Zgodność wyników tego rachunku ze zjawiskami fizycznemi, stwierdza słuszność naszych założeń; na jakich oparliśmy dany rachunek; — t. j. stwierdza, że punkt materyalny pozostawiony sam sobie zakreśli tor prostolinijny ruchem jednostajnym względem układu sztywno związanego z gwiazdami stałemi.

VIII. Metoda d'Alembert'a.

71. Określenie i rozwinięcie tej metody. Metoda ta ma na celu uproszczenie rozpatrywania ruchu punktów czy też brył materyalnych, i polega na tem, że iloczyn

$$(-m\bar{p});$$

t. j. że iloczyn z masy poruszającego się punktu i jego przyśpieszenia w danej chwili z przeciwnym zwrotem uważać będziemy za siłę. Siłę tę wprowadzamy do naszych rozumowań w celu zastąpienia pojęcia kinetycznego, iloczynu z masy i przyśpieszenia, pojęciem statycznem. Siłę, określoną w ten sposób, nazwiemy siłą bezwładności danego punktu; siłę tę oznaczać będziemy literą $\bar{B}$; a geometrycznie wyrazimy ją wektorem $m\bar{p}$ z odwróconą strzałką.

Jeżeli przeto wyobrazimy sobie, że siłę

$$\bar{B} = -m\bar{p},$$

przyłożymy do punktu ruchomego, posiadającego masę m i przyśpieszenie $\bar{p}$, to punkt dany będzie pozbawiony tego przyśpieszenia i pozostanie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym; inaczej mówiąc, **siły zewnętrzne**, wywołujące dane przyśpieszenie, i **siła bezwładności** $\bar{B}$ **są w każdej chwili w równowadze.** Gdy warunek tej równowagi wyrazimy, zgodnie z § 23-cim tomu I-go równaniem

$$\bar{P}+\bar{B}=0, \text{ lub inaczej } \bar{P}+(-m\bar{p})=0,$$

wtedy pod względem formalnym równania te różnią się od równania dynamicznego

$$\bar{P}=m\bar{p}.$$

tylko przeniesieniem wyrazu $m\bar{p}$; a pod względem ich znaczenia fizycznego różnią się sposobem pojmowania tych wyrazów.

Gdy wprowadzimy do rozpatrywań ruchu punktu materyalnego pojęcie siły bezwładności, wtedy możemy otrzymać równanie ruchu punktu z równania równowagi, po przyłożeniu do danego punktu siły bezwładności.

Na str. 39-ej tomu I-go dowiedliśmy np., że gdy siły, działające na punkt, są w równowadze, wtedy suma ich momentów równa się zeru; zastosujemy przeto to twierdzenie do punktu, będącego w ruchu, wywołanym siłą $\bar{P}$, W tym celu przyłożymy do niego siłę $\bar{B} = (-m\bar{p})$ i przyrównamy sumę momentów tych sił, wziętych względem dowolnie obranego bieguna, do zera; a otrzymany równanie

$$\bar{M}_P + \bar{M}_B = 0.$$

Moment $\bar{M}_B$ siły bezwładności $\bar{B}$ wyrazimy wzorem wektorowym

$$-V\frac{d(m\bar{v})}{dt} \, . \, \bar{r},$$

który na zasadzie rozważań, przytoczonych na str. 66-ej, zastąpimy następującym

$$-\frac{d\bar{M}_v}{dt};$$

a po podstawieniu go w równanie poprzednie, otrzymamy równ. 70-te, wyrażające zasadę momentów. Warunek równowagi sił, wyrażony równaniem ich momentów $\Sigma\bar{M}_k = 0$, oraz równanie momentów w dynamice, równ. 70-te, mają również tę wspólną właściwość, że równanie momentów w obydwóch przypadkach nie określa jednoznacznie ani równowagi sił, ani też ruchu punktu; a wyraża tylko pewne właściwości, jak równowagi tak i ruchu, cośmy już wypowiedzieli w § 26-tym.

W tenże sposób warunek równowagi, wyrażony zasadą pracy wyobrażalnej, porów. § 117-ty tomu I-go, może być zastosowany do zestawienia równania dynamicznego ruchu. W tym celu przyrównamy do zera sumę wyobrażalnych prac sił zewnętrznych i siły bezwładności i napiszemy równanie

$$dL_P + dL_B = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

Pracę dL_B siły bezwładności wyrazimy zgodnie z danemi określeniami wzorem

$$(-mp_t) \, . \, ds,$$

lub inaczej wzorem

$$-m\frac{dv}{dt} \, . \, ds.$$

który, po podstawieniu $\frac{ds}{dt} = v$, przekształcimy na następujący

$$-d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right).$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy równanie, wyrażające zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej.

Z tych przykładów wynika, że moment siły bezwładności wyraża się pochodną względem czasu momentu ilości ruchu z odwrotnym znakiem; a praca wyobrażalna siły bezwładności — przyrostem energii kinetycznej danego punktu ze znakiem odjemnym; obydwa te wnioski wyrazimy wzorami

$$\bar{M}_B = -\frac{d}{dt} V m\bar{v} \, . \, \bar{r}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (172)$$

oraz

$$dL_B = -d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (173)$$

Jeżeli punkt jest nieswobodny, to dla siły bezwładności znajdziemy pewne fizyczne znaczenie; a mianowicie rzut jej na główną normalną do toru, lub do powierzchni, po której punkt się porusza, wyraża **siłę parcia**, jaką wywiera **punkt** ruchomy **na dany tor** czy też na daną powierzchnię; siłę tę, jako szczególny przypadek siły bezwładności, nazywają siłą odśrodkową.

Jeżeli np. punkt materyalny porusza się po danem kole ze stałą prędkością, to siła odporowa koła

$$\bar{N} = m\bar{p}, \text{ a } \bar{B} = (-m\bar{p}); \text{ a więc: } \bar{B} = -\bar{N};$$

czyli siła odśrodkowa $\bar{B}$ jest siłą parcia, jaką wywiera punkt ruchomy na tor, po którym się porusza. Z tego widzimy, że siły bezwładności punktu nieswobodnego, będącego w ruchu, są miarą statycznego działania tego punktu na tor lub na powierzchnię, po której punkt się porusza.

Rozpatrzmy dla przykładu ruch punktu materyalnego, poruszającego się po kole pod działaniem siły ciążenia, gdy koło jest w ruchu postępowym w swej płaszczyźnie. Równanie statyczne ruchu tego punktu wyrazimy wzorem

$$\bar{Q} + \bar{N} + \bar{B} = 0; \text{ w którym } \bar{B} = (-m\bar{p});$$

Równanie to wypowiemy: siła ciążenia punktu siła odporowa toru i siła bezwładności punktu są w równowadze w każdem miejscu toru; gdy punkt wyobrazimy sobie w spoczynku w danem miejscu koła.

Dla wyrażenia równowagi tych sił możemy stosować wszystkie sposoby, wyłożone w statyce. Wyraźmy np. warunek tej równowagi zasadą momentów sił; porów. § 26-ty tomu I-go, a napiszemy

$$M_Q + M_N + M_B = 0.$$

Obierzmy biegun momentów w środku koła, a po podstawieniu odpowiednich wartości, porów. rys. 31-szy str. 95-ta oraz wzór 170-ty; otrzymamy równanie

$$Ql \sin \sigma + \left[-\frac{d}{dt}(mvl) \right] = 0;$$

które po przekształcen'u da równ. 95-te.

Można również wyrazić warunek równowagi zasadą pracy przystosowanej, porówn. wzór 95-ty tomu I-go; a napiszemy wtedy

$$dL_Q + dL_N + dL_B = 0;$$

po podstawieniu zaś odpowiednich wartości mamy

$$Q\,dy - d(\tfrac{1}{2}mv^2) = 0;$$

i wreszcie po scałkowaniu od y_0 do y, lub od σ_0 do σ, i od 0 do v, otrzymamy równanie równowartości pracy i energii kinetycznej.

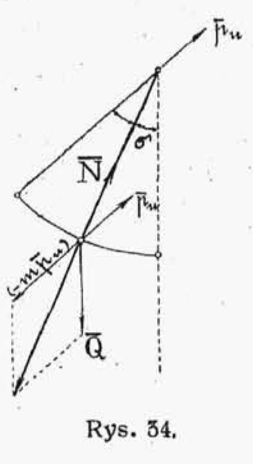
Jeżeli punkt jest w ruchu złożonym, to można przyjąć, że jego przyśpieszenie właściwe jest złożone z kilku przyśpieszeń; jeżeli przeto przyłożymy do tego punktu siły bezwładności, równe iloczynom z masy punktu i odwróconych przyśpieszeń, wynikających z pewnego rodzaju ruchu, to możemy uważać, że dany punkt jest pozbawiony tego rodzaju ruchu; lecz wykonywa on pozostałe ruchy, wskazane warunkami danego zadania. W ten sposób metoda d'Alembert'a daje sposób rozpatrywania właściwości **poszczególnych ruchów**, z jakich złożony jest ruch danego punktu.

Rozpatrzmy dla przykładu ruch punktu ciężkiego po kole, będącym w ruchu postępowym jednostajnie przyśpieszonym we własnej płaszczyźnie; ruch ten rozpatrywaliśmy już metodą dynamiczną w § 64-ym; ażeby zaś zastosować do tych rozpatrywań metodę d'Alemberta, wyobraźmy sobie iloczyn $(-m\bar{p}_u)$ jako siłę i przyłóżmy ją do punktu ruchomego, a tor uważajmy za pozostający w spoczynku; wtedy napiszemy równanie

$$[\bar{Q} + (-m\bar{p}_u)] + \bar{N} = m\bar{p}_w;$$

które przedstawia ruch wahadła zwykłego, poddanego stałej sile

$$[\bar{Q} + (-m\bar{p}_u)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$



Rys. 54.

Kierunek przeto tej siły jest kierunkiem równowagi względnej danego wahadła. Łatwo spostrzedz, że wzór powyższy, z którego mamy wyznaczyć kierunek szukanej równowagi względnej, jest wyrazem wektorowym równania algebraicznego 146-ego. Ruch przeto względny wahadła, będącego w ruchu jednostajnie przyśpieszonym, jest ruchem wahadłowym około położenia równowagi, którego kierunek jest równoległy do kierunku wektora $(\bar{Q} - m\bar{p}_u)$.

Jeżeli tor jest w ruchu obrotowym; to w celu obliczenia względnego ruchu danego punktu materyalnego; należy przyłożyć do niego siłę

$$\bar{B}_u = (- m\bar{p}_u)\text{; oraz siłę } \bar{B}_C = (- 2m \mathrm{V}\, \bar{v}_w \bar{\varphi})\text{;}$$

a tor należy wyobrazić sobie pozostającym w spoczynku. Siły bezwładności łącznie z siłą ciężkości punktu oraz z siłą odporową toru, wywołują ten sam ruch punktu po danym torze, będącym w spoczynku, jaki wywołują siły zewnętrzne (bez sił bezwładności) po torze, obracającym się. Ażeby przeto obliczyć ruch względny punktu, pozostającego na torze ruchomym, należy do sił zewnętrznych oraz do sił odporowych dołączyć siły bezwładności $\bar{B}_u$ i $\bar{B}_C$ i obliczyć ruch punktu, będącego pod ich działaniem, po torze nieruchomym; do czego stosować można każde z twierdzeń, wyłożonych w rozdziałach poprzednich.

Ażeby np. unaocznić sobie ruch względny, opisany w przykładzie § 69-go, wyobraźmy sobie, że koło pozostaje w spoczynku, a do punktu ruchomego przyłożoną jest siła

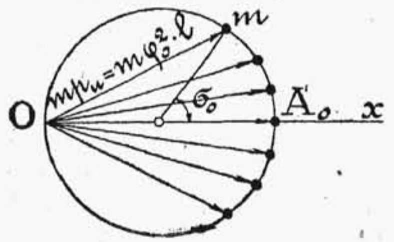
$$(- m\bar{p}_u)\text{, oraz siła } (- 2m \mathrm{V}\, \bar{v}_w\, \bar{\varphi}_0)\text{;}$$

a wtedy napiszemy równanie dynamiczne ruchu względnego

$$\bar{N} + (- m\bar{p}_u) + (- 2m \mathrm{V}\, \bar{v}_w\, \bar{\varphi}_0) = m\bar{p}_w\text{;}$$

które jest jednakowe z równ. 164-em; otrzymujemy przeto drogą tego rozumowania to samo równanie, jakie otrzymaliśmy poprzednio; nadając inne znaczenie jego wyrazom.

Ruch punktu po kole tego przykładu wywołany jest siłami, posiadającemi składowe w kierunku stycznej do toru; siła przeto $\bar{N}$ i siła $(- 2m \mathrm{V}\, \bar{v}_w \,.\, \bar{\varphi}_0)$, rys. 51-szy, nie wpływają na ruch punktu po kole; a jedynie siła $(-m\sigma_u)$; po przyłożeniu przeto do punktu danego siły $(-m\sigma_u)$; uważać będziemy, że punkt znajduje się na kole nieruchomem i że działają na niego siły środkowe, wychodzące ze środka, znajdującego się w biegunie obrotu; siły te odpychają dany punkt siłą $m\varphi_0^2 l$; t. j. siłą proporcyonalną do odległości od tegoż bieguna, rys. 55-ty. Ruch przeto jaki wykonywa dany punkt pod działaniem tych sił po kole nieruchomem, będzie jednakowy z ruchem, jaki on wykona podczas obrotu koła. Rów-



Rys. 55.

nanie tego ruchu otrzymamy z rzutu siły $(-m\bar{p}_u)$ na styczną do koła; równanie to jest następujące

$$(-m\bar{p}_u)_t = mp_{w,t};$$

z którego, po podstawieniu odpowiednich wartości, otrzymamy rów. 166-te.

Mając na uwadze działanie tych sił wytłomaczymy sobie statycznie, dlaczego np. w tym przykładzie punkt ruchomy, umieszczony bez prędkości względnej na końcu średnicy, przechodzącej przez biegun, nie poruszy się; siła bowiem $(-m\bar{p}_u)$ jest w tem miejscu toru prostopadłą do toru i nie jest w stanie wywołać ruchu. Jest to wynik, do którego doszliśmy poprzednio drogą analizy równania ruchu.

72. Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej złożonego ruchu punktu materyalnego. W obliczeniach ruchu punktu po torze nieruchomym korzystaliśmy z zasady równowartości pracy sił i energii kinetycznej tego punktu; zasada ta dawała bezpośrednio związek pomiędzy prędkością punktu i położeniem jego na torze poruszającym się.

W tym celu wyobraźmy sobie dany tor (który jest w ruchu) pozostającym w spoczynku; a wzamian tego, w myśl metody d'Alembert'a, przyłóżmy do danego punktu siły

$$\bar{B}_u = (-m\bar{p}_u); \text{ oraz } \bar{B}_C = (-2\, m V \bar{v}_w \bar{\varphi});$$

w ten sposób sprowadzimy zadanie ruchu po torze, poruszającym się, do zadania ruchu punktu po torze nieruchomym, co da możność zastosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej. Przyrównamy przeto pracę tych sił, jaką one wykonują podczas cząstkowego przesunięcia punktu po tym torze, do wartości przyrostu energii kinetycznej ruchu względnego; którą określimy wzorem

$$\tfrac{1}{2} m v^2_w,$$

i nazwiemy energią kinetyczną ruchu względnego.

Pracę cząstkową dL_P siły zewnętrznej (P) obliczymy z iloczynu rzutu tej siły na styczną do toru w danem jego miejscu i z cząstki tego toru; t. j. obliczymy ją ze wzoru wektorowego

$$dL_P = \bar{P} \, . \, d\bar{s}_w,$$

w którym $d\bar{s}_w$ oznacza przesunięcie punktu po torze względnym; lub też obliczymy ją ze wzoru rzutów siły i przesunięcia na osi prostokątne ξ, η, ζ, sztywno związane z torem poruszającym się (porów. wzór 62-gi tomu I-ego); wzór ten jest nast.

$$dL_P = P_\xi \, . \, d\xi + P_\eta \, . \, d\eta + P_\zeta \, . \, d\zeta.$$

Praca cząstkowa siły odporowej podczas przesunięcia punktu po torze względnym, o ile nie uwzględniamy tarcia, równa się zeru.

Pracę siły odśrodkowej $\bar{B}_u$ obliczymy w każdem miejscu toru, jeżeli znany jest ruch tego toru; pracę tę oznaczymy literą L_u.

Praca wreszcie siły $\bar{B}_C$ (Coriolisa) równa się w danym razie zeru; kierunek jej bowiem jest prostopadły do kierunku prędkości względnej, a więc jest prostopadły do przesunięcia punktu po torze poruszającym się.

Zasadę przeto równowartości pracy i energii kinetycznej ruchu względnego wyrazimy następującem równaniem

$$dL_P + dL_u = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2{}_w\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

które napiszemy po dodaniu wszystkich tych prac cząstkowych, porów. § 20-ty, w postaci podobnej do postaci równ. 66-go tego tomu

$$L_{PA}^{\;B} + L_u{}_A^B = \tfrac{1}{2} m v^2_{w,B} - \tfrac{1}{2} m v^2_{w,A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

Równanie to wypowiemy w następujący sposób: praca sił zewnętrznych i praca sił odśrodkowych, podczas przesunięcia punktu po torze, będącym w ruchu, równa się przyrostowi energii kinetycznej względnego ruchu punktu, poruszającego się z miejsca A do miejsca B danego toru.

W szczególnym przypadku; jeżeli ruch toru jest obrotowy o niezmiennej prędkości $\bar{\varphi}_0$; to siła

$$\bar{B}_u = m h \varphi_0{}^2;$$

gdzie h oznacza odległość punktu od osi obrotu ze zwrotem dodatnim zgodnym z powiększającą się wartością tej odległości. Siła ta, zwana siłą odśrodkową normalną (często — wprost siłą odśr.), posiada funkcyę sił, i praca jej powstaje tylko wtedy, gdy punkt oddala się od osi obrotu lub zbliża się do niej; praca przeto tej siły

$$L_u{}_A^B = \int_{h_A}^{h_B} m h \varphi^2_0 \,.\, dh = \tfrac{1}{2} m \varphi^2_0 (h^2_B - h^2_A);$$

gdzie litery h_A i h_B oznaczają odległości punktu ruchomego od osi obrotu.

Jeżeli przytem siły zewnętrzne, działające na dany punkt, posiadają funkcyę sił, wyrażoną spółrzędnemi, określającemi położenie punktu względem danego toru; — t. j. spółrzędnemi względnemi (np. ξ, η, ζ), to napiszemy równanie pracy w postaci

$$(U_B - U_A) + \tfrac{1}{2} m \varphi_0{}^2 (h^2_B - h^2_A) = \tfrac{1}{2} m v^2_{w,B} - \tfrac{1}{2} m v^2_{w,A} \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

Jeżeli przeto mamy obliczyć prędkość względną punktu w danem miejscu toru ruchomego, to równanie powyższe daje bezpośrednio możność tego obliczenia.

Obliczymy np. prędkość punktu ciężkiego, poruszającego się w rurce, doskonale wewnątrz gładkiej, obracającej się około osi pionowej; jakieśmy opisali w przykładzie na str. 150-ej, i przedstawili na rys. 49-tym.

Przyjmijmy np., że punkt ruchomy otrzymał w miejscu z_1 danej osi prędkość v_{w1}, to, po przejściu do miejsca z, dozna on odpowiedniego przyrostu energii kinetycznej, a zasada pracy da równanie

$$-mg(z-z_1)\,.\cos\alpha + \tfrac{1}{2} m\varphi_0^2 (x^2 - x^2_1) = \tfrac{1}{2} mv^2_w - \tfrac{1}{2} mv^2_{w1},$$

i po podstawieniu

$$x = z \sin\alpha, \text{ oraz } x_1 = z_1 \sin\alpha,$$

otrzymamy równanie, z którego obliczyć można v_w w każdem miejscu z toru ruchomego.

Z równania przeto 177-go wynika: gdy siły zewnętrzne posiadają funkcyę sił (w spółrzędnych względnych) i gdy tor jest w ruchu obrotowym i jednostajnym, to prędkość względna punktu ruchomego zależy tylko od jego położenia względem ruchomego układu odniesienia, a nie zależy od postaci toru, po jakim on przebył z jednego położenia do drugiego.

W przypadku, gdy tor ruchomy jest płaski i obraca się w płaszczyźnie poziomej około bieguna, obranego na tejże płaszczyźnie, to praca siły ciążenia punktu podczas jego ruchu równa się zeru; przyrost więc jego energii kinetycznej zależy tylko od początkowej jej wartości i od odległości punktu od bieguna; a nie zależy od postaci toru, po jakim on przebył z początkowego położenia do położenia, w którem chcemy obliczyć jego prędkość; a więc nie zależy również od postaci geometrycznej obracającego się toru.

IX. Ruch względny punktu materyalnego.

A. Kinematyka względnego ruchu punktu.

73. Określenia i twierdzenia. W celu unaocznienia ruchu względnego wyobraźmy sobie całą przestrzeń, wypełnioną punktami matematycznymi, których wzajemne odległości nie zmieniają się podczas naszych rozpatrywań. Przyjmijmy następnie, że zbiór tych punktów może przenikać bez oporów inne takież zbiory punktów; jak również każdy oddzielny punkt, nie należący do takiego zbioru, może również przenikać taki zbiór.

Jeżeli w takim zbiorze pewien punkt, nie należący do tego zbioru, zmienia swe położenie, to pokrywać się on będzie kolejno z różnymi jego punktami; geometryczne miejsce tych punktów nazwaliśmy już w kinematyce torem, a cały zbiór, w którym punkt dany wyznacza ten tor, nazwaliśmy **układem odniesienia** ruchu danego punktu.