III. Równanie dynamiczne, wyrażone siłą normalną i styczną.

18. Siła dośrodkowa i styczna. Za pomocą przytoczonych trzech równań dynamicznych możemy rozwiązać wszelkie zadania z dynamiki punktu. Często jednakże, jak to było w ostatnim przykładzie, zadanie to można rozwiązać prościej, gdy warunki jego pozwalają na wyznaczenia wektora przyśpieszenia; wtedy bowiem szukaną siłę wyznaczymy bezpośrednio: — jako m-krotny wektor przyśpieszenia. Gdy w zadaniu dany jest tor, oraz równanie ruchu po tym torze w postaci np. $s = f(t)$, wtedy wyznaczyć można przyśpieszenie z dwóch jego rzutów na główną normalną do toru i na styczną do niego; jakieśmy to pokazali w § 24-ym tomu II-ego. Rzuty te są równe

$$p_n = \frac{v^2}{\rho}; \; p_t = \frac{dv}{dt}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

a właściwe przyśpieszenie

$$\bar{p} = \bar{p}_n + \bar{p}_t.$$

Zrzutujmy następnie siłę $\bar{P}$, działającą na dany punkt w pewnem miejscu jego toru, na te same osi, na które zrzutowaliśmy przyśpieszenie t. j. na następujące trzy osi: na główną normalną do toru (na której leży promień krzywizny); na styczną do niego i prostopadłą do tych dwóch osi (t. j. na binormalną); a zgodnie z twierdzeniem o rzutach sił na osi (§ 13-ty) i mając na uwadze rów. 63-cie, napiszemy:

$$P_n = m\frac{v^2}{\rho}; \; P_t = m\frac{dv}{dt}; \text{ oraz } P_b = 0 \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

$P_b = 0$, wskutek tego, że wektor przyśpieszenia punktu leży w płaszczyźnie ściśle stycznej, (w której leżą też osi n i t), a zatem rzut jego, a więc i rzut siły na binormalną równają się zeru. Na podstawie tych równań mamy

$$\bar{P} = \bar{P}_n + \bar{P}_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Z równania 64-go i 65-go obliczyć można siłę, wywołującą ruch, gdy dany jest tor i ruch punktu po nim; lecz można również wyznaczyć tor i ruch punktu, gdy dane są siły. W tym celu wyobrazimy sobie, mając na uwadze prawo superpozycyi, że ruch punktu w danem polu sił wywołany jest dwiema siłami, jednocześnie działającemi: siłą normalną do toru, która utrzymuje punkt na okręgu koła w ruchu jednostajnym i siłą styczną, udzielającą mu przyśpieszenia wzdłuż tego okręgu. Niech będzie np. dane położenie początkowe punktu w przestrzeni, masa, jego prędkość v_1 w tem położeniu i siła $\overline{P}_1$, która w tem miejscu na niego działa, to znajdziemy następne położenie tego punktu, jakie on zajmie po upływie czasu Δt, oraz jego prędkość w tem położeniu, gdy w płaszczyźnie $(\bar{v}_1, \overline{P}_1)$ przeprowadzimy normalną do kierunku danej prędkości; zrzutujemy na nią daną siłę i odłożymy długość ρ, obliczoną z równ. 64-go; a koło, zakreślone tym promieniem, jest kołem krzywizny szukanego toru. W celu wyznaczenia położenia punktu, po upływie czasu Δt, przyjmiemy z pewnem przybliżeniem, że punkt dany przebiega po tym kole ze stałą prędkością v_1; znajdzie się on zatem, po upływie czasu Δt, w miejscu $A_1A_2 = v_1 \,.\, \Delta t$. Jeśliby na dany punkt działała tylko siła $P_{1,n}$, to przybyłby on do A_2 z prędkością v_1; ponieważ zaś działa na niego jeszcze siła styczna, prędkość ta będzie inną. W celu jej obliczenia, skorzystamy z równania $P_{1,t} = m\frac{dv}{dt}$, z którego obliczymy $\Delta v_1 = \frac{P_{1,t}}{m} \,.\, \Delta t$; $P_{1,t}$ jest bowiem znane jako rzut siły P_1 na kierunek v_1. Prędkość zatem w miejscu A_2 jest styczną do koła, zakreślonego promieniem ρ_1; a wartość jej $v_2 = v_1 + \Delta v_1$.

Znając następnie siłę P_2 w miejscu A_2, obliczymy ρ_2, zakreślimy koło tym promieniem i obliczymy w powyższy sposób położenie A_3 punktu ruchomego, oraz jego prędkość w tem miejscu. Postępując w ten sposób, otrzymamy tor punktu, złożony z cząstek kół, zakreślonych z różnych środków, różnymi promieniami.

Zauważymy, że tor punktu, wykreślony sposobem wskazanym na str. 7, składa się z odcinków prostych; wykreślony zaś sposobem teraz wyłożonym składa się z odcinków kołowych.

W szczególnych przypadkach

1) gdy $P_n = 0$, oraz $P_t = 0$; wtedy ruch punktu jest albo prostolinijny i jednostajny; z powyższych bowiem równań otrzymamy $\rho = \infty$; i prędkość stałą;
2) gdy $P_n = 0$; a $P_t \gtreqless 0$, wtedy jest ruch prostolinijny zmienny; gdyż $\rho = \infty$, a prędkość jest zmienną;
3) gdy zaś $P_n \gtreqless 0$, a $P_t = 0$; wtedy jest ruch krzywolinijny jednostajny;
4) gdy wreszcie $P_n \gtreqless 0$, oraz $P_t \gtreqless 0$, wtedy jest ruch krzywolinijny zmienny.

Obserwując np. siły, wywołujące bieg ostatniego wagonu pociągu, który przebiega po łuku, zauważymy, że siły, występujące w ciągnących go łańcuchach, są siłami stycznemi do toru; nadają więc one ruch przyspieszony wzdłuż toru; siły zaś odporowe szyn, występujące w płaszczyźnie poziomej, są siłami dośrodkowemi normalnemi do toru.

Równania zatem 64-te i 65-te są równaniami dynamicznemi w postaci skolarnej i różnią się tylko od takichże równań, wyrażonych spółrzędnemi osiowemi, szczególnym wyborem osi rzutów. Równania zatem 64-te i 65-te stosować można do rozwiązywania wszelkich zadań z dynamiki punktu; a przedewszystkiem, do obliczenia sił, wywołujących dany ruch punktu po danym torze. Gdy bowiem dany jest tor i ruch punktu po nim, wtedy obliczymy metodą analityczną z równań toru promień krzywizny w danym miejscu toru, lub wyznaczymy go wykreślnie, gdy dana jest postać toru (porów. § 18-ty tomu II-giego); a z równań 64-tych obliczymy rzut P_n; z przyśpieszenia zaś punktu po torze, t. j. z wartości $\frac{dv}{dt}$ obliczymy siłę P_t; a z równania 65-go wyznaczymy siłę, działającą, w danej chwili na punkt ruchomy i wywołującą dany ruch. Możnaby również rozwiązać za pomocą tych równań zadanie odwrotne t. j. z danych sił obliczyć tor, lecz sposób ten jest dosyć zawiły pod względem rachunkowym.

Przykład. Punkt materyalny o ciężarze $Q = 10$ *kg.* zakreśla w płaszczyźnie poziomej ruchem jednostajnym, o prędkości $v = 3$ *m/sek.*, koło o promieniu $r = 1$ *m.* Obliczyć siłę, wywołującą ten ruch.

Siła styczna w danym razie $P_t = m \frac{dv}{dt} = 0$, gdyż prędkość v, stosownie do warunków zadania, jest stałą. Siła zaś normalna $P_n = m \frac{v^2}{r} = \frac{10}{g} \cdot \frac{3^2}{1} \cong 9$ *kg.* Ponieważ tor jest kołem, przeto normalne we wszystkich punktach koła, przecinają się w jego środku; siła P_n jest przeto skierowaną ku środkowi koła i posiada wartość stałą. Ażeby więc punkt materyalny o ciężarze 10 *kg.* zakreślił tor kołowy ruchem jednostajnym z prędkością 3 *m/sek.*, należy do tego punktu przyłożyć siłę niezmienną pod względem algebraicznym $P \cong 9$ *kg.*, skierowaną ku środkowi koła. Siłę dośrodkową dostarcza w tym razie naprężenie nici, które jest równe 9 *kg.* Wynik ten pozwoli obliczyć wielkość przekroju nici; ażeby pod działaniem siły ciągnienia nie zerwała się, jeżeli np. obierzemy tę nić w postaci drutu żelaznego, którego wytrzymałość przyjmiemy: $\sigma = 1000$ *kg/cm²*, to przekrój f tego drutu obliczymy z równania $f \,.\, 1000 = 9$ *kg*; skąd $f = \frac{9}{1000} \cdot 100 = 0{,}9$ mm^2; a zatem średnica drutu $d = 1{,}08$ *mm.*

Jeżeliby torem punktu były szyny, to siła dośrodkowa zostałaby udzielona danemu punktowi za pośrednictwem szyn; wtedy parcie szyn na punkt materyalny jest siłą, która nadaje mu ruch krzywolinijny.