

7 11 720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

28
PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK
TOM 26 ZESZYT 3



PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1988

531

SPIS TREŚCI

И. Нагибина, Голографические методы исследования формы и деформаций твёрдых тел и методы обработки интерферограмм Metody holograficzne badań kształtu i odkształceń ciał stałych oraz metody analizy interferogramów Holographic methods for investigation of the shapes and deformation of solid bodies and methods of analysis of interferograms	411
S. Bytner, B. Gambin, Homogenization of first strain-gradient body Гомогенизация градиентной среды первого порядка Homogenizacja ośrodka gradientowego 1-go rzędu	423
F. Romanów, S. Dzielendziak, Stateczność osiowo ściskanych cylindrycznych powłok dwuwarstwowych. Устойчивость двухслойных цилиндрических оболочек, подвергнутых осевому сжатию Stability of two-layer cylindrical shells with axial compression	431
J. Godzimirski, Analiza rozkładu naprężeń w spoinie klejowej połączenia zakładkowego w zakresie odkształceń plastycznych Анализ распределения напряжений в клеевом слое соединения в нахлестку в области пластических деформации Analysis of stress distribution in the adhesive of lap joints within the range of plastic deformations	445
E. Wittbrodt, T. Bocheński, Modelowanie procesu frezowania igłowego z zastosowaniem metody elementów skończonych Моделирование иглового процесса фрезерования с применением метода конечных элементов The microscalping process model using the finite element method	457
R. Lewandowski, Analiza nieliniowych drgań własnych belek wieloprzęsłowych Анализ нелинейных собственных колебаний многопролетных балок The analysis of non-linear free vibrations of multispan beams	471
W. Lisewski, P. Gutowski, Praktyczne zastosowanie elementów analizy modalnej do dynamicznych badań obrabiarek Применение элементов модального анализа к динамическим исследованиям станков Practical applications of the modal analysis elements to dynamical tests of machine tools	487
M. Wróbel, Przepływy termodyfuzyjne sprzężone z polem naprężeń w lepkośćprężystości Термодиффузионные переплывы связанные с полем напряжения в вязкоупругости Heat and mass transfer problem coupled with stress field in viscoelasticity	507
J. Szala, Zastosowanie programowanych badań zmęczeniowych do wyznaczania granicy zmęczenia Применение программированных усталостных исследований к определению предела усталости Application of the programmed fatigue investigation to the fatigue limit evaluation	523
R. Maroński, Minimalizacja zużycia paliwa w locie na zadaną odległość Минимализация расхода топлива в полёте по заданном расстоянии Minimization of fuel consumption during flight on a given distance	541
Biuletyn Informacyjny	557

J. 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 6 · Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 8 8

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

RADA REDAKCYJNA

MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,

STANISŁAW J. GDULA, IGOR KISIEL,

ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

KOMITET REDAKCYJNY

REDAKTOR NACZELNY—ZBIGNIEW OLESIAK,
REDAKTORZY—STANISŁAW DUBIEL, JACEK STUPNICKI,
ANDRZEJ TYLIKOWSKI, CZESŁAW WOŹNIAK,
SEKRETARZ—EWA KOISAR

Kwartalnik ukazuje się przy pomocy finansowej PAN

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa, pokój 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 500. Ark. wydawniczych 12,5. Ark. drukarskich 10,0. Papier offset. mat. kl. IV, 71 g. 70×100.
Oddano do składania 14.I.1988 r. Druk ukończono w kwietniu 1989 r. Zam. 6338/12/88. Cena zł 180,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ГОЛОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФОРМЫ И ДЕФОРМАЦИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНТЕРФЕРОГРАММ*)

И. НАГИВИНА

Ленинградский институт точной механики и оптики

Развитие лазерной техники и голографии открыли большие возможности для создания принципиально новых, когерентно-оптических методов исследования формы и напряженно-деформированного состояния диффузно-рассеивающих объектов. В настоящее время значительные успехи достигнуты в области разработки методов и принципов построения измерительных систем расшифровки картин в методах голографической интерферометрии и спекл-интерферометрии. В первом случае наиболее перспективным является метод двух длин волн. Однако, отсутствие требуемых регистрирующих сред, необходимость компенсации поперечного сдвига изображений ограничивают возможности широкого применения этого метода.

Методы спекл-интерферометрии и спекл-фотографии, предъявляя значительно меньшие требования к регистрирующим средам и к условиям регистрации, обеспечивают возможность регистрации и последующей обработки спекл-картин с помощью электронных методов, т.е. дает возможность автоматизировать процесс измерения.

При изучении деформаций объектов с помощью методов голографической интерферометрии и спекл-интерферометрии основные трудности возникают на этапе расшифровки интерферограмм.

Современный уровень развития методов гетеродинной обработки голографических интерферограмм и спекл-картин дает основания надеяться, что уже в ближайшем будущем будут созданы высокоэффективные, автоматизированные системы обработки интерферограмм.

Возникновение нового направления в интерферометрии (голографическая интерферометрия и спекл-интерферометрия) позволило осуществлять контроль диффузно-рассеивающих объектов с интерферометрической точностью, а также реализовать сравнение световых полей, существовавших в различные моменты времени.

*) Praca wygłoszona na XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa—Jadwisin, 1986.

Как уже упоминалось, методы когерентной оптики, основанные на принципах голографической интерферометрии и спекл-интерферометрии в настоящее время находят широкое применение при изучении формы поверхности, вибраций и деформаций объектов.

I. В данной работе вначале проводится краткий анализ методов голографической интерферометрии и отмечаются основные тенденции и перспективы использования их для решения практических задач, в частности, для исследования медуко-биологических объектов.

В основе голографических методов изучения формы поверхности объектов лежит возможность формирования интерференционной картины, в которой интерференционные полосы являются линиями равного уровня и представляют исследуемый объект в виде его топографической карты.

Известно три голографических метода получения топограмм объекта: метод двух источников (или метод смещенного источника), иммерсионный метод и метод двух длин волн (двухчастотный). Расстояние между секущими эквидистантными плоскостями в топографических интерферограммах соответственно определяются выражениями:

$$а) \quad \Delta h = \frac{\lambda}{2 \sin(\Theta/2)} \quad (1)$$

$$б) \quad \Delta h = \frac{\lambda}{n_1(1 + \cos \gamma_1) - n_2(1 + \cos \gamma_2)} \quad (2)$$

$$в) \quad \Delta h = \frac{\lambda \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad (3)$$

В этих формулах Θ — угол между первоначальным и последующим направлением распространения освещающего объект пучка при первой и второй экспозициях, λ — длина волны, n_1 и n_2 — показатели преломления иммерсии при первой и второй экспозициях (иммерсионный метод), а γ_1 и γ_2 — углы преломления света при соответствующих экспозициях.

λ_1 и λ_2 — длины волн применяемого излучения при записи первой и второй голограммы одного и того же объекта.

Как уже отмечалось, среди методов контроля формы поверхности объектов наибольшую простоту имеет метод двух длин волн. С помощью этого метода можно исследовать объекты произвольной формы, в широком диапазоне управлять шагом полос. Однако, отсутствие в ряде случаев требуемых источников света — лазеров для записи голограмм, трудоемкость методов расшифровки в значительной степени ограничивает возможности практического использования этого и других методов для контроля формы поверхности объектов.

С точки зрения регистрирующих сред наибольшие перспективы возлагаются на фототермопластические материалы. При использовании фототермопластических регистрирующих сред время получения топографической интерферограммы объекта методом двух длин волн составляет величину порядка I сек. Дальнейшее уменьшение времени получения топографической интерферограммы ограничивается фи-

зическими свойствами самой регистрирующей среды и возможностями быстрого перехода с одной длины волны на другую при записи голограммы. Кроме того, достижение предельных точностных характеристик при определении формы поверхности диффузно-рассеивающих объектов связано с необходимостью компенсации поперечного сдвига изображений, что в свою очередь накладывает ограничения на линейные размеры исследуемых объектов. В наших работах (работы аспирантов) для исследования формы и деформаций различных объектов нами был применен метод смещенного источника (Рис. 1), метод встречных пучков по Денисюку (Рис. 2) и метод проекции полос (Рис. 3).

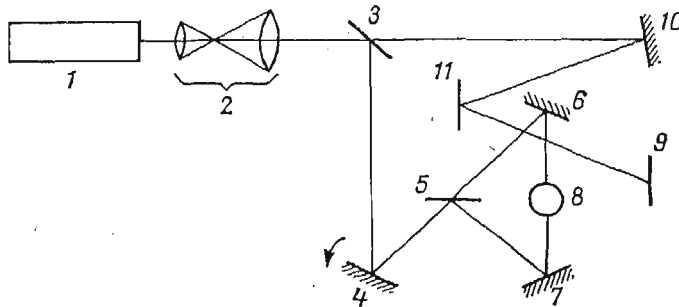


Рис. 1. Оптическая схема регистрации интерферограмм методом смещенного источника; 1 — лазер; 2 — коллиматор; 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 — отражающие или полупрозрачные зеркала, 8 — объект.

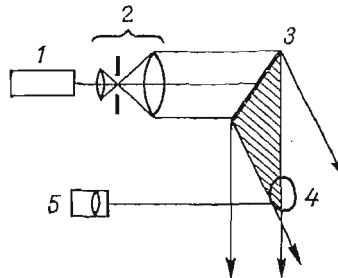


Рис. 2. Метод проекции полос для получения топографических карт диффузно-отражающих объектов; 1 — лазер, 2 — коллиматор, 3 — голограмма, 4 — объект, 5 — фотоаппарат.

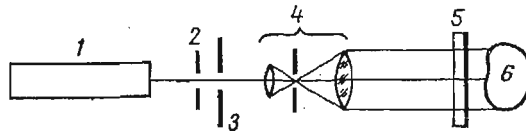


Рис. 3. Оптическая схема регистрации голографических изображений методом Ю. Н. Денисюка; 1 — лазер, 2 — диафрагма, 3 — фотозатвор, 4 — коллиматор, 5 — голограмма, 6 — объект.

II. Остановимся на проблемах, которые решались при исследованиях различных параметров медико-биологических объектов. Мы ставили следующие задачи: — получить объемную оптическую информацию об объекте и создать таким

образом реальную картину объекта для обеспечения, например, музеев учебных институтов соответствующими голограммами-экспонатами;

— исследовать топографические карты и деформацию сложных анатомических препаратов костных тканей человека или других органов;

— исследовать изменение фотоупругих свойств искусственных и препарированных артерий (сосудов) человека с применением аппарата искусственного кровообращения (эта проблема в настоящей работе не рассматривается).

Первая задача была осуществлена с помощью использования записи голограмм в толстослойных эмульсиях по схеме Ю. Н. Денисюка. Реальное изображение, как известно, обладает объемностью, глубиной изображения, игрой бликов, параллаксом; поэтому это изображение соответствует точной копии диффузно-отражающего объекта. Такие изображения — „образы” объектов являются, по существу, оптическими эквивалентами объекта, т.е. имеют такую структуру, которая воздействует на глаз человека так, как и собственно объект.

В настоящее время в СССР (в Ленинграде и других городах) созданы музеи голографических экспонатов, которые дают представление об этой уникальной возможности голографии: создается сильное и эффектное зрительное впечатление.

Для количественного исследования топографических карт диффузно-отражающих объектов использовались оптическая установка смещенного источника (Рис. 1) и оптическая схема проекции полос (Рис. 2), а для изучения деформаций костных тканей — схема Денисюка (Рис. 3).

Обратимся к результатам исследований формы и деформации медико-биологических объектов. Современная морфологическая наука требует точной количественной информации о деформированном состоянии и изменчивости различных органов под влиянием функциональных и экстремальных воздействий. Эти вопросы необходимо рассматривать в топографической анатомии и экспериментальной хирургии.

Для изучения топографии поверхностей костных тканей или деформаций экспериментально были освоены два указанных выше метода. В обоих случаях объект (как целое) при первой и второй экспозициях остается неподвижным. Для исследования деформаций интерференционное поле, восстановленное с голограммы, интерферирует с измененным полем при деформации объекта или с коллимированным фронтом лучей, распространяющимся под другим углом. Таким образом осуществляется когерентное сложение объектных волновых полей. При изучении контурных карт обеспечивалось постоянство шага интерференционных полос. В соответствии с инвариантностью формы поверхности интерферограммы позволяют проводить точное описание формы поверхности или ее деформации. Последнее имеет важное значение при изучении индивидуальной и возрастной изменчивости различных органов.

Для изучения деформации костных тканей черепной коробки и выявления механизмов образования трещин и переломов было разработано специальное нагрузочное приспособление, исключаящее смещение объекта при возрастании нагрузки.

Для удобства расшифровки интерферограмм создано приспособление, позвол-

яющее совместить исследуемую точку восстановленного изображения с точкой пересечения оптических осей восстанавливающего пучка и системы наблюдения. Можно было проводить счет полос и определять Δl — расстояние между реперными точками поверхности*.

В качестве примера приводим результаты по изучению деформации основания черепной коробки в широком диапазоне дозированной нагрузки. На рис. 4 (а, б) представлены интерферограммы при достаточно высоких нагрузках. При сравнительно малых нагрузках до 15 кг (физиологическая нагрузка) возникает деформация отдельных участков, было четко выражено смещение костных элементов относительно друг друга за счет уплотнения межкостных швов; при нагрузках

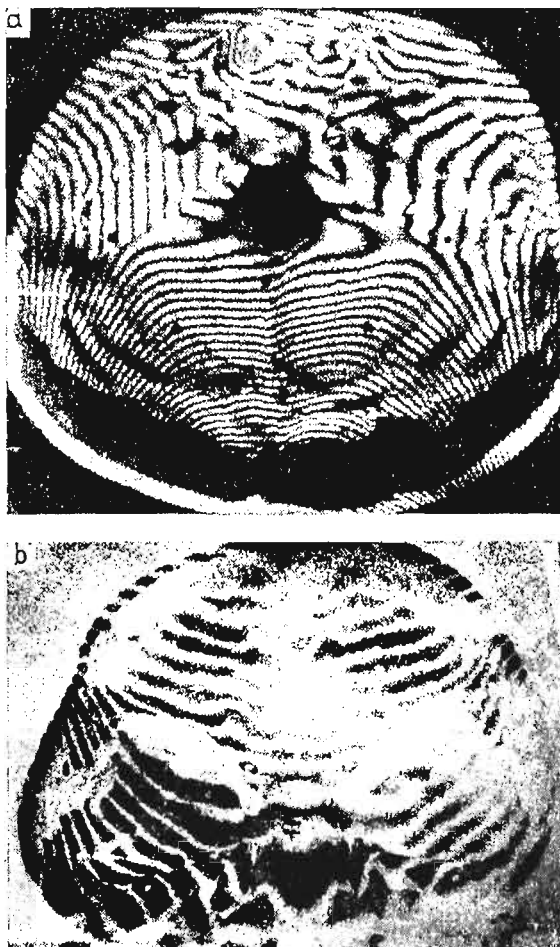


Рис. 4а. Интерферограмма деформации основания черепной коробки при изменении нагрузки от 60 до 65 кг.

Рис. 4б. Интерферограмма деформации основания черепной коробки при изменении нагрузки от 93 до 95 кг.

*) Метод расшифровки интерференционных полос см. в разделе III.

20 - 30 кг и выше появляются микротрещины в области крыльев основной кости и верхней стенки глазниц. Рис. 4а. При увеличении нагрузки до 90 кг и несколько выше (Рис. 4б) имеет место монолитное образование. Образование трещин и переломов начинается после упругой деформации отдельных костей при нагрузках 100 кг и выше. Деформации отдельных участков при малых нагрузках определяются величиной около $2 \cdot 10^{-4}$.

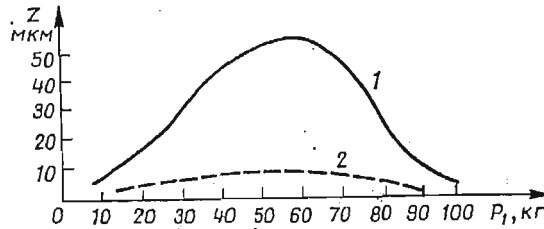


Рис. 4в. Зависимость проекций перемещений по X и Z точек черепной коробки при различных нагрузках.

На рис. 4в показаны зависимости величин проекций перемещений точек основания черепа при различных нагрузках. Как видно из рисунка, при увеличении нагрузки взаимные смещения заметно увеличиваются. Однако, начиная с нагрузок 60 кг, резервы смещения иссякают и получается более монолитное образование (рис. 4б).

Выявления закономерностей деформаций черепной коробки могут быть использованы для прицельной рентгенографии и представляют интерес для травматологов, патофизиологов и в судебно-медицинских исследованиях.

III. Обратим внимание на эксперименты по получению контурных карт поверхностей твердых тел, которые позволяют измерять отступления формы поверхности от заданной (или нормальной) с весьма большой точностью. Анализ обобщенного уравнения голографической интерферограммы при условии, что координаты точек исследуемой поверхности не смещаются ($r_1 = r_2 = r$), позволил нам использовать модифицированный вариант смещенного источника. Освещение объекта производилось с двух противоположных сторон. Между экспозициями направление опорного пучка изменялось на угол θ , который определяет шаг полос. Минимальный шаг полос Δh выбирается из учета среднего размера микронеровностей и критерия Релея: $\Delta h_{cp} < 0,125\Delta h$. Количественные данные дают возможность построить контур диффузноотражающих объектов, определить радиус кривизны при заданной форме поверхности или определить уравнение поверхности.

Оказалось также целесообразным использовать два коллимированные волновые фронта, пересекающиеся под некоторым углом, и применить метод проекции полос. Тогда на этапе восстановления возникают полосы с эквидистантным шагом. Помещая объект в интерференционное поле, можно получить топографическую карту объекта.

Экспериментально получены контурные карты ряда механических и медико-биологических объектов. В частности, метод проекции полос (Рис. 2) был исполь-

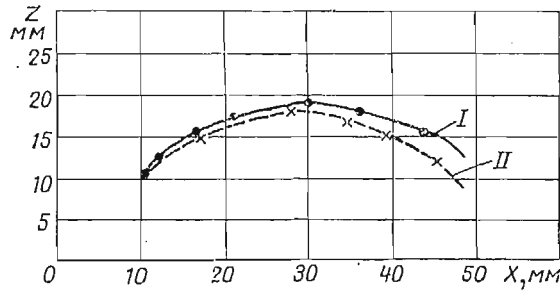


Рис. 5. Смещение зубного ряда в процессе ортодонтического лечения; 1 — исходное положение, 2 — после коррекции

зован при контроле коррекции расположения элементов зубного ряда в процессе ортодонтического лечения. На рис. 5 дана картина расположения зубного ряда до и после проведения лечения.

IV. Важным этапом интерферометрического исследования является разработка методов расшифровки голографических интерферограмм при высоких требованиях к точности измерений. При исследовании деформаций целью расшифровки является определение вектора перемещения точек поверхности $r = r_2 - r_1$. Наиболее распространенный способ расшифровки состоит в определении трех проекций вектора смещения при использовании трех уравнений. Метод Е. Б. Александрова и А. М. Бонч-Бруевича при этом фиксируют направления наблюдения. Разность фаз тогда выражается в виде:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_s - n_i) \quad N\lambda = r(n_s - n_i)$$

где n_s — единичный вектор освещения. n_i — единичный вектор наблюдения, N — порядковый номер интерференционной полосы. Для определения r наблюдают и отсчитывают число интерференционных полос N , проходящих через некоторую зону в каждой исследуемой точке поверхности при изменении n_i . Тогда можно записать три уравнения:

$$\begin{aligned} \pm N_1 \lambda &= r(n_{2s} - n_{1s}) \\ \pm N_2 \lambda &= r(n_{4s} - n_{3s}) \\ \pm N_3 \lambda &= r(n_{6s} - n_{5s}) \end{aligned} \quad (5)$$

Однако, для определения знака целесообразно использовать четвертое уравнение, чтобы знать не только величину, но и направление вектора. Это особенно важно при исследовании диффузных объектов сложной формы. Тогда

$$\pm N_4 \lambda = r(n_8 - n_7) \quad (6)$$

Решением этих систем уравнений можно определить также направление r . Как уже отмечалось, было разработано специальное приспособление ГИД-1, позволяющее совместить исследуемую точку восстановленного изображения с точкой пересечения оптических осей пучка n_i (ось OZ), векторов n_s и оси вращения системы наблюдения (ось OY).

Существенно, что восстанавливающий пучок света направлен по нормали к голограмме, что позволяет при любом повороте голограммы вокруг оси OZ получать восстановленное изображение объекта неискаженным, а исследуемая точка не смещается с оптической оси системы наблюдения (зрительная труба). Для изменения угла наблюдения в этом случае достаточно повернуть голограмму относительно оси OZ на некоторый угол.

Это устройство позволило измерить значение вектора r и деформацию $\varepsilon = \Delta l/l$, где Δl — изменение расстояния между фиксированными точками поверхности, l — начальное расстояние между точками. Наибольшее смещение, которое может быть измерено, ограничивается пространственной частотой полос.

Значительно большие возможности дают гетеродинные методы, позволяющие при высокой точности измерений автоматизировать процесс обработки информации. Сущность гетеродинных методов заключается в формировании синусоидального электрического сигнала, в фазе которого содержится информация о величине вектора смещения; высокие точностные характеристики обусловлены возможностью использования электронной техники для считывания информации с интерференционной картины. Гетеродинная схема расшифровки предполагает наличие разностной частоты интерферирующих световых пучков, лежащей в радиодиапазоне. В результате интерференционная картина „бежит“ мимо фотоприемника, что и приводит к формированию на выходе фотоприемника синусоидального электрического сигнала. Метод гетеродинной голографической интерферометрии известен как наиболее точный.

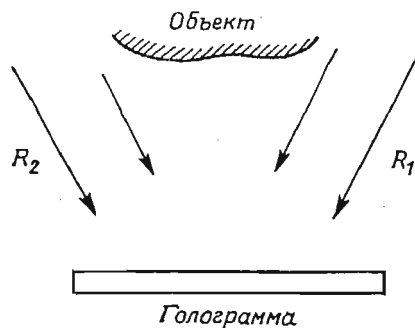


Рис. 6. Схема принципа гетеродинной интерферометрии

Традиционный принцип реализации метода изображен на рис. 6. При записи голограммы используются два различных опорных пучка R_1 и R_2 с одинаковой оптической частотой ω_0 . Первая экспозиция (с невозмущенным объектом) производится с помощью опорного пучка R_1 , вторая экспозиция при изменении состояния объекта — с опорным пучком R_2 .

При восстановлении частоты пучков R_1 и R_2 сдвигаются на величины — $\Omega/2$ и $+\Omega/2$. Соответственно сдвигаются частоты восстановленных интерферирующих волновых фронтов*). Поэтому интенсивность излучения, идущего от

*) Подробно о методе голографической гетеродинной интерферометрии см. в [5].

голограммы, меняется во времени с частотой биений $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, лежащей в радиодиапазоне. На выходе фотоприемника формируется синусоидальный сигнал, фаза которого может быть измерена с помощью электронной техники.

Применение гетеродинного интерферометра сдвига позволяет построить схему расшифровки голографических интерферограмм лишь с одним опорным пучком [2]. Схема расшифровки изображена на рис. 7. Интерферометр сдвига образован

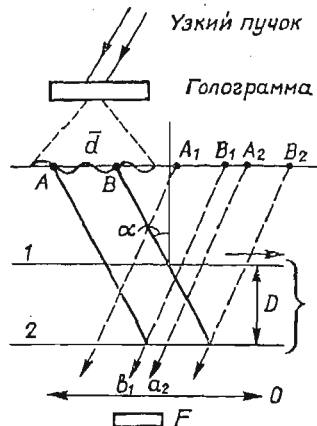


Рис. 7. Интерферометр сдвига, предназначенный для обработки интерферограмм и спекл-фотографий; A, B — соответственные элементы спекл-интерферограммы, 1, 2 — дифракционные решетки, α — угол Брэгга, A_1 и B_1 , A_2 и B_2 — мнимые изображения точек A и B , \vec{d} — вектор смещения спекл-интерферограммы между экспозициями, O — объектив, F — фотоприемник, D — расстояние между решетками.

двумя дифракционными решетками 1 и 2. Дифракционные решетки строят две пары мнимых изображений соответственных элементов A и B , восстановленного с голограммы изображения объекта. Смещение соответственных элементов определяется искомым вектором d .

Можно показать, что при выполнении условия $d = 2Dt \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол Брэгга, Лучи a_2 и b_1 , исходящие из точек A_2 и B_1 , совпадут в пространстве. В плоскости фотоприемника F будут наблюдаться интерференционные полосы, образованные в результате интерференции лучей a_2 и b_1 . Полосы, образованные в результате интерференции всех других пар лучей, изображенных на рисунке, локализируются вне плоскости фотоприемника и не регистрируются.

Для осуществления принципа гетеродинирования необходимо сместить частоту одного из интерферирующих лучей. С этой целью решетка 1 сканирует относительно решетки 2 по направлению, отмеченному стрелкой. Частоты интерферирующих лучей будут отличаться на величину $\Omega = 2\pi\delta/t$, где δ — скорость движения решетки 1, t — период штрихов решетки.

Диапазон и погрешность измерений можно оценить, используя выражение для разности фаз соответственных лучей, прошедших интерферометр сдвига. Теоретический анализ показывает, что можно производить измерения вектора смещения величиной до 7 мм с точностью не хуже 1/100 полосы.

Таким образом, метод гетеродинной голографической интерферометрии позволяет производить измерения с очень большой точностью. Однако, сложность регистрации и расшифровки интерферограмм, повышенные требования к виброустойчивости оптической схемы делают применение отмеченного метода достаточно сложным и не всегда возможным. Хорошо известный метод спекл-фотографии отличается своей простотой и свободен от этих недостатков. Поэтому развитие принципа гетеродинной интерферометрии нужно видеть в методе спекл-фотографии, т.к. будут сочетаться простота регистрации и точность измерений.

Для расшифровки спекл-фотографий можно использовать схему, приведенную на рис. 7, заменив голограмму спекл-фотографией и поместив последнюю в область формирования действительного изображения, восстановленного с голограммы. Работа устройства по расшифровке спекл-фотографий аналогична рассмотренному выше случаю с голограммой. Точность измерений при этом может быть 0,01 полосы. Однако достижение такой точности связано с высокими требованиями к юстировке элементов устройства. Чувствительность устройства для расшифровки спекл-фотографий определяется углом φ между направлением наблюдения интерференционных полос и направлением освещения, как это видно из рис. 8. Смещение фазы равно

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi.$$

Например, при $\varphi = 0,1$ рад. изменение разности фаз на 2π соответствует изменению вектора смещения d на 6 мкм.

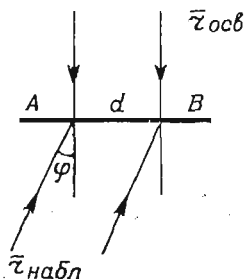


Рис. 8. К вопросу о чувствительности метода расшифровки спекл-фотографий.

Необходимо отметить, что в работе активное участие принимали сотрудники Т. А. Ильинская, В. В. Хопов, В. Л. Казак.

Литература

1. Ч. Вест, *Голографическая интерферометрия*, М.: Мир, 1982.
2. И. М. НАГИБИНА, В. В. Хопов, *Автоматизированная обработка голографических интерферограмм при определении деформаций диффузно-отражающих объектов*, Изв. вузов. Приборостроение, 1983, т. 26, № 2, с. 80 - 84.
3. И. М. НАГИБИНА, В. В. Хопов, *Гетеродинная спекл-интерферометрия*, Опт. и спектр., 1983, т. 55, № 4, с. 762 - 764.

4. О. П. Большаков, В. Л. Казак, Т. А. Ильинская, *Исследование процесса деформации основания черепа методом голографической интерферометрии*, Архив анатомии, гистологии и эмбриологии. 1982, т. 88, № 7, с. 18 - 24.
5. K. DANDLIKER, B. B. INEICHEN, F. MOTTIER, *Opt Commun.* 9, 412, 1973.

Streszczenie

METODY HOLOGRAFICZNE BADAŃ KSZTAŁTU I ODKSZTAŁCEŃ CIAŁ STAŁYCH ORAZ METODY ANALIZY INTERFEROGRAMÓW

W pracy opisano metody interferometrii holograficznej i ich zastosowanie w badaniu kształtów i odkształceń obiektów biomedycznych. Opisane są metody analizy interferogramów holograficznych i interferencji plamkowej. Specjalną uwagę skupiono na heterodynamicznej technice analizy interferogramów.

Summary

HOLOGRAPHIC METHODS FOR INVESTIGATION OF THE SHAPES AND DEFORMATION OF SOLID BODIES AND METHODS OF ANALYSIS OF INTERFEROGRAMS

In this article a few problems of holographic interferometry methods applied to the investigation of the shape and deformations of the medicine-biological objects are discussed. The possible methods of deciphering interferograms and spectrophotographs are described. A special attention is given to the techniques of heterodyning for the interferograms processing. The optical diagrams are also given and certain results of the experimental research.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 czerwca 1987 roku

HOMOGENIZATION OF FIRST STRAIN-GRADIENT BODY

ŚLAWOMIRA BYTNER
BARBARA GAMBIN

Institut of Fundamental Technological Research, Warsaw

The problem of the homogenization of first strain-gradient body is studied by means of the Γ -convergence method. Assuming the form of internal energy for real ε -periodic structure the homogenized internal energy of the homogeneous (effective) body is determined. The coefficients in the homogenized energy functional are effective material constants and they depend on the solutions of a so-called cell-problem.

1. Introduction

Homogenization method is applied to describe the global elastic response of the non-simple material body with periodic microstructure. As a result one obtain the closed form of effective (homogenized) internal energy function in which any quantities can be calculated explicitly for a given real structure as far as so-called „problem on a cell” is solved. Microstructure is understood here as a real heterogeneous non-simple elastic body (first strain-gradient model) whose properties vary rapidly and periodically with space. The real dimension of a single cell of periodicity is big enough to apply the concept of continuum but the number of cells is too large to apply any numerical procedure for solving the proper system of partial differential equation. For this purpose one seek the behaviour of limiting process when the numbers of cells goes to infinity and at the same time their characteristic dimension becomes infinitely small. In the problem of the first strain-gradient theory we deal with the system of partial differential equations of the 4th order with rapidly varying coefficient and to get any limiting result we decide to use the concept of Γ -convergence rather than homogenization theorem based on G -convergence i.e. convergence of a sequence of the partial differential operators ([1] [2]). In mathematical description is the problem going to the limit (Γ -convergence) of a sequence whose terms are the energy functionals involving the small parameter ε . The limit is a functional with constant coefficients which we call effective material parameters. We follow the homogenization theorem [4] and we apply it to the case of the first strain-gradient model of elasticity with periodic microstructure.

2. Equations of the first strain-gradient model of elasticity

The statical equations of equilibrium are [5]:

$$\tau_{ij,i} - \mu_{ijk,ik} + X_j = 0 \quad \text{in } \Omega \subset R^3, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

here $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, μ_{ijk} denotes the stress tensor and the couple stress tensor, respectively. X_j is the body force vector per unit volume.

We suppose that the internal energy per unit volume has the form:

$$\mathcal{A}(\varepsilon_{ij}, \varkappa_{ijk}) = \frac{1}{2} K_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} M_{ijklmn} \varkappa_{ijk} \varkappa_{lmn} + N_{ijklm} \varepsilon_{ij} \varkappa_{klm}, \quad (2.2)$$

where:

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \quad \varkappa_{ijk} = \varepsilon_{jk,i}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} K_{ijkl} &= K_{klij} = K_{jikl}, & M_{ijklmn} &= M_{imnijk}, \\ N_{ijklm} &= N_{jiklm}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

and K_{ijkl} , M_{ijklmn} , N_{ijklm} are bounded and measurable functions in $\bar{\Omega}$ (Ω is a region in R^3 occupied by the body).

Then the constitutive equations become:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &\equiv \partial \mathcal{A} / \partial \varepsilon_{ij} = K_{ijpq} \varepsilon_{pq} + N_{ijpqr} \varkappa_{pqr}, \\ \mu_{ijk} &\equiv \partial \mathcal{A} / \partial \varkappa_{ijk} = N_{pqijk} \varepsilon_{pq} + M_{ijkpqr} \varkappa_{pqr}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Moreover, we assume that the form $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ is positive definite i.e. there exists such a number $c > 0$ that for all $X \in \Omega$ holds:

$$\mathcal{A}(\varepsilon_{ij}, \varkappa_{ijk}) \geq c \sum_{i,j,k=1}^3 (\varepsilon_{ij}^2 + \varkappa_{ijk}^2). \quad (2.6)$$

Now, we define the microperiodic structure of the real medium.

Let:

$$Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3] \subset R^3, \quad (2.7)$$

after [2] we shall call it a basic cell.

Moreover we assume that functions:

$$K_{ijkl}(y), M_{ijklmn}(y), N_{ijklm}(y) \in L^\infty(Y), y \in Y, \quad (2.8)$$

i.e. they are bounded and measurable functions and can be extended to the whole R^3 as Y -periodic functions. Now we define Y periodic coefficients by the following assumptions:

$$\begin{aligned} K_{ijkl}^\varepsilon(x) &= K_{ijkl}(y), \\ M_{ijklmn}^\varepsilon(x) &= M_{ijklmn}(y), \quad x = \frac{y}{\varepsilon}, \\ N_{ijklm}^\varepsilon(x) &= N_{ijklm}(y). \end{aligned} \quad (2.9)$$

For a fixed ε the internal energy function per unit volume has the form:

$$\mathcal{A}(\varepsilon_{ij}, \varkappa_{ijk}) = \frac{1}{2} K_{ijkl}^\varepsilon(x) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} M_{ijklmn}^\varepsilon(x) \varkappa_{ijk} \varkappa_{lmn} + N_{ijklm}^\varepsilon(x) \varepsilon_{ij} \varkappa_{klm}. \quad (2.10)$$

3. The Concept of Γ — convergence and homogenization theorem

Let (X, τ) be a topological space and (F_h) , $h \in N$, $F_h: X \rightarrow \bar{R}$ a sequence of functions (\bar{R} denotes closure of R).

Following [4] we define:

$$\Gamma^-(\tau) \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(y) = \sup_{y \rightarrow x} \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y), \quad (3.1)$$

$$\Gamma^-(\tau) \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(y) = \sup_{y \rightarrow x} \liminf_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y), \quad (3.2)$$

where $\tau(x)$ is the family of open sets, for the topology τ , containing x .

When:

$$\Gamma^-(\tau) \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(y) = \Gamma^-(\tau) \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(y). \quad (3.3)$$

We shall denote their common value by:

$$\Gamma^-(\tau) \lim_{h \rightarrow \infty} F_h(y), \quad (3.4)$$

or briefly by:

$$\Gamma^-(\tau) \lim_{h \rightarrow \infty} F_h(x). \quad (3.5)$$

We shall say that $F = \Gamma^-(\tau) \lim_{h \rightarrow \infty} F_h$, iff

$$\forall x \in X \quad F(x) = \Gamma^-(\tau) \lim_{h \rightarrow \infty} F_h(x). \quad (3.6)$$

In other words $\{F_h\}_{h \in N}$ converges in the sense of Γ -convergence to the limit $F(x)$. The homogenization theorem given in [4] is used to formulate appropriate theorem in the case of the first strain-gradient model of elasticity. In [4] the theorem is given for the case of scalar field (see below) $\alpha \in R^1$, but the proof of the theorem can be repeated in 3 dimensional case without any important changes. The proof is long and we decided to omit it. Now, we shall formulate theorem:

let:

$$f: R^3 \times R^3 \times R^{3^2} \times R^{3^3} \rightarrow R^+, \\ (x, \alpha, \beta, \xi) \rightarrow f(x, \alpha, \beta, \xi),$$

be an integrand satisfying:

- (i) $x \rightarrow f(x, \alpha, \beta, \xi)$ is Y — periodic, (Y is a basic cell in R^3),
- (ii) $\xi \rightarrow f(x, \alpha, \beta, \xi)$ is convex, (3.7)
- (iii) $\lambda|\xi|^2 \leq f(x, \alpha, \beta, \xi) \leq \Lambda(1 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\xi|^2)$,
(λ, Λ — constant),
- (iv) $|f^{1/2}(x, \alpha, \beta, \xi) - f^{1/2}(x, \alpha', \beta', \xi)| \leq s(|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'|)$,
(s — constant).

Let:

$$F_\varepsilon(u, \Omega) = \int_{\Omega} f\left(\frac{x}{\varepsilon}, u(x), Du(x), D^2u(x)\right) dx, \tag{3.8}$$

then,

$$\forall \Omega \subset \Theta_n,$$

$\forall u \in [W_{loc}^{2,2}(R^3)]^3$ (Θ_n -family of open bounded sets in R^3),

$$\Gamma\text{-}(s\text{-}W^{1,2}(\Omega))\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u, \Omega) = F_0(u, \Omega), \tag{3.9}$$

with

$$F_0(u, \Omega) = \int_{\Omega} f_0(u(x), Du(x), D^2u(x)) dx, \tag{3.10}$$

and

$$f_0(\alpha, \beta, \xi) = \min_{u \in W_Y} \frac{1}{|Y|} \int_Y f(x, \alpha, \beta, D^2u(x) + \xi) dy, \tag{3.11}$$

where: $W_Y = \{u \in [W_{loc}^{2,2}(R^3), u \text{ is } Y\text{-periodic}\}$,

s — topology in $W^{1,2}(\Omega)$.

The spaces $W_{loc}^{2,2}(R^3)$, $W^{1,2}(\Omega)$ are the proper Sobolev spaces. Using (2.10) we define:

$$f(x, \alpha, \beta, \xi) = \mathcal{A}^e(\beta, \xi) = \frac{1}{2} K(y)\beta\beta + \frac{1}{2} M(y)\xi\xi + N(y)\beta\xi \tag{3.12}$$

with $y = \frac{x}{\varepsilon}$.

Now, we verify the assumptions (i)–(iv).

The (i) follows from (2.8) and (2.9) i.e. from the assumption about periodic structure of the body.

The (ii) follows from the square form of f as a function of ξ .

The (iii) is fulfilled because of (2.6) and the fact that all quantities $K_{ijkl}(y)$, $M_{ijklmn}(y)$, $N_{ijklm}(y)$ are bounded.

The (iv) is proved by using the average value theorem. The energy density of the homogenized body writes:

$$f_0(\beta, \xi) = \min_{\Theta \in W_Y} \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[\frac{1}{2} K\beta\beta + \frac{1}{2} M(D^2\Theta + \xi)(D^2\Theta + \xi) + N\beta(D^2\Theta + \xi) \right] dy, \tag{3.13}$$

(we use abbreviate notation).

To find Θ which minimizes the functional we shall calculate the variations of integrand with respect to Θ :

$$\delta_{\Theta} \left[\frac{1}{2} K\beta\beta + \frac{1}{2} M(D^2\Theta + \xi)(D^2\Theta + \xi) + N\beta(D^2\Theta + \xi) \right]. \tag{3.14}$$

Assuming:

$$\delta_{\Theta}(\cdot) = 0, \tag{3.15}$$

we take:

$$\Theta = \chi(y)\xi(x) + \bar{\chi}(y)\beta(x) \tag{3.16}$$

and as a final result we get the set of equations which should be fulfilled on the basic cell Y :

$$\begin{aligned} \nabla\nabla(M\nabla\nabla\chi) &= -\nabla\nabla M, \\ \nabla\nabla(M\nabla\nabla\bar{\chi}) &= -\nabla\nabla N. \end{aligned} \tag{3.17}$$

The above system of equations determines the „cell-problem”. One can see that the coefficients $K_{ijkl}(y)$ are not taken into account. The solution $(\chi, \bar{\chi})$ exists and is unique (with accuracy up to polinomial of the 1st order) iff:

$$(\chi, \bar{\chi}) \text{ is } Y \text{ periodic and } (\chi, \bar{\chi}) \in W^{4,2}(Y).$$

Substituting (3.16) into (3.13) we get:

$$\begin{aligned} f_0(\beta, \xi) &= \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{1}{2} K dy \right) \beta\beta + \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{1}{2} M(D^2\chi + I)(D^2\chi + I) \right] \xi\xi + \\ &+ \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{1}{2} MD^2\bar{\chi}D^2\bar{\chi} dy \right] \beta\beta + \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y ND^2\bar{\chi} dy \right] \beta\beta + \\ &+ \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y M(D^2\chi + I)D^2\bar{\chi} dy \right] \beta\xi + \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y N(D^2\chi + I) dy \right] \beta\xi, \end{aligned} \tag{3.18}$$

or:

$$f_0(\beta, \xi) = \frac{1}{2} K^{ef} \beta\beta + \frac{1}{2} M^{ef} \xi\xi + N^{ef} \beta\xi, \tag{3.19}$$

where:

$$\begin{aligned} K^{ef} &= \frac{1}{|Y|} \int_Y K dy + \frac{1}{|Y|} \int_Y MD^2\bar{\chi}D^2\bar{\chi} dy + \frac{1}{|Y|} \int_Y 2ND^2\bar{\chi} dy, \\ M^{ef} &= \frac{1}{|Y|} \int_Y M(D^2\chi + I)(D^2\chi + I) dy, \\ N^{ef} &= \frac{1}{|Y|} \int_Y M(D^2\chi + I)D^2\bar{\chi} dy + \frac{1}{|Y|} \int_Y N(D^2\chi + I) dy. \end{aligned} \tag{3.20}$$

The effective functional $F_0(u, \Omega)$ has the simple form:

$$F_0(u, \Omega) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} K_{ijkl}^{ef} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} M_{ijklmn}^{ef} \varkappa_{ijk} \varkappa_{lmn} + N_{ijklm}^{ef} \varepsilon_{ij} \varkappa_{klm} \right) dx. \tag{3.21}$$

It is clear that fields χ and $\bar{\chi}$ are not need to be known. We use only the second derivatives of them.

4. One-dimensional example

Assuming that all quantities depend on one variable only we deal with reduced problem of (2.1):

$$\frac{d\tau}{dx} - \frac{d^2}{dx^2} \mu + X = 0 \quad \text{in } \Omega \subset R^1, \quad (4.1)$$

where:

$$\begin{aligned} \tau &= K^e(x) \frac{du}{dx} + N^e \frac{d^2u}{dx^2}, \\ \mu &= M^e(x) \frac{d^2u}{dx^2} + N^e \frac{du}{dx}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

If, independently, we formally reduced the cell problem to a one-dimensional we get:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} M(y) \frac{d^2}{dy^2} \chi(y) &= - \frac{d^2}{dy^2} M(y), \\ \frac{d^2}{dy^2} M(y) \frac{d^2}{dy^2} \bar{\chi}(y) &= - \frac{d^2}{dy^2} N(y). \end{aligned} \quad y \in Y \quad (4.3)$$

The solutions (second derivatives of $\chi, \bar{\chi}$) have the form:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} &= -1 + \frac{C_1}{M(y)}, \\ \frac{d^2\bar{\chi}(y)}{dy^2} &= \frac{C_2}{M(y)} - \frac{N(y)}{M(y)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

where:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\langle \frac{1}{M(y)} \right\rangle^{-1}, \\ C_2 &= \left\langle \frac{N(y)}{M(y)} \right\rangle C_1, \quad \langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y (\cdot) dy. \end{aligned}$$

Using formulae (3.20) we get:

$$\begin{aligned} K^{ef} &= \langle K \rangle + \left\langle \frac{N}{M} \right\rangle^2 \left\langle \frac{1}{M} \right\rangle^{-1} - \left\langle \frac{N^2}{M} \right\rangle, \\ M^{ef} &= \left\langle \frac{1}{M} \right\rangle^{-1}, \\ N^{ef} &= \left\langle \frac{1}{M} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{N}{M} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

If one assumed the stronger conditions of continuity for the functions $K_{ijkl}^e(x)$, $M_{ijklmn}^e(x)$, $N_{ijklm}^e(x)$ one can use the G -convergence method (compare [3], [6], [7]) to obtain the effective properties of the medium under consideration. But in the case this method provides to a long calculations (4th order differential operator) and the proof of the proper

homogenization theorem is not trivial one. In contrast, the Γ -convergence concept applied in this paper gives the results (i.e. effective material parameters) almost immediately and in a very elegant manner.

References

1. E. SANCHEZ-PALENZIA, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lect. Notes in Physics 127, Springer-Verlag Berlin, 1980.
2. A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland Pub. Comp. New York, Oxford, Amsterdam 1978.
3. P. SUQUET, *Une methode duale en homogenisation: application aux milieux elastiques*, J. de Mech. Theor. et Appl. No sp. 1982.
4. H. ATTOUCH, C. SBORDONE, *A general homogenization formula for functionals of calculus of variations* to appear.
5. I. HLAVACEK, M. HLAVACEK, *On the existence and uniqueness of solution and some variational principles in linear theories of elasticity with couple stresses*, Appl. Mat., 5, 14, 1969.
6. S. BYTNER, B. GAMBIN, *Homogenization of Cosserat continuum*, Arch. of Mech., 38, 3, 1986.
7. A. LUTOBORSKI, J. J. TELEGA, *Homogenization of a plane elastic arch*, Journal of Elasticity 14, 1984.

Резюме

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Проведена гомогенизация градиентной среды первого порядка методом Γ -сходимости. Предлагая вид внутренней энергии для действительной ε -периодической структуры получено гомогенизованную внутреннюю энергию для однородной эффективной среды. Коэффициенты в гомогенизованном функционале энергии являются эффективными материальными постоянными. Они зависят от решения т. наз. задачи на ячейке.

Streszczenie

HOMOGENIZACJA OŚRODKA GRADIENTOWEGO PIERWSZEGO RZĘDU

Przeprowadzono homogenizację ośrodka gradientowego 1-go rzędu metodą Γ -zbieżności. Zakładając postać energii wewnętrznej dla rzeczywistej ε -periodycznej struktury wyznaczono zhomogenizowaną energię wewnętrzną dla jednorodnego ciała efektywnego. Współczynniki w zhomogenizowanym funkcjonałe energii są efektywnymi stałymi materiałowymi. Zależą one od rozwiązania tzw. problemu na komórce.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 września 1987 roku.

STATECZNOŚĆ OSIOWO ŚCISKANYCH CYLINDRYCZNYCH POWŁOK DWUWARSTWOWYCH

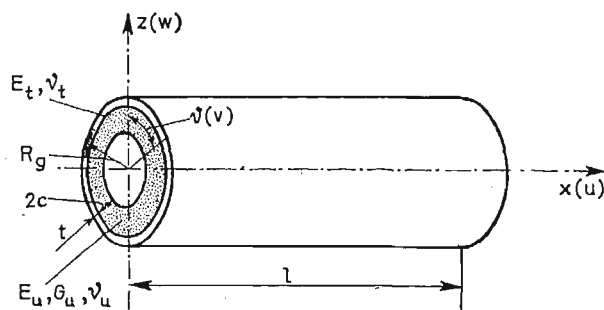
FRANCISZEK ROMANÓW
STEFAN DZIELENDZIAK

Politechnika Wroclawska

1. Wstęp

Dotychczasowe metody obliczania obciążeń krytycznych powłok dwuwarstwowych pokrywają się ze znanymi metodami dotyczącymi konstrukcji przekładkowych. Ogólnie można je podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich dotyczy konstrukcji cienkich, dla których zakłada się nieodkształcalność rdzenia w kierunku poprzecznym. Oznacza to, że moduł Younga w tym kierunku jest nieskończenie duży a przemieszczenie poprzeczne rdzenia jest równe przemieszczeniu okładziny [1, 2]. Druga grupa to prace, w których moduł rdzenia w kierunku poprzecznym jest skończony a przemieszczenia są nieliniowymi funkcjami. Zagadnienie stateczności cylindrycznych powłok dwuwarstwowych w tym ujęciu analizowano w pracach [3, 7]. W pierwszej z nich wykorzystano równania równowagi okładziny uzupełnione o siły wynikające z oddziaływania rdzenia na okładzinę. W drugiej autorzy posłużyli się modelem zbliżonym do sprężystego podłoża typu Winklera, wprowadzając tzw. współczynnik podłoża, uwzględniający jedynie składową promieniową reakcji rdzenia na okładzinę. Otrzymany w ten sposób warunek wyboczenia nie uwzględnia wpływu grubości rdzenia na wielkość obciążeń krytycznych.

Niniejsze opracowanie zawiera analizę trójosiowego stanu przemieszczeń w wypełniaczu powłoki dwuwarstwowej. Rozpatrywany cylinder warstwowy (rys. 1) składa się



Rys. 1. Cylinder dwuwarstwowy

z cienkiej powłoki zewnętrznej (okładziny) i sprężystego wypełniacza (rdzenia). Okładzina spełnia założenia dwuwymiarowej teorii powłok, rdzeń (pełny lub rurowy) założenia teorii trójwymiarowej.

Założono, że obciążenie zewnętrzne przyłożone jest jedynie do okładziny, moduł Younga rdzenia jest znacznie mniejszy od modułu okładziny ($E_u \ll E_l$) oraz, że podczas odkształcenia nie ma ruchu względnego pomiędzy obydwiema warstwami. Dopuszczono możliwość niesprężystego wybożenia okładziny. Zastosowano związki fizyczne teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych Henck'y-Iljuszyna pomijając efekt odciążenia części przekroju i przesunięcia osi obojętnej. Przyjęto warunek nieściśliwości ($\nu_l = 0,5$).

Dla tak określonego modelu wyznaczono funkcje przemieszczeń w rdzeniu. Z zasady prac wirtualnych wyprowadzono równania równowagi i zespół naturalnych warunków brzegowych. W oparciu o otrzymane rozwiązanie analityczne obliczono obciążenia krytyczne dla osiowo ściskanego cylindra z pełnym rdzeniem. Rozpatrzono stosunkowo prosty przypadek wybożenia osiowo-symetrycznego. Rozwiązanie teoretyczne porównano z wynikami badań doświadczalnych.

2. Przemieszczenia

2.1. Przemieszczenia okładziny. Zgodnie z przyjętymi założeniami stan przemieszczeń okładziny jest zgodny z hipotezą prostych normalnych Kirchhoffa-Love'a. Przemieszczenia w kierunkach x , ϑ , z , dowolnego punktu okładziny, oddalonego o $z - R_g$ od powierzchni środkowej mają postać:

$$\begin{aligned} u_g &= u - (z - R_g)w_{,x}, \\ v_g &= v - (z - R_g)(w_{,\vartheta} - v) \frac{1}{R_g}, \\ w_g &= w. \end{aligned} \quad (1)$$

2.2. Trójosiowy stan przemieszczeń rdzenia. Rdzeń konstrukcji znajduje się w trójosiowym stanie przemieszczenia. W ogólnym przypadku przemieszczenia rdzenia w kierunku osiowym, obwodowym i promieniowym są funkcjami trzech zmiennych x , ϑ , z i nie są znane:

$$\begin{aligned} U_u &= U_u(x, \vartheta, z), \\ V_u &= V_u(x, \vartheta, z), \\ W_u &= W_u(x, \vartheta, z). \end{aligned} \quad (2)$$

Mamy więc do czynienia z trójwymiarowym zadaniem teorii sprężystości. Przedstawienie przemieszczeń składowych (2) jako iloczynów przemieszczeń okładziny w punktach styku obydwu warstw (tj. dla $z = R_g - \frac{t}{2}$) i pewnych nieliniowych funkcji zmiennej t pozwala na rozdzielenie zmiennych a w rezultacie na sprowadzenie zadania trójwymiarowego do dwuwymiarowego:

$$\begin{aligned} U_u &= u_\theta \left(z = R_\theta - \frac{t}{2} \right) \cdot \delta(z), \\ V_u &= v_\theta \left(z = R_\theta - \frac{t}{2} \right) \cdot \varkappa(z), \\ W_u &= w_\theta \left(z = R_\theta - \frac{t}{2} \right) \cdot \varphi(z). \end{aligned} \tag{3}$$

Nieznane funkcje $\delta(z)$, $\varkappa(z)$, $\varphi(z)$ można wyznaczyć z warunków równowagi wewnętrznej elementarnego wycinka rdzenia:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_u + \frac{1}{1-2\nu_u} \Theta_{,x} &= 0, \\ \nabla^2 V_u + \frac{1}{1-2\nu_u} \frac{1}{z} \Theta_{,\theta} + \frac{2}{z^2} W_{u,\theta} - \frac{V_u}{z^2} &= 0, \\ \nabla^2 W_u + \frac{1}{1-2\nu_u} \Theta_{,z} - \frac{2}{z^2} V_{u,\theta} - \frac{W_u}{z^2} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= (\dots)_{,xx} + \frac{1}{z^2} (\dots)_{,\theta\theta} + (\dots)_{,zz} + \frac{1}{z} (\dots)_{,z}, \\ \Theta &= U_{u,x} + \frac{1}{z} V_{u,\theta} + \frac{1}{z} W_u + W_{u,z}. \end{aligned}$$

Podstawiając równania (3) do (4) otrzymujemy warunki równowagi wewnętrznej rdzenia w postaci:

$$\begin{aligned} (a_1 \delta)_{,zz} + \frac{1}{z} (a_1 \delta)_{,z} + (1+c^*)(a_1 \delta)_{,xx} + \frac{1}{z^2} (a_1 \delta)_{,\theta\theta} + \\ + c^* \frac{1}{z} (b_1 \varkappa)_{,x\theta} + c^* \frac{1}{z} (w \cdot \varphi)_{,x} + c^* (w \cdot \varphi)_{,xz} &= 0, \\ (b_1 \varkappa)_{,zz} + \frac{1}{z} (b_1 \varkappa)_{,z} + (b_1 \varkappa)_{,xx} + (1+c^*) \frac{1}{z^2} (b_1 \varkappa)_{,\theta\theta} + \\ - (b_1 \varkappa) \frac{1}{z^2} + c^* \frac{1}{z} (a_1 \delta)_{,x\theta} + c^* \frac{1}{z} (w \cdot \varphi)_{,\theta z} + \\ + \frac{1}{z^2} (2+c^*) (w \cdot \varphi)_{,\theta} &= 0, \\ (w \cdot \varphi)_{,zz} (1+c^*) + \frac{1}{z} (w \cdot \varphi)_{,z} \cdot (1+c^*) + (w \cdot \varphi)_{,xx} + \\ + \frac{1}{z^2} (w \cdot \varphi)_{,\theta\theta} - \frac{1}{z^2} (w \cdot \varphi) + c^* (a_1 \delta)_{,xz} + c^* \frac{1}{z} (b_1 \varkappa)_{,\theta z} + \\ - \frac{1}{z^2} (2+c^*) (b_1 \varkappa)_{,\theta} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie:

$$a_1 = u + \frac{t}{2} w_{,x},$$

$$b_1 = v + \frac{t}{2} (w_{,\vartheta} - v) \frac{1}{R_g}.$$

Są to równania różniczkowe drugiego rzędu o pochodnych cząstkowych zmiennych x, ϑ, z . Rozwiązanie powyższych równań ze względu na funkcje $\delta = \delta(z)$, $\kappa = \kappa(z)$, $\varphi = \varphi(z)$ staje się możliwe dopiero po przyjęciu postaci funkcji u, v, w zmiennych x i ϑ . Funkcje te muszą być tak dobrane, aby spełniały warunki podparcia cylindrów na ich końcach. Do wyznaczenia stałych całkowania niezbędne są również warunki brzegowe jakie muszą spełniać funkcje $\delta(z)$, $\kappa(z)$, $\varphi(z)$. Z równości przemieszczeń okładziny i rdzenia na powierzchni ich połączenia, tj. dla $z = R_g - \frac{t}{2}$ wynikają związki:

$$\delta\left(R_g - \frac{t}{2}\right) = \kappa\left(R_g - \frac{t}{2}\right) = \varphi\left(R_g - \frac{t}{2}\right) = 1. \quad (6)$$

W dalszym ciągu założymy swobodne podparcie obciążonych brzegów powłoki. Odpowiada to następującym warunkom brzegowym dla $x = 0$ i $x = 1$: $w = 0$ — zerowe ugięcie; $w_{,xx} + \nu_t w_{,\vartheta\vartheta} \frac{1}{R_g^2} = 0$ — zerowy moment gnący. Powyższe warunki spełniają przemieszczenia okładzin w postaci:

$$\begin{aligned} u &= A \cdot \cos(\beta x) \cdot \sin(n\vartheta), \\ v &= B \cdot \sin(\beta x) \cdot \cos(n\vartheta), \\ w &= E \cdot \sin(\beta x) \cdot \sin(n\vartheta). \end{aligned} \quad (7)$$

Odpowiada to założeniu, że powierzchnia wyboczenia cylindra składa się z m półfal w kierunku osiowym oraz $2n$ półfal w kierunku obwodowym.

Podstawiając wyrażenia (7) do równań (5) i wprowadzając oznaczenia $\Delta = r\delta(z)$, $\mathcal{K} = p\kappa(z)$, $\Phi = E\varphi(z)$ otrzymujemy układ równań jedynie ze względu na funkcje Δ , \mathcal{K} , Φ zmiennej z . Całkami ogólnymi tego układu są funkcje:

$$\begin{aligned} \Delta &= c_1 \beta I_n(\beta z) + c_2 \beta K_n(\beta z) + c_3 \beta z I_{n+1}(\beta z) + c_4 \beta z K_{n+1}(\beta z) + \\ &\quad + c_5 \beta z I_{n-1}(\beta z) + c_6 \beta z K_{n-1}(\beta z), \\ \mathcal{K} &= c_1 \frac{n}{z} I_n(\beta z) + c_2 \frac{n}{z} K_n(\beta z) + c_3 (n+2\alpha) I_{n+1}(\beta z) + \\ &\quad + c_4 (n+2\alpha) K_{n+1}(\beta z) + c_5 (n-2\alpha) I_{n-1}(\beta z) + c_6 (n-2\alpha) K_{n-1}(\beta z), \\ \Phi &= c_1 I'_n(\beta z) + c_2 K'_n(\beta z) + c_3 [z I'_{n+1}(\beta z) - (2\alpha-1) I_{n+1}(\beta z)] + \\ &\quad + c_4 [z K'_{n+1}(\beta z) - (2\alpha-1) K_{n+1}(\beta z)] + c_5 [z I'_{n-1}(\beta z) + \\ &\quad - (2\alpha-1) I_{n-1}(\beta z)] + c_6 [z K'_{n-1}(\beta z) - (2\alpha-1) K_{n-1}(\beta z)], \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie: $\alpha = 2(1-\nu_u)$.

$I_n(\beta z)$, $K_n(\beta z)$ są odpowiednio zmodyfikowaną f -cją Bessela pierwszego rodzaju i f -cją Mac Donalda rzędu n , przy czym:

$$I_n'(\beta z) = \frac{d}{dz} I_n(\beta z), \text{ itd.}$$

Stałe całkowania c_1, \dots, c_6 należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Trzy z nich określone są warunkami równości przemieszczeń rdzenia i okładziny dla $z = R + c$ (6). Pozostałe warunki dla przypadku rdzenia pełnego ($R = c$) wynikają z nieokreśloności funkcji $K_n(\beta z)$ i z $K_n(\beta z)$ dla $z \rightarrow 0$, stąd $c_2 = c_4 = c_6 = 0$. W przypadku rdzenia rurowego na jego swobodnej powierzchni ($z = R - c$) zerują się naprężenia

$$\sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{zx} = 0.$$

Poniżej, jako przykład, rozpatrzony zostanie stosunkowo prosty przypadek osiowosymetrycznego wyboczenia cylindra z pełnym rdzeniem. Dla tego przypadku można przyjąć:

$$u = u(x); w = w(x); v = 0. \tag{9}$$

Przyjmując dalej $n = 0$ dostajemy z (8):

$$\begin{aligned} \Delta &= c_1 I_0(\beta z) + c_3 z I_1(\beta z), \\ \mathcal{H} &= 0, \\ \Phi &= c_1 I_1(\beta z) + c_3 \left[z I_0(\beta z) - 2 \frac{1+c^*}{\beta c^*} I_1(\beta z) \right], \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} c_1 &= [r - c_3 2c I_1(2\beta c)] \frac{1}{I_0(2\beta c)}, \\ c_3 &= \frac{EI_0(2\beta c) - r I_1(2\beta c)}{2c [I_0^2(2\beta c) - I_1^2(2\beta c)] - \frac{2(1+c^*)}{c^*} I_0(2\beta c) I_1(2\beta c)}. \end{aligned}$$

3. Równania równowagi i obciążenia krytyczne

3.1. Energia potencjalna odkształcenia okładziny i praca sił zewnętrznych. W dalszym ciągu dopuścimy możliwość utraty stateczności przez okładzinę poza przedziałem sprężystości. Energię potencjalną odkształcenia okładziny obliczymy w oparciu o teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych Henck'y-Iljuszyna zakładając, że materiał okładziny jest nieściśliwy ($\nu_r = 0,5$) oraz przy pominięciu efektu odciążenia części przekroju i przesunięcia osi obojętnej [6]. Dla osiowo-symetrycznej formy wyboczenia cylindra ma ona postać:

$$U_\theta = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ a_{11}^- [D_1(w,_{xx})^2 + B_1(u,_{xx})^2] + a_{22}^- B_1 \left(\frac{w}{R_\theta} \right)^2 + 2a_{12}^- B_1 u,_{xx} \frac{w}{R_\theta} \right\} R_\theta d\vartheta dx, \tag{11}$$

gdzie:

$$a_{11} = \varphi_k + \frac{1}{3} \varphi_c, \quad a_{12} = \frac{2}{3} \varphi_c, \quad a_{22} = \frac{4}{3} \varphi_c,$$

$$\varphi_c = \frac{E_c}{E_t}, \quad \varphi_k = \frac{E_k}{E_t}.$$

Dla wyboczenia czysto sprężystego:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{1-\nu_t^2}, \quad a_{12} = \frac{\nu_t}{1-\nu_t^2}.$$

Zakładając, że na krawędziach $x = 0$, $x = l$ działa stałe obciążenie osiowe N_x , praca sił zewnętrznych na okładzinie dana jest zależnością [5]:

$$L_z = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} R_\theta N_x(w_{,xx})^2 d\theta dx. \quad (12)$$

3.2. Energia sprężysta rdzenia. Zgodnie z wcześniejszymi założeniami rdzeń znajduje się w trójosiowym stanie odkształcenia. Energia sprężysta rdzenia dla osiowo-symetrycznej formy wyboczenia cylindra dana jest zależnością:

$$A_u = G_u \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2c} \left[\left(1 + \frac{\nu_u}{1-2\nu_u} \right) (\varepsilon_{xu}^2 + \varepsilon_{zu}^2 + \varepsilon_{\theta u}^2) + \right. \\ \left. + \frac{2\nu_u}{1-2\nu_u} (\varepsilon_{xu} \varepsilon_{\theta u} + \varepsilon_{\theta u} \varepsilon_{zu} + \varepsilon_{zu} \varepsilon_{xu}) + \frac{1}{2} \gamma_{xzu}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma_{\theta zu}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{x\theta u}^2 \right] z dz, \quad (13)$$

gdzie:

$$\varepsilon_{xu} = U_{u,x}, \quad \varepsilon_{\theta u} = \frac{W_u}{z}, \quad \varepsilon_{zu} = W_{u,z},$$

$$\gamma_{xzu} = U_{u,z} + W_{u,x}, \quad \gamma_{x\theta} = 0, \quad \gamma_{\theta z} = 0.$$

3.3. Równania równowagi. Uwzględniając (11), (12), (13) możemy zapisać całkowity potencjał energetyczny cylindra jako:

$$\Pi = U_\theta + A_u - L_z. \quad (14)$$

Z warunku minimum potencjału:

$$\delta \Pi = 0 \quad (15)$$

znajdujemy dwa lokalne równania równowagi powłoki dwuwarstwowej:

$$2A_7 u - 2A_1 u_{,xx} + (A_9 - A_5) w_{,x} - A_3 w_{,xxx} = 0,$$

$$2A_4 w + 2(A_6 - A_8) w_{,xx} + 2A_2 w_{,xxxx} + (A_9 - A_5) u_{,x} + \\ + A_3 u_{,xxx} = N_x w_{,xx}, \quad (16)$$

oraz zespół naturalnych warunków brzegowych dla $x = 0$ i $x = l$:

$$\begin{aligned} 2A_1 u_{,x} + A_3 w_{,xx} + w A_5 &= 0, \\ A_9 u - A_3 u_{,xx} + 2(A_8 - A_6) w_{,x} - 2A_2 w_{,xxx} + N_x w_{,x} &= 0, \\ 2A_2 w_{,xx} + A_3 u_{,x} + A_6 w &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie:

A_1, \dots, A_9 są stałymi.

Przyjmując dalej dla $n = 0$ przemieszczenia okładziny w postaci (7), otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie:

$$\begin{aligned} N_{xkr} &= -\frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{A}{E} [(A_9 - A_5)\beta + \beta^3 A_3] + 2A_4 - 2\beta^2(A_6 - A_8) + 2\beta^4 A_2 \right\}, \\ \frac{A}{E} &= \frac{\frac{B_1}{G_u} \beta \left(a_{\bar{1}2} + \frac{t}{2} \beta^2 a_{\bar{1}1} R_g \right) + \frac{D_1}{G_u} \beta^3 a_{\bar{1}1}}{\beta^2 a_{\bar{1}1} \frac{B_1}{G_u} R_g - 4(1 + \nu_u) \frac{I_1^2 \cdot 2c}{d}} + \\ &\quad - \frac{\frac{2\beta}{d} 4c^2 \left[I_0^2 - I_1^2 - \frac{I_1 I_0}{\beta c} (1 - \nu_u) \right]}{\beta^2 a_{\bar{1}1} \frac{B_1}{G_u} R_g - 4(1 + \nu_u) \frac{I_1^2 \cdot 2c}{d}} - \frac{t}{2} \beta, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie: $d = 2c (I_0^2 - I_1^2) - \frac{2(1 + \nu_u)}{\beta c} I_0 I_1,$

$$I_0 = I_0(2\beta c), I_1 = I_1(2\beta c),$$

$$A_1 = \frac{1}{R_g} \left(1 + \frac{\nu_u}{1 - 2\nu_u} \right) G_u X_1 + \frac{1}{2} B_1 a_{\bar{1}1},$$

$$A_2 = \frac{1}{R_g} \left(1 + \frac{\nu_u}{1 - 2\nu_u} \right) G_u \frac{t^2}{4} X_1 + \frac{1}{2} D_1 a_{\bar{1}1},$$

$$A_3 = \frac{1}{R_g} t \left(1 + \frac{\nu_u}{1 - 2\nu_u} \right) G_u X_1,$$

$$A_4 = \frac{1}{R_g} \left(1 + \frac{\nu_u}{1 - 2\nu_u} \right) G_u (X_2 + X_7) + \frac{1}{R_g} \frac{2\nu_u}{1 - 2\nu_u} G_u X_8 + \frac{1}{2} a_{\bar{2}2} \frac{1}{R^2} B_1,$$

$$A_5 = \frac{1}{R_g} \frac{2\nu_u}{1 - 2\nu_u} G_u (X_3 + X_9) + a_{\bar{1}2} B_1 \frac{1}{R_g},$$

$$A_6 = \frac{2\nu_u}{1 - 2\nu_u} \frac{1}{R_g} \frac{t}{2} G_u (X_3 + X_9),$$

$$A_7 = \frac{1}{2R_g} G_u X_5,$$

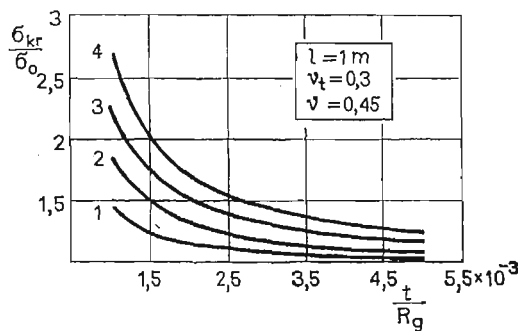
$$A_8 = \frac{1}{2R_g} G_u \left(X_4 + \frac{t^2}{4} X_5 + t X_6 \right),$$

$$\begin{aligned}
 A_9 &= \frac{1}{2R_g} G_u(2X_6 + tX_5), \\
 X_1 &= \int_0^{2c} z \delta^2(z) dz, \quad X_2 = \int_0^{2c} z [\varphi(z), z]^2 dz, \\
 X_3 &= \int_0^{2c} z \delta(z) \varphi(z), z dz, \quad X_4 = \int_0^{2c} z [\varphi^2(z)] dz, \\
 X_5 &= \int_0^{2c} z [\delta(z), z]^2 dz, \quad X_6 = \int_0^{2c} z \varphi(z) \delta(z), z dz, \\
 X_7 &= \int_0^{2c} \frac{1}{z} \varphi^2(z) dz, \quad X_8 = \int_0^{2c} \varphi(z) \varphi(z), z dz, \\
 X_9 &= \int_0^{2c} \varphi(z) \cdot \delta(z) dz.
 \end{aligned}$$

Obciążenie N_{xkr} uzależnione jest od ilości półfal m . Najmniejszą wartość obciążeń krytycznych znajdujemy z warunku:

$$\frac{\partial N_{xkr}}{\partial m} = 0. \quad (19)$$

Przykładową zależność teoretycznych obciążeń krytycznych, wg (18), w funkcji stosunku t/R_g pokazano na rysunku 2. Do obliczeń przyjęto: $l = 1,0$ m, $t = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $G_u/E_t = 1, 2, 3, 4 \cdot 10^{-5}$, $\nu = 0,3$, $\nu_u = 0,45$.

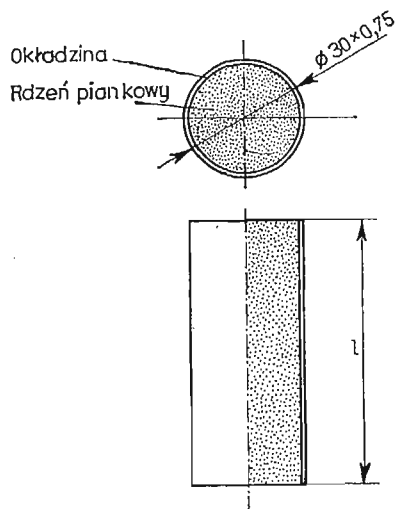


Rys. 2. Zależność teoretycznych obciążeń krytycznych σ_{kr}/σ_0 ($\sigma_0 = \frac{E_t \cdot t}{R_g \sqrt{3(1-\nu_t^2)}}$) w funkcji parametru t/R_g

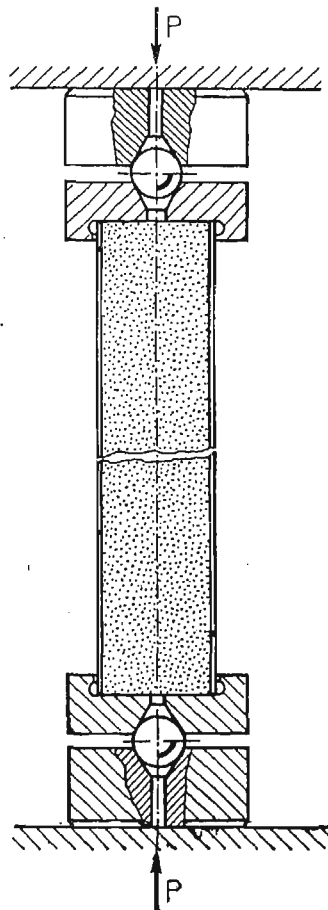
$$\begin{aligned}
 1 &- G_u/E_t = 10^{-5}, & 2 &- G_u/E_t = 2 \cdot 10^{-5}, \\
 3 &- G_u/E_t = 3 \cdot 10^{-5}, & 4 &- G_u/E_t = 4 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

4. Badania doświadczalne

Badaniom, mającym na celu wyznaczenie wartości obciążeń krytycznych powodujących utratę stateczności, poddano cylindry z pełnym rdzeniem (rys. 3).



Rys. 3. Cylinder z pełnym rdzeniem stosow. do badań

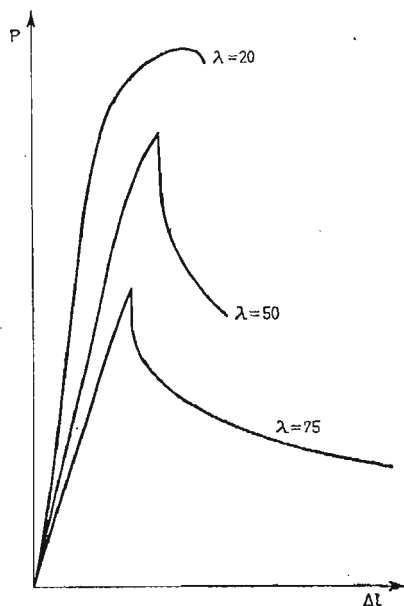


Rys. 4. Schemat zamocowania i obciążenia cylindrów

Okładziny zewnętrzne wykonano z odcinków rury PA-4N-tb $\varnothing 30 \times 0,75$ wg PN-70/H-74592 o własnościach $E_t = 0,72387 \times 10^5$ MPa, $R_H = 0,153 \times 10^3$ MPa, $R_{0,2} = 0,191 \times 10^3$ MPa, $R_m = 0,259 \times 10^3$ MPa. Rdzenie wykonano ze sztywnej pianki poliuretanowej o gęstościach pozornych 100, 125, 150 kg/m³. Dla pianki przyjęto $\nu_u = 0$, $G_u = 19,4$ MPa. Długości cylindrów wynosiły 206, 515 i 772,5 mm co odpowiada smukłościom λ równym 20, 50, 75 (smukłość graniczna $\lambda_{gr} = 68,3$)*.

Sposób zamocowania i obciążenia cylindrów pokazano na rys. 4. Przykładowe wykresy obciążenia w układzie Δl [mm]– P [kG] pokazano na rys. 5. Jako wartość siły krytycz-

*¹) Smukłość liczona dla samej okładziny



Rys. 5. Wykresy obciążenia

nej P_{kr} przyjmowano maksymalną wartość siły jaką był w stanie przenieść cylinder (wartość siły po przekroczeniu P_{kr} gwałtownie malała). Pomiar umożliwił dodatkowo obliczenie ilości energii potrzebnej do osiągnięcia siły krytycznej. Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Zestawienie obciążeń krytycznych

L.p.	Smukłość	Gęstość rdzenia	P_{kr} doświadcz.	$k_{p\text{dośw.}}$	Energia	k_e	P_{kr} teoretycz.	$k_{p\text{teor.}}$
—	—	[kg/m ³]	[kN]	—	[Nm]	—	[kN]	—
1	20	pusty	13,4	—	22,5	—	12,26	—
2		100	14,9	1,11	35,2	1,56		
3		125	15,1	1,12	29,9	1,33		
4		150	14,8	1,10	33,3	1,48		
1	50	pusty	11,5	—	12,8	—	—	—
2		100	11,8	1,02	14,9	1,01		
3		125	11,5	1,00	13,3	1,04		
4		150	11,2	0,97	12,2	0,95		
1	75	pusty	8,3	—	8,3	—	—	—
2		100	7,8	0,94	7,2	0,87		
3		125	9,0	1,08	9,0	1,08		
4		150	7,6	0,91	6,5	0,78		

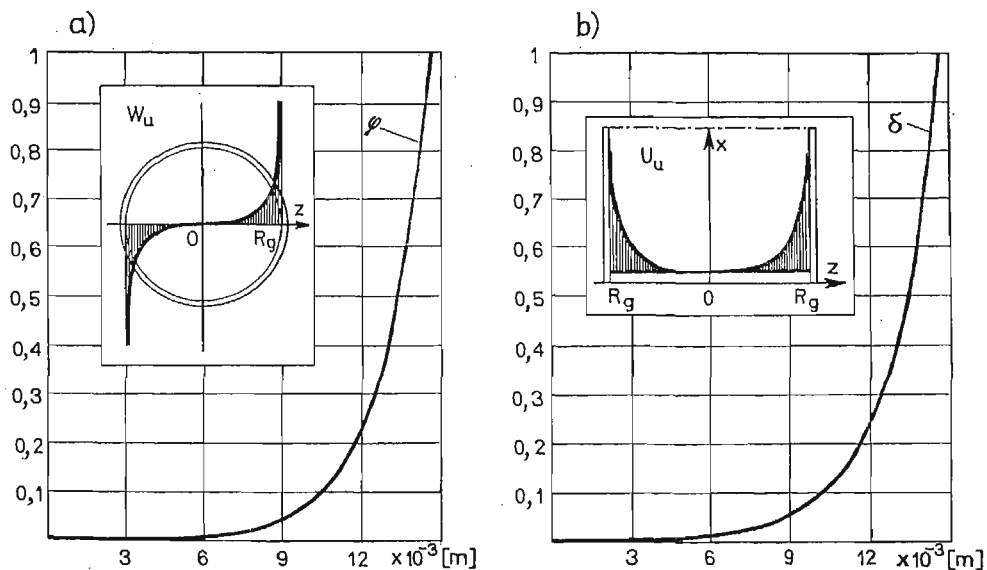
Z przeprowadzonych badań wynika, że wzrost siły krytycznej przenoszonej przez cylinder z pełnym rdzeniem jest zauważalny w zakresie małych smukłości. Dla $\lambda = 20$ zaobserwowano ok. 10% wzrost P_{kr} w stosunku do rur pustych. W zakresie smukłości bliskich granicznej ($\lambda = 50$ i $\lambda = 75$) rdzeń nie ma wpływu na wzrost siły krytycznej. Podobnie gęstość zastosowanej na rdzenie pianki poliuretanowej nie ma praktycznie wpływu na wzrost obciążeń krytycznych.

Dla małych smukłości zaobserwowano znaczne zwiększenie energii odkształcenia potrzebnej do wyboczenia pręta. Dla $\lambda = 20$, w zależności od gęstości rdzenia, wynosił on od 33% do 56%.

Zaobserwowano również, że cylindry pełne odkształcały się w inny sposób aniżeli puste. Widoczne były na nich liczne lokalne półfale przy zachowaniu kołowej postaci geometrycznej przekroju.

5. Porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi

Obliczenia obciążeń krytycznych wg (18) przeprowadzono jedynie dla cylindrów o smukłości $\lambda = 20$. Wynika to z warunku (9), który może być spełniony jedynie w przypadku dostatecznie krępych cylindrów. Ponieważ dla tej smukłości wyboczenie zachodzi poza zakresem sprężystym, energia odkształcenia okładziny opisana jest zależnością (11). Współczynniki φ_c i φ_k wyznaczone z przebiegu krzywej jednoosiowego rozciągania przybliżonej trzema prostoliniowymi odcinkami. Wyniki zestawiono w tabeli 1. Jak widać współczynniki $k_{p\text{dośw.}}$ i $k_{p\text{teor.}}$, określające procentowy wzrost obciążeń krytycznych dla



Rys. 6. Wykresy teoretycznych funkcji przemieszczeń w rdzeniu dla cylindrów o smukłości $\lambda = 20$: a — przemieszczenie rdzenia w kierunku promieniowym, b — przemieszczenie rdzenia w kierunku osiowym

cylindrów pełnych w stosunku do pustych są zbliżone do siebie. Na rys. 6 pokazano przebiegi teoretycznych funkcji przemieszczeń $\delta = \frac{\Delta}{r}$ i $\varphi = \frac{\Phi}{E}$, obliczone dla cylindrów o smukłości $\lambda = 20$, wg wzorów (10).

Oznaczenia

- E_u, G_u, ν_u — moduł sprężystości podłużnej, moduł sprężystości poprzecznej i wsp. Poissona dla rdzenia,
 E_t, G_t, ν_t — j.w. dla okładziny,
 x, ϑ, z — współrzędne walcowe,
 u, v, w — przemieszczenia pow. środkowej okładziny w kierunkach x, ϑ, z ,
 R_g — promień pow. środkowej okładziny,
 R — promień pow. środkowej rdzenia,
 $2c, t, l$ — całkowita grubość rdzenia i okładziny oraz całkowita długość cylindra,

$$c^* = \frac{1}{1-2\nu_u}$$

$$\beta = \frac{m \cdot \pi}{l}$$

- A, B, E — amplituda przemieszczeń powierzchni środkowej okładziny,

$$D_1 = \frac{E_t \cdot t^3}{12}$$

$$B_1 = E_t \cdot t$$

$$r = A + \frac{t}{2} \beta E; \quad p = B + \frac{t}{2} (nE - B) \frac{1}{R_g}$$

- E_c, E_k — moduły plastyczności dla okładziny

$$\left(E_c = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad E_k = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)$$

- $R_H, R_{0.2}$ — granica proporcjonalności i umowna granica plastyczności dla okładziny,

$$(\dots)_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} (\dots); \quad (\dots)_{,\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\dots); \quad (\dots)_{,z} = \frac{\partial}{\partial z} \dots$$

Literatura

1. А. Я. Александров, Л. Э. Бруккер, Л. М. Куршин, А. П. Прусаков, *Расчёт трехслойных панелей*, Оборонгиз, Москва 1960.
2. Э. И. Григolloк, П. П. Чулков, *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*, Москва 1973.
3. М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. В. Гулин, *Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем*, Наука, Москва 1977.
4. S. TIMOSHENKO, I. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, New York, Toronto, London, 1961.

5. S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIGER, *Theory of plates and shells*, New York, Toronto, London, 1959.
6. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, Москва 1977.
7. J. C. YAO, *Buckling of Axially Compressed Long Cylindrical Shell with Elastic Core*, Journal of App. Mechanics, June 1962.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК,
ПОДВЕРГНУТЫХ ОСЕВОМУ СЖАТИЮ

Работа содержит анализ трехосного состояния перемещений в заполнителе двухслойной оболочки. Рассматриваемый композитный цилиндр состоит из тонкой внешней оболочки (облицовки) и упругого заполнителя, которые успешно взаимодействуют друг с другом в совместной работе. Облицовка удовлетворяет основным положениям двухмерной теории оболочек.

Для так принятой модели определены функции перемещений в заполнителе. На основе полученных аналитических решений вычислены критические нагрузки для подвергнутого осевому сжатию цилиндра со сплошным заполнителем. Рассмотрен сравнительно простой случай аксиально-симметрического продольного изгиба. Решение сравнено с доступными результатами опытных исследований.

Summary

STABILITY OF TWO-LAYER CYLINDRICAL SHELLS WITH AXIAL COMPRESSION

Analysis of three-axial displacements state in two-layer shell filler is described. Tested composite cylinder consists of the thin external shell (lining) and elastic filler (core) — which are in ideal matching. Lining assumptions of the two-dimensional satisfies layer theory, and the core-of the three dimensional theory. For a such model displacement functions in the core were determined. On the base of analytic solution we have obtained critical load for full core cylinder with axial compression. Relatively simple case of axial-symmetrical buckling was examined. Theoretical solution was compared with accessible experimental tests results.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 lutego 1986 roku.

ANALIZA ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ W SPOINIE KLEJOWEJ POŁĄCZENIA ZAKŁADKOWEGO W ZAKRESIE ODKSZTAŁCEŃ PLASTYCZNYCH

JAN GODZIMIRSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

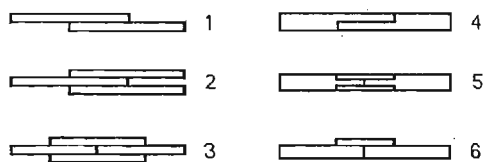
Zaproponowano metodą określania naprężeń stycznych w spoinach klejowych połączeń zakładkowych pracujących na ścinanie w zakresie plastycznych odkształceń klejonych elementów oraz przy uwzględnieniu nieliniowości charakterystyk klejów. Przyjęto dla kleju i klejonych elementów model ciała sprężysto-plastycznego z umocnieniem.

Wykaz oznaczeń

G (G_k , G_u)	— moduł sprężystości postaciowej kleju
E	— moduł sprężystości podłużnej klejonych elementów
δ_k	— grubość spoiny klejowej
δ	— grubość klejonego elementu
γ	— kąt odkształcenia postaciowego
ε	— wydłużenie względne
τ	— naprężenia styczne
σ	— naprężenia normalne
σ_0	— naprężenia normalne w klejonym elemencie występujące poza spoiną
D	— moduł umocnienia klejonego elementu
$R_{0,2}$	— granica plastyczności materiału klejonego elementu
l	— długość spoiny klejowej
z	— położenie przekroju w którym w klejonym elemencie lub spoinie występuje — zmiana modułu sprężystości.
τ_z	— wartość naprężeń stycznych przy których następuje zmiana modułu sprężystości kleju.

1. Wstęp

Połączenia zakładkowe (rys. 1) są najczęściej stosowanymi w technice połączeniami klejonymi. Analiza rozkładu naprężeń w spoinach takich połączeń była tematem wielu



Rys. 1. Przykłady kolejnych połączeń zakładkowych

rozważań teoretycznych [1] [2] [3]. W rozważaniach tych przyjmowano następujące założenia upraszczające:

- pracę klejonych elementów w zakresie odkształceń sprężystych,
- liniowo-sprężystą charakterystykę kleju,
- stałość naprężeń wzdłuż grubości spoiny klejowej.

W najbardziej popularnej teorii Volkersena dodatkowo założono, że w spoinach takich połączeń występują jedynie naprężenia styczne.

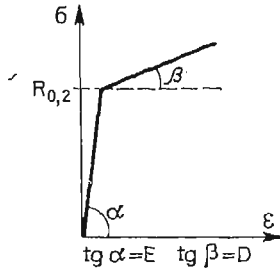
Analiza naprężeń w spoinach połączeń zakładkowych metodą elementów skończonych z wykorzystaniem maszyn cyfrowych [4] wykazuje, że w połączeniach, w których klejone elementy nie są obciążone zewnętrznymi momentami gnącymi oraz siłami poprzecznymi, teoria Volkersena dosyć dokładnie odwzorowuje rozkład naprężeń stycznych. Naprężenia te nie są naprężeniami jedynymi, ale one głównie wpływają na stopień wyężenia materiału spoiny.

Celem niniejszej pracy jest sprawdzenie, jaki wpływ na rozkład naprężeń stycznych w spoinach połączeń zakładkowych ma przekroczenie granicy plastyczności w klejonych elementach oraz jak wpływa nieliniowość charakterystyk klejów na wytrzymałość takich połączeń.

2. Założenia

W rozważaniach pominięto naprężenia normalne występujące w spoinach połączeń zakładkowych i założono, że rozkład naprężeń stycznych z dostateczną dokładnością odwzorowuje zależność Volkersena [2]. Zaniedbanie niewspółosiowości sił zewnętrznych wydaje się dopuszczalne w wypadku niektórych typów połączeń, np. przykłady 2, 3, 4, 5 na rys. 1 zwłaszcza, gdy klejone elementy są cienkie. Oceniając wpływ pracy klejonych elementów w zakresie odkształceń plastycznych na rozkład naprężeń, założono liniowo-sprężystą charakterystykę kleju, a oceniając wpływ nieliniowości charakterystyki kleju na wytrzymałość połączenia, założono pracę klejonych elementów w zakresie odkształceń sprężystych. Przyjęto, że zależność między naprężeniami i odkształceniami kleju i klejonych elementów można zastąpić modelem ciała sprężysto-plastycznego z umocnieniem (rys. 2). W wypadku klejonych elementów metalowych założenie takie nie budzi zastrzeżeń. Taki właśnie model metali przyjmuje się z powodzeniem w obliczeniach parametrów przeróbki plastycznej metali [5]. W wypadku klejów założenie takie jest większym uproszczeniem, ponieważ kleje są ciałami lepkosprężystymi. Założenie to można uznać za dopuszczalne, gdy przyjmiemy, że rozpatrujemy wytrzymałość spoiny przy określonej prędkości jej odkształcenia. W rzeczywistości prędkość odkształcenia spoiny w jej róż-

nych przekrojach nie jest stała. Jednak badania wykazują [6], że np. wytrzymałość spoin epoksydowych nie jest zależna od prędkości odkształcania w stosunkowo dużych ich przedziałach (zmienianie prędkości od 5 mm/min do 90 mm/min praktycznie nie powoduje zmiany wytrzymałości połączeń).

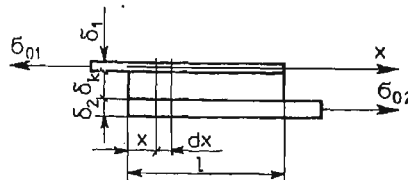


Rys. 2. Wykres rozciągania materiałów sprężysto-plastycznych z umocnieniem: E — moduł sprężystości podłużnej, D — moduł umocnienia

Biorąc pod uwagę przyjęte założenia upraszczające, a zwłaszcza pominięcie naprężeń normalnych w spoinach i założenie stałości naprężeń na grubości spoiny można stwierdzić, że uzyskane zależności analityczne mogą mieć tylko charakter poglądowy i służyć do jakościowej oceny wpływu nieliniowości charakterystyk materiałów zakładkowych połączeń klejonych na ich wytrzymałość.

3. Rozkład naprężeń w spoinie połączenia zakładkowego w zakresie plastycznych odkształceń klejonych elementów

Model rozpatrywanego połączenia przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Model obciążenia połączenia zakładkowego pracującego na ścinania

Naprężenia styczne w spoinie są funkcją kąta odkształcenia kleju (γ) i jego modułu sprężystości postaciowej G_k :

$$\tau = \gamma \cdot G_k \tag{1}$$

Uwzględniając przyjęte założenia:

$$d\tau = d\gamma \cdot G_k \tag{2}$$

Zmianę kąta odkształcenia spoiny na jej elementarnym odcinku dx można opisać zależnością:

$$d\gamma = \frac{\varepsilon dx_1}{\delta_k} - \frac{\varepsilon dx_2}{\delta_k} \tag{3}$$

w której:

δ_k — grubość spoiny,

$\varepsilon dx_1, \varepsilon dx_2$ — odkształcenia elementarnych odcinków klejonych elementów spowodowane występującymi w nich naprężeniami normalnymi ($\sigma_1(x), \sigma_2(x)$).

W wypadku sprężystego odkształcenia klejonych elementów:

$$\varepsilon = \frac{\sigma(x)}{E}, \quad (4a)$$

a w wypadku odkształcenia plastycznego:

$$\varepsilon = \frac{R_{0,2}}{E} + \frac{\sigma(x) - R_{0,2}}{D} \quad (4b)$$

Podstawiając (3) i (4a) lub (4b) do (2) otrzymujemy:

$$d\tau = \frac{\sigma_1(x)}{E_1} \cdot \frac{dx G_k}{\delta_k} - \frac{\sigma_2(x)}{E_2} \cdot \frac{dx G_k}{\delta_k}, \quad (5a)$$

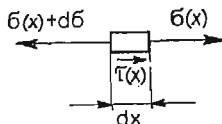
$$d\tau = \frac{G_k}{\delta_k} dx \left(\frac{R_{0,2}}{E_1} + \frac{\sigma_1(x)}{D_1} - \frac{R_{0,2}}{D_1} - \frac{\sigma_2(x)}{E_2} \right). \quad (5b)$$

Z warunku równowagi sił działających na elementarny odcinek klejonego elementu (rys. 4):

$$d\sigma_1(x) \delta_1 = \tau(x) dx \quad (6)$$

można obliczyć:

$$d\tau(x) = \frac{d^2\sigma_1(x)}{dx^2} dx \delta_1. \quad (7)$$



Rys. 4. Obciążenie elementarnego odcinka klejonego elementu połączenia zakładkowego

Podstawienie zależności (7) do równania (5a) umożliwia uzyskanie równania różniczkowego opisującego rozkład naprężeń normalnych w elemencie „1” na odcinku spoiny przy założeniu sprężystych odkształceń obu elementów:

$$\frac{d^2\sigma_1(x)}{dx^2} = \frac{G_k}{\delta_k \delta_1} \left(\frac{\sigma_1(x)}{E_1} - \frac{\sigma_2(x)}{E_2} \right). \quad (8)$$

Z warunku równowagi sił działających na odcinek połączenia klejonego (rys. 5) otrzymujemy:

$$\sigma_{01} \delta_1 = \sigma_1(x) \delta_1 + \sigma_2(x) \delta_2. \quad (9)$$

Uwzględnienie zależności (9) umożliwia przedstawienie równania (8) w postaci:

$$\frac{d^2\sigma_1(x)}{dx^2} = \frac{G_k \sigma_1(x)}{\delta_k} \cdot \frac{E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1 E_2 \delta_2} - \frac{G_k}{\delta_k} \cdot \frac{\sigma_{01}}{E_2 \delta_2}. \quad (10)$$



Rys. 5. Obciążenie odcinka połączenia zakładkowego

Jeżeli w elemencie oznaczonym „1” na pewnym odcinku zostanie przekroczona granica plastyczności materiału to równanie opisujące rozkład naprężeń normalnych w elemencie na tym odcinku przybiera postać:

$$\frac{d^2 \sigma_1(x)}{dx^2} = \frac{G_k}{\delta_k \delta_1} \left(\frac{R_{0,2}}{E_1} - \frac{R_{0,2}}{D_1} - \frac{\sigma_{01} \delta_1}{E_2 \delta_2} + \sigma_1(x) \frac{\delta_2 E_2 + \delta_1 D_1}{E_2 D_1 \delta_2} \right). \quad (11)$$

Założmy, że na odcinku spoiny $0 \leq x \leq z$ została przekroczona granica plastyczności w elemencie „1” i dla tego odcinka obowiązuje zależność (11), zaś dla odcinka spoiny $z < x \leq l$ obciążonego w zakresie odkształceń sprężystych klejonych elementów obowiązuje zależność (10).

Zastosowanie podstawień:

$$T = \frac{D_1 \delta_1}{E_2 \delta_2} \quad \text{i} \quad n = \sqrt{\frac{G_k(1+T)}{\delta_k D_1 \delta_1}},$$

oraz przyjęcie warunków brzegowych:

$$\text{dla } x = 0 \quad \sigma_1(x) = \sigma_{01},$$

$$\text{dla } x = z \quad \sigma_1(x) = R_{0,2},$$

pozwała uzyskać rozwiązanie równania (11) w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) = & \\ = & \frac{\operatorname{sh} n x \left\{ R_{0,2} \left[1 - \frac{1}{1+T} \left(1 - \frac{D_1}{E_1} \right) \right] - \sigma_{01} \frac{T}{1+T} \right\} - \operatorname{sh} n(z-x) \left\{ \frac{\sigma_{01}}{1+T} - \frac{R_{0,2}}{1+T} \left(1 - \frac{D_1}{E_1} \right) \right\}}{\operatorname{sh} n z} + \\ & + \sigma_{01} \frac{T}{1+T} + \frac{R_{0,2}}{1+T} \left(1 - \frac{D_1}{E_1} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Zastosowanie podstawień:

$$S = \frac{E_1 \delta_1}{E_2 \delta_2} \quad \text{i} \quad m = \sqrt{\frac{G_k(1+S)}{\delta_k E_1 \delta_1}},$$

oraz przyjęcie warunków brzegowych:

$$\text{dla } x = z \quad \sigma_1(x) = R_{0,2},$$

$$\text{dla } x = l \quad \sigma_1(x) = 0,$$

umożliwia rozwiązanie równania (10):

$$\sigma_1(x) = \sigma_{01} \frac{S}{S+1} + \frac{R_{0,2} \operatorname{sh} m(l-x) - \frac{S}{S+1} \sigma_{01} (\operatorname{sh} m(l-x) + \operatorname{sh} m(x-z))}{\operatorname{sh} m(l-z)}. \quad (13)$$

Wykorzystując równanie (6) można określić rozkład naprężeń stycznych w spoinie na odcinku plastycznych odkształceń elementu „1”

$$\tau_x = \sqrt{\frac{G_k(1+T)}{\delta_k D_1}} \delta_1 \cdot \frac{\operatorname{ch} nx \left(R_{0,2} \frac{2T}{1+T} - \sigma_{01} \frac{T}{1+T} \right) - \operatorname{ch} n(z-x) \left(\frac{\sigma_{01}}{1+T} - R_{0,2} \frac{1-T}{1+T} \right)}{\operatorname{sh} nz} \quad (14)$$

i na odcinku odkształceń sprężystych:

$$\tau_x = \sqrt{\frac{G_k(1+S)\delta_1}{\delta_k E_1}} \cdot \frac{S}{S+1} \sigma_{01} (\operatorname{ch} m(l-x) - \operatorname{ch} m(x-z)) - R_{0,2} \operatorname{ch} m(l-x) \quad (15)$$

W równaniach (12) (13) (14) i (15) występuje niewiadoma z określającą położenie punktu, w którym poziom naprężeń w mniej sztywnym elemencie „1” jest równy granicy plastyczności materiału — $R_{0,2}$. Zależność między wartością naprężeń w nie objętej spoiną części elementu „1” (σ_{01}), a wartością z można wyznaczyć z warunku, że naprężenia styczne w punkcie $x = z$ obliczone z zależności (14) i (15) są sobie równe:

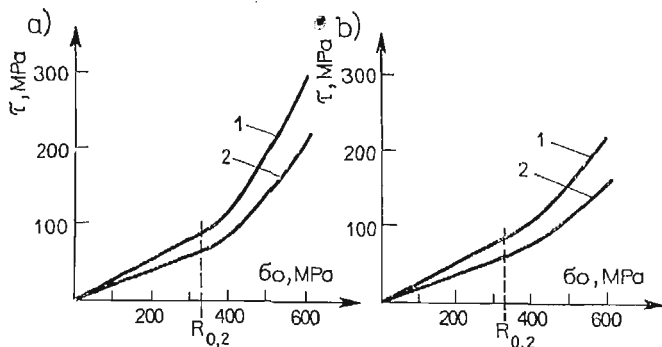
$$\sigma_{01} = R_{0,2} \frac{\frac{T(S+1)}{S(T+1)} \operatorname{ch} nz + \frac{S-T}{S(T+1)} + \sqrt{\frac{(S+1)T}{(T+1)S}} \frac{\operatorname{ch} m(l-z)}{\operatorname{sh} m(l-z)} \operatorname{sh} nz}{\frac{T \operatorname{ch} nz + 1}{T+1} + \sqrt{\frac{(S+1)T}{(T+1)S}} \frac{S}{S+1} \frac{\operatorname{ch} m(l-z) - 1}{\operatorname{sh} m(l-z)} \operatorname{sh} nz} \quad (16)$$

Uwzględniając, że dla określonych wymiarów połączeń klejonych:

$$\operatorname{ch} m(l-z) \approx \operatorname{sh} m(l-z) \gg 1$$

zależność (16) można uprościć do postaci:

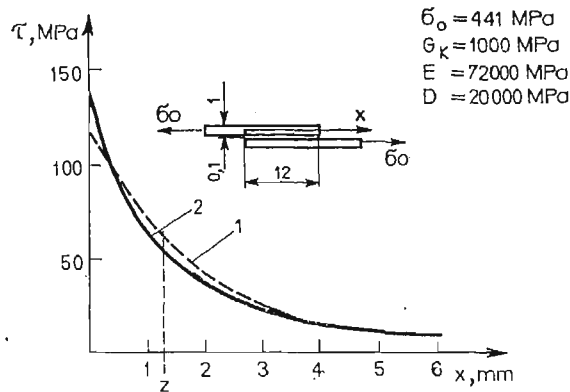
$$\sigma_{01} = R_{0,2} \frac{\frac{T(S+1)}{S(T+1)} \operatorname{ch} nz + \frac{S-T}{S(T+1)} + \sqrt{\frac{T(S+1)}{S(T+1)}} \operatorname{sh} nz}{\frac{T \operatorname{ch} nz + 1}{T+1} + \sqrt{\frac{(1+S)T}{(1+T)S}} \frac{S}{S+1} \operatorname{sh} nz} \quad (17)$$



Rys. 6. Zależność maksymalnych naprężeń stycznych w spoinie połączenia zakładkowego w funkcji naprężeń normalnych występujących w klejonych elementach: a) $D = 10000$ MPa, b) $D = 20000$ MPa, 1 — $\delta = 1$ mm, 2 — $\delta = 0,5$ mm

Wartość maksymalnych naprężeń stycznych występujących w spoinach połączeń zakładkowych pracujących na ścinanie w zakresie plastycznych odkształceń klejonych elementów można wyznaczyć z zależności (14) podstawiając za x wartość 0. W równaniu (14) występują dwie zależne od siebie wielkości z i σ_{01} . W związku z tym, że równanie (17) trudno jest tak przekształcić, aby uzyskać zależność $z = f(\sigma_{01})$ dla określonego złącza można sporządzić wykres $\sigma_{01} = f(z)$ i z tego wykresu wyznaczać wartość z dla określonego poziomu naprężeń σ_{01} .

Na podstawie zależności (14) i (17) wykonano wykresy $\tau_{max} = f(\sigma_{01})$ dla połączeń zakładkowych identycznych elementów $E_1 = E_2$ i $\delta_1 = \delta_2$ (rys. 6). W obliczeniach założono: $E = 72000$ MPa, $R_{0,2} = 330$ MPa, $G_k = 1000$ MPa, $\delta_k = 0,1$ mm, $l = 25$ mm. Obliczenia i wykresy wykonano dla dwóch wartości modułu umocnienia klejonych materiałów: $D = 10000$ MPa i $D = 20000$ MPa oraz dwóch grubości klejonych elementów $\delta = 0,5$ mm i $\delta = 1$ mm. Stwierdzono, że wzrost naprężeń stycznych towarzyszący przekroczeniu granicy plastyczności w klejonych elementach jest mniejszy w wypadku elementów cienkich, charakteryzujących się większą wartością modułu umocnienia.



Rys. 7. Rozkład naprężeń stycznych w spoinie połączeń zakładkowych jednakowo obciążonych przy: 1 — sprężystych odkształceniach obu klejonych elementów $R_{0,2} > \sigma_{01}$; 2 — przekroczeniu granicy plastyczności w klejonych elementach $R_{0,2} = 330$ MPa

Na rys. 7 przedstawiono rozkład naprężeń stycznych w spoinie połączenia, w którego elementach została przekroczona granica plastyczności materiału. Na rysunku tym linią przerywaną zaznaczono rozkład naprężeń stycznych, jaki wystąpiłby w tej spoinie przy identycznej wartości sił obciążających połączenie, jeżeli klejone materiały charakteryzowałyby większą wartością granicy plastyczności i obciążone byłyby w zakresie odkształceń sprężystych (rozkład wyznaczony z zależności Volkersena).

Pomimo założenia stosunkowo korzystnych warunków pracy połączenia (cienkie elementy i wysoka wartość modułu umocnienia), wzrost wartości maksymalnych naprężeń stycznych w spoinie spowodowany przekroczeniem granicy plastyczności klejonych materiałów powinien wynosić około 17%.

4. Wytrzymałość połączenia zakładkowego przy uwzględnieniu nieliniowości charakterystyki kleju

Rozpatrzono zakładkowe połączenie klejowe składające się z dwóch jednakowych elementów pod wpływem obciążenia σ_{01} . Zmianę naprężeń normalnych w klejonym elemencie tego połączenia na odcinku spoiny opisuje zależność:

$$\frac{d^2 \sigma(x)}{dx^2} - \frac{2G}{\delta_k E \delta} \sigma(x) = -\sigma_{01} \frac{G}{\delta_k E \delta}. \quad (18)$$

Przyjęto, że w pewnej odległości od krawędzi spoiny klejowej $x = z$ występują takie naprężenia w spoinie, którym towarzyszy zmiana modułu sprężystości kleju. Wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned} \text{dla } x \leq z \quad G = G_u \quad \text{i} \quad \sqrt{\frac{2G_u}{\delta \delta_k E}} = n, \\ \text{dla } x > z \quad G = G_k \quad \text{i} \quad \sqrt{\frac{2G_k}{\delta \delta_k E}} = m, \end{aligned}$$

przy których rozwiązanie równania (18) ma postać:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} + \frac{\sigma_{01}}{2} \quad \text{dla } x \leq z, \\ \sigma_2(x) &= C_3 e^{mx} + C_4 e^{-mx} + \frac{\sigma_{01}}{2} \quad \text{dla } x > z. \end{aligned} \quad (19)$$

Wartości stałych całkowania C występujących w zależnościach (19) można wyznaczyć uwzględniając następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \text{dla} \quad x = 0 \quad \sigma_1 &= \sigma_{01}, \\ x = z \quad \sigma_1 &= \sigma_2, \\ x = z \quad \tau_1 &= \tau_2, \\ x = \frac{l}{2} \quad \tau' &= 0. \end{aligned}$$

Wyznaczenie stałych całkowania i podstawienie ich do zależności (19) pozwala przedstawić je w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{01} e^{-nz} \cdot e^{nx} \frac{n \operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right) - m \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right)}{4n \operatorname{ch} n z \operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right) + 4m \operatorname{sh} n z \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right)} + \\ + \frac{\sigma_{01}}{2} + \sigma_{01} e^{nz} \cdot e^{-nx} \frac{m \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right) + n \operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right)}{4n \operatorname{ch} n z \operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right) + 4m \operatorname{sh} n z \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right)}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{01}}{2} + \frac{\sigma_{01} n \left(e^{\frac{ml}{2}} e^{-mx} - e^{-\frac{ml}{2}} e^{mx} \right)}{4n \operatorname{ch} nz \operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right) + 4m \operatorname{sh} nz \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right)}$$

Uwzględniając zależność (6) można wyznaczyć rozkład naprężeń stycznych w spoinie rozpatrywanego połączenia. Dla $x < z$:

$$\tau(x) = \sigma_{01} \sqrt{\frac{2G_u \delta}{E\delta_k}} \times \frac{e^{-n(z-x)} \left\{ n \operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right) - m \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right) \right\} - e^{n(z-x)} \left\{ m \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right) + n \operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right) \right\}}{4n \operatorname{ch} nz \cdot \operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right) + 4m \operatorname{sh} nz \cdot \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right)}$$

(21)

Ponieważ dla większości połączeń klejowych można przyjąć, że:

$$\operatorname{sh} m \left(\frac{l}{2} - z \right) \simeq \operatorname{ch} m \left(\frac{l}{2} - z \right),$$

zależność (21) można uprościć do postaci:

$$\tau_x = \sigma_{01} \sqrt{\frac{G_u \delta}{2E\delta_k}} \frac{(n-m)e^{-n(z-x)} - (n+m)e^{n(z-x)}}{2(n \operatorname{ch} nz + m \operatorname{sh} nz)}$$

(22)

Dla $x = 0$ naprężenia styczne osiągają wartość maksymalną:

$$\tau_0 = \tau_{max} = -\sigma_{01} \sqrt{\frac{G_u \delta}{2E\delta_k}} \frac{m \operatorname{ch} nz + n \operatorname{sh} nz}{n \operatorname{ch} nz + m \operatorname{sh} nz}$$

(23)

Dla $x = z$ zależność (22) przybiera postać:

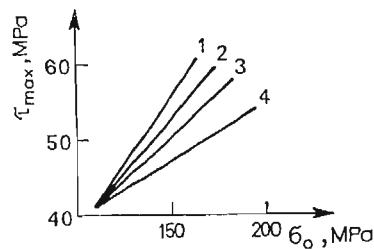
$$\tau_z = -\sigma_{01} \sqrt{\frac{G_u \delta}{2E\delta_k}} \frac{m}{n \operatorname{ch} nz + m \operatorname{sh} nz}$$

(24)

Naprężenia $\tau(z)$ są naprężeniami, przy których następuje zmiana modułu sprężystości kleju. Dla określonego kleju mają one wartość stałą i można je wyznaczyć z krzywej rozciągania kleju.

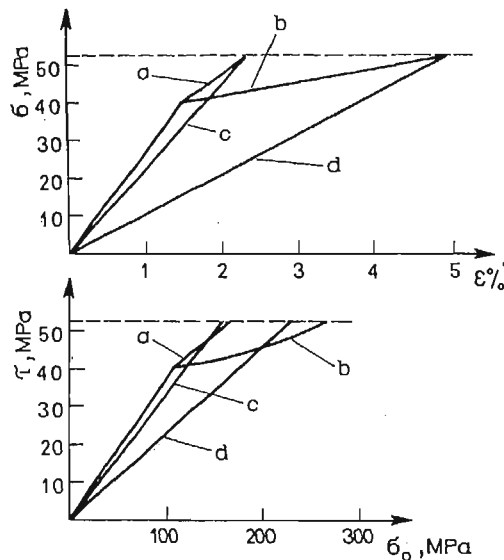
W związku z tym, że z zależności (24) trudno jest wyznaczyć $z = f(\sigma_{01}, \tau(z))$ w praktyce korzystnie jest założyć kilka wartości „ z ” i obliczyć $\sigma_{01} = f(z, \tau(z))$, a następnie założone wartości „ z ” i obliczone σ_{01} podstawić do zależności (23) w celu obliczenia wartości maksymalnych naprężeń stycznych τ_{max} .

Stosując taki tok postępowania obliczono zależność $\tau_{max} = f(\sigma_{01})$ dla zakładkowego połączenia pracującego na ścinanie. W obliczeniach przyjęto następujące parametry połączenia: $E = 72000$ MPa, $\delta = 2$ mm, $\delta_k = 0,1$ mm, $G_k = 1000$ MPa, $\tau(z) = 40$ MPa oraz różne wartości modułu umocnienia kleju $G_u = 800, 600$ i 400 MPa. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 8. W porównaniu z klejem o charakterystyce liniowo-sprężystej stwierdzono wzrost wytrzymałości połączeń — większy w wypadku kleju o mniejszej wartości modułu umocnienia.



Rys. 8. Zależność maksymalnych naprężeń stycznych w spoinach połączeń zakładkowych w funkcji obciążenia: 1 — $G_k = 1000$ MPa (charakterystyka liniowa), 2 — $G_u = 800$, 3 — $G_u = 600$, 4 — $G_u = 400$ MPa (charakterystyki nieliniowe)

Obliczanie maksymalnych naprężeń stycznych w spoinach klejowych pracujących na ścinanie, przy założeniu nieliniowości charakterystyk klejów jest kłopotliwe i bardziej pracochłonne w porównaniu z obliczeniami prowadzonymi przy założeniu liniowej charakterystyki kleju. W pracy [7] sugerowano możliwość uwzględniania nieliniowości charakterystyk klejów poprzez wprowadzanie tak zwanego siecznego modułu sprężystości (tangens kąta prostej łączącej początek i koniec krzywej rozciągania) i traktowania kleju jako ciała liniowo-sprężystego o takiej właśnie wartości modułu sprężystości. W celu stwierdzenia, czy uproszczenia takie jest dopuszczalne obliczono zależności $\tau_{max} = f(\sigma_{01})$ dla dwóch klejów o nieliniowych charakterystykach i porównano je z zależnościami obliczonymi z zastosowaniem siecznego modułu sprężystości (rys. 9). Stwierdzono dopuszczalność stosowania w obliczeniach siecznego modułu sprężystości w wypadku małego zakresu odkształceń plastycznych kleju.



Rys. 9. Krzywe rozciągania czterech klejów (a, b, c i d) oraz zależności maksymalnych naprężeń stycznych w spoinach połączeń zakładkowych w funkcji obciążenia obliczone dla tych klejów

5. Wnioski

1. W wypadku przekroczenia granicy plastyczności w klejonych elementach połączenia zakładkowego pracującego na ścinanie następuje dodatkowe spiętrzenie naprężeń w spoinie, a więc spadek jej wytrzymałości. Wartość przyrostu naprężeń jest zależna głównie od wartości modułu umocnienia materiału klejonego elementu, w którym została przekroczona granica plastyczności — w wypadku mniejszych wartości modułu umocnienia przyrost naprężeń jest większy.

2. Nieliniowość charakterystyk klejów istotnie wpływa na wytrzymałość połączeń zakładkowych pracujących na ścinanie i należy ją uwzględnić w obliczeniach wytrzymałościowych. Spadek modułu sprężystości kleju wraz ze wzrostem jego odkształceń korzystnie wpływa na wytrzymałość połączeń zakładkowych. Jedynie w wypadku klejów, które charakteryzuje mały zakres odkształceń plastycznych można uwzględnić ich nieliniowość przyjmując do obliczeń zastępczą wartość modułu sprężystości kleju równą wartości modułu siecznego.

Literatura

1. *Адгезия. Клеи, цементы, припои*, Москва, Издательство Иностранной Литературы, 1954.
2. N. K. BENSON, *Influence of stress distribution on the strength of bonded joints, Adhesion. Fundamentals and practice*, Elsevier Publishing Co, 1970.
3. D. O. ELEY, *Adhesion*, Oxford University Press, 1961.
4. J. GODZIMIRSKI, *Określanie naprężeń w spoinach metodą elementów skończonych*, Biul. WAT Nr 11 1985.
5. В. ДАВЫДОВ, *Изделия из тонкостенных профилей*, Москва 1957.
6. S. DONMIRSKI, *Modyfikacja klejów epoksydowych i właściwości otrzymanych połączeń klejowych*, Rozprawa doktorska WAT, Warszawa 1965.
7. R. SICHOWICZ, *Przydatność metod określania nośności granicznej metalowych połączeń klejowych w świetle badań laboratoryjnych*, Biul. WAT nr 6 1968.

Резюме

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В КЛЕЕВОМ СЛОЕ СОЕДИНЕНИЯ В НАХЛЕСТКУ В ОБЛАСТИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИИ

Предложен метод определения напряжений сдвига в клеевом соединении, которое работает на сдвиг в области пластических деформации клееных элементов, а также при участии нелинейностей характеристик клеев. Для клея и клееных элементов принято модель тела упруго-пластического с упрочнением.

Summary

ANALYSIS OF STRESS DISTRIBUTION IN THE ADHESIVE OF LAP JOINTS WITHIN THE RANGE OF PLASTIC DEFORMATIONS

A method is proposed for defining the shearing stress in a glued joint that works in shearing within the range of plastic deformations of glued materials with nonlinear characteristic of adhesive taken into consideration. Models of elastic-plastic bodies with strain-hardening is assumed for the adhesive and glued materials.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 stycznia 1987 roku.

MODELOWANIE PROCESU FREZOWANIA IGŁOWEGO Z ZASTOSOWANIEM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

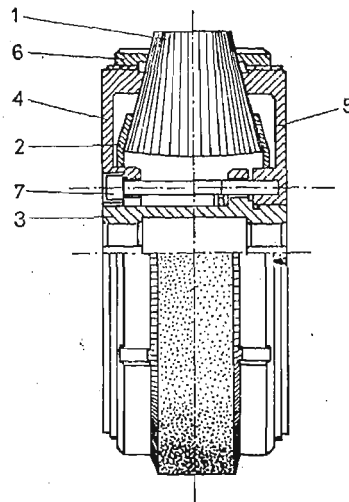
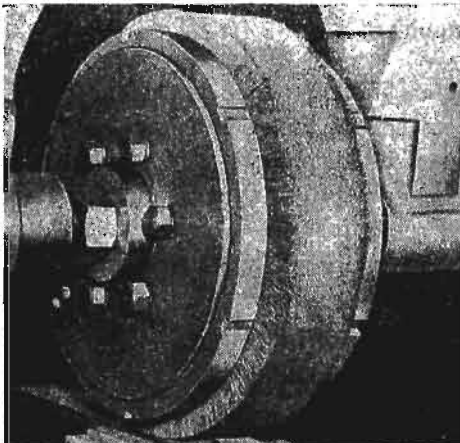
EDMUND WITTBRODT
TADEUSZ BOCHEŃSKI

Politechnika Gdańska

1. Wprowadzenie

Frezowanie igłowe jest wiórowym sposobem obróbki, umożliwiającym usuwanie warstwy materiału o grubości od kilku setnych do kilku milimetrów. Biorąc pod uwagę uzyskiwaną dokładność i chropowatość powierzchni, obróbkę tę można zakwalifikować jako zgrubną ewentualnie kształtującą.

Frez igłowy (rys. 1a) jest narzędziem o elastycznej powierzchni roboczej utworzonej z dużej liczby gęsto upakowanych igieł, wykonanych z drutu sprężynowego ciągnionego na zimno o średnicy od 0.2 do 0.8 mm [3, 4, 5, 6, 7]. Powszechnie stosowaną konstrukcją freza igłowego jest rozwiązanie przedstawione na rys. 1b. Igły freza 1 mogą być



Rys. 1. Frez igłowy: a) widok ogólny, b) konstrukcja narzędzia

połączone ze sobą za pomocą spawania lub klejenia i wraz z tarczami 2 tworzą wieniec, który jest osadzony na występach tarcz 4 i 5. Tarcze te, skręcane śrubami 7, posiadają nacięte zęby, które wchodzą w wieniec powodując zagęszczenie igieł na powierzchni roboczej freza. Pierścienie 6 mają na celu przeciwdziałanie odkształcaniu się igieł w kierunku poprzecznym do kierunku prędkości skrawania.

Dotychczasowe badania ukierunkowane były przede wszystkim na określenie wpływu parametrów obróbkowych (prędkość skrawania v_c , prędkość posuwu v_f i nastawiona głębokość skrawania g_n) na efekty technologiczne (rzeczywista głębokość skrawania g_r , wydajność i chropowatość obrobionych powierzchni). Niektórzy autorzy w oparciu o przyjęte uproszczone teoretyczne modele freza igłowego podejmowali próby analizy wpływu wybranych czynników na rzeczywistą głębokość skrawania. Jednakże ze względu na zbyt duże uproszczenia modeli, ich wnioski i wyjaśnienia są rozbieżne, a często nawet sprzeczne [4, 6]. W związku z tym podjęto się przeprowadzenia badań niektórych czynników procesu frezowania igłowego oraz oceny ich wpływu na efekty technologiczne, koncentrując się przede wszystkim na badaniu wpływu czynników związanych z narzędziem na rzeczywistą głębokość skrawania. Celem tak przeprowadzonych badań oraz analizy czynników jest opracowanie założeń projektowych i konstrukcyjnych frezów igłowych w aspekcie osiągnięcia optymalnych właściwości użytkowych narzędzia w zależności od zadania obróbkowego.

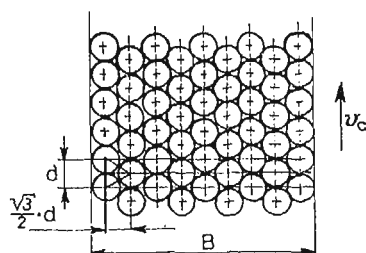
Zrealizowanie badań doświadczalnych czynników procesu frezowania igłowego (zwłaszcza czynników związanych z narzędziem) byłoby bardzo kosztowne i pracochłonne, gdyż badania takie wymagałyby wykonania dużej liczby frezów igłowych o zróżnicowanych wymiarach, średnicach i długościach igieł oraz gęstości ich upakowania. Badania te zrealizowano jako badania symulacyjne na teoretycznym dyskretnym modelu freza igłowego, a badania doświadczalne ograniczono do wyznaczenia danych do modelu (sił skrawania w zależności od parametrów obróbkowych i od czynników związanych z narzędziem) oraz do weryfikacji badań symulacyjnych [1].

2. Teoretyczny dyskretny model freza igłowego z zastosowaniem metody elementów skończonych

Zadaniem dyskretnego teoretycznego modelu freza igłowego jest wyznaczenie rzeczywistej głębokości skrawania w zależności od czynników związanych z narzędziem i parametrami obróbkowymi. Z uwagi na duże przemieszczenia ostrzy igieł, dochodzące do 25 mm [1, 5], model uwzględnia zależności nieliniowe między odkształceniami a przemieszczeniami ostrzy igieł. Przyjęto następujące założenia:

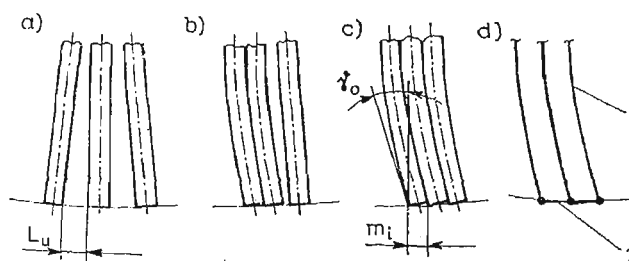
- frez igłowy posiada stałą gęstość upakowania na powierzchni roboczej,
- wszystkie igły są ułożone prostopadle do osi obrotu freza,
- podczas obróbki igły oddziałują na siebie tylko w kierunku v_c ,
- ułożenie igieł na powierzchni roboczej freza przy ich maksymalnej gęstości upakowania tak jak na rys. 2 [4, 6].

Mechanizm usztywniania się części roboczej freza igłowego będącej w kontakcie z obrabianym przedmiotem, a także bezpośrednio poza nią, rzutuje na sposób dyskret-

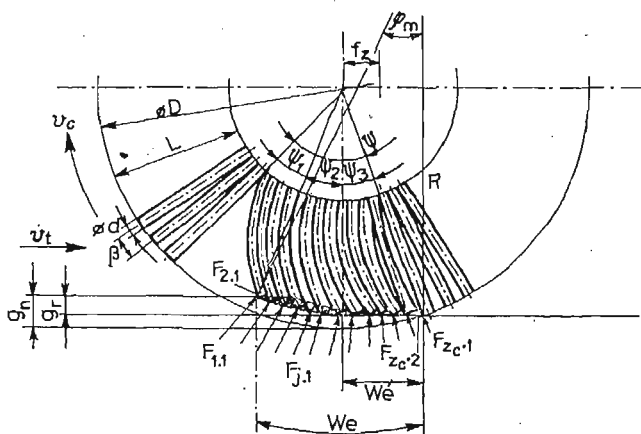


Rys. 2. Rzędowe ułożenie igieł przy ich maksymalnym upakowaniu: B — szerokość powierzchni roboczej freza, d — średnica igły

zacji modelu oraz na sposób przeprowadzania obliczeń. Pod wpływem sił skrawania igły freza odkształcają się. Gdy odkształcenie pierwszej igły jest większe od odkształcenia drugiej o wielkość występującego między igłami luzu, następuje podparcie pierwszej igły drugą, następnie drugiej trzecią, a pierwszej drugą i trzecią itd. (rys. 3). Dzięki temu uzyskuje się wielokrotne zwiększenie sztywności igieł w stosunku do ich sztywności własnej [5, 6].



Rys. 3. Mechanizm podpierania się igieł freza: a) igły nieobciążone, b) początek podpierania się igieł, c) igły wzajemnie podparte, d) dyskretyzacja igieł: 1 — skończony element belkowy, 2 — skończony element prętowy, L_u — luz występujący między igłami, m_i — odległość między ostrzami igieł, γ_o — kąt natarcia ostrza igły



Rys. 4. Technologiczne i geometryczne parametry skrawania podczas frezowania igłowego

Dyskretyzacja modelu polega na przedstawieniu pojedynczej igły freza jako elementu belkowego. Oddziaływanie między igłami (igły wzajemnie podparte) odzwierciedla wprowadzony zastępczy element prętowy (rys. 3d), obciążony siłami działającymi w kierunku osi pręta. Model freza igłowego traktowany jest jako model dyskretny składający się z elementów skończonych belkowych i prętowych. Przed przystąpieniem do budowy modelu obliczeniowego określono technologiczne i geometryczne parametry skrawania oraz sposób obciążenia poszczególnych igieł siłami skrawania (rys. 4). Zależności matematyczne między charakterystycznymi parametrami skrawania wyprowadzono na podstawie rys. 2 i rys. 4, wychodząc ze wzoru na gęstość upakowania igieł na powierzchni roboczej freza [4, 6]:

$$G = \frac{i \cdot A}{A_f}, \quad (1)$$

gdzie:

G — gęstość upakowania igieł,

i — liczba igieł freza,

A — pole powierzchni przekroju poprzecznego igły, mm^2

A_f — pole powierzchni roboczej freza igłowego, mm^2

Otrzymano następujące zależności:

— liczba igieł freza:

$$i = 4 \cdot G \cdot \frac{D \cdot B}{d^2}, \quad (2)$$

— liczba rzędów igieł na szerokości B freza:

$$y = \frac{4 \cdot G \cdot B}{\pi \cdot d}, \quad (3)$$

— liczba igieł w jednym rzędzie (na obwodzie):

$$z = \frac{G}{G_m} \cdot \frac{\pi \cdot D}{d}, \quad (4)$$

gdzie:

$$G_m = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.906 \text{ — maksymalna gęstość upakowania igieł,}$$

— luz między igłami:

$$L_u = 0.5 \cdot d \sqrt{\pi \cdot \left(\frac{G_m}{G} - 1 \right)}, \text{ mm} \quad (5)$$

— kąt między igłami:

$$\beta = \frac{2 \cdot d}{D} \cdot \frac{G_m}{G}, \text{ rad.} \quad (6)$$

Liczbę igieł czynnych (będących w kontakcie z obrabianym przedmiotem) określano:
a) w przypadku, gdy igły nie były jeszcze podparte:

$$z_c = \frac{z}{2\pi} \cdot \psi = \frac{\psi}{\beta}, \quad (7)$$

gdzie:

$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ — kąt styku określający część obwodu freza, powstający na skutek zeiknięcia z obrabianym przedmiotem, uwzględniający kąt ψ_1 odkształcenia pierwszej igły (rys. 4),

b) w przypadku, gdy wyznaczono liczbę igieł podpierających się l_p :

$$\begin{aligned} z_c &= z'_c + z''_c, & \text{gdy } l_p \cdot \beta < \psi_2 + \psi_3, \\ z_c &= z''_c, & \text{gdy } l_p \cdot \beta > \psi_2 + \psi_3, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$z'_c = (\psi - l_p \beta) / \beta,$$

z_c — wyznaczono metodą iteracyjną (rys. 3c) w następujący sposób:

$$\sum_{i=1}^{l_p} m_i = w_e \rightarrow z_c = i, \quad (9)$$

m_i — odległość między sąsiednimi ostrzami igieł (rys. 3), ($m_i = d / \cos \gamma_{0i}$) mm,

$w_e = w'_e + [0.5 \cdot D - (g_n - g_r)] \cdot \psi_2$ — droga ruchu wypadkowego, mm

$w'_e = \sqrt{D(g_n - g_r) - (g_n - g_r)^2}$ — część drogi ruchu wypadkowego (w mm) powstająca na skutek odkształcenia powierzchni roboczej freza igłowego (rys. 4), gdzie:
 D — średnica freza igłowego, g_n — nastawiona głębokość skrawania, g_r — rzeczywista głębokość skrawania.

Siły obciążające układ przedstawiono analogicznie jak przy frezowaniu walcowym przeciwbieżnym frezem o zębach prostych. W celu określenia chwilowego nominalnego pola przekroju warstwy skrawanej, kształt warstwy aproksymowano łukiem koła o promieniu R , którego środek przesunięty jest o wielkość w'_e względem osi freza (rys. 4). W ten sposób otrzymano zależności:

— kąt skrawania:

$$\varrho_m = \frac{w_e}{R}, \text{ rad}, \quad (10)$$

— jednostkowy kąt skrawania:

$$\varrho = \frac{\varrho_m}{z_c}, \text{ rad}, \quad (11)$$

Chwilową siłę skrawania obliczono ze wzoru:

$$F_{j2} = k_s \cdot f_z \cdot \sin[\varrho_m - \varrho(j-1)], N, \quad (12)$$

a chwilową siłę skrawania normalną

$$F_{j1} = \frac{F_{j2}}{u}, N \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, \dots, z_c, \quad (13)$$

gdzie:

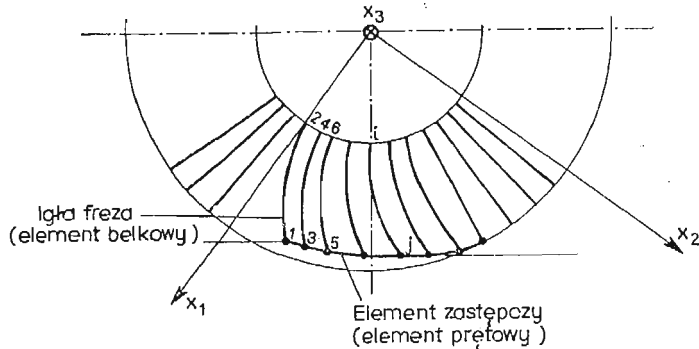
k_s — opór właściwy skrawania, MPa,

f_z — posuw na obrót, mm,

u — współczynnik proporcjonalności.

Opór właściwy skrawania k_s oraz współczynnik proporcjonalności u wyznaczono w sposób doświadczalny.

Model obliczeniowy przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Model obliczeniowy: x_1, x_2, x_3 — osie układu, względem którego obliczano przemieszczenia ostrzy igieł (osie układu globalnego), 1, 2, ..., j, i, \dots, l_w — numeracja węzłów.

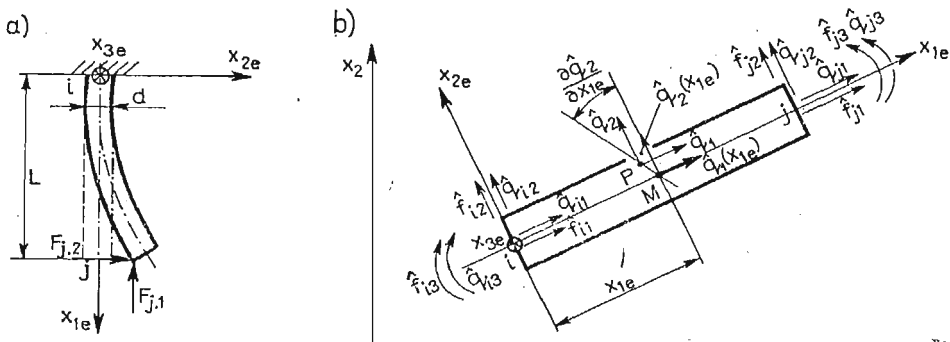
Równania równowagi modelu obliczeniowego wyprowadzono korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju. Układ rozpatruje się jako statyczny, zatem równanie Lagrange'a upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = f_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

gdzie:

- U — energia potencjalna układu,
- q_i — współrzędna uogólniona,
- f_i — siła uogólniona,
- n — liczba stopni swobody układu.

W pierwszej kolejności rozpatrzono pojedynczą igłę freza. Na rys. 6a przedstawiono igłę jako element belkowy o średnicy d i długości L . Początek układu lokalnego x_{1e}, x_{2e}, x_{3e} przyjęto w miejscu utwierdzenia igły. Oś x_{1e} pokrywa się z osią obojętną igły. Na węzeł j działa płaski układ sił utworzony z normalnej siły skrawania F_{j1} oraz głównej siły skrawania F_{j2} .



Rys. 6. Igła jako element belkowy w płaskim układzie sił: a) schemat ogólny, b) przemieszczenia węzłów elementu oraz punktów M i P

Współrzędnymi uogólnionymi elementu, wynikającymi z charakteru obciążenia, są:
 — współrzędne translacyjne w kierunkach osi x_{1e} i x_{2e} ,
 — współrzędne rotacyjne wokół osi x_{3e} .

Wektor współrzędnych uogólnionych (wektor przemieszczeń węzłowych elementu) w układzie lokalnym ma postać:

$$\hat{q}_e = \text{col}(\hat{q}_t, \hat{q}_j), \quad (15)$$

gdzie:

$$\hat{q}_j = (\hat{q}_{j1}, \hat{q}_{j2}, \hat{q}_{j3}).$$

Wektor sił uogólnionych ma postać:

$$\hat{f}_e = \text{col}(\hat{f}_t, \hat{f}_j), \quad (16)$$

gdzie:

$$\hat{f}_j = \text{col}(\hat{f}_{j1}, \hat{f}_{j2}, \hat{f}_{j3}).$$

Po przekształceniach równanie równowagi modelu obliczeniowego w postaci macierzowej przedstawia się następująco [1, 8]:

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_n - \mathbf{K}_G) \cdot q = f. \quad (17)$$

Po stwierdzeniu, że igły podpierają się wzajemnie dopisywana jest macierz sztywności elementów prętowych zastępczych:

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_n - \mathbf{K}_G + \mathbf{K}^*)q = f, \quad (18)$$

gdzie:

- \mathbf{K}_L — macierz sztywności liniowej,
- \mathbf{K}_n — macierz sztywności nieliniowej,
- \mathbf{K}_G — macierz sztywności geometrycznej,
- \mathbf{K}^* — macierz sztywności elementów zastępczych,
- q — wektor przemieszczeń końców igieł,
- f — wektor sił uwzględniający zależności (12) i (13).

Elementy wektora przemieszczeń $\hat{q}_{i1} = \hat{q}_{i2} = \hat{q}_{i3} = 0$ (rys. 6a), a elementy wektora sił \hat{f}_{i1} , \hat{f}_{i2} i \hat{f}_{i3} są reakcjami w miejscu utwierdzenia. Z uwagi na cel obliczeń, jakim jest wyznaczenie wektora przemieszczeń ostrzy igieł, elementy te można pominąć. Ponadto $\hat{f}_{j1} = -F_{j1}$, $\hat{f}_{j2} = F_{j2}$ i $\hat{f}_{j3} = 0$. Wektory \hat{q}_e i \hat{f}_e mają więc postać:

$$\hat{q}_e = \text{col}(\hat{q}_j) \quad \text{i} \quad \hat{f}_e = \text{col}(\hat{f}_j). \quad (19)$$

Macierz sztywności belkowego elementu skończonego wyprowadzono korzystając z macierzy funkcji kształtu [8, 9]:

— aproksymującej przemieszczenia punktu M leżącego na osi obojętnej elementu (rys. 6b)

$$\mathbf{N}_e(x_1) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_1}{L} & 0 & 0 & \frac{x_1}{L} \\ 0 & 1 - 3\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x_1}{L}\right)^3 & L\left[\frac{x_1}{L} - 2\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{L}\right)^3\right] & 0 \\ 0 & \frac{6}{L}\left[\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 - \frac{x_1}{L}\right] & 1 - 4\frac{x_1}{L} + 3\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x_1}{L}\right)^3 & L\left[\left(\frac{x_1}{L}\right)^3 - \left(\frac{x_1}{L}\right)^2\right] \\ \frac{6}{L}\left[\frac{x_1}{L} - \left(\frac{x_1}{L}\right)^2\right] & 3\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 - 2\frac{x_1}{L} \end{bmatrix}, \quad (20) \quad [\text{cd}]$$

— aproksymującej przemieszczenia punktu P leżącego poza osią obojętną elementu (rys. 6b)

$$\mathbf{N}_e(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_1}{L} & -\frac{6}{L^2}x_2x_1\left(\frac{x_1}{L} - 1\right) & -x_2\left(1 - \frac{4}{L}x_1 + \frac{3}{L^2}x_1^2\right) & \frac{x_1}{L} \\ 0 & 1 - \frac{3}{L^2}x_1^2 + \frac{2}{L^3}x_1^3 & x_1\left(1 - \frac{2}{L}x_1 + \frac{x_1^2}{L^2}\right) & 0 \\ -\frac{6}{L^2}x_1x_2\left(1 - \frac{x_1}{L}\right) & -\frac{x_1x_2}{L}\left(\frac{3}{L}x_1 - 2\right) \\ \left(\frac{x_1}{L}\right)^2 \cdot \left(3 - \frac{2}{L}x_1\right) & \frac{x_1^2}{L}\left(\frac{x_1}{L} - 1\right) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Końcowa postać macierzy sztywności w układzie lokalnym, po odrzuceniu wyrazów odpowiadających węzłowi i , przedstawia się następująco:

— macierz sztywności liniowej:

$$\hat{\mathbf{K}}_{Le} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} \\ 0 & -\frac{6I}{L} & 4I \end{bmatrix}, \quad (22)$$

gdzie:

A — pole przekroju poprzecznego elementu skończonego,

I — moment bezwładności przekroju poprzecznego elementu skończonego,

L — długość elementu skończonego

— macierz sztywności nieliniowej:

$$\hat{\mathbf{K}}_{ne} = \frac{E}{2} \begin{bmatrix} \frac{q_{J1}}{L^2} \left(2 + \frac{q_{J1}}{2L}\right) A & \frac{6}{L^4} q_{J2} \left(2 + \frac{q_{J1}}{L}\right) I & \frac{2}{L^2} q_{J3} \left(2 + \frac{q_{J1}}{L}\right) I \\ \frac{6}{L^4} q_{J2} \left(2 + \frac{q_{J1}}{L}\right) I & \Pi \frac{81}{320} \frac{d^6}{L^7} q_{J2}^2 & \Pi \frac{3}{40} \frac{d^6}{L^5} q_{J2} q_{J3} \\ \frac{2}{L^2} q_{J3} \left(2 + \frac{q_{J1}}{L}\right) I & \Pi \frac{3}{40} \frac{d^6}{L^5} q_{J2} q_{J3} & \Pi \frac{11}{320} \frac{d^6}{L^3} q_{J3}^2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

— macierz sztywności geometrycznej:

$$\mathbf{K}_{Ge} = F_{J1} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

Macierz elementu zastępczego w układzie lokalnym, przy uwzględnieniu trzech stopni swobody w węźle, ma postać:

$$\hat{\mathbf{K}}_e^* = G^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

gdzie:

G^* — sztywność elementu zastępczego, N/mm.

Sztywność elementu zastępczego G^* , z uwagi na przyjęte założenia, powinna się zmieniać w zależności od liczby igieł podpierających się oraz położenia igły w danej chwili. Sztywność tę wyznaczono z zależności:

$$G_i^* = \frac{G^{**}}{l_i}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, l_p, \quad (26)$$

gdzie:

$G^{**} = 4 \cdot 10^4$ N/mm — początkowa sztywność elementu zastępczego, dobrana na podstawie numerycznych obliczeń testujących,

l_i — liczba igieł wzajemnie podpartych.

Przy tak dobranej wartości sztywności zastępczej G^* otrzymuje się dobrą zgodność wyników obliczeń z wynikami eksperymentalnymi.

Liczba stopni swobody modelu w układzie globalnym wynosi:

$$n = n_w l_w / 2 = \frac{3}{2} l_w, \quad (27)$$

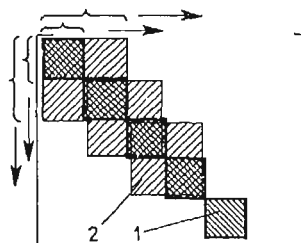
gdzie:

n_w — liczba stopni swobody węzła,

l_w — całkowita liczba węzłów (łącznie z węzłami i).

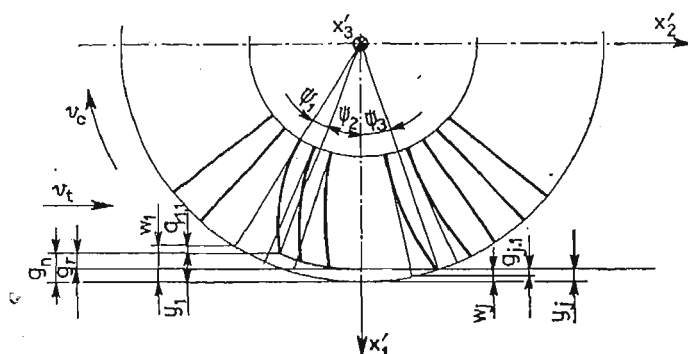
Na rys. 7 przedstawiono schemat budowy globalnej macierzy sztywności układu równań (17) i (18).

W pierwszym etapie, gdy $L_u > 0$, budowana jest macierz sztywności elementów belkowych. Macierz ta jest symetryczną macierzą pasmową. Gdy $L_u = 0$ następuje dodanie macierzy \mathbf{K}_e^* elementów prętowych. Macierz globalna zachowuje układ symetryczny pasmowy.



Rys. 7. Globalna macierz sztywności układu: 1 — macierz elementu belkowego $K_e = K_{Le} + K_{ne} - K_{Ge}$,
2 — macierz elementu prętowego K_e^*

Rzeczywistą głębokość skrawania g_r oblicza się na podstawie wektora przemieszczeń q . Wektor q wyznaczony w układzie globalnym o osiach x_1, x_2, x_3 (rys. 5) transformowany



Rys. 8. Wyznaczenie rzeczywistej głębokości skrawania

jest do układu o osiach x'_1, x'_2, x'_3 (rys. 8). Wyznaczenie g_r polega na znalezieniu minimalnej wartości y_j , która jest różnicą między g_n i g_r (rys. 8):

$$y_{min} = g_n - g_r, \text{ mm.} \quad (28)$$

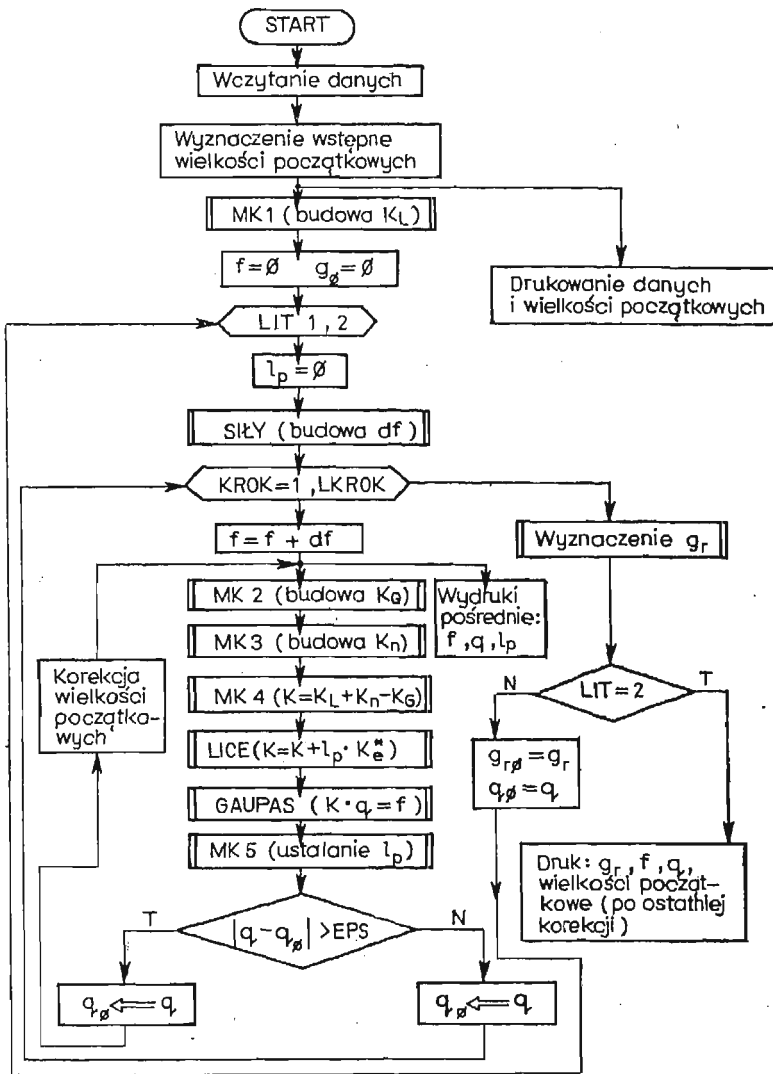
Wartość y_j wyznaczono z zależności:

$$y_j = w_j + q_{j1}, \text{ mm dla } j = 1, 2, \dots, l_w, \quad (29)$$

gdzie:

$$w_j = \frac{D}{2} \{1 - \cos[\psi_1 + \psi_2 - (j-1) \cdot \beta]\}, \text{ mm.} \quad (30)$$

Program obliczeń napisano w języku PASCAL, a obliczenia przeprowadzono na mikrokomputerze IBM PC. Główny segment algorytmu programu przedstawiono na rys. 9. Wczytanie danych obejmuje wielkości charakteryzujące frez igłowy, parametry obróbkowe, wartości współczynników do wzorów na siły skrawania (w zależności od obrabianego materiału). Wyznaczenie wielkości początkowych polega na obliczeniu oporu właściwego skrawania k_s i współczynnika proporcjonalności u oraz technologicznych i geometrycznych parametrów skrawania. Przyłożenie maksymalnych wartości sił skrawania do igieł jeszcze nie podpartych odbywa się krokowo. W podprogramie SIŁY, budującym



Rys. 9. Schemat blokowy programu obliczeniowego

wektor sił, elementy tego wektora dzielone są przez wartość LKROK. Obliczenia realizowane są „KROK”-ami, w których elementy wektora sił powiększane są o wartości df wyznaczone w podprogramie SIŁY. Również w każdym kroku budowane są macierze K_G i K_n , ponieważ elementy tych macierzy zależą od wartości elementów wektora q i f . Wektor odkształceń q obliczany jest w podprogramie GAUPAS (metodą eliminacji Gaussa). Podprogramem ustalającym liczbę igieł, które wzajemnie się podpierają jest podprogram MK 5. Liczba ta wyznaczana z nierówności:

$$(r_{j-1} - r_j) > L_u \cdot \cos(j-1) \frac{\beta}{2}, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, l_w, \quad (31)$$

gdzie:

r_{j-1}, r_j — przemieszczenia sąsiednich ostrzy igieł, przekazywana jest do podprogramu LICE. W podprogramie tym do globalnej macierzy sztywności \mathbf{K} (rys. 7) dopisywane są macierze sztywności elementów prętowych.

W przypadku, gdy elementy wektora sił posiadają maksymalne wartości oraz gdy elementy wektorów przemieszczeń z poprzedniego i bieżącego cyklu obliczeń nie wykazują większej zmienności od założonej wartości $EPS = 0.01$, następuje wyznaczenie rzeczywistej głębokości skrawania. Na podstawie obliczeń testujących stwierdzono, że wartość g_r ustala się (w ramach dokładności EPS), już w drugim kroku obliczeń (pętla LIT 1,2).

3. Badania symulacyjne na EMC

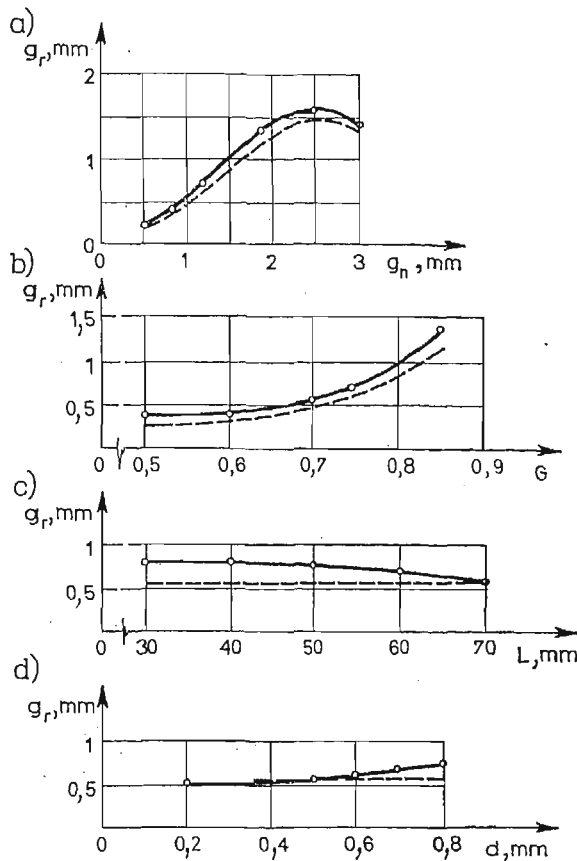
Badania przeprowadzono dla jednego rodzaju obrabianego materiału żeliwa szarego ZL 250, oraz przy stałych wartościach parametrów technologicznych: $v_c = 1.5$ m/s i $v_f = 1.14$ mm/obrót. Moduł Younga materiału igieł $E = 2.15 \cdot 10^5$ MPa. Program badań — statyczny zdeterminowany, selekcyjny, jednoczynnikowy (symbol PS/DS-UP) — polegał na wyznaczeniu kolejnych czynników badanych przy ustalonych wartościach (wartościach centralnych) wszystkich innych czynników, chwilowo nie będących przedmiotem badań. W tabelicy 1 podano wartości czynników badanych oraz podkreślono ich wartości centralne.

Tablica 1. Wartości czynników badanych

Lp.	Badany czynnik	Wartości czynników badanych					
1	d, mm	0.2	0.37	0.5	<u>0.6</u>	0.7	0.8
2	L, mm	30.0	40.0	50.0	<u>60.0</u>	70.0	—
3	G, —	0.5	0.6	0.7	<u>0.75</u>	0.8	0.85
4	g, mm	0.5	0.8	<u>1.2</u>	1.9	2.5	3.0

Na podstawie otrzymanych wyników badań symulacyjnych sporządzono przebiegi rzeczywistej głębokości skrawania w zależności od badanych czynników (rys. 10). Analizując otrzymane wyniki stwierdzono, że spośród czynników związanych z narzędziem największy wpływ na rzeczywistą głębokość skrawania ma gęstość upakowania igieł freza. Natomiast średnica i długość igieł są czynnikami, których wpływ na g_r jest niewielki.

W celu porównania wyników uzyskanych na drodze badań teoretycznych z wynikami doświadczalnymi, na rys. 10 naniesiono przebiegi uzyskane na drodze badań doświadczalnych. Z porównania widać, że wartości teoretyczne rzeczywistej głębokości skrawania są wyższe od wartości doświadczalnych, przy czym dla małych wartości czynników badanych błąd między wartościami g_r nie przekracza 50%. Natomiast przy centralnych i mak-



Rys. 10. Przebiegi teoretyczne i doświadczalne rzeczywistej głębokości skrawania: ——— przebiegi teoretyczne, - - - - - przebiegi rzeczywiste, a) $g_r = f(g_n)$, b) $g_r = F(G)$, c) $g_r = f(L)$, d) $g_r = f(d)$.

symalnych wartościach czynników badanych błąd nie przekracza 10%. Większe wartości teoretyczne są prawdopodobnie spowodowane między innymi przyjęciem założenia, że igły odkształcają się tylko w jednej płaszczyźnie, oddziaływanie między igłami występuje również w jednej płaszczyźnie, które w modelu sprowadzono do węzłów usytuowanych tylko na ostrzach igieł.

4. Podsumowanie

— Zaprezentowany teoretyczny, dyskretny model freza igłowego potwierdzony weryfikacyjnymi badaniami doświadczalnymi umożliwił przeprowadzenie symulacyjnych badań niektórych czynników procesu frezowania igłowego bez konieczności wykonywania wielu frezów igłowych o zróżnicowanych średnicach i długościach igieł oraz ich gęstościach upakowania,

— wyniki badań symulacyjnych procesu frezowania igłowego pozwoliły na stwier-

dzenie, że spośród czynników związanych z narzędziem gęstość upakowania igieł wywiera najistotniejszy wpływ na rzeczywistą głębokość skrawania,

— teoretyczny dyskretny model umożliwi optymalizację czynników procesu frezowania igłowego oraz doboru charakterystycznych wielkości narzędzia w zależności od zadania obróbkowego.

Literatura

1. T. BOCHEŃSKI, *Analiza niektórych czynników procesu frezowania igłowego*, Praca doktorska. Politechnika Gdańska. Gdańsk 1986.
2. M. FELD, T. BOCHEŃSKI, *Kształtowanie warstwy wierzchniej metodą frezowania igłowego*, Materiały z III Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Technicznej „Wpływ technologii na stan warstwy wierzchniej”. Gorzów Wlkp. 1980.
3. W. SALUKWADZE, *Rotierendes Schneidwerkzeug zur Oberflächenbearbeitung von Werkstücken und — stoffen*, Patentschrift 1802360 vom 10.10.1968.
4. W. SCHWEER, R. E. KOCH, *Naderlfräsen ein neues Verfahren der Oberflächenbearbeitung*, Werkstatt und Betrieb 109, 6, 1976.
5. Th. STÖFERLE, H. MÜLLER-GERBES, *Bearbeitung von Werkstückoberflächen durch Nadelfräsen*, Werkstatt und Betrieb 110, 1, 1977.
6. H. P. WOLF, *Technisch — Wissenschaftliche Begleitforschung zu den Vorhaben „Nadelfräsen“ einschließlich der Ermittlung der Verfahrenskenngrößen*, Bundesministerium für Forschung und Technologie — Forschungsbericht HA 81-005, 1981.
8. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, W. OSTACHOWICZ, J. TARNOWSKI, E. WITTBRODT, *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, Arkady. Warszawa 1984.
9. E. WITTBRODT, *Dynamika układów o zmiennej w czasie konfiguracji z zastosowaniem metody elementów skończonych*, Zeszyty Naukowe Politechn. Gdańskiej. Mechanika nr 46, Gdańsk 1983.

Резюме

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИГЛОВОГО ПРОЦЕССА ФРЕЗЕРОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Описано теоретическую модель иглового процесса фрезерования с применением метода конечных элементов. Полученные аналитические результаты сопоставлено с измеренными на фрезерном станке. Исследовано влияние параметров игловой фрезы и глубины фрезерования на технологические эффекты процесса.

Summary

THE MICROSCALPING PROCESS MODEL USING THE FINITE ELEMENT METHOD

A theoretical model of the „microscalping” process using the finite element method is presented. Results of the theoretical calculations are compared with those measured in an experiment. A special attention was payed to search influences of the tool parameters and depth of cut on selected technological effects.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 lutego 1987 roku.

ANALIZA NIELINIOWYCH DRGAŃ WŁASNYCH BELEK WIELOPRZEŚŁOWYCH

ROMAN LEWANDOWSKI

Politechnika Poznańska

W niniejszej pracy podano numeryczne rozwiązanie dla geometrycznie nieliniowych drgań własnych belek ciągłych których końce są sprężyste podparte w kierunku poziomym. Pominięto poziome i obrotowe siły bezwładności a belki traktuje się jako układy z ciągłym rozkładem masy. Zastosowano podejście wariacyjne, metodę elementów skończonych oraz pewną procedurę iteracyjną do wyznaczenia nieliniowych częstości i postaci drgań. Podano wyniki przykładowych obliczeń numerycznych.

1. Wstęp

Belki poddane drganiom o dużych amplitudach należy traktować jako układy nieliniowe. Analiza drgań własnych oraz ustalonych, harmonicznie wymuszonych drgań belek jednoprzęsłowych była przedmiotem szeregu publikacji spośród których dla przykładu można wymienić prace [1 ÷ 14]. W pracach [1 ÷ 7] do rozwiązania problemu używano przybliżonych metod analitycznych, a metodę elementów skończonych zastosowano w pracach [8 ÷ 14].

Przeprowadzono szczegółowe analizy wpływu poszczególnych parametrów belki na częstości drgań własnych. We wszystkich pracach zgodnie stwierdza się zasadniczy wpływ odkształceń osi belki oraz braku swobody przesuwu końców belki w poziomie na jej nieliniowe zachowanie. W pracach [7, 12] wykazano również, że sprężyste podparcie końców belki w poziomie znacząco zwiększa częstości drgań własnych. Ponadto w [3, 13] stwierdza się nieznaczny wpływ poziomych sił bezwładności na częstości drgań. Belki jednoprzęsłowe charakteryzują się wzrostem częstości drgań wraz ze wzrostem amplitudy. Rzadko występujące przypadki dla których następuje zmniejszenie częstości drgań przy wzrastających amplitudach omówiono w [12].

W pracy [6] wykazano istotny wpływ nieliniowego, sprężystego podparcia belki w kierunku pionowym na częstości i postacie drgań.

Problem sprzężenia postaci drgań w stanie ustalonym drgań harmonicznie wymuszonych analizowano w pracy [5], a w [14] podano nową numeryczną metodę analizy drgań ustalonych w otoczeniu rezonansu głównego.

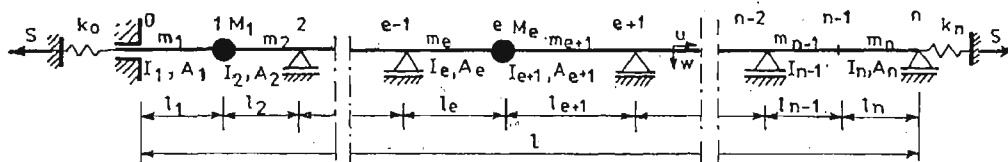
Autorowi nie są znane prace dotyczące problemów nieliniowej dynamiki belek ciągłych.

Niniejsza praca podaje przybliżone rozwiązanie zagadnienia drgań własnych geometrycznie nieliniowych belek ciągłych. W szczególności wyznacza się nieliniowe częstotliwości i postacie drgań.

Podano wariacyjne sformułowanie problemu. Założono rozwiązanie harmonicznie zmienne względem czasu, a względem zmiennej przestrzennej problem sprowadzono do rozwiązania nieliniowego zadania na wartości własne. Nieliniowy problem własny rozwiązano numerycznie. Zastosowano metodę elementów skończonych oraz wyprowadzono dynamiczne macierze mas i sztywności elementów.

2. Sformułowanie problemu i jego rozwiązanie

W pracy analizuje się drgania własne belek wieloprzęsłowych opartych na niepodatnych podporach. Skrajne podpory mają więzy sprężyste o współczynnikach podatności k_0 i k_n kępujące swobodę przemieszczania końców belki w kierunku poziomym. Na belkę



Rys. 1. Widok rozpatrywanej belki

działa osiowa siła statyczna, S , masa belki jest rozłożona w sposób ciągły na jej długości, a ponadto w pewnych punktach są skoncentrowane masy skupione. Moment bezwładności $I(x)$, pole przekroju poprzecznego $A(x)$ oraz jednostkowa masa belki $m(x)$ są stałe na pewnych odcinkach belki. Przykładową belkę wraz z używanymi oznaczeniami pokazano na rys. 1.

Związki geometryczne dla rozpatrywanej belki mają postać:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

gdzie u , w , ε , κ oznaczają kolejno: poziome i pionowe przemieszczenie belki, odkształcenie osi belki oraz jej krzywiznę.

Zakładając, że poziome oraz obrotowe siły bezwładności są pomijalnie małe, z warunku równowagi $\sum x = 0$ i po uwzględnieniu (2.1)₁, otrzymamy następujące wyrażenie na siłę normalną w belce wywołaną odkształceniami osi belki:

$$N(t) = EA(x) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.2)$$

Całkując (2.2) w granicach od 0 do l oraz uwzględniając warunki brzegowe $u(0) = k_0 N(t)$, $u(l) = -k_n N(t)$ możemy wyrażenie na siłę $N(t)$ zapisać w postaci:

$$N(t) = \frac{EA}{2lk} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2.3)$$

gdzie $k = d + \frac{EA}{l} (k_0 + k_n)$, $d = \sum_{e=1}^n l_e A_e / l A_e$, A oznacza porównawcze pole przekroju poprzecznego belki. Ze wzoru (2.3) wynika, że siła normalna $N(t)$ jest stała na długości belki.

Po wykorzystaniu powyższych spostrzeżeń energię potencjalną i kinetyczną rozpatrywanego układu można zapisać w postaci:

$$U = \int_0^l \frac{EI(x)}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{SN(t)}{EA(x)} dx + \int_0^l \frac{N^2(t)}{2EA(x)} dx + SN(t) \cdot (k_0 + k_n) + \frac{1}{2} N^2(t) \cdot (k_0 + k_n), \quad (2.4)$$

$$K = \int_0^l \frac{1}{2} m(x) \dot{w}^2(x, t) dx + \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} M_e \dot{w}_e^2(t). \quad (2.5)$$

Dwa ostatnie składniki w (2.4) uwzględniają wpływ podatności skrajnych podpór.

Ponieważ poszukujemy rozwiązań okresowych, więc zakładamy, że w pierwszym przybliżeniu przemieszczenia dynamiczne belki można aproksymować funkcją o postaci:

$$w(x, t) = \alpha v(x) \cos \omega t, \quad (2.6)$$

gdzie $v(x)$ oznacza nieliniową postać drgań unormowaną w ten sposób aby dla $x = \bar{x}$, $v(\bar{x}) = 1$, α amplitudę drgań punktu $x = \bar{x}$ belki a ω nieliniową częstość drgań. Rozwiązanie powyższe spełnia warunki początkowe o postaci: $w(x, 0) = \alpha v(x)$, $\dot{w}(x, 0) = 0$. Jak wynika, np. z pracy [15], przyjęcie w omawianym przypadku harmonicznego przebiegu drgań w czasie dobrze przybliża rozwiązanie dokładne.

Podstawiając (2.6) do całki działania $W = \frac{1}{T} \int_0^T (K - U) dt$ oraz całkując względem czasu w przedziale równym poszukiwanemu okresowi drgań $T = 2\pi/\omega$ otrzymamy funkcjonal o postaci:

$$W(v) = \frac{1}{4} \int_0^l \omega^2 \alpha^2 m(x) v^2(x) dx + \frac{1}{4} \sum_{e=1}^n \alpha^2 M_e v_e^2 - \frac{1}{4} \int_0^l \alpha^2 EI(x) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l \frac{SC(v, \alpha^2)}{2EA(x)} dx - \int_0^l \frac{3C^2(v, \alpha^2)}{16EA(x)} dx - \left(\frac{1}{2} SC + \frac{3}{16} C^2 \right) (k_0 + k_n) \quad (2.7)$$

gdzie:

$$C(v, \alpha^2) = \frac{EA\alpha^2}{2lk} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx = \text{const.}$$

Warunek stacjonarności funkcjonału (2.7) dla $m(x) = m$, $M_e = 0$, $A(x) = A$, $I(x) = I$ prowadzi do równania różniczkowego o postaci:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \left[S + \frac{3}{4} C(v, \alpha^2) \right] \frac{d^2 v}{dx^2} - \omega^2 m v(x) = 0. \quad (2.8)$$

Jak wykazano w pracy [7] rozwiązanie równania (2.8) dla jednoprzęsłowej belki ma postać:

$$v(x) = D_1 \operatorname{ch} \delta \frac{x}{l} + D_2 \operatorname{sh} \delta \frac{x}{l} + D_3 \cos \nu \frac{x}{l} + D_4 \sin \nu \frac{x}{l}, \quad (2.9)$$

gdzie D_1, D_2, D_3, D_4 to stałe, oraz:

$$\delta = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma^4}{4} + \beta^4} + \frac{\gamma^2}{2}}, \quad \nu = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma^4}{4} + \beta^4} - \frac{\gamma^2}{2}}, \quad (2.10)$$

$$\beta^4 = \omega^2 m l^4 / (EI), \quad \gamma^2 = l^2 \left(S + \frac{3}{4} C \right) / (EI).$$

Nieliniowość zadania wymaga ustalenia właściwej wartości stałej C . Można ją wyznaczyć stosując iteracyjny sposób postępowania podany w pracy [7].

Dla belki ciągłej stosuje się metodę elementów skończonych dla wyznaczenia nieliniowej postaci drgań $v(x)$. Belkę dzieli się na elementy w ten sposób aby w każdym typowym elemencie e masa jednostkowa belki $m(x) = m_e$, pole przekroju poprzecznego $A(x) = A_e$, oraz jego moment bezwładności $I(x) = I_e$ były stałe. Ponadto miejsca występowania podpór oraz mas skupionych winny pokrywać się z brzegami elementów. Związek (2.9) można teraz przyjąć jako rozwiązanie dla pojedynczego elementu skończonego, a stałe D_i potraktować jako uogólnione parametry węzłowe.

Macierzowa postać zależności (2.9) jest następująca:

$$v(x) = \mathbf{N}^t \mathbf{q}_e, \quad (2.9a)$$

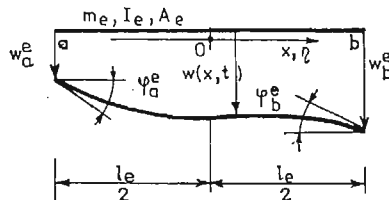
gdzie: $\mathbf{N}^t(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$, $\mathbf{q}_e = \{D_1^e, D_2^e, D_3^e, D_4^e\}$,

$$N_1 = \operatorname{ch} \delta_e \xi, \quad N_2 = \operatorname{sh} \delta_e \xi, \quad N_3 = \cos \nu_e \xi, \quad N_4 = \sin \nu_e \xi,$$

$$\xi = x/l_e, \quad \beta_e^4 = \omega^2 m_e l_e^4 / (EI_e), \quad \gamma_e^2 = l_e^2 \left(S + \frac{3}{4} C \right) / (EI_e),$$

$$\delta_e = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma_e^4}{4} + \beta_e^4} + \frac{\gamma_e^2}{2}}, \quad \nu_e = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma_e^4}{4} + \beta_e^4} - \frac{\gamma_e^2}{2}},$$

a ()^t oznacza transpozycję macierzy.



Rys. 2. Element belkowy

Kinematyczne warunki na brzegach elementu $v(-0,5l_e) = v_a^e$, $v(0,5l_e) = v_b^e$,

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=-0,5l_e} = \varphi_a^e, \quad \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0,5l_e} = \varphi_b^e \quad (\text{porównaj rys. 2}) \text{ pozwalają na napisanie równań:}$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{q}_e, \quad \mathbf{q}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{v}_e, \quad (2.11)$$

gdzie: $\mathbf{v}_e^t = \{v_a^e, \varphi_a^e, v_b^e, \varphi_b^e\}$,

$$\mathbf{A}_e = \frac{1}{2F_1 F_2} \begin{bmatrix} \nu_e \tilde{S} F_1, & -l_e \tilde{C} F_1, & \nu_e \tilde{S} F_1, & l_e \tilde{C} F_1 \\ \nu_e \tilde{C} F_2, & l_e \tilde{S} F_2, & -\nu_e \tilde{C} F_2, & l_e \tilde{S} F_2 \\ \delta_e \tilde{S} F_1, & l_e \tilde{C} F_1, & \delta_e \tilde{S} F_1, & -l_e \tilde{C} F_1 \\ -\delta_e \tilde{C} F_2, & -l_e \tilde{S} F_2, & \delta_e \tilde{C} F_2, & -l_e \tilde{S} F_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \delta_e \tilde{C} \tilde{c} - \nu_e \tilde{S} \tilde{s}, \quad F_2 = \nu_e \tilde{C} \tilde{s} + \delta_e \tilde{S} \tilde{c}, \quad \tilde{c} = \cos \nu_e / 2, \quad \tilde{s} = \sin \nu_e / 2, \\ \tilde{C} &= \text{ch } \delta_e / 2, \quad \tilde{S} = \text{sh } \delta_e / 2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Podstawiając (2.9a) i (2.11) do (2.7) możemy funkcjonal $W(v)$ zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$W(\mathbf{V}) = \frac{1}{4} \omega^2 \alpha^2 \mathbf{V}' \mathbf{M} \mathbf{V} - \frac{1}{4} \alpha^2 \mathbf{V}' \mathbf{K} \mathbf{V} - \frac{Slk}{2EA} C(\mathbf{V}, \alpha^2) - \frac{3lk}{16EA} C^2(\mathbf{V}, \alpha^2), \quad (2.7a)$$

gdzie:

$$C(\mathbf{V}, \alpha^2) = \frac{EA \alpha^2}{2lk} \sum_{e=1}^n \mathbf{v}_e^t \mathbf{B}_e \mathbf{v}_e = \frac{EA \alpha^2}{2lk} \mathbf{V}' \mathbf{B} \mathbf{V}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{V}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_e, \dots, \mathbf{v}'_n\},$$

$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, \mathbf{M}_1 oznacza diagonalną macierz utworzoną z mas skupionych. Globalne macierze \mathbf{M}_2 , \mathbf{K} , \mathbf{B} powstały w wyniku agregacji odpowiednio macierzy \mathbf{M}_e , \mathbf{K}_e , \mathbf{B}_e elementu. Postacie \mathbf{M}_e , \mathbf{K}_e , \mathbf{B}_e podano poniżej:

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{A}_e^t \mathbf{X}_e \mathbf{A}_e, \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{A}_e^t \mathbf{Y}_e \mathbf{A}_e, \quad \mathbf{B}_e = \mathbf{A}_e^t \mathbf{Z}_e \mathbf{A}_e,$$

$$\mathbf{X}_e = \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} m(x) \mathbf{N} \mathbf{N}' dx = ml \begin{bmatrix} \frac{1}{2\delta} F_3, & 0, & \frac{2}{\delta^2 + \nu^2} F_2, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2\delta} F_4, & 0, & \frac{2}{\delta^2 + \nu^2} F_1 \\ \frac{2}{\delta^2 + \nu^2} F_2, & 0, & \frac{1}{2\nu} F_5, & 0 \\ 0, & \frac{2}{\delta^2 + \nu^2} F_1, & 0, & \frac{1}{2\nu} F_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_e = \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} EI(x) \mathbf{N}' \mathbf{N}'' dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{\delta^3}{2} F_3, & 0, & -\frac{2\delta^2\nu^2}{\delta^2+\nu^2} F_2, & 0 \\ 0, & \frac{\delta^3}{2} F_4, & 0, & -\frac{2\delta^2\nu^2}{\delta^2+\nu^2} F_1 \\ -\frac{2\delta^2\nu^2}{\delta^2+\nu^2} F_2, & 0, & \frac{\nu^3}{2} F_5, & 0 \\ 0, & -\frac{2\delta^2\nu^2}{\delta^2+\nu^2} F_1, & 0, & \frac{\nu^3}{2} F_6 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{z}_e &= \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} \mathbf{N}'\mathbf{N}'' dx = 1/l \begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} F_4, & 0, & -\frac{2\delta\nu}{\delta^2+\nu^2} F_1, & 0 \\ 0, & \frac{\delta}{2} F_3, & 0, & \frac{2\delta\nu}{\delta^2+\nu^2} F_2 \\ -\frac{2\delta\nu}{\delta^2+\nu^2} F_1, & 0, & \frac{\nu}{2} F_6, & 0 \\ 0, & \frac{2\delta\nu}{\delta^2+\nu^2} F_2, & 0, & \frac{\nu}{2} F_5 \end{bmatrix}, \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$F_3 = \delta + 2\tilde{S}\tilde{C}, \quad F_4 = 2\tilde{S}\tilde{C} - \delta, \quad F_5 = \nu + 2\tilde{z}\tilde{c}, \quad F_6 = \nu - 2\tilde{z}\tilde{c}, \quad (') = \frac{d}{dx}.$$

We wzorach (2.14), dla uproszczenia zapisu, opuszczono indeks e przy l, m, I, δ, ν .

Warunek stacjonarności funkcjonału (2.7a) $\delta W(\mathbf{V}) = 0$ prowadzi do poniższego równania:

$$\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{V} - \mathbf{K}\mathbf{V} - \left[S + \frac{3}{4} C(\mathbf{V}, \alpha^2) \right] \mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Równanie (2.15) łącznie z odpowiednimi warunkami brzegowymi definiuje tzw. nieliniowy problem własny [6, 10, 16÷18]. Kwadrat częstości drgań własnych jest nieliniową wartością własną, a wektor \mathbf{V} nieliniowym wektorem własnym. Zauważmy, że macierze $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{B}$ oraz stała C są złożonymi funkcjami ω i \mathbf{V} .

Rozwiązując powyższy problem własny wyznaczmy ω i \mathbf{V} a tym samym rozwiążemy postawione w pracy zagadnienie. Rozwiązanie problemu liniowych drgań własnych otrzymamy po rozwiązaniu równania macierzowego (2.15) w którym formalnie podstawimy $\alpha \doteq 0$.

Metodę rozwiązania nieliniowego problemu własnego opisano w następnym punkcie pracy.

3. Rozwiązanie nieliniowego problemu własnego

Teoria nieliniowych problemów własnych jest do tej pory stosunkowo słabo opracowana. Tym niemniej opracowano już kilka efektywnych metod numerycznych za pomocą których można uzyskać rozwiązanie. Omówienie tych metod można znaleźć w pracach

[17, 18]. W pracy [19] podano nową metodę rozwiązania będącą rozszerzeniem metody wektorów iterowanych na przypadek nieliniowy.

Przystępując do opisu metody rozwiązania problemu własnego opisanego równaniem (2.15) zakładamy, że interesuje nas tylko jedno z rozwiązań które dla α zmierzającego do zera przechodzi w wybraną postać i częstość drgań belki traktowanej jako układ liniowy. Ponadto dążymy do numerycznego wyznaczenia krzywej szkieletowej i wobec tego zamierzamy określić ω i \mathbf{V} dla ciągu rosnących wartości parametru α .

Rozwiązanie uzyskuje się za pomocą opisanego poniżej procesu iteracyjnego. Zakładamy, że dla danej wartości α znane jest przybliżenie początkowe C , ω i \mathbf{V} oznaczone przez C_i , ω_i , \mathbf{V}_i (indeks i oznacza numer iteracji).

Wybór początkowego przybliżenia rozwiązania w zasadniczy sposób wpływa na zbieżność procesu iteracyjnego. Na podstawie doświadczeń numerycznych stwierdzono, że szybką zbieżność uzyskuje się przyjmując pierwsze przybliżenia w sposób następujący:

- dla $\alpha = 0$ (poszukiwanie rozwiązania liniowego problemu własnego) $C_1 = 0$, $\mathbf{V}_1 = 0$, $\omega_1 = a \neq 0$, gdzie a jest oszacowaniem poszukiwanej liniowej częstości drgań ω_1 ,
- dla $\alpha = \Delta\alpha$ (pierwszy przyrost amplitudy drgań) jako pierwsze przybliżenie postaci drgań przyjmuje się wybraną liniową postać, ω_1 i C_1 wyznacza się ze wzorów:

$$\omega_1^2 = \omega_i^2 + \frac{3EA}{8lk} \cdot \frac{(\mathbf{V}'\mathbf{B}\mathbf{V})^2}{\mathbf{V}'\mathbf{M}\mathbf{V}} \Delta\alpha^2 = \omega_i^2 + \eta \Delta\alpha^2, \quad (3.1)$$

$$C_1 = \frac{EA}{2lk} \mathbf{V}'\mathbf{B}\mathbf{V} \Delta\alpha^2, \quad (3.2)$$

gdzie elementy macierzy \mathbf{B} , \mathbf{M} określa się przyjmując $C = 0$, $\omega = \omega_i$,

- dla kolejnych przyrostów amplitudy drgań (np. $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\alpha$) jako pierwsze przybliżenie postaci drgań wybiera się postać wyznaczoną dla α_n a ω_1 i C_1 wyznacza się ze wzorów:

$$\omega_1^2 = \omega_i^2 + \eta \cdot \alpha_{n+1}^2, \quad (3.3)$$

$$C_1 = C(\alpha_n) \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right)^2. \quad (3.4)$$

Wykorzystując związki (2.12) i (2.14) można, znając C_i , ω_i , \mathbf{V}_i , określić macierze \mathbf{M}_e , \mathbf{K}_e , oraz \mathbf{B}_e a następnie wygenerować macierze globalne \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{B} . Operacji tych nie można wykonać tylko wtedy gdy ω_i pokrywa się z jedną z liniowych częstości drgań ω_{ei} elementu skończonego traktowanego jako izolowana belka obustronnie utwierdzona. W tym przypadku iloczyn występujący w mianowniku wzoru (2.12) $F_1 F_2 = 0$ gdyż jest on identyczny z lewą stroną równania charakterystycznego belki obustronnie utwierdzonej. Jeżeli więc $\omega_i \neq \omega_{ei}$ ale $\omega_i = \omega_{ei}$ to należy zmienić ω_i przyjmując np. $\omega_i = 0,98\omega_{ei}$. Jeżeli zaś $\omega_i = \omega_{ei}$ oraz $\omega_i = \omega$ to należy zmienić podział belki na elementy i w ten sposób doprowadzić do zmiany ω_{ei} .

Następnie podstawiamy macierze \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{B} oraz stałą C do równania (2.15) i rozwiązujemy otrzymany w ten sposób zlinearyzowany problem własny. Jako nowe przybliżenia ω_{i+1} , \mathbf{V}_{i+1} wybieramy to rozwiązanie zlinearyzowanego problemu własnego którego wektor własny jest bliski dotychczasowemu przybliżeniu postaci drgań \mathbf{V} .

Z kolei wykorzystując (2.13) wyznaczamy nowe przybliżenie stałej C . W zasadzie wymaga to zastosowania pomocniczego procesu iteracyjnego gdyż, dla zadanego ω_{i+1} , \mathbf{V}_{i+1} , elementy macierzy \mathbf{B}_e zależą od C poprzez parametr γ . Doświadczenia numeryczne pokazały jednak, że bez szkody dla zbieżności metody można zaniedbać to sprzężenie i określać elementy macierzy \mathbf{B}_e na podstawie dotychczasowego przybliżenia stałej C .

Mając nowe przybliżenia rozwiązania nieliniowego problemu własnego C_{i+1} , ω_{i+1} , \mathbf{V}_{i+1} przystępujemy do sprawdzenia warunków zbieżności iteracji. Mają one postać:

$$|C_{i+1} - C_i| \leq \varepsilon_1 C_{i+1}, |\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2| \leq \varepsilon_2 \omega_{i+1}^2, \|\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i\| \leq \varepsilon_3 \|\mathbf{V}_{i+1}\| \quad (3.5)$$

gdzie ε_1 , ε_2 , ε_3 oznaczają przyjęte dokładności obliczeń, a $\|\cdot\|$ normę euklidesową wektora. Jeżeli powyższe nierówności są spełnione to otrzymane ostatnio przybliżenie ω i \mathbf{V} traktujemy jako rozwiązanie nieliniowego problemu własnego. W przeciwnym wypadku powtarzamy opisanie powyżej postępowanie iteracyjne przyjmując C_{i+1} , ω_{i+1} , \mathbf{V}_{i+1} jako nowe przybliżenie poszukiwanego rozwiązania.

Podobny do opisanego powyżej sposób rozwiązania nieliniowego problemu własnego został podany w pracach [8 ÷ 11]. W niniejszej pracy został on rozszerzony na przypadek, w którym macierze \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{B} zależą od wartości własnej.

4. Wyniki obliczeń numerycznych

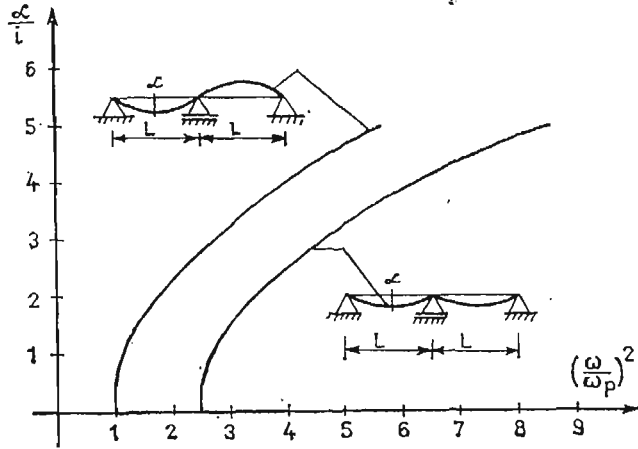
Posługując się opisaną powyżej metodą uzyskano rozwiązania szeregu przykładowych zadań. Wyniki obliczeń wykonanych za pomocą maszyny cyfrowej przedstawiono na rys. 3 ÷ 16. Uwagę skoncentrowano na analizie wpływu różnych parametrów belki na zmianę stosunku nieliniowej częstości drgań do częstości tej samej belki traktowanej jako układ geometrycznie liniowy.

W opisywanych poniżej przykładach każde przęsło belki dzielono na dwa elementy skończone. W wielu przypadkach można jednak bez szkody dla dokładności obliczeń przyjąć długość elementu skończonego równą długości przęsła belki, ponieważ przyjęte funkcje kształtu są identyczne z funkcjami analitycznymi opisującymi nieliniową postać drgań belki jednoprzęsłowej o stałym przekroju poprzecznym.

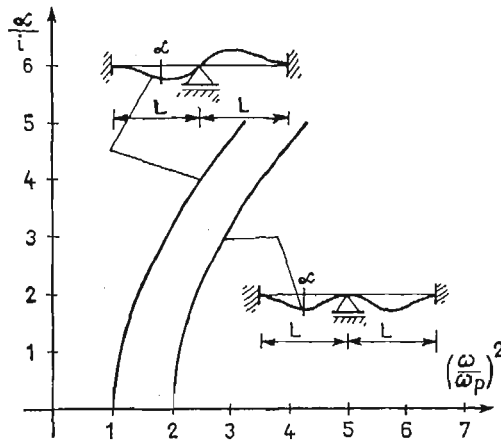
Obliczenia wykonano przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,001$ jako dopuszczalne względne błędy obliczeń. Ponadto we wszystkich przykładach dotyczących belek dwuprzęsłowych α oznacza amplitudę drgań punktu położonego w środku lewego przęsła, a ω_p podstawową liniową częstość drgań własnych rozpatrywanej belki. We wszystkich analizowanych przypadkach maksymalna liczba wykonywanych iteracji nie była większa od trzech przy czym bezwymiarowy przyrost amplitudy przyjęto równy $\Delta\alpha/i = 0,5$ (i oznacza promień bezwładności przekroju lewego przęsła). Dane podane w przykładzie pierwszym należy traktować jako dane bazowe, w kolejnych przykładach zmieniać się będą tylko te dane których zmiana jest niezbędna do przeprowadzenia opisywanej analizy. Poza przykładem pierwszym wszystkie pozostałe analizy dotyczą podstawowej częstości drgań.

4.1. Przykład 1. Przykład ten ilustruje dokładność rozwiązywania otrzymywanego za pomocą metody elementów skończonych. Wyznaczono krzywe szkieletowe dla dwóch pierwszych częstości drgań belki dwuprzęsłowej o równych rozpiętościach przęseł L ,

masach jednostkowych $m(x) = m$ i charakterystykach geometrycznych $I(x) = I$, $A(x) = A$. Ponadto przyjęto $k_0 = k_n = 0$, $S = 0$. Na rys. 3 pokazano krzywe szkieletowe dla belki spoczywającej na podporach przegubowych, a na rys. 4 podobne krzywe dla belki



Rys. 3. Krzywe szkieletowe belki swobodnie podpartej



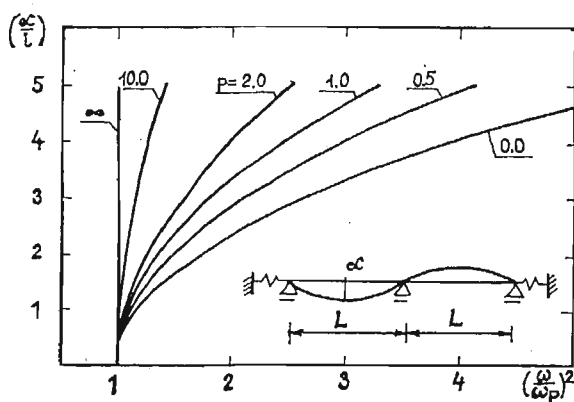
Rys. 4. Krzywe szkieletowe belki utwierdzonej na końcach

utwierdzonej na końcach. Dla dużych amplitud drgań brak swobody przesuwu końców belki w poziomie znacząco zwiększa częstotliwości drgań własnych. Ponieważ pierwsza postać drgań belki przegubowej jest antysymetryczna, więc każde jej przesło zachowuje się tak jak izolowana belka jednoprzęsłowa. Podstawowa częstotać drgań jednoprzęsłowej belki przegubowo podpartej wyznacza się ze wzoru [7]:

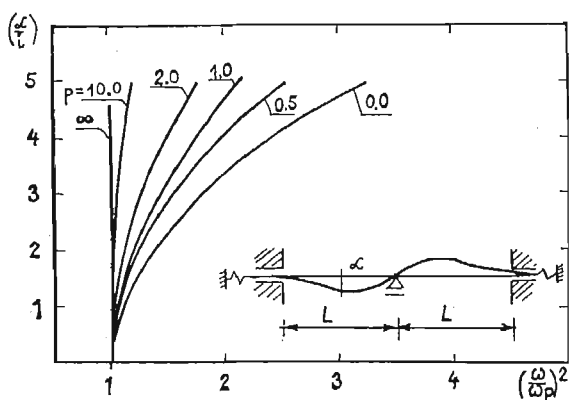
$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{\alpha}{i}\right)^2 \quad (4.1)$$

Wyniki pokazane na rys. 3 są identyczne z wynikami analitycznymi. W podobny sposób wykorzystując rezultaty obliczeń zamieszczone w [7], sprawdzono pozostałe krzywe szkieletowe uzyskując całkowitą zgodność wyników.

4.2. Przykład 2 — wpływ podatności poziomej skrajnych podpór. Dla omówionych powyżej belek dwuprzęsłowych wykonano obliczenia zakładając, że $k_0 = k_n \neq 0$. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 5,6 dla różnych stosunków $p = k_0 EA/L$ podatności skrajnej pod-



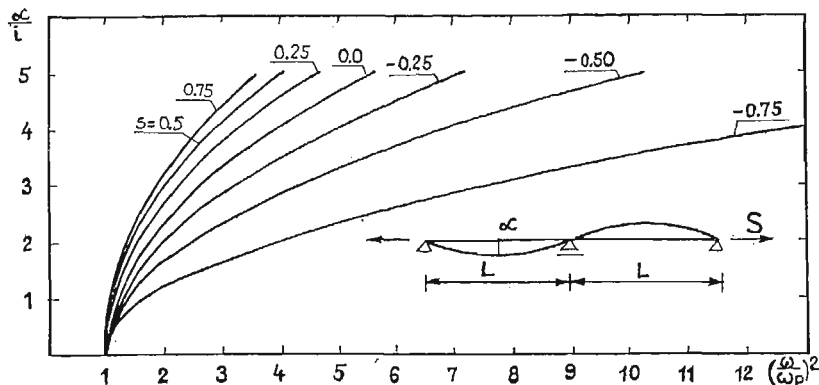
Rys. 5. Krzywe szkieletowe belki swobodnie podpartej o różnej podatności poziomej podpór skrajnych



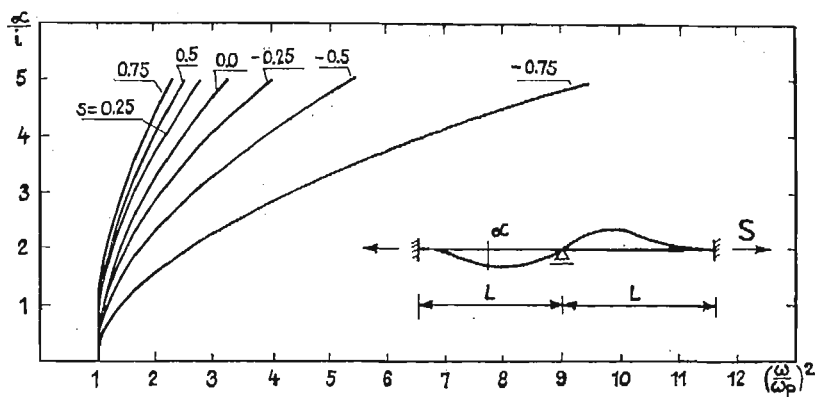
Rys. 6. Krzywe szkieletowe belki utwierdzonej o różnych podatnościach poziomych podpór skrajnych

pory do podatności jednego przęsła na rozciąganie. Znaczące efekty nieliniowe występują również w przypadku dużej podatności podpór — przykładowo dla belki przegubowej o $k_0 = L/EA$ i $\alpha/i = 5,0$ $\omega = 1,83 \omega_p$. Dla belek o swobodnych końcach mamy $k_0 = k_n = \infty$, co prowadzi do $N(t) = 0$, znikania członów nieliniowych w (2.15) i liniowego zachowania układu.

4.3. Przykład 3 — wpływ statycznej siły osiowej S . Na rys. 7 i 8 przedstawiono krzywe szkieletowe belek poddanych działaniu statycznej siły osiowej S . Parametr $s = S/S_{kr}$ określa stosunek siły osiowej do pierwszej siły krytycznej wyznaczonej według teorii



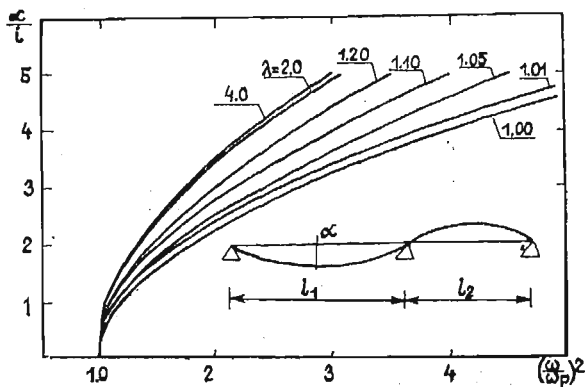
Rys. 7. Krzywe szkieletowe belki swobodnie podpartej poddanej działaniu siły osiowej



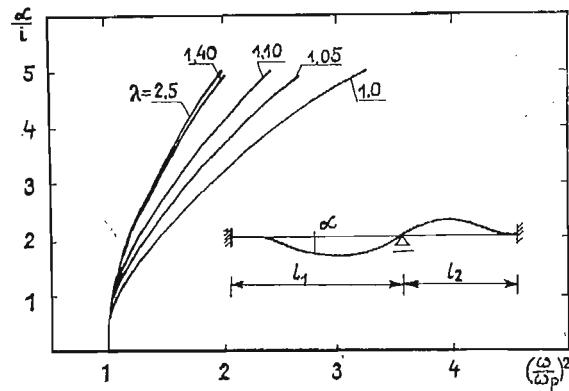
Rys. 8. Krzywe szkieletowe belki utwardzonej poddanej działaniu siły osiowej

Eulera. Osiowe siły rozciągające zmniejszają efekty geometrycznej nieliniowości w odróżnieniu od sił ściskających, które mogą w bardzo znacznym stopniu je zwiększyć.

4.4. Przykład 4 — wpływ różnic w rozpiętości przęseł. Analizowano belkę dwuprzęsłową o stałej długości równej $2L$, i różnych proporcjach długości przęseł $\lambda = l_1/l_2$. Wyniki



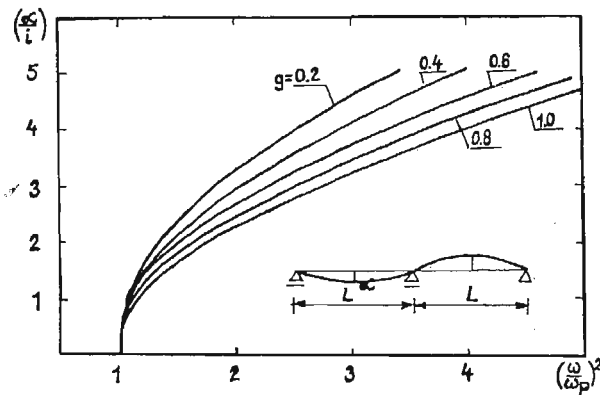
Rys. 9. Wpływ różnic w rozpiętości przęseł belki swobodnie podpartej na podstawową częstość drgań własnych



Rys. 10. Wpływ różnic w rozpiętości przęseł belki utwierdzonej na podstawową częstość drgań własnych

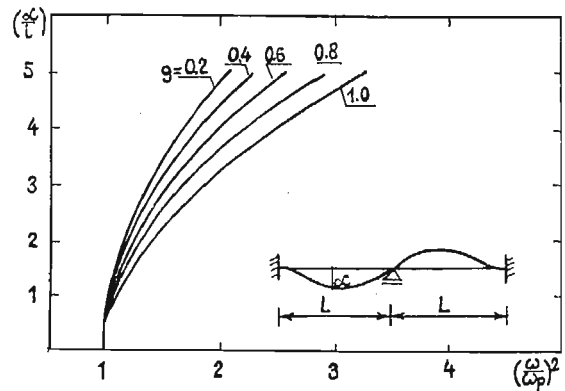
obliczeń przedstawiono na rys. 9 i 10. Występuje wyraźna redukcja efektów geometrycznej nieliniowości, w tym także dla przęseł o małych różnicach rozpiętości. Przykładowo dla belki przegubowej dla której $\lambda = 1,10$ i $\alpha/i = 5,0$ efekty nieliniowe są w przybliżeniu o połowę mniejsze niż dla belki o równych rozpiętościach przęseł ($\lambda = 1,0$).

4.5. Przykład 5 — wpływ różnic w szerokości przekroju belki. W przykładach 5 i 6 założono, że belka ma prostokątny przekrój poprzeczny o wymiarach b i h , różny w każdym przęśle.



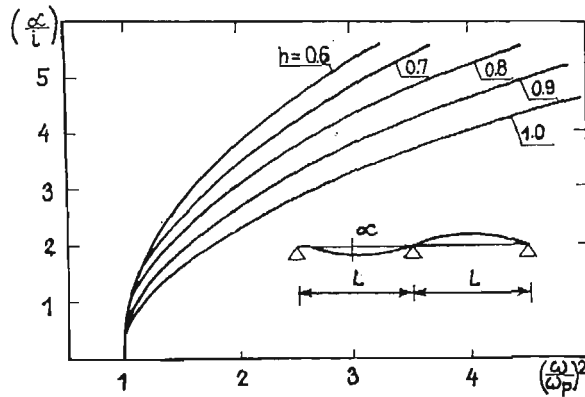
Rys. 11. Krzywe szkieletowe belki swobodnie podpartej w zależności od szerokości przekroju poprzecznego

Rys. 12. Krzywe szkieletowe belki utwierdzonej w zależności od szerokości przekroju poprzecznego

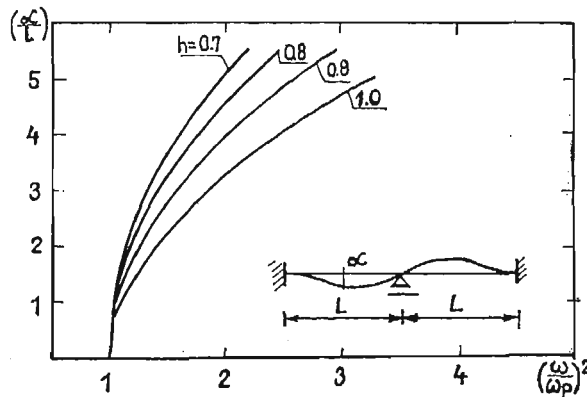


W omawianym przykładzie zmianie ulegają proporcje między szerokościami przekroju b_1/b_2 , polami przekroji A_1/A_2 i momentami bezwładności I_1/I_2 podczas gdy promienie bezwładności pozostają takie same $i_1 = i_2 = i$. Wyniki obliczeń dla różnych stosunków $g = b_1/b_2 = A_1/A_2 = I_1/I_2$ zaprezentowano na rys. 11 i 12. Dla obu sposobów podparcia wpływ nieliniowości zmniejsza się jeżeli belka ma w każdym przęśle inną szerokość.

4.6. Przykład 6 — wpływ różnic w wysokości przekroju belki. Jeżeli w każdym przęśle wysokość przekroju poprzecznego jest inna i wynosi odpowiednio h_1 i h_2 , to $A_1/A_2 = h_1/h_2$, $i_1/i_2 = h_1/h_2$, $I_1/I_2 = (h_1/h_2)^2$. Na rys. 13 i 14 pokazano krzywe szkieletowe wyznaczone



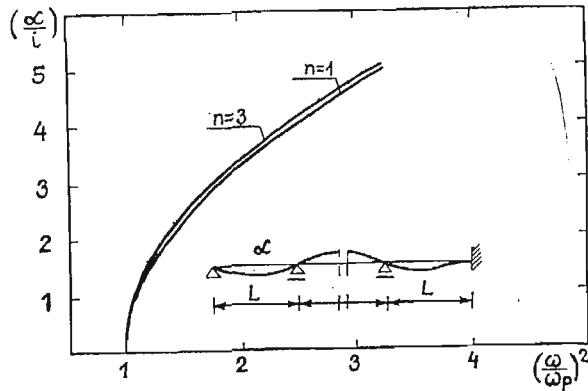
Rys. 13. Wpływ wysokości przekroju belki przegubowo podpartej na częstości drgań własnych



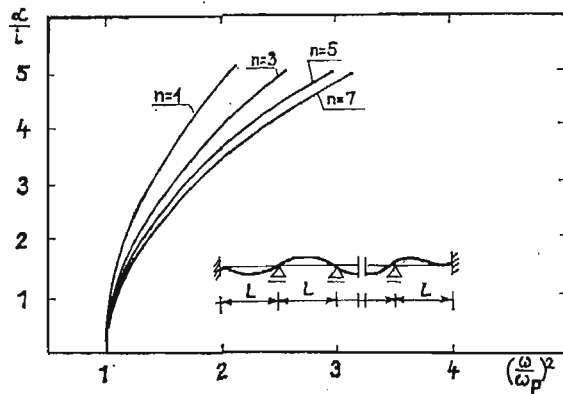
Rys. 14. Wpływ wysokości przekroju belki utwierdzonej na częstości drgań własnych

dla belek charakteryzujących się różnymi stosunkami $h = h_1/h_2$. Jako porównawczy przyjęto promień bezwładności i_1 . Również w tym przypadku obserwuje się zmniejszenie efektów nieliniowych w belkach o zróżnicowanych wysokościach przekrojów poprzecznych.

4.7. Przykład 7 — wpływ liczby przęseł. Dla belki przegubowo podpartej krzywa szkieletowa podstawowej częstości drgań nie zależy od liczby przęseł i jest opisana równaniem (4.1), co w pełni potwierdziły obliczenia numeryczne. Również krzywa szkieletowa belki



Rys. 15. Wpływ liczby przęseł na częstość drgań własnych dla belki jednostronnie utwierdzonej



Rys. 16. Wpływ liczby przęseł na częstości drgań własnych belki obustronnie utwierdzonej

utwierdzonej na jednym końcu w bardzo małym stopniu zależy od liczby przęseł. Na rys. 15 pokazano przykładowe krzywe szkieletowe dla belki jedno i trójprzęsłowej. Parametr α oznacza tutaj amplitudę drgań punktu położonego w środku rozpiętości pierwszego przęsła. Przeprowadzono również obliczenia dla belki utwierdzonej na obu końcach a wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 16. Zauważmy, że występuje wzrost efektów nieliniowych wraz ze wzrostem liczby przęseł n . Dla belek o nieparzystej liczbie przęseł α oznacza amplitudę drgań punktu leżącego na osi symetrii belki.

5. Uwagi końcowe

W pracy podano wariacyjne sformułowanie problemu nieliniowych drgań własnych belek ciągłych. Podano efektywną metodę wyznaczania nieliniowych częstości i postaci drgań, wyprowadzono dynamiczne macierze mas i sztywności elementu belkowego. Opisany proces iteracyjny jest szybkozbieżny, a wprowadzenie dynamicznej wersji metody elementów skończonych wydatnie zmniejsza wymiar zadania.

Przeprowadzono analizy wpływu różnych parametrów belek na nieliniowe częstości drgań własnych. Z analiz tych wynika, że nieregularności w budowie belki zmniejszają efekty geometrycznej nieliniowości. Podobny efekt wywołuje działanie statycznych sił rozciągających oraz zwiększanie podatności skrajnych podpór na przemieszczenia poziome. Z kolei działanie ściskających sił osiowych oraz zwiększanie liczby przęseł w belce obustronnie utwierdzonej zwiększa wpływ nieliniowości na częstości drgań własnych. We wszystkich jednak przypadkach częstości drgań rosną wraz ze wzrostem amplitudy drgań. Analizując inne, bardziej złożone przypadki można się spodziewać, że w zależności od doboru parametrów belki będziemy mieli do czynienia z układami wykazującymi w różnym stopniu efekty nieliniowe.

Literatura

1. S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *The effect of an axial force on the vibration of hinged bars*, J. Applied Mech., t. 17, 1950, pp. 35 - 36.
2. A. V. SRINIVASAM, *Large amplitude free oscillations of beams and plates*, AIAA J., t. 3, 1969, pp. 1951 - 1953.
3. I. S. RAJU, G. VENKATESWARA RAO, K. KANAKA RAJU, *Effect of longitudinal or inplane deformation and inertia on the large amplitude flexural vibrations of slender beams and thin plates*, J. of Sound and Vibration, 49, 1976, pp. 415 - 422.
4. D. A. EVENSEN, *Non-linear vibrations of beams with various boundary conditions*, AIAA J., 6, 1968, pp. 370 - 372.
5. J. A. BENNETT, J. G. EISLEY, *A multiple degree-of-freedom approach to nonlinear beam vibrations* AIAA J., 8, 1970, pp. 734 - 739.
6. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, „*Non-linear normal modes*” and the generalized Ritz method in the problems of vibrations of non-linear elastic continuous systems, Int. J. Non-Linear Mech., 18, 1983, pp. 149 - 165.
7. R. LEWANDOWSKI, *Application of the Ritz method to the analysis of non-linear free vibrations of beams*, J. of Sound and Vibration, 1987, t. 114, pp. 91 - 101.
8. C. MEI, *Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibration of beams and plates*, Comp. Struct., 3, 1973, pp. 163 - 174.
9. G. R. BHASHYAM, G. PRATHAP, *Galerkin finite element method for nonlinear beam vibrations*, J. of Sound and Vibration, 72, 1980, pp. 191 - 203.
10. B. S. SARMA, T. K. VARADAN, *Lagrange-type formulation for finite element analysis of non-linear beam vibrations*, J. of Sound and Vibration, 86, 1983, pp. 61 - 70.
11. G. V. RAO, K. K. RAJU, *Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of beams and orthotropic plates*, Compt. Struct., 6, 1976, pp. 169 - 172.
12. G. PRATHAP, *Nonlinear vibration of beams with variable axial restraint*, AIAA J., 16, 1978, pp. 622 - 624.
13. B. S. SARMA, T. K. VARDAN, *Ritz finite element approach to nonlinear vibration of beams*, Int. J. for Numer. Meth. in Engng, 20, 1984, pp. 353 - 357.
14. C. MEI, K. DECHA-UMPHAI, *A finite element method for non-linear forced vibrations of beams*, J. of Sound and Vibration, 102, 1985, pp. 369 - 380.
15. N. W. McLACHLAN, *Równania różniczkowe zwyczajne, nieliniowe w fizyce i w naukach technicznych*. PWN, Warszawa, 1964.
16. L. C. WELLFORD, G. M. DIB, *Post-buckling behaviour of structures using a finite element-nonlinear eigenvalue technique*, Int. J. Numer. Meth. Engng, 15, 1980, pp. 955 - 980.
17. R. LEWANDOWSKI, *Przegląd komputerowych metod rozwiązywania nieliniowych problemów własnych*, IV Konf. Nauk. Wydz. Bud. Łąd. Polit. Poznańskiej, t. 2, 1985, str. 175 - 182.

18. A. RUHE, *Algorithms for the nonlinear eigenvalue problem*, SIAM J. Numer. Anal., 10, 1973, pp. 674 - 689.
19. R. LEWANDOWSKI, *The application of the vector iteration methods to the solution of nonlinear eigenproblems*. Proc. Fifth National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, 23 - 29 September, Varna, Bulgaria, 1985, vol. 2, pp. 42 - 47,
20. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT, Warszawa, 1974.

Р е з ю м е

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

В настоящей работе представлено численные решение для нелинейных, собственных колебаний многопролетных балок, которых концы упруго оперты в горизонтальном направлении. Балки считаются непрерывными системами, кроме того в работе пренебрегаем горизонтальными силами инерции. Применено вариационный подход, метод конечных элементов, а также одну итерационную процедуру для определения нелинейных частот и форм колебаний. Приведены примеры расчётов.

S u m m a r y

THE ANALYSIS OF NON-LINEAR FREE VIBRATIONS OF MULTISPAN BEAMS

The paper presents a numerical solution for geometrically non-linear free vibrations of continuous beams with elastically supported ends in the horizontal direction. The horizontal and rotary inertia forces can be neglected and the beams are considered as the systems with distributed mass. The variational approach, finite element method, and the iterative procedure are used for determining the frequencies and non-linear modes of vibrations. Some numerical results are given.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 marca 1987 roku.

PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIE ELEMENTÓW ANALIZY MODALNEJ DO DYNAMICZNYCH BADAŃ OBRABIAREK

WŁADYSŁAW LISEWSKI
PAWEŁ GUTOWSKI

Politechnika Szczecińska

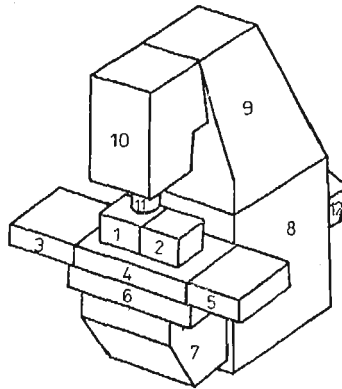
1. Wprowadzenie

Właściwości dynamiczne układów liniowych, a więc również i obrabiarek można opisać przez zbiór funkcji przejścia lub przez częstości własne i odpowiadające im postacie drgań [1]. W ostatnim okresie obserwuje się szczególne zainteresowanie tą drugą formą opisu [2]. Wynika to niewątpliwie z faktu, że obraz postaci drgań zawiera często bardziej czytelne informacje o właściwościach dynamicznych badanej obrabiarki. Z wizualnej analizy zachowania się obrabiarki lub poszczególnych jej zespołów przy częstościach rezonansowych doświadczony badacz może wyciągnąć wnioski potrzebne konstruktorowi [3]. Metoda ta winna być więc szczególnie przydatna, gdy celem badań jest uzyskanie informacji o tym jak należy przekonstruować obrabiarkę, by uzyskać lepsze jej właściwości ze względu na przyjęte kryterium. Intuicyjne dotychczas propozycje zmian konstrukcyjnych obrabiarki, w przypadku analizy modalnej mogą być wynikiem przeprowadzonych obliczeń modelowych (przynajmniej w sensie jakościowym) [4].

2. Zasady budowy modelu badawczego obrabiarki

Określenie postaci drgań obrabiarki w oparciu o badania doświadczalne wiąże się z koniecznością ustawienia na niej dużej liczby czujników. Dokładność odtworzenia drgań obrabiarki drgającej z określoną częstością wynika z liczby zastosowanych do pomiaru czujników oraz złożoności postaci drgań odpowiadającej badanej częstości. Przykładowo, do badania postaci drgań tokarki autorzy pracy [4] zastosowali 160 czujników. Nie zawsze ośrodki badawcze zajmujące się tą problematyką dysponują aparaturą umożliwiającą prowadzenie pomiarów tak dużej liczby sygnałów równocześnie.

Przedstawiona w tym opracowaniu analiza modalna jest pewną modyfikacją metod przedstawionych w literaturze [2, 4, 10]. Bazuje ona na założeniach metody sztywnych



Rys. 1. Model badawczy obrabiarki — podział na sztywne elementy skończone

elementów skończonych (SES) [5]. Badany układ mechaniczny traktuje się jak zespół sztywnych brył połączonych elementami sprężysto-tłumiącymi (EST). Podział badanego układu na bryły sztywne odbywa się na ogół w sposób naturalny tzn. w płaszczyznach styku poszczególnych jego elementów (np. płaszczyzny prowadnic, połączeń itp.) Możliwe są też podziały elementów jednolitych w sposób sztuczny. Przykładowy model badawczy obrabiarki przedstawiono na rys. 1. Poza podziałami naturalnymi, stół i stojak frezarki podzielono dodatkowo w sposób sztuczny-umowny. Dzięki tak przyjętemu modelowi obrabiarki w badaniach doświadczalnych uzyskuje się możliwość rozważania zarówno analitycznego jak i doświadczalnego modelu badanego obiektu we wspólnej przestrzeni metrycznej [6]. Wyłania się więc możliwość jednoznacznego porównania sygnałów z obu modeli co ma istotne znaczenie np. w procesie identyfikacji parametrów modelu analitycznego w oparciu o wyniki badań doświadczalnych. Wprowadzenie założeń metody SES pozwala ponadto zminimalizować liczbę czujników niezbędnych do jednoznacznego określenia ruchu elementów obrabiarki, oraz rozdzielić jego składowe translacyjne i rotacyjne. W przypadku badania tak złożonych obiektów jak obrabiarka, problem ustalenia najmniejszej niezbędnej liczby czujników jest ważny ze względu na czas badań, oraz ilość zdobywanych i dalej przetwarzanych informacji. Możliwość rozdzielenia translacyjnych i rotacyjnych postaci drgań ułatwia wnioskowanie konstruktora o przyczynach występowania w obrabiarkach niekorzystnych zjawisk z dynamicznego punktu widzenia. Lepsza w związku z tym powinna być efektywność wprowadzanych przez niego zmian konstrukcyjnych.

3. Pomiar parametrów przestrzennego ruchu bryły sztywnej

Każda bryła sztywna w przestrzeni R^3 może mieć sześć stopni swobody. Jej ruch w dowolnym nieruchomym układzie współrzędnych opisują trzy translacyjne i trzy rotacyjne współrzędne uogólnione. Przedstawić je można w postaci wektora (macierzy kolumnowej):

$$q_i(t) = \text{col} \{q_{i\alpha}(t)\}; \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6, \quad (1)$$

gdzie: $q_{i\alpha}(t)$ — współrzędna uogólniona sztywnego elementu oznaczonego numerem i ,

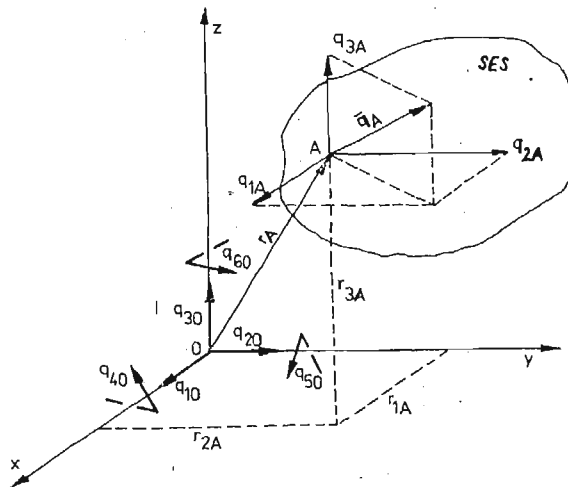
Pomiar ruchu dowolnego elementu obrabiarki traktowanego jak sztywny możliwy jest przy użyciu czujników przyspieszeń (sejsmicznych) odpowiednio na nim rozmieszczonych. Każdy czujnik zamocowany na bryle sztywnej wykonującej drgania mierzy jej przyspieszenie w punkcie pokrywającym się ze środkiem ciężkości masy sejsmicznej czujnika. Równanie opisujące to przyspieszenie ma postać:

$$p_A(t) = p_0(t) + \varepsilon(t) \times r_A + \omega(t) \times [\omega(t) \times r_A], \quad (2)$$

gdzie:

- $p_A(t)$ — wektor przyspieszenia punktu A ,
- $p_0(t)$ — wektor przyspieszenia punktu O (początku układu współrzędnych),
- $\varepsilon(t)$ — wektor przyspieszenia kąтового,
- $\omega(t)$ — wektor prędkości kątowej,
- r_A — wektor-promień łączący punkt O z punktem A .

Jak wynika z pracy [7] przy kątach obrotu ciała nie większych od 1° przyspieszenie dośrodkowe stanowi mniej niż 1% stycznego i może być pominięte. Ponadto w przypadku małych drgań określenie ruchu bryły sztywnej możliwe jest zarówno przez pomiar przyspieszeń, prędkości jak i przemieszczeń [4] tzn., że proces całkowania można realizować zarówno w odniesieniu do bezpośrednio mierzonych sygnałów jak i wyznaczonych z równania (2) przyspieszeń. Wobec powyższego w prezentowanej pracy dalsze rozważania prowadzone będą na przemieszczeniach.



Rys. 2. Składowe przemieszczeń SES w układzie współrzędnych

Przemieszczenie punktu A bryły sztywnej (rys. 2) mierzone przez trzy czujniki ustawione ortogonalnie do siebie i równoległe do osi przyjętego układu współrzędnych opisuje równanie macierzowe [5]:

$$q_A = R \cdot q_0, \quad (3)$$

gdzie:

q_A — macierz kolumnowa zawierająca współrzędne przemieszczenia punktu A bryły sztywnej,

$q_A = \text{col}\{q_{1A}(t), q_{2A}(t), q_{3A}(t)\}$,

R — macierz transformacji współrzędnych uogólnionych ruchu bryły sztywnej z punktu O do punktu A ,

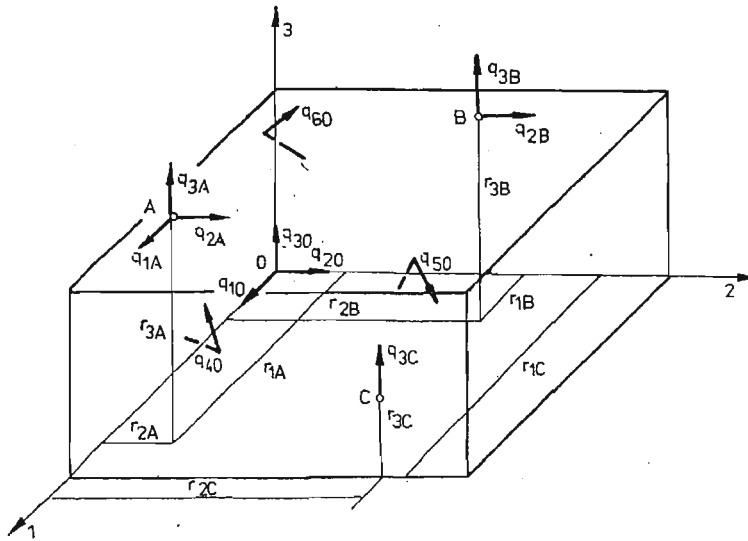
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_{3A} & -r_{2A} \\ 0 & 1 & 0 & -r_{3A} & 0 & r_{1A} \\ 0 & 0 & 1 & r_{2A} & -r_{1A} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

r_{iA} — współrzędne wektora określającego położenie punktu A względem O ,

q_0 — współrzędne uogólnione ruchu bryły sztywnej określone w punkcie O ,

$q_0 = \text{col}\{q_{10}(t), \dots, q_{60}(t)\}$.

Aby na podstawie pomiarów wyznaczyć przemieszczenia uogólnione q_0 należy także w innych punktach bryły sztywnej umieścić czujniki. Łączna ich liczba nie może być mniejsza od sześciu, a liczba punktów w których je ustawiono — nie mniejsza od trzech. Każdy następny czujnik to dodatkowy wiersz w macierzy R . Przy trzech punktach pomiarowych możliwe są dwie wersje rozmieszczenia czujników — w układzie 2-2-2 lub 3-2-1.



Rys. 3. Ustawienie czujników pomiarowych w układzie 3-2-1

W przypadku układu 3-2-1 pokazanego na rys. 3 istnieje możliwość wyznaczenia współrzędnych uogólnionych q_0 gdy prawdziwa jest koniunkcja:

$$\sim \bigvee_{i,j \in \{1,2,3\}} : (r_{1A} \neq r_{1B}) \wedge [(r_{jA} \neq r_{jB}) \vee (r_{jA} \neq r_{jC})] \quad i \neq j. \quad (5)$$

W ogólnym przypadku musi być spełniony warunek:

$$\sim \bigvee_L : L \supset \{A, B, C\}, \quad (6)$$

gdzie:

- i, j — numery współrzędnych układu odniesienia,
 $\{A, B, C\}$ — zbiór punktów w których zamocowano czujniki,
 L — dowolna prosta w przestrzeni R^3 .

Równanie (6) jest matematycznym zapisem powszechnie znanego warunku by punkty mocowania czujników nie leżały na jednej prostej.

Wymagania dotyczące punktów mocowania czujników podczas pomiarów (zależność 5) ograniczające się do nierówności określonych współrzędnych są bardzo łatwe do spełnienia. Celowe jest jednak możliwie wyraźne różnicowanie tych współrzędnych, by rejestrowane przebiegi przemieszczeń także wyraźnie różniły się między sobą. W równaniu (3) obowiązuje założenie, że układy współrzędnych związane z punktami A i O są do siebie równoległe. W przypadku nie spełnienia tego założenia, równanie to będzie miało postać:

$$q = \Theta \cdot R^* \cdot q_0, \quad (7)$$

gdzie:

- q — macierz kolumnowa zawierająca przemieszczenia mierzone przez wszystkie czujniki zamocowane na drgającej bryle sztywnej,
 R^* — macierz transformacji o wymiarach 6×6 uwzględniająca współrzędne mocowania wszystkich sześciu czujników na bryle sztywnej (zbudowana analogicznie do R — wzór (4)),
 Θ — macierz kosinusów kierunkowych.

Dla czujników w układzie 3-2-1 (rys. 3) ma ona postać:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{A11} & \cos \varphi_{A12} & \cos \varphi_{A13} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_{A21} & \cos \varphi_{A22} & \cos \varphi_{A23} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_{A31} & \cos \varphi_{A32} & \cos \varphi_{A33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_{B12} & \cos \varphi_{B13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_{B22} & \cos \varphi_{B23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_{C33} \end{bmatrix},$$

φ_{Aij} — kąt zawarty między osią i -tego czujnika w punkcie A oraz j -tą osią globalnego układu współrzędnych.

Przy trzech punktach mocowania czujników, wyjściowa postać macierzy Θ jest następująca:

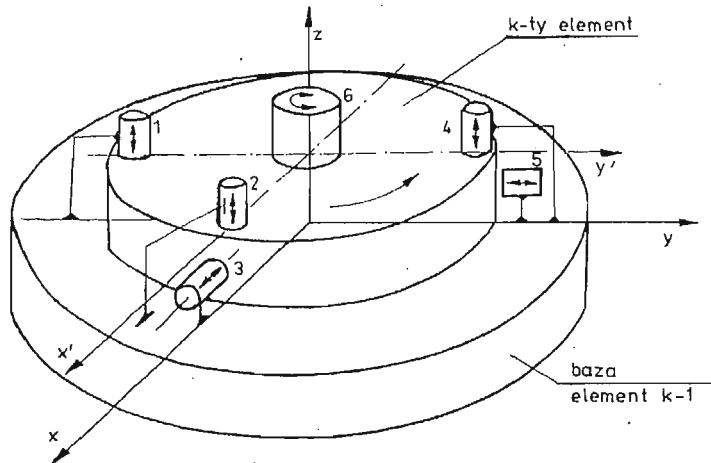
$$\Theta' = \begin{bmatrix} \Theta_A & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_B & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_C \end{bmatrix},$$

gdzie: A, B, C — nazwy punktów mocowania czujników,

$$\Theta_A = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{A11} & \cos \varphi_{A12} & \cos \varphi_{A13} \\ \cos \varphi_{A21} & \cos \varphi_{A22} & \cos \varphi_{A23} \\ \cos \varphi_{A31} & \cos \varphi_{A32} & \cos \varphi_{A33} \end{bmatrix}.$$

Macierz Θ' ma wymiary 9×9 i poszukiwaną macierz Θ otrzymuje się z niej przez skreślenie wierszy oraz kolumn opisujących położenie „brakujących” czujników w poszczegól-

nych punktach. Przykładowo wyżej zapisana macierz kosinusów kierunkowych dla układów czujników z rys. 3 powstała po skreśleniu z macierzy Θ' wierszy, oraz kolumn opisujących położenie czujników q_{1B} w punkcie B , oraz q_{1C} i q_{2C} w punkcie C . Takich czujników po prostu nie ma. Jeśli któryś z elementów badanego urządzenia wiruje (np. narzędzie w modelu, z rys. 1), pomiar składowych jego ruchu przy użyciu czujników sejsmicznych nie jest możliwy. Jednakże z powodzeniem zadanie to można rozwiązać używając pięciu czujników indukcyjnych bezdotykowych, oraz czujnika drgań skrętnych. Sposób



Rys. 4. Pomiar składowych ruchu wirującej tarczy; 1-5 — czujniki bezdotykowe, 6 — czujnik drgań skrętnych (sejsmiczny)

pomiaru pokazano na rys. 4. Macierz R^* dla takiego układu pomiarowego przyjmuje postać:

$$R^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & r_{21} & -r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_{22} & -r_{12} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & r_{33} & -r_{23} \\ 0 & 0 & 1 & r_{24} & -r_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -r_{35} & 0 & r_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie: r_{ij} — i -ta współrzędna odległości j -tego czujnika od początku przyjętego układu współrzędnych.

Czujniki indukcyjne mierzą ruch w stosunku do bazy, na której zostały zamocowane. Jeśli bazą tą jest sąsiedni element badanego urządzenia, którego ruch mierzony jest czujnikami sejsmicznymi, wówczas wykorzystując możliwość transformacji współrzędnych uogólnionych, ruch elementu wirującego w układzie bezwzględny wyznaczyć można z zależności (rys. 4):

$$q_{0K} = q'_{0K} + \Theta \cdot R_K \cdot q_{0K-1}, \quad (9)$$

gdzie:

q_{0K} — macierz zawierająca składowe ruchu wirującej bryły sztywnej określona w układzie bezwzględny,

- q'_{0k} — macierz zawierająca składowe ruchu wirującej bryły sztywnej określona względem elementu bazowego na którym zamocowano czujniki indukcyjne,
 R_k — macierz transformacji przemieszczeń bryły ($k-1$) będącej bazą, do układu współrzędnych bryły wirującej (k),
 q_{0k-1} — macierz zawierająca składowe ruchu bryły ($k-1$) będącej bazą do mocowania czujników indukcyjnych.

Podczas badania obiektów składających się z n elementów, które można traktować jak sztywne, układ pomiarowy powinien składać się z $6n$ czujników mierzących sygnały wyjściowe. W przypadku braku zestawu badawczego o dużej liczbie torów pomiarowych, przy założeniu o stacjonarności obiektu, badania można prowadzić etapowo przenosząc czujniki na kolejne bryły. Wówczas wystarczy 6 czujników mierzących sygnały wyjściowe oraz jeden do pomiaru sygnału wejściowego. W badaniach takich operować należy nie sygnałami (przemieszczeniami) lecz zespolonymi funkcjami przejścia. Odniesienie przemieszczeń zmierzonych w wybranych punktach na obrabiarence do sygnału wymuszenia rozwiązuje problem przesunięć fazowych między sygnałami mierzonymi w kolejnych etapach badań. Równanie (7) w tej sytuacji przyjmuje postać:

$$W = \Theta \cdot R^* \cdot W_0, \quad (10)$$

gdzie:

$$W_n = \frac{q_n(j\omega)}{f(j\omega)}; \quad W_{0i} = \frac{q_{0i}(j\omega)}{f(j\omega)}; \quad n, i = 1, 2, \dots, 6, \quad (11)$$

n — numer czujnika,

i — numer składowej zespolonej funkcji przejścia,

$f(j\omega)$ — siła wymuszająca drgania obrabiarki.

Po wyznaczeniu funkcji przejścia W w oparciu o pomiary dla każdej bryły sztywnej rozwiązanie równania (10) ze względu na W_0 nie stanowi problemu. W ten sposób otrzymuje się pełną informację o ruchu każdego elementu badanego urządzenia (np. obrabiarki). Informacja ta jest opisana w układzie współrzędnych związanym z każdą mierzoną bryłą.

Tak wyznaczone funkcje przejścia mogą być aproksymowane wyrażeniem [1]:

$$W_i(j\omega) = -\frac{1}{m_i \omega^2} + \sum_{k=1}^n \frac{F_{ik} + j\omega G_{ik}}{-\omega^2 + S_k + j\omega R_k} + x_i + jy_i, \quad (12)$$

gdzie:

m_i — masa rezydualna,

F_{ik}, G_{ik}, S_i, R_i — parametry wielomianu aproksymującego,

$x_i + jy_i$ — podatność rezydualna,

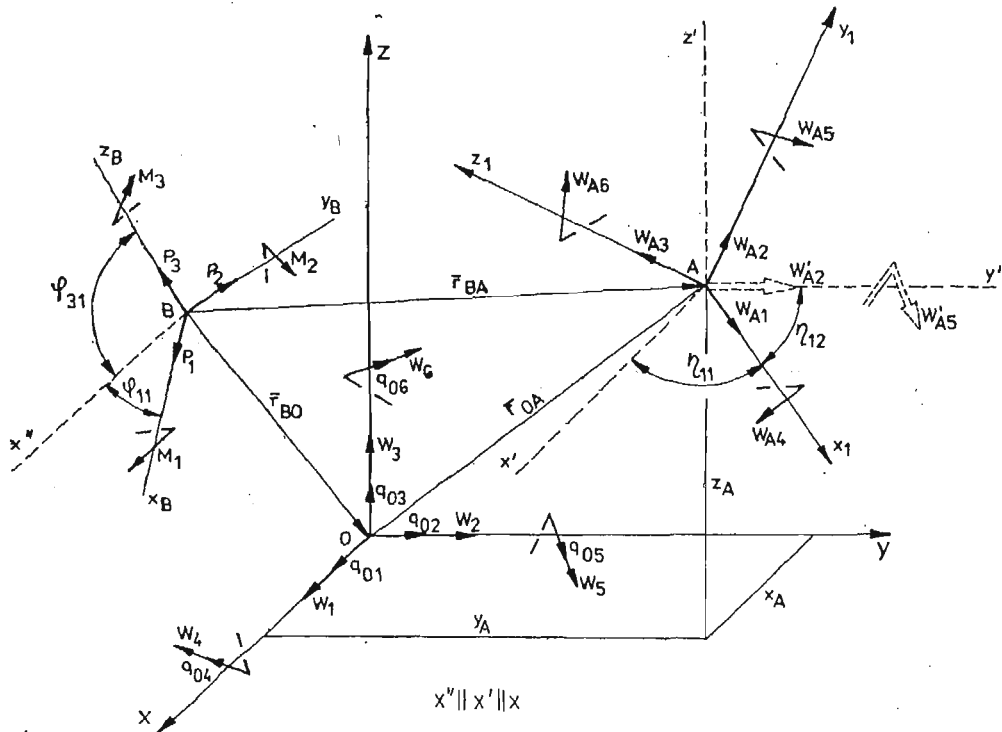
n — liczba rezonansów na charakterystyce w rozpatrywanym przedziale częstotliwości

Taka postać charakterystyk wymaga znacznie mniejszych obszarów pamięci komputera niezbędnej do zmagazynowania wyników badań, a jednocześnie stanowi wygodną formę wyjściową do estymacji parametrów modelu badanego obiektu [1].

4. Transformacja charakterystyk częstotliwościowych

Czytelną informację o właściwościach badanej obrabiarki zawierają graficzne obrazy postaci drgań odpowiadających poszczególnym częstościom rezonansowym. W przypadku prezentowanej metody badawczej dane niezbędne do uzyskania przejrzystego obrazu postaci drgań otrzymuje się w wyniku transformacji charakterystyk W_0 do każdego naroża bryły której ruch one opisują. Problem transformacji charakterystyk do dowolnego punktu badanego obiektu pojawia się także w innych sytuacjach zależnie od celu badań. Sposób realizacji tego zadania zarówno dla funkcji przejścia w postaci tablicy jak i w formie aproksymowanej wzorem (12) jest przedmiotem rozważań niniejszego rozdziału pracy.

Ogólny przypadek transformacji charakterystyk występuje wtedy, gdy rozpatrywane układy współrzędnych są przesunięte i obrócone względem siebie. W tym przypadku transformację przeprowadza się niejako dwuetapowo, najpierw do układu $Ax'y'z'$ przesuniętego równoległe o wektor r_{OA} względem układu wyjściowego $Oxyz$ (rys. 5), a następnie dokonując obrotu układu $Ax'y'z'$ do $Ax_1y_1z_1$.



Rys. 5. Transformacja charakterystyk częstotliwościowych W z układu $Oxyz$ do układu $Ax_1y_1z_1$

W układzie $Oxyz$ charakterystyki dynamiczne W_i określone są zależnością (11).

Dla układów przestrzennych siły uogólnione f_i tworzą wektor f o sześciu składowych, z których trzy pierwsze są siłami P działającymi wzdłuż osi układu, zaś pozostałe trzy momentami M względem tych osi.

Redukcja siły f do układu $Ax'y'z'$ określona jest zależnością [5]:

$$f_A = T_f \cdot \Theta \cdot f, \quad (13)$$

gdzie: T_f — macierz współczynników redukcji sił,

zaś transformacja przemieszczeń z punktu 0 układu $Oxyz$ do punktu A układu $Ax'y'z'$ wyraża się zależnością:

$$q_A = T_u \cdot q_0, \quad (14)$$

gdzie:

q_0 — macierz przemieszczeń uogólnionych w punkcie 0,

T_u — macierz transformacji przemieszczeń.

Charakterystykę dynamiczną w punkcie A układu $Ox'y'z'$ || do $Oxyz$ określić więc można zależnością:

$$W'_{Ai} = \frac{q_{Ai}}{f_{Ai}}, \quad (15)$$

zaś związek między charakterystykami W i W'_A równaniem:

$$W'_A = T \cdot W, \quad (16)$$

gdzie T jest poszukiwaną macierzą redukcji do układów równoległych.

Elementy T_{ij} macierzy T wyznaczyć można z równania (16) po jego rozpisaniu w postaci jawnej i podstawieniu wartości W_i i W'_{Ai} wyznaczonych z zależności geometrycznych określonych na podstawie rys. 4. W rezultacie otrzymuje się:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & T_{15} & T_{16} \\ 0 & 1 & 0 & T_{24} & 0 & T_{26} \\ 0 & 0 & 1 & T_{34} & T_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{66} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

gdzie:

$$T_{ik} = \frac{C_k}{C_i} \quad \text{dla} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \\ k = 4, 5, 6, \end{matrix} \quad (18)$$

i

$$T_{kk} = \frac{C_k^*}{C_k} \quad \text{dla} \quad k = 4, 5, 6, \quad (19)$$

oraz:

$$C_i = \sum_{j=1}^n P_j \cos \varphi_{ij}, \quad (20)$$

$$C_K = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ X_{BA} & Y_{BA} & Z_{BA} \\ \cos \varphi_{n1} & \cos \varphi_{n2} & \cos \varphi_{n3} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^3 M_i \cos \varphi_{ni}, \quad n = k-3 \quad (21)$$

$$C_K^* = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ X_{B0} & Y_{B0} & Z_{B0} \\ \cos \varphi_{n1} & \cos \varphi_{n2} & \cos \varphi_{n3} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^3 M_i \cos \varphi_{ni}. \quad (22)$$

W drugim etapie dokonuje się transformacji charakterystyk W'_A do układu $Ax_1y_1z_1$ obróconego względem $Ax'y'z'$ o kąt określony macierzą kosinusów kierunkowych η' .

$$\eta' = \begin{bmatrix} \cos\eta_{11} & \cos\eta_{12} & \cos\eta_{13} \\ \cos\eta_{21} & \cos\eta_{22} & \cos\eta_{23} \\ \cos\eta_{31} & \cos\eta_{32} & \cos\eta_{33} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

W rezultacie otrzymuje się ogólny wzór na transformację charakterystyk W z układu $Oxyz$ do przesuniętego równolegle i obróconego względem niego układu $Ax_1y_1z_1$. Wzór ten ma postać:

$$W_A = \eta \cdot T \cdot W, \quad (24)$$

gdzie:

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \eta' \end{bmatrix}, \quad (25)$$

zaś macierz T określona jest równaniem (17).

4.1. Transformacja charakterystyk aproksymowanych do dowolnego punktu bryły sztywnej. Jak wykazano w pracy [1], charakterystyki dynamiczne wyznaczone doświadczalnie w określonym przedziale częstotliwości (ω_A, ω_B) w punkcie t dowolnego układu posiadającego n sprzężonych stopni swobody można aproksymować wielomianem o postaci opisanej zależnością (12).

Transformacja charakterystyk dynamicznych opisanych wielomianem aproksymacyjnym nie zmienia postaci wielomianu, lecz powoduje zmianę współczynników aproksymacji, przy czym zmianie ulegają parametry m_t, x_t, y_t, F_{tk} i G_{tk} , gdyż są one funkcją położenia punktu, w którym zdejmowano charakterystykę, natomiast parametry S_k i R_k nie ulegają zmianie, gdyż charakteryzują one własności układu niezależnie od miejsca zdejmowania charakterystyki.

Transformację charakterystyk aproksymowanych przeprowadza się korzystając z zależności (24), która w tym przypadku przyjmie postać:

$$W_r = T_r \cdot W, \quad (26)$$

gdzie:

$T_r = \eta \cdot T$ — macierz redukcji,

W — macierz charakterystyk opisanych równaniem (12),

W_r — macierz charakterystyk zredukowanych z układu $Oxyz$ do układu $Ax_1y_1z_1$, natomiast parametry $m'_t, x'_t, y'_t, F'_{tk}, G'_{tk}$ wielomianu W przetransformowanego z układu $Oxyz$ do układu $Ax_1y_1z_1$, znajduje się z układu równań powstających po zapisaniu równania macierzowego (26) w formie rozwiniętej i po porównaniu w otrzymanych równaniach składników o tej samej postaci.

Równanie (26) w formie rozwiniętej ma postać:

$$\begin{bmatrix} W'_1 \\ \dots \\ \dots \\ W'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & \dots & T'_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T'_{61} & T'_{62} & \dots & T'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ \dots \\ \dots \\ W_6 \end{bmatrix}, \quad (26a)$$

przy czym dla $i = 4, 5, 6$ i $j = 1, 2, 3$ $T'_{ij} = 0$.

Pierwsze z tych równań to:

$$W_1^r = T_{11}^r W_1 + T_{12}^r W_2 + T_{13}^r W_3 + T_{14}^r W_4 + T_{15}^r W_5 + T_{16}^r W_6. \quad (27)$$

Podstawiając zamiast W_j i W_j^r wyrażenie (12) otrzymuje się:

$$-\frac{1}{m_1^r \omega^2} + \sum_{k=1}^n \frac{F_{1k}^r + j\omega G_{1k}^r}{-\omega^2 + S_k + j\omega R_k} + x_{1o}^r + jy_{1o}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r \left[-\frac{1}{m_j \omega^2} + \sum_{k=1}^n \frac{F_{jk} + j\omega G_{jk}}{-\omega^2 + S_k + j\omega R_k} + x_{jo} + jy_{jo} \right]. \quad (28)$$

W wyniku porównania w równaniu (28) odpowiednich składników otrzymuje się:

$$m_1^r = \frac{1}{\sum_{j=1}^6 \frac{T_{1j}^r}{m_j}}, \quad (29)$$

$$x_{1o}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r x_{jo}, \quad (30)$$

$$y_{1o}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r y_{jo}, \quad (31)$$

$$F_{1k}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r F_{jk} \quad k = 1 \dots n, \quad (32)$$

$$G_{1k}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r G_{jk} \quad k = 1 \dots n. \quad (33)$$

W sposób analogiczny z dalszych 5-ciu równań wynikających z równania (26a) wyznacza się pozostałe parametry charakterystyk przetransformowanych. Parametry te wraz z parametrami opisanymi równaniami (29÷33) można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{array}{ll} \text{a) dla } i = 1, 2, 3; & \text{b) dla } i = 4, 5, 6, \\ k = 1, 2, \dots, n & k = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

$$m_i^r = \left(\sum_{j=1}^6 \frac{T_{ij}^r}{m_j} \right)^{-1}, \quad m_i^r = \left(\sum_{j=4}^6 \frac{T_{ij}^r}{m_j} \right)^{-1}, \quad (34)$$

$$x_i^r = \sum_{j=1}^6 T_{ij}^r x_j, \quad x_i^r = \sum_{j=4}^6 T_{ij}^r x_j, \quad (35)$$

$$y_i^r = \sum_{j=1}^6 T_{ij}^r y_j, \quad y_i^r = \sum_{j=4}^6 T_{ij}^r y_j, \quad (36)$$

$$F_{ik}^r = \sum_{j=1}^6 T_{ij}^r F_{jk}, \quad F_{ik}^r = \sum_{j=4}^6 T_{ij}^r F_{jk}, \quad (37)$$

$$G_{ik}^r = \sum_{j=1}^6 T_{ij}^r G_{jk}, \quad G_{ik}^s = \sum_{j=4}^6 T_{ij}^s G_{jk}. \quad (38)$$

Z przedstawionych rozważań wynika, że transformacja charakterystyk aproksymowanych jest bardzo prosta. Można więc bezpośrednio po zdjęciu charakterystyk dynamicznych badanego obiektu przeprowadzić ich aproksymację, a wszystkie dalsze operacje związane z przetwarzaniem tych charakterystyk prowadzić nie na tablicach lecz na wielomianach.

5. Wyniki badań doświadczalnych

Wykorzystując metodę zaprezentowaną w pracy [1], oraz powyższe rozważania przeprowadzono badania doświadczalne kilku obrabiarek. Podczas badań starano się symulować określone warunki pracy obrabiarki. W związku z tym między narzędziem i przedmiotem obrabianym instalowano siłownik hydrauliczny lub sprężynowy. Kierunek oraz wartość siły wywołanej w ten sposób odpowiadały stałej składowej siły skrawania symulowanego procesu obróbki. Składową zmienną generowano przy użyciu impulsatora. Parametry impulsu dobierano stosownie do własności badanej obrabiarki, oraz zakresu częstotliwości, w którym należało wyznaczyć charakterystyki [11]. Przykładowe charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone podczas badań jednej z obrabiarek przedstawiono na rys. 6. Są to charakterystyki otrzymane w wyniku pomiaru sygnałów odpowiedzi przez sześć czujników ustawionych w układzie 3-2-1 (rys. 3). Obok każdego z wykresów zamieszczono w tablicy wartości parametrów opisujących charakterystyki aproksymujące.

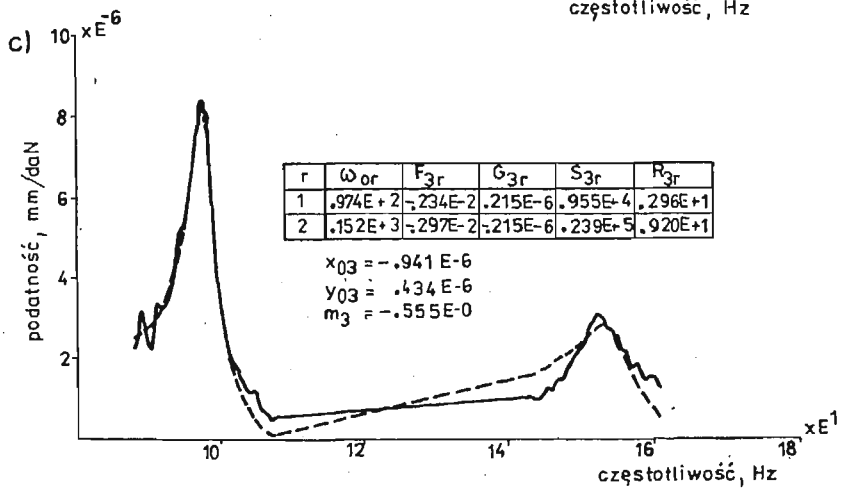
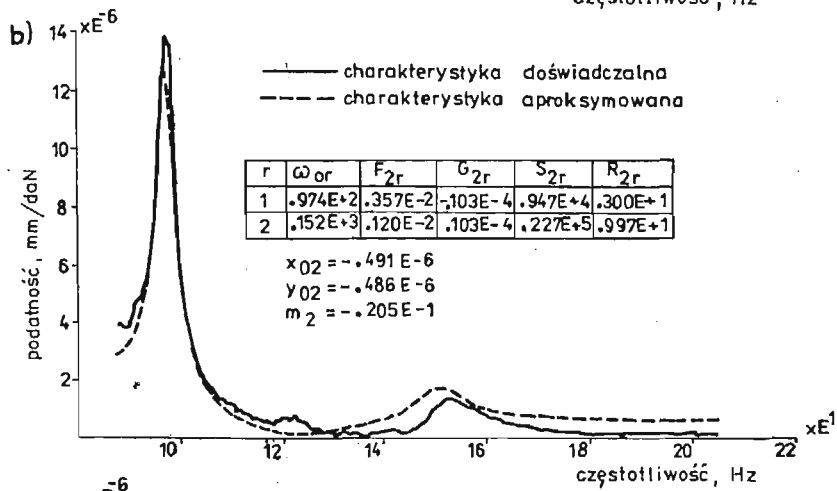
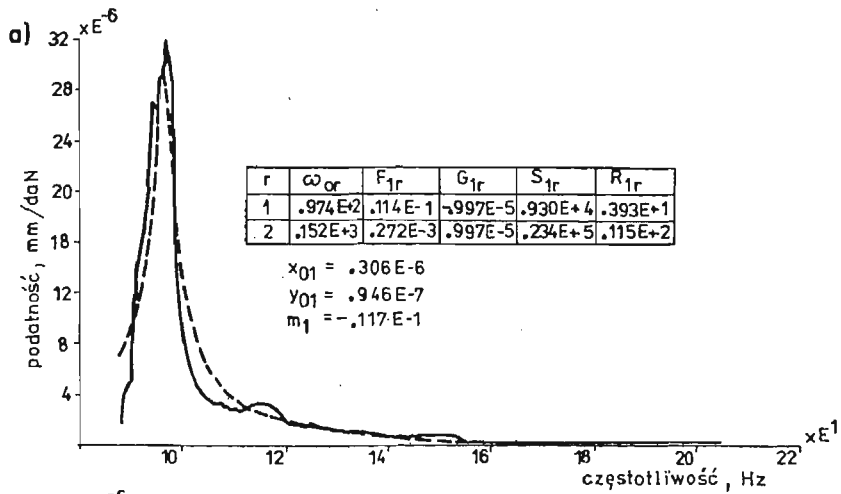
Wyestymowane na podstawie tych charakterystyk parametry R i S zestawiono poniżej:

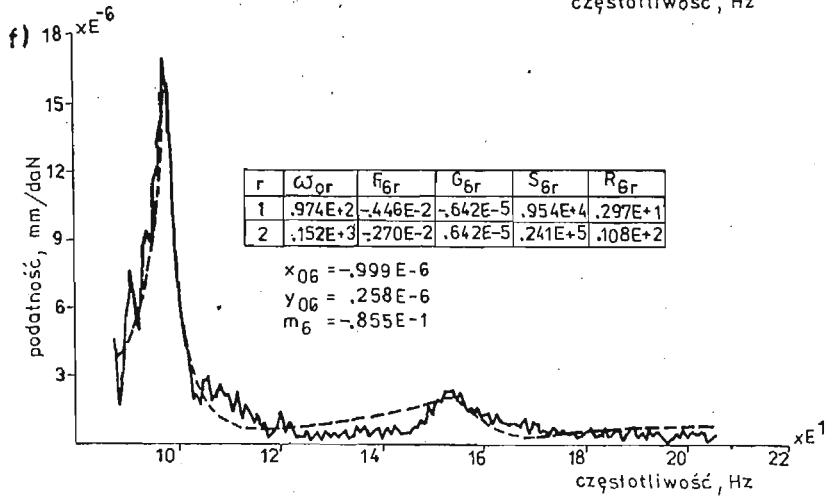
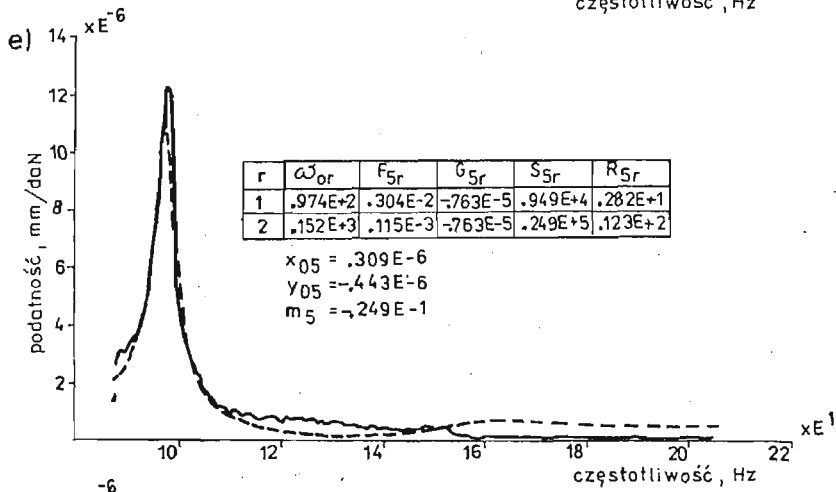
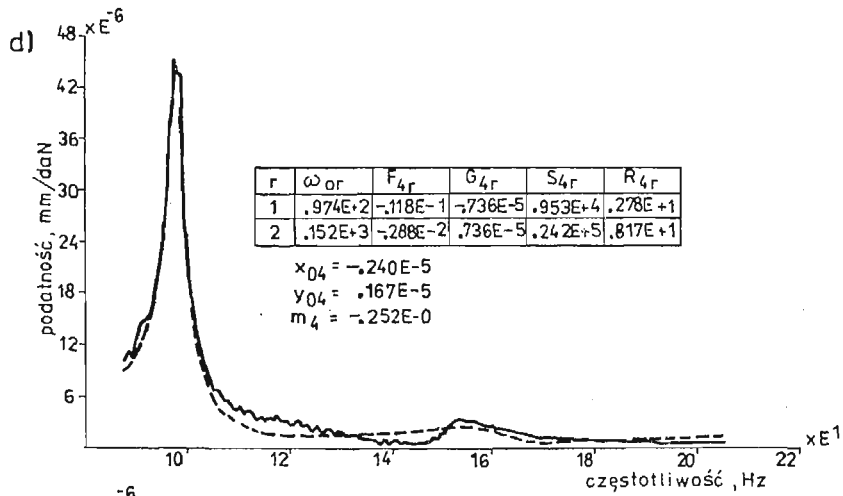
$$S = \begin{bmatrix} -.2084 \text{ E}+4 & -.5472 \text{ E}+5 \\ .5327 \text{ E}+4 & .3359 \text{ E}+5 \end{bmatrix}^{\circ}$$

$$R = \begin{bmatrix} -.1595 \text{ E}+3 & -.6467 \text{ E}+3 \\ .4421 \text{ E}+2 & .1710 \text{ E}+3 \end{bmatrix}$$

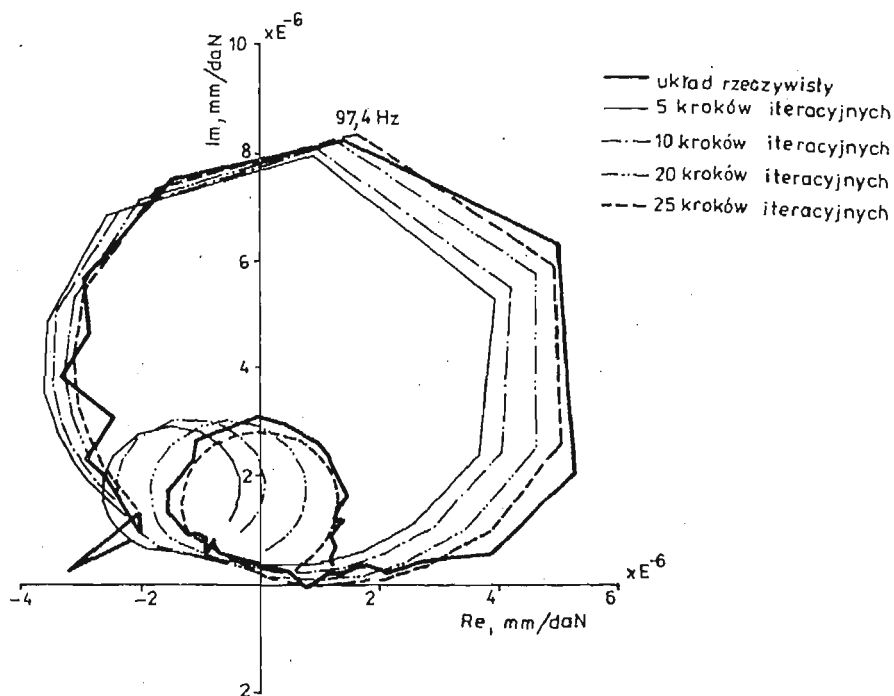
Zagadnienie interpretacji tych wyników, związanie ich z adekwatnym modelem w sensie jego struktury, to odrębny problem, który jest przedmiotem aktualnie prowadzonych przez autorów prac.

We wcześniejszej pracy [1] pokazano proces aproksymacji w odniesieniu do charakterystyk wyznaczonych analitycznie. Interesująca jest odpowiedź na pytanie dotyczące szybkości zbieżności procesu iteracyjnego w przypadku opisu charakterystyk wyznaczonych doświadczalnie. Przykład pokazujący dokładność dopasowania charakterystyki aproksymowanej pokazano na rys. 7. W omawianym przypadku pokazano kilka faz zbliżania się do rozwiązania zadowalającego. Okazuje się, że uzyskanie dobrej zgodności obu wykresów wymaga wielu iteracji. Czas obliczeń jest jednak na tyle krótki, że nie stanowi to istotnego problemu.





Rys. 6. Przykładowe charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe wyznaczone na stole jednej z badanych obrabiarek

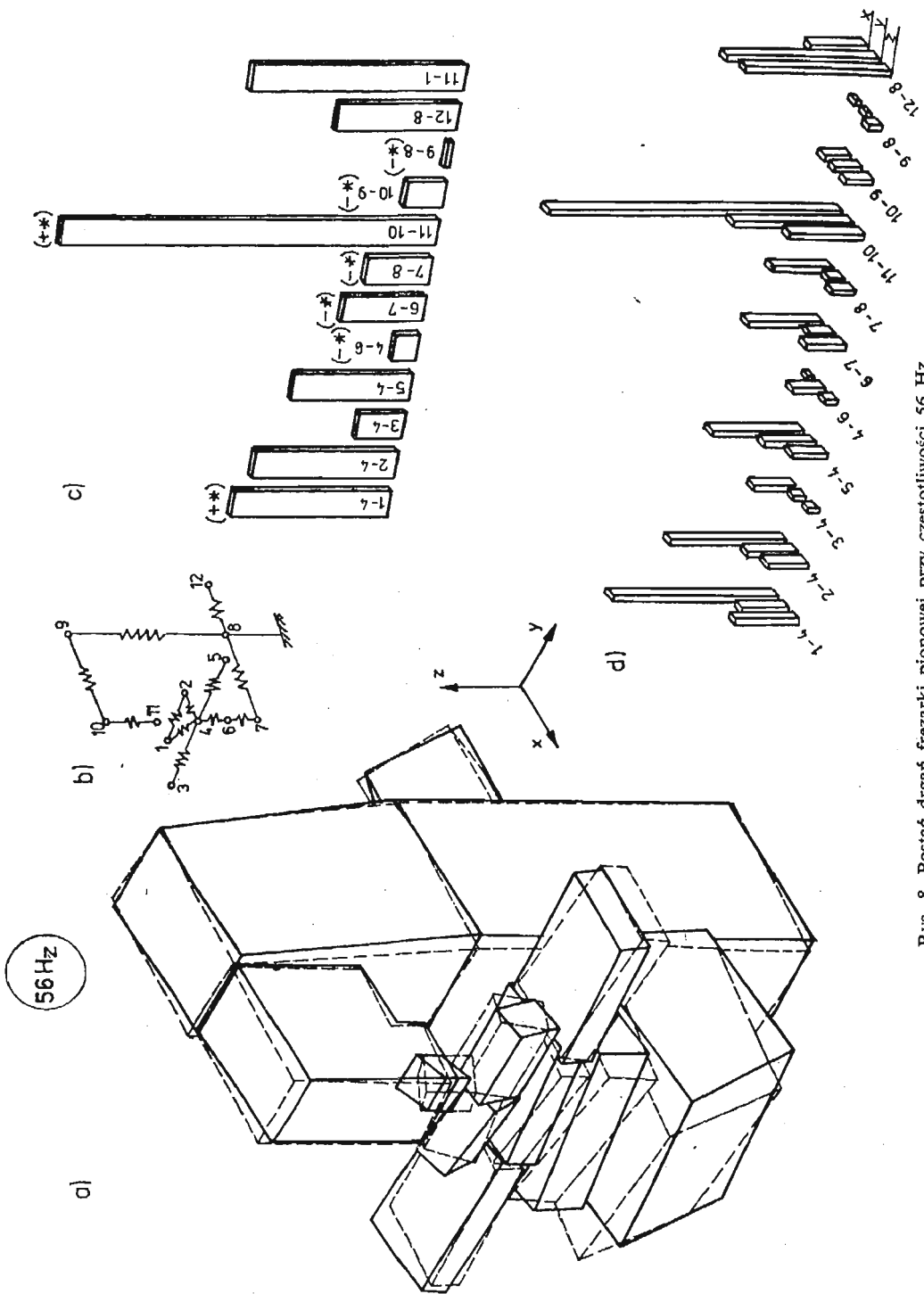


Rys. 7. Charakterystyki aproksymujące po kolejnych krokach iteracyjnych (charakterystyka z rys. 6c)

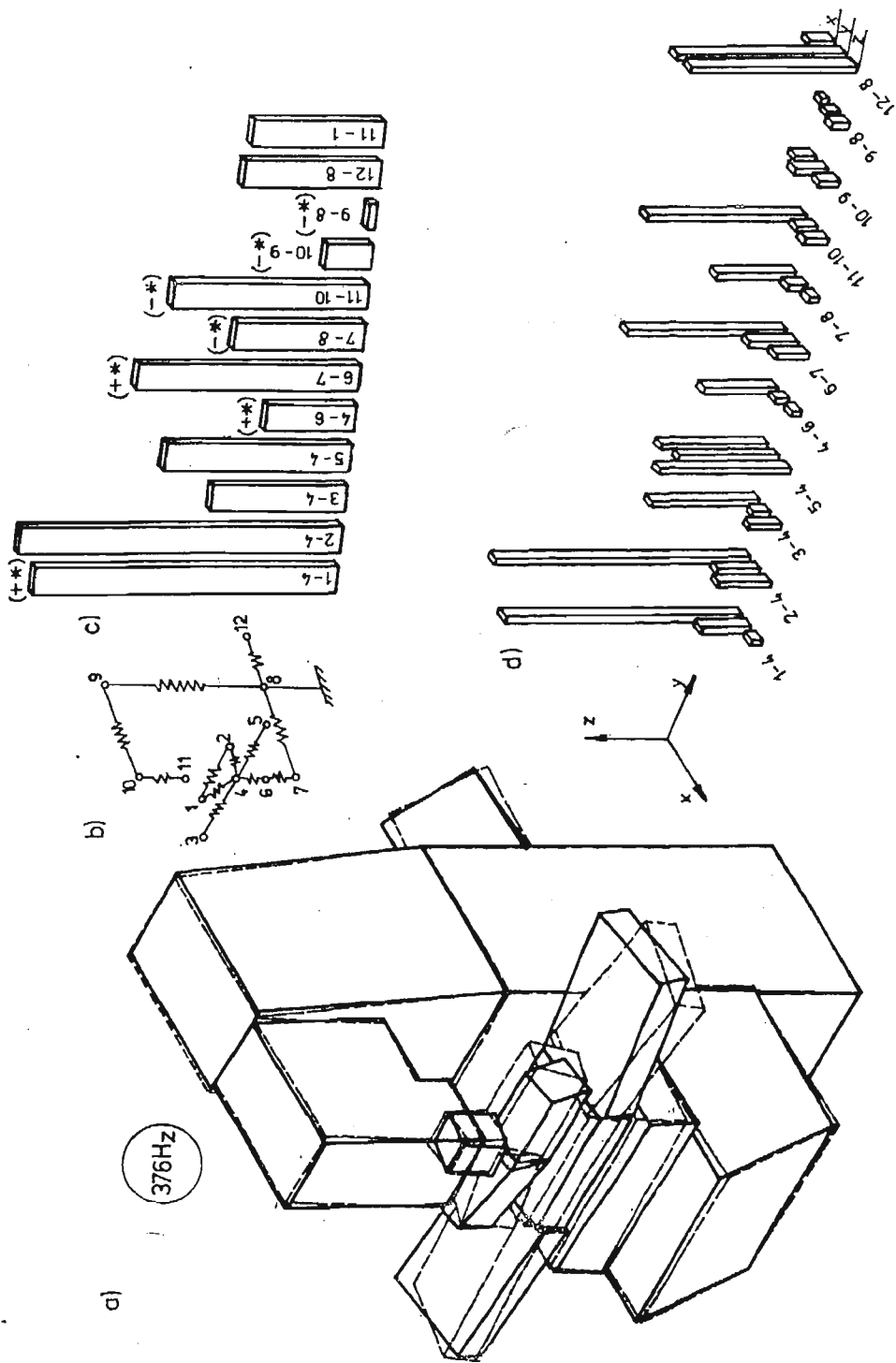
Jednym z ważniejszych celów prezentowanej pracy jest badanie postaci drgań obrabiarek. Zgodnie więc z założeniami metody zbudowano model obrabiarki (rys. 1) i dla przyjętego wariantu jej pracy (przypadku skrawania stwarzającego określony stan obciążenia obrabiarki) wykonano pomiary [11; 12]. Na każdej z umownie sztywnych brył instalowano po 6 czujników sejsmicznych (jak na rys. 3) i wyznaczano charakterystyki częstotliwościowe. W ramach niniejszej pracy dla zilustrowania wyników przedstawiono dwie postacie drgań (56 Hz — rys. 8 i 376 Hz — rys. 9) jednej z wielu przebadanych frezarek pionowych. Zachowanie się obrabiarki podczas drgań przy tych częstotliwościach można ocenić w oparciu o obraz przedstawiony w lewej części omawianych rysunków. Są to w odpowiednim powiększeniu dwie skrajne fazy ruchu badanej obrabiarki. Obraz taki rysowany jest przez komputer [8] na podstawie wyznaczonych doświadczalnie charakterystyk oraz danych geometrycznych obrabiarki. Swoboda wyboru położenia obserwatora względem drgającej obrabiarki stwarza możliwość oglądania jej z wielu stron. Ten płaski obraz może stać się więc bardziej plastyczny i informacja o ruchu obiektu pełniejsza.

Istotnym uzupełnieniem prezentacji wyników badań jest możliwość wygenerowania wielu obrazów drgającej obrabiarki, będących kolejnymi fazami jej ruchu. Podanie kolejnych obrazów w odpowiednim tempie na monitor komputera pozwala uzyskać ruchomy obraz drgającej obrabiarki.

Postacie drgań układów tłumionych opisują liczby zespolone. Rzeczywiste zachowanie się obrabiarki w takiej sytuacji poprawniej może pokazać właśnie ruchomy jej obraz. Taka analiza pozwala na jakościową ocenę badanego obiektu. Do oceny ilościowej potrzeb-



Rys. 8. Postać drgań frezarki pionowej przy częstotliwości 56 Hz



Rys. 9. Postać drgań frezarki pionowej przy częstotliwości 376 Hz

na jest informacja o udziałach poszczególnych zespołów obrabiarki (w tym przypadku brył traktowanych jak sztywne) w drganiach względnych między narzędziem i przedmiotem obrabianym. Przyjęty model pomiarowy oraz wynikająca stąd możliwość transformowania przemieszczeń zadanie to czynią realnym. Na rys. 8b przedstawiony jest schematycznie układ obrabiarki, na którym widać łańcuch brył „obejmujących” proces skrawania. Są to bryły: 1 lub 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10 i 11. Wszystkie one mają wpływ na przemieszczenia narzędzia względem przedmiotu obrabianego.

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów bezwzględnych drgań wszystkich elementów przyjętego modelu obrabiarki (rys. 1), można wyznaczyć drgania względne występujące między stykającymi się bryłami. Miarą wielkości amplitud drgań występujących między narzędziem i przedmiotem jest na rys. 8c słupek oznaczony numerem 11-1. Jest on miarą różnicy współrzędnych ruchu elementu 11 i elementu 1, określonej w punkcie ich styku. Słupki pozostałe informują o amplitudach drgań względnych między kolejnymi bryłami (zgodnie z naniesionym na nich opisem). Zostały one wyznaczone w płaszczyźnie styku między odpowiednimi elementami, a następnie przetransformowane do punktu styku narzędzia z przedmiotem obrabianym (N-P). Z rys. 8b widać, że drgania względne (N-P) wyznaczyć można także jako sumę drgań względnych brył „obejmujących” proces skrawania (na rys. 8c zaznaczono je gwiazdkami). Sumowanie nie odbywa się jednak wprost, gdyż część z tych elementów wykonuje drgania przesunięte w fazie o ok. 180° w stosunku do pozostałych. Bardzo dobrze uwidacznia to film. Rysunek (8a i 9a) niestety w tym zakresie jest nieczytelny, wobec czego na histogramie (8c i 9c) obok gwiazdek dla rozróżnienia faz podano znak „+” lub „-”. Tak więc w prawej części rysunków 8 i 9 (c i d) przedstawione są histogramy pokazujące wpływ drgań względnych poszczególnych brył na amplitudy drgań występujących między narzędziem i przedmiotem. Przykładowo słupek histogramu oznaczony numerem 1-4 informuje o tym, jak duży udział w drganiach między narzędziem i przedmiotem ma ruch przedmiotu obrabianego (element nr 1) względem środkowej części stołu (element nr 4). Na rys. 8c i 9c udziały wszystkich brył (w sensie amplitudowym) zrzutowane zostały na kierunek, w którym amplitudy drgań względnych narzędzia i przedmiotów są największe. Tę samą informację lecz w rozbiciu na współrzędne przedstawia rys. d. Na podstawie tak przedstawionych wyników łatwo wskazać ogniwa, które są najsłabsze w badanej frezarce. Z przedstawionych rysunków wynika, że przy częstotliwości 56 Hz najsłabszym ogniwem frezarki jest grupa wrzecionowa wraz z narzędziem skrawającym, natomiast przy częstotliwości 376 Hz — elementy mocujące przedmiot obrabiany. Mimo iż silnik (element nr 12) nie uczestniczy bezpośrednio w łańcuchu brył „zamykających” proces skrawania — rys. 8b i 9b, to jednak sposób jego mocowania winien być zmieniony (rys. 8 i 9), gdyż tak znaczna masa zamocowana jest do korpusu obrabiarki za pomocą zbyt podatnych elementów, wobec czego amplitudy drgań silnika są znaczne. Mogą więc zaistnieć takie sytuacje, kiedy staje się on generatorem drgań całej obrabiarki.

6. Podsumowanie

Przedstawiona w pracy metoda badawcza umożliwia zarówno jakościową jak i ilościową ocenę właściwości dynamicznych układów nośnych (w tym również obrabiarek) na pod-

stawie analizy postaci drgań. Przyjęty model badawczy oparty na założeniach metody SES sprawia, że w łatwy sposób można określić udziały badanych zespołów obrabiarki w drganiach względnych między narzędziem i przedmiotem obrabianym. Powyższy model umożliwia także skrócenie czasu badań w związku z ograniczeniem do sześciu liczby czujników niezbędnych do pomiaru drgań poszczególnych elementów badanego urządzenia.

Testy efektywności procedur aproksymacji doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych pokazują, że uzyskanie zadowalających wyników wymaga stosunkowo dużej liczby iteracji procesu obliczeniowego. Czas trwania takich obliczeń jest jednak nieporównywalnie krótszy od czasu wykonania samych badań, nie stanowi zatem istotnego problemu. Aproksymacja charakterystyk prowadzi do wygładzenia ich przebiegu, co zmniejsza błędy losowe, jakimi mogą być obciążone charakterystyki doświadczalne przed aproksymacją.

W rozważaniach dotyczących transformacji wskazano na możliwość wykonywania tych operacji także na charakterystykach aproksymujących (opisanych zależnością 12).

Wyniki badań doświadczalnych (przedstawione przykładowo na rys. 8 i 9) stanowią bardzo czytelną informację o zachowaniu się obrabiarki podczas drgań z określoną częstotliwością rezonansową.

Można więc stwierdzić, iż opracowana i przedstawiona w pracy metoda badań obiektów dynamicznych może być szczególnie przydatna przy badaniach prototypowych obrabiarek, gdyż na podstawie otrzymanych plastycznych obrazów zachowania się badanej obrabiarki przy danych wymuszeniach umożliwia wskazanie w sposób bezbłędny ogniwa najsłabszego z punktu widzenia jego udziału w drganiach między narzędziem i przedmiotem obrabianym. Umożliwia to konstruktorowi w sposób efektywny wpłynąć na minimalizację tych drgań. Jednocześnie metoda ta pozwala na zbadanie całego obiektu dynamicznego, jakim jest obrabiarka, przy użyciu tylko siedmiu czujników pomiarowych. Opracowana metoda aproksymacji i transformacji charakterystyk wyznaczonych doświadczalnie umożliwia przechowywanie ich w formie niewielkich tablic ze współczynnikami wielomianów aproksymujących.

Literatura

1. W. LISEWSKI, P. GUTOWSKI, *Wykorzystanie analizy modalnej do badania układów dynamicznych o wielu stopniach swobody*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1987 nr 4.
2. R. SNOEYS, U. ROESEMS, U. VANDEURZEN, P. VANHONACKER, *Survey of Modal Analysis Applications*, CIRP Ann. 1979, Vol. 28 nr 2 s. 497.
3. M. WECK, K. TEPPEL, *Dynamisches Verhalten Spanender Werkzeugmaschinen*, Berlin, Springer — Verlag 1977.
4. В. А. КУДИНОВ, В. А. КОЦИНОВ, Е. И. ШИБАНОВ, *Испытания токарных станков на виброустойчивость методом резания*, Станки и Инструмент, 4, 1978.
5. J. KRUSZEWSKI i in., *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Warszawa, Arkady 1975.
6. J. BARAN, *Zastosowanie dynamiki ruchu przestrzennego ciała sztywnego z więzami do teorii identyfikacji obiektu modelowanego nieswobodnym ciałem sztywnym*, Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 60, Szczecin 1976.
7. В. С. ГОУБЕВ, *О разделении колебаний твёрдого тела на компоненты с помощью пьезоэлектрических датчиков*, Машиноведение, 5, 1967, Москва.

8. A. KORYCKI, W. LISEWSKI, Z. MINCIEL, *Wykorzystanie komputera do detekcji słabych ogniw obrabiarki*, Mater. Konf. nt. Zastosowanie komputerów w przemyśle. Tom 3. Szczecin 1983.
9. J. PETERS, W. MERGEAY, *Dynamic Analysis of Machine Tools Using Complex Modal Method*, CTRP Ann 1976 Vol. 25 nr 1 s. 257.
10. E. K. PRÖSSLER, *Experimentell — rechnerische Analyse von Maschinenschwingungen*, VDI-Verlag, Düsseldorf 1981.
11. A. BODNAR i inni, *Metodyka doświadczalnego wyznaczania częstotliwościowych charakterystyk obrabiarek* (w druku).
12. A. BODNAR, W. LISEWSKI, *O potrzebie korygowania charakterystyk dynamicznych skazonych wpływem siłownika*, Postępy Technologii Maszyn i Urządzeń, 1981 zesz. 1.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ДИНАМИЧЕСКИМ ИССЛЕДОВАНИЯМ СТАНКОВ

В статье представлены примеры использования элементов модального анализа в динамических исследованиях металлорежущих станков. Для экспериментально определённых амплитудно-фазово-частотных характеристик показаны эффекты их аппроксимации при использовании метода описанного в предыдущей статье [1]. Показано, что после аппроксимации частотные характеристики возможно трансформировать согласно правилам движения жёсткого тела. Наконец, в статье представлены результаты исследований различных станков, показывающие возможность указания их слабого звена.

Summary

PRACTICAL APPLICATIONS OF THE MODAL ANALYSIS ELEMENTS TO DYNAMICAL TEST OF MACHINE TOOLS

The examples of the application of modal analysis in dynamic tests of machine tools have been presented in this paper. For experimentally obtained frequency characteristics the effects of approximation have been shown by the use of the previously described [1] method. It has been proved that the frequency characteristics can be transformed after the approximation in conformity with the principles of the rigid body motion.

Finally, the results of tests made on various machine tools have been presented. These tests enabled to indicate the weakest point in the machine.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 maja 1987 roku.

PRZEPLYWY TERMODYFUZYJNE SPRZEŻONE Z POLEM NAPRĘŻEŃ W LEPKOSPĘŻYSTOŚCI

MAREK WRÓBEL

Wyższa Szkoła Inżynierska, Opole

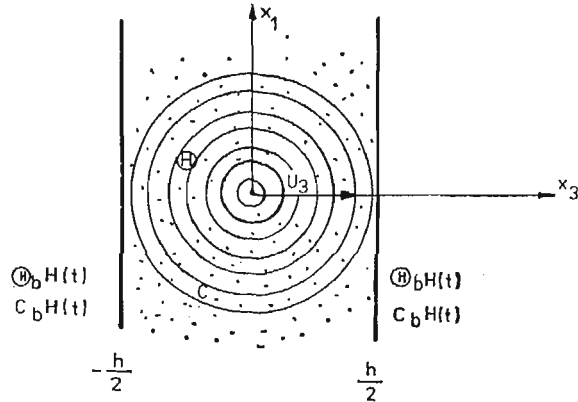
1. Wstęp

Problematyka przepływów ciepłno-dyfuzyjnych sprzężonych z polem mechanicznym jest jedną z podstawowych jakie napotykamy w zagadnieniach naprężeń technologicznych występujących w dojrzewającym betonie, naprężeń w korodujących konstrukcjach, gruntach ekspansywnych, czy też przy nakładaniu powłok ochronnych w metalach. Z punktu widzenia budownictwa szczególnie istotny jest pierwszy przypadek, kiedy wzajemnie oddziaływujące na siebie przepływy wilgoci i ciepła oraz pola przemieszczeń determinują późniejsze własności betonu i konstrukcji wykonanych z tego materiału. W pracy podjęto próbę ilościowego oszacowania wpływu wzajemnych sprzężeń między tymi polami, oraz wpływu tych sprzężeń na pole naprężeń, na podstawie rozwiązania pewnego zadania początkowo-brzegowego. Rozwiązanie oparto na odpowiednim funkcjonalnie [15], którego warunkami stacjonarności są równania termodyfuzji podane przez Nowackiego dla ośrodka sprężystego [10, 11] i uogólnione przez Kubika [6] na zadania sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej. Wydaje się, że taka analiza sprzężeń może być celowa, gdyż autorzy niewielu publikacji z zakresu termodyfuzji sprężystej i lepkosprężystej skupiają uwagę na teoretycznych podstawach problemu [6, 10, 11, 24]. Znane są rozwiązania pewnych zagadnień brzegowych [2, 4, 8, 14] lecz brak jest tam przykładów liczbowych obrazujących rozważane procesy i mogących posłużyć do analizy sprzężeń rozpatrywanych wielkości polowych.

2. Podstawowe założenia i postawienie zadania

Sformułujemy teraz analizowane w pracy zadanie początkowo-brzegowe: Należy wyznaczyć pola temperatury, koncentracji i przemieszczeń, oraz odkształceń i naprężeń zdeterminowane przez zadane na brzegach wartości temperatury i koncentracji, oraz określić wpływ wzajemnych sprzężeń między rozpatrywanymi polami na ich rozkład.

Rozpatrzmy więc warstwę o grubości h , w której występuje pole temperatury Θ , koncentracji C i przemieszczenia U_i (rys. 1). Zakładamy, że zagadnienie przez nas rozpatrywane jest jednowymiarowe, tzn. wszystkie pola zależą od jednej zmiennej przestrzennej x_3 , oraz że ośrodek jest izotropowy, brak w nim źródeł ciepła i masy oraz sił masowych.



Rys. 1. Warstwa z polem temperatury, koncentracji i przemieszczenia

Warunki brzegowe podamy w temperaturze i koncentracji:

$$\Theta\left(\pm \frac{h}{2}, t\right) = \Theta_b H(t), \quad C\left(\pm \frac{h}{2}, t\right) = C_b H(t), \quad (2.1)$$

natomiast za warunki początkowe przyjmujemy wartości przyrostów entropii i koncentracji ponad stan naturalny na całej grubości warstwy równe zero:

$$C(x_3, 0) = 0, \quad \rho S(x_3, 0) = 0. \quad (2.2)$$

Wtedy funkcjonal dla sprzężonych pól temperatury, koncentracji i przemieszczenia przyjmie postać (por. (2.31) w pracy [15]):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Theta, C, U_3] = & \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{1}{2} E_{3333} * dU_{3,3} * dU_{3,3} - \varphi_{33} * dU_{3,3} * d\Theta + \right. \\ & - \frac{1}{2} n * dC * dC + \frac{1}{2} m * d\Theta * d\Theta - \frac{K'}{2} \Phi_{33} * \Phi_{33} * dU_{3,3} * dU_{3,3} + \\ & - K' \Phi_{33} * l * dU_{3,3} * d\Theta_{,3} + K' \Phi_{33} * n * dU_{3,3} * dC_{,3} + \\ & - \frac{K'}{2} l * l * d\Theta_{,3} * d\Theta_{,3} + K' l * n * d\Theta_{,3} * dC_{,3} + \\ & \left. - \frac{K}{2} n * n * dC_{,3} * dC_{,3} - \frac{KH}{2T_0} * \Theta_{,3} * d\Theta_{,3} \right] dx_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

W zależności (2.3) wielkości E_{3333} , φ_{33} , Φ_{33} , K' , K są odpowiednimi do rozpatrywanego zadania składowymi tensorów funkcji materiałowych E_{ijkl} [Pa], φ_{ij} [J/m³K], Φ_{ij} [J/kg] i tensorów przewodnictwa dyfuzyjnego K'_{ij} [kg²/Jms] i cieplnego K_{ij} [J/msK]. Z ko-

leci l [J/kgK], m [J/m³K²], n [Jm³/kg²] są funkcjami materiałowymi, T_0 [K] jest temperaturą stanu naturalnego, a $H = H(t)$ oznacza funkcję Heavisid'a (por. [15]). Powyższe zadanie początkowo-brzegowe rozwiążemy zmodyfikowaną metodą bezpośrednią Ritza [23].

Przyjmujemy do rozwiązania następujące funkcje bazy:

— dla koncentracji:

$$f_k(x_3) = \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3; \quad f_{k,3}(x_3) = -\frac{\pi(2k-1)}{h} \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \quad (2.4)$$

— dla temperatury:

$$g_k(x_3) = \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \quad g_{k,3}(x_3) = -\frac{\pi(2k-1)}{h} \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \quad (2.5)$$

— dla przemieszczenia:

$$u_k(x_3) = \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \quad u_{k,3}(x_3) = \frac{\pi(2k-1)}{h} \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3. \quad (2.6)$$

Wartości funkcjonału (2.3) będziemy poszukiwali na kombinacjach liniowych mających postać:

$$\Theta^n(x_3, t) = g_0(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t) g_k(x_3), \quad (2.7)$$

$$C^n(x_3, t) = f_0(t) + \sum_{k=1}^n b_k(t) f_k(x_3), \quad (2.8)$$

$$U_3^n(x_3, t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^n c_k(t) u_k(x_3). \quad (2.9)$$

gdzie:

$$g_0(t) = \Theta_b H(t), \quad (2.10)$$

$$f_0(t) = C_b H(t), \quad (2.11)$$

$$u_0(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu} [\alpha_c C_b + \alpha_T \Theta_b] H(t) x_3 = U_b H(t) x_3, \quad (2.12)$$

przy czym α_T [K⁻¹] i α_c [m³/kg] są współczynnikami rozszerzalności cieplnej i dyfuzyjnej natomiast ν [-] jest współczynnikiem Poissona.

Funkcje g_0 , f_0 i u_0 spełniają niejednorodne, natomiast funkcje g_k , f_k i u_k — jednorodne warunki brzegowe w temperaturze, koncentracji i odkształceniach. $a_k(t)$, $b_k(t)$ i $c_k(t)$ są tutaj poszukiwanymi funkcjami czasu. Występujące w funkcjonałe (2.3) funkcje materiałowe l , m , n przyjmujemy stałe w czasie (por. [2])

$$l(t) = lH(t), \quad m(t) = mH(t), \quad n(t) = nH(t), \quad (2.13)$$

oraz zgodnie z [6, 10, 11, 16]:

$$\begin{aligned}
 E_{3333} &= \frac{15}{14} G(t), & \varphi_{33} &= \frac{7}{5} \alpha_T E_{3333} = \frac{3}{2} \alpha_T G(t), \\
 \Phi_{33} &= -\frac{7}{5} \alpha_c E_{3333} = -\frac{3}{2} \alpha_c G(t), & & (2.14) \\
 D_T &= \frac{K}{mT_0}, & D_c &= K'n.
 \end{aligned}$$

Natomiast z analizy funkcjonału danego zależnością (2.3) wynika kilka funkcji sprzęgających pola termiczne, dyfuzyjne i mechaniczne, które po uwzględnieniu (2.14) można przedstawić w postaci:

1. Funkcja sprzęgająca pole mechaniczne z cieplnym związanym z przepływem ciepła:

$$\kappa_{c1} = \frac{3}{2} \alpha_T. \quad (2.15)$$

2. Funkcja sprzęgająca pole mechaniczne z cieplnym związanym z przepływem masy:

$$\kappa_{c2} = \frac{3}{2} K' l \alpha_c. \quad (2.16)$$

3. Funkcja sprzęgająca pole mechaniczne z dyfuzyjnym:

$$\kappa_T = \frac{3}{2} D_c \alpha_c. \quad (2.17)$$

4. Funkcja sprzęgająca pole cieplne z dyfuzyjnym:

$$\kappa_u = D_c l. \quad (2.18)$$

Wobec założenia (2.13) funkcje sprzęgające redukują się do roli współczynników sprzęgających (stałych w czasie)

3. Rozwiązanie zagadnienia w warstwie lepkosprężystej

Przyjmujemy, że materiał warstwy podlega zjawiskom reologicznym opisywanym teorią Artuniana [18], w której przyjmuje się, że jądra w całkowych równaniach fizycznych są nieinwariantne względem przesunięć skali czasowej. Natomiast wraz z upływem czasu — materiał taki może być opisany równaniami liniowej lepkosprężystości o jądrach typu splotu (por. [1, 7, 12, 13, 19]). Funkcja relaksacji ma wtedy postać:

$$G(t) = \frac{E_0}{1 + E_0 \tilde{C}_0} [E_0 \tilde{C}_0 e^{-\gamma(1 + E_0 \tilde{C}_0)t} + H(t)], \quad (3.1)$$

a jej transformata Laplace'a:

$$\bar{G}(p) = E_0 \frac{p + \gamma}{p[p + \gamma(1 + E_0 \tilde{C}_0)]}. \quad (3.2)$$

Dzięki zastosowaniu metody bezpośredniej Ritza zadanie szukania ekstremum funkcjonału $\mathcal{F}[\Theta^n, C^n, U_3^n]$ sprowadziło się do zadania poszukiwania ekstremum funkcji, której argumentami są poszukiwane funkcje czasu $a_k(t)$, $b_k(t)$ i $c_k(t)$. Warunek istnienia ekstremum tej funkcji prowadzi do układu trzech równań Eulera-Lagrange'a. Po dokonaniu na tym układzie transformacji Laplace'a, uwzględnieniu (3.2) i wprowadzeniu oznaczeń z tabl. 1 otrzymamy:

$$[a_1 \kappa_u + a_2 + a_3 p] \bar{a}_k + [b_1 \kappa_u] \bar{b}_k + \left[c_1 \kappa_{c2} + c_2 \kappa_{c1} p + \frac{c_6 \kappa_{c2}}{p + R_0} + \frac{c_7 \kappa_{c1} p}{p + R_0} \right] \bar{c}_k = \frac{4}{\pi} \Theta_b \left[d_1 + d_2 \kappa_{c1} + d_6 \frac{\kappa_{c1}}{p + R_0} \right], \quad (3.3)$$

$$[a_4 \kappa_u] \bar{a}_k + [b_2 + b_3 p] \bar{b}_k + \left[c_3 \kappa_T + \frac{c_8 \kappa_T}{p + R_0} \right] \bar{c}_k = \frac{4}{\pi} C_b d_3, \quad (3.4)$$

Tabela 1. Oznaczenia wprowadzone na układzie równań Eulera-Lagrange'a w przestrzeni obrazu

Warstwa sprężysta	Warstwa lepko sprężysta
$E(t) = E_0 H(t)$	$E(t) = G(t) = \frac{E_0}{1 + E_0 C_0} [E_0 \tilde{C}_0 e^{-(1 + E_0 \tilde{C}_0)t} + H(t)]$
	$a_1 = -\pi^2 (2k-1)^2 \frac{hl}{n}$ $a_2 = -\pi^2 (2k-1)^2 D_T h m$ $a_3 = -h^3 m$ $a_4 = b_1 = \pi^2 (2k-1)^2 h$ $a_5 = c_1 = -\pi^3 (2k-1)^3 E_0$ $a_6 = c_2 = -\pi (2k-1) h^2 E_0$ $a_7 = c_6 = \pi^3 (2k-1)^3 \gamma E_0^2 \tilde{C}_0$ $a_8 = c_7 = \pi (2k-1) h^2 \gamma E_0^2 \tilde{C}_0$ $b_2 = -\pi^2 (2k-1)^2 D_c n h$ $b_3 = -h^3 n$ $b_4 = c_3 = \pi^3 (2k-1)^3 E_0$ $b_5 = c_8 = -\pi^3 (2k-1)^3 \gamma E_0^2 \tilde{C}_0$ $c_4 = \frac{15}{14} \pi^2 (2k-1)^2 h E_0$ $c_5 = -\pi^4 (2k-1)^4 \frac{E_0^2}{D_c l h}$ $c_9 = -\frac{15}{14} \pi^2 (2k-1)^2 h \gamma E_0^2 \tilde{C}_0$ $c_{10} = \pi^4 (2k-1)^4 E_0^3 \gamma^2 \tilde{C}_0 \frac{2 + E_0 \tilde{C}_0}{D_c l h}$ $c_{11} = \pi^4 (2k-1)^4 E_0^3 \frac{2 \gamma \tilde{C}_0}{D_c l h}$ $d_1 = (-1)^{k+1} h^3 m / (2k-1)$ $d_2 = (-1)^{k+1} h^3 E_0 \bar{U}_b / (2k-1) \bar{\Theta}_b$ $d_3 = (-1)^{k+1} h^3 n / (2k-1)$ $d_4 = -\frac{15}{14} (-1)^{k+1} E_0 h^2$ $d_5 = (-1)^{k+1} E_0 h^2 \bar{\Theta}_b / \bar{U}_b$ $d_6 = -(-1)^{k+1} h^3 \gamma E_0^2 \tilde{C}_0 \bar{U}_b / \bar{\Theta}_b$ $d_7 = \frac{15}{14} (-1)^{k+1} h^2 \gamma E_0^2 \tilde{C}_0$ $d_8 = -(-1)^{k+1} h^2 \gamma E_0^2 \tilde{C}_0 \bar{\Theta}_b / \bar{U}_b$ $R_0 = \gamma (1 + E_0 \tilde{C}_0)$

$$\begin{aligned}
 & \left[a_5 \varkappa_{c1} + a_6 \varkappa_{c1} p + \frac{a_7 \varkappa_{c2}}{p+R_0} + \frac{a_8 \varkappa_{c1} p}{p+R_0} \right] \bar{a}_k + \left[b_4 \varkappa_T + \frac{b_5 \varkappa_T}{p+R_0} \right] \bar{b}_k + \\
 & + \left[c_4 p + c_5 \varkappa_{c2} \varkappa_T + \frac{c_9 p}{p+R_0} + \frac{c_{10} \varkappa_{c2} \varkappa_T}{(p+R_0)^2} \right] \bar{c}_k = \\
 & = 4U_b \left(d_u + d_5 \varkappa_{c1} + \frac{d_7}{p+R_0} + \frac{d_8 \varkappa_{c1}}{p+R_0} \right).
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Z układu równań (3.3) ÷ (3.5) obliczamy wartości poszukiwanych funkcji $\bar{a}_k(p)$, $\bar{b}_k(p)$, $\bar{c}_k(p)$ w przestrzeni obrazu. Dokonując następnie retransformacji Laplace'a po wstawieniu do (2.7) ÷ (2.9) otrzymujemy poszukiwane wielkości połowe:

$$\Theta^n(x_3, t) = \Theta_b \left[H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \bar{a}_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.6)$$

$$C^n(x_3, t) = C_b \left[H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \bar{b}_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.7)$$

Tabela 2. Współczynniki rozwiązania zadania początkowo-brzegowego w warstwie lepkosprężystej

g_0	$\frac{R^5 - R^4 A_1 + R^3 A_2 - R^2 A_3 + R A_4 - A_5}{(R+p_{1k})(R+p_{2k})(R+p_{3k})(R+p_{4k})(R+p_{5k})}$	
b_0	$\frac{R^5 - R^4 B_1 + R^3 B_2 - R^2 B_3 + R B_4 - B_5}{(R+p_{1k})(R+p_{2k})(R+p_{3k})(R+p_{4k})(R+p_{5k})}$	
ξ_0	$\frac{R^5 - R^4 C_1 + R^3 C_2 - R^2 C_3 + R C_4 - C_5}{(R+p_{1k})(R+p_{2k})(R+p_{3k})(R+p_{4k})(R+p_{5k})}$	
g_t	$\frac{p_{1k}^5 + p_{1k}^4 A_1 + p_{1k}^3 A_2 + p_{1k}^2 A_3 + p_{1k} A_4 + A_5}{(p_{1k}+R)(p_{1k}-p_{1k})(p_{1k}-p_{2k})(p_{1k}-p_{3k})(p_{1k}-p_{4k})(p_{1k}-p_{5k})}$	
b_t	$\frac{p_{1k}^5 + p_{1k}^4 B_1 + p_{1k}^3 B_2 + p_{1k}^2 B_3 + p_{1k} B_4 + B_5}{(p_{1k}+R)(p_{1k}-p_{1k})(p_{1k}-p_{2k})(p_{1k}-p_{3k})(p_{1k}-p_{4k})(p_{1k}-p_{5k})}$	Bez czynnika w mianowniku, dla którego wyrażenie w nawiasach (...) jest równe zero.
ξ_t	$\frac{p_{1k}^5 + p_{1k}^4 C_1 + p_{1k}^3 C_2 + p_{1k}^2 C_3 + p_{1k} C_4 + C_5}{(p_{1k}+R)(p_{1k}-p_{1k})(p_{1k}-p_{2k})(p_{1k}-p_{3k})(p_{1k}-p_{4k})(p_{1k}-p_{5k})}$	
g_{1R}	$\frac{p_{1k}^5 + p_{1k}^4 A_1 + p_{1k}^3 A_2 + p_{1k}^2 A_3 + p_{1k} A_4 + A_5}{(p_{1k}+R)^2 (p_{1k}-p_{1k})(p_{1k}-p_{2k})(p_{1k}-p_{3k})(p_{1k}-p_{4k})(p_{1k}-p_{5k})}$	
b_{1R}	$\frac{p_{1k}^5 + p_{1k}^4 B_1 + p_{1k}^3 B_2 + p_{1k}^2 B_3 + p_{1k} B_4 + B_5}{(p_{1k}+R)^2 (p_{1k}-p_{1k})(p_{1k}-p_{2k})(p_{1k}-p_{3k})(p_{1k}-p_{4k})(p_{1k}-p_{5k})}$	Bez czynnika w mianowniku, dla którego wyrażenie w nawiasach (...) jest równe zero.
ξ_{1R}	$\frac{p_{1k}^5 + p_{1k}^4 C_1 + p_{1k}^3 C_2 + p_{1k}^2 C_3 + p_{1k} C_4 + C_5}{(p_{1k}+R)^2 (p_{1k}-p_{1k})(p_{1k}-p_{2k})(p_{1k}-p_{3k})(p_{1k}-p_{4k})(p_{1k}-p_{5k})}$	

$$U_3^n(x_3, t) = U_b \left[H(t)x_3 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n c_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.8)$$

gdzie:

$$a_k(t) = A \left[a_0 e^{-Rt} + \sum_{i=1}^5 a_i e^{p_{ik}t} \right], \quad (3.9)$$

$$b_k(t) = B \left[b_0 e^{-Rt} + \sum_{i=1}^5 b_i e^{p_{ik}t} \right], \quad (3.10)$$

$$c_k(t) = C \left[c_0 e^{-Rt} + \sum_{i=1}^5 c_i e^{p_{ik}t} \right], \quad (3.11)$$

a współczynniki a_i , b_i i c_i znajdują się w tabl. 2.

Wielkości $A, A_1, \dots, A_5, B, B_1, \dots, B_5, C, C_1, \dots, C_5$ z tabl. 2 oraz z zależności (3.9) ÷ (3.11) są funkcjami stałych materiałowych, oraz współczynników sprzęgających (2.15) ÷ (2.18). Występujące w zależnościach (3.9) ÷ (3.11) wielkości p_{ik} ($i = 1, \dots, 5$) są pierwiastkami równania piątego stopnia ($p^5 + p^4 D_1 + p^3 D_2 + p^2 D_3 + p D_4 + D_5 = 0$), które rozwiązywano numerycznie.

Pole odkształceń dla danego zadania początkowo-brzegowego otrzymamy z zależności na tensor odkształcenia Cauchy'ego [6, 10, 11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \rightarrow \varepsilon_{33}^n(x_3, t) = \\ &= U_b \left[H(t) + \frac{4}{h} \sum_{k=1}^n (2k-1) c_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Z kolei przystąpimy do wyznaczenia składowych tensora naprężenia [6]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu * d\varepsilon_{ij} + (\lambda * d\varepsilon_{kk} - \gamma_T * d\Theta + \gamma_c * dC) \delta_{ij}. \quad (3.13)$$

Jeżeli na zależności (3.13) dokonamy transformacji Laplace'a, skorzystamy ze związków (3.1) i (3.2), oraz z transformat wielkości polowych (3.6) ÷ (3.8), to po retransformacji otrzymamy następujące składowe tensora naprężenia w przestrzeni oryginału:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^n(x_3, t) = \sigma_{22}^n(x_3, t) &= \frac{E_0}{1-2\nu} \left\{ \frac{\nu}{1+\nu} \varepsilon_{33R}^n(x_3, t) + \right. \\ &\left. - [\alpha_c C_R^n(x_3, t) + \alpha_T \Theta_R^n(x_3, t)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\sigma_{33}^n(x_3, t) = 0, \quad (3.15)$$

gdzie:

$$\Theta_R^n(x_3, t) = \Theta_b \left\{ H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n [a_k(t) - a_{kR}(t)] \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right\}, \quad (3.16)$$

$$C_R^n(x_3, t) = C_b \left\{ H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n [b_k(t) - b_{kR}(t)] \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right\}, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{33R}^n(x_3, t) = U_b \left\{ H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n (2k-1) [c_k(t) - c_{kR}(t)] \cdot \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right\}, \quad (3.18)$$

przy czym:

$$a_{kR}(t) = A_R \left[a_0 t e^{-Rt} + \sum_{i=1}^5 a_{iR} (e^{p_{ik}t} - e^{-Rt}) \right], \quad (3.19)$$

$$b_{kR}(t) = B_R \left[b_0 t e^{-Rt} + \sum_{i=1}^5 b_{iR} (e^{p_{ik}t} - e^{-Rt}) \right], \quad (3.20)$$

$$c_{kR}(t) = C_R \left[c_0 t e^{-Rt} + \sum_{i=1}^5 c_{iR} (e^{p_{ik}t} - e^{-Rt}) \right], \quad (3.21)$$

$$A_R = A\gamma E_0 \tilde{C}_0, \quad B_R = B\gamma E_0 \tilde{C}_0, \quad C_R = C\gamma E_0 \tilde{C}_0, \quad (3.22)$$

a współczynniki a_0 , b_0 , c_0 , a_{iR} , b_{iR} , c_{iR} znajdują się w tabl. 2.

4. Realizacja numeryczna i zestawienie wyników

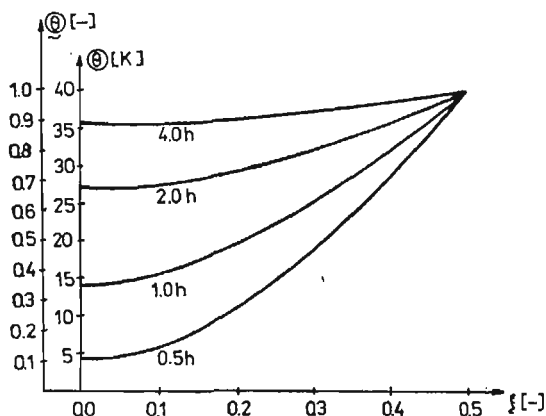
W oparciu o przedstawione rozwiązanie analityczne opracowano program na EMC ODRA 1204 w języku Algol 60. Do przeprowadzenia obliczeń wykorzystano następujące wartości odpowiednich współczynników i funkcji materiałowych dotyczących dojrzewającego betonu (po sprowadzeniu do jednostek układu SI):

— współczynniki dyfuzji D_c [5, 17, 20] i przewodności cieplnej D_T [3, 9]:

$$D_c = 6 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{h]}, \quad D_T = 4 \cdot 10^{-2} \text{ [m}^2/\text{h]}, \quad (4.1)$$

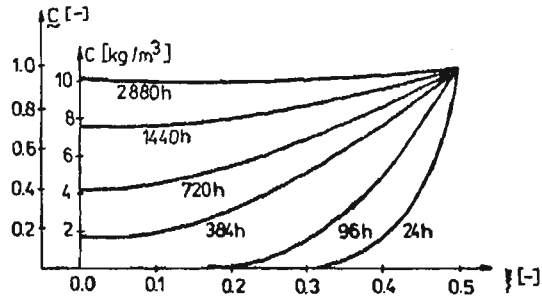
— współczynniki rozszerzalności cieplnej α_T [3, 9] i dyfuzyjnej α_c [5, 7]:

$$\alpha_T = 4.7 \cdot 10^{-6} \text{ [1/K]}, \quad \alpha_c = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^3/\text{kg]}, \quad (4.2)$$

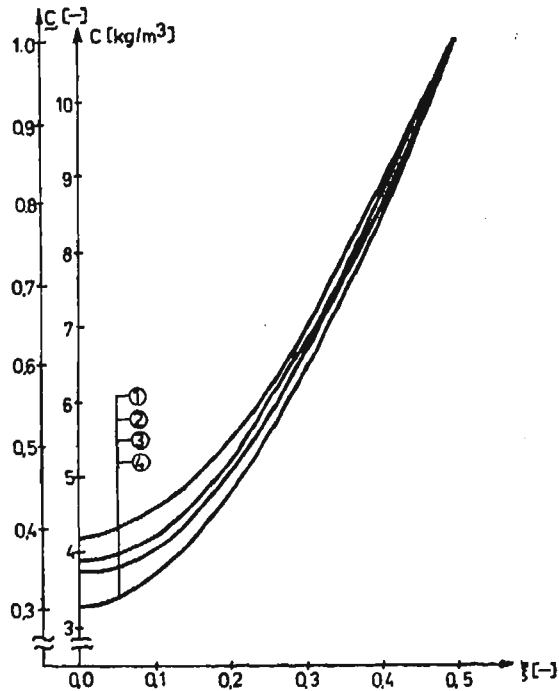


Rys. 2. Rozkład temperatury w warstwie dla przypadku:

$$\kappa_v = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$$



Rys. 3. Rozkład koncentracji w warstwie dla przypadku:
 $\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$



Rys. 4. Rozkład koncentracji w warstwie lepkościąowej dla czasu $t = 720$ h

- ① $\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = 0$; $\kappa_{c1} \neq 0$ oraz $\kappa_u = \kappa_T = 0$; $\kappa_{c2} \neq 0$; $\kappa_{c1} \neq 0$
- ② $\kappa_u \neq 0$; $\kappa_T = \kappa_{c2} = 0$; $\kappa_{c1} \neq 0$ oraz $\kappa_u \neq 0$; $\kappa_T = 0$; $\kappa_{c2} \neq 0$; $\kappa_{c1} \neq 0$
- ③ $\kappa_u = 0$; $\kappa_T \neq 0$; $\kappa_{c2} = 0$; $\kappa_{c1} \neq 0$ oraz $\kappa_u = 0$; $\kappa_T \neq 0$; $\kappa_{c2} \neq 0$; $\kappa_{c1} \neq 0$
- ④ $\kappa_u \neq 0$; $\kappa_T \neq 0$; $\kappa_{c2} = 0$; $\kappa_{c1} \neq 0$ oraz $\kappa_u \neq 0$; $\kappa_T \neq 0$; $\kappa_{c2} \neq 0$; $\kappa_{c1} \neq 0$

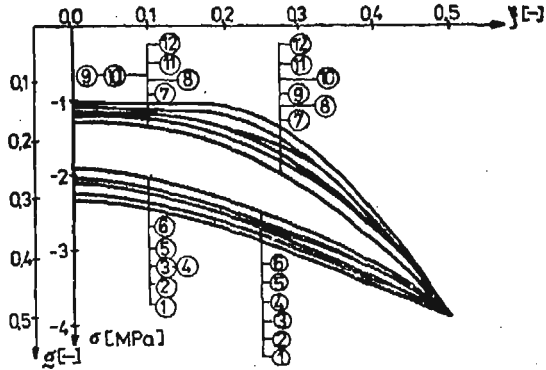
— współczynniki materiałowe m [3, 9], n , l [21, 22]:

$$l = 1305.4 \text{ [J/kgK]}, \quad m = 7862.5 \text{ [J/m}^3\text{K}^2], \quad (4.3)$$

$$n = 134.2 \text{ [J/m}^3\text{kg}^2],$$

— współczynniki C_0 i γ [5, 7]:

$$C_0 = 9.75 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^2\text{/N]}, \quad \gamma = 12.46 \cdot 10^2 \text{ [1/h]}, \quad (4.4)$$

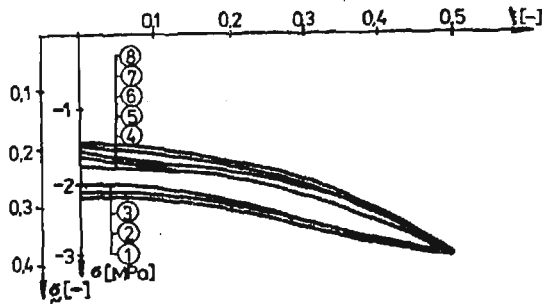


Rys. 6. Rozkład naprężeń w warstwie lepkościowej dla czasu $t = 384$ h

$$\begin{array}{ccc}
 \textcircled{1} \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} &
 \textcircled{2} \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} &
 \textcircled{3} \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \textcircled{4} \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} &
 \textcircled{5} \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} &
 \textcircled{6} \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} &
 \textcircled{7} \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

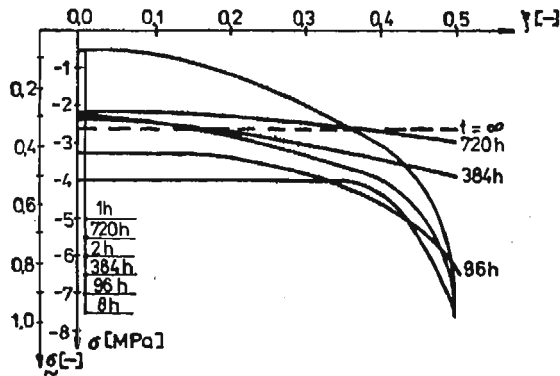
$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{8} \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{cases} &
 \textcircled{9} \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{cases} &
 \textcircled{10} \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{cases} &
 \textcircled{11} \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{cases} &
 \textcircled{12} \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{cases}
 \end{array}$$



Rys. 7. Rozkład naprężeń w warstwie lepkościowej dla czasu $t = 720$ h

$$\textcircled{1} \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{cases}$$

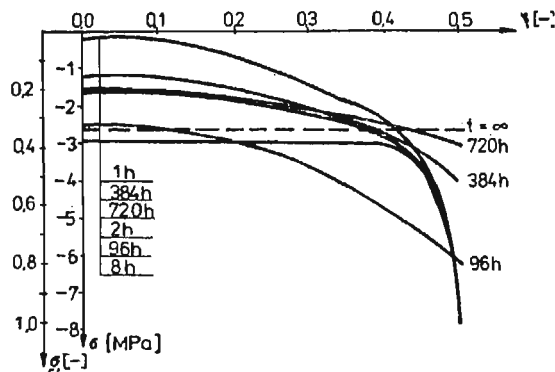
$$\begin{array}{l}
 \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{array} \right. \textcircled{3} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 \textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \end{array} \right. \textcircled{5} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} = 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \end{array} \right. \\
 \\
 \textcircled{6} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{array} \right. \textcircled{7} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C1} \neq 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{array} \right. \textcircled{8} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{C1} = 0 \\ \kappa_{C2} \neq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$



Rys. 8. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla przypadku:

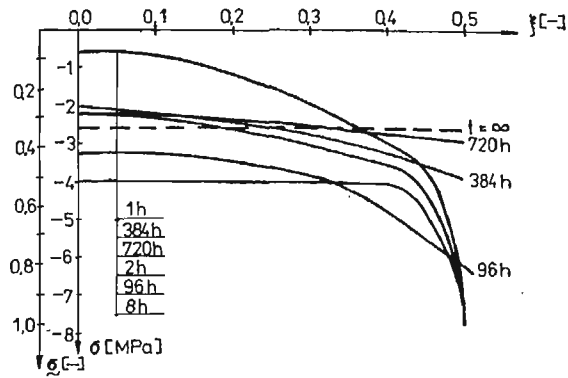
$$\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{C2} = \kappa_{C1} = 0.$$

Dla $t = 96$ h pojawiają się zauważalne różnice między naprężeniami w warstwach sprężystej i lepkosprężystej

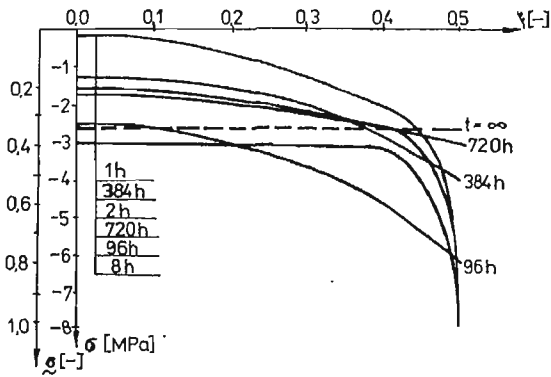


Rys. 9. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla przypadku:

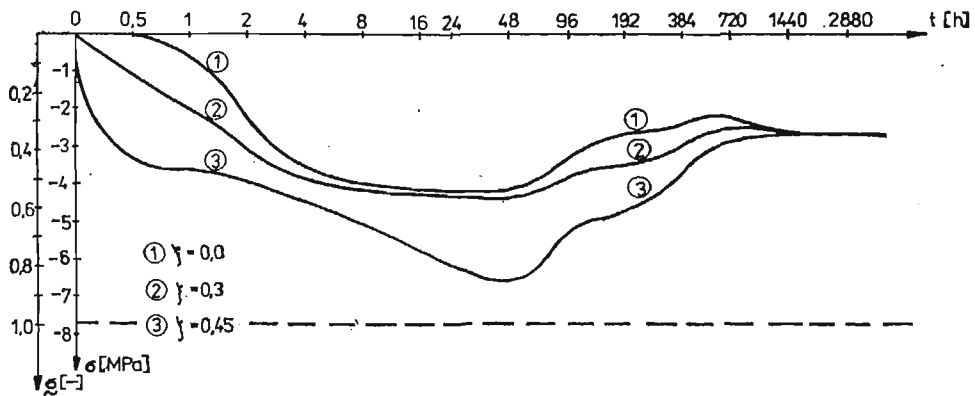
$$\kappa_T \neq 0; \quad \kappa_u = \kappa_{C2} = \kappa_{C1} = 0$$



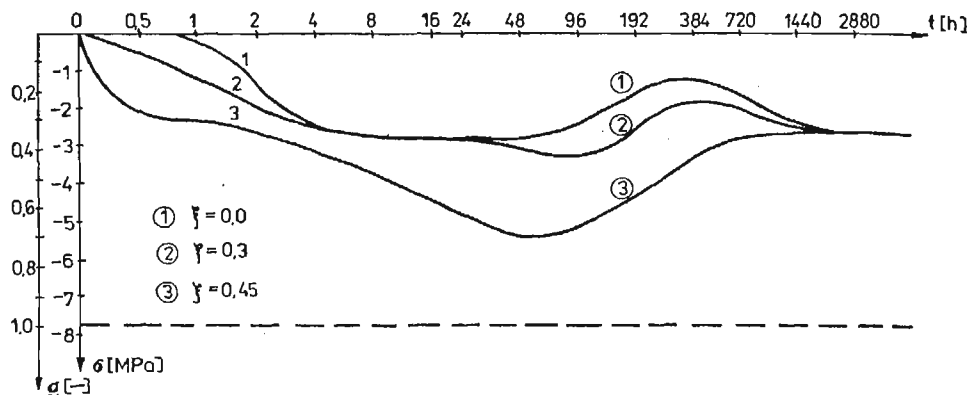
Rys. 10. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla przypadku:
 $\nu_{c2} \neq \nu_{c1} \neq 0; \quad \nu_u = \nu_T = 0$



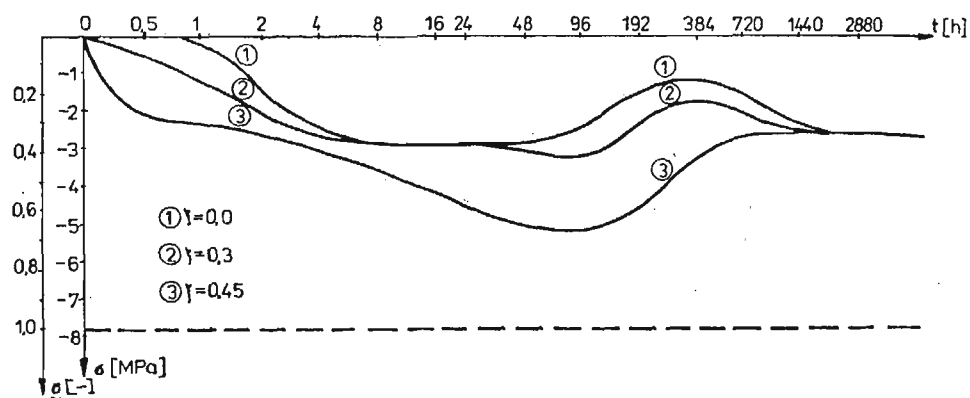
Rys. 11. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla przypadku:
 $\nu_T \neq \nu_{c2} \neq 0; \quad \nu_u = 0; \quad \nu_{c1} \neq 0$



Rys. 12. Warstwa lepkosprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku: $\nu_u = \nu_T = \nu_{c2} = \nu_{c1} = 0$.
 Linia przerywaną oznaczono poziom ustalonych naprężeń ($t = 2880h$) w warstwie sprężystej



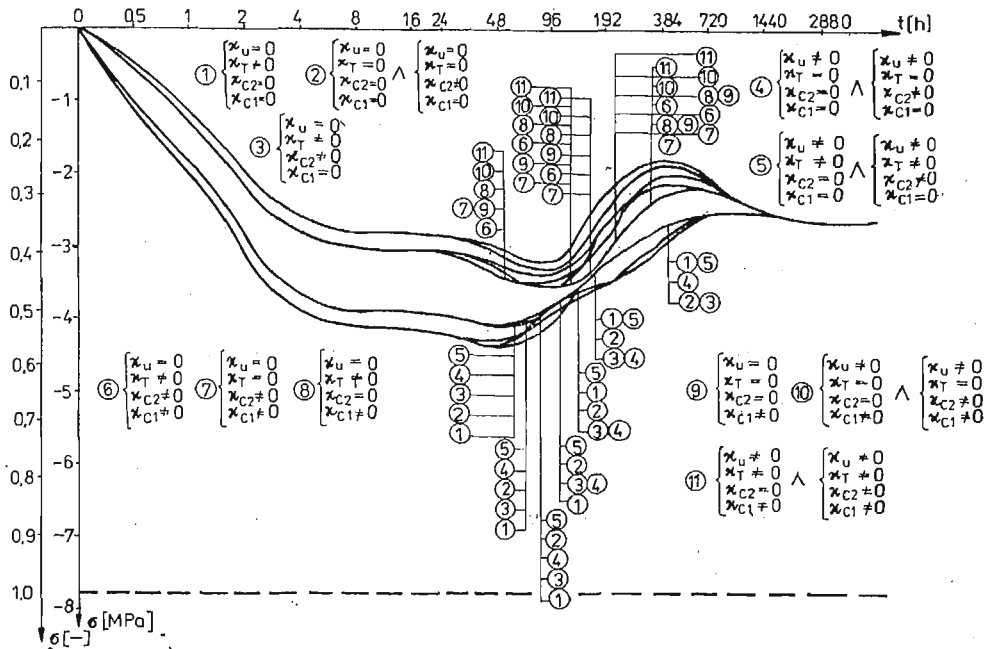
Rys. 13. Warstwa lepkosprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku: $\kappa_u \neq \kappa_{c1} \neq 0$; $\kappa_T = \kappa_{c2} = 0$. Linia przerywaną oznaczono poziom ustalonych naprężeń ($t = 5760h$) w warstwie sprężystej



Rys. 14. Warstwa lepkosprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku: $\kappa_u \neq \kappa_T \neq \kappa_{c2} \neq \kappa_{c1} \neq 0$. Linia przerywaną oznaczono poziom ustalonych naprężeń ($t = 5760h$) w warstwie sprężystej

prezentowanych wykresów korzystać należy z definicji współczynników sprzęgających (2.15)÷(2.18). Każdy z nich w zależności od stopnia sprzężenia rozpatrywanego zadania przybierać może bowiem wartość równą lub różną od zera. W ten sposób zadanie w sposób naturalny dzieli się na szesnaście elementarnych przypadków. I tak np. zadaniu zupełnie niesprężonemu odpowiada przypadek $\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$, natomiast zadaniu w którym występuje pełne sprzężenie rozpatrywanych pól — przypadek $\kappa_u \neq \kappa_T \neq \kappa_{c2} \neq \kappa_{c1} \neq 0$.

Brak pełnego kompletu danych dla innych technologii sprawił, że przyjęto beton jako rozpatrywany ośrodek. Należy jednak pamiętać, że w toku rozwiązania postawionego problemu początkowo-brzegowego poczyniliśmy szereg założeń upraszczających, z których najistotniejsze to pominięcie źródeł ciepła i masy, oraz przyjęcie stałych (uśrednionych) funkcji materiałowych określających własności fizyczne betonu. Okazuje się, że w sytuacjach, gdy zmiany temperatury i koncentracji wywołane reakcjami hydratacji są małe w porównaniu ze zmianami tych wielkości spowodowanymi przepływami ciepła i masy, to zaniedbanie źródeł ciepła i masy jest uzasadnione. Przyjęcie takiego uprosz-



Rys. 15. Warstwa lepkosprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla $\xi = 0.3$. Linia przerywana oznaczono poziom ustalonych naprężeń w warstwie sprężystej

czenia jak również przyjęcie stałych (uśrednionych) wartości współczynników dyfuzji i termodyfuzji jest na podstawie prac [17, 20, 22] obszernie uzasadnione w pracy [2].

Analizowane w pracy zadanie początkowo-brzegowe należy więc traktować jako kolejne przybliżenie tego złożonego problemu. Ze względu na ograniczoną objętość pracy nie będziemy tu przeprowadzali szczegółowej analizy otrzymanych wyników numerycznych. Warto jednak zaznaczyć — pozostają one w dobrej zgodności z wynikami innych autorów. I tak, jeżeli chodzi o wpływ sprzężeń na rozwój pola cieplnego, oraz sprzężenia cieplno-dyfuzyjne z pracami [2, 17, 20, 22], natomiast w zakresie zagadnień sprzężenia pola mechanicznego z polem koncentracji — z pracą [16]. Otrzymane wyniki numeryczne w sensie opisanych wcześniej założeń upraszczających nabierają znaczenia jako wyniki ilościowe obrazujące wpływ sprzężeń rozpatrywanych pól na siebie. Mogą się one okazać pomocne w rozstrzygnięciu nierzadkiego dylematu, czy dane zadanie początkowo-brzegowe rozwiązywać jako niesprężone, czy też analizować bardziej złożone zadanie sprężone.

Literatura

1. R. M. CHRISTENSEN, *Theory of viscoelasticity*, Academic Press New York and London 1971.
2. F. GAJDA, *Sprężenie cieplno-dyfuzyjne w ciałach lepkosprężystych*, dysertacja doktorska, Politechnika Wroclawska 1983.
3. F. GRUDZIŃSKI, *Procesy cieplne w technologii betonów*, Warszawa 1976.
4. K. GRYSA, R. SZCZEPAŃSKI, *O płaskim quasi-statycznym zagadnieniu termodyfuzji dla sprężystego walca kołowego*, *Mech. Teoret. i Stos.* 2, 17, 1979.

5. J. Kasperkiewicz, *Dyfuzja wilgoci i deformacje skurczowe w betonie*, PWN, Warszawa 1972.
6. J. KUBIK, *Analogie i podobieństwo w liniowych ośrodkach odkształcalnych*, Z. N. Pol. Śl., Bud. 38, Gliwice 1975.
7. A. MITZEL, *Reologia betonu*, PWN, Warszawa 1972.
8. R. MOKRYK, Z. OLESIAK, *Termodyfuzja w zagadnieniu kontaktu warstwy i półprzestrzeni sprężystej* Mech. Teoret. i Stos. 3/4, 20, 1982.
9. A. M. NEVILLE, *Właściwości betonu*, PWN, Warszawa 1977.
10. W. NOWACKI, *Certain problems of thermodiffusion in solids*, A.M.S. 23, 6, 1971.
11. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 13, 1975.
12. Z. OLESIAK, *Dynamiczne zagadnienia ciał o właściwościach lepko-sprężystych*, Rozpr. Inż. 9, 3, 1961.
13. Z. PIEKARSKI, G. SZEFER, *Pelzanie półplaszczyny przy mieszanych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inż. 4, 18, 1970.
14. J. STEFANIAK, J. JANKOWSKI, *Plaskie fale harmoniczne i dyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 18, 1980.
15. M. WRÓBEL, *Wariacyjne ujęcie przepływów termodyfuzyjnych sprzężonych z polem naprężeń*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 25, 1987.
16. J. WYRWAŁ, *Wariacyjne ujęcie termodyfuzji lepko-sprężystej*, dysertacja doktorska, Politechnika Krakowska 1979.
17. С. В. АЛЕКСАНДРОВСКИЙ, *Расчёт бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести*, Стройиздат, Москва 1973
18. Н. Х. АРУТУНЯН, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Москва 1952
19. Н. Х. АРУТУНЯН, *Ползучест стареющих материалов. Ползучест бетона*, Мех. Твёрд. Тела, Москва 6, 1967
20. Л. Я. ВОЛОСЯН, *Тепло- и массообмен при термообработке бетонных и железобетонных изделий*, Минск 1973
21. А. В. ЛЬКОВ, *Теоретические основы строительной физики*, Минск 1961
22. Л. А. МАЛИНИНА, *Тепловлажностная обработка тяжелого бетона*, Москва 1977
23. П. В. ЦОЙ, *Методы расчёта отдельных задач тепло-массопереноса*, Москва 1971
24. Р. Н. ШВЕЦ, Я. М. ДАСЮК, *О вариационных теоремах термодиффузии деформируемых твёрдых тел*, Мат. Физ. 22, 1977

Резюме

ТЕРМОДИФФУЗИОННЫЕ ПЕРЕПЛЫВЫ СВЯЗАННЫЕ С ПОЛЕМ НАПРЯЖЕНИЯ В ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В работе обсуждено термодиффузионные переплывы связанные с механическим полем в однородном, изотропном, вязкоупругом слое. Процесс вызывают данные величины температуры и концентрации на краях слоя, так же как происходит в классическом процессе запаривания бетона. Для решения проблемы использовано соответствующий функционал и модифицированный непосредственный метод Ритца. Результаты представлено в графической форме.

Summary

HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEM COUPLED WITH STRESS FIELD IN VISCOELASTICITY

Problem of heat and mass transfer coupled with stress field in homogeneous and isotropic viscoelastic layer is treated. The process is based on the value of temperature and concentration on the boundary as in technological processes in concrete. The solution is based on the appropriate functional and a modified direct Ritz method is used. The results are represented in the diagram form.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 maja 1987 roku.

ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANYCH BADAŃ ZMĘCZENIOWYCH DO WYZNACZANIA GRANICY ZMĘCZENIA

JÓZEF SZALA

AT-R Bydgoszcz

W pracy opisano możliwość zastosowania programowanych badań zmęczeniowych do przybliżonego wyznaczenia granicy zmęczenia. Proponowana metoda podobnie jak metoda Locati oparta jest na hipotezie sumowania uszkodzeń zmęczeniowych sformułowanej przez Palmgrena i Minera. Na podstawie licznych wyników badań zmęczeniowych dokonano analizy przydatności proponowanej metody oraz zakresu jej zastosowań.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- i — numer stopnia naprężeń w stopniowym programie,
- k — liczba stopni naprężeń spełniających warunek $\sigma_{ai} \geq Z_G$,
- $N_c = \lambda n_\lambda$ — ogólna liczba cykli obciążenia programowanego do zniszczenia zmęczeniowego próbki,
- n_i — liczba cykli zrealizowana do zniszczenia zmęczeniowego próbki na i -tym stopniu $n_i = \lambda n_{\lambda i}$,
- n_λ — ogólna liczba cykli w okresie programu,
- $n_{\lambda i}$ — liczba cykli o amplitudzie σ_{ai} w okresie programu,
- s — odchylenie standardowe odpowiadające granicy zmęczenia \bar{Z}_G w MPa,
- s_Z — odchylenie standardowe granicy zmęczenia w MPa,
- Z_G — granica zmęczenia w MPa (wielkość losowa),
- \bar{Z}_G — średnia wartość granicy zmęczenia dla programu o określonej wartości σ_{amax} w MPa,
- $\bar{\bar{Z}}_G$ — średnia wartość granicy zmęczenia dla wszystkich wartości σ_{amax} w programie o określonej postaci w MPa,
- ζ — współczynnik wypełnienia programu obciążen (widma obciążeń),
- λ — liczba powtórzeń okresu programu do zniszczenia zmęczeniowego próbki,

σ_{ai} — amplituda naprężeń i -tego stopnia w MPa,
 $\sigma_{amax} = \sigma_{a1}$ — maksymalna wartość amplitudy naprężeń w programie odpowiadająca amplitudzie pierwszego stopnia.

1. Wprowadzenie

Dokładne wyznaczenie granicy zmęczenia według metody schodkowej (staircase method) i metody Probit, opisanych m.in. w pracach [1] i [2] wymaga przeprowadzenia długotrwałych badań zmęczeniowych na ponad 25 próbkach do bazowej liczby cykli N_G od $5 \cdot 10^6$ – $5 \cdot 10^7$ cykli. Od dłuższego czasu poszukiwane są metody skróconego wyznaczania granicy zmęczenia. W literaturze opisano: metodę brzegową (boundary technique) [3] i [4] i pełnobazowych stopniowych przeciążeń [5]. Metody te umożliwiają wyznaczenie parametrów statystycznych granicy zmęczenia na podstawie mniejszej liczby próbek, jednakże z mniejszą dokładnością niż w przypadku metody schodkowej i Probit.

Niedogodnością w stosowaniu wymienionych metod poza czasochłonnością badań jest to, że wymagają one wstępnego oszacowania granicy zmęczenia z względnie dużą dokładnością, dla przyjęcia poziomów naprężeń, na których badania te się rozpoczyna. Gdy takie oszacowanie (np. na podstawie wytrzymałości na rozciąganie R_m , czy danych literaturowych dotyczących badań zmęczeniowych podobnych próbek lub węzłów konstrukcyjnych) jest niedokładne, liczba próbek potrzebnych do badań rośnie o tę liczbę, którą przeznaczają się na wstępne badania, których celem jest orientacyjne wyznaczenie granicy zmęczenia.

Wymienionych niedogodności nie posiadają t.zw. przyspieszone metody np. Locati i Protta [6]. Pierwsza z wymienionych objęta została normą ZSRR [7]. W metodach tych zastąpiono obciążenie zmienne sinusoidalnie o stałej amplitudzie, obciążeniem programowanym. Skrócenie czasu badań otrzymuje się przez zmniejszenie liczby badanych próbek (wszystkie próbki ulegają zniszczeniu zmęczeniowemu) oraz realizacją mniejszej liczby cykli do zniszczenia próbki niż przyjęta graniczna (bazowa) liczba cykli np. w metodzie schodkowej, czy brzegowej.

Metodami przyspieszonych badań, granicę zmęczenia wyznacza się pośrednio, co jest poważną wadą. Do obliczeń stosuje się ogólnie znaną liniową hipotezę sumowania uszkodzeń zmęczeniowych Palmgrena-Minera. W wielu pracach m.in. [8] i [9] wykazano, że zależnie od warunków obciążeń otrzymuje się różną zgodność tej hipotezy z wynikami badań. Istnieją jednakże takie zakresy obciążeń programowanych, w których zgodność liniowej hipotezy jest zadowalająca [10]. Podstawowym czynnikiem wpływającym na niezgodność hipotezy z wynikami badań jest przyjęcie do obliczeń sumy uszkodzeń niedokładnego opisu wykresu zmęczeniowego jako linii łamanej. Wykazano już w pracy [11] co potwierdzono także w pracy [9], że szczególnie w zakresie naprężeń bliskich granicy zmęczenia, wykres zmęczeniowy odbiega od przyjmowanej powszechnie linii łamanej.

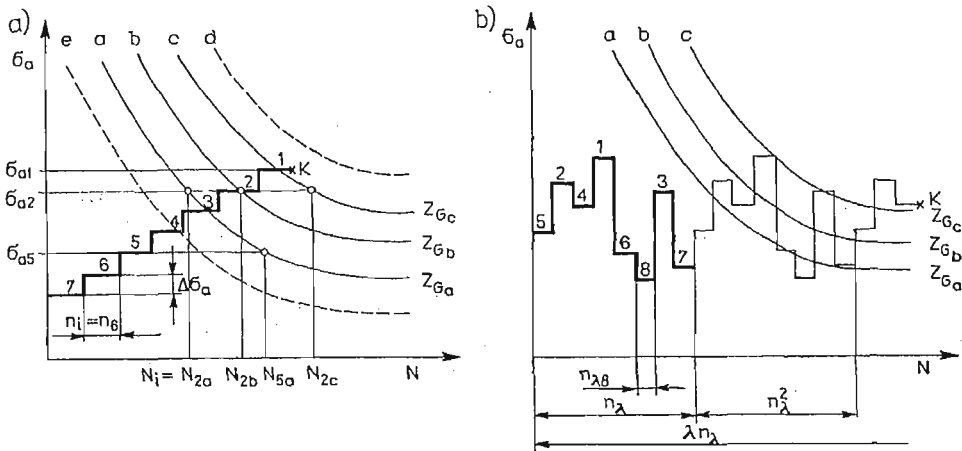
Celem pracy jest analiza możliwości zastosowania programowanych badań zmęczeniowych do wyznaczania granicy zmęczenia, porównanie proponowanej metody z metodą schodkową i metodą Locati oraz określenie warunków badań wpływających na dokładność wyznaczenia granicy zmęczenia według proponowanej metody i metody Locati.

2. Sformułowanie problemu

W metodzie wyznaczania granicy zmęczenia opartej na wynikach programowanych badań, podobnie jak w metodzie Locati, zakłada się słuszność liniowej hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych:

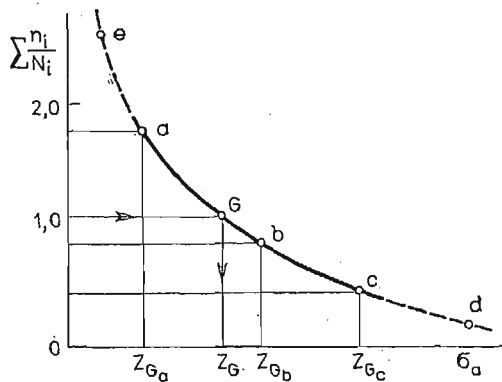
$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1,0 \tag{1}$$

przy czym sumowaniu podlegają liczby cykli n_i na stopniach naprężeń $\sigma_{ai} \geq Z_G$.



Rys. 1. Schemat programów obciążeń do wyznaczania granicy zmęczenia metodą: a) Locati, b) programowanych badań

Sposób postępowania może być objaśniony na przykładzie metody Locati — rys. 1a. Zastosowano tu program obciążeń stopniowo rosnących do momentu zniszczenia próbki lub elementu konstrukcyjnego w punkcie K , na poziomie naprężeń σ_{a1} , po zrealizowaniu 7 stopni obciążenia. Ponieważ nie jest znany rzeczywisty wykres zmęczeniowy, przyj-



Rys. 2. Schemat do interpolacyjnego wyznaczania granicy zmęczenia

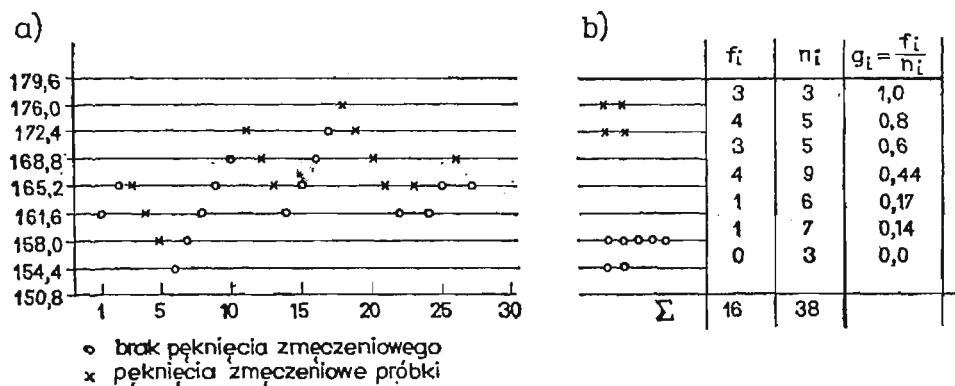
ujemy na podstawie literatury lub innych źródeł orientacyjne wykresy a , b i c , według których obliczane będą cząstkowe uszkodzenia według wzoru (1). Na podstawie otrzymanych z wzoru (1) wyników sumowania, dla poszczególnych wykresów zmęczeniowych sporządza się pomocniczy wykres do interpolacyjnego wyznaczania granicy zmęczenia — rys. 2. Granicy zmęczenia na tym wykresie odpowiada punkt G , dla którego suma uszkodzeń zgodnie z założeniem równa jest 1,0.

W ten sam sposób postępuje się dla dowolnego programu obciążeń o liczbie cykli w okresie n_k , powtarzanego do zniszczenia zmęczeniowego λ razy — rys. 1b. W obu przypadkach dla poszczególnych wykresów zmęczeniowych uwzględnia się tylko poziomy naprężenia $\sigma_{aj} > Z_{Gj}$ (gdzie $j = a, b, c$), czyli dla wykresu a poziomy od 1—6, dla wykresu b poziomy od 1—4, dla wykresu c poziomy od 1—3.

3. Wyniki badań zmęczeniowych i ich opracowanie

Dla oceny przydatności wymienionych w punktach 1 i 2 metod przyspieszonego wyznaczania granicy zmęczenia przeprowadzono badania na próbkach z karbem ($\alpha_k = 1,65$) wykonanych ze stali 45 w stanie normalizowanym w warunkach obrotowego zginania. Opis próbki i pozostałe własności mechaniczne podano w pracy [9].

3.1. Wyznaczenie granicy zmęczenia metodami schodkową i Probit. Podstawą analizy był rozkład granicy zmęczenia wyznaczony metodą schodkową na 27 próbkach według opisu zawartego w pracy [2]. Schemat eksperymentu i wyniki badań pokazano na rys. 3a.



Rys. 3. Schemat badań zmęczeniowych metodą schodkową i Probit

Z obliczeń zamieszczonych w pracy [2], a dotyczących omawianych w tej pracy próbek otrzymano:

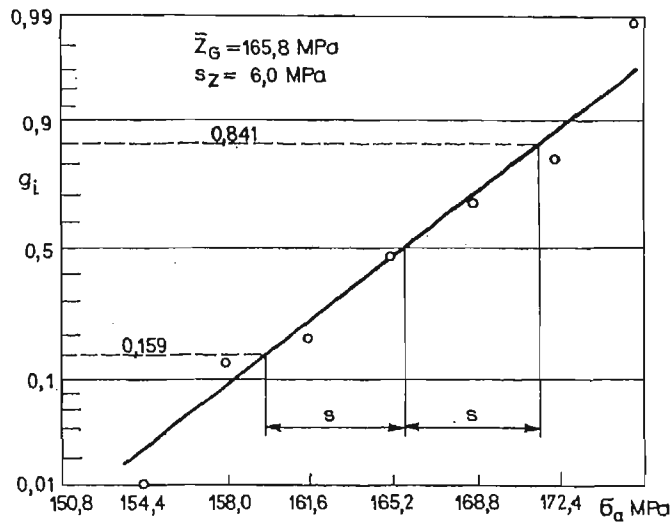
— średnią wartość granicy zmęczenia

$$\bar{Z}_G = 165,5 \text{ MPa,}$$

— odchylenie standardowe

$$s = 10,33 \text{ MPa.}$$

Wartości te określają rozkład normalny granicy zmęczenia. Nanosząc częstotliwość występowania zniszczenia próbek na poszczególnych poziomach na siatkę rozkładu



Rys. 4. Wykreślne wyznaczenie rozkładu granicy zmęczenia metodą Probit

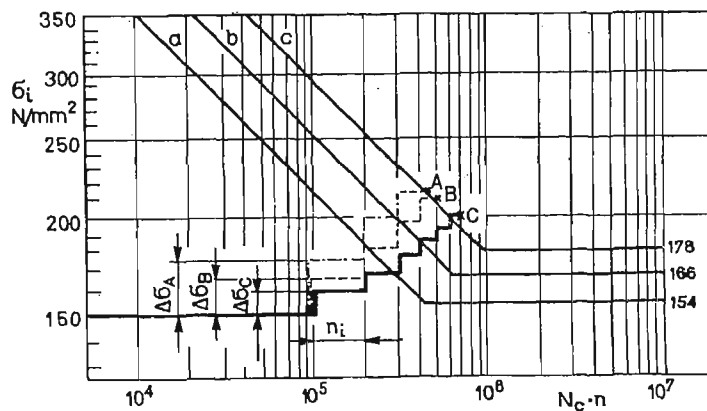
normalnego rys. 4 wyznaczamy średnią wartość granicy zmęczenia i jej odchylenie standardowe metodą Probit. Z danych na rys. 4 odczytujemy:

$$\bar{Z}_G = 165,8 \text{ MPa},$$

oraz:

$$s_z = 6,0 \text{ MPa}.$$

Do wyznaczania tych danych wykorzystano wyniki badań metodą schodkową (rys. 3a) uzupełnione dodatkowymi próbami na dolnych poziomach naprężeń (154,4 i 158,0 MPa)



Rys. 5. Schemat badań zmęczeniowych metodą Locati próbek z normalizowanej stali 45 dla trzech różnych programów obciążeń

celem upewnienia się o niepękaniu próbek oraz na górnych poziomach (172,4 i 176,0 MPa) celem potwierdzenia spostrzeżenia o pękaniu próbek (rys. 3b). Dane do wyznaczenia wykresu (rys. 4) wzięto z tabliczki zamieszczonej na rys. 3b.

3.2. **Badania metodą Locati.** Schemat badań zmęczeniowych metodą Locati przedstawiono na rys. 5, na którym oznaczono literami *a*, *b* i *c* przybliżone wykresy zmęczeniowe obejmujące rozproszone wyniki badań w zakresie ograniczonej trwałości. Literami *A*, *B* i *C* oznaczono programy obciążeń różniące się przyrostem naprężeń $\Delta\sigma$ na kolejnych stopniach, który wynosi dla programu *A* — 25 MPa, dla programu *B* — 15 MPa i programu *C* — 8 MPa. Liczba cykli na poszczególnych stopniach $n_i = 10^5$ dla wszystkich programów.

Wyniki obliczeń sum uszkodzeń zmęczeniowych $\Sigma n_i/N_i$ według wzoru (1) podano w tablicy 1 i na wykresie pomocniczym do interpolacyjnego wyznaczania granicy zme-

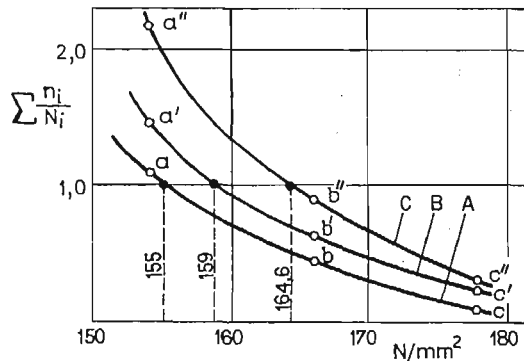
Tablica 1. Sumy uszkodzeń $\Sigma \frac{n_i}{N_i}$ dla poszczególnych programów obciążeń

Program obciążeń	Obliczenia według krzywej		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	2	3	4
A	1,1	0,44	0,1
B	1,4	0,6	0,2
C	2,08	0,9	0,32

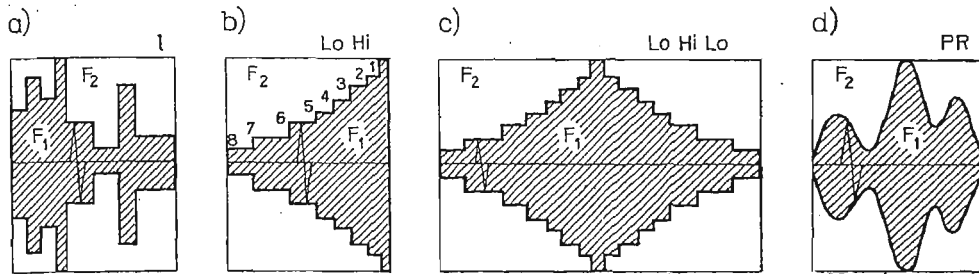
czenia (rys. 6). Krzywe *A*, *B* i *C* pokazane na tym rysunku powstały z połączenia punktów: *a*-wyznaczonego na podstawie sumowania uszkodzeń według wykresu zmęczeniowego *a* z rys. 5, *b* — podobnie, z obliczeń według wykresu zmęczeniowego *b* i *c* — wyznaczonego według wykresu zmęczeniowego *c*.

Dla programu *A* punkty te są bez oznaczeń, dla programu *B* — ze znakiem prim ('), dla programu *C* — ze znakiem bis ("). Dla $\Sigma n_i/N_i = 1$ otrzymuje się następujące wartości granicy zmęczenia $Z_{GA} = 155$ MPa, $Z_{GB} = 159$ MPa, $Z_{GC} = 164,6$ MPa.

3.3. **Programowane badania zmęczeniowe.** W programowanych badaniach zastosowano programy obciążeń z nieregularnym następstwem stopni I, stopniowo rosnących naprężeń



Rys. 6. Wykres do interpolacyjnego wyznaczania granicy zmęczenia próbek ze stali 45



Rys. 7. Schematy programów obciążeń zastosowanych w badaniach zmęczeniowych

Lo-Hi, stopniowo rosnących a następnie malejących naprężeń *Lo-Hi-Lo* oraz z pseudolosową zmianą amplitud *PR*, pokazane na rys. 7. Dane liczbowe w układzie wartości względnych zamieszczono w tablicy 2. Badania programowane przeprowadzono na kilku

Tablica 2. Dane liczbowe programów obciążeń

Nr poziomu i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_{a1}/\sigma_{amax}$	1,00	0,875	0,750	0,625	0,50	0,375	0,250	0,125
$\alpha_i = \frac{n_{\lambda i}}{n_{\lambda}}$ dla ζ	0,34	0,006	0,012	0,038	0,081	0,138	0,205	0,305
	0,56	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
	0,77	0,170	0,305	0,205	0,138	0,081	0,038	0,006

poziomach σ_{amax} , oraz dla trzech wartości współczynnika wypełnienia widma $\zeta = 0,34$, $0,56$ i $0,77$. Do obliczeń sum uszkodzeń przyjęto te same orientacyjne wykresy zmęczeniowe, jak w punkcie 3.2 w badaniach metodą Locati. Dane liczbowe do wyznaczania granicy zmęczenia, dla programu z nieregularnym następstwem stopni I i współczynnika wypełnienia widma $\zeta = 0,34$ podano w tablicy 3. Podobny zestaw danych dla widm o $\zeta = 0,56$ i $\zeta = 0,77$ zamieszczono w tablicy 4, tu także realizowano program obciążeń I. W kolumnach 2 tych tablic podano maksymalne amplitudy naprężeń w programach $\sigma_{amax} = \sigma_{a1}$. Wartości naprężeń dla pozostałych poziomów σ_{ai} obliczamy posługując się danymi z wiersza 2 tablicy 2. Podobnie znając całkowitą liczbę cykli do zniszczenia N_c podaną w kolumnach 3 tablic 3 i 4 obliczyć można dla poszczególnych wartości ζ wartości $n_i = \alpha_i N_c$ biorąc dane α_i odpowiednio dla ζ z wierszy 3, 4 i 5 tablicy 2. Wartości N_i do obliczenia sum uszkodzeń można odczytać (lub obliczyć z równań) z wykresów zmęczeniowych pokazanych na rys. 5, przy czym $\Sigma_{(a)}$ jest sumą obliczoną według wykresu a , $\Sigma_{(b)}$ — według wykresu b oraz podobnie $\Sigma_{(c)}$ jest sumą obliczoną według wykresu c . Wartości tych sum zestawiono w kolumnach 4, 5 i 6 tablic 3 i 4.

Z wykresów pomocniczych do interpolacyjnego wyznaczania granicy zmęczenia (tu nie pokazanych ze względu na ich dużą liczbę) wyznaczono wartości granicy zmęczenia Z_{G_i}

zestawione w kolumnach 7 tablic 3 i 4. Dane zawarte w tych tablicach uzupełnione o wartości średnie i odchylenia standardowe granicy zmęczenia wyznaczone dla poszczególnych poziomów naprężeń σ_{amax} (kol. 8).

Tablica 3. Dane liczbowe do wyznaczenia granicy zmęczenia próbek z karbem ($\alpha_k = 1,65$) wykonanych z normalizowanej stali 45, obciążenie programowane I o współczynniku wypełnienia $\zeta = 0,34$

Nr próbki	σ_{amax} [MPa]	$\frac{N_c}{10^4}$	$\Sigma_{(a)}$	$\Sigma_{(b)}$	$\Sigma_{(c)}$	Z_G [MPa]	$\frac{\bar{Z}_G}{s_z}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	365	13	0,6	0,28	0,12	150,0	$\frac{155,13}{5,41}$
2		18	0,83	0,41	0,2	152,5	
3		24	1,09	0,54	0,27	155,5	
4		35	1,59	0,8	0,4	162,5	
5	325	67	1,82	0,74	0,34	163,0	$\frac{162,13}{2,37}$
6		63	1,72	0,7	0,31	162,0	
7		77	2,09	0,84	0,4	165,0	
8		48	1,30	0,53	0,26	158,5	
9	285	140	1,76	0,84	0,39	163,5	$\frac{158,24}{3,26}$
10		80	1,03	0,5	0,24	155,0	
11		100	1,25	0,6	0,27	158,0	
12		95	1,19	0,57	0,25	157,5	
13		120	1,50	0,73	0,35	161,5	
14		77	0,95	0,45	0,22	153,5	
15		96	1,20	0,57	0,27	157,3	
16		110	1,37	0,66	0,31	159,6	
17	245	150	0,96	0,31	0,15	153,8	$\frac{155,30}{2,88}$
18		130	0,83	0,28	0,11	152,0	
19		200	1,28	0,42	0,20	157,4	
20		220	1,39	0,46	0,22	158,0	
21	205	4000	0,08	0,02	0,01	—	—
22		9500	0,19	0,04	0,02	—	
23		17000	0,33	0,09	0,04	—	
24		3500	0,07	0,02	0,01	—	

Celem poszerzenia analizy o wpływ postaci programu obciążeń na wyznaczaną granicę zmęczenia przeprowadzono obliczenia dla programów obciążeń o sekwencji *Lo-Hi* (stopniowo rosnących naprężeń) odpowiadającej obciążeniu według metody Locati, sekwencji *Lo-Hi-Lo* (stopniowo rosnącej następnie malejącej) oraz pseudolosowej zmiany amplitud naprężeń *PR*. Badania te przeprowadzono dla programów o $\zeta = 0,34$. Zestawienie danych Z_{Gi} , obliczonych według tych samych zasad co te, które zestawiono w tablicach 3 i 4, podano w tablicy 5.

Tablica 4. Dane liczbowe do wyznaczenia granicy zmęczenia próbek z karbem ($\alpha_k = 1,65$) wykonanych z normalizowanej stali 45, obciążenie programowane I o współczynniku wypełnienia $\zeta = 0,56$ i $\zeta = 0,77$

Nr próbki	σ_{amax} [MPa]	ξ	$\frac{N_c}{10^4}$	$\Sigma_{(a)}$	$\Sigma_{(b)}$	$\Sigma_{(c)}$	Z_G [MPa]	$\frac{\bar{Z}_a}{s_z}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	352	0,56	5,1	1,29	0,65	0,31	158,4	$\frac{159,33}{1,60}$
2			5,0	1,27	0,64	0,31	158,0	
3			5,6	1,42	0,71	0,35	160,3	
4			5,8	1,50	0,75	0,37	161,4	
5	312		8,9	1,26	0,60	0,29	158,0	$\frac{159,43}{2,45}$
6			11,2	1,60	0,77	0,35	162,5	
7			8,2	1,18	0,58	0,28	157,0	
8			9,8	1,40	0,70	0,35	160,2	
9	272		20,5	1,54	0,77	0,38	162,0	$\frac{158,83}{2,80}$
10			18,6	1,40	0,70	0,35	160,3	
11			15,0	1,13	0,55	0,24	156,0	
12			15,7	1,18	0,56	0,27	157,0	
13	232		33,0	1,14	0,55	0,27	156,0	$\frac{163,08}{4,76}$
14			55,0	1,90	0,93	0,45	165,0	
15			60,0	2,08	1,02	0,50	166,3	
16			55,0	1,90	0,93	0,45	165,0	
17	192		180,0	2,29	1,09	0,33	167,4	$\frac{165,3}{3,76}$
18			110,0	1,39	0,65	0,20	159,7	
19			170,0	2,17	1,03	0,31	166,5	
20			183,0	2,33	1,11	0,34	167,6	
1	324	0,77	5,25	1,48	0,72	0,34	160,7	$\frac{164,3}{2,66}$
2			6,25	1,78	0,86	0,41	164,0	
3			7,5	2,14	1,03	0,49	166,8	
4			7,0	1,99	0,96	0,46	165,7	
5	295		15,3	2,76	1,33	0,63	171,0	$\frac{164,7}{5,20}$
6			7,0	1,29	0,62	0,29	158,4	
7			9,9	1,78	0,86	0,41	164,0	
8			11,3	2,03	0,98	0,47	165,8	
9	263		16,4	1,81	0,81	0,39	163,6	$\frac{162,78}{4,54}$
10			21,0	2,29	1,02	0,50	166,5	
11			18,4	2,03	0,91	0,44	164,8	
12			10,2	1,13	0,51	0,24	156,2	
13	230		27,0	1,59	0,74	0,30	164,8	$\frac{159,60}{4,75}$
14			25,0	1,47	0,69	0,28	160,5	
15			24,0	1,40	0,65	0,26	159,8	
16			16,0	0,93	0,44	0,18	153,3	
17	196		95,0	2,26	1,11	0,26	167,7	$\frac{164,13}{6,84}$
18			55,0	1,32	0,64	0,15	158,4	
19			140,0	3,28	1,63	0,38	172,0	
20			55,0	1,32	0,64	0,15	158,4	

Tablica 5. Zestawienie wyników programowanych badań granicy zniechęcia z zastosowaniem programów Lo-Hi i Lo-Hi-Lo, $\zeta = 0,34$

Nr próbki	σ_{max} [MPa]	Lo-Hi, $\zeta = 0,34$			Lo-Hi-Lo, $\zeta = 0,34$			PR, $\zeta = 0,34$		
		$\frac{N_c}{10^4}$	Z_G [MPa]	$\frac{\bar{Z}_G}{s_{ZG}}$	$\frac{N_c}{10^4}$	Z_G [MPa]	$\frac{\bar{Z}_G}{s_{ZG}}$	$\frac{N_c}{10^4}$	Z_G [MPa]	$\frac{\bar{Z}_G}{s_{ZG}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	365	49	171,0	$\frac{161,93}{7,97}$	20	163,0	$\frac{161,38}{14,42}$	17	152,0	$\frac{154,1}{1,73}$
2		39	165,2		11	148,5		20	153,4	
3		30	159,0		61	181,0		25	156,3	
4		20	152,5		20	153,0		22	154,7	
5	325	56	160,0	$\frac{160,13}{2,04}$	57	160,5	$\frac{163,08}{2,85}$	36	156,5	$\frac{156,38}{2,25}$
6		65	162,5		71	164,0		48	159,0	
7		57	160,5		83	166,3		22	153,5	
8		46	157,5		62	161,5		36	156,5	
9	285	76	153,2	$\frac{155,81}{3,34}$	110	159,6	$\frac{158,14}{3,62}$	87	156,5	$\frac{154,53}{4,86}$
10		85	155,3		79	154,0		84	155,4	
11		76	153,2		88	156,0		127	162,3	
12		105	158,8		116	160,7		48	148,0	
13		86	155,5		77	153,5		55	149,0	
14		70	151,8		124	162,0		60	150,5	
15		94	156,7		96	157,3		80	154,5	
16		124	162,0		135	163,0		109	160,4	
17	245	260	165,0	$\frac{157,5}{5,80}$	250	159,0	$\frac{157,23}{2,37}$	160	154,0	$\frac{157,0}{6,83}$
18		180	156,0		150	153,8		320	166,0	
19		210	158,0		230	158,6		106	150,0	
20		120	151,0		210	157,5		220	158,0	

Łącznie wszystkie wyniki dla $\zeta = 0,34$: $\bar{Z}_G = 157,73$ MPa

4. Analiza wyników badań

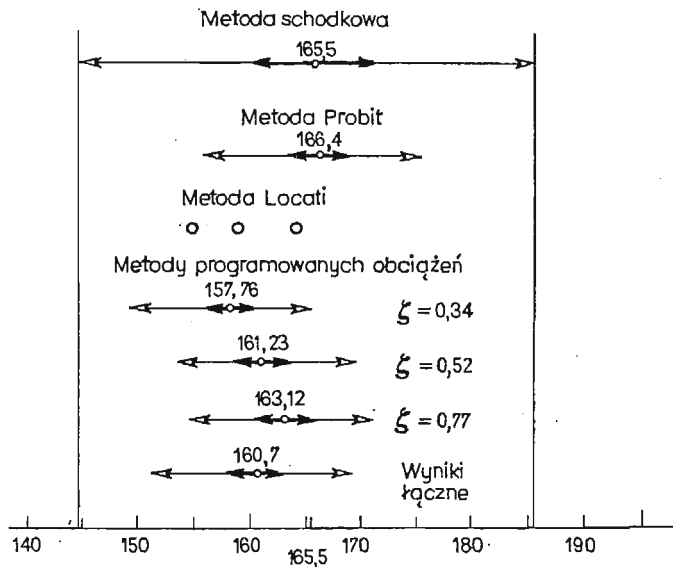
Szeroki zakres wyników badań programowanych umożliwia dokonanie analizy wpływu różnorodnych czynników związanych z obciążeniem na dokładność oceny parametrów rozkładu granicy zmęczenia a przede wszystkim wpływu:

- poziomu naprężeń maksymalnych w programie $\sigma_{amax} = \sigma_{a1}$,
- współczynnika wypełnienia widma (programu) ζ ,
- postaci programu (sekwencji obciążeń).

Przed analizą wpływu wymienionych czynników należy dokonać oceny metod schodkowej i Probit stanowiących podstawę porównań wyników badań granicy zmęczenia.

4.1. Uwagi o wynikach badań metodą schodkową i Probit. Badania zmęczeniowe według wymienionych metod prowadzi się na kilku wybranych poziomach wokół prawdopodobnej granicy zmęczenia. Na poziomach tych część próbek (lub elementów konstrukcyjnych) ulega zniszczeniu, część nie ulega zniszczeniu. Wymaga to przeprowadzenia większej liczby prób (ponad 20), ponieważ pęknięcie lub nie pęknięcie próbki na wybranym poziomie wskazuje na to, w którym kierunku (niższych lub wyższych naprężeń) leży granica zmęczenia, natomiast nie wskazuje jej wartości. Metody Locati i proponowana, oparta na programowanych badaniach, daje pojedynczy wynik z każdej indywidualnej próby, a zatem może być ograniczona ich liczba.

Porównanie parametrów rozkładu granicy zmęczenia według wzorów Dixona-Mooda w metodzie schodkowej i według metody Probit wskazuje, że wartości średnie granicy zmęczenia są praktycznie jednakowe (165,5 i 165,8 MPa), natomiast odchylenia standardowe różnią się istotnie (10,3 i 6,0 MPa). W wielu badaniach prowadzonych przez autora na elementach konstrukcyjnych zróżnicowanych pod względem kształtu, wymiarów i materiału potwierdzono wymienione spostrzeżenie. Z porównywanych metod dokład-



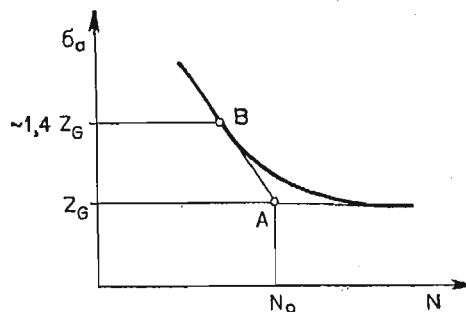
Rys. 8. Graficzne przedstawienie przedziałów ufności dla granicy zmęczenia wyznaczonej różnymi metodami

niejszą w ocenie odchylenia standardowego jest metoda Probit (w przypadku prawidłowo przeprowadzonego doświadczenia). Można z łatwością zauważyć, że wyznaczone według metody schodkowej podwójne odchylenie standardowe jest większe od rozpiętości (rozrzutu) wyników badań.

Szerokości przedziałów ufności (na poziomie 0,95) dla wartości średniej (grube strzałki) i pojedynczych wyników (cienkie strzałki) dla granicy zmęczenia wyznaczonej metodą schodkową i Probit oznaczono na rys. 8. Przedziały te stanowią tło wyników badań programowanych i badań metodą Locati.

4.2. Analiza wyników programowanych badań.

a. Wpływ poziomu naprężeń maksymalnych w programie. Programowane badania zmęczeniowe przeprowadzono na kilku poziomach naprężeń maksymalnych w programie w zakresie od 205—365 MPa co w odniesieniu do granicy zmęczenia daje zakres (1,2—2,2) Z_G . Na poszczególnych poziomach badano 4 lub 8 próbek. Średnie wartości granicy zmęczenia na poszczególnych poziomach σ_{amax} w różnym stopniu odbiegają od wyznaczonej metodą schodkową i Probit. Mniejsze różnice otrzymano dla wyższych poziomów naprężeń σ_{amax} . W przypadku programu I i $\zeta = 0,34$ badania na poziomie $\sigma_{amax} = 205$ MPa nie dały rezultatów (nieprawdopodobnie niska wartość granicy zmęczenia), stąd w pozostałych programach dla $\zeta = 0,34$ nie obliczano granicy zmęczenia, ponieważ badania te zostały przeprowadzone z podobnymi rezultatami. Na tak niskich poziomach σ_{amax} w obliczaniu sum uszkodzeń uwzględnia się nieliczne najwyższe poziomy naprężeń (1 do 3) dlatego obliczenia granicy zmęczenia są niedokładne. Główną jednakże przyczyną wspomnianej niedokładności jest to, że wykresy zmęczeniowe, jak już wspomniano w p. 1 w obszarze granicy zmęczenia nie są linią łamaną. Wykres w zakresie ograniczonej do zakresu nieograniczonej trwałości przechodzi łagodnym łukiem (rys. 9) z punktu B o rzęd-



Rys. 9. Schematyczny przebieg wykresu zmęczeniowego w obszarze granicy zmęczenia

nej około 1,4 Z_G [9] i [11]. W analizie niezgodności hipotezy Palmgren-Minera z wynikami badań [10] wykazano, że uwzględnienie tego przejścia łukiem istotnie wpływa na zmniejszenie wspomnianej niezgodności.

Różnice pomiędzy granicą zmęczenia wyznaczoną metodami schodkową i Probit, a wyznaczoną w programowanych badaniach przy wysokich naprężeniach σ_{amax} (np. $\sigma_{amax} = 365$ MPa, $\zeta = 0,34$ tab. 3) wynikają z małej liczby powtórzeń programu do znisz-

czenia zmęczeniowego próbki. Mała liczba powtórzeń programu λ prowadzi do niedokładnej oceny trwałości N_c stanowiącej podstawę wyznaczania granicy zmęczenia Z_G (w przytoczonym przykładzie — duży rozrzut przy małej liczbie wyników).

b. Wpływ stopnia wypełnienia programu ζ . Porównując dane zawarte w tablicach 3 i 4, stwierdzić można, że dokładności w wyznaczaniu granicy zmęczenia sprzyjają wyniki badań programowanych z rosnącą wartością współczynnika wypełniania ζ . Najbliższe wynikom otrzymanym według metod schodkowej i Probit są wyniki programowanych badań z zastosowaniem programów obciążeń o współczynniku $\zeta = 0,77$, niezależnie od poziomu naprężeń maksymalnych w programie σ_{amax} . Jest to zgodne z wnioskami zawartymi w pracy [10], w której wykazano, że dla wysokich wartości współczynnika ζ zachodzi wyższa zgodność hipotezy Palmgren-Minera z wynikami badań. Podkreślić należy, że program obciążeń w metodzie Locati posiada współczynnik wypełnienia $\zeta > 0,5$ (zbliżony do 0,56).

c. Wpływ postaci programu. Programowane badania zmęczeniowe prowadzi się z zastosowaniem programów o różnej sekwencji poziomów naprężenia. Omówione do tej pory zagadnienia dotyczyły badań z zastosowaniem programu o nieregularnym następstwie stopni. Celem umożliwienia przeprowadzenia analizy wpływu postaci programu (sekwencji obciążenia i liczby cykli na poszczególnych poziomach) wyznaczono granice zmęczenia dla programów o sekwencji: stopniowo rosnących naprężeń ($Lo-Hi$) najbardziej zbliżonej do programu obciążeń metody Locati, stopniowo rosnących następnie malejących naprężeń ($Lo-Hi-Lo$) oraz pseudolosowego następstwa amplitud (PR), w którym liczba cykli na i -tym poziomie dążyła do 1,0. Wszystkie programy posiadały $\zeta = 0,34$. Z danych zawartych w tablicy 5 wynika, że wpływ postaci programu na wartość średnią granicy zmęczenia oraz odchylenie standardowe (za wyjątkiem poziomu $\sigma_{amax} = 365$ MPa) jest mały. Z porównania tego wyniku, że nie ma potrzeby ograniczania liczby cykli w okresie programu poniżej ogólnych zaleceń dla programowanych badań zmęczeniowych [9].

4.3. Analiza statystyczna wyników badań. Analiza statystyczna obejmowała wyznaczenie wartości średniej, i odchylenia standardowego i przedziałów ufności dla granicy zmęczenia wyznaczonej w określonych warunkach programowanych badań oraz badania istotności różnic tych parametrów w stosunku do wartości odniesienia otrzymanych według metod schodkowej i Probit. Na rys. 8, na tle przedziałów ufności dla wyników otrzymanych metodą schodkową i Probit naniesiono wyniki badań według metody Locati i wyniki programowanych badań zmęczeniowych (program I) dla poszczególnych wartości współczynnika ζ oraz wszystkich wyników programowanych badań według programu I łącznie. Wartości średnie i odchylenia standardowe granicy zmęczenia dla poszczególnych programów zestawiono w tablicy 6.

Z danych zawartych w tablicy 6 i na rys. 8 wynika, że wszystkie wyniki badań (według metod: Probit, Locati i programowanych obciążeń) mieszczą się w przedziale ufności wyznaczonym metodą schodkową.

Analiza statystyczna wyników badań dotyczyła oceny:

- typu rozkładu,
- istotności różnic średnich wartości granicy zmęczenia,
- istotności różnic wariancji.

Tablica 6. Zestawienie danych statystycznych

Lp.	Opis programu (sekwencja, ζ)	Liczba próbek n	\bar{Z}_G [MPa]	s [MPa]	Przedział ufności dla	
					średniej	pojedynczych wyników
1	2	3	4	5	6	7
1	I, 0,34	20	158,0	4,2	(156; 160)	(149; 167)
2	I, 0,56	20	161,2	3,8	(159,3; 163,1)	(152,5 170)
3	I, 0,77	20	163,1	4,7	(161,2; 165,1)	(154,4; 171,9)
4	Lo-Hi, 0,34	20	158,2	5,1	(155,84; 160,64)	(147,52; 168,96)
5	Lo-Hi-Lo, 0,34	20	159,6	6,8	(156,43; 162,85)	(145,37; 173,91)
6	PR, 0,34	20	155,3	4,4	(153,22; 157,38)	(146,05; 164,55)

Z analizy tej wynika, że we wszystkich przypadkach (dane Z_{G1} zawarte w tablicach 3, 4 i 5) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o rozkładzie normalnym granicy zmęczenia. W analizie zastosowano test zgodności χ^2 .

W analizie statystycznej dotyczącej średnich wartości stawiano hipotezę zerową o równości średnich \bar{Z}_G z programowanych badań ze średnią otrzymaną według metody schodkowej i metody Probit. W pierwszym przypadku uzyskano negatywny wynik testu dla zbiorów danych ($\zeta = 0,34$, I — dane z tab. 3, $\zeta = 0,34$, Lo-Hi — dane z tab. 5, kol. 4, oraz dla $\zeta = 0,34$, PR — dane z tab. 5, kol. 10). Z porównania do wyników otrzymanych w metodzie Probit, tylko w przypadku programu: $\zeta = 0,77$, I — dane z tablicy 4, kol. 7.

Podobne porównanie wariancji wyznaczonych zbiorów danych wykazało, że negatywny wynik otrzymano we wszystkich przypadkach programowanych badań w porównaniu z metodą schodkową, natomiast w porównaniu z metodą Probit jedynie w przypadku programu $\zeta = 0,56$, I — dane z kol. 7, tablicy 4.

Negatywny wynik testów statystycznych w odniesieniu do średniej świadczy, że wyznaczona w programowanych badaniach zmęczeniowych wartość granicy zmęczenia jest mniejsza od wyznaczonej metodą schodkową i Probit. Natomiast w przypadku wariancji — wskazuje na istotnie większą wartość odchylenia standardowego wyznaczonego metodą schodkową.

4.4. Przybliżona ocena skrócenia czasu badań. Przy założeniu tej samej częstotliwości f obciążeń czas na wyznaczenie granicy zmęczenia metodą programowanych badań wynosi:

$$T_p = \frac{1}{f} \sum_j^{n_p} N_c.$$

Dla programu I, $\zeta = 0,77$, $\sigma_{max} = 324$ MPa i $n_p = 4$ próbki (dane z tablicy 4) otrzymuje się:

$$T = \frac{1}{f} 26 \cdot 10^4 \text{ s.}$$

Natomiast rozkład granicy zmęczenia wyznaczony metodą schodkową według schematu na rys. 3 wynosi dla $n_s = 27$ próbek około

$$T_s \cong n_s N_G \frac{1}{f} = \frac{1}{f} 27 \cdot 5 \cdot 10^6.$$

Czas na badania metodą schodkową jest kilkaset razy większy

$$\frac{T_s}{T_p} \cong \frac{27 \cdot 5 \cdot 10^6}{26 \cdot 10^4} \cong 5 \cdot 10^2.$$

Podany przykład jest oczywiście orientacyjną oceną skrócenia czasu badań, który zależy od liczby badanych próbek, zarówno n_p , jak i n_s , wartości σ_{amax} i ζ w programie. Z danych zawartych w tablicach 3 i 4 wynika jednakże, że szczególnie wartość odchylenia standardowego dla wszystkich serii badań szybko się ustala (np. porównując przypadki $n_p = 4$ i $n_p = 8$ dla programów I) natomiast w metodach schodkowej i Probit liczba tych prób dla podobnej oceny wynosi ponad 25.

Oceniając czas próby metodą Locati dla tej samej liczby próbek (dla danych z rys. 5) otrzymujemy, że jest on około

$$\frac{T_p^L}{T_p} \cong \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^5}{26 \cdot 10^4} \cong 12$$

razy dłuższy od czasu programowanych badań przyjętych w programie.

5. Wnioski

- a. Analiza wyników badań wykazała możliwość zastosowania programowanych badań zmęczeniowych do wyznaczania granicy zmęczenia próbek i elementów konstrukcyjnych przy spełnieniu określonych warunków.
- b. Dokładność oceny granicy zmęczenia (odniesiona do dokładnych metod: schodkowej i Probit) rośnie w miarę wzrostu wartości współczynnika wypełnienia widma oraz dla programów obciążeń, w których $\sigma_{amax} \geq 1,4 Z_G$.
- c. Stwierdzone w badaniach istotne różnice w wartościach granicy zmęczenia dotyczą jej wartości średniej, nie stwierdzono natomiast istotnych różnic w wartościach odchylenia standardowego.
- d. Dokładność oceny granicy zmęczenia wyznaczonej metodą programowanych badań jest porównywalna z oceną według metody Locati.
- e. W wyniku przeprowadzonej analizy nie stwierdzono istotnego wpływu postaci programu (sekwencji obciążeń i liczby cykli na poszczególnych poziomach naprężeń) na wartość granicy zmęczenia.
- f. Istotną zaletą proponowanej metody jest skrócenie czasu badań w wyniku realizacji mniejszej liczby cykli dla osiągnięcia wyniku niż graniczna liczba N_G oraz badanie mniejszej liczby próbek niezbędnych do wyznaczania parametrów rozkładu granicy zmęczenia.

6. Podsumowanie

Możliwość oceny rozkładu granicy zmęczenia na podstawie programowanych badań zmęczeniowych istotnie poszerza zakres ich zastosowań. Umożliwia wykorzystanie maszyn do badań zmęczeniowych z programowanym obciążeniem. W przypadku programowanych badań realizowanych dla oceny eksploatacyjnej trwałości zmęczeniowej, możliwość jednoczesnej oceny granicy zmęczenia sprzyja dokonaniu zmian konstrukcyjnych w zakresie wymiarów, doboru materiału i technologii wykonania elementów konstrukcyjnych. Wyznaczone rozkłady granicy zmęczenia umożliwiają stosowanie probabilistycznych metod obliczeń zmęczeniowych, a niższy (w stosunku do metod dokładnych) koszt tych badań ma istotne znaczenie w nowych konstrukcjach przy konieczności weryfikacji większej liczby wersji.

Z przeprowadzonej analizy wynikają proste zalecenia dla realizacji omawianych badań. Jeśli inne względy nie ograniczają swobody doboru programu należy stosować programy o dużych wartościach współczynnika wypełnienia widma $\zeta \geq 0,5$ oraz o istotnie większych od przewidywanej granicy zmęczenia wartości maksymalnych naprężeń w programie $\sigma_{amax} \geq 1,4 Z_G$. Dobór przybliżonych wykresów zmęczeniowych do obliczeń sum uszkodzeń wpływa w niniejszym stopniu na dokładność oceny granicy zmęczenia. Położenie tych wykresów można korygować w trakcie obliczeń tak aby punkt G na rys. 2 leżał pomiędzy skrajnymi punktami a i c , lub w ich pobliżu. Uwagę tę łatwo wykazać analizując wpływ położenia wykresów na rys. 1a (np. linie d i e) na przebieg wykresu do interpolacyjnego wyznaczania granicy zmęczenia (położenie punktów d i e) na rys. 2. Przyjmując wykresy b , c i d na rys. 1a punkt G leży poza punktami b , c i d na rys. 2, co obniża dokładność wyznaczenia granicy zmęczenia Z_G .

Ogólnie należy stwierdzić, że proponowana metoda wyznaczania rozkładu granicy zmęczenia nie zastępuje metod: schodkowej i Probit, a stanowi ich uzupełnienie podobnie jak znana metoda Locati.

Literatura

1. W. MAENNIG, *Vergleichende Untersuchung über die Eignung der Treppenstufen Methode zur Berechnung der Dauerschwingfestigkeit*, Materialprüfung, 1, 1971, ss. 6 - 11.
2. S. KOCANĀDA, J. SZALA, *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*, PWN, Warszawa, 1985.
3. W. MAENNIG, *Statistical Planning and Evaluation of Fatigue tests. A survey of Recent Results*, International Journal of Fracture, 1, 1975.
4. W. MAENNIG, *Das Abgrenzungsverfahren, eine Kostensparende Methode zur Ermittlung von Schwingfestigkeitswerten-Theorie Praxis und Erfahrungen*, Materialprüfung, 8, 1977, ss. 280 - 289.
5. И. В. Кудрявцев, *Два замечания по методике испытаниям металлов на усталость*, Заводская Лаборатория, 9, 1978.
6. J. HAJDUK, *Przyspieszone metody wyznaczania parametrów wytrzymałości zmęczeniowej*, Przegląd Mechaniczny, 17, 1970.
7. Государственный Стандарт Союза СССР, Надежность изделий машиностроения, Ускоренная оценка пределов выносливости методом ступенчатого нагружения, ГОСТ 19533 - 74
8. R. LEHMAN, *Über die Gültigkeit der Hypothese der Linearen Schadensakkumulation*, Maschinenbau-technik 5, 1970.
9. J. SZALA, *Ocena trwałości zmęczeniowej elementów maszyn w warunkach obciążeń losowych i progra-*

- mowanych*. Akademia Techniczno-Rolnicza, Zeszyty Naukowe nr 79, Mechanika 22, Bydgoszcz, 1980.
10. J. SZALA, *Hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych — wybrane zagadnienia*, Prace Wydziału Nauk Technicznych Bydgoskiego Towarzystwa Naukowego, Zeszyt Naukowy Nr 15, Warszawa—Poznań, PWN, 1985.
11. W. WEIBULL, *Fatigue Testing and Analysis of Results*, Pergamon Press, 1961.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММИРОВАННЫХ УСТАЛОСТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРЕДЕЛА УСТАЛОСТИ

В статье представлено возможность применения программированных усталостных исследований к приближенному определению предела усталости.

Предлагаемый метод, как метод Локати, базируется на гипотезе линейного суммирования усталостных повреждений (Пальмгрена — Майнера).

На примере многих результатов усталостных исследований произведено анализ области его применения.

Summary

APPLICATION OF THE PROGRAMMED FATIGUE INVESTIGATION TO THE FATIGUE LIMIT
EVALUATION

A possibility of application of the programmed fatigue investigation to an approximate fatigue limit evaluation is presented in this paper. The proposed method, as the Locati method, is based on the fatigue damage cumulation hypothesis which was formulated by Palmgren and Miner. The analysis of the usefulness of the proposed method and the range of its application based on many fatigue investigation results has been made.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 czerwca 1987 roku.

MINIMALIZACJA ZUŻYCIA PALIWA W LOCIE NA ZADANĄ ODLEGŁOŚĆ

RYSZARD MAROŃSKI

Politechnika Warszawska

Zagadnienie minimalizacji zużycia paliwa przez samolot w locie na zadaną odległość, mimo iż upłynęło wiele lat od jego sformułowania, nie doczekało się, jak dotąd, zadowalającego rozwiązania. W pracy wskazano na podstawową trudność polegającą na tym, że o ile dla założonej stałej wysokości lotu pewne sterowanie z klasy funkcji przedziałami ciągłych może spełniać warunki konieczny i wystarczający optymalności na łuku osobliwym, o tyle dla zmiennej wysokości lotu sterowanie optymalne w podanej klasie funkcji może nie istnieć. W pracy omówiono niektóre pojęcia teorii sterowania optymalnego, dokonano przeglądu stosowanych modeli ruchu samolotu i na tym tle wskazano, na podstawie cytowanej literatury, główne kierunki poszukiwań rozwiązania zadania.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- A — punkt początkowy,
- B — punkt końcowy,
- C_x — współczynnik oporu aerodynamicznego,
- C_{x0} — współczynnik oporu aerodynamicznego przy zerowej sile nośnej,
- C_z — współczynnik siły nośnej,
- E — energia właściwa samolotu, (energia przypadająca na jednostkę ciężaru)
- g — przyspieszenie ziemskie,
- H — hamiltonian,
- h — wysokość lotu samolotu,
- J — wskaźnik jakości,
- K — współczynnik w biegunowej samolotu,
- M — masa samolotu,
- m — masa zużytego paliwa,
- P_s — ciąg silnika,
- P_x — opór aerodynamiczny,
- P_z — siła nośna,

- Q — współczynnik jednostkowego zużycia paliwa,
 S — pole powierzchni płata,
 t — czas,
 u — wektor sterujący,
 V — prędkość lotu,
 x — współrzędna poziomego położenia samolotu,
 x — wektor stanu,
 γ — kąt toru lotu,
 η — współczynnik wykorzystania ciągu ($P_s = \eta P_{smax}$),
 λ — wektor sprzężony,
 ρ — gęstość powietrza,
 ω — funkcja fundamentalna rozwiązania.

Znaczenie indeksów:

- $(\cdot)_{max}$ — wartość maksymalna,
 $(\cdot)_{min}$ — wartość minimalna,
 $(\cdot)_{mo}$ — wartość odpowiadająca minimalnemu oporowi,
 $(:)$ — pochodna względem czasu,
 $(\cdot)'$ — pochodna,
 $(\cdot)^T$ — transpozycja wektora.

1. Wprowadzenie

Rozważmy następujące zagadnienie. Samolot porusza się w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni Ziemi. Rozpoczyna swój ruch w zadanym punkcie płaszczyzny i ma osiągnąć inny zadany punkt w taki sposób, aby zużyć najmniej paliwa. Czas przelotu nie jest z góry zadany. Jak widać sformułowanie problemu na tym etapie jest mało precyzyjne. Jego uściślenie może nastąpić dopiero po dokonaniu wyboru modelu ruchu samolotu. Omówieniu stosowanych modeli ruchu poświęcono rozdział trzeci niniejszego opracowania, przedtem jednak (w rozdziale drugim) omówiono wybrane pojęcia teorii sterowania optymalnego. W rozdziale czwartym pokazano, dla tego samego modelu ruchu samolotu, ale przy różnych założeniach odnośnie stałości wysokości lotu, że rozwiązanie zadania może bądź zawierać łuki osobliwe, bądź w ogóle nie istnieć w klasie sterowań przedziałami ciągłych. Rozdział piąty zawiera krótkie omówienie wyników otrzymanych przez innych autorów.

2. Wybrane pojęcia teorii sterowania optymalnego

Najprostsze zadanie rachunku wariacyjnego sformułowane jest w następujący sposób: poszukiwana jest taka krzywa opisana funkcją $y(x)$ przechodząca przez wybrane punkty A i B , minimalizująca całkowity wskaźnik jakości (funkcjonał):

$$J = \int_A^B f_0(x, y, y') dx, \quad (1)$$

w którym $f_0(x, y, y')$ jest znaną funkcją swoich argumentów. Funkcję $y(x)$ można wyznaczyć rozwiązując równanie Eulera-Lagrange'a [3, 4]:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f_0}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f_0}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

z warunkami brzegowymi:

$$y(x_A) = y_A, \quad y(x_B) = y_B. \quad (3)$$

Warunek (2) jest warunkiem koniecznym ekstremum, a otrzymywany jest z przyrównania do zera wariacji funkcjonału (1). Równanie (2) jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zatem jego rozwiązanie zawiera dwie stałe dowolne, które mogą być wyznaczone z warunków brzegowych (3).

W szczególnym przypadku podanego zagadnienia, gdy funkcjonał jest liniowy ze względu na pochodną y' :

$$J = \int_A^B [\varphi(x, y) + y' \psi(x, y)] dx, \quad (4)$$

równanie Eulera-Lagrange'a degeneruje się do następującego równania algebraicznego:

$$\omega(x, y) = 0, \quad (5)$$

gdzie:

$$\omega(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (6)$$

Funkcja $\omega(x, y)$ nazywa się funkcją fundamentalną rozwiązania [11], zaś krzywa $y(x)$ będąca rozwiązaniem równania (5) nazywa się łukiem osobliwym (singular arc). Na ogół nie jest ona rozwiązaniem postawionego zadania, gdyż nie zawiera stałych dowolnych pozwalających na spełnienie warunków (3). Dalszą konsekwencją jest również to, że inne warunki konieczne nie zachowują tradycyjnej postaci.

Klasyczny rachunek wariacyjny nie uwzględnia ograniczeń nałożonych na pochodną $u = y'$, to jest ograniczeń:

$$u_{min} \leq u \leq u_{max}. \quad (7)$$

Ich uwzględnienie można uznać za istotny wkład współczesnej teorii sterowania optymalnego. Dołączenie ograniczeń (7) do zagadnienia opisanego funkcjonałem (4) z warunkami brzegowymi (3) w istotny sposób zmienia możliwość jego rozwiązania. Zdegenerowane równanie Eulera-Lagrange'a (5) jest warunkiem koniecznym optimum jedynie dla tej części krzywej $y(x)$, dla której ograniczenia (7) nie są aktywne, to znaczy:

$$u_{min} < u < u_{max}. \quad (8)$$

Możliwe jest zatem osiągnięcie punktów A i B ekstremali dla $u = u_{min}$ lub $u = u_{max}$.

Oryginalną, bo nie nawiązującą do metodyki rachunku wariacyjnego, metodę rozwiązania zagadnienia z funkcjonałem liniowym ze względu na y' , podał i zastosował do szeregu

przypadków Miele. Metoda ta daje warunki konieczny i wystarczający optymalności, dlatego też zostanie tu przytoczona.

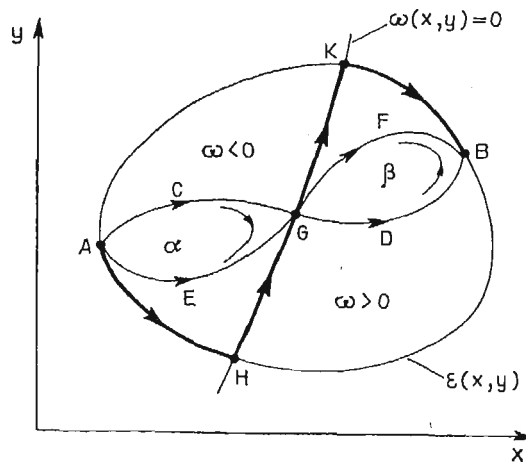
Założmy, że wszystkie rozwiązania dopuszczalne zadania zawierają się we wnętrzu krzywej domkniętej:

$$\varepsilon(x, y) = 0 \quad (9)$$

oraz, że punkty początkowy A i końcowy B leżą na tej krzywej

$$\varepsilon(x_A, y_A) = 0, \quad \varepsilon(x_B, y_B) = 0. \quad (10)$$

Założmy ponadto, że krzywa $\omega(x, y) = 0$ dzieli ten obszar na dwa podobszary, w których znak ω jest określony, na przykład taki jak na rysunku 1. Obliczmy teraz różnicę wartości



Rys. 1. Obszar rozwiązań dopuszczalnych (AHGKB — krzywa minimalizująca funkcjonal)

funkcjonału (4) dla dwóch arbitralnie wybranych trajektorii $ACGDB$ i $AEGFB$ łączących punkty A i B :

$$\begin{aligned} J_{ACGDB} - J_{AEGFB} &= \int_{ACGDB} \varphi dx + \psi dy - \int_{AEGFB} \varphi dx + \psi dy = \\ &= \oint_{ACGEA} \varphi dx + \psi dy + \oint_{GDBFG} \varphi dx + \psi dy, \end{aligned} \quad (11)$$

skąd, po zastosowaniu twierdzenia Greena otrzymamy:

$$J_{ACGDB} - J_{AEGFB} = - \iint_{\alpha} \omega dx dy + \iint_{\beta} \omega dx dy, \quad (12)$$

dzie ω ane jest związkem (6), zaś α i β oznaczają obszary ograniczone odpowiednio krzywymi $ACGEA$ i $GDBFG$. Jeżeli w obszarze α $\omega < 0$, zaś w obszarze β $\omega > 0$, to wówczas:

$$J_{ACGDB} > J_{AEGFB}. \quad (13)$$

Ze względu na to, że obie krzywe $ACGDB$ i $AEGFB$ można wybrać dowolnie, to można powiedzieć, że krzywa $AHGKB$ minimalizuje funkcjonał (4). Szczegóły dotyczące innych przypadków znajdują się w pracy [11].

W teorii sterowania optymalnego zadanie minimalizacji funkcjonału sformułowane jest w sposób następujący: poszukujemy w klasie funkcji przedziałami ciągłych takiego wektora sterowania $u(t)$

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}, \quad (14)$$

aby całkowity wskaźnik jakości:

$$J = \int_{t_A}^{t_B} f_0(x, u, t) dt \quad (15)$$

przy ograniczeniach w postaci równań stanu

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (16)$$

i zadanych warunkach brzegowych, osiągał minimum. Do wyznaczenia sterowania optymalnego u^* można posłużyć się warunkiem koniecznym minimum funkcjonału — zasadą maksimum Pontriagina. W tym celu należy poszukać sterowania maksymalizującego hamiltonian zadania:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \arg \max_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} H(x, u, \lambda, t) = \\ &= \arg \max_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} [-f_0(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Wektor λ nazywany jest wektorem sprzężonym z wektorem stanu x , albo inaczej wektorem mnożników Lagrange'a. Spełnia on równanie:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (18)$$

(Ze względu na oczywiste podobieństwo do równań mechaniki analitycznej równania stanu (16) i sprzężone (18) nazywane są także równaniami kanonicznymi Hamiltona). Rozwiązanie zadania sterowania optymalnego polega na rozwiązaniu zagadnienia brzegowego dla równań stanu (16) i równań sprzężonych (18) przy sterowaniu wyznaczonym związkami (17). We wnętrzu zbioru sterowań dopuszczalnych związkowi (17) odpowiadają warunki:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0. \quad (19)$$

Pierwszy z nich, po rozwikłaniu ze względu na wektor sterowania, pozwala zwykle na wyznaczenie sterowania optymalnego u^* , drugi zaś oznacza, że macierz drugich pochodnych hamiltonianu względem wektora sterowania ma być ujemnie określona. Jest to tak zwany silny warunek Legendre'a-Clebscha. Jeżeli macierz ta jest ujemnie półokreślona to mówimy, że spełniony jest słaby warunek Legendre'a-Clebscha.

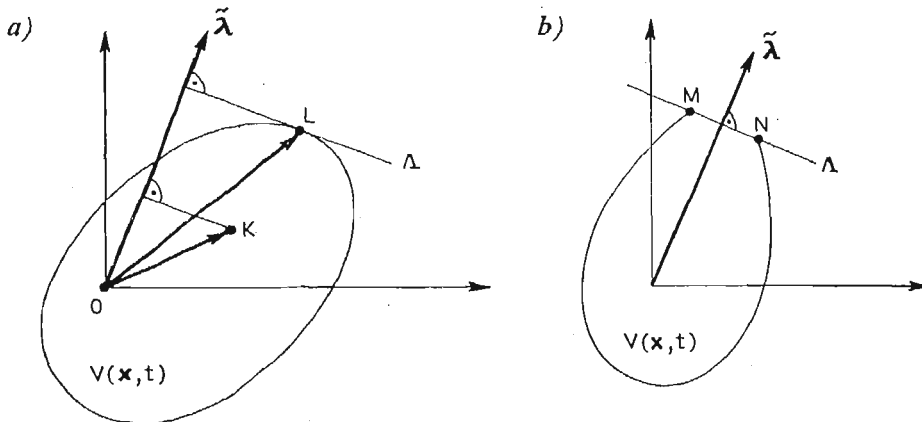
Postać zasady maksimum danej związkami (17) pozwala na następującą interpretację geometryczną [12, 18]. Utwórzmy zbiór prędkości uogólnionych:

$$V(x, t) = \{f(x, u, t), f_0(x, u, t): u \in \langle u_{min}, u_{max} \rangle\}, \quad (20)$$

jako zbiór miejsc geometrycznych końca wektora $\{f(x, u, t), f_0(x, u, t)\}$ przy ustalonych x i t , podczas gdy u zmienia się wewnątrz całego zbioru sterowań dopuszczalnych $\langle u_{min}, u_{max} \rangle$. Zasada maksimum wyraża żądanie, aby w każdej chwili czasu rzut wektora \vec{OK} na kierunek rozszerzonego wektora sprzężonego $\tilde{\lambda} = \{\lambda, -1\}$ był maksymalny (punkt L na rys. 2a). Punkt L odpowiadający rozwiązaniu optymalnemu może być interpretowany jako punkt wspólny hiperpłaszczyzny Λ stycznej do zbioru prędkości uogólnionych i tego zbioru. Wektor sprzężony $\tilde{\lambda}$ jest wtedy wektorem normalnym do tej hiperpłaszczyzny.

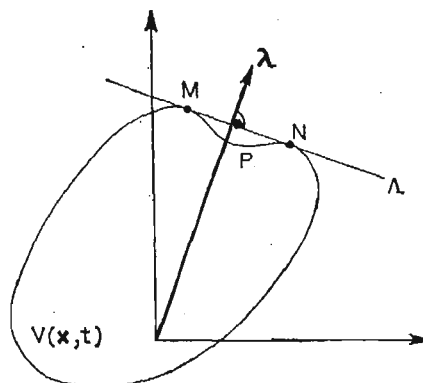
Rozważmy następujące sytuacje:

1° — Zbiór prędkości uogólnionych V jest wypukły i ma on z hiperpłaszczyzną Λ w danej chwili czasu jeden punkt wspólny. Rozwiązaniu optymalnemu odpowiada punkt L wykresu (rys. 2a).



Rys. 2. Wypukły zbiór prędkości uogólnionych

2° — Zbiór prędkości uogólnionych V jest wypukły i ma on z hiperpłaszczyzną Λ nieskończenie wiele punktów wspólnych. Niech V_{Λ} oznacza przecięcie zbiorów V i Λ (na rys. 2b odcinek MN). V_{Λ} jest zbiorem wypukłym z założenia wypukłości zbioru V . Żaden punkt



Rys. 3. Niewypukły zbiór prędkości uogólnionych

zbioru V_A nie jest wyróżniony — zasada maksimum w swojej podstawowej wersji zawodzi. Sterowanie odpowiadające punktom zbioru V_A jest osobliwe.

3° — Zbiór prędkości uogólnionych V nie jest wypukły (na rys. 3 krzywa MPN), wówczas można go uczynić wypukłym w sposób sztuczny zastępując ten zbiór najmniejszym zbiorem wypukłym go zawierającym (odcinek MN na rys. 3). Może wówczas dojść do pojedynczego przełączenia sterowania pomiędzy punktami M i N , może być jednak wygenerowany stan należący do owego uzupełnienia zbioru, który sam do zbioru V nie należy, a otrzymywany jest w wyniku nieskończonej częstoty przełączeń sterowania pomiędzy punktami zbioru V (punktami M i N na rys. 3). Sterowanie odpowiadające takiej sytuacji będziemy nazywali sterowaniem uogólnionym (chattering control).

Przytoczone przykłady wskazują, że istotną ze względu na istnienie rozwiązania w klasie sterowań przedziałami ciągłych własnością zadania jest wypukłość zbioru prędkości uogólnionych. Faktycznie znajduje to potwierdzenie w twierdzeniu egzystencjalnym (porównaj [8], str. 284). Rozwiązanie zadania istnieje również w przypadku szczególnym, gdy hamiltonian liniowo zależy od sterowania (porównaj [8], str. 288).

Jeżeli hamiltonian jest liniowo zależny od sterowania, to na łuku osobliwym (przypadek 2°) pochodna hamiltonianu względem sterowania znika tożsamościowo. Istotnie, rozważmy funkcjonał w postaci (4), to jest:

$$J = \int_{t_A}^{t_B} [\varphi(t, x) + \psi(t, x)u] dt, \quad (21)$$

z następującym równaniem stanu:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = u. \quad (22)$$

Hamiltonian ma wtedy postać:

$$H = -\varphi(t, x) - \psi(t, x)u + \lambda u. \quad (23)$$

Dla zmiennej sprzężonej:

$$\lambda = \psi(t, x) \quad (24)$$

hamiltonian nie zależy od sterowania (jego pochodna względem sterowania znika) Po wykorzystaniu (22) otrzymujemy następującą zależność:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} u. \quad (25)$$

Zmienna sprzężona λ spełnia również równanie (18):

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} u. \quad (26)$$

Odejmując stronami równania (25) i (26) mamy:

$$\omega(t, x) = \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad (27)$$

czyli otrzymaliśmy równanie łuku osobliwego (porównaj (5)).

Sterowanie na łuku osobliwym, dla hamiltonianu liniowo zależnego od sterowania, można wyznaczyć z warunku, że $\partial H/\partial u$ jest tożsamościowo równe zero. Otrzymujemy wtedy ciąg warunków (porównaj [12, 20]):

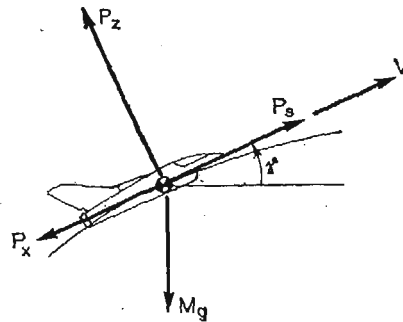
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0, \dots \quad (28)$$

Mimo, że w pierwszym warunku (28) pochodna $\partial H/\partial u$ nie zależy od sterowania, to zależy od (x, λ, t) , a zatem jej kolejne pochodne względem czasu mogą jawnie zawierać sterowanie poprzez związki (16) i (18). Należy jednak pamiętać, że na łuku osobliwym warunek konieczny Legendre'a-Clebscha spełniony jest jedynie w słabej postaci, dlatego trzeba go badać oddzielnie (porównaj [12, 18]).

3. Modele ruchu samolotu

W niniejszym rozdziale przedstawiono stosowany przez autora [9] model ruchu samolotu traktowanego jak punkt materialny oraz pokazano przy jakich dodatkowych założeniach upraszczających można z tego modelu otrzymać model najprostszy, tak zwany model energetyczny [13]. Wszystkie modele ruchu badane w cytowanej literaturze mieszczą się w podanym przedziale, chociaż, z uwagi na różnorodność założeń upraszczających poczynionych przez ich autorów, trudno omawiać każdy z nich oddzielnie. Model energetyczny będzie natomiast wykorzystany w rozdziale 4.

Zakładamy, że samolot ma stałe zachowaną równowagę momentów podłużnych i jest traktowany jak punkt materialny poruszający się w płaszczyźnie pionowej względem płaskiej powierzchni nieruchomej Ziemi. Zakładamy ponadto, że wektory ciągu P_s oraz prędkości lotu V są współliniowe. Siły działające na samolot przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Siły działające na samolot

Z twierdzenia o pochodnej pędu względem czasu otrzymujemy (porównaj [9]):

$$M \frac{dV}{dt} = \eta P_{smax} - P_x - Mg \sin \gamma, \quad (29)$$

$$MV \frac{d\gamma}{dt} = P_z - Mg \cos \gamma. \quad (30)$$

Powyższy układ równań uzupełniają dwa związki kinematyczne:

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma, \quad (31)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma, \quad (32)$$

oraz zakładając, że zmiana masy następuje tylko w wyniku spalania paliwa, równanie zmiany masy samolotu:

$$\frac{dM}{dt} = -\eta Q. \quad (33)$$

Siła nośna P_z i opór P_x są funkcjami prędkości V , wysokości lotu h oraz kąta natarcia, a współczynnik jednostkowego zużycia paliwa Q zależy od prędkości i wysokości lotu.

Równania (29)÷(33) tworzą układ równań stanu (16). Zmiennymi stanu są wielkości stojące pod znakiem pochodnej, zaś zmiennymi sterującymi te wielkości, które nie dadzą się wyrazić jako funkcje zmiennych stanu i czasu. Wskaźnikiem jakości jest masa zużytego paliwa w chwili końcowej $m(t_B)$, gdzie:

$$m(t) = \int_{t_A}^t \eta Q dt; \quad m(t_A) = 0. \quad (34)$$

Zamiast tego związku wygodniej posługiwać się równaniem:

$$\frac{dm}{dt} = \eta Q, \quad (35)$$

z warunkiem początkowym $m(t_A) = 0$. (Zachodzi oczywisty związek między masą samolotu M a masą zużytego paliwa m : $M(t) = M(t_A) - m(t)$).

W sformułowanym zadaniu zmienne stanu w chwili początkowej t_A są określone, natomiast w chwili końcowej t_B mogą być ustalone lub dowolne. Zasięg lotu ($x_B - x_A$) jest zadany, czas przelotu ($t_B - t_A$) nie jest z góry znany i wynika z rozwiązania zadania. Z uwagi na to, że równania stanu są autonomiczne, zaś całkowanie równań różniczkowych najlepiej przeprowadzać w znanym przedziale zmiennej niezależnej, zamiast czasu t wprowadza się zwykle nową zmienną niezależną x wykorzystując równanie (32). (Zagadnieniem analogicznym do rozważanego jest zadanie maksymalizacji zasięgu lotu, wówczas wygodnie jest za zmienną niezależną uważać zużyte paliwo, którego ilość przeznaczona na przelot jest z góry znana).

Uprościmy teraz równania ruchu samolotu (29)÷(33) otrzymując tak zwany model energetyczny. Wprowadzamy w tym celu nową zmienną stanu — energię właściwą samolotu określoną związkiem

$$E = h + \frac{V^2}{2g}. \quad (36)$$

Różniczkując ten związek względem czasu, po uwzględnieniu (31) mamy:

$$\frac{dE}{dt} = V \sin \gamma + \frac{V}{g} \frac{dV}{dt}. \quad (37)$$

Po wyznaczeniu z tego równania dV/dt i wstawieniu do równania (29) otrzymujemy:

$$\frac{Mg}{V} \left(\frac{dE}{dt} - V \sin \gamma \right) = \eta P_{smax} - P_x - Mg \sin \gamma, \quad (38)$$

skąd:

$$\frac{dE}{dt} = (\eta P_{smax} - P_x) \frac{V}{Mg}. \quad (39)$$

Jest to najprostsze równanie różniczkowe opisujące dynamikę samolotu. Wyraża ono fakt, że różnica mocy dostarczanej do układu i mocy traconej na skutek dyssypacji jest równa przyrostowi energii tego układu, stąd też nazwa modelu opisywanego tym równaniem — model energetyczny. Ruch samolotu opisany jest wtedy równaniami (39), (36) oraz związkami otrzymanymi z zależności (30) i (32) przy założeniu, że $d\gamma/dt \approx 0$ i, że kąt pochylenia trajektorii γ jest mały:

$$P_z = Mg, \quad (40)$$

$$\frac{dx}{dt} = V. \quad (41)$$

Energetyczny model ruchu samolotu nie wymaga aby prędkość V i wysokość lotu h były ciągłymi funkcjami czasu. Obie te funkcje mogą doznawać nieciągłości pod warunkiem, że energia właściwa E jest ciągłą funkcją czasu. Własność ta odgrywa istotną rolę w zagadnieniu rozpędzania z jednoczesnym nabieraniem wysokości [13].

4. Rozwiązanie zadania dla modelu energetycznego

Celem niniejszego rozdziału jest pokazanie, że dla energetycznego modelu ruchu samolotu przy założeniu stałej wysokości lotu można względnie prosto otrzymać rozwiązanie optymalne metodą Mielego. Rozwiązanie to zawiera łuk osobliwy odpowiadający lotowi ustalonymu, co jest zgodne z intuicją i praktyką. Odstąpienie od założenia o stałej wysokości lotu prowadzi do zaskakującego wniosku. Nie tylko otrzymane poprzednio rozwiązanie nie jest optymalne, rozwiązanie zadania może w ogóle nie istnieć w klasie sterowań przedziałami ciągłych.

Przy założeniu, że lot samolotu o stałej masie M odbywa się na stałej wysokości ($h = \text{const.}$) równania (39) i (35) po wykorzystaniu (41) przybierają postacie:

$$\frac{dV}{dx} = (\eta P_{smax} - P_x) / MV, \quad (42)$$

$$\frac{dm}{dx} = \eta Q / V. \quad (43)$$

Zagadnienie minimalizacji zużycia paliwa, dla zadanych warunków brzegowych:

$$E(x_A) = E_A, \quad E(x_B) = E_B, \quad m(x_A) = 0, \quad (44)$$

można sprowadzić do zagadnienia minimalizacji całki liniowej:

$$m(x_B) = \int_A^B \frac{\eta Q}{V} dx = \int_A^B \psi(V) dV + \varphi(V) dx, \quad (45)$$

gdzie funkcje $\psi(V)$ i $\varphi(V)$ można określić wyznaczając η ze wzoru (42), wtedy:

$$\psi(V) = \frac{Q(V)M}{P_{smax}}, \quad \varphi(V) = \frac{Q(V)P_x(V)}{VP_{smax}}. \quad (46)$$

Postać funkcjonału (45) jest analogiczna do postaci danej wzorem (4). Przyjmując, że biegunowa samolotu dana jest w klasyczny sposób:

$$C_x = C_{x0} + KC_z^2, \quad (47)$$

po wykorzystaniu (40) z drugiego warunku (46) otrzymujemy:

$$\varphi(V) = \frac{QC_1 V}{P_{smax}} + \frac{QC_2}{P_{smax} V^3}, \quad (48)$$

gdzie:

$$C_1 = 0.5\rho SC_{x0}, \quad C_2 = \frac{2M^2 g^2 K}{\rho S}. \quad (49)$$

Przy założeniu, że P_{smax} , Q , C_1 , C_2 nie zależą od prędkości lotu, funkcja fundamentalna rozwiązania (6) ma postać:

$$\omega(x, V) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial V} = -\frac{QC_1}{P_{smax}} + \frac{3QC_2}{P_{smax} V^4}. \quad (50)$$

Po przyrównaniu jej do zera otrzymujemy rozwiązanie optymalne na łuku osobliwym

$$V = \sqrt[4]{\frac{3C_2}{C_1}} = const. \quad (51)$$

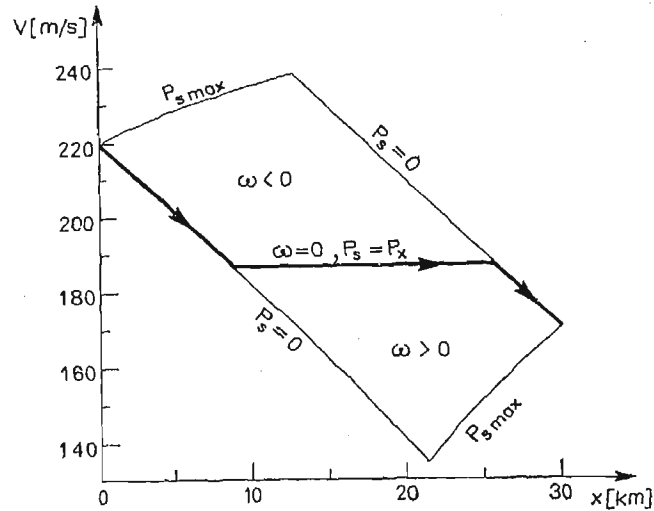
Z powyższego warunku oraz z równania (42) wynika, że na łuku osobliwym trajektorii optymalnej ciąg pośredni silnika stale równoważy opór aerodynamiczny samolotu:

$$P_s = P_{smax} \eta = P_x. \quad (52)$$

Granice obszaru rozwiązań dopuszczalnych na płaszczyźnie (x, V) wyznaczają krzywe poprowadzone z punktów początkowego i końcowego, a otrzymane ze scałkowania równania (42) dla $\eta = 0$ i $\eta = 1$.

Przykładowe rozwiązanie zagadnienia dla samolotu klasy TU-134A zawiera rys. 5. Składa się ono z trzech odcinków: skrajnych, na których ciąg jest minimalny $P_s = 0$ i środkowego, gdzie ciąg ma wartość pośrednią.

Odstąpienie od założenia o stałej wysokości lotu prowadzi do istotnych komplikacji. Metody Mielego nie można zastosować, co więcej, nabiera znaczenia kwestia istnienia rozwiązania w klasie sterowań przedziałami ciągłych. Twierdzenie egzystencjalne (patrz [8] str. 284) wymaga bowiem, aby zbiór prędkości uogólnionych był wypukły. Dla energetycznego modelu ruchu samolotu warunek ten nie jest spełniony, na co zwrócono uwagę w pracy [19].



Rys. 5. Rozwiązanie zagadnienia dla stałej wysokości lotu

Pokażemy teraz, że uzyskane poprzednio sterowanie, w przypadku gdy wysokość lotu może być zmienna, nie jest optymalne. Lepsze od niego jest sterowanie uogólnione.

Rozważmy ruch samolotu opisany modelem energetycznym. Równania tego modelu po zmianie zmiennej niezależnej, są następujące (porównaj związki (39), (35), (40), (41), (36)):

$$\frac{dE}{dx} = E' = (\eta P_{smax} - P_x) / Mg, \quad (53)$$

$$\frac{dm}{dx} = m' = \eta Q / V, \quad (54)$$

$$P_z = Mg, \quad (55)$$

$$E = h + \frac{V^2}{2g}. \quad (56)$$

Minimalizowana jest masa zużytego paliwa $m(x_B)$ przy warunkach brzegowych (44), przy czym dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że:

$$E(x_A) = E(x_B) = E_0. \quad (57)$$

Biegunowa samolotu opisana jest zależnością (47), zaś o wielkościach P_{smax} , Q , ρ , C_{x0} , K , podobnie jak poprzednio zakładamy, że są stałe. Dokonamy zamiany zmiennych w podany w pracy [6] sposób:

$$\hat{E} = E(P_z/P_x)_{max}, \quad (58)$$

$$\hat{m} = mV_{mo}P/Q, \quad (59)$$

gdzie $(P_z/P_x)_{max}$ jest doskonałością maksymalną przy spełnionym warunku (55):

$$(P_z/P_x)_{max} = Mg/P_{xmo}, \quad (60)$$

P_{xmo} jest minimalnym oporem przy spełnionym warunku (55), V_{mo} jest prędkością lotu przy jakiej występuje opór minimalny P_{xmo} zaś $p = P_{smax}/P_{xmo}$. Po wykonaniu prostych przekształceń równania (53), (54) przybierają postacie:

$$\hat{E}' = \eta p - \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right), \quad (61)$$

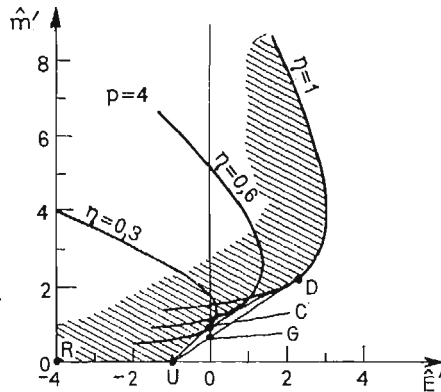
$$\hat{m}' = \eta p / u, \quad (62)$$

gdzie u jest prędkością bezwymiarową $u = V/V_{mo}$. Po wyeliminowaniu u z równań (61) i (62) mamy:

$$\hat{E}' = \sigma - 0.5[(\sigma/\hat{m}')^2 + (\hat{m}'/\sigma)^2] = f(\hat{m}', \sigma), \quad (63)$$

gdzie $\sigma = \eta p$ ($0 \leq \sigma \leq p$).

Dla wybranego samolotu i ustalonych współczynników wykorzystania ciągu $\eta \in \langle 0, 1 \rangle$ równanie (63) przedstawia rodzinę krzywych pokazanych na rys. 6. Zakreskowana



Rys. 6. Dyskusja rozwiązania zagadnienia dla zmiennej wysokości lotu

część wykresu reprezentuje zbiór prędkości uogólnionych. Równanie (63) nie zależy od czasu ani od współrzędnej poziomego położenia samolotu x , zatem otrzymany z niego wykres jest słuszny w różnych chwilach czasu. Odcinek RU wykresu odpowiada lotowi szybowemu, gdyż dla $\hat{m}' = 0$ z równania (62) wynika, że $\eta = 0$. Punkt U o współrzędnych $(-1, 0)$ odpowiada lotowi szybowemu na takim kącie natarcia, że opór jest minimalny, wtedy z równania (61) wynika, że $u = 1$. Krzywa UCD jest obwiednią rodziny krzywych danych równaniem (63), przy czym σ zmienia się od 0 do p . Dla typowych samolotów zbiór prędkości uogólnionych (zakreskowany obszar na rys. 6) nie jest wypukły, co pociąga za sobą istotne następstwa. Lot ustalony $\hat{E}' = 0$ spełnia warunki brzegowe $E(x_A) = E(x_B)$ — odpowiada mu punkt C wykresu. Punkt G pozwala jednak na zmniejszenie zużycia paliwa, gdyż odpowiadająca mu wartość \hat{m}' (a więc ilość zużytego paliwa na jednostkę odległości) jest mniejsza. Sterowanie odpowiadające temu stanowi może być wygenerowane w wyniku nieskończonej liczby przełączeń ciągu pomiędzy punktami U ($\eta = 0$) i D ($\eta = 1$), zatem lot ustalony dla przyjętego modelu ruchu samolotu nie jest optymalny, co więcej optymalne sterowanie ciągiem może nie należeć do klasy funkcji przedziałami ciągłych.

5. Uwagi o rozwiązaniach zadania

Przedstawiony w rozdziale 4 przykład wskazuje na to, że do zadania minimalizacji zużycia paliwa należy podchodzić dość ostrożnie. Znajduje to odzwierciedlenie w cytowanych opracowaniach tematu. Dość wcześnie zauważono bowiem, że rozwiązanie zadania powinno uwzględniać łuki osobliwe, gdyż występowały one w podobnych zagadnieniach dotyczących lotu raket w atmosferze. Zadania takie z powodzeniem rozwiązywał Miele opracowaną przez siebie metodą już pod koniec lat pięćdziesiątych (prace te zostały zebrane w publikacji [11]). Metoda ta, choć bardzo skuteczna, stosunkowo rzadko może być stosowana, gdyż dotyczy jedynie funkcjonalów w postaci (4). Dopiero rozwój metod współczesnej teorii sterowania optymalnego dostarczył narzędzi pozwalających na dalsze badanie problemu. Już w 1971 roku podano wynik badania zbioru prędkości uogólnionych dla energetycznego modelu ruchu samolotu F4 [19]. Zbiór ten nie jest wypukły, a co z tego wynika, lot ustalony nie jest optymalny. Lepszy od niego jest lot ze sterowaniem uogólnionym ciągiem. Jedynie dla dystansów lotu na tyle krótkich aby lot ustalony w ogóle nie występował, optymalna trajektoria składa się ze wznoszenia na pełnym ciągu i lotu szybowego. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że sterowanie przełączne o częstości przełączeń na tyle dużej, aby można je było uznać za przybliżenie sterowania uogólnionego, nie jest realizowalne praktycznie. Zmiana obrotów współczesnego silnika lotniczego wymaga kilkunastu sekund, nie mówiąc już o kwestiach trwałości sprzętu i komfortu lotu. Te względy zapewne sprawiły, że autorzy opracowania [19] w dalszych swoich pracach poszukiwali takiego modelu ruchu samolotu, dla którego trajektoria optymalna byłaby zbliżona do stosowanej w praktyce. W artykule [14], dla energetycznego modelu ruchu wzbogaconego o równanie (31), pokazali oni, że sterowanie pośrednie ciągiem dla warunków lotu ustalonego może być optymalne na łuku osobliwym. Sterowanie to spełnia wówczas warunki (28). Powyższy rezultat został podważony przez Speyera [16], który wykazał, że rozwiązanie ustalone nie spełnia warunków koniecznych Legendre'a-Clebscha. W kolejnym artykule polemicznym [15] Schultz pokazał, że dla modelu ruchu z pracy [14] wzbogaconego o równanie (30) sterowanie na łuku osobliwym, odpowiadające warunkom lotu ustalonego, spełnia warunki Legendre'a-Clebscha. Jednakże i ten rezultat został podważony. W artykule [17] Speyer wykazał, że dla przyjętego przez Schultza modelu ruchu samolotu lot ustalony nie jest optymalny dla dostatecznie długich czasów lotu (powyżej 2.8 min.). Warunek konieczny Jacobiego nie jest wtedy spełniony. Speyer wykluczył również sterowanie uogólnione jako nie optymalne. Mimo, iż cytowana praca nie zawiera metody wyznaczenia sterowania optymalnego, jej autor pokazał, że sterowanie okresowe ciągiem i siłą nośną powoduje zmniejszenie wskaźnika jakości w porównaniu z lotem ustalonym. Zysk ten nie jest jednak duży, nie przekracza bowiem pół procenta. Tak więc poszukiwania modelu ruchu samolotu, dla którego lot ustalony okazałby się optymalny nie zakończyły się, jak dotąd, powodzeniem.

Wydaje się, że prace dotyczące sformułowanego zadania można podzielić na dwie główne grupy:

- pierwsza, stara się oszacować ile można zaoszczędzić paliwa stosując sterowanie uogólnione lub sterowanie okresowe [5, 6, 17]:
- druga, kierując się względami praktycznymi, poszukuje rozwiązań suboptymal-

nych otrzymanych w wyniku założenia, że rozwiązanie istnieje w klasie sterowań przedziałami ciągłych z uwzględnieniem łuków osobliwych [9] (co w świetle przytoczonych rozważań nie jest zupełnie pewne), bądź założeń równoważnych: o stałości kąta natarcia [7], o stałości wysokości lotu [1] lub o równości oporu aerodynamicznego i ciągu [2] na odcinku trajektorii odpowiadającym lotowi ustalonemu.

Jeżeli idzie o pierwszą grupę prac to najpełniejsze oszacowanie oszczędności zużycia paliwa dla modelu energetycznego można znaleźć w pracy [6]. Sterowanie uogólnione w porównaniu ze sterowaniem odpowiadającym lotowi ustalonemu daje oszczędności zależne od parametru $p = P_{smax}/P_{xmo}$ i są one tym większe im większy jest ten stosunek (a więc dla samolotów o dużym nadmiarze ciągu w lotach na niewielkich wysokościach). W skrajnych przypadkach, dla nowo projektowanych samolotów, zysk ten może sięgać 30%. Dla istniejących samolotów w lotach na dużych wysokościach zysk ten nie przekracza kilku procent, co jest wielkością porównywalną z błędami wskaźnika jakości wynikającymi z uproszczeń modelowych.

Jeśli idzie o drugą grupę prac to na uwagę zasługuje praca [1] ze względu na prostotę stosowanej tam metody, a co za tym idzie, na szybkość wykonywania obliczeń, co w zastosowaniach praktycznych ma istotne znaczenie [10].

6. Uwagi końcowe

W pracy pokazano, że dla tego samego energetycznego modelu ruchu samolotu, ale przy różnych założeniach odnośnie stałości wysokości lotu, rozwiązania zadania minimalizacji zużycia paliwa mogą być jakościowo różne. Przy założeniu, że lot odbywa się na stałej wysokości, rozwiązanie ustalone ($V = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$) spełnia warunki konieczny i wystarczający optymalności, wynik ten jest zgodny zarówno z twierdzeniem egzystencjalnym (patrz [8], str. 288) jak i z intuicją. Próba uogólnienia otrzymanego wyniku na przypadek zmiennej wysokości lotu może prowadzić do błędu, gdyż nie są spełnione założenia twierdzenia egzystencjalnego o wypukłości zbioru prędkości uogólnionych (patrz [8], str. 284). Sterowanie uogólnione jest wtedy lepsze od sterowania ustalonego, co nie jest zgodne ani z intuicją, ani ze stosowaną praktyką. Bardziej złożone modele ruchu samolotu wymagają dalszych badań charakteru rozwiązania zadania.

Literatura

1. J. F. BARMAN, H. ERZBERGER, *Fixed-Range Optimum Trajectories for Short-Haul Aircraft*, J. of Aircraft, Vol. 13, No. 10, Oct. 1972.
2. A. J. CALISE, *Extended Energy Management Methods for Flight Performance Optimization*, AIAA Journal, Vol. 15, No. 3, March 1977.
3. L. E. ELSGOLC, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1960.
4. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1972.
5. E. G. GILBERT, M. G. PERSONS, *Periodic Control and the Optimality of Aircraft Cruise*, J. of Aircraft, Vol. 13, No. 10, Oct. 1976.
6. S. C. HOULIHAN, E. M. CLIFF, H. J. KELLEY, *Study of Chattering Cruise*, J. of Aircraft, Vol. 19, No. 2, Feb. 1982.

7. E. LARGE, *Minimum Fuel Paths for a Subsonic Aircraft*, J. of Aircraft, Vol. 18, No. 5, May 1981.
8. E. B. LEE, L. MARKUS, *Foundations of Optimal Control Theory* (wydanie rosyjskie), Nauka, Moskwa 1972.
9. R. MAROŃSKI, W. ŁUCJANEK, *Optymalizacja trajektorii samolotu w locie na zadaną odległość*, Archiwum Budowy Maszyn, Tom XXVI, zeszyt 2, 1979.
10. R. MAROŃSKI, *Praktyczne wyznaczanie optymalnych warunków lotu samolotu*, Materiały XXV Symp. „Modelowanie w Mechanice”, Kudowa marzec 1986.
11. A. MIELE, *Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem*, w zbiorze Leitman G. (editor): Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems, Academic Press, New York 1962.
12. H. M. ROBBINS, *A Generalized Legendre-Clebsch Condition for the Singular Cases of Optimal Control*, IBM Journal, July 1967.
13. E. S. RUTOWSKI, *Energy Approach to the General Aircraft Performance Problem*, J. of Aeronautical Sciences, March 1954.
14. R. L. SCHULTZ, N. R. ZAGALSKY, *Aircraft Performance Optimization*, J. of Aircraft, Vol. 9, No. 2, Feb. 1972.
15. R. L. SCHULTZ, *Fuel Optimality of Cruise*, J. of Aircraft, Vol. 11, No. 9, Sept. 1974.
16. J. L. SPEYER, *On the Fuel Optimality of Cruise*, J. of Aircraft, Vol. 10, No. 12, Dec. 1973.
17. J. L. SPEYER, *Nonoptimality of the Steady-State Cruise for Aircraft*, AIAA Journal, Vol. 14, No. 11, Nov. 1976.
18. N. X. VINH, *Optimal Trajectories in Atmospheric Flight*, Elsevier, Amsterdam 1981.
19. N. R. ZAGALSKY, R. P. IRONS, R. L. SCHULTZ, *Energy State Approximation and Minimum-Fuel Fixed-Range Trajectories*, J. of Aircraft, Vol. 8, No. 6, June 1971.
20. В. Т. Злацкий, Б. Н. Кифоренко, *Оптимальные траектории с сингулярными дугами*, Автоматика и Телемеханика, 12, 1974.

Р е з ю м е

МИНИМАЛИЗАЦИЯ РАСХОДА ТОПЛИВА В ПОЛЁТЕ ПО ЗАДАННОМ РАССТОЯНИИ

Задача минимализации расхода топлива самолёта в полёте по заданному расстоянию, хотя прошло много лет от её формулировки, не нашла до сих пор удовлетворительного решения. В статье показано, что основная трудность заключается в том, что если для определённой постоянной высоты полёта определённое управление из класса кусочно непрерывных функции может выполнять конечные и необходимые условия оптимальности на сингулярной дуге, то для переменной высоты полёта оптимальное управление в этой классе может не существовать. В статье дается обзор некоторых понятий теории оптимального управления, а также обзор применяемых моделей движения самолёта. На этом фоне указано, на основе цитированной литературы, основное направление решения задачи.

S u m m a r y

MINIMIZATION OF FUEL CONSUMPTION DURING FLIGHT ON A GIVEN DISTANCE

The problem of minimum fuel consumption by the aircraft for a given distance flight has been considered for years in many papers, however, the satisfactory solution of that problem has not been found yet.

In the paper it has been shown, that the solutions for control in the form of piecewise functions exist only for the flights of constant altitude, but may not exist for the more general cases. Some concepts of optimal control theory are also discussed, models of aircraft motion are reviewed and, on the base of cited references, basic directions of conducting the research are pointed out.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 września 1987 roku.

BIULETYN INFORMACYJNY

Międzynarodowa Konferencja
„Measurements of Static and Dynamic Parameters
of Structures and Materials”
Pilzno (Czechosłowacja), 26—29 maja 1987 r.

Konferencja została zorganizowana przez Czechosłowacką grupę Komitetu Technicznego TC 15 Międzynarodowego Stowarzyszenia Metod Pomiarowych (IMECO — International Measurement Confederation). Główną osobą w komitecie organizacyjnym był doc. dr Jan Javornicky, znany z prac w dziedzinie elastoptyki, który niestety zmarł 2 maja, na kilka tygodni przed rozpoczęciem Konferencji. Obrady otwarte zostały przypomnieniem tego wybitnego badacza, który także w Polsce miał wielu przyjaciół.

Konferencja znalazła oparcie materialne w Zakładach „Škoda” a pół dnia przerwy w obradach poświęcono na interesujące zwiedzanie laboratoriów badawczych i wytwórni konstrukcji stalowych, należących do tego koncernu. Również wybór miejsca Konferencji — Pilzno — był podyktowany związkami organizatorów z Zakładami „Škoda”, których tematyka badawcza pojawiła się także w kilku referatach.

W konferencji uczestniczyło 210 osób, w tym 58 z kilkunastu krajów poza Czechosłowacją. Z Polski przyjechało 9 osób. Udział wielu znanych specjalistów w dziedzinie badania naprężeń i odkształceń wpłynął na wysoki poziom części referatów i na wartościowe dyskusje. Można tu m.in. wymienić takie osoby, jak H. Aben z Tallina (Estonia), J. W. Dally z Maryland (USA), K. H. Laermann z Wuppertal (RFN), A. Lagarde z Poitiers (Francja), C. A. Sciammarella z Chicago (USA), P. Stanley z Manchester (Wlk. Brytania) i P. S. Theocaris z Aten (Grecja).

Szczególnie nowoczesne metody i ważne wyniki zawierały referaty dotyczące m. in. zaawansowanych metod badań elastoptycznych, zastosowań techniki laserowej, mechaniki pęknięcia i pomiarów zjawisk dynamicznych. Badacze z Czechosłowacji przedstawili szeroki wachlarz stosowanych metod i podejmowanych zagadnień, w wielu przypadkach ściśle związanych z budowanymi konstrukcjami inżynierskimi i urządzeniami mechanicznymi.

Uczestnicy z Polski przedstawili również kilka interesujących referatów.

Obrady prowadzono w dwóch równoległych salach, a oprócz referatów plenarnych zorganizowano także dwie sesje plakatowe, które spotkały się z dużym zainteresowaniem. Dyskusje obok kilku plansz były żywe i zapewne pomogły do nawiązania kontaktów osobistych, a ta forma przedstawiania prac okazała się owocna.

Po obradach organizatorzy przewidzieli udany program spotkań towarzyskich, połączonych m. in. ze zwiedzaniem pięknego rejonu wokół Pilzna.

Uczestnicy dostali dwa tomy materiałów konferencyjnych, w których zamieszczono obszernie streszczenia lub pełne referaty w postaci nadesłanej przez autorów.

Konferencja w Pilźnie została sprawnie zorganizowana, a poziom większości referatów był dobry.

A. M. Brandt

I-sza Konferencja Mechaniki
Praga, 29.6—3.7.1987

Konferencja o pełnej nazwie „Wyniki badań naukowych i osiągnięcia wielostronnej współpracy naukowej Akademii Nauk Krajów Socjalistycznych” została zorganizowana przez Instytut Teoretycznej i Stosowanej Mechaniki Czechosłowackiej Akademii Nauk, w ramach udziału Czechosłowackiej Akademii

Nauk w pracach Komisji Problemowej Wielostronnej Współpracy Akademii Nauk Krajów Socjalistycznych — „Naukowe podstawy mechaniki maszyn, konstrukcji i procesów technologicznych”. W dalszym ciągu tytułu konferencji wyjaśniono, że tematem mają być wyniki i perspektywy wspólnych badań w Akademii Nauk krajów socjalistycznych.

Udział w obradach wzięło około 500 osób, w tym 340 z Czechosłowacji. Tematyka Konferencji objęła bardzo szeroki zakres, który podzielono na następujące działy:

- 1A Teoria mechaniki i mechanizmów,
- 1B Drgania układów mechanicznych,
- 1C Mechanika układów dyskretnych ciał stałych,
- 2A Mechanika ciał odkształcalnych i systemów,
- 2B Mechanika zniszczenia i trwałości konstrukcji,
- 2C Rozprzestrzenianie się fal w ciałach stałych w stanach granicznych zniszczeń z uwzględnieniem zagadnień stateczności,
- 3 Mechanika struktur materiałowych,
4. Geomechanika,
5. Biomechanika,
- 6 Hydromechanika układów cieczy newtonowskich,
7. Hydromechanika cieczy anomalnych i układów cieczy,
- 8 Dynamika gazów i układy polifazowe, wymiana ciepła i masy,
- 9 Turbulencja i warstwy przyścienne,
- 10 Automatyzacja metod badawczych w mechanice.

Obrady prowadzone były w wielu salach równolegle oprócz referatów plenarnych, podczas których zorganizowano tłumaczenia na języki czeski, rosyjski i angielski. Odbyły się także sesje plakatowe.

Materiały Konferencji wydane zostały w postaci 8 tomów o łącznej objętości ponad 2000 stron. W wydawnictwie tym umieszczono 366 Czechosłowackich i 445 zagranicznych referatów lub streszczeń.

Dzień wolny od obrad poświęcono na wycieczki do laboratorium badań mechanicznych Zakładów Škoda w Pilźnie i na zamek Karlsztejn. W tym dniu odbyło się także posiedzenie Komisji Problemowej oraz zebrania dwóch zespołów tematycznych (Grup Roboczych) — „Mechanika gruntów i górotworu” i „Hydromechanika”. Odbyło się także posiedzenie Komitetu redakcyjnego wspólnego czasopisma Akademii Nauk Krajów Socjalistycznych — „Uspěchi Mechaniki” — *Advances in Mechanics*.

Sekretarzem Komitetu Organizacyjnego był Docent Dr Jan Javornický, znany badacz w dziedzinie elastooptyki. Niestety zmarł on 2 maja br, na krótko przed rozpoczęciem obrad Konferencji, której poświęcił wiele wysiłku w ciągu ostatniego roku swego życia.

Podczas obrad plenarnych warto wyróżnić m. in. wykład Akademika G. G. Czornego (ZSRR) na temat zastosowania technologii wybuchowych w przemyśle i budownictwie oraz Prof. dr Adama Borkowskiego (Polska) o kształceniu w dziedzinie mechaniki. Również wiele interesujących wykładów przedstawiono w poszczególnych działach.

Poziom referatów przy tak znacznej ich liczbie był nierówny. Wydaje się, że organizatorzy nie stawiali zbyt ostrych kryteriów przy przyjmowaniu prac, stąd niektóre wystąpienia miały charakter przyczynkowy, a inne przedstawiane były w tak krótkim czasie, że wobec braku tłumaczeń na sekcjach trudno było docenić ich wartość.

Zamierzenia Konferencji zostały niewątpliwie pomyślnie zrealizowane w sensie spotkania badaczy z krajów socjalistycznych, których rzadko widuje się na zebraniach międzynarodowych i wydrukowania wielkiej liczby ich referatów, co z pewnością pomoże w dalszych kontaktach. Dyskusyjna jest natomiast kwestia organizowania oddzielnych spotkań w dziedzinie mechaniki, z których wyłączeni są badacze z innych krajów. Ponieważ obrady i wykłady tak plenarne, jak i w sekcjach, nie dotyczyły spraw organizacyjnych ani koordynacji badań w krajach socjalistycznych, to uczestnictwo osób z innych krajów mogłoby wpłynąć jedynie na wartość referatów i dyskusji.

Dyskusje przewidziane jako spotkania „okrągłego stołu” nie spełniły oczekiwań, gdyż zastąpione zostały paroma przydługimi wystąpieniami o treści zawierającej ogólnie znane stwierdzenia lub dezycydujące. Rola dyskusji została niedoceniona przez organizatorów Konferencji. Nie było na nie czasu także po wykładach plenarnych i podczas obrad w sekcjach.

Konferencja miała niejako podwójny charakter, stanowiła bowiem również krajowy kongres mechaników. Spośród 21 referatów sekcyjnych — 18 zostało wygłoszonych przez gospodarzy, podobnie na 253 komunikaty — 186 pochodziło z CSRS. Odwrotna proporcja miała miejsce dla sesji plakatowych — na 70 komunikatów jedynie 13 było z Czechosłowacji.

Kwestia celowości organizowania podobnych spotkań w przyszłości, jak również ich formuła będą omawiane na najbliższym posiedzeniu Komisji Problemowej. Konferencja wykazała w sposób bardzo widoczny, jak wiele jest jeszcze do zrobienia w dziedzinie współpracy między placówkami badawczymi i poszczególnymi zespołami w krajach socjalistycznych. Nie przedstawiono, jak się wydaje, ani jednej pracy autorów z dwóch lub więcej krajów. Brakuje również choćby informacji wzajemnej w postaci np. kalendarza organizowanych spotkań w dziedzinie mechaniki.

Powyższe uwagi nie umniejszają w żadnym stopniu wartości Konferencji i wydanych materiałów, a wysiłek organizatorów kierowanych przez Prof. J. Nemeca uwieńczony został pełnym powodzeniem.

A. Blinowski

A. M. Brandt

**Międzynarodowa Konferencja
„Composite Structures 4”
Paisley (Szkocja), 27—29 lipca 1987 r.**

Czwarta Międzynarodowa Konferencja na temat konstrukcji kompozytowych została zorganizowana w Paisley College of Technology, podobnie jak poprzednie w latach 1981, 1983 i 1985 przy udziale Scottish Development Agency i National Engineering Laboratory, a także innych instytucji patronujących i wspomagających finansowo. Głównym organizatorem jest dr Ian H. Marshall, a konferencje te są już uznanym miejscem wymiany informacji w skali światowej w dziedzinie materiałów i konstrukcji kompozytowych.

Dwa referaty plenarne poprzedziły zebrania w sesjach specjalistycznych. Pierwszy z nich wygłoszony przez A. W. Leissa z Ohio State University (USA) obejmował przegląd problemów związanych z analizą i projektowaniem płyt kompozytowych, podlegających wyboczeniu. Autor zajął się płytami o rozmaitych strukturach wewnętrznych i różnych rodzajach anizotropii oraz uwzględnił niektóre zjawiska, komplikujące stan naprężeń i odkształceń, jak wpływ otworów, efektów lokalnych, nieliniowości. Również zostały omówione zjawiska po wystąpieniu wyboczenia.

Drugi referat plenarny przedstawił C. W. Bert z University of Oklahoma (USA), który zajął się najnowszymi wynikami badań w dziedzinie dynamiki konstrukcji kompozytowych. Referat obejmował zagadnienia i rezultaty badań doświadczalnych, ale także prac teoretycznych i numerycznych. Tematyka referatu dotyczyła zjawisk występujących w najróżniejszych konstrukcjach kompozytowych, od raket tenisowych aż do elementów pojazdów kosmicznych i raket bojowych. Oba referaty uzupełnione były obszernymi zestawieniami publikacji z ostatnich paru lat.

Następnie przedstawiono około 90 referatów, podzielonych na 28 grup jednolitych tematycznie i wygłaszanych podczas trzech serii sesji równoczesnych. Dalsze 15 prac pokazano jedynie w postaci plakatów. Podział referatów na krótkie sesje umożliwił zebranie na każdej z nich uczestników istotnie zainteresowanych daną tematyką, co wielokrotnie doprowadziło do rzeczowej wymiany poglądów.

Sesje dotyczące głównie zagadnień konstrukcji kompozytowych objęły m. in. tematykę konstrukcji lotniczych i pojazdów kosmicznych, połączeń elementów nośnych, turbin wiatrowych, rur i naczyń ciśnieniowych, uszkodzeń i optymalizacji.

Pozostałe sesje objęły zagadnienia bardziej związane z materiałami kompozytowymi i dotyczyły: mechaniki pękania i zjawisk występujących podczas zniszczenia, wytwarzania kompozytów, kompozytów o matrycach metalowych, badań nieniszczących, zjawisk termicznych i wpływu czynników zewnętrznych, wreszcie zjawisk dynamicznych, pętzenia i zmęczenia.

Podział między zagadnieniami konstrukcji i materiałów nie był zbyt ostry, co pozwoliło na szersze traktowanie poszczególnych zagadnień. Podczas wielu referatów przedstawiono przykłady udanego stosowania wszechstronnych metod badawczych, teoretycznych i doświadczalnych oraz zastosowań uzyska-

nych wyników. Rozmaitość zagadnień i oryginalność wielu przedstawionych rozwiązań zdecydowały o wysokim poziomie Konferencji.

Trudno jest w krótkim przeglądzie wymienić wszystkie szczególnie interesujące referaty. Według subiektywnej opinii recenzenta na wzmiankę zasługują m. in. prace L. Hollaway'a i A. Thorna na temat badań kompozytowej konstrukcji składanych anten, umieszczanych na statkach kosmicznych, A. J. Arsenaulta o mechanizmie wzmocnienia w kompozytach SiC/Al oraz J. E. Schoutensa o projektowaniu kompozytów z metalowymi matrycami, a także grupa referatów dotyczących zagadnień optymalizacji konstrukcji kompozytowych.

W Konferencji wzięło udział 200 uczestników z 27 krajów, przy czym aż 140 osób przybyło spoza Wielkiej Brytanii. Program techniczny był uzupełniony spotkaniami towarzyskimi, zorganizowanymi przy wykorzystaniu szkockiego folkloru, lecz także mającymi na celu ukazanie lokalnych możliwości badawczych i przemysłowych.

Referaty przyjęte na Konferencji zostały wydrukowane w postaci starannie wydanych dwóch tomów przez Elsevier Applied Science Publishers, dostarczonych uczestnikom przed rozpoczęciem spotkania.

Zarówno przebieg sesji technicznych jak i innych spotkań cechowała niezawodna organizacja i uprzejmość gospodarzy.

A. M. Brandt

I-szy Kongres RILEM
„From Materials Science to Construction Materials Engineering”
Versailles (Francja), 7—11 września 1987 r.

Jest to bardzo charakterystyczne, że I-szy Kongres przypada w 40-tą rocznicę powstania RILEM (Reunion Internationale des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les Matériaux et les Constructions — Międzynarodowe Stowarzyszenie Laboratoriów Badania Materiałów i Konstrukcji). Stowarzyszenie to bowiem jest jednym z najbardziej aktywnych i skutecznie działających, ale jego działalność jest bardziej widoczna w zebraniach komisji roboczych, w publikacji ważnego czasopisma i ogłaszaniu zaleceń metod badania materiałów i konstrukcji, niż w organizowaniu wspaniałych i bogatych kongresów. Również ten Kongres miał raczej charakter roboczy i był skoncentrowany na podstawowych problemach nauki o materiałach i konstrukcjach.

Kongres był zorganizowany przez grupę francuską RILEM pod kierunkiem J. C. Parriaud, a Komitet Naukowy Kongresu kierowany był przez J. C. Maso. Blisko 400 uczestników z 35 krajów spędziło 5 dni obrad w znakomych warunkach Pałacu Kongresów w Wersalu.

Referaty podzielono na trzy sesje równoległe. Były one poprzedzone wprowadzającymi wykładami o tych samych tytułach, wygłoszonymi pierwszego dnia Kongresu:

1. Struktura materiałów i kontrola porowatości. Wpływ procesów na mikrostrukturę materiałów, J. M. Haynes z Uniwersytetu w Bristolu, Anglia.
2. Projektowanie i produkowanie materiałów złożonych, U. Meier z EMPA w Dubendorf, Szwajcaria.
3. Wpływ czasu i otoczenia. Przewidywanie i kontrola nad zjawiskami długotrwałymi w materiałach, S. Saunders z Washington State University, USA.

Inne trzy wykłady zostały przedstawione na zaproszenie organizatorów na początek każdego z kolejnych dni obrad:

1. Materiały bardzo niejednorodne: wpływ skali i prawa zachowania, E. Guyon z Université Paris Sud, Francja.
2. Metody fizyczne identyfikacji mikrostruktury, P. L. Pratt z Imperial College of Science and Technology, Londyn, Anglia.
3. Od nauki o materiałach do inżynierii materiałowej, H. Tavernier z koncernu Saint-Gobain, Francja.

Wykłady te zostały zorganizowane w inny sposób niż zwykle przy takich okazjach. Nie były to bowiem ani raporty o stanie wiedzy w danej dziedzinie, ani sprawozdania z referatów w poszczególnych sesjach. Dotyczyły one nowych dla większości słuchaczy dziedzin nauk podstawowych, z wyjątkiem ostatniego wykładu, który obejmował aktualny przegląd niektórych badań w laboratoriach Saint-Gobain. Wykła-

dowcy przedstawili nowe i niezmiernie interesujące dziedziny, których związek z sesjami polegał na pokazaniu możliwości nauk podstawowych w zastosowaniu do badania i wytwarzania materiałów i konstrukcji. Koncepcja takiego zorganizowania wykładów wstępnych zadecydowała o ogólnym powołaniu Kongresu.

Kolejne sesje zawierały interesujące zbiory referatów i obejmowały przegląd najnowszych badań w wielu laboratoriach na świecie. Długie dyskusje po wielu z nich wskazywały zarówno na zainteresowanie jak i na kompetencję uczestników. Również zorganizowane na zakończenie dyskusje „okrągłego stołu” i przedstawione syntetyczne raporty z sesji były udane.

Udział badaczy z Polski ograniczył się do trzech osób i czterech referatów, zresztą dobrze przyjętych, oraz do współudziału w raporcie z drugiej sesji.

Uczestnicy otrzymali trzy tomy zawierające wszystkie przyjęte referaty. Natomiast wykłady i raporty z sesji będą opublikowane wkrótce w czasopiśmie RILEM.

A. M. Brandt

II Szkoła „Sterowanie w mechanice”

II-ga Szkoła „Sterowanie w mechanice” zorganizowana przez Zarząd Główny PTMITS odbyła się w dniach 21.09 - 26.09.1987 w ośrodku wczasowym kopalni węgla kamiennego Knurów „Buk” w miejscowości Rudy k/Raciborza. Program Szkoły został uaktualniony o pewne nowe problemy sterowania układami mechanicznymi z wykorzystaniem materiałów przygotowanych dla I Szkoły zorganizowanej w roku 1985.

Program II Szkoły „Sterowanie w mechanice”

- Ruch nieswobodny a sterowane układy mechaniczne — Cz. 1 — prof. dr hab. R. Gutowski, mgr inż. E. Jarzębowska

Ruch nieswobodny a sterowane układy mechaniczne — Cz. 2 — dr inż. J. Pietrucha

Zasady wariacyjne w mechanice — doc. dr hab. S. Bednarz

Elementy nowoczesnej teorii sterowania — dr inż. J. Skrzypczyk

Układy mechaniczne celowego działania — prof. dr hab. S. Dubiel

Układy mechaniczne celowego działania — ujęcie stochastyczne — prof. dr hab. B. Skalmierski

Sterowanie więzami ciała odkształcalnego — dr inż. J. Grabacki

Program szkoły wzbogacili trzy wystąpienia:

— prof. dr hab. Roman Gutowski wygłosił okolicznościowy wykład z okazji 300-lecia wydania dzieła I. Newtona „Naturalis Philosophiae Principia Mathematica” pt.: „Izaak Newton — człowiek epoki”,

— prof. dr Jens Wittenburg wygłosił referat pt.: „An application of the Pontriagin maximum principle to the slip motors control”,

— doc. dr hab. Stanisław Kasprzyk wygłosił referat pt.: „Wykorzystanie dystrybucji do badania układów mechanicznych”. Organizacji Szkoły podjął się Komitet Organizacyjny:

Stanisław Dubiel — przewodniczący, Stanisław Bednarz, Roman Gutowski, Bogdan Skalmierski
Józef Wojnarowski, Andrzej Buchacz, Alicja Dźwiarek, Jadwiga Wojda.

Liczba uczestników Szkoły — 32.

Prowadzący zajęcia: autorzy opracowanych działów jak w programie.

Ankieta ekspresowa przeprowadzona wśród uczestników potwierdziła potrzebę prowadzenia szkoły o tematyce zgodnej z programem z rozszerzeniem na tematykę praktyczną (stosowaną). Miejsce szkoły uznano za bardzo dobre.

Każdy z uczestników otrzymał komplet materiałów w formie książki „Sterowanie w mechanice” wydanych w 1985 roku przez Wydział Wydawniczy Wojskowej Akademii Technicznej z materiałami uzupełniającymi program.

Rozszerzony program Szkoły wymagał prowadzenia wykładów na sesjach przedpołudniowych i popołudniowych w ilości 8 - 10 godzin dziennie. Jedynie w dniach 24.09. i 26.09. prowadzono sesje przedpołudniowe zgodnie z opracowanym rozkładem zajęć.

Stanisław Dubiel

**Sesja naukowa z okazji 300-lecia wydania dzieła Newtona
„Philosophiae naturalis principia mathematica”**

W dniach 9 - 10 października 1987 r. Zarząd Główny PTMTS przy współudziale Oddziału Bielskiego zorganizował sesję naukową w celu zaakcentowania znaczenia Principiów Newtona w 300 lat po ich ukazaniu się. Sesję tę, w której wzięło udział 50 uczestników, w tym 6 uczonych z zagranicy, połączono z wręczeniem dyplomów nowych członkom zagranicznym PTMTS: profesorowi Arturowi Berglesowi (Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, USA) i profesorowi Uniwersytetu w Karlsruhe (RFN) Jensowi Wittenburgowi. Dyplomy wręczył prof. Józef Wojnarowski podkreślając znaczące osiągnięcia nowowybranych członków zagranicznych PTMTS w dziedzinie mechaniki i ich rozległe formy współdziałania z nauką polską.

W czasie dwudniowej sesji wygłoszono 16 referatów, w tym 4 referaty uczestników zagranicznych. Sesja była dobrą okazją nie tylko do refleksji nad znaczeniem i wpływem Principiów na rozwój nauk ścisłych, ale także dała asumpt do nowej perspektywy poznawczej w świetle rozwoju mechaniki.

Należy podkreślić, że w obradach wzięli również udział członkowie zagraniczni PTMTS profesorowie Zdenek Sobotka z Pragi i Georg Rieder z Akwizgranu. Gościem PTMTSu był Sekretarz Generalny Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki dr Dobrosław Ruziń.

Sesja odbyła się w Domu Wczasowym Fabryki Samochodów Małolitrażowych „CENTRUM” w Szczyrku, w którym uczestnicy spotkali się z miłym przyjęciem.

Poniżej podajemy tytuły referatów w chronologicznej kolejności ich wygłaszania:

- Józef Wojnarowski — Śladami Newtona,
 Roman Gutowski — Działalność naukowa Newtona ze szczególnym uwzględnieniem jego wpływu na rozwój mechaniki (w zastępstwie wygłosił Stanisław Dubiel),
 Artur Bergles — Enhancement of convective heat transfer — Newton's legacy pursued,
 Jens Wittenburg — Some aspects of dynamics multi-body systems,
 Eugeniusz Brzuchowski — Zasady Newtona w niektórych przypadkach skrajnych,
 Tadeusz Chmielewski — Wybrane problemy inżynierii sejsmicznej,
 Andrzej Olędzki — Znaczenie praw Newtona we współczesnych zagadnieniach techniki,
 Georg Rieder — On analogies, dualities and topological questions between curl (incompatibility and source) force in the statics of electromagnetic mechanic network of continua,
 Czesław Woźniak — O modelowaniu sprężysto-lepko-plastycznych kompozytów,
 Wiesław Nagórko — Podstawy mechaniki Newtona w świetle rozwoju mechaniki,
 Zdenek Sobotka — Parameters of evolution and intrinsic time measures in asymmetric plasticity and rheology (ref. wygłoszony w języku polskim),
 Antoni Jakubowicz — Stan nauki mechaniki w Polsce w XVIII wieku na przykładzie Kolegium Nobilium,
 Marian Kmiecik — Nośność kadłuba okrętu,
 Roman Nagórski — Mechanika ośrodków przeliczalnych,
 Krzysztof Żmijewski — Komputerowa analiza materiałów,
 Alfred Stepiński — Uzupełniona i uogólniona zasada d'Alemberta oraz uzupełnione II i III prawo Newtona jako podstawowe prawa mechaniki klasycznej.

W drugim dniu obrad odbyło się także posiedzenie Prezydium Zarządu Głównego PTMTS.

Józef Wojnarowski

Symposium „Dwuwymiarowe aproksymacje trójwymiarowych zagadnień w teorii sprężystości”

Rzym, 20—22 października 1987 r.

W jednej z historycznych sal pałacu Corsinich, będącego siedzibą Accademia Nazionale Dei Lincei, odbyło się sympozjum pod hasłem podanym powyżej w tytule. W skład komitetu organizacyjnego sympozjum wchodził znani profesorowie: G. Caricato, G. Fichera (przewodniczący), L. Finzi, G. Grioli, T. Manacorda i P. Podio Guidugli. Sympozjum otworzył wiceprezes Akademii wybitny fizyk i uczeń

E. Fermiego profesor S. Amaldi. W obradach uczestniczyło ponad 50 osób. Dwanaście jednogodzinnych wykładów wygłosili profesorowie z Włoch, USA, Holandii, Francji, W. Brytanii i Polski, nie przyjechał zaproszony prof. D. Ieşan z Rumunii. W chronologicznym porządku wygłoszono następujące referaty:

W. T. Koiter (Delft): The theory of thin elastic shells,

I. N. Sneddon (Glasgow) Relations between plane strain problems and axi-symmetric problems in linear elasticity,

E. Sternberg (Pasadena, Caltech): Three-dimensional aspects of the plane problem in linear elastostatics,

P. G. Ciarlet (Paryż): Modelling and mathematical analysis of the junction between a three-dimensional elastic body and an elastic plate,

Z. S. Olesiak: On two and three-dimensional problems of elasticity with thermodiffusive effects,

C. O. Horgan (Michigan State Un.): Exponential decay estimates for the von Kármán plate equations in nonlinear elasticity,

E. Benvenuto (Genoa): Il contributo di Saint-Venant alla teoria molecolare dell'elasticità,

G. Fichera (Rzym): Sforzi elastici piani,

M. Sokolowski (IPPT PAN): Approximate analysis of two-dimensional elastic media containing cylindrical cavities and cracks,

B. Firmani: Il fattore di intensità degli sforzi nello spigolo rientrate di un prisma sottoposto a flessione non uniforme secondo la teoria di Saint-Venant,

E. Sanchez-Palencia (Paryż): Asymptotic and numerical study of some junctions in elasticity,

G. Grioli (Padwa): Il problema di Saint-Venant: confronti con la teoria esatta.

Accademia Dei Lincei jest jedną z najstarszych akademii nauk na świecie i została założona w r. 1603. Lynx, po włosku ryś, miał symbolizować dalekowzroczność i przenikliwość poczytań i wiedzy członków Akademii. Uczonym, który uczynił Akademię sławną był Galileusz — członek tejże od r. 1611. Po długiej przerwie działalność Accademia Dei Lincei została wznowiona w r. 1870. Na Zatybrzu w 17 wiecznym pałacu znanej rzymskiej rodziny Corsinich mieści się również galeria obrazów, oraz biblioteka zawierająca ponad 4000 rękopisów, 3000 inkunabuł, kolekcję cennych map i książek powstałych od 16 wieku, w tym dzieło Kopernika „*Revolutionibus...*”. W sali, w której odbyło się sympozjum wykładali: Vito Volterra, Guido Castelnuovo, Tullio Levi-Civita, Jacques Hadamard, Eugenio Beltrami, i wielu innych sławnych uczonych. Do Akademii należeli Luigi Cremona, Enrico Betti, Ulisse Dini, Hermann von Helmholtz, Robert W. Bunsen, C. R. Darwin.

W latach faszystów Akademia przeżywała duże kłopoty i przez 6 lat, dekretem rządu Mussoliniego, została poddana pod kuratelę rządowej Accademia d'Italia. Po wyzwoleniu we wrześniu 1944 wznowiła działalność.

Z. S. Olesiak

SZKOŁA LETNIA MECHANIKI PŁYNÓW

Mikołajki, 18—23 września 1989 r.

Komunikat No 1

Sekcja Mechaniki Płynów Komitetu Mechaniki PAN, Instytut Budownictwa Wodnego PAN w Gdańsku oraz Akademia Rolniczo-Techniczna w Olsztynie organizują VII Szkołę Letnią Mechaniki Płynów.

1. **Cele Szkoły:** Aktywizacja i podniesienie poziomu naukowego środowiska hydro- i aeromechaników oraz upowszechnienie podstaw i metod opisu procesów hydrodynamicznych w ośrodkach z granicami swobodnymi.
2. **Miejsce i termin:** Mikołajki, 18—23 września 1989 r. Czas trwania Szkoły: 6 dni.
3. **Uczestnicy Szkoły:** Przewiduje się uczestnictwo ok. 120 osób reprezentujących krajowe ośrodki naukowo-badawcze i dydaktyczno-naukowe (placówki PAN, szkolnictwa wyższego oraz placówki resortowe) aktywnie pracujących w dziedzinie mechaniki płynów oraz przedstawicieli innych dziedzin nauki i techniki zainteresowanych zastosowaniem mechaniki płynów.
4. **Tematyka Szkoły:** Podstawy i metody opisu procesów hydrodynamicznych w ośrodkach z granicami swobodnymi — 32 godziny wykładów.
5. **Opieka merytoryczna:** Opiekę nad stroną merytoryczną Szkoły sprawuje Dyrektor Instytutu Budownictwa Wodnego PAN w Gdańsku, prof. dr hab. Stanisław Massel.
6. **Zgłoszenie uczestnictwa:** Zgłoszenie uczestnictwa do dnia 30 maja 1989 roku, na adres:
SZKOŁA LETNIA MECHANIKI PŁYNÓW
Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn ART
10-736 OLSZTYN-KORTOWO, Blok 50
7. **Materiały Szkoły:** Uczestnicy Szkoły otrzymują:
 - 1 — Skrypt — 200 stron — Wydawnictwo Szkoły — Podstawy i metody opisu procesów hydrodynamicznych w ośrodkach z granicami swobodnymi — materiały wykładowe.
 - 2 — Skrypt — 455 stron — Wydawnictwo ART — Olsztyn — Mechanika Płynów w Przykładach — Eustachy S. Burka i Tomasz J. Nałęcz.
 - 3 — Materiały informacyjne i pomocnicze.
8. **Informacje dodatkowe:** Przewiduje się, że wszyscy uczestnicy zostaną zakwaterowani w Ośrodku Wczasowym Olsztyńskich Zakładów Opon Samochodowych w Mikołajkach.
Wpisowe, koszt zakwaterowania z pełnym utrzymaniem oraz koszt materiałów Szkoły wynosi 32.000, — złotych.
Kwotę złotych 32.000, — należy przekazać do dnia 30 maja 1989 roku na konto PKO — II Oddział w Olsztynie, Nr 51523-16186-132 z dopiskiem — Szkoła Letnia Mechaniki Płynów —.

Kierownik Szkoły
Eustachy S. Burka

INSTRUKCJE DLA AUTORÓW

Ogólne

W Mechanice Teoretycznej i Stosowanej drukowane są prace przeglądowe oraz oryginalne teoretyczne i doświadczalne z zakresu mechaniki ciała stałego oraz cieczy i gazów. Publikujemy również dyskusję naukową oraz polemikę dotyczącą prac z mechaniki, które ukazały się w MTiS lub w innych czasopismach naukowych.

W Biuletynie Informacyjnym drukujemy sprawozdania z konferencji naukowych z zakresu mechaniki w kraju i za granicą oraz z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Praca może być złożona do druku w MTiS pod warunkiem jej nieopublikowania w innym czasopiśmie.

Drukujemy w języku polskim oraz na życzenie autorów w języku angielskim pod warunkiem złożenia pracy w tym języku.

Prace należy nadsyłać na adres Redakcji bądź jednego z redaktorów, w dwóch egzemplarzach (oryginał+kopia).

Praca złożona do druku podlega recenzji.

Wszelkie zmiany (poprawki autorskie) po zakwalifikowaniu artykułu do druku i przekazaniu go do drukarni mogą być dokonane tylko w czasie 1 korekty (na koszt autora).

Po opublikowaniu autorzy otrzymują 25 egzemplarzy odbitek swojego artykułu.

Szczegółowe

- Prace składane do publikacji w MTiS powinny zawierać (wg. kolejności)
 - Tytuł
 - Imię, Nazwisko z podaniem miejsca pracy
 - Abstrakt (w języku polskim)
 - Właściwą pracę
 - Spis literatury
 - Streszczenia w języku
 - praca w języku polskim — rosyjskim w maszynopisie i angielskim
 - praca w języku angielskim — polskim i rosyjskim.
- Tekst powinien być napisany po jednej stronie (nie na papierze kredowym) z zachowaniem podwójnych odstępów i obustronnych marginesów — z lewej 6 cm, z prawej 1 cm.
- Wzory należy wpisywać czytelnie, w kolorze czarnym, z zachowaniem numeracji po stronie prawej (należy zwrócić szczególną uwagę na rozróżnienie 1 oraz litery l, zera i litery o oraz literę q i p).
- Życzenia autorów dotyczące formy graficznej pracy w tym kraju czcionki, liter greckich itp. powinny być dołączone na osobnej kartce, bądź na marginesie (ołówkiem).
- Tablice występujące w tekście należy dołączyć na oddzielnych kartkach (jedna na stronie).
- Podpisy pod rysunkami powinny być wyszczególnione oddzielnie, a nie pod rysunkami.
- Prosimy o sporządzanie wykazu literatury w sposób następujący: W. Nowacki, Teoria Sprężystości, Warszawa PWN, 1970.
- Oдноśniki należy numerować kolejno w całej pracy, a nie wg strony.
- Obowiązuje stosowanie układu jednostek SI.

Prenumeratę na kraj przyjmuje się:

- do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Instytucje i zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział w Warszawie Nr 370044-1195-139-11, w terminach podanych dla prenumeraty krajowej. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland. Our bankers: BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się od r. 1963, a od 1967 r. jako kwartalnik. (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa p. 309).
