

44 280
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701



MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK
TOM 26 • ZESZYT 1

WARSZAWA 1988
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

53

SPIS TREŚCI

Wspomnienie o Profesorze Zbigniewie Brzosec	3
A. MARANDA, E. WŁODARCZYK, J. SERAFINOWICZ, Analiza parametrów detonacyjnych materiałów wybuchowych emulsyjnych (MWE) uczulanych szklanymi mikrosferami zawierającymi powietrze	9
Анализ детонационных параметров эмульсионных взрывчатых веществ (ЭВВ) сенсibilизированных стеклянными микросферами заполненными воздухом	
Analysis of the detonation parameters of emulsion explosives (EM) depending on glass microspheres filled with air	
J. WOJNAROWSKI, A. NOWAK, Grafy transformacji zmiennych jako modele drgających układów ciągłych	21
Графы трансформации переменных как модели колеблющихся непрерывных систем	
Graphs of variables transformations as the models of vibrating continuous systems	
J. КУВИК, М. WRÓBEL, O rozseparowaniu równań termodyfuzji lepkosprężystej	43
O разделении уравнений вязкоупругой термодиффузии	
On decoupling equations of viscoelastic thermodiffusion	
R. WOJNAR, Fale powierzchniowe w termosprężystości z czasami relaksacji	55
Поверхностные волны в термоупругости с временами релаксации	
Surface waves in thermoelasticity with relaxation times	
J. A. KOŁODZIEJ, M. BARBASKI, Theoretical model of externally pressurized circular thrust porous gas bearing with deformable material	73
Теоретическая модель цилиндрического подшипника-подпятника внешне питаемого при учёте деформации пористого материала	
Teoretyczny model porowatego zewnętrznie zasilanego cylindrycznego gazowego łożyska wzdłużnego z odkształcalnym materiałem porowatym	
M. KACZMAREK, J. A. KOŁODZIEJ, G. MUSIELAK, Wyznaczanie powierzchni swobodnej cieczy w trójkątnym rowku	83
Определение свободной поверхности жидкости в трёхугольной канавке	
Determination of free surface of liquid in a triangular groove	
A. PIŁORZ, Application of waves method in investigation of drives systems, comparisons with other methods	97
Использование волнового метода в исследованиях приводных систем и его сравнение с другими методами	
Wykorzystanie metody falowej w badaniach układów napędowych, porównanie z innymi metodami	
K. MURAWSKI, The Korteweg-de Vries equations for waves propagation in an infinite tube	113
Уравнения Кортевега-де Фриза для распространения волн в бесконечно длинной трубе	
Równania Kortewega-de Vriesa dla propagacji fal w rurze o nieskończonej długości	
J. ŚWIRYDZUK, Rozwój i deformacja warstwy wirowej indukowanej za profilem aerodynamicznym przez przepływającą strukturę wirową	121
Развитие и деформация вихревого слоя индуцированного за аэродинамическим профилем движущейся вихревой структурой	
Development and deformation of the vortex layer induced behind an airfoil by the moving vortex structure	
S. WRZESIEN, Numeryczne obliczenia płaskich lepkich przepływów naddźwiękowych z falą uderzeniową	135
Численный расчёт плоских сверхзвуковых течений вязкого газа с ударными волнами	
Numerical computations of plane viscous supersonic flows with shock waves	
J. SKŁADZIEŃ, M. PRUS, Metoda analizy cieplnej trójstrumieniowych krzyżowoprądowych konwekcyjnych wymienników ciepła przy wymieszaniu czynnika zewnętrznego	149
Метод термодинамического анализа конвекционных трёхпоточных перекрестных теплообменников из смешиванием внешнего потока	
Thermodynamical analysis method of the convection three-stream crossflow heat exchangers with mixed flow of the outer agent	

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 6 · Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1 9 8 8

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

RADA REDAKCYJNA

MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,

STANISŁAW J. GDULA, IGOR KISIEL,

ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

KOMITET REDAKCYJNY

REDAKTOR NACZELNY—ZBIGNIEW OLESIAK,
REDAKTORZY—STANISŁAW DUBIEL, JACEK STUPNICKI,
ANDRZEJ TYLIKOWSKI, CZEŚŁAW WOŹNIAK,
SEKRETARZ—EWA KOISAR

Kwartalnik ukazuje się przy pomocy finansowej PAN

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa, pokój 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 500. Ark. wydawniczych 16,25. Ark. drukarskich 13,5. Papier druk. sat. kl. IV, 71 g. 70×100. Oddano do składania 17.VI.1987 r. Druk ukończono w listopadzie 1988 r. Zam. 4572/12/87. Cena zł 180,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa



WSPOMNIENIE O PROFESORZE ZBIGNIEWIE BRZOSCE

Dnia 9 maja 1987 r. zmarł nagle Profesor Zbigniew Brzoska. Wraz z jego odejściem skończyła się — chyba na zawsze — pewna epoka i pewien styl działania w polskich naukach technicznych, dydaktyce inżynierskiej, w podejściu do zasad projektowania wytrzymałościowego. Był jednym z ostatnich wybitnych profesorów polskich uczelni technicznych w starym stylu o niekwestionowanym i uznanym w całym kraju autorytecie, ogromnej i rozległej wiedzy, człowiekiem, którego zainteresowania i talenty umieszczały wśród osobistości nazywanych w epoce Renesansu „Homo trium linguarum”. Wielki urok, cięty dowcip, znakomita pamięć nie tylko do liczb i wykresów, ale nazwisk i twarzy powodowały, że każde spotkanie z Profesorem studenta, ucznia czy współpracownika zostawiały wspomnienie nie jedynie znakomitej konsultacji zawodowej, lecz także bardzo osobistego kontaktu z człowiekiem wybitnym.

Śp. Profesor Zbigniew Brzoska urodził się 27 września 1916 roku w Warszawie, w rodzinie inteligenckiej osiadłej w stolicy od wielu pokoleń. Lubił zawsze żartobliwie podkreślać, że pochodzi z rodziny kupieckiej i dlatego do działalności technicznej, jak twier-

dził, miał od początku podejście pragmatyczne: nie to dobre i ważne co sobie sami wymyślimy, lecz to co przemysł zechce od nas kupić. Maturę uzyskał w państwowym gimnazjum humanistycznym im. J. Lelewela w 1934 r. i w tym samym roku wstąpił na Wydział Mechaniczny Politechniki Warszawskiej, wybierając po podyplomie specjalność lotniczą. Działalność naukową rozpoczął jeszcze w czasie studiów, pod koniec lat trzydziestych, w Katedrze Wytrzymałości Materiałów prof. Maksymiliana Tytusa Hubera, wykonując jako wolontariusz badania konstrukcji lotniczych i osłabionych otworami powłok. Studia w dziedzinie Teorii Sprężystości i Teorii Powłok kontynuował pod kierunkiem prof. Hubera w okresie okupacji, prowadząc równocześnie badania elastooptyczne z ówczesnym adiunktem w Katedrze Wytrzymałości dr R. Kurowskim. Zaowocowały one tuż po wojnie w postaci dysertacji doktorskiej pt. „Wytrzymałość cylindrycznej powłoki kołowej” (promotor prof. dr M. T. Huber) obronionej w czerwcu 1946 r. na Politechnice Gdańskiej.

Działalność konstrukcyjną, prof. Brzoska zaczął również jeszcze jako student pracując w latach 1938 - 39 pod kierunkiem inż. K. Korsaka na stanowisku młodszego konstruktora w Oddziale Studiów Wytwórci Płatowców PZL Okęcie, gdzie prowadził całość analizy wytrzymałościowej i prób statycznych samolotu myśliwskiego „Sokół” PZL 42.

W Kampanii wrześniowej brał czynny udział jako ochotnik w technicznej służbie lotnictwa. W czasie okupacji środki utrzymania dla siebie i — pod koniec wojny — już czteroosobowej swojej rodziny zdobywał jako robotnik w różnych warsztatach prywatnych, najdłużej przy remoncie obrabiarek do drewna. Równocześnie uczestniczył w walce z okupantem w szeregach Armii Krajowej.

Od pierwszych lat po wojnie rozpoczyna się okres szczególnie intensywnej i wielokierunkowej działalności Profesora. Był jednym z najwybitniejszych przedstawicieli pokolenia, które natychmiast włączyło się do odbudowy kraju, tworzenia nowych dóbr i wartości, kontynuowało chlubne tradycje polskiego lotnictwa lat trzydziestych. W działalności tej wyróżnić można kilka nurtów: organizacyjny w przemyśle, organizacyjny w szkolnictwie wyższym i nauce, dydaktyczny, inżyniersko-konstrukcyjny i badawczy.

Już w sierpniu 1945 r. wspólnie z inż. K. Szałkowskim uruchomił przy Centralnym Zarządzie Przemysłu Zbrojeniowego komórkę przekształconą następnie w Główny Instytut Lotnictwa. W Instytucie tym kierował do 1955 r. pracą Działu Wytrzymałościowo-Konstrukcyjnego obejmującą całokształt zagadnień wytrzymałościowych wszystkich typów samolotów i śmigłowców. W Dziale tym konstruowano także nietypowe wówczas maszyny jak np. zaprojektowany przez inż. B. Żurakowskiego pierwszy polski śmigłowiec SP GIL. Rezygnując ze stałej pracy w Instytucie Lotnictwa w 1955 r. (pozostał tam nadal jako konsultant, a od 1960 r. członek Rady Naukowej) zostawił Dział jako samodzielną i prężną komórkę dorównującą placówkom zagranicznym zarówno pod względem kadrowym jak i wyposażenia wykonanego w dużej mierze we własnym zakresie.

Równoległe z pracą w Instytucie brał udział w organizowaniu, prowadził dydaktykę i prace badawcze na wyższych uczelniach technicznych, które odbudowywały się po ogromnych stratach wojennych tak w sensie fizycznym jak i gromadzenia i tworzenia nowej kadry nauczycieli akademickich. W latach 1946 - 51 był profesorem Wytrzymałości Materiałów w Szkole Inżynierskiej im. H. Wawelberga i S. Rotwanda jednocześnie

pracując jako adiunkt na Politechnice Warszawskiej: najpierw u prof. W. Wierzbickiego na Wydziale Inżynierii (1946 - 1948), później w Katedrze Mechaniki Lotu na Wydziale Mechanicznym (1948 - 1951). Wykłady młodego profesora w Szkole Inżynierskiej szybko zaczęły być słynne: dowcip i swoboda połączone ze znakomitą pamięcią i starannym przygotowaniem tematu dawały rezultaty, które porywały słuchaczy i imponowały kolegom. Nie bez znaczenia w tych sukcesach było — jak sam podkreślał — wykorzystanie ogromnego doświadczenia dydaktycznego jego przyjaciela i starszego kolegi — prof. R. Kurowskiego. Będąc adiunktem u prof. W. Wierzbickiego odbudował i zorganizował laboratorium Wytrzymałości dając Politechnice placówkę, której stan wyposażenia zdobytego po Niemcach, wyremontowanego z uszkodzonych maszyn lub wykonanego samodzielnie stawiał ją jako jednostkę o najlepszych wówczas możliwościach badawczych w zakresie budownictwa w Polsce.

W 1951 r. po połączeniu Politechniki ze Szkołą Wawelberga został powołany na stanowisko zastępcy profesora, w 1954 r. profesora nadzwyczajnego, a 1960 — zwyczajnego oraz — od początku — kierownika Katedry Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Wydziału Lotniczego Politechniki Warszawskiej. Kierownikiem tej Katedry był niemal do końca, biorąc jednocześnie żywy, niezwykle twórczy i inspirujący udział w pracach organizacyjnych Wydziału Uczelni i Ministerstwa: jako Dziekan Wydziału Lotniczego w kadencji 1956 - 60, członek (1950 - 1956), a następnie przewodniczący (1956 - 62) Komisji Programowych Wydziałów Mechanicznych w Ministerstwie, przy którego współudziale, a później pod bezpośrednim kierownictwem formułowane były plany i programy studiów, wszystkich wydziałów mechanicznych w kraju, Kierownik Studium Doktoranckiego PW (1972 - 77), Przewodniczący Wydziałowej Komisji Programowej Wydziału MEiL PW (1973 - 1978) i opiekun specjalności Lotnictwo tegoż Wydziału, Przewodniczący Senackiej Komisji do Spraw Dydaktyki i Kierunków Studiów (1981 - 1984).

Jednocześnie Profesor prowadził niesłychanie bogatą działalność dydaktyczną, inżynierską i badawczą. Poza wykładami (Wytrzymałość Materiałów, Wytrzymałość Konstrukcji Lotniczych, Teoria Sprężystości, Stateczność Konstrukcji, Kształtowanie Konstrukcji, Mechanika Pękania) i laboratorium z Wytrzymałości Materiałów i Wytrzymałości Konstrukcji Lotniczych na rodzinnym Wydziale Lotniczym, a później (1960 r.) Wydziale Mechanicznym Energetyki i Lotnictwa, prowadzi również wykłady z Wytrzymałości Materiałów oraz Statyki Konstrukcji Przestrzennych na Wydziale Mechanicznym Konstrukcyjnym (1956 - 1960) oraz, do 1965 r. specjalistyczne wykłady Statyki Konstrukcji Przestrzennych i Statyki Konstrukcji Pojazdów na ówczesnym Wydziale Maszyn Roboczych i Pojazdów. Jest faktem, że ogromna większość wszystkich inżynierów lotniczych specjalności płatowcowej w Polsce nauczyła się u Niego nie tylko samej analizy, ale i zrozumienia oraz tworzenia koncepcji prawidłowych — z punktu widzenia wytrzymałości — konstrukcji. To samo można powiedzieć o średniej wiekiem generacji inżynierów w dziedzinie maszyn roboczych, którym wykłady Statyki Konstrukcji dawały klucz do tworzenia ustrojów nowoczesnych, bardziej racjonalnych, przewyższających dotychczasowe rozwiązania. Jako pomoc dla studentów i szerokie monografie dla inżynierów zostały pomyslane dwie książki Profesora, które doczekały się kilku wydań: Wytrzymałość Materiałów (PWN 1972, 1974 i 1979 r.), oraz Statyka i Stateczność Konstrukcji Prętowych i Cienkościennych (PWN 1961 i 1965 r.). Pisanie trzeciej, ogromnie rozbudowanej, trzy-

tomowej (w zamyśle ~ 1000 str.) wersji tego ostatniego dzieła przerwała Mu śmierć. Nie ma chyba obecnie polskiego inżyniera zajmującego się obliczeniami statycznymi, który nie miałby na biurku tych podręczników.

W swoich wykładach Profesor wykorzystywał wyniki współpracy z przemysłem. Współpraca ta polegała w głównej mierze na tworzeniu koncepcji nowych konstrukcji cienkościennych w budowie samolotów oraz różnych innych działach techniki, jak nadwozia samochodowe, cysterny samojezdne, wagony kolejowe, dźwigi budowlane i okrętowe — by wymienić tylko najważniejsze. Prac takich dla przemysłu wykonał (bądź nimi kierował) ponad pięćdziesiąt, przy czym bardzo wiele z tych koncepcji zostało zrealizowanych w praktyce: samonośne nadwozia autobusowe SAN, wagony do przewozu granulatów, cysterny różnych rodzajów, naczepy samochodowe, wysięgniki teleskopowe żurawi, konstrukcje żurawi budowlanych i okrętowych itp. Niektóre pomysły zostały opatentowane (9 patentów).

Kierowana przez Niego od 1951 r. Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji (później Zakład w Instytucie Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Wydziału MEiL) — jest placówką, z której wyszło liczne grono doktorów, docentów i profesorów. Był promotorem 15 prac doktorskich, przy Jego doradztwie i sugestjach wykonano 5 prac habilitacyjnych, z grona Jego uczniów wywodzi się czterech docentów (A. Jaworski, Z. Treszkowski, M. Bijak-Żochowski, J. Kapkowski), pięciu profesorów (W. Szczepiński, W. Gutkowski, H. Frąckiewicz, S. Łukasiewicz, J. Stupnicki), trzech z nich jest członkami Polskiej Akademii Nauk.

Działalność na Uczelni nie zaspokajała bujnej, ekspansywnej natury Profesora, i chociaż tak szeroka — nie wyczerpywała Jego możliwości.

W latach 1956 - 1967 kieruje Zakładem Podstaw Konstrukcji Maszyn przy Komitecie Budowy Maszyn PAN. Szereg osiągniętych wówczas w tym Zakładzie wyników np. badania dynamiki kół zębatach (zespół prof. A. Moreckiego), analizy numerycznej metodą elementów skończonych (zespół prof. J. Szmeltera) lokowało go ówczesnie w czołowie światowej. Od 1956 r. jest stałym członkiem Komitetu Budowy Maszyn, a od 1968 do 1980 r. Komitetu tego wiceprzewodniczącym, jak również kierownikiem Sekcji Podstaw Konstrukcji Maszyn. Zespoły tej Sekcji: Dynamiki Maszyn, Zmęczenia Materiałów, Stateczności Konstrukcji — liczyły przeszło 250 aktywnych pracowników naukowych z całego kraju, a ich działalność (sympozja, konferencje naukowe, szkoły) miała istotne znaczenie dla rozwoju tych kierunków.

W roku 1969 nadana Mu zostaje godność Członka Korespondenta, a w roku 1981 Członka Rzeczywistego PAN.

Profesor był współtwórcą, członkiem i przewodniczącym wielu Towarzystw Naukowych i Rad Naukowych. 13 marca 1958 r. znalazł się w gronie 74 wybitnych polskich specjalistów w dziedzinie Mechaniki, którzy powołali do życia Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, został pięciokrotnie wybrany tego Towarzystwa Wiceprzewodniczącym (1963 - 1969), a w kadencji 1969 - 71 — Przewodniczącym. W dwudziestolecie PTMTS w 1978 r. 18 Zjazd Delegatów nadał Mu godność Członka Honorowego. W ramach działalności w Towarzystwie Przewodniczył Komitetom Organizacyjnym szeroko znanych w Polsce, a później również za granicą, ośmiu kolejnych Sympozjów

Badań Doświadczalnych w Mechanice Ciała Stałego, dwu ostatnich (w 1984 i 1986 r.) był Przewodniczącym Honorowym.

Członek i Viceprzewodniczący Rady Naukowej Instytutu Lotnictwa, Członek Rady Naukowej Ośrodka Badawczo Rozwojowego WSK-Mielec, Rady Naukowej Ośrodka Badawczo-Rozwojowego Taboru Kolejowego, Rady Programowej Czasopisma „Przegląd Techniczny-Innowacje”, Rady Naukowej Instytutu Inżynierii Materiałowej PW i wreszcie wieloletni Redaktor Naczelny Archiwum Budowy Maszyn czasopisma naukowego PAN o długiej tradycji i znakomitym poziomie: wszystkie te godności i tytuły, za którymi kryła się zawsze wyteżona praca wyczerpują już być może spis obszarów aktywności zawodowej Profesora. Była ona doceniana przez Uczelnię, Ministerstwo, Środowisko Naukowe i Władze: uzyskał szereg Nagród Ministra I stopnia, odznaczono Go Krzyżami Kawalerskim i Oficerskim Orderu Odrodzenia Polski, przyznano tytuł Zasłużonego Nauczyciela PRL.

Tyle suche fakty życiorysu. Wskazują na zdumiewający ogrom pracy, potężną energię, niebywałą szerokość zainteresowań i umiejętność równoległego działania na wielu obszarach. Nie mówią natomiast wiele o Profesorze jako o człowieku: co lubił, jakie miał poglądy, jak na co dzień pracował, jak wykladał, rozmawiał ze studentami, żartował ze współpracownikami. Oddanie tej drugiej, niejako prywatnej strony życia jest zresztą znacznie trudniejsze niż przedstawienie rejestru godności zaszczytów i stanowisk i znacznie mocniej obarczone być może błędem subiektywnej oceny.

Miał dwie wielkie miłości w swojej pracy, nauczanie i działalność inżyniersko-konstrukcyjną. Studentom poświęcał bardzo wiele czasu — wykłady przygotowywał starannie, ciągle je zmieniał i unowocześniał, lubił prowadzić je w sposób efektowny, a nawet czasami nieco teatralny. Były słynne na Wydziale i Politechnice, gromadziły licznych słuchaczy, bardzo często spoza obowiązkowych kursów. Wspaniała pamięć pozwalała mu znać nazwiska i imiona wszystkich swoich wychowanków; uczył ich się zresztą uważając, że znać je jest jego obowiązkiem. Miał wiele kontaktów osobistych ze studentami, a godziny konsultacji były zawsze święte: ulubieni współpracownicy i znakomici koledzy musieli często czekać na ich zakończenie, gdy — nawet w bardzo pilnej sprawie — chcieli się z Nim porozumieć. Jego dawni wychowankowie, później często poważni dyrektorzy poważnych przedsiębiorstw, przyjeżdżających na konsultacje, bądź by zamówić ekspertyzę, czy pracę badawczą witani byli przez Profesora zwykle kordialnie, po imieniu. Pamiętał nawet ich oceny na studiach, zachowanie na egzaminie. Przyjeżdżali więc często i chętnie: i z sentymentu do Uczelni i własnej młodości, które Profesor tak znakomicie im przypominał i by uzyskać rzetelną i szybką odpowiedź od najlepszego fachowca w dziedzinie Wytrzymałości w Polsce.

Profesor był niewyczerpanym źródłem nowych pomysłów i koncepcji. Rozdawał je wszystkim bardzo szczerze nie żądając pokwitowania, cieszył się, gdy ktoś je podejmował, sam do ich realizacji nie mając często cierpliwości i czasu.

Nie publikował zbyt dużo, miał pewien dystans do czysto akademickich rozważań, w całej działalności naukowej i zawodowej kierując się przydatnością techniczną swoich dociekań. Często widać było, że zamiłowania konstruktorskie biorą w nim górę nad postawą badacza. Wyznawał zasadę, że postulat absolutnej poprawności rozwiązań działa hamująco na impet twórczy, twierdził, że jedno doświadczenie jest warte więcej niż funt obli-

czeń, a odpowiedź dana z inżynierską dokładnością ale szybko, znacznie bardziej wartościowa i przydatna niż precyzyjny wynik długich dywagacji.

Był wymagający w stosunku do siebie, swoich współpracowników i studentów, ale nawet Ci, którym u Niego się nie powiodło darzyli Go zawsze szacunkiem i tym dziwnym rodzajem uczucia, w którym odrobina żalu pomieszana jest z podziwem i miłością.

Umiał patrzeć krytycznie: widział wiele słabości Wydziału, Politechniki Warszawskiej, polskich nauk technicznych. Słabościom tym starał się przeciwdziałać. W działaniu był realistą, liczył się z rzeczywistością, respektował kierunki i granice możliwości działania oceniał fakty i ludzi bez uprzedzeń, stronniczości i złudzeń.

Licznym Swoim współpracownikom wpajał zasady by badać rzetelnie, nauczać uczciwie, oceniać sprawiedliwie.

Czy stworzył szkołę. W sensie uformowania zwartej grupy ludzi działających w dość wąskiej dziedzinie badawczej — nie. Jego wszakże szkołą jest kilkuset wysoko wykwalifikowanych inżynierów zajmujących się Wytrzymałością i Statyką Konstrukcji, rozsianych w biurach konstrukcyjnych i fabrykach w całej Polsce. Jego wszakże szkołą jest działalność naukowa docentów, profesorów Członków Akademii, których on w ich pierwszych, a często i następnych krokach zawodowych promował.

Dlatego Jego pogrzeb w dniu 14 maja 1987 roku zgromadził na cmentarzu powązkowskim setki osób. Żegnały Go sztandary Politechniki Warszawskiej, Instytutu Lotnictwa, żegnały Go delegacje ludzi nauki i ludzie techniki z instytucji i przedsiębiorstw całego kraju. Dziesiątki wieńców i wiązanek, tysiące kwiatów pokryły grób jak serdeczne łązy rozstania.

Autorem tekstu wspomnienia jest Marek Bijak-Żochowski

ANALIZA PARAMETRÓW DETONACYJNYCH MATERIAŁÓW WYBUCHOWYCH EMULSYJNYCH (MWE) UCZULANYCH SZKLANYMI MIKROSFERAMI ZAWIERAJĄCYMI POWIETRZE

ANDRZEJ MARANDA
EDWARD WŁODARCZYK
JACEK SERAFINOWICZ

Wojskowa Akademia Techniczna

1. Wstęp

Emulsyjne materiały wybuchowe, ze względu na swoje zalety, są aktualnie przedmiotem zainteresowania wielu naukowych zespołów wyspecjalizowanych w dziedzinie nowoczesnych środków strzałowych. Przejawem tych zainteresowań jest rosnąca liczba zgłoszeń patentowych, przekraczająca aktualnie sto pozycji. Jednocześnie, coraz częściej zaczynają się pojawiać artykuły w czasopismach naukowych i referaty wygłaszane na konferencjach dotyczących MWE [1 - 6]. Jest rzeczą charakterystyczną, że ich autorzy są głównie przedstawicielami Krajów Dalekiego Wschodu — kolebki materiałów wybuchowych. Ze względu na niedostępność niektórych czasopism w naszym kraju, jak również barierę lingwistyczną, trudno jest definitywnie określić, jakie badania zostały już przeprowadzone i opisane.

Emulsyjne materiały wybuchowe pod względem składu chemicznego są saletrolami zawierającymi kilkanaście procent wody oraz dodatkowo (w niektórych przypadkach) kilka lub kilkanaście procent udziału masowego krzemionki w postaci baloników lub kapilar wypełnionych powietrzem. Stosunki masowe podstawowych składników mają decydujący wpływ na parametry detonacyjne MWE. Uzyskanie charakterystyk detonacyjnych MWE w funkcji zawartości głównych komponentów stwarza możliwość optymalizacji składu emulsji wybuchowych. Ponadto stanowią one etap prac mających na celu wniknięcie w procesy chemiczne i fizyczne zachodzące podczas wybuchowej przemiany MWE.

W pracy określono wpływ zawartości wody, oleju, mikrosfer szklanych wypełnionych powietrzem oraz utleniaczy na prędkość i średnicę krytyczną detonacji MWE. W zakończeniu przedstawiono wstępną, jakościową interpretację fizykochemiczną uzyskanych charakterystyk z uwzględnieniem roli głównych składników w procesie detonacji MWE.

2. Część doświadczalna

W celu scharakteryzowania materiału wybuchowego podaje się wartości jego parametrów detonacyjnych. W niniejszej pracy określono eksperymentalnie dwa podstawowe parametry MWE — prędkość detonacji i średnicę krytyczną.

Pomiar prędkości detonacji wykonano w ładunkach MWE, umieszczonych w rurach stalowych o średnicach 36/42 mm, za pomocą czujników zwarciovych z wykorzystaniem czterokanałowego mikrosekundomierza cyfrowego T-1510 o zdolności rozdzielczej 0,1 μ s. Średnicę krytyczną detonacji MWE określano wstępnie za pomocą ładunków stożkowych, a następnie w celu sprecyzowania wyników pomiaru — za pomocą ładunków cylindrycznych o skokowo zmiennej średnicy.

Do prób laboratoryjnych stosowano oprócz emulgatorów produkcji RFN dostępne krajowe surowce, których użycie przewiduje się do produkcji MWE na skalę półtechniczną, a w późniejszym czasie — przemysłową. Zawartość składników zmieniano w następujących przedziałach:

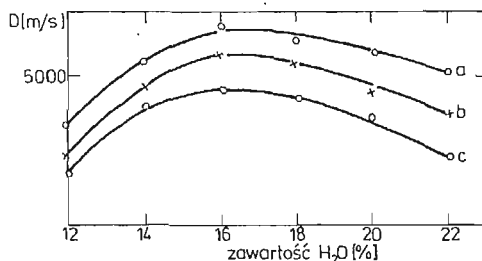
— azotan amonowy	36,3—67,9 % udziału masowego
— azotan sodowy	0—31,6 % udziału masowego
— woda	10,8—22,0 % udziału masowego
— olej maszynowy nr 8	3,9—10,3 % udziału masowego
— szklane mikrosfery (frakcja poniżej 0,125 mm, gęstość usypowa 0,36—0,38 g/cm ³)	2,9—26,0 % udziału masowego

Do mieszaniny wybuchowej dodawano emulgatora w ilości 1,8% udziału masowego.

W dalszym ciągu rozważań wymieniając procentowy udział danego składnika w mieszaninie będziemy mieli na uwadze udział masowy.

Próbki do badań przygotowywano wg metod opisanych w pracy [7].

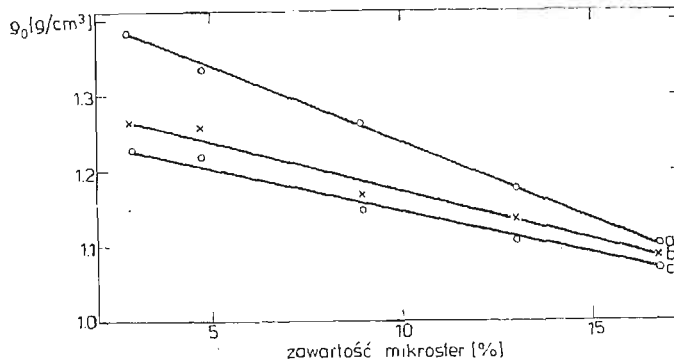
2.1. Wpływ zawartości wody na prędkość detonacji MWE. W pierwszej kolejności zbadano wpływ zawartości wody na prędkość detonacji. Jak już wspomniano, zawartość wody zmieniano w przedziale od 10,8 — 22%. Granice zawartości wody były zdeterminowane możliwościami powstawania emulsji wodno-olejowej (W-O). Eksperymenty przeprowadzono dla układów zawierających różne ilości szklanych mikrosfer. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 1. Krzywe *a*, *b* i *c* odpowiadają różnym zawartościom szklanych mikrosfer, a mianowicie *a* — 4,8%, *b* — 9,1% i *c* — 13%.



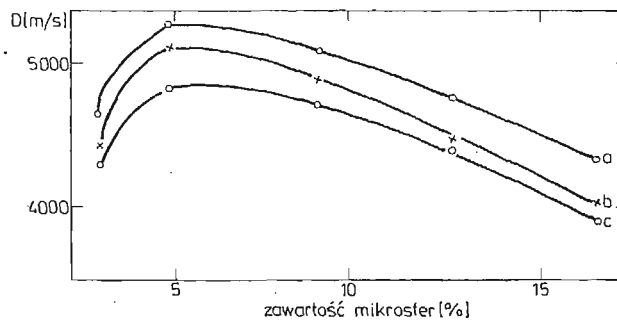
Rys. 1. Wpływ wody na prędkość detonacji MWE przy zawartości szklanych mikrosfer: *a* — 4,8%, *b* — 9,1%, *c* — 13,0% .

Z zamieszczonych wykresów wynika, że dodatek wody ma istotny wpływ na prędkość detonacji mieszanin. Ze wzrostem ilości wody początkowo dość szybko rośnie prędkość detonacji i po osiągnięciu maksymalnej wartości — następnie maleje. Ponadto z wykresów tych widać, że niezależnie od ilości zatopionych w mieszaninie szklanych mikrosfer, maksymalna wartość prędkości jej detonacji występuje przy zawartości wody około 16%. Wynika stąd praktyczny wniosek, że chcąc otrzymać MWE o określonej maksymalnej prędkości detonacji należy w składzie materiału zapewnić zawartość wody $\sim 16\%$. Początkowa gęstość mieszaniny wybuchowej wraz ze wzrostem zawartości wody od 10,8 — 22% nieznacznie maleje — średnio o około $0,1 \text{ g/cm}^3$.

2.2. Wpływ ilości szklanych mikrosfer na prędkość detonacji i gęstość MWE. Próby laboratoryjne prowadzono dla trzech serii układów zawierających 12, 16 i 22% wody. Ilość szklanych mikrosfer zmieniano w granicach od 2,9 do 16,7%. Wyniki eksperymentów przedstawiono na rys. 2 i 3.



Rys. 2. Wpływ mikrosfer szklanych wypełnionych powietrzem na początkową gęstość MWE przy ilościach wody: a — 12%, b — 16%, c — 22%



Rys. 3. Wpływ mikrosfer szklanych wypełnionych powietrzem na prędkość detonacji MWE przy ilościach wody: a — 16%, b — 22%, c — 12%

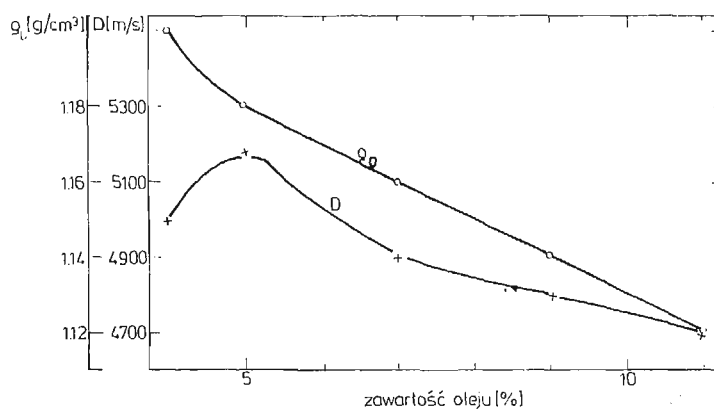
Zmiana gęstości początkowej MWE- ρ_0 w funkcji zawartości szklanych mikrosfer ma w przybliżeniu charakter prostoliniowy (rys. 2); jak należało oczekiwać — jest to funkcja malejąca.

Zawarte w mikrosferach powietrze w sposób istotny wpływa na prędkość detonacji MWE (rys. 3). Jak widać z wykresów zamieszczonych na rys. 3, wszystkie trzy krzywe

charakteryzujące związek $D = f$ (% szklanych mikrosfer) mają podobny przebieg niezależnie od zawartości wody. Maksymalne wartości prędkości detonacji występują przy około 4,8% zawartości szklanych mikrosfer. Obserwuje się tutaj również (podobnie jak dla H_2O) intensywne zmiany prędkości detonacji D w funkcji wzrostu zawartości szklanych mikrosfer. Zatem dla uzyskania maksymalnej prędkości detonacji, zawartość szklanych mikrosfer w mieszaninie nie może zbytnio różnić się od wartości optymalnej (4,8%).

2.3. Wpływ zawartości oleju na prędkość detonacji MWE. Zwiększenie zawartości oleju w mieszaninie (przy stałych stosunkach masowych pozostałych składników) zmniejsza lepkość układu. Jednocześnie bilans tlenowy mieszanin ze wzrostem zawartości oleju maleje i może przyjmować ujemne wartości. Na tej podstawie należało przypuszczać, że zmiana ilości oleju będzie oddziaływać bezpośrednio na wartość parametrów detonacyjnych MWE.

W celu wyjaśnienia wpływu ilości oleju zawartego w MWE na prędkość detonacji mieszanin przeprowadzono odpowiednie pomiary. Próby laboratoryjne prowadzono dla wybranego składu podstawowego, zawierającego stałe ilości wody (16%) i szklanych mikrosfer (9,1%). Wyniki badań przedstawiono na rys. 4.

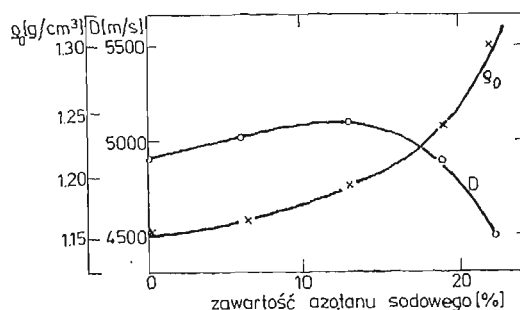


Rys. 4. Wpływ oleju na prędkość detonacji i gęstość początkową MWE zawierających stałe ilości wody (16%) i szklanych mikrosfer (9,1%)

Z przebiegu zmian prędkości detonacji pokazanych na rys. 4 widać wyraźnie, że zwiększenie ilości oleju w zakresie do około 5% powoduje istotne zwiększenie prędkości detonacji MWE. Po przekroczeniu tej wartości, prędkość detonacji monotonicznie maleje, aż do zawartości oleju około 12%, powyżej której detonacja zanika. MWE zawierające powyżej 12% oleju nie detonowały w warunkach przeprowadzonych doświadczeń (również przy inicjowaniu detonatorem HT-14). Charakter przebiegu krzywej D dowodzi, że w początkowej fazie przyrost ilości oleju w mieszaninie powoduje istotne zmiany wartości prędkości detonacji MWE.

Na rys. 4 przedstawiono także wpływ zawartości oleju na gęstość MWE. Jak widać, zależność $\rho_0 = f$ (oleju) ma w przybliżeniu charakter prostoliniowy za wyjątkiem początkowego odcinka. Ze wzrostem ilości oleju do 12%, gęstość maleje od 1,2 g/cm^3 do 1,1 g/cm^3 .

2.4. Wpływ zmiany zawartości azotanu amonowego i azotanu sodowego na prędkość detonacji MWE oraz początkową jego gęstość. Ze względu na dużą różnicę w rozpuszczalności azotanu amonowego i sodowego w wodzie wzajemny stosunek tych utleniaczy w MWE decyduje o stopniu trudności otrzymywania emulsji W-O. Również należało przypuszczać, że odmienne bilanse tlenowe wymienionych saletr będą determinowały wartość parametrów detonacyjnych MWE. Eksperymenty przeprowadzono dla wytypowanych składów mieszanin o stałych zawartościach wody (16%) i szklanych mikrosfer (10%). Zawartość azotanu sodowego zmieniano w przedziale 0 - 31,6%. Górna granica zawartości saletry sodowej była uwarunkowana możliwościami powstawania emulsji W-O. Wyniki eksperymentów przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Wpływ azotanu sodowego na prędkość detonacji i gęstość początkową emulsyjnych materiałów wybuchowych zawierających stałe ilości wody (16%), oleju (4,3%) i szklanych mikrosfer (10%)

Z wyników badań przedstawionych na rys. 5 wynika, że zawartość azotanu sodowego ma istotny wpływ na gęstość początkową i prędkość detonacji MWE.

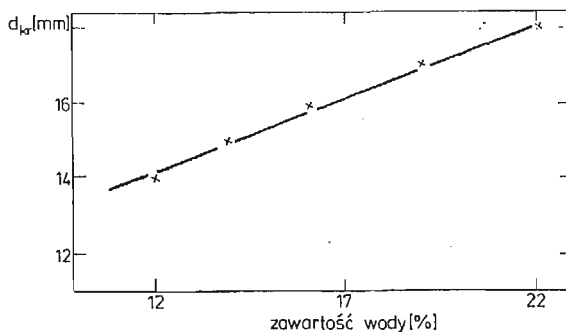
Ze wzrostem stężenia azotanu sodowego prędkość detonacji początkowo rośnie, a po osiągnięciu maksimum maleje aż do zaniku detonacji. Natomiast gęstość początkowa MWE monotonicznie rośnie.

2.5. Wpływ zawartości niektórych składników na średnicę krytyczną MWE. Materiały wybuchowe emulsyjne, jako specyficzna mieszanina saletroli i wody, nie posiadają w swoim składzie substancji wysokoenergetycznych (klasycznych materiałów wybuchowych). Dlatego o wartości parametrów detonacyjnych decyduje jakościowy i ilościowy skład mieszanin. W celu wyjaśnienia wpływu niektórych składników MWE na ich średnicę krytyczną detonacji przeprowadzono próby jej pomiaru w funkcji:

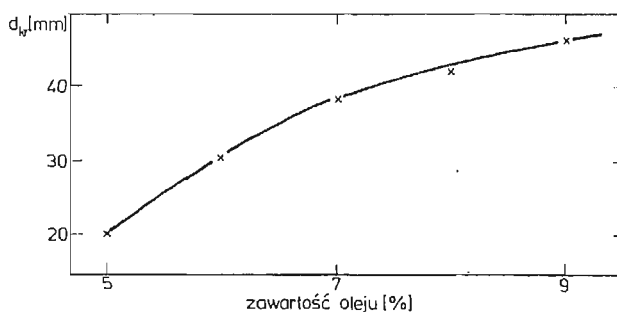
- ilości mikrosfer szklanych dla mieszanin o stałej zawartości wody (16%) i oleju (4,3%);
- ilości oleju dla mieszanin o stałej zawartości wody (16%) i szklanych mikrosfer (9,1%);
- ilości wody przy stałej zawartości oleju (4,1%) i szklanych mikrosfer (15%).

Wyniki badań laboratoryjnych przedstawiono na rys. 6-8.

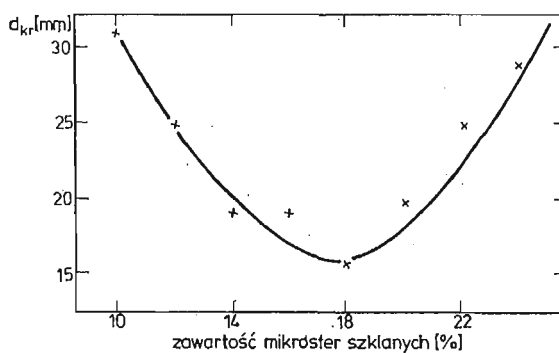
Z otrzymanych rezultatów widać, że średnice krytyczne detonacji MWE są stosunkowo małe, jak na materiały wybuchowe nie zawierające w swoim składzie wysokoenergetycznych składników. Dla badanych zawartości składników mieszczą się one w przedziale 14 - 46 mm. Charakter zmian średnic krytycznych detonacji jest zróżnicowany w funkcji zawartości poszczególnych składników. I tak z wykresów zamieszczonych na rys. 8, charakteryzujących wpływ zmiany ilości mikrosfer szklanych na średnicę krytyczną,



Rys. 6. Wpływ wody na średnicę krytyczną MWE zawierających stałe ilości oleju (4,1%) i szklanych mikrosfer (15%)



Rys. 7. Wpływ oleju na średnicę krytyczną MWE zawierających stałe ilości wody (16%) i szklanych mikrosfer (9,1%)



Rys. 8. Wpływ mikrosfer szklanych na średnicę krytyczną MWE zawierających stałe ilości wody (16%) i oleju (4,3%)

wynika, że funkcja $d_{kr} = f$ (% szklanych mikrosfer) posiada minimum przy zawartości szklanych mikrosfer $\sim 18\%$. Natomiast zależności $d_{kr} = f$ (% oleju) — rys. 7 i $d_{kr} = f$ (% wody) — rys. 6 w badanych zakresach ilości oleju (5 - 9%) i wody (12 - 22%), mają charakter wzrastający.

3. Dyskusja uzyskanych wyników

Detonacja skondensowanych materiałów wybuchowych jest procesem skomplikowanym. O jej mechanizmie decydują reakcje chemiczne i zjawiska falowe. W przypadku materiałów emulsyjnych właściwa interpretacja procesów zachodzących podczas wybuchowych przemian jest bardzo utrudniona multifazowością wieloskładnikowego układu. Już samo sprecyzowanie ilości faz nastęrcza duże trudności. Z pewnością w MWE nie zawierających szklanych mikrosfer występują dwie podstawowe fazy: ciekła i gazowa, które są zasadniczymi elementami tekstury materiału. Natomiast nie można jednoznacznie stwierdzić, czy w takich MWE występuje faza stała.

Jak wykazały badania opisane w pracy [6], wielkość mikrokropelek emulsji zawarta jest w przedziale 0,2 - 2 μm . Jeżeli zatem znajdują się w niej kryształy nieorganicznych utleniaczy, to mają one niewielkie rozmiary. Dlatego przy interpretacji uzyskanych wyników eksperymentalnych założono, że faza stała w postaci utleniaczy nie występuje.

Analiza uzyskanych rezultatów doświadczeń pozwala na wstępne, jakościowe określenie roli poszczególnych składników w wybuchowych procesach badanych mieszanin, co może być pomocne przy rozważaniach nad mechanizmem detonacji MWE.

Woda podobnie jak w przypadku materiałów wybuchowych zawieszinowych (MWZ) jest nieodłącznym składnikiem mieszanin emulsyjnych. Zwiększanie jej ilości w mieszaninie wybuchowej kosztem azotanu amonu powoduje zwiększanie odległości pomiędzy cząsteczkami utleniacza oraz, zgodnie z postulatem Arrheniusa i prawem granicznym dla przewodnictwa równoważnikowego, wzrost ilości zdysocjowanych cząstek utleniacza. Odległość pomiędzy cząsteczkami azotanu amonu determinuje możliwość i szybkość propagacji procesu wybuchowego rozkładu tego utleniacza. Im odległość ta jest większa, a pomiędzy cząsteczkami azotanu amonu znajdują się cząstki niezdolne do samodzielnej wybuchowej przemiany lub w trakcie ich pirolitycznej dekompozycji nie powstają produkty mogące wejść w egzotermiczną reakcję z produktami rozkładu utleniacza, tym bardziej utrudnione jest przenoszenie wybuchowych przemian z cząstki reagującej na nierozłożoną cząstkę azotanu amonu. Z drugiej strony wzrost ilości zdysocjowanych cząstek powoduje, że w układzie znajdują się elementy w większym stopniu przygotowane do dekompozycji, co ułatwia proces detonacji. Wynika stąd wniosek, że w badanej mieszaninie zachodzą dwa zjawiska przeciwstawnie oddziałujące na proces jej detonacji, czego fizycznym przejawem jest występowanie maksimum w zależności $D = f(\% \text{ wody})$ — (rys. 1). Najbardziej optymalne warunki, w aspekcie opisanych zjawisk powstają w układach zawierających około 16% wody niezależnie od ilości szklanych mikrosfer. Natomiast poniżej oraz powyżej optymalnej zawartości wody oddziaływanie zjawisk negatywnych jest bardziej intensywne niż pozytywnych i występuje małenie prędkości detonacji.

Podstawowym komponentem wszystkich wykonanych mieszanin, nie zawierających w swoim składzie klasycznych materiałów wybuchowych jest utleniacz. Substancja ta podczas dekompozycji generuje wolny tlen, będący potencjalnym reagentem z atomami i cząsteczkami lub rodnikami o ujemnych bilansach tlenowych.

Najbardziej popularnym utleniaczem jest azotan amonu. W celu korekcji bilansu tlenowego MWE, dodaje się również innych nieorganicznych utleniaczy, na przykład saletrę

sodową lub wapniową. Wszystkie wymienione utleniacze są substancjami rozpuszczalnymi w wodzie i można założyć, że w MWE znajdują się w fazie ciekłej.

Azotan amonu jest jedynym komponentem MWE mającym właściwości wybuchowe. Pod wpływem odpowiednio intensywnej fali uderzeniowej może nastąpić jego egzotermiczny rozkład z wydzieleniem wolnego tlenu. Natomiast dekompozycja innych utleniaczy jest procesem endotermicznym. Wynika z tego, że wszystkie procesy wybuchowej przemiany MWE biorą swój początek w rozkładzie azotanu amonu. Następnie generujące się w czasie tej reakcji ciepło powoduje rozkład pozostałych utleniaczy, a wydzielający się tlen reaguje z elementami cząsteczek paliwa. Egzotermiczna reakcja pomiędzy tlenem wydobywającym się z azotanu sodowego a paliwem jest możliwa w strefie reakcji fali detonacyjnej dzięki cząsteczkowemu a nawet jonowemu rozdrobnieniu tego utleniacza.

Tlen powstający podczas rozkładu saletry sodowej parcjalnie lub całkowicie uczestniczy w procesach wybuchowych w strefie reakcji chemicznej fali detonacyjnej. Fizyczną egzemplifikacją opisanych zjawisk jest maksimum występujące na zależności $D = f$ (% azotanu sodowego) (patrz rys. 5). Występuje ono przy ujemnym bilansie tlenowym MWE. Jest to bezpośredni dowód na niepełne przereagowanie saletry sodowej w strefie reakcji fali detonacyjnej.

Drugim podstawowym składnikiem mieszanin wybuchowych nie zawierających wysokoenergetycznych MW jest paliwo (olej w MWE). W materiałach emulsyjnych spełnia ono podwójną rolę — chemiczną i fizyczną. Zwiększanie ilości oleju w mieszaninie ułatwia sporządzanie emulsji. Jednocześnie zmieniają się: bilans tlenowy mieszanin (rośnie ujemna jego wartość) oraz geometryczne wymiary mikrotekstury MWE.

Efektym wymienionych właściwości jest ekstremum na zależności $D = f$ (% oleju), (rys. 4) oraz wzrost średnicy krytycznej detonacji (rys. 7) MWE wraz ze zwiększeniem ilości oleju powyżej 5%, która to ilość odpowiada zerowemu bilansowi tlenowemu mieszaniny. Można z tego wyciągnąć generalny wniosek, że przy odpowiednio zbilansowanym tlenowo MWE cały olej bierze udział w przemianach zachodzących w strefie reakcji chemicznej fali detonacyjnej.

Możliwość całkowitego przereagowania oleju wynika z tekstury MWE. Cząsteczki oleju tworząc fazę ciągłą emulsji wodnoolejowych formują cienkie filmy na powierzchni mikrokropek przesyconych roztworów utleniaczy. Rozwijają to potencjalną strefę współreagowania paliwa i utleniacza. Z tego względu szybsza jest dyfuzja reagentów w obszar reakcji decydujących o wartości prędkości i średnicy krytycznej detonacji.

Zwiększenie ilości oleju powyżej wartości stechiometrycznej powoduje szereg niekorzystnych zjawisk. Zwiększa się, jak już wcześniej wspomniano, odległość pomiędzy mikrokropekami zawierającymi utleniacz. Grubość pokrywającego je organicznego filmu rośnie, przez co utrudniona jest dyfuzja cząsteczek oleju w strefę reakcji. W układzie zaczyna brakować tlenu do pełnego utlenienia oleju. Nieutlenione cząsteczki oleju stają się balastem energetycznym. Ulegają endotermicznej pirolizie, przez co obniżają parametry fali detonacyjnej. Powoduje to wzrost średnicy krytycznej i malenie prędkości detonacji.

W procesie detonacji MWE fundamentalne znaczenie mają wypełnione powietrzem szklane mikrosfery. Dodatek tego składnika umożliwia inicjację i rozwój detonacji w tego typu MW. Mikrosfery szklane wypełnione powietrzem zmniejszają gęstość MWE i tworzą centra aktywne przyszłych reakcji chemicznych. W strukturze MWE tworzą one trój-

warstwowe mikroobszary, powstałe z pęcherzyków powietrza zamkniętych w szklanych bańkach otoczonych emulsją wodnoolejową. W czasie rozprzestrzeniania się fali uderzeniowej obszary te „zanurzają się” w pole ciśnienia i ulegają kompresji. Jeśli założyć, że proces kompresji pęcherzyków powietrza jest adiabatyczny, to wzrost temperatury powietrza zawartego w mikrosferze szklanej można oszacować według następującego wzoru [8]:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1},$$

gdzie indeks „1” oznacza początkowe stany powietrza natomiast „2” końcowe.

W ten sposób formują się „gorące punkty”, które odgrywają decydującą rolę w procesie detonacji tego typu MWE [9]. Wzrost temperatury i ciśnienia w tych punktach powoduje efektywny i pełny rozwój oraz przebieg chemicznych reakcji, co z kolei istotnie wpływa na wartość prędkości detonacji. Natomiast w przypadku braku mikrosfer szklanych w MWE rozprzestrzeniająca się w emulsji fala uderzeniowa spręża ją i również ogrzewa. Powstała przy tym temperatura jest jednak zbyt niska, w porównaniu z temperaturą w pęcherzykach gazowych, aby móc spowodować rozwój reakcji chemicznych, które mogłyby podtrzymać stacjonarny przebieg wybuchowych procesów. W efekcie mieszaniny takie nie detonują.

Zwiększenie procentowego udziału mikrosfer szklanych w emulsji powoduje zwiększenie stopnia napowietrzenia MWE oraz wprowadzenie coraz większych ilości szkła a więc materiału inercyjnego. Jak wiadomo, zmniejszanie gęstości poniżej optymalnej powoduje malenie prędkości detonacji. Również ze wzrostem ilości dodatku inercyjnego w MW prędkość detonacji wybuchowych procesów maleje. Przedstawione powyżej rozważania całkowicie wyjaśniają występowanie ekstremum na zależności $D = f(\% \text{ mikrosfer szklanych})$ (rys. 3.) Przy zawartości 5% szklanych mikrosfer, MWE posiada najbardziej optymalną strukturę w aspekcie szybkości przebiegów wybuchowych reakcji. Poniżej tej zawartości jest zbyt mała ilość gorących punktów, natomiast powyżej niewątpliwym wpływ ma obniżenie gęstości MWE i zwiększenie zawartości szkła (balastu).

Z przedstawionej interpretacji wynika rola poszczególnych składników w procesie detonacji MWE. Woda i olej są czynnikami teksturotwórczymi. Olej oprócz tego bierze również udział w reakcjach chemicznych. Jego podstawowym współreagentem jest tlen powstający podczas rozkładu azotanów amoniaku i dopełniający tlen wydzielający się w trakcie dekompozycji azotanów sodu. Mikrosfery szklane, a właściwie zawarte w nich powietrze są czynnikiem sensybilizującym, zapewniającym warunki na rozwój wybuchowych przemian.

4. Wnioski końcowe

Rezultaty pomiarów parametrów detonacyjnych MWE pozwalają scharakteryzować ich właściwości. Stwarzają możliwość usytuowania MWE w odpowiedniej klasie MW oraz determinują zakres ich zastosowania. Wykazały również bezsprzeczną zaletę MWE, a mianowicie, możliwość regulowania ich parametrów detonacyjnych poprzez zmianę

zawartości poszczególnych składników. Dzięki temu można uzyskiwać materiały o zróżnicowanych parametrach detonacyjnych i różnych właściwościach reologicznych.

MWE charakteryzują się dobrymi właściwościami wybuchowymi (stosunkowo duża prędkość detonacji i mała średnica krytyczna). Można je usytuować, między górnictwami MW amono-saletrzanami a dynamitami. MWE ze względu na budowę oraz uzyskane charakterystyki można zaliczyć do grupy materiałów wybuchowych zawieszonych (MWZ). Należy jednak podkreślić, że MWE posiadają kilka zalet, które stawiają je ponad MWZ. Przede wszystkim MWE nie posiadając składnika wysokoenergetycznego, w analogicznym zakresie gęstości mają znacznie większe wartości prędkości detonacji od MWZ. Aby osiągnąć tego rzędu prędkość detonacji MWZ, muszą być one uczulane MW kruszącym i mają duże średnice krytyczne. Natomiast aby uzyskać MWZ, o niskiej średnicy krytycznej, należy go uczulić pyłem aluminiowym, który jest surowcem deficytowym.

Drugą istotną zaletą MWE jest brak wpływu ciśnienia hydrostatycznego na zdolność MWE do detonacji. MWZ uczulane pyłem aluminiowym są czułe na ciśnienie hydrostatyczne i zdarzały się przypadki zaniku zdolności detonacji w zawodnionych otworach strzałowych.

MWE mogą ze względu na swoje właściwości znaleźć zastosowanie w górnictwie odkrywkowym i podziemnym. MWE zawierające więcej niż 10% ilości mikrosfer szklanych detonują od zapalników elektrycznych i charakteryzują się małymi średnicami krytycznymi. Te cechy umożliwiają zastosowanie MWE do ładowania otworów małośrednicowych, a więc nadają się do stosowania w górnictwie podziemnym wydobywającym, np. rudy miedzi. MWE zawierające mniejsze niż 10% ilości mikrosfer szklanych można z powodzeniem stosować w górnictwie odkrywkowym. Do ich inicjowania wskazane jest stosować małe ładunki pośrednie. MWE o takim składzie, mają ogromną zaletę, gdyż ich gęstość i całkowita wodoodporność sprawiają, że nadają się do ładowania otworów zawodnionych.

Aby MWE można było wprowadzić do przemysłu górniczego należy dokonać jeszcze zamiany importowanego emulgatora na substytuty krajowe. Potencjalne możliwości takiej zamiany istnieją, gdyż przemysł chemiczny w Polsce produkuje takie związki. Wymagają one tylko bardziej szczegółowego przebadania emulgatora pod kątem wartości równowagi hydrofilowo-lipofilowej — HLB. W przyszłości MWE mogą stać się jednym z podstawowych środków strzałowych używanych w przemyśle górniczym.

Literatura

1. F. TAKEUCHI, K. YAMAMOTO, H. SAKAI, *Emulsion Type Explosives*, Kogyo Kayaku, 43, 5, 285, 1982.
2. BO TONG, *Emulsified Explosives*, Coal. Sci. Technol. 6, 21, 1983.
3. B. LIU, S. YANG, N. ZHUNG, *Study of CRH Explosive Emulsions*, Kuangye Gongcheng, 3, 3, 7, 1983.
4. V. KRISHNA MOHAN, J. E. FIELD, G. W. SWALLOWE, *High-Speed Photographic Studies of Impact of Thin Layers of Emulsion Explosives*, Prop. Expl. Pyr. 9, 77, 1984.
5. K. HATTORI, Y. FUKATSU, N. MORI, H. SAKAI, *Effect of Particle Size Microballons on Detonation Velocity and Sensitivity of Emulsion Explosives*, Proc. Symp. Explos. Pyrotech. 12th, 5, 3 - 5, 11, 1984.
6. G. KOBAYASHI, H. ITOH, K. YAMAMOTO, *Emulsion Particles Size and Initiating Sensitivity of Emulsion Explosives*, Kogyo Kayaku, 45, 3, 135, 1985.

7. *Sprawozdanie z badań laboratoryjnych zawieszinowego materiału wybuchowego do urabiania węgla. Część VI*, Warszawa 1985.
8. A. MARANDA, J. NOWACZEWSKI, E. WŁODARCZYK, B. ZYGMUNT, *Some Detonation Properties of Aluminium Dust Sensitized Slurry Explosives*, J. Techn. Phys. **20**, 3, 1979.
9. E. WŁODARCZYK, *Роль газовых пузырьков в инициировании детонации водонаполненных взрывчатых веществ*, Успехи Механики, 8, 2, 1985.

Резюме

АНАЛИЗ ДЕТОНАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЭМУЛЬСИОННЫХ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ (ЭВВ) СЕНСИБИЛИЗИРОВАННЫХ СТЕКЛЯННЫМИ МИКРОСФЕРАМИ ЗАПОЛНЕННЫМИ ВОЗДУХОМ

В экспериментальной части работы определены скорость и критический диаметр детонации эмульсионных взрывчатых веществ (ЭВВ) в зависимости от содержания основных компонентов. В отдельных образцах изменялись количества азотнокислого аммония и азотнокислого натрия, масла, воды, а также стеклянных микробаллонов заполненных воздухом. На основе полученных результатов определена роль вышеупомянутых компонентов в процессе детонации ЭВВ. Полученные данные дают также возможность поместить ЭВВ в соответствующий класс горных взрывчатых веществ, а также представить перспективы их применения.

Summary

ANALYSIS OF THE DETONATION PARAMETERS OF EMULSION EXPLOSIVES (EM) DEPENDING ON GLASS MICROSPHERES FILLED WITH AIR

In the experimental part of the work reported here the velocity and the critical diameter were determined of the detonation of the emulsion explosives (EM) depending upon the content of the basic components. In the respective samples the quantity was being changed of ammonium- and sodium nitrate, oil, water, and of glass microspheres filled by air. On the strength of the results obtained the role was defined of the above components in the detonation process of EM. The data obtained also enabled placing EM in a suitable class of mining explosives and presenting the prospects of their applications.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 września 1986 roku.

GRAFY TRANSFORMACJI ZMIENNYCH JAKO MODELE DRGAJĄCYCH UKŁADÓW CIĄGŁYCH

JÓZEF WOJNAROWSKI
ANDRZEJ NOWAK

Politechnika Śląska, Gliwice

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- A_k — pole przekroju k -tego elementu belkowego
 \mathbf{C} — macierz sztywności elementu sprężystego
 c — współczynnik sztywności
 D_k — funkcja charakterystyczna układu
 D — funkcja wyznacznikowa grafu przekształconego
 E — moduł Younga na rozciąganie
 I — geometryczny moment bezwładności przekroju belki
 K_1, K_2, K_3, K_4 — funkcje Kryłowa-Pragera
 \mathbf{M} — macierz bezwładności elementu inercyjnego
 S_k — siła osiowa w k -tym przekroju
 \mathbf{T}_{ij}^k — macierzowa waga krawędzi grafu drgań poprzecznych
 t_{ij}^k — waga krawędzi grafu dla drgań wzdłużnych
 \mathbf{T}^k — macierz przejścia k -tego elementu belkowego
 \mathbf{T}_{ij}^* — waga krawędzi grafu zredukowanego
 u_k — przemieszczenie osiowe w k -tym przekroju
 \mathbf{v}_k — macierz zmiennych w k -tym przekroju
 ${}_1x_k$ — wierzchołek grafu odpowiadający k -tej zmiennej biegunowej
 ${}_2x_k$ — wierzchołek grafu odpowiadający k -tej zmiennej przepływowej
 X_T — oznaczenie grafu transformacji zmiennych
 \tilde{X}_T — oznaczenie grafu przekształconego
 \mathbf{Y}_k — macierz podatności w k -tym przekroju
 Y_k — podatność przemieszczeniowa układu w k -tym przekroju
 β — pierwiastek charakterystyczny
 Δ_{ij} — funkcja wyznacznikowa grafu dla drgań wzdłużnych
 $\mathbf{\Delta}_{ij}$ — macierz wyznacznikowa grafu dla drgań poprzecznych
 δ — transmitancja ścieżki głównej grafu zredukowanego

- Δ — macierz charakterystyczna układu
 ρ — gęstość masy
 Θ_k — podatność kątowna w k -tym przekroju
 μ_k — współczynnik określający iloraz pierwiastków charakterystycznych
 $\bar{\mathbf{1}}$ — macierz $[1, 0]$
 $\underline{\mathbf{1}}$ — macierz $[0, 1]$.

1. Wprowadzenie

W formułowaniu zadań modelowania drgań układów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły stosuje się metody: klasyczna metoda rozdzielania zmiennych, macierzy przeniesienia [10] oraz metodę elementów skończonych [1]. Niektóre z tych metod są wygodnym narzędziem w analizie drgań układów prętowych, co wymaga przyjęcia postaci funkcji kształtu.

W pracy sformułowano nową interpretację modelowania drgań układów ciągłych przy zastosowaniu formalizmu grafów [5, 7]. Metodę grafów wykorzystano w agregacji podukładów prostych, które mogą być zarówno ciągłe jak i dyskretne. W przypadku układów złożonych powstaje problem ustalenia warunków zgodności przemieszczeń i sił pomiędzy podukładami nazywanymi prostymi o znanych podatnościach dynamicznych. Konstruując grafy transformacji zmiennych elementu prętowego oraz podstawowych elementów dyskretnych, sposób modelowania sprowadzono do wyznaczania ścieżek głównych w grafie układu [2, 3, 4].

Zastosowania grafów przepływu sygnałów i reguły Masona znane są w analizie układów elektrycznych [8, 9] i dotyczą one równań cząstkowych rzędu 2-go. W sformułowanej metodzie opisuje się układy prętowe drgające wzdłużnie i skrętnie, których modelem matematycznym są równania rzędu 2-go oraz układy wykonujące drgania giętne, modelowane równaniami rzędu 4-go. Zakres metody ograniczono do wyznaczenia równania charakterystycznego oraz dynamicznych podatności układów ciągłych.

Dla układów o strukturze szeregowej podano rekurencyjne związki, umożliwiające redukcję grafu do grafu czwórnika z wierzchołkami brzegowymi. W grafie tym jedna z transformacji zastępczych określa równanie charakterystyczne układu. Możliwe jest również badanie postaci drgań własnych układu na etapie kolejnych kroków redukcji grafu. Zakres metody rozszerzono na układy o strukturze nieszerzowej dzięki zastosowaniu dekompozycji układu na podukłady oraz agregacją ich grafów. W tym przypadku konieczne jest wyznaczenie dynamicznych podatności podukładów w punkcie sprzężenia.

Ponadto rozważono zagadnienie badania wrażliwości strukturalnej częstości własnych układu ciągłego przy modyfikacji struktury układu. W przedstawionym przykładzie badań wpływ położenia punktu sprzężenia podukładów na wartości pierwiastków charakterystycznych. Analiza wykazała, że w niektórych położeniach częstości własne układu głównego są niewrażliwe na modyfikację struktury tego układu, przez przyłączenie drugiego podukładu.

2. Grafy transformacji zmiennych elementów

Układy ciągle można modelować za pośrednictwem belek prostych, wykonujących drgania wzdłużne oraz poprzeczne. W obydwu przekrojach brzegowych elementu wyróżnia się macierze kolumnowe zmiennych reprezentujących wielkości kinematyczne oraz siłowe^{*)}. Pomiedzy zmiennymi wyodrębnionymi w przekrojach brzegowych zachodzi relacja macierzowa:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{T}\mathbf{v}_1, \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{v}_i = \text{col}[u, y, \vartheta, s, Q, M]_i$, $i = 1, 2$,

$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\beta)$ jest macierzą transformacji zmiennych elementu macierzą przejścia elementu,

β jest pierwiastkiem charakterystycznym.

Dokonując specyfikacji macierzy \mathbf{T} oddzielnie dla drgań wzdłużnych i poprzecznych otrzymujemy szczegółowe jej postacie [1]

— dla drgań wzdłużnych:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \frac{l}{EA\beta} \sin \beta \\ -\frac{EA}{l} \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

— dla drgań poprzecznych:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie wyróżnione podmacierze są następujące:

$$\mathbf{T}_{11} = \mathbf{T}_{22} = \begin{bmatrix} K_1 & \frac{l}{\beta} K_2 \\ \frac{\beta}{l} K_4 & K_1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{-l^3}{EI\beta^3} K_4 & \frac{-l^2}{EI\beta^2} K_3 \\ \frac{-l^2}{EI\beta^2} K_3 & \frac{-l}{EI\beta} K_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{-EI\beta^3}{l^3} K_2 & \frac{-EI}{l^2} \beta^2 K_3 \\ \frac{-EI\beta^2}{l^2} K_3 & \frac{-EI\beta}{l} K_4 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

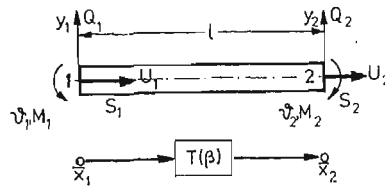
gdzie przez $K_i = K_i(\beta)$, $i \pm 1, 2, 3, 4$ oznaczono funkcje Kryłowa.

Równanie (1) można odwzorować geometrycznie w postaci grafu przepływu informacji elementu belkowego (rys. 1).

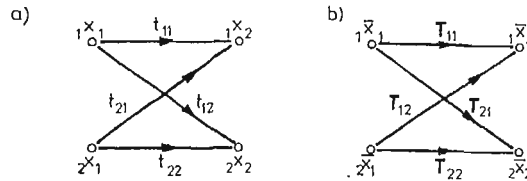
Odpowiednie grafy transformacji zmiennych elementu ilustrują rys. 2a, b.

W tablicy 1 zamieszczono schematy fizyczne, postacie macierzy przejścia oraz grafy transformacji zmiennych elementów dyskretnych — sztywności i masy, dokonując ich specyfikacji dla drgań wzdłużnych i poprzecznych.

^{*)} Zmienne biegunowe oraz przepływowo zgodnie z przyjętą terminologią zaproponowaną przez Firsona [6].



Rys. 1. Model elementu ciągłego



Rys. 2. Grafy elementu belkowego

Tablica 1

Lp	schemat elementu	macierz przejścia elementu	graf transformacji zmiennych elementu
1		$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
2		$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\tilde{C} = \begin{bmatrix} c_y & 0 \\ 0 & c_\varphi \end{bmatrix}$	
3		$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix}$	
4		$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -m\omega^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -I\omega^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\tilde{M} = \begin{bmatrix} -m\omega^2 & 0 \\ 0 & -I\omega^2 \end{bmatrix}$	

Dla układów złożonych z większej liczby elementów zachodzi potrzeba uzależnienia ich pierwiastków charakterystycznych, wykorzystując wzory:
— dla drgań wzłużnych:

$$\beta_1 = \sqrt{\omega^2 \frac{\rho_1 l_1^2}{E_1}}, \quad \beta_K = \chi_K \beta_1, \quad \chi_K = \sqrt{\frac{E_1 \rho_K l_K^2}{E_K \rho_1 l_1^2}}, \quad (6)$$

— dla drgań poprzecznych:

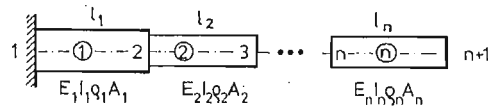
$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\omega^2 \frac{\rho_1 A_1 l_1^4}{E_1 I_1}}, \quad \lambda_K = \lambda_1 \nu_K,$$

$$\nu_K = \sqrt[4]{\frac{E_1 I_1 \rho_K A_K l_K^4}{E_K I_K \rho_1 A_1 l_1^4}}.$$

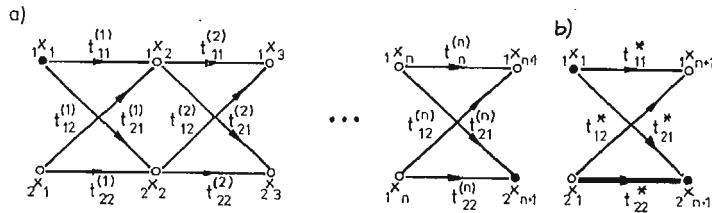
Gałęzie grafu przypadku drgań wzdłużnych są obciążone wagami w spostaci skalarnej natomiast gałęzie grafu modelującego drgania poprzeczne mają reprezentację macierzową. Zauważmy, że tak skonstruowane grafy posiadają własności grafów przepływu informacji [5].

3. Redukcja grafu transformacji zmiennych układu ciągłego

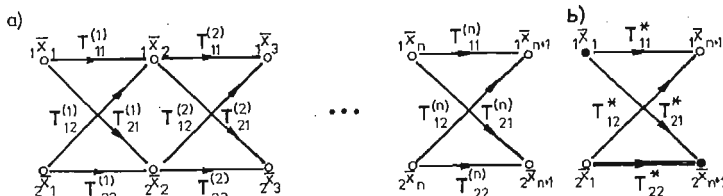
Rozważmy układ złożony z n elementów kontinualnych (rys. 3), którego grafy dla drgań wzdłużnych i poprzecznych ilustrują rys. 4a, 5a. Dokonując redukcji węzłów wewnętrznych $1x_k, 2x_k$ grafów otrzymujemy grafy czwórnikowe przedstawione na rys. 4b, 5b o odpowiednich transmitancjach zastępczych.



Rys. 3. Układ złożony z n elementów



Rys. 4. Graf układu jako model drgań wzdłużnych



Rys. 5. Graf układu jako model drgań poprzecznych

Redukcję grafu z rys. 4a przeprowadza się wykorzystując rekurencyjne zależności (4):

$$\begin{aligned}\Delta_{11}^{(k)} &= t_{11}^{(k)} \Delta_{11}^{(k-1)} + t_{12}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{12}^{(k)} &= t_{11}^{(k)} \Delta_{12}^{(k-1)} + t_{12}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)}, \\ \Delta_{21}^{(k)} &= t_{21}^{(k)} \Delta_{11}^{(k-1)} + t_{22}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{22}^{(k)} &= t_{21}^{(k)} \Delta_{12}^{(k-1)} + t_{22}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)},\end{aligned}\quad (7)$$

gdzie: $k = 2, 3, \dots, n$

$$\Delta_{ij}^{(1)} = t_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Transmitancje krawędzi grafu zredukowanego (rys. 4b) wynoszą:

$$t_{ij} = \Delta_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Z uwagi na warunki brzegowe zachodzi: $\Delta_{11}^{(1)} = \Delta_{21}^{(1)} = 0$. W analogiczny sposób dokonuje się redukcji grafu łańcuchowego z rys. 5a, wykorzystując rekurencyjne zależności macierzowe:

$$\begin{aligned}\Delta_{11}^{(k)} &= \mathbf{T}_{11}^{(k)} \Delta_{11}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{12}^{(k)} &= \mathbf{T}_{11}^{(k)} \Delta_{12}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)}, \\ \Delta_{21}^{(k)} &= \mathbf{T}_{21}^{(k)} \Delta_{11}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{22}^{(k)} &= \mathbf{T}_{21}^{(k)} \Delta_{12}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)},\end{aligned}\quad (8)$$

gdzie: $k = 2, 3, \dots, n$

$$\Delta_{ij}^{(1)} = \mathbf{T}_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Z uwagi na warunki brzegowe zachodzi $\Delta_{11}^{(1)} = \mathbf{0}$, $\Delta_{21}^{(1)} = \mathbf{0}$. Transmitancje krawędzi grafu zredukowanego (rys. 4b) wynoszą:

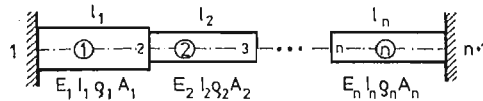
$$\mathbf{T}_{ij}^* = \Delta_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Równanie charakterystyczne układu jest określone za pośrednictwem transmitancji krawędzi łączącej wierzchołek — źródło z wierzchołkiem — upustem i w rozważanym przypadku posiada postać:

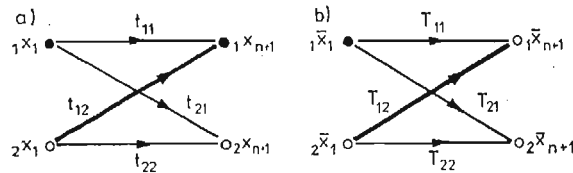
$$t_{22}^*(\beta) = 0, \quad \det \mathbf{T}_{22}^*(\beta) = 0. \quad (9)$$

Dla układu z utwierdzonymi obustronnie brzegami (rys. 6) grafy zredukowane posiadają wierzchołki — upusty ${}_1x_{n+1}$ i ${}_1\bar{x}_{n+1}$ (rys. 7). W tym przypadku równania charakterystyczne przyjmują postać:

$$t_{12}^*(\beta) = 0, \quad \det \mathbf{T}_{12}^*(\beta) = 0. \quad (10)$$



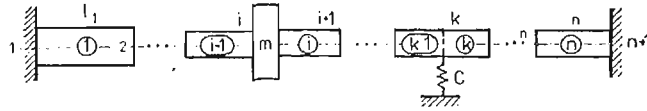
Rys. 6. Model układu



Rys. 7. Grafy zredukowane układu

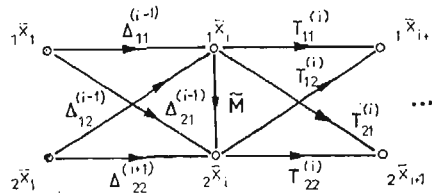
Równania charakterystyczne (9) i (10) rozwiązuje się stosując jedną z metod iteracyjnych np. metodę siecznych. Przedstawiona metoda redukcji grafu z wykorzystaniem równań (7) i (8) posiada własności algorytmiczne i stanowi podstawę do opracowania programów numerycznych.

Dokonyamy modyfikacji równań (8) w przypadku analizy drgań układów ciągłych z elementami dyskretnymi. Rozważmy układ drgający (rys. 8), w którym w i -tym przekroju występuje masa skupiona m oraz podpora sprężysta w przekroju k -tym.



Rys. 8. Model układu

Przeprowadzając redukcję grafu do przekroju i -tego uzyskujemy graf częściowo zredukowany przedstawiony na rys. 9.

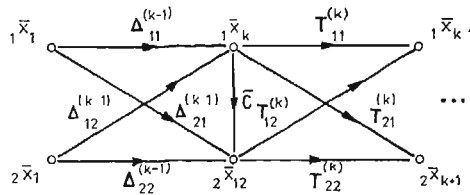


Rys. 9.

Redukcję grafu w następnym kroku przeprowadza się według równań:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11}^{(i)} &= (\mathbf{T}_{11}^{(i)} + \mathbf{T}_{12}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}) \Delta_{11}^{(i-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(i)} \Delta_{21}^{(i-1)}, \\
 \Delta_{12}^{(i)} &= (\mathbf{T}_{11}^{(i)} + \mathbf{T}_{12}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}) \Delta_{12}^{(i-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(i)} \Delta_{22}^{(i-1)}, \\
 \Delta_{21}^{(i)} &= (\mathbf{T}_{21}^{(i)} + \mathbf{T}_{22}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}) \Delta_{11}^{(i-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(i)} \Delta_{21}^{(i-1)}, \\
 \Delta_{22}^{(i)} &= (\mathbf{T}_{21}^{(i)} + \mathbf{T}_{22}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}) \Delta_{12}^{(i-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(i)} \Delta_{22}^{(i-1)}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

W następnych krokach redukcji dokonuje się z wykorzystaniem równań (8) dochodząc do przekroju k -tego, w którym występuje element sprężysty. Graf częściowo zredukowany pokazano na rys. 10



Rys. 10.

W k -tym kroku redukcję przeprowadza się według równań:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11}^{(k)} &= (\mathbf{T}_{11}^{(k)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}) \Delta_{11}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\
 \Delta_{12}^{(k)} &= (\mathbf{T}_{11}^{(k)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}) \Delta_{12}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)},
 \end{aligned} \tag{12}$$

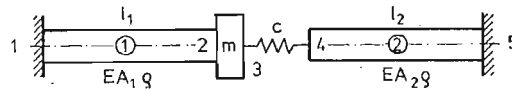
$$\begin{aligned}\Delta_{21}^{(k)} &= (\mathbf{T}_{21}^{(k)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}) \Delta_{11}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{22}^{(k)} &= (\mathbf{T}_{21}^{(k)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}) \Delta_{12}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)}.\end{aligned}$$

Postacie macierzy $\tilde{\mathbf{M}}$ i $\tilde{\mathbf{C}}$ podano w tablicy 1. Redukcję pozostałych podgrafów przeprowadza się już dalej wg równań (8).

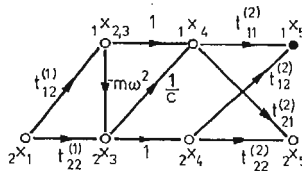
4. Metoda ścieżek głównych grafu transformacji zmiennych

W rozpatrywanej klasie grafów występują jedynie ścieżki otwarte, których redukcja polega na mnożeniu transmitancji składowych krawędzi. Przez ścieżkę główną rozumiemy łańcuch w grafie prowadzący od wierzchołka — źródła do wierzchołka — upustu. Dokonując geometrycznej redukcji ścieżek głównych w grafie możemy wyznaczyć postać analityczną równania charakterystycznego układu, które otrzymuje się jako sumę transmitancji zastępczych wszystkich ścieżek głównych. Sposób taki jest efektywny dla układów złożonych z mniejszej liczby elementów a szczególnie w analizie drgań wzdłużnych układów dyskretno-ciągłych ze względu na skalarną reprezentację grafu.

Rozpatrzmy w formie przykładu układ jak na rys. 11 wykonujący drgania wzdłużne, którego graf ilustruje rys. 12.



Rys. 11. Model układu



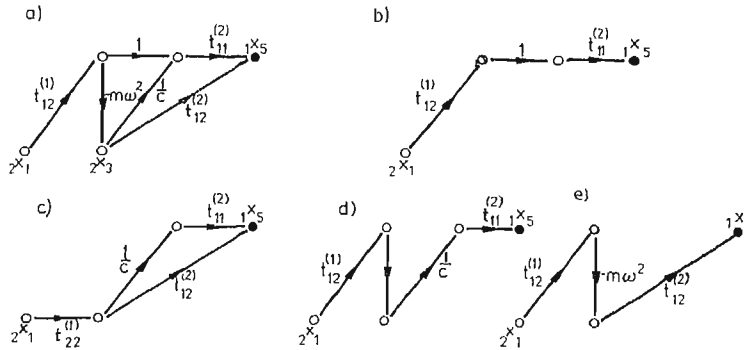
Rys. 12. Graf transformacji zmiennych układu

W grafie daje się wyodrębnić pięć ścieżek głównych pomiędzy wierzchołkami $2x_1$ i $1x_5$, które przedstawiono na rys. 13. Wagi krawędzi grafu są następujące:

$$\begin{aligned}t_{22}^{(1)} &= \cos \beta, & t_{12}^{(1)} &= \frac{1}{c_{01} \beta} \cdot \sin \beta, & t_{11}^{(2)} &= t_{22}^{(2)} = \cos \beta, \\ t_{12}^2 &= \frac{1}{\mu c_{02} \cdot \beta} \sin \mu \beta, & t_{21}^2 &= -\mu c_{02} \beta \sin \mu \beta, \\ \mu &= l_2/l_1, & c_{01} &= \frac{EA_1}{L_1}, & c_{02} &= \frac{EA_2}{L_2}, & m_{01} &= \rho A_1 l_1.\end{aligned}\quad (13)$$

Suma transmitancji zastępczych tych ścieżek generuje funkcję charakterystyczną układu:

$$\Delta = t_{11}^{(2)} \left[\left(1 - \frac{m\omega^2}{c} \right) t_{12}^{(1)} + \frac{1}{c} t_{22}^{(1)} \right] + t_{12}^{(2)} (t_{22}^{(1)} - m\omega^2 t_{12}^{(1)}), \quad (14)$$



Rys. 13.

gdzie w miejsce częstości ω należy podstawić wyrażenie:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{01}}{m_{01}}} = \sqrt{\frac{E}{\rho l_1^2}} \quad (15)$$

Podstawiając do wyrażenia (14) zależności (13), (15) i przyrównując je do zera wyznaczamy po prostych przekształceniach postać funkcji charakterystycznej układu:

$$A = \frac{1}{c \cdot c_{01} \cdot \beta} \cos \beta \cos \mu \beta \left[1 + \frac{c}{\mu c_{02} \beta} \operatorname{tg} \mu \beta \left(1 - \frac{m\beta}{m_{01}} \operatorname{tg} \beta \right) + \right. \\ \left. + \frac{c}{c_{01} \beta} \operatorname{tg} \beta \cdot \left(1 - \frac{m}{m_{01}} \frac{c_{01}}{c} \beta^2 \right) \right] \quad (16)$$

oraz równania charakterystycznego:

$$1 + \frac{c}{\mu c_{02} \beta} \operatorname{tg} \mu \beta \left(1 - \frac{m\beta}{m_{01}} \operatorname{tg} \beta \right) + \frac{c}{c_{01} \beta} \operatorname{tg} \beta \left(1 - \frac{m}{m_{01}} \frac{c_{01}}{c} \beta^2 \right) = 0. \quad (17)$$

Przyjmując wartości parametrów:

$$m = 2m_{01}, \quad c = \frac{1}{2} c_{01}, \quad \mu = 1, \quad c_{02} = c_{01}$$

otrzymujemy szczegółową postać równania (16):

$$\beta \operatorname{tg}^2 \beta + (2\beta^2 - 1) \operatorname{tg} \beta - \beta = 0. \quad (18)$$

Z równania (17) wyznaczamy wartości pierwiastków charakterystycznych

$$\beta_1 = 0,7475, \quad \beta_2 = 3,2944, \quad \beta_k \cong T(k-1)\pi, \quad \text{dla } k \geq 3.$$

Na podstawie grafu z rys. 12 wyznaczamy również wartości zmiennych biegunowych i przepływowych układu a następnie współczynniki postaci drgań.

Ogólne wyrażenia na te wielkości są następujące:

1) w przekroju 2:

$$u_2 = t_{12}^{(1)}, \quad S_1 = \frac{1}{c_{01} \beta} \sin \beta, \quad S_1 = 1,$$

$$S_2 = t_{22}^{(1)} S_1 = \cos \beta.$$

2) $x = l_1^+$ w przekroju 3: $u_3 = u_2$,

$$S_3 = t_{22}^{(1)} S_1 - m\omega^2 u_2 = \cos \beta - \frac{m}{m_{01}} \beta \sin \beta.$$

3) w przekroju 4:

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{c} S_3 = \frac{1}{c_{01} \beta} \sin \beta + \frac{1}{c} \left(\cos \beta - \frac{m}{m_{01}} \beta \sin \beta \right),$$

$$S_4 = S_3.$$

4) w przekroju 5:

$$u_5 = 0,$$

$$S_5 = t_{21}^{(2)} u_4 + t_{22}^{(2)} S_4 = -\mu c_{02} \alpha \sin \mu \beta \cdot u_4 + \cos \mu \beta \cdot S_4.$$

Wartości tych zmiennych w przekrojach wewnętrznych elementów 1 i (2) wyznacza się na podstawie równań „uzmiennionych”:

1) $0 \leq x_1 \leq l_1$ dla elementu 1:

$$u^{(1)}(\xi) = \frac{1}{c_{01} \beta} \sin \beta \xi, \quad \xi = x_1 / l_1,$$

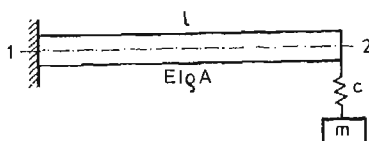
$$S^1(\xi) = \cos \beta \xi,$$

2) $u^2(\xi) = \cos \mu \beta \xi \cdot u_4 + \frac{1}{c_{02} \mu \beta} \sin \mu \beta \xi \cdot S_4, \quad \xi = \frac{x_2}{l_2},$

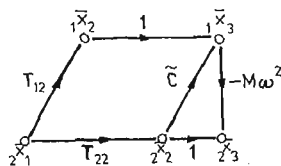
$$S^2(\xi) = -\mu c_{02} \beta \sin \mu \beta \xi \cdot u_4 + \cos \mu \beta \xi \cdot S_4.$$

Normując przemieszczenia układu względem wartości maksymalnej możemy określić współczynniki postaci drgań.

Zastosowanie metody ścieżek głównych pokazemy również na przykładzie drgań poprzecznych układu z rys. 14, dla którego odpowiedni graf pokazano na rys. 15.



Rys. 14.



Rys. 15.

Macierze występujące jako wagi krawędzi grafu wynoszą:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Redukując graf metodą ścieżek głównych wyznaczamy macierz charakterystyczną układu:

$$\mathbf{\Delta} = (\mathbf{1} - \mathbf{M}\omega^2\mathbf{C})\mathbf{T}_{22} - \mathbf{M}\omega^2\mathbf{T}_{1,2}, \quad (20)$$

gdzie:

$$\omega = \beta^2 \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}, \quad c_0 = \frac{EI}{l^3}, \quad m_0 = \rho AI.$$

Uwzględniając zależności (4), (5), (19) i obliczając wyznacznik macierzy (20) wyznaczamy postać równania charakterystycznego

$$(1 - \kappa_1 \kappa_2 \beta)(K_1^2 - K_2 K_4) - \kappa_2 \beta(K_2 K_3 - {}_1 K_4) = 0, \quad (21)$$

gdzie:

$$\kappa_1 = \frac{c_0}{c}, \quad \kappa_2 = \frac{m}{m_0}.$$

5. Wyznaczenie podatności układów ciągłych

Pod pojęciem podatności Y rozumiemy odpowiedź układu na wymuszenie jednostkowe w przekroju x , co zapisujemy:

$$Y = Y(\omega, x). \quad (22)$$

Przyjmując $x = x_k$ wyznaczamy wartość funkcji (22) w tym punkcie, którą umownie nazywamy podatnością podukładu w k -tym przekroju i oznaczamy przez Y_k .

Można wykazać, że podatność daje się bezpośrednio wyznaczyć z grafu układu, przyjmując następujące określenie [5]:

$$Y_k = \frac{D_k(\omega)}{D(\omega)}, \quad (23)$$

gdzie:

$D(\omega)$ — jest funkcją charakterystyczną układu równą funkcji wyznacznikowej grafu X_T ,

$D_k(\omega)$ — jest funkcją wyznacznikową grafu przekształconego X_T .

Zagadnienie wyznaczania podatności metodą grafów sprowadza się do skonstruowania grafu przekształconego X_T , który otrzymuje się z grafu X_T stosując proste topologiczne przekształcenia.

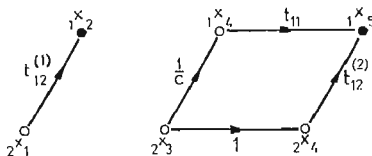
Sposób przekształcenia prowadzi do:

- 1° Przyjęcia zerowego wierzchołka-upustu ${}_1 x_k$ odpowiadającego przemieszczeniu układu w k -tym przekroju.
- 2° Przyjęcia jednostkowej wartości zmiennej przepływowej w k -tym przekroju co odpowiada przyjęciu wierzchołka-źródła ${}_2 x_k$.
- 3° Usunięcia wszystkich krawędzi grafu X_T wychodzących z wierzchołka ${}_1 x_k$.
- 4° Usunięcia wszystkich krawędzi grafu X_T wchodzących do wierzchołka ${}_2 x_k$.

Opisany czynnościowy sposób wyznaczania podatności układów ciągłych zilustrujemy na przykładzie układu przedstawionego na rys. 11, którego graf ilustruje rys. 12.

Wyznamy podatność układu w przekroju 2, generując funkcję charakterystyczną grafu przekształconego pokazanego na rys. 16. Graf ten powstaje z grafu jak na rys. 12 przez przyjęcie zerowego wierzchołka ${}_1 x_{2,3}$ oraz wierzchołka-źródła ${}_2 x_3$. Wówczas graf przekształcony przyjmuje postać dwóch rozłącznych grafów (rys. 16).

Funkcja wyznacznikowa grafu przekształconego jest iloczynem funkcji wyznacznikowych składowych podgrafów.



Rys. 16.

Funkcja wyznacznikowa grafu przekształconego jest postaci:

$$\Delta_2(\beta) = t_{12}^{(1)} \left(t_{12}^{(2)} + \frac{1}{c} t_{11}^{(2)} \right) \quad (24)$$

a po wstawieniu wag krawędzi:

$$\Delta_2(\beta) = \frac{1}{cc_{01}\beta} \cos\beta \cos\mu\beta \frac{1}{\mu c_{02}\beta} \operatorname{tg}\beta \left(\frac{\mu c_{02}\beta}{c} \operatorname{tg}\mu\beta + 1 \right). \quad (25)$$

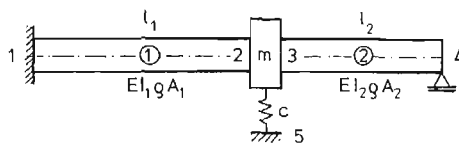
Iloraz funkcji (16), (25) określa podatność dynamiczną układu obliczaną w przekroju 2:

$$Y_2 = \frac{1}{\mu c_{02}\beta} \frac{\operatorname{tg}\beta \left(1 + \frac{\mu c_{02}\beta}{c} \operatorname{tg}\mu\beta \right)}{1 + \frac{c}{\mu c_{02}\beta} \operatorname{tg}\mu\beta \left(1 - \frac{m\beta}{m_{01}} \operatorname{tg}\beta \right) + \frac{c}{c_{01}\beta} \operatorname{tg}\beta \left(1 - \frac{m}{m_{01}} \frac{c_{01}}{c} \beta^2 \right)}, \quad (26)$$

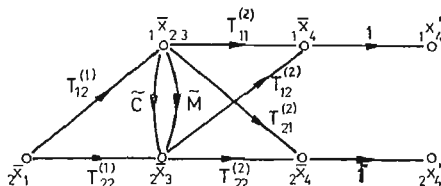
gdzie w miejsce parametru β należy podstawić wyrażenie:

$$\beta = \omega/\omega_{01}\omega_{01} = \sqrt{\frac{c_{01}}{m_{01}}}, \quad c_{01} = \frac{EA_1}{l_1}, \quad m_{01} = \rho A_1 l_1. \quad (27)$$

Rozważmy z kolei model układu dyskretno-ciągłego wykonującego drgania poprzeczne (rys. 17), którego macierzowy graf przedstawiono na rys. 18.



Rys. 17.



Rys. 18.

Macierz charakterystyczną układu przedstawiamy w postaci macierzy o strukturze blokowej:

$$\Delta = \begin{bmatrix} {}_1\Delta \\ {}_2\Delta \end{bmatrix}, \quad (28)$$

gdzie podmacierz ${}_1\Delta$ jest generowana przez ścieżki główne grafu zawarte pomiędzy wierzchołkami ${}_2x_1$ i ${}_1x_4$ i ma postać:

$$\Delta_1 = \bar{\mathbf{1}} \{ \mathbf{T}_{11}^{(2)} \mathbf{T}_{12}^{(1)} + \mathbf{T}_{12}^{(2)} [\mathbf{T}_{22}^{(1)} + (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{T}_{12}^{(1)}] \}. \quad (29)$$

Podmacierz ${}_2\Delta$ jest generowana przez ścieżki główne zawarte między wierzchołkami ${}_2x_1, {}_2x_4''$ i ma postać:

$$\Delta_2 = \bar{\mathbf{1}} \{ \mathbf{T}_{21}^{(2)} \mathbf{T}_{12}^{(1)} + \mathbf{T}_{22}^{(2)} [(\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{T}_{12}^{(1)} + \mathbf{T}_{22}^{(1)}] \}. \quad (30)$$

Zauważmy, że wymiar macierzy charakterystycznej Δ wynosi $\dim \Delta = \langle 2, 2 \rangle$ a jej wyznacznik przyrównany do zera określa równanie charakterystyczne układu:

$$\Delta(\beta) = \det \Delta(\beta) = 0. \quad (31)$$

Dla układów ciągłych wykonujących drgania poprzeczne możemy w każdym przekroju określić trzy niezależne funkcje podatności dynamicznej, które generują macierz podatności układu w k -tym przekroju:

$$\mathbf{Y}_k(\beta) = \begin{bmatrix} Y_k & \tilde{\Theta}_k \\ \tilde{\Theta}_k & \Theta_k \end{bmatrix}, \quad (32)$$

gdzie:

Y_k i Θ_k są odpowiednio podatnością przemieszczeniową i kątową, które wyznacza się przy jednostkowej wartości siły skupionej $\Theta_k = 1$ oraz jednostkowym momencie $M_k = 1$ w tym przekroju,

$\tilde{\Theta}_k$ jest podatnością przemieszczeniową kątową przy jednostkowym momencie M_k sile skupionej Q_k .

W rozważanym przykładzie wyznaczmy macierz podatności układu w przekroju 2. Odpowiednie grafy przekształcone umożliwiające wyznaczenie podatności $Y_k, \Theta_k, \tilde{\Theta}_k$ pokazano na rys. 19a, b, c.

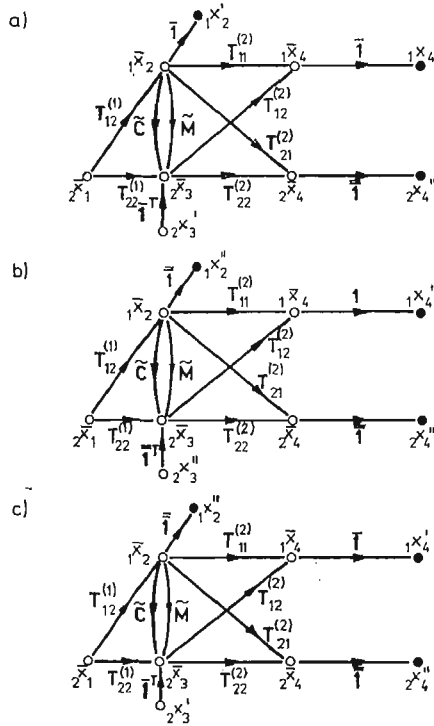
Redukując przykładowo graf z rys. 19a otrzymujemy pięć ścieżek głównych zaznaczone na rys. 20.

Transmitancje ścieżek głównych wynoszą:

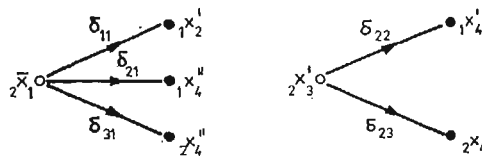
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \bar{\mathbf{1}} \mathbf{T}_{12}^{(1)}, \\ \delta_{21} &= \bar{\mathbf{1}} \{ \mathbf{T}_{11}^{(2)} \mathbf{T}_{12}^{(1)} + \mathbf{T}_{12}^{(2)} [\mathbf{T}_{22}^{(1)} + (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{T}_{12}^{(1)}] \}, \\ \delta_{31} &= \bar{\mathbf{1}} \{ \mathbf{T}_{22}^{(1)} [\mathbf{T}_{22}^{(1)} + (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{T}_{12}^{(1)}] + \mathbf{T}_{21}^{(2)} \mathbf{T}_{12}^{(1)} \}, \\ \delta_{22} &= \bar{\mathbf{1}} \mathbf{T}_{12}^{(2)} \mathbf{1}^\top, \quad \delta_{23} = \bar{\mathbf{1}} \mathbf{T}_{22}^{(2)} \mathbf{1}^\top. \end{aligned}$$

Na ich podstawie konstruujemy macierz wyznacznikową grafu z rys. 19a:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} \\ \delta_{31} & \delta_{23} \end{bmatrix}. \tag{34}$$



Rys. 19.



Rys. 20.

Obliczając wyznacznik macierzy (34) $\Delta_2(\beta) = \det \Delta_2$ i uwzględniając funkcję (31) wyznaczamy podatność przemieszczeniową układu w przekroju 2:

$$Y_2(\beta) = \frac{\Delta_2(\beta)}{\Delta(\beta)}. \tag{35}$$

W podobny sposób wyznacza się pozostałe podatności Θ_2 i $\tilde{\Theta}_2$ układu.

6. Metoda dekompozycji układu i agregacji grafów

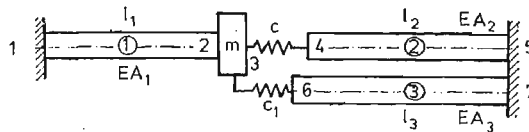
Metoda polega na dekompozycji, czyli podziale układu na prostsze podukłady, dla których niezależnie są konstruowane odpowiednie grafy transformacji zmiennych. W przekrojach podziału wyznacza się podatności dynamiczne poszczególnych podukładów. Dokonując agregacji podgrafów wyznaczamy podatność całego układu w wybranym przekroju. Dla układów sprzężonych poprzez tylko jedną zmienną kinematyczną (biegunową) wykorzystuje się następujący wzór:

$$Y_k(\beta) = \frac{Y_k^{(1)} \cdot Y_k^{(2)}}{Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)}}, \quad (36)$$

gdzie: $Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}$ są podatnościami podukładów w k -tym przekroju.

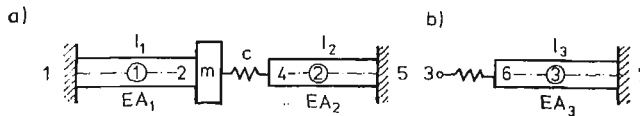
Równanie charakterystyczne otrzymuje się przez przyrównanie do zera mianownika funkcji (36).

Istotę metody zilustrujemy na przykładzie drgań wzdłużnych układu przedstawionego na rys. 21. Układ podzielono na dwa podukłady w przekroju 3, przedstawione na rys.



Rys. 21.

22a, b. Pierwszy z podukładów pokazany na rys. 22a był analizowany w punkcie 4 pracy jego graf ilustruje rys. 12. Dla tego podukładu wyznaczono podatność dynamiczną w przekroju 2, która jest opisana wzorem (27). Konstruując graf układu złożonego zre-



Rys. 22.

dukowano graf podukładu pierwszego do jednej krawędzi o wadze równej podatności $Y_2^{(1)}$ (wzór 27), do którego przyłączono następnie graf drugiego podukładu. Generując ścieżki główne otrzymanego grafu, pokazanego na rys. 23 wyznaczono ogólną postać równania charakterystycznego układu:

$$t_{11}^{(3)} \left(Y_3^{(1)} + \frac{1}{c_1} \right) + t_{12}^{(3)} = 0, \quad (37)$$

gdzie:

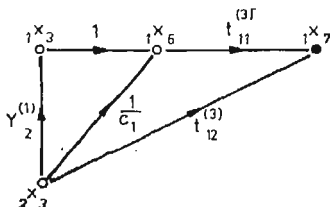
$$t_{11}^{(3)} = \cos \mu_1 \beta, \quad t_{12}^{(3)} = \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \sin \mu_1 \beta,$$

$$\mu_1 = \frac{l_3}{l_1}, \quad c_{03} = \frac{EA_3}{l_3}.$$

Po podstawieniu do (37) wag krawędzi grafu otrzymujemy postać równania charakterystycznego:

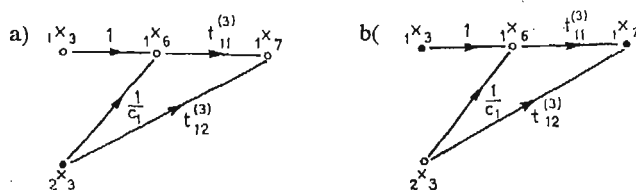
$$Y_2^{(1)} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \operatorname{tg} \mu_1 \beta = 0, \quad (38)$$

gdzie $Y_2^{(1)}$ jest podatnością pierwszego podukładu określoną wzorem (27).



Rys. 23.

Wyznamy również podatność układu złożonego z przekroju 3, wykorzystując grafy drugiego podukładu przedstawione na rys. 24a, b, przy czym graf z rys. 24b jest grafem przekształconym (przyjmując zerowy wierzchołek $1x_3$ oraz wierzchołek-źródło $2x_3$).



Rys. 24.

Funkcje wyznacznikowe podgrafów wynoszą:

$$\Delta^{(2)} = t_{11}^{(3)} = \cos \mu_1 \beta, \quad (39)$$

$$\Delta_3^{(2)} = t_{12}^{(3)} + \frac{1}{c_1} t_{11}^{(3)} = \frac{1}{c_{03} \mu_1 \beta} \cos \mu_1 \beta \left(\operatorname{tg} \mu_1 \beta + \frac{\mu_1 c_{03} \beta}{c_1} \right). \quad (40)$$

Na ich podstawie wyznaczamy podatność drugiego podukładu:

$$Y_2^{(2)} = \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta^{(2)}} = \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \left(\operatorname{tg} \mu_1 \beta + \frac{\mu_1 c_{03} \beta}{c_1} \right). \quad (41)$$

Wykorzystując wzór (36) wyznaczamy podatność układu złożonego:

$$Y_2 = \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \frac{Y_2^{(1)} \left(\operatorname{tg} \mu_1 \beta + \frac{\mu_1 c_{03} \beta}{c_1} \right)}{\Delta(\beta)}, \quad (42)$$

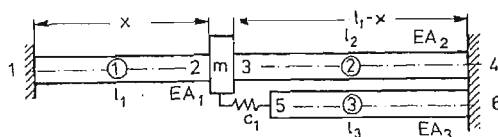
gdzie:

$$\Delta(\beta) = Y_2^{(1)} + \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \left(\frac{\mu_1 c_{03} \beta}{c_1} + \operatorname{tg} \mu_1 \beta \right).$$

Przedstawiony przykład ilustruje sposób analizy układów złożonych o strukturze nieszeręgowej, polegający na dekompozycji układu na podukłady o strukturze szeregowej, dla których są wyznaczane podatności w przekrojach sprzężenia. Dokonując agregacji grafów podukładów możliwe jest wyznaczenie w sposób sekwencyjny równania charakterystycznego układu złożonego oraz jego podatności dynamicznej względem jednego z punktów sprzężenia.

7. Przykłady liczbowe

Rozważmy drgania wzdluzne układu przedstawionego na rys. 25, który otrzymuje się przez modyfikację układu z rys. 21, przyjmując nieskończenie dużą sztywność elementu sprzężonego c ($c = \infty$). Dla tak przyjętego modelu drgającego sformułowano zagadnienie oceny wpływu położenia masy m , określonego współrzędną x na wartości częstości własnych układu z jednoczesną zmianą długości l_2 elementu 3, przejmując $l_2 = l_1 - x$.



Rys. 25.

Równanie charakterystyczne układu otrzymujemy wykorzystując zależności (27), (38) i po podstawieniu wartości parametrów

$$c = \infty, \quad A_1 = A_2 = A_3, \quad m = 2m_{01}, \quad m_{01} = \rho A_1 l_1, \quad c_1 = 2c_{01}, \\ c_{01} = EA_1/l_1$$

sprowadzono je do postaci:

$$\operatorname{tg} \beta \xi \operatorname{tg}(1 - \xi) \beta + [0,5\beta + \operatorname{tg}(1 - \xi) \beta] [\operatorname{tg}(1 - \xi) \beta + \operatorname{tg} \beta \xi (1 - 2\beta \operatorname{tg}(1 - \xi) \beta)] = 0, \quad (43)$$

gdzie:

$$\beta = \omega/\omega_{01}, \quad \omega_{01} = \sqrt{c_{01}/m_{01}}, \quad \xi = x/l_1.$$

Rozwiązując równanie (43) wyznaczono wartości pierwiastków charakterystycznych β w funkcji współrzędnej ξ , czyli położenia masy m . Wyniki obliczeń dla czterech początkowych postaci drgań opracowano graficznie w postaci krzywych, które pokazano na rys. 26.

W wyniku przeprowadzonej analizy stwierdzono, że w pewnych położeniach masy dyskretnej częstości własne układu pokrywają się z wartościami częstości własnych belki obustronnie utwierdzonej, które wynoszą $\beta = \pi$ oraz $\beta = 2\pi$.

Punkty niewrażliwości częstości własnych układu na modyfikację strukturalną, polegającą na przyłączeniu do niego innego podukładu są określone wzorami:

$$\xi = \frac{l}{k} \quad (l = 1, 2, \dots, k-1) \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} k\pi \xi = \frac{k^2 \pi^2 - 1}{2k\pi}, \quad (45)$$

gdzie k oznacza numer postaci drgań.

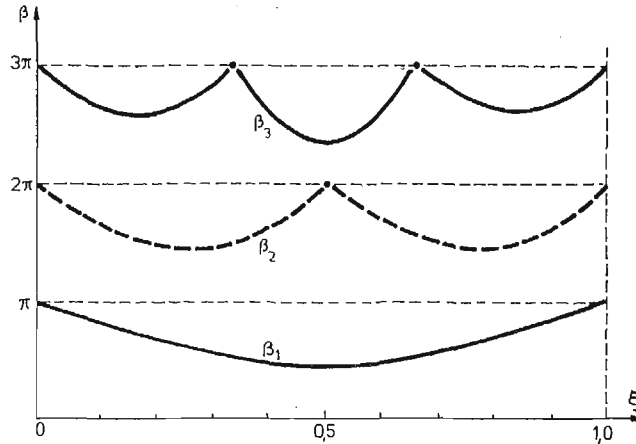
W pierwszym przypadku punkty te pokrywają się z węzłami drgań belki obustronnie utwierdzonej.

Przyjmujemy umownie, że belka z masą dyskretną m stanowi układ główny. Zbadajmy również przebiegi częstości własnych układu głównego, pomijając element sprężysty c_1 , tzn. przyjmując $c_1 = 0$.

Równanie charakterystyczne (40) dla układu głównego jest postaci:

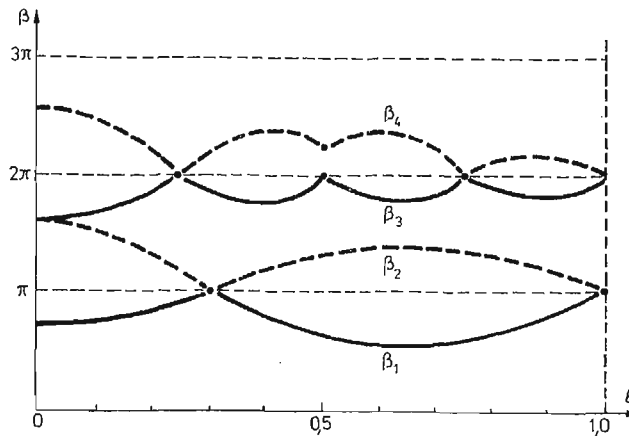
$$\operatorname{tg}(1-\xi)\beta + \operatorname{tg}\beta\xi[1-2\beta\operatorname{tg}(1-\xi)\beta] = 0. \quad (45)$$

Pierwiastki równania (45) w funkcji współrzędnej ξ pokazano na rys. 26.



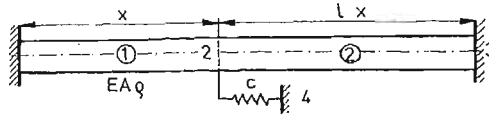
Rys. 26.

Analizując wykresy pokazane na rys. 27 zauważa się dla wyższych postaci drgań zjawisko „dudnienia” częstości własnych. Punkty nieczułości pokrywają się również z węzłami drgań belki. Dołączenie masy dyskretnnej powoduje zmniejszenie częstości własnych belki, co jest zgodne z ogólnym stwierdzeniem, że ze wzrostem masy częstości własne układu maleją.



Rys. 27.

Odwrotne zjawisko obserwuje się, gdy układ poddamy dodatkowym więzom sprężystym. Rozważmy układ złożony z belki obustronnie utwierdzonej, do której w przekroju x przyłączono element sprężysty c (rys. 28). Układ ten jest szczególnym przypadkiem modyfikacji modelu z rys. 25.



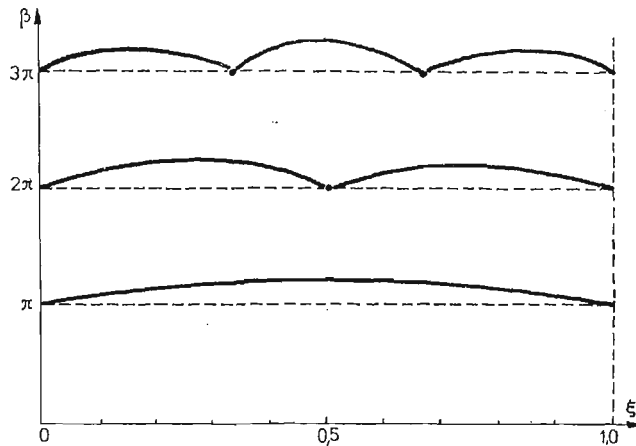
Rys. 28.

Równanie charakterystyczne układu ma postać:

$$\beta \operatorname{tg} \beta \xi + (\beta + 0,5 \operatorname{tg} \beta \xi) \cdot \operatorname{tg}(1 - \xi) \beta = 0, \quad (46)$$

gdzie założono, że $\frac{1}{2} c_0, c_0 = EA/l$.

Zmiany częstości własnych układu w funkcji współrzędnej przedstawiono na rys. 29.



Rys. 29.

Przy dołączeniu do belki elementu sprężystego zauważa się wzrost częstości własnych. Zmiany częstości są większe przy dołączeniu do belki elementu masowego, co ilustruje porównanie krzywych z rys. 27 i 29.

8. Podsumowanie i wnioski

Przedstawiony w pracy sposób modelowania drgań układów ciągłych posiada własności algorytmiczne w zakresie wyznaczania równania charakterystycznego i postaci drgań układów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. Trzeba zaznaczyć, że w literaturze analizę drgań układów mechanicznych na gruncie modeli kontinualnych przeprowadza się na przykładach stosunkowo prostych modeli [10, 11]. Dla bardziej złożo-

nych układów analizę prowadzi się w oparciu o modele dyskretne, np. z zastosowaniem metody elementów skończonych. Niemniej istnieje potrzeba rozwijania metod analizy drgań układów na gruncie modeli kontinualnych, ponieważ wyniki tej analizy nie są obciążone błędami aproksymacji. W pracy [10] przedstawiono metodę wyznaczania równania charakterystycznego i dynamicznych podatności złożonych układów ciągłych z zastosowaniem schematów blokowych. W metodzie tej wymaga się znajomości podatności podukładów w punkcie ich sprzężenia.

W prezentowanej pracy wykorzystano również ten sposób analizy formułując metodę agregacji grafów podukładów (rozdział 6), przy czym podatności podukładów wyznaczone są na podstawie grafu przekształconego podukładu metodą opisaną w rozdziale 5. W tym zakresie przedstawiony sposób analizy jest równoważny metodzie macierzy przeniesienia oraz metodzie układów blokowych [10]. W literaturze nie spotyka się jednak prób zastosowań metody grafów przepływu sygnałów w modelowaniu drgań układów ciągłych.

Zaletą przedstawionego w pracy sposobu modelowania jest możliwość bezpośredniego wyznaczania równania charakterystycznego układu wprost z grafu, metodą poszukiwania ścieżek głównych pomijając etap określania warunków brzegowych dla układu. Przedstawione w pracy rekurencyjne zależności stanowią podstawę do opracowania szczegółowych programów obliczeń.

Literatura

1. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych.*, Arkady, Warszawa 1970.
2. A. NOWAK, J. WOJNAROWSKI, *Modelowanie drgań układów dyskretno-ciągłych metodą grafów transformacji zmiennych*, Zbiór referatów XXII Sympozjonu „Modelowanie w mechanice”, Gliwice—Szczyrk 1984, prace PTMTS nr 49, s. 329 - 337.
3. A. NOWAK, J. WOJNAROWSKI, *Modelowanie drgających układów ciągłych metodą grafów transformacji zmiennych*. Zbiór streszczeń XI Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, Poznań—Biażejewko 1984.
4. A. NOWAK, J. WOJNAROWSKI, *Modelowanie drgań swobodnych układów dyskretno-ciągłych metodą grafów transformacji zmiennych*, Problemy Dynamiki Maszyn nr 2, 3, 1984.
5. J. WOJNAROWSKI, *Zastosowania grafów w analizie drgań układów mechanicznych*, PAN, Komitet Budowy Maszyn PWN, Warszawa—Wrocław 1981.
6. F. A. FIRESTONE, *Twixt Earth and Sky with Roel and Tube. The Mobility and Classical Impedence Analogies*, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 28, 1958, s. 1117 - 1153.
7. L. ROBICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Grafy przepływu sygnałów*, PWN Warszawa 1968.
8. F. KAMIŃSKI, *Synteza obwodów liniowych o stałych rozłożonych*, PWN Warszawa 1976.:
9. M. SKOWROŃSKA, *Teoria filtru elektromechanicznego o drganiach skręcających lub podłużnych*, Z. N. Politech. Warsz. 86, Elektryka 33, 1964.
10. R. BISHOP, G. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT Warszawa 1972.
11. А. Филиппов, *Колебания деформируемых систем*, Машиностроение 1970.

Резюме

ГРАФЫ ТРАНСФОРМАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ КАК МОДЕЛИ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ
НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

В работе представлен анализ колебаний непрерывных систем при применении графов трансформации переменных. Метод заключается в определении главных путей в графе системы. Этот способ применяется для определения характеристического уравнения и динамических податливостей системы. В случае сложных систем применено метод декомпозиции системы на подсистемы и агрегации их подграфов. Представленные примеры иллюстрируют использование метода в анализе продольных колебаний непрерывных систем.

Summary

GRAPHS OF VARIABLES TRANSFORMATIONS AS THE MODELS OF VIBRATING
CONTINUOUS SYSTEMS

A method of analysis of the vibrations of continuous systems has been presented by the application of the graphs of variables transformation. The method consists in the determination of the principal paths in the system graph, and has been applied in determining the characteristic equation and the dynamical flexibility of the system.

In the case of complex systems a method has been applied to the decomposition of the system into subsystems and the aggregation of their subgraphs.

The examples illustrate the application of the method in the analysis of the longitudinal vibrations of continuous systems.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 maja 1986 roku.

O ROZSEPAROWANIU RÓWNAŃ TERMODYFUZJI LEPKOSPĘŻYSTEJ

JAN KUBIK
MAREK WRÓBEL

Wyższa Szkoła Inżynierska, Opole

1. Wstęp

Zagadnienia termodyfuzji lepkospężystej prowadzą do złożonego układu pięciu równań różniczkowo-całkowych. Trudności związane z całkowaniem tego układu równań skłaniają do poszukiwań prostszych ujęć zagadnienia. Jedną z takich możliwości w zakresie sprzężonej termosprężystości podał jeszcze w 1956 r. Biot [1]. Propozycja ta sprowadza zadania termosprężystości do rozsprężonych równań teorii naprężeń cieplnych. Niniejsza praca stanowi przeniesienie tej idei na zagadnienia termodyfuzji lepkospężystej.

2. Równania zagadnienia

Równania tworzące wynikające z funkcjonału energii wewnętrznej dla zadań termodyfuzji lepkospężystej mają postać [4, 5, 6]:

$$\sigma_{ij} = E'_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} - \varphi'_{ij} * d\varrho S - \Phi'_{ij} * dC, \quad (2.1)$$

$$\Theta = -\varphi'_{ij} * d\varepsilon_{ij} + m' * d\varrho S - l' * dC, \quad (2.2)$$

$$M = -\Phi'_{ij} * d\varepsilon_{ij} - l' * d\varrho S + n' * dC. \quad (2.3)$$

Kolejny równoważny zestaw równań tworzących otrzymuje się z funkcjonału energii swobodnej [4, 5, 6]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} - \varphi_{ij} * d\Theta + \Phi_{ij} * dC, \quad (2.4)$$

$$\varrho S = \varphi_{ij} * d\varepsilon_{ij} + m * d\Theta + l * dC, \quad (2.5)$$

$$M = \Phi_{ij} * d\varepsilon_{ij} - l * d\Theta + n * dC. \quad (2.6)$$

Zależnościom (2.1) - (2.6) odpowiadają następujące równania na strumienie masy i ciepła:

$$j_i = -K_{ij} M_{,j}, \quad (2.7)$$

$$q_i = -k_{ij} \Theta_{,j}, \quad (2.8)$$

oraz równania pól dotyczące quasi-statycznych zagadnień termodynamiki:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad (2.9)$$

$$\dot{C} = r_1 - j_{i,i}, \quad (2.10)$$

$$T_0 \rho \dot{S} = \rho r_2 - q_{i,i}. \quad (2.11)$$

W rozważaniach uwzględniamy także równania geometryczne:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}). \quad (2.12)$$

Zależnościom (2.12) i (2.9) oraz równaniom tworzącym (2.1) ÷ (2.3) lub (2.4) ÷ (2.6) odpowiadają w ośrodku izotropowym następujące równania przemieszczeniowe Lamego [4, 5, 6]:

$$\mu' * dU_{i,jj} + (\mu' + \lambda') * dU_{j,ji} = \gamma'_s * d\rho S_{,i} + \gamma'_c * dC_{,i} - \rho F_i, \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\gamma'_s = \alpha_s(2\mu' + 3\lambda'), \quad (2.14)$$

$$\gamma'_c = \alpha_c(2\mu' + 3\lambda'), \quad (2.15)$$

$$\mu * dU_{i,jj} + (\mu + \lambda) * dU_{j,ji} = \gamma_T * d\Theta_{,i} + \gamma_c * dC_{,i} - \rho F_i, \quad (2.16)$$

gdzie:

$$\gamma_T = \alpha_T(2\mu + 3\lambda), \quad (2.17)$$

$$\gamma_c = \alpha_c(2\mu + 3\lambda). \quad (2.18)$$

Jeżeli uwzględnić równania tworzące (2.1) - (2.3) i związek geometryczny (2.12) w równaniu entropii (2.11) i bilansie masy (2.10) to otrzymamy:

$$T_0 \rho \dot{S} = \rho r_2 - k(\varphi' * de_{,ii} - m' * d\rho S_{,ii} - l' * dC_{,ii}), \quad (2.19)$$

$$\dot{C} = r_1 - K(\Phi' * de_{,ii} + l' * d\rho S_{,ii} + n * dC_{,ii}). \quad (2.20)$$

W równaniach (2.19) i (2.20) przyjęto, że:

$$k_{ij} = k\delta_{ij}, \quad K_{ij} = K\delta_{ij}, \quad \varphi'_{ij} = \varphi'\delta_{ij}, \quad \Phi'_{ij} = \Phi'\delta_{ij}. \quad (2.21)$$

W zależnościach (2.1) ÷ (2.21) przyjęto następujące oznaczenia:

σ_{ij} , ε_{ij} — tensory stanu naprężenia i odkształcenia,

T_1 , C_1 — temperatura i koncentracja w chwili t ,

T_0 , C_0 — temperatura i koncentracja stanu naturalnego,

$$\Theta = T_1 - T_0, \quad C = C_1 - C_0 \quad (2.22)$$

ρF_i — siła masowa jednostki objętości ciała,

E_{ijkl} , E'_{ijkl} , φ_{ij} , φ'_{ij} , Φ_{ij} , Φ'_{ij} — tensory funkcji relaksacji,

l , l' , m , n , n' — funkcje relaksacji,

q_i , j_i — strumień ciepła i strumień masy,

S — entropia,

M — potencjał chemiczny,

k_{ij}, K_{ij} — tensory przewodności cieplnej i dyfuzyjnej,
 r_1, r_2 — źródło masy i źródło ciepła w jednostce objętości i na jednostkę czasu,
 $*$ — symbol oznaczający mnożenie splotowe, zdefiniowane relacją,

$$f_1 * df_2 = \int_0^t f_1(t-\tau) df_2(\tau) \quad (2.23)$$

$(\dots)_i$ — oznaczenie pochodnej cząstkowej,

$(:)$ — oznaczenie pochodnej względem czasu $\frac{d(\dots)}{dt}$

$H, H(t)$ — funkcja Heaviside'a,

3. Rozsprężenie równań

Proces rozsprężania układu równań termodyfuzji lepkosprężystej rozpoczynamy od różniczkowania zależności (2.13). Otrzymamy

$$(2\mu' + \lambda') * dU_{i,jj} = \gamma'_s * d\varrho S_{,ii} + \gamma'_c * dC_{,ii} - \varrho F_{i,i}. \quad (3.1)$$

Po przyjęciu założenia, że współczynnik Poissona jest stały, czyli

$$\mu'(t) = \dot{\mu}' f(t), \quad \lambda'(t) = \dot{\lambda}' f(t), \quad (3.2)$$

dokonyjemy na równaniu (3.1) transformacji i retransformacji Laplace'a otrzymując:

$$\begin{aligned} e_{,ii} &= \frac{\gamma'_s}{(2\dot{\mu}' + \dot{\lambda}') f(t)} \varrho S_{,ii} + \frac{\gamma'_c}{(2\dot{\mu}' + \dot{\lambda}') f(t)} C_{,ii} - \frac{\varrho}{(2\dot{\mu}' + \dot{\lambda}') f(t)} F_{i,i} = \\ &= \dot{\gamma}_s \varrho S_{,ii} + \dot{\gamma}_c C_{,ii} - \dot{\varrho} F_{i,i}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wykorzystując zależność (3.3) można wyeliminować z równań (2.19) i (2.20) pierwsze składniki w nawiasach. W rezultacie otrzymamy:

$$T_0 \varrho \dot{S} = \varrho r_2 - k(\hat{m} * d\varrho S_{,ii} + \hat{l} * dC_{,ii} - \hat{\varrho} F_{i,i}), \quad (3.4)$$

$$\dot{C} = r_1 - K(\hat{l} * d\varrho S_{,ii} + \hat{n} * dC_{,ii} - \hat{\varrho} F_{i,i}), \quad (3.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \varphi' \dot{\gamma}_s - m', \\ \hat{l} &= \varphi' \dot{\gamma}_c + l' = \Phi' \dot{\gamma}_s + l', \\ \hat{n} &= \Phi' \dot{\gamma}_c - n', \\ \hat{\varrho} &= \varphi' \dot{\varrho}, \\ \tilde{\varrho} &= \Phi' \dot{\varrho}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Równania (3.4) i (3.5) są rozseparowanym od pola przemieszczeń układem równań ciepłno-dyfuzyjnych, który wraz z równaniem przemieszczeniowym:

$$\mu' * dU_{i,jj} + (\mu' + \lambda') * dU_{j,ji} = \gamma'_s * d\varrho S_{,i} + \gamma'_c * dC_{,i} - \varrho F_i, \quad (3.7)$$

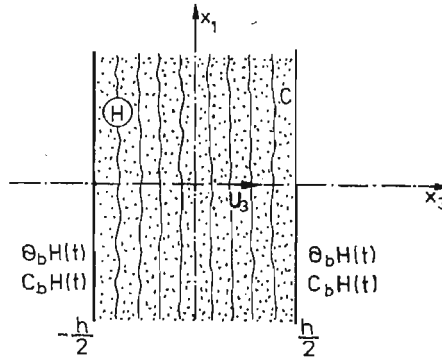
stanowią komplet równań termodyfuzji lepkosprężystej sprowadzonej do teorii naprężeń cieplno-dyfuzyjnych.

4. Termodyfuzja w warstwie

Jako zastosowanie proponowanej w pracy metody rozwiązania zadań termodyfuzji sprężystej i lepkosprężystej przeprowadzimy analizę następującego zadania:

Należy wyznaczyć pola temperatury koncentracji, przemieszczeń, a w dalszej kolejności odkształceń i naprężeń w warstwie sprężystej określone przez dane na brzegach wartości temperatury i koncentracji.

Rozważmy więc warstwę o grubości h , w której występuje pole temperatury Θ , koncentracji C i przemieszczenia U_i (rys. 1).



Rys. 1. Warstwa z polem temperatury, koncentracji i przemieszczenia oraz warunkami brzegowymi

Zakładamy, że zagadnienie przez nas rozpatrywane jest jednowymiarowe, oraz że ośrodek jest izotropowy, brak w nim źródeł ciepła i masy oraz sił masowych. Wówczas wielkości występujące w zadaniu dadzą się przedstawić w postaci:

$$\Theta = \Theta(x_3, t), \quad (4.1)$$

$$\varrho S = \varrho S(x_3, t), \quad (4.2)$$

$$C = C(x_3, t), \quad (4.3)$$

$$U_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \end{bmatrix}, \quad (4.4) \quad n_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$k_{ij} = k \delta_{ij} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \quad (4.6) \quad K_{ij} = K \delta_{ij} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu' * dU_{i,j} + (\lambda * dU_{k,k} - \gamma'_c * d\varrho S - \gamma_c * dC) \delta_{ij} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_3, t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}(x_3, t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_3, t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\varrho r_2 = 0, \quad r_1 = 0,$$

$$\varrho F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

$$\Theta\left(\pm \frac{h}{2}; t\right) = \Theta_b H(t), \quad C\left(\pm \frac{h}{2}; t\right) = C_b H(t) \quad (4.10)$$

Wobec powyższego komplet równań wyjściowych (3.4), (3.5) i (3.7) można przedstawić w postaci:

$$T_0 \varrho \dot{S} = -k(\hat{m} * d\varrho S_{,33} + \hat{l} * dC_{,33}), \quad (4.11)$$

$$\dot{C} = -K(\hat{l} * d\varrho S_{,33} + \hat{n} * dC_{,33}), \quad (4.12)$$

$$U_{3,33} = \frac{1}{2\mu' + \lambda'} (\gamma'_s \varrho S_{,33} + \gamma'_c C_{,33}). \quad (4.13)$$

Do rozwiązania układu równań (4.11) i (4.12) potrzebny jest jeszcze warunek brzegowy dla entropii i warunki początkowe. Aby znaleźć warunek brzegowy w entropii weźmy równanie tworzące (2.5) oraz równanie przemieszczeniowe (2.16) na którym dokonano transformacji Laplace'a. Po scałkowaniu będzie:

$$\varrho S = \varphi_{ij} * dU_{i,j} + m * d\Theta + l * dC, \quad (4.14)$$

$$\bar{U}_{3,3} = \frac{2\bar{\mu} + 3\bar{\lambda}}{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}} (\alpha_c \bar{C} + \alpha_T \bar{\Theta}) + X, \quad (4.15)$$

stałą X wyznaczmy z warunku brzegowego:

$$\bar{U}_{3,3} \Big|_{\pm \frac{h}{2}} = \frac{2\bar{\mu} + 3\bar{\lambda}}{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}} (\alpha_c C_b + \alpha_T \Theta_b) \frac{1}{s} \Rightarrow X = 0, \quad (4.16)$$

stąd:

$$U_{3,3} = \frac{2\mu + 3\lambda}{2\mu + \lambda} (\alpha_c C + \alpha_T \Theta), \quad (4.17)$$

wstawiając (4.17) do (4.14) otrzymujemy warunek brzegowy dla entropii:

$$\varrho S \Big|_{\pm \frac{h}{2}} = \left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \varphi_{33} \alpha_T + m \right) \Theta_b + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \varphi_{33} \alpha_c + l \right) C_b \right] H(t) = \varrho S_b H(t). \quad (4.18)$$

Natomiast jako warunki początkowe przyjmujemy zerową wartość entropii i koncentracji na całej grubości warstwy

$$\varrho S(0^+) = 0, \quad C(0^+) = 0. \quad (4.19)$$

Jeżeli na układzie równań (4.11) i (4.12) dokonać teraz transformacji Laplace'a to po wykorzystaniu warunków początkowych (4.19) układ ten można rozseparować. Otrzymamy dwa równania postaci:

$$A\varrho\bar{S}_{,3333} - sB\varrho\bar{S}_{,33} + s^2T_0\varrho\bar{S} = 0, \quad (4.20)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{s} D\varrho\bar{S}_{,33} + E\varrho\bar{S}, \quad (4.21)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= kK(\hat{l}^2 - \hat{m}\hat{n}), & B &= k\hat{m} + K\hat{n}T_0, \\ D &= K\left(\frac{\hat{m}\hat{n}}{\hat{l}} - \hat{l}\right), & E &= \frac{K\hat{n}}{k\hat{l}}T_0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Rozwiązanie ogólne dla transformaty entropii wyznacza się z równania (4.20) otrzymując:

$$\varrho\bar{S}(x_3, s) = A_1e^{c\sqrt{s}x_3} + A_2e^{-c\sqrt{s}x_3} + A_3e^{d\sqrt{s}x_3} + A_4e^{-d\sqrt{s}x_3}, \quad (4.23)$$

gdzie:

$$c = \sqrt{\frac{1}{2A}(B + \sqrt{B^2 - 4AT_0})} \quad d = \sqrt{\frac{1}{2A}(B - \sqrt{B^2 - 4AT_0})}. \quad (4.24)$$

Dzięki symetrii warunków brzegowych rozważania nasze znacznie się upraszczają, bowiem rozwiązanie zawiera parzyste funkcje ze względu na współrzędną x_3 :

$$\varrho\bar{S}(x_3, s) = \varrho\bar{S}(-x_3, s), \quad \bar{C}(x_3, s) = \bar{C}(-x_3, s). \quad (4.25)$$

Własność (4.25) pociąga za sobą w rozwiązaniu (4.23) równość parametrów:

$$A_1 = A_2 \text{ i } A_3 = A_4. \quad (4.26)$$

Wówczas transformatę entropii (4.23) można zapisać wykorzystując definicję cosinusa hiperbolicznego w postaci:

$$\varrho\bar{S}(x_3, s) = 2A_1\text{ch}(c\sqrt{s}x_3) + 2A_3\text{ch}(d\sqrt{s}x_3). \quad (4.27)$$

Natomiast z drugiego równania układu (4.20) i (4.21) otrzymamy rozwiązanie ogólne dla transformaty koncentracji:

$$\bar{C}(x_3, s) = 2A_1(Dc^2 + E)\text{ch}(c\sqrt{s}x_3) + 2A_3(Dd^2 + E)\text{ch}(d\sqrt{s}x_3), \quad (4.28)$$

skąd po wykorzystaniu warunków brzegowych (4.10) i dokonaniu retransformacji Laplace'a [2,3] otrzymujemy po przekształceniach ostateczną postać na poszukiwane wielkości polowe entropii i koncentracji:

$$\begin{aligned} \varrho S(x_3, t) = & \frac{C_b - \varrho S_b(Dd^2 + E)}{D(c^2 - d^2)} \left[H(t) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2 c^2} t} \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right] + \\ & + \frac{\varrho S_b(Dc^2 + E) - C_b}{D(c^2 - d^2)} \left[H(t) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2 d^2} t} \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} C(x_3, t) = & \frac{[C_b - \varrho S_b(Dd^2 + E)](Dc^2 + E)}{D(c^2 - d^2)} \left[H(t) + \right. \\ & \left. - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2 c^2} t} \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right] + \frac{[\varrho S_b(Dc^2 + E) - C_b](Dd^2 + E)}{D(c^2 - d^2)} \\ & \left[H(t) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2 d^2} t} \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Pole odkształceń obliczymy z równania (2.12) poprzez scałkowanie zależności (4.13):

$$\varepsilon_{33} = U_{3,3} = \frac{2\mu' + 3\lambda'}{2\mu' + \lambda'} (\alpha_s \varrho S + \alpha_c C) + Y, \quad (4.32)$$

a stałą Y wyznaczmy z warunku brzegowego i znanych wartości ϱS_b i C_b :

$$U_{3,3} \Big|_{\pm \frac{h}{2}} = \frac{2\mu' + 3\lambda'}{2\mu' + \lambda'} (\alpha_s \varrho S_b + \alpha_c C_b) \Rightarrow Y = 0, \quad (4.33)$$

skąd po odpowiednich rachunkach otrzymujemy z zależności (4.32) ostateczną postać równania na pole odkształceń:

$$\varepsilon_{33}(x_3, t) = \frac{1+\nu}{1-\nu} (\alpha_s \varrho S + \alpha_c C). \quad (4.34)$$

Natomiast pole temperatury Θ i naprężeń σ_{ij} określimy z równań tworzących (2.2) i (2.4) dla ośrodka sprężystego:

$$\Theta = -\varphi'_{ij} \varepsilon_{ij} + m' \varrho S - l' C, \quad (4.35)$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \varphi_{ij} \Theta + \Phi_{ij} C, \quad (4.36)$$

skąd ostatecznie po wykorzystaniu zależności łączących odpowiednie stałe materiałowe otrzymujemy:

$$\Theta(x_3, t) = \frac{1}{m} \left[\frac{-\alpha_T}{(1-2\nu)} E \varepsilon_{33}(x_3, t) + \varrho S(x_3, t) - l C(x_3, t) \right], \quad (4.37)$$

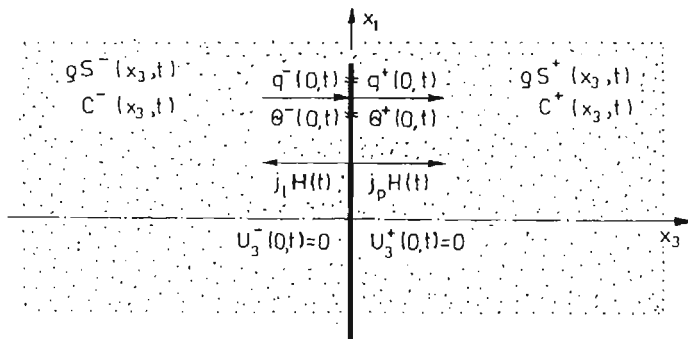
$$\sigma_{11}(x_3, t) = \sigma_{22}(x_3, t) = \frac{E}{1-2\nu} \left\{ \frac{\nu}{1+\nu} \varepsilon_{33}(x_3, t) - [\alpha_T \Theta(x_3, t) + \alpha_c C(x_3, t)] \right\}, \quad (4.38)$$

$$\sigma_{33}(x_3, t) = 0, \quad (4.39)$$

gdzie występujące w zależnościach (4.35) - (4.38) pola entropii, koncentracji i odkształceń dane są równaniami (4.30), (4.31) i (4.44).

5. Kontakt dwóch półprzestrzeni

Jako kolejny przykład proponowanego ujęcia zadań termodyfuzji rozpatrzmy zagadnienie kontaktu dwóch sprężystych i izotropowych półprzestrzeni (rys. 2). Zakładamy, że zagadnienie przez nas rozpatrywane jest jednowymiarowe, oraz pomijamy w nim



Rys. 2. Kontakt dwóch półprzestrzeni z polem entropii i koncentracji oraz warunkami brzegowymi

źródła ciepła i masy oraz siły masowe. Wówczas podobnie jak poprzednio wielkości występujące w zadaniu opisane są zależnościami (4.1) - (4.9) i (4.11) - (4.13). Jako warunki początkowe przyjmujemy brak przyrostów odkształceń, temperatury i koncentracji ponad stan naturalny:

$$\varepsilon_{ij}^{\pm}(x_3, 0) = 0, \quad \theta^{\pm}(x_3, 0) = 0, \quad C^{\pm}(x_3, 0) = 0. \quad (5.1)$$

Przyjmujemy również zanikanie tych wielkości połowych w nieskończoności:

$$\varepsilon_{ij}^{\pm}(\pm \infty, t) = 0, \quad \theta^{\pm}(\pm \infty, t) = 0, \quad C^{\pm}(\pm \infty, t) = 0. \quad (5.2)$$

Warunki (5.1) i (5.2) w połączeniu z równaniem konstytutywnym (2.5) dają:

$$\rho S^{\pm}(x_3, 0) = 0, \quad (5.3)$$

$$\rho S^{\pm}(\pm \infty, t) = 0. \quad (5.4)$$

Wykorzystanie warunków (5.1) - (5.4) w układzie równań (4.11) i (4.12) prowadzi poprzez zależność (4.23) do następującego układu równań:

$$\rho \bar{S}^+(x_3, s) = A_2^+ e^{-c\sqrt{s}x_3} + A_4^+ e^{-d\sqrt{s}x_3}, \quad (5.5)$$

$$\rho \bar{S}^-(x_3, s) = A_1^- e^{+c\sqrt{s}x_3} + A_3^- e^{+d\sqrt{s}x_3}, \quad (5.6)$$

$$\bar{C}^+(x_3, s) = A_2^+ L e^{-c\sqrt{s}x_3} + A_4^+ R e^{-d\sqrt{s}x_3}, \quad (5.7)$$

$$\bar{C}^-(x_3, s) = A_1^- L e^{+c\sqrt{s}x_3} + A_3^- R e^{+d\sqrt{s}x_3}, \quad (5.8)$$

gdzie:

$$L = Dc^2 + E, \quad R = Dd^2 + E. \quad (5.9)$$

W płaszczyźnie kontaktu półprzestrzeni ($x_3 = 0$) zakładamy idealny kontakt termiczny obu półprzestrzeni przejawiający się ciągłością strumienia ciepła:

$$q_3^+(0, t) = q_3^-(0, t), \quad (5.10)$$

oraz równością temperatur po obu stronach płaszczyzny kontaktu:

$$\Theta^+(0, t) = \Theta^-(0, t). \quad (5.11)$$

Zakładamy również zerową wartość przemieszczenia na brzegach półprzestrzeni (sztywna półpłaszczyzna kontaktu):

$$U_3^\pm(0, t) = 0, \quad (5.12)$$

oraz przyjmujemy warunki brzegowe w wartościach strumieni masy po obu stronach płaszczyzny kontaktu półprzestrzeni (rys. 2):

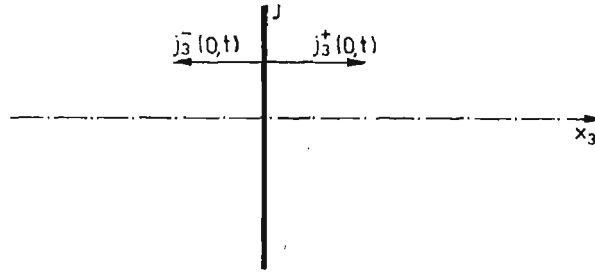
$$j_3^+(0, t) = j_p H(t), \quad (5.13)$$

$$j_3^-(0, t) = -j_l H(t). \quad (5.14)$$

Przyjmijmy tutaj, że w płaszczyźnie $x_3 = 0$ występuje powierzchniowe źródło masy o intensywności I . Mogą wówczas wystąpić warunki brzegowe (rys. 3):

$$j_3^+(0, t) + \hat{\rho} \hat{r} J = j_3^-(0, t). \quad (5.15)$$

Warunki (5.10) - (5.14) pozwalają na wyznaczenie stałych w układzie równań (5.5) - (5.8), który po ich wprowadzeniu można przedstawić w postaci dwóch równań na transformaty entropii i koncentracji:



Rys. 3. Warunki brzegowe dla strumieni masy w zadaniu kontaktu dwóch półprzestrzeni

$$\varrho \bar{S}^\pm(x_3, s) = A^\pm \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-c\sqrt{s}|x_3|} + B^\pm \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-d\sqrt{s}|x_3|} \quad (5.16)$$

$$\bar{C}^\pm(x_3, s) = A^\pm L^\pm \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-c\sqrt{s}|x_3|} + B^\pm R^\pm \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-d\sqrt{s}|x_3|} \quad (5.17)$$

gdzie:

$$A^\pm = \frac{\tilde{c}^\mp (b^\mp f^\pm + b^\pm f^\mp) j_L^p + \bar{d}^\pm (b^\mp e^\mp - a^\mp f^\mp) j_P^l - \bar{d}^\mp (b^\pm e^\pm + a^\mp f^\pm) j_L^p}{(a^+ \bar{d}^+ - b^+ \tilde{c}^+) (\bar{d}^- e^- - \tilde{c}^- f^-) + (a^- \bar{d}^- - b^- \tilde{c}^-) (\bar{d}^+ e^+ - \tilde{c}^+ f^+)}$$

$$B^\pm = \frac{\bar{d}^\mp (a^\pm e^\mp + a^\mp e^\pm) j_L^p + \tilde{c}^\pm (a^\mp f^\mp - b^\mp e^\mp) j_P^l - \tilde{c}^\mp (a^\pm f^\mp + b^\mp e^\pm) j_L^p}{(a^+ \bar{d}^+ - b^+ \tilde{c}^+) (\bar{d}^- e^- - \tilde{c}^- f^-) + (a^- \bar{d}^- - b^- \tilde{c}^-) (\bar{d}^+ e^+ - \tilde{c}^+ f^+)}$$

$$\begin{aligned}
a^\pm &= \left[\frac{(Dc^2 + E)l - 1}{m} \right]^\pm; & b^\pm &= \left[\frac{(Dd^2 + E)l - 1}{m} \right]^\pm \\
c^\pm &= \left\{ Kc \left[(Dc^2 + E) \left(n + \frac{l^2}{m} \right) - \frac{l}{m} \right] \right\}^\pm \\
d^\pm &= \left\{ Kd \left[(Dc^2 + E) \left(n + \frac{l^2}{m} \right) - \frac{l}{m} \right] \right\}^\pm \\
e^\pm &= \left\{ \frac{Kc}{m} [1 - (Dc^2 + E)l] \right\}^\pm \\
f^\pm &= \left\{ \frac{Kd}{m} [1 - (Dd^2 + E)l] \right\}^\pm
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Dokonując na zależnościach (5.15) i (5.16) retransformacji Laplace'a otrzymujemy poszukiwane wielkości połowe w przestrzeni oryginału

$$\begin{aligned}
\varrho S^\pm(x_3, t) &= A^\pm \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(\frac{-c^2 x_3^2}{4t}\right) - c|x_3| \operatorname{erfc}\left(\frac{c|x_3|}{2\sqrt{t}}\right) \right] + \\
&+ B^\pm \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(\frac{-d^2 x_3^2}{4t}\right) - d|x_3| \operatorname{erfc}\left(\frac{d|x_3|}{2\sqrt{t}}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
C^\pm(x_3, t) &= A^\pm L^\pm \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(\frac{-c^2 x_3^2}{4t}\right) - c|x_3| \operatorname{erfc}\left(\frac{c|x_3|}{2\sqrt{t}}\right) \right] + \\
&+ B^\pm R^\pm \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(\frac{-d^2 x_3^2}{4t}\right) - d|x_3| \operatorname{erfc}\left(\frac{d|x_3|}{2\sqrt{t}}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Przystąpimy z kolei do obliczania pola odkształceń. Wykorzystując zależność (2.12) i całkując równanie (4.13) otrzymujemy:

$$\varepsilon_{33}^\pm(x_3, t) = U_{3,3}^\pm(x_3, t) = \frac{2\mu'^\pm + 3\lambda'^\pm}{2\mu'^\pm + \lambda'^\pm} [\alpha_s^\pm \varrho S^\pm(x_3, t) + \alpha_c^\pm C^\pm(x_3, t)] + X. \tag{5.21}$$

Stałą X obliczamy z warunku brzegowego (5.12) i zależności (5.19) i (5.20):

$$\varepsilon_{33}^\pm(0, t) = \frac{2\mu'^\pm + 3\lambda'^\pm}{2\mu'^\pm + \lambda'^\pm} [\alpha_s^\pm \varrho S(0, t) + \alpha_c^\pm C^\pm(0, t)] + X = 0 \tag{5.22}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\varepsilon_{33}^\pm(x_3, t) = \frac{2\mu'^\pm + 3\lambda'^\pm}{2\mu'^\pm + \lambda'^\pm} [\alpha_s^\pm \varrho S^\pm(x_3, t) + \alpha_c^\pm C^\pm(x_3, t) - (\alpha_s^\pm \varrho S_0^\pm + \alpha_c^\pm C_0^\pm)] \tag{5.23}$$

gdzie:

$$\varrho S_0^\pm = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} (A^\pm + B^\pm) \tag{5.24}$$

$$C_0^\pm = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} (A^\pm L^\pm + B^\pm R^\pm) \tag{5.25}$$

Pozostało jeszcze określenie tensora stanu naprężenia dla rozpatrywanego problemu początkowo-brzegowego. Wykorzystując zależność (4.8) otrzymujemy:

$$\sigma_{11}^{\pm}(x_3, t) = \sigma_{22}^{\pm}(x_3, t) = \lambda'^{\pm} \varepsilon_{33}^{\pm}(x_3, t) - (2\mu'^{\pm} + 3\lambda'^{\pm}) [\alpha_s^{\pm} \rho S^{\pm}(x_3, t) + \alpha_c^{\pm} C^{\pm}(x_3, t)] \quad (5.26)$$

$$\sigma_{33}^{\pm}(x_3, t) = (2\mu'^{\pm} + \lambda'^{\pm}) \varepsilon_{33}^{\pm}(x_3, t) - (2\mu'^{\pm} + 3\lambda'^{\pm}) \cdot [\alpha_s^{\pm} \rho S^{\pm}(x_3, t) + \alpha_c^{\pm} C^{\pm}(x_3, t)] \quad (5.27)$$

gdzie pola entropii, koncentracji i odkształceń dane są równaniami (5.19), (5.20), (5.23). Stałe materiałowe występujące w zadaniu łączą następujące związki:

$$\begin{aligned} \gamma'_s &= \alpha_s(2\mu' + 3\lambda') = \frac{E\alpha_T}{m(1-2\nu)}, & \alpha_s &= \frac{\alpha_T}{m}, & \gamma'_c &= \alpha_c(2\mu' + 3\lambda') = \frac{E}{1-2\nu} \left(\alpha_c + \alpha_T \frac{l}{m} \right), \\ \mu' &= \frac{E}{(1-2\nu)} \left[\frac{1-\nu}{2(1+\nu)} - \frac{\alpha_T l}{6\alpha_c m} + \frac{2\alpha_T^2 E}{3m(1-2\nu)} \right], & \lambda' &= \frac{E}{3(1-2\nu)m} \left[\frac{\alpha_T}{\alpha_c} l - \frac{\alpha_T^2 E}{(1-2\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

6. Działanie płaskiego źródła masy

Zagadnienie płaskiego źródła masy w przestrzeni jest przypadkiem szczególnym rozpatrywanego w poprzednim punkcie pracy zadania kontaktu dwóch półprzestrzeni, który zachodzi wówczas gdy obie półprzestrzenie są z tego samego materiału, a więc posiadają jednakowe stałe (funkcje) materiałowe. Rozwiązanie takiego problemu początkowo-brzegowego otrzymamy z przytoczonych w p-cie 5 pracy równań przyjmując w nich stałe materiałowe dla „dodatniej” i „ujemnej” półprzestrzeni (rys. 2) za równe sobie.

Odpowiednio będzie:

Poszukiwane wielkości połowe entropii i koncentracji wyrażają się zależnościami:

$$\begin{aligned} \rho S^{\pm}(x_3, t) &= \frac{2b\underline{c}fj_l^p - a\underline{d}f(j_p + j_l) - b\underline{d}e(j_l^p - j_p^l)}{2(a\underline{d} - b\underline{c})(\underline{d}e - \underline{c}f)} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(\frac{-c^2 x_3^2}{4t}\right) + \right. \\ &\quad \left. - c|x_3| \operatorname{erfc}\left(\frac{c|x_3|}{2\sqrt{t}}\right) \right] + \frac{2a\underline{d}e j_l^p - b\underline{c}e(j_p + j_l) - a\underline{c}f(j_l^p - j_p^l)}{2(a\underline{d} - b\underline{c})(\underline{d}e - \underline{c}f)} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp\left(\frac{-d^2 x_3^2}{4t}\right) - d|x_3| \operatorname{erfc}\left(\frac{d|x_3|}{2\sqrt{t}}\right) \right], \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} C^{\pm}(x_3, t) &= \frac{2b\underline{c}fj_l^p - a\underline{d}f(j_p + j_l) - b\underline{d}e(j_l^p - j_p^l)}{2(a\underline{d} - b\underline{c})(\underline{d}e - \underline{c}f)} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(\frac{-c^2 x_3^2}{4t}\right) + \right. \\ &\quad \left. - c|x_3| \operatorname{erfc}\left(\frac{c|x_3|}{2\sqrt{t}}\right) \right] L + \frac{2a\underline{d}e j_l^p - b\underline{c}e(j_p + j_l) - a\underline{c}f(j_l^p - j_p^l)}{2(a\underline{d} - b\underline{c})(\underline{d}e - \underline{c}f)} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp\left(\frac{-d^2 x_3^2}{4t}\right) - d|x_3| \operatorname{erfc}\left(\frac{d|x_3|}{2\sqrt{t}}\right) \right] R. \end{aligned} \quad (6.2)$$

natomiast pole odkształceń opisane jest formułą:

$$\varepsilon_{33}^{\pm}(x_3, t) = \frac{2\mu' + 3\lambda'}{2\mu' + \lambda'} [\alpha_s \rho S^{\pm}(x_3, t) + \alpha_c C^{\pm}(x_3, t) - (\alpha_s \rho S_0^{\pm} + \alpha_c C_0^{\pm})], \quad (6.3)$$

gdzie:

$$\rho S_0^\pm = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \frac{2j_p^p (bcf + ade) - (adf + bce)(j_p + j_i) - (acf + bde)(j_p^p - j_p^i)}{2(ad - bc)(de - cf)}, \quad (6.4)$$

$$C_0^\pm = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \frac{2j_p^p (bcfL + adeR) - (adfL + bceR)(j_p + j_i) - (bdeL - acfR)(j_p^p - j_p^i)}{2(ad - bc)(de - cf)}. \quad (6.5)$$

Z kolei tensor naprężenia otrzymujemy z zależności (5.26) i (5.27) przyjmując w nim równe sobie stałe materiałowe po obu stronach płaszczyzny rozdziału przestrzeni:

$$\sigma_{11}^\pm(x_3, t) = \sigma_{22}^\pm(x_3, t) = \lambda' \varepsilon_{33}^\pm(x_3, t) + \\ - (2\mu' + 3\lambda') [\alpha_s \rho S^\pm(x_3, t) + \alpha_c C^\pm(x_3, t)], \quad (6.6)$$

$$\sigma_{33}^\pm(x_3, t) = (2\mu' + \lambda') \varepsilon_{33}^\pm(x_3, t) - (2\mu' + 3\lambda') [\alpha_s \rho S^\pm(x_3, t) + \alpha_c C^\pm(x_3, t)], \quad (6.7)$$

gdzie występujące w zadaniu stałe materiałowe łączą związki dane zależnością (5.28).

Literatura

1. M. A. БЮТ, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, J. Appl. Phys. 27, 1956.
2. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, Warszawa 1964.
3. G. A. KORN, T. M. KORN, *Mathematical Handbook*, Mc. Graw-Hill Company, New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney 1968 (tłum. ros. Moskwa 1977).
4. J. KUBIK, *Analogie i podobieństwo w liniowych ośrodkach odkształcalnych*, ZN Pol. Śl. Bud. 38, Gliwice 1975.
5. W. NOWACKI, *Certain problems of thermodiffusion in solids*, A. M. S. 23, 6, 1971.
6. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 13, 1975.

Резюме

О РАЗДЕЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТЕРМОДИФУЗИИ

В работе предложено метод приведения проблем вязкоупругой термодиффузии к распрямленным уравнениям теории тепло-диффузионных напряжений. Теория иллюстрирована задачей термодиффузии в слое с краевыми условиями первого рода, а также задачу термодиффузии при контакте двух полупространств при идеальном тепловом контакте и граничных условиях второго рода.

Summary

ON DECOUPLING EQUATIONS OF VISCOELASTIC THERMODIFFUSION

In the paper the proposition of reducing the viscoelastic thermodiffusion problems to the theory of thermodiffusion stresses is presented. Next the solution of thermodiffusion problem in layer with the boundary conditions of first type is given. The problem of interaction between two semispaces with ideal thermal contact and the boundary condition of second type is also considered.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 lutego 1986 roku.

FALE POWIERZCHNIOWE W TERMOSPŁĘŻYSTOŚCI Z CZASAMI RELAKSACJI

RYSZARD WOJNAR

IPPT PAN, Warszawa

1. Wstęp

Stacjonarne fale powierzchniowe (F. P.) stanowią tę klasę zjawisk fizycznych, które z jednej strony dostępne są bezpośredniej obserwacji i mają dzięki temu duże znaczenie dla zastosowań praktycznych, z drugiej zaś strony, podobnie jak i inne procesy stacjonarne poddają się stosunkowo łatwo opisowi matematycznemu. Szczególna prostota opisu matematycznego F. P. wynika z podwójnego warunku koniecznego na istnienie tych fal, narzuconego przez jednorodność równań pola oraz brak obciążeń na powierzchni brzegowej ośrodka.

Poniżej zajmiemy się opisem fal powierzchniowych korzystając z równań uogólnionej termosprężystości, [1]. W teorii tej propagacja impulsu termosprężystego ma charakter falowy, por. Dodatek A. Nie występuje więc tutaj znany w teorii klasycznej paradoks nieskończonej prędkości rozchodzenia się impulsu termosprężystego.

Znane są dwie podstawowe teorie uogólnionej termosprężystości, teoria z jednym czasem relaksacji, [2, 3] oraz teoria z dwoma czasami relaksacji, [4].

Fale powierzchniowe w półprzestrzeni termosprężystej z jednym czasem relaksacji badane były przez Nayfeh'a i Nemat-Nassera, [5], (N, N-N). Wyprowadzili oni równanie dyspersji dla F. P. w półprzestrzeni. Powierzchnia półprzestrzeni była swobodna od obciążeń mechanicznych. Jednocześnie znikła na niej składowa normalna strumienia cieplnego. Analiza równania dyspersji pozwoliła podać zależność prędkości fali termosprężystej od czasu relaksacji t° dla różnych częstości.

Równania dyspersji F. P. w półprzestrzeni termosprężystej z dwoma czasami relaksacji t_0 i t_1 otrzymane zostały przez Agarwala [6], oraz Chandrasekharaiaha i Sri-kantaiaha, [7]. Autorzy ci szukali rozwiązań w oparciu o równania potencjałów Lamego. Autor pracy [6] przy okazji swojego wywodu uogólnia spostrzeżenie Knowlesa, tzn. pokazuje słuszność równania dyspersji dla szerszej klasy fal niż fale płaskie. Autorzy pracy [7] rozważają powierzchnię z pewnym nieklasycznym mechanicznym warunkiem brzegowym, na której jednocześnie panuje warunek izotermiczności.

W obecnym artykule badamy fale powierzchniowe również w półprzestrzeni z dwoma czasami relaksacji, a więc zajętej przez materiał Greena-Lindsaya, [4]. Zakładamy, że

ciało jest jednorodne i izotropowe. Ponadto przyjmujemy że powierzchnia półprzestrzeni jest swobodna od obciążeń mechanicznych oraz, że panuje na niej warunek swobodnej wymiany ciepła. Wychodząc bezpośrednio z równań przemieszczeniowo-temperaturowych otrzymujemy związek dyspersyjny zawierający częstość, długość wektora falowego, stałą sprzężenia termosprężystego ε , dwa czasy relaksacji t_0 i t_1 oraz współczynniki wymiany ciepłej na brzegu η_1 i η_2 . Dla szczególnego przypadku warunku brzegowego rozważanego przez N, N-N, [5], przeprowadzamy asymptotyczną oraz numeryczną analizę wyprowadzonego równania dyspersji. Analizę tę ułatwia zauważona analogia między równaniem dyspersji dla ośrodka z jednym a dwoma czasami relaksacji.

2. Związki podstawowe

Dla liniowego, izotropowego i jednorodnego ciała termosprężystego, przy braku sił masowych i braku źródeł ciepła, w prostokątnym prostoliniowym układzie współrzędnych x_i , $i = 1, 2, 3$, podstawowe równania obu wymienionych teorii są, [1]:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ S_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_i, \\ S_{ij} &= 2\mu E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} - (1 + t_1 \partial/\partial t) \Theta \delta_{ij}, \\ -q_{i,i} &= C_E (1 + t_0 \partial/\partial t) \dot{\Theta} + \gamma \Theta_0 \dot{E}_{kk}, \\ (1 + t^0 \partial/\partial t) q_i &= -K \Theta_{,i}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Powyżej kropka ($\dot{}$) nad symbolem jest równoważna pochodnej czasowej ($\partial/\partial t$). Wielkości u_i , E_{ij} , S_{ij} , q_i oraz Θ przedstawiają kolejno składowe przemieszczenia, odkształcenia, naprężenia, strumienia ciepła oraz temperaturę powyżej temperatury naturalnego stanu odniesienia Θ_0 . Współczynniki ρ , λ i μ , C_E oraz K przedstawiają kolejno gęstość ośrodka, moduły Lamégo, ciepło właściwe przy zerowej deformacji oraz współczynnik przewodnictwa ciepła. Ponadto

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu) \gamma_0, \quad (2.2)$$

gdzie γ_0 oznacza liniowy współczynnik rozszerzalności termicznej, zaś t^0 , t_0 i t_1 są czasami relaksacji. Jeśli

$$t_1 = t_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad t^0 > 0 \quad (2.3)$$

mamy ośrodek z 1 czasem relaksacji, [2, 3]; jeśli

$$t_1 \geq t_0 > 0 \quad \text{oraz} \quad t^0 = 0 \quad (2.4)$$

mamy ośrodek z 2 czasami relaksacji, [4].

Eliminując E_{ij} , S_{ij} oraz q_i z układu (2.1) dochodzimy do przemieszczeniowo-temperaturowych równań termosprężystości, które dla przypadku (2.4) są:

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,i} - \gamma (\Theta + t_1 \dot{\Theta})_{,i} &= \rho \ddot{u}_i, \\ K \Theta_{,ii} &= C_E (\Theta + t_0 \dot{\Theta}) + \gamma \Theta_0 u_{j,j}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Niech w kierunku x_1 rozchodzi się zaburzenie termosprężyste niezależne od x_3 ,

$$u_i = u_i(x_\alpha, t), \quad \Theta = \Theta(x_\alpha, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2.$$

Wtedy postać r-ń (2.5) jest:

$$\begin{aligned} \mu u_{\alpha, \beta\beta} + (\lambda + \mu) u_{\beta, \beta\alpha} - \gamma(\Theta + t_1 \dot{\Theta})_{,\alpha} &= \rho \ddot{u}_\alpha \\ \mu u_{3, \beta\beta} &= \rho \ddot{u}_3 \\ K\Theta_{,\alpha\alpha} &= C_E(\dot{\Theta} + t_0 \ddot{\Theta}) + \gamma\Theta_0 \dot{u}_{\alpha, \alpha} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Składowa u_3 jest opisywana zwykłym, izotermicznym równaniem falowym. Nie jest ona sprzężona z pozostałymi polami (u_1, u_2, Θ) i nie będziemy się nią dalej zajmować.

3. Rozwiązanie stacjonarne

Szukamy rozwiązania r-ń (2.6)_{1,3} w postaci fali harmoniczej z poprzecznie tłumioną amplitudą:

$$(u_1, u_2, \Theta) = (U, V, \vartheta) \exp[-ax_2 + i(kx_1 - \Omega t)], \quad (3.1)$$

gdzie a jest współczynnikiem zaniku na głębokości (w kierunku x_2), k jest wektorem falowym, zaś Ω częstotnością. Wstawiając (3.1) do (2.6)_{1,3} dostajemy następujący układ równań na stałe U, V, ϑ :

$$\begin{aligned} \mu[(ik)^2 + a^2]U + (\lambda + \mu)[(ik)^2 U - aikV] - (1 - it_1 \Omega) ik &= -\rho \Omega^2 U, \\ \mu[(ik)^2 + a^2]V + (\lambda + \mu)[-ikaU + a^2 V] - (1 - it_1 \Omega)(-a) &= -\rho \Omega^2 V, \\ K[(ik)^2 + a^2]\vartheta = C_E[-i\Omega + t_0(-i\Omega)^2]\vartheta - \gamma\Theta_0 i\Omega(ikU - aV), \end{aligned}$$

co można też zapisać jako:

$$\begin{aligned} (\omega^2 + \beta^{-2}\alpha^2 - q^2)U - (1 - \beta^{-2})\alpha iqV - mc_1^{-1}\kappa iq(1 - i\omega\tau_1)\vartheta &= 0, \\ -(1 - \beta^{-2})\alpha iqU + (\omega^2 + \alpha^2 - \beta^{-2}q^2)V + mc_1^{-1}\kappa\alpha(1 - i\omega\tau_1)\vartheta &= 0, \\ -h\omega qU - h i\omega\alpha V + c_1^{-1}[\alpha^2 - q^2 + \omega(i + \tau_0\omega)] &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie:

$$\omega = \Omega/\Omega^*, \quad \alpha = ac_1/\Omega^*, \quad q = kc_1/\Omega^*, \quad \varepsilon = mh\kappa, \quad \beta^2 = c_1^2 c_2^{-2} \quad (3.3)$$

$$\tau_0 = \Omega^* t_0, \quad \tau_1 = \Omega^* t_1, \quad (3.4)$$

zaś $\Omega^* = c_1^2/\kappa$ jest jednostką częstotliwości Chadwicka-Sneddona. Ponadto:

$$c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad c_2^2 = \mu/\rho, \quad m = \gamma/(\lambda + 2\mu), \quad h = \gamma\Theta_0/K, \quad \kappa = K/C_E, \quad (3.5)$$

Wyznacznik układu (3.2) po prostym przekształceniu jest:

$$D = \frac{1}{\alpha iq} \begin{vmatrix} \omega^2 + \beta^{-2}(\alpha^2 - q^2), & [\omega^2 + \beta^{-2}(\alpha^2 - q^2)]iq, & 0 \\ (1 - \beta^{-2})\alpha q^2, & (\omega^2 + \alpha^2 - \beta^{-2}q^2)iq, & mc_1^{-1}\kappa\alpha iq(1 - i\omega\tau_1) \\ -h\omega q, & -h i\omega\alpha, & c_1^{-1}[\alpha^2 - q^2 + \omega(i + \tau_0\omega)] \end{vmatrix},$$

lub

$$D = \begin{vmatrix} \omega^2 + \beta^{-2}(\alpha^2 - q^2), & 0, & 0 \\ (1 - \beta^{-2})q^2, & \omega^2 + \alpha^2 - q^2, & mc_1^{-1}\kappa(1 - i\omega\tau_1) \\ -h\omega iq^2, & -(\alpha^2 - q^2)h\omega i, & c_1^{-1}[\alpha^2 - q^2 + \omega(i + \tau_0\omega)] \end{vmatrix}.$$

Warunek istnienia niezerowych rozwiązań układu (3.2) jest więc po skorzystaniu jeszcze z (3.3)₄ postaci:

$$[\omega_2 + \beta^{-2}(\alpha^2 - q^2)][(\alpha^2 + \tilde{P})(\alpha^2 + \tilde{Q}) + (\alpha^2 - q^2)\tilde{R}] = 0, \quad (3.6)$$

gdzie:

$$\tilde{P} = \omega^2 - q^2, \quad \tilde{Q} = -q^2 + \omega^2\tau_0 + i\omega, \quad \tilde{R} = \varepsilon\omega(i + \omega\tau_1). \quad (3.7)$$

Wartości własne problemu spełniają zatem zależności:

$$\alpha_1^2 = q^2 - \beta^2\omega^2, \quad \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -\tilde{P} - \tilde{Q} - \tilde{R}, \quad \alpha_2^2\alpha_3^2 = \tilde{P}\tilde{Q} - q^2\tilde{R}. \quad (3.8)$$

Wartości te wstawiamy do r-ń (3.2) i dostajemy następujące równania na U , V , ϑ :

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= -\frac{q}{i\alpha_1} U^{(1)}, & \vartheta^{(1)} &= 0, \\ V^{(j)} &= -\frac{\alpha_j}{iq} U^{(j)}, & \vartheta^{(j)} &= \frac{\omega^2 + \alpha_j^2 - q^2}{m\kappa iq(1 - i\omega\tau_1)} c_1 U^{(j)}, \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

4. Fale powierzchniowe

Zakładamy, że półprzestrzeń $x_2 \geq 0$ jest nieobciążona, $S_{13}(x_1, 0, x_3, t) = 0$, oraz że na powierzchni półprzestrzeni zachodzi swobodna wymiana ciepła. Zatem dla pól niezależnych od x_3 , na powierzchni $x_2 = 0$ spełnione są następujące warunki brzegowe:

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 0, \quad \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{2,2} - \gamma(\Theta + t_1\dot{\Theta}) = 0, \quad u_{3,2} = 0, \quad (4.1)$$

$$\eta_1\Theta + \eta_2\partial\Theta/\partial x_2 = 0 \quad \text{dla stałych} \quad 1 \geq \eta_1 \geq 0, \quad \eta_2 \geq 0, \quad (4.2)$$

Aby otrzymać (4.1) skorzystano z r-nia (2.1)₃. Kładąc

$$A_j = \alpha_j c_1 / \kappa, \quad (4.3)$$

wstawiamy teraz ogólną postać naszej fali bieżącej

$$(u_1, u_2, \Theta) = \sum_{j=1}^3 (U^{(j)}, V^{(j)}, \vartheta^{(j)}) \exp[-A_j x_2 + i(kx_1 - \Omega t)] \quad (4.4)$$

do r-ń (4.1)_{1,2} i (4.2). Dostajemy po skorzystaniu z (3.9):

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 + q^2) U^{(1)} + 2\alpha_1 \alpha_2 U^{(2)} + 2\alpha_1 \alpha_3 U^{(3)} &= 0, \\ 2q^2 U^{(1)} + (2q^2 - \beta^2\omega^2) U^{(2)} + (2q^2 - \beta^2\omega^2) U^{(3)} &= 0, \\ (\eta_0 - \eta_2 \alpha_2)(\omega^2 + \alpha_2^2 - q^2) U^{(2)} + (\eta_0 - \eta_2 \alpha_3)(\omega^2 + \alpha_3^2 - q^2) U^{(3)} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie:

$$\eta_0 = \eta_1 \kappa / c_1. \quad (4.6)$$

Warunek istnienia niezerowego rozwiązania układu (4.5) prowadzi po pewnych przekształceniach do szukanego związku dyspersyjnego (por. [6]):

$$\begin{aligned} [qG\eta_2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \omega^2 - q^2 + \alpha_2 \alpha_3) + \eta_0(q^2 - \omega^2 + \alpha_2 \alpha_3)]^2 &= \\ = (qG\eta_0 + \eta_2 \alpha_2 \alpha_3)^2 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2 \alpha_3), \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie zdefiniowaliśmy:

$$G = \frac{q}{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1^2 + q^2}{2q^2} \right)^2.$$

5. Dyskusja równania

R-nie (4.7) dla granicznej wartości $\varepsilon = 0$ dopuszcza rozwiązania

$$G^2 = 1 - \omega^2/q^2, \quad q^2 = \omega^2 \tau_0 + i\omega. \quad (5.1)$$

Pierwsze z tych równań jest klasycznym równaniem na prędkość fali Rayleigha, drugie jest równaniem dyspersji fali termicznej.

Dla innego szczególnego przypadku: $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$, r-nie (4.7) redukuje się do (por. [7]):

$$\begin{aligned} G^2 [q^2 - \omega^2(\tau_0 + \varepsilon\tau_1) - i\omega(1 + \varepsilon) + \alpha_2 \alpha_3]^2 = \\ = (\alpha_2^2 \alpha_3^2 / q^2) [2q^2 - \omega(1 + \tau_0 + \varepsilon\tau_1) - i\omega(1 + \varepsilon) + 2\alpha_2 \alpha_3]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Jeśli $\omega \rightarrow 0$ oraz $q \rightarrow 0$ w taki sposób, że $\omega/q \rightarrow \text{constans}$, wtedy dla każdego $\tau_1 \geq \tau_0 > 0$ odzyskujemy z (5.2) wynik Locketta, [8]:

$$G^2 = (1 + \varepsilon - \omega^2/q^2)/(1 + \varepsilon). \quad (5.3)$$

Aby dojść do tego wyniku, kładziemy:

$$X = \frac{\omega^2}{q^2}, \quad (5.4)$$

co pozwala zapisać r-nie (5.2) w postaci:

$$\mathcal{G} [1 - X(T_0 + \varepsilon T_1) + A]^2 = A^2 [2 - X - X(T_0 + \varepsilon T_1) + 2A], \quad (5.5)$$

gdzie:

$$\mathcal{G} \equiv G^2 = \left(1 - \frac{\beta^2}{2} X \right)^4 (1 - \beta^2 X), \quad (5.6)$$

$$A^2 \equiv (\alpha_2 \alpha_3 / q^2)^2 = (1 - X)(1 - XT_0) - \varepsilon XT_1, \quad (5.7)$$

oraz:

$$T_0 = \tau_0 + \frac{i}{\omega}, \quad T_1 = \tau_1 + \frac{i}{\omega}. \quad (5.8)$$

Jeśli teraz $\omega \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$, ale $X \rightarrow \text{constans}$, wtedy

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{\left\{ (1 - X) \left[1 - X \left(\tau_0 + \frac{i}{\omega} \right) \right] - \varepsilon X \left(\tau_1 + \frac{i}{\omega} \right) \right\}}{\left\{ 1 - X \left[\tau_0 + \frac{i}{\omega} + \varepsilon \left(\tau_1 + \frac{i}{\omega} \right) \right] + A \right\}^2} \\ &\cdot \left\{ 2 - X - X \left[\tau_0 + \frac{i}{\omega} + \varepsilon \left(\tau_1 + \frac{i}{\omega} \right) \right] + 2A \right\} \rightarrow \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{i^2 \{ -(1 - X)X - \varepsilon X \} \{ -X(1 + \varepsilon) \}}{-\{X(1 + \varepsilon)\}^2}, \end{aligned}$$

albo

$$\mathcal{G} \rightarrow \frac{1 + \varepsilon - X}{1 + \varepsilon},$$

stąd, uwzględnivszy (5.4) dostajemy (5.3).

Jeśli z kolei mamy przypadek równych czasów relaksacji:

$$\tau_1 = \tau_0 \equiv \tau^0 \quad \text{czyli} \quad T_1 = T_0 = T^0 \equiv \tau^0 + \frac{i}{\omega}. \quad (5.9)$$

r -nie (5.5) przyjmuje postać równania dyspersji wyprowadzonego przez N , N - N , por. r -nie (4.9a) w [5], w ramach teorii z jednym czasem relaksacji,

$$\mathcal{G}[1 - (1 + \varepsilon)XT^0 + A]^2 = A^2[2 - X - (1 + \varepsilon)XT^0 + 2A], \quad (5.10)$$

gdzie:

$$A^2 = (1 - X)(1 - XT^0) - \varepsilon XT^0.$$

Tak więc również dla fal powierzchniowych zachodzi analogia wskazana przez Agarvala, [9], dla fal płaskich w przestrzeni nieskończonej. Analogia ta, słuszna jeśli idzie o równanie dyspersji, nie obowiązuje w odniesieniu do amplitud: nasze wyrażenia (3.9) nie są przy założeniu (5.9) takie same jak ich odpowiedniki (4.2), (4.3) w [5].

Dokonajmy jeszcze, wbrew założeniu $\tau_1 \geq \tau_0$, formalnego przejścia granicznego:

$$T_1 = (\tau_1, 1/\omega) \rightarrow (0, 0). \quad (5.11)$$

Otrzymujemy wtedy ten sam wynik co dla $\varepsilon \rightarrow 0$, tzn:

$$[\mathcal{G} - (1 - X)](1 - XT_0)[\sqrt{1 - X} + \sqrt{1 - XT_0}]^2 = 0. \quad (5.12)$$

Ponieważ ostatni nawias po P. S. nie może znikać, więc r -nie (5.12) daje:

$$\mathcal{G} = 1 - X, \quad 1 - XT_0 = 0, \quad (5.13)$$

a więc znów mod fali Rayleigha i mod entropowy. Wynik ten pozwoli lepiej zinterpretować przebieg numerycznego rozwiązania równania dyspersji.

6. Analiza numeryczna

Pełniejsza dyskusja równania dyspersji (5.5) może być przeprowadzona po analizie numerycznej jego rozwiązania. Rozwiązanie otrzymano metodą Newtona, tzn. metodą kolejnych przybliżeń wg. schematu:

$$X := X - f(X)/f'(X), \quad (6.1)$$

gdzie $f' = df/dX$, zaś:

$$f(X) = \mathcal{G}(1 - X\mathcal{F} + A)^2 - A^2(2 - X - X\mathcal{F} + 2A). \quad (6.2)$$

Tutaj:

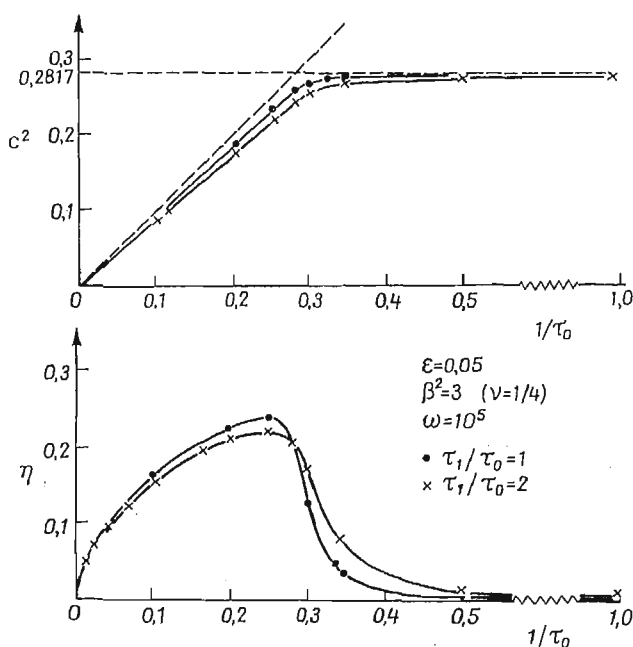
$$\mathcal{F} = T_0 + \varepsilon T_1. \quad (6.3)$$

zaś \mathcal{G} i A dane są formułami (5.6) i (5.7).

Za zerowe przybliżenie przyjęto dla $(1/\tau_0) < c_R^2 = 0.2817$ wartość X stanowiącą rozwiązanie modu termicznego (5.13)₂, zaś dla $(1/\tau_0) > c_R^2$, wartość $X = (c_R^2, 0)$ stanowiącą rozwiązanie modu Rayleigha (5.13)₁.

Zbieżność kolejnych przybliżeń była szybka. Na ogół potrzeba było mniej niż 10 iteracji na to, by moduł różnicy wartości X uzyskanych w dwu kolejnych przybliżeniach był mniejszy od 10^{-6} .

Na rys. 1 przedstawiono wyniki obliczeń przeprowadzonych dla wartości stałej sprężenia $\varepsilon = 0.05$, wartości ilorazu (3.3)₅ $\beta^2 = 3$ (co odpowiada liczbie Poissona $\nu = 1/4$),



Rys. 1. Kwadrat prędkości termosprężystej fali powierzchniowej c^2 oraz współczynnik jej tłumienia η w funkcji odwrotności czasu relaksacji $(1/\tau_0)$ dla dwu stosunków $\tau_1/\tau_0 = 1$ oraz $\tau_1/\tau_0 = 2$, w ośrodku z liczbą Poissona $\nu = 1/4$ i stałą sprężenia termosprężystego $\varepsilon = 0.05$ dla częstości $\omega = 10^5$

przy założeniu, że częstość jest liczbą rzeczywistą o wartości $\omega = 10^5$ i dla dwu wartości ilorazu τ_1/τ_0 , wynoszących 1 oraz 2.

Pierwszy wykres przedstawia prędkość fali:

$$c = \frac{\omega}{\operatorname{Re} q} = \frac{1}{\operatorname{Re}(1/\sqrt{X})}, \quad (6.4)$$

zaś drugi — tłumienie fali:

$$\eta = \operatorname{Im} q = \omega \operatorname{Im}(1/\sqrt{X}). \quad (6.5)$$

w funkcji $(1/\tau_0)$, tzn. w funkcji odwrotności mniejszego z dwu czasów relaksacji. Zgodnie z wynikiem (5.13), dla malejących wartości τ_1 , rozwiązanie zbliża się do prostych asymptotycznych, oznaczonych liniami przerywanymi.

Prędkość termosprężystej fali powierzchniowej nie przekracza nigdzie prędkości klasycznej fali Rayleigha c_R . Co do przebiegu jakościowego, nasze wyniki odpowiadają dolnej gałęzi rozwiązań podanych przez Tao i Prevost, [10], dla płaskiej fali termosprężystej w nieskończonej przestrzeni z czasami relaksacji, por. także Dodatek B.

Tłumienie fali termosprężystej rośnie z $(1/\tau_0)$, i osiąga maksimum w obszarze, w którym zaburzenie to wytraca stopniowo charakter fali termicznej nabierając charakteru fali sprężystej. Dla dużych $(1/\tau_0)$ fala ma charakter fali Rayleigha, tzn. charakter powierzchniowej fali sprężystej, która rozchodzi się bez strat z prędkością c_R .

7. Dyskusja wyników

Dalszą analizę otrzymanych wyników umożliwi nam rozwiązanie równania dyspersji (5.5) metodą rachunku zaburzeń, por. [5].

Celem uproszczenia postępowania zauważamy najpierw, że r-nie (5.5) z 2 czasami relaksacji można zapisać formalnie w postaci równania z 1 czasem relaksacji podanego przez N , $N-N$ w [5]:

$$\mathcal{G}[1 - XT_0(1 + \mathcal{E}) + A]^2 = A^2[2 - X - XT_0(1 + \mathcal{E}) + 2A], \quad (7.1)$$

gdzie:

$$A^2 = (1 - X)(1 - XT_0) - \mathcal{E}XT_0, \quad (7.2)$$

zaś:

$$\mathcal{E} = \varepsilon \frac{T_1}{T_0}. \quad (7.3)$$

Teraz jednak nowy współczynnik sprężenia \mathcal{E} nie jest już stałą materiałową lecz poprzez T_1 i T_0 zależy od ω : zarówno \mathcal{E} jak i T_0 są wielkościami zespolonymi.

Dzieląc stronami (7.1), (7.2) przez X^2 dostajemy:

$$\mathcal{G} \left[\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) + \mathcal{A} \right]^2 = \mathcal{A}^2 \left[\frac{2}{X} - 1 - T_0(1 + \mathcal{E}) + 2\mathcal{A} \right] X, \quad (7.4)$$

gdzie:

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{X^2} A^2 = \left(\frac{1}{X} - 1 \right) \left(\frac{1}{X} - T_0 \right) - \mathcal{E} T_0 \frac{1}{X}. \quad (7.5)$$

Pamiętamy przy tem, że na mocy definicji X , (5.4):

$$\frac{1}{X} = \frac{q^2}{\omega^2}. \quad (7.6)$$

Usuwamy niewymierność w (7.4) otrzymując:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{G} \frac{1}{X} \left\{ \left[\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) \right]^2 + \mathcal{A}^2 \right\} - \mathcal{A}^2 \left[\frac{2}{X} - 1 - T_0(1 + \mathcal{E}) \right] \right)^2 = \\ = \left\{ \mathcal{A}^2 - \mathcal{G} \frac{1}{X} \left[\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) \right] \right\}^2 4\mathcal{A}^2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Mała wartość parametru sprzężenia \mathcal{E} skłania do szukania rozwiązań r-nia (7.7) metodą rachunku zaburzeń. Nasuwają się przy tym, ze względu na własność graniczną (5.1), dwa sposoby poszukiwania takiego rozwiązania: 1° szukamy rozwiązania wychodząc z równania fali Rayleigha:

$$\mathcal{G} = 1 - R, \quad (7.8)$$

gdzie R jest kwadratem prędkości fali Rayleigha

$$R = c_R^2, \quad (7.9)$$

zaś $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X)$ brane jest w punkcie $X = R$; 2° szukamy rozwiązania wychodząc z zależności dla fali termicznej

$$X = \frac{1}{T_0}, \quad (7.10)$$

gdzie T_0 dane jest przez (5.8)₁.

7.1. Rozwiązanie od strony fali Rayleigha. Szukamy rozwiązania w postaci $X = R/\mathcal{H}$ czyli (por. (4.15a) w [5])

$$\frac{1}{X} = \frac{\mathcal{H}}{R}, \quad (7.11)$$

gdzie:

$$\mathcal{H} = 1 + \mathcal{E}h_1 + \mathcal{E}^2h_2 + \dots \quad (7.12)$$

Pisząc jeszcze:

$$\mathcal{H} = 1 + \mathcal{E}H_1, \quad (7.13)$$

gdzie:

$$H_1 = h_1 + \mathcal{E}h_2 + \dots$$

nadajemy rozwinięciu (7.11) postać:

$$\frac{1}{X} = \frac{1 + \mathcal{E}H_1}{R}. \quad (7.14)$$

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia:

$$r = \frac{1}{R} - 1, \quad s = \frac{1}{R} - T_0. \quad (7.15)$$

Wtedy (7.5) przyjmuje postać:

$$\mathcal{A}^2 = rs + \mathcal{E}a_1 + \mathcal{E}^2a_2, \quad (7.16)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{1}{R} [H_1(r+s) - T_0], \quad a_2 = \frac{H_1}{R} \left(\frac{H_1}{R} - T_0 \right).$$

zaś wyraz w nawiasie klamrowym {...} po L. S. r-nia (7.7) daje się zapisać następująco:

$$\left[\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) \right]^2 + \mathcal{A}^2 = (r+s)s + \mathcal{E}w_1 + \mathcal{E}^2w_2, \quad (7.17)$$

gdzie:

$$w_1 = (r+3s)\frac{H_1}{R} - \left(2s + \frac{1}{R}\right)T_0, \quad w_2 = \left(\frac{H_1}{R} - T_0\right)\left(2\frac{H_1}{R} - T_0\right).$$

Z kolei wyraz w drugim nawiasie kwadratowym po L. S. r-nia (7.7) wynosi:

$$\frac{2}{X} - 1 - T_0(1+\mathcal{E}) = r+s+\mathcal{E}\left(2\frac{H_1}{R} - T_0\right), \quad (7.18)$$

zaś wyraz w nawiasie kwadratowym po P. S. r-nia (7.7) jest:

$$\frac{1}{X} - T_0(1+\mathcal{E}) = s+\mathcal{E}\left(\frac{H_1}{R} - T_0\right). \quad (7.19)$$

Czynnik \mathcal{G} rozwijamy w szereg potęgowy:

$$\mathcal{G} = g_R + \mathcal{E}\mathcal{G}' + \mathcal{E}^2\mathcal{G}'' + \dots, \quad (7.20)$$

gdzie:

$$g_R = \mathcal{G}|_{X=R}, \quad (7.21)$$

oraz

$$\mathcal{G}' = \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{E}} \right|_{\mathcal{E}=0}. \quad (7.22)$$

Korzystając z (7.21) zapisujemy r-nie (7.8) w postaci:

$$g_R = 1 - R. \quad (7.23)$$

Obliczamy pochodną (7.22); mamy:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{E}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \mathcal{E}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left(\frac{R}{1+\mathcal{E}H_1} \right),$$

lub

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{E}} = -R \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \right) \frac{1}{(1+\mathcal{E}H_1)^2} \left(H_1 + \mathcal{E} \frac{\partial H_1}{\partial \mathcal{E}} \right). \quad (7.24)$$

Ponieważ $X|_{\mathcal{E}=0} = R$, więc:

$$\mathcal{G}' = \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{E}} \right|_{\mathcal{E}=0} = -h_1 R \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \right|_{X=R}. \quad (7.25)$$

Zapisujemy jeszcze (7.23) w postaci skrótowej:

$$\mathcal{G} = g_R + \mathcal{E}g, \quad (7.26)$$

gdzie:

$$g = \mathcal{G}' + \mathcal{E}\mathcal{G}'' + \dots$$

Wstawiamy (7.26, 7.17, 7.16, 7.18) i (7.19) do (7.7). Ze względu na wynikającą z (7.23) i (7.15)₁ tożsamość:

$$g_R \frac{1}{R} = r \quad (7.27)$$

spostrzegamy, że znikają wyrazy rzędu $O(\mathcal{E}^0) = O(1)$ po każdej stronie tak otrzymanego równania. Pozostają wyrazy, których najniższy rząd po każdej stronie jest $O(\mathcal{E}^2)$. Współczynnikiem przy \mathcal{E}^2 po lewej stronie równania jest $(\mathcal{L}^0)^2$, zaś po prawej stronie $(\mathcal{P}^0)^2$ 4rs. Przy tym:

$$\mathcal{L}^0 = -(r+s)sh_1 \left(1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \Big|_{X=R} \right) + sT_0, \quad (7.28)$$

zaś:

$$\mathcal{P}^0 = sh_1 \left(1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \Big|_{X=R} \right) - T_0. \quad (7.29)$$

Zatem nasze równanie (7.7) w przybliżeniu $O(\mathcal{E}^2)$ jest:

$$(\mathcal{L}^0)^2 = (\mathcal{P}^0)^2 4rs,$$

skąd:

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}^0 2\sqrt{rs}.$$

Po skorzystaniu z (7.28) - (7.29) dostajemy:

$$(\sqrt{r} + \sqrt{s})^2 sh_1 \left(1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \Big|_{X=R} \right) = (s + 2\sqrt{rs}) T_0.$$

Stąd:

$$h_1 = T_0 \frac{1 - r/(\sqrt{r} + \sqrt{s})^2}{s(1 + \partial \mathcal{G}/\partial X|_{X=R})}. \quad (7.30)$$

Jest to wyrażenie identyczne z otrzymanym wg teorii z 1 czasem relaksacji, por. wzór (4.15b) w pracy [5]. Zauważmy jednak, że sama pierwsza poprawka w rachunku zaburzeń, wynosząca $\mathcal{E}h_1$, na mocy definicji (7.3) zależy liniowo od T_1 , zaś od T_0 zależy w sposób bardziej skomplikowany poprzez funkcję s , por. (7.15)₂.

7.2. Rozwiązanie od strony fali termicznej. Szukamy rozwiązania w postaci (por. wzór (4.14 a) w [5])

$$\frac{1}{X} = T_0(1 + \mathcal{E}\xi_1 + \mathcal{E}^2\xi_2 + \dots), \quad (7.31)$$

gdzie ξ_1, ξ_2 są na razie nieznanymi współczynnikami. Kładąc

$$W = 1 + \mathcal{E}\xi_1 + \mathcal{E}^2\xi_2 + \dots \quad (7.32)$$

lub:

$$W = 1 + \mathcal{E}W_1, \quad (7.33)$$

gdzie:

$$W_1 = \xi_1 + \mathcal{E}\xi_2 + \dots, \quad (7.34)$$

piszemy:

$$\frac{1}{X} = T_0(1 + \mathcal{E}W_1), \quad (7.35)$$

czyli

$$X = \frac{1}{T_0(1 + \mathcal{E}W_1)}. \quad (7.36)$$

Po wstawieniu (7.35) do (7.5) dostajemy:

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}T_0[T_0W(W_1 - 1) - W_1],$$

lub po skorzystaniu z (7.32) i (7.34):

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}T_0B, \quad (7.37)$$

gdzie:

$$B = Z_0 + \mathcal{E}T_0M^2 + \mathcal{E}^2T_0N,$$

zaś:

$$Z_0 = (T_0 - 1)\xi_1 - T_0, \quad (7.38)$$

oraz:

$$T_0M^2 = (T_0 - 1)\xi_2 + T_0\xi_1(\xi_1 - 1),$$

$$N = \xi_2(2\xi_1 - 1 + \mathcal{E}\xi_2).$$

W dalszym ciągu, zgodnie z (7.35) znajdujemy:

$$\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) = \mathcal{E}T_0(\xi_1 - 1 + \mathcal{E}\xi_2), \quad (7.39)$$

oraz:

$$\frac{2}{X} - 1 - T_0(1 + \mathcal{E}) = T_0 - 1 + \mathcal{E}T_0(2\xi_1 - 1) + 2\mathcal{E}^2T_0\xi_2. \quad (7.40)$$

Ponadto z dokładnością do wyrazów liniowych w \mathcal{E} :

$$\mathcal{G} = g_0 + \mathcal{E}g_1, \quad (7.41)$$

gdzie:

$$g_0 = \mathcal{G} \Big|_{\mathcal{E}=0} = \frac{\left(1 - \frac{\beta^2}{2}X\right)^4}{1 - \beta^2X} \Big|_{\mathcal{E}=0},$$

czyli po skorzystaniu z (7.36):

$$g_0 = \left(1 - \frac{\beta^2}{2T_0}\right)^4 \Big| \left(1 - \frac{\beta^2}{T_0}\right).$$

Znajomość g_1 nie będzie nam dalej potrzebna. W rezultacie, na mocy (7.39) i (7.35) mamy:

$$\mathcal{G} \frac{1}{X} = g_0T_0 + \mathcal{E}T_0g, \quad (7.42)$$

gdzie:

$$g = g_1 + g_0W_1 + \mathcal{E}g_1W_1.$$

Wstawiamy (7.42, 7.39, 7.40, 7.37) do (7.7). Widzimy, że o ile P. S. tak otrzymanego równania zawiera wyrazy co najwyżej rzędu 0 (\mathcal{E}^1), to L. S. zawiera również wyrazy rzędu

0 (ε^0). Zatem suma tych ostatnich wyrazów winna znikać:

$$[g_0 T_0 - (T_0 - 1)] Z_0 = 0,$$

skąd:

$$Z_0 = 0,$$

lub zgodnie z definicją Z_0 (por. wzór (7.38)):

$$\xi_1 = \frac{T_0}{T_0 - 1}. \quad (7.43)$$

Ograniczając się do liniowego względem ε przybliżenia, z rozwinięcia (7.31) otrzymujemy:

$$\frac{1}{X} = T_0 \left(1 + \varepsilon \frac{T_0}{T_0 - 1} \right),$$

lub po skorzystaniu z definicji (7.3):

$$\frac{1}{X} = T_0 \left(1 + \varepsilon \frac{T_1}{T_0 - 1} \right). \quad (7.44)$$

Zatem, podobnie jak w rozwinięciu od strony fali Rayleigha, pierwsza poprawka w rozwinięciu od strony fali termicznej jest liniową funkcją T_1 ; natomiast zależność od T_0 jest w obu wypadkach różna i nieliniowa.

Biorąc pierwiastek kwadratowy z obu stron r-nia (7.44), w liniowym przybliżeniu mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{X}} = \sqrt{T_0} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{T_1}{T_0 - 1} \right), \quad (7.45)$$

lub:

$$\frac{1}{\sqrt{X}} = \sqrt{T_0} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon B_1 - \frac{1}{2} \frac{i}{\omega} \varepsilon B_2 \right),$$

gdzie:

$$B_1 = \frac{\tau_1(\tau_0 - 1) + 1/\omega^2}{(\tau_0 - 1)^2 + 1/\omega^2}, \quad B_2 = \frac{\tau_1 - \tau_0 + 1}{(\tau_0 - 1)^2 + 1/\omega^2}.$$

Jeśli ponadto $\omega \gg 1$, wtedy w liniowym przybliżeniu:

$$\sqrt{T_0} = \sqrt{\tau_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i}{\omega \tau_0} \right),$$

$$B_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0 - 1}, \quad B_2 = \frac{\tau_1 - \tau_0 + 1}{(\tau_0 - 1)^2},$$

więc:

$$\operatorname{Re}(1/\sqrt{X}) = \sqrt{\tau_0} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\tau_1}{\tau_0 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Im}(1/\sqrt{X}) = \frac{\sqrt{\tau_0}}{2\omega} \left[\frac{1}{\tau_0} + \varepsilon \frac{(\tau_0 - 1)(\tau_1 + 2\tau_0) - 2\tau_1 \tau_0}{2\tau_0(\tau_0 - 1)^2} \right].$$

Założmy jeszcze, że $\tau_1 \geq \tau_0 \gg 1$; wtedy na mocy (6.4) - (6.5):

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\operatorname{Re}(1/\sqrt{X})} = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\tau_1}{\tau_0} \right), \\ \eta &= \omega \operatorname{Im}(1/\sqrt{X}) = \frac{1}{2\sqrt{\tau_0}} \left[1 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_1}{\tau_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Dla dużych wartości τ_0 , tzn. małych $(1/\tau_0)$ zarówno prędkość fali termosprężystej c jak i jej tłumienie η , ze względu na małość ε , są praktycznie liniowymi funkcjami $(1/\sqrt{\tau_0})$. Oznacza to zatem, co widać na rys. 1, że dla małych $(1/\tau_0)$, wielkość c^2 jest liniową funkcją $(1/\tau_0)$, zaś związek η z $(1/\tau_0)$ jest paraboliczny. Porównanie wartości c i η obliczonych wg formuł (7.46) z wartościami uzyskanymi na drodze numerycznej (por. rozdział 6) wskazuje na ich praktyczną zgodność (< 0.01) dla wartości $(1/\tau_0) < 0.2$.

Zauważmy jeszcze, że w tej granicznej sytuacji ($\omega \gg 1$, $\tau_1 \geq \tau_0 \gg 1$) prędkość fali i jej współczynnik tłumienia są dla fali powierzchniowej takie same jak dla płaskiej fali harmonicznnej w ciele nieskończonym (por. [10], a także Dodatek B); zatem panujące na powierzchni półprzestrzeni warunki brzegowe nie mają wpływu na propagację fali w tym zakresie parametrów.

Dodatek A

Elementarne wzbudzenia ciała stałego w modelu typu Debye'a zdefiniowane jako kwanty podłużnych fal dźwiękowych noszą nazwę fononów. Fonony poruszają się w kierunkach przypadkowych z prędkością c_1 . Jeśli c_x , c_y , c_z są składowymi prędkościami c_1 w kierunkach osi x , y , z to:

$$c_1^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2,$$

przy czym:

$$\langle c_x^2 \rangle = \langle c_y^2 \rangle = \langle c_z^2 \rangle = c_{11}^2,$$

gdzie $\langle \dots \rangle$ oznacza średnią. W związku z tym prędkości fali termicznej jest:

$$c_{11} = c_1/\sqrt{3}, \quad (A1)$$

por. [11], [12]. Wzór (A1) słuszny jest dla ciała, w którym przekazywanie energii odbywa się na drodze fononowej, a więc dla dielektryka, por. [12], [13].

Analiza kinetycznego równania Boltzmanna dla fononów [14], [15] jak i teoria liniowej odpowiedzi [16] wykazują, że można obserwować rozchodzenie się fal termicznych w „oknie” częstości

$$\tau_U^{-1} < \omega < \tau_E^{-1},$$

gdzie τ_U , τ_E są odpowiednio średnimi czasami zaniku strumienia ciepła i powrotu do lokalnej równowagi termicznej.

Dodatek B

Falę harmoniczną o stałej amplitudzie opisuje r-nie (3.1), jeśli położymy w nim $a = 0$. Ponieważ, zgodnie z (3.3)₂ oznacza to, że

$$\alpha = 0, \quad (\text{B1})$$

więc r-nie (3.6) redukuje się do:

$$(\omega^2 - \beta^{-2}q^2)(\tilde{P}\tilde{Q} - q^2\tilde{R}) = 0,$$

Stąd albo:

$$\omega^2 = \beta^{-2}q^2, \quad (\text{B2})$$

albo:

$$(\omega^2 - q^2)(-q^2 + \omega^2\tau_0 + i\omega) - q^2\varepsilon\omega(i + \omega\tau_1) = 0 \quad (\text{B3})$$

Skorzystaliśmy tutaj ze związków (3.7). R-nia (B2) i (B3) odpowiadają r -niom (14) i (15) w [10]. Korzystając z definicji (5.4) i (5.8) zapisujemy (B3) w postaci:

$$T_0X^2 - bX + 1 = 0, \quad (\text{B4})$$

gdzie:

$$b = 1 + T_0 + \varepsilon T_1.$$

Pierwiastki tego równania są:

$$X_+ = \frac{1}{2T_0}(b + \sqrt{\Delta}), \quad X_- = \frac{1}{2T_0}(b - \sqrt{\Delta}), \quad (\text{B5})$$

gdzie:

$$\Delta = b^2 - 4T_0. \quad (\text{B6})$$

Stąd (por. rys. 2):

$$\frac{1}{\sqrt{X_+}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - \sqrt{\Delta})^{1/2}, \quad \frac{1}{\sqrt{X_-}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b + \sqrt{\Delta})^{1/2}. \quad (\text{B7})$$

Pamiętajmy, że pierwiastki liczb zespolonych występujące w (B5) i dalej są obliczane wg wzoru:

$$\sqrt{a+ib} = x+iy,$$

gdzie:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{1/2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{1/2} \frac{b}{|b|},$$

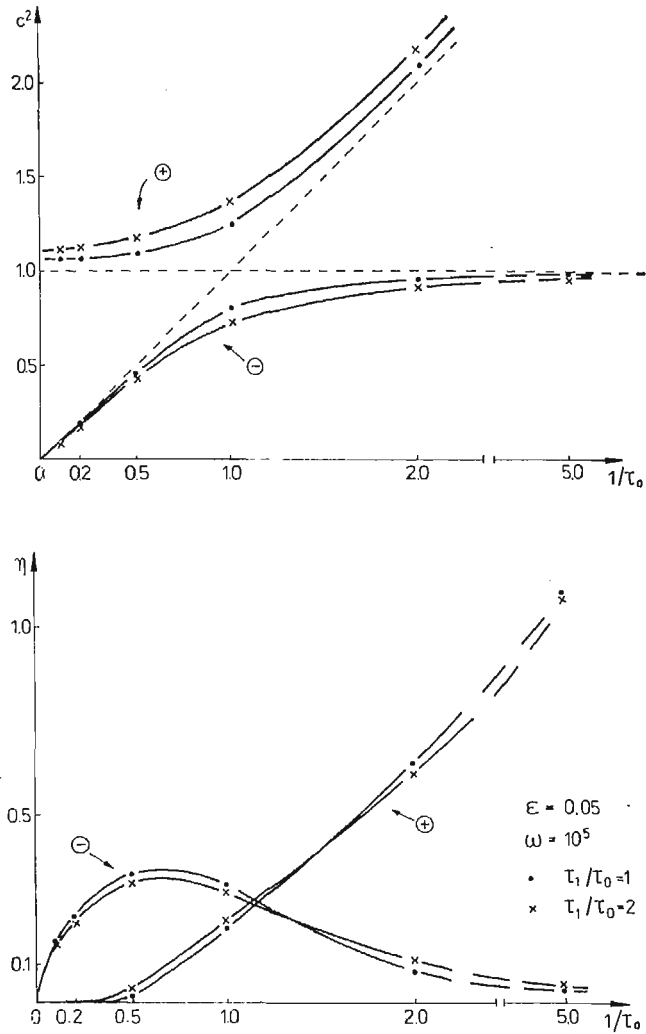
zaś a oraz b są liczbami rzeczywistymi.

Pierwiastek kwadratowy z wyróżnika (B6) możemy zapisać w postaci:

$$\sqrt{\Delta} = -(1-T_0) \left[1 + 2\varepsilon T_1 \frac{1+T_0}{(1-T_0)^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{T_1}{1-T_0} \right)^2 \right]^{1/2},$$

lub w przybliżeniu liniowym ze względu na małość ε :

$$\sqrt{\Delta} = -(1-T_0) - \varepsilon T_1 \frac{1+T_0}{1-T_0}. \quad (\text{B8})$$



Rys. 2. Kwadrat prędkości harmonickej fali termosprężystej c^2 oraz współczynnik jej tłumienia η w funkcji odwrotności czasu relaksacji $1/\tau_0$. Krzywe oznaczone kołeczkami \oplus lub \ominus zostały wykreślone odpowiednio na podstawie funkcji X_+ lub X_- , z wykorzystaniem wzorów (6.4), (6.5).

Parametry rozpatrywanego ośrodka są takie same jak na rys. 1

Wstawiając (B8) do (B7) znajdujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{X_+}} = 1 + \frac{1}{2} \epsilon \frac{T_1}{1-T_0}, \quad \frac{1}{\sqrt{X_-}} = \sqrt{T_0} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon \frac{T_1}{1-T_0} \right). \quad (\text{B9})$$

Zauważmy, iż r-nie (B9)₂ jest identyczne z (7.45).

Literatura

1. J. IGNACZAK, *Linear Dynamic Thermoelasticity — a Survey*, The Shock and Vibration Digest 13, 3 - 8 (1981)
2. S. KALISKI, *Wave Equations in Thermoelasticity*, Bull. Acad. Pol. Sci. techn. 13, 253 - 260 (1965).
3. H. W. LORD, Y. SHULMAN, *A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids 15, 299 - 309 (1967).
4. A. E. GREEN, K. A. LINDSAY, *Thermoelasticity*, J. Elasticity 2, 1 - 7 (1972).
5. A. NAYFEH, S. NEMAT-NASSER, *Thermoelastic Waves with Thermal Relaxation*, Acta Mech. 12, 53 - 69 (1971).
6. V. K. AGARVAL, *On Surface Waves in Generalized Thermoelasticity*, J. Elasticity 8, 171 - 177 (1978).
7. D. S. CHANDRASEKHARAI AH, K. R. SRIKANTAI AH, *On Temperature — Rate Dependent Thermoelastic Rayleigh Waves in Halfspace with Material Boundary*, Gerlands Beitr. Geophys. 93, 133 - 141 (1984).
8. F. J. LOCKETT, *Effect of Thermal Properties of a Solid on the Velocity of Rayleigh Waves*, J. Mech. Phys. Solids 7, 71 - 75 (1958).
9. V. K. AGARVAL, *On Plane Waves in Generalized Thermoelasticity*, Acta Mech., 31, 185 - 198 (1979).
10. D. TAO, J. H. PREVOST, *Relaxation Effects on Generalized Thermoelastic Waves*, J. Therm. Stresses 7, 79 - 89 (1984).
11. J. C. WARD, J. WILKS, *Second Sound and the Thermo-Mechanical Effect at very low Temperatures*, Phil. Mag. 43, 48 - 50 (1952).
12. M. CHESTER, *Second Sound in Solids*, Phys. Rev. 131, 2013 - 2015 (1963).
13. M. J. MAURER, *Relaxation Model for Heat Conduction in Metals*, J. Appl. Phys. 40, 5123 - 5130 (1969).
14. E. W. PROHOFKY, J. A. KRUMHANSL, *Second — Sound Propagation in Dielectric Solids*, Phys. Rev. 133, A 1403 - 1410 (1964).
15. W. E. BRON, ed., *Nonequilibrium Phonon Dynamics*, Plenum Press, New York and London, 1985.
16. A. GRIFFIN, *On the Detection of Second Sound in Crystals by Light Scattering*, Phys. Letters 17, 208 - 210 (1965).

Р е з ю м е

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ТЕРМОУПРУГОСТИ С ВРЕМЕНАМИ
РЕЛАКСАЦИИ

Исследуем поверхностные волны в изотропном однородном полупространстве используя теорией линейной термоупругости с двумя временами релаксации. Предполагается, что поверхность полупространства свободна от механической нагрузки, и что на нее возможен свободной теплообмен. Выводится дисперсионное соотношение и представляется его численной и асимптотический анализ. Указана аналогия найденных результатов с результатами теории с одним временем релаксации. При отсутствии сопряжения термических и механических полей получается классическую волну Рэлея. Для низких значений частоты и волнового вектора задача сводится к решению Лёккетта.

S u m m a r y

SURFACE WAVES IN THERMOELASTICITY WITH RELAXATION TIMES

Surface waves in an isotropic homogeneous semi-infinite space are studied within the linear thermoelasticity with two relaxation times. The boundary of the semi — space is assumed to be free of stresses and through it there is a heat exchange with environment. Associated dispersion relation is derived and its

numerical and asymptotic analysis are presented. The analogy of our results with those of a theory with one relaxation time is discussed. Also, Rayleigh's classical result for isothermal elastodynamics, and Lockett's thermoelastic solution corresponding to low frequencies and small wave vectors are recovered.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1987 roku.

THEORETICAL MODEL OF EXTERNALLY PRESSURIZED CIRCULAR THRUST POROUS GAS BEARING WITH DEFORMABLE MATERIAL

JAN A. KOŁODZIEJ
MACIEJ BARBACKI

Politechnika Poznańska

A method is proposed for determining dimensionless characteristics of an externally pressurized circular thrust bearing. An essential novelty in the present model as compared with many existing theoretical models consists in the deformability of the porous pad being taken into consideration. The unknowns of the present model are: the pressure distribution in the clearance and the thickness of the lubricating film (deflection of the porous pad). These quantities are determined by solving by method of successive approximations the set of governing equations. For the zero approximation it is assumed that the porous material is indeformable, which enables us to obtain a solution for the zero approximation to the pressure distribution. For the first and subsequent approximations the porous pad is treated as a thin elastic plate loaded in an axially symmetric manner by pressure which has been found in the preceding approximation. The equation of bending of the porous plate is integrated in an analytic manner in every approximation. The equation governing the pressure distribution is integrated numerically by using the method of orthogonal collocation. A detailed algorithm is given for the determination of the dimensionless load capacity and the dimensionless mass flow rate.

1. Introduction

Aerostatic thrust bearings are commonly used in industry, since they have exceedingly low frictional coefficients, even at slow speeds, and they are readily operated from the factory air-line. Conventional capillary or orifice-compensated bearings have, however, low load capacities for the high supply pressures and feed rates required, and their operating range is often limited by the pneumatic instability of the air film. These disadvantages may be overcome by using a porous pad in place of the combination of a solid pad and compensating elements. Thus, the aerostatic porous bearing, also has a stiffer film, ensuring greater positional accuracy, and a smaller tendency to fail through blockage.

Porous thrust bearings have been investigated by many authors. A review of the literature pertaining to the theory of such bearings was given in paper [1]. Almost all the research workers made the assumption that in bearing clearance exists a uniform gas film, as this drastically simplifies the solution of the Reynolds equation. This implies that the

elastic strength of the porous material is such that deformation that does occur is negligible. In aerostatic thrust bearings, film thicknesses are small of the order of $12 \mu\text{m}$ and hence any apparently negligible deflection of the porous media may be of the same order of magnitude as the film thickness. The deflection of the porous pad depends upon its flexural rigidity. For certain materials the elastic strength of the pad will be insufficient to withstand the loading by pressure difference across it. Consequently, a diverging film will be produced. This effect was observed by Taylor & Lewis [2] in experiments with porous carbon as the media. The divergent film reduces the film pressure and hence the load-carrying capacity of the bearing.

The deformation of porous material, as yet, was taken into account only in Taylor & Lewis [2 - 3] and in the paper [4]. In papers [2 - 3] essential part of proposed model is determination the two-dimensional flow in porous material. However, in most applications the wall thickness of the pad is small compared to its radius. Thus, the gas flow in the bearing matrix is predominantly axial and it is immaterial whether the porous pad is sealed at the sides or open to the atmosphere. This assumption in essential way simplifies the mathematical model of the bearing. In paper [4] the method for determining characteristics of externally pressurized circular thrust bearings with deformable porous material with the mentioned above assumption on axial flow for incompressible lubricant was proposed.

The purpose of this paper is to present the mathematical model for the performance characteristics of the aerostatic porous thrust bearing with deformable porous material and compressible lubricant. We take into account also a slip flow at the boundary between the bearing clearance and the porous material. Opposite from papers [2 - 3] in this paper the radial flow in the porous material is neglected.

2. Assumptions

Figure 1 represents the flow model and coordinate system in the circular porous thrust bearing. We assume that known values are: p_s — supply pressure, p_p — ambient pressure, H — thickness of porous material, $2a$ — diameter of porous pad.

The assumptions made for this analysis are as follows:

a) The lubricant is a compressible viscous fluid with equation of state for perfect gas:

$$p = \rho \mathcal{R} T, \quad (1)$$

where: p — pressure, ρ — density of gas, \mathcal{R} — gas constant, T — temperature.

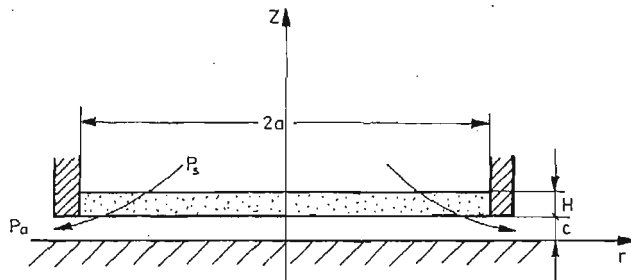


Fig. 1. Configuration of porous thrust bearing

- b) The fluid flow through the bearing is isothermal and steady.
 c) The flow in porous material is viscous and Darcy's law applies:

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \quad (2)$$

where: q — velocity in porous material, k — permeability coefficient, μ — viscosity of fluid.

d) The porous material is deformable. The thickness H of the pad of bearing is small as compared with the diameter $2a$; the deformability of the material may be described by the theory of thin plates, the deflection of which is described by the equation:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{Q}{N}, \quad (3)$$

where: w — deflection of porous pad, Q — transverse loading, N — flexure rigidity of porous plate.

e) Since $H \ll a$, the radial flow in the porous material is neglected, The Darcy's equation (2) is in this way reduced to the form:

$$q_z = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (4)$$

f) The tangential stresses in lubricating layer penetrates on a distance δ in the bulk of porous material [5 - 6]. Therefore the condition that there is no sliding was proposed to apply but on surface inside porous material, not its nominal boundary.

g) The usual simplifications of the classical lubrication theory can be used for the bearing clearance, it being assumed that there is only radial flow governed by reduced equations of viscous compressible flow in the form:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dp}{dr} = \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}, \quad (6)$$

where: v_r — radial velocity in bearing clearance, v_z — axial velocity in bearing clearance.

3. Governing equations and method of solution

Flow in the porous material is governed by the steady-state mass continuity equation (axisymmetric case):

$$\frac{d}{dz} (\rho q_z) = 0. \quad (7)$$

Substitution of Darcy's law (4) and equation of state (1) into equation (7), yields

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{kp}{\mu \mathcal{R}T} \frac{dp}{dz} \right) = 0. \quad (8)$$

By noting that $2p \frac{dp}{dz} = \frac{dp^2}{dz}$, it can be shown, that

$$\left. \frac{dp^2}{dz} \right|_{z=c-w+\delta} = \frac{p_s^2 - p^2}{H}. \quad (9)$$

Integrating equation (6) twice respect to z , applying the boudary conditions in the form:

$$v_r = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, \quad (10)$$

$$v_r = 0 \quad \text{for} \quad z = c - w + \delta, \quad (11)$$

we have:

$$v_r = \frac{(c-w+\delta)^2}{2} \frac{dp}{dr} \left[\frac{z^2}{(c-w+\delta)^2} - \frac{z}{c-w+\delta} \right]. \quad (12)$$

Substitution of equation (12) to (5) and integration in the film region, yields:

$$\frac{(c-w+\delta)^3}{12} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(qr \frac{dp}{dr} \right) = -(\rho v_z)|_{z=c-w+\delta}. \quad (13)$$

Because $\rho v_z = \rho q_z$ for $z = c - w + \delta$, from (4) and (9) we have governing equation for pressure in bearing clearance:

$$\frac{d^2 P^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dP^2}{dR} - \frac{A_0 P^2}{(1 - a_c W + \Delta)^3} = - \frac{A_0 P_s^2}{(1 - a_c W + \Delta)^3}, \quad (14)$$

where:

$$R = \frac{r}{a}, \quad P = \frac{p}{p_a}, \quad P_s = \frac{p_s}{p_a}, \quad A_0 = \frac{12ka^2}{H}, \quad (15)$$

$$a_c = \frac{a}{c}, \quad \Delta = \frac{\delta}{c}.$$

After introducing dimensionless values (15) into (3) and puting $Q = p_s - p$, we have governing equation for deflection of porous plate:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left\{ R \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dW}{dR} \right) \right] \right\} = S_b (P_s - P), \quad (16)$$

where:

$$S_b = \frac{a^2 p_a}{N} \quad (17)$$

is dimensionless parameter of stiffness.

In solution of equation (14), should satisfy the following boundary conditions:

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \text{for} \quad R = 0, \quad (18)$$

$$P = 1 \quad \text{for} \quad R = 1, \quad (19)$$

While, in solution of equation (16), W —should satisfy the following boundary conditions:

$$\left. \begin{array}{l} W = 0 \\ \frac{dW}{dR} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{for} \quad R = 1, \quad (20)$$

which are conditions for clamped edge of plate. It is also required that:

$$\frac{dW}{dR} = \frac{d^3W}{dR^3} = 0 \quad \text{for} \quad R = 0, \quad (21)$$

which results from the symmetry of the problem.

The unknowns of the present model are: the pressure distribution — P in the clearance, and deflection — W of the porous pad (the thickness of the lubricating film). These quantities are determined by solving by method of successive approximations the set of equations (14) and (16) with the boundary conditions (18), (19), (20) and (21). For the zero approximation it is assumed that the porous material is indeformable, $W^{(0)} = 0$, which enables to obtain the zero approximation to the pressure distribution $P^{(0)}$, by solution of equation (14) with $W = 0$. For the first and subsequent approximations the porous pad is treated as a thin elastic plate loaded in an axially symmetric manner by pressure which has been found in the preceding approximations. The equation governing the pressure distribution (14) is integrated numerically in every approximation by means of orthogonal collocation [7]. In this way solution for P is given in polynomial form. The equation of bending of the plate (16) is integrated in analytic manner in every approximation, because it is a linear equation with load described by polynomials.

Solutions to the foregoing system of equations are in the form of pressure-squared distributions through the bearing clearance. The load capacity is simply found as the sum of forces created by the fouilm boundary pressure acting normally to the bearing area or

$$s = \int_0^{2\pi} \int_0^a (p - p_a) r dr d\Theta = 2\pi \int_0^a (p - p_a) r dr. \quad (22)$$

In dimensionless form this becomes:

$$S = \frac{s}{\pi a^2 (p_s - p_a)} = \frac{2}{P_s - 1} \int_0^1 (P - 1) R dR. \quad (23)$$

The dimensionless load capacity is seen to be the ration of the actual load to the maximum load possible.

The mass flow rate required by the film may be calculated from the gas velocity crossing the film boundary:

$$m = - \int_0^{2\pi} \int_0^a (\rho q_z)|_{z=c} r dr d\Theta. \quad (24)$$

Substitution of Darcy's law (4) and the equation of state (1) yields

$$m = - \frac{\pi k}{\mu R T} \int_0^a \left(\frac{\partial p^2}{\partial z} \right) \Big|_{z=c} r dr. \quad (25)$$

In dimensionless form the flow becomes:

$$M = \frac{2m\mu RTH}{\pi a^2(p_s^2 - p_n^2)k} = \frac{-2}{A_0(P_s^2 - 1)} \frac{dP^2}{dR} \Big|_{R=1} \quad (26)$$

4. Results

The convergence of the described above method of successive approximations is satisfactory. In almost all calculated cases with number of iterations less than 10, results are stable for the pressure distribution P and the deflection of porous plate W . This good convergence is illustrated in Tables 1 and 2.

Table 1. Load capacity S and mass flow rate M for successive approximation i ; $P_s = 9$, $A_0 = 10$, $a_c = 100$, $S_b = 0.05$, $\Delta = 0.01$

i	S	M
1	0.6237747	68.12282
2	0.6431721	69.77471
3	0.6407426	69.54882
4	0.6410518	69.57369
5	0.6410124	69.57052
6	0.6410168	69.57092
7	0.6410169	69.57087
8	0.6410168	69.57088

Table 2. Load capacity S and mass flow rate M for successive approximation i ; $P_s = 9$, $A_0 = 90$, $a_c = 100$, $S_b = 0.05$, $\Delta = 0.1$

i	S	M
1	0.8452509	140.5341
2	0.8427989	140.1449
3	0.8428321	140.1500
4	0.8428317	140.1499
5	0.8428317	140.1499
6	0.8428317	140.1499
7	0.8428317	140.1499

In the proposed mathematical model the dimensionless characteristics such as the load capacity S and the mass flow rate M are functions of the following dimensionless parameters: A_0 , P_s , S_b , a_c and Δ . The variation in the load capacity S and the mass flow rate M with the bearing number A_0 for various ration of radius pad to bearing clearance a_c are shown in Figs. 2 and 4. It is seen from these figures that deformation of

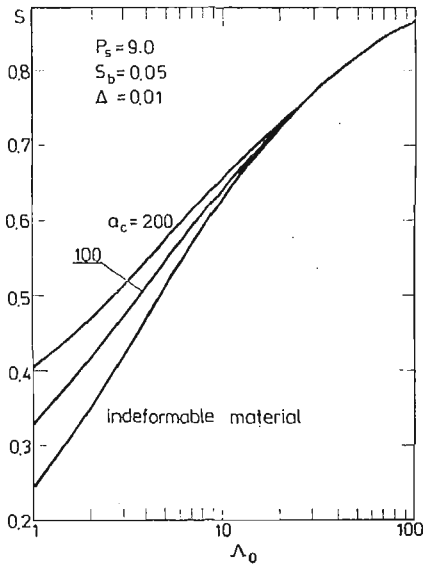


Fig. 2. Normalized load capacity S versus bearing number Λ_0 for a range of ratio of radius pad to bearing clearance a_c .

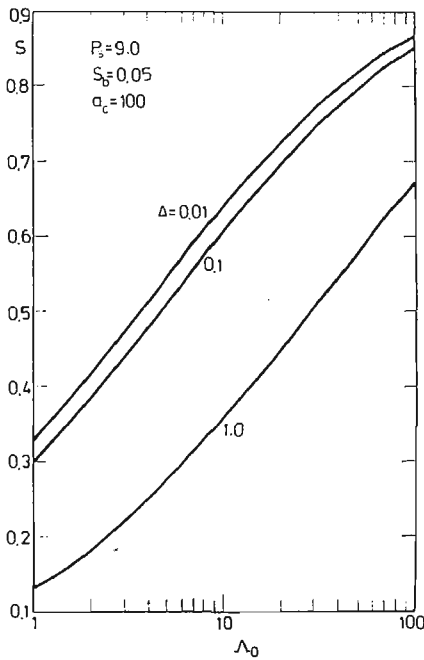


Fig. 3. Normalized load capacity S versus bearing number Λ_0 , for a range of dimensionless depth of penetration of shear Δ

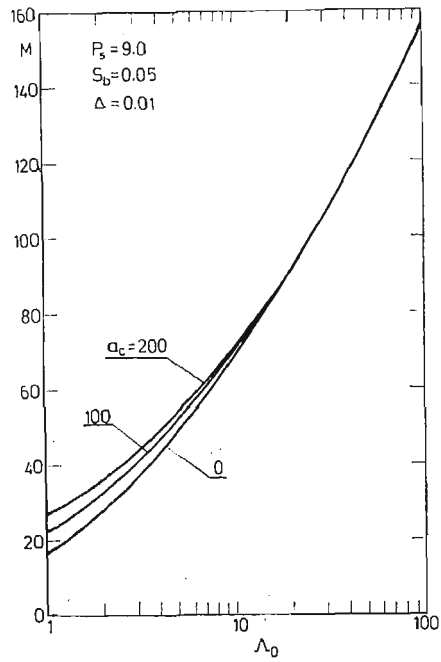


Fig. 4. Normalized mass flow rate M versus bearing number Λ_0 for a range of ration of radius pad to bearing clearance a_c

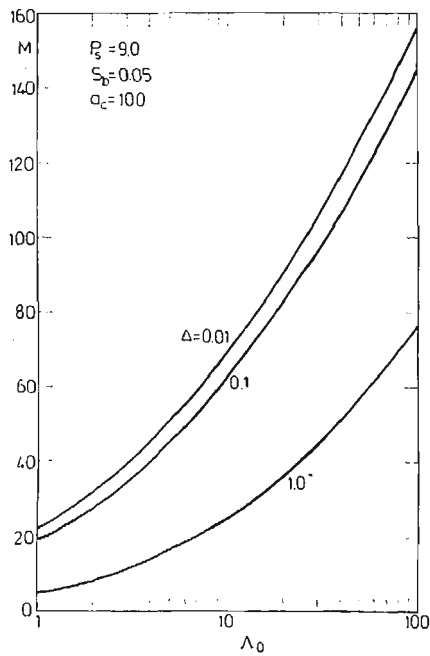


Fig. 5. Normalized mass flow rate M versus bearing number Λ_0 for a range of dimensionless depth of penetration of shear Δ

porous material can have significant influence on nondimensional load capacity and mass flow rate. This influence increases with decrease of parameter Λ_0 , whereas this influence increases with increase of parameter a_c . While, Figs 3 and 5 show the variation in the load capacity S and the mass flow rate M with the bearing number Λ_0 for various dimensionless depths of penetration of shear Δ . It is seen from these figures that penetration of shear inside porous material (the slip flow on the boundary of porous region and of fluid region) can have significant influence on load capacity and mass flow rate. The Table 3 shows the variation in the load capacity and mass flow rate with dimensionless parameter of stiffness of porous pad S_b .

Table 3. Variation in the load capacity S and mass flow rate M with the dimensionless parameter of stiffness S_b ; $\Lambda_0 = 10$, $P = 9$, $\Delta = 0.01$, $a = 100$.

S_b	S	M
0.0	0.623774	68.123
0.002	0.624556	68.187
0.004	0.625329	68.251
0.006	0.626093	68.315
0.008	0.626849	68.378
0.01	0.627597	68.439
0.02	0.631218	68.742
0.03	0.634653	68.031
0.04	0.637915	69.307
0.05	0.641017	69.571

References

1. J. A. KOŁODZIEJ, *On possibilities of more accurate designing of characteristics of thrust porous bearings Part 1: Survey of theoretical models*, *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, Zeszyt nr 2, vol. 46, (1981), pp. 91 - 103, (in Polish).
2. R. TAYLOR, G. K. LEWIS, *Experience relating to the steady performance of aerostatic porous thrust-bearings*, The Institution of Mechanical Engineers, Proceedings 1975, vol. 189, 22/75, pp. 383 - 390.
3. R. TAYLOR, G. K. LEWIS, *Steady-state solution for an aerostatic thrust bearing with an elastic porous pad* 6th Int. Gas Bearing Symp. 1974, Paper C5.
4. J. A. KOŁODZIEJ, *A theoretical model of an externally pressurized porous thrust bearing with deformable porous material*, *Archiwum Budowy Maszyn*, vol. 32, Zeszyt 1 - 2, pp. 95 - 114, (1985), (in Polish).
5. J. A. KOŁODZIEJ, *Flow of viscous incompressible fluid at boundary of porous region with high porosity*, Ph. D. Thesis, Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Science, 1977. (in Polish).
6. J. A. KOŁODZIEJ, *On possibilities of more accurate designing of characteristics of thrust porous bearings. Part 2: Proposition of new theoretical model for steady-state conditions*. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, Zeszyt 1 - 2, vol. 49 - 50, (1982), pp. 49 - 63, (in Polish).
7. B. A. FINLAYSON, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, 1972.

Резюме

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА-ПОДПЯТНИКА
ВНЕШНЕ ПИТАЕМОГО ПРИ УЧЁТЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

В работе представлен способ определения безразмерных характеристик плоского цилиндрического подпятника, питаемого внешне. Существенной новостью в модели, по сравнению с многими уже существующими теоретическими моделями является учёт деформации пористой вкладки.

В предлагаемой модели неизвестными для определения являются: разложение давления в щели подшипника и функция толщины смазывающего слоя (прогиб пористой вкладки). Эти величины определяются методом очередных приближений. В нулевом приближении предлагается, что материал пористый недеформируемый, что позволяет получить решение распределения давления для этого приближения.

В первом и следующих приближениях пористая вкладка трактуется как тонкая эластичная плитка с осевой симметрической нагрузкой давления, определенного ранее в последнем приближении. Уравнение прогиба плитки интегрируется аналитически в каждом приближении. Уравнение для распределения давления в каждом приближении интегрируется численно методом ортогональной коллокации.

Представлен подробный алгоритм определения безразмерной несущей силы и безразмерной скорости потока.

Streszczenie

TEORETYCZNY MODEL POROWATEGO ZEWNETRZNIE ZASILANEGO
CYLINDRYCZNEGO GAZOWEGO ŁOŻYSKA WZDŁUŻNEGO Z ODKSZTAŁCALNYM
MATERIAŁEM POROWATYM

W pracy przedstawia się sposób wyznaczania bezwymiarowych charakterystyk cylindrycznego łożyska wzdluznego zasilanego zewnetrnie. Istotną nowością modelu, w porównaniu z wieloma istniejącymi modelami teoretycznymi jest uwzględnienie odkształcalności porowatej wkładki. W proponowanym modelu niewiadomymi są: rozkład ciśnienia w szczelinie łożyska oraz grubość filmu smarującego ugięcie wkładki porowatej. Wielkości te wyznacza się poprzez rozwiązanie układu równań rządzących metodą kolejnych przybliżeń. W przybliżeniu zerowym zakłada się, że materiał porowaty jest nieodkształcalny, co pozwala na uzyskanie zerowego przybliżenia dla rozkładu ciśnienia. W pierwszym i następnych przybliżeniach wkładkę porowatą traktuje się jako cienką sprężystą płytę obciążoną osiowosymetrycznie ciśnieniem wyznaczonym w poprzednim przybliżeniu. Równania zginania płyty całkuje się analitycznie w każdym przybliżeniu. Podaje się algorytm wyznaczania bezwymiarowej siły nośnej oraz bezwymiarowej prędkości przepływu gazi przez łożysko.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1987 roku.

WYZNACZANIE POWIERZCHNI SWOBODNEJ CIECZY W TRÓJKĄTNYM ROWKU

MARIUSZ KACZMAREK
IPPT PAN, Poznań

JAN. A. KOŁODZIEJ
Politechnika Poznańska

GRZEGORZ MUSIELAK
IPPT PAN, Poznań

W pracy wyznacza się kształt powierzchni swobodnej cieczy znajdującej się w trójkątnym rowku. W tym celu korzysta się z równania Laplace'a-Younga. Parametrami ustalonymi są: kąt rozwarcia rowka, kąt zwilżenia, liczba Bonda. Opisano stosowaną numeryczną metodę optymalizacyjną, podano przykładowe wyniki oraz program w języku Basic mikrokomputera HP86B, przy pomocy którego wykonywano obliczenia.

1. Wprowadzenie

W niektórych zagadnieniach technicznych dąży się do zwiększenia powierzchni swobodnej cieczy. Celem może być intensyfikacja procesów wymiany ciepły i masy pomiędzy cieczą i gazem na powierzchni swobodnej (parowanie lub kondensacja). Jedną z dróg zwiększenia powierzchni swobodnej jest stosowanie powierzchni żłobionych trójkątnymi rowkami lub powierzchni pofalowanych, na których zachodzi spływ cieczy pod wpływem sił grawitacji. Przy przepływie wzdłuż rowków, przy niewielkiej ilości cieczy w rowkach, wpływ sił kapilarnych jest istotny i następuje znaczny wzrost efektywnej powierzchni wymiany w porównaniu do spływu po powierzchni płaskiej.

Problem laminarnego przepływu cieczy lepkiej, nieściśliwej w trójkątnym rowku pod wpływem sił grawitacji był rozważany w pracy [1]. Uwzględniono tam efekt napięcia powierzchniowego na powierzchni swobodnej cieczy, jednak przyjęto założenie upraszczające, że powierzchnia swobodna ma stały promień krzywizny. Założenie to jest korzystne z punktu widzenia stosowanej metody rozwiązywania zagadnienia przepływu, zapewnia bowiem analityczną postać funkcji określającej kształt powierzchni swobodnej, może być jednak przybliżeniem niewystarczająco dokładnym z punktu widzenia modelowania rzeczywistej powierzchni swobodnej. Ponadto założenie takie ogranicza budowę modelu teoretycznego optymalizacji procesu wymiany.

Celem niniejszej pracy jest podanie metody numerycznego wyznaczania kształtu powierzchni swobodnej dla dowolnych ilości cieczy w trójkątnym rowku, przy dowolnym napięciu powierzchniowym i dowolnej gęstości cieczy, to jest dla dowolnych liczb Bonda. Założenie stałego promienia krzywizny, jakie przyjęto w pracy [1] jest uzasadnione przy bardzo małych wartościach liczby Bonda. Podstawą rozważań jest związek Laplace'a-Younga, który w rozważanym przypadku prowadzi do dwupunktowego zagadnienia brzegowego z nieliniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu, w którym niewiadomą wielkością jest współrzędna powierzchni swobodnej.

W przyjętej metodzie rozwiązywania zagadnienie brzegowe sprowadza się do zagadnienia początkowego. W takim ujęciu istotna różnica w stosunku do znanych autorom rozwiązań tego typu, np. z pracy [2], w której określano kształt powierzchni swobodnej cieczy, polega na tym, iż w niniejszej pracy nieznany jest jeden z warunków początkowych. Zamiast tego zadany jest warunek określonego pola pod powierzchnią swobodną.

Z uwagi na duże rozpowszechnienie mikrokomputerów do pracy dołączony jest program obliczeń w języku Basic.

2. Sformułowanie problemu

Weźmy pod uwagę rowek trójkątny o kącie rozwarcia 2Φ (rys. 1). Przyjmijmy biegunowy układ współrzędnych (r, φ) o początku w wierzchołku rowka i współrzędnej $\varphi = 0$ pokrywającej się z osią symetrii rowka. Ciecz znajdująca się w rowku tworzy powierzchnię swobodną, której kształt opisuje funkcja $r_s = r_s(\varphi)$. Ze ścianką rowka tworzy ona określony kąt zwilżenia θ . Problem polega na wyznaczeniu kształtu powierzchni swobodnej (funkcji $r_s(\varphi)$) przy znanych: kącie wierzchołkowym 2Φ , ilości cieczy w rowku, kącie zwilżenia θ i współczynniku napięcia powierzchniowego.

W stanie ustalonym kształt powierzchni swobodnej w ogólności opisuje związek Laplace'a-Younga:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

gdzie Δp jest skokiem ciśnienia na powierzchni swobodnej, σ współczynnikiem napięcia powierzchniowego a R_1, R_2 — głównymi promieniami krzywizny powierzchni swobodnej. Z uwagi na fakt, iż rozważana powierzchnia swobodna jest powierzchnią walcową przyjmujemy, że $R_2 = \infty$. Ze względu na symetrię wystarczy rozważyć przedział $\varphi \in \langle 0, \Phi \rangle$.

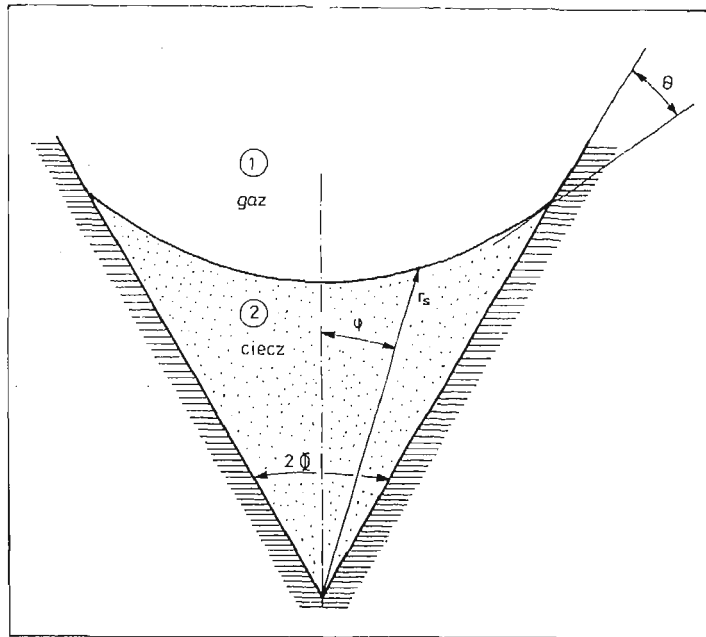
Precyzując wielkości w równaniu (1) przyjmijmy, że w kierunku pionowym zachowaniem ośrodków rządzą prawa statyki płynów. Mamy więc związki:

$$p_1 = -\gamma_1(r \cos \varphi - C_1), \quad (2)$$

$$p_2 = -\gamma_2(r \cos \varphi - C_2), \quad (3)$$

gdzie oznaczono: p_1, p_2 — ciśnienia statyczne w gazie (ośrodek 1) i w cieczy (ośrodek 2), γ_1, γ_2 — odpowiednie ciężary właściwe, C_1, C_2 — stałe całkowania. Skok ciśnienia Δp na granicy ośrodków jest wówczas równy

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma(r_s \cos \varphi - C), \quad (4)$$



Rys.1. Rowek wypełniony cieczą

gdzie $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ i przy $\gamma_1 \ll \gamma_2$ przyjmuje się, że $\gamma = \gamma_2$. $C = C_1 - C_2$ — stała, określająca wysokość słupa cieczy, dla której $p_2 = p_1$. Tak więc, uwzględniając zależność (4) i wzory geometrii różniczkowej równanie (1) przyjmuje postać:

$$\gamma(r_s \cos \varphi - C) = -\sigma \frac{r_s^2 + 2 \left(\frac{dr_s}{d\varphi} \right)^2 - r_s \frac{d^2 r_s}{d\varphi^2}}{\left[r_s^2 + \left(\frac{dr_s}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (5)$$

Z symetrii zagadnienia wynika warunek brzegowy:

$$\frac{dr_s(\varphi)}{d\varphi} = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi = 0. \quad (6)$$

Drugi warunek brzegowy wynika z kąta zwilżenia na granicy trzech ośrodków i ma postać:

$$\frac{dr_s(\varphi)}{d\varphi} = \frac{r_s}{\operatorname{tg} \theta} \quad \text{dla} \quad \varphi = \Phi. \quad (7)$$

Dodatkowy warunek, jaki musi spełniać rozwiązanie $r_s(\varphi)$ wynika z zadanej ilości cieczy w rowku i może być sformułowany w postaci:

$$\int_0^{\Phi} r_s^2(\varphi) d\varphi = b^2 \operatorname{tg} \Phi, \quad (8)$$

gdzie b jest odległością powierzchni swobodnej od dna rowka przy braku sił kapilarnych.

Wprowadzając bezwymiarową zmienną $R = \frac{r_s}{b}$ równanie (5) i warunki (6-8) można zapisać następująco:

$$\frac{d^2 R}{d\varphi^2} = R + \frac{2}{R} \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 + \text{Bo} \left(\cos \varphi - \frac{A}{R} \right) \left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (9)$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{R}{\text{tg} \Theta} \quad \text{dla} \quad \varphi = \Phi, \quad (11)$$

$$\int_0^\Phi R^2(\varphi) d\varphi = \text{tg} \Phi, \quad (12)$$

gdzie $\text{Bo} = \frac{\gamma b^2}{\sigma}$ jest bezwymiarową liczbą Bonda, $A = \frac{C}{b}$ — bezwymiarową stałą.

Równanie (9) z warunkami brzegowymi (10, 11) formuluje dwupunktowe zagadnienie brzegowe. W równaniu (9) występuje nieznaną parametr A , do określenia którego dysponujemy dodatkowym warunkiem (12).

3. Opis metody rozwiązania zagadnienia

Sprowadźmy sformułowane zagadnienie brzegowe do zagadnienia początkowego. W tym celu, traktując warunek (10) jako pierwszy warunek początkowy, przyjmujemy drugi warunek początkowy w postaci:

$$R_s(\varphi) = S \quad \text{dla} \quad \varphi = 0, \quad (13)$$

gdzie S jest drugim nieznanym parametrem (obok parametru A). Zagadnienie początkowe proponujemy rozwiązywać metodą Rungego-Kutty w wersji podanej w [3] {patrz Appendix}, sprowadzając przedtem równanie (9) do układu dwóch równań pierwszego rzędu w postaci:

$$\frac{dY_1}{d\varphi} = Y_2, \quad (14)$$

$$\frac{dY_2}{d\varphi} = Y_1 + \frac{2}{Y_1} (Y_2)^2 + \text{Bo} \left(\cos \varphi - \frac{A}{Y_1} \right) [(Y_1)^2 + (Y_2)^2]^{3/2}, \quad (15)$$

gdzie: $Y_1 = R_s(\varphi)$, $Y_2 = \frac{dR_s(\varphi)}{d\varphi}$.

Rozwiązując problem początkowy sformułowany równaniami (14) i (15) oraz warunkami (10) i (13) dla dowolnie dobranych parametrów A i S otrzymamy postać powierzchni swobodnej, która z określonymi błędami spełnia warunki (11) i (12). Zakładając, że istnieje para parametrów A i S , dla której warunki (11) i (12) są spełnione dokładnie, naszym celem jest znalezienie rozwiązania z określonym błędem względnym DT dla kąta

zwilżenia

$$DT = \frac{T - \Theta}{\Theta} \quad (16)$$

i błędem DS dla pola powierzchni pod krzywą

$$DS = \frac{POL - \text{tg } \Phi}{\text{tg } \Phi}, \quad (17)$$

gdzie T i POL są obliczonymi wartościami kąta zwilżenia i pola powierzchni pod krzywą dla zadanych parametrów A i S . Realizacja postawionego celu polega na minimalizacji, przy pomocy omówionej niżej procedury numerycznej, funkcji błędu w postaci:

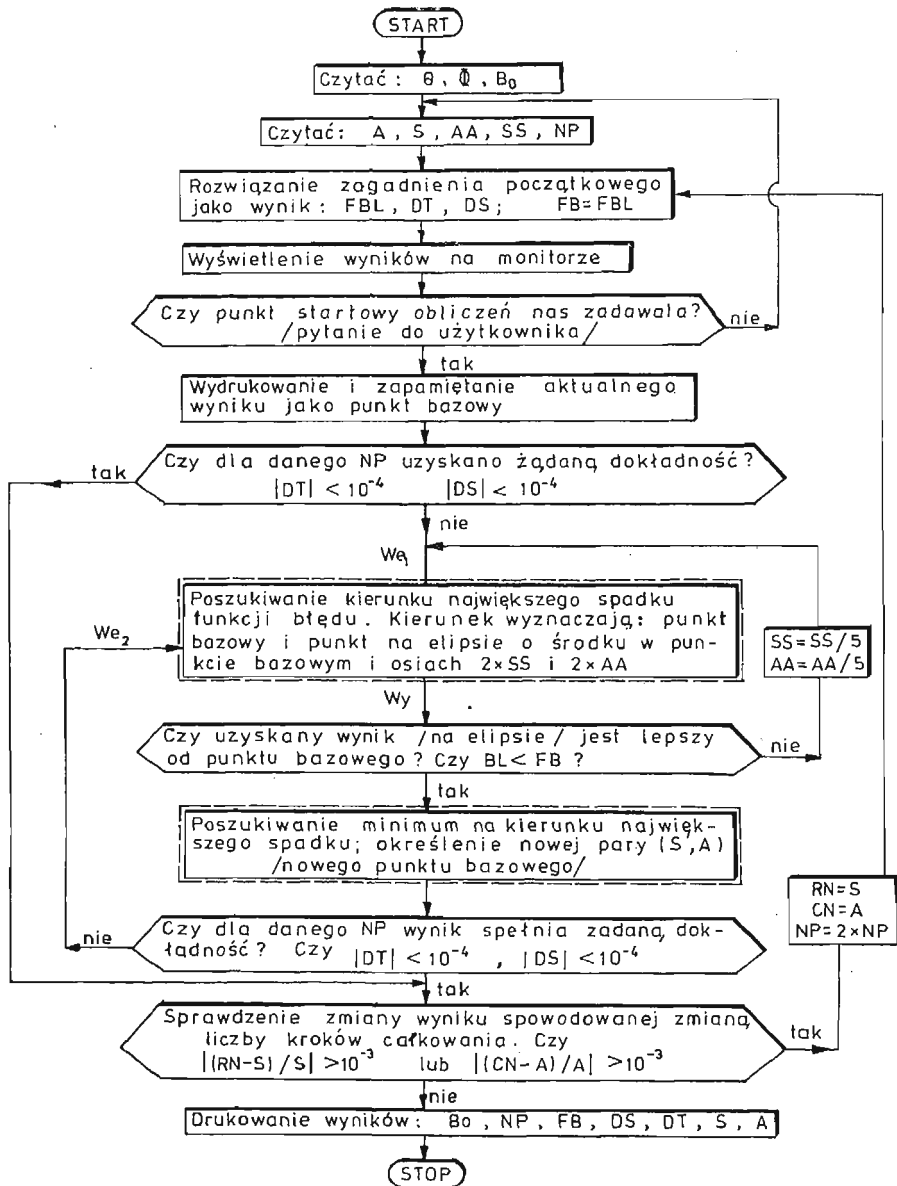
$$FBL = DT^2 + DS^2. \quad (18)$$

Jako warunek zakończenia obliczeń numerycznych przyjmuje się odpowiednio małe wartości dla błędów względnych DT i DS .

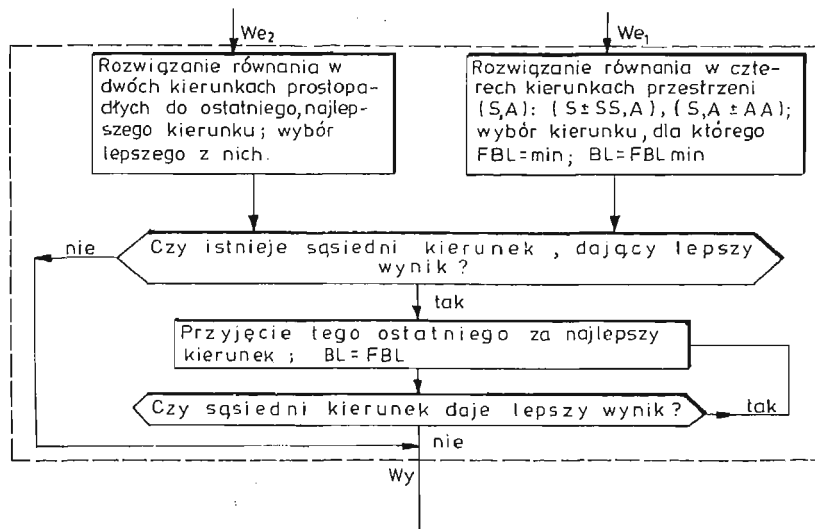
W pracy proponuje się minimalizowanie wprowadzonej funkcji błędu (18) przy pomocy metody będącej pośrednią pomiędzy metodą Gaussa-Seidela (bezgradientową) {[4], str. 200} a metodą największego spadku (gradientową) {[4], str. 203}. Zasadniczo w tej procedurze powtarzają się na przemian dwa etapy obliczeń: poszukiwanie kierunku największego spadku oraz przeszukiwanie tego kierunku. Z uwagi na fakt, że w badanym zagadnieniu nie dysponuje się informacją o gradiencie funkcji błędu FBL w pierwszym etapie poszukuje się minimum FBL w skończonej ilości punktów na elipsie w płaszczyźnie (A, S) . Ilość tych punktów, osie i środek elipsy określa się arbitralnie na początku procedury poszukiwania kierunku największego spadku. Punkt na elipsie, w którym FBL osiąga minimum i środek elipsy wyznaczają kierunek przybliżony do kierunku największego spadku i jest on dalej nazywany kierunkiem największego spadku. O ile FBL na elipsie nie osiąga wartości mniejszej aniżeli w jej środku następuje zmniejszenie osi elipsy. W kierunku największego spadku minimum funkcji błędu poszukuje się przy pomocy metody przeszukiwania ze zmiennym krokiem.

Dla przyspieszenia obliczeń pierwsze przybliżenie rozwiązania poszukiwano dla małej ilości kroków całkowania (oznaczonej w algorytmie NP) w metodzie Rungego-Kutty. Następnie ilość tych kroków zwiększano tak długo, dopóki wyniki z dwóch kolejnych kroków całkowania różniły się mniej niż założone kryterium (w pracy 1% uzyskanego wyniku). Należy zwrócić uwagę na fakt, że czas obliczeń jest w dużym stopniu zależny od trafności przyjęcia pierwszej pary parametrów A i S oraz kroków procedury przeszukiwania (w programie oznaczonych AA dla A i SS dla S). Dlatego też w programie wprowadzono możliwość „strzelania” punktem startowym (danymi A, S, AA, SS, NP) tak, aby uzyskane pierwsze przybliżenie zapewniało możliwie krótki czas obliczeń.

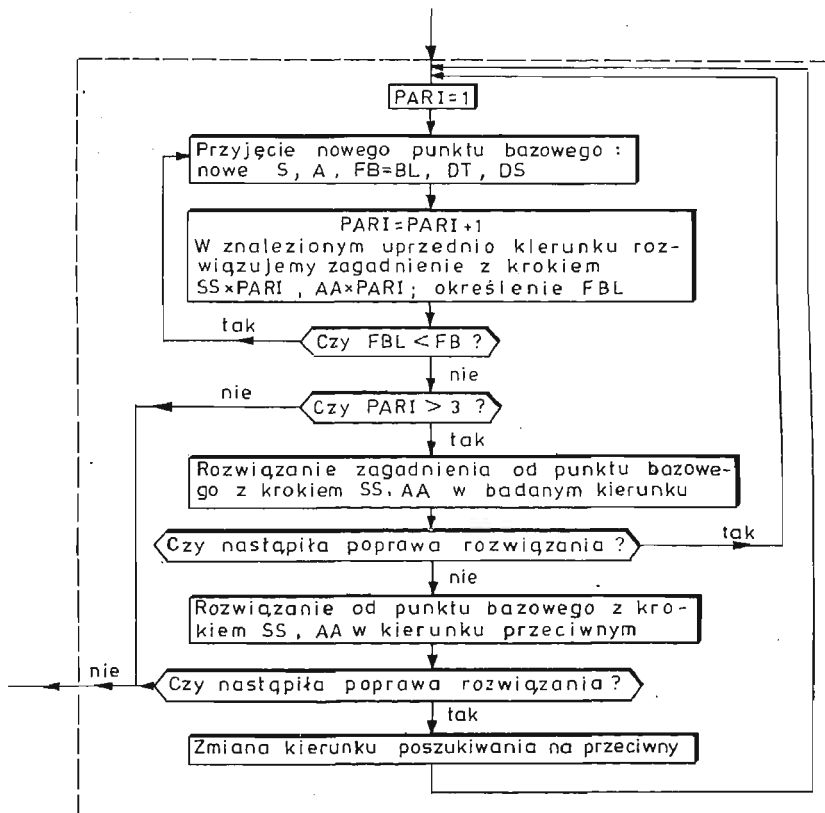
Na rys. 2 podano algorytm obliczeń programu wykorzystanego w pracy, który jest zamieszczony w dodatku. Oddzielnie na rys. 3 i 4 rozpisane zostały fragmenty tej procedury dotyczące poszukiwania kierunku największego spadku oraz poszukiwania minimum na tym kierunku. Algorytm obliczeń z rys. 3, 2 i 4 ma na celu ułatwienie ewentualnemu użytkownikowi korzystania z załączonego programu (obliczenia wykonywano na HP 86B w języku Basic).



Rys. 2. Algorytm obliczeń wyznaczania kształtu powierzchni swobodnej



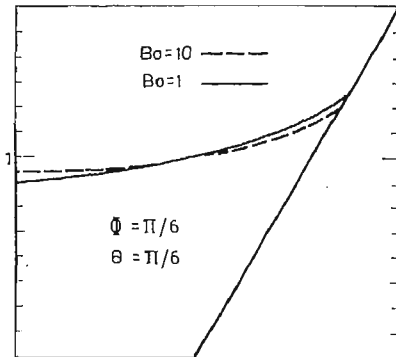
Rys. 3. Algorytm procedury wyznaczenia kierunku największego spadku



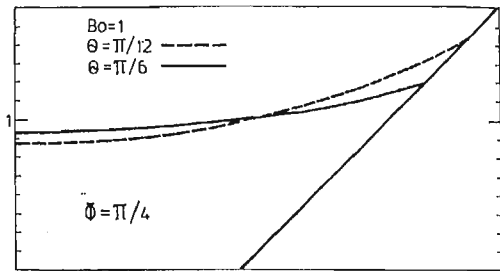
Rys. 4. Algorytm procedury metody przeszukiwania

4. Przykładowe wyniki

Przedstawiona metoda wyznaczania powierzchni swobodnej może być wykorzystana dla powierzchni wypukłych zarówno w dodatnim ($A > S$) jak i ujemnym ($A < S$) kierunku osi układu biegunowego. Przykładowe przebiegi powierzchni swobodnych pokazano na rys. 5 i 6. Na rys. 5 przedstawiono powierzchnie swobodne dla równych kątów

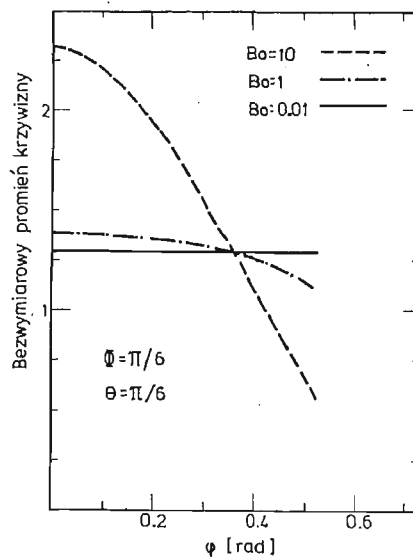


Rys. 5. Profile powierzchni swobodnej dla różnych liczb Bonda



Rys. 6. Profile powierzchni swobodnych dla różnych kątów zwilżenia

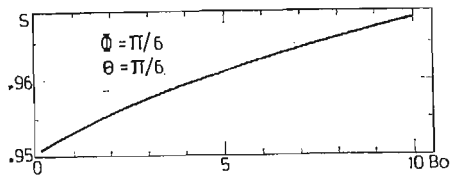
zwilżenia i różnych liczb Bonda. Na rys. 6 przedstawiono sytuację odwrotną. W celu oszacowania błędu wynikającego z założenia stałego promienia krzywizny [1] na rys. 7 przedstawiono zależności promienia krzywizny od współrzędnej biegunowej φ dla róż-



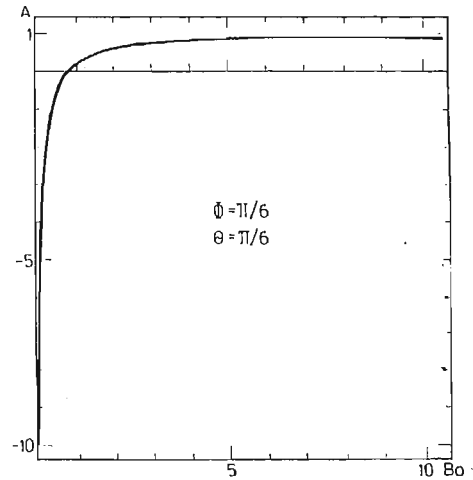
Rys. 7. Bezwymiarowe promienie krzywizny dla różnych liczb Bonda

nych liczb Bonda. Z przebiegów można stwierdzić, że popełniony błąd jest niewielki jeżeli liczba Bonda jest mniejsza od 1. Dla większych liczb Bonda błąd ten znacznie rośnie.

Używany przez autorów program wymaga określenia wyjściowej pary parametrów A i S . Trafność ich doboru decyduje o szybkości osiągnięcia zadowalających wyników a tę pierwszą ułatwia znajomość charakteru zmian tych wielkości w funkcji liczby Bonda. Przykładowe zależności pokazujące jak zmieniają się parametry A i S w funkcji liczby Bonda przedstawiono na rys. 8 i 9. Znajomość jakościowych zależności tych parametrów może być wykorzystana w trakcie obliczeń dotyczących innych kątów rozwarcia Φ i zwilżania Θ .



Rys. 8. Zależność wysokości cieczy w środku rowka od liczby Bonda



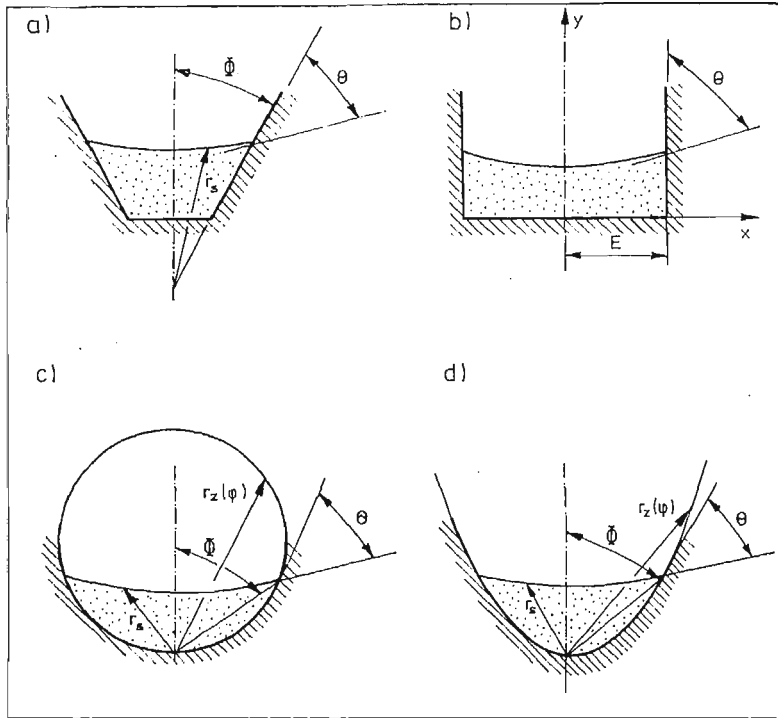
Rys. 9. Zależność parametru A od liczby Bonda

5. Uwagi końcowe

Przedstawiona procedura umożliwia określenie powierzchni swobodnej cieczy w trójkątnym rowku dla dowolnych kątów rozwarcia i zwilżenia oraz dowolnej liczby Bonda. Próby pokazały, że procedura jest zbieżna względem wyboru punktu początkowego A i S oraz liczby kroków całkowania. Stosunkowo szybki proces rozwiązywania numerycznego umożliwia wykorzystanie procedury do analizy wpływu poszczególnych wielkości (np. liczby Bonda, kąta zwilżenia, kąta rozwarcia) na kształt powierzchni i pozostałe parametry.

Przedstawiony algorytm postępowania może być względnie łatwo adaptowany do wyznaczania powierzchni swobodnej w rowkach o innych kształtach niż trójkątny, których przykłady zostały przedstawione na rys. 10. Modyfikacja załączonego programu jest uzależniona od kształtu rowka. Dla przypadku a) należy zmienić jedynie wzór na pole powierzchni pod krzywą. W przypadku, b) wygodniej jest zastosować kartezjański

układ współrzędnych w miejsce biegunowego. Zmienia się wówczas postać równania różniczkowego (na prostszą) oraz zamiast granicznej współrzędnej kątowej Φ jest współrzędna kartezjańska E . Dla przedstawionych na rys. 10 przypadków c) i d) rozwiązania należy wyznaczać we współrzędnych biegunowych (tak jak w załączonym programie)



Rys. 10. Przykłady zagadnień możliwych do rozwiązania przy pomocy przedstawionej procedury

przy czym proces całkowania w metodzie Rungego-Kutty należy przerwać w chwili gdy powierzchnia swobodna przecina zadany profil rowka, tzn. Φ jest rozwiązaniem równania $R_s(\varphi) = r_z(\varphi)$

Możliwe byłoby również zastosowanie proponowanej metody do optymalizacji. Przykładowo można poszukiwać największej powierzchni swobodnej (powierzchni wymiany) w funkcji kąta rozwarcia rowka, pola pod krzywą, liczby Bonda.

6. Dodatek. Program obliczeń w języku Basic

```

10 ! Program wyznaczający kształt powierzchni swobodnej cieczy
20 ! przy przepływie grawitacyjnym w trójkątnym rowku
30 RAD ! wszystkie obliczenia będą przeprowadzane w radianach
40 ! TH - kat zwilżenia; AL - kat rozwarcia rowka (dane w linii 60)

50 READ TH,AL
60 DATA .523598775598,.785398163398
70 SKAT=PI /8
80 READ BO ! BO - bezwymiarowa liczba Bonda (dana w linii 90)
90 DATA 1
100 RN,CN=0
110 TA=TAN (AL) @ TT=TAN (TH)
120 CLEAR
130 ! wprowadzanie punktu startowego
140 DISP "S,A,SS,AA,NF=";@ INPUT S,A,SS,AA,NF
150 FARN=0
160 C=A @ Y(1)=S @ GOSUB ROZW
170 DISP "S=";S;"A=";A;"FBL=";FBL;"DT=";DDT;"DS=";DDS @ DISP "Czy p
rogram ma już liczyć";@ INPUT A#
180 IF A##"TAK" THEN 140
190 DT=DDT @ DS=DDS @ FB=FBL @ PRINT "S=";S;"A=";A;"FBL=";FBL;"DT="
;DDT;"DS=";DDS
200 DISP "S=";S;"A=";A;"FBL=";FBL;"DT=";DDT;"DS=";DDS
210 GOSUB SPR @ IF FARN=1 THEN GOTO 150
220 BL=INF
230 ! Początek procedury optymalizującej
240 ! Punkt We1 algorytmu (rys. 2)
250 FOR Q=0 TO 12 STEP 4
260 KATA=Q*SKAT
270 C=A+AA*COS (KATA) @ Y(1)=S+SS*SIN (KATA)
280 IF S>Y(1) THEN NK
290 IF Y(1)>1 THEN NK
300 GOSUB ROZW
310 IF BL>FBL THEN KAT=KATA @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ BL=FBL
320 NK: NEXT Q
330 KATA=KAT @ GOTO 560
340 IF BL>FB THEN AA=AA*.2 @ SS=SS*.2 @ DISP "zmiana kroku AA,SS=";
AA;SS @ GOTO 220
350 ! Procedura przeszukiwania kierunku
360 FARI=1
370 AR: A=A+AA*COS (KAT)*FARI @ S=S+SS*SIN (KAT)*FARI
380 FB=BL @ DT=KDT @ DS=KDS @ FARI=FARI+1
390 C=A+AA*COS (KAT)*FARI @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT)*FARI
400 GOSUB ROZW
410 IF FBL<FB THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ GOTO AR
420 IF FARI>3 THEN C=A+AA*COS (KAT) @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT) @ GOSUB R
OZW ELSE GOTO 470
430 IF FBL<FB THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ FARI=1 @ GOTO AR
440 IF FARI>3 THEN C=A-AA*COS (KAT) @ Y(1)=S-SS*SIN (KAT) @ GOSUB R
OZW
450 IF FBL<FB THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ FARI=1 @ KAT=(KAT+F
I ) MOD (2*PI ) @ GOTO AR
460 ! Koniec procedury przeszukiwania kierunku

```

```

470 NI: DISP "S=";S;"A=";A,"FBL=";FBL;"DT=";DDT;"DS=";DDS
480 GOSUB SFR @ IF PARN=1 THEN GOTO 150
490 ! Punkt We2 algorytmu (rys. 2)
500 KATA=(KAT+4*SKAT) MOD (2*PI )
510 C=A+AA*COS (KATA) @ Y(1)=S+SS*SIN (KATA)
520 GOSUB ROZW @ BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS
530 KATB=(KAT+12*SKAT) MOD (2*PI )
540 C=A+AA*COS (KATB) @ Y(1)=S+SS*SIN (KATB)
550 GOSUB ROZW @ IF BL>FBL THEN KATA=KATB @ BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS
=DDS
560 ZKAT=SKAT
570 KAT1=(KATA+ZKAT) MOD (2*PI )
580 C=A+AA*COS (KAT1) @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT1)
590 GOSUB ROZW @ IF FBL<BL THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ GOTO
660
600 ZKAT=-SKAT
610 KAT1=(KATA+ZKAT) MOD (2*PI )
620 C=A+AA*COS (KAT1) @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT1)
630 GOSUB ROZW @ IF FBL<BL THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ GOTO
660
640 IF BL>FB THEN AA=AA*.2 @ SS=SS*.2 @ DISP "zmiana kroku AA,SS=";
AA;SS @ GOTO 220
650 KAT=KATA @ GOTO 360
660 KATA=KAT1 @ KAT1=(KATA+ZKAT) MOD (2*PI )
670 C=A+AA*COS (KAT1) @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT1)
680 GOSUB ROZW @ IF FBL<BL THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ GOTO
660
690 IF BL>FB THEN AA=AA*.2 @ SS=SS*.2 @ DISP "zmiana kroku AA,SS=";
AA;SS @ GOTO 220
700 KAT=KATA @ GOTO 360
710 ! Sprawdzenie dokladnosci uzyskanego wyniku
720 SFR: IF ABS (DT)>.0001 OR ABS (DS)>.0001 THEN RETURN
730 IF ABS ((RN-S)/S)>.001 OR ABS ((CN-A)/A)>.001 THEN DISP "zmiana
kroku calkowania NP";NP*2
740 IF ABS ((RN-S)/S)>.001 OR ABS ((CN-A)/A)>.001 THEN PARN=1 @ RN=
S @ CN=A @ NP=2*NP @ PRINT "zmiana kroku calkowania NP";NP @ RETURN

750 DISP " ***** KONIEC OBLICZEN *****"
760 GOTO KONIEC
770 ! Procedura rozwiazywania problemu poczatkowego
780 ! przy pomocy metody Rungego-Kutty
790 ROZW:
800 H=AL/NP @ M,KR,X=0 @ Y(2)=0 @ G1=Y(1) @ POLB,G2=0
810 LD: M=M+1
820 ON M GOTO A ,B ,C ,L ,E
830 A: FOR I=1 TO 2
840 Q(I)=0
850 NEXT I
860 U=.5
870 GOTO F
880 D: U=1.707107
890 B: X=X+.5*H
900 C: FOR I=1 TO 2
910 Y(I)=Y(I)+U*(F(I)*H-Q(I))
920 Q(I)=2*U*H*F(I)+(1-3*U)*Q(I)
930 NEXT I
940 U=.2928932
950 GOTO F

```



```

960 E: FOR I=1 TO 2
970 Y(I)=Y(I)+H*F(I)/6-Q(I)/3
980 NEXT I
990 M=0 @ K=2
1000 GOTO G
1010 F: K=1
1020 G: IF K=2 THEN K
1030 F(1)=Y(2)
1040 F(2)=Y(1)+2*Y(2)*Y(2)/Y(1)+B0*(COS (X)-C/Y(1))*SQR (Y(1)*Y(1)+
Y(2)*Y(2))^3
1050 GOTO LD
1060 K: AB=Y(1)*COS (X) @ AC=Y(1)*SIN (X)
1070 POLB=POLB+(AB+G1)*(AC-G2)
1080 G1=AB @ G2=AC @ KR=KR+1
1090 IF KR<NF THEN LD
1100 TZ=Y(1)/Y(2) @ DDT=(TZ-TT)/TT @ DDS=(FOL }-AB*AC-TA)/TA @ FBL=D
DT*DDT+DDS*DDS
1110 RETURN
1120 ! Zakonczenie obliczen i wydruk wynikow
1130 KONIEC:
1140 PRINT "OBLICZENIA DLA LICZBY BONDA";B0
1150 PRINT @ PRINT
1160 PRINT "OBLICZENIA DLA NF=";NF
1170 PRINT "WIELKOSC FUNKCJI BLEDU";FB
1180 PRINT "BLAD POLA";DS,"BLAD KATA";DT
1190 PRINT "OBLICZONE WIELKOSCI:"
1200 PRINT "  promien poczatku krzywej S";S
1210 PRINT "  punkt rownowagi cisnien A ";A
1220 STOP
1230 END

```

Literatura

1. P. S. AYYASWAMY, I. CATTON, D. K. EDWARDS, *Capillary Flow in Triangular Grooves*, Transactions of the ASME, vol 41, no 1, 332 - 336, (1974).
2. J. SIEKMANN, W. SCHEIDLER, P. TIETZE, *Static Meniscus Configurations in Propellant Tanks under, Reduced Gravity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 28, 103 - 116, (1981).
3. F. M. WHITE, *Viscous Fluid Flow*, Mc Graw-Hill Company, 1974.
4. W. FINDEISEN, J. SZYMAŃSKI, A. WIERZBICKI, *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, Warszawa, PWN, 1980.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ТРЕХУГОЛЬНОЙ КАНАВКЕ

В работе получено, при помощи числового метода, решение уравнения Лапласа-Янга для свободной поверхности. Эту поверхность характеризуют три независимые параметра: угол канавки, критерий Бонда и угол увлажнения. Описано метод, подано некоторые результаты и также программу, при помощи которой сделано вычисления на ЭВМ.

S u m m a r y

DETERMINATION OF FREE SURFACE OF LIQUID IN A TRIANGULAR GROOVE

Solutions to the Laplace—Young equation for free surface are obtained by proposed numerical method of minimalization. The three independent parameters, which characterize the free surface configuration are the half angle of the liquid-filled triangular groove, the Bond number and the contact angle of the shear-free meniscus. The results and program of calculations in Basic on HP 86B are given in the paper.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1987 roku.

APPLICATION OF WAVE METHOD IN INVESTIGATION OF DRIVE SYSTEMS COMPARISONS WITH OTHER METHODS

AMALIA PIELORZ

IPPT PAN, Warszawa

1. Introduction

The paper concerns dynamic investigations of drive systems with variable and constant shaft cross-sections using the wave solution of motion equations. The model of a drive system consists of shafts and rigid bodies with constant mass moments of inertia with respect to the axis of rotation. Rigid bodies are loaded by external moments which practically can be arbitrary. Considerations concern those systems where supporting bearings eliminate flexural deformations and shafts are mainly torsionally deformed. Damping appearing in these systems is taken into account by an equivalent damping, which is compared with a damping continuously distributed in the case of a unilaterally fixed rod torsionally deformed. Moreover, results obtained by means of the wave method are compared with suitable results obtained by means of the rigid finite element method and with the method of separation of variables.

It should be pointed out that dynamic investigations of drive systems are carried mostly out by means of discrete models, [1]. In literature also discrete-continuous models are used likewise in the present paper, [2, 3], which more precisely describe real systems but require slightly different methods for solution. The method of separation of variables is the most often applied in these studies. It allows, in principle, to consider undamped systems and to determine natural frequencies and eigenfunctions, [2 - 4]. Using the wave solution of motion equations one can determine displacements, strains and velocities in arbitrary shaft cross-sections at an arbitrary time instant.

2. Wave method in investigation of drive systems

In this section the wave method is presented in the case of the discrete-continuous model of a drive system with variable cross-section of shafts. The method is based on the utilization of wave solution of appropriate motion equations. It can be applied for shafts with a constant and variable cross-section, however in the last case the functions representing variable cross-sections should be such that the equations of motion have solutions of the d'Alembert type.

2.1. Drive systems with variable shaft cross-section. Consider a multi-mass drive system consisting of an arbitrary number of rigid bodies connected by means of shafts. The shafts consist of segments with variable polar moment of inertia. The method proposed may be easily applied to the discussion of models for drive systems with an arbitrary number of segments, however in order to get clearer and simpler analytical formulae the analysis is limited to the case when each shaft consists of two segments, Fig. 1.

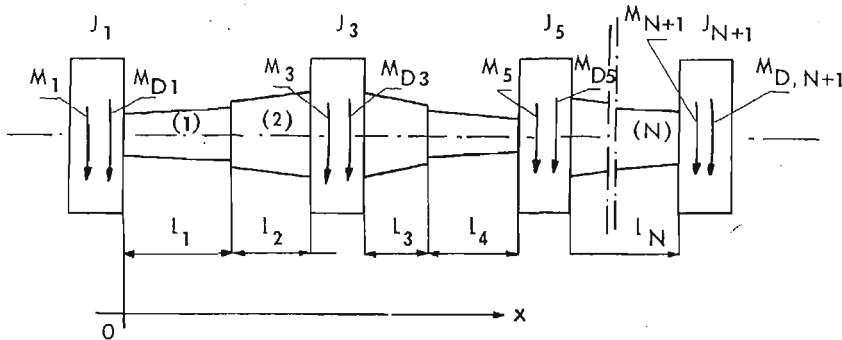


Fig. 1. Model of a drive system

The shafts are deformable only in torsion-like manner and their central axes, together with elements settled on them, coincide with the main axis of the drive system. It is assumed that the x axis is parallel to the main axis of the drive system, and that its origin coincides with the location of the left end of the first shaft in an undisturbed state at time instant $t = 0$. Moreover, damping is taken into account by means of an equivalent damping.

The i -th shaft segment, $i = 1, 2, \dots, N$, where N is an even number, is characterized by the length l_i , density ρ , shear modulus G and variable polar moment of inertia J_{oi} which is described by the function:

$$J_{oi}(x) = J_{pi} \left(\frac{x - b_{oi}}{L_{i-1} - b_{oi}} \right)^{\alpha}, \quad (1)$$

where: $J_{oi}(b_{oi}) = 0$, $J_{pi} = J_{oi}(L_{i-1})$, $L_i = l_1 + l_2 + \dots + l_i$. If $b_{oi} \rightarrow -\infty$ then function (1) is constant, therefore shaft cross-sections can be constant, piece-wisely constant, variable and piece-wisely variable. Other forms of function J_{oi} , suitable motion equations for which have the solution of the d'Alembert type, one can find in [5 - 7]. The rigid bodies of the system, with mass moments of inertia J_i , are loaded by external moments $M_i(t)$. The moments of an equivalent damping, also loaded these bodies, are assumed in the form:

$$\begin{aligned} M_{Di}(t) &= -D_i \Theta_{i,t}(x, t) \quad \text{for } x = L_{i-1}, \quad i = 1, 3, \dots, N, \\ M_{D,N+1}(t) &= -D_{N+1} \Theta_{N,t}(x, t) \quad \text{for } x = L_N, \end{aligned} \quad (2)$$

where D_i are the coefficients of the equivalent damping of viscous type, Θ_i angular displacements of shafts, and comma denotes partial differentiation. Moments M_{Di} act in selected shaft cross-sections, and thus this assumption allows to apply motion equations

without damping. Moreover, it is assumed that displacements and velocities of shaft cross-sections are equal to zero at time instant $t = 0$.

Under above assumptions, the determination of angular displacements and velocities of the system shown in Fig. 1 is reduced to the solution of wave equations, [7],

$$\Theta_{i,tt} - c^2(\Theta_{i,xx} + \frac{2}{x-b_{0i}}\Theta_{i,x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

with boundary conditions;

$$\begin{aligned} M_1(t) - J_1\Theta_{1,tt} + GJ_{01}\Theta_{1,x} - D_1\Theta_{1,t} &= 0 \quad \text{for } x = 0, \\ J_{0,t-1}\Theta_{i-1,x} &= J_{0i}\Theta_{i,x} \quad \text{for } x = L_{i-1}, \quad i = 2, 4, \dots, N, \\ M_i(t) - J_i\Theta_{i,tt} + GJ_{0i}\Theta_{i,x} - GJ_{0,i-1}\Theta_{i-1,x} - D_i\Theta_{i,t} &= 0 \quad \text{for } x = L_{i-1}, \\ & \quad i = 3, 5, \dots, N-1, \\ M_{N+1}(t) - J_{N+1}\Theta_{N,tt} - GJ_{0N}\Theta_{N,x} - D_{N+1}\Theta_{N,t} &= 0 \quad \text{for } x = L_N, \\ \Theta_{i-1} &= \Theta_i \quad \text{for } x = L_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (4)$$

and with initial conditions

$$\Theta_i(x, 0) = \Theta_{i,t}(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

where $c^2 = G/\rho$. In the case of constant polar moment of inertia J_{0i} equations (3) become classical wave equations.

Upon the introduction of the following nondimensional quantities

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x/(l_1 + l_2), \quad \bar{t} = ct/(l_1 + l_2), \quad \bar{\Theta}_i = \Theta_i/\Theta_0, \quad \bar{D}_i = D_i(l_1 + l_2)/(J_1c), \\ \bar{M}_i &= M_i(l_1 + l_2)^2/(J_1\Theta_0c^2), \quad K_i = J_{pi}\rho(l_1 + l_2)/J_i, \quad E_i = J_i/J_1, \end{aligned} \quad (6)$$

relations (3) - (4), omitting bars for convenience, are

$$\begin{aligned} \Theta_{i,tt} - \Theta_{i,xx} - \frac{2}{x-b_{0i}}\Theta_{i,x} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ M_1 - \Theta_{1,tt} + K_1J_{01}\Theta_{1,x} - D_1\Theta_{1,t} &= 0 \quad \text{for } x = 0, \\ J_{0,t-1}\Theta_{i-1,x} &= B_iJ_{0i}\Theta_{i,x} \quad \text{for } x = L_{i-1}, \quad i = 2, 4, \dots, N, \\ E_iM_i - \Theta_{i,tt} + K_iJ_{0i}\Theta_{i,x} - K_{i-1}E_iJ_{0,t-1}\Theta_{i-1,x} & - E_iD_i\Theta_{i,t} = 0 \\ & \quad \text{for } x = L_{i-1}, \quad i = 3, 5, \dots, N-1, \\ E_{N+1}M_{N+1} - \Theta_{N,tt} - K_NJ_{0N}E_{N+1}\Theta_{N,x} & - E_N - E_{N+1}D_{N+1}\Theta_{N,t} = 0 \quad \text{for } x = L_N, \\ \Theta_{i-1} &= \Theta_i \quad \text{for } x = L_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (8)$$

where Θ_0 is the constant value of an angular displacement.

The solutions of the problem (7), (8) and (5) are sought in the form

$$\begin{aligned} \Theta_i(x, t) &= \frac{1}{x-b_{0i}} [f_i(t-x+L_{i-1}) + g_i(t+x-L_{i-1})] \quad \text{for } x = 1, 3, \dots, N-1, \\ \Theta_i(x, t) &= \frac{1}{x-b_{0i}} [f_i(t-x+L_i) + g_i(t+x-L_i)] \quad \text{for } i = 2, 4, \dots, N, \end{aligned} \quad (9)$$

where functions $(x-b_{0i})^{-1}f_i$ and $(x-b_{0i})^{-1}g_i$ represent waves, caused by an external loading, propagating in the i -th shaft segment in the direction consistent and opposite

to the direction of the x axis, respectively. In the arguments of functions f_i and g_i it was taken into account that the first perturbation occurs in the i -th shaft segment at the time instant $t = 0$ in the cross-section $x = L_{i-1}$ or $x = L_i$, respectively, where $L_i = l_1 + l_2 + \dots + l_i$. Furthermore it is assumed that the functions f_i and g_i are equal to zero for negative arguments. If the function J_{0i} is constant and equations (7) become classical wave equations then the sought solution (9) consists only of the sums of functions f_i and g_i with the same arguments, [8, 9].

Upon the substitution the assumed form of solution (9) into boundary conditions (8), upon denoting the largest argument in each equality by z and using the function (1) to the description of the variation of polar moment of inertia one gets the following system of equations for unknown functions f_i and g_i :

$$\begin{aligned}
 r_{1i}f_i'(z) + r_{2i}f_i(z) &= r_{3i}g_i'(z-2l_i) - r_{2i}g_i(z-2l_i) \\
 &\quad + r_{4i}f_{i-1}^2(z-l_{i-1}-l_i) \quad \text{for } i = 2, 4, \dots, N, \\
 r_{1,i+1}g_i'(z) + r_{2,i+1}g_i(z) &= -r_{3,i+1}f_i'(z-2l_i) - r_{2,i+1}f_i(z-2l_i) \\
 &\quad + r_{4,i+1}^2g_{i+1}^2(z-l_i-l_{i+1}) \quad \text{for } i = 1, 3, \dots, N-1, \\
 f_1''(z) + r_{11}f_1'(z) + r_{21}f_1(z) &= C_1M_1(z) - g_1''(z) + r_{31}g_1'(z) - r_{21}g_1(z), \\
 f_i''(z) + r_{1i}f_i'(z) + r_{2i}f_i(z) &= C_iM_i(z) - g_i''(z) + r_{3i}g_i'(z) \\
 &\quad - r_{2i}g_i(z) + r_{4i}f_{i-1}^2(z) \quad \text{for } i = 3, 5, \dots, N-1, \\
 g_i''(z) + r_{1,i+1}g_i'(z) + r_{2,i+1}g_i(z) &= C_iM_{i+1}(z) - f_i''(z) \\
 &\quad + r_{3,i+1}^2f_i^2(z) - r_{2,i+1}f_i(z) + r_{4,i+1}^2g_{i+1}^2(z) \\
 &\quad \text{for } i = 2, 4, \dots, N-2, \\
 g_N''(z) + r_{1,N+1}g_N'(z) + r_{2,N+1}g_N(z) &= C_NM_{N+1}(z) - f_N''(z) \\
 &\quad + r_{3,N+1}^2f_N^2(z) - r_{2,N+1}f_N(z),
 \end{aligned} \tag{10}$$

where:

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= K_1 + D_1, \quad r_{21} = -K_1/b_{01}, \quad r_{31} = K_1 - D_1, \\
 r_{1i} &= (L_{i-1} - b_{0,i-1})^2(L_{i-2} - b_{0,i-1})^{-2} + B_i, \quad i = 2, 4, \dots, N, \\
 r_{2i} &= B_i(L_{i-1} - b_{0i})^{-1} - (L_{i-1} - b_{0,i-1})(L_{i-2} - b_{0,i-1})^{-2}, \quad i = 2, 4, \dots, N, \\
 r_{3i} &= B_i - (L_{i-1} - b_{0,i-1})^2(L_{i-2} - b_{0,i-1})^{-2}, \quad i = 2, 4, \dots, N, \\
 r_{4i} &= 2(L_{i-1} - b_{0,i-1})(L_{i-1} - b_{0i})(L_{i-2} - b_{0,i-1})^{-2}, \quad i = 2, 4, \dots, N, \\
 r_{4i}^2 &= 2B_i(L_{i-1} - b_{0,i-1})(L_{i-1} - b_{0i})^{-1}, \quad i = 2, 4, \dots, N, \\
 r_{1i} &= K_i + K_{i-1}E_i(L_{i-1} - b_{0,i-1})^2E_{i-1}^{-1}(L_{i-2} - b_{0,i-1})^{-2} + E_iD_i, \\
 &\quad i = 3, 5, \dots, N-1, \\
 r_{2i} &= K_i(L_{i-1} - b_{0i})^{-1} - K_{i-1}E_i(L_{i-1} - b_{0,i-1})E_{i-1}^{-1}(L_{i-2} - b_{0,i-1})^{-2}, \\
 &\quad i = 3, 5, \dots, N-1, \\
 r_{3i} &= -r_{1i} + 2K_i, \quad r_{3i}^2 = -r_{3i} - 2E_iD_i, \quad i = 3, 5, \dots, N-1, \\
 r_{4i} &= 2K_{i-1}E_i(L_{i-1} - b_{0,i-1})(L_{i-1} - b_{0i})E_{i-1}^{-1}(L_{i-2} - b_{0,i-1})^{-2}, \\
 &\quad i = 3, 5, \dots, N-1,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
r_{4i} &= 2K_i(L_{i-1}-b_{0,i-1})(L_{i-1}-b_{0i})^{-1}, \quad i = 3, 5, \dots, N-1, \\
r_{1,N+1} &= K_N E_{N+1}(L_N-b_{0N})^2 E_N^{-1}(L_{N-1}-b_{0N})^{-2} + E_{N+1} D_{N+1}, \\
r_{2,N+1} &= -K_N E_{N+1} E_N^{-1}(L_{N-1}-b_{0N})^{-2}(L_N-b_{0N}), \\
r_{3,N+1} &= r_{1,N+1} - 2E_{N+1} D_{N+1}, \\
C_i &= E_i(L_{i-1}-b_{0i}), \quad i = 1, 3, \dots, N-1, \\
C_i &= E_{i+1}(L_i-b_{0i}), \quad i = 2, 4, \dots, N.
\end{aligned}$$

Equations (10) are differential equations with constant coefficients, however the arguments of several functions of the right-hand sides of these equations are shifted. These equations can be solved numerically by means of the finite difference method or analytically, as it was presented in [8, 9] for a drive system with a constant shaft cross-section.

2.2. Numerical results. Numerical calculations for nondimensional angular displacements $\Theta(x, t)$ are carried out in the case of a two-mass drive system. The method of finite differences with $\Delta z = 0.025$ is applied in order to solve equations (10) for $N = 2$, and next displacement functions are determined according to formulae (9).

The two-mass drive system is characterized by the following nondimensional parameters, (6): $l_1 = l_2 = 0.5$, $K_1 = 0.01$, $E_3 = 0.1$, $B_2 = 0.8, 1.0, 1.25$, $D_1 = D_3 = 1.0$, the parameters $b_{01} = -20, -1000$, $b_{02} = b_{01} - l_1$ occurring in formula (1), and $\Theta_0 = 1$ [rad], $c = 5000$ [m/s]. The effect of the quotient of polar moments of inertia of shaft segments $B_2 = J_{p2}/J_{p1}$ is investigated for the nondimensional external moments $M_1(t) = 7 \cdot 10^{-5} \exp(-0.0044t) \cdot \sin(\pi t/70)$ and $M_3(t) = 0$. Displacements $\Theta(x, t)$ are plotted out in Fig. 2 for the three selected shaft cross-sections $x = 0, 0.5, 1.0$ and for $b_{01} = -20, -1000$. It follows from Fig. 2 that for any time instant differences between displacements for moderately changing shaft cross-sections with $b_{01} = -20$ and $b_{01} = -1000$ are small, and that the effect of the quotient $B_2 = J_{p2}/J_{p1}$ on displacements is most observable in the cross-section $x = 0.5$.

In the case of a two-mass drive system the effect of the lengths of shaft segments on displacements $\Theta(x, t)$ was also considered, namely for the lengths of shaft segments $l_1 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$, $l_2 = 1.0 - l_1$, and for $K_1 = 0.01, 1.0$ and $B_2 = 1.25$. All calculations indicated that this effect on angular displacements in shaft cross-sections under consideration was inconsiderable. For this reason, the appropriate diagrams for displacements are not presented in the paper.

3. Comparisons

The method, proposed in the paper for investigations of drive systems torsionally deformed, takes into account all reflections of waves during the work of the drive system and leads to solving ordinary differential equations with a retarded argument. These equations are derived under the assumption that equivalent damping may be considered in boundary conditions. In real systems damping is distributed continuously. For the present, methods for solving appropriate motion equations with damping are not sufficiently effective to be used in investigations of discrete-continuous models of drive systems. A comparative

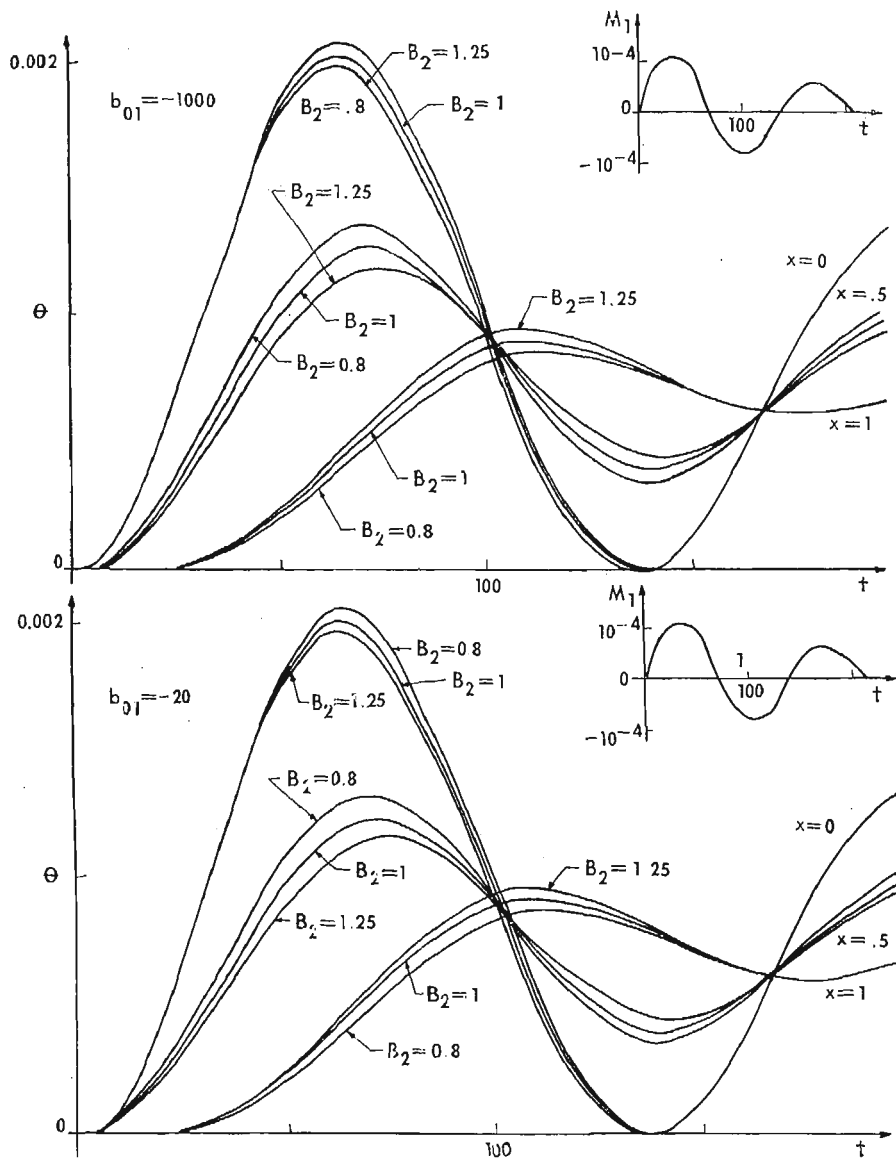


Fig. 2. Displacement diagrams for a two-mass drive system

analysis for the dissipative wave equation and the classical wave equation with the equivalent damping is performed in the case of a unilaterally fixed rod with a constant cross-section. Also for simple systems, results obtained by means of the wave method is compared with appropriate results obtained by means of the rigid finite element method and the method of separation of variables.

3.1. Damping in dissipative wave equation and equivalent damping. The solution of the dissipative wave equation is now compared with the solution of the classical wave equation with the equivalent damping. The comparison is accomplished for the rod right-handly fixed the free end of which is loaded at time instant $t = 0$ by a constant torque, Fig. 6 with $J = 0$.

3.1.1. Solution for dissipative wave equation. The discussion of the system under consideration, Fig. 6 with $J = 0$, taking into account the damping continuously distributed is reduced to solving the dissipative wave equation, which in appropriate nondimensional quantities analogous to (6) has the form:

$$\Theta_{,tt} + 2h\Theta_{,t} - \Theta_{,xx} = 0, \quad (12)$$

with the following initial conditions:

$$\Theta = \Theta_{,t} = 0 \quad \text{for} \quad t = 0 \quad (13)$$

and boundary conditions:

$$\begin{aligned} \Theta_{,x} &= -M_0 \quad \text{for} \quad x = 0, \\ \Theta &= 0 \quad \text{for} \quad x = 1, \end{aligned} \quad (14)$$

where h is a nondimensional damping coefficient, M_0 is a nondimensional constant torque, and bars are omitted for convenience.

Upon the introduction of the transformation:

$$\Theta = e^{-ht}v \quad (15)$$

equation (12) takes the form:

$$v_{,tt} - v_{,xx} - h^2v = 0. \quad (16)$$

By executing the Laplace transformation relations (16), (14) are:

$$(s^2 - h^2)\tilde{v} - \frac{d^2\tilde{v}}{dx^2} = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{for} \quad x = 1 \quad \text{and} \quad \frac{d\tilde{v}}{dx} + \tilde{M}_0 = 0 \quad \text{for} \quad x = 0, \quad (18)$$

where by wavy lines the Laplace transformation of suitable functions are marked.

The solution of equation (17) for conditions (18) has the form:

$$\tilde{v}(x; s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^1 (-1)^{n+k} \frac{\tilde{M}_0}{(s^2 - h^2)^{1/2}} \exp(-x_{kn}(s^2 - h^2)^{1/2}), \quad (19)$$

where $x_{kn} = (-1)^k x + 2(k+n)$.

Upon the retransformation and the use of relation (15) the solution of equation (12)

is the following function:

$$\Theta(x, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^1 (-1)^{k+n} H(t - x_{kn}) \int_0^t e^{-hz} I_0(h(z^2 - x_{kn}^2)^{1/2}) dz, \quad (20)$$

where $I_0(x)$ is the Bessel function. From formula (20) it is seen that it is more comfortable to consider the derivative of function $\Theta(x, t)$ with respect to time. This derivative has the form:

$$\begin{aligned} \Theta_{,t}(x, t) &= M_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^1 (-1)^{k+n} H(t - x_{kn}) e^{-ht} I_0(h(t^2 - x_{kn}^2)^{1/2}) = \\ &= M_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^1 (-1)^{n+k} H(t - x_{kn}) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h^2(t^2 - x_{kn}^2)/4)^r}{(r!)^2} e^{-ht}, \end{aligned} \quad (21)$$

where $H(t)$ is the Heaviside function.

3.1.2. Equivalent damping. The discussion of the fixed rod to the free end of which a constant torque and an equivalent damping moment are applied is reduced, in nondimensional quantities, to solving the equation

$$\Theta_{,tt} - \Theta_{,xx} = 0 \quad (22)$$

with initial conditions (13) and with the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} \Theta_{,x} &= -M_0 + D\Theta_{,t} \quad \text{for } x = 0, \\ \Theta &= 0 \quad \text{for } x = 1, \end{aligned} \quad (23)$$

where D is a nondimensional coefficient of equivalent damping.

For the solution of the form:

$$\Theta(x, t) = f(t-x) + g(t+x), \quad (24)$$

we have

$$\begin{aligned} g(z) &= -f(z-2), \\ f'(z)(1+D) &= M_0 + (1-D)g'(z), \end{aligned} \quad (25)$$

from where:

$$f'(z) = \frac{M_0}{1+D} \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{1-D}{1+D} \right)^k \quad \text{for } 2n \leq z < 2(n+1). \quad (26)$$

For example for cross-section $x = 0$ and for $2n \leq t < 2(n+1)$

$$\Theta_{,t}(0, t) = \frac{M_0}{1+D} (-1)^n \left(\frac{1-D}{1+D} \right)^n. \quad (27)$$

Function (27) is a piece-wisely constant function.

3.1.3. Numerical results. In Fig. 3 are shown diagrams of velocities in cross-sections $x = 0$ and $x = 0.5$ of the considered rod for damping coefficients $h = D = 0.1, 0.2$ and 0.5 and for $M_0 = 1.0$ obtained according to formulae (21) (continuous lines) and formulae (26) (dashed lines). From Fig. 3 it follows that velocities obtained for the equiva-

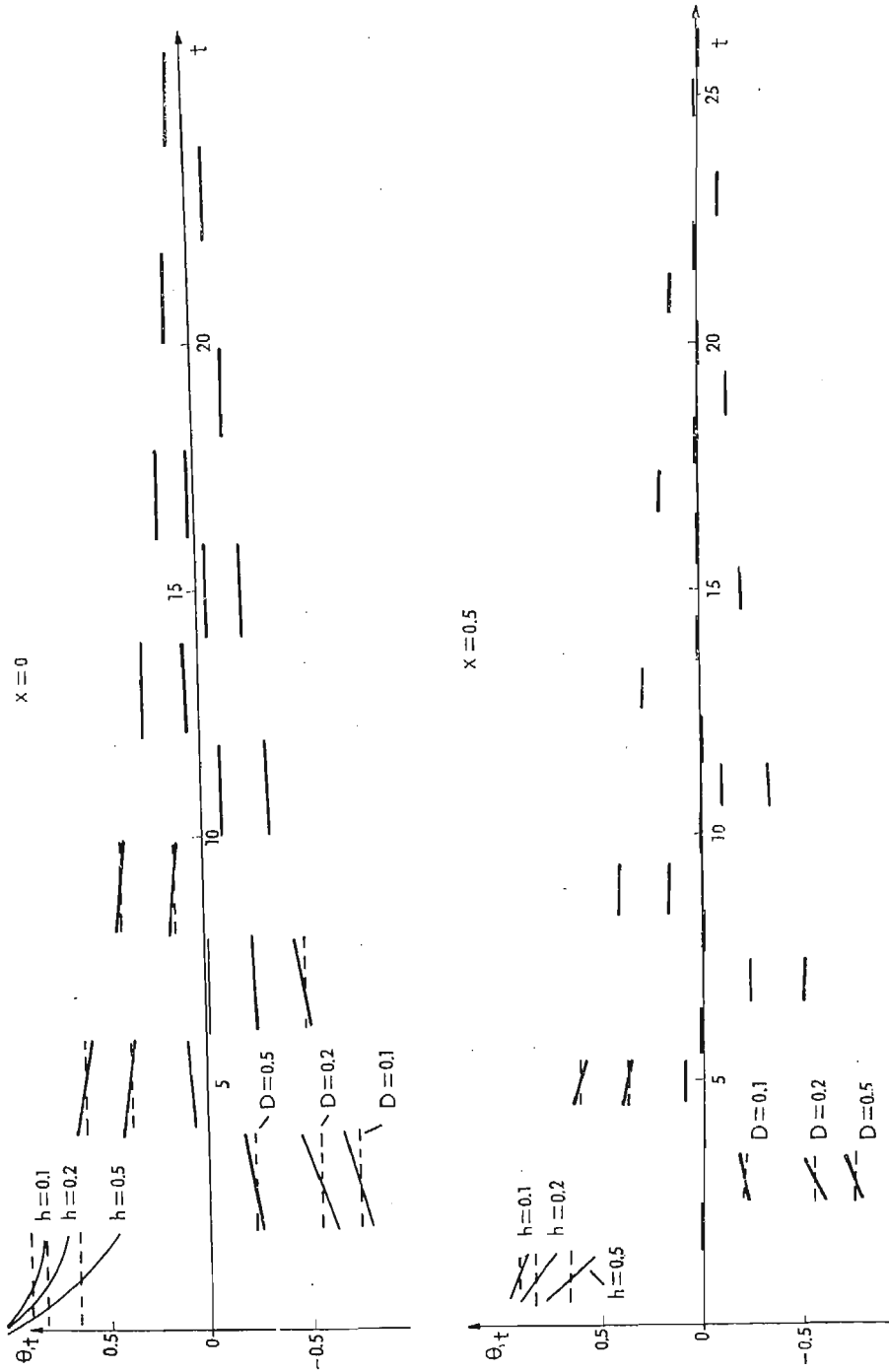


Fig. 3. Velocity diagrams for damping continuously distributed (---) and for equivalent damping (—)

lent damping in successive intervals of time beginning with even numbers are approximately average velocities obtained for the damping continuously distributed. Moreover, results for the both types of damping coincide for $t \geq 8$. Analytical formulae are considerably simpler in the case of the equivalent damping.

3.2. Wave method and rigid finite element method. The comparison of the wave method with the rigid finite element method is performed for angular displacements of an undamped two-mass drive system with constant cross-section, Fig. 1 for $N = 2$, $J_{01} = J_{02} = \text{const}$ and $M_{D1}(t) = M_{D3}(t) = 0$. The system is loaded by the external moment applied to rigid body (1), which is described in nondimensional quantities by function $M_1(t) = 0.00001 \sin(\pi t/4)$. In calculations $K_1 = 0.1$ and $E_3 = 0.1$, (6), are assumed.

The motion of the drive system under consideration using the method proposed in the paper is described by equations (10) with $b_{01} \rightarrow -\infty$. Displacements $\Theta(x, t)$ of shaft cross-sections of the drive system for $x = 0, 0.5, 1.0$ are obtained by means of the finite difference method with $\Delta z = 0.025$. Diagrams of these displacements are shown in Fig. 4.

Motion equations for the undamped two-mass drive system using the rigid finite element method have the form, [10],

$$\begin{aligned} \left(J_1 + \frac{1}{2} R_0 \right) \ddot{\Theta}_1 + \frac{GJ_{01}}{\Delta l} (\Theta_1 - \Theta_2) &= \frac{J_1 \Theta_0 c^2}{l^2} M_1(t), \\ R_0 \ddot{\Theta}_i + \frac{GJ_{01}}{\Delta l} (-\Theta_{i-1} + 2\Theta_i - \Theta_{i+1}) &= 0 \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, N, \\ \left(J_3 + \frac{1}{2} R_0 \right) \ddot{\Theta}_N + \frac{GJ_{01}}{\Delta l} (-\Theta_{N-1} + \Theta_N) &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

where N is the number of finite elements, lengths of extreme and remaining elements are $\Delta l/2$ and Δl respectively, $R_0 = J_{01} \rho \Delta l$ and Θ_i is the displacement of the i -th element.

Introducing the appropriate nondimensional quantities (6) equations (28) take the form:

$$\begin{aligned} r_1 \ddot{\Theta}_1 + r_4 (\Theta_1 - \Theta_2) &= M_1(t), \\ r_2 \ddot{\Theta}_i + r_4 (-\Theta_{i-1} + 2\Theta_i - \Theta_{i+1}) &= 0 \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, N-1, \\ r_3 \ddot{\Theta}_N + r_4 (-\Theta_{N-1} + \Theta_N) &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

where: $r_1 = 1 + \Delta l K_1 / 2l$, $r_2 = \Delta l K_1 / l$, $r_3 = \Delta l K_1 / 2l + 1/E_3$, $r_4 = K_1 l / \Delta l$, and bars are omitted for convenience.

Displacements Θ_i for finite elements are obtained from equations (29) by means of the Runge-Kutta method with $\Delta t = 0.01$ and initial conditions:

$$\Theta_i(0) = \dot{\Theta}_i(0) = 0. \quad (30)$$

Diagrams for these displacements, in nondimensional time, are shown in Fig. 5 taking into account 5 finite elements.

From the comparison of the displacement diagram for the cross-section $x = 0$ in Fig. 4 with the diagram of function Θ_1 in Fig. 5 it follows that the character of the both curves is similar, and that the suitable maximum displacements obtained by means of the both methods differ from each other by about 8 per cent. However, the displacement

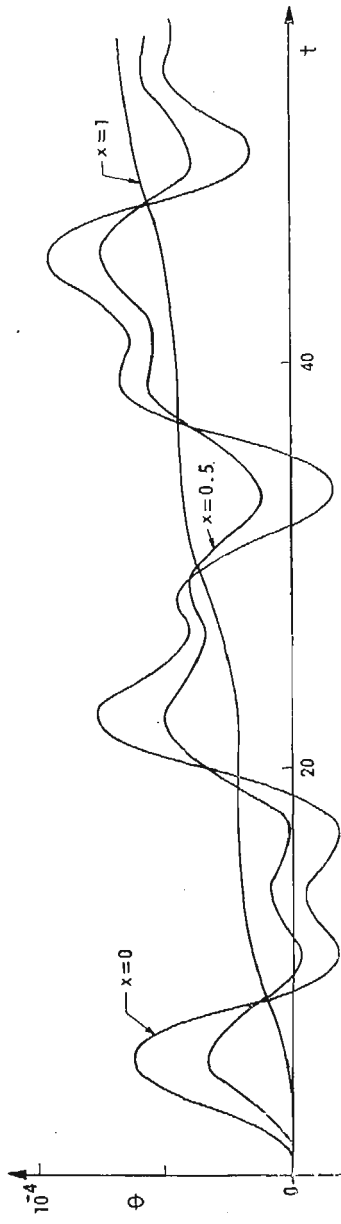


Fig. 4. Displacements of cross-sections $x = 0, 0.5, 1.0$ obtained from equations (10)

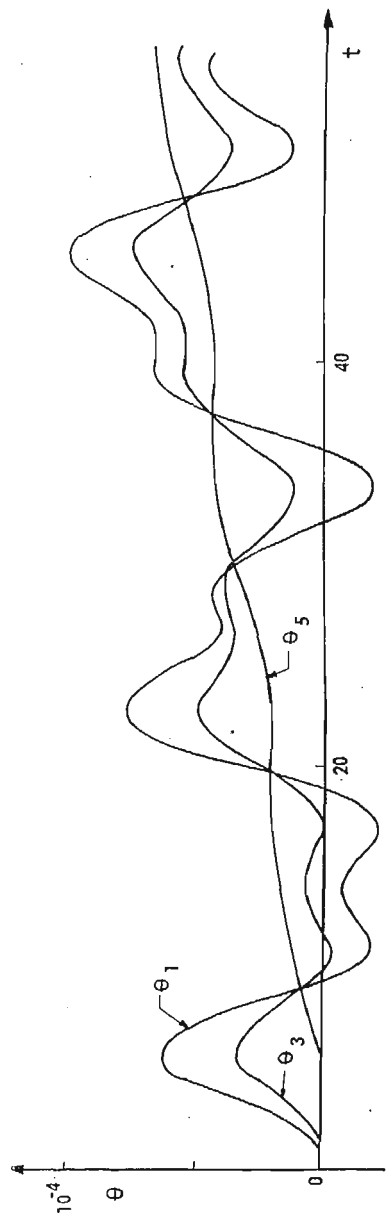


Fig. 5. Displacements $\theta_1, \theta_3, \theta_5$ obtained from equations (29)

curves of cross-sections $x = 0.5$ and $x = 1.0$ do not differ practically from corresponding curves Θ_3 , Θ_5 presented in Fig. 5. Additionally one may note that the execution time of numerical calculations is much longer when the rigid finite element method is applied.

3.3. Wave method and method of separation of variables. In this section the forced vibrations of the undamped system shown in Fig. 6 is considered using wave solutions of mo-

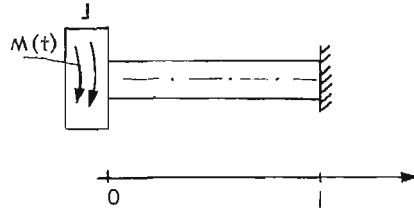


Fig. 6. Simple mechanical system

tion equations and the method of separation of variables. In the both cases displacements of cross-section $x = 0$ are determined (i.e. for the cross-section where the rigid body is attached to the rod), and the amplitude-frequency curve is plotted out for the nondimensional external moment $M(t) = a_0 \sin pt$. The rod is characterized by polar moment of inertia J_0 , shear modulus G , density ρ and length l .

3.3.1. Wave solution. The determination of nondimensional displacements in the elastic element of the system shown in Fig. 6 is reduced to solving motion equations (22) with initial conditions (13) and the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} M(t) - \Theta_{,tt} + K\Theta_{,x} &= 0 \quad \text{for } x = 0, \\ \Theta &= 0 \quad \text{for } x = 1, \end{aligned} \quad (31)$$

where bars, denoting nondimensional quantities, are omitted for convenience and $K = J_0 \rho l$.

Substituting (24) into boundary conditions (31) we have:

$$\begin{aligned} f''(z) + Kf'(z) &= a_0 \sin pz + f''(z-2) - Kf'(z-2), \\ g(z) &= -f(z-2), \end{aligned} \quad (32)$$

where function $f(z)$ is assumed to be zero for negative arguments. Equations (32) are solved numerically by means of the finite difference method.

3.3.2. Method of separation of variables. The solution for the forced vibrations of the undamped system presented in Fig. 6 is now sought in the form:

$$\Theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \Theta_n(x), \quad (33)$$

where T_n are unknown functions depending on time, and Θ_n are eigenfunctions which are determined from equation (22) with boundary conditions (31) for $M(t) = 0$. We have then, analogously as in [4],

$$\begin{aligned} \Theta_n(x) &= \sin \omega_n x - \frac{K}{\omega_n} \cos \omega_n x, \\ \gamma_n^2 &= \int_0^1 \Theta_n^2(x) dx + \frac{1}{K} \Theta_n^2(0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{K^2}{\omega_n^2} \right) + \frac{1}{4\omega_n} \left(\frac{K^2}{\omega_n^2} - 1 \right) \sin 2\omega_n + \frac{K}{\omega_n^2} \cos^2 \omega_n, \end{aligned} \quad (34)$$

where ω_n are natural frequencies, and γ_n^2 can be obtained from an orthogonality principle for the discussed example when eigenfunctions are assumed to be identical. As it is seen from (34)₂ a nonintegral term appears in the orthogonality principle. Such a term occurs in the case of discrete-continuous systems. For such systems it is more convenient to use Lagrange equations in coordinates T_n :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{T}_n} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial T_n} = H_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (35)$$

where H_n are generalized external forces corresponding to coordinates T_n and they are determined from the expression for the work of an external loading on an infinitesimal displacement $\delta\Theta(x, t)$. In the case under discussion the loading acts in cross-section $x = 0$.

Energies E_k and E_p in nondimensional quantities:

$$\bar{E}_{k,p} = \frac{l^2}{Jc^2\Theta_0^2} E_{k,p}, \quad \bar{H}_n(\bar{t}) = \frac{l^2}{Jc^2\Theta_0^2} H_n(t), \quad \bar{\gamma}_n^2 = \frac{1}{l\Theta_0^2} \gamma_n^2, \quad (36)$$

take the form, [4],

$$E_p = \frac{K}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x} \right)^2 dx, \quad E_k = \frac{K}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial\Theta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Theta(0, t)}{\partial t} \right)^2, \quad (37)$$

where bars are omitted for convenience, and the Lagrange equations remain in the form (35).

Upon the substitution (33) into (37) and upon proper transformations we get:

$$E_p = \frac{K}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \gamma_n^2 T_n^2(t), \quad (38)$$

$$E_k = \frac{K}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 T_n^2(t).$$

Substituting (38) into (35) we have:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{1}{K\gamma_n^2} H_n(t). \quad (39)$$

In the case of an external loading applied in cross-section $x = 0$, [4],

$$H_n(t) = M(t)\Theta_n(0) = -\frac{K}{\omega_n} M(t), \quad (40)$$

and equation (39) for $M(t) = a_0 \sin pt$ has the following solution

$$T_n(t) = -\frac{a_0}{\omega_n^2(\omega_n^2 - p^2)\gamma_n^2} (\omega_n \sin pt - p \sin \omega_n t). \quad (41)$$

Displacement $\Theta(x, t)$ is then calculated according to the formula

$$\Theta(x, t) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 (\omega_n^2 - p^2) \gamma_n^2} (\omega_n \sin pt - p \sin \omega_n t) \times \left(\frac{K}{\omega_n} \cos \omega_n x - \sin \omega_n x \right). \quad (42)$$

3.3.3. Numerical results. Numerical calculations are concentrated on the amplitude-frequency curve for the cross-section $x = 0$ with $K = 0.5$ and $a_0 = 1.0$. This curve on the base of the Lagrange equations for the undamped system can be easily determined from the formula (42). However, when the wave method is used the points of this curve are obtained from numerical solutions of equations (32) in the region of steady motion.

In Fig. 7 results obtained on the base of formula (42) are marked by a continuous line. According to this formula, the vibration amplitude is infinite for the frequencies

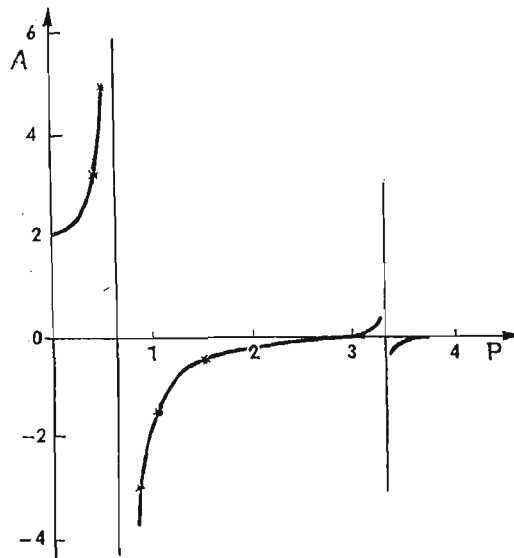


Fig. 7. Amplitude-frequency curve

of the external moment being equal to the successive natural frequencies of the system, because in the denominator of formula (42) differences $\omega_n - p$ occur. In the considered example $\omega_1 = 0.654$, $\omega_2 = 3.293$, $\omega_3 = 6.362$.

In Fig. 7 results obtained using wave solutions of motion equations are marked by stars for p smaller than the second natural frequency. It follows from Fig. 7 that stars lie practically on the continuous curve. However, from numerical calculations it follows that for p being equal to the first natural frequency and in the neighbourhood of this value the vibration amplitude is not infinite, because expressions $(\omega_n - p)^{-1}$ do not occur

when the finite difference method is applied for the solution of equations (32). It appears moreover that the value of the amplitude for the resonance frequency is sensitive to a numerical integration step and there are some difficulties in its exact determination.

4. Final remarks

The method applied in the paper, based on the use of wave solutions of suitable motion equations, allows to determine displacements, strains and velocities in arbitrary shaft cross-sections of drive systems modelled by means of rigid bodies and elements torsionally deformed. These systems can be loaded by periodic and nonperiodic external forces. Using this method variable cross-sections, finite lengths and equivalent damping can be taken into account.

From comparisons for simple systems it follows that 1) the substitution of damping continuously distributed by an equivalent damping leads, beyond a short initial time interval, to practically the same results, 2) maximum values of displacements for the cross-section in which the external loading is applied, obtained by means of the wave method and the method of rigid finite elements differ by 8 per cent, while suitable curves coincide practically for remaining considered cross-sections, and the execution time of numerical calculations is considerably shorter when the wave method is used, 3) the application of the wave method in the investigation of forced vibrations for undamped systems does not lead to infinite amplitudes.

It should be pointed out that the wave method in the presented form leads to solving simple mathematical relations and it is more effective than other methods for considerations of discrete-continuous models of drive systems undergoing torsional deformations.

References

1. W. KER WILSON, *Practical solutions of torsional vibration problems*, vol. I, John Wiley and Sons Inc., New York 1948.
2. D. K. RAO, *Torsional frequencies of multi-stepped shafts with rotors*, Int. J. Mech. Sci., 20, 415 - 422., 1978.
3. O. BERNASCONI, *Solution for torsional vibrations of stepped shafts using singularity functions*, Int. J. Mech. Sci., 28, 1, 31 - 39, 1986.
4. S. KALISKI i inni, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966, 378 - 391.
5. L. H. DONNELL, *Longitudinal wave transmission and impact*, Trans. of ASME, 52, 153 - 167, 1930.
6. E. WŁODARCZYK, *Rozprzestrzenianie się i odbicie jedno- i dwuwymiarowych fal naprężenia w ośrodkach plastycznych*, Dodatek do Biuletynu WAT, No. 2(198), 1969.
7. K. F. GRAFF, *Wave motion in elastic solids*, Clarendon Press, Oxford 1975.
8. W. NADOLSKI, A. PIELORZ, A. MIODUCHOWSKI, *Dynamic investigation of multi-mass drive system by means of torsional waves, Part I: Formulation of the problem and numerical solution*, ZAMM, 64, 427 - 431, 1984.
9. A. PIELORZ, W. NADOLSKI, A. MIODUCHOWSKI, *Dynamic investigation of multi-mass drive system by means of torsional waves, Part II: Analytical solution and stability*, ZAMM, 64, 537 - 541, 1984.
10. J. KRUSZEWSKI i inni, *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1975.

Резюме

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЛНОВОГО МЕТОДА В ИССЛЕДОВАНИЯХ
ПРИВОДНЫХ СИСТЕМ И ЕГО СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

В работе предложено волновой метод для динамических исследований дискретно-непрерывной модели приводной системы с постоянными и переменными сечениями валов переносящих скручивающий момент. Затухание в исследованной системе учитываются при помощи фиктивного затухания действующего в избранных сечениях привода, что допускает применять уравнения движения без затухания.

Предлагаемый метод сравнено с другими методами на примере избранных простых систем торсионно деформированных. Именно, фиктивное затухание сравнено с затуханием непрерывно разложенном и полученные при помощи волнового метода результаты сравнено с соответствующими результатами полученными при помощи метода жёстких конечных элементов и метода разделения переменных.

В данной форме волновой метод ведёт до простых математических формул. Кроме того, из сравнений простых систем следует, что он более эффективен чем другие методы анализа систем переносящих скручивающую нагрузку.

Streszczenie

WYKORZYSTANIE METODY FALOWEJ W BADANIACH UKŁADÓW NAPĘDOWYCH,
PORÓWNANIE Z INNYMI METODAMI

W pracy zaproponowano metodę falową do badań dynamicznych dyskretno-ciągłego modelu układu napędowego poddanego odkształceniom skrętnym, o stałych i zmiennych przekrojach wałów. Tłumienie w badanym układzie uwzględnione jest poprzez tłumienie zastępcze działające w wybranych przekrojach wału, co umożliwiło przyjęcie równań ruchu bez tłumienia.

Proponowaną metodę porównano z innymi metodami na przykładzie wybranych prostych układów odkształcanych skrętnie. Mianowicie, tłumienie zastępcze porównano z tłumieniem rozłożonym w sposób ciągły, oraz wyniki otrzymane za pomocą metody falowej porównano z odpowiednimi wynikami uzyskanymi za pomocą metody sztywnych elementów skończonych i metody rozdzielania zmiennych.

W podanej postaci metoda falowa prowadzi do prostych związków matematycznych. Ponadto z dokonanych porównań dla prostych układów wynika, że jest efektywniejsza od innych metod przy dyskusji układów poddanych odkształceniom skrętnym.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1987 roku.

THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATIONS FOR WAVES PROPAGATION IN AN INFINITE TUBE

KRZYSZTOF MURAWSKI

Agricultural Academy, Lublin

1. Introduction

In recent years, there has been growing interest in the partial differential equations which govern wave phenomena on the basis of the reductive Taniuti-Wei's [1], the multiple-scaling [2], the Lagrangian [3], and Shen's [4] methods. Amongst them, the number of equations appeared on linear waves in tubes [5 - 9]. It was shown that in the absence of dissipation of energy the fundamental set of nonlinear equations for the irrotational motion of waves in a liquid filled a tube can be reduced to the Korteweg-de Vries equation [10]. Also Burgers equation was obtained for dissipative systems [10 - 12]. In 1968 Johnson [13] introduced the so-called Korteweg-de Vries-Burgers equation for a wave propagation on an elastic tube containing a viscous fluid which may be regarded as a simple model of an artery. Recently the discussion of an incompressible fluid that is confined within an infinitely long circular cylinder with thin walls of elastic rings leads to the Korteweg-de Vries equation [14] which also may be obtained in this case via Lagrangian method [15].

The main purpose of this note is to broaden Lamb equations [14] to allow compressibility of fluid and to take more realistic model equation, describing motion of a tube wall, into consideration.

The organization of this note is as follows. In the next Section fundamental sets of equations are presented. Section 3 and 4 deal with derivation of the Korteweg-de Vries equation for a tube with elastic rings and the Korteweg-de Vries equation with varying coefficients. Section 5 presents construction of the same equation via the multiple-scaling method. Last Section is devoted to the short summary of this note.

2. Physical models

In this note we consider the one-dimensional irrotational fluid waves of characteristic amplitude l and characteristic length λ in an infinitely long tube with thin walls of elastic rings and a diameter $2a$ to take into account nonlinearity and dispersion of medium on the assumption that $l \ll 2a \ll \lambda$. The tube wall is assumed to be incompressible and we

ignore axial motions of the wall and bending moments are neglected. Then we take as the set of relevant basic equations:

— equation of continuity,

$$(\varrho A)_t + (\varrho AV)_x = 0, \quad (2.1)$$

— Euler's equation,

$$V_t + VV_x + \frac{1}{\varrho} P_x = 0, \quad (2.2)$$

— Newton's equation,

$$A_{tt} + \frac{E}{a^2 \varrho_m} A - \frac{2\pi a}{\varrho_m h} p + \frac{\pi(2aq - Eh)}{\varrho_m h} = 0, \quad (2.3)$$

— equation of state,

$$\varrho = \varrho(p) \equiv D \cdot p, \quad D = \text{const.}, \quad (2.4)$$

where we used the following notations: ϱ — liquid density, A — area of the crosssection, V — liquid velocity, a — tube radius at the undisturbed uniform state, ϱ — density of the tube material, E — Young's modulus in the circumferential direction, p — liquid pressure, q — outside pressure. The subscripts x and t imply partial differentiation.

The other model equation governing motion of a tube wall without rings as a linear viscoelastic solid characterized by its relaxation time was that employed previously in [16] and for our aim may be written in the following form

$$\frac{Eh}{(1-\nu^2)a^2} r + \varrho h r_{tt} - \frac{\varrho h^3}{12} r_{xxxx} - p = \frac{Eh}{(1-\nu^2)a} - q, \quad (2.5)$$

where: ν is a Poisson's coefficients and r is a tube radius at the disturbed uniform state.

We define two dimensionless small parameters, namely:

$$\varepsilon = \frac{2a}{\lambda}, \quad \delta = \frac{l}{2a}, \quad (2.6)$$

which measure the weakness of dispersion and nonlinearity, respectively. The Korteweg-de Vries equation will be derived on assumption that $\delta = \varepsilon^2$.

3. Derivation of the Korteweg-de Vries equation for tube with rings

Our primary aim is to derive an approximate single equation from the fundamental set of equations (2.1) - (2.4). For this purpose we apply the reductive Taniuti-Wei's method [2]. Assuming that A , V , p are slowly varying functions in a reference frame moving with the speed V_0 , we introduce the following coordinate-stretching:

$$\xi = \varepsilon(x - V_0 t), \quad \tau = \varepsilon t. \quad (3.1)$$

In new coordinates ξ , τ , equations (2.1) - (2.4) may be rewritten in the form

$$\varepsilon^2 (pA)_\tau - V_0 (pA)_\xi + (pAV)_\xi = 0, \quad (3.2)$$

$$Dp[\varepsilon^2 V_\tau + (V - V_0)V_\xi] + p_\xi = 0, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon^2 A_{\xi\xi\xi} + \frac{E}{a^2 \varrho_m} A - \frac{2\pi a}{\varrho_m h} p + \frac{\pi(2aq - Eh)}{\varrho_m h} = 0(\varepsilon^2). \quad (3.4)$$

On the other hand, since we are concerned with weak nonlinear waves, we expand the dependent variables as power series in δ around the undisturbed uniform state:

$$\left. \begin{aligned} p &= q + \delta p_1 + \dots, \\ V &= \delta V_1 + \delta^2 V_2 + \dots, \\ A &= A_0 + \delta A_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Substituting (3.5) and $\varepsilon^2 = \delta$ into the above set of equations (3.2) - (3.4) and equating all the coefficients of the various powers of ε to zero, we have the equations:

$$qA_0 V_{1\xi} - V_0(A_0 p_{1\xi} + qA_{1\xi}) = 0, \quad (3.6)$$

$$p_{1\xi} - qV_0 V_{1\xi} = 0, \quad (3.7)$$

$$EhA_1 - 2\pi a^3 p_1 = 0. \quad (3.8)$$

Hence, we obtain

$$A_1 = \frac{2\pi a^3}{Eh} p_1, \quad (3.9)$$

$$V_1 = \frac{V_0(EhA_0 + 2\pi qa^3)}{EhqA_0} p_1 \quad (3.10)$$

$$V_0^2 = \frac{EhA_0}{D(A_0 Eh + 2\pi qa^3)}. \quad (3.11)$$

Finally, from ε^4 , the second-order perturbed terms can be eliminated and the compatibility condition (3.11) gives rise to the Korteweg-de Vries equation for p_1

$$p_{1x} + \beta p_1 p_{1\xi} + \alpha p_{1\xi\xi\xi} = 0. \quad (3.12)$$

The nonlinear β and the dispersive α coefficients are described by the formulae

$$\beta = \frac{V_0[(Eh)^2 + aqEh + 6(aq)^2]}{Ehq(Eh + 2aq)}, \quad (3.13)$$

$$\alpha = \frac{\varrho_m qa^3 V_0}{E(Eh + 2aq)}. \quad (3.14)$$

4. Derivation of the Korteweg-de Vries equation with varying coefficients

We consider now the fundamental set of equations (2.1), (2.2), and (2.5) which describe wave propagation in an infinite thin-walled tube without rings neglecting bending moments and axial motion of the tube wall. We assume that the undisturbed radius a is varying slowly along axial direction and rewrite the above mentioned equations for $\varrho = \text{const.} = \varrho_0$ in the following form:

$$\varrho_0(V_t + VV_x) + (Br)_x + \varrho_0 hr_{xtt} - \frac{\varrho_0 h^3}{12} r_{xxxxt} - C_x = 0, \quad (4.1)$$

$$(r^2)_t + (r^2 V)_x = 0, \quad (4.2)$$

where we introduce the notation:

$$B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)a^2}, \quad (4.3)$$

$$C = \frac{Eh}{(1-\nu^2)a} - q. \quad (4.4)$$

We investigate ingoing solutions of equations (4.1) and (4.2) in the small amplitude approximation using the same reductive method. Because $a = a(x)$, we introduce the following coordinate-stretching of the reference moving frame:

$$\xi = \varepsilon \left(\int \frac{dx}{V_0} - t \right), \quad (4.5)$$

$$\eta = \varepsilon^{3/2} x.$$

Now V_0 is a function of x . We take $\varepsilon^2 = \delta$ into consideration. Expansion of r , V into power series of the same parameter

$$r = a + \varepsilon r_1 + \dots, \quad (4.6)$$

$$V = \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots,$$

leads to the decomposition of equations (4.1) and (4.2) establishing the relationship among the first-order perturbed quantities from collecting terms by ε :

$$V_1 = \frac{2V_0}{a} r_1, \quad (4.7)$$

$$V_0^2 = -\frac{aB}{2Q_0}. \quad (4.8)$$

From the second-order equations ε^2 , the compatibility condition give rise to the Korteweg-de Vries equation with varying coefficients

$$2aBV_{1\eta} + 5Q_0V_1V_{1\xi} + \frac{aQ_0h}{V_0}V_{1\xi\xi\xi} = 2 \left[V_0 \left(\frac{Ba}{2V_0} \right)_\eta - Ba_\eta \right] V_1. \quad (4.9)$$

5. Derivation of the Korteweg-de Vries equation via multiple-scaling method

Our next purpose is to apply the multiple-scaling method [2] to derive the Korteweg-de Vries equation which describe small amplitude and long waves. The fundamental set of equations (4.1) and (4.2) may be rewritten in the following form:

$$V_t + VV_x + r_x + r_{xt} + r_{xxx}t = 0, \quad (5.1)$$

$$(r^2)_t + (r^2V)_x = 0, \quad (5.2)$$

where dimensionless variables are introduced by the transformations:

$$x \rightarrow \frac{h}{\sqrt{12}} x, \quad t \rightarrow \sqrt{\frac{Q_0h}{B}} t, \quad r \rightarrow \frac{h}{12} r, \quad V \rightarrow \sqrt{\frac{Bh}{12Q_0}} V. \quad (5.3)$$

In equations (5.1) and (5.2) we introduce the multiple spatial and temporal scales $x_n = \varepsilon^n x$ and $t_n = \varepsilon^n t$ for $n = 1, 2, \dots$. The dependent variables are expanded around the undi-

sturbed uniform state into the asymptotic series in terms of the parameter δ by writing

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n V_n, \quad r = \tilde{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n r_n. \quad (5.4)$$

\tilde{l} is the undisturbed dimensionless radius of tube. The derivative operators are considered to be of the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Substituting (5.5) and (5.4) into equations (5.1) and (5.2), we obtain a sequence of equations by equating the coefficients of like powers of ε . The first three sets of perturbation equations are as follows:

$$\varepsilon^2: \begin{cases} V_{1t_1} + r_{1x_1} = 0, \\ 2r_{1t_1} + \tilde{l}V_{1x_1} = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon^3: \begin{cases} V_{1t_2} + r_{1x_2} = 0, \\ 2r_{1t_2} + \tilde{l}V_{1x_2} = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon^4: \begin{cases} V_{2t_1} + V_{1t_3} + V_1V_{1x_1} + r_{2x_1} + r_{1x_3} + r_{1x_1t_1} = 0, \\ 2\tilde{l}r_{2t_1} + r_{1t_3} + 2r_1r_{1t_1} + 2\tilde{l}V_1r_{1x_1} + \tilde{l}^2(V_{2x_1} + V_{1x_3}) + \end{cases} \quad (5.10)$$

$$+ 2\tilde{l}r_1V_{1x_1} = 0. \quad (5.11)$$

From equations (5.6) - (5.9), we find

$$V_1 = V_1 \left(x_1 - \sqrt{\frac{\tilde{l}}{2}} t_1 \right) \equiv V(\xi_1), \quad (5.12)$$

$$r_1 = r_1(\xi_1) = \sqrt{\frac{\tilde{l}}{2}} V_1, \quad (5.13)$$

$$V_1 = V_1 \left(x_2 - \sqrt{\frac{\tilde{l}}{2}} t_2 \right) \equiv V_1(\xi_2), \quad r_1 = r_1(\xi_2). \quad (5.14)$$

The fourth-order equations (5.10) and (5.11) lead to the following equation after removing second-order terms by assuming that V_2 depends on x_1 and t_1 through ξ_1 :

$$V_{1t_3} + \sqrt{\frac{\tilde{l}}{2}} V_{1x_3} + \frac{5}{4} V_1 V_{1\xi_1} + \left(\frac{\tilde{l}}{2} \right)^{3/2} V_{1\xi_1\xi_1\xi_1} = 0. \quad (5.15)$$

Transforming to the coordinate system moving with a phase velocity $\sqrt{\frac{\tilde{l}}{2}}$, i.e.,

$$\xi_3 = x_3 - \sqrt{\frac{\tilde{l}}{2}} t_3, \quad \tau = t_3, \quad (5.16)$$

we can obtain the Korteweg-de Vries equation

$$V_{1\tau} + \frac{5}{4} V_1 V_{1\xi_1} + \left(\frac{\tilde{l}}{2}\right)^{3/2} V_{1\xi_1\xi_1} = 0. \quad (5.17)$$

6. Summary

Basing on the rigorous developed in the reductive theory, we have derived the Korteweg-de Vries equations as a first-order of approximation of waves in an infinite thin-walled tube having taken into account the fundamental sets of equations. These equations model also impulse propagation in an arterial system, small intensines and a nervous system. The problem of impulse propagation was considered via various methods by Scott [17] for the nervous system and by Greenwald et al [18] for the arterial stenoses and aneurysms.

The formulae (3.11), (4.8), and (5.16) may be used to determine physical parameters such as Young's modulus having measured the velocity of the moving frame [19]. Various models of the tubes may be tested against experiments.

The Korteweg-de Vries equation with constant coefficients was discussed in some details to obtain N — soliton [20] and N — periodical wave [21] solutions. These equations were reviewed for water waves by Johnson [22].

Solution of the Korteweg-de Vries equation with varying coefficients was considered in the context of a solitary wave propagation from one uniform cross section of a symmetric triangular channel into another through a transition region. Numerical results showed that the solitary wave is desintegrated into a train of solitons of decreasing amplitudes [23].

The author would like to express the sincere thanks to the referee for his valuable comments.

References

1. T. TANIUTI, C. C. WEI, *Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation*, J. Phys. Soc. Japan 24 1968 941/46.
2. T. KAWAHARA, *The derivative-expansion method and nonlinear dispersive waves*, J. Phys. Soc. Japan 35 1973 1537/44.
3. T. KAWAHARA, *A note on the Lagrangian method for nonlinear dispersive waves*, J. Plasma Phys. 18 1977 305/16.
4. M. C. SHEN, X. -C. ZHONG, *Derivation of K-dV equations for water waves in a channel with variable cross section*, J. Mećanique 20 1981 789/801.
5. T. YOUNG, *Hydraulic investigations, subserviant to an intended Croonian Lecture on the motion of the blood*, Phil. Trans. Roy. Soc. London 98 1808 164/86.

6. T. B. MOODIE, D. W. BARCLAY, R. J. TAIT, *Pressure and flow pulses in viscoelastic arterial models with reflection sites*, Acta Mech. 53 1984 57/72.
7. R. J. TAIT, T. B. MOODIE, J. B. HADDOW, *On radial motion of a non-linear viscoelastic tube*, Q. Appl. Math. 17 1985 385/93.
8. T. B. MOODIE, D. W. BARCLAY, S. E. GREENWALD, D. L. NEWMAN, *Waves in fluid filled tubes; theory and experiment*, Acta Mech. 54 1984 107/19.
9. T. B. MOODIE, D. W. BARCLAY, *Propagation and reflection of waves in finite length liquid-filled distensible shells*, Acta Mech. 56 1985 151/63.
10. P. L. BHATNAGAR, *Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems*, Clarendon Press, Oxford 1979.
11. K. MURAWSKI, *Homogeneous Burgers equation for a wave propagation in an infinite tube*, Acta Phys. Polon. A61 1986.
12. K. MURAWSKI, *Burgers equation for a wave propagation in an infinite stout-wall tube*, Z. Naturforsch. 40a 1985 952/54.
13. R. S. JOHNSON, Doctoral thesis, Univ. London, London 1969.
14. G. L. LAMB, Jr., *Elements of Soliton Theory*, J. Wiley 1980.
15. K. MURAWSKI, *The Korteweg-de Vries equation obtained via Lagrangian method for a wave propagation in an infinite tube*, Z. Naturforsch. 40a 1985 955/6.
16. T. B. MOODIE, R. J. TAIT, J. B. HADDOW, *Waves in compliant tubes*, F. Mainardi (ed.), Res. Notes in Math. 52 1982 124/68.
17. A. C. SCOTT, *The vibrational structure of Davydov solitons* Phys. Scr. 25 1982 651/8.
18. S. E. GREENWALD, D. L. NEWMAN, T. B. MOODIE, *Impulse propagation in rubber-tube analogues of arterial stenoses and aneurysms*, Med. & Biol. Eng. & Computing March 1985 150/4.
19. K. MURAWSKI J. KUKIELKA, *Determination of Young's modulus in the circumferential direction to the stalk of corn*, submitted to J. ASAE.
20. R. HIROTA, in „Solitons”, R. K. BULLUOGH, P. J. CAUDREY (eds.), *Topics in Current Physics 17*, Springer-Verlag, Berlin 1980.
21. R. HIROTA, M. ITO, *A direct approach to multi-periodic wave solutions to nonlinear evolution equations*, J. Phys. Soc. Japan 50 1981 338/42.
22. R. S. JOHNSON, *Water waves and Korteweg-de Vries equations*, J. Fluid Mech. 97 1980 701/19.
23. X. -C. ZHONG, M. C. SHEN, *Fission of solitons in a symmetric triangular channel with variable cross section*, Wave Motion 5 1983 167/76.

Р е з ю м е

УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН
В БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ТРУБЕ

В работе применено теорию нелинейных волн, основанную на методе редукции Тапоти-Вей и методе многих параметров для получения уравнения Кортевега-де Фриза для распространения нелинейных и дисперсионных волн в трубе.

Streszczenie

RÓWNANIA KORTEWEGA-DE VRIESA DLA PROPAGACJI FAL W RURZE O NIESKOŃCZONEJ
DŁUGOŚCI

W pracy zastosowano teorię fal nieliniowych opartą na metodzie redukcji Taniuti-Wei i metodzie wielu skal od otrzymania równania Kortewega-de Vriesa dla propagacji nieliniowych i dyspersyjnych fal w rurach.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 września 1985 roku.

ROZWÓJ I DEFORMACJA WARSTWY WIROWEJ INDUKOWANEJ ZA PROFILEM AERODYNAMICZNYM PRZEZ PRZEPIYWAJĄCĄ STRUKTURĘ WIROWĄ

JERZY ŚWIRYDCZUK
IMP PAN Gdańsk

1. Wstęp

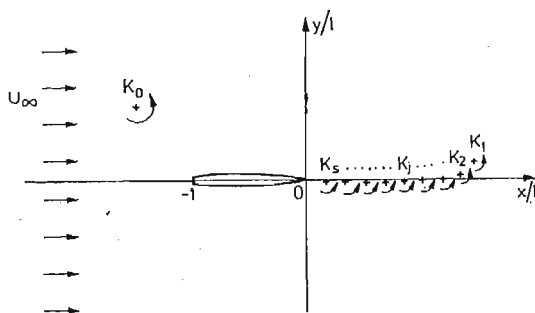
Ważnym elementem badań opływu profilu aerodynamicznego są prace zmierzające do określenia jego zachowania się w zmiennych warunkach przepływu przy założonym z góry charakterze tych zmian. Celem powyższych prac jest określenie np. zmian siły nośnej, rozkładu ciśnień lub wirowości na profilu w zależności od chwilowych, bądź lokalnych zmian pola prędkości przepływu w jego otoczeniu. Znaczenie niniejszego problemu wynika z faktu, iż zmiany te wywołać mogą efekty, których nie można przewidzieć w oparciu o teorię stacjonarnego opływu profilu, a które w istotny sposób, np. poprzez drgania lub silne chwilowe przeciążenia mogą pogorszyć warunki pracy profilu, a w konsekwencji jego niezawodność i żywotność. Dlatego też często podejmowane były — i są nadal — starania zmierzające do opracowania modelu, pozwalającego w sposób teoretyczny możliwie najpełniej przewidywać i analizować zjawiska wywołane niestacjonarnymi warunkami opływu profilu aerodynamicznego.

Zmiany warunków przepływu związane z sytuacjami występującymi często w technice lotniczej, takimi jak np. zmiana prędkości lub kąta natarcia profilu, podmuchy wiatru czy drgania profilu, zostały dość szczegółowo przeanalizowane w oparciu o modele zarówno teoretyczne [1] ÷ [5] jak i numeryczne [6], [7]. Stosunkowo mało zbadany, w porównaniu z poprzednimi, jest przypadek zaburzenia ściśle związanego z pracą elementów wirnikowych maszyn przepływowych, mianowicie przypadek obecności w strumieniu opływającym profil skoncentrowanych struktur wirowych. Powyższy typ zaburzenia bywa niekiedy analizowany jako fragment rozwiązania zadania dotyczącego opływu zadanej, konkretnej konfiguracji palisad profilowych o z góry przyjętej ich ilości i geometrii, natomiast ilość prac traktujących zagadnienie w sposób ogólny tj. jako elementarną formę oddziaływania struktury wirowej z profilem, jest niewielka. Do grupy tej można zaliczyć prace Saffmana i Sheffielda [8] oraz Huang i Chow [9] traktujące o przypadku stacjonarnego oddziaływania wiru z profilem oraz pracę Timma [10], w której Autor bada akustyczne aspekty oddziaływania wiru z warstwą przyścienną profilu. W tej ostatniej pracy wskazano, iż efektem powyższego oddziaływania może być utworzenie się w pobliżu badanego wiru dodatkowych, nowych struktur wirowych.

W niniejszej pracy przedstawione zostały rezultaty badań, dotyczących zachowania się niestacjonarnej warstwy wirowej generowanej za profilem aerodynamicznym w rezultacie przepływu w jego pobliżu pojedynczego, skoncentrowanego wiru, traktowanego w pracy jako pierwotne, elementarne zaburzenie przepływu. Badania miały na celu określenie przebiegu zmian intensywności warstwy, poszczególne fazy jej deformacji oraz oddziaływania z wirem pierwotnym, jak również próbę określenia pewnych relacji ilościowych, dotyczących występujących w zadaniu struktur wirowych. Przedstawione rezultaty winny, jak się ocenia, być przydatne w wielu kierunkach analiz teoretycznych bardziej skomplikowanych przypadków opływu ciał, jak również winny dostarczyć nowych wiadomości na temat fizycznych prawidłowości oddziaływania struktur wirowych w przepływie rzeczywistym.

2. Analityczny opis przepływu

Obliczenia teoretyczne przeprowadzono w oparciu o analityczno-numeryczny model, w którym istniejące w przepływie struktury wirowe opisane zostały przez odpowiednią ilość i konfigurację wirów punktowych. Przyjęto mianowicie, że jeden z wirów, reprezentujących zaburzenie pierwotne, nadpływa wraz z przepływem w pobliżu profilu, wywołując powstawanie w rejonie jego krawędzi spływowej zwiększającego się szeregu s wirów śladowych, przy czym wiry te generowane są numerycznie po jednym w każdym kroku obliczeniowym (rys. 1). Analityczny opis ruchu wirów w zadanym s -tym kroku oblicze-



Rys. 1. Szkic modelu opływu wirowego profilu. U_∞ — prędkość strumienia równoległego, K_0 — intensywność wiru pierwotnego, K_j — intensywność j -tego wiru śladowego

niowym przedstawia funkcja Kirchhoffa-Routha W , stanowiąca niezmiennik ruchu której ogólny wzór można przedstawić jako:

$$W = \sum_{j=0}^s K_j \Psi_0(x_j, y_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^s \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^s K_j K_k G(x_j, y_j; x_k, y_k) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^s K_j^2 g(x_j, y_j; x_j, y_j) \quad (1)$$

Symbole K_j, K_k oznaczają intensywność j -tego, względnie k -tego wiru ($K = \Gamma/2\pi$) a pozostałe wyrażenia stanowią elementy wchodzące w skład funkcji prądu badanego przepływu.

Wyrażenie $\Psi_0(x, y)$ przedstawia funkcję prądu ustalonego opływu profilu, powstałego w wyniku hipotetycznego usunięcia wirów z obszaru przepływu, natomiast ogólnie rozpatrywana funkcja $G(x, y; x_k, y_k)$ opisuje funkcje prądu generowane w obszarze o zadanych granicach przez wir znajdujący się w punkcie $P_k(x_k, y_k)$. Zakłada się, że funkcja G przyjmuje wartość stałą na brzegu obszaru, natomiast w punkcie P_k ma osobliwość logarytmiczną. W nieskończoności funkcja G ma osobliwość przeciwnego znaku do osobliwości w punkcie P_k . Ogólna postać funkcji $g(x, y; x_j, y_j)$ wynika z jej definicji:

$$q(x, y; x_j, y_j) \stackrel{\text{def}}{=} G(x, y, x_j, y_j) - \frac{1}{2} \ln[(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2] \quad (2)$$

przy czym do wzoru (1) podstawione są jej wartości obliczane w kolejnych punktach $P_j(x_j, y_j)$ chwilowych położenia wirów. Analizując na podstawie funkcji W ruch wybranego j -tego wiru można określić, iż pierwszy jej człon przedstawia wpływ stacjonarnej części przepływu, drugi — oddziaływanie pozostałych $j-1$ wirów, zmodyfikowane obecnością granic, trzeci — wpływ granic obszaru przepływu na ruch wiru, traktowanego jako jedyna osobliwość przepływu. Bliższe dane na temat własności funkcji G, g oraz W można znaleźć w pracy [11].

Zależność chwilowych prędkości wirów od funkcji W określają wzory:

$$\begin{aligned} K_j \frac{dx_j}{dt} &= K_j v_{x_j} = - \frac{\partial W}{\partial y_j} \\ K_j \frac{dy_j}{dt} &= K_j v_{y_j} = \frac{\partial W}{\partial x_j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (3)$$

Znajomość funkcji W pozwala, poprzez określenie chwilowych prędkości każdego z wirów, na numeryczne znalezienie ich nowego położenia wynikającego z zadanej wartości kroku czasowego, nie daje jednak żadnych informacji na temat miejsca generacji oraz intensywności kolejnych wirów śladowych, będących rezultatem zmiany warunków opływu profilu. W związku z powyższym przyjęto następujące założenia, umożliwiające określenie powyższych wielkości w każdym kolejnym kroku obliczeniowym:

1. punkt generacji wiru jest położony na osi x w takiej odległości od krawędzi sphywowej, jaka wynika z iloczynu lokalnej prędkości w tym punkcie (zależnej od zmian pola prędkości wywoływanych przez przemierzające się wiry) oraz połowy założonego przyrostu czasu dt .
2. intensywność wiru (przy określonym już jego położeniu) wynika z jednoczesnego spełnienia postulatów o sphywie z ostrza profilu oraz o stałości sumarycznej wartości cyrkulacji w przepływie.

Drugi z warunków, identyczny ze stosowanym w przypadkach stacjonarnych opływu profilu, stanowi często spotykany, lecz nie jedyny sposób uzupełnienia rozważanego modelu. W wariantach modelu, w których kształt profilu opływany jest przez zadany rozkład osobliwości wirowych lub źródłowych, intensywność nowego wiru śladowego określona bywa często w oparciu o wyliczone różnice prędkości, występujące po obu

stronach krawędzi spływowej [7]. Metoda ta wydaje się wykazywać dużą adekwatność do rzeczywistego przebiegu formowania się warstwy wirowej w rejonie spływu, jednak próby jej stosowania w modelach wykorzystujących metodę odwzorowań konforemnych nie dały zbyt realistycznych rezultatów [12], [13]. Również pierwszy z warunków stanowi jeden z kilku realizowanych praktycznie sposobów określania miejsca generacji wiru. Sposób przyjęty w pracy stanowi pewną modyfikację warunków proponowanych przez Basu i Hancocka [7], wydaje się on najlepiej uwzględniać fizyczne warunki przepływu. Spośród innych możliwych wariantów można przykładowo wymienić przyjęcie stałego punktu generacji [14] [15] lub poszukiwanie jego położenia w oparciu o ruch wirów poprzednich [12].

Omawiane obliczenia przeprowadzono wykorzystując metodę odwzorowań konforemnych. Zachowanie się funkcji W podczas odwzorowania z obszaru pomocniczego $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ do obszaru przepływu $z = x + iy$ określa wzór:

$$W = \tilde{W} + \sum_{j=0}^s \frac{K_j^2}{2} \ln \left| \frac{d\tilde{z}}{dz} \right| P_j \quad (4)$$

Konstrukcję funkcji W dla analizowanego przypadku oparto na następujących założeniach szczegółowych:

1. Założony, symetryczny kształt profilu uzyskany został w wyniku odwzorowania konforemnego

$$z = \tilde{z} - A + \frac{(a-A)^2}{\tilde{z} - A} \quad (5)$$

okręgu o promieniu a oraz środka przesuniętym o odcinek A względem początku układu.

2. Kierunek przepływu jest zgodny z kierunkiem osi $0\tilde{x}$. Funkcja prądu w obszarze pomocniczym ma w tym przypadku postać:

$$\Psi_0(\tilde{x}, \tilde{y}) = -U\tilde{y} \left(1 - \frac{a^2}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \right) \quad (6)$$

Powyższe założenia nie umniejszają ogólności rozwiązania. W oparciu o znajomość potencjału zespolonego wytwarzanego przez pojedynczy wir w pobliżu okręgu [16] można wykazać, iż spełniająca uprzednio podane warunki funkcja G ma w obszarze pomocniczym postać:

$$G(\tilde{x}, \tilde{y}; \tilde{x}_k, \tilde{y}_k) = \frac{1}{2} \ln \frac{(\tilde{x} - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}_k)^2}{(\tilde{x}\tilde{x}_k + \tilde{y}\tilde{y}_k - a^2)^2 + (\tilde{x}\tilde{y}_k - \tilde{y}\tilde{x}_k)^2} \quad (7)$$

przy czym warunek zerowania się cyrkulacji wokół profilu, wywołanej wirami pierwotnym powoduje konieczność dołączenia do funkcji (6) członu:

$$\Psi_{aa} = \frac{1}{2} K_0 \ln(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \quad (8)$$

Obliczenie drugiego ze składników wzoru (4) jest możliwe po zróżniczkowaniu funkcji

odwzorowującej (5) i prowadzi do postaci:

$$\ln \left| \frac{dz}{d\bar{z}} \right| = \ln \frac{\sqrt{[(\tilde{x}-a)^2 + \tilde{y}^2][(\tilde{x}+a-2A)^2 + \tilde{y}^2]}}{(\tilde{x}-A)^2 + \tilde{y}^2} \quad (9)$$

Łączne wykorzystanie wzorów 1÷3 oraz 5÷9 pozwala przedstawić z dokładnością do stałej addytywnej funkcję W_s funkcję Kirchhoffa-Routha dla s -tego kroku obliczeniowego we współrzędnych obszaru pomocniczego jako:

$$\begin{aligned} W_s = & \sum_{j=0}^s K_j \left[\frac{1}{2} K_0 \ln \frac{\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2}{a^2} - u\tilde{y}_j \left(1 - \frac{a^2}{\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\substack{j,k=0 \\ j \neq k}}^s K_j K_k \ln \frac{a^2 [(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_k - \tilde{y}_j)^2]}{(\tilde{x}_j \tilde{x}_k + \tilde{y}_j \tilde{y}_k - a^2)^2 + (\tilde{x}_j \tilde{y}_k - \tilde{y}_j \tilde{x}_k)^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^s K_j^2 \ln \frac{\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2 - a^2}{a} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^s K_j^2 \ln \frac{(\tilde{x}_j - A)^2 + \tilde{y}_j^2}{\sqrt{[(\tilde{x}_j - a)^2 + \tilde{y}_j^2][(\tilde{x}_j + a - 2A)^2 + \tilde{y}_j^2]}} \quad (10) \end{aligned}$$

Chwilowe składowe prędkości poszczególnych wirów w obszarze przepływu uzyskuje się po zróżniczkowaniu zależności (10), zgodnie z wzorami (4), jako:

$$v_{x_j} = \frac{v_{\tilde{x}_j} A - v_{\tilde{y}_j} B}{A^2 + B^2} \quad v_{y_j} = \frac{v_{\tilde{y}_j} A + v_{\tilde{x}_j} B}{A^2 + B^2} \quad (11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A = \operatorname{Re} \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right) &= 1 - \frac{(a-A)^2 [(\tilde{x}-A)^2 - \tilde{y}^2]}{[(\tilde{x}-A)^2 + \tilde{y}^2]^2} \\ B = \operatorname{Im} \left(\frac{dz}{d\bar{z}} \right) &= \frac{2(a-A)^2 (\tilde{x}-A)\tilde{y}}{[(\tilde{x}-A)^2 + \tilde{y}^2]^2} \end{aligned}$$

3. Obliczenia numeryczne

Obliczenia numeryczne, prowadzone w oparciu o przedstawione w poprzednim rozdziale zależności analityczne, miały na celu określenie konfiguracji wirów śladowych w dowolnym zadanym momencie czasowym, w zależności od założonej wstępnie, początkowej konfiguracji wiru pierwotnego oraz profilu, co pozwoliło na ocenę przebiegu deformacji reprezentowanej przez nie warstwy wirowej. Można wyróżnić trzy główne etapy obliczeń, charakterystyczne dla każdego kroku obliczeniowego:

1. wyszukanie położenia i intensywności nowego wiru śladowego bilansującego cyrkulację i rozkład prędkości wokół profilu,
2. przesunięcie wirów o zadany krok czasowy dt ,
3. dokonanie oceny błędu wynikłego z określonej wartości kroku czasowego.

Obliczenia dotyczące generowanego w danym kroku wiru śladowego prowadzone były,

w oparciu o poprzednio podane warunki, metodą iteracji do momentu uzyskania założonej wartości błędu.

Przesunięcie wirów realizowano metodą dwukrokową, określoną często w literaturze jako metoda „predictor-corrector”, uzyskując przy określonych możliwościach obliczeniowych zadawalające wyniki.

Oceny błędu przesunięcia wirów dokonywano wykorzystując niezmienniczość funkcji W . Założoną wartość błędu δW w danym kroku kontrolowano w trakcie obliczeń i w przypadku jej przekroczenia, powtarzano obliczenia tego kroku, realizując przesunięcie wirów w pewnej ilości etapów częściowych, zapewniających zachowanie wartości błędu mniejszej niż δW . W etapach częściowych warunek spływu z ostrza nie był spełniony. Zakładaną wartość δW przyjmowano na podstawie obliczeń wstępnych, jako rezultat kompromisu pomiędzy wymaganiami możliwie dużej dokładności a możliwą do przyjęcia długością czasu obliczeń.

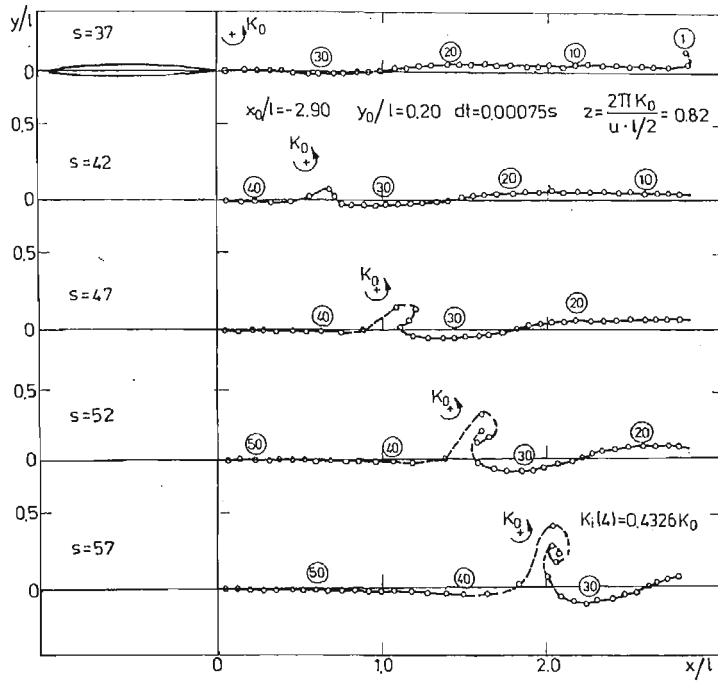
4. Rezultaty

Obliczenia przeprowadzono dla szeregu wartości danych wejściowych zmieniających się w następujących granicach:

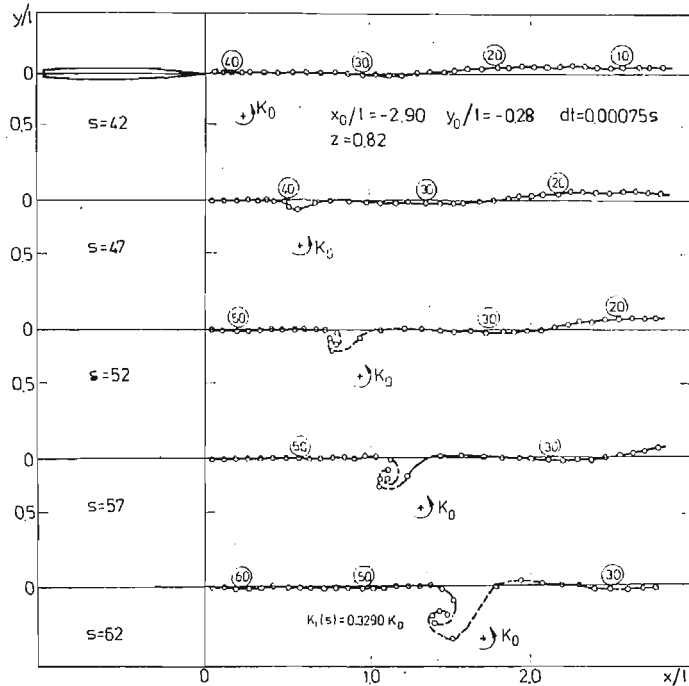
- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| a. prędkość przepływu niezaburzonego | $U = 1,9 \div 2,7 \text{ m/s}$ |
| b. względna wysokość położenia początkowego wiru pierwotnego
względem osi x | $y_0/l = -0,60 \div 0,60$ |
| c. względna początkowa odległość wiru pierwotnego od krawędzi spływowej
profilu | $x_0/l = (-2,10) \div (-4,54)$ |
| d. współczynnik cyrkulacji wiru pierwotnego | $z = 2\pi K_0 \left U \cdot \frac{l}{2} \right = 0,40 \div 0,85$ |
| e. krok czasowy | $dt = 0,5 \div 1,0 \text{ ms}$ |

Maksymalna ilość kroków obliczeniowych wynosiła $s_{max} = 60 \div 100$. Kształt profilu przyjętego do obliczeń pochodził z odwzorowania (5) okręgu o promieniu $a = 0,65 \text{ cm}$ oraz przesunięciu $A = 0,026 \text{ cm}$. Długość cięciwy profilu wynosiła 2,5. Powyższe zakresy danych liczbowych przyjęto, kierując się przesłankami związanymi z przewidywaną weryfikacją doświadczalną uzyskanych rezultatów.

Przeprowadzone obliczenia pozwalają sformułować ocenę o istnieniu dwóch jakościowo różnych możliwych przebiegów deformacji szeregu wirów śladowych. Wystąpienie jednego z nich uzależnione jest od położenia toru wiru pierwotnego w najbliższym sąsiedztwie profilu. Przykładowy obraz poszczególnych faz deformacji omawianego szeregu w przypadku toru wiru położonego ponad profilem (czyli tak jak na rys. 1) przedstawia rys. 2, natomiast dla położenia toru przebiegających poniżej profilu — rys. 3. Wspólną cechą deformacji obu typów jest fakt iż zakrzywienie się linii łączącej kolejne wiry zapoczątkowane jest w rejonie położonym najbliżej wiru pierwotnego (jest to zarazem fragment szeregu, w którym wiry śladowe posiadają największą intensywność — por. wykresy na rys. 4), po czym kolejne fazy deformacji powodują stopniowe kształtowanie się grupy wirów krążących w sposób wyraźny wokół wspólnego środka, których globalne oddziały-

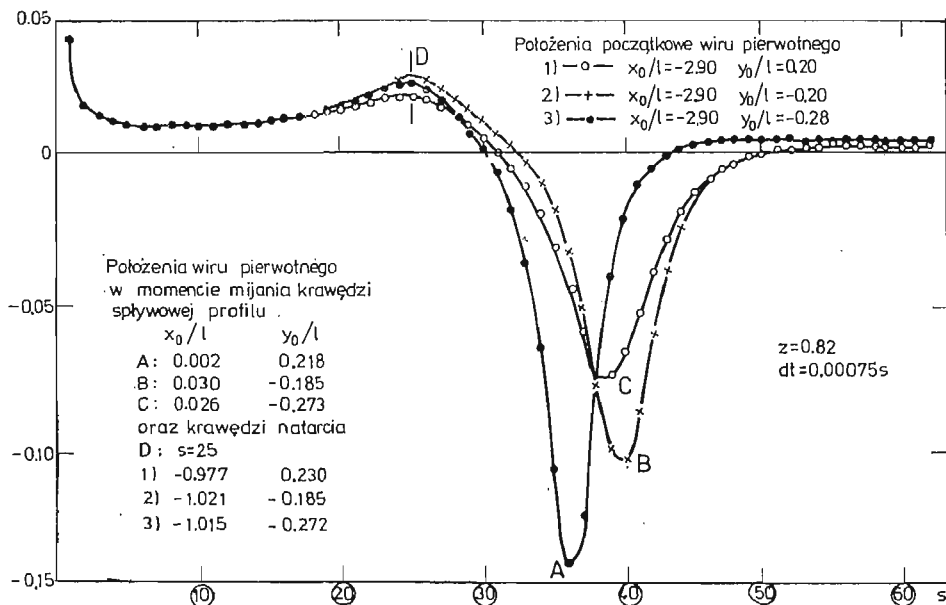


Rys. 2. Przebieg deformacji szeregu wirów śladowych w przypadku toru wiru pierwotnego leżącego ponad profilem



Rys. 3. Przebieg deformacji szeregu wirów śladowych w przypadku toru wiru pierwotnego leżącego poniżej profilu

wanie zewnętrzne można porównać z oddziaływaniem pojedynczego wiru o sumarycznej intensywności, przy czym kierunek obrotu wirów wokół wspólnego środka jest przeciwny do kierunku obrotu wiru pierwotnego. Istotną różnicą pomiędzy deformacją pierwszego i drugiego typu jest położenie nowego wiru — wiru interakcyjnego — względem wiru pierwotnego. W przypadku, gdy wir pierwotny znajduje się nad szeregiem wirów śladowych, tworzący się wir interakcyjny nieznacznie wyprzedza wir pierwotny, natomiast w przypadku przeciwnym wir interakcyjny tworzy się w małej odległości za wirami pierwotnym^{*)}. Można wskazać dwa powody zaistnienia powyższych różnic w przebiegu deformacji badanego szeregu wirów. Po pierwsze — wir pierwotny, gdy znajduje się ponad śladem, powoduje przyspieszenie ruchu wirów śladowych, natomiast w przypadku przeciwnym — opóźnia ich poruszanie się, w wyniku czego dokonuje się zagęszczenia wirów w określonych rejonach śladu. Po drugie, jak wskazuje wyniki analiz numerycznych stabilności pojedynczego szeregu wirów, raz zainicjowany proces deformacji szeregu może rozwijać się dalej samorzutnie w wyniku wzajemnego oddziaływania poszczególnych wirów. W niniejszym przypadku efekt ten nakłada się na oddziaływanie wiru pierwotnego, intensyfikując przebieg deformacji.



Rys. 4. Rozkład intensywności szeregu wirów śladowych

Na rys. 4 przedstawiono rozkład intensywności wirów śladowych generowanych w trakcie obliczeń. Odpowiada on sytuacji po $s = 62$ kroku obliczeniowym (w szczególności rozkład nr 3 odpowiada końcowemu obrazowi deformacji z rys. 3). Zaprezentowano trzy warianty rozkładu intensywności, z których warianty 1 i 2 charakteryzują się symetrycznym wzgl. osi x położeniem początkowym wiru pierwotnego, natomiast warianty 1 i 3 —

^{*)} Rozważania te są słuszne dla określonego znaku cyrkulacji wiru pierwotnego. W przypadku przeciwnego znaku cyrkulacji — efekty stanowią lustrzane odbicie wyżej opisanych.

tą samą minimalną odległością toru wiru pierwotnego od powierzchni profilu. Ze względu na specyfikę wzajemnego oddziaływania wir-profil, nie jest możliwe znalezienie w pełni symetrycznych torów wiru pierwotnego leżących nad i pod profilem. Na każdej z przedstawionych krzywych zaznaczono wartości intensywności wiru śladowego odpowiadające położeniom wiru pierwotnego leżącym w najbliższym sąsiedztwie krawędzi natarcia oraz krawędzi spływu profilu. Jak już wspomniano uprzednio, w drugiej z wymienionych sytuacji na miejsce generowane wirów śladowych o największej intensywności.

Porównanie krzywej 1 z krzywymi 2 i 3 prowadzi do wniosku iż w przypadku, gdy tor wiru pierwotnego leży powyżej profilu, wzajemne oddziaływanie wiru i profilu wywołuje silniejsze chwilowe zmiany cyrkulacji wokół profilu i, tym samym, powstawanie bardziej intensywnych wirów śladowych, niż w przypadku toru wiru pierwotnego położonego poniżej profilu.

Obliczenia intensywności wiru interakcyjnego prowadzone w podanym uprzednio zakresie danych początkowych dają rezultaty w granicach:

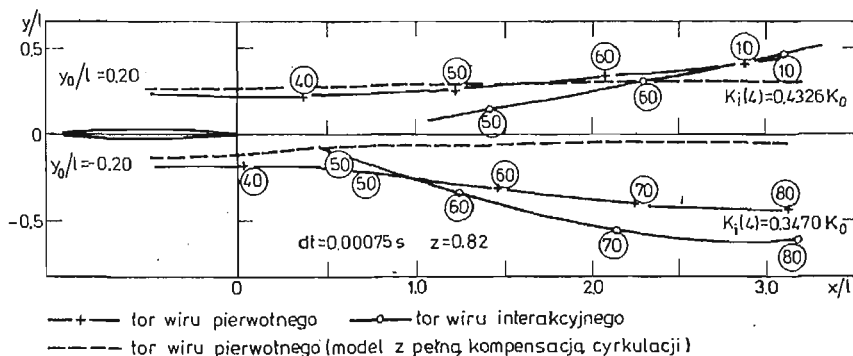
$$K_i = (0.25 \div 0.45) * K_0$$

przy czym na ocenę powyższego wyniku wpływa istotnie fakt, iż wybór ilości wirów elementarnych tworzących wir interakcyjny dokonywany może być li tylko w oparciu o ich aktualną konfigurację, co może powodować zarówno pewną arbitralność kryterium wyboru, jak i nieprecyzyjność oceny, wynikającą z udziału ilości elementarnego wirów śladowych w różnych stadiach formowania się wiru interakcyjnego. Wydaje się jednak możliwe wskazanie górnej, nieprzekraczalnej wartości intensywności wiru interakcyjnego. Na podstawie rys. 4 można przyjąć, iż jest nią sumaryczna intensywność wirów śladowych posiadających ten sam kierunek obrotu (w tym przypadku ujemny-prawoskrętny). Obliczona na podstawie tego kryterium maksymalna intensywność wiru interakcyjnego waha się:

$$\text{od } 0,64 \div 0,67 \quad \text{dla} \quad y_0/l = \pm 0,20$$

$$\text{od } 0,41 \div 0,43 \quad \text{dla} \quad y_0/l = \pm 0,60$$

Rys. 5 przedstawia jeden z efektów obecności w przepływie szeregu wirów śladowych. Jest nim deformacja toru wiru pierwotnego w obszarze za krawędzią spływową profilu. W porównaniu z innymi modelami (które na rysunku reprezentuje model zakładający



Rys. 5. Tory wirów w obszarze za krawędzią spływową profilu

nałożenie na profil pełnej wartości zmian cyrkulacji wymaganej przez warunek spływu w ostrzu), w których największe zmiany kształtu toru spotykane są w najbliższym sąsiedztwie profilu, w omawianym modelu największe odchylenia kierunku ruchu wiru pierwotnego od głównego kierunku prędkości strumienia występują z dala od profilu w rejonie intensywnego oddziaływania wiru interakcyjnego.

W rezultacie badań wrażliwości rozwiązania na zmianę danych początkowych stwierdzono, że zmiana dt oraz x_0/l w podanym uprzednio zakresie nie powoduje żadnych zmian jakościowych rozwiązania. Również zmiany ilościowe rezultatów można uznać za nieistotne (przykładowo: rozbieżność w rezultatach obliczeń intensywności wiru interakcyjnego wynosiła 3,5%).

5. Weryfikacja doświadczalna

Przedstawione w rozdziałach poprzednich rezultaty skonfrontowane zostały z wynikami badań doświadczalnych. Badania te przeprowadzono w strumieniu powietrza o prędkości U rzędu 2,2 m/s, w którym umieszczono profil o kształcie zbliżonym do stosowanego w obliczeniach. Liczba Reynoldsa, obliczona w oparciu o długość cięciwy profilu wynosiła $4 \cdot 10^3$. Względna intensywność wiru pierwotnego generowanego w doświadczeniu wynosiła $z = 0,57$.

Dokładne omówienie uzyskanych rezultatów w ramach niniejszej publikacji nie jest niestety możliwe ze względu na duży zakres przeprowadzanych badań, dlatego też w niniejszym rozdziale zaprezentowane zostały jedynie wnioski sformułowane na ich podstawie. Pełny materiał doświadczalny, ze szczegółowym opisem stoiska wraz z aparaturą, metodyki badań oraz drobiazgową analizą uzyskanych rezultatów zgromadzony został w pracy [17]. Parametrem zmiennym badań była minimalna odległość y_p/l , w jakiej wir pierwotny mija profil. Stwierdzono, iż dla dostatecznie dużych, dodatnich wartości y_p/l ($y_p/l \geq 0,18$ — dla określonych warunków doświadczenia) przebieg deformacji niestacjonarnej warstwy wirowej, tworzącej się za profilem w okresie mijania go przez wir pierwotny, jest jakościowo zbliżony do obliczonego teoretycznie i opisanego w poprzednich rozdziałach. W szczególności: możliwe jest wyodrębnienie poszczególnych faz tworzenia się wiru interakcyjnego, jako nowej, skoncentrowanej struktury wirowej. Naturalne ograniczenie zbieżności rezultatów teoretycznych i zarejestrowanych doświadczalnie stanowi proces utraty aktywności wiru pierwotnego, nie uwzględniony w modelu teoretycznym. Typowy obraz przepływu w rejonie śladu za profilem w momencie tworzenia się wiru interakcyjnego przedstawia rys. 6. Obraz ten powstał z linii wysnutych generowanych metodą „dymiącego drutu” w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi spływowej profilu. Praktycznie niewidoczny na zdjęciu profil (słabo widoczna jest jedynie, po lewej stronie zdjęcia, jego krawędź spływowa) usytuowany jest w odległości 0,1 l przed drutem generującym dym. Na zdjęciu — oprócz zasadniczego efektu oddziaływania wirowego, tj. tworzącego się wiru interakcyjnego oraz silnie już zdestabilizowanego wiru pierwotnego, widoczne są fragmenty dwóch ścieżek Karmana, stanowiące element niepożądany z punktu widzenia celu badań. Rejestracje prowadzone dla zmniejszających się, lecz wciąż dodatnich wartości y_p/l wykazały intensyfikację procesu tworzenia się wiru

interakcyjnego oraz destabilizacji wiru pierwotnego. Dodatkowo dla wartości $y_p/l < 0,18$ stwierdzono formowanie się kilku dodatkowych struktur wirowych w pobliżu głównego wiru interakcyjnego, co tłumaczy się faktem rozcięcia rdzenia wiru pierwotnego przez profil i przepłynięcia pewnej części płynnego obszaru wirowego po przeciwnej stronie jego powierzchni.



Rys. 6. Chwilowy obraz przepływu z wirum interakcyjnym oraz silnie już zdeformowanym wirum pierwotnym

W przypadku ruchu wiru pierwotnego poniżej profilu ($y_p/l < 0$) nie zarejestrowano formowania się nowych struktur. Można wskazać dwie prawdopodobne przyczyny negatywnego wyniku badań w tym przypadku. Po pierwsze — intensywność generowanej warstwy, jak wskazuje rys. 4 jest w tym przypadku niższa (krzywa B), niż w przypadku ruchu wiru ponad profilem (krzywa A). Po wtóre — wymaganie uzyskania określonej wartości y_p/l powodowało konieczność umieszczenia profilu w obszarze stosunkowo silnego śladu stacjonarnego, tworzącego się za profilem, użytym do generacji wiru pierwotnego (por. rys. 6). Powyższe dwa warunki utrudniły uformowanie się niestacjonarnej warstwy wirowej o przewidywanym teoretycznie rozkładzie intensywności. Pomiaru zmian modułu prędkości w momencie mijania punktu pomiaru przez badane struktury, pozwoliły na oszacowanie relatywnej intensywności obu wirów w prezentowanym na rys. 6 przypadku $y/l \cong 0,40$, jako:

$$K_i/K_0 \cong 0.60.$$

Jak widać wartość ta jest nieco wyższa, niż w przypadku obliczeń teoretycznych.

6. Zakończenie

W pracy przeprowadzono wyniki teoretycznych analiz rozwoju niestacjonarnej warstwy wirowej, spływającej z krawędzi spływowej profilu w wyniku jego oddziaływania z pojedynczym wirum przepływającym w jego pobliżu. Stwierdzono, iż warstwa ta każdorazowo dąży do uformowania nowej struktury o nieco mniejszej intensywności i przeciwnym kierunku rotacji w porównaniu z zaburzeniem pierwotnym. W zależności od położenia toru wiru względem profilu nowy wir interakcyjny może uformować się w rejonie przed lub za wirum pierwotnym.

Ocenia się iż powyższe wyniki, rozpatrywane w kontekście teoretycznym, mogą być wykorzystywane:

- w analizach testowych nowopowstających programów obliczeniowych, wykorzystujących różne od zaprezentowanej metody (np. metodę osobliwości) do opisu opływu profilu,
- do przewidywania rezultatów wzajemnego oddziaływania struktur wirowych i profili w bardziej skomplikowanych przypadkach ich wzajemnych położań.

Przytoczone w pracy rezultaty doświadczalne, stanowiące w pewnym zakresie konfiguracji wir — profil pozytywną weryfikację obliczeń teoretycznych, uzyskane zostały dla małych prędkości przepływu oraz dla jednej wartości intensywności wiru. Przeniesienie zaprezentowanych rezultatów na inne warunki przepływu, w szczególności: do analiz przepływów mających miejsce w maszynach przepływowych wymaga przeprowadzenia podobnych badań w strumieniu o znacznie wyższych prędkościach. Opierając się jednak na rezultatach uzyskanych przez Timma można przypuszczać, że jakościowy przebieg deformacji warstwy wirowej również i w tych prędkościach zbliżony będzie do zaprezentowanego w pracy. Niezależnie od powyższego — przedstawione rezultaty wskazują na nowe problemy, dotyczące generacji hałasu, wibracji czy wytrzymałości zmęczeniowej, jakie mogą wiązać się z opisami w pracy efektami zachowania się warstwy wirowej w przepływach przez elementy maszyn przepływowych.

Literatura

1. H. WAGNER, *Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln*, ZAMM, Band 5(1925), s. 17 - 35.
2. T. THEODORSEN, *General Theory of Aerodynamic Instability and Mechanism of Flutter*, NACA Techn. Rep. No 496, Washington D. C. 1935.
3. H. G. KÜSSNER, *Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Partialbewegungen der Flüssigkeit*, Luftfahrtf. Band 17(1949), s. 355 - 361.
4. T. VON KARMAN, W. R. SEARS, *Airfoil Theory for Non-Uniform Motion*, J. Aeron. Sci., 5(1938), s. 379 - 390.
5. A. I. van de VOOREN, H. van de VEL, *Unsteady Profile Theory in Incompressible Flow*, Arch. Mech. Stos. vol. 3(1964), s. 709 - 735.
6. J. P. GIESING, *Nonlinear Two-Dimensional Unsteady Potential Flow with Lift*, J. Aircr., vol. 5(1968), s. 135 - 143.
7. B. C. BASU, G. J. HANCOCK, *The Unsteady Motion of a Two-Dimensional Aerofoil in Incompressible Flow*, J. Fluid Mech. vol 87(1978), s. 159 - 178.

8. P. G. SAFFMAN, J. S. SHEFFIELD, *Flow Over a Wing with an Attached Free Vortex*, Stud. Appl. Math., 57(1977), s. 107 - 117.
9. HUANG, MING-KE, CHOW, CHUEN-YEN, *Trapping of a Free Vortex by Youkowski Airfoil*, AIAA J., vol. 2(1982), s. 292 - 298.
10. R. TIMM, *Schallentstehung bei der Wechselwirkung von Wirbeln mit einer Tragflügelumströmung*, Mitt. Mack-Planck Inst. f. Strömungf., No 80(1985), Göttingen.
11. C. C. LIN, *On the Motion of Vortices in Two Dimensions*. Univ. Toronto Press 1943.
12. T. SARPKAYA, *An Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding from Transient and Asymptotically Steady Separated Flow Over an Inclined Flat Plate*, J. Fluid Mech., vol. 68(1975), s. 109 - 128.
13. R. A. EVANS, I. G. BLOOR, *The Starting Mechanism of Wave Induced Flow Through a Sharp-Edged Orifice*, J. Fluid Mech., vol. 82(1977), s. 115 - 128.
14. K. KUWAHARA, *Numerical Study of Flow Past an Inclined Flat Plate by an Inviscid Model*, J. Phys. Soc., Jap., vol. 35(1973), s. 1545 - 1551.
15. M. KIYA, M. ARIE, *A Contribution to an Inviscid Vortex-Shedding Model for an Inclined Flat Plate in Uniform Flow*, J. Fluid Mech., vol. 82(1977), s. 223 - 240.
16. L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics*, London 1968.
17. J. ŚWIRYDZUK, *Badanie zachowania się warstwy wirkowej generowanej za profilem przez przepływającą pojedynczą strukturę wirową*. Praca doktorska IMP PAN, Gdańsk 1986 r.

Р е з ю м е

РАЗВИТИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ ВИХРЕВОГО СЛОЯ ИНДУЦИРОВАННОГО ЗА АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматриваются результаты исследований развития и деформации нестационарного вихревого слоя стекающего с задней кромки аэродинамического профиля находящегося в плоском параллельном потоке. Изменяющаяся интенсивность слоя индуцируется свободным вихрем движущимся вблизи профиля. Теоретические расчеты, проведенные с учетом конструкции функции Кирхгофа-Рута, показывают, что генерированный слой быстро деформируется, образуя новый концентрированный вихрь характеризующийся интенсивностью немножко меньшей и обратным направлением ротации, по сравнению с первым вихрем.

Экспериментальные исследования, проведенные в потоке протекающим со скоростью $U = 2.1$ м/сек и при числе Рейнольдса $Re = 4 \cdot 10^3$, подтвердили теоретические результаты для некоторых взаимоположений вихря и профиля.

S u m m a r y

DEVELOPMENT AND DEFORMATION OF THE VORTEX LAYER INDUCED BEHIND AN AIRFOIL BY THE MOVING VORTEX STRUCTURE

The are given results of the study of development and deformation of the unsteady vortex layer formed behind a trailing edge of the symmetric airfoil in a plane parallel flow. The changing intensity of the layer is induced by a single concentrated vortex passing by the airfoil. The theoretical calculations performed on the basis of the construction of the Kirchhoff-Routh function indicate that the generated layer forms in a short period of time a new concentrated vortex of comparable intensity but of rotation opposite to that represented by the primary vortex.

The experimental investigations, conducted in a flow of the velocity $U = 2.1$ m/s and Reynolds number based on the airfoil chord length $Re = 4 \times 10^3$, agree with the theoretical results in some cases of the vortex-airfoil configuration.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 listopada 1986 roku.

NUMERYCZNE OBLICZENIA PŁASKICH LEPKICH PRZEPŁYWÓW NADDŹWIĘKOWYCH Z FALĄ UDERZENIOWĄ

STANISŁAW WRZESIEŃ

Wojskowa Akademia Techniczna

Rozpatrzono niektóre przypadki przepływów gazu lepkiego i przewodzącego ciepło, wykorzystując układ równań Naviera-Stokesa oraz równania ciągłości i energii.

Równania zapisane w niestacjonarnej formie rozwiązano stosując metodę iteracji po czasie z wykorzystaniem metody dekompozycji.

Zbadano wpływ niektórych parametrów modelowania na proces ustalania się przepływu i formowania fali uderzeniowej.

1. Wstęp

Przy rozwiązywaniu zagadnień naddźwiękowego opływu z falami uderzeniowymi, stosowane najczęściej rozdzielanie obszaru na obszar strumienia nielepkiego i obszar warstwy przyściennej nie zawsze jest przydatne. Dla małych i umiarkowanych liczb Reynoldsa konieczne jest rozpatrywanie całego obszaru przepływu przy zastosowaniu równań Naviera-Stokesa. Zagadnienia oddziaływania strumienia zewnętrznego z warstwą przyścienną, przepływy z obszarami oderwania, wzajemne oddziaływanie warstwy przyściennej z falą uderzeniową występujące np. we wlotach silników samolotów naddźwiękowych, są przykładami, dla których poprawny opis zjawisk można uzyskać rozwiązując pełne równania Naviera-Stokesa.

Aktualnie obserwuje się znaczny wzrost zainteresowania numerycznym rozwiązywaniem równań Naviera-Stokesa. Poczyniono też wiele prób zastosowania różnorodnych metod numerycznego całkowania, np. [1], [2], [3], [4], [5].

Początkowo do badania laminarnych przepływów lepkiego ściśliwego gazu stosowane były jawne schematy różnicowe [1], [2] pozwalające budować proste i ekonomiczne algorytmy dla maszyn cyfrowych o małej pojemności pamięci operacyjnej i stosunkowo niewielkiej szybkości obliczeń. Jednak jawne schematy różnicowe wykazują szereg istotnych wad m.in. charakteryzują się warunkową stabilnością co znacznie ogranicza zakres ich stosowania. Wady tej nie mają niejawnie schematy różnicowe, ale z kolei prowadzą do skomplikowanych różnicowych równań algebraicznych wymagających do ich rozwiązania maszyn cyfrowych o b. dużej pamięci operacyjnej i dużej szybkości działania.

Pewien kompromis można tu osiągnąć stosując metody pozwalające łączyć prostotę i ekonomiczność jawnych schematów różnicowych ze stabilnością niejawnych.

Jedną z najbardziej interesujących metod jest tu metoda dekompozycji, zaproponowana w pracy [6], pozwalająca na sprowadzenie N -wymiarowych równań do ciągu jednowymiarowych równań, co pozwala na stosunkowo łatwe stosowanie niejawnych schematów różnicowych. Metoda ta łączy niektóre z zalet jawnych i niejawnych schematów różnicowych, eliminując jednocześnie podstawowe trudności w stosowaniu każdego z nich oddzielnie. Ponieważ, jednak metoda ta nie ma jeszcze pełnego teoretycznego ujęcia, przy wykorzystywaniu nowych wariantów schematów różnicowych wynikających m.in. ze sposobu aproksymacji pochodnych, aproksymacji warunków brzegowych, rodzaju siatki różnicowej itp., konieczne jest testowanie algorytmu skonstruowanego z pomocą danego wariantu schematu różnicowego z równoczesnym badaniem granic jego stosowalności.

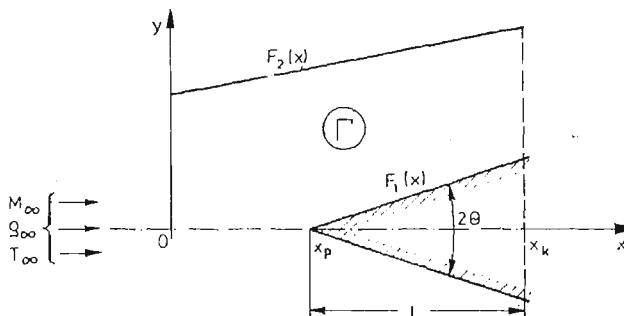
W pracy niniejszej rozpatrzono naddźwiękowy opływ klina i dokonano analizy wpływu dysypatywnych własności gazu na formowanie się pola przepływu, z wykorzystaniem zachowawczego schematu różnicowego stosowanego do pełnych równań Naviera-Stokesa [3].

Podobnego typu zagadnienie rozpatrywano w pracy [7], jednak stosowany tam schemat dekompozycji przy ustaleniu ($t \rightarrow \infty$) nie miał właściwości schematu zachowawczego, co znacznie obniżało dokładność otrzymanych rezultatów i nie pozwalało na szczegółową analizę wpływu dysypatywnych własności gazu.

W niniejszej pracy, poprzez podwójne przekształcenie obszaru całkowania, otrzymano algorytm pozwalający na łatwą zmianę obszaru całkowania, jak również zagęszczenie siatki różnicowej w obszarze warstwy przyściennej w zależności od liczby Reynoldsa przepływu.

2. Sformułowanie zagadnienia

Poszukiwać będziemy pola ustalonego przepływu w sąsiedztwie pewnej początkowej części L klina o kącie rozwarcia 2θ , na który napływa naddźwiękowy strumień gazu lepkiego i przewodzącego ciepło (rys. 1).



Rys. 1. Obszar całkowania w kartezjańskim układzie współrzędnych

Numeryczną analizę zagadnienia przeprowadzimy na podstawie rozwiązań pełnych równań Naviera-Stokesa w pewnym obszarze I' ograniczonym brzegiem $\partial I'$, zapisanych w prostokątnym układzie współrzędnych (x, y) . Wprowadzimy bezwymiarowe wielkości

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, & \bar{y} &= \frac{y}{L}, & \bar{t} &= \frac{t \cdot u_\infty}{L}, & \bar{u} &= \frac{u}{u_\infty}, & \bar{v} &= \frac{v}{u_\infty}, \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & \bar{T} &= \frac{T \cdot c_p}{u_\infty^2}, & \bar{p} &= \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}, & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_\infty}, & \bar{\kappa} &= \frac{\kappa}{\kappa_\infty}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty u_\infty \cdot L}{\mu_\infty}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p \cdot \mu_\infty}{\kappa_\infty},$$

gdzie:

t — czas,

u, v — rzuty wektora prędkości odpowiednio na oś x, y ,

ρ — gęstość gazu,

T — temperatura gazu,

p — ciśnienie gazu,

μ — współczynnik lepkości dynamicznej,

κ — współczynnik przewodności cieplnej gazu,

Re — liczba Reynoldsa przepływu,

Pr — liczba Prandtla,

c_p — ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu.

Układ równań dla ściśliwego gazu zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} u (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} v \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} u \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} u \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} v (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} v \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big] = 0,$$

$$E = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + e, \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu.$$

Dla wygody zapisu opuszczono symbole przyjęte dla oznaczenia wielkości bezwymiarowych.

W celu zamknięcia układu do równań (3.2) dołączymy równanie stanu gazu doskonałego

$$p = \frac{k-1}{k} \rho T. \quad (2.3)$$

Współczynnik lepkości dynamicznej μ przyjmiemy jako znaną funkcję temperatury T w postaci wykładniczej zależności

$$\mu = \left(\frac{T}{T_0} \right)^\omega. \quad (2.4)$$

Przyjmujemy następujące założenia, przy których badać będziemy wpływ dysypatywnych właściwości gazu na jakościowy i ilościowy charakter pola przepływu:

- 1) napływający strumień gazu jest naddźwiękowy ($M_\infty > 1$), jednorodny i niezaburzony;
- 2) przepływ w całym obszarze jest symetryczny względem płaszczyzny symetrii klina;
- 3) nie uwzględnia się przemian fizyko-chemicznych t.j. gaz przyjmuje się jako doskonały o stałej Prandtla Pr , stałym wykładniku adiabaty Poissona k i $e = C_p T$;

Rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia poszukiwać będziemy dla stacjonarnych warunków brzegowych:

$$\rho = \rho_0, \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad T = T_0 \quad \text{dla } x = 0 \text{ i } 0 < y \leq F_2(x),$$

$$\text{oraz } 0 < x < x_k \text{ i } y = F_2(x)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = v = 0 \quad \text{dla } 0 \leq x \leq x_p \text{ i } y = 0,$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{dla } x_p < x \leq x_k \text{ i } y = F_1(x),$$

$$\frac{\partial^r u}{\partial S^r} = \frac{\partial^r v}{\partial S^r} = \frac{\partial^r T}{\partial S^r} = 0 \quad \text{dla } x = x_k \text{ i } F_1(x) < y < F_2(x),$$

gdzie:

S — kierunek wektora prędkości ($r = 1, 2$ — bez sumowania).

Dla wygody numerycznego całkowania przekształcimy obszar całkowania w/g zależności

$$x_1 = \frac{x}{x_k},$$

$$y_1 = \frac{y - F_1(x)}{F_2(x) - F_1(x)}, \quad (2.6)$$

sprowadzając go do standartowej postaci $Q \{0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq y_1 \leq 1\}$. Dokonamy ponadto zgęszczenia siatki różnicowej w obszarze warstwy przyściennej przyjmując:

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1, \\ q_2 &= \frac{\ln(1+by_1)}{\ln(1+b)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie stałą b przyjmiemy w postaci zależnej od wartości $\sqrt{\text{Re}}$. Wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\partial y}{\partial q_2}, & z_4 &= \frac{\partial q_1}{\partial x}, \\ z_2 &= -\frac{\partial x}{\partial q_2}, & z_5 &= \frac{\partial q_2}{\partial x}, \\ z_3 &= \frac{\partial x}{\partial q_1}, & z_6 &= \frac{\partial q_2}{\partial y}, \\ \Delta &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(q_1, q_2)} = z_1 \cdot z_3 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

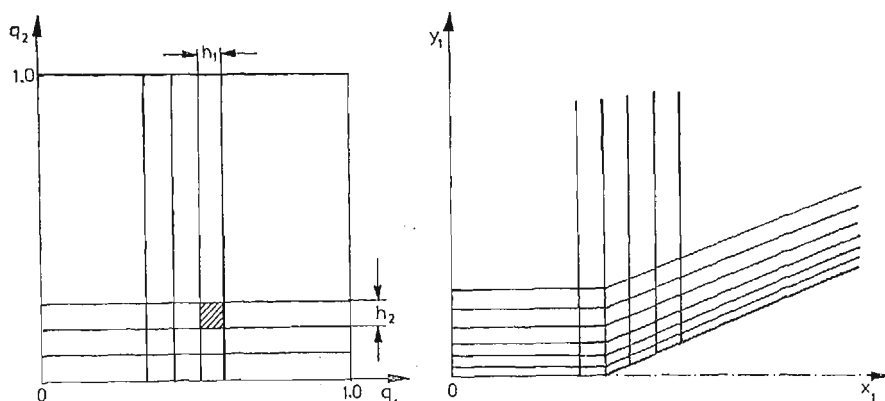
Układ równań (2.2) zapiszemy w układzie współrzędnych (q_1, q_2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varrho) &= - \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (z_1 \varrho u) + \frac{\partial}{\partial q_2} (z_2 \varrho u + z_3 \varrho v) \right] = \tilde{W} \varrho, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varrho u) &= - \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ z_1 \varrho u^2 + z_1 p - \frac{1}{\text{Re}} \left[z_1 z_4 (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial v}{\partial q_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. z_1 z_5 (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial q_2} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ (z_2 u + z_3 v) \varrho u + z_2 p - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\text{Re}} \left[z_3 z_6 \mu + z_2 z_5 (2\mu + \lambda) \right] \frac{\partial u}{\partial q_2} + \mu \frac{\partial v}{\partial q_1} + \right. \\ &\quad \left. \left. 2z_2 z_6 (\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial q_2} + z_1 z_5 (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial q_1} \right] \right\} = \tilde{W} \varrho u, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varrho v) &= - \tilde{W} \varrho v, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varrho E) &= - \tilde{W} \varrho E, \end{aligned} \quad (2.9a)$$

lub krócej:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \tilde{W} \mathbf{U}. \quad (2.9b)$$

Tak zapisany układ rozwiązywać będziemy w sposób numeryczny, dokonując dyskretyzacji obszaru całkowania siatką różnicową, przy czym w układzie (q_1, q_2) będzie to siatka równomierna a odpowiadająca jej siatka w obszarze rzeczywistym nierównomierna, zgęszczona w pobliżu powierzchni klina (rys. 2).

Rys. 2. Siatka różnicowa w układzie wsp. (q_1, q_2) i (x_1, y_1)

3. Algorytm dekompozycji. Schemat różnicowy

Dla numerycznego rozwiązywania układu równań (2.9) z warunkami brzegowymi (2.5) wykorzystamy metodę dekompozycji [3], [6], pozwalającą na sprowadzeniu zagadnienia do ciągu prostszych zadań poprzez pewne rozdzielanie układu równań wyjściowych przy jednoczesnym zachowaniu warunku aproksymacji globalnej. Sposób rozdzielania uwarunkowany jest przede wszystkim:

- statecznością schematu różnicowego i prostotą realizacji algorytmu,
- sposobem określania warunków brzegowych,
- żądaną dokładnością rozwiązań numerycznych,
- wyborem układu współrzędnych i postacią zapisu równań wyjściowych.

W tym celu zapiszemy układ równań (2.9) w prostszej postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega f = F_p, \quad (3.1)$$

gdzie: $f = f\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ — wektor szukanych funkcji gazodynamicznych,

Ω — operator wydzielonej części układu (2.9) aproksymowany dalej niejawnym schematem różnicowym,

F_p — pozostała część układu równań aproksymowana w sposób jawny.

Jeśli przy tym układ (2.9b) wykazuje właściwości ustalenia (a zakładamy, że tak jest) to dla $t \rightarrow \infty$ mamy:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial f}\right)^{-1} \tilde{W} = -\Omega f + F_p. \quad (3.2)$$

Dokonując teraz aproksymacji lewej części układu (3.1) niejawnym dwuwarstwowym schematem typu Cranka-Nicholsona ze współczynnikami wagowymi otrzymamy schemat różnicowy:

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} + \Lambda_h [\alpha f^{n+1} + (1 - \alpha)f^n] = F_p, \quad (3.3)$$

aproxymujący układ równań (3.1) z dokładnością $O(\tau + h^k)$, który przedstawimy w kanonicznej postaci z uwzględnieniem (3.2):

$$(\mathbf{I} + \tau \alpha \Lambda_h^k) \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial f} \right)^{-1} \tilde{W} \right]^n. \quad (3.4)$$

Wprowadzając w obszarze $A_h = Q \times C$, gdzie Q — jednostkowy kwadrat, $C = [0, T]$ dla $t \in C$, różnicową siatkę o stałym kroku przestrzennym $h_1 = 1/NI$, $h_2 = 1/NJ$ i kroku iteracyjnym τ , otrzymamy po aproksymacji pochodnych w (3.3) układ równań algebraicznych dla niewiadomych funkcji sieciowych:

$$(f_s)_{i,j}^n, \quad (s = 1, \dots, 4). \quad (3.5)$$

Układ ten można rozwiązać stosując np. metodę macierzowej „progonki”. Dla dostatecznie dużej liczby węzłów jest to operacja bardzo trudna, a czasem wręcz niemożliwa z uwagi na znaczne wymagania odnośnie pamięci operacyjnej EMC i czasu obliczeń.

Wybierając w charakterze wektora funkcji gazodynamicznych wektor o składowych:

$$f = \begin{Bmatrix} \varrho \\ u \\ v \\ T \end{Bmatrix}, \quad (3.6)$$

dokonyamy wieloskładnikowej dekompozycji [3] i napiszemy (2.9) w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{l=1}^4 \Omega_l f = F_f, \quad (3.7)$$

gdzie:

$$\Omega_l = \sum_{i=1}^1 \left[z_i^l u_i \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{\varrho \text{Re}} \left(z_i^l \frac{\partial}{\partial q^i} z_i^l \mathbf{b}_l \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \right] \mathbf{I} \quad (\text{dla } l = 1, 2),$$

$$z_2^1 = 0, \quad z_1^1 = z_4, \quad z_1^2 = z_5, \quad z_2^2 = z_6,$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\text{Pr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\text{Pr}} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & z_4 \varrho \frac{\partial}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ z_4 \frac{1}{\varrho} \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_1} & 0 & 0 & z_4 \frac{k-1}{k} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_4 \frac{p}{\varrho} \frac{\partial}{\partial q_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} 0 & z_5 \varrho \frac{\partial}{\partial q_2} & z_6 \varrho \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 \\ z_5 \frac{1}{\varrho} \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 & 0 & z_5 \frac{k-1}{k} \frac{\partial}{\partial q_2} \\ z_6 \frac{1}{\varrho} \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 & 0 & z_6 \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} \\ 0 & z_5 \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} & z_6 \frac{k-1}{k} T \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = u, u_2 = v,$$

I — macierz jednostkowa.

Operatory różniczkowe Ω_i zastąpimy operatorami różnicowymi $\Omega_{i,jh}^k$ w węzłach siatki n, i, j otrzymanymi po aproksymacji pochodnych ilorazami różnicowymi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} f &\approx A_{q_1} f_{i,j} = \pm \frac{1}{h_1} (f_{i,j} - f_{i \mp 1,j}), \\ \frac{\partial}{\partial q_1} a \frac{\partial}{\partial q_1} f &\approx A_{q_1} a_{i,j} A_{q_1} f_{i,j} = \frac{1}{2h_1^2} [(a_{i,j} + a_{i+1,j}) \cdot \\ &\quad (f_{i+1,j} - f_{i,j}) - (a_{i,j} + a_{i-1,j})(f_{i,j} - f_{i-1,j})], \\ \frac{\partial}{\partial q_1} b \frac{\partial}{\partial q_2} f &\approx A_{q_1} b_{i,j} A_{q_2} f_{i,j} = \frac{1}{4h_1 h_2} [b_{i+1,j}(f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}) - \\ &\quad b_{i,j-1}(f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1})]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analogicznie aproksymujemy pochodne: $\frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_2} c \frac{\partial}{\partial q_2}$ i $\frac{\partial}{\partial q_2} d \frac{\partial}{\partial q_1}$.

Po zastąpieniu operatora $I + \tau \alpha \Omega_h$ w ogólnym schemacie różnicowym (3.4), operatorem przybliżonym:

$$(I + \tau \alpha_1 \Omega_{1h})(I + \tau \alpha_2 \Omega_{2h})(I + \tau \alpha_3 \Omega_{3h})(I + \tau \alpha_4 \Omega_{4h}) \approx \left(I + \tau \alpha \sum_{i=1}^4 \Omega_h \right) \quad (3.10)$$

można już prowadzić obliczenia w czterech kolejnych etapach schematu dekompozycji:

$$\begin{aligned} (I + \tau \alpha_1 \Omega_{1h}) \varphi^{n+1/4} &= - \left[\left(\frac{\partial U}{\partial f} \right)^{-1} \right]^n \sum_{i=1}^4 \Omega_h W_h^n, \\ (I + \tau \alpha_2 \Omega_{2h}) \varphi^{n+1/2} &= \varphi^{n+1/4}, \\ (I + \tau \alpha_3 \Omega_{3h}) \varphi^{n+3/4} &= \varphi^{n+1/2}, \\ (I + \tau \alpha_4 \Omega_{4h}) \varphi^{n+1} &= \varphi^{n+3/4}, \\ f_{i,j}^{n+1} &= f_{i,j}^n + \tau \cdot \varphi_{i,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

W każdym z etapów, z uwagi na rodzaj aproksymacji pochodnych i warunków brzegowych, uzyskuje się układy równań algebraicznych z macierzą trójdziagonalną, łatwe do rozwiązywania na maszynach cyfrowych o średnich zdolnościach obliczeniowych (serii

ODRA i R-32). W tym przypadku zastosowano metodę faktoryzacji (zwaną często metodą „przeznania”).

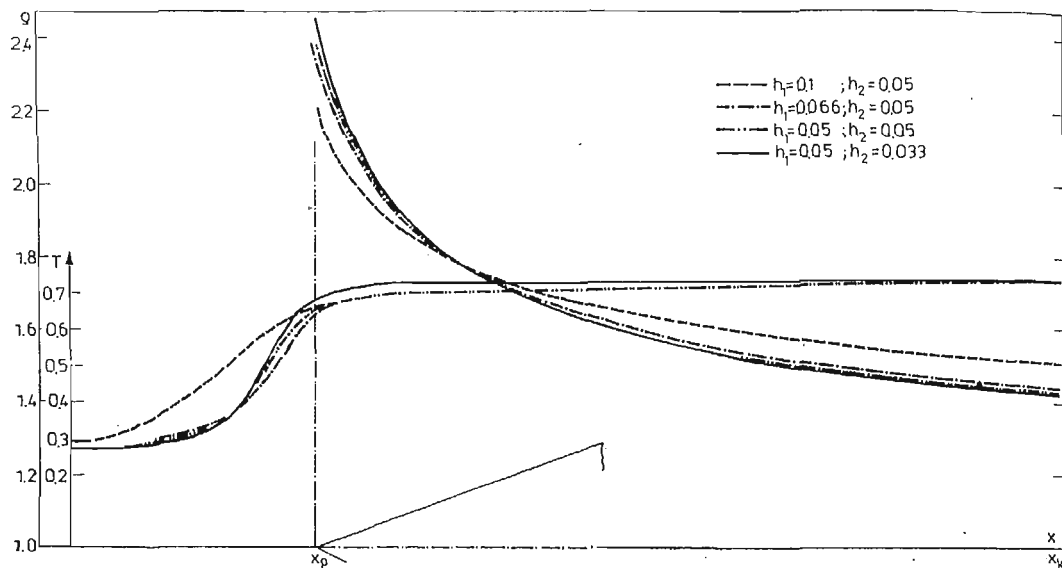
4. Analiza numeryczna

Numeryczne obliczenia wykonano na cyfrowej maszynie ODRA 1305 za pomocą programu o nazwie LNPP.

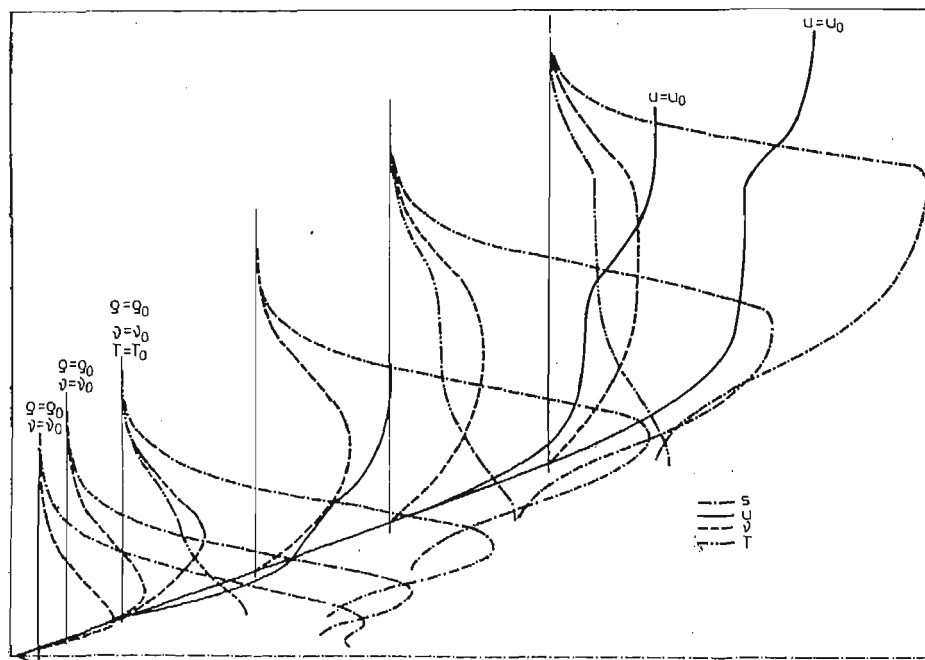
Z uwagi na długi czas obliczeń każdego wariantu (rzędu kilku godzin), obliczenia prowadzono etapami zapisując wyniki pośrednie na taśmie magnetycznej. Przy każdym kolejnym etapie pracy maszyny wyniki te wprowadzano jako warunki początkowe. Końcowe wyniki również zapisywano na taśmie magnetycznej w formie rekordów niezredukowanych, tworząc w ten sposób zbiór rozwiązań dla różnych liczb Reynoldsa przepływu, poszczególnych liczb węzłów siatki różnicowej, stopnia zgęszczenia siatki itp. Postąpiono tak z dwóch powodów. Po pierwsze, wyniki te wprowadzono jako warunki początkowe przy zmianie np. liczby Reynoldsa przepływu, co znacznie skraca czas obliczeń nowego wariantu. Po drugie, powstał pewien zbiór, łatwo dostępny i wygodny przy analizie pola przepływu programami użytkowymi tablicującymi lub rysującymi żądane funkcje i współczynniki.

Obliczenia testujące prowadzono dla klina o kącie rozwarcia $2\theta = 40^\circ$, prędkości przepływu niezaburzonego $M = 3,0$ dla współczynników: $\kappa = 1,41$; $\omega = 0,75$; $Pr = 0,71$, w szerokim przedziale liczb Reynoldsa oraz dla różnych wartości kroku przestrzennego: h_1 i h_2 . Przykładowe wyniki obliczeń rozkładu na powierzchni klina niektórych parametrów gazodynamicznych uzyskanych dla warunków brzegowych (2.5) i warunków początkowych określonych parametrami przepływu niezaburzonego przedstawiono na rys. 3. Z przebiegu funkcji ϱ i T wynika iż uzyskano dużą zbieżność wyników w dość dużym przedziale zmiany kroku h_1 i h_2 . Np. przy zmianie kroku h_1 od wartości $h_1 = 0,066$ do $h_1 = 0,05$ krzywe $\varrho(x)$ i $T(x)$ leżą bardzo blisko siebie, jedynie w obszarze dosuniętej fali uderzeniowej różnica wartości parametrów sięga $7 \div 8\%$. Dla wartości $h_1 = 0,1$ różnice są wyraźne również w obszarze dalszej części klina, gdzie nie występuje wzajemne oddziaływanie warstwy przyściennej z falą uderzeniową. Rozbieżności parametrów sięgają tu 7% , natomiast w obszarze ostrza klina $10 - 12\%$. Stąd wniosek, że w pobliżu ostrza konieczne jest zgęszczenie węzłów siatki różnicowej w kierunku osi x . Można to oczywiście osiągnąć zwiększając ogólną liczbę węzłów siatki w tym kierunku, chociaż bardziej celowe byłoby niejednorodne zgęszczenie istniejącej liczby węzłów (lub nieznacznie tylko większej), z uwagi na wystarczająco poprawny przebieg funkcji gazodynamicznych w dalszej części klina. Za takim rozwiązaniem przemawia również fakt, iż jest to obszar dużych gradientów parametrów w obydwu kierunkach obszaru całkowania.

Analizując wpływ kroku h_2 na wyniki obliczeń, łatwo zauważyć że wartość $h_2 = 0,05$ przy zachowaniu $h_1 = 0,05$ jest wystarczająca do otrzymywania zbieżnych rezultatów. Przy dalszym zmniejszaniu wartości h_1 ($h_2 = 0,033$) krzywe $\varrho(x)$ prawie pokrywają się, a różnice w przebiegu $T(x)$ są nieznaczne (rzędu $1,5\%$). Również i w tym przypadku mamy do czynienia z pewną niedokładnością w obszarze ostrza klina. Wydaje się, więc celowe by rozpatrzyć w późniejszym etapie testowania metodyki, sposoby prowadzące do



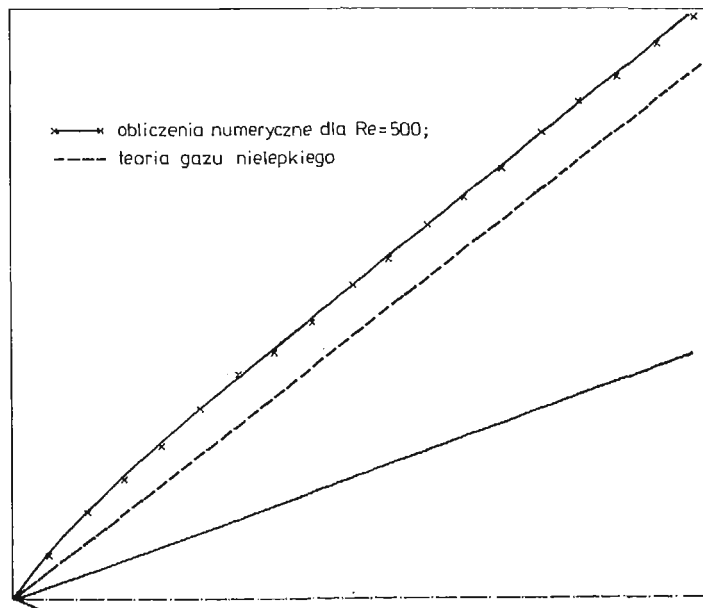
Rys. 3. Wpływ wartości kroku całkowania na wartości q , T na powierzchni ciała opływającego



Rys. 4. Zmiana parametrów przepływu wzdłuż długości klina ($Re = 500$)

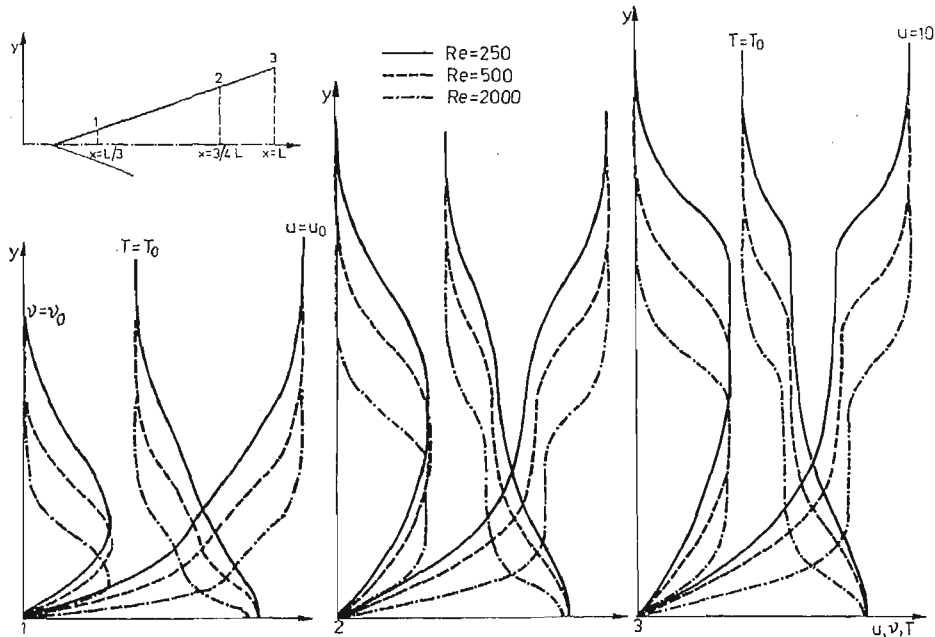
zwiększenia dokładności obliczeń w obszarach wzajemnego oddziaływania fali uderzeniowej z warstwą przyścienną. Jedną z metod może tu być wspomniane wcześniej zgęszczenie siatki w kierunku osi x , drugą natomiast modyfikacja aproksymacji równania ciągłości. Gęstość gazu jest bowiem parametrem, którego ustalenie się w procesie iteracji po czasie, następuje zdecydowanie najwolniej. Prace nad tymi zagadnieniami są aktualnie prowadzone.

Na rys. 4 pokazano przykładowy przebieg funkcji ρ , u , v i T uzyskanych dla $M = 3,0$ i $Re = 500$, w kilku przekrojach wybranych wzdłuż długości klina. Widać wyraźną zmianę charakteru przebiegu krzywych w miarę oddalania się od ostrza klina. Mianowicie, jeśli bezpośrednio za ostrzem przebiegi wszystkich parametrów charakteryzują się ciągłym gradientem (oczywiście zmiennym), to w miarę oddalania od ostrza można wyróżnić obszar w którym parametry przepływu są w przybliżeniu stałe. W końcowej części klina obszar pola przepływu ze stałymi wartościami parametrów widać już bardzo wyraźnie, przy czym obejmuje on już znacznie większą strefę pomiędzy powierzchnią klina, a falą uderzeniową. Zjawisko to ma swój głęboki sens fizyczny. Mianowicie w pobliżu ostrza klina następuje wzajemne przenikanie się i wzajemne oddziaływanie warstwy przyściennej z falą uderzeniową. Prawdopodobnie oddziaływanie to jest przyczyną pewnego zakrzywienia się w tej strefie fali uderzeniowej rys. 5. W strefie przepływu gdzie odległość fali



Rys. 5. Położenie fali uderzeniowej przy opływie klina dla $M = 3.0$ i $\Theta = 20^\circ$

uderzeniowej od warstwy przyściennej jest na tyle duża, iż wzajemne oddziaływanie nie występuje, zaczyna się formować obszar przepływu o stałej wartości parametrów — odpowiednik pola opływu klina w/g klasycznej teorii dynamiki gazu nielepkiego. Zwraca uwagę również fakt braku zakrzywienia fali uderzeniowej w tej strefie pola przepływu.



Rys. 6. Parametry przepływu ustalonego dla $Re = 250; 500; 2000$

Rysunek 6 przedstawia parametry gazodynamiczne uzyskane przy numerycznym modelowaniu opływu dla różnych wartości liczby Reynoldsa przepływu niezaburzonego. Łatwo zauważyć wpływ liczby Re na trzy zasadnicze elementy nadźwiękowego opływu ciała płynem lepkiem. Rozpatrzmy je kolejno.

Warstwa przyścienna. Widać bardzo wyraźny wzrost grubości warstwy przyściennej wraz ze zmniejszaniem się liczby Reynoldsa. Prowadzi to oczywiście do zwiększania strefy wzajemnego oddziaływania warstwy przyściennej z falą uderzeniową (krzywe dla $Re = 250$). Należy przypuszczać, że dalsze już niewielkie zmniejszenie liczby Reynoldsa doprowadzi do uformowania pola przepływu bez wyraźnej strefy warstwy przyściennej i fali uderzeniowej. Będzie to oczywiście przypadek niemożliwy do obliczeń za pomocą innych niż pełne równania N-S.

Fala uderzeniowa. Z uwagi na niezbyt dużą liczbę węzłów siatki przypadającą w strefie formowanie się fali uderzeniowej, nie analizowano grubości fali uderzeniowej, a jedynie jej położenie rozumiane jako zbiór \max wartości ϱ . Dla małych liczb Reynoldsa (250) fala uderzeniowa formuje się znacznie wyżej od jej położenia w opływie gazem nielepkiem przy czym kąt fali jest znacznie większy. Odpowiada to w przybliżeniu położeniu fali przy opływie ciała pogrubionego o grubość warstwy przyściennej. Jednocześnie można stwierdzić, że jest to fala o znacznej grubości, gdyż zaburzenia przepływu docierają do górnej granicy całkowania i w celu uniknięcia błędów należało zwiększyć obszar całkowania do wartości $G_1 = 2L$. A dla porównania: dla $Re = 500$ wystarczała wartość $G_1 = 1,5 L$, dla $Re = 2000$ $G_1 = L$. Dla rosnącej liczby Reynoldsa położenie formującej się fali uderzeniowej zbliża się do otrzymanego w teorii przepływu nielepkiego, z zachowaniem prawa opływu ciała pogrubionego.

Переупы в стrefie помядзу варстwą przысциенą а варстwą удерзениową. Zachodzi tu oczywisty звязек zgodny zresztą z wyżej wymienionymi zjawiskami, помядзу полоzeniem tej стrefy, jej wielkością i parametrami переупы. Dla малых числ Re jest to стrefa stosunkowo mala, znajdujaca sie tylko w tylnej częsci klina. Kąt odchylenia wektora прeдкoсци wynosi tu 26° (przy kącie klina 20°). Dla rosnących числ Re obserwuje sie znaczne zwiekszenie takiej стrefy, а kąt odchylenia strumienia np. dla $Re = 2000$ wynosi 22°.

5. Uwagi końcowe

Przewiduje sie również testowanie metodyki dla $Re > 2000$ по uwzględnieniu wspomnianych wcześniej sposobów zwiekszenia dokladności obliczeń w стrefach переупы о dużych gradientach parametrów. Należy wtedy zastanowić sie nad sposobem optymalizacji wielkości zmian kroku iteracyjnego τ w procesie iteracji, ponieważ dla rosnących числ Reynoldsa процес ustalania sie переупы (przy $\tau = \text{const}$) staje sie coraz bardziej powolny co znacznie wydłuża czas pracy maszyny.

Literatura

1. J. S. ALLEN, S. I. CHENG, *Numerical Solution of the Compressible Navier Stokes Equations for the Laminar Near Wake*. Physics of Fluids, v. 13, No 1, 1970.
2. Н. Ю. Брайлoвская, *Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа*, ДАН СССР, т. 160, № 5, 1965.
В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко, *Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа*, ЖВМиМФ, т. 19, № 1, с. 174 - 188, 1979.
4. R. M. BEAM, R. F. WARMING, *An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier — Stokes Equations*, AIAA Journal, Vol. 16, No 4, s. 393 - 402, 1978.
5. E. VON LAVANTE, Jr. W. T. THOMPSON, *An Implicit, Bidiagonal Numerical Method for Solving the Navier — Stokes Equations*, AIAA Journal, Vol. 21, No 6, s. 828 - 833, 1983.
6. Н. Н. Яненко, *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*, Издательство „Наука”, 1967.
7. Ю. А. Березин, В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко, *Об одной неявной схеме расчета течения вязкого теплопроводного газа*. „Численные методы механики сплошной среды”, т. 3, № 4, с. 3 - 18, Новосибирск 1972.

Резюме

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Рассмотрены некоторые виды течения вязкого теплопроводного газа при использовании уравнений Навье-Стокса, уравнения неразрывности и уравнения энергии.

Уравнения, записанные в нестационарном виде, решаются методом установления по времени с использованием схемы расщепления.

Исследовано влияние параметров численного расчета на процесс установления течения и формирование ударной волны.

S u m m a r y

NUMERICAL COMPUTATIONS OF PLANE VISCOUS SUPERSONIC FLOWS WITH SHOCK WAVES

Some cases of viscous and heat conducting and compressible gas flows have been considered by making use of the Navier-Stokes equations.

The equations are written in the nonstationary conservation-law form and solved by means of time-dependent iterations, the method of fractional steps being applied.

The effect of some parameters on the process of determining a steady state flow and shock wave formation has been examined.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 listopada 1986 roku.

METODA ANALIZY CIEPLNEJ TRÓJSTRUMIENIOWYCH
KRZYŻOWOPRĄDOWYCH KONWEKCYJNYCH WYMIENNIKÓW CIEPŁA
PRZY WYMIESZANIU CZYNNIKA ZEWNĘTRZNEGO

JAN SKŁADZIENÍ
MACIEJ PRUS

Politechnika Śląska, Gliwice

Oznaczenia

a, a_1, a_2, a' — pomocnicze stałe, wynikające z warunków brzegowych,

b, b_1, b_2, b' — pomocnicze stałe, wynikające z warunków brzegowych,

B_1, B_2, C — pomocnicze stałe, wynikające z całkowania,

g, h, k_i, k'_i — pomocnicze stałe: $k_i = \sum_{\substack{l=j,k \\ l \neq i}} K_{i-l}, i, j, k = 1, 2, 3, k'_i = k_i + K_{i-0},$

k_{i-j} — współczynnik przenikania ciepła pomiędzy strumieniami i oraz j , odniesiony do modelowej powierzchni prostokątnej $x_0 y_0$ ($k_{i-j} = k_{j-i}$), $\frac{W}{m^2 K}$,

K_{i-j} — bezwymiarowa powierzchnia wymiany ciepła:

$$K_{i-j} = \frac{k_{i-j} x_0 y_0}{W_i},$$

m_1, m_2, M — pomocnicze stałe, wynikające z całkowania i warunków brzegowych,

\dot{Q} — strumień ciepła, W ,

T, t — rzeczywista i bezwymiarowa temperatura, $K, -$,

W — pojemność cieplna strumienia (dodatnia, gdy przepływ ma miejsce w kierunku zgodnym z kierunkiem osi układu współrzędnych), W/K ,

X, Y, x, y, z — rzeczywiste i bezwymiarowe współrzędne:

$$x = \frac{X}{x_0}, \quad y = \frac{Y}{y_0}, \quad z = x \quad \text{lub} \quad z = y, \quad m,$$

($\bar{\quad}$) — wartość średnia,

) $_i$ — dotyczy strumienia i ,

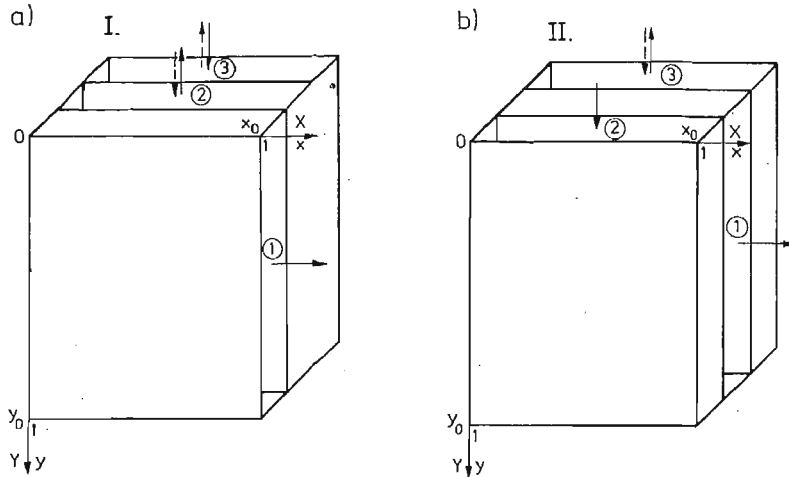
) $_d$ — przy dopływie,

) $_o$ — dotyczy otoczenia,

) $_w$ — przy wypływie.

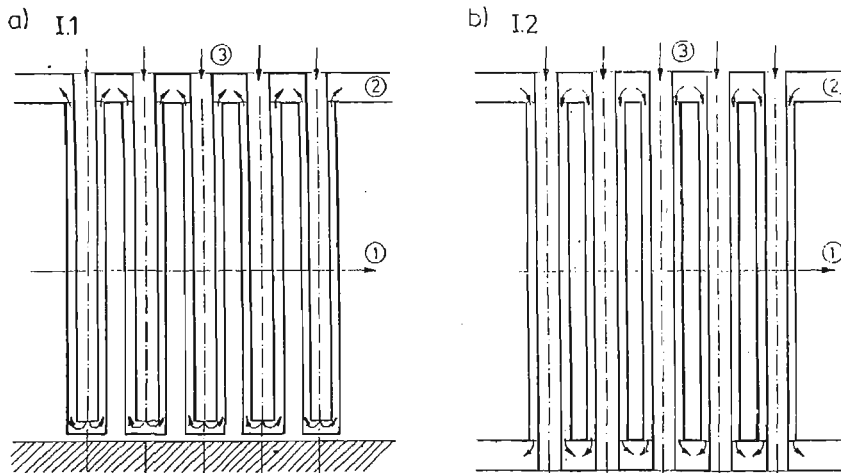
1. Wstęp

Dwa warianty modeli trójstrumieniowych krzyżowoprądowych wymienników ciepła przedstawiono na rys. 1. Modele te składają się z czterech równoległych prostokątnych płyt o wymiarach x_0, y_0 . Płyty środkowe reprezentują powierzchnie wymiany ciepła, podczas gdy płyty zewnętrzne w przypadku wymienników bez strat są adiabatyczne.



1. Model trójstrumieniowego krzyżowoprądowego wymiennika ciepła; a) wariant I, b) wariant II

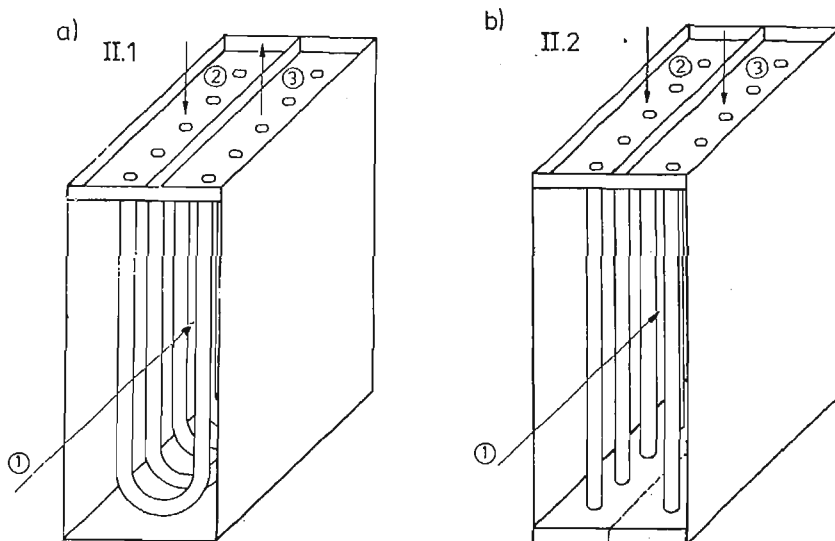
Media robocze przepływają przez szczeliny, przy czym strumień 2 i 3 są prostopadłe do strumienia czynnika 1. Czynniki te wymienia ciepło tylko z jednym z dwóch strumieni równoległych (wariant I) lub z obydwooma strumieniami równoległymi (wariant II). Nie ma wówczas wymiany ciepła pomiędzy strumieniami 2 i 3. Strumienie równoległe mogą poruszać się współprądowo lub przeciwnieprądowo. Strumienie te mogą ponadto być zwią-



2. Przykłady zastosowania wariantu I; a) normalny krzyżowoprądowy wymiennik Fielda (I. 1.n), b) trójczynnikowy krzyżowoprądowy wymiennik ciepła z przepływem współprądowym strumieni równoległych (I.2.w)

zane z tym samym czynnikiem i wymiennik ma wtedy charakter dwuczynnikowy (wersja 1). Gdy strumienie 2 i 3 odnoszą się do różnych mediów, to wymiennik staje się trójczynnikowy (wersja 2).

Przykłady rzeczywistych trójstrumieniowych krzyżowoprądowych wymienników ciepła pokazano na rys. 2 i 3. Wariant I może być realizowany w wersji 1, tzn. dwuczynnikowej, w postaci normalnego wymiennika Fielda I. 1. n (rys. 2a). Strumienie 2 i 3 mogą również płynąć w kierunkach przeciwnych, tzn. czynnik związany z tymi strumieniami doprowadzany jest do przestrzeni międzyrurowej, co daje odwrócony wymiennik Fielda I.1.o. Wariant I w wersji trójczynnikowej występuje w postaci współprądowej I.2.w, jak na rys. 2b, lub w przeciwproudowej I.2.p, gdy czynnik 3 porusza się w kierunku przeciwnym do zaznaczonego. Wariant II zrealizowany w wersji dwuczynnikowej przybiera postać wymiennika pętlicowego II.1 (rys. 3a). Wersja trójczynnikowa wariantu II pokazana jest na rys. 3b dla przypadku współprądowego II.2.w. Przypadek przeciwproudowy II.2.p. dotyczy odwrotność niż na rysunku kierunku przepływu czynnika 3.



3. Przykłady zastosowania wariantu II; a) krzyżowoprądowy wymiennik pętlicowy (II.1), b) trójczynnikowy krzyżowoprądowy wymiennik ciepła z przepływem współprądowym strumieni równoległych (II.2.w)

Ogólne rozwiązanie równań bilansu energii dla klasycznych konwekcyjnych trójstrumieniowych krzyżowoprądowych wymienników ciepła podano w pracy [8]. Przykłady szczególne rozpatrzono w pozycjach [2], [4], [5] i [6]. Wymienione publikacje dotyczą wymiennika klasycznego tzn. takiego, w którym wszystkie strumienie są złożone z odizolowanych strug. Pomiedzy tymi strugami nie występuje ani wymiana ciepła ani wymiana masy. Założenie powyższe jest na ogół uzasadnione w odniesieniu do strumieni 2 i 3. Czynnik 1 ulega natomiast częściowemu wymieszaniu. Sytuacja, gdy występuje całkowite wymieszanie czynnika 1, była analizowana dla wybranych przypadków w [3] i [7].

Jak wynika z pracy [1] przypadek całkowitego wymieszania czynnika 1 w przekrojach poprzecznych do kierunku przepływu jest zwykle bardziej oddalony od rzeczywistości niż założenie przepływu czynnika 1 adiabatycznymi strugami. Rozpatrzenie przypadku całkowitego wymieszania czynnika 1 ma jednak uzasadnienie praktyczne. Przypadek ten bowiem, jak wykazały liczne przykłady obliczeniowe, daje wyniki liczbowe różniące się w znikomy sposób od rezultatów uzyskanych dla przepływu czynnika 1 całkowicie bez wymieszania. Z drugiej strony wzory określające temperatury końcowe czynników dla przypadku całkowitego wymieszania czynnika 1 są znacznie prostsze. Za stosowaniem tych wzorów przemawia ponadto fakt, że o błędzie obliczeń decyduje zwykle błąd z jakim są wyznaczone współczynniki przenikania ciepła.

2. Założenia

W pracy przyjęto założenia ogólnie stosowane w klasycznej teorii wymienników ciepła. Wyjątek stanowi postulat dotyczący wymieszania czynnika 1. Ponadto w ostatnim punkcie zrezygnowano z założenia o niewystępowaniu strat ciepła do otoczenia. W rezultacie przy analizie równań bilansu energii, z wyjątkiem p. 6, w którym uwzględniono wymianę ciepła z otoczeniem, przyjęto następujące uproszczenia:

- W wymienniku panuje stan ustalony.
- Przepływ czynników jest jednowymiarowy i równomierny.
- Czynnik 1 ulega całkowitemu wymieszaniu w przekrojach poprzecznych do kierunku przepływu.
- Strumienie 2 i 3 są złożone z adiabatycznych strug, pomiędzy którymi nie ma ani wymiany ciepła ani wymiany masy.
- Przepływ ciepła jest jednowymiarowy we wszystkich elementach wymiennika.
- W wymienniku nie pojawiają się źródła ciepła.
- Pojemności cieplne poszczególnych strumieni oraz współczynniki przenikania ciepła są stałe.
- Nie występuje przepływ ciepła przez promieniowanie.
- Przepływ ciepła przy końcach elementów (wersja 1) ma znikomy wpływ.
- Straty ciepła do otoczenia nie występują.

Trzecie i czwarte założenie powoduje w konsekwencji istnienie zależności:

$$T_1 = T_1(X), \quad T_2 = T_2(X, Y), \quad T_3 = T_3(X, Y). \quad (1)$$

3. Równania bilansu energii

Równania różniczkowe bilansu energii dla strumienia 2 i 3 są identyczne jak w przypadku klasycznego przepływu krzyżowoprądowego bez wymieszania czynnika 1. Równania te otrzymuje się po rozpatrzeniu fragmentu strumienia znajdującego się w elemencie o wymiarach $dX dY$ [8] i mają one postać:

$$-\frac{W_i}{x_0 y_0} \frac{\partial T_i}{\partial y} = \sum_{l=j,k} k_{l-i} (T_l - T_i), \quad (2)$$

gdzie: $i = 2, 3, j, k = 1, 2, 3, j, k \neq i$.

Równanie bilansu energii dla czynnika 1 można otrzymać dwiema drogami. Po sporządzeniu bilansu w elemencie $dX dY$ równanie całkuje się obustronnie względem zmiennej y w granicach $0 \div 1$. Można również bezpośrednio dokonać bilansu energii dla elementu $y_0 dX$. W rezultacie otrzymuje się:

$$-\frac{W_1}{x_0 y_0} \frac{dT_1}{dx} = \sum_{l=2,3} k_{1-l} \left(T_1 - \int_0^1 T_l dy \right). \quad (3)$$

Wygodnie jest operować bezwymiarowymi temperaturami:

$$t_l = \frac{T_l - T_{1d}}{T_{1d} - T_{1a}}. \quad (4)$$

Indeks l przybiera wartość $l = 2$ z wyjątkiem przypadku I.1.n oraz wymienników trójczynnika w których zachodzi:

$$|T_{1a} - T_{3d}| > |T_{1d} - T_{2d}|. \quad (5)$$

W tych sytuacjach $l = 3$. Tak zdefiniowane temperatury t_l przybierają wartości:

$$0 \leq t_l \leq 1 \quad \text{dla} \quad \text{I.1 i II.1}, \quad (6)$$

$$0 \leq t_l \leq 2 \quad \text{dla} \quad \text{I.2 i II.2}. \quad (7)$$

Równania 2 i 3 można zatem po wprowadzeniu pomocniczych stałych k_l zapisać w postaci bezwymiarowej:

$$t_1 + \frac{1}{k_1} \frac{dt_1}{dx} = \frac{1}{k_1} \sum_{l=2,3} K_{1-l} \int_0^1 t_l dy, \quad (8a)$$

$$t_2 + \frac{1}{k_2} \frac{\partial t_2}{\partial y} = \frac{1}{k_2} \sum_{l=1,3} K_{2-l} t_l, \quad (8b)$$

$$t_3 + \frac{1}{k_3} \frac{\partial t_3}{\partial y} = \frac{1}{k_3} \sum_{l=1,2} K_{3-l} t_l. \quad (8c)$$

Warunek brzegowy dla czynnika 1 ma postać:

$$t_1|_{x=0} = t_{1d} = 1, \quad (9)$$

podczas gdy warunki brzegowe dla strumieni 2 i 3 zależą od rozpatrywanego przypadku. Warunki te są następujące:

I.1.n

$$t_3|_{y=0} = 0, \quad t_2|_{y=1} = t_3|_{y=1} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial t_3}{\partial y}|_{y=1} = 0, \quad (10)$$

I.1.o

$$t_2|_{y=0} = 0, \quad t_2|_{y=1} = t_3|_{y=1} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial t_3}{\partial y}|_{y=1} = 0, \quad (11)$$

I.2.w i II.2.w

$$t_2|_{y=0} = t_{2d}, \quad t_3|_{y=0} = t_{3d}, \quad (12)$$

I.2.p i II.2.p

$$t_2|_{y=0} = t_{2d}, \quad t_3|_{y=1} = t_{3d}, \quad (13)$$

II.1

$$t_2|_{y=0} = 0, \quad t_2|_{y=1} = t_3|_{y=1}. \quad (14)$$

4. Rozwiązanie zagadnienia

W celu wyznaczenia rozkładu temperatur należy rozpatrzyć układ równań (8) z warunkami (9)÷(14). Układ (8) jest stosunkowo łatwy do rozwiązania z uwagi na zależność temperatury t_1 tylko od jednej zmiennej. Fakt ten umożliwia oddzielne rozwiązywanie równań (8b) i (8c) względem temperatur t_2 i t_3 . Równania (8b) i (8c) rozpatruje się dla stałej wartości x , a zatem temperaturę t_1 można uważać na tym etapie za wielkość niezmienną.

Dla wariantu I obowiązuje $K_{1-3} = K_{3-1} = 0$, a zatem temperatura t_1 w równaniu (8c) nie występuje. Równania (8b) i (8c) trzeba natomiast rozwiązywać łącznie, najprościej przez eliminację jednej ze zmiennych.

Wariant II dotyczy przypadku $K_{2-3} = K_{3-2} = 0$. Temperatura t_1 pojawia się zarówno w równaniu (8b) jak i (8c), równania te jednak zawierają jedynie po jednej niewiadomej i tym samym mogą być rozwiązywane oddzielnie.

Po rozwiązaniu równań (8b) i (8c), osobno dla wariantu I i II, otrzymuje się wyrażenia określające temperaturę t_2 i t_3 w funkcji zmiennej y oraz temperatury t_1 . Temperatura ta z kolei jest funkcją zmiennej x . Po wykorzystaniu warunków brzegowych (10)÷(14) rozpatruje się równanie (8a) wraz z warunkiem (9). W rezultacie dostaje się końcowy wzór na temperaturę t_1 .

Postępowanie według przedstawionego schematu prowadzi do następujących zależności:

$$t_1 = \left(1 + \frac{a}{b}\right) e^{bx} - \frac{a}{b}, \quad (15)$$

wariant I:

$$t_2 = t_1 + B_1 e^{m_1 y} + B_2 e^{m_2 y}, \quad (16)$$

$$t_3 = t_1 + \frac{B_1}{K_{2-3}} (k_2 + m_1) e^{m_1 y} + \frac{B_2}{K_{2-3}} (k_2 + m_2) e^{m_2 y}, \quad (17)$$

$$m_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[k_2 + k_3 \pm \sqrt{(k_2 + k_3)^2 - 4K_{3-2}K_{2-1}} \right], \quad (18)$$

$$a = K_{1-2} \sum_{i=1,2} a_i \frac{e^{m_i} - 1}{m_i}, \quad (19)$$

$$b = K_{1-2} \sum_{i=1,2} b_i \frac{e^{m_i} - 1}{m_i},$$

$$B_i = a_i + b_i t_1, \quad (20)$$

a następnie po wprowadzeniu $j = 1$ gdy $i = 2$ oraz $j = 2$ gdy $i = 1$
I.1.n

$$a_i = 0, \quad b_i = (-1)^i \frac{1}{M} m_j e^{m_j} \left(1 + \frac{m_i}{K_{3-2}} \right), \quad (21)$$

$$M = m_2 e^{m_2} - m_1 e^{m_1},$$

I.1.o

$$a_i = 0, \quad b_i = (-1)^i \frac{1}{M} (k_2 + m_j) m_j e^{m_j}, \quad (22)$$

$$M = (k_2 + m_2) m_2 e^{m_2} - (k_2 + m_1) m_1 e^{m_1},$$

I.2.w

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{M} [-t_{2d}(k_2 + m_j) + t_{3d}K_{2-3}], \quad (23)$$

$$b_i = (-1)^i \frac{1}{M} (k_2 + m_j - K_{2-3}), \quad M = m_2 - m_1,$$

I.2.p

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{M} [-t_{2d}(k_2 + m_j) e^{m_j} + t_{3d}K_{2-3}],$$

$$b_i = (-1)^i \frac{1}{M} [(k_2 + m_j) e^{m_j} - K_{2-3}], \quad (24)$$

$$M = (k_2 + m_2) e^{m_2} - (k_2 + m_1) e^{m_1},$$

wariant II

$$t_2 = t_1 + (t_{2d} - t_1) e^{-K_{2-1}y}, \quad (25)$$

$$t_3 = t_1 + C e^{-K_{3-1}y}, \quad (26)$$

$$g = \frac{K_{1-2}}{K_{2-1}} (1 - e^{-K_{2-1}}), \quad h = \frac{K_{1-3}}{K_{3-1}} (1 - e^{-K_{3-1}}), \quad (27)$$

II.1

$$a = 0, \quad b = -g - h e^{K_{3-1} - K_{2-1}}, \quad C = -t_1 e^{K_{3-1} - K_{2-1}}, \quad (28)$$

II.2.w

$$a = g t_{2d} + h t_{3d}, \quad b = -g - h, \quad C = t_{3d} - t_1, \quad (29)$$

II.2.p

$$\begin{aligned} a &= gt_{2d} + ht_{3d}e^{K_3-1}, & b &= -g - he^{K_3-1}, \\ C &= (t_{3d} - t_1)e^{K_3-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Wyznaczenie rozkładu temperatur t_1 , t_2 i t_3 jest równoznaczne z matematycznym rozwiązaniem zagadnienia. Z punktu widzenia technicznego istotne są strumienie przekazywanego ciepła, a tym samym średnie temperatury przy wypływie poszczególnych czynników. Temperatura medium 1 przy wypływie wynosi:

$$t_{1w} = t_1|_{x=1} = \left(1 + \frac{a}{b}\right)e^b - \frac{a}{b}. \quad (31)$$

Średnia temperatura przy wypływie czynników przepływających wewnątrz rur jest funkcją średniej temperatury płynu 1, równej

$$\bar{t}_1 = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\frac{e^b - 1}{b} - \frac{a}{b}. \quad (32)$$

Średnie temperatury przy wypływie mediów związanych ze strumieniami 2 i 3 określają wzory:

$$t_{2w} = \bar{t}_2|_{y=0} = \bar{t}_1 + \bar{B}_1 + \bar{B}_2 \quad \text{dla I.1.n,} \quad (33)$$

$$t_{3w} = \bar{t}_3|_{y=0} = \bar{t}_1 + \frac{\bar{B}_1}{K_{2-3}}(k_2 + m_1) + \frac{\bar{B}_2}{K_{2-3}}(k_2 + m_2) \quad (34)$$

dla I.1.o i I.2.p,

$$t_{2w} = t_2|_{y=1} = \bar{t}_1 + \bar{B}_1 e^{m_1} + \bar{B}_2 e^{m_2} \quad \text{dla I.2,} \quad (35)$$

$$t_{3w} = \bar{t}_3|_{y=1} = \bar{t}_1 + \frac{\bar{B}_1}{K_{2-3}}(k_2 + m_1)e^{m_1} + \frac{\bar{B}_2}{K_{2-3}}(k_2 + m_2)e^{m_2} \quad (36)$$

dla I.2.w,

gdzie:

$$\bar{B}_i = a_i + b_i \bar{t}_1, \quad (37)$$

$$t_{3w} = \bar{t}_3|_{y=0} = (1 - e^{K_3-1-K_2-1})\bar{t}_1 \quad \text{dla II.1,} \quad (38)$$

$$t_{2w} = \bar{t}_2|_{y=1} = t_{2d}e^{-K_2-1} + (1 - e^{-K_2-1})\bar{t}_1 \quad \text{dla II.2,} \quad (39)$$

$$t_{3w} = \bar{t}_3|_{y=1} = t_{3d}e^{-K_3-1} + (1 - e^{-K_3-1})\bar{t}_1 \quad \text{dla II.2.w,} \quad (40)$$

$$t_{3w} = \bar{t}_3|_{y=0} = t_{3d}e^{K_3-1} + (1 - e^{K_3-1})\bar{t}_1 \quad \text{dla II.2.p.} \quad (41)$$

Dla wymienników dwuczynnikowych istotna może być również średnia temperatura przy nawrocie. Temperatura ta wynosi:

I.1

$$\bar{t}_2|_{y=1} = \bar{t}_3|_{y=1} = \bar{t}_1 + \bar{B}_1 e^{m_1} + \bar{B}_2 e^{m_2}, \quad (42)$$

II.1

$$\bar{t}_2|_{y=1} = \bar{t}_3|_{y=1} = \bar{t}_1(1 - e^{-K_2 \cdot 1}). \quad (43)$$

Dodatni lub ujemny strumień ciepła pochłoniętego przez i -ty strumień płynu ma wartość:

$$\dot{Q}_i = W_i(\bar{t}_i|_{z_i=1} - \bar{t}_i|_{z_i=0})(T_{1d} - T_{ld}), \quad (44)$$

gdzie $z_1 = x$, $z_2 = y$, $z_3 = y$, l zaś wynosi 2 lub 3. W zależnościach (44) należy wykozystać warunki brzegowe, w tym $\bar{t}_1|_{x=0} = t_{1d} = 1$. Relacje te dla wymiennika bez strat ciepła spełniają oczywisty warunek

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 = 0. \quad (45)$$

W przypadku wersji trójczynnikowej strumienie \dot{Q}_i są równocześnie strumieniami ciepła pobieranego lub oddawanego przez poszczególne czynniki. Dla wersji dwuczynnikowej strumień ciepła pobieranego przez czynnik płynący wewnątrz rur jest równy sumie $\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3$.

5. Przykłady liczbowe

W celu zorientowania się w wartości różnicy pomiędzy wynikami otrzymywanymi dla czystego przepływu krzyżowoprądowego i dla przepływu z całkowitym wymieszaniem czynnika 1 wykonano przykładowe obliczenia liczbowe. Dla przypadku całkowitego wymieszania czynnika 1 (przypadek a) wykorzystano wzory podane w p. 4. Obliczenia dla klasycznych wymienników krzyżowoprądowych (przypadek b) zrealizowano w oparciu o zależności zamieszczone w pracach [8]. Rozważania dotyczą wielkości bezwymiarowych i określano średnią bezwymiarową temperaturę przy wypływie czynnika lub czynników poruszających się wewnątrz rur.

Poniżej zamieszczono zestawienie danych przyjętych do obliczeń oraz otrzymane rezultaty.

I.1.n:

$$K_{1-2} = K_{3-2} = 1, \quad K_{2-1} = K_{2-3} = -1,$$

$$\text{a) } \bar{t}_2|_{y=0} = 0.4116, \quad \text{b) } \bar{t}_2|_{y=0} = 0.4149,$$

I.1.o:

$$K_{1-2} = K_{2-1} = K_{2-3} = 1, \quad K_{3-2} = -1,$$

$$\text{a) } \bar{t}_3|_{y=0} = 0.4116, \quad \text{b) } \bar{t}_3|_{y=0} = 0.4149,$$

I.2.w:

$$K_{1-2} = K_{2-1} = K_{2-3} = K_{3-2} = 1, \quad t_{2d} = 0.2, \quad t_{3d} = 0.0,$$

$$\text{a) } \bar{t}_2|_{y=1} = 0.4168, \quad \bar{t}_3|_{y=1} = 0.2163, \quad \text{b) } \bar{t}_2|_{y=1} = 0.4215, \quad \bar{t}_3|_{y=1} = 0.2145,$$

I.2.p:

$$K_{1-2} = K_{2-1} = K_{2-3} = 1, \quad K_{3-2} = -1, \quad t_{2d} = 0.2, \quad t_{3d} = 0.0,$$

$$\text{a) } \bar{t}_2|_{y=1} = 0.4045, \quad \bar{t}_3|_{y=0} = 0.2121, \quad \text{b) } \bar{t}_2|_{y=1} = 0.4091, \quad \bar{t}_3|_{y=0} = 0.2097,$$

II.1:

$$K_{1-2} = K_{1-3} = K_{2-1} = 1, \quad K_{3-1} = -1,$$

$$\text{a) } \bar{t}_3|_{y=0} = 0.5788, \quad \text{b) } \bar{t}_3|_{y=0} = 0.5766,$$

II.2.w:

$$K_{1-2} = K_{1-3} = K_{2-1} = K_{3-1} = 1, \quad t_{2d} = t_{3d} = 0.0,$$

$$\text{a) } \bar{t}_2|_{y=1} = \bar{t}_3|_{y=1} = 0.3588, \quad \text{b) } \bar{t}_2|_{y=1} = \bar{t}_3|_{y=1} = 0.3663,$$

II.2.p:

$$K_{1-2} = K_{1-3} = K_{2-1} = 1, \quad K_{3-1} = -1, \quad t_{2d} = t_{3d} = 0.0,$$

$$\text{a) } \bar{t}_2|_{y=1} = \bar{t}_3|_{y=0} = 0.3588, \quad \text{b) } \bar{t}_2|_{y=1} = \bar{t}_3|_{y=0} = 0.3587.$$

Jak widać z przedstawionych wyników, mimo stosunkowo dużych wartości bezwzględnych bezwymiarowych powierzchni przepływu ciepła, różnice pomiędzy zmianami temperatur czynników są niewielkie. Przyjęcie założenia o idealnym wymieszaniu czynnika 1 w przekrojach poprzecznych do kierunku przepływu powoduje nieznaczną różnicę w wynikach w stosunku do klasycznego przepływu krzyżowoprądowego. Różnica ta w rozpatrywanych przypadkach co najwyżej dochodziła do ok. 2%, w przypadku wymienników trójczynnikowych, nie przekraczała natomiast 1% dla wersji dwuczynnikowej.

6. Wymienniki ze stratami ciepła do otoczenia

W poprzednich punktach skorzystano z założenia upraszczającego, zgodnie z którym nie ma wymiany ciepła z otoczeniem. W rzeczywistości wymiana taka istnieje i można ją uwzględnić przez modyfikację równania bilansu energii dla czynnika 1. Równanie to przyjmuje wtedy postać

$$-\frac{W_1}{x_0 y_0} \frac{dT_1}{dx} = \sum_{l=2,3} k_{1-l} \left(T_1 - \int_0^1 T_l dy \right) + k_{1-o} (T_1 - T_o), \quad (46)$$

lub

$$t_1 + \frac{1}{k'_1} \frac{dt_1}{dx} = \frac{1}{k'_1} \left[\sum_{l=2,3} K_{1-l} \int_0^1 t_l dy + K_{1-o} t_o \right]. \quad (47)$$

Zależność powyższa pozostaje w pewnej sprzeczności z modelem przedstawionym na rys. 1b, jest jednak uzasadniona również dla wariantu II z uwagi na sposób jego realizacji, uwidoczniony na rys. 3.

Układ złożony z równań (47), (8b) i (8c) rozwiązuje się podobną metodą jak dla wymienników bez strat. Wynik końcowy w postaci funkcji określających rozkłady temperatur poszczególnych strumieni jest identyczny jak w p. 4, jedynie zamiast stałych a i b należy wszędzie wstawić skorygowane stałe:

$$a' = a + K_{1-o} t_o, \quad b' = b - K_{1-o}. \quad (48)$$

Stałe te występują również w zależnościach określających temperatury przy wypływie.

7. Wnioski

Równania bilansu energii dla trójstrumieniowych konwekcyjnych krzyżowoprądowych wymienników ciepła dają się w prosty sposób rozwiązać po przyjęciu założenia o całkowitym wymieszaniu w przekrojach poprzecznych do kierunku przepływu czynnika omywającego rury z zewnątrz. Otrzymane wzory mogą być wykorzystywane w obliczeniach technicznych bez użycia szeregów, w przeciwieństwie do zależności obowiązujących dla wymienników z klasycznym przepływem krzyżowym.

Przykładowe obliczenia liczbowe wykazały, że wyniki otrzymane po przyjęciu rozpatrywanego modelu różnią się nieznacznie od rezultatów słusznych dla klasycznego niemieszanego przepływu krzyżowoprądowego.

Uwzględnienie strat ciepła do otoczenia tylko nieznacznie komplikuje rozwiązanie i nie powoduje wydłużenia obliczeń cyfrowych.

Literatura

1. R. A. BOWMAN, A. C. MUELLER, W. M. NAGLE, *Mean Temperature Difference in Design*, Trans. ASME, 5 (1940), 283 - 294.
2. G. D. RABINOVICH, *On a Particular Case of Stationary Heat Transfer with Crossflow of Heat Agents*, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 5 (1962), 409 - 412.
3. J. SKŁADZIEŃ, *Rozkład temperatur w rekuperatorze Fielda przy krzyżowym przepływie czynników*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Energetyka, 39 (1971), 77 - 94.
4. J. SKŁADZIEŃ, *Analiza rekuperatora Fielda przy krzyżowym przepływie czynników bez wymieszania*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Energetyka, 45 (1973), 81 - 100.
5. J. SKŁADZIEŃ, *Analiza konwekcyjnego rekuperatora płelcowego z krzyżowym przepływem czynników*, Mech. Teoret. i Stos., 1 (1975), 57 - 67.
6. J. SKŁADZIEŃ, *Bestimmung der Vorwärmtemperatur im Fields-Konvektionsrekuperator und im Schlaufenrekuperator mit kreuzweisem Durchfluß der Arbeitsflüssigkeit*, Brennstoff-Wärme-Kraft, 11 (1976) 439 - 442.
7. J. SKŁADZIEŃ, *Analiza krzyżowoprądowego konwekcyjnego rekuperatora Fielda oraz płelcowego ze stratami ciepła do otoczenia*, Mech. Teoret. i Stos., 2 (1977), 265 - 274.
8. J. SKŁADZIEŃ, *Convection Three-Stream Crossflow Heat Exchangers Thermal Analysis*, I i II, Biuletyn PAN, 5 - 6 (1982), 1 - 14.

Резюме

МЕТОД ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОНВЕКЦИОННЫХ ТРЁХПОТОЧНЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ ИЗ СМЕШИВАНИЕМ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

В статье приведен теплообмен в конвекционных трёхпоточных перекрестных теплообменниках с полным смешиванием внешнего потока в поперечном разрезе. При анализе используются общепринятые предположения для конвекционных рекуператоров. Приведенные рассуждения проиллюстрированы числовым примером. В работе рассмотрены также теплообменники с потерями тепла.

S u m m a r y

THERMODYNAMICAL ANALYSIS METHOD OF THE CONVECTION THREE-STREAM
CROSSFLOW HEAT EXCHANGERS WITH MIXED FLOW OF THE OUTER AGENT

Convection three-stream cross-flow heat exchangers have been analysed in the paper in the case when the outflowing agent is entirely mixed along the cross-section normal to the flow. The usual assumptions of the theory of the convection heat exchangers have been used. The considerations have been illustrated by a numerical example. The solution for heat exchangers with heat losses has been also presented.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 maja 1986 roku.

THE APPLICATION OF CURVATURE AND CONTOUR LINES IN SCULPTURED SURFACES MACHINING ON NUMERICAL CONTROL MILLING MACHINES

KRZYSZTOF MARCINIAK
JERZY WOJCIECHOWSKI

Politechnika Warszawska

The exact sculptured surfaces machining time can be substantially reduced when one tool movement machined strips are properly distributed. Characteristic sculptured surface lines are suggested. Their picture provide sufficient information for correct trajectory design. Practical applications are discussed. Four examples are given.

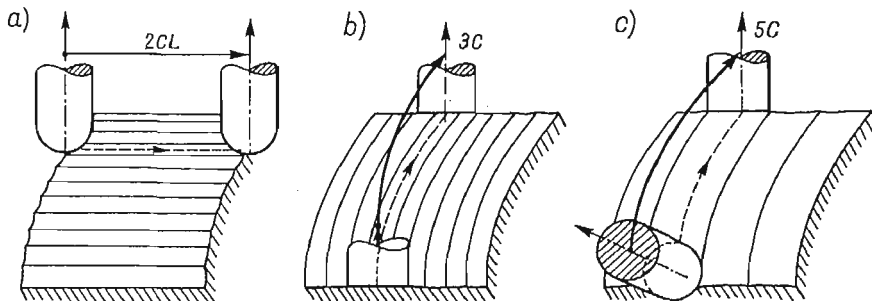


Fig. 1. Machining on milling machines type 2CL, 3C, 5C

1. Introduction

The surface regularity in the sense of slow curvature changes may be necessary because of aerodynamic and aesthetic expectations. In this paper some technology conditions leading to similar regularity demands will be described. They appear when precise sculptured surfaces face milling on numerical control milling machines is applied. In works [1] [2] fundamental connections between the local machined strip width, tool dimensions, position, and movement direction are presented. It was shown, that optimal (taking strip width as a criterion) machined strip positions are similar:

- to contour lines when 2CL milling machines are applied,
- to gradient lines when 3C milling machines are applied,
- to principal curvature lines when 5C milling machines are applied.

Interactive computer graphics methods make it possible to use the mentioned lines picture on the display as a basis for general trajectory design when programming NC milling machines. This approach allows to design a trajectory in such a way as to make the consecutive machined strips broad and not overlapping one another. The trajectory design method depends greatly on the milling machine type. In the next sections sculptured surfaces face milling on the milling machines type 2CL, 3C, and 5C will be described. The surface lines characteristic for particular machines type will be derived.

2. The face milling on 2CL machines

In this case miller moves round the surface in such a way as not to change the distance from the machine table (fig 1a). The machining accuracy depends mainly on tool shape and the difference between tool distances in two adjacent tool movements. It was shown in [1] that:

- the trajectory of the tool-surface contact point is similar to the surface contour line in practically all the cases,
- broadest machined strips are obtained when spherical end mills are applied,
- the machined strip width can be approximately described as

$$d \cong 2\sqrt{2h}$$

where h — machining tolerance;

- tool radius assumed equals 1,
- regions close to the surface ridges limit maximum tool distance difference.

3. The face milling on 3C machines

In this case the miller moves round the surface in such a way that the tool axis is constantly perpendicular to the fixed plane (usually table plane — fig. 1b). In [1] it was shown that:

- the broadest machined strips are obtained when cylindrical, flat end mill is applied, and tool-surface contact point moves approximately along gradient lines.
- the machined strip width d can be approximately described as:

$$d \cong 2\sqrt{\frac{2h}{\sin \alpha - \kappa_y}}$$

where h — machining tolerance,

- κ_y — surface normal curvature in plane tangent to tool edge at the contact point,
- α — angle between the normal to surface at the tool-surface contact point and the tool axis,
- tool radius is 1.
- the surface point cannot be machined when the curvature of the contour line drawn through this point is smaller than $1/r$, where r is tool radius.

4. The face milling on 5C machines

In this case miller moves round the surface in such a way that the direction of the tool axis may be changed (fig. 1c). In [1] it was shown that:

- the broadest machined strips are obtained when toroidal end mill is applied and tool-surface contact point moves approximately along principal curvature line. The line characterizing smaller principal curvature should be chosen. (It has been assumed that in convex surface the curvatures are negative.)
- the maximum machined strip width d can be approximately described as

$$d \cong 2 \sqrt{4 \sqrt{\frac{2h}{\Delta\kappa} - \frac{8h}{\Delta\kappa}}}$$

where $\Delta\kappa$ — principal curvatures difference in the contact point;

h — machining tolerance;

— tool radius is 1.

It should be stressed that in this case the maximum strip width is a decreasing function of principal curvatures difference.

5. Examples of trajectory design

To illustrate the use of characteristic lines, four surfaces are presented in the figures 2, 3, 4 and 5. In figures marked **a** the surfaces are presented. They are displayed by constant parameter lines. All the four pictures look like one another. In figures marked **b** Bezier characteristic points for analyzed surfaces are displayed. It is easy to observe that there are substantial differences between the shapes, however, Bezier points do not make it possible to analyze how great the influence on milling process is. Let us analyze the machining process on NC milling machines of type 2CL, 3C and 5C.

5.1. 5C face milling. In this case constant smaller principal curvature lines and constant principal curvatures difference lines are of at most importance. Constant smaller principal curvature lines (figures marked **c**) present the approximate tool movement directions when maximal machined strip width is to be obtained. Constant principal curvatures difference lines (according to point 4) make it possible to decide how the machined strip will change along surface-tool contact point trajectory (figures marked **d**). It is easy to observe in figures 2c and 3c that in case of surfaces 1 and 2 the optimal tool movements direction are clearly defined. In case of surface 1 machined strips width will be approximately constant due to the parallelism between trajectory lines in fig. 2c and constant strip width lines in fig. 2d. In figure 3d the principal curvatures difference extremum can be observed (marked with +) so in case of surface 2 machined strips width is likely to vary along the strip and reaches its extremum value in the + area. In some cases of that kind interactive machined strip arrangement should be made. A much more complex situation can be observed in cases of surfaces 3 and 4. Principal curvature lines in figures 4c and 5c are less regular and umbilic points marked with + can be observed (one in fig. 4c and two in fig. 5c). If machining time is very important due to trajectory design

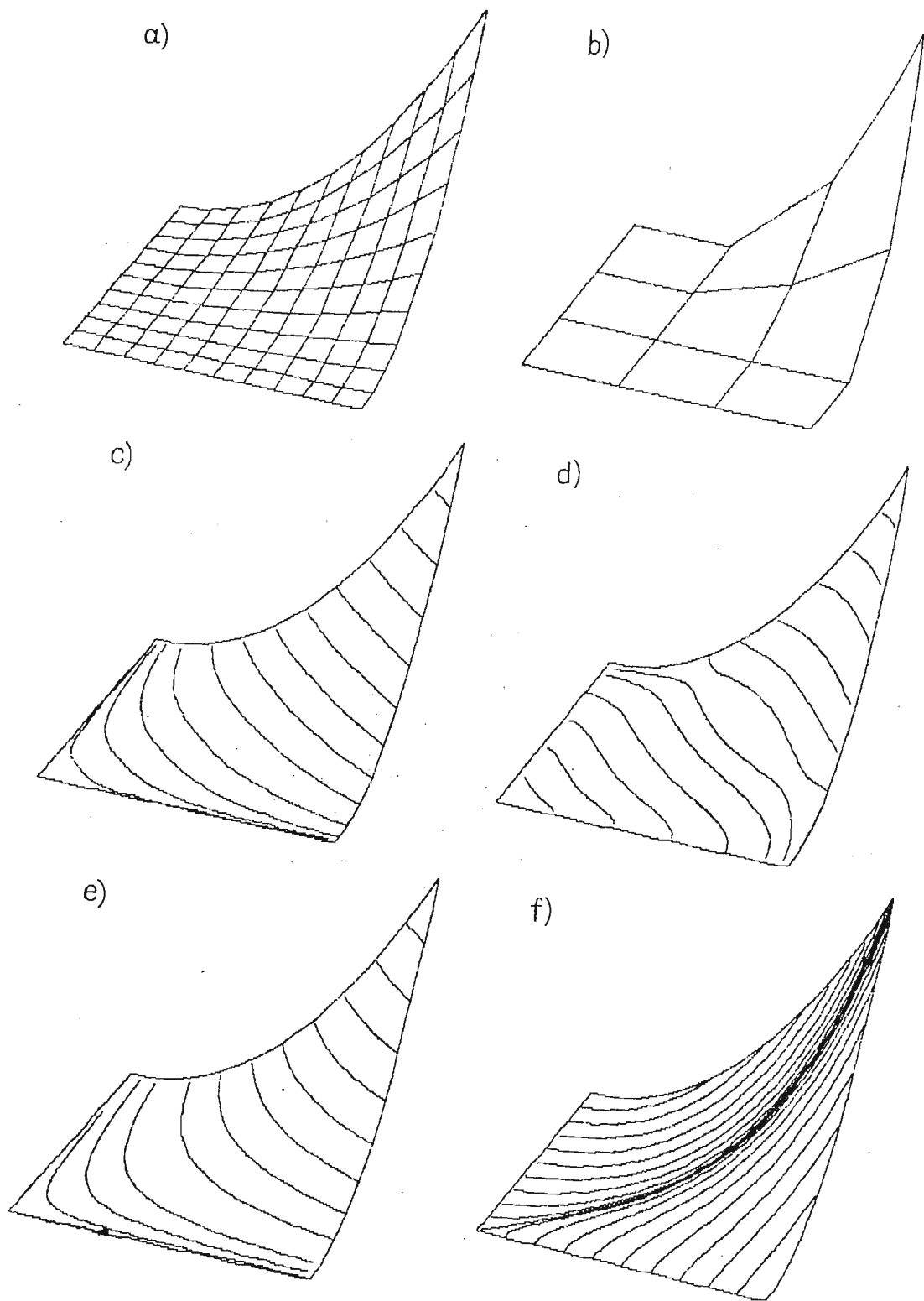


Fig. 2. Surface 1 characteristic lines

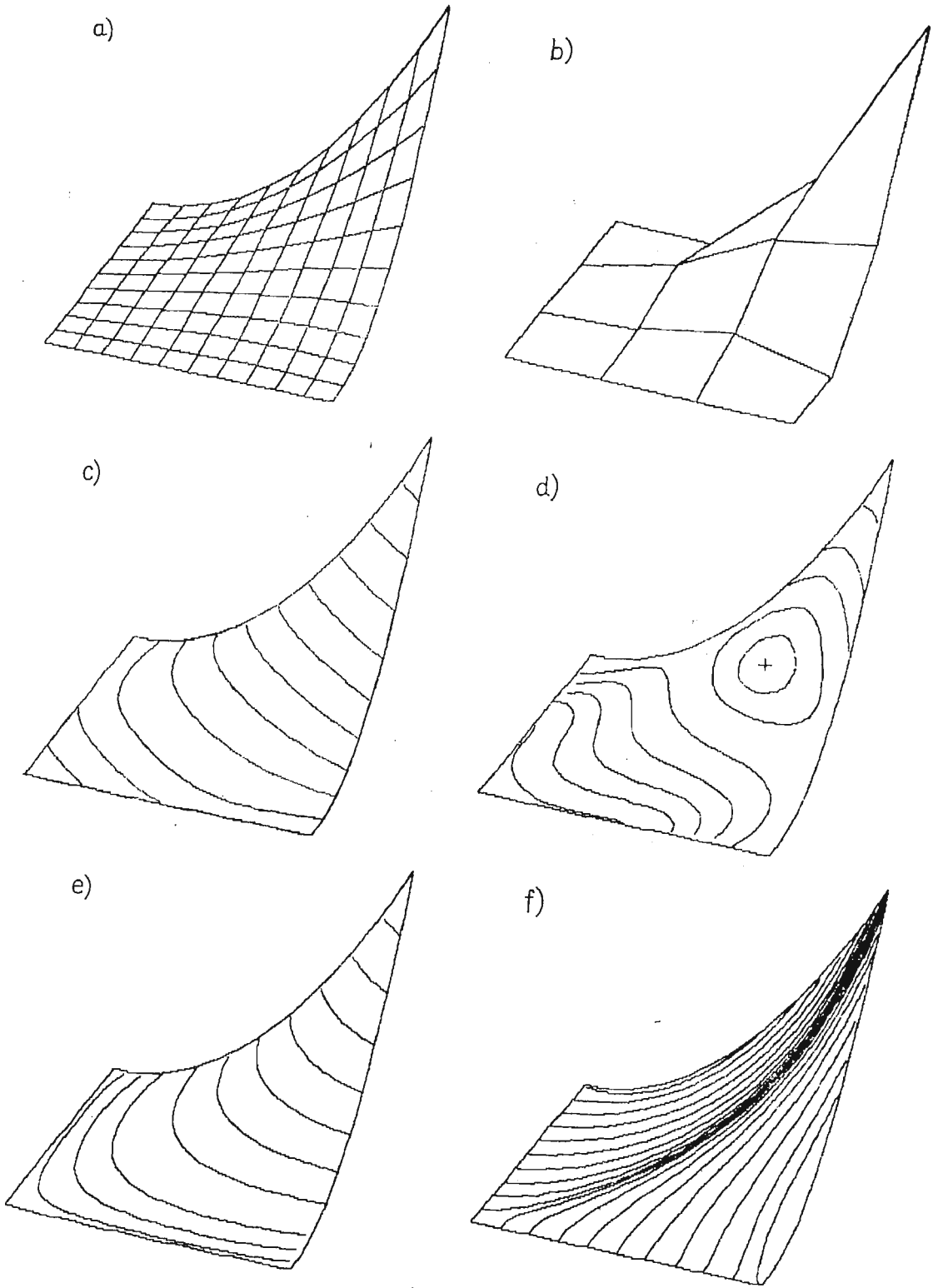


Fig. 3. Surface 2 characteristic lines

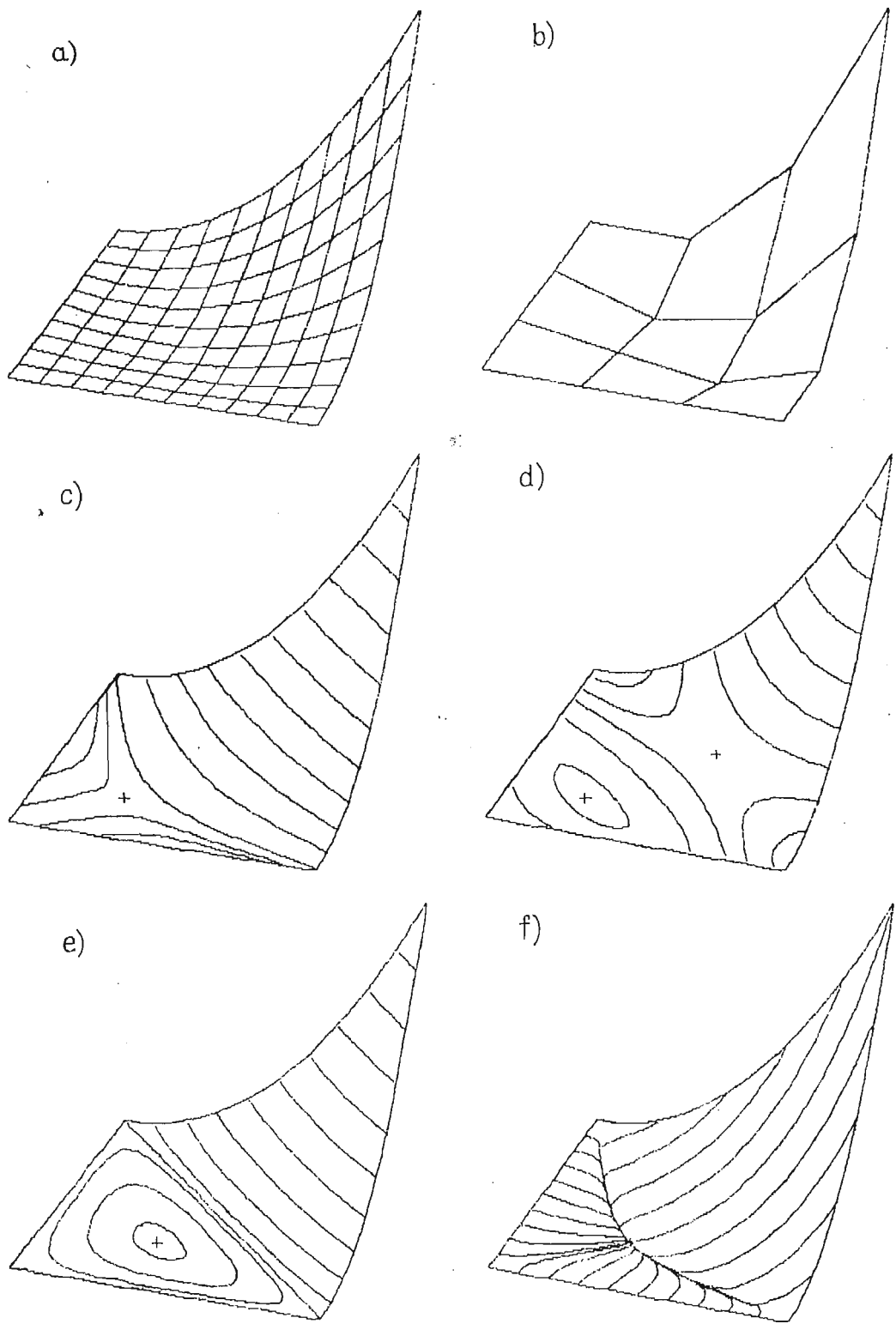


Fig. 4. Surface 3 characteristic lines

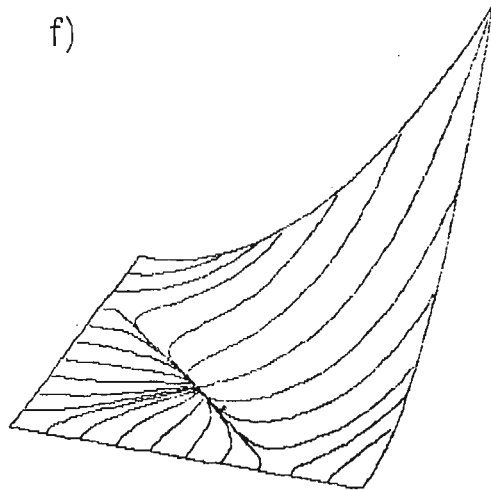
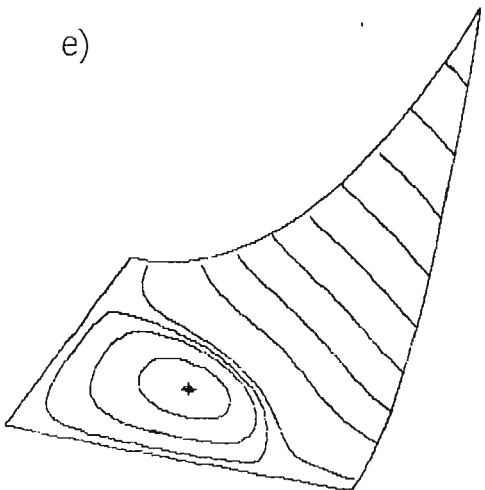
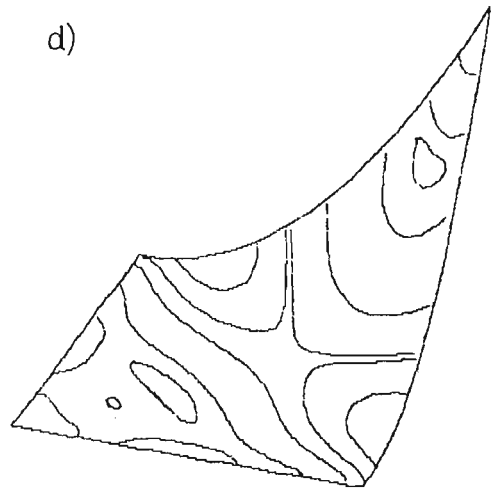
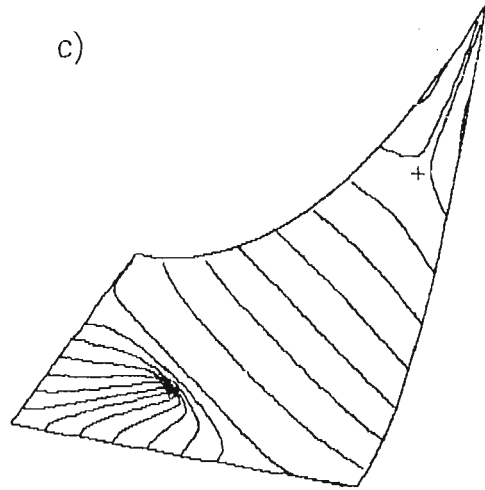
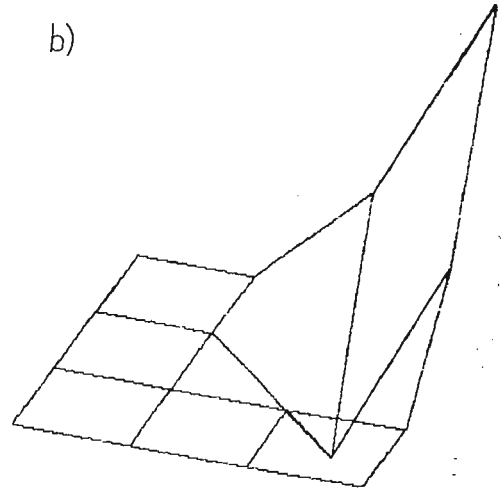
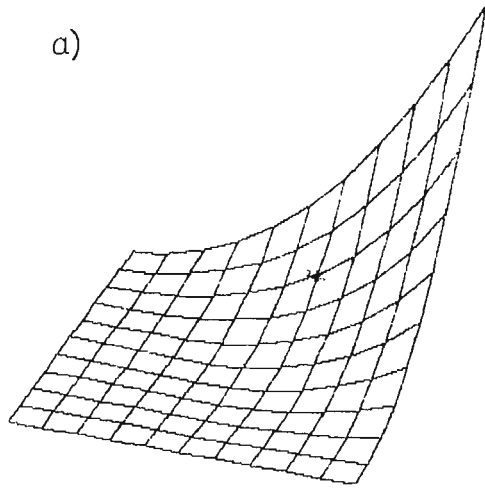


Fig. 5. Surface 4 characteristic lines

process, both surfaces should be divided into parts with similar optima machined strip directions. When observing constant principal curvatures difference lines in figures 4d and 5d machined strips width can be expected to vary substantially from point to point so, that in surface 4 case maximum strip width machining method may turn out to be quite useless. However, if applied after all interactive machined strips arrangement should be used.

5.2. 3C face milling. In this case the contour lines (figures marked e) and gradient lines (figures marked f) give most information about machining process. As it has been discussed in point 3 the maximum strip width trajectories are approximately parallel to gradient lines. In figures 2f and 3f can be observed that the programming process in case of surfaces 1 and 2 should be clear. A more complicated arrangement can be observed in case of surfaces 3 and 4. The contour lines shown in figures 4e and 5e present local surface minimum (marked with +). At that point it should be stressed that the shape and position of contour lines depend on miller axis direction. The contour lines planes are perpendicular to the tool axis direction. In both cases in the lower part of surfaces ridges originating from the minimum can be observed and trajectory design in their surroundings can be a somewhat more complicated as in the rest of the surface. Moreover the surroundings of the minimum points are unmachinable when cylindrical flat end mill is applied this being due to the undercutting conditions discussed in point 3.

All the problems with 3C machining of surfaces 3 and 4 have their origin in improper surface position relatively to the tool axis direction. If there is a possibility to place machined part on the milling machine tool in such a way as to make the minimums disappear, surfaces 3 and 4 machining will be as simple as in cases 1 and 2.

5.3. 2CL face milling. In this case contour lines (figures marked e) give most information about machining process. Gradient lines (figures marked f) can also be helpful in surface ridges regions finding. As mentioned in point 2 the tool trajectories are in this case parallel to the contour lines. In case of surfaces 1 and 2 the trajectory design process is a simple one. If machining accuracy has to be preserved (see p. 2) the ridges, regions easy to observe in figures 2f and 3f, (high density of gradient lines), should be taken into account.

In case of surfaces 3 and 4, in the surrounding of minimum, the trajectories will assume the shape of closed curves. This need some extra programming effort at the beginning and the end of cutting tool movement. The minimum point will probably be badly machined because of zero cutting speed in the lowest point of the spherical end miller. These two last disadvantages can be easily done away with, if it is possible to reposition the surface as to make the minimum point disappear.

6. Summary

Proposed methods of surface shape displaying make it possible to obtain sufficient information to program the NC milling machines. Machining process planning consist of two stages: global movements planning and local adjacent machined strip positioning. Proposed characteristic lines are particularly useful when global problems are being

solved. The local problems (machined strips overlapping) can be solved automatically by computer system itself or in more complicated cases by interactive computer graphics tools.

Bibliography

1. K. MARCINIAK, *Podstawy geometryczne projektowania obróbki powierzchni krzywoliniowych na frezarkach sterowanych numerycznie*, Warszawa WPW, 1985.
2. K. MARCINIAK, B. PUTZ, J. WOJCIECHOWSKI, *Opracowanie metod korygowania kształtu powierzchni. Sprawozdanie z realizacji zadania badawczego wykonanego w IAP PW, Warszawa 1985.*

Резюме

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ И УРОВНЕЙ ДЛЯ ОБРАБОТКИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ФРЕЗЕРНЫХ СТАНКАХ, УПРАВЛЯЕМЫХ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Правильное размещение поясов обработки при отделочной фрезерной обработке криволинейных поверхностей может значительно сократить время обработки. В работе предлагаются характерные линии криволинейных поверхностей, образ которых является источником необходимого числа данных для правильного проектирования траектории инструмента. Обсуждается практическая пригодность данного типа образов поверхностей, а также приводятся практические примеры.

Streszczenie

ZASTOSOWANIE LINII KRZYWIZNOWYCH I KONTUROWYCH PRZY OBRÓBCE FREZOWANIEM POWIERZCHNI KRZYWOLINIOWYCH DLA OBRABIAREK STEROWANYCH NUMERYCZNIE

Dokładną obróbkę frezowaniem dużych powierzchni krzywoliniowych można znacznie skrócić przez właściwe rozplanowanie pasów obrobionych jednym ruchem narzędzia. Sposób obróbki zależy od typu obrabiarki (2CL, 3C, 5C). Dla każdego z typów wyróżniono najkorzystniejszy kierunek ruchu narzędzia. W każdym z przypadków zaproponowano również linie charakterystyczne powierzchni, których rysunek daje wystarczającą ilość informacji do zaprojektowania trajektorii narzędzia. W przypadku obrabiarek typu 2CL i 3C są to poziomicie i linie gradientowe, zaś w przypadku typu 5C linie krzywiznowe i linie stałe różnicy krzywizn głównych. Praktyczną przydatność linii charakterystycznych przedstawiono na czterech przykładach.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 marca 1986 roku.

PLASTIC STRAIN ENERGY UNDER CYCLIC MULTIAXIAL STATES OF STRESS

KRZYSZTOF GOŁOŚ

Politechnika Warszawska

In this paper the cyclic plastic strain energy density under multiaxial states of stress is analysed. A relationship is proposed which can be used to determine the plastic strain energy per cycle for non — Masing material for various stress range. In the investigation the generalized constitutive relations cyclic stress — strain for non — Masing material are used. The presented model based on general and basic principles and significant constants can be obtained from appropriate and common tests. Predictions of the proposed method with the experimental data of biaxial cyclic loading has shown good agreement.

1. Introduction

In total strain — controlled experiments it has been observed that after some number of cycles, usually less than half — life duration the steady state of the material is achieved. For practical purposes, it may reasonably be assumed that the steady hysteresis loop does not vary with cycles [1 - 4]. Therefore, the idea of relating fatigue life to the plastic strain energy density (area of hysteresis loop) during a load cycle has been proposed. The work of Feltner and Morrow [5] need mentioning as the first significant contribution in which they have clearly pointed out the significance of plastic strain energy in the analysis of fatigue properties of metals.

Halford [6] presented the relationship for plastic strain energy based on the cyclic stress — strain curve of the material. Esin and Jones [7] introduced the concept of statistical functions characterizing the micro — inhomogeneity of stress and strains existing in a metal and used it to express the hysteresis energy. Jhansale and Topper [8] proposed an approach for describing the loop shapes of a non — Masing material. Abel and Muri [9] suggested that the hysteresis loop closure failure may be an essential prerequisite for the fatigue — crack initiation. The method of an analytical description of the steady hysteresis loops and cyclic strain curve from the test of one specimen only, was discussed in [10].

It is generally agreed, that plastic strain energy plays an important role in the damage process. The plastic strain energy density depends on the kind and range of the cyclic loading. The significance of the energy approach is in ability to unify microscopic and

macroscopic testing data and to define multiaxial criteria. All, of there above mentioned investigations consider only the uniaxial state of stress. The problem of plastic strain energy in multiaxial cyclic loading was considered in some works. Damali and Esin [11] discussed the extension of Esin's statistical formulation to the case of biaxial fatigue under proportional stressing. Garud [12] considered the plastic cyclic strain energy under complex loading based on a „new hardening rule”. Lately, Lefebvre, Neal and Ellyin [13] according to I_2 (von Mises) theory presented the relation for the plastic energy dissipated during proportional loading.

It is objective of this paper to present the relationship, which can be used to determine plastic strain energy for both, Masing and non — Masing material under cyclic multiaxial states of stress. In the investigations, the general constitutive equations cyclic stress — strain [14] are used.

The significant constants in the proposed relationship can be obtained from appropriate and common tests.

2. Cyclic plastic strain energy

During strain fatigue, energy is dissipated because of plastic deformation. The cyclic plastic strain energy dissipated per unit volume during a given loading cycle for an element subjected to a cyclically varying stress and strain history $\Delta\sigma_{ij}$ and $\Delta\varepsilon_{ij}$ is:

$$\Delta W^p = \oint \Delta\sigma_{ij} d(\Delta\varepsilon_{ij}^p), \quad (1)$$

where $\Delta\varepsilon_{ij}^p$ is the plastic strain range. Because of incompressibility of plastic deformation (i.e. $d(\Delta\varepsilon_{kk}) = 0$, the foregoing relation can also be expressed as follows:

$$\Delta W^p = \oint \Delta S_{ij} d(\Delta\varepsilon_{ij}^p), \quad (2)$$

where $\Delta S_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - (\delta_{ij}\Delta\sigma_{kk})/3$ is the deviatoric stress tensor.

The cyclic uniaxial stress — strain curve is generally obtained by plotting the stress corresponding to the positive (tensive) peaks of the hysteresis loop at half — life for various strain ranges. A widely used form is:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K}\right)^{1/n'}, \quad (3)$$

where $\Delta\sigma/2$, $\Delta\varepsilon/2$ are the stress and strain amplitude, respectively, E is the modulus of elasticity, K is a strength coefficient, and n' is the cyclic strain hardening exponent. A material is said to exhibit a Masing description when the branches of hysteresis loops can be described by the equation (3) magnified by a factor of two, i.e.:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma}{2K}\right)^{1/n'}. \quad (4)$$

The origin of the coordinate system in this case is transferred to the compressive tip of the hysteresis loop.

Generally, if the origin of the coordinate axes is transformed to the tip of the negative

(compressive) cycle, the positive branches of the half — life hysteresis loops do not fall on a monotonically increasing unique curve (non — Masing material). This observation is rather significant and it affects the manner in which the plastic strain energy per cycle is to be determined. Jhansale and Topper [8] proposed an approach for describing the loop shapes of non — Masing material. This approach was analysed in [2, 3] and is adopted herein. A „master” curve different from that of the cyclic curve is defined as one geometrically similar to the matched upper branches of the hysteresis loops with minimum proportional range.

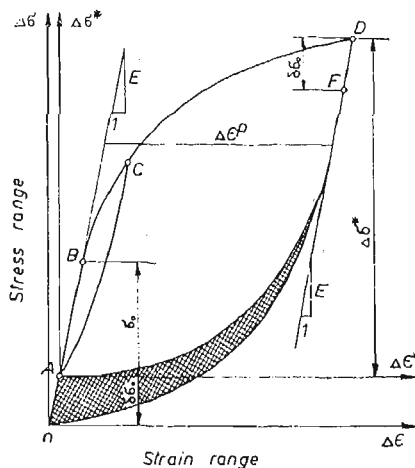


Fig. 1. Hysteresis loop for a non — Masing material

In the Figure 1 the uniaxial hysteresis loop (ABCA) for the „minimum” proportional range, σ_0 and that of (OABCDFO) with a bigger proportional range are presented. The equation of the „master” curve ABCD, where the origin A corresponds to the lower tip of the minimum proportional range hysteresis loop is given by [3]:

$$\Delta \varepsilon^* = \frac{\Delta \sigma^*}{E} + 2 \left(\frac{\Delta \sigma^*}{2K^*} \right)^{1/n^*} \quad (5)$$

The increase in the proportional stress, $\delta\sigma_0$, can be obtained from:

$$\delta\sigma_0 = \Delta\sigma - \Delta\sigma^* = \Delta\sigma - 2K^* (\Delta\varepsilon^p/2)^{n^*} \quad (6)$$

Then, the plastic strain energy density — the area of the hysteresis loop OABCDFO may be expressed as:

$$\Delta W^p = \frac{1-n^*}{1+n^*} (\Delta\sigma - \delta\sigma_0) \Delta\varepsilon^p + \delta\sigma_0 \Delta\varepsilon^p \quad (7)$$

For Masing material $\delta\sigma_0 = 0$, and equation (7) reduced to [6]

$$\Delta W^p = \frac{1-n'}{1+n'} \Delta\sigma \Delta\varepsilon^p \quad (8)$$

For non — Masing material under cyclic multiaxial loading the relation between stress

and strain components is given by [14]:

$$\frac{\Delta \varepsilon_{ij}^*}{2} = \frac{1+\nu}{2E} \Delta \sigma_{ij}^* - \frac{\nu}{2E} \delta_{ij} \Delta \sigma_{kk}^* + \frac{3}{2} \frac{(\overline{\Delta \sigma^*})^{\frac{1-n^*}{n^*}}}{(2K^*)^{1/n^*}} \Delta S_{ij}^*, \quad (9)$$

where $\overline{\Delta \sigma^*} = (3/2 \Delta S_{ij}^* \Delta S_{ij}^*)^{1/2}$ is the effective range stress. The deviatoric stress tensor ΔS_{ij}^* is calculated as:

$$\Delta S_{ij}^* = \Delta \sigma_{ij}^* - \delta_{ij} (\Delta \sigma_{kk}^*)/3. \quad (10)$$

The components of stress tensor $\Delta \sigma_{ij}^*$ may be estimated from the difference between $\Delta \sigma_{ij}$ and the increase in the proportional stress, $\overline{\delta \sigma}_0$. The increase in proportional stress, $\overline{\delta \sigma}_0$ can be obtained as:

$$\overline{\delta \sigma}_0 \cong \frac{\overline{\Delta \sigma}}{2} - \sigma_0, \quad (11)$$

where $\overline{\Delta \sigma} = (3/2 \Delta S_{ij} \Delta S_{ij})^{1/2}$, and σ_0 is the minimum proportional stress for uniaxial case. According to the I_2 theory the equivalent plastic strain can be defined as follows:

$$\overline{\Delta \varepsilon}^p = (2/3 \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p)^{1/2}. \quad (12)$$

It is generally assumed that the effective cyclic stress — strain curve for multiaxial proportional loading takes the form analogous to equation (5), (see Fig. 2).

$$\overline{\Delta \varepsilon}^p = 2 \left(\frac{\overline{\Delta \sigma^*}}{2K^*} \right)^{1/n^*}. \quad (13)$$

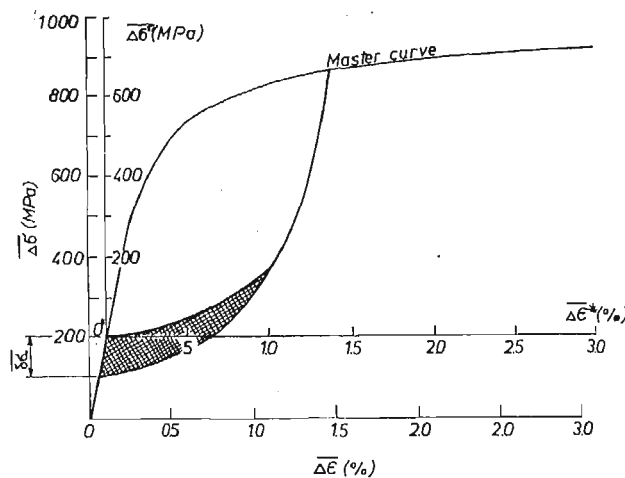


Fig. 2. A cyclic stress — strain relation for a A-516 Gr. 70 carbon steel

Therefore, the plastic strain energy for non — Masing material under multiaxial loading can be expressed by following equation:

$$\Delta W^p = \frac{1-n^*}{1+n^*} \overline{\Delta \sigma^*} \overline{\Delta \varepsilon}^p + \overline{\delta \sigma}_0 \overline{\Delta \varepsilon}^p. \quad (14)$$

The above equation relates the plastic strain energy density under multiaxial loading with the components of the strain and the stress tensors. The softening or hardening of the material due to cyclic loading is included through the equation (9).

3. Comparison with experimental data

To examine the applicability of the proposed criterion we would require data on uniaxial cyclic — strain curves and amplitudes of strain and stress for multiaxial cyclic loading. The test results for A-516 Gr. 70 low alloy carbon steel presented in [2, 15] enable us to make relative comparison. This material as shown in [2, 3] does not follow the Masing hypothesis.

Fully reversed strain — controlled tests at six strain ratios ($\rho = \Delta\epsilon_t/\Delta\epsilon_a$) have been carried on thin — walled tubular specimens using a hydraulic servo — controlled testing system. Specimens were cyclically loading in the axial direction while pressures were applied to the inside and outside alternatively during each half cycle. The strain ratio, ρ , was kept constant during a given test. Figure 2 shown a master curve under uniaxial stress conditions. The strength coefficient K^* and the hardening exponent n^* of the Eq. (13) evaluated by a least — squares technique were:

$$K^* = 629.8 \text{ MPa} \quad \text{and} \quad n^* = 0.144. \quad (15)$$

The plastic components of strain tensor based on relationship (9) for the plane stress condition may be expressed as:

$$\Delta\epsilon_x^{p*} = 2 \frac{(\overline{\Delta\sigma^*})^{\frac{1-n^*}{n^*}}}{(2K^*)^{\frac{1}{n^*}}} \left(\Delta\sigma_x^* - \frac{1}{2} \Delta\sigma_y^* \right), \quad (16a)$$

$$\Delta\epsilon_y^{p*} = 2 \frac{(\overline{\Delta\sigma^*})^{\frac{1-n^*}{n^*}}}{(2K^*)^{\frac{1}{n^*}}} \left(\Delta\sigma_y^* - \frac{1}{2} \Delta\sigma_x^* \right), \quad (16b)$$

where

$$\overline{\Delta\sigma^*} = [(\Delta\sigma_x^*)^2 - \Delta\sigma_x^* \Delta\sigma_y^* + (\Delta\sigma_y^*)^2]^{1/2}. \quad (16c)$$

The minimum proportional range σ_0 for the A-516 Gr. 70 carbon steel is $\sigma_0 \cong 180 \text{ MPa}$ [3]. The predicted values of the plastic strain energy are compared with the experimental data for two strain ratios, $\rho = 0$ and 1 in Fig. 3. It is seen that the correlation is rather good. Note that the required constants in Eq. (14), were obtained from the uniaxial test results.

4. Conclusions

A method for calculation of the cyclic plastic strain energy density under multiaxial loading has been presented. A relationship is derived which can be used to determine plastic strain energy density for a non — Masing material for various stress ranges. The Masing

type of response also can be obtained as a particular case of the present model. The material constants used in the calculations can be obtained from the uniaxial test data.

The predictions of the proposed model are compared with the biaxial test data of A-516 Gr. 70 carbon steel, and the agreement is found to be good.

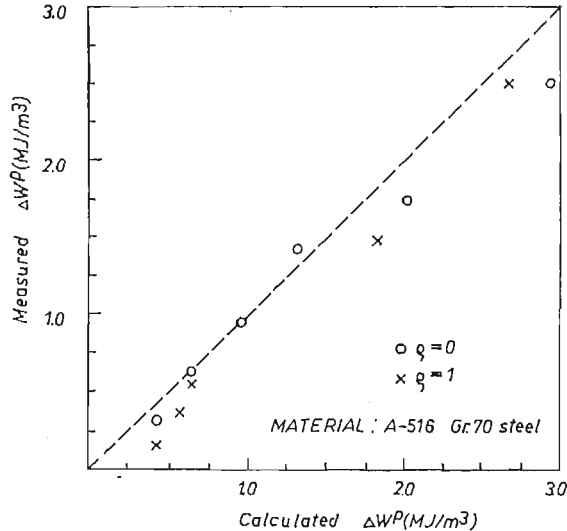


Fig. 3. Comparison between predicted and experimental data [15] for strain ratios 0 and 1

References

1. S. KOCAŃDA, *Zmęczeniowe zniszczenie metali*, WNT, Warszawa 1985.
2. D. LEFEBVRE, F. ELLYIN, *Cyclic Response and Inelastic Strain Energy in Low Cycle Fatigue*, International Journal of Fatigue, Vol. 6, No 1, 1984, 9 - 15.
3. F. ELLYIN, D. KUJAWSKI, *Plastic Strain Energy in Fatigue Failure*, ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 106, No 4, 1984, 342 - 347.
4. P. P. BENHAN, *Axial — Load and Strain — Cycling Fatigue of Copper at Low Endurance*, The Institute of Metals, Vol. 89, 1961, 328 - 338.
5. C. E. FELTNER, J. D. MORROW, *Microplastic Strain Hysteresis Energy as a Criterion for Fatigue Fracture*, ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 83, Mar. 1961, 5 - 22.
6. G. R. HALFORD, *The Energy Required for Fatigue*, Journal of Materials, Vol. 1, No 1, Mar. 1966, 3-18.
7. A. ESIN, W. J. JONES, W. J. DERRICK, *A Theory of Fatigue Based on the Microstructural Accumulation of Strain Energy*, Nuclear Eng. and Design, Vol. 4, 1966, 292 - 298.
8. H. R. JHANSALE, T. H. TOPPER, *Engineering Analysis of the Inelastic Stress Response of a Structural Metal under Variable Cyclic Strains*, ASTM STP-519, American Society of Testing and Materials, 1973, 246 - 270.
9. A. ABEL H. MURI, *Mechanical Hysteresis and the Initial Stage of Fatigue*, Metal Science, Vol. 9, 1979, 459 - 463.
10. C. GOSS, S. KOCAŃDA, *Experimental and analytical studies on high — strength steels within the range, of low — cycle fatigue*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, No 3, 1979, 167 - 184. (in Polish).
11. A. DAMALI, A. ESIN, *Micro Plastic Strain Energy Criterion Applied to Reversed Biaxial Fatigue*, Proc. 4th Int. Conference on Fracture, Waterloo, 1977, Vol. 2, 1201 - 1206.
12. Y. S. GARUD, *A New Approach to the Evaluation of Fatigue under Multi-Axial Loading*, Methods for predicting Material Life in Fatigue, ASME, 1979, 247 - 258.

13. D. LEFEBVRE, K. W. NEALE, F. ELLYIN, *A criterion for Low-cycle Fatigue Failure under Biaxial States of Stress*, ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 103, No 1, 1981, 1 - 6.
14. F. ELLYIN, K. GOŁOŚ, *A Constitutive Relation for Multiaxial Stress States under Cyclic Loading*, Proc. International Conference on Constitutive Laws, Tucson, 1986.
15. D. F. LEFEBVRE, *Hydrostatic Effect on the Life Prediction in Biaxial Low-Cycle Fatigue*, Proc. Second International Conference on Biaxial Fatigue, Sheffield, 1985.

Р е з ю м е

ЭНЕРГИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО
ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

В работе представлено метод оценки энергии диссипации в цикле в условиях сложного циклического нагружения. Предлагаемый метод даёт возможность расчёта энергии пластической деформации для материалов описываемых моделью Мазинга, а также таких, которые неподчиняются этой модели. Преимуществом метода есть то, что коэффициенты использованные в расчётах можно получить на основе одноосных экспериментальных результатов.

Результаты расчёта циклической энергии пластической деформации полученные на основе представленного метода были сравнены с данными экспериментальными в условиях плоского напряженного состояния.

Streszczenie

ENERGIA ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNEGO PRZY WIELOOSIOWYCH OBCIĄŻENIACH
CYKLICZNIE ZMIENNYCH

W pracy przedstawiono metodę obliczania jednostkowej energii dysypacji przy obciążeniach cyklicznie zmiennych w warunkach złożonego stanu obciążenia. Przedstawiona metoda może być stosowana do obliczania energii odkształcenia plastycznego zarówno dla materiałów podlegających opisowi modelem Masinga i nie podlegających temu opisowi. Zaletą przedstawionej metody jest to, że stałe materiałowe zastosowane w obliczeniach mogą być otrzymane na podstawie wyników badań zagadnień jednoosiowych.

Wyniki obliczeń jednostkowej energii odkształcenia plastycznego uzyskane przy zastosowaniu przedstawionej metody zostały dla płaskiego stanu naprężeń porównane z odpowiednimi wynikami uzyskanymi z badań doświadczalnych.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 października 1986 roku.

SKRĘPOWANE SKRĘCANIE PRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW O BISYMETRYCZNYCH, ZWARTYCH PRZEKROJACH

KRYSZYNA MAZUR-ŚNIADY

Politechnika Wroclawska

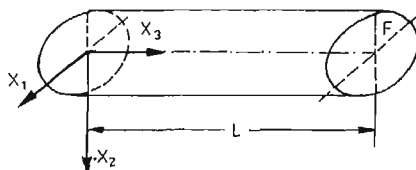
Przedstawiona w niniejszej pracy techniczna teoria skrępowanego skręcania pryzmatycznych prętów o bisymetrycznych, zwartych przekrojach została wyprowadzona w ramach mechaniki analitycznej kontinuum materialnego Cz. Woźniaka [1].

Znane teorie skręcania skrępowanego prętów o zwartych przekrojach bazowały na klasycznej teorii sprężystości uzupełnionej dodatkowymi hipotezami, ograniczając się z konieczności do konkretnych kształtów przekroju poprzecznego (np.: elipsy [2], prostokąta [3]). Szczególną trudność sprawiała realizacja sztywnego utwierdzenia całego przekroju podporowego, na co zwracał uwagę W. Burzyński [4].

Sposób podejścia do zagadnienia stosowany w niniejszej pracy jest oryginalny, otrzymana teoria jest wewnątrznie niesprzeczna. Pojęcie więzów pozwala na przyjęcie zupełnie dowolnych warunków brzegowych, a ponadto pozwala na weryfikację otrzymanych wyników.

1. Wyprowadzenie równań¹⁾

Przedmiotem rozważań jest pręt, zajmujący w konfiguracji odniesienia obszar $\Omega = F \times P$, gdzie F jest jednospójnym obszarem na płaszczyźnie OX_1X_2 , ograniczonym krzywą odcinkami gładką, symetrycznym względem osi X_1 i X_2 , a P jest odcinkiem $\langle 0, L \rangle$ osi X_3 kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych (rys. 1).



Rys. 1.

¹⁾ Wskaźniki greckie α, β przebiegają ciąg 1, 2, wskaźniki łacińskie i, j, m przebiegają ciąg 1, 2, 3. Obowiązuje umowa sumacyjna względem wszystkich wskaźników. Przecinek poprzedzający wskaźnik oznacza pochodną cząstkową względem odpowiedniej współrzędnej materialnej, kropka nad symbolem oznacza pochodną względem czasu. Kropka między symbolami oznacza iloczyn skalarowy wektorów i macierzy, natomiast mnożenie macierzy przez macierz i macierzy przez wektor zapisuje się bez użycia znaku działania.

Pręt jest utwierdzony w przekroju $X_3 = 0$.

Gęstość masy pręta oznacza się $\rho = \rho(X)$, pole zewnętrznych obciążeń masowych $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, zaś pole zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

Równania ogólnej teorii skręcania prostych pryzmatycznych prętów wyprowadzone na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1] przedstawiono w [5].

Teoria ta opiera się na założeniu nieodkształcalności rzutów przekrojów poprzecznych pręta na płaszczyzny prostopadłe do osi pręta, co realizują więzy wewnętrzne narzucone na funkcję deformacji $\chi(X, t)$:

$$\chi_{,\alpha}^m \chi_{m,\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.1)$$

$$\text{gdzie: } \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{dla } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Wyrażając funkcję deformacji za pomocą wektora przemieszczenia $\mathbf{u} = \chi - X$, otrzymuje się po linearyzacji i scałkowaniu:

$$\begin{aligned} u_1 &= \psi_1 - \varphi X_2, \\ u_2 &= \psi_2 + \varphi X_1, \\ u_3 &= \zeta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdzie: $\varphi = \varphi(X_3, t)$, $\psi_\alpha = \psi_\alpha(X_3, t)$, $\zeta = \zeta(X_1, X_2, X_3, t)$ są dowolnymi, niezależnymi, różniczkowalnymi funkcjami wszystkich argumentów, pełniącymi rolę współrzędnych uogólnionych. Funkcja φ jest kątem obrotu, ψ_α są przesunięciami rzutu przekroju pręta na płaszczyznę OX_1X_2 , funkcja ζ opisuje spaczenie przekroju. Dla prostego, pryzmatycznego pręta zasadę idealności więzów [1] można napisać w postaci:

$$\int_0^L \left[\int_{\partial F} \mathbf{s} \cdot \delta \chi d(\partial F) + \int_F \rho \mathbf{r} \cdot \delta \chi dF \right] dX_3 + \left[\int_F \mathbf{s} \cdot \delta \chi dF \right] \Big|_{X_3=0}^{X_3=L} = 0, \quad (1.3)$$

gdzie \mathbf{s} oznacza brzegowe, natomiast \mathbf{r} masowe siły reakcji więzów. Eliminując z (1.3) reakcje więzów za pomocą równań ruchu

$$\text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{r} = \rho \ddot{\chi}, \quad (1.4)$$

(gdzie \mathbf{T} jest pierwszym tensorem ekstra naprężenia Pioli-Kirchhoffa i wyraża reakcję materiału ciała na stan odkształcenia) oraz warunków brzegowych:

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{p} + \mathbf{s}, \quad (1.5)$$

(gdzie \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem zewnętrznym normalnym do $\partial\Omega$) oraz podstawiając składowe przemieszczeń wirtualnych (z uwzględnieniem (1.2)) otrzymano w [5] równania ruchu i warunki brzegowe dla współrzędnych uogólnionych.

W pracy [6] otrzymano równania teorii skręcania skrępowanego prętów o zwartych przekrojach poprzez narzucenie na ruch pręta opisany w [5] dodatkowych więzów wewnętrznych i warunków brzegowych.

W niniejszej pracy zawężamy rozważania, ograniczając je do prętów o bisymetrycznych przekrojach poprzecznych. Dodatkowe więzy wewnętrzne, narzucone na funkcję spaczenia przekroju przyjmuje się w postaci:

$$\zeta - \varepsilon X_1 X_2 = 0, \quad (1.6)$$

gdzie $\varepsilon = \varepsilon(X_3, t)$ jest nową współrzędną uogólnioną, określającą stopień skrępowania skręcania wzdłuż długości pręta.

Utwierdzenie pręta uniemożliwia przemieszczenia punktów przekroju $X_3 = 0$ (przekrój podporowy nie paczy się, nie wykonuje obrotu i nie przesuwa się w płaszczyźnie OX_1X_2), co realizują geometryczne więzy brzegowe

$$\begin{aligned}\varepsilon(0, t) &= 0, \\ \varphi(0, t) &= 0, \\ \psi_\alpha(0, t) &= 0.\end{aligned}\tag{1.7}$$

W wyniku wprowadzenia dodatkowych więzów (1.6) i (1.7) powstają dodatkowe siły reakcji więzów, które analogicznie jak w pracy [3], wprowadza się do równań ruchu ((2.1) w [5]):

$$\begin{aligned}T_{,j}^{3j} + \varrho b_3 + R_3 &= \varrho \ddot{\chi}_3, \\ Q_{\alpha, 3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F \varrho b_\alpha dF + R_{\varphi_\alpha} &= \int_F \ddot{\chi}_\alpha dF, \\ M_{3, 3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F \varrho (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF + R_\varphi &= \int_F \varrho (\chi_2 X_1 - \chi_1 X_2) dF,\end{aligned}\tag{1.8}$$

oraz do warunków brzegowych ((2.3) w [5]):

$$\begin{aligned}T^{3\alpha} n_\alpha - p_3 &= \overset{\circ}{S}_3 && \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ T^{33} n_3 - p_3 &= S_3 && \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ Q_\alpha n_\alpha - \int_F p^\alpha dF &= S_{\varphi_\alpha} && \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ M_3 n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= S_\varphi && \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L,\end{aligned}\tag{1.9}$$

gdzie $Q_\alpha \equiv \int_F T^{\alpha 3} dF$, $M_3 \equiv \int_F (T^{23} X_1 - T^{13} X_2) dF$.

Następnie korzysta się z zasady idealności dla więzów dodatkowych:

$$\begin{aligned}\int_0^L \left\{ \int_{\partial F} \overset{\circ}{S}_3 \delta \zeta d(\partial F) + \int_F R_3 \delta \zeta dF + R_{\varphi_1} \delta \psi_1 + R_{\varphi_2} \delta \psi_2 + R_\varphi \delta \varphi \right\} dX_3 + \\ + \left[\int_F S_3 \delta \zeta dF + S_{\varphi_1} \delta \psi_1 + S_{\varphi_2} \delta \psi_2 + S_\varphi \delta \varphi \right] \Big|_{X_3=0}^{X_3=L} = 0\end{aligned}\tag{1.10}$$

Składowe przemieszczeń wirtualnych po uwzględnieniu (1.2) i (1.6) przybierają postać:

$$\begin{aligned}\delta \chi_1 &= -X_2 \delta \varphi + \delta \psi_1, \\ \delta \chi_2 &= X_1 \delta \varphi + \delta \psi_2, \\ \delta \chi_3 &= X_1 X_2 \delta \varepsilon.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Eliminując z (1.10) dodatkowe siły reakcji więzów za pomocą (1.8) i (1.9) oraz stosując lemat du Bois-Reymonda i twierdzenie o divergencji otrzymuje się następujący układ równań ruchu

$$\begin{aligned}
& \int_F [T_{,3}^{33} X_1 X_2 - T^{3\alpha} (X_1 X_2)_{, \alpha}] dF + \int_{\partial F} p_3 X_1 X_2 d(\partial F) + \\
& + \int_F \varrho b_3 X_1 X_2 dF = \int_F \varrho \ddot{X}_1^2 X_2^2 dF, \\
& \int_F T_{,3}^{13} dF + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \int_F \varrho b_1 dF = \int_F \varrho (\dot{\psi}_1 - \ddot{\psi} X_2) dF, \\
& \int_F T_{,3}^{23} dF + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \int_F \varrho b_2 dF = \int_F \varrho (\dot{\psi}_2 + \ddot{\psi} X_1) dF, \\
& \int_F (T_{,3}^{23} X_1 - T_{,3}^{13} X_2) dF + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \\
& + \int_F \varrho (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF = \int_F \varrho [\dot{\psi}_2 X_1 - \dot{\psi}_1 X_2 + \ddot{\psi} (X_1^2 + X_2^2)] dF,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

oraz warunki brzegowe dla $X_3 = 0$ i $X_3 = L$:

$$\begin{aligned}
& \int_F (T^{33} n_3 - p_3) X_1 X_2 dF = 0, \\
& \int_F T^{\alpha 3} dF n_3 - \int_F p_\alpha dF = 0, \\
& \int_F (T^{23} X_1 - T^{13} X_2) dF n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF = 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

W dalszym ciągu ogranicza się rozważania do jednorodnych, izotropowych materiałów, dla których:

$$\begin{aligned}
T^{11} = T^{22} &= C^{1133} \zeta_{,3} = \lambda X_1 X_2 \varepsilon_{,3}, \\
T^{12} = T^{21} &= C^{1233} \zeta_{,3} = 0, \\
T^{13} = T^{31} &= C^{1313} (\zeta_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3} X_2) = \mu (X_2 \varepsilon + \psi_{1,3} - X_2 \varphi_{,3}), \\
T^{23} = T^{32} &= C^{2323} (\zeta_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1) = \mu (X_1 \varepsilon + \psi_{2,3} + X_1 \varphi_{,3}), \\
T^{33} &= C^{3333} \zeta_{,3} = (\lambda + 2\mu) X_1 X_2 \varepsilon_{,3}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Podstawiając (1.14) do (1.12) otrzymuje się układ czterech równań różniczkowych dla czterech współrzędnych uogólnionych:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) I \varepsilon_{,33} - \mu I_0 \varepsilon - \mu I_s \varphi_{,3} + \int_{\partial F} p_3 X_1 X_2 d(\partial F) + \varrho \int_F b_3 X_1 X_2 dF &= \varrho I \ddot{\varepsilon}, \\
\mu I_s \varepsilon_{,3} + \mu I_0 \varphi_{,33} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \varrho \int_F (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF &= \varrho I_0 \ddot{\varphi}, \\
\mu F \psi_{\alpha,33} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \varrho \int_F b_\alpha dF &= \varrho \ddot{\psi}_\alpha F,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

natomiast po podstawieniu do (1.13) otrzymuje się warunki brzegowe dla $X_3 = 0$ i $X_3 = L$:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu)I\varepsilon_{,3}n_3 - \int_F p_3 X_1 X_2 dF &= 0, \\
 \mu(I_s \varepsilon + I_0 \varphi_{,3})n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dE &= 0, \\
 \mu F \psi_{\alpha,3} n_3 - \int_F p_1 dF &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

gdzie $I_1 = \int_F X_2^2 dF$ i $I_2 = \int_F X_1^2 dF$ są głównymi, centralnymi momentami bezwładności przekroju, $I_0 = I_1 + I_2$, $I_s = I_2 - I_1$, $I = \int_F X_1^2 X_2^2 dF$.

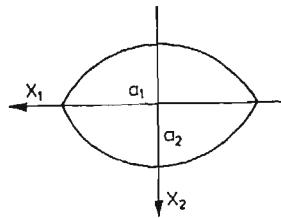
Po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych ε , φ , ψ_α z równań ruchu (1.15) i warunków brzegowych (1.16) uwzględniając sposób podparcia pręta (1.7) można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_i(X, t)$ z (1.2) i (1.6), składowe stanu naprężenia T^{ij} z (1.14), siły reakcji więzów ze wzorów (1.4) i (1.5) oraz dodatkowe siły reakcji więzów z zależności (1.8) i (1.9).

Stosując kryterium fizycznej poprawności więzów modelowych, przedstawione w pracy [1], należy pamiętać o tym, że modelowymi są tylko więzy opisane za pomocą zależności (1.2) i (1.6), natomiast geometryczne warunki brzegowe (1.7) są więzami fizycznymi.

Należy zauważyć, że układ równań (1.15) ma złożoną budowę i w ogólnym przypadku efektywne rozwiązanie można otrzymać na drodze numerycznej. Tylko w szczególnych przypadkach można otrzymać rozwiązanie analityczne, np. dla pręta o przekroju eliptycznym. Jest to tematem rozważań następnego rozdziału pracy.

2. Skręcanie wspornika o przekroju eliptycznym

Rozpatruje się pryzmatyczny, jednorodny, izotropowy pręt o długości L i przekroju poprzecznym w kształcie elipsy (rys. 2.). Osie X_1 , X_2 układu współrzędnych kartezjańskich $OX_1X_2X_3$ są zarazem głównymi, centralnymi osiami bezwładności przekroju. Pręt jest



Rys. 2.

sztynno utwierdzony w przekroju $X_3 = 0$, natomiast na swobodnym końcu obciążony jest w sposób statyczny momentem skręcającym $M_s = \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF$; ($\int_F p_1 dF = 0$, $\int_F p_2 dF = 0$). Pomija się wpływ zewnętrznych obciążeń masowych.

Uwzględniając sposób obciążenia pręta otrzymuje się układ równań (1.15) z niewiadomymi współrzędnymi uogólnionymi $\varepsilon(X_3)$, $\varphi(X_3)$, $\psi_\alpha(X_3)$ w postaci układu dwóch

równań różniczkowych zwyczajnych sprzężonych i dwóch równań różniczkowych zwyczajnych separowanych.

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)I\varepsilon_{,33} - \mu I_0 \varepsilon - \mu I_s \varphi_{,3} &= 0, \\ I_s \varepsilon_{,3} + I_0 \varphi_{,33} &= 0, \\ \psi_{\alpha,33} &= 0,\end{aligned}\quad (2.1)$$

natomiast warunki brzegowe (1.16) dla $X_3 = 0$ w postaci:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)I\varepsilon_{,3} + \int_F p_3 X_1 X_2 dF &= 0, \\ \mu I_s \varepsilon + \mu I_0 \varphi_{,3} + \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= 0, \\ \mu F \psi_{\alpha,3} + \int_F p_{\alpha} dF &= 0,\end{aligned}\quad (2.2)$$

zaś dla $X_3 = L$ w postaci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{,3} &= 0, \\ \mu I_s \varepsilon + \mu I_0 \varphi_{,3} - M_s &= 0, \\ \psi_{\alpha,3} &= 0.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Utwierdzenie pręta w przekroju podporowym realizują geometryczne więzy brzegowe:

$$\begin{aligned}\varepsilon(0) &= 0, \\ \varphi(0) &= 0, \\ \psi_{\alpha}(0) &= 0.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Rozwiązując układ równań (2.1) przy uwzględnieniu (2.2), (2.3) i (2.4) otrzymuje się współrzędne uogólnione:

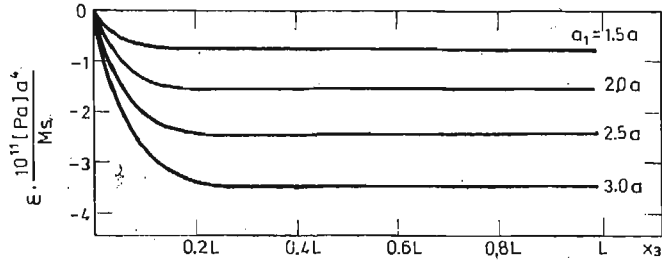
$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{M_s I_s}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} + \frac{M_s I_s}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\operatorname{ch}(kX_3) - \operatorname{th}(kL) \operatorname{sh}(kX_3)], \\ \varphi &= \frac{M_s I_0}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} X_3 + \frac{M_s I_s^2}{k\mu I_0(I_0^2 - I_s^2)} \{-\operatorname{sh}(kX_3) + \operatorname{th}(kL) [\operatorname{ch}(kX_3) - 1]\}, \\ \psi_{\alpha} &\equiv 0,\end{aligned}\quad (2.5)$$

gdzie: $k = \sqrt{\frac{\mu(I_0^2 - I_s^2)}{(\lambda + 2\mu)I_0}}$.

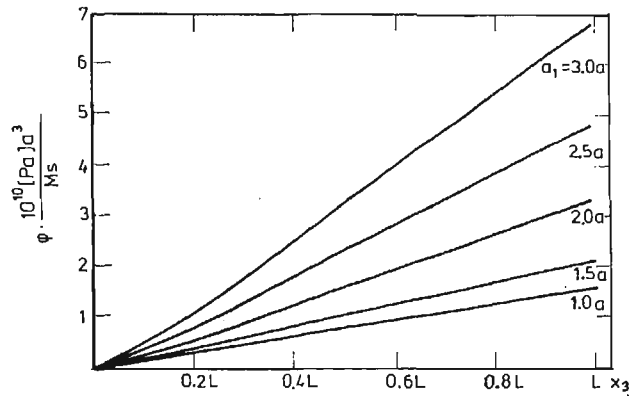
Podkreślone człony w wyrażeniach (2.5) opisujących ε i φ powstają w wyniku skęrcania pręta zgodnie z więzami modelowymi (1.2), (1.6), pozostałe są spowodowane narzuceniem więzów fizycznych (2.4) opisujących podparcie pręta. Ten sposób rozróżnienia zachowany zostanie w dalszych rozważaniach.

Przeprowadzono analizę wpływu utwierdzenia i proporcji wymiarów przekroju na funkcje ε i φ . Rozpatrywano pręty z materiału o stałych materiałowych $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa i $\nu = 0,3$, o polu powierzchni przekroju poprzecznego równym polu koła o promieniu a . Poziomą półoś elipsy przyjęto kolejno równą $a, 1,5a, 2a, 2,5a, 3a$.

Rys. 3 i 4 przedstawiają wykresy funkcji ε i φ dla prętów o długości $L = 20a$. Funkcja ε osiąga stałą wartość poczynając od współrzędnej $X_3 = 0,3L$, natomiast φ staje się liniowa poczynając od $X_3 = 0,2L$.



Rys. 3.



Rys. 4.

Podobny charakter wykresów otrzymano dla większych długości pręta (z przedziału $\langle 20a, 40a \rangle$) — wykresy stawały się liniowe w odpowiednio proporcjonalnych odległościach od przekroju utwierdzenia.

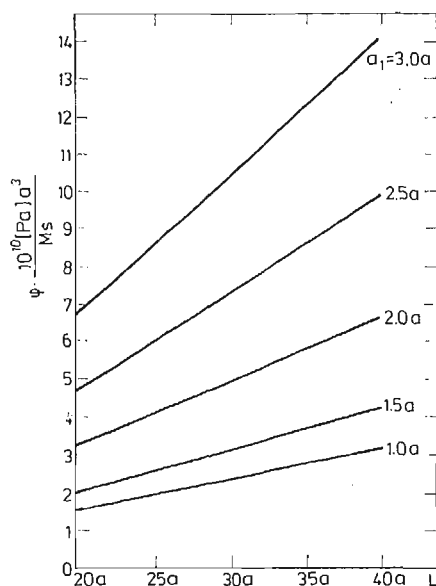
Stwierdzono, że długość pręta praktycznie nie ma wpływu na wartości funkcji ε — zależą one przede wszystkim od kształtu przekroju.

Inaczej jest w przypadku funkcji φ . Liniową zależność wielkości kąta skręcania końca wspornika od długości pręta dla różnych proporcji wymiarów przekroju elipsy pokazano na rys. 5.

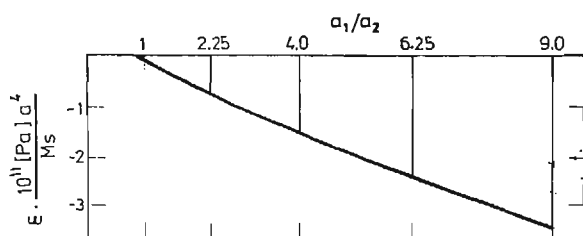
Rys. 6 i 7 przedstawiają wpływ kształtu przekroju na funkcje ε i φ na swobodnym końcu wspornika o długości $20a$.

Na rys. 8 linia krzywa opisuje zmianę kąta φ wyrażonego wzorem (2.5) wzdłuż długości pręta dla wspornika o $L = 20a$, $a_1 = 2a$, zaś linia prosta przedstawia wartości podkreślonego członu w wyrażeniu (2.5) na kąt φ (a więc względny kąt skręcenia w przypadku pręta skręcanego swobodnie).

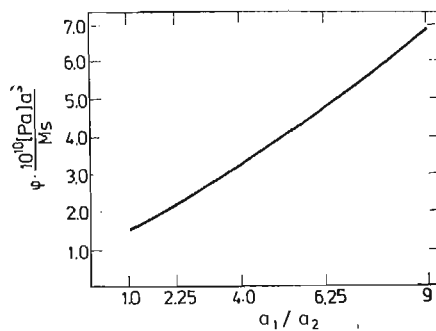
Im bardziej kształt przekroju elipsy odbiega od przekroju kołowego tym większy staje się wpływ zamocowania na ostateczną wartość kąta skręcenia. Rys. 9 przedstawia względną



Rys. 5.



Rys. 6.

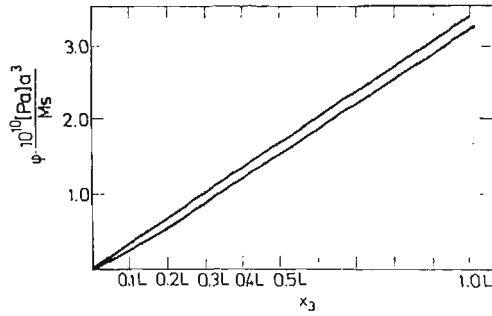


Rys. 7.

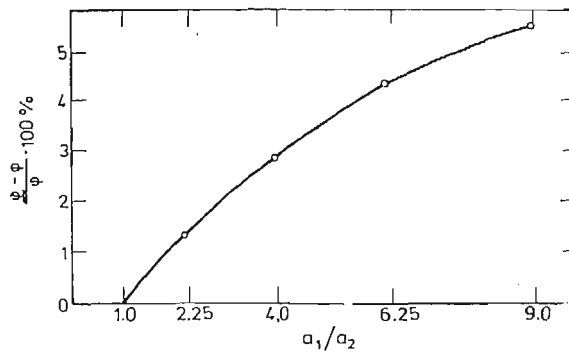
różnicę kątów skręcenia w przypadku skręcania swobodnego i skrępowanego dla różnych proporcji półosi elipsy.

Po podstawieniu (2.5) do (1.14) otrzymuje się składowe stanu naprężenia w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 T^{11} &= T^{22} = \frac{\lambda M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\operatorname{sh}(kX_3) - \operatorname{th}(kL) \operatorname{ch}(kX_3)] X_1 X_2, \\
 T^{12} &= 0, \\
 T^{13} &= - \frac{M_s I_0 + I_s}{I_0^2 - I_s^2} X_2 + \frac{M_s I_s (I_0 + I_s)}{I_0(I_0^2 - I_s^2)} \\
 &\quad [\operatorname{ch}(kX_3) - \operatorname{th}(kL) \operatorname{sh}(kX_3)] X_2,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$



Rys. 8.



Rys. 9.

$$T^{23} = \frac{M_s(I_0 - I_s)}{I_0^2 - I_s^2} X_1 + \frac{M_s I_s(I_0 - I_s)}{I_0(I_0^2 - I_s^2)} [\text{ch}(kX_3) - \text{th}(kL)\text{sh}(kX_3)] X_1,$$

$$T^{33} = \frac{(\lambda + 2\mu)M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\text{sh}(kX_3) - \text{th}(kL)\text{ch}(kX_3)] X_1 X_2.$$

Podstawiając (2.6) do (1.4) i (1.8) otrzymuje się te siły reakcji więzów, które występują wewnątrz obszaru Ω

$$\begin{aligned} q r_1 &= -T_{,j}^{1j} = -\frac{[I_0 \lambda + (I_0 + I_s)\mu] M_s I_s k}{\mu I_0 (I_0^2 - I_s^2)} [\text{sh}(kX_3) - \text{th}(kL)\text{ch}(kX_3)] X_2, \\ q r_2 &= -T_{,j}^{2j} = -\frac{[I_0 \lambda + (I_0 - I_s)\mu] M_s I_s k}{\mu I_0 (I_0^2 - I_s^2)} [\text{sh}(kX_3) - \text{th}(kL)\text{ch}(kX_3)] X_1, \\ R_3 &= -T_{,j}^{3j} = -\frac{(\lambda + 2\mu) M_s I_s k^2}{\mu (I_0^2 - I_s^2)} [\text{ch}(kX_3) - \text{th}(kL)\text{sh}(kL)] X_1 X_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$R_{\nu_\alpha} = \int_F T_{,3}^{\alpha 3} dF \equiv 0, \quad R_\varphi = \int_F (T_{,3}^{23} X_1 - T_{,3}^{13} X_2) dF = 0.$$

Siły reakcji więzów na $\partial\Omega$ można obliczyć podstawiając (2.6) do (1.5) i (1.9).

Na poboczniczy pręta (dla $X_1, X_2 \in \partial F$ i $X_3 \in (0, L)$) otrzymuje się następujące siły reakcji więzów:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= T^{1\alpha} n_\alpha = \frac{\lambda M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\text{sh}(kX_3) - \text{th}(kL) \text{ch}(kX_3)] X_1 X_2 n_1, \\ \dot{S}_2 &= T^{2\alpha} n_\alpha = \frac{\lambda M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\text{sh}(kX_3) - \text{th}(kL) \text{ch}(kX_3)] X_1 X_2 n_2, \\ \dot{S}_3 &= T^{3\alpha} n_\alpha = \frac{M_s}{I_0^2 - I_s^2} [-(I_0 + I_s) X_2 n_1 + (I_0 - I_s) X_1 n_2] + \\ &\quad + \frac{M_s I_s}{I_0(I_0^2 - I_s^2)} [\text{ch}(kX_3) - \text{th}(kL) \text{sh}(kX_3)] [(I_0 + I_s) X_2 n_1 + (I_0 - I_s) X_1 n_2]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dla elipsy jak na rys. 2 składowe wektora zewnętrznje normalnego do brzegu mają składowe:

$$n_1 = \frac{a_2^2 X_1}{\sqrt{a_1^4 X_2^2 + a_2^4 X_1^2}}; \quad n_2 = \frac{a_1^2 X_2}{\sqrt{a_1^4 X_2^2 + a_2^4 X_1^2}}, \quad (2.9)$$

w związku z tym podkreślony człon w wyrażeniu \dot{S}_3 jest równy zeru.

W przekrojach końcowych pręta występują następujące siły reakcji więzów:

$$\begin{aligned} S_1 &= T^{13} n_3 - p_1 = \left\{ -\frac{M_s X_2}{I_0 - I_s} + \frac{M_s I_s X_2}{I_0(I_0 - I_s)} [\text{ch}(kX_3) - \text{th}(kL) \text{sh}(kX_3)] \right\} n_3 - p_1, \\ S_2 &= T^{23} n_3 - p_2 = \left\{ \frac{M_s X_1}{I_0 + I_s} + \frac{M_s I_s X_1}{I_0(I_0 + I_s)} [\text{ch}(kX_3) - \text{th}(kL) \text{sh}(kX_3)] \right\} n_3 - p_2, \\ S_3 &= T^{33} n_3 - p_3 = \frac{(\lambda + 2\mu) M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\text{sh}(kX_3) - \text{th}(kL) \text{ch}(kX_3)] X_1 X_2 n_3 - p_3, \\ S_{\nu_\alpha} &= \int_F T^{\alpha 3} dF n_3 - \int_F p_\alpha dF \equiv 0, \\ S_\varphi &= \int_F (T^{23} X_1 - T^{13} X_2) dF n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

W przekroju podporowym ($X_3 = 0$, $n_3 = -1$) otrzymujemy zatem różne od zera siły reakcji więzów:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{M_s X_2}{I_0 - I_s} - \frac{M_s I_s X_2}{(I_0 - I_s) I_0} - p_1, \\ S_2 &= -\frac{M_s X_1}{I_0 + I_s} - \frac{M_s I_s X_1}{(I_0 + I_s) I_0} - p_2, \\ S_3 &= \frac{(\lambda + 2\mu) M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} \text{th}(kL) X_1 X_2 - p_3, \end{aligned} \quad (2.11)$$

natomiast w przekroju $X_3 = L$, $n_3 = 1$ występują następujące siły reakcji więzów:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{M_s X_2}{I_0 - I_s} + \frac{M_s I_s X_2}{(I_0 - I_s) I_0 \operatorname{ch}(kL)} - p_1, \\ S_2 &= \frac{M_s X_1}{I_0 + I_s} + \frac{M_s I_s X_1}{(I_0 + I_s) I_0 \operatorname{ch}(kL)} - p_2, \\ S_3 &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Jak wynika z powyższych obliczeń zastosowane w niniejszej pracy więzy wewnętrzne wywołują siły reakcji więzów modelowych jedynie w końcowych przekrojach pręta. Stanowią one część sił reakcji więzów S_α (dopełnienie stanowią siły reakcji więzów fizycznych, spowodowane sposobem podparcia pręta). Nie jest możliwe rozdzielenie tych sił reakcji, ponieważ nie wiadomo, jaka część siły p_α przypada na więzy modelowe, a jaka na fizyczne.

Przyjmując rozkład obciążenia zewnętrznego w postaci

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{M_s X_2}{I_0 - I_s} + \frac{M_s I_s X_2}{(I_0 - I_s) I_0 \operatorname{ch}(kL)}, \\ p_2 &= \frac{M_s X_1}{I_0 + I_s} + \frac{M_s I_s X_1}{(I_0 + I_s) I_0 \operatorname{ch}(kL)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

(spełnione są warunki $\int_F p_\alpha = 0$, $\int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF = M_s$), otrzymuje się siły reakcji więzów modelowych i fizycznych na końcu swobodnym (dla $X_3 = L$) równe zero. Można zatem stwierdzić, że przyjęty model jest dobry i spełnia warunek fizycznej poprawności.

Interesujące jest rozpatrzenie przypadku szczególnego, a mianowicie skręcanego wspornika o przekroju kołowym. Wówczas $a_1 = a_2 = a$, zaś $I_s = 0$. W związku z tym znikają wszystkie siły reakcji więzów modelowych i fizycznych wewnątrz obszaru Ω i na pobocznicy. Pozostają jedynie siły reakcji więzów modelowych na końcach pręta:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{M_s X_2}{I_0} n_3 - p_1, \\ S_2 &= \frac{M_s X_1}{I_0} n_3 - p_2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

które także znikają na końcu swobodnym w przypadku rozkładu obciążenia zewnętrznego w tym przekroju w postaci:

$$p_1 = -\frac{M_s X_2}{I_0}, \quad p_2 = \frac{M_s X_1}{I_0}. \quad (2.15)$$

Znikanie więzów fizycznych jest w tym przypadku oczywiste. Przekroje pręta okrągłego ze względu na osiową symetrię nie ulegają spaczeniu, w związku z tym jest równa zero funkcja ε , określająca stopień skrępowania wzdłuż długości pręta, a kąt obrotu φ jest wówczas liniowo zależny od współrzędnej X_3 (tak jak w przypadku skręcania swobodnego).

Literatura

1. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*, Dynamika układów sprężystych — praca zbiorowa, Wrocław 1976.
2. A. i L. FÖPPL, *Drang und Zwang*, Monachium—Berlin 1944, t. 2.
3. J. NOWIŃSKI, *Skręcanie pręta prostopadłościennego, którego jeden przekrój pozostaje płaski*, Arch. Mech. Stos., 1, 1953.
4. W. BURZYŃSKI, *O niedomaganiach i koniecznych uzupełnieniach de Saint-Venantowskiej teorii prętów prostych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, nr 42, Wrocław 1951.
5. K. MAZUR-ŚNIADY, *Some problems of torsion of prismatic rods as bodies with internal constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., sci. techn., 22, 1974, s. 389 - 397.
6. K. MAZUR-ŚNIADY, *Skręcanie przyzmatycznych prętów jako ciał z wewnętrznymi więzami*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 4, 17, 1979, s. 553 - 565.

Praca wykonana w ramach C.P.B.P.01.02.

Резюме

СТЕСНЁННОЕ КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ О БИСИММЕТРИЧНЫХ СПЛОШНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Темой работы является вывод технической теории стесненного кручения призматических стержней о бисимметричных, сплошных сечениях на основе механики тел с внутренними связями [1]. В примере рассматривается однородную, изотропную консоль о поперечном сечении в виде эллипса. Консоль нагружена крутящим моментом на свободном конце. Получается аналитическое решение проблемы и анализируется влияние соотношения полуосей эллипса на величины угла кручения и функции стеснения кручения.

Summary

CONSTRAINED TORSION OF PRISMATIC ROD WITH BISYMMETRIC COMPACT CROSS-SECTION

The aim of the present paper is to derive technical theory of constrained torsion of prismatic rods with bisymmetric compact cross-section on the basis of the theory of bodies with internal constraints [1]. In an example a homogeneous, isotropic cantilever of an elliptic cross-section is studied loaded by a torsion moment in unconstrained cross-section. The analytical solution of the problem is obtained. The influence of the shape of the cross-section on the angle rotation and on constrain function is examined.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 lutego 1987 roku.

METODA SUPERELEMENTU W STATYCE UKŁADÓW Z WIĘZAMI JEDNOSTRONNYMI

RYSZARD PISKORSKI

Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej

Idea superelementów i rozwiązania operatorowe pewnych układów regularnych pozwoliły otrzymać rozwiązania w postaci zamkniętej zagadnienia statyki mostów pontonowych z więzami jednostronnymi na obroty.

1. Wstęp

Pod pojęciem układu z więzami jednostronnymi będzie się rozumieć równania statyki mostów pontonowych, posiadających jednostronne ograniczenia na wzajemne obroty pontonów w połączeniach. Równania te mają postać [2]:

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{K} \cdot z + \mathbf{L} \cdot m, \\ f &\geq \mathbf{L}^T \cdot z, \quad m \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie: p — wektor obciążeń w węzłach,

m — wektor momentów w punktach zwarcia mostu (reakcje na więzy f),

z — wektor ugięć pionowych przegubów,

f — wektor jednostronnych ograniczeń na wzajemne obroty pontonów w przegubach,

\mathbf{K} — macierz sztywności podłoża sprężystego,

\mathbf{L} — macierz struktury układu (operator różnicowy).

Cechą charakterystyczną tego układu są jednostronne więzy w postaci nierówności w (1.1). Więzy te interweniują w postaci reakcji m , w ten sposób, że $m > 0$, gdy $f = \mathbf{L}^T \cdot z$. Mówimy wtedy, że pontony są zwarte, tworząc tzw. strefę zwarcia. W ogólnym przypadku obciążenia lokalizacja stref zwarcia nie jest znana i należy ją znajdować drogą dość pracochłonną obliczeń na maszynie cyfrowej. W przypadku, gdy obciążenie mostu skupione jest w pewnym ograniczonym obszarze, wówczas również strefa zwarcia pojawia się w otoczeniu tego obszaru. W takiej sytuacji rozwiązanie układu rozpada się na dwa rozłączne obszary:

a) strefę zwarcia, w której $m > 0$,

b) strefę rozwartą, w której $m = 0$.

W strefie zwarcia do wyznaczenia z z układu (1.1) są ugięcia z i momenty zwarcia m .

W strefie rozwarcia tylko ugięcia z z układu $p = K \cdot z$. W punkcie rozdziału obu stref działa siła tnąca wzajemnego oddziaływania w przegubie. Położenie tego punktu nie jest jednak znane 'a priori' i należy je znaleźć z dodatkowego warunku zgodności ugięć.

Takie podejście, mimo niejednoznaczności w sensie długości strefy zwarcia nasuwa pomysł użycia metody dwóch superelementów obejmujących strefę zwarcia i rozwarcia jako rozłączne obiekty do dalszej analizy. Metoda superelementu pozwala bowiem wyeliminować dużą ilość niewiadomych, które do syntezy układu nie są potrzebne. Dotyczy to przede wszystkim strefy rozwartej, która charakteryzuje się zanikającym ciągiem ugięć w miarę oddalania się od punktu przyłożenia siły.

2. Półograniczone pasmo pontonów (PPP)

Strefa rozwarta jest półograniczonym ciągiem pontonów, w stanie bezzwarciovym w przegubach, a jedynym obciążeniem zewnętrznym jest siła skupiona na jednym brzegu tej strefy.

Równania (1.1) w przypadku n jednakowych pontonów sprowadzają się do układu $p = K \cdot z$:

$$(3 + \alpha)kz_0 + (3 - \alpha)kz_1 = p_0, \quad (2.1)$$

$$(3 - \alpha)kz_{i-1} + 2(3 + \alpha)kz_i + (3 - \alpha)kz_{i+1} = 0, \quad (2.2)$$

$$(3 - \alpha)kz_{n-1} + (3 + \alpha)kz_n = 0, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.3)$$

gdzie:

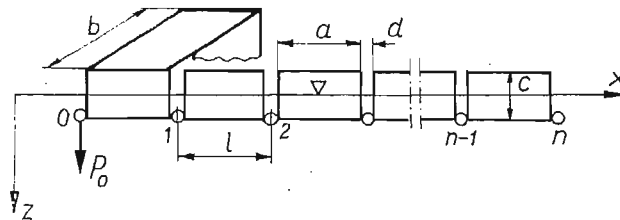
$$k = \frac{\gamma \cdot a \cdot b}{12}, \quad \alpha = \left(\frac{a}{l}\right)^2,$$

a — długość pontonu,

b — szerokość pontonu,

l — odległość między przegubami,

γ — ciężar właściwy wody.



Rys. 1.

Układ równań jednorodnych (2.2) z warunkami brzegowymi (2.1) i (2.3) można rozwiązać metodą operatorową [1], zakładając rozwiązanie w postaci $z_j = A \cdot (r)^j$, $j = 0, 1, \dots, n$. W rezultacie otrzymamy następujące pierwiastki równania charakterystycznego:

$$r_1 = \frac{1}{r_2} = -\frac{\sqrt{3} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}}, \quad (2.4)$$

oraz

$$z_j = A_1(r_1)^j + A_2 \cdot (r_2)^j. \quad (2.5)$$

Stałe A_1, A_2 , wyznaczone z warunków brzegowych (2.1) i (2.3) wynoszą:

$$A_1 = \frac{[(3-\alpha) + (3+\alpha)r_2]r_2^{n-1}}{M} \cdot \frac{p_0}{k},$$

$$A_2 = \frac{-[(3-\alpha) + (3+\alpha)r_1]r_1^{n-1}}{M} \cdot \frac{p_0}{k},$$

gdzie:

$$M = [(3+\alpha) + (3-\alpha)r_1][(3-\alpha) + (3+\alpha)r_2]r_2^{n-1} + \\ - [(3+\alpha) + (3-\alpha)r_2][(3-\alpha) + (3+\alpha)r_1]r_1^{n-1}.$$

Można wykazać, że ponieważ $r_1 \cdot r_2 = 1$ oraz $r_1 \neq r_2$ to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{\alpha}} \frac{p_0}{k} \equiv A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_2 = 0.$$

Obliczenia numeryczne dla $\alpha = 1$ ($a = l$) wykazują bardzo szybką zbieżność A_1 do A , a A_2 do zera już dla niewielkiej liczby pontonów (patrz tabl. 1).

Tablica 1

n	2	3	4	5	6
$\frac{2k}{p_0} A_1$	0.58034	0.57756	0.57737	0.577351	0.57735
$\frac{2k}{p_0} A_2$	$3.10 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$7.9 \cdot 10^{-8}$

$$\text{Dla } n = \infty \quad \frac{2k}{p_0} A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735.$$

Z powyższego zestawienia można wnioskować, że dla $n > 4$ półograniczone pasmo pontonów można traktować jako półnieskończone ($n = \infty$). Rozwiązania układu (2.2) mają wówczas szczególnie prostą postać:

$$z_0 = A = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{\alpha}} \frac{p_0}{k}, \quad (2.6)$$

$$z_1 = z_0 \cdot r_1^1,$$

czyli

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{3}+\sqrt{\alpha}} z_0 \quad \text{itd.}$$

Wniosek: PPP traktowane jako superelement posiada sztywność na ugięcie pionowe

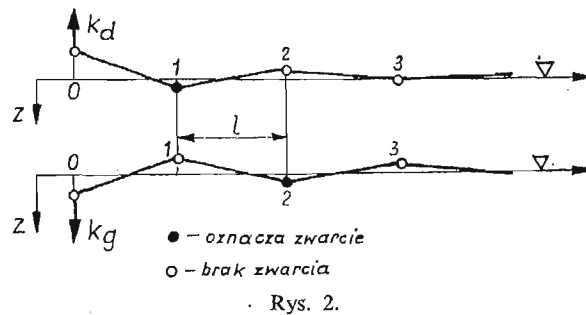
w węźle brzegowym nr. 0 równą:

$$k_0 = 2\sqrt{3}\sqrt{\alpha} \cdot k, \quad (2.7)$$

tzn. $p_0 = k_0 \cdot z_0$.

2.1. Ograniczenia stosowalności superelementu PPP. Superelement brzegowy charakteryzuje jego sztywność na brzegu (k_0). Sztywność ta jest wielkością stałą, dopóki wewnątrz tego elementu nie pojawi się dodatkowe zwarcie, wynikające z wyczerpania się luzów między pontonami. Warunek ten w sposób istotny ogranicza zastosowanie elementu PPP w obliczeniach, zmieniając jego charakterystykę sztywnościową. W tym sensie element PPP posiada charakterystykę nieliniową (zmienną skokowo).

Z zanikającego charakteru ugięć węzłów wewnątrz PPP wynika, że dodatkowe zwarcie może pojawić się albo w węźle 1, gdy $z_0 < 0$, albo w węźle 2, gdy $z_0 > 0$, (patrz rys. 2).



Badając warunek zwarcia w obu przypadkach w odpowiednich węzłach otrzymuje się następujące ograniczenie na ugięcie z_0 :

$$z_d = -\frac{fl}{(r-1)^2} \leq z_0 \leq -\frac{fl}{(r-1)^2 r} = z_g, \quad (2.8)$$

gdzie: $r = r_1$ według (2.4)

f — ograniczenie kątów obrotu w przegubach,

l — odległości przegubów.

Dla $z_0 \notin (z_d, z_g)$ należy zmienić sztywność PPP z k_0 na k_g lub k_d . Wartości tych sztywności są następujące:

$$\begin{aligned} k_d &= \beta k \\ k_g &= \left(3 + \alpha - \frac{3 - \alpha}{3 + \alpha + \beta}\right) k, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie:

$$\beta = \frac{1}{2} \left[15 + \alpha - \frac{(9 - \alpha)^2}{15 + \alpha + 4\sqrt{3}\sqrt{\alpha}} \right].$$

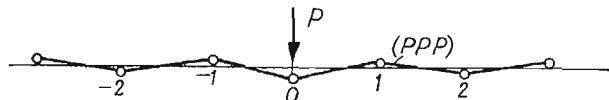
Przykładowo dla $\alpha = (.8)^2$: $k_0 = 2.771 k$, $k_d = 6.17 k$, $k_g = 3.073 k$. Jak widać, szczególnie k_d wzrasta dość znacznie, powodując nieliniowość PPP, jeśli $z_0 < z_d$.

3. Synteza układu zwartego i rozwartego

Zastąpienie części rozwartej układu superelementem PPP ze sztywnością k_0 na brzegu, pozwala sprowadzić zadanie statyki mostu pontonowego do analizy strefy zvarcia, do której zostaną dołączone na końcach elementy sprężyste o znanej charakterystyce (elementy PPP). Ponieważ, jak już wcześniej wspomniano, nie znana jest długość strefy zvarcia, obliczenia można prowadzić zwiększając stopniowo długość strefy zvarcia, począwszy od ustalonej ilości pontonów i sprawdzając warunki ciągłości na styku strefy zvarcia i rozwarcia. Dołączenie jednego pontonu ze strefy rozwarcia nie zmienia charakterystyki elementu dołączonego (PPP), albowiem, jak pokazano w punkcie 2 nie zależy ona od ilości pontonów.

Niewiadome momenty zvarcia i ugięcia wewnątrz strefy zvarcia można zredukować do brzegów, jak to się czyni w metodzie superelementów, wprowadzając macierz brzegową i reakcje brzegów. Metodę tę zilustrujemy na prostym przykładzie z jedną siłą skupioną na moście swobodnie pływającym, wyznaczając rozwiązania we wstępnej fazie tworzenia się strefy zvarcia. Podobne zagadnienie zvarcia punktowego w początkowej fazie ruchu, przy nagłym przyłożeniu siły, można znaleźć w pracy [3].

3.1. Przykład obciążenia siłą skupioną w przegubie środkowym mostu. Wykorzystując rozwiązania dla PPP z punktu 2, można znaleźć natychmiast warunki obciążenia powodujące



Rys. 3.

tzw. punktowe zvarcie mostu pod siłą P , (patrz rys. 3). Model mostu składa się z dwóch symetrycznych elementów PPP, do brzegu których przyłożona jest siła skupiona $\frac{P}{2}$. Warunek, przy którym pojawia się zvarcie pomiędzy elementami ma postać:

$$f_0 \geq \left(-\frac{1}{l}, \quad \frac{2}{l}, \quad -\frac{1}{l} \right) \begin{bmatrix} z_{-1} \\ z_0 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

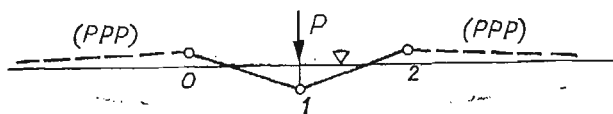
gdzie: $z_0 = \frac{P_0}{k_0}$, $z_{-1} = z_1 = z_0 \cdot r$ zgodnie z (2.6) i (2.7).

Warunek (3.1) prowadzi do obliczenia siły powodującej pierwsze zvarcie mostu:

$$P_{zw} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}) \cdot kfl. \quad (3.2)$$

Dla $P > P_{zw}$ pojawia się w przegubie 0 moment zvarcia i od tej chwili należy wprowadzić inny model obliczeniowy, uwzględniający istnienie strefy zvarcia między PPP (rys. 4).

Rozwiążemy to zadanie metodą superelementów. Superelement zwarty obejmuje przeguby 0-1-2. Po obu jego stronach znajdują się superelementy PPP.



Rys. 4.

Równanie równowagi dla superelementu 0-1-2, zgodnie z (1.1) ma postać:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+\alpha)k & (3-\alpha)k & 0 & -\frac{1}{l} \\ (3-\alpha)k & 2(3+\alpha)k & (3-\alpha)k & \frac{2}{l} \\ 0 & (3-\alpha)k & (3+\alpha)k & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{2}{l} & -\frac{1}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Brzeg elementu stanowią przeguby 0 i 2. Ponadto: $p_0 = p_2 = 0$, $p_1 = P$, $z_0 = z_2$. Po uporządkowaniu układu (3.3) ze względu na ugięcia brzegowe i wykorzystaniu symetrii otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{f}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+\alpha)k & (3-\alpha)k & -\frac{1}{l} \\ (3-\alpha)k & (3+\alpha)k & \frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (b) \\ (i) \end{matrix} \quad (3.4)$$

Redukując obciążenie do brzegu otrzymamy kolejno:
reakcje brzegu

$$r_b = K_{bi} K_{ii}^{-1} p_i = -\frac{P}{2} + 3kfl,$$

siły na brzegu

$$s_b^{(1)} = p_b - r_b = \frac{P}{2} - 3kfl, \quad (3.5)$$

macierz brzegową elementu 0-1-2

$$K_b^{(1)} = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} = 12k.$$

Od strony superelementu brzegowego PPP:

$$\begin{aligned} s_b^{(2)} &= 0, \\ K_b^{(2)} &= k_0 = 2\sqrt{3} \sqrt{\alpha} \cdot k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zatem na brzegu równanie równowagi jest:

$$s_b^{(1)} + s_b^{(2)} = (K_b^{(1)} + K_b^{(2)}) \cdot z_b, \quad (3.7)$$

skąd:

$$z_b = z_2 = \frac{P - 6kfl}{4\sqrt{3}(2\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})k}. \quad (3.8)$$

Z rozwiązaniem z_2 można wrócić do superelementu (strefy zvarcia) i obliczyć pozostałe niewiadome, np. moment zvarcia:

$$m_1 = \frac{Pl}{2} - 6kz_2 - \frac{3+\alpha}{2} kfl^2. \quad (3.9)$$

Przyjmując $m_1 = 0$ znajdziemy minimalną siłę, przy której znika zvarcie w środku strefy:

$$P_{min} = (\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})\sqrt{\alpha}kfl, \quad (3.10)$$

wartość której pokrywa się z rozwiązaniem (3.2).

Moment gnący m_1 można wtedy przekształcić do postaci:

$$m_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}} (P - P_{min}) \frac{l}{2}. \quad (3.11)$$

Zakładając zvarcie na brzegu między superelementami można obliczyć P_{max} , czyli siłę, kiedy dołączy się następny ponton ze strefy rozwartej, albo kres założonego typu rozwiązania:

$$P_{max} = 3[2 + (\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})(2\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})]kfl. \quad (3.12)$$

Zatem zakres rozwiązań przyjętych na wstępie jest ograniczony do siły P spełniającej nierówność:

$$P_{min} \leq P \leq P_{max}. \quad (3.13)$$

Sprawdzimy jeszcze, czy w całym zakresie (3.13) superelement PPP jest liniowy, tzn. czy nie interweniuje warunek (2.8). Łatwo sprawdzić, że:

$$z_2(P_{max}) = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})}{4\sqrt{3}} fl < z_g.$$

Na koniec, wracając do (3.8) można zauważyć, że dla siły $P_0 = 6kfl$ $z_b = 0$, co oznacza, że znika oddziaływanie między strefami. Strefa rozwarta jest płaska ($z_i = 0$) i następuje „izolacja” strefy zvarcia, bo siła wzajemnego oddziaływania spada do zera. Takie zjawisko można zaobserwować dla dowolnej strefy zvarcia, pomiędzy kolejnymi przyłączeniami pontonów.

4. Podsumowanie

W przykładzie przytoczonym w punkcie 3 pracy, dzięki swej prostocie można było wyznaczyć podstawowe relacje zachodzące w moście w początkowej fazie zvarcia mostu z siłą skupioną w przegubie. Podobne związki można wyznaczyć dla siły przyłożonej w środku pontonu [2].

Dalsza analiza, przy zwiększaniu liczby pontonów w zwarciu nie jest już możliwa w sposób analityczny. Przeprowadzić ją można jedynie na maszynie cyfrowej, wykorzystując opisaną wyżej ideę superelementu. Celem niniejszej pracy było naszkicowanie metody w zagadnieniu statyki mostu z więzami jednostronnymi, a w szczególności zastosowanie elementu PPP.

Dla pewnych układów regularnych możliwe są rozwiązania operatorowe również w strefie zwarcia, ale to już będzie tematem innej pracy.

5. Wspomnienie

Niniejszą pracę pragnę poświęcić pamięci Profesora Józefa Więckowskiego, który zapoczątkował prace nad układami dyskretnymi i swoim zaangażowaniem dał asumpt do powstania szeregu prac poświęconych mechanice mostów pływających.

Dzisiaj niestety nie ma Go już wśród nas.

Literatura

1. R. BITTNER, *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.
2. R. PISKORSKI, *Numeryczne i analityczne zastosowanie sztywnych elementów skończonych do statyki mostu pontonowego z więzami*, Prace Badawcze I. O. P. G. Nr. 1635/MR-632/82, Gdańsk 1982.
3. J. WIĘCKOWSKI, *Elementy dynamiki mostu pontonowego z luzami obrotowymi w opisie dyskretnym*, Prace IMP, z. 77, Gdańsk 1980.

Резюме

МЕТОД СУПЕРЭЛЕМЕНТА В СТАТИКЕ СИСТЕМ С ОДНОСТРОННЫМИ СВЯЗЯМИ

Идея суперэлементов и операторное интегрирование некоторых регулярных систем позволили получить в замкнутой форме результаты в статике понтонных мостов с одностронными связями при оборотах.

Summary

SUPERELEMENT METHOD IN THE STATICS OF SYSTEM WITH UNILATERAL CONSTRAINTS

Idea of superelement and operator integration solutions of certain regular systems allowed to obtain in exact form the solutions of the ferry-bridge problem with unilateral constraints on pivot.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 grudnia 1986 roku.

OPERATOROWA METODA ROZWIĄZANIA PEWNEGO UKŁADU ŁAŃCUCHOWEGO

RYSZARD PISKORSKI

Institut Okrętowy Politechniki Gdańskiej

Rozwiązano układ równań, opisujących statykę mostu pontonowego w zwarciu, stosując rachunek operatorów do całkowania równań różnicowych.

1. Wstęp

Układem łańcuchowym będziemy nazywać układ pontonów tworzących most pływający z ograniczeniami na wzajemne obroty w przegubach, zwierający się pod wpływem obciążenia zewnętrznego. Strefa zwarcia przesuwa się wraz z przemieszczającym się obciążeniem, stanowiąc w ten sposób rodzaj mostu promowego, nieruchomego jednak jako całości. Po obu stronach strefy zwarcia reszta mostu zachowuje się jako układ połączonych przegubowo pontonów, nie przenoszących obciążenia.

W pracy [2] rozwiązano zagadnienie początkowego zwarcia mostu, traktując strefę zwarcia i strefę rozwarcia jako dwa superelementy. Udało się przy tym zredukować sztywność całej strefy rozwartej do węzła brzegowego, dzięki wykorzystaniu rachunku operatorowego zastosowanego do różnic skończonych, opisujących równania równowagi w tej strefie. Ograniczenie rozwiązań analitycznych wynikało tylko z wielkości strefy zwarcia i dla dłuższych stref zwarcia należało korzystać z pomocy komputera przy analizie strefy zwarcia, traktowanej jako superelement [3].

Dla pewnych spotykanych w praktyce obciążeń statycznych siłami skupionymi i przy założeniu regularności konstrukcji mostu możliwe są również rozwiązania w strefie zwarcia w postaci analitycznej, dzięki zastosowaniu rachunku operatorowego.

Tematem tej pracy jest analiza strefy zwarcia. Jest zatem ta praca kontynuacją idei superelementu rozwiniętej w [2].

2. Sformułowanie problemu

Równania statyki, opisujące strefę zwarcia mają postać [2]:

$$\begin{aligned} p &= K \cdot z + L \cdot m, \\ f &= L^T \cdot z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

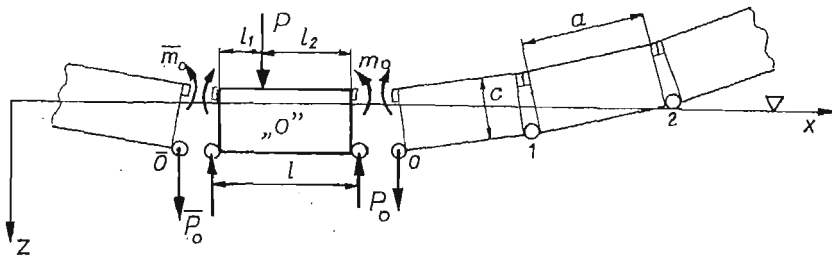
gdzie: p — wektor obciążeń zewnętrznych,
 m — wektor niewiadomych momentów zvarcia w przegubach,
 z — wektor przemieszczeń pionowych węzłów,
 f — wektor zadanych zmian kątów nachylenia między pontonami w przegubach, wynikających z luzów między pontonami w stanie nieobciążonym,
 K — macierz sztywności podłoża sprężystego,
 L — macierz „struktury” układu (operator różnicowy).

Zakładamy, że strefa zvarcia obejmuje nieokreśloną bliżej ilość pontonów, liczbę których należy określić z dodatkowych warunków zvarcia ($m > 0$) i ciągłości ugięć na styku ze strefą rozvarcia. Dzięki pasmowej budowie macierzy K i L można powyższy układ (2.1) rozwiązać metodą operatorową [1], przepisując go w postaci:

$$\begin{aligned} L^T \cdot z &= f, \\ L \cdot m &= p - K \cdot z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

W ten sposób po „scałkowaniu” pierwszej grupy układu równań (2.2) i wyznaczeniu przemieszczeń z można następnie „scałkować” drugą grupę równań i w ten sposób obliczyć momenty zvarcia m w całej strefie zvarcia.

Niech układ obciążony będzie jedną siłą skupioną przyłożoną do pontonu „zerowego”, wokół którego rozciąga się po obu stronach strefa zvarcia, (rys. 1).



Rys. 1

Zanurzenia przegubów pontonu „0”: \bar{z}_0 i z_0 określają jednoznacznie położenie całej strefy jako ciała sztywnego, można je więc traktować jako stałe do wyznaczenia po rozwiązaniu układu (2.2). Jednocześnie siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy pontonem „0” i resztą strefy zvarcia: \bar{p}_0 , p_0 oraz \bar{m}_0 , m_0 stanowią obciążenia brzegowe na końcach obu części strefy zvarcia. Z równań równowagi pontonu zerowego mamy następujący związek tych obciążeń z siłą zewnętrzną P :

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{P \cdot l_1}{l} - (3 + \alpha)k \cdot z_0 - (3 - \alpha)k \cdot \bar{z}_0 - \frac{m_0 - \bar{m}_0}{l}, \\ \bar{p}_0 &= \frac{P \cdot l_2}{l} - (3 + \alpha) \cdot k \bar{z}_0 - (3 - \alpha)k \cdot z_0 - \frac{\bar{m}_0 - m_0}{l}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie: $k = \frac{\gamma \cdot a \cdot b}{12}$, $\alpha = \left(\frac{a}{l}\right)^2$,

a — długość pontonu,
 b — szerokość pontonu,
 l — odległość między przegubami,
 γ — ciężar właściwy wody,
 pozostałe oznaczenia zgodnie z rys. 1.

3. Rozwiązania w strefie zwarcia

3.1. Ugięcia przegubów. Równania określające ugięcia przegubów w strefie zwartej, rozciągającej się po prawej stronie pontonu „0”, mają postać $\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{z} = \mathbf{f}$, albo:

$$z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} = -f \cdot l, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.1)$$

a dla $i = 0$:

$$z_0 - 2z_0 + z_1 = -f \cdot l. \quad (3.2)$$

Równanie (3.1) jest równaniem różnicowym, którego rozwiązanie przewidujemy w postaci: $z_j = A(r)^j$, co prowadzi do równania charakterystycznego:

$$r^2 - 2 \cdot r + 1 = 0, \quad \text{skąd} \quad r_1 = r_2 = 1.$$

Stąd całka ogólna równania jednorodnego ma postać: $z_j = A + Bj$. W celu obliczenia całki ogólnej równania niejednorodnego należy z rozwiązania z_j zbudować całkę x_j spełniającą jednorodne warunki początkowe: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, stąd $x_j = j$.

Wtedy całka równania niejednorodnego ma postać [1]:

$$y_j = \sum_{k=1}^j x_k \cdot q_{j-k}.$$

Ponieważ $q_j = q_{j-k} = -fl = \text{const.}$, stąd;

$$y_j = -fl \cdot \sum_{k=1}^j k = -fl \frac{j(j+1)}{2}. \quad (3.3)$$

Zatem rozwiązanie równania różnicowego (3.1) ma ostatecznie postać:

$$z_j = A + B \cdot j - \frac{fl}{2} \cdot j^2. \quad (3.4)$$

Stałe A i B wyznaczamy z warunku brzegowego (3.2), stąd:

$$A = z_0, \quad B = z_0 - \bar{z}_0 - \frac{fl}{2}. \quad (3.5)$$

Dla lewej strony strefy zwarcia można natychmiast napisać:

$$\bar{A} = \bar{z}_0, \quad \bar{B} = \bar{z}_0 - z_0 - \frac{fl}{2} \quad (3.6)$$

pod warunkiem, że numeracja węzłów tej części będzie się odbywać w odwrotnym kierunku (w lewo) od $\bar{0}$ do \bar{n} .

Znajomość rozwiązań (3.4) z dokładnością do \bar{z}_0 i z_0 pozwala nam obliczyć rozkłady momentów w strefie zwarcia.

3.2. Momenty zwarcia. Równania określające momenty zwarcia $\mathbf{L} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{p} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}$ dla prawej strony strefy zwarcia mają następującą postać:

$$m_{i-1} - 2m_i + m_{i+1} = kl[(3-\alpha), 2(3+\alpha), (3-\alpha)] \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \equiv q_i, \quad (3.7)$$

$$i = 1, 2 \dots n-1$$

$$m_0 - m_1 = p_0 l - kl[(3+\alpha), (3-\alpha)] \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \equiv q_0, \quad (3.8)$$

$$m_{n-1} = kl[(3-\alpha), (3+\alpha)] \begin{bmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} - p_n l \equiv q_n,$$

gdzie: p_0, m_0 — obciążenia węzła 0,

p_n — obciążenia węzła n od strony strefy rozwartej.

Prawe strony równań (3.7) i (3.8) po podstawieniu rozwiązań (3.4) mają postać:

$$\begin{aligned} q_i &= kl\{12A + 12Bi - fl[6i^2 + (3-\alpha)]\}, \\ q_0 &= p_0 l - 6Akl - (3-\alpha)Bkl + \frac{kfl^2}{2}(3-\alpha), \\ q_n &= -p_n l + 6Akl + Bkl[3(2n-1) + \alpha] + \\ &+ \frac{kfl^2}{2} [(3-\alpha)(2n-1) - 6n^2]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Postępując jak w p. 3.1 znajdziemy rozwiązanie równania różnicowego (3.7):

$$m_j = C + Dj + \left[6Akl - \frac{kfl^2}{2}(3-\alpha) + \frac{kfl^2}{2} \right] j^2 + 2Bklj^3 - \frac{kfl^2}{2} j^4. \quad (3.10)$$

Stałe całkowania C i D wyznaczone z warunków brzegowych (3.8) mają postać:

$$\begin{aligned} C &= m_0 = p_0 l(n-1) - p_n l - 6Aklb(n-2) + \\ &- Bkl[2n(n-1)(n-2) - (3+\alpha)n] + \\ &+ \frac{kfl^2}{2} [n(n-1)^2(n-2) - (3+\alpha)n^2], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$D = -p_0 l + (1-\alpha)Bkl.$$

W rozwiązaniach występuje oprócz niewiadomych z_0, p_0, m_0 , również nieznaną liczbą pontonów n po prawej stronie strefy zwarcia. Siła p_n występująca na końcu strefy zwarcia reprezentuje oddziaływanie reszty rozwartej mostu. Zgodnie z obliczeniami w [2], siła działająca na część rozwartą mostu można wyrazić następująco:

$$p_n^+ = k_n \cdot z_n, \quad k_n = 2\sqrt{3} \sqrt{\alpha} k. \quad (3.12)$$

Równanie ciągłości sił na końcu strefy zwarcia: $p_n^+ + p_n^- = 0$ pozwala obliczyć siłę $p_n = p_n^-$, działającą na końcu strefy zwarcia:

$$p_n = p_n^- = -p_n^+ = -2\sqrt{3} \sqrt{\alpha} k \cdot z_n,$$

gdzie z_n jest ugięciem końca strefy zwarcia:

$$z_n = A + Bn - \frac{fl}{2} n^2.$$

Podstawowy warunek pozwalający określić liczbę pontonów n w zwarciu z prawej strony pontonu środkowego, to warunek zerowania się momentu na końcu strefy: $m_n = 0$. Warunek ten prowadzi do równania:

$$\begin{aligned} -p_0 l + Akl(12n + 2\sqrt{3}\sqrt{\alpha}) + Bkl6n + (2\sqrt{3}\sqrt{\alpha}) + \\ -kfl^2 n(2n^2 + 1 - \sqrt{3}\sqrt{\alpha}n) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Podobny warunek można napisać dla lewej strony strefy zwarcia, podstawiając: $p_0 = \bar{p}_0$, $A = \bar{A}$, $n = \bar{n}$ itd.

Poprzez p_0 i \bar{p}_0 zgodnie z równaniami (2.3) wchodzi do rozwiązania parametry z obu stron zwarcia i przez to zadanie nie jest proste do dalszej analizy.

Stosunkowo proste rozwiązania otrzymuje się dla symetrycznych przypadków obciążenia, które zostaną przedyskutowane w dalszym ciągu.

4. Symetryczne przypadki obciążenia

4.1. Siła skupiona w środku pontonu. W tym przypadku $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ (patrz rys. 1). Strefa zwarcia musi być symetryczna tzn: $z_0 = \bar{z}_0$, $m_0 = \bar{m}_0$, stąd można rozpatrywać tylko prawą stronę strefy zwarcia i na podstawie (2.3):

$$p_0 = \frac{P}{2} - 6kz_0. \quad (4.1)$$

Ponieważ $B = -\frac{fl}{2}$ zgodnie z (3.5), więc rozwiązania w strefie zwarcia będą miały postać:

$$z_j = z_0 - \frac{fl}{2} (j+1)j. \quad (4.2)$$

Momenty gnące, zgodnie z (3.10):

$$\begin{aligned} m_j = m_0 - \left[p_0 l + \frac{kfl^2}{2} (1 - \alpha) \right] j + \\ + \left[6klz_0 - \frac{kfl^2}{2} (2 - \alpha) \right] j^2 - kfl^2 j^3 - \frac{kfl^2}{2} j^4, \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} m_0 = p_0 l(n-1) - p_n l - 6klz_0(n-2) + \\ + \frac{kfl^2}{2} n(n^2-1)(n-2) - \frac{kfl^2}{2} (3+\alpha)n(n+1), \end{aligned} \quad (4.3)$$

n — liczba pontonów w zwarciu po prawej stronie pontonu zerowego. Odpowiednikiem równania (3.13) jest teraz:

$$-p_0 l + 2\sqrt{3}\sqrt{\alpha}klz_n + 12klz_0 n - kfl^2 n(n+1)(2n+1) = 0, \quad (4.5)$$

skąd:

$$z_n = \frac{\frac{P}{2k} - 2n(n+1)(2n+1)fl}{6(2n+1) + 2\sqrt{3}\sqrt{\alpha}}, \quad (4.6)$$

oraz

$$z_0 = z_n + \frac{fl}{2}(n+1)n.$$

Całkowita długość strefy zwarcia wyrażona w ilości pontonów wynosi $2n+1$ (pontonów).

Relacje (4.6) pozwalają wyznaczyć zanurzenia środkowych przegubów z_0 i końcowych z_n , jeśli znamy ilość pontonów w zwarcu. Nie mamy przy tym żadnej gwarancji, że:

- a) wszystkie pontony wewnątrz strefy są zwarte ($m_i > 0$ dla $i < n$),
- b) nie występuje zwarcie na styku strefy zwarcia i rozzwarcia.

Warunki powyższe można sprowadzić do następujących żądań:

- a) $m_{n-1} > 0$ — wobec monotoniczności funkcji m_i (4.3),
- b) $\varphi_n < f$ — gdzie φ_n jest kątem załamania pomiędzy pontonami na styku strefy zwarcia i rozzwarcia.

Nie spełnienie warunku (a) oznacza odłączenie się ostatniego pontonu od strefy zwarcia, zaś w przypadku (b) — dołączenie się następnego do strefy zwarcia.

Kąt załamania φ_n wynosi: $\varphi_n = (-z_{n-1} + 2z_n - z_{n+1}) \cdot \frac{1}{l}$. Podstawiając z_{n-1} ze strefy zwarcia (4.2) i z_{n+1} ze strefy rozzwarcia: $z_{n+1} = z_n \cdot r$, gdzie r zgodnie z formułami w [2]:

$$r = -\frac{\sqrt{3} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}}, \text{ otrzymamy:}$$

$$\varphi_n = \frac{z_n}{l}(1-r) - fn. \quad (4.7)$$

Warunki (a) i (b) prowadzą w rezultacie do następującego ograniczenia na ugięcia końca strefy zwarcia:

$$-\frac{\sqrt{3} - \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3}} fln < z_n < \frac{\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3}} fl(n+1), \quad (4.8)$$

lub w powiązaniu z siłą P :

$$P_{n, \min} < P < P_{n, \max},$$

gdzie:

$$\frac{P_{n, \min}}{kfl} = \frac{P_{n, \text{zer}}}{kfl} - [\sqrt{3}(2n+1) + \sqrt{\alpha}](\sqrt{3} - \sqrt{\alpha})2n, \quad (4.9)$$

$$\frac{P_{n, \max}}{kfl} = \frac{P_{n, \text{zer}}}{kfl} + [\sqrt{3}(2n+1) + \sqrt{\alpha}](\sqrt{3} - \sqrt{\alpha})2(n+1),$$

$$P_{n, \text{zer}} = 4n(n+1)(2n+1)kfl. \quad (4.10)$$

$P_{n, \text{zer}}$ jest siłą, przy której następuje „izolacja” strefy zwarcia ($z_n = 0$). Wówczas siła wzajemnego oddziaływania między strefami jest równa zero, a most poza strefą zwarcia

jest płaski. Obliczając $P_{n, \min}$ i $P_{n, \max}$ dla każdego n znajdziemy przedziały, w jakich musi się znaleźć siła P , aby możliwe było zwarcie n pontonów w prawej części strefy zvarcia, albo $2n+1$ pontonów w całej strefie.

W tabelicy 1 przedstawiono bezwymiarowe wartości tych sił dla $\alpha = 0.91$.

Tabela 1

n	$\frac{P_{n, \min}}{kfl}$	$\frac{P_{n, \text{zer}}}{kfl}$	$\frac{P_{n, \max}}{kfl}$
1	14.43	24	90.07
2	90.07	120	274.94
3	274.94	336	617.02
4	617.02	720	1164.3
5	1164.3	1320	1964.8
6	1964.8	2184	3066.6
...

Wnioski do tabelicy 1

1. Zwarcie punktowe $n = 1$ może zajść dla siły $P_{1, \min} = 14.43 kfl$.
2. Przedziały $(P_{n, \min}, P_{n, \max})$ wypełniają całkowicie oś P tzn. $P_{n, \max} = P_{n-1, \min}$.
3. Przy zadanej sile P można natychmiast określić liczbę n pontonów w zvarciu na podstawie tabl. 1.

4.2. Siła skupiona w środkowym przegubie mostu Jeżeli siła P działa w przegubie o nr. 0 ($l_1 = l, l_2 = 0$), wówczas nie istnieje ponton środkowy określający położenie prawej połowy strefy zvarcia z dokładnością do A i B (patrz rys. 1). Rozwiązania będą jednak nadal symetryczne i takie, że $z_{-1} = z_1$, (przegub o nr. $\bar{0}$ nie istnieje). Na podstawie (3.4) otrzymamy w tym przypadku $B = 0$, stąd:

$$z_j = z_0 - \frac{fl}{2} j^2. \quad (4.11)$$

Siła P działająca w przegubie 0 musi się rozdzielić po połowie na obie części strefy zvarcia, stąd:

$$p_0 = \frac{P}{2}, \quad (4.12)$$

(równania 2.3 są w tym przypadku nieprzydatne).

Podstawienie (4.11) i (4.12) do relacji z rozdziału 3.2 prowadzi do następujących wzorów na moment gnący w strefie zvarcia:

$$m_j = m_0 - p_0 lj + \left[6klz_0 + \frac{kfl^2}{2} (2 - \alpha) \right] j^2 - \frac{kfl^2}{2} j^4, \quad (4.13)$$

gdzie:

$$m_0 = p_0 l(n-1) + 2\sqrt{3} \sqrt{\alpha} klz_n - 6klz_0 n(n-2) + \frac{kfl^2}{2} [n(n-2)(n-1)^2 - (3 + \alpha)n^2]. \quad (4.14)$$

Warunek zerowania się momentu na końcu strefy zwarcia $m_n = 0$ ma postać:

$$-p_0 l + 2\sqrt{3} \sqrt{\alpha} k l z_n + 12k l z_0 n - k f l^2 (2n^2 + 1)n = 0 \quad (4.15)$$

i prowadzi do wyznaczenia z_n lub z_0 :

$$z_n = \frac{\frac{P}{2k} - n(4n^2 - 1)fl}{12n + 2\sqrt{3} \sqrt{\alpha}}, \quad (4.16)$$

$$z_0 = z_n + \frac{fl}{2} n^2,$$

gdzie:

n — jest liczbą pontonów zwartych po prawej stronie obciążenia P , a długość strefy zwarcia wynosi $2n$ pontonów.

Przeprowadzając podobną analizę zwarcia w przedostatnim i ostatnim przegubie, jak w p. 4.1 pracy otrzymamy odpowiednik relacji (4.8):

$$-\frac{\sqrt{3} - \sqrt{\alpha}}{4\sqrt{3}} (2n-1)fl < z_n < \frac{\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}}{4\sqrt{3}} (2n+1)fl, \quad (4.17)$$

lub wprowadzając siłę $P_{n,min}$ odpowiadającą odłączeniu się ostatniego pontonu i $P_{n,max}$ — odpowiadającą dołączeniu się następnego pontonu do strefy zwarcia, otrzymamy:

$$P_{n,min} < P < P_{n,max},$$

gdzie:

$$\frac{P_{n,min}}{kfl} = \frac{P_{n,zer}}{kfl} - (\sqrt{3} - \sqrt{\alpha}) (2\sqrt{3}n + \sqrt{\alpha}) (2n-1), \quad (4.18)$$

$$\frac{P_{n,max}}{kfl} = \frac{P_{n,zer}}{kfl} + (\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}) (2\sqrt{3}n + \sqrt{\alpha}) (2n+1).$$

$$P_{n,zer} = 2n(4n^2 - 1)kfl \quad (4.19)$$

$P_{n,zer}$ zgodnie z (4.16), odpowiada $z_n = 0$ i jak poprzednio dotyczy izolacji strefy zwarcia od reszty mostu. Wartości tych sił dla $\alpha = 0.91$ przedstawiono w tabl. 2.

Tablica 2

n	$\frac{P_{n,min}}{kfl}$	$\frac{P_{n,zer}}{kfl}$	$\frac{P_{n,max}}{kfl}$
1	2.565	6	41.6
2	41.6	60	165.8
3	156.8	210	423.2
4	423.2	504	862
5	862	990	1530
6	1530	1716	2475
7	2475	2730	3445
...

4.3. Dyskusja wyników. Powyższe dwa przypadki obciążenia siłą skupioną obejmują również te obciążenia lokalne mostu, których wypadkowa skupiona jest bądź w środku pontonu, bądź w przegubie. Ponieważ praktyczne przypadki obciążenia nie przekraczają długości dwóch sąsiednich pontonów, więc wyprowadzone tu formuły mogą służyć do obliczeń zanurzeń mostu i rozkładów sił wewnętrznych w strefie zwarcia w tych dwóch charakterystycznych położeniach obciążenia mostu. Jedynie moment gnący bezpośrednio pod obciążeniem będzie zależał od rozkładu tego obciążenia.

Jeżeli obciążenie będzie się poruszać po moście, to pomijając efekty dynamiczne, będziemy mieli na przemian do czynienia z obu przypadkami opisanymi w p. 4.2 i 4.3 pracy. Z analizy wyników zamieszczonych w tabl. 1 i 2 wynika, że przy takiej samej sile, długość strefy zwarcia wyrażona liczbą pontonów w zwarciu jest różna w obu przypadkach. Np. dla $P/kfl = 500$, w chwili, gdy siła znajduje się w środku pontonu, długość strefy zwarcia wynosi 7 pontonów ($2n+1$), zaś w chwili, gdy siła znajduje się nad przegubem, 8 pontonów ($2n$), więc jest dłuższa. Zmiany te będą zachodzić okresowo i oznacza to tylko, że odłączenie się pontonu od strefy zwarcia z tyłu za obciążeniem nie odbywa się w tym samym momencie co przyłączenie następnego przed obciążeniem. Ta oscylacyjna własność dotyczy również zanurzenia strefy zwarcia, (przy dłuższej strefie zanurzenie jest mniejsze); ruchowi postępowemu towarzyszy więc również ruch pionowy całej strefy jako ciała sztywnego. Zjawiska te zaobserwowano przy okazji obliczeń kontrolnych w pracy [3]. Jako ilustrację obu przypadków zwarcia przytoczymy wyniki obliczeń, według wyprowadzonych formuł, mostu pontonowego obciążonego siłą $P = 600$ kN. Wymiary wszystkich pontonów były identyczne:

długość $a = 2.2$ m,

szerokość $b = 6.3$ m,

wysokość $c = 1.0$ m,

luz na zderzakach $d = .01$ m,

odległość przegubów $l = 2.3$ m,

ciężar właściwy wody $\gamma = 9.81$ kN/m³.

Na tej podstawie parametry potrzebne do dalszych obliczeń są następujące:

$$k = \frac{\gamma ab}{12} = 11.33 \text{ kN/m}, \quad \alpha = \left(\frac{a}{l}\right)^2 = .915, \quad fl = \frac{d}{c} l = .023 \text{ m},$$

Tablica 3

$P = 600$ kN		Siła w przegubie	Siła w środku pontonu
liczba pontonów w zwarciu	n	6	6
długość strefy zwarcia	L	27.6 m	29.9 m
zanurzenie pod siłą	z_0	.503 m	.499 m
moment gnący w przegubie 0	m_0	1692.4 kNm	1382.2 *kNm

* w tym przypadku moment m_0 nie występuje bezpośrednio pod siłą, lecz w sąsiednim węźle o nr. 0

$kfl = .2606 \text{ kN}$, $\frac{P}{kfl} = 2302.47$, stąd na podstawie tabl. 1 i 2 można natychmiast określić liczbę n pontonów w zwarciu. Wyniki obliczeń w obu przypadkach obciążenia zestawiono w tabl. 3.

5. Podsumowanie

Formuły wyprowadzone w p. 4 pracy pozwalają zorientować się w rozwiązaniach w strefie zwarcia, a co najważniejsze, obliczyć długość strefy zwarcia, która w przeciwnym przypadku jest niewiadomą przy rozwiązywaniu numerycznym układu (2.1).

Analityczne rozwiązania, choć nie wyczerpujące wszystkich przypadków, umożliwiły porównanie z rozwiązaniami modelu ciągłego [4] i oszacowanie przydatności tego modelu w obliczeniach numerycznych.

Literatura

1. R. BITTNER, *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.
2. R. PISKORSKI, *Metoda superelementu w statyce układów z więzami jednostronnymi*, Mech. Teoret. i Stos. 1, 1988, s. 191—198.
3. *Obliczenia wytrzymałościowe mostu pontonowego*, Praca zbiorowa, Wyd. wewn. I. O. P. G., Nr. 1901/84, Gdańsk 1984.
4. R. PISKORSKI, *Ocena przydatności modelu ciągłego w statyce mostu pontonowego*, Prace Badawcze I. O. P. G. Nr. 1783/MR-774/84, Gdańsk 1983.

Резюме

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА НЕКОТОРОЙ ЦЕПНОЙ СИСТЕМЫ

Решено систему уравнений, описывающих статику понтонного моста в контакте, применяя операторное исчисление к интегрированию разностных уравнений.

Summary

OPERATOR INTEGRATION METHOD OF SOLUTION OF A CATENARY SYSTEM

The system of equations governing the problems of ferry-bridge statics has been solved by means of the operational calculus applied to the integration of difference equations.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 grudnia 1986 roku.

BIULETYN INFORMACYJNY

SYMPOZJUM IUTAM „ODDZIAŁYWANIA ELEKTROMECHANICZNE W ODKSZTAŁCALNYCH CIAŁACH I UKŁADACH”

Tokio, 12 - 17 października 1986

W dniach 12 - 17 października 1986 r. odbyło się sympozjum IUTAM „Oddziaływania elektromechaniczne w odkształcalnych ciałach i układach” („The electromechanical Interactions in Deformable Solids and Structures”). Organizatorem sympozjum był Uniwersytet Tokijski. W skład komitetu naukowego wchodził Y. Yamamoto (Japonia) — przewodniczący, K. Miya (Japonia) — sekretarz generalny, I. Imai (Japonia), F. C. Moon (USA), I. M. Kirko (ZSRR), R. Hsieh (Szwecja), G. A. Maugin (Francja), S. A. Ambartsumian (ZSRR). Przewodniczącym komitetu organizacyjnego był Y. Yamamoto, a Komitetu Wykonawczego prof. K. Miya.

Celem sympozjum było przedstawienie najnowszych osiągnięć teorii i zastosowań oddziaływań elektromagnetycznych i przedyskutowanie kierunków ich dalszego rozwoju. W zakres sympozjum wchodziły następujące zagadnienia:

1. Magnetomechanika elementów konstrukcji,
2. Magnetomechanika nadprzewodzących magnesów,
3. Propagacja fal w polu magnetycznym,
4. Akustoelektryczność i piezoelektryczność,
5. Zastosowanie prądów wirowych w badaniach nieniszczących,
6. Metody numeryczne w zagadnieniach prądów wirowych i analizie pól magnetycznych.

W sympozjum wzięło udział 60 uczestników z 14 krajów: Czechosłowacja (1), Francja (3), Holandia (3), Irlandia (1), Japonia (22), Kanada (1), Polska (10), RFN (2), Singapur (1), Stany Zjednoczone A. P. (10), Szwecja (2), Turcja (1), Wielka Brytania (2), Związek Radziecki (1). Wygłoszono 6 wykładów generalnych oraz 60 referatów sekcyjnych. Organizatorzy podzielili referaty na następujące sekcje:

1. Zginanie, 2. Fale, 3. Materiały elektryczne, 4. Prądy wirowe, 5. Oddziaływania wzajemne, 6. Pękanie, 7. Nadprzewodzące magnesy, 8. Dynamika, 9. Pola elektromagnetyczne, 10. Pola magnetyczne, 11. Magnetyczność.

Uroczystego otwarcia konferencji dokonał przewodniczący Komitetu Organizacyjnego prof. Y. Yamamoto. Następnie głos zabrali Dziekan Wydziału Inżynierii Uniwersytetu Tokijskiego prof. H. Inose oraz Przewodniczący Narodowego Komitetu Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Japońskiej Rady Naukowej prof. I. Imai.

Pierwszą sesję przedpołudniową (poniedziałek, 13.10) otworzył F. C. Moon (USA) wykładem generalnym na temat chaosu i przewidywalności w dynamice ferromagnetyków oraz w sprzężonych układach magneto-mechanicznych. Następnie wygłoszono pięć referatów w sekcji „Zginanie”. Dotyczyły one głównie zginania płyt ferromagnetycznych, zginania i drgań ceramicznych płyt piezoelektrycznych oraz zagadnień wariacyjnych w magnetycznych problemach zginania.

Pierwsza część Sesji popołudniowej dotyczyła zagadnień falowych. Z pięciu referatów trzy dotyczyły rozchodzenia się fal w ferromagnetykach, jeden równań konstytutywnych w ośrodku termomechanicznym. W tej grupie znalazł się referat J. Stefaniaka (Politechnika Poznańska) dotyczący analizy rozchodzenia się fali magnetycznej wywołanej liniowym źródłem zaburzenia. Druga część sesji popołudniowej poświęcona była materiałom elektrycznym. Większość referatów dotyczyła metod obliczeniowych w różnych ośrodkach. W tej sekcji wygłosił referat J. P. Nowacki (IPPT PAN) na temat defektów w dielektrykach z gradientem polaryzacji. Również w tej sekcji wygłosił referat B. Maruszewski (Politechnika Poznańska), o równaniach ewolucji strumieni ciepła i nośników ładunków w półprzewodnikach.

Na sesji przedpołudniowej drugiego dnia obrad (14.10) wykład generalny wygłosił C. W. Trowbridge (Wielka Brytania). Autor dokonał przeglądu ostatnich osiągnięć światowych w metodach obliczeń trójwymiarowych prądów wirowych. Wszystkie sześć referatów tej sesji koncentrowało się wokół zagadnień prądów wirowych i dotyczyło głównie metod obliczeniowych.

Pierwszą część sesji popołudniowej otworzył wykład generalny na temat sprzężonych efektów histerezy magnetosprężystej i ich zastosowań w badaniach nieniszczących. Autorami wykładu byli G. A. Maugin, M. Sabir, P. Chambon (Francja). W tej części sesji dotyczącej ogólnych zagadnień wzajemnych oddziaływań wygłoszono poza wykładem generalnym jeszcze cztery referaty. D. Rogula (IPPT PAN) przedstawił ogólną teorię fizycznego modelu kontinuum złożonego z identycznych (nierozróżnialnych) cząstek C. Rymarz (Wojskowa Akademia Techniczna) przedstawił procedurę filtracji widmowej w zastosowaniu do budowy modelu sprężystego oddziałującego z polem elektromagnetycznym. Tego dnia odbyły się jeszcze dwie sesje. Pierwsza dotyczyła pękania — trzy referaty, z czego dwa omawiały pęknięcie w niskich temperaturach. Druga dotyczyła nadprzewodzących magnesów (pięć referatów). Referaty obydwu grup były ukierunkowane na ogół na efektywne rozwiązywanie zagadnień konstrukcyjnych. Najwięcej referatów wygłoszili gospodarze.

Trzeciego dnia obrad (15.10) pierwszy wykład generalny wygłosił R. Hsieh (Szwecja). Dał w nim przegląd zagadnień wielopolarnej elektrodynamiki (multipole electrodynamics) ciał odkształcalnych. W dalszym ciągu obrad wygłoszono cztery referaty, z których trzy dotyczyły efektów falowych w dielektrykach, a jeden pewnych dodatkowych efektów w ceramicznych płytkach ferroelektrycznych. K. Majorkowska-Knap (Politechnika Warszawska) omówiła w swym referacie zagadnienia odbicia i załamania fal w dielektrykach z gradientem polaryzacji.

Sesję popołudniową otworzył wykład generalny S. A. Ambartsumiana (Związek Radziecki) poświęcony zginaniu i drganiom płyt piezoelektrycznych. Dalszych osiem referatów dotyczyło szerokiego wachlarza zagadnień dynamicznych (np. stateczność magnetosprężysta, drgania, formowanie siłami elektrodynamicznymi). W tej sesji wygłosił referat W. Kurnik (Politechnika Warszawska), w którym przedstawił zagadnienia aeroflasteru w płytach paramagnetycznych i diamagnetycznych.

W czwartym ostatnim dniu obrad (16.10) wykład generalny wygłosił W. Lord (Stany Zjednoczone). Tematem było zastosowanie prądów wirowych w nieniszczącym badaniu materiałów. Z sześciu dalszych referatów tej sekcji, która w tytule miała „pola elektromagnetyczne” cztery dotyczyły prądów wirowych a dwa metod numerycznych w zagadnieniach pola elektromagnetycznego. Sesja popołudniowa, na której wygłoszono pięć referatów, poświęcona była zagadnieniom pola magnetycznego i magnetosprężystości. Tematem referatu J. Kapelewskiego (Wojskowa Akademia Techniczna) był pewien sposób modelowania warstwy przypowierzchniowej w przypadku występowania dystorsji. M. Szyren (Politechnika Warszawska) przedstawiła w swym referacie fenomenologiczny model ciała heterogenicznego przy uwzględnieniu występowania sił elektronowych. M. Żórawski (IPPT PAN) wyprowadził równania magnetosprężystości jako warunki cechowania dla pola Yang-Millsa.

Ostatniego dnia (17.10) odbyła się wycieczka do dwóch ośrodków badawczych położonych kilkadziesiąt kilometrów poza Tokio. Pierwszy, to Laboratorium Elektrotechniczne z kilkunastoma oddziałami zajmującymi się problematyką różnych metod przetwarzania i przenoszenia energii, automatyką, technologią itp. Drugi ośrodek to Narodowe Laboratorium Fizyki Wysokich Energii. Udostępniono do zwiedzania między innymi akceleratory cząstek i zaprezentowano szeroki wachlarz możliwości badawczych.

Symposium w Tokio było kolejnym organizowanym przez IUTAM spotkaniem na temat oddziaływań elektromechanicznych. Poprzednie odbyło się w 1983 r. w Paryżu. Na podobny temat odbyło się też w 1984 r. w Błażejewku k. Poznania 189 kolokwium „EUROMECH”. Zainteresowanie tymi konferencjami świadczy o aktualności problematyki i celowości kontynuowania spotkań na ten temat. We wszystkich dotychczasowych konferencjach licznie były reprezentowane różne ośrodki badawcze z Polski. W Tokio uczestnicy z Polski i Stanów Zjednoczonych stanowili oprócz gospodarzy najliczniejsze zespoły.

Symposium dało przegląd stanu badań nad teorią pól połączonych oraz wskazało kierunki dalszego rozwoju tej problematyki. Pełne teksty referatów zostaną wydane przez North-Holland Publishing Company.

Jarosław Stefaniak

**XII KONGRES MEKSYKAŃSKIEJ AKADEMII INŻYNIERII
Saltillo, Coahuila, 24 - 26 października 1986**

Kongresy organizowane są corocznie i stanowią przegląd osiągnięć nauk technicznych w Meksyku. W zakresie mechaniki wygłoszono 73 referaty, w tym 1 referat z Brazylii oraz 2 referaty meksykańsko-amerykańskie. Polacy pracujący w Meksyku wygłoszili łącznie 9 referatów. Całość materiałów konferencyjnych została opublikowana w „Memoria Duodécimo Congreso Academia Nacional de Ingeniería A. C.” Dr. W. R. Pawlak, Profesor wizytujący w Uniwersytecie Nucoro León otrzymał dyplom członka rzeczywistego Meksykańskiej Akademii Inżynierii z rąk Prezesa Dra. O. Gonzáles Cuevas. Na Kongresie dr. W. R. Pawlak przedstawił łącznie 6 prac.

Referaty były przedstawione w 13 sekcjach:

1. Przepływy cieplne I (6 referatów); przewodn. Prof. A. F. Romero.
2. Materiały I (6 referatów); przewodn. Prof. J. L. Serrano.
3. Maszyny i mechanizmy I (6 referatów); przewodn. Prof. R. Sepúlveda.
4. Maszyny i mechanizmy II (3 referaty); przewodn. Prof. A. Lozano.
5. Maszyny i mechanizmy III (3 referaty); przewodn. Prof. E. Chicurel.
6. Przepływy cieplne II (6 referatów); przewodn. Prof. J. L. Fernández.
7. Materiały II (6 referatów); przewodn. Prof. R. Colás.
8. Maszyny i mechanizmy IV (6 referatów); przewodn. Prof. C. Beckwith.
9. Przepływy cieplne III (3 referaty); przewodn. Prof. F. J. Solorio.
10. Maszyny i mechanizmy V (6 referatów); przewodn. Prof. J. Kowalski.
11. Przepływy cieplne IV (7 referatów); przewodn. Prof. F. Sánchez.
12. Materiały III (8 referatów); przewodn. Prof. H. López.
13. Maszyny i mechanizmy VI; przewodn. Prof. A. Garza.

Na podstawie analizy 3 prac przedstawionych na kongresie z Uniwersytetu w Meksyku oraz Instytutów Technologicznych w Torreón i Celaya, można wysnuć wniosek, że prace z optymalizacji konstrukcji systemów mechanicznych takich jak: silnik wysokoprężny ciągnika, pompa odśrodkowa, przekładnie mechaniczne, sprzęgła cierne i zawory, wykonywane przez zespół pod kierunkiem autora są unikalne w Meksyku. Dr. P. Rusek z Instytutu Technologicznego w Querétaro przedstawił referat pt. Własności trybologiczne powierzchni elementów maszyn. Najwięcej prac (20) zostało wykonanych w Uniwersytecie w Meksyku (UNAM).

Mimo poważnego kryzysu ekonomicznego trapiącego Meksyk, poziom prac można uznać za dobry.

*Jerzy Kowalski
Uniwersytet Guanajuato,
Gto., Meksyk*

**DRUGA MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA NT. „CONSTITUTIVE
LAWS FOR ENGINEERING MATERIALS”
5 - 8 stycznia 1987 r. Tucson, Arizona, U.S.A.**

Zagadnienie matematycznego modelowania procesów niesprężystej deformacji i zniszczenia materiałów przyciąga uwagę wielu badaczy. W systemie analizy numerycznej problemów brzegowych dla materiałów i konstrukcji dobór właściwego modelu konstytutywnego jest sprawą bardzo ważną i decyduje o dokładności tej analizy. Druga międzynarodowa konferencja poświęcona tego rodzaju zagadnieniom odbyła się w Tucson (Arizona, USA) w okresie 5 - 8 stycznia 1987 r. z udziałem ponad 200 uczestników z bogatym programem zawierającym ok. 190 referatów. Obok wykładów generalnych oraz referatów przedstawionych w poszczególnych sekcjach, odbywały się codziennie duże dyskusje plenarne dotyczące różnych zagadnień związanych z tematyką referatów sekcyjnych. Dyskusje te były bardzo ważnym elementem konferencji i wskazywały na istnienie dużych rozpiętości w poglądach na sprawę zastosowań i sformułowań różnych modeli konstytutywnych. Modelowanie dotyczyło głównie metali i tzw. geomateriałów (grunty, skały, betony), w mniejszym stopniu kompozytów i polimerów.

Jako główne tematy referatów i dyskusji należy wymienić:

1. Plastyczność metali (obciążenia cykliczne, pełzanie, rozwój uszkodzeń, obciążenia dynamiczne, anizotropia).
2. Mechanika geomateriałów (obciążenia monotoniczne, upłynnienie gruntów przy deformacji cyklicznej, modelowanie ruchu wzdłuż powierzchni nieciągłości).
3. Stany pokrytyczne w materiałach (lokalizacja odkształceń, efekty lokalnego osłabienia).
4. Opis dużych deformacji plastycznych (zastosowanie konfiguracji odciążonej, równania przyrostowe, sprawa spinu plastycznego).

Jeśli chodzi o temat pierwszy, to wymienić tu należy w pierwszym rzędzie szereg referatów dotyczących modelowania deformacji cyklicznej metali, a zwłaszcza takich zjawisk jak akumulacja odkształceń, wzmocnienie przykołowych dróg deformacji, opis anizotropii plastycznej. Do opisu deformacji cyklicznej proponowane są zarówno teorie przyrostowe jak i całkowite (endochroniczne).

W mechanice geomateriałów podstawowym problemem jest opis progresywnego zniszczenia połączonego z rozwojem deformacji plastycznej oraz opis deformacji cyklicznej, gdzie występują zjawiska zagęszczenia lub dylatacji i związane z nimi zmiany ciśnienia porowego. Zjawisko tzw. upłynniania (liquefaction) wywołane jest wzrostem ciśnienia porowego i prowadzi ono do katastroficznego zniszczenia przy działaniach sejsmicznych. Odrębną grupą tematyczną jest termomechanika gruntów i skał i związane z tym problemy magazynowania odpadów radioaktywnych. Referaty O. C. Zienkiewicza, T. Hucckla, C. Desai'a i innych dotyczyły tej klasy zagadnień.

Przez termin „stany pokrytyczne” rozumiemy proces deformacji w zakresie niestatycznym krzywej naprężenie-odkształcenie. Występują tu zjawiska zlokalizowanej deformacji, efekt skali oraz efekty nielokalne. Brak jest do tej pory jednolitego podejścia do tej klasy zagadnień. W przedstawionych referatach (Z. Bazant, K. Wilam, J. Bordet i inni) traktowano zjawisko lokalizacji jako proces nielokalny, jako problem bifurkacji lub wprowadzając dodatkowe związki konstytutywne w strefie lokalizacji. Jest to jeden z najbardziej aktywnie rozwijanych kierunków badań w zakresie niesprężystej analizy materiałów.

Problem opisu dużych deformacji plastycznych jest związany z takimi zagadnieniami jak zastosowanie konfiguracji odciążonej, związku konstytutywnego dla spinu plastycznego, opis anizotropii plastycznej itp. Przedstawione referaty sekcyjne (E. H. Lee, Y. Dafalias, T. Lehmann) reprezentują różne podejścia do tego zagadnienia.

Większość uczestników pochodziła ze Stanów Zjednoczonych. Wykłady generalne przedstawili między innymi: R. S. Rivlin, O. C. Zienkiewicz, D. C. Drucker, K. C. Valanis, J. T. Oden, T. Lehmann, S. N. Atluri, Y. F. Dafalias, S. Nemat-Nasser, T. J. Hughes. Mój referat generalny dotyczył zagadnienia „Anizotropia materiałów przy monotonicznym i cyklicznym obciążeniu”.

Konferencja wykazała, że opracowanie modeli konstytutywnych stanowi najtrudniejszą część systemów analizy niesprężystej. Brak jest do tej pory ogólnie zaakceptowanych opisów metod identyfikacji czy też określonych zakresów stosowności. Olbrzymi wysiłek badawczy przyczyni się niewątpliwie do szybkiego postępu w tym zakresie.

Zenon Mróz

IUTAM SYMPOSIUM ON ADVANCED BOUNDARY ELEMENT METHODS San Antonio — USA, 1987

W dniach 13-16 kwietnia 1987 r. odbyło się w San Antonio w Teksasie Sympozjum poświęcone najnowszym osiągnięciom w rozwoju i zastosowaniu metody elementów brzegowych. Sympozjum odbywało się pod patronatem IUTAM (Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej) i zorganizowane zostało przez Southwest Research Institute (Południowo-Zachodni Instytut Badawczy) w San Antonio przy wsparciu finansowym Narodowej Fundacji Naukowej Daimler-Benz.

Przewodniczącym Komitetu Naukowego Sympozjum był dr T. A. Cruse — dyrektor Departamentu Mechaniki Technicznej w SwRI. Dr T. A. Cruse, zajmujący się obecnie zastosowaniem metody elementów brzegowych do zagadnień mechaniki pękania, jest jednym z głównych pionierów metody elementów brzegowych.

Obrady plenarne Sympozjum odbywały się w hotelu La Mansion del Rio, a sesja plakatowa miała miejsce w siedzibie SwRI. W trakcie obrad plenarnych wygłoszono 48 referatów w tym 7 referatów ogólnych oraz 41 referatów specjalistycznych wyselekcjonowanych przez Komitet Naukowy. W sesji plakatowej prezentowanych było 11 prac.

Referaty ogólne wygłoszili: profesorowie F. J. Rizzo (USA), W. L. Wendland (RFN), U. Heise (RFN), J. L. Hess (USA), D. H. Peregrine (W. Brytania), S. N. Atluri (USA) i J. C. Nedelec (Francja). Referaty plenarne wygłoszili przedstawiciele następujących krajów: Australia (1), Austria (2), Francja (6), Hiszpania (1), Holandia (2), Japonia (6), Kanada (1), Polska (1), RFN (3), USA (18), W. Brytania (4), Włochy (3). W sesji plakatowej prezentowane były prace z następujących krajów: Bułgaria (1), ChRL (1), Hiszpania (1), Japonia (1), Maroko (1), USA (5), W. Brytania (1).

Referaty i prace prezentowane w trakcie Sympozjum poświęcone były zastosowaniu metody elementów brzegowych w mechanice ciała stałego i mechanice płynów i poruszały zagadnienia związane z najnowszymi osiągnięciami z zakresu teorii, algorytmizacji i zastosowań.

Tematyka referatów obejmowała takie zagadnienia jak:

- analiza liniowa i nieliniowa (nieliniowości fizyczne i geometryczne),
- analiza dynamiczna (zagadnienia ustalone i niustalone),
- zastosowania w mechanice płynów (aerodynamika, teoria fal powierzchniowych cieczy, oddziaływania niustalone),
- zastosowania w mechanice pęknięcia i w analizie konstrukcji,
- analiza wrażliwości i optymalizacja kształtu elementów konstrukcyjnych,
- teoretyczne i numeryczne podstawy metody (dyskretyzacja, całkowanie, szacowanie błędów, efektywność).

Uczestnictwo w Sympozjum było ograniczone do autorów i uczestników wyselekcjonowanych przez Komitet Naukowy. Stwarzało to dogodne warunki do dyskusji i wymiany poglądów.

Program oraz streszczenia referatów zostały wydane w postaci specjalnie przygotowanych materiałów konferencyjnych. Pełne teksty wygłoszonych referatów zostaną wydane w 1987 r. pod redakcją dr. T. A. Cruse'a przez Springer-Verlag. Wybrane referaty będą także opublikowane w *International Journal of Computational Mechanics* (wykładowcy: S. N. Atluri i G. Yagawa).

Organizatorzy konferencji zadbali nie tylko o wysoki poziom naukowy i wzorowy przebieg Sympozjum ale także stworzyli warunki umożliwiające poznanie historii i dorobku kulturalnego Teksasu i San Antonio.

Tadeusz Burezyński

Wyciąg z protokołu nr 2/XXII/87 z Posiedzenia Plenarnego ZG PTMTS. Warszawa 1987-01-20.

W punkcie 7 obrad prof. J. Wojnarowski przedstawił główne kierunki działalności PTMTS w XXII kadencji:

- a) Kontynuowanie stałych form działalności Zarządu Głównego i Oddziałów PTMTS, które należą już do tradycji Towarzystwa (zebrań naukowych, seminariów, konferencji, sympozjów, konkursów, sesji wyjazdowych oraz szkół naukowych) — realizacja Prezydium ZG oraz Zarządy Oddziałów.
- b) Zorganizowanie drugiej Szkoły „Sterowanie w mechanice” — odpowiedzialny przewodniczący Komitetu Organizacyjnego prof. St. Dubiel.
- c) Zorganizowanie sesji naukowej z okazji 300-lecia wydania *Principiów Newtona*. Sesja ta planowana jest na 9 - 10 października 1987 r. w Bielsku Białej (organizatorem jest Prezydium ZG oraz Zarząd oddziału w Bielsku Białej) — odpowiedzialni: prof. prof. Cz. Woźniak, i J. Wojnarowski oraz doc. M. Trombski.
- d) Udział w I-szej Jugosławijsko-Polskiej Konferencji „Nowe kierunki w mechanice ciała stałego i konstrukcji”. Przewiduje się ze strony PTMTS udział 15 członków Towarzystwa — realizuje Prezydium ZG, odpowiedzialny prof. Cz. Woźniak.

- e) Sfinalizowanie sprawy przygotowania i wybicia medalu, który ma stanowić 1-szą nagrodę w konkursach naukowych — odpowiedzialni: prof. prof. R. Parkitny i J. Wojnarowski oraz doc. M. Trombski.
- f) Powoływanie członków zagranicznych i wspierających — realizują Prezydium ZG i Przewodniczący Oddziałów.
- g) Nawiązywanie kontaktów i podejmowanie współpracy z bliźniaczymi Towarzystwami — odpowiedzialny prof. R. Gutowski.
- h) Podjęcie prac mających na celu okresowe wydawanie biuletynu o działalności Towarzystwa — odpowiedzialni prof. prof. K. Sobczyk i J. Wojnarowski.
- i) Wydanie biuletynu z wykazem wszystkich członków Towarzystwa — formę realizatorską i sposób realizacji pracy przedstawi doc. Z. Kończak.
- j) Powołanie Komisji do spraw terminologii w mechanice — propozycje działania w tym zakresie przedstawią prof. prof. B. Skalmierski i M. Zakrzewski.
- k) Współdziałanie z Komitetem Redakcyjnym naszego kwartalnika — odpowiedzialne Prezydium ZG.
- l) Współdziałanie z Komitetem Mechaniki i Komitetem Budowy Maszyn PAN — odpowiedzialni prof. prof. R. Gutowski, Z. Dźygadlo i J. Wojnarowski.
- m) Odbycie 3 lub 4 wyjazdowych posiedzeń Plenarnych — wstępnie Oddziały: Bielsko Biała, Bydgoszcz, Gdańsk i Lublin zgłosiły gotowość zorganizowania posiedzeń.
- n) Wydanie informacji o planowanych konferencjach organizowanych nie tylko w ramach działalności PTMTS — odpowiedzialne Biuro ZG.
- o) Podjęcie prac związanych z wprowadzeniem poprawek do Statutu — sprawa powołania Komisji zostanie omówiona na jednym z najbliższych posiedzeń Prezydium.
- p) Wydanie drugiej serii znaczka Towarzystwa — realizacja Prezydium ZG.
- r) Przygotowanie wniosków o nadanie godności Członka Honorowego — Prezydium ZG i Przewodniczący Oddziałów proszeni są o przeanalizowanie kandydatów i zasadności wniosków.
- s) Zorganizowanie walnych zgromadzeń w Oddziałach (I półrocze 1988 — odpowiedzialni Przewodniczący Oddziałów) oraz XXIII Zjazdu Delegatów połączonego z Sesją z okazji 30-lecia PTMTS (II półrocze 1988 — odpowiedzialne Prezydium ZG).
- t) Wszczęcie prac nad założeniem kroniki PTMTS — realizuje Prezydium ZG.

Konferencje

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. 6th International Conference on Numerical Methods for Thermal Problems
Swansea, Wlk. Brytania
3—7 lipca 1989</p> | <p>Prof. R. W. Lewis, Instit. for Numerical Methods in Engineering,
Univ. College of Swansea.
Swansea SA2 8PP, U. K.</p> |
| <p>2. 6th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Swansea, Wlk. Brytania
11—15 lipca 1989</p> | <p>Prof. C. Taylor, Dep. of Civil Engineering, Univ. College of Swansea, Singleton Park,
Swansea SA2 8PP, U. K.</p> |
| <p>3. Minisymposium on Outflow Boundary Condition
Swansea, Wlk. Brytania, 10 lipca 1989</p> | <p>Prof. R. L. Sani, Univ. of Colorado, CIRES RLI-158
Boulder, CO 80302, USA</p> |

INSTRUKCJE DLA AUTORÓW

Ogólne

W Mechanice Teoretycznej i Stosowanej drukowane są prace przeglądowe oraz oryginalne teoretyczne i doświadczalne z zakresu mechaniki ciała stałego oraz cieczy i gazów. Publikujemy również dyskusję naukową oraz polemikę dotyczącą prac z mechaniki, które ukazały się w MTiS lub w innych czasopismach naukowych.

W Biuletynie Informacyjnym drukujemy sprawozdania z konferencji naukowych z zakresu mechaniki w kraju i za granicą oraz z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Praca może być złożona do druku w MTiS pod warunkiem jej nieopublikowania w innym czasopiśmie.

Drukujemy w języku polskim oraz na życzenie autorów w języku angielskim pod warunkiem złożenia pracy w tym języku.

Prace należy nadysłać na adres Redakcji bądź jednego z redaktorów, w dwóch egzemplarzach (oryginał + kopia).

Praca złożona do druku podlega recenzji.

Wszelkie zmiany (poprawki autorskie) po zakwalifikowaniu artykułu do druku i przekazaniu go do drukarni mogą być dokonane tylko w czasie 1 korekty (na koszt autora).

Po opublikowaniu autorzy otrzymują 25 egzemplarzy odbitek swojego artykułu.

Szczegółowe

- Prace składane do publikacji w MTiS powinny zawierać (wg. kolejności)
 - Tytuł
 - Imię, Nazwisko z podaniem miejsca pracy
 - Abstrakt (w języku polskim)
 - Właściwą pracę
 - Spis literatury
 - Streszczenia w języku
 - praca w języku polskim — rosyjskim w maszynopisie i angielskim
 - praca w języku angielskim — polskim i rosyjskim.
- Tekst powinien być napisany po jednej stronie (nie na papierze kredowym) z zachowaniem podwójnych odstępów i obustronnych marginesów — z lewej 6 cm, z prawej 1 cm.
- Wzory należy wpisywać czytelnie, w kolorze czarnym, z zachowaniem numeracji po stronie prawej (należy zwrócić szczególną uwagę na rozróżnienie 1 oraz litery l, zera i litery o oraz literę q i p).
- Życzenia autorów dotyczące formy graficznej pracy w tym kroju czcionki, liter greckich itp. powinny być dołączone na osobnej kartce, bądź na marginesie (ołówkiem).
- Tablice występujące w tekście należy dołączyć na oddzielnych kartkach (jedna na stronie).
- Podpisy pod rysunkami powinny być wyszczególnione oddzielnie, a nie pod rysunkami.
- Prosimy o sporządzanie wykazu literatury w sposób następujący: W. Nowacki, Teoria Sprężystości, Warszawa PWN, 1970.
- Odnośniki należy numerować kolejno w całej pracy, a nie wg strony.
- Obowiązuje stosowanie układu jednostek SI.

K. MARCINIAK, J. WOJTECHOWSKI, The application of curvature and contour lines in sculptured surfaces machining on numerical control milling machines	161
Использование линий кривизны и уровней для обработки криволинейных поверхностей на фрезерных станках, управляемых при помощи электронно-вычислительных устройств	
Zastosowanie linii krzywiznowych i konturowych przy obróbce frezowaniem powierzchni krzywoliniowych dla obrabiarek sterowanych numerycznie	
K. GOŁOŚ, Plastic strain energy under cyclic multiaxial states of stress	171
Энергия пластической деформации в условиях сложного циклического нагружения	
Energia odkształcenia plastycznego przy wieloosiowych obciążeniach cyklicznie zmiennych	
K. MAZUR-ŚNIADY, Skrępowane skręcanie przyrmatycznych prętów o bisymetrycznych, zwartych przekrojach	179
Степённое кручение призматических стержней о бисимметричных сплошных сечениях	
Constrained torsion of prismatic rod with bisymmetric compact cross-section	
R. PIKORSKI, Metoda superelementu w statyce układów z więzami jednostronnymi	191
Метод суперэлемента в статике систем с одностронными связями	
Superelement method in the statics of system with unilateral constraints	
R. PIKORSKI, Operatorowa metoda rozwiązania pewnego układu łańcuchowego	199
Операторный метод расчёта некоторой цепной системы	
Operator integration method of solution of a catenary system	209
Biuletyn Informacyjny	

Prenumeratę **na kraj** przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki **za granicę** przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, PKO BP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona — Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1.I.1967 r. jako kwartalnik. (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa, pokój 309)
