A. Zastosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu prostolinijnego.

4. Warunki powstawania ruchu prostolinijnego. Szczególnym przypadkiem ruchu punktu jest ruch prostolinijny. Ruch ten powstaje wtedy, gdy przyśpieszenie punktu ruchomego posiada kierunek niezmienny i gdy kierunek początkowej jego prędkości, o ile on ją posiada, pokrywa się z kierunkiem przyśpieszenia; inaczej mówiąc, ruch prostolinijny powstaje, gdy siła, wywołująca go, posiada stały kierunek, pokrywający się z kierunkiem początkowej prędkości; wartość przytem siły może się zmieniać.

5. Ruch punktu pod działaniem siły stałej. Rozpatrzmy ruch punktu materyalnego, na który działa siła stała $\overline{P}$ i którego prędkość początkowa posiada kierunek, pokrywający się z kierunkiem siły. Równanie dynamiczne ruchu tego napiszemy w postaci algebraicznej ze względu na to, że wektory tego równania leżą na jednej prostej, wszelkie zatem działania matematyczne z temi wielkościami podlegają odnośnym prawidłom algebry zwykłej; napiszemy zetem równanie to w postaci

$$P = m\frac{d^2x}{dt^2}; \qquad \text{lub inaczej} \qquad P = m\frac{dv}{dt} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

W równaniach tych x oznacza drogę punktu ruchu,—a v jego prędkość.

Ponieważ przyjęliśmy w tym przykładzie, że siła przyśpieszająca P jest stałą wielkością, przeto równanie to można bezpośrednio scałkować i otrzymamy

$$Pt = mv + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Stałą C obliczymy, przyjąwszy początkowe warunki ruchu, np. dla

$$t = 0; \quad x = 0; \quad v = v_0;$$

a po podstawienie tych wartości, otrzymamy $C = - mv_0$; a zatem

$$Pt = mv - mv_0;$$

skąd

$$v = v_0 + \frac{P}{m}t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Jest to równanie, wykazujące związek pomiędzy czasem i prędkością danego punktu. Ażeby zaś znaleźć związek pomiędzy czasem i drogą, podstawimy w równ. 9-te

$$v = \frac{dx}{dt}$$

i otrzymamy po scałkowaniu

$$\tfrac{1}{2}Pt^2 = mx - mv_0t + C'.$$

Przyjmiemy warunki początkowego ruchu $x = 0$, $t = 0$; otrzymamy $C' = 0$; a więc

$$x = v_0t + \tfrac{1}{2}\frac{P}{m}\,.\,t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Jest to równanie ruchu punktu materyalnego, będącego pod działaniem siły stałej, wyrażające związek pomiędzy spółrzędną x i czasem.

Jeżeli zechcemy znaleźć związek pomiędzy drogą i prędkością, to możemy z równ. 9-go obliczyć czas t, a po podstawieniu jego wartości w równanie 10-te otrzymamy szukany związek

$$x = v_0\frac{mv - mv_0}{P} + \tfrac{1}{2}\frac{P}{m}\left(\frac{mv - mv_0}{P}\right)^2,$$

a po uproszczeniu

$$x = \tfrac{1}{2}\,m\frac{v^2 - v_0^2}{P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Równanie to możemy otrzymać bezpośrednio z równania dynamicznego siły, z równ. 7-mego; podstawiając w nie

$$dt = \frac{dx}{v};$$

a wtedy

$$P = mdv\frac{v}{dx}; \quad \text{lub inaczej} \quad P\,.\,dx = d\,(\tfrac{1}{2}mv^2);$$

a po scałkowaniu pomiędzy granicami dla x od zera do x, oraz dla prędkości od v_0 do v, otrzymamy równanie szukane, t. j. równanie 11-te.

Rachunek powyższy ma na celu przedstawienie na najprostszym przykładzie sposobu stosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu. Z rachunku tego widzimy, że równanie dynamiczne siły daje związek, w postaci równania różniczkowego, pomiędzy trzema wielkościami: siłą, przyśpieszeniem i czasem; jeżeli jedna z tych wielkości jest znana, np. w powyższym przykładzie siła P, to obliczyć można równanie ruchu w postaci skończonej, które wyraża związek pomiędzy dwiema pozostałemi wielkościami; w przykładzie powyższym jest nim równ. 9-te, wykazujące związek pomiędzy v i t. Związek pomiędzy x i v lub pomiędzy x i t, obliczymy, stosując do tego równanie kinematyczne $v = \dfrac{dx}{dt}$, z którego obliczymy dt i podstawimy w równanie, wykazujące związek pomiędzy prędkością i czasem, lub w równanie dynamiczne, a po odpowiedniem scałkowaniu, znajdziemy szukane związki. Wybór jednakże zmiennych, pomiędzy któremi chcemy znaleźć związki, zależy w wielu przypadkach od możności wyrażenia całek danych wzorów funkcyami znanemi; zdarzają się bowiem wzory, których całki nie dają się wyrazić temi funkcyami.

W szczególnym przypadku powyższego przykładu, gdy siłą przyśpieszającą jest przyciąganie kuli ziemskiej, które w pewnych niewielkich przestrzeniach można uważać za stałe, wtedy siłę tę, zwaną ciężarem danego punktu materyalnego, wyrazić można równaniem

$$P = mg;$$

w którem g jest przyśpieszeniem w danem miejscu kuli ziemskiej; po podstawieniu tej wartości w równ. 9-te, 10-te i 11-te; otrzymamy równanie ruchu punktu materyalnego, spadającego w próżni pod działaniem siły ciążenia; równania te są następujące

$$1)\quad v = v_0 + gt;$$

$$2)\quad x = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2; \qquad \text{oraz}$$

$$x = \frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Pierwsze z tych równań wyraża związek w skończonej postaci, pomiędzy prędkością i czasem; — drugie pomiędzy drogą i czasem; — a trzecie pomiędzy drogą i prędkością.

6. Spadanie pionowe bryły materyalnej z uwzględnieniem oporu powietrza. Na bryłę spadającą działają w danym przypadku dwie siły: siła ciążenia bryły, działająca z góry na dół, i siła parcia powietrza, jaka powstaje podczas ruchu bryły. Przyjmujemy w tem zadaniu, że ciężar bryły jest nam dany, i że parcie powietrza na poruszającą się bryłę, na podstawie doświadczeń, jest proporcyonalne do wielkości pola F, utworzonego przez rzut bryły na płaszczyznę prostopadłą do kierunku jej ruchu; oraz proporcyonalne do prędkości w drugiej potędze. Siłę zatem parcia, którą oznaczymy literą A, wyrazimy wzorem

$$A = kFv^2;$$

i nadamy jej zwrot przeciwny zwrotowi prędkości bryły

We wzorze tym k jest spółczynnikiem empirycznym, otrzymanym z doświadczeń; F oznacza wielkość pola rzutu bryły na płaszczyznę, prostopadłą do kierunku ruchu, wyrażoną w m^2; $v m$/sek. oznacza prędkość uderzającego powietrza w bryłę; wartość tej prędkości przyjmiemy w danem zadaniu równą wartości prędkości spadającej bryły. Wzór ten, jako empiryczny, stosowany być może tylko do przypadków, które są zbliżone do przypadków objętych danemi doświadczeniami.

Oznaczywszy ciężar spadającej bryły przez Q *kg*, wyrazimy siłę, działającą na nią, wzorem $(Q - kFv^2)$; siła ta wywołuje przyśpieszenie $\frac{dv}{dt}$; a więc napiszemy równanie dynamiczne

$$(Q - kFv^2) = m\frac{dv}{dt}, \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

w którem

$$m = \frac{Q}{g}.$$

Równanie to jest równaniem różniczkowem ruchu, które należy scałkować, ażeby otrzymać równanie ruchu w skończonej postaci; jakieśmy to czynili w przykładzie poprzednim. W celu scałkowania oddzielmy zmienne, a otrzymamy

$$dt = m\frac{dv}{Q - kFv^2}.$$

Przyjąwszy początkowe warunki ruchu

$$x = 0; \quad t = 0; \quad v = 0;$$

po scałkowaniu tego równania podług wzoru 16-go, zamieszczonego w „Techniku" t. I str. 75, otrzymamy

$$t = m\frac{1}{2\sqrt{QkF}} \operatorname{lgn} \frac{\sqrt{QkF} + kFv}{\sqrt{QkF} - kFv}. \quad \ldots \ldots (14)$$

Równanie to pozwala obliczyć czas, po którego upływie, spadająca bryła posiada daną prędkość v. W celu zaś obliczenia prędkości, jaką bryła posiada po upływie danego czasu, rozwiążemy to równanie względem v; a skróciwszy przedtem ułamek przez wartość $\sqrt{kF}$, otrzymamy

$$e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} = \frac{\sqrt{Q} + v\sqrt{kF}}{\sqrt{Q} - v\sqrt{kF}};$$

skąd

$$e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} \cdot (\sqrt{Q} - v\sqrt{kF}) = (\sqrt{Q} + v\sqrt{kF});$$

i wreszcie

$$v = \sqrt{\frac{Q}{kF}} \cdot \frac{e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} - 1}{e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} + 1}. \quad \ldots \ldots \ldots (15)$$

Sprawdzimy przedewszystkiem wymiary tego wzoru, i w tym celu obliczymy najpierw wymiar spółczynnika k. Wymiar ten otrzymamy ze wzoru

$P = kFv^2$, gdy podstawimy w niego wymiary siły, pola i prędkości; a zatem po podstawieniu mamy

$$MLT^{-2} = kL^2 (LT^{-1})^2; \qquad \text{skąd} \qquad k = ML^{-3}.$$

Po podstawieniu następnie wymiarów wielkości wyrazu $\sqrt{\frac{Q}{kF}}$, otrzymamy jego wymiar

$$\sqrt{\frac{Q}{kF}} = (MLT^{-2} \, . \, M^{-1} L^3 L^{-2})^{1/2} = (L^2T^{-2})^{1/2} = LT^{-1};$$

jest to wymiar prędkości; a ponieważ i po lewej stronie jest prędkość, przeto ułamek w wykładniku powinien mieć wymiar zero Sprawdźmy jego wymiar, t. j. wymiar wyrazu $t . \frac{2\sqrt{QkF}}{m}$; wymiar ten jest następujący

$$TM^{-1} (MLT^{-2} \, ML^{-3} \, L^2)^{1/2} = T^0M^0L^0 = \text{wymiar } 0.$$

A więc obydwie strony równania 15-go posiadają wymiar prędkości LT^{-1}. Wzór 15-ty można jeszcze sprawdzić, zakładając $k = 0$; lub $F = 0$; a wtedy powinniśmy otrzymać równanie ruchu jednostajnie przyśpieszonego $v = gt$.

W celu unaocznienia zależności v od t obliczymy następujący przykład liczbowy i zestawimy wartość v dla różnych wartości t. Do obliczenia przyjmiemy $F = 1\ m^2$; $Q = mg = 24\ kg$, oraz $k = 0{,}12$[1]). Z tych danych obliczymy $m = \frac{24}{9{,}81} = 2{,}45$, a po podstawieniu tych wartości w równanie 15-te, otrzymamy

$$v = 13{,}9 \; \frac{e^{1,4t} - 1}{e^{1,4t} + 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Na podstawie tego wzoru obliczyliśmy wartości v dla różnych t i zestawiliśmy je w następującej tablicy, w której podaliśmy również wartości v_b ze wzoru $v = gt$ dla przypadku, w którym nie uwzględniamy oporu powietrza.

t sek.	0	0,1	1	2	3	4	5	. . . .	∞
v m/sek. . . .	0	0,97	8,5	12,4	13,5	13,9	13,9	. . . .	13,9
v_b bez oporu .	0	0,98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	. . . .	∞

[1]) G. Eiffel, w pracy „Recherches expérimentales sur la resistance de l'air“ 1907 — podaje różne spółczynniki oporu dla różnych powierzchni.

Ażeby określić związek pomiędzy drogą i czasem, podstawimy w równ. 15-te, $v=\frac{dx}{dt}$; gdzie x oznacza odległość punktu od miejsca wyjścia, i otrzymujemy z niego, po przemnożeniu licznika i mianownika przez wartość $e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}$, równanie następujące

$$dx=\sqrt{\frac{Q}{kF}}\,\frac{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}-e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}+e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}\,dt;$$

$$dx=\sqrt{\frac{Q}{kF}}\,\frac{\frac{m}{\sqrt{QkF}}\,d\left(e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}+e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right)}{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}+e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}.$$

Równanie to możemy bezpośrednio scałkować i otrzymamy

$$x=\frac{m}{kF}\lg n\left(e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}+e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right)+K.$$

Wartość K obliczymy z warunków, że dla $x=0$, $t=0$; a po podstawie tych wartości, otrzymamy

$$x=\frac{m}{kF}\lg n\,\frac{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}+e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}{2}$$

Ze wzoru tego obliczyć można długości drogi, jaką zakreśli punkt materyalny w różnych okresach czasu. Zestawienie wartości drogi i czasu dla tego przykładu podajemy w nast. tablicy, w której dopisaliśmy szereg wartości x_b, obliczonych ze wzoru $x_b=\frac{1}{2}gt^2$; i przedstawiających drogę, którą przebyłby punkt bez oporu powietrza:

t sek. . .	0	1	2	3	4	5
x m. . . .	0	4,5	15,0	27,5	41,3	55,1
x_b m. . . .	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,6

Tablica ta poucza, że ze wzrostem czasu, przyrosty drogi stają się prawie równe; np. pomiędzy sekundą 2-gą i 3-cią przybyło drogi 12,5 *m*, pomiędzy 3-cią i 4-tą przybyło 13,8 *m*, pomiędzy 4-tą i 5-tą przybyło również 13,8 *m*; czyli z powiększeniem czasu ruch punktu zbliża się do ruchu jednostajnego; a prędkość jego zbliża się do wartości 13,9 *m*; wykazanej w poprzedniej już tablicy.

We wzorze drogi wartość wyrazu $e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}$, z powiększaniem się t, nadzwyczaj prędko maleje tak, iż przy znacznych wartościach czasu możemy ten wyraz odrzucić; a wtedy otrzymamy wzór przybliżony dla, dużych wartości t

$$x = \frac{m}{kF} \operatorname{lgn} \left(\tfrac{1}{2} e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right);$$

lub inaczej

$$x = \frac{m}{kF} \left(t \frac{\sqrt{QkF}}{m} - \operatorname{lgn} 2\right);$$

odrzucając jeszcze lgn 2 jako wartość małą, w porównaniu z wartością wyrazu, zawierającego czas, otrzymamy po skróceniu wzór przybliżony

$$x = \sqrt{\frac{Q}{kF}} \cdot t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Dla ruchu jednostajnego mamy wogóle wzór drogi $x = ct$; wyraz zatem $\sqrt{\frac{Q}{kF}}$ wyraża prędkość stałą, do której zbliża się z biegiem czasu prędkość punktu spadającego. Jest to ta sama wartość, którą otrzymamy, gdy w równ. 15-em lub 16-em odrzucimy jednostki, znajdujące się w liczniku i mianowniku, jako wartości bardzo małe w stosunku do wartości wyrazu poprzedzającego.

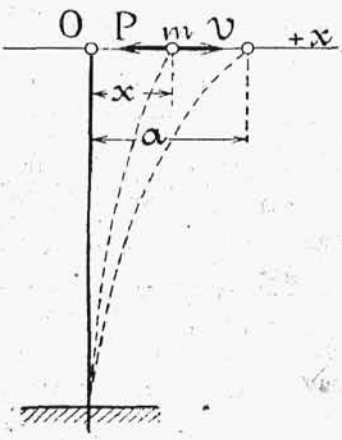
Przykład powyższy poucza, że ruch punktu materyalnego, poruszającego się pod działaniem siły ciągnienia w środowisku, sprawiającem opór, proporcyonalny do kwadratu prędkości, charakteryzuje się tem, że po upływie pewnego czasu, (jak w przykładzie powyższym po upływie 4-ch sekund), prędkość staje się, praktycznie biorąc, prawie niezmienną, t. j. ruch staje się prawie jednostajny [1].

Wynik ten wytłómaczymy sobie fizycznie, gdy zwrócimy uwagę na stosunek siły ciążenia do siły oporu. Siła ciążenia w danym przykładzie jest stałą, siła zaś oporu wzrasta ze wzrastającą prędkością; z biegiem zatem czasu siła oporu dąży do zrównania się z siłą ciążenia; wskutek czego ruch punktu spadającego zbliża się do ruchu jednostajnego. Rozpatrując z teoretycznego stanowiska ten przebieg, zrównanie się tych sił następuje asymptotycznie do czasu; lecz biorąc go z praktycznego stanowiska, zrównanie się tych sił może nastąpić dosyć szybko; różnice ich bowiem po upływie krótkiego czasu stają się niedostrzegalne. Z tej właściwości danego ruchu korzystamy w przypadkach, w których działa na daną bryłę siła przyśpiesza-

[1] Doświadczenia, wykonane przez G. Eiffel'a, potwierdzają z całą ścisłością te teoretyczne wyniki.

jąca, a chcemy otrzymać ruch tej bryły jednostajny; lub ściślej mówiąc prawie jednostajny. Gdy np. na powierzchnię wała, prostopadle do jego osi, działa siła Q, wtedy, jak łatwo to fizycznie pojąć, wał dozna obrotu jednostajnie przyśpieszonego; chcąc jednakże otrzymać ruch jednostajny przytwierdzamy do wała łopatki z płaszczyznami prostopadłemi do kierunku ruchu, a podczas obrotu wała łopatki te wywołują opór, którego wynikiem jest ruch jednostajny przyrządu. Przyrząd, w ten sposób zbudowany, bywa stosowany jako regulator (miarkownik) w małych mechanizmach, poruszanych siłami stałemi; bywa również stosowany do regulowania ruchu silników [2]).

7. **Ruch drgający.** Punkt materyalny o masie m poddany jest działaniu siły, przyciągającej do pewnego środka; obliczyć równanie ruchu. Jeżeli punkt dany umieścimy w środku przyciągania, nie nadając mu prędkości, to pozostanie on w spoczynku; lecz gdy umieścimy go zewnątrz tego środka i puścimy np. swobodnie, wtedy siła przyciągania nada mu pewien ruch w kierunku tego środka. Punkt dany nie zatrzyma się jednakże w środku przyciągania, lecz, zgodnie z prawem bezwładności, wskutek nabytej prędkości, przeleci przez środek przyciągania, i przesunąłby się do nieskończoności z tą prędkością, gdyby siła przyciągania nie wstrzymywała go w tym ruchu; a wreszcie nie zawróciła go znowuż do tego środka. Punkt zatem materyalny, wyprowadzony w tych warunkach z położenia równowagi, będzie się wahał około środka przyciągania. Ruch taki nazywamy wogóle ruchem wahadłowym, lub ruchem drgającym. Szczegółowe właściwości tego ruchu zależą od zmienności siły przyciągania; a zmienność ta może być rozmaita.



Rys. 4.

Przyjmijmy w danym przykładzie, że siła przyciągająca jest **proporcyonalną do odległości** punktu od środka przyciągania; jeżeli odległość tę oznaczymy przez x, to siłę przyciągającą P wyrazimy wzorem

$$P = -kx,$$

w którym k oznacza spółczynnik proporcyonalności działania siły; znak zaś odjemny wskazuje, że siła P posiada zwrot przeciwny zwrotowi dodatniemu osi x. Ruch w ten sposób określony nazwano ze względu na znaczenie jakie posiada w akustyce, ruchem **harmonicznym.**

Ruch ten unaocznić sobie możemy zapomocą następującego modelu fizycznego. Umocujmy pionowo jeden koniec pręta sprężystego,

[2]) Ztft. d. V. d. Ing. 1892, str. 184.

a do drugiego przyczepmy bryłę materyalną o masie m; odchylmy następnie pręt od położenia pionowego i puśćmy go, a otrzymamy wahania się przyczepionej bryły; rys. 4-ty. W razie gdy pręt jest zupełnie sprężysty, siła sprężystości pręta jest, jak doświadczenia uczą, proporcyonalna do wielkości odchylenia; zatem odpowiada ona sile, przyjętej w danym przykładzie. Model ten jednakże jest niezupełnie zgodny z postawionem zadaniem; w przytoczonem bowiem zadaniu punkt przebiega po prostej linii; koniec zaś pręta zakreśla pewien łuk. Gdy jednakże przyjmiemy, że pręt jest dosyć długi, a odchylenie jego od położenia równowagi jest niewielkie, wtedy łuk, jaki zakreśla przyczepiona bryła, przyjąć można za jego cięciwę; a z tem zastrzeżeniem opisany model odpowiada warunkom, postawionym w danem zadaniu i może służyć do jego unaocznienia.

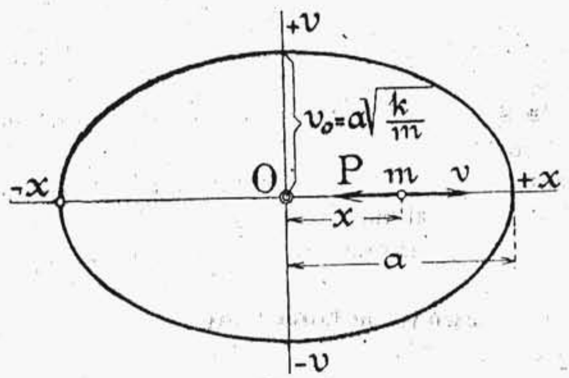
W celu zestawienia równania dynamicznego ruchu danego punktu podstawmy w ogólny wzór równania dynamicznego $P = m \dfrac{dv}{dt}$, wartość siły $P = -kx$, a otrzymamy równanie

$$-kx = m \frac{dv}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Pomiędzy zmiennemi tego równania zachodzi związek, wynikający z określenia prędkości $v = \dfrac{dx}{dt}$.

Z tych dwóch równań możemy jedną zmienną wyrugować, a otrzymamy jedno równanie, wyrażające związek pomiędzy dwiema zmiennemi. Równań takich napisać możemy wogóle trzy (x, v), (x, t), oraz (v, t). Zwrócić jednakże należy uwagę, że te trzy równania są zależne od siebie.

W celu znalezienia związku, pomiędzy x i v, podstawimy w powyższe równanie dynamiczne $dt = \dfrac{dx}{v}$, a otrzymamy, po scałkowaniu, równanie, wykazujące szukany związek. Równanie to jest następujące



Rys. 5.

$$-\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + C.$$

Stałą C obliczymy, przyjąwszy np. dla wartości $x = a$, $v = 0$;

t. j. przyjąwszy, że punkt ruchomy, po odchyleniu go na odległość a od środka przyciągania, puścimy swobodnie bez prędkości. Po podstawieniu tych wartości w równanie powyższe otrzymamy

$$-\frac{ka^2}{2} = C;$$

a następnie

$$-\frac{kx^2}{2} = m\frac{v^2}{2} - \frac{ka^2}{2};$$

skąd wreszcie

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(a^2-x^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Z równania tego obliczyć można prędkości punktu ruchomego w każdem miejscu x toru; znak dodatni należy brać w tym przypadku, gdy spółrzędna x rośnie podczas ruchu punktu; gdy zaś ona maleje, należy brać znak odjemny.

Wykres (x, v) tego ruchu przedstawiony jest na rys. 5-tym. Z równania 19-ego wynika, że dla ruchu rzeczywistego powinno być $x < a$, i że największe oddalenie punktu ruchomego od O jest $x = a$; poza tą bowiem wartością dla x, v otrzymuje wartości urojone. Odległość tę nazwano największem odchyleniem, inaczej amplitudą. W miejscu, dla którego $x = a$, jest, zgodnie z założeniem, $v = 0$; czyniąc następnie $x < a$, v powiększa się, i dla $x = 0$

$$v = v_{\text{maxim}} = \pm a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Największą zatem prędkość posiada punkt podczas przejścia przez środek przyciągania; oznaczywszy tę prędkość przez v_m, napiszemy

$$v_m = \pm a\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Gdy daną jest prędkość v_m, wtedy największe odchylenie

$$a = \pm v_m\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Jeżeli uczynimy $x < 0$, to wartości v będą się powtarzały, albowiem $(\pm x)^2$ zawsze daje tę samą wartość.

Postać wykresu (x, v) unaocznimy sobie dokładniej, gdy równanie 19-te przekształcimy na następujące

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{\left(a\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} = 1,$$

które jest równaniem elipsy; wykres więc (x, v) danego ruchu jest elipsą.

W celu znalezienia związku pomiędzy czasem i drogą podstawimy w równanie dynamiczne, w równ. 18-te, $v = \frac{dx}{dt}$; i otrzymamy

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu.

Pierwszą jego całkę otrzymamy, po podstawieniu w nie $\frac{dx}{dt} = v$, oraz $dt = \frac{dx}{v}$. Pierwszą jego całką jest równanie ze zmiennemi x i v; a ponieważ równanie to już eśmy obliczyli, przeto w równ. 19-te podstawimy bezpośrednio $v = \frac{dx}{dt}$ i otrzymamy szukany związek, lecz w postaci różniczkowej

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}.$$

W celu przekształcenia go na postać skończoną, oddzielimy zmienne i napiszemy

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}};$$

a po scałkowaniu mamy

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right) + C_1;$$

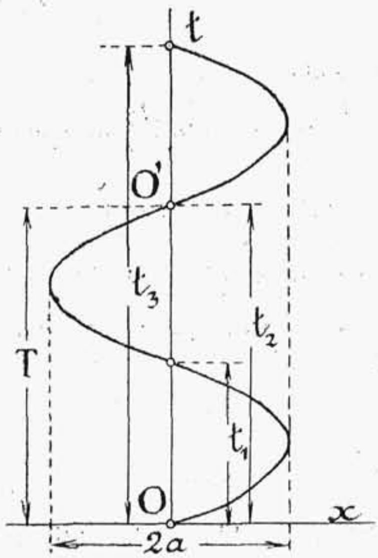
stałą C_1 obliczymy, przyjąwszy dla $x = 0$; $t = 0$; t. j. przyjąwszy, że czas zaczynamy liczyć od chwili, w której punkt ruchomy przechodzi przez środek O; a podstawiwszy te wartości, otrzymamy $C_1 = 0$; a następnie

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\ \text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right); \qquad \text{lub}$$

$$t\sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right); \qquad \text{skąd}$$

$$x = a \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Równianie to jest zatem całką równania różniczkowego drugiego rzędu, przedstawionego pod Nr. 22-gim. Wykres (x, t) danego ruchu przedstawiliśmy na rys. 6-tym.



Rys. 6.

Znajdźmy jeszcze związek pomiędzy prędkością i czasem, i w tym celu różniczkując równ. 23-cie względem czasu t, otrzymamy

$$v = \pm a\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right). \quad (24)$$

Równanie to pozwala obliczyć prędkość punktu w każdej chwili t.

Z równ. 23-go wynika, że dla $x = 0$;

$$\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) = 0; \quad \text{skąd}$$

$$t = n\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

gdzie n może być dowolną całą cyfrą: 0, 1, 2, 3,...; a więc punkt ruchomy przechodzi przez miejsce, $x = 0$, w równych odstępach czasu. Prędkości, z jaką on przechodzi to miejsce, obliczymy w równ. 24-go, po podstawieniu w nie odpowiednich wartości czasu, a zatem prędkości te w czasie

$$t_0 = 0; \qquad t_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad t_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad t_3 = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

są następujące

$$v_0 = a\sqrt{\frac{k}{m}}; \; v_1 = -a\sqrt{\frac{k}{m}}; \; v_2 = a\sqrt{\frac{k}{m}}; \; v_3 = -a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Z zestawienia tych wartości widzimy, że punkt ruchomy przechodzi przez środek przyciągania z prędkościami o jednakowych bezwzględnych wartościach, lecz o zwrotach różnych, co fizycznie wytłómaczymy sobie w ten sposób, że gdy punkt przechodzi w danej chwili z dodatnią prędkością, to następnie przejść on musi to samo miejsce z odjemną prędkością.

Dla czasu t_2, dla którego $n=2$, punkt ruchomy zaczyna na nowo ruch z prędkością, jaką posiadał w czasie $t=0$. Okres czasu, po upływie którego punkt ruchomy, po wyjściu z pewnego miejsca toru, powróci do niego **z tą samą prędkością**, nazwano okresem **podwójnego wahnięcia**.

Okres ten oznaczymy literą T; i obliczymy go dla danego przykładu z następującego równania

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

ze wzoru tego wynika, że okres T nie zależy od wielkości odchylenia a, t. j. nie zależy od amplitudy.

Jeżeli ruch dany unaocznimy sobie za pomocą ruchu punktu materyalnego, umieszczonego na końcu pręta sprężystego, którego drugi koniec jest sztywno umocowany, jakieśmy to już wyżej mówili, to równ. 25-te wyraża, że okres podwójnego wahnięcia nie zależy od wielkości początkowego odchylenia pręta, a zależy tylko od wielkości masy i od wielkości spółczynnika sprężystości. Wziąwszy następnie pod uwagę związek pomiędzy a i v_m, wyrażony równaniem 21-szem, wypowiemy ten wniosek: okres podwójnego wahnięcia nie zależy od prędkości jaką nadamy punktowi w środku przyciągania.

Wzór 25-ty wytłómaczymy sobie fizycznie w następujący sposób Z powiększeniem masy poruszającej się, okres wahnięcia powinien się powiększać; większa bowiem masa pod działaniem takiejże samej siły porusza się wolniej, niż masa mniejsza; okres zatem wahnięcia tej samej sprężyny rośnie z powiększeniem masy ruchomej. Ze zwiększeniem natomiast siły przyśpieszającej, której wielkość dla tych samych odległości punktu wyraża spółczynnik k, okres wahnięć się zmniejsza; dany bowiem punkt prędzej przebiega po torze. Z tego wynika, że okres podwójnego wahnięcia powiększa się z powiększeniem się masy, poruszającego się punktu, i zmniejsza się z powiększeniem spółczynnika k, co jest zgodne z powyższym wzorem. Jeżelibyśmy przyjęli w myśl tych rozumowań, że okres T jest wprost proporcyonalny do masy i odwrotnie proporcyonalny do spółczynnika k, to wymiar wzoru takiego nie przedstawiałby wymiaru czasu; wymiar bowiem wielkości k, (który otrzymamy z określenia kx=sile, t. j. $kL = MLT^{-2}$), jest MT^{-2}, wyraz zatem $\frac{m}{k}$ ma wymiar T^2. Ażeby zaś otrzymać wymiar czasu, należy wziąć pierwiastek drugi z wyrazu $\frac{m}{k}$; a w ten sposób dojdziemy do powyższego wzoru; liczbę zaś π można uważać jako cechę okresowości danego ruchu.

Ruch okresowy punktu materyalnego, którego okresy nie zależą od odchyleń nazwano ruchem **izochronicznym**. Izochronizm w powyższym przykładzie wytłómaczymy sobie fizycznie w ten sposób, iż z powiększeniem odchylenia pręta, t. j. amplitudy, wywołujemy jednocześnie większą siłę przyciągającą punkt materyalny do położenia równowagi;

wskutek czego punkt dany otrzymuje większe przyśpieszenie tak, iż w tych samych okresach czasu przejść on **może** drogi o różnych długościach. W powyższych rozpatrywaniach ruch dany wyraziliśmy wielkością odchylenia i stosunkiem $\frac{k}{m}$; możemy jednakże wyrazić go innemi wielkościami, np. wielkością a i T; w tym celu należy z równ. 25-go podstawić w równ. 23-cie wartość

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\frac{1}{T};$$

a otrzymamy

$$x = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right).$$

Równanie w tej postaci bywa często stosowane do badań fizycznych, gdyż wyraża ono ruch wielkościami a i T, które można bezpośrednio wymierzyć z danego zjawiska.

Jeżeli następnie zechcemy wyrazić równanie ruchu prędkością punktu w chwili, gdy znajduje się on w środku przyciągania, i stosunkiem $\frac{k}{m}$, to podstawimy w równanie powyższe $a = v_m\sqrt{\frac{m}{k}}$; i otrzymamy równanie

$$x = v_m\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

w którem v_m oznacza prędkość punktu w chwili przejścia przez środek przyciągania

Ze wzoru 25-go skorzystać możemy w celu obliczenia stosunku mas różnych brył. W tym celu umieszczać będziemy kolejno na końcu jednego i tego samego pręta sprężystego, umocowanego pionowo, różne bryły, których masy mamy obliczyć, a wyznaczywszy doświadczalnie okresy wahnięć każdej z brył, co nietrudno jest wykonać, ze względu na izochronizm ich ruchów;—obliczymy stosunek wartości okresów w drugiej potędze.

8. Ruch, gdy środek dany odpycha punkt proporcyonalnie do odległości. Rozpatrzmy przypadek, gdy środek dany **odpycha** punkt materyalny siłą proporcyonalną do odległości. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące

$$kx = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad \text{ub } kx = m\frac{dv}{dt}. \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

W celu scałkowania tego równania podstawimy w nie

$dt = \frac{dx}{v}$, i otrzymamy $kx\,dx = mv\,dv$, a po scałkowaniu

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + K \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x = 0$; $v = v_0$; $t = 0$,

a otrzymamy $0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + K$; skąd $K = -\frac{1}{2}mv_0^2$,

a po podstawieniu tych wartości, napiszemy równanie

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2; \text{ skąd}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}x^2 + v_0^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Z równania tego obliczymy v w każdem miejscu x toru, jeżeli daną jest prędkość v_0 w środku odpychania.

Ponieważ wielkości x i v wchodzą w to równanie w drugiej potędze, przeto wartości v są jednakowe dla symetrycznych położeń punktu względem środka odpychania. Z równania tego widzimy również, że wartość v rośnie do ∞ z powiększeniem się wartości x do ∞.

Podstawmy następnie w rów. 29-te $v = \frac{dx}{dt}$, a otrzymamy równanie różniczkowe, wyrażające związek pomiędzy x i t

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 + v_0^2}; \text{ skąd } dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}x^2 + v_0^2}}$$

W celu scałkowania tego równania przekształcimy je w ten sposób, ażeby przy zmiennej x znajdował się spółczynnik jedność, gdyż przyjmujemy, że znaną jest nam całka wyrazu ogólnego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \lg n\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C;$$

(zamieszczonego w Techniku na str. 77, pod Nr. 33); na podstawie tego wzoru równanie powyższe otrzyma postać

$$dt = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right) v_0^2 + x^2}},$$

a po scałkowaniu

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \lg n\left(x + \sqrt{\frac{m}{k}v_0^2 + x^2}\right) + C.$$

Podstawmy w nie $t=0$; $x=0$, a otrzymamy

$$C=-\sqrt{\frac{m}{k}}.\,\mathrm{lgn}\left(v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\right);$$

i wreszcie

$$t=\sqrt{\frac{m}{k}}.\,\mathrm{lgn}\frac{x+\sqrt{\frac{m}{k}v_0^2+x^2}}{v_0\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

W celu rozwiązania tego równania względem x, zastępujemy funkcyę logarytmiczną funkcyą wykładniczą, a więc

$$e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}=\frac{x+\sqrt{\frac{m}{k}v_0^2+x^2}}{v_0\sqrt{\frac{m}{k}}};$$

równanie to możemy napisać w sposób następujący

$$\sqrt{\frac{m}{k}v_0^2+x^2}=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}-x,$$

a po podniesieniu obydwóch stron do drugiej potęgi i po odpowiedniem skróceniu, otrzymamy

$$\frac{m}{k}v_0^2=\frac{m}{k}v_0^2e^{2t\sqrt{\frac{k}{m}}}-2xv_0\sqrt{\frac{m}{k}}.e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}},$$

skąd wreszcie

$$x=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\frac{e^{2t\sqrt{\frac{k}{m}}}-1}{2e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}};$$

lub inaczej

$$x=\tfrac{1}{2}v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}-e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Jest to równanie ruchu, wykazujące związek pomiędzy drogą i czasem. Z równania tego wynika, że z rosnącą wartością t, wartość wyrazu $e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}$ nadzwyczaj prędko rośnie, natomiast drugi wyraz jednocześnie prędko maleje; wobec tego dla $t=\infty$, otrzymamy $x=\infty$. Równanie to wskazuje również, że dla $x=0$ $t=0$.

W szczególnym przypadku, gdy $v_0 = 0$, wtedy $x = 0$, niezależnie od czasu, t. j. punkt ruchomy, umieszczony bez prędkości początkowej w środku przyciągania, pozostaje w spoczynku; co jest fizycznie zrozumiałem.

Porównywując równanie dynamiczne tego zadania (równ. 27-me) z takimże równaniem zadania poprzedniego (równ. 22-gie) zauważymy, że różnią się one tylko znakiem przy wielkości k. Całkę zatem równ. 27-ego otrzymamy z całki równ. 22-ego, gdy podstawimy w nie $k = -k$, czyli $\sqrt{k} = i\sqrt{k}$, gdzie $i = \sqrt{-1}$; tem równaniem jest nast.

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{i} \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\, i\right).$$

W celu usunięcia z niego wielkości urojonych, skorzystamy z ogólnego wzoru

$$\sin(i\alpha) = i\,\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2};$$

(„Technik" I str. 68, wzór 6-ty), i otrzymamy równ. 31-sze.

Można również dojść do całki równania postaci ogólnej

$$\frac{d^2x}{dt^2} + qx = 0; \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

podstawiając w nie

$$x = A\cos(t\sqrt{q}) + B\sin(t\sqrt{q});$$

lub

$$x = Ae^{t\sqrt{q}} + Be^{-t\sqrt{q}};$$

lub

$$x = \alpha \,.\, \cos(t\sqrt{q} + \beta),$$

a po obliczeniu stałych A i B lub α i β z początkowych warunków zadania, otrzymamy powyższe całki.

9. Ruch harmoniczny zanikający. Z warunków podanego powyżej zadania wynika, że ruch harmoniczny, gdy został raz wywołany, powinien trwać do nieskończoności; gdyż dla każdej wartości t otrzymamy zawsze z równania ruchu wartość skończoną zmiennej x. W rzeczywistości jednakże przypadek taki nie zachodzi, ruch bowiem np. pręta sprężystego, wprowadzonego w ruch okresowy, po upływie pewnego czasu, zanika.

Wzór więc ruchu, wyżej wyprowadzony, nie jest zgodny z rzeczywistością, a przyczyną tego jest pominięcie, przy wprowadzeniu tego wzoru, pewnych warunków fizycznych, w jakich odbywa się dany ruch. W przykładzie powyższym założyliśmy pewne warunki, na których pod-