

W razie ruchu punktu po torze z oporem, proporcjonalnym do wartości pewnej funkcji z prędkości, postępowanie rachunkowe, wyżej wyłożone, się nie zmieni, przybędzie tylko w równaniu pracy cząstkowej jeden wyraz siły, przedstawiony funkcją prędkości; lecz to nie zmieni ogólnej postaci równania różniczkowego; zmieni tylko sposób jego całkowania

#### D. Ruch punktu materalnego po danej powierzchni.

**54. Ruch punktu po powierzchni bez oporów.** Punkt materalny, poruszający się po danej powierzchni, posiada dwa stopnie swobody; dwiema zatem spólrzëdnymi niezaleźnymi wyrazimy ruch punktu oraz siły odporowe powierzchni. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{p}.$$

Siła odporowa  $N$ , wobec gładkości powierzchni, jest normalną do niej; kierunek jej jest więc znany; nieznaną jest tylko jej wielkość; siła ta przedstawia przeto jedną algebraiczną niewiadomą. Ponieważ tor, jest nieznaný co do swej postaci, przeto i przyspieszenie punktu podczas ruchu jest nam nieznane ani co do kierunku, ani co do wielkości. Przyspieszenie to przedstawia jednakże tylko pozornie trzy algebraiczne niewiadome; jest ono bowiem uwarunkowane postacią powierzchni, po której punkt się porusza; a warunek ten wyrazimy równaniem powierzchni. Mamy przeto w danem zadaniu cztery niewiadome, a dla ich wyliczenia jedno równanie dynamiczne w postaci wektorowej, oraz jedno równanie algebraiczne, określające daną powierzchnię. W celu obliczenia tych niewiadomych, stosujemy wogóle metodę rzutów na trzy osi prostokątne  $x, y, z$ ; dowolnie obrane w przestrzeni. Rzuty wektorów równania dynamicznego na te osi dają następujące trzy równania

$$1) \quad P_x + N_x = m \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$2) \quad P_y + N_y = m \frac{d^2y}{dt^2};$$

$$3) \quad P_z + N_z = m \frac{d^2z}{dt^2};$$

Równanie zaś powierzchni jest następujące

$$4) \quad f(x, y, z) = 0.$$

Są to cztery wyżej omówione równania. Ponieważ jednakże jedną niewiadomą  $N$  wyraziliśmy, ze względuw rachunkowych, trzema jej rzu-

tami, przeto należy jeszcze wprowadzić do rachunku warunek, że siła  $N$  jest prostopadłą do powierzchni; warunek ten wyrazimy dwoma następującymi równaniami

$$5) \quad N_x : N_y = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy};$$

$$6) \quad N_y : N_z = \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz};$$

Mamy zatem sześć równań, z których obliczymy sześć niewiadomych:  $x, y, z, N_x, N_y, N_z$  w funkcji czasu  $t$ ; — jest to ogólne postępowanie.

Lecz takie postępowanie rachunkowe, aczkolwiek zupełnie ściśle, prowadzi do wzorów dosyć zawiłych i daje najczęściej wyniki mało przejrzyste; w celu zatem ułatwienia rozpatrywań tego ruchu, należy korzystać ze szczegółowych właściwości danych powierzchni w ten sposób, ażeby móc bezpośrednio zastosować twierdzenie pracy, oraz momentów ilości ruchu, które są pierwszymi całkami powyższych równań dynamicznych; postępowanie takie w wielu szczególnych przypadkach prowadzi wprost do celu.

Równanie pracy daje bezpośrednio zależność pomiędzy spółrzednymi punktu ruchomego i jego prędkością. Równanie to łącznie z równaniem momentu ilości ruchu pozwala w wielu przypadkach obliczyć tor i ruch po nim. Lecz wogóle w równanie momentów ilości ruchu wchodzi wielkość siły odporowej, która jest nieznaną; równanie to nie wystarcza przeto do obliczenia ruchu i należy zastosować jeszcze inne równania dynamiczne.

Dla pewnych jednakże szczególnych powierzchni moment sił odporowych, czy to względem odpowiednio obranego bieguna, czy też względem takiejże osi równa się zeru; a wtedy równanie momentu ilości ruchu będzie drugim równaniem, wykazującym zależność pomiędzy spółrzednymi punktu i prędkością jego, lub inaczej się wyrażając, pomiędzy spółrzednymi i czasem. Takimi powierzchniami są powierzchnie obrotowe; ich bowiem normalne przecinają oś obrotu; momenty przeto sił odporowych względem tej osi równają się zeru.

**55. Ruch punktu materialnego po powierzchni walca prostego o podstawie kołowej.** Weźmy naprzód przypadek, w którym na dany punkt, posiadający początkową prędkość  $\bar{v}_0$ , styczną do powierzchni walca, nie działa żadna siła zewnętrzna (a więc również i siła ciężenia). Jeśli punkt był swobodny, poruszałby się po linii prostej ruchem jednostajnym; w danym zaś przypadku, wskutek sił odporowych walca, zakreśli on z pewną prędkością pewien tor, leżący na powierzchni walca. Poślad tego toru, oraz prędkości punktu odczytamy, z równania pracy

i momentu ilości ruchu. Na dany punkt działa przeto tylko siła odporna, której praca podczas przystosowanego przesunięcia punktu,  $= 0$ , a zatem równanie pracy jest następujące

$$1) \quad 0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2,$$

z którego wynika, że  $v = v_0$  t. j., że punkt ruchomy przebiega po danym walcu z prędkością stałą pod względem algebraicznym, i równą prędkości początkowej.

Równania momentu ilości ruchu zestawimy względem osi walca; momenty bowiem sił odporowych, względem tej osi, równają się zeru. W tym celu, zgodnie z określeniem momentu względem osi, zrzutujemy siły i prędkości na płaszczyznę prostopadłą do osi; a odznaczyszy te rzuty kreskami, otrzymamy równanie

$$2) \quad 0 = \frac{dM_{v,z}}{dt}; \text{ lub inaczej } mv'r - mv_0'r = 0,$$

z którego wynika, że rzuty właściwych prędkości na płaszczyznę, prostopadłą do osi, są stałe. Z tych właściwości wynika, że tor jest linią śrubową o stałym podniesieniu.

Przyjmijmy następnie, że na punkt, któremu udzielono prędkości początkowej  $v_0$ , działa siła ciężenia  $m\vec{g}$ , a walec jest ustawiony pionowo.

W celu zestawienia równania pracy, oznaczmy odległość pionową punktu ruchomego od położenia początkowego przez  $z$ , a napiszemy to równanie w następującej postaci

$$1) \quad mgz = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Równanie zaś momentu ilości ruchu względem osi obrotowej jest następujące

$$2) \quad 0 = mv'r - mv_0'r = 0, \text{ skąd } v' = v_0'.$$

Z równania tego wynika, że rzuty prędkości właściwej na płaszczyznę poziomą są niezmiennie (jak poprzednio); lecz z równania pracy odczytamy, że prędkość właściwa jest zmienną i powiększa się z rosnącą wartością spólrzędnej  $z$ ; z tych właściwości wynika, że kierunek prędkości punktu po powierzchni walca z biegiem czasu zbliża się do kierunku pionowego.

W celu wyznaczenia toru tego ruchu, rozwińmy powierzchnię walca na płaszczyznę, a wektory wszystkich prędkości znajdą się na tej płaszczyźnie i będą stycznymi do krzywej, powstałej z rozwiniętego toru. Z powyższego stosunku rzutu prędkości właściwej obliczyć można, że rozwinięcie toru jest parabolą. Parabola zatem z osią pionową, której płaszczyznę nawiniemy na walec, przedstawia tor punktu materialnego, posuwającego się z prędkością początkową pod działaniem siły ciężenia po powierzchni gładkiej walca pionowego o podstawie kołowej.

**56. Ruch punktu po powierzchni kuli.** Ruch punktu po powierzchni kuli wywołać można, puściwszy punkt materialny z pewną prędkością zewnątrz względnie wewnątrz powierzchni kuli; punkt ten zakreśli na tej powierzchni pewien tor. Ruch taki wywołać również można, nadawszy punktowi materialnemu wahadła pospolitego, § 43-ci, pewną dowolnie skierowaną w przestrzeni prędkość; a punkt ten zakreśli w przestrzeni tor, który leży na powierzchni kuli o promieniu równym długości nici; w ten sposób puszczone wahadło nazywają wahadłem kulistym.

Zadanie polega na wyznaczeniu toru, ruchu po nim i wielkości siły odporowej, jaką on wywoła podczas tego ruchu. Weźmy najpierw pod uwagę przypadek, gdy punkt ruchomy o masie  $m$  porusza się po powierzchni danej kuli **bez działania sił zewnętrznych**, a więc również bez udziału sił ciężenia; i porusza się jedynie skutkiem nadanej mu prędkości początkowej. Gdyby ten punkt był swobodny, zakreśliłby on ruchem jednostajnym tor prostoliniowy. W danym zaś razie skutek sił odporowych wykona on inny ruch, który obliczymy z równań dynamicznych.

Praca sił podczas przesunięcia cząstkowego punktu po powierzchni kuli, równa się w danym razie zeru. Energia kinetyczna punktu pozostaje zatem podczas tego ruchu niezmienną, t. j. punkt ruchomy zakreśla ruchem jednostajnym na powierzchni kuli pewien tor dotychczas nieznany.

W celu wyznaczenia postaci toru zastosujemy zasadę momentu ilości ruchu, i otrzymamy drugie równanie dynamiczne ruchu. Siłą, działającą na punkt ruchomy, jest wobec założeń powyższych tylko siła odporowa powierzchni kuli; a ponieważ moment jej względem środka kuli równa się zeru, przeto mamy równanie momentu ilości ruchu względem bieguna obranego w środku kuli

$$\frac{d\vec{M}_O}{dt} = 0,$$

t. j. wektor momentu ilości ruchu jest stały co do kierunku, wielkości i zwrotu; z czego wynika, że ruch punktu po kuli, bez udziału sił zewnętrznych, odbywa się w płaszczyźnie nieruchomej, wyznaczonej przez kierunek prędkości początkowej punktu i przez środek kuli; ruch zatem danego punktu w tych warunkach jest ruchem jednostajnym po wielkiem kole, wyznaczonem przez początkowe położenie punktu i przez kierunek początkowej jego prędkości.

Ponieważ promień krzywizny tego toru jest stały, równa się bowiem promieniowi kuli  $r$ , przeto siła odporowa  $N$ , jako siła dośrodkowa.

$$N = m \frac{v^2}{r};$$



2) oraz kąt  $\Theta$ , jaki tworzy płaszczyzna biegunowa, przechodząca przez punkt ruchomy z inną płaszczyzną biegunową nieruchomo obraną w przestrzeni. Na rys. 37-ym, na którym  $O$  oznacza środek kuli, naniesiono współrzędne  $z$  i  $\Theta$ . Współrzędne początkowego położenia punktu oznaczmy literami  $z_0$  i  $\Theta_0$ , a prędkość początkową literą  $\bar{v}_0$ .

Na punkt dany działa siła jego ciężkości  $m\bar{g}$  i siła odporowa  $\bar{N}$  powierzchni kuli, (czy też naprężenia wahadła); równanie przeto dynamiczne ruchu tego punktu jest następujące

$$\bar{N} + m\bar{g} = m\bar{p}.$$

W celu rozwiązania zadania tego możemy zastosować bezpośrednio zasadę pracy i zasadę momentów. Praca bowiem siły odporowej  $\bar{N}$ , podczas przesunięcia punktu po kuli, równa się zeru, i moment jej względem bieguna, obranego w środku kuli, równa się także zeru.

Równanie przeto pracy, podczas cząstkowego przesunięcia punktu po powierzchni kuli jest nast.

$$mg dz = d(\frac{1}{2} m v^2),$$

z którego po scałkowaniu od  $z_0$  do  $z$ ; i od  $v_0$  do  $v$ , otrzymamy następujące równanie

$$1) \quad mg(z - z_0) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (115)$$

Moment sił odporowych względem środka kuli równa się zeru; a więc i względem każdej osi, przechodzącej przez ten biegun, równa się zeru. Zestawimy przeto równanie momentu ilości ruchu względem osi pionowej  $z$ , gdyż wtedy i moment siły ciężkości równa się zeru; okoliczność ta chociaż nie jest potrzebną dla naszego rachunku, upraszcza go jednakże, pozbywamy się bowiem momentu siły ciężkości;

a zatem napiszemy  $\frac{dM_{v,z}}{dt} = 0$ ; a więc

$M_{v,z} = \text{stałe}$ ; lub inaczej, zgodnie z równ. 74-tem

$$2) \quad mh^2 \frac{d\Theta}{dt} = M_0 \quad (116)$$

gdzie  $M_0$  oznacza moment, względem osi  $z$ , ilości ruchu punktu w początkowym jego położeniu;  $h$  — promień równoleżnika, na którym znajduje się chwilowo, a  $\frac{d\Theta}{dt}$  jest prędkością obrotową płaszczyzny biegunowej punktu ruchomego.

W celu wyrażenia prędkości obranemi współrzędnymi, zrzutujemy ją na trzy następujące wzajemnie prostopadłe osi, rys. 37-my: na oś  $z$ , styczną do równoleżnika, na którym znajduje się w danej chwili punkt



ruchomy; na oś  $h$ , będącą przedłużeniem promienia tegoż równoleżnika, i na oś  $z$  pionową; a zważywszy, że rzuty prędkości punktu ruchomego są prędkościami jego rzutów, str. 39-ta tomu II-ego, i że obrane osi są wzajemnie prostopadłe, mamy

$$v^2 = \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \left(h\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Wielkość bowiem  $h = \sqrt{r^2 - z^2}$ ; a  $dh = \frac{-zdz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$ .

Po podstawieniu tych wartości w równania 115-te i 116-te; otrzymamy

$$1) \quad 2g(z - z_0) = \left[\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \left(h\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - v_0^2; \text{ oraz}$$

$$2) \quad m h^2 \frac{d\Theta}{dt} = M_0 \dots \dots \dots (117)$$

W tych równaniach mamy trzy zmienne  $z$ ,  $\Theta$ , oraz czas  $t$ ; można więc z nich wytworzyć związki pomiędzy każdą ze współrzędnych i czasem lub pomiędzy samymi współrzędnymi.

W celu znalezienia związku pomiędzy  $z$  i  $t$ , obliczymy z drugiego równania  $\frac{d\Theta}{dt}$ , i podstawimy w pierwsze, oraz podstawimy wartość  $dh$ , a otrzymamy

$$2g(z - z_0) = \left[\left(\frac{-z}{h} \cdot \frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(h \cdot \frac{M_0}{mh^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - v_0^2;$$

po uporządkowaniu zaś

$$2g(z - z_0) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left(\frac{z^2}{h^2} + 1\right) + \left(\frac{M_0}{mh}\right)^2 - v_0^2 \dots \dots (118)$$

skąd, po podstawieniu  $h^2 = r^2 - z^2$  i rozwiązaniu względem  $\frac{dz}{dt}$ , otrzymamy

$$r \frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{f(z)} \dots \dots \dots (119)$$

w którym przyjęto

$$f(z) = (r^2 - z^2) [2g(z - z_0) + v_0^2] - \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 \dots \dots (120)$$

W podobny sposób, rugując z powyższych równań zmienną  $z$ , obliczyć można związek pomiędzy współrzędnymi  $\Theta$  i  $t$ .

Wyrugowawszy następnie z równania 1-go i 2-go zmienną  $t$ , która występuje w postaci różniczki  $dt$ , otrzymamy równanie, które łącznie z równaniem kuli określa postać toru; równanie to jest następujące

$$\frac{d\theta}{dz} = r \frac{M_0}{m} \cdot \frac{1}{(r^2 - z^2) \sqrt{f(z)}} \dots \dots \dots (121)$$

Całki powyższych wzorów są funkcyami eliptycznemi, nie dają się przeto wyrazić zwykłemi funkcyami. Można jednakże drogą analizy równań różniczkowych wywnioskować o pewnych właściwościach danego ruchu i otrzymać jego obraz; analizę tę przeprowadzimy w paragrafie następnym; a obecnie obliczymy siłę odporową powierzchni kuli. W tym celu zrzutujemy równanie dynamiczne

$$m\ddot{r} + N = m\dot{p}.$$

na normalną do powierzchni kuli t. j. na jej promień<sup>1)</sup>, przechodzący przez dany punkt.

Siła  $N$  zrzutuje się w rzeczywistej swej wielkości; i jeżeli przyjmiemy zwrot dodatni ku środkowi kuli, to rzut siły ciężkości równa się ( $-mg \cos \sigma$ ); gdzie  $\sigma$  oznacza kąt, zawarty pomiędzy kierunkiem promienia i kierunkiem pionowym, a  $\cos \sigma = \frac{z}{r}$ , rys. 37-my.

Rzut przyspieszenia  $\ddot{r}$  na kierunek normalnej do powierzchni obliczymy w następujący sposób. Zastąpmy przyspieszenie  $\ddot{r}$  sumą dwóch przyspieszeń ( $\ddot{r}_n + \ddot{r}_t$ ), w której  $\ddot{r}_n = \frac{v^2}{\rho}$ , jest rzutem przyspieszenia na główną normalną do toru, a  $\ddot{r}_t = \frac{dv}{dt}$  na styczną; i zrzutujemy ją na obrane osi. Rzut  $\ddot{r}_n$  na normalną do powierzchni wyrazimy wzorem

$$\frac{v^2}{\rho} \cdot \cos(\rho, N),$$

rzut zaś  $\ddot{r}_t$  równa się zeru.

Zważywszy następnie, że, stosownie do twierdzeń geometrii analitycznej

$$\rho = r \cdot \cos(\rho, N)^2), \dots \dots \dots (122)$$

<sup>1)</sup> Uprzypomnić sobie należy, że główna normalna do krzywej, zakreślonej na pewnej powierzchni, nie zlewa się wogóle z normalną tej powierzchni; lecz tworzy z nią pewien kąt, który w szczególnym tylko przypadku może równać się zeru.

<sup>2)</sup> Związek ten dla krzywej na kuli wynika bezpośrednio z następujących rozważań. Płaszczyzna ściśle styczna w pewnym punkcie każdej krzywej, zakreślonej na dowolnej powierzchni, przechodzi przez dwie sąsiednie cząstki łuku; koło przechodzące przez te dwie cząstki jest kołem krzywizny. Gdy zaś krzywa leży na powierzchni kuli, to płaszczyzna ściśle do niej styczna w pewnym jej punkcie,



otrzymamy, po skróceniu przez  $\rho$ , równanie rzutów na normalną

$$-mg \frac{z}{r} + N = \frac{mv^2}{r},$$

z którego, po podstawieniu wartości  $v^2$  z równania pracy, obliczymy

$$N = \frac{m}{r} [g(3z - 2z_0) + v_0^2]. \quad (123)$$

Jest to szukane równanie, z którego obliczyć można np. położenie równoleżnika, na którym punkt ruchomu opuści powierzchnię kuli.

**57. Analiza równań ruchu punktu ciężkiego po powierzchni kuli.** Zestawienie równania dynamicznego w zadaniu powyższem nie przedstawiało żadnych trudności; scałkowanie jego jednakże i uwidocznienie sobie ruchu, wyrażonego otrzymanymi równaniami, przedstawia znaczne trudności rachunkowe. W takich przypadkach staramy się wogóle odczytać właściwości ruchu bezpośrednio z równań różniczkowych oraz z geometrycznych stosunków, które zachodzą w każdym poszczególnem zadaniu. W celu zastosowania tego sposobu do obliczenia ruchu punktu po kuli, weźmiemy pod uwagę jego równania dynamiczne i zbadamy ich właściwości.

Z niezmienności znaku wartości  $\frac{d\Theta}{dt}$ , obliczonej z równania momentu ilości ruchu

$$m h^2 \frac{d\Theta}{dt} = M_0,$$

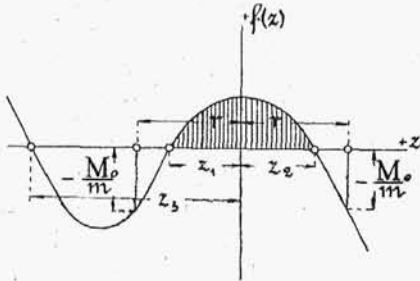
wynika, że rzut punktu na płaszczyznę poziomą krąży około osi pionowej z jednym i tym samym zwrotem, o ile  $M_0 \neq 0$ . W przypadku zaś, w którym  $M_0 = 0$ ,  $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ , kat przeto  $\Theta$  jest stały, a ruch punktu jest ruchem zwykłego wahadła płaskiego.

Podczas ruchu punktu na powierzchni kuli, rzut jego na oś pionową wykonywa również pewien ruch. Równaniem ruchu tego rzutu jest równanie 119-te; a wartości dla  $z$ , które czynią  $\frac{dz}{dt} = 0$ ; t. j. pierwiastki równania  $f(z) = 0$ ; wskazują miejsca na osi pionowej, w których rzut punktu posiada prędkość zero i jednocześnie wskazują największe oddalenia tego rzutu od środka kuli. Pierwiastki przeto równania

$$(r^2 - z^2) [2g(z - z_0) + v_0^2] - \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 = 0. \quad (124)$$

przecina powierzchnię kuli po kole, które jest kołem jej krzywizny, a promień jego jest jej promieniem krzywizny; z czego wynika związek pomiędzy promieniem krzywizny krzywej, zakreślonej na kuli a promieniem kuli.

wyznaczają miejsca na osi, w których rzut punktu na tę oś posiada prędkość zero. Równanie to jest względem niewiadomej  $z$  stopnia 3-go; posiada przeto trzy pierwiastki. Dla naszych rozpatrywań tylko te pierwiastki mają znaczenie fizyczne, które leżą pomiędzy wartościami  $(-r)$  i  $(+r)$ ; i które czynią  $f(z) > 0$ ; w razie bowiem ujemnej wartości tej funkcji wartości prędkości stają się urojonemi, a więc nie mają fizycznego znaczenia. Wartości przeto  $z = \pm r$  (o ile  $M_0 < 0$ ) nie mogą być pierwiastkami danego równania, gdyż czynią wartość  $f(z) < 0$ ; z czego wynika, że punkt ruchomy nie przechodzi przez wierzchołki kuli. Ponieważ ruch danego punktu odbywa się wogóle przy wszelkich warunkach początkowych, przeto dla zmiennej  $z$  jest szereg wartości, które czynią  $f(z) > 0$ , i szereg ten powinien znajdować się pomiędzy  $z = \pm r$ ; a ponieważ dla  $z = \pm r$ ,  $f(z) < 0$ ; przeto wartość jej zmienia dla dwóch



Rys. 38.

wartości  $z$ , leżących pomiędzy  $\pm r$ , dwa razy swój znak; a zatem dwa pierwiastki danego równania leżeć muszą pomiędzy  $\pm r$ ; pierwiastki te oznaczmy literami  $z_1$  i  $z_2$ ; wartość zaś trzeciego leżeć będzie pomiędzy wartościami  $(-r)$  i  $(-\infty)$  t. j. będzie ujemną; podstawivszy bowiem  $z = -r$ , otrzymamy  $f(z) < 0$ ; podstawivszy zaś  $z = -\infty$ ,  $f(z) > 0$ .

Wykres przeto wartości  $f(z)$ , który

w przybliżeniu przedstawiłmy na rys. 38-tym, dla różnych wartości zmiennej  $z$ , przecina trzy razy oś spółrzędnych; dwa razy w miejscach, leżących pomiędzy  $z = \pm r$  i po raz trzeci w miejscu pomiędzy  $-\infty$  i  $-r$ . Rozumie się, że spółrzędne miejsc tych można obliczyć bezpośrednio z równ. 124-ego, jeżeli weźmiemy do rachunku wartości liczbowe.

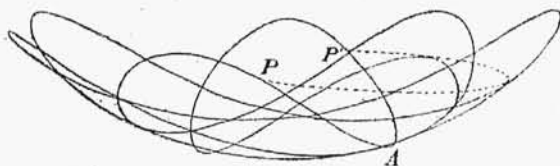
Rozpatrzmy jednakże ogólne właściwości tych pierwiastków, ażeby na ich podstawie wytworzyć sobie choć przybliżony obraz ruchu. Pierwiastki  $z_1$  i  $z_2$  wyznaczają położenie dwóch równoleżników na kuli, po-

między którymi punkt ruchomy zakreśla tor; a ponieważ  $\frac{d\Theta}{dt} \cong 0$ , (jeżeli

$M_0 \cong 0$ ), przeto punkt ruchomy na poziomie tych równoleżników posiada prędkości poziomo skierowane, których wartości można obliczyć z rów. 117-tego, po podstawieniu w nie

$$h = h_1 = \sqrt{r^2 - z_1^2}; \text{ oraz } h = h_2 = \sqrt{r^2 - z_2^2}.$$

Ruch punktu danego możemy przeto unaooczyć sobie np. w ten sposób. Punkt, otrzymawszy pewną prędkość początkową, opuszcza się po powierzchni kuli i, dosięgnawszy równoleżnika na poziomie  $z_2$ , dot-



Rys. 39.

knie się jego, aby następnie dzięki posiadanej energii (inaczej, wskutek bezwładności) podnieść się do równoleżnika  $z_1$ ; i następnie po zetknięciu się z nim opuścić się znów do równoleżnika  $z_2$  i t. d. Obraz ten nasuwa przypuszczenie, że tor punktu jest symetryczny

względem płaszczyzny biegunowej, przechodzącej przez punkty zetknięcia się toru z ograniczającym go równoleżnikiem (dolnym lub górnym). Ażeby to zbadać, weźmy pod uwagę dwa miejsca na dowolnym równoleżniku, wyznaczonym współrzędną  $z_0$ , w których tor punktu przecina go, i wyobraźmy sobie, że punkt ruchomy, przechodząc przez miejsce  $P'$ , rys. 39-ty, równoleżnika tego, opuszcza się do miejsca  $A$ , leżącego na dolnym równoleżniku  $z_2$ ; a w miejscu  $P$  przecina on podczas podnoszenia się równoleżnik  $z_0$ ; na rys. 39-tym pokazany jest tor punktu, oraz równoleżnik, oznaczony punktami. Położenia miejsc  $P'$  i  $P$ , w których punkt ruchomy, przecina równoleżnik  $z_0$ , określimy kątami biegunowymi  $\Theta'$  i  $\Theta$ , rys. 40-ty; położenie zaś miejsca zetknięcia się toru z równoleżnikiem dolnym określimy kątem  $\Theta_1$ . W równaniu 121-szem, wyrażającym przyrost  $d\Theta$ , brać należy znak  $+$ , gdy przyrost  $dz$  jest dodatni, t. j. gdy punkt ruchomy opuszcza się; należy zaś brać go odjemnym, gdy punkt podnosi się. Przy wyrażeniu przeto kąta  $\Theta_1$  zmienną  $z$  należy wziąć pod uwagę, że funkcja pod znakiem całki zmienia swój znak przy przejściu przez wartość  $\Theta_1$ ; kąt przeto, jaki zatacza płaszczyzna biegunowa, gdy punkt ruchomy przejdzie od  $P'$  do  $A$ , rys. 40-ty, obliczymy z następującego równania

$$\Theta_1 - \Theta' = \int_{Q'}^Q d\Theta = -r \frac{M_0}{m} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{f(z)}} = -[F(z_1) - F(z_0)];$$

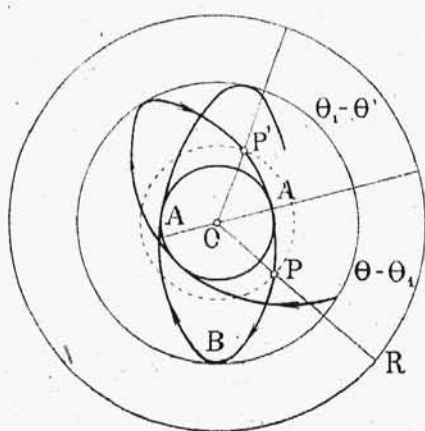
a kąt

$$\Theta - \Theta_1 = \int_Q^{Q_1} d\Theta = r \frac{M_0}{m} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{f(z)}} = [F(z_0) - F(z_1)]$$

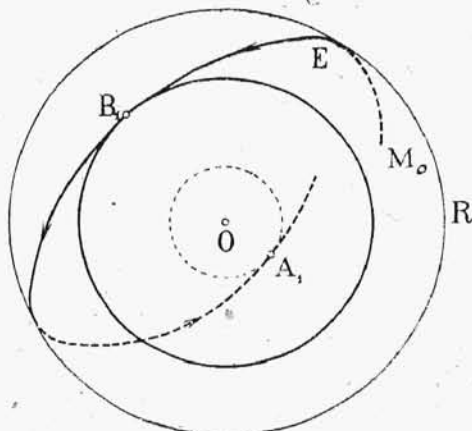
z równań tych wynika, że  $\Theta_1 - \Theta' = \Theta - \Theta_1$ ; co stwierdza nasze przypuszczenie. Płaszczyzna przeto biegunowa, przechodząca przez punkt zetknięcia się toru z równoleżnikiem górnym lub dolnym, jest płaszczyzną symetrii toru.

Jeżeli następnie rzutujemy tor punktu na płaszczyznę poziomą, to otrzymamy krzywą, która leży pomiędzy dwoma kołami o promieniach  $h_1$  i  $h_2$ , dotyka je kolejno w pewnych punktach, i jest symetryczną względem osi, przeprowadzonych z rzutu środka kuli do punktów zetknięć toru z temi kołami.

Zbadajmy obecnie, czy krzywa ta nie jest elipsą, której średnice główne równają się  $2 h_1$  i  $2 h_2$ ; elipsa bowiem taka odpowiadałaby zbadanym dotychczas właściwościom. Przypuszczenie to jednakże jest niemożliwem; pod pierwiastkiem bowiem wzoru 121-go mamy funkcję stopnia trzeciego, której całka nie może być funkcją algebraiczną.



Rys. 40.



Rys. 41.

Zbadajmy jeszcze tor punktu ze względu na ograniczające go równoleżniki. Pierwiastki równania  $f(z) = 0$ , wyznaczają odległość równoleżników, ograniczających tor. W celu zbadania właściwości tych równoleżników zanalizujemy to równanie i uporządkujemy je podług zmiennej  $z$ , a po podstawieniu

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0 = E_0, \quad . . . . . (125)$$

gdzie  $E_0$  wyraża warunki początkowe ruchu, i po sprowadzeniu współczynnika przy  $z^3$  do jedności; otrzymamy równanie

$$z^3 + \frac{E_0}{mg} \cdot z^2 - r^2 \cdot z - \left[ \frac{E_0}{mg} r^2 - \frac{1}{2g} \left( \frac{M_0}{m} \right)^2 \right] = 0, \quad . (126)$$

którego pierwiastki wyznaczają położenie ograniczających ruch równoleżników.

Równanie powyższe da się przedstawić w postaci

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0;$$

a po przemnożeniu czynników — w postaci

$$z^3 - (z_1 + z_2 + z_3) \cdot z^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) \cdot z - z_1 z_2 z_3 = 0. \quad (127)$$

Z porównania współczynnika przy zmiennej  $z$  tego równania z takimże współczynnikiem równ. 126-tego otrzymamy

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = -r^2; \text{ inaczej } z_3(z_1 + z_2) = -(r^2 + z_1 z_2).$$

Ze stosunków geometrycznych wynika, że bezwzględna wartość iloczynu  $z_1 z_2 < r^2$ ; wartość przeto wyrazu  $(r^2 + z_1 z_2) > 0$ , niezależnie czy iloczyn  $z_1 z_2$  jest dodatni czy też ujemny; z czego znów wynika że

$$z_3(z_1 + z_2) < 0.$$

Ponieważ zaś  $z_3$  jest zawsze ujemne, leży bowiem pomiędzy  $-r$  i  $-\infty$ , przeto  $(z_1 + z_2)$  musi posiadać zawsze wartość dodatnią; t. j.

$$z_1 + z_2 > 0.$$

Warunek ten wyraża, że albo obydwa koła, ograniczające tor, leżą na dolnej półkuli, w tym bowiem razie  $z_1$  i  $z_2$  są dodatnie; lub też jedno z nich jest na dolnej, a drugie na górnej półkuli i w ten sposób są położone, że suma ich odległości od środka kuli  $> 0$ ; — z czego wynika, że nie mogą leżeć na półkuli górnej; jak również, że punkt materialny, puszczony na górnej półkuli, zejdzie zawsze na półkulę dolną.

Jeżeli równoleżniki te leżą na różnych półkulach, to odległość dolnego równoleżnika od środka kuli musi być większa od takiejże odległości górnego równoleżnika. Jeżeli zatem punkt ruchomy wskutek nadanego mu ruchu podniesie się na górną półkulę do pewnego poziomu, to opuści się on następnie na dolną półkulę o tyle, że suma odległości ograniczających równoleżników od środka kuli zawsze jest dodatnią. Promień przeto dolnego równoleżnika jest zawsze mniejszy od promienia górnego równoleżnika. Rys. 40-ty i 41-szy przedstawiają rzuty toru na płaszczyznę poziomą. Rys. 40-ty przedstawia ruch punktu po jednej półkuli; rys. zaś 41-szy, gdy ruch ten odbywa się po obydwóch półkulach, a w tym razie  $A_1$  i  $B_1$  są miejscami zetknięć się punktu ruchomego z kołami ograniczającymi; koło zaś  $R$  jest rzutem równika.

W szczególnym przypadku, gdy pierwiastki są wzajemnie równe, t. j. gdy  $z_1 = z_2$ , wtedy punkt ruchomy zakresli koło, które wobec powyższego wniosku może leżeć tylko na półkuli dolnej. Ponieważ w tym przypadku siła ciężenia punktu ruchomego wykonuje pracę równą zero, a siła odporowa powierzchni gładkiej wykonywa zawsze pracę równą zero, przeto punkt dany podczas ruchu nie doznaje zmiany energii kinetycznej, t. j. zakresla on koło ze stałą początkowo nadaną prędkością.

Powróćmy jeszcze do równań 126-tego i 127-mego, a z porównania wyrazów stałych otrzymamy związek

$$\frac{E_0}{mg} r^2 - \frac{1}{2g} \cdot \left( \frac{M_0}{m} \right)^2 = z_1 z_2 z_3;$$

a ponieważ pierwiastek  $z_3$  jest zawsze ujemny, przeto znak wyrazu, znajdującego się po lewej stronie równania, którego wartość można obliczyć z początkowych warunków ruchu, rozstrzyga o tem, czy ruch punktu odbywa się po jednej półkuli, czy też po obydwóch. Jeżeli np.

$$E_0 r^2 - \frac{1}{2} \frac{M_0^2}{m} < 0; \text{ to } z_1 z_2 > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

czyli punkt przebiega po jednej tylko półkuli.

Znajdźmy obecnie znaczenie dynamiczne tych warunków; w tym celu podzielmy wzór 128-my przez  $r^2$  i napiszemy go w postaci

$$E_0 > \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2}{mr^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

W szczególnym przypadku, gdy  $M_0 = 0$ , t. j. gdy ruch odbywa się w płaszczyźnie biegunowej, warunek podniesienia się punktu ponad równik, t. j. ponad średnicę poziomą, wyrazi się wzorem

$$E_0 > 0.$$

Wartość wyrazu  $E_0$  zgodnie z jego określeniem, podanem w równ. 125-tem, wyraża przewyżkę energii kinetycznej  $\frac{1}{2} m v_0^2$ , udzielonej punktowi, ponad wartość pracy  $mgz_0$ , jaką siła ciężenia punktu wykona podczas podniesienia jego do poziomu równika. W tym więc szczególnym przypadku ruch punktu, warunek,  $E_0 > 0$ , podniesienia się punktu ponad równik, lub dojścia do niego, jest wyrazem zasady zachowania energii.

Warunki ruchu po kuli można wyprowadzić również z zasady zachowania energii, gdy zważymy, że ruch punktu w płaszczyźnie biegunowej, (t. j., gdy  $M_0 = 0$ ), i ruch dowolny po powierzchni kuli, różni się tem, że punkt, poruszający się tylko w płaszczyźnie biegunowej, przybywa do równika z prędkością zero; w ogólnym zaś ruchu (gdy  $M_0 \neq 0$ ), punkt ruchomy dochodzi do równika z pewną prędkością poziomo skierowaną; posiada więc on w tem miejscu pewną energię kinetyczną. Punkt zatem ruchomy, ażeby doszedł do równika, powinien mieć wogóle nadane tyle energii ( $\frac{1}{2} m v_0^2$ ), ażeby po wykonaniu pracy podniesienia  $mgz_0$  posiadał w poziomie równika jeszcze energię  $\frac{1}{2} m v_r^2$ ; gdy literą  $v_r$  oznaczymy prędkość na równiku. Obliczmy tę prędkość. Rzut po-



ziomy prędkości punktu w każdym miejscu  $= h \frac{d\Theta}{dt}$ ; na równiku przeto

$$v_r = r \frac{d\Theta}{dt};$$

wyraz  $\frac{d\Theta}{dt}$  obliczymy z równania 117-ego, po podstawieniu w nie  $h = r$ ; zatem

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{M_0}{mr^2};$$

wartość przeto energii punktu na poziomie równika

$$\frac{1}{2} mv_r^2 = \frac{1}{2} m \left( r \frac{M_0}{mr^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2}{mr^2}.$$

Ażeby więc punkt ruchomy doszedł do równika powinna być mu nadana w początku jego ruchu energia kinetyczna

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = mgs_0 + \frac{1}{2} \frac{M_0^2}{mr^2};$$

a jeżeli energia ta jest większą od wskazanej przez to równanie, to ciężar punktu może wykonać jeszcze pracę podniesienia się jej równika. Co też wyraża warunek przedstawiony wzorem 129-em, wyprowadzonym drogą analizy algebraicznej. Rozpatrzmy jeszcze ruch rzutu punktu, poruszającego się po kuli, na płaszczyznę poziomą, z tego bowiem ruchu będziemy również mogli sądzić o ruchu punktu właściwego. W tym celu zrzutujemy na płaszczyznę poziomą punkt ruchomy i siły nań działające, t. j. siłę normalną i siłę jego ciężkości, a zauważymy, że kierunki rzutów siły normalnej zbiegają się w rzucie środka kuli; rzut zaś siły ciężkości równa się zeru. Rzut przeto punktu ruchomego znajduje się tylko pod działaniem siły środkowej, równej rzutowi siły odporowej. Oznaczmy ten rzut literą  $N'$ , a napiszemy

$$N' = N \cdot \sin \sigma; \text{ lub inaczej } N' = N \frac{h}{r};$$

gdzie  $h$  jest promieniem wodzącym rzutu punktu właściwego. Ażeby zatem wyznaczyć ruch rzutu punktu danego, należy wyznaczyć ruch punktu, będącego w polu sił środkowych, określonych równaniem

$$N' = N \frac{h}{r}. \text{ Wyznaczenie tego ruchu nie przedstawia trudności w przy-$$

padku, gdy  $N$  jest stałą wielkością; wtedy bowiem wielkość siły środkowej będzie proporcjonalną do długości promienia wodzącego; tor przeto tego ruchu stosownie do § 16-tego będzie elipsą, lub kołem. Szczególny ten przypadek nastąpi, gdy kąt odchylenia wahadła jest bardzo mały. Przyjawszy np., że kąt odchylenia zbliża się do zera, siła  $N'$

zblizać się będzie do wartości stałej; a rzut punktu właściwego zakresli na płaszczyźnie poziomej, zgodnie z § 16-tym, krzywą zbliżoną do elipsy, której środek znajduje się w środku przyciągania; a jedna z osi sprzężonych posiada kierunek rzutu promienia wodzącego w początkowym położeniu punktu właściwego; druga zaś — kierunek rzutu prędkości początkowej. Dla małych zatem odchyśleń wahadła, tor właściwy, jaki zakresla punkt na kuli, otrzymamy, jako przecięcie się walca prostego o podstawie eliptycznej z powierzchnią kuli. Prędkości rzutu punktu właściwego po elipsie są rzutami prędkości punktu właściwego; z rzutów tych można zatem wyznaczyć wektory prędkości właściwych. Inny przypadek, w którym  $N = \text{stałej}$ , następuje, gdy  $z = \text{stałej}$ , tor jest w tym razie kołowym. W przypadkach ogólnych możemy również sądzić, chociaż w przybliżeniu, o postaci toru, gdy zamiast wyrazu ścisłego

$$N = mg (3 \cos \sigma - 2 \cos \sigma_0) + \frac{mv_0^2}{r},$$

zastosujemy przybliżoną jego wartość, którą otrzymamy po podstawieniu

$$\cos \sigma = \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2} \cong 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r}\right)^2; \text{ a zatem}$$

$$N \cong mg \left[ 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \right] + \left( \frac{mv_0^2}{r} - 2 mg \cos \sigma_0 \right); \text{ skąd}$$

$$N \cong C - \frac{3}{2} mg \left(\frac{h}{r}\right)^2; \text{ gdzie}$$

$$C = 3 mg + \frac{mv_0^2}{r} - 2 mg \cos \sigma_0;$$

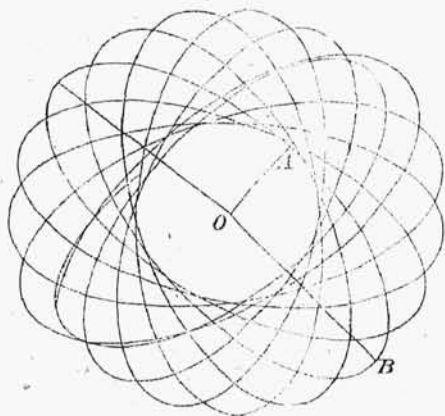
i jest wielkością niezmienną dla danego zadania; po podstawieniu tych wzorów

$$N' \cong N \frac{h}{r} = C \cdot \frac{h}{r} - \frac{3}{2} mg \cdot \left(\frac{h}{r}\right)^3 \quad \dots \quad (130)$$

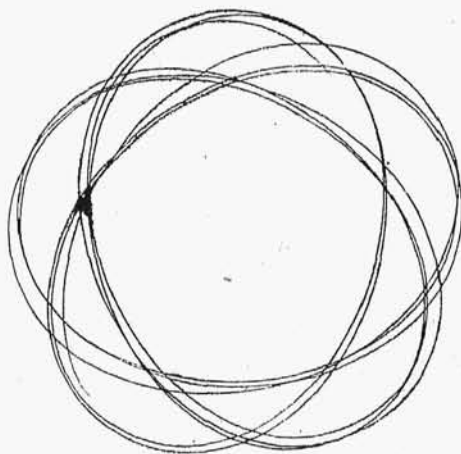
Z tego wzoru wynika, że siłę środkową  $N'$  można uważać z pewnem przybliżeniem, za złożoną z dwóch sił: z siły przyciągającej proporcjonalnie do odległości od środka i z siły odpychającej proporcjonalnie do trzeciej potęgi tejże odległości. Łatwo odczytać z tego równania, że jeżeli wartość  $\left(\frac{h}{r}\right)$  maleje, to wartość  $\left(\frac{h}{r}\right)^3$  jeszcze prędzej

maleje tak, iż wpływ siły odpychającej na ruch punktu staje się coraz mniejszy, a tor zbliża się do elipsy, cośmy już wyżej przewidzieli. Ze wzrostem wartości  $h$  wpływ siły odpychającej wzrasta i ruch należy już uważać za złożony, z ruchu po elipsie i z ruchu powstałego z siły odpychającej; ruch taki wyobrazić sobie można jako ruch po elipsie,

gdy jednocześnie elipsa jest w ruchu. Rys. 42-gi i 43-ci są rzutami toru punktu wahadła kulistego na płaszczyznę poziomą, a powstanie tego toru można sobie wyobrazić w ten sposób, że punkt ruchomy, (t. j. rzut punktu właściwego), zakreśla elipsę, która obraca się około swego środka.



Rys. 42.



Rys. 43.

Szczegółowsze badania tego ruchu wykazują, że punkt styka się z tem samem kołem, ograniczającym jego ruch w różnych odstępach. Jeżeli zatem stosunek wielkości takiego odstepu do obwodu tegoż koła jest wymierny, to punkt po przejściu pewnej ilości razy około środka, powróci do miejsca wyjścia; gdy zaś stosunek ten jest niewymierny, wtedy punkt ruchomy nigdy nie wróci do swego pierwotnego położenia; a tor będzie w tym razie krzywą niezamkniętą, która po upływie nieskończonego długiego czasu, wypełni swemi punktami całe pole pomiędzy kołami, ograniczającemi tor. Rys. 39-ty przedstawia tor punktu ruchomego w widoku. Rysunki zaś 42-gi i 43-ci są odbitkami zdjęć fotograficznych ruchu, odbywającego się w rzeczywistości <sup>1)</sup>.

**58. Właściwości ruchu wahadła kulistego, zbliżonego do wahadła stożkowego.** Znajomość ruchu wahadła kulistego potrzebną nam jest przy badaniu ruchu regulatorów; rozpatrzmy przeto jeszcze pewne jego właściwości. Rozpatrywania, które mamy teraz przedsięwziąć różnią się pod względem teoretycznym od poprzednich tem, że obecnie za podstawę weźmiemy szczególny ruch po kole w płaszczyźnie poziomej,

<sup>1)</sup> Rys. 40, 43 i 44 są wzięte z dzieła „The Dynamics, by Arthur Gordon Webster. 1912”.