

11 420 +
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK
TOM 25 • ZESZYT 3

XXV-lecie



WARSZAWA 1987

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

TOM 25 ZESZYT 3

XXV-lecie

WARSZAWA 1987

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A

MAREK DIETRICH—PRZEWODNICZĄCY,
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,
STANISŁAW J. GDULA, IGOR KISIEL,
ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI,
PIOTR WILDE, JÓZEF WOJNAROWSKI,
MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

K O L E G I U M R E D A K C Y J N E

REDAKTOR NACZELNY—ZBIGNIEW OLESIAK,
REDAKTORZY—STANISŁAW DUBIEL,
JACEK STUPNICKI, ANDRZEJ TYLIKOWSKI,
CZESŁAW WOŹNIAK, SEKRETARZ—EWA KOISAR

Kwartalnik ukazuje się przy pomocy finansowej PAN

R E D A K C J A

00-901 Warszawa, PKiN, Sala Kongresowa, pokój 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Nakład 510. Ark. wydawniczych 14,5. Ark. drukarskich 12,5. Papier druk. b. sat. kl. III, 70 g. 70×100.
Oddano do składania 9.II.1987 r. Druk ukończono w sierpniu 1988 r. Zam. 4155/12/87. Cena zł 140.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОГО ШТАМПА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ СЛОЕМ

А. Н. Гузь
В. Б. Рудницкий
Киев, СССР

Обозначения

- y_i — координаты начального деформированного состояния;
 λ_i — коэффициенты удлинения определяющие перемещения начального состояния;
 $S_0^{\beta\beta}$ — физические составляющие тензора напряжений относительно ковариантных базисных векторов в деформированном состоянии;
 u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора перемещений в начальном деформированном состоянии;
 \tilde{Q}_{ij} — составляющие тензора напряжений в начальном деформированном состоянии;
 δ_{ij} — символ Кронекера
 p — скалярная величина соответствующая гидростатическому давлению;
 c_{10} — упругая постоянная потенциала Трелоара.

1. Введение

Контактные задачи для слоя (полосы) конечной толщины без начальных напряжений исследованы в монографиях [10, 11, 12, 13, 14, 15], подробный обзор которых дан в [16]. Влияние начальных напряжений на закон распределения контактных напряжений в упругих полуплоскости и полупространстве при их контактном взаимодействии с упругими штампами исследовано в работах [5 - 7]. Причем в них дан общий метод решения смешанных контактных задач для полуплоскости и полупространства с начальными напряжениями. Задача о давлении жесткого штампа на упругий слой с начальными напряжениями рассмотрена в [8], а для частного вида упругого потенциала несжимаемых тел в работах [9, 17].

Ниже в рамках линеаризированной теории упругости [1 - 4] приводится решение смешанной задачи о давлении упругого цилиндричного штампа на слой с начальными напряжениями. Исследования выполнены для теорий больших

(конечных) начальной деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Предполагается, что упругие потенциалы есть дважды непрерывно-дифференцируемые функции алгебраических инвариантов тензора деформации Грина [4]. Все исследование приведено в координатах начального деформированного состояния u_i , которые связаны с лагранжевыми координатами (естественного состояния) отношениями $u_i = \lambda_i x_j$ ($i = 1, 2, 3$), где λ_i — коэффициенты удлинения определяющие перемещения начального состояния. Кроме того, будем считать, что действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного однородного напряженно-деформированного состояния, для которого выполняются условия:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0, \quad S_0^{33} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1.1)$$

Все величины, относящиеся к упругому штампу, будем записывать в принятых обозначениях теории упругости, а величины относящиеся к слою и полупространству с начальными напряжениями, — в обозначениях [9]. Через ν , E и ν_1 , E_1 — обозначим коэффициенты Пуассона и модули Юнга соответственно цилиндра и слоя.

2. Постановка задачи и основные соотношения

Пусть в упругий слой с начальными напряжениями (которые возникают до контакта) вдавливаются упругий цилиндр (рис. 1), под действием нагрузки, которая приложена так, что его свободный торец деформируется в направлении оси Ou_3 на одинаковую величину — ε . Все поверхности вне области контакта свободны от внешних усилий. Рассматривается два случая закрепления слоя по нижнему основанию: задача I — слой лежит на жестком основании без сил трения; задача II — слой жестко закреплен по основанию.

Переходя к круговым цилиндрическим координатам (r, θ, z_i) , где $z_i = \sqrt{n_i} y_3$, и предполагая, что цилиндр и слой изготовлены из различных материалов, для определения составляющих вектора перемещений и компонент тензора напряжений в цилиндре и слое имеем следующие граничные условия:

На торце упругого штампа $z_i = \sqrt{n_i} H$

$$U_z = -\varepsilon, \quad \tau_{rz} = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (2.1)$$

На границе упругого слоя $z_i = 0$ в области контакта

$$u_3 = u_z, \quad \tilde{Q}_{33} = \sigma_{zz}, \quad \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad (0 \leq r \leq R). \quad (2.2)$$

На границе упругого слоя $z_i = 0$ вне области контакта

$$\tilde{Q}_{33} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad (R \leq r < \infty). \quad (2.3)$$

На боковой поверхности цилиндра $r = R$

$$\tau_{rz} = 0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad (0 \leq z_i \leq H). \quad (2.4)$$

На нижней поверхности слоя $z_i = \frac{\lambda_3 h_i}{\sqrt{n_i}} = \frac{H_1}{\sqrt{n_i}}$ или $y_3 = H_1$

$$u_3 = 0, \quad \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (\text{задача I}) \quad (2.5)$$

$$u_3 = 0, \quad u_r = 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (\text{задача II}) \quad (2.5a)$$

Напряженно-деформированное состояние в упругом цилиндре определим из уравнений Ляме

$$\begin{aligned} 2(1-\nu) \left(\Delta_1 - \frac{1}{r} \right) u_r + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial y_3} &= 0, \\ (1-2\nu) \Delta_1 u_z + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial y_3^2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение (2.1) ищем в виде гармонических функций Папковича-Неибера [5, формула (2.6)] φ и $\bar{\varphi}$. Компоненты вектора перемещений и тензора напряжений для упругого штампа через потенциалы φ и $\bar{\varphi}$ с учетом неоднородности граничных условий (выбор элементарного решения зависит от вида граничных условий) представим в виде

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{1-2\nu} \left\{ 2B_0 r + \sum_{k=0}^{\infty} [\beta_k^2 W_1(A_k, B_k) \cdot W_1(C_k, -D_k) + \mu_k^2 W_3(E_k, F_k) + \right. \\ &\quad \left. + N_k W_1(\text{ch } \mu_k y_3) + M_k W_2(\text{sh } \mu_k y_3)] \right\}; \\ u_z &= \frac{1}{1-2\nu} \left\{ (2A_0 + 6C_0)(1-2\nu) + 4B_0 z + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k^2 \left(A_k I_0(\beta_k r) + B_k W_3((4-4\nu)I_0(\beta_k r)) \cdot \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot W_2(D_k, C_k) - \mu_k^2 J_0(\mu_k r) \left(\frac{W_3(F_k, E_k)}{1-2\nu} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2N_k W_2 \left(\frac{\text{sh } \mu_k y_3}{2(1-2\nu)} \right) - 2M_k W_1 \left(-\frac{\text{sh } \mu_k y_3}{2(1-2\nu)} \right) \right] \right\}; \\ \tau_{rz} &= \Theta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^3 \left[W_1(A_k, B_k) + 2B_k(1-\nu) I_1(\beta_k r) W_2(D_k, C_k) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_k^3 W_3(F_k, E_k) + 2N_k \cdot \nu \cdot w_2 \left(\frac{\text{sh } \mu_k y_3}{2\nu} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\nu M_k w_1 \left(\frac{\text{ch } \mu_k y_3}{2\nu} \right) \right]; \\ \sigma_z &= \Theta \cdot \left\{ (2-\nu)(4B_0 + 6C_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\beta_k^3 \left(A_k I_0(\beta_k r) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_k W_3(2(1-\nu)I_0(\beta_k r)) W_2(E_k, -D_k) - \right. \right. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_k^3 J_0(\mu_k r) \left(W_3(E_k, F_k) - (1-2\nu) N_k w_2 \left(\frac{\text{ch } \mu_k y_3}{1-2\nu} \right) - \right. \\
& \left. - (1-2\nu) M_k w_2 \left(\frac{\text{sh } \mu_k y_3}{1-2\nu} \right) \right) \Bigg\}; \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r = \Theta \Big\{ & 4\nu(C_0 + B_0) + 2B_0 - \sum_{k=1}^{\infty} [\beta_k^3 (A_k I_0'(\beta_k r) + \\
& + B_k W_2(C_k, -D_k)(1-2\nu)) + \mu_k^3 ((1-2\nu) J_0(\mu_k r)(N_k \text{sh } \mu_k y_3 + \\
& + M_k \text{ch } \mu_k y_3) + J_0'(\mu_k r) W_1(E_k, F_k) + \\
& + N_k w_1(\text{ch } \mu_k y_3) + M_k w_2(\text{sh } \mu_k y_3))] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\text{где: } \Theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$\begin{aligned}
W_1(A_k, B_k) &= A_k I_1(\beta_k r) + B_k \beta_k r I_0(\beta_k r); \\
W_2(C_k, D_k) &= C_k \cos \beta_k y_3 + D_k \sin \beta_k y_3; \\
W_3(E_k, F_k) &= E_k \text{ch } \mu_k y_3 + F_k \text{sh } \mu_k y_3; \\
w_1(\text{ch } \mu_k y_3) &= \text{sh } \mu_k y_3 + \mu_k y_3 \text{ch } \mu_k y_3; \\
w_2(\text{sh } \mu_k y_3) &= \text{ch } \mu_k y_3 + \mu_k y_3 \text{sh } \mu_k y_3; \\
w_3(m I_0(\beta_k r)) &= m I_0(\beta_k r) + \beta_k r I_1(\beta_k r).
\end{aligned}$$

Здесь $A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, F_k, A_0, B_0, C_0$, — произвольные постоянные, $J_n(x)$, $I_n(x)$ — функции Бесселя действительного и мнимого аргумента.

Для определения напряженно-деформированного состояния в слое используем линеаризованные уравнения и представления их решений, полученные в монографиях [1 - 4]. Как и в [5] рассмотрим случай сжимаемых и несжимаемых тел.

Для сжимаемых тел в случае пространственной статической задачи систему уравнений равновесия запишем в виде

$$\omega_{i\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y_i \partial y_\beta} = 0 \quad (i, m, \alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{2.8}$$

Здесь тензора $\tilde{\omega}$ для теории конечных (больших) начальных деформаций и первого варианта теорий малых начальных деформаций, когда упругий потенциал представлен в виде функции алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина определяются из выражения

$$\begin{aligned}
\omega_{i\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_m \lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} [& \delta_{im} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{im})(\delta_{i\alpha} \delta_{m\alpha} + \\
& + \delta_{i\beta} \delta_{m\alpha}) \mu_{im} + \lambda_\alpha^{-2} \delta_{i\beta} \delta_{m\alpha} S_0^{\beta\beta}], \tag{2.9}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{i\beta} &= \left(\sum_{ii} \sum_{\beta\beta} + 2\delta_{i\beta} B_{ii} \right) \Phi^0; \quad \mu_{ij} = B_{ij} \Phi^0; \\
S_0^{\beta\beta} &= \sum_{\beta\beta} \Phi^0; \quad \Phi^0 = \Phi^0(A_1^0, A_2^0, A_3^0); \quad 2\varepsilon_{ii}^0 = \lambda_i^2 - 1; \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\sum_{ii} = \frac{\partial}{\partial A_1^0} + 2\varepsilon_{ii} \frac{\partial}{\partial A_2^0} + 3\varepsilon_{ii} \frac{\partial}{\partial A_3^0}; \quad B_{ii} = \frac{\partial}{\partial A_2^0} + \frac{3}{2}(\varepsilon_{ii}^0 + \varepsilon_{jj}^0) \frac{\partial}{\partial A_3^0}. \quad (2.10a)$$

Для перехода к второму варианту теории малых начальных деформаций [4] в (2.10), необходимо положить

$$\delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \approx \delta_{ij}; \quad \varepsilon_{ii}^0 = \lambda_i - 1; \quad S_0^{\beta\beta} = \sigma_{\beta\beta}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{i\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta i}^0} \right) \Phi^0. \quad (2.11)$$

Связь между составляющими тензора напряжений \tilde{Q} и компонентами вектора перемещений \tilde{u} представим в форме

$$\tilde{Q}_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta}. \quad (2.12)$$

Решение (2.3) представим через две функции ψ и χ

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1} \psi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_3}; & u_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_2 \partial y_3}; \\ u_3 &= \frac{\tilde{\omega}_{1111}}{\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313}} \left(\Delta_2 + \frac{\tilde{\omega}_{3113}}{\tilde{\omega}_{1111}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi; & \Delta_2 &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

которые определяются из дифференциальных уравнений

$$\left(\Delta_2 + n_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \psi = 0; \quad \left(\Delta_2 + n_1 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta_2 + n_2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi = 0. \quad (2.14)$$

Величины n_i ($i = 1, 2$) являются корнями квадратного уравнения

$$n^2 - 2An + A_1 = 0 \quad (2.15)$$

а A , A_1 и n_3 даются выражениями

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{\tilde{\omega}_{3113}}{\tilde{\omega}_{1221}}; & n_{1,2} &= A + (A^2 - A_1)^{\frac{1}{2}}; \\ 2A\tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{1331} &= \tilde{\omega}_{1331}\tilde{\omega}_{3113} + \tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{3333} - (\omega_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^2; \\ \tilde{\omega}_{1331}\tilde{\omega}_{3333}A_1 &= \tilde{\omega}_{1331}\tilde{\omega}_{1111}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В случае несжимаемых тел уравнения равновесия, условие несжимаемости, связь между составляющими тензора напряжений \tilde{Q} и перемещениями, запишем в форме

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y_i \partial y_\beta} + q_{ij} \frac{\partial p}{\partial y_i} = 0; \quad q_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} = 0; \quad (2.17)$$

$$Q_{ij} = \kappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} + \tilde{q}_{ij} p,$$

Здесь составляющие тензоров κ и \tilde{q} определяются для теорий конечных (больших) начальных деформаций, первого варианта теории малых начальных деформаций выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} &= \lambda_j \lambda_\alpha [\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij}] + \\ &+ \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_0^{\beta\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i q_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} q_j, \end{aligned} \quad (2.18)$$

а для второго варианта теории малых начальных деформаций имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = & \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij} + \\ & + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} \sigma_{\beta\beta}^0; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Величины $A_{i\beta}$, μ_{ij} , $S_0^{\beta\beta}$, $\sigma_{\beta\beta}^0$, входящие в (2.17) — (2.19), как и для сжимаемых тел определяются для каждого варианта постановки задач с использованием дифференциальных операторов (2.10а) с учетом конкретной зависимости упругого потенциала от алгебраических инвариантов. Так, для теории конечных (больших) начальных деформаций [5] получаем

$$\begin{aligned} A_{i\beta} = & \left(\sum_{ii} \sum_{\beta\beta} + 2\delta_{i\beta} B_{ii} \right) W^0 - 2p^0 \delta_{i\beta} \lambda_i^{-4}; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \\ \mu_{ij} = & B_{ij} W^0 - p^0 \lambda_i^{-2} \lambda_j^{-2}; \quad S_0^{\beta\beta} = \sum_{\beta\beta} W^0 + p^0 \lambda_\beta^{-2}; \\ 2\varepsilon_{ii} = & \lambda_i^2 - 1; \quad \Phi(I_1^0, I_2^0) \equiv W^0(A_1^0, A_2^0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для первого варианта теории малых начальных деформаций аналогичные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} A_{i\beta} = & \left(\sum_{ii} \sum_{\beta\beta} + 2\delta_{i\beta} B_{ii} \right) \Phi^0; \quad \mu_{ij} = B_{ij} \Phi^0; \\ q_i = & \lambda_i; \quad S_0^{\beta\beta} = \sigma_{\beta\beta}^0 = \sum_{\beta\beta} \Phi^0 + p^0; \quad 2\varepsilon_{ii} = \lambda_i^2 - 1; \\ \Phi^0 = & \Phi(A_3^0, A_3^0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

В случае второго варианта теории малых начальных деформаций в (2.19) следует положить

$$\begin{aligned} A_{i\beta} = & \left(\sum_{ii} \sum_{\beta\beta} + 2\delta_{i\beta} B_{ii} \right); \quad \mu_{ij} = B_{ij} \Phi^0; \\ \sigma_{\beta\beta}^0 = & \sum_{\beta\beta} \Phi + p^0; \quad \Phi^0 = \Phi(A_2^0, A_1^0); \quad \varepsilon_{ii} = \lambda_i - 1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Общее решение системы (2.11) представим в виде

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{\partial \psi}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_3}; \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_2 \partial y_3}; \\ u_3 = & \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} A_1 \chi; \quad p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ [\tilde{\kappa}_{1111} - \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} \right. \\ & \left. (\tilde{\kappa}_{1133} + \tilde{\kappa}_{1313})] A_1 + \tilde{\kappa}_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3} \right\} \frac{\partial \chi}{\partial y_3}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

Функции ψ и χ определяются из дифференциальных уравнений (2.9), только здесь

$$\begin{aligned} n_3 = & \frac{\tilde{\kappa}_{3113}}{\tilde{\kappa}_{1221}}; \quad \tilde{\kappa}_{1331} A_1 = \lambda_1^{-2} q_1^{-2} \lambda_3^2 q_3 \kappa_{3113}; \\ 2A_1 \tilde{\kappa}_{1331} = & \tilde{\kappa}_{3333} + \lambda_1^{-2} q_1^{-2} \lambda_3^2 q_3^2 \kappa_{1111} - 2\lambda_1^{-1} q_1^{-1} \lambda_3 q_3 (\tilde{\kappa}_{1133} + \tilde{\kappa}_{1313}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ограничимся случаем $\text{Im}(n_i) = 0$, $\text{Re}(n_i) > 0$ ($i = 1, 2$), который, как показано в [4], имеет место для всех потенциалов конкретной простейшей структуры в случае сжимаемых и несжимаемых тел с начальными напряжениями [3]. Этому случаю

соответствуют такие начальные напряжения, которые не вызывают явление внутренней потери устойчивости [18]. Учитывая это обстоятельство, приходим к выводу, что возможны различные представления общего решения (2.8), (2.17) для равных и неравных корней (2.15).

Представляя функции ψ и χ через новые потенциалы φ_j ($j = 1, 2, 3$) запишем решение (2.13) и (2.23) отдельно для равных и неравных корней в общем случае для сжимаемых и несжимаемых тел.

2.1. Неравные корни ($n_1 \neq n_2$). Как и в [4] введем новые функции

$$\psi = -\varphi_3; \quad -\frac{\partial \chi}{\partial y_3} = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (2.25)$$

Согласно (2.9) с учетом (2.10), (2.15) получаем уравнение для определения функций φ_j :

$$\left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right) \varphi_j = 0; \quad \left(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \Theta} \right) \quad (2.26)$$

и выражения для перемещений и напряжений (при $y_3 = \text{const}$):

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} \varphi_3; & u_\Theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial r} \varphi_3; \\ u_3 &= \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}; \\ Q_{33} &= c_{44} \left[(1+m_1) l_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + (1+m_2) l_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right]; \\ Q_{3r} &= c_{44} \left[\frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + \frac{1+m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} - \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \Theta \partial z_3} \right]; \\ Q_{3\Theta} &= c_{44} \left[\frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \Theta \partial z_1} + \frac{1+m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{r \partial \Theta \partial z_2} + \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

где c_{44} — упругая постоянная [7].

Кроме того, в случае несжимаемых тел для скалярной величины p [1] через функции φ_j имеем выражение

$$p = -\lambda_1^{-1} q_1^{-1} \{ [\tilde{\alpha}_{1111} - \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} (\tilde{\alpha}_{1133} + \tilde{\alpha}_{1313}) \Delta_1 (\varphi_1 + \varphi_2) - \tilde{\alpha}_{3113} \Delta_1 (n_1^{-1} \varphi_1 + n_2^{-1} \varphi_2)] \}. \quad (2.27a)$$

Здесь коэффициенты m_j , l_j , c_{44} имеют вид:

для сжимаемых тел

$$\begin{aligned} c_{44} &= \tilde{\omega}_{1313}; & m_j &= (\tilde{\omega}_{1111} n_1 - \tilde{\omega}_{3113}) (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; \\ l_j &= (\tilde{\omega}_{3333} m_j - \tilde{\omega}_{1133} n_j) n_j^{-1} (1+m_j)^{-1} \omega_{1313}; & j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

для несжимаемых тел

$$\begin{aligned} c_{44} &= \tilde{\alpha}_{1313}; & m_j &= \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} n_j; & l_j &= [\tilde{\alpha}_{1313} n_j (1+m_j)]^{-1} \\ & & & & & [\tilde{\alpha}_{3333} m_j + n_j (\lambda_1^{-1} q_1^{-1} \lambda_3 q_3 \tilde{\alpha}_{1111} - \tilde{\alpha}_{1313} - 2\tilde{\alpha}_{1133}) - \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \lambda_3 q_3 \tilde{\alpha}_{3113}]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.2. **Равные корни** ($n_1 = n_2$). В случае равных корней представим функции ψ и χ через потенциалы φ_i ($i = 1, 2, 3$) в виде

$$\psi = -\varphi_3; \quad \frac{\partial \chi}{\partial y_3} = -\varphi_1 - \varphi_2 - y_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_3}. \quad (2.30)$$

Аналогично как и для неравных корней получаем уравнения для их определения

$$\left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \varphi_1 = 0; \quad \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \varphi_2 = 0; \quad \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \varphi_3 = 0 \quad (2.31)$$

Подставляя (2.13) и (2.23) в (2.12), (2.17) с учетом (2.25), (2.27), (2.29) для сжимаемых и несжимаемых тел компоненты вектора и тензора напряжений (для $y_3 = \text{const}$) представим в форме

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} \varphi_3; \\ u_\Theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{z_1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \Theta \partial z_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}; \\ u_3 &= \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_1^2} \right) + \frac{m_2 - 1}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}; \\ \tilde{Q}_{33} &= c_{44} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} [(1+m_1)l_1 \varphi_1 + (1+m_2)l_2 \varphi_2] + (1+m_1)l_1 z_1 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial z_1^3} \right\}; \\ \tilde{Q}_{3r} &= c_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} [(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r \partial z_1} - \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \Theta \partial z_1} \right\}; \\ \tilde{Q}_{3\Theta} &= c_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \Theta \partial z_1} [(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{r \partial \Theta \partial z_1^2} + \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right\}; \end{aligned} \quad (2.32)$$

Дополнительно для несжимаемых тел находим выражение для определения искомой величины p [I].

$$\begin{aligned} p &= -\lambda_1^{-1} q_1 \left\{ \left[\tilde{\kappa}_{1111} - \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3} (\tilde{\kappa}_{1133} + \tilde{\kappa}_{1313}) \right] \Delta_1 + n_1^{-1} \tilde{\kappa}_{3113} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\varphi_1 + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_2 + \varphi_2 \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Выражения (2.26)—(2.34) получены в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел. Коэффициенты c_{44} , m_1 , l_1 при этом определяются из выражений (2.28)—(2.29), а m_2 и l_2 имеют вид:

для сжимаемых тел

$$m_2 = \frac{\tilde{\omega}_{1133} - \tilde{\omega}_{1313}}{\omega_{1133} + \omega_{1313}}; \quad l_2 = \frac{\tilde{\omega}_{3333}(m_1 + m_2 - 1) - \tilde{\omega}_{1133} \cdot n_1}{n_1(1 + m_2)\tilde{\omega}_{1313}}; \quad (2.35)$$

для несжимаемых тел

$$m_2 = 1; \quad l_2 = \frac{\tilde{\kappa}_{3333}m_1 + n_1(\lambda_1^{-1}q_1^{-1}\lambda_3q_3\tilde{\kappa}_{1111} - 2\tilde{\kappa}_{1133} - \tilde{\kappa}_{1313}) - \frac{3\lambda_1q_1}{\lambda_3q_3}\tilde{\kappa}_{3113}}{2n_1\kappa_{1313}}. \quad (2.36)$$

В случае осесимметричной деформации необходимо положить $\varphi_3 = 0$, а в задаче кручения $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$. Таким образом, сформулированная задача сводится к решению уравнений (2.8) и (2.17) при граничных условиях (2.1) — (2.5) и определению напряжений и смещений из соотношений (2.27), (2.32), (2.33) и скалярной величины P , соответствующей гидростатическому давлению, из (2.27) и (2.33).

3. Определение перемещений и напряжений в цилиндре и слое

В соответствии с постановкой задачи рассматриваем случай осесимметричной деформации ($\varphi_3 = 0$). Представим гармонические функции φ_1 и φ_2 в виде ретрансформант Ханкеля. Для первого случая кратных корней ($n_1 = n_2$) имеем

$$\varphi_1 = -\frac{1}{1+m_1} \int_0^\infty \left[A(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \left(\frac{h}{\sqrt{n_1}} + z_1 \right) - B(\alpha) \frac{\alpha h}{\sqrt{n_1}} \operatorname{ch}(\alpha z_1) - \frac{J_0(\alpha r) d\alpha}{\alpha \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\alpha h}{\sqrt{n_1}} \right)} \right]; \quad (3.1)$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{1+m_2} \int_0^\infty B(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \left(\frac{h}{\sqrt{n_1}} + z_1 \right) J_0(\alpha r) \frac{d\alpha}{\alpha \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha h}{\sqrt{n_1}} \right)};$$

Для случая неравных корней функции $\varphi_1(r, z_1)$ представим следующим образом:

$$\varphi_1 = -\frac{\sqrt{n_1}}{1+m_1} \int_0^\infty A(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \left(\frac{h}{\sqrt{n_1}} + z_1 \right) \frac{J_0(\alpha r) d\alpha}{\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha h}{\sqrt{n_1}} \right)};$$

$$\varphi_2 = -\frac{\sqrt{n_2}}{1+m_2} \int_0^\infty B(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \left(\frac{h}{\sqrt{n_2}} + z_1 \right) J_0(\alpha r) \frac{d\alpha}{\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha h}{\sqrt{n_1}} \right)};$$

Здесь $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ — функции подлежащие определению.

Выбрав искомые функции φ_1 и φ_2 в виде (3.2) и (3.1), граничные условия (2.5) с учетом (2.27), (2.32) — (2.34) удовлетворяются тождественно. Удовлетворив третьему условию (2.2) и второму (2.3), после ряда преобразований получаем зависимость между $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ соответственно для равных и неравных корней

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= -(1+m_2)(1+m_1)^{-1}B(\alpha), \quad (n_1 = n_2); \\
 A(\alpha) &= -(1+m_2)(1+m_1)^{-1}n_1^{\frac{1}{2}}n_2^{-\frac{1}{2}}B(\alpha), \quad (n_1 \neq n_2);
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Подставив значение (3.1) и (3.2) с учетом (3.3) в (2.27) (2.32) — (2.34) после ряда преобразований определим компоненты вектора перемещений и тензора напряжений на поверхности слоя с начальными напряжениями ($y_3 = 0$), для равных и неравных корней (2.15) в виде

$$\begin{aligned}
 u_3(r, 0) &= -\frac{1}{\omega_1} \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) J_0(\eta \varrho) d\eta - \frac{1}{\omega_1} \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) G(\eta h) J_0(\eta \varrho) d\eta; \\
 u_r(r, 0) &= -\int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) g(\eta, 1) g^{-1}(\eta, s) J_0(\eta \varrho) d\eta; \\
 \tilde{Q}_{33}(r, 0) &= \frac{2\omega_2}{R} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \varrho) d\eta.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 R \cdot \varrho &= r; \quad \alpha R = \eta; \quad B(\eta/R) = R \cdot \eta^{-1} F(\eta) q^{-1}(\eta/R); \\
 G(\eta h) &= 1 - q^{-1}(\eta h); \quad h = H_1/R;
 \end{aligned}$$

$$g(\eta, s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2\eta h}{\sqrt{n_1}}\right) + \frac{2}{s-s_0} \frac{\eta h}{\sqrt{n_1}}}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\eta h}{\sqrt{n_1}}\right) - 1}, & n_1 = n_2; \\ s \cdot \operatorname{cth}\left(\frac{2\eta h}{\sqrt{n_1}}\right) - s_3 \operatorname{cth}\left(2 \frac{\eta h}{\sqrt{n_2}}\right), & n_1 \neq n_2; \end{cases}
 \tag{3.5}$$

$$s_0 = \frac{1+m_2}{1+m_1}; \quad s = s_0 l_2 / l_1; \quad s_3 = s_0 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}; \quad s_2 = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

$$\omega_1 = \begin{cases} -\frac{\sqrt{n_1}(1+m_2)}{m_1(s_1-s_0)}, & (n_1 = n_2); \\ -\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \frac{1+m_2}{m_1(s_2-s_3)}, & (n_1 \neq n_2); \end{cases} \quad \omega_2 = \begin{cases} -\frac{c_{44} l_1 (s_0-s)}{2s_0}, & (n_1 = n_2); \\ -\frac{c_{44} l_1 (s-s_3)}{2s_0}, & (n_1 \neq n_2). \end{cases}$$

Для определения постоянных входящих в (2.2) и неизвестной функции $F(\eta)$ используем остальные граничные условия. Так четвертое (2.2) и первое (2.4) приводят к определению собственных значений задачи $\mu_k = t_k R$, $\beta_k = \pi k / H$, которые являются корнями характеристических уравнений

$$\sin(\beta_k H) = 0; \quad J_1(t_k R) = 0.
 \tag{3.6}$$

Удовлетворив условию (2.2), (2.4) с учетом ортогональности тригонометрических и Бесселевых функций получаем следующие рекуррентные соотношения между произвольными постоянными [10].

$$\begin{aligned}
 D_k &= 0; \quad N_k = -2\nu F_k; \quad E_k = -\mu_k l N_k - M_k(2\nu \operatorname{sh} \mu_k l + \mu_k l \operatorname{ch} \mu_k l) \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_n l}; \\
 A_k &= -B_k \left[2(1-\nu) + \frac{\tau_k I_0(\varepsilon_k)}{I_1(\tau_k)} \right]; \quad -\varepsilon = 2A_0 + \frac{2(1-2\nu)}{1+\nu} R l B_0 + 6R l C_0; \\
 B_k &= -\frac{4l^4 I_1(\tau_k)}{k\pi\omega_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n \mu_n^2 J_0(\mu_n) \operatorname{th} \mu_n l}{(k^2 \pi^2 + \mu_n^2 l^2)^2}; \quad F_k = -2\nu M_k \operatorname{th} \mu_k l; \\
 \omega_k &= -\frac{2(1-\nu)}{\tau_k} I_1^2(\tau_k) + \tau_k [I_0^2(\tau_k) - I_1^2(\tau_k)]; \quad \tau_k = \frac{k\pi}{l}; \quad l = \frac{H}{R}.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Первые условия (2.2) и (2.3) дают возможность определить неизвестную функцию $F(\eta)$ из парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 \chi_0[\eta^{-1}F(\eta); \quad \eta \rightarrow \varrho] &= f(\varrho) \quad (\varrho \leq 1), \\
 \chi_0[F(\eta); \quad \eta \rightarrow \varrho] &= 0 \quad (\varrho > 1).
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

где

$$f(\varrho) = -\varepsilon\omega_1(1-\chi_0) + \frac{(1-2\nu)\varepsilon\omega_1}{2(1-\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k J_0(\mu_k \varrho) + \int_0^{\infty} \eta^{-1}F(\eta)G(\eta h)J_0(\eta \varrho) d\eta.$$

Второе условие (2.2) с учетом значения интегралов

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \varrho I_0(\tau_k \varrho) J_0(\mu_n \varrho) d\varrho &= \frac{\tau_k l^2 I_1(\tau_k) J_0(\mu_k)}{\mu_n^2 l^2 + \pi^2 k^2}; \\
 \int_0^1 \varrho^2 I_1(\tau_k \varrho) J_0(\mu_n \varrho) d\varrho &= \frac{\tau_k l^2 J_0(\mu_n)}{\mu_n^2 l^2 + k^2 \pi^2} \left[I_0(\tau_k) - \frac{2k\pi I_1(\tau_k)}{\mu_n^2 l^2 + k^2 \pi^2} \right];
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

дает зависимость между неизвестной функцией $F(\eta)$ и постоянными χ_0 и χ_k ($k = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \eta^{-1}F(\eta)J_1(\eta) d\eta &= -\frac{\varepsilon}{4l\omega_2} \chi_0; \\
 \int_0^{\infty} F(\eta) d\eta \int_0^1 \varrho J_0(\eta \varrho) J_0(\mu_k \varrho) d\varrho &= -\frac{\omega_1 \cdot \varepsilon \cdot E \cdot \mu_k \chi_k J_0^2(\mu_k)}{\omega_2 8(1+\nu)(1-2\nu) \operatorname{sh}^2 \mu_k l} \cdot \\
 &\cdot (2\mu_k l + \operatorname{sh} 2\mu_k l) + 8\pi^3 E \frac{\omega_1}{\omega_2} l^4 \cdot \varepsilon \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\chi_k m^3 I_1(\tau_m) t_{km} t_{mn}}{2(1+\nu)(1-2\nu)\omega_n},
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

здесь

$$M_k = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\varepsilon R^2}{\mu_k^2} \chi_k \operatorname{cth} \mu_k l, \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$

Используя формулу обращения [19] к (3.8), для определения неизвестной функции $F(\eta)$ приходим к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода [10]

$$F(\eta) = -\frac{2\varepsilon\omega_1}{\pi}(1-\chi_0)\sin\eta + \eta \frac{\varepsilon\omega_1(1-2\nu)}{\pi(2-\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \int_0^1 \cos\eta y \cos\mu_k y dy + \\ + \frac{2}{\pi} \eta \int_0^1 \cos\eta y dy \int_0^{\infty} F(u) G(uh) \cos uy \frac{du}{u}. \quad (3.11)$$

Решение (3.11) ищем методом последовательных приближений, взяв за нулевое приближение функцию

$$F^{(0)}(\eta) = -\frac{2\varepsilon\omega_1}{\pi}(1-\chi_0)\sin\eta + \frac{2\varepsilon\omega_1(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \eta \int_0^1 \cos\eta y \cos\mu_k y dy. \quad (3.12)$$

Последующие приближения определим по формуле

$$F^{(k)}(\eta) = \frac{2}{\pi} \eta \int_0^1 \cos\eta y dy \int_0^{\infty} F^{(k-1)}(u) G(uh) \cos uy \frac{du}{u} \quad (3.13)$$

и решение (3.11) запишем в виде

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(\eta). \quad (3.14)$$

Используя принцип сжатых отображений [10] можно показать, что процесс последовательных приближений будет сходящимся, если $h > 1$.

Подставив (3.14) с учетом (3.12) — (3.13) в (3.10) после ряда преобразований и значения интегралов

$$\int_0^{\infty} G(t) t^n dt = 2\Gamma(n+2)\zeta(n+2) \frac{1}{\varkappa} - \\ - \frac{\Gamma(n+2)}{\varkappa} \left[\left(2 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \zeta(n+2) - 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \zeta(n+1) \right] - \\ - \frac{1}{\varkappa(\varkappa+1)} \left\{ \frac{\Gamma(n+3)}{2^{n+1}} + 0,14 \left[\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 2\right) \zeta(n+2) + \right. \right. \quad (3.15) \\ \left. \left. + 2\Gamma(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+3}} \right] \right\} - \\ - \frac{0,14\Gamma(n+3)}{\varkappa^2(\varkappa+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{n+3}}\right) \frac{\zeta(n+3)}{2^{n+1}} + 2\Gamma(n+1) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \zeta(n+1)$$

для определения постоянных χ_k получаем бесконечную систему алгебраических уравнений.

$$\alpha_k \chi_n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn} \chi_n = d_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.16)$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета функция Римана, $\Gamma(z)$ — гамма — функция. Ввиду громоздкости выражений для коэффициентов α_k , α_{kn} и d_k приведем здесь их через квадратуры.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= d_0 = \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u^2} G(uh) p_{i-1}(u) du \right] \\ \alpha_{0n} &= \frac{\omega_1(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \left[\beta_1(\mu_n) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u^2} G(uh) q_{i-1}(\mu_n, u) du \right] \\ \alpha_{k0} &= \frac{2}{\pi} \left[\beta_1(\mu_k) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta_1(u, \mu_k)}{u} G(uh) p_{i-1}(u) du \right]; \\ \alpha_{kn} &= \frac{1-2\nu}{\pi(1-\nu)} \left[\beta_1(\mu_k, \mu_n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \frac{\beta_1(u, \mu_k)}{u} G(uh) q_{i-1}(u, \mu_n) du \right] + \\ &\quad + \frac{8E(1-\nu)}{1+\nu} \frac{\pi^3 l^4}{\omega_1 \omega_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 I_1^2(\tau_m) t_{km} \cdot t_{mn}}{\omega_m}; \\ \alpha_{k0} &= d_k; \quad \alpha_{00} = \frac{E}{8l\omega_1\omega_2}; \\ \alpha_k &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\mu_k J_0^2(\mu_k)}{4\omega_2 \operatorname{sh}^2 \mu_k l} (2\mu_k l + \operatorname{sh} \mu_k l), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где

$$\begin{aligned} t_{km} &= \frac{\mu_k^2 J_0(\mu_k)}{(\pi^2 m^2 + \mu_k^2 l^2)^2}; \\ \beta_1(\mu_k) &= \int_0^{\infty} J_1(\eta) d\eta \int_0^1 \cos \eta y \cos \mu_k y dy = \\ &= \int_0^1 \varrho J_0(\mu_k \varrho) d\varrho \int_0^{\infty} J_0(\eta \varrho) \sin \eta d\eta = \frac{\sin \mu_k}{\mu_k}; \\ &\int_0^{\infty} \eta \cos \eta y dy \int_0^1 \cos \mu_n y dy \int_0^1 \varrho J_0(\eta \varrho) J_0(\mu_k \varrho) d\varrho = \\ &= \frac{1}{\mu_n^2 - \mu_k^2} (\mu_n \cos \mu_k \sin \mu_n - \mu_k \sin \mu_k \cos \mu_n) = \beta_1(\mu_k, \mu_n); \\ p_0(\eta) &= \sin \eta; \quad q_0(\mu_k, \eta) = \eta \int_0^1 \cos u y \cos \mu_k y dy. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Замегаим, что для вычисления квадратур входящих в (3.17) и последующие выражения для напряжений и смещений функции аппроксимируем их приближенным значениям

$$1 - \frac{1}{\kappa + 1} \frac{x}{\operatorname{sh} x} - \frac{0,14}{\kappa(\kappa - 1)} \frac{x}{\operatorname{ch} x} \quad (n_1 = n_2),$$

$$1 - \frac{\kappa}{1 + \frac{\xi_1}{\xi_2} \kappa} \frac{\operatorname{sh} \xi_1 x}{\operatorname{ch} \xi_1 x} - \frac{0,28 \kappa^2 \frac{\xi_1}{\xi_2}}{1 + \frac{\xi_1}{\xi_2} \kappa} \frac{\operatorname{sh} \xi_1 x}{\operatorname{ch} \xi_2 x} \quad (n_1 \neq n_2),$$

где $\xi_1 = \sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}$; $\xi_2 = \sqrt{n_2} + \sqrt{n_1}$, а κ имеет вид

$$\kappa = \begin{cases} s - s_0 & n_1 = n_2, \\ \frac{s + s_3}{s - s_3} & n_1 \neq n_2. \end{cases}$$

В системе (3.16) коэффициенты α_k и α_{kn} зависят от величины ω_1 и ω_2 , характеризующих структуру упругого потенциала, высоты цилиндра H и толщины слоя h_1 , а свободные члены d_k — только от корней характеристических уровней (3.6). Можно показать, что система (3.16) для упругих потенциалов гармонического типа, Бартенева — Хазановича и Трелоара является квазирегулярной, и её решение может быть найдено методом редукции с урезанной системой. Аналогичное доказательство можно провести и для потенциалов произвольной структуры.

Определив χ_k можно вычислить напряжения и перемещения в любой точке как цилиндра так и слоя. Переходя к безразмерной координате $\zeta = y_3/R$ приведем формулы для σ_{zz} и u_z а также u_3 на границе полупространства $y_3 = 0$. (\bar{Q}_{33} — неприводится в виду (2.2)).

$$u_z(\varrho, \zeta) = -\varepsilon \frac{\delta\omega_1 + \pi\omega_2 \zeta}{\delta\omega_1 + \pi\omega_1 l} - \varepsilon \frac{(1-2\nu)}{2\omega_1(1-\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k J_1(\mu_k \varrho)}{\operatorname{sh}^2 \mu_k l} r_k +$$

$$+ \frac{4\varepsilon\pi l}{\omega_1(1-2\nu)} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{kt_{kn}\chi_k}{\omega_k} (\beta_k a_k - 2(1-\nu)/b_k) \sin \beta_n \zeta.$$

$$\sigma_z(\varrho, \zeta) = -\frac{\varepsilon E}{Rl} \left[\frac{\pi l \omega_2}{\delta\omega_1 + \pi l \omega_2} + \frac{l\omega_1^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k \chi_k J_0(\mu_k \varrho)}{\operatorname{sh}^2 \mu_k l} \cdot c_k \right]$$

$$u_3(\varrho, 0) = \left[\frac{\delta\omega_1}{\delta\omega_1 + \pi l \omega_2} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\varrho} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\omega_1} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \frac{J_0(\mu_k \varrho)}{\mu_k} \right] -$$

$$- \frac{1}{\omega_1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} F^{(k)}(\eta) J_0(\eta \varrho) d\eta \quad (\varrho < 1);$$

$$\begin{aligned}
 u_3(\varrho, 0) = & -\frac{2\varepsilon}{\pi} \left[\frac{\delta\omega_1}{\delta\omega_1 + \pi l\omega_2} \arcsin \frac{1}{\varrho} - \right. \\
 & - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\omega_1} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left[J_0(\mu_k \varrho) \arcsin \frac{1}{\varrho} + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n}(\mu_k \varrho)}{n} \sin \left(2n \arcsin \frac{1}{\varrho} \right) \left. \right] - \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta^{-1} F^{(k)} \cdot \\
 & \cdot (\eta) G(\eta h) J_0(\eta \varrho) d\eta \left. \right], \quad (\varrho < 1).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 r_k &= -2(1-\nu) \operatorname{sh} \mu_k l \operatorname{sh} \mu_k (l-\zeta) + \mu_k [l \operatorname{sh} \mu_k \zeta - \zeta \operatorname{sh} \mu_k l \operatorname{ch} \mu_k (l-\zeta)]; \\
 c_k &= \operatorname{sh} \mu_k l \operatorname{ch} \mu_k (l-\zeta) + \mu_k [l \operatorname{ch} \mu_k \zeta + \zeta \operatorname{sh} \mu_k l \operatorname{sh} \mu_k (l-\zeta)]; \\
 a_k &= \varrho I_1(\tau_k \varrho) I_1(\tau_k) - I_0(\tau_k) I_0(\tau_k \varrho);
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$b_k = \varrho I_1(\tau_k \varrho) I_1(\tau_k); \quad \delta = \frac{E}{E_1} \text{ — для сжимаемых тел,} \quad \delta = \frac{E}{c_{10}} \text{ — для несжимаемых тел.}$$

Из условия равновесия цилиндра получаем зависимость для вычисления внешней силы в зависимости от заданной осадки в виде

$$P = \pi^2 \varepsilon R E \left(\pi l + \delta \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) + \frac{4\pi\omega_2}{R} \int_0^R \varrho d\varrho \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \varrho) d\eta. \tag{3.22}$$

Из полученных решений можно получить ряд частных случаев. Так, устремив $\nu_1 \rightarrow -1$ (жесткий слой) формулы (3.20) дают решение задачи сопротивления материалов о сжатии кругового цилиндра осевой силой, если $\nu \rightarrow -1$ из (3.21) получаем выражение для перемещения точек слоя при давлении на него жесткого штампа [8]. При $h_1 \rightarrow \infty$ формулы (3.20) и (2.21) переходят в [5].

4. Численный анализ

Решения (3.20) и (3.21) зависят от постоянных χ_k , которые определяются из системы (3.16). Квазирегулярность этой системы не зависит от l, h и δ . Следовательно, они пригодны для любых их значений. Все расчеты реализованы на ЭВМ ЕС—1022 для $\nu_1 = \nu = 0,3, l = 10, h = 4$. В таблице I приводятся вычисления силы, которую нужно приложить к штампу в зависимости от заданного перемещения торца цилиндра ε . Сравнение с [10] показывает о значительном влиянии начальных напряжений на напряженно-деформируемое состояние взаимодействующих тел.

Таблица 1. $h = 4$ $\delta = 8$

λ_1	Гармонический потенциал	Потенциал Трелоара
0,6	0,201	0,398
0,7	0,281	0,406
0,8	0,293	0,409
0,9	0,310	0,442
1	0,159	0,159
1,1	0,342	0,445
1,2	0,341	0,531

Литература

1. А. Н. Гузь, *Устойчивость трехмерных деформируемых тел*. Киев, Наук. думка, 1971, 276 с.
2. А. Н. Гузь, *Устойчивость упругих тел при конечных деформациях*. Киев, Наук. думка, 1973, 272 с.
3. А. Н. Гузь, *Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии*. Киев, Наук. думка, 1979, 144 с.
4. А. Н. Гузь, *Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями*. Киев, Наук. думка, 1983, 286 с. 34 - 40.
5. А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий, *Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями*. Прикл. механика, 1984, 20, № 8, с. 3 - 11.
6. А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий, *Контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями усиленной накладкой*. Прикл. механика, 1985, 21, № 3.
7. А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий, *Периодическая контактная задача для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками*. Докл. АН СССР, 1985, № 2.
8. С. Ю. Бабич, *Контактная задача теории упругости для слоя с начальными напряжениями*. Прикл. механика, 1984, 20, № 6.
9. В. М. Александров, В. С. Порошин, *Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя*. Инж. ж. МТТ, 1984, № 6, с. 79 - 85.
10. Д. В. Грилицкий, Я. М. Кизыма, *Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости*. Львов, Изд-во Львовс. ун-та, 1981, 135 с.
11. Я. С. Уфленд, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Изд-во „Наука”, Л., 1968, 402 с.
12. И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бавешко, *Неклассические смешанные задачи теории упругости*. Изд-во „Наука”, М., 1974, 455 с.
13. В. М. Александров, С. М. Мхитарян, *Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками*. М. М., „Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 488 с.
14. Г. Я. Попов, *Контактные задачи для линейно-деформируемого основания*. Киев, Одесса, Вища школа. Главное изд-во, 1982, 168 с.
15. Г. Я. Попов, *Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений*. М., Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982, 344 с.
16. *Развитие теории контактных задач в СССР*. Изд-во „Наука”, М., 1976, 492 с.
17. S. RAJG, R. S. DHALIWAL, B. M. SING, J. G. ROKNE, *Axissymmetric contact and crack problems for an initially stressed Neo-Hookean elastic layer*. Int. J. Eng. Sci., 1980, 18, Nr 1.
18. M. A. Biot, *Mechanics of incremental deformations*. New York, John Wiley and Sons, 1965, 504 p.
19. V. NOBLE, *The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying factor method*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 59, N2, 1963, pp. 147 - 159.

Streszczenie

KONTAKTOWE ODDZIAŁYWANIE SPRĘŻYSTEGO STEMPLA
ZE WSTĘPNIE NAPRĘŻONĄ WARSTWĄ

W ramach zlinearyzowanej teorii sprężystości podano rozwiązanie mieszane zagadnienia brzegowego opisującego wciskanie sprężystego walca we wstępnie naprężoną warstwę. Zagadnienie rozwiązano w postaci ogólnej dla teorii dużych (skończonych) wstępnych deformacji oraz różnych teorii małych wstępnych deformacji przy dowolnej strukturze potencjału sprężystego. Przy pomocy transformacji zagadnienie sprowadzono do quasiregularnego układu równań algebraicznych. Podano przykład numeryczny.

Summary

CONTACT INTERACTION OF AN ELASTIC PUNCH AND A PRESTRESSED LAYER

Within the framework of the linearized elasticity the solution of mixed boundary value problem for an elastic cylinder pressing into a prestressed layer is given. The problem is solved in the general form for the theory of large (finite) initial deformations and various theories of small deformations with an arbitrary structure of elastic potential. By using transformation the given problem is reduced to the quasi-regular system of algebraic equations. The numerical example is considered.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 stycznia 1986 roku.

ZJAWISKA REZONANSÓW WEWNĘTRZNYCH W NIELINIOWYCH UKŁADACH DRGAJĄCYCH

JÓZEF BAJKOWSKI

WANDA SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA

IPPT PAN, Warszawa

1. Wstęp i przegląd literatury

Terminem „rezonans wewnętrzny” przyjęto określać te szczególne zjawiska, które pojawiają się w drgających układach nieliniowych o n stopniach swobody wtedy, gdy istnieją liczby całkowite k_s , $s = 1, 2, \dots, p$, nie wszystkie równe zero, takie że między częstościami własnymi układu $\omega_1, \dots, \omega_p$ zachodzi związek typu:

$$\sum_{s=1}^p k_s \omega_s = 0, \quad p \leq n, \quad (1)$$

tzn. gdy częstości te są współmierne. W teorii pierwszego przybliżenia częstości ω_s są częstościami własnymi układu liniowego, tj. układu w którym człony nieliniowe zostały odrzucone.

Szczególnie interesującym jest przypadek kiedy w układzie występuje jednocześnie rezonans zewnętrzny, tj. gdy istnieją liczby całkowite m_1, \dots, m_p nie wszystkie równe zero i liczba m_p takie, że spełniony jest warunek:

$$\sum_{s=1}^p m_s \omega_s + m_p \nu = 0, \quad p \leq n, \quad (2)$$

gdzie ν — częstość siły wzbudzającej, $m_p = 1, 2, 3, \dots$, oraz gdy wśród częstości $\omega_1, \dots, \omega_p$ są częstości współmierne, a więc spełniony jest warunek (1).

W przypadku gdy rezonansem zewnętrznym jest rezonans główny, tj. gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej z częstości własnych,

$$\nu \approx \omega_k, \quad (3)$$

efektem współmierności częstości własnych jest „wciąganie” do rezonansu oprócz rezonansowej współrzędnej normalnej ξ_k , również innych współrzędnych ξ_s odpowiadających częstościom własnym ω_s współmiernym z ω_k . W rezultacie zamiast jednopostaciowej odpowiedzi rezonansowej, w której dominuje składowa harmoniczna o częstości ν , może pojawić się odpowiedź wielopostaciowa, w której równoważną rolę odgrywają również

składowe harmoniczne o częstościach odpowiadających częstościom własnym współrzędnych ξ_s .

Efekty współmierności częstości własnych w nieliniowych autonomicznym i zachowawczym układzie o dwóch stopniach swobody, po raz pierwszy zostały zbadane przez Gorelika i Witta [1]. Układem tym było wahadło matematyczne zawieszone na sprężynie, a opisane układem dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu sprzężonych tylko poprzez człon nieliniowy. Stwierdzili oni, że gdy częstość drgań wzdłuż długości wahadła jest podwojoną częstością drgań obrotowych wahadła, to charakter drgań ulega jakościowej zmianie i pojawiają się drgania, w których następuje przepływ energii z jednej postaci do drugiej i z powrotem.

Układ ten analizowało teoretycznie i doświadczalnie wielu autorów, między innymi Kane i Kahn [2], van der Burgh [3, 4], Srinivasan i Sankar [5], Evan-Iwanowski [6], Minorsky [7].

Zjawisko przepływu energii między poszczególnymi postaciami w układach nieliniowych autonomicznych, a wywołane współmiernością częstości własnych i znane również w literaturze pod nazwą drgania „autoparametryczne”, badane było również dla innych układów, np. belki i wahadła — Sevin [8], Struble [9, 10, 11, 12], Struble i Heinbockel [13].

Fakt, że jedna postać może wytłumiać drgania innej postaci wykorzystali Haxton i Barr [14] budując autoparametryczny tłumik drgań. Natomiast Barr i Nelson [15] stwierdzili, że efektem rezonansu wewnętrznego, tj. wzajemnego oddziaływania między postaciami, może być np. to, że wymuszone drgania jednej postaci mogą spowodować wykładniczy wzrost amplitudy drgań innej postaci.

Efekty sprzężenia i oddziaływania międzypostaciowego w różnego typu układach, lecz bez uwzględnienia możliwości wystąpienia rezonansu wewnętrznego, analizują w swoich pracach Mac Donald [16], Atluri [17], Dowell [18], Morino [19], Bennet i Eisley [20], Bennet [21], Tseng i Dugundji [22].

W pracach poświęconych efektom współmierności częstości własnych szczególna uwaga została zwrócona na przypadek, gdy jedna z częstości jest dwukrotnie większa od drugiej tj.

$$2\omega_i = \omega_j. \quad (4)$$

Zależność tego typu prowadzi do zjawiska rezonansu wewnętrznego gdy nieliniowość w układzie jest typu kwadratowego. Próbę ogólnej analizy i klasyfikację tego typu układów o n stopniach swobody podjął po raz pierwszy Sethna [23]. W zależności od wartości częstości wymuszenia ν i amplitudy siły wymuszającej, autor wprowadził następujące typy układów:

- 1 — autonomiczny z rezonansem wewnętrznym,
- 2 — nieautonomiczny z rezonansem zewnętrznym bez rezonansu wewnętrznego,
- 3 — nieautonomiczny z rezonansem zewnętrznym i wewnętrznym:
 - (a) przypadek superharmoniczny — gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej,
 - (b) przypadek subharmoniczny — gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej.

Dla przypadku (3a) jednym rozwiązaniem jest rozwiązanie nietrywialne dwuczęstościowe z amplitudami: $a_1 \neq 0$ dla współrzędnej rezonansowej i $a_2 \neq 0$ dla współrzędnej wciąż

ganej do rezonansu. Dla przypadku (3b) możliwe są dwa typy rozwiązań: jednoczęstościowe — $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$, oraz dwuczęstościowe z amplitudami $a_1 \neq 0$ dla współrzędnej wciąganej do rezonansu i $a_2 \neq 0$ dla współrzędnej rezonansowej.

Podobne wyniki i wnioski możemy znaleźć w pracy Piszcza [24]. Rozpatruje on drgania ustalone płaskiej belki, podpartej na końcach przy pomocy sztywnych podpór sprężyste zamocowanych do podłoża. W środku belki umieszczono obciążenie oraz masę na mimośrodku.

Układy z nieliniowością typu kwadratowego i rezonansem wewnętrznym typu $2\omega_i = \omega_j$ są również przedmiotem badań szeregu prac Tondla [25, 26, 27, 28]. W pracach [25, 26] bada on układ o dwóch stopniach swobody wzbudzony siłą harmoniczną o amplitudzie proporcjonalnej do kwadratu częstości wymuszenia. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest bliska pierwszej częstości własnej, drgania charakteryzują się wciąganiem do rezonansu drugiej współrzędnej i mamy rozwiązanie dwuczęstościowe ze składowymi harmonicznymi ν i 2ν . W przypadku gdy częstość wymuszenia jest bliska wyższej częstości własnej, wciągana do rezonansu jest pierwsza współrzędna i również mamy rozwiązanie dwuczęstościowe, ze składowymi harmonicznymi ν i $\nu/2$. W [27] układ wzbudzany jest siłą okresową zawierającą pierwszą i drugą harmoniczną. W tym przypadku, zarówno gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej jak i wyższej częstości własnej, możliwe są dwa typy rozwiązań: (a) — półtrywialne, kiedy mamy tylko drgania drugiej współrzędnej, są to drgania dwuczęstościowe z częstościami siły wymuszającej, (b) — nietrywialne, kiedy pierwsza współrzędna drga harmonicznie ze swoją częstością własną, drgania drugiej współrzędnej są dwuczęstościowe z częstościami siły wymuszającej.

Z innych publikacji poświęconych rezonansom wewnętrznym typu $2\omega_i = \omega_j$ w układach z nieliniowością typu kwadratowego, na uwagę zasługują prace Barr'a i Nelson'a [15] oraz Sethna i Bajaj'a [29].

Ten sam typ rezonansu wewnętrznego, tj. $2\omega_i = \omega_j$, badany był w układach zawierających nieliniowość typu kwadratowego i sześciennego łącznie. Tondl w [28] rozpatruje przypadek rezonansu $\omega_1 = 2\omega_2$, kiedy częstości wymuszenia ν jest bliska ω_1 . Autor stwierdza istnienie dwóch typów rozwiązań: jednoczęstościowego o częstości wymuszenia oraz dwuczęstościowego ze składowymi harmonicznymi o częstościach ν i $\nu/2$. Szczegółowa analiza poświęcona jest rezonansowi dwuczęstościowemu. W pracy tej wyznaczono także obszary przyciągania, tj. obszary warunków początkowych prowadzących do rozwiązania jedno- lub dwuczęstościowego.

Yamamoto i Yasuda [30] oraz Yamamoto, Yasuda i Nagasaka [31] również badają rezonans $\omega_2 = 2\omega_1$ gdy nieliniowość zawiera człony kwadratowe i sześciennie. Stwierdzają oni, że gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej [30], jedynym rozwiązaniem jest rozwiązanie dwuczęstościowe ze składowymi harmonicznymi o częstościach: wymuszenia i podwojonej częstości wymuszenia. Autorzy pokazują, że w pewnym zakresie częstości wymuszenia ν , drgania okresowe dwuczęstościowe przechodzą w drgania prawie-okresowe ze składowymi harmonicznymi o częstościach: ν i bliskiej 2ν . Drgania te są bardzo wrażliwe na tłumienie. Badając układ w pobliżu wyższej częstości własnej [31], autorzy stwierdzają możliwość wystąpienia dwóch typów rozwiązań: jednoczęstościowego o częstości wymuszenia ν , a więc takiego jak bez rezonansu wewnętrznego, i dwuczęstościowego ze składowymi harmonicznymi o częstościach ν i $\nu/2$. Podobnie jak

poprzednio, stwierdzają oni istnienie pewnego przedziału częstości wymuszenia, w którym występują drgania prawie-okresowe.

Omawiane w pracach [13 - 31] problemy dotyczyły układów nieautonomicznych, z nieliniowością typu kwadratowego bądź kwadratowego i sześciennego łącznie i rezonansiem wewnętrznym $2\omega_i = \omega_j$.

Klasycznym przykładem nieliniowości sprężystej, występującej w wielu układach fizycznych jest nieliniowość aproksymowana przez funkcję typu sześciennego. Z tą klasą funkcji nieliniowych wiąże się rezonans wewnętrzny typu:

$$3\omega_i = \omega_j. \quad (5)$$

Zagadnieniu temu poświęcają swoje prace między innymi: Sethna [32], Nayfeh, Mook i Sridhar [33], Nayfeh, Mook, i Lobitz [34], Lau, Cheung i Wu [35], Croll [36, 37], Bajkowski [38], Bajkowski i Szemplińska-Stupnicka [39].

W pracy [32] rozważany jest układ o dwóch stopniach swobody z rezonansiem wewnętrznym $\omega_2 = 3\omega_1$. Autor stwierdza, że gdy częstość wymuszenia jest bliska niższej częstości własnej, w rozwiązaniu daje zauważyć się bardzo silny udział trzeciej harmonicznej. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej w odpowiedzi nie stwierdzono istnienia składowej subharmonicznej.

Nayfeh, Mook i Sridhar [33] znajdują rezonans wewnętrzny przy badaniu drgań poprzecznych belki podlegającej dużym odkształceniom. W przypadku gdy belka z jednej strony jest utwierdzona, a z drugiej zamocowana przegubowo, autorzy zwracają uwagę na jeden z możliwych przypadków współmierności częstości własnych, a mianowicie $\omega_2 \cong 3\omega_1$. Gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej, jedynym rozwiązaniem jest rozwiązanie dwuczęstościowe ze składowymi harmonicznymi o częstościach: wymuszenia i potrojonej częstości wymuszenia. Amplituda postaci wciąganej w rezonans jest bardzo mała i w rozwiązaniu praktycznie dominuje pierwsza postać. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest bliska wyższej częstości własnej, możliwe są dwa różne rozwiązania: jednoczęstościowe o częstości wymuszenia ν i dwuczęstościowe ze składowymi harmonicznymi o częstościach ν i $\nu/3$. Warto zauważyć, że w przypadku drgań dwuczęstościowych, udział składowej o częstości $\nu/3$ (pierwszej postaci), może być bardzo duży, nawet sześciokrotnie większy niż podstawowej. Z podobnymi wynikami możemy spotkać się w pracy [34]. Lau, Cheung i Wu [35] analizując podobny typ układu pokazują, że oprócz drgań okresowych mogą wystąpić drgania prawie-okresowe.

Także Croll [36, 37] analizuje drgania powłok z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego. W [36] badane są rezonanse wewnętrzne $\omega_1 = 2\omega_2$ i $\omega_1 = 3\omega_2$ zaś w [37] rezonanse $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_1 = 2\omega_2$ i $\omega_1 = 4\omega_2$.

Bajkowski i Szemplińska-Stupnicka [38, 39] badają przydatność metod Ritza i uśrednienia do badania efektów rezonansu wewnętrznego $\omega_2 = 3\omega_1$ w układzie z nieliniowością typu sześciennego.

W pracach [23 - 39] omawiany był rezonans wewnętrzny typu $\omega_i = 2\omega_j$ bądź $\omega_i = 3\omega_j$, mieliśmy więc przypadek rozwiązania dwupostaciowego, w którym oprócz współrzędnej rezonansowej, w rezonans wciągana była jeszcze jedna współrzędna o częstości współmiernej z rezonansową.

W układach o więcej niż dwu stopniach swobody, w przypadku gdy występują więcej

niż dwie częstości współmierne, mogą wystąpić rezonanse wewnętrzne wielopostaciowe zwane kombinowanymi.

Barr i Nelson [15] badają kombinowany rezonans wewnętrzny typu $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$ analizując zachowanie się elementów konstrukcji pod działaniem harmonicznego wymuszenia zewnętrznego i nieliniowości typu kwadratowego. Autorzy wykazują możliwość wystąpienia dwóch typów rozwiązań: jednopostaciowego o częstości wymuszenia i trzypostaciowego, w którym oprócz współrzędnej rezonansowej, do rezonansu zewnętrznego wciągane są dwie współrzędne, których częstości są współmierne z rezonansową.

Sridhar, Mook i Nayfeh [40, 41] badają drgania utwierdzonych okrągłych płyt obciążonych siłami harmonicznymi uwzględniając efekt rezonansu wewnętrznego. W [40] przeprowadzają analizę uwzględniając rezonans trzypostaciowy, natomiast w [41] rezonans czteropostaciowy typu $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej z niższych częstości własnych wciąganych w rezonans, ustalona odpowiedź układu może mieć postać fali stojącej. Natomiast gdy wymuszenie jest w pobliżu najwyższej ze współmiernych częstości własnych, ustalona odpowiedź układu może mieć dwie postacie: jako superpozycja fal stojących wszystkich postaci wciąganych w rezonans, albo jako superpozycja fal stojących trzech niższych postaci z falą biegnącą najwyższej postaci. Lobitz, Nayfeh i Mook [42] rozważają drgania rezonansowe płyt eliptycznych w przypadku obciążenia harmonicznego i rezonansów wewnętrznych. Analizują oni dwa typy rezonansów: trzypostaciowy $\omega_4 = 2\omega_3 - \omega_1$ i czteropostaciowy $\omega_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Wykazują, że wszystkie pięć postaci mogą uczestniczyć w rozwiązaniu, pomimo że tylko jedna z postaci jest bezpośrednio wzbudzana, poza tym dominującą w rozwiązaniu może być inna niż bezpośrednio wzbudzona postać.

W omawianych uprzednio pracach badano wpływ rezonansu wewnętrznego na zewnętrzne rezonanse główne. O wpływie rezonansu wewnętrznego na rezonans zewnętrzny kombinowany typu $\nu = \omega_1 + \omega_2$ mówią prace Asmis'a i Tso [43] oraz Nayfeh'a [44]. W [43] badany jest układ o dwóch stopniach swobody, z nieliniowością typu sześciennego i rezonansem wewnętrznym $\omega_1 = \omega_2$. Natomiast w [44] badany jest ten sam typ rezonansu zewnętrznego, w przypadku układu z nieliniowością typu kwadratowego i sześciennego łącznie, przy rezonansach wewnętrznych $\omega_2 = 2\omega_1$ i $\omega_2 = 3\omega_1$. Autor stwierdza, że obecność rezonansów wewnętrznych wpływa na zwiększenie amplitud drgań, z tym że większy jest wpływ rezonansu $\omega_2 = 3\omega_1$. Należy nadmienić, że równania tego typu mogą opisywać drgania: akceleratorów indukcyjnych, wirujących wałów, powłok, wyginanych elementów konstrukcji, statycznie obciążonych konstrukcji.

Szczegółowe omówienie i wyniki prac [15, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33] można znaleźć w przeglądowej pracy Bajkowskiego i Szemplińskiej-Stupnickiej [45].

W przedstawionych pracach [23 - 44] analizowano drgania układów o wzbudzeniu zewnętrznym harmonicznym. Omówimy teraz niektóre z prac, w których analizowano drgania układów o wzbudzeniu parametrycznym bądź parametrycznym i zewnętrznym harmonicznym.

Ibrahim i Barr [46, 47] badają drgania układu złożonego ze zbiornika częściowo napełnionego cieczą i sprężyscie zamocowanego. Nieliniowość jest tu typu kwadratowego, a układ może być wzbudzany parametrycznie, bądź przez autoparametryczne sprzężenie pomiędzy poszczególnymi postaciami elementów konstrukcji a pierwszą postacią falującą;

cieczy. W [46] rozważają przypadek rezonansu wewnętrznego $\omega_2 = 2\omega_1$, gdzie ω_2 — drgania własne konstrukcji, ω_1 — drgania własne falującej cieczy. W [47] badają przypadek rezonansu wewnętrznego trzypostaciowego typu sumy lub różnicy. Stwierdzają, że typ ten rozwiązania jest możliwy tylko wtedy, gdy tłumienie dwóch niższych postaci jest równe zero bądź jest bliskie zera.

Analizę podobnego układu przeprowadzili Nayfeh, Mook i Marshal [48] badając rozwiązanie w przypadku rezonansu $\omega_2 = 2\omega_1$, a także Nayfeh i Mook [49] dla rezonansu wewnętrznego typu kombinowanego. W obu przypadkach otrzymali analitycznie stany ustalone lecz bez żadnych ograniczeń jeśli chodzi o tłumienie.

Tso i Asmis [50] analizowali odpowiedź nieliniowego układu drgającego o dwóch stopniach swobody, z nieliniowością typu sześciennego i harmonicznym wzbudzeniu parametrycznym, lecz bez rezonansu wewnętrznego. Podobny układ opisujący drgania boczne kolumn przy udziale zewnętrznego obciążenia harmonicznego z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego badali Tezak, Mook i Nayfeh [51]. Natomiast Nayfeh w [52] bada odpowiedź układu o dwóch stopniach swobody, wzbudzeniu parametrycznym, z rezonansem wewnętrznym, w przypadku nieliniowości typu kwadratowego.

Hatwal, Mallik i Ghosh [53] analizują podobny układ jaki badali Haxton i Barr [15], a więc układ masa-wahadło z nieliniowością typu kwadratowego. Stwierdzają oni, że efektem rezonansu wewnętrznego $\omega_2 = 2\omega_1$ jest wzbudzenie parametryczne, a dla dostatecznie dużych amplitud wymuszenia możliwość wystąpienia drgań prawie-okresowych.

Nayfeh w [54] bada układ o wielu stopniach swobody z nieliniowością typu kwadratowego i sześciennego łącznie, z wymuszeniem parametrycznym i rezonansem wewnętrznym $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Nieliniowość może być typu geometrycznego bądź sprężystego, a równania mogą opisywać drgania wirujących wałów, sklepień, powłok i płyt, sprzężone poprzeczne i wzdłużne drgania kolumn, drgania zbiorników częściowo napełnionych cieczą i zamocowanych sprężystości.

Z analizą układów z wielokrotnymi częstościami własnymi i wzbudzanych parametrycznie możemy spotkać się między innymi w pracach [55, 56, 57, 68]. Fu i Nemat-Nasser [55, 56] rozpatrują układy liniowe, nietłumione w przypadku występowania dwóch częstości wielokrotnych. Natomiast Tezak, Nayfeh i Mook [57] rozwijają analizę przeprowadzoną przez Fu i Nemat-Nasser'a włączając do układu tłumienie i nieliniowość typu sześciennego, a jako przykład podają badanie flatteru powłok w obecności obciążenia harmonicznego. Także Nayfeh [58] rozważa układ o wielu stopniach swobody z wielokrotnymi częstościami własnymi, a szczegółowej analizie poddaje układ o czterech stopniach swobody, w którym trzy pierwsze częstości własne są takie same. Badania koncentruje na rezonansach parametrycznych: $2\omega_1$, $\omega_1 + \omega_4$ i $\omega_1 - \omega_4$.

Ogólniejszą teorię i klasyfikację rezonansów wewnętrznych można także znaleźć w pracach Sethna [59], Czesankowa [60, 61, 62], Samojlenki i Momota [63, 64], Nayfeh'a i Mook'a [65].

W przeważającej większości omawianych prac wyniki teoretyczne uzyskane były za pomocą jednej z technik perturbacyjnych, najczęściej za pomocą klasycznej metody uśrednienia, a weryfikacja tych wyników przeprowadzana była przez symulację równań ruchu na maszynach cyfrowych lub analogowych.

W nielicznych tylko pracach np. [27, 35, 53], stosowana była metoda bilansu harmo-

nicznych, ale nie podejmowano analizy, która z metod przybliżonych jest adekwatna dla danego układu i danego typu rezonansu.

O ile rezonansowi wewnętrznemu typu $2\omega_i = \omega_j$ poświęcona jest obszerna literatura i w wielu pracach wyniki teoretyczne zostały całkowicie potwierdzone przez badania symulacyjne, to zachowanie się układu przy rezonansie typu $3\omega_i = \omega_j$ nie jest w pełni wyjaśnione. W szczególności dotychczasowe wyniki nie dają wyczerpującej odpowiedzi na pytania:

- czy rozwiązanie pierwszego przybliżenia metod perturbacyjnych daje wiarygodne jakościowo wyniki zgodne z wynikami symulacji komputerowej,
- jakich zmian w charakterze drgań rezonansowych możemy oczekiwać gdy parametry układu, przy których nie jest spełniony warunek istnienia rezonansu wewnętrznego, zmienić tak że będzie spełniony warunek:

$$3\omega_i = \omega_j.$$

Bezpośrednim bodźcem do podjęcia prac nad tym typem rezonansu wewnętrznego były badania teoretyczne i analogowe prowadzone na prostym przykładzie modelu układu o dwóch stopniach swobody z nieliniowością typu sześciennego i wzbudzanego siłą harmoniczną (rys. 1).

Drgania rezonansowe tego układu zarówno przy rezonansach głównych jak i pobocznych bez rezonansu wewnętrznego, oraz studia porównawcze różnych metod przybliżonych, były przedmiotem wcześniejszych studiów autorów [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73]. W pracach tych, oprócz analizy zjawisk drgań rezonansowych pojawiających się w układach nieliniowych posiadających więcej niż jeden stopień swobody, zwracano baczną uwagę na problem doboru przybliżonej metody analitycznej, adekwatnej do danego typu badanego zjawiska i badanego układu. W szczególności analizowano metody perturbacyjne w pierwszym przybliżeniu i metodę Ritza (metodę bilansu harmonicznym), porównując rozwiązania mające tą samą formę jako funkcję czasu.

W obecnej pracy dobrano parametry układu tak, by spełniony był warunek występowania rezonansu wewnętrznego typu $\omega_2 = 3\omega_1$. W przeprowadzonych badaniach analogowych nie uzyskano tych wyników jakie przewiduje teoria pierwszego przybliżenia metody uśrednienia, natomiast uzyskano efekty, których ta teoria nie przewiduje.

Problem został rozwiązany, gdy w rozważaniach teoretycznych zastosowano metodę Ritza, przy niezmięnionej formie rozwiązania jako funkcji czasu.

2. Ogólne równania i badanie rezonansów wewnętrznych metodą uśrednienia i metodą Ritza

Rozważamy równania ruchu nieliniowych układów drgających o skończonej liczbie stopni swobody, zapisane w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{P}\cos\gamma t = 0, \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{q} = \text{col}[q_1, \dots, q_n]$ — współrzędne uogólnione, $\mathbf{A} = \text{diag}[m_i]$ — macierz bezwładności, \mathbf{C} — macierzz tywności, kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona, $\mathbf{f} = \text{col}[f_1,$

$\dots, f_n]$ — reprezentuje nieliniową część sił sprężystych, $\boldsymbol{\varphi} = \text{col}[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ — reprezentuje siły tłumienia.

Układy ciągle opisane będą równaniami cząstkowymi w postaci,

$$m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L(w) + L_1(w) + N(w) - p(x) \cos \nu t = 0, \quad (7)$$

z warunkami brzegowymi,

$$B(w) = 0 \text{ na brzegu } \Gamma,$$

gdzie $L(w)$ i $L_1(w)$ — odpowiednio liniowy i nieliniowy operator zmiennych przestrzennych odpowiadający liniowej i nieliniowej części sił sprężystych, $N(w)$ — operator tłumienia, $p(x)$ — amplituda siły wymuszającej.

Obydwa modele matematyczne (6) i (7) sprowadzamy do układu równań modalnych przez wprowadzenie współrzędnych normalnych ξ_1, \dots, ξ_n . Dla układu (6) współrzędne te wprowadzamy za pomocą transformacji:

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{0ij} \xi_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

gdzie b_{0ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, są współczynnikami postaci własnych układu (6) dla $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{P} = \mathbf{0}$, a dla układów ciągłych (7) przez przyjęcie przybliżenia,

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \xi_j(t), \quad (9)$$

gdzie: $\psi_j(x)$ — znane liniowe funkcje x (postacie własne układu (7) przy $L_1(w) = N(w) = p(x) = 0$), oraz zastosowanie metody Galerkin.

Dla obu układów (6) i (7) otrzymamy równania ruchu w formie:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) - \mathbf{Q} \cos \nu t = 0, \quad (10)$$

gdzie: $\mathbf{M} = \text{diag}[M_j]$, $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}[M_j \omega_{0j}^2]$, M_j — uogólniona masa, ω_{0j} — częstość własna j -tej postaci. Elementy kolumnowej macierzy \mathbf{F} są funkcjami wszystkich współrzędnych, $F_j = F_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, zaś elementy macierzy \mathbf{H} są zależne od wszystkich współrzędnych i ich pochodnych, $H_j \equiv H_j(\xi_1, \dots, \xi_n, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n)$. Ponadto mamy:

$$M_j = \sum_{i=1}^n m_i b_{0ij}^2, \quad F_j = \sum_{i=1}^n f_i b_{0ij}, \quad H_j = \sum_{i=1}^n \varphi_i b_{0ij}, \quad Q_j = \sum_{i=1}^n P_i b_{0ij}, \quad (11)$$

— dla układu równań (6),

$$\begin{aligned} M_j &= \int_0^l m(x) \psi_j^2(x) dx, & F_j &= \int_0^l L_1 \left[\sum_{s=1}^n \psi_s(x) \xi_s(t) \right] \psi_j(x) dx, \\ H_j &= \int_0^l N \left[\sum_{s=1}^n \psi_s(x) \xi_s(t) \right] \psi_j(x) dx, & Q_j &= \int_0^l p(x) \psi_j(x) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

— dla układu równań (7).

Zakłada się, że autonomiczny, zachowawczy układ nieliniowy:

$$M\ddot{\xi} + \Omega\xi + F(\xi) = 0, \quad (13)$$

posiada energię potencjalną U spełniającą warunki:

$$\begin{aligned} U(0, \dots, 0) &= 0, \\ U > 0 &\text{ jeśli } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ nie znikają jednocześnie,} \\ U(\xi_1, \dots, \xi_n) &= U(-\xi_1, \dots, -\xi_n), \end{aligned} \quad (14)$$

tak więc:

$$-\frac{\partial U}{\partial \xi_j} = -M_j \omega_{0j}^2 \xi_j - F_j(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (15)$$

Funkcje F_j są analitycznymi i nieparzystymi funkcjami swoich argumentów. Przyjmuje się, że z wystarczającą dokładnością można je przedstawić w postaci skończonego szeregu Taylora. Siły tłumienia spełniają warunek:

$$\sum_{j=1}^n H_j \dot{\xi}_j > 0, \quad (16)$$

jeśli tylko $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n$ nie znikają równocześnie, i także są przedstawiane w postaci skończonego szeregu Taylora.

Tak więc układ równań (10) traktowany jest jako model matematyczny zarówno układów o skupionych masach jak i układów o ciągłym rozkładzie mas i będzie przedmiotem dalszych badań.

2.1. Metoda uśrednienia. Załóżmy, że spełniony jest warunek zewnętrznego rezonansu głównego tj.:

$$\nu \approx \omega_k, \quad (17)$$

i wszystkie częstotliwości są niewspółmierne. Rozwiązania układu (10) w pierwszym przybliżeniu szukamy w postaci:

$$\begin{aligned} \xi_k &= a_k \cos(\nu t + \vartheta), \nu \approx \omega_k, \\ \xi_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie a_k i ϑ — pewne stałe wyznaczone metodą uśrednienia lub inną procedurą perturbacyjną.

W tym przypadku tylko współrzędna rezonansowa ξ_k jest różna od zera. Współrzędne nieresonansowe ξ_j , $j \neq k$, w rozwiązaniu w pierwszym przybliżeniu są równe zero. Rozwiązanie takie nazywane jest jednoczęściowym (jednopostaciowym), gdyż postać drgań scharakteryzowana jest jedną funkcją własną $\psi_k(x)$ lub układem współczynników b_{0ik} , $i = 1, 2, \dots, n$.

Jeśli jednak choć jedna z częstotliwości własnych, np. ω_s , jest współmierna z rezonansową, wówczas okazuje się, że odpowiedź układu przestaje być jednopostaciowa, a do rozwiązania zostaje wciągana dodatkowo współrzędna ξ_s . Załóżmy dla ogólności, że $r-1$ częstotliwości własnych jest współmiernych z częstotliwością ω_k , tzn.:

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_k \omega_k + \dots + k_r \omega_r = 0, \quad (19)$$

gdzie k_1, \dots, k_r — liczby całkowite. Warunek (19) zapisać możemy także w postaci:

$$\frac{\omega_s}{\omega_k} = \frac{s_s}{s_k} = N_{ks} \quad (20)$$

gdzie $s_k, s_s = 1, 2, 3, \dots$

Stosując wprowadzone oznaczenia (20) równania ruchu (10) przepiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} \nu &\approx \omega_k, \\ \ddot{\xi}_k + \nu^2 \xi_k &= (\nu^2 - \omega_k^2) \xi_k - F_k(\xi_1, \dots, \xi_r) - H_k(\xi_1, \dots, \xi_r, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_r) + Q_k \cos \nu t, \\ \ddot{\xi}_s + N_{ks}^2 \nu^2 \xi_s &= N_{ks}^2 (\nu^2 - \omega_k^2) \xi_s - F_s(\xi_1, \dots, \xi_r) - H_s(\xi_1, \dots, \xi_r, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_r) + \\ &+ Q_s \cos \nu t, \quad s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r, \\ \ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j &= -F_j(\xi_{r+1}, \dots, \xi_n) - H_j(\xi_{r+1}, \dots, \xi_n, \dot{\xi}_{r+1}, \dots, \dot{\xi}_n) + Q_j \cos \nu t, \\ & j = r+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (21)$$

Efekt rezonansu wewnętrznego uzyskano zakładając, że nie tylko współrzędna rezonansowa, lecz i współrzędne ξ_s odpowiadające częstościom współmiernym z ω_k są różne od zera. Tak więc rozwiązania układu równań (21) szukamy w postaci:

$$\begin{aligned} \xi_k &= a_k \cos(\nu t + \vartheta_k), & \nu &\approx \omega_k, \\ \xi_s &= a_s \cos(N_{ks} \nu t + \vartheta_s), & s &= 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r, \\ \xi_j &= 0, & j &\neq 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (22)$$

Dla wyznaczenia amplitud a_1, \dots, a_r i kątów fazowych $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$ stosujemy metodę uśrednienia [74-79]. W tym celu najpierw traktujemy te wielkości jako nowe zmienne $a_s \equiv a_s(t)$, $\vartheta_s \equiv \vartheta_s(t)$, $s = 1, \dots, r$, i przekształcamy równania (21) do postaci:

$$\begin{aligned} \frac{da_s}{dt} &= \frac{1}{N_{ks} \nu} [-(N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2) a_s \cos \Theta_s + \tilde{F}_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) - Q_s \cos \nu t] \sin \Theta_s, \\ \frac{d\vartheta_s}{dt} &= \frac{1}{N_{ks} \nu a_s} [-(N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2) a_s \cos \Theta_s + \tilde{F}_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) - Q_s \cos \nu t] \cos \Theta_s \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Theta_s &= N_{ks} \nu t + \vartheta_s, \\ \tilde{F}_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) &= F_s(a_1 \cos \Theta_1, \dots, a_r \cos \Theta_r) + \\ &+ H_s(a_1 \cos \Theta_1, \dots, a_r \cos \Theta_r, -a_1 \nu N_{k1} \sin \Theta_1, \dots, -a_r \nu N_{kr} \sin \Theta_r). \end{aligned} \quad (24)$$

Dodajmy, że aby zastosować metodę uśrednienia musimy zażądać by prawe strony równań (23) były małe, rzędu μ^1 , gdzie μ jest małym parametrem — $\mu \ll 1$, $\mu > 0$. Widzimy więc, że nie tylko funkcje nieliniowe \tilde{F}_s ale i amplitudy siły wymuszającej Q_s oraz różnice $(N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2)$ muszą być małe, rzędu μ^1 .

Następnie zastępujemy prawe strony równań (23) przez ich wartości uśrednione w czasie. Operacje te możemy zapisać następująco:

$$\frac{da_s}{dt} = \frac{1}{N_{ks} \nu} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \sin \Theta_s dt - \frac{1}{2} \delta_{ks} Q_s \sin \vartheta_s \right], \quad (25)$$

(25) [cd.]

$$\frac{d\vartheta_s}{dt} = \frac{1}{a_s N_{ks} \nu} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \cos \Theta_s dt + \frac{1}{2} (N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2) a_s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{ks} Q_s \cos \vartheta_s \right],$$

gdzie: δ_{ks} — delta Kroneckera, $s, k = 1, 2, \dots, r$.

Ponieważ szukamy ustalonych rozwiązań $a_s = \text{const}$ i $\vartheta_s = \text{const}$, $s = 1, 2, \dots, r$, żądamy by spełnione były równania:

$$\frac{da_s}{dt} = \frac{1}{N_{ks} \nu} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \sin \Theta_s dt - \frac{1}{2} \delta_{ks} Q_s \sin \vartheta_s \right] = 0, \quad (26a)$$

$$\frac{d\vartheta_s}{dt} = \frac{1}{a_s N_{ks} \nu} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \cos \Theta_s dt + \frac{1}{2} (N_{ks}^2 \nu^2 - \omega_s^2) a_s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{ks} Q_s \cos \vartheta_s \right] = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r. \quad (26b)$$

Warunki (26) prowadzą do $2r$ nieliniowych równań algebraicznych z niewiadomymi $a_1, \dots, a_r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_r$.

Równania (26a) pozwalają na prostą interpretację związku między formą funkcji nieliniowej (24) i typem rezonansu wewnętrznego. Zbadajmy więc szczegółowiej równania (26a) dla współrzędnych o częstotliwościach współmiernych z ω_k , spełnienie których jest warunkiem niezbędnym istnienia niezerowych rozwiązań na $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_r$. Warunki te możemy zapisać w postaci:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{F}_s(a_1, \dots, a_r, \Theta_1, \dots, \Theta_r) \sin \Theta_s dt = 0, \quad (27) \\ s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r.$$

W tym celu przedstawimy funkcje \tilde{F}_s w formie uogólnionego szeregu Fouriera:

$$F_s = P_0^{(s)} + P^{(s)} \cos \Theta_s + G^{(s)} \sin \Theta_s + \sum_m P_{s, m_1, m_2, \dots} \cos(m_1 \Theta_1 + \dots \\ + m_k \Theta_k + \dots + m_r \Theta_r) + \sum_m G_{s, m_1, m_2, \dots} \sin(m_1 \Theta_1 + \dots + \\ + m_k \Theta_k + \dots + m_r \Theta_r), \quad (28)$$

gdzie \sum_m oznacza sumę po wszystkich $m_1, \dots, m_k, \dots, m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, za wyjątkiem przypadku, kiedy $m_k = \pm 1$ a pozostałe m_s , $s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$ są równe zero. Zauważmy, że współczynniki $G^{(s)}$ przy $\sin \Theta_s$ są w rozważanych układach dysypacyjnych różne od zera jeśli tylko $a_s \neq 0$. Zatem, aby warunek (27) mógł być spełniony, w rozwinięciu funkcji \tilde{F}_s w szereg Fouriera muszą znaleźć się dodatkowe człony z $\sin \Theta_s$.

Człony takie uzyskamy, jeśli wśród kombinacji współczynników m_1, \dots, m_r występujących w (28) znajdują się takie, że spełniony będzie warunek:

$$m_1\Theta_1 + \dots + m_k\Theta_k + \dots + m_r\Theta_r = \pm\Theta_s + \vartheta, \quad (29)$$

co odpowiada zależności między częstościami:

$$m_1\omega_1 + \dots + m_k\omega_k + \dots + m_r\omega_r = \pm\omega_s, \quad (30)$$

$$s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r.$$

Tak więc widzimy, że warunek (27) dla amplitud współrzędnych nierezonansowych sprowadza się do tego aby częstości $\omega_1, \dots, \omega_r$ były współmierne. Zauważmy jednak, że współczynniki m_1, \dots, m_r nie są tu już dowolne, a zależą od formy funkcji nieliniowej.

Zależności (29) mogą stanowić podstawę do wyznaczenia wszystkich typów rezonansów wewnętrznych jakie mogą się pojawić przy danej formie funkcji nieliniowej. Między innymi w pracy [45] jest pokazane jakie typy rezonansów wewnętrznych mogą wystąpić, gdy nieliniowa część sił sprężystych jest opisana funkcją typu kwadratowego, sześciennego lub piątego stopnia.

I tak przy liniowym tłumieniu i nieliniowości sprężystej typu sześciennego, z analizy tej wynika, że w układzie o dwóch stopniach swobody istnieje możliwość wystąpienia tylko rezonansu wewnętrznego typu:

$$\omega_2 = 3\omega_1. \quad (31)$$

Przedstawione rozważania za pomocą metody uśrednienia opierały się na założeniu harmonicznym rozwiązaniu na współrzędne normalne. Na podstawie transformacji (8) widzimy, że założenie to daje rozwiązanie we współrzędnych q_1, \dots, q_n w formie:

$$q_i(t) = \sum_{s=1}^r b_{0is} \xi_s(t) = \sum_{s=1}^r b_{0is} a_s \cos(N_{ks} \nu t + \vartheta_s), \quad (32)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

A zatem stosunki amplitud poszczególnych harmonicznym są równe współczynnikom postaci własnych układu liniowego. Jednak już we wcześniejszych pracach na temat drgań układów o wielu stopniach swobody wykazano, że założenie to może prowadzić do poważnych błędów [71, 72, 80, 81]. Omówimy więc metodę, która nie wprowadza żadnych założeń upraszczających odnośnie postaci drgań układu — metodę Ritza.

2.2. Metoda Ritza. Poszukajmy rozwiązania układu równań (6) w tej samej formie co w metodzie uśrednienia (32):

$$q_i(t) = \sum_{s=1}^r b_{is} a_s \cos\Theta_s, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

gdzie:

$$\Theta_s = N_{ks} \nu t + \vartheta_{is},$$

lecz przy założeniu, że nie tylko a_s, ϑ_{is} ale i b_{is} wymagają wyznaczenia. Oznacza to, że rozwiązanie we współrzędnych normalnych powinno również zawierać wszystkie składowe harmoniczne:

$$\xi_j(t) = \sum_{s=1}^r \alpha_s \cos\Theta_s. \quad (34)$$

Dla wyznaczenia a_s , b_{is} i ϑ_{is} w rozwiązaniu (33) lub α_s i ϑ_{is} w rozwiązaniu (34) zastosujemy metodę Ritza [66, 74, 79], równoważną procedurze bilansu harmonicznego, tzn. żądamy spełnienia zależności:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_i(t) \cos \Theta_s dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_i(t) \sin \Theta_s dt = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

gdzie $\varepsilon_i(t)$ — „pozostałości” równań (6) po podstawieniu przybliżonego rozwiązania (33), lub równań (10) po podstawieniu rozwiązania (34).

W zastosowaniu do równań (6) warunki (35) dają $2 \times n \times r$ równań algebraicznych, które możemy zapisać w postaci,

$$-m_i a_s b_{is} \nu^2 N_{ks}^2 + \sum_{j=1}^r c_{ij} b_{js} a_s + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f_i + \varphi_i) \cos \Theta_s dt - \quad (36a)$$

$$-\frac{1}{2} \delta_{ks} P_i \cos \vartheta_{is} = 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f_i + \varphi_i) \sin \Theta_s dt - \frac{1}{2} \delta_{ks} P_i \cos \vartheta_{is} = 0, \quad (36b)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

z których wyznaczmy $a_s \equiv a_s(\nu)$, $\vartheta_{is} \equiv \vartheta_{is}(\nu)$, $b_{is} \equiv b_{is}(\nu)$, $b_{1s} = 1$.

Równania (36b), które dla $s \neq k$ możemy zapisać w postaci:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f_i + \varphi_i) \sin \Theta_s dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (37)$$

$$s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r,$$

pozwalają na prostą interpretację związku między formą funkcji nieliniowej — $f_i + \varphi_i$, a typem rezonansu wewnętrznego. Przedstawmy więc funkcje $f_i + \varphi_i$ w formie uogólnionego szeregu Fouriera,

$$f_i + \varphi_i = p_0^{(i)} + p^{(i)} \cos \Theta_s + g^{(i)} \sin \Theta_s + \quad (38)$$

$$+ \sum_m p_{i, m_1, m_2, \dots} \cos(m_1 \Theta_1 + \dots + m_k \Theta_k + \dots + m_r \Theta_r) +$$

$$+ \sum_m g_{i, m_1, m_2, \dots} \sin(m_1 \Theta_1 + \dots + m_k \Theta_k + \dots + m_r \Theta_r),$$

gdzie \sum_m oznacza sumę po wszystkich $m_1, \dots, m_k, \dots, m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, za wyjątkiem przypadku kiedy $m_k = \pm 1$ a pozostałe $m_s, s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$ są równe zero. Zauważmy, że współczynniki $g^{(i)}$ przy $\sin \Theta_s$ są w rozważanych układach dysypacyjnych różne od zera jeśli tylko $a_s \neq 0$. Zatem aby warunek (37) mógł być spełniony, w rozwinięciu $f_i + \varphi_i$ w szereg Fouriera (38) muszą znaleźć się dodatkowe człony z $\sin \Theta_s$.

Uzyskamy je jeśli wśród kombinacji współczynników m_1, \dots, m_r , występujących w (38), znajdują się takie, że spełniony będzie warunek:

$$m_1\Theta_1 + \dots + m_k\Theta_k + \dots + m_r\Theta_r = \pm\Theta_s + \vartheta, \quad (39)$$

$$s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r.$$

Zauważmy, że współczynniki m_1, \dots, m_r występujące w (39) są identyczne jak współczynniki m_1, \dots, m_r występujące w (29), gdyż w obu przypadkach rozwijamy w szereg Fouriera jakościowo tą samą funkcję:

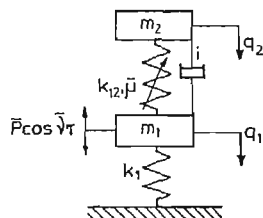
$$\tilde{F}_s = \sum_{s=1}^n b_{0is}(f_i + \varphi_i) \text{ — w metodzie uśrednienia przy rozwiązaniu (32),} \quad (40)$$

$$f_i + \varphi_i \text{ — w metodzie Ritza przy rozwiązaniu (33).}$$

Tak więc widzimy, że spełnienie warunku (39) jest równoważne spełnieniu warunku (29) metody uśrednienia. A zatem metoda Ritza prowadzi do tych samych typów rezonansów wewnętrznych przy zadanej formie funkcji nieliniowej.

3. Analiza teoretyczna i analogowa układu o dwóch stopniach swobody

Szczegółowe obliczenia analityczne wykonamy dla układu o dwóch stopniach swobody, złożonego z dwóch mas połączonych więzią sprężystą typu Duffinga i liniowym tłumikiem



Rys. 1. Model układu o dwóch stopniach swobody

oraz wzbudzanego siłą harmoniczną o stałej amplitudzie — rys. 1. Układ ten możemy opisać równaniami ruchu w formie,

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \alpha^2 q_1 + \gamma(q_1 - q_2) + \mu\gamma l \left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right) + \mu\gamma(q_1 - q_2)^3 = P \cos v t, \quad (41)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} - (q_1 - q_2) - \mu l \left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right) - \mu(q_1 - q_2)^3 = 0,$$

gdzie q_1, q_2 — oznaczają wychylenia mas m_1 i m_2 od położenia równowagi, $t = \sqrt{k_{12}/m_2} \tau$ — bezwymiarowy czas, oraz

$$\gamma = m_2/m_1, \quad \alpha^2 = k_1\gamma/k_{12}, \quad \mu = \bar{\mu}/k_{12},$$

$$l = \bar{l}\sqrt{k_{12}/m_2}, \quad v = \bar{v}\sqrt{m_2/k_{12}}, \quad P = \bar{P}\frac{\gamma}{k_{12}}.$$

Równania w postaci modalnej (10) otrzymamy przez zastosowanie transformacji (8),

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi_1 + \xi_2, \\ q_2 &= b_{021}\xi_1 + b_{022}\xi_2, \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie b_{021} , b_{022} —są współczynnikami postaci własnych układu liniowego. Po przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_{01}^2 \xi_1 &= \frac{-\mu\gamma(1-b_{021})}{1+\gamma b_{021}^2} \{l(1-b_{021})\dot{\xi}_1 + l(1-b_{022})\dot{\xi}_2 + \\ &+ [(1-b_{021})\xi_1 + (1-b_{022})\xi_2]^3\} + \frac{P \cos \nu t}{1+\gamma b_{021}^2}, \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_{02}^2 \xi_2 &= \frac{-\mu\gamma(1-b_{022})}{1+\gamma b_{022}^2} \{l(1-b_{021})\dot{\xi}_1 + l(1-b_{022})\dot{\xi}_2 + \\ &+ [(1-b_{021})\xi_1 + (1-b_{022})\xi_2]^3\} + \frac{P \cos \nu t}{1+\gamma b_{022}^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

Przyjmując następujące dane liczbowe: $\kappa^2 = 1.5$ i $\gamma = 1.582$, spełnimy warunek współmierności częstości własnych,

$$\omega_{02} = 3\omega_{01}. \quad (44)$$

W tym przypadku na częstości i postaci własne układu liniowego otrzymamy następujące wartości:

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= 0.639, & b_{021} &= 1.6898, \\ \omega_{02} &= 1.917, & b_{022} &= -0.3739. \end{aligned} \quad (45)$$

Na pozostałe parametry układu przyjmujemy następujące wartości:

$$P = 2.0, \quad \mu = 0.01, \quad l = 2.0. \quad (46)$$

W dalszej kolejności będziemy badali zachowanie się układu w przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu częstości własnych układu.

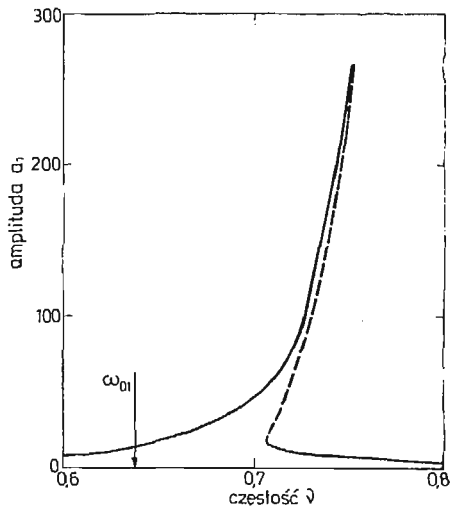
3.1. Analiza pierwszego rezonansu głównego — metoda uśrednienia. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej, rozwiązanie układu równań (43) zakładamy w postaci,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_1 \cos \Theta_1, & \nu &\approx \omega_{01}, \\ \xi_2 &= a_2 \cos \Theta_2, \end{aligned} \quad (47)$$

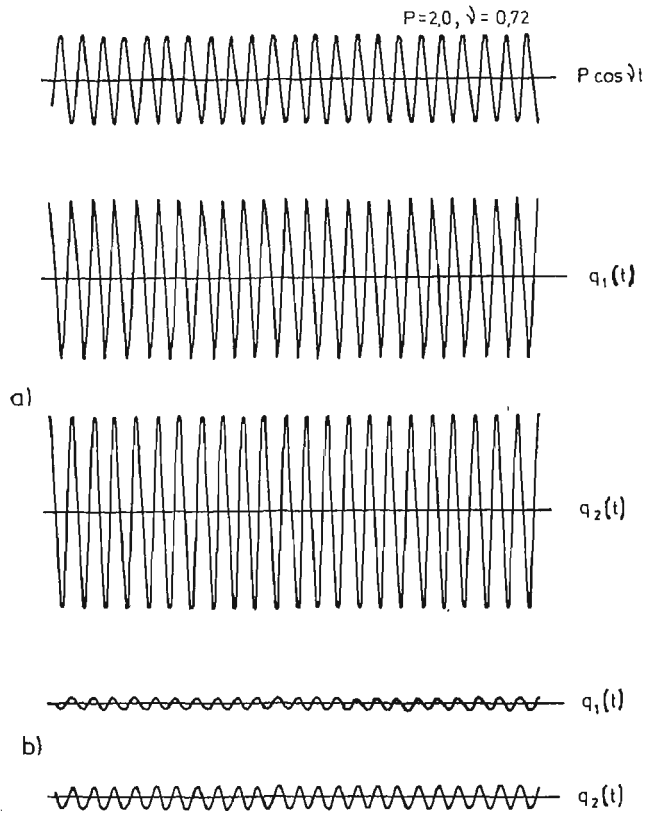
gdzie: $\Theta_1 = \nu t + \vartheta_1$, $\Theta_2 = 3\nu t + \vartheta_2$.

Równania (25) przybierają w tym przypadku postać,

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \frac{1}{2\nu(1+\gamma b_{021}^2)} \left\{ -P \sin \vartheta_1 - \mu\gamma(1-b_{021})^2 \left[l + \frac{3}{4}(1-b_{022})^2 a_2^2 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] a_1 \right\}, \\ \frac{da_2}{dt} &= \frac{1}{2\nu(1+\gamma b_{022}^2)} \left\{ -\mu\gamma l(1-b_{022})^2 a_2 - \frac{1}{12} \mu\gamma(1-b_{021})^3 (1-b_{022}) a_1^3 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right\}, \\ \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \frac{1}{2a_1\nu(1+\gamma b_{021}^2)} \left\{ -(\nu^2 - \omega_{01}^2)(1+\gamma b_{021}^2) a_1 - P \cos \vartheta_1 + \frac{3}{4} \mu\gamma(1-b_{021})^2 a_1 \left[a_1^2 (1 - \right. \right. \end{aligned} \quad (48)$$



Rys. 2. Krzywa rezonansowa $a_1 \equiv a_1(\nu)$ dla pierwszego rezonansu głównego — wyniki analogowe



Rys. 3. Przebiegi czasowe $q_1(t)$ i $q_2(t)$ przy częstotliwości wymuszenia $\nu = 0,72$, (a) — odpowiedź rezonansowa, (b) — odpowiedź nierezonansowa

$$\begin{aligned}
 & -b_{021})^2 + 2a_2^2(1-b_{022})^2 + a_1 a_2(1-b_{021})(1-b_{022})\cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \Big] \Big\}, \quad (48) \\
 & \left[\text{cd.} \right] \\
 \frac{d\vartheta_2}{dt} = & \frac{1}{2a_2\nu(1+\gamma b_{022}^2)} \left\{ -3(\nu^2 - \omega_{\delta 1}^2)(1+\gamma b_{022}^2)a_2 + \mu\gamma(1-b_{022}) \left[\frac{1}{4}a_2^3(1-b_{022}^3) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2}a_1^2 a_2(1-b_{021})^2(1-b_{022}) + \frac{1}{12}a_1^3(1-b_{021})^3\cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Przy wyprowadzaniu równań (48) wykorzystano zależności:

$$\begin{aligned}
 \cos 3\Theta_1 &= \cos\Theta_2 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) - \sin\Theta_2 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2), \\
 \cos(\Theta_2 - 2\Theta_1) &= \cos\Theta_1 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin\Theta_1 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2).
 \end{aligned} \quad (49)$$

Badając stany ustalone przyrównujemy do zera prawe strony równań (48). Jak widać, jedynym możliwym rozwiązaniem jest rozwiązanie dwuczęstościowe $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$.

Z przeprowadzonych badań analogowych wynika, że gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej, mamy odpowiedź okresową dwuczęstościową, w której dominuje składowa o częstości wymuszenia ν . Udział drugiej składowej o częstości 3ν jest bardzo mały i praktycznie mamy odpowiedź bliską harmoniczną. Na rys. 2 pokazano tylko krzywą rezonansową $a_1 \equiv a_1(\nu)$, gdyż amplituda a_2 na wykresie w tej samej skali jest pomijalnie mała. Na rys. 3 pokazano przebiegi czasowe $q_1(t)$ i $q_2(t)$ w przypadku odpowiedzi rezonansowej i nierezonansowej przy częstości wymuszenia $\nu = 0.72$.

Ponieważ efekty rezonansu wewnętrznego są w tym przypadku bardzo małe, dlatego też pominiemy obliczenia analityczne, a przejdziemy do analizy wyższego rezonansu głównego.

3.2. Analiza drugiego rezonansu głównego — metoda uśredniania. W przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej rozwiązanie układu równań (43) zakładamy w postaci,

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= a_1 \cos\left(\frac{\nu}{3}t + \vartheta_1\right), \quad \nu \approx \omega_{02}, \\
 \xi_2 &= a_2 \cos(\nu t + \vartheta_2).
 \end{aligned} \quad (50)$$

Wykorzystując (25) otrzymamy następujące równania na wyznaczenie amplitud i kątów fazowych:

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= \frac{1}{2\nu M_{01}} [-c_{11}\nu + 9\beta_{21}a_1 a_2 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2)]a_1 \equiv X_1 \\
 \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \frac{1}{2\nu M_{01}a_1} \left[-\frac{1}{3}(\nu^2 - \omega_{\delta 2}^2)M_{01} + 3\beta_{1,1}a_1^2 + 3\beta_{1,2}a_2^2 + 3\beta_{2,1}a_1 a_2 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right]a_1 \equiv X_2 \\
 \frac{da_2}{dt} &= \frac{1}{2\nu M_{02}} [-c_{22}\nu a_2 - P \sin \vartheta_2 - \beta_{2,1}a_1^3 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2)] \equiv X_3 \\
 \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \frac{1}{2\nu M_{02}a_2} [-(\nu^2 - \omega_{\delta 2}^2)M_{02}a_2 - P \cos \vartheta_2 + \beta_{2,2}a_2^3 + \beta_{1,2}a_1^2 a_2 + \\
 & + \beta_{2,1}a_1^3 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2)] \equiv X_4,
 \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie:

$$c_{ii} = \mu\gamma l(1-b_{02i})^2, \quad \beta_{ii} = \frac{3}{4}\mu\gamma(1-b_{02i})^4, \quad M_{0i} = 1 + \gamma b_{02i}^2, \quad i = 1, 2,$$

$$\beta_{12} = \frac{3}{2}\mu\gamma(1-b_{021})^2(1-b_{022})^2, \quad \beta_{21} = \frac{1}{4}\mu\gamma(1-b_{021})^3(1-b_{022}).$$

W celu wyznaczenia parametrów stanów ustalonych przyrównujemy do zera prawe strony równań (51),

$$\begin{aligned} [-c_{11}\nu + 9\beta_{21}a_1a_2 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2)]a_1 &= 0 \\ \left[-\frac{1}{3}(\nu^2 - \omega_{02}^2)M_{01} + 3\beta_{11}a_1^2 + 3\beta_{12}a_2^2 + 3\beta_{21}a_1a_2 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) \right]a_1 &= 0 \\ -c_{22}\nu a_2 - P \sin \vartheta_2 - \beta_{21}a_1^3 \sin(3\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0 \\ -(\nu^2 - \omega_{02}^2)M_{02}a_2 - P \cos \vartheta_2 + \beta_{22}a_2^3 + \beta_{12}a_1^2a_2 + \beta_{21}a_1^3 \cos(3\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Jak widzimy, w tym przypadku możliwe są dwa typy rozwiązań:

(a) — jednoczęstościowe,

$$a_1 = 0 \text{ i } a_2 \neq 0, \quad (53)$$

(b) — dwuczęstościowe,

$$a_1 \neq 0 \text{ i } a_2 \neq 0. \quad (54)$$

Zbadajmy więc stateczność tych rozwiązań. Niech parametrami stanu ustalonego będą a_{10} , a_{20} , ϑ_{10} i ϑ_{20} , a dostatecznie małymi zaburzeniami od niego będą η_1 , η_2 , η_3 , η_4 . Wtedy z równań (51) otrzymamy,

$$\begin{aligned} -2\nu M_{01}\dot{\eta}_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3 + a_{14}\eta_4 \\ -2\nu M_{01}\dot{\eta}_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{23}\eta_3 + a_{24}\eta_4 \\ -2\nu M_{02}\dot{\eta}_3 &= a_{31}\eta_1 + a_{32}\eta_2 + a_{33}\eta_3 + a_{34}\eta_4 \\ -2\nu M_{02}\dot{\eta}_4 &= a_{41}\eta_1 + a_{42}\eta_2 + a_{43}\eta_3 + a_{44}\eta_4 \end{aligned} \quad (55)$$

gdzie:

$$a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial \eta_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (56)$$

Równanie charakterystyczne dla równań (55) możemy zapisać w postaci,

$$\lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0. \quad (57)$$

Zgodnie z kryterium Routh-Hurwitza otrzymamy następujące warunki stateczności,

$$\begin{aligned} A_0 > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \\ A_1A_2A_3 - A_0A_3^2 - A_1^2 > 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Z warunków tych $A_3 = 2\nu(c_{11} + c_{22}) > 0$ jest spełniony zawsze, natomiast dla warunku $A_0 = 0$ granica stateczności zbiega się z punktami, dla których styczna do krzywych rezonansowych a_1 i a_2 w funkcji częstotliwości ν jest pionowa.

3.2.1. Rozwiązanie jednoczęstotliwościowe. W pierwszej kolejności rozważymy rozwiązanie jednoczęstotliwościowe $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$. Podstawiając $a_1 = 0$ do trzeciego i czwartego równania w (52) otrzymamy:

$$\begin{aligned} -c_{22}\nu a_2 - P \sin \vartheta_2 &= 0 \\ (\nu^2 - \omega_{02}^2) M_{02} a_2 - P \cos \vartheta_2 + \beta_{22} a_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Równania te są podobne do tych, które wyznaczają amplitudę i kąt fazowy w pobliżu rezonansu w układzie o jednym stopniu swobody.

Badając stateczność tego rozwiązania, równanie charakterystyczne (57) przybiera następującą postać,

$$(\lambda^2 + A_1^{(1)} \lambda + A_0^{(1)})(\lambda^2 + A_1^{(2)} \lambda + A_0^{(2)}) = 0, \quad (60)$$

gdzie

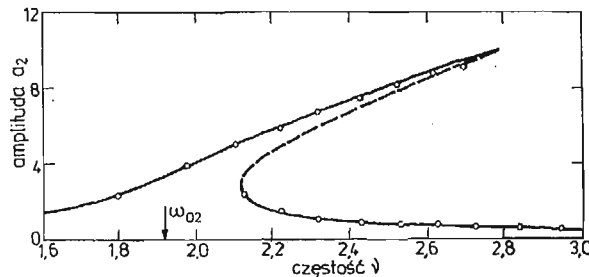
$$A_1^{(1)} = 2\nu c_{11}, \quad A_0^{(1)} = c_{11}^2 \nu^2 + \left[\frac{1}{3} (\nu^2 - \omega_{02}^2) M_{01} - \beta_{12} a_{20}^2 \right]^2, \quad (61)$$

$$A_1^{(2)} = 2\nu c_{22}, \quad A_0^{(2)} = c_{22}^2 \nu^2 + (\nu^2 - \omega_{02}^2) M_{02} - 4\beta_{22} a_{20}^2 \left[(\nu^2 - \omega_{02}^2) M_{02} - \frac{3}{4} \beta_{22} a_{20}^2 \right].$$

Warunki stateczności są w tym przypadku następujące,

$$A_1^{(1)} > 0, \quad A_0^{(1)} > 0, \quad A_1^{(2)} > 0, \quad A_0^{(2)} > 0, \quad (62)$$

z których trzy pierwsze są spełnione zawsze. Dla czwartego z nich — $A_0^{(2)}$, punkty graniczne pokrywają się z punktami, w których styczna do krzywej rezonansowej a_2 w funkcji częstości ν jest pionowa.

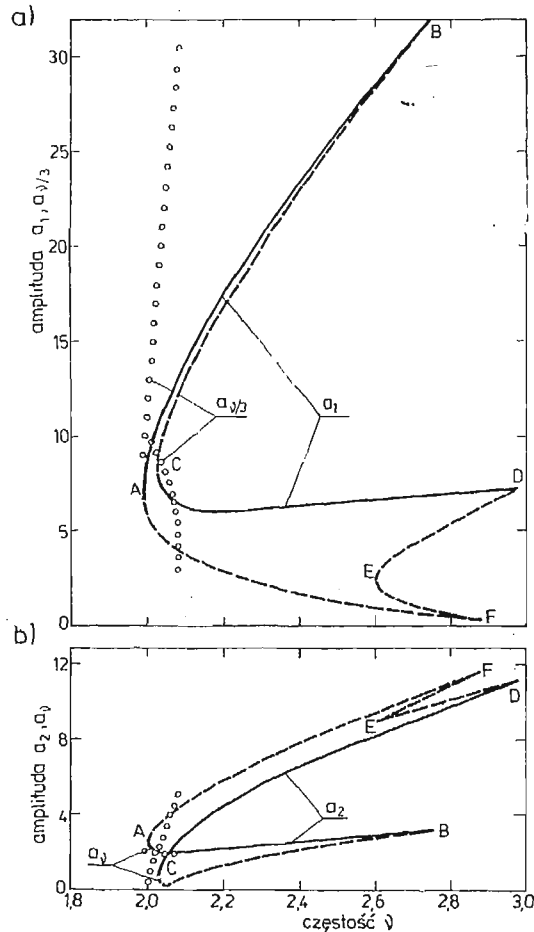


Rys. 4. Krzywa rezonansowa $a_2 \equiv a_2(\nu)$ w przypadku kiedy $a_1 = 0$,

— stateczna } metoda uśrednienia,
 - - - - - }
 o o o o o — wyniki analogowe

Na rys. 4 pokazano krzywą rezonansową $a_2 \equiv a_2(\nu)$ dla rozwiązania jednoczęstotliwościowego, w przypadku gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu drugiego rezonansu głównego. Na rysunku tym pokazano także krzywą rezonansową znalezioną na maszynie analogowej. Jak widać wyniki metody uśrednienia są bliskie wynikom analogowym i potwierdzają w tym przypadku słuszność zastosowania metody uśrednienia.

3.2.2. **Rozwiązanie dwuczęstościowe.** Rozważymy teraz rozwiązanie dwuczęstościowe (54), a więc $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$. Aby wyznaczyć parametry stanu ustalonego dla tego typu rozwiązania, równania (52) rozwiązano za pomocą maszyny cyfrowej i znaleziono $a_1 \equiv a_1(\nu)$, $a_2 \equiv a_2(\nu)$, $\vartheta_1 \equiv \vartheta_1(\nu)$, i $\vartheta_2 \equiv \vartheta_2(\nu)$. Na rys. 5 pokazano $a_1 \equiv a_1(\nu)$ i $a_2 \equiv a_2(\nu)$, które



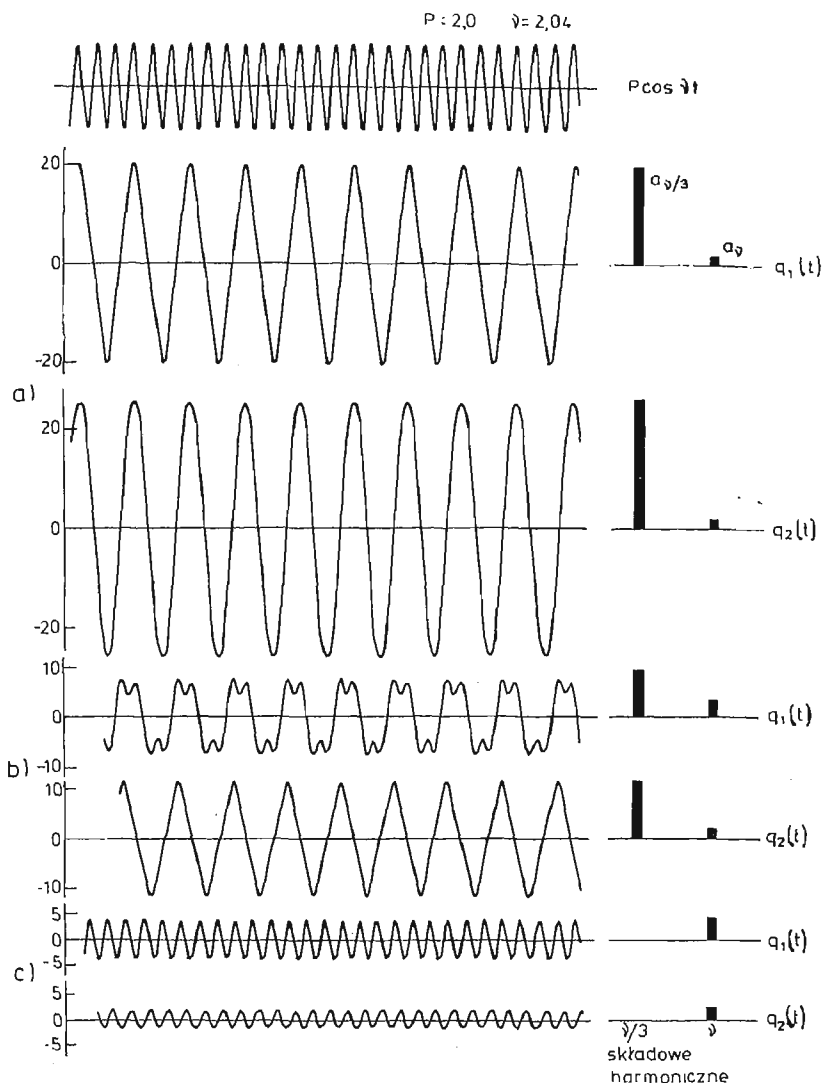
Rys. 5. Krzywe rezonansowe dla rozwiązań dwuczęstościowych, (a) $a_1 \equiv a_1(\nu)$ i $a_{\nu/3} \equiv a_{\nu/3}(\nu)$, (b) $a_2 \equiv a_2(\nu)$ i $a_{\nu} \equiv a_{\nu}(\nu)$,

— stateczna
 - - - - - niestateczna } metoda uśrednienia,
 o o o o o — wyniki analogowe

spełniają układ równań (52). Z badania stateczności wynika, że warunki (58) są spełnione w przedziałach $A-B$ i $C-D$, zawierają się więc w nich stateczne rozwiązania dwuczęstościowe. Rozwiązania niestateczne zawierają się w przedziałach,

$$\begin{aligned}
 A-F \text{ i } B-C & - A_0 < 0, \\
 E-F & - A_1 < 0 \text{ i } A_2 < 0, \\
 E-D & - A_0 < 0, A_1 < 0 \text{ i } A_2 < 0.
 \end{aligned} \tag{63}$$

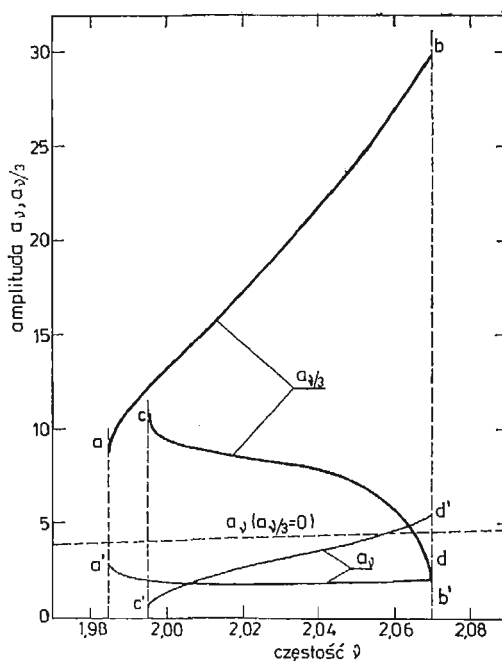
Jak widzimy, możliwe są w tym przypadku dwa typy rozwiązań dwuczęstościowych. W pierwszym z nich reprezentowanym przez gałąź *C—D*, wielkość amplitudy a_2 jest zbliżone do tej kiedy $a_1 = 0$. W drugim typie, reprezentowanym przez gałąź *A—B*, dominują drgania o częstotliwości $\nu/3$ z amplitudą a_1 , mogącą osiągnąć wartość nawet dziewięćkrotnie większą niż amplituda a_2 dla drgań o częstotliwości wymuszenia ν .



Rys. 6. Przebiegi czasowe $q_1(t)$ i $q_2(t)$ oraz ich analiza harmoniczna przy częstotliwości $\nu = 2.04$; (a) i (b) — rozwiązania dwuczęstościowe, (c) — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe

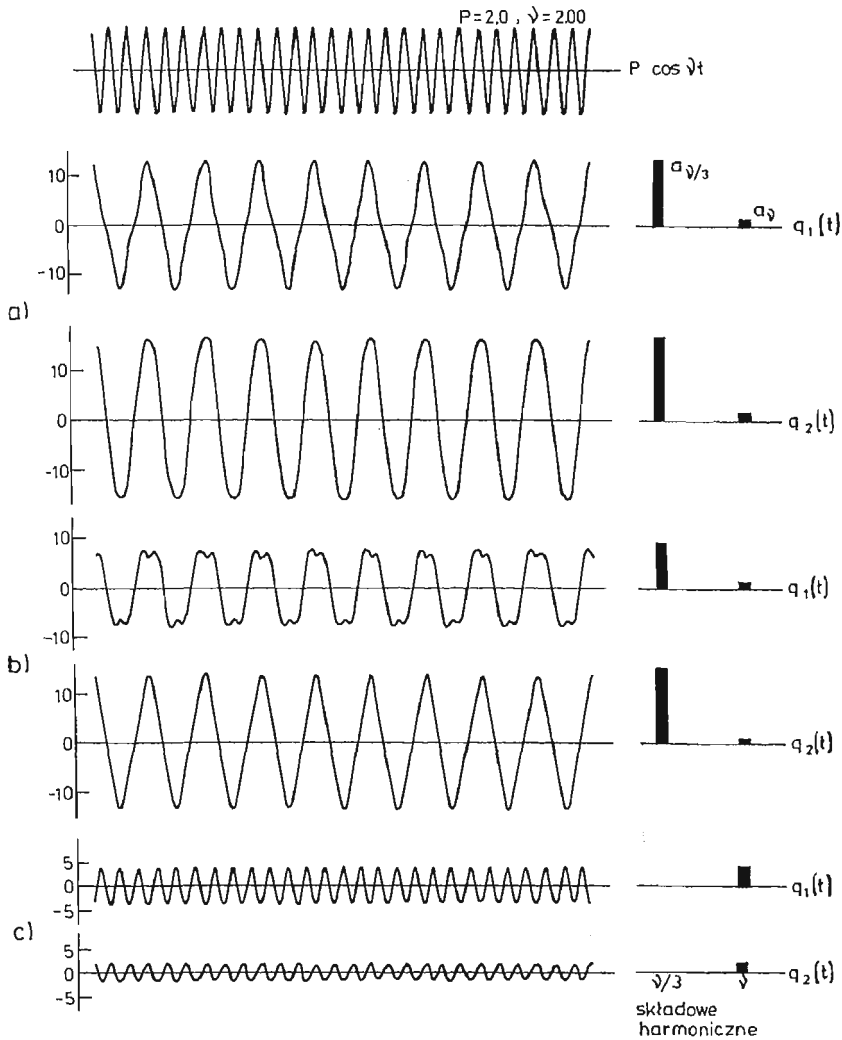
Dla weryfikacji wyników metody uśrednienia, przeprowadzono badania analogowe modelując równania ruchu (41). Badania analogowe potwierdziły istnienie dwóch typów okresowych dwuczęstościowych — ilustruje to rys. 6. Pierwszy typ odpowiedzi przed-

stawiony na rys. 6a charakteryzuje się dużymi amplitudami, a dominującymi w nim są drgania o częstotliwości $\nu/3$ z amplitudą $a_{\nu/3}$. Wpływ drgań o częstotliwości wymuszenia ν z amplitudą a_ν jest mały, i drgania układu są podobne do tych jak dla pierwszego rezonansu głównego. Drugi typ odpowiedzi przedstawiony na rys. 6b charakteryzuje się mniejszymi amplitudami, występują te same składowe harmoniczne co i poprzednio, z tym że udział składowej o częstotliwości wymuszenia jest w tym przypadku większy. W obu przypadkach drgań dwuczęstościowych amplitudy są znacznie większe niż w przypadku drgań rezonansowych jednoczęstościowych. Na rys. 7 pokazano krzywe rezonansowe $a_{\nu/3} \equiv a_{\nu/3}(\nu)$



Rys. 7. Krzywe rezonansowe znalezione na maszynie analogowej,
 ————— — rozwiązania dwuczęstościowe z amplitudą $a_{\nu/3}$,
 ————— — rozwiązania dwuczęstościowe z amplitudą a_ν ,
 - - - - - — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe

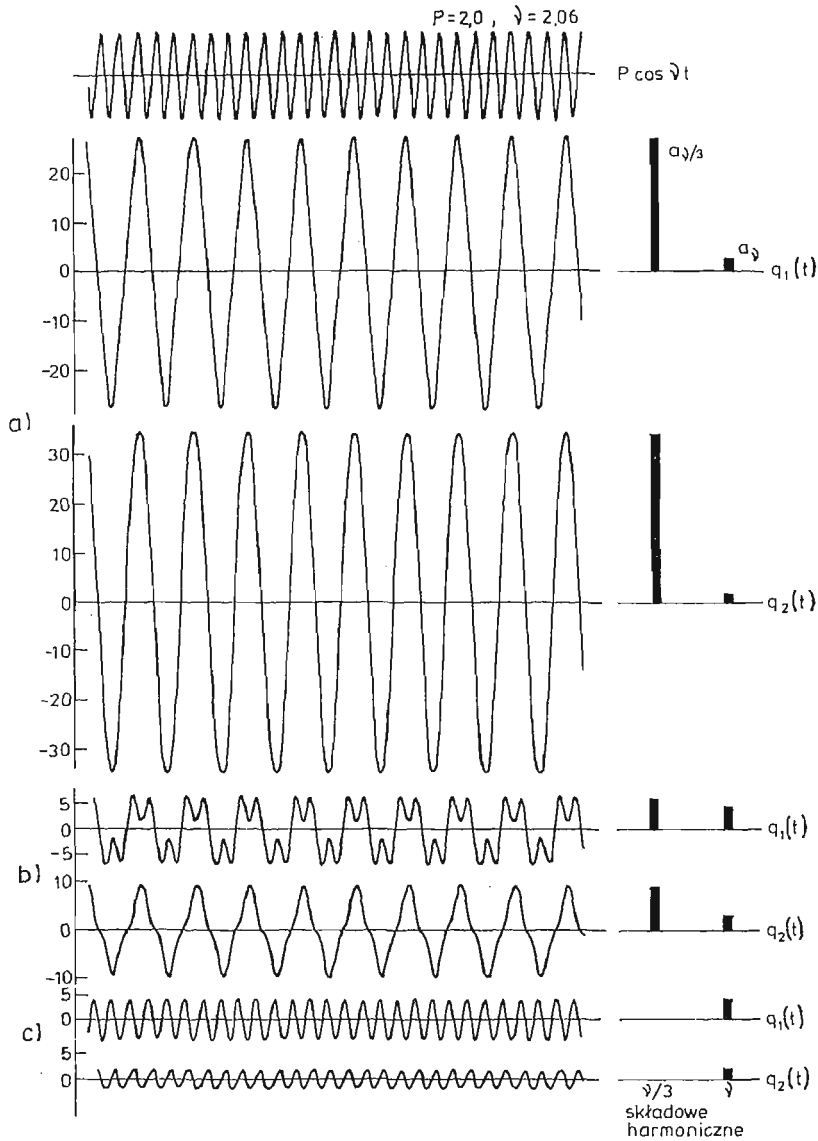
i $a_\nu \equiv a_\nu(\nu)$ dla drgań dwuczęstościowych, tj w przypadku występowania rezonansu wewnętrznego. Pierwsze z drgań reprezentowane jest przez gałąź $a-b$ dla składowej o częstotliwości $\nu/3$ z amplitudą $a_{\nu/3}$, a przez gałąź $a'-b'$ dla składowej o częstotliwości wymuszenia ν z amplitudą a_ν . Dominują w nim drgania o częstotliwości $\nu/3$, przy czym ze wzrostem ν amplituda ich gwałtownie rośnie. Amplituda składowej o częstotliwości wymuszenia ν nie ulega większym zmianom. Drugie z drgań dwuczęstościowych, gałąź $c-d$ dla składowej o częstotliwości $\nu/3$ i $c'-d'$ dla składowej o częstotliwości ν , zachowuje się odmiennie od poprzedniego. Ze wzrostem częstotliwości ν amplituda $a_{\nu/3}$ maleje, natomiast amplituda a_ν rośnie i na końcu przedziału staje się bliska amplitudy rozwiązania rezonansowego jednoczęstościowego. Na rys. 8 i 9 pokazano przebiegi czasowe $q_1(t)$ i $q_2(t)$ wraz z ich analizą harmoniczną przy częstotliwościach $\nu = 2,00$ i $2,06$, a więc dla częstotliwości bliskich skrajnym dla tego typu rozwiązania.



Rys. 8. Przebiegi czasowe $q_1(t)$ i $q_2(t)$ oraz ich analiza harmoniczna przy częstotliwości wymuszenia $\nu = 2.00$;
 (a) — rozwiązanie dwuczęstościowe (gałąź $a-b$ na rys. 7),
 (b) — rozwiązanie dwuczęstościowe (gałąź $c-d$ na rys. 7),
 (c) — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe

Dla porównania wyników uzyskanych przy pomocy uśrednienia z wynikami analogowymi, naniesiono te ostatnie na rys. 5. Jak łatwo zauważyć wyniki obu metod nie zgadają się ani nie są sobie bliskie, dotyczy to zwłaszcza zakresów częstości, w których występują drgania dwuczęstościowe. Jeśli przyjmijemy, że bliskie rzeczywistości są wyniki analogowe, to musimy stwierdzić, że wyniki uzyskane metodą uśrednienia są nie do przyjęcia, chociaż postać założonego rozwiązania, zawierającego dwie składowe harmoniczne jest zgodna z wynikami analizy analogowej.

Zastanówmy się w czym należy upatrywać błędnych wyników jakie dała metoda uśrednienia. Jak już wspomniano w p. 2.1 powodem tych rozbieżności może być założenie



Rys. 9. Przebiegi czasowe $q_1(t)$ i $q_2(t)$ oraz ich analiza harmoniczna przy częstotliwości wymuszenia $\nu = 2,06$,
 (a) — rozwiązanie dwuczęstościowe (gałąź a–b na rys. 7),
 (b) — rozwiązanie dwuczęstościowe (gałąź c–d na rys. 7),
 (c) — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe

w rozwiązaniu układu równań (41) dla współrzędnych q_1 i q_2 zapisanych w postaci (32),

$$q_1 = a_1 \cos\left(\frac{\nu}{3} t + \vartheta_1\right) + a_2 \cos(\nu t + \vartheta_2)$$

$$q_2 = a_1 b_{021} \cos\left(\frac{\nu}{3} t + \vartheta_1\right) + a_2 b_{022} \cos(\nu t + \vartheta_2),$$
(64)

współczynników postaci własnych b_{021} i b_{022} takich jak dla układu liniowego.

Przeprowadzimy więc obliczenia analityczne wykorzystując metodę Ritz'a, która jak wiadomo nie wprowadza żadnych założeń upraszczających odnośnie postaci drgań układu.

3.3. Analiza drugiego rezonansu głównego — metoda Ritz'a. Przepiszemy jeszcze raz równania ruchu (41) w nieco przekształconej formie,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(t) &\equiv \ddot{q}_2 - (q_1 - q_2) - \mu(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \mu(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ \varepsilon_2(t) &\equiv \ddot{q}_1 + \gamma\ddot{q}_2 + \kappa^2 q_1 - P \cos \nu t = 0,\end{aligned}\quad (65)$$

i zgodnie z (33) poszukajmy rozwiązania w postaci:

$$\begin{aligned}q_1 &= a_1 \cos\left(\frac{\nu}{3} t + \vartheta_{11}\right) + a_2 \cos(\nu t + \vartheta_{12}) \\ q_2 &= a_1 b_{21} \cos\left(\frac{\nu}{3} t + \vartheta_{21}\right) + a_2 b_{22} \cos(\nu t + \vartheta_{22}).\end{aligned}\quad (66)$$

Dla uproszczenia zapisu rozwiązanie (66) przepiszemy w formie,

$$\begin{aligned}q_1 &= a_1 \cos \Theta_1 + a_2 \cos \Theta_2 \\ q_2 &= a_1 b_{21} \cos(\Theta_1 + \delta_1) + a_2 b_{22} \cos(\Theta_2 + \delta_2),\end{aligned}\quad (67)$$

gdzie:

$$\Theta_1 = \frac{\nu}{3} t + \vartheta_{11}, \quad \Theta_2 = \nu t + \vartheta_{12}, \quad \delta_1 = \vartheta_{21} - \vartheta_{11}, \quad \delta_2 = \vartheta_{22} - \vartheta_{12}.$$

Nieznane wielkości a_1 , a_2 , b_{21} , b_{22} , ϑ_{11} , ϑ_{12} , δ_1 i δ_2 wyznaczymy podstawiając przybliżone rozwiązanie (67) do równań ruchu (65) i wykorzystując zależność (35). Otrzymamy wtedy,

$$\begin{aligned}\left[\kappa^2 - \frac{1}{9} \nu^2 (1 + \gamma b_{21})\right] a_1 &= 0, \\ [\kappa^2 - \nu^2 (1 + \gamma b_{22} \cos \delta_2)] a_2 &= P \cos \vartheta_{12}.\end{aligned}\quad (68)$$

$$\frac{1}{9} \nu^2 \gamma a_1 b_{21} \sin \delta_1 = 0,$$

$$\gamma a_2 b_{22} \nu^2 \sin \delta_2 = P \sin \vartheta_{12}.$$

$$\left\{ \frac{1}{9} \nu^2 b_{21} + 1 - b_{21} + \frac{3}{4} \mu (1 - b_{21}) [a_1^2 (1 - b_{21})^2 + 2a_2^2 (1 + b_{22}^2 - 2b_{22} \cos \delta_2) + \right.$$

$$\left. + a_1 a_2 (1 - b_{21}) \cos \vartheta - a_1 a_2 (1 - b_{21}) b_{22} \cos(\vartheta - \delta_2)] \right\} a_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}[(\nu^2 - 1) b_{22} \cos \delta_2 + 1 + \mu \nu b_{22} \sin \delta_2] a_2 + \frac{3}{4} \mu \left\{ a_2^3 + 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 - \right. \\ \left. - [2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 b_{22} + a_2^3 b_{22}^2 + 3a_2^3 b_{22}] \cos \delta_2 + 2a_2^3 b_{22}^2 + a_2^3 b_{22}^2 \cos 2\delta_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} a_1^3 (1 - b_{21})^3 \cos \vartheta \right\} = 0,\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{3} \mu \nu (1 - b_{21}) + \frac{3}{4} \mu (1 - b_{21})^2 a_1 a_2 [\sin \vartheta - b_{22} \sin(\vartheta - \delta_2)] \right\} a_1 = 0, \quad (69)$$

[cd.]

$$(1 - \nu^2) a_2 b_{22} \sin \delta_2 - \mu \nu a_2 (1 - b_{22} \cos \delta_2) + \frac{3}{4} \mu \left\{ [a_2^3 b_{22}^3 + 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21}) b_{22} + \right.$$

$$\left. + a_2^3 b_{22}] \sin \delta_2 - \frac{1}{3} a_1^3 (1 - b_{21})^3 \sin \vartheta - a_2^3 b_{22}^2 \sin 2\delta_2 \right\} = 0.$$

gdzie: $\vartheta = 3\vartheta_{11} - \vartheta_{12}$.

Z analizy równań (68) wynika, że $\sin \delta_1 = 0$, gdyż równanie

$$\frac{1}{9} \nu^2 a_1 b_{21} \sin \delta_1 = 0, \quad (69)$$

jest spełnione tylko wtedy gdy $\sin \delta_1 = 0$, ponieważ dla rozwiązań dwuczęstościowych zarówno a_1 jak i b_{21} są różne od zera. Ostatecznie układ równań (68) redukuje się do siedmiu równań z niewiadomymi: $a_1, a_2, b_{21}, b_{22}, \vartheta, \vartheta_{12}$ i δ_2 . Równania (68) wyprowadzono przy uwzględnieniu, że $\sin \delta_1 = 0$. Aby wyznaczyć parametry stanów ustalonych dla rozwiązań dwuczęstościowych należy rozwiązać układ równań (68).

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku kiedy tłumienie jest równe zero, co znacznie uprości nam obliczenia, a nie powinno mieć istotnego wpływu na otrzymane wyniki za wyjątkiem obszaru częstości, gdzie rozwiązanie osiąga maksymalne amplitudy. Równania (68) dla tłumienia równego zero redukują się do układu czterech algebraicznych równań nieliniowych z niewiadomymi a_1, a_2, b_{21} i b_{22} ,

$$\left[\kappa^2 - \frac{1}{9} \nu^2 (1 + \gamma b_{21}) \right] a_1 = 0,$$

$$[\kappa^2 - \nu^2 (1 + \gamma b_{22})] a_2 = P,$$

$$\left\{ \frac{1}{9} \nu^2 b_{21} + 1 - b_{21} + \frac{3}{4} \mu (1 - b_{21}) [a_1^2 (1 - b_{21})^2 + 2a_2^2 (1 - b_{22})^2 + a_1 a_2 (1 - \right.$$

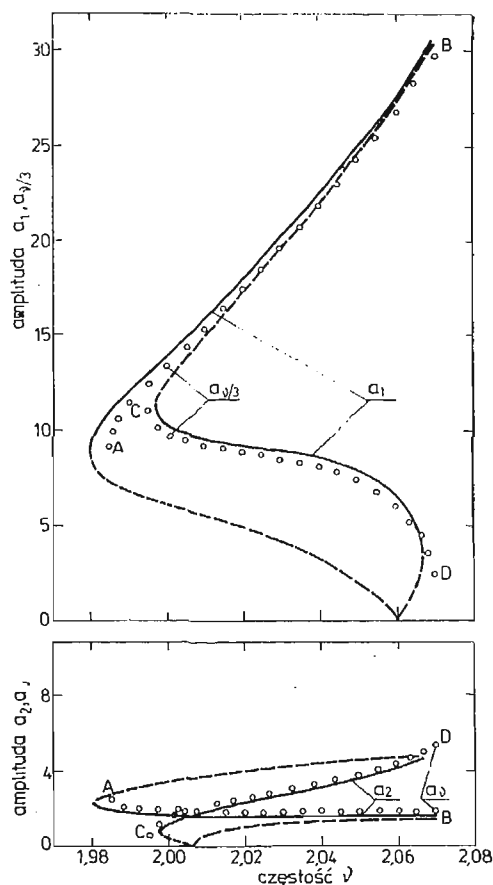
$$\left. - b_{21})(1 - b_{22})] \right\} a_1 = 0, \quad (70)$$

$$\left. \nu^2 a_2 b_{22} + a_2 (1 - b_{22}) + \frac{3}{4} \mu \left[a_2^3 (1 - b_{22})^3 + 2a_1^2 a_2 (1 - b_{21})^2 (1 - b_{22}) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} a_1^3 (1 - b_{21})^3 \right] = 0.$$

Jak należało oczekiwać możliwe są dwa typy rozwiązań: jednoczęstościowe: $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$ i dwuczęstościowe: $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$.

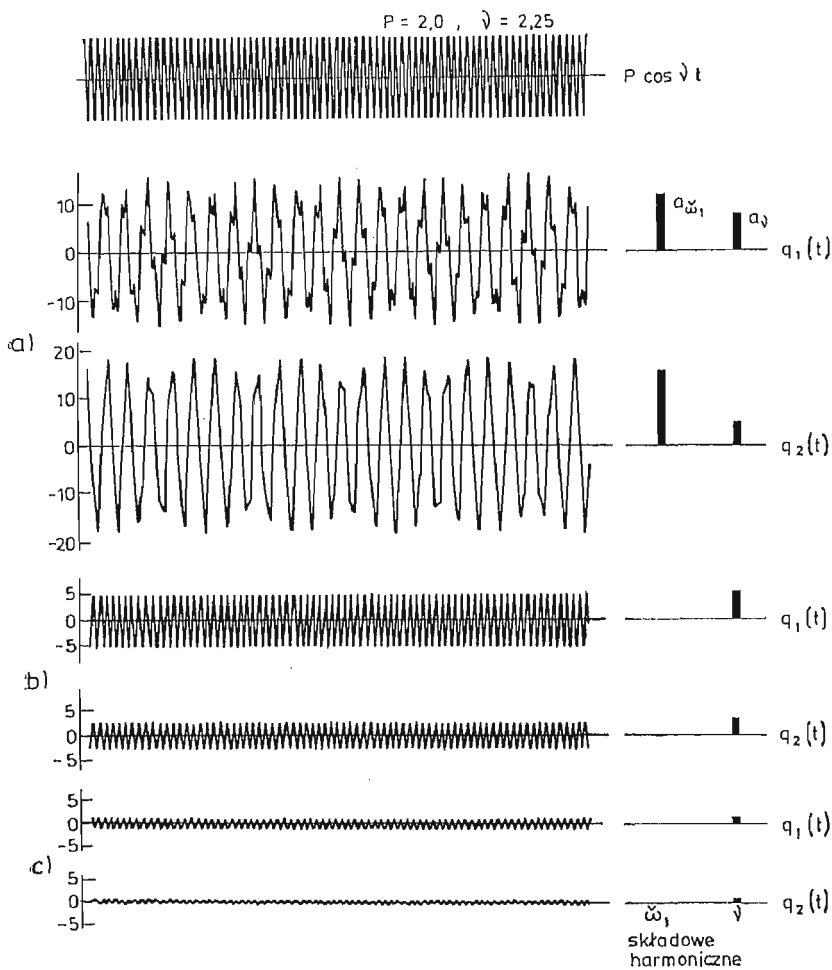
Skoro metoda uśrednienia dała wyniki zgodne z analogowymi w przypadku rozwiązania jednoczęstościowego, zajmiemy się obecnie tylko rozwiązaniem dwuczęstościowym. Rozwiązano w tym celu równania (70) przy pomocy maszyny cyfrowej. Na rys. 10, na którym pokazano wyniki analogowe, pokazano także $a_1 \equiv a_1(\nu)$ i $a_2 \equiv a_2(\nu)$ które spełniają układ równań (70).



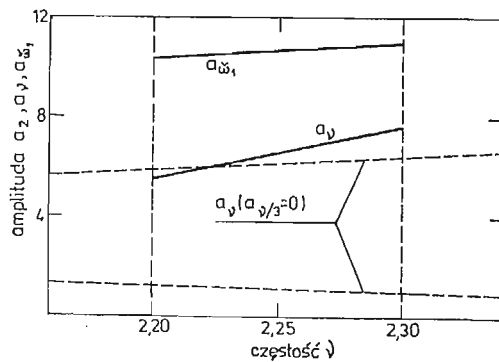
Rys. 10. Krzywe rezonansowe dla rozwiązań dwuczęstościowych, (a) $a_1 \equiv a_1(\nu)$ i $a_{\nu/3} \equiv a_{\nu/3}(\nu)$, (b) $a_2 \equiv a_2(\nu)$ i $a_\nu \equiv a_\nu(\nu)$,
 ————— stateczna } metoda Ritz,
 - - - - - niestateczna }
 o o o o o — wyniki analogowe

Jak łatwo zauważyć, wyniki z metody Ritz są bardzo bliskie analogowym, zarówno jeśli chodzi o zakres częstości w jakim występują rozwiązania dwuczęstościowe jak również i wielkość amplitud.

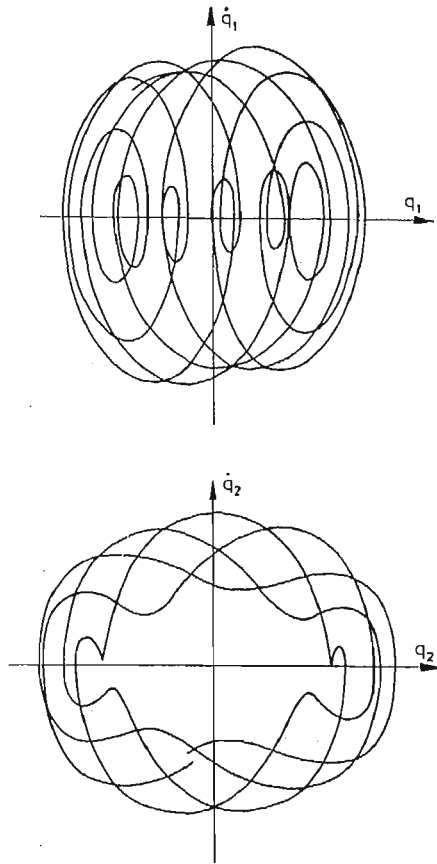
3.4. Drgania prawie-okresowe. W trakcie badań analogowych okazało się, że dla częstości wymuszenia $\nu \in \langle 2.20, 2.30 \rangle$, oprócz drgań harmoniczných odpowiadających drugiemu rezonansowi głównemu, mogą pojawić się drgania prawie-okresowe o znacznych amplitudach. Z przeprowadzonej analizy harmonicznej wynika, że w odpowiedzi dominują dwie składowe harmoniczne: jedna, podobnie jak poprzednio o częstości wymuszenia ν i druga o częstości nieco niższej niż $\nu/3$, którą oznaczmy symbolem $\tilde{\omega}_1$. Częstości te nie są współmierne, stąd odpowiedź układu jest prawie-okresowa. Dla ustalonej częstości wymuszenia $\nu = 2.25$ zarejestrowano przebiegi czasowe, które pokazano na rys. 11. Na rys. 12 pokazano wykresy: amplitudy o częstości ν , $a_\nu \equiv a_\nu(\nu)$ i amplitudy o częstości



Rys. 11. Przebiegi czasowe oraz ich analiza harmoniczna przy $\nu = 2.25$,
 (a) — rozwiązanie prawie-okresowe,
 (b) — rozwiązanie rezonansowe jednoczęstościowe,
 (c) — rozwiązanie nierozonansowe jednoczęstościowe.



Rys. 12. Zmiany amplitud składowych o częstościach ν i $\check{\omega}_1$, dla rozwiązania prawie-okresowego



Rys. 13. Trajektorie w stanie ustalonym dla rozwiązania prawie-okresowego przy częstotliwości $\nu = 2.25$

$\check{\omega}_1$, $a_{\check{\omega}_1}^* \equiv a_{\check{\omega}_1}^*(\nu)$. Na rys. 13 pokazano trajektorie w stanie ustalonym na płaszczyznach fazowych $[q_1, \dot{q}_1]$ i $[q_2, \dot{q}_2]$ dla $\nu = 2.25$.

Wzmianki o drganiach prawie-okresowych w układach z rezonansem wewnętrznym wykrytych na drodze symulacji analogowej i cyfrowej znaleźć można w pracach [30, 31, 35, 53], lecz nie podjęto jeszcze prób teoretycznego wyjaśnienia tego zjawiska i zagadnienie to wymaga dalszych badań.

4. Wnioski

Analiza zjawiska rezonansu wewnętrznego w pobliżu rezonansów głównych układów o wielu stopniach swobody przeprowadzona za pomocą analitycznych metod przybliżonych i symulacji komputerowej pozwala na sformułowanie następujących wniosków: — Zgodnie z wynikami wcześniejszych prac, istotą zjawiska rezonansów wewnętrznych jest pojawienie się w odpowiedzi rezonansowej dodatkowych składowych harmonicznych, oprócz składowej o częstotliwości wymuszenia, tak że przybliżone rozwiązanie w postaci,

$$q_i(t) = a_{ik} \cos(\nu t + \vartheta_k) + \sum_{s=1}^r a_{is} \cos(N_{ks} \nu t + \vartheta_s), \quad \nu \approx \omega_k, \quad (71)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad s \neq k,$$

gdzie: $N_{ks} = \frac{\omega_s}{\omega_k}$,

prawidłowo opisuje odpowiedź układu jako funkcji czasu.

- Wyznaczenie analityczne krzywych rezonansowych $a_{ik} = a_{ik}(\nu)$, $a_{is} = a_{is}(\nu)$, $s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$, za pomocą powszechnie stosowanej w literaturze metody uśrednienia może prowadzić do istotnych jakościowo rozbieżności z wynikami symulacji komputerowej. Błędy te są konsekwencją założenia upraszczającego nierozłącznie związanego z tą metodą — założenia, że stosunki amplitud poszczególnych harmonicznych są równe współczynnikom postaci własnych układu liniowego, tj.,

$$\frac{a_{ik}}{a_{1k}} = b_{0ik}; \quad \frac{a_{is}}{a_{1s}} = b_{0is}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (72)$$

Natomiast metoda Ritza, która nie narzuca tego uproszczenia w rozwiązaniu (71), pozwala traktować wszystkie amplitudy a_{is} , a_{ik} , $i = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$, jako niewiadome, prowadzi do wyników zgodnych z wynikami symulacji komputerowej. — Efekty rezonansu wewnętrznego mogą powodować drgania o amplitudach wielokrotnie większych niż te, które występują w układach bez rezonansu wewnętrznego. I tak w badanym szczegółowo układzie o dwóch stopniach swobody, w pewnym obszarze częstości wymuszenia $\nu \in \langle 1.98, 2.07 \rangle$, dodatkowa składowa harmoniczna o częstości $\nu/3$ jest prawie dziesięciokrotnie większa od amplitudy składowej podstawowej. Przykład ten nasuwa wniosek, że w analizie drgań rezonansowych układów nieliniowych powinna zawsze być rozważana sprawa niebezpieczeństwa rezonansów wewnętrznych.

Literatura

1. Г. С. ГОРЕЛИК, А. ВИТТ, ж. Техн. Физ. СССР, 3, 1933.
2. T. R. KANE, M. E. KAHN, *On a class of twodegree-of-freedom oscillations*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, March 1968, pp. 547 - 552.
3. A. H. P. VAN DER BURGH, Ph. D. THESIS, *Studies in the asymptotic theory of nonlinear resonances*, Technische Hogeschool Delft, 1974.
4. A. H. P. VAN DER BURGH, *On the higher order asymptotic approximations for solutions of the equations of an elastic pendulum*, Journal of Sound and Vibration 42(4) 1975, pp. 463 - 475.
5. P. SRINIVASAN, T. S. SANKAR, *Autoparametric self-excitation of a pendulum type elastic oscillator*, Journal of Sound and Vibration 35, 1974, pp. 549 - 557.
6. R. M. EVAN-IVANOWSKI, *Resonance Oscillations in Mechanical Systems*, Amsterdam 1976, Elseviers.
7. N. MINORSKY, *Drżania nieliniowe*, PWN Kraków 1967.
8. E. SEVIN, *On the Parametric Excitation of Pendulum-Type Vibration Absorber*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, September 1961, pp. 330 - 334.
9. R. A. STRUBLE, *Nonlinear Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London 1962.
10. R. A. STRUBLE, *On the sub-harmonic oscillations of a pendulum*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 30, 1963, pp. 301 - 303.

11. R. A. STRUBLE, *On the oscillations of a pendulum under parametric excitation*, Quarterly of Applied Mathematics 22, 1964, pp. 157 - 159.
12. R. A. STRUBLE, *Oscillations of a pendulum under parametric excitation*, Quarterly of Applied Mathematics 21, 1963, pp. 121 - 131.
13. R. A. STRUBLE, J. H. HEINBOCKEL, *Resonant Oscillations of a Beam-Pendulum System*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, June 1963, pp. 181 - 188.
14. R. S. HAXTON, A. D. S. BARR, *The Autoparametric Vibration Absorber*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, 94, 1972, pp. 119 - 125.
15. A. D. S. BARR, D. J. NELSON, *Autoparametric Interactions in Structures*, Symposium on Nonlinear Dynamics, 1975, University of Edinburgh.
16. P. H. MAC DONALD, *Nonlinear Dynamic Coupling in a Beam Vibration*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, 1955, pp. 573 - 578.
17. S. ATLURI, *Nonlinear Vibrations of a Hinged Beam Including Nonlinear Inertia Effects*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 40, 1973, pp. 121 - 126.
18. E. H. DOWELL, *Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 5, No. 10, Oct. 1967, pp. 1856 - 1962.
19. L. MORINO, *A Perturbation Method for Treating Nonlinear Panel Flutter Problems*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 7, No. 3, March 1969, pp. 405 - 411.
20. J. A. BENNET, J. G. EISLEY, *A Multiple-Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibrations*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 8, No. 4, April 1970, pp. 734 - 739.
21. J. A. BENNET, *Ultraharmonic Motion of a Viscously Damped Nonlinear Beam*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 11, No. 5, May 1973, pp. 710 - 715.
22. W. Y. TSENG, J. DUGUNDJI, *Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam under Harmonic Excitation*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 38, 1971, pp. 467 - 476.
23. P. R. SETHNA, *Vibrations of Dynamical Systems with Quadratic Nonlinearities*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, September 1965, pp. 576 - 582.
24. P. PISZCZEK, *Some Problems of Forced Vibrations of Constructions in the Nonlinear Case*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, PWN Warszawa, 1964.
25. T. TONDL, *On the internal resonance of nonlinear systems with two degrees of freedom*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 5, 1963, pp. 207 - 222.
26. A. TONDL, *Some Problems of Rotor Dynamics*, Publishing House of CAS, Prague 1965.
27. A. TONDL, *Resonance Vibrations of Nonlinear Systems Excited by a Periodic Non-harmonic Force*, Monographs and Memoranda, No. 13, 1972, pp. 56 - 89, National Research Institute for Machine Design, Bechovice.
28. A. TONDL, *Domains of Attraction for Nonlinear Systems*, Monographs and Memoranda, No. 8, 1970, National Research Institute for Machine Design, Bechovice.
29. P. R. SETHNA, A. K. BAJAJ, *Bifurcations in Dynamical Systems with Internal Resonance*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 45, Dec. 1978, pp. 895 - 902.
30. T. YAMAMOTO, K. YASUDA, *On the Internal Resonance in a Nonlinear Two-Degree-of-Freedom System* Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 20, No. 140, February 1977, pp. 168 - 176.
31. T. YAMAMOTO, K. YASUDA, I. NAGASAKA, *On the Internal Resonance in a Nonlinear Two-Degree-of-Freedom System*, Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 20, No. 147, Sept. 1977, pp. 1093 - 1100.
32. P. R. SETHNA, *Steady-State Undamped Vibrations of a Class of Nonlinear Discrete Systems*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the SME, March 1960, pp. 187 - 195.
33. A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, S. SRIDHAR, *Nonlinear Analysis of the Forced Response of Structural Elements*, Journal of the Acoustic Society of America, Vol. 55, No. 2, February 1974.
34. A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, D. W. LOBITZ, *Numerical-Perturbation Method for the Nonlinear Analysis of Structural Vibrations*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 12, No. 9, Sept. 1974, pp. 1222 - 1228.
35. S. L. LAU, Y. K. CHEUNG, S. Y. WU, *Incremental Harmonic Balance Method with Multiple Time Scales for Aperiodic Vibration of Nonlinear Systems*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 50, Dec. 1983, pp. 871 - 876.

36. J. G. A. CROLL, *Coupled vibration modes*, Journal of Sound and Vibration 38(1) 1975, pp. 27 - 37.
37. J. G. A. CROLL, *Kinematically coupled non-linear vibrations*, Journal of Sound and Vibration 40(1), 1975, pp. 77 - 85.
38. J. BAJKOWSKI, *Rezonanse wewnętrzne w nieliniowych układach drgających, cz. I*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 15/1984 (na prawach rękopisu).
39. J. BAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Rezonanse wewnętrzne w nieliniowych układach drgających, cz. II*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 23/1984 (na prawach rękopisu)
40. S. SRIDHAR, D. T. MOOK, A. H. NAYFEH, *Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates Part I: Symmetric Responses of Circular Plates*, Journal of Sound and Vibration 41, 1975, pp. 359 - 373.
41. S. SRIDHAR, D. T. MOOK, A. H. NAYFEH, *Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates. Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates*, Journal of Sound and Vibration 59 (2) 1978, pp. 159 - 170.
42. D. W. LOBITZ, A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, *Nonlinear Analysis of Vibrations of Irregular Plates*, Journal of Sound and Vibration 50(2) 1977, pp. 203 - 217.
43. K. G. ASMIS, W. K. TSO, *Combination and internal resonance in a nonlinear two-degree-of freedom system*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 39, Sept. 1972, pp. 832 - 834.
44. A. H. NAYFEH, *Combination resonances in the nonlinear response of bowed structures to a harmonic excitation*, Journal of Sound and Vibration 90(4) 1983, pp. 457 - 470.
45. J. BAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Zagadnienie rezonansów wewnętrznych w nieliniowych układach drgających*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 19/1982, pp. 1 - 44 (na prawach rękopisu).
46. R. A. IBRAHIM A. D. S. BARR, *Autoparametric resonance in a structure containing a liquid, Part I: two mode interaction*, Journal of Sound and Vibration 42(2) 1975, pp. 159 - 179.
47. R. A. IBRAHIM A. D. S. BARR, *Autoparametric resonance in a structure containing a liquid, Part II: three mode interaction*, Journal of Sound and Vibration 42(2) 1975, pp. 181 - 200.
48. A. H. NAYFEH, D. T. MOOK L. R. MARSHAL, *Nonlinear coupling of a pitch and roll modes in ship motion*, Journal of Hydraulics 7, 1973, pp. 145 - 152.
49. A. H. NAYFEH D. T. MOOK, *A saturation phenomenon in the forced response of system with quadratic nonlinearities*, Proceedings of the VIIIth. Internationale Conference on Nonlinear Oscillations, Prague 1978. pp. 511 - 516.
50. W. K. TSO, K. G. ASMIS, *Multiple parametric resonance in onlinear two-degree-of-freedom system*, International Journal of Non-Linear Mechanics 9, 1974, pp. 269 - 277.
51. E. G. TEZAK, D. T. MOOK, A. H. NAYFEH, *Nonlinear analysis of the lateral response of columns to periodic loads*, Journal of Mech. Design, Transactions of the ASME, 100, 1978, pp. 651 - 659.
52. A. H. NAYFEH, *The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to parametric excitation*, Journal of Sound and Vibration 88(4) 1983, pp. 547 - 557.
53. H. HATWAL, A. K. MALLIK, A. GHOSH, *Non-linear vibrations of harmonically excited autoparametric system*, Journal of Sound and Vibration 81(2) 1982, pp. 153 - 164.
54. A. H. NAYFEH, *The response of multi-degree-of-freedom system with quadratic nonlinearities to a harmonic parametric resonance*, Journal of Sound and Vibration 90(2) 1983, pp. 237 - 243.
55. F. C. L. FU, S. NEMAT-NASSER, *Stability of solution of systems of linear differential equations with harmonic coefficients*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 10, 1972, pp. 30 - 36.
56. F. C. L. FU, S. NEMAT-NASSER, *Response and stability of linear dynamics systems with many degrees of freedom subjected to nonconservative and harmonic forces*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 42, 1875, pp. 458 - 463.
57. E. G. TEZAK, A. H. NAYFEH, D. T. MOOK, *Parametrically excited nonlinear multi-degree-of-freedom systems with repeated natural frequencies*, Journal of Sound and Vibration 85, 1982, pp. 459 - 472.
58. A. H. NAYFEH, *Parametrically excited multidegree-of-freedom systems with repeated frequencies*, Journal of Sound and Vibration 88(2) 1983, pp. 145 - 150.
59. P. R. SETHNA, *Transients in Certain Autonomous Multiple-Degree-of-Freedom Nonlinear Vibrating Systems*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, March 1963, pp. 44 - 50.

60. В. И. ЧЕШАНКОВ, *Bi-Frequency Oscillations in the Case Resonance of Arbitrary Rank*, VII Internationale Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, 1975 Berlin.
61. Б. И. ЧЕШАНКОВ, *Многочастотные резонансы колебания третьего ранга при внешних смещениях*, Прикладная мат., мех. 39, вып. I (1975).
62. Б. И. ЧЕШАНКОВ, *Резонансные колебания некоторых механических систем*, Успехи Механики, май 1980.
63. А. М. САМОЙЛЕНКО, И. П. МАЙОТ, *Стационарные квазипериодические колебания в нелинейных автономных системах второго порядка*, Динамика систем и вопросы устойчивости дифференциальных уравнений, Киев 1973.
64. А. М. САМОЙЛЕНКО, И. П. МАЙОТ, *О квазипериодических колебаниях в нелинейных системах второго порядка в случае резонанса*, Мат. Физика, вып. 15, 1974, стр. 140 - 152.
65. А. Н. НАУФЕН, D. Т. МООК, *Nonlinear Oscillations* 1979, New York: Wiley — Interscience.
66. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the asymptotic, averaging and Ritz method in the theory of steady-state vibrations of nonlinear systems with many degrees of freedom*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 22, 2 (1970).
67. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, J. BAJKOWSKI, *Obszary przyciągania rezonansów prawie-periodycznych*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 53/1974.
68. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On certain new phenomena arising in nonlinear multi-degree-of-freedom vibrating systems*, VII Internationale Konferenz über Nichtlineare Schwingungen Berlin 1975, Abh. Akad. Wissenschaften DDR, Jhrg 1977, Bd. II, 2, 317 - 327.
69. J. BAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Domains of attraction of the secondary periodic and combination resonances in nonlinear two-degree-of-freedom systems*, VII Internationale Konferenz über Nichtlineare Schwingungen Berlin 1975, Abh. Akad. Wissenschaften DDR, Jhrg 1977, 3N Bd. I, 1, 55 - 69.
70. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *A study of main and secondary resonances in nonlinear multi-degree-of-freedom systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics 10, 1975, pp. 289 - 304.
71. J. BAJKOWSKI, *Obszary przyciągania rezonansów pobocznych w nieliniowych układach drgających*, Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki 6/1977.
72. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems*, Journal of Sound and Vibration 63(4) 1979, pp. 475 - 489.
73. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, J. BAJKOWSKI, *Multi-harmonic response in the regions of instability of harmonic solution in multi-degree-of-freedom non-linear systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics 15, 1980, pp. 1 - 11.
74. D. E. NEWLAND, *On the method of Galerkin, Ritz and Krylov-Bogoliubov in the theory of nonlinear vibrations*, Int. J. Mech. Sci., 7, 1965, pp. 159 - 172.
75. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Ф. М. Москва 1963.
76. Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Метод усреднения в нелинейной механике*, Наукова Думка, Киев 1971.
77. И. Г. МАЛКИН, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, 1956.
78. J. A. GRIEBENIKOW, J. A. RIABOW, *Metoda uśrednienia w mechanice nieliniowej*, PWN, Warszawa 1982.
79. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the averaging and W. Ritz methods in the theory of nonlinear resonances in vibrating systems with multiple degrees of freedom*, Archives of Mechanics, 24, 1, 1972, pp. 67 - 88.
80. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the phenomenon of the combination type resonance in nonlinear two-degree-of-freedom systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics 4, 1969, pp. 335 - 359.
81. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych nieliniowych układów drgających o wielu stopniach swobody*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1, 11, 1973, str. 17 - 34.

Резюме

ЯВЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ РЕЗОНАНСОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В данной статье рассматривается состояние знаний в области исследований внутреннего резонанса в нелинейных колебательных системах. В работу включены некоторые новые результаты полученные в случае внутреннего резонанса типа $\omega_2 = 3\omega_1$ в системе с двумя степенями свободы, с нелинейностью кубического типа и гармоническим внешним возбуждением. Были использованы два теоретических метода: метод Ритца и метод усреднения. Конечные результаты проверялись путём симуляции уравнений движения на аналоговой вычислительной машине. Было установлено что в области второго основного резонанса следствием внутреннего резонанса могут являться двухчастотные колебания, амплитуды которых многократно превышают те, которые выступают в случае системы с отсутствием внутреннего резонанса. Доминирующей является та гармоническая, составляющая, частота которой равна $1/3$ частоты возбуждения. Было показано что результаты полученные по методу Ритца, согласуются с теми которые были получены путём симуляции, в то время как метод усреднения ведёт к качественно другим результатам. Кроме того было показано что в области второго основного резонанса возможны колебания почти-периодические.

Summary

THE PHENOMENA OF INTERNAL RESONANCES IN NONLINEAR VIBRATING SYSTEMS

The paper presents a survey of the recent literature on the problems of internal resonances in nonlinear vibrating systems, and gives some new results on the internal resonance of order $\omega_2 = 3\omega_1$ in a two-degree of-freedom system subjected to harmonic load. Two theoretical methods are used: the Ritz method and the averaging method and results are verified by an analog computer simulation. It is shown that in the neighbourhood of the second principle resonance the two-frequency oscillations occur with the amplitude of the subharmonic of order $1/3$ considerably higher than that of the fundamental harmonic component. The Ritz method gives results very close with those of analog computer simulation whereas results obtained by the averaging method are qualitatively different with them. It is also shown that there occurs steady-state almost-periodic response in certain region of the excitation frequency.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 września 1984 roku.

URZĄDZENIE DO PRÓB SKRĘCANIA ZE STATYCZNYM ROZCIĄGANIEM

MIROSLAW PIWECKI
STEFAN JONIAK
PIOTR WASILEWICZ

Politechnika Poznańska

1. Wstęp

W Instytucie Mechaniki Stosowanej Politechniki Poznańskiej prowadzone są badania własności plastycznych austenitycznych stali kwasoodpornych podczas statycznych i dynamicznych obciążeń złożonych. Prace te objęte były problemem węzłowym 05.12, a obecnie przystępując do realizacji harmonogramu badań założono, że będą wykonywane próby statycznego i dynamicznego skręcania na próbkach rurkowych poddanych wstępnemu obciążeniu rozciągającemu.

Przyjęto że podczas dynamicznego obciążenia skręcającego maksymalna prędkość odkształcenia postaciowego będzie rzędu 10^2 s^{-1} .

W następnych punktach tego artykułu przedstawione zostaną szczegóły konstrukcyjne oraz wyniki testowania stanowiska zaprojektowanego do prób w wyżej podanym zakresie. Stanowisko to powstało na bazie własnego, wcześniej zbudowanego urządzenia do dynamicznego skręcania, które opisano w [1]. Wstępne informacje o zmodyfikowanym stanowisku podano w [2]. Przytoczone będą również obliczenia stanu naprężenia w próbce, oraz pierwsze wyniki badań.

2. Przegląd literatury

Literatura dotycząca prób w złożonych stanach naprężenia jest bardzo obszerna. Temat ten doczekał się szeregu opracowań syntetycznych, z których wymienić można monografie [3] i [4]. Wykonanie badań dynamicznych w złożonym stanie naprężeń wymaga budowy odpowiednich stanowisk badawczych, a w przypadku dużych prędkości odkształceń — również zastosowania zaawansowanej techniki pomiarowej. Poniżej omówione zostaną skrótowo urządzenia do prób skręcania z rozciąganiem, należące do następujących grup:

- a) stanowiska, w których wszystkie składowe obciążenia mają charakter dynamiczny,
- b) stanowiska, w których tylko jedna składowa obciążenia ma charakter dynamiczny, a druga — statyczny.

Zwizyly opis urzadzzen nalezacych do grupy a) rozpoczniemy od konstrukcji U. S. Lindholma i L. M. Yeakley'a [5], umozliwiajacej jednoczesne skrecanie z rozciaganiem realizowane przy pomocy urzadzenia pneumatycznego. W urzadzeniu H. Fukuoki i T. Masui [6] dynamiczne rozciaganie uzyskiwano za pomoca ciężaru opadajacego na plyte przymocowana do probki, a udar skretny wywieral mlot wahadlowy uderzajacy w wystep plyty. W pracy [7] opisano sposob realizacji dynamicznego skrecania i rozciagania w chwili wyzwolenia energii sprzystej zmagazynowanej we wstepnie skreconym i rozciagnietym precie polaczonym z probka.

Stanowiska, w ktorych tylko jedna skladowa obciazenia ma charakter dynamiczny bazuja czesto na zasadzie preta Hopkinsona. A. Hojo i A. Chatani opisali [8] takie wlasnie rozwiazanie problemu — skretny pret Hopkinsona uzupealniono o naciag srubowy do wywierania sily osiowej. Impuls skretny uzyskiwano za pomoca ciężaru opadajacego na dzwignie polaczona z pretem. Z kolei w pracy [9] znajdujemy opis urzadzenia, w ktorym klasyczny uklad Hopkinsona zaopatrzone w odpowiedni naciag linowy do wywierania statycznego momentu skrecajacego.

Bardzo interesujace rozwiazanie konstrukcyjne stanowiska do prob quasi-statycznych opracowali autorzy pracy [10]. W zakresie predkosci odkształcen od 10^{-4} do 10^{-1} s $^{-1}$ daje ona mozliwosc osiowego rozciagania z jednoczesnym skrecaniem probki. Istotnym elementem jest tutaj lozysko srubowe, przez ktore przekazywany jest moment skrecajacy, a jednoczesnie jego obrót wywiera sile osiowa.

Integralna czescia kazdego stanowiska jest probka. W przypadku cienkościennych probek rurkowych istotny jest iloraz grubosci scianki t i srednicy zewnetrznej D_z na odcinku pomiarowym. Wartości t/D_z przyjete przez róznych autorów podano w tablicy 1. Tamze przytoczono wartosci ilorazu dlugosci pomiarowej l_0 i srednicy zewnetrznej, ktory pozwala w pewnym stopniu oszacowac rownomiernosc rozkladu naprezenia na dlugosci pomiarowej, a takze sklonnosc do utraty statecznosc podczas skrecania powloki, jaka jest cienkościenna probka.

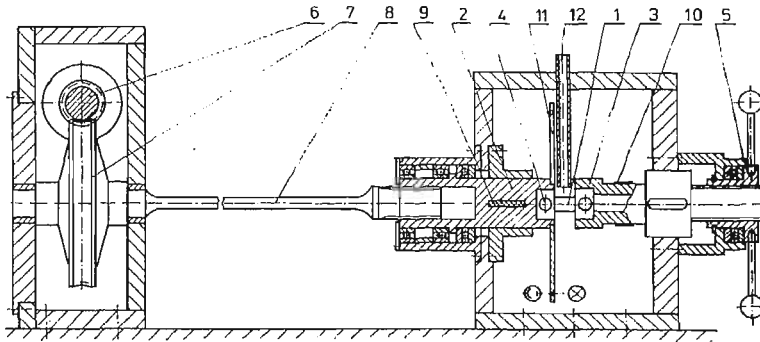
Tablica 1. Charakterystyczne parametry probek wedlug róznych autorów

Lp.	t/D_z	l_0/D_z	Literatura
1	0,0312	2,50	[5]
2	0,0375	71,9	[6]
3	0,0500	0,714	[8]
4	0,0526	1,58	[10]
5	0,0556	0,556	[7]
6	0,0556	0,278	[11]
7	0,0714	0,714	[10]

Jak wynika z tablicy, iloraz t/D_z mieści się w przedziale od 0,03 do 0,07, natomiast l_0/D_z przyjmuje rozmaite wartości zależnie od przeznaczenia próbki w poszczególnych badaniach.

3. Własne stanowisko badawcze

Na rysunku 1 pokazano budowę własnego stanowiska do statycznego i dynamicznego skręcania ze wstępnym statycznym rozciąganiem próbki. Cienkościennej próbki rurkowej



Rys. 1. Stanowisko badawcze

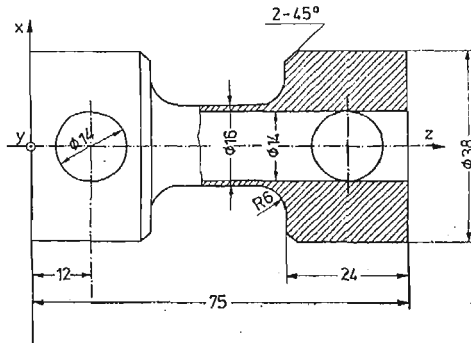
1 jest mocowana w gniazdach uchwytów 2 i 3 za pomocą sworzni 4. Uchwyt 2 jest łożyskowany obrotowo, nieprzesuwnie za pomocą dwu łożysk kulkowych poprzecznych i jednego łożyska wzdłużnego. Pokręcając nakrętkę 5 osadzoną na gwincie śruby tworzącej całość z uchwytem 3, dzięki suwliwemu łożyskowaniu uchwytu w korpusie, wywołuje się w próbce statyczny naciąg. Źródłem energii skręcającej próbkę jest drążek skrętny 8 z duralu PA9, połączony za pomocą wielowypustu z uchwytem 2 unieruchomionym przez zatyczkę 9 wykonaną z metapleksu. Ślimak 6 powoduje obrót ślimacznicy 7 i skręcenie drążka 8. Zgromadzona w nim energia sprężysta zostaje udarowo przekazana na próbkę w chwili ścięcia zatyczki. Próby statycznego skręcania wykonuje się bez zatyczki 9. Moment skręcający przenoszony przez próbkę jest mierzony za pomocą dwóch rozet tensometrycznych prostokątnych 10 naklejonych na rurowej części uchwytu 3 i tworzących układ pełnomostkowy. Inne dwie rozety prostokątne, połączone również w pełny mostek, mierzą siłę osiową.

Do pomiaru kąta skręcenia służy zestaw składający się z fotodiody, żarówki i tarczy 11 z 300 otworami wykonanymi na odpowiednio dobranej średnicy. Zasada pomiaru kąta skręcenia została szerzej opisana w pracy [1]. Układ pomiarowy uzupełnia mostek tensometryczny M1000 firmy Mikrotechna i oscyloskop czterokanałowy typu DB 510 A produkcji Radiotechniki. Zastosowany układ umożliwia wyznaczenie prędkości odkształcenia postaciowego próbki podczas skręcania oraz konstrukcję wykresu skręcania, a także kontrolę wartości siły rozciągającej. Nanosząc uprzednio rysy na powierzchni próbek, można zmierzyć ich trwałe odkształcenia po odjęciu obciążenia. Zaznaczyć należy, że pomiar kąta skręcenia za pomocą opisanej wyżej tarczy z otworami prowadzi do pewnego

błędu przy obliczeniu odkształcenia postaciowego, co jest związane z nieznajomością dokładnej wartości długości efektywnej próbki, która obejmuje oprócz długości roboczej również pewną część strefy przejściowej o promieniu R6. Długość efektywną rozumiemy podobnie jak w zakresie sprężystym (patrz p. 4). Długość ta zależy od geometrii próbki oraz od stałych materiałowych. Podczas badań w obniżonych temperaturach płyn chłodzący doprowadza się do próbki ze zbiornika, w którym temperatura jest stabilizowana z dokładnością $\pm 0,5^\circ \text{C}$. Na powierzchnię zewnętrzną ciecz chłodząca spływa przewodem gumowym 12. Ze względu na cienkościenność przyjęto, że w całej odkształcanej objętości panuje stała temperatura.

4. Stan naprężeń w próbce

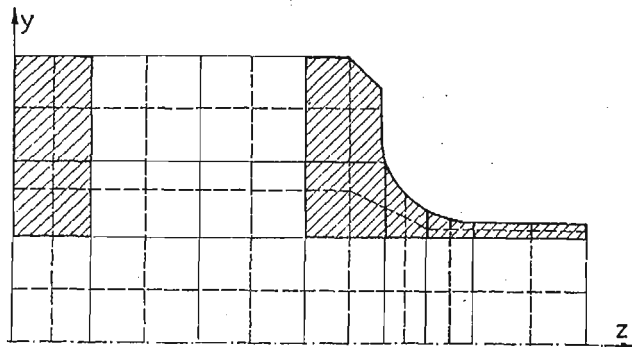
Kształt i wymiary próbki przystosowanej do wyżej opisanego stanowiska pokazano na rysunku 2. Jest to cienkościenna próbka rurkowa, dla której $t/D_z = 0,0625$, a $l_0/D_z =$



Rys. 2. Kształt próbki

$= 0,938$. Wartości tych ilorazów są zbliżone do podawanych w literaturze. Rurkowa część próbki przechodzi w masywne części chwytowe z otworami na sworznie.

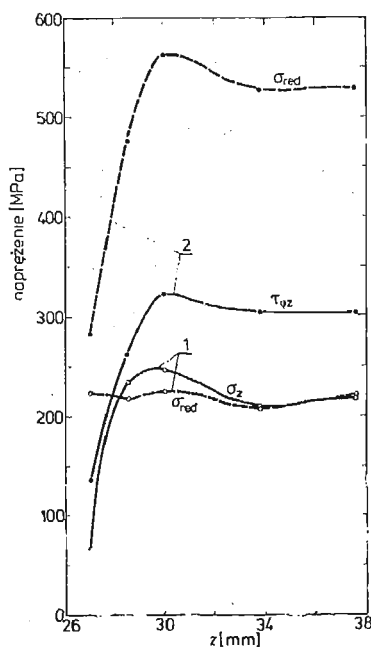
Podczas badań próbka podlega dwom rodzajom obciążeń, a mianowicie rozciąganiu i skręcaniu. W każdym z tych przypadków jednorodny stan naprężenia panujący pośrodku



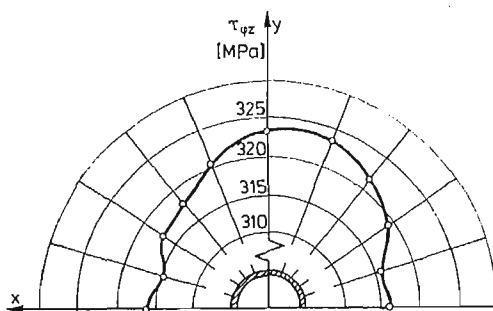
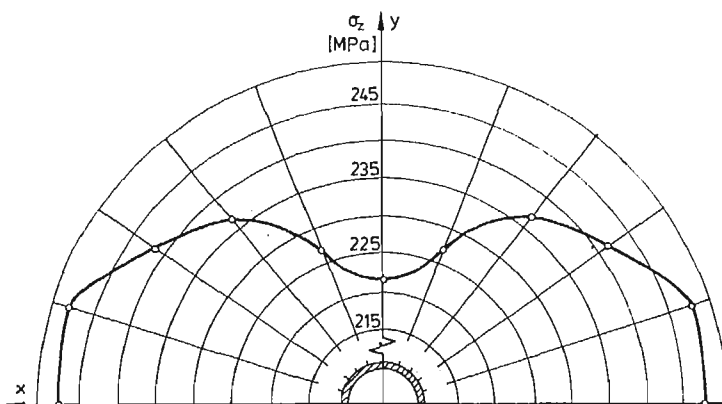
Rys. 3. Podział próbki do obliczeń metodą elementów skończonych (w płaszczyźnie $x = 0$)

długości pomiarowej zostaje zaburzony w okolicach części chwytowych wskutek zmiany kształtu. Wpływ na rozkład naprężeń w próbce ma również sposób przyłożenia obciążenia za pomocą sworzni. W celu uzyskania informacji o rozkładach naprężeń w próbce, wykonano obliczenia metodą elementów skończonych, bazując na systemie SESAM-69, w ramach którego program o symbolu NV333J umożliwia analizę statyczną trójwymiarowego stanu naprężenia [12]. Wykonano oddzielnie obliczenia na rozciąganie i skręcanie, przyjmując każdorazowo do obliczeń ćwiartkę próbki i dzieląc ją na 51 elementów (rysunek 3). W obliczeniach przyjęto odpowiednie warunki brzegowe wynikające z symetrii i antysymetrii. Założono również, że naciski sworzni na otwór są stałe wzdłuż osi y , a dla ustalonego y zmieniają się proporcjonalnie do wartości funkcji cosinus. W obliczeniach na skręcanie przyjęto obciążenie o zwrocie zgodnym z osią x .

Najważniejsze wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 4, 5 i 6 dla wartości momentu skręcającego $M_x = 100 \text{ Nm}$ i siły osiowej $F_z = 10 \text{ kN}$. Jak widać, maksymalne spiętrzenie naprężeń występuje dla współrzędnej $z = 30 \text{ mm}$, czyli w miejscu gdzie kończy się łuk R6, a rozpoczyna część rurowa próbki. Współczynnik kształtu dla naprężeń $\tau_{\varphi z}$ w przypadku skręcania, uzyskany po wykorzystaniu rezultatów obliczeń metodą elementów skończonych wynosi 1,086. Współczynnik kształtu dla naprężeń σ_z z obliczeń na rozciąganie wynosi 1,167. Z rysunku 5 wynika, że podczas skręcania maksymalne wartości naprężeń występują w płaszczyźnie $x = 0$, choć należy zauważyć, że nierównomierność rozkładu naprężeń $\tau_{\varphi z}$ na obwodzie jest niewielka i wynosi około 2%. Efekt ten utrzymuje się na długości pomiarowej próbki.



Rys. 4. Rozkłady najważniejszych składowych tensora naprężenia i naprężeń zredukowanych wzdłuż osi z na powierzchni próbki uzyskane z obliczeń na: 1 — rozciąganie ($y = 0$), 2 — skręcanie ($x = 0$)

Rys. 5. Rozkład naprężeń τ_{qz} na obwodzie próbki dla $z = 30$ mmRys. 6. Rozkład naprężeń σ_z na obwodzie próbki dla $z = 30$ mm

W przypadku rozciągania maksymalne naprężenia σ_z występują każdorazowo w przekroju $y = 0$, a maksymalna nierównomierność ich rozkładu na obwodzie próbki wynosi około 10% dla $z = 30$ mm (rysunek 6). Występowanie maksymalnych naprężeń τ_{qz} w płaszczyźnie $x = 0$ podczas skręcania, oraz maksimum σ_z w płaszczyźnie $y = 0$ podczas rozciągania można wytłumaczyć zagęszczeniem trajektorii naprężeń wywołanym obecnością otworu na sworzeń w części chwytowej próbki.

W zakresie odkształceń plastycznych należy się spodziewać wyrównania poziomów naprężeń.

Wykorzystując przytoczone powyżej wyniki obliczeń podamy jeszcze „długość efektywną” próbki w zakresie sprężystym, zdefiniowaną jako długość l_e odcinka obejmującego część roboczą i pewien fragment próbki o promieniu R_6 , przy czym:

$$\gamma = \frac{\alpha R}{l_e}, \quad (1)$$

gdzie: α — kąt obrotu części chwytowej obliczony metodą elementów skończonych dla przyłożonej wartości M_z ,

γ — kąt odkształcenia postaciowego na środku długości roboczej,

R — promień zewnętrzny na długości roboczej.

Wartość γ oblicza się ze wzoru

$$\gamma = \frac{M_z}{W_0 \cdot G}, \quad (2)$$

gdzie: G — moduł na ścinanie,

W_0 — wskaźnik wytrzymałości na skręcanie.

Dla przyjętej geometrii próbki oraz $G = 0,8077 \cdot 10^5$ MPa uzyskano $l_e = 22,60$ mm, którą to wartość należy podstawić do wzoru (1), aby uzyskać γ na długości roboczej, znając kąt obrotu.

5. Skłonność próbki do utraty stateczności

Próbka podczas skręcania z rozciąganiem osiąga stan sprężysto-plastyczny. Ponieważ jest ona cienkościenną powłoką, więc grozi jej w tych warunkach utrata stateczności. Na podstawie zawartych w literaturze rozwiązań stateczności powłoki walcowej skręcanej w zakresie sprężysto-plastycznym, można wyznaczyć wartość obciążenia powodującego utratę stateczności. Rozwiązanie takie cytują w postaci wykresu E. I. Grigoluk i W. W. Kabanow [13]. Zgodnie z tym rozwiązaniem krytyczny moment skręcający wynosi

$$M_{kr} = T^* \frac{\pi R_s t (4R_s^2 + t^2)}{2R_s + t}, \quad (3)$$

gdzie: T^* — wielkość o wymiarze naprężenia według [13],

R_s — średni promień powłoki,

t — grubość ścianki.

Po podstawieniu danych uzyskano $M_{kr} = 119$ Nm. Nie natrafiono w literaturze na rozwiązanie podobnego zagadnienia stateczności przy równoczesnym skręcaniu i rozciąganiu. W związku z tym, do oceny wpływu siły rozciągającej na wartość krytycznego momentu skręcającego wykorzystano rozwiązanie w zakresie sprężystym zawarte w [14], przyjmując zgodnie z zleceniami literatury [15] moduł sieczny E_s zamiast modułu Younga E oraz liczbę Poissona $\nu = 0,5$. Rozwiązanie to ma postać ogólną

$$M_{kr} = AE_s + BF_z, \quad (4)$$

gdzie: A, B — współczynniki zawierające wymiary powłoki, parametry kształtu po utracie stateczności i liczbę Poissona.

F_z — siła osiowa.

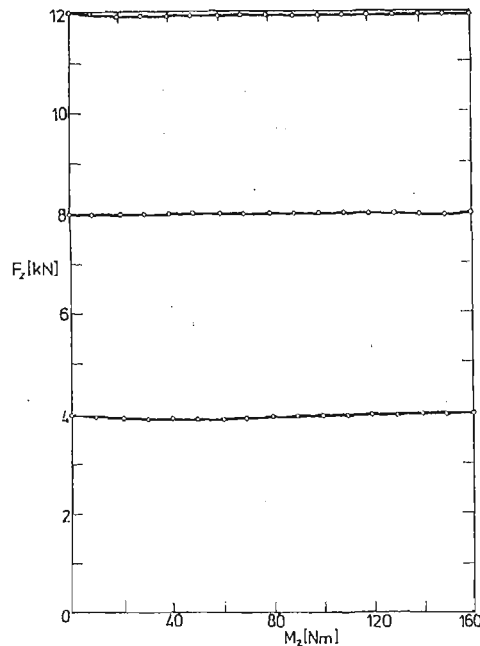
Rozwiązanie powyższe ma charakter jakościowy, gdyż dopiero przy odkształceniach trwałych około 0,024 i module $E_s = 2 \cdot 10^4$ MPa daje wartości realne. Ważniejsze jest tu wyjaśnienie wpływu siły osiowej F_z na wartość momentu krytycznego. Obecność siły zwiększa odporność próbki na utratę stateczności, przy czym wartość drugiego członu we wzorze (4) praktycznie się nie zmienia przy stałej sile. Przykładowo dla $F_z = 10$ kN, gdy E_s maleje od wartości równej E do $2 \cdot 10^4$ MPa, to iloraz BF_z/AE_s zmienia się w przedziale od 0,01 do 0,1. Podobnie dla $F_z = 16$ kN otrzymano wartości tego ilorazu od 0,02 do 0,17.

6. Testowanie stanowiska

Testowanie stanowiska rozpoczęto od wyznaczenia charakterystyk siłomierza oddzielnie podczas obciążenia momentem skręcającym i obciążenia siłą osiową.

Stwierdzono liniowość jego wskazań w szerokich przedziałach M_z i F_z .

Ważnym problemem było zbadanie, czy wzrost momentu skręcającego nie powoduje zmiany siły osiowej wywieranej za pomocą nakrętki 5 (rysunek 1). Wyniki trzech wykonanych w tym zakresie pomiarów dla przypadku połączenia uchwytów 2 i 3 sztywnym wałkiem w miejsce cienkościennej próbki, zilustrowano na rysunku 7. Wynika z niego że



Rys. 7. Zależność siły osiowej od narastającego momentu skręcającego

w stanowisku nie ma praktycznie sprzężenia między obciążeniem skręcającym i siłą osiową tak długo dopóki próbka nie odkształca się trwale w kierunku osiowym. Odkształcenie plastyczne próbki powoduje spadek siły osiowej co można zaobserwować na oscylogramach dynamicznego skręcania ze wstępnie przyłożoną siłą osiową. Omówienie oscylogramów uzyskiwanych przy zastosowaniu wyżej opisanego układu pomiarowego znaleźć można w pracy [1]. Z oscylogramów wyznaczono czas zniszczenia próbki podczas prób dynamicznych, który wynosił 3 do 4 ms, oraz prędkość odkształcenia postaciowego podczas próby. W początkowym stadium odkształcenia prędkość zmienia się w przedziale od $0,7 \cdot 10^2$ do 10^2 s^{-1} , by później utrzymywać wartość stałą. Poniżej wykazemy, że próby na omawianym stanowisku mogą być traktowane od strony pomiarowej jako quasi-statyczne. Analizę tego zagadnienia zawiera praca J. Klepaczki [16]. Zaliczenie próby do rodzaju quasi-statycznych wymaga spełnienia dwóch warunków:

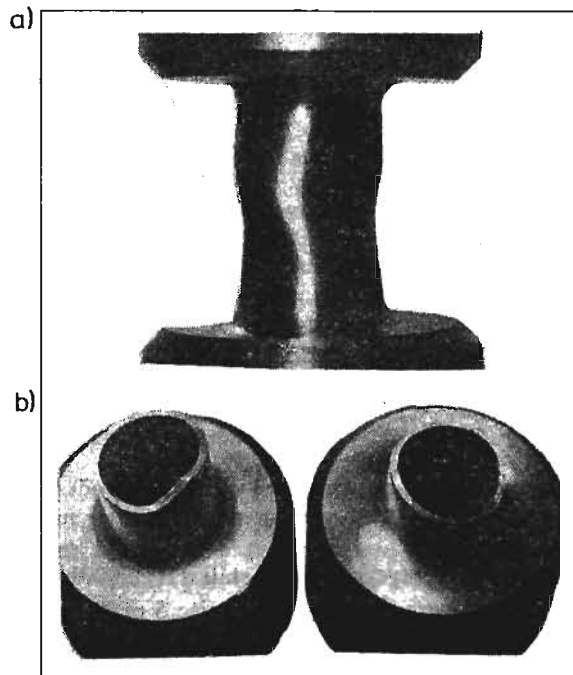
- a) czas propagacji fali ścinania na drodze próbka-czujniki tensometryczne jest dużo krótszy od czasu próby,
 b) pomiarowy przetwornik tensometryczny ma dużą częstotliwość i małą amplitudę drgań własnych.

Warunek b) jest spełniony, co potwierdziły oscylogramy. Obliczmy teraz czas propagacji fali ścinania na drodze próbka-czujniki tensometryczne, zakładając że w próbce propaguje się fala plastyczna, a w uchwycie z czujnikami — fala sprężysta.

Czas ten oszacujemy na podstawie wzoru

$$t = l_1 \sqrt{\frac{g}{d\tau}} + l_2 \sqrt{\frac{g}{G}}, \quad (5)$$

- gdzie: $l_1 = 0,015$ m — długość robocza próbki (rysunek 2),
 $l_2 = 0,054$ m — długość od czoła uchwytu nieruchomego 3 do miejsca naklejenia czujników tensometrycznych 10 (rysunek 1),
 $g = 7850$ kg/m³ — gęstość stali,
 $G = 8,8 \cdot 10^4$ MPa — moduł na ścinanie dla stali,
 $\frac{d\tau}{dy} = 0,02 G$ — pochodna naprężenia stycznego względem odkształcenia postaciowego, której wartość przyjęto dla zaawansowanego odkształcenia plastycznego.



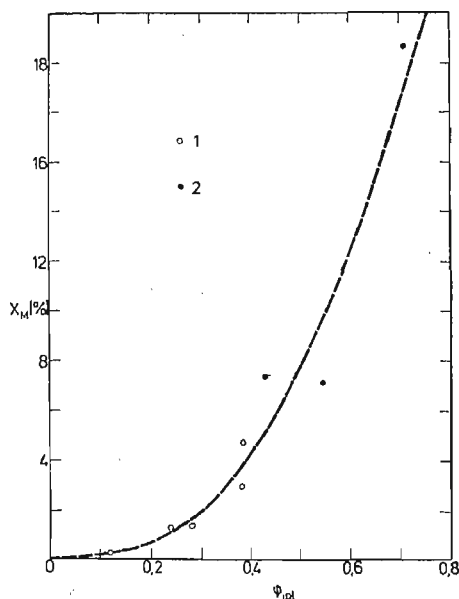
Rys. 8. Formy zniszczenia próbek: a) — po utracie stateczności, b) — złom na długości roboczej

Po podstawieniu wartości liczbowych uzyskano $t = 0,048$ ms, to jest wartość od 60 do 80 razy mniejszą od czasu zniszczenia próbki, co prowadzi do wniosku, że próby mają charakter quasi-statyczny z pomiarowego punktu widzenia.

Na zakończenie tej części podamy parę uwag na temat form zniszczenia próbek pokazanych na rysunku 8. Przypadki uzyskania złomu podczas realizacji programu badań występują rzadko, gdyż przeważnie próbę przerywa się po osiągnięciu założonych odkształceń. Pewne utrudnienie badań polega na tym, że przyłożenie zbyt małej siły osiowej może doprowadzić do utraty stateczności próbki podczas skręcania. Doświadczenia potwierdziły słuszność przytoczonych w punkcie 5 rozważań na temat wpływu siły osiowej F_z na wartość obciążenia krytycznego. Również wartość krytycznego momentu skręcającego około 120 Nm jest dobrym dolnym oszacowaniem tej wielkości w temperaturze otoczenia.

7. Odkształcenia plastyczne austenitycznych stali kwasoodpornych

Opisane stanowisko wykorzystano do badania metastabilnych austenitycznych stali kwasoodpornych. Jak wiadomo, w stalach tych pod wpływem odkształcenia plastycznego zachodzi przemiana martenzytyczna. Na rysunku 9 pokazano zależność ilości martenzytu



Rys. 9. Zależność udziału objętościowego martenzytu od intensywności odkształceń plastycznych dla stali 1H18N9 w temperaturze 0°C. 1—rozciganie, 2—złożony stan naprężenia

od intensywności odkształceń plastycznych dla stali 1H18N9 badanej statycznie w temperaturze 0°C. Punkty pomiarowe uzyskano wykonując 5 prób rozciągania i 3 w złożonym stanie naprężenia. Te ostatnie realizowano w ten sposób, że utrzymywano stałą wartość siły osiowej podczas narastania momentu skręcającego. Po odkształceniu, ze środka części rurkowej wycinano dwie próbki do pomiaru metodą magnetyczną udziału obję-

tościowego martenzytu. Intensywność odkształceń wyznaczono mierząc przemieszczenia końców odcinka pomiarowego naniesionego na rurkowej części próbki. Linię przerywaną widoczną na wykresie wyliczono bazując na zależności podanej przez D. C. Ludwigsona i J. A. Bergera [17].

Przytoczone w tym punkcie informacje należy traktować jako komunikat o badaniach, których pełne rezultaty zostaną opublikowane w terminie późniejszym.

8. Podsumowanie

W pracy przedstawiono opis stanowiska umożliwiającego wykonanie prób statycznego i dynamicznego skręcania ze wstępnym statycznym rozciąganiem próbki. Uzyskano zakładaną prędkość odkształcenia postaciowego rzędu 10^2 s^{-1} . Wykazano, że próby można traktować od strony pomiarowej jako quasi-statyczne.

Zaprojektowano cienkościenną próbkę rurkową. Wykonano obliczenie rozkładów naprężeń w próbce metodą elementów skończonych. Obliczono współczynniki kształtu dla przyjętej geometrii próbki oraz zbadano równomierność rozkładów naprężeń na długości roboczej. Stwierdzono, że niewielka koncentracja naprężeń w okolicach części chwytowych nie powoduje występowania złomu próbek w tych miejscach. W pracy podano informacje o wpływie sworzniowego połączenia próbki z uchwytami na rozkłady naprężeń. Przeanalizowano również warunki utraty stateczności przez próbkę obciążoną momentem skręcającym i siłą osiową w zakresie sprężysto-plastycznym.

W artykule przytoczono wyniki pierwszych badań nad wpływem odkształceń plastycznych w złożonych stanach naprężeń na odkształceniową przemianę austenitu w stali nierdzewnej.

Literatura

1. M. PIWECKI, *Próby statycznego i dynamicznego skręcania w zastosowaniu do oceny zdolności do odkształceń twardych stali*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 18 (1980), 3, str. 371 - 381.
2. M. PIWECKI, S. JONIAK, P. WASILEWICZ, *Konstrukcja i testowanie stanowiska do dynamicznego skręcania ze wstępnym statycznym rozciąganiem próbki*, XI Sympozjum Dośw. Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa 1984, Cz. 1, str. 292 - 295.
3. *Mechanika techniczna tom X, Metody doświadczalne mechaniki ciała stałego*, pod red. W. Szczepińskiego, PWN, Warszawa 1984.
4. N. N. MALININ, J. RZYSKO, *Mechanika materiałów*, PWN, Warszawa 1981.
5. U. S. LINDHOLM, L. M. YEAKLEY, *A Dynamic Biaxial Testing Machine*, Proceedings SESA, 24 (1967), 1, str. 1 - 7.
6. H. FUKUOKA, T. MASUI, *Incremental Impact Loading of Plastically Prestressed Aluminum by Combined Tension-Torsion Load*, Bulletin JSME, 18 (1975), 116, str. 104 - 103.
7. T. HAYASHI, N. TANIMOTU, *Behavior of Aluminum Simultaneously Subjected to Dynamic Combined Stresses of Torsion and Tension*, 19th Japan Congress on Materials Research „Metallic Materials” March 1976, str. 53 - 56.
8. A. HOJO, A. CHATANI, *On the Dynamic Yield Condition under Combined Loading of Dynamic Torsion and Static Tension*, Bulletin JSME, 21 (1978), 157, str. 1064 - 1070.
9. J. LIPKIN, R. J. CLIFTON, *Plastic Waves of Combined Stresses Due to Longitudinal Impact of a Pretorqued Tube*, Part 1: Experimental Results, Journal of Applied Mechanics, 37 (1970), 4, str. 1107 - 1112.

10. A. HOJO, A. CHATANI, *On the Dynamic Stress-Strain Relations under the Combined Loading of Tension and Torsion*, Bulletin JSME, 22 (1979), 166, str. 469 - 475.
11. K. OSAKADA, A. WATADANI, *Ductile Fracture of Carbon Steel under Cold Metal Forming Conditions*, Bulletin JSME, 20(1977), 150, str. 1557 - 1565.
12. *Instrukcja użytkowania programu System SESAM 69, NV333J*, „Analiza statyczna trójwymiarowego stanu naprężeń”, Centrum Techniki Okrętowej, Gdańsk 1974.
13. Э. И. Григolloк, В. В. Клянов, *Устойчивость оболочек*, Наука, Москва 1978.
14. А. С. Авдонин, *Прикладные методы расчёта оболочек и тонкостенных конструкций*, Машиностроение, Москва 1969.
15. *Справочник „Прочность, устойчивость, колебания”*, Машиностроение, Москва 1968.
16. J. KLEPACZKO, *Urządzenie do dynamicznego skręcania*, Mechanika Teoret. Stosowana, 5 (1967), 4, str. 425 - 438.
17. D. C. LUDWIGSON, J. A. BERGER, *Plastic Behaviour of Metastable Austenitic Stainless Steels*, Journal Iron Steel Inst. 207 (1969), str. 63 - 69.

Резюме

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ИСПЫТАНИЙ НА КРУЧЕНИЕ СО СТАТИЧЕСКИМ РАСТЯЖЕНИЕМ

В статье дано описание устройства для статических и динамических испытаний на кручение со статическим растяжением тонкостенного образца. С использованием метода конечных элементов анализировано состояния напряжений в образце. Статья содержит замечания на тему упруго-пластической устойчивости образца во время испытаний на кручение с растяжением.

В конце статьи представлено первые результаты испытаний деформационного превращения аустенита в нержавеющую стали.

Summary

APPARATUS FOR TORSION TESTS WITH STATIC TENSION

In the paper an apparatus for static and dynamic torsion tests with static tension of a thin-walled specimen is described. With the use of finite element method the states of stresses in the specimen have been analysed. The paper contains remarks on elastic-plastic stability of the specimen during torsion tests with tension.

At the end of the paper some experimental results of strain-induced austenite transformation in a stainless steel are presented.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1985 roku.

ISTNIENIE CAŁKI ENERGII W WYBRANYCH OBSZARACH OPŁYWU PROFILU CIECZĄ DOSKONAŁĄ

M. J. CIAŁKOWSKI

Politechnika Poznańska

*Autor składa podziękowania Pani Dr. M. E. Klonowskiej-Prosnak
za dyskusję nad niniejszą pracą.*

Oznaczenia:

- z — zmienna zespolona w płaszczyźnie fizycznej
- \bar{z} — zmienna zespolona sprzężona do zmiennej zespolonej z
- ζ — zmienna zespolona w płaszczyźnie pomocniczej
- a — promień walca opływającego
- w — potencjał zespolony opływu profilu w płaszczyźnie fizycznej
- W — potencjał zespolony opływu walca w płaszczyźnie pomocniczej
- v_∞ — prędkość zespolona przepływu jednostajnego w nieskończoności
- Γ — cyrkulacja
- Φ — funkcja potencjału prędkości
- Ψ — funkcja potencjału prądu
- $\operatorname{Re}(z)$ — część rzeczywista liczby zespolonej z
- $\operatorname{Im}(z)$ — część urojona liczby zespolonej z
- Ω — obszar opływu profilu
- $\partial\Omega$ — brzeg obszaru Ω
- Ω' — obszar opływu walca (w płaszczyźnie pomocniczej)
- $\partial\Omega'$ — brzeg obszaru Ω'

1. Wstęp

W wielu zagadnieniach przepływowych używa się do opisu ruchu płynu rachunku wariacyjnego. Prowadzi to do ujęcia ruchu płynu w kategoriach energii [3]. Obszar, w którym poszukuje się rozwiązania może być nieskończony a ponadto profil może posia-

dać ostrze. W tych przypadkach należy zbadać zachowanie się pierwszej wariacji funkcjonału w otoczeniu ostrza oraz w obszarze nieskończonym. Badanie to wynika z następujących faktów

- dla cieczy doskonałej przy opływie ostrza prędkość staje się w otoczeniu ostrza nieskończenie duża [1, 2]
- przy opływie pojedynczego profilu całkowita energia kinetyczna w obszarze opływu jest nieskończona [1, s. 52]

Drugi fakt skłania do wydzielenia z całej płaszczyzny fizycznej tej części obszaru, w którym całka z energii kinetycznej będzie skończona. Ruch cieczy doskonałej opisany jest równaniem Laplace'a [2, 5]. Jeśli przyjmiemy, że na brzegu obszaru składowa normalna prędkości jest daną funkcją p to opis ten jest równoważny poszukiwaniu funkcji potencjału prędkości Φ , który nadaje minimum następującemu funkcjonałowi [3]

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla \Phi \, dx \, dy - \int_{\partial \Omega} \Phi \cdot p(s) \, ds; \quad \Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial \Omega). \quad (1)$$

Minimalizacja funkcjonału (1) prowadzi do minimalizacji całki $(-\int_{\Omega} p \, d\Omega)$ dla zadanych warunków brzegowych (jest to zasada Batemana [4]). Ze względu na to, że wymiar wyrażenia (1) jest $[J/kg]$, funkcjonal (1) bywa również nazywany funkcjonałem energii.

Do zależności (1) możemy wprowadzić potencjał zespolony $w(z)$ opływu profilu, wówczas:

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{dw}{dz} \frac{\overline{dw}}{dz} \, dx \, dy - \int_{\partial \Omega} \operatorname{Re}[w(z)] \cdot p(s) \cdot ds. \quad (2)$$

Ze względu na równość energii kinetycznych w odpowiadających sobie obszarach w płaszczyźnie fizycznej i pomocniczej [1, s. 66] do badania zachowania się funkcjonału (2) wygodniej będzie przejść do płaszczyzny pomocniczej, w której znana jest postać potencjału zespolonego $W(\zeta)$ cyrkulacyjnego opływu walca [2].

$$W(\zeta) = \bar{v}_{\infty} \zeta + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \cdot \ln \zeta + \frac{v_{\infty} a^2}{\zeta}; \quad |\zeta| \geq a.$$

Przy rozwiązywaniu zagadnienia opływu płynem ściśliwym jako pierwsze przybliżenie przyjmuje się rozwiązanie zagadnienia opływu cieczą doskonałą (równania różniczkowe rządzące przepływem płynu ściśliwego są nieliniowe [2] a pierwsza wariacja funkcjonału energii nie jest funkcjonałem liniowym). Dlatego zbadanie istnienia I wariacji funkcjonału (1) jest zagadnieniem podstawowym.

Zagadnienie istnienia I wariacji funkcjonału (1) przedstawiono na przykładzie profilu o kącie ostrza $\delta = 0$ (profil Żukowskiego) oraz profilu o kącie ostrza $\delta > 0$ (profil Kármána-Treffftza).

2. Badanie istnienia całki (2) w punkcie osobliwym profilu o jednej stycznej

Dla zobrazowania zagadnienia zajmiemy się profilami uzyskanymi z odwzorowania zewnątrz koła za pomocą funkcji Żukowskiego [2]

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\bar{\zeta}}; \quad |\zeta| \geq a, \quad (3)$$

dla której funkcja odwrotna jest postaci:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4a^2} \right); \quad |z| \geq 2a, \quad (4)$$

oraz

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{2} \frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{\sqrt{z^2 - 4a^2}}. \quad (5)$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \left(\bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \frac{1}{\zeta} - \frac{v_\infty a^2}{\zeta^2} \right) \cdot \frac{d\zeta}{dz}, \\ \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} &= \left(\bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \frac{1}{\zeta} - \frac{v_\infty a^2}{\zeta^2} \right) \cdot \left(v_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{\bar{v}_\infty a^2}{\bar{\zeta}^2} \right) \cdot \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} = \\ &= f(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} = f(\zeta) g(z), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= v_\infty \bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \left[\frac{v_\infty}{\zeta} - \left(\frac{\bar{v}_\infty}{\bar{\zeta}} \right) \right] \cdot \left(1 + \frac{a^2}{\zeta \bar{\zeta}} \right) + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\zeta \bar{\zeta}} + \\ &\quad - \left[\frac{v_\infty^2 a^2}{\zeta^2} + \left(\frac{v^2 a^2}{\zeta^2} \right) \right] + \frac{v_\infty \bar{v}_\infty a^4}{(\zeta \bar{\zeta})^2}, \end{aligned}$$

gdzie funkcja $f(\zeta(z))$ jest rzeczywista i ograniczona w obszarze Ω . Natomiast funkcja $g(z)$ jest określona wzorem:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}} = \frac{1}{4} \frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} \cdot \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\bar{z}z + \bar{z} \cdot \sqrt{z^2 - 4a^2} + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{z^2 - 4a^2}}{\sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{z^2 - 4a^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

i jest funkcją rzeczywistą. Licznik funkcji $g(z)$ jest funkcją ograniczoną w obszarze ograniczonym, gdyż

$$\begin{aligned} \left| \bar{z}z + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{z^2 - 4a^2} \right| &\leq \\ &\leq \max_{x, y \in \Omega_e} \left| \bar{z}z + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + \sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{z^2 - 4a^2} \right| = A. \end{aligned}$$

Funkcja $g(z)$ posiada osobliwość w punkcie $(x, y) = (2a, 0)$. Zbadajmy teraz istnienie całki (2) w obszarze Ω_e (rys. 1) zawierającym punkt osobliwy $(x, y) = (2a, 0)$. Zatem

$$I_1 = \int_{\Omega_e} \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} dx dy = \int_{\Omega_e} f(\zeta(z)) \cdot g(z) \cdot dx \cdot dy \leq \max_{(x, y) \in \Omega_e} f(\zeta(z)) \cdot \max g_1(z) \cdot I_2, \quad (8)$$

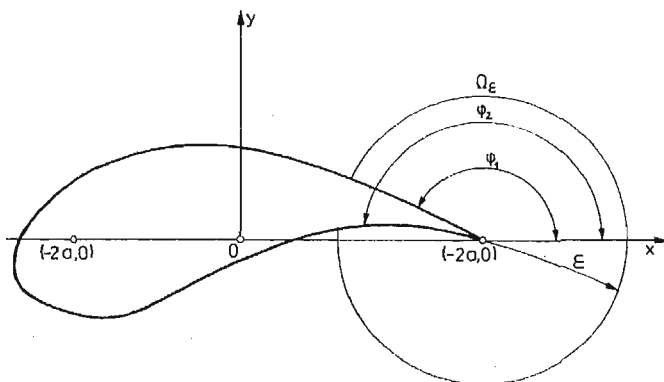
gdzie:

$$I_2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx \cdot dy}{\sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{\bar{z}^2 - 4a^2}}, \quad (9)$$

$$g_1(z) = \frac{1}{4} \left[z\bar{z} + \bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2} + (\bar{z} \sqrt{z^2 - 4a^2}) + \sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{\bar{z}^2 - 4a^2} \right],$$

$$\max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} |g_1(z)| = \frac{1}{4} A.$$

Zagadnienie istnienia całki I_1 sprowadziliśmy do badania istnienia całki I_2 . Dalsze roz-



Rys. 1.

ważania wygodniej będzie przeprowadzić w lokalnym układzie współrzędnych o początku w punkcie osobliwym (rys. 1), wtedy:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, y) : x = 2a + \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad 0 \leq \varrho \leq \varepsilon, \\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \quad \varphi_2 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$I_2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx \cdot dy}{\sqrt{z^2 - 4a^2} \sqrt{\bar{z}^2 - 4a^2}} \int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \right) \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\sqrt{\varrho^2(16a^2 + \varrho^2 + 8a\varrho \cos \varphi)}} = \\ = \int_0^{\varepsilon/4a} \left(\int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \right) \frac{d\varrho d\varphi}{\sqrt{1 + 2p \cos \varphi + p^2}}, \quad p = \frac{\varrho}{4a}. \quad (9a)$$

Stosując podstawienie $\varphi = 2\vartheta$ otrzymamy:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} \frac{2 \cdot dp}{1+p} \left(\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_{\frac{\varphi_2}{2}}^{\pi} \right) \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} \frac{2dp}{1+p} \left(\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_0^{\pi} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}} \right) \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \\ = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} \left[F\left(\frac{\varphi_1}{2}, k\right) + F(\pi, k) - F\left(\frac{\varphi_2}{2}, k\right) \right] \cdot \frac{2dp}{1+p}; \quad k^2 = \frac{4p}{1+p^2},$$

gdzie funkcje $F\left(\frac{\varphi_1}{2}, k\right)$, $F(\pi, k)$, $F\left(\frac{\varphi_2}{2}, k\right)$ są całkami eliptycznymi I rodzaju [6]. Dla $k^2 < 1$ całki eliptyczne I rodzaju posiadają wartość skończoną. Ponieważ $F(\pi, k) = 2F(\pi/2, k)$ oraz $\frac{\varphi_1}{2} \leq \frac{\varphi_2}{2} < \frac{\pi}{2}$, stąd $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \pi - \varphi_1 < \pi$, więc:

$$\begin{aligned} 0 &< 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + F\left(\frac{\varphi_1}{2}, k\right) - F\left(\frac{\varphi_2}{2}, k\right) \leq 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \\ I_2 &\leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \frac{2dp}{1+p} \leq 4 \cdot \max F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \int_0^{\frac{\varepsilon}{4a}} \frac{dp}{1+p} = \\ &= 4 \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{4a}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{4a}\right). \end{aligned} \tag{9b}$$

Zatem na mocy monotoniczności funkcji $F\left(\frac{\pi}{2}, k(p)\right)$ mamy:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} f(\zeta(z)) \cdot \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} g_l(z) \cdot 4 \cdot \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{4a}} F\left(\frac{\pi}{2}, k(p)\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{4a}\right) \\ &= \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} f(\zeta(z)) \cdot \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} g_l(z) \cdot 4F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{4a}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{4 \cdot \frac{\varepsilon}{4a}}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{4a}\right)^2} = \frac{16a \cdot \varepsilon}{(4a + \varepsilon)^2} < 1.$$

Dla $k = 1$ ($p = 1$, $\varrho = 4a$) funkcja podcałkowa w (9a) przyjmuje postać

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2p \cos \varphi + p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi)}}$$

i posiada osobliwość dla $\varphi = \pi$. Punkt o współrzędnych:

$$\begin{aligned} x &= 2a + \varrho \cos \varphi /_{(4a, \pi)} = -2a, \\ y &= \varrho \cdot \sin \varphi /_{(4a, \pi)} = 0, \end{aligned}$$

jest drugim punktem osobliwym profilu. Punkt $(x, y) = (-2a, 0)$ leży we wnętrzu profilu ($\varphi_1 < \pi$, $\varphi_2 > \pi$) jeśli koło w płaszczyźnie pomocniczej ma środek poza początkiem układu współrzędnych. Całka I_2 jest wtedy ograniczona. Jeśli koło w płaszczyźnie pomocniczej ma środek w początku układu współrzędnych, wówczas profil redukuje się do odcinka mającego końce w punktach $(-2a, 0)$ i $(2a, 0)$ [6]. Musimy zatem zbadać zachowanie się całki w otoczeniu punktu $(-2a, 0)$. Dla profilu o wielu punktach osobliwych nie

leżących we wnętrzu profilu obszar Ω_ε dzielimy na podobszary Ω_{ε_i} , $i = 1, 2, \dots, N$ z których każdy zawiera tylko jeden punkt osobliwy i badamy zachowanie się całki I_2 w obszarze $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N \Omega_{\varepsilon_i}$. Dla powyższego przypadku obszar Ω_{ε_1} jest określony następująco:

$$\Omega_{\varepsilon_1} = \{(x, y): x = -2a + \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad 0 \leq \varrho \leq \varepsilon_1, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\Omega_{\varepsilon_2} = \Omega_\varepsilon, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 4a,$$

przeto:

$$I_2 = \int_0^{\varepsilon_1} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\sqrt{\varrho^2(16a^2 + \varrho^2 - 8a\varrho \cos \varphi)}} = \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} \int_0^{2\pi} \frac{dp d\varphi}{\sqrt{1 - 2p \cos \varphi + p^2}} = \\ = \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp d\vartheta}{\sqrt{1 + 2p \cos \vartheta + p^2}} = 2 \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} \int_0^{\pi} \frac{dp d\vartheta}{\sqrt{1 + 2p \cos \vartheta + p^2}} = \\ = 2 \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} \frac{2dp}{1+p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \int_0^{\frac{\varepsilon_1}{4a}} 2F\left(\frac{\pi}{2}, k(p)\right) \cdot \frac{2dp}{1+p}. \quad (11)$$

Ponieważ $\varepsilon_1 < 4a$ a stąd $k < 1$, więc całka (11) jest ograniczona i zachodzi oszacowanie (10).

3. Badanie istnienia całki (2) w otoczeniu punktu osobliwego profilu z ostrzem o dwóch stycznych

Przykładem profilu mającego w ostrzu dwie styczne jest profil Kármána-Trefftza (profil sierpowy), którego ostrza są położone symetrycznie względem osi urojonej i leżą na osi odciętych w punktach $(-mc, 0)$ i $(mc, 0)$ [2].

Profile Kármána-Trefftza otrzymuje się przez odwzorowanie zewnątrz koła o środku na osi urojonej według funkcji:

$$\frac{z - mc}{z + mc} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^m, \quad m > 1, \quad (13)$$

dla której funkcja odwrotna jest postaci:

$$\zeta = c \cdot \frac{(z + mc)^{\frac{1}{m}} + (z - mc)^{\frac{1}{m}}}{(z + mc)^{\frac{1}{m}} - (z - mc)^{\frac{1}{m}}}, \quad (14)$$

oraz:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{4c^2}{(z^2 - m^2c^2)^{1 - \frac{1}{m}} [(z + mc)^{\frac{1}{m}} - (z - mc)^{\frac{1}{m}}]^2} = \frac{h(z)}{(z^2 - m^2c^2)^{1 - \frac{1}{m}}},$$

gdzie funkcja $h(z)$ jest równa:

$$h(z) = \frac{4c^2}{[(z+mc)^{\frac{1}{m}} - (z-mc)^{\frac{1}{m}}]^2}$$

i jest funkcją ograniczoną na zewnątrz profilu.

Zatem analogicznie do (6) mamy:

$$\frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{dz} = f(\zeta(z)) \cdot \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{dz} = f(\zeta(z)) \cdot q(z),$$

gdzie funkcja $q(z)$ jest rzeczywista

$$q(z) = \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{\zeta}}{dz} = \frac{h(z) \cdot \overline{h(z)}}{(z^2 - m^2c^2)^{1-\frac{1}{m}} (z^2 - m^2c^2)^{1-\frac{1}{m}}} \leq A \cdot q_1(z),$$

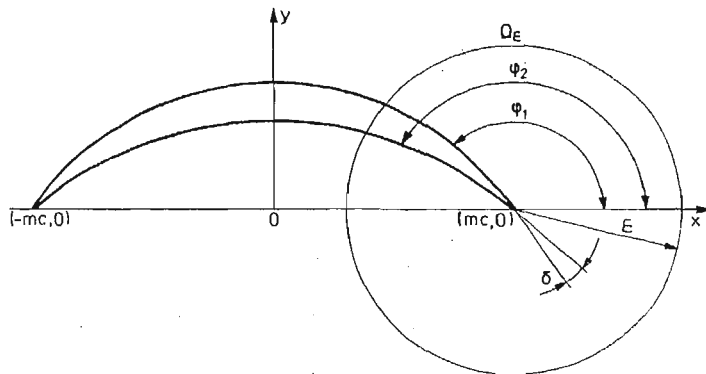
oraz

$$A = \max_{(x,y) \in \Omega_\varepsilon} (h(z) \cdot \overline{h(z)}, q_1(z(x,y))) = \frac{1}{[(x^2 - y^2 - m^2c^2)^2 + 4x^2y^2]^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Podobnie jak poprzednio zbadamy istnienie pierwszej całki w zależności (2) w otoczeniu punktu osobliwego. Ze względu na to, że funkcje $f(\zeta(z))$ i $h(z) \cdot \overline{h(z)}$ są ograniczone w obszarze Ω_ε (rys. 2) wystarczy zbadać istnienie całki

$$I_3 = \int_{\Omega_\varepsilon} q_1(z) dx dy \tag{15}$$

w obszarze Ω_ε zawierającym punkt osobliwy.



Rys. 2.

Dla ułatwienia rozważań zastosujemy lokalny układ współrzędnych (ϱ, φ) w obszarze Ω_ε , wtedy obszar Ω_ε jest określony następująco:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, y): x = m \cdot c + \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Całka (15) przyjmie zatem postać:

$$I_3 = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \left(\int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \right) \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\{\varrho^2[\varrho^2 + 2\varrho \cdot 2mc \cdot \cos \varphi + (2mc)^2]\}^{1-\frac{1}{m}}} =$$

$$= \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \left(\int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \right) \frac{p^{\frac{2}{m}} dp d\varphi}{(1+2p \cos \varphi + p^2)^{1-\frac{1}{m}}}; \quad p = \frac{\varphi}{2mc}. \quad (15a)$$

Stosując dalej podstawienie $\varphi = 2\vartheta$ otrzymujemy:

$$I_3 = \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \frac{2p^{\frac{2}{m}-1} dp}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} \left(\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_{\frac{\varphi_2}{2}}^{\pi} \right) \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Całki wewnętrzne możemy przekształcić następująco:

$$\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_{\frac{\varphi_2}{2}}^{\pi} = \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} + \int_0^{\pi} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}},$$

więc:

$$I_3 = \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \frac{2p^{\frac{2}{m}-1} dp}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} \cdot \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}} \right) \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Ponieważ $\varphi_2 \geq \varphi_1$ oraz funkcja podcałkowa jest dodatnia, przeto:

$$\left(\int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} - \int_0^{\frac{\varphi_2}{2}} \right) \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}} \leq 0,$$

a stąd:

$$I_3 \leq \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \frac{2p^{\frac{2}{m}-1} dp}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Parametr m określa kąt δ w ostrzu, $\delta = (2-m) \cdot \pi$, spełnia więc nierówność $1 < m \leq 2$ oraz na mocy monotoniczności funkcji podcałkowej mamy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{1-\frac{1}{m}}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq \frac{1}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \frac{2p^{\frac{2}{m}-1}}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} dp \leq \\
 &\leq \frac{4}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \cdot \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{2mc}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \int_0^{\frac{\varepsilon}{2mc}} \frac{p^{\frac{2}{m}-1}}{(1+p)^{2-\frac{2}{m}}} dp \leq \\
 &\leq \frac{4}{(2mc)^{2-\frac{2}{m}}} \cdot \max_{0 \leq p \leq \frac{\varepsilon}{2mc}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \cdot \begin{cases} \frac{m}{2-m} \cdot \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{2mc}\right)^{\frac{2}{m}-1} - 1 \right] & 0 < m < 2 \\ \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{4c}\right) & m = 2 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Pokazaliśmy więc, że również dla profilu o dwóch stycznych w ostrzu całka (2) jest ograniczona. Dla $m = 2$ wynik (16) jest identyczny z (9b), gdyż profil Kármána-Treffftza jest modyfikacją profilu Żukowskiego i dla $m = 2$ funkcje (3) i (13) są identyczne.

4. Badanie istnienia całki (2) w obszarze nieorganicznym

Całka

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \frac{\frac{dW}{d\zeta} \left(\frac{d\bar{W}}{d\bar{\zeta}} \right)}{\frac{dz}{d\zeta} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \right)} \cdot J \cdot d\zeta \cdot d\eta = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\bar{W}}{d\bar{\zeta}} d\zeta d\eta \tag{17}$$

wyraża energię kinetyczną cieczy doskonałej. C. Witoszyński pokazał [1], że energia kinetyczna w obszarze nieskończonym na zewnątrz walca (przy pominięciu energii kinetycznej pochodzącej od przepływu jednostajnego) jest nieskończenie duża. Rozważania nasze przeprowadzimy dla potencjału zespolonego z pominięciem członu odpowiadającego przepływowi jednostajnemu, wtedy:

$$\begin{aligned}
 \hat{W}(\zeta) &= W(\zeta) - \bar{v}_{\infty} \cdot \zeta = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot i} \ln \zeta + \frac{v_{\infty} a^2}{\zeta}, \\
 \hat{w}(z) &= \Phi(x, y) - \text{Re}(\bar{v}_{\infty} z) + i[\psi(x, y) - \text{Im}(\bar{v}_{\infty} z)] = \\
 &= \Phi(x, y) - u(x, y) + i[\psi(x, y) - V(x, y)] = \hat{\Phi}(x, y) + i\hat{\Psi}(x, y), \\
 u(x, y) &= \text{Re}(\bar{v}_{\infty} z) = x \cdot v_x + y \cdot v_y, \quad V(x, y) = \text{Im}(\bar{v}_{\infty} z) = y \cdot v_x - x \cdot v_y.
 \end{aligned}$$

Stąd funkcjonał energii ma postać:

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \hat{\Phi} \nabla \hat{\Phi} \cdot dx \cdot dy - \int_{\partial\Omega} \hat{\Phi} \cdot \hat{p}(s) \cdot ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d\hat{W}}{dz} \frac{d\bar{\hat{W}}}{dz} \cdot dx \cdot dy - \int_{\partial\Omega} \operatorname{Re}[\hat{w}] \cdot \hat{p}(s) \cdot ds = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \frac{d\hat{W}}{d\xi} \frac{d\bar{\hat{W}}}{d\bar{\xi}} d\xi \cdot d\eta - \int_{\partial\Omega'} \operatorname{Re}[\hat{W}] \cdot P(S) \cdot dS,
 \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie:

$$P(S) = \frac{\partial}{\partial n} [\operatorname{Re}(\hat{W})],$$

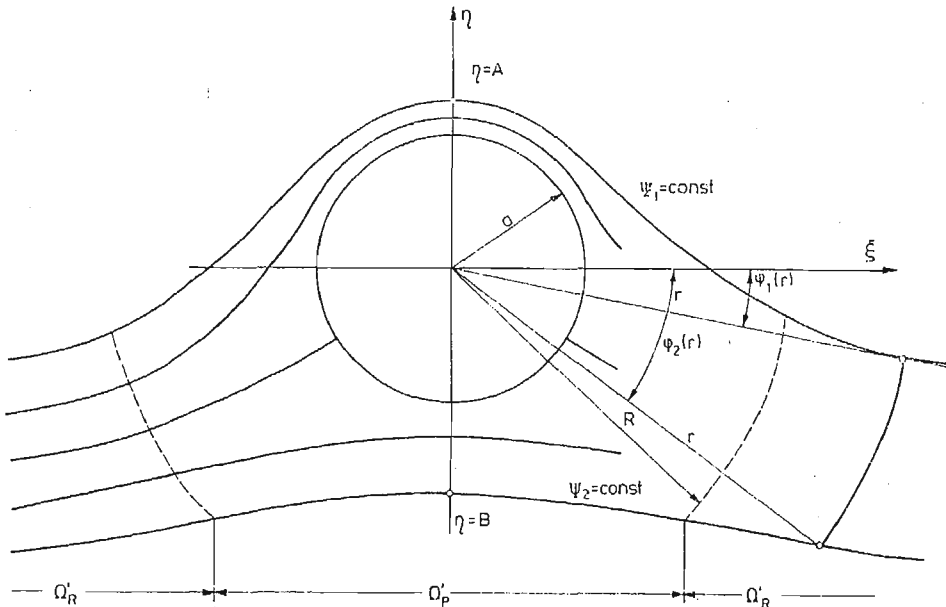
n -normalna zewnętrzna do brzegu

Zajmiemy się teraz zbadaniem istnienia pierwszej całki zależności (18)

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \frac{d\hat{W}}{d\xi} \frac{d\bar{\hat{W}}}{d\bar{\xi}} \cdot d\xi \cdot d\eta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \left[\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + \frac{\Gamma a^2}{2\pi \cdot i} \left(\frac{v_\infty}{\xi} - \frac{\bar{v}_\infty}{\bar{\xi}} \right) + \frac{v_\infty \bar{v}_\infty}{\xi \bar{\xi}} a^4 \right] \frac{d\xi d\eta}{\xi \bar{\xi}}.
 \end{aligned}$$

Zachodzi pytanie czy w pasie nieskończonym zawierającym profil, całka (18) będzie miała wartość skończoną. Dla uproszczenia rozważań podzielimy obszar na dwie części $\Omega' = \Omega'_p \cup \Omega'_R$, gdzie Ω'_p jest obszarem zawartym między liniami prądu Ψ_1 i Ψ_2 (rys. 3) i promieniem $r < R$ natomiast obszar Ω'_R zawarty jest między liniami prądu Ψ_1 i Ψ_2 i $r \geq R$. W obszarze skończonym Ω'_p na mocy poprzednich rozważań całka (18) jest ograniczona. Zatem wystarczy zbadać całkę I_4 tylko w obszarze Ω'_p określonym zależnościami

$$\Omega'_p = \{(r, \varphi) : \varphi_2(r) \leq \varphi \leq \varphi_1(r), \quad r \geq R > a\}.$$



Rys. 3.

Dla uproszczenia przyjmijmy $v_\infty = \bar{v}_\infty^{\frac{1}{2}}$. Całkę I_4 zbadamy w biegunowym układzie współrzędnych (rys. 3)

$$\xi = r \cdot \cos \varphi, \quad \eta = r \cdot \sin \varphi, \quad \text{stąd: } \zeta = r \cdot e^{i\varphi},$$

wtedy:

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} \int_R^\infty \int_{\varphi_2(r)}^{\varphi_1(r)} \left[\frac{\Gamma^2}{4 \cdot \pi^2} + \frac{\Gamma a^2}{2 \cdot \pi} \frac{-2v_\infty \sin \varphi + \frac{v_\infty^2 a^4}{r^2}}{r} \right] \frac{r \cdot dr \cdot d\varphi}{r^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_R^\infty \left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + \frac{v_\infty^2 a^4}{r^2} \right) \frac{\varphi_2(r) - \varphi_1(r)}{r} \cdot dr - \frac{\Gamma \cdot a^2 v_\infty}{2 \cdot \pi} \int_R^\infty \int_{\varphi_2(r)}^{\varphi_1(r)} \frac{\sin \varphi}{r^2} d\varphi \cdot dr. \quad (19) \end{aligned}$$

Druga całka w zależności (19) ma wartość skończoną gdyż:

$$\begin{aligned} \int_R^\infty \int_{\varphi_2(r)}^{\varphi_1(r)} \frac{\sin \varphi}{r^2} \cdot d\varphi \cdot dr &\leq \int_R^\infty \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} \frac{d\varphi \cdot dr}{r^2} = \int_R^\infty \frac{\varphi_1(r) - \varphi_2(r)}{r^2} dr \leq \\ &\leq \max_{R \leq r < \infty} [\varphi_1(r) - \varphi_2(r)] \cdot \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{R} \max_{R \leq r < \infty} [\varphi_1(r) - \varphi_2(r)]. \end{aligned}$$

Również drugi składnik pierwszej całki w zależności (19) daje całkę skończoną

$$\frac{1}{2} \int_R^\infty \frac{v_\infty^2 a^4}{r^2} \frac{\varphi_1(r) - \varphi_2(r)}{r} dr \leq \frac{1}{4} \frac{v_\infty^2 a^4}{R^2} \max_{R \leq r < \infty} [\varphi_1(r) - \varphi_2(r)],$$

zatem o skończoności całki I_5 decydować będzie całka:

$$I_5 = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{4 \cdot \pi^2} \int_0^\infty \frac{\varphi_1(r) - \varphi_2(r)}{r} dr \leq \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{4 \cdot \pi^2} \int_R^\infty \frac{|\varphi_1(r) - \varphi_2(r)|}{r} dr. \quad (20)$$

Całka I_5 będzie skończona tylko wtedy gdy:

$$|\varphi_1(r) - \varphi_2(r)| = H(r) < \frac{c}{r^\alpha}, \quad c > 0, \quad \alpha > 0.$$

Dla każdej funkcji $H(r)$ spełniającej powyższy warunek całka (20) będzie skończona. Dla $c = 2\pi$ i $\alpha = 0$ otrzymujemy całkę rozbieżną zgodną z wynikiem uzyskanym przez Witoszyńskiego [1]. Wyznamy teraz kąt widzenia $\varphi_2(r) - \varphi_1(r)$ przekroju o promieniu r zawartego między liniami prądu Ψ_1 i Ψ_2 , które przechodzą przez punkty A i B (rys. 3). Równanie linii prądu jest następujące [2]:

$$\psi = v_\infty \cdot \eta - v_\infty a^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Zatem równania linii prądu przechodzących przez punkty A i B wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} \psi_1: v_\infty A - \frac{v_\infty a^2}{A} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |A| &= v_\infty \cdot \eta - v_\infty a^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \psi_2: v_\infty B - \frac{v_\infty a^2}{B} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |B| &= v_\infty \cdot \eta - v_\infty a^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \end{aligned}$$

lub we współrzędnych biegunowych:

$$\varphi_1: v_\infty(A - r \cdot \sin \varphi) - v_\infty a^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{\sin \varphi}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \ln \frac{|A|}{r} = 0,$$

$$\varphi_2: v_\infty(B - r \cdot \sin \varphi) - v_\infty a^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{\sin \varphi}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \ln \frac{|B|}{r} = 0.$$

Stąd:

$$\sin \varphi_1(r) = \frac{A - \frac{a^2}{r}}{r - \frac{a^2}{r}} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \frac{\ln \frac{|A|}{r}}{r - \frac{a^2}{r}}; \lim_{r \rightarrow \infty} \sin \varphi_1(r) = 0, \quad (21)$$

$$\sin \varphi_2(r) = \frac{B - \frac{a^2}{r}}{r - \frac{a^2}{r}} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \frac{\ln \frac{|B|}{r}}{r - \frac{a^2}{r}}; \lim_{r \rightarrow \infty} \sin \varphi_2(r) = 0, \quad (22)$$

$$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 = 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} =$$

$$= \frac{B - A - a^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right)}{r - \frac{a^2}{r}} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \frac{\ln \left| \frac{B}{A} \right|}{r - \frac{a^2}{r}},$$

$$2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \frac{B - A - a^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \ln \left| \frac{B}{A} \right|}{r - \frac{a^2}{r}} = \frac{D}{r - \frac{a^2}{r}}.$$

Dla dostatecznie dużych wartości r zachodzi nierówność $0 \leq \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. Pozwala to na wykorzystanie następującej nierówności:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \leq \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\pi} \cdot \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Zatem:

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \frac{\Gamma^2}{4 \cdot \pi^2} \int_R^\infty \frac{1}{r} \left| \frac{\varphi_2(r) - \varphi_1(r)}{2} \right| dr \leq \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \int_R^\infty \frac{1}{r} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2 \left| \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right|} \frac{|D|}{r - \frac{a^2}{r}} dr \leq \\ &\leq \frac{\Gamma^2}{4\pi^3} \frac{|D|}{\min_{R \leq r < \infty} \left| \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right|} \cdot \int_R^\infty \frac{dr}{r^2 - a^2} = D_1 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2 - a^2} = \frac{D_1}{2} \ln \frac{R+a}{R-a}, \end{aligned}$$

Zbadajmy teraz drugą całkę w (18). Wyznaczmy funkcję $P(S)$, $P(S) = v_\xi \cdot \cos \alpha + v_\eta \cdot \sin \alpha$, gdzie kąt α zawarty jest między normalną zewnętrzną do $\partial\Omega'$ a osią x . Prędkość zespolona wynosi:

$$\frac{d\hat{W}}{d\zeta} = v_\xi - i \cdot v_\eta = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \zeta} - \frac{v_\infty a^2}{\zeta^2},$$

stąd:

$$v_\xi = -\frac{\Gamma \cdot \eta}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{v_\infty a^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \frac{1}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$v_\eta = -\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot v_\infty}{(\xi^2 + \eta^2)^2},$$

oraz

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v_\xi = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v_\eta = 0,$$

$$\hat{P}(S) \cdot \text{Re}[\hat{W}] = \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \text{arctg} \frac{\eta}{\xi} + \frac{v_\infty a^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2} \right) \cdot (v_\xi \cdot \cos \alpha + v_\eta \cdot \sin \alpha). \quad (23)$$

Dla dostatecznie dużych wartości ξ mamy [7]:

$$\text{arctg} \frac{\eta}{\xi} = \frac{\eta}{\xi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^3 + \dots, \quad \left| \frac{\eta}{\xi} \right| < 1,$$

$$v_\xi \cdot \text{Re}[\hat{W}] = B_1 \frac{1}{\xi^3} + B_2 \frac{1}{\xi^5} + \dots, \quad B_1, B_2 \neq 0, \quad (24)$$

$$v_\eta \cdot \text{Re}[\hat{W}] = C_2 \frac{1}{\xi^2} + C_3 \frac{1}{\xi^4} + \dots, \quad C_1, C_2 \neq 0, \quad (25)$$

oraz linie Ψ_1 i Ψ_2 są równoległe do osi x (zależność (21), (22)) a całka

$$\int_{\partial\Omega'} \text{Re}[\hat{W}] \cdot \hat{P}(S) dS = \int_{\Psi_2} \text{Re}[\hat{W}] \hat{P}(S) dS + \int_{\Psi_1} \text{Re}[\hat{W}] \hat{P}(S) dS$$

jest skończona wtedy i tylko wtedy gdy funkcja podcałkowa posiada oszacowanie

$$|\text{Re}[\hat{W}] \cdot \hat{P}(S)| \leq \frac{E}{\xi^\beta}, \quad E > 0, \quad \beta > 1, \quad (26)$$

co na mocy (23)–(25) jest zachowane. Zatem całka po brzegu z zależności (18) w pasie nieskończonym obejmującym profil jest skończona. Pokazaliśmy więc, że dla różnych wartości cyrkulacji Γ całka (18) w pasie nieskończonym zawartym między dwoma liniami prądu obejmującymi profil ma wartość skończoną.

5. Uwagi końcowe

Przedstawione rozważania dotyczyły wybranych dwóch profili, o jednej oraz o dwóch stycznych w ostrzu. Zachodzi zatem naturalne pytanie o istnienie całki energii w przypadku dowolnych profili mających ostrze. W takich przypadkach całka energii będzie

istnieć, co wynika z następującego rozumowania. Dla profilu o jednej stycznej ostrze jego może być aproksymowane ostrzem profilu Żukowskiego i w otoczeniu ostrza funkcja odwzorowania Żukowskiego odwzorowuje aproksymowany profil na krzywą styczną do koła w punkcie odpowiadającym ostrzu. Ograniczoność całki energii dla profilu aproksymowanego w otoczeniu ostrza będzie wynikać z ograniczoności całki energii dla profilu Żukowskiego, co zostało już wykazane. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla profilu o dwóch stycznych w ostrzu. Do tego celu można wykorzystać przedstawione rozważania dotyczące profilu Kármána-Trefftza.

Przedstawione rozważania dotyczyły opływu pojedynczego profilu. Interesujące staje się zatem rozważanie problemu istnienia całki energii dla profilu znajdującego się w palisadzie profilów. Prędkość zespolona przepływu w palisadzie profilów rozłożonych równomiernie wzdłuż osi urojonej jest wyrażona zależnością [10, 11]

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_m + \frac{1}{2it} \int_L \bar{v}(\zeta) \cdot \operatorname{ctgh} \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right], \quad L \text{—kontur profilu,}$$

stąd sprzężona prędkość przepływu odniesiona do prędkości w nieskończoności wynosi:

$$\begin{aligned} V(z) &= \bar{v}(z) - \bar{v}(z = \infty) = \frac{1}{2it} \int_L \bar{v}(\zeta) \cdot \left[\operatorname{ctgh} \frac{\pi}{t} (z - \zeta) - 1 \right] d\zeta = \\ &= \frac{1}{2it} \int_L \bar{v}(\zeta) \cdot \frac{2}{e^{\frac{\pi}{t}(z-\zeta)} - 1} d\zeta. \end{aligned} \quad (27)$$

Funkcja $V(z)$ jest funkcją okresową $V(z) = V(z + i \cdot n \cdot t)$, $n = 1, 2, \dots$, zatem istnienie całki energii można badać nie w pasie nieograniczonym zawierającym się między dwoma liniami prądu lecz w pasie nieograniczonym zawierającym się między dwoma prostymi równoległymi oddalonymi od siebie o podziałkę palisady t . Dla dostatecznie dużych wartości $|z| \geq x_0$, $\left| \exp \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] - 1 \right| \approx \left| \exp \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] \right|$ więc:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{i \cdot t} e^{-\frac{\pi}{t} z} \cdot \int_L \bar{v}(\zeta) \cdot e^{\frac{\pi}{t} \zeta} d\zeta, \\ V(z) \cdot \overline{V(z)} &= \frac{1}{t^2} e^{-\frac{2\pi}{t} x} \cdot \int_L \bar{v}(\zeta) e^{\frac{\pi}{t} \zeta} d\zeta \cdot \int_L \overline{v(\zeta) \cdot e^{\frac{\pi}{t} \zeta}} d\zeta = \frac{A}{t^2} e^{-\frac{\pi^2}{t} x}, \end{aligned}$$

oraz:

$$\int_{x_0}^{\infty} \int_y^{y+t} V(z) \cdot \overline{V(z)} dx dy = \frac{A}{t} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{t} x} dx = \frac{A}{2\pi} e^{-\frac{2\pi}{t} x_0} \quad (28)$$

Pokazaliśmy więc, że również dla palisady profili całka energii (17) ma wartość skończoną a ponadto wyrównanie się pola prędkości następuje szybciej niż dla profilu pojedynczego co ujawnia się szybszą zbieżnością całki (17).

Niniejsze rozważania można uogólnić na palisady wielokrotne zawierające układ profilów [8, 9]. W tych przypadkach prędkość zespolona (27) będzie zawierać sumę całek po każdym konturze profilu z układu profilów zawartych między dwoma liniami periodyczności. Charakter zbieżności całki energii (17) będzie analogiczny do (28).

Literatura

1. C. WITOSZYŃSKI., *Aerodynamika*, Warszawa 1928.
2. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*. Tom I. PWN Warszawa 1970.
3. S. G. MICHELIN, *Variationsmethoden der mathematischen Physik*. Akademie-Verlag-Berlin 1962.
4. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*. PWN Warszawa 1969 (tłumaczenie z angielskiego).
5. B. ŚREDNIWA, *Hydrodynamika i teoria sprężystości*, PWN Warszawa 1977.
6. F. OBERHETTINGER, W. MAGNUS, *Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice*. PWN Warszawa 1963.
7. I. M. RYŻYK, I. S. GRADSTEJN, *Tablica całek, sum, szeregów i iloczynów*. PWN Warszawa 1964.
8. W. J. PROSNAK, *Teoria układów profilów lotniczych*. Wszechnica Polskiej Akademii Nauk. Zakład Narodowy im. Ossolińskich. Wyd. Polskiej Akademii Nauk 1981.
9. W. J. PROSNAK, *On a Method of Computing the Plane Steady Flow around a Profile Situated between Straight Parallel Lines*. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des sciences techniques. Vol. XX, No. 4 - 1972.
10. Г. Ю. СТЕПАНОВ, *Гидродинамика решеток турбомашин*, Изд. Физико-Матем. Литературы, Москва 1962.
11. T. CHMIELNIAK, *Zagadnienia cieplnych maszyn przepływowych. Teoria palisad*. Skrypt uczelniany Politechniki Śląskiej. Nr 783. Gliwice 1979.

Niniejsza praca powstała na podstawie prac przeprowadzonych w ramach stypendium im. A. v. Humboldta w Institut für Strahlantriebe und Turboarbeitsmaschinen der RWTH Aachen. Dir. Prof. Dr.-Ing. H. E. Gallus.

Резюме

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ В ИЗБРАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе исследовано существование интеграла энергии для идеальной жидкости вблизи профиля с одной или двумя касательными в его задней кромке.

Исследовано тоже существование интеграла энергии в неограниченной полосе между двумя линиями тока обтекающими профиль.

Summary

EXISTENCE OF THE ENERGY INTEGRAL IN SELECTED INCOMPRESIBLE FLUID FLOW AROUND THE PROFILE

Existence of the energy integral in the incompressible fluid flow around the profile with the sharp single and double tangential trailing edge has been considered in the paper. Existing of the energy integral in an infinite band situated between the two stream lines with a profile in it has been also considered.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1985 roku.

WARIACYJNE UJĘCIE PRZEPIŁYWÓW TERMODYFUZYJNYCH SPRZEŻONYCH Z POLEM NAPRĘŻEŃ

MAREK WRÓBEL

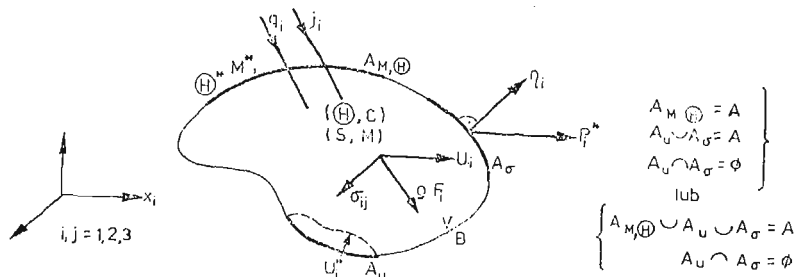
Wyższa Szkoła Inżynierska, Opole

1. Wstęp

Zasady wariacyjne zajmują jedno z centralnych miejsc w zadaniach mechaniki i fizyki ośrodka ciągłego. Wynika to z kilku przyczyn, z których najistotniejsze to możliwość wyprowadzenia równań mechaniki oraz konstruowanie przybliżonych metod rozwiązań szczególnie istotnych przy rozwiązywaniu zadań numerycznych. Stąd problematyka formułowania zasad wariacyjnych dla zadań początkowo-brzegowych w ramach coraz to ogólniejszych teorii była zawsze przedmiotem intensywnych badań. I tak w ramach teorii termo sprężystości do pierwszych prac tego typu zaliczyć należy prace Biota [3, 4]. Rozszerzenie zasad wariacyjnych proponowanych przez Biota znaleźć można w pracach Herrmana [11] Ben-Amoza [2] i Bao-Liana [1]. Wszystkie te prace opierają się na zasadzie Hamiltona. Istotnym krokiem naprzód pozwalającym na bezpośrednie włączenie warunków początkowych do równań pola są zasady wariacyjne typu splotowego zaproponowane przez Gurtina [9, 10]. Prace Gurtina dają możliwość stosowania zasad wariacyjnych w dynamicznych zagadnieniach lepkosprężystości. Obecnie twierdzenia wariacyjne lepkosprężystości znaleźć można w licznych opracowaniach, że wymienimy tu prace Christensena [5], Onata [21], oraz Olszaka i Perzyny [20]. Rozszerzenie zasad wariacyjnych typu Gurtina na zadania termosprężystości znajdujemy w pracy Nickella i Sackmana [19]. Z kolei bardzo ciekawą i przeglądową pracę dotyczącą twierdzeń wariacyjnych termo-lepkosprężystości zaprezentował Reddy [22]. Natomiast wciąż jeszcze znikoma jest liczba prac dotyczących wariacyjnego ujęcia termodyfuzji lepkosprężystej i sprężystej. W zakresie sprężystym wariacyjną formę równań termodyfuzji uzyskali Podstrigacz i Szewczuk [29], lecz najbardziej bogate ujęcie tej problematyki znaleźć można w pracy Szweca i Dasjuka [31]. Natomiast w zakresie lepkosprężystym — korzystając z metod analizy funkcjonalnej i wykorzystując metodykę postępowania Gurtina [10] — interesujące wyniki uzyskał Wyrwał [24]. W opracowaniu tym zaprezentujemy budowę funkcjonu dla zadań sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej. Otrzymany funkcjonu posłuży do analizy sprzężeń przepływów termodyfuzyjnych z polem naprężeń na przykładzie pewnego problemu początkowo-brzegowego. Wydaje się że analiza taka może być celowa, gdyż autorzy niewielu publikacji z zakresu termodyfuzji sprężystej i lepkosprężystej skupiają uwagę na teoretycznych podstawach problemu [13, 17, 18, 29, 31]. Znane

są rozwiązaniami pewnych zagadnień brzegowych [6, 8, 14, 23] lecz brak jest tam przykładów liczbowych obrazujących rozważane procesy i mogących posłużyć do analizy sprzężeń rozpatrywanych wielkości polowych.

Wprowadzamy w analizowanym zadaniu następujące oznaczenia:



Rys. 1. Ciało lepkosprężyste

U_i^*, P_i^* — wektory przemieszczeń i sił zewnętrznych zadane odpowiednio na brzegach A_u i A_σ ciała β

ρF_i — siła masowa jednostki objętości ciała β

T_1, C_1 — odpowiednio temperatura i koncentracja w chwili t

T_0, C_0 — odpowiednio temperatura i koncentracja stanu naturalnego

$$\Theta = T_1 - T_0; \quad C = C_1 - C_0$$

K_{ij}, K'_{ij} — odpowiednio tensory przewodności cieplnej i dyfuzyjnej

$E_{ijkl}, \varphi_{ij}, \Phi_{ij}$ — tensory funkcji relaksacji

M — potencjał chemiczny

Θ^*, M^* — różnice temperatur (Θ^*) i potencjał chemiczny (M^*) dane na brzegach A_M i A_Θ ciała β

r_1, r_2 — odpowiednio źródło masy i źródło ciepła w jednostce objętości i na jednostkę czasu

S — entropia

l, m, n — funkcje relaksacji

q_i, j_i — odpowiednio strumienie ciepła i masy

* — symbol oznaczający mnożenie splotowe

$$f_1 * df_2 = \int_0^t f_1(t-\tau) df_2(\tau); \quad f_1 * df_2 = f_2 * df_1$$

$(\dots)_i$ — oznacza pochodną cząstkową

(\dots) — oznacza pochodną względem czasu $\frac{d(\dots)}{dt}$

$H(t)$ — jest funkcją Heaviside'a

2. Budowa funkcjonału dla zadań sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej

Punktem wyjścia do budowy funkcjonału są następujące równania sprzężonej termodyfuzji [13, 17, 18]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} - \varphi_{ij} * d\Theta + \Phi_{ij} * dC, \quad (2.1)$$

$$\varrho S = \varphi_{ij} * d\varepsilon_{ij} + m * d\Theta + l * dC, \quad (2.2)$$

$$M = \Phi_{ij} * d\varepsilon_{ij} - l * d\Theta + n * dC, \quad (2.3)$$

$$\varrho S + \frac{q_{i,i}}{T_0} * H(t) = \frac{\hat{\varrho} r_2}{T_0}, \quad (2.4)$$

gdzie: $\frac{\hat{\varrho} r_2}{T_0} = \frac{\varrho r_2}{T_0} * H(t) + \varrho S(0^+) \cdot H(t),$

$$\dot{C} + j_{i,i} - r_1 = 0, \quad (2.5)$$

$$q_i = -K_{ij} \Theta_{,j}, \quad (2.6)$$

$$j_i = -K'_{ij} M_{,j}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij,j} + \varrho F_i = 0, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}), \quad (2.9)$$

$$\sigma_{ij} n_j = P_i^* \quad \text{na } A_\sigma \times [0, \infty], \quad (2.10)$$

$$q_i n_i = q_n^* \quad \text{na } A_q \times [0, \infty], \quad (2.11)$$

$$j_i n_i = j_n^* \quad \text{na } A_j \times [0, \infty], \quad (2.12)$$

$$U_i = U_i^* \quad \text{na } A_u \times [0, \infty], \quad (2.13)$$

$$M = M^* \quad \text{na } A_M \times [0, \infty], \quad (2.14)$$

$$C(0^+) = \tilde{C}_0 \quad \text{na } E, \quad (2.15)$$

$$\varrho S(0^+) = \varrho S_0 \quad \text{na } E. \quad (2.16)$$

Gdzie układ równań problemu (2.1)÷(2.9) jest spełniony w obszarze $E \times [0, \infty)$, przy czym E jest regularnym obszarem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowskiej, natomiast $[0, \infty]$ jest przedziałem czasowym.

Budowę funkcjonału rozpoczniemy od mechanicznej części problemu. Wstawimy na-prężenia (2.1) do warunku brzegowego (2.10) oraz do równania równowagi (2.8), które następnie mnożymy splotowo przez $(-\delta dU_i)$ i całkujemy po objętości \mathcal{V} . Wykorzystując twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego o zamianie całki objętościowej na powierzchniową po odpowiednich operacjach uzyskujemy równanie

$$\int_{\mathcal{V}} [E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} * d\delta U_{i,j} - \varphi_{ij} * d\Theta * d\delta U_{i,j} + \Phi_{ij} * dC * d\delta U_{i,j} - \varrho F_i * d\delta U_i] dV - \int_{A_\sigma} [P_i^* * d\delta U_i] dA = 0. \quad (2.17)$$

Z kolei warunek brzegowy na przemieszczenia (2.13) mnożymy splotowo przez (δdP_i) i całkujemy po powierzchni A otrzymując:

$$\int_{A_u} [(U_i^* - U_i) * d\delta P_i] dA = 0. \quad (2.18)$$

Aby zbudować dyfuzyjną część funkcjonału podstawiamy potencjał chemiczny (2.3) do strumienia masy (2.7) a strumień masy do warunku brzegowego (2.12) i bilansu (2.5). Otrzymany bilans masy mnożymy splotowo przez $(-\delta M) = \delta(-\Phi_{ij} * d\varepsilon_{ij} + l * d\Theta + -n * dC)$ i całkujemy po objętości V . Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \int_V [-\Phi_{ij} * dC * d\delta\varepsilon_{ij} + l * dC * d\delta\Theta - n * dC * d\delta C + \tilde{C}_0(\Phi_{ij} * d\delta\varepsilon_{ij} - l * d\delta\Theta + \\ & + n * d\delta C) - K'_{ij}(\Phi_{kl} * \Phi_{pr} * d\varepsilon_{kl,j} * d\delta\varepsilon_{pr,i} - \Phi_{kl} * l * d\varepsilon_{kl,j} * d\delta\Theta_{,i} + \\ & + \Phi_{kl} * n * d\varepsilon_{kl,j} * d\delta C_{,i} - \Phi_{kl} * l * d\Theta_{,j} * d\delta\varepsilon_{kl,i} + l * l * d\Theta_{,j} * d\delta\Theta_{,i} + \\ & - l * n * d\Theta_{,j} * d\delta C_{,i} + \Phi_{kl} * n * dC_{,j} * d\delta\varepsilon_{kl,i} - l * n * dC_{,j} * d\delta\Theta_{,i} + \\ & + n * n * dC_{,j} * d\delta C_{,i}) + r_{1i} * (\Phi_{ij} * d\delta\varepsilon_{ij} - l * d\delta\Theta + n * d\delta C)] dV + \\ & - \int_{A_j} [j_n^* * \delta(\Phi_{ij} * d\varepsilon_{ij} - l * d\Theta + n * dC)] dA. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dla uzyskania cieplnej części funkcjonału wyrażenie na gęstość entropii (2.2) mnożymy splotowo przez $(\delta d\Theta)$ i całkujemy po objętości V otrzymując

$$\int_V [\varrho S * d\delta\Theta - \varphi_{ij} * d\varepsilon_{ij} * d\delta\Theta - m * d\Theta * d\delta\Theta - l * dC * d\delta\Theta] dV = 0. \quad (2.20)$$

Z kolei strumień ciepła (2.6) wstawiamy do warunku brzegowego (2.11) oraz do równania (2.4) które następnie mnożymy przez $(\delta d\Theta)$ i całkujemy po objętości V . Po przekształceniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\frac{\varrho r_2}{T_0} * H(t) * d\delta\Theta + \varrho S_0 H(t) * d\delta\Theta - \delta \left(\frac{1}{2} \frac{K_{ij}\Theta_{,j}}{T_0} * H(t) * d\Theta_{,i} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \varrho S * d\delta\Theta \right] dV - \int_{A_q} \left[q_n^* * \frac{H(t)}{T_0} * d\delta\Theta \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dodajemy teraz do siebie stronami zależności (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) wstawiając w nich zamiast tensora odkształcenia gradienty przemieszczeń (2.9). Wykorzystując symetrię tensorów E_{ijkl} , φ_{ij} , Φ_{ij} , K'_{ij} , K_{ij} możemy po redukcji wyrazów podobnych wyłączyć znak wariacji przed wyrażenie określające otrzymaną sumę. Wyrażenie to jest poszukiwanym funkcjonałem termodyfuzji lepkosprężystej

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[U_i, C, \Theta] = & \int_V \left[\frac{1}{2} E_{ijkl} * dU_{k,i} * dU_{l,j} - \varphi_{ij} * dU_{l,j} * d\Theta - \frac{1}{2} n * dC * dC + \right. \\ & - \frac{1}{2} m * d\Theta * d\Theta - K'_{ij} \left(\frac{1}{2} \Phi_{kl} * \Phi_{pr} * dU_{k,lj} * dU_{p,ri} - \Phi_{kl} * l * dU_{k,lj} * d\Theta_{,i} + \right. \\ & + \Phi_{kl} * n * dU_{k,lj} * dC_{,i} + \frac{1}{2} l * l * d\Theta_{,j} * d\Theta_{,i} - l * n * d\Theta_{,j} * dC_{,i} + \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} n * n * dC_{,j} * dC_{,i} + \tilde{C}_0(\Phi_{ij} * dU_{l,j} - l * d\Theta + n * dC) + \varrho S_0 H(t) * d\Theta + \right. \right. \end{aligned} \quad (2.22)$$

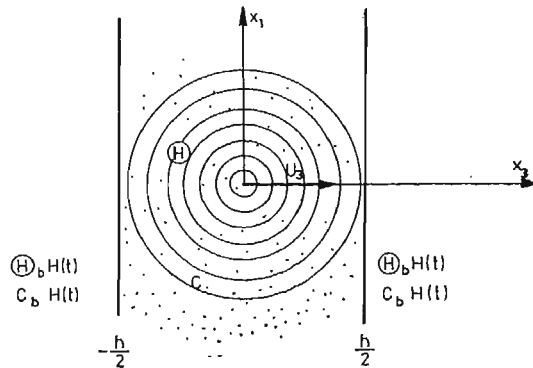
$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varrho r_2}{T_0} * H(t) * d\Theta + r_1 * (\Phi_{i,j} * dU_{i,j} - l * d\Theta + n * dC) - \frac{H(t)}{2} * \frac{K_{i,j}}{T_0} \Theta_{,j} * \\
 & * d\Theta_{,i} - \varrho F_i * dU_i \Big] dV - \int_{A_\sigma} [P_i^* * dU_i] dA - \int_{A_u} [(U_i^* - U_i) * dP_i] dA + \\
 & - \int_{A_2} \left[q_n^* * \frac{H(t)}{T_0} * d\Theta \right] dA - \int_{A_j} [j_n^* * (\Phi_{i,j} * dU_{i,j} - l * d\Theta + n * dC)] dA.
 \end{aligned} \tag{2.22} \quad [\text{cd.}]$$

Należy zwrócić uwagę, że funkcjonal powyższy otrzymany został przy założeniu, że potencjał chemiczny określony jest równaniem konstytutywnym (2.3), a związki geometryczne dane są równaniem (2.9). Zbudowany funkcjonal wykorzystany będzie dalej do rozwiązania pewnego zadania początkowo — brzegowego sprzężonej termodyfuzji.

3. Zastosowanie — o pewnym zadaniu sprzężonej termodyfuzji w warstwie

Sformułujemy teraz zasadniczy w całej pracy PROBLEM: Należy wyznaczyć pola temperatury, koncentracji i przemieszczeń, a w dalszej kolejności odkształceń i naprężeń w warstwie zdeterminowane przez zadane na brzegach wartości temperatury i koncentracji, oraz określić wpływ wzajemnych sprzężeń między rozpatrywanymi polami na ich rozkład.

Rozpatrzmy więc warstwę o grubości h , w której występuje pole temperatury Θ , koncentracji C i przemieszczeń U_i . Zakładamy, że zagadnienie przez nas rozpatrywane jest jednowymiarowe, tzn. wszystkie pola zależą od jednej zmiennej przestrzennej x_3 , oraz że środek jest izotropowy, brak w nim źródeł ciepła i masy oraz sił masowych (rys. 2).



Rys. 2. Warstwa z polem temperatury, koncentracji i przemieszczenia

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe pierwszego rodzaju

$$\Theta \left(\pm \frac{h}{2}, t \right) = \Theta_b H(t), \quad C \left(\pm \frac{h}{2}, t \right) = C_b H(t), \tag{3.1}$$

natomiast za warunki początkowe przyjmujemy wartość entropii i koncentracji na całej grubości warstwy równe zero

$$C(x_3, 0) = \tilde{C}_0 = 0, \quad \varrho S(x_3, 0) = \varrho S_0 = 0. \tag{3.2}$$

Wtedy funkcjonal (2.22) dla sprzężonych pól temperatury, koncentracji i przemieszczenia przyjmie postać

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Theta, C, U_3] = & \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{1}{2} E_{3333} * dU_{3,3} * dU_{3,3} - \varphi_{33} * dU_{3,3} * d\Theta + \right. \\ & - \frac{1}{2} n * dC * dC - \frac{1}{2} m * d\Theta * d\Theta - \frac{K'}{2} \Phi_{33} * \Phi_{33} * dU_{3,3} * dU_{3,3} + \\ & - K' \Phi_{33} * l * dU_{3,3} * d\Theta_{,3} + K' \Phi_{33} * n * dU_{3,3} * dC_{,3} + \\ & - \frac{K'}{2} l * l * d\Theta_{,3} * d\Theta_{,3} + K' l * n * d\Theta_{,3} * dC_{,3} + \\ & \left. - \frac{K'}{2} n * n * dC_{,3} * dC_{,3} - \frac{KH(t)}{2T_0} * \Theta_{,3} * d\Theta_{,3} \right] dx_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Powyższe zadanie początkowo-brzegowe rozwiążemy zmodyfikowaną metodą bezpośrednią Ritza [30]. Przyjmujemy do rozwiązania następujące funkcje bazy

— dla koncentracji:

$$f_k(x_3) = \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3; \quad f_{k,3}(x_3) = -\frac{\pi(2k-1)}{h} \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \quad (3.4)$$

— dla temperatury:

$$g_k(x_3) = \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3; \quad g_{k,3}(x_3) = -\frac{\pi(2k-1)}{h} \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \quad (3.5)$$

— dla przemieszczenia:

$$\begin{aligned} u_k(x_3) = \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3; \quad u_{k,3}(x_3) = \frac{\pi(2k-1)}{h} \cdot \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \\ u_{k,33}(x_3) = -\frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2} \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wartości funkcjonau (3.3) będziemy poszukiwali na kombinacjach liniowych mających postać:

$$\Theta^n(x_3, t) = g_0(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t) g_k(x_3), \quad (3.7)$$

$$C^n(x_3, t) = f_0(t) + \sum_{k=1}^n b_k(t) f_k(x_3), \quad (3.8)$$

$$U_3^n(x_3, t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^n c_k(t) u_k(x_3), \quad (3.9)$$

gdzie:

$$g_0(t) = \Theta_b H(t), \quad (3.10)$$

$$f_0(t) = C_b H(t), \quad (3.11)$$

$$u_0(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu} [(\alpha_c C_b + \alpha_T \Theta_b) H(t) x_3] = U_b H(t) x_3. \quad (3.12)$$

Funkcje g_0, f_0 i u_0 spełniają niejednorodne, natomiast funkcje g_k, f_k i u_k — jednorodne warunki brzegowe; $a_k(t), b_k(t)$ i $c_k(t)$ są tutaj poszukiwanymi funkcjami czasu.

Dzięki zastosowaniu zmodyfikowanej metody bezpośredniej Ritza zadanie szukania ekstremum funkcjonau $\mathcal{F}[\Theta^n, C^n, U_3^n]$ sprowadziło się do zadania poszukiwania ekstremum funkcji, której argumentami są poszukiwane funkcje czasu $a_k(t), b_k(t)$ i $c_k(t)$. Warunek istnienia ekstremum tej funkcji prowadzi do następujących równań Eulera-Lagrange'a

$$-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} K'l * l * da_k - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{2hT_0} KH(t) * a_k - \frac{h}{2} m * da_k + \quad (3.13)$$

$$-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} K'l * n * db_k + \frac{\pi(2k-1)}{2} \varphi_{33} * dc_k + \frac{\pi^3(2k-1)^3}{2h^2} K'\varphi_{33} * l * dc_k =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}2h}{\pi(2k-1)} \cdot (\varphi_{33} * dU_b + m * d\Theta_b) H(t),$$

$$\frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} K'l * n * da_k - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} K'n * n * db_k - \frac{h}{2} n * db_k -$$

$$-\frac{\pi^3(2k-1)^3}{2h^2} K'\Phi_{33} * n * dc_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} \cdot 2hn * dC_b H(t), \quad (3.14)$$

$$\frac{\pi^3(2k-1)^3}{2h^2} K'\Phi_{33} * l * da_k - \frac{\pi(2k-1)}{2} \varphi_{33} * da_k - \frac{\pi^3(2k-1)^3}{2h^2} K'\Phi_{33} * n * db_k +$$

$$+ \frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} E_{3333} * dc_k - \frac{\pi^4(2k-1)^4}{2h^3} K'\Phi_{33} * \Phi_{33} * dc_k = 2(-1)^{k+1} \cdot$$

$$\cdot (\varphi_{33} * d\Theta_b - E_{3333} * dU_b) H(t). \quad (3.15)$$

Występujące w zadaniu funkcje materiałowe l, m, n przyjmujemy za stałe w czasie:

$$l(t) = lH(t), \quad m(t) = mH(t), \quad n(t) = nH(t), \quad (3.16)$$

oraz zgodnie z [6, 13, 17, 18, 24]:

$$E_{3333} = \frac{15}{14} G(t), \quad \varphi_{33} = \frac{7}{5} \alpha_T E_{3333} = \frac{3}{2} \alpha_T G(t),$$

$$\Phi_{33} = -\frac{7}{5} \alpha_c E_{3333} = -\frac{3}{2} \alpha_c G(t),$$

$$D_T = \frac{K}{mT_0}, \quad D_c = K'n. \quad (3.17)$$

Natomiast z analizy funkcjonau danego zależnością (3.3) bądź układu równań (3.13) ÷ ÷ (3.15) wynika kilka funkcji sprzęgających pola termiczne, dyfuzyjne i mechaniczne, które po uwzględnieniu (3.16) i (3.17) można przedstawić w postaci współczynników: 1° współczynnik sprzęgający pole mechaniczne z cieplnym związanym z przepływem ciepła

$$\alpha_{ci} = \frac{3}{2} \alpha_T, \quad (3.18)$$

2° współczynnik sprzęgający pole mechaniczne z ciepłym związanym z przepływem masy

$$\kappa_{c2} = \frac{3}{2} K' l \alpha_c, \quad (3.19)$$

3° współczynnik sprzęgający pole mechaniczne z dyfuzyjnym

$$\kappa_T = \frac{3}{2} D_c \alpha_c, \quad (3.20)$$

4° współczynnik sprzęgający pole ciepłe z dyfuzyjnym

$$\kappa_u = D_c l. \quad (3.21)$$

Wyznaczanie pola temperatury, koncentracji i przemieszczenia w warstwie sprężystej.

Dla ciała sprężystego funkcja relaksacji jest stała w czasie:

$$G(t) = EH(t), \quad (3.22)$$

a jej transformata Laplace'a ma postać:

$$\bar{G}(p) = E \frac{1}{p}, \quad (3.23)$$

gdzie p jest parametrem transformacji. Dokonując na układzie równań (3.13)÷(3.15) transformacji Laplace'a i uwzględniając zależności (3.16)÷(3.23) obliczamy wartości poszukiwanych funkcji w przestrzeni obrazu. Dokonując następnie retransformacji Laplace'a po wstawieniu do (3.7)÷(3.12) otrzymujemy poszukiwane wielkości polowe Θ^n , C^n , U_3^n

$$\Theta^n(x_3, t) = \Theta_b \left[H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n a_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.24)$$

$$C^n(x_3, t) = C_b \left[H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n b_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.25)$$

$$U_3^n(x_3, t) = U_b \left[H(t) x_3 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n c_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.26)$$

gdzie:

$$a_k(t) = A \left[\frac{p_{1k}^2 + p_{1k} A_1 + A_2}{(p_{1k} - p_{2k})(p_{1k} - p_{3k})} e^{p_{1k} t} + \frac{p_{2k}^2 + p_{2k} A_1 + A_2}{(p_{2k} - p_{1k})(p_{2k} - p_{3k})} \cdot e^{p_{2k} t} + \frac{p_{3k}^2 + p_{3k} A_1 + A_2}{(p_{3k} - p_{1k})(p_{3k} - p_{2k})} e^{p_{3k} t} \right], \quad (3.27)$$

$$b_k(t) = B \left[\frac{p_{1k}^2 + p_{1k} B_1 + B_2}{(p_{1k} - p_{2k})(p_{1k} - p_{3k})} e^{p_{1k} t} + \frac{p_{2k}^2 + p_{2k} B_1 + B_2}{(p_{2k} - p_{1k})(p_{2k} - p_{3k})} \cdot e^{p_{2k} t} + \frac{p_{3k}^2 + p_{3k} B_1 + B_2}{(p_{3k} - p_{1k})(p_{3k} - p_{2k})} e^{p_{3k} t} \right], \quad (3.28)$$

$$c_k(t) = \tilde{C} \left[\frac{p_{1k}^2 + p_{1k} C_1 + C_2}{(p_{1k} - p_{2k})(p_{1k} - p_{3k})} e^{p_{1k} t} + \frac{p_{2k}^2 + p_{2k} C_1 + C_2}{(p_{2k} - p_{1k})(p_{2k} - p_{3k})} \cdot e^{p_{2k} t} + \frac{p_{3k}^2 + p_{3k} C_1 + C_2}{(p_{3k} - p_{1k})(p_{3k} - p_{2k})} e^{p_{3k} t} \right]. \quad (3.29)$$

Występujące w zależnościach (3.27) ÷ (3.29) wielkości $A, A_1, A_2, A_3, B, B_1, B_2, B_3, \bar{C}, C_1, C_2, C_3$ są funkcjami stałych materiałowych oraz współczynników sprzęgających (3.18 ÷ (3.21). Natomiast wielkości p_{ik} ($i = 1, 2, 3$) są pierwiastkami równania trzeciego stopnia, które rozwiązano metodą Cardana.

Pole odkształceń otrzymamy z zależności na tensor odkształcenia Cauchy'ego (2.9), a pole naprężeń z równania tworzącego na tensor naprężenia (2.1). Po rachunkach i przekształceniach otrzymujemy

$$\varepsilon_{33}^n(x_3, t) = U_b \left[H(t) + \frac{4}{h} \sum_{k=1}^n (2k-1) c_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.30)$$

$$\sigma_{11}^n(x_3, t) = \sigma_{22}^n(x_3, t) = \frac{E}{1-2\nu} \left\{ \frac{\nu}{1+\nu} \varepsilon_{33}^n(x_3, t) - [\alpha_c C^n(x_3, t) + \alpha_T \Theta^n(x_3, t)] \right\}, \quad (3.31)$$

$$\sigma_{33}^n(x_3, t) = 0, \quad (3.32)$$

gdzie występujące w (3.30) i (3.31) wielkości dane są odpowiednio zależnościami (3.29) oraz (3.24) i (3.25), natomiast ν jest współczynnikiem Poissona.

4. Realizacja numeryczna i zestawienie wyników

W oparciu o przedstawione rozwiązanie analityczne opracowano program na EMC •ODRA 1204 w języku Algol 60. Do przeprowadzenia obliczeń wykorzystano następujące wartości odpowiednich współczynników (po sprowadzeniu do jednostek SI):

— współczynniki dyfuzji D_c [12, 25, 26] i przewodności cieplnej D_T [7, 16]

$$D_c = 6 \cdot 10^{-6} [\text{m}^2/\text{h}], \quad D_T = 4 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2/\text{h}], \quad (4.1)$$

— współczynniki materiałowe m [7, 16] n, l [27, 28]

$$m = 7862,5 [\text{J}/\text{m}^3 \text{K}^2], \quad n = 134,2 [\text{J}/\text{m}^3 \text{kg}^2], \quad (4.2)$$

$$l = 1305,4 [\text{J}/\text{kgK}],$$

— współczynniki rozszerzalności cieplnej α_T [7, 16] i dyfuzyjnej α_c [12, 15]

$$\alpha_T = 4,7 \cdot 10^{-6} [1/\text{K}], \quad \alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5} [\text{m}^3/\text{kg}], \quad (4.3)$$

— moduł sprężystości podłużnej E [16] i współczynnik Poissona ν [15]

$$E = 2 \cdot 10^{10} [\text{Pa}], \quad \nu = \frac{1}{6} [-], \quad (4.4)$$

— warunki brzegowe [7, 15]

$$\Theta_b = 40,0 [\text{K}], \quad C_b = 10,8 [\text{kg}/\text{m}^3]. \quad (4.5)$$

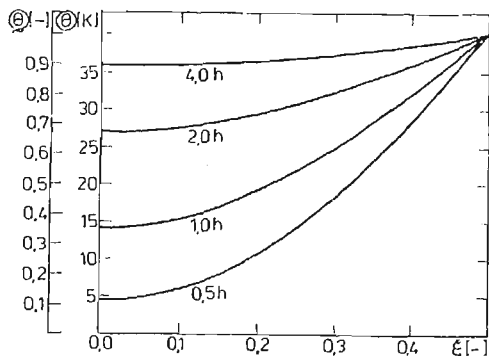
Wyniki numeryczne przedstawiono w postaci graficznej na rysunkach 3÷15. Mając na uwadze ograniczoną objętość pracy zilustrowano tu tylko najistotniejsze z nich. Ze względu na symetrię zadania (rys. 2) na wykresach przedstawiono jedynie wyniki przebiegu procesów dla połowy rozpatrywanej warstwy. Aby umożliwić lepszą analizę ilościową prezentowanych wyników wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe

$$\xi = \frac{x_3}{h}, \quad \varrho = \frac{\theta}{\theta_b}, \quad \zeta = \frac{C}{C_b}, \quad \varrho = \frac{\sigma}{\sigma_b}, \quad (4.6)$$

przy czym dla temperatury i koncentracji poziomem odniesienia są zadane wartości temperatury i koncentracji na brzegach, natomiast dla naprężeń poziom ustalonych naprężeń osiągniętych w rozpatrywanym procesie.

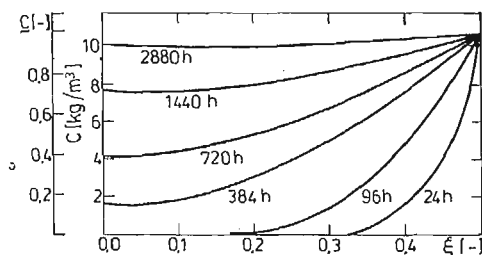
W trakcie analizy prezentowanych wykresów korzystać należy z wprowadzonych współczynników sprzęgających (3.18)÷(3.21). Każdy z nich w zależności od rozpatrywanego zadania przybierać może bowiem wartość równą lub różną od zera. W ten sposób zadanie ogólne w sposób naturalny dzieli się na szesnaście elementarnych przypadków. I tak np. zadaniu zupełnie rozprężonemu odpowiada przypadek $\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$, natomiast zadaniu w którym występuje pełne sprzężenie rozpatrywanych pól — przypadek $\kappa_u \neq \kappa_T \neq \kappa_{c2} \neq \kappa_{c1} \neq 0$.

Brak pełnego kompletu danych dla innych technologii sprawił, że przyjęto beton jako rozpatrywany ośrodek. Należy jednak pamiętać, że w toku rozwiązania postawionego problemu początkowo-brzegowego poczyniliśmy szereg założeń upraszczających, z których najistotniejsze to pominięcie źródeł ciepła i masy, oraz przyjęcie stałych (uśrednionych) funkcji materiałowych określających własności fizyczne betonu. Okazuje się, że w sytuacjach, gdy zmiany temperatury i koncentracji wywołane reakcjami hydratacji są małe w porównaniu ze zmianami tych wielkości spowodowanymi przepływami ciepła i masy, to zaniedbanie źródeł ciepła i masy jest uzasadnione. Przyjęcie takiego uproszczenia jest na podstawie analizy prac [25, 26, 28] obszernie uzasadnione w pracy [6]. W tejże pracy [6] autor w oparciu o badania Malininy [28] i wyniki prezentowane przez Aleksandrowskiego [25] uzasadnia przyjęcie stałych (uśrednionych) wartości współczynników



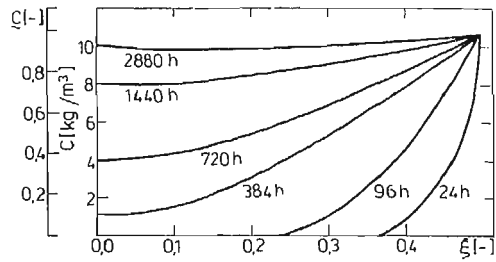
Rys. 3. Rozkład temperatury w warstwie dla przypadku:

$$\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$$

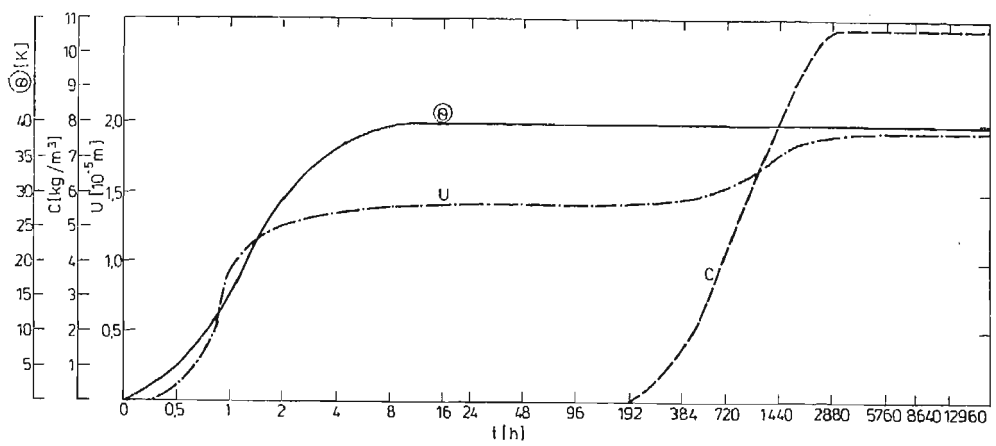


Rys. 4. Rozkład koncentracji w warstwie dla przypadku:

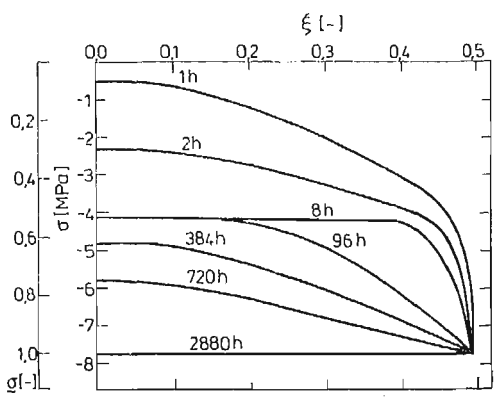
$$\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$$



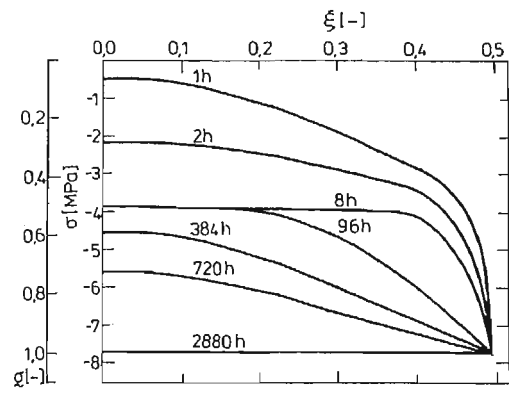
Rys. 5. Rozkład koncentracji w warstwie sprężystej dla przypadku:
 $\kappa_u \neq 0; \quad \kappa_T \neq 0; \quad \kappa_{c2} \neq 0, \kappa_{c1} \neq 0$



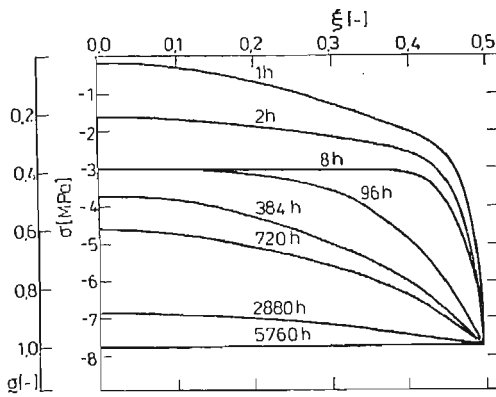
Rys. 6. Rozkład wielkości połowych w warstwie sprężystej przy wartości $\xi = 0,1$ dla przypadku:
 $\kappa_u \neq 0; \quad \kappa_T \neq 0; \quad \kappa_{c2} \neq 0; \quad \kappa_{c1} \neq 0$



Rys. 7. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla przypadku:
 $\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$

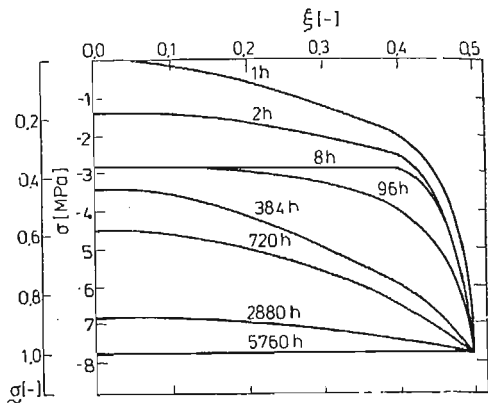


Rys. 8. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla przypadku:
 $\kappa_u \neq 0; \quad \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$



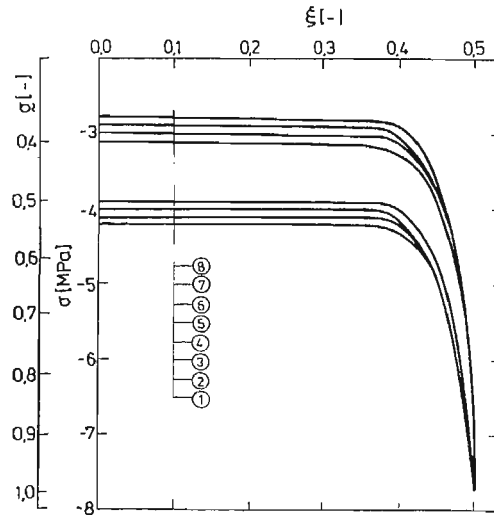
Rys. 9. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla przypadku:

$$\kappa_{c1} \neq 0; \quad \kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = 0$$



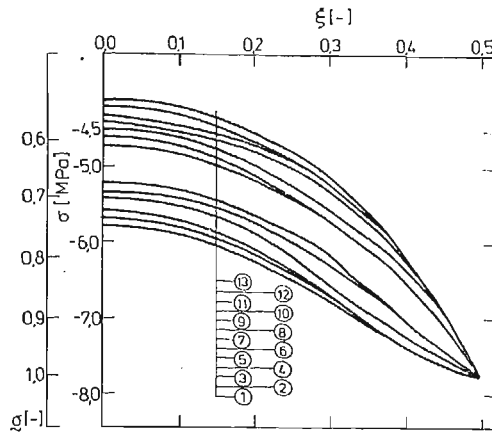
Rys. 10. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla przypadku:

$$\kappa_u \neq \kappa_{c1} \neq 0; \quad \kappa_T = \kappa_{c2} = 0$$



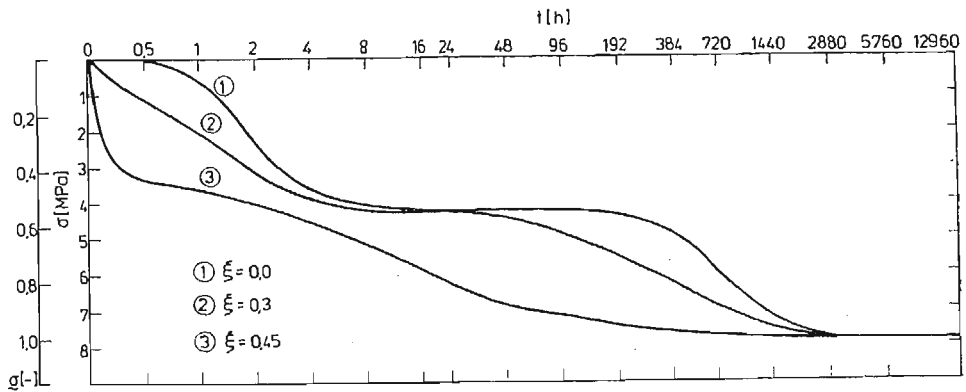
Rys. 11. Rozkład naprężeń w warstwie dla czasu $t = 8h$

1	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$



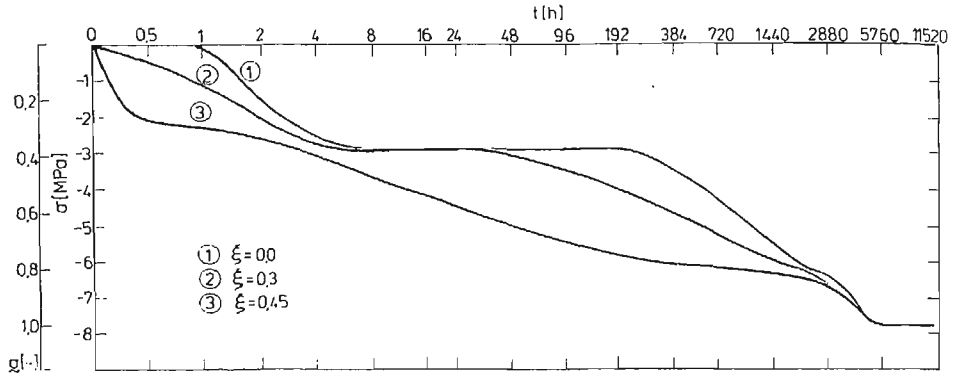
Rys. 12. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla czasu $t = 720h$

$$\begin{array}{l}
 1 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \wedge \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \quad 2 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \quad 3 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 5 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \wedge \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \quad 4 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \quad 6 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 7 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 8 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 9 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \end{array} \right. \wedge \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \\
 \\
 10 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 11 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 12 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 13 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

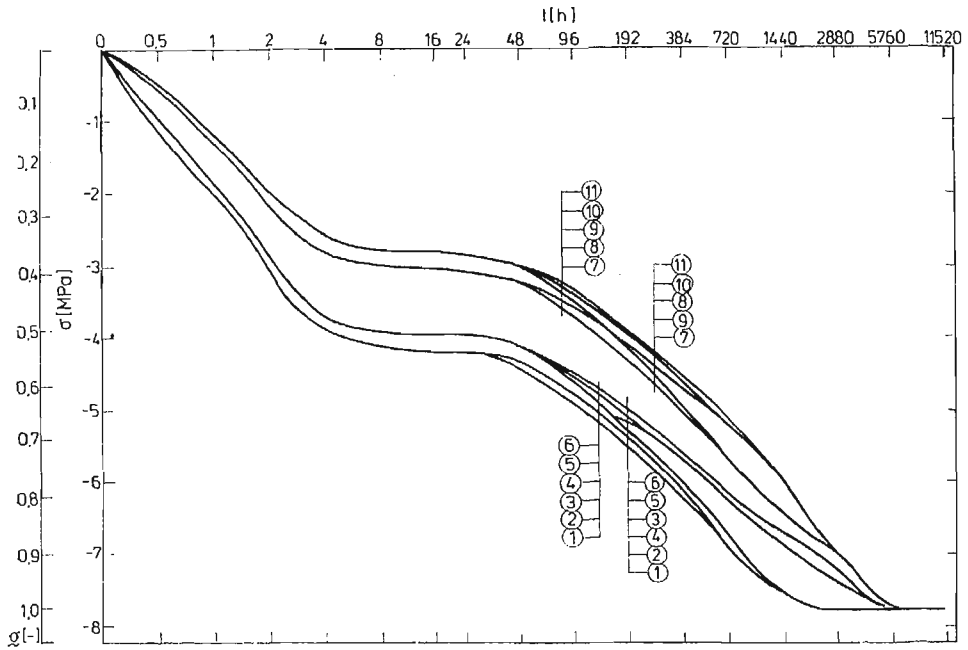


Rys. 13. Warstwa sprężysta
Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku:

$$\kappa_U = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$$



Rys. 14. Warstwa sprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku:
 $\kappa_u \neq \kappa_T \neq \kappa_{c1} \neq \kappa_{c2} \neq 0$



Rys. 15. Warstwa sprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla $\xi = 0,3$

1	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	3	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	^	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	^	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	^	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	9	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	v	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	^	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	11	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$

dyfuzji i termodyfuzji. Kolejnym mankamentem prezentowanego rozwiązania jest fakt, że beton — w początkowym etapie dojrzewania — wykazuje własności lepkosprężyste. Analizowane w pracy zadanie początkowo-brzegowe należy więc traktować jako pierwsze przybliżenie tego złożonego problemu.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy nie będziemy tu przeprowadzali szczegółowej analizy otrzymanych wyników numerycznych. Warto jednak zaznaczyć, że pozostałe w dobrej zgodności z wynikami innych badaczy problemu. I tak jeżeli chodzi o wpływ sprzężeń na rozwój pola cieplnego, oraz sprzężenia cieplno-dyfuzyjne — z pracami [6, 25, 26, 28], natomiast w zakresie zagadnień sprzężenia pola mechanicznego z polem koncentracji z pracą [24].

Otrzymane wyniki numeryczne w sensie opisanych wcześniej założeń upraszczających nabierają znaczenia jako wyniki ilościowe obrazujące wpływ sprzężeń rozpatrywanych pól na siebie. Mogą się one okazać pomocne w rozstrzygnięciu dylematu, czy dane zadanie początkowo — brzegowe rozwiązywać jako niesprężone, czy też analizować bardziej złożone zadanie sprzężone.

Literatura

1. BAO-LIAN FU, *Ob obobščennych variacjonnych principach termouprugosti*, Scienta — Sinica 13, 9, 1964.
2. M. BEN AMOZ, *On a variational theorem in coupled thermoelasticity*, J. Appl. Mech. 32, 4, 1965.
3. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, J. Appl. Phys. 3, 27, 1956.
4. M. A. BIOT, *New thermoelastical reciprocity relations with application to thermal stresses*, J. Aero/Space Sciences 7, 26, 1969.
5. R. M. CHRISTENSEN, *Variational and minimum theorems for the linear theory of viscoelasticity*, Z. Angew. Math. Phys. 19, 233, 1968.
6. F. GAJDA, *Sprężenie cieplno-dyfuzyjne w ciałach lepkosprężystych*, dysertacja doktorska, Politechnika Wrocławska 1983.
7. F. GRUDZIŃSKI, *Procesy cieplne w technologii betonów*, Warszawa 1976.
8. K. GRYSA, R. SZCZEPAŃSKI, *O płaskim quasi-statycznym zagadnieniu termodyfuzji dla sprężystego walca kołowego*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 17, 1979.
9. M. E. GURTIN, *Variational principles in the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 13, 179, 1963.
10. M. E. GURTIN, *Variational principles for linear elastodynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., 17, 1, 1964.
11. G. HERRMAN, *On variational principles in thermoelasticity and heat conduction*, Q. Appl. Math. 2, 21, 1963.
12. J. KASPERKIEWICZ, *Dyfuzja wilgoci i deformacje skurczowe w betonie*, PWN, Warszawa 1972.
13. J. KUBIK, *Analogie i podobieństwo w liniowych ośrodkach odkształcalnych*, Z. N. Pol. Śl. Bud. 38, Gliwice 1975.
14. R. MOKRYK, Z. OLESIAK, *Termodyfuzja w zagadnieniu kontaktu warstwy i półprzestrzeni sprężystej*, Mech. Teoret. i Stos., 3/4, 20, 1982.
15. A. MITZEL, *Reologia betonu*, PWN, Warszawa 1972.
16. A. M. NEVILLE, *Właściwości betonu*, PWN, Warszawa 1977.
17. W. NOWACKI, *Certain problems of thermodiffusion in solids*, A. M. S. 23, 6, 1971.
18. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 13, 1975.
19. R. E. NICKELL, J. L. SACKMAN, *Variational principles for linear coupled thermoelasticity*, Q. Appl. Math. 1, 26, 1968.
20. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *Variational theorems in general viscoelasticity*, Ing. Arch. 28, 1959.
21. E. T. ONAT, *On a variational principle in linear viscoelasticity*, I. Mech. 1, 135, 1962.

22. J. N. REDDY, *Variational principles for linear coupled dynamic theory of thermoelasticity*, Int. J. Eng. Science 14, 605, 1976.
23. J. STEFANIAK, J. JANKOWSKI, *Плоские фале harmoniczne i dyfuzja w cieiele stalym*, Mech. Teoret. i Stos. 18, 3, 1980.
24. J. WYRWAŁ, *Wariacyjne ujęcie termodyfuzji lepkosprężystej*, dysertacja doktorska, Politechnika Krakowska 1979.
25. С. В. АЛЕКСАНДРОВСКИЙ, *Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия*, Стройиздат 1966.
26. Л. Я. ВОЛОСЯН, *Тепло-и массообмен при термообработке бетонных и железобетонных изделий*, Минск 1973.
27. А. В. ЛЬКОВ, *Теоретические основы строительной физики*, Минск 1961.
28. Л. А. МАЛИНИНА, *Тепловлажностная обработка тяжёлого бетона*, Москва 1977.
29. Я. С. ПОДСТРИГАЧ, П. Р. ШЕВЧУК, *Вариационная форма уравнений термодиффузионных процессов в деформируемом теле*, Прикл. Мех. и Мат. 33, 4, 1969.
30. П. В. ЦОЙ, *Методы расчета отдельных задач теплопереноса*, Москва 1971.
31. Р. Н. ШВЕЦ, Я. М. ДАСЮК, *О вариационных теоремах термодиффузии деформируемых твердых тел*, Мат. Физ. 22, 1977.

Резюме

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМА ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ПЕРЕПЛИВОВ СВЯЗАННЫХ С ПОЛЕМ НАПРЯЖЕНИЯ

В работе построено функционал для задач сопряженной вязкоупругой термодиффузии. Основой построения функционала являются уравнение балансов, производящие уравнения, уравнения потоков массы и тепла, а также граничные условия задачи. Затем обсуждено термодиффузионные перепливы связанные с механическим полем в однородном изотропном упругом слое. Процесс вызывают данные величины температуры и концентрации на краях слоя, так же как происходит в классическом процессе запаривания бетона. Для решения проблемы использовано построенный функционал и применено модифицированный непосредственный метод Ритца.

Summary

THE VARIATIONAL FORMULATION OF HEAT AND MASS TRANSFER CONJUGATED WITH STRESS FIELD

The functional for problems of the coupled viscoelastic thermodifusion is formulated. The basis for the construction of the functional constitute: balance equations, constitutive equations, mass and heat flux equations and boundary conditions of the problem. Next the problem of the heat and mass transfer coupled with the stressfield in a homogenous and isotropic layer is treated. The process is generated by the values of the temperature and concentration on the boundary like in the classical technological processes. The solution is based on the formulated functional and on a modified direct Ritz method.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 września 1985 roku.

ANALIZA PŁASKICH ZAGADNIENIŃ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

KAZIMIERZ MYŚLECKI

Politechnika Wroclawska

1. Wstęp

Metoda elementów brzegowych w zastosowaniu do płaskich zagadnień teorii sprężystości doczekała się już wielu opracowań, z których wymienimy dwa — ogólne, książkowe [1, 2]. Za punkt wyjścia przyjmuje się tam równania równowagi w przemieszczeniach.

W niniejszym opracowaniu przyjęto odmienne podejście: rozpatruje się zagadnienie brzegowe dla funkcji naprężeń Airy'ego F . Gdy siły objętościowe są stałe wówczas otrzymuje się jednorodne równanie biharmoniczne

$$\Delta^2 F = 0. \quad (1.1)$$

W dalszej części opracowania stosuje się zapis wskaźnikowy i umowę sumacyjną dla pary takich samych wskaźników. Wskaźniki, oznaczone małymi literami łańskimi, przebiegają zbiór $\{1, 2\}$.

2. Podstawowe równania

Równanie (1.1) zapiszemy w notacji wskaźnikowej

$$F_{,iijj} = 0. \quad (2.1)$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania równania (2.1) w płaskim obszarze V ograniczonym krzywą L (rys. 1).

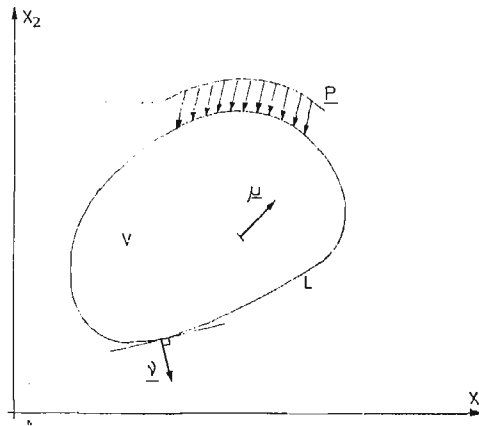
Zakładamy, że obciążenie brzegowe p jest określone w każdym punkcie krzywej L i ponadto występuje stałe obciążenie objętościowe γ skierowane przeciwnie do osi x_2 . Wówczas naprężenia można wyrazić wzorami

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} F_{,kl} + \delta_{ij} \gamma x_2, \quad (2.2)$$

gdzie ε_{ik} jest symbolem permutacyjnym, a δ_{ij} deltą Kroneckera.

Warunki równowagi na brzegu przyjmą teraz postać

$$(\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} F_{,kl} + \delta_{ij} \gamma x_2) \nu_j = p_i. \quad (2.3)$$



Rys. 1.

Oznaczmy:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^0 &= \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} F_{,kl}, \\ p_i^0 &= p_i - \nu_i \gamma x_2,\end{aligned}\quad (2.4)$$

i przepiszmy (2.3) w postaci

$$\sigma_{ij}^0 \nu_j = p_i^0. \quad (2.5)$$

Warunki (2.5) są identyczne jak dla zagadnienia bez sił objętościowych i można je wykorzystać do wyprowadzenia warunków brzegowych dla równania (2.1) [3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \nu}(Q) &= \nu_j(Q) \varepsilon_{ij} \int_P^Q p_i^0(R) dL, \\ F(Q) &= \varepsilon_{ji} \int_P^Q (x_{Qi} - x_{Ri}) p_j^0(R) dL, \quad P, Q, R \in L.\end{aligned}\quad (2.6)$$

P jest dowolnym lecz ustalonym punktem krzywej L .

Po prawej stronie równości (2.6) mamy znane funkcje punktu $Q \in L$. Oznaczmy je przez h i g :

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} = h, \quad F = g. \quad (2.7)$$

Problem brzegowy (2.1) i (2.7) będzie przedmiotem dalszych rozważań.

3. Brzegowe równania całkowe

Wraz z problemem brzegowym (2.1) i (2.7) weźmiemy pod uwagę dwa równania różniczkowe

$$\bar{F}_{,iJJ} = \delta(A', B), \quad A, B \in V, \quad (3.1)$$

i

$$F_{,i}^*{}_{,jj} = \frac{\partial \delta(A, B)}{\partial \mu(A)}, \quad (3.2)$$

gdzie $\delta(A, B)$ jest deltą Diraca, a μ kierunkiem wzdłuż wektora μ w obszarze V . Zapis $\delta(A, B)$ należy rozumieć jako $\delta(x_{A1} - x_{B1}, x_{A2} - x_{B2})$ itp.

Rozwiązaniami szczególnymi równań (3.1) i (3.2) są funkcje

$$\bar{F} = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln \frac{r}{a}, \quad (3.3)$$

i

$$F^* = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mu} = \bar{F}_{,i} \mu_i = - \frac{\left(2 \ln \frac{r}{a} + 1\right) (r_i \mu_i)}{8\pi}. \quad (3.4)$$

W powyższych wzorach przyjęto oznaczenia

$$\begin{aligned} r_i &= x_{A1} - x_{B1}, \\ r &= \sqrt{r_i r_i}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

a — dowolna stała o wymiarze długości.

Równanie (2.1) mnożymy obustronnie, kolejno przez \bar{F} i F^* , a następnie całkujemy po obszarze V . Podobnie postępujemy z równaniami (3.1) i (3.2) mnożąc je przez F . Po dwukrotnym zastosowaniu twierdzenia Ostrogradskiego-Gaussa

$$\int_V \Phi_{,i} dV = \int_L \Phi \cdot \nu_i dL \quad (3.6)$$

i wykorzystaniu własności funkcji δ , otrzymujemy cztery tożsamości

$$\int_L (F_{,ii} \bar{F}_{,jj} \nu_j - \bar{F} F_{,ii} \nu_j) dL = \int_V F_{,ii} \bar{F}_{,jj} dV, \quad (3.7)$$

$$\int_L (F_{,ii} F^*_{,jj} \nu_j - F^* F_{,ii} \nu_j) dL = \int_V F_{,ii} F^*_{,jj} dV, \quad (3.8)$$

$$\alpha F + \int_L (\bar{F}_{,ii} F_{,jj} \nu_j - \bar{F} F_{,ii} \nu_j) dL = \int_V F_{,ii} \bar{F}_{,jj} dV, \quad (3.9)$$

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial \mu} + \int_L (F^*_{,ii} F_{,jj} \nu_j - F F^*_{,ii} \nu_j) dL = \int_V F_{,ii} F^*_{,jj} dV. \quad (3.10)$$

Porównując stronami równości (3.7) i (3.9) oraz (3.8) i (3.10) znajdziemy

$$\begin{aligned} & \int_L [V(R) \bar{F}(A, R) + M(R) \bar{F}_{,i}(A, R)] dL = \\ & = \alpha F(A) + \int_L [\bar{V}(A, R) F(R) + \bar{M}(A, R) F_{,i}(R)] dL, \quad R \in L, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_L [V(R) F^*(A, R) + M(R) F^*_{,i}(A, R)] dL = \\ & = \alpha F_{,i}(A) + \int_L [V^*(A, R) F(R) + M^*(A, R) F_{,i}(R)] dL, \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} F_\nu &= F_{,j} \nu_j = \frac{\partial F}{\partial \nu}, \\ M &= F_{,ii} = \Delta F, \\ V &= -F_{,ij} \nu_j = -\frac{\partial \Delta F}{\partial \nu}, \quad \text{itp.} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Współczynnik α przyjmuje wartość 1 dla $A \in V$, a 0 dla $A \notin V$ i $A \notin L$.

Zależność (3.12) przepiszemy w nieco innej postaci wykorzystując własność funkcji V^*

$$\int_L V^*(A, R) dL = 0, \quad R \in L, \quad (3.14)$$

wynikającą z równania (3.2) po scałkowaniu obustronnym po obszarze V i wykorzystaniu twierdzenia Ostrogradskiego-Gaussa

$$\begin{aligned} \int_L [V(R)F^*(A, R) + M(R)F_\nu^*(A, R)] dL &= \alpha F_\mu(A) + \\ + \int_L \{V^*(A, R)[F(R) - F(A)] + M^*(A, R)F_\nu(R)\} dL. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Gdy założymy, że $A \rightarrow Q$ i jednocześnie $\mu \rightarrow \nu$, z (3.11) i (3.15) otrzymamy dwa brzegowe równania całkowe dla funkcji M i V :

$$\begin{aligned} \int_L [V(R)\bar{F}(Q, R) + M(R)\bar{F}_\nu(Q, R)] dL &= \frac{1}{2} F(Q) + \\ + \int_L [\bar{V}(Q, R)F(R) + \bar{M}(Q, R)F_\nu(R)] dL, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \int_L [V(R)F^*(Q, R) + M(R)F_\nu^*(Q, R)] dL &= \frac{1}{2} F_\nu(Q) + \\ + \int_L \{V^*(Q, R)[F(R) - F(Q)] + M^*(Q, R)F_\nu(R)\} dL. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Po prawej stronie równań występują znane funkcje punktu Q , które po wprowadzeniu warunków brzegowych mają postać

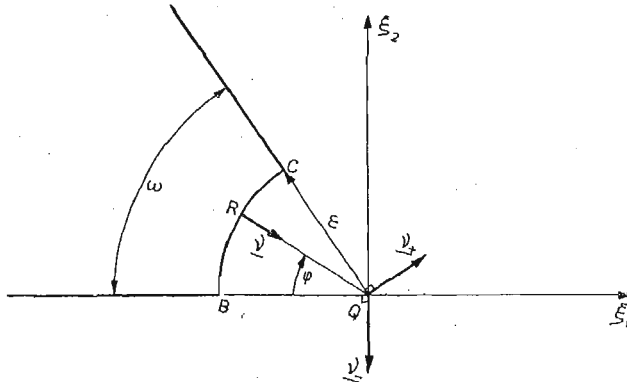
$$H(Q) = \frac{1}{2} h(Q) + \int_L [\bar{V}(Q, R)h(R) + \bar{M}(Q, R)g(R)] dL, \quad (3.18)$$

$$G(Q) = \frac{1}{2} g(Q) + \int_L \{V^*(Q, R)[h(R) - h(Q)] + M^*(Q, R)g(R)\} dL. \quad (3.19)$$

Należy zaznaczyć, że wzory (3.18) i (3.19) są słuszne jedynie dla gładkiej części brzegu L , a całki w tych wzorach rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego.

Zanim przejdziemy do wyprowadzenia funkcji H i G dla punktu narożnego podamy jawną postać funkcji \bar{M} , M^* , \bar{V} i V^*

$$\begin{aligned}
 \bar{M}(Q, R) &= \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right), \\
 M^*(Q, R) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{r_k v_k(Q)}{r^2}, \\
 \bar{V}(Q, R) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{r_k v_k(R)}{r^2}, \\
 V^*(Q, R) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{v_k(Q) v_k(R)}{r^2} - \frac{2r_k v_k(Q) r_l v_l(R)}{r^4} \right].
 \end{aligned} \tag{3.20}$$



Rys. 2.

W narożu o rozwartości ω przyjmujemy lokalny układ współrzędnych ξ_1, ξ_2 (rys. 2). W otoczeniu punktu Q funkcję Airy'ego F będziemy aproksymować funkcją liniową opartą na wartościach $F(Q)$, $\partial F/\partial v_-$ i $\partial F/\partial v_+$

$$F = \frac{1}{\sin \omega} (F_{v_+} + \cos \omega F_{v_-}) \cdot \xi_1 - F_{v_-} \cdot \xi_2 + F(Q). \tag{3.21}$$

Odpowiednie elementy wzorów (3.20) mają teraz postać

$$\begin{aligned}
 v(Q) &= v_- = [0, -1], \\
 v(R) &= [\cos \varphi, -\sin \varphi], \\
 r_1 &= -\varepsilon \cdot \cos \varphi, r_2 = \varepsilon \cdot \sin \varphi, \\
 r &= \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

a same wzory —

$$\begin{aligned}
 \bar{V} &= \frac{1}{2\pi \varepsilon}, \\
 M^* &= \frac{\sin \varphi}{2\pi \varepsilon}, \\
 V^* &= -\frac{\sin \varphi}{2\pi \varepsilon^2}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Funkcje H i G dla naroża różnią się jedynie swobodnymi składnikami (nie występującymi pod znakiem całki) od tych dla części gładkiej. Otrzymamy je ze wzorów (3.11) i (3.15). Całkowanie rozbijamy na dwie części: łuk $B-C$ (rys. 2) i pozostałą część krzywej L . Warto zauważyć, że punkt Q nie należy tutaj do obszaru V ($\alpha = 0$). Po obliczeniu granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymamy swobodny składnik w funkcji H

$$\frac{\omega}{2\pi} F(Q) \quad (3.24)$$

i w funkcji G

$$\frac{1}{2\pi} (\omega F_{v_-} + \sin \omega F_{v_+}). \quad (3.25)$$

Podobnie znajdziemy swobodny składnik w funkcji G dla $v(Q) = v_+$

$$\frac{1}{2\pi} (\omega F_{v_+} + \sin \omega F_{v_-}). \quad (3.26)$$

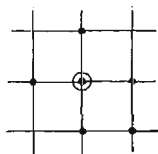
W szczególnym przypadku, gdy $\omega = \pi$, wyrażenia (3.24), (3.25) i (3.26) odpowiadają tym dla brzegu gładkiego (3.18) i (3.19).

W narożu funkcja G , podobnie jak poszukiwana funkcja V , jest nieciągła.

4. Rozwiązanie numeryczne i przykłady

Brzeg L dzieli się na elementy prostoliniowe i zakłada się stałą wartość wszystkich funkcji określonych na L w obrębie jednego elementu. Punkt węzłowy umieszcza się w środku elementu. Taka aproksymacja, choć najprostsza z możliwych i wymagająca gęstszego podziału, posiada wiele zalet: wszystkie punkty węzłowe leżą na gładkiej krzywej (odcinku prostoliniowym), unika się uciążliwego numerycznego obliczania wartości głównych osobliwych całek gdyż na odpowiednich odcinkach wyrażenia podcałkowe zawierające \bar{V} , M^* i V^* znikają.

Naprężenia w obszarze V oblicza się ze wzorów (2.2) aproksymując pochodne różnicami skończonymi opartymi na schemacie sześciopunktowym (rys. 3). Ze względu na przyjęte

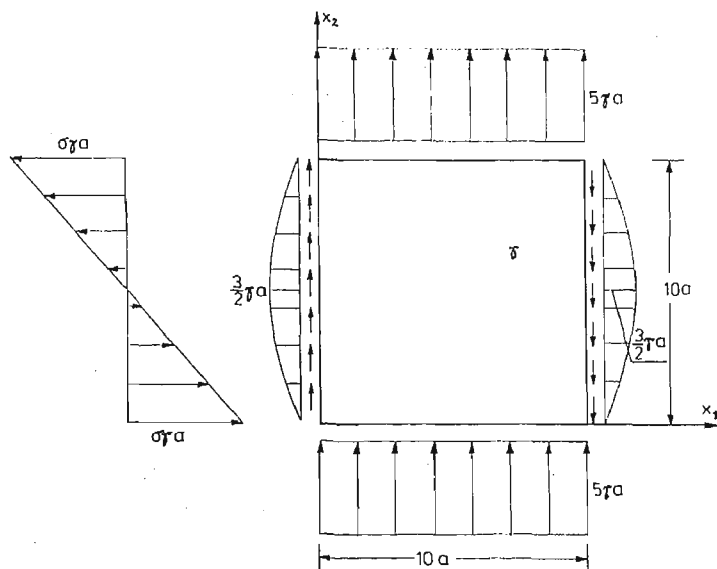


Rys. 3.

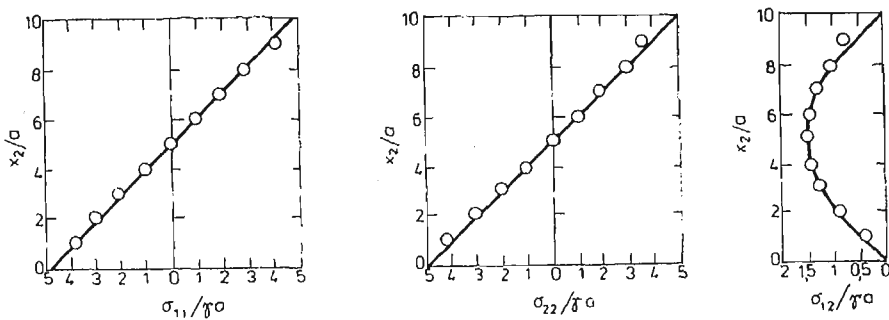
aproksymacje niemożliwe jest obliczanie naprężeń w bliskim sąsiedztwie brzegu. Na podstawie testów numerycznych jako oszacowanie minimalnej odległości od brzegu uzyskano długość najbliższego elementu.

Analizę numeryczną przeprowadzono dla dwóch przykładów o znanym rozwiązaniu analitycznym.

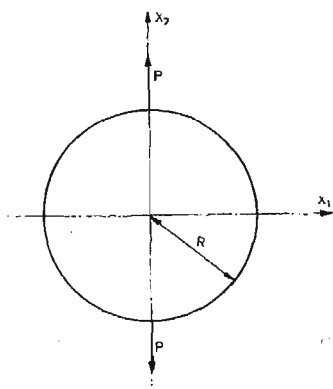
W pierwszym przykładzie rozwiązano kwadratową tarczę obciążoną ciężarem własnym γ i siłami brzegowymi o rozkładzie jak na rysunku 4. Każdy bok kwadratu został podzie-



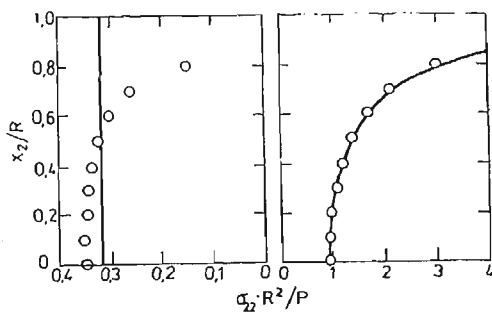
Rys. 4. Błąd: na rys. ma być: $6\gamma a$



Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7. Błąd, ma być: $\sigma_{11} R^2 / P$, $\sigma_{22} R^2 / P$

lony na dziesięć elementów o stałej długości a . Otrzymane wartości naprężeń wzdłuż pionowej linii odległej o $2a$ od lewego boku pokazano na rys. 5.

Drugi przykład dotyczy kołowej tarczy obciążonej dwoma siłami skupionymi (rys. 6). Zastosowano tutaj 38 elementów o stałej długości. Każdą z sił skupionych rozłożono na długości jednego elementu. Na rysunku 7 przedstawiono rozkład naprężeń wzdłuż pionowego promienia.

5. Uwagi końcowe

Na podstawie wzorów (2.6) funkcjom h i g można nadać interpretację odpowiednio: siły osiowej i momentu zginającego w pewnym fikcyjnym pręcie o osi w kształcie krzywej brzegowej. Pręt taki jest przecięty w punkcie P i oczywiście statycznie wyznaczalny. Wybór punktu P , jak wspomniano wyżej, jest dowolny i ma jedynie wpływ na liniową część funkcji naprężeń. Rozkład sił wewnętrznych w tym pręcie jest dość nierównomierny: największe siły wewnętrzne, na ogół, występują w oddaleniu od punktu przecięcia. Taka sytuacja, wobec przyjętej w pracy aproksymacji funkcji na brzegu, powoduje nagromadzenie się błędów aproksymacji w niektórych obszarach. Aby tego uniknąć obliczono funkcje h i g jako siłę osiową i moment zginający w zamkniętym, statycznie niewyznaczalnym pręcie. Uzyskano w ten sposób bardziej równomierne rozłożenie błędów aproksymacji funkcji h i g (i w konsekwencji całego problemu).

W obu przedstawionych przykładach numerycznych błąd w oszacowaniu dominujących naprężeń nie przekracza kilku procent, co potwierdza, nawet przy prostych funkcjach aproksymujących i stosunkowo rzadkiej dyskretyzacji, skuteczność metody elementów brzegowych przy rozwiązywaniu tego typu zagadnień.

Literatura

1. C. A. BREBBIA, S. WALKER, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London 1980.
2. P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill Book Company, London 1981.
3. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Граничная задача для функции напряжений Эри свелась к схеме двух граничных интегральных уравнений, которые решаются численно применяя метод граничных элементов. Принимаются во внимание постоянные объёмные силы. Подробно проанализировано вид уравнений в углу. Даны решения двух численных примеров, которые сравнены с аналитическими решениями.

S u m m a r y

ANALYSIS OF PLANE PROBLEMS OF ELASTICITY BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

The boundary value problem for Airy stress function is reduced to a system of two boundary integral equations. The equations are solved by the boundary element method. Constant body forces are considered. The form of the equations at a corner is analysed in detail. Two numeric examples are given and compared with analytical ones.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 marca 1986 roku.

IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA MODELU MATEMATYCZNEGO SAMOLOTU

WŁADYSŁAW JAROMINEK

Polska Akademia Nauk, Warszawa

TADEUSZ STEFAŃSKI

Politechnika Świętokrzyska, Kielce

1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych problemów syntezy układu stabilizacji samolotu jest problem identyfikacji, którego zadaniem jest otrzymanie niezbędnych informacji o charakterystykach statycznych i dynamicznych samolotu. Problem ten posiada szczególnie istotne znaczenie w przypadku samolotu naddźwiękowego, gdzie informacje o aktualnych zmianach jego parametrów muszą być ciągle w czasie lotu korygowane. Identyfikacja obiektów niestacjonarnych — a takim jest samolot — sprowadza się głównie do założenia quasi-stacjonarności w pewnym dopuszczalnym przedziale czasu ΔT i na znalezieniu takiego algorytmu identyfikacji, którego czas procesu przejściowego jest mniejszy od czasu ΔT .

W niniejszym artykule do syntezy algorytmów identyfikacji parametrów modelu matematycznego samolotu w kanale podłużnym zastosowano metodę najmniejszych kwadratów. Metoda ta wykazuje w tym przypadku wiele istotnych zalet, w tym: otrzymanie algorytmu identyfikacji w postaci układu równań normalnych lub w postaci rekurencyjnej — prostej i wygodnej do obliczeń numerycznych, możliwość uwzględnienia szumów pomiarowych lub zakłóceń działających na samolot, wysoka zbieżność i dokładność identyfikacji parametrów modelu matematycznego. Ponieważ przedstawione algorytmy pozwalają identyfikować parametry dyskretnego modelu matematycznego samolotu, w pracy przedstawiono także problem określania parametrów ciągłego modelu matematycznego na podstawie modelu dyskretnego.

2. Model matematyczny samolotu

W wielu praktycznych zastosowaniach, np. w przypadku stabilizacji układu pilotażu ręcznego samolotu w kanale podłużnym, istotne znaczenie ma ruch krótkookresowy. Wynika to z faktu, że pierwszą reakcją na wychylenie steru wysokości jest zmiana kąta natarcia, podczas gdy zmiana prędkości lotu zachodzi znacznie później.

Liniowy model matematyczny krótkookresowego ruchu podłużnego samolotu, dla ustalonego lotu poziomego, ma postać [2]:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \dot{\alpha} + P_{\alpha}\alpha + P_{\delta}\delta + P_w \\ \ddot{\vartheta} &= M_{\alpha}\alpha + M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + M_{\dot{\vartheta}}\dot{\vartheta} + M_{\delta}\delta + M_w \\ n &= \frac{V}{57,3g}(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha})\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie: α — kąt natarcia; ϑ — kąt pochylenia; δ — wychylenie steru; n — przyspieszenie normalne; V — prędkość lotu; g — przyspieszenie ziemskie; P_{α} , P_{δ} , $M_{\dot{\vartheta}}$, M_{α} , $M_{\dot{\alpha}}$, M_{δ} — współczynniki zależne od geometrii, kinematyki i parametrów lotu; P_w , M_w — zakłócenia działające na samolot.

Z równań (1) otrzymano transmitancje wiążące sygnały wyjściowe $\dot{\vartheta}$ i n z wejściowym sygnałem sterującym δ dla $P_w = 0$ oraz $M_w = 0$, które mają postać:

$$G_{\dot{\vartheta}}(s) = \frac{\dot{\vartheta}(s)}{\delta(s)} = \frac{K_{\dot{\vartheta}}(1 + T_1 s)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (2)$$

$$G_n(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)} = \frac{K_n(1 - T_2^2 s^2)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{M_{\dot{\vartheta}} + P_{\alpha} + M_{\dot{\alpha}}}{2\sqrt{M_{\alpha} + M_{\dot{\vartheta}}P_{\alpha}}}, & T_1 &= \frac{M_{\delta} - M_{\dot{\alpha}}P_{\delta}}{M_{\delta}P_{\alpha} - M_{\alpha}P_{\delta}} \\ T &= \frac{1}{\sqrt{M_{\alpha} + M_{\dot{\vartheta}}P_{\alpha}}}, & T_2 &= \sqrt{\frac{P_{\delta}}{M_{\delta}P_{\alpha} + M_{\alpha}P_{\delta}}} \\ K_{\dot{\vartheta}} &= \frac{M_{\delta}P_{\alpha} - M_{\alpha}P_{\delta}}{M_{\alpha} + M_{\dot{\vartheta}}P_{\alpha}}, & K_n &= K_{\dot{\vartheta}} \frac{V}{57,3g}\end{aligned}$$

Współczynniki transmitancji (2) i (3) są zmienne i zależne od prędkości V oraz wysokości H lotu; ogólnie stwierdza się, że są funkcją czasu.

Układ równań (1) można zapisać w postaci macierzowej

$$\dot{\underline{x}}(t) = A_c \underline{x}(t) + B_c \delta(t) + W_c \quad (4)$$

przy czym:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= [x_1(t), x_2(t)]^T = [\dot{\vartheta}(t), \alpha(t)]^T \\ A_c &= \begin{bmatrix} -M_{\dot{\vartheta}} - M_{\dot{\alpha}} & -M_{\alpha} + M_{\dot{\alpha}}P_{\alpha} \\ 1 & -P_{\alpha} \end{bmatrix}, & B_c &= \begin{bmatrix} M_{\delta} - M_{\dot{\alpha}}P_{\delta} \\ P_{\delta} \end{bmatrix}, & W_c &= \begin{bmatrix} M_w - M_{\dot{\alpha}}P_w \\ P_w \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Również w tym przypadku parametry modelu (4), tj. macierze A_c , B_c i W_c są funkcjami czasu.

3. Algorytmny identyfikacji

Samolot jest obiektem, którego właściwości statyczne i dynamiczne zmieniają się w czasie lotu, na ogół jednak zmiany są powolne. Z tych też względów dopuszczalne jest założenie, że istnieje przedział czasu ΔT , w którym parametry modelu matematycznego

(2) lub (4) nie ulegają istotnym zmianom. Do identyfikacji parametrów modelu matematycznego należy wówczas zastosować metodę, której proces przejściowy nie będzie dłuższy niż ΔT . Tak postawiony problem rozwiązany zostanie przy pomocy metody najmniejszych kwadratów, której algorytmy cechują się wysoką zbieżnością i dokładnością identyfikacji.

W warunkach quasistacjonarności, dyskretna postać równania (4) określona jest następująco

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\delta(k) + W \quad (5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= \exp(A_c T) \\ B &= A_c^{-1} (\exp(A_c T) - I) B_c \\ W &= A_c^{-1} (\exp(A_c T) - I) W_c \end{aligned}$$

W przypadku małej wartości okresu impulsowania T można ograniczyć się do przybliżenia liniowego rozwinięcia macierzy $\exp(A_c T)$ w szereg potęgowy i wówczas

$$\begin{aligned} A &= I + A_c T \\ B &= B_c T \\ W &= W_c T \end{aligned} \quad (6)$$

Identyfikację parametrów modelu matematycznego (5) można przeprowadzić w oparciu o pomiar $\delta(k)$ i $\dot{\theta}(k)$ lub w oparciu o pomiar $\delta(k)$ oraz $\underline{x}(k)$.

W metodzie bazującej na pomiarze skalnych sygnałów (tj. $\delta(k)$ i $\dot{\theta}(k)$) konieczne jest przedstawienie modelu (5) w postaci kanonicznej Frobeniusa. Dla kwadratowego wskaźnika jakości algorytm identyfikacji ma postać:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(k) &= \hat{\varphi}(k-1) + P(k) G^T(k) Q(k) [\dot{\theta}(k) - G(k) \hat{\varphi}(k-1)] \\ P(k) &= P(k-1) - P(k-1) G^T(k) [Q^{-1}(k) + G(k) P(k-1) G^T(k)]^{-1} G(k) P(k-1) \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie: $\hat{\varphi}(k)$ — estymator macierzy parametrów φ ,

$$\varphi = [a_1, a_2, c_1, c_2],$$

$$G(k) = [\dot{\theta}(k-1), \dot{\theta}(k-2), \delta(k-1), \delta(k-2)]^T,$$

$Q(k)$ — współczynnik wagi.

Identyfikowane elementy macierzy φ powiązane są z elementami macierzy stanu A i macierzy sterowania B modelu (5) zależnościami:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}, & a_2 &= a_{11} + a_{22} \\ c_1 &= b_1, & c_2 &= b_1(a_{11} - a_{12} - a_{22}) + b_2 a_{22} \end{aligned} \quad (8)$$

Algorytm (7), uzupełniony warunkami początkowymi $\hat{\varphi}(0)$ i $P(0)$, pozwala określić wartości parametrów równania (5) z minimalnym średniokwadratowym błędem, spowodowanym szumami pomiarowymi i zakłóceniami działającymi na samolot. Algorytm ten posiada dobrą zbieżność i dokładność identyfikacji, jeśli parametry identyfikowanego obiektu w czasie trwania procesu identyfikacji są stałe lub niewiele zmieniające się. Jeśli

natomiast zmieniają się — algorytm ten traci zbieżność. Wówczas lepsze wyniki uzyskuje się stosując następujący algorytm:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(k) &= \hat{\phi}(k-1) + P(k)G^T(k)Q(k)[\hat{\theta}(k) - G(k)\hat{\phi}(k-1)] \\ P(k) &= R(k) - R(k)G^T(k)[Q^{-1}(k) + G(k)R(k)G^T(k)]^{-1}G(k)R(k)\end{aligned}\quad (9)$$

przy czym najczęściej przyjmuje się $R(k) = \gamma I$, gdzie I jest macierzą jednostkową a γ współczynnikiem o dużej wartości (rzędu $10^3 \div 10^5$). Zbieżność tego algorytmu można dodatkowo poprawić dobierając eksperymentalnie ciąg wartości współczynników wagi $Q(k)$.

W przypadku, gdy niestacjonarność identyfikowanych parametrów jest silna, algorytmy rekurencyjne najczęściej są rozbieżne. Lepsze wyniki osiąga się stosując tzw. układ równań normalnych. Niech ΔT będzie przedziałem czasu, w którym parametry obiektu nie ulegają istotnym zmianom. Dla tego przedziału estymator identyfikowanych parametrów, uzyskany metodą najmniejszych kwadratów ma postać

$$\hat{\phi} = [G^T(N)G(N)]^{-1}G^T(N)\bar{y}(N)\quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}G(N) &= [G^T(1)|G^T(2)|\dots|G^T(N)]^T \\ \bar{y}(N) &= [\hat{\theta}(1), \hat{\theta}(2), \dots, \hat{\theta}(N)]\end{aligned}$$

Idea tej metody polega na tym, że w każdym przedziale czasu ΔT należy dokonać N pomiarów sygnału wejściowego $\delta(k)$ i wyjściowego $\hat{\theta}(k)$ w chwilach dyskretnych k , przy czym $N \geq 4$, a następnie przetwarzać je zgodnie z zależnością (10). Najczęściej równania (10) rozwiązuje się w oparciu o dekompozycję macierzy, np. metodą ortogonalizacji Householdera lub metodą SVD. Zwiększenie ilości pomiarów N ma duże znaczenie w przypadku działania na układ zakłóceń i szumów pomiarowych. Wpływ wymienionych zjawisk na dokładność identyfikacji można zmniejszyć stosując odpowiednią filtrację.

Identyfikacji parametrów modelu matematycznego samolotu można także dokonać poprzez pomiar sygnału wejściowego $\delta(k)$ oraz wektora stanu $\underline{x}(k)$. Wówczas algorytm identyfikacji ma postać:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^T(k) &= \hat{\psi}^T(k-1) + P(k)S(k)Q(k)[\underline{x}^T(k) - S^T(k)\hat{\psi}^T(k-1)] \\ P(k) &= P(k-1) - P(k-1)S(k)[Q^{-1}(k) + S^T(k)P(k-1)S(k)]^{-1}S^T(k)P(k-1)\end{aligned}\quad (11)$$

przy czym:

$$\psi = [A|B], \quad S(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k-1) \\ \delta(k-1) \end{bmatrix}$$

Również w tym przypadku macierz kowariancji $P(k-1)$ można zastąpić macierzą $R(k)$, analogicznie jak w algorytmie (9). Zaletą algorytmu (11) jest wyższa, niż algorytmu (9), zbieżność i dokładność identyfikacji, wadą — konieczność pomiaru kąta pochylenia $\hat{\theta}(k)$ i kąta natarcia $\alpha(k)$. Gdy zmiany parametrów są szybkie, zamiast algorytmu rekurencyjnego (11) należy zastosować układ równań normalnych, wynikających z metody najmniejszych kwadratów.

W wielu przypadkach zachodzi konieczność określania parametrów ciągłego modelu matematycznego. Ciągły model matematyczny obiektu można uzyskać jako przypadek

graniczny modelu dyskretnego, przyjmując, że okres impulsowania T dąży do zera. Wówczas macierze A_c i B_c równania (4) można określić z zależności (6)

$$\begin{aligned} A_c &= (A - I)T^{-1} \\ B_c &= BT^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

Jeżeli okres impulsowania T ma dużą wartość, człony wyższego rzędu rozwinięcia macierzy $\exp(A_c T)$ mają duży wpływ na A (nie są jeszcze bliskie zeru) i zależności (12) nie można stosować, gdyż błąd obliczenia macierzy A_c i B_c jest zbyt duży. Również bardzo mała wartość T nie jest wskazana, przy stosowaniu tych zależności, gdyż błąd identyfikacji parametrów modelu dyskretnego silnie przenosi się na wartości parametrów modelu ciągłego.

Macierze A_c i B_c określić można ze stosunkowo małym błędem, korzystając z równań (5) i tak:

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{1}{T} \ln A \\ B_c &= [\exp(A_c T) - I]^{-1} A_c B \end{aligned} \quad (13)$$

Zasadniczą trudność sprawia tu obliczenie macierzy A_c . Jeśli wartości własne λ_j macierzy A spełniają warunek

$$|\lambda_j - 1| < 1 \quad j = 1, 2 \quad (14)$$

to słuszna jest zależność

$$A_c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (A - I)^k}{kT} \quad (15)$$

Dla układów stabilnych i $\lambda_j > 0$ warunek (14) jest zawsze spełniony. Macierz B_c wyznaczyć można z zależności (13), uprzednio określając macierz $\exp(A_c T)$, lub też z zależności przybliżonej

$$B_c = \left[- \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right] A_c B \quad (16)$$

4. Badania symulacyjne algorytmów identyfikacji

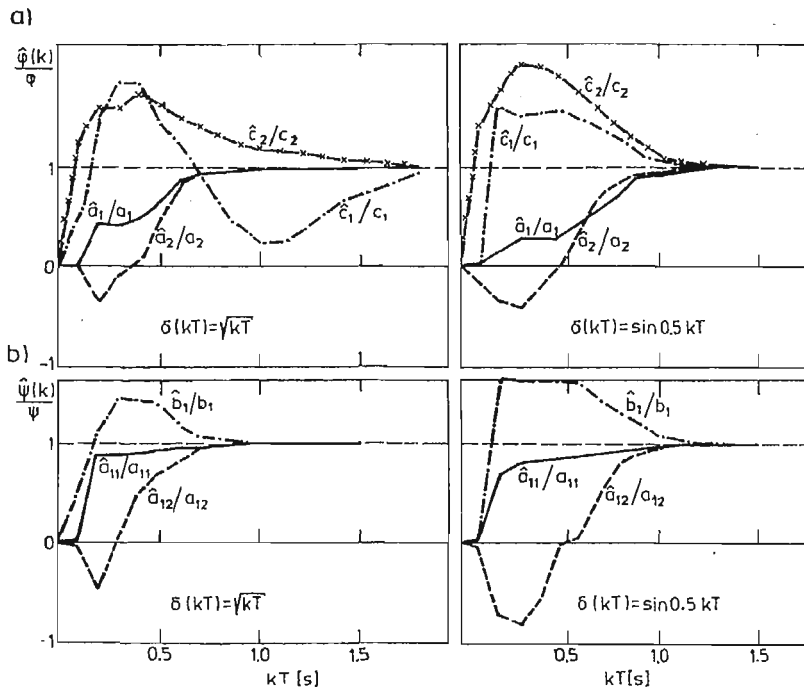
Przedstawione algorytmy identyfikacji przetestowano na EMC w celu oceny ich zbieżności i dokładności identyfikacji. Analizy dokonano dla stacjonarnego oraz niestacjonarnego modelu matematycznego. W pierwszym przypadku badano podstawowe właściwości algorytmów identyfikacji, w drugim — przydatność tych algorytmów do identyfikacji modeli niestacjonarnych.

Symulowany obiekt identyfikacji określony został przez model matematyczny (4); parametry tego modelu dla zakresu prędkości lotu $Ma = 0,5 \div 1,8$ i zakresu wysokości lotu $H = 0 \div 13500$ m zaczerpnięto z pracy [4].

Przyjęto następujące wartości parametrów identyfikowanego obiektu stacjonarnego

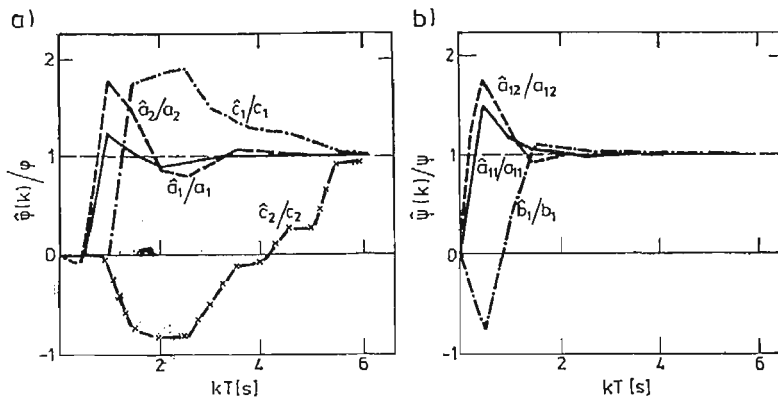
$$A = \begin{bmatrix} 0,95 & -0,2 \\ 0,1 & 0,95 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,28 \\ 0,26 \end{bmatrix}$$

W wyniku symulacji stwierdzono (rys. 1), że algorytm (11) wykazuje dużo lepszą zbieżność niż algorytm (7). Również w przypadku uwzględnienia szumów pomiarowych (rys. 2)



Rys. 1. Zbieżność procesu identyfikacji dla obserwacji:

- a) — skalarne sygnału wyjściowego,
b) — pełnego wektora stanu.

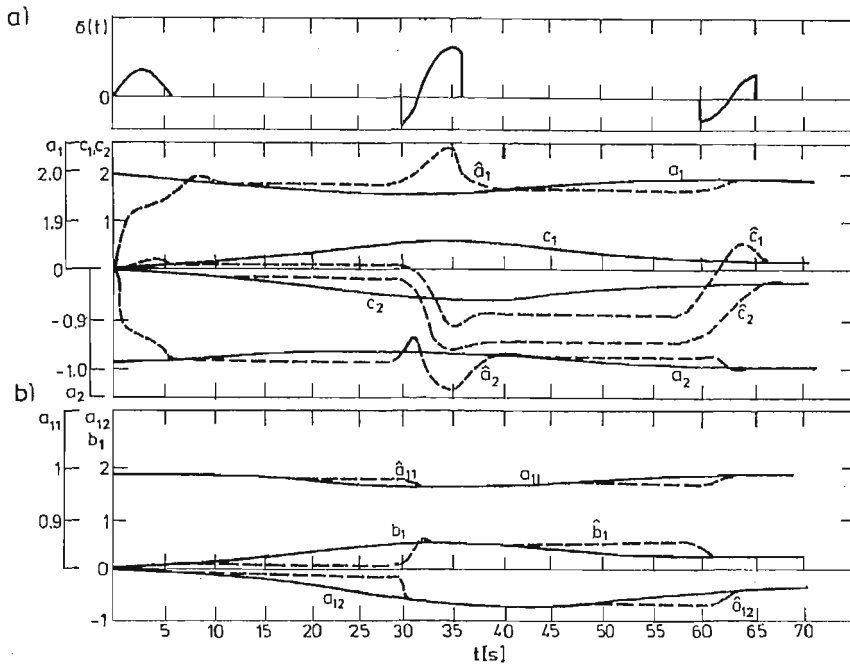


Rys. 2. Zbieżność procesu identyfikacji w przypadku uwzględnienia szumów pomiarowych dla obserwacji:

- a) — skalarne sygnału wyjściowego,
b) — pełnego wektora stanu.

— wniosek jest identyczny. Podczas symulacji przyjęto, że szумы pomiarowe są sygnałami losowymi o zerowych wartościach oczekiwanych i maksymalnych amplitudach nie przekraczających 10% amplitud mierzonych sygnałów.

Zbieżność algorytmu identyfikacji dla obiektu niestacjonarnego przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Identyfikacja obiektu niestacjonarnego przy obserwacji:
a) — skalarne sygnału wyjściowego,
b) — pełnego wektora stanu.

Podczas symulacji procesu identyfikacji założono, że samolot nabiera prędkości do wartości 2Ma i wysokości do 15000 m w ciągu 75s. Linia ciągłą oznaczono zmiany wartości parametrów obiektu, natomiast linią przerywaną — zmiany wartości parametrów samolotu otrzymanych z procesu identyfikacji. Również w tym przypadku dużo wyższą zbieżność i dokładność identyfikacji wykazuje algorytm (11). Algorytm (7) przy dużej szybkości zmian parametrów obiektu utracił zbieżność. Oczywiście lepsze wyniki uzyska się stosując algorytm (8) lub (10).

5. Podsumowanie

Przedstawione algorytmy identyfikacji można z powodzeniem wykorzystać do identyfikacji parametrów stacjonarnego i niestacjonarnego modelu matematycznego. Jeśli jest możliwość obserwacji kąta natarcia $\alpha(k)$ zaleca się stosować algorytmy bazujące na pełnej obserwacji wektora stanu modelu matematycznego samolotu, gdyż stabilność algorytmów (7) i (8) jest bardziej wrażliwa na zmiany parametrów obiektu niż algorytmu

(11). Trudno tu jest sformułować warunki graniczne, które określałyby dopuszczalną prędkość zmian parametrów. Proces identyfikacji jest tylko możliwy podczas trwania procesu przejściowego i musi odbywać się cyklicznie, tzn. wyniki uzyskane w poprzednim cyklu będą warunkami początkowymi dla nowego cyklu. Taki sposób postępowania istotnie podwyższa zbieżność i dokładność identyfikacji.

Literatura

1. A. P. SAGE, J. L. MELSА, *Estimation Theory with Application to Communication and Control*. New York, Mc Graw-Hill 1971.
2. T. STEFAŃSKI, *Zagadnienie syntezy dyskretnego, adaptacyjnego układu sterowania samolotu w kanale podłużnym*. Rozprawa doktorska, Kraków, AGH 1978.
3. V. STŘEJС, *Least Squares Parameter Estimation*. Automatica, No 3, 1980.
4. Ю. И. Топчеев, В. Г. Потемкин, *Системы стабилизации*. Машиностроение, Москва, 1974.

Резюме

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САМОЛЁТА

В работе рассматривается проблема параметрической идентификации дискретной математической модели в продольном канале методом наименьших квадратов. Показано что идентификация параметров нестационарной математической модели самолёта возможна в реальном времени на основе пассивного эксперимента, осуществляя измерения входного сигнала и тоже одной или всех переменных состояния этой модели. Проанализировано сходимость полученных алгоритмов идентификации, а тоже проблему определения непрерывной математической модели на основе дискретной модели, полученной в результате параметрической идентификации.

Summary

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF MATHEMATICAL MODEL OF AIRCRAFT

The present paper deals with the problem of parametric identification of discrete mathematical model of aircraft in the oblong channel solved by means of the method of least squares. It is shown that identification of parameters of non-stationary mathematical model is possible in the real time basing upon passive experiment consisting of measurement of input signal as well as one or all variables of the state of the model. The convergence of the identification algorithms being obtained and the problem of determining of continuous mathematical model on the basis of discrete model resulting from parametric identification has been analysed.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 marca 1986 roku.

WYZNACZANIE MODELU STEROWANIA SAMOŁOTEM ZAPEWNIAJĄCEGO ŚCISŁĄ REALIZACJĘ RUCHU PROGRAMOWEGO*

WOJCIECH BLAJER

Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu

Praca podejmuje zagadnienie ścisłej realizacji programowego ruchu samolotu. Nakładając na ruch samolotu odpowiednie warunki, czyli więzy programowe, poszukiwano takiego modelu sterowania, który zapewniłby ścisłą ich realizację. Zadanie rozwiązano dla modelu samolotu sztywnego, sterowanego parametrycznie. Sformułowano kryteria realizowalności sterowania w założonym ruchu programowym. Warunki nakładane na układ przez więzy programowe przekształcono do odpowiednich równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na funkcje parametrów sterowania.

1. Wstęp

Najczęściej podejmowanym zagadnieniem numerycznej symulacji sterowanego ruchu samolotu jest badanie odpowiedzi zamodelowanego układu na narzucony model sterowania [2, 10, 12]. Z punktu widzenia symulacji konkretnego manewru czy figury akrobacji lotniczej, istotnym jest jednak przyjęcie odpowiedniego modelu sterowania. Najczęściej znane są tylko ogólne zasady sterowania samolotem przy wykonywaniu poszczególnych manewrów. Empiryczny dobór ścisłych przebiegów czasowych wartości parametrów sterowania, powodujących dokładną realizację założonego manewru, jest praktycznie niemożliwy. Oczywiście model sterowania można uściślić poprzez kolejne jego poprawki lub też zapewnienie sprzężeń pomiędzy parametrami sterowania i stanem symulowanego lotu (najczęściej odpowiada to modelowym reakcjom pilota lub autopilota na stan lotu). W każdym przypadku symulowany ruch odwzorowywać jednak będzie zamierzony manewr ze skończoną dokładnością.

W pracy podjęto się rozwiązanie zagadnienia odwrotnego. Przyjmując jako wyjściowe odpowiednie warunki nakładane na ruch samolotu, poszukiwano takiego modelu sterowania, który zapewniłby ścisłą realizację ruchu określonego tymi warunkami. Narzucone

* Fragmenty pracy przedstawione były w formie referatu na XII Konf. „Drgania w układach fizycznych”, Poznań—Błażejewko, 1986.

na układ warunki rozumieć należy jako więzy programowe [5, 6, 7], czyli analityczne związki czasu, współrzędnych układu oraz ich pochodnych. W takim rozumieniu ruch programowy, czyli ruch zgodny z więzami, jest ruchem, który w każdej chwili spełnia nałożone na niego więzy. Jak zostanie pokazane w pracy, postulat realizacji więzów programowych implikuje odpowiednie warunki, spełnienie których w każdej chwili czasu zapewni realizację założonego ruchu programowego. Warunki te przekształcone być mogą do postaci równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na funkcje parametrów sterowania. W ten sposób każdy z więzów nakłada odpowiedni warunek na model sterowania samolotem. Reasumując, każdy model sterowania wypełniający warunki nakładane przez narzucone więzy programowe stanowić będzie rozwiązanie zagadnienia podjętego w pracy.

Zagadnienie rozwiązano dla modelu samolotu sztywnego ze sztywnymi układami sterowania. Sterowanie realizowano uzależniając prawe strony równań ruchu samolotu od poszczególnych parametrów sterowania. Do rozważań przyjęto przy tym równania ruchu wyprowadzone w quasi-współrzędnych dowolnego układu własnego samolotu.

Prezentowana praca jest rozwinięciem i uogólnieniem zagadnień podjętych w [1, 3, 4]. Prace te, a w szczególności [1], stanowią też przykład praktycznego wykorzystania teoretycznego modelu przedstawionego poniżej.

2. Równania ruchu samolotu swobodnego

W zagadnieniach dynamiki ruchu samolotu najczęściej stosowane są równania ruchu wyprowadzone w quasi-współrzędnych wybranego układu własnego. Równania te można zapisać jako [9, 10, 12]:

$$\mathbf{M}\dot{\omega} + \mathbf{B}\mathbf{M}\omega = \mathbf{Q}^*, \quad (1)$$

gdzie zgodnie z cytowanymi powyżej pracami: \mathbf{M} — stałowspółczynnikowa macierz bezwładności, ω — wektor quasi-prędkości, elementami którego są składowe prędkości liniowej i kątowej samolotu w przyjętym układzie odniesienia, \mathbf{B} — macierz sprzężeń dynamicznych, której elementami są składowe wektora ω , \mathbf{Q}^* — wektor sił uogólnionych na kierunkach quasi-współrzędnych.

Przyjmuje się, że źródłem zewnętrznych oddziaływań na samolot w locie są siły i momenty aerodynamiczne, siła ciężkości oraz siły i momenty od zespołu napędowego. Wartości tych oddziaływań zależą od aktualnego stanu lotu samolotu oraz, z wyjątkiem siły grawitacyjnej, od aktualnych wartości parametrów sterowania. Wektor sił uogólnionych zapisać można wówczas w formie:

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{s}), \quad (2)$$

gdzie: \mathbf{q} — wektor współrzędnych uogólnionych samolotu, \mathbf{s} — wektor niezależnych parametrów sterowania. Najczęściej składowymi wektora \mathbf{s} są wartości wychyleń lotek, steru wysokości i kierunku oraz siła ciągu silnika (lub wymiennie prędkość kątowa obrotów silnika). Czasami jako parametry sterowania wyróżnia się też kąt wychylenia klap, wielkość wysunięcia hamulców aerodynamicznych i inne. Oczywistym jest, że przy wyko-

nywaniu poszczególnych manewrów w locie, tylko część kanałów sterowania jest wykorzystywana. W dalszej części pracy przyjmowane będzie, że wektor s jest b -elementowy.

Wektor prędkości uogólnionych \dot{q} związany jest z wektorem quasi-prędkości ω poprzez zależność:

$$\dot{q} = A\omega, \quad (3)$$

gdzie A — macierz o współczynnikach zależnych od q .

Wykorzystując wzory (1)-(3) oraz uwzględniając uwagi poczynione powyżej, pełne równania ruchu samolotu dla numerycznej symulacji lotu można zapisać w formie układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu o postaci normalnej:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= F(\omega, q, s), \\ q &= A(q)\omega, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie $F = M^{-1}(Q^* - BM\omega)$. Równania o powyższej postaci (wraz z odpowiednimi warunkami początkowymi) stanowią zwykle wyjście do numerycznej symulacji nieustalonych ruchów samolotu. Aktualne wartości wektora stanu $[\omega, q]^T$ zależą przy tym od nałożonego na układ modelu sterowania, czyli przebiegów zmian elementów wektora s . Najczęściej funkcje te przyjmuje się jako $s = s(\omega, q, t)$, gdzie t — czas.

3. Więzy programowe i warunki nakładane przez więzy

W pracy przyjęto, że narzucony na ruch układu program, realizację którego postuluje się, opisany jest przez a niezależnych od siebie związków analitycznych:

$$g^*(\omega, q, t) = 0. \quad (5)$$

Każdy ze związków g_1, \dots, g_a wyraża sobą jeden więz programowy, którego równanie ma być spełnione podczas symulowanego ruchu. Zakłada się, że funkcje więzów są co najmniej klasy C^1 , a rząd macierzy $\partial g^*/\partial \omega$ w obszarze określoności ω i q jest dla dowolnego czasu t równy a . Pomijając na razie pełniejszą analizę co do maksymalnej ilości więzów programowych, wynika stąd, że nie może ona przekroczyć ilości stopni swobody układu. Indeks*, podobnie jak w równaniu (2), oznacza, że równania (5) nie zależą jawnie od prędkości uogólnionych. Można to zawsze uzyskać stosując podstawienie (3).

Równanie (5) reprezentuje zbiór więzów kinematycznych o dowolnej postaci. Objęty może też być tym przypadek dowolnej postaci więzu geometrycznego, czyli

$$f_i(q, t) = 0. \quad (6)$$

Postulując mianowicie, ażeby w chwili $t = 0$ układ spełniał warunek więzu, czyli $f_i(q_0, 0) = 0$, warunek (6) można przekształcić do jego równoważnej formy kinematycznej [7]

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial q} \right)^T A\omega + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

która to forma jest równoważna zapisowi (5). W ten sposób dowolny zbiór więzów programowych geometrycznych i kinematycznych można zapisać w jednolitej formie. Oczywiście więzy geometryczne narzucają dodatkowe warunki na położenie układu w chwili $t = 0$, a równania ich muszą być co najmniej klasy C^2 .

Jeśli układ ma realizować narzucony program, równania więzów (5) muszą być uwzględnione w procesie ruchu opisanego różniczkowymi równaniami [4]. W odróżnieniu od więzów materialnych, w przypadku których ruch zgodny z więzami wymuszany jest poprzez reakcje więzów [7], więzy programowe są czystymi związkami analitycznymi wyrażającymi warunki jakie winny spełnić rozwiązania odnośnych równań ruchu. W tym przypadku reakcje więzów programowych (traktowanych jako idealne więzy materialne), które mogłyby być traktowane jako dodatkowe siły sterujące [5, 6, 7], wymuszające ruch zgodny z więzami, nie mają fizycznego sensu. Ruch programowy winien przebiegać tak, by reakcje więzów programowych w sensie Appela-Czetajewa tożsamościowo równały się zeru. Fizycznie bowiem reakcji takich być nie może. Realizację narzuconego programu ruchu zapewnić można jedynie poprzez dobór odpowiedniego modelu sterowania. W pracy wykazano możliwość doboru takiego modelu.

Równania więzów programowych (5) narzucają ograniczenia również na quasi-przyspieszenia, mianowicie [5, 6, 7]:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial \omega}\right)^T \dot{\omega} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Jeżeli założymy, że w chwili $t = 0$ układ spełnia nałożone więzy, czyli:

$$\mathbf{g}^*(\omega_0, \mathbf{q}_0, 0) = 0, \quad (9)$$

ruch programowy realizowany będzie jeśli w dowolnej chwili czasu t spełnione będą zależności (8). Podstawiając do tych równań wartości na $\dot{\omega}$ i $\dot{\mathbf{q}}$ zgodnie z (4), przekształcając się one do następującej postaci:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial \omega}\right)^T \mathbf{F} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \mathbf{A}\omega + \frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami, równania (10) są a zależnościami, które można zapisać symbolicznie jako:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^*(s, \omega, \mathbf{q}, t) = 0. \quad (11)$$

Reasumując, jeśli w chwili początkowej $t = 0$ układ spełnia więzy, czyli prawdziwe są równania (9), ruch programowy opisany związkami (5) realizowany będzie ściśle gdy w każdej chwili czasu wypełniane będą warunki (11). Te ostatnie wynikają z ograniczeń nakładanych przez więzy na wektor stanu układu równań różniczkowych (4). W dalszej części pracy warunki (11) nazywane będą więzami dynamicznymi.

Wyrażenia (11) mają charakter ogólny. W szczególnym przypadku mogą one nie zależeć jawnie o niektórych lub nawet wszystkich parametrów sterowania [1, 3, 4]. Dotychczas nie dyskutowano też sprawy wzajemnych proporcji długości wektorów s i \mathbf{g}^* . Zagadnienia te rozpatrzone będą w następnym rozdziale.

4. Warunki więzów programowych jako ograniczenia nakładane na model sterowania samolotem

Traktując poszczególne parametry sterowania $s = [s_1, \dots, s_b]^T$ jako dodatkowe zmienne, układ równań (4) oraz związek (11) traktować można jako $2n+a$ zależności na $2n+b$

zmiennych, gdzie n — ilość stopni swobody. Wnioskować stąd można, że podstawowym warunkiem realizowalności sterowania w ruchu programowym jest, by ilość nałożonych więzów była nie większa niż ilość niezależnych kanałów sterowania. Wcześniej stwierdzono już, że ilość więzów programowych nie może przekroczyć ilości stopni swobody układu. Ostatecznie więc, najogólniejszy warunek konieczny realizowalności sterowania w ruchu programowym można sformułować następująco:

$$a \leq b \leq n. \quad (12)$$

Nie jest to oczywiście warunek wystarczający realizowalności sterowania. Z drugiej strony a zależności typu (11) determinować będzie tylko a parametrów sterowania. Pozostałe $b - a$ parametrów sterowania, z punktu widzenia realizacji programu (5), może być przyjęta dowolnie. Na funkcje zmian tych parametrów będą nakładane jedynie ograniczenia co do odpowiedniej klasy funkcji.

Rozważmy w pierwszym kroku przypadek, gdy układ warunków (11) zależy jawnie od co najmniej a parametrów sterowania oraz daje się rozwikłać ze względu na a parametrów sterowania $\tilde{s} = [\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_a]^T$. Inaczej mówiąc, ze związków (11) można wyznaczyć a zależności typu:

$$\tilde{s} = \tilde{s}(\omega, q, \tilde{\tilde{s}}, t), \quad (13)$$

gdzie $\tilde{\tilde{s}} = [\tilde{\tilde{s}}_1, \dots, \tilde{\tilde{s}}_{b-a}]^T$ — wektor pozostałych $b - a$ parametrów sterowania, którego elementy, z punktu widzenia realizacji więzów programowych (5), mogą być przyjęte dowolnie jako

$$\tilde{\tilde{s}} = \tilde{\tilde{s}}(\omega, q, t). \quad (14)$$

Uwzględniając powyższe, warunki (13) nakładane na a kanałów sterowania, a wynikające bezpośrednio z równań więzów dynamicznych (11), są funkcjami typu:

$$\tilde{s} = \tilde{s}^*(\omega, q, t). \quad (15)$$

Przyjęte a priori funkcje $\tilde{\tilde{s}}$ muszą być przy tym co najmniej ciągłe w całym zakresie określoności.

W przypadku tym układ równań (4), odpowiedź którego realizować będzie ściśle program (5), przekształcić można do postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= F(\omega, q, \tilde{s}, \tilde{\tilde{s}}) = F^*(\omega, q, t), \\ \dot{q} &= A(q)\omega, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie F^* — funkcje prawych stron odpowiednich równań układu (4) po wstawieniu (14) i (15). Wartości początkowe wektora stanu układu (16) muszą być przy tym dobrane tak, ażeby zachowane były warunki (9). Tym samym związki (15) umożliwiają wyznaczenie ścisłego modelu sterowania zapewniającego realizację programu (5).

W przypadku ogólnym układ warunków (11) nie musi dać się efektywnie rozwikłać względem a parametrów sterowania (nawet wówczas, gdy układ ten zależy jawnie od co najmniej a parametrów sterowania). Warunki więzów dynamicznych mogą poza tym zależeć jawnie od mniejszej niż a liczby parametrów sterowania (jak np. w pracach [1, 3, 4]). W końcu, zadanie sterowania w zadanym ruchu programowym może okazać się nierealizowalne. Poniżej starano się rozważyć to zagadnienie w miarę ogólnie. Na wstępie zało-

żono, że spełniony jest warunek $a \leq b \leq n$ oraz że układ równań (11), bez względu na powód, nie można efektywnie rozwinąć względem a parametrów sterowania.

Narzucając warunek realizacji więzów dynamicznych w chwili $t = 0$, czyli:

$$w^*(s_0, \omega_0, q_0, 0) = 0, \quad (17)$$

ruch zgodny z więzami realizowany będzie wówczas, gdy w każdej chwili czasu spełniane będą zależności różniczkowe:

$$\frac{dw^*}{dt} = \left(\frac{\partial w^*}{\partial s} \right)^T \dot{s} + \left(\frac{\partial w^*}{\partial \omega} \right)^T \dot{\omega} + \left(\frac{\partial w^*}{\partial q} \right)^T \dot{q} + \frac{\partial w^*}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

Jeśli dokonać analogicznych podstawień na $\dot{\omega}$ i \dot{q} jak przy przejściu od wzoru (8) do (10), równania (18) można przedstawić jako ogólne zależności typu:

$$\dot{w}^*(\dot{s}, s, \omega, q, t) = 0. \quad (19)$$

Dokonując w analogiczny sposób m -krotnego różniczkowania wyjściowych zależności (11) otrzymać można:

$$w^{*(m)}(s_1, \dots, s_1^{(m_1)}, \dots, s_b, \dots, s_b^{(m_b)}, \omega, q, t) = 0, \quad (20)$$

gdzie $m_1, \dots, m_b \leq m$. Żądać należy przy tym, ażeby spełnione były następujące warunki początkowe:

$$w^{*(i)}(s_0, \dot{s}_0, \dots, s_0^{(i)}, \omega_0, q_0, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (21)$$

Jeśli dla pewnego m układ równań (20) da się rozwinąć względem najwyższych pochodnych a parametrów sterowania, układ ten można przedstawić w postaci normalnej [8, 11]:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_j^{(m_j)} = f_j(\ddot{s}_1, \dots, \ddot{s}_1^{(m_1-1)}, \dots, \ddot{s}_a, \dots, \ddot{s}_a^{(m_a-1)}, \ddot{s}_{a+1}, \dots, \ddot{s}_{a+1}^{(m_{a+1})}, \dots, \ddot{s}_b, \dots, \ddot{s}_b^{(m_b)}, \omega, q, t), \\ j = 1, \dots, a, \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie: s i \ddot{s} są definiowane analogicznie jak we wzorach (13) i (14). Warunkiem koniecznym umożliwiającym przejście od wzoru (20) do (22) jest przy tym, ażeby

$$\det \left(\frac{\partial w^{*(m-1)}}{\partial s} \right) \neq 0, \quad (23)$$

gdzie:

$$\left(\frac{\partial w^{*(m-1)}}{\partial s} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1^{*(m-1)}}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial w_1^{*(m-1)}}{\partial s_a} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial w_a^{*(m-1)}}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial w_a^{*(m-1)}}{\partial s_a} \end{bmatrix}.$$

Wynika z powyższego między innymi, że warunki $w^{*(m-1)}$ muszą zależeć jawnie od co najmniej a parametrów sterowania.

Ponieważ parametry sterowania \ddot{s} mogą być, z punktu widzenia realizacji więzów, dowolnymi funkcjami typu (14) (ale odpowiedniej klasy — C^{m_k} , gdzie $m_k = m_{a+1}, \dots, m_b$), zależności (22) są w istocie następującymi:

$$\ddot{s}_j^{(m_j)} = f_j(\ddot{s}_1, \dots, \ddot{s}_1^{(m_1-1)}, \dots, \ddot{s}_a, \dots, s_a^{(m_a-1)}, \omega, q, t), \quad j = 1, \dots, a. \quad (24)$$

5. Wnioski

W pracy przedstawiono ogólny model matematyczny wyznaczania modelu sterowania samolotem w ruchu programowym. Zagadnienie może być rozszerzone również na inne układy sterowane parametrycznie. Sens metody nie uległby też zmianie gdyby równania ruchu układu wyprowadzone były w układzie współrzędnych uogólnionych.

Rozwiązanie podjętego zagadnienia oparto na specyficznym podejściu do zagadnienia więzów nałożonych na układ. W pojęciu klasycznym oddziaływanie więzów na układ realizuje się poprzez reakcje więzów, czyli dodatkowe siły (obok sił czynnych) wymuszające ruch zgodny z więzami. W podobny sposób potraktować można ruch programowy układu sterowanego siłami zewnętrznymi. Siły sterujące utożsamiać należałoby w takim wypadku z siłami reakcji więzów programowych traktowanymi jako idealne więzy materialne. Zagadnienie to rozważone jest m.in. w pracach [5, 6]. W rozważanym przypadku ruchu samolotu, albo ogólniej układu sterowanego parametrycznie, podejście takie nie ma fizycznego sensu. Wartości parametrów sterowania wpływają bezpośrednio na wielkość oddziaływań zewnętrznych. Zadanie rozwiązać można jedynie poprzez odpowiedni dobór modelu sterowania, zapewniających taką kreację sił czynnych, że powodować one będą ruch ściśle realizujący nałożony program. Ostatni warunek wyrażają sobą równania więzów dynamicznych (11). Model matematyczny opisany w rozdziale 4 pozwala (jeśli sterowanie jest realizowalne) na wyznaczenie poszukiwanego modelu sterowania.

W pracy stwierdzono, że każdy krok różniczkowania więzów dynamicznych w istotny sposób komplikuje zapis odpowiednich warunków $w^{*(i)}$. W porównaniu z zaprezentowanym modelem, w pewnych przypadkach układ warunków $w^{*(m-1)}$ może dać się rozwinąć względem najwyższych pochodnych oraz funkcji a parametrów sterowania \tilde{x} . Uzyskany w ten sposób układ równań różniczkowych ze względu na część elementów wektora \tilde{x} oraz funkcji zmian pozostałych elementów tego wektora będzie równoważny układowi (22). Rząd równań różniczkowych obniżony będzie przy tym o jeden, a część parametrów sterowania wyznaczona będzie bezpośrednio. Odpowiedniemu uproszczeniu ulegną wówczas również różniczkowe równania ruchu samolotu realizującego program (5), czyli równania (25). Przypadek ten najlepiej pokazany jest w pracy [1].

Zaprezentowana metoda ma charakter czysto analityczny. Uzyskane tą drogą modele sterowania w zadanym ruchu programowym mogą nie być realizowalne w praktyce, tzn. mogą na przykład wykroczać poza eksploatacyjne zakresy zmian parametrów sterowania.

Podjęte zagadnienie może mieć szerokie zastosowanie przy symulacji niustalonych ruchów samolotu. W szczególności dotyczy to prawidłowego modelowania figur akrobacji lotniczej oraz manewrów w locie. Pewną trudność stanowić może przy tym analityczne sformułowanie warunków więzów programowych.

Literatura

1. W. BŁAJER, *Numeryczna symulacja programowego ruchu samolotu w pętli pionowej*, Mech. Teoret. i Stos. 4, 25 (1987).
2. W. BŁAJER, J. MARYNIAK, *Modelowanie matematyczne sterowanego ruchu samolotu w pętli*, zb. ref. XXIV Symp. „Modelowanie w mechanice”, Gliwice—Szczyrk 1985.

3. W. BLAJER, J. MARYNIAK, J. PARCZEWSKI, *Modelowanie programowego ruchu samolotu w pętli*, zb. ref. XXV Symp. „Modelowanie w mechanice”, Gliwice — Kudowa Zdr. 1986.
4. W. BLAJER, J. PARCZEWSKI, *Model matematyczny wyznaczania funkcji sterowania samolotem w pętli*, II Ogólnopolska Konf. „Mechanika w lotnictwie”, Warszawa 1986, Mech. Teoret. i Stos., 1-2, 25 (1987).
5. DO SANH, *On the Equations of Motion of a Controlled Mechanical System*, Zag. Drgań Niel., 21 (1983).
6. DO SANH, *On the Motion of Controlled Mechanical Systems*, Учену Механику, 2, 7 (1984).
7. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
8. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
9. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1975.
10. J. MARYNIAK, W. BLAJER, *Numeryczna symulacja korkociągu samolotu*, Mech. Teoret. i Stos., 2/3, 21 (1983).
11. J. MUSZYŃSKI, A. D. MYSKIS, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1984.
12. Z. PATURSKI, M. ZŁOCKA, *Symulacja numeryczna sterowanego ruchu samolotu*, zb. ref. XXVI Symp. „Modelowanie w mechanice”, Gliwice — Szczyrk 1985.

Р е з ю м е

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЁТОМ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЙ ТОЧНОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОГРАМНОГО ДВИЖЕНИЯ

В работе рассматривается проблема точной реализации программногo движения самолёта. Программа движения была принята как комплекс кинематических связей произвольного вида. Представлен способ определения модели управления самолётом, обеспечивающей реализацию программы. Проблема решена для жёсткого самолёта, управляемого параметрами.

S u m m a r y

DETERMINATION OF THE MODEL OF AIRPLANE CONTROL ENSURING THE EXACT REALIZATION OF A PROGRAM MOTION

In the paper the problem of exact realization of a program motion by an airplane has been considered. The program of motion was meant as a set of conditions imposed on the motion, or in other words a set of program constraints. The model of airplane control ensuring the simulated motion be consistent with the program constraint equations was determined. The problem was solved for a rigid airplane controlled by parameters. The criteria of control realizability in a certain program motion were also formulated. The program constraint conditions imposed on the system were transformed into the equivalent set of differential equations determining functions of control parameters.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 kwietnia 1986 roku.

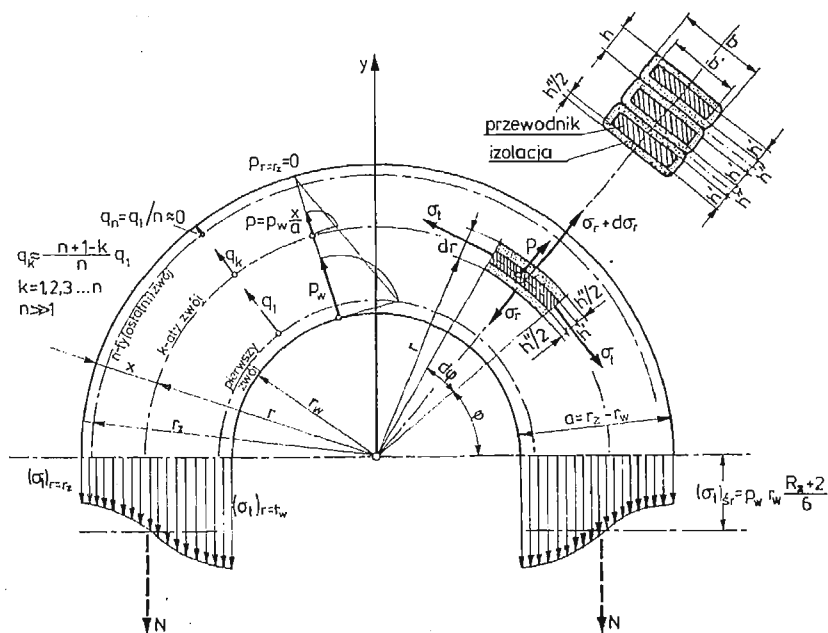
OKREŚLENIE NAPRĘŻEŃ W CEWCE TRANSFORMATORA ROZCIĄGANEJ NA SKUTEK DZIAŁANIA PROMIENIOWYCH SIŁ ELEKTRODYNAMICZNYCH

TADEUSZ GAŁKIEWICZ

Politechnika Łódzka

Wprowadzenie

W pracy wyprowadzone zostały wzory na naprężenia występujące w cewce transformatora narażonej na działanie elektrodynamicznych odśrodkowo skierowanych sił zwarciowych. Wzory podane zostały w wielkościach bezwymiarowych dzięki czemu poszczególne rozwiązania dotyczą nie jednej cewki lecz pewnej grupy cewek. Oryginalnością pracy jest potraktowanie cewki jako jednolitej ortotropowej tarczy pierścieniowej obciążonej siłami objętościowymi zmieniającymi się wg trójkąta (rys. 1).



Rys. 1.

1. Wstęp

Uzwojenie transformatora składa się z szeregu ułożonych na sobie współosiowo cewek. W celu zwiększenia intensywności chłodzenia transformatora kolejne cewki tworzące uzwojenie podzielone są międzycewkowymi wstawkami dystansowymi. Uzwojenia dużych transformatorów sprasowane są w kierunku osiowym specjalnymi śrubami osadzonymi w jarzmach rdzenia. W transformatorze są dwa rodzaje uzwojeń, uzwojenia wewnętrzne i zewnętrzne. Cewki tych uzwojeń powinny być tak zaprojektowane aby siły występujące w czasie ewentualnego elektrycznego zwarcia nie powodowały uszkodzeń zwojów. W czasie zwarcia transformatora cewki obciążone są siłami elektrodynamicznymi działającymi na uzwojenie w kierunkach promieniowych i osiowym. Uzwojenia wewnętrzne obciążone są promieniowymi siłami dośrodkowymi, natomiast uzwojenie zewnętrzne — siłami odśrodkowymi.

W niniejszej pracy analizie wytrzymałościowej poddane zostały cewki uzwojeń zewnętrznych tzn. cewki, w których siły dynamiczne działając odśrodkowo powodują rozciąganie zwojów. Analizowano cewki utworzone ze ściśle nawiniętych na siebie zwojów. Przyjęto, że przekrój poprzeczny przewodnika, z którego wykonane jest uzwojenie ma kształt prostokąta o wymiarach $b' \times h'$. Przewodnik owinięty jest izolacją o grubości $h''/2$, czyli grubość izolacji między kolejnymi przylegającymi do siebie zwojami drutów cewki wynosi h'' , natomiast grubość zwoju $h = h' + h''$. W rozważaniach nie uwzględniono występowania naprężeń montażowych wynikających z wstępnego napięcia przewodu i z zakrzywienia przewodu przy nawijaniu cewki.

Wprowadzono oznaczenia:

- r_w — promień wewnętrzny cewki
 r_z — promień zewnętrzny cewki
 r, φ — współrzędne określające położenie punktu cewki
 u — przemieszczenie promieniowe punktu cewki
 a — grubość cewki (rys. 1) $a = r_z - r_w$
 b' — szerokość przekroju poprzecznego przewodnika (szerokość drutu)
 b — wysokość cewki
 h' — grubość przewodnika (grubość drutu)
 $h''/2$ — grubość izolacji przewodnika
 h'' — grubość izolacji między drutami kolejnych zwojów cewki
 h — grubość przewodu (grubość zwoju) $h = h' + h''$
 H — względna grubość zwoju odniesiona do grubości drutu h'
 n — liczba zwojów cewce
 E' — moduł Younga drutu
 E'' — moduł Younga izolacji

w wielkościach bezwymiarowych

- $R_w = r_w/r_w = 1$
 $R_z = r_z/r_w$
 $R = r/r_w$
 $U = u/r_w$
 $a/r_w = R_z - 1$
 $H = h/h' = 1 + h''/h'$
 ν' — liczba Poissona drutu
 ν'' — liczba Poissona izolacji (papieru: przyjęto $\nu'' = 0$)

E_t — moduł sprężystości cewki jako całości — w kierunku obwodowym

E_r — moduł sprężystości cewki jako całości — w kierunku promieniowym

ν_t, ν_r — odpowiednie liczby Poissona cewki — jako tarczy ortotropowej.

Cewkę potraktowano jako ortotropową tarczę pierścieniową, dla której to tarczy określono (w punkcie 2 niniejszej pracy) zastępcze stałe sprężystości w kierunku obwodowym i promieniowym. Każdej jednostce objętości cewki przyporządkowano pewną elektrodynamiczną siłę promieniową p . Siłę tę działającą na jednostkę objętości znajdującą się tuż przy wewnętrznej powierzchni cewki oznaczono przez p_w — czyli $p_w = p_{r=r_w}$.

Siłę elektrodynamiczną przypadającą na jednostkę długości pierwszego od środka zwoju oznaczono przez q_1 . Przy dużej liczbie zwojów w cewce można przyjąć, że związek między p_w , q_1 , b' i h jest następujący:

$$p_w \approx q_1 / (b'h) \quad (1)$$

gdzie: b' — jest to wysokość pracująca cewki (szerokość przewodnika)

h — grubość zwoju

Przy obliczaniu cewek transformatorowych zakłada się istnienie liniowego rozkładu sił promieniowych. W cewce zewnętrznej największa odśrodkowa siła elektrodynamiczna występuje w pierwszym (wewnętrznym) zwoju. Siła ta maleje na grubości cewki wg trójkąta osiągając w ostatnim (n -tym, zewnętrznym) zwoju wartość bliską zeru. Zgodnie z rys. 1 i wzorem (1) można przyjąć, że:

$$p = p_w \frac{x}{a} = p_w \frac{r_z - r}{r_z - r_w} = p_w \frac{R_z - R}{R_z - 1} \approx \frac{q_1}{b'h} \frac{R_z - R}{R_z - 1} = \frac{q_1 r_w}{ab'h} (R_z - R), \quad (2)$$

gdzie: $R = r/r_w$, $R_z = r_z/r_w$.

W rzeczywistej cewce transformatorowej liczba zwojów $n \gg 1$, więc obciążenie k -tego (licząc od środka cewki) zwoju

$$q_k \approx \frac{n+1-k}{n} q_1, \quad p_k = \frac{q_k}{b'h} \approx \frac{n+1-k}{b'hn} q_1, \quad (3)$$

gdzie: $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Siła dynamiczna odśrodkowa działająca na element o wymiarach $rd\varphi \times dr \times b'$ (rys. 1) wynosi $dP = prd\varphi drb'$, gdzie jednostkowa siła objętościowa p określona jest wzorem (2). Z sumy rzutów sił na oś y (rys. 1) wynika, że siła normalna w przekroju poprzecznym cewki

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} \int \int dP \sin \varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{r_w}^{r_z} pr d\varphi dr b' \sin \varphi = \\ &= \frac{b'}{2} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_a^0 p_w \frac{x}{a} (r_z - x) (-dx) = p_w r_w \frac{ab'}{6} (R_z + 2) = \\ &= \frac{q_1 r_w^2}{6h} (R_z - 1)(R_z + 2) = q_1 r_w \frac{a}{6h} (R_z + 2) \end{aligned} \quad (4)$$

Średnie naprężenia obwodowe w cewce wynosi:

$$(\sigma_t)_{sr} = \frac{N}{ab'} = \frac{p_w r_w}{6} (R_z + 2) \quad (5a)$$

a w wielkościach bezwymiarowych:

$$(\sigma_t^*)_{sr} = \frac{(\sigma_t)_{sr}}{p_w r_w} = \frac{R_z + 2}{6}. \quad (5b)$$

Jeżeli przyjąć, że siłę normalną N w przekroju cewki przenoszą wyłącznie druty bez pomocy izolacji — to średnie naprężenie rozciągające w drutach cewki

$$(\sigma'_t)_{sr} = (\sigma_t)_{sr} H = p_w r_w \frac{H}{6} (R_z + 2) = \frac{q_1 r_w}{b' h'} \frac{R_z + 2}{6} = \frac{q_1 r_w}{b' h'} (\sigma_t^*)_{sr} \quad (6)$$

gdzie: $H = h/h'$.

2. Określenie zastępczych stałych sprężystości

W celu określenia zastępczych stałych sprężystości analizowanej tarczy (wykazującej cechy ortotropii konstrukcyjnej) uwzględniono, że jednostka długości zwoju pod wpływem jednokierunkowego rozciągania średnimi naprężeniami σ_t wydłuży się tyle co jednostka długości drutu poddanego naprężeniom σ'_t — występującym w drucie,

czyli $\varepsilon_t = \varepsilon'_t$, stąd $\sigma'_t/E' = \sigma_t/E_t$, a ponieważ

$$\sigma'_t = \sigma_t h/h' = \sigma_t H, \text{ więc} \quad (7)$$

$$E_t = E'/H. \quad (8)$$

Gdy zwój rozciągany jest jednokierunkowo wzdłuż jego osi wówczas grubość zwoju zmieni się o $\Delta h = -\nu_t \varepsilon_t h$, przy czym grubość drutu dozna zmiany o $\Delta h' = -\nu' \varepsilon'_t h'$. Ponieważ w cewkach $E''/E' \ll 1$, więc przyjęto, że w rozciągającym przewodzie całą siłę przenosi drut bez udziału izolacji — a zatem $\sigma'_t = 0$ i $\Delta h' = 0$. Z warunków: $\Delta h = \Delta h' + \Delta h''$, $\varepsilon_t = \varepsilon'_t$ wynika, że:

$$\nu_t = \nu'/H. \quad (9)$$

Jeżeli zwój poddany zostanie jednokierunkowemu poprzecznemu obciążeniu naprężeniami σ_r , to zmiana grubości zwoju wyniesie:

$$\Delta h = \frac{\sigma_r h'}{E'} + \frac{\sigma_r h''}{E''} = \frac{\sigma_r h}{E_r},$$

stąd:

$$E_r = E' \frac{H}{1 + (E'/E'')(H-1)}. \quad (10)$$

Zwój obciążony jednokierunkowo w poprzek naprężeniami σ_r doznaje w kierunku obwodowym jednostkowego odkształcenia $\varepsilon_t = -\nu_r \varepsilon_r = -\nu_r \sigma_r / E_r$. Odkształcenie to równe jest odkształceniu drutu, które wynosi $\varepsilon_t \approx -\nu' \sigma_r / E'$ (pominięto tu oddziaływanie izolacji). Po porównaniu ze sobą wzorów na ε_t i po uwzględnieniu związku (10) otrzymano;

$$\nu_r = \nu' \frac{H}{1 + (E'/E'')(H-1)}. \quad (11)$$

W modelu obliczeniowym występuje ortotropia konstrukcyjna, więc jak należało oczekiwać obowiązuje następująca zależność:

$$\nu_t/E_t = \nu_r/E_r. \quad (12)$$

3. Rozwiązanie zagadnienia

Cewkę transformatora potraktowano jako tarczę pierścieniową, wykonaną z materiału ortotropowego, obciążoną wyłącznie siłami objętościowymi — p (na obecnym etapie rozważań nie uwzględniono sił tarcia występujących na powierzchniach styku cewki z wstawkami dystansowymi).

Z sumy rzutów sił działających na element tarczy o wymiarach $r dp \times dr \times b'$ wynika ogólnie znane równanie różniczkowe:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_t) = -p, \quad \text{albo} \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r) - \sigma_t = -pr, \quad (13)$$

gdzie:

σ_r — są to naprężenia promieniowe w cewce,

σ_t — naprężenia obwodowe w modelu zastępczym cewki,

(należy pamiętać, że naprężenie w drucie w kierunku osi drutu wynosi $\sigma'_t = \sigma_t h/h' = \sigma_t H$).

Po wykorzystaniu wzoru (2) otrzymano

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_t) + p_w \frac{r_z - r}{r_z - r_w} = 0. \quad (14)$$

Jest to różniczkowe równanie równowagi wyrażone w naprężeniach chcąc wyrazić je przez przemieszczenia należy uwzględnić, że

$$\sigma_r = \frac{E_r}{1 - \nu_r \nu_t} (\varepsilon_r + \nu_t \varepsilon_t), \quad \sigma_t = \frac{E_t}{1 - \nu_r \nu_t} (\varepsilon_t + \nu_r \varepsilon_r), \quad (15)$$

gdzie:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}. \quad (16)$$

Po wprowadzeniu następujących wielkości bezwymiarowych:

$$U = \frac{u}{r_w}, \quad R = \frac{r}{r_w}, \quad R_w = R_{r=r_w} = 1, \quad R_z = R_{r=r_z} = \frac{r_z}{r_w}, \quad (17)$$

$$E_* = \frac{E_t}{E_r} = \frac{1}{H^2} \left[1 + \frac{E'}{E''} (H-1) \right], \quad \alpha = \sqrt{E_*} \quad (18)$$

$$p_* = \frac{p_w r_w}{R_z - 1} \frac{1 - \nu_r \nu_t}{E_r} \quad (19)$$

Otrzymano równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} - E_* \frac{U}{R^2} + p_*(R_z - R) = 0 \quad (20)$$

Okazuje się, że postać funkcji U spełniającej powyższe równanie zależy od wartości parametru E_* i tak:

A) gdy $E_* \neq 4$ i $E_* \neq 9$, wówczas

$$U = \frac{u}{r_w} = A_1 R^\alpha + A_2 R^{-\alpha} - \frac{P_*}{4-E_*} R_z R^2 + \frac{P_*}{9-E_*} R^3 \quad (21')$$

B) gdy $E_* = 4$

$$U = B_1 R^2 + B_2 R^{-2} + \frac{P_*}{16} R_z R^2 (1 - 4 \ln R) + \frac{P_*}{5} R^3 \quad (21'')$$

C) gdy $E_* = 9$

$$U = C_1 R^3 + C_2 R^{-3} + \frac{P_*}{5} R_z R^2 + \frac{P_*}{36} R^3 (6 \ln R - 1) \quad (21''')$$

W powyższych wzorach $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ są to stałe całkowania, które wyznacza się w warunkach brzegowych.

Wprowadzono oznaczenia:

$$\sigma_t^* = \sigma_t / (p_w r_w), \quad \sigma_r^* = \sigma_r / (p_w r_w).$$

Korzystając z zależności (15), (16), (17) bezwymiarowe naprężenia obwodowe σ_t^* wyrazić można przez E_* , R_z i R w sposób następujący

$$\sigma_t^* = \frac{\sigma_t}{p_w r_w} = \frac{E_t}{p_w r_w (1 - \nu_r \nu_t)} \left(\frac{U}{R} + \nu_r \frac{dU}{dR} \right) = \frac{E_*}{R_z - 1} \xi(R). \quad (22)$$

Postać funkcji $\xi(R)$ zależy od parametru E_*

A) gdy $E_* \neq 4$ oraz $E_* \neq 9$ wówczas:

$$\begin{aligned} \xi(R) = & \frac{A_1}{p_*} (1 + \alpha \nu_r) R^{\alpha-1} + \frac{A_2}{p_*} (1 - \alpha \nu_r) R^{-\alpha-1} - \frac{1}{4-E_*} (1 + 2\nu_r) R_z R + \\ & + \frac{1}{9-E_*} (1 + 3\nu_r) R^2 \end{aligned} \quad (23')$$

B) gdy $E_* = 4$ wówczas:

$$\begin{aligned} \xi(R) = & \frac{B_1}{p_*} (1 + 2\nu_r) R + \frac{B_2}{p_*} (1 - 2\nu_r) R^{-3} + \frac{1}{16} [(1 - 2\nu_r) - 4(1 + 2\nu_r) \ln R] R_z R + \\ & + \frac{1}{5} (1 + 3\nu_r) R^2 \end{aligned} \quad (23'')$$

C) gdy $E_* = 9$ wówczas:

$$\begin{aligned} \xi(R) = & \frac{C_1}{p_*} (1 + 3\nu_r) R^2 + \frac{C_2}{p_*} (1 - 3\nu_r) R^{-4} + \frac{1}{5} (1 + 2\nu_r) R_z R + \\ & + \frac{1}{36} [-(1 - 3\nu_r) + (1 + 3\nu_r) 6 \ln R] R^2 \end{aligned} \quad (23''')$$

Bezwymiarowe naprężenia promieniowe σ_r^* wynoszą

$$\sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{p_w r_w} = \frac{E_r}{p_w r_w (1 - \nu_r \nu_t)} \left(\frac{dU}{dR} + \nu_t \frac{U}{R} \right) = \frac{1}{R_z - 1} \psi(R) \quad (24)$$

Postać funkcji $\psi(R)$ zależy od wartości parametru E_* :

A) gdy $E_* \neq 4$ i $E_* \neq 9$ wówczas

$$\psi(R) = \frac{A_1}{p_*} (\alpha + \nu_t) R^{\alpha-1} + \frac{A_2}{p_*} (-\alpha + \nu_t) R^{-\alpha-1} - \frac{1}{4-E_*} (2 + \nu_t) R_z R + \frac{1}{9-E_*} (3 + \nu_t) R^2 \quad (25')$$

B) gdy $E_* = 4$, wówczas

$$\psi(R) = \frac{B_1}{p_*} (2 + \nu_t) R + \frac{B_2}{p_*} (-2 + \nu_t) R^{-3} + \frac{1}{16} [(-2 + \nu_t) - (2 + \nu_t) 4 \ln R] R_z R + \frac{1}{5} (3 + \nu_t) R^2 \quad (25'')$$

C) gdy $E_* = 9$, wówczas

$$\psi(R) = \frac{C_1}{p_*} (3 + \nu_t) R^2 + \frac{C_2}{p_*} (-3 + \nu_t) R^{-4} + \frac{1}{5} (2 + \nu_t) R_z R + \frac{1}{36} [6(3 + \nu_t) \ln R + (3 - \nu_t)] R^2 \quad (25''')$$

4. Określenie stałych całkowania

Dla rozważanych tu cewek transformatorowych przyjęto następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_w} = 0 & \text{ — lub w wielkościach bezwymiarowych } (\sigma_r^*)_{R=R_w=1} = 0 \\ (\sigma_r)_{r=r_z} = 0 & \text{ — lub w wielkościach bezwymiarowych } (\sigma_r^*)_{R=R_z} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Po wykorzystaniu tych warunków okazało się, że:

A) gdy $E_* \neq 4$ i $E_* \neq 9$ wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{p_*} &= \frac{1}{(\alpha + \nu_t)(R_z^{2\alpha} - 1)} \left[\frac{2 + \nu_t}{4 - E_*} (R_z^{\alpha+3} - R_z) - \frac{3 + \nu_t}{9 - E_*} (R_z^{\alpha+3} - 1) \right] \\ \frac{A_2}{p_*} &= \frac{1}{(-\alpha + \nu_t)(R_z^{2\alpha} - 1)} \left[\frac{2 + \nu_t}{4 - E_*} (R_z^{2\alpha+1} - R_z^{\alpha+3}) - \frac{3 + \nu_t}{9 - E_*} (R_z^{2\alpha} - R_z^{\alpha+3}) \right] \end{aligned} \quad (27')$$

B) gdy $E_* = 4$, wówczas:

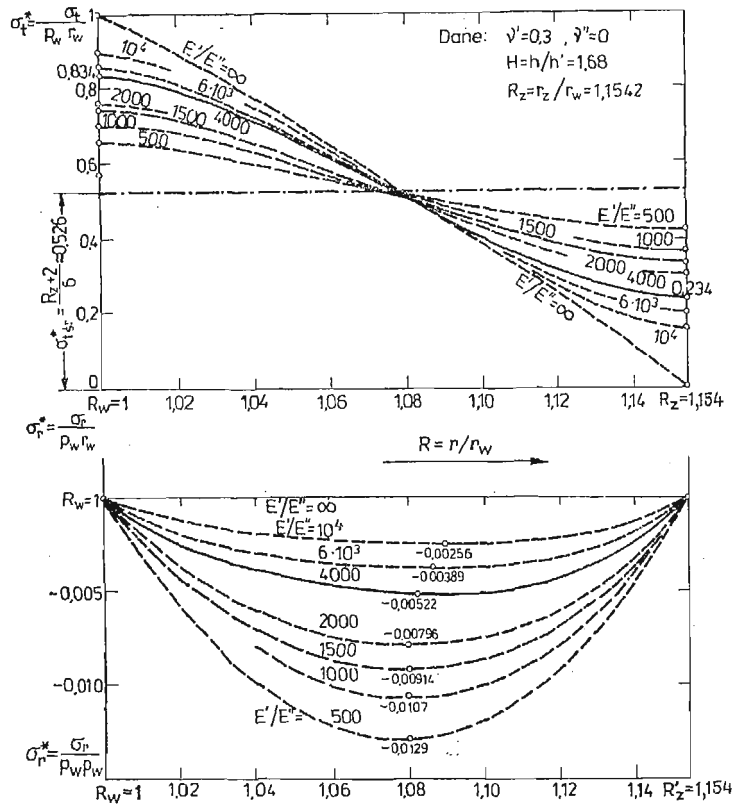
$$\begin{aligned} \frac{B_1}{p_*} &= \frac{1}{(2 + \nu_t)(R_z^4 - 1)} \left[-\frac{2 + \nu_t}{16} R_z (R_z^4 - 1) + \frac{2 + \nu_t}{4} R_z^2 \ln R_z - \frac{3 + \nu_t}{5} (R_z^5 - 1) \right] \\ \frac{B_2}{p_*} &= \frac{R_z^4}{(-2 + \nu_t)(R_z^4 - 1)} \left[-\frac{2 + \nu_t}{4} R_z \ln R_z + \frac{3 + \nu_t}{5} (R_z - 1) \right] \end{aligned} \quad (27'')$$

C) gdy $E_* = 9$, wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{p_*} &= \frac{1}{(3 + \nu_t)(R_z^6 - 1)} \left[-\frac{2 + \nu_t}{5} R_z (R_z^5 - 1) - \frac{3 + \nu_t}{6} R_z^6 \ln R_z - \frac{3 - \nu_t}{36} (R_z^6 - 1) \right] \\ \frac{C_2}{p_*} &= \frac{R_z^6}{(-3 + \nu_t)(R_z^6 - 1)} \left[-\frac{2 + \nu_t}{5} (R_z - 1) + \frac{3 + \nu_t}{6} \ln R_z \right] \end{aligned} \quad (27''')$$

5. Określenie rzeczywistych naprężeń występujących w drutach zwojów cewki

Po określeniu stałych całkowania funkcje σ_r^* (22) i σ_r^* (24) przedstawić można w postaci wykresów. Przebieg funkcji zależy od parametrów R_z , H , E_* , ν_r , ν_t , a więc od r_z , r_w , h' , h'' , E' , E'' , ν' , ν'' . Wykresy takie zostały wykonane przykładowo dla cewek, dla których $\nu' = 0,3$, $\nu'' = 0$, $H = h/h' = 1,68$, $R_z = 1,154$, $E'/E'' = 500, 1000, 1500, 2000, 4000, 6000, 10000, \infty$ i przedstawione na rys. 2.



Rys. 2.

Naprężenia wzdłużne w drucie k -tego (licząc od środka cewki) zwoju wynoszą:

$$\sigma'_{tk} = p_w r_w H (\sigma'_t)_{R=R_k} \approx \frac{q_1 r_w}{b' h'} (\sigma'_t)_{R=R_k}, \quad k = 1, 2, 3 \dots n. \quad (28)$$

w omawianej tu cewce naprężenia obwodowe mają wartość dodatnią co oznacza, że druty są rozciągane.

Naprężenia poprzeczne w drucie k -tego zwoju (w cewce są to naprężenia promieniowe)

$$\sigma_{rk} = p_w r_w (\sigma_r^*)_{R=R_k} \approx \frac{q_1 r_w}{b' h'} (\sigma_r^*)_{R=R_k}. \quad (29)$$

Ponieważ sąsiadujące ze sobą zwoje cewki muszą do siebie przylegać, więc powinien być spełniony stałe warunek $\sigma_{rk} \leq 0$; należy przypomnieć (26), że szczegółowej analizie podane zostały tu cewki, dla których

$$(\sigma_r^*)_{R=R_w=1} = (\sigma_r^*)_{R=R_z} = 0$$

6. Ustalenie zakresu E_* w jakim mogą zmieniać się naprężenia w cewkach

Aby ocenić zakres w jakim mieszczą się naprężenia σ_t i σ_r należy rozpatrzyć dwa skrajne przypadki jakie teoretycznie mogłyby wystąpić: $E_* = 1$ i $E_* = \infty$.

Jeżeli $E_* = 1$ to analizowana tarcza jest tarczą izotropową. Przypadek ten dotyczy „cewek”, w których zwoje nie mają izolacji i ściśle do siebie przylegają. Wówczas $h'' = 0$, $H = 1 + h''/h' = 1$, $E_t = E_r = E'$, $v_t = v_r = v'$, $\alpha = \sqrt{E_*} = 1$.

Przypadek $E_* = \infty$ odnosi się do cewek, w których izolacja jest, lecz sztywność na ściskanie izolacji $E'' = 0$.

Powyższe dwa graniczne przypadki w rzeczywistych cewkach transformatorowych nie zdarzają się. Ograniczają one na wykresach $\sigma_t^*(R)$ obszar, w którym mieszczą się rozwiązania dotyczące rzeczywistych cewek.

Osobnego omówienia wymaga przypadek $E_* = \infty$. Zagadnienie to odpowiada przypadkowi cewek, w których przewody cewek mają nieskończenie podatną izolację czyli $E'' = 0$, $\sigma_r = 0$ — więc zwoje nie naciskają na siebie. Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia założono, że kolejne zwoje mają kształt zamkniętych kołowych pierścieni o średnim promieniu k -tego zwoju równym r_k , szerokości b' i grubości h' . (Faktyczne zwoje są spiralne co może być przyczyną ślizgania się kolejnych zwojów po sobie. W rzeczywistych cewkach występują pewne wstępne naciski na izolację, które — z racji istnienia tarcia — utrudniają przesuwanie się przewodów po sobie. Naprężenia w zwoju spiralnym są w przybliżeniu takie jak w zwoju o kształcie pierścienia).

Przy tak uproszczonym modelu cewki (tzn. gdy $E_* = \infty$) problem staje się zagadnieniem statycznie wyznaczalnym i wówczas dla każdego zwoju obowiązują łatwe do wyrowadzenia wzory:

$$q_1 \approx p_w b' h, \quad q_k = q_1 \frac{R_z - R}{R_z - 1}$$

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_t' = \frac{q_k r_k}{b' h'} = \frac{q_1 r_w}{b' h'} \frac{R(R_z - R)}{R_z - 1} \approx p_w r_w H \frac{R(R_z - R)}{R_z - 1} \quad (30)$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_t'}{H} = p_w r_w \frac{R(R_z - R)}{R_z - 1}; \quad \sigma_t^* = \frac{\sigma_t}{p_w r_w} = \frac{R(R_z - R)}{R_z - 1} \quad (31)$$

Ze wzoru powyższego wynika, że dla cewek, dla których $R_z \leq 2$ naprężenia rozciągające drut są największe w pierwszym zwoju, naprężenia te wynoszą

$$(\sigma_t)_{max} = (\sigma_t)_{R=1} = p_w r_w, \quad (\sigma_t')_{max} = (\sigma_t)_{max} H = p_w r_w H = \frac{q_1 r_w}{b' h'} \quad (32)$$

natomiast gdy $R_z > 2$ (czyli $r_z > 2r_w$), wówczas z analizy przebiegu funkcji σ_t (31) okazuje się, że maksymalne naprężenia rozciągające występują nie w pierwszym zwoju cewki

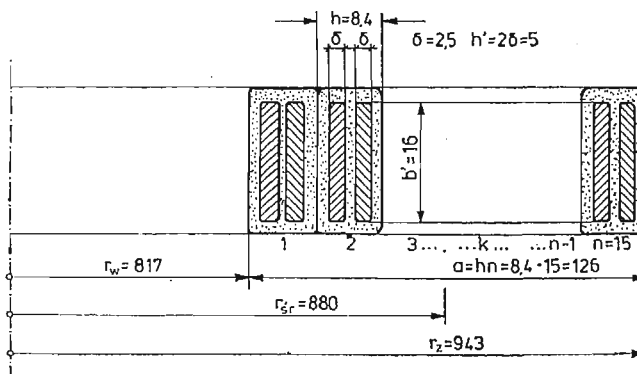
lecz w zwoju oddalonym od środka cewki o $R = 0,5 R_z$. W konkretnych przykładach przypadek cewek, dla których $R_z > 2$ — jako cewek w praktyce transformatorowej niespotykanych — nie wymaga analizowania.

7. Przykład liczbowy

Sposób korzystania z otrzymanych wzorów przedstawiony zostanie na konkretnym przykładzie. Określony zostanie stan naprężenia w cewce, dla której:

	w rzeczywistości	w wielkościach bezwymiarowych
promień wewnętrzny	$r_w = 817 \text{ mm}$	$R_w = r_w/r_w = 1$
promień zewnętrzny	$r_z = 943 \text{ mm}$	$R_z = r_z/r_w = 943/817 = 1,1542$
promień średni	$r_{sr} = (817 + 943)/2 = 880 \text{ mm}$	$R_{sr} = r_{sr}/r_w = 1,077$

Cewka wykonana jest z przewodu bliźniaczego o przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 3. Przewód składa się z dwóch jednakowych drutów, każdy o grubości $\delta = 2,5 \text{ mm}$

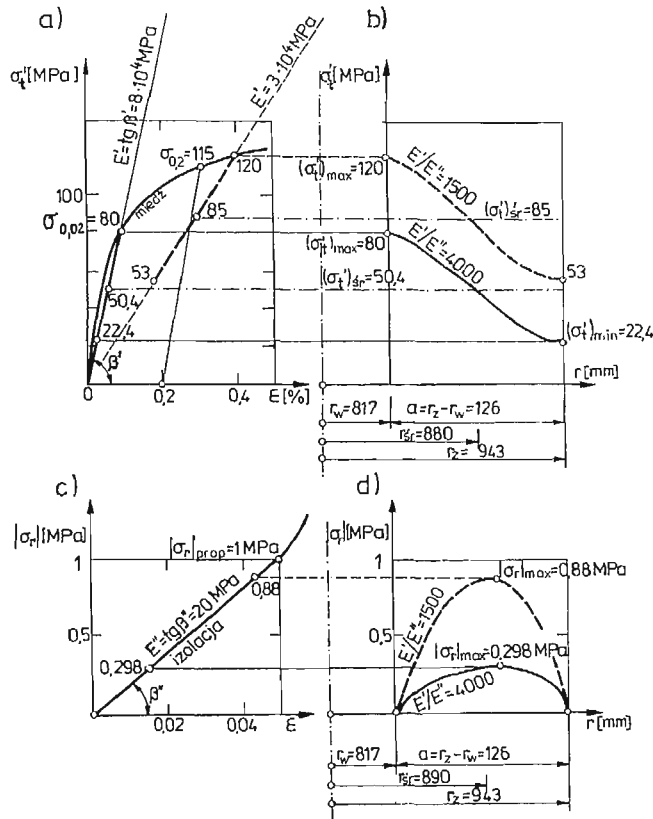


Rys. 3.

i szerokości $b' = 16 \text{ mm}$ owiniętych izolacją. Łączna grubość przewodu wynosi $h = 8,4 \text{ mm}$. Chcąc wykorzystać wyprowadzone tutaj wzory na naprężenia: $\sigma_r^*(22)$, $\sigma_r^*(24)$ należy dokonać podstawienia: $h' = 2\delta$

$$h' = 2\delta = 2 \cdot 2,5 \text{ mm} = 5 \text{ mm} \text{ — a więc } H = h/h' = 8,4/5 = 1,68$$

h' — jest to w przypadku przewodu bliźniaczego suma grubości dwóch drutów znajdujących się w tym przewodzie.



Rys. 4.

Na rys. 4a pokazany jest wykres rozciągania $\sigma'_t(\epsilon)$ miedzi, z której wykonane są druty analizowanej cewki, natomiast na rys. 4c, wykres ściskania $|\sigma_r|(\epsilon)$ papieru użytego na izolację. Interesujące nas własności materiałów użytych na cewkę są następujące:

- dla miedzi — umowna granica proporcjonalności $\sigma_{0,02} = 80$ MPa = 80 N/mm²
- umowna granica plastyczności $\sigma_{0,2} = 115$ MPa,

$$E' = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \quad \nu' = 0,3 \text{ (gdy } 0 < \sigma'_t \leq \sigma_{0,02}\text{)},$$

dla izolacji:

$$E'' = 20 \text{ MPa}, \quad \nu'' = 0 \text{ (gdy } 0 < \sigma_r \leq 1 \text{ MPa)}.$$

W rozpatrywanym przypadku $E'/E'' = 4000$, więc zgodnie ze związkami (9), (11), (18), (19):

$$\begin{aligned} \nu_t &= \frac{\nu'}{H} = \frac{0,3}{1,68} = 0,1786, & \nu_r &= \nu' \frac{H}{1 + (E'/E'')(H-1)} = \\ & & &= 0,3 \frac{1,68}{1 + 4000(1,68-1)} = \frac{1,852}{10^4} \end{aligned}$$

$$E_* = \frac{1}{H^2} \left[1 + \frac{E'}{E''} (H-1) \right] = \frac{1}{1,68^2} [1 + 4000(1,68-1)] = 964,1$$

$$\alpha = \sqrt{E_*} = 31,05$$

Powyższe wielkości wstawiono do zależności (27'), określono A_1/p_* , A_2/p_* a bezwymiarowe naprężenia obwodowe $\sigma_t^*(R)$ oraz promieniowe $\sigma_r^*(R)$ obliczono ze wzorów (23'), (22), (25'), (24). W taki sposób postąpiono nie tylko dla $E'/E'' = 4000$ lecz również dodatkowo dla $E'/E'' = 500, 1000, 1500, 2000, 6000, 10000$.

Z rys. 2 widać, że gdy $E'/E'' = 4000$ wówczas:

$$(\sigma_t^*)_{max} = (\sigma_t^*)_{R=1} \approx (\sigma_t^*)_{k=1} = 0,834, \quad (\sigma_t^*)_{sr} = 0,526,$$

$$(\sigma_t^*)_{min} = (\sigma_t^*)_{R=R_2} \approx (\sigma_t^*)_{k=n=15} = 0,234$$

$$(\sigma_r^*)_{max} = (\sigma_r^*)_{R=1,085} = -0,00522$$

Zgodnie ze wzorem (28) naprężenia rozciągające w drucie pierwszego (wewnętrznego) zwoju wynoszą

$$\sigma'_{t1} \approx (\sigma'_t)_{max} \approx \frac{q_1 r'_w}{b' h'} (\sigma_t^*)_{R=R_w=1}$$

Określone zostanie teraz do jakiej maksymalnej wartości obciążenia $q_1 = (q_1)_{prop}$ analizowana cewka nie dozna (praktycznie) trwałych odkształceń. Wynika to ze związku

$$(\sigma'_t)_{max} = \frac{(q_1)_{prop} r'_w}{b' h'} (\sigma_t^*)_{R=1} = \sigma_{0,02}$$

stąd

$$(q_1)_{prop} = \frac{\sigma_{0,02}}{(\sigma_t^*)_{R=1}} \frac{b' h'}{r'_w} = \frac{80}{0,834} \frac{16 \cdot 5}{817} \approx 9,39 \text{ N/mm}$$

przy tym obciążeniu:

$$(\sigma'_t)_{sr} = \frac{(q_1)_{prop} r'_w}{b' h'} (\sigma_t^*)_{sr} = \frac{9,39 \cdot 817}{16 \cdot 5} 0,526 \approx 50,4 \text{ N/mm}^2 = 50,4 \text{ MPa}$$

$$(\sigma'_t)_{min} = \frac{(q_1)_{prop} r'_w}{b' h'} (\sigma_t^*)_{min} = \frac{9,39 \cdot 817}{16 \cdot 5} 0,234 \approx 22,4 \text{ N/mm}^2 = 22,4 \text{ MPa}$$

Ze wzoru (29) znajduje się naciski na izolację. Wynoszą one

$$(\sigma_r)_{max} = \frac{(q_1)_{prop} r'_w}{b' h'} |\sigma_r|_{max} = \frac{9,39 \cdot 817}{16 \cdot 8,4} 0,00522 \approx 0,298 \text{ N/mm}^2 = 0,298 \text{ MPa}$$

W omawianym przypadku (np. 4c) obowiązuje prawo Hooke'a, gdyż

$$(\sigma_r)_{max} = 0,298 \text{ MPa} < |\sigma_r|_{prop} = 1 \text{ MPa}$$

Stan naprężenia w cewce, w której $(\sigma'_t)_{max} = \sigma_{prop} = \sigma_{0,02} = 80 \text{ MPa}$ pokazany jest na rysunkach 4b i 4d liniami ciągłymi.

Należy zauważyć, że w rzeczywistych cewkach w czasie zwarć transformatorów w zwojach występują na ogół stosunkowo duże trwałe odkształcenia, co oczywiście powoduje

рównież trwałe powiększanie się średnic cewek. W таких przypadkach $q_1 > (q_1)_{spr}$, $E' \neq \text{const}$, $E'' \neq \text{const}$ i wtedy wyprowadzone tu wzory przestają obowiązywać. Można (postępując w sposób omówiony wyżej) oszacować bardzo z grubsza takie zwarciowe stany naprężeń zastępując rzeczywistą cewkę modelami fikcyjnymi o odpowiednio dobranych modułach E' i E'' uzależnionych od naprężenia $(\sigma'_t)_{max}$. Przykład jednego ze sposobów takiego oszacowania naprężeń pokazany jest na rys. 4 liniami przerywanymi.

Omawiane zagadnienie w praktyce inżynierskiej bywa rozwiązywane inaczej. Traktuje się mianowicie poszczególne zwoje jako zamknięte kołowe pierścienie przedzielone izolacją. Na każdy zwój działają siły elektrodynamiczne i naciski izolacji. Z warunków równowagi i ze związków między odkształceniami kolejnych zwojów uzyskuje się do rozwiązania układ równań. Przy rozwiązywaniu uwzględnia się na ogół nieliniowość materiałową elementów cewki. Okazuje się, że w zakresie liniowej proporcjonalności naprężeń od odkształceń obydwie metody (metoda tu zaproponowana i metoda dotychczas stosowana) prowadzą do podobnych rezultatów.

Literatura

1. Л. И. Мильман, *Расчет механических напряжений растяжения и сжатия с учетом изменения радиуса витков обмотки*. Электротехническая промышленность. 1967.
2. Л. И. Мильман, С. И. Лурье, *Расчет прочности внутренних обмоток трансформаторов при действии радиальных усилий короткого замыкания*. Электричество. 1968. № 3.
3. Л. И. Мильман, С. И. Лурье, *Расчет внутренних обмоток трансформаторов на прочность с учетом конечной ширины реек*. Электричество. 1971, № 9.
4. *Uzwojenia transformatorów energetycznych — budowa i obliczanie*, praca zbiorowa pod kierunkiem prof. E. Jeziarskiego WNT Warszawa 1982 r.
5. T. GAŁKIEWICZ — praca wykolana w 1973 r. w Instytucie Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej na zlecenie Instytutu Elektrotechniki Oddział w Łodzi.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КАТУШКЕ ТРАНСФОРМАТОРА РАСТЯГИВАННОЙ В СЛЕДСТВИЕ ДЕЙСТВИЯ РАДИАЛЬНЫХ СПЛОЧЕНИЕВЫХ СИЛ

В работе определяются напряжения возникающие в проводе катушки трансформатора а также радиальные напряжения в катушке. Эти формулы представлены в безразмерных величинах, благодаря чему получаемые решения касаются не только одной катушки, а могут быть использованы для некоторой группы катушек.

Своеобразием работы является рассматривание катушки как ортотропного диска. Упругие войства диска показаны в р. 2 работы.

S u m m a r y

DETERMINATION OF STRESSES IN THE TRANSFORMER COIL SUBJECTED TO EXTENSION
WITH RADIAL ELECTRODYNAMIC

In this paper the stresses in the coil wire and the radial stresses of the coil are determined. The resulting formulas are given in a nondimensional form and so received solutions may be used for some systems of coils.

The original feature of the approach is that the coil is treated as an uniform orthotropic disk. Elastic properties of the disk are determined in sec. 2 of the paper.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 maja 1986 roku.

ZASTOSOWANIE FUNKCJI KSZTAŁTU DO OPISU DRGAŃ PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O ZAMKNIĘTYM PROFILU

MAREK SPERSKI

Politechnika Gdańska

1. Wstęp

Z chwilą wprowadzenia do eksploatacji dużych jednostek pływających pojawił się w budownictwie okrętowym problem drgań kadłuba statku, wzbudzanych falowaniem morza oraz wywoływanych przez pracujące na okręcie maszyny. Drgania te są przyczyną powstawania naprężeń dynamicznych, które — poprzez pęknięcie i rozwój szczelin — prowadzą do przedwczesnego zużycia konstrukcji. Zakłócają też pracę precyzyjnych urządzeń instalowanych na okręcie i odbijają się niekorzystnie na zdrowiu załogi, uniemożliwiając wypoczynek.

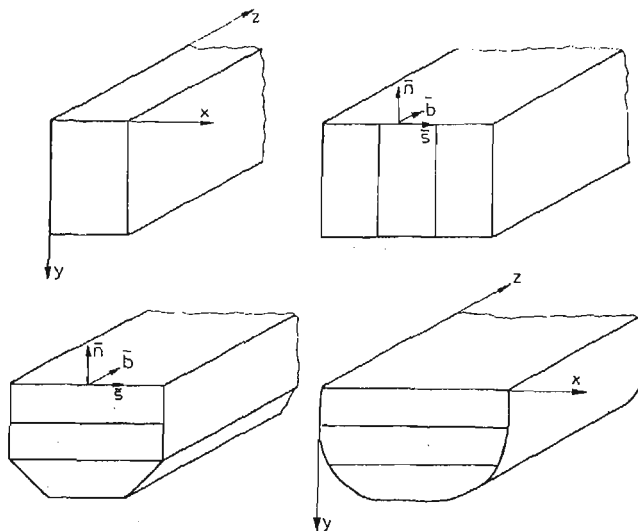
Spotykane w praktyce projektowej metody analizy tzw. drgań ogólnych kadłuba [1], [2] oparte są na modelach prętowych. Modele prętowe, zastosowane do konstrukcji o bardziej skomplikowanych kształtach, często okazują się zawodne. Stosowanie modeli powłokowych, lub dyskretnych o wielu stopniach swobody umożliwia dokładniejszy opis, wiąże się jednak z pracochłonnym, często prowadzącym do pomyłek procesem przygotowywania danych, długim czasem liczenia oraz koniecznością używania maszyn cyfrowych o dużej pamięci operacyjnej.

Mankamenty te skłoniły do poszukiwania innego, w miarę możliwości prostego modelu kadłuba [5], [6] dokładniejszego od modeli belkowych. Jednym z nich jest model ramowo-powłokowy, zaproponowany przez W. Z. Własowa [3] w 1931 r. Oparta na tym modelu teoria, umożliwiająca zamianę cząstkowych, różniczkowych równań równowagi cienkościennego pręta na równania różniczkowe zwyczajne jest dzisiaj stosowana dość powszechnie [4], [11] w obliczeniach statycznych konstrukcji lotniczych, okrętowych i budowlanych.

Praca niniejsza stanowi uogólnienie teorii Własowa na przypadek ruchu. Choć genezą opracowania były problemy budowy okrętów, przedstawiony w nim model może służyć do badania drgań innych konstrukcji inżynierskich, jak skrzydła samolotów, mosty skrzynkowe, lub niektóre typy pojazdów drogowych i szynowych.

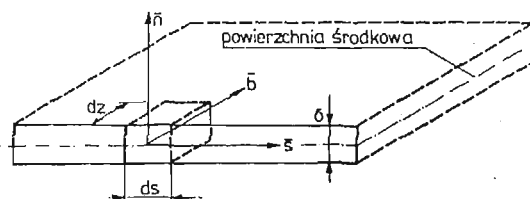
2. Założenia teorii

Przedmiotem rozważań jest pryzmatyczny, cienkościenny pręt o skończonej liczbie zamkniętych obwodów w przekroju poprzecznym. Przekrój poprzeczny (rys. 1) składa się z N węzłów, połączonych między sobą odcinkami prostymi, lub zakrzywionymi. Cała konstrukcja zbudowana jest z płaskich, ortotropowych płyt oraz cienkościennych powłok walcowych, których krawędzie, równoległe do osi pręta, nazywać będziemy liniami węzłowymi.



Rys. 1.

Wzorując się na hipotezie Własowa, składowe u , v , w , wektora przemieszczenia w dowolnie obranego punktu na powierzchni środkowej płyty, lub powłoki (rys. 2), na osie



Rys. 2.

lokalnego układu współrzędnych b , s , n :

$$w = u \cdot b + v \cdot s + w \cdot n \quad (2.1)$$

przedstawiamy w postaci wielomianów dwóch zmiennych rozdzielonych:

$$u = \sum_{i=1}^n v_i(z, t) \cdot \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i \quad (2.2)$$

$$v = \sum_{k=1}^r \vartheta_k(z, t) \cdot \psi_k(s) = \sum_{k=1}^r \vartheta_k \psi_k \quad (2.2)$$

[cd.]

$$w = \sum_{l=1}^m \eta_l(z, t) \cdot \chi_l(s) = \sum_{l=1}^m \eta_l \chi_l$$

przy czym funkcje: $\varphi_i, \psi_k, \chi_l$, współrzędnej obwodowej s — nazywane funkcjami kształtu — przyjmiemy jako znane, natomiast funkcje: $\nu_i, \vartheta_k, \eta_l$, współrzędnej z na osi pręta oraz czasu t będą wielkościami poszukiwanymi.

Na element pręta o gęstości ρ , modułach sprężystości E_1 (na kierunku podłużnym z), E_2 (na kierunku obwodowym s), module odkształcenia postaciowego G , współczynnikach Poisson'a: ν_{21}, ν_{12} i wymiarach: $\delta \cdot ds \cdot dz$, działają:

1. Siła bezwładności

$$\mathbf{P}_B = -w \cdot \rho \cdot \delta \cdot ds \cdot dz = -\rho \cdot \delta (\ddot{u}b + \ddot{v}s + \ddot{w}n) ds \cdot dz \quad (2.3)$$

przy czym kropki nad symbolami oznaczają pochodne współrzędnych względem czasu, δ zaś jest grubością płyty, lub powłoki.

2. Siła zewnętrzna, będąca jawną funkcją czasu t i współrzędnych z, s :

$$\mathbf{p}_z = p_n(z, s, t) \cdot \mathbf{n} + p_s(z, s, t) \cdot \mathbf{s} + p_b(z, s, t) \cdot \mathbf{b} \quad (2.4)$$

3. Wewnętrzne siły sprężyste:

a) na kierunku podłużnym siła normalna:

$$N_b = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_z dn = \check{E}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad (2.5a)$$

b) na kierunku obwodowym:

— siła normalna:

$$N_s = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_s dn = \check{E}_2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.5b)$$

— siła styczna:

$$S = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{zs} dn = \check{G} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.5c)$$

— moment zginający

$$M = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_z n dn = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cong -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (2.5d)$$

gdzie: $\sigma_z, \sigma_s, \tau_{zs}$ oznaczają naprężenia normalne i styczne, a:

$$\check{E}_1 = \frac{E_1 \delta}{1 - \nu_{21} \cdot \nu_{12}}, \quad \check{E}_2 = \frac{E_2 \delta}{1 - \nu_{21} \nu_{12}}$$

$$\check{G} = G \cdot \delta \quad D = \frac{E_2 \delta^3}{12(1 - \nu_{21} \nu_{12})}$$

— zredukowane stałe materiałowe.

W rozważaniach pominięto jako małe: moment zginający na kierunku podłużnym, moment skręcający oraz siłę styczną na kierunku normalnym. Jak widać, pręt jest zbudowany z materiału ortotropowego, liniowo-sprężystego, o osiach ortotropii b, s . W opisie nie uwzględniono sił tłumienia, zależnych od prędkości elementu. Wprowadzenie tych sił do różniczkowych równań ruchu nie stanowi problemu, jednak na wstępnym etapie badań nie wydaje się celowe.

3. Równania ruchu

Zakładając, że działające na konstrukcję siły bezwładności stanowią składnik obciążenia zewnętrznego, problem sformułowania równań ruchu sprowadzamy do wyznaczenia ekstremum funkcjonału:

$$J = \int_0^L \Omega dz = II + A \quad (3.1)$$

w którym II oznacza całkowitą energię sprężystą pręta, równą sumie prac sił wewnętrznych na przemieszczeniach w , natomiast $A = A_B - A_z$ — sumę prac sił bezwładności i sił zewnętrznych na tych przemieszczeniach.

Energię sprężystą pręta o długości L :

$$II = -\frac{1}{2} \int_0^L \left[\oint_s \left(N_b \varepsilon_z + N_s \varepsilon_s + S \gamma_{zs} + \frac{M^2}{D} \right) ds \right] dz \quad (3.2)$$

można, uwzględniając związki (2.5), (2.2) oraz:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z}, & \gamma_{zs} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_s &= \frac{\partial v}{\partial s}, & \nu_{21} \check{E}_1 &= \nu_{12} \check{E}_2 = \check{E} \end{aligned}$$

przedstawić w postaci macierzowej:

$$II = -\frac{1}{2} \int_0^L (\check{v}^T \mathbf{P} \check{v} + \check{\vartheta}^T \mathbf{R} \check{\vartheta} + \check{v}^T \mathbf{S} \check{v} + 2\check{\vartheta}^T \mathbf{\Theta} \check{v} + 2\check{v}^T \mathbf{Q} \check{\vartheta} + \check{\vartheta}^T \mathbf{T} \check{\vartheta} + \eta^T A \eta) dz \quad (3.3)$$

gdzie elementy kwadratowych, lub prostokątnych macierzy: $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{Q}, \mathbf{T}, A$, są stałymi współczynnikami:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \oint_s \check{E}_1 \varphi_i \varphi_j ds; & R_{kg} &= \oint_s \check{G} \psi_k \psi_g ds; \\ S_{ij} &= \oint_s \check{G} \frac{d\varphi_i}{ds} \cdot \frac{d\varphi_j}{ds} ds; & \Theta_{ki} &= \oint_s \check{E} \frac{d\psi_k}{ds} \varphi_i ds; \end{aligned}$$

$$Q_{ik} = \oint_s \check{G} \frac{d\varphi_i}{ds} \psi_k ds; \quad T_{kg} = \oint_s \check{E}_2 \frac{d\psi_k}{ds} \cdot \frac{d\psi_g}{ds} ds \quad (3.4)$$

$$A_{hl} = \oint_s D \frac{d^2\chi_h}{ds^2} \cdot \frac{d^2\chi_l}{ds^2} ds$$

$i, j = 1, 2 \dots n$; $k, g = 1, 2 \dots r$; $h, l = 1, 2 \dots m$; n jest liczbą przyjętych do opisu funkcji kształtu φ_i ; r — liczbą funkcji ψ_k ; m — liczbą funkcji χ_i (wzór 2.2). Symbol: \oint_s oznacza całkę wzdłuż zamkniętego konturu opisanego współrzędną obwodową s , a kreski nad symbolami — pochodne cząstkowe względem zmiennej s . Elementami macierzy kolumnowych: \mathbf{v} , \mathfrak{g} , $\boldsymbol{\eta}$, są poszukiwane funkcje: v_i , ϑ_k , η_l , określające przemieszczenia.

Praca sił bezwładności:

$$A_B = - \int_0^L \left[\oint_s \rho \delta w \cdot \dot{w} ds \right] dz = - \int_0^L \left[\oint_s \rho \delta (u\ddot{u} + v\ddot{v} + w\ddot{w}) ds \right] dz \quad (3.5)$$

po uwzględnieniu (2.2) daje się zapisać w postaci:

$$A_B = - \int_0^L (\mathbf{v}^T \mathbf{U} \ddot{\mathbf{v}} + \mathfrak{g}^T \mathbf{V} \ddot{\mathfrak{g}} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W} \ddot{\boldsymbol{\eta}}) dz \quad (3.6)$$

przy czym elementy kwadratowych macierzy \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{W} , są — jak w poprzednim przypadku — stałymi współczynnikami:

$$U_{ij} = \oint_s \rho \delta \varphi_i \varphi_j ds.$$

$$V_{kg} = \oint_s \rho \delta \psi_k \psi_g ds. \quad (3.7)$$

$$W_{hl} = \oint_s \rho \delta \chi_h \chi_l ds$$

Praca sił zewnętrznych:

$$A_z = \int_0^L \left[\oint_s (p_b u + p_s v + p_n w) ds \right] dz \quad (3.8)$$

po podstawieniu wzorów (2.2) przyjmuje formę:

$$A = \int_0^L (\mathbf{a}^T \mathbf{v} + \mathbf{b}^T \mathfrak{g} + \mathbf{c}^T \boldsymbol{\eta}) dz \quad (3.9)$$

w której elementami macierzy kolumnowych \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , są współczynniki:

$$a_i = \oint_s p_b \varphi_i ds,$$

$$b_k = \oint_s p_s \psi_k ds \quad (3.10)$$

$$c_l = \oint_s p_n \chi_l ds$$

zależne już tylko od współrzędnej z i czasu t .

Po podstawieniu wzorów (3.3), (3.6), (3.9) do (3.1) otrzymamy, posługując się równaniami Eulera:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\alpha}_j} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (3.11)$$

(za α_j należy przyjmować kolejno: $\nu_l, \vartheta_k, \eta_l$) poszukiwane równania ruchu:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\ddot{\mathbf{v}} &= \mathbf{P}\ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{S}\mathbf{v} + (\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q})\dot{\mathbf{g}} - \mathbf{a} \\ \mathbf{V}\ddot{\mathbf{g}} &= \mathbf{R}\ddot{\mathbf{g}} - \mathbf{T}\mathbf{g} + (\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q})\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b} \\ \mathbf{W}\ddot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{c} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ten sam układ równań można wyprowadzić z zasady Hamiltona, tworząc funkcjonal:

$$\int_0^l \int_0^L L dt = \int_0^l (T + \Pi - A_z) dz \quad (3.13)$$

w którym:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_s^L \rho \delta (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds \right] dz \quad (3.14)$$

jest energią kinetyczną układu. Uwzględniając związki (2.2) przekształcamy wzór (3.14) do postaci macierzowej:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{U} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}^T \mathbf{V} \dot{\mathbf{g}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{W} \dot{\boldsymbol{\eta}}) dz \quad (3.15)$$

i z równań Eulera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_j} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (3.16)$$

otrzymujemy, po podstawieniu (3.15), (3.3), (3.9), do (3.13), równania (3.12).

Korzystając z równań Eulera (3.11) lub (3.16) warto posłużyć się następującymi regułami różniczkowania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} &= 2\mathbf{A} \mathbf{a}, & \frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{a}} &= \mathbf{B} \mathbf{b}, \\ \frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} &= \mathbf{B}^T \mathbf{a}, & \frac{\partial(\mathbf{b}^T \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} &= \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie \mathbf{A} jest dowolną macierzą kwadratową, \mathbf{B} — macierzą prostokątną; \mathbf{a} , \mathbf{b} — macierzami kolumnowymi.

4. Teoria ramowo-powłokowa

Funkcje kształtu $\psi_k(s)$, przyjęte do opisu przemieszczeń stycznych we wzorze (2.2), determinują jednoznacznie przemieszczenia normalne punktów położonych na linii środkowej przekroju poprzecznego pręta. Przyjmując zatem: $l = k$, $\eta_l = \vartheta_k$, $\chi_k = \chi_k(\psi_k)$

oraz zakładając, że wycinek pręta ograniczony dwoma poprzecznymi przekrojami odległymi od siebie o 1, odkształca się w kierunku poprzecznym do osi pręta, jak płaska rama o kształcie tego przekroju, linię ugięcia tej ramy, utożsamianą z przemieszczeniami normalnymi linii środkowej przekroju pręta, można wyznaczyć z równania (2.5d):

$$M = M_\psi + M_P + M_B = -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (4.1)$$

w którym moment gnący w przekroju ramy przedstawiamy jako sumę trzech wielkości: — momentu M_ψ wywołanego przemieszczeniami węzłów w płaszczyźnie ramy; — momentu M_P wywołanego obciążeniami zewnętrznymi p_n (ciśnieniami normalnymi — wzór (2.4)); — momentu M_B wywołanego składowymi sił bezwładności na kierunku normalny.

Przyjęcie takich założeń umożliwia połączenie dwóch ostatnich równań macierzowych układu (3.12) w jedno równanie, a zatem zmniejszenie liczby równań opisujących ruch pręta. We wzorze (3.3) na energię sprężystą pręta ulegnie zmianie tylko ostatni składnik, wyrażający pracę momentu gnącego M na przemieszczeniach w :

$$\eta \Delta \eta = \int_s^r \frac{M^2}{D} ds \quad (4.2)$$

Moment gnący M_P wywołany ciśnieniami normalnymi nie zależy od funkcji v_i , ϑ_k , opisujących przemieszczenia. Dwa pozostałe momenty można przedstawić w postaci:

$$M_\psi = \sum_{k=1}^r \mathfrak{M}_k \vartheta_k; \quad M_B = \sum_{k=1}^r m_k \ddot{\vartheta}_k; \quad (4.3)$$

gdzie \mathfrak{M}_k jest momentem gnącym wywołanym przemieszczeniami węzłów ramy, zgodnymi z funkcją ψ_k , natomiast $m_k \ddot{\vartheta}_k$ — momentem od obciążeń ramy (o węzłach nieprzesuwnych, lecz podatnych na obrót) składowymi normalnymi sił bezwładności: $-\rho \delta \chi_k \ddot{\vartheta}_k$

Podstawiając wzory (4.1), (4.3), do (4.2) otrzymamy związek:

$$\eta \Delta \eta = \vartheta^T \mathbf{X} \vartheta + 2\vartheta^T \mathbf{\Pi} \ddot{\vartheta} + 2\vartheta^T \mathbf{h} + \ddot{\vartheta}^T \mathbf{Y} \ddot{\vartheta} + 2\ddot{\vartheta} \mathbf{k} + \int_s^r \frac{M_P^2}{D} ds \quad (4.4)$$

w którym elementy kwadratowych macierzy \mathbf{X} , $\mathbf{\Pi}$, są stałymi współczynnikami:

$$X_{kg} = \int_s^r \frac{\mathfrak{M}_k \mathfrak{M}_g}{D} ds; \quad \Pi_{kg} = \int_s^r \frac{\mathfrak{M}_k m_g}{D} ds$$

a elementy macierzy kolumnowej \mathbf{h} , również stałe, są równe:

$$h_k = \int_s^r \frac{\mathfrak{M}_k M_P}{D} ds \quad (k, g = 1, 2 \dots r)$$

Trzema ostatnimi składnikami wzoru (4.4) zajmować się dalej nie warto, ponieważ pochodne cząstkowe tych składników względem zmiennych występujących w równaniach Eulera są zerami.

Przyjmując we wzorach (3.6) i (3.9), zgodnie z założeniami podanymi na początku rozdziału:

$$\eta^T \mathbf{W} \ddot{\eta} = \mathcal{G}^T \mathbf{W} \ddot{\mathcal{G}}, \quad \mathbf{c}^T \eta = \mathbf{c}^T \mathcal{G}$$

otrzymamy, korzystając z (3.1) i (3.11), następujący układ równań ruchu:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \ddot{\mathbf{v}} &= \mathbf{P} \ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{H} \mathcal{G} - \mathbf{a}, \\ \mathbf{Z} \ddot{\mathcal{G}} &= \mathbf{R} \ddot{\mathcal{G}} - \mathcal{E} \mathcal{G} + \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

w którym:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathcal{O}^T - \mathcal{Q}, & \mathbf{Z} &= \mathbf{V} + \mathbf{W} + \mathbf{H}, \\ \mathcal{E} &= \mathbf{T} + \mathbf{X}, & \mathbf{K} &= \mathcal{Q}^T - \mathcal{O}, \end{aligned}$$

są prostokątnymi, lub kwadratowymi macierzami o stałych współczynnikach, zależnych od geometrii przekroju, stałych materiałowych i przyjętych do opisu funkcji kształtu. Natomiast:

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{h} + \mathbf{c}$$

jest macierzą kolumnową, zależną od obciążeń zewnętrznych, funkcji kształtu i współrzędnej z na osi pręta.

Tworząc macierze kolumnowe:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathcal{G} \end{Bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix}$$

układ (4.5) można zapisać w postaci jednego równania macierzowego:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{B} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D} \mathbf{z} - \mathbf{f}, \quad (4.6)$$

w którym \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , są macierzami symetrycznymi, natomiast \mathbf{C} — macierzą kwadratową antysymetryczną:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{E} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wymiar tych macierzy jest równy $n+r$, tj. liczbie przyjętych do opisu funkcji kształtu φ_i , ψ_k .

Równanie macierzowe (4.6) stanowi układ równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, niejednorodnych, o stałych współczynnikach. Znalazienie całek tego układu, przy zadanych warunkach granicznych, umożliwi — po podstawieniu rozwiązań do wzorów (2.2) — wyznaczenie przemieszczeń dowolnie wybranych punktów pręta, w dowolnej chwili t .

Nietrudno zauważyć, że dla $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ równanie (4.6) opisuje drgania swobodne układu:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{B} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D} \mathbf{z}, \quad (4.7)$$

a dla $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$ — niezależnego od czasu przechodzi w równanie równowagi:

$$\mathbf{B} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D} \mathbf{z} - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

5. Warunki graniczne

Jeżeli skrajny przekrój pręta ($z = a$) obciążymy układem sił zewnętrznych:

$$\mathbf{q} = q_b(s, t) \mathbf{n} + q_s(s, t) \mathbf{s} + q_n(s, t) \mathbf{b}, \quad (5.1)$$

funkcjonał całkowitej energii mechanicznej (3.1) powiększy się o składnik:

$$G = \int_s (q_b u + q_s v + q_n w) ds, \quad (5.2)$$

wyrażający pracę tych sił na przemieszczeniach (2.1). Po podstawieniu w miejsce u, v, w , związków (2.2) oraz — zgodnie z założeniami teorii ramowo—powłokowej: $\eta_k = \vartheta_k$, wzór (5.2) przyjmie postać:

$$G = \mathbf{p}^T \mathbf{v} + \mathbf{q}^T \mathfrak{g}, \quad (5.3)$$

przy czym elementy kolumnowych macierzy \mathbf{p}, \mathbf{q} , są funkcjami czasu:

$$p_i = \int_s q_b \varphi_i ds, \quad (5.4)$$

$$q_k = \int_s q_s \psi_k ds + \int_s \frac{q_n \chi_k}{D} ds.$$

Przyrównanie do zera wariacji funkcyjonału:

$$J_1 = \int_0^L \Omega dz + G, \quad (5.5)$$

prowadzi [7] do wyznaczenia warunku granicznego na brzegu $z = a$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial G}{\partial \alpha_j}, \quad (5.6)$$

gdzie α_j przyjmuje kolejno wartości: v_i, ϑ_k ($i = 1, 2 \dots n; k = 1, 2 \dots r$).

Podstawiając poszczególne składniki funkcji Ω (wzory (3.3), (3.6), (3.9)) do wzoru (5.5) można ograniczyć się do wyrazów zawierających pochodne współrzędnych względem zmiennej z :

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathfrak{g}^T \mathbf{R} \mathfrak{g} + 2 \mathfrak{g}^T \mathbf{\Theta} \mathbf{v} + 2 \mathbf{v}^T \mathbf{Q} \mathfrak{g} + \dots) dz + \mathbf{p}^T \mathbf{v} + \mathbf{q}^T \mathfrak{g} \quad (5.7)$$

i posługując się wzorem (5.6) oraz regułami różniczkowania (3.17) wyznaczyć warunki graniczne:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{\Theta}^T \mathfrak{g} &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{R} \mathfrak{g} + \mathbf{Q}^T \mathbf{v} &= \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

stanowiące układ równań różniczkowych pierwszego rzędu. Układ ten można przedstawić w formie jednego równania macierzowego:

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{x}|_{z=a} = \mathbf{r}, \quad (5.9)$$

w którym:

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & & \boldsymbol{\theta} \\ & \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \{\dot{v} \dot{\vartheta} v \vartheta\}^T, \quad \mathbf{r} = \{\mathbf{p} \mathbf{q}\}^T.$$

Gdy skrajny przekrój pręta jest swobodny (nieobciążony), macierze \mathbf{p} , \mathbf{q} , są zerowe i warunek graniczny dla tego przypadku przyjmuje postać:

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{x}|_{z=a} = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Szytywne utwierdzenie przekroju pręta powoduje, że przemieszczenia (2.2) wszystkich punktów tego przekroju są zerami, a warunek graniczny:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} \\ \dot{\vartheta} \end{array} \right\} = \mathbf{0}, \quad (5.11)$$

można uważać za szczególny przypadek warunku (5.9).

Przewodując możliwość numerycznego całkowania równań ruchu, warunki graniczne na krańcach pręta zapiszemy w postaci:

$$\mathbf{M} \mathbf{x}|_{z=0} + \mathbf{N} \mathbf{x}|_{z=L} = \mathbf{s}, \quad (5.12)$$

gdzie $\mathbf{s} = \{\mathbf{r}|_{z=L} \mathbf{r}|_{z=0}\}^T$ jest macierzą kolumnową sił uogólnionych, a \mathbf{M} i \mathbf{N} — macierzami kwadratowymi o wymiarach $2(n+r)$ i elementach będących stałymi współczynnikami.

Do pełnego opisu ruchu, oprócz warunków granicznych na krańcach pręta, należy również podać warunki początkowe, określające położenia i prędkości wszystkich punktów układu w chwili $t = 0$. Funkcje zmiennej z , określające wartości współrzędnych uogólnionych v_i , ϑ_k na początku ruchu:

$$v_{i0} = v_{i0}(z), \quad \vartheta_{k0} = \vartheta_{k0}(z),$$

powinny spełniać równania równowagi (4.8). Natomiast funkcje określające początkowe prędkości uogólnione:

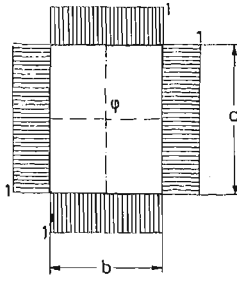
$$\dot{v}_{i0} = \dot{v}_{i0}(z), \quad \dot{\vartheta}_{k0} = \dot{\vartheta}_{k0}(z),$$

muszą być funkcjami ciągłymi.

6. Wybór funkcji kształtu

Zasady wyboru funkcji kształtu: φ_i , ψ_k , (2.2) pozostają takie same jak w zagadnieniach statycznych [3], [4], [5]. Aby potwierdzić poprawność sformułowanych równań ruchu rozpatrzmy następujące przykłady:

Przykład 6.1. Jeżeli przemieszczenie przekroju poprzecznego jednorodnego pręta o gęstości ρ , module sprężystości E , module odkształcenia postaciowego G i przekroju, jak na rys. 6.1 opiszemy jedną tylko funkcją φ , mającą wartość 1 w każdym punkcie tego



Rys. 6.1.

przekroju oraz założymy, że na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, to w równaniu (4.6) tylko dwa współczynniki (3.7) i (3.4):

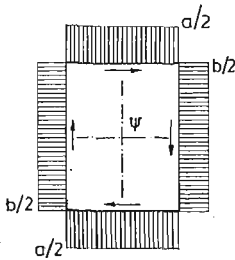
$$U_{11} = U = \int_s \rho \delta \varphi^2 ds = \rho A,$$

$$P_{11} = P = \int_s \rho \delta \varphi^2 ds = EA,$$

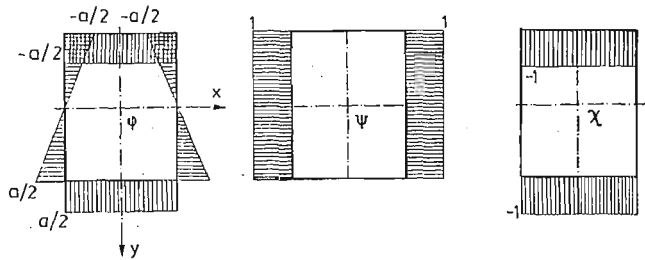
oraz jedna współrzędna $v_1 = v$ są różne od zera. Symbol A oznacza powierzchnię przekroju. Otrzymane równanie ruchu:

$$\ddot{v} - \frac{E}{\rho} v'' = 0, \tag{6.1}$$

jest znany równaniem różniczkowym podłużnych drgań swobodnych pręta.



Rys. 6.2.



Rys. 6.3.

Przykład 6.2. Opisując przemieszczenie tego samego pręta jedną funkcją kształtu ψ przedstawioną na rys. 6.2, obliczamy współczynniki równania ruchu (4.6) wg wzorów (3.7) i (3.4):

$$V_{11} = V = \int_s \rho \delta \psi^2 ds = \frac{1}{2} \rho \delta ab(a+b),$$

$$R_{11} = R = \int_s G \delta \psi^2 ds = \frac{1}{2} G \delta ab(a+b).$$

Po podstawieniu tych współczynników oraz $\vartheta_1 = \vartheta$ do równania (4.6) otrzymujemy równanie drgań skrętnych pręta:

$$\ddot{\vartheta} - \frac{G}{\rho} \ddot{\vartheta} = 0, \quad (6.2)$$

w którym ϑ jest kątem obrotu przekroju.

Przykład 6.3. Trzy funkcje; φ , ψ , χ przedstawione na rys. 6.3 opisują zgięcie pręta w płaszczyźnie pionowej, przy czym przekrój poprzeczny pręta przemieszcza się jak ciało sztywne, pozostając prostopadły do linii ugięcia. Nietrudno bowiem zauważyć, że składowe przemieszczenia (2.1) są równe:

$$u = y\varphi, \quad v = y\psi, \quad w = y\chi, \quad (6.3)$$

gdzie y jest przemieszczeniem środka geometrycznego przekroju.

Podstawiając iloczyny (6.3) do wzorów (3.2) i (3.6), otrzymamy funkcjonał (3.1):

$$\int_0^L \Omega dz = -\frac{1}{2} \int_0^L (EJ_x \ddot{y}^2 + 2\rho J_x y \ddot{y} + 2\rho A y \ddot{y}) dz,$$

w którym:

$$J_x = \int_s \delta \varphi^2 ds = 2\delta \left(\frac{a^2 b}{4} - \frac{a^3}{12} \right),$$

jest powierzchniowym momentem bezwładności przekroju względem osi x , natomiast:

$$A = \int_s \delta(\psi^2 + \chi^2) ds,$$

— polem tego przekroju. Z równania Eulera:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \ddot{y}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0,$$

otrzymujemy znane równanie drgań poprzecznych pręta:

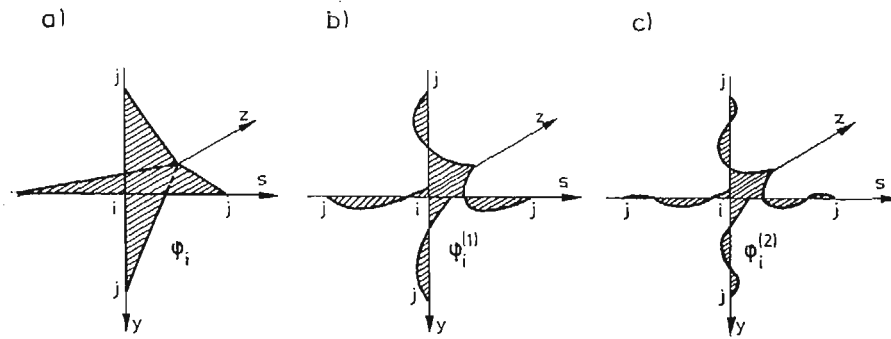
$$EJ_x \text{IV} y + \rho A \ddot{y} - \rho J_x \ddot{y} = 0, \quad (6.4)$$

uwzględniające siły bezwładności od obrotu przekroju wokół osi x .

W podobny sposób można opisać zgięcie pręta w płaszczyźnie poziomej, a także wprowadzić dodatkowe funkcje [3], [10] uwzględniające paczenie przekroju. Funkcje tego typu można jednak przyjmować tylko do obliczeń prętów o przekrojach nieskomplikowanych, złożonych z jednego, lub co najwyżej dwóch prostokątów.

Znacznie dokładniejsze wyniki uzyskuje się, przyjmując do opisu przemieszczeń wzdłużnych funkcje φ_i skonstruowane z wielomianów Legendre'a w taki sposób, aby przyjmowały one wartości 1 w i -tym węźle przekroju (rys. 6.4) i wartości zero we wszystkich węzłach sąsiednich [5]. Można też na linii środkowej przekroju przyjmować dodatkowe, fikcyjne węzły.

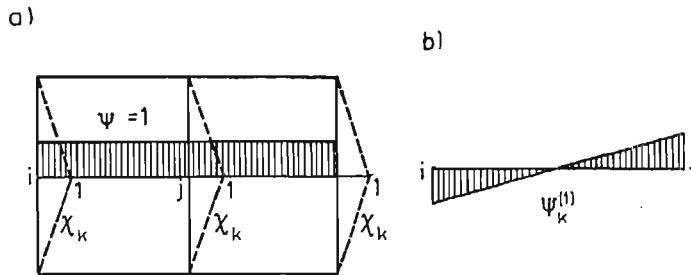
Funkcje ψ_k , χ_k opisujące przemieszczenia styczne i normalne w płaszczyźnie przekroju konstruuje się przesuwając o wartość 1 w kierunku współrzędnej obwodowej s , dwa połą-



Rys. 6.4.

czone ze sobą węzły przekroju (rys. 6.5a). Wprowadzając dodatkową funkcję $\psi_k^{(1)}$, jak na rys. 6.5b, uwzględniamy w opisie efekt ściskania pręta ramy.

Im większa jest liczba przyjętych funkcji kształtu, tym opis jest dokładniejszy. Wzrostowi tej dokładności towarzyszy jednak wzrost liczby równań ruchu, a zatem rozwiązanie problemu staje się bardziej skomplikowane. Z tego względu, w obliczeniach statycznych, konstruktorzy ograniczają swój wybór do funkcji przedstawionych na rys. 6.4a i 6.5a, nazywanych funkcjami Własowa pierwszego rodzaju.



Rys. 6.5.

7. Całkowanie równań

Jeżeli pręt jest obciążony układem sił harmonicznymi o takich samych fazach i częstościach: $f = g \cos \omega t$, równanie ruchu (4.6) przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D}\mathbf{z} - \mathbf{g} \cos \omega t. \quad (7.1)$$

Przewidując szczególne rozwiązanie tego równania w formie:

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} \cos \omega t$$

otrzymamy, po podstawieniu do (7.1) układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{g}, \quad (7.2)$$

w którym:

$$\mathbf{G} = \omega^2 \mathbf{A} - \mathbf{D}.$$

Całkując ten układ numerycznie [11] z uwzględnieniem warunków brzegowych (5.12) wyznaczmy maksymalne przemieszczenia (amplitudy) poszczególnych punktów konstrukcji. Natomiast powtarzając obliczenia wielokrotnie, dla różnych częstości ω i rejestrując podczas całkowania tylko przemieszczenia maksymalne, można wyznaczyć częstości rezonansowe. Są nimi te wielkości ω przy których przemieszczenia osiągają wartości bardzo duże.

Jako przykład rozpatrzmy pręt o przekroju złożonym ze skończonej liczby prostokątów, jednym końcem utwierdzony, na drugim zaś obciążony układem sił skupionych: $\mathbf{p}_0 \cos \omega t$. Przyjmijmy, dla uproszczenia obliczeń, że składowe binormalne tych sił są przyłożone w węzłach przekroju, a składowe styczne działają wzdłuż linii łączących poszczególne węzły. Wprowadzając do opisu funkcje Własowa pierwszego rodzaju (rys. 6.4a i 6.5a) stwierdzamy, że wektor sił uogólnionych w równaniu (5.9) jest:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t, \quad (7.3)$$

gdź wartości funkcji φ_i, ψ_k (wzór 5.4) w punktach przyłożenia sił są równe 1.

Równanie amplitud (7.2) ma zatem postać:

$$\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (7.4)$$

a warunki graniczne (5.12):

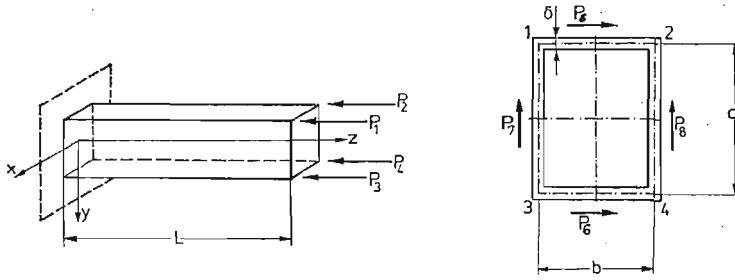
$$\left[\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix}_{z=0} + \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{P} & & & \\ & \mathbf{R} & \mathbf{Q}^T & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix}_{z=L} = \left\{ \mathbf{P}_0 \right\}. \quad (7.5)$$

W miejsca niewypełnione w równaniu (7.5) należy wpisać macierze zerowe. \mathbf{I} oznacza macierz jednostkową.

Gdy przekrojem pręta jest jeden prostokąt, układ (7.4) składa się z ośmiu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Dla przekroju dwuobwodowego (dwa prostokąty) liczba tych równań wzrasta do 11, a dla przekroju złożonego z czterech prostokątów wynosi już 15.

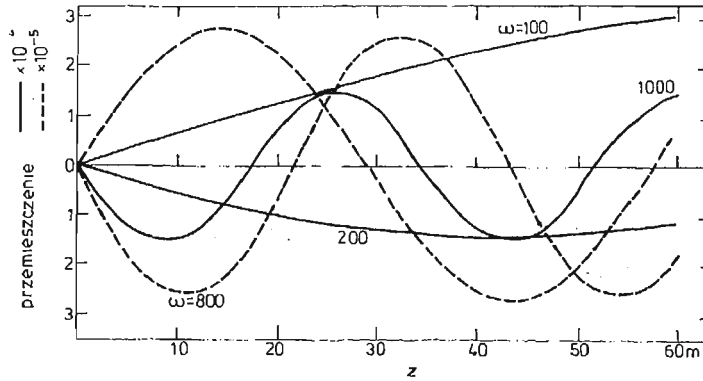
8. Przykłady obliczeń numerycznych

Mając na względzie kontrolę poprawności opisanej metody, obliczono współczynniki równania (7.4) dla wspornika o przekroju prostokątnym, obciążonego na końcu układem sił skupionych: $P_1 \cos \omega t$, jak na rys. 8.1. Dane liczbowe: $L = 60$; $a = 20$; $b = 10$; $\delta = 0,1$; $E_1 = 2,1 \cdot 10^5$; $E_2 = 2,1 \cdot 10^5$; $\nu_{21} = \nu_{12} = 0,3$; $G = 8,1 \cdot 10^4$; $\rho = 7,6 \cdot 10^{-3}$. Jednostki podstawowe: MN, m, s. Równania całkowano metodą Oluremiego-Olaofe [8] uogólnioną przez J. Więckowskiego [11] na równania macierzowe z osobliwą macierzą \mathbf{C} .

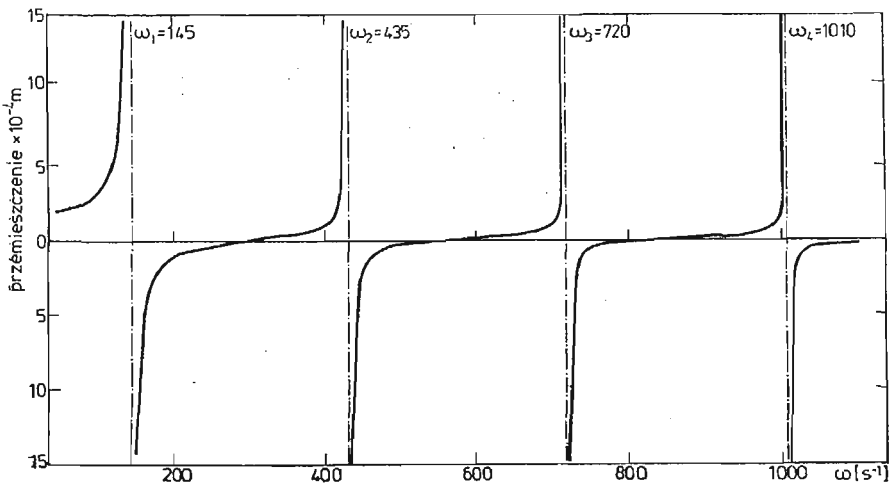


Rys. 8.1.

Przykład 8.1. $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1$; $P_5 = P_6 = P_7 = P_8 = 0$. Dla każdej wartości ω otrzymano jednakowe przemieszczenia podłużne wszystkich punktów danego przekroju oraz wszystkie przemieszczenia poprzeczne równe zero. Przykład przedstawia zatem drgania podłużne pręta. Na rys. 8.2 przedstawiono obliczone amplitudy przemiesz-



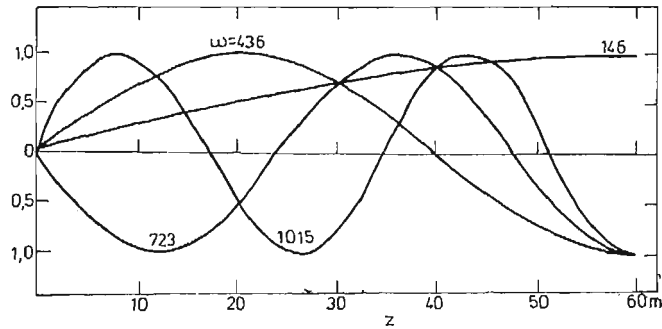
Rys. 8.2.



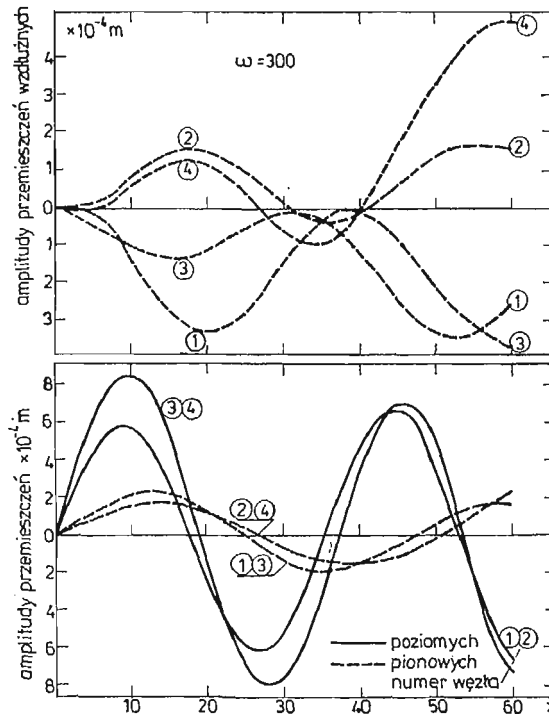
Rys. 8.3.

czeń przekrojów wzdłuż osi pręta, dla kilku przypadkowo wybranych częstości ω . Częstość $\omega = 1000$ jest bliska częstości rezonansowej, bowiem otrzymany dla niej wykres amplitud przypomina czwartą postać drgań własnych.

Amplitudy przemieszczeń skrajnego przekroju pręta ($z = 60$) obliczone dla różnych częstości ω wykreślono na rys. 8.3. Częstości: $\omega_1 = 145$, $\omega_2 = 435$, $\omega_3 = 720$, $\omega_4 = 1010$, przy których przemieszczenia osiągają wartości nieskończenie duże są częstościami rezonansowymi układu. Znane są częstości własne swobodnych drgań podłużnych wspornika wg teorii technicznej (równanie 6.1):



Rys. 8.4.

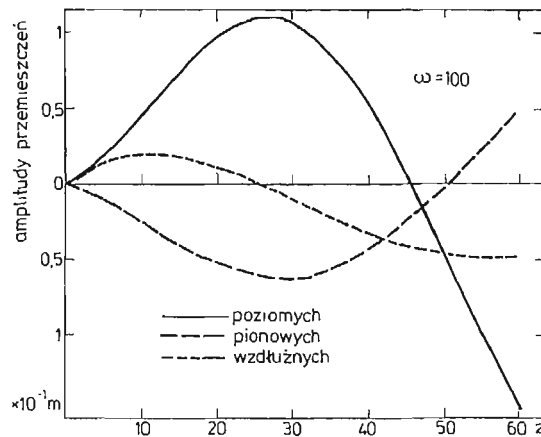


Rys. 8.5.

$$\omega_n = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E_1}{\rho}} (2n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Podstawiając w miejsce E_1 zredukowaną stałą $E = E_1/(1-\nu_{21} \cdot \nu_{12})$ jak w (2.5a) oraz pozostałe dane liczbowe z naszego przykładu, otrzymamy wielkości: $\omega_1 = 144,3$; $\omega_2 = 432,8$; $\omega_3 = 721,3$; $\omega_4 = 1009,8$; równe praktycznie częstościom rezonansowym badanego pręta. Dzieliąc natomiast amplitudy przemieszczeń punktów na liniach węzłowych, obliczone dla częstości bliskich rezonansowych: $\omega_1 = 146$, $\omega_2 = 436$, $\omega_3 = 723$, $\omega_4 = 1015$, przez wartość amplitudy przemieszczenia przekroju skrajnego, otrzymamy wykresy (rys. 8.4) przedstawiające główne postacie drgań własnych układu.

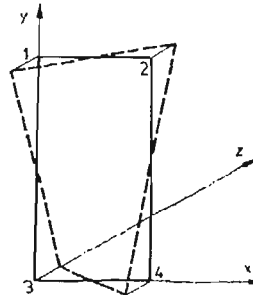
Przykład 8.2. $P_1 = 4$, $P_2 \dots P_8 = 0$. Pozioma siła harmoniczna przyłożona w węzle 1 (rys. 8.1) skrajnego przekroju, wywołuje drgania podłużne, sprzężone ze zginaniem ukośnym i deformacją przekroju. Na ogół, przy dowolnie obranej częstości wymuszenia (rys. 8.5), amplitudy przemieszczeń poszczególnych węzłów przekroju są różne. Jeżeli jednak częstość siły wymuszającej zbliża się do rezonansu (rys. 8.6), amplitudy przemieszczeń wszystkich czterech linii węzłowych stają się w przybliżeniu jednakowe, choć ruch podłużny dwóch sąsiadujących ze sobą węzłów odbywa się w przeciwnych kierunkach. Inne są też częstości rezonansowe niż w poprzednim przykładzie.



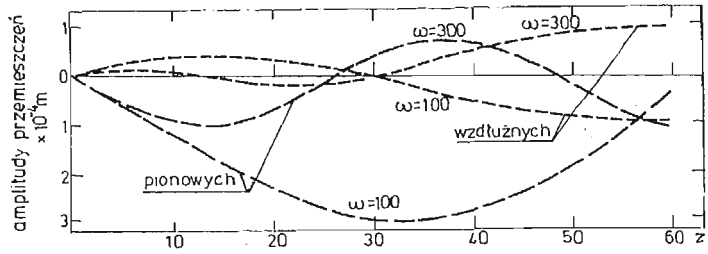
Deformacja skrajnego przekroju

a) poprzeczna

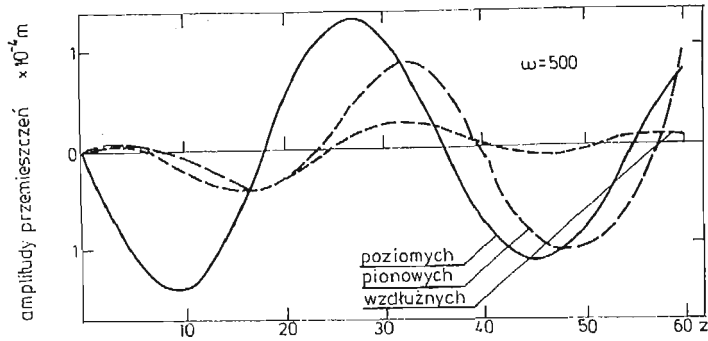
b) podłużna



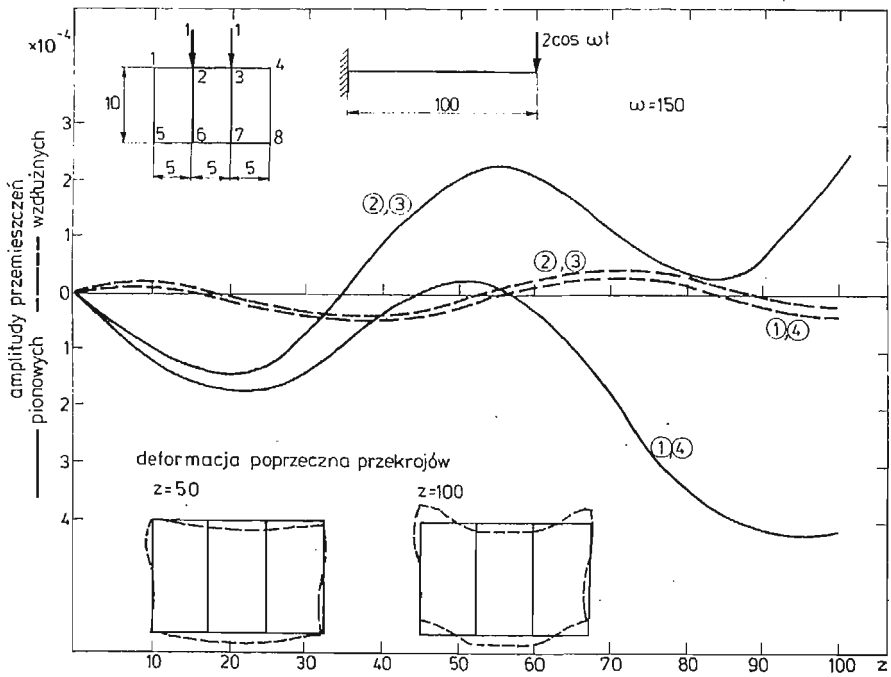
Rys. 8.6.



Rys. 8.7.



Rys. 8.8.



Rys. 8.9.

Przykład 8.3. Układ sił harmoniczných o amplitudach: $P_1 \dots P_6 = 0$, $P_7 = P_8 = 1$, wywołał drgania giętné wspornika w płaszczyźnie pionowej, o takich samych amplitudach przemieszczeń wszystkich czterech węzłów przekroju. Na rys. 8.7 pokazano amplitudy przemieszczeń linii węzłowych przy dwóch różnych częstotliwościach sił wymuszających.

Przykład 8.4. $P_1 \dots P_4 = 0$, $P_5 = 1$, $P_6 = -1$, $P_7 = 2$, $P_8 = -2$. Dwie pary sił o takich samych amplitudach momentów, przyłożone do skrajnego przekroju, wywołują drgania skrętne wspornika, połączone z paczeniem oraz deformacją poprzeczną konturu. Amplitudy przemieszczeń wszystkich czterech węzłów przekroju są zawsze jednakowe a węzły sąsiadujące ze sobą poruszają się na kierunku wzdłużnym w przeciwné strony. Rys. 8.8 przedstawia amplitudy przemieszczeń linii węzłowych przy częstotliwości wymuszenia $\omega = 500$, znajdującej się pomiędzy czwartą, a piątą częstotliwością rezonansową.

Przykład 8.5. Dwie pionowe siły harmoniczne, przyłożone w węzłach 2 i 3 (rys. 8.9) przekroju składającego się z trzech prostokątów wywołały drgania giętné wspornika, połączone z deformacją poprzeczną i paczeniem przekroju; amplitudy skrajnych węzłów konturu różnią się od amplitud przemieszczeń węzłów wewnętrznych. W stosunku do poprzednich przykładów zmieniono tylko wymiary przekroju poprzecznego ($a = 10$, $b = 15$) oraz długość pręta ($L = 100$), pozostawiając takie same grubości i stałe materiałowe.

9. Wnioski

Przy odpowiednio dobranych funkcjach kształtu model ramowo-powłokowy Własowa prowadzi do takich samych wyników, jak powszechnie znane modele prętowe. W ogólnym jednak przypadku przedstawiona metoda umożliwia opis dokładniejszy, uwzględnia bowiem rozmaite postacie deformacji poprzecznej i paczenia przekroju. Mankamentem teorii Własowa jest — jak wiadomo — odbiegający od rzeczywistości rozkład naprężeń stycznych w przekroju cienkościennego pręta. W wypadku zastosowania omawianej teorii do opisu drgań, przyjęcie niepoprawnego rozkładu naprężeń stycznych nie powinno mieć istotnego wpływu na obliczenia częstotliwości rezonansowych, gdyż w równaniach ruchu występują tylko wypadkowe tych naprężeń.

Znalezienie ogólnego rozwiązania równań ruchu (4.6), poprzez wartości i funkcje własne, jest — jak dotąd — możliwe tylko w najprostszycich przypadkach [9], [10]. Gdy przekrój pręta jest bardziej skomplikowany, rozmywa się przejrzystość opisu jaką dawała teoria techniczna, a znaczna liczba wartości własnych i podstawowych form wydłuża czas liczenia i angażuje pamięć maszyny cyfrowej. Zastosowana w pracy metoda bezpośrednia, prowadząca do rozwiązania szczególnego, umożliwia jednak oszacowanie częstotliwości rezonansowych i wskazanie najbardziej niebezpiecznych miejsc konstrukcji.

Pozornie najprostszyc problem numerycznego całkowania układu równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach okazał się w danym przypadku niełatwy, ze względu na błędy maszynowych zaokrążeń. Zawiodły metody wielokrokowe połączone z tworzeniem macierzy bazowej, a metody różnicowe wymagały przy wyższych częstotliwościach zbyt dużej pamięci maszyny. Zastosowana metoda [11] polegająca na rozwinięciu przewidywanych rozwiązań w szereg wielomianów Czebyszewa, umożliwia wyznaczenie pierwszych kilkunastu częstotliwości rezonansowych cienkościennego pręta

o przekroju złożonym z co najwyżej 8 - 10 prostokątów. Nadal więc problemem jest znalezienie dostatecznie szybkiej i dokładnej metody całkowania równań.

Jeżeli poszczególne węzły przekroju są połączone liniami prostymi (pręt cienkościenny o przekroju złożonym z wielokątów), proces obliczania na maszynie cyfrowej współczynników równania macierzowego (7.5) oraz warunków granicznych (5.12) można zautomatyzować. W pracy [5] przedstawiono algorytm, umożliwiający automatyczną generację równań ruchu cienkościennego pręta o przekroju złożonym ze skończonej liczby prostokątów, po wprowadzeniu danych, zawierających wymiary geometryczne i stałe materiałowe poszczególnych elementów konstrukcji.

Możliwe jest zastosowanie hipotezy Własowa do opisu drgań prętów cienkościennych o przekroju zmiennym odcinkami, przy czym niektóre odcinki takiej konstrukcji mogą być prętami cienkościennymi o profilu otwartym. Równania ruchu tych ostatnich są znane [1], [2], [3], a sprzężenie układów równań opisujących drgania poszczególnych odcinków umożliwia warunki graniczne (5.12).

Literatura

1. J. WIĘCKOWSKI, *Mechanika konstrukcji okrętowych*, Wyd. Politechniki Gdańskiej 1985.
 2. R. E. D. BISHOP, W. G. PRICE, *Hydroelasticity of Ships*, Cambridge University Press, 1979.
 3. В. Э. Власов, *Избранные Труды*, Т. III, ГИФМЛ, Москва 1960.
 4. Z. GÓRECKI, *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok w obliczeniach statycznych ortotropowych, liniowo-sprężystych prętów cienkościennych, przyzmatycznych, o przekroju wieloobwodowym, zamkniętym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 3/4, 20, 1982.
 5. M. SPERSKI, *Zastosowanie hipotezy Własowa do opisu drgań prętów cienkościennych o zamkniętym profilu*, *Prace Badawcze Instytutu Okrętowego Politechniki Gdańskiej* 1250//MR-360, 1979 (niepublikowana).
 6. H. MAJEWSKI, *Zastosowanie zasady Hamiltona do wyprowadzenia równań ruchu belki cienkościennej z uwzględnieniem deformacji konturu*, *Materiały IX Sympozjum: Drgania w Układach Fizycznych*, Poznań — Błażejewko 1980.
 7. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1970.
 8. G. OLUREMI-OLAFOE, *On the Tchebyschev method of solution of ordinary differential equations*, *J. of Math. Anal. and Appl.* 1, 1977.
 9. M. SPERSKI, *Drgania własne prętów cienkościennych i wieloobwodowym, zamkniętym przekroju*, *Prace Badawcze Instytutu Okrętowego Politechniki Gdańskiej* 1374//MR-436 1980 (niepublikowana).
 10. H. MAJEWSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy drgań belek cienkościennych o przekroju dwuobwodowym z uwzględnieniem deformacji konturu*, *Praca doktorska*, Politechnika Gdańska 1985 (niepublikowana).
 11. J. WIĘCKOWSKI i inni, *Wdrożenie półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów bezgrodzio- wych*, *Prace Badawcze Instytutu Okrętowego Politechniki Gdańskiej* 1148/79 (niepublikowana).
- Egzemplarze wymienionych prac niepublikowanych są dostępne w Bibliotece Głównej, lub jej filii przy Intytucie Okrętowym Politechniki Gdańskiej.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЛАСОВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ-ОБОЛОЧЕК ЗАКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В работе представлено обобщение теории Власова на случай движения. Интегрирование сформулированных, дифференциальных уравнений на вычислительной машине, позволяет определить ответ конструкции на вынуждение гармоническими силами, а также найти критические частоты.

S u m m a r y

USE OF SHAPE FUNCTIONS TO THE DESCRIPTION OF VIBRATION OF THE THIN-WALLED BARS WITH CLOSED SECTION

The motion equations of orthotropic elastic bar with multicircuit closed section have been formulated. The numerical integration of the differential equations of motion enables to determine the structure response caused by the system of harmonic forces excitation as well as the calculation of the resonance frequencies.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 maja 1986 roku.

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ DYNAMICZNYCH W OBSZARACH NIEOGRANICZONYCH.*

RYSZARD GAJEWSKI

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W numerycznej analizie zagadnień dynamicznych (zjawisko rozchodzenia się fal, problemy geotechniczne) wprowadzenie sztucznego brzegu powoduje wystąpienie nie-naturalnych odbić fal, zaburzających rozwiązanie. Z praktycznego punktu widzenia istotna jest więc umiejętność ich eliminacji i symulowanie nieograniczonego ośrodka. Najprostsze, ale jednocześnie chyba najkosztowniejsze, rozwiązanie polega na zbudowaniu modelu obliczeniowego o odpowiednio dużych wymiarach, pozwalającego na uzyskanie wyników przed wystąpieniem odbić.

Dla eliminacji tego zjawiska można na rozpatrywanym brzegu odcinającym skończony obszar zastosować odpowiednio dobrany system lepkich tłumików [6]. W wielu pracach wykorzystano rodzinę absorpcyjnych warunków brzegowych, opracowanych na podstawie uprzednio rozwiniętej teorii przez Engquista [2]. Znakomitym narzędziem do analizy tych zagadnień może być metoda elementów brzegowych [7], w której budowa nieskończonych elementów jest bardzo naturalna. Podobnie jak dla metody elementów skończonych w zagadnieniach statyki [8] można zbudować element nieskończony eliminujący odbicia lub rozwiązywać zadanie poprzez dokonanie odwzorowania obszaru nieograniczonego w obszar skończony.

W pracy przedstawiono trzy koncepcje eliminacji odbić poprzez przyjęcie absorpcyjnych warunków brzegowych typu Sommerfelda, superpozycję rozwiązań i przyjęcie dynamicznych warunków brzegowych. Proponowane algorytmy przetestowano na niewielkich zadaniach jedno- i dwuwymiarowych, wykorzystując mikrokomputer ZX Spectrum +, co umożliwiło wizualizację wyników.

* Praca prezentowana na I Ogólnopolskiej Konferencji „Mikrokomputery w Mechanice”, Warszawa 1986.

2. Absorpcyjne warunki brzegowe

Rozpatrzmy równanie falowe (1):

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}, \quad (1)$$

gdzie: $x \in [-a, 0]$, $t \in [0, \infty)$. Dla brzegu $x = 0$ poszukujemy takiego warunku, który dla fali o źródle w punkcie $x = -a$ poruszającej się w prawą stronę pozwoli na jej przejście przez brzeg $x = 0$ bez wywoływania odbić. Rozwiązanie równania (1) dane jest wzorem (2):

$$u = A \cdot \exp[i(\omega t - kx)] + B \cdot \exp[i(\omega t + kx)], \quad (2)$$

gdzie: ω — częstość kołowa, k — numer wektora falowego ($\omega = kc$), A — amplituda źródła, B — amplituda fali odbitej. Dokonując formalnego rozkładu operatora (1) otrzymamy (3):

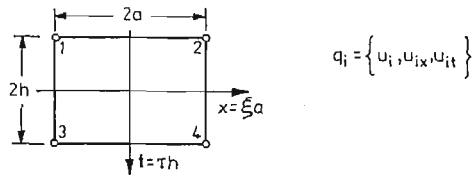
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (3)$$

Przyjmując dla $x = 0$ warunek brzegowy (4) zgodny z (3):

$$u_t + c \cdot u_x|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

łatwo stwierdzić, że podstawiając rozwiązanie (2) do (4) otrzymamy $B = 0$, co odpowiada eliminacji odbić. Wzór (4) zgodny jest z warunkiem wykorzystywanym przez Engquista, (dla fali poruszającej się w lewą stronę we wzorze (4) wystąpi znak $-$).

Proponowany warunek brzegowy może być wykorzystany nie tylko w metodzie różnic skończonych [2], ale także w metodzie elementów skończonych [1] lub metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych [4]. Wiąże się to jednak z koniecznością budowy elementów, dla których na rozpatrywanym brzegu mogą być wyrażone pochodne funkcji u .



Rys. 1. Element czasoprzestrzenny typu Hermite'a

Rozpatrzmy prostokątny element czasoprzestrzenny (rys. 1) o parametrach węzłowych (5)

$$\mathbf{q}_i = \{u_i, u_{ix}, u_{it}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

Macierz \mathbf{N} funkcji kształtu przyjmujemy w postaci wielomianów Hermite'a:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathbf{N}(x, t) \cdot \mathbf{q}_e, \\ \mathbf{N}(x, t) &= [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4]. \end{aligned} \quad (6)$$

Po przejściu na zmienne bezwymiarowe ξ , τ możemy N_i zapisać w postaci (7):

$$\mathbf{N}_i(\xi, \tau) = [\varrho(\xi_i \xi) \varrho(\tau_i \tau); a\omega(\xi_i \xi) \varrho(\tau_i \tau); h\varrho(\xi_i \xi) \omega(\tau_i \tau)], \quad (7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varrho(\zeta_0, \zeta) &= 0.25(2 + 3\zeta_0 - \zeta_0^3), \\ \omega(\zeta_0, \zeta) &= -0.25\zeta_i(1 + \zeta_0 - \zeta_0^2 - \zeta_0^3), \\ \zeta_0 &= \zeta\zeta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \zeta = \xi, \tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Przyjmując:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \partial \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{d}{d\xi} \\ \frac{1}{h} & \frac{d}{d\tau} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (9)$$

wyznaczamy macierz $B_i = \partial N_i$. Macierz sztywności elementu czasoprzestrzennego wyznaczamy ze wzoru (10):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_j \cdot ah \cdot d\xi d\tau, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \\ \mathbf{K}_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

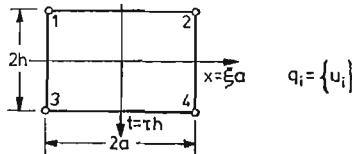
gdzie:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & -\varrho A \end{bmatrix}. \quad (11)$$

W otrzymanej tak macierzy \mathbf{K}_e podmacierze \mathbf{B}_e i \mathbf{C}_e są niesymetryczne, co w połączeniu z trzykrotnym wzrostem liczby niewiadomych w porównaniu do zadania rozwiązywanego tylko w wielkościach przemieszczeń znacznie obniża przydatność proponowanego algorytmu.

Spełnienie warunku (4) sprowadza się do kondensacji w macierzy sztywności elementu czasoprzestrzennego stopni swobody związanych z wielkościami u_x i u_t na brzegu odcinającym skończony obszar.

Ze względu na niską efektywność algorytmu wykorzystującego czworokątne elementy typu Hermite'a poszukiwano dla elementów czworokątnych z aproksymacją Lagrange'a pola przemieszczeń u (rys. 2) takich modyfikacji funkcji kształtu, aby na brzegu $\xi = \text{const}$



Rys. 2. Element czasoprzestrzenny typu Lagrange'a

spełniony był warunek (4). Modyfikacji poszukiwano w klasie wielomianów. Postulowano spełnienie warunku (4) na całym brzegu, w węzłach lub całkowo (12):

$$\begin{aligned} u(a, t)_i + c \cdot u(a, t)_x &= 0, \\ u_{ti} + c \cdot u_{tx} &= 0, \quad i = 2, 4, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_{-h}^h [u(a, t)_i + c \cdot u(a, t)_x] dt = 0.$$

Analizę przeprowadzono wykorzystując mikrokomputer ZX Spectrum +. Uzyskane w ten sposób modyfikacje funkcji kształtu prowadziły do schematów niestabilnych lub o znacznie obniżonej granicy stabilności. W badaniu stabilności wykorzystano warunek (13) [5]:

$$B + C - A - D > 0. \quad (13)$$

Celowe więc wydaje się rozszerzenie klas funkcji modyfikujących na funkcje wymierne, logarytmiczne lub eksponentialne.

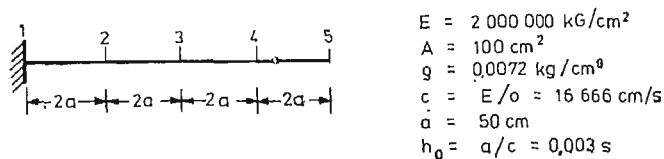
3. Metoda superpozycji rozwiązań

Rozpatrzmy ponownie równanie (1) i jego rozwiązanie (2). Przyjęcie na rozpatrywanym brzegu warunku (14):

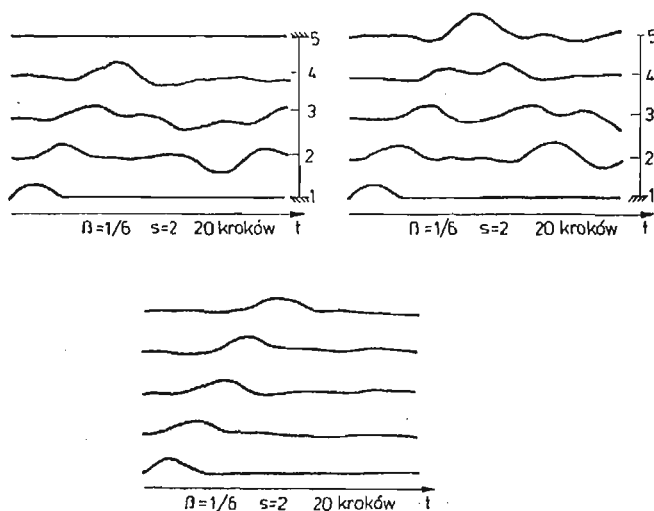
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad (14)$$

daje $B = -A$, zaś przyjęcie warunku (15):

$$u|_{x=0} = 0, \quad (15)$$



Rys. 3. Zagadnienie jednowymiarowe — drgania podłużne pręta



Rys. 4. Drgania podłużne pręta — superpozycja rozwiązań

daje $B = A$. Jak łatwo więc zauważyć superpozycja tych rozwiązań całkowicie eliminuje zjawisko odbicia fal.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić także dla zadania dwuwymiarowego (tarcza, membrana). Zwiększeniu ulega wtedy liczba superponowanych rozwiązań — należy uwzględnić wszystkie możliwe kombinacje warunków brzegowych w narożach.

Algorytm przetestowano na prostym zadaniu jednowymiarowym — drgań podłużnych pręta. (rys. 3). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4. Istotną wadą proponowanej metody jest wzrost czasu obliczeń i zapotrzebowania na pamięć, gdy superponowane zadania rozwiązywane są równoległe.

4. Dynamiczne warunki brzegowe

Do analizy dynamicznej nieograniczonego obszaru Ω wykorzystano β -algorytm metody elementów czasoprzestrzennych [3]. Macierze **A**, **B**, **C**, **D** mają budowę (16):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{D} = h(1-2\beta) \cdot \mathbf{S} - 1/2h \cdot \mathbf{M}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{C} = 2h \cdot \mathbf{S} + 1/2h \cdot \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie: $\beta \in [0, 1/2]$, $2h$ — krok całkowania, **S**, **M** — macierze sztywności i bezwładności. Układ równań metody elementów czasoprzestrzennych rozwiązujemy korzystając z zależności (17), (18):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_0 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{f}_0, \quad (17)$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{q}_{i-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{f}_i. \quad (18)$$

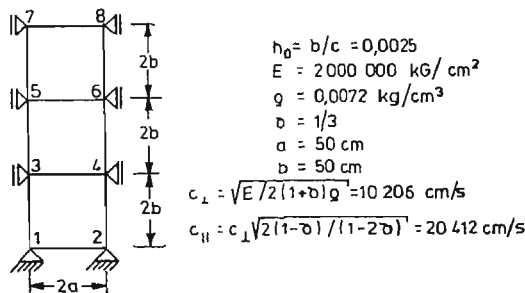
Wprowadzając dodatkowe oznaczenia (19):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^+ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}_{i+1}, \\ \mathbf{f}_i^- &= -\mathbf{C} \cdot \mathbf{q}_{i-1} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{q}_i, \end{aligned} \quad (19)$$

równanie (18) można przekształcić do postaci (20):

$$\mathbf{f}_i^+ = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^-. \quad (20)$$

Wielkości \mathbf{f}_i^- i \mathbf{f}_i^+ są wektorami pędów starym, obliczonym z przemieszczeń \mathbf{q}_{i-1} i \mathbf{q}_i oraz nowym, obliczonym z przemieszczeń \mathbf{q}_i i \mathbf{q}_{i+1} . Równanie (20) jest równaniem równowagi dynamicznej, zapisanym dla chwili i w wielkościach pędów. Wprowadźmy dodatkowy

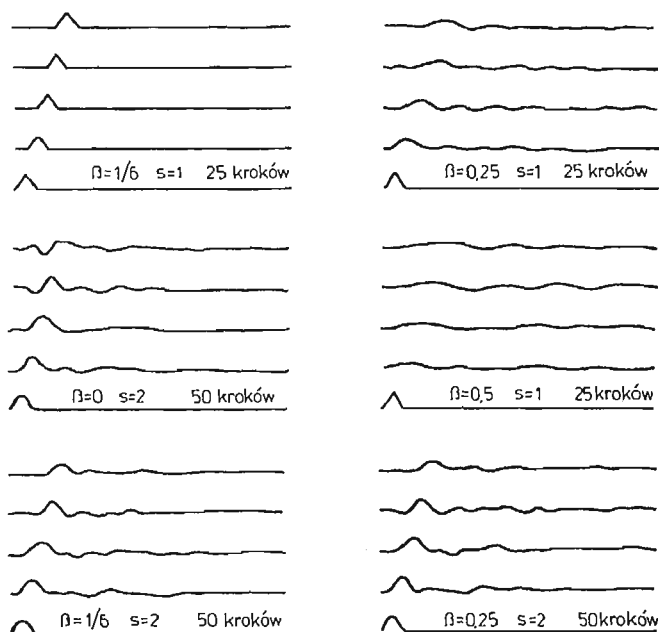


Rys. 5. Zagadnienie dwuwymiarowe — drgania tarczy

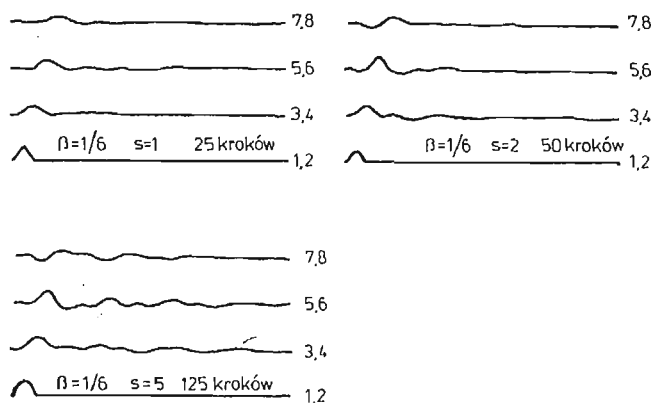
symbol $f_i^+|_\infty$ oznaczający składowe wektora f_i^+ na brzegu $\partial\Omega$ ograniczającym rozpatrywany skończony obszar Ω^* . Przyjmijmy, że węzły na brzegu $\partial\Omega$ są całkowicie nieobciążone i mają tylko ruchome stopnie swobody. Aby brzeg $\partial\Omega$ przy analizie obszaru Ω^* był w takich samych warunkach jak przy analizie Ω należy spełnić na nim dynamiczny warunek brzegowy (21):

$$f_i^+|_\infty = \mathbf{0}. \quad (21)$$

Przy przyjęciu $f_i|_\infty = \mathbf{0}$ odpowiada to warunkowi $f_i^-|_\infty = \mathbf{0}$. Jest on łatwy do spełnienia i wymaga niewielkich modyfikacji algorytmu. W równaniu (18) należy wyzerować składniki iloczynu $\mathbf{C} \cdot \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{q}_i$ odpowiadające stopniom swobody na brzegu $\partial\Omega$.



Rys. 6. Drgania podłużne pręta — dynamiczne warunki brzegowe



Rys. 7. Drgania tarczy — dynamiczne warunki brzegowe

Proponowany algorytm został sprawdzony na niewielkich zadaniach jedno- i dwuwymiarowych (drgania podłużne pręta- rys. 3, drgania tarczy- rys. 5). Obciążenie stanowił impuls kinematyczny. W obliczeniach wykorzystano mikrokomputer ZX Spectrum +. Wyniki obliczeń dla różnych wartości parametru β i skrócenia s ($s = h_0/h$) kroku całkowania przedstawiono na rys. 6 i rys. 7.

5. Uwagi końcowe

W rozwiązaniu i analizie postawionego problemu mikrokomputer ZX Spectrum + okazał się bardzo przydatnym narzędziem. Prosty program napisany w Basic-u umożliwił automatyzację badania różnych modyfikacji funkcji kształtu. Wyjście graficzne, choć bardzo niedoskonałe, pozwoliło na szybką wizualizację wyników i uniknięcie żmudnego wykonywania wykresów. Niewielka pojemność pamięci i bardzo wolny interpreter Basic-a uniemożliwiły rozwiązanie większych zadań. Proponowane algorytmy wymagają więc dalszych testów, możliwych do zrealizowania na profesjonalnym sprzęcie.

Literatura

1. B. ENGQUIST, H. O. KREISS, *Difference and finite element methods for hyperbolic differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 3, 581 - 596, 1979.
2. B. ENGQUIST, A. MAJDA, *Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves*, Proceedings of the National Academy Sciences of USA, 74, 5, 1765 - 1766, 1974.
3. Z. KACPRZYK, *Pewne uogólnienie metody czasoprzestrzennych elementów skończonych*, VI Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice, Tom 1, 251 - 256, Białystok 1983.
4. Z. KĄCZKOWSKI, *General formulation of stiffness matrix for space-time finite elements*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 25, 3, 351 - 357, 1979.
5. T. LEWIŃSKI, *Stability analysis of a difference scheme for the vibration equation with a finite number of degrees of freedom*, Applicationes Mathematicae, 18, 3, 473 - 486, 1983.
6. J. LYSMER, R. L. KUHLEMEYER, *Finite dynamic model for infinite media*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 95 EM4, 859 - 877, 1969.
7. D. M. MISLENOVIC, *Boundary element method and wave equation*, Applied Mathematical Modelling, 6, 3, 205 - 208, 1982.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, C. EMSON, P. BETTES, *A novel boundary infinite element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, 3, 393 - 404, 1983.

Резюме

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В численном решении динамических задач в неограниченных областях появляются отражения. Очень важным является исключение этих отражений и симуляция неограниченного пространства. В работе представлено несколько новых методов решения этой задачи. Один из них суперпонирует решения задач Дирихлета и Неймана. Введены тоже динамические и абсорбционные граничные условия, которые можно употреблять в методе конечных временно-пространственных элементов.

S u m m a r y

SOLUTION OF DYNAMICAL PROBLEMS IN UNBOUNDED REGIONS

In numerical solutions of dynamical problems in unbounded regions the presence of typical boundaries introduces reflections. It is very important to be able to eliminate these reflections and to simulate an infinite region. Some new techniques are presented in the paper. One of them solves the problem by adding together the solutions of Dirichlet and Neumann problems. Dynamical and absorbing boundary conditions, which can be used in space-time finite elements, are also introduced.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 kwietnia 1986 roku.

SIMULATION ANALYSIS OF A SEMI-ACTIVE VEHICLE SUSPENSION

TADEUSZ WESOŁOWSKI
KRZYSZTOF PÓLTORAK

Warsaw Technical University

1. Introduction

In recent years the traditional passive car suspensions cannot meet the growing requirements concerning comfort and safety of driving cars. While searching the optimum characteristics of suspensions, it is often found that this problem can be solved by applying the system of changeable structure, adjusting its characteristic to conditions of motion i.e. by applying so-called active systems. The active suspensions are mostly hydropneumatic, because of the simplicity of controlling their action. Their action can be controlled mechanically. The suspension to which the energy is supplied during the controlling process e.g. the working medium is pumped in, react to slow-varying displacements of the car body, such as those occurring when the car is rolling on curves or is braking [1]. The systems like those are characterized, however, by a long delay of action, so they cannot react properly to road irregularities.

There are also suspensions which are controlled by changing the magnitude of damping in the system [3, 4, 5]. These are called semi-active suspensions. They react immediately to the road irregularities. The example model of such a suspension patented by the first author [6] is shown in Fig. 1. The spring k_1 and the hydraulic damper with a mutable characteristics controlled by an inertial transmitter having the mass m_0 is located between the car body m_1 and the wheel m_2 . The transmitter consists of the spring k_0 and the damper c_0 which are connected to both the wheel and the mass m_0 . This mass is connected with the valve c_{10} by means of a lever system and is used for a direct control of the valve. The position of the valve slide is changed when the acceleration acts upon the mass during the car motion and/or the distance between the car body and the wheel changes. Any change of the slide position results in the change of the damping factor. Thus, it is easy to get the desirable characteristics

$$c_{10} = f(x) \quad \text{where} \quad x = z_0 - z, \quad (1)$$

by appropriate selection of the slide in the throttling valve.

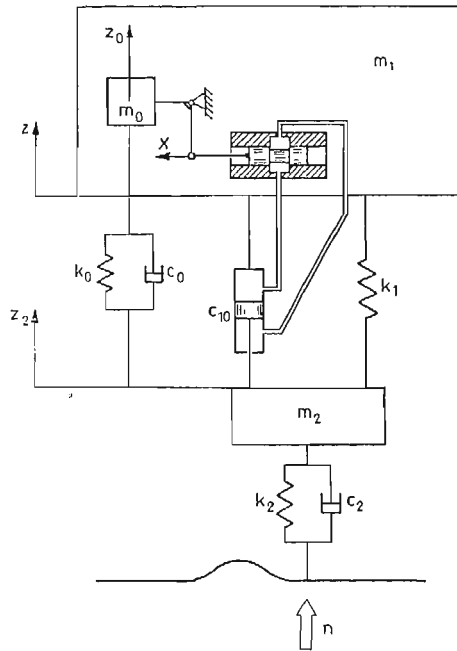


Fig. 1.

2. Analysis

The equation of motion of the inertial transmitter is derived basing on the scheme of the semi-active suspension shown in Fig. 1. The following assumptions are introduced:

- the valve is relieved and the mass of the slide is negligible as compared to m_0 ;
- the mass and the moment of inertia of connecting elements are neglected;
- the levers are long enough to assume the motion of the mass m_0 to be rectilinear;
- the mass m_0 can be neglected as compared to m_1 and m_2 .

The equation of motion takes the form:

$$m_0 \ddot{z}_0 + c_0(\dot{z}_0 - \dot{z}_2) + k_0(z_0 - z_2) = 0 \tag{2}$$

In the following the semi-active suspension shown in Fig. 1 is applied in — a plane model of a mobile crane (see Fig. 2) to absorb shocks acting on its leading axle. The application of the semi-active suspension in the vehicle like that seems to be especially justified because of several disadvantageous phenomena occurring in the currently applied passive system. For example so-called „galloping” is observed, which is a slow-decaying vibration of low frequency and big amplitude due to a huge moment of inertia of the car body. It occurs in the range of the working speed of the vehicle between 5 and 14 [m/s]. The application of the suspension with the mutable structure should lead to an observable diminishing of this vibration.

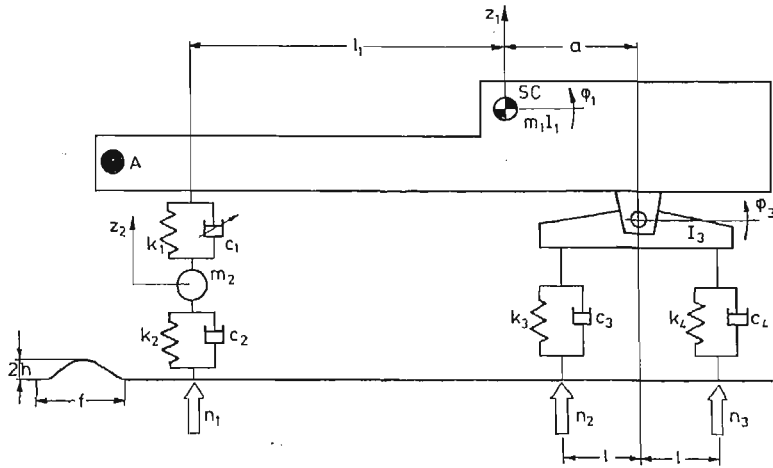


Fig. 2.

The currently presented in-plane model of the vehicle is a system of four-degree-of-freedom (without the inertial transmitter):

$$q_1 = z_1, \quad q_2 = \varrho_1, \quad q_3 = z_2, \quad q_4 = \varrho_3. \tag{3}$$

The Lagrange equation of the second kind is used to describe the model considered:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

By taking

$$q_5 = z_0 \tag{5}$$

and placing

$$z = z_1 + l_1 \varrho_1 \tag{6}$$

into the equation of motion (2) of the inertial transmitter, the following equation of motion of the vehicle with the semi-active suspension can be obtained:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_c\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{Q}_k\mathbf{n}, \quad \mathbf{q} = q(z_1, \varrho_1, z_2, \varrho_3, z_0) \tag{7}$$

where

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} c_1 + c_3 + c_4 & c_1 l_1 - a(c_3 + c_4) & -c_1 & l(c_3 - c_4) & 0 \\ c_1 l_1 - a(c_3 + c_4) & c_1 l_1^2 + a^2(c_3 + c_4) & -c_1 l_1 & al(c_4 - c_3) & 0 \\ -c_1 & -c_1 l_1 & c_1 + c_2 & 0 & 0 \\ l(c_3 - c_4) & al(c_4 - c_3) & 0 & l^2(c_3 + c_4) & 0 \\ 0 & 0 & -c_0 & 0 & c_0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} k_1 + k_3 + k_4 & k_1 l_1 - a(k_3 - k_4) & -k_1 & l(k_3 - k_4) & 0 \\ k_1 l_1 - a(k_3 + k_4) & k_1 l_1^2 + a^2(k_3 + k_4) & -k_1 l_1 & al(k_4 - k_3) & 0 \\ -k_1 & -k_1 l_1 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ l(k_3 - k_4) & al(k_4 - k_3) & 0 & l^2(k_3 + k_4) & 0 \\ 0 & 0 & -k_0 & 0 & k_0 \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}_c = \begin{vmatrix} 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & -ac_3 & -ac_4 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & lc_3 & l - c_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}_k = \begin{vmatrix} 0 & k_3 & k_4 \\ 0 & -ak_3 & -ak_4 \\ k_2 & 0 & 0 \\ 0 & lk_3 & -lk_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (12)$$

The function n modelling irregularities of the road (single obstacle) is plotted in Fig. 2. The analytical form of this function is as follows

$$n = h \left(1 - \cos \frac{2\pi l v}{f} \right) \quad (13)$$

The excitation acts on the system successively at the time resulting from the speed of the vehicle and the distance of its axles.

3. Numerical calculations

The problem is solved by use of a digital simulation technique. The equations of motion are transformed into the Cauchy form, so the RKGS procedure included in the IBM library can be applied. The RKGS procedure is a ready-made Fortran subprogram for solving ordinary differential equations of the first order with known initial conditions. It is based on the Runge-Kutta method of the fourth order with the Gill's modification.

The size of the program and the time of its execution makes it possible to perform numerical calculations on the 16-bit microcomputer in Fortran language working under CP/M-86 disc operating system. The computer used is NEC PC-9801E equipped in 348 kB RAM, a double floppy disk drive and a printer. The program runs about 5 min. for typical data. The results, which include displacements, vertical speeds and accelerations of the driver's cabin for following points of time, may appear on the monitor screen or on the printer depending on the computer operator's wish.

The selection of the appropriate step of integration is extremely important in the simulation process. If the step is taken to big a part of the excitation acting on the system may be ignored. In order to avoid such a case and in order to obtain the most accurate mapping of the excitation function the program reduces automatically the step of integration when the obstacle is met (independently of the RKGS procedure).

The example calculations are carried out for the data as for the mobile crane HYDROST-253 ($m_1 = 26520$ [kg], $m_2 = 1160$ [kg], $I_1 = 160000$ [kgm²], $I_3 = 160$ [kgm²], $k_1 = 1147370$ [N/m], $k_2 = k_3 = k_4 = 1759680$ [N/m], $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, $l_1 = 3.252$ [m], $l = 0.7$ [m], $a = 1.748$ [m]). The inertial transmitter data are as follows: $m_0 = 20$ [kg], $k_0 = 2692$ [N/m], $c_0 = 464$ [Ns/m].

The assumed dependence of the damping factor vs. the displacement of the mass m_0 taken for numerical simulation is shown in Fig. 3. This function is of parabolic type in the range $x < |0,07$ [m]| and is constant for other values of x ($c_{1max} = 17000$ [Ns/m], $c_{1min} = 75000$ [Ns/m]).

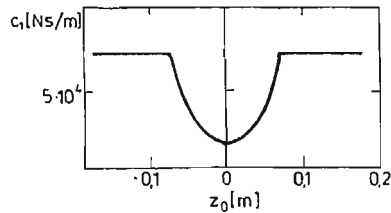


Fig. 3.

The simulative calculations are carried out for the speed of the vehicle equal to 5 [m/s].

The diagrams for the driver's cabin displacements with regard to time are shown in Fig. 4. Line *a* corresponds to the traditional suspension and line *b* to the semi-active suspension respectively.

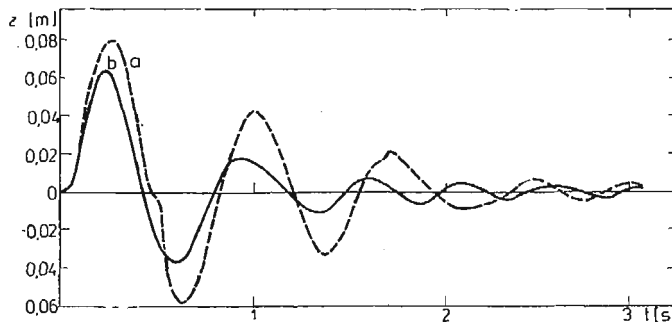


Fig. 4.

4. Concluding remarks

The comparison of the results obtained for both the traditional and the active suspension confirms that the application of the latter one results in a certain diminishing of the cabin displacements and the effective values of accelerations (a detailed analysis for a wide range of input data and several excitation functions will be the subject of a separate paper).

The program discussed in a convenient tool for predicting the vehicle behaviour on the irregularities of the road.

References

1. M. COTTEREL et. al., *Theoretical Analysis of an Active Suspension Fitted to a London Transport Bus*, Applied Science, London, 1976.
2. E. KAMIŃSKI, J. POKORSKI, *Dynamika zawieszzeń i układów napędowych pojazdów samochodowych*, WKŁ, Warszawa, 1983.
3. D. KARNOPP, M. J. GROSBY, R. A. HARWOOD, *Vibration Control Using Semi-Active Force Generators*, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, pp. 619 - 626, May 1974.
4. D. L. MARGOLIS, *Semi-Active Heave and Pitch Control for Ground Vehicles*, Vehicle System Dynamics, 11, pp. 31 - 42, 1982.
5. D. L. MARGOLIS, *Semi-Active Control of Wheel Hop in Ground Vehicles*, Vehicle System Dynamics, 12, pp. 317 - 330, 1980.
6. T. WESOŁOWSKI, *Zawieszenie aktywne pojazdu drogowego*, patent PRL 181449/80/84.

Резюме

СИМУЛИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ ПОЛУАКТИВНОЙ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ

В докладе представлен метод симулированного исследования подвесок автомобиля при помощи ЭВМ. Сделано теоретический анализ полуактивной подвески, которая управляется инерционным датчиком. Представлены тоже, основанные на примерах, результаты вычислений.

Streszczenie

ANALIZA SYMULACYJNA PÓŁAKTYWNEGO ZAWIESZENIA POJAZDU

W pracy przedstawiono metodę analizy symulacyjnej zawieszzeń pojazdów przy pomocy mikrokomputera. Analizie teoretycznej poddano model zawieszenia półaktywnego sterowanego nadajnikiem bezwładnościowym. Przedstawiono również przykładowe wyniki obliczeń numerycznych.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 kwietnia 1986 roku.

PRZYKŁADY WYKORZYSTANIA KOMPUTERÓW DOMOWYCH W NAUCZANIU WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

HANNA OLESIAK
JANUSZ ŚLIŻEWICZ

Politechnika Warszawska

Rozwój dość łatwo dostępnych komputerów domowych umożliwił zastosowanie ich do różnych obliczeń w ramach procesu dydaktycznego. W związku z tym zachodzi konieczność zmiany w podejściu do nauczania między innymi wytrzymałości materiałów przez zmniejszenie czasu poświęconego na rozwiązywanie przykładów numerycznych. Opracowane zostały programy do obliczeń płaskich ram, lub belek statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych, oraz momentów bezwładności na obecnie najpopularniejsze komputery ZX Spectrum lub ZX 81. Programy te zastępują istniejące zbiory zadań w tym zakresie i napisane zostały w języku Basic.

Pierwszy z programów pozwala na rozwiązywanie belek i ram płaskich obciążonych siłami i momentami skupionymi, oraz stałym obciążeniem ciągłym. Ramy statycznie niewyznaczalne rozwiązywane są metodą sił (równania Maxwella Mohra). Wielkościami poszukiwanymi są reakcje statycznie niewyznaczalne X_j , które wyznacza się z następujących liniowych równań algebraicznych:

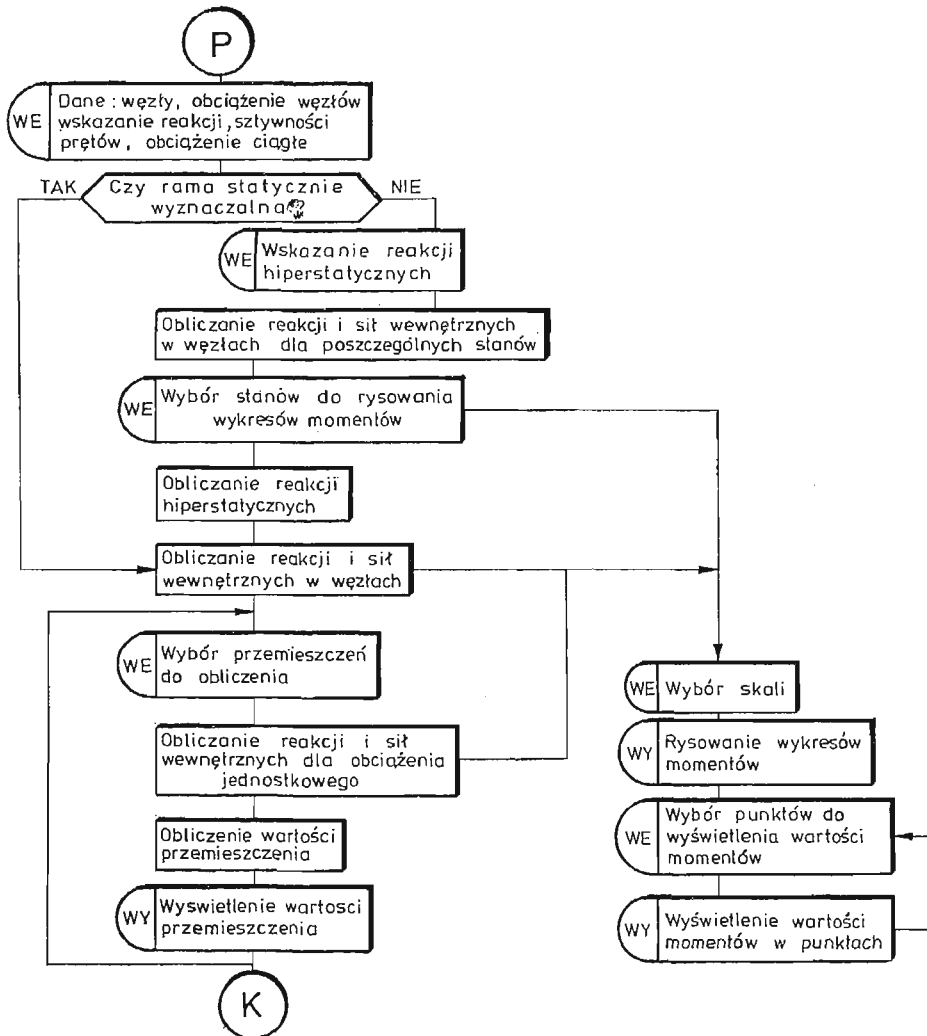
$$X_j a_{ij} + a_{i0} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie n jest stopniem statycznej niewyznaczalności. Do obliczania współczynników a_{ij} stosuje się metodę superpozycji rozwiązując kolejno: w stanie „0” zagadnienie rami obciążonej siłami zewnętrznymi, w stanie „1” obciążonej tylko siłą jednostkową przyłożoną w miejscu działania reakcji hiperstatycznej X_1 , itd. Pomijamy wpływ sił normalnych i stycznych. Współczynniki a_{ij} są następującymi całkami:

$$a_{ij} = \frac{M_i M_j}{EJ} dl,$$

gdzie: M_i , M_j są funkcjami, momentów zginających w poszczególnych stanach, a całkowanie dotyczy wszystkich prętów rami. Wykresy momentów dla kolejnych stanów potrzebne są do kontroli zadań, w których całkowanie wykonywane jest sposobem Wereszczagina. Dane i wartości momentów w węzłach przechowywane są w dwuwymiarowej macierzy węzłów $\mathbf{E}(k, 14)$ (k numer węzła), dwuwymiarowej macierzy reakcji $\mathbf{R}(k, 3)$

i trójwymiarowej macierzy prętów $\mathbf{T}(l, k, 5)$ (pręt łączy węzeł l z węzłem k). Wprowadzamy do komputera dane dotyczące kształtu ramy, sztywności prętów oraz obciążenie. Układy algebraicznych równań liniowych rozwiązywane są metodą Gaussa z wyborem największego elementu z kolumny, a całkowanie metodą Newtona Cotesa. Ze względu na to, że numeracja węzłów jest dowolna do znajdowania momentów zginających opracowano algorytm wyszukujący punkty leżące po jednej stronie przekroju. W wyniku otrzymujemy wykresy momentów zginających dla poszczególnych stanów z możliwością odczytywania ich wartości w każdym punkcie. Ponadto wyświetlane są wartości reakcji hiperstatycznych, a następnie otrzymujemy wykres momentów zginających dla ramy z uwzględnieniem wyliczonych reakcji hiperstatycznych. W dowolnym węźle ramy otrzymać możemy

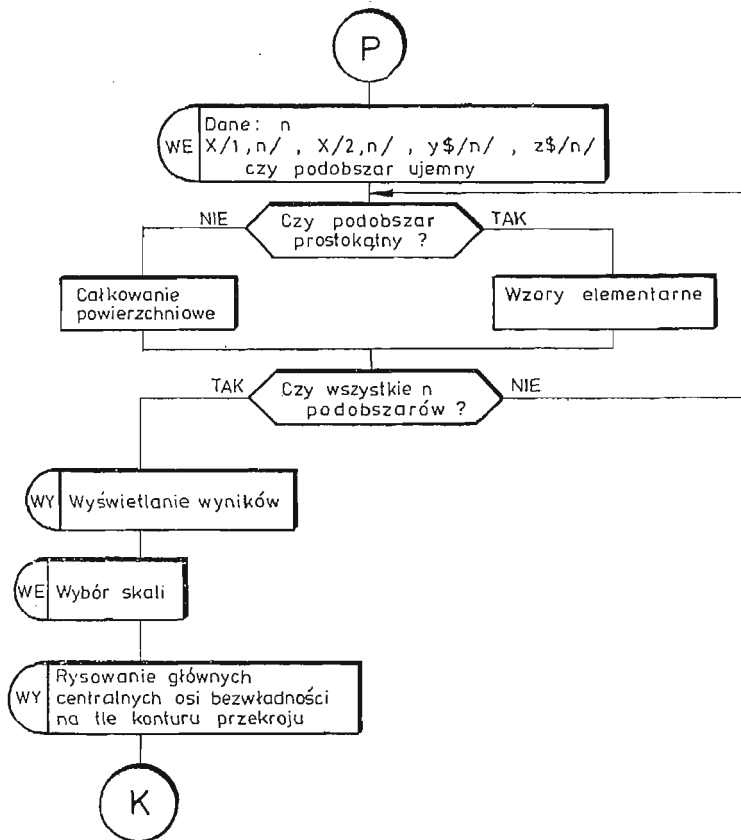


Rys. 1. Program do obliczania ram

wartość przemieszczeń liniowych i kąt obrotu elementu ramy oraz wykres dla ramy pod działaniem obciążenia jednostkowego odpowiadającego poszukiwanemu przemieszczeniu.

Dla ram statycznie wyznaczalnych otrzymujemy wykresy momentów zginających oraz przy poszukiwaniu przemieszczeń liniowych i kątowych w dowolnym węźle otrzymujemy wykresy dla ram pod obciążeniem jednostkowym. Wartości momentów zginających możemy odczytać w dowolnym punkcie ramy. Na ekranie otrzymujemy również wartości przemieszczeń.

Drugi program służy do znajdowania momentów bezwładności figur płaskich. Dane i wartości momentów przechowywane są w jednowymiarowych macierzach $\mathbf{B}(6)$, $\mathbf{y}(n)$, $\mathbf{z}(n)$ i dwuwymiarowej macierzy $\mathbf{X}(2, n)$ (gdzie n jest liczbą podobszarów). Całkowanie odbywa się dla obszarów podzielonych liniami pionowymi gdzie dół i góra obszaru zadane są dowolnymi funkcjami. Całkowanie powierzchniowe wykonywane jest metodą



- n liczba podobszarów
- X/1, n/ prosta ograniczająca podobszar z lewej strony
- X/2, n/ prosta ograniczająca podobszar z prawej strony
- y\$/n/ funkcja ograniczająca podobszar od dołu
- z\$/n/ funkcja ograniczająca podobszar od góry

Rys. 2. Program do obliczania momentów bezwładności

Gaussa. Komputer rozpoznaje podobzary prostokątne i wtedy w celu skrócenia czasu obliczeń omija całkowanie i wykorzystuje gotowe wzory. Możemy posługiwać się metodą obszarów ujemnych. Na ekranie otrzymujemy wyświetlane współrzędne środka ciężkości, momenty bezwładności i moment dewiacji względem osi centralnych, kąt określający położenie osi głównych centralnych, oraz momenty bezwładności względem tych osi. Następnie otrzymujemy na ekranie rysunek osi głównych centralnych na tle konturu przekroju.

Pierwszy program działa na komputerze ZX Spectrum 48 K oraz na ZX 81 z modułem pamięci 64 K. W przypadku ZX 81 ze względu na małą rozdzielczość grafiki wykresy są mniej czytelne niż na Spectrum dysponującym rozdzielczością 256×176 punktów. Schematy blokowe programów pokazano na rys. 1 i 2.

Резюме

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИКРОКОМПЬЮТЕРОВ В ОБУЧЕНИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Представлено две программы для микрокомпьютеров типа ZX СПЕКТРУМ и ZX 81.

Первая программа используется для решения задач статически определённых и неопределённых балок и плоских рам с построением эпюр изгибающих моментов и определением перемещений.

Вторая программа определяет главные центральные оси инерции и моменты инерции относительно этих осей.

Summary

AN APPLICATION OF PERSONAL MICROCOMPUTERS TO LEARNING OF STRENGTH OF MATERIALS

Two programs for microcomputers ZX Spectrum and ZX81 have been presented. Namely the program for solving statically determinate and indeterminate plane frames or beams with the diagrams of bending moments and computing the deflections. The second program computes the inertia moments of cross-sections and determines the principal axes with respect to the coordinate system.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 maja 1986 roku.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ STOSOWANEJ ZA OKRES XXI KADENCJI TJ. OD 11 MAJA 1984 R. DO 9 PAŹDZIERNIKA 1986 R.

1. Działalność naukowa

Zarząd Główny XXI kadencji, przy zachowaniu określonych przepisów prawnych i statutowych realizował działalność naukową przez:

- organizowanie zebrań naukowych, sympozjonów i szkół naukowych,
- udzielenie informacji naukowych członkom Towarzystwa i zainteresowanym instytucjom,
- utrzymywanie łączności z pokrewnymi stowarzyszeniami w kraju i za granicą (Jugosławiąńskim Towarzystwem Mechaniki, Słowackim Towarzystwem Mechaniki i Chińskim Tow. Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej),
- czynny udział w konferencjach krajowych i zagranicznych,
- wydawanie kwartalnika i materiałów konferencyjnych,
- organizowanie konkursów naukowych z nagrodami.

1.1. Zebrania naukowe.

Zebrania naukowe były formą ciągłej działalności. W ciągu XXI kadencji Zarząd Główny zorganizował 5 zebrań naukowych, natomiast w Oddziałach Towarzystwa odbyło się w sumie 167 zebrań, na których wygłoszono 179 referatów. Szczegółowy wykaz wygłoszonych referatów jest publikowany w sprawozdaniach rocznych.

1.2. Sympozja i konferencje organizowane lub współorganizowane przez Oddziały:

Gdańsk

- konferencja „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji”
maj 1985 268 os., 143 referaty
- konferencja „Problemy losowe w mechanice konstrukcji”
15-16 listopada 1985 64 os., 28 referatów

Gliwice

- XXIV Sympozjon „Modelowanie w mechanice”
4-9 marca 1985, Szczyrk 202 os., 11 kom., 69 ref.
- XXV Sympozjon „Modelowanie w mechanice”
17-22 marca 1986, Kudowa Zdrój 127 os., 43 referaty

Kielce

- Konferencja „Mechanika procesów technologicznych”
16-18 września 1985, Borków 51 os., 28 referatów

Łódź

- IV Sympozjum „Stateczność konstrukcji”
9-11 października 1985, Sulejów 53 os.

Poznań

- XI Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”
24-26 maja 1984, Błażewko 149 os., 76 referatów

- XIII Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”
15 - 17 maja 1986, Błażejewko 148 os. (14 zagr.),
119 ref., (35 plakatów)

Warszawa

- XI Sympozjum „Badania doświadczalne w mechanice ciała stałego”
6 - 8 października 1984 128 os., 96 referatów
- konferencja „Mechanika w lotnictwie”
27 - 28 stycznia 1985 152 os., 49 referatów
- I Ogólnopolska Konferencja „Mikrokomputery w mechanice”
27 lutego 1986 135 os., 35 referatów

Wrocław

- IX Sympozjum Reologii
listopad 1984 75 os., 30 referatów

Zielona Góra

- konferencja „Nauczanie mechaniki w rejonie zielonogórskim”
czerwiec 1984 40 os., 8 referatów

W przygotowaniu są następujące konferencje:

Częstochowa — VII Krajowa Konferencja Mechniki Cieczy i Gazów (1986)

Rzeszów — VI Sympozjum Dynamiki Konstrukcji (październik 1986)

Warszawa — X Sympozjum „Badania doświadczalne w mechanice ciała stałego” (październik 1986)

1.3. Sesje i seminaria naukowe.

W XXI kadencji zorganizowano w Oddziałach 14 sesji i seminariów naukowych. Szczegółowy wykaz jest publikowany w sprawozdaniach rocznych.

1.4. Konkursy naukowe.

Częstochowa — Konkurs na prace z mechaniki płynów, 1984-09-20

Sąd konkursowy w składzie: prof. prof. J. Elsner (Przewodniczący), Z. Dźygadło (Sekretarz), K. Orzechowski, Z. Kazimierski, R. Puzyrewski, E. Tuliscka, po wysłuchaniu 9 referatów przyznał:

- dwie nagrody II stopnia
dr inż. S. Drobniakowi za pracę „Struktury koherentne strugi osiowo-symetrycznej”
mgr inż. M. Marcinkowskiemu za pracę „Oprządkowanie oraz metody eksperymentalnego wyznaczenia przepływu pary przez ostatnie stopnie turbin kondensacyjnych”
- jedną nagrodę III stopnia
dr inż. M. Ciałkowskiemu za pracę „Rozwiązanie przepływu idealnego czynnika ściśliwego w palisadzie profilu metodą wariacyjną”
- trzy wyróżnienia
dr inż. P. Sierputowskiemu i mgr inż. J. Błażewiczowi za pracę „Badania modelowe opływu wiatrem fragmentów zabudowy miejskiej o skomplikowanej figuracji geometrycznej”
mgr inż. J. Rokickiemu za pracę „Zagadnienia odwrotne w teorii układu profilów”
dr inż. T. Kowalskiemu za pracę „Dystrybucja kropeł zawiesiny w przepływie typu Poiseuilla”

Gliwice

Konkurs na pracę dyplomową z zakresu mechaniki teoretycznej im. prof. W. Burzyńskiego. Sąd konkursowy w składzie: prof. prof. R. Gryboś (Przewodniczący), A. Jakubowicz, J. Wojnarowski, doc. doc. W. Staroski, W. Szuścik przyznał następujące nagrody:

- dwie nagrody II stopnia
mgr inż. G. Poremskiemu za pracę „Efekty sprzężenia pola przemieszczeń w aspekcie nieliniowych równań konstytutywnych termosprężystości na modelu półprzestrzeni”
mgr inż. M. Wiercigrochowi za pracę „Symulacja cyfrowa procesów wykonania otworów na wiertarko-frezarce WFM-100N”
- jedną nagrodę III stopnia
mgr inż. K. Tkoczowi za pracę „Ocena wartości użytkowych łańcuchów górniczych ze stali 23 HGNMa”
- dwa wyróżnienia
mgr inż. J. Skrzydlakowi za pracę „Analiza wpływu grubości warstwy przyściennej na strukturę prze-

plywu w osiowym stopniu sprężającym”

mgr inż. K. Sura za pracę „Analiza zużycia elementów napędu maszyn urabiających na przykładzie głowicy kombajnu ścianowego”

Wrocław

Konkurs na najlepszą pracę z mechaniki stosowanej.

Nagrody I stopnia nie przyznano.

Nagrodę II stopnia przyznano dr inż. J. Kołodziejowi za pracę „Przegląd zastosowań metody kollokacji brzegowej w mechanice ośrodków ciągłych”.

Nagrodę III stopnia przyznano dr inż. Wł. Ilkowiowi za pracę „Obliczanie macierzy sztywności pręta w zagadnieniu geometrycznie nieliniowym z warunku równowagi sił”.

1.5. Kursy i szkoły.

Zarząd Główny PTMITS zorganizował Szkołę „Sterowanie w mechanice”. Wygłoszono 6 cykli wykładów. W trakcie odbyła się dyskusja okrągłego stołu nt. „Mechanika w programach Wyższych Szkół Technicznych” 20 - 25 października 1985, Rudy Raciborskie

Kielce

— cykl wykładów „Metody komputerowe w mechanice”

20 - 26 czerwca 1986

Szczecin

— kurs „Podstawy metody elementów skończonych”

marzec 1985

— cykl wykładów „Metoda różnic skończonych w mechanice ciała stałego i termodynamice”

14 - 18 kwietnia 1986

Warszawa

— szkoła „Chaos w mechanice”

sierpień 1984

1.6. Dyskusje okrągłego stołu.

Gliwice

— „Problemy projektowania silnie obciążonych profili skrzynkowych w maszynach górniczych”

Warszawa

— „Modelowanie w mechanice konstrukcji”

— „Modelowanie stochastyczne czy inne”

— „Mikrokomputery w mechanice”

— „Stateczność, stabilność a może co innego”

2. Działalność wydawnicza

W XXI kadencji Komitet Redakcyjny kwartalnika „Mechanika Teoretyczna i Stosowana” działał w składzie:

Marek Dietrich (Przewodniczący), Zbigniew Dźygadło, Janusz Elsner, Stanisław Jerzy Gduła, Igor Kisiel, Witold Nowacki, Zenon Mróz, Bogdan Skalmierski, Piotr Wilde, Józef Wojnarowski, Michał Życzkowski, Zbigniew Olesiak — Redaktor Naczelny, Stanisław Dubiel, Jacek Stupnicki, Andrzej Tylikowski, Czesław Woźniak — Redaktorzy, Liliana Jezierska — Redaktor Techniczny do czerwca 1985, Felicja Kolińska — Sekretarz Redakcji do czerwca 1985, Ewa Koisar — Sekretarz Redakcji i Redaktor Techniczny od 1 października 1985.

2.1. Wydawnictwa periodyczne i ciągłe.

W roku 1984 ukazały się następujące zeszyty kwartalnika MTiS — 1/1983, 2 - 3/1983, 4/1983, łącznie 57,5 ark.

W roku 1985 ukazały się zeszyty 1 - 2/84 — 23,5 ark., 3 - 4/84 — 22,5 ark.

Złożono do druku zeszyty: 1/85, 2/85, 3 - 4/85, 1 - 2/86.

W roku 1986 ukazały się zeszyty: 1/85 — 10,5 ark., 2/85 — 11,5 ark.

Złożono do druku zeszyty: 3/86, 4/86.

- Zarząd Główny wydał metodą małej poligrafii:
- Biuletyn „Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics” str. 14, Warszawa 1984
 - Materiały Szkoły „Sterowanie w mechanice”, (red. St. Dubiel) str. 391, Warszawa 1985., dzięki pomocy Politechniki Śląskiej i Wojskowej Akademii Technicznej.
 - Biuletyn „O Chińskim Towarzystwie Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej”, str. 5, 1986
- Oddziały wydały:
- zbiór referatów konferencji „Problemy losowe w mechanice” Gdańsk, str. 237
 - zbiór referatów VII Konferencji „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji”, V tomów, Gdańsk, str. 1396
 - zbiór referatów XXIV Sympozjonu „Modelowanie w mechanice” PTMTS Oddział Gliwice 1985, z. 51, str. 673
 - zbiór referatów XXIV Sympozjonu „Modelowanie w mechanice”
Prace członków Oddziału PTMTS Oddział Gliwice 1985, z. 52, str. 174
 - zbiór referatów XXV Sympozjonu „Modelowanie w mechanice”, PTMTS Oddział Gliwice, 1986 z. 53, T.I. str. 291, T. II, str. 281.
 - zbiór referatów konferencji „Mechanika procesów technologicznych PTMTS Oddział Kielce, Zeszyt Naukowy Politechniki Świętokrzyskiej nr. 37, 1985, str. 248
 - materiały IV Sympozjum „Stateczność konstrukcji”, PTMTS Oddział Łódź, 1985, str. 135
 - zbiór referatów XI Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, PTMTS Oddział Poznań, 1984, str. 313
 - zbiór referatów XII Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, PTMTS Oddział Poznań, 1986, str. 440
 - Materiały VI Sympozjum Dynamiki Maszyn, PTMTS Oddział Rzeszów, 1985, str. 500
 - Zbiór referatów IX Sympozjum Reologii, PTMTS Oddział Wrocław, 1984, str. 232
 - Konferencja „Nauczanie mechaniki w regionie Zielonogórskim”, PTMTS Oddział Zielona Góra, 1984, str. 44
 - R. Cwik, J. Wojnarowski — „Dwudziestolecie PTMTS Oddział Gliwice” z. 50, Gliwice 1984, str. 94
 - Informator o tematyce prac badawczych z zakresu mechaniki teoretycznej i stosowanej prowadzonych w środowisku poznańskim — PTMTS Oddział Poznań, 1985, str. 24
 - [K. Biernatowski], S. Fuliński, M. Jokiel, H. Wzorek — „Oddział Wrocławski PTMTS w latach 1958-1983”, Wrocław 1984, str. 56

3. Współpraca towarzystwa z zagranicą

3.1. Profesor Z. OLESIAK został zaproszony przez Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaniki (Jugoslovensko Društvo za Mehaniku) na 16 Jugosłowiański Kongres Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, który odbył się w Bečići w dniach 28 maja - 1 czerwca 1984. Kongres ten był związany z 30-leciem istnienia Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki. Profesor Z. OLESIAK przekazał na ręce Prezesa J. T. M. (Profesor dr Luka Vujošević) i Sekretarza Generalnego (Profesor dr Jovo Jarić) medal wybity z okazji 25-lecia naszego Towarzystwa oraz znaczki PTMTS i pozdrowienia oraz życzenia od Zarządu Głównego. Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaniki jest zainteresowane współpracą z PTMTS. Prof. Jovo Jarić zaproponował w imieniu Z. G. organizowanie w przyszłości polsko-jugosłowiańskich sympozjów. Pierwsze takie sympozjum miałyby się odbyć w Jugosławii w r. 1987. Prof. Jovo Jarić przebywał w Warszawie w sierpniu 1984, przed Kongresem Mechaniki w Danii, by wręczyć profesorowi Witoldowi Nowackiemu dyplom honorowego członka J. T. M. Uroczystość odbyła się w Ambasadzie Jugosłowiańskiej w Warszawie dnia 17 sierpnia 1984. Prof. Z. OLESIAK wygłosił na Jug. Kongresie Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej referat pt. „Modelling of the moment theory of plasticity” i po Kongresie na zaproszenie Wydziału Maszynowego Uniwersytetu w Belgradzie referat na temat zagadnień termicznych w teorii szczelin. Obszerne sprawozdanie z 16 Jug. Kongresu Mechaniki zostało złożone do publikacji w Biuletynie PTMTS 22/1984 zeszyt 4.

3.2. W dniu 3.12.1984 na X Konferencji Teorii Maszyn i Mechanizmów prof. J. WOJNAROWSKI

wręczył profesorowi L. MAUNDEROWI z Anglii dyplom członka zagranicznego Towarzystwa wraz z biuletynem informacyjnym.

3.3. W dniu 4.07.1984 Z. Gł. przekazał do wydawnictwa The World of Learning 1984 - 85, informacje o Towarzystwie, która została wydrukowana (1985, s. 927).

3.4. Gośćmi zagranicznymi Towarzystwa byli:

Z NRD — H. Aurich, M. Granz, M. Hoffmeister, F. Ihlenburg, E. Köhler, W. Kühn, W. Kissing, H. Pfau, S. Larek, R. Tiedt, Ch. Reissmann, G. Burghardt,

z ZSRR — W. L. Fiedjajew, A. L. Goldenwejzer, L. Soskin, Z. Agamirow,

z Holandii — W. I. Huisman,

z Hiszpanii — F. Motta,

z Węgier — S. Nagy,

z RFN — L. P. Nolte, P. Rix, U. Schick, J. Wauer, D. Besdo,

z Czechosłowacji — K. Prileryl, J. Vrbka,

ze Szwecji — B. Broberg,

z USA — S. K. Dey,

z Chin — Fu Hua Ling.

3.5. Powołano dwóch nowych członków zagranicznych PTMTS — prof. Józefa Brillę ze Słowackiego Uniwersytetu w Bratysławie i prof. Giovanniego Bianchiego z Mediolanu.

3.6. Przeprowadzono dalsze rozmowy w sprawie organizowania wymiennych konferencji z mechaniki z Jugosławijskim Towarzystwem Mechaniki. W rozmowach ze strony jugosławijskiej udział brali: prof. prof. Z. Vujesevic, J. Jaric, Rózić. Ze strony polskiej rozmowy prowadzili: podczas kongresu GAMM w Dubrowniku (I - 4 VI 1985) prof. prof. A. Tylikowski, J. Wojnarowski, podczas XVII Jugosławijskiego Kongresu Méchaniki Teoretycznej i Stosowanej w Radarze (2 - 6 VI 1986) prof. prof. Z. Olesiak, K. Sobczyk, A. Tylikowski.

3.7. Przekazano dyplomy członkom zagranicznym PTMTS: prof. Trusdellowi z USA, prof. Olafowi Brulinowi ze Szwecji oraz prof. Stigowi Hjalmarowski ze Szwecji, uzyskując zwrotne potwierdzenia.

4. Działalność organizacyjna

4.1. Władze Towarzystwa

Prezydium Zarządu Głównego działało w składzie:

prof. dr hab. J. WOJNAROWSKI — Przewodniczący

prof. dr hab. E. BRZUCHOWSKI — wiceprzewodniczący

prof. dr hab. W. KRZYŚ — wiceprzewodniczący

prof. dr hab. Z. DŻYGADŁO — Sekretarz Generalny

prof. dr hab. A. WILCZYŃSKI — Skarbnik

doc. dr J. LIPIŃSKI — Zastępca Sekretarza Generalnego

prof. dr hab. R. PARKITNY — Zastępca Skarbnika

Ponadto w posiedzeniach Prezydium brali udział:

prof. dr hab. B. SKALMIERSKI — Członek Zarządu

prof. dr hab. K. SOBCZYK — Członek Zarządu

prof. dr hab. M. WIZMUR — Członek Zarządu

doc. dr J. GOŁAŚ — Zastępca Członka Zarządu

doc. dr Cz. MICKIEWICZ — Zastępca Członek Zarządu

doc. dr. Z. SULIMOWSKI — Zastępca Członka Zarządu

Główna Komisja Rewizyjna działała w składzie:

prof. dr hab. A. TYLIKOWSKI — Przewodniczący

prof. dr O. DĄBROWSKI, prof. dr hab. K. WRZEŚNIEWSKI — Członkowie

prof. dr hab. St. DUBIEL, doc. dr M. SKOWRONEK — Zastępcy Członków

Zarządy w Oddziałach działały w składzie:**Bielsko-Biała**

Przewodniczący	— prof. dr hab. St. J. GDULA	(od 30.05.86)*	doc. dr M. TROMBSKI
Zastępca	— doc. dr R. BŁOCKI		doc. dr. hab. St. WOJCIECH
Sekretarz	— dr inż. Wł. JAKUBIEC		dr inż. Wł. JAKUBIEC
Skarbnik	— dr hab. inż. St. WOJCIECH		dr inż. Zb. BANET
Członek Zarządu	— dr inż. A. SUCHETA		dr inż. A. SUCHETA

Bydgoszcz

Przewodniczący	— doc. dr hab. E. WALICKI	(od 22.10.85)	doc. dr. inż. B. SIOŁKOWSKI
Sekretarz	— dr inż. A. WALICKA		dr inż. A. TOPOLIŃSKI
Skarbnik	— dr inż. M. MALEC		dr inż. M. MALEC
Członek Zarządu	— dr inż. J. LORKOWSKI		dr J. CABAŃSKI
Członek Zarządu	— mgr inż. J. ZADŹWIEJA		doc. T. KABAT

Częstochowa

Przewodniczący	— prof. dr hab. J. ELSNER	(od 27.03.86)	prof. dr hab. J. ELSNER
Zastępca	— prof. dr hab. R. PARKITNY		prof. dr hab. R. PARKITNY
Sekretarz	— dr inż. St. DROBNIAK		dr inż. St. DROBNIAK
Skarbnik	— dr inż. J. ZAJDEL		dr inż. J. ZAJDEL
Członek Zarządu	— doc. dr hab. L. TOMSKI		doc. dr L. TOMSKI
Członek Zarządu	— doc. dr. W. BACHMACZ		doc. dr W. BACHMACZ
Zastępcy			dr A. BOKOTA
			dr A. PIEKARSKA

Gdańsk

Przewodniczący	— prof. dr hab. E. BIELEWICZ	(od 27.05.86)	prof. dr hab. E. BIELEWICZ
Zastępca	— doc. dr hab. W. PUDLIK		doc. dr hab. W. PUDLIK
Sekretarz	— dr inż. E. WITBRODT		doc. dr H. SPUS
Skarbnik	— doc. dr hab. M. SKOWRONEK		dr inż. H. WALUKIEWICZ
Członek Zarządu	— doc. dr inż. H. SPUS		doc. dr hab. A. SAWICKI
			dr inż. A. ZIMTROWICZ

Gliwice

Przewodniczący	— doc. dr W. SZUŚCIK	(od 13.05.86)	doc. dr W. SZUŚCIK
Zastępca	— doc. dr hab. W. STAROSOLSKI		doc. dr A. AJDUKIEWICZ
Sekretarz	— dr inż. H. SKOWRON		dr inż. A. BUCHACZ
Zastępca	— dr inż. A. BUCHACZ		dr inż. H. SKOWRON
Skarbnik	— dr inż. R. ĆWIK		dr inż. J. ŚWIDER
Zastępca	— dr in. J. KUCZYŃSKI		dr inż. R. ĆWIK
Członek Zarządu	— doc. dr hab. G. KOSMAN		dr inż. J. KUCZYŃSKI
Członek Zarządu	— dr inż. J. SUCHOŃ		doc. dr hab. G. KOSMAN

Kielce

Przewodniczący	— doc. dr hab. A. RADOWICZ	(od 26.03.86)	doc. dr hab. A. RADOWICZ
Zastępca	— dr inż. A. PIĄTKOWSKI		doc. dr L. GOŁASKI

*) Data Walnego Zgromadzenia

Sekretarz	— dr inż. A. BARCHAN	dr inż. A. BARCHAN
Skarbnik	— dr inż. W. GIERULSKI	dr inż. W. GIERULSKI
Członek Zarządu	— dr inż. M. MIKSA	dr inż. A. NEITZ
Członek Zarządu	— doc. dr hab. M. KARGOL	dr inż. A. PIĄTKOWSKI

Kraków

Przewodniczący	— doc. dr hab. St. BEDNARZ	(od 19.03.86)	doc. dr hab. J. RYŚ
Zastępca	— doc. dr J. SKRZYPEK		prof. dr hab. Z. STOJEK
Sekretarz	— dr inż. J. WAPIENNIK		dr inż. Z. SKRZYSZOWSKI
Skarbnik	— dr inż. M. BACZYŃSKA		
Członek Zarządu	— prof. dr hab. W. KRZYŚ		doc. dr hab. St. DUBIEL
Członek Zarządu	— prof. dr hab. M. ZABAWA		dr inż. L. GŁUCH
Zastępca	— dr inż. A. GUMIŃSKI		dr inż. A. GOŁAŚ
Zastępca	— dr inż. J. GASZYŃSKI		dr inż. St. MICHAŁOWSKI
Zastępca	— dr inż. L. GŁUCH		

Lublin

Przewodniczący	— doc. dr Z. ROTTER	(od 13.03.86)	doc. dr Z. ROTTER
Zastępca	— dr inż. A. MALICKI		dr inż. A. MALICKI
Zastępca	— dr inż. M. BARTNIK		dr inż. M. BARTNIK
Sekretarz	— dr inż. B. SKIERCZYŃSKI		dr inż. K. SCHABOWSKA
Skarbnik	— mgr inż. F. MARTINKA		mgr inż. F. MARTINKA
Członek Zarządu	—		dr inż. R. OSTAPIUK

Łódź

Przewodniczący	— doc. dr hab. W. KOBZA	(od 24.05.86)	doc. dr T. PRZEDECKI
Zastępca	— dr inż. A. MŁOTKOWSKI		dr inż. Z. KOŁAKOWSKI
Sekretarz	— dr inż. L. KOWALCZYK		dr inż. S. KOSIŃSKI
Skarbnik	— dr inż. T. JESKE		dr inż. B. ROGOWSKI

Opole

Przewodniczący	— doc. dr hab. J. KUBIK	(od 21.05.86)	doc. dr hab. T. CHMIELEWSKI
Zastępca	— doc. dr J. GOŁAŚ		doc. dr hab. J. KUBIK
Sekretarz	— doc. dr M. GRYZMAŃSKI		dr J. WYRWĄŁ
Skarbnik	— dr inż. T. DZIADEK		dr R. KAŁUŻA
Członek Zarządu	— dr inż. TARCZYŃSKI		dr T. SMOLEŃ

Poznań

Przewodniczący	— doc. dr hab. R. DZIĘCIELAK	(od 14.04.86)	doc. dr hab. R. DZIĘCIELAK
Zastępca	— doc. dr hab. A. LITEWKA		doc. dr hab. J. KUBIK
Sekretarz	— doc. dr hab. R. SYGULSKI		doc. dr hab. R. SYGULSKI
Członek Zarządu	— dr J. RAKOWSKI		doc. dr hab. A. LITEWKA
Zastępca	— doc. dr hab. J. KUBIK		dr inż. F. SORDYL

Rzeszów

Przewodniczący	— doc. dr H. KOPECKI	(od 21.03.86)	doc. dr H. KOPECKI
Zastępca	—		doc. dr hab. J. WALCZAK
Sekretarz	— dr inż. W. ZYLSKI		dr inż. W. ZYLSKI

Skarbnik	— dr inż. WŁ. ŁAKOTA	dr inż. WŁ. ŁAKOTA
Członek Zarządu	— prof. dr J. MADEJSKI	dr inż. M. JANARSKI

Szczecin

Przewodniczący	— doc. dr hab. K. GRUDZIŃSKI	doc. dr hab. K. GRUDZIŃSKI
Zastępca	— prof. dr hab. M. KMIECIK	prof. dr hab. M. KMICIK
Sekretarz	— doc. dr Cz. MICKIEWICZ	doc. dr Cz. MICKIEWICZ
Skarbnik	— dr inż. J. HONCZARENKO	dr inż. J. HONCZARENKO
Członek Zarządu	— doc. dr B. KUŹNIEWSKI	doc. dr B. KUŹNIEWSKI

Warszawa

(od 26.05.86)

Przewodniczący	— prof. dr hab. A. OLĘDZKI	prof. dr hab. A. OLĘDZKI
Zastępca	— prof. dr hab. W. SZEPLIŃSKA-STUPNICKA	
Sekretarz	— dr inż. Z. GORAJ	dr inż. Z. GORAJ
Zastępca	— dr inż. J. BAJKOWSKI	
Skarbnik	— prof. dr hab. P. JASTRZĘBSKI	dr inż. W. SOBIERAJ
Zastępca	— dr inż. W. SOBIERAJ	dr inż. J. GRABOWSKI
Członek Zarządu	— prof. dr hab. J. MARYNIAK	prof. dr hab. J. MARYNIAK
Członek Zarządu	— dr inż. T. KUZMICEWICZ	doc. dr hab. R. BOGACZ
		dr inż. M. JEŻ

Wrocław

Przewodniczący	— prof. dr hab. <u>K. BIERNATOWSKI</u>	prof. dr hab. M. ZAKRZEWSKI
Zastępca	— doc. dr F. ROMANÓW	prof. dr hab. Z. GABRYSZEWSKI
Członek Zarządu	— doc. dr hab. M. WERSZKO	
Sekretarz		dr WŁ. BRZKAŁA
Członek Zarządu	— doc. dr M. JOKIEL	
Skarbnik		dr L. STRICKER
Członek Zarządu	— doc. E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI	doc. R. JANKOWIAK
Członek Zarządu	— doc. dr J. WOJCIECHOWSKI	doc. dr F. ROMANÓW
Zastępca	— dr inż. Z. SYSAK	dr inż. Z. SYSAK Czł. Zarz.
Zastępca	— dr inż. W. BRZEKAŁA	dr inż. S. WÓJCIK Czł. Zarz.

Zielona Góra

(od 22.05.86)

Przewodniczący	— doc. dr L. SZELOCH	doc. dr L. SZELOCH
Zastępca	— mgr inż. St. MAZUR	dr inż. St. PRYPUTNIEWICZ
Sekretarz	— dr inż. St. PRYPUTNIEWICZ	dr inż. G. BRYŚ
Skarbnik	— dr inż. Ł. FRĄCKOWIAK	mgr inż. J. SOBICH

4.2. Członkowie Towarzystwa

Liczba członków Towarzystwa wzrosła w kadencji o 71 osób i osiągnęła 1138 osób. Liczba członków w Oddziałach przedstawia się następująco: Bielsko-Biała — 26, Bydgoszcz — 42, Częstochowa — 82, Gdańsk — 59, Gliwice — 168, Kielce-31, Kraków — 88, Lublin — 57, Łódź — 59, Opole — 23, Poznań — 76, Rzeszów — 18, Szczecin — 42, Warszawa — 243, Wrocław — 101, Zielona Góra — 21.

4.3. Członkowie zagraniczni Towarzystwa

W ciągu 26 lat istnienia PTMTS w poczet członków zagranicznych Towarzystwa zostało przyjętych 65 naukowców.

4.4. Członkowie honorowi

W dotychczasowej działalności PTMTS tytuł członka honorowego Towarzystwa otrzymali:

	Oddział	Rok nadania godności
prof. dr Włodzimierz Burzyński	— Gliwice	1966
prof. dr Bohdan Stefanowski	— Warszawa	1966
prof. dr Edmund Karaśkiewicz	— Poznań	1970
prof. dr Jerzy Mutermilch	— Warszawa	1970
prof. dr Wacław Olszak	— Warszawa	1970
prof. dr Witold Nowacki	— Warszawa	1971
prof. dr Marian Janusz	— Gliwice	1974
prof. dr Janusz Dietrych	— Gliwice	1976
prof. dr Zbigniew Kączkowski	— Warszawa	1976
prof. dr Zbigniew Brzoska	— Warszawa	1978
prof. dr Igor Kisiel	— Wrocław	1978
prof. dr Jan Oderfeld	— Warszawa	1978
prof. dr hab. Oktawian Popowicz	— Gliwice	1984

5. Zebrania organizacyjne

5.1. Zebrania Głównej Komisji Rewizyjnej

Zebranie Głównej Komisji Rewizyjnej odbyło się 21 marca 1985 r.

5.2. Zebrania Prezydium Zarządu Głównego

W XXI kadencji odbyło się 11 posiedzeń Prezydium ZG oraz 6 posiedzeń plenarnych z częścią naukową.

5.3. Zebrania Zarządów w Oddziałach Towarzystwa

W XXI kadencji Zarządu Głównego odbyły się 133 zebrania organizacyjne Zarządów Oddziałów.

6. Wyróżnienia za zasługi dla Towarzystwa

W biuletynie informacyjnym kwartalnika MTiS z. 2/1985, został opublikowany Protokół z XXI Zjazdu Delegatów i Sesji Naukowej PTMTS. Wymieniono w nim dwunastu Członków Towarzystwa, którzy w czasie XXI Zjazdu Delegatów otrzymali od Prezesa PAN listy z podziękowaniami.

W dniu 21 listopada 1985 r. odbyło się w Oddziale Gliwickim uroczyste zebranie Zarządu, w czasie którego Przewodniczący WRN prof. dr Adam Szczurowski z okazji 25 lecia Oddziału Gliwice wręczył odznaki „Zasłużonemu w Rozwoju Województwa Katowickiego” — złotą Instruktorce Oddziału p. Jadwidze Wojdzie oraz odznaki srebrne niżej wymienionym Członkom Towarzystwa: Andrzejowi Buchaczowi, Jerzemu Kuczyńskiemu, Joachimowi Otte, Wojciechowi Pilichowi oraz Józefowi Suchniowi.

W trakcie IX Sympozjonu Reologii połączonego z obchodami 25-lecia Oddziału Wrocławskiego PTMTS za pracę na rzecz Towarzystwa złotą odznakę „Zasłużonemu w Rozwoju Województwa Wrocławskiego” otrzymali: Augustyn Bacz, Eugeniusz Brzuchowski, Adam Cybulski, Igor Kisiel i Jerzy Zawadzki.

W dniu 2.07.1986 r. na plenarnym posiedzeniu Zarządu Głównego w Opolu, przewodniczący prof. J. Wojnarowski wręczył ustępującym Przewodniczącym Oddziałów pisemne podziękowanie za ich pracę społeczną na rzecz Towarzystwa w XXI kadencji.

7. Ważniejsze uchwały organów statutowych Towarzystwa i inne zmiany organizacyjne

7.1. 21 maja 1985 Urząd Miasta Stołecznego Warszawy zatwierdził Statut PTMETS uchwalony na XXI Zjeździe Delegatów.

7.2. 14 grudnia 1985 na zebraniu plenarnym ustalono termin Zjazdu Delegatów na 9 - 10 października 1986. Zjazd ten organizowany przez Oddział Częstochowa odbędzie się w Kokotku.

7.3. 14 grudnia 1985 zatwierdzono instrukcję obiektu dokumentów finansowych.

7.4. 14 grudnia 1985 przyjęto jako obowiązujące stawki za referaty naukowe zgodnie z Dziennikiem Urzędowym Ministerstwa Pracy, Płac i Spraw Socjalnych Nr 5 z dnia 19.IX.85 w sprawie wynagrodzania osób wygłaszających odczyty, prelekcje i referaty (od 1800,— do 1200,— w zależności od stopnia naukowego).

7.5. Opracowano „Informację o podstawowych kierunkach i warunkach działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej” i przekazano ją 24 stycznia 1985 do Komitetu Organizacyjnego III Kongresu Nauki Polskiej.

7.6. Przygotowane opracowanie „Rozwój nauk mechanicznych w Polsce — wnioski PTMETS na III Kongres Nauki Polskiej” przekazano 21 czerwca Sekretarzowi Komitetu Organizacyjnego Kongresu prof. dr hab. Romanowi Neyowi.

Rozwój nauk mechanicznych w Polsce — wnioski Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej na III Kongres Nauki Polskiej

Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej — skupiające ponad tysiąc przedstawicieli nauki polskiej i sięgające swą działalnością do wszystkich znaczących ośrodków naukowych i technicznych kraju wyraża swoje wnioski dotyczące podstawowych kierunków rozwoju mechaniki w najbliższych latach.

Mechanika — nauka o ruchu ciał materialnych — wyrosła jako jedna z pierwszych dziedzin przyrodnictwa. Uczestnicząc w rozwiązywaniu fundamentalnych problemów związanych z poznawaniem otaczającego świata, mechanika wzbogaca nieprzerwanie od czasów Newtona swą treść i metody. Dzisiaj swe doniosłe znaczenie zawdzięcza szerokiemu zakresowi opisywanych zjawisk i dojrzałości metod badawczych. Mechanika stanowi podstawę poznawczą wielu dziedzin współczesnej techniki.

W ostatnich latach obserwujemy szczególnie szybki rozwój nauk mechanicznych. Jest on stymulowany, obok naturalnego dążenia do poznawania nowych zjawisk, potrzebami praktyki, a także możliwościami związanymi z zastosowaniem komputerów. Dążność do ulepszania konstrukcji konwencjonalnych oraz rozwój konstrukcji nowych (np. pojazdy kosmiczne, reaktory atomowe, roboty itp.) wywołuje potrzebę rozszerzania badań. Związane z tym wprowadzenie nowoczesnych materiałów stymuluje np. rozwój badań w zakresie mechaniki ciał stałych. Wymienimy tutaj dla ilustracji materiały obejmowane nazwą kompozytów (materiały wzmocniane włóknami, cięgnami, wtrąceniami nieregularnymi itp.); odpowiednie połączenie różnych składników prowadzi do unikalnych własności globalnych. Istotnym rysem współczesnej mechaniki jest zazębianie się i wzajemne przenikanie różnych dziedzin i metod badawczych. Wiele żywych i ważnych problemów mechaniki rodzi się na styku mechaniki z fizyką, chemią, nauką o sterowaniu i biologią.

Polska mechanika aktywnie uczestniczy we wskazanym wyżej postępie i ma w pewnych wybranych dziedzinach istotne — na światowym poziomie — osiągnięcia. Dotyczy to głównie badań teoretycznych w zakresie mechaniki ciał stałych i konstrukcji. W zakresie doświadczalnictwa — wyraźnie odstawiamy od poziomu światowego, głównie ze względu na brak wyposażenia laboratoryjnego. Ten brak bazy laboratoryjnej (na właściwym współczesnym poziomie) jest alarmujący i może wpłynąć bardzo negatywnie na dalszy rozwój mechaniki i jej zastosowania w technice.

Inną przeszkodą na drodze rozwoju mechaniki w Polsce jest pogarszający się stan informacji naukowej i technicznej (np. obcinanie prenumeraty czasopism naukowych i skąpy zakup nowych książek). Należy też wymienić brak nowoczesnego sprzętu komputerowego — szeroko wykorzystywanego obecnie w krajach rozwiniętych do wspomagania badań i do wdrażania wyników do praktyki.

Biorąc pod uwagę priorytetowe kierunki badań wskazane w tezach przed III Kongresem Nauki

Polskiej wynikające z potrzeb rozwoju gospodarczego kraju, a także uwzględniając tradycje i obecne zaangażowanie niektórych dziedzin, PTMTS uważa za konieczne prowadzenie badań w następujących kierunkach.

1. Mechanika ciał stałych wraz z teorią pól połączonych

Szczególny nacisk powinien być położony na kontynuację istniejących szkół naukowych w zakresie teorii sprężystości, teorii plastyczności oraz teorii oddziaływań wzajemnych pól elektromagnetycznych, termicznych i pól naprężeń.

Spośród kierunków mniej rozwiniętych należy rozwijać w sposób zorganizowany mechanikę materiałów kompozytowych oraz mechanikę zniszczenia, w szczególności — badania akumulacji zniszczenia zmęczeniowego.

Należy również podkreślić ważność mechaniki procesów przetwórstwa materiałów (obróbka metali, formowanie polimerów itp.) oraz mechanikę górotworu i gruntu.

2. Mechanika konstrukcji inżynierskich

Szczególne znaczenie ma rozwój systemów analizy numerycznej i komputerowej złożonych konstrukcji i zastosowania w technologii reaktorowej, w inżynierii morskiej itp.

Zagadnienia niezawodności, optymalizacji i identyfikacji konstrukcji powinny być rozwijane ze względu na ich doniosłość praktyczną we wszystkich rodzajach konstrukcji inżynierskich.

3. Mechanika mechanizmów, konstrukcji ruchomych i dynamika maszyn

Chociaż mechanika układu punktów materialnych i ciał sztywnych jest dziedziną, która już dawno osiągnęła wysoki stopień dojrzałości formalnej, spełnia ona ciągle bardzo ważną rolę w bardzo licznych zastosowaniach, np. w mechanice nieba, mechanice mechanizmów, maszyn i pojazdów. Wciąż ważne związane są z badaniem różnych struktur ruchomych, z analizą i syntezą mechanizmów, problemy badaniem drgań i stateczności ruchu. Szczególnej uwagi wymagają problemy analizy i syntezy układów elektromechanicznych ze sterowaniem w związku z projektowaniem i wytwarzaniem manipulatorów i robotów.

4. Mechanika cieczy i gazów

Jest to bardzo obszerna dziedzina badań o bogatej tradycji, rozwiniętych metodach i szerokich zastosowaniach związanych z okrętownictwem, lotnictwem, energetyką, budownictwem morskim, meteorologią, ochroną środowiska itp. Na szczególne wyróżnienie zasługują tutaj przepływy z uwzględnieniem różnych zjawisk fizycznych i chemicznych jak spalanie, wrzenie, kondensacja, jonizacja itp. Inny ważny kierunek badań to przepływy wielofazowe oraz stacjonarne i niestacjonarne opływy profilów i brył występujące w lotnictwie, energetyce i budownictwie. Wreszcie równie ważny i ostatnio szybko rozwijający się dział mechaniki płynów — to przepływy turbulენტne. Problemy związane z rozpoznawaniem natury zjawiska turbulencji i jego właściwego opisu oraz różne zastosowania teorii turbulencji powinny być przedmiotem, szczególnej uwagi.

Przedstawione wyżej zwięźle podstawowe kierunki badań w dziedzinie nauk mechanicznych wymagają dla swego rozwoju zarówno metod teoretycznych jak i doświadczalnych, a także ze względu na różnorodny charakter zjawisk i problemów — różnych metodologii badawczych (deterministycznych, stochastycznych itp.). Jest oczywiste, iż realizacja wymienionych kierunków badań będzie możliwa jedynie przy zapewnieniu właściwej, szybkiej informacji — w postaci periodyków i książek naukowych, kserografów oraz otwartych kontaktów ze światem zewnętrznym — oraz przy wyposażeniu laboratoriów naukowych we właściwy i nowoczesny sprzęt. Bardzo ważny jest też właściwy sposób finansowania badań oraz ich organizacja. Istniejące obecnie problemy badawcze powinny być utrzymane; wydaje się jednak, że utworzenie na ich bazie problemów o węższym zakresie tematycznym mogłoby wpłynąć na zwiększenie elastyczności i efektywności badań.

W zakresie usytuowania prawno-administracyjnego towarzystw pożądana jest nowelizacja ustawy, która umocniłaby pozycję tego społecznego ruchu i dałaby większe szanse szczególnie regionalnym oddziałom do zdobycia choćby skromnej bazy lokalowej.

W chwili obecnej dużym utrudnieniem działalności Oddziałów PTMTS jest brak lokali. Zarządy Oddziałów gnieźdzą się kątem w pokojach Instytutów uczelnianych nie posiadając odpowiedniego sprzętu biurowego, niejednokrotnie brak nawet maszyny do pisania.

W zakresie warunków materialnych działalność PTMTS ze względu na rozwój Towarzystwa wymaga większej pomocy ze strony Polskiej Akademii Nauk, terenowych organów władzy i administracji państwowej, a także sponsorów gospodarczych. Obecnie przepisy zasad finansowania Towarzystw naukowych nie są elastyczne i uniemożliwiają przyjęcie dotacji sponsora z uwagi na przepis, który automatycznie redukuje dotacje PAN. Daje się również odczuć brak przepisów umożliwiających np. wykonanie ekspertyz, co nie sprzyja wdrażaniu zasad wynikających z reformy gospodarczej.

Uważamy za problem dużej wagi, aby władze Polskiej Akademii Nauk, niezależnie od przygotowujących wniosków na III Kongres Nauk Polskiej, już w chwili obecnej podjęły decyzję w zakresie zwiększenia dotacji finansowych dla Towarzystwa, co jest niezbędne dla normalnego działania Oddziałów i Zarządu Głównego PTMTS.

Za wyżej wymienione opracowania PTMTS otrzymało podziękowanie od Komitetu Organizacyjnego III Kongresu Nauki Polskiej.

8. Inne formy działalności

W związku z III Kongresem Nauki Polskiej prof. K. Sobczyk i prof. J. Wojnarowski opracowali ankietę dotyczącą stanu i perspektyw rozwoju nauk mechanicznych w Polsce. Ankietę przeprowadzono wśród samodzielnych pracowników nauki — członków Towarzystwa.

Prof. R. Gutowski — wiceprzewodniczący XX kadencji ZG PTMTS opracował propozycje i sugestie dotyczące rozwoju polskich specjalności w nauce i technice (ze szczególnym uwzględnieniem roli Pol. Warszawskiej).

Na uroczystościach odsłonięcia tablicy i wybicia medalu z racji 20. rocznicy śmierci prof. Witolda Wierzbickiego I Przewodniczącego PTMTS, w dniu 25 czerwca 1985 Zarząd Główny PTMTS reprezentował i przemówienie wygłosił prof. dr hab. J. Wojnarowski.

9. Etatowi pracownicy PTMTS

Barbara Michalska-Czachor (do 12.03.86)		ZG PTMTS cały etat
mgr inż. A. Furmaniak-Dźwiarek (od X.85)		ZG PTMTS cały etat
Barbara Kręzlewicz (do IX.85)		ZG PTMTS 1/2 etatu
Helena Jańczyk (od 1.04.86)		ZG PTMTS 1/2 „
mgr Ewa Koisar (od X.85)		ZG PTMTS 1/2 „
Jacek Kowalczyk (od 12.05.86 do 12.08.86)		ZG PTMTS cały etat
Cecylia Sarbinowska	O/Bydgoszcz	1/2 etatu
Anna Sadek	O/Częstochowa	1/4 „
Hanna Pieniążek	O/Gdańsk	1/4 „
Jadwiga Wojda	O/Gliwice	1/3 „
Maria Cabak	O/Kraków	1/4 „
Irena Szmelter	O/Łódź	1/4 „
Barbara Szymkow	O/Opole	1/8 „ do 31.02.1984
Maria Zwierzykowska	O/Poznań	1/5 „
Mieczysława Mierzejewska	O/Szczecin	1/4 „
Czesława Ostrowska	O/Rzeszów	1/8 „
Helena Wzorek	O/Wrocław	1/4 „
Anna Nonckiewicz	O/Zielona Góra	1/8 „ do 31.12.1985

10. Realizacja uchwał XXI Zjazdu Delegatów

Zarząd Główny XXI kadencji realizując uchwały Zjazdu Delegatów doprowadził do zatwierdzenia nowego Statutu Towarzystwa, zorganizował szkołę naukową „Sterowanie w mechanice”, przygotował biuletyn o działalności Towarzystwa w okresie 25-lecia, przeprowadził badania opinii dotyczącej stanu i perspektyw rozwoju nauk mechanicznych w Polsce.

11. Sprawozdanie finansowe

Zostało ujęte w oddzielnym sprawozdaniu.

12. Analityczna ocena działalności Towarzystwa

W okresie XXI kadencji zanotowano dalszy rozwój Towarzystwa:

1. Liczba członków wzrosła o 71 osób i osiągnęła liczbę 1138.
2. Odbyło się 167 zebrań, na których wygłoszono 179 referatów.
3. W zebraniach naukowych udział wzięło 2850 osób, a 898 zabrało głos w dyskusji.
4. Zorganizowano:
 - 13 sympozjów i konferencji, w których udział wzięło około 1650 osób i wygłoszono na nich 724 referaty,
 - 13 sesji i seminariów naukowych,
 - 3 konkursy naukowe,
 - 2 szkoły naukowe,
 - 3 kursy naukowe.
5. Gośćmi Towarzystwa było 29 uczonych zagranicznych.
6. Wydano: 496,5 ark. wydawniczych, w tym 125,5 publikacji periodycznych. Szczególnie cenną pozycją jest Kronika Oddziału Wrocławskiego.
7. Nadano godność Członków Zagranicznych prof. Józefowi Brillii (CSRS) i prof. Giovanniemu Bianchietemu (Włochy).
8. Towarzystwo reprezentowane było w Komitecie Mechaniki PAN, na III Kongresie Nauki Polskiej i na spotkaniach okolicznościowych.
9. Rozszerzono program zebrań plenarnych Zarządu Głównego o część naukową. Zapoczątkowano również odbywanie zebrań plenarnych w Oddziałach.
10. Podjęto prace w zakresie gromadzenia i porządkowania informacji o działalności Oddziałów.

Z. DŻYGADŁO
J. WOJNAROWSKI

IX Kongres n. t. Badania Materiałów

Budapeszt, 29.IX - 3.X.1986 R.

W dniach 29 września - 3 października 1986 r. odbył się w Budapeszcie IX Kongres n.t. Badania Materiałów (9th Congress on Material Testing and 3rd Danubia-Adria Symposium).

Organizatorami Kongresu były:

- Naukowe Stowarzyszenie Inżynierów Mechaników Węgierskiej Republiki Ludowej (The Scientific Society of Mechanical Engineers — Gépipari Tudományos Egyesület, GTE);
- Austriackie Towarzystwo Doświadczalnej Analizy Odształceń (Society of Experimental Strain Analysis — ASESA) — Austria;
- Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaników (Yugoslav Society of Mechanics — Croatian Society of Mechanics).

Przewodniczącym 17-osobowego Komitetu Organizacyjnego, w skład którego wchodził przedstawiciel wszystkich wymienionych wyżej stowarzyszeń, był prof. dr Kornel Lehofer.

Kongres n.t. Badania Materiałów jest organizowany tradycyjnie w Budapeszcie co 4 lata i obejmuje szeroki zakres zagadnień. Na obecnym, IX-ym Kongresie — podobnie jak w latach poprzednich — oprócz zagadnień analizy naprężeń, problemów zmęczenia i pełzania oraz badań nieniszczących, najwięcej uwagi poświęcono różnym aspektom procesów zniszczenia.

Obrazy Kongresu odbywały się w salach Domu Techniki w Budapeszcie. Oficjalnymi językami Kongresu były: angielski, niemiecki, węgierski i rosyjski. W Kongresie wzięło udział ponad 330 uczestników z 20-tu krajów, w tym około połowa spoza Węgier. Najliczniej, poza Węgrami, reprezentowane były kraje demokracji ludowych: Polska (35 osób), NRD (32 osoby) i Czechosłowacja (20 osób). Ponadto w Kongresie wzięli udział przedstawiciele: Austrii (5), Bułgarii (8), Chin (2), Egiptu (1), Francji (2), Holandii (2), Japonii (2), Jugosławii (12), Kanady (2), Kuwejtu (1), Portugalii (1), RFN (13), Rumunii (3), Szwecji (2), Szwajcarii (5), Włoch (5) i Związku Radzieckiego (8).

Obrazy Kongresu rozpoczęły się Sesją Plenarną, której przewodniczył prof. J. Prohaszka. Przemówienia powitalne wygłosili: prof. K. Lehofer oraz prof. Z. Terplan. Następnie w trzech referatach przeglądowych zostały przedstawione osiągnięcia Węgierskiej Republiki Ludowej w ostatnim 10-leciu w zakresie badań własności mechanicznych materiałów konstrukcyjnych (K. Lehofer), doświadczalnej analizy naprężeń (I. Huszar) oraz badań nieniszczących (I. Karsai).

Program obrad był podzielony między 3 Sekcje problemowe. Z kolei, kolejne sesje — w ramach obrad każdej z Sekcji — poświęcone były określonej tematyce. Prowadzone były zarówno sesje referatowe jak i plakatowe.

Problematyka obrad Sekcji I-ej dotyczyła zagadnień zniszczenia, zmęczenia i pełzania. W kolejnych 5-ciu sesjach referatowych tej Sekcji omówiono:

Sesja I.1. — Rozwój pęknięć (8 referatów);

Sesja I.2. — Zagadnienia zmęczenia (10 referatów);

Sesja I.3. — Pęknięcia przy obciążeniach dynamicznych (9 referatów);

Sesja I.4. — Modele uszkodzeń i metody doświadczalne (7 referatów);

Sesja I.5. — Zmęczenie termiczne i wytrzymałość na pełzanie (7 referatów).

Przedmiotem obrad Sekcji II-ej była doświadczalna analiza naprężeń. W ramach tej Sekcji odbyły się 4 sesje referatowe, na których omówiono następujące zagadnienia:

Sesja II.1. — Rozwój metod optycznych (8 referatów);

Sesja II.2. — Pomiar naprężeń kontaktowych i własnych (8 referatów);

Sesja II.3. — Zagadnienia modelowania i techniki hybrydowej (7 referatów);

Sesja II.4. — Zastosowanie analizy naprężeń i automatyzacji (6 referatów).

W Sekcji III odbyły się 2 sesje referatowe poświęcone badaniom nieniszczącym. Na pierwszej z nich przedstawiono 7, a na drugiej — 8 referatów.

Ponadto odbyło się 5 tematycznych sesji plakatowych. Na każdej z nich zgrupowano prace z zakresu określonej tematyki, podanej hasłowo w następujących tytułach kolejnych sesji:

Sesja A — Pomiar i analiza naprężeń (19 prac);

Sesja B — Zmęczenie (33 prace);

Sesja C — Badania nieniszczące (25 prac);

Sesja D — Pełzanie i zmęczenie termiczne (29 prac);

Sesja E — Zniszczenie (30 prac).

Tematycznie, sesje plakatowe B, D i E stanowiły integralną część obrad Sekcji I-ej, sesja A — Sekcji II-ej, zaś sesja C — Sekcji III-ej.

Najwięcej prac przedstawiono na obradach Sekcji I — (ok. 133), w czasie obrad Sekcji II przedstawiono 48 prac, zaś Sekcji III — 40 prac.

Łącznie wygłoszono 88 referatów, a 136 prac przedyskutowano na sesjach plakatowych. Z Polski przedstawiono ogółem 47 prac, z których 31 przedstawiono w trakcie obrad prowadzonych w Sekcji I, 13 prac — w Sekcji II oraz 3 prace — w Sekcji III.

W pracach, przedstawianych podczas obrad Sekcji I-ej omówiono m.in. niżej wymienione zagadnienia.

1. Na sesji pierwszej oraz związanej z nią tematycznie sesji plakatowej E przedyskutowano: zagadnienia inicjacji pęknięć i ich propagacji w różnych materiałach oraz spoinach, wpływy: karbów, ośrodków korozyjnych, wtrąceń siarki niemetalicznej, rys powierzchniowych i temperatury na powstawanie i rozprzestrzenianie się pęknięć, związki między koncentracją naprężeń a propagacją pęknięć, kryteria zniszczenia materiałów izo- i anizotropowych, metody statystycznej oceny rozwoju pęknięć w obszarach koncentracji naprężeń przy obciążeniach wolnozmiennych, zagadnienia rozpraszania energii przy szybkiej propagacji pęknięć, a także wyniki licznych badań dotyczących wyznaczania różnych parametrów wytrzymałościowych metali konstrukcyjnych, materiałów ceramicznych, polimerów, połączeń spawalniczych oraz wysokociśnieniowych zbiorników cylindrycznych.
2. Na sesji drugiej oraz na związanej z nią tematycznie sesji plakatowej B omówiono m.in.: zjawiska, towarzyszące zmęczeniu różnych materiałów konstrukcyjnych, mikromechanizmy wzrostu pęknięć zmęczeniowych w stalach austenicznych, specjalne urządzenia badawcze przeznaczone do badań własności mechanicznych konstrukcyjnych elementów pracujących w wyczerpanych warunkach, podstawy, metodę oraz urządzenie komputerowej analizy propagacji pęknięć zmęczeniowych w spoinach, metodę określania wytrzymałości zmęczeniowej niemetalowych elementów konstrukcyjnych, wpływ różnych czynników (naprężeń wstępnych, obciążeń przypadkowych, powłok cynkowych, jonizacji itp.) na wytrzymałość zmęczeniową stali konstrukcyjnych a także elementów konstrukcyjnych (np. wpływ odkształceń plastycznych na żywotność lin i drutów) oraz wyniki konkretnych badań różnych materiałów i elementów konstrukcyjnych poddanych działaniu różnorodnych obciążeń typu zmęczeniowego.
3. Na sesji trzeciej przedyskutowano wiarygodność pomiarów udarności materiałów sprężysto-plastycznych przy zastosowaniu młota Charpy'ego, proces wibracyjnego niszczenia żeliwa szarego przy złożonym stanie obciążenia, wpływ inkluzji siarczków na udarność oraz wstępnego przecięcia na energię pęknięcia przy działaniu udarowych obciążeń rozciągających i zginających, nową metodę określania udarności przy zastosowaniu małych próbek, a także specjalne metody badania procesów zniszczenia metodą drgań rezonansowych oraz przy zastosowaniu laserowej techniki plamkowej.
4. Na sesji czwartej przedmiotem dyskusji był m.in. rozwój uniwersalnych urządzeń badawczych, metoda częściowego odciążania dla określania powolnego wzrostu pęknięć, analiza pęknięć jako procesu dyskretnego oraz propozycja modelu deformacji i zniszczenia metali.
5. Na sesji piątej oraz z związanej z nią tematycznie sesji plakatowej D przedyskutowano zagadnienia zmęczenia cieplnego różnych materiałów, charakterystyki termodynamicznych cykli zmęczenia cieplnego, konstytutywny model odkształceniowy metali dla szerokiego zakresu temperatur, deformacje i pęknięcia w stalach konstrukcyjnych przy pełzaniu i cyklicznych obciążeniach cieplnych, pełzanie betonu w podwyższonych temperaturach i określonych warunkach wilgotności oraz betonu zbrojonego przy zginaniu, wpływ mikrostruktury staliw na pełzanie oraz napromieniowania i wyżarzania stali na kotły parowe, propagację pęknięć przy pełzaniu — przy rozproszonych uszkodzeniach, urządzenia ostrzegawcze o uszkodzeniach ciśnieniowych kotłów reaktorów atomowych oraz wyniki konkretnych badań materiałów prowadzonych pod kątem określenia ich charakterystyk pełzania oraz odporności na termiczne obciążenia zmęczeniowe.

W pracach, prezentowanych podczas obrad Sekcji II-ej omówiono m.in. niżej podane zagadnienia na poszczególnych sesjach:

1. Na sesji pierwszej przedmiotem referatów oraz dyskusji były następujące zagadnienia z zakresu optycznych metod badania materiałów i konstrukcji: analiza prążków emisji termicznych, określanie kierunków głównych metodą superpozycji prążków izochrom, zastosowanie fotografii plamkowej w badaniach połączeń wciskowych (połączenie wału z tarczą), modyfikacje metody holograficznej w badaniach drgań, zastosowanie metody elastoptycznej w badaniach naprężeń własnych oraz wyniki badań porównawczych przeprowadzonych metodą mory oraz metodą elastoptyczną przy zastosowaniu pokryw optycznie czynnych.
2. Na sesji drugiej przedmiotem dyskusji były zagadnienia naprężeń kontaktowych oraz naprężeń własnych. W pierwszej grupie tych zagadnień przedyskutowano metody badań — w tym elastoptycznej i pro-

- mieniowania γ , automatyzację badań elastooptycznych oraz przedstawione wyniki doświadczalnej i numerycznej analizy naprężeń kontaktowych w połączeniach wciskowych. W grupie drugiej rozpatrzono wyniki badań naprężeń własnych w laminowanych, zakrzywionych belkach drewnianych, modelach elastooptycznych — metodą światła rozproszonego oraz w mono- i polikrystalicznym niklu poddanym działaniu obciążeń zmęczeniowych — nową metodą rentgenowską.
3. Na sesji trzeciej dyskusja dotyczyła głównie zagadnień komputerowego wspomaganie badań, zastosowań komputerów osobistych w prowadzeniu pomiarów „on-line”, możliwości komputerowego przekształcania analizy prążków otrzymanywanych przy zastosowaniu metody mory i metody elastooptycznej oraz technik hybrydowych z wykorzystaniem komputera w analizie zagadnień lepkości sprężystości ciał stałych.
 4. Podczas obrad sesji czwartej przedstawiono i przedyskutowano m.in. wyniki porównawczych badań podparć wyrobisk górniczych, nową odmianę odbiciowej metody mory, zagadnienie automatyzacji analizy prążków otrzymanywanych metodami interferencyjnymi oraz mory, ocenę efektów starzenia elementów konstrukcyjnych na podstawie badań relaksacji naprężeń, a także wyniki badań naprężeń w elementach konstrukcyjnych metodą pokryw optycznie czynnych.

Na sesji plakatowej A, bezpośrednio związanej z tematyką obrad Sekcji II-iej przedstawiono głównie wyniki konkretnych badań różnego rodzaju konstrukcji, połączeń spawanych itp. — przeprowadzonych metodami: mory, elastooptyczną i tensometryczną.

Przedmiotem obrad, prowadzonych na dwóch sesjach Sekcji III-iej oraz sesji plakatowej C były zagadnienia dotyczące badań materiałów i konstrukcji metodami nieniszczącymi. W dużej części dotyczyły one automatyzacji badań przeprowadzanych metodą ultradźwiękową oraz prądów wirowych. Przedstawiono zestawy aparaturowe, a także konkretne rozwiązania automatycznych linii kontrolnych, uwzględniające specyfikę procesu technologicznego wytwarzania różnych elementów konstrukcyjnych. Dyskusja dotyczyła również możliwości i zakresu zastosowań oraz dokładności metod: rentgenowskiej, emisji akustycznej, indukcji magnetycznej, prądów wirowych oraz rezonansowej w badaniach różnych konstrukcji i materiałów.

Streszczenia prac, zakwalifikowanych do przedstawienia na IX-ym Kongresie Badania Materiałów zostały opublikowane przez Naukowe Stowarzyszenie Inżynierów W.R.L. w specjalnym wydawnictwie p.t. „The Proceedings of the 9th Congress on Material Testing”, Budapest, 29 September — 3 October 1986 — w dwóch tomach o łącznej objętości 686 stron. W tomie pierwszym, o objętości 366 stron, zamieszczono streszczenia tych prac, które były prezentowane na sesjach referatowych Sekcji I-iej oraz sesjach plakatowych B, D i E. Natomiast w tomie drugim zamieszczono streszczenia prac prezentowanych na sesjach Sekcji II-iej i Sekcji III-iej oraz na sesjach plakatowych A i C.

Z powyższego wynika, że dominującą tematyką obrad Kongresu były zagadnienia zniszczenia, zmęczenia i pelzania.

Wydano również broszurę zawierającą wykaz nazwisk uczestników Kongresu.

Władysław Walczak

KOMUNIKAT

W dniach 11 — 14 października 1988 r. odbędzie się w Warszawie
XIII Sympozjum Mechaniki Doświadczalnej Ciała Stałego.

Korespondencję prosimy kierować na adres:
mgr inż. Tomasz Pancewicz, ul. Nowowiejska 24, 00-665 Warszawa,
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej, PW

SPIS TREŚCI

<p>A. H. Гузь, В. Б. Рудницкий, Контактное взаимодействие упругого штампа с предварительно напряженным слоем Kontaktowe oddziaływanie sprężystego stempla ze wstępnie naprężoną warstwą Contact interaction of an elastic punch and a prestressed layer</p>	323
<p>J. WAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, Zjawiska rezonansów wewnętrznych w nieliniowych układach drgających Явления внутренних резонансов в нелинейных колебательных системах The phenomena internal resonances in nonlinear vibrating systems</p>	341
<p>M. PIWESKI, S. JONIAK, P. WASILEWICZ, Urządzenie do prób skręcania ze statycznym rozciąganiem Устройство для испытаний на кручение со статическим растяжением Apparatus for torsion tests with static tension</p>	375
<p>M. J. STAŁKOWSKI, Istnienie całki energii w wybranych obszarach opływu profilu cieczą doskonałą Существование интеграла энергии в избранных пространствах обтекания профиля идеальной жидкостью Existence of the energy integral in selected incompressible fluid flow around the profile</p>	387
<p>M. WRÓBEL, Wariacyjne ujęcie przepływów termodyfuzyjnych sprzężonych z polem naprężeń Вариационная форма термодиффузионных переплывов связанных с полем напряжения The variational formulation of heat and mass transfer conjugated with stress field</p>	403
<p>K. MYŚLECKI, Analiza płaskich zagadnień teorii sprężystości metodą elementów brzegowych Анализ двумерных задач теории упругости методом граничных элементов Analysis of plane problems of elasticity by boundary element method</p>	419
<p>W. JAROMINEK, T. STEFAŃSKI, Identyfikacja parametryczna modelu matematycznego samolotu Параметрическая идентификация математической модели самолёта Parametric identification on mathematical model of aircraft</p>	429
<p>W. BŁAJER, Wyznaczanie modelu sterowania samolotem zapewniającego ścisłą realizację ruchu programowego Разработка модели управления самолётом, обеспечивающей точное выполнение программного движения Determination of the model of airplane control ensuring the exact realization of a program motion</p>	437
<p>T. GAŁKIEWICZ, Określenie naprężeń w cewce transformatora rozciąganej na skutek działania promieniowych sił elektrodynamicznych Определение напряжений в катушке трансформатора растягиваной в следствие действия радиальных сплочениевых сил Determination of stresses in the transformer coil subjected to extension with radial electrodynamic</p>	447
<p>M. SPERSKI, Zastosowanie funkcji kształtu do opisu drgań prętów cienkościennych o zamkniętym profilu Применение функций Власова для описания колебаний тонкостенных стержней-оболочек закрытого профиля Use of shape functions to the description of vibration of the thin-walled bars with closed section</p>	461

R. GAJEWSKI, Rozwiązanie zadań dynamicznych w obszarach nieograniczonych Решение динамических задач в неограниченных областях Solution of dynamical problems in unbounded regions	483
T. WESOŁOWSKI, K. PÓŁTORAK, Simulation analysis a semi-active suspension Симулированный анализ полуактивной подвески автомобиля Analiza symulacyjna półaktywnego zawieszenia pojazdu	491
H. OLESIAK, J. ŚLIŻEWICZ, Przykłady wykorzystania komputerów domowych w nauczaniu wytrzyma- łości materiałów Примеры использования микрокомпьютеров в обучении сопротивления материалов An application of personal microcomputers to learning of strength of materials	497
BIULETYN INFORMACYJNY	501

INSTRUKCJE DLA AUTORÓW

Ogólne

W Mechanice Teoretycznej i Stosowanej drukowane są prace przeglądowe oraz oryginalne teoretyczne i doświadczalne z zakresu mechaniki ciała stałego oraz cieczy i gazów. Publikujemy również dyskusję naukową oraz polemikę dotyczącą prac z mechaniki, które ukazały się w MTiS lub w innych czasopismach naukowych.

W Biuletynie Informacyjnym drukujemy sprawozdania z konferencji naukowych z zakresu mechaniki w kraju i za granicą oraz z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Praca może być złożona do druku w MTiS pod warunkiem jej nieopublikowania w innym czasopiśmie.

Drukujemy w języku polskim oraz na życzenie autorów w języku angielskim pod warunkiem złożenia pracy w tym języku.

Prace należy nadsyłać na adres Redakcji bądź jednego z redaktorów, w dwóch egzemplarzach (oryginał + kopia).

Praca złożona do druku podlega recenzji.

Wszelkie zmiany (poprawki autorskie) po zakwalifikowaniu artykułu do druku i przekazaniu go do drukarni mogą być dokonane tylko w czasie 1 korekty (na koszt autora).

Po opublikowaniu autorzy otrzymują 25 egzemplarzy odbitek swojego artykułu.

Szczegółowe

- Prace składane do publikacji w MTiS powinny zawierać (wg. kolejności)
 - Tytuł
 - Imię, Nazwisko z podaniem miejsca pracy
 - Abstrakt (w języku polskim)
 - Właściwą pracę
 - Spis literatury
 - Streszczenia w języku
 - praca w języku polskim — rosyjskim w maszynopisie i angielskim
 - praca w języku angielskim — polskim i rosyjskim.
- Tekst powinien być napisany po jednej stronie (nie na papierze kredowym) z zachowaniem podwójnych odstępów i obustronnych marginesów — z lewej 6 cm, z prawej 1 cm.
- Wzory należy wpisywać czytelnie, w kolorze czarnym, z zachowaniem numeracji po stronie prawej (należy zwrócić szczególną uwagę na rozróżnienie 1 oraz litery l, zera i litery o oraz literę q i p).
- Życzenia autorów dotyczące formy graficznej pracy w tym kroju czcionki, liter greckich itp. powinny być dołączone na osobnej kartce, bądź na marginesie (ołówkiem).
- Tablice występujące w tekście należy dołączyć na oddzielnych kartkach (jedna na stronie).
- Podpisy pod rysunkami powinny być wyszczególnione oddzielnie, a nie pod rysunkami.
- Prosimy o sporządzanie wykazu literatury w sposób następujący: W. Nowacki, Teoria Sprężystości, Warszawa, PWN, 1970.
- Odnośniki należy numerować kolejno w całej pracy, a nie wg strony.
- Obowiązuje stosowanie układu jednostek SI.

Prenumeratę **na kraj** przyjmują Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch”, oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

- do 25 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do 10 czerwca na I półrocze roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej, instytucje, organizacje i wszelkiego rodzaju zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch”, w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW w urzędach pocztowych.

Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki **za granicę** przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki **za granicę** jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciennodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona—Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona—Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1.1.1967 r. jako kwartalnik.
(Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa, pokój 309)*
