V. Ruch punktu nieswobodnego oraz ruch punktu z oporami.

A. Siły odporowe i siły oporowe.

35. Warunki fizyczne powstawania ruchu punktu nieswobodnego. Jeżeli punkt materyalny pod działaniem sił danych wykonywa ruch nie zgodny z ruchem, wskazanym przez te siły, to po bliższem rozpatrzeniu warunków fizycznych, w jakich odbywa się taki ruch, zauważymy, że przyczyną tej niezgodności są ciała, z któremi styka się punkt ruchomy, i które zmieniają ruch, wyznaczony przez siły dane.

Jeżeli np. punkt materyalny pod działaniem siły ciężenia, zsuwa się po płaszczyźnie pochyłej, to płaszczyzna dana przedstawia właśnie ten fizyczny warunek, który nie pozwala punktowi zakreślić toru pionowego ruchem, wyznaczonym siłą ciężenia, lecz zmusza go do wykonywania ruchu po płaszczyźnie. Bryłę, znajdującą się w takich warunkach, nazwaliśmy w § 50-tym tomu I-go bryłę nieswobodną.

W przykładzie zaś spadania brył w powietrzu lub w jakiem innem środowisku fizycznem opór danego środowiska jest tym czynnikiem fizycznym, który zmienia ruch punktu, wyznaczony siłami ciężenia; w danym razie mówimy, że punkt ruchomy doznaje **oporu.**

Ponieważ warunki fizyczne, w jakich odbywa się ruch, wpływają na zmianę danego ruchu, przypisujemy im przeto właściwości sił. Siły te obliczyć można ze zmian, jakie one wywołują w ruchu punktu, poddanego działaniu danych sił. Gdy więc rozpatrujemy ruch punktu nieswobodnego lub też ruch z oporami, to przyjmujemy, ażeby być w zgodzie z pojmowaniem i określeniem siły, że działają na niego oprócz sił zewnętrznych inne jeszcze siły, pochodzące od otaczających go ciał. Temi siłami bywają:

1) siły **odporowe,** inaczej zwane siły połączeń, które występują w miejscach zetknięcia się punktu lub bryły ruchomej z powierzchniami, otaczających ją ciał sztywnych. Siły, pochodzące od ciał sztywnych i gładkich, stykających się z punktem ruchomym, są normalne do powierzchni zetknięć, lub też do krzywych, po których punkt się porusza. Siły te odznaczają się tą właściwością, że ich praca, podczas przesunięcia przystosowanego, równa się zeru.

2) siły **tarcia,** które występują podczas ruchu punktu lub bryły po torze, lub po powierzchni. Wielkości tych sił zależą, jak doświad-

czenia uczą, przedewszystkiem od spółczynników, właściwych stykającym się bryłom; następnie zależą od wielkości ciśnienia normalnego tychże brył; nie bez wpływu przytem pozostaje prędkość względna obydwóch brył, oraz wielkość powierzchni zetknięcia się. Dla zwykłych warunków przyjmujemy, że siła tarcia równa się iloczynowi z siły normalnej i spółczynnika tarcia;

3) siły, powstające wskutek **oporu środowiska**, w którem porusza się dany punkt. Siły, występujące w tych warunkach, nazywamy siłami oporowemi danego środowiska; lub krótko nazywać będziemy je oporami. Wielkości tych sił zależą od geometrycznej postaci bryły ruchomej; od fizycznych właściwości danego środowiska; (np. od większej lub mniejszej gęstości); i od prędkości poruszającej się bryły względem środowiska. Dla większości przypadków przyjmujemy zgodnie z doświadczeniami i rozważaniami teoretycznemi, że siły te są proporcyonalne do pierwszej lub do drugiej potęgi z prędkości bryły ruchomej względem środowiska.

Siły te oraz siły tarcia mają tę wspólną właściwość, że kierunki ich działania pokrywają się z kierunkami prędkości poruszającego się punktu, a zwroty ich są przeciwne zwrotowi tejże prędkości; wskutek czego praca rzeczywista tych sił jest zawsze odjemną;

4) siły **sprężystości** brył lub też linii materyalnych, po których porusza się punkt dany lub też do których jest on przymocowany. Przykładem tego przypadku służyć może ciężar, przyczepiony do jednego końca nici sprężystej, gdy drugi koniec jest unieruchomiony w przestrzeni lub też gdy jest w pewnym określonym ruchu. Wielkości tych sił są w przybliżeniu, zależnie od fizycznych właściwości brył lub linii materyalnych, proporcyonalne do wielkości ich odkształceń; praca zaś ich może być tak odjemną, jak i dodatnią. Podczas odkształcenia bryły lub linii sprężystej, siły sprężystości wykonują pracę odjemną; podczas zaś powrotu tych ciał do stanu pierwotnego praca ich jest dodatnią ; a suma algebraiczna obydwóch prac, jak doświadczenia uczą, jest zawsze odjemną i wartość jej zależy od fizycznych właściwości brył. W przypadkach, w których suma ta jest tak małą w porównaniu z innemi wielkościami danego zadania, że można jej wartość liczbową pominąć, przyjmujemy ją często dla uproszczenia rachunku równą zeru.

Zadaniem naszem obecnie jest wskazanie sposobów obliczenia ruchu punktu, odbywającego się w wymienionych warunkach.

Pod względem kinematycznym zadania te podzielić można na dwie grupy:

1) zadania na ruch punktu **swobodnego**; (z oporami, lub bez nich); oraz

2) zadania na ruch punktu **nieswobodnego**, (z oporami lub bez nich)

Gdy punkt jest nieswobodny, ilość spółrzędnych, wyznaczających położenie punktu jest mniejszą od trzech, cośmy szczegółowo wyłożyli na str. 44-ej tomu II-go. Do obliczenia przeto ruchu punktu nieswobodnego potrzeba jedno lub dwa równania algebraiczne zależnie od ilości stopni swobody, t. j. zależnie od tego, czy punkt porusza się po linii, czy też po powierzchni.

Ruch punktu swobodnego z oporami lub bez oporów posiada trzy stopnie swobody; do jego przeto obliczenia należy mieć trzy równania algebraiczne.

36. Rodzaje zadań. Zadania na obliczenie ruchu punktu wogóle, podzielimy przeto na następujące grupy:

I. Punkt jest swobodny, a ruch jest:
1) bez oporów lub też;
2) z oporami. W obydwu tych przypadkach punkt posiada trzy stopnie swobody.

II. Punkt jest nieswobodny, a ruch jest:
1) bez oporów, lub też;
2) z oporami. W obydwóch tych przypadkach punkt posiada jeden lub dwa stopnie swobody.

Do rozwiązania zadań obydwóch grup stosujemy zasady, wyłożone w rozdziałach poprzednich; i w tym celu wyobrazimy sobie, że na dany punkt oprócz sił zewnętrznych działają jeszcze siły odporowe łącznie z oporowemi i następnie zestawimy odnośne równanie dynamiczne, jak dla punktu swobodnego.

B. Ruch punktu swobodnego z oporami.

37. Przykład. Przykładem tego ruchu jest ruch punktu ciężkiego, wyrzuconego w powietrze. Szczególny przypadek tego ruchu rozpatrywaliśmy w § 15-ym, w którym nie uwzględnialiśmy oporu powietrza, w § 6-ym zaś rozpatrywaliśmy ten ruch z uwzględnieniem oporu, gdy punkt nie posiadał prędkości początkowej; obecnie przyjmiemy, że punkt ma nadaną pewną początkową prędkość, której kierunek tworzy z poziomem kąt α. Na dany punkt w danym razie działa:

1) siła ciężkości $m\bar{g}$, oraz

2) siła oporu $\overline{W}$; której kierunek pokrywa się z kierunkiem chwilowej prędkości punktu; a zwrot jest jej przeciwny, rys. 25-ty. Równanie dynamiczne ruchu punktu w środowisku z oporami jest przeto następujące

$$m\bar{g} + \overline{W} = m\frac{d\bar{v}}{dt},$$

w którem są dwie zmienne $\bar{v}$ i t. Równania tego całkować w tej formie nie możemy, kierunek bowiem prędkości, a więc i siły $\overline{W}$ jest zmienny. Zastosujemy przeto całkowanie algebraiczne, i w tym celu zrzutujemy to równanie na dwie osi wzajemnie prostopadłe, rys. 25-ty, jakieśmy to uczynili w § 15-tym. Równanie rzutów na oś x jest następujące

$$-W_x = m\frac{dv_x}{dt};$$

równanie zaś rzutów na oś y

$$mg + W_y = m\frac{dv_y}{dt}.$$

Przyjmijmy, że opór jest proporcyonalny do drugiej potęgi prędkości, t. j. $W = kv^2$; a więc

$$W_x = kv^2 \cos\alpha; \text{ oraz } W_y = kv^2 \sin\alpha;$$

gdzie α oznacza kąt nachylenia stycznej do toru, przeprowadzonej w miejscu rozpatrywanem. Jeżeli wprowadzimy jako zmienne rzuty prędkości na osi, to

$$W_x = kvv_x; \quad W_y = kvv_y.$$

Podstawimy wartość W_x w pierwsze równanie, a obliczymy bezpośrednio jego całkę. W tym celu oddzielimy zmienne i otrzymamy następujące równanie

$$-kvdt = m\frac{dv_x}{v_x};$$

a przyjąwszy warunki ruchu początkowego dla $s = 0$

$$v_x = c_x, \quad v_y = c_y,$$

oraz podstawiwszy $vdt = ds$; otrzymamy bezpośrednio całkę

$$-ks = m \lg n \frac{v_x}{c_x}; \text{ skąd } v_x = c_x e^{-\frac{ks}{m}},$$

Równanie to daje związek pomiędzy rzutem v_x prędkości i drogą s, znalezienie bowiem związku pomiędzy v_x i t, jakieśmy to uczynili poprzednio, sprawia przy całkowaniu znaczne trudności. Z tej też przyczyny v_y trudno jest wyrazić funkcyą t.

W przypadku takich trudności matematycznych staramy się obliczyć związki pomiędzy innemi zmiennemi, będącemi w pewnym ściśle określonym związku z ruchem danego punktu. W danym np. przypadku można wyrazić spółrzędne punktu funkcyą tangensa kąta, jaki tworzy styczna do toru z osią x. Obliczenie to przeprowadzono w mechanice Auteurietha, (w tłomaczeniu inż. St. Patschkego na str. 324-tej), do której zwracam czytelnika.

Postępowanie rachunkowe w rozwiązaniu zadania powyższego jest łatwiejsze, gdy przyjmiemy, że opór środowiska jest proporcyonalny do pierwszej potęgi z prędkości. Wtedy mamy równanie dynamiczne

$$m\bar{g} - k\bar{v} = m\frac{d\bar{v}}{dt},$$

którego rzut na oś x daje następujące równanie 1) $-kv_x = m\dfrac{dv_x}{dt}$;

a na oś y 2) $mg - kv_y = m\dfrac{dv_y}{dt}$.

Całka pierwszego równania po przyjęciu dla $t = 0$

$$x = 0,\ y = 0,\ v_x = c_x \text{ i } v_y = c_y;$$

jest następująca

$$t = -\frac{m}{k}\operatorname{lgn}\frac{v_x}{c_x};\ \text{skąd } 1)\ v_x = c_x e^{-\frac{k}{m}t}.$$

W celu scałkowania równania drugiego, przekształcimy je na następujące

$$(mg - kv_y) = -\frac{m}{k}\frac{d(mg - kv_y)}{dt};$$

z którego, po oddzieleniu zmiennych, napiszemy bezpośrednio jego całkę

$$t = -\frac{m}{k}\operatorname{lgn}\frac{mg - kv_y}{mg - kc_y};\ \text{skąd}$$

$$mg - kv_y = (mg - kc_y)\,e^{-\frac{k}{m}t};\ \text{i wreszcie}$$

$$2)\quad v_y = \frac{m}{k}g - \left(\frac{m}{k}g - c_y\right)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Obliczymy następnie właściwe równania ruchu, podstawiwszy w równania powyższe

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ \text{oraz } v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Równania te po scałkowaniu są następujące

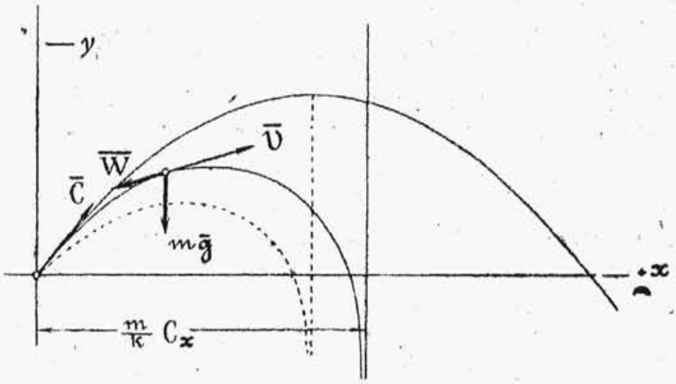
$$1)\quad x=\frac{m}{k}c_x\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right);\text{ oraz}$$

$$2)\quad y=\frac{m}{k}gt-\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}g-c_y\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Z równań tych wynika, że z powiększeniem czasu wartość wyrazu $e^{-\frac{k}{m}t}$ maleje, a spółrzędna x zbliża się do pewnej stałej wielkości, równej $\frac{m}{k}c_x$; y zaś wzrasta do nieskończoności.

Dla $t=\infty$, mamy

$$x_m=\frac{m}{k}c_x;\ =\text{a } y=\infty;\text{ oraz } v_x=0;\ v_y=\frac{m}{k}g.$$



Rys. 25.

Prosta przeto $x_m=\frac{m}{k}c_x$ jest asymptotą do toru, rys. 25-ty, a kierunek prędkości zbliża się do kierunku pionowego, wartość zaś jej zbliża się do pewnej stałej wartości; porów. wyniki obliczeń w § 6-ym.

Ruch tego punktu może być uważany za przybliżony obraz, w którym opór jest proporcyonalny do innej potęgi z prędkości.

Łatwo wywnioskować, że dla tych przypadków, przy jednakowych warunkach początkowych, asymptota toru będzie leżała bliżej miejsca wyjścia punktu, a wysokość wzniesienia będzie mniejszą; energia bowiem początkowa punktu pójdzie nietylko na pracę podniesienia punktu, lecz i na pracę oporów, która powiększa się z powiększeniem się oporów.

38. Równania ogólne ruchu punktu swobodnego z oporami. Ogólne równanie dynamiczne punktu swobodnego, poruszającego się w środowisku z oporami jest następujące

$$\bar{P} + \bar{W} = m \frac{d\bar{v}}{dt},$$

w którem $\bar{P}$ oznacza siłę, przyłożoną do punktu; $\bar{W}$ — siłę oporową, której kierunek pokrywa się z kierunkiem prędkości chwilowej; zwrot zaś jest przeciwny zwrotowi tej prędkości, a wartość jest pewną funkcyą tejże prędkości i zależy od fizycznych właściwości środowiska. Równanie powyższe przekształcić można na równanie algebraiczne, rzutując je na osi spółrzędnych, jakieśmy to w powyższym przykładzie wykonali.

Stosowanie zasady pracy lub też zasady momentów w przypadkach ruchu z oporami nie daje tych dogodności rachunkowych, jakie dają te zasady w przypadku np. sił środkowych i zachowawczych. Praca bowiem sił oporowych zależy w danym razie od drogi, po jakiej przebywa punkt ruchomy. Do równania zaś momentu sił wejdzie moment sił oporowych; wskutek czego równania te są dosyć zawiłe pod względem matematycznym i nie dają się łatwo całkować.

Dla przybliżonych rozpatrywań tych ruchów może być stosowane z pewnem powodzeniem równanie dynamiczne siły normalnej i stycznej. Z równania siły normalnej obliczymy $\rho = m \frac{v^2}{P_n}$ i drogą wykreślną wskazaną w § 18-tym, kolejno znajdować będziemy położenia punktu ruchomego; a zważywszy, że

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}_t - \bar{W},$$

otrzymamy

$$\Delta \bar{v} = \frac{1}{m} (\bar{P}_t - \bar{W}) \, . \, \Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Z równania tego wynika, że prędkość ruchu z oporami w miejscu np. 2-em jest mniejszą niż prędkość w temże miejscu tegoż punktu, poruszającego się bez oporu; a ponieważ wartości P_n są te same dla obydwóch przypadków (siła $\bar{P}$ jest dana), przeto promień krzywizny toru w miejscu wyjścia punktu, poruszającego się z oporami, jest mniejszy niż takiż promień toru punktu, poruszającego się w temże polu sił, lecz bez oporów. Z czego wynika, że punkt poruszający się w środowisku z oporami, przy wyjściu z początkowego położenia, zakreśla tor o większej krzywiźnie, niżby go zakreślił, gdyby oporów nie istniało; co też stwierdza przykład poprzedni.