Przyjmijmy np., że punkt ruchomy otrzymał w miejscu z_1 danej osi prędkość v_{w1}, to, po przejściu do miejsca z, dozna on odpowiedniego przyrostu energii kinetycznej, a zasada pracy da równanie

$$-mg(z-z_1)\,.\,\cos\alpha+\tfrac{1}{2}m\varphi_0^{\,2}(x^2 \quad x^3{}_1)=\tfrac{1}{2}mv^2{}_w-\tfrac{1}{2}mv^2{}_{w1},$$

i po podstawieniu

$$x=z\,\sin\alpha,\ \text{oraz}\ x_1=z_1\,\sin\alpha,$$

otrzymamy równanie, z którego obliczyć można v_w w kazdem miejscu z toru ruchomego.

Z równania przeto 177-go wynika: gdy siły zewnętrzne posiadają funkcyę sił (w spółrzędnych względnych) i gdy tor jest w ruchu obrotowym i jednostajnym, to prędkość względna punktu ruchomego zależy tylko od jego położenia względem ruchomego układu odniesienia, a nie zależy od postaci toru, po jakim on przebył z jednego położenia do drugiego.

W przypadku, gdy tor ruchomy jest płaski i obraca się w płaszczyźnie poziomej około bieguna, obranego na tejże płaszczyźnie, to praca siły ciążenia punktu podczas jego ruchu równa się zeru; przyrost więc jego energii kinetycznej zależy tylko od początkowej jej wartości i od odległości punktu od bieguna; a nie zależy od postaci toru, po jakim on przebył z początkowego położenia do położenia, w którem chcemy obliczyć jego prędkość; a więc nie zależy również od postaci geometrycznej obracającego się toru.

IX. Ruch względny punktu materyalnego.

A. Kinematyka względnego ruchu punktu.

73. Określenia i twierdzenia. W celu unaocznienia ruchu względnego wyobraźmy sobie całą przestrzeń, wypełnioną punktami matematycznymi, których wzajemne odległości nie zmieniają się podczas naszych rozpatrywań. Przyjmijmy następnie, że zbiór tych punktów może przenikać bez oporów inne takież zbiory punktów; jak również każdy oddzielny punkt, nie należący do takiego zbioru, może również przenikać taki zbiór.

Jeżeli w takim zbiorze pewien punkt, nie należący do tego zbioru, zmienia swe położenie, to pokrywać się on będzie kolejno z różnymi jego punktami; geometryczne miejsce tych punktów nazwaliśmy już w kinematyce torem, a cały zbiór, w którym punkt dany wyznacza ten tor, nazwaliśmy **układem odniesienia** ruchu danego punktu.

Ze zmiany położenia punktu w danym układzie odniesienia nie jest możliwem sądzić o tem, czy punkt się porusza, — czy też układ; ażeby zaś o tem módz sądzić, należy odnieść tak ruch punktu, jak i ruch danego układu, do innego układu odniesienia.

Układy odniesienia mogą być w spoczynku, lub też w ruchu względem innego układu, który, dla uproszczenia rozpatrywań, przyjąć można za nieruchomy; choć zresztą i ten układ może być w ruchu względem innego — trzeciego układu i t. d.

Układ, który przyjmiemy za nieruchomy, nazywać będziemy **bezwzględnym**; a prędkości i przyśpienia, z jakiemi punkt dany porusza się w takim układzie — **bezwzględnemi**; wielkości te oznaczymy literami $\bar{v}_b$ i $\bar{p}_b$. Dotychczas mieliśmy tylko z temi wielkościami do czynienia, gdyż przyjmowaliśmy układ odniesienia za nieruchomy.

Przypomnieć należy, że chwilowy ruch układu odniesienia, jako ruch nieograniczonej bryły sztywnej, jest ściśle określony, porów. § 46-ty tomu II-ego, wektorem chwilowej prędkości kątowej $\bar{\varphi}$ oraz wektorem prędkości postępowej $\bar{v}$, i że te wektory należy wyobrazić sobie sztywno związanymi z układem, przyjętym za nieruchomy.

Jeżeli pewien punkt zakreśla tor w układzie odniesienia, będącym w ruchu względem innego układu, to nazwiemy go torem względnym; a stosunek długości cząstki łuku, łączącego dwa nieskończenie blizkie położenia tego punktu, do czasu, w jakim on przebył tę cząstkę, nazwiemy prędkością względną; i w tenże sposób wprowadzimy pojęcie przyśpieszenia względnego; wielkości te oznaczymy literami $\bar{v}_w$ i $\bar{p}_w$.

Z tych rozpatrywań wynika, że może zajść taki szczególny przypadek, w którym dany punkt pozostaje w spoczynku względem tak zwanego układu bezwzględnego; a względem innego układu będzie w ruchu; przypadek ten nastąpi, gdy ten drugi układ będzie w ruchu względem układu bezwzględnego; przypadek ten wyrazimy nast. wzorami

$$\bar{v}_b = 0; \text{ a } \bar{v}_w \gtreqless 0.$$

Przez ruch przeto punktu w pewnym układzie odniesienia, rozumieć należy wogóle zmianę jego położenia w tym układzie, nie wchodząc w to, czy punkt jest w ruchu, a układ w spoczynku, czy też punkt jest w spoczynku, a układ w ruchu; czy też wreszcie punkt i układ są jednocześnie w ruchu. Stan ruchu tak punktu jak i układu w tych przypadkach odnosimy do innego układu, który w danej chwili przyjmujemy za nieruchomy, — za t. zw. bezwzględny.

Tory zatem i wogóle ruchy, jakie zakreśla dany punkt w pewnym układzie, zależą od ruchu tego punktu i od ruchu układu odniesienia względem układu nieruchomego. W szczególnym przypadku, gdy układ ruchomy pozostaje w spoczynku względem innego, przyjętego za nieruchomy—za bezwzględny; wtedy tor bezwzględny i względny tego punktu wzajemnie się pokrywają; a prędkości i przyśpieszenia tego punktu są w każdej chwili jednakowe w obydwóch układach.

Z tych określeń wyprowadzić można dwa następujące bardzo ważne dla naszych rozpatrywań twierdzenia:

1) ruch punktu względem układu, będącego w ruchu, nie zmieni się, jeżeli udzielimy **jednocześnie** układowi oraz punktowi pewnego wspólnego przesunięcia. W celu unaocznienia sobie tego wniosku, wyobraźmy sobie, że zatrzymujemy chwilowo ruch układu odniesienia oraz ruch punktu, i nadajemy układowi pewne dowolne przesunięcie, nie mające nic wspólnego z ruchem układu i punktu; wskutek czego miejsce układu, w którym znajdował się w danej chwili punkt ruchomy, oddali się od tego punktu; ażeby zaś zatrzymać punkt ruchomy w tem samem miejscu danego układu, w którem znajdował się przed jego przesunięciem, nadajmy również temu punktowi takie same przesunięcie, jakie doznało odnośne **miejsce** układu wskutek jego przesunięcia. Jeżeli np. miejsce układu, w którem znajduje się w danej chwili punkt ruchomy, wskutek pewnego przesunięcia całego układu, dozna przesunięcia $\Delta\bar{s}$; to należy punktowi ruchomemu, ażeby pozostawał on w temże miejscu układu odniesienia, nadać również takie same przesunięcie $\Delta\bar{s}$. Jeżeli np. obrócimy dany układ o pewien dowolny kąt około dowolnie obranej osi, to i punkt ruchomy, ażeby pozostał on w tem samem miejscu danego układu, obrócić należy około tejże osi o tenże kąt. Przez takie jednoczesne przesunięcie układu i punktu ruchomego zmieniamy co prawda położenie punktu i układu względem innego układu, — bezwzględnego; t. j. wogóle zmieniamy łącznie ruch układu i punktu, lecz nie zmieniamy położenia danego punktu względem układu ruchomego.

2) ruch punktu względem poruszającego się układu nie zmieni się, jeżeli wyobrazimy sobie układ ten w spoczynku, a punktowi nadamy w tejże chwili ruch odwrotny, jaki posiadało **miejsce**, w którem on się znajdował. Ażeby tego dowieść, wybierzmy z pomiędzy dowolnych przesunięć, jakie możemy nadać jednocześnie ruchomemu układowi odniesienia i punktowi danemu, przesunięcie, które jest równe, lecz przeciwne co do zwrotu, przesunięciu, jakie posiadał w danej chwili układ ruchomy; przez taki ruch układ ruchomy pozostanie w spoczynku; a punkt ruchomy będzie posiadał dwa ruchy: ruch, który już posiadał, t. j. ruch bezwględny; oraz ruch, jaki posiadało w danej chwili miejsce, w którem on się znajdował, lecz z przeciwnym zwrotem. Ażeby punktowi danemu udzielić tego ruchu, wyobrazimy sobie, że jest on sztywno połączony z układem bezwzględnym, i temu układowi razem z tym punktem nadamy ruch przeciwny ruchowi układu ruchomego.

Jeżeli np. układ ruchomy jest chwilowo w ruchu postępowym o prędkości $\bar{v}$, a punkt posiada pewien ruch, określony względem układu bezwzględnego; to wyobraźmy sobie poruszający się układ w spoczynku, a układ bezwzględny razem z punktem w ruchu postępowym o prędkości $(-\bar{v})$. Jeżeli zaś układ ruchomy ma chwilową prędkość obrotową $\bar{\varphi}$, to, po jednoczesnem nadaniu układowi bezwzględnemu, a więc i punktowi prędkości $(-\bar{\varphi})$, układ ruchomy pozostanie w spoczynku, a punkt nie zmieni swego ruchu **względem tego układu**. Gdy przeto nadamy układowi bezwzględnemu, z którym związany jest tor bezwzględny, ruch odwrotny ruchowi, jaki posiada w danej chwili układ ruchomy; wtedy ruch punktu będzie ruchem wypadkowym: z ruchu punktu po torze bezwzględnym i z ruchu, jaki posiada w danej chwili układ ruchomy, lecz z przeciwnym zwrotem. Tę właściwość ruchów nazywają „przemiennością ruchów"; (Dualismus, Reciprocität).

Prawo przeto przemienności ruchów pozwala sprowadzić zadanie obliczenia ruchu danego punktu względem poruszającego się układu odniesienia do obliczenia ruchu złożonego tegoż punktu. Ruch przeto, jaki zakreśli dany punkt w ruchomym układzie odniesienia, może być uważany za ruch złożony; § 40-ty oraz § 74-ty tomu II-go.

Wzory przeto ruchu punktu w układzie, będącym w ruchu, wyprowadzimy bezpośrednio z wzoru 58-ego tomu II-ego, jako z wzoru, wyrażającego ruch wypadkowy, gdy zważymy, że tor ruchomy ruchu złożonego, nazwany tam względnym, w rozpatrywaniach tego działu, jest bezwzględnym; jest on bowiem właściwie nieruchomym, a wyobrażamy go sobie tylko na zasadzie prawa przemienności ruchów — ruchomym; a ruch, który w ruchu złożonym nazwaliśmy bezwzględnym inaczej wypadkowym, jest w tych rozpatrywaniach ruchem względnym; ruch wreszcie, któryśmy w tamtych rozpatrywaniach nazywali unoszącym, w tych rozpatrywaniach jest odwrotnym ruchem układu ruchomego.

Po zastąpieniu przeto w równaniach 37-em i 58-em tomu II-ego, wielkości

$$\bar{v}_b \text{ przez } \bar{v}_w,\ \bar{v}_w \text{ przez } \bar{v}_b,\ \bar{v}_u \text{ przez } (-\bar{v}_u), \text{ oraz}$$

$$\bar{p}_b \text{ przez } \bar{p}_w,\ \bar{p}_w \text{ przez } \bar{p}_b,\ \bar{p}_u \text{ przez } \pm\bar{p}_u,\ \bar{\varphi} \text{ przez } (-\bar{\varphi}),$$

otrzymamy szukane wzory ruchu względnego

$$\bar{v}_w = \bar{v}_b - \bar{v}_u\,, \quad \dots\dots\dots \quad (178)$$

$$\bar{p}_w = \bar{p}_b \mp \bar{p}_u - 2\,V\,\bar{v}_b\bar{\varphi} \quad \dots\dots \quad (179)$$

Dwoisty znak przyśpieszenia unoszącego $(\mp\bar{p}_u)$ oznacza, że zwrot przyśpieszenia nie zawsze się zmienia, gdy odwraca się zwrot ruchu układu. Jeżeli np. układ poruszający się jest w ruchu postępowym; to ze zmianą zwrotu ruchu następuje zmiana zwrotu przyśpieszenia, i w tym razie bierzemy $(-\bar{p}_u)$; jeżeli zaś układ poruszający się był w ruchu obrotowym; to zmiana zwrotu obrotu nie wpływa na znak przyśpieszenia; w danym bowiem razie przyśpieszenie jest zawsze dośrodkowe niezależnie od zwrotu obrotu.

Przyjmijmy np., że układ nieruchomy jest sztywno związany z gwiazdami stałemi; wtedy ruch bezwzględny każdej gwiazdy stałej wyrazi się wzorem

$$\bar{v}_b = 0; \text{ a więc i } \sigma_b = 0;$$

a ruch jej w układzie, obracającym się np. z ziemią, wyrazimy wzorami

$$\bar{v}_w = -\bar{v}_u; \; \sigma_w = +\sigma_u.$$

A ponieważ przyśpieszenie unoszące jest zwrócone ku osi obrotu i $= h\varphi^2$; przeto każda gwiazda stała zakreśla w przestrzeni, związanej z ziemią, koło ruchem odwrotnym ruchowi unoszącemu. Zrozumiałem jest, że do tegoż wniosku dojść można bezpośrednio, stosując zasadę przemienności ruchów.

Równ. 179-te można jeszcze przekształcić na następujące. Podstawmy w równanie, odnoszące się do ruchu obrotowego układu, rów. 179-te z $(+\sigma_u)$

$$\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{v}_u,$$

a otrzymamy, po rozwiązaniu nawias, równ. nast.

$$\sigma_w = \sigma_b + \sigma_u - 2\,\mathrm{V}\,\bar{v}_w\bar{\varphi} - 2\,\bar{v}_u\bar{\varphi};$$

a ponieważ

$$\mathrm{V}\,\bar{v}_u\bar{\varphi} = \sigma_u;$$

przeto mamy

$$\sigma_w = \sigma_b - \sigma_u - 2\,\mathrm{V}\,\bar{v}_w\bar{\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (180)$$

Jest to równanie, które stosować można tak do postępowego, jak i do obrotowego ruchu układu; przedstawia ono jednakże tę niedogodność rachunkową, że po obydwóch stronach są niewiadome w postaci przyśpieszenia i prędkości ruchu względnego.

74. Przykład. Punkt materyalny jest swobodnie wyrzucony z powierzchni ziemi z prędkością $\bar{v}_{b,0}$; wyznaczyć tor, jaki on nakreśli na płaszczyźnie, poruszającej się w płaszczyźnie jego toru bezwzględnego ruchem postępowym z prędkością stałą $\bar{c}$; nie uwzględniając oporu powietrza, jakiego doznaje punkt podczas swego ruchu.

Wobec tego, że zjawisko tego ruchu jest krótkotrwałe i odbywa się na niewielkim obszarze, przyjmiemy, że układ bezwzględny (kinetyczny) jest sztywno związany z bryłą ziemską; przyjmiemy przeto, że bezwzględny ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez kierunek początkowej prędkości $\bar{v}_{b,0}$ i że tor jego jest parabolą, której osi sprzężone posiadają kierunki, wyznaczone kierunkami wektorów $\bar{g}$ i $\bar{v}_{b,0}$. Inny jednakże jest tor, jaki zakreśli ten punkt na płaszczyźnie poruszającej się. Ażeby go obliczyć zastosujemy wzór

$$\bar{v}_w = \bar{v}_b - \bar{c};$$

skąd obliczymy prędkość względną w początku ruchu

$$\bar{v}_{w,0} = \bar{v}_{b,0} - \bar{c}.$$

W tenże sposób, ponieważ $\bar{g}$ jest przyśpieszeniem bezwzględnem; i zgodnie z założeniem, co do ruchu układu odniesienia

$$\bar{p}_u = 0; \text{ oraz } \varphi = 0; \text{ mamy}$$

$$\bar{p}_w = \bar{g}.$$

Przyśpieszenie przeto ruchu względnego danego punktu jest równe przyśpieszeniu ziemskiemu; a więc jest ono stałe i pionowo skierowane; tor przeto względny, t. j. tor, jaki zakreśli punkt dany na płaszczyźnie poruszającej się, jest parabolą o kierunkach osi sprzężonych, wyznaczonych kierunkami wektora $\bar{g}$ i wektora $(\bar{v}_{b,0} - \bar{c})$. Pozostawia się czytelnikowi nakreślić tę parabolę.

W celu zestawienia równania ruchu względnego tego punktu, zastosujemy układ spółrzędnych wektorowych i w tym celu przeprowadzimy z miejsca wyjścia punktu promienie wodzące do kolejnych położeń punktu, a równanie różniczkowe ruchu przedstawi się w tych spółrzędnych

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{g}.$$

Pierwsza całka tego równania (wobec niezmienności wektora $\bar{g}$) dla granic od $(\bar{v}_{b,0} - \bar{c})$ do $\frac{d\bar{r}}{dt}$ oraz od 0 do t jest nast.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} - (\bar{v}_{b,0} - \bar{c}) = \bar{g}t,$$

druga zaś całka dla granic od 0 do $\bar{r}$ i od 0 do t

$$\bar{r} = (\bar{v}_{b,0} - \bar{c}) \,.\, t + \tfrac{1}{2}\bar{g}t^2.$$

Z równania tego wyznaczymy na płaszczyźnie poruszającej się, w każdej chwili t położenie punktu, gdy w miejscu początkowego punktu ruchomego wystawimy wektor $(\bar{v}_{b,0} - \bar{c})\,t$ i dodamy do niego wektor $\frac{1}{2}\bar{g}t^2$; można do tych rozpatrywań zastosować rys. 14-ty. Zrzutowawszy następnie powyższe równanie wektorowe np. na osi ukośnokątne, równoległe do kierunków $(\bar{v}_0 - \bar{c})$ i do $\bar{g}$, otrzymamy algebraiczne równanie ruchu, wyrażone obranemi spółrzędnemi.

75. Przykład. Rozpatrzmy obecnie ruch, bez uwzględnienia oporów, punktu materyalnego, upuszczonego np. z pewnej wysokości w polu sił ciążenia względem układu, sztywno związanego z bryłą ziemską; uwzględniwszy obrót ziemi tylko około własnej osi, z prędkością kątową $\bar{\varphi}$. Pominięcie w tem obliczeniu ruchu ziemi około słońca pozostaje w danym razie bez wpływu na wynik obliczenia; zjawisko bowiem spadania punktu jest zbyt krótkotrwałe w porównaniu z okresem rocznego obiegu ziemi.

Przyjmiemy w tych rozpatrywaniach, że kinetyczny układ odniesienia jest sztywno związany ze słońcem; punkt przeto materyalny, swobodnie puszczony bez prędkości **względem ziemi**, posiada w danej chwili prędkość bezwzględną $\bar{v}_{b,0}$, równą prędkości unoszącej miejsca, z którego został on upuszczony; t. j.

$$v_b = h\varphi;$$

i jest zwróconą ku wschodowi; litera h oznacza promień równoleżnika tego miejsca.

Gdyby na ten punkt nie działała siła ciążenia. wtedy punkt, będąc oswobodzony od połączeń z ziemią, zakreśliłby w układzie kinetycznym, w myśl przyjętego prawa bezwładności, tor prostolinijny ruchem jednostajnym, którego kierunek byłby styczny do równoleżnika w miejscu, w którem znajdował się ten punkt w chwili upuszczenia. Ruch ten jednakże byłby inny w przestrzeni, obracającej się razem z ziemią. Ażeby ten ruch obliczyć, wyobraźmy sobie bryłę ziemską, zatrzymaną w swym obrocie, natomiast prosta, po której punkt przebiega z prędkością v_b, obracającą się z prędkością $(-\bar{\varphi})$; tor wtedy, jakiby zakreślił dany punkt w tym układzie, i ruch, z jakimby on go przebiegł, byłby taki sam, jaki by wykonał, gdyby ziemia obracała się względem układu kinetycznego, a punkt zakreślał tor prostolinijny w tymże układzie. Nietrudno przedstawić sobie, że tor ten jest pewną linią spiralną, leżącą w płaszczyźnie równoleżnika początkowego położenia punktu. Obliczenie tego ruchu jest zbliżone do obliczenia, przytoczonego w przykładzie na str. 119-ej tomu II-go; z tą tylko zmianą, że biegun obrotu O obrać należy nie na prostej, obracającej się, jak to uczyniono w tym przykładzie, lecz na odległości h od niej, t. j. na odległości promienia równoleżnika początkowego położenia punktu.

Rozpatrywania te jak i wyniki ich będą nieco odmianne, gdy przyjmiemy, że upuszczony punkt jest przyciągany, w myśl hypotezy Nawtona, przez bryłę zniemską. Ażaby obliczyć ten ruch, przyjmiemy, że siły przyciągania zbiagają się w jednym punkcie, w tak zwanym środku ziemi; na punkt dany, posiadający prędkość początkową

$$v_{b,0} = h\varphi,$$

działają przeto siły środkowe, odwrotnie proporcyonalnie do odległości punktu ruchomego od środka przyciągania.

Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy już w § 29-tym tego tomu i obliczyliśmy, że tor jego jest płaski i przedstawia jedną z krzywych stożkowych; w której ognisku leży środek przyciągania. W § 31-szym zwróciliśmy uwagę na tę okoliczność, że w badaniach ruchów ziemskich na niewielkich obszarach można przyjąć ten tor za parabolę, a siły przyciągające za stałe. Wobec tego przyjmiemy, że tor bazwzględny punktu materyalnego, swobodnie upuszczonego z pewnej wysokości powierzchni ziemi, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się w początkowem położeniu punktu, oś główna zlewa się z kierunkiem przyciągania ziemskiego, a płaszczyzna tej paraboli jest nieruchomą w przestrzeni kinetycznej t. j. w przestrzeni, sztywno związanej ze słońcem.

Ażeby następnie obliczyć tor i ruch po nim, jaki dany punkt wykona w przestrzeni, sztywno związanej z obracającą się bryłą ziemską, wyobraźmy sobie ziemię pozostającą w spoczynku, a punkt — w ruchu obrotowym ($\bar{\varphi}$); punkt wtedy zakreśli w przestrzeni, sztywno związanej z ziemią, którą narazie wyobrażamy sobie nieruchomą, pewien tor i wykona ruch taki, jaki by wykonał w przestrzeni obracającej się. Ogólne równanie tego ruchu jest nast.

$$\bar{p}_w = \bar{p}_b + \bar{p}_u - 2\,\mathrm{V}\bar{v}_b\bar{\varphi};$$

które można uprościć, mając na uwadze, pewne liczbowe stosunki wartości, odnoszących się do obrotu ziemi. Mianowicie, wziąwszy pod uwagę, że największa wartość przyśpieszenia unoszącego równa się, por. wzór. 169-ty

$$p_u = 0{,}034 \text{ m./sek}^2.,$$

pominiemy ją wobec wartości przyśpieszenia ziemskiego, i przyśpieszenie bezwzględne przyjmiemy

$$\bar{p}_b \cong \bar{g};$$

wobec czego otrzymamy równanie

$$\bar{p}_w = \bar{g} - 2\,\mathrm{V}\bar{v}_b\bar{\varphi}.$$

Wielkości, stojące po prawej stronie tego równania, są znane; prędkość bowiem $\bar{v}_b$ możemy obliczyć z czasu t; zastąpiwszy przeto to równanie, równaniami algebraicznemi, otrzymamy po ich scałkowaniu szukane równania ruchu, jaki punkt dany wykona w przestrzeni obracającej się wraz z ziemią.

Wartość prędkości bezwzględnej

$$v_b = \sqrt{v^2_{b,0} + (g\,t)^2};$$

lecz już po upływie jednej sekundy wartość $v_{b,0}$ staje się bardzo małą w porównaniu z wartością gt; przyjmiemy przeto z pewnem przybliżeniem

$$\bar{v}_b \cong \bar{g}t; \text{ a więc } v_b \cong gt;$$

a po podstawieniu w powyższe równanie otrzymamy

$$\bar{p}_w = \bar{g} - 2\,t\,V\bar{g}\bar{\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (181)$$

Z równania tego wynik, że dwa wektory $\bar{g}$ i $2\,V\bar{g}\bar{\varphi}$ leżą w jednej płaszczyźnie, — w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez kierunek bezwzględnej prędkości początkowej. Ruch przeto względny danego punktu, wobec postawionych założeń ($\bar{p}_u \cong 0$ oraz $\bar{v}_b \cong \bar{g}t$), jest płaski. W celu zestawienia równań jego ruchu; przeprowadźmy w płaszczyźnie ruchu przez miejsce wyjścia danego punktu oś ξ z kieruniem i zwrotem zgodnym z kierunkiem przyśpieszenia $\bar{g}$ i oś η — zgodnie z kierunkiem wektora $\bar{v}_{b,0}$.

Rzuty równania 181-ego na obrane osi dają następujące równania algebraiczne

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -2\,gt\varphi\cos\lambda.$$

Wprowadziwszy początkowe warunki ruchu dla $t = 0$; $\xi = 0$; $\eta = 0$

$$\frac{d\xi}{dt} = 0; \quad \frac{d\eta}{dt} = v_w = 0;$$

otrzymamy po scałkowaniu równania ruchu

$$\xi = \frac{1}{2}gt^2; \; \eta = \frac{1}{3}g\cos\lambda\,.\,t^3;$$

i równanie toru

$$\eta = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{2g}}\cos\lambda\,.\,\varphi\,.\,\xi^{\frac{3}{2}}.$$

Swobodnie przeto z pewnej wysokości upuszczony ciężar zakreśli tor w układzie, obracającym się razem z ziemią, nie prostolinijny lecz krzywolinijny; i upadnie na odległości η od miejsca, w jakim pion, przeprowadzony z miejsca wyjścia punktu, spotka odnośny poziom. Doświadczalnie znaleziono

$$\text{dla } \xi = 158{,}5\ m;\quad \eta = 28{,}4 \text{ m/m};$$

a ze wzoru powyższego wypada

$$\eta = 27{,}5 \text{ m/m}.$$

Zgodność tych wyników stwierdza założenie, że układ kinetyczny można uważać z dostateczną dokładnością dla zjawisk ziemskich za połączony sztywno ze słońcem i gwiazdami stałemi.

KONIEC TOMU TRZECIEGO.

Warszawa, Listopad 1921 r.