

720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 26 • ZESZYT 4



WARSZAWA 1988

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

Jugosłowiańsko-polska konferencja p.t. „New trends in mechanics of solids and structures”	571
A. POCESKI, G. KOKALANOV, Three-dimensional mixed finite elements	575
Трёхмерные смешанные конечные элементы	
Trójwymiarowe mieszane elementy skończone	
A. ALUJEVIČ, I. POTRČ, Boundary elements for thermo-elasto-plasticity of metals	589
Краевые элементы в задачах термо-упруго-пластичности металлов	
Elementy brzegowe w zagadnieniach termo-sprężysto-plastyczności metali	
Z. V. DRAŠKOVIĆ, On invariance of finite element approximations	597
Инвариантные аппроксимации конечных элементов	
O niezmienniczości przybliżeń elementów skończonych	
O. DĄBROWSKI, R. SZMIGIELSKI, Solution of shells by boundary element method. Problem of corners	603
Разрешение задачи пологих оболочек методом граничных уравнений. Угловая проблема	
Rozwiązanie zagadnienia powłok małowyńiosłych za pomocą elementów brzegowych. Zagadnienie naroży	
Z. DŻYGADŁO, Nonautonomous nonlinear vibrations of a continuous self-excited system. A plate in supersonic flow	611
Неавтономные нелинейные колебания автоколебательной системы с распределенными параметрами. Пластика в сверхзвуковом потоке	
Nieautonomiczne nieliniowe drgania ciągłego układu samowzbudnego. Płyta w opływie nadźwiękowym	
P. KONDERLA, Dynamics of the material body with variable mass	625
Динамика материального тела с переменной массой	
Dynamika ciała materialnego o zmiennej masie	
Z. KOŃCZAK, The influence of moisture and temperature on the behaviour of orthotropic, viscoelastic plates	641
Влияние изменения влажности и температуры на поведение ортотропных вязкоупругих пластинок	
Wpływ zmian wilgotności i temperatury na zachowanie się ortotropowych płyt lepkosprężystych	
Z. S. OLESIAK, On properties of thermo-diffusive stresses in solids	649
О свойствах термо-диффузионных напряжений	
О własnościach naprężeń od termodyfuzji	
A. TYLIKOWSKI, Dynamic stability of antisymmetrically laminated cross-ply cylindrical shells	655
Динамическая устойчивость антисимметрично слоистых цилиндрических оболочек	
Dynamiczna stateczność antysymetrycznie poprzecznie laminarnych powłok walcowych	
J. A. KOŁODZIEJ, M. KLEIBER, G. MUSIŁAK, Comparison of the boundary collocation and finite element methods for some harmonic 2D problems	663
Сравнение метода граничной коллокации и метода конечных элементов для некоторых гармонических двумерных граничных задач	
Pogównanie metody kolokacji brzegowej z metodą elementów skończonych dla niektórych harmonicznych dwuwymiarowych problemów brzegowych	
A. PODNORECKA, Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych	683
Метод временно-пространственных элементов в геометрически нелинейных задачах	
The space-time element method in geometrically non-linear problems	
BIULETYN INFORMACYJNY	701
Roczny spis treści — rok 1988	716

T 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 6 Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 8 8

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym doświadczalnym, komunikatom, naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

RADA REDAKCYJNA

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY,
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,

STANISŁAW J. GDULA, IGOR KISIEL,

ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI,

KOMITET REDAKCYJNY

REDAKTOR NACZELNY — ZBIGNIEW OLESIAK

REDAKTORZY — STANISŁAW DUBIEL, JACEK STUPNICKI,

ANDRZEJ TYLIKOWSKI, CZESŁAW WOŹNIAK,

SEKRETARZ — EWA KOISAR

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa pokój 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Kwartalnik ukazuje się przy pomocy finansowej PAN

Nakład 500. Ark. wydawniczych 12,5 Ark. drukarskich 9,5 Papier offset, mat .kl. IV, 71 g. 70×100
Oddano do składania 22.III.1988 r. Druk ukończono w marcu 1989 r. Zam. 6339/88 Cena zł 180.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

**JUGOSŁOWIAŃSKO-POLSKA KONFERENCJA
P.T. "NEW TRENDS IN MECHANICS OF SOLIDS AND STRUCTURES"**

Konferencja ta odbyła się w Dubrowniku w dniach 23 - 26 czerwca 1987 r. Była to pierwsza konferencja organizowana wspólnie przez Jugoslovensko Društvo za Mehaniku i Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i zarazem pierwsza międzynarodowa, dwustronna konferencja z udziałem naszego Towarzystwa. Idea organizowania wspólnych jugosłowiańsko-polskich i polsko-jugosłowiańskich konferencji powstała już dość dawno. Pierwsze bardziej konkretne propozycje powstały w czasie XVI Jugosłowiańskiego Kongresu Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w Bečići, w r. 1984, a promotorem organizacji konferencji ze strony jugosłowiańskiej był profesor Jovo Jarić, ówczesny Sekretarz Generalny J. D. M. Skład komitetu organizacyjnego ze strony jugosłowiańskiej stanowili: Sekretarz Generalny J. D. M. docent Dobroslav Ružić i profesorowie Rastko Čukić z Belgradu i Stjepan Ječić z Zagrzebia. Docent D. Ružić wziął na siebie główny ciężar obowiązków organizacyjnych. Ze strony polskiej do komitetu organizacyjnego weszli profesorowie Czesław Woźniak, Józef Wojnarowski (Przewodniczący PTMTS) i Zbigniew Olesiak. Staraniem organizatorów jugosłowiańskich ukazał się 98 stronicowy skrypt zawierający streszczenia referatów (15 polskich i 23 jugosłowiańskie), wstęp, program konferencji i spis uczestników. Na konferencji wygłoszono ostatecznie 19 jugosłowiańskich i 13 polskich referatów. Nastąpiły niestety perturbacje w zaplanowanym programie konferencji w związku z opóźnieniem przyjazdu części uczestników polskich. Samolot LOT miał wielogodzinne opóźnienie tak, że 6 osób nie zdążyło na nocny pociąg do Dubrownika i tym samym na pierwszy dzień obrad. Na domiar złego jeden z naszych kolegów zrezygnował z podróży w ogóle, gdy stwierdził, że mamy lecieć IŁ 62M.

Tematyka konferencji była z założenia obszerna i obejmowała zagadnienia teoretyczne mechaniki ośrodków ciągłych, w tym teorii plastyczności, przewodnictwa cieplnego, ośrodków włóknistych, lepkosprężystych, termodyfuzji. Rozpatrywano zagadnienia mechaniki pękania, zagadnienia falowe, dynamicznej stabilności, stochastyczne, aż do zagadnień mogących mieć bezpośrednie praktyczne zastosowania w mechanice budowli. Przedstawiono również prace doświadczalne oraz rozwiązania metodami elementów skończonych i elementów brzegowych.

Dyskusja tylko po niektórych referatach była ożywiona, należy stwierdzić, że częściej głos w dyskusji zabierali nasi koledzy jugosłowiańscy.

Bezpośrednio przed Konferencją w dniu 22 czerwca br. w Instytucie Mihajlo Pupina w Belgradzie odbyło się uroczyste wręczenie dyplomu członka zagranicznego naszego Towarzystwa profesorowi Miodirowi Vukobratovicowi — Przewodniczącemu J.D.M. Wręczenia dokonali Przewodniczący PTMTS prof. J. Wojnarowski i Sekretarz Generalny PTMTS prof. Z. Dzygadło.

Pierwszy dzień obrad rozpoczął się od otwarcia Konferencji.

Obrady Konferencji otworzył Sekretarz Generalny JDM doc. D. Ružić. Do prezydium uroczystości otwarcia zaprosił prof. Apostola Poceskiego, Przewodniczącego PTMTS prof. Józefa Wojnarowskiego oraz Sekretarza Generalnego PTMTS prof. Zbigniewa Dzygadłę. W swoim wystąpieniu doc. Dobrosław Ružić przypomniał między innymi historię kontaktów naukowych między przedstawicielami JDM i PTMTS, które doprowadziły do uzgodnienia koncepcji konferencji i zorganizowania bieżącego spotkania. Prof. J. Wojnarowski korzystając z udzielonego mu głosu przedstawił historię i osiągnięcia PTMTS ze szczególnym uwzględnieniem kontaktów międzynarodowych. Na zakończenie prof. J. Wojnarowski życzył zebranych owocnych obrad i zaprosił jugosłowiańskich uczestników na następną konferencję do Polski.

W pierwszym dniu Konferencji wygłoszono 9 referatów, w porządku chronologicznym były to:

J. Wojnarowski, Hybrid methods in dynamical analysis of three-dimensional mechanical systems,

S. Komljenović, On a method of integration of nonlinear continuum mechanics equations.

J. Jarić, On the energy release rate in quasi-static crack propagation in general elastic materials,

D. Kuzmanović, Generalized Darcy's law for partly saturated porous media,

B. Maruszewski, A new approach to thermomechanics of coupled fields in solids,

S. Milanović-Lazarević, On the influence of couple-stresses on stress distribution in an infinite plate with an elliptic hole,

M. Berković, A. Sedmak, Z. Drašković, Thin shell equilibrium equations,

Z. Dzygadło, Nonautonomous nonlinear vibrations of a continuous self-excited system,

V. Manojlović, Analysis of solutions of acoustic field in a cavity with rigid walls using finite elements method.

W drugim dniu obrad wygłoszono również dziewięć referatów:

P. Marović, F. B. Damjanić, New approach in the solution of problems with infinite domain,

Z. Kończak, The influence of moisture and temperature on the behaviour of orthotropic viscoelastic plates,

V. Lubarda, Modelling of the anisotropic hardening in plastic deformations of metals,

Z. Więckowski, Dual and mixed finite element methods in analysis of anti-plane/shear of elasto-plastic fibre reinforced composite,

S. Ranković, Restoring force characteristics of steel frames,

I. Dobovšek, Dynamic stability of autonomous nonconservative elastic systems,

Z. Wesółowski, Dynamic properties of two elastic layers,

D. Semenski, Contribution to determination of stress intensity factors,

H. Kopecki, J. Smykla, Experimental-numerical hybrid technique for stress analysis of thin-walled structures in post buckling state,

W trzecim dniu konferencji wygłoszono 10 referatów:

A. Poceski, G. Kokalanov, A mixed three-dimensional finite element,

Z. Drašković, On invariance of finite element approximations,

O. Dąbrowski, Boundary element method for some types of shells,

- A. Alujević, I. Potrc, Boundary elements for large plastic displacement problems of metals,
M. Oblak, B. Butinar, Minimum weight design of space trusses,
A. Janković, Ž. Mičić, M. Živulović, R. Slavković, Stress states of the passenger car body,
L. Todorovska-Ažijevska, D. Kecman, Collapse of thin-walled square and rectangular section tubes due to combined torsion and uniaxial bending load,
S. Sedmak, B. Petrovski, The J-integral elastic-plastic behaviour in specimens and full scale structures,
P. Konderla, Dynamic process of the material body undergoing evolution,
Z. Naniewicz, On some nonconvex problems in the theory of elasticity,
W ostatnim dniu Konferencji wygłoszono następujące referaty:
A. Tylikowski, Dynamic stability of laminated plates and cylindrical shells,
Z. Olesiak, Properties of thermodiffusive stresses in solids,
M. Mićunović, Some comments on viscoplasticity of isotropic materials with small thermo-elastic strains,
Čz. Woźniak, On the modelling of elastic-unelastic periodic composites.

Konferencja była bardzo udana, a przyjęcie gościnne. Podczas uroczystości zamknięcia konferencji przemawiali doc. D. Ružić i prof. J. Wojnarowski. Wszyscy Polscy uczestnicy Konferencji przebywali w Dubrowniku na koszt organizatorów JDM. 10 listopada 1987 r. Zarząd Główny PTMTS postanowił, że konferencja "On New Trends in Mechanics of Solids and Structures" odbędzie się w dniach 9 - 12 maja 1989 roku w Boguchwale k/Rzeszowa. Współorganizatorem konferencji będzie Politechnika Rzeszowska a także Rzeszowski Oddział PTMTS. W tym numerze publikujemy część referatów wygłoszonych na Konferencji.

*Zbigniew Olesiak
Andrzej Tylikowski*

THREE-DIMENSIONAL MIXED FINITE ELEMENTS

APOSTOL POCESKI

GEORGI KOKALANOV

University Kiril i Metodij, Skopje

1. Introduction

The basis for the development of three-dimensional elements are the two-dimensional plane stress elements. By introduction of the third dimension for instance the triangular elements become tetrahedron elements, the rectangular become hexahedron etc.

The development of the three-dimensional elements is similar to the development of the two-dimensional elements and doesn't represent any particular problem. However, the number of degrees of freedom (d.o.f.) of the three-dimensional elements, and consequently the number of equations which have to be solved for a particular three-dimensional problem, is large. The solutions of such problems sometimes become impossible even by computers of large capacity. Therefore the development of three-dimensional elements reducing the total number of equations for a solution of any three-dimensional problem, is very important.

The most of the developed three-dimensional elements are of stiffness type. The primary nodal unknowns are the deformations. The elements are developed by application of the minimum potential energy variational principle. The problem in the development of the elements represents the so called "parasitic stresses". In such a case the parasitic stresses are the shear stresses — the functions of the nodal axial deformations. Usually the problem is solved by application of the "reduced selective integration". However, such an approach to solution of the problem is not appropriate and reliable. As a result of the approach for instance some three-dimensional elements are good for analysis of thin systems like plate bending analysis (20 nodes, 60 d.o.f. element), the others for analysis of thick systems, like plane stress analysis (8 nodes, 24 d.o.f. element) [1].

In the early development of the mixed elements it was assumed independence of stresses and deformations. The correctness of such assumption was not verified for a long time. Therefore the mixed finite element method (FEM) was doubtful and was not widely applied. Here we develop mixed elements by application of a direct method [6]. The deformation shape function (DShF) is complete, depends on the nodal stresses and deformations. The boundary forces and deformations are derived directly from DShF, without application of any variational principle. From the distribution of these values at the nodes we derive

equivalent nodal forces and nodal deformations, which represent the element matrix. This concept of development of the elements was applied in the problems of plane stress and plate bending elements [2, 3].

The three-dimensional element which we consider in this paper, is based on the plane stress element (Fig. 1a). This plane stress element gives very good results. For instance

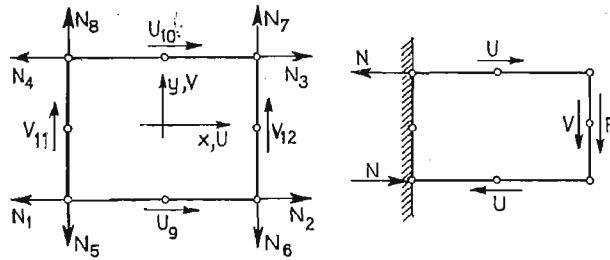


Fig. 1. Mixed plane stress element (a), cantilever represented by one element (b)

in the analysis of a cantilever (Fig. 1b) even one element, with totaly 5 equations, gives exactly the beam solution! Such results were obtained primarily due to particular distribution of the unknowns (degrees of freedom). Note that the stresses and the displacements, were taken at the midside nodes. In such cases the degrees of freedom, the displacements and the stresses, are not independent of each other. For instance by variation of the stresses we can develop the equations of the compatibility of displacements, which are already satisfied due to the presence of the displacements as the degrees of freedom at the same nodes.

The element was developed by application of the direct method of development of finite elements [6]. In this way the parasitic shear stresses $S_{xy} = f(N_{xt}, N_{yt})$, functions of the axial stresses, were automatically excluded. The exclusion of the stresses was another reason for the very good behaviour of the element. The element developed in this way is the same as the element developed by the assumption of independent stresses and deformations. It means that, in the case of energetic approach, the stresses and the displacements have to be independently assumed! The correctness of such assumption for the first time was proved in Ref. [4].

The element which we discuss is a simple prismatic three-dimensional element. The element is our first step in the development of mixed three-dimensional elements. The development of the element has to show the way of development of the mixed elements and the accuracy which could be expected. The element presented here gives very good accuracy and is very promising for further development of the mixed FEM.

2. Prismatic element with 36 d.o.f.

The element is presented on Fig. 2. At the corner nodes the unknowns are the stress components (8×3), and at the edge nodes are the displacements in the direction of the edges (12×1), it makes 36 d.o.f. in total.

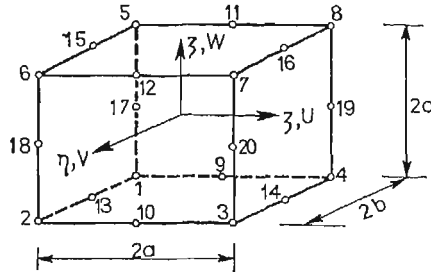


Fig. 2. Prismatic mixed element with 36 d.o.f.

2.1. The deformation shape function. The number of parameters defining the DShF is equal to the number of the degrees of freedom — 36. It means that the deformation shape function should be defined by 3 polynomials with 12 parameters each, for the 3 deformation components u , v and w separately. However, an assumption of 12 terms polynomial, as the standard procedure in the FEM, can be misleading. We shall discuss this below. Here somewhat different procedure will be considered.

If an edge of the element, for instance the edge 1 - 4, Fig. 2, is considered as an axially loaded rod, the deformations in the rod will be defined by the following expression:

$$U_{14} = U_9 + \frac{1}{2} [\varepsilon_{1x} a \xi (1 - \xi/2) + \varepsilon_{4x} a \xi (1 + \xi/2)], \quad (\xi = x/a). \quad (1)$$

These deformations are translated in the xy plane, in such a way that the deformations at the edge 2 - 3 vanish, and next translated along z axis so that the side 5 ÷ 8 the deformations vanish. The contribution of the nodal parameters U_9 , ε_{1x} and ε_{4x} to the deformation U in the element is defined as follows:

$$U = \frac{1}{8} [2U_9 + \varepsilon_{1x} a \xi (1 - \xi/2) + \varepsilon_{4x} a \xi (1 + \xi/2)] (1 - \eta) (1 - \zeta). \quad (2)$$

In this way the complete DShF can be defined and represented as follows:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_x & \Phi_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_y & \Phi_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_z & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xi} \\ U_i \\ \varepsilon_{yi} \\ V_i \\ \varepsilon_{zi} \\ W_i \end{bmatrix}, \quad (3)$$

where we have:

$$\begin{aligned} \Phi_{xi} &= \frac{a}{8} (1 + \xi_0/2) \xi (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0), \\ \Phi_{yi} &= \frac{b}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0/2) \eta (1 + \zeta_0), \quad i = 1, 8 \\ \Phi_{zi} &= \frac{c}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0/2) \zeta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{ul} &= \frac{1}{4} (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0), & i = 9, 12 \\ \Phi_{vl} &= \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \zeta_0), & i = 13, 16 \\ \Phi_{wl} &= \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \zeta_0), & i = 17, 20 \\ \xi_0 &= \xi \xi_i, & \eta_0 = \eta \eta_i, & \zeta = \zeta \zeta_i\end{aligned}\tag{5}$$

It is interesting to note that the polynomial by which for instance deformations U are defined is of the following type:

$$\begin{aligned}U &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 x^2 + a_6 xy + a_7 xz + a_8 yz + a_9 x^2 y + a_{10} x^2 z + \\ &+ a_{11} xyz + a_{12} x^2 yz.\end{aligned}\tag{6}$$

The polynomial is not a "complete" one, as usually is required. It is evident that such a polynomial is very difficult to assume in advance. The polynomial corresponds to a linear variation of strains (stresses), similarly to the stresses at the element in Fig. 2.

2.2. The element matrix. The element matrix can be represented as follows:

$$Fk = \begin{bmatrix} F_n & F_{uvw} \\ F_{uvw}^t & K \end{bmatrix}.\tag{7}$$

The vector of nodal parameters is the following:

$$d' = [N_{1x} \dots N_{8x} \dots N_{1y} \dots N_{8y} \dots N_{1z} \dots N_{8z} \dots U_9 \dots U_{12} V_{13} \dots V_{16} W_1 \dots W_{20}].\tag{8}$$

The first row submatrices in the element matrix represents the flexibility submatrices. The submatrix F_n gives nodal displacements in direction of the axial stresses due to the same stresses. Submatrix F_{uvw} affords the displacements due to the midedge node displacements. The second row represents the stiffness submatrices. Submatrix F_{uvw}^t gives the nodal forces in the direction of the edge nodes due to the axial stresses, and submatrix K -nodal forces in the same direction due to the edge node displacements.

2.2.1. Flexibility submatrices F_n and F_{uvw} . From the DShF (3-5) for $\xi = -1$ the deformations on the surface 1,2, 6,5 are derived. These deformations, for instance due to ε_{1x} are as follows:

$$U = \varepsilon_{x1} \Phi_{x1} = \frac{-3a}{16} \varepsilon_{x1} (1 - \eta) (1 - \zeta).\tag{9}$$

The volume of these deformations is:

$$\iint U dy dz = \frac{-3}{4} abc \varepsilon_{x1}.$$

The volume is equal to the nodal deformations 1, 2, 6, 5 due to the same strain. The distribution due to the particular node is as follows:

$$F_{nij} = \iint U \delta U(\varepsilon_i) dy dz,$$

where U is as Exp. (9) and $\delta U(\varepsilon_i)$ is the variation of the displacement on the particular strains. In this way the derived nodal displacements due to ε_{x1} take the following form:

$$[U_1 U_2 U_6 U_5]^t = \frac{-abc}{12} [4 \ 2 \ 1 \ 2].$$

From ϵ_{x1} we obtain deformations also on the surface 3, 4, 8, 7. The nodal deformations derived in the same way for these nodes are as follows:

$$[U_3 U_4 U_8 U]^t = \frac{-abc}{36} [2 \ 4 \ 2 \ 1].$$

These two submatrices define the first column of submatrix F_n . In this way the complete submatrix F_n can be derived. The submatrix can be derived by an energetic way as follows:

$$F_{ni,j} = \int \epsilon_i \delta \epsilon_i dx dy dz.$$

The values of the same nodal displacements due to ϵ_{x1} derived in this way are as follows:

$$[U_1 U_2 U_6 U_5 U_3 U_4 U_8 U_7]^t = \frac{-abc}{27} [8 \ 4 \ 2 \ 4 \ 2 \ 4 \ 2 \ 1].$$

The coefficients derived in both ways are not the same, but their sum in one row or column is the same, equal to 1. Therefore submatrix F_n defined in both ways finally would give the same results. Here it is convenient to use F_n derived by the energetic way. Submatrix F_n derived in this way is the following:

$$F_n = \begin{bmatrix} F_{nx} & 0 & 0 \\ 0 & F_{ny} & 0 \\ 0 & 0 & F_{nz} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$F_n^0 = F_{nx} = \frac{-abc}{27} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ & 8 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ & & 8 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ & & & 8 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ & & & & 8 & 4 & 2 & 4 \\ & & & & & Sym. & 8 & 4 & 2 \\ & & & & & & & 8 & 4 \\ & & & & & & & & 8 \end{bmatrix} = F_{ny} = F_{nz}. \tag{11}$$

If instead of strains ϵ we introduce stresses N , for instance for strains ϵ_x :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [N_x - \nu(N_y + N_z)],$$

submatrix F_n becomes:

$$F_n = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} F_n^0 & -\nu F_n^0 & -\nu F_n^0 \\ -\nu F_n^0 & F_n^0 & -\nu F_n^0 \\ -\nu F_n^0 & -\nu F_n^0 & F_n^0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

In the same way submatrix F_{uvw} is derived. This submatrix can be defined as follows:

$$F_{uvw} = \begin{bmatrix} F_u & 0 & 0 \\ 0 & F_v & 0 \\ 0 & 0 & F_w \end{bmatrix} \tag{13}$$

The values of the submatrices take the form:

$$F_u^t = \frac{bc}{9} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 4 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$F_v^t = \frac{ac}{9} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 4 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$F_w^t = \frac{ab}{9} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 & -4 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -2 & -4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & -1 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & -2 & -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

2.2.2. Stiffness submatrix K. The stiffness submatrix K gives the nodal shear forces in the direction of the edge node displacements, due to the displacements of the nodes. For instance the forces due to $U_9 = 1$ are as follows:

$$N_{xy} = \frac{-G}{4b} (1 - \zeta),$$

$$N_{xz} = \frac{-G}{4c} (1 - \eta)$$

$$N_{yz} = 0$$

The shear force due to the shear stresses acting on the surface 1, 4, 8, 5 takes the form:

$$S_{xy} = \frac{2a2c}{2}, \quad N_{xy} = G \frac{ac}{b}.$$

Since the distribution of the shear stresses from node 9 to 11 is triangular, 2/3 of this shear force is applied to node 9 and 1/3 to node 11. In this way the defined nodal forces give the coefficients of the stiffness submatrix K. The submatrix can be represented as follows:

$$K = \frac{G}{3} \begin{bmatrix} K_1 & K_{12} & K_{13} \\ & K_2 & K_{23} \\ Sym. & & K_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

The values of submatrices in this expression are the following:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2(\alpha c + \beta b) & -2\alpha c + \beta b & \alpha c - 2\beta b & -\alpha c - \beta b \\ & 2(\alpha c + \beta b) & -\alpha c - \beta b & \alpha c - 2\beta b \\ & & 2(\alpha c + \beta b) & -2\alpha c + \beta b \\ Sym. & & & 2(\alpha c + \beta b) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\alpha = a/b, \quad \beta = a/c,$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ & 2 & -1 & -2 \\ & & 2 & -2 \\ Sym. & & & 2 \end{bmatrix} c, \tag{19}$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ & 2 & -1 & -2 \\ & & 2 & 1 \\ Sym. & & & 2 \end{bmatrix} b. \tag{20}$$

Submatrix K_2 is obtained if instead of α in K_1 we substitute α^{-1} .

$$K_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} a, \tag{21}$$

$$K_3 = c \begin{bmatrix} 2(\alpha^{-1} + \alpha) & \alpha^{-1} - 2\alpha & -\alpha^{-1} - \alpha & -2\alpha^{-1} + \alpha \\ & 2(\alpha^{-1} + \alpha) & -2\alpha^{-1} + \alpha & -\alpha^{-1} - \alpha \\ & & 2(\alpha^{-1} + \alpha) & \alpha^{-1} - 2\alpha \\ Sym. & & & 2(\alpha^{-1} + \alpha) \end{bmatrix}. \tag{22}$$

2.3. Numerical examples.

2.3.1. Simply supported square plate. The plate is subdivided in 4 elements (Fig. 3a). Since there is the symmetry, only a quarter of the plate is analyzed, (Fig. 3b). There are only 3 unknowns: N_6 , U_{10} and W_{18} . The analysis gives the following results:

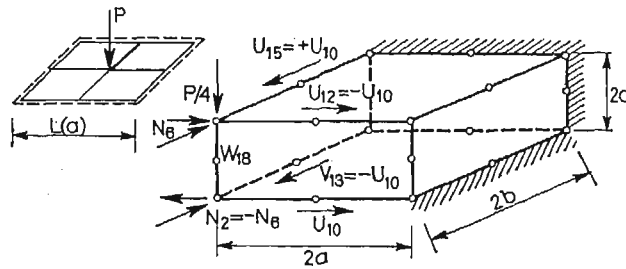


Fig. 3. Analysis of simply supported square plate (a), the quarter of the plate represented by one element (b)

$$N_6 = -\frac{9}{32c^2} P(1+\nu),$$

$$U_{10} = \frac{3aP}{16Ec^2} (1-\nu^2),$$

$$W_{18} = \frac{-3PL^2}{192D} \left[1 + \frac{16c^2}{L^2(1-\nu)} \right] = -0,01562 \frac{PL^2}{D} \left[1 + \frac{16c^2}{L^2(1-\nu)} \right],$$

(Thin Plate $Th.0,0116PL^2/D$).

The results for the case of constant distributed load q can be derived by the substitution of qa^2 instead of $P/4$. The results are as follows:

$$N_6 = \frac{-9qL^2}{128c^2} (1+\nu),$$

$$U_{10} = \frac{3qa^3}{4Ec^2} (1-\nu^2),$$

$$W_{18} = \frac{-3qL^4}{768D} \left[1 + \frac{16c^2}{L^2(1-\nu)} \right] = 0,00391 \frac{qL^4}{D} \left[1 + \frac{16c^2}{L^2(1-\nu)} \right],$$

(Thin plate theory: $0,00406 qL^4/D$).

The following bending moment corresponds to stress N_6 :

$$M_6 = N_6 \frac{(2c)^2}{6} = \frac{3qL^2}{64} (1+\nu) = 0,0609qL^2, \quad (\nu = 0,3),$$

(Thin plate theory: $0,0479 qL^2$)

The results for the displacement W_{18} contain two components: the thin plate theory component and the contribution of the shear forces component. The first component is the same as is the result obtained by our very first rectangular mixed bending element [7], with the assumption that the moments and displacements are independent. The second component will be analyzed in the next chapter.

2.3.2. Cantilever. The analysis of the cantilever in Fig. 4 loaded by concentrated edge force gives the following results:

$$N_6 = \frac{3aP}{2bc^2},$$

$$W_{20} = \frac{P}{2Ec} \left[4,0 \frac{a^3}{c^3} + 2 \frac{a}{c} (1+\nu) \right].$$

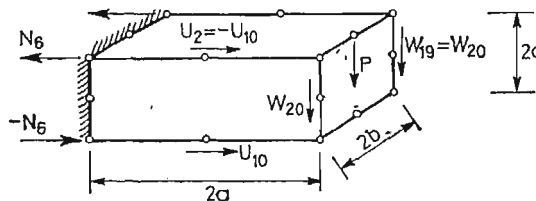


Fig. 4. Analysis of a cantilever as one finite element

These results are exactly the beam solution, with cross section shape coefficient $k = 1$. As could be expected, the three-dimensional element gives exactly the same results as the plane stress element from Fig. 1 [2]. In the case of a cantilever loaded by a moment, the element also gives also the beam solution.

3. Reduced three-dimensional element for plate bending analysis

3.1. Element matrix. The reduced three-dimensional element is presented in Fig. 5. The primary unknowns for the element are the following:

$$d^t = [M_{1x} \dots M_{4x} \dots M_{1y} \dots M_{4y} \dots \Theta_9 \dots \Theta_{12}, W_1 \dots W_4]. \tag{23}$$

It means that the element is reduced to 16 d.o.f.

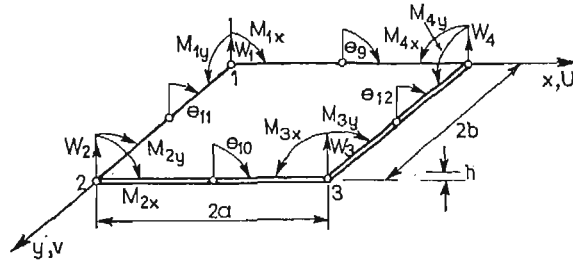


Fig. 5. Reduced plate bending element

The strains for the three-dimensional element can be substituted by the bending moments as follows:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{c}{D(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y), \\ \epsilon_y &= \frac{c}{D(1-\nu^2)} (-\nu M_x + M_y). \end{aligned}$$

The displacements u and v can be substituted by the rotations, for instance according to the following relation:

$$\Theta_9 = (U_9 - U_{11})/2c.$$

The upper stresses and displacements, and the lower stresses and displacements, in the case of plate bending are of the same intensity, but with different signes, for instance:

$$\begin{aligned} N_1 &= -N_5 \\ U_9 &= -U_{11} \end{aligned}$$

The element matrix can be represented as follows:

$$Fk = \begin{bmatrix} F_m & -\nu F_m & F_{\theta x} & 0 & 0 \\ & F_m & 0 & F_{\theta y} & 0 \\ & & K_{\theta x} & K_{\theta xy} & K_{\theta xw} \\ & & & K_{\theta y} & K_{\theta yw} \\ \text{Sym.} & & & & K_w \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Submatrix F_m derived in this way is the same as for the element with the assumption that the moments and displacements are independent. The derivation of the other submatrices is very simple and will not be given.

3.2. Analysis of thick plates. As an illustration of the accuracy of the reduced three-dimensional element, and consequently of the original element, the simply supported square plate in Fig. 3a will be analyzed. The results of the analysis are presented in the table below and in Figs. 6, 7.

Table 1. Results of the analysis of thick simply supported square plate

Thickness Span (h/L)	Constant distributed load		Concent. Force
	W/W_{ex}^0	M/M_{ex}^0	W/W_{ex}^0
0.0125	1.0059	1.054	1.1055
0.075	1.031	1.054	1.160
0.125	1.077	1.054	1.256
0.200	1.187	1.054	1.492
0.250	1.290	1.054	1.709

The results presented in the table are the ratio of the computed deflection W at the center of the plate versus the theoretical thin plate deflection, and the similar ratio of the computed M and theoretical M_{ex}^0 moments. In the case of very thin plates ($h/L = 0.0125$) the element gives the same results as the plate bending element with the assumption that the moments and deflections are independent. The moments do not depend on the thickness of the plate. The results are derived by subdivision of the quarter of the plate on 2×2 elements.

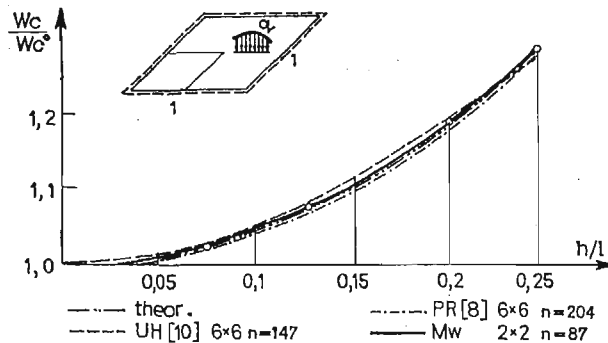


Fig. 6. Central displacement of simply supported square thick plate subjected to constant distributed load

With the increase of the thickness of the plate the relative deflections of the plate increase (Figs. 6 and 7). Besides the results obtained by our element Mw, we present in the figures the results obtained by Prior et al. [8] (Pr) with stiffness element, Chang-Chun Wu [10] (UH) — with a hybrid element, and Rao et al. [9] (Ra) — with a triangular stiffness element. The number n besides the particular results denotes the number of equations by means of which the results were obtained.

From Fig. 6 one can see that our mixed element (Mw) gives excellent results, with values somewhat higher than the theoretical ones, while the stiffness element (Pr) gives

similar accuracy, with values below the exact. The results in the case of concentrated force (Fig. 7) take the values between those obtained by the other. In region of thin plates the results are not so good, since the rough mesh was used (2×2). If the refined mesh (4×4) is used then the results fall down close to the exact ones (dotted line in the figure).

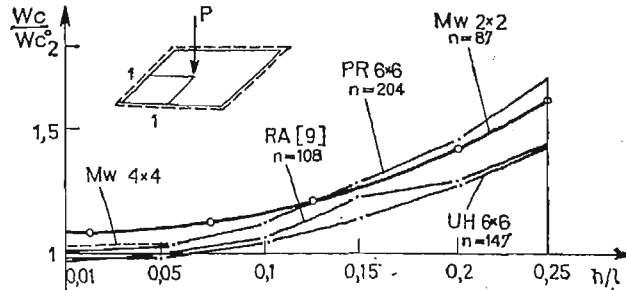


Fig. 7. Central displacement of simply supported square thick plate subjected to concentrated force

A disadvantage of the stiffness elements for analysis of thick plates is that they give bad results for thin plates. In the case of thin plates there is the so called "locking" phenomenon. Contrary to that, our mixed element gives good results for thick and thin plates, regardless of their thickness.

4. Further development and conclusions

The three-dimensional element presented here represents our first step in the development of mixed three-dimensional elements. Due to its shape, the practical application of the element is limited. The purpose of the development of the element was to show the way of development and expected accuracy of the mixed elements.

The accuracy of the element is very good. In the case of plane stress problem the element gives the same results as the corresponding plane stress element [2]. The plane stress element is one of the best elements available at present. In the analysis of plate bending the three-dimensional element gives the same results as the plate bending element with assumption that the moments and displacements are independent [7]. The plate bending element gives also very good results.

Such results obtained by means of the presented element are encouraging for further research of the three-dimensional mixed elements. As the next step in the development of mixed elements should be the development of a general hexahedron element (Fig. 8a) with 36 d.o.f. It would be convenient if such an element to be taken with displacements along the edges as the degrees of freedom. The same element could be developed with curved boundaries. The development of the element could be based on the assumption that the stresses and displacements are independent. It was shown that such an assumption is correct and has advantage in the exclusion of the parasitic stresses. The final aim would be to develop such elements explicitly.

The best mixed element that can be developed is the in Fig. 8b, with curved boundaries and 60 d.o.f. Such an element corresponds to our plane stress isoparametric element

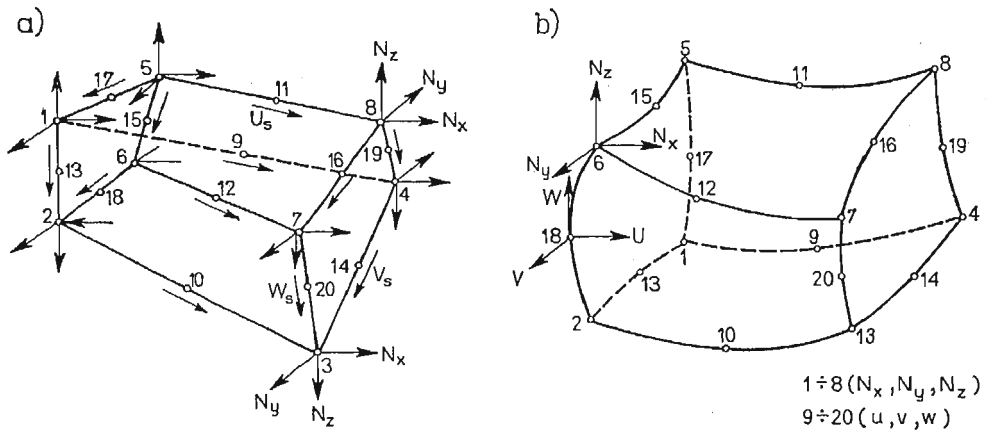


Fig. 8. Possible three-dimensional elements: (a) with 36 d.o.f. (b) with 60 d.o.f.

with 16 d.o.f. [2]. This plane stress element seems to be the best plane stress element available at present. Thus, the corresponding three-dimensional element should be expected to give excellent results also. The development of such an element is in progress.

The reduced three-dimensional element with 16 d.o.f. successfully can be applied for analysis of plate bending. The element gives results of very good accuracy, unconditionally stable, regardless the stiffness of the plate. Now we will try to eliminate the rotations as d.o.f., although they are internal d.o.f., and in such a way develop a 12 d.o.f. plate bending element for analysis of thick plates.

References

1. R. W. CLOUGH, *Comparison of Three-dimensional Finite Elements*, Symp. Application FEM in Civil. Engineering, Nashville, Tenn. 1969.
2. A. M. POCESKI, G. KOKALANOV, *Mixed plane stress finite elements*, Int. Conf. Computer aided Anal. Design Concrete Str., Split, 1984, Pineridge press, part I, 707 - 719.
3. A. POCESKI, G. KOKALANOV, *Mixed plate bending elements*, Int. Conf. Comp. Aidede anal. Design Conc. Str., Split 1984, Pineridge I, 721 - 34.
4. A. POCESKI, G. KOKALANOV, *Ploči-ramninska sastojba na napregnajata, primena na MKE*, Gradežen Fakultet, Skopje 1981, Izv. 2.3.
5. G. KOKALANOV, *Mešoviti izoparametrijski elementi za analiza na ploči*, Dr. Dis., Gradezen Facultet, Skopje, 1983.
6. A. POCESKI, *The direct method of development of finite elements*, J. Theor. App. Mechanics, Belgrade 1985, No. 11.
7. A. POCESKI, *Mešoviti metod na konačni elementi (III)*, 12 Ju. Kongres Teor. Prim. Mehanike, Ohrid 1974.
8. CH. PRYOR, R. BAKER, D. FREDERIC, *Finite element bending analysis of Reisner's plates*, ASCE 96, No. EM6, 1970, 967 - 8d.
9. G. RAO et al., *A high precision triangular plate bending element for analysis of thick plates*, Nuclear Eng. Design 30, 1974, 408 - 12.
10. WU. CHANG-CHUN, *Some problems of a plate bending hybrid model with shear effects*, Int. J. Num. Meth. Eng. 18, 1982, 755 - 64.

Резюме

ТРЕХМЕРНЫЕ СМЕШАННЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Следующие параметры являются неизвестными в элементе: компоненты напряжений в угловых узлах (8×3) и перемещения граней (12×1). Элемент развитый при помощи непосредственного метода, без применения вариационного принципа. Известные „паразитные напряжения” исключаются автоматически. Сведенный трёхмерный элемент дает очень хорошие результаты в анализе толстых и тонких плит. В работе показан путь развития смешанных элементов и ожидаемая точность. Далее рассмотрены изопараметрические элементы любых форм (рис. 8, а - б). Найлучшим ожидаемым элементом является показанный на рис. 8б элемент с 60 степенями свободы, который теперь разрабатывается.

Streszczenie

TRÓJWYMIAROWE MIESZANE ELEMENTY SKOŃCZONE

Nieznanyimi parametrami elementu są składowe naprężenia w węzłach narożnych (8×3) i przemieszczenia krawędzi (12×1). Elementy zostały rozwinięte z pomocą metody bezpośredniej bez zastosowania zasady wariacyjnej. „Naprężenia parametryczne” zostały wyeliminowane automatycznie. Zredukowane trójwymiarowe elementy dają znakomite wyniki w analizie płyt grubych i cienkich.

Celem pracy jest pokazanie sposobu rozwoju mieszanych elementów i spodziewanej dokładności ich stosowania. Oprócz tego rozpatrujemy izoparametryczne elementy o dowolnych kształtach (rys. 8a - b). Najlepszym jest element pokazany na rys. 8b z 60 stopniami swobody. Jest on obecnie rozwijany.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 czerwca 1987 roku.

BOUNDARY ELEMENTS FOR THERMO-ELASTO-PLASTICITY OF METALS

ANDRO ALUJEVIČ

IZTOK POTRČ

University of Maribor, Yugoslavia

1. Introduction

Singularities contained in the boundary element method represent one of its main advantages over finite elements, enabling a better approximation of stress distributions due to shape changes and/or variation of boundary conditions, like supports, contacts etc. Also, the resulting system of equations is smaller with BEM than with FEM, but, unfortunately, its matrix is fully populated. In this paper governing equations and numerical results (for a metal wall and plate bending) are given for the initial strain concept of BEM elasto-plastic formulation, bearing in mind body forces and thermal loads. For the case of large displacements, an updated Lagrange technique has been developed and is also reported in this paper.

2. Theoretical background

Mechanical properties of metals may be divided into elastic, plastic and viscous. In this paper, viscous influence has been neglected. In the elastic domain a complete reversibility can be observed, and at each point of time there is a unique relationship of loads and deformations, while for the plastic regime permanent deformations are due to occur, which are dependent upon the history of loading. If only small strain rates apply:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (1.1)$$

an incremental formulation may be written by a formal multiplication with a time step $dt > 0$, which is also typical in the classical elasto-plastic analysis. For the description of material properties, elasticity and plasticity laws are required, where the last one is composed of a yield criterion and flow rule. Considering a bilinear material, one dimensional yield stress formulation reads as:

$$\sigma_y = \sigma_0 + E_t \varepsilon^p / (1 - E_t/E), \quad (1.2)$$

and the yield criterion is:

$$F(\sigma, k, \Theta) = |\sigma| - \sigma_y(k, \Theta) = 0, \quad (1.3)$$

which is dependent on stress (σ), hardening (k) and temperature (θ). For the multidimensional modelling the Mises-Huber criterion is applicable:

$$F(\sigma_{ij}, k, \theta) = \sqrt{3/2 S_{ij} S_{ij}} - \sigma_y(k, \theta) = 0, \quad (1.4)$$

where S_{ij} is the deviatoric stress and k material hardening coefficient:

$$k = W^p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p. \quad (1.5)$$

For the plastic flow Prandtl-Reuss equation may be used in its incremental form:

$$d\epsilon_{ij}^p = S_{ij} d\lambda. \quad (1.6)$$

In order to correlate the unidimensional state, a comparative stress shall be used:

$$\sigma_v = \sqrt{3/2 S_{ij} S_{ij}}, \quad (1.7)$$

and also a corresponding comparative plastic strain increment:

$$d\epsilon_v^p = \sqrt{2/3} d\epsilon_{ij}^p. \quad (1.8)$$

Using the associated yield criterion, the proportionality factor is:

$$d\lambda = 3/2 d\epsilon_v^p / \sigma_v. \quad (1.9)$$

Additionally, there are also incremental equilibrium conditions, valid both in the elastic and in the plastic regime:

$$\dot{\sigma}_{ij,i} + \dot{b}_j = 0, \quad \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ji}, \quad \dot{p}_i = \dot{\sigma}_{ij} n_j. \quad (1.10)$$

For the elastic strain increment:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^i - \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad (1.11)$$

the Hookean constitutive law is applicable:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^i - \dot{\epsilon}_{ij}^p) + 2G\nu \delta_{ij}(\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}_{kk}^i - \dot{\epsilon}_{kk}^p)/(1-2\nu), \quad (1.12a)$$

where $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ represents initial strain. Analogously by defining:

$$\dot{\sigma}_{ij}^p = 2G\dot{\epsilon}_{ij}^p + 2G\nu \delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}^p/(1-2\nu),$$

the above formulation reads for the initial stress:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^i) + 2G\nu \delta_{ij}(\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}_{kk}^i)/(1-2\nu) - \dot{\sigma}_{ij}^p. \quad (1.12b)$$

Incorporating kinematic relations (1.1) into (1.12a) and (1.12b), and then to the equilibrium equations (1.10a), the generalised Navier-Lamé equation is obtained:

$$\dot{u}_{j,kk} + u_{k,kj}/(1-2\nu) = \dot{b}_j/G, \quad (1.13)$$

where generalised body forces \dot{b}_j include thermal loading.

The direct solution of this equation leads to the finite differences or to the finite element technique, while by converting this equation into an integral form, the boundary element method may be derived.

3. Integral formulation

Starting from the weighted residual formulation of the equilibrium equation:

$$\int (\dot{\sigma}_{jk,j} + \dot{b}_k) u_k^* dV = 0,$$

where the weighting displacement function u_k^* depends on the Kelvin fundamental solution for an infinite domain. Equation (2.1) may be converted into a generalised Somigliana equation:

$$\dot{u}_i(\xi) = \int (u_{ik}^* \dot{p}_k - p_{ik}^* \dot{u}_k) dA + \int (u_{ik}^* \dot{b}_k + u_{ik,k}^* \dot{\Theta}) dV + \int \sigma_{ijk}^* \dot{e}_{jk}^p dV, \quad (2.2)$$

with initial deformations \dot{e}_{ij}^p , while u_{ij}^* and p_{ij}^* are displacements or tractions at point \bar{r} due to the unit body force in i direction at source point ξ in Kelvin's space, σ_{ijk}^* being stress kernel. The volume integral, which includes contributions of body forces and thermal loads, may be transformed into a contour integral form. Alternatively particular solutions (\bar{u}, \bar{p}) [4] can also be applied, transforming equation (2.2) into:

$$\dot{u}_i(\xi) - \bar{u}_i(\xi) = \int (u_{ik}^* (\dot{p}_k - \bar{p}_k) - p_{ik}^* (\dot{u}_k - \bar{u}_k)) dA + \int \sigma_{ijk}^* \dot{e}_{jk}^p dV. \quad (2.3)$$

Bringing the source point ξ to the contour, the basic integral equation is obtained for nodes on the boundary:

$$C_{ik}(\dot{u}_k - \bar{u}_k) = \int (u_{ik}^* (\dot{p}_k - \bar{p}_k) - p_{ik}^* (\dot{u}_k - \bar{u}_k)) dA + \int \sigma_{ijk}^* \dot{e}_{jk}^p dV. \quad (2.4)$$

For the iterative process, stress values have to be determined. At the interior, these can be evaluated from the Somigliana equation (2.3), performing the derivation and bearing in mind the Hookean relationship (1.12a) of the elastic part of total displacements:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = & \int (U_{kij}^* (p_k - \bar{p}_k) - P_{kij}^* (u_k - \bar{u}_k)) dA - \delta_{ij} \alpha E \Theta / (1 - 2\nu) + \\ & + \int \Sigma_{ijkm}^* \varepsilon_{km}^p dV - D_{ij} \varepsilon_{km}^p(\xi), \end{aligned} \quad (2.5)$$

where all tensors with an asterisk (*) are derived from the Kelvin fundamental solution, while vectors with a dash (-) are particular solutions for body forces and temperature field with constant gradients.

For boundary nodes (2D) two stress tensor components appear to be known, and the third component may be determined by means of numerical derivatives.

4. Discretization and algebraization

In the case of elasto-plastic computation by the boundary element technique, nodalization is required not only on the contour, but also in one part of the interior where plastic zone is due to appear. Internal cells are to be used for the volume integration of plastic strain contributions, but they do not increase the number of algebraic equations. With N boundary nodes and $2N$ unknowns, only a system of $2N$ equations is obtained:

$$\underline{Hu} = \underline{Gp} + \underline{b} + \underline{S\varepsilon}^p. \quad (4.1)$$

Taking into account the prescribed boundary values, the system is written as:

$$\underline{Ax} = \underline{f} + \underline{S}\underline{\varepsilon}^p, \quad (4.2)$$

and its solution is:

$$\underline{x} = \underline{m} + \underline{K}_1 \underline{\varepsilon}^p. \quad (4.3)$$

Stresses have to be evaluated at N boundary nodes and M internal points (i.e. $3^*(M+N)$ equations):

$$\underline{\sigma} = \underline{\hat{G}}\underline{p} + \underline{\hat{H}}\underline{u} + \underline{\hat{b}} + (\underline{\hat{S}} + \underline{D}) \underline{\varepsilon}^p. \quad (4.4)$$

Taking into account the known boundary values, it gives:

$$\underline{\sigma} = \underline{\hat{A}}\underline{x} + \underline{\hat{f}} + (\underline{\hat{S}} + \underline{D}) \underline{\varepsilon}^p, \quad (4.5)$$

for \underline{x} the solution of (4.3) has to be considered, rendering:

$$\underline{\sigma} = \underline{\hat{A}}\underline{m} + \underline{\hat{f}} + (\underline{\hat{A}}\underline{K}_1 + \underline{\hat{S}} + \underline{D}) \underline{\varepsilon}^p = \underline{n} + \underline{K}_2 \underline{\varepsilon}^p. \quad (4.6)$$

5. Solution procedure

In the preceding formulation increments of plastic deformation have been taken as formally known. In the reality these values have yet to be determined by an incremental procedure:

A) At the first step a complete elastic computation is performed, using the full load (prescribed tractions, displacements, body forces and thermal loading):

$$\underline{x}^e = \underline{m}, \quad \underline{\sigma}^e = \underline{n}. \quad (5.1)$$

Consecutively, the load is to be adjusted to meet the yield criterion at the mostly loaded node:

$$L_0 = \sigma_0 / \max(\sigma_0) \rightarrow \underline{x}_0 = L_0 \underline{m}, \quad \underline{\sigma}_0 = L_0 \underline{n}. \quad (5.2)$$

B) Next, an incremental part of the load is used. After the l -th step the load factor is determined selecting an increment ω :

$$L_l = L_{l-1} + L_0 \omega, \quad (5.3)$$

and the unknown boundary values are:

$$\underline{x}_l = L_l \underline{m} + \underline{K}_1 \underline{\varepsilon}_l^p, \quad \underline{\sigma}_l = L_l \underline{n} + \underline{K}_2 \underline{\varepsilon}_l^p. \quad (5.4)$$

For the evaluation of plastic deformations, plastic strains are separated into accumulated strains (from the previous increments) and actual strain increments:

$$\underline{\varepsilon}_{ij}^p(l) = \bar{\underline{\varepsilon}}_{ij}^p(l-1) + \Delta \underline{\varepsilon}_{ij}^p(l). \quad (5.5)$$

C) The plastic strain increment is determined iteratively [1]. The procedure starts from the old value at each of $M+N$ points, producing stress values:

$$\underline{\sigma}(l) = L_l \underline{n} + \underline{K}_2 (\bar{\underline{\varepsilon}}^p(l-1) + \Delta \underline{\varepsilon}^p(l)) \quad (5.6)$$

Next, modified strains may be determined:

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \bar{\epsilon}^p_{ij} = \epsilon^e_{ij} + \epsilon^p_{ij} + \Delta \epsilon^p_{ij}, \tag{5.7}$$

and also deviatoric strains:

$$e'_{ij} = \epsilon'_{ij} - \delta_{ij} \epsilon'_{mm} / 3. \tag{5.8}$$

Using the Hookean law of elasticity, deviatoric strains are evaluated from stresses:

$$e'_{ij} = S_{ij} / 2G + \Delta \epsilon^p_{ij}. \tag{5.9}$$

Plastic strain increments can now be evaluated using Prandtl-Reuss rule:

$$\Delta \epsilon^p_{ij} = \Delta \lambda S_{ij}. \tag{5.10}$$

For the determination of the yield point of a bilinear material, the following relation is to be used:

$$\sigma_v(l) = \sigma_v(l-1) + E_t \Delta \epsilon^p_{ij} / (1 - E_t/E). \tag{5.11}$$

From the last interval plastic strain increments are obtained:

$$^{old}(\Delta \epsilon^p_{ij}) = (3G \sqrt{2/3} e'_{ij} e'_{ij} - \sigma_v(l-1)) / (3G + E_t / (1 - E_t/E)), \tag{5.12}$$

and now for the new interval the strain components become:

$$^{new}(\Delta \epsilon^p_{ij}) = \Delta \epsilon^p_{ij} e'_{ij} / \sqrt{2/3} e'_{ij} e'_{ij}. \tag{5.13}$$

By recursion, starting from equation (5.6) and repeating the procedure until the required convergence criterion:

$$^{old}(\Delta \epsilon^p_{ij}) \simeq ^{new}(\Delta \epsilon^p_{ij}) \tag{5.14}$$

is met, the last load increment gives:

$$\underline{x} = \underline{x}^e + \underline{K}_1 (\underline{\epsilon}^p(l-1) + \Delta \underline{\epsilon}^p(l)), \quad \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^e + \underline{K}_2 (\underline{\epsilon}^p(l-1) + \Delta \underline{\epsilon}^p(l)). \tag{5.15}$$

As an example of the described procedure, a thermally loaded metal wall analysis has been performed, using temperature dependent material properties $\sigma_y(\theta)$ and $E_t(\theta)$. The temperature field has been kept steady, 0°C at the upper and 480°C at the lower side. The yield point has been 310 MPa (20°C) and 175 MPa (500°C), and the tangent modulus of 36 GPa (20°C) and 30 GPa (500°C) respectively have been considered with linear variation between specified limits. Results of the analysis are given in Fig. 1.

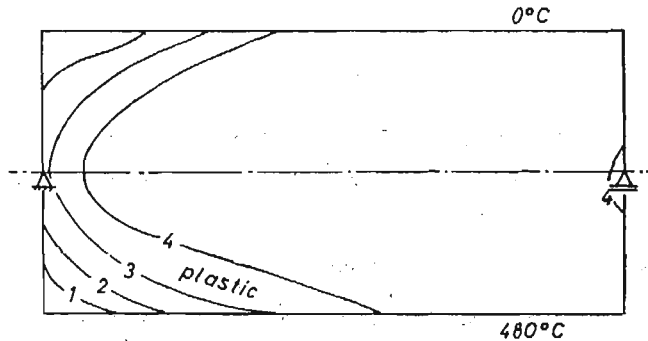


Fig. 1. Plastic zone development in a thermally loaded wall

6. Updated Lagrange routine

In many engineering problems there are small strains but large geometrical changes. For such cases an "updated" Lagrange procedure has been developed, consisting of the following steps:

- A) Evaluation stops if a maximum displacement reaches a specified value.
- B) New geometry is determined using computed displacements.
- C) For each computational point, a rotation with respect to the previous position is determined.
- D) Stresses and strains from the preceding steps are added and rotated for the new geometry.
- E) Correction of the yield point.
- F) Correction of boundary conditions (supports and contacts).
- G) Restart of the elasto-plastic computation (i.e. back to A).

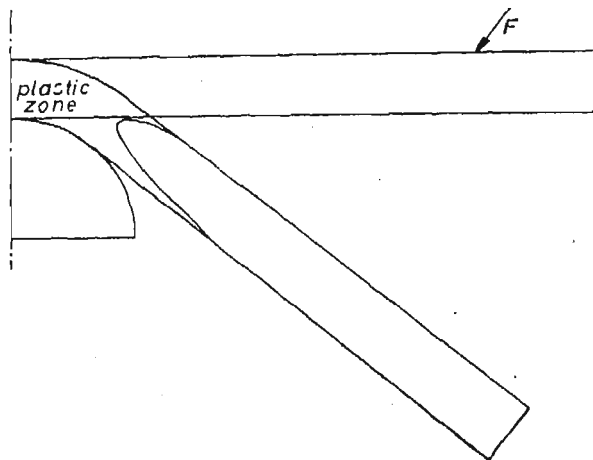


Fig. 2. Plastic zone development in a bending plate sheet

As an example of this kind of structural behaviour, plastic bending problem of a plate has been evaluated. Results of the computation are shown in Fig. 2 (plane strain case of a metal plate, bent over a rigid support cylinder).

7. Conclusion

In the above paper, theory of the boundary element method for plasticity problems has been demonstrated. Results of two typical problems have been presented.

References

1. MENDELSON, *Plasticity — Theory and Application*, McMillan, New York 1968.
2. RICARDELLA, *An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems in Elasticity and Elastoplasticity*, Report No. SM-73-10, University of Pittsburg, 1973.

3. BREBBIA, TELLES, WROBEL, *Boundary Element Techniques — Theory and Applications*, Springer Verlag, Berlin 1984.
4. POTRČ, *Zur Behandlung temperaturabhängiger elastoplastischer Probleme mittels Randelementmethode*, Dissertation, University of Erlangen, 1987.
5. ALUJEVIČ, POTRČ, *Boundary Elements for Large Plastic Displacement Problems of Metals*, 1st YU-PL conference on new trends in mechanics of solids and structures, Dubrovnik 1987 (pp. 53 - 54).
6. POTRČ, ALUJEVIČ, KUHN, *Thermo-plasticity by Boundary Elements*, 9th Boundary Element Conference. Stuttgart 1987 (pp. 373 - 384).

Резюме

КРАЕВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ТЕРМО-УПРУГО-ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ

В работе выведены управляющие уравнения и представлены численные результаты для двух типичных, упруго-пластических задач касающихся начальной деформации в формулировке метода краевых элементов. Учтено массовые силы и теоретическую нагрузку.

Для случая больших перемещений, в работе развито современную формулировку метода Лагранжа, силлострированную на примере изгиба металлической пластинки на жесткой опоре.

Streszczenie

ELEMENTY BRZEGOWE W ZAGADNIENIACH TERMO-SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNOŚCI METALI

W pracy zostały wyprowadzone równania rządzące i przedstawione wyniki liczbowe dwu typowych zagadnień sprężystoplastycznych dotyczących początkowego odkształcenia w sformułowaniu MEB. Uwzględniono siły masowe i obciążenia termiczne. W przypadku dużych przemieszczeń w pracy rozwinięto współczesną metodę Lagrange'a, zilustrowaną przykładem zagadnienia zginania płyty metalowej na sztywnej podporze.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 lipca 1987 roku.

ON INVARIANCE OF FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS

ZORAN V. DRAŠKOVIĆ

Aeronautical Institute, Belgrade

1. Introduction

In order that some physical law is a law of the nature, it can not depend on the choice of the coordinate system where it is applied. In view of the fact that these laws are represented by mathematical equations, this means that the form of natural laws (i.e. their equations) do not depend on the system in which they are formulated — they are invariant with respect to the operation of the change of the coordinate system. If one understands these laws as relations between mathematical objects, invariant in the sense of tensor calculus, the invariant mathematical objects will be the tensor fields, while the natural laws will be described by the tensor equations.

On the other hand, in the applications of the theory we are most frequently forced to use the approximations of natural laws; however, this is not the reason to desist from the request that these approximative laws would be “natural” too. After all, what we call “the natural laws” are only the approximative forms of the true laws of the nature, and nevertheless we request their invariance! This request, if we stay on the natural laws described by the tensor equations, would mean that the approximations of tensor fields which take part in these equations, must be invariant under coordinate transformations.

We shall see in the next section what are the repercussions of the request for invariance of finite element approximations in Euclidean space.

2. Invariant finite element approximations in Euclidean space

Let us start from the following interpolation formula for one vector function:

$$\mathbf{v}(x^a) = P^K(x^a)\mathbf{v}(x_K^a) = P^K(x^a)\mathbf{v}_K. \quad (1)$$

where P^K are interpolation functions, and x^a are arbitrary curvilinear coordinates in (three-dimensional) Euclidean space; Einstein's summation convention for diagonally repeated indices will be used; index K relates to the points in the space where the values of the vector function were done. There is nothing new in the vector representation (1) and it is quoted in this form for example by Oden ((7.48) in [2]), but immediately rejected as “less accurate” than “the usual approximation” ((7.51) in [2]). However, let us look

for the coordinate form of the representation (1); after the multiplication with base vectors, we shall have:

$$\begin{aligned} \{v(x^a) \cdot g^b(x^a) = \} v^b(x^a) &= P^K(x^a) v(x_K^a) \cdot g^b(x^a) \\ &= P^K(x^a) v^c(x_K^a) g_c(x_{(K)}^a) \cdot g^b(x^a) \\ &= P^K(x^a) g_c^b(x^a, x_{(K)}^a) v_K^c. \end{aligned} \quad (2)$$

since the scalar product of the base vectors at different points of the space is equal to the Euclidean shifters ([1], p. 806); placement of index K in the parentheses in (2) means that the summation convention is not applied to the corresponding member — in summation over K this member is simply associated to the other members with this index.

There is another way to obtain representation (2). Let us start from the usual expression in the rectangular Cartesian system for the approximation of coordinates of the vector function under consideration:

$$v^j(z^i) = Q^K(z^i) v^j(z_K^i) = Q^K(z^i) v_K^j. \quad (3)$$

where now Q^K are some interpolation functions. In order to give to this expression an invariant form, we introduce arbitrary generalized coordinates:

$$x^a = x^a(z^i). \quad (4)$$

Under this coordinate transformation we shall have:

$$v^c(x^a) \frac{\partial z^j}{\partial x^c} \Big|_{x^a} = Q^K[z^i(x^a)] v^c(x_K^a) \frac{\partial z_j}{\partial x^c} \Big|_{x_{(K)}^a} = R^K(x^a) v_K^c \frac{\partial z^j}{\partial x^c} \Big|_{x_{(K)}^a} \quad (5)$$

or, after multiplication by $\partial x^b / \partial z^j \Big|_{x^a}$:

$$v^b(x^a) = R^K(x^a) \frac{\partial x^b}{\partial z^j} \Big|_{x^a} \frac{\partial z^j}{\partial x^c} \Big|_{x_{(K)}^a} v^c(x_K^a) = R^K(x^a) g_c^b(x^a, x_{(K)}^a) v_K^c \quad (6)$$

and that is the same formula as (2); (we used the fact that the shifters are given by:

$$g_c^b(x^a, x_K^a) = \frac{\partial x^b}{\partial z^j} \Big|_{x^a} \frac{\partial z^j}{\partial x^c} \Big|_{x_K^a} \quad (7)$$

s. [1], p. 807). In this way, the equivalence between vectorial and coordinate approach in obtaining the invariant approximation is proved. Anyhow, one can say that the interpolation (6) reduces to:

$$v^b(x^a) = R^K(x^a) v_K^b(x^a). \quad (8)$$

i.e. to the summation at the point x^a shifted nodal values of a vector function. In any case, the shifters (which has not appeared in (13.94) at Oden, when the vector-valued representation has been used) are introduced in a natural way in the approximations of vector function — by passing on the curvilinear coordinates; this is just the consequence of the request that the interpolation procedure must be invariant. It is clear that this invariant process can be also extended on the tensor fields.

Only in rectangular Cartesian coordinates, when the shifters are the Kronecker delta, the expression (2), i.e. (6) reduces to the usual finite element approximation for the coordinates of a vector field:

$$v^b(x^a) = P^K(x^a) v^b(x_K^a) = P^K(x^a) v_K^b. \quad (9)$$

However, the approximation (9) (which is simpler than (2) or (6), since it does not include the shifters) has not the above-mentioned property of invariance. Let us perform in (9) the transvection with base vectors, and we shall have the following representation of a vector field:

$$v(x^a) = v^b(x^a)g_b(x^a) = P^K(x^a)v^b(x_K^a)g_b(x^a) \tag{10}$$

(we emphasize that geometrically is incorrect to indicate the expression:

$$v^b(x_K^a)g_b(x^a) \tag{11}$$

as the value of a vector field at the point x_K^a ; cf. (7.45) in [2]). If, by the transformation:

$$y^p = y^p(x^a) \tag{12}$$

we introduce another curvilinear coordinates y^p , we can also write (10) in the form:

$$\begin{aligned} v^q(y^p)h_q(y^p) &= v(y^p) = v[x^a(y^p)] \\ &= P^K[x^a(y^p)] \left. \frac{\partial x^b}{\partial y^q} \right|_{y_K^p} v^q(y_K^p) \left. \frac{\partial y^r}{\partial x^b} \right|_{y^p} h_r(y^p) \\ &= Q^K(y^p)v^q(y_K^p) \left. \frac{\partial x^b}{\partial y^q} \right|_{y_K^p} \left. \frac{\partial y^r}{\partial x^b} \right|_{y^p} h_r(y^p); \end{aligned} \tag{13}$$

in general case, this is different from the representation obtained by starting from the approximation for coordinates of vector field analogous to (9), but in the system of curvilinear coordinates (12). Consequently, the approximation in the form of (9) is not really invariant under the transformations of the coordinate system. This means that the form (9) would not be used (except in Cartesian orthogonal coordinates) in approximations of one natural law, if we request its invariance.

3. Example: comparison of two methods of interpolation

For the sake of comparison of two approaches (the usual and the invariant one), we shall consider a vector field defined on a cylindrical surface. Let us prescribe the values of the field at the points A, B, C and D (s. Fig. 1), so that in the cylindrical polar system:

$$v^2(x_A^a) = v^2(x_B^a) = v^2(x_C^a) = v^2(x_D^a) = 0 \tag{14}$$

and:

$$v^3(x_A^a) = v^3(x_B^a) = v^3(x_C^a) = v^3(x_D^a) = 0. \tag{15}$$

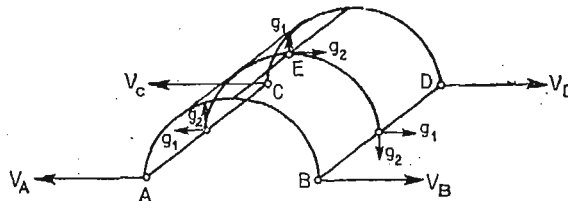


Fig. 1.

Regardless of the interpolation functions assumed in these approximation procedures, these two approaches will be essentially different. To be assured in that, we will first determine the value of the vector field at the point E by the usual approximation (10); it will be:

$$v^1(x_E^a) = v(x_E^a)g^1(x_E^a) = P^K(x_E^a)v^b(x_K^a)g_b(x_E^a)g^1(x_E^a) = P^K(x_E^a)v^1(x_K^a) \neq 0 \quad (16)$$

and:

$$v^2(x_E^a) = v(x_E^a)g^2(x_E^a) = P^K(x_E^a)v^b(x_K^a)g_b(x_E^a)g^2(x_E^a) = P^K(x_E^a)v^2(x_K^a) = 0; \quad (17)$$

here we use the orthogonality of cylindrical coordinates, and in (17) we use the assumption (14) too. However, if we use the invariant approximation in the form of (2) for the vector field in question, we shall have:

$$\begin{aligned} v^1(x_E^a) &= v(x_E^a)g^1(x_E^a) = P^K(x_E^a)v^b(x_K^a)g_b(x_{(K)}^a)g^1(x_E^a) \\ &= P^K(x_E^a)v^2(x_K^a)g_2(x_{(K)}^a)g^1(x_E^a) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

and:

$$\begin{aligned} v^2(x_E^a) &= v(x_E^a)g^2(x_E^a) = P^K(x_E^a)v^b(x_K^a)g_b(x_{(K)}^a)g^2(x_E^a) \\ &= P^K(x_E^a)v^1(x_K^a)g_1(x_{(K)}^a)g^2(x_E^a) \neq 0; \end{aligned} \quad (19)$$

here we have used the fact that:

$$g^1(x_E^a) \perp g_1(x_A^a), g_1(x_B^a), g_1(x_C^a), g_1(x_D^a) \quad (20)$$

and:

$$g^2(x_E^a) \perp g_2(x_A^a), g_2(x_B^a), g_2(x_C^a), g_2(x_D^a), \quad (21)$$

as well as the assumption (14).

Generally, one can say that the first approximation procedure gives the field of radially distributed vectors, while the second one gives the field of vectors parallel to the prescribed vectors at the points A, B, C and D.

4. Concluding remarks and future work

The basic conclusion is the following: the usage of the shifting operators in a coordinate form of approximations of vector and tensor fields in an arbitrary curvilinear coordinate system in (three-dimensional) Euclidean space is necessary if we want to realize the invariance of the approximative form of a natural law in which these fields take part. Only in Cartesian orthogonal coordinates these approximations coincide with usual expressions for the approximation of coordinates of vector and tensor fields.

The dwelling upon Euclidean space has, on the one hand, its reasons in the fact that we have been primarily interested in (finite element) approximations in such physical theory like mechanics of continua. More definitely, the necessity of the consistent introduction of shifters into interpolation formulae was appeared in the three-field theory [3] (in the case of the use of these formulae in curvilinear coordinates). On the other hand, it is difficult to speak about operators of parallel displacement (in the sense of the above-mentioned shifters) in non-euclidean spaces.

The acceptance of the presented procedure of the invariant interpolation will request, for example, to carry out the finite element equations of motion in arbitrary curvilinear coordinates. However, the naturalness of this interpolation is not the guarantee of its simplicity — the shifters, in which variables are not separate, will arise explicitly in it. In any case, the presented approach would be justified in numerical examples, in the sense that we will essay to explain some effects by the consistent introducing of shifting operators.

Acknowledgements

The author wishes to express his gratitude to Dr. Mladen Berković (Aeronautical Institute, Belgrade) for his greatest patience during numerous valuable discussions related to the ripening of the idea presented in the paper. The author is also indebted to Prof. Jovo Jarić (Faculty of Sciences, Belgrade) for critical review of the paper. Any faults, of course, are those of the author.

References

1. J. L. ERICKSEN, *Tensor fields*, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
2. J. T. ODEN, *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York, 1972.
3. M. BERKOVIC, *Three-field approximations in nonlinear finite element analysis* (Private communications)

Резюме

ИНВАРИАНТНЫЕ АПРОКСИМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Физические законы будут „натуральными“ тогда когда они инвариантны (ковариантны) при трансформации системы координат. Мы можем обсуждать такую инвариантность также в случае приближений натуральных законов если приимём, что эти законы описаны тензорными уравнениями (в 3-мерном) пространстве Евклида. В результате мы получаем явную форму евклидовых шифтеров (в общей криволинейной системе координат) для приближений векторного, или в общем случае, тензорного поля.

Streszczenie

O NIEZMIENNICZOŚCI PRZYBLIŻEŃ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Prawa fizyczne są „naturalne” jeżeli są niezmiennicze (kowariantne) względem transformacji układu współrzędnych. Możemy badać taką niezmienniczość również w przypadku przybliżeń naturalnych praw jeżeli założymy, że prawa te są opisane równaniami tensorowymi (w trójwymiarowej) przestrzeni Euklidesa. W wyniku otrzymujemy jawną postać (w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych) euklidesowych przybliżeń wektorowego, lub w ogólnym przypadku, tensorowego pola.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 września 1987 roku.

SOLUTION OF SHALLOW SHELLS BY BOUNDARY ELEMENT METHOD. PROBLEM OF CORNERS

OTTON DĄBROWSKI

ROMAN SZMIGIELSKI

Technical University of Wrocław

1. Introduction

Boundary Element Method (BEM) is one of numerical methods which is finding now greater attention in mechanics [1, 2]. BEM is applied for the solution of the boundary problems described by the integral equations. The advantage of BEM which causes its computational applications is, that the BEM reduces geometrical size of the problem by one and consequently reduces the time of calculations. The unknown quantities are boundary displacements or forces depending on how the edge is supported. The solution of wider class of shells is restricted to the possibility of obtaining fundamental solutions (Green's function).

We will discuss the thin, shallow, spherical shell, which middle surface can be described approximately by equation [5]:

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2), \quad (1.1)$$

where $k = 2d/a^2$ — constant curvature, d — height of the shell, a — radius of the bottom of the shell.

The fundamental solution is given in [4] and complete solution in [8].

The integral representation of the equilibrium equations of shells can be obtained by making use of Betti-Maxwell's reciprocal theorem [6]. If one of the state of forces is unit loading and corresponding fundamental solution is one of the state of the displacements and after making use of the properties of the Dirac's function we obtain the Somigliano's formulas for displacements:

$$u_j(G) = \int_C [T_i(K)\bar{u}_{ij}(K, G) + M_n(K)\bar{\varphi}_{nj}(K, G)]dC - \int [\bar{T}_{ij}(K, G)u_i(K) + \bar{M}_{nj}(K, G)\varphi_n(K)]dC + \int_A P_i(F)\bar{u}_{ij}(F, G)dA + \sum_{r=1}^k R_r(K)\bar{w}_{3j}(K, G), \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(G) = & \int_C [T_i(K)\bar{u}_{i4}(K, G) + M_n(K)\bar{\varphi}_{n4}(K, G)]dC - \int_C [\bar{T}_{i4}(K, G)u_i(K) + \\ & + \bar{M}_{n4}(K, G)\varphi_n(K)]dC + \int_A P_i(F)\bar{u}_{i4}(F, G)dA + \sum_{r=1}^k R_r(K)\bar{u}_{34}^r(K, G), \end{aligned} \quad (1.2)$$

[cont]

where $\bar{T}_{i4} = \bar{T}_{i3, \mu}$, $\bar{u}_{i4} = \bar{u}_{i3, \mu}$, $\bar{\varphi}_{n4} = \bar{\varphi}_{n3, \mu}$, μ — arbitrary direction, C — boundary of the shell. A — the projection of the middle surface on the plane x_1, x_2 , F — arbitrary point of the middle surface, G — point of application of the concentrated unit load, K — the searched point, the known fundamental solution is marked by bar.

2. Boundary integral equations

We obtain the boundary integral equations passing from inner point G of a shell to the point M which belongs to the shell edge. The formulas (1.2) become boundary integral equations:

$$\begin{aligned} \alpha u_j(M) = & \int_C [T_i(K)\bar{u}_{ij}(K, M) + M_n(K)\bar{\varphi}_{nj}(K, M)]dC - \int_C [\bar{T}_{ij}(K, M)u_i(K) + \\ & + \bar{M}_{nj}(K, M)\varphi_n(K)]dC + \int_A P_i(F)\bar{u}_{ij}(F, M)dA + \sum_{r=1}^k R_r(K)\bar{u}_{3j}^r(K, M), \\ \beta \varphi_n(M) = & \int_C [T_i(K)\bar{u}_{i4}(K, M) + M_n(K)\bar{\varphi}_{n4}(K, M)]dC - \int_C [\bar{T}_{i4}(K, M)u_i(K) + \\ & + \bar{M}_{n4}(K, M)\varphi_n(K)]dC + \int_A P_i(F)\bar{u}_{i4}(F, M)dA + \sum_{r=1}^k R_r(K)\bar{u}_{34}^r(K, M), \end{aligned} \quad (2.1)$$

where n — normal vector to the edge.

When we calculate the boundary forces or boundary displacements in the point $K = M$ arise the singularities, which can be avoided. The coefficients α and β in formulas (2.1) are equal 0.5 on smooth edge [7]. In the corner points Q the values of those coefficients are depending on the angle ω of the corner [7, 8].

3. Problem of corners

In the corners arise the singularities. The singularity order is the same as of the plate [3]. Therefore the corner coefficients α and β were determined by replacing the shell fundamental functions of forces, moments and displacements by corresponding plate fundamental solutions:

$$\bar{u}_{33} = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r, \quad (3.1)$$

$$\bar{u}_{34} = \bar{u}_{33, \xi_1} \mu_1 + \bar{u}_{33, \xi_2} \mu_2,$$

where $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$.

For $j = 3$ in the corner point Q the boundary integral equations have the form:

$$\alpha u_3(Q) = \int_C [T_i(K)\bar{u}_{i3}(K, Q) + M_n(K)\bar{\varphi}_{n3}(K, Q)] dC - \int_C [\bar{T}_{a3}(K, Q)u_a(K) + \bar{T}_{33}(K, Q)u_3(K) + \bar{M}_{n3}(K, Q)\varphi_n(K)] dC + \int_A P_i(F)\bar{u}_{i3}(F, Q) dA + \sum_{r=1}^k R_r \bar{u}_{33}^r(K, Q), \tag{3.2}$$

$$\beta \varphi_n(Q) = \int_C [T_i(K)\bar{u}_{i4}(K, Q) + M_n(K)\bar{\varphi}_{n4}(K, Q)] dC - \int_C [\bar{T}_{a4}(K, Q)u_a(K) + \bar{T}_{34}(K, Q)u_3(K) + \bar{M}_{n4}(K, Q)\varphi_n(K)] dC + \int_A P_i(F)\bar{u}_{i4}(F, Q) dA + \sum_{r=1}^k R_r \bar{u}_{34}^r(K, Q), \tag{3.3}$$

where $a = 1, 2$.

We make use of the properties of the function \bar{T}_{34} resulting from equilibrium equation:

$$\int_C T_{34}(K, Q) dC = 0, \tag{3.4}$$

then the equation (3.3) becomes.

$$\beta \varphi_n(Q) = \int_C [T_i(K)\bar{u}_{i4}(K, Q) + M_n(K)\bar{\varphi}_{n4}(K, Q)] dC - \int_C \{\bar{T}_{a4}(K, Q)u_a(K) + \underline{\bar{T}_{34}(K, Q)[u_3(K) - u_3(Q)] + \bar{M}_{n4}(K, Q)\varphi_n(K)}\} dC + \int_A P_i(F)\bar{u}_{i4}(F, Q) dA + \sum_{r=1}^k R_r(K)\bar{u}_{34}^r(K, Q). \tag{3.5}$$

In this way the order of the singularity in the underlined expression in (3.5) has been lowered.

The local coordinate system ξ_1, ξ_2 (Fig. 1.) is assumed.

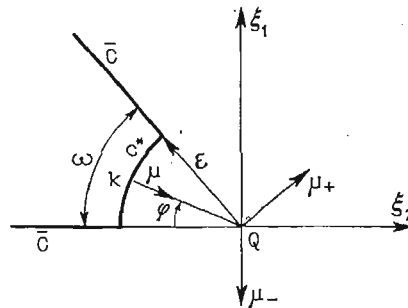


Fig. 1. The local coordinate system

where:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\varepsilon \cos \varphi, \\ \xi_2 &= \varepsilon \sin \varphi, \\ \mu(K) &= [\cos \varphi, -\sin \varphi], \\ \mu_-(Q) &= [0, -1], \\ \mu_+(Q) &= [\sin \omega, \cos \omega]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

In the surroundings of the point Q the boundary curve C of the shell is divided on boundary curve \bar{C} and C^* (C^* is a circular sector around the point Q in diameter ε , Fig. 1.). The displacement function in the surroundings of point Q has been approximated by the linear function in the form:

$$\begin{aligned} u_3(K) &= \frac{1}{\sin \omega} (u_{3\mu+} + \cos \omega \cdot u_{3\mu-}) \xi_1 - u_{3\mu-} \xi_2 + u_3(Q), \\ \varphi_n(K) &= \frac{\partial u_3(K)}{\partial n} = \frac{1}{\sin \omega} (u_{3\mu+} + \cos \omega \cdot u_{3\mu-}) - u_{3\mu-}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

The boundary forces expressed in polar coordinates in this point are:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{33}(K, Q) &= -\bar{Q}_r - \frac{1}{r} \bar{M}_{r\varphi, \varphi}, \\ \bar{Q}_r &= -D \left[\bar{u}_{33, rr} + \frac{1}{r} \bar{u}_{33, r} + \frac{1}{r^2} \bar{u}_{33, \varphi\varphi} \right]_{,r}, \\ \bar{M}_{r\varphi} &= -(1-\nu) D \left(\frac{1}{r} \bar{u}_{33, \varphi} \right)_{,r}, \\ \bar{T}_{34}(K, Q) &= -Q_r^* - \frac{1}{r} M_{r\varphi}^*, \\ Q_r^* &= -D \left[\bar{u}_{34, rr} + \frac{1}{r} \bar{u}_{34, r} + \frac{1}{r^2} \bar{u}_{34, \varphi\varphi} \right]_{,r}, \\ M_{r\varphi}^* &= -(1-\nu) D \left(\frac{1}{r} \bar{u}_{34, \varphi} \right)_{,r}, \\ \bar{M}_{n4} &= -M_r^* = D \left[\bar{u}_{34, rr} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \bar{u}_{34, \varphi\varphi} + \frac{1}{r} \bar{u}_{34, r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Taking into account formulas (3.6) we obtain:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{33}(K, Q) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}, \\ \bar{T}_{34}(K, Q) &= -\frac{3-\nu}{4\pi\varepsilon^2} (\cos \varphi \cdot \mu_1 - \sin \varphi \cdot \mu_2), \\ \bar{M}_{n4}(K, Q) &= -M_r^* = \frac{1+\nu}{4\pi\varepsilon} (\cos \varphi \cdot \mu_1 - \sin \varphi \cdot \mu_2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

For $\varepsilon \rightarrow 0$ the integral along the boundary \bar{C} in equations (3.3) and (3.5) becomes the principal value in Cauchy's sense. When we integrate the equation (3.2) along C^* ($\varepsilon \rightarrow 0$) we obtain the following quantities:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C^*} \bar{T}_{33}(K, Q) u_3(Q) dC^* = \frac{\omega}{2\pi} u_3(Q), \quad (3.10)$$

and from equation (3.5) for $\mu(Q) = \mu_-$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{C^*} \bar{T}_{34}(K, Q) [u_3(K) - u_3(Q)] dC^* + \int_{C^*} \bar{M}_{n4}(K, Q) \varphi_n(K) dC^* \right\} &= \\ = \frac{1}{2\pi} (\omega \cdot u_{3\mu-} + \sin \omega \cdot u_{3\mu+}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

and for $\mu(Q) = \mu_+$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{C^*} \bar{T}_{34}(K, Q)[u_3(K) - u_3(Q)] dC^* + \int_{C^*} \bar{M}_{n4}(K, Q) \varphi_n(K) dC^* \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} (\omega \cdot u_{3\mu+} + \sin \omega \cdot u_{3\mu-}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

In the case when $\omega = \pi$ expressions (3.10), (3.11), and (3.12) correspond to smooth edge and are equal 0.5.

4. Numerical solutions

On the boundary of the thin shell two boundary conditions are known. Introducing the boundary conditions into equations (2.1) we obtain four integrall equations which we can solve numerically. The shell contour is divided into N elements and the middle surface into L elements, then we obtain $4\bar{N} + k$ linear algebraic equations (\bar{N} — number of knots and k — number of corners) as follows:

$$\begin{aligned} \alpha u_j = \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (\bar{u}_{ij} dC_j) T_i + \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (\bar{\varphi}_{nj} dC_j) M_n - \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (\bar{T}_{ij} dC_j) u_i + \\ - \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (\bar{M}_{nj} dC_j) \varphi_n + \sum_{l=1}^L \int_{A_l} (\bar{u}_{ij} dA_l) P_l + \sum_{r=1}^k R_r \bar{u}'_{3j}, \\ \beta \varphi_n = \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (\bar{u}_{i4} dC_j) T_i + \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (\bar{\varphi}_{n4} dC_j) M_n - \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (\bar{T}_{i4} dC_j) u_i + \\ - \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (\bar{M}_{n4} dC_j) \varphi_n + \sum_{l=1}^L \int_{A_l} (\bar{u}_{i4} dA_l) P_l + \sum_{r=1}^k R_r \bar{u}'_{34}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

The number of boundary elements and the choice of the basic functions depend on the shape of the contour and on the demands for the occuracy of the solution. The solution of the set of linear algebraic equations (4.1) allow us to determine the boundary values of displacements and forces at assumed knots. Somigliano's formulas (1.2) permit to determine the displacements and forces inside the shell.

5. Examples

The shown above algorithm of solution of shallow shell was applied, among others, to the solution of a spherical shell on rectangular plan. The contour of shell was divided into 4, 6 and 10 elements and the basic function was a Lagrange's polinomial of third order. The dimensions of the shell are following: rectangular plan 9.0×6.0 m, thickness of the shell $h = 0.10$ m, height of the shell $d = 0.10$ m. The shell is uniformly loaded $q = 1.0$ kN/m². Material constants are $E = 2.0 \times 10^7$ kN/m², $\nu = 0.16$.

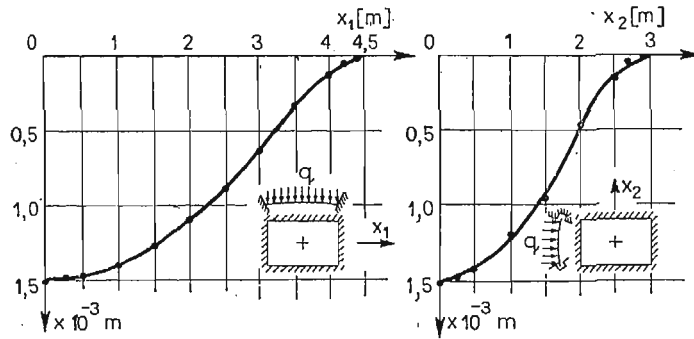


Fig. 2. Vertical displacements

Table 1.

	u_3 [m]	4 elements	6 elements	10 elements
x_1	0,0	1,502 E-3	1,499 E-3	1,494 E-3
	0,25	1,497 E-3	1,494 E-3	1,489 E-3
	0,5	1,482 E-3	1,479 E-3	1,474 E-3
	1,0	1,409 E-3	1,407 E-3	1,402 E-3
	1,5	1,287 E-3	1,285 E-3	1,280 E-3
	2,0	1,118 E-3	1,116 E-3	1,110 E-3
	2,5	8,936 E-4	8,925 E-4	8,862 E-4
	3,0	6,334 E-4	6,329 E-4	6,255 E-4
	3,5	3,579 E-4	3,579 E-4	3,488 E-4
	4,0	1,208 E-4	1,210 E-4	1,096 E-4
	4,2	5,562 E-5	5,579 E-5	4,309 E-5
	4,4	1,812 E-5	1,814 E-5	5,174 E-6
x_2	0,0	1,502 E-3	1,499 E-3	1,494 E-3
	0,25	1,482 E-3	1,479 E-3	1,474 E-3
	0,5	1,424 E-3	1,421 E-3	1,416 E-3
	1,0	1,200 E-3	1,197 E-3	1,193 E-3
	1,5	8,656 E-4	8,633 E-4	8,598 E-4
	2,0	4,838 E-4	4,817 E-4	4,791 E-4
	2,5	1,533 E-4	1,482 E-4	1,464 E-4
	2,7	6,565 E-5	5,743 E-5	5,573 E-5
	2,9	1,440 E-5	6,625 E-5	5,356 E-6

The calculated vertical displacements are shown in Fig. 2. and Fig. 3. The numerical results are given in Tables 1 and 2 where the contour of the shell is divided into 4, 6 and 10 elements. The graphs are completed for 4 elements division of the edge contour. The two discussed shells are supported in a different manner on the edge as is seen in graphs.

The presented results can not be compared with the numerical results taken from the literature because of lack of such examples. It is to state that the number of boundary elements when the basic functions are polynomials of third order have the slight influence on the calculated displacements inside the shell.

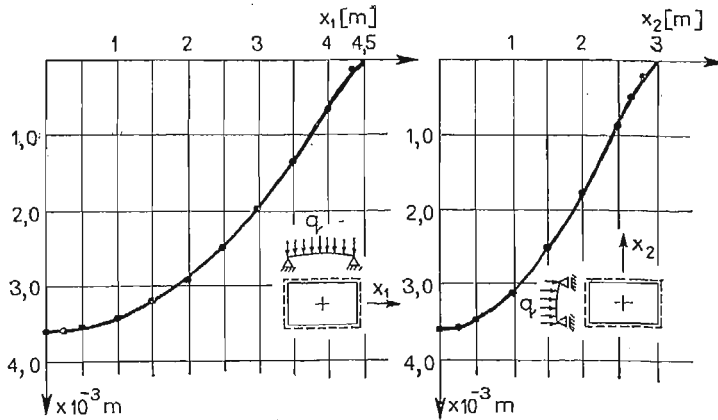


Fig. 3. Vertical displacements

Table 2.

	u_3 [m]	4 elements	6 elements	10 elements
x_1	0,0	3,615 E-3	3,681 E-3	3,689 E-3
	0,25	3,606 E-3	3,670 E-3	3,678 E-3
	0,5	3,578 E-3	3,636 E-3	3,644 E-3
	1,0	3,452 E-3	3,491 E-3	3,500 E-3
	1,5	3,237 E-3	3,249 E-3	3,258 E-3
	2,0	2,927 E-3	2,911 E-3	2,922 E-3
	2,5	2,506 E-3	2,470 E-3	2,483 E-3
	3,0	1,980 E-3	1,935 E-3	1,952 E-3
	3,5	1,354 E-3	1,317 E-3	1,338 E-3
	4,0	6,687 E-4	6,502 E-4	6,704 E-4
	4,2	3,937 E-4	3,837 E-4	3,977 E-4
	4,4	1,449 E-4	1,449 E-4	1,284 E-4
x_2	0,0	3,615 E-3	3,681 E-3	3,689 E-3
	0,25	3,584 E-3	3,650 E-3	3,658 E-3
	0,5	3,492 E-3	3,560 E-3	3,567 E-3
	1,0	3,128 E-3	3,201 E-3	3,207 E-3
	1,5	2,545 E-3	2,624 E-3	2,628 E-3
	2,0	1,777 E-3	1,859 E-3	1,862 E-3
	2,5	8,850 E-4	9,560 E-4	9,629 E-4
	2,7	5,242 E-4	5,726 E-4	5,810 E-4
	2,9	2,101 E-4	1,864 E-4	1,967 E-4

References

1. P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1981.
2. C. A. BREBBIA, S. WALKER, *Boundary element techniques in engineering*, Butterworth Ltd. London, 1980.

3. Г. Н. ЧЕРНЫШЕВ, *О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую тонкую оболочку произвольного очертания*, Прикладная математика и механика, Т XX II, Вып. I, Издательство АН СССР, 1963.
4. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa, 1976.
5. А. А. НАЗАРОВ, *Основы теории и методы расчета пологих оболочек*, Издательство литературы по строительству, Ленинград, 1966.
6. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970.
7. M. STERN, *A general boundary integral formation for the numerical solutions of plate bending problems*, Int. J. Solids Structures, 1979, vol. 15.
8. R. SZMIGIELSKI, *Rozwiązanie pewnych typów powłok małowyniosłych Metodą Elementów Brzegowych*, praca doktorska. Pol. Wrocl., Wrocław, 1986.

Резюме

РАЗРЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ. УГЛОВАЯ ПРОБЛЕМА

В статье представлены основы метода граничных уравнений применены к цифровому анализу пологих оболочек. Подробно обсуждена проблема углов и связанные с ней особенности. Для иллюстрации метода приведены численные решения двух сферических оболочек, распределенных на прямоугольном плане.

Streszczenie

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA POWŁOK MAŁOWYNIOSŁYCH ZA POMOCĄ METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH. ZAGADNIENIE NAROŻY

Przedstawiono podstawy metody elementów brzegowych w zastosowaniu do analizy numerycznej powłok małowyniosłych. Omówiono szczegółowo problem naroży i związanych z narożami osobliwości. Dla zilustrowania metody zamieszczono rozwiązania numeryczne dwóch powłok sferycznych na rzucie prostokątnym.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 sierpnia 1987 roku.

NONAUTONOMOUS NONLINEAR VIBRATIONS OF A CONTINUOUS SELF-EXCITED SYSTEM. A PLATE IN SUPERSONIC FLOW

ZBIGNIEW DŻYGADŁO

Wojskowa Akademia Techniczna

1. Introduction

Continuous self-excited systems, which occur in aircraft structures, as well as in other fields of technology, have properties important for structural engineering. Elastic and damping coefficients of such systems depend on the parameter of self-excitation and in the case of external loading or parametrically exciting forces acting on the system, its resonance characteristics also vary with the degree of self-excitation.

Nonautonomous linearized vibration problems of continuous self-excited systems have been considered in a number of papers (cf. for instance, [1], [2], [3]).

Nonlinear analysis of forced vibrations of a continuous self-excited system has been presented in [4] and nonlinear parametric self-excited vibrations in [5]. In the present paper vibrations of a continuous self-excited system will be analysed by way of example of a plate of finite length in plane supersonic flow as shown in Fig. 1. Nonlinear membrane forces induced by the plate motion will be included into analysis.

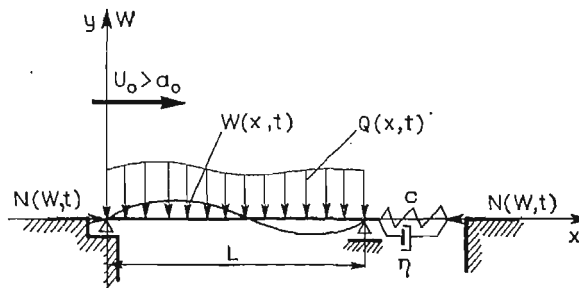


Fig. 1.

The plate is forced by a harmonically varying pressure and periodic in-plane loads parametrically exciting the system.

The phenomena to be investigated include regular and chaotic motions which may occur in such a nonlinear self-excited system (cf. [6]).

2. Equations of the problem

Let us consider vibrations of a plate of length L and infinite width assuming that the plate is exposed to a one-side supersonic flow, the unperturbed velocity of which U_0 is parallel to the x -axis (Fig. 1).

The equation of motion of the plate will be written in the form:

$$D \left(1 + \theta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + N(W, t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho_0 h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \Delta p(W) - Q(x, t), \quad (1)$$

where the pressure difference $\Delta p(W)$ is produced by the normal displacement $W = W(x, t)$ of the plate in supersonic gas stream [1].

$$\Delta p(W) = -\rho_0 U_0^2 \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{U_0} \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \frac{\partial W}{\partial t} \right], \quad (2)$$

and

$$\mu = \sqrt{M^2 - 1},$$

$M = U_0/a_0 > 1$ is Mach number of unperturbed flow.

The variable nonlinear membrane force $N(W, t)$ is assumed as:

$$N(W, t) = N(t) - \left(1 + \beta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{c_0}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3)$$

In Eqs. (1) and (3) the viscoelastic Voigt model of the plate material and nonlinear membrane forces are taken into account.

Parametrically exciting part of the membrane forces $N(t)$ is taken in the form:

$$N(t) = N_0 + \varepsilon_0 \cos p_p t, \quad (4)$$

and external pressure $Q(x, t)$, we assume as:

$$Q(x, t) = Q_1(x) \cos p_e t + Q_2(x) \sin p_e t, \quad (5)$$

where the frequencies p_p and p_e may be different in the general case.

In Eqs. (1), (2), (3) the following symbols have been used:

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — plate stiffness, c_0 — spring-stiffness coefficient of the plate elastic support, θ_0, β_0 — coefficients of material damping of the plate and its deformable support, ρ_0, h — density and thickness of the plate, a_0, ρ_0 — sound velocity and gas density of the unperturbed flow.

3. Transformation of the equations

The problem will be studied in the dimensionless form, assuming that the coordinate x is referred to the length of the plate L , the normal displacement W — to its thickness h , and the time t — to the ratio L/U_0 . The equation of motion is then obtained in the form:

$$\left(1 + \theta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + S(W, t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \lambda_1 M^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \lambda_0 \Delta p(W) + \lambda_2 P(x, t), \quad (6)$$

where we have:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 12(1-\nu^2) \frac{L^4}{Eh^4}, & \lambda_1 &= 12(1-\nu^2) \frac{L^2}{h^2} \frac{\rho_p a_0^2}{E}, \\ \lambda_2 &= 12(1-\nu^2) \frac{L^4}{h^4} \frac{\rho_0 a_0^2}{E}, & P(x, t) &= -\frac{Q(x, t)}{\rho_0 a_0^2}.\end{aligned}\quad (7)$$

The dimensionless in-plane force:

$$S(W, t) = 12(1-\nu^2) \frac{L^2}{Eh^3} N(W, t) = S(t) - \left(1 + \beta \frac{\partial}{\partial t}\right) c \int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx, \quad (8)$$

and the pressure difference:

$$\Delta p(W) = -\rho_0 U_0^2 \frac{h}{L\mu} \left[\frac{\partial W}{\partial x} + \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \frac{\partial W}{\partial t} \right]. \quad (9)$$

The solution of Eq. (6) is sought in the form of a series of normalized eigenfunctions $X_j(x)$ of the self-adjointed boundary-value vibration problem of the plate considered in the vacuum with:

$$\Theta = S(W, t) = 0, \quad (10)$$

and it is assumed that the dimensionless load $P(x, t)$ can be expanded in a series of functions $X_j(x)$. Confining ourselves to n terms of these series, we have:

$$\begin{aligned}W(x, t) &= \sum_{j=1}^n w_j(t) X_j(x), \\ P(x, t) &= \sum_{j=1}^n h_j(t) X_j(x).\end{aligned}\quad (11)$$

For a plate simply supported at both edges — that is, for $x = 0$ and $x = 1$ — the eigenfunctions are:

$$X_j(x) = \sqrt{2} \sin j\pi x, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

On substituting (11) and (12) into Eq. (6), taking into account (8), (9) and making use of the Galerkin method, we obtain a set of equations of the following form:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_1^2} \ddot{w}_j + \frac{\eta_j}{\omega_1} \dot{w}_j + u_j^2 w_j + \gamma_1 \sum_{k=1}^n b_{jk} w_k &= -\alpha j^2 w_j \sum_{k=1}^n k^2 \left(w_k^2 + \frac{\beta_1}{\omega_1} \dot{w}_k w_k \right) + \\ &+ \varepsilon_1 j^2 w_j \cos p_p t + \gamma_0 h_j(t),\end{aligned}\quad (13)$$

for $j = 1, 2, 3, \dots, n$,

where:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \pi^2 / M \sqrt{\lambda_1}, & \eta_j &= \omega_1 \left[\gamma_1 \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) + \Theta j^4 \right], \\ u_j^2 &= j^2(j^2 - \sigma), & \gamma_0 &= \frac{L^2 \rho_0 \lambda_1}{h^2 \rho_p \pi^4},\end{aligned}\quad (14)$$

$$\alpha = 6(1-\nu^2) \frac{Lc_0}{hE}, \quad \sigma = 12(1-\nu^2) \frac{L^2 N_0}{\pi^2 h^3 E},$$

$$\gamma_1 = \frac{LQ_0}{hQ_p \mu \omega_1^2}, \quad \beta_1 = 2\omega_1 \beta, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{N_0} \varepsilon_0.$$

The skew - symmetric coefficients b_{jk} , for $j \neq k$ assume the form:

$$b_{jk} = -b_{kj} = \frac{2jk}{j^2 - k^2} [1 - (-1)^{j+k}] \quad (15)$$

while for $j = k$, $b_{jk} = 0$.

The set of Eqs. (13) is taken as a starting point for the vibration analysis of the system considered under the assumption that, according to (5), the external pressure is a harmonically varying function:

$$h_j(t) = h_{1j} \cos p_e t + h_{2j} \sin p_e t. \quad (16)$$

4. Analysis of vibrations in the vicinity of critical parameters of the system

Let us assume that the vibrations occur in the vicinity of the critical state of the system under study, and the critical state is considered here as the boundary between damped and self-excited vibrations.

In this connection we shall examine the simplified set of equations which can be obtained by setting the right-hand sides of Eqs. (13) equal to zero.

The critical Mach number is denoted by M_{cr} and ω_{cr} is the real frequency corresponding to M_{cr} .

The reduced time τ is introduced:

$$\tau = \omega_1 t, \quad (17)$$

and Eqs. (13) will be transformed to give:

$$\ddot{v}_j + \eta_{j*} \dot{v}_j + \alpha_j^2 v_j + \gamma_{1*} \sum_{k=1}^n b_{jk} v_k = \varepsilon F_j(v_1, \dots, v_n, \dot{v}_1, \dots, \dot{v}_n, \tau), \quad (18)$$

for $j = 1, 2, \dots, n$,

where:

$$F_j(v_1, \dots, v_n, \dot{v}_1, \dots, \dot{v}_n, \tau) = (\eta_{j*} - \eta_j) \dot{v}_j + (\gamma_{1*} - \gamma_1) \sum_{k=1}^n b_{jk} v_k +$$

$$- \alpha_j^2 v_j \sum_{k=1}^n k^2 (v_k^2 + \beta_1 \dot{v}_k v_k) + \varepsilon_1 j^2 v_j \cos q_p \tau + \gamma_0 h_j(\tau), \quad (19)$$

and we have:

$$v_j(\tau) = w_j \left(\frac{\tau}{\omega_1} \right), \quad q_p = p_p / \omega_1, \quad (20)$$

η_{j*} and γ_{1*} denote the values of the coefficients η_j and γ_1 for $M = M_{cr}$, ε is a small parameter.

The solution of the simplified set of Eqs. (18), for $\varepsilon = 0$, can be found as:

$$v_j(\tau) = \xi_j e^{iq\tau}. \quad (21)$$

The coefficients ξ_j satisfy the set of equations:

$$\sum_{k=1}^n \xi_k [(u_j^2 - q^2 + iq\eta_{j*}) \delta_{jk} + \gamma_{1*} b_{jk}] = 0, \quad (22)$$

for $j, k = 1, 2, \dots, n$,

where δ_{jk} is the Kronecker delta.

The frequency equation of the simplified Eqs. (18) has the form:

$$D_n = \det |(u_j^2 - q^2 + iq\eta_{j*}) \delta_{jk} + \gamma_{1*} b_{jk}| = 0, \quad (23)$$

$j, k = 1, 2, 3, \dots, n$.

From Eq. (23) we obtain the critical parameters:

$$M = M_{cr} \quad \text{and} \quad q = q_{1,2} = \pm q_{cr} \quad (24)$$

and the imaginary parts of the remainder roots of Eq. (23) are positive—that is, these roots correspond to damped vibrations.

It results from the above statement that Eqs. (18) satisfy the validity conditions of the asymptotic method of single-frequency analysis [7].

For this reason, we seek the solution of Eqs. (18) in the first-order approximation as:

$$v_j(\tau) = a(\xi_j e^{i\psi} + \bar{\xi}_j e^{-i\psi}), \quad (25)$$

for $j = 1, 2, \dots, n$,

where:

$$a = a(\tau), \quad \psi = q\tau + \vartheta(\tau). \quad (26)$$

The first derivatives of these functions can be found from the equations:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} &= q_{cr} - q + \varepsilon B_1(a, \vartheta), \end{aligned} \quad (27)$$

and we also assume that:

$$q_{cr} - q = 0(\varepsilon). \quad (28)$$

On substituting the solution (25) into Eqs. (18), taking into account (26), (27) and employing the method of harmonic balance, we obtain the set of equations:

$$\sum_{k=1}^n \xi_k [(u_j^2 - q_{cr}^2 + iq_{cr}\eta_{j*}) \delta_{jk} + \gamma_{1*} b_{jk}] = \varepsilon [2q_{cr}(aB_1 - iA_1)\xi_j - \eta_{j*}(A_1 + iaB_1)\xi_j + \Phi_j], \quad (29)$$

for $j = 1, 2, \dots, n$,

where:

$$\Phi_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_j(v_1, \dots, v_n, \dot{v}_1, \dots, \dot{v}_n, \psi - \vartheta) e^{-i\psi} d\psi. \quad (30)$$

From the set of Eqs. (29) we can determine the functions:

$$A_1 = A_1(a, \vartheta), \quad B_1 = B_1(a, \vartheta)$$

and then we obtain equations of resonance characteristics in the vicinity of the critical state and examine the question of stability of the steady-state vibrations under investigation.

5. Numerical analysis of vibrations

Numerical integration of the set of Eqs. (13) has been also performed in order to study the typical courses of vibrations, phase plane portraits of the motion and resonance characteristics of vibrations.

In this connection Eqs. (13) have been written in the form:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_j + \eta_j \dot{v}_j + u_j^2 v_j + \gamma_1 \sum_{k=1}^n b_{jk} v_k = -\alpha j^2 v_j \sum_{k=1}^n k^2 (v_k^2 + \beta_1 \dot{v}_k v_k) + \\ + \varepsilon_1 j^2 v_j \cos q_p \tau + \gamma_0 (h_{1j} \cos q_e \tau + h_{2j} \sin q_e \tau), \end{aligned} \quad (31)$$

for $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Vibrations were calculated for:

$$q_e = q_p/2, \quad q_e = q_p, \quad q_e = 0 \quad (32)$$

and for other relationships between the frequencies q_e and q_p .

The region of frequencies, taken into consideration in the numerical calculations, involved the first two natural frequencies of the system under investigation. In the vicinity of these two frequencies elastic and damping properties of the system depend on the parameter of self-excitation in a significant manner.

6. Examples of numerical analysis

Let us begin with the short analysis of the simplified, linearized nonautonomous vibration problem. The frequency equation of that problem is Eq. (23), which can be written as:

$$D_n = D_n(M, q) = \operatorname{Re} D_n + i \operatorname{Im} D_n = 0. \quad (33)$$

By determining the real roots q in the function of number M from the first and the second of Eq. (33) separately, we can plot diagrams in the plane M, q , which are shown by way of example in Fig. 2 for $n = 4$ and plate of $L/h = 180$. The intersection point of the lines $\operatorname{Re} D_n = 0$ and $\operatorname{Im} D_n = 0$ determines the critical parameters (24). It follows from the computations performed that the location of the line $\operatorname{Re} D_n = 0$ depends in an insignificant manner on the value of the material damping θ . The line $\operatorname{Im} D_n = 0$ is shifted to the left with increasing values of θ . This fact results in a decrease in the critical parameters (24).

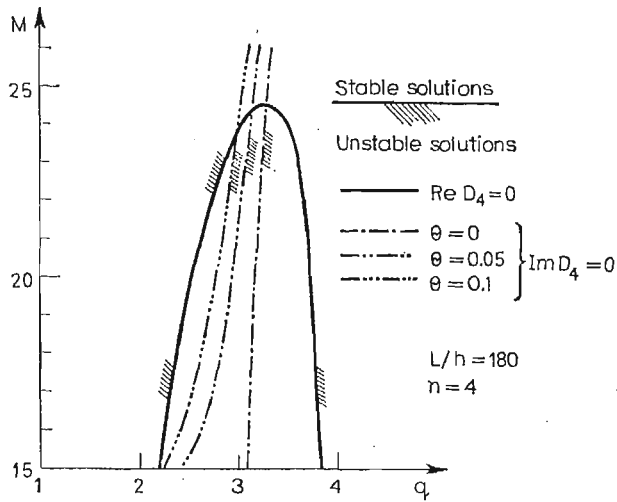


Fig. 2.

The form of the lines (33) for real values of q is also a cause of deformation of the resonance diagrams in the function of Mach number. This is shown by way of example in Fig. 3 for the forced vibration of a plate in supersonic flow (cf. [1]). In this figure $a(0.5)$ denotes the coefficient of dynamic amplification of the amplitude of vibration at the middle of the plate.

It follows from the computation that for $M < M_{cr}$ the maximum amplitudes of forced vibrations approach each other with increasing M and a sharp resonance occurs in the

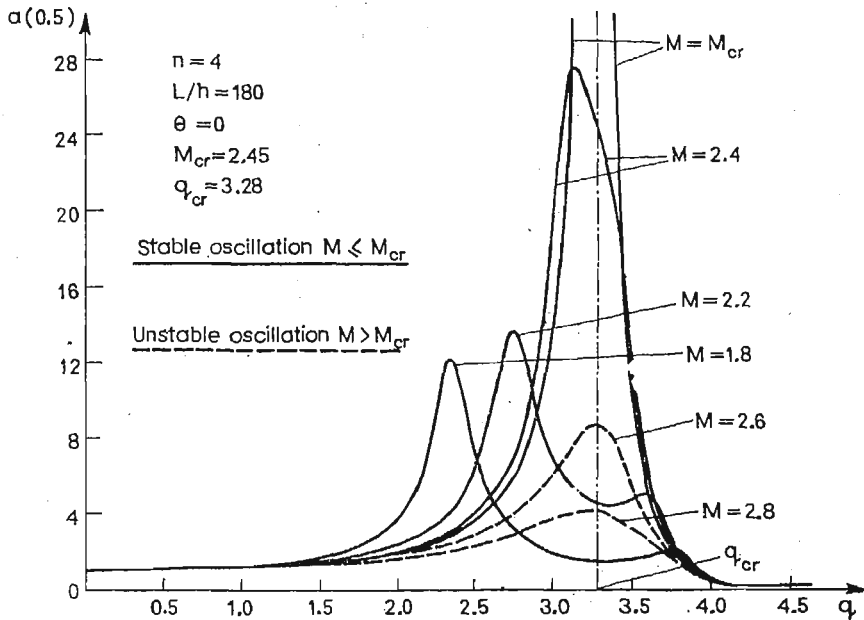


Fig. 3.

critical state (24). In the case of parametrically excited vibrations of a plate in supersonic flow, deformations of regions of parametric resonance have been studied (cf. [1]).

The vibrations have been investigated in the vicinity of the regions of subharmonic resonance corresponding to the first two natural frequencies of the structure.

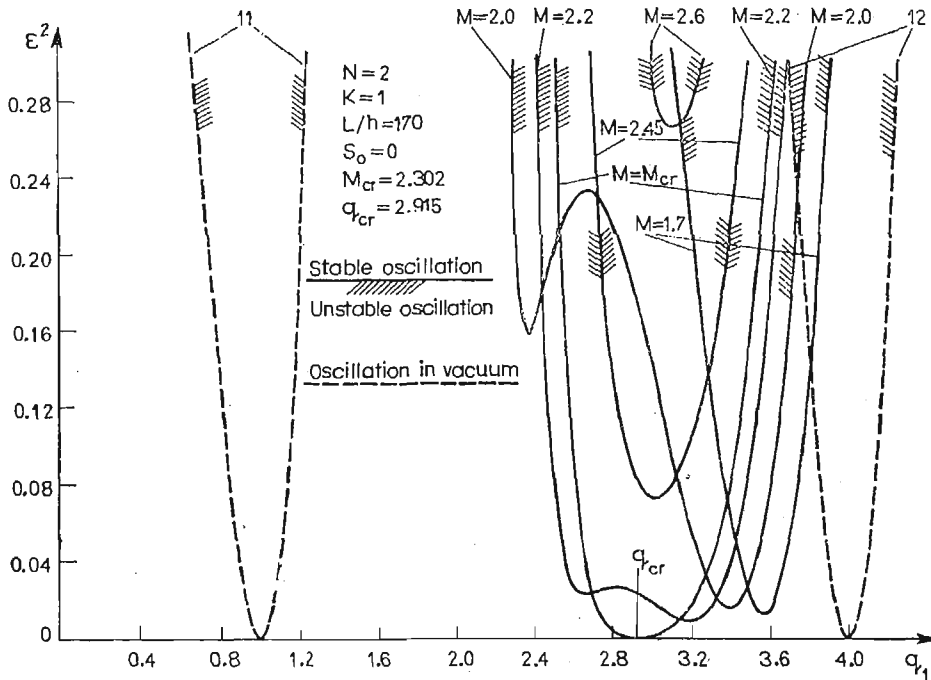


Fig. 4.

Some results of computation of parametrically excited vibrations are shown in Fig. 4, which presents deformations of the regions of unstable vibration on the plane ε^2, q_1 , where ε is a reduced amplitude of parametric excitation and $q_1 = p_p/2\omega_1$.

It follows from the computation that in supersonic flow the largest region of unstable vibrations is the first region of subharmonic resonance which corresponds to the second natural frequency. The region corresponding to the first natural frequency undergoes strong degeneration resulting from the action of the flow.

For Mach numbers M approaching M_{cr} , for which the two natural frequencies approach each other, the resonance regions corresponding to these two natural frequencies unite and for $M = M_{cr}$ there occurs a single fundamental region of subharmonic resonance which touches the frequency axis at the point $q_1 = q_{cr}$. For $M > M_{cr}$ the image of regions of unstable vibrations becomes more complicated, this is described in [1].

In the case of the nonlinear system let us consider nonautonomous vibrations in the vicinity of critical parameters.

Equations (18), (19) will be used under the assumption that:

$$\varepsilon_1 = 0, \quad h_j(\tau) = h_{j0} \cos q\tau. \tag{34}$$

This enables us to study the forced vibrations and to determine the resonance characteristics of the system for subcritical and supercritical Mach numbers ($M < M_{cr}$ and $M > M_{cr}$) (cf. [4]).

Some results of computations are shown in Figs. 5 to 10. Diagrams present the ratio:

$$C_w(x) = C(x)/C(x)_{q=2.5}, \quad (35)$$

versus the dimensionless frequency of loading q in the interval $2.5 \leq q \leq 3.5$ for fixed values of M and x , where $C(x)$ is the amplitude of forced vibrations of the plate under study. The diagrams are plotted for a point with the coordinate $x = 0.75$, since from the computations performed it results that the maximum of the plate displacement occurs near this point (cf. also [1]).

The coefficient α , determining nonlinear properties of the system, plays the role of a parameter of those diagrams.

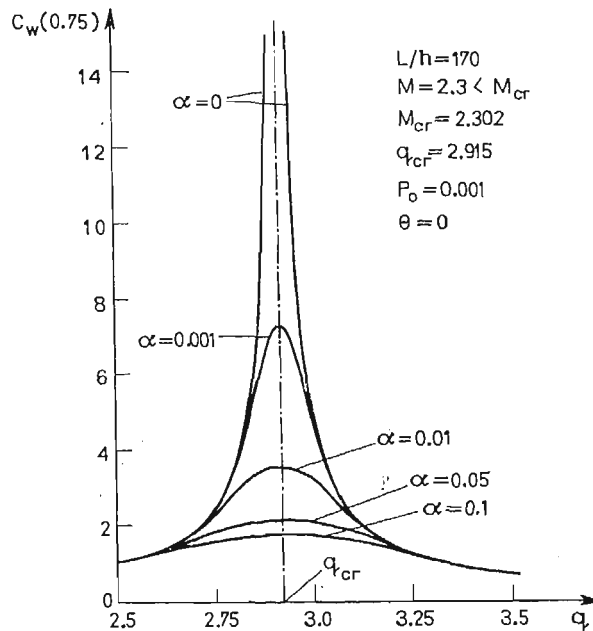


Fig. 5.

Figure 5 shows the results of computation for the Mach number $M = 2.3 < M_{cr}$ and $\Theta = 0$, while in the following three Figs. 6, 7, 8, the diagrams are presented for $M > M_{cr}$ and $\Theta = 0$.

It is seen in Fig. 5 that for a number $M < M_{cr}$ the nonlinear properties of the system considerably decrease the amplitude of forced vibration in the vicinity of the resonance frequency $q = q_{cr}$ even for small values of α .

For $M > M_{cr}$ the system investigated becomes a self-excited one and in the case for $\alpha > 0$ with $P(x, t) \equiv 0$, a stable limit cycle of self-excited vibration occurs with a frequency near to q_{cr} .

For a harmonically varying load $P(x, t)$, $M > M_{cr}$ and $\alpha > 0$, stable periodic forced vibrations appear in the vicinity of q_{cr} . They are shown by bold lines in Figs. 6 to 8.

For a given $\alpha > 0$, the maximum amplitude of stable forced vibrations increases with increasing M and the range of q , in which these vibrations occur, becomes narrower.

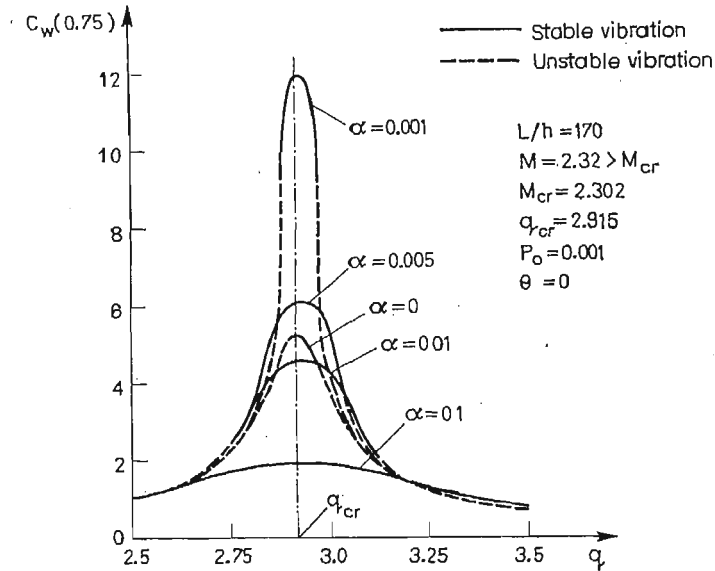


Fig. 6.

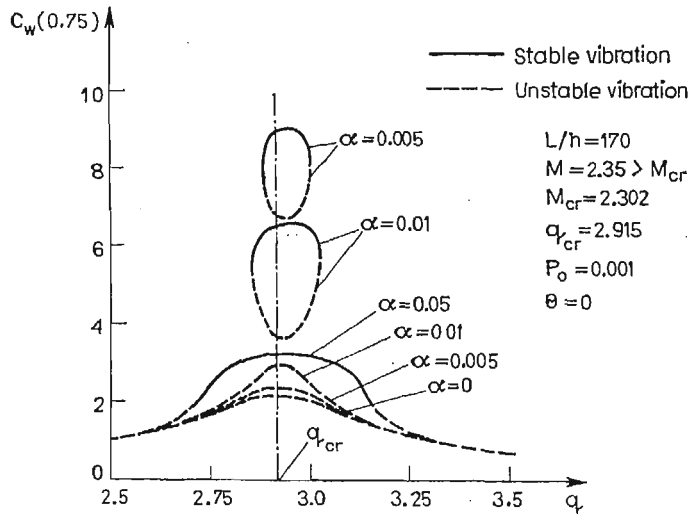


Fig. 7.

By contrast, for a given number $M > M_{cr}$, the maximum amplitude decreases and the range of stable periodic vibrations widens with increasing α .

Figures 9 and 10 show some results of computation performed for the case in which a small material damping $\theta = 0.05$ is taken into account and $M > M_{cr}$.

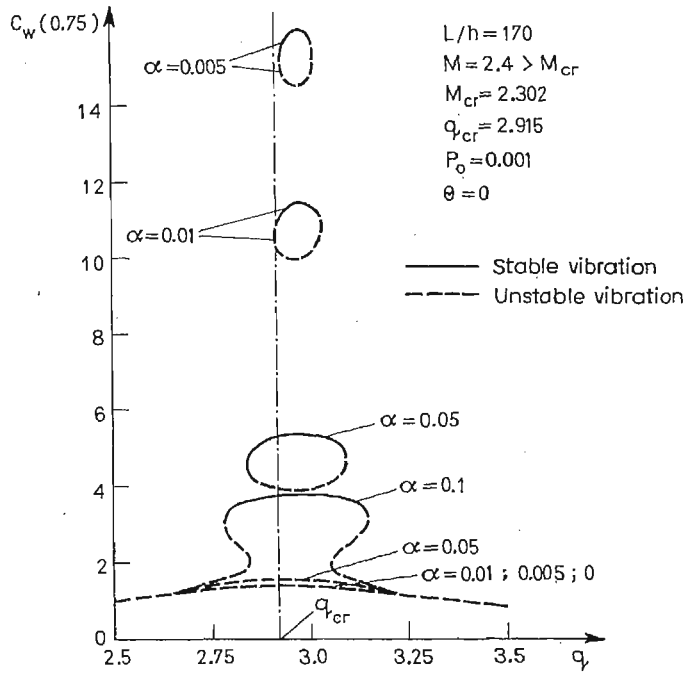


Fig. 8.

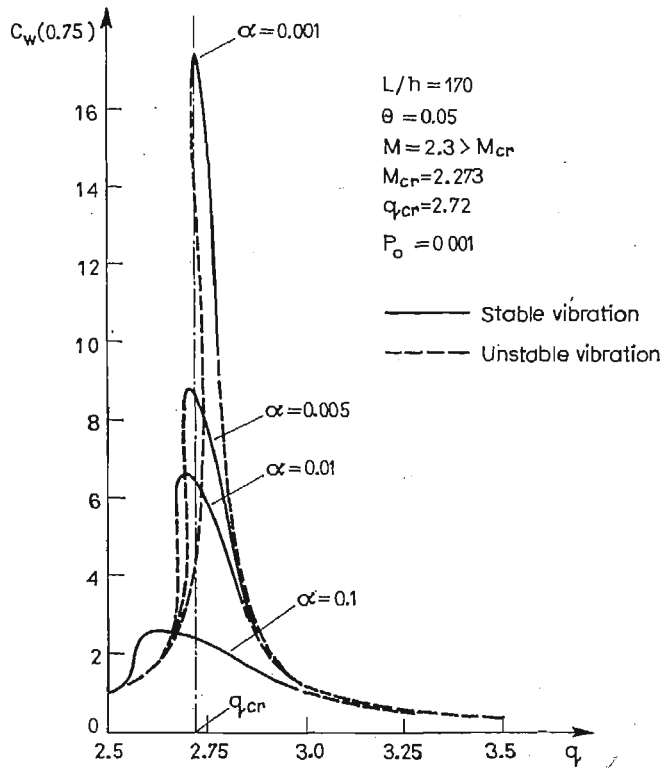


Fig. 9.

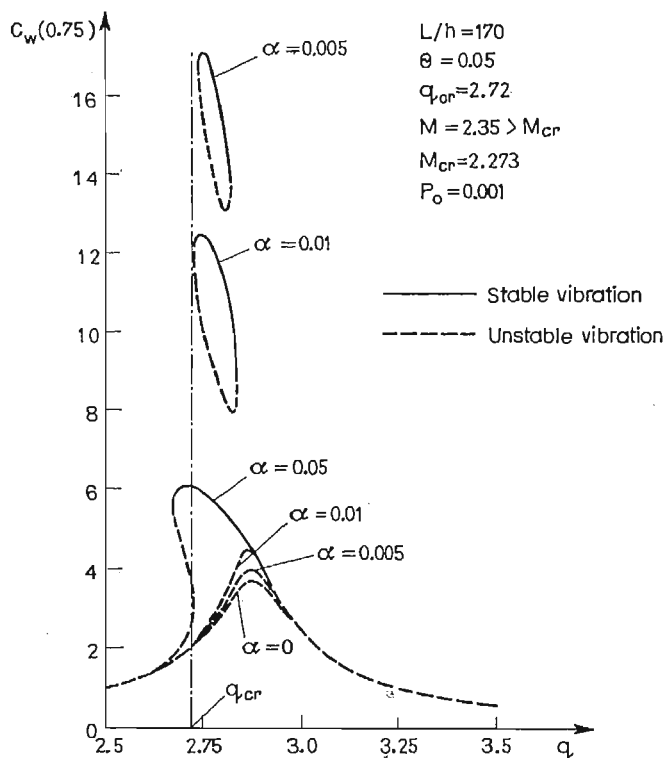


Fig. 10.

Comparing the diagrams in Figs. 9 and 10 with those in Figs. 6 to 8, we find that the introduction of material damping by means of the Voigt model generates much sharper resonance maxima than in the system without material damping. The same phenomenon has been found in the case of forced vibrations of linear aeroelastic self-excited systems (cf. [1]).

7. Concluding remarks

Nonautonomous nonlinear vibrations of continuous self-excited systems have interesting properties which are important for aircraft engineering. Some results of numerical analysis of resonance characteristics of such a system have been presented in this paper. The equations derived in the paper enable us also to study other kinds of nonautonomous vibrations including regular and chaotic motions of the system. This will be presented in further publications.

References

1. Z. DŻYGADŁO, *On nonautonomous boundary value problems of plates oscillating in supersonic flow*. Fluid Dynamics Transactions, vol. 4, PWN, Warszawa 1969.
2. Z. DŻYGADŁO, A. KRZYŻANOWSKI, *Self-excited and forced vibrations of an aeroelastic system subject to a follower force*. Proc. Vibr. Probl. No 3, vol. 13, 1972.

3. Z. DŻYGADŁO, *Forced parametrically-excited bending vibrations of a rotating shaft*. Proc. Vibr. Probl. No 4, vol. 14, 1973.
4. Z. DŻYGADŁO, *Local analysis of nonlinear forced vibrations of a plate of finite length in plane supersonic flow*. Proc. Vibr. Probl. No 4, vol. 11, 1970.
5. Z. DŻYGADŁO, *Nonlinear parametric self-excited vibrations of a beam with a follower force*. Tenth International Conference on Nonlinear Oscillations. Varna, September 12 - 17, 1984.
6. P. J. HOLMES, F. C. MOON, *Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics*. J. Appl. Mech. vol. 50. December 1983.
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Изд. Наука, Москва 1974.

Резюме

НЕАВТОНОМНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. ПЛАСТИНКА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрены неавтономные нелинейные колебания автоколебательной системы с распределенными параметрами на примере пластинки конечной длины в плоском сверхзвуковом потоке нагруженной одновременно гармонически меняющимся давлением и параметрически возбуждающими силами в её плоскости. В уравнении пластинки учтено нелинейность упругих и неупругих сил вызванных нагрузкой в плоскости пластинки.

Решение предлагается в виде ряда по собственным функциям колебаний пластинки в вакууме. Применен асимптотический метод одночастного анализа колебаний для исследования резонансных характеристик в окрестности критических параметров автоколебательной системы и метод численного интегрирования уравнений движения.

Представлены результаты примерных численных расчётов резонансных характеристик исследуемой системы.

Streszczenie

NIEAUTONOMICZNE NIELINIOWE DRGANIA CIĄGŁEGO UKŁADU SAMOWZBUDNEGO. PŁYTA W OPLYWIE NADDŹWIĘKOWYM

Rozpatrzono nieautonomiczne nieliniowe drgania ciągłego układu samowzbudnego na przykładzie płyty o skończonej długości w płaskim opływie naddźwiękowym obciążonej parametrycznie pobudzającymi siłami w płaszczyźnie płyty i harmonicznym zmiennym ciśnieniem. W równaniu płyty uwzględniono nieliniowość sił sprężystych i tłumiących spowodowanych siłami napięcia w płaszczyźnie płyty.

Rozwiązania poszukiwano w postaci rozwinięcia względem funkcji własnych zlinearyzowanego problemu drgań płyty w próżni. Omówiono asymptotyczną metodę jednoczęściowej analizy drgań w celu wyznaczenia rezonansowych charakterystyk w otoczeniu krytycznych parametrów samowzbudnych drgań układu oraz metodę numerycznego całkowania równań ruchu.

Przedstawiono wyniki przykładowych obliczeń numerycznych charakterystyk rezonansowych badanego układu.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 grudnia 1987 roku.

DYNAMIC OF THE MATERIAL BODY WITH VARIABLE MASS

PIOTR KONDERLA

Politechnika Wroclawska

1. Introduction

The paper contains the analysis of the material deformable body of with the mass is growing with time. Such a body may be the model of the real constructions being in the course of assembly. This study is an attempt of description of the dynamic process in the aforementioned material system. For example, in the figure 1 are shown three engine-

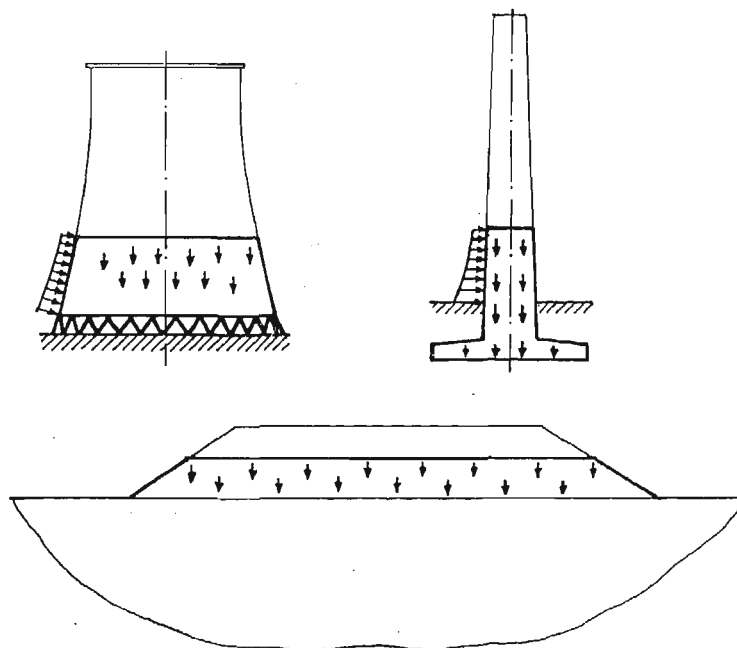


Fig. 1.

ering objects in the course of erection. It is easy to notice, that there are two factors, which are not usually taken into consideration in the classical analysis of the construction:
a) the load as well as the deformation of the construction take place already in the course of erection of the object,

b) using the material which undergoes the ageing (for example: concrete) we deal with the anisotropic body.

In the literature of the subject there is small amount of the papers devoted to that problem. There is only monograph of Arutunian and Kolmanowski [1] where one can find an extensive discussion of that problem together with numerical examples. In principle, the authors confined themselves to the discussion of the linear, viscoelastic problem, concentrating on the models of the ageing body. This monograph is a recapitulation of the earlier works of these authors as well as others [2, 3, 4, 5, 6, 7].

This study is an attempt of the construction of the model of the material body with variable mass treated as nonlinear one, at the same time, the starting point is classical problem, i.e. dynamic process of the material body with constant mass.

The paper presents the definition of the body model, there is description of the motion, the measures of strain and stress as well as forces acting on the body. Next there is proposal of the modified principled of behaviour, which supplemented with constitutive relations create the basic system of the model relations. It was proved, that all relations to be derived coincide with classical equations for dynamic process in the case of limiting transition from the body with growing mass to the body with constant mass.

2. Basic definition and assumptions

In Euclidean space E was defined an arbitrary system of coordinates $\{x^i\}$ interrelated with Cartesian coordinates $\{z^i\}$ by transformation:

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3), \quad z^a = z^a(x^1, x^2, x^3), \quad (1)$$

which is further called the system of the spatial coordinates.

The natural basic of the system $\{x^i\}$ are vectors:

$$g_i(x) = z^a_{,i}(x) e_a, \quad (2)$$

metric tensor is in the form:

$$g_{ij}(x) = g_i(x) g_j(x) = z^a_{,i} z^b_{,j} \delta_{ab}. \quad (3)$$

In the same space was defined second system of coordinates $\{X^I\}$, which is called the system of the material coordinates:

$$X^I = X^I(Z^1, Z^2, Z^3), \quad Z^A = Z^A(X^1, X^2, X^3), \quad (4)$$

with the natural basic:

$$G_I(X) = Z^A_{,I}(X) e_A, \quad (5)$$

and the metric tensor:

$$G_{IJ}(X) = G_I(X) G_J(X) = Z^A_{,I} Z^B_{,J} \delta_{AB}. \quad (6)$$

Cartesian systems $\{z^a\}$ and $\{Z^A\}$ are identical.

The following definition of the material system (material body) with increasing mass have been introduced:

- Def. 1. The material system is a set B composed of the bodies A_I, A_J, A_K, \dots , being Boolean algebra with relations of the alternation \vee , conjunction \wedge and arrangement $<$.
- Def. 2. The body with increasing mass is called a material subsystem B^* if it is the subset of the material system $B^* \subset B$ and if the elements of B^* are the bodies $B_t \in B^*$ with the following structure:
- B_t body is the set of elements P called material points. Subscript t refers to the moment t under consideration, and for every $t_2 > t_1, B_{t_1} \subset B_{t_2}$.
 - Every element $B_t \in B^*$ can be mapped onto Euclidean space E , it means that at every moment t the configuration \varkappa_t of the body B_t in E is given.
 - In the space E to each body configuration B_t is assigned Borel measure on all subsets of B_t set.
 - For every material point $P \in B_t$ the specified system of the constitutive equations defining the material is fulfilled.

The above definition is an extension of the known definition of the material system [8]. According with the postulate b) there is possibility of the assignment to the elements $P \in B_t$ of the definite place in the space E , what was written:

$$X = \varkappa_t(P), \quad X \in E. \quad (7)$$

It is assumed that the mapping (7) is so chosen, that for the same element $P \in B_{t_1}$ and $P \in B_{t_2}$, $\varkappa_{t_1}(P)$ should equal to $\varkappa_{t_2}(P)$.

The aforementioned definition of the body with increasing mass one can interpret twofold:

- as a set of bodies B_t with constant mass, at the same time, the mapping of the points of these bodies $X = \varkappa_t(P)$ is so chosen that for the successive moments $t_1 < t_2 < t_3 \dots$ their pictures in E overlap respectively $\varkappa_{t_1}(P) = \varkappa_{t_2}(P) = \varkappa_{t_3}(P) \dots$
- as a one body, whose picture in E evolves in time, i.e. it constitutes differentiable manifold in the space with variable boundaries.

In the later passage of the paper the second interpretation was used as being much closer to the physical interpretation of the problem.

Evolution of the material body is a determined process, i.e. there is known function defining the instant when the element P becomes an element of the material body. This function is called the function of the mass increment $\tau(\varkappa_t(P)) = \tau(X)$ and was described as follows:

Def. 3.:

- Function $\tau(X)$ takes the values from the time interval $[t_0, T]$ and it means the instant t of the particle joining with the coordinate X to the material body. It the instant $t = T$ the body reaches its nominal mass.
- Function $\tau(X)$ is the continuous function of the class C^1 on the finite number of the subdomains Ω_t . On the boundaries of these subdomains there can be discontinuities of the function $\tau(X)$ itself or its derivatives. At the same time it is assumed that the boundaries of the subdomains may be only the equiscalar surfaces of the function $\tau(X)$.
- Function $\tau(X)$ has been chosen in such a way that at every moment of time

$t \in [t_0, \infty)$ there is ensured material continuity of the body — there are no relative extremum at each of the subdomains.

d) Equiscalar surfaces $\tau(X)$ are smooth ones, coinciding with some part of the domain boundary Ω_t .

The definition written above enables us to formulate the problem. From the engineering point of view, the goal is to build-up and to describe the motion of the material body taking up determined shape in the space. It is assumed that the body shape to be designed in the space E assumes the configuration \mathcal{K} and occupies the domain Ω (fig. 2). On this space there is defined function $\tau(X)$ which allows for explicit determination of that part of the domain $\Omega_t \subset \Omega$ which is occupied by the body for given instant t . At instant t for every $X \in \Omega_t$ the relation $\tau(X) \leq t$ is fulfilled. Configuration \mathcal{K} (further called the initial reference configuration) and the function $\tau(X)$ in the explicit way determine each of the configurations \mathcal{K}_t of the body B_t in E .

The body domain Ω_t is limited by the surface S_t and

$$S_t = S_t^1 \cup S_t^2 \cup S_t^3, \tag{8}$$

where S_t^1 is the surface with assigned kinematic boundary conditions, S_t^2 is the surface with assigned kinetic boundary conditions. Surface S_t^3 is unloaded, equiscalar surface of the function $\tau(X)$, the evolving surface.

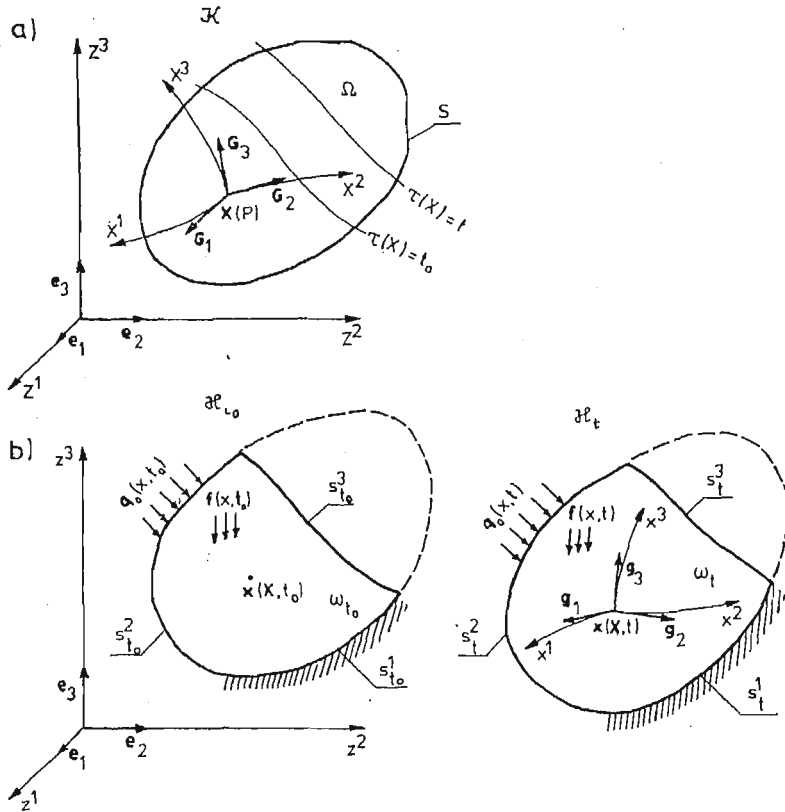


Fig. 2.

The body is loaded by the body forces $f(x, t)$ as well as by the surface forces $q_0(x, t)$ on S_t^2 . Every element with coordinate X at instant t has attributed: mass density $\rho_0(X)$ and the initial speed $v_0(X)$. It is assumed that at the moment $t = \tau(X)$ at point X the deformation equals to zero.

3. Motion. State of strain

In the course of the motion the material body at instant t occupies the actual configuration κ_t . Each of the material points $P = \mathcal{K}^{-1}(X)$ takes up the position $x(P)$. The set of all these configurations we call the body motion, and it is written:

$$x^i = \kappa_t^i(P) = \chi^i(X, t), \quad (9)$$

where $\chi(\dots)$ is the deformation function, $X \in \Omega_t$, $t \in [t_0, \infty)$.

Equation (9) describes the motion with respect to the reference configuration \mathcal{K} . The mapping $x \leftrightarrow X$ is explicit ($j \equiv \det(\partial x^j / \partial X^I) \neq 0$), thanks to that there is inverse relation:

$$X^I = \chi^{-1I}(x, t). \quad (10)$$

Speed and acceleration of the point X was written in the form

$$\begin{aligned} v^i(x, t) &= \dot{x}^i(x, t) = \frac{d}{dt} \chi^i(X, t). \\ a^i(x, t) &= \ddot{x}^i(x, t) = \frac{d^2}{dt^2} \chi^i(X, t). \end{aligned} \quad (11)$$

The basic measure of the deformation is deformation gradient. From definition we have [8]:

$$F_i^I(X, t) = \frac{\partial}{\partial X^I} \chi^i(X, t) \quad \text{and} \quad F_i^{-1I}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x^i} \chi^{-1I}(x, t). \quad (12)$$

In general, configuration \mathcal{K} is not the configuration of the state of the natural body, thus, the deformation (12) doesn't express the real deformation of the element at point X . At instant $t = \tau(X)$ the deformation gradients equal to:

$$F_i^I(X, \tau) \equiv \mathring{F}_i^I(X), \quad F_i^{-1I}(x, \tau) \equiv \mathring{F}_i^{-1I}(X), \quad (13)$$

and in general are different from g_i^I and $g_i^I(g_i^I(x, X) = g^I G_I, g^I(x, X) = G^I g_i)$.

On the other hand, there is not such configuration, where all elements (particles) would be in natural state. To overcome this difficulty it was necessary to introduce the concept of the local reference configuration.

Def. 4. The local reference configuration \mathcal{K}_τ in the neighborhood of the element X is tangent to the actual configuration $\kappa_{\tau(x)}$ at the place $x(X, \tau)$.

Definition 4 allows for the construction of the configuration, in which all elements of the body are — according with the previous assumption — in the natural state (undeformed). At instant $t = \tau(X)$ the position of the element X equals to:

$$x^i = \chi^i(X, \tau(X)). \quad (14)$$

Let:

$$\begin{aligned}\Theta^\alpha(X) &= \delta_i^\alpha x^i(X, \tau(X)) = \kappa_{(\tau)}^\alpha(X), \\ X^I(\Theta) &= \kappa_{(\tau)}^{-1I}(\Theta).\end{aligned}\quad (15)$$

The system of coordinates $\{\Theta^\alpha\}$ determined by means of eq. (15) will be distinguished by introduction of the local reference configuration \mathcal{K}_τ . To mark off, all quantities described with respect to local reference configuration will possess dash over the letter.

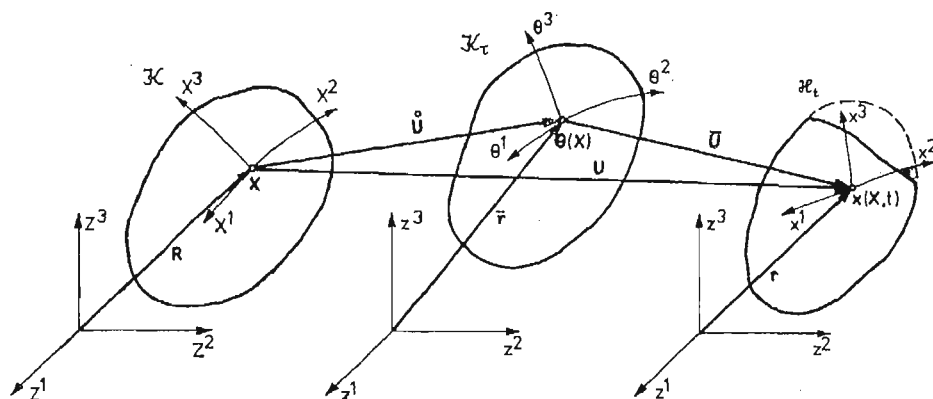


Fig. 3.

In the fig. 3 is shown the material body in configurations \mathcal{K} , \mathcal{K}_τ and \mathcal{K}_t . The radiuses-vectors of the point X in the particular configurations are equal to:

$$\begin{aligned}R(X) &= R^I(X)G_I(X), \\ r(X, t) &= r^i(X, t)g_i(x), \\ \bar{r}(\Theta, t) &\equiv r(\kappa_{(\tau)}^{-1}(\Theta), t).\end{aligned}\quad (16)$$

Vector of the natural base of the system $\{\Theta^\alpha\}$ are equal to:

$$\bar{G}_\alpha(\Theta) = \left[\frac{\partial}{\partial \Theta^\alpha} r(x, t) \right]_{t=\tau(X)} = \left[\frac{\partial}{\partial \Theta^\alpha} r(\kappa_{(\tau)}^{-1}(\Theta), t) \right]_{t=\tau(X)} = \dot{F}_I^i(X) \kappa_{(\tau), \alpha}^{-1}(\Theta) \dot{g}_i(X). \quad (17)$$

Putting $K_\alpha^I(\Theta) \equiv \kappa_{(\tau), \alpha}^{-1I}(\Theta)$ we have:

$$\bar{G}_\alpha(\Theta) = \dot{F}_I^i(X) K_\alpha^I(\Theta) \dot{g}_i(X), \quad (18)$$

where $\dot{g}_i(X) \equiv g_i(x, \tau(X))$, $\dot{F}_I^i(X) \equiv F_I^i(X, \tau(X))$.

Tensor K is in reality transformation tensor of the configuration \mathcal{K} on configuration \mathcal{K}_τ . The inverse tensor K^{-1} has the form:

$$K_I^{-1\alpha}(X) = \frac{\partial \kappa_{(\tau)}^\alpha(X)}{\partial X^I} = \delta_I^\alpha [\dot{F}_I^i(X) + \dot{\vartheta}^i(X) \tau_{,I}(X)]. \quad (19)$$

The motion and deformation gradient with respect to the local reference configuration are equal to:

$$x^i = \chi^i(\kappa_{(\tau)}^{-1}(\Theta), t) \equiv \bar{\chi}^i(\Theta, t), \quad (20)$$

$$\bar{F}_\alpha^I(\Theta, t) \equiv \frac{\partial}{\partial \Theta^\alpha} \bar{\chi}^I(\Theta, t). \quad (21)$$

Deformation gradient \bar{F} which is called further the gradient of the relative deformation expresses the real deformation of the material point. It is interrelated with gradient F by the transformation expression:

$$\bar{F}_\alpha^i(\Theta, t) = F_j^i(X, t)K_\alpha^j(\Theta), \tag{22}$$

and at moment $t = \tau(X)$ equals to 1.

$$\bar{F}_\alpha^i(\Theta, \tau) = \bar{F}_j^i(X)K_\alpha^j(\Theta) = \mathring{g}_\alpha^i(\Theta), \tag{23}$$

where $\mathring{g}_\alpha^i(\Theta) = g^i\bar{G}_\alpha$.

Transformation (15) is continuous, if the function $\tau(X)$ is of the class at least C^1 . Otherwise, tensor K as well as the quantities connected with local reference configuration have the surfaces of discontinuities. Discontinuity of function $\tau(X)$ in the real process corresponds with the pause in the erection of the material body while the discontinuity of the gradient $\nabla\tau(X)$ refers to the sudden change of the speed of increment of the body mass. Other measures of the strain are in the form:

— tensors of Green's deformation:

$$\begin{aligned} C_{IJ}(X, t) &= F_{jI}(X, t)F_j^J(X, t), \\ \bar{C}_{\alpha\alpha}(\Theta, t) &= \bar{F}_{j\alpha}(\Theta, t)\bar{F}_\beta^j(\Theta, t) = K_\alpha^I C_{IJ} K_\beta^J, \end{aligned} \tag{24}$$

— tensors of Green-Saint Venant's strain:

$$\begin{aligned} 2\bar{E}_{IJ}(X, t) &= C_{IJ}(X, t) - G_{IJ}(X, t), \\ 2\bar{E}_{\alpha\beta}(\Theta, t) &= \bar{C}_{\alpha\beta}(\Theta, t) - \bar{G}_{\alpha\beta}(\Theta) = 2K_\alpha^I (E_{IJ} - \mathring{E}_{IJ}) K_\beta^J. \end{aligned} \tag{25}$$

4. Principles of conservation

4.1. Principle of the mass conservation. According with the formulated problem the whole mass of the material body changes with time. It is assumed, that at any instant t at the domain ω_t there exists the scalar function $\rho(x, t)$, which is interpreted as a mass density. At instant $t = \tau(X)$ the particle with coordinate X has assigned the known mass density equal to $\rho_0(X)$:

$$\rho(x, \tau(X)) = \rho_0(X). \tag{26}$$

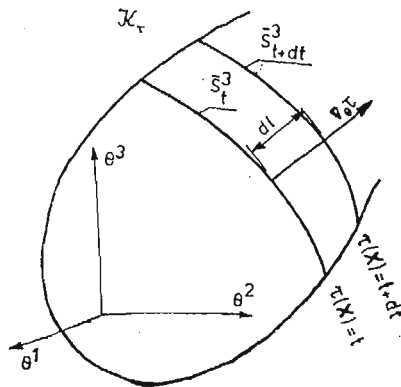


Fig. 4.

The body in local reference configuration \mathcal{K}_τ occupies at the moment t the domain $\bar{\Omega}_t$ (fig. 4) and the mass increment takes place on the surface \bar{S}_t^3 . At instant $t + dt$ the domain occupied by the body equals to $\bar{\Omega}_{t+dt}$. The total mass of the body in the time interval $[t, t + dt]$ increases by the mass of the material particles being contained between surfaces \bar{S}_t^3 and \bar{S}_{t+dt}^3 . The measure of the distance between these two surfaces is the segment dl collinear with $\text{grad}_\theta \tau$.

The principle of the mass conservation can be formulated as follows: the time derivative of the mass increment of the material body equals to the speed of increase of the body mass on the surface \bar{S}_t^3 , what was written:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\omega_t} \varrho(x, t) d\omega(x) = \int_{\bar{S}_t^3} \varrho_0(X) \frac{dl}{dt} dS. \quad (27)$$

After transformation of the left hand part of eq. (27) we have:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\omega_t} \varrho(x, t) d\omega &= \frac{D}{Dt} \int_{\bar{\Omega}_t} \varrho(x, t) \bar{J}(\Theta, t) d\Omega(\Theta) = \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{\bar{\Omega}_t = \text{const}} \varrho(x, t) \bar{J}(\Theta, t) d\Omega(\Theta) + \int_{\bar{S}_t^3} \varrho(x, t) \bar{J}(\Theta, t) \frac{dl}{dt} dS(\Theta) = \\ &= \int_{\bar{\Omega}_t = \text{const}} \frac{D}{Dt} [\varrho(x, t) \bar{J}(\Theta, t)] d\Omega(\Theta) + \int_{\bar{S}_t^3} \varrho_0(X) \frac{dl}{dt} dS(\Theta), \end{aligned} \quad (28)$$

where $\bar{J}(\Theta, t) \equiv \det(\bar{F}_t^i) \sqrt{\det(g_{ij})/\det(\bar{G}_{\alpha\beta})}$.

After substitution (28) to (27) one can get the local form of the principle of the mass conservation:

$$\frac{D}{Dt} [\varrho(x, t) \bar{J}(\Theta, t)] = 0. \quad (29)$$

4.2. Principle of balance of momentum. Momentum \mathcal{P} of the material body occupying at instant t the domain ω_t can be expressed as:

$$\mathcal{P} \equiv \int_{\omega_t} \mathbf{v}(x, t) \varrho(x, t) d\omega(x). \quad (30)$$

The principle of balance of momentum postulates that instantenous material derivative of momentum equals to the sum of the forces acting on this body, hence:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \mathcal{P} &= \frac{D}{Dt} \int_{\omega_t} \mathbf{v}(x, t) \varrho(x, t) d\omega(x) = \int_{\omega_t} \mathbf{f}(x, t) \varrho(x, t) d\omega(x) + \\ &+ \int_{S_t^1 \cup S_t^2} q_0(x, t) ds(x) + \frac{D}{Dt} \int_{S_t^3} p_0(X) dS(X). \end{aligned} \quad (31)$$

According with assumption the material particles with cordimates X have assigned the vector function $\mathbf{v}_0(X)$, what is interpret in the real process as a initial speed at the moment, when the particle "joins" the body, i.e. at moment $t = \tau(X)$. The quantity $p_0(X)$

should be interpreted as a density of momentum falling on the surface S_t^3 resulting from "the joining" material particles. After transformation of the left hand of eq. (31) we have:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\omega_t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) d\omega(\mathbf{x}) &= \frac{D}{Dt} \int_{\bar{\Omega}_t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\varrho_0(\mathbf{X})}{J(\Theta)} \bar{J}(\Theta) d\bar{\Omega}(\Theta) = \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{\bar{\Omega}_t = \text{const}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varrho_0(\mathbf{X}) d\bar{\Omega}(\Theta) + \int_{\bar{S}_t^3} \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) \varrho_0(\mathbf{X}) \frac{dl}{dt} dS(\Theta). \end{aligned} \tag{32}$$

Segment dl is connected with the speed of displacement of the boundary \bar{S}_t^3 by the dependence:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{|\text{grad}_{\Theta} \tau|} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{,i} \tau_{,j} \dot{C}^{-1ij}}} \equiv v_{(n)}(\Theta). \tag{33}$$

After substituting (32) and (33) to (31) and further transformations we arrive at:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_t} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) d\omega(\mathbf{x}) &= \int_{\omega_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) d\omega(\mathbf{x}) + \int_{S_t^1 \cup S_t^2} \mathbf{q}_0(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{S_t^3} [\mathbf{v}_0(\mathbf{X}) - \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X})] \varrho_0(\mathbf{X}) v_{(n)}(\Theta) ds(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{34}$$

The integrand in the last integral one can interpret as the load intensity of the surface S_t^3 . The difference $\mathbf{v}_0(\mathbf{X}) - \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X})$ is the difference of the particle speed with coordinate \mathbf{X} and the particle of the surface $\mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau) \in S_t^3$ at the instant, when the particle has joined the material body. After denotation:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{q}_0(\mathbf{x}, t) & \text{for } \mathbf{x} \in S_t^1 \cup S_t^2 \\ [\mathbf{v}_0(\mathbf{X}) - \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X})] \varrho_0(\mathbf{X}) v_{(n)}(\Theta) & \text{for } \mathbf{x} \in S_t^3 \end{cases} \tag{35}$$

the principle of balance of momentum conservation can be written in the standard way:

$$\int_{\omega_t} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) d\omega(\mathbf{x}) = \int_{\omega_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) d\omega(\mathbf{x}) + \int_{S_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}). \tag{36}$$

After analogous as above transformations one can get the equation expressing the principle of balance of moment of momentum conservation in the form:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_t} \frac{D}{Dt} \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) d\omega &= \int_{\omega_t} \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) d\omega + \\ &+ \int_{S_t} \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) ds(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{37}$$

5. State of stress. Cauchy equations of the motion

In the Fig. 5 there is shown the material body with distinguished element of volume in reference configurations \mathcal{K} and \mathcal{K}_τ as well as in actual configuration \mathbf{x}_t . At the interface of the surfaces cut-off in the thoughts it is postulated the vectors field of stress $\mathbf{t}_{(n)}$, which can be presented in the form of the stress tensors:

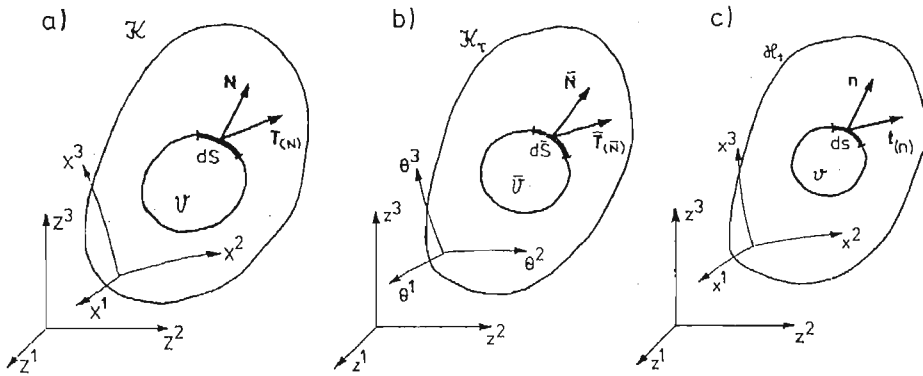


Fig. 5.

$$\begin{aligned}
 t_{(n)} ds(x) &= t^{kl}(x, t) g_l(x) n_k(x) ds(x) = T^{Ii}(X, t) g_i(X) N_I(X) dS(X) = \\
 &= \bar{T}^{\alpha i}(\Theta, t) g_i(x) \bar{N}_\alpha(\Theta) dS(\Theta),
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

where T^{Ii} , $\bar{T}^{\alpha i}$ are Pioli-Kirchhoff stress tensors with respect to \mathcal{K} and \mathcal{K}_τ configurations respectively.

Cauchy equations of the motion are local forms of the principles of balance of momentum and moment of momentum conservation. Let discuss the domain ω_t limited by the surface s_t . According to def. 3 function $\tau(X)$ or $\text{grad } \tau(X)$ can posses definite number of the discontiuties on the surfaces $s_t^1, s_t^2, \dots, s_t^R$ (Fig. 6). In this way there can take place

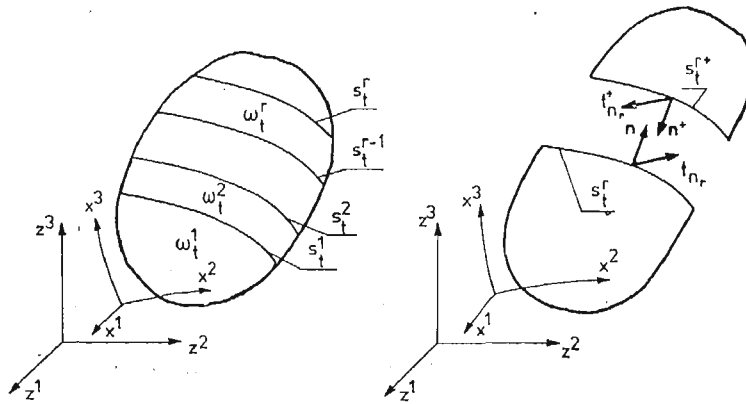


Fig. 6.

the discontiuties of the stress tensor. Dividing the domain ω_t on the separable subdomains ω_t^r as well as taking advantage of the boundary conditions, eq. (36) can be written in the form:

$$\begin{aligned}
 \int_{\omega_t} a(x, t) \rho(x, t) d\omega(x) &= \int_{\omega_t} f(x, t) \rho(x, t) d\omega(x) + \int_{s_t} t_{(n)} ds(x) + \\
 &+ \sum_{r=1}^R \left[\int_{s_t^r} t_{(n_r)}(x, t) ds(x) + \int_{s_t^{r+}} t_{(n_r^+)}(x, t) ds(x) \right].
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

The last sum in the eq. (39) is by identity equal to zero, what gives the continuity condition of the stress vector on the surfaces s_i^r :

$$t_{(n_r)}(x, t) + t_{(n_r)}^+(x, t) = 0 \quad \text{for } x \in s_i^r. \tag{40}$$

After denoting by $\partial\omega_i^r$ the limiting surface of the domain ω_i^r we have:

$$\int_{\omega_i^r} a(x, t) \rho(x, t) d\omega(x) = \int_{\omega_i^r} f(x, t) \rho(x, t) d\omega(x) + \sum_{r=1}^R \int_{\partial\omega_i^r} t_{(n)} ds(x). \tag{41}$$

Taking advantage of Gauss-Ostrogradski theorem for each of the terms of sum and carrying-out all necessary transformation, we have:

$$\sum_{r=1}^R \int_{\omega_i^r} \{t_{;k}^{kl}(x, t) + \rho(x, t) [f^l(x, t) - a^l(x, t)]\} g_i(x) d\omega(x) = 0. \tag{42}$$

Hence, the first Cauchy equation of the motion together with the continuity condition has the following form:

$$t_{;k}^{kl}(x, t) + \rho(x, t) [f^l(x, t) - a^l(x, t)] = 0 \quad \text{for } x \in \bigcup_{r=1}^R \omega_i^r, \tag{43}$$

$$(t^{kl} - t_{+}^{kl}) n_k = 0 \quad \text{for } x \in \bigcup_{r=1}^R s_i^r.$$

Performing analogous procedure with eq. (37) we get second Cauchy equation of motion in the form:

$$t^{kl}(x, t) = t^{lk}(x, t) \quad \text{for } x \in \bigcup_{r=1}^R \omega_i^r. \tag{44}$$

Cauchy equations of motion (43) and (44) one can get using Pioli-Kirchhoff's stress tensors.

6. Constitutive equations

To describe the dynamic process of the with growing mass it is necessary to formulate the constitutive equations. It is possible to use without any limits the same equations as in the classic problems. Let for example, the body to be built from isotropic elastic material, then the constitutive equations dependences have the form [9]:

$$t^{kl}(x, t) = f^{kl}(\bar{C}_{KL}(\Theta, t)). \tag{45}$$

This study contains the set of equations of the problem of initial-boundary body with growing mass. Full description requires additionally of the formulation of the initial and boundary conditions of the process.

7. Example

An example presented below illustrates the function of the mass increment and the relations between the kinematic quantities for given material body.

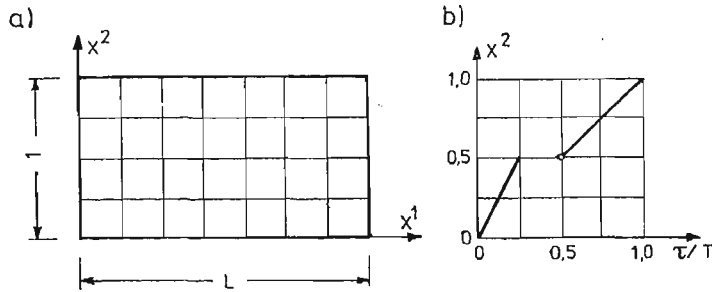


Fig. 7.

A flat rectangular disk of dimensions $L \times 1$ is considered (Fig. 7a). Coordinate systems $\{X^I\}$ and $\{x^i\}$ were assumed as Cartesian ones. Let the function of the mass increment $\tau(X)$ to be in the form:

$$\tau(X^1, X^2) = T_1 X^2 = \begin{cases} T_1 X^2 & \text{for } X^2 \leq \frac{1}{2} \\ T_2 X^2 & \text{for } X^2 > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (46)$$

where $T_2 > T_1 > 0$. The initial moment is $t_0 = 0$. It was assumed that $T_2 = T_1 = T$ (see Fig. 7).

As it results from (46) the disk is build in two time intervals $\left[0, \frac{1}{2}T_1\right]$ and $\left[\frac{1}{2}T_2, T_2\right]$. The pause in the course of building of the body corresponds to the time interval $\left(\frac{1}{2}T_1, \frac{1}{2}T_2\right)$. The diagram of function $\tau(X)$ is shown in fig. 7b.

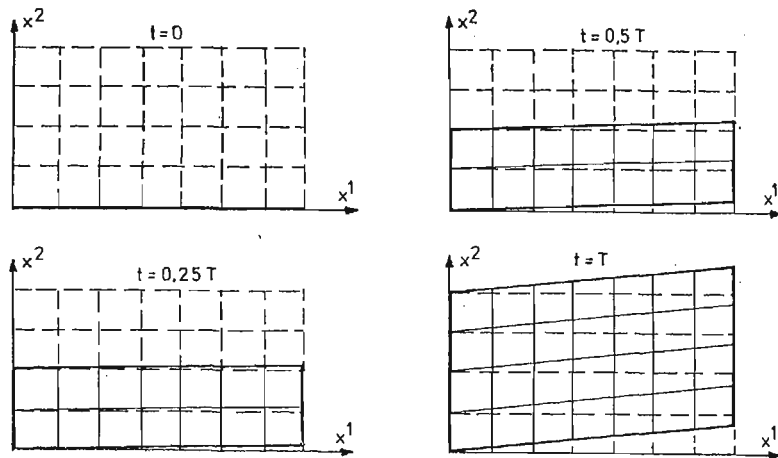


Fig. 8.

The disk is subjected to the "pure" forced shear. Disk motion is described by equations:

$$\begin{aligned} x &= \chi(X, t), & \chi^1(X, t) &= X^1, \\ & & \chi^2(X, t) &= AtX^1 + X^2, \end{aligned} \quad (47)$$

where A — an arbitrary constant.

The successive phases of disk construction as well as its successive configurations are shown in fig. 8.

The local system of the material coordinates is defined by eq. (15):

$$\begin{aligned} \Theta(X) &= \kappa_{(\tau)}(X), & \kappa_{(\tau)}^1(X) &= X^1, \\ & & \kappa_{(\tau)}^2(X) &= AT_i X^1 X^2 + X^2, \\ X(\Theta) &= \kappa_{(\tau)}^{-1}(\Theta), & \kappa_{(\tau)}^{-1}(\Theta) &= \Theta^1, \\ & & \kappa_{(\tau)}^{-1,2}(\Theta) &= \frac{\Theta^2}{AT_i \Theta^1 + 1}. \end{aligned} \quad (48)$$

The transformation matrix of system $\{X^I\}$ into $\{\Theta^\alpha\}$ is in the form:

$$K(\Theta) = \nabla_{\Theta} \kappa_{(\tau)}^{-1}(\Theta), \quad K_{\alpha}^I(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{AT_i \Theta^2}{(AT_i \Theta^1 + 1)^2} & \frac{1}{AT_i \Theta^1 + 1} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Coordinate system $\{\Theta^\alpha\}$ has the surface of discontinuity for $X^2 = \frac{1}{2}$. It is equiscalar surface of the function $\tau(X)$ at the moment of "the pause of building" of the disk. The vectors of the natural basis of the system $\{\Theta^\alpha\}$ as well as the first metric form equal to:

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= g_1, \\ \bar{G}_2 &= \frac{A^2 T_i^2 \Theta^1 \Theta^2}{(AT_i \Theta^1 + 1)^2} g_1 + \frac{1}{AT_i \Theta^1 + 1} g_2, \\ \bar{G}_{\alpha\beta}(\Theta) &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{A^4 T_i^4 (\Theta^1 \Theta^2)^2}{(AT_i \Theta^1 + 1)^4} & \frac{A^2 T_i^2 \Theta^1 \Theta^2}{(AT_i \Theta^1 + 1)^3} \\ \text{sym.} & \frac{1}{(AT_i \Theta^1 + 1)^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

The motion in relation to the local configuration expresses the equation:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(\Theta, t) &= \chi(X(\Theta), t), & \bar{\chi}^1(\Theta, t) &= \Theta^1, \\ & & \bar{\chi}^2(\Theta, t) &= At\Theta^1 + \frac{\Theta^2}{AT_i \Theta^1 + 1}. \end{aligned} \quad (51)$$

The strain measures in relation to the local configuration are equal:
— gradient of the relative deformation:

$$\bar{F}_{\alpha}^i(\Theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ At - \frac{AT_i \Theta^2}{(AT_i \Theta^1 + 1)^2} & \frac{1}{AT_i \Theta^1 + 1} \end{bmatrix}, \quad (52)$$

— tensor of the relative deformation:

$$\bar{C}_{\alpha\beta}(\Theta, t) = \begin{bmatrix} 1 + \left[At - \frac{AT_i\Theta^2}{(AT_i\Theta^1 + 1)^2} \right]^2 & \text{sym.} \\ \frac{1}{AT_i\Theta^1 + 1} \left[At - \frac{AT_i\Theta^2}{(AT_i\Theta^1 + 1)^2} \right] & \frac{1}{(AT_i\Theta^1 + 1)^2} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

— tensor of the relative strain:

$$2\bar{E}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \left[At - \frac{AT_i\Theta^2}{(AT_i\Theta^1 + 1)^2} \right]^2 - \frac{A^4 T_i^4 (\Theta^1 \Theta^2)^2}{(AT_i\Theta^1 + 1)^4} & \text{sym.} \\ \frac{1}{AT_i\Theta^1 + 1} \left[At - \frac{AT_i\Theta^2}{(AT_i\Theta^1 + 1)^2} \right] - \frac{A^2 T_i^2 \Theta^1 \Theta^2}{(AT_i\Theta^1 + 1)^3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

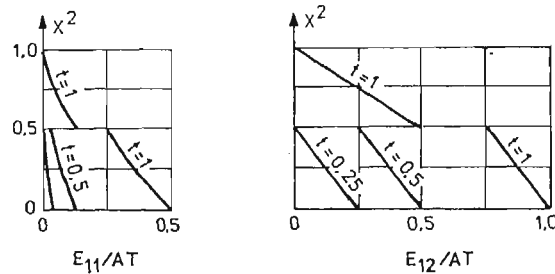


Fig. 9.

All the strain measures in relation to the local configuration on the line $X^2 = \frac{1}{2}$ are discrete. For example, fig. 9 presents the diagrams of non-zero values of strain tensor coordinates \bar{E} following their transformation into the system $\{x^i\}$ according to the relation:

$$2\bar{E}_{ij}(\Theta, t) = 2\bar{E}_{\alpha\beta} g_i^\alpha g_j^\beta. \quad (55)$$

References

1. Н. Х. Арутюнян, В. Т. Кольмановски, *Теория ползучести неоднородных тел*, Наука, Москва 1983.
2. Н. Х. Арутюнян, А. А. Зевин, *Оптимальная форма наращиваемой колонны*, Изв. АН СССР, МТТ, 1981, нр. 5, с. 128 - 132.
3. Н. Х. Арутюнян, А. А. Зевин, *Задачи оптимизации в теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению*, Изв. АН СССР, МТТ, 1979, нр. 1, с. 100 - 107.
4. Н. Х. Арутюнян, *Кривая задача теории ползучести для наращиваемого тела*, ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783 - 789.
5. Н. Х. Арутюнян, В. В. Метлов, *Некоторые задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел с изменяющейся границей*, Изв. АН СССР, МТТ, 1982, нр. 5, с. 91 - 100.
6. Н. Х. Арутюнян, А. С. Лозовски, *Об одной задаче теории вязкоупругости для тел с фазовыми превращениями*, ДАН Арм. ССР, 1977, т. 65, нр. 2, с. 109—115.

7. В. Д. Харлава, *К линейной теории ползучести нарастающего тела*, Мех. Стержневых Систем и сплошных сред, вып. 13, ЛИСИ, Ленинград 1980.
8. P. PERZYNA, *Termodynamika materiałów niesprężystych*, PWN, Warszawa 1978.
9. A. C. ERINGEN, *Nonlinear theory of continuous media*, Mc Graw-Hill Book Company, London 1962.

Резюме

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОГО ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

В работе сконструировано модель материального тела с переменной массой. Представлено определение такой модели, описано движение, меры деформации, напряжения и силы действующие на тело. Кроме этого предлагаем модифицированные законы сохранения, которые дополненные определяющими уравнениями дают основную систему соотношений модели.

В окончании работы показано пример иллюстрирующий кинематические зависимости модели.

Streszczenie

DYNAMIKA CIAŁA MATERIALNEGO O ZMIENNEJ MASIE

W pracy skonstruowano model ciała materialnego o zmiennej masie. Podano definicję takiego ciała, opisano ruch, miary odkształcenia i naprężenia oraz siły działające na ciało. Następnie postuluje się zmodyfikowane zasady zachowania, które po uzupełnieniu związkami konstytutywnymi dają podstawowy układ relacji modelu. W zakończeniu pracy podano przykład ilustrujący zależności kinematyczne modelu.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 grudnia 1987 roku.

THE INFLUENCE OF MOISTURE AND TEMPERATURE ON THE BEHAVIOUR OF ORTHOTROPIC, VISCOELASTIC PLATES

ZENON KOŃCZAK

Technical University of Poznań

1. Introduction

The influence of humidity and temperature variation on the properties of different materials is commonly known. In the case of wood and plywood this influence is of great moment for the durability and the behaviour in constructions of wood as well. Numerous investigators have shown that the mechanical properties of such materials strongly depend on moisture, also. The influence of temperature on the elastic properties of wood is also perceptible.

There are many papers in which mathematical models, involving the variations of moisture content and temperature are considered (e.g. [1 - 3]) basing on experimental investigations. Recently, Bažant [4] has formulated the constitutive relation for steady states conditions basing on the Maxwell chain model whose viscosity coefficients depend on moisture content and temperature. However, in the cases mentioned above one dimensional problems were studied only and an anisotropy of the material was omitted.

The object of this paper is an attempt to formulate the equations describing the behaviour of orthotropic, viscoelastic plates, subjected to the influence of temperature and moisture variation.

The paper consist of two general parts. The first one is concerned with deriving the fundamental equations for the body considered basing on the principles of mechanics and thermodynamics. We restrict our considerations to the linear case, only. It indicates that the displacements, temperature changes and moisture concentration are assumed to be small. The second part is devoted to formulate the basic differential equations for thin plate, where the equations that were just derived in the first part will be applied.

2. Basic equations

The point of departure of our considerations are the balance equations that result from the fundamental laws of mechanics and thermodynamics of continuous media. The local balance laws which must be satisfied are:

1. conservation of mass

$$\dot{c} = -\eta_{i,i} + r_m, \quad c = \varrho_m/\varrho \quad (2.1)$$

2. balance of linear momentum and angular momentum

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \varrho \ddot{u}_i, \quad \sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (2.2)$$

3. balance of energy

$$\dot{e} = \sigma_{ji} \dot{\varepsilon}_{ij} - q_{i,i} + (\mu \eta_i)_{,i} + r_h - \mu r_m \quad (2.3)$$

4. entropy inequality

$$\dot{s} \geq \frac{1}{T} r_h - \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} \quad (2.4)$$

where c denotes the concentration of moisture, ϱ_m and ϱ are the densities of moisture and the material, respectively, σ_{ij} is the stress tensor, ε_{ij} is the deformation tensor, X_i is the body force vector, u_i is the displacement vector, q_i is the heat flux vector, η_i is the vector of moisture mass flux, μ is the potential of moisture transmission, e , s , r_h , r_m and T are respectively the internal energy, the entropy, the internal heat source, internal source of diffusing matter and the absolute temperature. A superposed dot denotes differentiation with respect to the time variable t and $(\)_{,i}$ denotes partial differentiation with respect to the coordinate x_i , referred to a system of rectangular cartesian axes fixed in space.

A different form of the entropy inequality (2.4) will be more convenient in the further considerations. We will obtain it by eliminating from (2.3) and (2.4) the heat source r_h and introducing the function of free energy:

$$\psi = e - sT. \quad (2.5)$$

We now get:

$$-\frac{1}{T} (\dot{\psi} + s\dot{T}) + \frac{1}{T} (\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \eta_i \mu_{,i} - \mu \dot{c}) - \frac{q_i}{T^2} T_{,i}, \quad (2.6)$$

where the equation (2.1) has been used.

As can be seen, the field equations (2.1) - (2.3) and entropy inequality (2.6) do not constitute a closed system. Therefore, it must be supplemented with suitable constitutive equations defining the class of considered material [5, 6]. In our case we will assume the following constitutive equations:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\{\mathcal{F}\}), \quad q_i = q_i(\{\mathcal{F}\}), \quad \eta_i = \eta_i(\{\mathcal{F}\}), \quad \psi = \psi(\{\mathcal{F}\}), \quad (2.7)$$

where:

$$\{\mathcal{F}\} = \{\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, T, T_{,k}, c, c_{,k}\} \quad (2.8)$$

is a set of independent constitutive variables.

Substituting for ψ from (2.5) into (2.6), and carrying out the indicated differentiations of ψ , we obtain:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} + \frac{1}{T} \left(\sigma_{ij}^E - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{T} \sigma_{ij}^D \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{T} \left(\mu + \frac{\partial \psi}{\partial c} \right) \dot{c} \\ & - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \ddot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{c}} \ddot{c} + \frac{\partial \psi}{\partial T_{,i}} \dot{T}_{,i} + \frac{\partial \psi}{\partial c_{,i}} \dot{c}_{,i} \right) + \frac{1}{T} \eta_i \mu_{,i} - \frac{q_i}{T^2} T_{,i} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Here decomposition of the stress tensor into elastic σ_{ij}^E and dissipative part σ_{ij}^D have been introduced.

The inequality (2.9) must hold for all independent variation of $\dot{\epsilon}_{ij}$, $\ddot{\epsilon}_{ij}$, \dot{T} , $\dot{T}_{,i}$, \dot{c} and $\dot{c}_{,i}$. These variables appear linearly in (2.9) and thus their coefficients must vanish. It then follows that:

$$\sigma_{ij}^E = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \mu = -\frac{\partial \psi}{\partial c}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \dot{c}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \dot{T}_{,i}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \dot{c}_{,i}} = 0, \tag{2.11}$$

and inequality (2.9) reduces to:

$$\frac{1}{T} \sigma_{ij}^D \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{T} \eta_i \mu_{,i} - \frac{q_i}{T^2} T_{,i} \geq 0. \tag{2.12}$$

From conditions (2.10) and (2.11) it results that:

$$\psi = \psi(\epsilon_{ij}, T, c), \quad \sigma_{ij}^E = \sigma_{ij}^E(\epsilon_{ij}, T, c), \quad \mu = \mu(\epsilon_{ij}, T, c), \quad s = s(\epsilon_{ij}, T, c). \tag{2.13}$$

The inequality (2.12) is a constraint of functions σ_{ij}^D , η_i and q_i but does not lead to a more general conclusion before the choice of these functions.

Let us now proceed to determining the final form of constitutive relations. We begin by specifying σ_{ij}^E , s and μ . To this end we develop the free energy function ψ into Taylor series about the reference state ($\epsilon_{ij} = 0, T = T_0, c = c_0$) with accuracy to quadratic terms. We have:

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon_{ij}, T, c) = & \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \frac{1}{2} m \Theta^2 + \frac{1}{2} n C^2 - \beta_{ij} \epsilon_{ij} \Theta \\ & - \gamma_{ij} \epsilon_{ij} C + \xi \Theta C, \quad \Theta = T - T_0, \quad C = c - c_0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

On the basis of (2.10) we obtain:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^E &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \Theta - \gamma_{ij} C, \\ \mu &= \gamma_{ij} \epsilon_{ij} - \xi \Theta - nC, \quad n = \frac{c_m}{T_0}, \\ s &= \beta_{ij} \epsilon_{ij} - m \Theta - \xi C, \quad m = -\frac{c_V}{T_0}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

where C_{ijkl} , β_{ij} , γ_{ij} , ... etc. are constants characterizing the mechanical and thermal properties of the medium.

We pass now to determine σ_{ij}^D , q_i and η_i . We will determine these functions from the condition of satisfaction of inequality (2.12), limiting ourselves to linear relations. This makes it possible to use phenomena of the cross effect and Onsager's symmetry relations. Thus, making use of the well known procedure we finally obtain:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^D &= G_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + \gamma_{ijk} \mu_{,k} - \beta_{ijk} \Theta_{,k}, \\ \eta_i &= \gamma_{ijk} \dot{\epsilon}_{jk} + \alpha_{ik} \mu_{,k} - \xi_{ik} \Theta_{,k}, \\ q_i &= T_0 \beta_{ikl} \dot{\epsilon}_{kl} + T_0 \xi_{ik} \mu_{,k} - k_{ik} \Theta_{,k}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

where G_{ijkl} , γ_{ikl} , ξ_{ik} , ... are material constants.

Summing the result obtained up to now we can write the final form of the constitutive equations. Hence, making use of (2.15) and (2.16) we obtain:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^D = C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl} + E_{ijklrs} \varepsilon_{rs,k} - \beta_{ij} \Theta - \beta_{ijk}^* \Theta_{,k} - \gamma_{ij} C - \gamma_{ijk}^* C_{,k}, \\ \eta_i &= \gamma_{ikl} \dot{\varepsilon}_{kl} + \alpha_{ikrs} \varepsilon_{rs,k} - \xi_{ik}^* \Theta_{,k} - \alpha_{ij}^* C_{,k}, \\ q_i &= T_0 \beta_{ikl} \dot{\varepsilon}_{kl} + T_0 \xi_{ikrs} \varepsilon_{rs,k} - k_{ik}^* \Theta_{,k} - T_0 d_{ik} C_{,k},\end{aligned}\quad (2.17)$$

where the following abbreviations have been introduced

$$\begin{aligned}C_{ijkl}^* &= C_{ijkl} + G_{ijkl} \partial_i, & E_{ijklrs} &= \gamma_{ijk} \gamma_{rs}, & \beta_{ijk}^* &= \beta_{ijk} + \xi \gamma_{ijk}, & \partial_i &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \alpha_{ikrs} &= \alpha_{ik} \gamma_{rs}, & \xi_{ik}^* &= \xi_{ik} + \xi \alpha_{ik}, & \alpha_{ik}^* &= n \alpha_{ik} = \frac{c_m}{T_0} \alpha_{ik}, \\ \xi_{ikrs} &= \xi_{ik} \gamma_{rs}, & k_{ik}^* &= k_{ik} + T_0 \xi \xi_{ik}, & \gamma_{ikl}^* &= n \gamma_{ikl}, & d_{ik} &= n \xi_{ik}.\end{aligned}$$

Proceeding now to writing the equation of heat conductivity we will use equation (2.3) in which we will take into consideration the substitution of (2.5), the derivative with respect to time of function (2.13)₁, and relations (2.10) and (2.15)₃. We get:

$$T(\beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - m \dot{\Theta} - \xi \dot{C}) = \sigma_{ij}^D \dot{\varepsilon}_{ij} - q_{i,i} + \eta_i \mu_{,i} + r_h, \quad (2.18)$$

where q_i is defined by relation (2.16)₃.

Assuming further that $|\theta/T| \ll 1$, i.e. restricting our considerations to small temperature changes and omitting the non-linear terms $\sigma_{ij}^D \dot{\varepsilon}_{ij}$ and $\eta_i \mu_{,i}$ as higher-order smalls, we finally obtain after taking into account (2.17):

$$k_{ij}^* \Theta_{,ij} + T_0 m \dot{\Theta} + d_{ij}^* C_{,ji} + d \dot{C} = \xi_{ijrs}^* \varepsilon_{rs,ji} + T_0 \beta_{ikl} \dot{\varepsilon}_{kl,i} + T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - r_h, \quad (2.19)$$

where:

$$\xi_{ijrs}^* = T_0 \xi_{ijrs}, \quad d_{ij}^* = T_0 d_{ij} = c_m \xi_{ij}, \quad d = T_0 \xi.$$

The equation of concentration of moisture can be obtained from mass continuity equation (2.1). After taking into consideration (2.17)₂ we have:

$$\alpha_{ik}^* C_{,ki} - \dot{C} + \xi_{ik}^* \Theta_{,ki} = \alpha_{ikrs} \varepsilon_{rs,ki} + \gamma_{ikl} \dot{\varepsilon}_{kl,i} - r_m, \quad (2.20)$$

where:

$$\alpha_{ik}^* = n \alpha_{ik} = \frac{1}{T_0} c_m \alpha_{ik}.$$

Equations (2.2), (2.17), (2.19) and (2.20) represent the full set of equations of considered medium.

3. Basic plate equations

In this section an attempt will be made to derive the basic differential equations for thin orthotropic, viscoelastic plate of thickness h , whose median plan lies in the $x_1 x_2$ plane with x_3 denoting the distance from this plane. The deflection of the middle surface is assumed small in relation to the thickness of the plate. Moreover, it is assumed that all simplifying assumptions that are usually used in the classical thin plates theory [7, 8]

are also valid in the present case. In accordance with these assumptions we can write $u_3(x_1, x_2, x_3, t) \approx w(x_1, x_2, t)$ where $w(x_1, x_2, t)$ is the deflection of the middle surface of the plate. Moreover, the strain tensor ϵ_{ij} can be divided into two parts [7]:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \epsilon'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0) - x_3 w_{,\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (3.1)$$

where u_α^0 denotes the displacement due to uniform tension of the middle surface, $u'_\alpha = -x_3 w_{,\alpha}$ stands for the displacement due to the deflection of the plate.

As it was already mentioned above, we are dealing with the thin plates. In this case the temperature distribution along the thickness can be assumed to be linear. We shall introduce this simplification also for the concentration field, i.e.:

$$\begin{aligned} \Theta(x_1, x_2, x_3, t) &\approx \tau_0(x_1, x_2, t) + x_3 \tau(x_1, x_2, t), \\ C(x_1, x_2, x_3, t) &\approx \kappa_0(x_1, x_2, t) + x_3 \kappa(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

where the following notations have been introduced:

$$\begin{aligned} \tau_0(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Theta(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \approx \frac{\Theta_U + \Theta_L}{2}, \\ \kappa_0(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} C(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \approx \frac{C_U + C_L}{2}, \\ \tau(x_1, x_2, t) &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \Theta(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \approx \frac{\Theta_U - \Theta_L}{h}, \\ \kappa(x_1, x_2, t) &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 C(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \approx \frac{C_U - C_L}{h}. \end{aligned}$$

Here τ_0 and κ_0 are the mean temperature and concentration of moisture which do not vary in x_3 direction, respectively, Θ_j and C_j ($j = U, L$) are temperatures and concentrations on upper (U) and lower (L) sides of the plate.

Further, let us define forces and moments per unit width of the plate cross-section, as it is usually done in the plate theory:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad M_{\alpha\beta}(x_1, x_2, t) = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \\ Q_{\alpha 3}(x_1, x_2, t) &= Q_{3\alpha}(x_1, x_2, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Making now use of (2.17), (3.1) and (3.3) we obtain:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= h(C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \epsilon_{\gamma\delta}^0 + E_{\alpha\beta\gamma\delta\omega} \epsilon_{\gamma\delta,\omega}^0 - \beta_{\alpha\beta\delta}^* \tau_{0,\delta} - \beta_{\alpha\beta} \tau_0 - \gamma_{\alpha\beta\delta}^* \kappa_{0,\delta} - \gamma_{\alpha\beta} \kappa_0), \\ M_{\alpha\beta} &= -\frac{h^3}{12} (C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* w_{,\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\gamma\delta\omega} w_{,\gamma\delta,\omega} - \beta_{\alpha\beta\gamma}^* \tau_{,\gamma} - \beta_{\alpha\beta} \tau - \gamma_{\alpha\beta\delta}^* \kappa_{,\delta} - \gamma_{\alpha\beta} \kappa). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Returning to the equation of motion (2.2) we express it in a different form:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha 3,3} + X_\alpha &= \rho_0 \ddot{u}_\alpha, \\ \sigma_{3\beta,\beta} + \sigma_{33,3} + X_3 &= \rho_0 \ddot{w}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

If we integrate now these equations along the thickness of the plate, and later on doing the same with equation (3.5)₁, after having first multiplied it by x_3 , and taking into account the expressions (3.3) we arrive at the following equations

$$N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha = \rho_0 h \ddot{u}_\alpha, \quad (3.6)$$

$$Q_{3\alpha,\alpha} + p_3 = \rho_0 h \ddot{w}, \quad (3.7)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} + m_{3\alpha} - Q_{3\alpha} = 0, \quad (3.8)$$

where ρ_0 is the plate density per unit area of the middle surface and:

$$\begin{aligned}p_\alpha &= \sigma_{\alpha 3} \Big|_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} X_\alpha dx_3, & p_3 &= \sigma_{33} \Big|_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} X_3 dx_3, \\ m_{3\alpha} &= (\sigma_{3\alpha} x_3) \Big|_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} x_3 X_\alpha dx_3.\end{aligned}$$

Equation (3.6) concerns the state of displacement in the plane of the plate.

Let us return now to the equations (3.7) and (3.8). Eliminating $Q_{3\alpha}$ from it we arrive at the equation of motion:

$$M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + q_w = \rho_0 h \ddot{w}, \quad (3.9)$$

where:

$$q_w = p_3 + m_{3\alpha}.$$

If we now introduce $M_{\alpha\beta}$ from (3.4)₂, into the equation of motion (3.9), we obtain in the general case of anisotropy the differential dynamic equation of the bent plate in the form:

$$\begin{aligned}C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* w_{,\alpha\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\gamma\delta\omega} w_{,\alpha\beta\gamma\delta\omega} + \beta_0 \rho_0 \ddot{w} &= \beta_{\alpha\gamma} \tau_{,\alpha\gamma}, \\ + \beta_{\alpha\gamma\omega}^* \tau_{,\alpha\gamma\omega} + \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{,\alpha\beta} + \alpha_{\beta\gamma\delta}^* \kappa_{,\beta\gamma\delta} + \frac{12}{h^3} q_w, & \beta_0 = \frac{12}{h^2}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

For the orthotropic plate the equation (3.10) simplified and take the following form:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* w_{,\alpha\beta\gamma\delta} + \beta_0 \rho_0 \ddot{w} = \frac{12}{h^3} q_w + \beta_{\alpha\gamma} \tau_{,\alpha\gamma} + \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{,\alpha\beta}, \quad (3.11)$$

where:

$$\begin{aligned}C_{1111}^* &= A(E_1 + \lambda_1 \partial_t), & C_{2222}^* &= A(E_2 + \lambda_2 \partial_t), & C_{1122}^* &= A(E_1 + \lambda_1 \partial_t), \\ C_{1212}^* &= (G_{12} + \eta_{12} \partial_t) \frac{h^3}{12}, & A &= \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}, & \nu^2 &= \nu_1 \nu_2, \\ \beta_{11} &= \frac{h^3}{12} \left(\frac{E_1}{1-\nu^2} \alpha_1 + G_{12} \alpha_2 \right), & \beta_{22} &= \frac{h^3}{12} \left(G_{12} \alpha_1 + \frac{E_2}{1-\nu^2} \alpha_2 \right).\end{aligned}$$

In these formulas E_α ($\alpha = 1, 2$) is the Young's modulus in the x_α direction, ν_α is the Poisson's ratio, G_{12} is the shear modulus in the $x_1 x_2$ plane, α_β is the thermal expansion coefficient in the x_β direction, λ_α and η_{12} are the viscosity coefficients.

Equation (3.11) must be supplemented by the equations describing heat conduction τ and concentration of the diffusing matter κ . In order to derive these equations we turn to equations (2.19) and (2.20) and integrate over the plate thickness, before this multiplying them by x_3 .

If, in addition, the boundary conditions of the form:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \Big|_{x_3 = \frac{h}{2}} &= p_U(x_1, x_2, t), & \lambda_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \Big|_{x_3 = -\frac{h}{2}} &= p_L(x_1, x_2, t), \\ D_0 \frac{\partial C}{\partial x_3} \Big|_{x_3 = \frac{h}{2}} &= f_U(x_1, x_2, t), & D_0 \frac{\partial C}{\partial x_3} \Big|_{x_3 = -\frac{h}{2}} &= f_L(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (3.12)$$

are assumed, where λ_0 and D_0 are the coefficients of heat conduction and diffusion, respectively, then equations (2.19) and (2.20), in the absence of heat and diffusion sources, for the considered orthotropic plate reduce to:

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta}^* \tau_{,\alpha\beta} - c_v \dot{\tau} - a_1 \tau + d_{\alpha\beta}^* \kappa_{,\alpha\beta} + d \dot{\kappa} - a_2 \kappa &= \frac{a_1}{2\lambda_0} (p_L - p_U) + \\ &+ \frac{a_2}{2D_0} (f_L - f_U) - \xi_{\alpha\beta\gamma\delta}^* W_{,\alpha\beta\gamma\delta} - T_0 \beta_{\alpha\beta} \dot{W}_{,\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\alpha_{\beta\gamma}^* \kappa_{,\beta\gamma} - \dot{\kappa} - a_3 \kappa + \xi_{\alpha\beta}^* \tau_{,\alpha\beta} - a_4 \tau = \frac{a_4}{2\lambda_0} (p_L - p_U) + \frac{a_3}{2D_0} (f_L - f_U) - \alpha_{\beta\gamma\delta\omega} W_{,\beta\gamma\delta\omega}, \quad (3.14)$$

where:

$$a_1 = k_{33}^* \beta_0, \quad a_2 = d_{33}^* \beta_0, \quad a_3 = \alpha_{33} \beta_0, \quad a_4 = \xi_{33} \beta_0.$$

The system of equations (3.11), (3.13) and (3.14) formed a mutually coupled system of differential equations for the case, when the boundary conditions are given by (3.12). The solution of the set of equations mentioned above must satisfy boundary and initial conditions appropriate to the given problem.

References

1. C. C. GERHARDS, *Effect of moisture content and temperature on the mechanical properties of wood: An analysis of immediate effects*, Wood Fibr., 14 (1982) 4 - 37.
2. A. RENATA-MANUS, *The viscoelasticity of wood at varying moisture content*, Wood Sci. Technol., 9 (1975) 189 - 205.
3. W. RYBARCZYK, R. GANOWICZ, *A theoretical description of the swelling pressure of wood*, Wood Sci. Technol., 8 (1974) 223 - 241.
4. Z. P. BAŻANT, *Constitutive equation of wood at variable humidity and temperature*, Wood Sci. Technol. 19 (1985) 159 - 177.
5. A. C. ERINGEN, *Continuum Physics*, Vol. II, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
6. K. WILMAŃSKI, *Termodynamika fenomenologiczna — stan badań i perspektywy*, Mech. Teoret. Stos., 21 (1983) 655 - 678.
7. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty — Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa, 1980.
8. R. F. S. HEARMAN, *An introduction to applied anisotropic elasticity*, Oxford University Press, 1961.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВЛАЖНОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПОВЕДЕНИЕ
ОРТОТРОПНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИНОК

В работе выведены основные уравнения для ортотропных вязкоупругих, тонких пластинок подверженных действию влажности и температуры переменных во времени. Предположено, что распределение так влажности как и температуры линейное по толщине пластинки. Принято, что упрощения классической теории тонких пластинок здесь также справедливы.

Формулировка перечисленных уравнений основана на уравнениях движения, конститутивных, а также уравнениях теплопроводности и концентрации влажности для анизотропной вязкоупругой среды. Уравнения построены в первой части работы, при использовании основных принципов механики и термодинамики сплошных сред и ограничении до линейных соотношений.

Streszczenie

WPŁYW ZMIAN WILGOTNOŚCI I TEMPERATURY NA ZACHOWANIE
SIĘ ORTOTROPOWYCH PŁYT LEPKOSPŘĘŻYSTYCH

Zasadniczym celem pracy było wyprowadzenie podstawowych równań dla ortotropowych, lepkospřężystych płyt cienkich poddanych równoczesnemu działaniu wilgotności i temperatury zmiennymi w czasie. Założono, że rozkład zarówno temperatury jak i wilgotności na grubości płyty jest liniowy. Przyjęto również, iż obowiązują założenia upraszczające stosowane w klasycznej teorii płyt cienkich.

Podstawę do sformułowania wyżej wymienionych równań stanowiły równania ruchu, związki konstytutywne oraz równania przewodnictwa ciepła i koncentracji wilgotności dla anizotropowego ośrodka lepkospřężystego. Równania te, co stanowi przedmiot pierwszej części pracy, zbudowano wykorzystując podstawowe prawa mechaniki i termodynamiki ośrodków ciągłych, ograniczając się do relacji liniowych.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 września 1987 roku.

ON PROPERTIES OF THERMO-DIFFUSIVE STRESSES IN SOLIDS

ZBIGNIEW S. OLESIAK

University of Warsaw

1. Introduction

Considering the problems of thermo-diffusion in solid bodies we are interested, as a rule, in finding the distribution of stresses. The effect of uneven heating and that of mass diffusion may result in stress concentration. Likewise there are the cases for which the stresses generated by thermal and (or) diffusive effects can be singular.

In this paper we shall not dwell on the dynamical cases. We shall point out the two-dimensional distributions of thermo-diffusive effects resulting in solid body deformation only. It is shown that in the case of simply connected bodies there are no stresses while for multiconnected bodies the problem can be reduced to that of Volterra's dislocations, determining the character of the stresses. Next we show the features of stresses for the three dimensional layered bodies. Finally we discuss the character of stresses in solids with cracks, taking as an example a disc shaped crack opened by a flux of heat and that of mass diffusion. The stress intensity factor depends on the distribution of known temperature and the distribution of diffusion concentration on the crack surfaces.

2. Basic equations

As our point of departure we take the equations of thermo-diffusion, i.e. the generalized Navier equations, the equation of heat conduction (Fourier's law) and Fick's equation. We have the following system of partial differential equations:

$$(1 - 2\nu)\nabla^2 \mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u} = 2(1 + \nu)(\alpha_\theta \text{grad } \Theta + \alpha_c \text{grad } c), \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \Theta = 0, \quad \nabla^2 c = 0, \quad (2.2)$$

where $\mathbf{u} = (u, v, w)$ is the displacement vector, ν — Poisson's ratio, μ, λ Lamé's constants, $\gamma_\theta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_\theta$, $\gamma_c = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c$, $\Theta(x, y, z)$ change of temperature with respect to the natural state, $c(x, y, z)$ — concentration of diffusing mass, α_θ, α_c coefficients of the linear thermal and diffusive expansion, respectively. In the considered case the constitutive equations (generalized Duhamel-Neumann relations), in absolute notation, take the following form:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{s} + (\lambda \text{div } \mathbf{u} - \gamma_\theta \Theta - \gamma_c c)\mathbf{1}, \quad (2.3)$$

where $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}, \mathbf{1}$ — denote the stress, strain, and unit tensors, respectively.

3. Two-dimensional state of strain

For two-dimensional state of strain Eqs. (2.3) reduce in a cartesian coordinate system to the form:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + (\lambda u_{,\gamma} - \gamma_{\Theta}\Theta - \gamma_c c) \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \quad (3.1)$$

and:

$$\sigma_{33} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) - \gamma_{\Theta}\Theta - \gamma_c c, \quad (3.2)$$

since $\varepsilon_{33} = 0$. Here $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv v$, $u_3 \equiv w$.

Let us assume the representation:

$$u_{\alpha} = u'_{\alpha} + (1+\nu)(\alpha_{\Theta}u_{\alpha}^* + \alpha_c \tilde{u}_{\alpha}). \quad (3.3)$$

We can impose on u_{α}^* and \tilde{u}_{α} ($\alpha = 1, 2$) the additional conditions, namely:

$$u_{1,1}^* = u_{2,2}^* = \Theta(x, y), \quad u_{1,2}^* = -u_{2,1}^*, \quad (3.4)$$

and

$$\tilde{u}_{1,1} = \tilde{u}_{2,2} = c(x, y), \quad \tilde{u}_{1,2} = -\tilde{u}_{2,1}.$$

Then substituting (3.3) into Eqs. (3.1) we obtain:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu(u'_{\alpha,\beta} + u'_{\beta,\alpha}) + \lambda\delta_{\alpha\beta}u'_{\gamma,\gamma}. \quad (3.5)$$

In a similar way, substituting into Navier's equations (3.1), we obtain the system of homogeneous equations:

$$\mu u'_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + \mu)u'_{\beta,\beta\alpha} = 0. \quad (3.6)$$

It is evident from (3.5) that for vanishing tractions $u'_{\alpha} \equiv 0$. Thus we obtain for simply connected bodies:

$$u_{\alpha} = (1+\nu)(\alpha_{\Theta}u_{\alpha}^* + \alpha_c \tilde{u}_{\alpha}), \quad (3.7)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \text{ and}$$

$$\sigma_{33} = -2\mu(1+\nu)(\alpha_{\Theta}\Theta + \alpha_c c). \quad (3.8)$$

Conclusions:

1. For two-dimensional state of strain and uneven heating and (or) diffusing mass concentration penetrating through the boundary there are no stresses except σ_{zz} in a simply connected body bounded by any (non-intersecting) contour. The displacements can be found from Eqs. (3.7) while u_{α}^* and \tilde{u}_{α} from conditions (3.4),

2. This is a generalization of the result given by Muskhelishvili [1] in the case of heat conduction.

3. The same is true for an infinite body with a flux of heat and (or) diffusing mass penetrating through the boundary of a single hole of any shape.

4. The result holds for simply connected two-dimensional solids and plane strain only. In the case of multiconnected regions the problem can be reduced to Volterra's distortions. Then in the expressions for $u_1^* + iu_2^*$ and $\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$ logarithmic terms appear (compare [1], §46).

5. In the classical theory of elasticity it is shown that the two-dimensional stress cases differ by magnitude of constants occurring in the equations. In the case of thermo-diffusive

effects it is difficult to expect that for two-dimensional stress the heat conduction and diffusion of mass could be in plane only. Thus it does not make much sense to consider the two-dimensional stress to be analogous to the two-dimensional strain.

4. Stresses in solids bounded by a plane

We assume that the bounding plane is free from tractions and that over certain domains Ω_θ and Ω_c there act the fluxes of heat and of mass diffusion, respectively. The system of partial differential equations of thermodiffusion in elastic solids can be reduced by applying the exponential Fourier transform:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\xi, \eta) &= \mathcal{F}[f(x, y); x \rightarrow \xi, y \rightarrow \eta], \\ f(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[\bar{f}(\xi, \eta); \xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y], \end{aligned} \tag{4.1}$$

to the following system of the linear ordinary differential equations in the transformed space:

$$\begin{aligned} [(1-2\nu)(D^2-\eta^2)-2(1-\nu)\xi^2]\bar{u}-\xi\eta\bar{v}-i\xi D\bar{w} &= -2(1+\nu)i\xi(\alpha_\theta\bar{\Theta}+\alpha_c\bar{c}), \\ -\xi\eta\bar{u}+[(1-2\nu)(D^2-\xi^2)-2(1-\nu)\eta^2]\bar{v}-i\eta D\bar{w} &= -2(1+\nu)i\eta(\alpha_\theta\bar{\Theta}+\alpha_c\bar{c}), \\ -i\xi D\bar{u}-i\eta D\bar{v}+[2(1-\nu)D^2-(1-2\nu)(\xi^2+\eta^2)]\bar{w} &= 2(1+\nu)(\alpha_\theta D\bar{\Theta}+\alpha_c D\bar{c}), \\ (D^2-\xi^2-\eta^2)\bar{\Theta} &= 0, \quad (D^2-\xi^2-\eta^2)\bar{c} = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

where $D \equiv \frac{d}{dz}$.

The solution to this system of differential equations, with the regularity conditions at infinity taken into account, takes the following form:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (A_1+z\sqrt{\xi^2+\eta^2}B_1)\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \\ \bar{v} &= (A_2+z\sqrt{\xi^2+\eta^2}B_2)\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \\ \bar{w} &= (A_3+z\sqrt{\xi^2+\eta^2}B_3)\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \\ \bar{\Theta} &= A\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \\ \bar{c} &= A_c\exp(-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}), \end{aligned} \tag{4.3}$$

with the relationships:

$$\begin{aligned} \xi B_1+\eta B_2 &= i\sqrt{\xi^2+\eta^2}B_3, \quad \xi B_1 = \eta B_2, \\ \sqrt{\xi^2+\eta^2}[2(1-\nu)B_3-A_3] &= (1+\nu)(\alpha_\theta A_\theta+\alpha_c A_c), \\ \xi A_1+\eta A_2+i\sqrt{\xi^2+\eta^2}[(3-4\nu)B_3-A_3] &= 2i(1+\nu)(\alpha_\theta A_\theta+\alpha_c A_c). \end{aligned}$$

In the case when the shear stress components disappear on the plane $z = 0$ we obtain:

$$\eta A_1 = \xi A_2, \quad i\sqrt{\xi^2+\eta^2}(B_3-A_3) = \eta A_2 + \xi A_1. \tag{4.4}$$

If we also assume that the normal component of the stress tensor vanishes on $z = 0$, we obtain the condition:

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}A_3+(1+\nu)(\alpha_\theta A_\theta+\alpha_c A_c) = 0. \tag{4.5}$$

This condition results from the formula for the transform of the normal stress tensor component:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{zz} &= \frac{2\mu}{1-2\nu} [(1-\nu)D\bar{w} - i\nu(\xi\bar{u} + \eta\bar{v}) - (1+\nu)(\alpha_\theta\Theta + \alpha_c\bar{c})] = \\ &= -\frac{\mu}{1-\nu} [\sqrt{\xi^2 + \eta^2}A_3 + (1+\nu)(\alpha_\theta A_\theta + \alpha_c A_c)](1 + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}z) \cdot \\ &\quad \cdot \exp(-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}).\end{aligned}\quad (4.6)$$

It is evident from Eq. (4.6) that normal stresses are identically zero in the whole space. Though σ_{zz} stress tensor component vanishes in the entire solid, the stress components σ_{xx} and σ_{yy} exist. The corresponding results for the thermal stresses were obtained by Sternberg and McDowell [3] and W. Nowacki [4].

5. Stresses generated by thermodiffusion in solid with a crack

In the case of axial symmetry the system of partial differential equations (3.1) can be reduced by means of the Hankel transforms of the zero and the first order to a system of ordinary differential equations [7]. The solution can be written down in the form of the following Hankel's integrals:

$$\begin{aligned}u &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1+\eta\zeta}{2(1-\nu)} [\psi(\eta) + \varphi(\eta)] - \psi(\eta) \right\} \exp(-\zeta\eta) J_1(\eta\rho) d\eta, \\ w &= \int_0^\infty \left\{ \psi(\eta) + \frac{\eta\zeta}{2(1-\nu)} [\psi(\eta) + \varphi(\eta)] \right\} \exp(-\zeta\eta) J_0(\eta\rho) d\eta, \\ c &= \frac{1}{\alpha_c(1+\nu)a} \int_0^\infty \eta\varphi_1(\eta) \exp(-\zeta\eta) J_0(\eta\rho) d\eta, \\ \Theta &= \frac{1}{\alpha_\theta(1+\nu)a} \int_0^\infty \eta\varphi_2(\eta) \exp(-\zeta\eta) J_0(\eta\rho) d\eta, \\ r &= \rho a, \quad z = \zeta a, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2,\end{aligned}\quad (5.1)$$

and the z component of the stress tensor:

$$\sigma_{zz} = -\frac{\mu}{(1-\nu)a} \int_0^\infty [\psi(\eta) + \varphi(\eta)](1 + \eta\zeta) \exp(-\zeta\eta) J_0(\eta\rho) d\eta. \quad (5.2)$$

The above solution is valid for the boundary conditions $\sigma_{rz}(r, 0) = 0$, $r \in [0, \infty)$, $z = 0$. Function $\psi(\eta)$ can be determined from the remaining mechanical boundary condition on $z = 0$ while $\varphi_1(\eta)$ and $\varphi_2(\eta)$ from the thermal and diffusion boundary conditions, respectively. The solution to the problem is obtained from the corresponding dual integral equations when on the crack surface temperature and diffusion of mass are prescribed.

In the case when the crack surface is traction free the stresses around the crack are generated by the distribution of uneven heating and (or) mass diffusion through the crack surfaces. Here an important remark should be made. For the traction free surfaces the crack is opened only provided the sum $\alpha_c c_0 + \alpha_\theta \vartheta_0$ is negative. If it is positive we deal with a source of heat and that of mass diffusion in an infinite solid and there is neither crack opening nor non zero stress intensity factor.

Let us take an example. Over the crack surface $\Omega = \{z = 0, r \in [0, a]\}$ there act a flux of heat $Q = -Q_c$ and a flux of mass diffusion $\mathfrak{M} = -M_\theta$. Then we obtain the solution:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} a^2 (\alpha_c c_0 + \alpha_\theta \vartheta_0) \int_0^\infty \left\{ [\eta \zeta - (1-2\nu)] \left[\eta^{-2} J_1(\eta) - \frac{1}{2} \eta^{-1} \cos \eta \right] - \right. \\
 &\quad \left. - (1+\eta \zeta) \eta^{-2} J_1(\eta) \right\} J_1(\rho \eta) \exp(-\eta \zeta) d\eta, \\
 w &= \frac{1}{2} (1+\nu) a^2 (\alpha_c c_0 + \alpha_\theta \vartheta_0) \int_0^\infty [2\eta^{-2} J_1(\eta) - \eta^{-1} \cos \eta - \\
 &\quad - \frac{\zeta}{2(1-\nu)} \cos \eta] J_0(\rho \eta) \exp(-\zeta \eta) d\eta, \\
 \sigma_{zz} &= -\frac{\mu(1+\nu)}{2(1-\nu)} a (\alpha_c c_0 + \alpha_\theta \vartheta_0) f(\rho, \zeta), \\
 f(\rho, \zeta) &= \int_0^\infty (1+\eta \zeta) \cos \eta J_0(\rho \eta) \exp(-\eta \zeta) d\eta = \\
 &= R^{-1} \cos \frac{1}{2} \Phi + R^{-3} \zeta \left[\zeta \cos \frac{3}{2} \Phi + \sin \frac{3}{2} \Phi \right],
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

where:

$$R^4 = (\rho^2 + \zeta^2 - 1)^2 + 4\zeta^2, \quad \tan \Phi = \frac{2\zeta}{\rho^2 + \zeta^2 - 1}.$$

We have the special cases, namely:

$$f(0, \zeta) = \frac{2\zeta^3}{(1+\zeta^2)^2}, \quad f(\rho, 0) = H(\rho-1)(\rho^2-1)^{-1/2}. \tag{5.4}$$

The stress intensity factor assumes the value:

$$K_I = \frac{\mu}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} [\alpha_c Q_c + \alpha_\theta M_\theta] a^{3/2}. \tag{5.5}$$

In a similar way we can find the stress intensity factors in all the cases for which the classical "mechanical" solution is known.

References

1. N. I. MUSKHELISHVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, transl. from Russian, 1953, Noordhoff Ltd.,
2. N. NOWACKI, *Thermoelasticity*, 2nd Edition, PWN — Pergamon Press Warsaw, 1986.
3. E. STERNBERG, E. L. MCDOWELL, *On the steady state thermoelastic problems for the half space*, *Quart. Appl. Math.*, 14, 1957, p. 381.
4. W. NOWACKI, *Two steady state thermoelastic problems*, *A.M.S.*, 9, 1957, pp. 579 - 592.
5. Z. OLESIAK, I. N. SNEDDON, *The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3, 1960, pp. 238 - 254.
6. Z. OLESIAK, *On a method of solution of mixed boundary-value problems of thermoelasticity*, *J. Therm. Stresses*, 1981, pp. 501 - 508.
7. Z. S. OLESIAK, *Cracks opened by thermodiffusive effects*, in course of publication, *Bull. Pol. Ac. Sci.*

Резюме

О СВОЙСТВАХ ТЕРМО-ДИФФУЗИОННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе рассмотрены некоторые задачи теории напряжений возникающие как результат действия потока тепла и диффузии массы. Обобщена известна задача Н. И. Мусхелишвили, найдены распределения напряжений от потоков тепла и диффузии на некоторой части плоскости ограничивающей тело, а также найден коэффициент интенсивности напряжений в случае дискообразной трещины.

Streszczenie

O WŁASNOŚCIACH NAPRĘŻEŃ OD TERMODYFUZJI

W pracy przedstawiono kilka zadań teorii naprężeń wywołanych strumieniem ciepła i dyfuzji masy. Uogólniono znane zagadnienie N. I. Muscheliszwilego, znaleziono naprężenia, gdy strumień ciepła i dyfuzji masy działa na części płaszczyzny ograniczającej ciepło. Wyprowadzono również wzór na współczynnik intensywności naprężeń w przypadku szczeliny osiowo symetrycznej.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 lutego 1988 roku.

DYNAMIC STABILITY OF ANTISYMMETRICALLY LAMINATED CROSS-PLY CYLINDRICAL SHELLS

ANDRZEJ TYLIKOWSKI

Warsaw University of Technology

1. Introduction

Dynamic behaviour of thin laminated cylindrical shells is of great importance to engineers. The coupling between bending and tension in laminates results in the necessity to modify the classic equilibrium equations and the boundary conditions for thin uniform cylindrical shells in order to apply them to laminated shells. The reformulation of boundary conditions and the solution of the static buckling problems for the cylindrical shells was done by Almqvist [1]. Numerous papers are available on free vibrations of laminated shells (see for example papers by Bert, Baker and Egle [2], Dong [3], Alam and Asnani [4]). While parametric vibrations and dynamic stability problems for uniform isotropic cylindrical shells under time-dependent membrane forces have drawn much attention, the dynamic stability of cylindrical shells has not been investigated yet.

The purpose of the paper is to analyse the dynamic asymptotic stability of thin elastic cylindrical shells for cross-ply antisymmetric configuration. Membrane forces acting in the shell midsurface are assumed to be deterministic functions of time or stochastic processes with differentiable realizations. The shell consists of an even number of equal thickness orthotropic laminae laid on each other with principal material directions alternating at 0 and $\pi/2$ to the shell axial and circumferential directions. Using the direct Liapunov method we have derived the sufficient conditions for the asymptotic stability and the almost sure asymptotic stability. The influence of geometric and material properties of the shell as well as characteristics of loading on stability regions have been examined numerically.

2. Problem formulation

Let us consider a closed elastic simply supported cylindrical shell of radius a , length l and total thickness h , $a \gg h$, $l \gg h$. The shell consists of an even number of equal thickness orthotropic layers antisymmetrically laminated with respect to its midsurface from both the geometric and the material property standpoint. The Kirchhoff-Love hypothesis on nondeformable normal element is taken into account. Tangential, rotary and coupling

inertias are neglected. For the shell subjected to a concentrated load P and a uniformly distributed radial loading q , the initial membrane loads can be determined by assuming that the shell remains circular and undergoes a uniform compression circumferentially. Consequently:

$$\begin{aligned} N_x &= P/2\pi a, \\ N_\theta &= aq. \end{aligned}$$

Taking into account a linear damping in the radial direction we obtain the equations of the technical theory of thin laminated shells in terms of displacements u , v , w in tangential, circumferential and radial direction, respectively [3]:

$$\begin{aligned} A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,\theta\theta}/a^2 + (A_{12} + A_{66})v_{,x,\theta}/a - B_{11}w_{,xxx} + A_{12}w_{,x}/a &= 0, \\ (A_{12} + A_{66})u_{,x,\theta}/a + A_{66}v_{,xx} + A_{11}v_{,\theta\theta}/a^2 + B_{11}w_{,\theta\theta\theta}/a^3 + A_{11}w_{,\theta}/a^2 &= 0, \\ -B_{11}u_{,xxx} + A_{12}u_{,x}/a + B_{11}v_{,\theta\theta\theta}/a^3 + A_{11}v_{,\theta}/a^2 + D_{11}w_{,xxxx} + & \\ + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xx\theta\theta}/a^2 + D_{22}w_{,\theta\theta\theta\theta}/a^4 + 2B_{11}w_{,\theta\theta}/a^3 + A_{11}w_{,\theta}/a^2 + & \\ + \rho h w_{,tt} + 2\rho\beta h w_{,t} - \bar{N}_x w_{,xx} - \bar{N}_\theta w_{,\theta\theta}/a^2 &= 0, \\ (x, \theta) \in \Omega \equiv (0, 1) \times (0, 2\pi). \end{aligned} \quad (1)$$

Internal forces and moments are expressed by the displacements as follows:

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}u_{,x} + A_{12}v_{,\theta}/a + A_{12}w_{,x}/a - B_{11}w_{,xx}, \\ N_\theta &= A_{12}u_{,x} + A_{11}v_{,\theta}/a + A_{11}w_{,x}/a + B_{11}w_{,\theta\theta}/a^2, \\ N_{x\theta} &= A_{66}(v_{,x} + u_{,\theta}/a), \\ M_x &= B_{11}u_{,x} - D_{11}w_{,xx} - D_{12}w_{,\theta\theta}/a^2, \\ M_\theta &= -B_{11}v_{,\theta}/a - B_{11}w_{,x}/a - D_{12}w_{,xx} - D_{22}w_{,\theta\theta}/a^2, \\ M_{x\theta} &= -2D_{66}w_{,x,\theta}/a. \end{aligned} \quad (2)$$

The closed shell is assumed to be simply supported without displacement in circumferential direction at $x = 0, 1$. The conditions imposed on displacements, internal forces and moments, called according to Almroth's classification $S2$, can be written down as:

$$w = 0, \quad v = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{at } x = 0, 1. \quad (3)$$

Our purpose is to investigate the stability of undisturbed shell surface $u = v = w = 0$ (the trivial solution). A disturbed state is estimated by means of a distance of the solution of system (1) with nontrivial initial conditions from the trivial solution. Under assumption that the membrane forces are the deterministic functions of time we will study the asymptotic stability of trivial solution, i.e. we will derive conditions that imply:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w\| = 0. \quad (4)$$

If the forces are stochastic "nonwhite" processes with sufficiently smooth realizations we shall consider the almost sure asymptotic stability which holds if a probability of event defined by (4) is equal to one:

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|w\| = 0\} = 1. \quad (5)$$

We shall examine the foregoing kinds of stability using the direct Liapunov method, which provides a significant advantage in that the conditions for stability can be obtained without the expicite solving the equations of motion.

3. Derivation of the sufficient stability conditions

We construct a functional as a sum of a modified kinetic energy and the potential energy of the shell in order to apply it as a Liapunov functional:

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [z^2 + 2\beta zw + 2\beta^2 w^2 - M_x w_{,xx} - M_{\theta} w_{,\theta\theta}/a^2 - M_{x\theta} 2w_{,x\theta}/a + N_x u_{,x} + N_{\theta}(v_{,\theta} + w)/a + N_{x\theta}(v_{,x} + u_{,\theta}/a)] ad\Omega, \tag{6}$$

where $z = w_{,t}$.

The functional is positive-definite since the first three terms of integrand can be rearranged as a sum of squares. Therefore, we can choose the square root of functional (6) as the distance used in the stability definitions. Under the previous assumptions imposed on the membrane forces the classic differentiation rule can be applied to calculate the time-derivative of functional (6). Dividing equations of motion (1) by ρh and retaining for convenience the same symbols for coefficients we obtain the time-derivative of functional (6) in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [2(z + \beta w)(-2\beta z + \bar{N}_x w_{,xx} + \bar{N}_{\theta} w_{,\theta\theta}/a^2 + B_{11} u_{,xxx} + \\ & - A_{12} u_{,x}/a - B_{11} v_{,\theta\theta\theta}/a^3 - A_{11} v_{,\theta}/a^2 - D_{11} w_{,xxxx} + \\ & - 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xx\theta\theta}/a^2 - D_{22} w_{,\theta\theta\theta\theta}/a^4 - 2B_{11} w_{,\theta\theta}/a^3 - A_{11} w/a^2) + \\ & - M_{x,t} w_{,xx} - M_{x,z,xx} - M_{\theta,t} w_{,\theta\theta}/a^2 - M_{\theta,z,\theta\theta}/a^2 - 2M_{x\theta,t} w_{,x\theta}/a + \\ & - 2M_{x\theta} z_{,x\theta}/a] ad\Omega + (I_1)_{,t}, \end{aligned} \tag{7}$$

where I_1 denotes an additional functional:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [N_x u_{,x} + N_{\theta}(v_{,\theta} + w)/a + N_{x\theta}(v_{,x} + u_{,\theta}/a)] ad\Omega.$$

Integrating by parts, using boundary conditions (3) and periodicity conditions with respect to variable Θ we prove the following formulae:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{x,xx} z ad\Omega &= \int_0^{2\pi} M_{x,x} z \Big|_0^l ad\Theta - \int_{\Omega} M_{x,x} z_{,x} ad\Omega = - \int_0^{2\pi} M_{x,z,x} \Big|_0^l ad\Theta + \\ &+ \int_{\Omega} M_{x,z,xx} ad\Omega = \int_{\Omega} M_{x,z,xx} ad\Omega, \\ \int_{\Omega} M_{\theta,\theta\theta} z ad\Omega &= \int_{\Omega} M_{\theta,z,\theta\theta} ad\Omega, \\ \int_{\Omega} M_{x\theta,x\theta} z ad\Omega &= \int_{\Omega} M_{x\theta,z,x\theta} ad\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{x,t} w_{,xx} a d\Omega &= \int_{\Omega} M_x z_{,xx} a d\Omega, \\ \int_{\Omega} M_{\theta,t} w_{,\theta\theta} a d\Omega &= \int_{\Omega} M_{\theta} z_{,\theta\theta} a d\Omega, \\ \int_{\Omega} M_{x\theta,t} w_{,x\theta} a d\Omega &= \int_{\Omega} M_{x\theta} z_{,x\theta} a d\Omega. \end{aligned}$$

In a similar way integrating by parts we convert the functional I_1 to the following form:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [-(N_{x,x} + N_{x\theta,\theta}/a)u - (N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta}/a)v + N_{\theta} w/a] a d\Omega.$$

Recognizing the expressions in the parentheses as left hand side expressions of the first two equations of motion (1) we omit them so we can write:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{\theta} w d\Omega.$$

Using the above relations we rewrite the time-derivative of functional (7) as:

$$\frac{dV}{dt} = -2\beta V + 2U, \tag{8}$$

where:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(z + \beta w)(\bar{N}_x w_{,xx} + \bar{N}_{\theta} w_{,\theta\theta}/a^2) + 2\beta^2 wz + 2\beta^3 w^2] a d\Omega. \tag{9}$$

Now we attempt to construct a bound:

$$U \leq \lambda V, \tag{10}$$

where the function λ is to be determined.

Proceeding similarly as Kozin [5] we solve an additional variational problem $\delta(U - \lambda V) = 0$ and we obtain:

$$\begin{aligned} \lambda = \max_{m,n=1,2,\dots} & |\beta^2 + (N_x k_m^2 + N_{\theta} k_n^2)/2| [\beta^2 + D_{11} k_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) k_m^2 k_n^2 + \\ & + D_{22} k_n^4 - 2B_{11} k_n^2/a + A_{11}/a^2 + (2T_{12} T_{13} T_{23} - T_{11} T_{23}^2 - T_{22} T_{13}^2)/ \\ & / (T_{11} T_{22} - T_{12}^2)]^{-1/2}, \end{aligned} \tag{11}$$

where:

$$\begin{aligned} k_m &= m\pi/l, \quad k_n = n/a, \\ T_{11} &= A_{11} k_m^2 + A_{12} k_n^2, \quad T_{12} = -(A_{12} + A_{66}) k_m k_n, \\ T_{22} &= A_{11} k_n^2 + A_{66} k_m^2, \quad T_{13} = -k_m (A_{12}/a + B_{11} k_m^2), \\ T_{23} &= k_n (-B_{11} k_n^2 + A_{11}/a). \end{aligned}$$

Substituting inequality (10) into equation (8) we obtain the differential inequality, from which we have the following estimation of functional (6):

$$V(t) \leq V(0) \exp \left\{ -2t \left[\beta - \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(s) ds \right] \right\}.$$

Thus, it immediately follows that the sufficient stability condition for the asymptotic stability with respect to the distance $\|\cdot\| = V^{1/2}$ is:

$$\beta \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(s) ds, \tag{12}$$

or for the almost sure asymptotic stability, provided processes N_x and N_θ are ergodic and stationary is:

$$\beta \geq E\lambda. \tag{13}$$

where E denotes the operator of the mathematical expectation.

4. Results

Expression (11) and inequality (13) give us possibility to obtain the critical damping coefficient guaranteeing the almost sure asymptotic stability as a function of laminate parameters and statistic characteristics of membrane forces. In order to obtain stability regions, we choose discrete values of force (N_x or N_θ) and compute λ_{mn} . Then we choose the largest value corresponding to the given value of the force and take the expectation numerically integrating the product of λ by the probability density function. This is accomplished for various values of parameters by choosing the variance and varying the damping coefficient until inequality (13) will be satisfied.

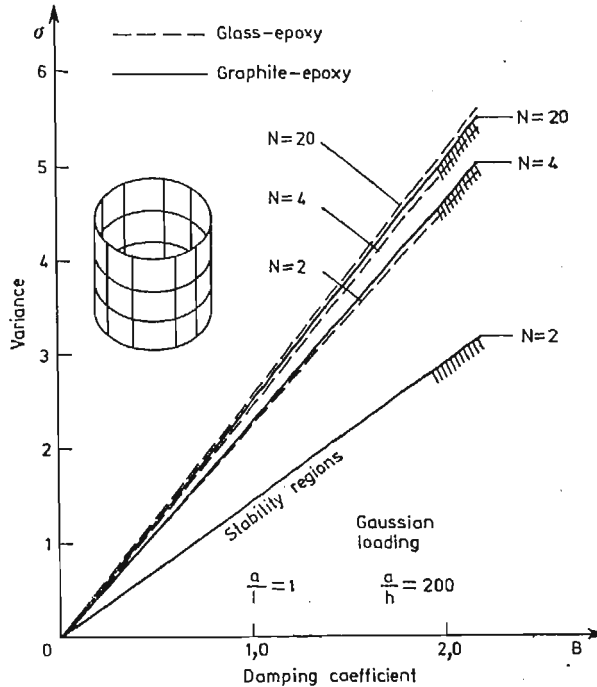


Fig. 1.

Numerical calculations are performed for the gaussian process with zero mean and variance σ^2 and the harmonic process with variance $\sigma^2 = A^2/2$, where A denotes its amplitude, for different number of layers and the shell aspect ratio a/l .

The almost sure asymptotic stability regions as functions of β , σ and number of layers N in the case, when the shell with $a/l = 1$ is loaded by the gaussian process, are shown in Fig. 1. The stability regions are not changed in going from the axial loading to the circumferential one. As the number of layers increases the orthotropic solution is rapidly approached. The coupling between bending and extension depends on the orthotropic moduli ratio E_1/E_2 . It is seen from the figure that for greater ratios E_1 to E_2 the effect of coupling increases.

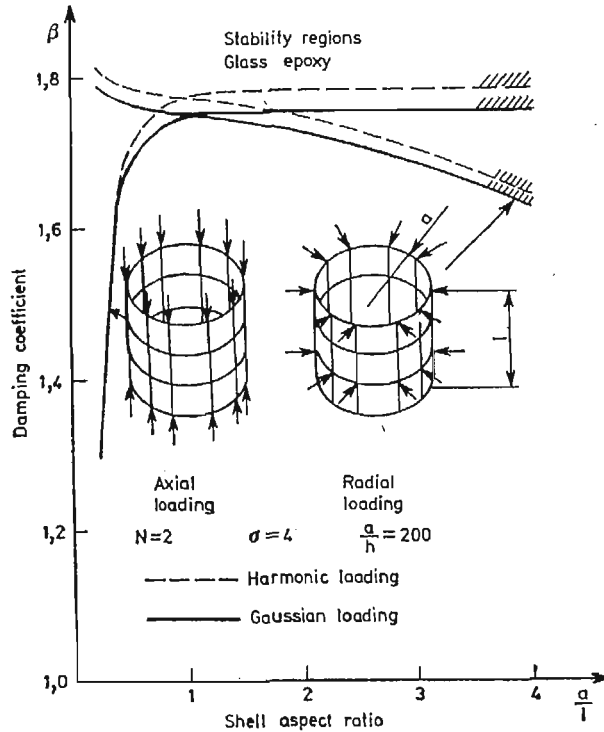


Fig. 2.

The dependence of stability regions as functions of β and the shell aspect ratio a/l for twolayered shell made of glass-epoxy is shown in Fig. 2. It is found that the stability regions are not changed substantially in going from the gaussian process to the harmonic one. The dependence of stability regions on the direction of loading is quite essential.

5. Acknowledgment

This work was supported by Grant No CPBP 02.02 coordinated by The Institute of Fundamental Technological Research of the Polish Academy of Sciences. The support is gratefully acknowledged.

References

1. B. O. ALMROTH, *Influence of edge conditions on the stability of axially compressed cylindrical shells*, AIAA J., 4 (1966) 134 - 140.
2. C. W. BERT, J. L. BAKER, D. M. EGGLE, *Free vibrations of multilayer anisotropic cylindrical shells*, J. Composite Materials, 3 (1969) 480 - 499.
3. S. B. DONG, *Free vibration of laminated orthotropic cylindrical shells*, J. Acoust. Soc. Amer., 44 (1968) 1628 - 1635.
4. N. ALAM, N. T. ASNANI, *Vibration and damping analysis of fibre reinforced composite material cylindrical shell*, J. Composite Materials 21 (1987) 348 - 361.
5. F. KOZIN, *Stability of the linear stochastic systems*, Lect. Not. in Math. 294 (1972) 186 - 229.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АНТИСИММЕТРИЧНО
СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Принимая во внимание, что замкнутая круговая оболочка составлена из четного числа ортотропных слоев антисимметрично расположенных относительно срединной поверхности, исследована асимптотическая и почти наверно асимптотическая устойчивость невыпущенной формы оболочки. Слоя оболочки изготовлены из однородного материала, которого главные направления ортотропии переменено совпадают с аксиальным и меридиональным направлением. В срединной поверхности оболочки действуют усилия зависящие от времени отвечающие исходному безмоментному состоянию. Вводя соответствующий функционал Ляпунова и исследуя его приращение по траектории решения уравнений движения получены достаточные условия устойчивости. Исследовано влияние числа слоев, геометрии оболочки и направления нагрузки на области устойчивости оболочек изготовленных из стекла и эпоксидной смолы или графита и эпоксидной смолы.

Streszczenie

DYNAMICZNA STATECZNOŚĆ ANTYSYMETRYCZNIE POPRZECZNE LAMINOWANYCH
POWŁOK WALCOWYCH

Zakładając, że zamknięta powłoka walcowa zbudowana jest z parzystej liczby ortotropowych warstw antysymetrycznie rozmieszczonych względem powierzchni środkowej zbadana jest asymptotyczna i prawie pewnie asymptotyczna stateczność nieodkształconej powierzchni. Warstwy powłoki wykonane są z ortotropowego materiału którego kierunki główne mają przemiennie kierunek osiowy lub obwodowy. W powierzchni środkowej powłoki działają siły membranowe jawnie zależne od czasu. Konstruując odpowiedni funkcjonal Lapunowa i badając jego wzrost wzdłuż rozwiązań równań ruchu wyznaczono dostateczne warunki stateczności. Przedyskutowano wpływ liczby warstw i współczynników geometrycznych na obszar stateczności powłoki wykonanej z włókna szklanego na bazie żywicy epoksydowej i włókna grafitowego na bazie żywicy epoksydowej.

Praca wpłynęła do Redakcji 14 stycznia 1988 roku.

COMPARISON OF THE BOUNDARY COLLOCATION AND FINITE ELEMENT METHODS FOR SOME HARMONIC 2D PROBLEMS

JAN A. KOŁODZIEJ

Technical University of Poznań

MICHAŁ KLEIBER

Institute of Fundamental Technological Research, Warsaw

GRZEGORZ MUSIELAK

Institute of Fundamental Technological Research, Poznań

1. Introduction

The analytical solutions to boundary value problems typical of mechanics of continuous media are as a rule possible for simple geometries only, such as circular or rectangular regions. Thus, numerical methods are often the only means for solving boundary value problems of engineering significance. The most widely used methods are the finite difference (FDM) and the finite element (FEM) methods. However, in the recent years we have also witnessed the fast development of the so-called boundary methods, [1 - 4]. Thus, in view of the different approaches now available, it seems necessary to work out procedures for effective comparison of them in order to facilitate their optimal choice in a given situation.

A special case of the boundary methods which will be referred to in the present paper is the boundary collocation method (BCM). The method is not very popular in comparison with other boundary methods (such as the boundary integral method) as it is applicable only to linear sets of differential equations for which some general solutions satisfying the equations inside the region considered are known. An extensive review of BCM as used in linear continuous mechanics is given in [5].

There exist a number of papers which attempt to compare the accuracy of results obtained by BCM against the exact solutions obtained analytically, see [6 - 11], for instance. On the other hand, the performance comparisons of BCM and other approximate methods are not numerous. Shuleshko [12] made comparisons for three different versions of the collocation procedure: (a) the BCM in which the equations are exactly satisfied inside the region but only approximately on its boundary, (b) the internal collocation method in which we satisfy exactly the boundary conditions whereas the equations inside the region are fulfilled approximately, and (c) the mixed collocation method in which all

the equations are satisfied in an approximate way only. The comparison was carried out for a torsion problem of a prismatic beam with a rectangular cross-section. The conclusion was that the method (a) was superior to the other approaches.

A comparison of nine approximate methods including BCM was presented in [13] for some thin plate bending problems for which exact solutions were available. Unfortunately, FEM and FDM were not included. As a conclusion the authors classified each of the methods as good, fair or poor depending on eleven selected technical criteria. France [14] compared two versions of BCM in the form of the straightforward boundary collocation method and the overdetermined boundary collocation method with least squares for the case of 2D Laplace equation in the rectangular region. The latter version yielded slightly better results.

The results reported in [15] may be interpreted in favor of BCM as well. For the case of the exact solution to the Laplace equation in the square region with discontinuous boundary conditions five different methods were compared in that paper, including the standard FEM approach and the method of "large singular finite elements", the latter being just a version of BCM based on large elements. This method yielded the most accurate results whereas the FEM performance was very poor.

In [16] the application of "large singular finite elements" to the solution of a torsion problem for a quadrangle, for which no exact solution existed, was proposed. The results were again superior with respect to those obtained by using FEM.

The comparison of BEM and BCM with a special choice of trial functions called by the authors the superposition method was performed in [17]. Nine exact solutions to some plane elasto-static problem were used for comparison. BCM turned out again to yield better results. In [18] some objections as to the results of the paper [17] were raised, but no definite conclusions were formulated.

To the best of authors' knowledge, no paper specifically devoted to the comparison of FEM and BCM has ever been published. Taking into account the popularity of the former method and the simplicity of the latter one, such a comparison seems to be desirable. The more so that the current tendency to combine different methods by exploiting their virtues and eliminating the faults, cf. [3 - 4], [19 - 20], may in this way be given an additional perspective.

The purpose of this paper is to carry out a thorough comparison of BCM and FEM. Some harmonic 2D boundary value problems are considered, for which the exact solutions are available. The key question to be posed below reads: which of the two methods yields more accurate results given the same "level of discretization" measured by the number of assumed degrees of freedom.

2. Test problems and the analytical solutions

The problem chosen for this study are as follows, cf. Fig. 1:
Problem I.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \quad 0 < R < \frac{0.5}{\cos \theta},$$

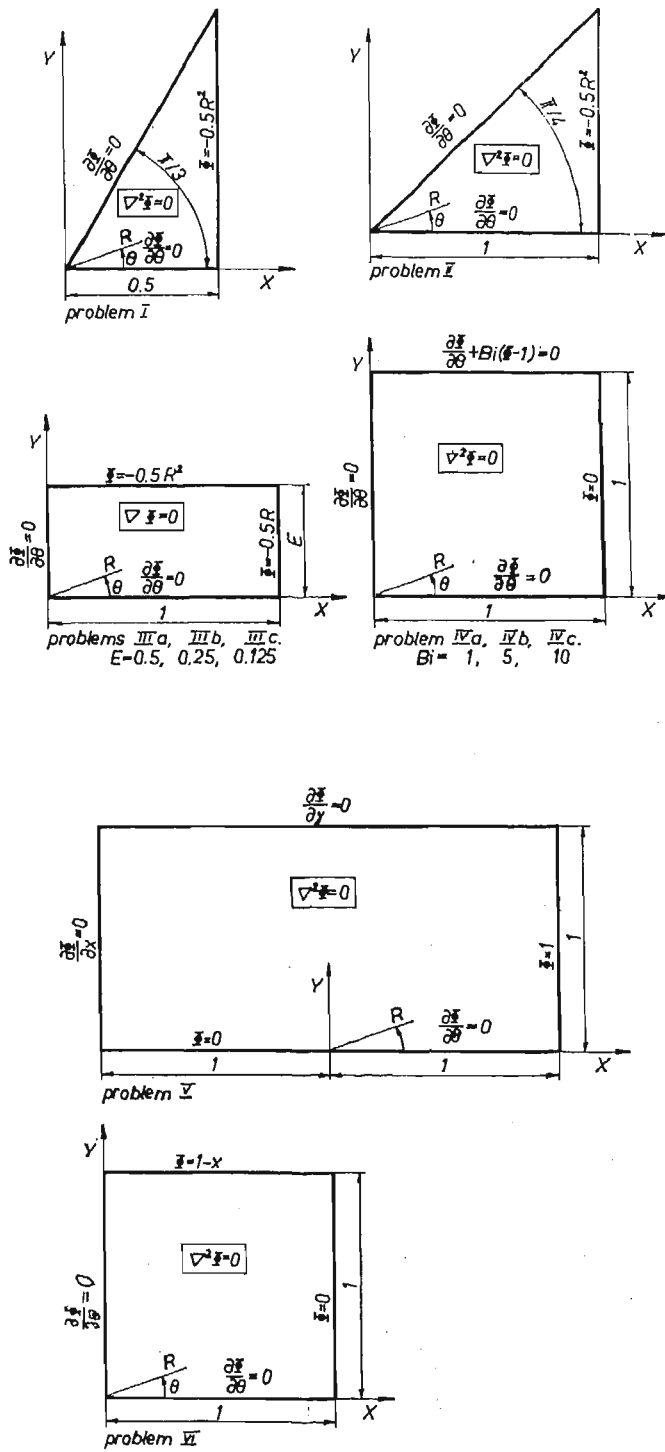


Fig. 1.

with the boundary conditions:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for} \quad \Theta = \begin{cases} 0, & 0 \leq R \leq 0.5 \\ \pi/3, & 0 \leq R \leq 1 \end{cases},$$

$$\Phi = -0.5R^2 \quad \text{for} \quad X = 0.5, \quad 0 \leq Y \leq \sqrt{3}/2.$$

Problem II.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in} \quad 0 < \Theta < \pi/4, \quad 0 < R < 1/\cos \Theta$$

with the boundary conditions:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for} \quad \Theta = \begin{cases} 0, & 0 \leq R \leq 1 \\ \pi/4, & 0 \leq R \leq \sqrt{2} \end{cases},$$

$$\Phi = -0.5R^2 \quad \text{for} \quad X = 1, \quad 0 \leq Y \leq 1.$$

Problem III.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < Y < E,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for} \quad \Theta = \begin{cases} 0, & 0 \leq R \leq 1 \\ \pi/2, & 0 \leq R \leq E \end{cases},$$

$$\Phi = -0.5R^2 \quad \text{for} \quad X = 1, \quad 0 \leq Y \leq E,$$

$$\Phi = -0.5R^2 \quad \text{for} \quad Y = E, \quad 0 \leq X \leq 1.$$

The values of $E = 0.5$, $E = 0.25$, $E = 0.125$ correspond to subproblems IIIa, IIIb, IIIc respectively.

Problem IV.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in} \quad 0 < X < 1, \quad 0 < Y < 1$$

with the boundary conditions:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for} \quad \Theta = \begin{cases} 0, & 0 \leq R \leq 1 \\ \pi/2, & 0 \leq R \leq 1 \end{cases},$$

$$\Phi = 0 \quad \text{for} \quad X = 1, \quad 0 \leq Y \leq 1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + Bi(\Phi - 1) = 0 \quad \text{for} \quad Y = 1, \quad 0 \leq X \leq 1.$$

The values of $Bi = 1$, $Bi = 5$, $Bi = 10$ correspond to subproblems IVa, IVb, IVc respectively.

Problem V.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in} \quad -1 < X < 1, \quad 0 < Y < 1$$

with the boundary conditions:

$$\Phi = 0 \quad \text{for} \quad \Theta = \pi, \quad 0 \leq R \leq 1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for} \quad \Theta = 0, \quad 0 \leq R \leq 1,$$

$$\Phi = 1 \quad \text{for} \quad X = 1, \quad 0 \leq Y \leq 1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0 \quad \text{for } Y = 1, \quad -1 \leq X \leq 1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \quad \text{for } X = -1, \quad 0 \leq Y \leq 1.$$

Problem VI.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in } 0 < X < 1, \quad 0 < Y < 1$$

with the boundary conditions:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for } \Theta = \begin{cases} 0, & 0 \leq R \leq 1 \\ \pi/4, & 0 \leq R \leq 1 \end{cases}$$

$$\Phi = 0 \quad \text{for } X = 1, \quad 0 \leq Y \leq 1,$$

$$\Phi = 1 - X \quad \text{for } Y = 1, \quad 0 \leq X \leq 1.$$

Problems I, II and III may be referred to some solutions of the Saint-Venant torsion problem, cf. [21], problem IV to some steady state temperature problem, cf. [22], problem V is the so called Motz problem, [23], and problem VI was employed in [25] for comparing FEM and BEM. The exact solutions to all the above problems are given in Tabl. I. The derivatives $\partial \Phi / \partial X$ and $\partial \Phi / \partial Y$ may easily be obtained, if necessary.

Table I. Exact solutions of Problem I - VI

Problem	Function Φ	Reference
I	$\Phi = \frac{1}{3} (X^3 - 3XY^2) - \frac{1}{6}$	[21]
II	$\Phi = -\frac{1}{2} (X^2 + Y^2) - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh[n\pi Y/2]}{\cosh[n\pi/2]} \right] \cos(n\pi X/2)$	[21]
III	$\Phi = -\frac{1}{2} (X^2 + Y^2) - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh[n\pi Y/2]}{\cosh[n\pi E/2]} \right] \cos(n\pi X/2)$ $E = 0.5; 0.25; 0,125$	[21]
IV	$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2Bi \cos(\mu_n X) [\exp(\mu_n Y) + \exp(-\mu_n Y)]}{\mu_n [\exp(\mu_n)(\mu_n + Bi) + \exp(-\mu_n)(Bi - \mu_n)]}$ $Bi = 1; 5; 10;$	[22] p. 317
V	$\Phi = \sum_{n=1}^{20} a_n R^{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)\Theta/2]$ coefficients a_n are given in Table Ia	[24]
VI	$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 \cos[(2n+1)\pi X/2] \cosh[(2n+1)\pi Y/2]}{(2n+1)^2 \pi^2 \cosh[(2n+1)\pi/2]}$	[25]

Table Ia. Coefficients a_n in solution of Problem V

n	a_n
1	0.80232490749016884047
2	0.17531184039017583405
3	0.0344758301588936187
4	-0.0161424305193962687
5	0.002880545434045715
6	0.000662109771814473
7	0.00055087468901836
8	-0.00017386598905107
9	0.0000672097568531
10	0.0000307687489651
11	0.000014604603348
12	-0.000006368227833
13	0.00000244129222
14	0.00000106193096
15	0.0000005430244
16	-0.0000002400927
17	0.000000101080
18	0.000000046334
19	0.00000002307
20	-0.00000001059

3. The boundary collocation method

The BCM can be summarized as consisting in using the exact solutions to the governing differential equation(s) of the problem and satisfying the given boundary conditions at a finite number of discrete points along the boundary. The solutions to boundary value problems are used by assuming:

$$\Phi = \sum_{k=1}^N X_k \varphi_k(R, \Theta),$$

where $\varphi_k(R, \Theta)$ are trial functions exactly satisfying the 2D Laplace equation and X_k are unknown parameters to be determined from the boundary conditions.

The selection of the trial functions is a crucial factor in using the method. For each b.v. problem we may find trial functions in the literature of differential equations. In this paper, the selection is made on the basis of the general solutions to the Laplace equation expressed in polar coordinates, so that we take:

$$\Phi = A_0 + B_0 \ln R + \sum_{k=1}^{\infty} [(A_k R^{\lambda_k} + B_k R^{-\lambda_k}) \cos(\lambda_k \Theta) + (C_k R^{\lambda_k} + D_k R^{-\lambda_k}) \sin(\lambda_k \Theta)], \quad (1)$$

where A_0 , B_0 , A_k , B_k , C_k , D_k and λ_k are unknown constants. Some of the constants will be determined from the boundary conditions.

After introducing the polar coordinate system for each of the problems, there holds the condition:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for } \Theta = 0.$$

This condition is satisfied for:

$$C_k = D_k = 0 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

In all the problems the solution at the origin of the coordinate system has a finite value. Thus:

$$B_k = 0 \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots$$

The value of the coefficients λ_k may be found from the boundary condition at $\Theta = \text{const}$ provided $\Theta \neq 0$, which reads each for particular problems as:

Problem I

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for } \Theta = \pi/3 \text{ which yields } \lambda_k = 3k.$$

Problem II

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for } \Theta = \pi/4 \text{ which yields } \lambda_k = 4k.$$

Problems III, IV and VI

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{for } \Theta = \pi/2 \text{ which yields } \lambda_k = 2k.$$

Problem V

$$\Phi = 0 \quad \text{for } \Theta = \pi \text{ which yields } \lambda_k = (2k-1)/2.$$

Using the above results in eq. (1) and confining ourselves to a certain number N of the expansion terms in the solution (1), we proceed by assuming the solution in each particular problem as:

Problem I

$$\Phi = \sum_{k=1}^N X_k R^{3(k-1)} \cos[3(k-1)\Theta].$$

Problem II

$$\Phi = \sum_{k=1}^N X_k R^{4(k-1)} \cos[4(k-1)\Theta].$$

Problems III, IV and VI

$$\Phi = \sum_{k=1}^N X_k R^{2(k-1)} \cos[2(k-1)\Theta].$$

Problem V

$$\Phi = \sum_{k=1}^N X_k R^{(2k-1)/2} \cos[(2k-1)\Theta/2]$$

with X , $k = 1, \dots, N$ being parameters to be determined from the collocation conditions imposed on that part of the boundary, along which the boundary conditions are not yet exactly satisfied. We assume that the collocations points are equally spaced along the boundary, cf. Fig. 2. Imposing the collocation results in a set of linear algebraic equations

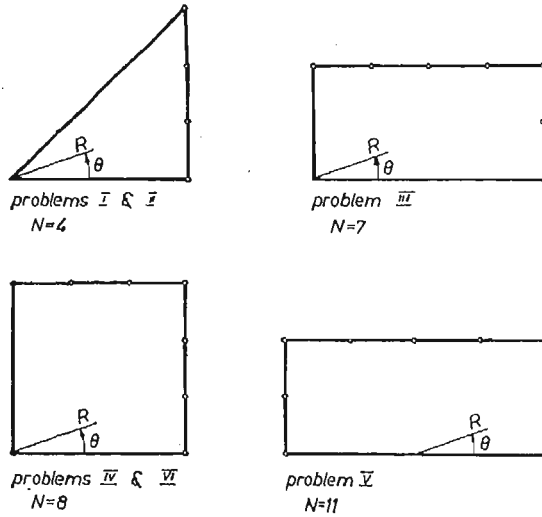
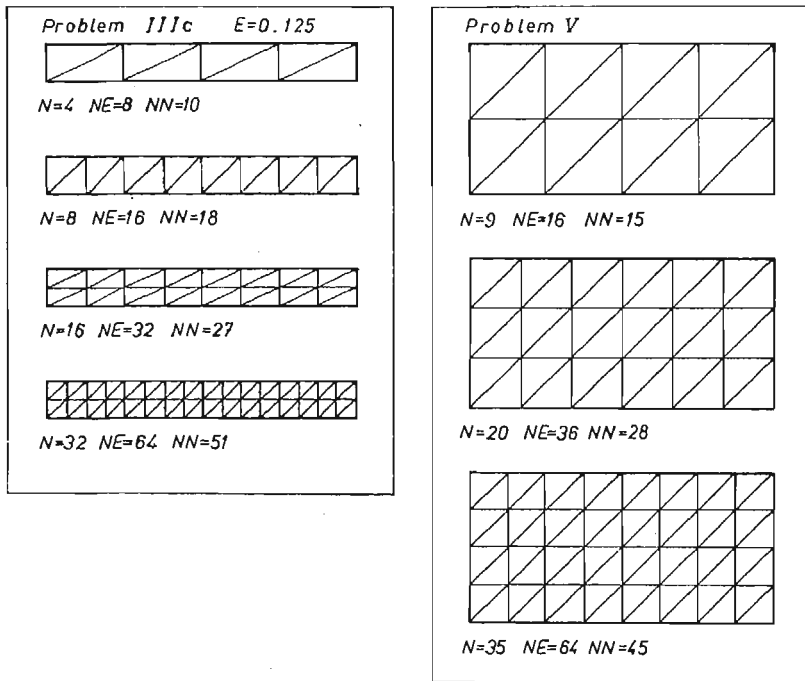


Fig. 2.



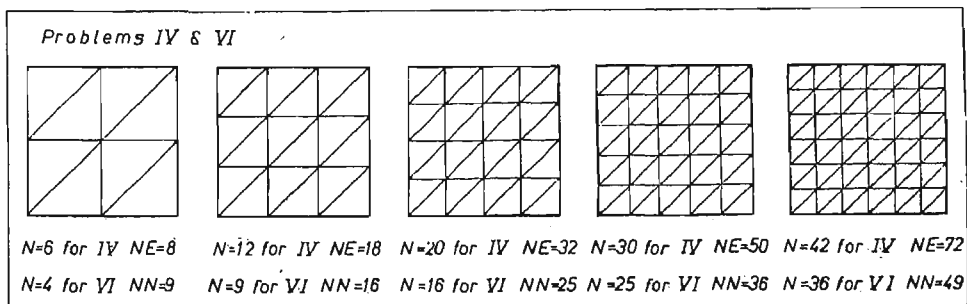
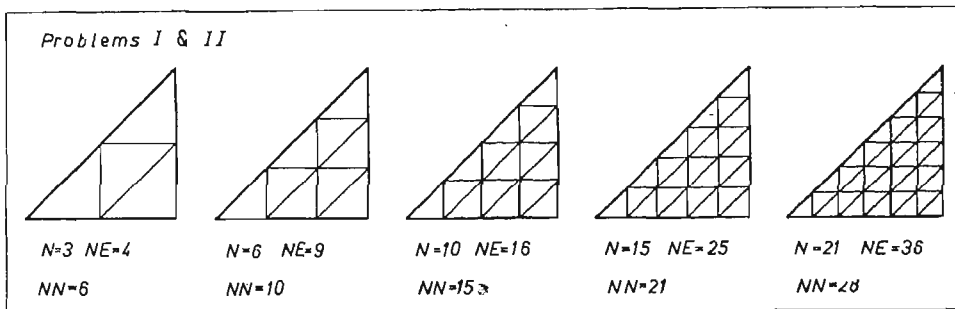
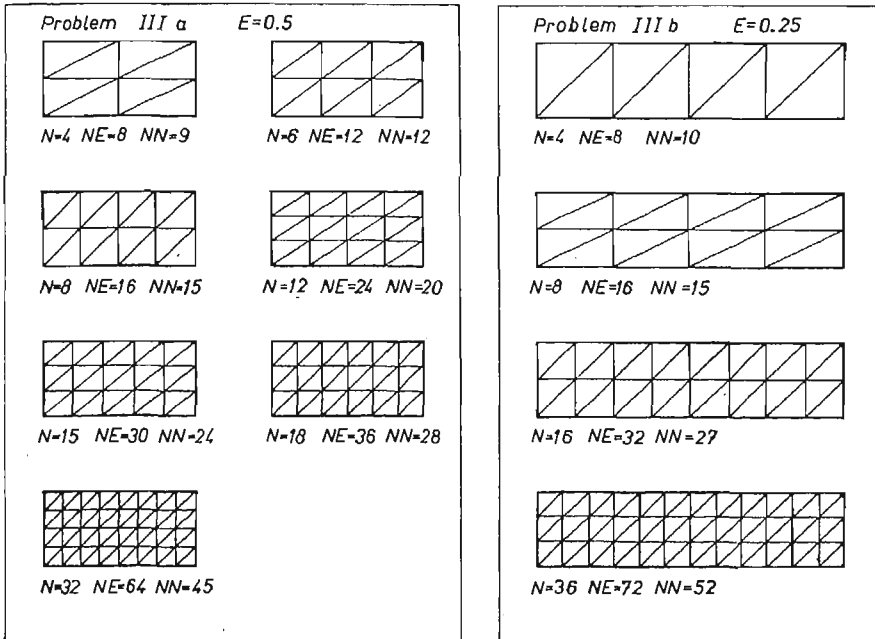


Fig. 3.

for the coefficients X_k . To illustrate this let us just give the explicit form of this equation set for Problem II:

$$\sum_{k=1}^N \{R_i^{4(k-1)} \cos[4(k-1)\Theta_i]\} X_k = -0.5R_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

where:

$$R_i = \sqrt{1 + \frac{(i-1)^2}{(N-1)^2}}, \quad \Theta_i = \arctg \left[\frac{(i-1)}{(N-1)} \right].$$

The number N (i.e. the number of linear equations to be solved) is referred to for the purpose of comparison with the FEM solutions as the number of degrees of freedom. The linear equation solver used in this study was taken from [26], p. 398 in the form of the Gauss elimination routine.

4. The finite element method

The constant strain triangular elements are used as the basis for the FEM program taken from [26]. The discretization patterns are shown in Fig. 3. The number of degrees of freedom in each case is equal to the number of nodes at which the function Φ is unknown.

5. Error criteria

Two different error criteria have been employed. The first one is based on "global" error measures for Φ and its derivatives which are given by:

$$ER1 = \frac{1}{NP} \sum_{i=1}^{NP} |\Phi_e(X_i, Y_i) - \Phi_a(X_i, Y_i, N)|,$$

$$ER2 = \frac{1}{NP} \sum_{i=1}^{NP} \left| \frac{\partial \Phi_e(X_i, Y_i)}{\partial X} - \frac{\partial \Phi_a(X_i, Y_i, N)}{\partial X} \right|,$$

$$ER3 = \frac{1}{NP} \sum_{i=1}^{NP} \left| \frac{\partial \Phi_e(X_i, Y_i)}{\partial Y} - \frac{\partial \Phi_a(X_i, Y_i, N)}{\partial Y} \right|.$$

The subscripts "e" and "a" above refer to the exact and approximate by means of either BCM or FEM solutions respectively. The points (X_i, Y_i) at which the errors are evaluated are uniformly distributed over the domains considered, cf. Fig. 4. The parameter NP used below stands for the number of such points in specific problem.

The second error criterion has a local character and is defined by:

$$PR = \max |\Phi_e - \Phi_a(N)|.$$

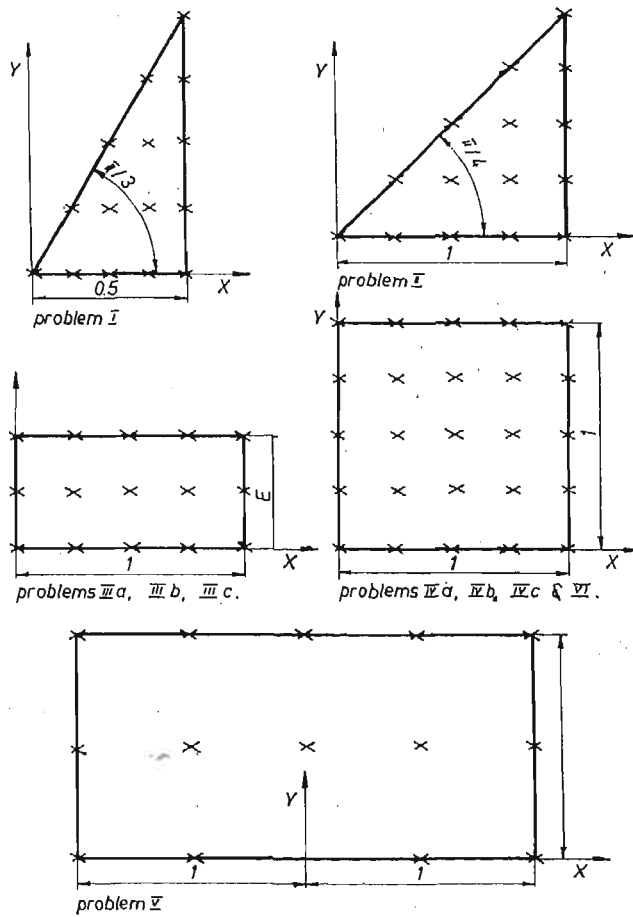


Fig. 4.

To simplify the FEM computations, the maximum is taken over the nodes in the finite element mesh. In BCM the local criterion was applied in the exact way by looking for the maximum of the point error along the boundary.

6. Results and conclusions

As noted before, the way of selecting the trial functions in BCM makes it possible to satisfy exactly not only the differential equation but also the boundary condition on a part of the domain boundary. Moreover, in Problem I we satisfy the boundary condition at the entire boundary by taking $N = 2$. In other words the two first trial functions multiplied by scalar coefficients form the exact solution to this problem. Thus $ER1 = ER2 = ER3 = 0$, cf. Tabl. 2. It is interesting to note that a further increase in the number of expansion terms for this case implies the worsening of the results which is due to the deterioration of the equation set conditioning.

Table II. Global errors and condition number for BCM; Problem I

<i>N</i>	<i>ER1</i>	<i>ER2</i>	<i>ER3</i>	κ
2	0.0	0.0	0.0	0.134 E+1
3	0.931 E-10	0.124 E-9	0.155 E-9	0.457 E+1
4	0.970 E-10	0.206 E-9	0.425 E-9	0.153 E+2
5	0.128 E-9	0.539 E-9	0.135 E-8	0.536 E+2
6	0.145 E-9	0.501 E-9	0.845 E-9	0.196 E+3
7	0.124 E-9	0.542 E-9	0.938 E-9	0.756 E+3
8	0.970 E-10	0.654 E-8	0.125 E-7	0.291 E+4
9	0.186 E-9	0.861 E-9	0.167 E-8	0.116 E+5
10	0.186 E-9	0.685 E-7	0.120 E-6	0.472 E+5
11	0.109 E-9	0.911 E-8	0.159 E-7	0.194 E+6
12	0.299 E-9	0.521 E-6	0.913 E-6	0.807 E+6
13	0.101 E-9	0.434 E-6	0.756 E-6	0.340 E+7
14	0.489 E-9	0.374 E-5	0.648 E-5	0.242 E+8
15	0.640 E-9	0.578 E-5	0.100 E-4	0.612 E+8
20	0.183 E-6	0.138 E-1	0.240 E-1	0.934 E+11

The problem of conditioning for the equation set matrix *A* for BCM requires special attention. Depending on the relative distribution of the collocation points the matrix may become ill-conditioned or even singular. For the equally distributed collocation points assumed in this study, the increase in *N* is always followed by the increase in the condition number defined as [27]:

$$\kappa = \frac{1}{N} \|A\|_E \|A^{-1}\|_E.$$

This clearly means that the conditioning of the governing set of equation becomes worse, cf. Tabs. II and III. This effect allows to formulate a general property of the BCM solutions as obtained in the present study: the increase in *N* pays off to a certain critical value of the number of collocation points only, beyond which the overall performance of BCM

Table III. Global errors of function Φ and condition numbers; Problem II

<i>N</i>	<i>ER1</i>	κ
2	0.110399 E-1	0.190000 E+1
3	0.863781 E-3	0.533193 E+1
4	0.178118 E-3	0.151460 E+1
5	0.245563 E-4	0.467881 E+2
6	0.175982 E-4	0.151932 E+3
7	0.791734 E-5	0.507495 E+3
8	0.365082 E-5	0.174014 E+4
9	0.179495 E-5	0.606870 E+4
10	0.195945 E-5	0.217053 E+5
15	0.189282 E-5	0.148221 E+6
20	0.194735 E-5	0.849611 E+8
25	0.303794 E-5	0.182446 E+10

Table IV. Global errors for straightforward BCM and collocation for unknown function together with 1st derivatives; Problem VI

straightforward BCM				collocation for function and deriv.			
N	ER1	ER2	ER3	N	ER1	ER2	ER3
3	0.736 E-1	0.105 E+0	0.193 E+0	5	0.432 E-1	0.910 E-1	0.132 E+0
5	0.208 E-1	0.627 E+0	0.151 E+0	9	0.138 E-1	0.310 E-1	0.804 E-1
7	0.122 E-1	0.764 E-1	0.146 E+0	13	0.668 E-2	0.259 E-1	0.550 E-1
9	0.282 E-2	0.117 E+0	0.137 E+0	17	0.346 E-2	0.766 E-2	0.518 E-1
11	0.674 E-2	0.220 E+0	0.256 E+0	21	0.362 E-2	0.216 E-1	0.358 E-1
13	0.581 E-2	0.429 E+0	0.412 E+0	25	0.423 E-2	0.224 E-1	0.499 E-1
15	0.584 E-2	0.865 E+0	0.746 E+0	29	0.450 E-2	0.597 E-1	0.582 E-1
17	0.808 E-3	0.179 E+1	0.145 E+1	33	0.516 E-2	0.289 E-1	0.124 E+0
19	0.680 E-2	0.381 E+1	0.315 E+1				
21	0.879 E-2	0.818 E+1	0.672 E+1				

becomes worse, cf. Tabl. 3 in which the best results are underlined. We may therefore say that despite the success of using BCM for solving Problem I, the way of selecting trial function and imposing the boundary conditions employed in this paper (which may be called the straightforward boundary collocation method) has its inherent weaknesses.

Table V. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem I

<i>N</i>	<i>ER1</i>		<i>ER2</i>		<i>ER3</i>	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
2		0.0		0.0		0.0
3	0.116 E-1	0.931 E-10		0.124 E-9		0.155 E-9
6	0.564 E-2	0.144 E-9	0.630 E-1	0.501 E-9	0.831 E-1	0.845 E-9
10	0.868 E-3	0.186 E-9				
15	0.209 E-2	0.640 E-9	0.488 E-1	0.578 E-5	0.428 E-1	0.100 E-4
21	0.129 E-2	0.232 E-6	0.138 E-1	0.738 E-2	0.381 E-1	0.128 E-1

Table VI. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem II

<i>N</i>	<i>ER1</i>		<i>ER2</i>		<i>ER3</i>	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
3	0.225 E-3	0.864 E-3				
6	0.164 E-1	0.176 E-4	0.108 E+0	0.238 E-2	0.106 E+0	0.245 E-2
10	0.332 E-2	0.180 E-4				
15	0.325 E-2	0.189 E-5	0.893 E-1	0.759 E-3	0.473 E-1	0.757 E-3
21	0.252 E-2	0.195 E-5	0.392 E-1	0.537 E-3	0.419 E-1	0.535 E-3
36	0.178 E-2		0.351 E-1		0.406 E-1	

Table VII. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem IIIa, $E = 0.5$

<i>N</i>	<i>ER1</i>		<i>ER2</i>		<i>ER3</i>	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
4	0.903 E-2	0.132 E-2	0.444 E-1	0.480 E-2	0.102 E+0	0.138 E-1
6	0.441 E-2		0.390 E-1		0.849 E-1	
7		0.313 E-4		0.146 E-2		0.623 E-2
8	0.194 E-2		0.368 E-1		0.933 E-1	
10		0.192 E-4		0.832 E-3		0.367 E-2
12	0.212 E-2		0.308 E-1		0.654 E-1	
13		0.154 E-5		0.540 E-3		0.279 E-2
15	0.192 E-2		0.307 E-1		0.949 E-1	
16		0.251 E-5		0.392 E-3		0.230 E-2
18	0.189 E-2		0.309 E-1		0.889 E-1	
19		0.136 E-5		0.301 E-3		0.186 E-2
31		0.239 E-4		0.541 E-2		0.875 E-2
32	0.483 E-3		0.253 E-1		0.557 E-1	
34		0.802 E-5		0.130 E-2		0.361 E-3

As indicated above these are due to sometimes encountered difficulties in making the errors sufficiently small. For Problem VI, for instance, we were not able to obtain the solution better than that having the error of 10%, cf. Tabl. IV. The only way to improve this result

Table VIII. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem IIIb, $E = 0.25$

N	$ER1$		$ER2$		$ER3$	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
2	0.122 E-1		0.195 E+0		0.109 E+0	
4	0.298 E-2		0.120 E+0		0.942 E-1	
6		0.210 E-3		0.666 E-3		0.839 E-2
8	0.449 E-3		0.105 E+0		0.923 E-1	
11		0.280 E-5		0.182 E-3		0.402 E-2
16	0.195 E-3	0.653 E-5	0.646 E-1	0.863 E-4	0.834 E-1	0.250 E-1
21		0.163 E-5		0.101 E-3		0.237 E-2
31		0.159 E-2		0.256 E+0		0.917 E-1
36	0.291 E-3	0.552 E-2	0.476 E-1	0.103 E+0	0.527 E-1	0.223 E-1

Table IX. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem IIIc, $E = 0.125$

N	$ER1$		$ER2$		$ER3$	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
4	0.140 E-2		0.113 E+0		0.416 E-1	
8	0.801 E-3		0.627 E-1		0.395 E-1	
10		0.464 E-4		0.672 E-4		0.449 E-2
16	0.340 E-4		0.593 E-1		0.301 E-1	
18		0.187 E-5		0.436 E-4		0.219 E-2
28		0.231 E-4		0.963 E-4		0.175 E-2
32	0.220 E-4		0.350 E-1		0.307 E-1	
37		0.517 E-2		0.565 E-1		0.707 E-1

Table X. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem IVa, $Bi = 1$

N	$ER1$		$ER2$		$ER3$	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
3		0.399 E-1		0.117 E+0		0.498 E-1
4	0.141 E-1		0.208 E+0		0.791 E+0	
5		0.973 E-2		0.711 E-1		0.213 E-1
9	0.631 E-2	0.211 E-2	0.919 E-1	0.459 E-1	0.680 E-1	0.107 E-1
15		0.636 E-3		0.297 E-1		0.909 E-1
16	0.191 E-2		0.493 E-1		0.325 E-1	
17		0.482 E-3		0.260 E-1		0.872 E-2
25	0.146 E-2	0.208 E-3	0.104 E+0	0.151 E-1	0.982 E-1	0.842 E-2
35		0.168 E-3		0.865 E-2		0.623 E-2
36	0.303 E-3		0.113 E-1		0.357 E-1	
37		0.214 E-3		0.878 E-2		0.562 E-2

is to employ the collocation for the unknown function together with its derivatives, which yields the relative error $ER3$ as small as 3%.

Before formulating final conclusions summarizing the findings of this work we note

Table XI. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem IVb, $Bi = 5$

N	$ER1$		$ER2$		$ER3$	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
3		0.807 E-1		0.382 E+0		0.125 E+0
4	0.374 E-1		0.350 E+0		0.157 E+0	
5		0.206 E-1		0.277 E+0		0.641 E-1
9	0.151 E-1	0.412 E-2	0.327 E+0	0.197 E+0	0.126 E+0	0.432 E-1
15		0.118 E-2				
16	0.541 E-2					
17		0.899 E-3				
25	0.325 E-2	0.384 E-3	0.295 E+0	0.685 E-1	0.112 E+0	0.387 E-1
35		0.233 E-3		0.256 E-1		0.391 E-1
36	0.425 E-2		0.287 E+0		0.649 E-1	
37		0.220 E-3		0.190 E-1		0.387 E-1

Table XII. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem IVc, $Bi = 10$

N	$ER1$		$ER2$		$ER3$	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
3		0.928 E-1		0.585 E+0		0.152 E+0
4	0.491 E-1		0.566 E+0		0.190 E+0	
5		0.247 E-1		0.459 E+0		0.834 E-1
9	0.192 E-1	0.461 E-2	0.521 E+0	0.344 E+0	0.148 E+0	0.708 E-1
15		0.128 E-2				
16	0.862 E-2					
17		0.976 E-3				
25	0.436 E-2	0.497 E-3	0.478 E+0	0.125 E+0	0.846 E-1	0.704 E-1
35		0.350 E-3		0.464 E-1		0.727 E-1
36	0.379 E-2		0.466 E+0		0.708 E-1	
37		0.334 E-3		0.337 E-1		0.726 E-1

Table XIII. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem V

N	$ER1$		$ER2$		$ER3$	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
7		0.169 E-2		0.277 E-2		0.439 E-2
9	0.262 E-1					
11		0.900 E-4		0.253 E-3		0.527 E-3
19		0.356 E-3		0.634 E-3		0.267 E-3
20	0.210 E-1		0.252 E-1		0.357 E-1	
35	0.130 E-1	0.441 E-3		0.457 E-3		0.100 E-2

that only a limited class of problems has been considered. It seems that the problems selected for the analysis happened to favor BCM rather than FEM, because all the problems allowed to pick out such trial functions which assured the exact satisfaction of the boundary conditions at least on a part of the boundary. In other words, rather than attempt-

Table XIV. Comparison of global errors for FEM and BCM; Problem VI

<i>N</i>	<i>ER1</i>		<i>ER2</i>		<i>ER3</i>	
	FEM	BCM	FEM	BCM	FEM	BCM
4	0.227 E-1		0.241 E+0		0.167 E+0	
5		0.432 E-1		0.910 E-1		0.132 E+0
9	0.110 E-1	0.138 E-1	0.161 E+0	0.310 E-1	0.159 E+0	0.804 E-1
13		0.668 E-2		0.259 E-1		0.550 E-1
16	0.558 E-2					
17		0.346 E-2		0.766 E-2		0.518 E-1
25	0.426 E-2	0.423 E-2	0.112 E+0	0.224 E-1	0.101 E+0	0.499 E-1
33		0.516 E-2		0.289 E-1		0.123 E+0

Table XV. Comparison of global errors and local ones for BCM; Problem II

<i>N</i>	<i>ER1</i>	<i>PR</i>
2	0.110 E-1	0.250 E-1
3	0.864 E-3	0.627 E-2
4	0.178 E-3	0.259 E-2
5	0.246 E-4	0.137 E-2
6	0.176 E-4	0.834 E-3
7	0.792 E-5	0.548 E-3
8	0.363 E-5	0.396 E-3
9	0.179 E-5	0.292 E-3
10	0.196 E-5	0.217 E-3
11	0.193 E-5	0.172 E-3
12	0.186 E-5	0.143 E-3
13	0.182 E-5	0.124 E-3
15	0.189 E-5	0.876 E-4

Table XVI. Comparison of global errors and local ones for FEM

Problem III			Problem VI		
<i>N</i>	<i>ER1</i>	<i>PR</i>	<i>N</i>	<i>ER1</i>	<i>PR</i>
4	0.903 E-2	0.101 E-1	4	0.227 E-1	0.628 E-1
6	0.441 E-2	0.595 E-2	9	0.110 E-1	0.383 E-1
8	0.194 E-2	0.443 E-2	16	0.558 E-2	0.279 E-1
12	0.212 E-2	0.323 E-2	25	0.426 E-2	0.220 E-1
15	0.192 E-2	0.250 E-2			
18	0.189 E-2	0.202 E-2			

ting to draw very general conclusions on performance of the both methods we below characterize class of problems considered specifically in this paper only.

The conclusions:

1. For the same numbers of the degrees of freedom, BCM leads to more exact results than FEM (see Tabs. V - XIV).
2. For the same numbers of the degrees of freedom, the accuracy of the BCM depends heavily on the type of the boundary value problem. For instance for the Saint-Venant torsion problem Tabs. VI - IX accuracy is much higher than in Problems IV and VI which describe the steady heat conduction Tabs. X - XII, XIV.
3. In both methods the values of functions are more exact than the values of their derivatives. However, in the BCM the ratio of the function error to the derivative error is much greater.
4. As expected in both methods the global errors are smaller than the local ones, but in the BCM this difference is significantly smaller, (see. Tabs. XV - XVI).
5. In the BCM problems may arise while increasing the number of the degrees of freedom. This may lead to the ill-conditioning of the problem matrix, quite differently than in the FEM.

References

1. A. P. ZIELIŃSKI, M. ŻYCKOWSKI, *The trigonometric contour series in application to clamped plates of an arbitrary contour*, Bull. Polish Acad. Sci., 29, 9 - 10, 159 - 167, 1981.
2. I. HERRERA, H. GOURGEON, *Boundary methods, C-complete systems for Stokes problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 30, 225 - 244, 1982.
3. A. P. ZIELIŃSKI, O. C. ZIENKIEWICZ, *Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions*, Int. j. num. meth. eng., 21, 509 - 528, 1985.
4. J. JIROUSEK, L. GUÉX, *The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plane bending*, Int. j. num. meth. eng., 23, 651 - 693, 1986.
5. J. A. KOŁODZIEJ, *Review of application of boundary collocation method in mechanics of continuous medium*, Solid Mechanics Archives, 12, 187 - 231, 1987.
6. J. BARTA, *Über die näherungsweise Lösung einiger Zweidimensionaler Elastizitätsaufgaben*, ZAMM, 17, 184 - 185, 1937.
7. H. D. CONWAY, *Approximate Analysis of Certain Boundary Value Problems*, J. Appl. Mech., 27, 275 - 277, 1960.
8. A. W. LEISSA, C. C. LO, F. W. NIEDENFUHR, *Uniformly Loaded Plates of Regular Polygonal Shape*, AIAA Journal, 3, 566 - 567, 1965.
9. C. J. HOOKE, *Numerical solution of axisymmetric-stress problems by point matching*, J. Strain Anal., 5, 25 - 37, 1969.
10. T. WAH, *Elastic quadrilateral plates*, Computers Structures, 10, 457 - 466, 1979.
11. D. REDEKOP, *Fundamental solutions for the collocation method in planar elastostatics*, Appl. Math. Modelling, 6, 390 - 393, 1982.
12. P. SHULESHKO, *Comparative analysis of different collocation method on the basis of the solution of a torsional problem*, Australian Journal of Applied Science, 12, 194 - 210, 1961.
13. A. W. LEISSA, W. E. CLAUSEN, L. E. HULBERT, A. T. HOPPER, *A Comparison of Approximate Methods for the Solution of Plate Bending Problems*, AIAA Journal, 7, 920 - 929, 1969.
14. D. M. FRANCE, *Analytical Solution to Steady-State Heat-Conduction Problems With Irregularly Shaped Boundaries*, J. Heat Transfer, 93, 449 - 454, 1971.

15. M. D. TOLLEY, S. J. WAJC, *Approximate Solution Methods of Laplace's Equation for a Square Domain*, in *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations-II*, R. Vichnevetsky editor. Publ. IMACS AICA, pp. 26 - 33, 1977.
16. D. LEFEBER, P. JANSSENS, *Sur le calcul de la torsion dans les barres a section polygonale*, Academie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5 serie-tome LXIX, 514 - 524, 1983 - 10.
17. G. BURGESS, E. MAHAJERIN, *A comparison of the boundary element and superposition methods*, *Computers Structures*, 19, 697 - 705, 1984.
18. G. BEER, *Comment on „A comparison of the boundary element and superposition methods”*, *Computers Structures*, 23, 459, 1986.
19. O. C. ZIENKIEWICZ, D. W. KELLY, P. BETTESS, *The coupling of the finite element method and boundary solution procedures*, *Int. j. num. meth. eng.*, 11, 355 - 375, 1977.
20. O. C. ZIENKIEWICZ, D. W. KELLY, P. BETTESS, *Marriage a la mode — the best of both worlds finite elements and boundary integrals*, ch. 5 in *Energy Methods in Finite Element Analysis* Eds. R. Glowinski, E. Y. Rodin and O. C. Zienkiewicz. Wiley, London and New York, 1979, pp. 81 - 107.
21. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1981.
22. S. J. GDULA, R. BIAŁECKI, K. KURPISZ, A. NOWAK, A. SUCHETA, *Przewodzenie ciepła*, PWN, Warszawa 1984.
23. A. MOTZ, *Treatment of singularities of partial differential equation by relaxation methods*, *Quart. J. Appl. Math.*, 4, 371 - 377, 1946.
24. J. B. ROSSER, N. PAPAMICHAEL, *A power series solution of a harmonic mixed boundary value problem*, MRC Technical Summary Repoer 1405, University of Wisconsin — Madison, Mathematics Research Center, 1975.
25. S. MUKHERJEE, M. MARIARIA, *On the efficiency and accuracy of the boundary element method and the finite element method*, *Int. j. num. meth. eng.*, 20, 515 - 522, 1984.
26. K. H. HUEBNER, *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley Sons, New York, London, Sydney and Toronto, 1975.
27. G. FAIRWEATHER, *A note on the condition of a matrix*, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 11, 191 - 195, 1984.

Резюме

СРАВНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНОЙ КОЛЛОКАЦИИ И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ДВУМЕРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Предметом работы является проблема сравнения эффективности и точности вычисления методом граничной коллокации и методом конечных элементов. Исследуются двумерные гармонические краевые задачи. Метод граничной коллокации применяется в прямой версии.

Решения полученные с помощью выше упомянутых методов были сравнены для функций и их производных с точными решениями. С численных исследований можно вывести, что для того же самого числа степеней свободы результаты полученные с помощью метода граничной коллокации являются более точными чем полученные с помощью метода конечных элементов. Однако эта положительная черта может быть уменьшена том фактом, что метод граничной коллокации требует решения системы уравнений с полной матрицей, так как в методе конечных элементов получаем ленточную и хорошо обусловленную матрицу.

Streszczenie

PORÓWNANIE METODY KOLLOKACJI BRZEGOWEJ Z METODĄ ELEMENTÓW
SKOŃCZONYCH DLA NIEKTÓRYCH HARMONICZNYCH DWUWYMIAROWYCH
PROBLEMÓW BRZEGOWYCH

W pracy porównano efektywność i dokładność obliczeniową metody kollokacji brzegowej i metody elementów skończonych. Rozważano dwuwymiarowe, harmoniczne problemy brzegowe. Metoda kollokacji brzegowej była stosowana w tzw. prostej wersji.

Rozwiązania uzyskane przy pomocy wyżej wymienionych metod były porównywane dla funkcji i ich pochodnych z rozwiązaniami dokładnymi.

Z badań numerycznych można wyciągnąć wniosek, że dla tej samej liczby stopni swobody wyniki uzyskane przy pomocy metody kollokacji brzegowej są dokładniejsze od uzyskanych przy pomocy metody elementów skończonych. Jednakże ta cecha dodatnia może być pomniejszona przez fakt, że metoda kollokacji brzegowej wymaga rozwiązania układu równań liniowych z całkowicie wypełnioną macierzą współczynników gdy tymczasem metoda elementów skończonych daje pasmową i zwykle lepiej uwarunkowaną macierz.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 lipca 1987 roku.

METODA ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH W ZAGADNIENIACH GEOMETRYCZNIE NIELINIOWYCH

ANNA PODHORECKA

Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz

1. Wstęp

Zagadnienia formułowane i analizowane w nieliniowej mechanice continuum sprowadzają się do rozwiązywania złożonych układów równań różniczkowych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych i czasu. Znamy szereg prób zastosowania różnorodnych metod analitycznych i numerycznych do rozwiązywania tego typu problemów. Jedną ze stosowanych z powodzeniem metod jest metoda elementów skończonych, której podstawowa zaleta, to łatwość automatyzowania obliczeń. O licznych zastosowaniach tej metody traktuje monografia Zienkiewicza [1]. Zrobiono tam też wzmiankę o możliwości stosowania elementów skończonych w przestrzeni i czasie, odsyłając zainteresowanych do prac źródłowych [2, 3]. Jednakże ani w żadnej z tych prac, ani w rozprawach Argyrisa, Scharpfa i Chana [4, 5] nie wprowadzono pojęcia elementu czasoprzestrzennego. Jedynie Oden w pracy [6] potraktował czasoprzestrzeń jako obiekt dzielony na elementy skończone, ale w późniejszych jego publikacjach nie napotkano żadnych śladów rozwijania tego pomysłu. W 1975 roku Kączkowski [7, 8] wykorzystując do końca wszystkie konsekwencje wynikające z wprowadzenia czwartego wymiaru i nadając wielkościom dynamicznym własne interpretacje geometryczne lub statyczne opracował metodę elementów czasoprzestrzennych (MECZ).

W metodzie tej traktowanie na równi czasu i przestrzeni umożliwia wprowadzenie pojęcia elementu czasoprzestrzennego i pozwala na formalne stosowanie znanych procedur wyznaczania macierzy sztywności ustroju, bez potrzeby jakichkolwiek ich modyfikacji. Idea metody Kączkowskiego (MECZ) polega na dyskretyzacji continuum czasoprzestrzennego, w wyniku czego przejście od równań różniczkowych cząstkowych do równań algebraicznych odbywa się w jednym etapie. W klasycznym podejściu do numerycznej analizy zjawisk dynamicznych postępuje się inaczej; z równań cząstkowych przechodzi się do równań różniczkowych zwyczajnych, które dopiero po wykonaniu odpowiedniej dyskretyzacji zastępujemy równaniami algebraicznymi. Próbę wykorzystania MECZ do zagadnień geometrycznie nieliniowych przedstawił Witkowski w swojej pracy habilitacyjnej [9].

W niniejszej pracy pokazano inne rozwiązanie dynamicznych problemów geometrycznie nieliniowych metodą elementów czasoprzestrzennych.

2. Odkształcenia

Przyjęto opis materialny zmiennych konfiguracji (opis Lagrange'a). Jeżeli korzystamy z tego samego kartezjańskiego (prostoliniowego i ortogonalnego) układu współrzędnych do opisu zarówno konfiguracji pierwotnej jak też końcowej, to tensor odkształcenia Greena E_{ij} można wyrazić wzorem [10]:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right] - E_{ij}^0, \quad (2.1)$$

(E_{ij}^0 — odkształcenia wstępne, \mathbf{u} — wektor przemieszczeń).

Składowe stanu naprężenia odniesione do stanu pierwotnego reprezentuje tensor naprężenia Kirchhoffa (II tensor Pioli-Kirchhoffa) S_{ij} :

$$S_{ij} = D_{ijkl}(E_{ij})E_{ij} + S_{ij}^0, \quad (2.2)$$

gdzie D_{ijkl} jest tensorem zależnym od cech materiałowych i odkształceń, a S_{ij}^0 oznacza naprężenia wstępne. Jawne sformułowanie tensora D_{ijkl} , np. dla ciała liniowo sprężystego, nie jest łatwe, gdyż składowe tensora odkształcenia E_{ij} nie mają interpretacji geometrycznej. Taką interpretację mają natomiast wydłużenia względne ε_{kk} i odkształcenia postaciowe γ_{ik} [10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= \sqrt{1+2E_{kk}} - 1, \\ \cos \varphi_{ik} &= \cos(90^\circ - \gamma_{ik}) = \sin 2\varepsilon_{ik} = \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}}, \\ \gamma_{ik} &= 2\varepsilon_{ik}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie γ_{ik} oznacza miarę zmiany kąta prostego. Rozłóżmy funkcje (2.3) w szereg potęgowy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= \sqrt{1+2E_{kk}} - 1 = E_{kk} \left(1 - \frac{1}{2} E_{kk} + \frac{1}{2} E_{kk}^2 + \dots \right), \\ |2E_{kk}| &\leq 1, \\ 2\varepsilon_{ik} &= \arcsin \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} = E_{ik} \left\{ \frac{2}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \frac{E_{ik}E_{ik}}{[\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}]^3} + \dots \right\}, \\ \left| \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} \right| &< 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Symetryczny tensor Pioli-Kirchhoffa S_{ij} można zapisać w formie prawa liniowego stosując miary ε_{ik} (2.4):

$$S_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + S_{ij}^0. \quad (2.5)$$

Tensor własności materiałowych C_{ijkl} nie zależy od odkształceń i np. dla ciała izotropowego opisuje go wzór:

$$C_{ijkl} = \lambda' \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu' (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.6)$$

(λ' i μ' — stałe Lamégo).

Wprowadzając związki (2.4) do wzoru (2.5) uzyskamy prawo fizyczne w postaci (2.2), przy czym tensor $D_{ijkl}(E_{ij})$ ma postać:

$$D_{ijkl}(E_{ij}) = \begin{cases} C_{ijkl}a_{kk} & \text{dla } l = k, \\ C_{ijkl}b_{kl} & \text{dla } l \neq k, \end{cases} \quad (2.7)$$

gdzie:

$$a_{kk} = 1 - \frac{1}{2} E_{kk} + \frac{1}{2} E_{kk}E_{kk} - \dots, \quad (2.8)$$

$$b_{kl} = \frac{1}{\sqrt{(1+2E_{kk})(1+2E_{ll})}} \left\{ 1 + \frac{2E_{lk}E_{lk}}{3(1+2E_{ll})(1+2E_{kk})} + \dots \right\}.$$

Przy założeniu małych odkształceń E_{ik} można przyjąć, że tensor D_{ijkl} nie zależy od odkształceń:

$$D_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad (2.9)$$

gdź:

$$a_{kk} \cong 1, \quad b_{kl} \cong 1.$$

Mając S_{ij} i u_i można wyznaczyć tensor naprężenia Cauchy [10] odniesiony do konfiguracji aktualnej:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left[S_{ij} + \left(\delta_{i\beta} \frac{\partial u_j}{\partial X_\alpha} + \delta_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} + \frac{\partial u_j}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} \right) S_{\alpha\beta} \right]. \quad (2.10)$$

Liniowa zależność tensora Pioli-Kirchhoffa S_{ij} od odkształceń wcale nie oznacza jednoczesnej liniowości tensora Cauchy'ego σ_{ij} , co wprost wynika z wzoru (2.10).

3. Równanie czteropracy wirtualnej

Rozpatrujemy ciało stanowiące ośrodek ciągły, które w konfiguracji początkowej charakteryzują objętość \mathcal{B}_0 , powierzchnia brzegowa $\partial\mathcal{B}_0$ i gęstość ρ_0 , a w konfiguracji aktualnej odpowiednio \mathcal{B} , $\partial\mathcal{B}$, ρ .

Pracę sił zewnętrznych (p_{0i} — siły powierzchniowe, $\rho_0 f_{0i}$ — siły masowe, $\rho_0 \ddot{u}_i$ — siły bezwładności) na wirtualnych przemieszczeniach δu_i wyraża wzór:

$$\delta L_z = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \rho_0 f_{0i} dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \rho_0 \ddot{u}_i dV_0. \quad (3.1)$$

Podobnie możemy opisać pracę sił wewnętrznych (naprężeń) na wirtualnych odkształceniach δE_{ij} :

$$\delta L_w = \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{ij} S_{ij} dV_0. \quad (3.2)$$

Korzystając z równości prac sił wewnętrznych i zewnętrznych mamy:

$$\delta L = \delta L_z - \delta L_w = 0,$$

$$\delta L = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \rho_0 f_{0i} dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \rho_0 \ddot{u}_i dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{ij} S_{ij} dV_0 = 0. \quad (3.3)$$

Równość pracy sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach i pracy sił wewnętrznych na wirtualnych odkształceniach musi zachodzić w każdej chwili t m.in. należącej do przedziału czasu od t_p do t_k [11].

$$\delta\chi = \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{0i} dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \ddot{u}_i dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{IJ} S_{IJ} dV_0 \right\} dt = 0, \quad (3.4)$$

Wykonując całkowanie przez części trzeciej całki:

$$\int_{t_p}^{t_k} \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \ddot{u}_i dV_0 dt = \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \dot{u}_i \Big|_{t_p}^{t_k} dV_0 - \int_{t_p}^{t_k} \int_{\mathcal{B}_0} \delta \dot{u}_i \varrho_0 \dot{u}_i dV_0 dt, \quad (3.5)$$

uzyskujemy ostatecznie równie czteropracy wirtualnej [8]:

$$\begin{aligned} \delta\chi = \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{0i} dV_0 \right\} dt - \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \dot{u}_i \Big|_{t_p}^{t_k} dV_0 + \\ + \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\mathcal{B}_0} \delta \dot{u}_i \varrho_0 \dot{u}_i dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{IJ} S_{IJ} dV_0 \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Jeżeli wprowadzimy ograniczenie, że w chwilach t_p i t_k wariacje δu_i zanikają [12, 13]:

$$\delta u_i(t_p) = \delta u_i(t_k) = 0, \quad (3.7)$$

to równanie (3.6) przyjmie prostszą formę:

$$\delta\chi = \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{0i} dV_0 \right\} dt + \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\mathcal{B}_0} \delta \dot{u}_i \varrho_0 \dot{u}_i dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{IJ} S_{IJ} dV_0 \right\} dt = 0. \quad (3.8)$$

Kolejne całki równania (3.8) reprezentują:

— wariację energii potencjalnej obciążeń:

$$dL = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{0i} dV_0, \quad (3.9)$$

— wariację energii kinetycznej:

$$\delta E_k = \int_{\mathcal{B}_0} \delta \dot{u}_i \varrho_0 \dot{u}_i dV_0, \quad (3.10)$$

— wariację energii potencjalnej odkształceń:

$$\delta E_p = \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{IJ} S_{IJ} dV_0. \quad (3.11)$$

Wprowadzając oznaczenia całek (3.9)÷(3.11) do równania (3.8) uzyskamy zasadę Hamiltona [10]:

$$\delta\chi = \delta \int_{t_p}^{t_k} (L + E_k - E_p) dt = 0, \quad (3.12)$$

gdzie:

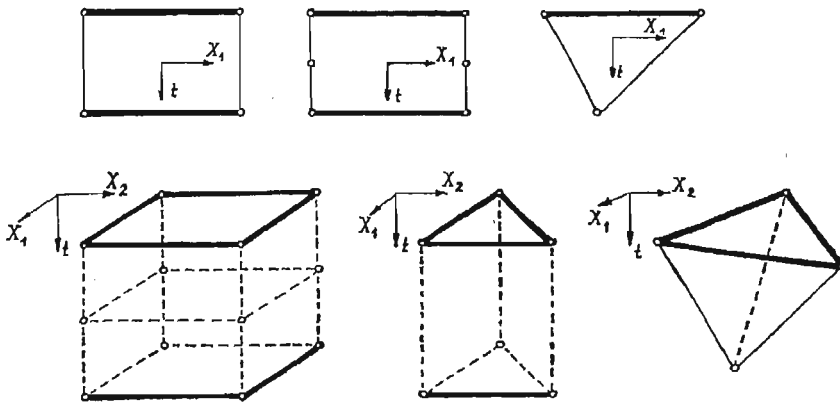
$$A = L + E_k - E_p \tag{3.13}$$

jest funkcją Lagrange'a.

Z powyższych rozważań wynika, że równanie czteropracy wirtualnej (3.6) ma charakter bardziej ogólny niż zasada Hamiltona (3.8).

4. Równanie ruchu dla zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni

Czasoprzestrzeń dyskretyzujemy na skończoną liczbę elementów czasoprzestrzennych o dowolnym kształcie (rys. 1).



Rys. 1.

Pole przemieszczeń elementu i pole prędkości tych przemieszczeń opisują funkcje:

$$\begin{aligned} u_i^e(X, t) &= N_{i\alpha}^e(X, t) r_\alpha^e, \\ \dot{u}_i^e(X, t) &= \dot{N}_{i\alpha}^e(X, t) r_\alpha^e, \\ e &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie $N_{i\alpha}^e(X, t)$ jest funkcją kształtu zależną od X i t , a r_α^e — przedstawia przemieszczenia węzłów.

Wariacje przemieszczeń i wariacje prędkości przemieszczeń można opisać innymi funkcjami kształtu (w szczególności $W_{i\alpha} = N_{i\alpha}$ — sposób Galerkinia) [1]:

$$\begin{aligned} \delta u_i^e(X, t) &= W_{i\alpha}^e(X, t) \delta r_\alpha^e, \\ \delta \dot{u}_i^e(X, t) &= \dot{W}_{i\alpha}^e(X, t) \delta r_\alpha^e. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Odkształcenia E_{ij} (2.1) elementu czasoprzestrzennego są w następujący sposób zależne od przemieszczeń węzłów:

$$E_{ij}^e(X, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i^e}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^e}{\partial X_i} - \frac{\partial u_k^e}{\partial X_i} \frac{\partial u_k^e}{\partial X_j} \right] = [{}'B_{ij\alpha}^e + {}''B_{ij\alpha}^e] r_\alpha^e, \tag{4.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}'B_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} [N_{i\alpha,j}^e + N_{j\alpha,i}^e], \\ {}''B_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} N_{k\alpha,i}^e N_{k\beta,j}^e r_\beta^e. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Podobnie od przemieszczeń węzłowych elementu czasoprzestrzennego uzależniamy wariacje odkształceń:

$$\delta E_{ij}^e(X, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u_i^e)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\delta u_j^e)}{\partial X_i} + 2 \frac{\partial(\delta u_k^e)}{\partial X_i} \frac{\partial(\delta u_k^e)}{\partial X_j} \right] = [{}'\tilde{B}_{ij\alpha}^e + 2''\tilde{B}_{ij\alpha}^e] \delta r_\alpha^e \quad (4.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}'\tilde{B}_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} (W_{i\alpha,j}^e + W_{j\alpha,i}^e), \\ {}''\tilde{B}_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} W_{k\alpha,i}^e W_{k\beta,j}^e r_\beta^e. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Naprężenia (2.2) po wykorzystaniu wzoru (4.3) opiszemy następująco:

$$S_{ij}^e = D_{ijkl}^e E_{kl}^e = D_{ijkl}^e ({}'B_{kl\alpha}^e + {}'B_{k\alpha l}^e) r_\alpha^e. \quad (4.7)$$

Dla ciała liniowo sprężystego tensor D_{ijkl} określa wzór (2.7), przy czym wielkości a_{kk} i b_{kl} wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned} a_{kk}^e &= 1 - \frac{1}{2} ({}'B_{kk\alpha}^e + {}''B_{kk\alpha}^e) r_\alpha^e + \dots, \\ b_{kl}^e &= \frac{1}{\sqrt{\{1 + 2[{}'B_{kk\alpha}^e + {}''B_{kk\alpha}^e] r_\alpha^e\} \{1 + 2[{}'B_{ll\beta}^e + {}''B_{ll\beta}^e] r_\beta^e\}}} \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2[{}'B_{kl\alpha}^e + {}''B_{kl\alpha}^e] r_\alpha^e [{}'B_{kl\beta}^e + {}''B_{kl\beta}^e] r_\beta^e}{3 \{1 + 2[{}'B_{kk\alpha}^e + {}''B_{kk\alpha}^e] r_\alpha^e\} \{1 + 2[{}'B_{ll\beta}^e + {}''B_{ll\beta}^e] r_\beta^e\}} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wprowadzając związki (4.1) ÷ (4.9) do równania czteropracy wirtualnej (3.6) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \delta \chi &= \sum_{e=1}^m \left\{ \iint_{\partial\Omega_e} \delta r_\alpha^e p_{0i}^e N_{i\alpha}^e d(\partial\Omega) + \int_{\Omega_e} \delta r_\alpha^e \rho_0^e f_{0i}^e N_{i\alpha}^e d\Omega + \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathcal{B}_{0\alpha}^e} \delta r_\alpha^e \rho_0^e N_{i\alpha}^e u_i^e \Big|_{t_p}^{t_k} d\mathcal{B} + \int_{\Omega_e} \delta r_\alpha^e \rho_0^e \dot{N}_{i\alpha}^e \dot{N}_{j\beta}^e r_\beta^e d\Omega + \right. \\ &\quad \left. - \iint_{\Omega_e} \delta r_\alpha^e D_{ijkl}^e [{}'\tilde{B}_{ij\alpha}^e + 2''\tilde{B}_{ij\alpha}^e] [{}'B_{kl\beta}^e + {}''B_{kl\beta}^e] r_\beta^e d\Omega \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdzie Ω_e oznacza obszar elementu czasoprzestrzennego.

Relacja (4.10) musi zachodzić dla dowolnej wariacji przemieszczeń δr_α . Ostatecznie uzyskujemy nieliniowe równania ruchu, które mają charakter równań równowagi i są ważne dla całej zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni:

$$\sum_{e=1}^m \{ [{}'K_{\alpha\beta}^{(kon)} + {}'K_{\alpha\beta}^{(u)} + {}'K_{\alpha\beta}^{(g)} - {}'M_{\alpha\beta}] r_\beta^e - {}'R_\alpha \} = 0, \quad (4.11)$$

gdzie:

$${}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)} = \int_{\Omega_e} D_{ijkl}^e \tilde{B}_{ij\alpha}^e B_{kl\beta}^e d\Omega, \quad (4.12)$$

$${}^e K_{\alpha\beta}^{(u)} = \int_{\Omega_e} D_{ijkl}^e \tilde{B}_{ij\alpha}^e B_{kl\beta}^e d\Omega, \quad (4.13)$$

$${}^e K_{\alpha\beta}^{(g)} = 2 \int_{\Omega_e} D_{ijkl}^e \tilde{B}_{ij\alpha}^e [B_{kl\beta}^e + B_{kl\beta}^e] d\Omega = \int_{\Omega_e} D_{ijkl}^e [B_{kl\beta}^e + B_{kl\beta}^e] W_{k\alpha,i}^e W_{l\beta,j}^e d\Omega = \int_{\Omega_e} S_{ij}^e W_{k\alpha,i}^e W_{l\beta,j}^e d\Omega, \quad (4.14)$$

$${}^e M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} \rho_0^e \dot{N}_{i\alpha}^e \dot{N}_{i\beta}^e d\Omega, \quad (4.15)$$

$${}^e R_{\alpha} = \int_{\partial\Omega_e} p_{0i}^e N_{i\alpha}^e d(\partial\Omega) + \int_{\Omega_e} \rho_0^e f_{0i}^e N_{i\alpha}^e d\Omega - \int_{\mathcal{V}_{0e}} \rho_0^e N_{i\alpha}^e \dot{u}_i^e \Big|_{t_p}^{t_k} dV_0. \quad (4.16)$$

Analogicznie do terminologii wprowadzonej w metodzie elementów skończonych [12] symbole ${}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)}$, ${}^e K_{\alpha\beta}^{(u)}$, ${}^e K_{\alpha\beta}^{(g)}$, ${}^e M_{\alpha\beta}$ i ${}^e R_{\alpha}$ oznaczają odpowiednio składowe: macierzy sztywności konstytutywnej, macierzy sztywności przemieszczeniowej (obrotowej), macierzy sztywności naprężeniowej (geometrycznej), macierzy bezwładności i macierzy impulsów węzłowych.

Ogólny wzór opisujący składowe macierzy sztywności układu ma postać:

$$K_{\alpha\beta}^e = \sum_{e=1}^m \{ {}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)} + {}^e K_{\alpha\beta}^{(u)} + {}^e K_{\alpha\beta}^{(g)} - {}^e M_{\alpha\beta} \}. \quad (4.17)$$

Obciążenie wyrażające impulsy węzłowe ${}^e R_{\alpha}$ (4.16) zależy m.in. od prędkości początkowej przemieszczeń $\dot{u}_i(t_0)$ (t_0 — czas rozpoczęcia obserwacji ciała). Impuls od prędkości przemieszczeń może wystąpić także w innej chwili, np. $\dot{u}_i(t_s)$, jeżeli takie obciążenie zostanie dodatkowo w chwili t_s przyłożone. W przeciwnym wypadku $\dot{u}_i(t_s) = 0$. Ostatecznie nieliniowe równania ruchu (4.11) możemy zapisać w następującej postaci:

$$\Psi_{\alpha} = \sum_{e=1}^m \{ K_{\alpha\beta}^e r_{\beta}^e - R_{\alpha}^e \} = 0, \quad (4.18)$$

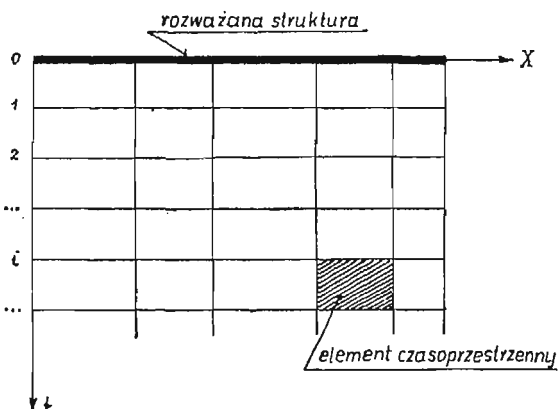
lub:

$$K r = R \quad (4.19)$$

gdzie K — jest globalną macierzą sztywności zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni.

5. Rozwiązywanie równań ruchu

Równania ruchu (4.18), przy znanych warunkach początkowych, można zawsze sprowadzić do formuły rekurencyjnej, niezależnie od kształtu elementu czasoprzestrzennego (od sposobu dyskretyzacji po czasie). Przykładowo, przy równomiernej dyskretyzacji



Rys. 2.

po współrzędnej czasowej (rys. 2), układ równań (4.18) możemy zapisać macierzowo w następującej formie:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{A}^{0,1} & \mathbf{B}^{0,1} & & & & & \\
 \mathbf{C}^{1,0} & \mathbf{D}^{1,0} + \mathbf{A}^{1,2} & \mathbf{B}^{1,2} & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \mathbf{C}^{l,l-1} & \mathbf{D}^{l,l-1} + \mathbf{A}^{l,l+1} & \mathbf{B}^{l,l+1} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 r^0 \\
 r^1 \\
 \vdots \\
 r^l \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 R^0 \\
 R^1 \\
 \vdots \\
 R^l \\
 \vdots
 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

gdzie r^l zawiera przemieszczenia rozważanej struktury przestrzennej w chwili „ l ”, natomiast $\mathbf{A}^{l,l+1}$, $\mathbf{B}^{l,l+1}$, $\mathbf{C}^{l,l-1}$ i $\mathbf{D}^{l,l-1}$ są macierzami sztywności struktury zależnymi m.in. od przemieszczeń r^{l-1} , r^l lub r^{l+1} .

Znanymi warunkami początkowymi są przemieszczenia r^0 oraz prędkości przemieszczeń $\dot{u}(t_0)$ sprowadzone do impulsów eR wg wzoru (4.16). Formuła rekurencyjna wynikająca z (5.1) przedstawia się następująco:

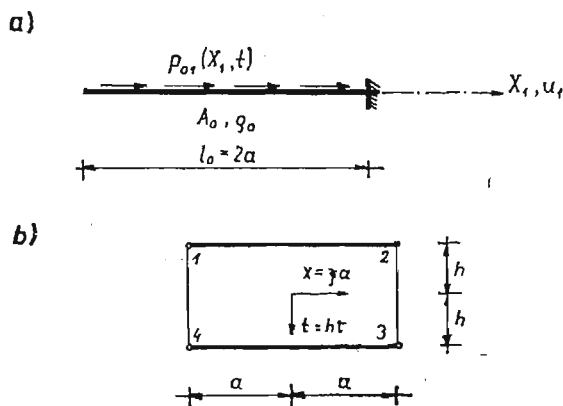
$$\Psi^l = \mathbf{C}^{l,l-1}r^{l-1} + [\mathbf{D}^{l,l-1} + \mathbf{A}^{l,l+1}]r^l + \mathbf{B}^{l,l+1}r^{l+1} - R^l = 0. \quad (5.2)$$

Z wzoru tego można obliczyć r^{l+1} , gdyż r^{l-1} oraz r^l zostały wyznaczone w poprzednich krokach rekurencyjnych. Macierze $\mathbf{C}^{l,l-1}$ i $\mathbf{D}^{l,l-1}$ są od razu w pełni określone, gdyż zależą od znanych już przemieszczeń r^{l-1} i r^l natomiast macierze $\mathbf{A}^{l,l+1}$ i $\mathbf{B}^{l,l+1}$ nie są całkowicie wyznaczalne, ponieważ zależą od nieznanego przemieszczenia r^{l+1} . Równanie (5.2) jest zatem równaniem nieliniowym, które można rozwiązywać różnymi sposobami (np.: metodą kolejnych przybliżeń, metodą początkowych obciążeń, metodą Newtona-Raphsona itp.).

6. Drgania podłużne pręta

Dalsze rozważania zmierzające do zilustrowania zaproponowanego algorytmu rozwiązywania zagadnień nieliniowych przeprowadzimy na elementarnym przykładzie pręta

prostego wspornika o długości $l_0 = 2.0$ [m], polu przekroju poprzecznego $A_0 = 0.005$ [m²] (rys. 3a). Działające obciążenie $p_{01}(X_1, t)$ wywołuje drgania podłużne $u_1(X_1, t)$. Materiał charakteryzuje: moduł Younga $E_0 = 2 \cdot 10^5$ [MPa], gęstość $\rho_0 = 7500$ [kg/m³], współczynnik Poissona $\nu = 0.29$.



Rys. 3.

W przypadku osiowego stanu naprężenia, wzór (2.4) przedstawiający składowe odkształcenia, można w ścisły sposób sprowadzić do postaci:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \quad \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \varepsilon_{33}. \quad (6.1)$$

Jeżeli dokonamy równomiernej dyskretyzacji czasoprzestrzeni (rys. 2), to element czasoprzestrzenny będzie miał kształt prostokąta o wymiarach $2a \times 2h$ (rys. 3b), gdzie $a = 1.0$ [m]. Funkcję kształtu $N_{1\alpha}(X_1, t) \equiv N_\alpha(X, t)$ można opisać związkami liniowymi:

$$N_\alpha(X, t) = \frac{1}{4} (1 + \xi_\alpha \xi) (1 + \tau_\alpha \tau), \quad (6.2)$$

$$\xi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 2, 3 \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 4 \end{cases}, \quad \tau_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 3, 4 \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 2 \end{cases}$$

$$\xi \in \langle -1; 1 \rangle, \quad \tau \in \langle -1; 1 \rangle, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Następnie opiszmy w obszarze elementu czasoprzestrzennego:

— przemieszczenia i wariacje przemieszczeń:

$$\begin{aligned} u_1^e &= N_\alpha^e r_\alpha^e, \\ \delta u_1^e &= N_\alpha^e \delta r_\alpha^e, \end{aligned} \quad (6.3)$$

— prędkości przemieszczeń i ich wariacje:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1^e &= \dot{N}_\alpha^e r_\alpha^e, \\ \delta \dot{u}_1^e &= \dot{N}_\alpha^e \delta r_\alpha^e, \end{aligned} \quad (6.4)$$

— odkształcenia i ich wariacje:

$$\begin{aligned} E_{11}^e &= [{}'B_\alpha^e + {}''B_\alpha^e] r_\alpha^e, \\ \delta E_{11}^e &= [{}'B_\alpha^e + 2{}''B_\alpha^e] \delta r_\alpha^e, \end{aligned} \quad (6.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}'B_{\alpha}^e &= \frac{1}{4a} \xi_{\alpha}(1 + \tau_{\alpha} \tau), \\ {}''B_{\alpha}^e &= \frac{1}{32a^2} \sum_{\beta=1}^4 \xi_{\alpha} \xi_{\beta}(1 + \tau_{\alpha} \tau)(1 + \tau_{\beta} \tau) r_{\alpha}^e. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Podobnie od przemieszczeń węzłowych elementu czasoprzestrzennego uzależniamy tensor naprężenia S_{ij} . Rozpatrywać będziemy trzy postacie związków konstytutywnych.

1. Drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} jest proporcjonalny do tensora odkształcenia Greena E_{ij} :

$$\begin{aligned} S_{11}^e &= E_0^e E_{11}^e = E_0^e \left(\frac{\partial u_1^e}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^e}{\partial X_1} \frac{\partial u_1^e}{\partial X_1} \right), \\ S_{11}^e &= E_0^e [{}'B_{\alpha}^e + {}''B_{\alpha}^e] r_{\alpha}^e. \end{aligned} \quad (6.7)$$

2. Drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} jest proporcjonalny do wydłużenia względnego ustalonego w konfiguracji nieodkształconej:

$$\begin{aligned} S_{11}^e &= E_0^e \varepsilon_{11}^e = E_0^e \frac{\partial u_1^e}{\partial X_1}, \\ S_{11}^e &= E_0^e {}'B_{\alpha}^e r_{\alpha}^e. \end{aligned} \quad (6.8)$$

3. Tensor Cauchy σ_{ij} jest proporcjonalny do wydłużenia względnego ustalonego w konfiguracji odkształconej:

$$\sigma_{11} = E_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (6.9)$$

gdzie:

$$x = u + X,$$

opisuje współrzędne punktów pręta odkształconego. Sprowadzając σ_{ij} (6.9) do współrzędnych Lagrange'a mamy:

$$\sigma_{11} = E_0 \frac{\frac{\partial u_1}{\partial X_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}}. \quad (6.10)$$

W celu określenia drugiego tensora Pioli-Kirchhoffa S_{ij} korzystamy ze wzoru (2.10):

$$\sigma_{11} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 S_{11}. \quad (6.11)$$

Z prawa zachowania masy wynika, że:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right), \quad (6.12)$$

gdzie (por. (6.1)):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = -\nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = -\nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1},\end{aligned}\tag{6.13}$$

Wprowadzając związki (6.12) i (6.13) do (6.11) ostatecznie otrzymamy:

$$\sigma_{11} = \frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}}{\left(1 - \nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2} S_{11i}.\tag{6.14}$$

lub:

$$S_{11i} = \frac{\left(1 - \nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)} \sigma_{11i}.\tag{6.15}$$

Podstawiając (6.10) do (6.15) uzyskamy jawny opis tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} :

$$S_{11i} = E_0 \frac{\left(1 - \nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)} \frac{\partial u_1}{\partial X_1}.\tag{6.16}$$

Przyjęcie w tym przypadku różnych od zera składowych ε_{22} i ε_{33} jest równoznaczne z uwzględnieniem zmiany pola przekroju poprzecznego pręta. Związek (6.16) dla elementu czasoprzestrzennego będzie miał postać:

$$S_{11i}^e = E_0^e \frac{1 - 2\nu' B_{\alpha'}^e r_{\alpha'}^e + 2\nu^{2''} B_{\alpha'}^e r_{\alpha'}^e}{(1 + B_{\alpha'}^e r_{\alpha'}^e)(1 + B_{\eta'}^e r_{\eta'}^e)} B_{\beta'}^e r_{\beta'}^e.\tag{6.17}$$

Korzystając z wzorów (4.12)÷(4.16) ustalamy wyrazy macierzy sztywności elementu czasoprzestrzennego (kolejno we wszystkich analizowanych przypadkach; przyjęto $\mathbf{W} = \mathbf{N}$).

1. Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa S_{ij} proporcjonalny do tensora Greena E_{ij} :

$$\begin{aligned}K_{\alpha\beta}^e &= \frac{E_0 A_0 h}{12a} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \left\{ 3 + \tau_{\alpha} \tau_{\beta} - \lambda^2 \tau_{\alpha} \tau_{\beta} (1 + 3\xi_{\alpha} \xi_{\beta}) + \frac{3}{8a} \sum_{\gamma=1}^4 \{ 3 + \right. \\ &+ \tau_{\gamma} (\tau_{\alpha} + \tau_{\beta}) + \tau_{\alpha} \tau_{\beta} \xi_{\gamma} r_{\gamma}^e \} + \frac{1}{160a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \{ 15 + 5[(\tau_{\alpha} + \\ &+ \tau_{\beta})(\tau_{\gamma} + \tau_{\varphi}) + \tau_{\alpha} \tau_{\beta} + \tau_{\gamma} \tau_{\varphi}] + 3\tau_{\alpha} \tau_{\beta} \tau_{\gamma} \tau_{\varphi} \} \xi_{\gamma} \xi_{\varphi} r_{\gamma}^e r_{\varphi}^e \},\end{aligned}\tag{6.18}$$

2. Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa S_{ij} proporcjonalny do wydłużenia względnego:

$$K_{\alpha\beta}^e = \frac{E_0 A_0 h}{12a} \xi_\alpha \xi_\beta \left\{ 3 + \tau_\alpha \tau_\beta + \frac{1}{4a} \sum_{\gamma=1}^4 [3 + \tau_\alpha \tau_\beta + (\tau_\alpha + \tau_\beta) \tau_\gamma] r_\gamma^e + \right. \\ \left. - \lambda^2 \tau_\alpha \tau_\beta (1 + 3\xi_\alpha \xi_\beta) \right\}, \quad (6.19)$$

3. Tensor Cauchy σ_{ij} proporcjonalny do wydłużenia względnego:

$$K_{\alpha\beta}^e = \frac{E_0 A_0 h}{12a} \xi_\alpha \xi_\beta \left\{ 6a \left[\frac{a_{\alpha\beta}^*}{B^*} \ln \left| \frac{A^* + B^*}{A^* - B^*} \right| + b_{\alpha\beta}^* \left(\frac{2}{B^*} + \frac{A^*}{B^{*2}} \ln \left| \frac{A^* - B^*}{A^* + B^*} \right| \right) \right] + \right. \\ + \frac{c_{\alpha\beta}^*}{B^{*3}} \left(A^{*2} \ln \left| \frac{A^* + B^*}{A^* - B^*} \right| - 2A^* B^* \right) - \frac{d_{\alpha\beta}^*}{B^{*4}} \left(\frac{2}{3} B^{*3} - 2A^{*2} B^* + \right. \\ \left. - A^{*3} \ln \left| \frac{A^* + B^*}{A^* - B^*} \right| \right) + \frac{e_{\alpha\beta}^* A^*}{B^{*4}} \left(\frac{A^{*3}}{B^*} \ln \left| \frac{A^* + B^*}{A^* - B^*} \right| - 2A^{*2} - \frac{2}{3} B^{*2} \right) \left. \right\} + \\ - \lambda^2 \tau_\alpha \tau_\beta (1 + 3\xi_\alpha \xi_\beta) \left. \right\}, \quad (6.20)$$

gdzie:

$$a_{\alpha\beta}^* = 1 - \frac{\nu}{2a} \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma r_\gamma^e + \frac{\nu^2}{16a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e, \\ b_{\alpha\beta}^* = \tau_\alpha + \tau_\beta - \frac{\nu}{2a} \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma r_\gamma^e (\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma) + \frac{\nu^2}{16a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e (\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma + \tau_\varphi), \\ c_{\alpha\beta}^* = \tau_\alpha \tau_\beta - \frac{\nu}{2a} \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma r_\gamma^e [\tau_\alpha \tau_\beta + (\tau_\alpha + \tau_\beta) \tau_\gamma] + \frac{\nu^2}{16a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e [\tau_\alpha + \\ + \tau_\beta + (\tau_\alpha + \tau_\beta) (\tau_\gamma + \tau_\varphi) + \tau_\gamma \tau_\varphi], \quad (6.21) \\ d_{\alpha\beta}^* = -\frac{\nu}{2a} \tau_\alpha \tau_\beta \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma \tau_\gamma r_\gamma^e + \frac{\nu^2}{16a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e [\tau_\alpha \tau_\beta (\tau_\gamma + \tau_\varphi) + \\ + (\tau_\alpha + \tau_\beta) \tau_\gamma \tau_\varphi], \\ e_{\alpha\beta}^* = \frac{\nu^2}{16a^2} \tau_\alpha \tau_\beta \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi \tau_\gamma \tau_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e, \\ A^* = 4a + \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma r_\gamma^e, \quad B^* = \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma \tau_\gamma r_\gamma^e,$$

$$\lambda^2 = \frac{\rho_0 a^2}{E_0 h^2}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \varphi = 1, 2, 3, 4. \quad (6.22)$$

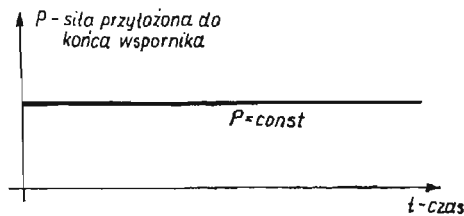
W zadaniach dotyczących zagadnień geometrycznie liniowych wystarczającym warunkiem stabilności rozwiązania numerycznego jest takie dobranie wymiarów elementów czasoprzestrzennych, aby była spełniona nierówność [8]:

$$\frac{a}{h} \geq \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.23)$$

Z warunku tego skorzystano także przy rozwiązywaniu zadań geometrycznie nieliniowych. Obciążenie (we wszystkich trzech przypadkach związków konstytutywnych) stanowi nagle przyłożona do końca wspornika siła podłużna (ściskająca lub rozciągająca) (rys. 4):

$$P(t) = PH(t), \quad (6.24)$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a.



Rys. 4.

Warunki początkowe przyjęto w postaci:

$$u(t=0) = 0, \quad \dot{u}(t=0) = 0, \quad \varepsilon^o = 0, \quad S^o = 0.$$

Przeliczono wiele zadań dla różnych wartości siły P . Na rys. 5 przedstawiono zmianę w czasie przemieszczeń końca wspornika od siły $P = 5 \cdot 10$ [N] przy różnych definicjach związków konstytutywnych (6.7)÷(6.9).

Porównując otrzymane wyniki z rozwiązaniem geometrycznie liniowym można sformułować kilka uwag.

1. W przypadku związków konstytutywnych (6.7) i (6.8) przemieszczenia przy rozciąganiu są mniejsze a przy ściskaniu większe. Podobnej zmianie ulega okres drgań (rys. 5a, b).

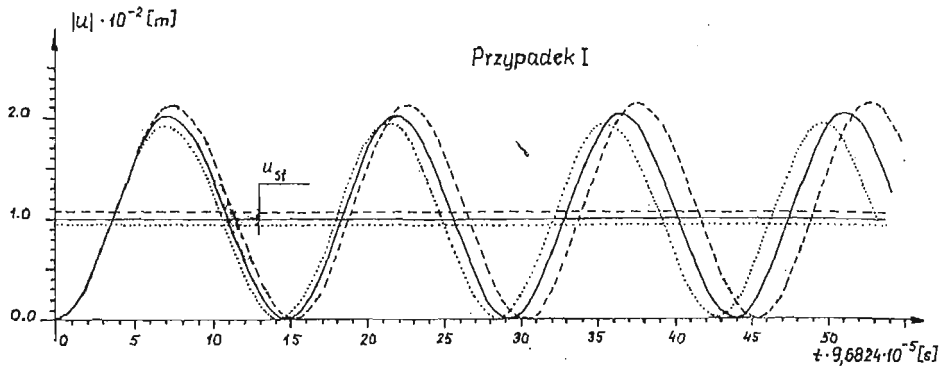
2. Jeżeli związek konstytutywny jest opisany wzorem (6.9) to przemieszczenia przy rozciąganiu są większe a przy ściskaniu mniejsze. Analogicznie również zmienia się okres drgań (rys. 5c).

3. Wartość obciążenia $P = 3.0$ [MN] stanowi w przybliżeniu maksymalną siłę spełniającą warunki wytrzymałościowe rozpatrywanego pręta. Przy tak dobranym obciążeniu wyniki analizy geometrycznie liniowej i nieliniowej różnią się o około 0.6%.

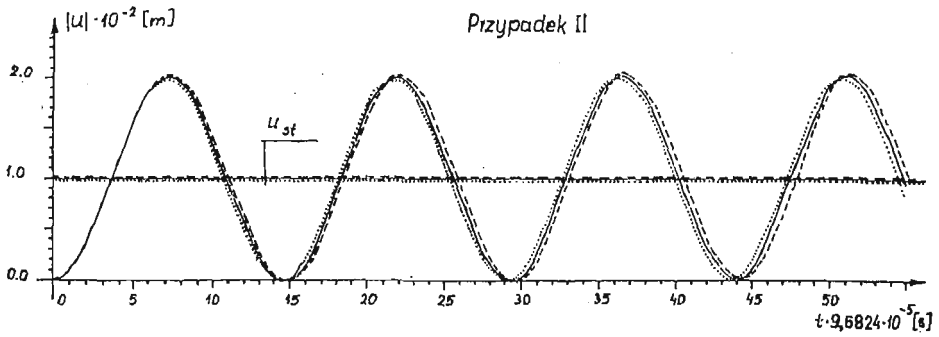
Amplituda przemieszczeń jest dwa razy większa od ugięcia statycznego (od statycznego działania siły P). Ugięcie statyczne policzono metodą elementów skończonych przy takich samych założeniach jak w metodzie elementów czasoprzestrzennych.

W celu uzasadnienia poprawności uzyskanych rezultatów przeprowadzimy analizę sztywności pręta. Rzeczywisty stan naprężeń opisuje tensor Cauchy σ_{ij} (naprężenia w kon-

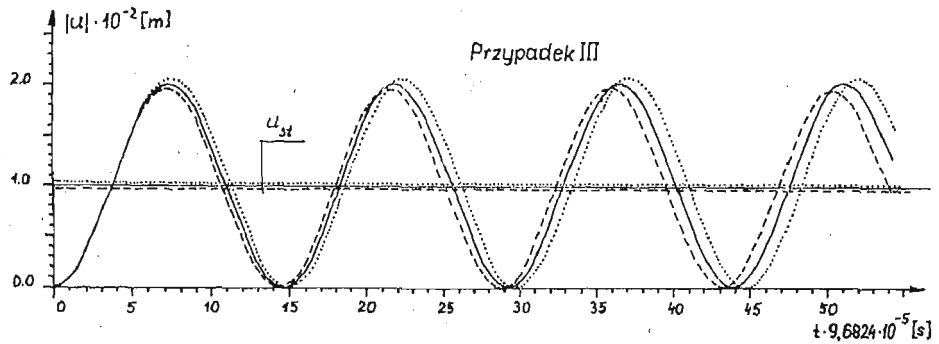
a)



b)



c)



———— analiza geometrycznie liniowa

----- ściskanie } analiza geometrycznie
 rozciąganie } nieliniowa

u_{st} - ugięcie od statycznego działania siły

$$P = \pm 5 \cdot 10^6 [N]$$

Rys. 5.

figuracji odkształconej i do niej odniesione). Opiszmy ten tensor w konfiguracji nieodkształconej (Lagrange'a):

(1) Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa proporcjonalny do tensora Greena (6.7):

$$\sigma_{11} = E(\varepsilon_{11}) \varepsilon_{11},$$

$$E(\varepsilon_{11}) = E_0 \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{11}\right) (1 + \varepsilon_{11})}{(1 - \nu \varepsilon_{11})^2}, \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \quad (6.25)$$

(2) Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa proporcjonalny do wydłużenia względnego w konfiguracji nieodkształconej (6.8):

$$\sigma_{11} = E(\varepsilon_{11}) \varepsilon_{11},$$

$$E(\varepsilon_{11}) = E_0 \frac{1 + \varepsilon_{11}}{(1 - \nu \varepsilon_{11})^2}, \quad (6.26)$$

(3) tensor Cauchy proporcjonalny do wydłużenia względnego w konfiguracji odkształconej (6.9):

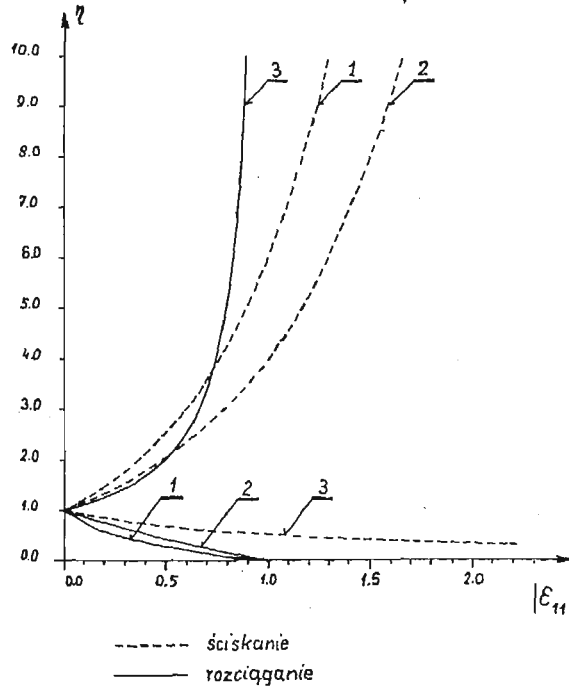
$$\sigma_{11} = E(\varepsilon_{11}) \varepsilon_{11}.$$

$$E(\varepsilon_{11}) = E_0 \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}}. \quad (6.27)$$

Wprowadzimy parametr η opisujący zmianę sztywności:

$$\eta(\varepsilon_{11}) = \frac{E(\varepsilon_{11})}{E_0}. \quad (6.28)$$

Analizując ten parametr sztywności w poszczególnych przypadkach prawa fizycznego (1, 2, 3) możemy podać kilka istotnych uwag (rys. 6).



Rys. 6.

1. Jeżeli tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} jest liniowo zależny od tensora odkształcenia Greena E_{ij} lub wydłużeń względnych (względem konfiguracji nieodkształconej), to sztywność przy rozciąganiu rośnie $|\eta| > 1$, a przy ściskaniu maleje $|\eta| < 1$. Z tego właśnie powodu wynikają mniejsze przemieszczenia przy rozciąganiu a większe przy ściskaniu (rys. 5a, b).

2. Liniowa zależność tensora Cauchy od odkształceń względnych (względem konfiguracji odkształconej) oznacza mniejszą sztywność przy rozciąganiu $|\eta| < 1$, a większą przy ściskaniu $|\eta| > 1$. Dlatego też przemieszczenia przy rozciąganiu są większe niż przy ściskaniu (rys. 5c).

3. Przy małych odkształceniach $|\partial u_1 / \partial X_1| \ll 1$, sposób definiowania prawa fizycznego nie ma praktycznego znaczenia, gdyż:

$$E(\varepsilon_{11}) \cong E_0 \quad \text{lub} \quad \eta(\varepsilon_{11}) \cong \eta = 1. \quad (6.29)$$

Przedstawiony przykład wyraźnie pokazuje jak dalece istotne jest właściwe sformułowanie równań konstytutywnych zwłaszcza przy dużych odkształceniach. Przypadek I i II zadania wykazał, że dowolne formułowanie zależności naprężeń od odkształceń (spotykane w literaturze, np. [10] str. 470) może spowodować uzyskanie wyników niezgodnych z doświadczeniem. Trudno sobie wyobrazić, aby sztywność rozciąganego pręta stalowego rosła wraz ze wzrostem siły, skoro wiadomo, że pole jego przekroju poprzecznego maleje. Ostatnia wersja prawa konstytutywnego jest prawidłowa, stąd uzyskane wyniki są zgodne z oczekiwaniami i nie budzą wątpliwości.

Literatura

1. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
2. O. C. ZIENKIEWICZ, PAREKH, *Transient field problems — to and three dimensional analysis by isoparametric finite elements*, Int. J. Num. Math. in Eng., 2, 1970.
3. I. FRIED, *Finite element analysis of time dependent phenomena*, Int. Report Stuttgart Univ., 1969.
4. J. H. ARGYRIS, D. W. SCHARPF, *Finite elements in time and space*, Aero. J. of the RAS, 73, 1969, p. 1041 - 1044.
5. J. H. ARGYRIS, A. S. L. CHAN, *Application of finite elements in space and time*, Ing. Arciv. 41, 1972, p. 235 - 257.
6. J. T. ODEN, *A general theory of finite elements*, Intern. J. of Num. Meth. in Engineering 1, 1969, 2, 205 - 221, 3, 247 - 259.
7. Z. KĄCZKOWSKI, *The method of finite space-time elements in dynamics of structures*, J. Techn. Phys., 16, 1, 1975, p. 69 - 84.
8. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., 22, 3, 1976, s. 365 - 378.
9. M. WITKOWSKI, *O czasoprzestrzeni w dynamice budowli*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 80, 1983.
10. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, 1969.
11. J. F. BESSELING, *Another Look at the Application of the Principle of Virtual Work with Particular Reference to Finite Plate and Shell Elements*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1981, p. 11 - 27.
12. M. K. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa—Poznań 1985.
13. H. ZORSKI (redakcja), *Mechanika techniczna, podstawy mechaniki*, PWN, Warszawa 1985.

Р е з ю м е

МЕТОД ВРЕМЕННО-ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

В работе представлено метод решения динамических и геометрических нелинейных задач с помощью метода временно-пространственных элементов. Закон напряжение — деформация определяются в различной форме. В случае больших деформаций конститутивные уравнения влияют значительно на остаточный результат. Этот эффект указан на нескольких примерах.

S u m m a r y

THE SPACE-TIME ELEMENT METHOD IN GEOMETRICALLY
NON-LINEAR PROBLEMS

The paper contains a method of solution of dynamically and geometrically non-linear problems by the use of the space — time element method (STEM). The stress — strain relation (the 2-nd Piola-Kirchhoff tensor — the Green tensor) has been defined in different form. It has been proved that the method of formulation of the constitutive relations plays a significant role in the case of large strains. This effect has been demonstrated on examples.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 maja 1986 roku.

BIULETYN INFORMACYJNY

PROTOKÓŁ

z XXII Zjazdu Delegatów i Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej 9 - 10 października 1986, Częstochowa — Kokotek

I dzień Zjazdu

Delegatów, a w szczególności członków honorowych profesorów Janusza Dietrycha i Zbigniewa Kączkowskiego, którzy przybyli na XXII Zjazd, powitał Przewodniczący Zarządu Głównego PTMTS prof. Józef Wojnarowski. Na wstępie zaproponował uczczenie pamięci członków PTMTS, którzy w minionej kadencji odeszli od nas na zawsze. Byli to:

prof. Witold Nowacki
prof. Józef Gil
prof. Janusz Walczak
prof. Józef Ledwoń
prof. Antoni Pietraniec
doc. Zbigniew Bogucki
doc. Zbigniew Gębicki
doc. Jerzy Gluza

doc. Józef Szpilecki
dr Kazimierz Borsuk
doc. Edmund Lubieniecki
prof. Witold Kreglewski
prof. Jan Brosch
dr Edward Piotrowski
doc. Jerzy Uniejewski
prof. Kazimierz Niewiarowski
Barbara Michalska-Czachor (kierownik biura ZG).

Zebrani uczcili ich pamięć minutą ciszy.

W imieniu Zarządu Głównego prof. J. Wojnarowski podziękował, Przewodniczącemu Oddziału w Częstochowie profesorowi Januszowi Elsnerowi za trud związany z organizacją Zjazdu Delegatów. Prof. J. Elsner został wybrany przewodniczącym XXII Zjazdu Delegatów przez aklamację.

Prof. J. Elsner podziękował za okazane mu zaufanie i zaproponował zatwierdzenie wcześniej dostarczonego delegatom szczegółowego programu Zjazdu.

W dyskusji nad szczegółowym programem Zjazdu prof. Z. Olesiak zgłosił wniosek uzupełnienia programu o dwa dodatkowe punkty:

1. wspomnienie pośmiertne o życiu i działalności wybitnego polskiego uczonego, jednego z założycieli PTMTS, byłego prezesa PAN — prof. Witolda Nowackiego,
2. powołanie zespołu, który by zajął się problematyką postawy etycznej nauczyciela akademickiego oraz przedstawił ją do przedyskutowania na Zjeździe. Sprawa jest ważna i aktualna zwłaszcza wobec pojawiających się w prasie publikacji na temat naruszania norm etycznych przez niektórych nauczycieli akademickich.

Wniosek pierwszy przyjęli jednogłośnie wszyscy uczestnicy Zjazdu. Wniosek drugi, który poparli w dyskusji: prof. J. Dietrych i prof. M. Zakrzewski, został również zaaprobowany w głosowaniu jawnym przez większość delegatów.

Niżej wymienieni Koledzy zgodzili się na udział w pracy zespołu: prof. R. Ganowicz, doc. W. Szuścik, prof. Z. Olesiak, doc. A. Styczek, prof. K. Sobczyk, prof. M. Wizmur, doc. K. Wernerowski, prof. M. Zakrzewski oraz prof. A. Tylikowski — jako przewodniczący Zespołu.

Ostatecznie przyjęto następujący szczegółowy program Zjazdu: godz. 10⁰⁰ - 13⁰⁰ — otwarcie Zjazdu:

1. Wybór Przewodniczącego, Z-cy Przewodniczącego oraz Sekretarzy Zjazdu,
2. wspomnienie pośmiertne o życiu i działalności prof. Witolda Nowackiego,

3. wybór Komisji Mandatowej,
4. przyjęcie protokołu z XXI Zjazdu Delegatów odbytego w Bielsku Białej w dniach 9 - 11 maja 1984 roku,
5. powołanie Komisji: Matki, Skrutacyjnej i Wnioskowej,
6. przedstawienie sprawozdania z działalności Towarzystwa w XXI kadencji,
7. przedstawienie sprawozdania finansowego,
8. sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej,
9. dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie sprawozdań i postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi absolutorium, głosowanie nad wnioskiem.
godz. 15⁰⁰ - 18⁰⁰
10. Sesja Naukowa z referatami:
prof. dr hab. inż. Janusz Elsner: „Rola struktur koherentnych w procesach turbulentnego transportu”
prof. dr hab. Michał Kleiber: „Metody sztucznej inteligencji w modelowaniu i analizie zagadnień mechaniki”
prof. dr hab. Kazimierz Biernatowski: „Geologia w ujęciu stochastycznym”
prof. dr Marek Zakrzewski: „O zmęczeniu cieplnym”
prof. dr hab. Andrzej Wilczyński: „Tensory wytrzymałości materiału”
dr inż. Henryk Walukiewicz: „Zastosowanie teorii grup w dynamice stochastycznej”
11. dyskusja nad wygłoszonymi referatami

II dzień Zjazdu

12. O etyce nauczyciela akademickiego w związku z incydentem w Bydgoszczy — ref. prof. A. Tylikowski
13. Wybór przewodniczącego PTMTS,
14. Wybór Członków i Zastępców Członków Zarządu Głównego PTMTS.
15. Wybór Głównej Komisji Rewizyjnej,
16. Sprawy organizacyjne,
17. Zamknięcie Zjazdu.

Ad. 1. Przewodniczący Zjazdu prof. J. Elsner w imieniu ustępującego Zarządu Głównego zaproponował wybór:

- Zastępców Przewodniczącego Zjazdu prof. A. Ołędzkiego i doc. R. Dziecielaka,
- Sekretarzy Zjazdu:
— doc. W. Bachmacza i doc. J. Kubika — I dzień Zjazdu,
— doc. K. Wernerowskiego i dra W. Brząkałę — II dzień Zjazdu.

Delegaci zaakceptowali proponowane kandydatury jednomyślnie.

Ad. 2. Prof. Z. Olesiak wygłosił wspomnienie o życiu i działalności prof. Witolda Nowackiego, wybitnego uczonego w zakresie mechaniki, współtwórcy Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, współzałożyciela „Archiwum Mechaniki Stosowanej”. Był to człowiek dobry i mądry. Trudno przecenić Jego wpływ na rozwój mechaniki. Zebrani uczcili minutą ciszy pamięć o prof. Nowackim.

Ad. 3. Ustępujący Zarząd Główny zaproponował do Komisji Mandatowej następujące kandydatury: prof. A. Negrusz, dr J. Rakowski, doc. Z. Rotter (przewodnicząca), doc. B. Siołkowski. Delegaci jednomyślnie zatwierdzili proponowany skład Komisji Mandatowej.

Ad. 4. Zgłoszono następujące uwagi i poprawki do protokołu z XXI Zjazdu Delegatów odbytego w Bielsku Białej w dniach 9 - 11 maja 1984: Prof. R. Gutowski zgłosił wątpliwość jak weryfikować protokół z XXI Zjazdu, podczas gdy obecni delegaci stanowią inny zespół ludzki.

Prof. J. Elsner odpowiedział, iż nie można znaleźć bardziej kompetentnego gremium dla zatwierdzenia protokołu, niż Zjazd Delegatów.

Doc. W. Szuścik stwierdził, iż na str. 24 pkt 13 winno być, iż Zjazd Delegatów ustalił wysokość składki rocznej na 200,— zł. a od emerytów — 1,— zł.

Doc. Z. Kończak z Oddziału Poznańskiego stwierdził, iż do protokołu z XXI Zjazdu nie dołączono Uchwały zobowiązującej Zarząd Główny do podjęcia starań o pozyskanie środków na prenumeratę czasopism zagranicznych z II obszaru płatniczego.

Doc. W. Bachmacz stwierdził, iż dla ujednoczenia danych o delegatach na XXI Zjazd w protokole na str. 3 przy nazwisku W. Bachmacz — winno być „z-ca Sekretarza Generalnego i Delegat” oraz przy nazwisku Z. Sulimowski — str. 4 — winno być „Z-ca Skarbnika Generalnego i Delegat na Zjazd”.

Doc. R. Dziecielak zauważył, iż w protokole z XXI Zjazdu nie ma uchwały zaproponowanej przez Oddział Poznański, a przyjętej przez Zjazd, n.t. prenumeraty czasopism zagranicznych i środków na ten cel.

Po uwzględnieniu zgłoszonych poprawek Delegaci przyjęli protokół jednomyślnie.

Ad. 5. Do Komisji Matki zostali wybrani przy 2 głosach wstrzymujących się następujący Koledzy: dr Z. Goraj, doc. K. Grudziński (przewodniczący), dr Z. Lis, doc. W. Szusćnik.

Do Komisji Skrutacyjnej przy 1 głosie wstrzymującym się zostali wybrani:

doc. R. Bogacz, doc. E. Goss, dr J. Grabacki, doc. M. Trombski (przewodniczący).

Do Komisji Wnioskowej przy 1 głosie wstrzymującym się zostali wybrani:

dr M. Hardygóra, doc. T. Przedecki, doc. A. Radowicz (przewodniczący).

Ad. 6. Przed przedstawieniem sprawozdania z działalności Towarzystwa w XXI kadencji, przewodnicząca Komisji Mandatowej doc. Z. Rotter stwierdziła, że na 109 uprawnionych Delegatów, na sali znajduje się 89 delegatów, zatem XXII Zjazd jest prawomocny.

Sprawozdanie z działalności Zarządu Głównego XXI kadencji zostało wydrukowane i doręczone Delegatom. Ustępujący Przewodniczący w swoim wystąpieniu omówił zatem tylko najważniejsze punkty. Na wstępie podkreślił rolę i zadania Towarzystwa, m.in. inspirowanie badań naukowych, integrowanie środowisk naukowych, szkolenie młodej kadry oraz współpracę z innymi Towarzystwami. Stwierdził następnie, iż w okresie XXI kadencji nastąpił liczbowy wzrost Towarzystwa (liczy ono 1138 osób skupionych w 16 oddziałach). Zarząd Główny wydrukował szereg materiałów szkoleniowych, m.in. „Sterowanie w mechanice” (szczegóły w sprawozdaniu).

Do niewątpliwych osiągnięć ustępującego Zarządu Głównego należy zaliczyć:

1. Zatwierdzenie Statutu Towarzystwa.
2. Rozszerzenie plenarnych posiedzeń Zarządu o część naukową.
3. Odbycie 3 wyjazdowych posiedzeń Z.Gł.
4. Podpisanie umowy ze Słowackim Towarzystwem Mechaniki — przy wydatnej pomocy doc. J. Kubika z Opola.
5. Opracowanie deklaracji członka wspierającego, umożliwiającej przyjęcie dotacji przez Towarzystwo.

Omawiając trudności w pracy Towarzystwa, prof. J. Wojnarowski wskazał na zbyt sztywne przepisy finansowe, które powodują, że przyjęcie darowizny automatycznie obniża dotacje z PAN. Podziękował następnie instytucjom za pomoc finansową przy wydawnictwach Z.Gł. a imiennie profesorom: J. Antoniakowi i E. Włodarczykowi za sfinansowanie i druk materiałów p.t. „Sterowanie w mechanice”.

W dalszej części swego wystąpienia Przewodniczący Z.Gł. podziękował prof. Z. Olesiakowi za redagowanie kwartalnika „Mechanika Teoretyczna i Stosowana” i prof. S. Dubielowi za zorganizowanie szkoły naukowej p.t. „Sterowanie w mechanice”.

Następnie wręczył pisma z podziękowaniem za współpracę następującym Kolegom: prof. W. Krzysiowi, prof. E. Brzuchowskiemu, prof. Z. Dzygadzie, prof. A. Wilczyńskiemu, doc. J. Lipińskiemu, prof. R. Parkitnemu, prof. M. Wizmurowi, prof. B. Skalmierskiemu, prof. K. Sobczykowi, doc. J. Golasowi, doc. Cz. Miekiewiczowi, doc. Z. Sulimowskiemu, prof. Z. Olesiakowi, doc. A. Radowiczowi oraz prof. E. Bielewiczowi.

Ad. 7. Sprawozdanie finansowe złożył Skarbnik ustępującego Zarządu, prof. A. Wilczyński. Szczegółowy tekst sprawozdania został doręczony delegatom. Prof. A. Wilczyński zaznaczył, że sprawozdanie nie obejmuje okresu od września 1983 r. do końca czerwca 1984. Zwrócił również uwagę na fakt, że składki członkowskie nie wpływają systematycznie z Oddziałów.

Ad. 8. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył prof. A. Tylikowski. Stwierdził, iż pod względem merytorycznym działalność Zarządu Głównego była poprawna. Zwrócił też uwagę na nowe formy działalności Z.Gł., które Główna Komisja Rewizyjna oceniła pozytywnie. Zauważył również, że nie wszystkie wnioski z XXI kadencji zostały zrealizowane, a m.in. wniosek o otwarty charakter Zjazdu dla członków PTMTS. Zwrócił uwagę na spadek zainteresowania konkursami naukowymi. Należy zmienić ich formę lub wogóle zrezygnować z tych imprez. W podsumowaniu prof. A. Tylikowski stwierdził, że w XXI kadencji Towarzystwo prowadziło działalność zgodną ze Statutem i dlatego wnioskuje o udzielenie absolutorium ustępującemu Zarządowi.

Ad. 9. W dyskusji udział wzięli:

Prof. J. Dietrych: w swojej wypowiedzi stwierdził, że przynależność do PTMTS jest zaszczytem, a równocześnie wynika z wolnego wyboru jednostki. Przy przyjmowaniu kandydatów do Towarzystwa należy zwracać większą uwagę na ich oblicze moralne. Prof. J. Dietrych zasugerował delegatom, aby do przyszłego Zarządu wybrali odpowiedzialnych i godnych tego zaszczytu członków PTMTS. Należy podnieść prestiż i znaczenie Towarzystwa. Podkreślił również elitarny charakter Towarzystwa.

Prof. Z. Olesiak stwierdził, że Z.Gł. XXI kadencji podjął szereg interesujących inicjatyw, a mianowicie: organizowanie sesji Z.Gł. w oddziałach wraz z referatami naukowymi, podpisanie umowy o współpracy ze Słowackim Towarzystwem Mechaniki, zakończenie prac nad Statutem i jego zatwierdzenie przez Urząd Miasta Warszawy. W uwagach do sprawozdania Z.Gł. zgłosił następujące zastrzeżenia:

- na str. 27 sprawozdania nie podano, że ukazał się t. 24 z. 1 - 2/86 MTiS, wydrukowany w sierpniu 1986 r.
- Pominęto w sprawozdaniu fakt, że Kol. Z. Olesiak napisał list z rezygnacją z funkcji Redaktora Naczelnego MTiS (4.IX.1985) na skutek niemożności dojścia do porozumienia z Przewodniczącym Z.Gł. na temat spraw związanych z obsługą administracyjną Redakcji. Podtrzymał On swoją decyzję na specjalnym zebraniu w dn. 17.IX.1985 r. W związku z Uchwałą Z.Gł. z dn. 14.XII.1985 przekazaną listem Przewodniczącego Z.Gł. w dn. 3.I.1986 oraz opinią Komitetu Redakcyjnego, podjął się ponownie pełnienia obowiązków Redaktora Naczelnego. Prof. Z. Olesiak przyjął uchwałę Zarządu Głównego z dn. 14.XII.1985 r. z pełnym uznaniem dla Z.Gł.

Następnie prof. Z. Olesiak przedstawił następujące uwagi szczegółowe:

- str. 28, wiersz 5 od dołu „Kongres Mechaniki” — nazwa niepoprawna.
- Str. 29 — nie byli to goście Towarzystwa lecz goście Uczelni, którzy wygłosili referaty w ramach PTMTS.
- Str. 29 — nie podano kto wnioskował powołanie prof. J. Brilli?
- Punkt 4.4 nie dotyczy XXI kadencji.
- Str. 49 p. 8 — od słów „Prof. Gutowski...” nie dotyczy obecnej kadencji.
- Str. 50 — winno być: Barbara Michalska do 12 marca 86.
- Str. 51 — podobnie jak na str. 29, nie byli to goście Towarzystwa
- W sprawozdaniu nie znalazło odzwierciedlenia kilka spraw, które w czasie XXI kadencji miały miejsce, a nawet bulwersowały członków PTMTS. Były to sprawy związane z działalnością Redakcji Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Biuletynu „Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics” oraz powody zmiany Zarządu Oddziału w Bydgoszczy.
- Termin Zjazdu Delegatów został tak ustalony, że nie był możliwy przyjazd kilku wybitnych kolegów z Oddziału warszawskiego, zajętych organizacją Sympozjum „Badania doświadczalne w mechanice”. Termin Sympozjum był od dawna znany.
- Komisja Rewizyjna w swoim sprawozdaniu pominęła ponadto milczeniem pisma, które wpływały do P. Przewodniczącego Komisji w sprawie Biuletynu „Polish Society...”
- Zarówno w sprawozdaniu Zarządu Głównego jak i sprawozdaniu Komisji Rewizyjnej nie znalazła w ogóle odzwierciedlenia sprawa bydgoska, której omówienie znalazło się nawet w prasie ogólnopolskiej i bydgoskiej.

Doc. St. Bednarz stwierdził, że na str. 23 sprawozdania utożsamiono go z innym członkiem PTMTS o tym samym nazwisku — dr St. Gracjanem Bednarzem, który wygłosił referat p.t. „Dynamika mechanizmu udarowego hydrogeologicznej maszyny wiertniczej”.

Prof. R. Gutowski zaapelował, aby w planach pracy przyszłego Zarządu znalazło się hasło „Mechanika analityczna”. Nie występuje ono na str. 44 sprawozdania. Również na III Kongresie Nauki Polskiej sprawę tę potraktowano marginesowo.

Doc. Z. Rotter wniosła poprawkę do sprawozdania na str. 12. Nie wymieniono tam referatu prof. R. Gutowskiego na zebraniu w Lublinie.

Doc. K. Wernerowski zgłosił wniosek, aby w przyszłości podawać w sprawozdaniach składy osobowe oddziałowych komisji rewizyjnych.

Doc. R. Dzieciela zwrócił uwagę, że na str. 36 sprawozdania nie podano nazwisk skarbników oddziału w Poznaniu:

do 14.IV.1986 — dra Jana Kołodzieja, a od 14.IV.1986 — dra Jerzego Rakowskiego.

Doc. Kasprzyk zaapelował, aby organizować nadal szkoły naukowe na wzór szkoły „Sterowanie w mechanice”.

Prof. K. Sobczyk w obszernej wypowiedzi podniósł problem prestiżu Towarzystwa, zwłaszcza w sytuacji spadku aktywności naukowej komitetów naukowych PAN, zajmujących się mechaniką. Komitety naukowe PAN mają ograniczony zasięg działania na mechanikę w Polsce, podczas gdy PTMTS obejmuje swoim oddziaływaniem cały kraj. Jest to szansa Towarzystwa, której nie powinno się zmarnować.

Prof. E. Brzuchowski w swojej wypowiedzi zaproponował powołanie w Towarzystwie Sądu Koleżeńskiego. Podkreślił również trudne warunki pracy Sekretariatu Z.Gł., którego lokal znajduje się obok Sali Kongresowej Pałacu Kultury i Nauki i w związku z tym często musi być okresowo opuszczany. Mówca zwrócił ponadto uwagę na brak małej poligrafii i dostępu do niej w Oddziałach.

Doc. K. Grudziński jako przewodniczący Komisji Matki stwierdził, że działa ona w oparciu o regulamin uchwalony na XXI Zjeździe.

Komisja Matka proponuje:

1. Skład Z.Gł. w liczbie 9 osób+3 zastępców.
2. Skład Głównej Komisji Rewizyjnej — 5 osób. Ukonstytuowanie się G.K.R. winno nastąpić w czasie trwania Zjazdu.
3. Zaproponował również, aby członkowie Z.G. i ich zastępcy zostali wybrani równocześnie z zachowaniem warunku uzyskania minimum 50% głosów. Zaapelował o zgłoszenie kandydatów. Trzy osoby wstrzymały się przy głosowaniu ostatniego wniosku.

Dalszy ciąg dyskusji przeniesiony został na II dzień Zjazdu.

Ad. 10. Po przerwie obiadowej odbyła się Sesja Naukowa, na której wygłoszono 6 referatów, zgodnie z wykazem podanym w programie.

Ad. 11. W dyskusji nad referatami udział wzięli Koledzy: profesorowie K. Sobczyk, J. Dietrych, Z. Dźygadło, A. Wilczyński, B. Skalmierski, J. Wojnarowski, M. Zakrzewski, J. Osiecki i doc. W. Krzyś.

Na tym zakończono I dzień Zjazdu.

II dzień Zjazdu Delegatów

W dniu 10 października 1986 r. obrady otworzył prof. J. Elsner, przedstawiając porządek obrad zgodnie z programem Zjazdu zatwierdzonym w dniu poprzednim:

Dokończenie dyskusji i podjęcie uchwały w sprawie wniosku o udzielenie absolutorium ustępującemu Zarządowi Głównemu, oraz realizację punktów 12 - 17.

Ad. 9. (c.d.) Prof. Z. Kączkowski wniósł swoje uwagi do sprawozdania finansowego wskazując na pewne zawarte w nim sprzeczności. Zdaniem prof. Z. Kączkowskiego przedstawiony w sprawozdaniu podział wpływów jest niewłaściwy przez swoją nieprecyzyjność. Wszystkie wpływy powinny być zestawione razem, podobnie jak zestawienie wszystkich wydatków. Wg obliczeń prof. Kączkowskiego łączna suma wpływów wyniosła 8.325.511,— zł. i z tej sumy należało rozliczyć się w wydatkach (np. jak zostały rozdysponowane środki pozostawione do dyspozycji Oddziałów i Zarządu Głównego z dotacji Politechniki Śląskiej). Z wyliczenia tego wynika, że składki członkowskie stanowią niespełna 4% ogólnej sumy wpływów. Reszta — to pieniądze społeczeństwa, wypłacone przez kasjera tego społeczeństwa, czyli państwo. Dotyczy to też „wpłat na konferencje naukowe”, dokonywanych tylko z innej kieszeni tego samego kasjera.

Główna Komisja Rewizyjna uznała, że Zarząd Główny gospodarował powierzonymi mu funduszami prawidłowo. Prof. Kączkowski przychyliła się do tej opinii i zamierza głosować za udzieleniem Zarządowi Głównemu absolutorium. Na zakończenie mówca zwrócił uwagę na „niektóre rażące objawy rozrzutności i beztroskiego wydawania pieniędzy społecznych na cele nieuzasadnione” (np. blankiety pism firmowych Z.Gł.). W dobie najgłębszego kryzysu braku papieru, trudności poligraficznych i wszystkich innych — nie wypada zdaniem Profesora — wydawać społecznych pieniędzy na wątpliwej wartości autoreklamę. Podobne odczucia wyraził odnośnie zaproszeń na Zjazd. Prof. Kączkowski zwrócił się z apelem do Zarządu Głównego, który zostanie wybrany — o większą skromność w gospodarowaniu środkami finansowymi dla dobra nauki i społeczeństwa.

Prof. K. Biernatowski stwierdził, że działalność Zarządu Głównego podczas ostatniej kadencji była pozytywna. Wystąpiły tylko drobne usterki oraz minimalne obniżenie aktywności i terminowości płacenia składek. Zarząd w swej działalności wykorzystał dobre tradycje Towarzystwa, i należy nadal dbać o umacnianie jego prestiżu. Prof. K. Biernatowski wyraził zamiar głosowania za udzieleniem absolutorium ustępującemu Zarządowi Głównemu.

Prof. W. Krzyś ustosunkował się do uwag prof. Olesiaka w związku z konfliktem: Zarząd Główny — Redakcja „Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej”. Sprawę uznano za wzajemnie wyjaśnioną i z tej racji Zarząd Główny zdecydował się nie poruszać tej kwestii w sprawozdaniu.

Prof. M. Zakrzewski stwierdził, że jednym z celów PTMTS jest dbanie o kulturę techniczną, w tym również i o kulturę języka technicznego. Nie wolno zaśmiecać polszczyzny. Jest ona dobrem, którego należy bronić wszelkimi sposobami. Zaproponował, aby przyszły Zarząd stworzył Zespół dbający o tę sprawę.

Prof. A. Wilczyński — w odpowiedzi prof. Tylikowskiemu wyjaśnił, że braki w sprawozdaniu finansowym występują od wyborów do 30.IX. (sprawozdanie Komisji Rewizyjnej z dn. 9.X.86).

Nierozliczenie dwóch okresów wynikło z przejściowych kłopotów na stanowisku księgowej. Uzupełnienia będą dołączone w terminie późniejszym. W odpowiedzi prof. Kączkowskiemu — nie zgodził się z zarzutami nierogospodarności. Prof. A. Wilczyński stwierdził ponadto że:

- „sprawa bydgoska” — nie ma jeszcze wyroku sądowego, postępowanie nie jest jeszcze zamknięte nawet w uczelni macierzystej docenta W. Inne kroki (oprócz zmiany Przewodniczącego Oddziału Bydgoskiego) uznano za przedczesne.
- Nadwyżki finansowe ze szkoły naukowej pochodzące z wpłat uczestników konferencji — oddano do dyspozycji oddziałów.

Prof. J. Wojnarowski na początku swego wystąpienia zwracając się do prof. A. Tylikowskiego wręczył mu pisemne podziękowanie za przejściowe pełnienie funkcji Redaktora Naczelnego kwartalnika „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”. Zjazd Delegatów przyjął to z pełną aprobatą. Z kolei ustępujący przewodniczący odpowiedział obszernie na wysunięte w czasie obrad zastrzeżenia.

W szczególności wyjaśnił prof. Z. Olesiakowi, że:

- w chwili składania sprawozdania do druku zeszyty MTiS nr 3 i 4 z 1985 jeszcze nie ukazały się drukiem, nie można więc było tego ująć w sprawozdaniu,
- zarzut, że nie podano opiniodawców prof. J. Brilli jest niesłuszny, bowiem na str. 42 wiersz 18 od góry znajduje się informacja, że opinie przygotowali: prof. Z. Olesiak i doc. J. Kubik, biuletyn o PTMTS w języku angielskim ma pewne nieścisłości, tym niemniej wydanie tego zeszytu było akcją potrzebną i spotkało się z pełną aprobatą, także członków zagranicznych, niektórzy z nich nadesłali listy wyrażające podziękowanie za przesłaną korespondencję,
- w incydentalnej sprawie związanej z byłym przewodniczącym Oddziału w Bydgoszczy prof. J. Wojnarowski stwierdził, że nikt oficjalnie nie podjął tej kwestii na posiedzeniach Zarządu Głównego. Z chwilą gdy dowiedział się o tym, powiedział prof. J. Wojnarowski, wystosował pismo do przewodniczącego Komisji Rewizyjnej Oddziału o podjęcie właściwych działań, wynik których jest znany. Umieszczanie tego rodzaju spraw w sprawozdaniu uznaliśmy za niecelowe.

W odpowiedzi na uwagi prof. Z. Kączkowskiego prof. J. Wojnarowski stwierdził, że zarzut o rozrzutności i beztroskim wydawaniu pieniędzy jest bezzasadny. Działalność merytoryczna Zarządu Głównego była na właściwym poziomie i pełna troski o dalszy rozwój Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Wszystkie natomiast działania Członków Zarządu były społeczne, a w zakresie wydatków zgodne ze Statutem i przepisami finansowymi. Prof. J. Wojnarowski dodał, że koszt firmówki Towarzystwa wydrukowanej jednolicie dla wszystkich Oddziałów jest właściwie mniejszy od druków cząstkowych. Zawarta w niej informacja o składzie Zarządu, Komisji Rewizyjnej i przewodniczących Oddziałów ułatwia działalność Towarzystwa. Odnośnie papieru, to nie czerpany ale kserograficzny jest obecnie niedostępny i bardzo drogi. Koszt druku materiałów Szkoły „Sterowanie w mechanice” w kwocie 435.000,— zł. został pokryty bezpośrednio przez Fundatora i suma ta nie przechodziła przez konto PTMTS, nie mogła zatem być księgowana. Natomiast nadwyżka pochodziła z tej części wpłat, której nie wydatkowano na ten druk i została przekazana na działalność w Oddziałach.

Na zakończenie swego wystąpienia Przewodniczący Z.G. gorąco podziękował wszystkim członkom Zarządu Głównego za współpracę, Komitetowi Organizacyjnemu za trud przygotowań XXII Zjazdu a Delegatom za życzliwość i podkreślaną w dyskusji akceptację działań Zarządu Głównego.

Prof. Z. Olesiak poprosił o głos w sprawie dodatkowych wyjaśnień. Biorąc pod uwagę ograniczony czas obrad zarządzone głosowanie w wyniku którego zamknięto dyskusję.

Po dyskusji Delegaci udzielili ustępującemu Zarządowi Głównemu absolutorium przy jednym głosie wstrzymującym się.

Ad. 12. Prof. A. Tylikowski przedstawił opinię komisji powołanej do oceny „casusu” z Bydgoszczy.

Wyciąg z protokołu Komisji XXII Zjazdu Delegatów PTMTS do spraw etyki nauczycieli akademickich, pod przewodnictwem prof. Andrzeja Tylikowskiego.

Komisja jednomyślnie stwierdza co następuje:

1. Komisja nie zna dokumentów wskazujących na działanie Oddziału w Bydgoszczy oraz Zarządu Głównego w kwestii wyjaśnienia wydarzeń związanych z działalnością byłego Przewodniczącego Oddziału w Bydgoszczy,
2. Komisja uważa za celowe przedstawienie Zjazdowi Delegatów wniosku o przekazanie dalszych prac w tej materii Komisji Rewizyjnej XXII kadencji władz PTMTS,
3. Komisja uważa za istotne prosić Zjazd Delegatów o podkreślenie wysokich wymagań etycznych stawianych członkom PTMTS — jako towarzystwu naukowemu,
4. Komisja wnioskuje o wszczęcie prac zmierzających do uzupełnienia Statutu PTMTS przez wprowadzenie instytucji sądu koleżeńskiego.

Prof. J. Elsner stwierdził, że sprawa ta ma tak oczywisty aspekt moralny, że dalsza dyskusja na ten temat jest niecelowa. W wyniku jednomyślnego głosowania zamknięto dyskusję na ten temat.

Ad. 13. Przewodniczący Komisji Matki doc. K. Grudziński przedstawił kandydatów na Przewodniczącego Zarządu Głównego w osobach:

1. prof. A. Olędzkiego,
2. prof. J. Wojnarowskiego,
3. prof. Cz. Woźniaka.

Kandydaci przedstawili krótko swoje programy wyborcze. Przewodnicząca Komisji Mandatowej doc. Z. Rotter podała, iż na 109 osób uprawnionych do głosowania, jest obecnych w II dniu Zjazdu 99 delegatów.

W pierwszym tajnym głosowaniu przy 99 obecnych delegatach oddano ważnych 98 głosów: prof. A. Olędzki otrzymał 12 głosów, prof. J. Wojnarowski 49, prof. Cz. Woźniak 36.

Ponieważ żaden z kandydatów nie otrzymał wymaganego minimum 50 głosów — przeprowadzono powtórne głosowanie, w którym na Przewodniczącego Zarządu Głównego kandydowali profesorowie:

J. Wojnarowski, Cz. Woźniak.

W wyniku powtórnego tajnego głosowania Przewodniczącym Zarządu Głównego został wybrany prof. J. Wojnarowski, który otrzymał 63 głosy. Prof. Cz. Woźniak otrzymał 35 głosów, przy czym jedna osoba wstrzymała się od głosowania. Wyniki I i II głosowania przedstawił przewodniczący Komisji Skrutacyjnej doc. M. Trombski.

Nowo wybrany Przewodniczący w serdecznych słowach podziękował wszystkim zebranych za wybór i okazane zaufanie.

Ad. 14. Po przerwie, Komisja Matka przedstawiła listę kandydatów na członków Zarządu Głównego. Na liście umieszczeni zostali:

prof. K. Biernatowski, doc. R. Bogacz, prof. E. Brzuchowski, prof. Z. Dzygadlo, prof. J. Gdula, doc. J. Golaś, prof. R. Gutowski, doc. Z. Kończak, prof. W. Krzyś, doc. J. Lipiński, doc. Cz. Mickiewicz, prof. R. Parkitny, prof. B. Skalmierski, prof. K. Sobczyk, doc. Z. Sulimowski, prof. A. Wilczyński, prof. M. Wismur, prof. Cz. Woźniak.

Na tym liście kandydatów zamknięto i przystąpiono do wyborów członków Zarządu Głównego. W głosowaniu tajnym brało udział 99 delegatów a uzyskane wyniki przedstawił przewodniczący Komisji Skrutacyjnej, doc. M. Trombski stwierdzając, że największą a jednocześnie kwalifikowaną liczbę głosów otrzymali następujący Koledzy:

Cz. Woźniak (86), R. Parkitny (76), K. Biernatowski (74), R. Gutowski (73), J. Lipiński (73), B. Skalmierski (73), M. Wizmur (73), Z. Dzygadlo (71), Z. Sulimowski (66), W. Krzyś (62), K. Sobczyk (59), Z. Kończak (54).

Na członków Zarządu Głównego wybrano zatem: Cz. Woźniaka, R. Parkitnego, K. Biernatowskiego, R. Gutowskiego, J. Lipińskiego, B. Skalmierskiego, M. Wizmura, Z. Dzygadlo, Z. Sulimowskiego.

Zastępcami członków Zarządu Głównego zostali natomiast Koledzy:

W. Krzyś, K. Sobczyk, Z. Kończak.

Ad. 15. Z kolei Komisja Matka przedstawiła kandydatury do Głównej Komisji Rewizyjnej Kolegów: R. Bąka, O. Dąbrowskiego, S. Dubiela, R. Gąnowicza, A. Tylikowskiego.

W głosowaniu tajnym wzięło udział 99 Delegatów a poszczególni Kandydaci otrzymali następującą liczbę głosów:

A. Tylikowski (92), O. Dąbrowski (87), S. Dubiel (83), R. Gąnowicz (79), R. Bąk (71).

Na przewodniczącego Komisji Rewizyjnej wybrano prof. A. Tylikowskiego.

Ad. 16. W dyskusji nad sprawami organizacyjnymi głos zabierali następujący Koledzy:

Doc. J. Kubik (Opole) — sugerował nawiązanie przez Zarząd ścisłych kontaktów ze Słowackim Towarzystwem Mechaniki.

Prof. M. Zakrzewski poparł przedmówcę.

Prof. Z. Dzygadlo zgłosił wniosek, aby zwycięzcy konkursu na najlepszą pracę w mechanice przyznawać obok nagrody pieniężnej równocześnie medal, natomiast zdobywcom dalszych miejsc przyznawać również dyplomy.

Prof. A. Wilczyński zaproponował wydanie „słownika terminologii” w dziedzinie mechaniki.

Doc. W. Kosiński (Warszawa) zastanawiał się, kto ma finansować prace nad ww słownikiem oraz zgłosił wniosek formalny aby konsekwentnie używać określenia „Towarzystwo” a nie „Stowarzyszenie”.

Prof. M. Zakrzewski podkreślił potrzebę powołania Sądu Koleżeńskiego.

Prof. E. Brzuchowski opowiedział się również za powołaniem tego rodzaju Sądu.

Prof. W. Krzyś był przeciwnego zdania; nie widząc potrzeby takiej formalizacji.

Prof. M. Dietrich poparł przedmówcę stwierdzając, że powołanie takiego Sądu będzie trudne oraz długotrwałe. Zaproponował natomiast powołanie Komisji Etyki.

Prof. Z. Dzygadlo wyraził opinię, że wystarczające w tym zakresie są Komisje Rewizyjne.

Doc. R. Dziecielak zwrócił uwagę na istnienie w obecnym statucie możliwości ukarania członka Towarzystwa przez Zarząd Oddziału bez konieczności powołania Sądu Koleżeńskiego.

Prof. A. Jakubowicz opowiedział się za powołaniem Komisji Językowej uważając, że cała praca nad słownikiem to raczej zajęcie redakcji.

Doc. B. Siołkowski z Bydgoszczy w nawiązaniu do omawianej szeroko na Zjeździe sprawy oznajmił, że Zarząd Oddziału czeka na ostateczną decyzję Sądu i decyzję Uczelnianej Komisji Dyscyplinarnej, co będzie podstawą dalszych działań Zarządu Oddziału.

Doc. A. Radowicz wniósł o głosowanie nad potrzebą wprowadzenia zmian statutowych (w przyszłości) — t.j. Sądu Koleżeńskiego.

Prof. M. Zakrzewski stwierdził, że w obecnej sytuacji Zarząd Główny nie ma żadnej możliwości ingerencji poprzez np. zawieszenie członków w jego prawach.

Doc. W. Bachmacz wyraził opinię, że niepotrzebny jest nadmierny pośpiech. Poparł sposób działania Oddziału Bydgoskiego.

Prof. R. Gutowski wyraził pogląd przeciwny powołaniu Komisji Dyscyplinarnej, uważając, że jest dostatecznie wiele innych środków.

Doc. A. Radowicz poparł propozycje prof. Gutowskiego.

Prof. J. Elsner zaproponował delegatom przegłosowanie wniosku dotyczącego powołania Sądu Koleżeńskiego. Za wnioskiem, w głosowaniu jawnym opowiedziała się większość delegatów.

Następnie doc. A. Radowicz odczytał wnioski sformułowane przez Komisję Wnioskową w następującej redakcji:

1. Wnioski z XXI Zjazdu Delegatów należy nadal traktować jako aktualne wytyczne działalności Towarzystwa na okres rozpoczynającej się XXII kadencji (za wyjątkiem punktów 8 i 13).
2. Oddziały PTMTS przy przyjmowaniu nowych członków powinny zgodnie z wymaganiami statutowymi, zwracać uwagę na wysoki prestiż Towarzystwa.
3. Należy podjąć prace zmierzające do uzupełnienia Statutu PTMTS przez wprowadzenie instytucji Sądu Koleżeńskiego oraz innych uzupełnień.
4. Zobowiązuje się Zarząd Główny do powołania Komisji ds Nomenklatury w dyscyplinach reprezentowanych przez PTMTS.
5. Zobowiązuje się Zarząd Główny do podjęcia w możliwie najkrótszym czasie dalszych roboczych kontaktów ze Słowackim Towarzystwem Mechaniki oraz rozważanie możliwości rozszerzenia tej współpracy na Czeskie Towarzystwo Mechaniki.

W głosowaniu jawnym delegaci jednomyślnie zatwierdzili powyższe wnioski jako wytyczne działania w nowej kadencji Zarządu Głównego.

Ad. 17. Prof. J. Elsner zamknął XXII Zjazd Delegatów dziękując zebranych za udział w obradach. Na ręce prof. R. Parkitnego złożył podziękowanie zespołowi organizacyjnemu za sprawne przygotowanie Zjazdu.

*Przewodniczący XXII Zjazdu
Prof. dr hab. inż. J. W. Elsner*

I POLSKO-SŁOWACKIE SYMPOZJUM MECHANIKI STOSOWANEJ

Jez. Turawskie k. Opola, 3 - 5.06.87

W czerwcu 87 r., w ośrodku wypoczynkowym Relax nad Jeziorem Turawskim odbyło się spotkanie mechaników polskich z sąsiadami zza Tatr — Słowakami. Słowackich mechaników reprezentowało 10 profesorów i docentów głównie z Politechniki w Bratysławie (Slovenska Vysoka Škola Technicka) oraz Prof. J. Brilla z Uniwersytetu Komeńskiego w Bratysławie i doc. S. Lichardus z SAV. Stronę polską reprezentowali zaproszeni przedstawiciele oddziałów PTMTS z południa Polski i Warszawy. Wygłoszono ogółem 19 referatów z różnych działów mechaniki ciała stałego. Tematyka wystąpień dotyczyła zarówno teorii ośrodka sprężystego, plastycznego, reologii i teorii zniszczenia jak i teorii powłok oraz mechaniki budowlanej. Szeroki wachlarz tematyczny konferencji wynikał z chęci zaprezentowania kierunków badań prowadzonych w obu krajach, stanowić miały one również propozycję do podjęcia wspólnych badań. Taka też była intencja organizatorów spotkania — PTMTS i sponsora, którym był Instytut Inżynierii Lądowej WSI w Opolu. Na początku obrad wręczono uroczystie dyplom członka zagranicznego PTMTS Prof. J. Brillii — Prezesowi Słowackiego Towarzystwa Mechaniki (SSM), który od lat był rzecznikiem współpracy mechaników z obu krajów.

Matematyczne podstawy mechaniki były głównie przedmiotem wystąpień J. Brillii (SSM) i G. Szefera. Pierwszy z tych referatów dotyczył adaptacji pojęć i metod analizy funkcjonalnej w lepkosprężystości i był zatytułowany: „Matematyczny aspekt liniowej lepkosprężystości”. Natomiast w referacie G. Szefera „Analiza wrażliwości w problemie kontaktowym z więzami jednostronnymi” wykorzystano teorię nierówności funkcjonalnych do badania własności zadań kontaktowych z jednostronnymi więzami. J. Murin (SSM) w referacie „O przyrostowych równaniach nieliniowych zadań mechaniki ciała stałego” przedstawił przyrostowe sformułowania równań reologii i mechaniki ciała plastycznego wraz z uwypukleniem numerycznych możliwości tego ujęcia. Zaawansowane opisy przemian energetycznych towarzyszących uplastycznieniu z udziałem przepływów ciepła zaprezentował S. Benča w pracy: „Model ciała termoplastycznego z mieszanym wzmocnieniem”. Słabszą stroną zaproponowanego ujęcia był brak pełnej analizy termodynamicznej procesów dysypatywnych. Jedyne referat z zakresu pól sprzężonych przedstawił J. Stefaniak („Warunki skoku w magnetotermosprężystości”), który zawierał opis złożonych przepływów dyfuzyjnych obojętnego elektrycznie składnika pod wpływem zewnętrznego pola elektromagnetycznego.

Znaczne zainteresowanie wywołało wystąpienie M. Kleibera, który przedstawił pracę „Zastosowanie sztucznej inteligencji w komputerowej analizie konstrukcji”. Przedstawiono w nim nowe tendencje w mechanice konstrukcji związane z pełniejszym wykorzystaniem możliwości komputerów.

Referaty związane z teorią szczelin przedstawił F. Vadovič (SSM) — „O analizie naprężeń w wierzchołku szczeliny” oraz K. Sobczyk, który zaprezentował pracę „Probabilistyczne modelowanie wzrostu szczelin zmęczeniowych”.

Klasyczne zagadnienia teorii mechanizmów przedstawił J. Hormann (SSM) w referacie „Algorytm analizy strukturalnej złożonych mechanizmów”, natomiast zastosowanie teorii grafów J. Wojnarowski w referacie „O zastosowaniu grafów w mechanice”.

Zagadnieniom heterogenicznych kompozytów lepkosprężystych poświęcił swoje wystąpienie S. Lichardus (SSM), który przedstawił pracę „Modelowanie lepkosprężystych materiałów kompozytowych”.

Spora grupa referatów dotyczyła mechaniki konstrukcji. Były to prace zarówno z teorii powłok, statyki i dynamiki konstrukcji warstwowych jak i niestandardowych zadań dynamiki konstrukcji. Statyki konstrukcji warstwowych przedstawił P. Marton zaś analogiczne zadania dynamiki F. Trawniczek. W referacie P. Martona (SSM) „Analiza numeryczna wielowarstwowych konstrukcji” przedstawiono programy obliczeń statyki belek i płyt uwarstwionych, zaś F. Trawniczek (SSM) w pracy „Niektóre problemy drgań wielowarstwowych płyt” omówił równania drgań własnych i wymuszonych belek i płyt warstwowych.

Teorię nieliniowych powłok sprężystych przedstawił J. Makowski w referacie „Wybrane zagadnienia nieliniowej teorii powłok”, który obejmował skończone przemieszczenia i obroty cienkich powłok łącznie z rozwiązaniami numerycznymi. Natomiast problem wyznaczenia naprężeń w uźebrowanych powłokach drewnianych podjął J. Kaiser (SSM) w opracowaniu „Analiza statyczna kopuł drewnianych dużej rozpiętości”.

Zastosowań technicznych dotyczył również referat L. Starka (SSM) „Działanie sejsmicznego impulsu na konstrukcję elektrowni jądrowej”. W wystąpieniu tym podano propozycję modelowania zagadnień sejsmicznych i parasejsmicznych w zakresie energetyki jądrowej. Podobnie, ogólnie ujętą tematykę niezawodności konstrukcji podjął T. Chmielewski w wystąpieniu „Niezasadność stochastyczna układów dynamicznych”.

Aktualne tendencje w mechanice gruntów przedstawił M. Gryczmański, a jego referat „Sprężysto-plastyczne modele gruntu” dotyczył możliwości opisu ujęcia własności gruntów w ramach teorii plastyczności i lepkoplastyczności.

Referaty wygłaszane były w języku polskim i słowackim, co nie przeszkadzało w ich dobrym zrozumieniu.

Spotkanie było praktyczną realizacją umowy o współpracy między PTMTS a SSM, którą po wielu zabiegach podpisano w 1986 r. Wydaje się, że sam fakt dojścia do skutku tego spotkania ma już swoją wymowę, zważywszy że od wielu lat organizuje się konferencje polsko-francuskie, polsko-włoskie itp. natomiast brak było takich spotkań z najbliższymi nam duchowo i językowo sąsiadami z południa Polski. Można żywić nadzieję, że spotkania te wejdą na stałe do kalendarza imprez organizowanych przez środowisko mechaników w Polsce. Warto więc podkreślić, że za 2 lata zostanie zorganizowana podobna konferencja przez Słowackie Towarzystwo Mechaniki (SSM) w Smolenicach — domu pracy twórczej Słowackiej Akademii Nauk (SAV).

Jan Kubik

FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS — Paryż, 29.6 - 03.7.87

Międzynarodowa konferencja naukowa ICIAM'87 (First International Conference on Industrial and Applied Mathematics) odbyła się w Paryżu w terminie od 29 czerwca do 3 lipca 1987 r. Tym samym zostały pomyślnie uwieńczone starania kilku znanych międzynarodowych towarzystw naukowych, które podjęły wspólną inicjatywę zorganizowania światowego, interdyscyplinarnego sympozjum poświęconego zastosowaniom matematyki w wielu dziedzinach nauki.

Organizatorami konferencji były następujące towarzystwa:

- GAMM (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik)
- IMA (Institute of Mathematics and its Applications) — Wlk. Bryt.
- SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) — USA
- SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) — Francja.

Trudu jej technicznej organizacji podjął się francuski Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA). Obrady pod honorowym patronatem Prezydenta Republiki Francuskiej odbyły się w Międzynarodowym Centrum Konferencyjnym zlokalizowanym na terenie nowowytbudowanego, nowoczesnego Ośrodka Nauki i Przemysłu (Cité des Sciences et de l'Industrie) w paryskiej dzielnicy La Villette. Zainteresowanie Konferencją było ogromne i przekroczyło oczekiwania organizatorów. Uczestników było ponad 1350 z 50 krajów. Najliczniej, oprócz Francji, reprezentowane były Stany Zjednoczone (280 uczestników). W trakcie Konferencji odbywała się wystawa książek i publikacji renomowanych wydawnictw naukowych oraz demonstracja zastosowań sprzętu komputerowego. Uczestnicy Konferencji mogli również zwiedzać aktualne wystawy osiągnięć techniki i nauki przedstawiane na terenie całego Ośrodka Nauki i Przemysłu.

Organizacja Konferencji, mimo dużej liczby uczestników i zgłoszonych referatów, była bardzo sprawna. Jej przebieg zrealizowany został w czterech nurtach: sesje ranne i popołudniowe rozpoczynały wykłady zaproszonych gości, następnie odbywały się tzw. minisympozja oraz prezentacje przyjętych referatów w poszczególnych sekcjach. Jednocześnie w wydzielonych pomieszczeniach Centrum przedstawiane były prace na sesji plakatowej.

Mimo różnorodności tematycznej, znaczna część prac prezentowanych na Konferencji związana była z problemami mechaniki teoretycznej i stosowanej. Zaproszeni naukowcy wygłosili 17 wykładów, a wśród nich:

- A. J. Majda (USA) — Vortex Dynamics-the Interaction of Numerical Analysis, Scientific Computing and Mathematical Theory,
- P. Perrier (Francja) — Numerical Flow Simulation in Aerospace Industry,
- W. Hackbusch (RFN) — The Multi-Grid Method. Algorithm, Software and New Developments,
- J. Hopcroft (USA) — Model Driven Simulation,
- M. J. D. Powell (W. Bryt.) — Algorithms for Nonlinear Equations and Unconstrained Optimization.

Ciekawą formą obrad były minisympozja, stanowiące przegląd aktualnego stanu wiedzy w określonych, wąskich gałęziach tematycznych. W trakcie ich trwania przedstawiano kilka referatów ściśle powiązanych z sobą tematycznie. Temat wiodący został wcześniej zgłoszony przez jednego z zainteresowanych naukowców, który jednocześnie podawał nazwiska innych specjalistów zaproszonych do dyskusji i prezentacji swoich prac. Zorganizowano 65 minisympozjów, a wśród nich:

- Finite Rotations in Nonlinear Plates and Shells (R. Schmidt-RFN)
- Minisymposium Dedicated to the Memory of J. H. Wilkinson (G. H. Golub — USA)
- Nonlinear Optimization — Principles and Technical Applications (H. P. Prüfer — RFN)
- New Methods for Numerical Turbulence Modeling (O. Pironneau — Francja)
- Expert and Knowledge Based Systems for Scientific Computing (B. Ford — W. Bryt.).

Wobec dużej liczby zgłoszonych i przyjętych referatów wygłaszane one były w siedmiu, równoległych odbywających się sekcjach tematycznych. W sumie przedstawiono 920 prac w następujących sekcjach (na pojedynczą prezentację przeznaczono 15 min.):

- Zastosowania
- Sterowanie
- Matematyka dyskretna
- Płyiny
- Informatyka
- Metody numeryczne
- Statystyka

Sesją plakatową zostało objętych 110 prac. Tematyka prac prezentowanych na konferencji dotyczyła zarówno problemów podstawowych w matematyce jak i wielu szeroko rozumianych zastosowań w takich naukach jak mechanika, automatyka, biologia, cybernetyka, chemia, astronomia, astronautyka, informatyka i wielu innych.

Jerzy Rakowski

VI SZKOŁA LETNIA MECHANIKI PŁYNÓW (Mikołajki 26 - 30 września 1987 r.)

We wrześniu 1987 roku, odbyła się w Mikołajkach VI-ta Szkoła Letnia Mechaniki Płynów, stanowiąca kontynuację rozpoczętego w roku 1977 i powtarzającego się co dwa lata cyklu szkolenia młodych pracowników nauki w zakresie Mechaniki Płynów.

Fakt ten oznacza, że upłynęło okrągiło 10 lat od chwili zainicjowania Szkół Letnich, co skłania do pewnych refleksji i podsumowań.

Przypominamy zatem, że Szkoły Letnie stanowią wyraz interpretacji postulatów II Kongresu Nauki Polskiej, dotyczących rozwoju Mechaniki Płynów w Polsce. Postulaty te, opublikowane w Materiałach Kongresowych Sekcji VI Mechaniki, opierały się na ocenie ogólnej, stwierdzającej (wówczas) niedorozwój Mechaniki Płynów w Polsce (Materiały, str. 23), zwłaszcza w porównaniu z Mechaniką Ciał Stałych Odkształcalnych. Wyrażały konieczność zmiany tego stanu rzeczy, określanego wręcz jako zagrożenie harmonijnej realizacji niektórych programów państwowych.

Upatrując w zaktywizowaniu środowiska hydro- i aeromechaników w Polsce podstawowy środek podniesienia poziomu tego środowiska naukowego, Sekcja Mechaniki Płynów Komitetu Mechaniki PAN, kierowana od roku 1973 przez członka rzeczywistego PAN Włodzimierza J. Prosnaka, powołała do życia dwie regularnie odbywające się imprezy naukowo-szkoleniowe, a mianowicie Krajowe Konferencje Mechaniki Płynów (I Konferencja — Jaszowiec, 2 - 7.12.1974) oraz Szkoły Letnie (I Szkoła — Mikołajki, 19 - 24.09.1977). Odpowiednie uchwały i ustalenia zawiera artykuł sprawozdawczy z I Konferencji Mechaniki Płynów (Nauka Polska nr. 7, 1975).

Niniejszy artykuł dotyczy Szkoły Letniej. Oto tematyka i daty Szkół poprzednich:

I Szkoła Letnia — Mikołajki, 19 - 24.09.1977 — Zagadnienia nauczania mechaniki płynów

II Szkoła Letnia — Rudziska Pasymskie, 17 - 22.09.1979 — Numeryczna mechanika płynów

III Szkoła Letnia — Mikołajki, 14 - 19.09.1981 — Metody doświadczalne w mechanice płynów

IV Szkoła Letnia — Mikołajki, 19 - 24.09.1983 — Metody analityczne i numeryczne w mechanice płynów

V Szkoła Letnia — Mikołajki, 16 - 21.09.1985 — Podstawy turbulencji

VI Szkoła Letnia — Mikołajki, 26 - 30.09.1987 — Przepływy wielofazowe.

Nie wdając się w drobiazgową ocenę stwierdzić można, że zarówno Szkoły jak i Konferencje osiągnęły w zupełności zamierzony cel: nastąpił znaczny rozwój i podniesienie poziomu naukowego hydro- i aeromechaników w Polsce. Analizę szczegółową odkładamy do innego opracowania.

VI Szkołę poświęcono zagadnieniom przepływów wielofazowych. Kierunek ten w ostatnim okresie, ze względu na liczne zastosowania, rozwija się na świecie bardzo intensywnie — nie znajduje to jednak — jak dotychczas, właściwego odbicia w kraju.

VI Szkoła Letnia podobnie jak poprzednie odbyła się z inicjatywy Sekcji Mechaniki Płynów Komitetu Mechaniki Polskiej Akademii Nauk, a osobiście jej przewodniczącego członka rzeczywistego PAN Włodzimierza J. Prosnaka, oraz przewodniczącego Podsekcji Szkolenia i Szkół Letnich prof. Eustachego S. Burki. Przygotowanie merytoryczno-naukowe Szkoły powierzono Podsekcji Przepływów Wielofazowych, kierowanej przez prof. Jarosława Mikielwicza.

Współorganizatorem Szkoły była tradycyjnie Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Akademii Rolniczo-Technicznej w Olsztynie oraz Instytut Maszyn Przepływowych Polskiej Akademii Nauk w Gdańsku. Bezpośrednimi organizatorami Szkoły byli: Eustachy S. Burka, Jarosław Mikielwicz i Mieczysław Ożóg, a sekretariat Szkoły prowadził Waclaw Ciana.

Ideą przewodnią Szkoły było przedstawienie podstaw i specyfiki przepływów dwufazowych, pokazanie złożoności tej problematyki — i w ten sposób zachęcenie młodych pracowników nauki do podjęcia badań w tej interesującej i burzliwie rozwijającej się dzisiaj dziedzinie.

Z obszernej tematyki związanej z przepływami wielofazowymi wybrano dwa zagadnienia: przepływy dwufazowe gaz-ciecz oraz procesy hydrodynamiczne w podłożu morskim traktowanym jako ośrodek wielofazowy.

Wybór tematyki podyktowany był nie tylko potrzebą rozwijania jej na gruncie krajowym, ale również nie mniejszą potrzebą wdrażania nauki światowej w gospodarce narodowej.

W programie wykładów przewidziano przedstawienie fizyki zjawisk, podstaw matematycznych modeli opisujących zjawiska, jak też przykłady zastosowań modeli oraz wyniki badań doświadczalnych.

W pierwszym cyklu dotyczącym modeli przepływów dwufazowych para-ciecz, zwrócono uwagę na szczególną rolę równań zamykających. Wykazano, że na budowę tych równań mają wpływ struktury przepływu dwufazowego. Stąd też niektóre z tych równań noszą umowną nazwę równań topologicznych.

Istotną rolę w weryfikacji doświadczalnej modelu przepływu dwufazowego (wielofazowego) odgrywa przepływ krytyczny. W wykładzie dotyczącym modelowania przepływów wielofazowych podkreślono fakt, że informacje o przepływach krytycznych można w zasadzie uzyskać z hiperbolicznych układów równań różniczkowych opisujących przepływy wielofazowe.

Kolejny wykład poświęcony problematyce przepływów para-ciecz dotyczył kondensacji homogenicznej podczas przepływu przez dyszę de Lavalą. Wyjaśniono w nim pojęcie zarodki kondensacji — tzw. kropli krytycznej. Przedstawiono związek pomiędzy kinetyką kondensacji, a rozkładem parametrów wzdłuż dyszy. Sposób budowy oraz efektywność prostych modeli opisujących przepływ dwufazowy przedstawiono w kolejnym wykładzie na przykładzie przepływu przez tak zwany trójnik.

Drugi cykl wykładów poświęcony hydrodynamice podłoża morskiego ujawniał złożoność problemów występujących w przepływach wielofazowych i ich bezpośredni związek z praktyką inżynierską — w tym przypadku — z inżynierią morską.

W podstawowym wykładzie związanym z tą problematyką przedstawiono zastosowanie teorii ośrodków wielofazowych do opisu ruchu wody w przepuszczalnym podłożu morskim. W następnych wykładach zilustrowano teorię — zastosowaniem modeli teoretycznych do inżynierii morskiej.

Organizatorzy zaprosili do Szkoły dwu specjalistów z Uniwersytetu w Manchesterze, profesora I. D. Jacksona i dr M. Christodoulou, którzy wygłosili w języku angielskim bardzo interesujące wykłady o wpływie konwekcji naturalnej na przepływ jedno i dwufazowy (prof. I. D. Jackson), oraz o metodzie pomiaru kropel i cząstek ciała stałego (dr M. Christodoulou).

Zrealizowany program Szkoły obejmował następujące wykłady:

- J. Mikielewicz — Zjawiska i modele przepływów dwufazowych — 4 godziny,
- R. Puzyrewski — Homogeniczna kondensacja w dyszach de Lavalą — 2 godziny,
- E. Śliwicky — Przepływy dwufazowe w rozgałęzieniach kanału — 2 godziny,
- St. Massel — Procesy hydrodynamiczne w podłożu morskim traktowanym jako ośrodek wielofazowy — 5 godzin,
- H. Zaradny — Wybrane zagadnienia dwufazowego przepływu wody i powietrza w ośrodkach porowatych — 5 godzin,
- I. D. Jackson — Wpływ konwekcji naturalnej na przepływ dwufazowy — (w jęz. ang.) — 2 godziny,
- M. Christodoulou — Problemy pomiarowe prędkości i wielkości kropel (w jęz. ang.) — 2 godziny.

Ponadto w materiałach Szkoły opublikowano nie wygłoszony wykład A. Konorskiego — Odparowanie i kondensacja na powierzchniach kropel w przepływie dwufazowym o silnym rozdrobieniu fazy ciekłej.

Zajęcia w Szkole objęły łącznie 22 godziny wykładów oraz kilkugodzinne zebranie dyskusyjne poświęcone podsumowaniu zajęć Szkoły, omówieniu programu, trafności doboru treści wykładów, tematyki następnych Szkół i spraw organizacyjnych.

Uczestnicy Szkoły wskazywali w dyskusji na celowość kontynuowania dobrych — dziesięcioletnich już — tradycji organizowania Szkół Letnich Mechaniki Płynów, które nie tylko spełniają ważną w kraju rolę szkoleniową, ale również — nie mniej ważną — rolę integrującą środowisko hydro- i aeromechaników w kraju.

Dodatkową atrakcją Szkoły była dwugodzinna wycieczka statkiem po jeziorze Śniardwy.

Zainteresowanie VI Szkołą Letnią w środowisku hydro-aero- i termomechaników było bardzo duże. Szkoła nie mogła niestety przyjąć wszystkich chętnych. W Szkole wzięło udział 107 osób (w tym 19 profesorów i docentów), reprezentujących 22 uczelnie krajowe, oraz 9 instytutów Polskiej Akademii Nauk i resortowych.

Uczestnicy Szkoły otrzymali dwa skrypty:

- 1 — Przepływy wielofazowe — materiały wykładowe — 203 str. wydawnictwo Szkoły,
- 2 — Katalog odwzorowań konforemnych — autorzy: W. J. Prosnak i Z. J. Kosma — 137 str., Zeszyty

Naukowe Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, nr 240/1180/87, Gdańsk 1987. Wydawnictwo ofiarowane Szkole przez Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku, jako wyraz poparcia jej dążeń i zamierzeń.

Opublikowane i oddane w ręce uczestników materiały wykładowe wypełniają po części lukę w krajowym piśmiennictwie naukowym w dziedzinie przepływów wielofazowych. Uzupełniają też, wyłożone w ramach poprzednich Szkół poświęconych Numerycznej Mechanice Płynów, metody wyznaczania przepływów oparte na wstępnej transformacji obszaru przepływu.

*Instytut Maszyn Przepływowych
PAN w Gdańsku*

*Eustachy S. Burka
Jarosław Mikieliewicz*

VIII MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA MASZYN PRZEPŁYWOWYCH (WRL, Budapeszt, 15 - 18 września 1987 roku)

Kolejna ósma Międzynarodowa Konferencja Maszyn Przepływowych odbyła się w dniach 15 - 18 września 1987 roku w Budapeszcie.

Organizatorami, zgodnie z tradycją były: Hungarian Scientific Society of Mechanical Engineers; Section of Technical Sciences of the Hungarian Academy of Sciences; IAHR oraz IUTAM HNC.

W roku 1987 minęło 25 lat od zorganizowania w roku 1962 w Budapeszcie pierwszej Konferencji Maszyn Przepływowych.

Z upływem lat, konferencje te nabierały większego międzynarodowego prestiżu naukowego i przyciągały stale wzrastającą liczbę badaczy z całego świata.

Na pierwszej Konferencji przedstawiono 23 referaty z czterech krajów europejskich. Na ósmej zaś, zaprezentowano 119 referatów z 22 krajów świata.

Od roku 1962 Konferencje te są regularnie organizowane przez Wydział Nauk Technicznych Węgierskiej Akademii Nauk oraz Węgierskie Stowarzyszenie Inżynierów Mechaników.

Wszystkie referaty (119), zostały opublikowane w języku angielskim w dwu tomach materiałów konferencyjnych (962 strony), pod redakcją profesorów László Kisbocskói oraz Ákos Szabó, (Proceedings of the Eighth Conference on Fluid Machinery, Vol. 1 and 2, Akadémiai Kiadó, Budapest 1987).

Organizatorzy Konferencji dopuścili do prezentacji prace o następującej tematyce:

- przepływ cieczy idealnej oraz cieczy rzeczywistych przez palisady łopatkowe,
- warstwy przyścienne,
- przepływy wielofazowe, mieszanie,
- kavitacja, erozja kawitacyjna, szum kawitacyjny, fale uderzeniowe,
- pompy wyporowe,
- turbiny wodne,
- wentylatory i sprężarki osiowe,
- wentylatory, pompy i sprężarki odśrodkowe,
- uszczelnienia,
- rozgałęzienia sieci i systemy rozdzielcze,
- strumienice.

Obrady odbywały się w Pałacu Kongresowym Węgierskiej Akademii Nauk na sesjach plenarnych. Odbyło się 12 Sesji Plenarnych. Po każdej Sesji przewidziano czas na dyskusję.

W trakcie obrad plenarnych uczestnicy z Polski przedstawili 25 referatów. Była to po gospodarzach najliczniejsza grupa uczestników. Węgrzy (28 referatów) i Polacy (25 referatów) prezentowali 50% materiału konferencyjnego. Konferencja uzyskała nieoficjalną nazwę Węgiersko-Polską.

Uczestnicy z Polski przedstawili następujące referaty szczegółowe:

- 1 — Adámkowski A. — Waterhammer reduction in the delivery pipe of a hydraulic machine by means of flow control.
- 2 — Burka E. S., Aerts K. — Dynamics of a laser pulse generated vapour-gaseous bubble.
- 3 — Burka E. S., Ciana W. — An approximate method determining volumetric losses in radial clearance of a gear pump.

- 4 — Burka E. S., Wilamowska M. — Numerical analysis of a liquid flow in radial clearance.
- 5 — Chmielniak T., Kosman G., Witkowski A., Rusin A. — Basic constructional problems of high-temperature fans and examples of their solution.
- 6 — Dzida M. — Experimental investigation of the distribution and the pulsation of temperature of a gas stream at the gas turbine inlet in the stationary regime.
- 7 — Fortua S. — Investigations of centrifugal fans having discontinuous characteristics with hysteresis.
- 8 — Jędrzysek J. — The vorticity method design for the modelling of rotor — stator interaction.
- 9 — Korczak A., Lamboj J. — Oscillation of axial force in the centrifugal pump working in cavitation.
- 10 — Kosowski K. — The effect of the degree of reaction and other design parameters on the optimum value of the nozzle outlet angle in turbine stages.
- 11 — Nałęcz T. — Experimental determination of volumetric coefficient of flow intensity through regulatory clearances of a variable section.
- 12 — Ożóg M. — Investigations of volumetric rate of liquid flow through properly configured seal of shaft terminals.
- 13 — Pakula G., Rduch J. — Laminar outward flow in a gap between rotating discs.
- 14 — Perycz S. — Estimation of the optimum velocity ratio of the last stage of great output condensing turbine.
- 15 — Piątkowski R. — Flow losses in blower centrifugal impellers.
- 16 — Plutecki J., Wiśniewski P. — Influence of the selected properties of oil on cavitation process.
- 17 — Pronobis-Prońska A. M. — Unsteady flow in rotating cascades of profiles.
- 18 — Rohatyński R. — On representation of potential velocity fields by various singularities.
- 19 — Rokita J. — Experimental estimation of the operating parameters of free-flow pumps with the increased specific work.
- 20 — Sentek J., Gniewek B., Odziewa B. — Noise generated by centrifugal fans.
- 21 — Steller J. — On prediction of Kaplan turbine performance and cavitation characteristics.
- 22 — Steller K. — On molecular metals applicability to the repair of cavitation-damaged hydraulic machines.
- 23 — Steller K., Reymann Z. — Some test results on Bánki turbine.
- 24 — Walczak J. — Velocity distributions and tangential stresses on the wall of a three-dimensional turbulent boundary layer in a parallel-disk vanelles diffuser.
- 25 — Zieliński A. — Recording of blade shape of fluid-flow machines.

W dyskusji końcowej wysoko oceniono materiał prezentowany przez referentów. Uznano za znaczący fakt, że coraz więcej młodych początkujących pracowników naukowo-badawczych, angażuje się w prace badawcze z zakresu teorii i badań doświadczalnych maszyn przepływowych.

Konferencja była doskonale zorganizowana. Językami konferencyjnymi był język angielski, niemiecki, rosyjski i węgierski.

Wygłaszane referaty w wybranym języku były bieżąco tłumaczone na wszystkie pozostałe języki konferencyjne. Dotyczyło to również dyskusji.

W drugim dniu Konferencji Przewodniczący Stowarzyszenia Węgierskich Inżynierów Mechaników i jednocześnie Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego Konferencji Profesor József J. Varaga podejmował uczestników Konferencji kolacją w salach Hotelu Gellerta.

Kolejna IX Międzynarodowa Konferencja Maszyn Przepływowych odbędzie się w Budapeszcie w 1990 roku.

ROCZNY SPIS TREŚCI ZA ROK 1988

Zeszyt 1

Wspomnienie o Profesorze Zbigniewie Brzosce	3
A. MARANDA, E. WŁODARCZYK, J. SERAFINOWICZ, Analiza parametrów detonacyjnych materiałów wybuchowych emulsyjnych (MWE) uczulanych szklanymi mikrosferami zawierającymi powietrze	9
Анализ детонационных параметров эмульсионных взрывчатых веществ (ЭВВ) сенсibilizированных стеклянными микросферами заполненными воздухом	
Analysis of the detonation parameters of emulsion explosives (EM) depending on glass microspheres filled with air	
J. WOJNAROWSKI, A. NOWAK, Grafy transformacji zmiennych jako modele drgających układów ciągłych	21
Графы трансформации переменных как модели колеблющихся непрерывных систем	
Graphs of variables transformations as the models of vibrating continuous systems	
J. KUBIAK, M. WRÓBEL, O rozseparowaniu równań termodyfuzji lepkosprężystej	43
О разделению уравнений вязкоупругой термодиффузии	
On decoupling equations of viscoelastic thermodiffusion	
R. WOJNAR, Fale powierzchniowe w termosprężystości z czasami relaksacji	55
Поверхностные волны в термоупругости с временами релаксации	
Surface waves in thermoelasticity with relaxation times	
J. A. KOŁODZIEJ, M. BARBAKCI, Theoretical model of externally pressurized circular thrust porous gas bearing with deformable material	73
Теоретическая модель цилиндрического подшипника-подпятника внешне питаемого при учёте деформации пористого материала	
Teoretyczny model porowatego zewnątrznie zasilanego cylindrycznego gazowego łożyska wzdużnego z odkształcalnym materiałem porowatym	
M. KACZMAREK, J. A. KOŁODZIEJ, G. MUSIELAK, Wyznaczanie powierzchni swobodnej cieczy w trójkątnym rowku	83
Определение свободной поверхности жидкости в трёхугульной канавке	
Determination of free surface of liquid in a triangular groove	
A. PIELORZ, Application of waves method in investigation of drives systems, comparisions with other methods	
Использование волнового метода в исследованиях приводных систем и его сравнение с другими методами	
Wykorzystanie metody falowej w badaniach układów napędowych, porównanie z innymi metodami	
K. MURAWSKI, The Korteweg-de Vries equations for waves propagation in an infinite tube	113
Уравнения Кортевега-де Фриза для распространения волн в бесконечно длинной трубе	
Równania Kortewega-de Vriesa dla propagacji fal w rurze o nieskończonej długości	
J. ŚWIRYDZUK, Rozwój i deformacja warstwy wirowej indukowanej za profilem aerodynamicznym przez przepływającą strukturę wirową	121
Развитие и деформация вихревого слоя индуцированного за аэродинамическим профилем движущейся вихревой структурой	
Development and deformation of the vortex layer induced behind an airfoil by the moving vortex structure	
S. WRZESIEN, Numeryczne obliczenia płaskich lepkich przepływów naddźwiękowych z falą uderzeniową	135
Численный расчёт плоских сверхзвуковых течений вязкого газа с ударными волнами	
Numerical computations of plane viscous supersonic flows with shock waves	

- J. SKŁADZIEN, M. PRUS, Metoda analizy cieplnej trójstrumieniowych krzyżowoprądowych konwekcyjnych wymienników ciepła przy wymieszaniu czynnika zewnętrznego 149
 Метод термодинамического анализа конвекционных трёхпоточных перекрестных теплообменников из смешиванием внешнего потока
 Thermodynamical analysis method of the convection three-stream crossflow heat exchangers with mixed flow of the outer agent
- K. MARCINIAK, J. WOJCIECHOWSKI, The application of curvature and contour lines in sculptured surfaces machining on numerical control milling machines 161
 Использование линий кривизны и уровней для обработки криволинейных поверхностей на фрезерных станках, управляемых при помощи электронно-вычислительных устройств
 Zastosowanie linii krzywiznowych i konturowych przy obróbce frezowaniem powierzchni krzywoliniowych dla obrabiarek sterowanych numerycznie
- K. GOŁOŚ, Plastic strain energy under cyclic multiaxial states of stress 171
 Энергия пластической деформации в условиях сложного циклического нагружения
 Energia odkształcenia plastycznego przy wieloosiowych obciążeniach cyklicznie zmiennych
- K. MAZUR-ŚNIADY, Skrępowane skręcanie przyrzątecznych prętów o bisymetrycznych, zwartych przekrojach 179
 Стеснённое кручение призматических стержней о бисимметричных сплошных сечениях
 Constrained torsion of prismatic rod with bisymmetric compact cross-section
- R. PIKORSKI, Metoda superelementu w statyce układów z więzami jednostronnymi 191
 Метод суперэлемента в статике систем с одностронными связями
 Superelement method in the statics of system with unilateral constraints
- R. PIKORSKI, Operatorowa metoda rozwiązania pewnego układu łańcuchowego 199
 Операторный метод расчёта некоторой цепной системы
 Operator intergration method of solution of a catenary system
- Biuletyn Informacyjny 209

Zeszyt 2

- V. ASKEGARD, Problems in connection with design, calibration and use of pressure cells 219
 Проектирование, калибровка и применения датчиков давления
 Problemy projektowania, kalibracji i użytkowania czujników ciśnienia
- K. H. LAERMANN, Automatic digital image-processing in photoelasticity 231
 Автоматическая цифровая обработка образов
 Automacyjne cyfrowe przetwarzanie obrazów
- Z. FÜZESSY, F. GYIMESI, J. KORNIŠ, Applications of the difference hologram interferometry 243
 Применения разностной голографической интерферометрии
 Zastosowanie różnicowej interferometrii holograficznej
- R. HÖFLING, W. OSTEN, Speckle pattern correlation using digital image progressing 253
 Корреляция спекл-картин при применении цифровой обработки образов
 Korelacja obrazów plamkowych przy użyciu techniki cyfrowej
- J. ДЕПУТАТ, Wykorzystanie zjawiska elasto-akustycznego do pomiaru naprężeń 263
 Использование акусто-упругого эффекта для измерения напряжений
 Use of elasto-acoustic effect in stress measurements
- M. J. MATCZAK, Wyznaczenie przemieszczeń i odkształceń na podstawie kontrastu prążków na obrazach interferometrii holograficznej 279
 Определение перемещений и деформации на основе контраста полос на образах голографической интерферометрии
 Displacement and strain evaluation on the basis of fringe contrast in holographic interferometry
- J. SZALA, Zagadnienia równoważnej amplitudy naprężeń w ocenie trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych 291

	Вопрос эквивалентной амплитуды напряжений при оценке прочности конструкционных деталей	
	Problem of equivalent stress amplitude for evaluation of construction elements fatigue life	
Z.	RYCHTER, Nonlinear equations of shells of slowly varying curvatures	303
	Нелинейные уравнения оболочек с медленно изменяющимися кривизнами	
	Nieliniowe równania powłok o wolno zmieniających się krzywiznach	
M.	CIAŁKOWSKI, Rozwiązanie zagadnienia przepływu idealnego czynnika ściśliwego w palisadzie profili metodą wariacyjną	311
	Решение задачи идеального течения текучей среды в решётке профилей вариационным методом	
	Solution to a problem of the ideal flow of compressible liquid in cascade profiles by variational method	
A.	JARŻA, Struktura turbulencji i bilans jej energii w warstwie przyściennej na powierzchni przepuszczalnej	329
	Баланс энергии и структура турбулентности в пограничном слое на проницаемой поверхности	
	Turbulence structure and balance of turbulent kinetic energy in boundary layer along a permeable surface	
M.	MINCH, Opis stanu zarysowania lepkosprężystej tarczy w ujęciu dystrybucyjnym	347
	Описание состояния вязкоупругого диска с трещиной в классе обобщённых функций	
	Description of a cracked state of a viscoelastic plate by distributional formulation	
M.	BANYŚ, Quasi-statyczna sprężysto-lepkoplastyczność dla materiału nieściśliwego. Rozwiązanie MES.	359
	Квази-статическая упруго-вязкопластичность для несжимаемого материала. Решение методом конечных элементов	
	Quasi-static elasto-viscoplasticity for incompressible material. Solution by FEM	
J.	BLANUT, Non-standard analysis and the continuous media	369
	Нестандартный анализ и сплошные среды	
	Analiza niestandardowa i ośrodki ciągłe	
E.	WIERZBIŃSKI, Constraints in solid mechanics. An application of nonstandard analysis	377
	Связи в механике твёрдого тела. Применение нестандартного анализа	
	Więzy w mechanice ciała stałego. Zastosowanie analizy niestandardowej	
	Biuletyn Informacyjny	389

Zeszyt 3

I.	НАГИВИНА, Голографические методы исследования формы и деформаций твёрдых тел и методы обработки интерферограмм	411
	Metody holograficzne badań kształtu i odkształceń ciał stałych oraz metody analizy interferogramów	
	Holographic methods for investigation of the shapes and deformation of solid bodies and methods of analysis of interferograms	
S.	BYTNER, B. GAMBIN, Homogenization of first strain-gradient body	423
	Гомогенизация градиентной среды первого порядка	
	Homogenizacja ośrodka gradientowego 1-go rzędu	
F.	ROMANÓW, S. DZIELENDZIAK, Stateczność osiowo ściskanych cylindrycznych powłok dwuwarstwowych	431
	Устойчивость двухслойных цилиндрических оболочек, подвергнутых осевому сжатию	
	Stability of two-layer cylindrical shells with axial compression	
J.	GODZIMIRSKI, Analiza rozkładu naprężeń w spoinie klejowej połączenia zakładkowego w zakresie odkształceń plastycznych	445

	Анализ распределения напряжений в клеевом слое соединения в нахлестку в области пластических деформации	
	Analysis of stress distribution in the adhesive of lap joints within the range of plastic deformations	
E. WITTBRODT, T. ВОСНЕŃSKI,	Modelowanie procesu frezowania igłowego z zastosowaniem metody elementów skończonych	457
	Моделирование иглового процесса фрезерования с применением метода конечных элементов	
	The microscalping process model using the finite element method	
R. LEWANDOWSKI,	Analiza nieliniowych drgań własnych belek wieloprzęsłowych	471
	Анализ нелинейных собственных колебаний многопролетных балок	
	The analysis of non-linear free vibrations of multispan beams	
W. LISEWSKI, P. GUTOWSKI,	Praktyczne zastosowanie elementów analizy modalnej do dynamicznych badań obrabiarek	481
	Применение элементов модального анализа к динамическим исследованиям станков	
	Practical applications of the modal analysis elements to dynamical tests of machine tools	
M. WRÓBEL,	Przepływy termodyfuzyjne sprzężone z polem naprężeń w lepkosprężystości	507
	Термодиффузионные переплывы связанные с полем напряжения в вязкоупругости	
	Heat and mass transfer problem coupled with stress field in viscoelasticity	
J. SZALA,	Zastosowanie programowych badań zmęczeniowych do wyznaczania granicy zmęczenia	523
	Применение программированных усталостных исследований к определению предела усталости	
	Application of the programmed fatigue investigation to the fatigue limit evaluation	
R. MAROŃSKI,	Minimalizacja zużycia paliwa w locie za zadaną odległość	541
	Minimization of fuel consumption during flight on a given distance	
	Минимализация расхода топлива в полёте по заданном расстоянии	
	Biuletyn Informacyjny	557

Zeszyt 4

	Jugosławiańsko-polska konferencja p.t. „New trends in mechanics of solids and structures”	571
A. POSESKI, G. КОКАЛАНОВ,	Three-dimensional mixed finite elements	575
	Трёхмерные смешанные конечные элементы	
	Trójwymiarowe mieszane elementy skończone	
A. ALUJEVIČ, I. POTRČ,	Boundary elements for thermo-elasto-plasticity of metals	589
	Краевые элементы в задачах термо-упруго-пластичности металлов	
	Elementy brzegowe w zagadnieniach termo-sprężysto-plastyczności metali	
Z. V. DRAŠKOVIC,	On invariance of finite element approximations	597
	Инвариантные аппроксимации конечных элементов	
	O niezmienniczości przybliżeń elementów skończonych	
O. DĄBROWSKI, R. SZMIGIELSKI,	Solution of shells by boundary element method. Problem of corners	603
	Разрешение задачи пологих оболочек методом граничных уравнений. Угловая проблема	
	Rozwiązanie zagadnienia powłok małowyniosłych za pomocą elementów brzegowych. Zagadnienie narożu	
Z. DŻYGADŁO,	Nonautonomous nonlinear vibrations of a continuous self-excited system. A plate in supersonic flow	611
	Неавтономные нелинейные колебания автоколебательной системы с распределенными параметрами. Пластика в сверхзвуковом потоке	
	Nieautonomiczne nieliniowe drgania ciągłego układu samowzbudnego. Płyta w opływie nadźwiękowym	
P. KONDERLA,	Dynamic of the material body with variable mass	625
	Динамика материального тела с переменной массой	
	Dynamika ciała materialnego o zmiennej masie	

Z. KOŃCZAK, The influence of moisture and temperature on the behaviour of orthotropic, visco-elastic plates	641
Влияние изменения влажности и температуры на поведение ортотропных вязкоупругих пластинок	
Wpływ zmian wilgotności i temperatury na zachowanie się ortotropowych płyt lepkosprężystych	
Z. OLESIAK, On properties of thermo-diffusive stresses in solids	649
О свойствах термо-диффузионных напряжений	
О własnościach naprężeń od termodyfuzji	
A. TYLIKOWSKI, Dynamic stability of antisymmetrically laminated cross-ply cylindrical shells	655
Динамическая устойчивость антисимметрично слоистых цилиндрических оболочек	
Dynamiczna stateczność antysymetrycznie poprzecznie laminarnych powłok walcowych	
J. A. KOŁODZIEJ, M. KLEIBER, G. MUSIELAK, Comparison of the boundary collocation and finite element methods for some harmonic 2D problems	663
Сравнение метода граничной коллокации и метода конечных элементов для некоторых гармонических двумерных граничных задач	
Porównanie metody kolokacji brzegowej z metodą elementów skończonych dla niektórych harmonicznych dwuwymiarowych problemów brzegowych	
A. PODNORECKA, Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych	683
Метод временно-пространственных элементов в геометрически нелинейных задачах	
The space-time element method in geometrically non-linear problems	
Biuletyn Informacyjny	701
Roczny spis treści — rok 1988	716

Cena zł 180,—

Prenumeratę na kraj przyjmują i informacji o cenach udzielają urzędy pocztowe i doręczyciele na wsi oraz Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” w miastach.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział w Warszawie Nr 370044-1195-139-11. Wysyłka za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumerat na kraj i za granicę:

- do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpoznania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland.

Our bankers:

BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa, pokój 309)

Mech. Tcor. T. 26, z. 4, s. 569—720, Warszawa 1988, Indeks 36523