W szczególnym przypadku, gdy $v_0 = 0$, wtedy $x = 0$, niezależnie od czasu, t. j. punkt ruchomy, umieszczony bez prędkości początkowej w środku przyciągania, pozostaje w spoczynku; co jest fizycznie zrozumiałem.

Porównywując równanie dynamiczne tego zadania (równ. 27-me) z takimże równaniem zadania poprzedniego (równ. 22-gie) zauważymy, że różnią się one tylko znakiem przy wielkości $k$. Całkę zatem równ. 27-ego otrzymamy z całki równ. 22-ego, gdy podstawimy w nie $k = -k$, czyli $\sqrt{k} = i\sqrt{k}$, gdzie $i = \sqrt{-1}$; tem równaniem jest nast.

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{i} \sin\left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\, i\right).$$

W celu usunięcia z niego wielkości urojonych, skorzystamy z ogólnego wzoru

$$\sin(i\alpha) = i\,\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2};$$

(„Technik" I str. 68, wzór 6-ty), i otrzymamy równ. 31-sze.

Można również dojść do całki równania postaci ogólnej

$$\frac{d^2x}{dt^2} + qx = 0; \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

podstawiając w nie

$$x = A\cos(t\sqrt{q}) + B\sin(t\sqrt{q});$$

lub

$$x = Ae^{t\sqrt{q}} + Be^{-t\sqrt{q}};$$

lub

$$x = \alpha.\cos(t\sqrt{q} + \beta),$$

a po obliczeniu stałych $A$ i $B$ lub $\alpha$ i $\beta$ z początkowych warunków zadania, otrzymamy powyższe całki.

**9. Ruch harmoniczny zanikający.** Z warunków podanego powyżej zadania wynika, że ruch harmoniczny, gdy został raz wywołany, powinien trwać do nieskończoności; gdyż dla każdej wartości $t$ otrzymamy zawsze z równania ruchu wartość skończoną zmiennej $x$. W rzeczywistości jednakże przypadek taki nie zachodzi, ruch bowiem np. pręta sprężystego, wprowadzonego w ruch okresowy, po upływie pewnego czasu, zanika.

Wzór więc ruchu, wyżej wyprowadzony, nie jest zgodny z rzeczywistością, a przyczyną tego jest pominięcie, przy wprowadzeniu tego wzoru, pewnych warunków fizycznych, w jakich odbywa się dany ruch. W przykładzie powyższym założyliśmy pewne warunki, na których podstawie obliczyliśmy równanie ruchu, i daje ono wyniki, zgodne z tymi warunkami. Stawiając sobie jednakże zadanie obliczenia ruchu punktu materyalnego, umocowanego na końcu sprężystego pręta, powinniśmy wniknąć w dany mechanizm, zbadać wszystkie czynniki fizyczne, jakie podczas ruchu występują, i ująć je rachunkiem.

Doświadczenie nas uczy, że ciała fizyczne nie są zupełnie sprężyste, i że po odkształceniu niezupełnie powracają do stanu pierwotnego; warunek ten należy przeto ująć rachunkiem. Następnie należy wziąć pod uwagę, że ruch sprężyny odbywa się w powietrzu, które przedstawia pewien opór drgającemu prętowi i poruszającej się masie; wstrzymuje on zatem drgania sprężyny. W jaki sposób wprowadzić te opory do rachunku, zależy od wyników badań, które należy przeprowadzić. W tym rachunku przyjmiemy, że wszystkie opory łącznie, które przeciwdziałają ruchowi, są proporcyonalne do prędkości punktu ruchomego i że kierunek ich wypadkowej pokrywa się z kierunkiem prędkości punktu ruchomego, zwrot zaś jej jest przeciwny zwrotowi prędkości. Siłę więc, przyśpieszającą dany punkt, wyrazimy wzorem

$$-\left(kx+c\frac{dx}{dt}\right),$$

w którym $c$ jest spółczynnikiem oporu środowiska, $k$—zaś, jak poprzednio, jest spółczynnikiem proporcyonalności siły przyciągającej.

Równanie dynamiczne danego ruchu jest zatem następujące

$$-\left(kx+c\frac{dx}{dt}\right)=m\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

lub w innej postaci, którą otrzymamy po podstawieniu $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$ i po uporządkowaniu wyrazów

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Z równań 33-ego lub 34-ego, po ich scałkowaniu, można wysnuć, drogą analizy algebraicznej, właściwości danego ruchu; zanim jednakże do tego przystąpimy, zanalizujemy to równanie w postaci różniczkowej, przedstawionej równaniem 33-em. W celu unaocznienia sobie danego ruchu przyjmijmy, że punkt ruchomy w chwili, gdy znajdował się w położeniu równowagi, otrzymał, za pomocą np. uderzenia pewną prędkość $v_0$; wskutek czego, gdyby na niego nie działały żadne siły, poruszałby się on, zgodnie z prawem bezwładności, ruchem jednostajnym i prostolinijnym; ponieważ jednakże działają na niego siły $kx$ i $c\frac{dx}{dt}$, obydwie zwrócone ku środkowi przyciągania, (gdy punkt oddala się od środka), to ruch tego punktu będzie zwolniony. Wynikiem tego działania mogą być dwa przypadki: punkt ten, oddalając się od środka, może zatrzymać się na pewnej skończonej odległości od środka przyciągania; lub też może on ruchem zwalniającym biedz do nieskończoności.

Ażeby rozstrzygnąć, który z tych przypadków zachodzi w naszym przykładzie, weźmy pod uwagę równ. 21-sze, z którego odczytamy, że w przypadku ruchu punktu przyciąganego proporcyonalnie do odległości, lecz bez oporu środowiska, zatrzyma się on na pewnej skończonej odległości. W danym zatem przykładzie, w którym oprócz siły przyciągającej występuje jeszcze opór środowiska, siła, wstrzymująca punkt w ruchu, jest większą niż w przykładzie bez oporu; punkt zatem tembardziej zatrzyma się na pewnej odległości od środka. Gdy następnie punkt dany dosięgnie tego położenia, wtedy pod działaniem siły przyciągającej, zacznie się on wracać ku środkowi z przyśpieszeniem, jakie nadadzą mu siły nań działające. Sił tych jest dwie: siła przyciągająca ku środkowi i siła oporu środowiska, odwrócona od tego środka. W miarę zbliżania się punktu ku środkowi, siła przyciągająca, zgodnie z warunkami danego zadania,—maleje; siła zaś oporu wzrasta lub maleje, zależnie od tego czy prędkość punktu powiększa się, czy też się zmniejsza. Wskutek przewagi jednej z tych sił nad drugą mogą nastąpić dwa rodzaje ruchu punktu: albo punkt, doszedłszy do środka, posiada jeszcze nabytą prędkość i w takim razie przejdzie na drugą stronę środka, ażeby znów powrócić do niego; lub też siła oporu środowiska jest tak wielką, że mogłaby zatrzymać punkt dany w ruchu; gdyby nie działała na niego siła przyciągania, która, choć jest znikomo mała w blizkości środka, nadaje jednakże punktowi ruch ku środkowi. W tym przypadku punkt posiadać zawsze będzie pewną prędkość, której wartość niewiele może różnić się od zera, czyli punkt zbliżać się będzie do środka nadzwyczaj wolno; co się wyrazi matematycznie nieskończenie długim okresem. Rodzaj zatem ruchu danego punktu zależy od wielkości siły przyciągającej, t. j. od spóczynnika $k$, od wielkości siły oporu, t. j. od spółczynnika $c$, i od masy $m$; od wielkości bowiem masy zależy wielkość prędkości, jakie wywołują jednakowe siły w jednakowych okresach czasu.

Ażeby ustalić ilościowo warunki, w jakich zachodzą te przypadki ruchu, znajdźmy całkę równania 34-go i zanalizujmy je.

Teorya równań różniczkowych daje sposoby całkowania, które, ściśle biorąc, polegają po większej części na odnalezieniu funkcji niezależnie zmiennej, jak w naszym przypadku $x = f(t)$, którąby, podstawiona w równanie różniczkowe, zamieniła je identycznie w zero przy wszelkich wartościach tej zmiennej. W danym przeto razie $x$ należy wyrazić taką funkcyą z $t$, której pochodne oraz jej wartość, podstawiona w równanie różniczkowe 34-te, zamieniłaby je w zero przy wszelkich wartościach zmiennej $t$. Przy wyborze tej funkcji powodować się można charakterem ruchu, który w przybliżeniu określiliśmy już poprzednio. Na zasadzie tych rozpatrywań funkcya w równaniu $x=f(t)$, powinna mieć tę właściwość, ażeby wartość jej przy pewnych warunkach zadania dla $t=\infty$ zbliżała się do zera (przypadek 1-szy poprzednich rozpatrywań), przy innych zaś warunkach, żeby była okresową; (przypadek 2-gi). Funkcyą taką jest funkcya wykładnicza ogólnej postaci $\alpha e^{\rho t}$; dla rzeczywistej bowiem wartości spółczynników $\rho$ i $\alpha$, gdy przytem $\rho$ jest odjemna, odpowiada ona warunkowi pierwszemu; dla urojonych zaś spółczynników $\alpha$ i $\rho$ zamieni się ona na funkcyę okresową. Podstawmy zatem w równanie 34-te

$$x=\alpha e^{\rho t},$$

gdzie $\alpha$ i $\rho$ są jeszcze nieokreślone spółczynniki, i zbadajmy, przy jakich wartościach funkcya ta zamieni równ. 34-te identycznie w zero. W tym celu podstawmy tę funkcyę, oraz jej pochodne w równanie 34-te, a otrzymamy:

$$e^{\rho t}\,(m\rho^2+c\rho+k)=0.$$

Równanie to zamieni się w zero przy wszelkich wartościach dla $t$, jeżeli wyraz

$$m\rho^2+c\rho+k=0;$$

ażeby to nastąpiło, powinno być

$$\rho=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}.$$

Przyjmując te dwie wartości dla $\rho$, otrzymamy dwie całki szczególne, wyrażające dwa szczególne ruchy danego punktu. Z wartości tych na zasadzie odnośnego twierdzenia z teoryi całek, napiszemy całkę zupełną równania 34-go w następującej postaci

$$x=Ae^{\left(-\frac{c}{2m}+\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t}+Be^{\left(-\frac{c}{m}-\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t}\quad\ldots\quad(35)$$

Wartości spółczynników $A$ i $B$ obliczymy z początkowych warunków zadania.

Równanie to przedstawia dwojakiego rodzaju ruch, jakieśmy to już przewidzieli, zależnie od tego, czy wartość pod pierwiastkiem jest rzeczywistą, czy też urojoną. Jeżeli jest ona rzeczywistą, to $x$ zostaje wyrażone funkcyą wykładniczą, której wykładnik jest proporcyonalny do $t$. Ażeby ten przypadek nastąpił, powinno być

$$\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0;$$

lub inaczej

$$c^2 > 4\,km.$$

Ażeby zbadać ten ruch, obliczymy stałe $A$ i $B$ i w tym celu przyjmiemy następujące warunki ruchu początkowego, dla

$$t = 0; \qquad x = 0; \qquad v = v_0;$$

t. j. przyjmiemy początek liczenia czasu w chwili, w której punkt ruchomy znajduje się w środku przyciągania i posiada w tem miejscu prędkość $v_0$. Unaocznić sobie możemy te warunki w ten sposób, że punkt ruchomy, będący w położeniu równowagi, otrzymuje np. zapomocą uderzenia prędkość $v_0$.

Po podstawieniu w równanie 35-te wartości $t = 0$: $x = 0$, otrzymamy

$$0 = A + B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

W celu zaś podstawienia $t = 0$; $v = v_0$ obliczymy prędkość punktu, zróżniczkowawszy równ. 35-te względem $t$ i następnie podstawiwszy w nie $t = 0$, oraz $v = v_0$; po wykonaniu tych działań otrzymamy

$$v_0 = A\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right) + B\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right) \quad . \quad (37)$$

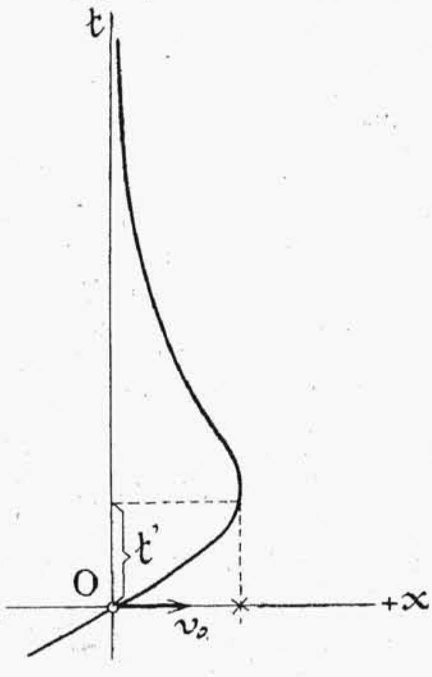
Z tych dwóch równań obliczymy spółczynniki $A$ i $B$; i oznaczywszy dla skrócenia wartość wyrazu $\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ literą $\gamma$, otrzymamy

$$A = \frac{v_0}{2\gamma}; \quad \text{oraz} \quad B = -\frac{v_0}{2\gamma};$$

a następnie, po podstawieniu tych wartości w równ. 35-te, otrzymamy równanie ruchu, wykazujące związek pomiędzy położeniem punktu i czasem; równanie to jest następujące

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{c}{2m}t} \, . \, (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Dla $t = 0$ otrzymamy $x = 0$; co jest zgodne z warunkami początkowego ruchu. Dla $t > 0$, $x$ otrzymuje wartość dodatnią, której znak nie zmienia się z rosnącem $t$, wartość bowiem wyrazu $e^{-\gamma t}$ dla $t > 0$ jest zawsze mniejszą od jedności, gdy tymczasem wartość wyrazu $e^{\gamma t}$ jest zawsze większą od jedności. Dla $t = \infty$ otrzymamy znów $x = 0$, albowiem $\frac{c}{2m} > \sqrt{\frac{c}{4m^2} - \frac{k}{m}}$, t. j. $\frac{c}{2m} > \gamma$. Punkt zatem od $t=0$ do chwili $t = \infty$, znajduje się po jednej stronie środka przyciągania; ruch jego jest zatem nieokresowy i punkt powraca asymptotycznie do położenia równowagi i z niego już nie wychodzi. Wykres $(x, t)$ tego ruchu przedstawiony jest na rys. 7-ym.



Rys. 7

Dla różnych wartości $t$ pomiędzy 0 i $\infty$, $x$ w równaniu 38-em przyjmuje różne wartości, co znaczy, że punkt zajmuje różne oddalenia od środka przyciągania. Pomiędzy temi oddaleniami są największe i najmniejsze; ażeby je obliczyć, zastosujemy prawidła do wyszukiwania największości i najmniejszości; i w tym celu pochodną $x$ względem $t$ przyrównamy do zera. Pochodna ta wyraża jednocześnie właściwość kinematyczną danego ruchu, t. j. że prędkość punktu w miejscu najmniejszego, lub największego oddalenia $= 0$. Z równania zatem, w tem sposób otrzymanego, obliczymy czas $t$, odpowiadający tym odchyleniom; a po podstawieniu tych wartości w równ. 38-me, obliczymy szukane oddalenia. Po wykonaniu rachunku powinniśmy otrzymać dla $x$ wartości 0 oraz $x_{\max}$.

Przypadek takiego ruchu unaocznimy sobie, przyjąwszy np., że punkt ruchomy, oraz środek przyciągający jest umieszczony w płynie bardzo gęstym, gdy bowiem w tych warunkach nadamy punktowi prędkość $v_0$, np uderzeniem, wtedy wychyli się on na pewną odległość, następnie zacznie powracać do miejsca wyjścia, lecz znaczny opór środowiska, w którem się punkt porusza,

$$c^2 > 4\,mk,$$

nie pozwoli mu powrócić do środka przyciągania w skończonym okresie czasu. Jeżeli opór środowiska o tyle zmniejszymy, że

$$c^2 < 4\,mk,$$

co można osiągnąć np. rozrzedzeniem środowiska, w którem porusza się punkt ruchomy, to otrzymamy wartość pod pierwiastkiem urojoną.

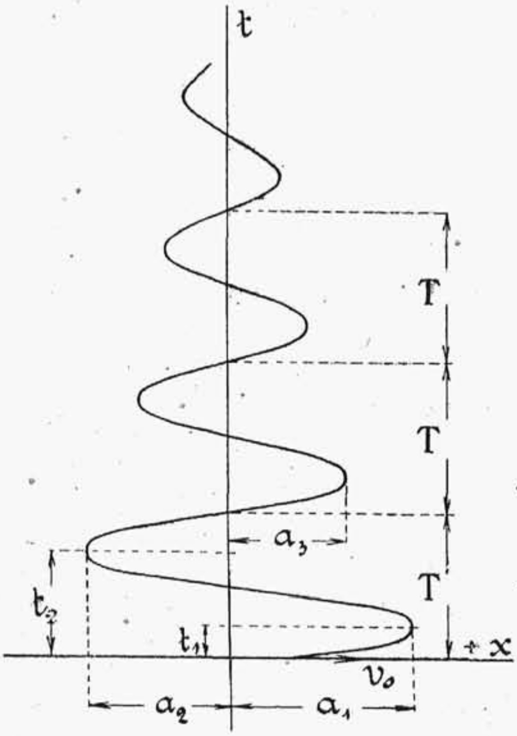
W celu zbadania tego ruchu, oznaczymy wartość pierwiastka $\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$ przez $\gamma'$, t. j. podstawimy w powyższe wzory $\gamma = i\gamma'$, a po podstawieniu tej wartości w równ. 38-me otrzymamy równanie

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \frac{e^{i\gamma' t} - e^{i\gamma' t}}{2i}.$$

Wyraz urojony, na zasadzie odpowiednich przekształceń, wyłożonych w analizie matematycznej, zastąpimy wyrazem $\sin(\gamma' t)$ i otrzymamy równanie ruchu dla danego przypadku w następującej postaci

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\gamma' t) \quad . \quad (39)$$

W równaniu tem posiadamy dwa czynniki ze zmienną $t$: czynnik $e^{-\frac{c}{2m}t}$, który z powiększeniem $t$ maleje, i czynnik $\sin(\gamma' t)$, który jest funkcją okresową; iloczyn więc tych czynników przedstawia krzywą okresową (w danym razie sinusoidę), której spółrzędne $x$ maleją ze wzrostem czasu. Ruch taki nazywamy ruchem harmonicznym przytłumionym. Wykres $(x, t)$ tego ruchu jest przedstawiony na rys. 8-mym.



Rys. 8.

Zbadamy obecnie, czy ruch ten jest izochronicznym. W tym celu obliczymy okres podwójnego wahnięcia $T$. Wartość tego okresu otrzymamy z równ. 39-go, po podstawieniu w nie $x = 0$, a zatem

$$\sin(\gamma' T) = 0, \quad \text{z którego} \quad (\gamma' T) = n\pi.$$

Dla podwójnego wahnięcia $n = 2$, a zatem

$$T = \frac{2\pi}{\gamma'},$$

lub też po podstawieniu wartości $\gamma'$

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mk - c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Wartość ta nie zależy od odchylenia, a zależy tylko od spółczynników $k$ i $c$; ruch zatem harmoniczny przytłumiony jest izochroniczny.

Łatwo sprawdzić, że dla $c=0$, okres podwójnego wahnięcia przybierze wartość, wyrażoną równ. 25-em.

Z równania powyższego wynika, że okres podwójnego wahnięcia w środowisku z oporem jest większy, niż takiż okres ruchu bez oporu, co też zgodne jest z fizycznem pojmowaniem danego zjawiska.

Ażeby obliczyć największe odchylenie punktu, należy przyrównać pochodną $x$ względem $t$ do zera; a z tego równania obliczymy czas, w którym punkt dany doznaje największego odchylenia. Czas ten oznaczymy literą $t_m$; ($m$ — maximum) i obliczymy je z nast. równania

$$\frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m} tm} \left[ \gamma' \cos(\gamma' t_m) - \frac{c}{2m} \sin(\gamma' t_m) \right] = 0;$$

które jest pochodną równ. 39-go. Z równania tego mamy:

$$tg(\gamma' t_m) = \frac{2m\gamma'}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

a więc

$$t_m = \frac{artg\left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)}{\gamma'} + \frac{n\pi}{\gamma'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

gdzie kolejno $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ Z równania tego wyprowadzamy wniosek, że największe odchylenie punktu powtarza się w odstępach czasu, równych liczbowo wartości $\frac{\pi}{\gamma'}$; które są równe $\frac{1}{2}T$, t. j. połowie podwójnego wahnięcia.

Jeżeli czas pierwszego odchylenia punktu oznaczymy literą $t_1$, to z powyższego równania mamy

$$t_1 = \frac{artg\left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)}{\gamma'},$$

a czas następnych odchyleń

$$t_m = t_1 + n \cdot \tfrac{1}{2} T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Ażeby obliczyć największe odchylenie, które oznaczymy literą $a_m$, podstawmy wartość $t_m$ z równ. 41-ego w równ. 39 te, a otrzymamy szukane odchylenie. W tym celu z równ. 41 ego obliczymy

$$\sin(\gamma' t_m) = \frac{\frac{2m}{c}\gamma'}{\sqrt{1+\left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)^2}} = \frac{2m\gamma'}{\sqrt{c^2+(2m\gamma')^2}},$$

a po podstawieniu tej wartości w rów. 39-te, oraz po podstawieniu odnośnej wartości $\gamma'$, otrzymamy

$$a_m = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot e^{-\frac{c}{2m}(t_1 + n \cdot {}^1/_2 T)}.$$

Dla pierwszego odchylenia, które oznaczymy literą $a_1$; $n = 0$; a zatem

$$a_1 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot e^{-\frac{c}{2m} t_1},$$

a następnie, odchylenie dowolne

$$a_m = a_1 \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot n \cdot {}^1/_2 T} \quad \dots\dots\dots \quad (44)$$

Z równania tego odczytamy, że wartości odchyleń danego punktu tworzą szereg geometryczny, którego wykładnikiem jest wyraz

$$e^{-\frac{c}{2m} {}^1/_2 T}.$$

Z powiększeniem przeto ilości wahnięć odchylenia maleją w ten sposób, że dla $n = \infty$; $a_m = 0$; i maleją o tyle prędzej, o ile wartość $c$ jest większą, t. j. o ile dane środowisko przedstawia większy opór poruszającemu się punktowi. Punkt ruchomy waha się więc w danych warunkach około środka i zakreśla coraz mniejsze odchylenia.

Przyjąwszy $c = 0$ t. j. przyjąwszy, że punkt ruchomy nie doznaje oporu, otrzymamy równanie, któreśmy już poprzednio wyprowadzili. Uczyniwszy zaś $c = \infty$, powinniśmy dla $x$ otrzymać wartość stałą i niezależną od $t$; przy tak wielkim bowiem oporze ruch nie następuje. Wykres $(x, t)$, oraz wszystkie obliczone w tym przykładzie wielkości są przedstawione na rys. 8-tym.

**10. Przykład ruchu harmonicznego.** Każdy ruch wogóle, a więc i ruch harmoniczny, może być wywołany w rozmaity sposób. Przytoczymy jeden z tych przypadków i wskażemy w jaki sposób stosować do obliczeń wzory, wyprowadzone w poprzednim paragrafie.

W rurce o stałym przekroju, wygiętej w postaci litery $U$, znajduje się płyn; którego powierzchnia, w stanie spoczynku, tworzy poziom, oznaczony literą $y$. Jeżeli w jednym końcu tej rurki płyn wepchniemy na głębokość $x$ niżej tego poziomu, to w drugim jej końcu podniesie się on na wysokość $x$. W tem położeniu płynu powstaje siła $P$, która pcha całą masę $m$ płynu do pierwotnego poziomu; siła ta równa się ciężarowi słupa płynu o wysokści $2\,x$. Oznaczywszy literą $f$ przekrój rurki, literą $\delta$ ciężar właściwy poruszającego się płynu, otrzymamy, że siła $P = 2xf\delta$ działa odwrotnie dodatniemu zwrotowi prędkości. Równanie zatem dynamiczne ruchu każdego punktu płynu jest następujące

$$-2\,xf\delta = m\,\frac{dv}{dt}.$$

Jeżeli literą $l$ oznaczymy długość rurki, napełnionej płynem, to masa poruszająca się $m = \frac{lf\delta}{g}$; po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy

$$-2xf\delta = \frac{lf\delta}{g}\cdot\frac{dv}{dt};$$

a po skróceniu

$$-x = \frac{l}{2g}\cdot\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Jest to równanie jednakowe z równ. 18-em, gdy podstawimy w nie $\frac{m}{k} = \frac{l}{2g}$. Wahanie się zatem słupa płynu jest harmoniczne, a więc i izochroniczne. Okres podwójnego wahnięcia $T$ obliczymy, gdy podstawimy w równ. 18-te iloraz $\frac{m}{k} = \frac{l}{2g}$; a zatem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Sprawdźmy obecnie wymiar wzoru tego; w tym celu podstawimy

$$l = L;\ g = LT^{-2};$$

a zatem wyraz

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = T = \text{(czasowi)};$$

co jest zgodne z wymiarem wielkości, znajdującej się po lewej stronie powyższego równania.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę opór, jakiego doznaje płyn podczas wahania się w rurce, i jezeli ten opór przyjmiewy proporcyonalnym do pierwszej potęgi prędkości, to do obliczenia ruchu można zastosować wzory, wyprowadzone w paragrafie poprzednim dla ruchu harmonicznego przytłumionego.

**11. Zastosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej.** Z równania dynamicznego ruchu prostolinijnego

$$P = m\,\frac{dv}{dt};$$

po podstawieniu w nie $dt = \frac{ds}{v}$, otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy siłą, spółrzędną punktu i wywołaną przez tę siłę prędkością; równanie to ma postać następującą

$$Pds = d\,(^1/_2\, m\, v^2);$$

i jest wyrazem równowartości i energii kinetycznej; porówn. tom I-szy, § 100-ny, rów. 68-me.

Równanie zatem równowartości pracy i energi kinetycznej jest pierwszą całką równania dynamicznego i wykazuje związek pomiędzy położeniem, t. j. pomiędzy **spółrzędną** punktu ruchomego i **prędkością** jego w miejscu, wskazanem przez tę spółrzędną. Zasada zatem równowartości pracy i energii kinetycznej w mechanice jest inną tylko postacią określenia dynamicznego siły. Siła wyraża zmianę prędkości punktu, na który działa; praca zaś wyraża zmianę wartości pewnej funkcyi tej prędkości, t. j. wyraża zmianę wartości $\frac{1}{2}\, mv^2$; pojęcia przeto siły i pracy wyrażają w innej tylko postaci matematycznej zmianę prędkości punktu, jaką on posiada w pewnej chwili swego ruchu. W następnych przykładach wskażemy sposoby stosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej do obliczenia ruchu punktu.

**Przykład.** Przy spadaniu pionowem, bez uwzględnienia oporu powietrza, gdy przyjmiemy oś $x$ skierowaną pionową ku dołowi, napiszemy równanie pracy

$$mgdx = d\,(\tfrac{1}{2}\, mv^2).$$

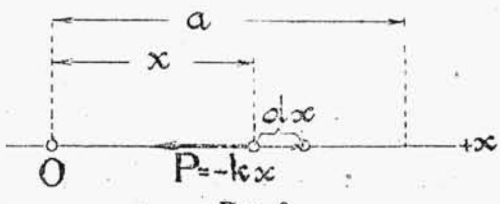
Gdy punkt ruchomy, w chwili rozpoczęcia mierzenia drogi $x$, posiada prędkość $v_0$, wtedy całka powyższego równania jest następująca

$$mg \int_0^x dx = \tfrac{1}{2}\, m \int_{v_0}^{v} d\,(v^2);$$

skąd po scałkowaniu

$$x = \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2_0}{2g};$$

jest to równanie jednakowe z rów. 12-tem.



Rys. 9.

**Przykład.** W razie ruchu harmonicznego, po wykonaniu nieskończenie małego przesunięcia $dx$, rys. 9-ty, wyrazimy zasadę pracy równaniem

$$-kxdx = d\,(\tfrac{1}{2}\, mv^2).$$

Całkując je od $x$ do $a$ oraz od $v$ do 0, napiszemy

$$-\int_x^a kxdx = \int_v^0 d\,(\tfrac{1}{2}\, mv^2);$$

a po scałkowaniu

$$- \tfrac{1}{2} ka^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = - \tfrac{1}{2} mv^2; \text{ skąd}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

jest to równanie jednakowe z rów. 19-tem.

Jeżeli zaś mamy daną prędkość $v_m$ w środku przyciągania, to granice całki obierzemy dla $x$ od zera do $x$; dla prędkości zaś od $v_m$ do $v$ a po scałkowaniu otrzymamy

$$- \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_m^2; \text{ skąd}$$

$$v = \pm \sqrt{v_m^2 - \frac{k}{m} x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

W celu obliczenia największego odchylenia $a$, podstawimy w równ. poprzednie $v = 0$, a otrzymamy $a = v_m \sqrt{\frac{m}{k}}$; — jak poprzednio.

W przykładzie odpychania, rów. 28-me wyraża równowartość pracy i energii kinetycznej i może być napisane bezpośrednio na podstawie tego twierdzenia.

**Przykład.** Punkt materyalny jest przyciągany przez pewien środek siłą odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi odległości. Obliczyć na podstawie twierdzenia pracy ruch punktu, gdy dane jest odchylenie początkowe $a$ i prędkość w niem $v = 0$. W celu zestawienia równania pracy, wyobraźmy sobie, iż punkt dany został przesunięty z miejsca $x$ wzdłuż cząstki drogi $dx$; a po przyrównaniu wartości pracy, powstałej wskutek tego, do przyrostu energii kinetycznej punktu, otrzymamy równanie

$$- \frac{k}{x^2}\, dx = d\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right),$$

którego całka pomiędzy granicami od $x$ do $a$, oraz od $v$ do $v = 0$ jest następująca

$$\frac{k}{a} - \frac{k}{x} = - \tfrac{1}{2} mv^2; \text{ skąd}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Równanie to wyraża związek pomiędzy prędkością i położeniem punktu; i służyć może do obliczenia prędkości w każdem miejscu toru. Ażeby znaleźć równanie ruchu, wyrażające związek pomiędzy drogą i czasem, podstawimy w to równanie $v = \frac{dx}{dt}$; a po oddzieleniu zmiennych i przyjęciu warunków początkowych dla $x = a$, $t = 0$, napiszemy równanie

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot \int_a^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

W celu jego scałkowania, zastąpimy zmienną $x$ nową zmienną $\psi$, określoną równaniem

$$x = a \cos^2 \psi,$$

z którego wynika

$$dx = -2a \cdot \cos\psi \cdot \sin\psi \cdot d\psi.$$

Granice całki nowej, odpowiadające granicom $a$ i $x$, są 0 i $\psi$. Po wykonaniu tych podstawień w rów. 49-te, otrzymamy

$$t = 2\sqrt{\frac{m}{2k}}\, a^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^\psi \cos^2\psi \cdot d\psi;$$

skąd, na zasadzie wzoru 49-go, podanego w „Techniku" na str. 79-ej

$$t = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot (2\psi + \sin 2\psi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

Z równania tego obliczyć można, za pośrednictwem wielkości $\psi$, czas, w jakim punkt ruchomy z wychylenia $a$ przybędzie do miejsca $x$ toru. Odwrotne jednakże obliczenie, mające na celu oznaczenie $x$, to jest obliczenia położenia punktu w danym czasie, wykonać można drogą prób, gdy dane są liczbowe wartości pozostałych zmiennych; nie można bowiem rozwiązać tego równania względem $\psi$.

Z równ. 48-go odczytamy, że prędkość $v$ posiada wartości rzeczywiste tylko dla $0 < x < a$, co znaczy, że punkt ruchomy znajduje się podczas ruchu tylko po jednej stronie środka przyciągania. Rozpoczyna on zatem swój ruch z odległości $a$ z prędkością $v = 0$; i przybywa do środka przyciągania z prędkością $v = \infty$ i następnie z powiększeniem dodatnich wartość $x$ zmniejsza znów swę prędkość; jest to zatem ruch okresowy. Z równ. 50-go obliczymy połowę okresu jego podwójnego wahnięcia, gdy podstawimy w nie $\psi = \frac{\pi}{2}$; wtedy bowiem $x = 0$. Oznaczywszy okres podwójnego wahnięcia literą $T$, otrzymamy jego wartość w postaci wzoru

$$\tfrac{1}{2}\, T = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \pi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

z którego odczytamy, że okresy wahnięć danego punktu zależą od wielkości początkowego wychylenia punktu i są dłuższe dla większych wychyleń; ruch więc w tym razie jest okresowy, lecz nie jest izochroniczny.

**12. O całkach równań dynamicznych ruchu prostolinijnego.** Równanie dynamiczne ruchu prostolinijnego jest równaniem różniczkowem rzędu drugiego z dwiemą zmiennemi $x$ i $t$.

Ażeby otrzymać z niego związek pomiędzy temi zmiennemi w skończonej postaci, należy równanie dynamiczne scałkować. Sposoby całkowania są różne, zależą bowiem od rodzaju funkcyi, jakie wchodzą do danego równania.

Jedna strona równania dynamicznego wyraża siłę, która może być stałą, lub zmienną; w przypadku zmienności może ona zależeć od położenia, t. j. może być wyrażona funkcyą $x$, jakieśmy to mieli np. w ruchu punktu przyciąganego lub odpychanego; lub może zależeć od prędkości i wyrazi się wtedy funkcyą zmiennej $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, jak to było w przykładzie spadania brył materyalnych z uwzględnieniem oporu powietrza, i wreszcie może ona zależeć od czasu, gdy przyjmiemy np., że działanie danej siły z czasem się zmienia; siła może być wreszcie zależna od każdej z tych wielkości oddzielnie lub też w dowolnem ich połączeniu. Gdy przeto siłę wyrazimy wogóle funkcyą $f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$, to równanie dynamiczne ruchu prostolinijnego będzie następujące

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Równanie to może posiadać tyle szczególnych przypadków, ile zestawić można kombinacyi z trzech wielkości $x$, $\frac{dx}{dt}$ i $t$, biorąc je pojedyńczo, lub też łącząc je po dwie, lub po trzy; lub też wreszcie gdy ta funkcya przedstawia wielkość stałą. Każdy z tych przypadków wymaga mniej lub więcej odmiennego sposobu całkowania.

Funkcya zatem może być:

1) stałą wielkością, jak w przykładzie spadania w polu sił ciążenia bez uwzględnienia oporów; lub też
2) może być wyrażona tylko zmienną $x$; jak to było w przykładzie sił przyciągających;
3) tylko zmienną $\frac{dx}{dt}$; gdy np. bryła, na którą nie działają żadne siły, rzuconą jest w środowisku, przedstawiającem opory, zależne od prędkości, lub też może być wyrażoną
4) tylko zmienną $t$. Następnie, może być wyrażoną jednocześnie:

5) zmiennemi $x$ oraz $\frac{dx}{dt}$; jak to było w przykładzie ruchu harmonicznego przytłumionego, lub

6) zmiennemi $x$ oraz $t$, jak w przykładzie z ruchomym środkiem przyciągania, lub

7) zmiennemi $\frac{dx}{dt}$ oraz $t$;

8) lub wreszcie, w najogólniejszym przypadku, może być wyrażoną funkcyą wszystkich trzech zmiennych $x$, $\frac{dx}{dt}$, $t$.

Całkowanie wzorów we wszystkich tych przypadkach da się sprowadzić, po większej części, do sposobów, wskazanych w przytoczonych przykładach. Ponieważ równanie dynamiczne siły jest równaniem różniczkowem rzędu drugiego, więc całka jego posiadać powinna dwie stałe, które wogóle mogą być obliczone z dwóch znanych par wartości zmiennych; podstawiwszy je bowiem w równanie ruchu, otrzymamy dwa równania z dwiema niewiadomemi, które obliczymy. Zwykle te stałe obliczamy z tak zwanych warunków początkowego ruchu, t. j. ze znanych wartości $x$ i $v$ w chwili $t$; gdyż po podstawieniu tych wartości w równania ruchu, otrzymamy dwa równania, w których niewiadomemi są wartości nieznanych stałych.

Wybitną rolę pomiędzy temi całkami zajmuje całka, zwana całką pierwszą równania dynamicznego, która wyraża związek pomiędzy spółrzędnemi punktu i prędkością w miejscu, wskazanem przez te spółrzędne. Całką tą jest równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. O tej całce mówiliśmy już w paragrafie poprzednim.

---

# II. Równanie dynamiczne ruchu punktu na płaszczyźnie lub w przestrzeni.

**13. Rzuty sił i przyśpieszeń.** Ażeby wogóle obliczyć równania ruchu, gdy dane są siły; lub ażeby obliczyć siły, gdy dany jest ruch punktu, należy równanie dynamiczne

$$\bar{P} = m\bar{p},$$

które jest wektorowe, wyrazić równaniami algebraicznemi; wtedy bowiem będzie możliwem stosowanie do obliczeń działań zwykłej algebry. W tym