}{g_e} = 1 + \frac{0{,}034}{\infty 10} = 1{,}003;$$

t. j. bryła, która waży na równiku np. 1000 *kg*, waży na biegunie 1003 *kg*.

W rachunku powyższym przyjęliśmy, że promień r jest stały dla wszystkich miejsc powierzchni bryły ziemskiej; gdy tymczasem dowiedliśmy poprzednio, że powierzchnia ziemi nie może być kulistą, a więc długość promienia nie jest stałą; do wyników więc powyższych należałoby wnieść odnośną poprawkę. Nie przeprowadzając szczegółowych rachunków ocenimy tę poprawkę w sposób następujący: ponieważ, w myśl poprzednich rozważań należy przyjąć że długość promienia r jest mniejsza w biegunach, przeto siła przyciągania, stosownie do Newtonowskiego prawa, jest większą na biegunach, niż na równiku, a więc przyśpieszenie w biegunach jest nieco większe, niż obliczone wyżej; co też stwierdziły odnośne pomiary za pomocą wahadła.

W przykładzie powyższym przyjęliśmy, że bryła materyalna pozostaje w spoczynku na powierzchni ziemi, jest to zatem przykład równowagi względnej; weżmy teraz pod uwagę przypadek, w którym bryła dana porusza się po powierzchni ziemi; i obliczmy siły względne, działające na nią. Ograniczmy na razie nasze rozpatrywania do przypadku, w którym bryła porusza się wzdłuż południka na półkuli północnej ze zwrotem od bieguna północnego ku równikowi. Przykładem tego ruchu jest bieg rzeki płynącej lub też—pociągu, biegnącego w tymże kierunku. W danym przykładzie należy wprowadzić do równania dynamicznego przyśpieszenie względne i prędkość względną. Zatrzymując oznaczenia, które przyjęliśmy w przykładzie poprzednim, równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące

$$\bar{P} + \bar{N} = m\bar{p}_w + m\bar{p}_u + 2\, m\, \mathrm{V}\, \bar{v}_w \bar{\varphi}_0.$$

Wektory $\bar{P}$, $m\bar{p}_w$ i $m\bar{p}_u$ leżą w płaszczyźnie biegunowej, a dwa pozostałe wektory tego równania wychodzą z tej płaszczyzny. Obliczymy przedewszystkiem siłę prostopadłą do płaszczyzny biegunowej; i w tym celu zrzutujemy powyższe równanie na oś b, przeprowadzoną prostopadle do płaszczyzny biegunowej w miejscu chwilowego przebywania punktu ruchomego; a otrzymamy siłę

$$N_b = 2\, m v_w \varphi_0 \,.\, \sin\,(v_w, \varphi_0) = 2\, m v_w \varphi_0 \,.\, \sin\,\alpha;$$

i zwróconą ku wschodowi; (porówn. rys. 88 str. 120 tomu II-ego, oraz treść § 40-tego tego tomu). A zatem, ażeby punkt materyalny mógł poruszać się z pewną prędkością na półkuli północnej wzdłuż południka od bieguna ku równikowi, należy przyłożyć do niego oprócz sił, leżących w płaszczyźnie biegunowej, siłę prostopadłą do niej, zwróconą ku wschodowi. Jeżeli weźmiemy pod uwagę rzekę płynącą na półkuli północnej wzdłuż południka, to wobec powyższych wyników prawy jej brzeg powinien być szczególniej wzmocniony, gdyż siła odporowa tego brzegu wywołuje przyśpieszenie; w przeciwnym bowiem razie rzeka podmyje ten brzeg i koryto przesunie się ze wschodu ku zachodowi. Niektórzy technicy uważają, że w pociągach biegnących w opisanym kierunku prawe szyny więcej się zużywają, niż lewe; chociaż bowiem siła N_b, jak łatwo obliczyć, posiada bardzo małą wartość, jednakże z biegiem czasu może znacznie zmienić warunki fizyczne, w jakich odbywa się ruch.

Łatwo spostrzedz z powyższego wzoru, że największą wartość posiada ta siła przy biegunie; przy zbliżaniu się zaś punktu ruchomego ku równikowi maleje, a na równiku $= 0$.

Zgodność wyników tego rachunku ze zjawiskami fizycznemi, stwierdza słuszność naszych założeń; na jakich oparliśmy dany rachunek; — t. j. stwierdza, że punkt materyalny pozostawiony sam sobie zakreśli tor prostolinijny ruchem jednostajnym względem układu sztywno związanego z gwiazdami stałemi.

VIII. Metoda d'Alembert'a.

71. Określenie i rozwinięcie tej metody. Metoda ta ma na celu uproszczenie rozpatrywania ruchu punktów czy też brył materyalnych, i polega na tem, że iloczyn

$$(-m\bar{p});$$

t. j. że iloczyn z masy poruszającego się punktu i jego przyśpieszenia w danej chwili z przeciwnym zwrotem uważać będziemy za siłę. Siłę tę wprowadzamy do naszych rozumowań w celu zastąpienia pojęcia kinetycznego, iloczynu z masy i przyśpieszenia, pojęciem statycznem. Siłę, określoną w ten sposób, nazwiemy siłą bezwładności danego punktu; siłę tę oznaczać będziemy literą $\bar{B}$; a geometrycznie wyrazimy ją wektorem $m\bar{p}$ z odwróconą strzałką.

Jeżeli przeto wyobrazimy sobie, że siłę

$$\bar{B} = -m\bar{p},$$

przyłożymy do punktu ruchomego, posiadającego masę m i przyśpieszenie $\bar{p}$, to punkt dany będzie pozbawiony tego przyśpieszenia i pozostanie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym; inaczej mówiąc, **siły zewnętrzne**, wywołujące dane przyśpieszenie, i **siła bezwładności** $\bar{B}$ **są w każdej chwili w równowadze**. Gdy warunek tej równowagi wyrazimy, zgodnie z § 23-cim tomu I-go równaniem

$$\bar{P} + \bar{B} = 0, \text{ lub inaczej } \bar{P} + (-m\bar{p}) = 0,$$

wtedy pod względem formalnym równania te różnią się od równania dynamicznego

$$\bar{P} = m\bar{p}.$$

tylko przeniesieniem wyrazu $m\bar{p}$; a pod względem ich znaczenia fizycznego różnią się sposobem pojmowania tych wyrazów.

Gdy wprowadzimy do rozpatrywań ruchu punktu materyalnego pojęcie siły bezwładności, wtedy możemy otrzymać równanie ruchu pun-