5) zmiennemi x oraz $\frac{dx}{dt}$; jak to było w przykładzie ruchu harmonicznego przytłumionego, lub

6) zmiennemi x oraz t, jak w przykładzie z ruchomym środkiem przyciągania, lub

7) zmiennemi $\frac{dx}{dt}$ oraz t;

8) lub wreszcie, w najogólniejszym przypadku, może być wyrażoną funkcyą wszystkich trzech zmiennych x, $\frac{dx}{dt}$, t.

Całkowanie wzorów we wszystkich tych przypadkach da się sprowadzić, po większej części, do sposobów, wskazanych w przytoczonych przykładach. Ponieważ równanie dynamiczne siły jest równaniem różniczkowem rzędu drugiego, więc całka jego posiadać powinna dwie stałe, które wogóle mogą być obliczone z dwóch znanych par wartości zmiennych; podstawiwszy je bowiem w równanie ruchu, otrzymamy dwa równania z dwiema niewiadomemi, które obliczymy. Zwykle te stałe obliczamy z tak zwanych warunków początkowego ruchu, t. j. ze znanych wartości x i v w chwili t; gdyż po podstawieniu tych wartości w równania ruchu, otrzymamy dwa równania, w których niewiadomemi są wartości nieznanych stałych.

Wybitną rolę pomiędzy temi całkami zajmuje całka, zwana całką pierwszą równania dynamicznego, która wyraża związek pomiędzy spółrzędnemi punktu i prędkością w miejscu, wskazanem przez te spółrzędne. Całką tą jest równanie *równowartości pracy i energii kinetycznej*. O tej całce mówiliśmy już w paragrafie poprzednim.

II. Równanie dynamiczne ruchu punktu na płaszczyźnie lub w przestrzeni.

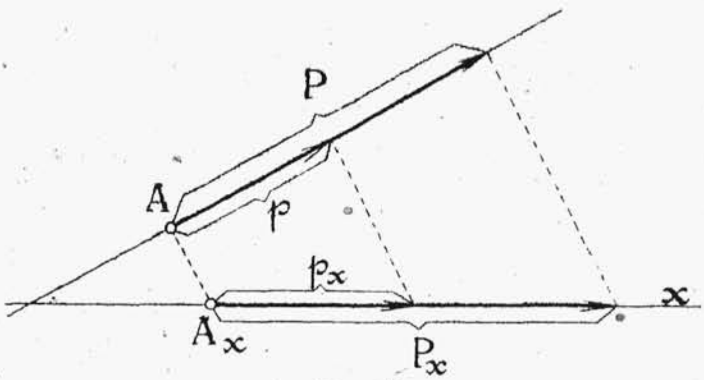
13. Rzuty sił i przyśpieszeń. Ażeby wogóle obliczyć równania ruchu, gdy dane są siły; lub ażeby obliczyć siły, gdy dany jest ruch punktu, należy równanie dynamiczne

$$\bar{P} = m\bar{p},$$

które jest wektorowe, wyrazić równaniami algebraicznemi; wtedy bowiem będzie możliwem stosowanie do obliczeń działań zwykłej algebry. W tym celu zrzutujmy promieniami równoległymi wektor siły, określony powyższym wzorem, na dowolnie obraną w przestrzeni oś x, a otrzymamy rzut P_x danej siły. Wzajemną zależność tych dwóch rzutów odczytamy z rys. 10-tego, i wyrazimy ją nast. równaniami

$$\frac{P}{p} = \frac{P_x}{p_x} m; \text{ skąd } P_x = m p_x.$$

Takiż stosunek pozostaje w mocy, gdy wektor ten zrzutujemy na dowolnie obraną płaszczyznę.



Rys. 10.

Jeżeli literą v_x oznaczymy rzut prędkości punktu właściwego na pewną oś, względnie na pewną płaszczyznę, to stosunek powyższy wyrazimy równaniem

$$P_x = m \frac{dv_x}{dt}; \text{ lub } P_x = m \frac{d^2x}{dt^2};$$

w którem x jest spółrzędną punktu ruchomego, mierzoną wzdłuż obranej osi od pewnego stałego punktu, na niej obranego.

Równania te wypowiemy w sposób następujący:

rzut równoległy siły na dowolną oś, lub płaszczyznę, równa się iloczynowi z masy punktu, na który ta siła działa i z rzutu przyśpieszenia tego punktu.

Dla rzutu siły i rzutu przyśpieszenia znajdziemy pewne znaczenia dynamiczne. Z kinematyki bowiem wiadomo, tom II-gi, § 30-ty, że rzut przyśpieszenia punktu ruchomego jest przyśpieszeniem jego rzutu; wielkość zatem p_x może być uważana za przyśpieszenie punktu A_x, który jest rzutem na oś x punktu właściwego A; rys. 10-ty. Twierdzenie to pozwala obliczyć ruch rzutu punktu właściwego na dowolnie obraną oś, lub płaszczyznę. Każde zatem z równań rzutów, uważać można za równanie dynamiczne ruchu rzutu punktu na odpowiednią oś lub na odpowiednią płaszczyznę.

Co do kierunku rzutowania nie robiliśmy żadnych zastrzeżeń, należy zatem rozumieć je tak prostokątne jak i ukośnokątne, byleby kierunek rzutowania był równoległy. W obliczeniach następnych przyjmiemy rzutowanie prostokątne; gdy zaś stosować będziemy ukośnokątne, wtedy zaznaczymy to wyraźnie.

Każdy wektor w przestrzeni jest ściśle określony przez rzuty na trzy osi, dowolnie obrane w przestrzeni, byle tylko nie równoległe do jednej płaszczyzny; po zrzutowaniu zatem wektora danej siły na takie osi, otrzymamy następujące **trzy** równania **algebraiczne**, które zastępują **jedno** równanie **wektorowe**; równania te są następujące

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt}; \quad P_y = m\frac{dv_y}{dt}; \quad P_z = m\frac{dv_z}{dt} \quad . \; . \; . \quad (53)$$

Równania te przedstawimy jeszcze w innej postaci, gdy podstawimy w nie

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt};$$

równania te są następujące

$$P_x = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad P_y = m\frac{d^2y}{dt^2}; \quad P_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \quad . \; . \; . \quad (54)$$

Za pomocą równań 53-cich lub 54-ych można rozwiązać drogą rachunkową wszystkie zadania z dynamiki punktu.

Gdy np. dane są równania ruchu punktu w postaci

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t);$$

wtedy obliczymy z nich drogą różniczkowania wartości $\frac{dx}{dt}$ i t. d.; następnie $\frac{dv_x}{dt}$ i t. d., a następnie, znając masę punktu ruchomego, obliczymy rzuty siły; a z nich siłę właściwą, wywołującą dany ruch punktu.

Można również za pomocą powyższych równań dynamicznych rozwiązać zadania odwrotne. Gdy np. daną jest siła przez swe rzuty na trzy osi, wyrażone np. funkcyami spółrzędnych; wtedy całkując równania dynamiczne obliczymy równania ruchu punktu danego.

Jeżeli na pewien punkt działa wiele sił, to siłę $\bar{P}$ uważać można za ich wypadkową; a sumę algebraiczną ich rzutów za rzut siły wypadkowej. W tenże sposób postąpimy, jeżeli zamiast jednego wektora przyśpieszenia, właściwego ruchomemu punktowi, wprowadzimy na skutek pewnych warunków zadania jego składowe.

Jeżeli ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie, to osi spółrzędnych obierzemy w tejże płaszczyźnie; i zastosujemy do rachunku tylko **dwa** z powyższych równań.

Równania 53-cie służą zatem do obliczenia w ogóle ruchu krzywolinijnego.

A. Zastosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu krzywolinijnego.

14. Warunki powstawania ruchu krzywolinijnego. Ruch krzywolinijny punktu swobodnego powstaje, gdy kierunki siły i prędkości są różne. Wnioski te oparte są bezpośrednio na pojmowaniu i określeniu siły. Z równania bowiem dynamicznego siły wynika, że przyrost $d\bar{v}$ prędkości jest równoległy do kierunku siły; gdy więc siła posiada kierunek, różny od kierunku prędkości chwilowej danego punktu, wtedy i kierunek prędkości po upływie czasu dt zmieni się; posiada on bowiem kierunek trzeciego boku trójkąta, zbudowanego z boków $\bar{v}$ i $d\bar{v}$; porów. rys. 1-szy.

W szczególnym przypadku, w którym kierunek siły, działającej na dany punkt, leży stale w jednej płaszczyźnie; w której leży również kierunek początkowej prędkości, ruch punktu odbywa się, w tej płaszczyźnie, w przeciwnym razie zakreśli on tor o podwójnej krzywiźnie.

15. Ruch punktu swobodnego pod działaniem siły stałej. Na punkt materyalny działa siła $\bar{P}$, stała co do kierunku, wielkości i zwrotu; w początku ruchu punkt dany posiada prędkość $\bar{c}$, której kierunek mija się z kierunkiem siły; obliczyć równanie ruchu.

Ponieważ w danym przykładzie ruch będzie w płaszczyźnie, przechodzącej przez kierunek prędkości początkowej i kierunek siły; obierzemy przeto w tej płaszczyźnie, dla ułatwienia rachunku, osi x i y. Osi te obrać można prostokątne lub ukośnokątne; obierzemy je prostokątnemi i w ten sposób, że osi y nadamy kierunek i zwrot siły; oś zaś x przeprowadzimy przez początkowe położenie punktu, prostopadle do y, ze zwrotem dodatnim, zgodnym ze zwrotem rzutu c_x prędkości początkowej, rys. 11-ty. Wybór osi w przestrzeni jest wogóle zupełnie dowolny i nie wpływa na wynik rachunku; wybór zaś szczególnego położenia ma jedynie na celu możliwe uproszczenie rachunku.

Warunki początkowe ruchu przyjmiemy w danym przykładzie w ten sposób, że czas zaczniemy liczyć od chwili wyjścia punktu ruchomego z początku układu, w którym też punkt dany posiada prędkość $\bar{c}$. Warunki te wyrazimy albegraicznie w sposób następujący

dla $$x = 0; \quad y = 0; \quad t = 0;$$

oraz dla

$$x = 0;\ y = 0;\ v_x = c_x;\ v_y = c_y.$$

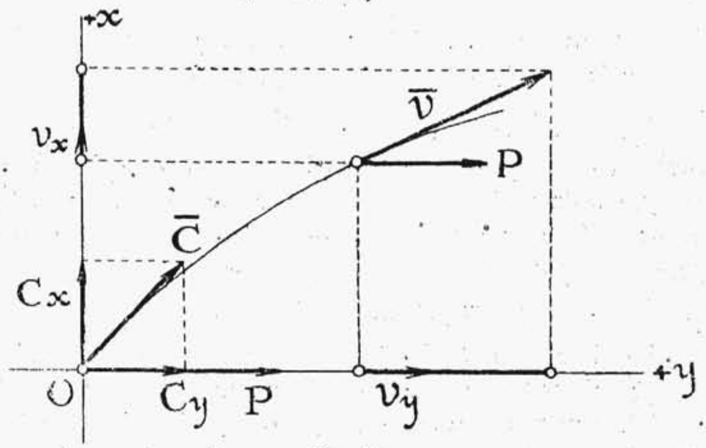
Obrawszy już osi spółrzędnych i warunki początkowe ruchu, przystąpimy do właściwego rachunku. W tym celu zastosujemy równania dynamiczne rzutów punktu na obrane osi, i w równania ogólne 53-cie

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt};\ P_y = m\frac{dv_y}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

podstawimy odpowiednie wartości.

W danem zadaniu siła jest znaną, obliczymy zatem jej rzuty na obrane osi; rzuty te są następujące

$$P_x = 0;\ P_y = P.$$



Rys 11.

Po podstawieniu tych wartości w równania 55-te, otrzymamy

$$O = m\frac{dv_x}{dt};\quad P = m\frac{dv_y}{dt}.$$

Są to równania różniczkowe, które możemy bezpośrednio scałkować; po scałkowaniu otrzymamy

$$mv_x = K_1;\ mv_y = Pt + K_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Ażeby obliczyć stałe, pochodzące z całkowania, skorzystamy z początkowych warunków ruchu, poprzednio obranych; i podstawimy

$$t = 0;\ v_x = c_x;\ v_y = c_y;$$

a otrzymamy wartości stałych

$$mc_x = K_1;\quad mc_y = K_2;$$

i następnie

$$mv_x = mc_x;\ mv_y = Pt + mc_y.$$

Pierwsze równanie wskazuje, że $v_x = c_x$, t. j. rzut prędkości punktu ruchomego na oś x jest stały we wszystkich jego położeniach; co można sobie wytłomaczyć w ten sposób, że rzut siły na oś równa się zeru, przeto rzut punktu na tę oś pozostaje w ruchu jednostajnym z prędkością, równą rzutowi początkowej prędkości. Z drugiego równania odczytamy, że rzut prędkości na oś y, zależy od czasu.

Ażeby obliczyć równania wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punku (x, y) i czasem t, podstawimy w równania powyższe

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt};$$

i otrzymamy

$$m\frac{dx}{dt} = mc_x; \quad m\frac{dy}{dt} = Pt + mc_y.$$

Równania te możemy bezpośrednio scałkować, a po scałkowaniu otrzymamy szukane zależności w postaci skończonej

$$mx = mc_xt + K'; \quad my = \tfrac{1}{2}Pt^2 + mc_yt + K'';$$

stałe tych równań obliczymy z warunków początkowych; któreśmy już przyjęli. W tym celu podstawimy $t = 0$; $x = 0$; oraz $y = 0$; i otrzymamy $K' = 0$; $K'' = 0$; wskutek czego równania ruchu przedstawią się w następującej postaci

$$mx = mc_xt; \quad my = \tfrac{1}{2}Pt^2 + mc_yt \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

Z tych równań obliczyć można miejsce (x, y), w jakiem punkt się znajduje w czasie t; lub też odwrotnie, obliczyć można czas, jaki upłynął od chwili wyjścia punktu z położenia początkowego do chwili przybycia do miejsca (x, y).

W celu obliczenia równania toru należy wyrugować t z powyższych równań ruchu; wtedy bowiem otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punktu ruchomego. Wyrugujmy zatem np. t z pierwszego równania i podstawmy je w drugie, a otrzymamy szukane równanie toru

$$my = \tfrac{1}{2}\frac{P}{c_x^2}\cdot x^2 + m\frac{c_y}{c_x}\cdot x.$$

Jestto równanie paraboli; tor więc, jaki zakreśli punkt materyalny z początkową prędkością $\bar{c}$ pod działaniem siły stałej, jest parabolą, której główna oś posiada kierunek siły.

W szczególnym przypadku, w którym siła, działająca na punkt ruchomy, jest siłą ciążenia ziemskiego; obliczymy równania ruchu po podstawieniu w równanie powyższe $P = mg$; oś y skierujemy wtedy pionowo ku dołowi; a po skróceniu przez m, otrzymamy równania ruchu

$$x = c_xt; \quad y = \tfrac{1}{2}gt^2 + c_yt.$$

Równanie zaś toru, jaki zakreśla w polu ciążenia punkt materyalny, wyrzucony z prędkością $\bar{c}$, jest następujące

$$y = \frac{1}{2}\frac{g}{c_x{}^2}x^2 + \frac{c_y}{c_x}x.$$

Sprawdzimy teraz wymiary tego równania i w tym celu podstawimy

$$x = L;\ y = L;\ g = LT^{-2};\ c = LT^{-1};$$

trygonometryczna bowiem funkcya ma wymiar zera; a otrzymamy równanie jednorodne.

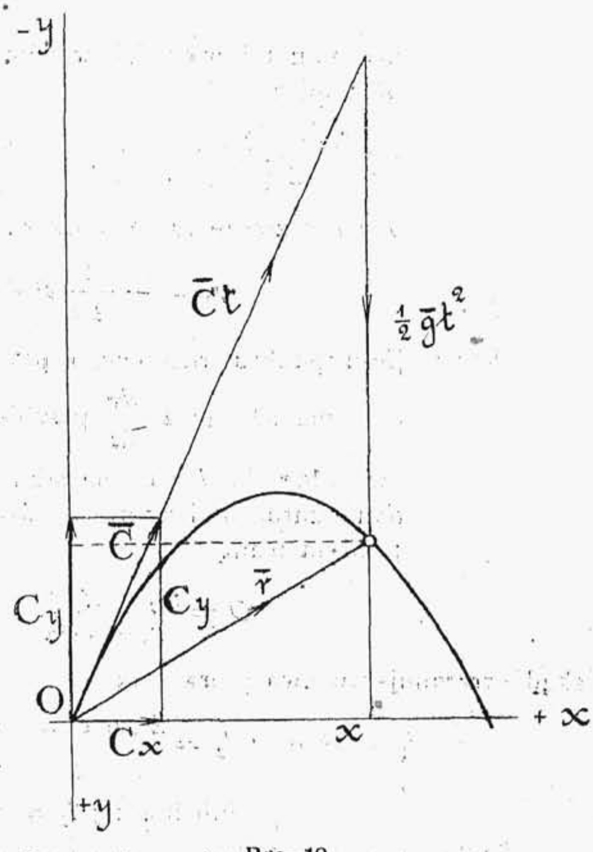
Zbadajmy obecnie ruch punktu materyalnego, wyrzuconego ku górze pod danym kątem α względem poziomu. Ażeby do obliczeń tego ruchu zastosować powyższe równania, wyobraźmy sobie oś y pionowo ku dołowi, rys. 12-ty; oś x poziomo; i należy podstawić w równania powyższe

$$c_x = c\cos\alpha;\ c_y = -c\sin\alpha.$$

Równanie zatem toru tego punktu jest następujące

$$y = \frac{1}{2}x^2\frac{g}{c^2\cos^2\alpha} - x\operatorname{tg}\alpha.$$

W celu zbadania właściwości tego ruchu, obliczmy pochodną $\frac{dy}{dx}$, która równa się



Rys. 12.

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{g}{c^2\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha.$$

Gdy przyjmiemy, że $90^0 > \alpha > 0$, to pochodna ta dla pewnych wartości x jest odjemną, co wyraża, że dla tych wartości punkt ruchomy, wychodząc z miejsca O, podnosi się, jak wskazuje rys. 12-ty.

Spółrzędną x_0 miejsca największego wzniesienia punktu ruchomego obliczymy z równania

$$\frac{dy}{dx} = 0; \text{ t. j. z równania}$$

$$x_0 \frac{g}{c^2 \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = 0; \text{ z którego}$$

$$x_0 = c^2 \frac{\sin \alpha \, . \, \cos \alpha}{g}, \text{ lub raczej } x_0 = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie toru, otrzymamy spółrzędną y_0 tegoż miejsca

$$y_0 = \tfrac{1}{2} \left[\frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}\right]^2 . \frac{g}{c^2 \cos^2 \alpha} - \frac{c^2 \, . \, \sin 2\alpha \, . \, \operatorname{tg} \alpha}{2g};$$

lub inaczej po przekształceniu tego wzoru

$$y_0 = -\frac{1}{2g} c^2 \sin^2 \alpha.$$

Po przejściu punktu ruchomego przez najwyższe miejsce (x_0, y_0) toru, zacznie on spadać, gdyż $\frac{dy}{dx}$ przybierze wartości dodatnie; a punkt przetnie oś x w odległości l od początku spółrzędnych. Odległość tę, zwaną przelotem rzutu, obliczymy z równania toru, po podstawieniu w nie $y = 0$; zatem mamy

$$O = \tfrac{1}{2} l^2 \frac{g}{c^2 \cos^2 \alpha} - l \operatorname{tg} \alpha;$$

skąd otrzymujemy dwa pierwiastki

$$l_1 = 0; \text{ oraz } l_2 = \frac{2 \sin \alpha \, . \, \cos \alpha}{g} c^2 = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha;$$

$$\text{lub inaczej } l_2 = 2 x_0.$$

Obliczymy obecnie kąt α, przy którym przelot l będzie największy; gdy daną jest tylko algebraiczna wartość początkowej prędkości. W danym razie l ma być maximum przy zmiennej α; a więc powinno być $\sin 2\alpha = \max$; co nastąpi, gdy $\sin 2\alpha = 1$; $2\alpha = 90^0$, a więc gdy $\alpha = 45^0$.

16. Ruch punktu materyalnego swobodnego, pod działaniem sił środkowych, przyciągających proporcyonalnie do odległości. Gdy punkt materyalny znajduje się w polu sił środkowych, przyciągających proporcyonalnie do jego odległości od środka przyciągania i gdy kierunek początkowej prędkości $\bar{v}_0$ nie pokrywa się z kierunkiem siły przyciągającej, wtedy punkt dany zakreśli w przestrzeni pewien tor krzywolinijny. W celu obliczenia tego toru oraz ruchu po nim, zbadamy najpierw, czy tor jest płaski, czy też przestrzenny. W tym celu przeprowadzimy płaszczyznę przez środek przyciągania i przez kierunek początkowej prędkości; i zauważymy, że niema sił, któreby wyprowadziły punkt ruchomy z tej płaszczyzny; ruch zatem danego punktu jest płaski. Obierzmy układ osi ukośnokątnych w płaszczyźnie ruchu w ten sposób, ażeby oś x pokrywała się z prostą, łączącą środek przyciągania z początkowem położeniem r_0 punktu, rys. 13-ty; a oś y ażeby była równoległa do $\bar{v}_0$. Niech A oznacza na rys. 13-tym położenie punktu ruchomego w chwili dowolnej t, r jego promień wodzący; to wartość siły przyciągającej w tem położeniu punktu wyrazimy wzorem $P = kr$. Równanie dynamiczne przeto jest

$$\bar{P} = m \frac{d\bar{v}}{dt};$$

a rzut jego na oś x

$$-P_x = m \frac{dv_x}{dt}.$$

Wartość P_x obliczymy ze stosunku geometrycznego

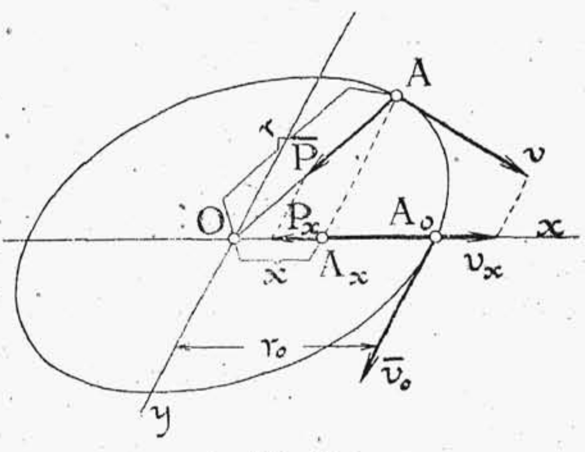
$$P_x = P \cdot \frac{x}{r} = kx;$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy równanie

$$-kx = m \frac{dv_x}{dt};$$

lub w innej postaci

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad (58)$$



Rys. 13.

z którego, po podstawieniu $dt = \frac{dx}{v}$ i po jego scałkowaniu, otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy prędkością i spółrzędną punktu; równanie to jest następujące

$$-\tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} mv^2_x + K_1.$$

W celu obliczenia wartości K_1 skorzystamy z warunków początkowych danego ruchu, które przyjmiemy dla

$$t = 0;\ x = r_0;\ y = 0;\ \text{oraz}\ v_x = 0;\ \text{i}\ v_y = v_0;$$

a po podstawieniu tych wartości otrzymamy $K_1 = -\frac{1}{2} k r_0^2$; a więc

$$m v_x^2 = k\,(r_0^2 - x^2).$$

Następnie, podstawiwszy w to równanie $v_x = \frac{dx}{dt}$, otrzymamy równanie

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{r_0^2 - x^2},$$

które po scałkowaniu daje jedno z równań ruchu

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) + K_2.$$

Podstawiwszy w nie $x = r_0$; $t = 0$; obliczymy

$$K_2 = -\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \operatorname{arsin}(1) = -\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{2}\pi.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie ruchu, mamy

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) - \frac{1}{2}\pi\right];\ \text{lub}$$

$$\left[\operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) - \tfrac{1}{2}\pi\right] = t\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ponieważ wzór ten przedstawia równość kątów, przeto i cosinusy ich są równe; mamy zatem pierwsze równanie ruchu

$$x = r_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \text{. . . . .} \quad (59)$$

Drugie równanie ruchu otrzymamy po zrzutowaniu siły na oś y; równanie to jest następujące

$$-ky = m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Po scałkowaniu jego i wprowadzeniu przyjętych poprzednio warunków ruchu początkowego, otrzymamy równanie

$$y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \text{. . . . .} \quad (60)$$

które łącznie z poprzedniem wyraża ruch danego punktu.

Równanie toru tego ruchu obliczymy, po wyrugowaniu z równań powyższych zmiennej t; równanie to jest następujące

$$\frac{x^2}{r_0^2}+\frac{y^2}{\left(v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2}=1; \quad \dots\dots \quad (61)$$

i przedstawia elipsę, zbudowaną na osiach sprzężonych, przechodzących przez środek przyciągania i równoległych do $\bar{v}_0$, oraz do promienia wodzącego $\bar{r}_0$ punktu w początkowem jego położeniu.

W szczególnym przypadku elipsa ta może przybrać postać koła o promieniu r_0; przypadek ten nastąpi, gdy osi elipsy staną się równemi, t. j. gdy $r_0 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$; lub inaczej, gdy początkowa prędkość $v_0 = r_0\sqrt{\frac{k}{m}}$ i kierunek jej jest prostopadły do promienia.

Znaczenie dynamiczne tego warunku znajdziemy, gdy przedstawimy to równanie w następującej postaci $m\frac{v_0^2}{r_0}=r_0 k$.

Lewa bowiem strona tego równania jest iloczynem z przyśpieszenia dośrodkowego i z masy punktu; prawa zaś wyraża wartość siły przyciągającej w danem położeniu punktu; a zatem ruch punktu będzie kołowym, gdy początkowe warunki ruchu odpowiadają warunkom ruchu po danem kole; t. j. gdy iloczyn z masy punktu i przyśpieszenia jego równa się sile przyciągającej.

W szczególnym przypadku, gdy kierunek początkowej prędkości pokrywa się z kierunkiem promienia wodzącego, wtedy osi x i y zlewają się z sobą i ruch będzie prostolinijny taki sam, jaki przedstawiliśmy w § 7-ym, a jego równanie jest następujące $x = r_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$.

Równanie to ma jednakże nieco inną postać, niż rów. 23-cie, lecz to pochodzi z odmiennych warunków początkowego ruchu. Poprzednio bowiem przyjęliśmy dla $x = 0$; $t = 0$; obecnie zaś przyjęliśmy dla $x = r_0$; $t = 0$.

Okres, który nazwaliśmy w ruchu harmonicznym, okresem podwójnego wahnięcia, a który obecnie jest okresem całkowitego obiegu, obliczymy, gdy znajdziemy okres czasu T, w którym punkt przybywa do tego samego miejsca na torze. Okres ten obliczymy z równania ruchu.

59-go, gdy podstawimy w nie $x = r_0$; $t = T$; wtedy $T\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi$; skąd

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Z równania tego wynika, że okres obiegu nie zależy od początkowego położenia punktu ani też od początkowej prędkości. Wyjaśnienie fizyczne tej właściwości jest takie same, jakie daliśmy przy rozpatrywaniu ruchu harmonicznego prostolinijnego.

Z powyższych równań można skorzystać w celu obliczenia równań ruchu dla przypadku, w którym siła środkowa odpycha punkt materyalny proporcyonalnie do odległości. W danym razie równanie dynamiczne ma postać

$$k x = m \frac{dv_x}{dt}.$$

Z równań zatem ruchu przyciąganego otrzymamy równania ruchu punktu odpychanego, przy zresztą jednakowych warunkach początkowych; gdy zamiast k podstawimy $(-k)$, równania te będą następujące

$$x = r_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\,.\,i\right); \text{ oraz}$$

$$y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.\,\frac{1}{i}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\,.\,i\right);$$

w których $i = \sqrt{-1}$.

W celu przekształcenia tych równań urojonych na równania rzeczywiste, skorzystamy ze wzorów 5-go i 6-go, przytoczonych w „Techniku" na str. 68-ej, i otrzymamy

$$x = {}^1/_2\, r_0 \left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} + e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right); \text{ oraz}$$

$$y = {}^1/_2\, v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} - e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right).$$

Równania te wskazują, że z rosnącym czasem spółrzędne punktu ruchomego również rosną, punkt zatem stale oddala się od miejsc wyjścia. Równanie toru otrzymamy, rugując z tych dwóch równań t; co można uskutecznić, przeniósłszy stałe wyrazy, stojące przed nawiasami prawej strony równania, do mianownika lewej strony i następnie podniósłszy obydwie strony tych równań do potęgi drugiej; a po ich odjęciu otrzymamy szukane równanie toru.

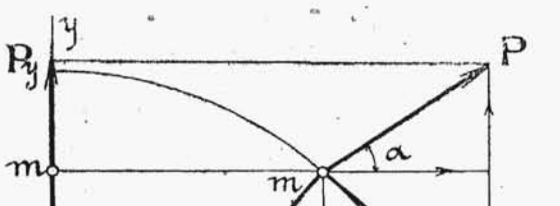
Można również napisać bezpośrednio równanie toru z równ. 61-go; po podstawieniu w nie $k = - k$; równanie to otrzyma postać

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{\left(v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62)$$

Tor zatem punktu materyalnego, odpychanego przez pewien środek siłą, proporcyonalną do odległości, jest hyperbolą, której średnice sprzężone przechodzą przez środek odpychania i jedna z nich jest równoległa do promienia wodzącego punktu w początkowem jego położeniu; druga zaś jest równoległa do kierunku początkowej prędkości; wartości tych średnic odczytać można z równania toru.

17. Przykład obliczenia sił, gdy dany jest tor i ruch punktu po nim. Punkt o masie m posuwa się po torze np. kołowym o promieniu r ze stałą prędkością v; wyznaczyć siłę, która wywołuje ten ruch. W przykładzie tym dany jest ruch punktu, t. j. tor i prędkości po nim, a należy obliczyć siłę, wywołującą ruch.

Gdy punkt materyalny posiada pewną prędkość, a siły na niego nie działają, wtedy wykona on ruch, zgodnie z prawem bezwładności, po torze prostolinijnym ze stałą prędkością. Gdy zaś punkt materyalny zakreśla tor krzywolinijny, wtedy działają na niego siły, które sprowadzają go z toru prostego, wyznaczonego kierunkiem prędkości początkowej. Ażeby obliczyć tę siłę, zastosujmy równania dynamiczne, wyrażone spółrzędnemi prostokątnemi i w tym celu wyobraźmy sobie dowolną siłę P, przyczepioną do danego punktu, rys. 14-ty, i przeprowadźmy przez środek koła dwie wzajemnie prostopadłe osi x i y; a napiszemy wtedy równania dynamiczne



Rys. 14.

$$P_x = m \frac{dv_x}{dt} \; ; \; P_y = m \frac{dv_y}{dt} \; ;$$

w których P_x i P_y są niewiadomemi. Z tegoż rys. 14-ego mamy związki

$$v_x = v \sin \sigma = v \frac{y}{r}; \quad v_y = -v \cos \sigma = -v \frac{x}{r};$$

po ich zróżniczkowaniu, zważywszy przedtem, że v i r są wielkości stałe, napiszemy

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{v}{r} v_y; \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{v}{r} v_x;$$

a po podstawieniu wartości v_x i v_y z równań poprzednich, otrzymamy

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v^2}{r} \cdot \frac{x}{r}; \quad \text{oraz} \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v^2}{r} \cdot \frac{y}{r}; \quad \text{a następnie}$$

$$P_x = -\frac{v^2}{r} \cdot \frac{x}{r}; \quad \text{oraz} \quad P_y = -\frac{v^2}{r} \cdot \frac{y}{r}; \quad \text{skąd}$$

$$P = \pm \sqrt{P^2{}_x + P^2{}_y} = \pm \frac{mv^2}{r}.$$

Z równania tego obliczymy wartość szukanej siły; a kąt kierunkowy α tej siły względem osi x, obliczymy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_y}{P_x} = \frac{-y}{-x} = \operatorname{tg} \sigma,$$

z którego wynika, że

$$\alpha = \sigma; \text{ lub } \alpha = \pi + \sigma.$$

Odjemne wartości rzutów siły na osi spółrzędnych wskazują, iż z tych dwóch odpowiedzi należy wybrać $\alpha = \pi + \sigma$; zresztą znaki odjemne we wzorze tg α przy y i przy x wskazują, że szukany kąt leżeć może tylko w trzeciej ćwiartce koła.

Z równań tych wynika, że siła, wywołująca ruch jednostajny po kole, działa wzdłuż promienia wodzącego ze zwrotem ku środkowi koła, a wartość jej równa się wartości wyrazu $m \frac{v^2}{r}$. Właściwe położenie tej siły jest oznaczone na rys. 14-tym, literą P'.

Do tegoż wyniku moglibyśmy dojść bezpośrednio na podstawie twierdzenia o przyśpieszeniu punktu, będącego w ruchu krzywolinijnym, oraz na podstawie określenia dynamicznego siły; wyznaczywszy bowiem wektor przyśpieszenia danego ruchu, wektor siły będzie jego m-krotną wielkością, co się zgadza z poprzednim wynikiem.