C. Zastosowania zasad szczególnych dynamiki.

29. Ruch punktu w polu sił Newtonowskich. Punkt materyalny o masie m, posiadający w chwili $t = 0$ prędkości $\bar{v}_0$, jest przyciągany do pewnego środka, nieruchomego w przestrzeni, siłą odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi jego odległości od tegoż środka, t. j. jest on przyciągany siłą, odpowiadającą prawu, postawionemu przez Newtona dla ruchu planet. Obliczyć równanie toru tego punktu.

Ponieważ moment sił, działających na dany punkt, względem bieguna obranego w środku przyciągania, równa się zeru; przeto wektor momentu ilości ruchu $\bar{M}_v$ punktu względem tego bieguna, pozostaje podczas ruchu punktu wektorem niezmiennym, tak co do kierunku, jak też co do długości; z czego znów wynika, że tor punktu leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek przyciągania i przez kierunek prędkości początkowej $\bar{v}_0$. Właściwość tę danego ruchu, można również sobie wytłumaczyć drogą rozważań właściwości sił; jak to czyniliśmy poprzednio w § 25-tym.

Ruch przeto tego punktu wyrazimy dwiema spółrzędnemi, obranemi w płaszczyźnie jego ruchu. Układ spółrzędnych obierzmy biegunowy ze spółrzędnemi r i σ i z biegunem w środku przyciągania; w tym bowiem układzie siły środkowe dają się wyrazić funkcyą jednej tylko zmiennej — promienia wodzącego; co stanowi ważne udogodnienie rachunkowe.

Do rozwiązania tego zadania zastosujemy zasadę pracy, oraz zasadę momentu ilości ruchu; w równania te wejdą spółrzędne punktu r i σ, oraz czas t, jaki upłynął od wyjścia jego z początkowego położenia; a po wyrugowaniu z tych dwóch równań zmiennej t, otrzymamy związek pomiędzy r i σ, t. j. otrzymamy równanie toru, wyrażone spółrzędnemi biegunowemi.

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje równanie

$$1)\quad -\frac{k}{r^2}\,dr = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Zasada zaś momentu ilości ruchu względem środka przyciągania, daje równanie

$$2)\quad \frac{dM_v}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Ażeby otrzymać równanie toru, wyrażone spółrzędnemi r i σ, należy wielkości v i M_v wyrazić temi spółrzędnemi. W tym celu prędkość $\bar{v}$ zrzutujemy na promień wodzący punktu i na prostopadłą do niego i napiszemy równanie

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\,\frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

Wartość zaś momentu ilości ruchu weźmiemy z równ. 74-go

$$M_v = mr^2 \frac{d\sigma}{dt}.$$

Po podstawieniu tych wartości w równania poprzednie, — scałkujemy je; a przyjąwszy, dla $t = 0$

$$r = r_0;\ \sigma = 0;\ v = v_0;\ M_v = M_0;$$

otrzymamy całki ich w następującej postaci

$$1)\quad \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} = \tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] - \tfrac{1}{2} m v_0^2, \text{ oraz,}$$

$$2)\quad mr^2 \frac{d\sigma}{dt} = M_0.$$

Z równań tych wyrugujemy dt, i otrzymamy równanie w postaci różniczkowej, wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punktu; a po jego scałkowaniu otrzymamy równanie toru w skończonej postaci, wyrażone obranemi spółrzędnemi.

Wyraz $\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0}$, który oznaczamy literą E_0; jest wielkością, charakteryzującą warunki początkowe ruchu; a po obliczeniu z równania momentów

$$dt = \frac{mr^2 d\sigma}{M_0},$$

i po podstawieniu tej wartości w równanie pracy, otrzymamy równanie

$$\frac{k}{r} = \tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{M_0}{mr^2}\right)^2 + \left(r \frac{M_0}{mr^2}\right)^2\right] - E_0 \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

W równaniu tem można oddzielić zmienne i następnie szukać jego całki. Lecz całkowanie to uprości się po wprowadzeniu nowej zmiennej w, określonej równaniem

$$w = \frac{1}{r};\ \text{skąd } r = \frac{1}{w};\ \text{oraz } dr = -\frac{1}{w^2} dw,$$

lub inaczej $dr = -r^2 dw$.

Po podstawieniu tych wartości w równanie poprzednie otrzymamy

$$kw = \tfrac{1}{2} m \left[\left(-\frac{dw}{d\sigma} \cdot \frac{M_0}{m}\right)^2 + \left(w \frac{M_0}{m}\right)^2\right] - E_0;\ \text{skąd}$$

$$d\sigma = \frac{-dw}{\sqrt{\frac{2E_0 m}{M_0^2} + \frac{2km}{M_0^2} w - w^2}}.$$

Na mocy wzoru 34-tego, podanego w „Techniku" na str. 77-ej, napiszemy całkę tego równania

$$\sigma = \operatorname{arsin} \frac{\frac{km}{M_0^2} - w}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2E_0 m}{M_0^2}}} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Jest to równanie toru, jaki zakreśla punkt materyalny w danem polu sił. Ażeby odczytać z tego równania właściwości geometryczne tego toru, należy przedewszystkiem obliczyć stałą C, przyjąwszy pewne wartości spółrzędne początkowego położenia punktu. W celu uproszczenia rachunku przyjmiemy pewne szczególne wartości w_1 i σ_1 zmiennych w i σ; któreby znajdowały się w pewnej zależności od samej krzywej. Przyjmijmy np. że, w_1 ma odpowiadać najmniejszej wartości r, którą oznaczymy przez r_1; a kąt biegunowy, odpowiadający temu promieniowi, oznaczymy literą σ_1.

Jeżeli zmienna r ma posiadać wartość najmniejszą, to zmienna w posiadać powinna wartość największą; przeto wartość ułamka, wchodzącego do równania 81-go, powinna przybrać wartość największą odjemną. Wartość jednakże tego ułamka przy zmiennej w posiadają granicę od $+1$ do -1; ułamek ten bowiem wyraża sinus pewnego kąta; dla największej zatem wartości w ułamek ten przybrać może tylko wartość (-1).

Po podstawieniu zatem w równ. 81-sze

$$w = w_1, \text{ oraz } \sigma = \sigma_1;$$

których wartości na razie nie obliczamy; otrzymamy równanie

$$\sigma_1 = \operatorname{arsin}(-1) + C;$$

z którego obliczymy

$$C = \sigma_1 + \frac{\pi}{2};$$

Po podstawieniu tej wartości, oraz wartości $w = \frac{1}{r}$ w równ. 2-gie, otrzymamy równanie toru w postaci następującej

$$\sigma - \sigma_1 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arsin} \frac{\frac{km}{M_0^2} - \frac{1}{r}}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2E_0 m}{M_0^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Oznaczmy kąt $(\sigma - \sigma_1)$ literą ψ i weźmy cosinus obydwóch stron tego równania, a zważywszy, że wogóle $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$, otrzymamy, po odpowiedniem przekształceniu

$$\cos\psi = \frac{\frac{1}{r} - \frac{km}{M_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2E_0 m}{M_0^2}}} \text{; skąd}$$

$$r = \frac{\frac{M_0^2}{km}}{1 + \cos\psi\sqrt{1 + \frac{2E_0 M_0^2}{k^2 m}}} \quad \ldots\ldots \quad (83)$$

Jest to równanie biegunowe krzywej stożkowej, w której ognisku leży biegun spółrzędnych. Postać ogólna tej krzywej jest następująca

$$r = \frac{p}{1 + \cos\psi \,.\, e}.$$

Równanie przeto 83-cie przedstawia stożkową, której parametr wyraża licznik tego równania, a wartość pierwiastka jej jest mimośrodem.

Z geometryi analitycznej jest wiadomem

gdy $e < 1$; t. j. gdy $E_0 < 0$, wtedy równanie powyższe przedstawia [elipsę;

gdy $e = 1$; t. j. gdy $E_0 = 0$, wtedy równanie powyższe przedstawia [parabolę;

gdy $e > 1$; t. j. gdy $E_0 > 0$, wtedy równanie powyższe przedstawia [hyperbolę.

Znak wartości E_0 rozstrzyga przeto o rodzaju stożkowej; a pozostałe wartości równania 83-ego nie wpływają na jej rodzaj; nie zmieniają one bowiem znaku wartości pierwiastka.

Zatem zależnie od tego, czy

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 \lesseqgtr \frac{k}{r_0};$$

tor będzie elipsą, parabolą lub hyperbolą.

Wyniki te wypowiemy w sposób następujący: rodzaj stożkowej, jaką zakreśla punkt materyalny w polu sił Newtonowskich, zależy od początkowej jego odległości r_0, i od energji kinetycznej; lecz nie zależy od jej kierunku w przestrzeni. Ponieważ przytem wartość M_0 wchodzi w równanie toru w drugiej potędze, rów. 83-cie, przeto postać toru nie zależy od zwrotu prędkości początkowej.

30. Analiza warunków, określających rodzaj stożkowej. Znajdźmy obecnie znaczenie dynamiczne, wyprowadzonych drogą analityczną warunków, określających rodzaj stożkowej. Wyraz $\frac{1}{2} m v_0^2$ wyraża wartość energii kinetycznej punktu ruchomego w jego położeniu początkowem; zaś wyraz $\frac{k}{r_0}$ — wartość pracy, jakąby siła przyciągania wykonała, podczas przeprowadzenia punktu ruchomego z ∞ do położenia początkowego r_0.

Siła przyciągająca punkt, który oddala się od środka, wykonywa pracę odjemną, (gdyż zwrot tego przesunięcia jest niezgodny ze zwrotem siły), energia zatem kinetyczna tego punktu zmniejsza się podczas oddalania się punktu od środka przyciągania, co i fizycznie jest zrozumiałem; jeżeli zatem punkt ruchomy ma przesunąć się do ∞, to jego energia kinetyczna $\frac{1}{2} m v_0^2$, powinna być przynajmniej równą wartości pracy $\frac{k}{r_0}$; jeżeli zaś jest ona mniejszą, to punkt ruchomy, nie mając takiego zasobu energii, ażeby wykonał pracę $= \frac{k}{r_0}$, będzie pozostawał w skończoności. Jeżeli zaś energia początkowa $\frac{1}{2} m v_0^2 > \frac{k}{r_0}$, to punkt dany przybędzie do ∞ z pewnym zapasem energii, która nie pozwoli mu zawrócić z drogi, lecz, przeprowadziwszy go przez nieskończoność (!), wprowadzi go do skończoności w innem miejscu przestrzeni.

Jeżeli wiemy, że torem punktu w danem polu sił jest jedna z krzywych stożkowych, można na podstawie tych wniosków orzec, w jakim przypadku będzie nią elipsa, parabola lub hyperbola.

W szczególnym przypadku elipsa może przybrać postać koła; przypadek ten nastąpi, gdy $e = 0$, t. j. gdy

$$1 + \frac{2 E_0 M_0^2}{k^2 m} = 0.$$

Z równania tego obliczymy wartość prędkości v_0, jaką należy nadać punktowi ruchomemu w danem jego położeniu r_0, ażeby zakreślił on koło. W tym celu podstawiamy w powyższe równanie przyjętą wartość $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0}$; oraz wartość

$$M_0 = m v_0 r_0 \sin \alpha_0;$$

gdzie α_0 oznacza $\sphericalangle (v_0, r_0)$;

a po przekształceniu jego, otrzymamy równanie

$$m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 \,.\, v_0^4 - 2\, k m r_0 \sin^2 \alpha_0 \,.\, v_0^2 + k^2 = 0,$$

z którego

$$v_0^2 = \frac{2\, k m r_0 \sin^2 \alpha_0 \pm \sqrt{4 k^2 m^2 r_0^2 \sin^4 \alpha_0 - 4 k^2 m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}}{2\, m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}$$

a następnie po wyniesieniu przed pierwiastek kwadratu wyrazu $2\, k m r_0$ $\sin \alpha_0$, otrzymamy, po skróceniu licznika i mianownika przez $2\, m r_0 \sin \alpha_0$

$$v^2_0 = \frac{k \sin \alpha_0 \pm \sqrt{\sin^2 \alpha_0 - 1}}{m r_0 \sin \alpha_0}.$$

Z wyrazu, znajdującego się pod pierwiastkiem, wnioskujemy, że v_0 może posiadać wartość rzeczywistą w jedynym tylko przypadku, gdy

$$\sin^2 \alpha_0 - 1 = 0;\ \text{t. j. gdy } \alpha_0 = \pm 90^0.$$

Podstawiwszy zatem tę wartość w równanie prędkości, otrzymamy wartość szukanej prędkości

$$v^2_0 = \frac{k}{m r_0};\ \text{lub inaczej } \frac{m v^2_0}{r_0} = \frac{k}{r_0^2}.$$

Wyniki te wypowiemy w sposób następujący: ażeby w polu sił Newtonowskich wywołać ruch kołowy punktu materyalnego, należy nadać mu prędkość, której kierunek jest prostopadły do promienia wodzącego; t. j. $\alpha_0 = \pm 90^0$; oraz należy, ażeby iloczyn z masy i przyśpieszenia dośrodkowego t. j. wartość $\frac{m v_0^2}{r_0}$ równała się sile przyciągania $\frac{k}{r_0^2}$; jak to wskazuje powyższe równanie.

Warunek powstawania ruchu kołowego obliczyć również można bezpośrednio; zważywszy, że siły, działające na punkt, poruszający się po kole w polu sił Newtonowskich, i wogóle w polu sił środkowych, zależnych tylko od odległości od środka przyciągania, nie wykonują żadnej pracy; energia kinetyczna przeto tego punktu, a więc i prędkość jego pozostaje niezmienioną (pod względem skalarnym) i równą prędkości początkowej. Wiemy z kinematyki, że przyśpieszenie punktu, przebiegającego po kole z prędkością jednostajną v_0, skierowane jest po promieniu, zwrócone ku środkowi koła i równa się $p = \frac{v_0^2}{r_0}$; a ponieważ siła, wywołująca to przyśpieszenie w polu sił Newtonowskich, równa się $\frac{k}{r^2_0}$; przeto dla ruchu po kole powinien być zachowany warunek $\frac{m v_0^2}{r_0} = \frac{k}{r_0^2}$, poprzednio wyprowadzony.

Uwaga. Zechce czytelnik uogólnić wskazany sposób określenia warunków powstawania ruchu kołowego, stosując go do pól sił środkowych, w których siły podlegają innym prawom zmienności, niż przytoczonym w tym przykładzie, np. prawu przyciągania proporcyonalnego do odległości.

31. Prawo ciążenia powszechnego. Newton postawił hypotezę, opartą na licznych obserwacyach ruchu planet, że ruchy te odbywają się w taki sposób, jaki gdyby planety przyciągały się wzajemnie siłą, odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi z ich wzajemnej odległości. Ponieważ wszystkie wnioski i rachunki, tyczące się ruchu ciał niebieskich, oparte na tej hypotezie, są zgodne z pomiarami ruchów zachodzących w rzeczywistości, właściwość zatem przyciągania się brył materyalnych odwrotnie proporcyonalnie do drugiej potęgi z ich odległości, przyjęto jako prawo ogólne przyrody i nazwano je prawem powszechnego ciążenia.

Jeżeli np. bryła materyalna, znajdująca się w polu sił ciążenia ziemskiego, otrzyma prędkość początkową, niezgodną z kierunkiem promienia kuli ziemskiej, to zakreśli ona tor w postaci krzywej stożkowej, zamkniętej w skończoności, lub też rozciągającej się do nieskończoności; zależnie od przytoczonych wyżej warunków ruchu początkowego.

Prędkości jednakże, nadane bryłom materyalnym, wyrzuconym z powierzchni ziemi, są zwykle tak małe, że $\frac{1}{2} m v_0^2 < \frac{k}{r_0}$; tory zatem, jakie one zakreślają są elipsami, w których ognisku znajduje się środek kuli ziemskiej; zauważymy następnie, że odległości, z jakiemi mamy do czynienia w doświadczeniach ziemskich, są tak małe w porównaniu z odległością środka tej elipsy, w której ognisku leży środek bryły ziemskiej, że część toru eliptycznego, przystępną dla naszych pomiarów, przyjąć możemy dla ułatwienia rozpatrywań ruchu za część paraboli, której oś główna pokrywa się z osią pomienionej elipsy. Tor zatem paraboliczny punktu materyalnego, wyrzuconego w polu ciążenia ziemskiego jest torem przybliżonym. Do tychże wyników doszliśmy też w § 15-ym, przy rozpatrywaniu rzutu punktu materyalnego. W rozpatrywaniach tych przyjęliśmy, że siły, przyciągające punkt wyrzucony, są stałe we wszystkich miejscach toru i że są wzajemnie równoległe; co jest tylko z pewnem przybliżeniem zgodne z rzeczywistością; błąd jednakże, stąd wynikający, jest w zwykłych warunkach niedostrzegalny.

Przyjąwszy zatem prawo powszechnego ciążenia za zgodne z przebiegiem zjawisk przyrody, wypowiemy na zasadzie wyników paragrafu poprzedniego, że ziemia np. zakreśla elipsę, w której ognisku leży słońce; że księżyc zakreśla również elipsę, w której ognisku znajduje się ziemia i t. p.

Badania ruchu komet wykazują, że ruch ich podlega również prawu ciążenia powszechnego; a tory ich nietylko eliptyczne, lecz i paraboliczne i hyperboliczne, w których ognisku znajduje się słońce, przewidziane są rachunkiem, przytoczonym w paragrafie poprzednim.

Przy obliczaniu ruchu punktu, wyrzuconego z powierzchni ziemi, należy zwrócić uwagę na tę okoliczność, że w przypadku, gdy tor punktu przetnie powierzchnię kuli ziemskiej, wtedy równania powyższe nie odpowiadają warunkom ruchu wewnątrz ziemi np. w głębokim otworze; wielkość bowiem przyciągania we wnętrzu ziemi, pomijając wszelkie opory, jest inna, niż na jej powierzchni; a mianowicie: powiększa się ona proporcyonalnie do odległości do środka ziemi, co można dowieść, wychodząc z ogólnej zasady, że punkt ruchomy jest przyciągany przez wszystkie cząstki kuli ziemskiej, podług prawa Newtona; gdy więc znajduje się on w jej wnętrzu, wypadkowa tych przyciągań cząstkowych jest inną, niż w przypadku, gdy jest on zewnątrz kuli ziemskiej.

32. Granice ruchu punktu w polu sił środkowych. Sposób odnalezienia warunków, przy których punkt ruchomy zakreśli tor w skończoności, lub nieskończoności można uogólnić i zastosować go do obliczenia ruchu punktu w polu sił środkowych, które są funkcyami odległości od środka pola, i nie zależą od wielkości kąta biegunowego. Sposób ten pozwoli obliczyć wogóle granice, w jakich dany punkt zakreśla tor pod działaniem takich sił.

Wyraźmy prawo zmienności sił środkowych funkcyą ogólną $f(r)$ ze znakiem dodatnim, gdy siły odpychają punkt; to praca tych sił podczas przejścia punktu ruchomego z położenia początkowego r_0 do innego położenia r wyrazi się całką $\int_{r_0}^{r} f(r)\, dr$, lub inaczej wzorem

$$U(r) - U(r_0).$$

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje równanie

$$U(r) - U(r_0) = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2;$$

Zasada zaś momentów daje równanie

$$M_0 = mr^2 \frac{d\sigma}{dt}.$$

W równaniach tych v oznacza prędkość punktu w miejscu r; v_0 — w miejscu r_0; a M_0 oznacza moment ilości ruchu w miejscu r_0.

W najodleglejszem i najbliższem miejscu toru punkt ruchomy posiada prędkość, której kierunek jest prostopadły do promienia wodzącego; przeto, oznaczywszą tę odległość literą r_m (maximum lub minimum) i prędkość w tych miejscach przez v_m, równanie momentu ilości ruchu jest następujący

$$mv_m r_m = M_0; \text{ skąd } v_m = \frac{M_0}{mr_m}.$$

Podstawiwszy wartość v_m w równanie pracy dla położenia r_m punktu, otrzymamy równanie

$$U(r_m) - U(r_0) = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 \frac{1}{r^2_m} - \tfrac{1}{2} m v^2_0,$$

z którego po przemnożeniu przez r^2_m, o ile r_m nie posiada wartości zera lub ∞, otrzymamy równanie

$$r^2_m \cdot U(r_m) + r^2_m [\tfrac{1}{2} m v^2_0 - U(r_0)] - \tfrac{1}{2} m \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 = 0,$$

z którego obliczymy długość promienia r_m.

Zauważyć następnie należy, że tor punktu ruchomego dotyka kół, zakreślonych promieniami r_m; koła przeto, zakreślone temi promieniami, wyznaczają granice, pomiędzy któremi ruch punktu się odbywa.

W szczególnym przypadku, gdy $M_0 = 0$, t. j. gdy ruch jest prostolinijny; równanie to przekształci się na nast.

$$U(r_m) + [\tfrac{1}{2} m v^2_0 - U(r_0)] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (84)$$

$M_0 = 0$ następuje w dwóch przypadkach; w przypadku, gdy kierunek prędkości początkowej przechodzi przez środek sił, lub też w przypadku, gdy $v_0 = 0$.

W przypadku $v_0 = 0$, mamy

$$U(r_m) = U(r_0).$$

33. Ogólne równanie toru punktu w polu sił środkowych. Obliczyć równanie ruchu punktu w polu sił środkowych, gdy siły te są pewną funkcyą, narazie nieokreśloną, promienia wodzącego; wyrażoną symbolem ogólnym $f(r)$.

Zadanie to jest uogólnieniem, wyżej rozpatrywanych przykładów; do rozwiązania jego zastosujemy przeto te same zasady, któreśmy stosowali do powyższych szczególnych przypadków. W celu uniknięcia powtarzania się, rozpatrzmy równ. 78-me i 79-te przykładu poprzedniego, a zauważymy, że tylko w pierwsze z nich wchodzi $f(r)$; lewa bowiem strona tego równania przedstawia iloczyn $f(r)\,dr$, wyrażający pracę cząstkową, prawa zaś strona pozostaje w tej samej postaci i dla tego ogólnego przypadku; drugie zaś z powyższych równań zupełnie nie zmienia się i dla danego przykładu. Całki więc tych równań są następujące:

$$1) \quad \int_{r_0}^{r} f(r)\,dr = \tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] - \tfrac{1}{2} m v^2_0; \text{ oraz}$$

$$2) \quad m r^2 \frac{d\sigma}{dt} = M_0.$$

Oznaczymy $\int f(r)\,dr$ przez $U(r)$ i następnie, jak poprzednio: $\frac{1}{2} mv^2_0 - U(r_0)$ przez E_0; a po wyrugowaniu z tych równań dt, otrzymamy równanie analogiczne do równ. 80-go

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 \cdot \frac{M^2_0}{mr^4} = U(r) - \frac{1}{2}\frac{M^2_0}{mr^2} + E_0 .$$

Podstawmy w nie, jak poprzednio $r = \frac{1}{w}$, a otrzymamy równanie

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{dw}{d\sigma}\right)^2 \frac{M^2_0}{m} = U(r) - \frac{1}{2}\frac{M^2_0}{m} w^2 + E_0, \quad \ldots \quad (85)$$

z którego można obliczyć $d\sigma$ i następnie, po scałkowaniu, σ wyrazić wielkością w, a więc również wielkością r. Funkcja $U(r)$ pozostaje naturalnie nieokreśloną, dopóki zadanie jej nam nie da.

Równanie 85-te przekształcimy na inne, którego całka jest nam znaną; a mianowicie zróżniczkujemy je względem σ, mając na uwadze, że r i w są funkcyami σ; i otrzymamy

$$\frac{dw}{d\sigma} \cdot \frac{d^2w}{d\sigma^2} \cdot \frac{M^2_0}{m} = \frac{d\,U(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dw} \cdot \frac{dw}{d\sigma} - \frac{M^2_0}{m} \cdot w \cdot \frac{dw}{d\sigma};$$

po skróceniu przez $\frac{dw}{d\sigma}$ i po podstawieniu

$$\frac{d(Ur)}{dr} = f(r) = f\left(\frac{1}{w}\right), \text{ oraz } \frac{dr}{dw} = - r^2 = - \frac{1}{w^2},$$

ostrzymamy

$$\frac{d^2w}{d\sigma^2} + w = -\frac{m}{M^2_0} \cdot \frac{f\left(\frac{1}{w}\right)}{w^2} \quad \ldots \ldots \quad (86)$$

Jest to ogólne równanie toru punktu w polu sił środkowych.

Sprawdźmy to równanie dla pola sił Newtonowskich. W tym celu podstawimy w nie

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} = - kw^2;$$

a otrzymamy

$$\frac{d^2w}{d\sigma^2} + w = \frac{m}{M^2_0} k.$$

Jest to równanie różniczkowe linijne 2 go rzędu ze stałą wielkością wikłającą; w celu jego scałkowania, wprowadzimy do rachunku nową zmienną z, zależną od w w sposób następujący

$$w = \frac{m}{M^2_0} k + z.$$

Po podstawieniu tej zmiennej; wielkość stała wypada z poprzedniego równania i otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2 z}{d\sigma^2} + z = 0,$$

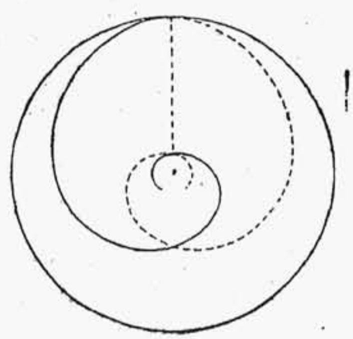
którego całkę przedstawić można w postaci następującej

$$z = A \cos(\sigma - \beta);$$

gdzie A i β są stałe, wyznaczalne z początkowych warunków ruchu. Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie i po zastąpieniu w wyrazem $\frac{1}{r}$, otrzymamy równanie toru tego ruchu

$$r = \frac{\frac{M^2}{mk}}{1 + e\cos(\sigma - \beta)},$$

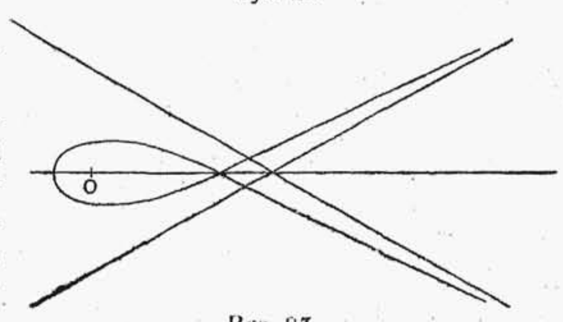
które jest jednakowe z równaniem 83-ciem lub następnem.



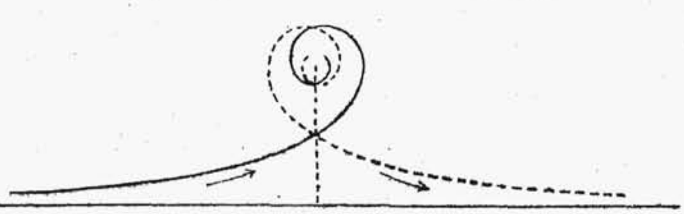
Rys. 21.

Rys. 22.

34. Zadanie. Punkt materyalny, przyciągany do pewnego środka siłą, odwrotnie proporcyonalną do trzeciej potęgi z odległości, zakreśla przy różnych warunkach ruchu początkowego tory, wskazane na rys. 21, 22, 23 i 24-tym. Zbadać, przy jakich warunkach ruchu początkowego zakreśla on każdy rodzaj z tych torów. (Rysunki te są wzięte z dzieła „Treatise on Dynamics by A. Gray and J. G. Gray". — 1911.).



Rys. 23



Rys. 24.