dla wszystkich kątów odchylenia. Widzimy z tego zestawienia, że różnica okresów wahnięć, np. dla $\sigma_0 = 40^0$, stanowi 3%; dla 90^0 około 20%, a dla większych kątów odchylenia znacznie rośnie.

46. Dokładniejszy sposób obliczenia ruchu wahadłowego. Przybliżenie, z jakiem chcemy obliczyć szukane wartości, może być dowolne; gdyż zależy ono od ilości wyrazów, jakie weźmiemy do rachunku, przy rozwinięciu funkcyi trygonometrycznej w szereg.

W celu uniknięcia długich szeregów możliwem jest również stosowanie innych skróceń, które prędzej prowadzą do wzorów dosyć dokładnych. Zastosujemy np. skrócenia następujące, z których częściowo korzystaliśmy już w przykładach § 142 i następnych tomu I-go, a mianowicie, gdy ξ jest wielkością mniejszą od jedności, to mamy

$$(1-\xi^2)^{-1/2} = (1+\xi^2)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}\xi^2.$$

Ażeby wyraz pod pierwiastkiem rów. 99-ego sprowadzić do tej postaci, podstawimy w niego $\cos\sigma = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma}{2}$; oraz $\cos\sigma_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma_0}{2}$; a otrzymamy

$$\int\frac{d\sigma}{\sqrt{\cos\sigma-\cos\sigma_0}} = \int\frac{d\sigma}{\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\sigma_0}{2}-\sin^2\frac{\sigma}{2}\right)}} = \int\frac{d\sigma}{\sqrt{2}\sin\frac{\sigma_0}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{\sigma}{2}}{\sin^2\frac{\sigma^0}{2}}}}.$$

Wprowadzimy następnie nową zmienną ψ, określoną równaniem

$$\frac{\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)} = \sin\psi,$$

i wyrazimy tę całkę funkcyą tej zmiennej. Ażeby wyrazić $d\sigma$ zmienną ψ, zróżniczkujemy powyższe równanie i otrzymamy

$$\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right).\, d\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \cos\psi\,.\,\sin\left(\frac{\sigma_0}{2}\right).\, d\psi; \text{ skąd}$$

$$d\sigma = \frac{2\cos\psi\,.\,\sin\frac{\sigma_0}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}}\, d\psi;$$

podstawiwszy w nie

$$\cos\frac{\sigma}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\sigma}{2}} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\sigma^2_0}{2}\,.\,\sin^2\psi};$$

otrzymamy

$$d\sigma = \frac{2 \cdot \cos\psi \cdot \sin\frac{\sigma_0}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin^2\psi}} d\psi.$$

Po podstawieniu tych wartości, otrzymamy całkę poprzednią w nast. postaci

$$\int \frac{2\cos\psi \cdot \sin\frac{\sigma_0}{2} \cdot d\psi}{\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{1 - \sin^2\psi} \cdot \sqrt{1 - \sin^2\frac{\sigma_0}{2}\sin^2\psi}}.$$

Po skróceniu i podstawieniu w równanie 99-te otrzymamy

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin^2\psi}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (104)$$

Granica $\psi = \frac{\pi}{2}$ odpowiada granicy $\sigma = \sigma_0$; drugą zaś granicę ψ obliczymy z σ, za pośrednictwem równania, określającego zmienną ψ.

Scałkujemy teraz powyższy wyraz sposobem skróconym, stosując wyżej przytoczony wzór, w który podstawimy

$$\xi^2 = \sin^2\frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin^2\psi; \text{ i otrzymamy}$$

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \left(1 + \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\sigma_0}{2}\sin^2\psi \cdot d\psi\right) \quad . \; . \; . \quad (105)$$

Całkowanie tego wyrazu może być wykonane podług wzoru 53-go, znajdującego się na str. 79-ej „Technika“. W celu obliczenia np. okresu podwójnego wahnięcia scałkujemy je dla ćwierci podwójnego wahnięcia; dla którego granice całkowania są od $\frac{\pi}{2}$ do 0; wartości te bowiem odpowiadają granicom od $\sigma = \sigma_0$ do $\sigma = 0$. Całka wyrazu

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\psi d\psi = \left| -\tfrac{1}{4}\sin 2\psi + \tfrac{1}{2}\psi \right|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{\pi}{4},$$

a po podstawieniu jej w równ. 105-te mamy

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\sigma_0}{2}\right); \text{ skąd}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \frac{\sigma^0}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (106)$$

Z tego wzoru wynika, że okres wahnięć zależy od amplitudy σ_0. Dokładność tego wzoru dalej sięga, niż wzoru poprzedniego; nie jest ona jednakże zupełną i np. dla $\sigma_0 = \pi$, wzór ten nie da wartości $T = \infty$; jaką powinien dać wzór dokładny.

Gdy podstawimy jeszcze dla uproszczenia rachunku $\sin \frac{\sigma_0}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$; wtedy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{16}\right) \quad \ldots \ldots \quad (107)$$

Wartość okresu, obliczona z tego wzoru, jest większą, niż otrzymana ze wzoru 101-ego, co było już przez nas przewidziane.

47. Obliczenia siły odporowej wahadła. W celu obliczenia siły odporowej toru, gdy wyobrażamy sobie ruch punktu po kole materyalnem; lub jak w przykładzie z wahadłem, — naprężenia nici, należy zrzutować równanie dynamiczne tego ruchu możliwie w ten sposób, ażeby dało bezpośrednio związek pomiędzy siłą odporową N i prędkością punktu; — przyjmujemy bowiem, że prędkość ta jest już obliczona z równania pracy. Równanie to otrzymamy, rzutując równanie dynamiczne tego ruchu na normalną do toru, a zważywszy, że $p_n = \frac{v^2}{l}$ otrzymamy

$$N - mg \cos\sigma = m\frac{v^2}{l}; \text{ skąd } N = mg \cos\sigma + m\frac{v^2}{l} \quad . \quad (108)$$

Podstawmy w nie z równania pracy

$$v^2 = 2gl(\cos\sigma - \cos\sigma_0),$$

a otrzymamy

$$N = mg(3\cos\sigma - 2\cos\sigma_0) \quad \ldots \ldots \quad (109)$$

Równanie to daje zależność siły odporowej od położenia wahadła. Szczególne przypadki:

1) Gdy $\sigma_0 = 0$, oraz $\sigma = 0$, t. j. gdy punkt jest zawieszony pionowo, wtedy $N = mg$; naprężenie nici w danym przypadku równa się ciężarowi punktu, jest to przypadek równowagi.

2) Dla $\sigma = \sigma_0$; $N = mg \cos\sigma_0$; t. j. naprężenie nici w początkowem jego położeniu równa się rzutowi ciężaru punktu na kierunek promienia, co wypada również ze statycznych rozpatrywań.

3) W najwyższem początkowem położeniu punktu, t. j. dla $\sigma_0 = 180^0$ i dla $\sigma = 180^0$; $N = -mg$; co znaczy, że do punktu, znajdującego się na wierzchołku koła, należy przyłożyć siłę, skierowaną po promieniu na zewnątrz koła; dodatni bowiem zwrot siły N przyjęliśmy w danym rachunku ku środkowi koła. W modelu więc fizycznym, przedstawiającym ten ruch, zamiast nici powinniśmy w danym razie zastosować pręt sztywny; siła ciśnienia pręta równa się w tym przypadku ciężarowi danego punktu. Przytoczone trzy przypadki są zgodne z twierdzeniami statyki.

4) N będzie największe dla danego odchylenia σ_0, gdy $\cos \sigma$ będzie największe, co nastąpi dla $\sigma = 0$; t. j. największe naprężenie dodatnie, przy dowolnem pierwotnem odchyleniu, następuje zawsze w najniższem położeniu punktu.

5) Bezwzględnie największą dodatnią wartość otrzyma N, gdy $\cos \sigma = + \max$; a $\cos \sigma_0 = - \max$. Przypadek ten nastąpi, gdy $\sigma = 0$; a $\sigma_0 = 180^0$; t. j. bezwzględnie największe naprężenie nici następuje w położeniu pionowem, gdy punkt rozpoczął swój ruch z wierzchołka koła. Wartość ta równa się $5\ mg$; naprężenie więc nici w tych warunkach jest pięć razy większe od ciężaru punktu.

6) Ponieważ naprężenie wahadła, gdy punkt znajduje się na wierzchołku koła, jest odjemne, gdy zaś spadnie na spód koła jest dodatnie; przeto istnieć powinno miejsce, w którem $N = 0$. Oznaczymy to miejsce litera σ'; a obliczymy je z rów. 109-go, gdy, podstawimy w nie $N = 0$ oraz $\sigma_0 = 180^0$; a zatem mamy

$3 \cos \sigma' + 2 = 0$; skąd $\cos \sigma' = -\frac{2}{3}$; a $\sigma' \cong 180^0 - 48^0 \cong 132^0$.

Punkt więc, spadający z wierzchołka koła, wywołuje w położeniu $\sigma < 132^0$, siłę odporową, zwróconą ku środkowi koła; powyżej zaś tego miejsca wywołuje siłę odporową, zwróconą na zewnątrz koła.

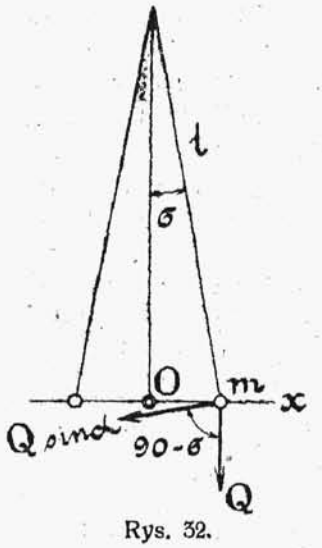
48. Bezpośredni sposób przybliżonego obliczenia ruchu wahadłowego. Przybliżone obliczenie ruchu wahadłowego, przeprowadzone w § 43-im, może być bezpośrednio zastosowane przy zestawieniu równania dynamicznego.

Przyjąwszy bowiem, że długość l jest dosyć wielka w porównaniu z kątem odchylenia σ_0, przyjąć możemy z pewnem przybliżeniem, że cząstka łuku, jaką zakreśla punkt, zlewa się ze styczną do tego łuku; t. j., przyjmiemy, że punkt przebiega po prostej x, rys. 32-gi. Siła przyśpieszająca punkt jest $Q \sin \sigma$; lub inaczej, po podstawieniu $\sin \sigma = \frac{x}{l}$, siła przyśpieszająca $= Q \frac{x}{l}$; równanie przeto dynamiczne ruchu jest następujące

$$- Q \frac{x}{l} = m \frac{dv}{dt},$$

z którego, po podstawieniu $Q = mg$ i po skróceniu przez m, otrzymamy

$$-x = \frac{l}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$



Rys. 32.

Równanie to pod względem algebraicznym jest jednakowe z rów. 18-em

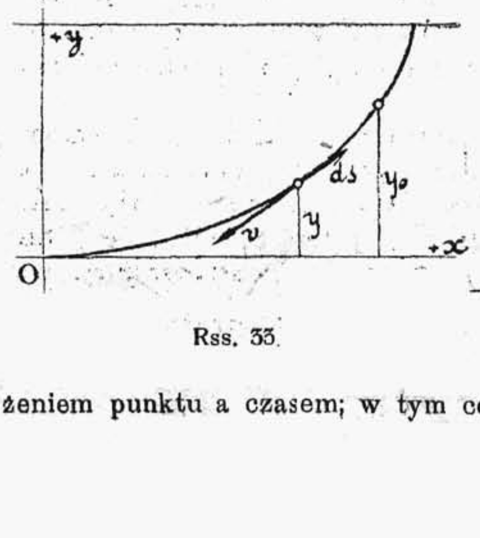
$$-x = \frac{m}{k} \frac{dv}{dt},$$

wyprowadzonem w § 7-ym, gdy podstawimy w nie $\frac{m}{k} = \frac{l}{g}$. Możemy przeto uniknąć całkowania tego równania, skorzystawszy bezpośrednio z wyników, poprzednio otrzymanych. Wzór np. podwójnego wahnięcia danego wahadła obliczymy z równ. 25-go

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

49. Ruch punktu po cykloidzie pospolitej. W ruchu wahadłowym, któryśmy opisali w poprzednim przykładzie, punkt materyalny zmuszony był przebiegać po kole, lecz może on również poruszać się po dowolnej krzywej; a metoda wyżej stosowana da się również zastosować do wszelkich przypadków ruchu po torze.

Przyjmijmy, że tor, po którym porusza się punkt materyalny pod działaniem siły ciążenia, jest cykloidą pospolitą, rys. 33-ci, i zestawmy równanie ruchu tego punktu.



Rss. 33.

Do rozwiązania tego zadania zastosujemy równanie pracy i napiszemy bezpośrednio

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)};$$

przyjmując, że punkt przesuwa się z miejsca, wyznaczonego przez spółrzędną y_0, do położenia y; rys. 33-ci.

Znajdźmy teraz równanie ruchu, wyrażające związek pomiędzy położeniem punktu a czasem; w tym celu podstawimy $v = -\frac{ds}{dt}$; a ponieważ z geometrycznych właściwości cykloidy wynika, że

$$ds = \sqrt{\frac{2r}{y}} \, . \, dy;$$

przeto po podstawieniu tej wartości w równanie prędkości, otrzymamy

$$-\frac{dy}{dt} \cdot \sqrt{\frac{2r}{y}} = \sqrt{2g(y_0 - y)}, \text{ skąd}$$

$$-\int_0^t dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y_0 y - y^2}}.$$

Przyjmując, dla $t = 0$, $y = y_0$ i całkując (Techn. tom I, str. 77, wzór 34), otrzymamy

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \left[\text{arc sin}\left(\frac{y_0 - 2y}{y_0}\right)\right]_{y_0}^{y} \quad \ldots \ldots \quad (111)$$

Jeżeli literą T oznaczymy okres podwójnego wahnięcia, to okres przejścia punktu z $y = y_0$, do $y = 0$, jest $\frac{1}{4} T$; a więc

$$\tfrac{1}{4} T = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\text{arc sin} \frac{y_0 - 2y}{y_0}\right]_{y_0}^{0};$$

a po podstawieniu

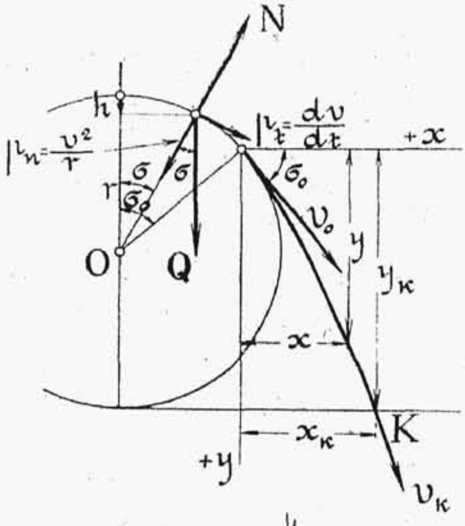
$$\tfrac{1}{4} T = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \pi \sqrt{\frac{r}{g}};$$

i wreszcie

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}; \text{ lub inaczej } T = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}} \quad \ldots \quad (112)$$

Ze wzoru tego wynika, że okres wahnięcia nie zależy od y_0, t. j. nie zależy od początkowego położenia punktu materyalnego. Gdy więc puścimy punkt materyalny z jakiegobądź miejsca cykloidy, okresy jego wachnięć będą jednakowe; ruch przeto wahadła cykloidalnego jest izochroniczny. Wynik ten możemy sobie w następujący sposób wytłomaczyć fizycznie. Gdy punkt dany opuścimy z wyższego miejsca cykloidy, wtedy spada on po torze więcej spadzistym, wskutek czego nabiera odrazu znacznej prędkości; gdy tymczasem puszczony z miejsca niżej położonego, w którem nachylenie toru jest więcej zbliżone do poziomu, poruszać się będzie wolniej. Punkt dany przebywa przeto dłuższą drogę z większą prędkością, drogę zaś krótszą z mniejszą prędkością w ten sposób, że okresy czasu, w jakich on przebywa te drogi, są wzajemnie równe. Izochronizm w danym razie jest przeto wynikiem postaci danego toru. Chcąc wyrazić tę właściwość, nazwano cykloidę tautochroną czyli krzywą jednakowych okresów czasu.

50. Spadanie punktu ciężkiego po kole. Na wierzchołku obwodu koła o porównaniu r, ustawionego pionowo, rys. 34-ty, umieszczono punkt materyalny o ciężarze Q, który pod działaniem swego ciężaru zsuwa się bez tarcia po obwodzie tego koła. Wyznaczyć miejsce, w którem dany punkt opuści obwód koła; i wyznaczyć miejsce w którem spadnie on na poziom, na którym stoi koło; oraz obliczyć prędkość, jaką on posiada w tem miejscu.



Rys. 35.

Przyjmujemy, że dany punkt wyprowadzony jest przez małe odchylenie ze stanu równowagi niestałej, w jakiej się znajduje na wierzchołku koła; po tem odchyleniu następuje ruch, wywołany siłą ciążenia. Punkt dany opuści obwód koła w tem miejscu, w którem siła odporowa równa się zeru i zmienia swój znak. Określmy dowolne położenie punktu na kole przez kąt środkowy σ, rys. 34-ty, i oznaczmy literą $+N$ siłę odporową, skierowaną na zewnątrz koła w miejscu zatem, w którem punkt ruchomy opuści obwód koła siła ta będzie $N = 0$, a przy dalszym ruchu zmieni swój znak. Zadanie więc polega na wyrażeniu siły N funkcyą spółrzędnej σ; a po przyrównaniu tej wartości do zera, otrzymamy równanie, z którego obliczymy szukany kąt, t. j., obliczymy spółrzędną σ_0 położenia, w którem punkt opuści obwód koła.

Na punkt dany działają siły $\bar{N}$ i $\bar{Q}$, które wywołują przyśpieszenie $\bar{p}$, mamy zatem równanie dynamiczne

$$\bar{N} + \bar{Q} = m\bar{p}.$$

Równanie szukane otrzymamy, rzutując to równanie na promień koła, zatem

$$N - Q \cos\sigma = m\frac{v^2}{r}.$$

W równaniu tem prędkość należy wyrazić spółrzędną σ i w tym celu zrzutujmy równanie dynamiczne na styczną, a otrzymamy szukany związek pomiędzy v i σ; lub zamiast tego równania napiszemy odrazu jego całkę w postaci równania pracy

$$Qh = \tfrac{1}{2} m v^2.$$

Podstawiwszy w nie $h = r(1 - \cos\sigma)$; $Q = mg$, otrzymamy

$$v^2 = 2gr(1 - \cos\sigma), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (113)$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy

$$N = Q\,(3 \cos \sigma - 2).$$

Kąt σ_0, przy którem $N = 0$, obliczymy z nast. równ. $\cos \sigma_0 = \frac{2}{3}$.

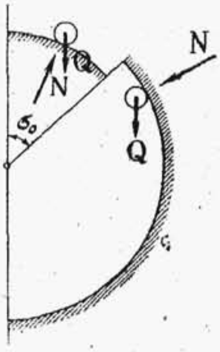
Prędkość v_0 w miejscu σ_0 obliczymy z równania 113-ego, podstawiwszy w nie $\cos \sigma = \cos \sigma_0 = \frac{2}{3}$; zatem prędkość $v^2_0 = \frac{2}{3}\, gr$; kierunek zaś jej jest styczny do koła. W miejscu, wyznaczonem kątem σ_0, z równania $\cos \sigma_0 = \frac{2}{3}$, punkt staje się swobodny, posiada prędkość v_0 i podlega działaniu tylko siły ciążenia, o ile nie uwzględnimy oporu powietrza.

W celu obliczenia miejsca, w którem punkt upadnie na poziom, przeprowadzimy przez punkt koła, wyznaczony kątem σ_0, dwie wzajemnie prostopadłe osi, rys. 34-ty, i podstawimy w równanie toru danego punktu, wyprowadzone na str. 46-tej, $y_k = r + r \cos \sigma_0 = \frac{5}{3}\, r$; a otrzymamy $x_k = (10 - \sqrt{10})\, \frac{2}{27}\, r \sqrt{2} \cong 0{,}716\ r$.

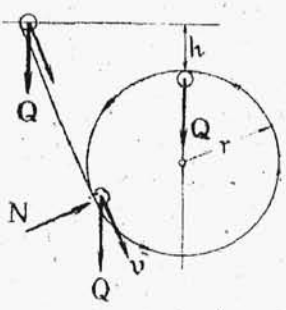
Wartość prędkości w miejscu K obliczymy z równania pracy, podstawiwszy $h = 2r$, $v_k = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gr}$.

Jeżeli zaś punkt ma nie spaść z obwodu koła, należy zbudować je w sposób wskazany na rys. 35-ym.

51. Zadanie. Punkt materyalny pod działaniem siły ciążenia spada z pewnej wysokości po torze prostym, do którego przytyka się koło



Rys. 35.



Rys. 36.

w ten sposób, że tworzy ono przedłużenie tego toru, rys. 36-ty. Obliczyć wzniesienie h ponad wierzchołkiem koła, z którego puszczony punkt nie spadnie z koła; nie uwzględniając tarcia i innych oporów, jakie powstają podczas ruchu.

W celu rozwiązania tego zadania postępujemy w tym przypadku, jak poprzednio; obliczymy siłę odporową N; wyznaczymy następnie miejsce na torze, w którem $N = 0$; i z tego równania obliczymy niewiadomą h Odpowiedź $h = \frac{1}{2}\, r$.

52. Ogólne rozpatrywanie ruchu punktu, będącego pod działaniem sił zewnętrznych, po danym torze krzywolinijnym w przestrzeni bez uwzględnienia sił oporowych. Przypadki szczególne tego ruchu rozpatrywaliśmy już w §§ poprzednich, badając ruch punktu, będącego pod działaniem siły ciężenia, po prostej, po kole i po cykloidzie; obecnie weźmiemy ogólny przypadek, gdy tor jest krzywy w przestrzeni, a siła, działająca na punkt, jest zmienna.

Ruch punktu po danym torze możemy fizycznie wywołać, gdy na tor, w postaci np. drutu bardzo gładkiego, nawleczemy bryłkę materyalną. Bryłka ta bowiem, pod działaniem przyłożonych do niej sił, będzie się wogóle ślizgać po drucie.

Jeżeli dany tor jest płaski, to można również wywołać ruch punktu po danym torze, gdy umocujemy ten punkt do końca nici zupełnie giętkiej, lecz nierozciągliwej i nić nawiniemy na ewolutę danej krzywej; podczas bowiem rozwijania się nici punkt zakreśli dany tor. Przykładem tego sposobu jest wahadło pospolite, którego ewolutą jest punkt; lub wahadło cykloidalne, którego ewelutą jest również cykloida. Jeżeli zaś tor jest krzywolinijny w przestrzeni, to, chociaż można wywołać ruch punktu po tym torze również za pomocą odwijania nici, sposób ten jednakże jest złożony. Zresztą, sposobów fizycznych, wywołujących ruch punktu po danym torze, może być bardzo wiele. Wogóle zaś uwidocznimy sobie ruch punktu po danym torze, ślizganiem się bryłki materyalnej, nawleczonej na odpowiednio wygięty drut.

Pod względem kinematycznym, ruch punktu po danym torze, posiada jeden stopień swobody; porów. tom II-gi § 31-szy; z trzech bowiem stopni swobody, jakie posiada każdy punkt swobodny, odejmujemy mu, dając tor, po którym on ma się poruszać, — dwa stopnie swobody. Jedna przeto spółrzędna, t. j. jedna niezależna zmienna, wyznacza położenie punktu na torze, a za tem droga, prędkość i przyśpieszenie danego punktu, oraz siła odporowa toru są funkcyami jednej tylko niezależnej zmiennej. Jaką wielkość obierzemy za tę niezależną zmienną, zależy od zadanie i wybór ten jest w zasadzie objętnym; udatny jednakże jej wybór wpływa znacznie na uproszczenie i przyjrzystość rachunku; na co należy zwrócić uwagę.

Jeżeli mamy w zadaniu wyznaczyć tylko ruch punktu, t. j. np. mamy obliczyć prędkość w funkcyi spółrzędnej, to do obliczenia tego ruchu wystarcza jedno tylko równanie; a tym równaniem może być równanie, wyrażające zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej; gdyż wartości sił odporowych, których nie znamy, nie wchodzą do tego równania.

Na punkt, który jest zmuszony poruszać się po danym torze, działa:

1) siła zewnętrzna $\bar{P}$, która może być uważaną za wypadkową wielu sił $\bar{P} = \Sigma \bar{P}_k$.

2) siła odporowa $\bar{N}$ toru. Siła ta, o ile nie uwzględniamy tarcia, znajduje się w płaszczyźnie normalnej do toru, przeprowadzonej w miejscu, w którem badamy ruch danego punktu; lecz nie znamy ani jej położenia (w tej płaszczyźnie), ani jej wielkości. W celu wyznaczenia położenia i wielkości tej siły, należy obliczyć np. dwa jej rzuty na osi spółrzędnych; które obierzemy w płaszczyźnie normalnej. W układzie zatem równań algebraicznych siła ta wyraża się dwiema niewiadomemi wielkościami. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące

$$\bar{P} + \bar{N} = m\bar{p} \quad \dots\dots\dots \quad (114)$$

Równanie to wektorowe, przekształcimy na algebraiczne, gdy zrzutujemy je na trzy dowolne osi; otrzymamy wtedy trzy równania algebraiczne, z których obliczyć można trzy niewiadome: prędkość i dwa rzuty siły odporowej; wyraziwszy je funkcyą obranej spółrzędnej niezależnej. Osi te, dla uproszczenia rachunku, obierzemy w sposób następujący:

jedną obierzemy po stycznej do toru, ze zwrotem dodatnim, zgodnym z ruchem punktu; oś tę oznaczymy literą t;

drugą, — którą oznaczymy literą n, obierzemy po głównej normalnej do toru z dodatnim zwrotem ku środkowi koła krzywizny; i

trzecią b (binormalną) obierzemy prostopadle do płaszczyzny dwóch poprzednich osi, t. j. prostopadle do płaszczyzny ściśle stycznej, w której leżą poprzednie dwie osi. Rzuty wektorów powyższego równania dynamicznego na te osi dają następujące trzy równania:

1) równanie rzutów sił na styczną

$$P_t = m\,\frac{dv}{dt}.$$

Równanie to zastąpić można pierwszą jego całką, wyrażającą równowartość pracy i energii kinetycznej; a zatem zastąpimy je równaniem

$$P_t \,.\, ds = d\left(\tfrac{1}{2}\,mv^2\right),$$

w którem ds oznacza cząstkę toru. Równanie to, gdy siły posiadają funkcyę sił, scałkujemy i wyrazimy prędkość funkcyą obranej spółrzędnej.

2) Równanie rzutów na normalną główną n, ma postać

$$P_n + N_n = m p_n;$$

w równaniu tem zgodnie ze wzorem 15-tym tomu II-go $p_n = \dfrac{v^2}{\rho}$; a ponieważ prędkość v obliczyliśmy już z poprzedniego równania, zaś ρ jest promieniem krzywizny, który może być obliczony z równania danego toru, przeto w równaniu tem jest tylko jedna niewiadoma N_n, t. j. rzut siły odporowej na główną normalną do toru.

3) Równanie rzutów na oś b jest następujące

$$P_b + N_b = 0;$$

z równania tego obliczymy rzut siły odporowej na tę oś; rzut bowiem P_b jest znany. Z dwóch zatem ostatnich równań obliczymy siłę odporową

$$\bar{N} = \bar{N}_n + \bar{N}_b; \text{ lub inaczej } N = \sqrt{N^2_n + N_b^2}; \text{ i t. d.}$$

W szczególnym przypadku, jeżeli tor jest płaski i siły leżą w jego płaszczyźnie, jak to było w przykładach np. z wahadłem kołowem i cykloidalnem, $P_b = 0$, a więc i $N_b = 0$; a siła odporowa, którą oznaczyliśmy, w tym przypadku, literą N

$$N = m\frac{v^2}{\rho} - P_n.$$

53. Ruch punktu po danym torze z tarciem. Wielkość siły tarcia w następujących rachunkach przyjmujemy równą iloczynowi z siły normalnej do toru i spółczynnika tarcia, właściwego trącym się ciałom. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące

$$\bar{P} + \bar{N} + \bar{W} = m\bar{p},$$

w którem siła $W = \mu . N$; a μ oznacza spółczynniki tarcia; siła ta jest styczną do toru ze zwrotem przeciwnym zwrotowi prędkości punktu poruszającego się. Zrzutujmy to równanie wektorowe na osi, przyjęte w paragrafie poprzednim, a otrzymamy równania

1) $P_t - \mu . N = m\dfrac{dv}{dt}$; lub w postaci równania pracy;

$$(P_t - \mu . N)\, ds = d\,(\tfrac{1}{2}\, mv^2); \text{ następnie}$$

2) $P_n + N_n = m\dfrac{v^2}{\rho}$;

3) $P_b + N_b = 0.$

Przy obliczeniu tarcia należy wziąć po uwagę, że $N = \sqrt{N^2_n + N^2_b}$.

Równania te różnią się od poprzednich tem, że w równanie pracy, któreśmy napisali zamiast rzutów sił na styczną, wchodzi obecnie wielkość siły odporowej.

Ogólna jednakże ilość równań oraz niewiadomych nie zmieniła się; jedynie rachunek nie jest tak prosty, jak poprzednio, wskutek tego, że wielkości rzutów niewiadomej siły N wchodzą we wszystkie trzy równania.

Dla wahadła np. płaskiego, dla którego $N_b = P_b = 0$, otrzymamy następujące równania dynamiczne

1) $-mgl \sin \sigma \, d\sigma - \mu . Nl d\sigma = d \left(\frac{1}{2} mv^2\right)$; oraz

2) $N - mg \cos \sigma = \frac{mv^2}{l}$.

Są to dwa równania z dwiema niewiadomemi N i v; które wyrazić można funkcyą spółrzędnej σ. Po wyrugowaniu np. wartości N z drugiego równania i po podstawieniu jej do pierwszego, otrzymamy równanie

$$- mgl \sin \sigma \, . \, d\sigma - \mu \left(\frac{mv^2}{l} + mg \cos \sigma \right) l d\sigma = d \left(\frac{1}{2} m v^2\right);$$

a po jego scałkowaniu otrzymamy szukaną zależność pomiędzy v i σ. Całkowanie tego równania można wykonać, po zastosowaniu pewnych podstawień. Przeprowadzenie tego rachunku, które tu pominę, znajdzie czytelnik między innemi w „Mechanice" Autenritt'a [1]).

Jeżeli siła P nie leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru, jak w powyższym przykładzie; to składowa N_b posiada pewną skończoną wartość; a siła odporowa

$$N = \sqrt{N^2_n + N^2_b}.$$

Wyraz ten wchodzi do równania dynamicznego i doprowadza wogóle całkę jego do funkcyi eliptycznej, której analiza jest nadzwyczaj zawiłą i przytem mało znaną.

Wobec tego uprościmy równanie różniczkowe, gdy zastąpimy wyraz

$$\sqrt{N^2_n + N^2_b} \text{ wyrazem } \alpha N_n + \beta N_b,$$

którego liczbowa wartość niewiele różni się od wartości wyrazu ścisłego. Można dowieść, lub sprawdzić drogą prób, że jeżeli

$$\alpha = 0{,}961, \text{ oraz } \beta = 0{,}398;$$

to największa różnica pomiędzy wartością ścisłą, a przybliżoną nieprzekracza 4%; a zważywszy jeszcze, że wartość ta w równaniu dynamicznem jest pomnożoną przez spółczynnik tarcia, który w ogóle jest < 1. a w mechanizmach udoskonalonych bywa doprowadzony do bardzo małego ułamka, możemy stosować wyraz przybliżony bez obawy uczynienia jakiejś dostrzegalnej niedokładności.

Przybliżone wzory tego rodzaju podaje „Technik" na str. 45-tej, pod № 16, 17, 18-tym, z których można korzystać i w innych tego rodzaju przypadkach.

---

[1]) W polskiem tłomaczeniu inż. St. Patschkego, str. 324.

W razie ruchu punktu po torze z oporem, proporcyonalnym do wartości pewnej funkcyi z prędkości, postępowanie rachunkowe, wyżej wyłożone, się nie zmieni, przybędzie tylko w równaniu pracy cząstkowej jeden wyraz siły, przedstawiony funkcyą prędkości; lecz to nie zmieni ogólnej postaci równania różniczkowego; zmieni tylko sposób jego całkowania

D. Ruch punktu materyalnego po danej powierzchni.

54. Ruch punktu po powierzchni bez oporów. Punkt materyalny, poruszający się po danej powierzchni, posiada dwa stopnie swobody; dwiema zatem spółrzędnemi niezależnemi wyrazimy ruch punktu oraz siły odporowe powierzchni. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące

$$\bar{P} + \bar{N} = m\bar{p}.$$

Siła odporowa N, wobec gładkości powierzchni, jest normalną do niej; kierunek jej jest więc znany; nieznaną jest tylko jej wielkość; siła ta przedstawia przeto jedną algebraiczną niewiadomą. Ponieważ tor, jest nieznany co do swej postaci, przeto i przyśpieszenie punktu podczas ruchu jest nam nieznane ani co do kierunku, ani co do wielkości. Przyśpieszenie to przedstawia jednakże tylko pozornie trzy algebraiczne niewiadome; jest ono bowiem uwarunkowane postacią powierzchni, po której punkt się porusza; a warunek ten wyrazimy równaniem powierzchni. Mamy przeto w danem zadaniu cztery niewiadome, a dla ich wyliczenia jedno równanie dynamiczne w postaci wektorowej, oraz jedno równanie algebraiczne, określające daną powierzchnię. W celu obliczenia tych niewiadomych, stosujemy wogóle metodę rzutów na trzy osi prostokątne x, y, z; dowolnie obrane w przestrzeni. Rzuty wektorów równania dynamicznego na te osi dają następujące trzy równania

1) $P_x + N_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$;

2) $P_y + N_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$;

3) $P_z + N_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2}$;

Równanie zaś powierzchni jest następujące

4) $f(x, y, z) = 0$.

Są to cztery wyżej omówione równania. Ponieważ jednakże jedną niewiadomą N wyraziliśmy, ze względów rachunkowych, trzema jej rzu-