Porównania prędkości obrotu kuli ziemskiej, zdobyte drogą ścisłych pomiarów, z czasem kinetycznym, wykazują, że prędkości te bardzo mało różnią się między sobą, t. j. że równym odstępom czasu kinetycznego odpowiadają, chociaż niezupełnie, różne lecz prawie równe kąty obrotu ziemi; i że różnice te są tak niewielkie, że w naszych ziemskich doświadczeniach mogą być nie uwzględnione; w astronomicznych jednakże obserwacyach nie mogą być pominięte. Praktyczną przeto jednostką czasu może pozostać dla naszych rozpatrywań sekunda; jako pewna część obrotu kuli ziemskiej.

VII. Ruch złożony punktu materyalnego.

A. Układ odniesienia złożonego ruchu punktu materyalnego.

62. Kinematyka ruchu złożonego. W rozdziałach poprzednich rozpatrywaliśmy ruch punktu po krzywych lub powierzchniach, pozostających w spoczynku. W otaczających nas zjawiskach fizycznych jak i w technice spotykamy się z ruchem punktów materyalnych (w ogóle brył) po krzywych, które są w ruchu. W tych rozpatrywaniach stosować będziemy wielkości, określone w § 49-tym tomu II-go, oraz — równania 56-te i 65-te, dające związki pomiędzy temi wielkościami[1]); równania te są nast.

$$\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{v}_u \text{; oraz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

$$\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u + 2\,V\,\bar{v}_w\,\bar{\varphi}\text{;} \quad \ldots\ldots \quad (141)$$

które przekształca się w przypadku postępowego ruchu toru ($\varphi = 0$) na

$$\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (142)$$

Nasuwa się pytanie czy wzory te odnoszą się do układu, pozostającego w spoczynku czy też w ruchu. Z rozpatrywań § 49-go tomu II-go

[1]) W § 50-tym tomu II-go podaliśmy obliczenie prędkości wypadkowej dla przypadku, gdy tor był w ruchu postępowym; do obliczenia zaś tej prędkości dla przypadku, gdy tor jest w ruchu dowolnym daliśmy tego wskazówki. Ażeby jednakże nie pozostawiać luki w wykładzie, omówimy szczegółowiej sposób tego obliczenia. Jeżeli tor ruchomy x przechodzi z pewnego położenia x_1 do innego dowolnego powolnego położenia x_2, to można go zawsze przeprowadzić z jednego położenia do drugiego ruchem obrotowym oraz postępowym. Można przeto sobie wyobrazić na zasadzie prawa superpozycyi, że ruch wypadkowy tego punktu składa się z tych kolejnych ruchów: z ruchu wzdłuż toru i z ruchu unoszącego razem z torem; ruch

wynika, że wzory te pozostają w swej mocy w obydwóch przypadkach; na zasadzie bowiem prawa superpozycyi możemy wielkości kinematyczne dadawać; aby tylko dany punkt i dany tor, po którym on się porusza, wykonywał ruch razem z tym układem. Jeżeli przeto idzie tylko o geometryczne pojęcie ruchu, to jest obojętnem, czy dany układ odniesienia jest w spoczynku czy też w ruchu, abyśmy tylko stan jego ruchu ściśle określili; jeżeli zaś weźmiemy pod uwagę bezwładność materyi, to położenie tego układu jest już ściśle w przestrzeni określone. Układem tym jest układ kinetyczny, w rozdziale poprzednim określony i względem niego obliczać będziemy wszelkie ruchy punktów materyalnych; jak i ruchy torów poruszających się.

Powstanie wypadkowego przyśpieszenia punktu, jakiego on doznaje w ruchu złożonym, przedstawimy sobie bezpośrednio, gdy zważymy, że prędkości punktu, będącego w ruchu złożonym, można uważać na zasadzie prawa superpozycyi za złożony:

a) z przyrostu prędkości, jaki powstaje podczas ruchu punktu po torze nieruchomym, t. j. z wielkości $d\bar{v}_w$;

b) z przyrostu prędkości, jaki powstaje wskutek ruchu punktu razem z torem; gdy wyobrazimy sobie punkt umocowanym do toru; przyrost ten oznaczyliśmy wyrazem $d\bar{v}_u$; i

z przyrostu prędkości, jaki powstaje podczas obrotu toru, gdy wyobrazimy sobie, że wektor prędkości danego punktu obraca się razem z torem, jak gdyby był do niego przymocowany. Przyrost ten składa się z dwóch przyrostów:

c) z przyrostu wektora prędkości $\bar{v}_w$, jaki powstaje wskutek obrotu jednej cząstki toru, wzdłuż której punkt się posuwa; przyrost ten wyrazimy wzorem, porów. wzór 56-ty tomu II-go,

$$V\bar{v}_w \,.\, \bar{\varphi} \,.\, dt;$$

gdzie $\bar{\varphi} \,.\, dt$ wyraża nieskończenie mały obrót toru; oraz

d) z przyrostu, jakiego doznaje wektor prędkości wskutek obrotu następnej cząstki toru, po której punkt przebiega z prędkością $(\bar{v} + d\bar{v})$; przyrost ten wyrazimy wzorem

$$V\,(\bar{v}_w + \Delta\,\bar{v}_w) \,.\, (\bar{\varphi} + \Delta\,\bar{\varphi}) \,.\, dt;$$

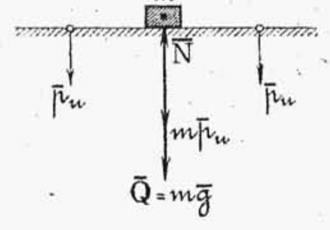
---

unoszący można przyjąć, że składa się z ruchu po kole podczas obrotu toru i z ruchu postępowego wraz z torem. Ponieważ przesunięcie po kole jest wielkością nieskończenie małą rzędu drugiego w porównaniu z wielkościami pozostałych przesunięć; jest ono bowiem równe iloczynowi z nieskończenie małego przęsunięcia wzdłuż toru, jako promienia koła, oraz z nieskończenie małego kąta obrotu, możemy przeto wyraz tego ruchu, przy przejściu do granic, opuścić, a otrzymamy wzór, wyrażający sumę przesunięć, t. j. sumę prędkości względnej i unoszącej.

a suma tych czterech przyrostów, rozdzielona przez dt, da wyraz wypadkowego przyśpieszenia punktu.

B. Ruch punktu materyalnego po torze, będącym w ruchu postępowym.

63. Przykład. Na podstawie poziomej spoczywa bryła materyalna o ciężarze mg; (którą wyobrażamy sobie w postaci punktu). Ciężar tej bryły wywołuje w podstawie siłę odporową N. Przyjmijmy, że podstawa ta posuwa się pionowo ku dołowi z przyśpieszeniem stałem $\bar{p}_u$. Obliczyć ruch tej bryły względem podstawy i siłę odporową N.



Rys. 45.

Na punkt dany działa w tych warunkach siła $(\bar{Q}+\bar{N})$; a punkt posiada przyśpieszenia $\bar{p}_w$ i $\bar{p}_u$. Wobec małego obszaru przestrzeni, w jakim zachodzi dane zjawisko ruchu, przyjmiemy, że układ kinetyczny jest sztywno związany z ziemią. Pionowy przeto kierunek przyjąć można za oś nieruchomą, względem której odbywa się ruch bryły i podstawy. W odniesieniu przeto do tego układu równanie dynamiczne jest nast.

$$(\bar{Q}+\bar{N})=m(\bar{p}_w+\bar{p}_u).$$

Zastąpimy to równanie wektorowe równaniem algebraicznem, gdy zrzutujemy wielobok wektorów, przedstawiony przez nie, na prostopadłą do podstawy; równanie to jest nast.

$$1)\quad Q-N=mp_u;$$

przyśpieszenie bowiem $\bar{p}_w$, zgodnie z warunkami zadania, może posiadać tylko kierunek wzdłuż podstawy, rzut przeto jego na oś prostopadłą do niej $=0$. Ażeby zaś je obliczyć, zrzutujmy równanie powyższe na kierunek podstawy, a otrzymamy równanie

$$2)\quad 0=p_w.$$

Punkt przeto w tych warunkach pozostaje na podstawie w spoczynku, co wysłowimy, że jest on w równowadze względnej.

Jeżeli daną jest siła Q oraz przyśpieszenie podstawy p_u, to obliczymy z równ. 1-go

$$N=Q-mp_u;\ \text{lub inaczej}\ N=m(g-p_u).$$

Siła zatem odporowa podstawy, na której spoczywa punkt, jest wielkością zależną od przyśpieszenia tejże podstawy.

Szczególne przypadki:

1) gdy $p_u = 0$, wtedy

$$N = mg;$$

t. j. gdy podstawa jest w spoczynku, wtedy siła odporowa równa się ciężarowi punktu; co jest zrozumiałe bezpośrednio; zachodzi bowiem w danym przypadku zwykły stan równowagi;

2) gdy $p_u = g$; wtedy siła odporowa

$$N = 0;$$

i rzeczywiście, podstawa i punkt materyalny posiadają w tym razie ruch o jednakowem przyśpieszeniu; biegną więc do siebie równolegle, nie wywierając na siebie ani ciągnienia ani ciśnienia;

3) gdy $p_u > g$; otrzymamy siłę odporową

$$N < 0;$$

t. j. siłę, posiadającą w tym razie znak przeciwny, przyjętemu za dodatni. Należy zatem punkt dany przymocować do podstawy, jeżeli ma on na niej pozostawać;

4) gdy $p_u < 0$, t. j. gdy przyśpieszenie podstawy zwrócone jest ku górze, wtedy siła odporowa jest zawsze skierowaną ku górze i posiada większe wartości, niż w przypadku, w którym przyśpieszenie p_u było zwrócone zgodnie ze zwrotem przyśpieszenia g. Zjawiska tego ruchu spostrzegać można, będąc np. w windzie w chwili, gdy winda rozpoczyna swój ruch lub też w chwili, gdy zatrzymuje się; w tych bowiem chwilach ruch jest przyśpieszony lub zwolniony. Podczas np. zatrzymywania się windy przyśpieszenie jej zwrócone jest ku górze, t. j. $p_u = -p'_u$, a więc

$$N = m\,(g + p'_u);$$

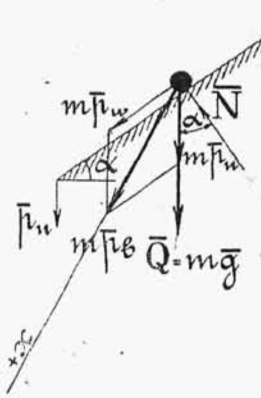
spostrzeżemy też w danym razie silne ugięcie sprężyn krzesła, na którym siedzimy w windzie; co jest wynikiem powiększenia się siły odporowej sprężyn. Podczas jednostajnego ruchu windy nieodczuwamy żadnych zmian w siłach odporowych, w tym bowiem ruchu $p_u = 0$.

Zwrócić jednakże należy uwagę, że w przykładzie tym punkt ruchomy znajduje się w równowadze względnej; gdyż niewykonywa on ruchu względem toru, na którym spoczywa; nie jest on jednakże w równowadze bezwzględnej, posiada bowiem pewne przyśpieszenie p_b.

Rozpatrzmy następnie ruch punktu ciężkiego, gdy tor prosty jest nachylony pod kątem α względem poziomu i jest w ruchu postępowym o przyśpieszeniu stałem, zwróconem np. pionowo ku dołowi. Punkt dany znajduje się w danym razie, pod działaniem ciążenia $\bar{Q}$ i siły odporowej $\bar{N}$ normalnej do toru posuszającego się; równanie przeto dynamiczne jest następ.

$$\bar{Q} + \bar{N} = m\bar{p}_w + m\bar{p}_u \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

W celu obliczenia przyśpieszenia p_w, zrzutujemy to równanie na kierunek toru; ażeby zaś obliczyć przyśpieszenie p_u zrzutujemy je na normalną do niego; rzutowania te dają dwa równania algebraiczne



Rys. 46.

1) $Q \sin \alpha = mp_w + mp_u \sin \alpha$; oraz

2) $Q \cos \alpha - N = mp_u \cos \alpha$.

Gdy wielkość Q, p_u oraz α są dane, wtedy obliczymy dwie niewiadome p_w i N.

Z pierwszego przeto równania

$$p_w = (g - p_u) \sin \alpha;$$

z drugiego zaś

$$N = m\,(g - p_u) \cos \alpha.$$

Szczególne przypadki:

1) gdy $p_u = 0$; wtedy

$$p_w = g \sin \alpha, \text{ a } N = Q \cos \alpha.$$

Jest to zwykły przypadek ruchu punktu ciężkiego po prostej pochyłej, pozostającej w spoczynku; porów. § 42-gi;

2) gdy $p_u = g$; wtedy $N = 0$; oraz $p_w = 0$ niezależnie od kąta α punkt przeto wykonywa w tym razie ruch, jak gdyby był swobodny;

3) gdy $p_u > g$; t. j., gdy przyśpieszenie unoszące zwrócone jest ku dołowi i jest większe od g; wtedy

$$N = -\,m\,(p_u - g) \cos \alpha;$$

t. j. siła normalna do toru jest odjemna; punkt zatem ruchomy ma dążność oderwania się od toru. Przyśpieszenie względne w danym razie

$$p_w = -\,(p_u - g) \sin \alpha;$$

t. j. punkt ruchomy porusza się po torze ku górze;

4) gdy $p_u < 0$, t. j. gdy przyśpieszenie unoszące zwrócone jest ku górze; wtedy po podstawieniu $p_u = -\,p_u'$ otrzymamy

$$N = m(g + p'_u) \cos \alpha; \text{ oraz}$$

$$p_w = (p_u' + g) \sin \alpha.$$

Siła normalna jest w tym przypadku zawsze dodatnią, jak również przyśpieszenie wzdłuż toru; ruch zatem względny zawsze jest zwrócony ku dołowi.

Siłę względną t. j. siłę, która jest wstanie wywołać taki sam ruch punktu po torze, pozostającym w spoczynku, jaki on posiada podczas ruchu toru, obliczymy ze wzoru

$$P_w = mp_w = m(g - p_u) \cos \alpha.$$

Siła ta może być dodatnią lub odjemną; zależnie od tego czy $g \gtreqless p_u$.

W celu obliczenia toru bezwzględnego punktu ruchomego, t. j. toru, jaki dany punkt zakreśla w przestrzeni nieruchomej (do której odnosimy siły Q i N); napiszemy bezpośrednio na zasadzie prawa superpozycyi

$$\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

Ponieważ tor w danym przykładzie jest w ruchu postępowym ze stałem przyśpieszeniem i jest on prostolinijny; przyśpieszenie przeto względne ma stały kierunek w przestrzeni, równoległy do toru; jeżeli następnie przyjmiemy, że przyśpieszenie ruchu unoszącego jest także niezmienne; to przyśpieszenie bezwzględne posiada stały kierunek i stałą wartość, którą obliczymy z powyższego równania. Ruch zatem bezwzględny punktu ruchomego, przy omówionych warunkach, będzie się odbywał w ten sposób, jak gdyby na niego działała jedna tylko siła stała $m\bar{p}_b$. Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy w § 15-ym i dowiedliśmy tam, że tor jego jest prostolinijny, gdy punkt nie posiada prędkości początkowaj lub gdy ją posiada w kierunku przyśpieszenia. Gdy więc punkt dany posiada w początku ruchu bezwzględną prędkość równą zeru, torem jego jest prosta linia, której kierunek wyznaczymy z powyższego równania; jeżeli zaś będzie temu punktowi nadana w początku jego ruchu pewna prędkość bezwzględna $\bar{v}_{b_0}$, która może być wynikiem dwóch prędkości $(\bar{v}_{w0} + \bar{v}_{u0})$; to torem jego jest parabola; a kierunki wektorów $\bar{p}_b$ i $\bar{v}_{b0}$, są kierunkami jej osi sprzężonych; porów. § 15-ty.

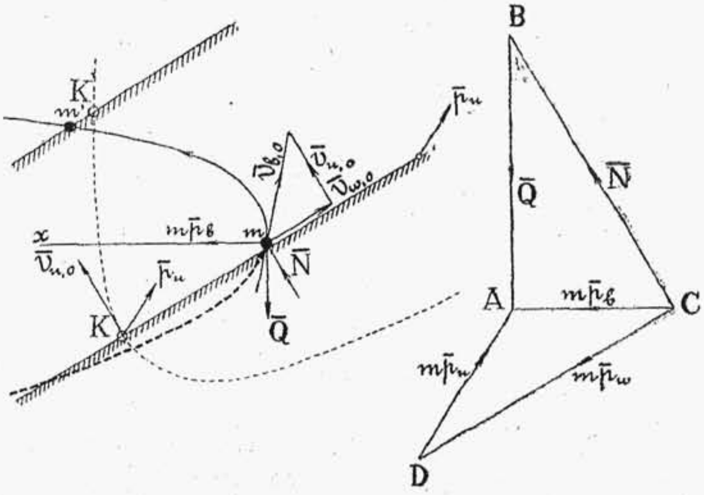
Jeżeli tor ruchomy posiada przyśpieszenie stałe, lecz dowolnie skierowane w przestrzeni, to sposób wyznaczenia ruchu punktu jest jednakowy z poprzednim. Niech np. na rys. 47-ym m oznacza położenie początkowe punktu na torze unoszącym; p_u przyśpieszenie toru, to czworobok A, B, C, D jest geometrycznym wyrazem równania 143-ego;

i jest on zestawiony ze znanych boków Q i $m\bar{p}_u$ oraz ze znanych kierunków $m\bar{p}_w$ i $\bar{N}$.

Jeżeli punkt nie posiadał początkowej prędkości względnej i tor nie posiadał prędkości bezwzględnej, to kierunek odcinka

$$\overline{AC} = m\bar{p}_w + m\bar{p}_u,$$

wyznacza kierunek bezwzględnego toru, jaki punkt ruchomy zakreśla, a prosta $mx \parallel AC$ jest tym torem. Gdy zaś punkt otrzymał prędkość



Rys. 47.

początkową $\bar{v}_{w,0}$, i tor — prędkość $\bar{v}_{u,0}$, wtedy torem bezwzględnym jest parabola.

Na rys. 47-ym parabola (mm') jest torem bezwzględnym danego punktu; parabola zaś (KK') jest torem, jaki zakreśla pewien punkt K toru ruchomego.

Zadanie. Jaki będzie ruch punktu, znajdującego się w powyższych warunkach, gdy nieuwzględnimy ciężaru bryły tylko jej masę. Przypadek ten zachodzi, gdy np. tor porusza się w płaszczyźnie poziomej, a ciężar punktu jest zrównoważony siłą odporową tej płaszczyzny.

64. Przykład. Przyjmijmy, że tor unoszący nie jest prosty lecz kołowy i porusza się w płaszczyźnie pionowej ruchem postępowym z przyśpieszeniem $\bar{p}_u$ stałem, zwróconem np. pionowo ku dołowi. Obliczyć ruch bezwzględny tego punktu, t. j. ruch jego po kole.

Fizycznie możemy przedstawić sobie ten przykład w postaci wahadła płaskiego z nicią sztywną, którego płaszczyzna wraz z punktem zawieszenia opuszcza się pionowo ze stałem przyśpieszeniem p_u.

Równanie dynamiczne tego ruchu jest nast.

$$\bar{Q} + \bar{N} = m\bar{p}_w + m\bar{p}_u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (145)$$

Ażeby wyrugować z rachunku nieznaną siłę N, zrzutujmy to równanie na styczną do toru, przeprowadzoną w dowolnem położeniu punktu, określonem kątem σ, jaki tworzy z pionem promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła do danego położenia punktu; a otrzymamy równanie

$$Q \sin \sigma = mp_{w,t} + mp_u \,.\, \sin \sigma;$$

w którem $p_{w,t}$ oznacza rzut przyśpieszenia względnego na styczną do toru; po podstawieniu w to równanie

$$Q = mg, \quad \text{oraz}\ p_{w,t} = -\, l\, \frac{d_2 \sigma}{dt^2}\,;$$

otrzymamy równanie ruchu w postaci

$$-\, l \frac{d^2\sigma}{dt^2} = (g - p_u) \sin \sigma\,.$$

Równanie to jest jednakowe z równaniem 95-tem, wyrażającem ruch punktu po nieruchomym torze kołowym, gdy zamiast g podstawimy w nie $(g - p_u)$. Całka zatem powyższego równania jest ta sama, jakąśmy znaleźli przy obliczeniu wahadła w § 43-cim; należy tylko zastąpić w tamtych wzorach g wyrazem $(g - p_u)$.

Na zasadzie tego porównania, okres np. podwójnego wahnięcia wahadła z małem odchyleniem początkowem σ_0, opuszczającego się pionowo z przyśpieszeniem p_u; obliczymy ze wzoru 101-ego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - p_u}}\,.$$

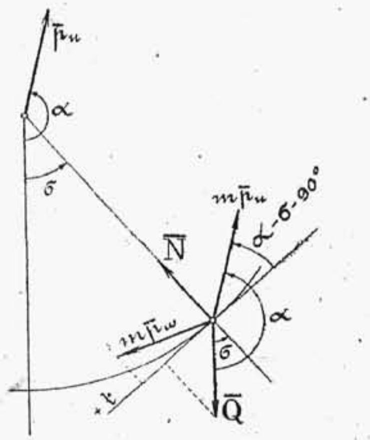
Analiza tego równania da nam dosyć oryginalny obraz ruchu tego wahadła. Jeżeli np. $p_u = 0$; to otrzymamy, że okres ten jest równy okresowi wahadła zwykłego i wzór powyższy przyjmie postać wzoru 101-ego.

Jeżeli p_u jest dodatnie, t. j. jeżeli przyśpieszenie unoszące zwrócone jest ku dołowi, ten bowiem zwrot przyjęliśmy za dodatni, to wahadło dane będzie miało dłuższe okresy wahnięć niż wahadło, pozostające w spoczynku; i zegar np. wahadłowy, opuszczany z takiem przyśpieszeniem, będzie się w tych warunkach opóźniał. W chwili zaś zwalniania ruchu unoszącego, przyśpieszenie unoszące jest odjemne, a okresy wahnięć zegara będą krótsze, zegar będzie się śpieszył.

Jeżeli $p_u > g$, to czas wahnięcia jest urojony; przyjmijmy jednakże dla l znak odjemny, a otrzymamy wartości okresów wahnięć rzeczywiste. Przypadek ten zachodzi, gdy wahadło ma symetryczne położenie względem poprzedniego; i przypadek ten przedstawia wahadło, którego punkt zawieszenia jest niżej punktu ruchomego. Jeżeli przedstawimy sobie ruch tego punktu po kole; to w tym przypadku punkt ruchomy wahać się będzie około wierzchołka koła.

Uogólnijmy to zadanie w ten sposób, że nadajmy wahadłu w jego płaszczyźnie ruch postępowy z przyśpieszeniem stałem, którego kierunek tworzy z pionem kąt α. Równanie dynamiczne tego ruchu posiada postać równania 145-ego; rzut zaś jego na styczną do toru będzie miał nieco zmienioną postać; a mianowicie, porów. rys. 48-my.

$$Q \sin \sigma = mp_{w,t} - mp_u \sin (\alpha - \sigma).$$



Rys. 48

W celu porównania tego wzoru z poprzednim, przyjmijmy, że przyśpieszenie unoszące jest zgodne z kierunkiem siły Q; a otrzymamy z niego równanie wyżej napisane.

Ażeby wytworzyć sobie dokładny obraz ruchu tego wahadła, znajdźmy położenie jego równowagi względnej, które określimy kątem σ', jaki tworzy z kierunkiem pionowym promień, przeprowadzony do tego położenia. W tym celu podstawimy w równanie powyższe $p_{w,t} = 0$, a otrzymamy po skróceniu przez m

$$g \sin \sigma' = - p_u \cdot \sin (\alpha - \sigma') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (146)$$

z którego obliczymy kąt σ'; lub znajdziemy go wykreślając z trójkąta, zestawionego ze znanych wektorów $\bar{g}$ i $\bar{p}_u$.

C. Ruch punktu materyalnego po torze, będącym w ruchu obrotowym.

65. Równanie dynamiczne tego ruchu. W § 74-tym tomu I-ego wykazaliśmy, że przyśpieszenie wypadkowe $\bar{p}_b$ punktu, poruszającego się po torze, będącym w ruchu dowolnym, równa się sumie z przyśpieszenia względnego $\bar{p}_w$, z przyśpieszenia $\bar{p}_u$ unoszącego i z przyśpieszenia