

II 720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 25 • ZESZYT 4

XXV-lecie

WARSZAWA 1987

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

53A

J 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 5 • Z E S Z Y T 4

XXV-lecie

W A R S Z A W A 1 9 8 7

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

RADA REDAKCYJNA

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,
STANISŁAW JERZY GDULA, IGOR KISIEL,
ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

KOMITET REDAKCYJNY

REDAKTOR NACZELNY — ZBIGNIEW OLESIAK
REDAKTORZY — STANISŁAW DUBIEL, JACEK STUPNICKI,
ANDRZEJ TYLIKOWSKI, CZESŁAW WOŹNIAK,
SEKRETARZ — EWA KOISAR

REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Kwartalnik ukazuje się przy pomocy finansowej PAN

Nakład 510. Ark. wydawniczych 12,0 Ark. drukarskich 10,0. Papier druk. sat. kl. III, 70 g. 70×100
Oddano do składania 18.III.1987 r. Druk ukończono we wrześniu 1988 r. Zam.4335/12/87. Cena 140 zł.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

RECENT DEVELOPMENTS IN SHELL STABILITY ANALYSIS

JOHANN ARBOCZ

Technical University Delft, The Netherlands

The present shell research activities at the Aerospace Engineering Department of the TH Delft are directed towards the development of an improved shell design criteria, which incorporates the latest theoretical findings and makes efficient use of the currently available computational facilities.

The establishment of an International Imperfection Data Bank is discussed. Characteristic initial imperfection distributions associated with different fabrication techniques are shown. It is demonstrated that the generation of reliability functions via the Monte Carlo Method, which displays the degrading effect of the expected initial imperfection distribution characteristic of a given fabrication process on the buckling load, offers the means of combining the Lower Bound Design Method with the notion of Goodness Classes. Thus shells manufactured by a process, which produces inherently a less damaging initial imperfection distribution, will not be penalized because of the low experimental results obtained with shells made by another process which produces a more damaging characteristic initial imperfection distribution.

1. Introduction

For buckling sensitive applications a typical shell design procedure, as recommended by any of the currently available shell design manuals [1], [2] consists of the following steps:

1. Lay-out the preliminary dimensions.
2. Select a wall construction and a stiffening concept.
3. Use one of the many shell-of-revolution codes to calculate the buckling load of the "perfect" structure taking into account the appropriate boundary conditions and the effect of prebuckling deformations.
4. Select a "knockdown" factor to account for the "imperfections" present in the finished product.
5. Apply the appropriate safety factor.

In the form of a formula one can write:

$$P_a \leq \frac{\gamma}{F.S.} P_c \quad (1)$$

where:

P_a = allowable load,

P_c = buckling load of the "perfect" structure,

γ = "knockdown" factor,

$F.S.$ = factor of safety.

The empirical "knockdown" factor γ is so chosen that when it is multiplied with P_c the buckling load of the perfect structure, a lower bound to all available experimental data is obtained. For isotropic shells under axial compression this approach yields the lower-bound curve shown in Figure 1.

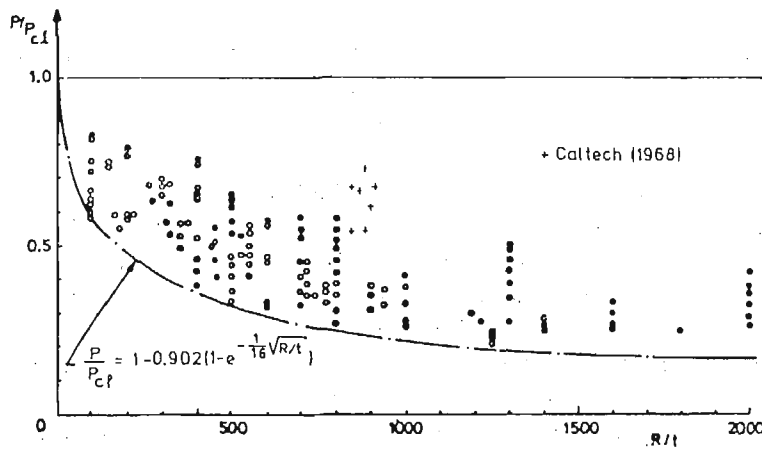


Fig. 1. Test data for isotropic cylinders under axial compression [3].

In principle, the use of empirical "knockdown" factors to account for the damaging effect of as yet unknown causes is an accepted engineering solution to a pressing problem. However, the question that immediately comes to one's mind is, where has scientific community failed? How comes that today, after so many years of concentrated research effort one cannot do any better and this despite the enormously increased computational facilities provided by today's high powered computers?

It is true that for many cases, especially in applications where the total weight of the structure is of no major concern, the Lower Bound Design Method provides safe and reliable buckling load prediction. However, it penalizes innovative shell design because of the poor experimental results obtained with shells produced and tested under completely different circumstances.

Thus the purpose of the Shell Stability Research currently being carried out at the Aerospace Engineering Department of the Delft University of Technology is to derive an Improved Shell Design Procedure, which will incorporate the latest theoretical findings, especially that of the Imperfection Sensitivity Theory [4], and makes full use of the available computational facilities.

2. The imperfection sensitivity theory

Much effort has been spent in the past 30 years in trying to find the cause (or the causes) for the wide experimental scatter and for the poor correlation between the predictions based on a linearized small deflection theory with SS-3 ($N_x = v = w = M_x = 0$) boundary conditions and the available experimental results for axially compressed cylindrical shells. The consensus reached is that the experimental buckling loads are mainly affected by 3 factors, namely:

1. Initial geometric imperfections,
2. Boundary conditions,
3. Inelastic effects.

It has been shown [5] that for thin shells ($\frac{R}{t} > 300$, say) the inelastic effects may be neglected. Moreover, though different combinations of in-plane boundary conditions may affect the buckling loads considerably, for thin shells that buckle elastically initial imperfections have been accepted as the main cause of the wide scatter of experimental results (see also Fig. 1).

Thus a designer that wants to do better than the Lower Bound Design Method is faced by the following 3 questions:

1. Is the projected structure imperfection sensitive?
2. What are the shape and the amplitudes of the expected imperfections?
3. How does one calculate the buckling load of the imperfect structure?

Since it is well known that the largest portion of the knockdown factor used during the buckling load calculations of stiffened or unstiffened cylinders is due to initial geometric imperfections, therefore it makes sense to try to find shell configurations with stable post-buckling behaviour.

The imperfection sensitivity that a given structure will exhibit under certain loading conditions can be investigated very conveniently by so-called *b*-Factor Method, which is based on Koiter's general theory of elastic stability [4]. For those cases where the lowest buckling load is single valued and the bifurcation point is symmetric with respect to the buckling deflection, the initial post-buckling behaviour is governed by the following equation:

$$\frac{\lambda}{\lambda_c} = 1 + b\xi^2 + \dots \quad (2)$$

where: λ = applied load,

λ_c = perfect shell buckling load,

ξ = buckling displacement,

all normalized in a suitable fashion, and

b = second post-buckling coefficient.

Notice from Fig. 2 that if the post-buckling coefficient b is negative, then the equilibrium load λ falls following buckling and the buckling load λ_s of the real structure is expected to be imperfection sensitive. In this case the asymptotic relationship between the buckling load of the imperfect structure λ_s and the imperfection amplitude $\bar{\xi}$ is:

$$(1 - \rho_s)^{3/2} = \frac{3}{2} \sqrt{-3b|\bar{\xi}|} \rho_s \quad (3)$$

where:

$$\rho_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_c}$$

Here it is assumed that the shape of the initial imperfection is affine to the shape of the lowest buckling mode.

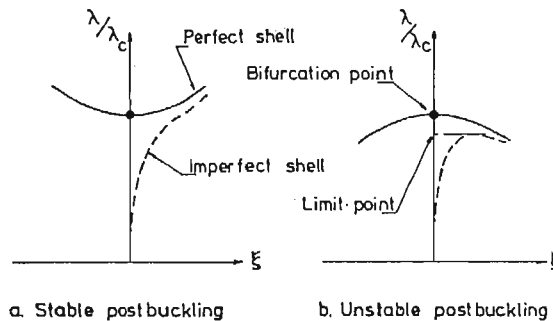


Fig. 2. Equilibrium path for perfect and imperfect shells.

That the idea of imperfection sensitivity is widely known and accepted is mainly due to the pioneering contributions of Koiter [4], [6] and the tireless efforts of the Harvard group under Budiansky and Hutchinson in the 60's [7], [8]. However, as the work of different investigators have shown, when computing the value of the b -factor for a particular configuration one must take into account the:

1. Effect of prebuckling analysis,
2. Effect of boundary conditions,
3. Apparent singularities due to the occurrence of (nearly) simultaneous buckling modes.

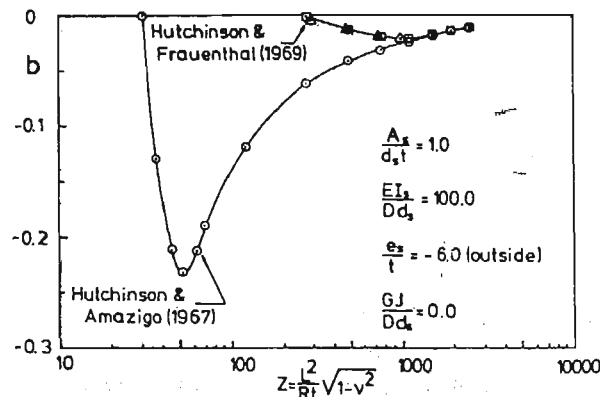


Fig. 3. Imperfection sensitivity of axially compressed stringer stiffened cylinders (HU-shells, $N_x = v = w = M_x = 0$).

Thus, for instance, considering Fig. 3 one sees that the large increase in imperfection sensitivity, obtained for Z values between 40 and 200 when one uses a membrane prebuckling analysis, disappears if the analysis is repeated using a nonlinear prebuckling analysis and when the SS-3 boundary conditions are enforced rigorously.

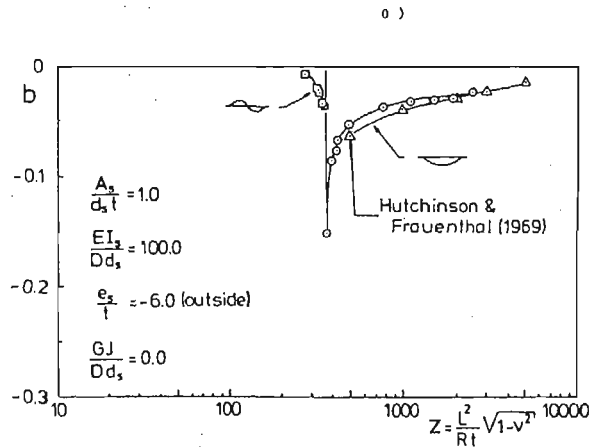


Fig. 4. Imperfection sensitivity of axially compressed stringer stiffened cylinders (HU-shells, $u = v = w = w_{,x} = 0$).

Furthermore, as can be seen from Fig. 4, the variation of the b -factor with Batdorf's Z -parameter exhibits a singular type behaviour at about $Z = 362$ if one uses nonlinear prebuckling analysis and C-4 ($u = v = w = w_{,x} = 0$) boundary conditions. The large negative peak of b , which corresponds to a large increase in imperfection sensitivity, is accompanied by a change in axial dependence of the buckling mode from antisymmetric to symmetric. Obviously close to $Z = 362$ one has two nearly coincident buckling modes. As has been shown recently by several investigators [9], [10] in such cases the perturbation scheme used to compute the post-buckling coefficient b must be modified to account for the occurrence of (nearly) simultaneous buckling modes and the resulting modal coupling effects.

The results shown in Fig. 4 have been computed by the computer code SRA [11] developed by Cohen, which has the capability of computing the first and second imperfection sensitivity factors " a " and " b " for general meridional shapes and wall constructions. The code provides for the use of different boundary conditions with either membrane, linear or nonlinear prebuckling analysis. However, the SRA program is based on the assumption that the lowest buckling load is isolated. Thus the results obtained near $Z = 362$ are uncertain.

Work is currently in progress at the TH-Delft to include the possibility of the occurrence of (nearly) simultaneous buckling modes in an SRA-like code.

3. Characteristic imperfection distributions

Once the preliminary layout of a shell design has been completed and initial runs with an SRA-like code indicate that the buckling load of the proposed structure is sensitive to initial imperfections one has essentially two options.

If the total weight of the structure and material costs are of no major concern one can employ the buckling formulas from the current design manuals, read the appropriate empirical "knockdown" factor γ from the charts to account for the effect of the unknown imperfections and use a factor of safety ($F.S. = 1.5 - 2.0$, say) to cover uncertainties in loading and other unforeseen damaging factors. This approach is the so-called Lower Bound Design Method.

If, however, the total cost and especially the total weight are of critical importance, then a more sophisticated design approach is called for. That is the designer must estimate how much the expected imperfections will decrease the buckling load of the chosen configuration. It is obvious that the main difficulty in using the Imperfection Sensitivity Theory in practical design problems dealing with weight sensitive applications is related to the fact, that it requires some advanced knowledge of the geometric imperfections that will be present once the structure under consideration has been built, an information that is rarely available.

For a prototype the imperfections can be measured experimentally and then they can be incorporated into the theoretical analysis to predict the buckling load accurately. This approach, however, is impractical for predicting the buckling loads of shells produced in normal production runs. The best one can hope to do for these shells is to establish the characteristic initial imperfection distribution, which a given fabrication process is likely to produce, and then to combine this information with some kind of statistical analysis of both imperfections and the corresponding critical loads, a kind of Statistical Imperfection Sensitivity Analysis. The critical question thus is:

"Can we associate characteristic initial imperfection distributions with a specified manufacturing process?"

That the answer to this question is an unconditional yes will be demonstrated by a few examples.

Figure 5 shows the measured initial imperfections of the integrally stringer stiffened aluminium shell AS-2, which has been tested at Caltech [12]. Figure 6 shows the measured initial imperfections of a similar shell KR-1 tested at Technion [13]. For further analysis the measured initial imperfections are decomposed in either a half-wave cosine

$$\bar{W}(x, y) = t\Sigma\Sigma \cos \frac{k\pi x}{L} \left(A_{kl} \cos l \frac{y}{R} + B_{kl} \sin l \frac{y}{R} \right), \quad (4)$$

or a half-wave sine Fourier series

$$\bar{W}(x, y) = t\Sigma\Sigma \sin \frac{k\pi x}{L} \left(C_{kl} \cos l \frac{y}{R} + D_{kl} \sin l \frac{y}{R} \right). \quad (5)$$

For the case of comparison Figures 7 and 8 display the variation of the measured half-wave sine Fourier coefficients as a function of the circumferential wave numbers (l) for selected axial half-wave numbers (k) for the shells AS-2 and KR-1. As one can see in both cases

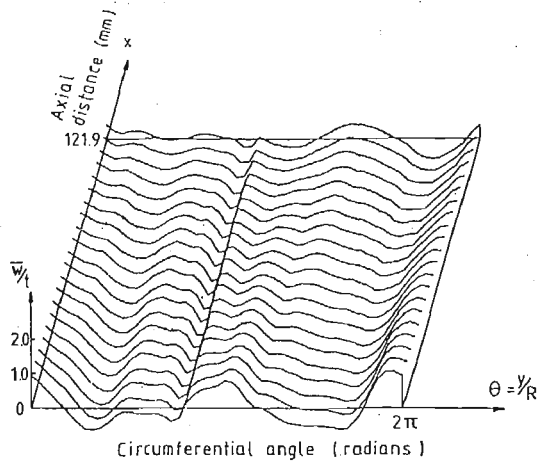


Fig. 5. Measured initial shape of the stringer-stiffened shell AS-2 [12].

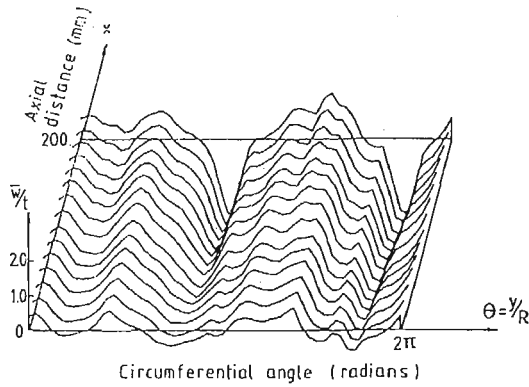


Fig. 6. Measured initial shape of the stringer-stiffened shell KR-1 [13].

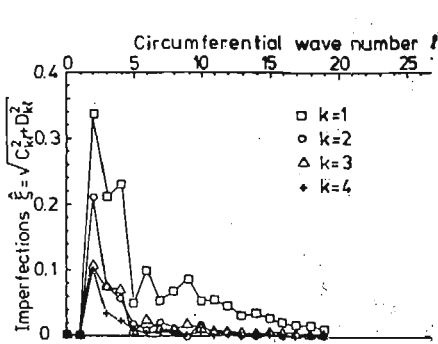


Fig. 7. Circumferential variation of the half-wave sine Fourier representation (Shell AS-2).

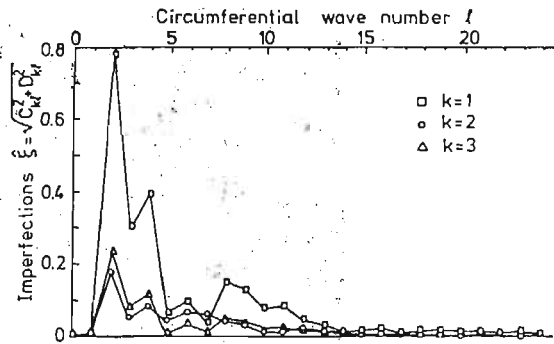


Fig. 8. Circumferential variation of the half-wave sine Fourier representation (Shell KR-1).

the amplitudes of the Fourier coefficients decay with increasing wave numbers both in the axial and in the circumferential directions. The Donnell-Imbert [14] analytical imperfection model

$$\bar{\xi}_{kl} = \sqrt{C_{kl}^2 + D_{kl}^2} = \frac{\bar{X}}{k^r l^s}, \quad (6)$$

where the coefficients \bar{X} , r and s are determined by least-square fitting the measured data displayed in Figures [7] and [8], represents the variation of the harmonic components with axial (k) and circumferential (l) wave numbers satisfactorily. Since both shells were machined out of seamless thick walled 7075-T6 aluminium alloy tubing, therefore the imperfection model given by Eq. (6) represents the characteristic imperfection distribution for this fabrication process.

Turning now to large scale of full scale shells, Figure 9 shows the 3-dimensional plot of measured initial imperfections of a large scale shell (945.8 mm radius, 0.635 mm well-thickness) tested at the Georgia Institute of Technology [15]. This shell was assembled

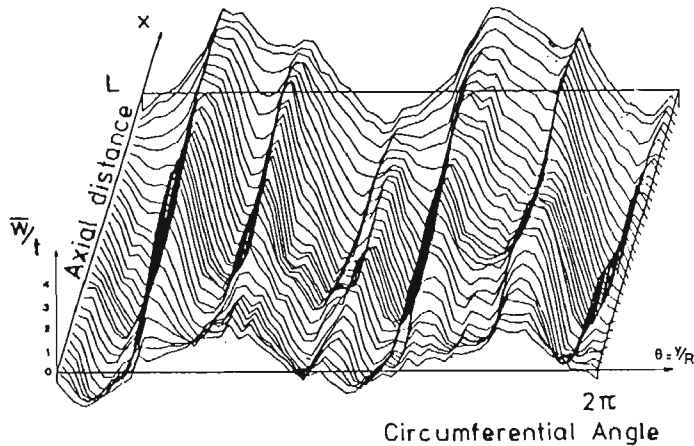


Fig. 9. Measured initial shape of Horton's shell HO-1 [15].



Fig. 10. Construction details of Horton's shell HO-1 [15].

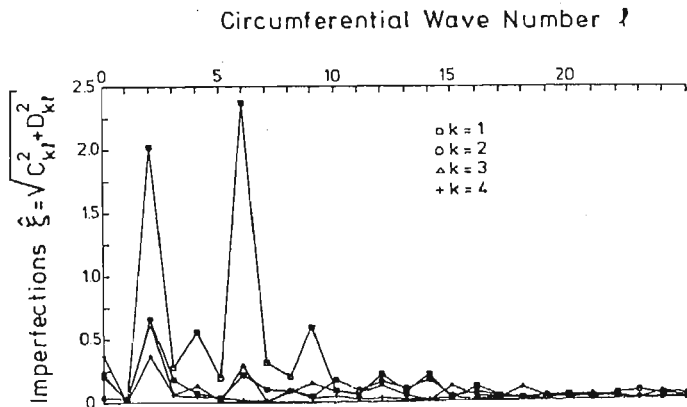


Fig. 11. Circumferential variation of the half-wave sine Fourier representation (Horton's shell HO-1).

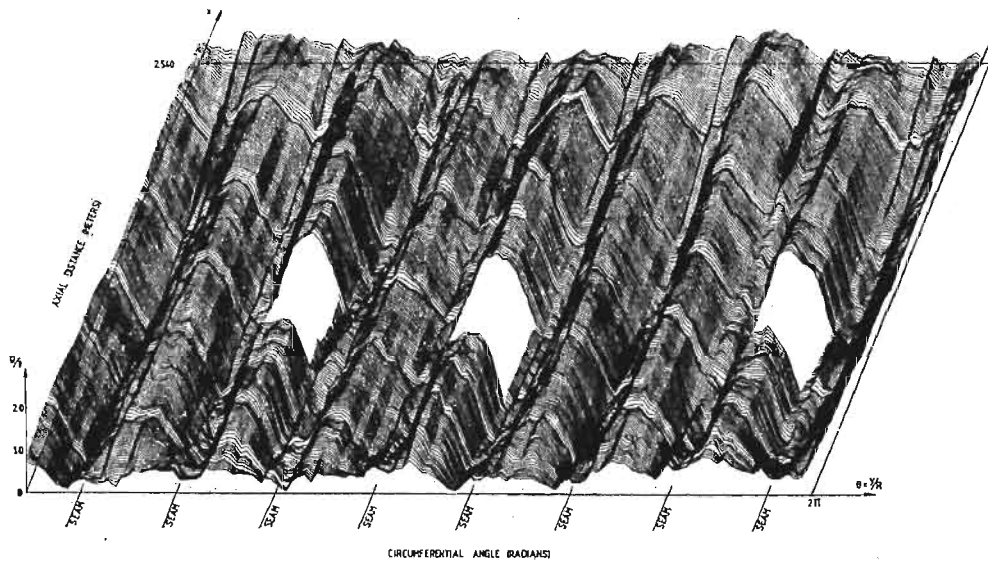


Fig. 12. Measured initial shape of the ARIANE shell AR23-1 [16].

from six identical longitudinal panels and reinforced by 312 closely spaced Z-shape stringers on the inside. One edge of each panel was joggled and two stringers were riveted along each joint line. As can be seen from Fig. 10 the shell was held circular by means of heavy rolled [-shaped external frames located 3.175 mm from each shell end. In addition 7 Z-shape equally spaced rings were riveted to the outer skin. As can be seen from Fig. 11 the amplitudes of the Fourier harmonics with a single half-wave in the axial direction have two distinct maxima, one at $l = 2$ (out of roundness) and another at $l = 6$ (number of panels the shell is assembled from). The Fourier coefficients with more than a single half-wave in the axial direction are in comparison much smaller.

In the last few years the Solid Mechanics Group of the Aerospace Engineering Department at the Delft University of Technology has carried out a number of imperfection

surveys on the Ariane interstage I/II and II/III shells [16]. Figure 12 shows the 3-dimensional plot of the Ariane interstage II/III shell AR23-1 (1300.0 mm radius, 1.2 mm wall-thickness). These shells are assembled out of eight identical longitudinal panels. The joints between adjacent panels are joggled and one of the 120 equally spaced hat-shape stringers are riveted along the joint line on the outside. The shells are held by two precision-machined end-rings on the outside and five equally spaced [-shape rings on the inside. As can be seen from Fig. 13 the amplitudes of the Fourier harmonics with a single half-

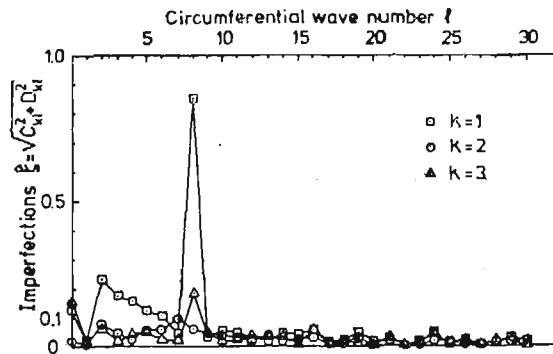


Fig. 13. Circumferential variation of the half-wave sine Fourier representation.

wave in the axial direction this time have a distinct maxima at $l = 8$ (which corresponds to the number of panels the shell is assembled from). There is also a sizeable $l = 2$ (out of roundness) component. All other Fourier coefficients are in comparison much smaller.

Thus, as has been pointed out by the same author in a recent survey lecture [17], it appears from the results presented in Figures 11 and 13 that for full-scale aerospace shells assembled out of a fixed number of curved panels the initial imperfections will be dominated by two components only, if the joints are riveted. Using the half-wave sine axial representation both components will have a single half-wave in the axial direction and, respectively, two and N_p full-waves in the circumferential direction, where N_p is the number of full-length panels out of which the shell is assembled. By using accurately machined rigid endrings the $l = 2$ (out of roundness) component can be significantly reduced in size. The variation of the measured Fourier coefficients with axial half-wave (k) and circumferential full wave (l) numbers can be approximated by expressions of type:

$$\bar{\xi}_{kl} = \sqrt{C_{kl}^2 + D_{kl}^2} = \frac{1}{kr} \left\{ \frac{\bar{X}_1}{(l_1 - l)^2 + 2\zeta_1 l^2} + \frac{\bar{X}_2}{(l_2 - l)^2 + 2\zeta_2 l^2} \right\}, \quad (7)$$

where coefficients \bar{X}_1 , \bar{X}_2 , r , l_1 , l_2 , ζ_1 and ζ_2 are determined by leastsquare fitting the measured data displayed in figures 11 and 13. Thus Equation (7) represents the characteristic imperfection distribution of full-scale aerospace shells assembled out of a fixed number of full-length panels by riveted joints.

The above examples demonstrate unequivocally that indeed characteristic initial imperfection distributions can be associated with the different fabrication processes. It must also be clear that further advances towards more accurate buckling load predictions of thin shells depend on the availability of extensive information about realistic imper-

fections and their correlation with manufacturing process. Hence the need for the establishment of an International Imperfection Data Bank.

The purpose of creating this International Imperfection Data Bank is twofold:

1. All the imperfection data obtained at different laboratories by different investigators are presented in identical format.

This makes the comparison and the critical evaluation possible resulting in characteristic imperfection distributions for the different manufacturing processes used.

2. For those who want to use the powerful nonlinear shell analysis codes on today's supercomputers the much needed realistic imperfection distributions are made available.

Besides contributions by Caltech, the TH Delft and Technion the International Imperfection Data Bank contains the results of initial imperfection surveys carried out at the University of Glasgow [18], at Det Norske Veritas [19] and others.

4. Stochastic stability analysis

Having demonstrated that indeed one can associate characteristic initial imperfection distributions with the different fabrication processes, one is faced with the next question, namely:

“Given a Characteristic Initial Imperfection Distribution, how does one proceed to incorporate this knowledge into a Systematic Design Procedure?”

Since initial imperfections are obviously random in nature some kind of Stochastic Stability Analysis is called for. The buckling of imperfection sensitive structures with small random initial imperfections has been studied by several investigators like Bolotin [20], Fraser and Budiansky [21], Amazigo [22], Roorda [23] and Hansen [24], just to name a few. In the absence of experimental evidence about the type of imperfections that occur in practice and in order to reduce the mathematical complexity of the problem all the above named investigators have worked with some form of idealized imperfection distribution.

It is not obvious to this author how these methods can be extended to the general imperfections observed in practice. Thus it was not until 1979 that a method has been proposed by Elishakoff [25] which makes it possible to introduce the results of the experimentally measured initial imperfections routinely into the analysis. The proposed approach is based on the notion of a reliability function $R(\lambda)$, where by definition:

$$R(\lambda) = \text{Prob}(A \geq \lambda). \quad (8)$$

Here λ is the normalized load parameter and A is the normalized random buckling load. As can be seen from Fig. 14 the knowledge of the reliability function permits the evaluation of the allowable load, defined as the load level λ_a for which the desired reliability is achieved, for the whole ensemble of similar shells produced by a given manufacturing process. Notice that the allowable load level λ_a is identical to the “knockdown” factor γ introduced in Eq. (1).

Basically Elishakoff has suggested to utilize the Monte Carlo Method to obtain the reliability function $R(\lambda)$ for a certain shell structure produced by a given fabrication

process. The relative ease with which one can apply this procedure, once a sufficiently large sample of initial imperfection measurements is available, will be demonstrated for the case of axially compressed cylindrical shell with random axisymmetric imperfections.

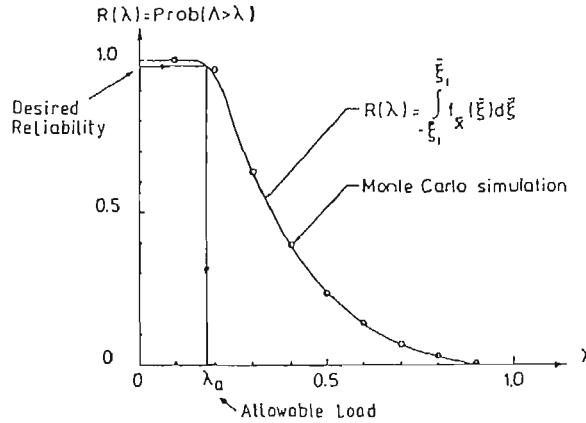


Fig. 14. Plot of the reliability function $R(\lambda)$.

Having a sample of N shells, the initial imperfections of which are given by:

$$\bar{W}(x)^{(m)} = t \sum A_i^{(m)} \cos i \frac{\pi x}{L}, \quad (m = 1, 2, \dots, N), \tag{9}$$

one proceeds by first calculating, by taking “ensemble averages”, the estimated mean of the Fourier coefficients $A_i^{(m)}$

$$\bar{A}_i^{(e)} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N A_i^{(m)}, \tag{10}$$

and then the estimated variance-covariance matrix

$$\sigma_{jk}^{(e)} = \frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^N [A_j^{(m)} - \bar{A}_j^{(e)}] \cdot [A_k^{(m)} - \bar{A}_k^{(e)}]. \tag{11}$$

Since $\sigma_{jk}^{(e)}$ is a non-negative symmetric matrix, therefore it can be decomposed into a product of lower and upper triangular matrices (Cholesky decomposition)

$$\sigma_{jk}^{(e)} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T, \tag{12}$$

where \mathbf{C} is a lower triangular matrix. Next the vector A of the simulated initial imperfections is obtained as:

$$A = \{A_i^{(s)}\} = \mathbf{C}\mathbf{r} + \bar{A}^{(e)}, \tag{13}$$

where: $\bar{A}^{(e)}$ = estimated “mean” vector

\mathbf{r} = random vector.

The \mathbf{r} 's are normally distributed random numbers with zero mean and unit variance computed by standard random number generators available at every computing center. Taking,

for example, 1000 different ν 's one gets 1000 different A 's, that is, 1000 different simulated shells with the A 's as the Fourier coefficients of the initial imperfections. With these simulated shells (which are statistically equivalent to the initial experimentally measured sample) one can proceed to carry out repeated buckling load analysis generating a so-called histogram of buckling loads. Since the reliability function $R(\lambda)$ has been defined as the probability that the random buckling load A will exceed the prescribed value, one then proceeds to calculate $R(\lambda)$ from the histogram of the buckling loads by the frequency interpretation (i.e. fraction of an ensemble).

As a test on the accuracy of the Monte Carlo Method one can use the results of Roorda and Hansen [26]. Assuming an axisymmetric initial imperfection of the form:

$$\bar{W}(x) = i_{cl} \bar{\xi} \cos i_{cl} \frac{\pi x}{L}, \quad (14)$$

$$\text{where: } i_{cl} = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{2c}{Rt}}, \quad c = \sqrt{3(1-\nu^2)},$$

and $\bar{\xi}$ is a normally distributed random variable \bar{X} , they used Koiter's formula

$$(1-\lambda)^2 = \frac{3}{2} c |\bar{\xi}| \lambda, \quad (15)$$

as the nonlinear transfer function between the imperfection $\bar{\xi}$ and the buckling load λ . Since $\bar{\xi}$ is assumed to be a random variable therefore λ must also be a random variable yielding

$$(1-A)^2 = \frac{3}{2} c |\bar{X}| A, \quad (16)$$

or

$$\bar{X} = \frac{2(1-A)^2}{3cA}.$$

The reliability is then defined as the probability that the (random) buckling load A be greater or equal to some specified value λ . From the transfer function this is equivalent to the probability that the absolute value of the (random) imperfection \bar{X} be less than or equal to the value given by Eq. (17.) Hence:

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \text{Prob}(A \geq \lambda) = \text{Prob}\left(|\bar{X}| \leq \frac{2(1-\lambda)^2}{3c\lambda}\right) = \\ &= \text{Prob}\left\{-\frac{2(1-\lambda)^2}{3c\lambda} < \bar{X} < \frac{2(1-\lambda)^2}{3c\lambda}\right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

If one further assumes that the random variable \bar{X} is normally distributed then its probability density is given by:

$$f_{\bar{X}}(\bar{\xi}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\bar{\xi}-a)^2}{\sigma^2}\right\}, \quad (19)$$

where: a = mean value of \bar{X} ,

σ = standard deviation of \bar{X} ,

and one can write

$$Prob(A \geq \lambda) = Prob(|\bar{X}| \leq \bar{\xi}) = \int_{-\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} f_{\bar{x}}(\bar{\xi}) d\bar{\xi}. \tag{20}$$

For $a \equiv 0$ one obtains Roorda and Hansen's result

$$R(\lambda) = Prob(A \geq \lambda) = \text{erf} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2(1-\lambda)^2}{3c \lambda \sigma} \right\}. \tag{21}$$

This expression has been plotted in Fig. 14 as the solid curve. The accuracy of the Monte Carlo Method can be seen from the close coincidence of the dots, representing the results obtained via the Monte Carlo Method, with the analytical solution. Further, it is evident from the initial imperfection surveys published sofar (see Figures 5, 6, 9 and

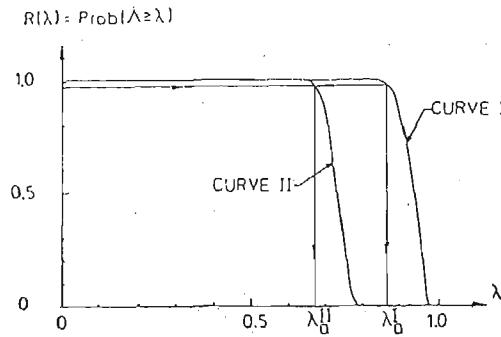


Fig. 15. Simulated reliability functions [29].

12) that in a realistic Stochastic Stability Analysis one must include both axisymmetric and asymmetric imperfections. Using the so-called Multi-Mode Analysis [27] Elishakoff and Arbocz [28] have demonstrated the feasibility of using the Monte Carlo Method to derive reliability functions for very general initial imperfections. As can be seen from Fig. 15 (here reproduced from Ref. [29]) the inclusion of asymmetric imperfection components results in a lower allowable load level λ_a for a given reliability (see curve II) than for the case of axisymmetric imperfections only (see curve I).

5. The improved shell design procedure

The improvements in the currently recommended shell design procedures are primarily sought in a more selective approach by the definition of the "knockdown" factor γ . Thus, for instance, if a company takes great care in producing its shells very accurately and if it can show experimentally that the boundary conditions are defined in such a way that no additional imperfections (especially at the shell edges) are introduced, then the use of an improved (higher) "knockdown" factor λ_a derived by a stochastic approach should

be allowed. The proposed new Improved Shell Design Procedure can be represented by the following formula:

$$P_a \leq \frac{\lambda_a}{F.S.} P_c, \quad (22)$$

where: P_a = allowable buckling load,

P_c = buckling load of the "perfect" structure,

λ_a = reliability based improved (higher) "knockdown" factor,

$F.S.$ = factor of safety.

The steps involved in the definition of such a reliability based improved (higher) "knockdown" factor λ_a can be summarized for the group of 7 copper electroplated shells tested at Caltech [30] as follows:

1. Compute the Fourier coefficients of the initial imperfection surveys of a relatively small sample (say 7) nominally identical shells.
2. Calculate the mean vector and the variance-covariance matrix of the Fourier coefficients of the experimental sample.
3. Use Elishakoff's Method [31] to simulate a large sample of statistically equivalent imperfect shells.
4. Calculate the buckling loads of each of the simulated imperfect shells by one of the available deterministic methods [27], [32].
5. Determine the histogram of buckling loads from the results of step 4.
6. Compute the reliability function $R(\lambda)$ from the histogram of buckling loads via the frequency interpretation (i.e. fraction of an ensemble).
7. Determine the improved (higher) "knockdown" factor λ_a for a given reliability from the plot $R(\lambda)$ VS λ .

If the R/t values of the shells in the small experimental sample vary only slightly (see Caltech shells on Fig. 16) then it is sufficient to derive just a single reliability function $R(\lambda)$ for a group of shells produced by the same fabrication process. One uses then the

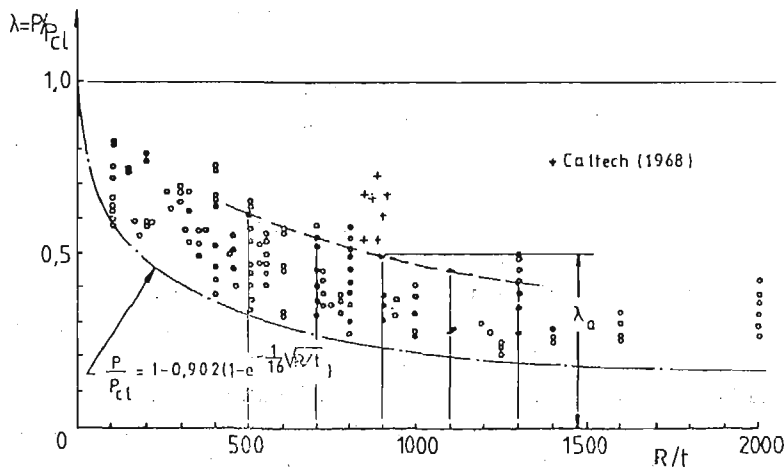


Fig. 16. Definition of the Improved Lower Bound Design Curve.

mean values for the geometric parameters involved like radius R , wall-thickness t , length L , Young's modulus E and Poisson's ratio ν . However, if the geometric parameters of the shells in question vary widely then it is necessary to calculate several reliability functions for a given fabrication process. Notice that one would have to derive at least (say) 4 reliability functions $R(\lambda)$ at different R/t values in order to get a reasonably well defined lower bound curve valid for (say) $300 < R/t < 1500$ (see Fig. 16).

To establish the accuracy of the new improved (higher) lower bound curve one must investigate the influence of the following factors

1. Confidence limits of the estimated statistical quantities;
2. Size of the experimental sample used;
3. Accuracy of the deterministic buckling analysis used;
4. Confidence limit of the Monte Carlo Method itself.

At the present time the effects of all these factors are being investigated at the Solid Mechanics Group of the Aerospace Engineering Department of the Delft University of Technology.

6. Conclusions

It has been shown that with the use of the reliability based "knockdown" factor λ_a it is possible to arrive at an Improved Shell Design Procedure, which for weight sensitive applications can result in large cost-savings.

Using the Monte Carlo Method to derive reliability functions one is combining the Lower Bound Design Philosophy with the notion of Googness Classes. Thus shells manufactured by a process, which produces inherently a less damaging initial imperfection distribution, will not be penalized because of low experimental results obtained with shells produced by another process, which generates a more damaging characteristic initial imperfection distribution.

For a successful implementation of the proposed Improved Shell Design Procedure the companies involved must be prepared to do the initial investment in carrying out complete imperfection surveys on a (small) sample of shells that are representative of their production-line. With the modern measuring and data systems one can carry out a complete surface map of very large shells at a negligible small fraction of their production cost. What is more expensive is the data reduction and the analysis that must be carried out in order to get the reliability functions.

The Solid Mechanics Group of the Aerospace Engineering Department of the Delft University of Technology is prepared to set up cooperative programs with interested companies in order to advice them how they can carry out the necessary imperfection surveys in an optimal manner, and to perform the necessary data reduction and the analysis involved in getting the reliability functions at minimal costs.

It is the author's opinion that, as the amount of data on characteristic initial imperfection distributions classified according to fabrication processes increases, we shall succeed with the help of the increased computational speed of the next generation of computers to make the Improved Shell Design Procedure available to more and more shell designers.

This, hopefully, will result in the desired dissemination of the vast amount of theoretical knowledge accumulated over the past 75 years about shell buckling behaviour. Thus, finally, the academic world will be able to point to the successful solution of one of the most perplexing problems in Mechanics.

References

1. *Buckling of thin-walled cylinders*. NASA Space Vehicle Design Criteria (Structures), NASA SP-8007, revised 1968.
2. *Rules for the Design, Construction and Inspection of Offshore Structures*. Det Norske Veritas, Oslo 1977.
3. V. I. WEINGARTEN, E. J. MORGAN, P. SEIDE, *Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression*. AIAA Journ. Vol. 3, 1965, pp. 500 - 505.
4. W. T. KOITER, *On the stability of elastic equilibrium*. Ph. D. Thesis, in Dutch, TH Delft, Netherlands, H. T. Paris, Amsterdam 1945. English translation as NASA TT F-10, 833, p., 1967.
5. R. P. NIMMER, J. MAYERS, *Limit point buckling loads of axially compressed, circular cylindrical shells — The effect of nonlinear material behaviour*. J. Appl. Mech. Vol. 46, 1979, pp. 386 - 392.
6. W. T. KOITER, *Elastic stability and postbuckling behaviour*. Proc. Symposium Nonlinear Problems, pp. 257 - 275. University of Wisconsin Press, Madison 1963.
7. B. BUDIANSKY, J. W. HUTCHISON, *Dynamic buckling of imperfection sensitive structures*. Proc. 11th IUTAM Congress, pp. 636 - 651. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York 1964.
8. B. BUDIANSKY, J. C. AMAZIGO, *Initial post-buckling behaviour of cylindrical shells under external pressure*. J. Math. Phys. Vol. 47, 1968, pp. 223 - 235.
9. W. T. KOITER, M. PIGNATARO, *A general theory for the interaction between local and overall buckling of stiffened shells*. Report WTHD-83, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands 1976.
10. E. BYSKOV, J. W. HUTCHISON, *Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells*. AIAA Journ., Vol. 15, 1977, pp. 941 - 948.
11. G. A. COHEN, *User document for computer programs for ring-stiffened shells of revolution*. NASA CR-2086 1973.
12. J. SINGER, J. ARBOCZ, C. D. BABCOCK Jr., *Buckling of imperfect stiffened cylindrical shells under axial compression*. AIAA Journ., Vol. 9, 1971, pp. 68 - 75.
13. J. SINGER, H. ABRAMOVICH, R. YAPPE, *Initial imperfection measurements of integrally stringer-stiffened shells*. TAE Rep. 330, Technion — Israel Inst. Tech., Dept. Aeron. Eng., Haifa, Israel 1978.
14. J. IMBERT, *The effect of imperfections on the buckling of cylindrical shells*. Aeronautical Engineering Thesis, Calif. Inst. Tech. 1971.
15. W. H. HORTON, *On the elastic stability of shells*. NASA CR-145088 1977.
16. R. W. L. SEBEK, *Imperfection surveys and data reduction of ARIANE interstages I/III and II/III*. ir. Thesis, TH Delft, Department of Aerospace Engineering 1981.
17. J. ARBOCZ, *Shells stability analysis — theory and practice*, In: J. M. T. Thompson and G. W. Hunt (editors) Proceedings IUTAM Symposium on Collapse, the buckling structures in theory and practice, pp. 43 - 74. Cambridge University Press, 1983.
18. D. R. GREEN, H. M. NELSON, *Compression tests on large-scale, stringer stiffened tubes*. In: P. J. Dowling and J. E. Harding (editors) Proceedings International Conference Buckling of shells in offshore Structures, pp. 25 - 43 — Granada, London, 1982.
19. T. GROVE, T. DIRDIKSEN, *Buckling experiments on 4 large axial stiffened and 1 ring stiffened cylindrical shells*. Det. Norske Veritas Rep. 76 - 432 1976.
20. V. V. BOLOTIN, *Statistical methods in the nonlinear theory of elastic shells*. NASA TT F-85 1962. Translation of a paper presented at a seminar in the Institute of Mechanics of the Academy of Sciences USSR 1957.
21. W. B. FRASER, B. BUDIANSKY, *The buckling of a column with random initial deflections*. J. Appl. Mech., Vol. 36, 1969, pp. 232 - 240.

22. J. C. AMAZIGO, *Buckling under axial compression of long cylindrical shells with random axisymmetric imperfections*. Quart. Appl. Math. Vol. 26, 1969, pp. 537 - 566.
23. J. ROORDA, *Buckling of Elastic Structures*. University of Waterloo Press, 1980.
24. J. HANSEN, *General random imperfections in the buckling of axially loaded cylindrical shells*. AIAA Journ. Vol. 15, 1977, pp. 1250 - 1256.
25. I. ELISHAKOFF, *Buckling of a stochastically imperfect finite column on a nonlinear elastic foundation — A reliability study*. J. Appl. Mech., Vol. 46, 1979, pp. 5411 - 416.
26. J. ROORDA, J. S. HANSEN, *Random buckling behaviour in axially loaded cylindrical shells with axisymmetric imperfections*. J. Spacecraft, Vol. 9, 1962, pp. 88 - 91.
27. J. ARBOCZ, C. D. BABCOCK Jr., *Prediction of buckling loads based on experimentally measured initial imperfections*.
In: B. Budiansky (Editor): *Proceedings IUTAM Symposium Buckling of Structures*, Harvard University, Cambridge, MA, June 1974, pp. 291 - 311. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
28. I. ELISHAKOFF, J. ARBOCZ, *Reliability of axially compressed cylindrical shells with general nonsymmetric imperfections*. J. Appl. Mech., Vol. 52, 1985, pp. 122 - 128.
29. J. ARBOCZ, *Past, present and future of shell stability analysis*. Z. Flugwiss. Weltraumforsch., Vol. 5, 1981, pp. 335 - 348.
30. J. ARBOCZ, C. D. BABCOCK Jr., *The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells*. J. Appl. Mech., Vol. 36, 1969, pp. 28 - 38.
31. I. ELISHAKOFF, *Simulation of space-random fields for solution of stochastic boundary-value problems*. J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 65, 1979, pp. 399 - 403.
32. E. RIKS, *Development of an improved analysis capability of the STAGS computer code with respect to the collapse behaviour of shells structures*. Memorandum SC-79-054, National Aerospace Laboratory NLR, The Netherlands 1979.

Р е з ю м е

ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

В работе представлено направления современной теории оболочек развиваемые в Институте Авиации политехнического института в Дельфт (Голландия). Сформулированы новые, улучшенные методы проектирования, которые учитывают последние результаты теоретических работ и современную электронно вычислительную технику.

Streszczenie

WSPÓŁCZESNE KIERUNKI ROZWOJU BADAŃ STATECZNOŚCI POWŁOK

W pracy omówiono kierunki rozwoju teorii powłok w ramach badań prowadzonych obecnie w Instytucie Inżynierii Lotniczej w Delft. Dotyczą one formułowania nowych ulepszonych kryteriów projektowania. Kryteria te uwzględniają najnowsze wyniki prac teoretycznych przy wykorzystaniu współczesnej techniki obliczeniowej.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 stycznia 1987 roku.

РАЗВИТИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ОБОЛОЧЕК В ТРУДАХ КАЗАНСКОЙ ШКОЛЫ

И. Г. ТЕРВГУЛОВ

Казань, СССР

1. Профессору Х. М. Муштари (1900 - 1981) и профессору К. З. Галимову (1910 - 1986) выпала честь основания Казанской школы нелинейной механики оболочек, многие фундаментальные результаты которой в этой области знания вошли в золотой фонд мировой науки. Первой такого рода работой (1938) была докторская диссертация Х. М. Муштари „Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия” [1, 2], в которой впервые в мировой литературе были проанализированы соотношения теории оболочек для случая прогибов, сравнимых с толщиной оболочки, и были выписаны корректные соотношения этой теории для ортотропного и изотропного линейно упругого тела. Эта пионерская работа вызвала поток исследований в этом направлении. Х. М. Муштари в своих публикациях [3 - 6] дает анализ пределов применимости приближенных теорий, основанных на гипотезах Кирхгофа-Лява (1947), дает вывод точных выражений для конечных деформаций срединной поверхности оболочки в произвольных координатах (1948)

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + E_{\beta\alpha} + E_{\alpha}^{\gamma} E_{\beta\gamma} + \omega_{\alpha}\omega_{\beta}, E_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}u_{\beta} - b_{\alpha\beta}w, \omega_{\alpha} = \nabla_{\alpha}w + b_{\alpha}^{\gamma}u_{\gamma}, \quad (1.1)$$

строит уравнения нелинейного краевого эффекта. К числу фундаментальных исследований следует считать публикацию Х. М. Муштари „Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях” [6], в которой впервые была дана общепринятая теперь классификация задач теории оболочек на слабый, средний и сильный изгибы и качественный анализ краевого эффекта.

В трудах К. З. Галимова в эти годы интенсивно развиваются методы исследования оболочек при конечных перемещениях и малых деформациях в части построения самих уравнений [7 - 9] и вариационные формулировки задач теории оболочек [10 и др.]. Эти и многие другие результаты Х. М. Муштари, К. З. Галимова и их учеников были подытожены в их совместной книге „Нелинейная теория упругих оболочек” [11], в которой был обобщен богатый опыт Казанской школы и основные результаты, опубликованные в мировой литературе к тому времени.

Большое количество научных результатов в нелинейной механике оболочек были получены учениками Х. М. Муштари и К. З. Галимова — профессором

Корнишиным М. С., Саченковым А. В. и другими, ссылки на которые можно найти в обзорах [12 – 14]. Эти результаты были подытожены в книгах М. С. Корнишина [15], М. С. Корнишина и Ф. С. Исанбаевой [16], И. Г. Терегулова [17], М. А. Ильгамова [18], М. А. Ильгамова, В. А. Иванова, Б. В. Гулина [19], И. В. Свирского [20].

Широко результаты ученых Казанской школы нелинейной механики оболочек освещены в регулярно издаваемых „Исследованиях по теории пластин и оболочек” при Казанском государственном университете (выпуски с I по ХУП с 1962 по 1985 г.г.).

В кратком сообщении нет никакой возможности осветить все вопросы, которые были подвергнуты исследованию в трудах Казанских ученых. Если отметить основные направления исследований, то к ним следует отнести следующие.

Общие вопросы нелинейной теории упругости по построению определяющих соотношений и общие вариационные принципы были исследованы в работах К. З. Галимова [21 и др.] и И. Г. Терегулова [22, 23 и др.]. В публикации [24] дается обобщение формул (1.1) для оболочки как трехмерного тела.

Вопросы построения уточненных теорий пластин и оболочек были подвергнуты исследованию в работах Х. М. Муштари и И. Г. Терегулова [24, 25], А. К. Галинъша, А. В. Саченкова с учениками и др. В статье [23] Терегуловым И. Г. впервые дана нелинейная формулировка общего вариационного принципа, который сегодня называется принципом Ху-Вашицу.

Многослойные и трехслойные оболочки были объектом исследования Х. М. Муштари [26], М. А. Ильгамова, Н. К. Галимова, А. Г. Терегулова и др.

Численные методы решения геометрически нелинейных задач развивались М. С. Корнишиным, Ф. С. Исанбаевой, М. С. Ганиевой и другими.

Задачи изгиба и устойчивости физически и геометрически нелинейных задач и задач ползучести изучались И. Г. Терегуловым, М. С. Ганиевой.

Широкий круг задач о сосредоточенных воздействиях и контактном взаимодействии исследован в работах Ю.П. Жигалко, Н. Г. Гурьянова, Ю. П. Артюхина.

А. В. Саченковым был развит удачный метод решения задач статики и динамики оболочек, получивший название теоретико-экспериментального метода, успешно развитый и примененный к широкому кругу прикладных задач Ю. Г. Коноплевым и другими его учениками.

В монографии К. З. Галимова [27] подведен итог его большой работы по построению нелинейной механики линейно упругих оболочек с учетом поперечного сдвига. В книге [28] под научной редакцией К. З. Галимова группой авторов изложены ряд результатов по теории и практике расчетов оболочек с учетом поперечных сдвигов. В книге К. З. Галимова и В. Н. Паймушина [29] излагается развитое ими направление по расчету оболочек сложной геометрии границы оболочки. Об этих и многих других исследованиях можно получить информацию из обзоров [12, 14], и упомянутых выше сборников „Исследования по теории пластин и оболочек”. Находится в печати книга К. З. Галимова, В. Н. Паймушина, И. Г. Терегулова „Основания нелинейной теории оболочек”, в которой рассматриваются

и физические соотношения механики оболочек [30]. Н. С. Ганиев исследует нелинейные задачи изгиба оболочек с учетом пластических деформаций, а С. В. Червацкий с учениками изучает несущую способность оболочки из волокнистых композитов.

2. Особо следует отметить одну из наиболее ярких публикаций Х. М. Муштари „Качественное исследование...” [6], в которой дана классификация задач теории оболочек. Не останавливаясь на всех деталях этой малой по объему, но очень содержательной работы, остановимся на отдельных вопросах, представляющих особый интерес. Отправляясь от уравнений равновесия

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} - (b_{\alpha}^{\beta} + \kappa_{\alpha}^{\beta}) N^{\alpha} + q^{\beta} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} M^{\alpha\beta} + (b_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}) T^{\alpha\beta} + q = 0, \quad (2.2)$$

и условий совместности деформаций

$$c^{\beta\gamma} [\nabla_{\gamma} \kappa_{\alpha\beta} - (b_{\beta}^{\alpha} + \kappa_{\beta}^{\alpha}) (\nabla_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\omega} + \nabla_{\beta} \varepsilon_{\gamma\omega} - \nabla_{\omega} \varepsilon_{\alpha\gamma})] = 0, \quad (2.3)$$

$$c^{\alpha\theta} c^{\beta\gamma} \left(\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \varepsilon_{\theta\gamma} + b_{\alpha\beta} \kappa_{\theta\gamma} + \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\theta\gamma} \right) - \varepsilon_{\alpha}^{\alpha} K = 0, \quad (2.4)$$

и сведя все величины к безразмерным путем умножения на величины $E^m L^n$, где m и n — соответствующие степени, E — модуль Юнга, L — характерный поперечный размер оболочки или пластины, Х. М. Муштари подвергает уравнения нелинейной теории упругих оболочек качественному анализу. В качестве основного параметра, с которым сравниваются порядки всех величин, вводится некоторое допустимое значение деформации удлинения ε_p , которое имеет порядок деформации на пределе пропорциональности. Введение этого параметра в качестве базового оправдано тем, что в реальных условиях приходится иметь дело с объектами, которые предназначены для того, чтобы нести некоторые реальные нагрузки, уровень которых определяется допустимыми величинами напряжений или деформаций, последние из которых имеют порядок ε_p . Попытка оправдать линейную теорию оболочек принятием предположения о том, что „будем рассматривать бесконечно малые перемещения”, не выдерживает критики, так как это может привести к очень низкому уровню допускаемых к рассмотрению на основе таких уравнений нагрузок и напряженно-деформированное состояние, которое с достоверностью описывается этими уравнениями, будет очень далеко от реально допускаемых материалом оболочки.

В работе рассматриваются два вида напряженного состояния. Первое считается медленно изменяющимся и для него операции дифференцирования функций, описывающих напряженно-деформированное состояние, удовлетворяют условию

$$f_{,\alpha} \sim f,$$

то есть операция дифференцирования не меняет порядка функции. Другой вид напряженного состояния таков, что

$$f_{,\alpha} \sim \lambda f,$$

где λ — показатель изменяемости напряженного состояния. В процессе выполнения качественного анализа считается, что

$$T^{\alpha\beta} = 2EhA^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma}, \quad M^{\alpha\beta} = -\frac{2Eh^3}{3} A^{\alpha\beta\gamma} \kappa_{\gamma},$$

или после обезразмеривания

$$T^{\alpha\beta} \sim hA^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma}, \quad M^{\alpha\beta} \sim h^3 A^{\alpha\beta\gamma} \kappa_{\gamma},$$

где $2h$ — отнесенная к L толщина, $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ — отнесенные к EL и EL^2 усилия и моменты, $\kappa_{\alpha\beta}$ — умноженные на L параметры изменения кривизны, знак \sim указывает на одинаковость порядков сопоставляемых величин.

Классификация оболочек по геометрии предложена следующая:

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} \sim b \lesssim \varepsilon_p & \text{ — пластины малой кривизны,} \\ b_{\alpha\beta} \sim b \sim \sqrt{\varepsilon_p} & \text{ — оболочки малой кривизны,} \\ b_{\alpha\beta} \sim b \sim \varepsilon_p^{1/4} & \text{ — пологие оболочки,} \\ b_{\alpha\beta} \sim b \sim 1 & \text{ — оболочки конечной кривизны.} \end{aligned}$$

Характер деформированного состояния X. М. Муштари классифицирует следующим образом ($\kappa_{\alpha\beta} \sim \kappa$, $\omega_{\alpha} \sim \omega$):

$$\begin{aligned} \kappa \sim \varepsilon_p (\omega \sim \varepsilon_p) & \text{ — слабый изгиб,} \\ \kappa \sim \sqrt{\varepsilon_p} (\omega \sim \sqrt{\varepsilon_p}) & \text{ — средний изгиб,} \\ \kappa \sim 1 & \text{ — сильный изгиб.} \end{aligned}$$

При малом изгибе и медленно изменяющемся напряженном состоянии

$$\kappa \lesssim \varepsilon_p, \quad \kappa_{,\alpha} \sim \kappa, \quad \varepsilon_{,\alpha} \sim \varepsilon$$

Для оболочек конечной кривизны $b \sim 1$ (тип 1а) с погрешностью порядка ε_p в сравнении с единицей приходим к общеизвестным уравнениям линейной задачи о безмоментном напряженном состоянии

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} + q^{\beta} = 0, \quad b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + q = 0. \quad (2.5)$$

Для пластин малой кривизны $b \lesssim \varepsilon_p$ (тип 1в) условия совместности приводятся к виду

$$c^{\alpha\nu} c^{\beta\omega} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \varepsilon_{\nu\omega} = 0, \quad c^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \kappa_{\beta\gamma} = 0, \quad (2.6)$$

и возможно введение функции прогиба

$$\kappa_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} w, \quad (2.7)$$

тогда как уравнениям (2.5) при $q^{\beta} = 0$ можно с погрешностью ε_p удовлетворить, полагая

$$T^{\alpha\beta} = c^{\alpha\mu} c^{\beta\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \Phi. \quad (2.8)$$

В итоге уравнения, решающие задачу, примут вид

$$A_1^{\alpha\beta\gamma\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \frac{1}{2h} \nabla_{\gamma} \nabla_{\nu} \Phi = 0, \quad (2.9)$$

$$-\frac{2}{3} A_2^{\lambda\delta\mu\nu} \nabla_{\lambda} \nabla_{\delta} (h^3 \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} w) + c^{\alpha\beta} c^{\gamma\delta} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} w + b_{\alpha\beta}) \nabla_{\gamma} \nabla_{\delta} \Phi + q = 0. \quad (2.10)$$

Здесь обозначено

$$A_1^{\alpha\beta\gamma} = a^{\alpha\beta}c^{\beta\gamma} - \sigma c^{\alpha\beta}c^{\beta\gamma},$$

$$A_2^{\alpha\beta\mu\nu}(1 - \sigma^2) = \sigma a^{\alpha\beta}a^{\mu\nu} + (1 - \sigma)a^{\alpha\mu}a^{\beta\nu},$$

σ — коэффициент Пуассона.

Для оболочки малой кривизны $b \sim \sqrt{\varepsilon_p}$ (тип 1с) условия совместности с погрешностью $\sqrt{\varepsilon_p}$ примут вид

$$c^{\alpha\beta}c^{\beta\gamma}(\nabla_\alpha \nabla_\beta \varepsilon_{\beta\gamma} + b_{\beta\gamma} \kappa_{\alpha\beta}) = 0, \quad c^{\beta\gamma} \nabla_\gamma \kappa_{\alpha\beta} = 0.$$

Здесь опять возможно представление (2.7), а первые два уравнения равновесия (2.5₁) при $q^\beta = 0$ удовлетворяются постановкой (2.8). Таким образом, в этом случае имеем систему двух нелинейных уравнений вида (2.9), (2.10).

При среднем изгибе $\kappa \sim \sqrt{\varepsilon_p}$ и при медленном изменении напряженного состояния ($\kappa_{,\alpha} \sim \kappa$, $\varepsilon_{,\alpha} \sim \varepsilon$, $\kappa h \lesssim \varepsilon_p$) для оболочки конечной кривизны $b \sim 1$ (тип Па) уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + q^\beta = 0, \quad (b_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta})T^{\alpha\beta} + q = 0,$$

и допускают линеаризацию в последнем уравнении лишь с погрешностью $\sqrt{\varepsilon_p}$, а условия совместности линеаризуются с погрешностью ε_p до вида

$$\nabla_\gamma G^{\delta\gamma} = 0, \quad b_{\delta\gamma} G^{\delta\gamma} = 0,$$

где:

$$G^{\delta\gamma} = -c^{\alpha\beta}c^{\beta\gamma} \kappa_{\alpha\beta}.$$

Для оболочки малой кривизны ($b \lesssim \sqrt{\varepsilon_p}$) (тип 2в) с погрешностью ε_p в сравнении с единицей условия совместности Кодацци (2.6₂) и первые два уравнения (2.5₁) позволяют ввести функцию прогиба w и функцию усилий Φ , тогда как оставшиеся уравнения принимают вид

$$-\frac{2}{3} A_1^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\beta (h^3 \nabla_\gamma w) + (b_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}) c^{\alpha\mu} c^{\beta\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + q = 0,$$

$$A_1^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\beta \left(\frac{1}{2h} \nabla_\gamma \Phi \right) + c^{\alpha\beta} c^{\beta\gamma} (\nabla_\alpha \nabla_\gamma w + b_{\beta\gamma}) \nabla_\alpha \nabla_\beta w = 0.$$

Эти уравнения не удастся линеаризовать даже пренебрегая величинами порядка $\sqrt{\varepsilon_p}$.

Особенно интересны выводы по качественному анализу краевого эффекта, где, как оказалось, нелинейности в ряде случаев играют существенную роль.

Пусть линия $x_1 = \text{const}$ совпадает с линией границы срединной поверхности и не касается асимптотической линии этой поверхности и

$$b_{22} \sim \varepsilon_p^\beta, \quad \varepsilon_{\alpha\beta,2} \sim \varepsilon_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_p^m, \quad \kappa_{11} \sim \varepsilon_p^m, \quad \varepsilon_{\alpha\beta,1} \sim \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_p^{-s},$$

$$\beta \geq 0, \quad m \geq 1, \quad n \geq 0, \quad s \geq 1/4.$$

Пусть при этом

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim h \kappa_{11} \varepsilon_p^i \quad \text{или} \quad h \sim \varepsilon_p^{m-n-i}.$$

Из уравнения изгиба (2.2) следует, что

$$\beta = m - n - 2s - t,$$

тогда как из условия совместности деформаций (2.4) (условие Гаусса) следует, что

$$\beta = m - n - 2s.$$

Сопоставляя эти два последние равенства, имеем

$$\beta = m - n - 2s, \quad t = 0.$$

Таким образом, в зоне краевого эффекта

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim h\kappa_{11},$$

4 мембранные деформации одного порядка с изгибными. Из первых двух уравнений равновесия (2.1) и условий совместности Кодацци (2.3) следует, что

а) для цилиндрических и близких к ним оболочек

$$T_{11} \sim T_{12} \varepsilon_p^s \sim T_{22} \varepsilon_p^{2s}, \quad \kappa_{22} \sim \kappa_{12} \varepsilon_p^s \sim \kappa_{11} \varepsilon_p^{2s},$$

б) для нецилиндрических оболочек

$$T_{11} \sim T_{12} \sim T_{22} \varepsilon_p^s, \quad \kappa_{22} \sim \kappa_{12} \sim \kappa_{11} \varepsilon_p^s.$$

Таким образом, при $s \geq 1/4$

$$T_{22} \geq T_{11}, \quad \kappa_{11} \geq \kappa_{22}.$$

Для оболочек конечной кривизны $b \sim 1$ ($\beta = 0$) при $\varepsilon_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_p$ ($m = 1$) и при $h \sim \varepsilon_p$ (тонкая оболочка) имеем

$$\beta = m - n - 2s = 0, \quad m - n - t = 1.$$

откуда в силу $m = 1$, $t = 0$ следует, что $n = 0$, $s = 1/2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \kappa_{22} \sim \varepsilon_p & \text{ для цилиндрических оболочек,} \\ \kappa_{22} \sim \sqrt{\varepsilon_p} \sim \sqrt{h} & \text{ для нецилиндрических оболочек.} \end{aligned}$$

В обоих случаях с погрешностью не более $\sqrt{\varepsilon_p}$ в уравнениях можно положить $b_{22} + \kappa_{22} \simeq b_{22}$ и тем самым линеаризовать к уравнения в усилиях и деформациях. Отметим, что в обоих случаях

$$\omega^2 \sim (\kappa_{11} \varepsilon_p^s)^2 \sim \varepsilon_p^{2s} \sim \varepsilon_p,$$

и выражение деформации через перемещения должно быть сохранено в нелинейном виде

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + E_{\beta\alpha} + \omega_\alpha \omega_\beta.$$

В случае пологой оболочки $b \sim \varepsilon_p^{1/4}$ при $h \sim \varepsilon_p$ (тонкая оболочка) получим $n = 0$, $s = 3/8$:

а) $\kappa_{22} \sim \varepsilon_p^{3/8}$ для нецилиндрических оболочек и $\kappa_{22}/b_{22} \sim \varepsilon_p^{1/8}$, следовательно, уравнение изгиба следует писать в нелинейном виде (2.2), так как пренебрежение величиной порядка $\varepsilon_p^{1/8}$ в сравнении с единицей внесет большую погрешность;

б) $\kappa_{22} \sim \varepsilon_p^{3/4}$ для цилиндрических оболочек и $\kappa_{22}/b_{22} \sim \sqrt{\varepsilon_p}$. Таким образом, в этом случае линеаризация уравнений возможна с погрешностью $\sqrt{\varepsilon_p}$. Отметим, что линеаризация выражения ε_{11} через перемещения возможна лишь с погрешностью $\varepsilon_p^{1/4}$.

Таким образом, в общем случае задача о краевом эффекте оказывается нелинейной.

В 1965 году в статье [31] была дана классификация задач теории оболочек, где в качестве малого параметра использовалась величина

$$\Theta = \max \left(\frac{h}{L}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\varepsilon_p} \right).$$

В 1972 г. в работе [32] эта классификация была развита введением еще одного параметра и

$$\Theta = \max \left(\frac{h}{l}, \frac{h}{L}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\varepsilon_p} \right),$$

где l — длина волны изгиба напряженного состояния. Очевидно, что это дало возможность вложить в предложенную классификацию и явления типа краевого эффекта. О преимуществах перед этими классификациями введения как основного малого параметра величины $\varepsilon_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_p$ сказано выше.

В 1980 году в статье [33] В. Петрашкевичем предложено расширение классификации характера изгиба, рассмотренного Х. М. Муштари, и предложено считать

$$\begin{aligned} \omega &\leq 0(\Theta^2) \text{ — малое вращение,} \\ \omega &= 0(\Theta) \text{ — среднее вращение,} \\ \omega &= 0(\sqrt{\Theta}) \text{ — большое вращение,} \\ \omega &= 0(1) \text{ — конечное вращение} \end{aligned}$$

Эта классификация при $\Theta^2 \sim \varepsilon_p$ представляется корректной и введение большего вращения условием $\omega = 0(\sqrt{\Theta}) = 0(\varepsilon_p^{1/4})$ выделяет в особый класс пологие оболочки при их большом изгибе.

3. В последние годы в Казани развивается теория построения определяющих соотношений для анизотропных оболочек, в частности, для композитных, образованных из монослоев однонаправленно армированной структуры [22]. Этими исследованиями восполняется пробел в нелинейной механике тонких оболочек в части построения общей теории для определяющих (физических) соотношений, тогда как вопросы теории геометрической нелинейности на сегодня достаточно глубоко разработаны. В части развития исследований нелинейных задач, связанных с конечными вращениями, следует отметить успехи Польской школы механики оболочек во главе с проф. В. Петрашкевичем.

а. На поверхности приведения S_0 в недеформированном состоянии введем систему лагранжевых координат x^α ($\alpha = 1, 2$) с метрическим тензором $a_{\alpha\beta} = (\rho_\alpha \cdot \rho_\beta)$ и координатными векторами $\rho_\alpha = \partial \rho / \partial x^\alpha$. На эквидистантных по нормальной к S_0 координате $z = x^3$ поверхностях S_z с ортом нормали m координаты x^α имеют метрический тензор $g_{\alpha\beta} = (r_\alpha \cdot r_\beta)$, $r = \rho + zm$, и координатные векторы $r_\alpha = \partial r / \partial x^\alpha$. При этом $g_{33} = 1$, $g_{\alpha 3} = 0$. В деформированном состоянии на S_z^* имеем $a_{\alpha\beta}^* = (\rho_\alpha^* \cdot \rho_\beta^*)$, $\rho_\alpha^* = \partial \rho^* / \partial x^\alpha$, $\rho^* = \rho + u$, а на S_z^* имеем

$$g_{\alpha\beta}^* = (r_\alpha^* \cdot r_\beta^*), \quad r_\alpha^* = \partial r^* / \partial x^\alpha, \quad r^* = r + u,$$

$$g_{\alpha 3}^* = (r_{\alpha}^* \cdot r_3^*), \quad g_{33}^* = (r_3^* \cdot r_3^*),$$

$$u = U|_{z=0}.$$

Характеристика деформации Грина

$$\varepsilon_{ik} = (g_{ik}^* - g_{ik})/2$$

отнесена к начальному состоянию и образует тензор

$$\underline{E} = \varepsilon_{ik} r^i r^k.$$

Тензор напряжений Коши $\underline{\Sigma}$ имеет составляющие σ^{ik} в деформированном базисе и

$$\underline{\Sigma} = \sigma^{ik} r_i^* r_k^*,$$

а тензор условных напряжений \underline{T} имеет в недеформированном базисе r_i составляющие t^{ik} и $\underline{T} = t^{ik} r_i r_k$ при выполнении условий $t^{ik} = \sigma^{ik}/\varrho_*$, где ϱ_* — плотность среды в деформированном состоянии. В статье [22] показано, что в случае полного рассеяния в виде тепла работы внутренних напряжений на приращениях деформаций ползучести $\delta\varepsilon_{ik}^{(c)}$ и пластических деформаций $\delta\varepsilon_{ik}^{(p)}$ имеет место обобщение формул Грина

$$t^{ik} = \frac{\partial F}{\partial e_{ik}}$$

где $\delta e_{ik} = de_{ik} - \delta\varepsilon_{ik}^{(p)} - \delta\varepsilon_{ik}^{(c)}$, ε_{ik} — полные деформации, F — свободная энергия, de_{ik} — приращения упругих деформаций. Здесь знак $\delta(\dots)$ указывает на то, что приращение соответствующей величины не есть полный дифференциал, а полное приращение соответствующей величины зависит от пути, по которому протекает процесс.

Формула (3.1), обобщающая формулу Грина на случай наличия неупругих приращений деформаций и следует из того, что для плотности свободной энергии F а случае наличия тепловых процессов имеем

$$\varrho_* dF = \sigma^{ik} de_{ik} - \varrho_* s dT - \sum_j P^j d\chi_j,$$

$$\varrho_* T ds = (\varrho_* r - \nabla_i q_i^*) dt + \sum_j P^j d\chi_j, \quad (3.2)$$

где s — плотность энтропии, T — абсолютная температура, r — интенсивность источников тепла, $q = q_i^* r_i^*$ — вектор потока тепла, P^j — составляющие обобщенных сил, χ_j — обобщенные перемещения, на которых силы P^j производят работу, рассеиваемую в виде тепла. В исследовании [34] показано, что не менее 90% механической работы на пластических деформациях переходят в тепловую энергию. Так как механизм деформации при ползучести одинаков с механизмом пластического деформирования, то и при ползучести следует ожидать перехода работы внутренних напряжений на деформациях ползучести в тепло. Таким образом, предположим, что механическая энергия $\sigma^{ik} \delta\varepsilon_{ik}^{(p)}$ и энергия $\sigma^{ik} \delta\varepsilon_{ik}^{(c)}$ переходят в тепло. Тогда согласно (3.2)

$$\varrho_* dF = \sigma^{ik} (de_{ik} - \delta\varepsilon_{ik}^{(p)} - \delta\varepsilon_{ik}^{(c)}) - \varrho_* s dT,$$

где принято

$$P^1 d\chi_1 = \sigma^{ik} \delta e_{ik}^{(p)}, \quad P^2 d\chi_2 = \sigma^{ik} \delta e_{ik}^{(c)}.$$

Из сказанного следует (1).

в. Функция F зависит от инвариантов деформированного состояния, температуры T и, может быть, от других параметров процесса. В качестве инвариантов деформированного состояния выберем величины [22]

$$\begin{aligned} I_1 &= e_{\alpha}^{\alpha} + A_{(1)}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, & I_2 &= e_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (e_{\alpha}^{\alpha})^2 - \frac{1}{2} (A_{(1)}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta})^2, \\ I_3 &= e_{\alpha}^{\alpha} - A_{(1)}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, & I_4 &= \gamma^{\alpha} \gamma_{\alpha} + A_{(2)}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}, \\ I_5 &= \gamma^{\alpha} \gamma_{\alpha} - A_{(2)}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}, & I &= e_{33}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $A_{(1)}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 0$, $\gamma_{\alpha} = 2e_{\alpha 3}$. Касательная к S_z плоскость есть плоскость симметрии механических свойств. В этом случае для t^{ik} согласно (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \rho t^{\alpha\beta} &= A_1 (g^{\alpha\beta} + A_{(1)}^{\alpha\beta}) + 2A_2 \left(e_{\alpha}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} e_{\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{2} A_{(1)}^{\alpha\beta} A_{(1)}^{\alpha\omega} e_{\omega\alpha} \right) + A_3 (g^{\alpha\beta} - A_{(1)}^{\alpha\beta}), \\ \rho t^{\alpha} &= 2A_4 (\gamma^{\alpha} + A_{(2)}^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}) + 2A_5 (\gamma^{\alpha} - A_{(2)}^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}); \quad \rho t^{33} = \rho \frac{\partial F}{\partial e_{33}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $t^{\alpha} = t^{\alpha 3}$, $A_i = \rho \partial F / \partial I_i$. Для ортотропного материала $A_{(1)}^{\alpha\beta} = A_{(2)}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}$ и в осях ортотропии $A_{12} = 0$.

Для тонких оболочек $t^{33} \ll t^{11}, t^{22}$ и, следовательно, $\partial F / \partial e_{33} \approx 0$. Таким образом, F от e_{33} не зависит. Полагая поперечную сдвиговую деформацию малой ($\gamma_{\alpha} \approx 0$) получим

$$F = F(I_1, I_2, I_3, T)$$

В осях ортотропии для локальных координат с характеристиками $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$ имеем $A_{11} = -A_{22} = 1$, $A_{12} = 0$

$$I_1 = 2e_{11}, \quad I_3 = 2e_{22}, \quad I_2 = 2e_{12}^2.$$

Примем, что система напряжений $t^{\alpha\beta}$ равновесная, приращения $\delta e_{\alpha\beta}$ кинематически возможные.

В силу того, что $\delta e_{\alpha\beta}$ — деформации упругие при $\rho \delta t^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\gamma\delta} \delta e_{\gamma\delta}$ имеем

$$\delta t^{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} \geq 0.$$

Пусть $\rho \delta t^{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\gamma\delta} \delta e_{\alpha\beta} \delta e_{\gamma\delta} = \sum_{i,k} A_{ik} \delta e_i \delta e_k$, где $e_{11} = e_1$, $e_{22} = e_2$, $e_{12} = e_3$. Матрица коэффициентов A_{ik} порождает положительно определенную квадратичную форму. Обозначим

$$A_{11} = \tilde{E}_1, \quad A_{12} = \tilde{\mu}_{12} \tilde{E}_1, \quad A_{13} = \tilde{\mu}_{13} \tilde{E}_1 \text{ ит.д.}$$

Тогда матрица $\|A_{ik}\|$ примет вид

$$\|A_{ik}\| = \begin{vmatrix} \tilde{E}_1 & \tilde{\mu}_{12} \tilde{E}_1 & \tilde{\mu}_{13} \tilde{E}_1 \\ \tilde{\mu}_{21} \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{\mu}_{23} \tilde{E}_2 \\ \tilde{\mu}_{31} \tilde{E}_3 & \tilde{\mu}_{23} \tilde{E}_3 & \tilde{E}_3 \end{vmatrix},$$

где $\tilde{\mu}_{ik}$, \tilde{E}_i — условные модули упругости. При этом \tilde{E}_1 имеет порядок модуля на

растяжение E_1, \tilde{E}_2 — порядка модуля E_2, \tilde{E}_3 — порядка модуля сдвига G_{12} : $\tilde{E}_1 \sim E_1, \tilde{E}_2 \sim E_2, \tilde{E}_3 \sim G_{12}$.

Обозначим

$$E_2/E_1 = \eta^2, \quad G_{12}/E_2 \sim \kappa^2.$$

Условие симметрии матрицы $\|A_{ik}\|$ дает $\tilde{\mu}_{ik}\tilde{E}_i = \tilde{\mu}_{ki}\tilde{E}_k$; $i, k = 1, 2, 3$ (не суммировать), а условие положительной определенности квадратичной формы $\sum_{i,k} A_{ik} \delta e_i \delta e_k$

— к условиям $\tilde{E}_i > 0, \tilde{\mu}_{ik}\tilde{\mu}_{ki} < 1$; $i, k = 1, 2, 3$ (не суммировать). Например, из условий $\tilde{\mu}_{12}\tilde{\mu}_{21} < 1, \tilde{\mu}_{12}\tilde{E}_1 = \tilde{\mu}_{21}\tilde{E}_2$ следует, что

$$\tilde{\mu}_{12} \leq \eta, \quad \tilde{\mu}_{12}\tilde{E}_1 = \tilde{\mu}_{21}\tilde{E}_2 \sim \eta E_1.$$

Выполняя подобные оценки для всех членов матрицы $\|A_{ik}\|$, получим, что можно записать следующее соотношение порядков

$$\|A_{ik}\| \sim E_1 \begin{vmatrix} 1, & \eta, & \kappa\eta \\ \eta, & \eta^2, & \kappa\eta^2 \\ \kappa\eta, & \kappa\eta^2, & \kappa^2\eta^2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, если $B_i = \rho \partial F / \partial e_i$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial e_1} &\sim E_1, & \frac{\partial B_1}{\partial e_2} &\sim \eta E_1, & \frac{\partial B_1}{\partial e_3} &\sim \kappa\eta E_1, \\ \frac{\partial B_2}{\partial e_1} &\sim \eta E_1, & \frac{\partial B_2}{\partial e_2} &\sim \eta^2 E_1, & \frac{\partial B_2}{\partial e_3} &\sim \kappa\eta^2 E_1, \\ \frac{\partial B_3}{\partial e_1} &\sim \kappa\eta E_1, & \frac{\partial B_3}{\partial e_2} &\sim \kappa\eta^2 E_1, & \frac{\partial B_3}{\partial e_3} &\sim \kappa^2\eta^2 E_1. \end{aligned}$$

Асимптотически при $\eta \rightarrow 0$ имеем, что существенным будет лишь один член

$$\partial B_1 / \partial e_1 \sim E_1. \quad (3.5)$$

Асимптотика $\kappa \rightarrow 0$ дает существенные члены

$$\frac{\partial B_1}{\partial e_1} \sim E_1, \quad \frac{\partial B_1}{\partial e_2} \sim \eta E_1, \quad \frac{\partial B_2}{\partial e_1} \sim \eta E_1, \quad \frac{\partial B_2}{\partial e_2} \sim \eta^2 E_1. \quad (3.6)$$

Случай (3.5) соответствует нитяной модели однонаправленно армированного слоя. Случай (3.6) соответствует ортогонально армированному слою с нулевой сдвиговой жесткостью. Для стеклопластиков однонаправленного армирования в направлении оси Ox_1 ; $E_1 \simeq 4600$ МПа, $E_2 \simeq 18000$ МПа, $G_{12} \simeq 4500$ МПа и, следовательно,

$$\eta^2 \sim 1/3, \quad \kappa^2 \sim 1/3, \quad \eta \sim \kappa.$$

Хотя $1/3$ и не мало в сравнении с единицей, однако в силу асимптотического подхода по малому параметру приведенные оценки корректны.

Для $\eta \sim \kappa$ из (3) следует, что $\partial B_1 / \partial e_1$ в асимптотическом разложении начинается с членов, содержащих η в нулевой степени, $\partial B_1 / \partial e_2$ — с членов, содержащих первые степени η , $\partial B_1 / \partial e_3$ — с членов, содержащих квадраты η . Следовательно,

$$B_1 = \varphi_0(e_1) + \eta\varphi_1(e_1, e_2) + \eta^2\varphi_2(e_1, e_2, e_3, \eta)$$

Здесь φ_2 в асимптотическом разложении по η начинается с членов, содержащих η в нулевой степени:

$$\varphi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2,k} \eta^k.$$

Аналогично

$$B_2 = \eta \psi_1(e_1) + \eta^2 \psi_2(e_1, e_2) + \eta^3 \psi_3(e_1, e_2, e_3, \eta)$$

$$B_3 = \eta^2 \chi_2(e_1) + \eta^3 \chi_3(e_1, e_2) + \eta \chi_4(e_1, e_2, e_3, \eta)$$

$$\psi_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{3,k} \eta^k, \quad \chi_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{4,k} \eta^k.$$

В асимптотическом разложении для функций B_i ограничимся случаем $\varphi_{2,k} = \psi_{3,k} = \chi_{4,k} = 0$ при $k \geq 1$. Из условий

$$\frac{\partial B_i}{\partial e_j} = \frac{\partial B_i}{\partial e_i}$$

с учетом того, что при e_{12} деформации e_{11}, e_{22} не могут вызвать напряжений t_{12} , заключаем, что

$$\varrho t_{11} = B_{11}(e_{11}, e_{22}) e_{11} + B_{12}(e_{11}, e_{22}) e_{22},$$

$$\varrho t_{22} = B_{21}(e_{11}, e_{22}) e_{11} + B_{22}(e_{11}, e_{22}) e_{22},$$

$$\varrho t_{12} = B_3(e_{12})$$

Если в асимптотических разложениях для B_1 и B_2 ограничиться двумя первыми членами, то определяющие соотношения должны быть представлены в виде

$$\varrho t_{11} = B_{11}(e_{11}) e_{11} + B_{12}(e_{11}) e_{22},$$

$$\varrho t_{22} = B_{21}(e_{11}) e_{11} + B_{22}(e_{22}) e_{22},$$

$$\varrho t_{12} = B_{33}(e_{12}) e_{12}$$

В простейшем случае, когда в разложении для B_1 сохраняется один член, то есть $B_1 = \varphi_0(e_1)$, определяющие соотношения приводятся к виду

$$\varrho t_{11} = B_{11}(e_{11}) e_{11}, \quad \varrho t_{22} = B_{22}(e_{22}) e_{22}, \quad \varrho t_{12} = B_{33}(e_{12}) e_{12}.$$

Последние совпадают с соотношениями, предложенными в работе [35].

с. Опишем процедуру экспериментального определения функций $A_i(I_j)$ при ограничениях $\gamma_\alpha \simeq 0$, $\delta \varepsilon_{ik}^{(p)} = 0$, $\delta \varepsilon_{ik}^{(e)} = 0$, т.е. в случае малых поперечных сдвигов. Для усилий, отнесенных к начальному недеформированному состоянию и в недеформированной площади, получим

$$T^{11} = \int_{-h}^h \varrho t^{11} dz, \quad T^{22} = \int_{-h}^h \varrho t^{22} dz, \quad T^{12} = \int_{-h}^h \varrho t^{12} dz, \quad (3.7)$$

где $2h$ — толщина оболочки. Пусть цилиндрическая оболочка изготовлена намоткой однонаправленно армированной лентой при углах намотки $\varphi_k = \pm \varphi$, где φ_k — углы, которые образуют направления армирования с образующей цилиндра, при

равном количестве слоев в обоих направлениях. При этом для случая $e_{12} = 0$ из (3.3) имеем

$$\begin{aligned} I_1^\pm &= 2(e_{11} \cos^2 \varphi + e_{22} \sin^2 \varphi), & I_3^\pm &= 2(e_{11} \sin^2 \varphi + e_{22} \cos^2 \varphi), \\ 2I_2^\pm &= (e_{11} - e_{22})^2 \sin^2 2\varphi, \\ A_{11}^k &= -A_{22}^k = \cos 2\varphi_k, & A_{12}^k &= \sin 2\varphi_k \end{aligned}$$

Так как I_j от номера слоя не зависят, то согласно (3.4), (3.7)

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2h[A_1 \cdot (1 + \cos 2\varphi) + A_3 \cdot (1 - \cos 2\varphi)] + 2hA_2 \cdot (e_{11} - e_{22}) \sin^2 2\varphi, \\ T_{22} &= 2h[A_1(1 - \cos 2\varphi) + A_3(1 + \cos 2\varphi)] - 2hA_2(e_{11} - e_{22}) \sin^2 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для определения $A_2(I_2)$ отсюда при $\varphi = \pi/4$ получим формулу

$$4hA_2(e_{22} - e_{11}) = T_{22} - T_{11} \quad (3.9)$$

В пределах точности рассмотренного ранее асимптотического приближения A_2 зависит лишь от I_2 , для которого при $\varphi = \pi/4$ имеем

$$2I_2 = (e_{11} - e_{22})^2.$$

При $T_{11} - T_{22} > 0$ из (3.9) для A_2 получим

$$A_2(I_2) = \frac{T_{11} - T_{22}}{4h\sqrt{2I_2}}.$$

В пределах той же асимптотической точности $A_1 = A_1(I_1, I_3)$, $A_3 = A_3(I_1, I_3)$. Для определения этих функций из (3.8) при $\varphi \neq \pi/4$ и известной функции $A_2(I_2)$ имеем

$$\begin{aligned} 4hA_1 \cos^2 \varphi &= T_{11} \cos^2 \varphi - T_{22} \sin^2 \varphi - 2hA_2(e_{11} - e_{22}) \sin^2 2\varphi, \\ 4hA_3 \cos^2 \varphi &= -T_{11} \sin^2 \varphi + T_{22} \cos^2 \varphi + 2hA_2(e_{11} - e_{22}) \sin^2 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь все входящие явно e_{11} , e_{22} , I_2 следует выразить через I_1 и I_3 согласно (3.3), то есть

$$\begin{aligned} 2e_{11} \cos 2\varphi &= I_1 \cos^2 \varphi - I_3 \sin^2 \varphi, \\ 2e_{22} \cos 2\varphi &= I_3 \cos^2 \varphi - I_1 \sin^2 \varphi, \\ 8I_2 \cos^2 2\varphi &= (I_1 - I_3)^2 \sin^2 2\varphi \end{aligned}$$

Для экспериментального определения функций A_1 , A_2 , A_3 необходимо установить связь между измеряемыми в эксперименте величинами относительного удлинения

$$\Delta_1 = \frac{ds_1^* - ds_1}{ds_1}, \quad \Delta_2 = \frac{ds - ds_2}{ds_2}$$

и величинами e_{11} , e_{22} , которая дается в виде

$$(\Delta_1 + 1)^2 = 1 + 2e_{11}, \quad (\Delta_2 + 1)^2 = 1 + 2e_{11}$$

С другой стороны, если к цилиндру приложена осевая растягивающая сила P и внутреннее давление q , то полная осевая сила при закрытых днищах $Q = P + \pi R_*^2 q$ создает в цилиндре истинные напряжения

$$\sigma_{11}^{\text{физ}} = \frac{Q}{2\pi R_* \cdot 2h_*}, \quad \sigma_{22}^{\text{физ}} = \frac{qR_*}{2h_*}.$$

Здесь $R_* = R(1 + \Delta_2)$, $h_* = h(1 + \Delta_3)$. С учетом перехода

$$\iint_{S_*} (\dots) dS_* = \iint_S (\dots) \sqrt{\frac{a_*}{a}} dS$$

из вариационного уравнения принципа возможных перемещений при выполнении уравнений равновесия получим

$$\iint_S \left[P_*^s \sqrt{\frac{a_*}{a}} - \varrho t^{ik} \left(r_i + \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) n_k \right] \delta u dS = 0.$$

Здесь P_*^s — вектор напряжения на срезе с границей S_* . Отсюда следует, что в случае $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$

$$\sigma_{11}^{fus}(1 + \Delta_2)(1 + \Delta_3) - \varrho t^{11}(1 + \Delta_1) = 0$$

а в случае $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 0$

$$\sigma_{22}^{fus}(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_3) - \varrho t^{22}(1 + \Delta_2) = 0$$

Таким образом,

$$T_{11} = \int_{-h}^h \varrho t_{11} dt = \frac{P}{2\pi(R + \Delta_1)} + \frac{qR(1 + \Delta_2)}{2(1 + \Delta_1)},$$

$$T_{22} = \int_{-h}^h \varrho t_{22} dt = qR(1 + \Delta_1),$$

что дает возможность входящие в (3.9) и (3.10) величины T_{11} , T_{22} выразить через замеряемые в эксперименте P , q , Δ_1 , Δ_2 .

Статья написана по материалам доклада, зачитанного на IU Польской конференции „Оболочечные конструкции, теория и припомения”, XI 1986 г., Шклярска Порэмба, ПНР.

Литература

1. Х. М. Муштари, *Некоторые обобщения теории тонких и оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия*, Известия физ.-мат. общества при КГУ, т. XI, сер. 3, стр. 71 - 150, Казань, 1938.
2. Х. М. Муштари, *Некоторые обобщения теории тонких оболочек*, ПММ, т. II, № 4, стр. 439 - 456, 1939.
3. Х. М. Муштари, *Об области применимости приближенной теории оболочек*. ДАН СССР, т. 58, 1947.
4. Х. М. Муштари, *Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа-Лява*. ПММ, т. XI, № 5, 1947.
5. Х. М. Муштари, *Об определении деформаций срединной поверхности оболочки при произвольных изгибах*. Тр. КХТИ, № 13, 1948, Казань.
6. Х. М. Муштари, *Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях*. ПММ, т. XIII, № 2, 1949.
7. К. З. Галимов, *Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложения к теории упругости*. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. наук, № I, 1948.

8. К. З. ГАЛИМОВ, *Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях*. Там же., № 2, 1950.
9. К. З. ГАЛИМОВ, *К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях*. ПММ, т. ХУ, № 6, 1951.
10. К. З. ГАЛИМОВ, *К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек*. Изв. Казанского филлала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 10, 1956.
11. Х. М. МУШТАРИ, К. З. ГАЛИМОВ, *Нелинейная теория упругих оболочек*. Таткнигоиздат, 1957.
12. К. З. ГАЛИМОВ, Р. Г. СУРКИН, *О работах Казанских ученых по теории пластин и оболочек*. Сб. „Иссл. по теории пластин и оболочек”, № 5, Изд. КГУ, Казань, 1967.
13. К. З. ГАЛИМОВ, *О некоторых направлениях развития механики деформируемого тела в Казани*. Сб. „Исследования по теории пластин и оболочек”, № 9, Изд. КГУ, Казань, 1972.
14. К. З. ГАЛИМОВ, *О некоторых направлениях развития механики деформируемого твердого тела в Казани*. Сб. „Исследования по теории пластин и оболочек”, вып. 14, 1979, стр. II - 82.
15. М. С. КОРНИШИН, *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*. Изд. „Наука”, М., 1964.
16. М. С. КОРНИШИН, Ф. С. ИСАНБАЕВА, *Гибкие пластины и панели*. М. „Наука”, 1968.
17. И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, *Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести*. М. „Наука”, 1969.
18. М. А. ИЛЬГАМОВ, *Колебания упругих оболочек, содержащих элипсоид и газ*. М. „Наука”, 1969.
19. М. А. ИЛЬГАМОВ, В. А. ИВАНОВ, Б. В. ГУЛИН, *Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем*. М. „Наука”, 1977.
20. И. В. СВИРСКИЙ, *Методы типа Бубнова-Галеркина и последовательных приближений*. М. „Наука”, 1968.
21. К. З. ГАЛИМОВ, *К теории конечных деформаций*. Уч. записки КГУ, т. 109, кн. I, 1949, стр. 35 - 71. Казань.
22. И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, *Определяющие соотношения для физически нелинейных анизотропных и композитных оболочек при конечных деформациях*. Часть I, Известия ВУЗов, серия „Математика”, № 5, 1985, стр. 33 - 41, часть II, там же, № 6, 1985, стр. 54 - 62.
23. И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, *К вариационным методам в нелинейной теории упругости*. ДАН СССР, 1962, 143, № 3.
24. Х. М. МУШТАРИ, И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, *К теории оболочек средней толщины*. ДАН СССР, т. 128, № 6, 1959.
25. Х. М. МУШТАРИ, И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, *К теории пологих анизотропных оболочек средней толщины*. Изв. АН СССР, ОНТ, сер. мех. и машиностроение, № 6, 1959.
26. Х. М. МУШТАРИ, *О применимости различных теорий трехслойных пластин и оболочек*. Изв. АН СССР, ОНТ, мех. и машиностроение, № 2, 1961.
27. К. З. ГАЛИМОВ, *Основы нелинейной теории тонких оболочек (учебное пособие)*. Изд. Казанского ун-та, 1975, стр. 326.
28. *Теория оболочек с учетом поперечного сдвига*. Изд. КГУ, Казань, 1977, 211 стр.
29. К. З. ГАЛИМОВ, В. Н. ПАЙМУШИН, *Теория оболочек сложной геометрии*. Казань, Изд. Казанского ун-та, 1985, 163 стр.
30. К. З. ГАЛИМОВ, В. Н. ПАЙМУШИН, И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, *Основания нелинейной теории оболочек*. Казань, КГУ, 1986.
31. F. JOHN, *Estimates for the derivatives of the stresses a thin shell and interior shell equations*. Comm Pure and Applied Mathematics, 18, 235 - 267, 1965.
32. W. I. KOITER, J. G. SIMMONDS, *Foundations of shell theory*. Theoretical and Appl. Mech., Proc. IUTAM Congr., Moscow 1972 Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
33. W. PIETRASZKIEWICZ, *Finite rotations in nonlinear theory of thin shells*. CISM Congress Courses and Lectures No. 240, International Centre for Mechanical Sciences, Springer-Verlag, Wien-New York, 1980.
34. TAYLOR, G. INGRAM, W. S. FARREN, *The heat developed during plastic extension of metals*. Proc. Soc. Ser. A-107, London, 1925.

35. И. Ф. ОБРАЗЦОВ, В. В. ВАСИЛЬЕВ, *Нелинейные феноменологические модели деформирования волокнистых композитных материалов*, Механика композитных материалов, № 3, 1982, с. 390 - 393.

Streszczenie

ROZWÓJ NIELINIOWEJ MECHANIKI POWŁOK W PRACACH SZKOŁY KAZAŃSKIEJ

Praca zawiera szeroki przegląd prac i monografii kazańskiej szkoły dotyczących liniowej i nieliniowej mechaniki płyt i powłok. Podano w niej klasyfikację zagadnień ze względu na charakter deformacji oraz geometrię powłoki. Omówiono również wyniki otrzymane dla zagadnień powłok anizotropowych, termo-sprężystych, plastycznych oraz z materiałów kompozytowych.

Summary

DEVELOPMENT OF NONLINEAR MECHANICS OF SHELLS IN THE KAZAN SCHOOL

The paper presents a wide review of Kazan school publications and monographs on the linear and nonlinear mechanics of plates and shells. The classification of the problems with respect to the geometry and deformation of shells is given. The results obtained for the problem of anisotropic, thermoelastic, plastic as well as composite shells are discussed.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 stycznia 1987 roku.

ANALIZA NIESTACJONARNYCH ODKSZTAŁCEŃ I NAPRĘŻEŃ TERMOSPĘŻYSTYCH W WALE Z ODSADZANIEM

ZBIGNIEW ORŁOŚ

Wojskowa Akademia Techniczna

WALDEMAR CUDNY

Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Warszawa

KAZIMIERZ TOMASZEWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna

W pracy przedstawiono badania odkształceń i naprężeń termosprężystych w wale z odsadzeniem. Wykonany z żywicy epoksydowej, model wału obciążono cieplnie przez zanurzenie w naczyniu z gorącym, krążącym w obiegu zamkniętym, olejem. Temperatury mierzono za pomocą termoelementów umieszczonych na powierzchni i wewnątrz modelu. Przy użyciu tensometrów o krótkich długościach pomiarowych wyznaczono odkształcenia termosprężyste. Wyniki badań doświadczalnych porównano z wynikami uzyskanymi w obliczeniach numerycznych metodą elementów skończonych.

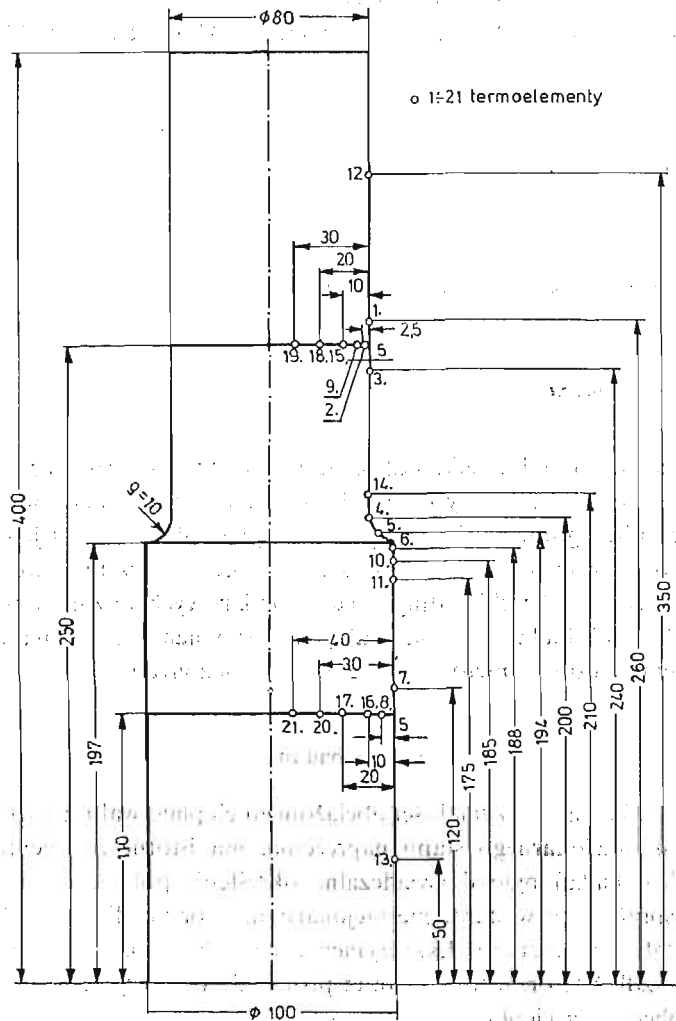
1. Cel badań

Zagadnienie określania wytrzymałości obciążonego cieplnie wału z karbem, a w szczególności analiza niestacjonarnego stanu naprężenia, ma istotne znaczenie dla praktyki inżynierskiej. Celem badań było doświadczalne określenie pól temperatur, odkształceń i naprężeń termosprężystych w stanie niestacjonarnym w przypadku obciążenia cieplnego modelu cieczą o stałej temperaturze. Eksperymentalnie badano rozkład temperatur w stanie niestacjonarnym wzdłuż tworzącej wału oraz promieni. Pomiarów temperatur umożliwiły nie tylko ocenę obciążenia cieplnego, ale również wyznaczenie współczynników przejmowania ciepła w warunkach wymuszonej konwekcji cieplnej. Temperatura cieczy oraz współczynniki przejmowania ciepła stanowiły niezbędne dane do obliczeń numerycznych dla analogicznego zadania.

Ponadto celem pracy było porównanie wyników tensometrycznych badań odkształceń i naprężeń termosprężystych z obliczeniami uzyskanymi metodą elementów skończonych (MES). Niektóre zagadnienia doświadczalnej i teoretycznej analizy naprężeń termosprężystych były przedstawione między innymi w pracach [1] i [2].

2. Model fizyczny

Badany model był wykonany z kompozycji żywicy epoksydowej CT200 (100 cz.w.) z utwardzaczem HT907 (60 cz.w.) o własnościach opisanych w [3]. Model składał się z trzech części. Dwie z nich, skrajne, stanowiły walce o średnicach 100 i 80 mm. Trzecia część — środkowa zawierała badany fragment wału z odsadzeniem w kształcie przejścia



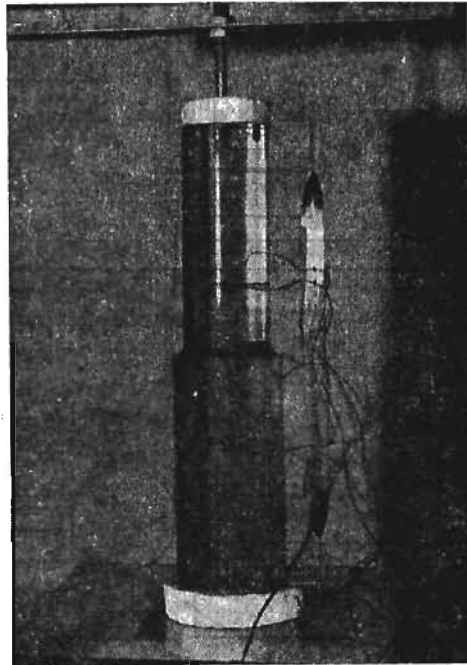
Rys. 1. Rozmieszczenie termoelementów na modelu wału z odsadzeniem.

łukiem kołowym o promieniu $\rho = 10$ mm z jednej średnicy wału na drugą. Rozmiary modelu oraz położenie punktów pomiaru temperatury przedstawiono na rys. 1. W trakcie wykonywania modelu na powierzchniach czołowych części środkowej umieszczono po 5 sztuk miniaturowych termoelementów Cu-K wzdłuż promienia wału. Przewody termoelementów prowadzono wzdłuż izoterm, które w przypadku osiowej symetrii znajdują

się na okręgach określonych promieniem $r = \text{const}$. Dla danej odległości r przewody termoelementów poprowadzono na połowie długości obwodu okręgu o promieniu r . W ten sam sposób zainstalowano termoelementy na powierzchni zewnętrznej modelu (rys. 2).

Po umieszczeniu termoelementów w płaszczyznach rozdzielających części środkową od pozostałych, wszystkie części modelu zostały sklejone za pomocą żywicy epoksydowej.

Na modelu, w obszarze karbu nakleiono 8 tensometrów elektrozestancyjnych FK1,2/120 podzielonych na dwie grupy. Pierwsza zawierała 6 tensometrów do pomiaru w trzech punktach odkształceń ε_s i ε_t — wzdłuż tworzącej i w kierunku obwodowym.



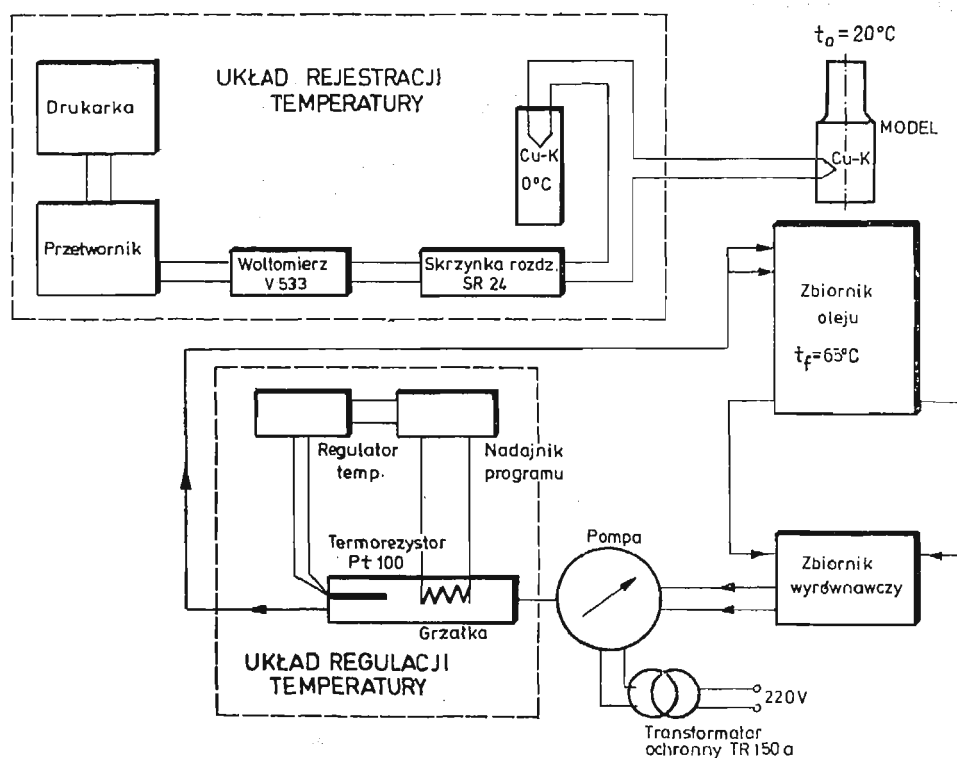
Rys. 2. Model wału z odsadzeniem.

Punkty pomiarowe oznaczono symbolami P_1 , P_2 i P_3 (por. rys. 6). Tensometry umieszczone były w zakresie wartości kąta γ od 9 do 36° liczonego od przejścia z średnicy wału $\varnothing 80$ mm w odsadzenie kołowe. Tensometry były przesunięte względem siebie na obwodzie aby nie wpływały na rozkład temperatury w badanym obszarze karbu. Dwa pozostałe tensometry umieszczono symetrycznie względem osi modelu na wysokości tensometrów środkowych pierwszej grupy. Użyte w badaniach tensometry o bazie 1,2 mm miały wymiary zbliżone do boku elementu skończonego (por. p. 5), w obszarze karbu, przyjętego w metodzie numerycznej.

Użycie niewielkiej liczby punktów pomiarowych w obszarze karbu wynikało z obawy, że umieszczenie większej ilości tensometrów może wprowadzić zakłócenie w rozkładzie temperatury.

3. Stanowisko pomiarowe

Układ obciążenia cieplnego (rys. 3) składał się ze zbiornika cylindrycznego o wysokości 60 cm wypełnionego olejem parafinowym tak, że badany model mógł być całkowicie zanurzony, a warstwa oleju pod i nad modelem wynosiła ~ 8 cm. Zbiornik był zasilany olejem za pomocą wysokowydajnej pompy przez 4 rozmieszczone symetrycznie wloty ze zbiornika



Rys. 3. Schemat stanowiska do obciążenia cieplnego modelu i pomiaru temperatur w modelu wału z odsadzeniem.

grzejnego. Podgrzewanie oleju odbywało się w drugim zbiorniku z grzałkami sterowanymi regulatorem temperatury. Ze zbiornika, w którym znajdował się model, olej odpływał dwoma otworami umieszczonymi przy dnie zbiornika. Obydwa zbiorniki miały izolację cieplną dla zminimalizowania strat ciepła do otoczenia. W zbiorniku z modelem umieszczono na trzech wysokościach termoelementy kontrolujące pionowy rozkład temperatury oleju.

Układ pomiarowy składał się z zestawu do pomiaru temperatury w 24 punktach i pomiaru odkształceń w 8 punktach modelu.

4. Metoda pomiarów

Pomiarów tensometrycznych dokonywano metodą wychyłową przy czym tensometr odniesienia — “kompensacyjny” znajdował się podczas pomiarów w temperaturze t_0 . Wstępnie określono odczyt w chwili początkowej τ_0 i temperaturze t_0 , przed zanurzeniem modelu. Następnie po zanurzeniu, w trakcie obciążenia cieplnego w czasie τ , dokonywano systematycznie odczytów położenia mostka dla każdego z tensometrów, oraz temperatur modelu i płynu. Różnicę wymienionych odczytów określamy umownie jako odkształcenie całkowite ε_c . Odkształcenie to jest sumą rzeczywistego odkształcenia ε modelu w kierunku osi tensometru i odkształcenia pozornego ε' wynikającego z różnicy współczynników rozszerzalności cieplnej modelu i tensometru oraz ze zmiany rezystancji drucika tensometru wywołanego przyrostem temperatury $\Delta t = t - t_0$,

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \varepsilon'. \quad (1)$$

Natomiast odkształcenie pozorne ε' można zapisać w postaci [4]:

$$\varepsilon' = \left(\frac{\beta_p}{k} - \beta_m + \beta_r \right) \Delta t, \quad (2)$$

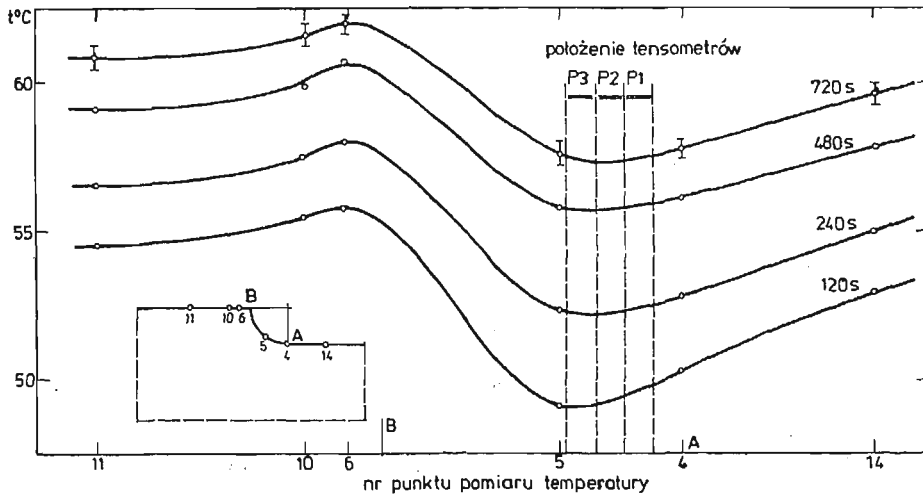
gdzie: β_p — współczynnik zmian rezystancji drucika tensometru z temperaturą.

β_m — współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału modelu,

β_r — współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału drucika tensometru,

k — stała tensometru.

W celu wyznaczenia odkształceń pozornych w funkcji temperatury $\varepsilon' = \varepsilon'(\Delta t)$ w pierwszej fazie pomiarów badano model przy stacjonarnym obciążeniu cieplnym w temperaturach podwyższonych. Zakładano, że model po osiągnięciu danej temperatury jednakowej we wszystkich jego punktach znajduje się w stanie beznaprężeniowym. A zatem w tym przy-



Rys. 4. Rozkład temperatury wzdłuż tworzącej karbu wału dla czterech chwil czasu obciążenia cieplnego. Odcinek A-B jest rozwinięciem łuku karbu.

padku mierzono tylko odkształcenia pozorne. Zakres temperatur przy wyznaczaniu odkształceń pozornych był zgodny z wartościami określonymi w próbie obciążenia cieplnego w stanie niestacjonarnym.

Tak uzyskane charakterystyki $\varepsilon' = \varepsilon'(\Delta t)$, dla wszystkich tensometrów na modelu, w stanie ustalonym oraz znajomość rozkładu temperatury w modelu w stanie niestacjonarnym umożliwiły wyznaczenie odkształceń pozornych.

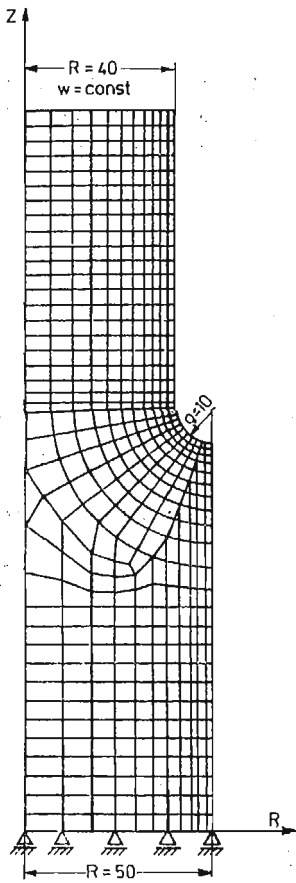
Przykładowo na rys. 4 przedstawiono rozkład temperatury w stanie niestacjonarnym wzdłuż tworzącej zarysu karbu, dla wybranych chwil czasu: 240, 480, i 720s określono temperaturę t oraz jej przyrost Δt przy znanej temperaturze początkowej t_0 w miejscu naklejenia tensometrów. Stąd można było wyznaczyć odkształcenie pozorne $\varepsilon'(\Delta t)$ dla tej chwili czasu i z zależności (1) odkształcenie rzeczywiste. Pomiar odkształceń $\varepsilon_c(\tau; t)$ i temperatury przeprowadzono dla następujących czasów: 30, 60, 120, 240, 480, 720, 960, 1200, 1440, 2400s.

5. Model numeryczny

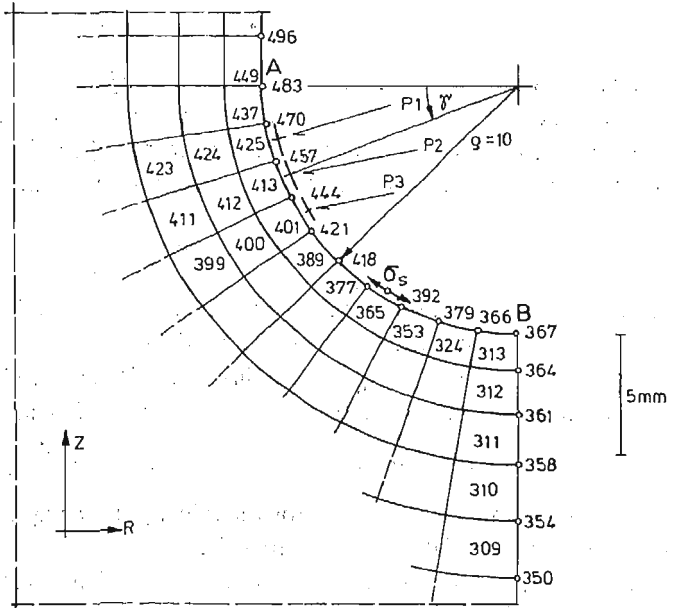
W obliczeniach numerycznych zastosowano metodę elementów skończonych, wykorzystując program KM-WAT (2). Program umożliwia określenie niestacjonarnego pola temperatur i naprężeń termosprężystych. Wartości temperatury obliczane są w węzłach siatki elementów natomiast składowe stanu naprężenia w środkach elementów. Z tego względu dla otrzymania wartości naprężeń na powierzchni modelu zastosowano ekstrapolację (por. p.7). Model obliczeniowy zawierał 690 elementów i 758 węzłów. Na rys. 5 przedstawiono siatkę elementów dla całego modelu obliczeniowego, a na rys. 6 fragment

Tablica 1

Stałe fizyczne	Model epoksydowy w temp. 65°C	Prototyp ze stali stopowej w temp. 500°C
wsp. przewodzenia ciepła [W/mK]	0.25	40
ciepło właściwe c_p [J/kgK]	0.0277	560
gęstość ρ [kg/m ³]	1200	7850
rozszerzalność cieplna β [K ⁻¹]	0.000051	0.000015
wsp. Poissona ν	0.34	0.30
moduł sprężystości podłużnej E [MPa]	3448	167000
wsp. wyrównywania temperatury α [m ² /s]	$0.125 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$9.099 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$



Rys. 5. Model numeryczny wału z odsadzeniem.



Rys. 6. Fragment podziału modelu na elementy. Podano numery elementów i węzłów oraz położenie tensometrów P1, P2 i P3.

siatki podziału modelu na elementy w obszarze karbu. Podano numery węzłów i elementów, w których wyniki numeryczne będą poddane szczegółowej analizie. Do obliczeń przyjęto stałe materiałowe tworzywa epoksydowego o wartościach zestawionych w tabelicy 1, w której podano dla porównania odpowiednie charakterystyki materiałowe obiektu rzeczywistego.

W przypadku analizy niestacjonarnego stanu przyjęto współczynnik przejmowania ciepła $\alpha = 100 \frac{W}{m^2 K}$, stały dla całej długości modelu. Przy współczynniku przewodzenia ciepła tworzywa epoksydowego modelu $\lambda = 0.25 \frac{W}{m K}$ dla większego promienia modelu $R = 0.05$ m wartość liczby Biota $Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda}$ jest równa 20.

Skrajne płaskie przekroje modelu były izolowane ($\alpha = 0$).

— W obliczeniach stosowano programy systemu WAT-KM [2]. Przyjęto krok czasowy $\Delta\tau = 60$ s i obciążono model płynem o temperaturze $t_f = 65^\circ C$. Temperatura początkowa modelu wynosiła $t_0 = 20^\circ C$.

6. Pola temperatury

Przeprowadzono badania przebiegów niestacjonarnych w dwóch grupach eksperymentów, w czasie których rejestrowano temperatury w przekrojach wału o promieniach $R = 50 \text{ mm}$ i $R = 40 \text{ mm}$ oraz wzdłuż tworzącej modelu. Wyniki porównano wykorzystując bezwymiarowy parametr temperatury α w postaci:

$$\alpha = \frac{t - t_0}{t_f - t_0} \quad (5)$$

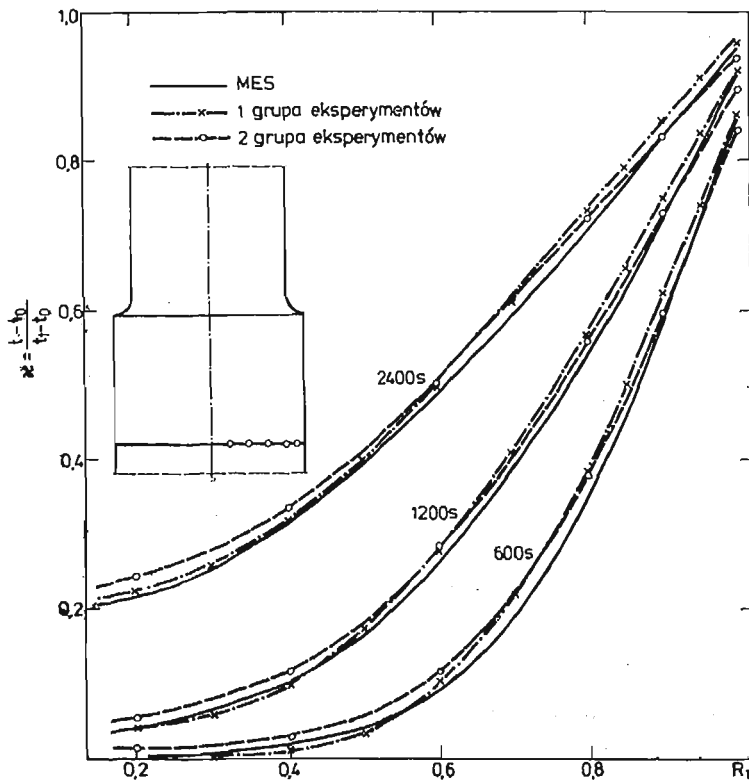
gdzie: t — aktualna temperatura w rozważanym punkcie modelu i chwili czasu,

t_0 — początkowa temperatura modelu,

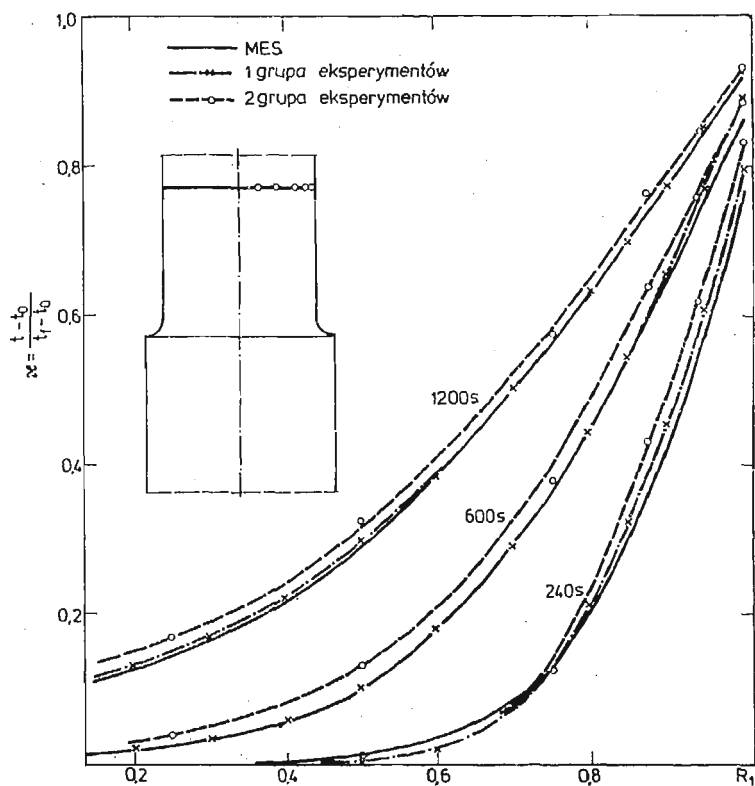
t_f — temperatura płynu (oleju) otaczającego model.

Wyniki doświadczalne dla trzech wybranych chwil czasu przedstawiono na rys. 7 i 8 w zależności od bezwymiarowego parametru $R_1 = \frac{r}{R}$, gdzie r odległość punktu od osi wału. Na rysunkach podano odpowiednie wykresy uzyskane numerycznie dla analogicznych przypadków jak w eksperymencie.

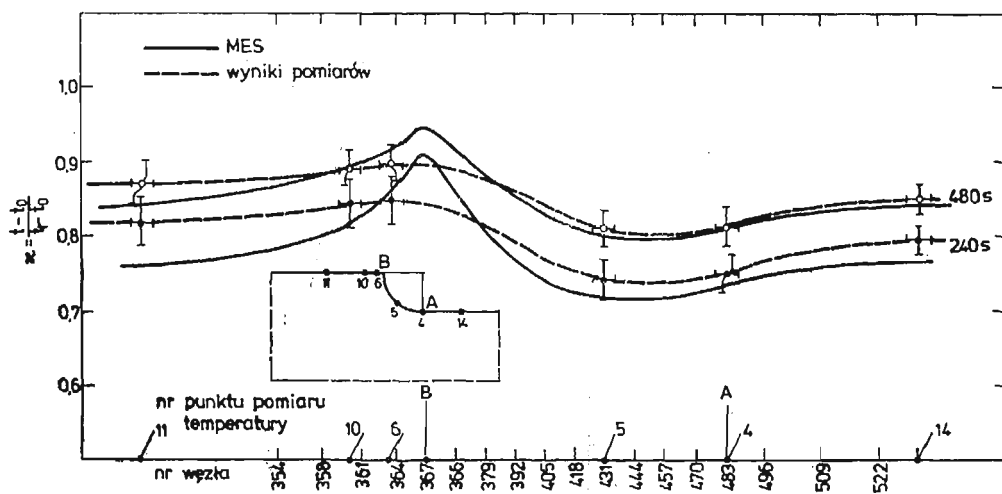
Porównując otrzymane wyniki dla obu wymienionych grup eksperymentów możemy uznać je za zbieżne.



Rys. 7. Rozkład parametru α wzdłuż promieni wału $R = 50 \text{ mm}$ w trzech chwilach czasu.



Rys. 8. Rozkład parametru α wzdłuż promienia wału $R = 40$ mm w trzech chwilach czasu.



Rys. 9. Rozkład parametru α wzdłuż fragmentu tworzącej wału dla dwóch chwil 480 s i 240 s. Odcinek AB jest rozwinięciem łuku karbu.

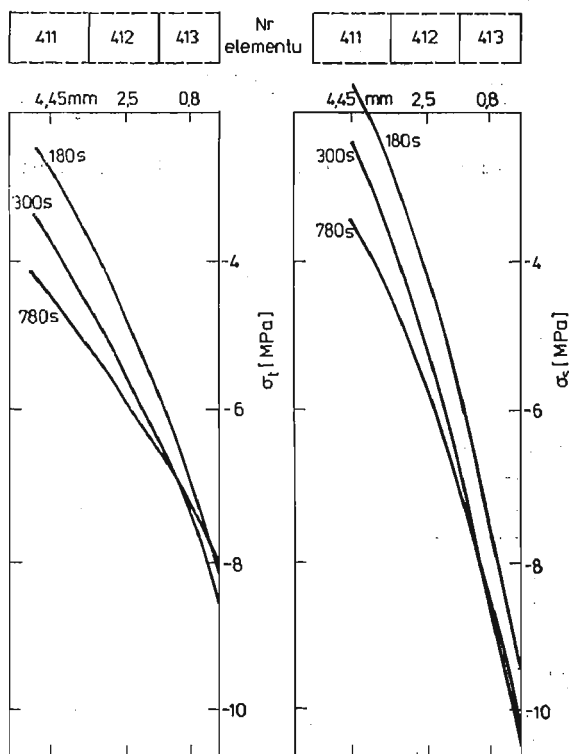
Na rysunku 9 przedstawiono rozkład temperatury bezwymiarowej wzdłuż fragmentu tworzącej modelu zawierającego karb. W tym obszarze łuk brzegu karbu został „wyprostowany” i zawiera się między punktami *A* i *B*. Generalnie można przyjąć, że uzyskane doświadczalnie wyniki rozkładu pól temperatury są tym bardziej zbliżone z wynikami obliczeń numerycznych im późniejszą chwilę czasu analizowano. Największe różnice obserwowano w początkowej fazie obciążenia cieplnego od 30 do 480 s. Te rozbieżności można tłumaczyć nie tylko błędami pomiarów ale i odchyleniami faktycznej lokalnej wartości współczynnika wymiany ciepła od wartości zadanej szczególnie w obszarze karbu. Dokładniejsze wyznaczenie rozkładu temperatury wymaga wprowadzenia większej ilości termoelementów które swą obecnością zakłócałyby badane pola.

7. Pola naprężeń

Na podstawie wyników pomiarów odkształceń określono składowe stanu naprężenia z zależności:

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_t) \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_s) \quad (6)$$

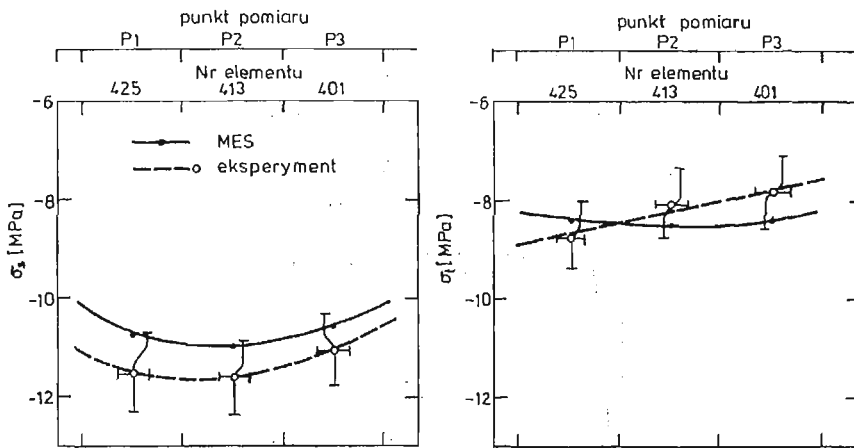
gdzie: *s* i *t* oznaczają odpowiednio kierunek styczny do konturu i obwodowy.



Rys. 10. Rozkład naprężeń σ_t i σ_s wzdłuż normalnej do brzegu w najbardziej obciążonym obszarze karbu. Wyniki dla trzech czasów uzyskane numerycznie.

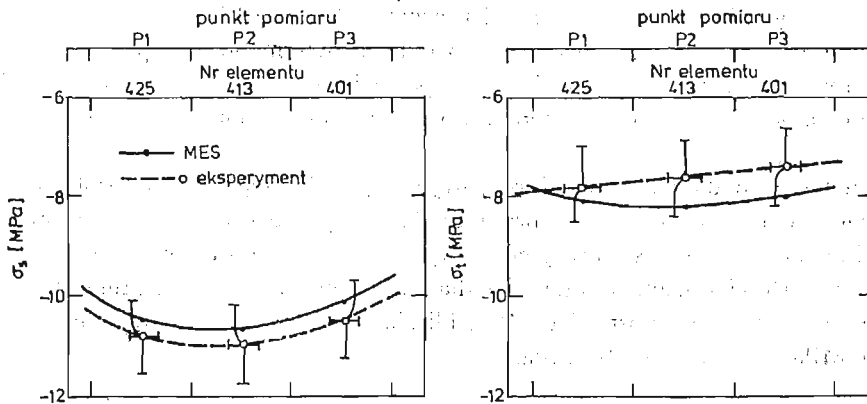
W celu porównania wyników doświadczalnych i numerycznych przeprowadzono ekstrapolację naprężeń uzyskanych numerycznie, w środkach elementów, do wartości w punktach powierzchni bocznej modelu.

Przykładowo na rys. 10 zaznaczono środki trzech kolejnych elementów: brzegowego 413 i głębiej położonych 412 i 411 (por. rys. 6) oraz przedstawiono rozkład naprężeń σ_s i σ_r .



Rys. 11. Rozkłady naprężeń σ_s i σ_r w fragmencie karbu wału w chwili 480 s uzyskane numerycznie i eksperymentalnie.

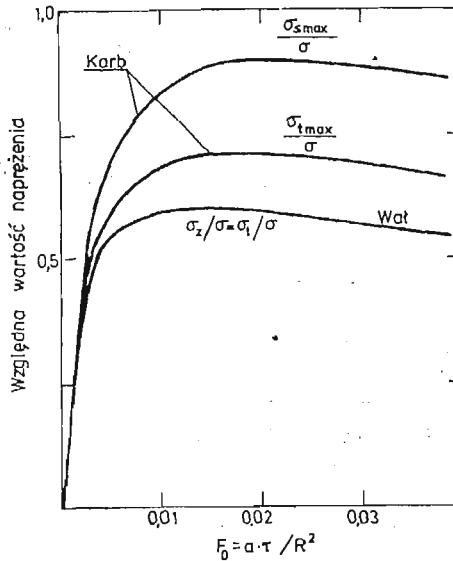
Na rysunkach 11 i 12 przedstawiono porównanie rozkładów naprężeń σ_s i σ_r we fragmencie wału z karbem uzyskanych doświadczalnie i numerycznie dla chwili czasowych 480 i 720 s. Zaznaczono także maksymalne odchylenia w wartościach naprężeń określonych w badaniach doświadczalnych. Z porównania wyników widać, że w granicach błędów pomiarów wyniki obu metod są zbieżne.



Rys. 12. Rozkłady naprężeń σ_s i σ_r w fragmencie karbu wału w chwili 720 s uzyskane numerycznie i eksperymentalnie.

8. Analiza wyników

Otrzymane wyniki badań wskazują na interesujący charakter zmienności wartości naprężeń w gładkich częściach wału i w miejscu karbu. Na rys. 13 przedstawiono wykresy zależności między liczbą Fouriera Fo a naprężeniami wyrażonymi w postaci stosunku σ_i/σ i σ_t/σ gdzie $\sigma = \frac{E\beta \cdot \Delta t}{1-\nu}$



Rys. 13. Zmiana w czasie maksymalnych naprężeń w karbie i na powierzchni gładkiego wału. Wyniki MES przy $Bi = 20$ i $R = 0,05$ m.

Z wykresów widać, że w części gładkiej wału o większej średnicy maksymalne wartości wymieniowych stosunków są równe 0,604. W pracy [5] odpowiednia wartość określona dla wału ciągłego gładkiego, przy $Bi = 20$, wynosi około 0,617.

W obszarze karbu na podstawie badań własnych otrzymano następującą maksymalną wartość stosunku σ_s/σ równą 0,90 i σ_t/σ odpowiednio 0,71. Z rysunku 13 wynika, że ekstremum naprężeń w karbie występuje później niż ma to miejsce w przypadku części gładkich.

Otrzymane w badaniach wyniki rozpatrywanego niestacjonarnego problemu termosprężystego można wykorzystać w praktyce do oceny wartości naprężeń w odsadzeniu wału wykonanego ze stali stopowej geometrycznie podobnego do modelu. Przykładowo przyjmując wartości podane w tabelcy 1 dla stali stopowej w temperaturze 500°C , przy nagłej zmianie temperatury ośrodka o 45 K i liczbie Biota równej 20 otrzymujemy $\sigma_{s\max} = -149$ MPa i $\sigma_{t\max} = -114$ MPa.

9. Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników badań można sformułować następujące wnioski:

1. Badania doświadczalne modelu wału umożliwiły wyznaczenie współczynnika przejmo-
wania ciepła i określenie liczby Biota charakteryzującej rozpatrywany proces wymiany
ciepła.
2. Wykonane obliczenia numeryczne pola temperatur oraz wartości naprężeń termospręż-
zystych potwierdzają wyniki badań eksperymentalnych.
3. Dla przyjętych w pracy danych geometrycznych, materiałowych, oraz sposobu obciąż-
zenia cieplnego wyznaczono maksymalne wartości naprężeń w części gładkiej modelu
i obszarze karbu. Doprowadziło to do wyraźnego ujawnienia wpływu spiętrzenia na-
prężeń termosprężystych, wywołanego danym rodzajem karbu.
4. Z przeprowadzonych badań wynika możliwość pomiarów pola temperatury i odkształ-
ceń w stanach nieustalonych i celowość porównania uzyskanych rezultatów z wynika-
mi otrzymanymi metodami numerycznymi.

Literatura

1. Z. ORŁÓŚ, K. TOMASZEWSKI, *Badania odkształceń i naprężeń termosprężystych na modelach epoksydo-
wych metodą tensometrii elektrozystancyjnej*, Mech. Teoret. i Stos. 4, 16 (1978), 467 - 481.
2. J. SZMELTER, M. AUGUSTYN, S. DOBROCIŃSKI, T. NIEZGODA, M. WIECZOREK, *Osiowo-symetryczne zadanie
teorii sprężystości i termosprężystości*, WAT, W-wa 1979.
3. F. A. KHAYAT, P. STANLEY, *The dependence of the mechanical, physical and optical properties of Araldite
CT200/HT907 on temperature over the range — 10°C to 70°C*, J. Phys. D: appl. Phys. 1978 11, 1237 - 1247;
4. B. LAWTON, *Use of plastic models to evaluate thermal strains in diesel-engine pistons*, J. Strain Analysis
1968 No 3, 176 - 186.
5. H. PARKUS, *Int stationare Warmespannungen*, Wien, Springer — Verlag, 1959.

Резюме

АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ВАЛА С КОЛЬЦЕВОЙ ГАЛТЕЛЮ

В работе представлены исследования термоупругих деформаций и напряжений в вале с гал-
телью. Модель вала был изготовлен из эпоксидной смолы. Исследования были проведены при
тепловом ударе. Измерения температуры модели были проведены с использованием термопар
на наружной поверхности и внутри модели. При применени малобазных тензорезисторов опре-
делено термоупругие деформации. Результаты экспериментальных исследований сопоставлено
с расчетными данными полученными методом конечных элементов.

Summary

ANALYSIS OF TRANSIENT THERMOELASTIC STRAINS AND STRESSES IN A SHOULDERED SHAFT

The paper deals with the investigations on thermal strains and stresses in a shouldered shaft with
a sudden change in its diameter. The model was made from epoxy resin. The surface of the model was
suddenly heated by dropping into the testing tank containing hot oil circulated continuously. The instan-

taneous temperature in the model was measured by fine-wire thermocouples. They were mounted on the surface and inside of the model. The thermoelastic strains on the surface of the model were determined by using strain gages of very short lengths. Experimental results were compared with those of theoretical calculations by means of finite-element analysis.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 marca 1986 roku.

DOPEŁNIENIE METODY MORY METODĄ WARSTWY OPTYCZNIE CZYNNEJ

ANIELA M. GLINICKA

Politechnika Warszawska

1. Wprowadzenie

O ile metoda mory i metoda elastooptyczna, każda z osobna, dostarczają w zakresie sprężystym pełnych informacji o stanie odkształcenia, to w zakresie sprężysto-plastycznym żadna z obu metod nie dostarcza kompletu informacji.

W celu otrzymania kompletnego rozwiązania dopełniono metodę mory metodą warstwy optycznie czynnej. Postępowanie takie pozwala na jednoczesne uzyskanie danych z obrazów przemieszczeń $u(x, y)$, $v(x, y)$ oraz obrazów izochrom $m(x, y)$ tego samego odkształcanego elementu konstrukcji.

Zaproponowaną metodę przedstawiono na przykładach rozciąganych osiowo pasm aluminiowych osłabionych korbami. Zależność naprężenie — odkształcenie dla aluminium charakteryzuje się wzmocnieniem powyżej umownej granicy plastyczności, a więc w strefie odkształceń sprężysto-plastycznych (nazywanej tu umownie strefą uplastycznioną).

Przedstawiono własny sposób badania elementów obiema metodami równocześnie. W wyniku końcowym — określono granice obszarów uplastycznionych i kierunki ich propagacji metodą warstwy optycznie czynnej oraz wyznaczono odkształcenia liniowe metodą mory. O wyborze równoczesnego zastosowania metod zdecydowały następujące czynniki:

- strefy uplastycznione na powierzchni elementu lokalizować można bezpośrednio,
- obliczenie odkształceń liniowych jest proste i dokładne.

2. Zalety i wady metod

Metoda mory przy zastosowaniu siatek liniowych najlepiej nadaje się do wyznaczania odkształceń liniowych. W wyniku posłużenia się metodą różnicową albo inaczej morą wstępną [11] możliwy jest pomiar w zakresie małych i dużych deformacji.

Nie wszystkie odpowiedzi dotyczące stanu odkształcenia można tą metodą uzyskać w sposób stosunkowo prosty i dokładny. Określenie granic stref uplastycznionych jest bardzo złożone i nieprecyzyjne. Nieprecyzyjne jest już określenie kątów odkształcenia postaciowego na granicy tych stref, ponieważ wymaga wyznaczenia pochodnych cząstko-

wych obu powierzchni przemieszczeń w kierunkach prostopadłych do kierunków głównych siatek wzorcowych [5] w tej samej chwili czasowej. Posługując się parą wzorcowych siatek liniowych, potrzebnych w metodzie różnicowej, obrazy przemieszczeń $u(x, y)$ i $v(x, y)$ rejestruje się przy danym obciążeniu kolejno, a więc w trakcie powiększania się stref uplastycznionych. Ponadto samo ustalenie już przybliżonych granic stref uplastycznionych jest bardzo złożone; trzeba wykonać szereg zdjęć, pomiarów i obliczeń oraz oddzielić część sprężystą od sprężysto-plastycznej (albo plastycznej).

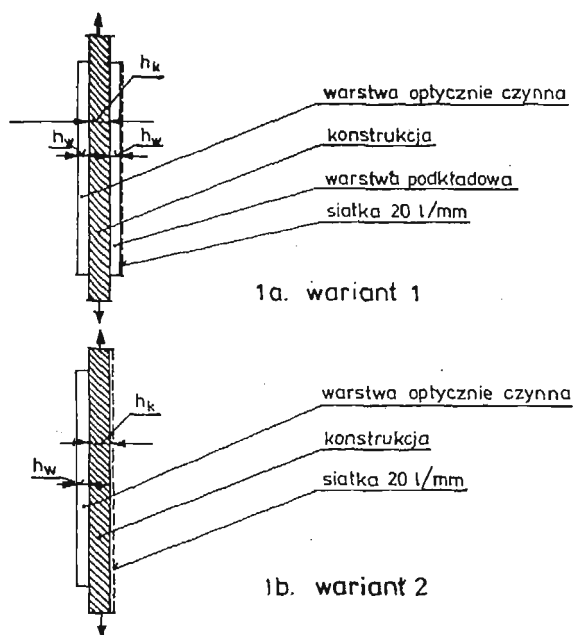
Całe postępowanie bardzo upraszcza się w wyniku dołączenia do metody mory metody warstwy optycznie czynnej, która na podstawie analogii fizycznej [12] umożliwia lokalizację stref uplastycznionych na bieżąco i pozwala wyznaczyć kierunki propagacji tych stref [8], [9]. Pomiarów elastooptycznych dokonuje się na podstawie obrazów w warstwie, a nie bezpośrednio na powierzchni elementu, co ma też pewne wady [12]. Wewnątrz obszarów uplastycznionych i w szczególności w pobliżu karbów, określenie odkształceń samej warstwy, która nie nadąża za odkształceniami elementu może być obciążone błędami. Niedogodność tę może uzupełnić pomiar za pomocą siatek stykowo umieszczonych na powierzchni elementu.

Połączenie dwu metod, umożliwiające wykorzystanie charakterystycznych i zarazem najprostszych danych doświadczalnych, celem otrzymania wyników ilościowych w zakresie sprężysto-plastycznym jest zatem zasadne.

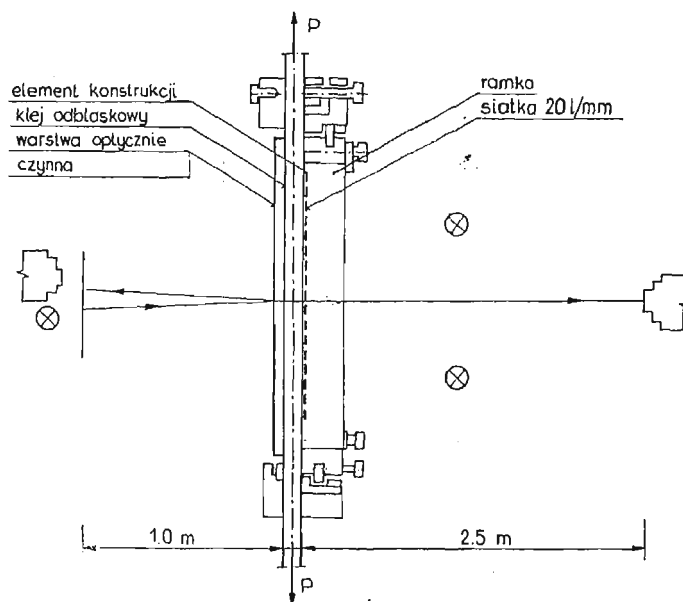
3. Metodyka badań

Do badań wybrano płaskie pasma aluminiowe o grubości 4 mm i szerokości 70 mm osłabione otworem kolistym o średnicy 12 mm albo trójkątnym karbem zewnętrznym o głębokości 12 mm. Elementy zostały przygotowane do badań dwuwariantowo rys. 1. Wariant 1 — to element z warstwą obustronną i siatką na warstwie nazywanej podkładową. Wariant 2 — to element z warstwą jednostronną i siatką na metalu. Warstwę optycznie czynną wykonano z Epidianu 5, warstwę podkładową z Epidianu 5 zmodyfikowanego poprzez dodanie do wnętrza płynnej żywicy drobnodispersyjnych wtrąceń tlenku aluminium [3]. Grubości warstw wynoszą 2 mm. Wariant 1 zapewnia co prawda symetrię pasma, ale izoluje siatkę od obiektu. Wady tej pozbawiony jest wariant 2 i on też został uznany za podstawowy. Warstwa optycznie czynna jest stosunkowo słabo odkształcalna (ulega pęknięciu przy $\varepsilon \approx 0,015$); badania metodą mory są jednak jeszcze w dalszym ciągu możliwe przy większych odkształceniach. Na obiekty naniesiono siatki kratowe o gęstości 20 linii/mm sposobem fotograficznym [7]. Posługiwano się metodą mory stykowej. Siatki wzorcowe umieszczano w specjalnej ramce zapewniającej dobry kontakt z siatką odkształcaną oraz wymagane ułożenia linii siatek. Siatka wzorcowa używana do otrzymywania obrazów przemieszczeń $u(x, y)$ była skrócona wstępnie, a siatka używana do otrzymywania obrazów przemieszczeń $v(x, y)$ wydłużona wstępnie, obie o kilka promil.

Badania elementów przeprowadzono w maszynie wytrzymałościowej ZD-10. Schemat układu pomiarowego pokazano na rysunku 2. Z jednej strony badanego elementu ustawiono polaryskop typu V z zamocowanym za płaszczyzną analizatora aparatem fotograficznym, a z drugiej strony aparat fotograficzny z teleobiektywem do fotografowania



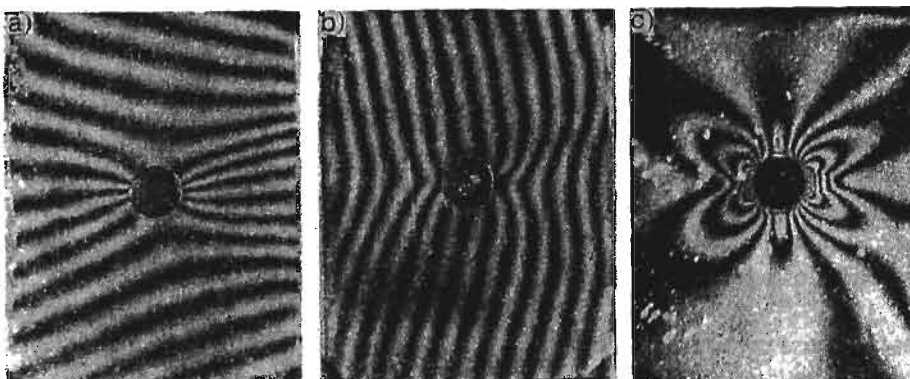
Rys. 1. Przekroje podłużne badanych elementów: 1a. wariant 1; 1b. wariant 2



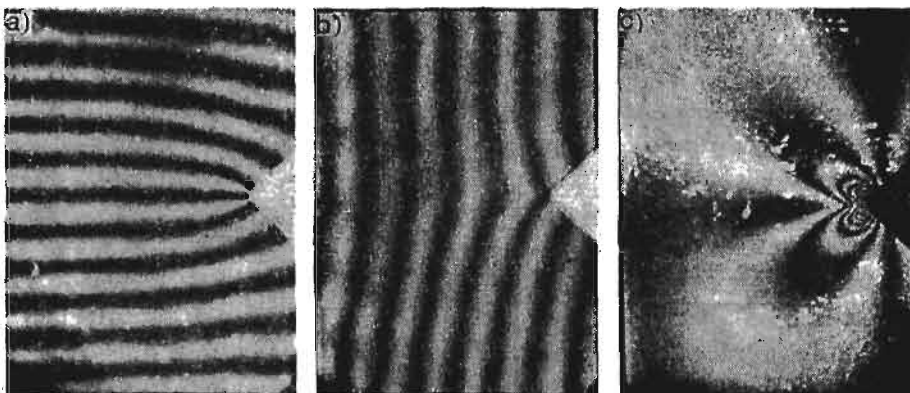
Rys. 2. Schemat układu pomiarowego

prążków mory. Zdjęcia izochrom wykonywano przez filtr odpowiadający długości fali światła sodowego. Zdjęcia prążków mory wykonywano intensywnie oświetlając element białym światłem reflektorów.

Sposób przeprowadzenia badań nie wymaga stosowania specjalnych urządzeń optycznych [10], poza typowymi dla tego rodzaju metod doświadczalnych. Otrzymane w bada-



Rys. 3. Obrazy prążków mory i izochrom dla jednakowego obciążenia: a. mora $u(x, y)$; b. mora $v(x, y)$; c. izochromy całkowite



Rys. 4. Obrazy prążków mory i izochrom dla jednakowego obciążenia: a. mora $u(x, y)$; b. mora $v(x, y)$; c. izochromy całkowite

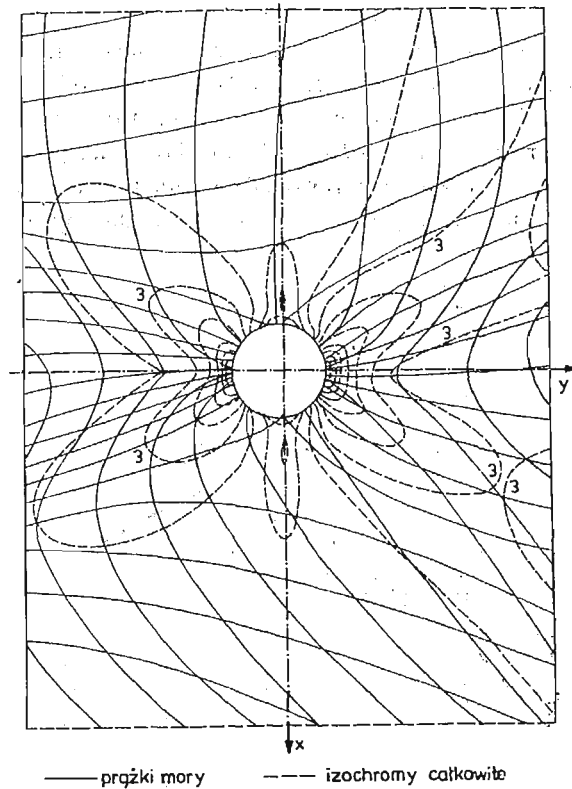
niach przykładowe zestawy obrazów prążków mory $u(x, y)$, $v(x, y)$ oraz izochrom całkowitych $m(x, y)$ dla jednakowego obciążenia elementów pokazano na rysunku 3a-3c i rysunku 4a-4c. Naprężenia średnie w najbardziej osłabionych przekrojach wynoszą: dla pasma z otworem kołowym — $\sigma_{sr} = 117$ MPa i dla pasma z zewnętrznym trójkątnym karbem — $\sigma_{sr} = 98$ MPa. Przedstawione fotografie pochodzą z badania elementów według wariantu 2. Charakter obrazów prążków obu rodzajów dla pasm rozciąganych o tym samym kształcie badanych według wariantu 1 jest taki sam.

4. Analiza wyników pomiarów

Analiza wyników badania elementów równocześnie obiema metodami obejmuje następujące zagadnienia:

1. porównanie nałożonych na siebie obrazów izochrom i przemieszczeń dla jednakowego obciążenia,
2. obliczenie odkształceń w przekrojach poprzecznych elementów i wyznaczenie punktów, w których kontur obszaru uplastycznionego przecina te przekroje,
3. wykorzystanie ustalonych kierunków propagacji stref uplastycznionych do obliczenia największych odkształceń metodą mory.

Wyniki badań przedstawiono dla wybranych przykładowo poziomów obciążenia.



Rys. 5. Łączny obraz przemieszczeń $u(x, y)$, $v(x, y)$ i izochrom $m(x, y)$ dla elementu według wariantu 2; $P = 28$ kN

Na rysunku 5 przedstawiono nałożone na siebie obrazy przemieszczeń $u(x, y)$, $v(x, y)$ i izochrom $m(x, y)$ otrzymane po obu stronach pasma z otworem według wariantu 2; (siła rozciągająca P równa się 28 kN, a σ_{sr} w najbardziej osłabionym przekroju wynosi 117 MPa).

Na obrazie elastoptycznym określa się izochromę — m_{gr} , która zgodnie z hipotezą

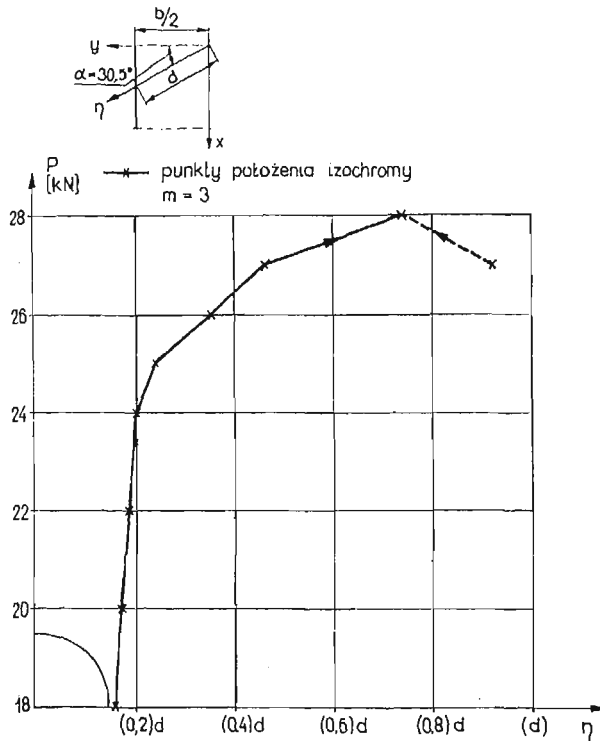
Coulomba-Treski stanowi tu granicę między obszarem sprężystym i sprężysto-plastycznym na podstawie zależności [12]:

$$m_{pr} = \frac{R_{pl}(1+\nu)C_n}{Ef} \quad (4.1)$$

gdzie: R_{pl} — granica plastyczności materiału konstrukcji; tu równa 108 MPa,
 ν, E — stałe sprężyste materiału konstrukcji; odpowiednio równe 0,336 i 71400 MPa,
 $1/C_n$ — współczynnik określający wpływ wzmocnienia elementu warstwą; dla wariantu 1 równy 1,2 oraz dla wariantu 2 równy 0,92 (por. [2]),
 f — elastooptyczna odkształceniowa stała modelowa; tu równa ok. $0,6 \times 10^{-3}$ [1/l rz.iz].

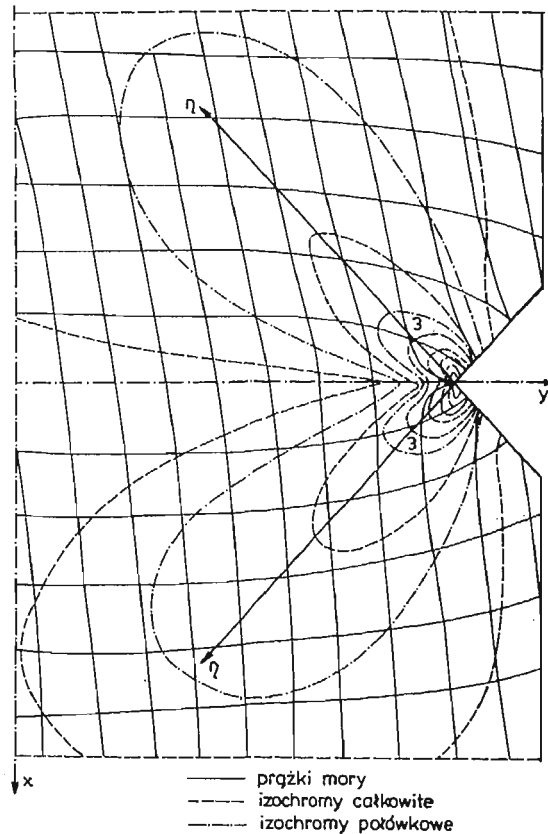
Na rysunku 5 zaznaczono izochromę rzędu 3 sąsiadującą z izochromą graniczną przyjmującą wartość 2,8. W miejscach największych odkształceń, zwłaszcza jest to widoczne w pobliżu karbu, prążki mory zagęszczają się.

Zaletę dopełnienia metody mory — metodą warstwy optycznie czynnej łatwo potwierdzić obserwując propagację lokalnych stref uplastycznionych od prostoliniowej krawędzi ku otworowi w środku. Z obrazów przemieszczeń istnienia tych stref w fazie ich powstawania i początkowego rozwoju nie można wykazać, bo obraz prążków jest zbyt rzadki. Wzdłuż określonego metodą warstwy optycznie czynnej kierunku η (por. także [8]), rys. 6 — dla wariantu 2, następuje połączenie izochrom granicznych wędrujących z dwóch



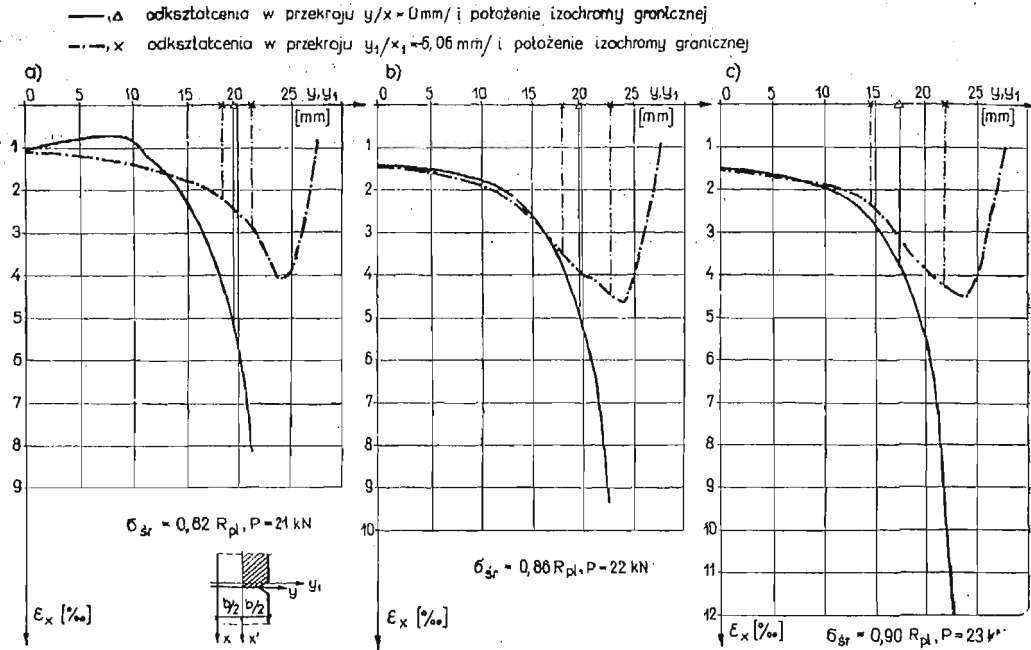
Rys. 6. Wędrowka izochromy granicznej wzdłuż kierunku propagacji η

stron. Kierunki propagacji η w elementach wariantu 1 i 2 prawie pokrywają się. Pomierzono kąty (rys. 6) między osiami η i y w obu wariantach. Wartości ich są bardzo bliskie sobie i wynoszą średnio 30° . Występujące w elemencie wariantu 2 zginanie praktycznie prawie nie zmienia kierunków propagacji stref uplastycznionych. Analogicznie jest w elementach z zewnętrznym trójkątnym karbem o kącie rozwarcia 90° , w których obraz izochrom dla wariantów 1 i 2 wskazuje kierunek najintensywniejszej propagacji η wzdłuż prostej pokrywającej się z przedłużeniem linii krawędziowej karbu; przykładowy rysunek 7 dla wariantu 2 (siła rozciągająca pasmo równa się 23 kN, a σ_{sp} w najbardziej osłabionym przekroju wynosi 98 MPa). Uplastycznienie elementu następuje tutaj przy karbie.

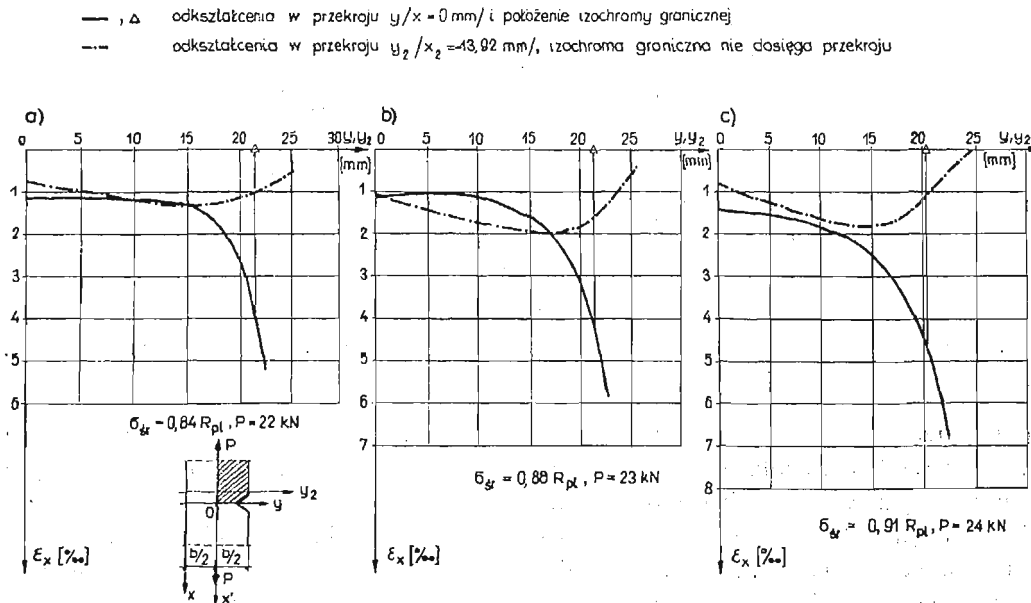


Rys. 7. Łączny obraz przemieszczeń $u(x, y)$, $v(x, y)$ i izochrom $m(x, y)$ dla elementu według wariantu 2; $P = 23$ kN

Dla trzech kolejnych poziomów obciążenia elementu-wariant 2 — wyznaczono metodą mory odkształcenia podłużne ε_x w przekrojach y i y_1 oraz zaznaczono punkty, w których izochroma graniczna przecina te przekroje, rys. 8. W miarę oddalania się izochromy granicznej (rzędu 2,8) od dna karbu odpowiadające jej położeniu wartości odkształceń podłużnych na osi y maleją. Jednocześnie odcinek między izochromą graniczną przecinającą oś y_1 gdzie nastąpiło całkowite uplastycznienie zbliża się coraz bardziej do lokalnego ekstremum odkształceń ε_x . Obserwowany efekt jest lokalny i świadczy o tym, że odkształ-



Rys. 8. Odkształcenia w przekrojach y i y_1 elementu według wariantu 2 (dla zakreskowanej części pasma)



Rys. 9. Odkształcenia w przekrojach y i y_2 elementu według wariantu 1 (dla zakreskowanej części pasma)

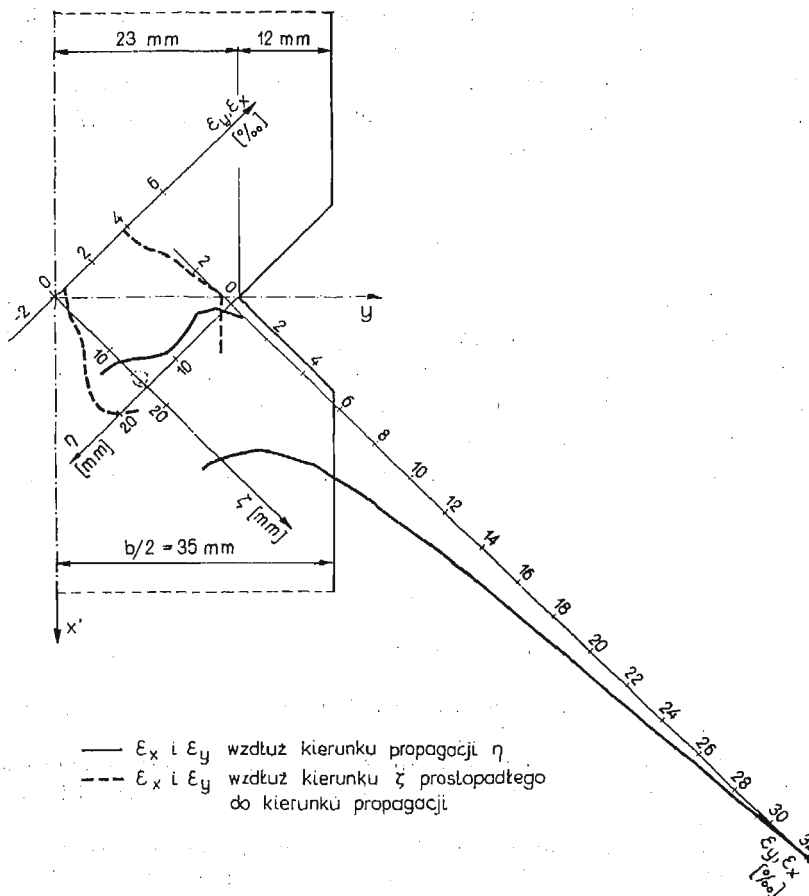
cenia warstwy w pobliżu karbu nie nadążają za odkształceniami powierzchni metalu (por. także [12]). Przy silniejszym rozwoju stref uplastycznionych, a więc przy większym oddaleniu się izochromy granicznej od karbu, efekt ten zmniejsza się do zaniknięcia. Odkształcenia liniowe wyznaczono tu z zależności [1], [11]:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x, \quad (4.2)$$

która prowadzi do rezultatów pokrywających się z zależnością [1], [11]:

$$\varepsilon_x^L = \sqrt{1 + 2(\partial u / \partial x) + (\partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2} - 1 \quad (4.3)$$

w przypadku małych odkształceń i małych wzajemnych obrotów siatek oraz jest dostatecznie dokładna dla większych odkształceń i większych kątów obrotu siatek. Obliczenia przeprowadzono według programu przygotowanego na maszynę cyfrową „Odra 1305” w języku Fortran [2]. Jako dane podstawowe wprowadzano punkty położenia środków prążków mory i izochrom w przekrojach poprzecznych elementów ustalone na zdjęciach negatywowych [2], [5].



Rys. 10. Odkształcenia wzdłuż kierunku η i ζ po pęknięciu warstwy optycznie czynnej; $P = 26$ kN

Takie samo rozwiązanie przedstawiono dla elementu badanego według wariantu 1 (rys. 9). Wykresy odkształceń podłużnych ε_x w przekrojach y i y_2 sporządzono na podstawie obrazów prążków mory otrzymanych na warstwie podkładowej z siatką. Odkształcenia są tu odpowiednio mniejsze niż w wypadku wariantu 2, bo element jest silniej wzmocniony przez istnienie dwóch warstw. Rząd izochromy granicznej wynosi 3,2 — czyli rozwój stref uplastycznionych jest nieco słabiej symulowany niż w elemencie z jedną warstwą, gdzie izochroma graniczna rzędu 2,8 wchodzi bardziej w głąb badanego pola. Wpływ wzmocnienia elementów warstwami, zależny od rodzaju materiałów, z których je wykonano i od ich grubości, przedstawiono w pracy [6].

Element według wariantu 1 po całkowitym pęknięciu warstw nie nadaje się do badań, w przeciwieństwie do elementu według wariantu 2, w którym dalej wyniki ilościowe można otrzymywać z obrazów prążków mory na powierzchni metalu. Na przykładowo wykonanym rysunku 10 — wzdłuż kierunku propagacji η wyznaczonym przed pęknięciem warstwy optycznie czynnej, obliczono po jej pęknięciu odkształcenia liniowe metodą mory (por. także [4]). Wzdłuż osi η odkształcenia rosną w miarę zbliżania się do dna karbu. Wzdłuż osi ζ prostopadłej do η , tworzą się kolalne ekstrema odkształceń, które są nieco odchylone od przecięcia osi η i ζ . Małe przesunięcia ekstremów krzywych ε_x i ε_y świadczą o nieco zmienionym wpływie całkowicie pękniętej warstwy na odkształcenia powierzchni elementu. Odkształcenie ε_x przy karbie osiąga tu wartość największą dla danego materiału konstrukcji; obciążenie zrywające element jest już niewiele większe od tu podanego. Wykonana próba może posłużyć do oceny nośności elementu.

5. Podsumowanie

Wyniki doświadczeń, w postaci bezpośrednich i prostych rozwiązań, potwierdzają celowość dopełnienia metody mory metodą warstwy optycznie czynnej. Znacznie rozszerzone są możliwości badawcze w stosunku do każdej z tych metod stosowanych niezależnie. Jednoczesne wykorzystanie metod może być bardzo przydatne, zwłaszcza w bardziej szczegółowych badaniach elementów konstrukcji.

Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 koordynowanego przez IPPT PAN.

Literatura

1. A. J., DURELLI, V. J. PARKS, *Moiré analysis of strain*, Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey 1970.
2. A. GLINICKA, *Możliwości łącznego zastosowania metody mory i metody elastooptycznej*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawaska, 1983.
3. A. GLINICKA, *Przykład zastosowania rastrów na podkładzie z materiału elastooptycznego do badania płaskich stanów naprężenia*, X Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Referaty, Warszawa 1982.
4. A. GLINICKA, *Wyznaczanie odkształceń wzdłuż kierunków propagacji obszarów plastycznych metodą mory*. XI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Referaty, Warszawa 1984.
5. A. GLINICKA, *Analiza możliwości łącznego zastosowania metody mory i metody elastooptycznej*, Archiwum Inżynierii Lądowej (w druku).

6. A. GLINICKA, P. JASTRZĘBSKI, *Wpływ wzmocnienia warstwą elastoptyczną na odkształcenia wyznaczone metodą mory*, XII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Referaty, Warszawa 1986.
7. P. JASTRZĘBSKI, J. KAPKOWSKI, S. WICHNIEWICZ, J. WĄSOWSKI, K. PATORSKI, *Zastosowanie metody mory do badania elementów konstrukcji*, Wyd. Komitetu Mechaniki PAN, Warszawa-Jabłonna 1981.
8. J. KAPKOWSKI, *Propagacja obszarów plastycznych w warunkach płaskiego stanu naprężeń*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika z. 50/1978.
9. J. KAPKOWSKI, *Studium propagacji obszarów plastycznych w zginanych elementach z karbem*, Archiwum Budowy Maszyn, tom XXX, zeszyt 1 - 2, 1983.
10. H. SHIMADA, M. OBATA, *Moiré method combined with photoelastic coating method*, Technology Reports, Tohoku Univ., Vol. 43, No 1, 1978.
11. W. SZCZEPIŃSKI, redaktor pracy zbiorowej, *Metody doświadczalne mechaniki ciała stałego*, PWN Warszawa 1984.
12. F. ZANDMAN, S. REDNER, J. W. DALLY, *Photoelastic coatings*, IOWA STATE/SESA, 1977.

R e z y u m e

ПОПОЛНЕНИЕ МЕТОДА МУАРА МЕТОДОМ ОПТИЧЕСКИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ

Метод муара и метод оптически чувствительных покрытий дают полный состав информации о состоянии упруго-пластических деформаций элементов конструкций.

Произведено исследование растягиваемых алюминиевых полос с концентраторами напряжений. На одной стороне полосы наклеено оптически чувствительное покрытие из эпоксидной смолы, а на вторую нанесено сетку взаимно перпендикулярных линий с частотой 20 л/мм. Снимались картины изохром и муара при одинаковой нагрузке элемента. В конечном итоге линейные деформации элементов определено при помощи метода муара. На основе полученных, методом оптически чувствительных покрытий, предельных изохром отделено эластический спектр деформаций от спектра упруго-пластического.

В предложенном способе использовано характеристические и одновременно более простые экспериментальные данные полученные применяя каждый из методов.

S u m m a r y

THE COMPLEMENT OF MOIRÉ METHOD BY PHOTOELASTIC COATING METHOD

The moiré method and photoelastic coating method applied simultaneously provide full information on the strain state of elasto-plastic structural elements.

The tensile tests were performed on aluminium strips. A photoelastic coating was glued to one side of the strip while the other side of the strip was covered by a cross grating of 20 l/mm. The isochromatics and moiré patterns were photographed at the same level of loading. As a result the linear strains were determined using the moiré method. On the basis of boundary isochromatics, obtained using the photoelastic coating method, the range of elastic strains was separated from the elastic-plastic range.

In the presented procedure both the characteristic and most simplest external data provided by each method were used.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 września 1985 roku.

WYKORZYSTANIE ANALIZY MODALNEJ DO BADANIA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O WIELU STOPNIACH SWOBODY

WŁADYSŁAW LISEWSKI

PAWEŁ GUTOWSKI

Politechnika Szczecińska

1. Wprowadzenie

Metoda analizy modalnej umożliwia poznanie własności dynamicznych badanego układu w oparciu o wartości własne i wektory własne. Trudności związane z analitycznym rozwiązaniem tego zadania dla liniowych układów tłumionych o wielu stopniach swobody zostały pokonane dzięki możliwości opisu dynamiki takich układów we współrzędnych stanu [1, 2]. Uzyskano w ten sposób możliwość rozkładu własnych drgań układu na sumę głównych postaci drgań. Matematyczna postać tej sumy ma bardzo praktyczne znaczenie w badaniach doświadczalnych [3, 4, 5]. Charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone eksperymentalnie można aproksymować zależnością o postaci analogicznej do w/w sumy uzyskując dużą dokładność opisu wyników pomiarów. Celem takiej aproksymacji jest zmniejszenie w maszynie cyfrowej obszaru pamięci potrzebnej do zapamiętania wyznaczonych charakterystyk, oraz estymacja parametrów modalnych. Przykładowo charakterystyka częstotliwościowa wyznaczona w zakresie 0÷500 Hz z rozdzielczością 0,25 Hz i przedstawiona w postaci tablicy zawiera 6000 liczb. Do opisu tej samej charakterystyki po aproksymacji wystarczy zapamiętać $4n+2$ liczby; gdzie n — liczba rezonansów.

W pracy pokazano jeden z możliwych sposobów aproksymowania doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych, oraz estymacji parametrów modalnych badanych obiektów. Przedstawioną metodę zilustrowano przykładem wykonanym w ramach jej testowania.

2. Teoretyczne podstawy metody rozkładu charakterystyk na składowe

Równanie ruchu dla układu o n stopniach swobody ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}_0, \quad (1)$$

gdzie:

M — macierz bezwładności ($n \times n$),

H — macierz tłumienia ($n \times n$),

\mathbf{K} — macierz sztywności ($n \times n$),

\mathbf{q} — macierz współrzędnych uogólnionych ($n \times 1$),

\mathbf{P}_0 — macierz sił uogólnionych ($n \times 1$).

\mathbf{M} , \mathbf{H} , \mathbf{K} — to symetryczne macierze rzeczywiste, dodatnio określone. Przyjmuje się ponadto, że w układzie występuje małe tłumienie o charakterze wiskotycznym, przy czym nie jest to tłumienie proporcjonalne (nie jest spełniony warunek: $\mathbf{HM}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{KM}^{-1}\mathbf{H}$ [3]).

Mnożąc równanie (1) lewostronnie przez \mathbf{M}^{-1} otrzymuje się:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{P}. \quad (1a)$$

Poszukiwany wzór aproksymacyjny jest formą przedstawienia funkcji przejścia obiektu dynamicznego za pomocą postaci drgań głównych. Wobec powyższego należy w pierwszej kolejności rozwiązać zadanie wartości i wektorów własnych. W omawianym tu zadaniu zarówno wartości jak i wektory własne są liczbami zespolonymi. Do ich wyznaczenia wygodniej jest przetransformować równanie ruchu do współrzędnych stanu, a następnie w końcowej fazie wyprowadzeń powrócić do postaci obecnej.

Równania ruchu we współrzędnych stanu otrzymuje się przez dołączenie do równania (1) tożsamości [2, 3]:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Otrzymuje się wówczas następującą postać równania:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{F}, \quad (3)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = -\lambda \cdot \mathbf{y},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix}.$$

Zapisując równania ruchu we współrzędnych stanu otrzymuje się równanie różniczkowe pierwszego rzędu przy czym wymiar macierzy wchodzących w skład tego równania rośnie dwukrotnie.

Przy zerowym wymuszeniu i przewidywanym rozwiązaniu w postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v} \cdot e^{\lambda t}$$

z równania (3) otrzymuje się układ $2n$ jednorodnych równań algebraicznych:

$$(\mathbf{B} - \lambda_i \mathbf{A}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Równanie (4) ma rozwiązanie nietrywialne, gdy jego wyznacznik charakterystyczny jest równy zero:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0. \quad (5)$$

Z równania (5) otrzymuje się wartości własne λ_i dla $i = 1 + 2n$. Wszystkie λ_i są liczbami zespolonymi o niezerowych częściach rzeczywistych i urojonych, oraz są parami sprzężone:

$$\lambda_i = \mu_i + j\nu_i \quad \text{oraz} \quad \bar{\lambda}_i = \mu_i - j\nu_i,$$

gdzie: μ_i — współczynnik tłumienia i -tej postaci drgań,
 ν_i — i -ta częstotliwość drgań własnych tłumionych.
 Z wartości własnych można zbudować macierz spektralną:

$$\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n} \} = \\ = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n \}. \quad (6)$$

Każdej parze wartości własnych przyporządkowana jest para zespolonych sprzężonych wektorów własnych (otrzymanych w wyniku rozwiązania układu równań (4))

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{s}_i + j\mathbf{p}_i \quad \text{oraz} \quad \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{s}_i - j\mathbf{p}_i.$$

Wektory te można zestawić w macierz modalną wektorów prawostronnych:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2n}] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n]. \quad (7)$$

Podobnie można wyznaczyć macierz modalną wektorów lewostronnych.

Po wykonaniu określonych przekształceń [1] równanie (3) można doprowadzić do postaci:

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \Lambda \mathbf{y} = \mathbf{F}_1. \quad (8)$$

W ten sposób wyjściowy układ n zależnych równań różniczkowych ruchu drugiego rzędu we współrzędnych \mathbf{q} został przetransformowany na $2n$ niezależnych równań różniczkowych pierwszego rzędu we współrzędnych \mathbf{y} .

Rozwiązanie ogólne równania (8) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}^{(-\Lambda)t} \mathbf{C}, \quad (9)$$

gdzie \mathbf{C} jest wektorem stałych całkowania:

$$C_i = a_i + jb_i \quad \text{oraz} \quad \bar{C}_i = a_i - jb_i.$$

Wzór transformacyjny umożliwiający przejście od układu we współrzędnych \mathbf{y} do współrzędnych \mathbf{q} ma następującą postać:

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}_{II} \mathbf{y}, \quad (10)$$

gdzie: \mathbf{V}_{II} — dolny blok macierzy modalnej \mathbf{V} ;

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_I \\ \mathbf{V}_{II} \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając (9) i (10) t -ta współrzędna wektora \mathbf{q} jest określona wzorem:

$$q_i(t) = \sum_{r=1}^n [V_{i,r,II} \cdot C_r e^{(-\mu_r + j\nu_r)t} + \bar{V}_{i,r,II} \cdot \bar{C}_r \cdot e^{(-\mu_r - j\nu_r)t}]. \quad (11)$$

Po wykonaniu prostych przekształceń otrzymuje się:

$$q_i(t) = \sum_{r=1}^n [(T_{i,r} + jU_{i,r})e^{(-\mu_r + j\nu_r)t} + (T_{i,r} - jU_{i,r})e^{(-\mu_r - j\nu_r)t}], \quad (11a)$$

gdzie:

$$T_{i,r} = s_{i,r,II} \cdot a_r - p_{i,r,II} \cdot b_r,$$

$$U_{i,r} = s_{i,r,II} \cdot b_r + p_{i,r,II} \cdot a_r.$$

Stosując transformację Laplace'a równanie powyższe przyjmuje postać:

$$q_t(s) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{T_{t,r} + jU_{t,r}}{s + (-\mu_r + j\nu_r)} + \frac{T_{t,r} - jU_{t,r}}{s + (-\mu_r - j\nu_r)} \right], \quad (12)$$

a po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i podstawieniu $s = j\omega$:

$$q_t(j\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{F_{t,r} + j\omega G_{t,r}}{-\omega^2 + S_r + j\omega R_r}, \quad (13)$$

gdzie:

$$F_{t,r} = -2\mu_r \cdot T_{t,r} + 2\nu_r \cdot U_{t,r},$$

$$G_{t,r} = 2T_{t,r},$$

$$S_r = \mu_r^2 + \nu_r^2,$$

$$R_r = 2\mu_r.$$

W praktyce na ogół wyznacza się funkcję przejścia W_t jako stosunek sygnału wyjściowego $q_t(j\omega)$ do siły wymuszającej $P(j\omega)$. Zależność (13) przyjmuje wówczas postać:

$$W_t(j\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{F_{t,r} + j\omega G_{t,r}}{-\omega^2 + S_r + j\omega R_r}. \quad (14)$$

Charakterystyka doświadczalna jest wyznaczana w określonym przedziale częstotliwości $[\omega_A, \omega_B]$. Obecność charakterystyki poza tym obszarem uwzględnić można przez wprowadzenie do wzoru (14) dwóch członów:

$\frac{1}{m_t \omega^2}$ człon inercyjny, uwzględniający wpływ postaci drgań z przedziału $(0, \omega_A)$,

gdzie m_t jest masą residualną niższych postaci drgań.

$x_0 + jy_0$ — człon uwzględniający postacie drgań w przedziale (ω_B, ∞) zwany residualną podatnością.

Wzór (14) przyjmuje więc formę:

$$W_t(j\omega) = -\frac{1}{m_t \omega^2} + \sum_{r=1}^n \frac{F_{t,r} + j\omega G_{t,r}}{-\omega^2 + S_r + j\omega R_r} + x_0 + jy_0. \quad (15)$$

3. Aproksymacja doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych

Poszczególne punkty charakterystyki częstotliwościowej wyznaczonej doświadczalnie mogą być obciążone błędami przypadkowymi. Do aproksymacji tych charakterystyk wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów.

W metodzie tej minimalizuje się następujące wyrażenie:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N (W_{tDi} - W_{tmi})(\bar{W}_{tDi} - \bar{W}_{tmi}), \quad (16)$$

gdzie: W_{tDi} — doświadczalnie wyznaczona podatność dynamiczna w punkcie t badanego układu przy i -tej częstotliwości,

W_{imi} — podatność dynamiczna w punkcie t badanego układu opisana równaniem (15) przy i -tej częstotliwości.

Sumowanie w powyższym wzorze odbywa się po wszystkich częstotliwościach z aproksymowanego przedziału. Ponieważ zadanie minimalizacji prowadzi do równań nieliniowych, rozwiązanie jego może być wykonane metodą iteracyjną.

Układ równań, który należy rozwiązać w każdej iteracji ma następującą postać [7]:

$$\mathbf{L} \cdot \delta_k + \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

gdzie:

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j} = (W_{im}^i - W_{iD}) \frac{\partial^2 \bar{W}_{im}}{\partial k_i \partial k_j} + \frac{\partial W_{im}}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_i} + \\ + (\bar{W}_{im} - \bar{W}_{iD}) \frac{\partial^2 W_{im}}{\partial k_i \partial k_j} + \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial W_{im}}{\partial k_i}, \quad (18)$$

δ_{ki} — poprawki wyznaczanych parametrów równania (15),

$$V_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_i} = (W_{im} - W_{iD}) \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_i} + (\bar{W}_{im} - \bar{W}_{iD}) \frac{\partial W_{im}}{\partial k_i}, \quad (19)$$

k_i, k_j — poszukiwane parametry równania (15), $i, j = 1, 2, \dots, 4n+2$.

Uwaga: W powyższych wzorach celem uproszczenia zapisów opuszczono znak sumowania po częstotliwościach.

Jeśli proces iteracyjny jest zbieżny do rozwiązania tak, że elementy macierzy kolumnowej δ_k stają się zerami, wówczas elementy macierzy \mathbf{V} są też zerami. Elementy macierzy \mathbf{L} nie mają więc istotnego wpływu na przebieg iteracji i sposób ich wyznaczania można nieco uprościć przez pominięcie wyrażań z pochodnymi drugiego rzędu. Równanie (18) przyjmuje w tej sytuacji postać:

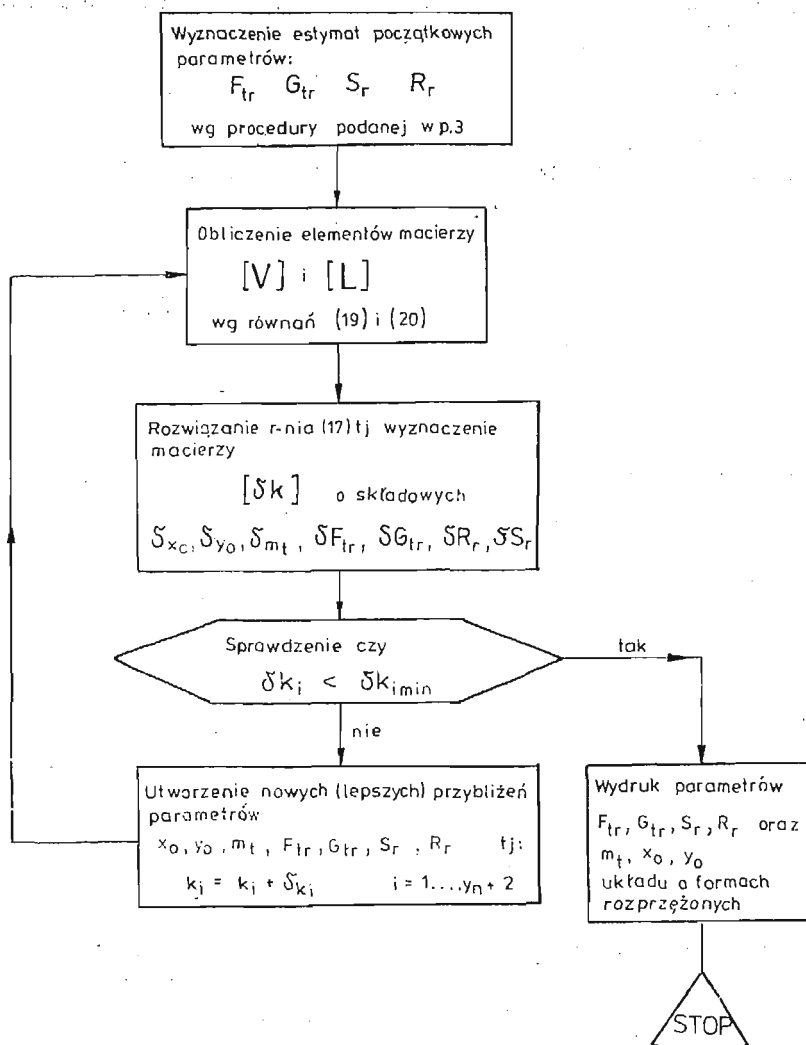
$$L_{ij} = \frac{\partial W_{im}}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_i} + \frac{\partial \bar{W}_{im}}{\partial k_j} \cdot \frac{\partial W_{im}}{\partial k_i}. \quad (20)$$

Cały proces iteracyjny przebiega wg schematu blokowego przedstawionego na rys. 1. Zakończenie obliczeń może nastąpić po osiągnięciu zadowalającej dokładności opisu charakterystyki (przyjętej odległości między charakterystyką doświadczalną a jej postacią aproksymującą) lub po wykonaniu zadanej ilości iteracji.

3.1. Wyznaczanie estymat początkowych parametrów dla poszczególnych postaci drgań. Iteracyjny sposób wyznaczania parametrów równania opisującego charakterystykę wymaga podania estymat początkowych. Różnice między tymi estymatami a wartościami dokładnymi mogą mieć wpływ na zbieżność procesu iteracyjnego.

Występujące we wzorze (15) człony uwzględniające wpływ postaci z przedziałów $(0; \omega_A)$ i (ω_B, ∞) nie zawsze muszą pojawić się podczas aproksymacji. Zależy to od kształtu charakterystyki w tych przedziałach. Przyjęto więc, że wstępne estymaty parametrów m_0, x_0 i y_0 są równe zero.

Estymaty parametrów R_0 i S_0 wyznaczyć można z charakterystyki amplitudowo-fazowo-częstotliwościowej $(A-\varphi-f)$ w oparciu o jej punkty przyrezonansowe. Konstrukcja geometryczna umożliwiająca wyznaczenie tych estymat dla każdego z rezonansów powstaje



Rys. 1. Schemat blokowy obliczeń parametrów modelu układu o formach rozprzężonych.

dzięki możliwości aproksymowania okręgiem charakterystyki $A-\varphi-f$ w pobliżu rezonansu [6] — rys. 2. Przy potraktowaniu każdego z rezonansów jako odpowiedzi układu o jednym stopniu swobody słuszne są zależności [7]:

$$S_r = \omega_0^2, \quad (21)$$

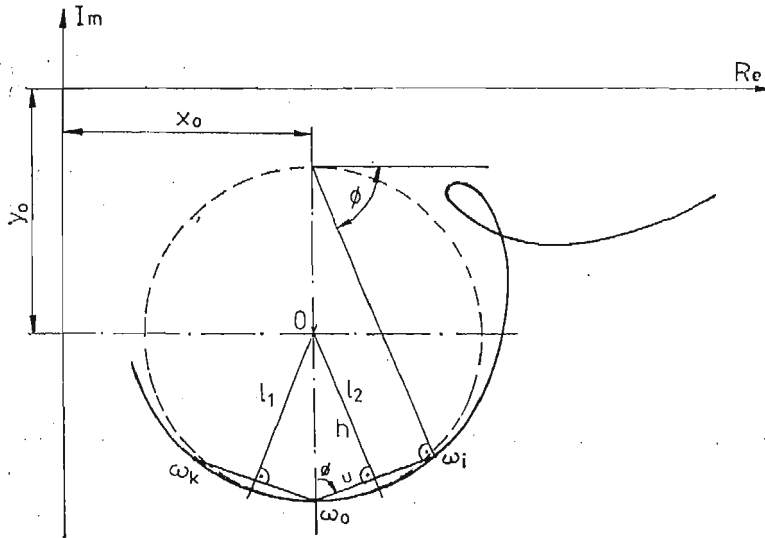
$$R_r = 2\Delta\omega \cdot \operatorname{tg} \Phi. \quad (22)$$

gdzie: ω_0 — częstotliwość rezonansowa,

$\Delta\omega = |\omega_0 - \omega_i|$; $\Delta\omega \ll \omega_0$,

ω_i — częstotliwość w punkcie charakterystyki wybranym do obliczeń,

Φ — kąt określający położenie na charakterystyce punktu o częstotliwości ω_i — rys. 2.



Rys. 2. Konstrukcja geometryczna umożliwiającą wyznaczenie kąta Φ do estymat początkowych R_r .

Sposób wyznaczania kąta Φ dla wybranego punktu ω_i oraz położenia środka okręgu 0 wynika z rysunku 2. W celu uniknięcia błędów grubych przy wyznaczaniu estymat parametrów R_r , obliczenia należy wykonać dla wielu punktów charakterystyki z otoczenia poszczególnych rezonansów, a następnie uśrednić je.

Punktem wyjścia do wyznaczenia estymat początkowych parametrów F_{tr} i G_{tr} jest równanie (15). Przyjmuje się wtedy, że parametry S_r i R_r są już znane. W tej sytuacji zadanie minimalizacji wyrażenia (16) w metodzie najmniejszych kwadratów prowadzi do układu liniowych równań ze względu na F_{tr} i G_{tr} . Jeśli w aproksymowanej charakterystyce występuje n rezonansów, w/w układ równań jest rzędu $2n$, przy czym ostatnie z nich to równanie (11). Postać tego układu równań w zapisie macierzowym jest następująca:

$$\begin{bmatrix} Y1 & Y3 \\ Y2 & Y4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K1 \\ K2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

gdzie:

$$Y1_{ij} = \frac{\omega^2 R_i R_j + (S_i - \omega^2)(S_j - \omega^2)}{(S_j - \omega^2)^2 + \omega^2 R_j^2}, \quad (24)$$

$$Y2_{ij} = -\frac{(S_j - \omega^2)\omega^2 R_i - \omega^2 R_j(S_i - \omega^2)}{[(S_i - \omega^2) + \omega^2 R_i^2][(S_j - \omega^2)^2 + \omega^2 R_j^2]} + \frac{[(S_n - \omega^2)R_j - (S_j - \omega^2)R_n]\omega^2}{[(S_i - \omega^2)^2 + \omega^2 R_i^2][(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2]}; \quad (25)$$

$i \neq n,$

$$Y2_{i,n} = 0, \quad (26)$$

$$Y3_{ij} = \frac{[R_j(S_i - \omega^2) - R_i(S_j - \omega^2)]\omega^2}{(S_j - \omega^2)^2 + \omega^2 R_j^2} - \frac{[R_n(S_i - \omega^2) - R_i(S_n - \omega^2)]\omega^2}{(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2}, \quad (27)$$

$$Y4_{ij} = Y4A_{ij} - Y4B_i \quad \text{dla} \quad i, j \neq n, \quad (28)$$

$$Y4_{i,n} = 0, \quad \text{dla} \quad i \neq n, \quad (29)$$

$$Y4_{n,j} = 1, \quad (30)$$

$$Y4A_{i,j} = \frac{\omega^2 R_i R_j + (S_i - \omega^2)(S_j - \omega^2)}{[(S_i - \omega^2)^2 + \omega^2 R_i^2][(S_j - \omega^2)^2 + \omega^2 R_j^2]} - \frac{[(S_j - \omega^2)(S_n - \omega^2) + \omega^2 R_j R_n] \omega^2}{[(S_j - \omega^2)^2 + \omega^2 R_j^2][(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2]}, \quad (31)$$

$$Y4B_i = \frac{\omega^4 R_n^2 + (S_n - \omega^2)^2 \omega^2}{[(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2]^2} - \frac{[(S_i - \omega^2)(S_n - \omega^2) + \omega^2 R_i R_n] \omega^2}{[(S_i - \omega^2)^2 + \omega^2 R_i^2][(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2]}, \quad (32)$$

$$K1_i = x(S_i - \omega^2) - y(\omega R_i), \quad (33)$$

$$K2_i = \frac{x\omega^2 R_i + y\omega(S_i - \omega^2)}{(S_i - \omega^2)^2 + \omega^2 R_i^2} - \frac{x\omega^2 R_n + y\omega(S_n - \omega^2)}{(S_n - \omega^2)^2 + \omega^2 R_n^2}, \quad (34)$$

$$x = \operatorname{Re} W_{TD}(j\omega); \quad y = \operatorname{Im} W_{TD}(j\omega), \quad (35)$$

F, G — macierze kolumnowe n -wymiarowe zawierające szukane parametry F_{tr} i G_{tr} .

Rozwiązanie równania (23) ze względu na **F** i **G** kończy etap prac związanych z wyznaczeniem estymat początkowych. Możliwe jest więc kontynuowanie procesu aproksymacji charakterystyk zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 1.

4. Identyfikacja parametrów modelu

W celu wyznaczenia macierzy tłumienia **R** i sztywności **S** układu o n stopniach swobody (wzór 3) należy dokonać analizy n charakterystyk $A-\varphi-f$. Danymi wyjściowymi do rozwiązania tego zadania są parametry powyższych n charakterystyk aproksymujących. Dla pojedynczej charakterystyki zawierającej n rezonansów zbiór tych parametrów obejmuje n wartości F_{tr} , G_{tr} , R_r i S_r . Jak już wcześniej zauważono parametry R_r i S_r z poszczególnych wykresów powinny być sobie równe, gdyż są one funkcją struktury układu, a nie punktu wymuszenia czy też punktu pomiaru sygnału wyjściowego. Powinna więc obowiązywać następująca równość:

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= \dots = R_{1,i} = \dots = R_{1,n} \\ &\vdots \\ R_{r,1} &= \dots = R_{r,i} = \dots = R_{r,n} \\ &\vdots \\ R_{n,1} &= \dots = R_{n,i} = \dots = R_{n,n} \end{aligned} \quad (36)$$

oraz:

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \dots = S_{1,i} = \dots = S_{1,n} \\ &\vdots \\ S_{r,1} &= \dots = S_{r,i} = \dots = S_{r,n} \\ &\vdots \\ S_{n,1} &= \dots = S_{n,i} = \dots = S_{n,n} \end{aligned} \quad (37)$$

gdzie: r — numer rezonansu, i — numer charakterystyki.

W praktyce mogą wystąpić niewielkie ich rozrzuty, stąd do dalszych rozważań przyjęto średnie arytmetyczne powyższych parametrów po wskaźniku „ i ”. W dalszej części pracy

tak uśrednione parametry oznaczano odpowiednio R_r i S_r , a więc tylko z indeksem mówiącym o numerze rezonansu.

Równanie (14) niniejszej pracy dotyczy pojedynczej charakterystyki wyznaczonej w punkcie t badanego układu. Postać równania macierzowego zawierającego wszystkie n charakterystyki jest następująca:

$$\mathbf{W} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}, \quad (38)$$

gdzie: \mathbf{W} — kolumnowa macierz zawierająca n odpowiedzi badanego układu;

\mathbf{D} — kwadratowa macierz elementów typu $F_{r,t} + j\omega G_{r,t}$;

\mathbf{N} — kolumnowa macierz elementów typu $(-\omega^2 + j\omega R_r + S_r)^{-1}$.

Analogicznie, macierzowy zapis charakterystyk wyrażonych wzorem (8) przedstawić można zależnością:

$$\mathbf{W} = \alpha \cdot \mathbf{q}, \quad (39)$$

gdzie: α — kwadratowa macierz współczynników kierunkowych.

Macierz współczynników kierunkowych określa się przez zależności geometryczne wiążące przemieszczenia w danym punkcie w funkcji współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} . Opis wyznaczania współczynników α_{ij} przedstawiony jest w pracy [7].

Porównując zależności (38) i (39) oraz podstawiając za \mathbf{q} związek (3) otrzymuje się:

$$\alpha(-\omega^2 \mathbf{I} + j\omega \mathbf{R} + \mathbf{S})^{-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}. \quad (40)$$

Po przekształceniu równanie to ma postać:

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + j\omega \mathbf{R} + \mathbf{S}) \alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N} = \mathbf{P}. \quad (41)$$

Równanie (41) jest słuszne dla wszystkich częstotliwości, a więc także dla $\omega = 0$. Wówczas:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \alpha^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}, \quad (42)$$

gdzie: \mathbf{F} — kwadratowa macierz parametrów F_{ij} (części rzeczywiste elementów macierzy \mathbf{D}),

\mathbf{T} — kolumnowa macierz parametrów S_r^{-1} .

Po wstawieniu (42) do (41) i odpowiednim przekształceniu otrzymuje się:

$$\mathbf{S}(\alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N} - \alpha^{-1} \mathbf{F} \mathbf{T}) + j\omega \mathbf{R} \alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N} = \omega^2 \mathbf{I} \alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}. \quad (43)$$

Równanie (43) jest równaniem zespolonym. Prawdziwe jest więc ono oddzielnie dla części rzeczywistej i części urojonej. Po rozdzieleniu otrzymuje się dwa macierzowe równania rzeczywiste:

$$\mathbf{S}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) - \omega \mathbf{R} \mathbf{B} = \omega^2 \mathbf{I} \mathbf{A}, \quad (44)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{B} + \omega \mathbf{R} \mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{I} \mathbf{B}, \quad (45)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \text{Re}(\alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}), \quad (46)$$

$$\mathbf{B} = \text{Im}(\alpha^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}), \quad (47)$$

$$\mathbf{C} = \alpha^{-1} \mathbf{F} \mathbf{T}. \quad (48)$$

Ponieważ macierze kolumnowe \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} są zależne od częstotliwości, można je rozbudować do kwadratowych przez wyznaczanie kolejnych kolumn dla innych częstotliwości.

Mogą to być częstotliwości odpowiadające kolejnym rezonansom. Wówczas powyższe równania przyjmują postać:

$$\mathbf{S}(\mathbf{A}' - \mathbf{C}') - \mathbf{R}\mathbf{B}'' = \mathbf{Z}\mathbf{1}, \quad (49)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{B}' + \mathbf{R}\mathbf{A}'' = \mathbf{V}\mathbf{1}, \quad (50)$$

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A}(\omega_1), \mathbf{A}(\omega_2), \dots, \mathbf{A}(\omega_n)], \quad (51)$$

$$\mathbf{B}' = [\mathbf{B}(\omega_1), \mathbf{B}(\omega_2), \dots, \mathbf{B}(\omega_n)], \quad (52)$$

$$\mathbf{C}' = [\mathbf{C}(\omega_1), \mathbf{C}(\omega_2), \dots, \mathbf{C}(\omega_n)], \quad (53)$$

$$\mathbf{A}'' = [\omega_1 \cdot \mathbf{A}(\omega_1), \omega_2 \cdot \mathbf{A}(\omega_2), \dots, \omega_n \mathbf{A}(\omega_n)], \quad (54)$$

$$\mathbf{B}'' = [\omega_1 \cdot \mathbf{B}(\omega_1), \omega_2 \mathbf{B}(\omega_2), \dots, \omega_n \mathbf{B}(\omega_n)], \quad (55)$$

$$\mathbf{Z}\mathbf{1} = [\mathbf{Z}(\omega_1), \mathbf{Z}(\omega_2), \dots, \mathbf{Z}(\omega_n)], \quad (56)$$

$$\mathbf{Z}(\omega_i) = \omega_i^2 \mathbf{I}\mathbf{A}(\omega_i), \quad (57)$$

$$\mathbf{V}\mathbf{1} = [\mathbf{V}(\omega_1), \mathbf{V}(\omega_2), \dots, \mathbf{V}(\omega_n)], \quad (58)$$

$$\mathbf{V}(\omega_i) = \omega_i^2 \mathbf{I}\mathbf{B}(\omega_i), \quad (59)$$

$\mathbf{A}(\omega_i)$, $\mathbf{B}(\omega_i)$, $\mathbf{C}(\omega_i)$ — macierze kolumnowe wyznaczone odpowiednio z równań (46 ÷ 48) dla i -tej wartości z wybranego zbioru częstotliwości.

Rozwiązanie tych równań wyrażają następujące równości:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z}\mathbf{1} \cdot \mathbf{B}''^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}''^{-1})[(\mathbf{A}' - \mathbf{C}')\mathbf{B}''^{-1} + \mathbf{B}'\mathbf{A}''^{-1}]^{-1}, \quad (60)$$

oraz

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}''^{-1} - [(\mathbf{Z}\mathbf{1} \cdot \mathbf{B}''^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}''^{-1})((\mathbf{A}' - \mathbf{C}')\mathbf{B}''^{-1} + \mathbf{B}'\mathbf{A}''^{-1})^{-1}]\mathbf{B}'\mathbf{A}''^{-1}. \quad (61)$$

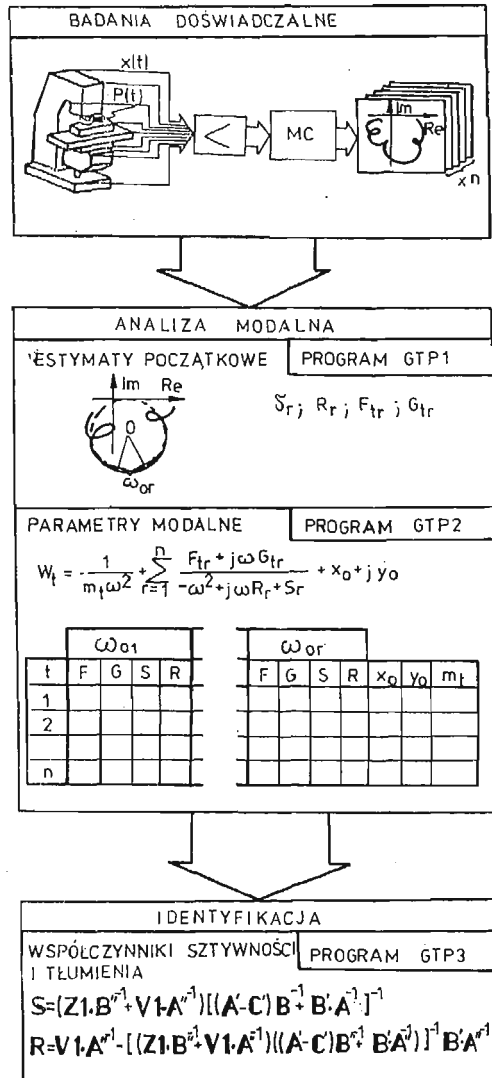
Uzyskano w ten sposób wzory pozwalające wyznaczyć szukane macierze współczynników sztywności i tłumienia układu o n stopniach swobody.

5. Przykład obliczeniowy

W oparciu o przedstawioną w rozdziałach 2 ÷ 4 teorię opracowano programy obliczeniowe na maszynę cyfrową HP 2100A umożliwiające aproksymację doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych, oraz estymację parametrów modalnych układów o wielu stopniach swobody. Schemat blokowy systemu organizującego współpracę tych programów przedstawiono na rys. 3.

W celu przetestowania zarówno metody jak i programów wykonano obliczenia sprawdzające dla różnych układów.

We wszystkich testach uzyskano dużą dokładność aproksymacji charakterystyk. Jedynie wówczas, gdy wśród innych rezonansów znajduje się taki, który jest znacznie mniejszy od pozostałych (rys. 4), program może ów rezonans pominąć. Powyższy rysunek ilustruje także jakość aproksymacji charakterystyk w przedziałach częstotliwości gdzie rezonanse są wyraźne. Zamieszczono też na nim wyliczone wartości parametrów charakterystyki aproksymującej.



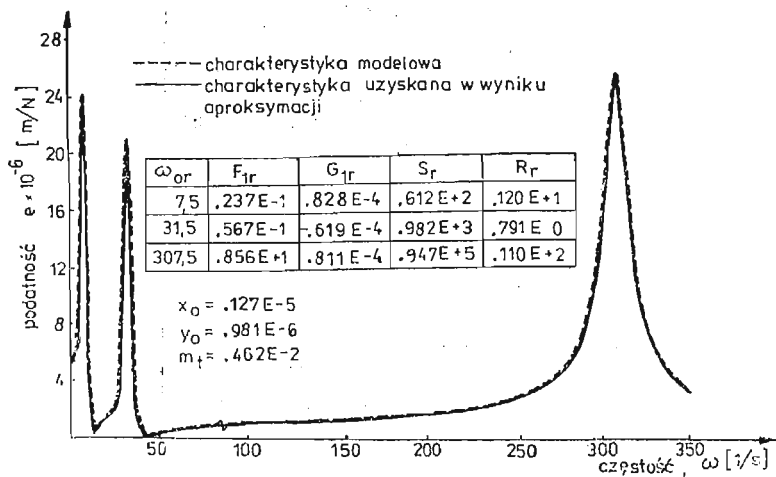
Rys. 3. Schemat organizacyjny prezentowanej metody badawczej.

W ramach prezentowanej pracy cały proces obejmujący aproksymację oraz estymację parametrów modalnych zilustrowano przykładem obliczeniowym układu modelowego o dwóch stopniach swobody (rys. 5). Ten prosty przykład w pełni pokazuje poprawność metody oraz programów obliczeniowych, a przy tym umożliwia łatwą interpretację otrzymanych wyników.

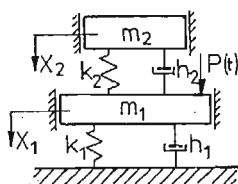
Parametry tego układu przyjęto następująco:

$$m_1 = 1,0 \text{ kg}; \quad h_1 = 8,0 \text{ Ns/m}; \quad k_1 = 1,0E+05 \text{ N/m};$$

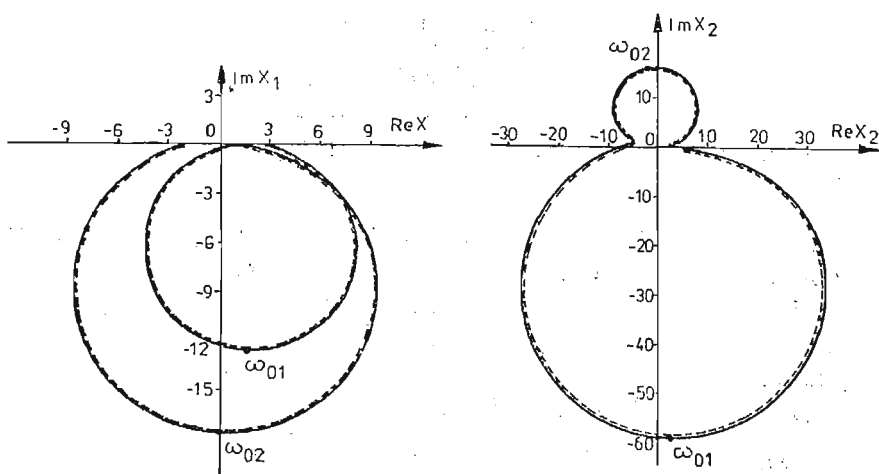
$$m_2 = 0,2 \text{ kg}; \quad h_2 = 2,0 \text{ Ns/m}; \quad k_2 = 1,3E+04 \text{ N/m}.$$



Rys. 4. Charakterystyka aproksymowana (modelowa) i aproksymująca wraz z wyznaczonymi parametrami modalnymi.



Rys 5. Model fizyczny układu dwumasowego o dwóch stopniach swobody.



Rys. 6. Charakterystyki $A-\varphi-f$ przyjętego do obliczeń układu o dwóch stopniach swobody.

Tablica 1. Estymaty początkowe i parametry modalne wyznaczone z aproksymacji układu o dwóch stopniach swobody (rys. 5).

ESTYMATY POCZĄTKOWE														
i	ω_{01}						ω_{02}						y_0	
	F	G	S	R	F	G	S	R	F	G	S	R		m_i
1	.168E+5	-.448E0	.512E+5	.671E+1	.142E+6	.448E0	.126E+6	.135E+2	.142E+6	.448E0	.126E+6	.135E+2	0	0
2	.921E+5	-.208E+1	.514E+5	.649E+1	-.246E+6	.208E+1	.126E+6	.136E+2	-.246E+6	.208E+1	.126E+6	.136E+2	0	0
PARAMETRY CHARAKTERYSTYKI APROKSYMUJĄCEJ														
1	.182E+5	.290E+1	.513E+5	.655E+1	.818E+5	-.290E+1	.127E+6	.134E+2	.818E+5	-.290E+1	.127E+6	.134E+2	.106E-3	.538E-2
2	.862E+5	.540E+1	.513E+5	.655E+1	-.864E+5	-.540E+1	.127E+6	.135E+2	-.864E+5	-.540E+1	.127E+6	.135E+2	.105E-3	.538E-2

Danymi do obliczeń testujących były analitycznie wyznaczone charakterystyki częstotliwościowe.

Wymagana do analizy ilość charakterystyk nie może być mniejsza od liczby postaci drgań występujących w badanym paśmie częstotliwości. Rozpatrując więc układ o dwóch stopniach swobody należało dysponować dwiema charakterystykami $A-\varphi-f$. Otrzymane z obliczeń charakterystyki modelowe (wyznaczone analitycznie dla przyjętego modelu z rys. 5) i aproksymujące (obliczone przy użyciu programów GTP1 i GTP2) przedstawiono na rys. 6. W obydwu przypadkach charakterystyka aproksymowana (modelowa) zaznaczona jest linią przerywaną, natomiast charakterystyka aproksymująca linię ciągłą. Wyznaczone dla każdej z charakterystyk estymaty wstępne (program GTP1) i parametry charakterystyk aproksymujących (program GTP2) zestawiono w tablicy 1.

Do wyznaczenia estymat wstępnych parametrów R_r wzięto z otoczenia każdego z rezonansów po dwadzieścia punktów a otrzymane zbiory wartości uśredniono.

Wyniki z programu GTP2 uzupełnione informacją o współczynnikach kierunkowych poszczególnych postaci drgań stanowią zbiór danych do dalszych obliczeń — estymacji parametrów modalnych (program GTP3 — rys. 3).

W rozpatrywanym przypadku macierz współczynników kierunkowych ma postać:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tak więc efektem końcowym przeprowadzonych obliczeń są macierze sztywności i tłumienia:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} .112989\text{E}+06 & -.129959\text{E}+05 \\ -.650611\text{E}+05 & .650110\text{E}+05 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} .100088\text{E}+02 & -.199059\text{E}+01 \\ -.100302\text{E}+02 & .999497\text{E}+01 \end{bmatrix}.$$

Dla przyjętego układu modelowego dwumasowego o dwóch stopniach swobody (rys. 5) macierze sztywności \mathbf{S} i tłumień \mathbf{R} są następującej postaci:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{m_1} & -\frac{h_1}{m_1} \\ -\frac{h_2}{m_2} & \frac{h_2}{m_2} \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Po podstawieniu przyjętych do obliczeń wartości liczbowych parametrów uzyskuje się

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} .113000\text{E}+06 & -.130000\text{E}+05 \\ -.650000\text{E}+05 & .650000\text{E}+05 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} .100000\text{E}+02 & -.200000\text{E}+01 \\ -.100000\text{E}+02 & .100000\text{E}+02 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Zgodność wyestymowanych macierzy sztywności i tłumienia (62) z przyjętymi w analizowanym modelu (64) potwierdza poprawność zaprezentowanej w tej pracy metody.

6. Uwagi końcowe

Opracowany w ramach niniejszej pracy system programów obliczeniowych służący do aproksymacji doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych oraz estymacji parametrów modalnych oparty został o jedną z możliwych metod rozwiązania tego zadania. Przeprowadzone testy wykazują dobrą efektywność systemu zarówno w zakresie czasu obliczeń jak i dokładności wyników. Bardzo dobrą zgodność charakterystyki aproksymowanej i aproksymującej uzyskiwano po wykonaniu trzech do pięciu iteracji.

Prezentowane przykłady pokazują działanie procedur obliczeniowych w odniesieniu do charakterystyk wyznaczonych analitycznie, a więc nie obciążonych błędami towarzyszącymi pomiarom eksperymentalnym. Jest to więc pierwszy etap sprawdzenia metody i pełniejszą informację można będzie uzyskać po opracowaniu wyników badań doświadczalnych. Tego typu testy zostaną przedstawione w następnym artykule będącym kontynuacją niniejszego.

Wyniki otrzymane przy badaniu prezentowanego układu dwumasowego pozwalają sądzić, że przedstawiona metoda może dawać niezłe efekty w zadaniach identyfikacji parametrów układów dynamicznych o znanej strukturze.

W wyniku opracowanych procedur aproksymacyjnych uzyskuje się znaczne zmniejszenie w maszynie cyfowej obszaru pamięci niezbędnej do zapamiętania dużej ilości charakterystyk. Przyczynić się to może do wykorzystania tych procedur przy badaniu postaci drgań własnych złożonych układów rzeczywistych.

Literatura

1. J. BRYNICH, *Spektrální veličiny a modální analýza vlastních kmitů lineárních diskretních tlumených soustav s vice stupni volnosti*, Strojnicky Časopis Nr 3, Ročník 28, 1977.
2. J. KRUSZEWSKI i inni, *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, Warszawa Arkady 1984.
3. J. PETERS, M. MERGEAY, *Dynamic Analysis of Machine Tools Using Complex Modal Method*, CIRP, Vol. 25 nr 1 1976, str. 257 - 261.
4. M. WECK, K. TEIPPEL, *Dynamisches Verhalten Spanender Werkzeugmaschinen*, Berlin: Springer-Verlag 1977.
5. R. SNOEYS, D. ROESEMS, W. VANDEURZEN, P. VANHONACKER, *Survey of Modal Analysis Applications*, CIRP, Vol. 28 nr 2, 1976, str. 497 - 511.
6. M. SIELSKI, W. GAWROŃSKI, *Interpretacja parametrów modalnych z charakterystyk amplitudowych układów mechanicznych o małym tłumieniu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Nr 315 Mechanika 39, Gdańsk 1980.
7. P. GUTOWSKI, *Aproksymacja charakterystyk częstotliwościowych metodą rozkładu na podstawowe formy drgań*, Praca dyplomowa, Politechnika Szczecińska 1977.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА В СЛУЧАЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В статье представлен метод аппроксимации экспериментально определённых амплитудно — фазово — частотных характеристик сложных механических систем. На основании полученных из аппроксимации модальных параметров разработано метод идентификации коэффициентов жёсткости и демпфирования исследованного объекта.

Представленные в статье примеры показывают правильность презентированного метода и показывают на возможность его практического использования при исследовании динамических действительных систем.

Summary

USE OF MODAL ANALYSIS IN THE DYNAMICAL SYSTEMS
OF MANY DEGREES OF FREEDOM

An approximation method for experimentally determined amplitude-phase-frequency characteristics of complex mechanical systems has been presented. On the basis of modal parameters describing particular set of characteristics and obtained from the approximation, the method has been shown of stiffness and damping identification for the examined object. The introduced algorithms made it possible to develop a system of programs. The examples prove the correctness of presented method, and indicate the possibility of applying the method for examining real dynamical systems.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 września 1986 roku.

ANALIZA WŁASNOŚCI WIBROIZOLATORÓW AKTYWNYCH TYPU PODUSZKA POWIETRZNA

ANDRZEJ GOŁAŚ
JANUSZ KOWAL
MAREK SZEPSKI

Akademia Górniczo—Hutnicza, Kraków

1. Wprowadzenie

Cechą charakterystyczną współczesnych maszyn i urządzeń jest ich szybkobieżność, duża moc, oraz zmienne obciążenia członów i par kinematycznych wywołane wymuszeniami siłowymi. Działające na maszyny lub urządzenia wymuszenia siłowe oraz pochodzące od podłoża wymuszenia kinematyczne wywołują ich stan drganiowy, który będziemy nazywać wibroaktywnością.

Drgania maszyn i urządzeń oraz ich podzespołów wpływają niekorzystnie na ich właściwości eksploatacyjne, będąc powodem obniżenia niezawodności i trwałości. Wpływają również niekorzystnie na realizowany proces technologiczny dając np. mniejszą dokładność i wreszcie są źródłem zakłóceń emitowanych w otoczenie techniczne i ludzkie. Zapewnienie niezawodności i trwałości maszyn i urządzeń jak również zabezpieczenie ludzi i otoczenia przed szkodliwym wpływem drgań wymaga zastosowania skutecznych sposobów i środków przeciwdziałających ich powstawaniu lub rozprzestrzenianiu się.

W dalszych rozważaniach maszyny, urządzenia i ich podzespoły nazywać będziemy obiektami. Zajmować się będziemy zmniejszeniem wybranych parametrów drgań generowanych podczas eksploatacji maszyn.

Stosowane powszechnie tradycyjne wibroizolatory pasywne składające się z elementów inercyjnych, sprężystych i tłumiących charakteryzują się małą efektywnością w zakresie niskich częstotliwości wymuszeń, a także przy działaniu wibracji o szerokim paśmie częstotliwości [5, 6, 7, 11]. W tych przypadkach szerokie zastosowanie znajdują sterowane układy wibroizolacji tzw. układy aktywne. Sterowanie w tych układach sprowadza się do kompensacji wymuszeń zakłócających oddziałujących na obiekt wibroizolacji za pomocą dodatkowych źródeł energii.

Układy aktywne stosuje się w celu wibroizolacji obiektów technicznych, które charakteryzują się dużymi wymaganiami odnośnie dopuszczalnego poziomu drgań np. wibroizolacja precyzyjnych obrabiarek [7, 12], aparatury kontrolno-sterującej [15], siedziska operatora maszyn [2] itp. W skład struktury aktywnych układów wibroizolacji wchodzi

elementy: pomiarowe, sterujące, wzmacniające i wykonawcze. W charakterze elementów pomiarowych wykorzystuje się czujniki siły, przemieszczeń, prędkości lub przyspieszeń. Sygnały z czujników charakteryzują jakość wibroizolacji i wykorzystane są do formowania sygnałów sterujących realizowanych przez elementy pętli sprzężenia zwrotnego. Po wzmocnieniu sygnały te podawane są do elementów wykonawczych formujących dodatkowe sterowane wymuszenie oddziałujące na obiekt wibroizolacji. Te czynniki determinują fakt, że koszt wibroizolacji aktywnej jest zdecydowanie większy od rozwiązań klasycznych. W wielu przypadkach w ocenie celowości zastosowania wibroizolacji aktywnej istotną rolę odgrywają niewyliczalne efekty pozaekonomiczne, które stanowią główną przesłankę jej stosowania np. w przypadku ochrony przed szkodliwym wpływem drgań. Są też przypadki gdy tańsze rozwiązania z natury swojej nie mogą dać oczekiwanych rezultatów. W zależności od rodzaju elementu wykonawczego rozróżniamy: pneumatyczne, hydrauliczne, elektromechaniczne, elektromagnetyczne i kombinowane aktywne układy wibroizolacji.

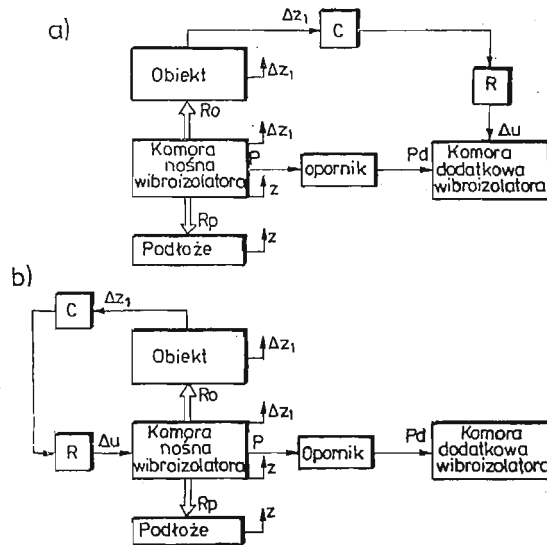
Wybór typu układu zależy od wymagań technicznych. Układy hydrauliczne stosuje się gdy wymagana jest duża sztywność statyczna [7]. Układy pneumatyczne pozwalają uzyskać małą sztywność statyczną (poniżej 2 Hz) [16, 17]. Elektromagnetyczne elementy wykonawcze charakteryzują się małą bezwładnością i umożliwiają zmiany charakterystyk amplitudowo — częstotliwościowych w szerokich zakresach częstotliwości [4].

Możliwości oraz sposoby zmian charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych wibroizolatora w funkcji zmian wymuszeń rozpatrzmy na przykładzie pneumatycznego elementu sprężystego. Tego rodzaju elementy mają szereg zalet, z których najważniejszymi są łatwość sterowania sprężystością i tłumieniem w ograniczonych zakresach oraz możliwość uzyskania różnej obciążalności przy tych samych wymiarach elementu [3, 14].

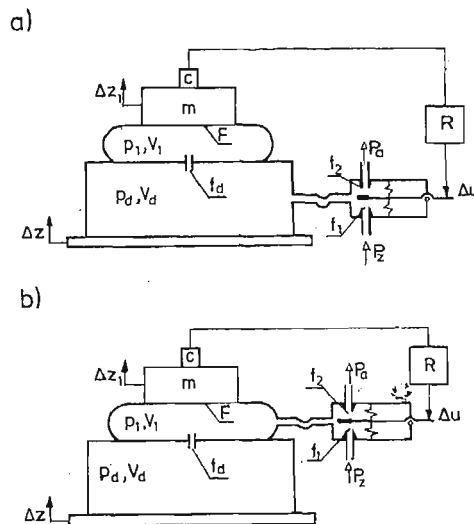
W pneumatycznych wibroizolatorach aktywnych zmiany charakterystyk uzyskuje się przez zmiany ciśnienia lub objętości komory wibroizolatora [8]. Zmiany objętości wibroizolatora można realizować przez dołączenie komory dodatkowej. Pozwala to również dla małych częstotliwości wymuszeń na formowanie siły dyssypatywnej przez tłumienie przepływu powietrza z komory nośnej do komory dodatkowej wibroizolatora. Własności takiego układu wibroizolacji zależą od rozwiązań strukturalnych i parametrów technicznych wibroizolatora oraz od charakterystyki regulatora.

2. Rozwiązania strukturalne pneumatycznych wibroizolatorów aktywnych

W skład struktury pneumatycznego wibroizolatora aktywnego wchodzi: komora nośna, komora dodatkowa i opornik pneumatyczny (rys. 1). Komory i oporniki pneumatyczne tworzą kaskadę pneumatyczną posiadającą własności elementu sprężysto-tłumiącego. Formowanie dodatkowego wymuszenia sterowanego można realizować w dwojaki sposób. W układzie A (rys. 1a) regulator oddziałuje na komorę dodatkową wibroizolatora wywołując zmiany ciśnienia w tej komorze. W układzie B (rys. 1b) regulator wywołuje zmiany ciśnienia w komorze nośnej wibroizolatora. W skład układu regulacji wchodzi czujnik C i regulator R. OchYLENIA parametrów drgań z_1 od wartości początkowych (w położeniu równowagi statycznej) mierzone są za pomocą czujnika C. Sygnał z czujnika przekazywany jest do regulatora R, który formuje sygnał sterujący oddziałujący na obiekt regulacji (komora nośna lub dodatkowa).



Rys. 1. Schematy strukturalne wibroizolatorów pneumatycznych.



Rys. 2. Modele fizyczne aktywnych wibroizolatorów pneumatycznych; a) struktura A — sterowanie napięciem dopływu powietrza do komory dodatkowej; b) struktura B — sterowanie napięciem dopływu powietrza do komory nośnej.

Zakres zmian własności sprężysto-tłumiących zależy od parametrów konstrukcyjnych wibroizolatora i charakterystyki regulatora. Wartości parametrów konstrukcyjnych wyznacza się dla konkretnego obiektu na drodze prostych obliczeń konstrukcyjnych lub metodą symulacji analogowej [13].

Dobór parametrów regulatora optymalnego przeprowadzono na drodze symulacji cyfrowej dla opisanych wyżej struktur pneumatycznych wibroizolatorów sterowanych, których modele fizyczne przedstawiono na rysunku 2.

Obiekt wibroizolacji o masie m posadowiony jest na komorze nośnej wibroizolatora typu poduszka powietrzna o objętości V_1 . Komora dodatkowa o objętości V_d połączona jest z komorą nośną za pomocą opornika laminarnego o efektywnej powierzchni przekroju f_d . Zmiany ciśnienia w komorze nośnej lub dodatkowej realizowane są za pomocą elementu dysza-przysłona o efektywnej powierzchni przekroju f_1 i f_2 . Elementy te stanowią obiekt sterowania.

3. Modele matematyczne obiektów sterowania

Opis matematyczny obiektów sterowania (rys. 2a i b) przeprowadzono przy następujących założeniach upraszczających:

- procesy nieustalone przepływu powietrza przez opornik przyjęto jako kwazistatyczne,
- zmiana stanu powietrza w komorach wibroizolatora podlega przemianie izotermicznej,
- powierzchnia efektywna wibroizolatora F i ciśnienie zasilania p_z są stałe,
- współczynnik sprężystości powłoki gumowej jest pomijalnie mały, co jest możliwe do przyjęcia przy założeniu małych przemieszczeń obiektu [10],
- ruch wibroizolowanego obiektu odbywa się w jednym kierunku z .

przy wyprowadzaniu równań przyjęto następujące oznaczenia dla warunków równowagi statycznej:

- p_1, p_d — ciśnienie bezwzględne w komorze nośnej i dodatkowej,
- V_1, V_d — objętość komory nośnej i dodatkowej,
- z, z_1 — przemieszczenia bezwzględne podłoża i obiektu wibroizolacji,
- Q, q — masa gazu i masowe natężenie przepływu,
- F — efektywna powierzchnia wibroizolatora,
- f_d, f_1, f_2 — efektywne powierzchnie przekrojów przepływu powietrza,
- R, Θ — stała gazowa i temperatura bezwzględna,
- q_a, q_1, q_2 — natężenie przepływu przez powierzchnie f_d, f_1, f_2 .

Powyższe wielkości w procesie przejściowym oznaczono znakiem \sim np. $\tilde{p}_1, \tilde{f}_1, \tilde{q}_1$. Bezwzględne przyrosty w stosunku do wartości początkowych oznaczono znakiem δ np. $\delta p_1 = \tilde{p}_1 - p_1, \delta q_1 = \tilde{q}_1 - q_1$ itd. Względne przyrosty wielkości będące stosunkiem przyrostu bezwzględnego do wartości początkowej oznaczono znakiem Δ np. $\Delta p_1 = \delta p_1 / p_1, \Delta q_1 = \delta q_1 / q_1$ itd. Korzystając z prawa zachowania masy i równania ciągłości strugi dla struktury A (rys. 2a):

- komora nośna

$$\frac{d\tilde{Q}_1}{dt} = \tilde{q}_d, \quad (1)$$

- komora dodatkowa

$$\frac{d\tilde{Q}_d}{dt} = \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 - \tilde{q}_d = \tilde{q}, \quad (2)$$

oraz dla struktury B (rys. 2b):

- komora nośna

$$\frac{d\tilde{Q}_1}{dt} = \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 - \tilde{q}_d = \tilde{q}. \quad (3)$$

— komora dodatkowa

$$\frac{d\tilde{Q}_d}{dt} = q_d, \quad (4)$$

otrzymano równania różniczkowe opisujące procesy przejściowe w komorach wibroizolatorów pneumatycznych o strukturze A i B, które po zlinearyzowaniu zapisano w postaci [8]:

— struktura A

$$\frac{V_1}{R\Theta} \frac{d\delta p_1}{dt} + \frac{p_1 F}{R\Theta} \frac{d(z-z_1)}{dt} = \frac{10}{9} \frac{f_d}{\alpha} \sqrt{\frac{2g}{R\theta}} (\delta p_d - \delta p_1), \quad (5)$$

$$\frac{V_d d\delta p_d}{R\Theta dt} = \frac{\partial q}{\partial p_d} \delta p_d + \frac{\partial q}{\partial f_1} \delta f_1 + \frac{\partial q}{\partial f_2} \delta f_2 - \frac{10f_d}{9\alpha} \sqrt{\frac{2g}{R\theta}} (\delta p_d - \delta p_1), \quad (6)$$

— struktura B

$$\frac{V_1}{R\Theta} \frac{d\delta p_1}{dt} + \frac{p_1 F}{R\Theta} \frac{d(z-z_1)}{dt} = \frac{\partial q}{\partial p_d} \delta p_d + \frac{\partial q}{\partial f_1} \delta f_1 + \frac{\partial q}{\partial f_2} \delta f_2 - \frac{10f_d}{g\alpha} \sqrt{\frac{2g}{R\theta}} (\delta p_d - \delta p_1), \quad (7)$$

$$\frac{V_d}{R\Theta} \frac{d\delta p_d}{dt} = \frac{10}{9} \frac{f_d}{\alpha} \sqrt{\frac{2g}{R\theta}} (\delta p_d - \delta p_1), \quad (8)$$

gdzie: g — przyspieszenie ziemskie,

$$\alpha = \sqrt{\frac{p_d - p_1}{p_1}}.$$

Przekształcając równania od (5) do (8) oraz przechodząc na przyrosty względne otrzymano:

— struktura A

$$\tau_1 \Delta \dot{p}_1 + \Delta p_1 = \tau_1 (\Delta z - \Delta z_1) + \Delta p_d, \quad (9)$$

$$\tau_d \Delta \dot{p}_d + \Delta p_d = K_1 \Delta f_1 + K_2 \Delta f_2 + K_3 \Delta p_1, \quad (10)$$

— struktura B

$$\tau_1 \Delta \dot{p}_1 + \Delta p_1 = \tau_1 (\Delta \dot{z} - \Delta \dot{z}_1) + K_1 \Delta f_1 + K_2 \Delta f_2 + \Delta p_d, \quad (11)$$

$$\tau_d \Delta \dot{p}_d + \Delta p_d = K_3 \Delta p_1, \quad (12)$$

gdzie:

$$\tau_1 = \frac{9V_1 \alpha}{10f_d \sqrt{2gR\theta}},$$

$$\tau_d = \frac{V_d}{R\Theta(10/9 \cdot f_d/\alpha\psi)},$$

$$K_1 = \frac{f_1 \cdot \partial q / \partial f_1}{p_1 \cdot 10/9 \cdot f_d/\alpha \cdot \psi},$$

$$K_2 = \frac{f_2 \cdot \partial q / \partial f_2}{p_1 \cdot 10/9 \cdot f_d/\alpha \cdot \psi},$$

$$K_3 = \frac{10/9 \cdot f_d / \alpha \sqrt{2g/R\Theta}}{10/9 \cdot f_d / \alpha \psi_1},$$

$$\psi = \sqrt{2g/R\Theta} - \partial q / \partial p_d,$$

$$\psi_1 = \sqrt{2g/R\Theta} - \partial q / \partial p_1.$$

Równanie różniczkowe elementu dysza przysłona można zapisać w postaci [8]:

$$\tau_r \Delta f + \Delta f = K_r \cdot \Delta u, \quad (13)$$

gdzie:

$$\Delta f = \Delta f_1 - \Delta f_2,$$

τ_r, K_r — stała czasowa i współczynnik wzmocnienia zależne od parametrów konstrukcyjnych układu.

Równanie ruchu obiektu wibroizolacji przyjmie postać

$$\tau_0^2 \Delta \ddot{z}_1 = \Delta p_1, \quad (14)$$

gdzie:

$$\tau_0^2 = z_1(p_1 - 1) / gp_1.$$

Przekształcając równania (9), (10), (11), (12), (13) i (14) układy równań różniczkowych opisujące podstawowe struktury pneumatycznych wibroizolatorów aktywnych można przedstawić w postaci równań stanu:

— dla struktury A

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{p}_1 \\ \Delta \dot{p}_d \\ \Delta \dot{f} \\ \Delta \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & \frac{1}{\tau_1} & 0 & -1 \\ \frac{K_3}{\tau_d} & -\frac{1}{\tau_d} & \frac{K}{\tau_d} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_r} & 0 \\ \frac{1}{\tau_0^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_d \\ \Delta f \\ \Delta v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_r}{\tau_r} \\ 0 \end{bmatrix} |\Delta u|, \quad (15)$$

— dla struktury B

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{p}_1 \\ \Delta \dot{p}_d \\ \Delta \dot{f} \\ \Delta \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & \frac{1}{\tau_1} & \frac{K}{\tau_1} & -1 \\ \frac{K_3}{\tau_d} & -\frac{1}{\tau_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_r} & 0 \\ \frac{1}{\tau_0^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_d \\ \Delta f \\ \Delta v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_r}{\tau_r} \\ 0 \end{bmatrix} |\Delta u|, \quad (16)$$

gdzie: $K = K_1 = K_2$, $v = \dot{z}_1$ — prędkość drgań obiektu.

Powyższe modele matematyczne podstawowych struktur pneumatycznych wibroizolatorów aktywnych typu poduszka powietrzna posłużyły do doboru parametrów regulatora optymalnego.

4. Optymalizacja sterowania wibroizolatora aktywnego

Syntezę optymalnych charakterystyk regulatora przeprowadzono stosując zasadę maksimum Pontriagina. Zakładając, że czas regulacji jest zadany, zadanie polegało na wyznaczeniu sterowania Δu , spełniającego układ równań różniczkowych (15) lub (16), które minimalizuje wskaźnik jakości [15].

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{C}x(\mathbf{C}x)^T dt + \gamma \int_0^{\infty} (\Delta u)^T \Delta u dt, \quad (17)$$

gdzie: $x^T = (\Delta p_1, \Delta p_d, \Delta f, \Delta v)$ — wektor stanu,

$\mathbf{C} = \text{col } [0, 0, 0, 1]$ — macierz obserwacji,

t — czas sterowania = ∞ ,

γ — współczynnik wagi.

Pierwszy składnik wskaźnika jakości uwzględnia minimalizację prędkości drgań obiektu wibroizolacji Δv i jest miarą energii kinetycznej wibroizowanego obiektu. Drugi człon kryterium jakości winien zapewnić minimalizację amplitudy sterowania i jest miarą energii potencjalnej przysłony sterującej dopływem sprężonego powietrza. Wprowadzenie do wskaźnika jakości (zamiast ograniczeń nierównościowych) zależności od sygnałów sterujących $u(t)$, mających charakter „kary” tym większej im większe są wartości bezwzględne tych sygnałów, pozwala na otrzymanie regulatora, którego sygnały wyjściowe są ograniczone (1).

Korzystając z zasady Pontriagina dla stanu ustalonego wyznaczono sterowanie optymalne, które jest funkcją stanu układu o postaci:

$$\Delta u^* = -\gamma^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \cdot x, \quad (18)$$

gdzie: $\mathbf{B}^T = \left[0, 0, \frac{K_r}{\tau_r}, 0 \right]$ jest macierzą wejść, natomiast K jest rozwiązaniem równania

Riccatiego o postaci:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K} + \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{P} = 0, \quad (19)$$

gdzie: \mathbf{A} — macierz stanu,

$\mathbf{P} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$,

\mathbf{C} — macierz wyjść.

W rozpatrywanym przypadku otrzymano układ szesnastu równań algebraicznych nieliniowych, z których wyznaczono stałe $K_{31} \dots K_{34}$ zależne od parametrów konstrukcyjnych układu. Sterowanie optymalnie przyjmuje wtedy postać:

$$\Delta u^* = -\gamma(K_{31} \Delta p_1 + K_{32} \Delta p_d + K_{33} \Delta f + K_{34} \Delta v), \quad (20)$$

Wynika stąd, że zaproponowane sformułowanie problemu doprowadziło do rozwiązania

w postaci stosunkowo prostego w realizacji regulatora, który wymaga jednak pomiaru wszystkich zmiennych stanu.

Ze względu na to, że w analizowanych układach tylko jedna zmienna stanu Δv jest bezpośrednio dostępna należy zastosować blok odtworzenia zmiennych stanu tzw. obserwator. Zadaniem obserwatora jest odtworzenie na podstawie odpowiedzi $y = \Delta v$ pozostałych zmiennych stanu [1].

Badanie wpływu struktury pneumatycznego układu wibroizolacji aktywnej oraz współczynnika wagi γ na skuteczność wibroizolacji przeprowadzono na drodze symulacji cyfrowej.

5. Badanie wpływu struktury układu na skuteczność wibroizolacji

Pod pojęciem skuteczności wibroizolacji będziemy rozumieć stopień realizacji celu wibroizolacji przy pomocy pneumatycznego układu aktywnego. Porównując interesujące nas wartości parametrów drgań obiektu (przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie lub siłę przenoszoną na podłoże) przed i po wprowadzeniu wibroizolacji wnioskuje się o jej skuteczności. Skuteczność wibroizolacji zależy od współczynnika przeniesienia T i można ją określić ze wzoru [6]:

$$e = (1 - T) 100\%. \quad (21)$$

Z zależności tej wynika, że skuteczność wibroizolacji jest tym większa im mniejszy jest współczynnik przeniesienia T . Podstawą oceny skuteczności wibroizolacji jest więc wartość współczynnika przeniesienia T definiowanego jako stosunek wartości parametru drgań obiektu przed i po wprowadzeniu wibroizolacji [6]:

$$T = \left| \frac{\Delta z_1}{\Delta z} \right| = \left| \frac{\Delta \dot{z}_1}{\Delta \dot{z}} \right| < 1. \quad (22)$$

Dla liniowego układu o jednym stopniu swobody przy wymuszeniu harmonicznym o częstości ω , współczynnik przeniesienia T wyrazi się zależnością:

$$T = \sqrt{\frac{1 + 4r^2(\omega/\omega_0)^2}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + 4r^2(\omega/\omega_0)^2}}, \quad (23)$$

gdzie: r — względny współczynnik tłumienia,
 ω_0 — częstość drgań własnych.

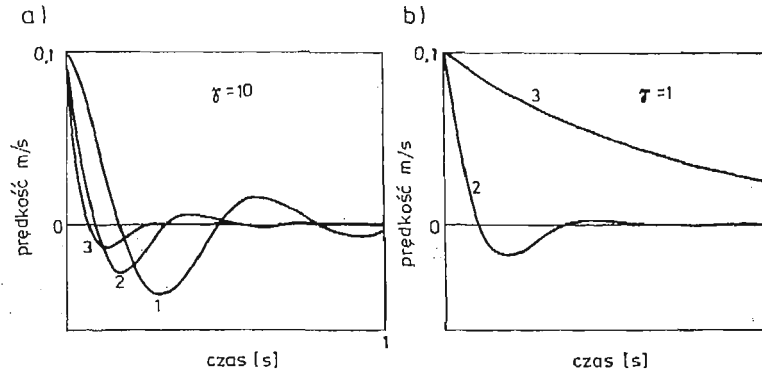
Z zależności tej wynika, że $T < 1$ w zakresie częstości $\omega > \sqrt{2}\omega_0$ tj. w zakresie rezonansowym i jest tym mniejszy im mniejszy jest współczynnik tłumienia r . Z zależności (23) wynika, że współczynnik przeniesienia T zależy od częstotliwości, można więc mówić o skuteczności wibroizolacji dla danej częstotliwości lub w zadanym zakresie częstotliwości.

Badania symulacyjne zależności współczynnika przeniesienia T od częstotliwości wymuszenia dla różnych struktur pneumatycznych wibroizolatorów aktywnych przeprowadzono dla następujących parametrów konstrukcyjnych wibroizolatorów (rys. 2a i 2b):

$$V_0 = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3, \quad f_d = f_1 = f_2 = 10^{-6} \text{ m}^2, \quad K_r = 10, \\ V_d = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3, \quad F = 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2, \quad \tau_r = 0,01 \text{ s}, \quad P_{st} = 60 \text{ N}.$$

Dobór współczynnika wagi γ przeprowadzono metodą prób i błędów badając charakterystyczne wielkości przebiegu przejściowego regulacji takie jak: czas ustalenia się przebiegu przejściowego, odchylenie maksymalne i przeregulowanie. Badania przeprowadzono dla różnych wartości γ z zakresu 0,1 do 100 [9].

Przykładowe wykresy odpowiedzi układu na zakłócenie skokowe dla $\gamma = 1$ i $\gamma = 10$ przedstawiono na rysunkach 3a i 3b.



Rys. 3. Przebiegi prędkości drgań obiektu wibroizolacji przy zakłóceniu skokowym, dla różnych struktur układów: 1 — bez sterowania, 2 — struktura A, 3 — struktura B

Z wykresów tych wynika, że wartość współczynnika wagi γ ma decydujący wpływ na jakość regulacji, a w szczególności na odchylenie maksymalne i czas regulacji. Zmniejszenie współczynnika wagi γ powoduje wzrost czasu regulacji w przypadku struktury B (rys. 3)

Przyjmując do dalszych badań $\gamma = 1$ i $\gamma = 10$ wyznaczono sterowania optymalne dla podstawowych struktur pneumatycznych wibroizolatorów aktywnych w postaci:

— dla struktury A (rys. 2a)

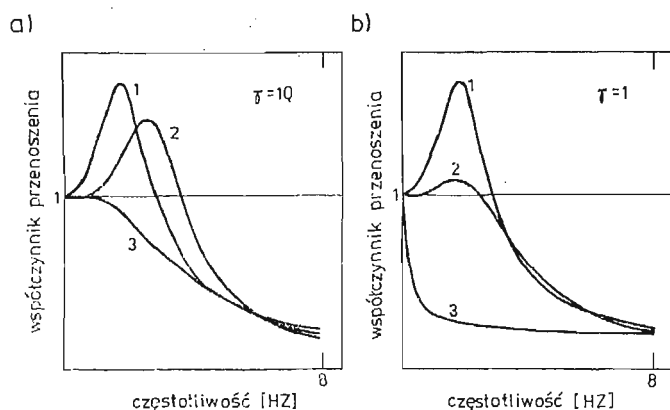
$$\Delta u_A^* = (0,1 \Delta p_1 + 1,43 \Delta p_d + 2,78 \Delta f + \Delta v), \quad (24)$$

— dla struktury B (rys. 2b)

$$\Delta u_B^* = (0,1 \Delta p_1 + 2,43 \Delta p_d + 1,7 \Delta f + \Delta v). \quad (25)$$

Zależność współczynnika przeniesienia drgań T od częstotliwości dla analizowanych układów przedstawiono na rysunku 4a i 4b. Z wykresów tych wynika, że współczynnik przeniesienia drgań pneumatycznych wibroizolatorów aktywnych (wykres 2 i 3) jest znacznie mniejszy niż pneumatycznego wibroizolatora nie sterowanego (wykres 1) o tych samych parametrach konstrukcyjnych. Wibroizolator aktywny o strukturze B (wykres 3) pozwala na odstrojenie układu od rezonansu i współczynnik przeniesienia T dla tego wibroizolatora jest mniejszy od jedności w całym zakresie częstotliwości.

Wartości współczynnika przeniesienia T zmieniają się również wraz ze zmianą współczynnika wagi γ . Porównując wykresy współczynnika przeniesienia dla $\gamma = 10$ (rys. 4a)



Rys. 4. Wykresy współczynnika przenoszenia drgań układu wibroizolacji aktywnej i pasywnej.

i $\gamma = 1$ (rys. 4b) można stwierdzić, że ze względu na skuteczność wibroizolacji dla obu struktur wibroizolatorów korzystniejszy jest współczynnik wagi $\gamma = 1$. Szczególnie dobrymi własnościami wibroizolacyjnymi charakteryzuje się w tym przypadku wibroizolator o strukturze B.

6. Wnioski

Pneumatyczne wibroizolatory sterowane mogą znaleźć szerokie zastosowanie w układach wibroizolacji maszyn i urządzeń oraz ich podzespołów. Przeprowadzone badania wykazały, że cechują się one znacznie większą skutecznością wibroizolacji w szerokim zakresie częstotliwości w porównaniu z tradycyjnymi wibroizolatorami nie sterowanymi. Pozwala to na zwiększenie niezawodności i trwałości maszyn i urządzeń jak również zabezpieczenie ludzi i otoczenia przed szkodliwym wpływem drgań.

Analiza wyników badań symulacyjnych wibroizolatorów sterowanych wykazała istotny wpływ różnych rozwiązań strukturalnych regulatora na skuteczność wibroizolacji. Przeprowadzone badania dwóch struktur wibroizolatorów wykazały, że szczególnie korzystna jest tu struktura, w której sygnał sterujący oddziałuje bezpośrednio na komorę nośną wibroizolatora. Skuteczność wibroizolacji tego wibroizolatora w zakresie częstotliwości większych od 2 Hz wynosi 76%, natomiast w zakresie częstotliwości poniżej 2 Hz wynosi średnio 45%. Jest to bardzo ważna jego zaleta ponieważ tradycyjne wibroizolatory pasywne powodują wzmocnienie drgań podłoża w zakresie małych częstotliwości.

Literatura

1. M. ATHANS, P. FALB, *Sterowanie optymalne*, WNT Warszawa 1979.
2. I. BALLO, J. HERGOTT, *Analyza dynamických vlastnosti sustavy aktivnej izolacie kmitania*, Strojnicky casopis — Bratislava 1974 s. 6.
3. D. GEE-CLAUGH, R. A. WALLER, *On improved self damped pneumatic isolator*, J. Sound Vib. 1968 Nr 8.
4. М. Д. ГЕНКИН, В. Г. ЭЛЕЗОВ, *Развитие методов активного виброгашения*. Сб. Методы активной и пассивной виброизоляции машин и присоединенных конструкций. Наука, Москва 1975.

5. М. Д. Генкин, В. Г. Элезов, В. В. Яблонский, *Методы управляемой виброзащиты машин*. Наука, Москва 1985.
6. J. GOŁIŃSKI, *Wibroizolacja maszyn i urządzeń*, WNT 1979.
7. Ф. А. Фурман, К. В. Фролов, *Резонансные характеристики активных гидравлических виброзащитных систем с управляемыми параметрами*. Сб. Виброзащита гидравлических машин. Наука, Москва 1975.
8. A. GOŁAŚ, J. KOWAL, *Optymalizacja pneumatycznego wibroizolatora sterowanego*, Archiwum Budowy Maszyn, Warszawa Nr 1 1986.
9. A. GOŁAŚ, J. KOWAL, M. SZEPSKI, *Wpływ struktury na działanie pneumatycznego wibroizolatora aktywnego*, Materiały konferencji NOISE CONTROL 85 Kraków 1985.
10. М. М. Грибов, *Регулируемые амортизаторы REA*. Советское радио, Москва 1974.
11. D. KARNOPP, *Active and passive isolation of random vibration*, ASME 1973, Nr 4.
12. D. KARNOPP, M. CROSBY, *Vibration Control Using Semi-Active Force Generators*, ASME 1974 v. 96, Nr 2.
13. J. KOWAL, W. WSZOŁEK, T. WSZOŁEK, *Synteza układu wibroizolacji metodą modelowania analogowego*, Zeszyty Naukowe AGH Kraków Nr 4 1984.
14. J. KOWAL, M. SZEPSKI, *Synteza dynamiczna pasywnego układu wibroizolacji sterowanej*, Materiały konferencji NOISE CONTROL 82 Kraków 1982.
15. J. KOWAL, *Synteza i analiza wybranych układów wibroizolacji sterowanej*, Praca doktorska AGH Kraków 1982.
16. T. H. ROCKWELL, J. M. LAWTHOR, *Theoretical and Experimental Results on Active Vibration Dampers*, JASA 1964.
17. J. E. RUZICKA, *Active Vibration and Shock Isolation*, Ekspres Informacja JPS 1969 Nr 10.
18. M. SZEPSKI, *Porównanie charakterystyk aktywnego i semiaktywnego układu wibroizolacji*, Materiały XXV Sympozjonu: Modelowanie w mechanice. Gliwice-Kudowa 1986.

Резюме

АНАЛИЗ СВОЙСТВ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ АКТИВНЫХ ТИПА ВОЗДУШНЫЙ МЕШЁК

В работе представлено физические и математические модели основных структур пневматических активных виброизоляторов типа воздушный мешёк. Для избранных моделей переведено оптимизацию, а также испытания эффективности виброизоляции. Из этих рассуждений вытекает, что большую эффективность имеют виброизоляторы с регулировкой давления в несущей камере.

Summary

ANALYSIS OF ACTIVE VIBROISOLATORS PROPERTIES OF AIR-CUSHION TYPE

In the paper mathematical and physical models of two fundamental structures of active pneumatical vibroisolators are presented. Vibroisolators are of air-cushion type. For the models a regulator optimization was provided. Digital simulation of the models provided a better vibroisolation efficiency of the structure with pressure regulation in the support chamber.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 czerwca 1986 roku.

ZASTOSOWANIE PROCESÓW MARKOWA DO MODELOWANIA I BADANIA UKŁADU MECHANICZNEGO TOR-POJAZD SZYNOWY

WŁODZIMIERZ CHOROMAŃSKI
JERZY KISIŁOWSKI
BOGDAN RACIBORSKI

Politechnika Warszawska

Streszczenie

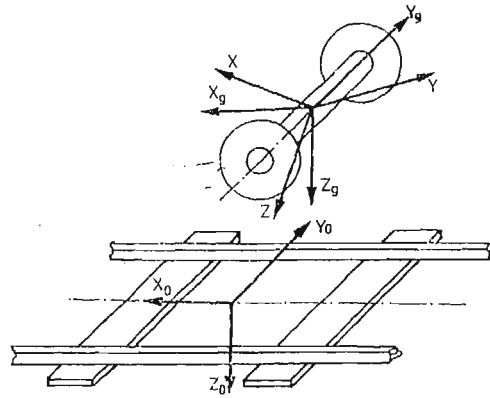
Badania dynamiki poprzecznej modelu matematycznego układu mechanicznego tor-pojazd szynowy mają niezwykle istotne znaczenie biorąc pod uwagę specyfikę badanego obiektu. Chodzi mianowicie o zapewnienie jednopunktowego styku podczas ruchu pomiędzy kołem pojazdu szynowego a główką szyny. Autorzy proponują do rozwiązania problemu wykorzystać teorię procesów Markowa. Jakkolwiek przedstawione w pracy wyniki odnoszą się do konkretnego obiektu mechanicznego to proponowaną metodę postępowania wydaje się można uogólnić do dowolnego układu mechanicznego opisanego układem równań różniczkowych zwyczajnych, na które narzucone są ograniczenia i który jest poddany wymuszaniu losowemu.

1. Wstęp

Badanie dynamiki poprzecznej zestawu kołowego w ruchu po torze prostym jest zadaniem posiadającym wiele aspektów teoretycznych i użytkarnych. Ma ono niezwykle istotne znaczenie z punktu widzenia specyfiki badanego obiektu, chodzi mianowicie o zapewnienie podczas ruchu „jednopunktowego” styku w układzie koło-główka szyny (brak styku obrzeża kół z szyną). Model nominalny analizowanego obiektu przedstawiono na rys. 1.

Tradycyjne podejście do rozważanego zagadnienia w literaturze dotyczącej pojazdów szynowych sprowadza się zazwyczaj do analizy stateczności w sensie Lapunowa zlinearyzowanego modelu autonomicznego. Nie uwzględnione zostają zatem z jednej strony losowe czynniki występujące w modelowanym obiekcie jak również ograniczenia narzucone na poszczególne przemieszczenia (będące np. wynikiem warunku jednopunktowego styku).

Tymczasem wymuszenia działające na zestaw kołowy pochodzą głównie od czynników losowych jak np. nierówności toru. Naturalnym więc wydaje się zastosowanie w rozważanym przypadku analizy probabilistycznej.



Rys. 1.

2. Sformułowanie problemu

Przyjęty model matematyczny zestawu kołowego w ruchu po torze prostym ma w ogólnym przypadku postać:

$$\dot{Y}_t = F(Y_t, t) + G(Y_t, t)X_t, \quad (1)$$

gdzie:

$Y_t = [Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^n]^T$ — wektor n -współrzędnych uogólnionych użytych do opisu modelu,

$X_t = [X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n]^T$ — wektorowy n -wymiarowy proces stochastyczny opisujący losowe wymuszenia,

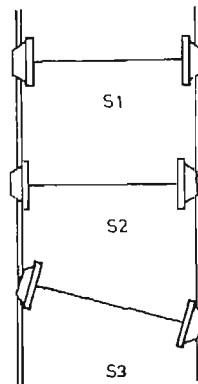
T — oznacza transpozycję,

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T,$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix},$$

● — pochodna czasowa.

Przyjęto, że X_t jest stacjonarnym w szerokim sensie procesem Markowa.



Rys. 2.

Z punktu widzenia specyfiki badanego obiektu wyróżniono trzy charakterystyczne stany, w jakich może znajdować się zestaw kołowy (rys. 2).

S1 — stan, gdy zestaw kołowy ma „dwa punkty styku” z tokami szynowymi,

S2 — stan, gdy zestaw kołowy ma „trzy punkty styku” z tokami szynowymi,

S3 — stan, gdy zestaw kołowy ma „cztery punkty styku” z tokami szynowymi.

Dla tak opisanego modelu układu przeprowadzono wyznaczenie szeregu własności probabilistycznych, a w tym przede wszystkim wyznaczenie prawdopodobieństwa wystąpienia stanu S1 (najbardziej korzystnego z punktu widzenia eksploatacji).

3. Metody analizy

Znalezienie rozwiązania układu stochastycznych równań różniczkowych (1) z wymuszeniem w postaci dowolnego porocesu stochastycznego jest na ogół niemożliwe. Jednak w przypadku stochastycznych równań różniczkowych ITÔ [2] z wymuszeniem w postaci białego szumu, istnieje aparat matematyczny pozwalający na dokładne obliczenie charakterystyk probabilistycznych procesu opisującego rozwiązanie układu. Stąd wynika, że pierwszym istotnym zagadnieniem jest sprowadzenie układu równań różniczkowych (1) do układu stochastycznych równań różniczkowych ITÔ postaci:

$$\dot{Y}_{tc} = f(Y_{tc}, t) + g(Y_{tc}, t) \cdot \eta_t, \quad (2)$$

● — pochodna czasowa,

$\bar{\eta}_t = [\eta_{t1}, \eta_{t2} \dots]^T$ — wektor niezależnych białych szumów.

Można wykazać [2], że rzeczywisty proces normalny x_t można z dowolną dokładnością aproksymować procesem stochastycznym będącym rozwiązaniem pewnego stochastycznego równania różniczkowego.

Niech $S_x(\omega)$ oznacza gęstość spektralną procesu X_t . Aproksymujemy funkcję $S_x(\omega)$ funkcją

postaci $S_\xi(\omega) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ gdzie:

$$P(z) = \beta_0 z^m + \beta_1 z^{m-1} + \dots + \beta_m,$$

$$Q(z) = z^{n_s} + \alpha_1 z^{n_s-1} + \dots + \alpha_n,$$

$$n_s > m.$$

α_i, β_i — stałe współczynniki.

Proces o gęstości spektralnej $S_\xi(\omega)$ można otrzymać jako rozwiązanie następującego równania [2]:

$$\frac{d^k \xi}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} \xi}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{n_s} \xi = \beta_0 \frac{d^m \eta}{dt^m} + \dots + \beta_m \eta, \quad (3)$$

gdzie: η — biały szum,

$\frac{d^{n_s}}{dt^{n_s}}$ — n_s -ta pochodna.

Dokonując elementarnych podstawień można powyższe równanie sprowadzić do układu równań różniczkowych I-rzędu, w których nie wystąpią już pochodne białego

szumu (traktowane w zapisie równania (d) czysto formalnie, ze względu na nieróżniczkowalność białego szumu).

$$\frac{d\xi}{dt} = H(\xi, \eta, t); \quad \xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T. \quad (4)$$

Uwzględniając powyższe fakty oraz równania (1) i (4) otrzymamy układ (4) przy czym:

$$Y_{tc} = [Y_t^1, Y_t^2 \dots Y_t^n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{ns}]^T. \quad (5)$$

Rozwiązanie równania (2) jest wektorowym procesem stochastycznym Y_{tc} . Aby otrzymać pełny jego opis probabilistyczny należy znaleźć wszystkie skończone wymiarowe rozkłady. W praktyce ograniczymy się do 1-wymiarowego rozkładu $f_t(Y_{tc})$ (gdzie: f_t — funkcja jednowymiarowej gęstości prawdopodobieństwa).

W dalszej części wszelkie rozważania odnosić się będą do równania (2).

Proces Y_{tc} stanowiący rozwiązanie układu równań stochastycznych jest procesem Markowa pod warunkiem, iż funkcje g i f (równanie (2)) spełniają pewne warunki regularności (zostały one sformułowane m.in. w [2] i [3]).

Jednowymiarową gęstość prawdopodobieństwa $f_t(Y_{tc})$ procesu Y_{tc} można wyznaczyć dokładnie rozwiązując równanie Fokkera-Plancka-KoImogorowa (FPK).

$$\frac{\partial f_t(Y_{tc})}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+n_s} \frac{\partial^2}{\partial Y_{tc}^i \partial Y_{tc}^j} (b_{ij}(Y_{tc}, t)) - \sum_{i=1}^{n+n_s} \partial [a_i(Y_{tc}) f_t(Y_{tc})], \quad (6)$$

$$f_{t0}(Y_{tc}) = f_0(Y_{tc}).$$

Rozwiązanie równań FPK jest w ogólnym przypadku praktycznie niemożliwe, dlatego też do analiz można zastosować pewną metodę przybliżoną zwaną metodą linearyzacji bezpośredniej [2]. Układ (2) można przedstawić w następującej postaci:

$$\dot{Y}_t = F_s(Y_{tc}, \eta_t, t), \quad Y(0) = Y_0, \quad (7)$$

gdzie: F_s jest funkcją nieliniową.

Ten nieliniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych można przybliżyć układem liniowym rozwijając prawą stronę w szereg Taylora względem fluktuacji ($Y_{tc}^0 = Y_{tc} - M_t$, $\eta_t^0 = \eta_t - M_t^n = \eta_t$) i odrzucając czony z potęgami większymi od jeden (z analizy układu wynika, że przemieszczenia zestawu kołowego są dostatecznie małe aby można było dokonać takiego przybliżenia).

Otrzymujemy w wyniku takich operacji dwa układy równań:

$$M_t = F(M_t, t), \quad M(0) = Y_{c0}, \quad (8)$$

jest to deterministyczny układ równań różniczkowych zwyczajnych, który można rozwiązać numerycznie na EMC

$$Y_{tc}^0 = \sum_{i=1}^p \frac{\partial F_j}{\partial m Y_{ci}} Y_j^0 + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_j}{\partial m Y_{ci}} \eta_i.$$

Niech:

$$A(t) = A(M_t) = \left[\frac{\partial F_j}{\partial m Y_t} \right],$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(M_t^0) = \left[\frac{\partial F_j}{\partial m_{\eta_t}} \right],$$

wtedy:

$$\dot{Y}_t^0 = \mathbf{A}_t Y_t^0 + \mathbf{B}_t \eta_t, \quad (9)$$

jest to układ liniowych, stochastycznych równań różniczkowych. Ponieważ przekształcenie liniowe zachowuje normalność a η jest normalny więc proces $Y_{t_0}^0$ jest również procesem normalnym. Do znalezienia jego charakterystyk wystarczy obliczenie wektora wartości średnich M_t , z układu oraz macierzy dyspersji D_t , spełniającej następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{D}_t = \mathbf{A}_t D_t + D_t \mathbf{A}_t^T + \mathbf{B}_t \mathbf{Q} \mathbf{B}_t, \quad (10)$$

\mathbf{A}_t , \mathbf{B}_t te same co w (9), a $\mathbf{Q} = \delta(t-t_0) \mathbf{E}(\eta_t + \eta_{t_0})$.

Gęstość prawdopodobieństwa $f_t(Y_u)$ procesu Y_{t_0} wyraża się wzorem:

$$f_t(Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det D_t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y_t - M_t) D_t^{-1} (Y_t - M_t)^T \right\}. \quad (11)$$

Interesujący nas rozkład współrzędnych ($Y_{t_0}^i$) otrzymujemy obliczając rozkład brzegowy:

$$f_t(Y^i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_t(Y_t) dY_3 \dots dY_n. \quad (12)$$

Jest to gęstość prawdopodobieństwa określona na całej przestrzeni R^2 .

Przyjęto, że granice obszaru Ω zmienności współrzędnych mają charakter ekranów odbijających (oznacza to, że trajektorie procesu ($Y_{t_0}^i$) po dotarciu do granicy są lustrzanym odbiciem trajektorii procesu, które przekroczyły granicę).

4. Algorytm obliczeń. Przykład zastosowania metody

W oparciu o zaprezentowaną metodę opracowano algorytm postępowania umożliwiający obliczenie prawdopodobieństwa znalezienia się zestawu kołowego w stanie S1. Schemat blokowy algorytmu przedstawiono na rys. 3.

Model matematyczny badanego obiektu (zestawu kołowego w ruchu po torze prostym) zaczerpnięty został z pracy [1].

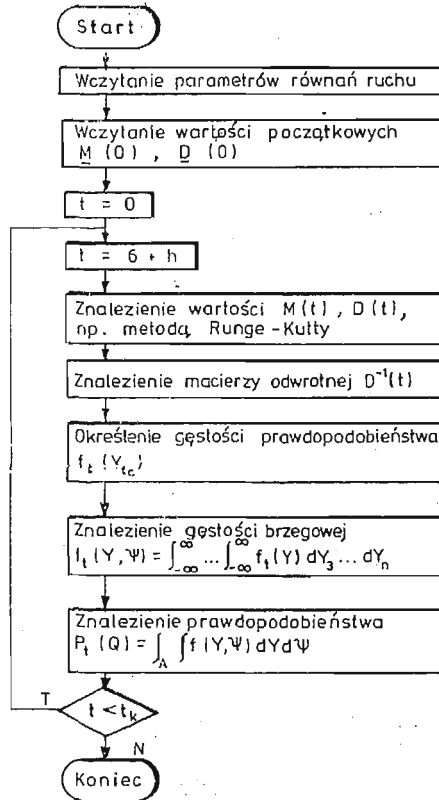
Ma on postać dwóch nieliniowych równań różniczkowych (uwzględniona tzw. nieliniowość typu kinematycznego [1] drugiego rzędu):

$$\begin{aligned} \left[m + \frac{\delta^2}{b^2} (J_x + J_x \Psi^2 + J_y \Psi^2) \right] \ddot{Y} + \frac{J_y \delta^2}{b^2} Y \Psi \ddot{\Psi} + \frac{\delta^2}{b^2} (2J_x + J_y) \dot{Y} \dot{\Psi} - \frac{J_y \delta^2}{b^2} Y \dot{\Psi}^2 = Q_y \\ - \frac{J_y \delta}{b^2} \ddot{Y} \Psi_y + J_y \ddot{\Psi} - \frac{J_y \delta^2}{b^2} \Psi \dot{Y}^2 - \frac{J_y \delta^2}{b^2} \dot{Y} Y \dot{\Psi} = Q_y \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie:

- $q_1 | \Psi |^*$ obrót zestawu kołowego wokół osi pionowej OZ (rys. 1),
- $q_2 | Y |$ przemieszczenie poprzeczne (wzdłuż osi OY) środka masy zestawu kołowego,

*) w nawiasach podano równoważne oznaczenia współrzędnych używanych w pracy.



Rys. 3.

Q_Y, Q_X siły styczne występujące w punktach styku układu tor-zestaw kołowy, (w nawiasie podano równorzędnie używane oznaczenia).

Siłę styczną Q_Y i moment Q_Ψ określono zgodnie z liniową teorią Kalkera:

$$\begin{aligned}
 Q_Y &= 2k_{pY}N \left[\Psi - \frac{\dot{Y}}{v} \left(1 + \frac{r\delta}{b} \right) \right] - \frac{2k_{ps}Nr}{v} \dot{\Psi} + 2N \left(\frac{\varepsilon}{b} - k_{ps} \frac{\varepsilon - \delta}{b} \right) (Y_w - Y) + \frac{2k_{pY}N\delta r}{bv} \dot{Y}_w \\
 Q_\Psi &= -2bNk_{px} \left(\lambda(Y - Y_w) + \frac{b}{v} \dot{\Psi} \right) + 2bN\delta\Psi(1 - k_{ps})
 \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie:

Y_w — rzeczywiste losowo wymuszenie kinematyczne działające na układ.

Wykaz parametrów wraz z ich wartościami zebrano w tabeli I. Gęstość spektralną rzeczywistego procesu Y_w utożsamiamy z losowym wymuszeniem X , równania (1) przedstawiono na rys. 4. Ograniczenia narzucone zaś na układ, warunkujące przebywanie jego w stanie S1 pokazano na rys. 5.

Po wprowadzeniu współrzędnych stanu $q_1 = y, q_2 = \Psi, q_3 = \dot{Y}, q_4 = \dot{\Psi}$ sprowadzono układ (13) do układu 4 równań I rzędu:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}) + \mathbf{B}\mathbf{Y}_w, \quad (15)$$

Tabela 1

Oznaczenie	Określenie	Wartość	Jednostka
m	masa zestawu kołowego	1400	kg
J_x	moment bezwładności zestawu kołowego względem osi OX	1747	kg · m ²
J_y	moment bezwładności zestawu kołowego względem osi OY	131	kg · m ²
b	połowa odległości między punktami styku układu tor-zestaw kołowy w położeniu środkowym	0.75	m
δ	połowa kąta stożkowatości profilu zestawu kołowego	0.038	rad
ε	parametr sztywności grawitacyjnej	0.038	rad
r	średni promień toczenia zestawu kołowego	0.46	m
k_{ps}	współczynnik Kalkera dla poślizgu wiertnego	0.81	
k_{px}	współczynnik Kalkera dla poślizgu wzdłużnego	200.0	
k_{py}	współczynnik Kalkera dla poślizgu poprzecznego	175.0	
N	siła normalna w punkcie kontaktu koła z szyną	26375	N
λ	parametr ekwiwalentnej stożkowatości	0.038	rad
v	prędkość protoliniowego ruchu zestawu kołowego	22.2222	m/s

gdzie:

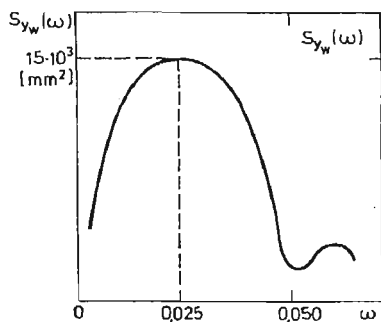
$$Y = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T,$$

$$Y_w = (0, 0, Y_w, \dot{Y}_w),$$

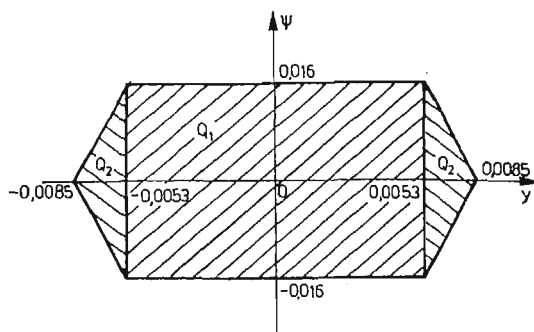
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m + \frac{\delta^2}{b^2} (J_x + J_x q_1^2 + J_y q_2^2) & -\frac{J_y \delta^2}{b^2} q_1 q_2 \\ 0 & 0 & -\frac{J_y \delta q_1 q_2}{b^2} & \end{bmatrix},$$

$$F(Y) = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ -\frac{\delta^2}{b^2} (2J_x + J_y) q_3 q_4 + \frac{J_y \delta^2}{b^2} q_1 q_4^2 + 2k_{py} N \left[q_2 - \frac{q_3}{v} + \frac{r \delta q_3}{vb} \right] - \frac{2k_{ps} N r q_4}{v} + \\ -2N \left[\frac{\varepsilon}{b} - k_{ps} \frac{\varepsilon - \delta}{b} \right] q_1 \\ \frac{J_y \delta^2}{b^2} q_2 q_3^2 + \frac{J_y \delta^2}{b^2} q_1 q_2 q_3 - 2bNk_{px} \left[\frac{\lambda}{r} q_1 + \frac{b}{v} q_4 \right] + 2bN\delta_1 (1 - k_{ps}) q_2 \end{bmatrix},$$

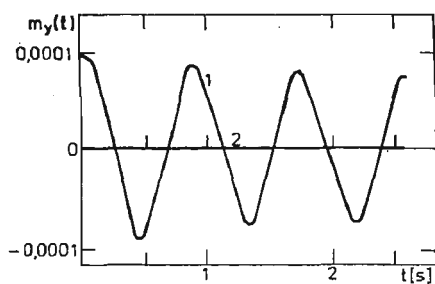
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2N \left[\frac{\varepsilon}{b} - k_{ps} \frac{\varepsilon - \delta}{b} \right] & \frac{2k_{py} N \delta r}{bv} \\ 0 & 0 & 2bNk_{px} \frac{\lambda}{r} & 0 \end{bmatrix},$$



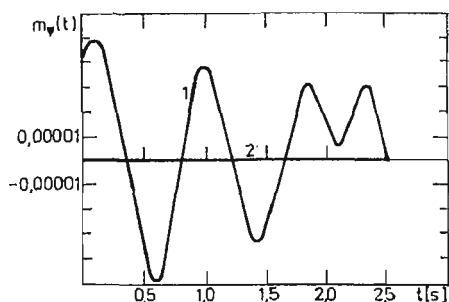
Rys. 4.



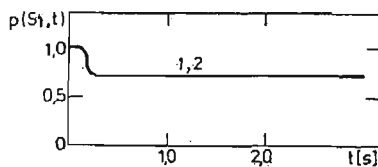
Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.



Rys. 8.

Rzeczywistą gęstość spektralną aproksymowano funkcją postaci:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{(\omega^2 - \alpha_2)^2 + \alpha_1^2 \omega^2} \quad (16)$$

Równanie (4) przyjęło postać:

$$\begin{aligned} Y_w &= \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 + \alpha_2 \xi_1 + \alpha_1 \xi_2 &= x. \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie:

x jest białym szumem o wartości średniej 0 i intensywności 1.

Parametry α_1 i α_2 zostały przy tym tak dobrane aby punkty ekstremalne obu funkcji ($S_x(\omega)$, $S_{\xi}(\omega)$) pokrywały się, tzn.:

$$\left. \frac{dS_{\xi}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0,025} = 0 \quad S_{\xi}(\omega)|_{\omega=0,025} = 15 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{]}$$

Mnożąc obustronnie układ (15) przez \mathbf{A}^{-1} oraz uwzględniając związki (17) otrzymano ostatecznie układ w postaci (2) tzn.

$$\dot{Y}_{1c} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(q_1, q_2, q_3, q_4) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}[0, 0, q_5, q_6] \\ q_6 \\ -\alpha_1 q_6 - \alpha_2 q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 00 \\ 0 & \dots & 00 \\ 0 & \dots & 01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\bar{Y}_{1c} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]; \quad \begin{aligned} q_5 &= \xi_1; \\ q_6 &= \xi_2. \end{aligned}$$

Stosując metodę i algorytm podany uprzednio uzyskano następujące wyniki dotyczące wartości średnich współrzędnych y (rys. 6 i 7) oraz prawdopodobieństwa znalezienia się układu w stanie $S1$ (rys. 8).

Można zauważyć, że krzywa określająca prawdopodobieństwa znalezienia się układu w stanie $S1$ po bardzo krótkim czasie stabilizuje się wokół wartości 0,69 (niezależnie od warunków początkowych).

5. Wnioski końcowe

Prezentowana w niniejszej pracy metoda analizy układu mechanicznego z ograniczeniami i losowym wymuszeniem, wydaje się efektywnym narzędziem badawczym prowadzącym do otrzymania szeregu interesujących charakterystyk probabilistycznych.

Przedstawione rozważania mogą zostać uogólnione na dowolne układy mechaniczne, pod warunkiem spełnienia sformułowanych w pracy założeń. Wykorzystana teoria procesów Markowa dostarcza bardzo silnego aparatu badawczego. Stosując ją można otrzymać szereg dodatkowych charakterystyk probabilistycznych nie omawianych w pracy (jak np. rozkład prawdopodobieństwa maksymalnych wartości procesu Y_{10}). Skomplikowana forma zależności jak i duża wymiarowość stosowanych modeli wymaga jednak użycia zarówno efektywnych procedur numerycznych jak również szybkich EMC.

Literatura

1. J. KISIŁOWSKI, *Dynamika układu tor-pojazd*. Prace Instytutu Transportu PW, z. 15, Wyd. PW, W-wa 1978.
2. K. SOBСZYK, *Metody dynamiki statystycznej*. PWN, W-wa 1973.
3. В. И. ТИХОПОВ, А. М. МИРПОВ, *Марковские процессы*, Москва „Советское радио” 1977.

Резюме

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ РЕЛЬС-РЕЛЬСОВОЙ СОСТАВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА

Анализ поперечной динамики системы рельс-рельсовой состав из-за специфических свойств этой системы является очень важной задачей. Существенной проблемой является задача обеспечения точенного контакта между колесом и головкой рельса. Для анализа авторы предполагают использовать теорию процессов Маркова и формализм стохастических уравнений ИТО. Рассуждения относятся к конкретной механической системе, но могут быть обобщены на любую механическую систему описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями со стохастическими возмущениями и ограничениями.

S u m m a r y

APPLICATION OF MARKOV PROCESSES FOR MODELLING AND INVESTIGATING
MECHANICAL TRACK-RAIL VEHICLE SYSTEM

The investigation of the lateral dynamics of the track-railway vehicle system is extremely important due to the specific features of such a system.

The problem is how obtain a one point contact between the rolling wheel and rail. The authors propose to use the theory of Markow processes and the stochastic ITO equations to solve the problem. Although the results are obtained there a concrete mechanical system the presented method seems to be applicable to arbitrary mechanical systems described by a set of ordinary differential equations, subject to constraints and random loading.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 kwietnia 1984 roku.

NUMERYCZNA SYMULACJA PROGRAMOWEGO RUCHU SAMOLOTU W PĘTLI PIONOWEJ

WOJCIECH BLAJER

Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu

Symulowano programowy ruch samolotu w pętli pionowej. Postulowano, by środek masy samolotu zakreślał okrąg o zadanym promieniu oraz dodatkowo, by prędkość lotu była stała. Poszukiwano takiego modelu sterowania, który zapewniałby, że symulowany ruch realizować będzie ściśle narzucony program. Samolot zamodelowano jako sztywny obiekt latający sterowany parametrycznie siłą ciągu silnika oraz wychyleniami steru wysokości. Przedstawiono wyniki symulacji numerycznej.

1. Wstęp

W pracy podjęto się numerycznej symulacji programowego ruchu samolotu w pętli wykonywanej w płaszczyźnie pionowej względem ziemi. Rozważono dwa przypadki ruchu programowego. W pierwszym postulowano, by środek masy samolotu zakreślał okrąg o zadanym promieniu, w drugim żądano dodatkowo, ażeby lot odbywał się ze stałą prędkością. Warunki te zapisane zostały w formie odpowiednich równań więzów programowych. Dla tak sformułowanych programów ruchu, poszukiwano modeli sterowania samolotu zapewniających, że symulowany ruch realizować będzie ściśle warunki więzów programowych.

Podstawowe założenia pracy oraz w znacznej części stosowany model matematyczny, m.in. równania ruchu samolotu i sformułowanie zagadnienia ruchu programowego w pętli kołowej, zawarte zostały w pracy [3]. Artykuł niniejszy stanowi rozwinięcie i poszerzenie cytowanej pracy. Zawarto więc w nim tylko elementy nowe i niezbędne uzupełnienia. Od podstaw sformulowano na przykład zagadnienie programowego ruchu samolotu w pętli kołowej ze stałą prędkością lotu. W odróżnieniu od pracy [3] przyjmowano też że gęstość powietrza zmienia się w funkcji wysokości lotu. Najistotniejszą częścią pracy są jednak przykładowe obliczenia numeryczne.

Rozważane zagadnienia podejmowane były również w pracach [1, 2]. W szczególności, niniejsza praca stanowi przykład praktycznego wykorzystania ogólnego modelu ruchu programowego zawartego w pierwszej z tych prac.

2. Oznaczenia

- c_a — średnia cięciwa aerodynamiczna, m
 c_m — współczynnik aerodynamicznego momentu pochylającego
 c_{mbu} — współczynnik momentu pochylającego dla samolotu bez usterzenia wysokości
 c_{mH} — współczynnik momentu pochylającego od usterzenia wysokości
 c_x — współczynnik aerodynamicznej siły oporu samolotu
 c_z — współczynnik aerodynamicznej siły nośnej samolotu
 c_{zH} — współczynnik siły nośnej na usterzeniu poziomym
 e — odległość linii działania siły ciągu od SC samolotu, m
 g — przyspieszenie ziemskie, $m\ s^{-2}$
 h — wysokość lotu, m
 J — centralny moment bezwładności samolotu, $kg\ m^2$
 m — masa samolotu, kg
 Q — kątowna prędkość pochylania samolotu, s^{-1}
 r — promień pętli, m
 S — powierzchnia nośna samolotu, m^2
 S_H — powierzchnia nośna usterzenia poziomego, m^2
 T — wartość siły ciągu, N
 V — prędkość liniowa samolotu, $m\ s^{-1}$
 x_1, z_1 — współrzędne położenia SC samolotu w inercjalnym układzie odniesienia, m
 x_H, z_H — współrzędne położenia środka parcia sił aerodynamicznych na usterzeniu poziomym wyrażone w układzie samolotowym, m
 α — kąt natarcia samolotu, deg
 α_H — kąt natarcia na usterzeniu poziomym, deg
 γ — kąt pochylenia wektora prędkości, deg
 δ_H — kąt wychylenia steru wysokości, deg
 ε — kąt ochylenia strug na usterzeniu poziomym, deg
 η_H — współczynnik zmniejszenia ciśnienia dynamicznego na usterzeniu wysokości
 Θ — kąt pochylenia samolotu, deg
 ρ — gęstość powietrza, $kg\ m^{-3}$
 χ — kąt między wektorem siły ciągu i osią Ox układu samolotowego, deg

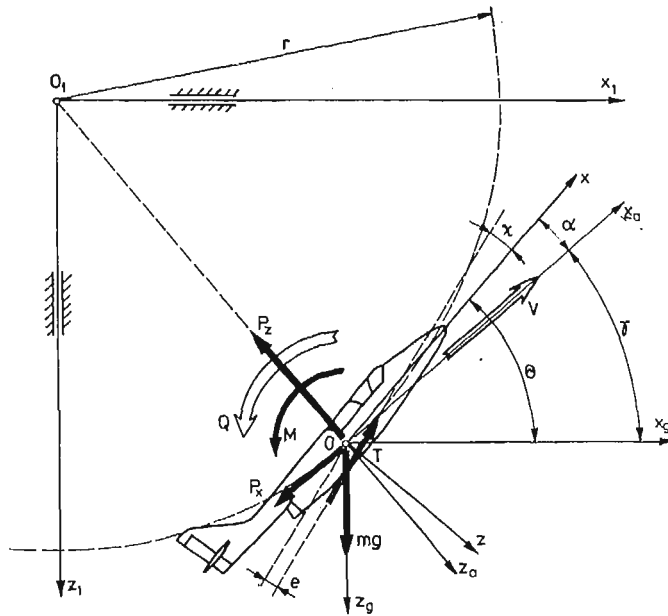
3. Warunki więzów programowych

Postulowanie stałego promienia pętli oraz stałej prędkości lotu jest równoważne z nałożeniem na układ więzów programowych o postaci:

$$f = \frac{1}{2}(x_1^2 + z_1^2) - \frac{1}{2} \cdot r^2 = 0, \quad (1)$$

$$\varphi = V - V_{ust} = C. \quad (2)$$

Jak pokazano w pracy [3], przy założeniu $f_{t=0} = 0$ oraz $\dot{f}_{t=0} = 0$, które to warunki stanowią, że początkowe wartości x_{10} , z_{10} i γ_0 są dobrane dla dowolnego punktu leżącego



Rys. 1 Geometria programowego ruchu samolotu w pętli.

na okręgu pętli (na przykład punkt A na rys. 1), więz geometryczny (1) jest równoważny jego formie różniczkowej $\dot{f} = 0$. Prowadzi to do warunku

$$\frac{m \cdot V^2}{r} - \frac{1}{2} \rho S V^2 c_z - T \cdot \sin(\alpha + \chi) + m \cdot g \cdot \cos \gamma = 0, \quad (3)$$

wyrażającego równowagę sił czynnych i bezwładności na kierunku promieniowym dla okręgu pętli. Podobnie, przy założeniu $\varphi_{t=0} = 0$, a więc $V_0 = V_{ust}$, więz w postaci kinematycznej (2) równoważny jest jego formie różniczkowej $\dot{\varphi} = 0$. Z równań ruchu samolotu pokazanych w [3] wynika, że jest to równoważne warunkowi

$$-\frac{1}{2} \rho S V^2 c_x + T \cdot \cos(\alpha + \chi) - m \cdot g \cdot \sin \gamma = 0. \quad (4)$$

Równanie powyższe oznacza równoważenie się wszystkich sił na kierunku stycznym (kierunku prędkości).

4. Równania ruchu programowego i warunki nakładane na model sterowania samolotem

Warunki więzów dynamicznych (3) i (4) wyrażają ograniczenia jakie nakładają więzy programowe na wzajemne proporcje sił wymuszających ruch samolotu. Ponieważ część tych sił (siła ciągu i aerodynamiczny moment pochylający) zależna jest od parametrów sterowania, związki te oznaczają jednocześnie warunki nakładane na model sterowania samolotu. W pracy [1] zagadnienie to zostało podjęte dla przypadku ogólnego. Poniżej przedstawione zostanie jego rozwiązanie dla przypadku pętli kołowej oraz przypadku pętli kołowej ze stałą prędkością lotu.

4.1. **Pętla kołowa.** Warunkiem, by symulowany ruch samolotu realizował ściśle pętlę kołową o zadanym promieniu r jest, ażeby w każdej chwili zachodziła równowaga sił zapisana równaniem (3). Równanie to zapisać można symbolicznie jako

$$w_1(V, \gamma, \Theta, z_1, T) = 0. \quad (5)$$

Sterowanie samolotu zamodelowano poprzez zmiany T i δ_H . Ponieważ nakładany jest tylko jeden warunek więzów, model zmian tylko jednego parametru sterowania będzie nim limitowany. Funkcja zmian drugiego parametru sterowania może być przyjęta a priori. Podobnie jak w pracy [3], odrzucono możliwość sterowania w tym przypadku wartością siły ciągu T , jako przypadek afizyczny. Na profil toru lotu samolotu wpływają bowiem przede wszystkim wychylenia sterów. Zadanie polegać więc będzie na takim doborze zmian wartości δ_H , by niezależnie od przyjętej funkcji zmian T , w każdej chwili realizowany był warunek (3).

Stosując identyczne przekształcenia jak w pracy [3], różniczkowe równania ruchu programowego zapisane mogą być w postaci:

$$\dot{V} = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho S V^2 c_x + T \cdot \cos(\alpha + \chi) - m \cdot g \cdot \sin \gamma \right), \quad (6)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{r}, \quad (7)$$

$$Q = \ddot{\alpha} + \frac{\dot{V}}{r}, \quad (8)$$

$$\dot{x}_1 = V \cos \gamma, \quad (9)$$

$$\dot{z}_1 = -V \cdot \sin \gamma, \quad (10)$$

$$\dot{\Theta} = Q. \quad (11)$$

Występująca w równaniu (8) druga pochodna kąta natarcia $\ddot{\alpha}$ jest wyznaczana z zależności

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(V, Q, \gamma, \Theta, z_1, T, \dot{T}, \ddot{T}) = \frac{b_1}{a_1}, \quad (12)$$

gdzie:

$$b_1 = \left(\frac{m}{r} - \rho S a \alpha \right) (\dot{V}^2 + V \ddot{V}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \rho}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 \right) S V^2 a \alpha - 2 \left(\frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 \alpha - \rho \dot{\alpha} \right) S V \dot{V} a + \\ - \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 S V^2 a \dot{\alpha} - (\ddot{T} - T \dot{\alpha}^2) \sin \alpha_T - 2 \dot{T} \dot{\alpha} \cos \alpha_T - m g (\dot{\gamma} \sin \gamma - \dot{\gamma}^2 \cos \gamma),$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \rho S V^2 a + T \cos \alpha_T.$$

Dla uproszczenia zapisu w powyższych związkach przyjęto:

$$a = \frac{dc_x}{d\alpha}, \quad \alpha_T = \alpha + \chi,$$

natomiast drugie pochodne \ddot{V} , \ddot{z}_1 i $\ddot{\gamma}$ zgodnie z przyjętymi równaniami ruchu (patrz [3]) otrzymać można jako:

$$\begin{aligned}\ddot{V} &= \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV^2 c_x - \rho SV \dot{V} c_x - \frac{1}{2} \rho SV^2 \frac{dc_x}{d\alpha} \dot{\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \dot{T} \cdot \cos \alpha_T - T \dot{\alpha} \sin \alpha_T - mg \dot{\gamma} \cos \gamma \right), \\ \ddot{z}_1 &= -\dot{V} \cdot \sin \gamma - V \dot{\gamma} \cos \gamma, \\ \ddot{\gamma} &= \frac{\dot{V}}{r}.\end{aligned}$$

W odróżnieniu od założeń pracy [3], przyjmowano zmienną wartość gęstości powietrza w funkcji wysokości lotu

$$\rho(z_1) = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{h_0 - z_1}{44300} \right)^{4,256}, \quad (13)$$

gdzie: $\rho_0 = 1.2258 \text{ kg m}^{-3}$ — gęstość powietrza na wysokości $h = 0$,

h_0 — wysokość położenia środka układu $0_1 x_1 y_1 z_1$.

Jak pokazano w [3] dla rozważanego przypadku oraz w [1] dla przypadku ogólnego, związek (12) otrzymuje się z warunku drugiej pochodnej po czasie równania (5), $\ddot{w}_1 = 0$. Ażebym w każdej chwili lotu warunek ten był równoważny wyjściowemu warunkowi $w_1 = 0$, spełnione muszą być odpowiednie warunki początkowe, mianowicie:

$$\begin{aligned}w_1(V_0, \gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0) &= 0, \\ \dot{w}_1(V_0, Q_0, \gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0, \dot{T}_0) &= 0.\end{aligned} \quad (14)$$

Warunki te (również warunki przy przekształceniu równania (1) do postaci (3)) nakładają odpowiednie ograniczenia na stan lotu samolotu w chwili $t = 0$.

Zbudowany model matematyczny pozwolił na wyeliminowanie z równań ruchu (6) - (11) jawnej zależności od δ_H . W przedstawionym ujęciu sterowanie jest tym samym zagadnieniem wtórnym, wynikającym z warunków nakładanych przez więzy. Było to możliwe dzięki temu, że zmiany konfiguracji samolotu (w przypadku klasycznej symulacji ruchu stanowiące odpowiedź układu na zadany model sterowania) wymuszono warunkami nakładanymi przez więzy — zmiany $\ddot{\alpha}$ według wzoru (12). Model sterowania musi więc być jedynie dobrany tak, by w każdej chwili wymuszał identyczne zmiany konfiguracji. Zgodnie z [1, 3] podstawą do wyznaczenia aktualnych wartości δ_H może być zależność

$$\frac{1}{J} \left(\frac{1}{2} \rho SV^2 c_a c_m(\alpha, Q, \delta_H) + Te \right) = \ddot{\alpha} + \frac{\dot{V}}{r}. \quad (14)$$

Na zakończenie należy dodać, że zbudowany model wymaga, by przyjęta z założenia funkcja zmian ciągu T musi być co najmniej klasy C^2 .

4.2. Pętla kołowa ze stałą prędkością lotu. Jak pokazano w rozdziale 3 zagadnienie sprowadza się do nałożenia na ruch układu więzów dynamicznych (3) i (4), które dalej oznaczane będą symbolicznie odpowiednio jako w_1 i w_2 . Ponieważ w tym wypadku ilość więzów i ilość parametrów sterowania są równe, przebiegi obydwu parametrów sterowania będą ściśle determinowane programem ruchu.

Stosując analogiczny ciąg przekształceń jak w rozdziale 4.1, poprzez różniczkowanie warunków więzów dynamicznych otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 a\alpha - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 a\dot{\alpha} - \dot{T} \cdot \sin \alpha_T - T\dot{\alpha} \cos \alpha_T - mg\dot{\gamma} \sin \gamma = 0 \\ \dot{w}_2 &= -\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 c_x - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha} + \dot{T} \cdot \cos \alpha_T - T\dot{\alpha} \sin \alpha_T - mg\dot{\gamma} \cos \gamma = 0,\end{aligned}\quad (15)$$

oraz

$$\begin{aligned}\ddot{w}_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\rho}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d\rho}{dz_1} \ddot{z}_1 \right) SV_{ust}^2 a\alpha - \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 a\dot{\alpha} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 a\ddot{\alpha} - \ddot{T} \cdot \sin \alpha_T - 2T\dot{\alpha} \cos \alpha_T + \\ &\quad - T\ddot{\alpha} \cos \alpha_T + T\dot{\alpha}^2 \sin \alpha_T - mg \cdot \dot{\gamma}^2 \cos \gamma = 0, \\ \ddot{w}_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\rho}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d\rho}{dz_1} \ddot{z}_1 \right) SV_{ust}^2 c_x - \frac{d\rho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha} \dot{\alpha} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 \frac{d^2c_x}{d\alpha^2} \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha} \ddot{\alpha} + \ddot{T} \cos \alpha_T + \\ &\quad - 2T\dot{\alpha} \sin \alpha_T - T\ddot{\alpha} \sin \alpha_T - T\dot{\alpha}^2 \cos \alpha_T + mg\dot{\gamma}^2 \sin \gamma = 0.\end{aligned}\quad (16)$$

Występujące w powyższych wielkości \ddot{z}_1 , $\dot{\gamma}$ i $\dot{\alpha}$ mają postać:

$$\ddot{z}_1 = -\frac{V_{ust}^2}{r} \cos \gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{V_{ust}}{r}, \quad \dot{\alpha} = Q - \frac{V_{ust}}{r}.$$

Postulowanie realizacji warunków (16) w dowolnej chwili czasu będzie równoważne warunkom (3) i (4) jeśli w chwili $t = 0$ spełnione będą warunki:

$$\begin{aligned}w_1(\gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0) &= 0, \\ w_2(\gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0) &= 0, \\ \dot{w}_1(Q_0, \gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0, \dot{T}_0) &= 0, \\ \dot{w}_2(Q_0, \gamma_0, \Theta_0, z_{10}, T_0, \dot{T}_0) &= 0.\end{aligned}\quad (17)$$

Zależności (16) pozwalają na określenie drugich pochodnych kąta natarcia $\ddot{\alpha}$ i siły ciągu \ddot{T} , mianowicie:

$$\ddot{T} = \ddot{T}(Q, \gamma, \Theta, z_1, T, \dot{T}) = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad (18)$$

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(Q, \gamma, \Theta, z_1, T, \dot{T}) = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad (19)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \sin \alpha_T, & a_{12} &= T \cdot \cos \alpha_T + \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 a, \\ a_{21} &= -\cos \alpha_T, & a_{22} &= T \cdot \sin \alpha_T + \frac{1}{2} \rho SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \varrho}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d}{dz_1} \ddot{z}_1 \right) SV_{ust}^2 a \alpha - \frac{d\varrho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 a \dot{\alpha} + \\
&\quad - 2T \ddot{\alpha} \cos \alpha_T + T \dot{\alpha}^2 \sin \alpha_T - mg \cdot \dot{\gamma}^2 \cos \gamma, \\
b_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dz_1^2} \dot{z}_1^2 + \frac{d\varrho}{dz_1} \ddot{z}_1 \right) SV_{ust}^2 c_x - \frac{d\varrho}{dz_1} \dot{z}_1 SV_{ust}^2 \frac{dc_x}{d\alpha} \dot{\alpha} + \\
&\quad - \frac{1}{2} \varrho SV_{ust}^2 \frac{d^2 c_x}{d\alpha^2} \dot{\alpha}^2 - 2T \dot{\alpha} \sin \alpha_T - T \dot{\alpha}^2 \cos \alpha_T + mg \dot{\gamma}^2 \sin \gamma.
\end{aligned}$$

Podstawiając $T_1 = \dot{T}$, odpowiedni układ różniczkowych równań ruchu samolotu realizującego założony program będzie mieć postać:

$$\dot{Q} = \ddot{\alpha}(Q, \gamma, \Theta, z_1, T, T_1), \quad (20)$$

$$\dot{x}_1 = V_{ust} \cdot \cos \gamma, \quad (21)$$

$$\dot{z}_1 = -V_{ust} \cdot \sin \gamma, \quad (22)$$

$$\dot{\Theta} = Q, \quad (23)$$

$$\dot{T} = T_1, \quad (24)$$

$$\dot{T}_1 = \ddot{T}(Q, \gamma, \Theta, z_1, T, T_1). \quad (25)$$

Równania te uzupełnione muszą być związkami algebraicznymi:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{V_{ust}}{r} t, \quad (26)$$

$$\alpha = \Theta - \gamma.$$

Model zmian wartości ciągu T wyznaczany będzie bezpośrednio w procesie całkowania równań ruchu (20) - (25). Aktualne wartości δ_H wyznaczane mogą być natomiast z analogicznej do (14) zależności o postaci

$$\frac{1}{J} \left(\frac{1}{2} \varrho SV_{ust}^2 c_a c_m(\alpha, Q, \delta_H) + Te \right) - \ddot{\alpha} = 0. \quad (27)$$

4.3. Inne sformułowanie zagadnienia. Zaproponowane w rozdziałach 4.1 i 4.2 modele matematyczne, niezależnie od różniczkowych równań ruchu programowego, pozwalają na wyznaczanie aktualnych wartości δ_H z odpowiednich związków algebraicznych (14) i (27). Zgodnie z [1] możliwe jest jednak inne sformułowanie zagadnienia. 3-krotne zróżniczkowanie po czasie wyjściowych zależności (3) i (4) (oczywiście przy założeniu, że $w_{t=0} = 0$, $\dot{w}_{t=0} = 0$, $\ddot{w}_{t=0} = 0$) pozwoli na otrzymanie odpowiednich związków $\ddot{w}_1 = 0$ i $\ddot{w}_2 = 0$, liniowo zależnych od δ_H i \ddot{T} . Standaryzacja tych związków względem najwyższych pochodnych parametrów sterowania oraz dołączenie (po uprzednim sprowadzeniu równań do rzędu pierwszego) do ogólnych równań ruchu samolotu, pozwoli na budowę odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego o postaci normalnej. Wektor stanu takiego układu zawierać będzie m.in. parametry sterowania, aktualne wartości których otrzymywane będą bezpośrednio w procesie całkowania numerycznego.

W rozważonym przypadku podejście takie nie jest jednak celowe. Dodatkowe różniczkowanie związków typu $\ddot{w} = 0$ znacznie bowiem komplikuje zapis matematyczny modelu.

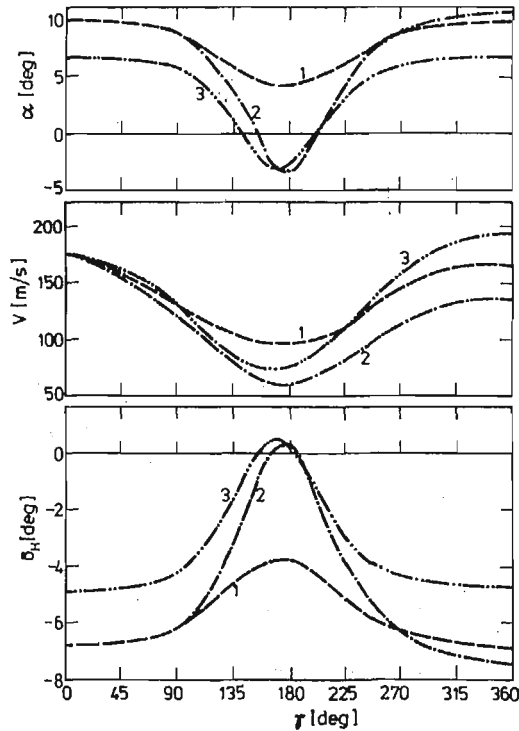
5. Obliczenia przykładowe

Obliczenia przykładowe przeprowadzone zostały dla samolotu TS-11 „Iskra”. Wszelkie dane geometryczne, masowe i aerodynamiczne dla tego samolotu przyjęte zostały za pracę [4], a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 m &= 3200 & x_H &= 4.84 & e &= 0 \\
 J &= 8000 & z_H &= 1.46 & \chi &= 0 \\
 S &= 17.5 & S_H &= 3.54 & \eta_H &= 0.9 \\
 c_a &= 1.83 & \alpha_{zH} &= -2 & g &= 9.8065 \\
 c_z &= 0.07313(\alpha + 0.456) & c_{mbu} &= -0.083 + 0.1035\alpha \\
 c_x &= 0.013 + 0.0005\alpha^2 & \varepsilon &= 0.17 + 0.3749\alpha \\
 c_{zH} &= 0.06453\alpha_H + 0.04464\delta_H
 \end{aligned}$$

W pracy przyjęty został stosunkowo prosty model oddziaływań aerodynamicznych, którego założenia zawarto w pracy [3]. Uściślenia wymaga jedynie sposób wyznaczania aerodynamicznego momentu pochylającego. Aktualną wartość współczynnika tego momentu c_m określano jako

$$c_m(\alpha, Q, \delta_H) = c_{mbu}(\alpha) + c_{mH}(\alpha, Q, \delta_H). \quad (28)$$



Rys. 2 Symulacja pętli kołowej:

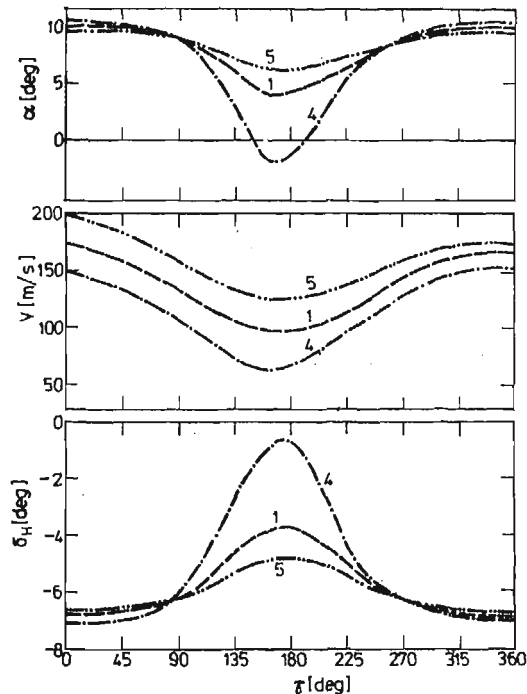
- 1) $r = 500$ m, $V_0 = 175$ m/s, $T = 8000$ N,
- 2) $r = 500$ m, $V_0 = 175$ m/s, $T = 800$ N,
- 3) $r = 750$ m, $V_0 = 175$ m/s, $T = 8000$ N.

Wartość momentu pochylającego od usterzenia poziomego (lub odpowiednio współczynnik c_{mH}) wyznaczano jako moment siły nośnej na usterzeniu względem środka masy samolotu. Zgodnie z przyjętym modelem aerodynamiki samolotu, współczynnik siły nośnej na usterzeniu c_{zH} uzależniono od wartości kąta natarcia α_H i wychylenia steru δ_H . Uwzględniano przy tym lokalne warunki opływu usterzenia, na które wpływ mają odchylenie strug za płatem, zmniejszenie ciśnienia dynamicznego oraz kątowa prędkość obrotu samolotu Q .

Przyjęty model oddziaływań aerodynamicznych jest oczywiście w znacznej mierze uproszczony. Celem podstawowym obliczeń była jedna numeryczna weryfikacja zbudowanych modeli matematycznych, a nie uzyskanie ścisłych wyników ilościowych dla tego typu samolotu.

Obliczenia przeprowadzone zostały na maszynie RIAD 32 według własnych programów w języku FORTRAN IV JS. Zaprezentowano wyniki dla ośmiu wariantów obliczeń. Warianty 1 - 5 dotyczą symulacji pętli kołowej, natomiast warianty a, b oraz c — pętli kołowej wykonywanej ze stałą prędkością lotu. Różnice pomiędzy poszczególnymi wariantami opisane są pod odpowiednimi rysunkami. We wszystkich przypadkach wprowadzenie do pętli następowało w najniższym jej punkcie (punkt A na rys. 1) na wysokości $h = 1000$ m.

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono przebiegi podstawowych parametrów symulowanego



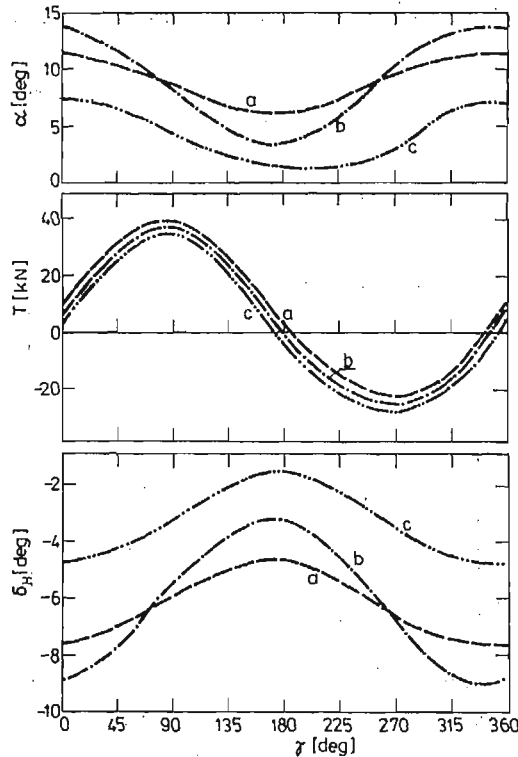
Rys. 3 Symulacja pętli kołowej:

- 1) $r = 500$ m, $V_0 = 175$ m/s, $T = 8000$ N,
- 4) $r = 500$ m, $V_0 = 150$ m/s, $T = 8000$ N,
- 5) $r = 500$ m, $V_0 = 200$ m/s, $T = 8000$ N.

ruchu z narzuconym warunkiem wykonania pętli kołowej. Przyjmowano przy tym, że wartość siły ciągu podczas całej pętli jest stała. Przebiegi zmian parametrów przedstawiono w funkcji kąta γ , który zgodnie z rys. 1 jednoznacznie wyznacza położenie środka masy samolotu na okręgu pętli. Kąt określający konfigurację samolotu w przestrzeni wyznaczany może być z drugiej zależności (26).

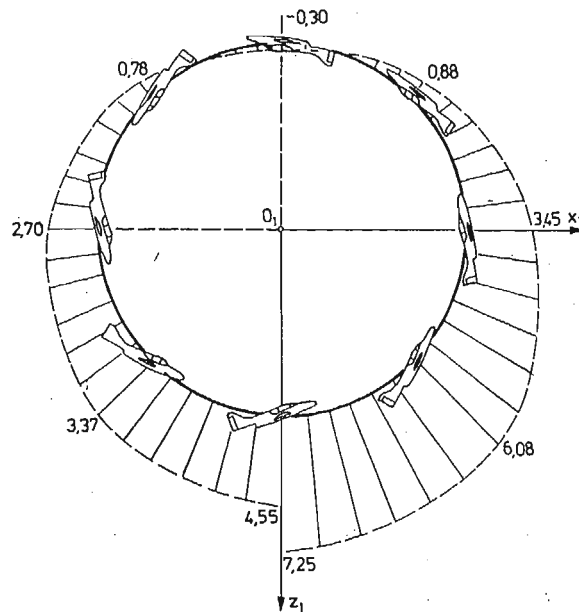
Z przedstawionych wykresów wynika, że przebieg symulowanego ruchu oraz model zmian wychylenia steru wysokości silnie zależą od początkowej prędkości lotu V_0 , narzuconego promienia pętli r oraz wartości siły ciągu $T = \text{const}$. Charakter zmian parametrów ruchu i parametru δ_H są przy tym zgodne z tym co obserwuje się w locie rzeczywistym. W punkcie szczytowym pętli zauważa się bowiem wyraźne zmniejszenie prędkości V , przejście na mniejsze wartości kątów natarcia α oraz zmniejszenie wychylenia steru wysokości δ_H . Zmiany te są szczególnie wyraźne w II i III ćwiartce pętli, czyli w zakresie kątów γ od 90° do 270° .

Na rys. 5 pokazano przebiegi podstawowych parametrów ruchu w symulowanej pętli kołowej ze stałą prędkością lotu. Podobnie jak poprzednio przebiegi te zależne są silnie od założonego promienia pętli oraz narzuconej V_{ust} . Model zmian wychyleń steru wysokości jest jakościowo zgodny z obserwowanym w rzeczywistości modelem sterowania, nato-



Rys. 4 Symulacja pętli kołowej z ustaloną prędkością lotu:

- a) $r = 500 \text{ m}$, $V_{ust} = 120 \text{ m/s}$,
- b) $r = 500 \text{ m}$, $V_{ust} = 90 \text{ m/s}$,
- c) $r = 1000 \text{ m}$, $V_{ust} = 120 \text{ m/s}$.



Rys. 5 Zmiany współczynnika przeciążenia dla wersji 2 obliczeń.

miast przebieg wymaganych zmian siły ciągu wskazuje, że rozwiązanie ma charakter czysto analityczny. Duże wartości dodatnie i przede wszystkim ujemne („ciąg odwrócony”), siły ciągu, niezbędne dla utrzymania stałej prędkości lotu wskazują, że w rzeczywistości założony program może być nie do zrealizowania. W pracy nie rozwijano jednak tego zagadnienia.

Podczas ruchu samolotu w pętli znacznym zmianom ulega również współczynnik przeciążenia. Zmiany te przedstawione zostały na rys. 5 dla wersji obliczeń nr 2.

6. Wnioski

Przedstawiona praca rozwiązuje szczególny przypadek programowego ruchu samolotu. Stanowi tym samym przykład wykorzystania ogólniejszego modelu przedstawionego w [1]. Wybór prostego przypadku lotu oraz uproszczenia modelu oddziaływań aerodynamicznych podyktowane były chęcią nieskomplikowanego podejścia do zagadnienia.

W przypadku symulacji ruchu w pętli kołowej tylko jeden z dwu zamodelowanych parametrów sterowania determinowany był warunkami wynikającymi z postulatu realizacji nałożonego więzu programowego. Jak wspomniano w niniejszej pracy oraz pokazano w pracy [3], lepiej uwarunkowane było poszukiwanie funkcji zmian δ_H jako wynikającej z warunków więzu. Tym samym funkcja zmian T przyjmowana była a priori (postawiono jedynie warunek klasy C^2 tej funkcji). Z równań ruchu samolotu wynika bowiem, że wektor ciągu jest praktycznie równoległy do wektora prędkości, ma więc znikomy wpływ na zmianę krzywizny toru ruchu. Wychylenia steru δ_H decydują natomiast o wartościach kątowej prędkości samolotu Q , a tym samym decydują o zmianach konfiguracji samolotu.

Wyznaczane warunki więzów wartości δ_H dopasowują więc tak konfigurację samolotu, by w każdej chwili siły na kierunku normalnym do toru równoważyły się (jest to warunek realizacji więzu dynamicznego).

Symulacja pętli kołowej z ustaloną prędkością lotu wykazała, że realizacja narzuconego programu (chodzi tu przede wszystkim o warunek $\dot{V} = 0$) wymaga afizycznego modelu zmian wartości siły ciągu. Uwaga ta dotyczy przede wszystkim dużych wartości ciągu wstecznego w III i IV ćwiartce pętli. Uzyskane rozwiązanie traktować należy zatem jako czysto teoretyczne. Poprawniejszym z punktu widzenia zastosowań praktycznych byłoby przyjęcie warunku zmian wartości prędkości V jako funkcji typu cosinusoidalnego w zależności od kąta γ .

We wszystkich pokazanych wariantach obliczeń parametry symulowanego ruchu oraz funkcje zmian determinowanych warunkami więzów parametrów sterowania, silnie zależały od przyjętych warunków początkowych. Jakościowy charakter tych zmian był jednak zgodny z doświadczeniami z lotu rzeczywistego.

Realizacja założonego programu nakłada warunki również na początkowe wartości wektora stanu odpowiedniego układu równań różniczkowych. Tylko część z nich dobrana może być dowolnie z punktu widzenia realizacji więzów. Oznaczało to m.in., że w chwili $t = 0$ (punkt A na rys. 1) samolot już realizował założoną pętlę.

Podjęte zagadnienie może mieć praktyczne wykorzystanie przy modelowaniu figur akrobacji lotniczej. Redefiniowania wymaga jednak przyjęty model matematyczny tak, by możliwe było formułowanie odpowiednich więzów programowych. Dotyczy to przede wszystkim zagadnienia programowego ruchu przestrzennego.

Przedstawione podejście do zagadnienia zastosowane może być również do innych układów sterowanych parametrycznie.

Literatura

1. W. BLAJER, *Wyznaczanie modelu sterowania samolotem zapewniającego ścisłą realizację ruchu programowego*, Mech. Teoret. i Stos., z 3, 1987.
2. W. BLAJER, J. MARYNIAK, J. PARCZEWSKI, *Modelowanie programowego ruchu samolotu w pętli*, zb. ref. XXV Symp. „Modelowanie w mechanice”, Gliwice-Kudowa 1986.
3. W. BLAJER, J. PARCZEWSKI, *Model matematyczny wyznaczania funkcji sterowania samolotem w pętli*, II Ogólnopolska Konf. „Mechanika w lotnictwie”, Warszawa 1986, Mech. Teoret. i Stos. z. 1 - 2, 1987.
4. Z. GORAJ, *Obliczanie sterowności, równowagi i stateczności samolotu w zakresie poddźwiękowym*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1984.

Резюме

СИМУЛИРОВАНИЕ ПРОГРАМНОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЁТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЕТЛЕ

Симулировано программное движение самолёта в вертикальной петле. Центр тяжести самолёта движется по окружности постоянного радиуса. Полёт происходит с постоянной скоростью. Получена модель управления самолётом, обеспечивает реализацию принятой программы. Самолёт представлен как жёсткий летающий объект, управляемый тягой двигателя и отклонением руля высоты. Представлены результаты вычислений на ЭВМ.

S u m m a r y

NUMERICAL SIMULATION OF AIRPLANE PROGRAMMED
MOTION IN VERTICAL LOOP

An airplane programmed motion in vertical loop has been simulated. The airplane center of gravity was demanded to describe an ideal circle, and in the other example, additionally a constant flying speed was postulated. The model of airplane control ensures that the simulated motion complies with the program constraints. The airplane was modelled as a rigid body controlled parametrically by jet thrust force and elevator deflections. Some results of numerical calculations are presented.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 kwietnia 1986 roku.

COMPLEX POTENTIALS IN TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF PERIODICALLY LAYERED ELASTIC COMPOSITES

ANDRZEJ KACZYŃSKI

Instytut Matematyki, Politechnika Warszawska

STANISŁAW J. MATYSIAK

Instytut Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

1. Introduction

The study of the behavior of stresses in periodically layered elastic composites is of importance in many engineering and geophysical applications. The problems of laminated materials have been treated by various methods (see for references, cf. [1]). One of the approaches is the linear theory of elasticity with microlocal parameters given by Woźniak [1 - 4]. This homogenized model of microperiodic multilayered bodies describes the microlocal effects, i.e. the effects due to the microperiodic structure of the body.

The aim of this paper is to adopt the complex variable method for two-dimensional problems of the periodically layered elastic composites. As a basis of the consideration we take into account the linear theory of elasticity with microlocal parameters [1 - 4]. The complex potentials are introduced for the reduction of the two-dimensional static problems of the layered periodic composites to the boundary values problems of analytical functions. The complex variable method is well-known, cf. [5] and it was applied fruitfully in the linear elasticity of anisotropic bodies, cf. [6].

In Section 2, based on the results of papers [1 - 4], the fundamental equations of the homogenized models of the periodic layered linear-elastic composites are presented for the two-dimensional static problems. The complex potentials for these equations are introduced in Section 3. In Section 4 a special example describing the stress distribution in the periodic two-layered half-space is considered. The solution of the problem is obtained for arbitrary given loads on the boundary.

2. Statement of the problem and governing equations

We consider a periodic laminated body in which every lamina is composed of two homogeneous isotropic linear-elastic layers. Let λ_1, μ_1 and λ_2, μ_2 be Lamé constants of the subsequent layers, (x_1, x_2, x_3) comprise the Cartesian coordinate system such

that the axis x_1 is normal to the layering. Let l_1, l_2 be the thicknesses of the layers, and δ be the thickness of the fundamental layer, so $\delta = l_1 + l_2$. The scheme of the open middle cross-section $B_0 \subset R^2$ of the considered body is given on Fig. 1. We assume the perfect bonding between the layers.

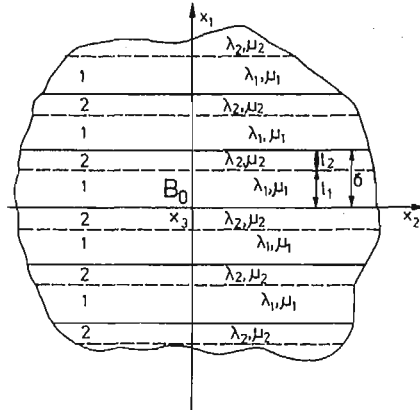


Fig. 1.

We confine attention to the two-dimensional static problems in which the displacement vector u is given in the form:

$$u(x_1, x_2) \equiv (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0).$$

To determine the stress and strain distribution in the laminated body we take into consideration the homogenized model of linear elasticity with microlocal parameters given in [1 - 4], in which the components of displacement vector is assumed as follows:

$$u_\alpha(x_1, x_2) = w_\alpha(x_1, x_2) + h(x_1)q_\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.1)$$

where $h: R \rightarrow R$ is the known a priori continuous δ -periodic function, called the shape function [1 - 4], given by:

$$h(x_1) = \begin{cases} x_1 - \frac{l_1}{2} & \text{for } x_1 \in \langle 0, l_1 \rangle \\ -\frac{\eta}{1-\eta}x_1 - \frac{l_1}{2} + \frac{l_1}{1-\eta} & \text{for } x_1 \in \langle l_1, \delta \rangle, \end{cases} \quad (2.2)$$

and $(\forall x_1 \in R), h(x_1) = h(x_1 + \delta)$, where:

$$\eta \equiv \frac{l_1}{\delta} \in (0; 1). \quad (2.3)$$

The shape function $h(\cdot)$ satisfies the conditions

$$\int_{x_1 - \delta/2}^{x_1 + \delta/2} h(t) dt = 0, \quad \forall x_1 \in R, |h(x_1)| < \delta. \quad (2.4)$$

The functions $w_\alpha(\cdot), q_\alpha(\cdot), \alpha = 1, 2$ are unknown functions of class $C^2(\bar{B}_0)$, the functions $w_\alpha(\cdot)$ are interpreted as the components of „macro”-displacement vector and the functions

$q_\alpha(\cdot)$ are called the microlocal parameters. The vector $h \cdot q$ represents the "micro-displacement vector connected with the microperiodic structure of the body.

According to the results given in [1 - 4], the governing equations of the homogenized model of the microperiodic two-layered composites under consideration in the two-dimensional static case take the following form:

$$\begin{aligned} &(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})(w_{1,11} + w_{2,21}) + \tilde{\mu}(w_{1,11} + w_{1,22}) + \\ &([\lambda] + 2[\mu])q_{1,1} + [\mu]q_{2,2} = 0, \\ &(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})(w_{1,12} + w_{2,22}) + \tilde{\mu}(w_{2,11} + w_{2,22}) + \\ &[\lambda]q_{1,2} + [\mu]q_{2,1} = 0, \\ &(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})q_1 + [\lambda](w_{1,1} + w_{2,2}) + 2[\mu]w_{1,1} = 0, \\ &\hat{\mu}q_2 + [\mu](w_{2,1} + w_{1,2}) = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \eta\lambda_1 + (1-\eta)\lambda_2, & [\lambda] &= \eta(\lambda_1 - \lambda_2), \\ \tilde{\mu} &= \eta\mu_1 + (1-\eta)\mu_2, & [\mu] &= \eta(\mu_1 - \mu_2), \\ \hat{\lambda} &= \eta\left(\lambda_1 + \frac{\eta}{1-\eta}\lambda_2\right), & \hat{\mu} &= \eta\left(\mu_1 + \frac{\eta}{1-\eta}\mu_2\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

and the comma denotes partial derivatives with respect to the coordinates x_α , $\alpha = 1, 2$.

Solving Eqs. (2.5)₃₋₄ we obtain

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{[\lambda]}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}(w_{1,1} + w_{2,2}) - \frac{2[\mu]}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}w_{1,1}, \\ q_2 &= -\frac{[\mu]}{\hat{\mu}}(w_{2,1} + w_{1,2}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Next, substitution of the microlocal parameters $q_\alpha(\cdot)$ given by Eqs. (2.7) into Eqs. (2.5)₁₋₂ yields

$$\begin{aligned} A_1 w_{1,11} + (B + C)w_{2,12} + Cw_{1,22} &= 0, \\ A_2 w_{2,22} + (B + C)w_{1,12} + Cw_{2,11} &= 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

where:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(1-\eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} > 0, \\ B &= \frac{(1-\eta)\lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta\lambda_1(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(1-\eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} > 0, \\ C &= \frac{\mu_1\mu_2}{(1-\eta)\mu_1 + \eta\mu_2} > 0, \\ A_2 &= A_1 + \frac{4\eta(1-\eta)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2)}{(1-\eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} > 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

The stresses in the subsequent layers may be obtained from the Hooke's law taking into account the displacement (2.1), the shape function $h(\cdot)$ given by (2.2) and equations (2.7). The components of stress tensor $\sigma_{\alpha\beta}^{(j)}$, where index j runs over 1, 2 and is related to

the layers of the first kind (with material constants λ_1, μ_1) and the second kind (with material constants λ_2, μ_2), can be expressed by:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(j)} &= A_1 w_{1,1} + B w_{2,2}, \\ \sigma_{12}^{(j)} &= C(w_{1,2} + w_{2,1}), \\ \sigma_{22}^{(j)} &= D^{(j)} w_{1,1} + E^{(j)} w_{2,2},\end{aligned}\quad (2.10)$$

where:

$$D^{(j)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} A_1, \quad E^{(j)} = \frac{4\mu_j(\lambda_j + \mu_j)}{\lambda_j + 2\mu_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} B. \quad (2.11)$$

Within the framework of given above homogenized model we can formulate boundary value problems for the equations (2.8) in terms of the "macro-displacements $w_\alpha(\cdot)$ " (by using Eqs. (2.10)).

3. Complex representation of the solution for the equations of homogenized model

We consider now two-dimensional problems of the "hypothetical" elastic orthotropic body which is described by strain-stress relations as follows

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= A_1 \varepsilon_{11} + B \varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= 2C \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= B \varepsilon_{11} + A_2 \varepsilon_{22},\end{aligned}\quad (3.1)$$

where:

$$\varepsilon_{11} = w_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = w_{2,2}, \quad \varepsilon_{12} = 0.5(w_{1,2} + w_{2,1}), \quad (3.2)$$

and the constants A_1, A_2, B, C are defined by (2.9).

The equilibrium equations

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0, \quad (3.3)$$

expressed in terms of w_α , (by using (3.1), (3.2)) $\alpha = 1, 2$ take the same form as equations (2.8). So, we can apply the well-known general solution of these equations given in, cf. [6], for the case of orthotropic elastic body.

If we express the components of stress tensor by the stress function $U(\cdot) \in C^4(\bar{B}_0)$.

$$\sigma_{11} = U_{,22}, \quad \sigma_{22} = U_{,11}, \quad \sigma_{12} = -U_{,12}, \quad (3.4)$$

then the equations (3.3) are satisfied identitely. Now solving equations (3.1) we have

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{A_2}{A_1 A_2 - B^2} \sigma_{11} - \frac{B}{A_1 A_2 - B^2} \sigma_{22}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{B}{A_1 A_2 - B^2} \sigma_{11} + \frac{A_1}{A_1 A_2 - B^2} \sigma_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2C} \sigma_{12}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Utilizing the strain compatibility equation

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}, \quad (3.6)$$

and equations (3.4), (3.5) we obtain the following equation for unknown function U :

$$A_1 C U_{,1111} + (A_1 A_2 - 2BC - B^2) U_{,1122} + A_2 C U_{,2222} = 0. \tag{3.7}$$

If we introduce the differential operators:

$$D_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} - s_k \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{3.8}$$

where $s_k, k = 1, 2, 3, 4$ are the roots of the characteristic equation

$$A_1 C s^4 + (A_1 A_2 - 2BC - B^2) s^2 + A_2 C = 0, \tag{3.9}$$

the equation (3.7) can be rewritten in the form

$$D_1 D_2 D_3 D_4 U = 0. \tag{3.10}$$

The solutions of characteristic equation (3.9) depend on material constants of the layers, and we can mark out two cases:

3.1. Case 1, $[\mu] \neq 0$. We assume now that $\mu_1 \neq \mu_2$. The equation (3.9) has four different pure imaginary complex roots $\pm i k_1, \pm i k_2$, where

$$k_1 = \left(\frac{A_1 A_2 - 2BC - B^2 - \sqrt{\delta_1}}{2A_1 C} \right)^{1/2},$$

$$k_2 = \left(\frac{A_1 A_2 - 2BC - B^2 + \sqrt{\delta_1}}{2A_1 C} \right)^{1/2}, \tag{3.11}$$

$$\delta_1 = (A_1 A_2 - 2BC - B^2)^2 - 4A_1 A_2 C^2 > 0.$$

By integration of the equation (3.10) we obtain the following general solution in the form

$$U(x_1, x_2) = 2\text{Re}[U_1(x_2 + i k_1 x_1) + U_2(x_2 + i k_2 x_1)]$$

$$= 2\text{Re}[U_1(z_1) + U_2(z_2)], \tag{3.12}$$

where $U_1(z_1)$ and $U_2(z_2)$ are arbitrary holomorphic functions of the complex variable $z_1 = x_2 + i k_1 x_1$ and $z_2 = x_2 + i k_2 x_1$.

Introducing the complex potentials

$$\varphi(z_1) \equiv \frac{dU_1}{dz_1},$$

$$\psi(z_1) \equiv \frac{dU_2}{dz_2}, \tag{3.13}$$

and utilizing Eqs. (3.4), (3.1) and (2.10) we obtain the complex representation for the stress components $\sigma_{11}^{(j)}$ and $\sigma_{12}^{(j)}$:

$$\sigma_{11}^{(j)} = \sigma_{11} = 2\text{Re}[\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)],$$

$$\sigma_{12}^{(j)} = \sigma_{12} = -2\text{Rei}[k_1 \varphi'(z_1) + k_2 \psi'(z_2)], \quad j = 1, 2. \tag{3.14}$$

To obtain the complex representation for the stress components $\sigma_{22}^{(j)}$ defined by (2.10)₃ we must determine the functions $w_{1,1}$ and $w_{2,2}$ by solving the following equations (we use Eqs. (3.1)_{1,3}, (3.2) and (3.14)):

$$A_1 w_{1,1} + B w_{2,2} = 2\text{Re}[\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)],$$

$$B w_{1,1} + A_2 w_{2,2} = -2\text{Re}[k_1^2 \varphi'(z_1) + k_2^2 \psi'(z_2)]. \tag{3.15}$$

After simple calculations we have functions $w_{1,1}$, $w_{2,2}$ expressed by the complex potentials and next from (2.10)₃ we obtain

$$\sigma_{22}^{(j)} = 2\operatorname{Re}[c_1^{(j)}\varphi'(z_1) + c_2^{(j)}\psi'(z_2)], \quad (3.16)$$

where:

$$c_\alpha^{(j)} = \frac{(A_2 + k_\alpha^2 B)D^{(j)} - (B + k_\alpha^2 A_1)E^{(j)}}{A_1 A_2 - B^2}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.17)$$

Finally taking into account equations (3.5), (3.1) and (3.2) we arrive at the following expressions for the "macro"-displacements w_α :

$$\begin{aligned} w_1 &= -2\operatorname{Re}[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)], \\ w_2 &= -2\operatorname{Re}[p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

where:

$$p_\alpha = \frac{A_1 k_\alpha^2 + B}{A_1 A_2 - B^2}, \quad q_\alpha = i \frac{A_2 + B k_\alpha^2}{k_\alpha (A_1 A_2 - B^2)}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.19)$$

The equations (3.18), (3.16) and (3.14) constitute the complex representation of the general solution for the homogenized model of microperiodic two-layered elastic composites presented in Section 2, in which the shear modulus μ_1, μ_2 satisfy $\mu_1 \neq \mu_2$. In this way two-dimensional problems of the composite bodies were reduced to the boundary value problems for holomorphic functions (complex potentials $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$) of complex variables, which are well-known, cf. [5], [7].

3.2. Case 2, $[\mu] = 0$. We now assume that $\mu_1 = \mu_2$. Then, from Eqs. (2.9), (3.11) it follows that

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = C, \quad A_1 = A_2 = B + 2C &= \frac{(\lambda_1 + 2C)(\lambda_2 + 2C)}{(1 - \eta)\lambda_1 + \eta\lambda_2 + 2C}, \\ \delta_1 = 0, \quad k_1 = k_2 = 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

The equation (3.9) has two double roots $\pm i$, what it means that equation (3.10) can be reduced to the biharmonic equation. The stress function $U(x_1, x_2)$ takes the Goursat's form

$$U(x_1, x_2) = \operatorname{Re}[\bar{z}U_1(z) + U_2(z)], \quad (3.21)$$

where $U_1(z)$, $U_2(z)$ are arbitrary holomorphic functions of the complex variable $z = x_2 + ix_1$. The stress function U given by (3.21) is the same as in the classical theory of elasticity, cf. [5, 7].

The "macro"-displacements w_α and components of stress tensor $\sigma_{\alpha\beta}^{(j)}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ can be written in terms of complex potentials $U_1(z)$, $U_2(z)$ and $\Phi(z) \equiv U_1'(z)$, $\Psi(z) \equiv U_2''(z)$ as follows:

$$\begin{aligned} 2C(w_2 + iw_1) &= \kappa U_1(z) - z\bar{\Phi}(z) - \bar{U}_2'(z), \\ \sigma_{11}^{(j)} &= \operatorname{Re}[2\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ \sigma_{12}^{(j)} &= \operatorname{Im}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ \sigma_{22}^{(j)} &= \operatorname{Re}[2\lambda^{(j)}\Phi(z) - \bar{z}\Phi'(z) - \Psi(z)], \end{aligned} \quad (3.22)$$

where, (see equation (3.20))

$$a^{(j)} = 1 + \frac{2C(\lambda_j + 2C - A_1)}{(A_1 - C)(\lambda_j + 2C)}, \quad j = 1, 2, \tag{3.23}$$

$$\kappa = \frac{A_1 + C}{A_1 - C}.$$

3.3. Remark. Setting $[\lambda] = 0$, $[\mu] = 0$, i.e. $\lambda_1 = \lambda_2$ and $\mu_1 = \mu_2$ we obtain the case of homogeneous isotropic linear-elastic body. From equation (3.20) and (3.23) it follows now that:

$$a^{(j)} = 1, \quad \kappa = \frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}. \tag{3.24}$$

Equations (3.22) together with (3.24) constitute the well-known complex representation of the general solution for the homogeneous isotropic linear-elastic body, [5, 7].

4. Example of application

We consider a two-layered microperiodic elastic half-space $x_1 \geq 0$, the scheme of which is given on Fig. 2. Let the half-space be loaded on the boundary $x_1 = 0$ by the force $(N(x_2), T(x_2), 0)$, where $N(x_2), T(x_2)$ are known functions described normal and tangent

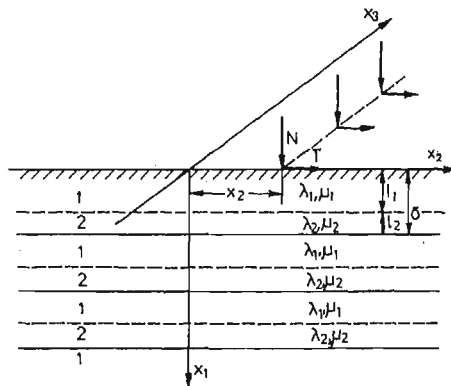


Fig. 2.

components of the force vector. The boundary conditions of equations (2.8) in this case can be written:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)}(0, x_2) &= A_1 w_{1,1}(0, x_2) + B w_{2,2}(0, x_2) = -N(x_2), \\ \sigma_{12}^{(1)}(0, x_2) &= C(w_{1,2}(0, x_2) + w_{2,1}(0, x_2)) = -T(x_2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

According to the results given in Section 3 we consider two cases:

4.1. Case 1, $[\mu] \neq 0$. Taking into account the complex representation (3.14), (3.16) and (3.18) and utilizing the solution of adequate problem for the orthotropic linear-elastic half-space $x_1 \geq 0$, [6] (with the constitutive relations given by (3.1)) we arrive at the solution:

$$\begin{aligned}\varphi(z_1) &= \frac{1}{k_1 - k_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_2 N(\xi) - iT(\xi)}{\xi - z_1} d\xi, \\ \psi(z_2) &= \frac{-1}{k_1 - k_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_1 N(\xi) - iT(\xi)}{\xi - z_2} d\xi.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Knowing the complex potentials φ and ψ we can obtain easily the "macro"-displacements w_α (by using Eqs. (3.18) and (4.2)) and stresses $\sigma_{\alpha\beta}^{(j)}$ (by using Eqs. (3.14), (3.16) and (4.2)).

4.2. Remark. If we put in equations (4.2)

$$N(x_2) = \begin{cases} \frac{P}{2\varepsilon} & \text{for } |x_2| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{for } |x_2| < \varepsilon \end{cases}, \quad T(x_2) = 0 \quad \text{for } x_2 \in R,\tag{4.3}$$

where $\varepsilon > 0$, and consider the limit case $\varepsilon \rightarrow 0$ we obtain the solution for the concentrated normal load $N(x_2) = P\delta(x_2)$ in the form:

$$\varphi(z_1) = \frac{C_1}{z_1}, \quad \psi(z_2) = \frac{C_2}{z_2},\tag{4.4}$$

where constants C_1, C_2 are given by

$$C_1 = \frac{Pk_2}{2\pi i(k_2 - k_1)}, \quad C_2 = -\frac{Pk_1}{2\pi i(k_2 - k_1)}.\tag{4.5}$$

The obtained above complex potentials φ and ψ together with equations (3.14) and (3.16) give the stress distribution consistent with the results obtained in [8] by using the Fourier transform methods.

4.3. Case 2, $[\mu] = 0$. Taking into account the complex representation (3.22) and utilizing the solution of adequate problem for the homogeneous isotropic linear-elastic half-space $x_1 \geq 0$, [5] we arrive at the solution:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(\xi) - iT(\xi)}{\xi - z} d\xi, \\ \Psi(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(\xi) + iT(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(\xi) - iT(\xi)}{(\xi - z)^2} \xi d\xi.\end{aligned}\tag{4.6}$$

In the case of the concentrated force given by Eq. (4.3), where $\varepsilon \rightarrow 0$, we obtain

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\pi z}, \quad \Psi(z) = \frac{P}{2\pi z}.\tag{4.7}$$

5. Conclusions

The presented method of complex potentials for the homogenized model of microperiodic two-layered composites is very useful and effective in two-dimensional problems. The method may be applied to solve contact problems, crack problems in the laminated bodies. It is possible to develop and adopt it for the two-dimensional problems of multi-layered microperiodic composites within the framework of the linear elasticity with microlocal parameters, [1 - 4].

References

1. S. J. MATYSIAK, Cz. WOŹNIAK, *Micromorphic effects in a modelling of periodic multilayered elastic composites*, Int. J. Engng. Sci., 25 5, 1987, 549—559.
2. Cz. WOŹNIAK, *Nonstandard analysis and microlocal effects in the multilayered bodies*, Bull. Pol. Acad. Sci., Techn. Sci., 34, 7—8, 1986, 385—392.
3. Cz. WOŹNIAK, *Homogenized thermoelasticity with microlocal parameters*, Bull. Pol. Acad. Sci., Techn. Sci., 35, 3—5, 1987, 133—143.
4. Cz. WOŹNIAK, *On the linearized problems of thermoelasticity with microlocal parameters*, Bull. Pol. Acad. Sci., Techn. Sci., 35, 3—5, 1987, 143—153.
5. Н. И. Мухелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Изд. Академии Наук СССР, Москва, 1949
6. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Изд. Наука, Москва, 1977.
7. А. И. Каландия, *Математические методы двумерной упругости*, Изд. Наука, Москва, 1973.
8. A. KACZYŃSKI, S. J. MATYSIAK, *The influence of microlocal effects on singular stress concentrations in periodic two-layered elastic composites*, Bull. Pol. Acad. Sci., Techn. Sci., 35, 7—8, 1987, 371—382.

Резюме

КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ СЛОИСТЫХ СРЕД ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В работе введено комплексные потенциалы для двумерных задач слоистых упругих сред периодической структуры рассмотренных в рамках модели Возняка линейной теории упругости с микролокальными параметрами.

Streszczenie

POTENCJAŁY ZESPÓŁONE W DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIENIACH KOMPOZYTÓW WARSTWOWYCH O STRUKTURZE PERIODYCZNEJ

W ramach modelu Woźniaka liniowej teorii sprężystości z mikrolokalnymi parametrami wprowadzono zespoloną reprezentację dla dwuwymiarowych zagadnień kompozytów warstwowych o strukturze periodycznej.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 listopada 1986 roku.

ROZWIĄZYWANIE PROBLEMÓW QUASI-STATYCZNEJ SPRĘŻYSTO-LĘPKOPLASTYCZNOŚCI ZE WZMOCNIENIEM KINEMATYCZNYM

MACIEJ BANYS

Politechnika Wroclawska

1. Wstęp

Dotychczasowe rozwiązywanie metodą elementów skończonych quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności w zakresie małych odkształceń oparte było na procedurach z ograniczoną stabilnością ze względu na krok czasu. W kolejnych artykułach [2], [8] przedstawiona została procedura Eulera oraz warunki dla kroku czasowego w celu zachowania stabilności. Podobne ograniczenia występują dla procedury początkowych obciążeń [1] z bezwarunkową stabilnością dla parametru aproksymacji $\theta = 1$. W pracy [3] przedstawiono procedurę Newtona-Raphsona bezwarunkowo stabilną dla $\theta \geq \frac{1}{2}$. Z wyjątkiem procedury Eulera dla $\theta = 0$ rozważania dotyczyły sprężysto-lepkoplastyczności bez wzmocnienia. Wiele materiałów wykazuje jednak równocześnie wrażliwość na prędkość odkształceń niesprężystych $\dot{\epsilon}^a$ jak i samo odkształcenie niesprężyste ϵ^a . Stąd potrzeba stosowania bardziej nieliniowych praw płynięcia. Ogólnie możemy zapisać tę zależność w postaci macierzowej:

$$\dot{\epsilon}^a = f(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}^a) \quad (1.1)$$

gdzie $\underline{\sigma}$ jest wektorem naprężeń.

Podejście sprężysto-lepkoplastyczne pozwala na uzyskiwanie rozwiązań sprężysto-plastyczności jako stanów ustalonych dla dużych czasów [8]. Taki sposób rozwiązywania ma charakter metody relaksacji dynamicznej. Czas gra rolę fikcyjnego parametru. Prowadzi to do uzyskania rozwiązania związanego ze spełnieniem warunku plastyczności.

2. Wzmocnienie kinematyczne

Ograniczymy się do przypadku wzmocnienia kinematycznego [5], dla którego wprowadza się naprężenie względne $\underline{\sigma}_k$ postaci

$$\underline{\sigma}_k = \underline{\sigma} - c \cdot \underline{\underline{III}} \cdot \underline{\epsilon}^a, \quad (2.1)$$

gdzie c jest stałą wzmocnienia.

Ponieważ stosujemy odkształcenie tzw. inżynierskie

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

stąd musimy wprowadzić diagonalną macierz $\underline{\text{III}}$ dla trójwymiarowego stanu naprężenia:

$$\underline{\text{III}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sym.} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Warunek plastyczności ma postać dla granicy plastyczności σ_0 przy rozciąganiu

$$\sigma_{kint} = \sigma_0, \quad (2.2)$$

gdzie:

$$\sigma_{kint} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}_k^T \underline{S}_D \underline{\text{II}} \underline{S}_D \underline{\sigma}_k}. \quad (2.3)$$

Iloczyn $\underline{S}_D \underline{\sigma}_k = \underline{S}_k$ stanowi dewiator naprężenia względnego, a macierz \underline{S}_D jest postaci:

$$\underline{S}_D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sym.} & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Wprowadzenie macierzy diagonalnej $\underline{\text{II}}$ o postaci podobnej do macierzy $\underline{\text{III}}$, gdzie w miejsce

$\frac{1}{2}$ należy podstawić 2, wynika z ograniczenia się do wektorów sześcioelementowych.

Zgodnie z koncepcją materiałów statecznych lepkoplastycznych [5] możemy zapisać prawo konstytutywne w postaci

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^a = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad (2.4)$$

gdzie γ jest lepkością,

$F = \frac{f}{\sigma_0} - 1$ określa statyczny warunek plastyczności, a

$$f = \sigma_{kint} \quad (2.5)$$

dla wzmocnienia kinematycznego.

Symbol $\langle \Phi \rangle$ oznacza próg, powyżej którego wystąpią odkształcenia niesprężyste tzn:

$$\langle \Phi \rangle = \begin{cases} \Phi & \text{dla } \Phi \geq 0 \\ 0 & \text{dla } \Phi < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Funkcję $\Phi(F)$ można przyjmować w różnej postaci [5] najczęściej jednak stosuje się funkcję potęgową $\Phi(F) = F^n$. Zgodnie z (2.4) i (2.5) możemy obliczyć pochodne cząstkowe i zapisać

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^a = \frac{3}{2} \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{II S_D \sigma_k}{\sigma_{klnt}}. \quad (2.7)$$

Taka postać równania konstytutywnego gwarantuje nieściśliwość w zakresie niesprężystym, co jest potwierdzone doświadczalnie dla metali.

3. Metoda Newtona-Raphsona

Oznaczmy dla wygody przyrosty zmiennej $\underline{\sigma}$ w przyroście

$$\delta \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{\sigma}_{n+1}^{i+1} - \underline{\sigma}_n, \quad (3.1)$$

oraz przyrosty zmiennej $\underline{\sigma}$ w iteracji:

$$\Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{\sigma}_{n+1}^{i+1} - \underline{\sigma}_{n+1}^i. \quad (3.2)$$

Ponieważ (1.1) jest określone postacią różniczkową możemy przyjąć, że

$$\delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai} = \dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{a(i+1)} \cdot \delta t_{n+1}, \quad (3.3)$$

gdzie $0 \leq \Theta \leq 1$ jest parametrem aproksymacji liniowej postaci

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{n+\Theta}^{i+1} &= (1-\Theta) \cdot \underline{\sigma}_n + \Theta \cdot \underline{\sigma}_{n+1}^{i+1}, \\ \underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{a(i+1)} &= (1-\Theta) \cdot \underline{\varepsilon}_n^a + \Theta \cdot \underline{\varepsilon}_{n+1}^{a(i+1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Natomiast:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{a(i+1)} = \dot{\underline{\varepsilon}}^a(\underline{\sigma}_{n+\Theta}^{i+1}; \underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{a(i+1)}). \quad (3.5)$$

Aby obliczyć nieznanne z góry wartości $\underline{\sigma}_{n+\Theta}^{i+1}$, $\underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{a(i+1)}$, rozwińmy $\dot{\underline{\varepsilon}}^a$ w szereg Taylora względem pierwszych pochodnych

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{a(i+1)} = \dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{ai} + \Theta \cdot \left. \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{aT}}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{n+\Theta}^i \cdot \Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i + \Theta \cdot \left. \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{aT}}{\partial \underline{\varepsilon}^a} \right|_{n+\Theta}^i \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai}, \quad (3.6)$$

wykorzystując zależność:

$$\Delta \underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{ai} = \Theta \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai} \quad \text{oraz} \quad \Delta \underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{a(i+1)} = \Theta \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{a(i+1)}.$$

Łącząc (3.6) z (3.3) otrzymujemy

$$\delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai} = \underline{G}^{-1} \cdot (\dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{ai} + \Theta \cdot \underline{P}_\sigma \cdot \Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i - \Theta \cdot \underline{P}_\varepsilon \cdot \delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{a(i-1)}) \cdot \delta t_{n+1}, \quad (3.7)$$

gdzie:

$$\underline{G} = \underline{I} - \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \underline{P}_\varepsilon.$$

Dla wygody wprowadziliśmy oznaczenia:

$$\underline{P}_\sigma = \left. \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{aT}}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{n+\Theta}^i \quad \text{oraz} \quad \underline{P}_\varepsilon = \left. \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{aT}}{\partial \underline{\varepsilon}^a} \right|_{n+}$$

Ogólne równanie konstytutywne dla sprężystości przy założeniu addytywności odkształceń sprężystych i niesprężystych ma postać w wersji przyrostowej

$$\delta \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{D} \cdot (\delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^i - \delta \varepsilon_{n+1}^{ai}), \quad (3.8)$$

gdzie \underline{D} jest macierzą sprężystości.

Podstawiając (3.7) do (3.8) i przekształcając względem $\delta \underline{\sigma}_{n+1}^i$ otrzymujemy:

$$\Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{D} \underline{B} \delta \underline{u}_{n+1}^i - \underline{D}^* \cdot (\underline{\varepsilon}_{n+\theta}^{ai} \cdot \delta t_{n+1} + \underline{D}^{-1} \cdot \delta \underline{\sigma}_{n+1}^{i-1} - \delta t_{n+1} \cdot \Theta \cdot \underline{P}_\varepsilon \cdot \delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{i-1}) \quad (3.9)$$

gdzie $\hat{\underline{D}}$ jest macierzą sprężysto-lepkoplastyczną z uwzględnieniem wzmocnienia kinematycznego

$$\hat{\underline{D}} = \underline{G}^T \cdot (\underline{G} \cdot \underline{D}^{-1} \cdot \underline{G}^T + \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \underline{P}_\sigma \cdot \underline{G}^T)^{-1} \cdot \underline{G} = \underline{D}^* \cdot \underline{G}, \quad (3.10)$$

a macierz

$$\underline{D}^* = (\underline{G} \cdot \underline{D}^{-1} + \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \underline{P}_\sigma)^{-1}. \quad (3.11)$$

W równaniu (3.9) pojawia się macierz odkształceń \underline{B} związana z dyskretyzacją kontinuum, łącząca odkształcenia z przemieszczeniami węzłów.

Zwróćmy uwagę na fakt, że w równaniu (3.9) znamy wszystkie wielkości z wyjątkiem $\Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i$ oraz $\delta \underline{u}_{n+1}^i$.

Dołączmy do tego równania równanie równowagi postaci

$$\int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}_{n+1}^i \cdot dV = \underline{R}_{n+1}, \quad (3.12)$$

gdzie \underline{R}_{n+1} jest wartością obciążeń węzłowych oraz sprowadzonych do węzłów sił masowych i sił od odkształceń początkowych w $(n+1)$ -szym przyroście czasu.

Podstawiając (3.9) do równania równowagi otrzymujemy

$$\underline{K}_{n+\theta}^i \cdot \delta \underline{u}_{n+1}^i = \underline{R}_{n+1} + \underline{J}_{n+\theta}^i, \quad (3.13)$$

gdzie:

$$\underline{K}_{n+\theta}^i = \int_V \underline{B}^T \cdot \hat{\underline{D}} \cdot \underline{B} \cdot dV \quad (3.14)$$

jest macierzą sztywności sprężysto-lepkoplastyczną,

$$\underline{J}_{n+\theta}^i = \int_V \underline{B}^T \cdot [\underline{D}^* \cdot (\underline{\varepsilon}_{n+\theta}^{ai} \cdot \delta t_{n+1} + \underline{D}^{-1} \cdot \delta \underline{\sigma}_{n+1}^{i-1} - \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \underline{P}_\varepsilon \cdot \delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{i-1}) - \underline{\sigma}_{n+1}^i] dV \quad (3.15)$$

i gra rolę sił początkowych korygujących rozwiązanie. Połączenie równań (3.9) i (3.13) oraz (3.8) daje procedurę Newtona-Raphsona względem zmiennych \underline{u} , $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}^a$ i umożliwia efektywne rozwiązanie zadanego problemu sprężysto-lepkoplastyczności oraz sprężysto-plastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym.

Poniżej przedstawiony zostanie algorytm analizowanej procedury typu Newtona-Raphsona. W algorytmie występują następujące oznaczenia:

$$\|\underline{x}\| = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

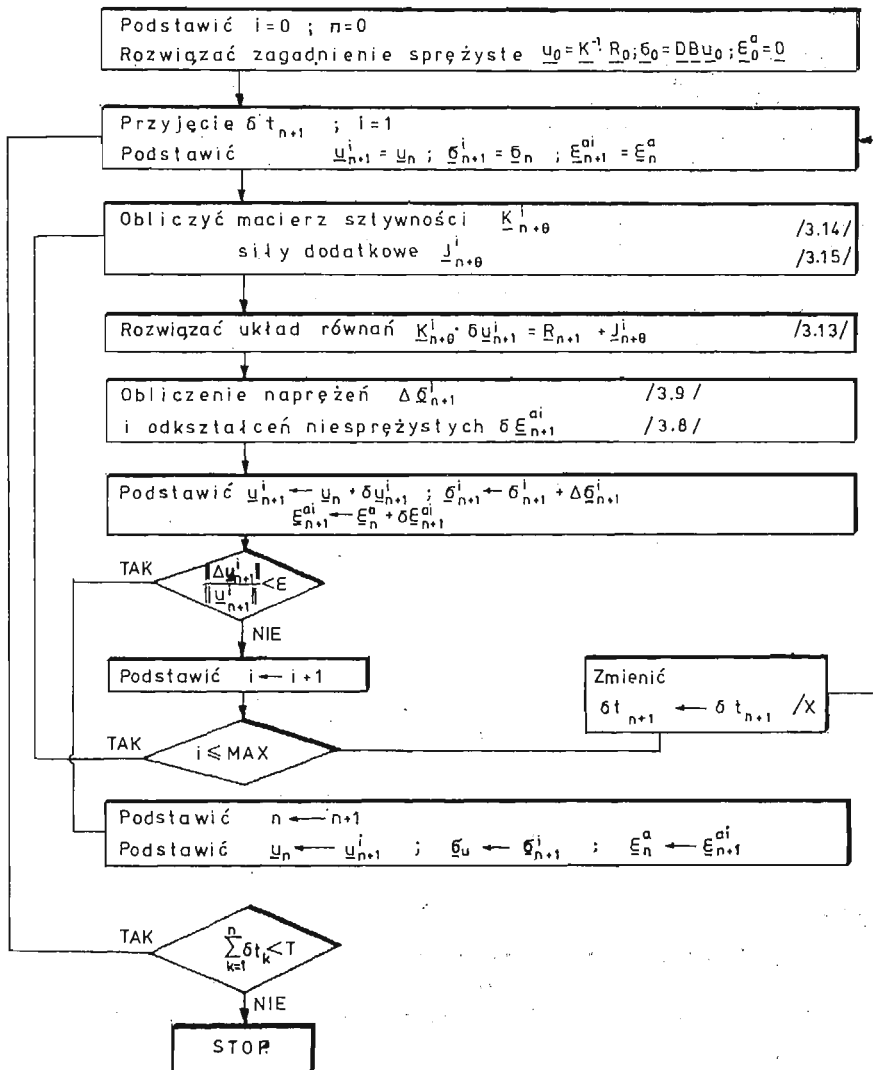
e — dokładność obliczeń w przyroście,

MAX — maksymalna liczba iteracji w przyroście,

T — całkowity czas obciążenia kontinuum.

X — liczba zmniejszająca przyrost czasu.

Algorytm procedury iteracyjno przyrostowej



Rys. 1.

W programie dodatkowo jest wbudowany segment, który umożliwia zwiększenie długości kroku czasowego δt o ile liczba iteracji w przyroście jest wystarczająco mała.

Rozpatrzmy pewne szczególne przypadki powyższego algorytmu.

a) Weźmy pod uwagę zależność (1.1) bez wzmocnienia tzn. $\dot{\epsilon}^a = f(\sigma)$. Wówczas $\frac{\partial \dot{\epsilon}^a}{\partial \epsilon^a} = 0$ i stąd macierz $\underline{G} = \underline{I}$ oraz $\hat{\underline{D}} = \underline{D}^* = (\underline{D}^{-1} + \theta \cdot \delta t \cdot \underline{P}_\sigma)^{-1}$. Taki algorytm przedstawiono w pracy [3]. Zasadnicza różnica, związana z uwzględnieniem umocnienia tkwi w postaci macierzy \underline{G} . Ponieważ materiał określony jest stowarzyszonym prawem płynięcia, stąd

$\left\| \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\sigma}} \right\| > 0$ i dla wzmocnienia, gdy $c > 0$ $\left\| \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\varepsilon}^a} \right\| \leq 0$. Stąd wniosek, że zarówno macierz

\underline{G} jak i $\underline{\hat{D}}$ nie będą osobliwe.

b) Zanalizujmy wpływ parametru aproksymacji. Jeśli $\Theta = 0$, to $\underline{\sigma}_{n+\Theta} = \underline{\sigma}_n$; $\underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^a = \underline{\varepsilon}_n^a$. Stąd $\underline{G} = \underline{I}$ oraz $\underline{D} = \underline{\hat{D}} = \underline{D}^*$. Macierz sztywności $\underline{K}_{n+\Theta}^i = \underline{K}$ jest stała i sprężysta. Jest to algorytm Eulera [2] warunkowo stabilny ze względu na przyrost czasu. Procedura iteracyjno-przyrostowa upraszcza się do przyrostowej. Dla $\Theta \neq 0$ mamy metodę typu implicit.

c) Istnieją różne modyfikacje procedury Newtona-Raphsona [4], które są możliwe do zastosowania również w powyższym algorytmie. Często jest stosowana modyfikacja polegająca na pozostawieniu niezmienionej macierzy sztywności \underline{K}_n w trakcie iteracji ze zmianą w przyroście. Taka modyfikacja ma charakter połączenia metody Newtona-Raphsona z metodą początkowych obciążeń.

4. Określenie macierzy występujących przy wzmocnieniu kinematycznym

Do obliczenia macierzy sztywności (3.14) oraz macierzy „wzmocnienia” \underline{G} są potrzebne odpowiednie pochodne cząstkowe. Mają one następującą postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\sigma}} &= \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\sigma_{kInt}} \cdot \underline{H} = \beta_1 \cdot \underline{H}, \\ \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\varepsilon}^a} &= -\frac{3}{2} \frac{c\gamma}{\sigma_{kInt}} \cdot \underline{III} \cdot \underline{H} = \beta_2 \cdot \underline{III} \cdot \underline{H}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \underline{S}_D \cdot \underline{II} \cdot (\langle \Phi(F) \rangle \cdot \underline{I} + \alpha \cdot \underline{\sigma}_k \cdot \underline{\sigma}_k^T \cdot \underline{II} \cdot \underline{S}_D), \\ \alpha &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{kInt}} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial F} \cdot \frac{1}{\sigma_0} - \langle \Phi(F) \rangle \cdot \frac{1}{\sigma_{kInt}} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Zanalizujemy własności symetrii macierzy $\underline{\hat{D}}$. Macierz \underline{H} jest macierzą symetryczną, ponieważ iloczyny $\underline{S}_D \cdot \underline{II}$ i $\underline{S}_D \cdot \underline{II} \cdot \underline{\sigma}_k \cdot \underline{\sigma}_k^T \cdot \underline{II} \cdot \underline{S}_D$ mają tę własność. Z kolei we wzorze

(3.10) występuje iloczyn macierzy $\frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \left(\underline{I} - \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\varepsilon}^a} \right)^T$. Własność symetrii

ma iloczyn $\frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\varepsilon}^a} = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \underline{H}^T \cdot \underline{III} \cdot \underline{H}$. Z powyższych własności wynika, że macierz sprężysto-lepkoplastyczna dla wzmocnienia kinematycznego jest symetryczna.

5. Stabilność procedury numerycznej

Ponieważ metoda Newtona-Raphsona jest zbieżna [1], [4] z wyjątkiem „patologicznych” przypadków, dlatego też należy określić jedynie jej stabilność.

Zapiszemy w wersji różniczkowej równania konstytutywne i równowagi wykorzystując model lepkoplastyczny ze wzmocnieniem kinematycznym

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\sigma}} &= \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \dot{\underline{u}} - \underline{D} \dot{\underline{\varepsilon}}^a, \\ \int_V \underline{B}^T \cdot \dot{\underline{\sigma}} \cdot dV &= \dot{\underline{R}}.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Łącząc oba równania otrzymujemy:

$$\int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dV \cdot \dot{\underline{u}} = \dot{\underline{R}} + \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a \cdot dV,$$

stąd:

$$\dot{\underline{u}} = \underline{K}^{-1} \cdot \left(\dot{\underline{R}} + \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a \cdot dV \right), \quad (5.2)$$

gdzie:

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dV.$$

Przy zastosowaniu N punktów Gaussa w całkowaniu numerycznym

$$\int_V f \cdot dV = \sum_{i=1}^N w_i \cdot f_i \quad \text{oraz} \quad w_j > 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Łącząc zależności (5.1) i (5.2) dla wszystkich punktów Gaussa otrzymujemy

$$\dot{\underline{\Sigma}} = \underline{\bar{D}} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \left(\dot{\underline{R}} + \underline{\bar{B}}^T \cdot \underline{\bar{D}} \cdot \underline{W} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a \right) - \underline{\bar{D}} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a, \quad (5.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma} &= (\underline{\sigma}_1^T, \dots, \underline{\sigma}_N^T)^T; \quad \underline{\varepsilon}^a = (\underline{\varepsilon}_1^{aT}, \dots, \underline{\varepsilon}_N^{aT})^T, \\ \underline{B} &= [\underline{B}_1^T, \dots, \underline{B}_N^T]^T, \\ \underline{\bar{D}} &= \begin{bmatrix} \underline{D}_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{D}_N \end{bmatrix}, \quad \underline{W} = \begin{bmatrix} w_1 \cdot \underline{I} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & w_N \cdot \underline{I} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Wprowadzając wzmocnienie kinematyczne poprzez naprężenie względne (2.1) możemy zapisać

$$\dot{\underline{\Sigma}}_k = \dot{\underline{\Sigma}} - c \cdot \underline{\bar{\Pi}} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a. \quad (5.4)$$

Zapiszemy równanie (2.7) w postaci

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^a = \underline{\Gamma} \cdot \underline{\sigma}_k \quad \text{lub} \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^a = \underline{\bar{\Gamma}} \cdot \underline{\Sigma}_k, \quad (5.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\underline{\Gamma} &= \frac{3}{2} \gamma \langle \Phi(F) \rangle \cdot \frac{\underline{\Pi} \cdot \underline{S}_D}{\sigma_{kint}}, \\ \underline{\bar{\Gamma}} &= \begin{bmatrix} \underline{\Gamma}_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{\Gamma}_N \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Wprowadzając powyższe równania do (5.3) otrzymamy

$$\dot{\underline{\Sigma}}_k = \underline{\bar{S}}_k \cdot \underline{W} \cdot \underline{\bar{\Gamma}} \cdot \underline{\Sigma}_k + \underline{\dot{T}}, \quad (5.6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\underline{\bar{S}}_k &= \underline{\bar{D}} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \underline{\bar{B}}^T \cdot \underline{\bar{D}} - (\underline{\bar{D}} + c \cdot \underline{\bar{I}}) \cdot \underline{W}^{-1}, \\ \underline{\dot{T}} &= \underline{\bar{D}} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \dot{\underline{R}}.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Sprowadziliśmy więc układ równań (5.1) do nieliniowego układu równań różniczkowych zwyczajnych względem $\underline{\sigma}_k$, tzn. $\dot{\underline{\Sigma}}_k = f(\underline{\Sigma}_k)$. Przy braku wzmocnienia dla $c = 0$ powyższy układ sprowadza się do wyprowadzonego w pracy [2]. Na wstępie musimy określić pewne własności macierzy w (5.6). Analizując macierz $\underline{\bar{S}}_k$ (5.7) oraz macierz $\underline{\bar{S}}_k = \underline{\bar{S}}$ bez wzmocnienia zauważamy, że

$$\underline{\bar{S}}_k = \underline{\bar{S}} - c \cdot \underline{\bar{\Pi}} \cdot \underline{W}^{-1}. \quad (5.8)$$

Jak stwierdzono w pracach [2], [3] macierz $\underline{\bar{S}}$ jest niedodatnio określona. Ze względu na charakter dodatnio określonej macierzy diagonalnej wag \underline{W} możemy wnioskować, że dla wzmocnienia, gdy $c > 0$, $\|c \underline{\bar{\Pi}} \underline{W}^{-1}\| > 0$. Oczywiście iloczyn $c \underline{\bar{\Pi}} \underline{W}^{-1}$ daje macierz symetryczną. Stąd wniosek, że $\underline{\bar{S}}_k$ jest macierzą symetryczną, niedodatnio określoną, rzeczywistą. Analizując równanie (5.5) możemy stwierdzić, że macierz $\underline{\Gamma}$ jest symetryczna, nieujemnie określona. Praktycznie macierz ta jest osobliwa jedynie w przypadku spełnienia warunku plastyczności. Ten warunek zostaje osiągnięty asymptotycznie jako rozwiązanie stacjonarne dla dużych czasów. Wynika to z niedodatniej określoności iloczynu $\underline{\bar{S}}_k \underline{W} \underline{\Gamma}$. Wówczas wartości własne $\lambda_k \leq 0$, co zapewnia asymptotyczną stabilność. Analiza stabilności numerycznej może być przeprowadzona w identyczny sposób jak w pracy [3], ponieważ macierze mają te same własności dla wzmocnienia kinematycznego, jak i bez wzmocnienia co pokazano powyżej.

Rozwiązanie w naprężeniach względnych $\underline{\Sigma}_k$ równania (5.6) można zapisać następująco

$$\underline{\Sigma}_{k(n+1)} = \underline{\Sigma}_{kn} + \delta t_{n+1} \cdot \underline{\bar{S}}_k \underline{L}_{n+\theta} \cdot \underline{\Sigma}_{k(n+\theta)}, \quad (5.9)$$

gdzie; $\underline{L} = \underline{W} \cdot \underline{\Gamma}$,

n — oznacza przyrost,

θ — jest parametrem aproksymacji liniowej.

Ostatecznie otrzymuje się identyczne kryterium stabilności postaci

$$\left| \frac{1 + \delta t_{n+1} \cdot (1 - \theta) \cdot \lambda_k^i}{1 - \delta t_{n+1} \cdot \theta \cdot \lambda_k^i} \right| \leq 1, \quad (5.10)$$

gdzie λ_k^i jest i -tą wartością własną macierzy $\underline{L} \underline{S}_k \underline{L}$.

Stąd wniosek, że dla $\theta \geq \frac{1}{2}$ warunek (5.10) zawsze będzie spełniony i otrzymamy algorytm z bezwarunkową stabilnością. Dla $\theta < \frac{1}{2}$ otrzymamy

$$\delta t_{n+1} \leq \frac{2}{(1 - 2\theta) \cdot \lambda} \quad (5.11)$$

gdzie $\lambda = \max |\lambda_k^i|$. Ponieważ λ_k^i zależy zarówno od $\underline{\Sigma}_{kn}$, jak i od $\underline{\Sigma}_{k(n+1)}$ (z wyjątkiem procedury Eulera dla $\theta = 0$) wówczas nie można z góry określić warunku (5.11).

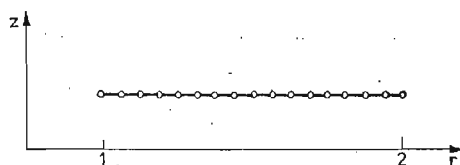
6. Zastosowania numeryczne

Do obliczeń wybrano przykład rury grubościennej i zbiornika kulistego obciążonych ciśnieniem wewnętrznym. Przykłady te są rozwiązane w literaturze, dlatego jest możliwe porównanie wyników. W obu wypadkach zastosowano prawo konstytutywne lepkoplastyczne postaci (2.7) z funkcją potęgową $\Phi(F) = F^n$.

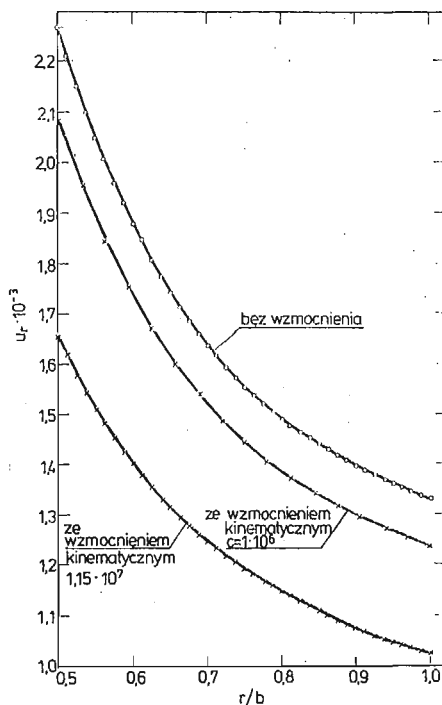
6.1. Nieskończenie długa rura grubościenna. Przykład ten zanalizowano w pracy [3] dla lepkoplastyczności bez wzmocnienia.

Dane materiałowe:

moduł Younga	$E = 3 \cdot 10^7$
ułamek Poissona	$\nu = 0.3$
granica plastyczności	$\sigma_0 = 3 \cdot 10^4$
wskaźnik potęgowania	$n = 1.$
lepkość	$\gamma = 1 \cdot 10^{-8}$
współczynnik wzmocnienia	$c = 1.15 \cdot 10^7$
	$c = 4.5 \cdot 10^6$
	$c = 1 \cdot 10^6$



Rys. 2. Rura grubościenna. Dyskretyzacja.



Rys. 3. Rura grubościenna. Wykresy przemieszczeń u_r , r — oznacza promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7];

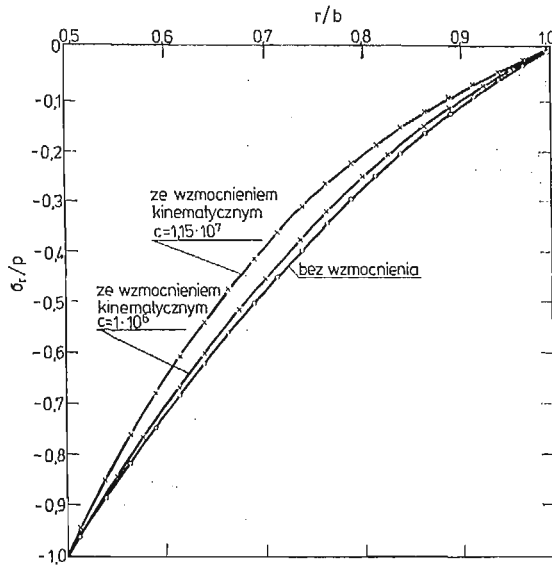
- + — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów; wartości przemieszczenia w węzłach elementów; $c = 10^6$,
- obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 20 elementów; wartości przemieszczenia w węzłach elementów; $c = 10^6$,
- o — bez wzmocnienia,
- + — ze wzmocnieniem kinematycznym $c = 1,15 \cdot 10^7$.

Zastosowano osiowo-symetryczne trójwęzłowe elementy Lagrange'a z ograniczoną możliwością odkształceń $\varepsilon_z = 0$ w kierunku osi symetrii oraz całkowanie numeryczne dwupunktowe kwadraturą Gaussa. Dyskretyzowano przekrój na 8 i 20 elementów otrzymując odpowiednio 17 i 41 węzłów. Wykonane obliczenia miały na celu potwierdzenie rozważań teoretycznych, związanych z bezwarunkową stabilnością dla $\Theta \geq \frac{1}{2}$ i dowolnie dużych przyrostów czasu δt oraz uzyskanie rozwiązań dla pośrednich czasów. Ponieważ można uzyskać rozwiązanie sprężysto-plastyczne dla dużych czasów, z tego więc względu przyjęto przyrost czasu $\delta t = 10^{10}$ (przebadano również większe przyrosty czasu $\delta t \leq 10^{12}$ uzyskując te same wyniki). Rozwiązaniem startowym było rozwiązanie „czysto” sprężyste. Dla różnych wartości parametru aproksymacji Θ testowano zacieranie się procedur. Podobnie jak w przypadku bez wzmocnienia [3] dla $\Theta \geq \frac{1}{2}$ algorytm miał bezwarunkową stabilność, jednakże dokładność zależała od wartości przyrostu czasu δt . Dla $\Theta = 1$ niezależnie od wielkości δt otrzymano bardzo dokładne wyniki dla stanu ustalonego zarówno dla naprężeń jak i przemieszczeń (Rys. 3÷6). Pominięcie wpływu $\frac{\partial \dot{\varepsilon}^a}{\partial \varepsilon^a}$ w procedurze, co odpowiada stosowaniu metody początkowych obciążeń względem ε^a , powoduje znaczne błędy w obliczeniach dla dużych δt . Dla małych δt zmniejsza się ten wpływ w macierzy „wzmocnienia” \underline{G} i tym samym błędy maleją. Jednakże dla obliczeń sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem, gdy jest wymagany duży krok czasu δt , powinno stosować się przedstawioną procedurę. Wykonano obliczenia bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym dla różnych współczynników (Rys. 3÷6). W zakresie bez wzmocnienia wyniki porównano z zamieszczonymi w pracach [6], [7] z odpowiednimi ułamkami Poissona, tzn. $\nu = 0.3$, $\nu = 0.25$. Otrzymano bardzo dobre wyniki.

W pracy [7] przedstawiono rozwiązywanie zagadnienia sprężysto-plastycznej rury ze wzmocnieniem liniowym. W celu sprawdzenia wyników równań różniczkowych zwyczajnych wyprowadzony w powyższej pracy rozwiązaliśmy metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. We wszystkich przypadkach zgodność wyników jest bardzo dobra i praktycznie dla 8 elementów warunek plastyczności jest spełniony idealnie w każdym punkcie Gaussa. Dla $\Theta = 1$ już w drugim przyroście osiąga się stan ustalony. Liczba iteracji nie przekraczała pięciu. Oczywiście również w zakresie przemieszczeń zgodność jest bardzo dobra z błędem poniżej 0.03%.

6.2. Grubościenny zbiornik kulisty. Zastosowano trójwęzłowe elementy Lagrange'a oraz dwupunktową kwadraturę Gaussa do całkowania numerycznego. Dane materiałowe przyjęto takie same jak w przypadku rury grubościennej (pkt. 6.1.) Ciśnienie wewnętrzne było stałe i wynosiło $p = 40000$. Obliczenia wykonano dla 8 elementów z 17 węzłami. Podobnie jak w poprzednim przykładzie otrzymano bardzo dokładne wyniki dla $\Theta = 1$ niezależnie od wielkości przyrostu δt . Dla mniejszych wartości $\Theta \in \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ pomimo bezwarunkowej stabilności dokładność pogarszała się. Dla $\Theta = 0$ warunkowo stabilna procedura zmuszała do stosowania dużej liczby przyrostów.

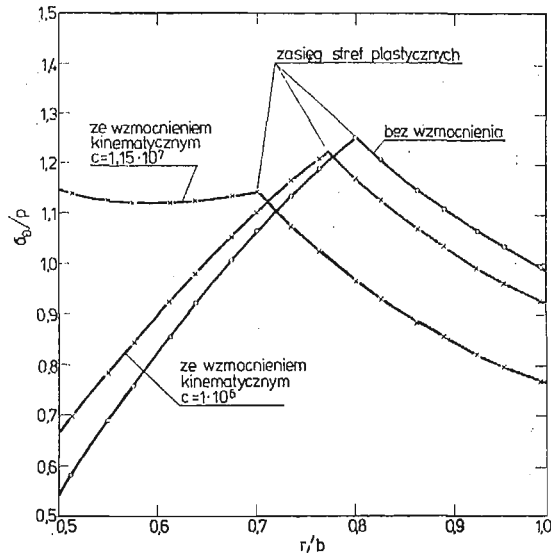
Wyniki porównano z własnymi obliczeniami według rozważań z pracy [7] zarówno dla wzmocnienia liniowego jak i bez wzmocnienia. Na kolejnych rysunkach 7, 8 oraz 9



Rys. 4. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń promieniowych σ_r/p ;

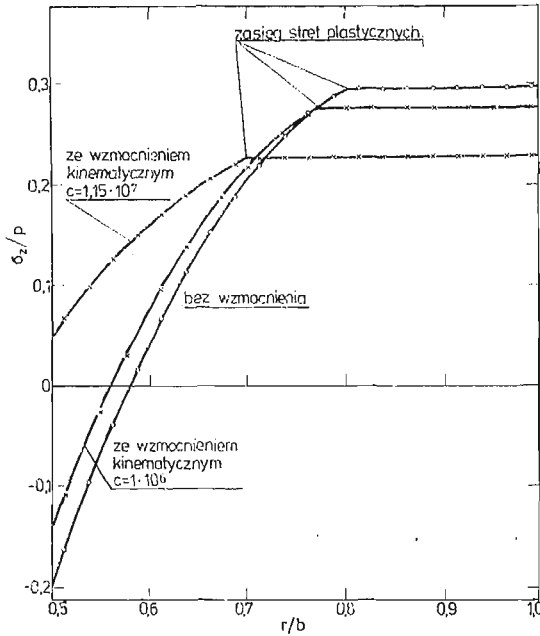
p — oznacza ciśnienie wewnętrzne, r — oznacza promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7].
 + — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów trójwęzłowych oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości w punktach Gaussa, dla wzmacnienia kinetycznego $c = 1,15 \cdot 10^6$,
 — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 20 elementów trójwęzłowych; wartości naprężeń w środku elementów:

o — bez wzmacnienia,
 + — ze wzmacnieniem kinematycznym $c = 1,15 \cdot 10^7$.



Rys. 5. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń obwodowych σ_θ/p ;

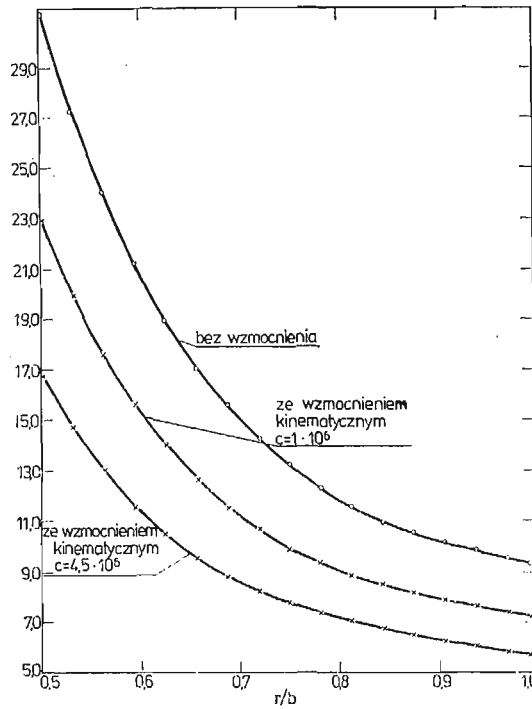
p — oznacza ciśnienie wewnętrzne, r — promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7];
 + o — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości naprężenia w punktach Gaussa.



Rys. 6. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń osiowych σ_z/p ; p — oznacza ciśnienie wewnętrzne, r — promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7];

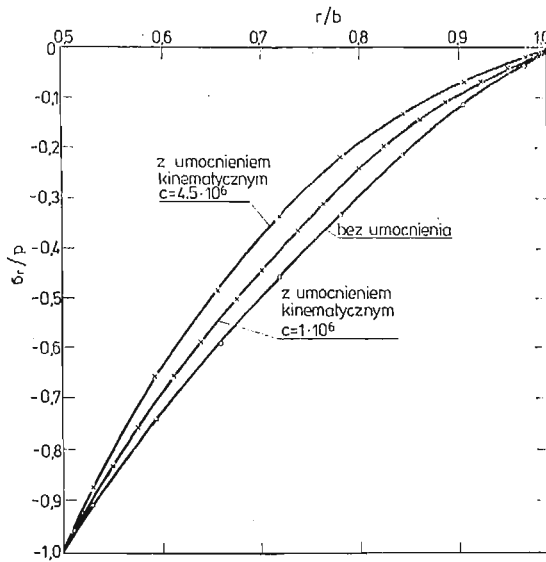
+ — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości naprężeń w punktach Gaussa, wzmacnienie $c = 1 \cdot 10^6$,
 — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 20 elementów trójwęzłowych; wartości naprężeń w środku elementów:

o — bez wzmacnienia,
 + — ze wzmacnieniem kinematycznym $c = 1,15 \cdot 10^7$.



Rys. 7. Zbiornik kulisty. Wykresy przemieszczeń u_r ; r — oznacza promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7];

+ o — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości przemieszczeń w węzłach elementów.



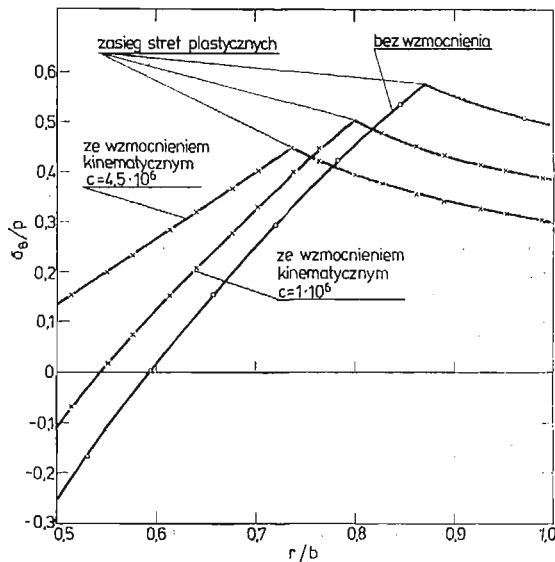
Rys. 8. Zbiornik kulisty. Wykresy naprężeń promieniowych σ_r/p ;

p — oznacza ciśnienie wewnętrzne, r — promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7].

+ — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości naprężeń w punktach Gaussa, wzmocnienie kinematyczne $c = 10^6$,

— obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa; wartości naprężeń w środkach elementów:

o — bez wzmocnienia,
+ — ze wzmocnieniem.



Rys. 9. Zbiornik kulisty. Wykresy naprężeń obwodowych σ_θ/p ;

p — oznacza ciśnienie wewnętrzne. Dyskretyzacja — 8 elementów trójwęzłowych, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7].

o — obliczenia metodą elementów skończonych dla środków elementów,

+ — obliczenia metodą elementów skończonych dla dwupunktowej kwadratury Gaussa całkowania numerycznego; wartości naprężeń w punktach Gaussa.

przedstawiono wyniki dla przemieszczeń i naprężeń dla parametru aproksymacji liniowej $\Theta = 1$. Przyjęto przyrost czasu $\delta t = 10^\circ$. Dla innych przyrostów czasu δt otrzymano praktycznie identyczne wyniki, z tym że dla mniejszych δt wymagana była większa liczba przyrostów w celu osiągnięcia stanu ustalonego.

7. Wnioski

Przedstawiony iteracyjno-przyrostowy algorytm typu Newtona-Raphsona umożliwia efektywne rozwiązywanie zarówno zagadnień quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności jak i sprężysto-plastyczności z uwzględnieniem wzmocnienia kinematycznego. Pokazano kryteria stabilności procedury z bezwarunkową stabilnością dla parametru aproksymacji liniowej $\Theta \geq \frac{1}{2}$. Zanalizowano własności macierzy sztywności oraz macierzy występujących w nieliniowym układzie równań różniczkowych zwyczajnych (punkt 5.).

Praca jest rozszerzeniem rozważań poprzednich publikacji nie uwzględniających wzmocnienia albo stosujących procedury warunkowo stabilne ze względu na wielkość przyrostu czasu δt . Zamieszczono przykłady numeryczne potwierdzające rozważania teoretyczne. Dalszych prac wymagają rozważania dotyczące innych modeli wzmocnienia i w tym kierunku prowadzone są przygotowania.

Literatura

1. J. H. ARGYRIS, L. F. VAZ, K. J. WILLAM, *Improved solution methods for inelastic rate problems*, Comp. Meth. in App. Mech. and Eng. 16, 31 - 77, 1978.
2. I. CORMEAU, *Numerical stability in quasi-static elasto/viscoplasticity*, Int. J. for Num. Meth. in Eng. 9, 109 - 127, 1975.
3. T. J. R. HUGHES, R. L. TAYLOR, *Unconditionally stable algorithms for quasistatic elasto/visco-plastic finite element analysis*, Comp. Struct. 8, 159-173, 1978.
4. M. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN-Warszawa-Poznań 1985.
5. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN 1966.
6. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley 1951.
7. W. W. SOKOŁOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN 1956.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, I. CORMEAU, *Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids — a unified numerical solution approach*, Int. J. for Num. Meth. in Eng. 8, 821 - 845, 1974.

Резюме

РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ УПРОЧНЕНИЕМ

Применен метод конечных элементов для квази-статических проблем упруго-вязкопластичности с учетом кинематического упрочнения. Представлен итерационный алгоритм типа Ньютона-Рафсона используя линейную аппроксимацию с параметром Θ . Показано, что для $\Theta \geq \frac{1}{2}$ алгоритм является безусловно стабильным. Приведены численные примеры, подтверждающие теоретическое решение

S u m m a r y

SOLUTIONS OF QUASI-STATIC PROBLEMS OF ELASTO-VISCOPLASTICITY WITH
KINEMATIC HARDENING

The finite element method is applied to quasi-static elasto-viscoplasticity with kinematic hardening. Newton-Raphson algorithm with linear approximation is developed. Unconditional stability for the approximation parameter $\Theta \geq \frac{1}{2}$ is shown. Selected examples illustrate theoretical investigations.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 lipca 1986 roku.

BIULETYN INFORMACYJNY

MIĘDZYNARODOWE SYMPOZJUM MATERIAŁÓW I KONSTRUKCJI KOMPOZYTOWYCH — PEKIN, CHINY, 10—13 CZERWCA 1986 R.

Symposium zostało sfinansowane wspólnie przez Chińskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Amerykańskie Towarzystwo Astronautyczne i Europejskie Towarzystwo Materiałów Kompozytowych. Było to pierwsze międzynarodowe spotkanie dotyczące mechaniki kompozytów zorganizowane w Chinach, gdzie badania w tej dziedzinie bardzo się rozwinęły, co odzwierciedliło się w postaci znacznej liczby prac uczestników chińskich, przedstawionych na Symposium.

Sprawozdania (Proceedings) z Symposium zostały opublikowane przez Technomic Publ. Co., Inc. (Lancaster, USA), a wydawcami byli profesorowie C.T. Sun (Purdue University, USA) i T. T. Loo (Shanghai Tiao Tong University, Chiny). Oprócz prac zakończonych przedstawiono również szereg wyników „prac w toku”. Streszczenia tych prac zostały opublikowane oddzielnie. Uczestnicy Symposium z Chin, Belgii, Czechosłowacji, Francji, Indii, Japonii, Jugosławii, Kanady, Korei Południowej, Meksyku, R.F.N., Rumunii, Szwecji, USA, W. Brytanii i ZSRR przedstawili 168 prac. Prace te zostały wygłoszone na ośmiu sesjach tematycznych:

- A. Mechaniczne własności kompozytów (23),
- B. Analiza i projektowanie konstrukcji kompozytowych (45),
- C. Pękanie i zniszczenie (25),
- D. Zmęczenie, pełzanie i wpływ uderzeń (17),
- E. Analiza naprężeń i kryteria zniszczenia (21),
- F. Badania doświadczalne (21),
- G. Kompozyty o matrycy metalowej (8),
- H. Wytwarzanie kompozytów i inne zagadnienia (8).

Była to duża konferencja, a wiele prac można było równie dobrze zakwalifikować do wygłoszenia w innych sesjach, a to z powodu wielodyscyplinarnego charakteru przedmiotu. Nie mniej zagadnienia, które były przedstawiane na poszczególnych sesjach, można sklasyfikować w następujący sposób.

Sekcja A: mikrostruktura, mechaniczno termiczne własności przędzy SiC, efekty wilgotnościowe, wpływ środowiska, wpływ wzmocnienia na międzyfazowe połączenia, teorie termoplastyczności, rozwieranie w płytach ortotropowych plastycznych wzmocnianych włóknami, korozja naprężeń włókien szklanych, własności starzenia się plastików wzmocnianych szkłem.

Sekcja B: wielowarstwowe płyty lepkosprężyste, sprężysto plastyczne kompozyty laminatowe, drgania nieliniowe i efekty powyboczeniowe, kompozyty hybrydowe i o strukturze tekstylnej, eksplozja kompozytowego koła zamachowego, stateczność i delaminacja płyt utwardzonych, związki między koncepcjami projektowania i łatwością wytwarzania, optymalne projektowanie, naprężenia termosprężyste w rurach kompozytowych, metoda elementów skończonych w zakrzywionych laminatach, katastroficzne zniszczenie sprężonych powłok, wyboczenie termiczne i efekty powyboczeniowe, sandwichce o minimalnym ciężarze, naprężenia adhezyjne, aerosprężysta dywergencja w płytach ortotropowych,

Sekcja C: parametry odporności na pękanie kompozytów bez makrodefektów, czynniki zimnego klimatu i wytrzymałość, statystyczne modele rozprzestrzeniania się szczelin, spawy i wytrzymałość wtryskowego formowania żywic termoplastycznych wzmocnionych włóknami, pękanie o mieszanych schematach (modach), progresywna akumulacja uszkodzeń, uszkodzenia anizotropowe, analiza delaminacji, odporność na pękanie w związku z obecnością pustek i włókien, pękanie matrycy.

Sekcja D: ciśnieniowe zniszczenie plastików wzmocnionych włóknami, szkody od uderzenia, zmęczeniowe rozprzestrzenianie się szczelin, wytrzymałość na uderzenie, obciążenia cykliczne i własności dynamiczno-lepkosprężyste, zniszczenie stochastyczne, wytrzymałość trwała plastików wzmocnionych szkłem.

Sekcja E: koncentracja naprężeń wokół otworu, prawdopodobieństwo zniszczenia, obliczanie naprężeń międzylaminarnych, naprężenia kontaktowe, wyznaczalne i niewyznaczalne osobliwości, naprężenia w płytach o spękaniu brzegowym, metody energetyczne w przypadku naprężeń interlaminarnych.

Sekcja F: akustyczna emisja uderzenia, detekcja rozwoju zniszczenia, naddźwiękowa detekcja bezniszczeniowa, ulepszone próbki, efekt zszywania, proces zniszczenia przy rozciąganiu i emisja akustyczna plastików wzmocnionych włóknami szklanymi, morfologia pęknięcia i własności mechaniczne, badania z pomocą mikroskopu elektronowego, próby rozciągania w niskich temperaturach, bezniszczeniowa detekcja delaminacji w plastikach wzmocnionych włóknami szklanymi, efekt doboru (felicity) w emisji akustycznej, defekty włókien, badanie związków konstytutywnych w warunkach uderzenia, pomiary modułów dynamicznych i tłumienia.

Sekcja G: endochroniczna sprężysto-plastyczność, wytwarzanie kompozytów SiC/Al przez walcowanie ciała stałego, rozszerzalność cieplna w kompozytach włókno węglowe-aluminium, własności w wysokich temperaturach, wytrzymałość kompozytów Gr/Al.

Sekcja H: włókna aramidowe stosowane powszechnie, zalecanie odkształceń części kompozytów w kształcie litery L, odkształcenia wychodzące z płaszczyzny spowodowane stanem płynięcia i orientacją włókna w procesie odlewania, mechanizm skrawania plastików wzmocnionych włóknami szklanymi, trwałość zaprawy murarskiej i betonu wzmocnionych włóknami szklanymi.

*Profesor Milan V. Mićunović
Uniwersytet Svetozara Markovića,
Kragujevac, Jugosławia*

Wyniki konkursu na najlepszą pracę teoretyczną z mechaniki technicznej

Na ogłoszony w 1986 roku konkurs Oddziału Łódzkiego PTMTS na najlepszą pracę teoretyczną z mechaniki technicznej wpłynęło 8 prac z następujących ośrodków: Bydgoszcz — 1, Częstochowa — 1, Poznań — 3, Warszawa — 2, Wrocław — 1. Wszystkie prace wysłane zostały do recenzentów.

Sąd Konkursowy w składzie: prof. dr hab. Marian Suchar — przewodniczący, prof. dr Zdzisław Orzechowski, doc. dr Janusz Lipiński, doc. dr Tadeusz Przedecki — członkowie, postanowił przyznać następujące nagrody. Nagrodę I stopnia w wysokości 20.000 zł. za pracę pt: „Fale powierzchniowe w termosprężystości z czasami relaksacji”, autor Raszard Wojnar — Warszawa. Dwie nagrody II stopnia w wysokości 15.000 zł. za pracę pt: „Teoretyczny model porowatego zewnątrznie zasilanego cylindrycznego gazowego łożyska wzdłużnego z odkształcalnym materiałem porowatym”, autorzy Jan A. Kołodziej i Maciej Barbacki — Poznań, oraz za pracę pt: „Wyznaczanie powierzchni swobodnej cieczy w trójkątnym rowku”, autorzy Mariusz Kaczmarek, Jan A. Kołodziej, Grzegorz Musielak — Poznań. Nagrodę III stopnia w wysokości 10.000 zł. za pracę: „Wykorzystanie metody falowej w badaniach układów napędowych, porównanie z innymi metodami”, autor Amalia Pielorz — Warszawa.

*Tadeusz Przedecki
Przewodniczący Oddziału
Łódzkiego PTMTS*

Chińskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (CSTAM)

(The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics)
(na podstawie Acta Mechanica Sinica t. 1, nr. 1, 1985, str. 94-97)

Chińskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (CSTAM) jest członkiem Towarzystwa Chińskiego Stowarzyszenia Nauk Przyrodniczych i Technicznych. CSTAM zostało założone w lutym 1957 roku. Członkami Towarzystwa mogą zostać osoby z tytułami zawodowymi równoważnymi lub wyż-

szymi od wykładowcy, inżynierowie lub pracownicy nauki należący do stowarzyszeń zawodowych oraz pracownicy naukowcy zajmujący się nauczaniem mechaniki lub badaniami z zakresu zastosowań mechaniki. Cudzoziemcy mogą być członkami zagranicznymi Towarzystwa. Towarzystwo zjawuje się popieraniem wymiany naukowej, finansuje czasopisma naukowe i techniczne, przyczynia się do nauczania i popularyzowania mechaniki teoretycznej i stosowanej, podejmuje działania służące wzrostowi ekonomii kraju oraz przyczynia się do rozkwitu nauki i techniki.

Obecnie prezesem CSTAM jest prof. Qian Lingxi, który został wybrany w 1982 r. Poprzednio prezesem był prof. Qian Xuesen (H. S. Tsien). Przed 1949 r. w Chinach badania z zakresu mechaniki były rozwijane w małym stopniu. Po 1949 r. i we wczesnych latach pięćdziesiątych wielu chińskich, znakomych profesorów jak Qian Xuesen i Guo Yonghuai (K. H. Kuo) powróciło do Chin. Wspólnie z profesorami Zhou Peiyuanem, Qian Weichangiem i innymi założyli CSTAM. Po 1949 r. mechanika staje się szybko dyscypliną uznaną w licznych Uniwersytetach Chińskich. W Chińskiej Akademii Nauk grupa zastosowań mechaniki kierowana przez prof. Qian Weichanga (W. Z. Chien) została utworzona w Instytucie Matematyki we wczesnych latach pięćdziesiątych.

Z grupy tej powstał obecny Instytut Mechaniki założony w 1955 r. przez prof. Qian Xuesena. Utworzenie CSTAM wpłynęło na szybki rozwój mechaniki w Chinach. Od tego czasu mechanika odegrała wyjątkową i ważną rolę w wielu fazach rozwoju odbudowy i obronności kraju, np. w zagadnieniach przestrzeni kosmicznej i techniki broni jądrowej, konstrukcji okrętów, lotnictwie i inżynierii budowlanej, chemicznej, budowie maszyn itp.

W czasie dziesięciu lat chaosu od 1966 do 1976 r. działalność CSTAM była zawieszona. Od stycznia 1977 r. Towarzystwo wznowiło działalność. Już w 1978 r. liczba członków Zarządu wzrosła z uprzedniej liczby 35 do 95. Ponadto wybrano drogą demokratycznych wyborów ośmiu nowych wiceprezesów oraz organ wykonawczy w postaci Prezydium.

W 1982 r. wybrano nowy Zarząd Główny w liczbie 111 członków, który kontynuował prace poprzedniego Zarządu.

Prof. Qian Lingxi został wybrany prezesem. Pierwszym wiceprezesem został prof. Zheng Zhemina, a pozostałymi profesorowie: Qian Weichang, Zhang Wei, Li Guohao, Shen Yuan, Ji Wenmei, Lin Tongji, Sun Xunfang, Sun Cheng. Lin Tongji został ponadto wybrany Sekretarzem Generalnym. Biuro Towarzystwa CSTAM mieści się w Instytucie Mechaniki Chińskiej Akademii Nauk w Pekinie. Wzrost aktywności CSTAM w latach od 1966 do 1985 r. ilustruje tablica 1.

Oddziały Towarzystwa zostały powołane w prowincjach, przy czym Pekin, Szanghaj i Tienjin stanowią okręgi wyróżnione. Obecnie działa w Chinach 29 Oddziałów CSTAM.

Tak jak Towarzystwa Krajowe, CSTAM jest subsydiowane przez CAST. W ostatnim roku budżet

Tablica 1. Dane liczbowe

Rok	1966	1980	1985
Członków	1100	3590	ponad 30.000
Oddziałów Towarzystwa	5	16	27
Komitatów i Grup	4	14	23
Czasopism	1	3	5
Komunikatów (w ciągu roku)	0	5 - 6	10 - 15
Konferencji krajowych (w roku)	1	9	16
Konferencji Międzynarodowych (w roku)	0	0	2
Liczba wygłoszonych referatów na konferencjach krajowych	50	385	1321
Liczba uczestników konferencji krajowych	100	650	1673
Seminariów (w roku)	10	4	31
Dotacji rządowych w yuan	10.000	50.000	90.000
Członków w komitetach	61	208	1165
Członków Zarządu	35	95	110

wynosił około 90 tys. yuan. Suma ta była głównie wydatkowana na finansowanie konferencji i dwóch czasopism. Lokalne Oddziały Towarzystw są finansowane oddzielnie przez CAST na szczeblu prowincji.

Zauważmy (tab. 1.), że liczba uczestników konferencji jest niewiele większa od liczby wygłoszonych referatów. Liczba ta ma znaczne tendencje wzrostowe.

W celu zaspokojenia narastającej aktywności członków Towarzystwa i stworzenia im możliwości udziału w pracach w dziedzinie mechaniki powołano wiele komitetów, podkomitetów i grup specjalistycznych tak jak np. Krajowy Komitet Mechaniki Płynów. Poniżej wykaz powołanych komitetów i grup.

1. Krajowy Komitet Mechaniki Ciała Stałego
z Podkomitetami: Obliczeń w Mechanice Konstrukcji, Mechaniki Pękania Drgań, Mechaniki Kompozytów,
2. Krajowy Komitet Doświadczalnej Analizy Naprężeń
3. Krajowy Komitet Mechaniki Ogólnej
4. Krajowy Komitet Dynamiki Wybuchu
5. Krajowy Komitet Wytwarzania Wybuchowych
6. Krajowy Komitet Inżynierii Podmuchu
7. Krajowy Komitet Mechaniki Skał i ciała Stałego
8. Krajowy Komitet Mechaniki Płynów
Podkomitet Obliczeń w Mechanice Płynów
9. Krajowy Komitet Mechaniki Stosowanej i Konstrukcji Reaktorów
10. Krajowy Komitet Biomechaniki
11. Specjalna Grupa Dynamiki Geotektonicznej
12. Specjalna Grupa Techniki Rur Uderzeniowych
13. Specjalna Grupa¹⁾ Mechaniki Racjonalnej i Metod Matematycznych
14. Krajowy Komitet Kształcenia Mechaników
15. Krajowy Komitet Popularyzowania Mechaniki

Oddział Towarzystwa w Pekinie został poproszony do utworzenia Krajowego Komitetu Nauczania Mechaniki, zaś Oddział w Szanghaju — do powołania Komitetu Popularyzacji Mechaniki wśród pracowników, szkół średnich i szkół zawodowych.

Poza czasopismami finansowanymi przez CSTAM (tablica 2) publikowane są czasopisma przez Oddziały Towarzystwa bądź wspólnie z innymi stowarzyszeniami.

Są to:

Szanghajskie czasopismo mechaniki (The Shanghai Journal of Mechanics), Obliczenia w mechanice konstrukcji i zastosowania (Computational Structure Mechanics and Application), Matematyka i mechanika stosowana (Applied Mathematics and Mechanics), Drganie i uderzenia (Vibration and shock), Postępy w mechanice (Progress in Mechanics), Tłumaczenia prac z mechaniki stosowanej (Translated Papers on Applied Mechanics).

Tablica 2.

Nazwa czasopisma	Redaktor naczelny	liczba wydań w roku
Acta Mechanica Sinica	Zheng Zhemin ²⁾	dwumiesięcznik
Acta Mechanica Solids Sinica	Du Qinghua	kwartalnik
Chinese Journal of Geotechnical Engineering	Huang Wenxi	kwartalnik
Mechanics and Practice	Bian Yinguei	dwumiesięcznik
Explosion and Shock Waves	Ding Jing	kwartalnik
Experimental Mechanics	Jia Younguan	kwartalnik

¹⁾ Obecnie już Komitet Krajowy

²⁾ Obecnie Lin Tongji

Acta Mechanica Sinica jest w Chinach najstarszym czasopismem z mechaniki. Każdy numer tego czasopisma zawiera od 13 do 15 prac ze streszczeniami w języku angielskim. Zakres tematyczny tego czasopisma jest szeroki i dlatego publikacje nie są ograniczane do jednej szczególnej dyscypliny. Przy czym przed publikacją każda praca jest kwalifikowana do druku i zwykle jest recenzowana przez dwóch recenzentów.

Konferencje naukowe są organizowane bądź to przez Krajowe Towarzystwo, bądź przez Oddziały CSTAM.

W roku 1977 CSTAM przystąpiło do IUTAM i prof. Zhou Peiyuan został członkiem rady IUTAM, zaś prof. Lin Tongji członkiem Organizacji Kongresów IUTAM. CSTAM wysłał delegację pod kierownictwem profesorów Zhou i Lina na 15 Kongres IUTAM do Toronto w roku 1980. Inna delegacja udała się w tym samym roku na Międzynarodową Konferencję „Doświadczalnej analizy naprężeń”.

Wspólnie z Japonią i Indiami zorganizowany został pierwszy Azjatycki Kongres Mechaniki Płynów w Indii w 1981 roku. Drugi Kongres o tej tematyce odbył się w Pekinie w październiku w 1983 roku. Następnie miesiąc później w Pekinie zorganizowane zostało przez ICF Międzynarodowe Sympozjum z Mechaniki Pęknięcia.

W 1984 r. CSTAM wysłał delegację na XVI Kongres IUTAM w Kopenhadze.

W 1985 r. planowana jest Międzynarodowa Konferencja z Nieliniowej Mechaniki w Szanghaju i druga z Mechaniki Doświadczalnej w Pekinie. Ponieważ ta tematyka będzie dalej rozwijana organizowane konferencje z tego zakresu będą w przyszłości popierane przez CSTAM.

W ostatnich kilku latach CSTAM zaprosiło pewną liczbę zagranicznych uczonych na wykłady do Chin. Spodziewamy się, że większa liczba przyjazdów uczonych z innych krajów będzie finansowana przez CSTAM.

Można dodać, że w maju 1983 r. w Wuhan została zorganizowana przez Chiny, Japonię i USA konferencja na temat biomechaniki, zaś w sierpniu 1985 r. konferencja o zastosowaniu obliczeń w budowie maszyn. Konferencje te nie były bezpośrednio finansowane przez CSTAM. W dniach 19 - 23 czerwca 1986 r. w Xiuan jest organizowana międzynarodowa konferencja „Problemy drgań w budowie maszyn” zaś w okresie od 15 - 17 września 1987 r. odbędzie się w Pekinie kongres INTER NOISE'87.

Pragnę w tym miejscu wyrazić podziękowanie Panu dr. Fu Hua Lingowi profesorowi Katedry Mechaniki Technicznej z Shanghai Jiao Tong University za udostępnienie materiałów z myślą o informacji dla naszego Towarzystwa.

Józef Wojnarowski

O możliwości współpracy Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej z Chińskim Towarzystwem Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (CSTAM)

W 1986 r. wymieniłem wstępną korespondencję z prof. Qian Lingxi przewodniczącym CSTAM (Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics). Z listu prof. Qian Linxi wynika, że CSTAM jest bardzo zainteresowane w podjęciu współpracy z naszym Towarzystwem. Również Instytut Badawczy Mechaniki Inżynierskiej (Research Institute of Engineering Mechanics) i Politechnika w Dalian (Dalian Institute of Technology), których dyrektorem jest prof. Qian Lingxi chcieliby podjąć współpracę z PTMTS w zakresie współczesnej mechaniki, projektowania wspomagane mikrokomputerami oraz w zakresie wymiany informacji dotyczącej organizowanych kongresów i sympozjów z dziedziny mechaniki.

Sprawa podjęcia ścisłej współpracy między PTMTS i CSTAM jest w toku i wymaga przeprowadzenia bezpośrednich rozmów pomiędzy przedstawicielami naszych Towarzystw.

Współpraca naukowa Politechniki Śląskiej z uczelniami Chińskimi.

W dniu 10 grudnia 1984 r. zawarto wstępne porozumienie między Politechniką Śląską i czterema Akademiemi Górniczymi ChRL.

Stosownie do zawartego porozumienia w dniach 6 - 21 czerwca 1985 r. przebywała w Chińskiej Republice Ludowej delegacja Politechniki Śląskiej w składzie: doc. Jerzy Frączek, prof. Mirosław Chudek, prof. Jerzy Nawrocki. W czasie dwutygodniowego pobytu członkowie delegacji wygłosili wykłady, odbyli spotkania z pracownikami naukowymi i studentami i podpisali w mieście Xi'an porozumienie o współ-

pracy naukowej z czterema Akademiemi Górniczymi: w Xi'an (prowincja Shaanxi), Jianczuo (prowincja Henan), Huainan (prowincja Anhui) oraz w Handen (prowincja Hebei).

Ideą podpisanego porozumienia jest podjęcie szerokiej współpracy w dziedzinie górnictwa węglowego i budownictwa oraz umocnienia przyjaźni i wymiany doświadczeń naukowo-dydaktycznych pomiędzy wyższymi uczelniami górniczymi w ChRL i PRL.

W dniach 21 kwietnia — 13 maja 1986 r. delegacja Politechniki Śląskiej w składzie: prof. Jerzy Antoniak, prof. Józef Gawroński i prof. Leszek Król przebywali w ChRL na zaproszenie Ministerstwa Przemysłu Metalurgicznego ChRL. Wizyta ta objęła swym zasięgiem również trzy ministerstwa (w Pekinie, Chang-sha i Shen-Yang), centralny Instytut Żelaza i Stali w Pekinie oraz dwie huty żelaza w Bao-shan i An-shan. Beijing University of Iron and Steel Technology (BUIST) reprezentowali prof. Wang Run i prof. Huang Wu-Di. Central Iron Steel Research Institute (CISRI) reprezentował dyrektor dr Siu Tujian oraz profesorowie i kierownicy zakładu a North Eats University of Technology w Shengang prof. Gzan Guangyne, dziekani i profesorowie.

W wyniku przeprowadzonych rozmów zostało podpisane z BUIST porozumienie o współpracy naukowej, wymianie i kształceniu kadry naukowej oraz o wymianie literatury i publikacji.

Warto wspomnieć, że już w 1954 i 1955 r. prof. Janusz Dietrich Członek Honorowy PTMTS na czele 7-mio osobowej grupy przebywał kilka miesięcy w ChRL. Celem ich pobytu było zbieranie danych i założeń a następnie przedstawienie projektu zakładów wzbogacenia węgla w Czu Dżua i Ta Juan.

Józef Wojnarowski

O mechanice w Chińskiej Republice Ludowej i Chińskim Towarzystwie Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

1. Wstęp

W latach czterdziestych trudno było mówić o rozwoju mechaniki w Chinach aczkolwiek działały uniwersytety i wyższe uczelnie techniczne, a kilku młodych wybijających się uczonych chińskich z tej dziedziny nauki pracowało zagranicą, przede wszystkim w Stanach Zjednoczonych A.P. Wymienimy tu profesora H. S. Tsiena (Qian Xuesen), który był współpracownikiem Theodora von Kármána i napisał z nim kilka wspólnych prac naukowych. Po powstaniu Chińskiej Republiki Ludowej w roku 1949 wielu uczonych chińskich powróciło z zagranicy do kraju. Został zorganizowany Instytut Mechaniki Chińskiej Akademii Nauk (1956-01-05), zaczęła się rozwijać działalność naukowa na chińskich uniwersytetach i uczelniach technicznych. Wielu młodych i zdolnych ludzi wyjechało na studia doktoranckie i staże naukowe do Związku Radzieckiego i Krajów Demokracji Ludowej. W Polskiej Akademii Nauk i na naszych uczelniach kształciło się wielu adeptów mechaniki, uzyskując stopnie doktorskie, a nawet doktora habilitowanego. Zaczęła się rozwijać również współpraca naukowa w postaci wymiany naukowej i dłuższych wyjazdów na wykłady na chińskich uczelniach. Wymianę w dziedzinie mechaniki zapoczątkował w roku 1955 pobyt delegacji P.A.N. w składzie profesorowie Witold Wierzbicki, Kazimierz Kuratowski i Witold Nowacki. Na długoterminowych kontraktach naukowych pracowali w Chinach w charakterze doradców i profesorów wizytujących między innymi profesorowie Maciej Bieniek i Igor Kisiel, na krótszych wizytach przebywali profesorowie Wacław Olszak, Zbigniew Kączkowski, Marek Sokolowski, Antoni Sawczuk i Wojciech Urbanowski. Na konferencje z dziedziny mechaniki przyjeżdżali do Polski profesorowie chińscy. Znany profesor Chien Wei-Zang (Qian Weichang) członek Chińskiej Akademii Nauk został wybrany członkiem zagranicznym PAN. W wyniku wojny domowej inna grupa zdolnej młodzieży chińskiej znalazła się na emigracji, gdzie uzyskała wykształcenie, między innymi w dziedzinie mechaniki.

W latach rewolucji „kulturalnej” (1966 - 76) wszelkie kontakty naukowe z zagranicą zostały przerwane. Dopiero w późnych latach siedemdziesiątych uczeni chińscy mogli powrócić na uniwersytety i nawiązać kontakty naukowe. Najpierw została nawiązana współpraca naukowa z uczelniami Stanów Zjednoczonych A.P. i krajów Europy Zachodniej. Odnowienie kontaktów z mechanikami polskimi nastąpiło, jeszcze później. Po kilku spotkaniach na międzynarodowych kongresach i konferencjach, wymianie kore-

spondencji i kilku zaledwie krótkich pobytach uczonych chińskich w Polsce powrócono do idei współpracy naukowej w dziedzinie mechaniki. Profesor A. Morecki wygłosił cykl wykładów z robotyki, biomechaniki i teorii maszyn na Uniwersytecie Tianjin (Tientsin, czyli Dagan, 25 IX - 25 X 1985). Profesor Zdzisław Marciniak przebywał ponad miesiąc z cyklem wykładów w Uniwersytecie Tsinghua. W międzynarodowej konferencji mechaniki nieliniowej w Szanghaju (październik 1985) uczestniczył między innymi profesor Henryk Frąckiewicz. Na dłuższy kontakt udał się do Szanghaju profesor Jan Rychlewski. Pomiedzy Uniwersytetem Warszawskim i Pekiniskim została podpisana umowa o wymianie, w ramach której w czerwcu 1986 przebywali w Pekinie profesor Czesław Woźniak i autor niniejszego opracowania. Uniwersytet Pekiniski wizytował prof. Grzegorz Białkowski, fizyk, rektor UW. Podpisana została umowa o współpracy między Politechniką Warszawską i Uniwersytetem Tsinghua, czyli Politechniką Pekiniską. Polsko-chińska współpraca naukowa w dziedzinie mechaniki ma dobre perspektywy, kilku chińskich kolegów, którzy przebywali w Polsce dłuższy czas w latach pięćdziesiątych i znają dobrze język polski, zajęło obecnie wysokie stanowiska w administracji akademickiej swoich uczelni i znaczą wiele w mechanice chińskiej, ponadto pewna grupa starszych uczonych pamięta dobrze kontakty z nauką polską w latach przed rewolucją „kulturalną”. Profesor Guo Zhongheng przebywał w tym roku w Warszawie na Kongresie Intelktualistów. Na Sympozjum „Modelowanie w mechanice” i Politechnice Śląskiej przebywał profesor Fu Hua Ling z Uniwersytetu Jiao Tong w Szanghaju. W XXVI Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego uczestniczył profesor Xu Bing-Ye (Hsu Bing-ye).

2. Mechanika na uczelniach chińskich i struktura uczelni

W Pekinie działa szereg uczelni, na których uprawiana jest mechanika. Najważniejszymi z nich są Uniwersytet Pekiniski (Peking University), Politechnika Pekiniska (Tsinghua University), Beijing Institute of Technology (odpowiednik naszej Wojskowej Akademii Technicznej), Beijing Aeronautical Institute, Beijing Institute of Aerodynamics. Inne najbardziej znane uniwersytety w Chinach to: Fudan University (Szanghaj), Lanzhou University (Lanchow), Sun Ya-sen University (Kanton), Chilin University, Tianjin University (Dagan). Poza Pekinem działa około 15 politechnik, na kilku z nich istnieją wydziały mechaniki technicznej (Tsinghua Un. w Pekinie, Jiao Tong Un. w Szanghaju).

Mieliśmy możliwość zapoznania się ze strukturą i działalnością w dziedzinie mechaniki dwóch najważniejszych uczelni pekińskich, a mianowicie Uniwersytetu Pekiniskiego i Politechniki (Un. Tsinghua). Obie uczelnie należą do czołowych w Chinach i odgrywają dużą rolę w nauce chińskiej oraz w życiu politycznym Kraju. Rewolucja „kulturalna” została zapoczątkowana właśnie przez studentów wymienionych uniwersytetów w Pekinie i Uniwersytetu Szanghajskiego. Również działalność Czerwonej Gwardii rozpoczęła się w roku 1966 od działalności studentów Politechniki Pekiniskiej (Tsinghua Un.), a po ekscesach zakończyła się w dwa lata później obłężeniem Uniwersytetu przez ponad 100 tys. robotników i walkami, które pociągnęły za sobą liczne ofiary i wreszcie rozwiązanie Czerwonej Gwardii oraz zesłanie pracowników nauki celem „edukacji” na wieś.

Uniwersytet Pekiniski kształci obecnie około 12 tysięcy studentów na wszystkich poziomach studiów uniwersyteckich. Wszyscy studenci mieszkają na terenie pięknego kampusu, który ma charakter wydzielonego miasteczka ze sklepami, boiskami sportowymi, stołówkami, itp. Nauczyciele akademicy mieszkają w pobliżu kampusu.

Mechanika na Uczelni jest uprawiana w dwóch Instytutach (Departments) Mechaniki i Matematyki. Instytut Mechaniki zatrudnia 10 profesorów zwyczajnych, 22 docentów, 30 asystentów i adiunktów oraz 45 laborantów i pracowników obsługi technicznej. Największy zakład to zakład mechaniki płynów. Istnieją tam dwa tunele aerodynamiczne (o przekroju prostokątnym 2×3 m i prędkości 0,5 - 30 m/s, oraz \emptyset 2 m i prędkości 15 - 50 m/s), oraz trzy małe tunele do celów dydaktycznych. Zainteresowania naukowe skupiają się na następujących zagadnieniach: wieże chłodnicze i obciążenia budynków wiatrami, komputerowa mechanika płynów, biomechanika, przepływy warstwowe, reologia cieczy nie-newtonowskich, turbulencja.

Zakład mechaniki ciała stałego posiada laboratorium elastooptyki oraz laboratorium do badań materiałów przy prędkościach obciążenia do 500 m/s. Uprawiane zagadnienia naukowe to teoria plastyczności, mechanika skał, zagadnienia relacji konstytutywnych, teoria drgań i mechanika pękania. Zakład

mechaniki ogólnej prowadzi badania naukowe w dziedzinie teorii sterowania układów, zagadnień bifurkacji i zagadnień robotyki.

Na Uniwersytecie Pekińskim działa 28 Instytutów (Departments), między innymi: informatyki (Computer Sci.), fizyki nuklearnej, geofizyki, w tym ostatnim zakład badania przestrzeni kosmicznej. Na Wydziale Matematyki istnieją zakłady matematyki czystej, matematyki stosowanej, metod numerycznych i zagadnień informatyki (niezależnie od wydzielonego Instytutu Informatyki). Ostatnio wydzielili się osobno Instytut Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki.

Struktura uniwersytetów chińskich jest zbliżona do struktury uniwersytetów amerykańskich. Istnieją więc następujące jednostki organizacyjne: school — tłumacząc wydział, department — instytut (dydaktyczny), division — zakład, research institute — instytut badawczy.

Tsinghua University, założony w roku 1911 kształci studentów nauk ścisłych, inżynierskich i zarządzania. Od czasów reformy w roku 1952 odeszły inne wydziały nie związane z naukami inżynierskimi lub ścisłymi. Obecnie ponad 3000 nauczycieli akademickich uczy ok. 12 500 studentów, w tej liczbie 2030 studentów powyżej tytułu bakałarza (postgraduate) i 97 studentów zagranicznych. W skład Uniwersytetu Tsinghua wchodzi 26 instytutów dydaktycznych oraz 27 instytutów badawczych oraz 6 ośrodków, lub laboratoriów ogólnouniwersyteckich. Interesujące jest to, że w strukturze uczelni znajdują się 4 instytuty wchodzące w skład Wydziału Zarządzania Ekonomicznego, a mianowicie instytuty: ekonomii inżynierskiego zarządzania, informatyki systemów zarządzania, handlu międzynarodowego i finansów. W ramach Uczelni działają również instytuty: języka i literatury chińskiej, języków obcych, oraz nauk społecznych.

Uniwersytet Tsinghua utrzymuje współpracę z profesorami chińskiego pochodzenia osiadłymi zagranicą, traktując ich jako konsultantów i profesorów honorowych (5 profesorów uniwersytetów amerykańskich dwóch z Hong-Kongu). Uniwersytet posiada dużą bibliotekę, ok. 2 miliony tomów i centralny ośrodek komputerowy. Na terenie kampusu o powierzchni ponad 2,1 km kwadratowych znajdują się boiska sportowe, duża pływalnia, domy profesorskie i studenckie, tereny rekreacyjne i miejsce na rozbudowę uczelni.

3. Prace naukowe z dziedziny mechaniki

Ośrodkiem wiodącym w dziedzinie badań naukowych z mechaniki w Chinach jest Instytut Mechaniki Chińskiej Akademii Nauk. Założony został w styczniu 1956 r., a pierwszym jego dyrektorem był profesor Hsue-Sen Tsian (Qian Xuesen) i powstał z Zakładu Mechaniki, którego kierownikiem był znany w Polsce profesor Wei-Zang Chian (Qian Weichang). Instytut zatrudnia w chwili obecnej ponad 600 pracowników naukowo-badawczych i około 200 pracowników obsługi. W skład Instytutu wchodzi 13 zakładów. Wielu profesorów prowadzi wykłady na uczelniach pekińskich, przede wszystkim na Uniwersytecie Tsinghua. Instytut jest dobrze wyposażony w urządzenia laboratoryjne poczynając od tuneli aerodynamicznych pod- i naddźwiękowych, rur i tuneli uderzeniowych, generatorów plazmowych, urządzeń do badań dynamicznych i wybuchów, badań zmęczeniowych, pęknięcia materiałów i drgań. Do badań doświadczalnych stosowane są lasery gazowe i pulsujące, istnieje laboratorium elastooptyczne, laboratoria do badania skał i gruntów i inne. Instytut zamierza unowocześnić bazę doświadczalną, rozwinąć wymianę z zagranicą. W ostatnim okresie rozwinęły się tu nowoczesne kierunki badań. Wymienię tu kilka przykładów: kinetyka nierównoważonych przepływów przy dużych prędkościach, intensyfikacja spalania sproszkowanego węgla i mieszaniny węgla z wodą, dynamika przenoszenia ciepła w przepływach dwufazowych, prądy oceaniczne, fale i turbulencja przepływów warstwowych, dynamika płyt tektonicznych, mechanika fizyki słońca, studia nad strukturą galaktyk i kwasarów, matematyczna teoria fal wodnych, teoria solitonów, stateczność ruchu, mechanika bio-cieczy, własności reologiczne krwi, mechanika środowiska, drgania części konstrukcji satelitów (anteny), sandwiczowe dźwigary powierzchniowe, mechanika kompozytów, wpływ korozji na zmęczenie, mechanika materiałów, mechanika wybuchów, dynamika plazmy i magneto-hydrodynamika, fale MHD, geologiczne poszukiwania podmorskie, konstrukcje podmorskie, mechanika fizyczna, techniki pomiarowe w mechanice. Instytut, w zeszłym roku (1985), utrzymywał kontakty międzynarodowe z 28 krajami, przede wszystkim ze Stanami Zjednoczonymi A.P. i Japonią. Badania naukowe z dziedziny mechaniki zarówno podstawowe jak i aplikacyjne są prowadzone również na wyższych uczelniach. Duży nacisk jest położony na współczesne kierunki rozwoju mechaniki, co odzwierciedla się również

w strukturze uczelni. Oprócz instytutów o tradycyjnych nazwach kierunków naukowych istnieją następujące (w Uniwersytecie Tsinghua): inżynieria środowiska, matematyka stosowana, współczesna fizyka stosowana, nauki biologiczne i technika, zarządzanie systemami informatycznymi, technika energii nuklearnej.

W czasie naszego pobytu mieliśmy możliwość uczestniczenia i wygłoszenia wykładów na ogólnochińskiej konferencji zorganizowanej przez Wydział Matematyki Uniwersytetu Pekńskiego i Chińskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej pod tytułem „współczesna matematyka a mechanika” (M-M-M, Modern Mathematics and Mechanics). Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego Konferencji był profesor Guo Zhongheng. Wszystkie referaty zostały wygłoszone na konferencji na zaproszenie Komitetu Organizacyjnego. Wygłoszono 18 referatów przeglądowych i 22 referaty z prac oryginalnych dotyczących tematyki związanej z referatami przeglądowymi. W Konferencji uczestniczyło 78 osób. Zajmowano się następującymi zagadnieniami: struktura klasycznej czasoprzestrzeni, geometryczna teoria mechaniki hamiltonowskiej, zastosowanie grup Liego w mechanice ośrodków ciągłych, zastosowania topologii różniczkowej w mechanice nieliniowej, geometryczne metody układów nieholonomicznych, zagadnienia z brzegiem swobodnym, nierówności w mechanice ciał stałych odkształcalnych, analiza wypukła i matematyczna teorii plastyczności, rozmaitości różniczkowalne i nieliniowa teoria sterowania, zastosowania analizy funkcjonalnej w mechanice, zagadnienia bifurkacji, odwzorowania — podkowy Smile'a, chaos i metoda Melnikowa w badaniach chaosu, teoria stateczności układów ciągłych w mechanice, aksjomatyka współczesnej mechaniki ośrodków ciągłych, dynamika w ekonomii, równania dyfuzji z reakcjami i termodyfuzja, zastosowania analizy niestandardowej w mechanice. Również w czerwcu odbyły się dwie międzynarodowe konferencje, a mianowicie Mechanika Kompozytów w Xiangshan pod Pekinem oraz 10 Międzynarodowa Konferencja Metod numerycznych w Dynamice Płynów (Beijing 23 - 27 czerwca 1986). Druga z tych konferencji została zorganizowana przez Chinese Aerodynamics Research Society we współpracy z China Association for Science and Technology. Program Konferencji obejmował 6 zaproszonych referatów sekcyjnych, 109 zgłoszonych referatów 25-minutowych i 18 referatów w sesjach plakatowych.

4. Chińskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

Towarzystwo (skrót angielski CSTAM) zostało założone nieco wcześniej od PTMTS, bowiem w lutym 1957, i jest członkiem Chińskiego Stowarzyszenia Nauki i Techniki (CAST). Celem Towarzystwa jest popieranie wymiany naukowej, wydawanie czasopism naukowych i technicznych z dziedziny mechaniki, popularyzacja i upowszechnianie mechaniki teoretycznej i stosowanej, organizowanie konferencji ogólnochińskich i międzynarodowych. Po przerwie związanej z zawieszeniem działalności Towarzystwa w latach 1966 - 76 nastąpił jego ponowny dynamiczny rozwój. Wznowienie pracy Towarzystwa oznaczało również przystąpienie w roku 1977 do Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM) i wzięcie udziału w Kongresach w Toronto i Lyngby.

Biuro Towarzystwa mieści się w Instytucie Mechaniki Chińskiej Akademii Nauk i zatrudnia ok. 15 pracowników, których zadaniem jest również organizowanie konferencji i redagowanie czasopism *Acta Mechanica Sinica* oraz *Mechanics and Practice*.

Wybory do władz Towarzystwa odbywają się co 5 lat. Ostatnie wybory odbyły się w roku 1982. Prezydium Chińskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej liczy 111 osób, prezesem jest profesor Qian Lingxi, jego specjalnością jest budowa mostów. Poprzednim prezesem był profesor Qian Xuesen, jeden z założycieli Towarzystwa. W roku 1966 Towarzystwo liczyło ok. 1100 członków, w roku 1980 liczba ta wyniosła 3590, a w roku 1985 przekroczyła już 30 tysięcy. Oprócz ChTMTS powstały lokalne towarzystwa mechaniki teoretycznej i stosowanej, które posiadają autonomię, uważa się jednak, że każdy z członków lokalnego towarzystwa jest zarazem członkiem Towarzystwa ogólnochińskiego. Obecnie działa 29 towarzystw lokalnych, w roku 1966 było ich tylko 5. Oprócz lokalnych towarzystw istnieje podział branżowy na komitety narodowe i grupy, których jest 15. Większe komitety jak np. mechaniki ciała stałego i mechaniki płynów dzielą się jeszcze na podkomitety. Po latach przerwy pierwsza międzynarodowa konferencja w Chinach została zorganizowana w roku 1983 w Pekinie. Był to II Azjatycki Kongres Mechaniki Płynów. W tym samym roku, również w Pekinie odbyło się międzynarodowe sympozjum mechaniki pękania. W październiku 1985 odbyła się w Szanghaju duża międzynarodowa konferencja mechaniki nielinio-

wej. W roku 1986 (czerwiec, 10 - 13, Pekin) odbyło się międzynarodowe sympozjum materiałów i konstrukcji kompozytowych, oraz międzynarodowa konferencja na temat zagadnień naukowych i technicznych plazmy (czerwiec, 4 - 7, Pekin). W przyszłym roku mają się odbyć, również organiczowane przez ChTMTS, międzynarodowa konferencja mechaniki płynów (Pekin, 1987 — VI, 16 - 19) i międzynarodowa konferencja komputerowej mechaniki inżynierskiej (Pekin, sierpień, 5 - 9).

5. Chińskie czasopisma naukowe z dziedziny mechaniki

ChTMTS wydaje szereg czasopism naukowych i technicznych. Dwa z nich wydawane są również w angielskiej wersji językowej, pozostałe wyłącznie po chińsku. Najstarszym czasopismem, założonym w r. 1957 jest dwumiesięcznik *Acta Mechanica Sinica*, wydawany jest w obu wersjach językowych w nakładzie 5000 egzemplarzy. Redaktorem naczelnym jest profesor Lin Tongji, który również wchodzi do Biura Kongresów IUTAM z ramienia ChRL.

Acta Mechanica Solids Sinica jest kwartalnikiem wydawanym wyłącznie po chińsku przez Towarzystwo M.T.S. w Wuhanie. *Advances in Mechanics* jest czasopismem recenzyjnym wydawanym przez Ch.Ak. Nauk. *Mechanics and Practice* jest dwumiesięcznikiem wydawanym po chińsku przez Ch. Akademię Nauk i Towarzystwo. W nakładzie 5000 egzemplarzy w obu wersjach językowych ukazuje się miesięcznik *Applied Mathematics and Mechanics*. Redaktorem naczelnym miesięcznika jest profesor Qian Weichang (Szanghaj), wydawane jest w Chunkingu (Chongqing). Towarzystwo wydaje jeszcze następujące 3 kwartalniki w języku chińskim: *Chinese Journal of Geotechnical Engineering, Explosion and Shock Waves, Experimental Mechanics*. Z dziedziny mechaniki należy wymienić jeszcze następujące czasopisma wydawane przez lokalne towarzystwa mechaniki teoretycznej i stosowanej i inne instytucje: *The Shanghai Journal of Mechanics, Computational Structure Mechanics and Application, Vibration and Shock, Progress in Mechanics*, oraz *Translated Papers on Applied Mechanics*.

6. O transkrypcji chińskich nazw i nazwisk

Pierwsze próby wprowadzenia alfabetu do języka chińskiego pochodzą jeszcze z okresu 1880 - 90. W latach dwudziestych próbowano skonstruować pismo chińskie na podstawie alfabetu łacińskiego, a nieco wcześniej (1913) na podstawie grafiki chińskiej. Wielkie trudności z wprowadzeniem pisma fonetycznego polegają na tym, że mieszkańcy Chin posługują się wieloma dialektami, różniącymi się często bardziej niż języki europejskie. Pismo jest natomiast jedno, zrozumiałe dla wszystkich, którzy umieją pisać. Drugą sprawą jest transkrypcja chińskich nazw i nazwisk przy tłumaczeniu na języki europejskie. Pierwszy system transkrypcyjny został wprowadzony w wieku XVII przez włoskich Jezuitów. Następnie upowszechniły się systemy „romanizacyjne” angielski, francuski i niemiecki. Najbardziej znany system angielski nazywa się, od nazwisk twórców, systemem Wade-Gilesa. Wymowa chińska jest bardzo trudna dla obcokrajowców, zmiana jedynie intonacji może zmienić całkowicie znaczenie słowa i całego zdania. Poczynając od 1 stycznia 1979 władze chińskie wprowadziły nową transkrypcję słów chińskich zwaną „pin yin”, związaną z wymową „mandaryńską”, powszechną w okręgu pekińskim. Od tego czasu zamiast Peking (po polsku Pekin) w wersji pin yin mamy Beijing, Canton (Kanton) — Guangzhou, Mao Tse-tung — Mao Zedong, Chou Enlai — Zhou En-lai, itp. W wielu przypadkach wymowa została faktycznie niezmieniona. Nie mniej trzeba stwierdzić że w transkrypcji pin yin litery alfabetu łacińskiego nabrały innego znaczenia i wymowa niektórych sylab nie przypomina wymowy w żadnym z języków europejskich. Np. Zh wymawia się jak polskie cz, qian jak czjen (lub cjen), jing jak cing. Dwa uniwersytety pekińskie zachowały pisownię historyczną. Piszę nadal Peking University i Tsesinghua University (Beijing i Qinghua w pin yin, jeżeli to dotyczy nazwy miejsca, a nie uniwersytetu). Oczywiście w piśmie chińskim nie nastąpiły żadne zmiany. Podobnie rzecz się ma z uczonymi, których nazwiska były znane już dawnej z publikacji w językach europejskich. Nazwiska znanych uczonych chińskich Hsue-Sen Tsien i Wei-Zang Chien (lub Wei-chang Chien) w wersji pin yin należy pisać Qian Xuesen i Qian Weichang. Wymowa jest identyczna. Można dodać, że w poprzedniej pisowni również „Tsien” i „Chien” należy wymawiać tak samo. Nie są więc to różne nazwiska pod którymi są znani naukowcy, lecz te same nazwiska, podobnie jak nazwisko napisane cyrylicą i alfabetem łacińskim pozostaje tym samym nazwiskiem.

Zbigniew Olesiak

Komunikat

Politechnika Częstochowska w uzgodnieniu z Sekcją Mechaniki Płynów Komitetu Mechaniki PAN podjęła się organizacji specjalistycznego czasopisma naukowego pod nazwą: *Turbulence*.

Zadaniem czasopisma, które powołane zostało za zgodą Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz GUKPiW, będzie publikowanie oryginalnych prac naukowych związanych z szeroko rozumianą problematyką zarówno teoretycznego jak i eksperymentalnego ujęcia turbulencji.

Założeniem programowym czasopisma jest podjęcie tematyki z zakresu: turbulentnego transportu różnych wielkości fizycznych, modelowania turbulencji, numerycznej termo-aerodynamiki przepływów turbulentnych, struktur koherentnych, turbulencji morskiej i wiatrowej, procesów turbulentnego spalania, metrologii przepływów turbulentnych, innych zagadnień turbulencji.

W celu zwiększenia międzynarodowego zasięgu czasopisma preferowane będą artykuły i komunikaty naukowe w języku angielskim, co nie wyklucza jednak możliwości publikacji również w języku polskim.

Czasopismo TURBULENCE ukazywać się będzie jako rocznik wydawany przez Politechnikę Częstochowską.

Komitet Redakcyjny będzie działał w składzie: doc. Jerzy Chomiak, prof. prof. Janusz Elsner (redaktor naczelny), Zbyszek Kazimierski, Jerzy Ostrowski, Edmund Tuliszcza, Mieczysław Zembrzusi.

Artykuły nieprzekraczające wraz z materiałem ilustracyjnym objętości jednego arkusza wydawniczego (ok. 20 stron maszynopisu) oraz nie publikowane a także nie zgłoszone dotychczas w żadnym innym czasopiśmie przesyłać można pod adresem:

Redakcja Czasopisma TURBULENCE
Instytut Maszyn Ciepłych Politechniki Częstochowskiej
Aleja A. Zawadzkiego 21, 42-200 Częstochowa

Janusz Witold Elsner

ROCZNY SPIS TREŚCI ZA ROK 1987

Zeszyt 1-2

WITOLD NOWACKI	— wspomnienie pośmiertne.	3
Z. DŻYGADŁO, K. SIBILSKI,	Wpływ zrztu ładunków na dynamikę przestrzennego ruchu samolotu Влияние сброса грузов на динамику пространственного движения самолёта The effect of dropped loads on the dynamics of spatial motion of an aeroplane	14
W. JAROMINEK, T. STEFAŃSKI,	Metoda syntezy algorytmu adaptacji układu stabilizacji samolotu Метод синтеза алгоритма адаптирования системы стабилизации самолёта Method of synthesis of adaptation algorithm of stabilization system of aircraft	29
З. ШКОДА, В. ПРЕЙЗЕК,	Расчёт основных аэродинамических характеристик самолёта Obliczenie podstawowych charakterystyk aerodynamicznych samolotu Computation of an aeroplane fundamental aerodynamic characteristics	37
T. GOETZENDORF-GRABOWSKI, Z. GORAJ,	Lateral stability of the canard configuration Боковая устойчивость самолёта типа „утки” Stateczność boczna samolotu w układzie „kaczka”	47
J. NICZYFORUK, A. WIELGUS,	Modelowanie dynamiki sterowanego obiektu latającego klasy ziemia — powietrze Моделирование динамики управляемого летучего объекта класса земля — воздух Modelling of the dynamics of a manoeuvring aircraft under control	63
J. MARYNIAK, B. TARKA,	Wpływ położenia płata na współczynniki aerodynamiczne zasobnika lotniczego Влияние расположения крыла на аэродинамические коэффициенты авиационных контейнеров Influence of the wing position on aerodynamic coefficients of an under — wing pack	75
J. GASEK,	Przybliżona metoda badania ruchu obrotowego obiektów latających Приближенный метод исследования вращательного движения летательных объектов Approximate method of investigation of the rotational motion of flying objects	87
J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA,	Dynamika ciała osiowosymetrycznego z elastycznym układem hamującym stabilizującym zrzuconego z nosiciela Динамика осево-симметрического тела с эластичной системой торможения и стабилизации бросанного из носителя Dynamics of an axially-symmetric body dropped from missile carrier equipped with elastic braking and stabilizing system	97
S. DUBIEL, R. KURNATOWSKI,	Warunek oscylacyjności wahań rakiety jako kryterium doboru długości wyrzutni Условие осцилляционности качания ракеты как критерий подбора длины направляющих пускового устройства Condition of an oscillatory motion of a rocket as a criterion for the determination of the launcher length	109
С. КАМИŃSKI, J. NARKIEWICZ,	Analiza możliwości zmniejszenia niebezpiecznej strefy H-V w zawisie i locie pionowym śmigłowca Анализ возможности уменьшения опасной зоны H-V на висении и во время вертикального полёта вертолёта The analysis of the possibilities of decreasing H-V danger region in helicopter governing or vertical flight	121
W. LEŚNIEWSKI, J. MARYNIAK,	Wahania śmigła ogonowego na odkształcalnej belce ogonowej kadłuba śmigłowca Колесания хвостового винта на упругой хвостовой балке фюзеляжа вертолёта Fluctuations of the helicopter tail propeller on the deformable tail boom	131

- Z. DŹYGADŁO, W. SOBIERAJ, P. ZAŁEWSKI, Analiza wymuszonych drgań wału korbowego ze śmigłem przy zastosowaniu metody elementów skończonych 145
 Анализ вынужденных колебаний коленчатого вала с воздушным винтом при помощи метода конечных элементов
 The finite element analysis of forced vibrations of a crankshaft with an airscrew
- J. MANEROWSKI, Metoda numerycznej analizy dynamiki niestacjonarnie obciążonego wirnika na anizotropowych podporach 157
 Метод численного анализа динамики нестационарного нагруженного ротора на анизотропных подпорах
 A method of numerical analysis of the dynamics of a nonstationary loaded rotor on anisotropic supports
- Z. ZAGDAŃSKI, Uproszczony model matematyczny układu sterowania jednowirnikowym turbinowym silnikiem odrzutowym — silnik SO-3 — z uwzględnieniem stanów awaryjnych 169
 Упрощенная математическая модель системы управления одновалового, турбореактивного двигателя (СО-3) — с учётом аварии
 A simplified mathematical model of a single — spool turbojet engine (SO-3) control system with the engine break — downs taken into account
- M. JEŹ, Modele obliczeniowe i badania doświadczalne zawieszenia lotniczego silnika tłokowego 181
 Расчёт модели и экспериментальные исследования подвески авиационного поршневого двигателя
 Model calculations and experimental testing of aircraft's piston engine
- J. MARYNIAK, System symulacji trenera lotu, naprowadzania i walki powietrznej samolotu 189
 Система симуляции имитатора полёта, наведения и воздушного сражения самолёта
 The system of airplane fight simulation for homing and air combat
- J. GAŁAJ, J. MARYNIAK, Synteza growego systemu naprowadzania samolotu na samolot-cel w płaszczyźnie podłużnej metodą gier elementarnych 215
 Синтез игровой системы наведения самолёта на самолёт-цель в продольной плоскости методом элементарных игр
 Suboptimal solution of flighter interception control process using elementary games method
- C. SZCZEPAŃSKI, R. VOGT, Modelowanie samolotu jako zamkniętego systemu sterowania 227
 Моделирование самолёта в виде закрытой управляемой системы
 Modelling of an airplane as a closed-loop control system
- M. MRÓZ, Optymalizacja związków sprzężenia w automatycznym sterowaniu lotem 235
 Оптимализация связи сопряжения в автоматическом управлении полетом
 Optimization of coupling relations in automatic flight control
- S. DUBIEL, W. PŁESCHA, Minimalno-czasowy program sterowania lotem ze zmienną prędkością 241
 Минимально-временная программа управления полетом при переменной скорости
 Minimum-time program for control flight with variable velocity
- W. JAROMINEK, T. STEFAŃSKI, Problem stabilizacji samolotu z zastosowaniem identyfikacji parametrycznej 249
 Проблема стабилизации самолёта с использованием параметрической идентификации
 Solution of the problem of stabilization of aircraft by means of parametric identification
- W. BŁAJER, J. PARCZEWSKI, Model matematyczny wyznaczenia funkcji sterowania samolotem w pętli 257
 Математическая модель определения функции управления самолётом в петле
 A mathematical model for determining the function of airplane control in loop
- J. GAJDA, R. VOGT, Symulacja sterowanego ruchu samolotu podczas startu i lądowania 265
 Симуляция управления движения самолёта при взлёте и посадке
 Simulation of an airplane flight control at the take-off and landing
- W. JAROMINEK, T. STEFAŃSKI, Modelowanie serwomechanizmu hydraulicznego na maszynie cyfrowej 273
 Цифровые моделирование гидропривода
 Modelling of hydraulic servo-mechanism on a digital computer

W. STAFIEŁ, Postulowane pomiary widma obciążeń eksploatacyjnych skrzydeł szybowców w locie	281
Требованные измерения спектра эксплуатационных нагрузок крыльев планеров в полёте	
Flight measurements of loads spectrum for a glider wing in exploitation	
P. LAMERS, Pomiar i rejestracja widma obciążeń skrzydeł szybowców laminatowych metodą tensometryczną	293
Измерение и регистрация спектра нагруженных крыльев ламинированных планеров тензометрическим методом	
A composite glider wing load spectrum measurements and registration by strain gauge technique	
J. MARYŃIAK, Prawa sterowania jako więzy nieholonomiczne automatycznego układu sterowania śmigłowcem	299
Законы управления как неголономные связи автоматического управления вертолётom	
Equivalence of the control rules and nonholonomic constrains in automatic control of helicopter	
BIULETYN INFORMACYJNY	315

Zeszyt 3

A. H. Гузь, В. Б. Рудницкий, Контактное взаимодействие упругого штампа с предварительно напряжённым слоем	323
Kontaktowe oddziaływanie sprężystego stempla ze wstępnie naprężoną warstwą	
Contact interaction of an elastic punch and a prestressed layer	
J. WAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, Zjawiska rezonansów wewnętrznych w nieliniowych układach drgających	341
Явления внутренних резонансов в нелинейных колебательных системах	
The phenomena internal resonances in nonlinear vibrating systems	
M. PRZEWSKI, S. JONIAK, P. WASILEWICZ, Urządzenie do prób skręcania ze statycznym rozciąganiem	375
Устройство для испытаний на кручение со статическим растяжением	
Apparatus for torsion tests with static tension	
M. J. SAŁKOWSKI, Istnienie całki energii w wybranych obszarach opływu profilu cieczy doskonałej	387
Существование интеграла энергии в избранных пространствах обтекания профиля идеальной жидкостью	
Existence of the energy integral in selected incompressible fluid flow around the profile	
M. WRÓBEL, Wariacyjne ujęcie przepływów termodyfuzyjnych sprzężonych z polem naprężeń	403
Вариационная форма термодиффузионных переплывов связанных с полем напряжения	
The variational formulation of heat and mass transfer conjugated with stress field	
K. MYŚLECKI, Analiza płaskich zagadnień teorii sprężystości metodą elementów brzegowych	419
Анализ двумерных задач теории упругости методом граничных элементов	
Analysis of plane problems of elasticity by boundary element method	
W. JAROMIŃEK, T. STEFAŃSKI, Identyfikacja parametryczna modelu matematycznego samolotu	429
Параметрическая идентификация математической модели самолёта	
Parametric identification on mathematical model of aircraft	
W. BŁAJER, Wyznaczanie modelu sterowania samolotem zapewniającego ścisłą realizację ruchu programowego	437
Разработка модели управления самолётom, обеспечивающей точное выполнение программного движения	
Determination of the model of airplane control ensuring the exact realization of a program motion	
T. GAŁKIEWICZ, Określenie naprężeń w cewce transformatora rozciąganej na skutek działania promieniowych sił elektrodynamicznych	447
Определение напряжений в катушке трансформатора растягнутой в следствие действия радиальных сплочённых сил	
Determination of stresses in the transformer coil subjected to extension with radial electro-dynamics	

- M. SPERSKI, Zastosowanie funkcji kształtu do opisu drgań prętów cienkościennych o zamkniętym profilu 461
 Применение функций Власова для описания колебаний тонкостенных стержней-оболочек закрытого профиля
 Use of shape functions to the description of vibration of the thin-walled bars with closed section
- R. GAJEWSKI, Rozwiązanie zadań dynamicznych w obszarach nieograniczonych 483
 Решение динамических задач в неограниченных областях
 Solution of dynamical problems in unbounded regions
- T. WESOŁOWSKI, K. RÓŁTORAK, Simulation analysis a semi-active suspension 491
 Симулированный анализ полуактивной подвески автомобиля
 Analiza symulacyjna półaktywnego zawieszenia pojazdu
- H. OLESIAK, J. ŚLIŻEWICZ, Przykłady wykorzystania komputerów domowych w nauczaniu wytrzymałości materiałów 497
 Примеры использования микрокомпьютеров в обучении сопротивления материалов
 An application of personal microcomputers to learning of strength of materials 501

BIULETYN INFORMACYJNY

Zeszyt 4

- J. ARBOCZ, Recent developments in shell stability analysis 523
 Последние достижения в теории устойчивости оболочек
 Współczesne kierunki badań stateczności powłok
- И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, Развитие нелинейной механики оболочек в трудах Казанской школы 541
 Rozwój nieliniowej mechaniki powłok w pracach szkoły kazańskiej
 Development of nonlinear mechanics of shells in the Kazan school
- Z. ORŁOŚ, W. CUDNY, K. TOMASZEWSKI, Analiza niestacjonarnych odkształceń naprężeń i termosprężystych w wale z odsadzaniem 557
 Анализ нестационарных термоупругих деформаций и напряжений вала с кольцевой галтелью
 Analysis of transient thermoclastic strains and stresses in a shouldered shaft 571
- A. GLINIŃSKI, Dopelnienie metody moire metodą warstwy optycznej czynnej 571
 Пополнение метода муара методом оптически чувствительных покрытий
 The complement of moire method by photoelastic coating method
- W. LISEWSKI, P. GUTOWSKI, Wykorzystanie analizy modalnej do badania układów dynamicznych o wielu stopniach swobody 583
 Применение модального анализа в случае динамических систем с многими степенями свободы
 Use of model analysis in the dynamical systems of many degrees of freedom
- A. GOŁAŚ, J. KOWAL, M. SZEPSKI, Analiza własności wibroizolatorów aktywnych typu poduszka powietrzna 599
 Анализ свойств виброизоляторов активных типа воздушный мешёк
 Analysis of active vibrisolators properties of air-cushion type
- W. SOROMAŃSKI, J. KISŁOWSKI, B. RACIBORSKI, Zastosowanie procesów Markowa do modelowania i badania układu mechanicznego tor-pojazd szynowy 611
 Анализ динамики системы рельс-рельсовый состав с использованием Маркова
 Application of Markov processes for modelling and investigating mechanical track-rail vehicle system
- W. WLAJER, Numeryczna symulacja programowego ruchu samolotu w pętli pionowej 621
 Симулирование программного движения самолёта в вертикальной петле
 Numerical simulation of airplane programmed motion in vertical loop

- A. KACZYŃSKI, S. MATYSIAK, Complex potentials in two-dimensional problems of periodically layered elastic composites 635
Комплексные потенциалы в двумерных задачах слоистых сред периодической структуры
Potencjały zespolone w dwuwymiarowych zagadnieniach kompozytów warstwowych o strukturze periodycznej
- M. BANYS, Rozwiązanie problemów quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym 645
Решение квазистатических задач упруго-вязкопластичности с кинематическим упрочнением
Solutions of quasi-static problems of elasto-viscoplasticity with kinematic hardening
- BIULETYN INFORMACYJNY 661

SPIS TREŚCI

<p>J. ARBOCZ, Recent developments in shell stability analysis Последние достижения в теории устойчивости оболочек Współczesne kierunki badań stateczności powłok</p>	523
<p>И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, Развитие нелинейной механики оболочек в трудах Казанской школы Rozwój nieliniowej mechaniki powłok w pracach szkoły kazańskiej Development of nonlinear mechanics of shells in the Kazan school</p>	541
<p>Z. ORŁOŚ, W. CUDNY, K. TOMASZEWSKI, Analiza niestacjonarnych odkształceń i naprężeń termosprężystych w wale z odsadzaniem Анализ нестационарных термоупругих деформаций и напряжений вала с кольцевой галтелью Analysis of transient thermoelastic strains and stresses in a shouldered shaft</p>	557
<p>A. GLIŃSKA, Dopełnienie metody moire metodą warstwy optycznie czynnej Пополнение метода муара методом оптически чувствительных покрытий The complement of moire method by photoelastic coating method</p>	571
<p>W. LISIŃSKI, P. GUTOWSKI, Wykorzystanie analizy modalnej do badania układów dynamicznych o wielu stopniach swobody Применение модального анализа в случае динамических систем с многими степенями свободы Use of model analysis in the dynamical systems of many degrees of freedom</p>	583
<p>A. GOŁAŚ, J. KOWAŁ, M. SZEPSKI, Analiza własności wibroizolatorów aktywnych typu poduszka powietrzna Анализ свойств виброизоляторов активных типа воздушный мешёк Analysis of active vibroisolators properties of air-cushion type</p>	599
<p>W. SŁOBIANIEC, J. KISIELOWSKI, B. RASIBORSKI, Zastosowanie procesów Markowa do modelowania i badania układu mechanicznego tor-pojazd szynowy Анализ динамики системы рельс-рельсовый состав с использованием процессов Маркова Application of Markov processes for modelling and investigating mechanical track-rail vehicle system</p>	611
<p>W. WŁAJER, Numeryczna symulacja programowego ruchu samolotu w pętli pionowej Симулирование программного движения самолёта в вертикальной петле Numerical simulation of airplane programmed motion in vertical loop</p>	621
<p>A. KACZYŃSKI, S. MATYSIAK, Complex potentials in two-dimensional problems of periodically layered elastic composites Комплексные потенциалы в двумерных задачах слоистых сред периодической структуры Potencjały zespolone w dwuwymiarowych zagadnieniach kompozytów warstwowych o strukturze periodycznej</p>	635
<p>M. BANIŚ, Rozwiązywanie problemów quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym Решение квазистатических задач упруго-вязкопластичности с кинематическим упрочнением Solutions of quasi-static problems of elasto-viscoplasticity with kinematic hardening</p>	645
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	661
<p>ROZNY SPIS TREŚCI</p>	673

Prenumeratę **na kraj** przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki **za granicę** przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki **za granicę** jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona — Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona — Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa
Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1.1.1967 r. jako kwartalnik.
(Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa, pokój 309)*
