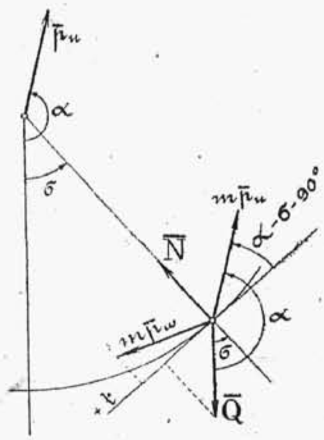
ruchu unoszącego, przyśpieszenie unoszące jest odjemne, a okresy wahnięć zegara będą krótsze, zegar będzie się śpieszył.

Jeżeli $p_u > g$, to czas wahnięcia jest urojony; przyjmijmy jednakże dla l znak odjemny, a otrzymamy wartości okresów wahnięć rzeczywiste. Przypadek ten zachodzi, gdy wahadło ma symetryczne położenie względem poprzedniego; i przypadek ten przedstawia wahadło, którego punkt zawieszenia jest niżej punktu ruchomego. Jeżeli przedstawimy sobie ruch tego punktu po kole; to w tym przypadku punkt ruchomy wahać się będzie około wierzchołka koła.

Uogólnijmy to zadanie w ten sposób, że nadajmy wahadłu w jego płaszczyźnie ruch postępowy z przyśpieszeniem stałem, którego kierunek tworzy z pionem kąt α. Równanie dynamiczne tego ruchu posiada postać równania 145-ego; rzut zaś jego na styczną do toru będzie miał nieco zmienioną postać; a mianowicie, porów. rys. 48-my

$$Q \sin \sigma = m p_{w,t} - m p_u \sin (\alpha - \sigma).$$

W celu porównania tego wzoru z poprzednim, przyjmijmy, że przyśpieszenie unoszące jest zgodne z kierunkiem siły Q; a otrzymamy z niego równanie wyżej napisane.



Rys. 48

Ażeby wytworzyć sobie dokładny obraz ruchu tego wahadła, znajdźmy położenie jego równowagi względnej, które określimy kątem σ', jaki tworzy z kierunkiem pionowym promień, przeprowadzony do tego położenia. W tym celu podstawimy w równanie powyższe $p_{w,t} = 0$, a otrzymamy po skróceniu przez m

$$g \sin \sigma' = - p_u \cdot \sin (\alpha - \sigma') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (146)$$

z którego obliczymy kąt σ'; lub znajdziemy go wykreślając z trójkąta, zestawionego ze znanych wektorów $\bar{g}$ i $\bar{p}_u$.

C. Ruch punktu materyalnego po torze, będącym w ruchu obrotowym.

65. Równanie dynamiczne tego ruchu. W § 74-tym tomu I-ego wykazaliśmy, że przyśpieszenie wypadkowe $\bar{p}_b$ punktu, poruszającego się po torze, będącym w ruchu dowolnym, równa się sumie z przyśpieszenia względnego $\bar{p}_w$, z przyśpieszenia $\bar{p}_u$ unoszącego i z przyśpieszenia złożonego, określonego wzorem wektorowym $2\,V\,\bar{v}_w\,.\,\dot{\varphi}$; a wynikającego ze zmiany położeń wektorów prędkości punktu, zachodzącej podczas obrotu toru; a zatem mamy równanie kinematyczne

$$\bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u + 2\,V\,\bar{v}_w\,.\,\dot{\varphi};$$

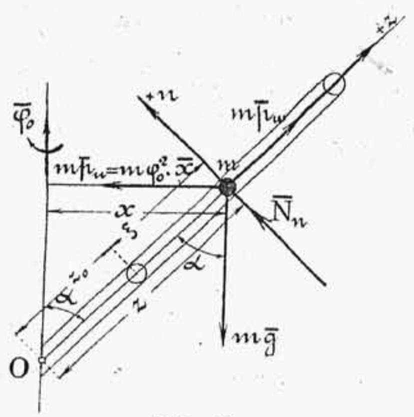
z którego otrzymamy dynamiczne, gdy przemnożymy je przez m, i zamiast iloczynu $m\bar{p}_b$ podstawimy siły zewnętrzne, działające na dany punkt; a zatem mamy

$$\bar{P} = m\bar{p}_w + m\bar{p}_u + 2\,m\,V\,\bar{v}_w\,.\,\dot{\varphi}\,.$$

Jeżeli chcemy obliczyć ruch względny lub siłę względną, t. j. siłę, któraby wywoływała taki sam ruch danego punktu po torze, pozostającym w spoczynku, jaki ten punkt posiadał podczas ruchu toru, to napiszemy z tego równania

$$m\bar{p}_w = \bar{P} - (m\bar{p}_u + 2\,m\,V\,\bar{v}_w\,\dot{\varphi})\quad.\;.\;.\;.\;.\quad(147)$$

66. Przykład. Torem unoszącym jest rurka prosta wewnątrz doskonale gładka, nachylona względem osi pionowej pod kątem α; rurka ta obraca się około tej osi z prędkością stałą $\dot{\varphi}_0$, rys. 50-ty; w rurce umieszczony jest punkt materyalny ciężki; mogący poruszać się w niej bez tarcia. Obliczyć ruch względny tego punktu, jego tor bezwzględny oraz siłę odporową; gdy oś rurki przecina oś obrotu.



Rys. 49.

Na dany punkt działają przeto siły

$$m\bar{g} \text{ oraz } \bar{N};$$

i wywołują przyśpieszenie, złożone z trzech wyżej określonych poszczególnych przyśpieszeń; równanie zatem dynamiczne tego ruchu jest nast.

$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p}_w + m\bar{p}_u + 2\,m\,V\,\bar{v}_w\,.\,\dot{\varphi}_0\;(148)$$

Przyśpieszenie unoszące $\bar{p}_u$ jest w danym razie wynikiem ruchu punktu po kole poziomem o promieniu x, na którem w danej chwili znajduje się punkt ruchomy, jest zwrócony ku osi i równa się

$$\bar{p}_u = \dot{\varphi}^2\,.\,\bar{x}.$$

Przyśpieszenie zaś $2\,V\,\bar{v}_w\,.\,\dot{\varphi}_0$, w myśl danego określenia, jest prostopadłe do kierunku prędkości względnej i do kierunku osi obrotu, czyli jest prostopadłe do płaszczyzny, przechodzącej przez chwilowe położenie rurki i jest zwrócone zgodnie ze zwrotem obrotu; ponieważ rys. 50-ty przedstawia tę płaszczyznę, a więc przyśpieszenie to jest prostopadłe do tej płaszczyzny i jest zwrócone ku czytelnikowi[1]); a wartość jego równa się

$$2 v_w \varphi_0 \sin \alpha.$$

Z tego wynika, że wielobok wektorowy przedstawiony przez powyższe równanie dynamiczne, nie leży w jednej płaszczyźnie; bo chociaż wektory

$$m\bar{g} \text{ i } m\bar{p}_u \text{ oraz } m\bar{p}_u$$

leżą w płaszczyźnie biegunowej, lecz wektor przyśpieszenia złożonego, a więc i wektor siły odporowej, wielobok musi być zamknięty, wychodzą z tej płaszczyzny.

Równanie powyższe, jako równanie wektorowe, może być zastąpione w ogóle przez trzy równania skolarne, w których mogą być trzy skolarne niewiadome. Jedną niewiadomą jest przyśpieszenie p_w, które, ze względu na to, że znamy jego kierunek, przedstawia jedną niewiadomę algebraiczną. Nieznana zaś prędkość v_w pozostaje w związku kinematycznym z przyśpieszeniem $\bar{p}_w$, nie przedstawia zatem nowej niewiadomej; natomiast jest jeszcze nieznany wektor siły $\bar{N}$, który przedstawia w danym razie dwie tylko niewiadome algebraiczne; położenie bowiem płaszczyzny, w której on się znajduje, jest nam znane z warunku gładkości toru; a dla wyznaczenia jego położenia w danej płaszczyźnie, wystarcza znajomość dwóch algebraicznych wielkości, wyrażających np. rzuty tej siły na dwie obrane osi. Siły zewnętrzne oraz wielkości, wyznaczające ruch toru, przyjęliśmy za znane; mamy zatem w powyższem równaniu wektorowem trzy niewiadome algebraiczne, które obliczymy z rzutów tego równania na trzy osi spółrzędnych. Osi te obierzemy w ten sposób, ażeby w każde z otrzymanych równań algebraicznych wchodziła możliwie jedna tylko niewiadoma. Ażeby obliczyć np. przyśpieszenie względne, zrzutujemy powyższe równanie na kierunek toru; przyśpieszenie bowiem $\bar{p}_w$ zrzutuje się w rzeczywistej wielkości, a wektor siły normalnej, jak również wektor przyśpieszenia złożo-

---

[1]) Powstanie i zwrot przyśpieszenia tego można bezpośrednio unaocznić wyobraziwszy sobie, że wektor $\bar{v}_w$ jest sztywno związany z torem ruchomym, a zwrot przesunięcia końca tego wektora, jakiego on doznа podczas obrotu wraz z torem, jest zwrotem przyśpieszenia złożonego; przesunięcie to bowiem jest w geometrycznej zależności od przyrostów prędkości, wynikających z obrotu toru. W przykładzie przeto powyższym, rys. 49, koniec wektora $\bar{v}_w$, sztywno związanego z torem ruchomym, zakreśli, podczas cząstkowego obrotu rurki, odcinek ze zwrotem prostopadłym do płaszczyzny biegunowej; dla wywołania przeto tego przyrostu powinna być pewna siła; siłą tą jest, w danym przypadku składową, w kierunku prostopadłym do płaszczyzny biegunowej, siła odporowa rurki.

nego, zrzutuje się jako zero; mamy przeto równanie algebraiczne, porów. rys. 49-ty

$$-mg\cos\alpha = mp_w - m\varphi^2_0 . x . \sin\alpha;$$

z którego

$$p_w = \varphi^2_0 . x . \sin\alpha - g . \cos\alpha.$$

Oznaczamy literą z odległość punktu ruchomego od miejsca przecięcia się osi rurki z osią obrotu; a równanie powyższe, po podstawieniu w nie

$$x = z . \sin\alpha,$$

przedstawi się w postaci

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = m . \varphi^2_0 . z . \sin^2\alpha - m . g . \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

Równanie to można przedstawić sobie fizycznie w ten sposób, że ruch punktu po danym torze odbywa się tak, jakgdyby tor pozostawał w spoczynku, a punkt był pod działaniem jednej siły stałej

$$mg\cos\alpha,$$

ze zwrotem odjemnym; i drugiej siły z kierunkiem dodatnim

$$m . \varphi^2_0 . z . \sin^2\alpha,$$

proporcyonalnej do odległości punktu od obranego początku. Z powyższego równania wynika, że przyśpieszenie względne może być dodatnie lub odjemne, zależnie od wielkości siły zmiennej, t. j. zależnie od położenia punktu na torze.

Szczególnem miejscem na torze jest miejsce, w którem punkt ruchomy posiada przyśpieszenie $p_w = 0$. Oznaczymy odległość tego miejsca od początku układu przez z_0, a obliczymy ją z równania poprzedniego, po podstawieniu $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$; a zatem

$$0 = \varphi^2_0 . z_0 . \sin^2\alpha - g . \cos\alpha; \text{ skąd}$$

$$z_0 = \frac{g}{\varphi^2_0} . \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

Jeśli np. punkt ruchomy umieścimy w miejscu z_0 i nie nadamy mu prędkości względnej, lecz nadamy mu prędkość unoszącą, to pozostawać on będzie podczas obrotu toru w spoczynku. Obierzmy to miejsce za początek drogi, i określmy każde inne położenie tego punktu przez odległość ξ od tego początku; to równanie ruchu uprości się o tyle, że nie będzie w niem wyrazu stałego; po podstawieniu bowiem $\xi = 0$, przybrać ono powinno postać

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0;$$

co też otrzymamy, gdy podstawimy $z = z_0 + \xi$, oraz wartości z_0 z równ. 150-go. Równanie to jest następujące

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \varphi^2_0 \,.\, \sin^2 \alpha \,.\, \xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (151)$$

Równanie to można uważać za równanie ruchu punktu, odpychanego od środka, siłą proporcyonalną do odległości; położenia zaś środka odpychania wyznacza wielkość z_0. Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy już w § 8-ym; napiszemy przeto szukane równanie ruchu względnego, utożsamiając równanie 151-sze z równaniem 27-em; i podstawiwszy np. w równ. 31-sze

$$\frac{k}{m} = \varphi^2_0 \sin^2 \alpha;$$

otrzymamy równanie ruchu względnego dla takich samych warunków początkowych, dla jakich zestawiane jest to równanie, t. j. dla

$$\xi = 0; \; v_w = v_{w,0}, \; t = 0;$$

równanie to jest nast.

$$\xi = \tfrac{1}{2}\, v_{w,0} \,.\, \frac{1}{\varphi_0 \,.\, \sin \alpha} (e^{t \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin \alpha} - e^{-t \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin \alpha}) \quad . \; . \; . \quad (152)$$

Z równania tego obliczymy prędkość względną v_w, różniczkując je względem t; a zatem

$$v_w = \tfrac{1}{2} v_{w,0} \,(e^{t \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin \alpha} + e^{-t \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin \alpha}). \quad . \; . \; . \; . \quad (153)$$

Z równania tego wynika, że zwrot ruchu punktu po torze jest zgodny ze zwrotem prędkości, jaką on posiada w miejscu równowagi względnej; i że wartość prędkości bardzo szybko rośnie z biegiem czasu; zmienna bowiem t jest w wykładniku.

Tor bezwzględny wyznaczyć możemy bezpośrednio na powierzchni stożka, zakreślonego przez oś obracającą się. W tym celu powierzchnię stóżka, o otworze $2\,\alpha$, rozwiniemy na płaszczyznę rysunku i z jego wierzchołka wyprowadzimy dla różnych wartości t pęk promieni, odpowiadających położeniom osi ruchomej, mając przytem na uwadze, że obrót osi, zgodnie z warunkami zadania, jest jednostajny; i następnie na tych promieniach odetniemy długość $z_0 + \xi$, obliczone z powyższych równań; a końce ich wyznaczą pewną krzywą płaską; która, po nawinięciu jej na stożek obrotowy, przedstawi w przestrzeni tor bezwzględny danego punktu ruchomego.

W celu unaocznienia sobie postaci toru bezwzględnego, można obliczyć również rzut jego na płaszczyznę poziomą. Najprostszą postać równania, przedstawiającego tę krzywą, otrzymamy, stosując spółrzędne biegunowe; i w tym celu oznaczymy promień wodzący literą r, — kąt biegunowy literą σ; promień przeto r jest rzutem odległości $(z_0 + \xi)$ na tę płaszczyznę; a $\sigma = \varphi_0 . t$. Z tych dwóch równań wyrugujemy zmienną t i otrzymamy w spółrzędnych biegunowych równanie rzutu toru właściwego na płaszczyznę poziomą; z tego rzutu sądzić można o właściwościach samego toru i ruchu po nim.

W celu obliczenia siły odporowej N, weźmy pod uwagę, że siła ta, wskutek zupełnej gładkości toru, działa w płaszczyźnie normalnej do toru, nie znane przeto jest położenie w tej płaszczyźnie i jej wartość. Niewiadome te wyrazimy rzutami jej na osi, przeprowadzone w płaszczyźnie normalnej do toru, przechodzącej przez miejsce, w którem chcemy obliczyć siłę odporową; jedną z tych osi obierzemy prostopadle do płaszczyzny biegunowej, i oznaczymy literą b (binormalna); drugą — w płaszczyźnie biegunowej, prostopadle do osi obracającego się toru; oś tę oznaczymy literą n; zrzutujmy następnie na te osi wielobok, przedstawiony równaniem 156-em; a otrzymamy jej rzuty. Rzut na normalną b daje równanie

$$1) \quad N_b = 2\, m \,.\, v_w \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

Rzut zaś na normalną n da równanie

$$- mg \sin\alpha + N_n = m\varphi_0{}^2 \,.\, x \,.\, \cos\alpha;$$

z którego po podstawieniu $x = z \sin\alpha$, otrzymamy

$$2) \quad N_n = m\varphi_0{}^2 \,.\, z \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + mg \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

Z tych dwóch równań obliczymy siłę odporową toru, oraz jej położenie w płaszczyźnie normalnej.

W szczególnym przypadku, gdy punkt ruchomy znajduje się w miejscu równowagi względnej; t. j. gdy znajduje się w miejscu z_0, obliczymy te wielkości, gdy podstawimy w powyższe równania wartości z_0, oraz $v_w = 0$; a otrzymamy następujące wzory rzutów siły odporowej w tem miejscu

$$N_b' = 0; \; N_n' = mg \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + mg \sin\alpha = \frac{mg}{\sin\alpha},$$

z których wynika, że siła odporowa toru w miejscu równowagi punktu, leży w płaszczyźnie biegunowej i jest większą od ciężaru punktu. Wynik ten zdaje się być w sprzeczności z zasadami statyki; w statycznych bowiem pojęciach opór ten posiada wartość $mg \sin\alpha$; sprzeczność tę wytłomaczymy sobie bezwładnością punktu materyalnego; podczas bowiem jego obrotu działa na niego siła dośrodkowa, której składową w kierunku osi n przedstawia wyraz $mg \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$; a ta dopiero łącznie ze statyczną składową $mg \sin\alpha$, daje siłę odporową N_n.

W szczególnym przypadku, gdy $\alpha = 90^0$; t. j. gdy tor obraca się w płaszczyźnie poziomej około jednego ze swych punktów: a punkt materyalny może się poruszać tylko po tej prostej; wtedy otrzymamy ze wzoru powyższego $z_0 = 0$; t. j. położenie równowagi punktu jest wtedy w miejscu przejęcia się toru z osią obrotu, co jest fizycznie łatwem do zrozumienia. Równanie toru bezwzględnego można w tym razie bezpośrednio wykreślić lub obliczyć z wyprowadzonych wyżej wzorów. Siła odporowa w tym przypadku, posiada następujące dwa rzuty

$$N_b = 2\, m \,.\, v_w \,.\, \varphi_0; \text{ oraz } N_n = mg.$$

z których N_n jest wynikiem tylko statycznego działania ciężaru; a N_b wyraża wpływ obrotu toru na zmianę prędkości względnej.

67. Przykład. Przyjmijmy teraz, że prędkość obrotowa φ jest zmienną; lecz o kierunku stałym. W celu zestawienia równań ruchu tego punktu zauważymy, że w równaniu dynamicznem przykładu poprzedniego zmieni się tylko przyśpieszenie unoszące; do poprzednich bowiem wielkości dojdzie przyśpieszenie styczne do równoleżnika, na którym chwilowo znajduje się punkt ruchomy; wartość tego przyśpieszenia jest

$$\frac{dv_u}{dt} \text{ inaczej } x\,.\frac{d\varphi}{dt};$$

pozostałe zaś wyrazy poprzedniego równania dynamicznego nie zmienią się. W celu np. obliczenia ruchu względnego tego punktu, zrzutujmy na kierunek osi rurki równanie dynamiczne, jakieśmy to uczynili poprzednio, a zważywszy, że rzut tego nowego przyśpieszenia na tor obracający się równa się zeru, otrzymamy te same równania różniczkowe ruchu względnego, jakie mieliśmy w poprzednim przykładzie.

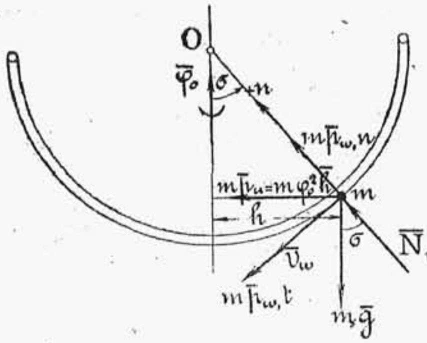
Ruch przeto względny punktu ruchomego w przypadku zmiennej prędkości obrotowej jest ten sam, jaki był podczas obrotu jednostajnego. Siła natomiast odporowa podczas obrotu niejednostajnego się zmieni; a mianowicie zmieni się jej składowa $\overline{N}_b$; przybędzie bowiem do poprzedniej wartości przyśpieszenie styczne.

$$m \frac{d\varphi}{dt} z \,.\, \sin \alpha.$$

Również ruch bezwzględny jest w tym razie inny; bo chociaż prędkości względne w obydwóch przypadkach ruchu są dla jednakowych wartości z jednakowe, lecz położenia toru unoszącego dla tych samych wartości t są różne; bezwględny przeto tor będzie także inny, niż był poprzednio. Tor ten można wykreślić lub obliczyć w sposób wyżej wskazany.

W razie uwzględnienia siły tarcia, pomiędzy punktem a torem ruchomym, przybędzie do równania dynamicznego siła tarcia, działająca wzdłuż osi rurki ze zwrotem przeciwnym zwrotowi względnej prędkości punktu; wartość tej siły $= \mu . N$. W równanie ruchu względnego w danym razie wejdzie wyraz siły odporowej, który do pewnego stopnia utrudni nieco rachunek; nie sprawi jednakże żadnych zasadniczych trudności. W celu zresztą uproszczenia tego rachunku można zastosować wzory przybliżone, wskazane w § 53-cim.

68. Przykład. Koło o promieniu r, które wyobrazić sobie możemy jako oś rurki, obraca się ruchem jednostajnym około swej średnicy, pionowo ustawionej; na obwodzie tego koła (lub wewnątrz rurki) znajduje się punkt materyalny o ciężarze mg, mogący się po nim suwać bez tarcia. Obliczyć ruch względny tego punktu.



Rys. 50.

Punkt ruchomy znajduje się w danym razie pod działaniem siły ciążenia i siły odporowej, leżącej w płaszczyźnie normalnej do toru poruszającego się; przyśpieszenie zaś tego punktu jest złożone, rys. 50 ty: 1) z przyśpieszenia, wywołanego względnym ruchem punktu po kole. Przyśpieszenie to wyobrazimy sobie złożonem z przyśpieszenia normalnego $\bar{p}_{w,n}$ po promieniu koła ze zwrotem ku środkowi koła; a którego wartość równa się

$$\frac{v^2_w}{r},$$

i z przyśpieszenia $\bar{p}_{w,t}$, stycznego do toru i zwróconego zgodnie ze zwrotem ruchu punktu po torze, a którego wartość równa się

$$\frac{dv_w}{dt}.$$

2) z przyśpieszenia unoszącego, złożonego z przyśpieszenia wzdłuż promienia h równoleżnika, na którym leży chwilowo dany punkt; wartość tego przyśpieszenia wyraża wzór

$$\bar{p}_u = \varphi^2 . \bar{h};$$

3) z przyśpieszenia, którego wartość wyrażamy wzorem

$$2\, \mathrm{V}\bar{v}_w . \bar{\varphi},$$

i które powstaje wskutek ruchu punktu po obracającym się torze. Równanie zatem dynamiczne tego ruchu jest następujące

$$m\bar{g} + (\bar{N}_n + \bar{N}_b) = (m\bar{p}_{w,n} + m\bar{p}_{w,t}) + (m\bar{p}_u + 2\, m\, \mathrm{V}\bar{v}_w\, \bar{\varphi}_0).$$

Równanie to przedstawia wielobok wektorowy, którego boki, oprócz boków $\bar{N}_b$ i $2m\mathrm{V}\bar{v}_w\bar{\varphi}_0$, leżą w płaszczyźnie biegunowej, t. j. w płaszczyźnie koła obracającego się. Rys. 50-ty przedstawia płaszczyznę biegunową ze znajdującymi się na niej wektorami; wektory zaś

$$\bar{N}_b \text{ i } 2m\,\mathrm{V}\bar{v}_w\,\bar{\varphi}_0.$$

nie są naniesione na ten rysunek, gdyż są prostopadłe do jego płaszczyzny.

Ażeby obliczyć ruch względny punktu, obliczymy przyśpieszenie styczne do koła i w tym celu zrzutujemy wszystkie wektory, przedstawione przez powyższe równanie, na styczną do toru, a otrzymamy jedno równanie z jedną niewiadomą $p_{w,t}$; gdyż rzuty pozostałych nieznanych wielkości będą równe zeru; a zatem otrzymamy równanie algebraiczne

$$mg \sin\sigma = m\varphi_0^2 r \,.\, \sin\sigma \,.\, \cos\sigma + m p_{w,t}\,; \text{ z którego}$$

$$p_{w,t} = g \sin\sigma - \varphi_0^2 r \,.\, \sin\sigma \cos\sigma; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

a ponieważ

$$p_{w,t} = \frac{dv_w}{dt} = -r\,\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

przeto, po podstawieniu tej wartości, otrzymamy równanie ruchu względnego

$$-r\,\frac{d^2\sigma}{dt^2} = g \sin\sigma - \varphi_0^2 r \,.\, \sin\sigma \,.\, \cos\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, które po scałkowaniu da związek pomiędzy σ i t, t. j. da równanie ruchu względnego. Porównywując powyższe równanie z takimże równaniem ruchu wahadła w płaszczyźnie nieruchomej, zauważymy, że przybył obecnie nowy wyraz

$$\varphi_0^2 r \,.\, \sin\sigma \,.\, \cos\,.\,\sigma,$$

wynikający z obrotu toru. W szczególnym przypadku, gdy $\varphi_0 = 0$, wtedy otrzymamy równanie ruchu wahadła płaskiego. Z powyższego równania, po jego scałkowaniu, obliczymy prędkość względną

$$v_w = -l\,\frac{d\sigma}{dl},$$

a z tej wartości obliczymy

$$p_{w,n} = \frac{v^2 w}{r};$$

t. j. przyśpieszenie normalne ruchu względnego; a wreszcie z tych dwóch przyśpieszeń $p_{w,t}$ i $p_{w,n}$ — przyśpieszenie całkowite ruchu względnego.

Z rzutu równania dynamicznego na promień wodzący r obliczymy rzut N_n siły odporowej; a z rzutu jej na normalną b obliczymy składową N_b; z tych wreszcie dwóch rzutów obliczymy wartość i położenie siły odporowej.

Nie wszystkie jednakże wskazane rachunki mogą być wykonane zwykłymi sposobami matematycznymi. Całka np. równania ruchu względnego jest funkcyą eliptyczną i może być obliczoną tylko z pewnem przybliżeniem w ten sposób, w jaki wykonaliśmy obliczenie ruchu wahadła pospolitego.

Ażeby otrzymać choć przybliżony obraz tego ruchu, zastosujemy uwagi, wyłożone w § 59-tym, odnoszące się do równania ruchu w postaci różniczkowej; napiszemy przeto równanie danego ruchu w postaci

$$r\frac{d^2\sigma}{dt^2} + (g - \varphi_0^2 \cdot r \cdot \cos \sigma) \sin \sigma = 0;$$

i zważywszy, że wartość $\sin \sigma$ dla wszystkich kątów σ nie zmienia postaci tego równania; gdyż dla $0 < \sigma < \pi$, $\sin \sigma$ jest dodatni; a dla $\sigma < 0$ wszystkie wyrazy tego równania zmieniają swój znak, wywnioskujemy, że o rodzaju ruchu roztrzyga znak wyrazu w nawiasach; i jeżeli

$$g - \varphi_0^2 \cdot r \cdot \cos \sigma > 0; \text{ t. j. jeżeli } \varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r \cos \sigma}}; \quad . \quad . \quad (158)$$

to ruch będzie wahadłowy około położenia równowagi, wyznaczonego kątem $\sigma = 0$. Ruch ten jednakże nie będzie, ściśle biorąc, jednakowy z ruchem wahadłowym, opisanym w § 43-cim; równania bowiem tych dwóch ruchów są nie jednakowe; a zresztą rozpatrując ten ruch ze stanowiska fizycznego, zauważymy, że i siły działające na punkt ruchomy są różne; lecz ruch ten może być nazwany ruchem wahadłowym w ogólniejszem znaczeniu. Zauważyć następnie należy, że zmiana znaku wartości kąta σ nie wpływa na warunek, wyrażony wzorem 157-mym; punkt przeto, puszczony ze wszystkich miejsc toru, wykona w tych warunkach ruch wahadłowy.

Jeżeli zaś $g - \varphi_0^2 r < 0$; to wyraz $(g - \varphi_0^2 r \cos \sigma)$ może być $\gtreqless 0$, zależnie od wartości $\cos \sigma$. Jeżeli np. dla pewnych wartości kąta σ wyraz ten jest odjemny, to dla innych wartości σ może być dodatni; z czego wynika, że punkt ruchomy w różnych swych położeniach na kole jest odpychany lub też przyciągany do położenia pionowego; tylko dla $\pi > \sigma > \frac{\pi}{2}$ wyraz ten będzie zawsze dodatni, t. j. punkt ruchomy będzie w tej ćwiartce koła posiadał zawsze ruch skierowany ku położeniu pionowemu.

Poniewaz punkt dany, znajdując się w pierwszej ćwiartce koła, $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$, w różnych jego miejscach, posiada prędkości różnie skierowane; przeto powstaje pytanie, czy nie waha się on koło pewnego położenia równowagi względnej, które jest nam dotychczas nieznane.

Miejsca, w których następuje równowaga względna, odznaczają się tem, że punkt ruchomy przechodzi przez nie z przyśpieszeniem względnem $= 0$. Jeżeli miejsce to określimy kątem σ', licząc go od położenia pionowego, to z równania ruchu napiszemy równanie

$$(g - \varphi_0^2 \cdot r \cdot \cos \sigma') \cdot \sin \sigma' = 0;$$

z którego

$$\sin \sigma' = 0; \text{ lub } \cos \sigma' = \frac{g}{\varphi^2 r};$$

a z nich otrzymamy cztery wartości dla σ'

$$\sigma_1' = 0; \; \sigma_2' = 180^0, \text{ oraz}$$

$$\sigma'_{3,4} = \pm \text{ arc cos}\left(\frac{g}{\varphi^2 r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (159)$$

Posiadamy przeto w tych warunkach ruchu cztery położenia względnej równowagi punktu na kole; dwa z nich leżą na końcach średnicy pionowo przeprowadzonej, drugie zaś dwa leżą symetrycznie względem tejże średnicy; i te dwa położenia występują dopiero przy warunku $g < \varphi_0^2 r$; lub inaczej, gdy $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$; położenie zaś równowagi, znajdujące się na końcach średnicy pionowej, występują przy wszelkich wartościach prędkości obrotowej koła.

Cztery te miejsca równowagi względnej mają przeto tę wspólną właściwość, że punkt ruchomy, umieszczony w nich bez prędkości względnej, lecz z prędkością unoszącą, pozostanie w spoczynku podczas obrotu koła. Porównywując ten przykład z przykładem, przytoczonym w § 66-tym, gdy torem ruchomym była prosta obracająca się, zauważymy, że w przykładzie z prostą mieliśmy jedno tylko położenie równowagi względnej; w danym zaś przykładzie mamy ich cztery.

W celu otrzymania pewnych ilościowych stosunków danego ruchu, weźmy pod uwagę, że siła styczna, której wyrazem jest prawa strona równ. 157-ego, jest mniejsza, niż takaż siła wahadła, którego płaszczyzna pozostaje w spoczynku, ruch przeto względny danego wahadła będzie wolniejszy. Z pewnem przybliżeniem obliczymy ruch względny tego wahadła, gdy przyjmiemy, że kąt początkowego odchylenia jest dostatecznie mały; wtedy bowiem

$$\sin\sigma = \sigma;\ \cos\sigma = 1;$$

i otrzymamy równanie

$$-r\frac{d^2\sigma}{dt^2} = (g - \varphi_0^2 r)\,.\,\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

które jest jednakowe z równ. 95-tem, gdy zastąpimy wielkość g wielkością $(g-\varphi_0^2 r)$. Okres np. podwójnego wahnięcia tego ruchu otrzymamy, po podstawieniu tych wartości do równ. 101-szego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g - \varphi_0^2 r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

Równaniu temu można nadać pewne dynamiczne znaczenie; dla małych np. kątów odchylenia można uważać kierunek przyśpieszenia dośrodkowego $\varphi_0^2 r$ za zlewający się z kierunkiem pionowym; a wtedy na punkt dany dzizła siła $m\ (g-\varphi_0^2 r)$ w kierunku pionowym, porówn. § 64-ty; której rzut na styczną jest

$$m\ (g - \varphi_0^2 r)\sin\sigma;$$

lub w skróceniu

$$m\ (g - \varphi_0^2 r)\,.\,\sigma.$$

W przypadku

$$g = \varphi_0^2 r;$$

otrzymamy siłę styczną $=0$, a to znaczy, że w tym przypadku punkt, odchylony z położenia równowagi, pozostanie w spoczynku na kole lub też w ruchu jednostajnym.

Jeżeli zaś

$$g < \varphi_0^2 r,$$

to równ. 160-te przedstawia ruch punktu, odpychanego od położenia równowagi siłą, proporcyonalną do odchylenia σ; punkt przeto w tych warunkach wykona znaczne odchylenia; a do zbadania tego ruchu, nie może być stosowane uproszczone równ, 160-te, a tylko równanie dokładne, t. j. równ. 157-me. Jeżeli przeto $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$, to położenie pionowe wahadła jest położeniem równowagi nietrwałej. punkt bowiem odchylony z tego położenia będzie się od niego oddalał.

W tenże sposób obliczymy ruch punktu, gdy wyprowadzimy go z położenia równowagi względnej, wyznaczonej kątem σ_3 lub σ_4. W tym celu podstawmy w równanie 157-me, jako w równanie ogólne danego ruchu

$$\sigma' = \sigma' + \Delta\,\sigma',$$

gdzie kąt $\Delta\sigma'$ oznacza odchylenie punktu od położenia równowagi, określonego kątem σ', a otrzymamy równanie

$$-r\frac{d^2(\sigma'+\Delta\sigma')}{dt^2}=g\sin(\sigma'+\Delta\sigma')-\varphi_0^2 r.\sin(\sigma'+\Delta\sigma').\cos(\sigma'+\Delta\sigma').$$

Nawiasy tego równania możemy rozwiązać, a przyrównawszy, wobec małych kątów $\Delta\sigma'$

$$\sin\Delta\sigma'=\Delta\sigma';\text{ oraz }\cos\Delta\sigma'=1;$$

i usunąwszy wartości nieskończenie małe drugiego rzędu, otrzymamy związek pomiędzy położeniem punktu, określonem kątem zmiennym $\Delta\sigma'$, a przyśpieszeniem jego. Przekształcenie to prędzej jednakże wykonamy, gdy odejmiemy od tego równania równanie 157-me; wtedy bowiem otrzymamy zupełną różniczkę równ. 157-go względem zmiennej σ'; w ten sposób otrzymamy bezpośrednio szukane równanie. Zróżniczkujmy przeto równanie 157-me; a otrzymamy

$$-r\frac{d^2(\Delta\sigma')}{dt^2}=g\cos\sigma'.\Delta\sigma'-\varphi_0^2 r.\cos 2\sigma'.\Delta\sigma';$$

a po podstawieniu

$$g=\varphi_0^2.r.\cos\sigma';\text{ mamy}$$

$$-r\frac{d^2(\Delta\sigma')}{dt^2}=(\cos^2\sigma'-\cos 2\sigma').\varphi_0^2 r.\Delta\sigma';$$

i wreszcie po przekształceniu otrzymamy równanie ruchu punktu, względem jego położenia równowagi

$$\frac{d^2(\Delta\sigma')}{dt^2}+\sin^2\sigma'.\varphi_0^2.\Delta\sigma'=0.$$

W równaniu tem spółczynnik przy zmiennej $\Delta\sigma'$ jest zawsze dodatni, równanie to, porówn. § 59-ty, wyraża przeto zawsze ruch wahadłowy około położenia równowagi, wyznaczonego kątem σ'. Okres np. podwójnego wahnięcia danego ruchu obliczymy ze wzoru np. 25-go, po podstawieniu w niego

$$\frac{k}{m}=\sin^2\sigma'.\varphi_0^2,$$

lub ze wzoru 109-go po podstawieniu $\left(\frac{g}{r}\right)=\sin^2\sigma'.\varphi_0^2$; i otrzymamy dla małych odchyleń

$$T_{3,4}=\frac{2\pi}{\sin\sigma'.\varphi_0}.$$

Przedstawmy sobie obecnie całokształt ruchu danego punktu, przy różnych wartościach prędkości obrotowej φ_0:

1) jeżeli $\varphi_0<\sqrt{\frac{g}{r}}$, to punkt ruchomy, odchylony z położenia pionowego, będzie się około tego położenia wahał; i np. okres jego po-

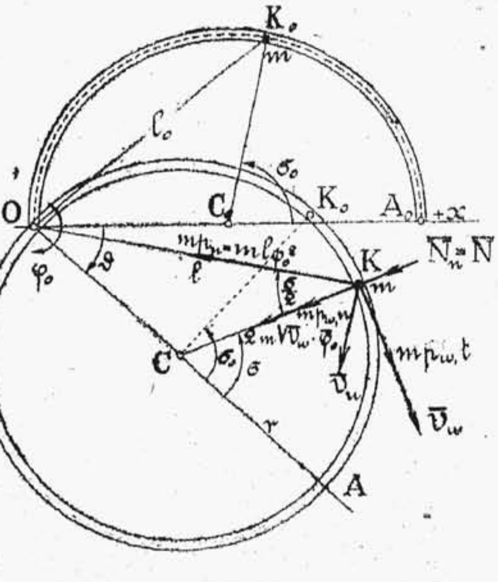
dwójnego wahnięcia dla małych odchyleń obliczymy z równ. 161-szego. Położenie pionowe wahadła jest w danym przypadku położeniem równowagi trwałej. Przy tych warunkach ruchu obrotowego niema innych położeń równowagi.

2) jeżeli $\varphi_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}$; położenie pionowe staje się położeniem równowagi obojętnej, dla małych odchyleń punkt będzie pozostawał na kole w spoczynku.

3) jeżeli wreszcie $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$; to położenie pionowe jest położeniem równowagi nie trwałej i powstają wtedy dwa inne położenia równowagi, które są położeni mi równowagi trwałej; położenia te wyznaczone są kątami $\sigma_{3,4}$, które obliczyć można z równ. 159-ego, a których wielkości rosną z powiększeniem prędkości obrotowej. Punkt wyprowadzony nieco z jednego z tych położeń równowagi, będzie się wahał około tych położeń; a np. okres podwójnego wahnięcia dla małych odchyleń obliczymy ze wzoru $T_{3,4}$.

Czytelnik zechce rozpatrzeć drogą rozumową właściwości siły odporowej w miejscach równowagi punktu; a następnie ją obliczyć.

69. Przykład. Punkt materyalny ślizga się wewnątrz rurki gładkiej, wygiętej w postaci koła o promieniu r. Rurka ta obraca się w płaszczyźnie poziomej ze stałą prędkością kątową φ_0 około nieruchomego bieguna O, obranego na obwodzie koła rys. 51-szy. Obliczyć ruch względny, i ruch bezwzględny punktu, oraz siłę odporową rurki.



Rys. 51.

Położenie koła na płaszczyźnie nieruchomej określmy kątem ϑ, jaki tworzy jego średnica OA z osią x, nieruchomo obraną na tej płaszczyźnie; położenie zaś punktu ruchomego na kole określiliśmy kątem σ, jaki tworzy promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła z obracającą się razem z kołem średnicą OA. Przyjmiemy następnie, że w początkowem położeniu koła

$$t = 0;\ \vartheta = 0;\ \sigma = \sigma_0:$$

a po upływie czasu t średnica OA_0 przyjmie położenie OA i utworzy z osią nieruchomą x kąt ϑ; punkt zaś ruchomy podczas tego obrotu, przesunie się po kole z miejca K_0 do miejsca K, wyznaczonego kątem środkowym σ. Jeżeli znane są ϑ i σ w chwili t, to położenie punktu ruchomego jest wyznaczone jak na kole tak i na płaszczyźnie nieruchomej.

Przyjąć można, że na punkt ruchomy w tym przykładzie nie działa żadna siła zewnętrzna; ciężar bowiem punktu jest zrównoważony siłą odporową płaszczyzny poziomej, po której porusza się rurka; lub też jest zrównoważony siłami odporowemi osi obrotu, jeżeli rurka przymocowaną jest do osi pionowej. Podczas jednakże obrotu rurki około bieguna O wywołana zostaje bezwładnością punktu siła odporowa N, normalna do koła. Przyśpieszenia zaś, jakie otrzymuje punkt ruchomy, podczas obrotu rurki, są nast.:

1) przyśpieszenie względne $\bar{p}_w$, które wyobrazimy sobie, w celu ułatwienia rozpatrywań, w postaci dwóch składowych: normalnej $\bar{p}_{w,n}$, oraz stycznej $\bar{p}_{w,t}$; wartości tych składowych są następujące

$$p_{w,n} = \frac{v^2_w}{r} = r\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2; \text{ oraz } p_{w,t} = \frac{dv_w}{dt} = -r\frac{d^2\sigma}{dt^2}. \quad . \quad (162)$$

2) przyśpieszenie unoszące $\bar{p}_u$, które jest zwrócone w tym przykładzie po promieniu wodzącym l, wyprowadzonym z bieguna nieruchomego O do danego punktu; wartość tego przyśpieszenia

$$p_u = \frac{v_u^2}{l}; \text{ lub inaczej } p_u = l\,\varphi_0^{\,2} \quad . \ . \ . \ . \quad (163)$$

3) z przyśpieszenia ruchu złożonego, wyrażonego wektorem $2\,\mathrm{V}\bar{v}_w\,\bar{\varphi}_0$; a które jest zwrócone po promieniu do środka koła i wartość którego równa się

$$2\,v_w \cdot \varphi_0;$$

kąt bowiem $(\bar{v}_w, \bar{\varphi}_0) = 90^0$.

Przyśpieszenia te są wywołane jedną siłą N; a zatem napiszemy równanie dynamiczne

$$\bar{N} = m\bar{p}_w + m\bar{p}_u + 2\,m\,\mathrm{V}\,\bar{v}_w \cdot \bar{\varphi}_0 \cdot \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (164)$$

w którem niewiadome są N i v_w; nieznane bowiem przyśpieszenie p_w wyrazić można zmienną v_w; lub też i odwrotnie.

Ażeby obliczyć prędkość względną v_w, najdogodniej będzie zrzutować wielobok wektorowy, przedstawiony przez powyższe równanie dynamiczne, na kierunek tejże prędkości v_w; niewiadoma bowiem N oraz wyraz przyśpieszenia złożonego nie wejdzie do równania rzutów; a zatem, po zrzutowaniu, otrzymamy równanie algebraiczne; porów. rys. 51-szy

$$mp_{w,t} - mp_u \cdot \sin\frac{\sigma}{2} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (165)$$

Wyraźmy następnie przyśpieszenie względne spółrzędną σ; w tym celu podstawimy w powyższe równanie

$$p_u = l\varphi_0^2;$$

a ponieważ z rys. 51-go odczytamy

$$l = 2r\cos\frac{\sigma}{2}; \text{ przeto}$$

$$p_u = 2r\varphi_0^2 \,.\, \cos\frac{\sigma}{2}; \quad \text{i } p_{w,t} = \frac{dv_w}{dt} = -r\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

a po podstawieniu tych wielkości w równ. 165-te i po skróceniu przez r i przez m, otrzymamy

$$-\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \varphi_0^2 \sin\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (166)$$

Równanie to wyraża ruch wahadłowy, jest ono bowiem jednakowe z równaniem 95-tem, gdy podstawimy w nie $\frac{g}{l} = \varphi_0^2$. Ruch zatem punktu materyalnego po kole, obracającem się z jednostajną prędkośbią w płaszczyźnie poziomej około jednego z punktów swego obwodu, jest ruchem jednakowym z ruchem wahadła o długości $l = \frac{g}{\varphi_0^2}$ i o początkowem odchyleniu σ_0; a którego położenie równowagi jest wyznaczone średnicą OA, sztywno związaną z kołem. Ruch ten unaocznić sobie można w następujący sposób: wyobraźmy sobie, żeśmy umieścili się w płaszczyźnie koła i obracamy się razem z tą płaszczyzną; a wtedy ruch punktu wyda się nam jako zwykły ruch wahadłowy.

Okres T' podwójnego wahnięcia (dla małych odchyleń σ_0), obliczymy ze wzoru 101-go wahadła pospolitego; gdy podstawimy w niego $\frac{g}{l} = \varphi^2{}_0$, a zatem

$$T' = \frac{2\pi}{\varphi_0}.$$

Oznaczmy okres czasu, w którym koło ruchome wykona pełny obrót literą T, a napiszemy równanie

$$\varphi_0 T = 2\pi; \text{ z którego}$$

$$T = \frac{2\pi}{\varphi_0}.$$

Okres zatem T' podwójnego wahnięcia punktu po kole, przy małem σ_0, równa się okresowi T całkowitego obrotu koła.

Siłę normalną N obliczymy, gdy zrzutujemy powyższe równanie dynamiczne na kierunek promienia koła; równanie to jest nast.

$$N_n = mp_{w,n} + mp_u \cos\frac{\sigma}{2} + 2mv_w\varphi_0;$$

podstawimy w nie odpowiednie wartości i otrzymamy

$$N_n = mr\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + 2mr\varphi^2_0 \, . \cos^2\frac{\sigma}{2} - mr\varphi_0\left(\frac{d\sigma}{dt}\right).$$

Ponieważ rzut równania dynamicznego na oś, prostopadłą do płaszczyzny koła, daje równanie

$$N_b = 0; \text{ zatem } N = N_n .$$

W celu obliczenia siły N w miejscu σ, należy $\frac{d\sigma}{dt}$ wyrazić funkcyą kąta σ; a w tym celu należy scałkować równanie ruchu względnego, t. j. równ. 166-te. Całkę tę obliczyliśmy już w § 43-cim; napiszemy ją przeto bezpośrednio z równ. 98-mego, po podstawieniu w nie $\frac{g}{l} = \varphi_0{}^2$; oraz $v = -r\frac{d\sigma}{dt}$; a zatem mamy

$$-\frac{d\sigma}{dt} = \pm\varphi_0\sqrt{2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie i po zastąpieniu wyrazu

$$\cos^2\frac{\sigma}{2} \text{ wyrazem } \frac{1+\cos\sigma}{2};$$

otrzymamy po uporządkowaniu

$$N = mr\varphi_0{}^2\,[3\cos\sigma + 1 - 2\cos\sigma \pm 2\sqrt{2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)}].$$

Wybór znaku pierwiastka zależy od zwrotu prędkości v_w; jeżeli punkt przebiega ze zwrotem, wskazanym na rys. 51-szym, to zwrót przyśpieszenia $2\,V\bar{v}_w\bar{\varphi}$ ruchu złożonego, skierowany jest w myśl danego określenia po promieniu ku środkowi koła; należy zatem przyjąć znak dodatni; jeżeli zaś punkt zmieni zwrot swej prędkości, co nastąpi podczas powrotu punktu ruchomego do położenia początkowego, wtedy przyśpieszenie to jest zwrócone na zewnątrz koła, i należy wtedy wziać znak odjemny; porów. prawidło, podane w § 62-gim. Nierówność wartości tego odporu dla tych samych położeń σ punktu ruchomego na kole wynika z niesymetryczności jego ruchu; punkt bowiem posiada jeden ruch symetryczny względem OA dający jednakowe wartości dla tych samych położeń punktu; oraz posiada jednocześnie ruch niesymetryczny—jednozwrotny, wynikający z obrotu koła.

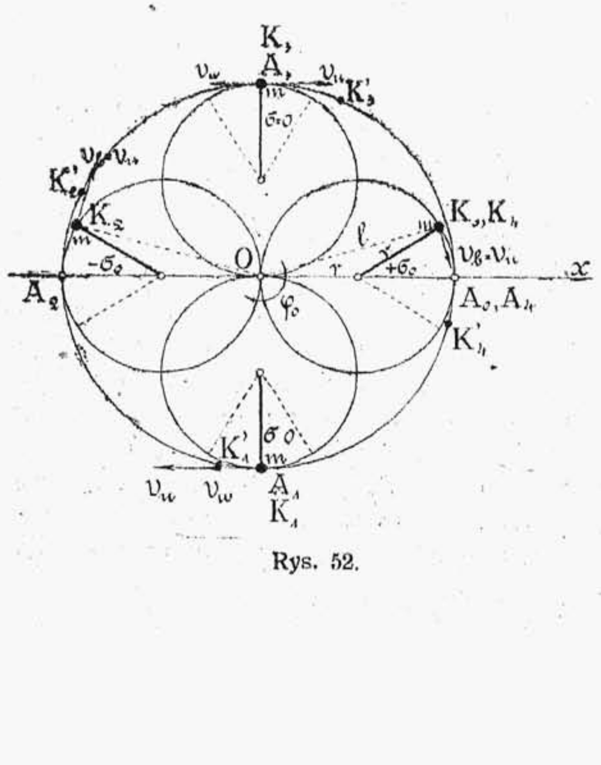
Szczególne przypadki:

1) jeżeli przyjmiemy $\varphi_0 = 0$; to $N = 0$. Wynik ten jest zrozumiały bezpośrednio; koło bowiem się nie obraca, siły zewnętrzne nie działają na dany punkt, przeto niepowstają i siły odporowe;

2) gdy $\sigma_0 = 0$, wtedy N może mieć wartości rzeczywiste tylko dla $\sigma = 0$; i w tym razie $N = 2mr\varphi_0^2$. Wynik ten wypowiemy: gdy punkt ruchomy umieścimy bez prędkości względnej, lecz z prędkością, unoszącą, na końcu średnicy, przechodzącej przez biegun obrotu; to pozostanie on w tem miejscu bez ruchu względem koła; a siła odporowa koła równa się sile dośrodkowej,

3) Jeżeli $\sigma_0 = \pi$; to dla $\sigma = 0$; $N = N_{\max} = mr\varphi_0^2(6 \pm 4)$; t. j. gdy punkt ruchomy rozpoczyna ruch z bieguna obrotu zgodnie ze zwrotem obrotu koła; wtedy po dojściu do miejsca, wyznaczonego przez koniec średnicy koła OA, wywołuje on siłę odporową $10\ mr\varphi^2$, gdy zaś następnie, przy dalszym obrocie koła, powróci do tegoż miejsca, to wywoła siłę odporową $2\ mr\varphi_0^2$.

Określmy obecnie choć w przybliżeniu tor bezwzględny i prędkość punktu ruchomego po nim. Jeżeli przyjmiemy, że odchylenie początkowe wahadła σ_0 jest dosyć małe, to, np. po zrobieniu przez koło ćwierci obrotu, wahadło zrobi ćwierć podwójnego wahnięcia i punkt ruchomy po przejściu koła z położenia OA_0 do OA_1 przejdzie z miejsca K_0 do miejsca K_1, pokrywającego się z końcem A_1 średnicy koła; okresy bowiem ćwierci wahnięcia wahadła równają się w przybliżeniu okresowi ćwierci obrotu koła. Następnie, gdy średnica koła obróci się o 180°, to punkt zrobi połowę podwójnego wahnięcia, t. j. znajdzie się w położeniu K_2; w tenże sposób rozumując, dojdziemy do wniosku, że K_3 pokryje się z A_3 i t. d. Krzywa ciągła, łącząca punkty K_0, K_1, K_2, K_3, jest torem bezwzględnym danego punktu przy warunku, że kąt σ_0 jest dostatecznie mały. Styczne do tego toru wyznaczymy wogóle z równania



Rys. 52.

$$\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{v}_u.$$

W miejscu np. K_0

$$\bar{v}_w = 0, \text{ przeto } \bar{v}_b = \bar{v}_u, \text{ a } \bar{v}_u = \nabla l \bar{\varphi},$$

i jest prostopadła do promienia wodzącego l, wyprowadzonego z bieguna obrotu; a zwrot jej jest zgodny ze zwrotem obrotu φ_0. Prostopadła przeto do OK_0 jest styczną do toru bezwzględnego w miejscu K_0;—tak samo będzie w miejscu K_2 toru. W miejs ach zaś K_1 i K_3 kierunki prędkości unoszącej i względnej zlewają się, są więc styczne do średnicy $2r$; prędkość np. w K_1

$$v_{b,1} = 2r\varphi_0 + v_w,$$

a w K_3

$$v_{b,3} = 2r\varphi_0 - v_w.$$

Z tych rozpatrywań wynika, że tor nie jest symetryczny względem osi x; co wynika z niesymetryczności ruchu względem tejże osi.

Następnie zwrócimy uwagę, że w pewnych miejscach toru bezwzględnego prędkość punktu składa się z różnicy dwóch prędkości; nasuwa się przeto pytanie, czy nie nastąpi taki przypadek, w którym $v_b \leqq 0$; t. j. w którym punkt zatrzyma się lub cofać się będzie po torze.

Prędkość względna jest największa dla $\sigma = 0$; przeto v_b może równać się zeru tylko w miejscu K_3. Prędkość ta zależy od początkowego odchylenia σ_0 wahadła, i rośnie razem z tym kątem. Obliczymy przeto kąt σ_0 ze wzoru 167-ego dla przypadku, w którym

$$2r\varphi_0 = v_w;$$

i napiszemy ze wzoru 167-ego

$$2r\varphi_0 = r\varphi_0 \sqrt{2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)};$$

ażeby zatem ten przypadek mógł nastąpić, powinno być

$$(\cos\sigma - \cos\sigma_0) = 2;$$

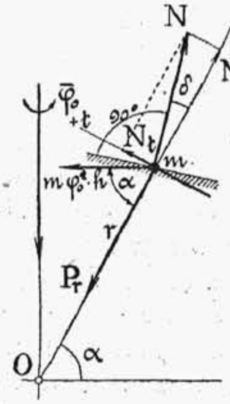
co może nastąpić tylko; dla $\sigma = 0$ i dla $\sigma_0 = 180$. Lecz wzór podwójnego wahnięcia, na podstawie którego oparliśmy te rozwiązanie, nie stosuje się do tego krańcowego przypadku; należałoby przeto zbadać równanie dokładne; badanie to jednakże pozostawimy czytelnikowi.

W innej nieco postaci przedstawi się tor tego punktu, jeżeli zastosujemy dokładne wartości okresów wahnięć. Ponieważ okresy te są większe od obliczonych ze wzoru skróconego (cośmy wytłómaczyli w § 45-tym na podstawie dynamicznego pojęcia siły), przeto, podczas ćwierci wahnięcia wahadła, średnica koła zakreśli większy kąt od 90^0 tak, iż K_1 wahadła odsunie się od A_1 zgodnie ze zwrotem obrotu koła. Punkt przeto ruchomy zakreśla z miejsca K_0 pewien tor, który styka się z kołem, zakreślonem promieniem $2r$, w miejscu K'_1; następnie w miejscu K_3' i t. d.; linia przeto łącząca punkty K_0, K_1', K_3', i t. d. przedstawia bezwzględny tor danego punktu. Widzimy z tego, że dany punkt zakreśla tor bezwzględny wogóle niezamknięty, a zamknięty tylko przy szczególnych odchyleniach, dla których okresy wahnięć są współmiernie z wielkością $\frac{2\pi r}{\varphi_0}$. Z powiększeniem odchylenia σ_0, okresy wahnięć się powiększają; a w blizkości $\sigma_0 = 180^0$ okres połowy wahnięcia zbliża się do ∞, § 44-ty; punkt przeto zakreśla w tym razie spiralę, biorącą początek w biegunie obrotu koła, a kończącą się na obwodzie koła zakreślonego z bieguna O promieniem $2r$. Ilość zwojów tej spirali ze zbliżaniem odchylenia σ_0 do 180^0, nadzwyczaj prędko się zwiększa, t. j. ze zbliżeniem początkowego położenia punktu ruchomego do bieguna obrotu; a prędkość bezwzględna punktu zbliża się do bardzo małej prędkości $(l_0\varphi_0)$, (l_0 bowiem jest bardzo małe); do prędkości

$$\lim.\ v_b = 2r\varphi_0 + r\varphi_0 + r\varphi_0\sqrt{2(\cos 0^0 - \cos 180^0)} = 2r\varphi_0 + 2r\varphi_0 = 4r\varphi_0.$$

70. Wpływ dziennego obrotu ziemi na kształt jej powierzchni i na ciężar brył materyalnych, znajdujących się na niej. Wszystkie bryły materyalne, znajdujące się w spoczynku na powierzchni ziemi, są w stanie równowagi względnej; — zestawmy warunki tej równowagi. Na każdą taką bryłę działa siła przyciągania ziemskiego, której kierunek zlewa się z promieniem wodzącym danej bryły, wyprowadzonym ze środka przyciągania; siłę tę oznaczymy literą P_r, rys. 53-ci, oraz siła odporowa N powierzchni, na której bryła dana spoczywa. Bryła, pozostająca w spoczynku względem ziemi posiada tylko przyśpieszenie unoszące, które wyrazimy wzorem

$$\bar{p}_u = \varphi_0^2 \bar{h};$$



Rys. 53.

w którym h jest promieniem równoleżnika, na którym bryła w danej chwili się znajduje, φ_0 — prędkość kątowa dziennego obrotu ziemi. Równanie równowagi względnej jest w tym razie następujące

$$\bar{P}_r + \bar{N} = m\varphi_0^2\bar{h}.$$

z którego wynika, że kierunek siły odporowej $\bar{N}$, nie zlewa się z kierunkiem promienia wodzącego, lecz tworzy z nim pewien kąt; z czego znów wynika, że powierzchnia bryły ziemskiej, utworzona np. przez powierzchnię wody spokojnej, nie może być kulistą; wszystkie bowiem jej cząstki są prostopadłe do kierunku, nie zlewającego się z kierunkiem promienia. Kierunek siły odporowej N jest kierunkiem t. zw. pionowym, t. j. kierunkiem, jaki przybierze nić zawieszona spokojnie z przymocowanym do jej końca ciężarem; kierunek