IV. Zasady szczególne dynamiki.

19. Cel tych zasad. Przytoczone na początku poprzedniego rozdziału dwa prawa zasadnicze: prawo bezwładności i prawo superpozycji wystarczają zupełnie do określania właściwości ruchu punktu, gdy dane są siły na niego działające; a równanie dynamiczne, będące wyrazem tych praw, daje możność ujęcia tych właściwości w matematyczną formę. Dla ułatwienia jednakże określenia właściwości ruchu, jak również dla ułatwienia obliczeń, wyprowadzono z tych praw inne prawa, zwane (niesłusznie) zasadami, które obejmują całe grupy zjawisk ruchu i wyjaśniają ich przebieg. Zasady te wyrażają się pewnemi równaniami, wyprowadzonemi drogą przekształceń algebraicznych z przytoczonego równania dynamicznego; i wyrażającemi jedynie w sposób więcej poglądowy związki pomiędzy parametrami ruchu.

Zasady zatem, które tu wyłożymy, nie wnoszą do naszych rozpatrywań żadnych nowych praw fizycznych, ani też nie dają równań algebraicznych, **niezależnych** od równania dynamicznego, a są tylko wyrazem w innej postaci tego równania; — są pierwszemi całkami tych równań.

Zasadami temi są

zasada **równowartości pracy sił i energii kinetycznej;** oraz

zasada **momentu ilości ruchu.**

A. Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej.

20. Rozwinięcie tej zasady. W tomie I-ym w § 100-ym wyprowadziliśmy równanie 68-me, wykazujące równowartość pracy siły, przyłożonej do punktu materyalnego i przyrostu energii kinetycznej, jakiego dany punkt dozna podczas nieskończenie małego przesunięcia pod działaniem tej siły. Równanie to ma następującą postać

$$P_t \,.\, ds = d\left(\tfrac{1}{2}\, mv^2\right);$$

P_t oznacza rzut siły na kierunek przesunięcia ds.

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym punkt ruchomy, pod działaniem danych sił zakreśli tor o skończonej długości. W tym celu dzielimy tor, jaki zakreśla punkt ruchomy, na cząstki ds, które uważać będziemy za cząstki prostolinijne; a pracę siły P_k wzdłuż k — tej cząstki toru wyrazimy, na zasadzie określeń, podanych w § 94-tym tomu I-ego, wzorem

$$P_k \,.\, ds_k \cos\left(P_k, ds_k\right);$$

sumę zaś tych prac, gdy punkt ruchomy przejdzie po pewnym torze ciągłym, z miejsca A do miejsca B, wyrazimy wzorem

$$\int_A^B P_k \cdot ds_k \cdot \cos(P_k, ds_k);$$

i wartość jej oznaczymy literę L_A^B.

Oznaczmy następnie prędkość punktu na początku k-tej cząstki toru przez v_{k-1}, a na jej końcu przez v_k, a wyrazimy przyrost energii kinetycznej wzdłuż tej cząstki wzorem

$$\tfrac{1}{2} mv^2_k - \tfrac{1}{2} mv^2_{k-1};$$

przyrost zaś wzdłuż następnej $(k+1)$-ej cząstki wzorem

$$\tfrac{1}{2} mv^2_{k+1} - \tfrac{1}{2} mv^2_k.$$

Gdy następnie dodamy wszystkie, w ten sposób utworzone, przyrosty energii kinetycznej, i gdy zważymy, że wartości energii kinetycznych w miejscach zetknięć się cząstek toru są wzajemnie równe, wtedy otrzymamy jako sumę tych przyrostów różnicę wartości energii kinetycznej punktu w końcowem i początkowem jego położeniu, wszystkie bowiem pośrednie wszystkie bowiem pośrednie wyrazy się zniosą, t. j. otrzymamy równanie

$$L_A^B = \tfrac{1}{2} mv^2_B - \tfrac{1}{2} mv^2_A, \quad \ldots \ldots \quad (66)$$

w którem v_B i v_A oznaczają prędkości w końcowem i początkowem położeniu punktu ruchomego. Równanie to jest jednakowe z rów. 69-em tomu I-go; wyprowadziliśmy je tylko w tem miejscu drogą szczególnych rozważań, która nas objaśnia, dla czego wartości energii kinetycznej w pośrednich położeniach punktu nie wchodzą do tej sumy. Treść równania 66-ego wypowiedzieliśmy już w tomie I-ym, którą tu powtarzamy

praca siły wzdłuż pewnej drogi równa się przyrostowi energii kinetycznej punktu, jakiego on doznał przy przejściu tej drogi.

Pracę sił wzdłuż pewnego toru obliczymy wogóle, gdy znany będzie tor, jaki zakreśli dany punkt, oraz siły, występujące wzdłuż tego toru. Obliczenie zatem pracy sił, przyłożonych do punktu ruchomego, podczas jego przejścia z jednego miejsca do drugiego, jest **wogóle** niemożliwe bez wskazania toru, po którym punkt przebiega.

W **szczególnych** jednakże przypadkach, które omówiliśmy w § 107-ym tomu I-go, a które spotykają się w wielu zjawiskach świata fizycznego, wartość pracy sił, przyłożonych do punktu ruchomego, zależy tylko od miejsca, w jakiem znajduje się punkt ruchomy i wyraża się funkcyą jego spółrzędnych; wartość ta jest zatem niezależną od postaci toru, po jakim przebiegł dany punkt pomiędzy dwoma położeniami, a zależy tylko od spółrzędnych krańcowych miejsc. W tych szczególnych przypadkach zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje bezpośredni związek pomiędzy prędkością punktu, a jego spółrzędnemi; t. j. daje pierwszą całkę równania dynamicznego, co również stwierdziliśmy przy badaniu ruchu prostolinijnego. Obierzmy jako spółrzędne danego punktu np. spółrzędne prostokątne (x, y, z), to pracę cząstkową siły P w miejscu (x, y, z), podczas nieskończenie małego przesunięcia punktu, wyrazimy wzorem 63-im tomu I-go.

$$P_x dx + P_y dy + P_z dz = d\,U,$$

gdzie U jest funkcyą spółrzędnych, nie zawierającą czasu wyraźnie; wtedy otrzymamy równanie

$$d\,U = d(\tfrac{1}{2} m v^2);\ \text{lub jego całkę}$$

$$U_B - U_A = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2 \quad \ldots\ldots\ldots (67)$$

Funkcya U, którą nazwaliśmy w § 108-ym tomu I-go funkcyą sił, a odjemną jej wartość w § 110-ym — potencyałem sił, jest funkcyą spółrzędnych punktu ruchomego. Jeżeli daną jest np. funkcya $U\,(x, y, z)$, to dla każdego położenia (x_B, y_B, z_B) punktu ruchomego obliczymy jej wartość i tę wartość oznaczyliśmy literą U_B; a po podstawieniu tej wartości w równanie 67-me obliczymy energię kinetyczną, jaką posiada dany punkt w tem miejscu (x_B, y_B, z_B), lecz we wszystkich miejscach przestrzeni, których spółrzędne czynią zadość równaniu

$$U\,(x_B, y_B, z_B) = U_B.$$

Geometryczne miejsce tych punktów jest przeto powierzchnią, wyrażoną tem równaniem. Jeżeli funkcya sił jest jednowartościowa, to punkt ruchomy przebija tę powierzchnię w jakiemkolwiek jej miejscu z jedną i tą samą energią kinetyczną; a więc również z jedną i tą samą prędkością. Jest to wynik, któryśmy tutaj zdobyli drogą analizy algebraicznej, a do którego doszliśmy również w § 111-ym tomu I-go, drogą rozpatrywań właściwości powierzchni równych potencyałów.

Chociaż sposób wyprowadzenia równania równowartości pracy i energii kinetycznej, jaki stosowaliśmy w tomie I-ym, polega jedynie na przekształceniach algebraicznych, dowiedziemy jednakże w więcej krótki sposób, że równanie to może być wyprowadzone bezpośrednio z równania dynamicznego ruchu drogą tylko przekształceń algebraicznych. W tym celu weźmiemy za podstawę naszych rozpatrywań równanie dynamiczne w postaci wektorowej $\overline{P} = m\dfrac{d\overline{v}}{dt}$; a po zrzutowaniu jego na styczną do toru, otrzymamy

$$P_t = m\frac{dv}{dt}.$$

Można było również wziąć bezpośrednio to równanie za podstawę naszych rozpatrywań, jest ono bowiem równaniem dynamicznem sił stycznych do toru.

Równanie to pomnożymy przez wartość ds i podstawimy w prawej stronie równania $\frac{ds}{dt} = v$, a otrzymamy szukane równanie

$$P_t \, . \, ds = d\,(^1/_2\, m\, v^2).$$

Równanie przeto równowartości pracy i energii kinetycznej punktu jest wynikiem równania dynamicznego ruchu, jest jego pierwszą całką; jest ono szczególnym wyrazem prawa bezwładności. I rzeczywiście, gdy na punkt dany nie działają siły, praca ich równa się zeru, i energia kinetyczna punktu nie doznaje przyrostu podczas ruchu; z czego wynika, że punkt porusza się ze stałą prędkością lub też pozostaje w spoczynku. Gdy zaś na dany punkt działa pewna siła, która wykonuje pracę, wtedy energia kinetyczna punktu o tyle się zmienia, o ile praca tej siły się zmienia.

Zasada jednakże równowartości pracy i energii kinetycznej jest tylko pewnym szczególnym wyrazem prawa bezwładności, gdyż wyraża ona, wrazie np. gdy siły na punkt nie działają, niezmienność prędkości tylko pod względem skalarnym, a nie wskazuje tej niezmienności pod względem wektorowym, jak to daje równanie dynamiczne. Równanie przeto 66-te, lub 67-me nie może wystarczyć do obliczenia ruchu punktu swobodnego. I rzeczywiście; w celu obliczenie ruchu punktu swobodnego należy mieć trzy równania algebraiczne. W szczególnych jednakże przypadkach, w których punkt ruchomy posiada jeden tylko stopień swobodny, a siły nań działające posiadają funkcyę sił, równ. 67-me wystarcza do obliczenia ruchu takiego punktu. Wogóle zaś jest ono jedno z trzech równań, potrzebnych do obliczenia ruchu punktu; dwa zaś brakujące mogą być np. równaniami rzutów siły na dwie osi, lub też równaniami, które wyprowadzimy w następującym paragrafie, a które wyrażają t. zw. zasadę momentu ilości ruchu.

B. Zasada momentu ilości ruchu.

21. Ilość ruchu. Określenie: wektor prędkości punktu materyalnego, pomnożony przez wartość masy tegoż punktu, nazywamy ilością jego ruchu. W oznaczeniach wektorowych określenie to wyrazimy iloczynem

$$m\bar{v};$$

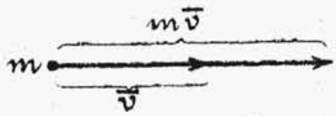
i wysłowimy je krótko; **ilością ruchu danego punktu nazywamy m-krotny wektor jego prędkości.**

Z określenia tego wynika, że ilość ruchu posiada wymiar

$$MLT^{-1}.$$

Znaczenie fizyczne ilości ruchu przedstawić sobie można w sposób następujący. Gdy punkt materyalny o masie m posiada pewną prędkość i gdy siły na ten punkt nie działają, wtedy wektor $m\bar{v}$, podczas ruchu tego punktu, nie zmienia się, ani co do długości, ani co do kierunku, ani też co do zwrotu; i odwrotnie, jeżeli dany punkt posiada podczas ruchu stałą ilość ruchu $m\bar{v}$, to powiadamy, że siły na niego nie działają. Niezmienność zatem wektora ilości ruchu jest ścisłym wyrazem prawa bezwładności.

Poprzednio wyrażaliśmy prawo bezwładności niezmiennością wektora prędkości, lecz w zjawiskach ruchu, w których bierzemy pod uwagę czynniki fizyczne, wywołujące dany ruchu, wielkości kinematyczne t. j. spółrzędne i czas nie wystarczają do wyrażenia zachodzących ruchów, potrzebną jest jeszcze znajomość masy punktu; wzór zatem $m\bar{v} =$ stałej; jest wyrazem ogólniejszym prawa bezwładności, niż wyraz samej prędkości.



Rys. 15.

Przyjąwszy niezmienność ilości ruchu za wyraz matematyczny bezwładności, określimy siłę jako stosunek przyrostu ilości ruchu do czasu, w jakim ten przyrost powstał; a zatem siłę wyrazimy wzorem

$$\bar{P} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

który jest ogólniejszy od wzoru 6-go i tylko w przypadku gdy masa m posiada stałą wartość, jest z nim jednakowy.

Przyjmijmy następnie, że dana siła jest np. stała i działa na dany punkt materyalny, nie posiadający początkowej prędkości, w przeciągu pewnego czasu t; to z równania 68-mego napiszemy

$$\int_0^t P\,dt = \int_0^v d(mv); \text{ a po zcałkowaniu } Pt = mv.$$

Równanie to wyraża, że iloczyn z siły stałej, działającej na punkt materyalny i z czasu t, w przeciągu którego ona działała, równa się ilości ruchu mv. Ilość zatem ruchu punktu danego może być uważana za miarę działania siły na dany punkt materyalny w przeciągu pewnego okresu czasu.

Zauważyć należy, że wartość ilości ruchu nie daje wielkości siły, ani też wielkości okresu czasu jej działania; a daje ona tylko wartość iloczynu z siły i czasu, gdy siła jest stała. Ta sama zatem ilość ruchu może być wywołaną np. wielkiemi siłami, działającemi w krótkich okresach czasu; lub też odwrotnie może być wywołaną — małemi siłami, działającemi w długim okresie czasu.

22. Siły chwilowe. Ilość ruchu może być uważaną za miarę tak zwanych sił chwilowych. Siłą chwilową nazywamy siłę, która w przeciągu bardzo krótkiego okresu czasu jest w stanie wywołać stosunkowo znaczną zmianę ilości ruchu danego punktu. Siły te powstają np. podczas uderzenia, podczas wybuchu i t. p. Gdy np. bryłę daną, będącą w danej chwili w spoczynku, uderzymy, to nabędzie ona odrazu znacznej prędkości,—tj. nabędzie w jednej chwili znacznego przyrostu ilości ruchu. W tym przykładzie siła przyśpieszająca, pochodząca od ciała uderzającego, działa na daną bryłę bardzo krótko, a wywołuje znaczny przyrost ilości ruchu. Przyrost ten przyjmiemy przeto za miarę **siły uderzenia.** Nie wchodząc więc w fizyczną stronę pochodzenia sił chwilowych, przyjmujemy za ich miarę przyrost ilości ruchu, jakiego doznaje dany punkt pod ich działaniem. Ze stanowiska fizycznego należy przeto rozróżniać dwojakiego rodzaju siły: siły ciągłe i siły chwilowe. Miarą sił ciągłych jest iloczyn z masy i przyśpieszenia punktu; — miarą zaś sił chwilowych jest przyrost ilości ruchu.

Powstawanie zatem każdego ruchu można sobie wyobrazić w dwojaki sposób: jako powstawanie w sposób ciągły lub też w sposób przerywany.

23. Moment ilości ruchu punktu materyalnego względem bieguna lub osi. Określenie: **Momentem ilości ruchu, względem dowolnie obranego w przestrzeni bieguna, nazywamy wektor, wystawiony w obranym biegunie prostopadle do płaszczyzny, przechodzącej przez ten biegun i przez wektor ilości ruchu, którego długość równa się iloczynowi z ilości ruchu i z odległości bieguna od kierunku wektora** $m\bar{v}$**; a zwrót jest skierowany ku patrzącemu,** gdy przypuszczalny obrót płaszczyzny, wskazany przez zwrót wektora ilości ruchu, jest zgodny z obrotem strzałki zegara, rys. 16-ty. Płaszczyznę, przechodzącą przez biegun i przez wektor ilości ruchu nazwiemy płaszczyzną momentu. Określenie to wyrazimy następującym wzórem wektorowym

$$\bar{M}_v = \mathrm{V} \cdot m\bar{v}\bar{h}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

w którym $\bar{M}_v$ oznacza określony wyżej wektor momentu ilości ruchu; a litera V objaśnia, że iloczyn $m\bar{v}\bar{h}$ należy przyjmować jako wektor.

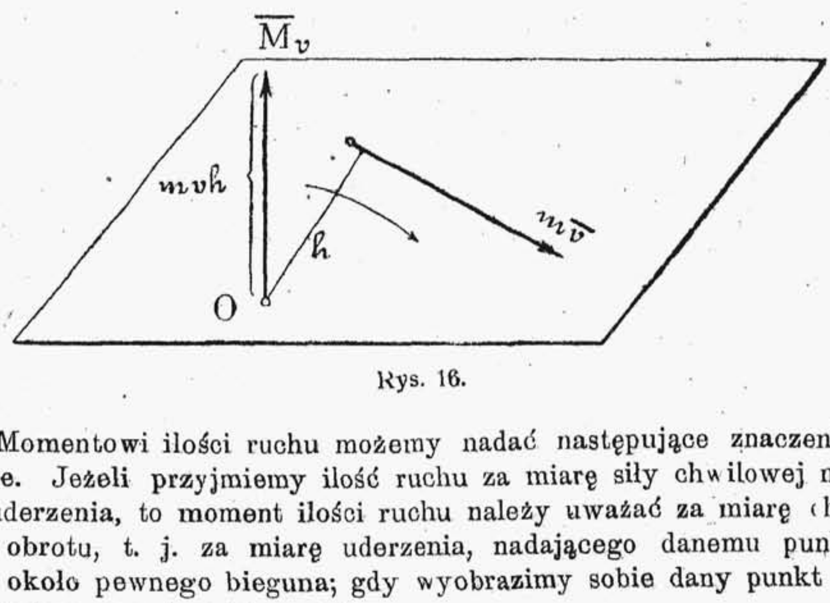
Stosując określenie iloczynu wektorowego, podane w § 25-tym tomu I-ego, napiszemy wzór 69-ty w następującej postaci

$$\bar{M}_v = V m \bar{v} \bar{r};$$

gdzie $\bar{r}$ oznacza wektor wodzący danego punktu.

Określenie momentu ilości ruchu co do swej formy geometrycznej jest jednakowe z określeniem momentu siły, jakieśmy dali w § 25-tym tomu I-ego, gdy wektor siły przyjmiemy za wektor ilości ruchu. W tenże sposób, zgodnie z określeniem momentu siły względem osi, podanem w § 42-gim tomu I-go, damy również określenie momentu ilości ruchu **względem osi**, gdy zamiast wektora siły zastosujemy wektor ilości ruchu; a zatem:

momentem ilości ruchu względem osi nazwiemy moment rzutu wektora ilości ruchu na płaszczyznę prostopadłą do osi, względem punktu przecięcia się jej z tą płaszczyzną.



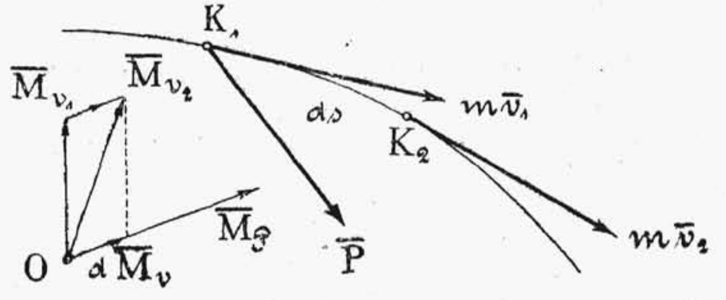
Rys. 16.

Momentowi ilości ruchu możemy nadać następujące znaczenie fizyczne. Jeżeli przyjmiemy ilość ruchu za miarę siły chwilowej np. — siły uderzenia, to moment ilości ruchu należy uważać za miarę chwilowego obrotu, t. j. za miarę uderzenia, nadającego danemu punktowi obrót około pewnego bieguna; gdy wyobrazimy sobie dany punkt sztywno związany z tym biegunem.

Przytoczymy obecnie pewne właściwości kinetyczne momentu ilości ruchu, wynikające bezpośrednio z jego określenia; jeżeli np. na dany punkt materyalny nie działa żadna siła, lub też działają siły, będące w równowadze, to na zasadzie prawa bezwładności punkt ten zakreśli ruchem jednostajnym tor prostolinijny; moment przeto ilości ruchu tego punktu względem dowolnie obranego bieguna w przestrzeni, jest wektorem stałym i niezmiennym; nietylko bowiem wartość iloczynu *mv* jest w danym przypadku stałą, lecz i ramię momentu jest niezmienne; a zatem i wektor $\overline{M}_v$ posiada niezmienne położenie w przestrzeni i niezmnienną długość. Gdy zaś na dany punkt działa pewna siła, wtedy wektor momentu ilości ruchu zmienia wogóle swój kierunek i swą wartość. W szczególnym przypadku, w którym siła, działająca na dany punkt, znajduje się ciągle w płaszczyźnie, wyznaczonej przez jego początkową ilość ruchu, wtedy tor punktu leży w tej płaszczyźnie; a kierunek wektora $\overline{M}_v$ jest stały; lecz długość jego wogóle się zmienia, zależnie od wartości iloczynu z ilości ruchu i z długości ramienia.

Wogóle można powiedzieć, że wektor momentu ilości ruchu punktu materyalnego, będącego pod działaniem pewnej siły t. j. pod działaniem momentu pewnej siły, zmienia kierunek, długość i zwrot, a w następnym paragrafie wykażemy, w jaki sposób zmiana ta następuje, t. j. wykażemy związek pomiędzy przyrostem wektora momentu ilości ruchu, a wektorem momentu siły, działającej na dany punkt.

24. Związek pomiędzy przyrostem wektora momentu ilości ruchu a wektorem momentu siły. W celu znalezienia tego związku weźmy pod



Rys. 17.

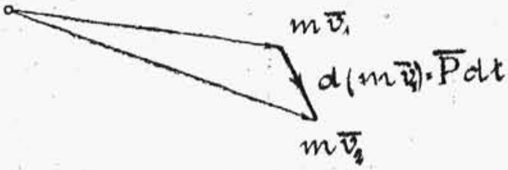
uwagę punkt w dwóch nieskończenie blizkich położeniach K_1 i K_2, rys. 17-ty. Niech $m\bar{v}_1$ oznacza wektor ilości ruchu punktu, znajdującego się chwilowo w położeniu K_1; $m\bar{v}_2$ zaś w następnem jego położeniu K_2, nieskończenie blizkiem do poprzedniego; to różnica tych wektorów $(m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1)$ jest przyrostem ilości ruchu, jaki powstał pod działaniem siły $\bar{P}$, przyłożonej do danego punktu. Stosownie do określenia siły, napiszemy równanie

$$\bar{P}dt = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1,$$

które wyraża, że wektor $\bar{P}dt$ równa się różnicy dwóch wektorów $m\bar{v}_2$ oraz $m\bar{v}_1$, rys. 18-ty. Ponieważ kierunki tych wektorów, oraz wektora siły, rys. 17-ty, przecinają się w jednym punkcie [1]), przeto możemy do

[1]) Kierunek bowiem wektora $m\bar{v}_2$ pokrywa się z kierunkiem cząstki toru ds, rys. 17-ty

tych wektorów zastosować twierdzenie o momentach, § 28-my tomu I-go, które głosi, że wektor momentu siły wypadkowej równa się sumie wektorowej momentów sił składowych, przyłożonych do jednego punktu. Twierdzenie to stosuje się nietylko do sił, lecz wogóle do wielkości wektorowych, których kierunki zbiegają się w jednym punkcie.



Rys. 18.

W danym przeto razie powiemy, że moment wektora $\bar{P}dt$ równa się różnicy wektorowej momentów ilości ruchu danego punktu w dwóch jego sąsiednich położeniach. Ażeby te stosunki unaocznić sobie geometrycznie, obierzmy w przestrzeni dowolny biegun O, rys. 17-ty, i wystawmy w niem, zgodnie z określeniem momentów, trzy wektory $\bar{M}_{v1}$, $\bar{M}_{v2}$, oraz $\bar{M}_P$, a zważywszy, że moment wektora $\bar{P}\,.\,dt$ równa się momentowi siły $\bar{P}$ pomnożonemu przez dt, wyrazimy powyższe twierdzenie o momencie wypadkowym następującem równaniem wektorowem

$$\bar{M}_P\,.\,dt = \bar{M}_{v2} - \bar{M}_{v1}\,.$$

Z równania tego odczytamy przedewszystkiem, że pod działaniem danej siły moment ilości ruchu doznaje pewnego przyrostu, który jest równoległy do wektora momentu tejże siły. Oznaczywszy ten przyrost przez $d\bar{M}_v$ i rozdzieliwszy powyższe równanie przez wielkość dt, otrzymamy równanie wektorowe

$$\bar{M}_P = \frac{d\bar{M}_v}{dt}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

które wyraża szukany związek. Równanie to wysłowimy w sposób następujący:

wektor momentu siły, przyłożonej do punktu ruchomego, względem dowolnie obranego bieguna, równa się ilorazowi przyrostu wektora momentu ilości ruchu względem tegoż bieguna do okresu czasu, w jakim ten przyrost powstał. Twierdzenie to nazwano zasadą momentów; a równ. 70-te, równaniem dynamicznem momentu siły.

Twierdzenie to jest przeto bezpośrednim wynikiem określenia siły i twierdzenia o momencie sumy wektorów: siła wywołuje przyrost ilości ruchu danego punktu; a moment jej wywołuje przyrost momentu ilości ruchu tegoż punktu. Dlatego też równanie momentu 70-te ma podobną postać matematyczną, jaką posiada równanie siły, — równ. 68-me.

25. Zasada pól. W szczególnym przypadku, w którym moment siły, działającej na dany punkt, względem pewnego bieguna, równa się zeru t. j. gdy $\bar{M}_P = 0$, wtedy przyrost $d\bar{M}_v = 0$; a wektor $\bar{M}_v$ pozostaje niezmienny podczas ruchu punktu i równa się wektorowi momentu początkowej ilości ruchu tegoż punktu. Z niezmienności wektora momentu ilości ruchu, jaka zachodzi w tym przypadku, wyprowadzimy następujące wnioski, tyczące się ruchu punktu:

1) ruch odnośnego punktu odbywa się stale w płaszczyźnie prostopadłej do tego wektora, t. j. do wektora $\overline{M}_v$; a płaszczyzna ta przechodzi przez biegun, względem którego $\overline{M}_p = 0$, i przez wektor początkowej ilości ruchu.

2) wartość momentu ilości ruchu, t. j. wartość iloczynu $m v h$, rys. 19-ty, podczas ruchu punktu pozostaje niezmieniona i równa iloczynowi $m v_0 h_0$; t. j. zachodzi w danym razie równanie

$$m v h = m v_0 h_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

w którem v_0 oznacza wartość prędkości początkowej; zaś h_0 ramię wektora tej prędkości względem obranego bieguna.

Z równania tego obliczyć można prędkość v punktu w każdem miejscu toru, gdy znaną będzie odległość h bieguna od stycznej, przeprowadzonej w danem miejscu. Wogóle zaś powiemy, że prędkość punktu w tym przypadku zwiększa się, gdy długość ramienia się zmniejsza.

Wynik ten, że iloczyn $m v h$ w danym przypadku jest stałą wielkością, możemy przedstawić geometrycznie w następujący sposób. Podstawmy w równ. 71-sze wartość $v = \dfrac{ds}{dt}$, a po jego przekształceniu, napiszemy

$$ds \,.\, h = (v_0 h_0) \,.\, dt.$$

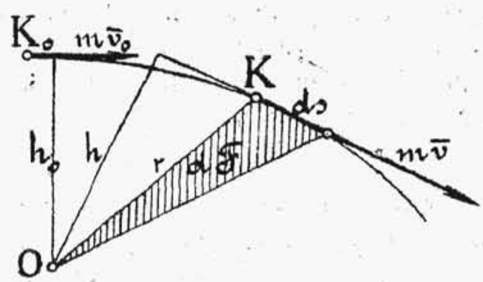
Iloczyn $ds \,.\, h$ wyraża podwójną wielkość pola trójkąta, którego podstawą jest cząstka ds toru punktu, a wierzchołek jego leży w biegunie; h bowiem jest wysokością tego trójkąta; rys. 19-ty. Oznaczmy wielkość pola tego trójkąta przez dF, to równanie powyższe napiszemy w postaci

$$dF = (\tfrac{1}{2} v_0 h_0) \,.\, dt;$$

a po scałkowaniu tego równania, otrzymamy, przyjąwszy dla $t = 0$; $F = 0$

$$F = (\tfrac{1}{2} v_0 \,.\, h_0) \,.\, t \quad \ldots \quad (72)$$

F w danym razie wyraża wielkość pola, jakie zakreśla promień wodzący, wyprowadzony z danego bieguna do punktu ruchomego.



Rys. 19.

Równanie 72-gie wysłowimy w sposób następujący: jeżeli suma momentów sił, działających na punkt ruchomy względem pewnego bieguna, równa się ciągle zeru, to ruch punktu jest płaski i odbywa się w płaszczyźnie, przechodzącej przez dany biegun i przez kierunek początkowej prędkości tego punktu; a promień wodzący, wyprowadzony z bieguna do danego punktu, zakreśla pole proporcyonalne do czasu. Twierdzenie to, będące szczególnym przypadkiem zasady momentu, równ. 70-te, nazwano **zasadą pól**.

26. Ile równań niezależnych daje zasada momentu ilości ruchu? Równanie dynamiczne ruchu punktu w postaci wektorowej, rów. 68-me, daje trzy równania algebraiczne, z których obliczyć można ruch punktu swobodnego, t. j. trzy jego spółrzędne w funkcyi czasu, gdy dane są warunki ruchu początkowego. Możliwość obliczenia ruchu punktu z równania dynamicznego jest wyrazem tej fizycznej właściwości ruchu, że punkt każdy przy danej prędkości początkowej i pod działaniem pewnej siły wykonywa ściśle określony ruch.

Nasuwa się teraz pytanie, czy zasada momentów, wyrażona równ. 70-tem, daje możność obliczenia ruchu ze znajomości momentów sił, działających na dany punkt; a jeżeli ta zasada nie wystarcza, to ile daje ona równań niezależnych.

W celu dania odpowiedzi rozpatrzmy najpierw równanie momentów ze stanowiska kinetycznego. W tym celu równanie 70-te przedstawmy w postaci następującej

$$\bar{M}_v = \int \bar{M}_P \, dt,$$

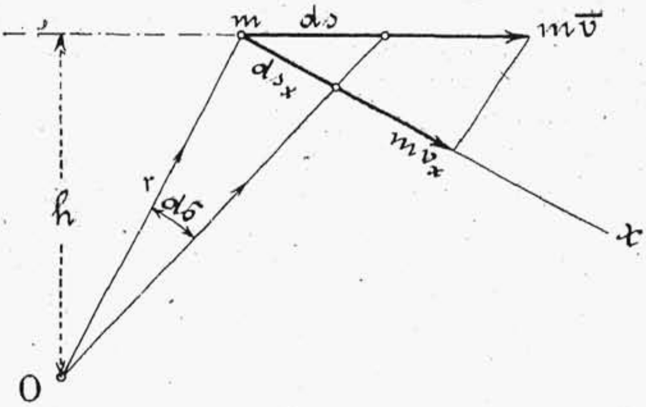
z którego można wyznaczyć wektor $\bar{M}_v$ momentu ilości ruchu danego punktu w każdej chwili jego ruchu, gdy dany jest wektor momentu siły w funkcyi czasu. Kierunek wektora $\bar{M}_v$ wyznacza płaszczyznę, w której **chwilowo** odbywa się ruch. Znajomość więc tego kierunku zastępuje jedno równanie algebraiczne, płaszczyzna bowiem wyraża się jednem równaniem algebraicznem. Znajomość następnie wartości wektora $\bar{M}_v$ w danej chwili ruchu pozwala zestawić jedno równanie algebraiczne ruchu, a mianowicie

$$m v h = M_{v, 0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Kierunek więc wektora ilości ruchu daje jedno równanie algebraiczne; długość jego daje drugie równanie, — rów. 73-cie; i więcej równań ze znajomości tego wektora nie otrzymamy; zwrót bowiem jego daje tylko zwrót prędkości, jaką punkt ruchomy w danej chwili posiada Zasada przeto momentów daje wogóle tylko dwa równania algebraiczne ruchu punktu; nie wystarcza zatem do obliczenia ruchu punktu **swobodnego**.

Do tegoż wniosku dojdziemy rozpatrując zasadę momentów ze stanowiska dynamicznego. Ruch punktu jest ściśle określony przez siłę, działającą na niego; a ponieważ ze znajomości momentu siły nie można sądzić o samej sile; moment przeto siły, działający na punkt ruchomy, nie może wystarczyć do obliczenia ruchu punktu. Dla tej też przyczyny stałość wektora ilości ruchu nie wyraża ściśle prawa bezwładności; — stałość ta bowiem jest wynikiem tej okoliczności, że $M_p = 0$; a moment siły równa się zeru nie tylko wtedy, gdy siła równa się zeru, lecz i wtedy, gdy siła posiada skończoną wartość, lecz jej kierunek przecina biegun.

27. Wzór momentu ilości ruchu, wyrażony spółrzędnemi biegunowemi. Zadanie to polega na wyrażeniu momentu ilości ruchu wielkością promienia wodzącego r, wyprowadzonego z bieguna O, rys. 20-ty,



Rys. 20.

i wielkością prędkości obrotowej, z jaką się obraca ten promień. Niech dany punkt w pewnej chwili posiada ilość ruchu $m\bar{v}$, to wartość momentu tej ilości w myśl danego określenia $M_v = mvh$; lub też inaczej, zgodnie z równaniem 18-tem, podanem w § 24-tym tomu I-go

$$M_v = mv_x r,$$

w którem v_x jest rzutem wektora v na oś x, prostopadłą do promienia wodzącego r. Rzut ten wyrazimy następującym wzorem

$$v_x = \frac{ds_x}{dt};$$

gdzie ds_x jest rzutem cząstki ds na oś x. Cząstka ds_x może być uważana, podczas nieskończenie małego przesunięcia, za cząstkę $rd\sigma$ łuku, jaki zakreśla koniec promienia wodzącego r; przeto podstawimy

$$v_x = r\frac{d\sigma}{dt},$$

i otrzymamy wyraz szukany

$$M_v = mr^2 \cdot \frac{d\sigma}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

28. Wzór momentu ilości ruchu, wyrażony spółrzędnemi prostokątnemi. Zadanie dane, analogiczne do zadania § 48-go tomu I-go, polega na obliczeniu wektora momentu ilości ruchu pewnego punktu ze składowych wektora ilości ruchu w kierunku osi spółrzędnych prostokątnych i ze spółrzędnych tego punktu. W tym celu zastosujemy twierdzenie, wyłożone o momencie sił w § 44-ym tomu I-go, w którem zastąpimy wektor siły wektorem ilości ruchu i wygłosimy twierdzenie: że rzut na pewną oś wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego na tejże osi, równa się momentowi ilości ruchu względem tejże osi, a suma wektorowa tych rzutów na trzy osi (nierównoległe do jednej płaszczyzny) wyznacza właściwy wektor momentu ilości ruchu.

W § 48-ym tomu I-go obliczyliśmy moment wektora siły; w tenże sposób obliczyć można mement wektora ilości ruchu; należy tylko podstawić we wzory 34-ty i 35-ty, na str. 67-ej tomu I-go, zamiast składowych siły składowe wektora ilości ruchu; a z tych równań napiszemy bezpośrednio równania rzutów momentu ilości ruchu na osi wzajemnie prostopadłe, przeprowadzone przez obrany biegun; a więc

$$M_{v,x} = mv_y z - mv_z y;$$
$$M_{v,y} = mv_z x - mv_x z;$$
$$M_{v,z} = mv_x y - mv_y x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

We wzorach tych M_v oraz v, zaopatrzone wskaźnikami x, y, z, oznaczają składowe tych wektorów wzdłuż osi spółrzędnych prostokątnych. Na podstawie powyższych wzorów napiszemy następujące równanie wektorowe

$$\overline{M}_v = \overline{M}_{v,x} + \overline{M}_{v,y} + \overline{M}_{v,z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

lub też równania algebraiczne

$$M_v = \pm\sqrt{M^2_{v,x} + M^2_{v,y} + M^2_{v,z}} \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

$$\cos(M_v, x) = \frac{M_{v,x}}{M}\ ; \text{ i t. d.}$$ [1]

---

[1]) Wzory te w postaci wektorowej podane są w wydaniu I-em tej Mechaniki w tomie II-gim na str. 66-ej.