

4720  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

PL ISSN 0079-3701

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK  
TOM 24 • ZESZYT 4

WARSZAWA 1986

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

Dr inż. Kazimierz Tomasz Borsuk — wspomnienie pośmiertne	483
A. WEGNER, Drgania osiowe fundamentów turbozespołów dużej mocy w świetle badań (Praca przeglądowa)	487
Продольные колебания фундаментов турбогенераторов большой мощности на фоне проведённых исследований.	
The longitudinal vibrations of large-turbo-generator foundations according to the experimental investigations.	
R. ŻUSNOWSKI, Problemy zmęczenia cieplnego metali.	501
Проблемы термоциклирования металлов.	
Problems of thermal fatigue of metals.	
Z. GÓRBECKI, Metoda automatycznego układania równań równowagi w obliczeniach statycznych ortotropowych, liniowo-sprężystych, cienkościennych prętów przyrztacycznych o dowolnym przekroju wieloobwodowym.	519
Метод автоматического построения уравнений равновесия в расчёте статических ортотропных, линейно-упругих, тонкостенных призматических стержней произвольного многосвязного поперечного сечения.	
Method of automatic construction of differential equations in computation of static, orthotropic, linearly elastic, thin-walled prismatic bars of multi connected cross-section.	
J. A. KOŁODZIEJ, Filtration resistance of a system of parallel cylinders at a transverse creeping flow.	537
Фильтрационное сопротивление системы параллельных цилиндров при поперечном ползучим обтекании.	
Opór filtracyjny układu równoległych cylindrów przy poprzecznym opływie pelzającym.	
R. KAŁUŻA, Doświadczalna analiza stateczności powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej.	551
Экспериментальный анализ устойчивости гиперболюидальной оболочки градирни.	
Experimental analysis of the buckling stability of the hyperbolic cooling tower shell.	
Z. GŁODOWSKI, E. WŁODARCZYK, Analityczne badanie intensywnych fal uderzeniowych w gazie politropowym w otoczeniu gazowych produktów wybuchu.	573
Аналитическое исследование интенсивных ударных волн в политропном газе в окрестности газовых продуктов взрыва.	
Analytic study of strong shock waves in a polytropic gas in the vicinity of the explosion centre	
J. KUBIK, Odpowiedniość między równaniami termodyfuzji a teorii mieszanin.	593
Соответствие уравнений термодиффузии и теории смесей.	
Relation between equations of thermodiffusion and those of the theory of mixtures.	
L. ŻURKOWSKI, M. GRUDNICKI, W. KRZEMIEŃ, Z. LORENC, Wstępne badania dynamicznie podobnego modelu samolotu podatnie zawieszzonego w tunelu aerodynamicznym.	601
Вводные исследования модели самолёта для испытания на флаттер, на эластической державке, в аэродинамической трубе.	
Preliminary tests of an elastic airplane elastically suspended in a wind tunnel.	
B. LESNOWICZ, Z. PIEKARSKI, Analogia sprężysto-lepkosprężysta w półprzestrzeni ze starzeniem.	609
Упруго-упруговязкая аналогия для полуплоскости со старением.	
Elastic — viscoelastic analogy for a semi-space with ageing.	
W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, Szywno-lepko-plastyczne płyty kołowe pod intensywnym obciążeniem dynamicznym. Analiza teoretyczno-doświadczalna i propozycje zastosowań.	617
Жестко — вязкопластические круглые плиты под действием интенсивной динамической нагрузки. Теоретическо-экспериментальный анализ и предложения применений.	
Rigid — viscoplastic circular plates under intensive dynamical loadings. Theoretical-experimental analysis and proposals of applications.	
J. TYL, E. WŁODARCZYK, Wpływ radiacji na parametry koncentrycznej fali uderzeniowej w gazie politropowym.	631

M 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

TOM 24 ZESZYT 4

WARSZAWA 1986

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА  
содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

### KOMITET REDAKCYJNY

MAREK DIETRICH — PRZEWODNICZĄCY  
ZBIGNIEW DŻYGADŁO, JANUSZ ELSNER,  
STANISŁAW JERZY GDULA, IGOR KISIEL,  
ZENON MRÓZ, BOGDAN SKALMIERSKI, PIOTR WILDE,  
JÓZEF WOJNAROWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR NACZELNY  
STANISŁAW DUBIEL — REDAKTOR  
JACEK STUPNICKI — REDAKTOR  
ANDRZEJ TYLIKOWSKI — REDAKTOR  
CZESŁAW WOŹNIAK — REDAKTOR  
EWA KOISAR — SEKRETARZ

### REDAKCJA

00-901 Warszawa, PKiN, pok. 309, tel. 20-02-11, wewn. 2268

Kwartalnik ukazuje się przy pomocy finansowej PAN

---

Nakład 510. Ark. wydawniczych 14,0 Ark. drukarskich 13,0. Papier druk. sut. kl. IV, 70 g. 70×100  
Oddano do składania 8.VIII.1986 r. Druk ukończono w marcu 1987 r. Zam.2729/86. Cena 120 zł.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

**Dr inż. KAZIMIERZ TOMASZ BORSUK**  
(1925—1985)



W dniu 5 grudnia 1985 roku zmarł w Warszawie dr inż. Kazimierz Borsuk. Jest to wielka strata zarówno dla polskiej mechaniki, projektowania inżynierskiego jak i naszego Towarzystwa. Dla kręgu przyjaciół i współpracowników Zmarłego jest to strata szczególnie bolesna z uwagi na Jego cechy charakteru: uczciwość, prostolinijność, otwarty i przyjazny stosunek do ludzi, poczucie humoru.

Śp. Kazimierz Borsuk urodził się 9 lutego 1925 roku we Lwowie, gdzie spędził dzieciństwo i wczesną młodość, co w specyficzny — ale jednoznacznie dodatni — sposób ukształtowało Jego charakter i poglądy. Tam też, na tajnych kompletach uzyskał maturę. Powołany do służby w I Armii WP przeszedł, jako chorąży, dowódca drużyny rusznic przeciwpancernych, szlak bojowy od Wisły do Berlina, biorąc udział w walkach na Wale Pomorskim, o Kołobrzeg, w forsowaniu Odry. Został wówczas (w 1945 r.) odznaczony Krzyżem Walk, Odznaką Grunwaldzką i medalami: „Zasłużony na Polu Chwały”, „Za Warszawę”, „Za Odrę, Nyse, Bałtyk”, „Za Zwycięstwo” oraz medalami radzieckimi. Ciężko ranny pod Berlinem opuścił szpital w 1946 r. jako częściowy inwalida. Po studiach na Politechnice Śląskiej uzyskał w roku 1950 stopień magistra inżyniera budownictwa. Doktorat nauk technicznych obronił w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w r. 1960. Przez 10 miesięcy (1964 - 65) przebywał na stażu podoktorskim w University of California (division of Applied Mechanics) w Berkeley.

Działalnością dydaktyczną zajmował się na Politechnice Warszawskiej w latach 1950 - 54, 1957 - 61 i 1974 - 77 prowadząc zajęcia z mechaniki budowli, budownictwa stalowego, metod prefabrykacji i projektowania konstrukcji. W latach 1971 - 72 prowadził wykłady z mechaniki budowli na WSI w Lublinie. W charakterze eksperta UNESCO z dziedziny mechaniki stosowanej i mechaniki budowli przebywał przez półtora roku w Indore w Indii (Govindram Seksaria Institute of Technology), gdzie prowadził wykłady i był rzeczoznawcą w Komitecie Techniki Rządu Indii w zakresie prefabrykacji.

Kazimierz Borsuk łączył twórczą pracę w zawodzie inżyniera konstruktora budowlane-

go z pracą naukową w dziedzinie teorii. Przejawiał żywą działalność społeczną w towarzystwach naukowych. Był długoletnim pracownikiem naukowym w Zakładzie Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN (1952 - 81). W dziedzinie płyt ortotropowych uzyskał szereg oryginalnych rozwiązań, które weszły do światowej literatury przedmiotu i do praktyki inżynierskiej. Praca „Stability and Vibrations on Circular Plates with Cylindrical Orthotropy”, wspólna z J. Mossakowskim, była referowana na 10 Kongresie Mechaniki Stosowanej w Stresie w 1960 r. Opublikował prace z zagadnień stateczności płyt i powłok, teorii i konstrukcji stropów grzybkowych, teorii obliczania budynków wysokich, optymalizacji wytrzymałości wielkich układów konstrukcyjnych, w tym nowy sposób obliczania ścian tarczowych. Z ważniejszych osiągnięć projektowych K. Borsuka należy wymienić projekt pierwszej w Polsce powłoki konoidalnej o rozpiętości 25,7 m (rok 1952, z niewielkimi zmianami realizowany również w Chinach w r. 1954), chłodnie kominowe w hucie im. B. Bieruta, kominy żelbetowe, przekrycie hali sportowo-widowskiej w Katowicach. W ostatnich latach był autorem ciekawych technicznie rozwiązań konstrukcyjnych kościołów i budynków towarzyszących w Ożarowie (powłoka dwukrzywiznowa), Świdrze, przy ulicy Gorkickiej w Warszawie, magazynu Kościoła Baptistów (ortotropowa płyta stropu). Samo wymienienie projektów, w których opracowywaniu brał udział śp. K. Borsuk wymagałoby obszernego artykułu. Jako piękny przykład transmisji nauki do praktyki można przytoczyć konstrukcję silosów o kształcie plastra miodu, do obliczania których dr inż. K. Borsuk zastosował teorię płyt Reissnera. Większość tych projektów miała charakter pionierski, projekty powłoki konoidalnej, silosów w Nowej Hucie, prefabrykowanych stropów grzybkowych uzyskały nagrody resortowe. Wykonał ponad 50 poważnych ekspertyz budowlanych dotyczących głównie zagadnień stateczności, dynamiki budowli, fundamentów pod maszyny i wzmocnień konstrukcji.

Do Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej należał od roku 1959, w latach 1963 - 66 pełnił funkcję zastępcy członka Zarządu Oddziału Warszawskiego, w latach 1967 - 72 skarbnika Oddziału Warszawskiego, w latach 1970 - 72 oraz 1976 - 79 skarbnikiem Zarządu Głównego PTMTS a w latach 1980 - 82 był członkiem Głównej Komisji Rewizyjnej PTMTS.

Był członkiem międzynarodowych towarzystw naukowych: Council on Tall Buildings and Urban Habitat, w latach 1970 - 72 był przewodniczącym polskiej grupy narodowej, IASS (Międzynarodowe Stowarzyszenie Konstrukcji Powłokowych) i IABSE (Międzynarodowe Stowarzyszenie Mostów i Konstrukcji). Ponadto był rzeczoznawcą do spraw konstrukcji Stołecznej Rady Narodowej w Warszawie (1968 - 74) i konsultantem szwedzkiej firmy IBS w Katowicach. Zapisane w dokumentach autorstwo to tylko mała część rzeczywistych zasług K. Borsuka dla nauki i projektowania. Jego otwarty i przyjazny stosunek do ludzi, gotowość do pomocy i dzielenia się z innymi swą wiedzą i doświadczeniem powodowały, że odgrywał On często rolę inspiratora, wnoszącego wiedzę naukową do projektów konstrukcji i doświadczenie inżyniera-konstruktora do badań naukowych. Jakże często Jego udział w nowych rozwiązaniach pozostawał niedostrzegany nawet przez ich współautorów — delikatny sposób czynienia uwag i podsuwania pomysłów, poczucie humoru i skromność śp. dra K. Borsuka umożliwiały powstawanie takich sytuacji.

Należy tu dodać, że wspomniane wyżej połączenie wiedzy teoretycznej i praktycznej jest stosunkowo rzadko spotykane. Stąd wyjątkowe znaczenie działalności Kazimierza

Borsuka dla poziomu rozwiązań technicznych stosowanych w projektach, których był współautorem, weryfikatorem lub opiniodawcą. Z drugiej strony w ciągu swej wieloletniej pracy w IPPT sprowadzał On na tory bliższe praktyki wiele pomysłów teoretycznych. Chętnie i bezinteresownie służył radą i pomocą młodszym od siebie adeptom nauki, poszukującym dopiero właściwej drogi. Odszedł od nas Człowiek szlachetny i uczciwy. Pamiętamy Jego skromny uśmiech, pokrywający wiedzę, odwagę przekonań i gotowość do pomocy. Wspomnienie tych cech śp. dra inż. Kazimierza Borsuka, a także Jego żartów i drobnych dziwactw, będą budzić u wszystkich, którzy Go znali, wzruszenie, smutek i żal.





## DRGANIA OSIOWE FUNDAMENTÓW TURBOZESPOŁÓW DUŻEJ MOCY W ŚWIELE BADAŃ

(Praca przeglądowa)

ANTONI WEGNER

*Politechnika Poznańska*

W pracy omówiono aktualny stan wiedzy dotyczącej drgań osiowych fundamentów pod turbozespoły. Przedstawiono dotychczasowe badania eksperymentalne zarówno na modelach jak i na eksploatowanych obiektach a także próby wyjaśnienia przyczyn drgań osiowych. Rozważano również sposoby ujęcia obliczeniowego osiowych sił wzbudających w świetle prowadzonych badań.

### 1. Uwagi wstępne

Jednym z dotychczas nie rozwiązanych problemów fundamentów turbozespołów jest występowanie drgań osiowych, niejednokrotnie o dużych wartościach amplitud.

W literaturze technicznej zarówno krajowej jak i zagranicznej zajmującej się problematyką projektowania fundamentów pod maszyny, autorzy dostrzegają zazwyczaj następujące źródła wzbudzenia drgań:

- a) siły odśrodkowe, spowodowane niedokładnością wyważenia części ruchomych
- b) siły powstałe w wyniku działania momentu krótkiego zwarcia w generatorze
- c) nieosiowość agregatu i zgięcia wału maszyny.

Przedstawione wyżej siły wzbudzenia pozwalają na przybliżone określenie amplitud drgań fundamentu w kierunku pionowym i poziomo-poprzecznym (drgania prostopadłe do osi wirników). Nie umożliwiają natomiast wyznaczenia amplitud drgań osiowych.

Tymczasem występujące zarysowania słupów ram fundamentów pod turbozespoły coraz częściej układem swych rys wskazują na siły osiowe jako na ich źródła. Możliwość tę potwierdzają dotychczasowe badania dynamiczne. Stąd w niniejszej pracy przedstawiono aktualny stan wiedzy dotyczącej omawianych sił wraz z jego oceną.

### 2. Dotychczasowe badania dynamiczne fundamentów

W okresie międzywojennym autorzy nielicznych opublikowanych badań dynamicznych nie dostrzegali konieczności prowadzenia pomiarów amplitud drgań osiowych fundamentów. Uważano bowiem, że przy maszynach rotacyjnych z osią poziomą nie występują osio-

we siły wzbudzające. Stąd omawiane wyniki badań dotyczą tylko drgań pionowych i poprzecznych (J. Geiger [1], G. Mensch [2], T. C. Rathbone [3], H. Kayzer [4, 5], G. Ehlers [6], S. Vesselowsky [7]). Niemniej jednak w pracach [4, 6, 8] przedstawiono formy drgań górnych płyt fundamentów, które wskazują na występowanie amplitud drgań osiowych.

Dopiero prowadzone w latach 50-tych badania dynamiczne fundamentów pod turbozespoły potwierdziły występowanie drgań osiowych.

W. W. Makariczew w pracy [9] przedstawił wibrogram drgań własnych poprzecznej ramy fundamentu (dla trzech rozważanych kierunków), jednak bez dalszej analizy zjawiska (np. sił wewnętrznych w maszynie, nieosiowości agregatu itp).

W pracy [10] A. I. Abaszidze i M. A. Branowskij — przedstawiają wyniki badań 8 fundamentów oraz łożysk podporowych wałów turbozespołów o mocy od 4 do 50 MW. Badania przeprowadzono także w czasie rozruchu i odstawiania maszyny.

Na podstawie badań autorzy stwierdzają, że drgania łożysk w kierunku osi wału są bardzo często większe od drgań w kierunku poprzecznym i pionowym.

Dużym mankamentem tej ciekawej pracy jest forma graficznego ujęcia wyników badania drgań elementów konstrukcyjnych — podczas rozruchu turbozespołu. Przedstawiono bowiem na wykresie przykładowo przebieg drgań trzech różnych elementów z różnych fundamentów w trzech rozpatrywanych kierunkach (trzy linie zapisu). Wyklucza to jakąkolwiek analizę wyników badania drgań elementów w trzech kierunkach.

Równolegle prowadzi badania R. Kohler [11] próbując wyjaśnić przyczyny zarysowania żelbetowego rygla ramy podłużnej fundamentu turbozespołu o mocy 10 MW.

W czasie badań rejestruje amplitudy drgań podłużnych fundamentów, potwierdzone badaniami modelowymi.

Drgania podłużne rejestruje R. Kohler również w czasie badania fundamentów niskostrojonych, zarówno stalowych jak i żelbetowych [12].

Także Z. Śniadkowski [13] stwierdza występowanie drgań osiowych fundamentu, zaznaczając, że wartości amplitud drgań na trzech rozważanych kierunkach wskazują na zaniżone mimośrodowość, przyjmowane do obliczeń projektowych.

W 1959 r. B. Kounovsky [14] przedstawia badania dynamiczne 8 różnych fundamentów, ukazując współzależność drgań w układach przestrzennych.

Na załączonych rysunkach można łatwo zauważyć jak bardzo zarejestrowane formy drgań fundamentów odbiegają od przedstawionych w literaturze technicznej na podstawie badań modelowych i analiz teoretycznych.

B. Kounovsky przedstawił także dla drgań rygla ramy podłużnej układ figur Lissajousa, potwierdzając tym samym wyniki badań T. C. Rathbone [8].

W czasie badań dynamicznych turbozespołu M. Novak [15] rejestruje duże drgania osiowe podpór łożyskowych generatora (panwi podporowych). Wyniki badań uzupełniono podaniem wartości amplitud drgań rygla ramy poprzecznej (drgania osiowe — z płaszczyzny ramy).

A. I. Abaszidze w pracy [16] przedstawia wyniki badań prowadzonych na fundamentach turbozespołów o mocy 4 ÷ 100 MW.

Analizując wyniki omawianych badań można łatwo stwierdzić, że wartości amplitud drgań osiowych fundamentów wzrastają wraz z mocą turbozespołu (w przypadku turbo-

zespołu o mocy 100 MW wartości amplitud drgań osiowych były w przybliżeniu równe wartościom amplitud drgań poprzecznych).

Ciekawe badania fundamentu turbozespołu o mocy 50 MW omawia J. Pałka [17]. Przedstawia m.in. wykres zależności amplitud drgań wybranego punktu fundamentu (dla trzech kierunków) od liczby obrotów maszyny. We wnioskach postuluje konieczność sprawdzania amplitud drgań osiowych fundamentów.

Na podobne współzależności drgań wskazuje również M. Novak [18], przy omawianiu badań fundamentów turbozespołów o mocy 25 i 35 MW.

W monografii [19] A. I. Abaszidze, S. A. Berenstein, F. W. Sapożnikow poszerzają wyniki swych badań sprzed kilku lat o eksperymentalne określenie drgań własnych (dla trzech kierunków) różnych elementów konstrukcyjnych fundamentów, a także porównują wartości otrzymane w czasie badań eksploatowanych fundamentów i odpowiednich modeli. Prócz tego przedstawiają wyniki badań prefabrykowanych fundamentów żelbetowych pod turbozespoły o mocy 150 MW.

Z porównania wartości amplitud drgań wynika, że w przypadku fundamentów prefabrykowanych — wartości amplitud drgań osiowych są największe, natomiast przy monolitycznych — najmniejsze.

Również A. Nesitka [20] w czasie badania fundamentu turbozespołu o mocy 3 MW stwierdził występowanie drgań osiowych. Zaznacza jednak, że są one znacznie mniejsze od wartości amplitud drgań poprzecznych.

Odmiennego zdania jest O. A. Sawinow [21], stwierdzając na podstawie badań D. D. Barkana, że ponad 50% fundamentów wykazuje wartości amplitud drgań osiowych równe bądź często większe od wartości amplitud drgań poprzecznych.

Wyniki badań żelbetowych fundamentów prefabrykowanych pod turbozespoły o różnej mocy przedstawiają A. I. Abaszidze i A. T. Kazandżjan [22]. Badają także drgania podpór wałów turbozespołów i na ich podstawie wyprowadzają liniową zależność m.in. pomiędzy podłużnymi drganiami fundamentu i łożysk podporowych.

Również G. G. Arganowskij [23] przedstawia wyniki badań amplitud drgań osiowych żelbetowych fundamentów prefabrykowanych o mocy 50, 100, 150 i 200 MW, porównując je z wartościami zarejestrowanymi na fundamentach monolityczno-prefabrykowanych.

A. I. Abaszidze, F. W. Sapożnikow, A. T. Kazandżjan [24] uzupełniają swoje badania, przytaczając wyniki zarejestrowane na żelbetowych fundamentach prefabrykowanych o mocy 200 MW (wartości amplitud mierzono dla trzech kierunków drgań).

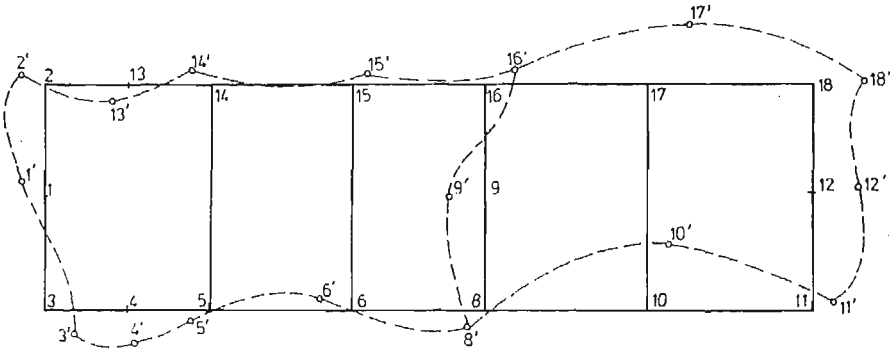
W latach 1971 - 1978 na zlecenie jednostek państwowych Zespół Inst. Technologii i Konstrukcji Budowlanych Politechniki Poznańskiej przeprowadza szerokie badania dynamiczne żelbetowych fundamentów monolitycznych pod turbozespoły o mocy 200 MW [25,26]\*)

Analizą objęto m.in. zależność wartości amplitud drgań od zarysowania fundamentu, a także jego wpływ na zmianę charakterystyki dynamicznej konstrukcji [27]. Badano wpływ elektropetryfikacji podłoża na wartość amplitud drgań fundamentu [28] oraz udział składowych amplitud drgań od maszyn sąsiadujących w końcowej wartości amplitud [29].

\*<sup>o</sup> We wszystkich badaniach dynamicznych uczestniczył prócz autora inż. d/s aparatury G. Wasielewski oraz towarzyszący mu technicy.

### 3. Próby wyjaśnienia przyczyn drgań osiowych

Dostrzeżone jeszcze w latach 30-tych drgania podłużne fundamentu próbowano wyjaśnić występującymi formami odkształceń płyty górnej konstrukcji (rys. 1). Wykluczono natomiast działanie jakichkolwiek sił podłużnych [30].



Rys. 1. Przykładowa forma odkształcenia dynamicznego płyty górnej fundamentu turbozespołu wg [24] (widok z góry)

Na wielkość sił wzbudzających, a tym samym na wielkość deformacji płyty górnej ma wg E. Rauscha [31] wpływ — poza mimośrodem początkowym, także rozregulowanie turbiny (jako wynik — wypadania łopatek z głównego koła, odkładanie się soli kotłowych na łopatkach, skrzywienie wału).

H. Weber w swej pracy [32] wskazuje na znaczenie doboru właściwego modelu ramy podłużnej fundamentu przy wyznaczaniu drgań własnych i stref rezonansu.

Na przykładach ramowych fundamentów turbozespołów o mocy 100 MW (stalowego i żelbetowego) przedstawia różnice w częstotliwościach drgań, wyznaczonych dla różnych modeli obliczeniowych.

Na podobne problemy zwraca uwagę E. Krämer [33] omawiając m.in. wpływ niedokładnego połączenia elementów wału na wzrost sił odśrodkowych (problem rozosiowania wału).

Istotne miejsce w analizie zjawiska zajmuje określenie wpływu ugięcia statycznego i dynamicznego wału wirnika na wielkość sił odśrodkowych. Problem ten zasygnalizowany przez I. Kisiela [34] został szeroko omówiony z punktu widzenia praktycznego w pracach J. Kożesnika [35], Lipsmanów [36] i R. Łączkowskiego [37].

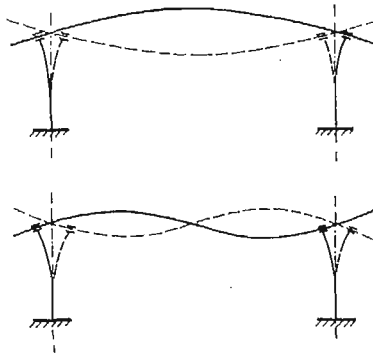
W pracach [36, 37] zwrócono również uwagę na wpływ rozosiowania wału na zwiększone oddziaływania dynamiczne turbozespołu.

Mała sztywność podpór łożyskowych może być wg R. Łączkowskiego [38] przyczyną powstawania silnych drgań podłużnych. Zaznaczono jednak, że problem ten dotyczy szczególnie generatorów dużej mocy.

Omówienie mechanizmu oddziaływania jak również związku z siłami bezwładności niewyważonych mas wirnika — znajdujemy w monografii R. Łączkowskiego [37]. Autor m.in. stwierdza, że amplitudy drgań osiowych podpór łożyskowych „...są proporcjonalne do dynamicznej strzałki linii ugięcia wirnika” (rys. 2). Prócz tego R. Łączkowski dostrzega

jako źródło sił podłużnych „...składowe osiowe dynamicznego naporu czynnika na łopatki wirnikowe oraz różnicę statycznego ciśnienia czynnika po obu stronach tarcz wirnikowych” [37].

Sposób wyznaczenia omówionych składowych przedstawia E. Tuliczka [39], podkreślając, że otrzymane wartości mogą być znaczne. Jednocześnie Autor wyjaśnia, że jakkolwiek



Rys. 2. Zależność kątowna przemieszczenia czopów łożysk podporowych od dynamicznego ugięcia wału turbozespołu: a) przy pierwszej prędkości krytycznej drgań obrotowych; b) przy drugiej prędkości krytycznej drgań obrotowych wg [37]

dąży się do wewnętrznego wyrównoważenia sił podłużnych (osiowych) w obszarze korpusu, to jednak takie rozwiązanie komplikuje układ konstrukcyjny. Stąd typowym rozwiązaniem dla przeniesienia sił podłużnych jest zastosowanie łożyska oporowego Mitchella. Wyznaczona w pracy [39] nośność łożyska wzdłużnego jest znaczna.

W pracy [38] R. Łączkowski stwierdza, że źródłem wzbudzenia znacznych drgań podłużnych jest również wirujące pole magnetyczne generatora. Częstotliwość drgań wywołanych omawianymi siłami jest równa 100 Hz.

Rozpatrując problem osiowych drgań wymuszonych fundamentu nie sposób pominąć wzdłużnych drgań własnych wału wirników i związanych z tym stref rezonansowych. Rozwiązanie tych zagadnień przedstawiono w sposób przydatny dla celów praktycznych w pracach R. Łączkowskiego [40, 41].

W ostatnich latach podjęto próby oceny zależności drgań łożysk i wirników wału od sztywności fundamentu. Zależność tę rozpatrywano przy uwzględnieniu różnych wpływów dodatkowych (warstewki olejowej łożyska, jej położenia, sztywności koźłów podporowych łożysk itp.) w pracach Z. Walczyka [42], J. Glienicke [43], E. Krämera [44].

Szerokie możliwości analizy wpływu różnych czynników na drgania wału przedstawiono w pracy A. Muszyńskiej [45]. Należy domniemywać, że przy pewnej modyfikacji przedstawionych w pracy równań, będzie można również uwzględnić wpływ fundamentu na drgania łożysk.

#### 4. Obliczeniowe ujęcie sił osiowych

W pierwszych zaleceniach projektowych [30] nie przewidywano konieczności uwzględnienia drgań osiowych w obliczeniach fundamentów turbozespołów. Dopiero w opracowa-

niu E. Rauscha [46] mamy pierwsze wzmianki na temat obliczeń układu podłużnego fundamentu (przy uwzględnieniu płyty górnej). Zalecono bowiem, by nie obciążone elementy konstrukcyjne fundamentu, współdrżące z ramami poprzecznymi obliczać przy uwzględnieniu 50% zwwyżki ich ciężaru własnego.

Sposób obliczania drgań pionowych i poprzecznych rygli ram podłużnych przedstawiono w monografii E. Rauscha [31].

Obliczenia dynamiczne sprowadzono do wyznaczenia drgań własnych pionowych i ewentualnie poprzecznych belki ciągłej (rygla ramy podłużnej) na podporach sztywnych lub sprężystych.

Możliwość wystąpienia sił wzbudzających w kierunku osiowym fundamentu dostrzeżono dopiero w normie niemieckiej [47]. Zalecono jednocześnie by w obliczeniach projektowych uwzględniono strefy rezonansowe ram podłużnych. Współdrżające, nie obciążone elementy konstrukcyjne fundamentu liczy się w sposób przedstawiony w opracowaniu [46].

Znowelizowana norma [48] nie wnosi do obliczeń żadnych zmian, potwierdza jednak możliwość występowania drgań osiowych fundamentu wywołanych siłami wzbudzającymi.

W pracy R. Jänischa [49] przedstawiono metodę obliczania drgań giętnych, drgań pionowych i poziomych (poprzecznych) rygla ramy podłużnej — jako belki ciągłej. Drgania osiowe pominięto z uwagi (jak zaznaczono) na ich małe znaczenie praktyczne (wyznaczone amplitudy drgań były b. małe).

M. F. Makaroczkin, Ju. A. Sobolewski [50] zalecają przy obliczaniu fundamentów turbosespołów bez wykonstruowanej ramy podłużnej — przyjmować osiowe siły wzbudzające równe połowie wartości odpowiednich obciążeń dynamicznych poprzeczno-poziomych. Jednocześnie uważają, że przy fundamentach ramowych, mających ramy podłużne, można nie uwzględniać w obliczeniach działania sił podłużnych (osiowych).

Wyznaczenie osiowych sił wzbudzających na podstawie prowadzonych badań przedstawiono w pracy P. A. Gutidze [51] (cyt. wg [19]). Dla fundamentów turbosespołów o 3000 obr/min otrzymano wartość osiowej siły wzbudzającej równą połowie wartości pionowej siły wzbudzającej.

Cz. Kłós i J. Lipiński [52] proponują natomiast na podstawie prowadzonych obserwacji drgań osiowych fundamentów (zaobserwowane drgania osiowe były znacznie mniejsze od drgań poprzecznych) przyjęcie sił osiowych równych „... połowie obciążeń dynamicznych poziomych, prostopadłych do osi turbosespołu”. Jednakże w przytoczonych przykładach obliczeń drgań ram podłużnych nie uwzględniono osiowych sił wzbudzających, ograniczając się tylko do ujęcia wpływu momentu zwarcia i drgających w węzłach mas, wzbudzonych drganiami rygli ram poprzecznych. Jako schemat obliczeniowy ramy podłużnej przyjęto podzielony rygiel na poszczególne przęsła, utwierdzone na podporach (w węzłach).

Prócz tego w pracy [52] przedstawiono ciekawe zestawienie porównawcze wartości poziomych amplitud drgań poprzecznych ram fundamentu pod turbosespół o mocy 25 MW. Amplitudy drgań obliczono rozpatrując ramy jako oddzielne konstrukcje i jako składowe elementy sztywnej płyty górnej. Rozbieżności pomiędzy wynikami sięgają ponad 50%.

W monografii E. Rauscha [53] dostrzeżono podobne ujęcie obciążenia przy obliczaniu ram podłużnych jak w pracy [31], jakkolwiek autor zaleca w pierwszej kolejności wyznaczenie drgań płyty górnej fundamentu jako sztywnej tarczy. Prócz tego zwraca uwagę na celowość sprawdzania drgań sprzężonego układu płyty górnej i dolnej fundamentu; często-

tliwość zaś obliczanych drgań własnych winna być różna o min. 20% od częstotliwości drgań eksploatacyjnych.

Obliczenia statyczne przeprowadzono jednocześnie dla całej ramy podłużnej, dynamiczne natomiast tylko dla rygla podłużnego.

Pierwsze ujęcie obliczeń wpływu dynamicznego dla całej ramy podłużnej przedstawiono w pracy A. I. Abaszidze [16].

Drgania własne całego układu (do IV rzędu) wyznaczono przy założeniu sprężystości rygli podłużnych i przegubowo połączenia ich w węzłach z ryglami ram poprzecznych. W węzłach tych skupiono masy złożone z połowy wartości przypadającej na poszczególne rygle ram poprzecznych i z części rygli ramy podłużnej. Następnie za pomocą rozłożenia w szereg wg form drgań własnych i przy uwzględnieniu poprzecznych sił wzbudzających (jak proponowano w pracy [52]) określono amplitudy drgań podłużnych.

Przedstawioną wyżej metodę obliczeń drgań ram podłużnych omówiono szerzej w monografii A. I. Abaszidze, S. A. Berensteina i F. W. Sapożnikowa [19].

Przyjęcie poziomej siły wzbudzającej do obliczenia drgań fundamentów w kierunku podłużnym zalecono również w przepisach amerykańskich [54] (cyt. wg [63]). W myśl tych przepisów wielkość sił osiowych winna być określona przez wytwórcę maszyn.

W schemacie obliczeniowym układu konstrukcyjnego fundamentu, siły podłużne (osiowe) obciążają obie skrajne ramy poprzeczne (siły przyłożone w środku rozpiętości rygla, prostopadle do jego osi).

Bardzo ciekawą analizę wartości amplitud drgań poprzecznych przeprowadzono w pracy E. Krynickiego i W. Włodarczyka [55]. Obliczono mianowicie częstotliwości drgań własnych i amplitudy drgań ram poprzecznych dla fundamentu pod turbozespół o mocy 125 MW przy zastosowaniu metody E. Rauscha [53], W. W. Makariczewa [9] i I. Kisiela [34], a także z uwzględnieniem sił poprzecznych lub bez nich — przy użyciu wzorów transformacyjnych metody przemieszczeń.

Różnice pomiędzy obliczonymi częstotliwościami drgań własnych nie przekraczają 20%, natomiast wartości amplitud drgań różnią się do 80%.

Prócz tego przedstawiono wyniki obliczeń ram poprzecznych fundamentu turbozespołu o mocy 200 MW, rozpatrywanych jako samodzielne konstrukcje i jako pracujące w układzie sztywnej płyty górnej.

W pracy G. Kleina [56] opartej na metodzie E. Rauscha przedstawiono wyznaczenie częstotliwości drgań własnych ram podłużnych oraz pionowych i poprzecznych (z płaszczyzny ramy) drgań wzbudzonych rygla (jako belki ciągłej). Zwrócono też uwagę na konieczność zachowania min. 20% różnicy pomiędzy częstotliwościami drgań własnych i wzbudzonych.

Na niedostatki dotychczasowych metod obliczeń rygli ram podłużnych zwrócono uwagę w pracy G. Kleina [57]. Podkreślono m.in. brak uwzględnienia w obliczeniach projektowych sztywności współpracującego turbozespołu, sprężystości podparć wału maszyny, sprzężenia drgań rygli ram poprzecznych z ramą podłużną, możliwości drgań konstrukcji fundamentu w trzech podstawowych kierunkach.

W normie [58] obowiązującej w naszym kraju w latach 1967 - 1980, nie przedstawiono żadnych zaleceń dotyczących konieczności obliczania drgań ram podłużnych, jakkolwiek w monografii J. Lipińskiego [59] (z tego samego okresu) stwierdzono, że mogą występować

obciążenia dynamiczne, działające wzdłuż osi maszyny. W cyt. monografii zalecono przyjęcie wielkości sił osiowych zgodnie z wcześniejszą pracą autora [52]. Niemniej jednak w przykładzie obliczeń fundamentu pod turbosespół o mocy 25 MW wartości tej nie uwzględniono (rygiel ramy podłużnej obliczono wg zasad sformułowanych przez E. Rauscha).

W pracy W. Herrmanna [60] oraz w monografiach A. Majora [61] i G. Buzdugana [62] problem obliczania podłużnych ram fundamentu ograniczono do podania zaleceń przedstawionych w opracowaniu E. Rauscha [46].

W najnowszej monografii A. Majora [63] w zestawieniu obciążeń ujęto poziome siły osiowe jako obciążenia wzbudzające drgania wzdłuż osi podłużnej fundamentu; nie podano jednak ich wartości. Miejsce przyłożenia sił osiowych przyjęto zgodnie z opracowaniem [54].

Wiele miejsca w publikacji poświęcono omówieniu schematów ram podłużnych, stosowanych przy obliczaniu drgań własnych (wg prac cyt. wyżej).

W aktualnie obowiązującej w kraju normie dotyczącej fundamentów pod maszyny [64] uwzględniono obciążenia dynamiczne, działające w osi konstrukcji. Przyjęto wielkość siły osiowej równą połowie wartości poprzecznych sił wzbudzających, co jest zgodne z wcześniejszymi propozycjami, przedstawionymi w pracach [16, 50, 52].

## 5. Ocena wyników badań i prac teoretycznych

Prowadzone w ostatnim dwudziestolecu badania dynamiczne eksploatowanych fundamentów turbos zespołów jednoznacznie wykazały występowanie drgań osiowych. Zarejestrowano mocno zróżnicowane wartości amplitud drgań osiowych, wzrastające wraz z mocą turbos zespołów. W przypadku maszyn o mocy 200 MW, wartości rozważanych amplitud drgań płyty górnej fundamentu są podobne do wartości amplitud drgań pionowych bądź poprzecznych [26]. Oznacza to, że niesposób nadal pomijać ich określenia w obliczeniach projektowych, a także w ujęciu normowym (wartości dopuszczalnej amplitudy drgań osiowych [64]).

Do problemów nadal nie rozwiązanych należy jednak wielkość osiowych sił wzbudzających.

Obowiązująca w kraju norma [64] ujmuje wielkości sił osiowych zgodnie z propozycjami autorów z końca lat pięćdziesiątych [16, 50, 51, 52], a więc przyjmuje siłę o wielkości równej połowie charakterystycznego obciążenia dynamicznego, zalecanego do obliczeń amplitud drgań pionowych bądź poprzecznych.

Powyższa wartość siły osiowej nie jest wynikiem szerszych badań konstrukcji czy analiz teoretycznych lecz została przyjęta przez pewną analogię do zaobserwowanych mniejszych wartości amplitud drgań osiowych (pomierzone amplitudy drgań osiowych były znacznie mniejsze od amplitud drgań poprzecznych [52]).

W tym miejscu należy zaznaczyć, że autorzy omawianych wyżej prac obserwowali fundamenty turbos zespołów o mocy do 100 MW (w przypadku publikacji [52] — do 50 MW). Stąd brak oceny spotykanych aktualnie wartości amplitud drgań osiowych fundamentów turbos zespołów dużej mocy [26].



W przypadku przyjęcia wyżej przytoczonego rozumowania dla fundamentów turbozespołów o mocy 200 MW — normową wartość siły osiowej należałoby zwiększyć dwukrotnie.

Powyższe zjawiska nie mają jednak liniowej zależności, co łatwo zauważyć śledząc treść pracy H. Webera, E. Krämera, Z. Walczyka, J. Glienicke czy A. Muszyńskiej.

I jakkolwiek rozwiązano wiele problemów mechanicznych, to jednak nie udało się jednoznacznie określić osiowej siły wzbudzającej, która winna być przyjmowana do obliczeń fundamentów.

Należy domniemywać, że taki stan wiedzy wynika przede wszystkim z przyjętego punktu widzenia autorów, którzy dostrzegają problem od strony wpływu fundamentu na pracę turbozespołu (np. [42, 43, 44]). Brak natomiast opracowań, w których byłaby przeprowadzona analiza występujących sił pod kątem wpływu turbozespołu na fundament. Stąd dla *pełnego rozwiązania problemu, przy całkowitej przydatności wyników dla konstruktorów fundamentów*, konieczna jest ścisła współpraca w czasie badań i analiz teoretycznych inżynierów mechaników i inżynierów budownictwa.

## 6. Uwagi końcowe i wnioski

Prawidłowa praca turbozespołu zależy m.in. od dobrego stanu technicznego fundamentu. Tymczasem występujące coraz częściej zarysowania konstrukcji fundamentów, szczególnie pod turbozespoły o mocy powyżej 50 MW wskazują, iż nie wszystkie problemy techniczne rozpatrywanej konstrukcji wsporczej zostały wyjaśnione.

Należy mieć również na uwadze fakt, że aktualnie budowane są w kraju turbozespoły o mocy 500 MW (są także w eksploatacji), wymagające skomplikowanej konstrukcji wsporczej o długości ok. 50,00 m. Stąd wydaje się anachronizmem stosowanie sił bądź parametrów określonych ponad ćwierć wieku temu podczas obserwacji fundamentów turbozespołów małych i średnich mocy (do 50 MW [50]) — do obliczeń fundamentów turbozespołów dużej mocy.

Konieczności prowadzenia badań dynamicznych dla wyjaśnienia rozważanych w niniejszej pracy zagadnień nie potrzeba uzasadniać. Uczynił to przed wielu laty R. Ciesielski przy omawianiu ogólnych problemów budownictwa, związanego z obciążeniami dynamicznymi [65, 66]. Również W. Włodarczyk w pracy [67] wskazuje, że w przypadku skomplikowanego układu konstrukcyjnego bądź występowania niewyjaśnionych dostatecznie obciążeń dynamicznych, najsłuszniejszą metodą dla rozwiązania problemu są badania dynamiczne.

Powstaje zatem pytanie: czy wolno nadal improwizować przy obliczaniu fundamentów turbozespołów dużej mocy, stosując metody i zasady wypróbowane i wystarczające — przy obliczaniu fundamentów turbozespołów małej mocy?

W świetle dotychczas prowadzonych badań fundamentów turbozespołów, a także na podstawie omówionego w publikacji materiału, można stwierdzić, że koszt rozwiązania problemu będzie wielokrotnie niższy od kosztów koniecznych napraw i wzmocnień aktualnie budowanych konstrukcji.

Można stąd sformułować następujące wnioski:

- 1). Występujące w czasie eksploatacji turbozespołu siły osiowe są duże i nie można ich pomijać przy obliczaniu amplitud drgań fundamentu
- 2). W obliczeniach fundamentów turbozespołów dużej mocy muszą być uwzględniane siły osiowe o wartościach zbliżonych do rzeczywiście występujących (ich ocena nie będzie jednoznaczna, zależy bowiem od stanu technicznego maszyny).
- 3). Badania dynamiczne i analizy teoretyczne wyjaśniające problem sił osiowych i związanych z nimi drgań, winny być prowadzone przez zespół składający się z inżynierów mechanicznych i inżynierów budownictwa
- 4). W znowelizowanej normie dotyczącej fundamentów pod maszyny musi być określona rzeczywista siła osiowa lub sposób jej obliczania (zalecana do obliczeń projektowych), jak również wartość dopuszczalnych amplitud drgań osiowych.

#### Literatura

1. J. GEIGER, *Untersuchung von Schwingungserscheinungen an Turbodynamos mit Hilfe des Vibrographen*. Zeitschr. d. VDI, 66/1922/18, s. 437 - 440
2. G. MENSCH, *Rechnerisch ermittelte und gemessene Schwingungszahlen an einem Turbinenfundament*. Bauingenieur 9/1928/H.9, s. 152 - 153.
3. T. C. RATHBONE, *Curing Resonant Vibration in Turbine Units*. Power, Apr. 10, 1928, s. 629 - 632.
4. H. KAYZER, *Über Fundamentalschwingungen*. Zeitschr. d. VDI, 73/1929/37, s. 1305 - 1310.
5. H. KAYZER, *Zur Beanspruchung von Turbinenfundamenten. Bericht über neuere Messungen von Fundamentalschwingungen*. Bauingenieur 13/1932/H. 17/18, s. 231 - 235; H. 31/32, s. 419 - 420.
6. G. EHLERS, *Dampfturbinenfundamente und damit zusammenhängende Fragen des Eisenbetonbaues*. Bauingenieur 15/1934/H. 29/30, s. 298 - 301; H. 31/32, s. 312 - 314.
7. S. VESSELOWSKY, *Experimental and Theoretical Investigation of a Turbine Foundation*. Journ. Appl. Mech. June 1940, s. 63 - 70; Sept. 1941, s. 141 - 143.
8. T. C. RATHBONE, *Vibration of Turbine-Generator-Foundations*. Power, Apr. 3, 1928, s. 588 - 592, s. 606.
9. В.В. МАКАРИЧЕВ, *Фундаменты под турбоагрегаты*. Москва-Ленинград, Госэнергоиздат, 1951.
10. А.И. АБАШИДЗЕ, М.А. БРАНОВСКИЙ, *О работе рамных фундаментов под динамической нагрузкой*. Электрические Станции № 2/1955, с. 18 - 25.
11. R. KÖHLER, *Das Schwingungssystem Turbine-Fundament*. VIK-Berichte nr 28 (August) 1955, s. 7 - 29.
12. R. KÖHLER, *Ergebnisse von Schwingungsuntersuchen an Turbinen-fundamenten und Turbinen*. VDI-Berichte Bd. 24, 1957, s. 59 - 63.
13. Z. ŚNIADKOWSKI, *Pomiar drgań fundamentu turbozespołu 19 MW*. Inż. i Bud. nr 5/1958, s. 173 - 174.
14. B. KOUNOVSKY, *Nové poznatky o kmitání zakladu pod turboagregáty*. Symp. Dynamics of Structures. Praga 1959, Ref. s. 39 - 63.
15. M. NOVAK, *Axiální kmitání ložiskových stojanu generátora*. Stavebnický Časopis, Bratislava 1960, nr 5/6, s. 324 - 339.
16. А.И. АБАШИДЗЕ, *Динамика фундаментов паровых турбин*. Москва-Ленинград Госэнергоиздат 1960.
17. J. PAŁKA, *Analiza drgań fundamentów pod turbozespoły*. Inż. i Bud. nr 2, 1962, s. 66 - 70
18. M. NOVAK, *On some dynamical problems of turbomachinery frame foundations*. Proc. RILEM Symp. 1, Budapest 1963, s. 215 - 234.
19. А.И. АБАШИДЗЕ, С.А. БЕРЕНСТЕЙН, Ф.В. СЛОПОЖНИКОВ, *Фундаменты паровых турбин (турбогенераторов)*, Москва-Ленинград, Госэнергоиздат, 1963
20. A. NESITKA, *Federnd gelagerte Dampfturbinenfundamente*, Bauingenieur 39/1964/H.6, s. 228 - 230.
21. О.А. СЛАВИНОВ, *Современные конструкции фундаментов под машины и их расчёт*. Ленинград-Москва, Стойиздат, 1964.

22. А.И. АБАШИДЗЕ, А.Т. КАЗАНДЖЯН, *Сборные железобетонные фундаменты под турбоагрегаты*. Энергетическое Строительство нр. 41/1964, с. 3 - 7.
23. Г.Г. АРГАНОВСКИЙ, *Натурное обследование сборных железобетонных фундаментов под крупные турбоагрегаты*. Энергетическое Строительство нр. 6/1966, с. 71 - 74.
24. А.И. АБАШИДЗЕ, Ф.В. САПОЖНИКОВ, А.Т. КАЗАНДЖЯН, *Фундаменты машин тепловых электростанции*. Москва, Энергия, 1975.
25. A. GARSTECKI, A. WEGNER, *Badania dynamiczne fundamentów ramowych pod turbozespoły dużej mocy*. Inż. i Bud. nr 2/1977, s. 65 - 69.
26. A. WEGNER, H. LITWINOWICZ, *Analiza drgań zmodernizowanych żelbetowych fundamentów ramowych pod turbozespoły o mocy 200 MW*. Zesz. Nauk. PP — seria: Budownictwo Lądowe nr 25/1980, s. 13 - 28.
27. A. WEGNER, *Wpływ zarysowania fundamentu na zmianę jego charakterystyki dynamicznej i na pracę turbozespołu*. Energetyka nr 3/1981, s. 83 - 86.
28. A. WEGNER, *Wpływ elektropetryfikacji podłoża na zmianę wartości amplitud drgań żelbetowego fundamentu pod turbozespół 200 MW*. Konf. Nauk. nt. Geotechniczne problemy Wielkopolski — połączona z Sesją wyjazdową Sekcji Mech. Gruntów, Skał i Fundamentowania KI LiW PAN, Poznań 1978, Materiały s. 167 - 171.
29. A. WEGNER, *Badanie wpływu pracy maszyn sąsiednich i towarzyszących na fundamenty turbozespołów dużej mocy*. Zesz. Nauk. PP — seria: Budownictwo Lądowe (w druku).
30. A. SCHÖNBURG, *Richtlinien für den Bau von Dampfturbinen-Fundamenten in Eisenbeton*. Bauingenieur 10/1929/H.46, s. 814 - 816.
31. E. RAUSCH, *Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben*. 3 Teil, Berlin, VDI-Verlag 1942.
32. H. WEBER, *Über das gemeinsame Schwingungsverhalten von Welle und Fundament bei Turbinenanlagen*. VDI-Berichte nr 48/1961, s. 55 - 62.
33. E. KRÄMER, *Über die Laufruhe von Turbogruppen*. VDI-Berichte nr 48/1961, s. 63 - 69.
34. I. KISIEL, *Dynamika fundamentów pod maszyny*. Warszawa, PWN, 1957.
35. J. KOŹEŚNIK, *Dynamika maszyn*. Warszawa, WNT, 1963.
36. И.С. ЛИПСМАН, А. Т. МУЗИКА, В. С. ЛИПСМАН, *Предупреждение и устранение вибраций роторных машин*. Киев, Издат „Техника”, 1968.
37. R. ŁĄCZKOWSKI, *Drgania elementu turbin ciepłych*. Warszawa, WNT, 1974.
38. R. ŁĄCZKOWSKI, *Podstawy diagnostyki stanu dynamicznego turbozespołu*. Energetyka nr 3/1968, s. 89 - 93.
39. E. TULISZKA, *Turbiny ciepłe. Zagadnienia termodynamiczne i przepływowe*. Warszawa, WNT, 1973.
40. R. ŁĄCZKOWSKI, *Wzdłużne drgania własne wału napędowego o stałej średnicy*. Przegląd Mechaniczny 34/1975/3, s. 77 - 81.
41. R. ŁĄCZKOWSKI, *Wzdłużne drgania własne wału napędowego o zmiennej średnicy*. Przegląd Mechaniczny 34/1975/5, s. 149 - 153.
42. Z. WALCZYK, *Wyznaczenie krytycznych obrotów oraz amplitud drgań wielopodporowego wału turbogeneratora z uwzględnieniem sprężystego powiązania podpór wału oraz filmu olejowego*. Konf. Nauk. nt. Metod numerycznych w mechanice, Gdańsk 1972, Materiały s. 115 - 118.
43. J. GLIENICKE, *Veränderungen im Schwingungsverhalten gleitgelagerter Wellen infolge von Zusatzeinflüssen*. VDI-Berichte nr 320/1978, s. 1 - 8.
44. E. KRÄMER, *Gemeinsame Schwingungsberechnung von Rotor und Fundament bei Turbomaschinen*. VDI-Berichte nr 381/1980, s. 121 - 127.
45. A. MUSZYŃSKA, *Modelowanie i analiza dynamiczna wirników*. Prace IPPT PAN nr 52/1975, Warszawa 1975.
46. E. RAUSCH, *Richtlinien für den Bau von Dampfturbinen-Fundamenten in Eisenbeton*. Bauingenieur 14/1933/H. 15/16, s. 227 - 228.
47. DIN 4024. *Dampfturbinenfundamente. Richtlinien für die Berechnung und Ausführung*. September 1951. Bauingenieur 27/1952/H.3, s. 106 - 108.
48. DIN 4024. *Stützkonstruktionen für rotierende Maschinen (vorzugsweise Tisch-Fundamente für Dampfturbinen)*. Januar 1955.
49. J. JÄNISCH, *Neuere Erkenntnisse für die Schwingungsberechnung von Turbinenfundamenten*. Bauplanung- und Bautechnik nr 2/1958, s. 73 - 76.

50. М. Ф. МАКАРОЧКИН, Ю. А. СОВОЛЕВСКИЙ, *Фундаменты под машины*. Минск, Госиздат БССР, 1958.
51. П. А. ГУТИДЗЕ, *Расчёт фундаментов рамного типа под турбогенераторы на действие продольных возмущающих сил*. Изв. ТНЦСГЭИ, т. 10, 1958.
52. Cz. KŁOŚ, J. LIPÍŃSKI, *Fundamenty pod maszyny*. Warszawa, Arkady 1959.
53. E. RAUSCH, *Maschinenfundamente und andere dynamisch beanspruchte Baukonstruktionen*. VDI-Kommission Verlag. Dusseldorf 1959.
54. *General Electric Co.: Steam turbine-generator foundations*. GET-1749-B-C, USA, 1961 - 1967.
55. E. KRYNICKI, W. WŁODARCZYK, *Projektowanie fundamentów pod maszyny. Przykłady*. Warszawa, Wyd. Politechniki Warszawskiej, 1964.
56. G. KLEIN, *Dynamische Berechnung von Turbineifundament*. Berlin, W. Ernst u. Sohn, Verlag, 1965.
57. G. KLEIN, *Entwicklung und Stand der Berechnung von Fundamenten für Dampfturbosätze*. Bautechnik nr 6/1966, s. 192 - 195; nr 8/1966, s. 284 - 287.
58. PN-67/B-3040. *Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny. Obliczenia i projektowanie*. Warszawa, Wyd. Normalizacyjne 1967.
59. J. LIPÍŃSKI, *Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny*. Warszawa, Arkady 1969.
60. W. HERRMANN, *Schwingungsbeanspruchung von Maschinenfundamenten*. Berlin, VEB Verlag Technik, 1954.
61. A. MAJOR, *Berechnung und Planung von Maschinen — und Turbinenfundamenten*. Berlin, VEB Verlag für Bauwesen, 1961.
62. G. BUZDUGAN, *Dynamique des Fondations Machines*. Paris, Editions Eyrolles 1972.
63. A. MAJOR, *Dynamics in Civil Engineering*. Vol. I - IV, Foundations for high speed machinery Vol. III, Budapest, Akademiai Kiado, 1980.
64. PN-80/B-3040. *Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny. Obliczenia i projektowanie*. Warszawa, Wyd. Normalizacyjne, 1981.
65. R. CIESIELSKI, *Aktualne kierunki badań doświadczalnych elementów i konstrukcji*. Czasopismo Techniczne nr 7/1969, s. 1 - 7.
66. R. CIESIELSKI, *Diagnostyka dynamiczna w budownictwie*. Konf. Nauk. Techn. nt. Oceny szkodliwości wpływów dynamicznych na budynki i konstrukcje inżynierskie. Kraków, 1971, Materiały T. 1, s. 5 - 20.
67. W. WŁODARCZYK. *Doświadczenia z badań dynamicznych fundamentów i konstrukcji obciążonych maszynami*. Zesz. Nauk. Pol. Warszawskiej, Budownictwo nr 12, Warszawa 1970, s. 51 - 90.

#### Резюме

#### ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФУНДАМЕНТОВ ТУРБОГЕНЕРАТОРОВ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ НА ФОНЕ ПРОВЕДЁННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В статье изложено актуальное знание относительно вынужденных продольных колебаний фундаментов турбогенераторов.

Представлены, полученные до сих пор, экспериментальные динамические исследования на моделях и эксплуатируемых фундаментах.

Обнаружено появление больших продольных колебаний фундаментов, увеличивающихся вместе с мощностью турбогенераторов.

Обсуждены на фоне проведённых исследований попытки выяснить причины продольных колебаний и тоже — образ математического вычисления продольных вынужденных сил.

#### Summary

#### THE LONGITUDINAL VIBRATIONS OF LARGE-TURBO-GENERATOR FOUNDATIONS ACCORDING TO THE EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS

Up to date state of knowledge on the forced vibrations of turbogenerator foundations in the longitudinal direction is reviewed and discussed in the paper.

Existing experiments both on the dynamically loaded foundations and on the model of the fram foundations are presented as well.

It was found that the longitudinal amplitudes of the foundation — vibrations are large and increase with the power rating.

Explanation of the phenomenon of longitudinal vibrations, as well as computation methods for the longitudinal dynamic load are outlined.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 lutego 1986 roku.*

---



## PROBLEMY ZMĘCZENIA CIEPLNEGO METALI

RYSZARD ŻUCHOWSKI

*Politechnika Wroclawska*

Zmęczenie cieplne jest to proces powstawania i rozwoju uszkodzeń na skutek zmian energii wewnętrznej w materiałach części maszyn i konstrukcji, pod wpływem wielokrotnych cyklicznych lub okresowych zmian temperatury [1]. W wyniku tego procesu mogą powstać pęknięcia lub zmiany geometrii danej części, a także zmiany własności fizycznych materiału. Główne przyczyny zmęczenia cieplnego to okresowe lub cykliczne zmiany temperatury i całkowite lub częściowe (na skutek podatności więzów) ograniczenie swobody odkształceń cieplnych. To ograniczenie może być spowodowane przez czynniki zewnętrzne lub wewnętrzne, a więc ze względu na sposób hamowania odkształceń cieplnych, zmęczenie cieplne można podzielić na dwie grupy [2], a mianowicie:}

- a) zmęczenie cieplne z ograniczeniami zewnętrznymi,
- b) zmęczenie cieplne z ograniczeniami wewnętrznymi.

Zewnętrznymi ograniczeniami swobody odkształceń cieplnych są reakcje więzów, czyli siły przyłożone do powierzchni elementu, który jest przemiennie nagrzewany i chłodzony. Ten sposób obciążenia, zwany także zmęczeniem cieplno-mechanicznym, stosuje się często w laboratoriach jako symulację rzeczywistych procesów obciążenia. W praktyce częściej występuje zmęczenie cieplne spowodowane ograniczeniem swobody odkształceń cieplnych przez czynniki wewnętrzne, takie jak gradient temperatury, anizotropia struktury i różne wartości współczynników rozszerzalności cieplnej sąsiednich ziarn, faz lub składowych kompozytów. Te czynniki mogą wywoływać w elementach konstrukcji naprężenia cieplne samorównoważące się w objętości całego elementu lub jego części.

Na części maszyn i urządzeń pracujących w warunkach cyklicznych lub okresowych zmian temperatury, mogą także oddziaływać:

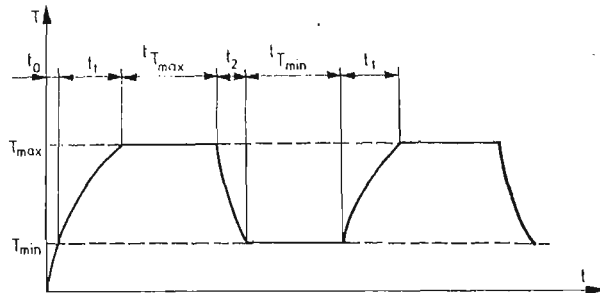
- naprężenia resztkowe (wpływ historii obciążenia),
- środowiska korozyjne,
- strumienie neutronów,
- naprężenia mechaniczne wywołane przez niezależne pola sił.

Uwzględniając także ten ostatni czynnik można wyróżnić cztery warianty zmęczenia cieplnego [1]. Zmęczenie cieplne może zatem wystąpić na skutek wielokrotnych zmian temperatury:

- a) nieobciążonego polem sił elementu o dużych wymiarach, bądź wykonanego z materiału charakteryzującego się dużą anizotropią strukturalną,

- b) elementu, którego swoboda odkształcania została ograniczona przez więzy kinematyczne,
- c) elementu bez więzów kinematycznych obciążonego niezależnie stałym polem sił (zwłaszcza w przypadku materiałów wielofazowych i szybkich zmian temperatury),
- d) elementu obciążonego niezależnie okresowo (lub cyklicznie) zmiennym polem sił.

W różnych częściach maszyn pracujących w warunkach cyklicznych zmian temperatury kształt cyklu cieplnego może być różny. W ogólności cykl cieplny (rys. 1) składa się z nagrzewania do temperatury maksymalnej  $T_{max}$  w czasie  $t_1$ , wytrzymywania w temperaturze maksymalnej w czasie  $t_{Tmax}$ , chłodzenia do temperatury minimalnej  $T_{min}$  w czasie  $t_2$  oraz wytrzymywania w temperaturze minimalnej w czasie  $t_{Tmin}$ . W przypadku pierwszego cyklu



Rys. 1. Kształt cyklu cieplnego

czas nagrzewania wynosi  $t_0 + t_1$ , przy czym  $t_0$  — czas nagrzewania do temperatury minimalnej cyklu. Szczególnym przypadkiem jest cykl, w którym  $t_{Tmax} = t_{Tmin} = 0$ . Taki cykl ma kształt zęba piły i określa się go jako cykl piłowy. Do analitycznego opisu cyklicznych zmian temperatury stosuje się często odcinkowo liniową schematyzację cykli (cykle trapezowe lub trójkątne). W przypadku działania niezależnych zmian obciążeń i temperatury wyróżnia się dwa rodzaje cyklu, a mianowicie:

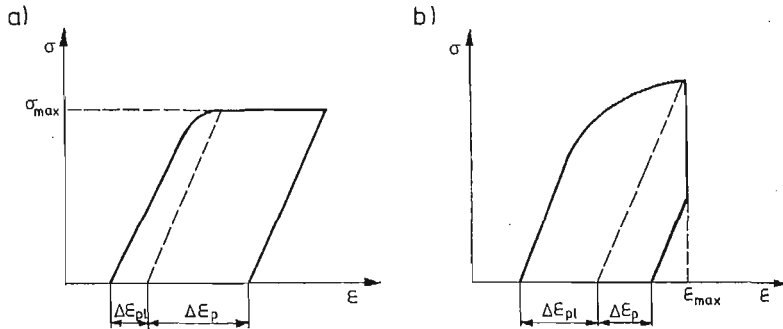
- cykl współfazowy, w którym maksymalnej temperaturze odpowiada maksymalne odkształcenie dodatnie (wydłużenie) elementu,
- cykl przeciwfazowy, w którym maksymalnej temperaturze odpowiada maksymalne odkształcenie ujemne (skrócenie) elementu.

Istotną składową amplitudy odkształcenia w warunkach zmęczenia cieplnego jest odkształcenie niesprężyste, które składa się z odkształcenia plastycznego i odkształcenia powstałego w wyniku pełzania. Warunki pracy urządzeń energetycznych są takie, że poszczególne ich elementy znajdują się przez dłuższy czas w stałej temperaturze pod działaniem stałego obciążenia. Te okresy stabilnej pracy są jednak przedzielone okresami zmian temperatury i obciążenia. W niezbyt wysokiej temperaturze (w której można pominąć wpływ pełzania) za wyłączną przyczyną zniszczenia można uznać odkształcenia plastyczne.

W wysokiej temperaturze natomiast pełzanie jest istotnym czynnikiem, który może spowodować zniszczenie elementu, także w stałej temperaturze przy stałym obciążeniu. Ogólnie przyjmuje się, że odkształcenie plastyczne jest niezależne od czasu, natomiast odkształcenie powstałe w wyniku pełzania zależy od czasu; ma to istotne znaczenie w przypadku sumowania uszkodzeń spowodowanych tymi przyczynami. Na rys. 2 pokazano podział całkowitego odkształcenia trwałego w cyklu na składową plastyczną i składową powstałą w wyniku



pełzania, a — dla cyklu o kontrolowanej amplitudzie naprężenia, b — dla cyklu o kontrolowanej amplitudzie odkształcenia. Rozróżnienie pojęć pełzania i plastyczności w warunkach zmęczenia cieplnego jest często trudne, szczególnie w przypadku cyklu piłowego, w którym brak okresu charakteryzującego się stałymi parametrami. Rozróżnienie tych pojęć jest szczególnie trudne, jeśli uwzględnić fizyczne aspekty odkształcenia. W takim przypadku można przyjąć, że plastyczność jest pewną formą pełzania [1], jak np. pełzanie krótkotrwałe.



Rys. 2. Podział całkowitego odkształcenia trwałego  $\Delta\epsilon_t$  na składowe:  $\Delta\epsilon_{p1}$  — składowa plastyczna,  $\Delta\epsilon_p$  — składowa powstała w wyniku pełzania

Ze zjawiskiem zmęczenia cieplnego można spotkać się w wielu konstrukcjach, np. w energetyce (kotły, rurociągi, pary, przegrzewacze, części reaktorów jądrowych itp.), przemyśle hutniczym (walce, kokile, wlewnice), maszynowym (narzędzia skrawające), przemyśle lotniczym i okrętowym (łopatki turbin, części silników) i w wielu innych. Zmęczeniu cieplnemu poświęca się wiele uwagi w krajach o wysokim poziomie techniki i światowe piśmiennictwo w tej dziedzinie jest bardzo bogate. Szersze omówienie problemów zmęczenia cieplnego można również znaleźć w pracach krajowych [1, 4 - 6]. Zjawisko zmęczenia cieplnego nie jest jeszcze w pełni poznane. Badania w tej dziedzinie obejmują następujące zadania wymagające rozwiązań teoretycznych i doświadczalnego sprawdzenia, a mianowicie:

- poznanie istoty i przebiegu zjawiska, aż do zniszczenia elementu,
- ustalenie kryteriów zniszczenia,
- określenie trwałości,
- opracowanie metod oceny trwałości i stopnia uszkodzenia materiału,
- opracowanie metod obliczeń wytrzymałościowych.

Wymiana doświadczeń między użytkownikami urządzeń, w których zjawisko zmęczenia cieplnego występuje, a badaczami tego zjawiska może przyczynić się do rozwiązania powyższych zadań.

W niniejszej pracy omówiono w skrócie podstawowe problemy zmęczenia cieplnego, a mianowicie: mechanizm zniszczenia oraz ważniejsze kryteria zniszczenia i metody oceny trwałości.

## 1. Mechanizm zniszczenia

Zmęczenie cieplne jest zjawiskiem złożonym, wymagającym dalszych badań. Wyniki uzyskane do tej pory sugerują jednak, że zjawisko to ma wiele cech wspólnych z pełzaniem

i zmęczeniem mechanicznym. Obniżenie temperatury i zwiększenie prędkości jej zmian zbliża charakter procesu zmęczenia cieplnego do zmęczenia mechanicznego w temperaturze pokojowej, działania przeciwne, a także brak symetrii cyklu cieplnego, są natomiast przyczyną pojawienia się zjawisk charakterystycznych dla pełzania. Zmęczenie cieplne może więc być traktowane jako wynik nakładania się procesów odkształcania cyklicznego (zmęczenia) i pełzania, choć nie można tu stosować superpozycji prostej. Takie podejście, aczkolwiek przybliżone, gdyż nie uwzględnia w pełni wzajemnych wpływów obu składowych procesów zmęczenia cieplnego, jest jednak uzasadnione, ponieważ umożliwia zastosowanie metodologii wykorzystywanej do opisu lepiej poznanych procesów, takich jak pełzania i zmęczenie mechaniczne.

Wszystkie skutki cyklicznych zmian temperatury znane współczesnej technice można podzielić na cztery grupy [3], a mianowicie:

- a) nieodwracalne zmiany geometrii elementów, związane z gromadzeniem jednoimiennych odkształceń trwałych, czego skutkiem może być również zniszczenie przyrostowe,
- b) utrata spójności w skali makroskopowej materiałów o małej plastyczności, w wyniku nagłych zmian temperatury — udar (szok) cieplny,
- c) zniszczenie elementów w wyniku różnoimiennych naprężeń cieplnych (uplastycznienie przeciwwzrotne),
- d) zmiany prędkości odkształcania (pełzania) i wytrzymałości długotrwałej.

Skutki cyklicznych zmian temperatury zależą od materiału i od parametrów cyklu cieplnego. Inaczej zachowują się materiały o małej plastyczności, które pękają krucho, jeśli naprężenia cieplne przekroczą wartość krytyczną, a inaczej materiały sprężysto-plastyczne mające tzw. zapas plastyczności. Konstrukcja wykonana z takich materiałów może nie ulec zniszczeniu, gdy naprężenia w najbardziej niebezpiecznych punktach przekroczą wartość krytyczną. Przy określonych parametrach procesu obciążenia konstrukcja może przystosować się do warunków eksploatacji pod wpływem naprężeń resztkowych powstałych w różnych elementach konstrukcji w początkowych cyklach obciążenia (przystosowanie plastyczne). Warunki bezpiecznej pracy można określić w takim przypadku za pomocą teorii przystosowania plastycznego [1, 7, 8].

Obecny stan wiedzy nie pozwala na przedstawienie pełnego uogólnionego modelu mechanizmu zniszczenia w procesie zmęczenia cieplnego, można jednak wyróżnić wiele cech charakterystycznych dla tego procesu. Niejednorodność struktury i obecność różnego rodzaju defektów ułatwiają powstanie uszkodzeń w materiale podczas odkształcania. W początkowym okresie cyklicznego obciążania zachodzą jednocześnie procesy umocnienia i osłabienia. Odkształcenia powstałe po pierwszym cyklu cieplnym rozwijają się intensywnie powodując pojawienie się substruktury [1], która jest jedną z przyczyn odkształcania plastycznego wewnątrz ziarn. Rozwój odkształceń plastycznych i gromadzenia się wszelkiego rodzaju uszkodzeń prowadzi do powstania mikropęknięć. Mikropęknięcia pojawiają się wewnątrz ziarn lub na ich granicach, w zależności od parametrów procesu obciążania. Główne miejsca powstawania mikropęknięć wewnątrz ziarn to granice subziarn i bliźniaków. Podczas zmęczenia cieplnego w wysokich temperaturach mikropęknięcia pojawiają się najczęściej na granicach ziarn. Znane są dwa główne rodzaje takich mikropęknięć: wnątkowy (rys. 3) i klinowy (rys. 4), podobnie jak w procesie pełzania. W powstaniu mikropęknięć



Rys. 3. Pęknięcia typu wnękowego (stal H23N18) — pełzanie w temperaturze 1123 K, naprężenie  $\sigma = 60$  MPa, pow. 50X



Rys. 4. Pęknięcia typu klinowego u zbiegu granic trzech ziarn (stal H23N18) — zmęczenie cieplne w zakresie zmian temperatury  $573 \leq T \leq 1173$  K, naprężenie  $\sigma = 60$  MPa, pow. 150X

podczas zmęczenia cieplnego szczególnie istotna jest rola wakansów, których koncentrację zwiększają cykliczne zmiany temperatury.

Charakter pęknięć (śródkrystaliczne, międzykrystaliczne) zależy od parametrów procesu obciążania, czyli od zakresu zmian odkształcenia i kształtu cyklu. W przypadku, gdy zakres zmian odkształcenia jest mały, złom ma charakter zbliżony do złomu zmęczeniowe-

go, pęknięcia rozwijają się wewnątrz ziarn. Zwiększenie zakresu zmian odkształcenia powoduje pojawienie się pęknięć o charakterze mieszanym, a dalsze zwiększenie zakresu zmian odkształcenia powoduje powstanie pęknięć wyłącznie międzykrystalicznych [9]. Zwiększenie czasu wytrzymywania elementu w maksymalnej temperaturze cyklu upodabnia charakter pęknięć do pęknięć powstałych podczas pełzania, a więc międzykrystalicznych. Rozwój uszkodzeń na granicach ziarn jest bardziej intensywny niż wewnątrz ziarn na skutek przemieszczania się dyslokacji ku granicom ziarn, gdzie powstają uskoki, pory i wydzielania węglików. Podstawowym mechanizmem zniszczenia międzykrystalicznego jest przemieszczanie się ziarn względem siebie.

## 2. Kryteria zniszczenia

Za zniszczenie elementu można uważać złom, powstanie pęknięć lub takie zmiany cech geometrycznych elementu albo zmiany własności mechanicznych materiału, które uniemożliwiają dalsze użytkowanie elementu. Dopuszczenie do złomu w skali makroskopowej w urządzeniach energetycznych jest niewskazane. Za kryterium zniszczenia przyjmuje się więc w praktyce powstanie pęknięć o określonych wymiarach [10 - 13], krytyczne zmiany geometrii elementu [14] lub krytyczne zmiany własności fizycznych materiału [15 - 17]. Takie kryteria nie są na ogół porównywalne ze względu na szczególne warunki badań, bądź też warunki pracy danego elementu. Za kryterium zniszczenia najwygodniej byłoby zatem przyjąć taką wielkość, która umożliwiłaby ocenę stanu materiału niezależnie od parametrów procesu obciążania, dlatego poszukuje się nadal optymalnego kryterium zniszczenia.

Proces rozwoju uszkodzenia materiału opisuje się zwykle wprowadzając pewną ilościową miarę uszkodzenia [18]. Pochodna uszkodzenia  $u$  względem czasu jest prędkością rozwoju uszkodzenia i w ogólności zależy od rodzaju materiału, naprężenia i temperatury oraz zakresu i prędkości ich zmian. Przyjmując, że w chwili początkowej materiał jest w stanie nieuszkodzonym, warunek zniszczenia można przedstawić w postaci równania

$$u = \int_0^{t_z} \dot{u} dt = u_z, \quad (1)$$

w którym  $t_z$  — czas do zniszczenia,  $u_z$  — krytyczna wartość uszkodzenia odpowiadająca zniszczeniu. Krytyczna wartość uszkodzenia  $u_z$  nie powinna być zależna od parametrów procesu obciążenia, a więc kryterium zniszczenia w uogólnionej postaci można wyrazić równaniem

$$u_z = \text{const.} \quad (2)$$

Wybór właściwego parametru  $u$  jest trudnym i nadal nie w pełni rozwiązany zadaniem. Jako miarę uszkodzenia przyjmuje się najczęściej odkształcenie lub energię rozproszoną w jednostce objętości materiału. W zależności od wyboru miary uszkodzenia kryteria zniszczenia dzielą się na odkształceniowe i energetyczne, jest to jednak podział umowny. W warunkach zmęczenia cieplnego, które można w przybliżeniu uznać za wynik nakładania się procesów zmęczenia mechanicznego i pełzania, wykorzystuje się kryteria zniszczenia stosowane w analizie tych obu procesów.

**2.1. Odształceniowe kryteria zniszczenia.** Podstawą tych kryteriów jest koncepcja tzw. zapasu plastyczności materiału. W myśl tej koncepcji przyjmuje się, że przekroczenie krytycznej wartości odkształcenia całkowitego lub jego plastycznej składowej spowoduje zniszczenie elementu. Najbardziej znanym kryterium odkształceniowym jest kryterium Mansona-Coffina [19, 20].

$$N_z^k \Delta \varepsilon_{pl} = C_1, \quad (3)$$

w której  $N_z$  — liczba cykli do złomu,  $\Delta \varepsilon_{pl}$  — plastyczna składowa odkształcenia (szerokość pętli histerezy),  $k$ ,  $C_1$  — stałe materiałowe (przy czym powszechnie przyjmuje się  $k = 0,5$ ). Przydatność tego kryterium została potwierdzona w praktyce przez wielu badaczy, w warunkach zmęczenia cieplnego. Stałe materiałowe  $k$  i  $C_1$  zależą jednak od parametrów cyklu cieplnego i w warunkach zmęczenia cieplnego należy stosować zmodyfikowaną postać kryterium (3) zaproponowaną w pracy [21].

$$N_z^{k_1} \Delta \varepsilon_{pl} F(T) = C_2. \quad (4)$$

W zależności tej

$$F(T) = \left( -\frac{Q}{T_m} \right) \left[ 1 + C_3 \Delta T \exp \left( -\frac{Q}{T_m} \right) \right],$$

$\Delta T$  — zakres zmian temperatury w cyklu,  $T_m$  — średnia temperatura cyklu,  $k_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $Q$  — stałe materiałowe, pozostałe oznaczenia jak w zależności (3). Autorzy pracy [21] potwierdzili doświadczalnie słuszność kryterium (4) dla trzech gatunków stali żaroodpornych.

HOFF w pracy [22] sformułował zależność między trwałością  $t_z$  w warunkach pełzania a prędkością pełzania ustalonego  $V_u$  dla złomu lepkiego

$$t_z V_u = C_4, \quad (5)$$

gdzie  $C_4$  — stała materiałowa.

MONKMAN i GRANT [23] na podstawie analizy wyników badań wielu stopów w warunkach pełzania ustalili doświadczalną zależność wiążącą trwałość  $t_z$  i prędkością pełzania ustalonego  $V_u$

$$t_z V_u^m = C_5, \quad (6)$$

gdzie  $m$  i  $C_5$  — stałe materiałowe (przy czym  $m \leq 1$ ).

Kryterium zniszczenia (6) może być stosowane w warunkach cyklicznych zmian temperatury, co stwierdzono na podstawie badań trzech gatunków stali żaroodpornych (H23N18, 50H17H17, 15HM) [24]. DOBEŠ i MILIČKA [25] stwierdzili podczas weryfikacji kryterium Monkmana-Granta (6), że znaczne rozproszenie wyników można istotnie zredukować, jeśli przyjmie się zmodyfikowaną postać tego kryterium

$$\frac{t_z}{\varepsilon_z} V_u^n = C_6, \quad (7)$$

gdzie  $\varepsilon_z$  — rzeczywiste odkształcenie zerwania,  $n$  i  $C_6$  — stałe pozostałe oznaczenia jak w zależnościach (5) i (6).

Jako kryterium zniszczenia przyjmuje się także całkowite odkształcenie trwałe nagromadzone w procesie obciążania [18].

$$\sum_{N=1}^{N=N_z} \Delta \varepsilon_{tN} = C_7 \quad (8)$$

gdzie  $\Delta \varepsilon_{tN}$  — przyrost odkształcenia trwałego w jednym cyklu,  $C_7$  — stała,  $N_z$  — liczba cykli do złomu. Przydatność tego kryterium w warunkach zmęczenia cieplnego jest jednak ograniczona, gdyż jak wykazały badania wartość stałej  $C_7$  zależy od parametrów cyklu cieplnego, a przede wszystkim od temperatury maksymalnej cyklu [24].

**2.2. Energetyczne kryteria zniszczenia.** Określenie związku między trwałością a energią rozproszoną w jednostce objętości materiału w jednym cyklu, na podstawie pomiarów pętli histerezy, jest jednym ze sposobów ustalenia kryterium zniszczenia. Inny sposób polega na uwzględnieniu termodynamicznych własności materiału i założeniu podobieństwa między zniszczeniem spójności materiału w wyniku działania naprężenia a stopieniem.

FELTNER i MORROW [26] sformułowali hipotezę, według której miarą zniszczenia w procesie zmęczenia jest całkowita wartość energii nagromadzonej w jednostce objętości materiału. Według tej hipotezy zniszczenie nastąpi wtedy, gdy wartość tej energii osiągnie wartość energii właściwej potrzebnej dla zerwania próbki w statycznej próbie rozciągania.

$$N_z \Delta E_N = C_8, \quad (9)$$

gdzie  $\Delta E_N$  — energia właściwa nagromadzona w materiale w jednym cyklu,  $N_z$  — liczba cykli do złomu,  $C_8$  — stała równa energii właściwej nagromadzonej w materiale w statycznej próbie rozciągania. Kryterium Feltnera i Morrowa (9) zostało potwierdzone doświadczalnie przez różnych badaczy, inni jednak stwierdzili, że nie może być ono stosowane. Według hipotezy MARTINA [27] za miarę zniszczenia należy przyjąć tylko tę część energii właściwej, która jest związana z umocnieniem:

$$N_z \Delta E_{NU} = C_9 \quad (10)$$

$\Delta E_{NU}$  — część energii właściwej (związanej z umocnieniem) nagromadzonej w jednym cyklu cieplnym,  $C_9$  — stała,  $N_z$  — jak w zależności (9). Kryterium Martina (10) zostało potwierdzone doświadczalnie w warunkach zmęczenia cieplnego [3].

IVANOVA [28] za podstawę swej hipotezy przyjęła analogię między zniszczeniem spójności elementu a stopieniem materiału. Przyjęła ona również niezależność energii koniecznej do zniszczenia spójności materiału od sposobu jej dostarczenia. Kryterium zniszczenia zaproponowane przez Ivanovą ma postać

$$\overline{\Delta E}_\sigma (N_z - N_i) = C_{10}, \quad (11)$$

gdzie  $\overline{\Delta E}_\sigma$  — średnia wartość energii właściwej rozproszona w jednym cyklu przy maksymalnym naprężeniu  $\sigma$ ,  $N_i$  — liczba cykli, po której zaczynają się pojawiać submikroskopowe pęknięcia przy danym naprężeniu,  $C_{10}$  — stała równa utajonemu ciepłu topnienia,  $N_z$  — liczba cykli do złomu.

**2.3. Kryteria zniszczenia oparte na sumowaniu uszkodzeń zmęczeniowych i powstałych w wyniku pełzania.** Kryterium zniszczenia w warunkach cyklicznych zmian obciążeń lub temperatury wywołujących odkształcenia plastyczne i odkształcenia spowodowane przez pełzanie można zapisać w postaci

$$u = F(u_c, u_p). \quad (12)$$

W zależności tej  $u = 1/N_z$  — całkowite uszkodzenie materiału w jednym cyklu,  $u_c = 1/N_0$  — stopień uszkodzenia materiału w jednym cyklu pod wpływem cyklicznych zmian odkształcenia (bez uwzględnienia pełzania),  $u_p = \int_0^t (dt/t_{zp})$  — stopień uszkodzenia spowodo-

wany przez pełzanie w czasie  $\Delta t$ ,  $\Delta t$  — czas trwania jednego cyklu,  $t_{zp}$  — czas potrzebny do zniszczenia w warunkach pełzania w stałej temperaturze przy stałym obciążeniu. Postać funkcji  $F(u_c, u_p)$ , zależy od sposobu sumowania uszkodzeń. Najczęściej jest stosowana hipoteza liniowego sumowania uszkodzeń

$$D_c + D_p = 1, \quad (13)$$

gdzie:

$$D_c = \frac{N_z}{N_0}, \quad D_p = k \cdot \frac{t_z}{t_{zp}},$$

$N_z$  — liczba cykli do złomu,  $N_0$  — liczba cykli do złomu pod wpływem cyklicznych zmian odkształcenia (bez pełzania),  $t_z$  — czas do złomu,  $k$  — współczynnik kształtu cyklu (dla cyklu trójkątnego  $k = 0,3$ ), powstałe oznaczenia jak w zależności (12). Zaletą tej hipotezy jest jej prostota, jednak wielu badaczy kwestionuje jej przydatność proponując różne sposoby nieliniowego sumowania uszkodzeń. Hipotezę liniowego sumowania uszkodzeń można przyjmować w przypadku szybkich zmian obciążeń (temperatury) bez przetrzymywania w ekstremalnych parametrach cyklu (cykl piłowy). W przypadku cyklu z przetrzymywaniem pod maksymalnym obciążeniem należy stosować nieliniowe sumowanie uszkodzeń; liniowe sumowanie uszkodzeń jest możliwe również w tym ostatnim przypadku, jeśli sumowania uszkodzeń dokonuje się po odkształceniach, a nie po czasie. Taki sposób zaproponowali SZNEJDROWICZ i GUSSIENKOV podając następujące kryterium zniszczenia [29].

$$2^m \int_0^{N_z} \frac{\varepsilon_n^m(t)}{\varepsilon_z^m(t)} dN + \int_0^{\varepsilon_z} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_z(t)} = 1, \quad (14)$$

w którym  $\varepsilon_n(t)$  — zależne od czasu odkształcenie trwałe (szerokość pętli histerezy w połowie cyklu),  $\varepsilon_z(t)$  — zależne od czasu rzeczywiste odkształcenie zerwania,  $m = 1/k$ , gdzie  $k$  — wykładnik w zależności (3),  $N_z$  — liczba cykli do złomu.

**2.4. Stosowanie kryteriów zniszczenia w złożonym stanie naprężenia.** W rzeczywistych konstrukcjach w każdej nieskończonej małej objętości materiału panuje na ogół przestrzenny stan naprężenia. Próby sformułowania warunku wytrzymałości, czyli kryterium zniszczenia, w przestrzennym stanie naprężenia były podejmowane wielokrotnie. Za parametry stanu granicznego przyjmuje się niezmienniki tensora stanu naprężenia lub odkształcenia. Jako kryterium zniszczenia można przyjmować warunek Hubera — Misesa lub Treski — Guesta. Autorzy pracy [30] twierdzą, że prawidłowo sformułowane kryterium zniszczenia w przypadku przestrzennego stanu naprężenia w warunkach zmęczenia cieplnego powinno w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia dać się sprowadzić do kryterium zniszczenia Mansona-Coffina (3). W przypadku złożonego (przestrzennego) stanu naprężenia kryterium zniszczenia wyraża równanie

$$N_z = C_{11} \Delta e_i^{-k_1} \quad (15)$$

w którym  $\Delta e_i$  — zakres zmian intensywności odkształcenia plastycznego,  $k_1$ ,  $C_{11}$  — stałe,  $N_z$  — liczba cykli do złomu. Słuszność tego kryterium potwierdzono doświadczalnie.

W pracy [31] stwierdzono, że w warunkach zmęczenia cieplnego trwałość elementów znajdujących się w przestrzennym stanie naprężenia może być przewidywana na podstawie wyników badań w jednoosiowym stanie naprężenia przy uwzględnieniu warunków brzeżo-

wych, jeśli porównamy zakres zmian odkształcenia w jednoosiowym stanie naprężenia z zakresem zmian intensywności odkształcenia w złożonym stanie naprężenia

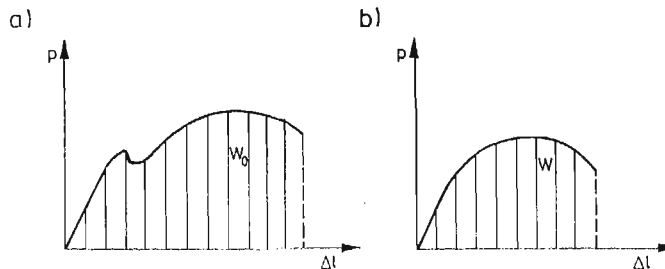
Autorzy pracy [32] stwierdzają, że w przestrzennym stanie naprężenia można stosować zmodyfikowane kryterium Martina

$$N_z^* = N_z \left( \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{a1}} \right)^{\frac{(p+1)(1+m)}{p(1-m)}}, \quad (16)$$

w którym  $N_z^*$  — liczba cykli do złomu w płaskim lub przestrzennym stanie naprężenia,  $N_z$  — liczba cykli do złomu w jednoosiowym stanie naprężenia,  $\varepsilon_a$  — amplituda odkształcenia w jednoosiowym stanie naprężenia,  $\varepsilon_{a1}$  — amplituda intensywności odkształcenia w złożonym stanie naprężenia,  $p, m$  — stałe charakteryzujące plastyczność materiału.

**2.5. Praca właściwa odkształcenia jako kryterium zniszczenia.** Przyjęcie koncepcji stałej pojemności energetycznej materiału będącej podstawą wszystkich energetycznych kryteriów zniszczenia prowadzi do wniosku, że każdy proces obciążania powodujący rozproszenie energii, musi po pewnym czasie doprowadzić do osiągnięcia przez dany materiał krytycznego stopnia uszkodzenia na skutek gromadzenia energii rozproszonej w materiale [1]. Prędkość rozwoju uszkodzenia, a więc gromadzenia energii w materiale, zależy od parametrów procesu obciążania i od stanu materiału, ale całkowita energia właściwa nagromadzona w materiale powodująca uszkodzenie podczas dowolnego procesu obciążania do chwili złomu jest wartością stałą i może być uważana za stałą materiałową [16]. Tej całkowitej energii powodującej uszkodzenie materiału nie należy utożsamiać z całkowitą energią rozproszoną w procesie obciążania (której miarą jest suma pól pętli histerezy w przypadku zmęczenia), gdyż ta ostatnia zależy od liczby cykli do złomu [26].

W pracach autora [15 - 17] zaproponowano kryterium zniszczenia. Według tego kryterium za miarę uszkodzenia można przyjąć zmiany pracy właściwej odkształcenia, czyli powierzchni pod krzywą rozciągania, uzyskanej podczas statycznego rozciągania w temperaturze pokojowej próbek poddanych uprzednio obciążeniu przez określony czas lub do określonej liczby cykli. Analiza wyników badań próbek wykonanych z różnych gatunków stali żarowytrzymałych wykazała, że praca odkształcenia  $W$  potrzebna do zerwania próbki obciążanej do określonej liczby cykli jest mniejsza niż praca odkształcenia  $W_0$  uzyskana podczas rozciągania próbek uprzednio nieobciążanych (rys. 5). Różnica ta jest spowodowana przez uszkodzenie materiału w procesie pierwotnego obciążania i jest na ogół tym większa im dłuższy był okres pierwotnego obciążania, chociaż dla materiałów cyklicznie umacnia-



Rys. 5. Wykresy rozciągania; a — próbki uprzednio nieobciążonej, b — próbki obciążanej do określonej liczby cykli



jących się spotyka się przypadki niemonotonicznych zmian pracy odkształcenia [33]. Dzieląc pracę odkształcenia przez objętość próbki uzyskuje się pracę właściwą odkształcenia (zerwania)  $W_s$ . Zakładając proporcjonalność pracy właściwej odkształcenia i energii właściwej zużytej na uszkodzenie jednostki objętości materiału można uważać, że różnica

$$W_{os} - W_s = W_{NS} \quad (17)$$

jest miarą uszkodzenia materiału, gdzie  $W_{os}$  jest pracą właściwą odkształcenia uzyskaną dla próbek uprzednio nieobciążanych. Aby umożliwić porównanie stopnia uszkodzenia różnych materiałów wprowadzono względną wartość pracy właściwej odkształcenia [1, 15]

$$\frac{W_{NS}}{W_{os}} = \frac{W_{os} - W_s}{W_{os}} = D_w, \quad (18)$$

którą nazwano uszkodzeniem.

Zniszczenie próbki nastąpi wtedy, gdy energia nagromadzona w jednostce objętości materiału osiągnie krytyczną wartość, a więc praca właściwa potrzebna do zerwania takiej zniszczonej próbki będzie równa zero. Podstawiając zatem  $W_s = 0$  do zależności (18) uzyska się

$$D_w = 1 \quad (19)$$

Równanie (19) stanowi proponowane kryterium zniszczenia. Kryterium to zostało potwierdzone doświadczalnie dla jednoosiowego i płaskiego stanu naprężenia [15, 16, 34, 35].

### 3. Metody oceny trwałości

Trwałość jest miarą wytrzymałości materiału na długotrwałe działanie obciążeń, czyli miarą zdolności materiału danego elementu konstrukcyjnego do wytrzymania określonej liczby cykli bez zniszczenia. Trwałość w warunkach zmęczenia cieplnego jest funkcją wielu czynników, takich jak

- a) temperatura maksymalna,
- b) kształt cyklu cieplnego,
- c) warunki brzegowe,
- d) skład chemiczny i struktura materiału,
- e) własności fizyczne materiału,
- f) ośrodek, w którym znajduje się dany element.

Wpływ tych czynników na trwałość omówiono w pracy [1].

Charakter procesu rozwoju uszkodzeń w warunkach zmęczenia cieplnego jest złożony i do chwili obecnej nie w pełni poznany. Brak również kryterium zniszczenia, którego przydatność byłaby jednoznacznie potwierdzona w szerokim zakresie zmian parametrów procesu obciążania. Podstawowym warunkiem prawidłowej oceny trwałości na podstawie wyników badań laboratoryjnych jest warunek podobieństwa prowadzonych badań do rzeczywistych procesów obciążania. Z tego względu są podejmowane próby opracowania różnych metod oceny trwałości, które umożliwiłyby prognozowanie trwałości elementu w warunkach zmęczenia cieplnego na podstawie wyników rutynowych badań wytrzymałościowych.

**3.1. Ocena trwałości na podstawie wyników badań zmęczenia izotermicznego.** Jednym z prostszych sposobów oceny trwałości w warunkach zmęczenia cieplnego jest ocena na podstawie zależności ustalonych dla zmęczenia izotermicznego. Trwałość określa się w takim przypadku z zależności Mansona-Coffina (3), a badania prowadzi się w średniej lub maksymalnej temperaturze cyklu. W pracy [36] są rozważane warunki w jakich wyniki uzyskane podczas izotermicznego zmęczenia mogą być stosowane do oceny trwałości w procesie zmęczenia cieplnego. Czynniki, które muszą być w tych warunkach wzięte pod uwagę są: częstość cyklicznego obciążenia, lokalne odkształcenia, koncentracja naprężeń i nakładanie się naprężeń resztkowych oraz pochodzących od obciążeń statycznych. Analizując wyniki badań autor pracy [36] dochodzi do wniosku, że liczba cykli do zniszczenia zwiększa się ze wzrostem częstości obciążania, zatem prowadząc badania przy częstościach niższych niż rzeczywiste można określić trwałość elementu z wystarczającym zapasem bezpieczeństwa. Wpływ zmian temperatury podczas cyklu jest istotny przede wszystkim dla metali o sieci heksagonalnej, zaś dla metali o sieci regularnej wytrzymałość materiału na zmęczenie cieplne powinna być bliska wytrzymałości zmęczeniowej w stałej temperaturze równej temperaturze maksymalnej cyklu. Zwiększenie średniej temperatury cyklu prowadzi do zmniejszenia trwałości elementu. Wpływ naprężeń resztkowych można pominąć, jeśli średnie odkształcenie w cyklu jest dostatecznie małe w porównaniu z odkształceniem zerwania podczas statycznego rozciągania. Wpływ naprężenia średniego można uwzględnić, jeśli w zależności Mansona zamiast wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$  podstawimy różnicę  $(R_m - \sigma_m)$ , w której  $\sigma_m$  — naprężenie średnie w cyklu [9]. Zależność Mansona przyjmie w tym przypadku postać

$$\Delta \varepsilon = \frac{3,5(R_m - \sigma_m)}{E} N_z^{-0,12} + \left( \ln \frac{1}{1 - \Psi} \right)^{0,6} N_z^{-0,6}, \quad (20)$$

gdzie  $\Delta \varepsilon$  — zakres zmian odkształcenia całkowitego,  $E$  — moduł Younga,  $\Psi$  — przewężenie względne,  $N_z$  — liczba cykli do złomu.

**3.2. Ocena trwałości na podstawie wyników uzyskanych podczas pełzania.** W przypadku, gdy udział pełzania jest dominujący stosuje się różne metody, w których przyjmuje się podobieństwo mechanizmów zniszczenia podczas zmęczenia cieplnego i podczas pełzania. Taką metodę zaproponowali TAIRA i OHNAMI w pracy [37]. Przyjęli oni, że trwałość w warunkach cyklicznie zmiennej temperatury  $T(t)$  jest taka sama jak podczas pełzania w stałej temperaturze równoważnej. Założyli również, że proces gromadzenia uszkodzeń można w obu analizowanych przypadkach opisać tym samym równaniem. Wychodząc z tych założeń wyznaczyli stałą temperaturę równoważną  $T_r$  z zależności

$$T_r = - \frac{Q}{\ln \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \exp \left[ - \frac{Q}{T(t)} \right] dt \right\}}, \quad (21)$$

w której  $Q$  — energia aktywacji,  $\Delta t$  — czas trwania cyklu,  $t$  — czas.

BOČEK [38] zaproponował metodę pozwalającą obliczyć trwałość w warunkach cyklicznych zmian temperatury  $T$  i naprężenia  $\sigma$  od czasu  $t$  na podstawie parametrów, które można wyznaczyć podczas statycznego obciążania. Trwałość wyznacza się według tej metody z zależności

$$\frac{2N_z}{b} \int_{\sigma_{min}}^{\sigma_{max}} \frac{d\sigma}{t_z[\sigma(t)]_{T=const}} + \frac{2N_z}{c} \int_{T_{min}}^{T_{max}} \frac{dT}{t_z[T(t)]_{\sigma=const}} = 1, \quad (22)$$

w której  $N_z$  — liczba cykli do złomu,  $t_z$  — trwałość

$$b = \frac{d\sigma}{dt}, \quad c = \frac{dT}{dt}.$$

W pracy [39] zaproponowano modyfikację metody Tary i Ohnami'ego. Modyfikacja polega na przyjęciu zależności energii aktywacji od temperatury i naprężenia. Autorzy przyjęli, że trwałość  $t_{zp}$  w warunkach pełzania w stałej temperaturze równoważnej  $T_r$ ,

$$t_{zp} = t_0 \exp \left[ m \frac{U_0 - B\sigma_0 T_r^n}{RT_r} \right] \quad (23)$$

jest równa trwałości  $t_{zz}$  w warunkach cyklicznych zmian temperatury  $T(t)$ .

$$t_{zz} = \frac{t_0 \Delta t}{\int_0^{\Delta t} \exp \left\{ m \frac{B\sigma_0 [T(t)]^n - U_0}{RT(t)} \right\} dt}. \quad (24)$$

W zależnościach (23) i (24)  $B$ ,  $t_0$ ,  $U_0$ ,  $m$ ,  $R$  — stałe,  $\Delta t$  — czas trwania cyklu,  $\sigma_0$  — naprężenie początkowe. Temperaturę równoważną  $T_r$  — wyznacza się z równania

$$\frac{mB\sigma_0}{R} T_r^n + T_r \ln \frac{\Delta t}{\int_0^{\Delta t} \exp \left\{ m \frac{B\sigma_0 [T(t)]^n - U_0}{RT(t)} \right\} dt} - \frac{mU_0}{R} = 0. \quad (25)$$

Trwałość wyznacza się z zależności Monkmana — Granta (6), przy czym prędkość odkształcania  $V_u$  określa się w próbie pełzania przeprowadzonej w temperaturze równoważnej  $T_r$ . Metoda ta została potwierdzona doświadczalnie na próbkach wykonanych ze stali H23N18 [39].

**3.3. Ocena trwałości na podstawie kształtu pętli histerezy.** W przypadku, gdy udział pełzania w rozwoju uszkodzeń jest porównywalny z udziałem cyklicznych zmian odkształcania oceny trwałości dokonuje się na podstawie kształtu pętli histerezy i przyjętego kryterium zniszczenia. Jeżeli przyjmie się kryterium zaproponowane przez Udouchi'ego i Wadę (4), to do oceny trwałości wystarczy określić szerokość pętli histerezy, natomiast w przypadku przyjęcia kryterium Martina (10) potrzebna jest znajomość kształtu pętli histerezy w stanie nasycenia procesu zmęczenia (stabilizacja kształtu pętli). Sposób określenia kształtu pętli histerezy oraz energii związanej z umocnieniem podano w pracach [3, 32].

W pracy [40] zaproponowano metodę oceny trwałości elementów pracujących w warunkach cyklicznych zmian temperatury, która polega na podziale zakresu zmian odkształcania trwałego w cyklu na odkształcania plastyczne i powstałe w wyniku pełzania. Trwałość wyznacza się z zależności

$$\sum_i \frac{F_i}{N_{zi}} = \frac{1}{N_z}, \quad (26)$$

w której  $F_i$  — stosunek danego rodzaju odkształcania do całkowitego odkształcania w cyklu,

$N_{zi}$  — liczba cykli do złomu w przypadku danego (jednego tylko) rodzaju odkształcenia w cyklu,  $i$  — liczba rodzajów odkształcenia,  $N_z$  — liczba cykli do złomu w warunkach cyklicznych zmian temperatury.

Do prognozowania trwałości wykorzystuje się również specjalne programy na maszyny cyfrowe. W pracy [41] podano schemat blokowy takiego programu. Za pomocą tego programu oblicza się trwałość oraz uszkodzenie. Szczególną cechą programu jest ocena trwałości według kilku kryteriów zniszczenia. Trwałość obliczoną za pomocą tego programu porównano z wynikami badań laboratoryjnych różnych materiałów i stwierdzono dużą zgodność. Podczas prognozowania trwałości na maszynach cyfrowych można stosować modele matematyczne. Modele takie mogą uwzględniać różne cechy materiału, takie jak wzmocnienie izotropowe lub efekt Bauschingera. Najczęściej stosuje się stosunkowo proste modele dwuparametrowe. Nie uwzględniają one jednak zmian temperatury i wykorzystywane są do opisu zmęczenia izotermicznego.

3.4. Zastosowanie emisji akustycznej do oceny stopnia uszkodzenia materiału i trwałości elementów. W wyniku badań autora i współpracowników opracowano dwie metody oceny stopnia uszkodzenia materiału w warunkach cyklicznych zmian temperatury wykorzystujące zjawisko emisji akustycznej [42 - 44]. Metody te umożliwiają ocenę stopnia uszkodzenia i prognozowanie trwałości na podstawie badań zmian emisji akustycznej podczas rozciągania próbek, wykonanych z elementów po określonym czasie eksploatacji [42, 43] oraz na podstawie zmian emisji akustycznej mierzonej podczas procesu obciążania [44].

Pośredni sposób oceny stopnia uszkodzenia polega na pomiarze emisji akustycznej podczas rozciągania (w temperaturze pokojowej) próbek wykonanych z elementów po różnych okresach eksploatacji i porównaniu tej emisji z emisją akustyczną uzyskaną podczas rozciągania próbek z materiału uprzednio nieobciążonego. Analiza wyników badań wykazała, że wartość względnej skumulowanej liczby impulsów  $AE/\overline{AE}_0$  zmienia się w funkcji stopnia zużycia próbki  $N/\overline{N}_z$  (rys. 6). Stwierdzono, że zmiana ta ma charakter liniowy

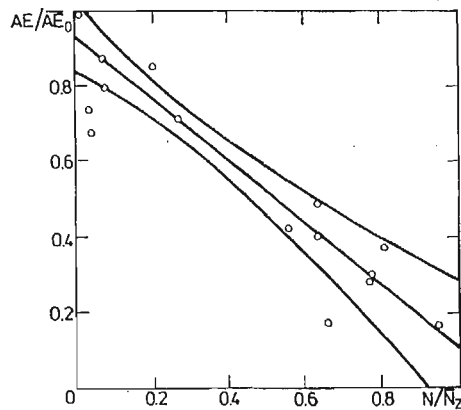
$$\frac{AE}{AE_0} = 0,92 + 0,82 \frac{N}{\overline{N}_z}, \quad (27)$$

gdzie  $AE$  — skumulowana liczba impulsów emisji akustycznej uzyskana dla próbki uprzednio obciążanej do określonej liczby cykli  $N$ ,  $\overline{AE}_0$  — średnia wartość skumulowanej liczby impulsów emisji akustycznej uzyskana dla próbek uprzednio nieobciążanych,  $\overline{N}_z$  — średnia wartość liczby cykli do złomu.

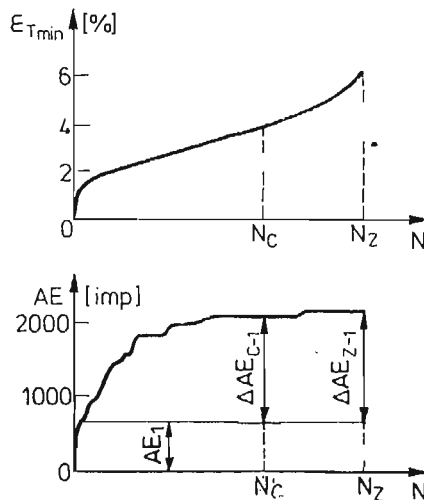
Zmiany emisji akustycznej uzyskane podczas próby rozciągania są wprost proporcjonalne do zmian pracy właściwej odkształcenia uzyskanych podczas tych badań [42] mogą być zatem przyjęte za miarę stopnia uszkodzenia materiału podczas pierwotnego obciążania (eksploatacji). Mogą być one również wykorzystane do prognozowania trwałości elementów.

Na rys. 7 pokazano zmiany odkształcenia średniego (wydłużenia) próbki i skumulowanej liczby impulsów w funkcji liczby cykli uzyskane podczas obciążania w warunkach cyklicznych zmian temperatury próbek wykonanych ze stali 15HM [44].

Porównanie skumulowanej liczby impulsów w chwili złomu z jej trwałością wykazało, że skumulowana liczba impulsów zależy również od indywidualnych cech danej próbki,



Rys. 6. Zależność względnych zmian emisji akustycznej  $\frac{AE}{AE_0}$  od stopnia zużycia próbki  $\frac{N}{N_z}$  (stal 15 HM), wraz z 95% przedziałem ufności [42]



Rys. 7. Zmiany odkształcenia średniego próbki  $\epsilon_{Tmin}$  i skumulowanej liczby impulsów emisji akustycznej AE w funkcji liczby cykli  $N$ , stal 15 HM, 473 → 853 K;  $\sigma = 255$  MPa

co znacznie zwiększa rozproszenie wyników. Jeśli jednak pominiemy emisję akustyczną w pierwszym cyklu, a za zniszczenie przyjmiemy wejście próbki w stan przyspieszonego odkształcania po osiągnięciu  $N_c$  cykli, to taka zredukowana wartość skumulowanej liczby impulsów  $\Delta AE_{c-1}$  zmienia się liniowo ze zmianą liczby cykli  $N_c$  dla badanej stali

$$AE_{c-1} = 660 + 5N_c \quad (28)$$

Prawdopodobieństwo istnienia tej korelacji wynosi 0,999, a więc zależność (28) może być wykorzystana do oceny trwałości.

## Literatura

1. ŻUCHOWSKI R., *Zmęczenie cieplne metali i elementów konstrukcji*, Prace Naukowe Inst. Mater. i Mech. Tech. Pol. Wr., Nr 43, Monografie Nr 15, Wrocław 1981.
2. SPERA D. A., *What is thermal fatigue? Thermal Fatigue of Materials and Components*, ASTM STP 612, 1976, s. 3 - 9.
3. ПИСАРЕНКО Г. С., МОЖАРОВСКИЙ Н. С., АНТИПОВ Е. А., *Сопротивление жаропрочных материалов нестационарным силовым и температурным воздействиям*, Наукова Думка, Киев 1974.
4. ŻUCHOWSKI R., *Zagadnienia zmęczenia cieplnego*. VII Krajowa Konferencja Wytrzymałości i Badania Materiałów, Sekcja I, Gdańsk 1977 s. 1 - 19.
5. ŻUCHOWSKI R., *O badaniach zmęczenia cieplnego metali*. Zesz. Nauk. Pol. Śl., Hutnictwo, 1979 nr 609, seria: Hutnictwo, zesz. 19 s. 317 - 329.
6. WEROŃSKI A., *Zmęczenie cieplne metali*, WNT, Warszawa 1983.
7. GOCHFELD D. A., *Teoria przystosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych i jej niektóre zastosowania*, Termoplastyczność, Ossolineum 1975, s. 283 - 348.
8. KÖNIG J. A., *Zagadnienia dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych*, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1965.
9. ДУЛЬБЕВ П. А., КОТОВ П. Я., *Термическая исталость металлов*, Машиностроение, Москва 1980.
10. DAWSON R. A. T., ELDER W. J., HILL G. J., PRICE A. T., *High-strain Fatigue of Austenitic Steels*. Int. Conf. on Termal and High-strain Fatigue, London 1967, The Institute of Metals s. 239.
11. ŻMIHORSKI E., ŻÓŁCIAK T., *Wytrzymałość stali stopówowych na zmęczenie cieplne*. Metaloznawstwo i Obróbka Ciepła, 1973, 3, s. 2 - 8.
12. ŻMIHORSKI E., KOWALSKI W., ŻÓŁCIAK T., *Własności stali narzędziowych do pracy na gorąco i wytyczne ich do obróbki cieplnej*, Metaloznawstwo i Obróbka Ciepła, 1975, 14 s. 36 - 40.
13. WEROŃSKI A., *Zmęczenie cieplne metali.*, Przegląd Mechaniczny 1975, 17 - 18, s. 520 - 527.
14. ДАВИДЕКОВ Н. Н., ЛИХАЧЕВ В. А., *Необратимое формоизменение металлов при циклическом тепловом воздействии*, Машгиз, Москва 1962.
15. ŻUCHOWSKI R., *Specific Strain Work as a Measure of Material Damage.*, Trans. 7th Inter. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Chicago 1983, North-Holland, Amsterdam 1983, v. L., s. 39 - 46, L1/6.
16. ŻUCHOWSKI R., *Specific Strain Work as a Failure Criterion*, 24 Polish Solid Body Conference, Jachranka 1983, IPPT PAN, Abstracts, s. 253 - 254.
17. ŻUCHOWSKI R., *Ocena stopnia uszkodzenia materialu na podstawie zmian własności fizycznych.*, Dozór Techniczny 18, 1984, 3, s. 97 - 101.
18. ФЕДОРОВ В. В., *Термодинамические аспекты прочности и разрушения твёрдых тел*. ФАН., Ташкент 1979.
19. MANSON S. S., *Behaviour of materials under conditions of thermal stress*, NACA TN — 2933, 1953.
20. COFFIN L. F., *A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metals*, Trans. ASME, 76, August 1954, 6 s. 931 - 949.
21. UDOUCHI T., WADA T., *Thermal Effect on Low-cycle Fatigue Strength of Steel*, Thermal Stress and Thermal Fatigue. Proc. Inter. Conf. Gloucestershire, England 1969, Butterworth 1971 s. 109 - 123.
22. HOFF N. J., *The Necking and the Rupture of Rods Subjected to Constant Tensile Loads.*, Trans. ASME, E. J. Appl. Mech., 1953, 1 s. 105 - 108.
23. MONKMAN F. C., GRANT N. J., *An Empirical Relationship Between Rupture Life and Minimum Creep Rate in Creep-rupture Tests, Deformation and Fracture at Elevated Temperatures*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1965, s. 91 - 103.
24. BUBA N., *Doświadczalna weryfikacja kryteriów zniszczenia w procesie zmęczenia cieplnego metali*. Rozprawa doktorska. Raport IMiMT PWr 1983, seria: Preprinty nr 8.
25. DOBEŠ F., MILIČKA K., *The Relation Between Minimum Creep Rate and Time to Fracture*. Metal Science 10, 1976, 11 s. 382 - 384.
26. FELTNER C. E., MORROW J. D., *Microplastic Strain Hysteresis Energy as a Criterion for Fatigue Failure*. Trans. ASME, Journal of Basic Engineering 83, D, 1961, 1 s. 15 - 22.

27. MARTIN D. E., *An Energy Criterion for Low-cycle Fatigue*, Trans. ASME, Journal of Basic Engineering 83, D, 1961, December. s. 563 - 571.
28. ІВАНОВА В. С., и др., *Роль дислокаций в упрочнении и разрушении металлов*, Москва 1965.
29. ШНЕЙДРОВИЦ Р. М., ГУССЕНКОВ А. П., *Деформационно-кинетические критерии длительной прочности, Исследования малоциклового прочностии при высоких температурах*, Наука, Москва 1975, с. 39 - 61.
30. КОСТЮК А. Г., ТРУХНИЙ А. Д., МИЧУЛИН В. Я., *Критерий прочности материалов при малоциклового исталостии при сложном напряженном состоянии*, Машиноведение 1974, 5, с. 62 - 67.
31. TAIRA S., INOUE T., *Thermal Fatigue under Multiaxial Thermal Stress*, Thermal Stress and Thermal Fatigue, Proc. Inter. Conf. Gloucestershire, England 1969, Butterworth 1971 s. 66 - 80.
32. ПИСАРЕНКО Г. С., МОЖАРОВСКИЙ Н. С., *О разрушении жаропрочных сплавов при термоциклических нагрузках*. Порошковая Металлургия, 1966, 2 с. 69 - 86.
33. ВУКОВСКИ Р. J., *Wplyw czasu eksploatacji na własności stali 15HM*, Przegląd Mechaniczny, 30, 1971 5 s. 141 - 144.
34. ŻUCHOWSKI R., KORUSIEWICZ L., *Experimental Verification of Failure Criterion Based on Specific Strain Work*. Rozprawy Inżynierskie 32, 1984, 4 s. 537 - 544.
35. ŻUCHOWSKI R., ZIĘTKOWSKI L., *Strain Work as a Failure Criterion in Plane Stress State*. Trans. 8th Inter. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Brussels, 1985, North-Holland-1985 vol. L, paper L4/2, s. 167 - 172.
36. FORREST P. G., *The use of Strain Cycle Tests For Assessing Thermal Fatigue*. Appl. Mater. Res. 1965, 4, October, s. 239 - 246.
37. TAIRA S., OHMAMI M., *Accelerated Stage Creep and Creep Rupture under Temperature Cycling*. Bull JSME, 1962, 5, s. 10 - 15.
38. ВОЇЕК М., *Lifetime and Failure Strain Prediction for Material Subjected to Non-stationary Tensile Loading Conditions; Application to Zircaloy 4*, 5th Conference ASTM 754, 1982. s. 239 - 349.
39. ŻUCHOWSKI R., BUBA N., *Assessment of Durability Under Conditions of Thermal Cycling on the Basis of the Results Obtained in Creep*. Res Mechanica, 5, 1982, 4 s. 317 - 322.
40. HALFORD G. R., MANSON S. S., *Life Prediction of Thermal-fatigue Using Strain Range Partitioning*, Thermal Fatigue of Materials and Components, ASTM STP 612, 1976, s. 239 - 254.
41. SPERA D. A., COX E. C., *Description of a Computerized Method for Predicting Thermal Life of Metals*. Thermal Fatigue of Materials and Components, ASTM STP 612, 1976, s. 69 - 85.
42. ŻUCHOWSKI R., KORUSIEWICZ L., *Acoustic Emission as a Measure of Material Damage Under Thermal-Cycling*. Journal of Acoustic Emission 2, 1983, 4 s. 272 - 274.
43. ŻUCHOWSKI R., KORUSIEWICZ L., PSZONKAA., *Acoustic Emission Application to the Evaluation of Material Damage Degree Under Thermal Cycling*, 8th Congress on Material Testing, Budapest 1982, Lectures, vol. 3 s. 1185 - 1189.
44. ŻUCHOWSKI R., KORUSIEWICZ L., *Application of Acoustic Emission to the Assessment of Damage in Steel in Thermal Cycling Conditions*. Res Mechanica, 6, 1983, 3 s. 161 - 166.

## Резюме

## ПРОБЛЕМЫ ТЕРМОЦИКЛИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ

В работе представлены важнейшие проблемы термоциклирования металлов. Обсуждено протекание явления в феноменологическом и физическом аспектах и приведены различные критерии разрушения элементов, работающих в циклических условиях изменений нагрузок и температуры, а также во время изотермической ползучести. Обсуждена пригодность этих критериев в условиях термоциклирования, а также приведён критерий, предложенный автором, в котором используются изменения удельной работы для оценки степени повреждения материала. Обсуждены различные методы оценки долговечности и степени повреждения материала, в том числе также методы, предложенные автором, использующие результаты испытаний ползучести, а также измерения акустической эмиссии.

## S u m m a r y

## PROBLEMS OF THERMAL FATIGUE OF METALS

The main problems of thermal fatigue of metals are presented in the paper. Physical and phenomenological aspects of the phenomenon are discussed as well as the different failure criteria of structural components operating under thermal and mechanical fatigue and isothermal creep conditions. Validity and application conditions of these criteria are also discussed as well as the failure criterion proposed by the author. The failure criterion is based on specific strain work. The paper also provided information on the methods for assessment of both the durability and the damage of structural components including the methods proposed by the author based on creep test results as well as acoustic emission measurement.

*Praca wpłynęła do redakcji dnia 20 września 1985 roku.*

---



## METODA AUTOMATYCZNEGO UKŁADANIA RÓWNAŃ RÓWNOWAGI W OBLICZENIACH STATYCZNYCH ORTOTROPOWYCH, LINIOWO-SPRĘŻYS- TYCH, CIENKOŚCIENNYCH PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH O DOWOLNYM PRZEKROJU WIELOOBWODOWYM

ZENON GÓRECKI

*Institut Okrętowy Politechniki Gdańskiej*

### 1. Uwagi wstępne

W pracach [1], [2], [4] przedstawiono metodę obliczania naprężeń i przemieszczeń dla prętów pryzmatycznych cienkościennych o przekroju zamkniętym. Podano założenia półbezmomentowej teorii powłok i półbezmomentowej teorii ramowo-powłokowej opracowanych na podstawie podanej przez W. Z. Własowa ogólnej teorii prętów cienkościennych [3]. Rozważania prowadzono w obliczeniach statycznych kadłubów statków bezgrozdziowych.

W celu zautomatyzowania obliczeń opracowano metodę konstruowania macierzy współczynników układu różniczkowych równań równowagi. Podstawę metody stanowi uogólnienie wzoru Własowa na obliczanie liczby stopni swobody w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pręta oraz sposób konstruowania funkcji kształtu  $\psi$  dla przemieszczeń stycznych. Całość postępowania przystosowano w programie na maszynę cyfrową do generowania macierzy współczynników układu, w których interpretacja niewiadomych nie jest w trakcie pracy maszyny znana.

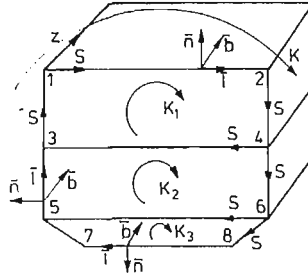
W celu wykonania obliczeń wystarczy podać następujące informacje dotyczące analizowanej konstrukcji:

- liczbę węzłów w przekroju poprzecznym pręta
- tablicę połączeń węzłów między sobą
- współrzędne węzłów w dowolnym kartezjańskim układzie współrzędnych
- charakterystyki geometryczne i materiałowe elementów międzywęzłowych (grubości odcinków, moduły Younga, Kirchhoffa oraz liczby Poissona)
- obciążenie zewnętrzne elementów pręta oraz rodzaj warunków granicznych.

### 2. Całkowita energia mechaniczna układu Macierzowa postać równań równowagi

Rozpatrujemy pręt pryzmatyczny cienkościenny posiadający w przekroju poprzecznym skończoną liczbę zamkniętych konturów (rys. 1).

Na każdym konturze zamkniętym  $K_i$  przekroju wprowadzamy współrzędną krzywoliniową  $s$  mierzoną po długości konturu. W każdym punkcie konturu  $K_i$  wprowadzamy układ trzech wersorów  $\bar{l}_i, \bar{n}_i, \bar{b}_i$ , lewoskrętny, taki że  $\bar{l}_i$  — wersor zgodny z kierunkiem wzrostu współrzędnej  $s$ ,  $\bar{n}_i$  — wersor normalnej zewnętrznej do konturu,  $\bar{b}_i$  — prostopadły do dwóch pozostałych i skierowany zgodnie ze skrętnością osi  $z$  (rys. 1).



Rys. 1.

Przemieszczenia powłoki zadajemy w postaci wektora przemieszczenia  $\bar{R}(z, s)$  funkcji dwóch zmiennych  $z, s$

gdzie:  $z$  — współrzędna wzdłuż belki

$s$  — współrzędna w kierunku obwodowym

i rozkładamy w bazie lokalnej  $\bar{l}, \bar{n}, \bar{b}$  (rys. 1)

$$\bar{R}(z, s) = u(z, s) \cdot \bar{b} + v(z, s) \cdot \bar{l} + w(z, s) \cdot \bar{n}. \quad (2.1)$$

Na przemieszczenia nakładamy więzy powodujące, że współrzędne wektora przemieszczenia można wyrazić w formie sum iloczynów dwóch funkcji o zmiennych rozdzielonych,

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^n U_i(z) \varphi_i(s) \quad (2.2.1)$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^m V_k(z) \psi_k(s) \quad (2.2.2)$$

$$w(z, s) = \sum_{j=1}^l W_j(z) \chi_j(s) \quad (2.2.3)$$

w których funkcje zmiennej  $z$ :  $U_i(z), V_k(z), W_j(z)$  są funkcjami poszukiwanymi, zaś funkcje współrzędnej  $s$ :  $\varphi_i(s), \psi_k(s), \chi_j(s)$  stanowią bazy, w których rozłożone są przemieszczenia  $\bar{R}(z, s)$ .

Przyjmując materiał sprężysty ortotropowy o osiach ortotropii  $\bar{b}, \bar{l}, \bar{n}$  i uwzględniając założenia półbezmomentowej teorii powłok [1] otrzymujemy wyrażenie na całkowitą energię sprężystą odkształcenia

$$\begin{aligned} \pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \oint_K \left\{ \check{E}_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \check{E}_2 \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \right. \right. \\ \left. \left. + \check{G} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{M^2}{D} \right\} ds \right] dz \quad (2.3) \end{aligned}$$

gdzie:

$$M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad D = \frac{E_2 \delta^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})};$$

$$\check{G} = G\delta; \quad \check{E}_i = \frac{E_i \delta}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad i = 1, 2$$

$E_1, E_2$  — moduły Younga

$\nu_{12}, \nu_{21}$  — stałe Poissona

$G$  — moduł ścinania (Kirchhoffa)

$\delta$  — grubość powłoki (stała na odcinku między węzłami)

$K$  — zamknięty kontur

$L$  — długość powłoki.

Obciążenia powłoki zadajemy w postaci wektora  $\bar{p}(z, s)$  funkcji dwóch zmiennych  $z, s$  i również rozkładamy w bazie  $\bar{n}, \bar{l}, \bar{b}$

$$\bar{p}(z, s) = p_n(z, s) \cdot \bar{n} + p_s(z, s) \cdot \bar{l} + p_b(z, s) \cdot \bar{b}. \quad (2.4)$$

Pracę sił zewnętrznych zapisujemy w postaci:

$$A = \int_0^L \left[ \oint_K \bar{p}(z, s) \cdot \bar{R}(z, s) ds \right] dz = \int_0^L \left[ \oint_K (u \cdot p_b + v \cdot p_s + w \cdot p_n) ds \right] dz. \quad (2.5)$$

Wykorzystujemy dalej założenia teorii ramowo-powłokowej [1] w której hipotezy deformacji wystarczy narzucić na funkcje  $u(z, s), v(z, s)$  a mianowicie:

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^n U_i(z) \cdot \Phi_i(s) \quad (2.6.1)$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^m V_k(z) \cdot \Psi_k(s) \quad (2.6.2)$$

a funkcje  $w(z, s) = \sum_{j=1}^l W_j(z) X_j(s)$  nie są potrzebne do pełnego opisu przemieszczeń ponieważ są jednoznacznie określone przez funkcje  $v(z, s)$  [1].

Z warunku ekstremum funkcjonału całkowitej energii mechanicznej po wykorzystaniu (2.6) i wprowadzeniu zapisu macierzowego otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi}] \\ [M_{\varphi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}'' + \begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi'}] - [M_{\varphi\psi'}] \\ [M_{\varphi\psi'}] - [M_{\psi\psi'}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}' +$$

$$- \begin{bmatrix} [M_{\varphi'\varphi'}] \\ [M_{\psi'\psi'}] + [M_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

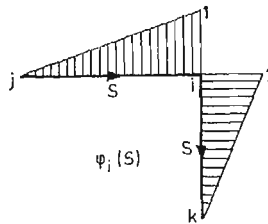
Szczegóły obliczeń macierzy współczynników podano w [1].

### 3. Metoda układania równań równowagi dla pręta pryzmatycznego o przekroju dowolnym wielobwodowym

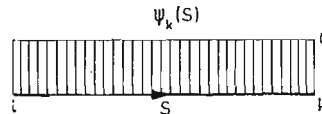
**3.1. Opis metody.** Równania równowagi (2.7) są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu. Ich liczbę określamy na podstawie niewiadomych przemieszczeń binormalnych i stycznych do konturu w oparciu o przyjętą hipotezę deformacji (2.6). Liczba niewiadomych odpowiada liczbie funkcji kształtu  $\varphi$  i  $\psi$ . Jeżeli przez  $n$  oznaczymy liczbę funkcji  $\varphi$  a przez  $k$  liczbę funkcji  $\psi$  to rząd układu równań różniczkowych jest

$$R = 2 \cdot (n+k). \quad (3.1)$$

Do rozważań wybieramy funkcje kształtu  $\varphi$  i  $\psi$  pierwszego rodzaju [1] jak na rys. 2 i 3.



Rys. 2.



Rys. 3.

Funkcję  $\varphi_i(s)$  określają przemieszczenia prostopadłe do konturu — muszą być zatem ciągłe na całym konturze  $K$ . Są one skonstruowane tak, że w wybranych węzłach mają wartość 1 (jeden) i zmieniają się liniowo do zera w węzłach najbliższych.

Funkcje  $\psi_k(s)$  określają przemieszczenia styczne do konturu. Muszą być zatem ciągłe na każdym odcinku prostym między węzłami. Wybrane funkcje  $\psi_k(s)$  nie uwzględniają wpływu sił osiowych w przecię są zatem stałe na odcinku międzywęzłowym.

Liczba funkcji  $\varphi_i$  odpowiada liczbie stopni swobody w kierunku binormalnym (równa liczbie węzłów w ramie będącej przekrojem poprzecznym pręta cienkościennego). Podobnie liczba funkcji  $\psi$  odpowiada liczbie stopni swobody w płaszczyźnie przekroju pręta.

W dowolnym przekroju wielobwodowym istnieją ograniczenia kinematyczne zmniejszające liczbę stopni swobody i wprowadzają ograniczenia na dobór funkcji  $\psi$ . Określenie liczby stopni swobody w płaszczyźnie przekroju pręta i dobór funkcji  $\psi$  wymagają szerszego omówienia.

**3.2. Określanie liczby stopni swobody w płaszczyźnie przekroju pręta:** Liczba stopni swobody w elemencie płaskiego wyraża się wzorem [3]

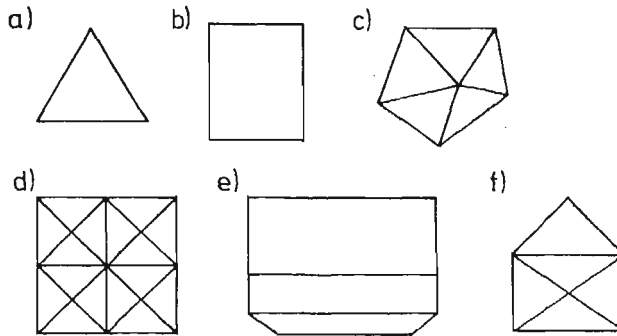
$$w = 2n - c \quad (3.2)$$

gdzie:

- $w$  — liczba stopni swobody w płaszczyźnie przekroju pręta
- $n$  — liczba węzłów
- $c$  — liczba odcinków łączących węzły.

W przypadku przekroju dowolnego składającego się z wielokątów dowolnego kształtu wzór ten jest słuszny (rys. 4c, d, t).

Poniżej przedstawimy wyprowadzenie wzoru pozwalającego określać liczbę stopni swobody dla dowolnego przekroju wieloobwodowego. Kształt profilu określamy przez podanie liczby węzłów i ich współrzędnych w dowolnym układzie kartezjańskim oraz przez podanie tablicy połączeń międzywęzłowych (np. rys. 1, tab. 1). Wprowadzamy połączenia fikcyjne między węzłami takie aby cały profil składał się tylko z trójkątów (liczba węzłów nie może ulec zmianie). Taka figura może w płaszczyźnie przemieszczać się tylko jako ciało sztywne i posiada trzy stopnie swobody.



Rys. 4.

Tablica 1.

Współrzędna X	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
Współrzędna Y	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8
Nr węzła	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	0	1	1	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	0	0	0	1	1	0

Jeżeli  $w < 3$  (rys. 4d — może być nawet liczbą ujemną), oznacza to, że pewne połączenia międzywęzłowe mogłyby nie istnieć, a profil byłby nadal ciałem sztywnym. Stąd wnioskujemy, że pewne połączenia są „przesztywniające”. Liczbę tych połączeń można określić z zależności

$$z = 3 - w \quad (3.3)$$

gdzie:

$z$  — liczba „przesztywnień”.

Przyjmujemy, że liczba „przesztywnień”  $z$  składa się z sumy

$$z = z_1 + z_2. \quad (3.4)$$

Liczby  $z_1$  i  $z_2$  określamy następująco. Załóżmy, że jakiś fragment profilu bez połączeń fikcyjnych składa się z pewnej figury geometrycznej, która zbudowana jest z trójkątów. Gdyby tę figurę rozpatrywać oddzielnie miałyby „przesztywnienia”.

Takich fragmentów może być więcej a suma wszystkich „przesztywnień” daje nam liczbę  $z_1$ . Oczywiście jeżeli „przesztywnień” we fragmencie profilu nie ma to  $z_1 = 0$ . Gdy teraz wprowadzimy  $r$  połączeń fikcyjnych i określimy liczbę  $z$  według wzoru (3.4) to jest możliwe, że  $z_1 \neq z_2$ . Oznacza to, że pewne połączenia fikcyjne dają „przesztywnienia”. Liczbę połączeń fikcyjnych, które dają „przesztywnienia” określamy przez  $z_2$ .

Wprowadzając pewną liczbę połączeń fikcyjnych (więzów dodatkowych) ograniczamy liczbę stopni swobody. Mając na uwadze, że połączenia fikcyjne dawać mogą „przesztywnienia” to liczba więzów ograniczających liczbę stopni swobody jest:

$$r_1 = r - z_2. \quad (3.5)$$

Rzeczywistą liczbę stopni swobody  $k$  określamy następująco:

$$k = w + z + r_1. \quad (3.6)$$

Wykorzystując (3.4) i (3.5) i wstawiając do (3.6) otrzymujemy

$$k = w + z_1 + z_2 + r - z_2 \quad (3.7)$$

stąd:

$$k = w + z_1 + r. \quad (3.8)$$

Wzór (3.2) można więc zapisać w postaci

$$w = 2n - c_1 = 2n - (p + r). \quad (3.9)$$

Jest to „poprawiony” wzór Własowa uwzględniający przesztywnienia. Poszczególne litery oznaczają:

$c_1$  — łączna liczba połączeń międzywęzłowych rzeczywistych i fikcyjnych

$p$  — liczba rzeczywistych połączeń międzywęzłowych

$r$  — liczba fikcyjnych połączeń międzywęzłowych

Jeżeli (3.9) wstawimy do (3.8) otrzymujemy.

$$k = w + z_1 + r = 2n - (p + r) + z_1 + r, \quad (3.10)$$

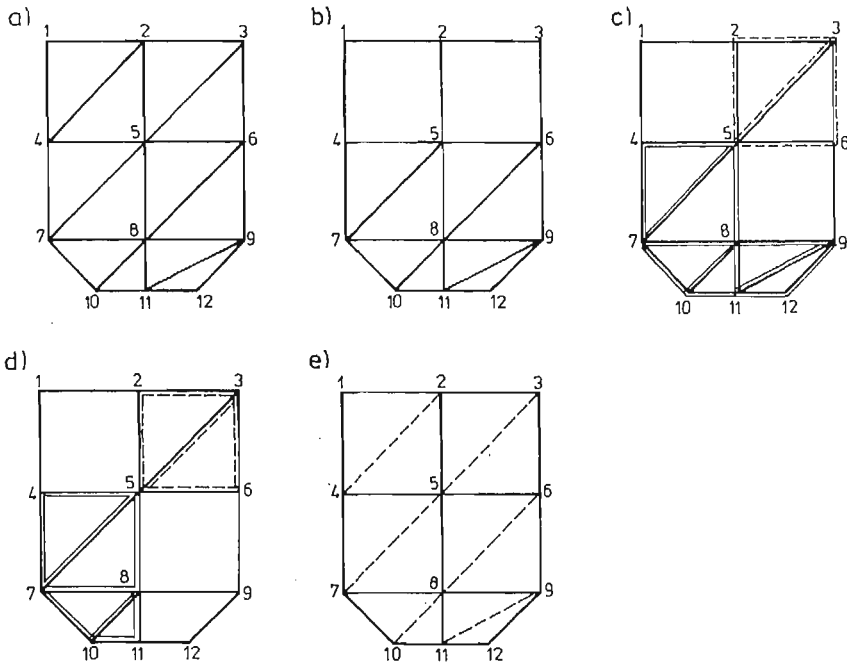
stąd:

$$k = 2n - p + z_1. \quad (3.11)$$

Ostatnia zależność oznacza, że w celu określenia liczby stopni swobody profilu w płaszczyźnie przekroju należy obliczyć liczbę „przesztywnień”  $z_1$ . Pozostałe wielkości  $n$  i  $p$  są dane.

Mając dane  $n$  i obliczone  $k$  określamy liczbę niewiadomych funkcji  $U_j, V_l$  ( $j = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, k$ ) a tym samym liczbę równań różniczkowych równowagi.

**Przykład.** Przekrój na rys. 5a składa się z samych trójkątów. Korzystając z wzoru (3.2) otrzymujemy  $w = 1$ . Jako ciało sztywne przekrój ten ma 3 stopnie swobody stąd liczba „przesztywnień”  $z_1 = 2$ . Przekrój na rys. 5b zawiera część 4-5-6-7-8-9-10-11-12 składającą się z trójkątów. Rozpatrując tę część oddzielnie otrzymujemy z wzoru (3.2)  $w = 2$  ( $n = 9, c = 16$ ). Stąd wynika, że posiada „przesztywnienia”  $z_1 = 1$ . Rozpatrując cały profil otrzymujemy z wzoru (3.11)  $k = 4$  ( $n = 12, p = 21, z_1 = 1$ ).



Rys. 5.

Przekrój na rys. 5c zawiera dwie części składające się z trójkątów. Część pierwsza (linia ciągła i przerywana) 2-3-5-6, dla której  $z_1^{\text{II}} = 0$  oraz część drugą (linia ciągła podwójna) 4-5-7-8-10-11-12 dla której  $z_1^{\text{II}} = 0$ . Korzystając z wzoru (3.11) otrzymujemy liczbę stopni swobody  $k = 3$  ( $n = 12$ ,  $p = 21$ ,  $z_1 = 0$ ). Podobnie obliczamy liczbę stopni swobody dla profilu na rys. 5d ( $k = 4$ ).

Przekrój na rys. 5e nie zawiera części składającej się z trójkątów, a zatem nie ma „przesztynień” (linią przerywaną zaznaczono połączenia fikcyjne). W tym przypadku  $k = 7$  ( $n = 12$ ,  $p = 17$ ,  $z_1 = 0$ ).

### 3.3. Wybór i budowanie funkcji kształtu. Rozpatrujemy dwa przypadki:

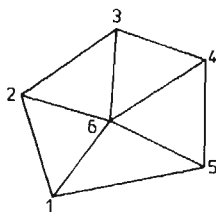
1. Przekrój pręta jest sztywny
2. Przekrój pręta nie jest sztywny.

**3.3.1. Przekrój pręta jest ciałem sztywnym.** Przekrój pręta będący ciałem sztywnym posiada trzy stopnie swobody. W tym przypadku funkcje  $\psi$  określamy następująco:

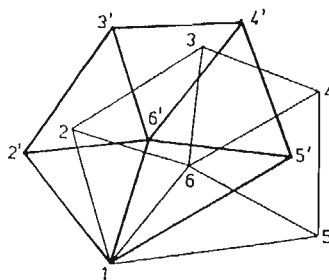
- a) wybieramy jeden trójkąt (dowolny) wchodzący w skład figury wyznaczającej przekrój poprzeczny pręta cienkościennego (zawsze istnieje co najmniej jeden trójkąt w przypadku ciała sztywnego)
- b) przyjmujemy jeden z wierzchołków jako chwilowy środek obrotu
- c) zakładamy obrót trójkąta o kąt  $\alpha = 1$  i określamy przemieszczenia na boku przeciwnym do chwilowego środka obrotu, przemieszczenia styczne tego boku traktujemy jako zadane
- d) określamy wszystkie istniejące przemieszczenia styczne na pozostałych elementach konturu od zadanego przemieszczenia.

W ten sposób otrzymujemy pierwszą z funkcji  $\psi$ . Pozostałe funkcje określamy w ten sam sposób przyjmując za chwilowe środki obrotu kolejne wierzchołki trójkąta.

Poniżej przedstawimy przykład budowania funkcji  $\psi$  dla przekroju sztywnego. Rozważamy przekrój sztywny jak na rys. 6. Węzły ponumerujemy w sposób dowolny. Wybieramy jeden trójkąt np. 1-2-6. Za chwilowy środek obrotu przyjmujemy węzeł 1 i obracamy o kąt  $\alpha_1 = 1$ . Przekrój przemieści się jak na rys. 7. Przed przystąpieniem do określania funkcji  $\psi_1$

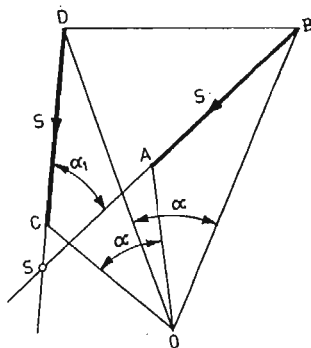


Rys. 6.



Rys. 7.

na poszczególnych prętach posłużmy się następującym rozumowaniem. Wybieramy odcinek  $AB$  (rys. 8) i dokonujemy jego obrotu względem chwilowego środka obrotu  $O$ . Punkty  $A$  i  $B$  po obrocie przyjmują położenie  $C$  i  $D$ . Przeprowadzamy proste przez  $A$  i  $B$  oraz przez  $C$  i  $D$ .  $S$  jest punktem przecięcia się tych prostych. Można wykazać, że kąt  $\alpha_1$  (kąt przecięcia się prostych  $ABS$  i  $CDS$ ) jest równy kątowi  $\alpha$  (co łatwo można sprawdzić prostym rachunkiem).



Rys. 8.

Jak wynika z rys. 8 przemieszczenie styczne odcinka  $AB$  na kierunku  $AB$  (kierunek współrzędnej  $s$ ) jest równe

$$\Delta_{AB} = SA - SC \quad (3.12)$$

lub

$$\Delta_{AB} = SB - SD. \quad (3.13)$$

Określone relacjami (3.12) lub (3.13) przemieszczenie styczne jest po prostu funkcją  $\psi$  dla odcinka  $AB$ .

Postępując w podany wyżej sposób potrafimy określić przemieszczenia styczne dla każ-



dego pręta przy zadanym przemieszczeniu innego pręta (rys. 7), a tym samym funkcję  $\psi_1$ . Funkcje  $\psi_2$  i  $\psi_3$  określamy analogicznie.

**3.3.2. Przekrój pręta nie jest ciałem sztywnym.** Przekrój pręta nie będący ciałem sztywnym posiada więcej niż trzy stopnie swobody. W celu określenia funkcji  $\psi$  postępujemy następująco:

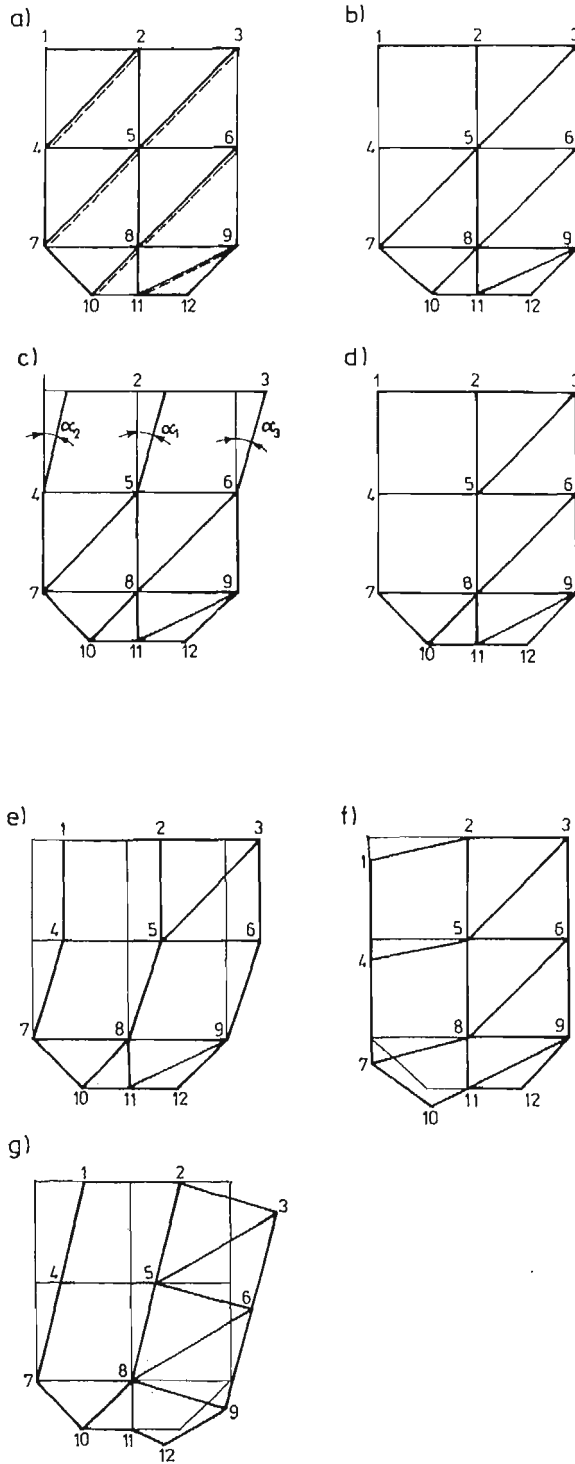
- wprowadzamy połączenia fikcyjne między węzłami w takiej liczbie aby cały przekrój składał się z samych trójkątów (liczba węzłów nie może ulec zmianie — pręty fikcyjne nie mogą się krzyżować).
- Przekrój złożony z samych trójkątów jest ciałem sztywnym więc możemy określić trzy funkcje  $\psi$  dla takiego profilu w sposób podany w p. 3.3.1 pracy. Oczywiście przemieszczenia będą rejestrowane tylko dla połączeń rzeczywistych bez względu na to czy wybrany trójkąt, którego wierzchołki są chwilowymi środkami na boki utworzone z połączeń fikcyjnych czy rzeczywistych.
- Pozostałe funkcje w ilości  $(k-3)$  określamy z warunku wystąpienia możliwości deformacji przekroju.

Przy określaniu  $k-3$  funkcji  $\psi$  postępujemy w sposób opisany niżej. W tym celu wybieramy dowolny pręt fikcyjny, usuwamy go i sprawdzamy czy taki przekrój jest nadal ciałem sztywnym (tzn. czy jest to pręt „przesztywniający” czy nie). Jeżeli przekrój będzie pozostawał ciałem sztywnym usuwamy kolejny pręt fikcyjny i postępujemy jak poprzednio (proces powtarzamy dotąd dopóki przekrój pozostaje ciałem sztywnym). W przypadku kiedy przekrój już nie jest ciałem sztywnym otrzymujemy czworokąt (przynajmniej jeden), który na pewno może się deformować.

Wybieramy dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta i zakładamy, że się nie przemieszczą. W związku z tym możemy określić przemieszczenia dla części przyległej do odcinka łączącego te wierzchołki — są równe zero. Pozostałe dwa wierzchołki czworokąta przemieszczają się. Wybieramy pręt łączący wierzchołek nieruchomy z ruchomym i przyjmujemy, że obróci się o kąt  $\alpha = 1$ . Z relacji geometrycznych określamy kąt o jaki obróci się pręt łączący pozostałe dwa wierzchołki (ruchomy i nieruchomy) oraz określamy przemieszczenia styczne pręta łączącego wierzchołki ruchome. W następnym kroku określamy przemieszczenia elementów przyległych do obracanych boków i boku przesuwanego.

Zilustrujemy sposób postępowania rysunkiem 9. Na rys. 9a przedstawiono profil rzeczywisty z wprowadzonymi połączeniami fikcyjnymi (linia przerywana) o 7 stopniach swobody. Na rys. 9b przedstawiono profil po usunięciu jednego połączenia fikcyjnego. Jeżeli teraz wszystkie połączenia fikcyjne potraktujemy jako rzeczywiste to profil ten jest nadal sztywny (wynika to z relacji (3.2) i (3.9)). Dopiero usunięcie połączenia 5-3 rys. 9c powoduje możliwość wystąpienia deformacji w płaszczyźnie przekroju (linia pogrubiona).

Założyliśmy, że wierzchołki 5 i 6 są nieruchome, stąd część 4-5-6-7-8-9-10-11-12 profilu nie przemieszcza się. Pręt 2-5 obróci się o kąt  $\alpha_1$ , spowoduje to obrót pręta 1-4 o kąt  $\alpha_2$  (na ogół  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ) i wywoła na 1-2 przemieszczenie. Pręt 3-6 obróci się o kąt  $\alpha_3$  ( $\alpha_1 \neq \alpha_3$ ) jeżeli 2-3 nie jest równoległe do 5-6) i wywoła przemieszczenie na 2-3. W ten sposób określamy funkcję  $\psi_4$ . Kolejne funkcje  $\psi$  określamy następująco. Wstawiamy ponownie połączenie fikcyjne ostatnio usunięte (połączenie 5-3) i zwalnimy następnego połączenie fikcyjne np. 5-7. Okazuje się, że profil jest sztywny (rys. 9d). Zwalnimy zatem kolejne połączenie



Rys. 9.

np. 8-6 (rys. 9e) i otrzymujemy sposób deformacji jak na rys. 9e — linia pogrubiona. W ten sposób określiliśmy funkcję  $\psi_5$ . Pozostałe funkcje przedstawiono na rys. 9f i 9g.

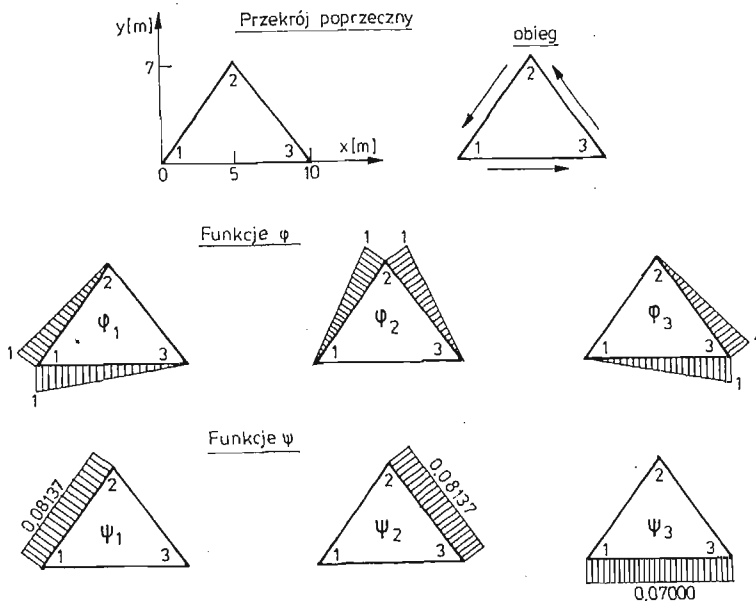
**3.4. Równania równowagi.** Określone wyżej funkcje kształtu  $\psi_k(s)$  są stałe na odcinkach międzywęzłowych. Pochodne względem  $s$  na poszczególnych odcinkach są równe zero, a zatem wszystkie współczynniki w macierzach równania (2.7) zawierające  $\psi'(s)$  są równe zero. Układ równań (2.7) zapisujemy teraz w postaci:

$$\begin{bmatrix} [M_{q\varphi}] \\ [M_{\psi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}'' + \begin{bmatrix} -[M_{\varphi'\psi}]^T \\ [M_{\varphi'\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [M_{q'\psi}] \\ [M_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

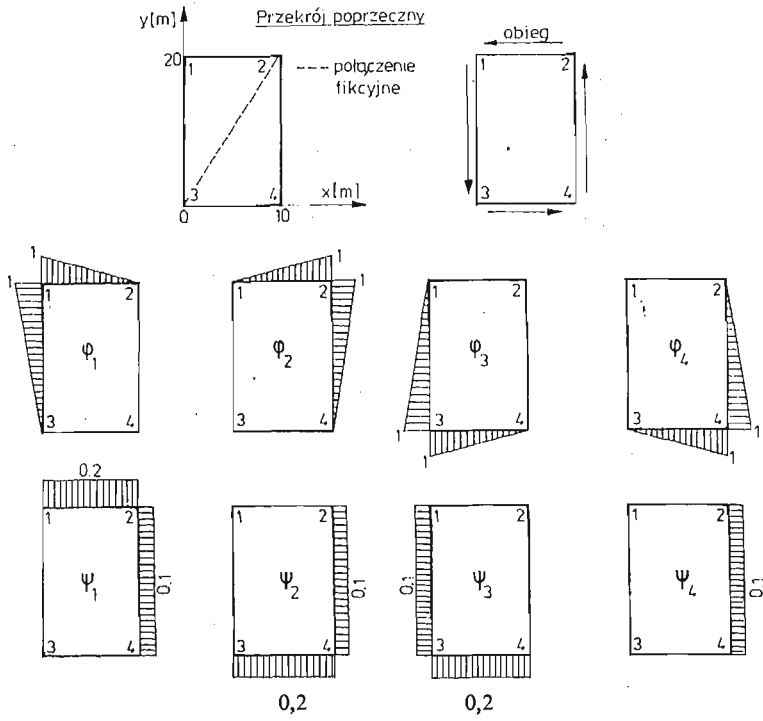
Wybierając funkcje  $\varphi_i(s)$  (rys. 2) i funkcje  $\psi_k(s)$  w sposób opisany wyżej możemy przy użyciu maszyny cyfrowej automatycznie budować macierze współczynników układu równań (3.14) dla prętów cienkościennych przyrządycznych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym składającym się z wielokątów dowolnego kształtu.

#### 4. Przykłady zastosowań

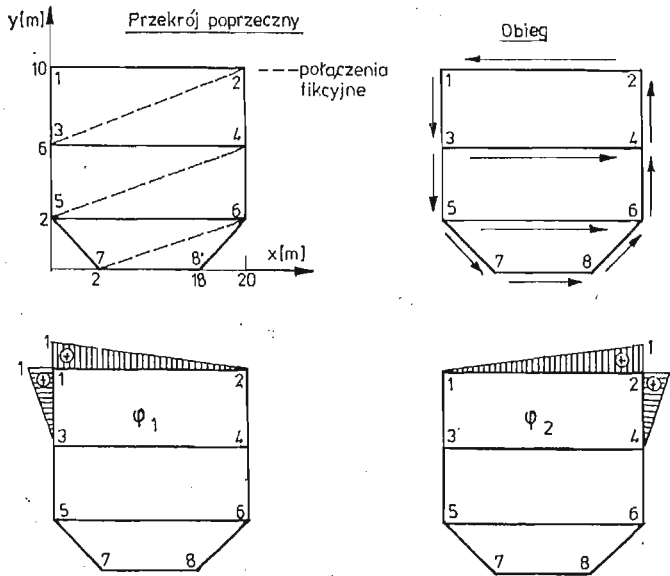
Na rys. 10, 11, 12, 13 przedstawiono kilka przykładów, dla których za pomocą maszyny cyfrowej uzyskano funkcje kształtu  $\varphi$  i  $\psi$ . Dla zadanego profilu maszyna cyfrowa wybrała kierunek wzrostu współrzędnej obwodowej  $s$  (obieg) i w zależności od przyjętej współrzędnej obliczone zostały funkcje  $\psi$ . Na rys. 14, 15 przedstawiono różne funkcje kształtu  $\psi$  uzyskane dla tego samego profilu w zależności od sposobu przyjęcia połączeń fikcyjnych i numeracji węzłów. Dla tego przypadku wykorzystano sposób rozwiązywania



Rys. 10.

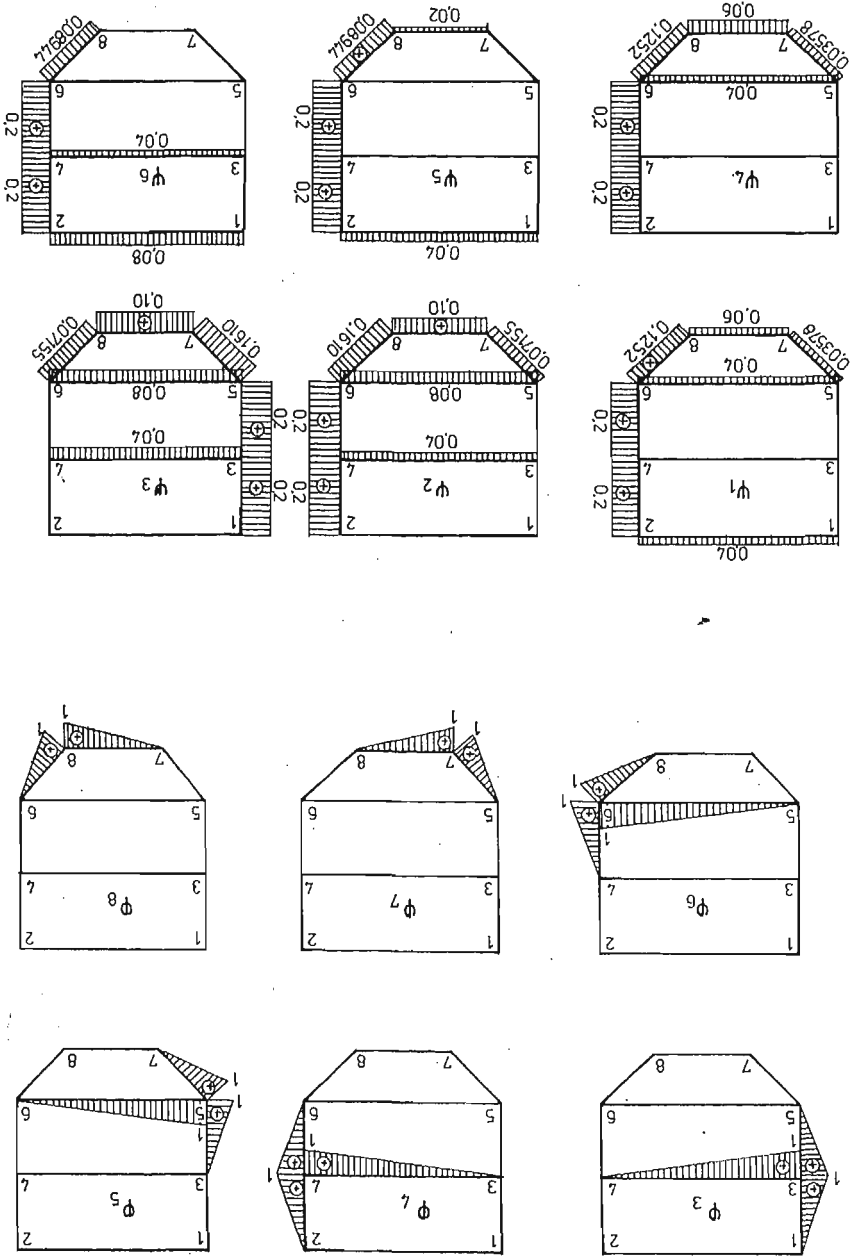


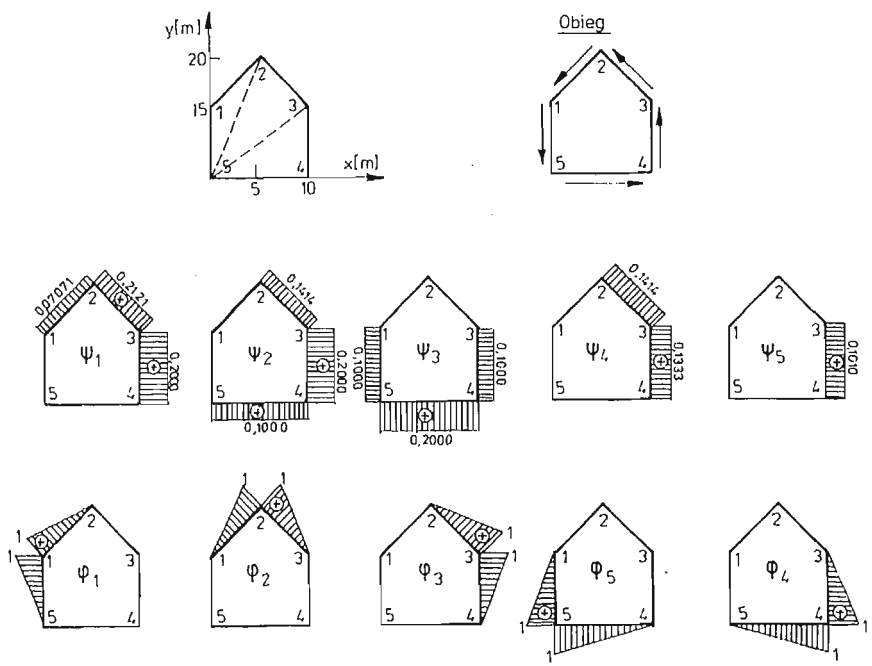
Rys. 11.



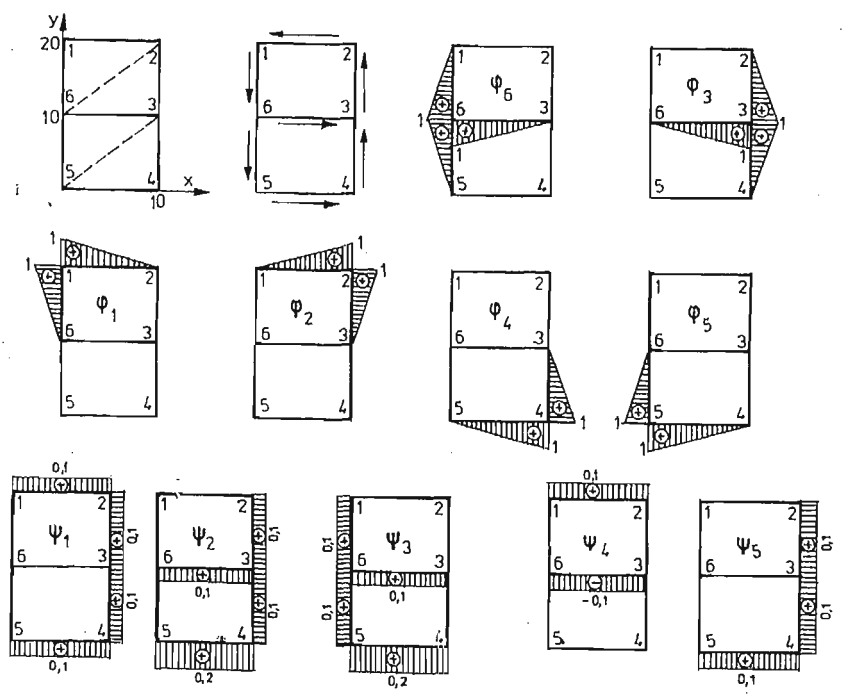
Rys. 12.

Rys. 12.

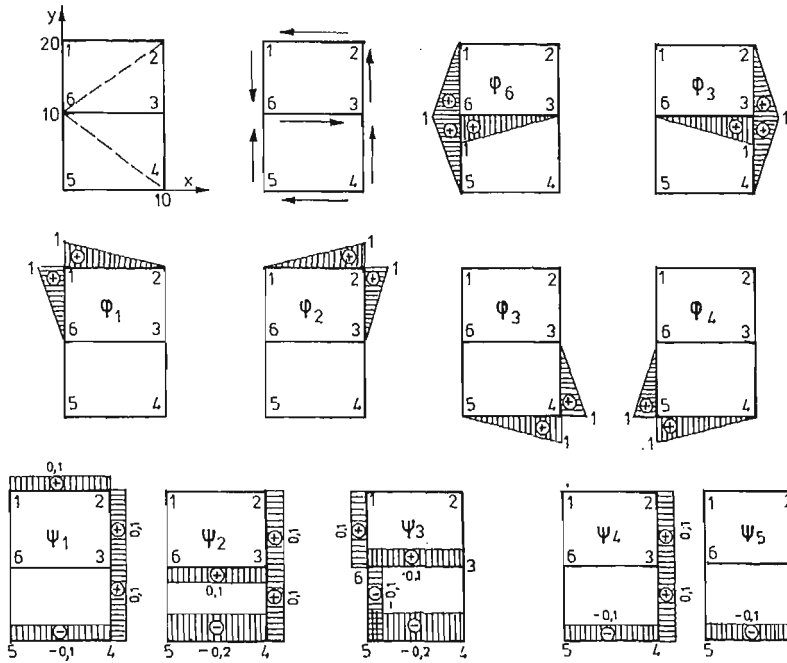




Rys. 13.



Rys. 14.



Rys. 15.

równań równowagi przedstawiony w [1]. Uzyskano dokładnie te same wartości naprężeń i przemieszczeń w poszczególnych przekrojach przy tych samych warunkach obciążenia i zamocowania końców (rys. 16).

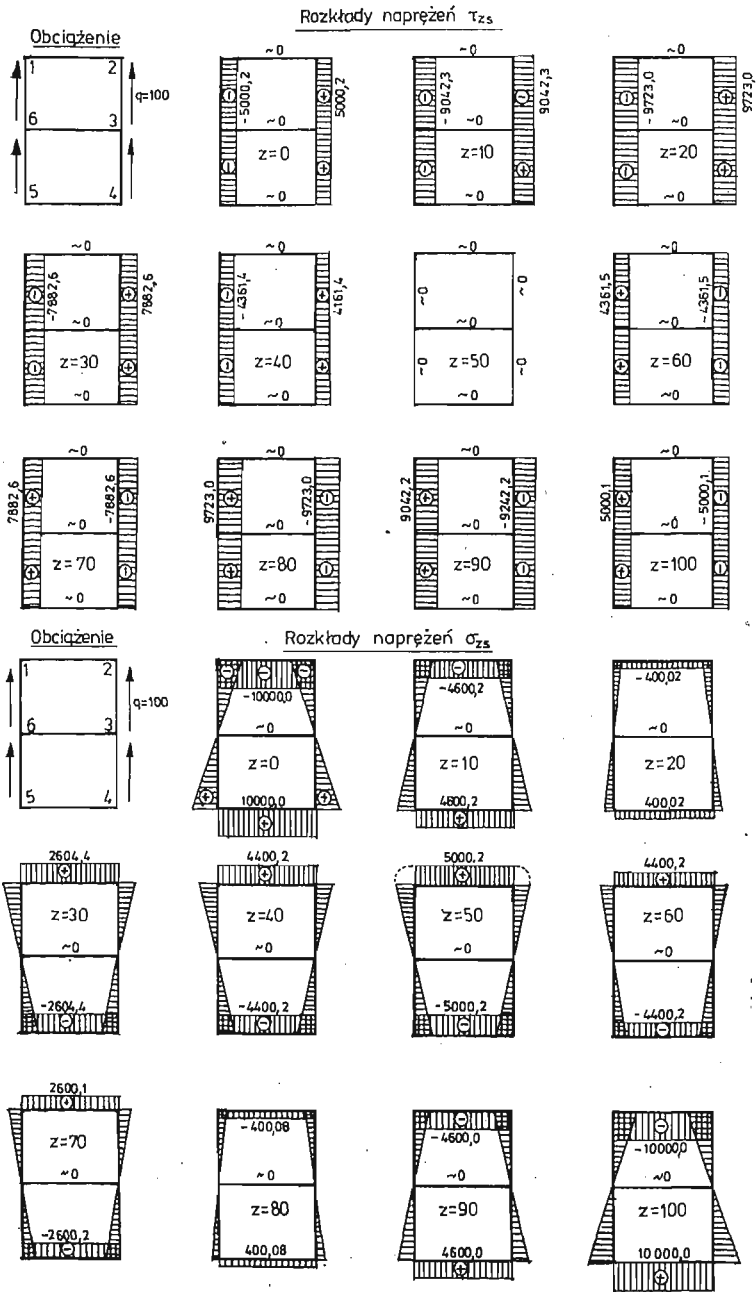
## 5. Wnioski

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda pozwala:

- układać równania równowagi w obliczeniach statycznych prętów cienkościennych pryzmatycznych o dowolnym przekroju zamkniętym wieloobwodowym
- automatycznie budować macierze współczynników układu równań równowagi (3.14), w których interpretacja niewiadomych nie jest w trakcie pracy maszyny cyfrowej znana
- rozwiązywać ten sam problem przy różnych funkcjach kształtu.

## Literatura

- Z. GÓRECKI, *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok w obliczeniach ortotropowych liniowo-sprężystych prętów cienkościennych pryzmatycznych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1982, T. 20 Zeszyt 3 - 4 str. 339 - 359.
- Z. GÓRECKI, *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów bezgrodziowych*. Praca doktorska. Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1980 (nieopublikowana).
- В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*. Государственный Издат. Физ.-Мат. Лит. Москва 1959.
- J. WIĘCKOWSKI, J. DREWKO, M. SPERSKI, *Równania równowagi i obliczenia numeryczne powłok liniowo-sprężystych o wielospójnym prostokątnym przekroju*. II Konferencja Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie, Gohń 6 - 10.11.1978.



Rys. 16.



## Р е з ю м е

## МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В РАСЧЁТЕ СТАТИЧЕСКИХ ОРТОТРОПНЫХ, ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ, ТОНКОСТЕННЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОСВЯЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе использовано принципы полу-безмоментной теории оболочек в расчётах статических призматических стержней произвольного многосвязного поперечного сечения. Представлено метод строения дифференциальных уравнений равновесия принимая специальный метод конструирования функции формы —  $\psi$  для касательных напряжений. Приведенный метод применено в программе на ЭБМ к автоматическому генерированию матриц коэффициентов системы уравнений равновесия, в которых интерпретация неизвестных во время работы вычислительной машины неизвестна. Этим методом можна решить задачу для разных функций формы —  $\psi$ . Метод иллюстрировано рисунками и примерами расчётов на ЭБМ.

## S u m m a r y

## METHOD OF AUTOMATIC CONSTRUCTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN COMPUTATION OF STATIC, ORTHOTROPIC, LINEARLY ELASTIC, THIN-WALLED PRISMATIC BARS OF MULTI CONNECTED CROSS-SECTION

The assumptions of the semi-momentless theory of shells have been applied in the computation of static, thin-walled, prismatic bars of multi connected cross-section. In order to construct the differential equilibrium equations we use the shape function  $\psi$  for the tangential displacement. A procedure has been adopted in the computer program for the automatic generation of the coefficient matrix of the system of the equilibrium equations where the interpretation of the unknowns is not know during the working time of the computer. The method enables us to solve the problem for various shape functions. The method have been illustrated by the results obtained on digital computer, and on diagrams.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 września 1982 roku.*

---



## FILTRATION RESISTANCE OF A SYSTEM OF PARALLEL CYLINDERS AT A TRANSVERSE CREEPING FLOW

JAN A. KOŁODZIEJ

*Politechnika Poznańska*

### Abstract

The subject matter of the present considerations is the problem of resistance of a system of cylindrical bars under perpendicular creeping flow. This system, which has the form of a bundle of parallel bars, is treated as an anisotropic porous medium, the flow through is described by the Darcy equation of filtration. The resistance of filtration is represented as a dimensionless permeability function  $F_1(\varphi)$ , where  $\varphi$  is the ratio of the volume of the bars that of the entire bundle.

The paper contains a survey of theoretical and experimental works concerning the problem under considerations.

### 1. Introduction

The problem of force acting on a single circular cylinder placed in a transverse uniform stream is a standard problem of fluid mechanics. At small Reynolds numbers Navier — Stokes equations governing the flow become Stokes equations {[1], p. 436}. It should be pointed out, however, that Stokes paradox occurs when the fluid flow is perpendicular to the cylinder axis and when the boundary conditions on the cylinder surface and at infinity cannot be satisfied simultaneously.

Oseen [2] has suggested the linearization of Navier — Stokes equations. This has not led to such paradox. Now, there are many proposals of solving the boundary value problems including Oseen equations concerning the transverse fluid flow uniform at infinity around the circular cylinder {see e. g. references in [3]}.

The problem of filtration resistance of a system of parallel cylinders is also of great importance considering the technical applications. The review of papers regarding the resistance of a system of parallel cylinders at the longitudinal laminar flow is given in [4] emphasizing the resistance dependence on the volume fraction of the solids and on the arrangement of the cylinders.

The purpose of this paper is to make a survey of the theoretical and experimental results given by various authors concerning the resistance of a system of cylinders at the transverse flow. Our considerations will be restricted to small Reynolds numbers.

It should be pointed out that in the case of the relative flow to the infinite system of cylinders when Stokes paradox does not exist, almost all the theoretical considerations regarding the transverse flow in such a system are based on the solutions of Stokes equations.

There are many different methods of representing the resistance of a system of cylinders. Usually a drag coefficient of a single cylinder of this system is given. In this paper a bundle of cylinders is considered as a porous medium, and permeability is presented as a proportionality coefficient occurring in Darcy filtration equations. This permeability presents the above mentioned resistance.

## 2. A bundle of parallel circular cylinders as an anisotropic porous medium

In some theoretical considerations it is convenient to treat a system of parallel circular cylinders as a porous medium. Such a model, for instance, has been used in describing the phenomena which occur in the production technology of man-made fibres [5], [6] as well as in the theory of fibrous filters [7, 8]. This enables one to apply an appropriate filtration law for the flow phenomena through a bundle. Since we restrict our considerations to of small Reynolds numbers, then Darcy law governing of the fluid flow through a porous medium can be used [9], p. 400).

Taking into account the fact that the flow resistance depends on the flow directions through a bundle, then Darcy law for an anisotropic porous medium should be applied: that is

$$\vec{q} = - \frac{\bar{K}}{\mu} \text{grad } P \quad (1)$$

where  $\vec{q}$  is the filtration velocity,  $P$  is the pressure,  $\mu$  is the viscosity of the fluid and  $\bar{K}$  is the permeability tensor (the second order tensor).

It has been proved in [10 - 12] that the permeability tensor is a symmetric tensor. Therefore, in a general case of anisotropy and of any selection of the coordinate system, the permeability tensor has six independent components.

In our case, when a bundle of parallel circular cylinders is considered, the filtration properties along the direction perpendicular to the bundle axes are the same and the number of tensor permeability components reduces to two, [4], which can be described by

$$K_{\parallel} = SF_{\parallel}(\varphi) \quad (2)$$

and

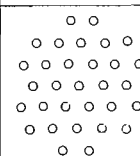
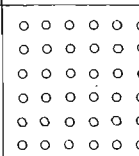
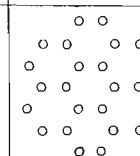
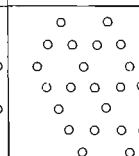
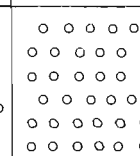
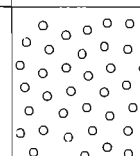
$$K_{\perp} = SF_{\perp}(\varphi). \quad (3)$$

In these relations  $K_{\parallel}$  and  $K_{\perp}$  are the components of the permeability at the parallel and perpendicular fluid flow towards a bundle, respectively,  $S$  stands for an area of a cross-section corresponding to one cylinder at the average,  $F_{\parallel}(\varphi)$  and  $F_{\perp}(\varphi)$  are the nondimensional functions characterizing the permeability at the fluid flow parallel and perpendicular towards a bundle, respectively, and  $\varphi$  represents a volume fraction of the solids. The parameter  $\varphi$  is defined as a ratio of volume of the cylinders to the bulk volume of a system.

For regular arrays of the cylinders the volume fraction  $\varphi$  can be expressed by means of

the distance  $b$  between the adjoining cylinders and by the radius  $a$  of the cylinders. In Table 1 there are formulae of  $\varphi$ ,  $S$  values and other parametrs for some regular arrays of the cylinders.

**Table 1.**

	triangular array	square array	hexagonal array	no 4	no. 5	no. 6
						
$\varphi$	$0.90690 \left(\frac{2a}{b}\right)^2$	$0.785398 \left(\frac{2a}{b}\right)^2$	$0.604600 \left(\frac{2a}{b}\right)^2$	$0.777301 \left(\frac{2a}{b}\right)^2$	$0.841810 \left(\frac{2a}{b}\right)^2$	$0.841810 \left(\frac{2a}{b}\right)^2$
$\frac{S}{b}$	0.8660	1	1.1299	1.0104	0.9330	0.9330
E	0.06979	0.10004	0.08093	0.04301	0.07311	0.07311

In the present paper the results of other authors regarding the flow resistance at perpendicular flow with respect to the cylinders are shown and compared by means of the nondimensional permeability functions  $F_{\perp}(\varphi)$ . Since some of the results are given by means of the drag coefficient of a single cylinder of the system, we assume in our calculations that the pressure drop at the fluid flow through the system is balanced by the drag forces of the cylinders.

### 3. Functions $F_{\perp}(\varphi)$ at any values of $\varphi$ and at $\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{max}}\right) \ll 1$ for some regular arrays of the cylinders

The theoretical study of the flow of viscous fluid through the regular arrays of the cylinders (especially square and triangular array), continues to attract the interest because of the importance of regular configurations in the design of many heat and mass transfer equipments. The creeping flow around the circular cylinders in the square and triangular arrays was discussed in [13], making use of the analitical-numerical methods. Those considerations are based on two-dimensional Stokes equations, and boundary value problems are formulated for the recurrent cells of these systems (Fig. 1). The governing equations of the fluid flow and a part of the boundary conditions are satisfied exactly by the assumed solutions (boundary conditions on the continuous lines of a boundary in Fig. 1). For the remaining part of the boundary conditions the collocation method is applied i. e. the boundary conditions are satisfied exactly in the finite number of points on the boundary (on the dotted lines of the boundary in Fig. 1). The calculations have been done practically for the range of the volume fraction, when  $0 < \varphi < \varphi_{max}$ . The graphs of the function  $F_{\perp}(\varphi)$  obtained on the base of the results from [13] are shown in Fig. 2.

When  $\varphi$  approaches  $\varphi_{max}$  the function  $F_{\perp}$  can be calculated in the approximate manner basing on Keller paper [14]; in which the flow through a narrow gap between two adjacent cylinders was analysed. Keller assumed that at amall Reynolds numbers the flow through

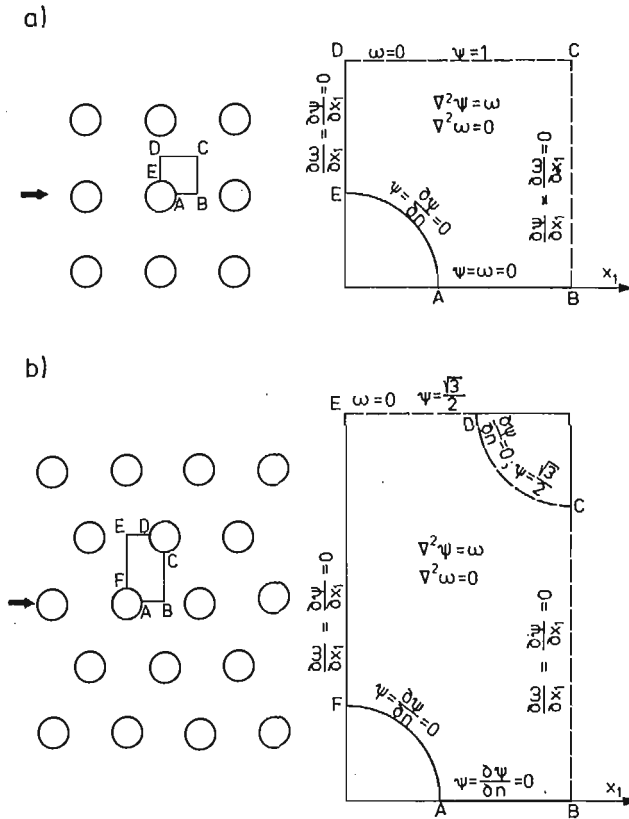


Fig. 1. The formulation of the boundary value problems in recurrent cells for the square and triangular array in the paper [13] where  $A B C D$  is the recurrent cell for the square array,  $A B C D E F$  is the recurrent cell for the triangular array,  $\omega$  is the vorticity,  $\psi$  is the stream function,  $\nabla^2$  is the two-dimensional Laplace operator

the narrow gap can be described using the hydrodynamic lubrication theory. His assumption and the results have been tested by Huston [15] numerically. From [14] results that the pressure difference  $\Delta p$  at the perpendicular flow through the gap is

$$\Delta p = \frac{9\pi\mu Q a^{1/2}}{8\sqrt{2}(b/2-a)^{5/2}}, \tag{4}$$

where  $Q$  is the total volume flux per unit length of the gap. Substituting  $\Delta p = b \text{ grad}_\perp P$  and  $Q = qb$  to (4) Keller obtained the filter velocity  $q$  for the square array in the form

$$q = \frac{8\sqrt{2}(b/2-a)^{5/2}}{9\pi\mu a^{1/2}} \text{ grad}_\perp P. \tag{5}$$

According to this result the nondimensional permeability function for the square array gets the form

$$F_\perp = E \left[ 1 - \left( \frac{\varphi}{\varphi_{max}} \right)^{1/2} \right]^{5/2}, \tag{6}$$

where  $E = 2\sqrt{2}/9\pi = 0.100036$ .

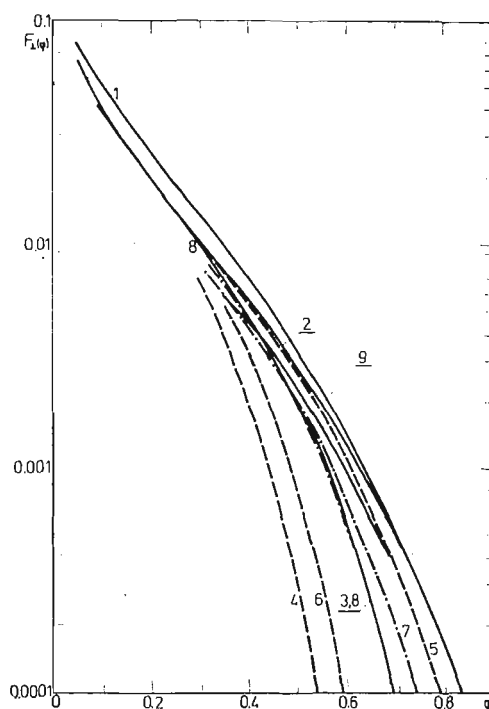


Fig. 2. The theoretical nondimensional permeability function  $F_1$  versus the volume fraction  $\varphi$ ; 1 — Kuwabara cell model [17] {eq. (7)}, 2 — Happel cell model [16] {eq. (8)}, 3 — the square array — eq. (6), 4 — the hexagonal array — eq. (6), 5 — the triangular array — eq. (6), 6 — the array no 4 in tab. 1 — eq. (6), 7 — the array no 5 and 6 in tab. 1 — eq. (6), 8 — the square array [13], 9 — the triangular array [13]

Sangani and Acrivos [13] applying the same concept as Keller probably not knowing his paper, have got the same result for the square array. Moreover, their results give the possibility of determination of value of the constant  $E$  in (6) for the triangular array.

In this paper for the remaining arrangements of the cylinders given in Table 1, the constant  $E$  in (6) basing on Keller concept is specified. The graphs of functions  $F_1$ , according to (6), are shown in Fig. 2.

#### 4. Functions $F_1(\varphi)$ at $\varphi \ll 1$ for the random and regular arrays of the cylinders

It should be pointed out that for the regular arrays as well as for the random arrangement of the cylinders the case when the volume fraction  $\varphi$  is small ( $\varphi \ll 1$ ) has been exhaustively examined. This arises from the fact that there is a wide possibility of the use of the asymptotic methods in the theoretical considerations.

For the first time the problem of the resistance of fluid flow through a parallel bundle of the cylinders for their random arrangement was considered by Happel [16] and Kuwabara [17]. They used a cell model in which every cylinder of a radius  $a$  was enclosed in thought, by a coaxial cylinder whose radius was determined by the relation  $c = a/\sqrt{\varphi}$ . In such a ring-shape zone these authors solved the boundary value problems with two-dimensional Stokes

equation but they employed different conditions on the outer cell boundary, however. Specifically, Kuwabara assumed the vanishing of vorticity while Happel the vanishing of viscous stresses on the cylinder surface of radius  $c$ . That is why the formulae defining the function  $F_{\perp}(\varphi)$  on the ground of their results, differ in form.

According to Kuwabara results the function  $F_{\perp}(\varphi)$  is

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left( \ln \frac{1}{\varphi} - \frac{3}{2} + 2\varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right), \quad (7)$$

while on the base of Happel results we have

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left( \ln \frac{1}{\varphi} + \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2 + 1} \right). \quad (8)$$

Kirsch and Fuchs [18] tested experimentally Happel and Kuwabara formulae using the regular triangular array and found a good agreement especially with Kuwabara results. The experiment consisted in taking the photographs of the streamlines near one of the cylinders of a bundle.

Spielman and Goren [7], using the concept of Brinkman [19] proposed a competitive cell model. They suggested that instead of considering the flow through a system of the cylinders, the flow around a single cylinder could be analysed, taking into account the influence of the remaining cylinders by an additional drag term in Stokes equations. Using the results of these authors we obtain

$$F_{\perp} = \frac{xK_1(x)}{4\pi K_0(x)}, \quad (9)$$

where  $K_0$  and  $K_1$  are modified Bessel functions and  $x$  is the function of  $\varphi$ , determined by

$$x^2 = 4\varphi \left[ \frac{x^2}{2} + x \frac{K_1(x)}{K_0(x)} \right]. \quad (10)$$

Hasimoto [20] considered, among other things, the problem of the transverse flow through a biperiodical system of the cylinders. He made use of Fourier series in order to solve Stokes equations. For the square array his results give

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.476 + 2\varphi + 0(\varphi^2) \right]. \quad (11)$$

Golowin and Lopatin [21] using the theory of the elliptic functions gave the solution describing the transverse flow for two-dimensional regular system of circular cylinders. With the help of Miyagi method [22] they found the exact solution of two-dimensional Stokes equations, but boundary conditions were satisfied in the approximate manner. According to their results functions  $F_{\perp}$  are:

— for the square array

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.478 + 2\varphi + 0(\varphi^2) \right], \quad (12)$$

— for the triangular array

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.508 + 2\varphi + 0(\varphi^2) \right]. \quad (13)$$



In [23], using Hasimoto method [20], the force acting on one cylinder of the square and triangular array of the cylinders was calculated preserving the higher order of terms as compared with [20] and [21]. On the ground of these results functions  $F_{\perp}$  have a form:

— for the square array

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.476 + 2\varphi - 1.774\varphi^2 + 4.076\varphi^3 + 0(\varphi^4) \right], \tag{14}$$

— for the triangular array

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.49 + 2\varphi - 0.5\varphi^2 + 0(\varphi^4) \right]. \tag{15}$$

In the paper [24] the method of singularities [25 - 26] was adopted to biharmonic equations which has produces some rigorous and reasonably accurate formulae for the square array

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.47633597 + 2\varphi - 1.77428264\varphi^2 + 4.0770444\varphi^3 - 4.84227402\varphi^4 + 0(\varphi^5) \right], \tag{16}$$

and the triangular array

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.497504972 + 2\varphi - 0.5\varphi^2 - 0.739137296\varphi^4 + \frac{2.534145018\varphi^5}{1 + 1.275793652\varphi} + 0(\varphi^6) \right]. \tag{17}$$

The comparison of the theoretical results  $F_{\perp}(\varphi)$  at  $\varphi \ll 1$  for the square and the triangular array proposed by the above mentioned authors with the results accurate at any values  $\varphi$  is given in Tab. 2 and 3. This comparison indicates that the most rigorous formula (16) for the square array agrees with Sangani and Acrivos

Table 2

triangular array				
$\varphi$	[13]	[24] for. (17)	[23] for. (15)	[21] for. (13)
0.05	0.6353240 (-1)*	0.6354171 (-1)	0.6384032 (-1)	0.6317386 (-1)
0.10	0.3974563 (-1)	0.3978988 (-1)	0.4009054 (-1)	0.3957280 (-1)
0.20	0.1955034 (-1)	0.1955205 (-1)	0.2065982 (-1)	0.1995158 (-1)
0.30	0.1033165 (-1)	0.1034246 (-1)	0.1070209 (-1)	0.1177638 (-1)
0.40	0.5383000 (-2)	0.5452870 (-2)	0.5820720 (-2)	0.8287620 (-2)
0.50	0.261643 (-2)	0.289646 (-2)	0.310938 (-2)	0.736677 (-2)
0.60	0.110913 (-2)	0.195553 (-2)	0.162440 (-2)	0.807018 (-2)
0.70	0.36101 (-3)		0.86242 (-3)	
0.80	0.61728 (-4)			
0.85	0.13151 (-4)			

\* 0.6353240 (-1) = 0.6353240 × 10<sup>-1</sup>, etc

Table 3

square array					
$\varphi$	[13]	[21] for. (12)	[20] for. (11)	[23] for. (14)	(24) for. (16)
0.05	0.6426735 (-1)	0.6436752 (-1)	0.6444710 (-1)	0.6429091 (-1)	0.6427752 (-1)
0.10	0.4027386 (-1)	0.4076695 (-1)	0.4084652 (-1)	0.4030285 (-1)	0.4027017 (-1)
0.20	0.1940617 (-1)	0.2114524 (-1)	0.2122482 (-1)	0.1969884 (-1)	0.1937730 (-1)
0.30	0.9718170 (-2)	0.1297005 (-2)	0.1304962 (-1)	0.1107578 (-1)	0.950263 (-2)
0.40	0.458947 (-2)	0.948129 (-2)	0.956086 (-2)	0.862503 (-2)	0.370187 (-2)
0.50	0.187776 (-2)	0.856043 (-2)	0.864001 (-2)	0.112661 (-1)	
0.60	0.56721 (-3)	0.926384 (-2)	0.934341 (-2)		
0.70	0.73964 (-4)	1.108812 (-2)	1.11677 (-2)		
0.75	0.79177 (-5)				

collocation calculations within 0.3% when  $\varphi = 0.2$ , 4% when  $\varphi = 0.3$  and deteriorates rapidly thereafter. The most rigorous formula (17) for the triangular array agrees with Sangani and Acrivos calculations within 0.1% when  $\varphi = 0.3$ , 1.3% when  $\varphi = 0.4$ , 10% when  $\varphi = 0.5$  and deteriorates rapidly thereafter.

The experimental investigations for small values of  $\varphi$  have been carried out by Sullivan and Hertel [27], Boumstart [28] and Billing [29]. Sullivan and Hertel applied Kozeny-Carman hydraulic radius theory [30] from which one could obtain

$$F_{\perp} = \frac{(1-\varphi)^3}{4\pi p \varphi}, \quad (18)$$

where constant  $p$  needs further experimental investigation. Mentioned authors assumed  $p = 6$  on basis of their first experimental observations. In further experiments [31-32] Sullivan found out that at small values of  $\varphi$ ,  $p$  depends on changes of  $\varphi$  and formula (18) loses its meaning. Sullivan results induced desistance from further application of the hydraulic radius theory to the filtration flow through the system of the cylinders.

In the literature concerning the air filters [33] the following empirical formula is used

$$F_{\perp} = \frac{\varphi}{16\pi\varphi^{1.5}(1+56\varphi^3)} \quad (19)$$

that is the approximation to Dowson experimental results [34] which concern small packing densities for the random cylinder arrangement in a parallel bundle.

The results of some authors for  $F_{\perp}(\varphi)$  at  $\varphi \ll 1$  are shown in Fig. 3 the comparison of the theoretical and experimental indicates that experimentally established permeability is greater than the theoretical one. This can be explained by the difficulties in preserving perfectly uniform volume fraction in experiment such uniformity is assumed in the theoretical considerations. Then, in the experiment, greater quantity of the fluid can flow through the regions of less packing density producing greater permeability.

In order to get the theoretical model more approximating to the experimental results, Yu and Soong [8] have proposed a generalization of Happel and Kuwabara model. Contrary to Happel and Kuwabara model in which the distortion of the flow due to the interaction was replaced concentrically to each single cylindrical rod, Yo and Soong proposed the

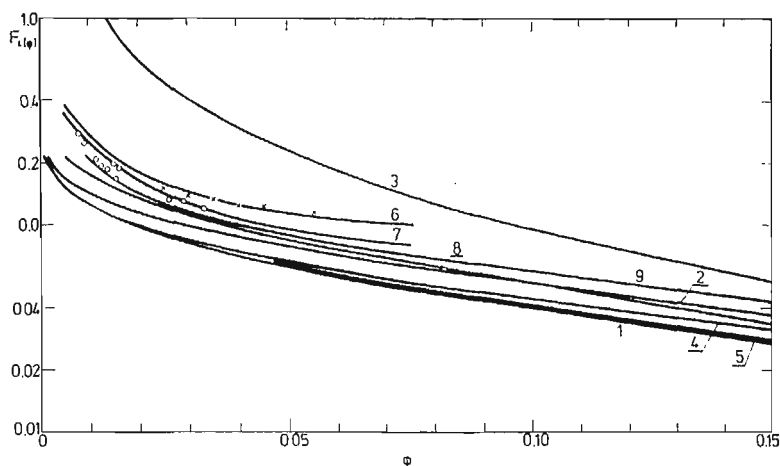


Fig. 3. The theoretical and empirical nondimensional permeability function  $F_{\perp}$  for  $\varphi \ll 1$  versus  $\varphi$ ; 1 — Kuwabara cell model [17] {eq. (7)}, 2 — Happel cell model [16] {eq. (8)}, 3 — Sullivan and Hertel [27] {eq. (18)}, 4 — the square array obtained by: Golovin and Lopatin [12] {eq. (12)}, Hasimoto [20] {eq. (11)}, Sangani and Acrivos [23] {eq. (14)}, Drummond and Tahir [24] {eq. (16)}, 5 — the triangular array obtained by Golovin and Lopatin [21] {eq. (13)}, Sangani and Acrivos [23] {eq. (15)}, Drummond and Tahir [24] {eq. (17)}, 6 — Happel cell model improved by Yu and Soong [8], 7 — Kuwabara cell model improved by Yu and Soong [8], 8 — Spielman and Goren [7] {eq. (9)}, 9 — the empirical formula of Dowson {eq. (19)}, O — the experiments of Billing [29], x — the experiments of Baumstark [28]

filtration model consisting of the random distribution of the parallel circular cylinders. The average pressure drop through the filtration region was determined by the random cell model of hydrodynamics. Assuming the particular probability distribution they obtained good agreement of their theoretical results with the experimental ones [28 - 29].

### 5. Functions $F_{\perp}(\varphi)$ at values of Knudsen numbers in a transition region

The classical theory of the filtration is built upon the hydrodynamics of the creeping flow (Stokes equations) and upon the boundary conditions of the velocity field. The boundary conditions refer to both the radial and tangential velocity components. These components are equal zero on the surface of pores. Fibres in some of the types of the air filters are made to a size which is not far from the mean free path of gas molecules. Then Knudsen number  $Kn = 2 \lambda/a$  (where  $\lambda$  is the mean free path of gas molecules), may reach relatively high values, particularly when filtration takes place at the reduced pressures. For  $10^{-3} < Kn < 0.25$ , i. e. in the transition region, the calculation of the pressure drop requires the use of the slip boundary condition for the tangential component of the velocity. With the use of this boundary condition and Kuwabara cell model, Pich [35] found out that the nondimensional permeability at  $\varphi \ll 1$  gives the form

$$F_{\perp} = \frac{\ln \frac{1}{\varphi} - 1.5 - 0.5\varphi^2 + 1.998Kn}{8\pi(1 + 1.996 Kn)} + \frac{\varphi}{\pi} \left( \ln \frac{1}{\varphi} + 0.5 - 0.5\varphi^2 \right). \quad (20)$$

Other, more complicated considerations for the flow at Knudsen numbers in transition region have been done by Spielman and Goren [7] as well as by Yu and Soong [8]. The experimental investigations concerning the transition region have been carried out by Robinson and Franklin [36]. Their results referring to nondimensional permeability of a system of the cylinders at the reduced pressure are shown in Fig. 4.

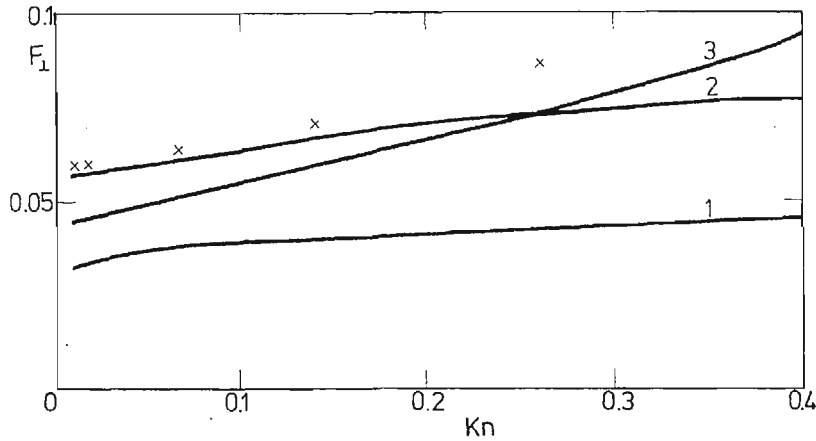


Fig. 4. The theoretical and empirical nondimensional permeability function  $F_{\perp}$  versus Knudsen numbers; 1 — Pich cell model [35] {eq. (20)}, 2 — Yu and Soong [8], 3 — Spielman and Goren [7], x — the experiments of Robinson and Franklin [36]

## 6. Conclusions

The analysis of the presented results leads to the following general conclusions:

a) The theoretical nondimensional permeability for the transverse flow through a system for the regular and random arrays of the cylinders at very small values of volume fraction weekly depends on the arrangement of the cylinders. This approximately the following formula is valid:

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left( \ln \frac{1}{\varphi} - 1.5 \right). \quad (21)$$

b) At very low values of the volume fraction the theoretical nondimensional permeability of the transverse flow is two times less than that of the longitudinal flow {see Eq. (24) in [3]}, and it results in

$$F_{\parallel} = 2F_{\perp}. \quad (22)$$

c) For the square array of the cylinders the following approximate formulae are valid with an error less than 5%

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.47633597 + 2\varphi - 1.77428264\varphi^2 + 4.07770444\varphi^3 - 4.84227402\varphi^4 \right], \quad \text{for } 0 < \varphi \leq 0.3, \quad (23)$$

$$F_{\perp} = \frac{2\sqrt{2}}{9\pi} \left[ 1 - \left( \frac{4\varphi}{\pi} \right)^{1/2} \right]^{5/2}, \quad \text{for } 0.4 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}. \quad (24)$$

d) For the triangular array of the cylinders the approximate following formulae are valid with an error less than 10%

$$F_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varphi} - 1.497504972 + 2\varphi - 0.5\varphi^2 - 0.739137296\varphi^4 + \frac{2.534145018\varphi^5}{1 + 1.275793632\varphi} \right], \quad \text{for } 0 < \varphi \leq 0.5, \quad (25)$$

$$F_{\perp} = \frac{4\sqrt{2}}{27\pi} \left[ 1 - \left( \frac{2\sqrt{3}\varphi}{\pi} \right)^{1/2} \right]^{5/2}, \quad \text{for } 0.6 \leq \varphi < \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \quad (26)$$

e) A "disturbance" of the uniformity of the volume fraction of a system has a large influence on the filtration resistance. This is observed in the experiments, where the filtration resistance is approximately smaller by a half than obtained from the theoretical considerations. This may be due to the difficulties of preserving the uniformity of porosity in the experiments. Therefore the empirical relations are of great importance.

#### References

1. W. J. PROSNAK, *Mechanika plynów*, t. I, PWN, Warszawa 1970.
2. C. W. OSEEN, *Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik*, Ark. Mat. Astronom. Phys. 6, (1910), p. 20.
3. H. YANO, A. KIEDA, *An approximate method for solving two-dimensional low-Reynolds-number flow past arbitrary cylindrical bodies*, J. Fluid Mech. 97, part 1, (1980), p. 157.
4. J. A. KOŁODZIEJ, *Filtration Resistance of a System of Cylindrical Bars under Conditions of Longitudinal Laminar Flow*, Archiwum Budowy Maszyn, 27, zeszyt 4, (1980), str. 487, (in Polish).
5. A. SZANIAWSKI, A. ZACHARA, *Hydrodynamic Problem of Multifilament Spinning*, Chemické Vlakna, 26, no. 1 - 2, 1976, p. 96.
6. A. SZANIAWSKI, *Equations of steady flow through slightly curved multifilament bundles*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 29, no. 4, (1977), p. 519.
7. L. SPIELMAN, S. L. GOREN, *Model for Pressure Drop and Filtration Efficiency in Fibrous Media*, Environ. Sci. and Technology, 2, no. 4, (1968), p. 279.
8. C. P. YU, T. T. SOONG, *A Random Cell Model for Pressure Drop Prediction in Fibrous Filters*, J. Appl. Mech., 42, no. 7, (1975), p. 301.
9. J. HAPPEL, H. BRENNER, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Noordhoff Inter. Pub., Leyden, 1973.
10. J. FERRANDON: *Les lois de l'écoulement de filtration*, Genie Civil, np. 2, (1948), p. 125.
11. M. POREH, C. ELATA, *An analytical derivation of Darcy's law*, Israel Journal of Technology, 4, (1966), p. 214.
12. S. P. NEUMAN, *Theoretical Derivation of Darcy's Law*, Acta Mechanica, 25, (1977), p. 153.
13. A. S. SANGANI, A. ACRIVOS, *Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfer*, Int. J. Multiphase Flow, 8, no. 3, (1983), p. 193.
14. J. B. KELLER, *Viscous flow through a grating or lattice of cylinders*, J. Fluid Mech., 18, (1964), p. 94.
15. V. HUSTON, *The Stokes flow past infinite row of equal, parallel, circular cylinders*, J. Phys. Soc. Japan, 27, (1969), p. 1693.
16. J. HAPPEL, *Viscous Flow Relative to Arrays of Cylinders*, AIChE Journal, 5, no. 2, (1959), p. 174.
17. S. KUWABARA, *The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small Reynolds number*, J. Phys. Soc. Japan, 14, no. 4, (1959), p. 527.
18. А. А. КИРШ, Н. А. ФУКС, *Течение жидкости в системе параллельных цилиндров, расположенных перпендикулярно потоку, при малых числах Рейнольдса*, Ж.П.М. и Т.Ф., нр. 6, (1966), стр. 101.

19. H. C. BRINKMAN, *A calculation of the viscous force exerted by flowing fluid or a dense swarm of particles*, Appl. Sci. Res., **A1**, (1947), p. 27.
20. H. HASIMOTO, *On the periodic fundamental solutions of Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres*, J. Fluid Mech., **5**, Part 2, (1959), p. 317.
21. А. М. ГОЛОВИН, В. А. ЛОПАТИН, *Течение вязкой жидкости через двоякопериодический ряд цилиндров*. П.М.Т.Ф., нр. 2, (1968), стр. 99.
22. T. MIYAGI, *Viscous flow at low Reynolds numbers past an infinite row of equal circular cylinders*, J. Phys. Soc., Japan, **13**, no. 5, (1958), p. 493.
23. A. S. SANGANI, A. ACRIVOS, *Slow flow through a periodic array of spheres*, Int. J. Multiphase Flow, **8**, no. 4, (1982), p. 343.
24. J. E. DRUMMOND, M. I. TAHIR, *Laminar viscous flow through regular arrays of parallel solid cylinders*, Int. J. Multiphase Flow, **10**, no. 5, 1984, p. 515.
25. J. E. DRUMMOND, *Heat flow in a region interlaced with cylinders and conductivity of wool*, New Zealand J. Sci., **14**, (1971), p. 621.
26. W. T. PERRIS, D. R. MCKENZIE, R. C. MC PHEDRAN, *Transport properties of regular array of cylinders*, Proc. Roy. Soc. London, **A369**, (1979), p. 207.
27. R. R. SULLIVAN, K. L. HERTEL, *The Flow of Air Through Porous Media*, J. Appl. Phys., **11**, (1940), p. 761.
28. J. BAUMSTART, *Upper Atmospheric Monitoring Program*, Atomic Energy Commision, Report AECU-4280, 1959.
29. C. A. BILLING, *Effect of Particle Accumulation in Aerosol Filtration*, Ph. Dis. Thesis, California Institute of Technology, 1966.
30. P. C. CARMAN, *Fluid flow through granular beds*, Trans. Inst. Chem. Eng., **15**, (1937), p. 150.
31. R. R. SULLIVAN, *Further Study of the Flow of Air Through Porous Media*, J. Appl. Phys., **12**, (1941) p. 503.
32. R. G. SULLIVAN, *Specific Surface Measurements of Compact Bundles of Parallel Fibers*, J. Appl. Phys., **13**, 1942, p. 725.
33. C. N. DAVIES, *Air Filtration*, Academic Press, London & New York, 1973.
34. S. V. DAWSON, *Theory of Collection in Airborne Particles by Fibrous Filters*, Ph. Dis. Thesis, Harvard University, 1969.
35. J. PICH, *Theory of Aerosol Filtration*, Aerosol Science, ed. C. N. Davies, 1976.
36. M. ROBINSON, H. FRANKLIN, *The Pressure Drop of Fibrous Filter of Reduced Ambient Pressure*, J. Aerosol Science, **3**, (1972), p. 413.

## Резюме

## ФИЛЬТРАЦИОННОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЦЫЛИНДРОВ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ПОЛЗУЧИМ ОБТЕКАНИИ

Предметом работы является проблема сопротивления цилиндрических стержней при поперечном ползучим обтекании. Система в виде параллельного пучка стержней, считается анизотропной пористой средой, в которой течение описывается уравнением фильтрации Дарси. Упомянутое сопротивление представлено при помощи безразмерной функции проницаемости  $F_{\perp}(\varphi)$ , где  $\varphi$  — отношение объема стержней к общему объему пучка.

В работе приведен обзор теоретических и экспериментальных работ, касающихся сопротивления системы стержней упомянутом обтекании.

## Streszczenie

## OPÓR FILTRACYJNY UKŁADU RÓWNOLEGŁYCH CYLINDRÓW PRZY POPRZECZNYM OPŁYWIE PEŁZAJĄCYM

Przedmiotem pracy jest zagadnienie oporu układu prętów cylindrycznych przy poprzecznym opływie pełzającym. Układ w postaci równoległej wiązki prętów potraktowano jako anizotropowy ośrodek poro-

waty, w którym przepływ opisany jest równaniem filtracji Darcy. Wspomniany opór przedstawia się przy pomocy bezwymiarowej funkcji przepuszczalności  $F_{\perp}(\varphi)$ , gdzie  $\varphi$  jest stosunkiem objętości prętów do objętości całkowitej wiązki.

W pracy dokonano przeglądu prac teoretycznych i doświadczalnych dotyczących zagadnienia oporu układu prętów przy wspomnianym opływie.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 maja 1983 roku.*

---





## DOŚWIADCZALNA ANALIZA STATECZNOŚCI POWŁOKI HIPERBOLOIDALNEJ CHŁODNI KOMINOWEJ

REINHOLD KALUŻA

*Institut Inżynierii Lądowej*  
*Wyższa Szkoła Inżynierska Opole*

### 1. Wstęp

Utrata stateczności powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej może mieć charakter ogólny lub lokalny. Przypadki ogólnej utraty stateczności, które obejmują swym zakresem całą powłokę występują w powłokach o idealnych kształtach obciążonych osiowo symetrycznie (np. w powłokach obciążonych ciężarem własnym lub różnicą ciśnień). W rzeczywistości powłoki chłodni kominowych obciążone są niesymetrycznie np. obciążeniem wywołanym parciem wiatru, a ponadto powłoki chłodni mają zwykle pewne niedokładności kształtu oraz wady materiałowe, które powodują, że powłoki takie tracą stateczność w sposób lokalny. Z reguły tracą stateczność w sposób lokalny cienkie powłoki chłodni wzmocnione żebrami równoleżnikowymi.

Problem lokalnej utraty stateczności powłoki, opisywany jest nieliniowymi równaniami różniczkowymi, których rozwiązanie nastęrcza wiele trudności. Z tego względu do badań problemów stateczności powłok chłodni kominowych przyjmuje się wiele uproszczeń, między innymi przyjmowane jest równoważne osiowo symetryczne obciążenie i obliczane jest osiowo symetryczne pole naprężeń [1] [2] [3] [4]. Wartość zastępczego osiowo symetrycznego obciążenia, równoważnego obciążeniom wywołanym parciem wiatru wyznaczana jest na podstawie badań modelowych.

W praktyce projektowej, jak dotychczas, zastosowanie znajdują tzw. kryteria projektowe uzyskane na podstawie badań modelowych powłok o stałej grubości [5 ÷ 14]. Stosowanie tych kryteriów w wersji podanej w [15 ÷ 18], do aktualnie projektowanych jak i wykonywanych powłokowych chłodni może budzić pewne zastrzeżenia. Dlatego też kryteria te wymagają uściślenia względnie uogólnienia na powłoki gładkie o zmiennej grubości oraz uźebrowane.

Zapoczątkowane przez MUNGANA [10], [14] badania modelowe powłokowych chłodni kominowych poddanych osiowo-symetrycznym obciążeniom doprowadziły do sformułowania kryterium lokalnej oceny stateczności powłoki. Kryterium to zakłada, że można wnioskować o stateczności powłoki na podstawie znajomości wartości naprężeń ściskających w powłoce, wywołanych przez obciążenia osiowo-symetryczne i niesymetryczne (np. parcie wiatru) [18].

Na podstawie badań modelowych powłok o stałej grubości oraz stałym promieniu podłużnikowym, przeprowadzonych przez MUNGANA, określono krzywe interakcji dla poszczególnych modeli a następnie zaproponowano uśrednione równanie krzywej granicznej będącej pewną modyfikacją zależności podanej przez DUNKERLY'EGO. Zaproponowana krzywa graniczna, będąca również przedmiotem badań w pracach [19], [20], wprowadzona została między innymi do IASSowskich wytycznych projektowania żelbetonowych chłodni kominowych [21]. Wydaje się jednak, że krzywa ta dotyczy jedynie pewnej klasy powłok, a ekstrapolacja jej na powłoki o kształcie hiperboloidy jednopowłokowej o zmiennej grubości może budzić pewne zastrzeżenia.

Potrzeba prowadzenia dalszych badań modelowych stateczności powłok chłodni kominowych poza czysto praktycznym aspektem tych badań, podyktowana jest także potrzebą zebrania doświadczalnych obserwacji utraty stateczności powłoki gładkiej o stałej a przede wszystkim zmiennej grubości oraz powłoki uźebrowanej mogących stanowić podstawę do weryfikacji nowo uzyskiwanych jak i istniejących już rozwiązań teoretycznych tego zagadnienia. Cel ten najłatwiej można osiągnąć na drodze badań modeli poddanych osiowo-symetrycznym obciążeniom, łatwym do realizacji a przede wszystkim nie wprowadzającym zakłóceń w pracy modelu, co jest szczególnie istotne przy badaniach stateczności cienkościennych modeli powłok. Na szczególną uwagę zasługują zaś te rozwiązania doświadczalne, w których określono tzw. dolne obciążenia krytyczne dla badanych ustrojów gdyż mogą one stanowić podstawę do weryfikacji nieliniowych rozwiązań stateczności powłok.

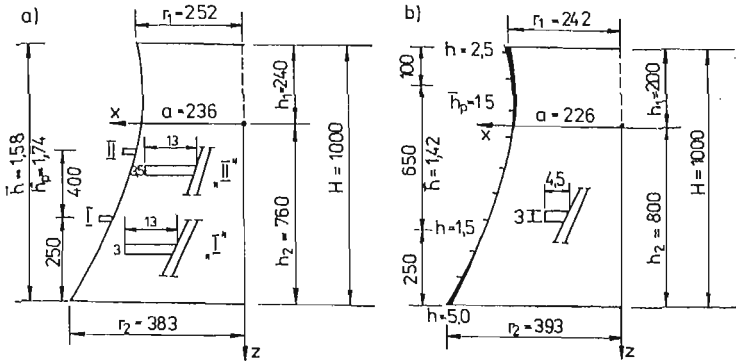
## 2. Program oraz metodyka badań

Badania stateczności powłok kominowych prowadzone były na modelach cienkościennych powłok, geometrycznie podobnych do powłoki obiektu, wykonanych w skali 1 : 100 z modyfikowanej żywicy epoksydowej „epidian 5” [22], [23], [24]. Do modyfikacji żywicy epoksydowej „epidian 5” stosowano: napełniacze (mączka kwarcowa, cement portlandzki), plastyfikatory (ftalan dwubutyłu łącznie z utwardzaczami Z-1, PAC) oraz utwardzacze (trójetylenoczteroamina „TECZA,Z-1”, poliaminoamid PAC).

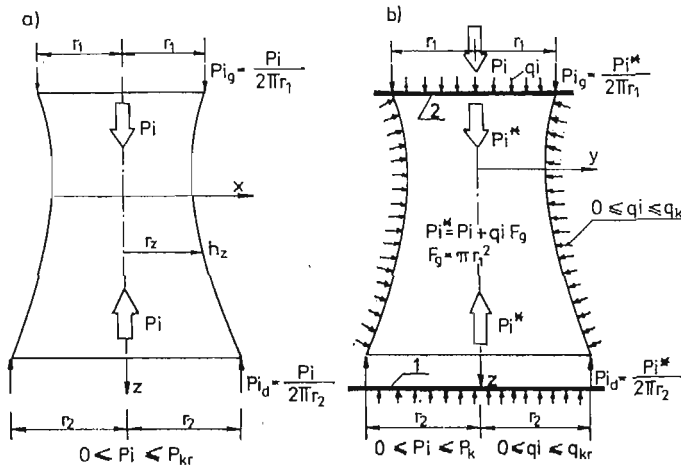
W badaniach stosowano modele powłok o stałej oraz zmiennej grubości wykonane w wersji powłoki gładkiej oraz uźebrowanej równoleżnikowymi żebrami (rys. 1). Modele powłok uźebrowanych uzyskiwano na drodze sukcesywnego doklejania, uprzednio przygotowanych, równoleżnikowych żeber do przebadanych powłok gładkich. Do wykonania żeber jak i ich doklejania do uprzednio wykonanej powłoki gładkiej stosowano tworzywo o tej samej kompozycji co tworzywo zastosowane do wykonania powłoki gładkiej. Zabieg ten zapewnił uzyskanie jednorodnego modelu powłoki uźebrowanej o mechanicznych właściwościach zastosowanego tworzywa, w znacznym stopniu, zbliżonych do własności mechanicznych tworzywa modelu powłoki gładkiej.

Uzyskane w ten sposób modele powłoki uźebrowanej, na bazie modelu powłoki gładkiej, miały ponadto zbliżoną geometrię do geometrii powłoki gładkiej szczególnie w odniesieniu do grubości.

Każdy z tak uzyskanych modeli poddawany był dwuetapowemu procesowi badawczemu (rys. 2). W etapie pierwszym dla każdego modelu określone zostało pionowe osiowo-sy-



Rys. 1. Gabarytowe wymiary modeli powłoki uźebrowanej o stałej (a) oraz zmiennej grubości (b), uzyskanych z modeli uprzednio przebadanych powłok gładkich



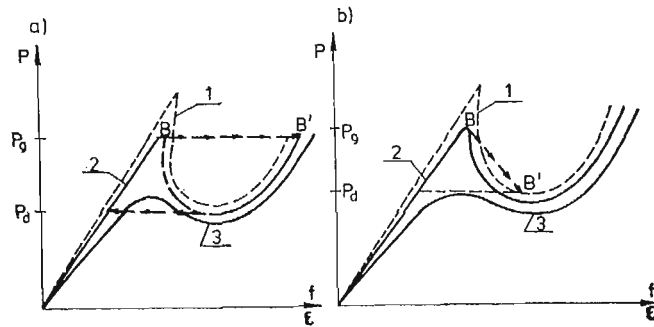
Rys. 2. Schematy obciążeń powłoki modeli obciążeniem osiowo-symetrycznym, przyłożonym do górnego brzegu (a) oraz powierzchni bocznej (b), 1 — sztywna płyta połączona na stałe z ramą, 2 — ruchoma płyta połączona z siłownikiem

metryczne obciążenie krytyczne  $P_k$  (rys. 2a) oraz dopuszczalny stateczny zakres obciążenia modelu obciążeniem pionowym  $P_i$  ( $0 \leq P_i \leq P_k$ ). W drugim etapie badań dla kolejno zadawanych osiowo-symetrycznych obciążeń  $P_i$  (rys. 2b) przykładowo również do bocznej powierzchni modelu obciążenia  $q_i$ . Obciążenia te zwiększano następnie aż do momentu wyboczenia powłoki modelu. Uzyskane w ten sposób boczne (powierzchniowo rozłożone)  $q_k$  oraz pionowe (działające w kierunku osi podłużnej modelu)  $P_k = P_i + F_g \cdot q_k$  obciążenia krytyczne (rys. 2) stanowiły podstawę do określenia tzw. krzywych granicznych obciążeń oraz odpowiadających tym obciążeniom naprężeń krytycznych południkowych  $\sigma_{1k}$  i równoleżnikowych  $\sigma_{2k}$ . Wartości obciążeń krytycznych określono na podstawie pomierzonych przemieszczeń oraz odkształceń modelu, stosując kryteria przedstawione na rys. 3.

Przemieszczenia powłoki modelu określono względem aktualnej geometrii modelu, określonej na drodze interpolacji (metodą SPLINE) oraz aproksymacji wielomianami (metodą najmniejszych kwadratów) pomierzonych promieni modeli. Pomiar geometrii

modeli przeprowadzano przed każdym cyklem badawczym, wzdłuż ośmiu południków równomiernie rozmieszczonych po obwodzie modelu.

Poza pomiarem geometrii modeli prowadzono również pomiar grubości modelu. Wyniki tych pomiarów pozwoliły określić odchyłki rzeczywistej geometrii modelu w odniesieniu od założonej.

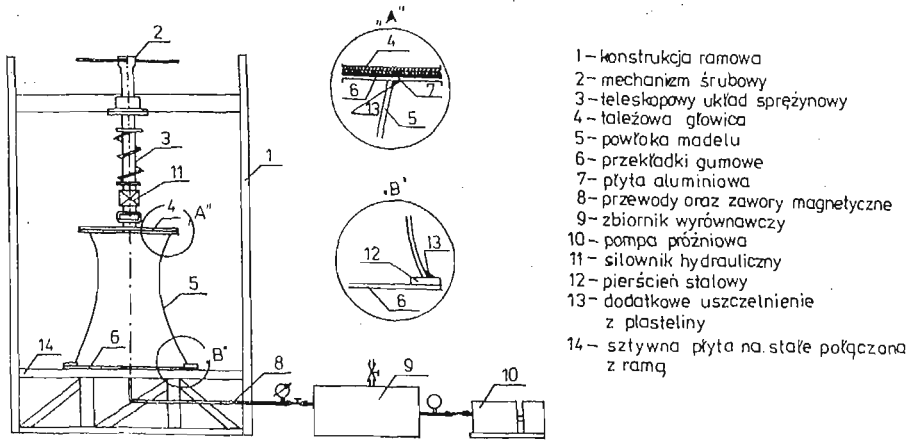


Rys. 3. Przyjęte kryterium do określenia utraty stateczności dla powłoki gładkiej (3) oraz uźebrowanej (2) w przypadku pośredniego (układ sprężynowy lub grawitacyjny) obciążenia górnego brzegu (a) oraz bezpośredniego (np. siłownik śrubowy) (b)

Do pomiaru przemieszczeń, a przede wszystkim odkształceń powłoki modelu zastosowano tensometrię elektrooporową oraz aparaturę pomiarowo-rejestrującą sprzężoną w sposób pośredni oraz bezpośredni z minikomputerem SM-3 [25], [26], [27], [28]. Zagadnienie to szczegółowo omówione jest między innymi w pracach [29], [30], [31], [32].

### 3. Stanowisko badawcze

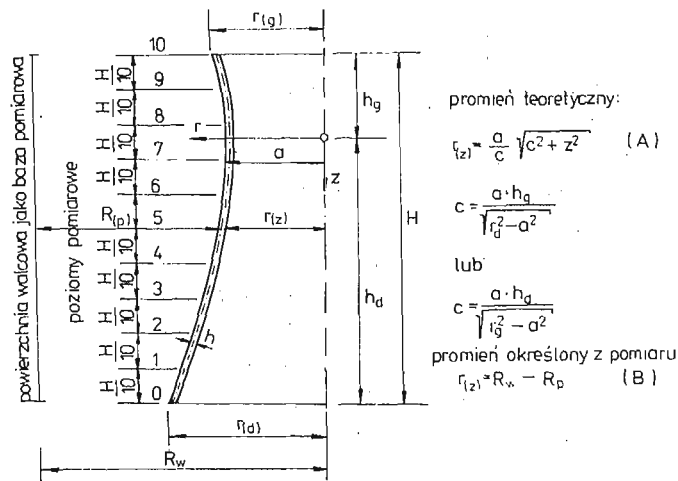
Do realizacji obciążeń osiowo-symetrycznych, przykładanych do górnego brzegu oraz powierzchni bocznej modelu (rys. 2), skonstruowano i wykonano stanowisko badawcze, którego schemat przedstawiono na rys. 4. Stanowisko to, zastosowane do badań modeli o ujemnej krzywiznie Gaussa [19], [20], w omawianych badaniach uzupełniono o sztywny pierścień, siłownik hydrauliczny, sztywną aluminiową przekładkę w górnej głowicy stanowiska badawczego oraz układ umożliwiający przeprowadzenie pomiaru geometrii modelu. Uzupełnienie stanowiska badawczego o wymienione elementy podtytułowane zostało potrzebą zapewnienia jednorodnych warunków brzegowych dla dolnego oraz górnego brzegu modelu jak i przystosowania tego stanowiska do wprowadzanej komputeryzacji tych badań. Prace związane z pełną komputeryzacją prowadzonych badań, polegające na zastosowaniu układu pomiarowego sprzężonego z mini-komputerem oraz wprowadzeniu systemu obciążającego sterowanego minikomputera SM-3 omówiono w pracach [25], [26], [27], [28]. W prowadzonych badaniach każdy model ustawiony jest na sztywnym pierścieniu metalowym połączonym ze sztywną płytą metalową na stałe połączoną z konstrukcją stanowiska badawczego (rys. 4). Obciążenie górnego brzegu modelu realizowane jest poprzez ruchomą płytę połączoną z siłownikiem (rys. 4).



Rys. 4. Schemat stanowiska badawczego

#### 4. Geometria modeli

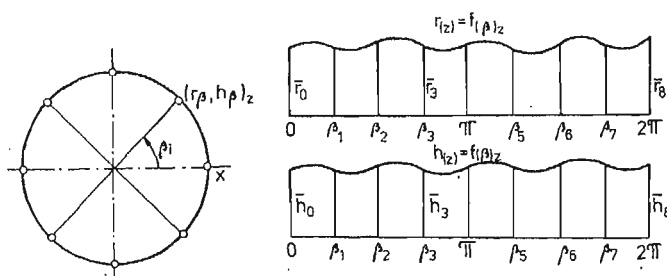
Geometrię badanych modeli wyznaczono na podstawie pomiaru promieni oraz grubości powłoki modelu. Pomiaru te przeprowadzono na stanowisku badawczym przed każdym cyklem pomiarowym wzdłuż ośmiu południków, równomiernie rozmieszczonych na obwodzie modelu. Wzdłuż każdego z tych południków rozmieszczono 11 punktów pomiarowych (rys. 5). W tych samych punktach przeprowadzono również, pomiar przemieszczeń badanej powłoki w trakcie obciążenia modelu. Dla każdego z badanych modeli wyznaczano jego teoretyczną geometrię, stanowiącą podstawę do jego wykonania oraz geometrię rzeczywistą. Do wyznaczenia tych geometrii zastosowano zależności (A) i (B) podane na rys. 5. Uzyskane z przeprowadzonych pomiarów promienie oraz grubości, czyli parametry charakteryzujące rzeczywistą geometrię badanego modelu, opisano wielomianami apro-



Rys. 5. Schemat pomiaru geometrii modelu stanowiący podstawę do jej identyfikacji

krymacyjnymi oraz interpolacyjnymi. Aproksymację tych wielkości wielomianami przeprowadzono przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów, stosując program „CZEBYSZEW” napisany w języku FORTRAN. Poza aproksymacją uzyskanych wyników pomiarów, przeprowadzono również interpolację tych wielkości stosując metodę SPLINE [33].

Jako bazę do interpolacji oraz aproksymacji, pomierzonych promieni, grubości jak i przemieszczeń powłoki modelu przyjęto położenie punktów pomiarowych. Punkty te rozmieszczono w sposób równomierny na całym obszarze powłoki stosując dyskretyzację przedstawioną na rys. 5 i 6. Punkty pomiarowe do pomiaru przemieszczeń jak i odkształceń powłoki rozmieszczono wzdłuż ośmiu południków określonych wielokrotnością kąta środkowego  $\beta = 45^\circ$  (rys. 6).



Rys. 6. Rozwinięcie pomierzonych wielkości promieni  $r(z)$  oraz grubości  $h(z)$  powłoki modelu, przyjęte w aproksymacji oraz interpolacji tych wielkości

Postać funkcji interpolujących, wartości uzyskane z pomiaru, promieni, grubości oraz przemieszczeń powłoki modelu, przy zastosowanej dyskretyzacji pomiarowej modelu opisano następującym wielomianem

$$\varrho \left( \frac{4\beta}{\pi} \right) = \varrho_{i-1} + a_i \frac{4\beta}{\pi} + b_i \left( \frac{4\beta}{\pi} \right)^2 + c_i \left( \frac{4\beta}{\pi} \right)^3, \quad (1)$$

gdzie:

$\beta$  — kąt środkowy,  $\varrho_{i-1} = \{\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_7\}$  wartości promieni, grubości lub przemieszczeń powłoki modelu uzyskane z przeprowadzonych pomiarów w punktach pomiarowych określonych kątem środkowym  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_8$  (rys. 6).

Współczynniki wielomianu interpolacyjnego  $a_i = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ ,  $b_i = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$  oraz  $c_i = \{c_1, c_2, \dots, c_8\}$  wyznaczono według metody SPLINE. Przykładowo, na rys. 7 i 8 przedstawiono wynik interpolacji, uzyskanej według programu SPLINE dla pomierzonych promieni oraz grubości powłoki modelu.

Uzyskane z pomiarów średnie wartości promieni oraz grubości dla powłok umberlandowych dwoma (rys. 1a) oraz dziesięcioma (rys. 1b) równoleżnikowymi żebrami, łącznie z przynależnymi im odchyleniami standardowymi podano w tablicy nr 1. Podana w tablicy nr 1 geometria opracowana dla powłok umberlandowych (rys. 1) w nieznacznym stopniu różni się od geometrii powłok gładkich. Z tego też względu może ona stanowić podstawę do charakterystyki geometrii powłok gładkich jak i umberlandowych zastosowanych w omawianych badaniach (rys. 1).

WART. MIN 315.3411

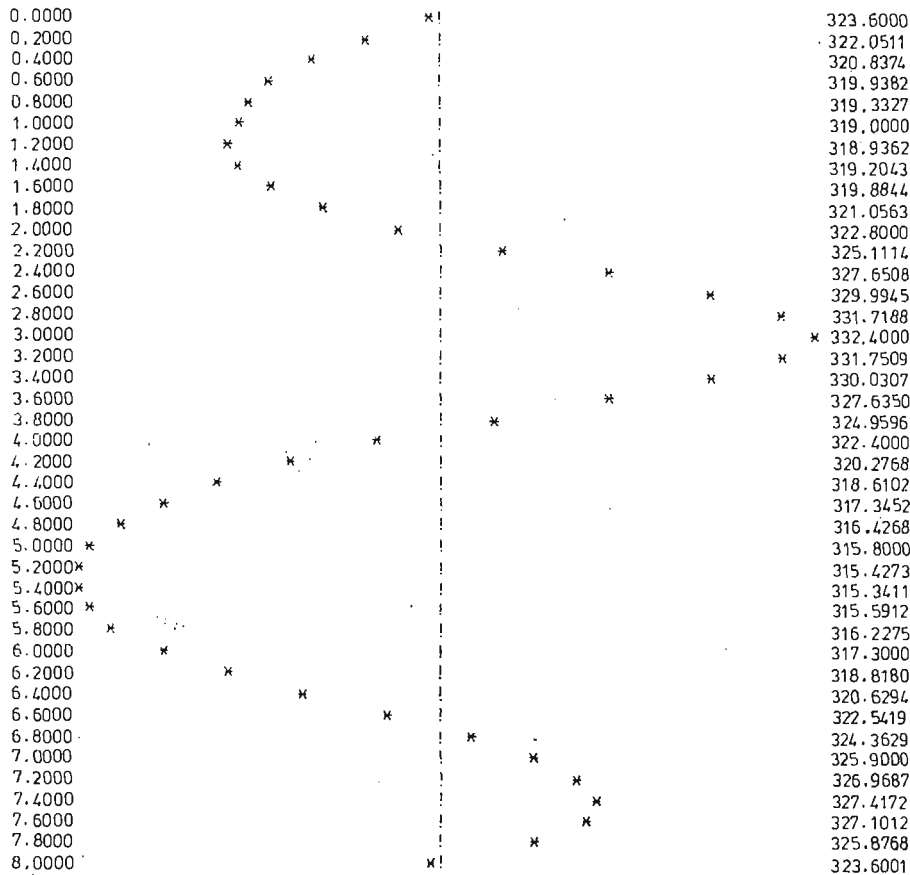
WART. MAX 332.4000

SKALA WYKRESU 0.2437/ZNAK

ARGUMENTY:  $\frac{4\beta}{\pi}$ 

323.8705

WARTOŚCI



Rys. 7. Przykładowy przebieg interpolacji promienia powłoki modelu (rys. 1a) dla poziomu pomiarowego  $z = 560$ , uzyskany według metody SPLINE

## 5. Wyniki badań

Obciążenie krytyczne dla zrealizowanych schematów obciążenia (rys. 2) przedstawić można następującą ogólną zależnością funkcyjną:

$$P_k = f(a, h, H, r_{(z)}, P, q, E, \nu, \sigma, t, f, \varepsilon); \quad (2)$$

$$q_k = f(a, h, H, r_{(z)}, P, q, E, \nu, \sigma, t, f, \varepsilon); \quad (3)$$

gdzie:

$a, h, r_{(z)}, H = h_1 + h_2$  — parametry charakteryzujące geometrię powłoki modelu (rys. 5);

$E, \nu$  — stałe materiałowe tworzywa modelowego;

WART. MIN 1.2425 WART. MAX 1.4038

SKALA WYKRESU 0.0380/ZNAK

ARGUMENTY : $\frac{4\beta}{\pi}$	1.3232	WARTOŚCI
0.0000	*	1.3300
0.2000	* !	1.2818
0.4000	* !	1.2536
0.6000	* !	1.2425
0.8000	* !	1.2456
1.0000	* !	1.2600
1.2000	* !	1.2826
1.4000	* !	1.3087
1.6000	*	1.3336
1.8000	*	1.3523
2.0000	*	1.3600
2.2000	*	1.3535
2.4000	*	1.3362
2.6000	* !	1.3131
2.8000	* !	1.2894
3.0000	* !	1.2700
3.2000	* !	1.2588
3.4000	* !	1.2547
3.6000	* !	1.2551
3.8000	* !	1.2577
4.0000	* !	1.2600
4.2000	* !	1.2602
4.4000	* !	1.2590
4.6000	* !	1.2577
4.8000	* !	1.2576
5.0000	* !	1.2600
5.2000	* !	1.2660
5.4000	* !	1.2754
5.6000	* !	1.2878
5.8000	* !	1.3028
6.0000	* !	1.3200
6.2000	*	1.3388
6.4000	*	1.3578
6.6000	!*	1.3754
6.8000	!*	1.3900
7.0000	!*	1.4000
7.2000	!*	1.4038
7.4000	!*	1.4001
7.6000	!*	1.3875
7.8000	*	1.3646
8.0000	*	1.3300

Rys. 8. Przykładowy przebieg interpolacji grubości powłoki modelu (rys. 1b) dla poziomu pomiarowego  $z = 280$ , uzyskany według metody SPLINE

- $t$  — temperatura otoczenia badanego modelu;  
 $P, q$  — zadawane obciążenia osiowo-symetryczne (rys. 2);  
 $\sigma, f, \varepsilon$  — naprężenia, przemieszczenia oraz odkształcenia powierzchni środkowej powłoki modelu (rys. 9).

Parametry występujące w zależnościach (2) i (3) podzielić można, z uwagi na zastosowaną metodykę badań, na wielkości zależne oraz niezależne od przebiegu procesu badawczego. Do wielkości zadanych (określonych) w prowadzonych badaniach zaliczyć można następujące wielkości (parametry):

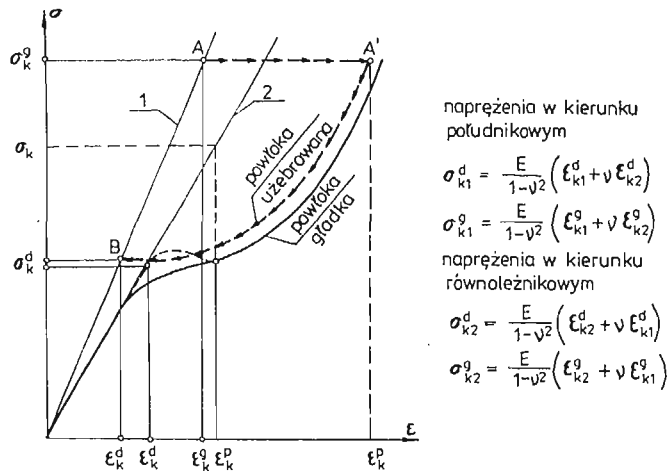
- geometrię modelu, czyli  $a, h, r_{(z)}, H$ ;
- warunki brzegowe podparcia modelu;
- wielkości obciążenia modelu ( $P, q$ ) jak i warunki ich zadawania;



Tablica 1. Charakterystyka geometrii dla modelu o stałej (rys. 1a) oraz zmiennej grubości (rys. 1b)

Model o stałej grubości (rys. 1a)						Model o zmiennej grubości (rys. 1b)					
$z$ [mm]	$r_t$ [mm]	$\bar{r}(z)$ [mm]	$s(r)$ [mm]	$\bar{h}$ [mm]	$s(h)$ [mm]	$z$ [mm]	$r_t$ [mm]	$\bar{r}(z)$ [mm]	$s(r)$ [mm]	$\bar{h}$ [mm]	$s(h)$ [mm]
660	354,7	352,1	4,22	1,56	0,14	680	360,9	358,7	1,43	2,33	0,10
560	324,6	323,8	4,95	1,41	0,12	580	330,5	329,4	1,29	1,55	0,186
460	297,2	295,8	5,81	1,38	0,06	480	302,4	302,1	1,71	1,43	0,057
360	273,1	272,5	6,53	1,48	0,08	380	277,6	277,8	2,12	1,38	0,044
260	253,4	254,6	6,88	1,53	0,06	280	256,9	257,8	2,63	1,32	0,051
160	239,1	242,2	6,6	1,68	0,11	180	241,5	242,2	3,09	1,44	0,076
60	231,1	235,7	6,44	1,83	0,07	80	232,3	232,9	3,56	1,23	0,091
-60	231,1	236,8	5,44	1,74	0,06	-80	232,3	231,2	3,63	1,39	0,145

gdzie:  $z$  — rzędne wysokości (rys. 5),  $r_t$  — teoretyczny promień powłoki modelu wyznaczony według wzoru (A) (rys. 5)  
 $\bar{r}(z)$  — średnia wartość pomierzonych promieni,  
 $s(r)$  — odchylenie standardowe pomierzonych promieni,  
 $\bar{h}$  — średnia wartość pomierzonych grubości,  
 $s(h)$  — odchylenie standardowe pomierzonych grubości.



Rys. 9. Zastosowane kryterium do określania dolnych  $\sigma_k^d$  oraz górnych  $\sigma_k^g$  naprężeń krytycznych, stosownie do pomierzonych odkształceń  $\epsilon_k^d$ ; 1, 2 — proste uzyskane z aproksymacji wyników pomiaru dla stanu przedkrytycznego

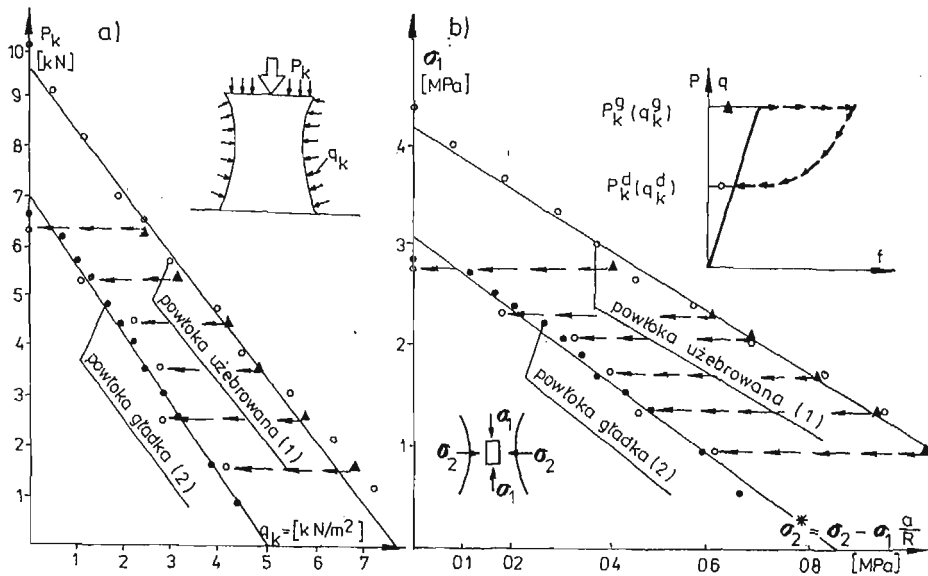
- własności materiału modelu ( $E$ ,  $\nu$ ), oraz
  - sposób jak i warunki pomiaru przemieszczeń oraz odkształceń.
- Pozostałe parametry funkcji (2) i (3) jak:
- przemieszczenia powierzchni środkowej ( $w$ ) oraz górnego brzegu powłoki modelu ( $u$ )
  - odkształcenia na zewnętrznej oraz wewnętrznej powierzchni modelu w kierunku południkowym  $\epsilon_1$  oraz równoleżnikowym  $\epsilon_2$
  - temperatura i wilgotność w otoczeniu badanego modelu, określane były na drodze pomiarów.

Przeprowadzony pomiar geometrii modelu oraz temperatury otoczenia modelu (korekcja  $E, \nu$ ) umożliwił uzależnienie obciążenia oraz naprężeń krytycznych od następujących parametrów:

$$P_k = f(P, q, \varepsilon, w) \quad \text{lub} \quad P_k = f(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon, w) \quad (4)$$

Uzyskane w wyniku przeprowadzonych badań obciążenia krytyczne dla powłoki gładkiej o stałej grubości (rys. 1a) wraz z odpowiadającymi im naprężeniami krytycznymi przedstawiono na rys. 10. Na rysunku tym podano także wartości górnych obciążeń krytycznych oraz odpowiadających tym obciążeniom naprężeń południkowych  $\sigma_1$  i równoleżnikowych  $\sigma_2$  uzyskanych dla modelu powłoki wzmocnionej jednym oraz dwoma żebrami równoleżnikowymi (por. rys. 1a).

Wartości obciążeń krytycznych wyznaczono na podstawie analizy pomierzonych przemieszczeń oraz odkształceń powłoki modelu, stosując kryterium przedstawione na rys. 3a. Wartości naprężeń krytycznych w kierunku południkowym  $\sigma_{k1}$  oraz równoleżnikowym  $\sigma_{k2}$ , podane na rys. 10b — wyznaczono na podstawie pomierzonych odkształceń  $\varepsilon_k^g$  dla stanu przedkrytycznego. Naprężenia te wyznaczono zatem według zależności podanych na rys. 9 dla zredukowanych wartości odkształceń  $\varepsilon_k^d$  oraz  $\varepsilon_k^g$  określonych dla stanu przedkrytycznego (punkt A) oraz pokrytycznego (punkt B na rys. 9).



Rys. 10. Zestawienie obciążeń (a) oraz odpowiadających im naprężeń (b) dla powłoki gładkiej oraz żebrowanej jednym oraz dwoma żebrami (rys. 1a)

Podane na rysunku 10 zbiory punktów określające górne oraz dolne obciążenia krytyczne jak i odpowiadające im naprężenia krytyczne opisano prostą oraz wielomianem drugiego stopnia o następujących równaniach:

a) model powłoki gładkiej o stałej grubości (rys. 1a)

$$q_k = 5,106 - 0,726P_k \quad \text{lub} \quad q_k = 4,576 - 0,428(P_k)^2 \quad (5)$$

$$\sigma_2^* = 0,886 - 0,290\sigma_1 \quad \text{lub} \quad \sigma_2^* = 0,748 - 0,135\sigma_1 - 0,040(\sigma_1)^2 \quad (6)$$

b) model powłoki uźebrowanej jednym oraz dwoma źebrami (rys. 1a)

$$q_k = 7,758 - 0,790P_k \quad \text{lub} \quad q_k = 8,40 - 1,047P_k + 0,021(P_k)^2 \quad (7)$$

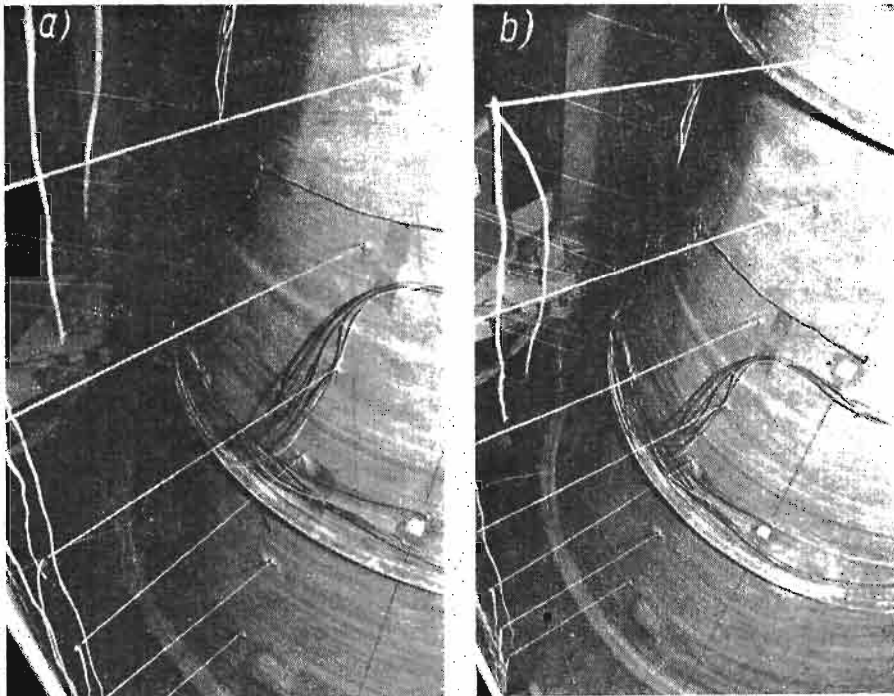
$$\sigma_2^* = 1,372 - 0,326\sigma_1 \quad \text{lub} \quad \sigma_2^* = 1,582 - 0,494\sigma_1 + 0,010(\sigma_1)^2 \quad (8)$$

Współczynniki równań (5) ÷ (8) wyznaczono posługując się metodą najmniejszych kwadratów.

Dwa pierwsze z tych równań, aproksymujące zbiory punktów pomiarowych oznaczonych przez (2) na rys. 10, interpretować można jako krzywe graniczne dla dolnych obciążeń oraz naprężeń krytycznych uzyskanych dla powłoki gładkiej oraz uźebrowanej jednym lub dwoma źebrami (rys. 1a).

Podobnie równania (7) i (8), aproksymujące zbiory punktów pomiarowych oznaczonych przez (1) na rys. 10, uznać można za krzywe graniczne dla górnych obciążeń oraz naprężeń uzyskanych dla modelu wzmocnionego jednym lub dwoma źebrami (rys. 1a).

Równania (5) ÷ (8) charakteryzujące dolne oraz górne obciążenie krytyczne jak i odpowiadające im naprężenia, dla powłoki uźebrowanej uzyskano w wyniku analizy przeskoku zachodzącego dla powłoki uźebrowanej jednym lub dwoma źebrami (rys. 11).

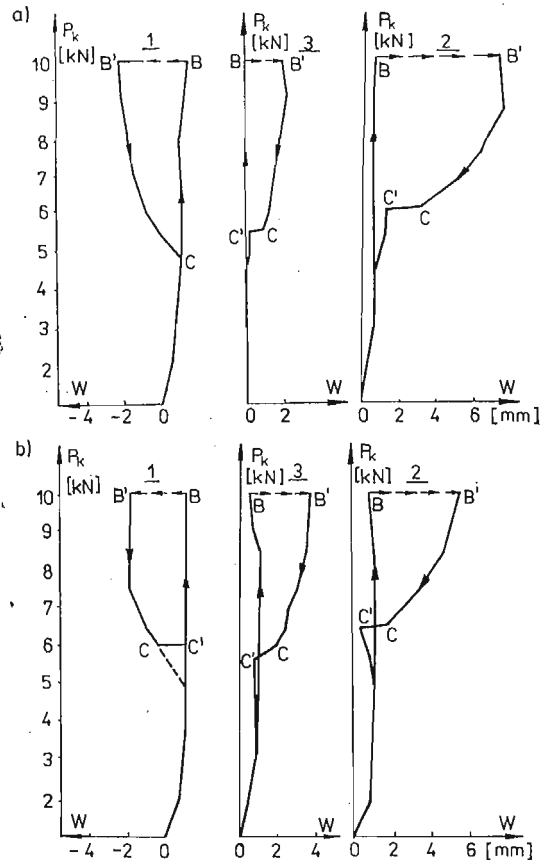


Rys. 11. Stan deformacji powłoki uźebrowanej dwoma źebrami (rys. 1a), wywołany przeskokiem przy pionowym obciążeniu modelu  $P_k = 10$  kN (a) pionowym  $P_l = 3$  kN i bocznym  $q_k = 4,5$  kN/m<sup>2</sup>(b)

Przykładowe przebiegi pomierzonej zależności obciążenie-przemieszczenie dla kilku poziomów obciążeń powłoki wzmocnionej dwoma źebrami przedstawiono na rys. 12 i 13. I tak na rys. 12 przedstawiono wyniki pomiarów uzyskane dla sąsiednich pkt. pomiarowych 1, 2 i 3 zlokalizowanych nad pierścieniem oznaczonym przez „II” na rys. 1a. Wykresy te

uzyskano przy pionowym obciążeniu badanego modelu, czyli przy realizacji obciążeń według schematu przedstawionego na rys. 2a. Na kolejnych rysunkach przedstawiono wyniki pomiarów dla pkt. pom. 1 i 3, jako że pkt. pom. 2 przy złożonym stanie obciążenia nie doznał przemieszczeń.

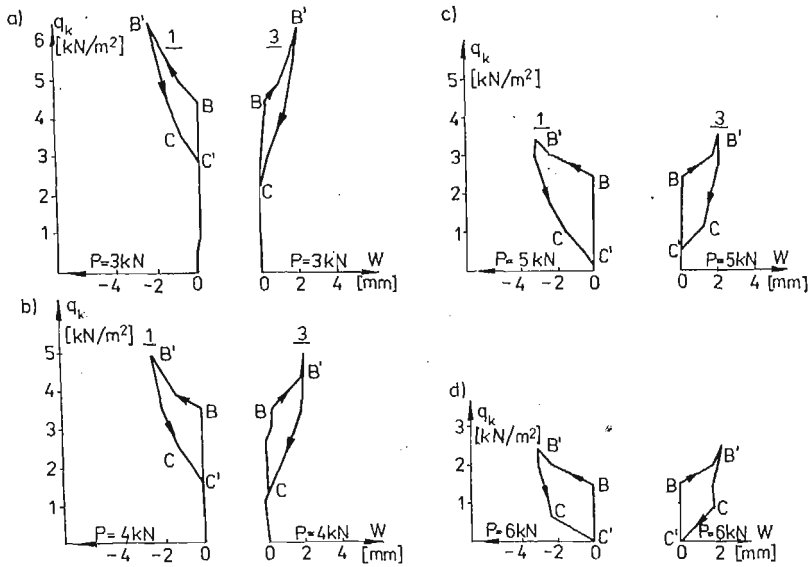
Wykresy przedstawione na rys. 12 i 13 stanowiły podstawę do wyznaczenia górnych oraz dolnych obciążeń krytycznych modelu jak i odpowiadających im naprężeń krytycznych  $\sigma_{k1}$ ,  $\sigma_{k2}$  przedstawionych na rys. 10.



Rys. 12. Zależności obciążenie-przemieszczenie dla powłoki modelu wzmocnionej dwoma żebrami (rys. 1a) przy obciążeniu górnego brzegu (rys. 2a), uzyskane przy pierwszym (a) oraz 5-tym (b) powtórzeniu cyklu badawczego

Zależności obciążenie — przemieszczenie przedstawione na rys. 12 i 13, uzyskane w wyniku niezależnego powtarzania procesu obciążenie-odciążenie powłoki modelu charakteryzują się dwiema wartościami obciążeń uzyskanymi przy obciążeniu oraz odciążeniu powłoki modelu. Obciążenia te nazwane jako górne oraz dolne obciążenia krytyczne stanowiły podstawę do wyznaczenia odpowiadających im dolnych oraz górnych obciążeń krytycznych.

Na uwagę zasługuje fakt, że badane modele do momentu utraty stateczności deformato-



Rys. 13. Zależność obciążenie-przemieszczenie dla powłoki wzmocnionej dwoma żebrami (rys. 1a) poddanej złożonemu obciążeniu (rys. 2b); a) dla obciążenia  $P_t = 3$  kN, b)  $P_t = 4$  kN, c)  $P_t = 5$  kN, d)  $P_t = 6$  kN

wały się w sposób osiowo-symetryczny, przechodząc w stan zafalowany po przekroczeniu obciążenia, określanego jako obciążenie wybaczące powłokę modelu (rys. 12 i 13).

W badaniach powłok uźebrowanych obciążenie powłoki modelu zwiększano do momentu zachwiania pierwotnego stanu równowagi uzewnętrzniającego się nagłym wybożeniem powłoki. Położenie punktu B w sposób gwałtowny przemieszczało się w położenie określone na rys. 12 i 13, przez punkty B'. Zjawisku temu towarzyszyły lokalne znaczne przemieszczenia, które doprowadzały do zniszczenia modelu powłoki o zmiennej grubości wzmocnionej 10-cio ma żebrami jak i jednym żebrzem (rys. 14).

Analizując podane na rys. 12 i 13 zależności obciążenie — przemieszczenie wyróżnić można następujące etapy:

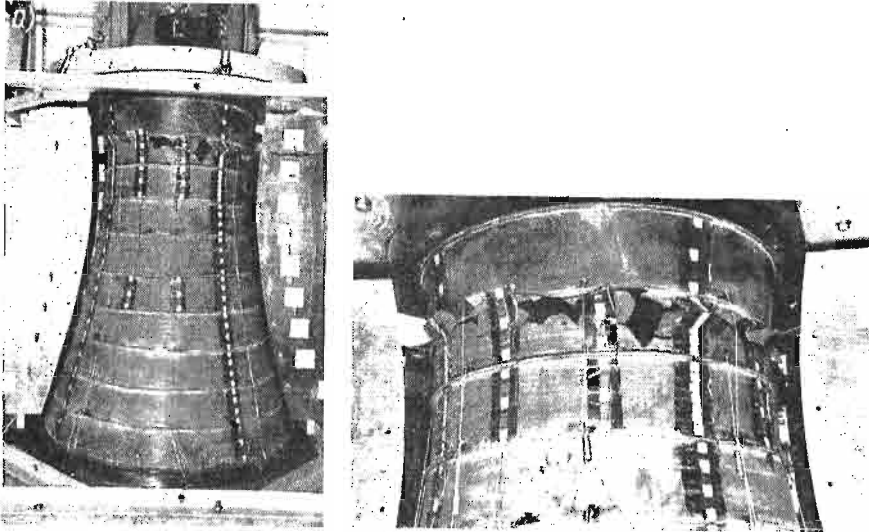
- odcinek O-B charakteryzujący liniową zależność  $P$ - $f$  lub  $q$ - $f$ ;
- odcinek B-B' charakteryzujący się gwałtownym przemieszczeniem punktu pomiarowego, co zachodziło przy górnym obciążeniu;
- krzywa B'-C charakteryzująca ześlizgiwanie się punktu B' po prawej części krzywej aż do osiągnięcia dolnego obciążenia krytycznego;
- prosta C-C' charakteryzująca powrotny przeskok punktu pomiarowego.

Naprężenie krytyczne dla hiperboloidalnej powłoki przez analogię do powłoki cylindrycznej określić można, jak wiadomo, w sposób przybliżony z zależności [15], [16], [17]:

$$\sigma_k = kE \frac{h}{r}, \quad (9)$$

gdzie:

$E$  — moduł Younga materiału powłoki,  $h$  — grubości powłoki,  $r$  — promień powłoki,  $k$  — bezwymiarowy parametr wynoszący 0,18 dla powłoki cylindrycznej o  $r/h = 250$ .



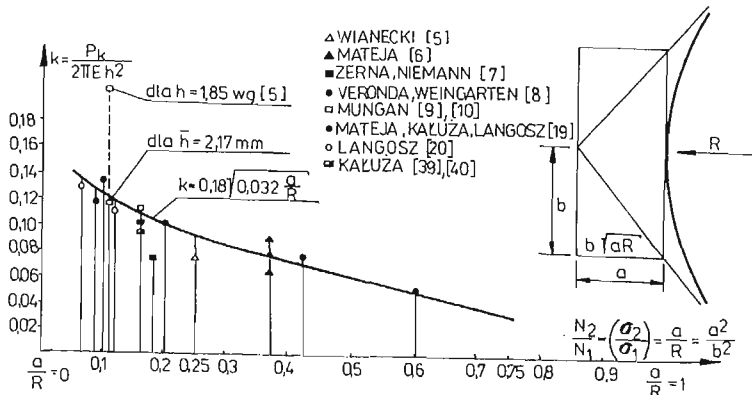
Rys. 14. Widok powłoki modelu o zmiennej grubości wzmocnionego 10-ciomą żebrami (rys. 1b), uszkodzonego w wyniku zaistniałego przeskoku (a) oraz szczegół zniszczenia z zarysowaniem wielościennej powierzchni uszkodzenia modelu (b)

Bezwymiarowy parametr  $k$  jak wskazano w pracy [15] wyznaczyć można z zależności:

$$k = \frac{P_k}{2\pi E h^2} \quad (10)$$

Uzyskane w dotychczas przeprowadzonych badaniach modeli powłok gładkich oraz uźebrowanych o stałej oraz zmiennej grubości powłoki, bezwymiarowe współczynniki  $k$  podano w tabelicy 2. W tabelicy tej podano również dolne  $P_k^d$  oraz górne  $P_k^g$  obciążenia krytyczne uzyskane na tych modelach.

Na rys. 15 porównano uzyskane wyniki badań dla osiowo-symetrycznego obciążenia górnego brzegu modelu (rys. 2a) z wynikami badań uzyskanymi przez innych autorów. Z porównania tego wyniku, że bezwymiarowy parametr  $k$ , określony zależnością (10)



Rys. 15. Prawdopodobny wpływ geometrii powłoki modelu o stałej grubości na wartość bezwymiarowego współczynnika  $k$  opisanego wzorem (10)

Tablica 2. Wartości bezwymiarowego współczynnika  $k$  uzyskanego ze wzoru (10) przy osiowym ściskaniu powłoki modelu

TYP MODELU	$\bar{h}_p$ [mm]	$\bar{E}$ [MPa]	$\bar{P}_{kr}^g$ [kN]	$\bar{k}_g = \frac{\bar{P}_{kr}^g}{2\pi\bar{E}\bar{h}_p^2}$	$\bar{P}_{kr}^d$ [kN]	$\bar{k}_d = \frac{\bar{P}_{kr}^d}{2\pi\bar{E}\bar{h}_p^2}$
model powłoki gładkiej o stałej grubości (rys. 1a)	1,74	3150	6,5	0,108	6,5	0,108
modele powłoki gładkiej o zmiennej grubości (rys. 1b)	1,56	3150	6,0	0,125	6,0	0,125
	1,37	3150	4,50	0,121	4,50	0,121
	1,5	7100	11,5	0,115	11,5	0,115
	1,86	3150	8,50	0,124	8,50	0,124
	1,38	3150	4,50	0,119	4,50	0,119
model powłoki o stałej grubości wzmocnionej żebrem „I” (rys. 1a)	1,74	3150	9,97	0,166	6,4	0,1097
model powłoki o stałej grubości wzmocnionej żebrem „I” i „II” (rys. 1a)	1,74	3150	9,85	0,169	6,6	0,113
model powłoki o zmiennej grubości wzmocnionej żebrem „I” (rys. 1a)	1,52	7100	13,50	0,135	—	—
model powłoki o zmiennej grubości wzmocnionej 10-cioma żebkami (rys. 1b)	1,42	7100	25,20	0,288	—	—

gdzie:  $\bar{h}_p$  — średnia grubość powłoki w jej przewężeniu,

$\bar{E}$  — moduł YOUNGA materiału modelu,

$\bar{P}_{kr}^g, \bar{P}_{kr}^d$  — średnia wartość górnego oraz dolnego obciążenia krytycznego z 6 powtórzeń,

$\bar{k}_g, \bar{k}_d$  — średnia wartość górna oraz dolna, bezwymiarowego współczynnika występującego we wzorze (9).

a zatem i południkowe naprężenia krytyczne, w znacznym stopniu uzależniony jest od geometrii powłoki modelu.

Wydaje się, że wartość tego współczynnika przyjmowana dla celów projektowych jako  $k = 0,079$ , [15], [16], [17] przy analizie stateczności powłoki obciążonej ciężarem własnym wymaga uściślenia. Jednakże uściślenie to jest trudne a właściwie niemożliwe do przeprowadzenia na podstawie aktualnego stanu badań, a przede wszystkim braku pełnego udokumentowania przyjętych kryteriów do określenia utraty stateczności jak i geometrii przebadanych modeli. Przykładowo, analizując wyniki uzyskane w badaniach MUNGANA [9], [10] wartość współczynnika  $k$  dla modelu A wynosi  $k = 0,217$  przy przyjęciu grubości

modelu  $h = 1,85$  mm podanej przez autorów w pracach [9], [10] lub  $k = 0,122$  przy przyjęciu średniej grubości modelu  $h = 2,17$  mm [9]. Cytowaną przez MUNGANA grubość powłoki  $h = 1,85$  mm dla modelu „A” jak i pozostałych przebadanych modeli należy traktować zatem jako najmniejszą grubość uzyskaną z pomiaru.

Przyjęcie przez MUNGANA do opracowania wyników pomiarów minimalnych grubości powłoki wpłynęło w bezpośredni sposób na znaczne (osiągające  $\sim 50\%$ ) zawyżenie uzyskanych naprężeń krytycznych.

Dla modelu powłoki wzmocnionej dziesięcioma żebrami (rys. 1b) zdołano przeprowadzić jedynie próbę osiowo-symetrycznego obciążenia górnego brzegu modelu według schematu przedstawionego na rys. 2a. W wyniku przeprowadzenia tej próby model ten uległ charakterystycznemu lokalnemu zniszczeniu. Zniszczenie to będące wynikiem lokalnej utraty stateczności powłoki modelu wystąpiło na całym obwodzie modelu na wysokości drugiego sektora powłoki (rys. 14), tzn. pomiędzy 2 i 3 wzmacniającym pierścieniem, licząc od górnego pierścienia (rys. 1b). Zniszczenie to nastąpiło zatem w pobliżu przewężenia modelu, czyli w sektorze o stałej grubości powłoki, charakteryzującym się największym wyężeniem wynoszącym około  $1/3$  wytrzymałości materiału modelu.

Porównując charakter zniszczenia modelu uźebrowanego dziesięcioma żebrami z charakterem deformacji powłoki gładkiej oraz uźebrowanej 1 i 2-ma równoleżnikowymi żebrami można stwierdzić, że powłoka uźebrowana w przeciwieństwie do powłoki gładkiej traciła stateczność lokalnie. Zjawisko to dla powłoki wzmocnionej jednym oraz dwoma równoleżnikowymi żebrami zachodziło w dolnej części powłoki (rys. 11a i 11b). Powłoka uźebrowana 10-cioma żebrami utraciła stateczność w przewężeniu po osiągnięciu górnych obciążeń krytycznych.

Z uwagi na zniszczenie modelu nie udało się wyznaczyć dolnych obciążeń krytycznych i porównać ich z odpowiednimi obciążeniami uzyskanymi dla powłoki gładkiej jak też wzmocnionej jednym oraz dwoma żebrami. Badania te będą w dalszym ciągu kontynuowane.

W ostatnich latach zrealizowane zostały bowiem obiekty w naturze wzmocnione równoleżnikowymi żebrami [41]. Zagadnienie utraty stateczności powłok uźebrowanych równoleżnikowymi żebrami posiada zatem poza aspektem poznawczym również znaczenie praktyczne.

Na szczególną uwagę w omawianym modelu wzmocnionym 10-cioma żebrami zasługuje charakter jego zniszczenia. Można tu zauważyć (rys. 14) wielościenną powierzchnię, uzyskaną również w badaniach MATEI [6] przeprowadzonych na modelach powłok gładkich. W badaniach MATEI powierzchnia ta objęła swym zakresem jednakże cały model a nie jedynie strefę przewężania jak to stwierdzono na przebadanym modelu (rys. 14). Na zaistniały stan zniszczenia modelu mógł wpływać w znacznym stopniu zastosowany osiowo-symetryczny stan obciążenia.

Zagadnienie to wymaga zatem przeprowadzenia dalszych badań mających na celu wyznaczenie wpływu liczby żeber na wielkość obciążeń krytycznych jak i charakter deformacji modelu poprzedzający proces utraty stateczności powłoki. W badaniach tych wyjaśnienia będzie wymagał także wpływ przyjętego obciążenia na uzyskiwane wyniki badań a przede wszystkim na możliwość ich praktycznego zastosowania. W prowadzonych badaniach podobnie jak w pracach [9], [10], [14], [21], stosowany jest nieadekwatny w stosunku



do obciążeń rzeczywistej konstrukcji sposób obciążenia modelu powłoki chłodni. Z tego też względu na podstawie przeprowadzonych badań niemożliwe jest określenie rzeczywistych krytycznych obciążeń powłoki w naturze. Istnieje jednakże, jak to stwierdzono w pracach [3], [9], [10], [14], [21], możliwość określenia dla poszczególnych punktów obiektu w naturze bezpiecznego przedkrytycznego zakresu naprężeń na podstawie uzyskanych równań krzywych względnie prostych interakcji (równania (6) i (8)), przetransponowanych na obiekt za pomocą analizy wymiarowej. Ekstrapolacja określonych prostych względnie krzywych interakcji na obiekty w naturze możliwa jest zarówno dla dolnych jak i górnych naprężeń krytycznych jako, że określają one zarazem ważności liniowej teorii powłok w analizowanym przypadku badawczym.

## 6. Wnioski i zakończenie

Na podstawie własnych badań oraz analizy wyników uzyskanych w cytowanych pracach, można sformułować następujące wnioski:

1. Południkowe naprężenia krytyczne dla powłoki obciążonej osiowo-symetrycznie (rys. 2a) wyznaczyć można według wzoru (9) przyjmując wartości współczynnika  $k$  według rys. 15 lub tablicy 2.
2. Obciążenia oraz naprężenia krytyczne w przewężeniu modelu  $\sigma_{1k}$ ,  $\sigma_{2k}$  przy różnych ich proporcjach wyznaczyć można na podstawie rys. 10 lub funkcji (5) ÷ (8) aproksymujących te wyniki badań.
3. Dolne obciążenia jak i naprężenia krytyczne dla powłoki uźebrowanej jednym oraz dwoma żebrami (żebra I i II na rys. 1a) w przeprowadzonych badaniach — osiągnęły wartości zbliżone do wielkości uzyskanych na modelu powłoki gładkiej (rys. 10, 11, 12, 13).
4. Zastosowane uźebrowanie równoleżnikowe w postaci jednego oraz dwu żeber (rys. 1a) nie wpłynęło na zwiększenie dolnych obciążeń krytycznych (rys. 10, 12 i 13). Stwierdzenia tego nie można uogólnić na przebadaną powłokę wzmocnioną 10-cioma żebrami (por. tabl. 2).
5. Powłoka gładka o stałej jak i zmiennej grubości w przeprowadzonych badaniach traciła stateczność w sposób globalny. Powłoki uźebrowane natomiast traciły stateczność w sposób lokalny. Przebieg tego zjawiska dla powłok gładkich posiadał charakter stopniowy (łagodny) a dla powłok uźebrowanych gwałtowny. Największe przemieszczenia powłoki zachodziły w jej dolnej (model z rys. 1a) oraz górnej części (model z rys. 1b).
6. Porównując zestawione w tablicy nr 2 wartości obciążeń krytycznych a w szczególności odpowiadające tym obciążeniom wartości bezwymiarowego parametru  $k$ , należy stwierdzić, że powłoka o zmiennej grubości (rys. 1b) traci stateczność przy większych obciążeniach krytycznych aniżeli powłoka o stałej grubości (rys. 1a). Wzrost wartości obciążeń krytycznych dla powłoki o zmiennej grubości w odniesieniu do powłoki o stałej grubości w przeprowadzonych badaniach wynosił około 30%.
7. Powłoka uźebrowana 10-cioma żebrami (rys. 1b) w trakcie badań zachowała się odmiennie w stosunku do powłoki gładkiej oraz uźebrowanej dwoma lub jednym żebrami (rys. 11 i 14). Zjawisko wyboczenia miało gwałtowny przebieg zakończony całkowitym

uszkodzeniem drugiego sektora licząc od góry (rys. 14), czyli w parti modelu o największym wyęzieniu sięgającym około 1/3 wytrzymałości materiału modelu. Na charakter zniszczenia modelu wpłynąć mógł zastosowany sposób obciążenia modelu wywołujący maksymalny stan wyęzienia w przewężeniu modelu.

8. W odniesieniu do badań modelowych MUNGANA [9] i [10] istnieją uzasadnione zastrzeżenia dotyczące: zawyżającej interpretacji naprężeń krytycznych, braku wystarczającej ilości badań modeli o różnych proporcjach kształtu ( $a/R$  na rys. 15) jak i skąpej informacji o geometrii modeli w dotychczas przeprowadzonych badaniach. Uzasadnia to konieczność prowadzenia dalszych badań stateczności powłok chłodni kominowych.
9. Potrzeba dalszych badań doświadczalnych powłokowych chłodni kominowych (gładkich jak i uźebrowanych) wynika także z analizy rezultatów uzyskanych w pracach [9], [10], [34], [35], [36], [37]. Wydaje się, że liczba żeber równoleżnikowych wpływać może również na podniesienie wielkości krytycznych naprężeń południkowych a nie tylko równoleżnikowych, jak to stwierdzono w pracach [34], [37]. Wskazują na to zamieszczone w niniejszej pracy wstępne wyniki badań powłoki wzmocnionej 10-cioma żebrami.
10. Doświadczalnego uściślenia wymagają także, zdaniem autora, wnioski zamieszczone w pracach [34], [35], [36], [37]. Podane w tych pracach stwierdzenie odnośnie wpływu wymiarów, a w szczególności wysokości zastosowanego pierścienia, na podniesienie wielkości obciążeń krytycznych nie zostało w pełni potwierdzone w przeprowadzonych badaniach.
11. Wyjaśnienia wymaga zatem określenie wpływu liczby jak i sztywności giętno-skrętnej zastosowanych żeber na wielkość górnych a przede wszystkim dolnych obciążeń krytycznych uźebrowanych powłok o stałej oraz zmiennej grubości płaszcza powłoki. Celowość kontynuacji badań powłok uźebrowanych przy sukcesywnie zmniejszanej sztywności żeber wynika również z teoretycznych rezultatów uzyskanych w pracy [38] a dotyczących cylindrycznej powłoki wzmocnionej równoleżnikowym uźebrowaniem.

#### Literatura

1. J. F. ABEL, D. P. BILLINGTON, D. A. NAGY, C. WITA - DWORKIN, *Buckling of Cooling Towers*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., ST10, 108 1982, 2162 - 2174
2. Z. WASZCZYŹYŹYN, *Aktualne tendencje w statyce i stateczności chłodni kominowych*, Ref. problemowy, Konferencja Naukowa poświęcona pamięci prof.-O. Matei nt. „Powłokowe budowle wieżowe” Opole—Turawa, 1984.
3. M. ECKSTEIN, C. ELLIER, R. HARTE, Z. SANAL, W. B. KRATZIG, U. WYTEK, *Improvement of the Structural Behavior of Cooling Tower Shells by Ring — Stiffeners*, Int. Symp. IASS Ruhr-Univ. Bochum, Sept. S-7, 1984, Springer — Verlag 1984, 61 - 76
4. P. P. COLE, J. F. ABEL, D. P. BILLINGTON, *Buckling of Cooling-Tower Shells — Bifurcation Results*, Proc. ASCE, St6, 101, 1975, 1205 - 1222
5. J. WIANECKI, *Badania doświadczalne wyoboczenia powłoki hiperboidalnej obciążonej na brzegach osiowo-symetrycznie*, Rozpr. Inż., 12, 4, 1964, s. 513 - 531
6. O. MATEJA, *Stateczność hiperboidalnych chłodni wieżowych obciążonych ciężarem własnym powłoki*, Arch. Inż. Łąd., 10, 4 1964, s. 409 - 442
7. W. ZERNA, H. J. NIEMANN, *Untersuchungen an Modellen des Naturzugkuhlers Ibbenburen*, Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Hanower, Bericht P. 2, 1962

8. D. R. VERONDA, V. I. WEINGARTEN, *Stability of hyperboloidal shell*, J. Struct. Div., ASCE, 101, ST7, 1975, p. 1585 - 1602
9. W. ZERNA, V. BASAR, I. MUNGAN, W. TIERMANN, *Beuluntersuchungen an hyperbolischen Rotationnchalen*, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum, Westdeutscher Verlag, 1974
10. I. MUNGAN; *Buckling stress states of hyperboloidal shells*, J. Struct. Div., ASCE, 101, ST7, 1975, p. 2005 - 2020
11. S. LOSKA, O. MATEJA, E. ŚWITOŃSKI, *Badania modelowe stateczności hiperboloidalnych chłodni wieżowych*, Arch. Inż. Łąd., 13, 1, 1967, s. 61 - 90
12. T. J. DER, R. FIDLER, *A model study of the buckling behavior of hyperbolic shells*, Proc. Inst. Civil Engineers, Jan., 1968
13. СЕРОВ, В. А. ЕРЯГИНА, *Экспериментальное исследование устойчивости конических башен градирен*. Научные Доклады Выжшой Школы Ленинградского Инженерно-Строительного Института, 1, 1959, с. 157 - 198.
14. I. MUNGAN, *Buckling stresses of stiffened hyperboloidal shells*, J. of the Struct. Div., ASCE, 105, ST8, 1979, s. 1589 - 1604
15. W. ZERNA, W. KRATZIG, *Probleme der Konstruktion und Berechnung von Naturzugkühltürmen in Schalenbauweise*, Vortrag auf dem Betontag 1967 von. 5 - 7, April in Berlin, DBV, 1967
16. O. MATEJA, *Z zagadnień kształtowania powłokowych chłodni kominowych*. Zesz. Nauk. WSI Opolo, 11, 1974, s. 91 - 108
17. O. MATEJA, Z. JAMNICKI, W. ŁABUŚ, *Problemy stateczności powłoki chłodni kominowej*, Inż. i Bud., 2, 1974
18. R. HARNACH, W. B. KRATZIG, I. MUNGAN, W. ZERNA, *Recomendations for the Design of Hyperbolic or other Similary Shaped Cooling Towers*, Technisch-wissenschaftliche Mittcilungen Nr 75 - 5, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1975
19. O. MATEJA, R. KAŁUŻA, A. LANGOSZ, *Doświadczalna analiza stateczności powłoki chłodni kominowej*, Arch. Inż. Łąd. 27, 2, 1981
20. A. LANGOSZ, *Doświadczalna analiza naprężeń krytycznych powłoki chłodni kominowej*, Konferencja, Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie, Opole 1982
21. *Recomendations for the Design of Hyperbolic or other Similary Shaped Cooling Towers*, IASS Working Group Nr 3, Bruksela 1978
22. R. KAŁUŻA, *Ócena przydatności żywicy epoksydowej „epidlan 5” do modelowania konstrukcji*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 4, 12, 1974, s. 421 - 437
23. R. KAŁUŻA, *O pewnym sposobie modelowania cienkich powłok obrotowych przy zastosowaniu modyfikowanej żywicy epoksydowej „epidlan 5”*, Zeszyty Naukowe WSI Opolo, seria Budownictwo z. 1, nr 11, 1974, s. 145 - 169
24. R. KAŁUŻA, O. MATEJA, *Wpływ czynnika czasu na stale materiałowe modyfikowanej żywicy epoksydowej „epidlan 5”*, Zeszyty Naukowe WSI Opolo, seria: Budownictwo, z. 14, nr 53, 1979, s. 47 - 63
25. K. DRZEWIŃSKI, R. KAŁUŻA, O. MATEJA, K. SKRZYPULEC, *Minikomputerowe wspomaganie badań doświadczalnych z mechaniki*, Mech. Teoret. i Stos., 3/4, 20, 1982
26. W. ANTOSZAK, K. DRZEWIŃSKI, R. KAŁUŻA, K. SKRZYPULEC, *Zastosowanie minikomputera SM-3 do wspomagania badań doświadczalnych z mechaniki konstrukcji*, Pomiar, Automatyka, Kontrola, 3, 1983
27. R. KAŁUŻA, *Zastosowanie minikomputera SM-3 do komputeryzacji badań modelowych stateczności powłokowych chłodni kominowych*, III Konf. Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie, Opole 1982
28. W. ANTOSZAK, K. DRZEWIŃSKI, M. GIGIEL, R. KAŁUŻA, K. SKRZYPULEC, *Realizacja badań stateczności powłokowych chłodni kominowych w trybie on-line przy zastosowaniu minikomputera*, Konf. Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, Białystok, 1983
29. J. W. COOPER, *Minikomputer w laboratorium badawczym na przykładzie zastosowania minikomputera PDP-11*, Centrum Inform. Energetyki i Energii Atomowej, Warszawa, 1980
30. H. ORLOWSKI, *Komputerowe układy automatyki*, WNT, Warszawa 1980
31. R. S. OŻAROWSKI, S. KORNAKCI, *Minikomputery w pracach eksperymentalnych*, WNT, Warszawa 1980
32. H. HOSSDORF, *Statyka modelowa*, Arkady, Warszawa 1975
33. G. E. FORSYTTHE, M. A. MALCOLM, C. B. MOLER, *Computer methods for mathematical computations*, Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, N. J. 07632, 1977

34. W. ZERNA, I. MÜNGAN, *Buckling Stresses of Shells Having Negative Gaussian Curvature*. Buckling of shells, A State-of-the-Art Colequium, Volume 2, Institut fur Baustatik Universitat Stuttgart, May 6 - 7, 1982
35. W. ZERNA, I. MÜNGAN, *Über das Beulen von Kühlturmschalen mit Versteifungsringen*, Beton-und Stahlbetonbau, 2/1981, s. 33 - 36
36. H. J. BENZ, *Kinutische Stabilitätsuntersuchungen für ausgewählte Kühlturmgeometrien*, Konstruktiven Ingenieurbau Berichte 1977, H 29/30 s. 70 - 74
37. I. MÜNGAN, *Experimentelle Beuluntersuchungen und Stabilitäts nachweise für Kühlturmschalen*, Konstruktiver Ingenieurbau Berichte 1977, H 29/30 s. 75 - 80
38. В. И. Гуляев, В. А. Фарзенов, Е. А. Голуляк, *Устойчивость нелинейных механических систем*, Издательство Вижша Школа Львов, 1982.
39. R. KAŁUŻA, *Doświadczalna analiza stateczności powłokowych chłodni kominowych*, XXX Jubileuszowa Konferencja Naukowa KILiW PAN KN PZiTB — Krynica, 1984
40. R. KAŁUŻA, *Doświadczalna analiza stateczności uźebrowanej powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej*. Konferencja Naukowa poświęcona pamięci prof. O. Matei nt. „Powłokowe Budowle Wieżowe”, Opole—Turawa, 9184, Zeszyty Naukowe WSI Opole nr 97, seria: Budownictwo z. 21.
41. *Materials International Symposium on Very Tall Reinforced Concrete Cooling Towers*, International Association for Shell and Spatial Structures, Paryż 1978.

## Р е з ю м е

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ГИПЕРБОЛОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ГРАДИРНИ

В работе обслужены результаты исследований устойчивости шперболоидальной оболочки градирни с постоянной, а также с переменной толщиной оболочки, исследования проведены при симметрично-осевой нагрузке на моделях оболочек гладких, а также оребренных (рис. 1). Оребренные оболочки получены путем приклеивания к гладким оболочкам двух, а также 10-ти ребер расположенных по параллелям. В проведенных исследованиях оболочек укрепленных одним, а также двумя ребрами определены верхняя и нижняя критическая нагрузки (рис. 10, 11, 12, 13). Обнаружено равенство нижней критической нагрузки для оболочки с одним и с двумя ребрами с критической нагрузкой гладкой оболочки (рис. 10). Этого следствия нельзя обобщить на оребренную оболочку с 10-ю ребрами. В работе проведено также сравнение и анализ полученных результатов исследований с результатами исследований за рубежом, в работе даются также критерия применяемые для определения верхних и нижних нагрузок, а также соответствующих или критических напряжений. Это подтверждается примерами.

Измеренную геометрию моделей интерполировано по параллелям многочленами с применением метода сплайнов. Полученные величины критических нагрузок как и величины соответствующих напряжений аппроксимированы многочленами с применением метода наименьших квадратов. Полученные результаты исследований могут быть применены в практике проектирования, а также при верификации теоретических решений проблемы устойчивости шперболоидальной оболочки нагруженной симметрично — осевой нагрузкой (рис. 2).

## S u m m a r y

## EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THE BUCKLING STABILITY OF THE HYPERBOLIC COOLING TOWER SHELL

The results of the experimental investigation of the buckling stability of the cooling tower shell with constant or varying shell thickness for hyperbolic shells with ribs (fig. 1) and without ribs subjected to axially-symmetric loads are presented. Two or ten circumferential ribs were bonded successively to the smooth shell. The upper-limit and lower-limit critical loads were determined for shells with one and two

ribs (fig. 10, 11, 12, 13). The lower-limit critical load values were similar to those obtained for the smooth shell (fig. 10). The results were compared with those obtained by other authors.

The conditions for determination of upper-limit loads and corresponding critical stresses are presented.

The model geometry was interpolated in the circumferential direction using spline functions. The obtained values of critical loads and corresponding stresses were fitted with polynomials using least squares method.

The obtained results may be interesting for the designers and for the research scientists interested in experimental verification of numerical solutions of the buckling stability of hyperbolic shells subjected to axially-symmetrical loads (fig. 2).

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 czerwca 1983 roku.*



## ANALITYCZNE BADANIE INTENSYWNYCH FAL UDERZENIOWYCH W GAZIE POLITROPOWYM W OTOCZENIU GAZOWYCH PRODUKTÓW WYBUCHU

ZBIGNIEW GŁODOWSKI  
EDWARD WŁODARCZYK

*Wojskowa Akademia Techniczna*

### 1. Wstęp

Ważną rolę w fizyce wybuchu spełnia teoria wybuchu skupionego (punktowego). Opisuje ona zjawiska występujące w ośrodkach ciągłych przy wybuchu w nich ładunku o małej objętości i dużej energii (wybuch jądrowy, wybuch stałych materiałów wybuchowych o dużej gęstości, elektrowybuch cienkich folii metali, silne wyładowania elektryczne i inne). Teoria wybuchu skupionego daje możliwość opisanie, z wystarczającą dla celów praktyki dokładnością, charakterystyk niestacjonarnego ruchu ośrodków ciągłych wywołanego nagłym, lokalnym wydzielaniem energii (jądrowej, chemicznej, elektromagnetycznej). Teoria ta znalazła również zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień opływu ciał smukłych strumieniem gazów poruszających się z dużą, naddźwiękową prędkością.

Podstawy teorii wybuchu skupionego stworzyli, niezależnie od siebie, J. G. Taylor [1 i 2] i L. I. Siedow [3 i 4] w latach czterdziestych bieżącego stulecia. Od tego czasu, problemowi niestacjonarnego ruchu gazów, wywołanego wybuchem skupionym, poświęcono wiele prac. Systematyczny opis teorii i ważniejszych wyników prac z tego zakresu wraz z przeglądem literatury światowej podany jest w monografii W. P. Korobiejnikowa, N. S. Mielnikowej i Je. W. Rjazanowa [5].

Teoria wybuchu skupionego opiera się na założeniu, że cała energia wybuchu wydzielana jest w obszarze o zerowej objętości; w punkcie — dla symetrii kulistej, na linii — dla symetrii cylindrycznej oraz na płaszczyźnie — dla symetrii płaskiej (w dwóch ostatnich przypadkach rozpatruje się energię odniesioną odpowiednio do jednostki długości oraz do jednostki powierzchni). Założenie to jest równoważne przyjęciu nieskończonej gęstości energii (energia na jednostkę objętości) wydzielonej w centrum wybuchu.

Taka idealizacja warunku początkowego oraz zaniedbanie wartości ciśnienia przed frontem fali uderzeniowej (przeciwiśnienia), umożliwia redukcję problemu do zagadnienia samopodobnego [6] i uzyskanie zamkniętych rozwiązań, określających charakterystyki niestacjonarnego ruchu gazu idealnego, wywołanego wybuchem ładunku skupionego. Zgodnie z tymi rozwiązaniami prędkość przepływu, ciśnienie i temperatura gazu w początkowej

chwili czasu ( $t = 0$ ) mają nieskończenie wielkie wartości w centrum wybuchu. Natomiast z fizycznych rozważań i danych eksperymentalnych wynika, że wymienione parametry w chwili  $t = 0$  mają duże, ale skończone wartości. Rozbieżność między wynikami teoretycznymi i eksperymentalnymi w otoczeniu centrum symetrii w początkowej chwili czasu spowodowana jest przyjętą idealizacją modelu, dopuszczającą nieskończenie wielką gęstość energii w miejscu wybuchu.

Poza tym, model wybuchu skupionego bez uwzględnienia objętości źródła wydzielającego energię nie pozwala ocenić wpływu geometrii ładunku (jego wymiarów) na rozkład parametrów ruchu i stanu gazu w otoczeniu centrum wybuchu. Z rozwiązań samopodobnych nie można również badać dowolnego, niestacjonarnego ruchu granicy gazowych produktów detonacji (GDP). Istniejące z tego zakresu rozwiązania [7 i 8] mają charakter szczególny — aproksymują prędkość ruchu granicy gazów za pomocą jednomianu potęgowego  $v_0 = ct^n$ .

Mając na uwadze wymienione mankamenty istniejących rozwiązań, w niniejszej pracy podjęliśmy próbę skonstruowania lokalnego w czasie i przestrzeni rozwiązania dla wybuchu skupionego (kulistego, cylindrycznego i płaskiego) w gazie politropowym z uwzględnieniem skończonej gęstości energii w centrum wybuchu. Rozwiązanie to przedstawimy w postaci szeregów Taylora dla funkcji jednej i dwóch zmiennych niezależnych ( $r, t$ ), przy czym współczynniki rozwinięcia określimy za pomocą równań ruchu i warunków granicznych, odpowiednią ilość razy różniczkowanych.

Zdaniem autorów, prezentowane rozwiązanie stanowi istotny przyczynek do teorii wybuchu skupionego.

## 2. Sformułowanie problemu

Będziemy badać niestacjonarny ruch układu mechanicznego, złożonego z wkłuzji o symetrii kulistej (kula), cylindrycznej (cylinder o nieskończonej długości) lub płaskiej (warstwa o nieskończonych wymiarach powierzchniowych), zanurzonej w nieograniczonej przestrzeni wypełnionej jednorodnym, niezaburzonym gazem politropowym.

Zakładamy, że w chwili  $t = 0$  w całej objętości wkłuzji nastąpiło nagłe wydzielenie energii o skończonej wartości  $E_0$ . Jak już wspomniano we wstępie, w przypadku symetrii cylindrycznej —  $E_0$  oznacza energię wydzieloną z jednostki długości cylindra, a dla symetrii płaskiej — z jednostki powierzchni warstwy.

Fizycznym modelem takiego układu może być, na przykład, natychmiastowy wybuch kulistego, cylindrycznego lub płaskiego ładunku materiału wybuchowego (MW) w przestrzeni nieograniczonej, wypełnionej gazem politropowym. Dla ujednoznacznienia dalszych rozważań przyjmujemy, że źródłem energii  $E_0$  jest natychmiastowa detonacja odpowiedniego ładunku MW. Przez  $r_0$  oznaczymy początkowy promień ładunku kulistego (cylindrycznego) lub połowę grubości warstwy ładunku płaskiego.

Z doświadczenia i hydrodynamicznej teorii ruchu gazu doskonałego wynika, że w opisanych warunkach w niezaburzonym gazie propagować się będzie, ze zmienną prędkością, fala uderzeniowa, wygenerowana rozszerzającymi się gazowymi produktami detonacji, które spełniają rolę ruchomego tłoka.

Jeśli przyjąć, że za czołem fali uderzeniowej ruch gazu ma charakter adiabatyczny, to



rozwiązanie tak zdefiniowanego zagadnienia początkowo-brzegowego sprowadza się do całkowania następującego układu równań:

$$\begin{aligned} p_{,r} &= -\varrho_1 \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} v_{,t} \\ \varrho(r+u)_{,r} &= \varrho_1 \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \\ \varrho p_{,t} - \gamma p \varrho_{,t} &= 0 \\ v &= u_{,t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie  $r$  jest współrzędną Lagrange'a, a  $t$  oznacza czas.

Wielkości  $p$ ,  $\varrho$ ,  $u$ ,  $v$  i  $\gamma$  odpowiednio oznaczają: ciśnienie, gęstość, przemieszczenie, prędkość przepływu i wykładnik izentropy gazu;  $\varrho_1$  jest wielkością stałą, charakteryzującą początkową gęstość gazu.

Symbolem  $\nu$  oznaczono wskaźnik symetrii, przy czym  $\nu$  przyjmuje wartości:

1 — dla symetrii płaskiej, 2 — dla symetrii cylindrycznej i 3 — dla symetrii kulistej.

Na czole fali silnej nieciągłości równania różniczkowe (2.1) tracą sens. W ich miejsce, z praw zachowania otrzymujemy związki w formie skończonej o następującej postaci:

$$\begin{aligned} \varrho_1(c-v_1) &= \varrho_2(c-v_2), \\ \varrho_1 v_1(c-v_1) - p_1 &= \varrho_2 v_2(c-v_2) - p_2, \\ \varrho_1(c-v_1) \left( \frac{v_1^2}{2} + \varepsilon_1 \right) - p_1 v_1 &= \varrho_2(c-v_2) \left( \frac{v_2^2}{2} + \varepsilon_2 \right) - p_2 v_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie literami  $c$  i  $\varepsilon$  odpowiednio oznaczono prędkość propagacji czoła fali w danym ośrodku oraz energię wewnętrzną jednostki masy ośrodka. Indeksy 1 i 2 identyfikują poszczególne parametry stanu i ruchu ośrodka przed i na czole fali.

Jeśli wziąć pod uwagę, że ośrodek przed czołem fali jest nieruchomy ( $v_1 = 0$ ) oraz, że dla gazu doskonałego mamy:

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma-1)\varrho}; \quad a_1 = \left( \gamma \frac{p_1}{\varrho_1} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

to związki (2.2) można, po przekształceniach, uprościć do postaci:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1} (1-q)c \\ \varrho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \varrho_1 \left( 1 + \frac{2q}{\gamma-1} \right)^{-1} \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1} \varrho_1 c^2 \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} q \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

lub

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{1-q}{\sqrt{q}} a_1 \\ \varrho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2q} \varrho_1 \\ p_2 &= \frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{(\gamma+1)q} p_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie parametr  $q = (a_1/c)^2$  charakteryzuje intensywność fali uderzeniowej;  $a_1$  jest prędkością propagacji dźwięku w gazie niezaburzonym.

Z trzeciego wyrażenia (2.5)<sub>3</sub> bezpośrednio otrzymujemy:

$$q = \frac{2\gamma}{(\gamma+1)p_2/p_1 + \gamma - 1} \quad (2.6)$$

Dalej, z wzoru tego wynika, że dla silnych fal uderzeniowych ( $p_2/p_1 \geq 1$ ) parametr  $q$  jest mały.

Dla  $q$  zmierzającego do zera, związki na czole fali uderzeniowej przyjmują prostą postać:

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1} c; \quad \varrho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \varrho_1; \quad p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \varrho_1 c^2. \quad (2.7)$$

Z analizy obliczeń liczbowych można wyciągnąć wniosek, że dla  $q < 0,01$  błąd określania wartości poszczególnych parametrów wg wzorów przybliżonych (2.7) nie przekracza 5%. Zatem dla fal poruszających się z prędkością  $c > 10a_1$  i niosących na swym czole ciśnienie  $p_2 > 100p_1$  można, z wystarczającą dla celów praktyki dokładnością, posługiwać się wzorami uproszczonymi (2.7). Takim właśnie falom poświęcona jest niniejsza praca.

Przejdziemy obecnie do sformułowania modelu ruchu GPD. Jak już wspomniano, stosujemy hipotezę natychmiastowej (momentalnej) detonacji ładunku wybuchowego. Stosowanie tej hipotezy w praktyce inżynierskiej jest uzasadnione małym udziałem energii kinetycznej w bilansie energetycznym GPD w fali detonacyjnej.

Dla przykładu w tablicy 1 podajemy ułamkowe udziały energii potencjalnej i kinetycznej GPD w fali detonacyjnej trotylu.

Tablica 1

Udział energii	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$
Energia potencjalna	0,939613	0,926581	0,920597
Energia kinetyczna	0,060387	0,073419	0,079403

Jak widać z zamieszczonych danych, największy udział energii kinetycznej (symetria kulista) nie przekracza 8%. Podobne wyniki uzyskuje się dla innych, stałych materiałów wybuchowych. Zatem w fali detonacyjnej ponad 90% energii GPD stanowi energia potencjalna (sprężysta i ciepła). Energię kinetyczną można zaniedbać — tym samym przyjmujemy, że cząstki GPD w czasie detonacji pozostają nieruchome. W wyniku tego założenia początkowa gęstość GPD równa się gęstości materiału wybuchowego, którą oznaczymy przez  $\varrho_{0e}$ . Natomiast ciśnienie początkowe  $p_{0e}$  określamy z następującego wzoru [9]:

$$p_{0e} = 0,5p_H; \quad p_H = \frac{\varrho_{0e} D^2}{k_H + 1}, \quad (2.8)$$

gdzie  $p_H$  oznacza ciśnienie GPD w punkcie Jougueta,  $D$  jest prędkością detonacji, a  $k_H$  — wykładnikiem izentropy GPD.

Jeśli zaniedbać zjawiska falowe w GPD i założyć, że gazowe produkty detonacji roz-

szerzają się w sposób adiabatyczny [10, 11], to średnią gęstość  $\varrho_e(t)$  i średnie ciśnienie  $p_e(t)$  w GPD można określić z następujących wzorów:

$$\varrho_{GPD}(r_0, t) = \varrho_e(t) = \varrho_{0e} \left[ \frac{r_0}{R_0(t)} \right]^r, \quad (2.9)$$

$$p_{GPD}(r_0, t) = p_e(t) = p_{0e} \left[ \frac{r_0}{R_0(t)} \right]^{rk_0}, \quad (2.10)$$

gdzie:

$$R_0(t) = r_0 + u(r_0, t), \quad (2.11)$$

$k_0$  jest skorelowanym wykładnikiem politropy GPD.

Sposób określania jego wartości podany jest w pracy [12]. Jest on nieco większy od wykładnika izentropy GPD w punkcie Jougueta ( $k_0 > k_H$ ). Przykładowe wartości  $k_0$  i  $k_H$  dla kilku klasycznych MW podajemy w tabelicy 2.

Tablica 2

MW	$\varrho_{0e}$ kg/m <sup>3</sup>	$p_{11}$ MPa	$D$ m/s	$k_{11}$	$k_0$
Trotyl	1630	21000	6930	2,73	3,00
TH 36/64	1717	29500	7980	2,71	3,00
Oktozen	1891	42000	9110	2,74	3,40
Pentryt	1770	33500	8300	2,64	2,90
Nitrometan	1128	12500	6280	2,56	2,73

Wymienione dotychczas warunki graniczne uzupełniają dodatkowo warunki ciągłości ciśnienia i prędkości na granicy kontaktowej GPD tj:

$$p(r_0 t) = p_e(t); \quad v(r_0, t) = v_e(t). \quad (2.12)$$

Ponadto przyjmujemy, że ośrodek gazowy przed czołem fali uderzeniowej jest niezaburzony. Zatem warunki początkowe mają postać:

$$u(r, 0) = 0; \quad v(r, 0) = 0; \quad p(r, 0) = p_1; \quad \varrho(r, 0) = \varrho_1. \quad (2.13)$$

Tym samym problem został jednoznacznie sformułowany. Przejdziemy obecnie do konstrukcji lokalnego (ograniczonego w czasie i przestrzeni) rozwiązania przedstawionego zagadnienia granicznego.

### 3. Lokalne rozwiązanie problemu

**3.1. Uwagi ogólne.** Pełne rozwiązanie sformułowanego w poprzednim rozdziale problemu sprowadza się do konstrukcji rozwiązania zmodyfikowanego zagadnienia Goursata [13] dla układu równań (2.1) z warunkami granicznymi (2.7) ÷ (2.13). Modyfikacja zagadnienia

Goursata w rozpatrywanym przypadku polega na nieznanym brzegu obszaru, w którym poszukujemy rozwiązania problemu. Jest nim czoło fali uderzeniowej  $r = R(t)$ . Będziemy go poszukiwać w formie szeregu Taylora o postaci:

$$R(t) = r_0 + R'(0)t + \frac{1}{2} R''(0)t^2 + \frac{1}{6} R'''(0)t^3 + \dots \quad (3.1)$$

Analogicznym szeregiem przedstawiamy położenie granicy kontaktowej GPD:

$$R_0(t) = r_0 + u(r_0, t) = r_0 + R'_0(0)t + \frac{1}{2} R''_0(0)t^2 + \frac{1}{6} R'''_0(0)t^3 + \dots \quad (3.2)$$

W podobnym ujęciu przedstawimy charakterystyki niestacjonarnego ruchu gazu z czołem fali uderzeniowej, a mianowicie:

$$F(r, t) = F(r_0, 0) + F_{,r}(r_0, 0)(r - r_0) + F_{,t}(r_0, 0)t + \frac{1}{2} [F_{,rr}(r_0, 0)(r - r_0)^2 + 2F_{,rt}(r_0, 0)(r - r_0)t + F_{,tt}(r_0, 0)t^2] + \dots \quad (3.3)$$

gdzie symbol  $F(r, t)$  reprezentuje następujące funkcje:  $u(r, t)$ ,  $v(r, t)$ ,  $p(r, t)$  i  $\varrho(r, t)$ .

Zatem dla uzyskania lokalnego rozwiązania przedstawionego problemu należy jednoznacznie określić współczynniki szeregów (3.1) — (3.3). Wykorzystamy do tego celu równania problemu (2.1) oraz warunki graniczne (2.7) - (2.13).

**3.2. Określenie wartości funkcji w punkcie rozwinięcia  $(r_0, 0)$ .** Zgodnie z trzecim warunkiem (2.7) prędkość propagacji czoła fali uderzeniowej wynosi:

$$c(t) = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \frac{p_2(t)}{\varrho_1} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

Stąd dla  $t = 0$ , po wykorzystaniu (2.8) mamy:

$$c(0) = c_0 = \left( \frac{\gamma + 1}{4} \frac{p_H}{\varrho_1} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma + 1}{k_H + 1} \frac{\varrho_{0e}}{\varrho_1} \right)^{1/2} D \quad (3.5)$$

Następnie wykorzystując związki (2.7) oraz warunki początkowe (2.8) i (2.13) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u(r_0, 0) &= u_{02} = 0; \\ v(r_0, 0) &= v_{02} = \frac{2}{\gamma + 1} c_0 = \left( \frac{1}{\gamma + 1} \frac{p_H}{\varrho_1} \right)^{1/2} = \frac{1}{\gamma + 1} \left( \frac{\gamma + 1}{k_H + 1} \frac{\varrho_{0e}}{\varrho_1} \right)^{1/2} D; \\ p(r_0, 0) &= p_{02} = \frac{2}{\gamma + 1} \varrho_1 c_0^2 = \frac{p_H}{2} = \frac{\varrho_{0e} D^2}{2(k_H + 1)}; \\ \varrho(r_0, 0) &= \varrho_{02} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \varrho_1; \\ R(0) &= r_0 + u_{02} = r_0; \quad R_0(0) = r_0 + u_{02} = r_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**3.3. Określenie wartości pierwszych pochodnych funkcji w punkcie  $(r_0, 0)$ .** Z równań (2.1)<sub>2</sub> i (2.1)<sub>4</sub> bezpośrednio wynika, że

$$\begin{aligned} u_{,r}(r, t) &= \left( \frac{r}{r + u} \right)^{\gamma - 1} \frac{\varrho_1}{\varrho} - 1; \\ u_{,t}(r, t) &= v(r, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dalej, różniczkując warunek brzegowy (2.10) względem czasu  $t$  i wykorzystując warunek ciągłości ciśnienia (2.12) otrzymujemy:

$$p_{,t}(r_0, t) = -\nu k_0 p_{0e} \left[ \frac{r_0}{R_0(t)} \right]^{\nu k_0} \frac{R_0'(t)}{R_0(t)}, \quad (3.8)$$

gdzie:

$$p_{0e} = p_{02} = \frac{2}{\gamma+1} \varrho_1 c_0^2, \quad R_0'(t) = v(r_0, t). \quad (3.9)$$

Następnie z (2.1)<sub>3</sub> mamy:

$$\varrho_{,t}(r, t) = \frac{\varrho}{\gamma p} p_{,t}(r, t). \quad (3.10)$$

Z kolei różniczkując równanie (2.1)<sub>2</sub> względem czasu, po rozwikłaniu uzyskujemy:

$$v_{,r}(r, t) = - \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \left[ \frac{\varrho'_{,t}(r, t)}{\varrho} + (\nu-1) \frac{v}{r+u} \right] \frac{\varrho_1}{\varrho}. \quad (3.11)$$

Dla określenia pozostałych pochodnych funkcji  $p$ ,  $\varrho$  i  $v$ , różniczkujemy związki (2.7) wzdłuż trajektorii czoła fali uderzeniowej w wyniku czego otrzymujemy:

$$v'_2(t) = \frac{2}{\gamma+1} c'(t); \quad \varrho'_2(t) \equiv 0; \quad p'_2(t) = \frac{4}{\gamma+1} \varrho_1 c c'(t). \quad (3.12)$$

Z drugiej strony, zgodnie z definicją pochodnej w danym kierunku, mamy:

$$\begin{aligned} v'_2(t) &= v_{,r}c + v_{,t}; & \varrho'_2(t) &= \varrho_{,r}c + \varrho_{,t}; \\ p'_2(t) &= p_{,r}c + p_{,t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Przyrównując prawe strony równań (3.12) i (3.13) oraz wykorzystując równanie (2.1)<sub>1</sub>, po rozwikłaniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varrho_{,r}(r, t)|_{r=R(t)} &= -\frac{1}{c(t)} \varrho_{,t}(r, t)|_{r=R(t)}, \\ v_{,t}(r, t)|_{r=R(t)} &= \frac{2}{\gamma+1} c'(t) - c v_{,r}(r, t)|_{r=R(t)}, \\ p_{,r}(r, t) &= -\varrho_1 \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} v_{,t}(r, t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdzie:

$$c'(t) = \frac{\gamma+1}{2\varrho_1 c} \frac{p_{,t}(r, t) + \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \varrho_1 c^2 v_{,r}(r, t)}{2 + \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1}}. \quad (3.15)$$

Z definicji funkcji  $R_0(t)$  i  $R(t)$  wynika, że:

$$\begin{aligned} R_0'(t) &= u_{,t}(r_0, t) = v(r_0, t), \\ R'(t) &= c(t) = \frac{\gamma+1}{2} v_2(t), \\ R_0''(t) &= u_{,tt}(r_0, t) = v_{,t}(r_0, t), \\ R''(t) &= c'(t), \quad \text{itd.} \end{aligned} \quad (3.16)$$

W ten sposób wyprowadziliśmy zamknięte wzory na wszystkie pierwsze pochodne poszukiwanych funkcji. Ponadto, rozwiązując układ równań (3.12) i (3.13) oraz (2.1)<sub>1</sub>, określono również drugie pochodne funkcji  $R(t)$  i  $R_0(t)$ .

Z wzorów tych, po wykorzystaniu wartości funkcji (3.6) i przekształceniach, w punkcie  $(r_0, 0)$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_{,r}(r_0, 0) &= -\frac{1}{c_0} u_{,t}(r_0, 0) = -\frac{v_{02}}{c_0} = -\frac{2}{\gamma+1}, \\ v_{,r}(r_0, 0) &= \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)^2} [\gamma + \nu(k_0 - \gamma)] \frac{c_0}{r_0}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$v_{,t}(r_0, 0) = -\frac{1}{\varrho_1} p_{,r}(r_0, 0) = -\frac{4}{3\gamma(\gamma+1)^2} \{ \nu k_0 \gamma + (\gamma-1) [\gamma + \nu(k_0 - \gamma)] \} \frac{c_0^2}{r_0},$$

$$p_{,t}(r_0, 0) = -\frac{4\nu k_0}{(\gamma+1)^2} \varrho_1 \frac{c_0^3}{r_0},$$

$$\varrho_{,r}(r_0, 0) = -\frac{1}{c_0} \varrho_{,t}(r_0, 0) = \frac{2\nu k_0}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\varrho_1}{r_0},$$

$$R'(0) = c_0; \quad R'_0(0) = v_{02} = \frac{2}{\gamma+1} c_0,$$

$$R''(0) = c'(0) = -\frac{2\nu k_0 \gamma - (\gamma-1) [\nu(k_0 - \gamma) + \gamma]}{3\gamma(\gamma+1)} \frac{c_0^2}{r_0}, \quad (3.18)$$

$$R''_0(0) = v_{,t}(r_0, 0).$$

**3.4. Określenie wartości drugich pochodnych funkcji w punkcie  $(r_0, 0)$ .** Z wyrażeń (3.7), po zróżniczkowaniu względem  $r$  i  $t$ , otrzymujemy:

$$u_{,rr}(r, t) = \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \left[ \frac{(\gamma-1)(u/r - u_{,r}(r, t))}{r+u} - \frac{\varrho_{,r}(r, t)}{\varrho} \right] \frac{\varrho_1}{\varrho}, \quad (3.19)$$

$$u_{,rt}(r, t) = v_{,r}(r, t), \quad u_{,tt}(r, t) = v_{,t}(r, t).$$

Z kolei różniczkując wyrażenia (3.8), (3.10), (3.11) i (2.1)<sub>1</sub> względem czasu  $t$  mamy:

$$\begin{aligned} p_{,tt}(r_0, t) &= \nu k_0 p_{0e} \left[ \frac{r_0}{R_0(t)} \right]^{\nu k_0} \left[ -\frac{R'_0(t)}{R_0(t)} + (1 + \nu k_0) \frac{R_0'^2(t)}{R_0^2(t)} \right], \\ \varrho_{,tt}(r, t) &= \frac{\varrho}{\gamma p} p_{,tt}(r, t) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{\varrho}{p^2} p_{,t}^2(r, t), \\ v_{,rt}(r, t) &= \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho} \right)^3 \frac{1}{\varrho_1^2} \left\{ -\varrho \varrho_{,tt}(r, t) + 2\varrho_{,t}^2(r, t) + \right. \\ &\quad \left. + (\nu-1) \left[ 2 \frac{\varrho v}{r+u} \varrho_{,t}(r, t) - \varrho^2 \frac{v_{,t}(r, t)}{r+u} + \nu \varrho^2 \left( \frac{v}{r+u} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.20) \\ v_{,tt}(r, t) &= -\frac{1}{\varrho_1} \left( \frac{r+u}{r} \right)^{\nu-1} \left\{ \frac{\gamma p}{\varrho} \varrho_{,rt}(r, t) + \gamma \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} \left[ p_{,r}(r, t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{p}{\varrho} \varrho_{,r}(r, t) \right] \right\} + (\nu-1) \frac{v}{r+u} v_{,t}(r, t). \end{aligned}$$

Dalej z równań (2.1)<sub>1</sub>, (2.1)<sub>3</sub> i (3.11) po zróżniczkowaniu względem  $r$  i rozwikłaniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 p_{,rr}(r, t) &= -\left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \left[ v_{,rt}(r, t) + \frac{(\nu-1)(u|r-u_{,r}(r, t))}{r+u} v_{,t}(r, t) \right] \varrho_1 \\
 p_{,rt}(r, t) &= \frac{\gamma p}{\varrho} \varrho_{,rt}(r, t) + \gamma \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} \left[ p_{,r}(r, t) - \frac{p}{\varrho} \varrho_{,r}(r, t) \right] \\
 v_{,rr}(r, t) &= -\left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \varrho_{,rt}(r, t) - \left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left\{ \left[ \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\nu-1) \frac{v}{r+u} \right] \left[ \frac{(\nu-1)(u|r-u_{,r}(r, t))}{r+u} - \frac{\varrho_{,r}(r, t)}{\varrho} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\varrho_{,r}(r, t)\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho^2} + (\nu-1) \left[ \frac{v_{,r}(r, t)}{r+u} - \frac{v}{(r+u)^2} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \right] \right\} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Następnie różniczkując wyrażenia (3.12) i (3.13) wzdłuż trajektorii czoła fali, po rozwikłaniu mamy:

$$\begin{aligned}
 \varrho_{,rr}(r, t)|_{r=R(t)} &= -\frac{2}{c} \varrho_{,rt}(r, t)|_{r=R(t)} - \frac{1}{c^2} \varrho_{,tt}(r, t)|_{r=R(t)} + \\
 &\quad - \frac{c'(t)}{c^2} \varrho_{,r}(r, t)|_{r=R(t)} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

$$\varrho_{,rt}(r, t)|_{r=R(t)} = -\frac{(\gamma+1)^2}{(\gamma-1)(5\gamma-1)} \frac{\varrho_1}{c_0^2} L(r, t)|_{r=R(t)}$$

$$R_0'''(t) = c''(t) = \frac{\gamma+1}{2} [c^2 v_{,rr}(r, t) + 2c v_{,rt}(r, t) + v_{,tt}(r, t) + c'(t) v_{,r}(r, t)]|_{r=R(t)}, \quad (3.23)$$

$$R_0'''(t) = v_{,tt}(r_0, t),$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 L(r, t)|_{r=R(t)} &= \left[ \frac{c}{2\varrho_1} p_{,rr}(r, t) + \frac{1}{2\varrho_1 c} p_{,tt}(r, t) - 2c v_{,rt}(r, t) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A(r, t)}{\varrho_1} - B(r, t) - c^2 C(r, t) + \frac{c'(t)}{2\varrho_1 c} p_{,r}(r, t) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{\gamma+1} \frac{c'^2(t)}{c} - c'(t) v_{,r}(r, t) \right]_{r=R(t)}, \\
 A(r, t) &= \gamma \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} \left[ p_{,r}(r, t) - \frac{p}{\varrho} \varrho_{,r}(r, t) \right], \\
 B(r, t) &= -\left(\frac{r+u}{r}\right)^{\nu-1} \frac{A(r, t)}{\varrho_1} + (\nu-1) \frac{v}{r+u} v_{,t}(r, t), \\
 C(r, t) &= -\left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left\{ \left[ \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} + (\nu-1) \frac{v}{r+u} \right] \left[ \frac{(\nu-1)(u|r-u_{,r}(r, t))}{r+u} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\nu-1) \frac{v}{r+u} \right] \left[ \frac{(\nu-1)(u|r-u_{,r}(r, t))}{r+u} - \frac{\varrho_{,r}(r, t)}{\varrho} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\varrho_{,r}(r, t)\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho^2} + (\nu-1) \left[ \frac{v_{,r}(r, t)}{r+u} - \frac{v}{(r+u)^2} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \right] \right\} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\varrho_{,r}(r, t)}{\varrho} \right] - \frac{\varrho_{,r}(r, t)\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho^2} + (\nu-1) \left[ \frac{v_{,r}(r, t)}{r+u} + \right. \\ \left. - \frac{v}{(r+u)^2} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \right] \Bigg\}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy komplet wzorów na drugie pochodne poszukiwanych funkcji  $u, v, p, i$  oraz trzecie pochodne  $R'''(t)$  i  $R_0'''(t)$ . Z wzorów tych w punkcie rozwinięcia  $(r_0, 0)$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_{,rr}(r_0, 0) &= - \frac{v_{,r}(r_0, 0)}{c_0} = - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)^2} [\nu(k_0-\gamma) + \gamma] \frac{1}{r_0}, \\ u_{,ri}(r_0, 0) &= v_{,r}(r_0, 0) = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)^2} [\nu(k_0-\gamma) + \gamma] \frac{c_0}{r_0}, \\ u_{,ii}(r_0, 0) &= v_{,i}(r_0, 0) = - \frac{4}{3\gamma(\gamma+1)^2} \{ \nu k_0 \gamma + (\gamma-1) [\gamma + \nu(k_0-\gamma)] \} \frac{c_0^2}{r_0}, \\ v_{,rr}(r_0, 0) &= - \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{\varrho_1} \varrho_{,ri}(r_0, 0) + C(r_0, 0), \\ v_{,ri}(r_0, 0) &= \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^3} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\nu k_0}{\gamma} \left[ (\nu-1) \left( \gamma + \frac{\gamma-1}{\nu} \frac{\gamma}{k_0} + \frac{\gamma-1}{k_0} (k_0-\gamma) \right) - 4\nu k_0 - \gamma + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 - \frac{\nu}{\gamma} (k_0-\gamma)(\gamma-1) \right] + 4(\gamma-1) \left( \frac{\nu k_0}{\gamma} \right)^2 + 8 \frac{\nu k_0}{\gamma} \left( \frac{\nu k_0}{\gamma} - \nu + 1 \right) + 4\nu(\nu-1) \right\} \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\ v_{,ii}(r_0, 0) &= - \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{c_0^2}{\varrho_1} \varrho_{,ri}(r_0, 0) + B(r_0, 0), \tag{3.25} \\ p_{,rr}(r_0, 0) &= - \frac{4}{3} \frac{\nu k_0}{\gamma} \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^3} \left\{ 4 \frac{\nu k_0}{\gamma} - 2\nu k_0 - 3 + (\nu-1) \left[ 2\gamma - 7 + \frac{\gamma-1}{\nu} \frac{\gamma}{k_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\gamma-1}{k_0} (k_0-\gamma) + \frac{3\gamma}{k_0} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} - \frac{2}{\nu k_0} (\gamma + \nu(k_0-\gamma)) \right] \right\} \varrho_1 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\ p_{,ri}(r_0, 0) &= \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} c_0^2 \varrho_{,ri}(r_0, 0) + A(r_0, 0), \\ p_{,ii}(r_0, 0) &= \frac{8}{3} \frac{\nu k_0}{(\gamma+1)^3} \left[ 4\nu k_0 + \gamma + 2 + \frac{\nu(k_0-\gamma)(\gamma-1)}{\gamma} \right] \varrho_1 c_0^2 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\ \varrho_{,rr}(r_0, 0) &= - \frac{2}{c_0} \varrho_{,ri}(r_0, 0) + D(r_0, 0), \\ \varrho_{,ri}(r_0, 0) &= - \frac{(\gamma+1)^2}{(\gamma-1)(5\gamma-1)} \frac{\varrho_1}{c_0^2} L(r_0, 0), \\ \varrho_{,ii}(r_0, 0) &= \left\{ \frac{4}{3} \frac{\nu k_0}{\gamma^2(\gamma^2-1)} [\gamma(4\nu k_0 + \gamma + 2) + \nu(k_0-\gamma)(\gamma-1)] - \frac{4(\nu k_0)^2}{\gamma^2(\gamma+1)} \right\} \varrho_1 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\ R'''(0) &= c''(0) = \frac{\gamma+1}{2} [c_0^2 v_{,rr}(r_0, 0) + 2c_0 v_{,ri}(r_0, 0) + v_{,ii}(r_0, 0) + c'(0) v_{,r}(r_0, 0)], \\ R_0'''(0) &= v_{,ii}(r_0, 0), \end{aligned}$$



gdzie:

$$\begin{aligned}
 A(r_0, 0) &= -\frac{8\nu}{(\gamma+1)^3} \frac{k_0}{\gamma} \left\{ \frac{\nu k_0 \gamma + (\gamma-1)[\gamma + \nu(k_0 - \gamma)]}{3} - \nu k_0 \right\} \varrho_1 c_0 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\
 B(r_0, 0) &= \frac{8}{3} \frac{\nu}{(\gamma+1)^3} \frac{k_0}{\gamma} \left\{ \nu \gamma \left( k_0 - \frac{\nu-1}{\nu} \right) + \frac{\gamma(\gamma-1)}{k_0} (\nu k_0 - \nu + 1) \left( \frac{1}{\nu} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{k_0 - \gamma}{\gamma} \right) - 3\nu k_0 \right\} c_0 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\
 C(r_0, 0) &= -\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^3} \left\{ (\nu-1)^2 + 2 \left( \frac{\nu k_0}{\gamma} \right)^2 + \frac{\nu(\nu-1)}{\gamma} \left[ \frac{(\gamma-1)(k_0 - \gamma)}{2} - 2k_0 \right] \right\} \frac{c_0}{r_0^2}, \\
 D(r_0, 0) &= -2 \frac{\nu k_0}{\gamma(\gamma^2-1)} \left[ \gamma + 1 + 2\nu \frac{k_0}{\gamma} + \nu \frac{(\gamma-1)(k_0 - \gamma)}{\gamma} \right] \frac{\varrho_1}{r_0^2}.
 \end{aligned}$$

Postępując w analogiczny sposób można wyprowadzić wzory na pochodne poszukiwanych funkcji dowolnego rzędu. Tym samym można dość dokładnie określić charakterystyki niestacjonarnego ruchu gazu doskonałego w bezpośrednim otoczeniu centrum wybuchu.

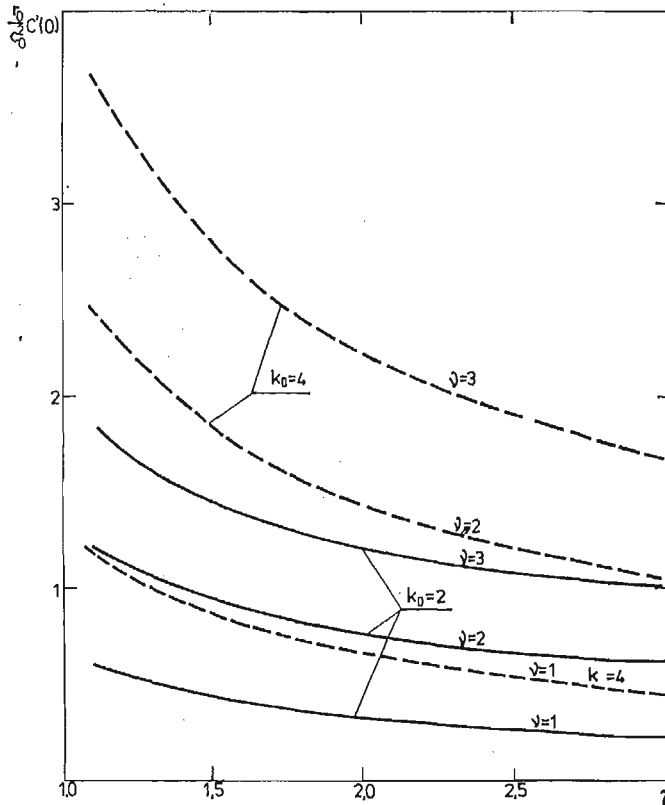
**3.5. Uproszczona wersja wzorów.** Wyprowadzone w poprzednich punktach wzory ulegają znacznemu uproszczeniu w przypadku, gdy  $k_0 = \gamma$ . Mamy wówczas:

$$\begin{aligned}
 v_{,r}(r_0, 0) &= \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{c_0}{r_0}, \\
 v_{,t}(r_0, 0) &= -\frac{1}{\varrho_1} p_{,r}(r_0, 0) = -\frac{4}{3} \frac{(\nu+1)\gamma-1}{(\gamma+1)^2} \frac{c_0^2}{r_0}, \\
 p_{,t}(r_0, 0) &= -\frac{4\nu\gamma}{(\gamma+1)^2} \varrho_1 \frac{c_0^3}{r_0}, \\
 \varrho_{,r}(r_0, 0) &= -\frac{1}{c_0} \varrho_{,t}(r_0, 0) = \frac{2\nu}{\gamma-1} \frac{\varrho_1}{r_0}, \\
 R''(0) = c'(0) &= -\frac{(2\nu-1)\gamma+1}{3(\gamma+1)} \frac{c_0^2}{r_0}, \\
 v_{,rr}(r_0, 0) &= -\left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{\varrho_1} \varrho_{,rr}(r_0, 0) - \frac{4(\gamma-1)(\nu^2+1)}{(\gamma+1)^3} \frac{c_0}{r_0^2}, \\
 v_{,rt}(r_0, 0) &= \frac{4}{3} \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^3} [1 - (\nu+1)\gamma] \frac{c_0^2}{r_0^2}, \\
 v_{,tt}(r_0, 0) &= -\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{c_0^2}{\varrho_1} \varrho_{,rt}(r_0, 0) + \frac{8}{3} \frac{\gamma^2\nu(\nu+1) - \gamma\nu(4\nu+1) + \nu + \gamma - 1}{(\gamma+1)^3} \frac{c_0^3}{r_0^2}, \\
 p_{,rr}(r_0, 0) &= \frac{4}{3} \frac{1}{(\gamma+1)^3} [\nu\gamma(2\gamma-1) + \gamma^2(\nu+1) - 4(\gamma-\nu) - 3] \frac{\varrho_1 c_0^2}{r_0^2}, \\
 p_{,rt}(r_0, 0) &= \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} c_0^2 \varrho_{,rt}(r_0, 0) - \frac{8\nu\gamma}{(\gamma+1)^3} \left[ \frac{\gamma(\nu+1)-1}{3} - \nu \right] \varrho_1 \frac{c_0^3}{r_0^2}, \\
 p_{,tt}(r_0, 0) &= \frac{8}{3} \frac{\nu\gamma[(4\nu+1)\gamma+2]}{(\gamma+1)^3} \frac{\varrho_1 c_0^4}{r_0^2},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

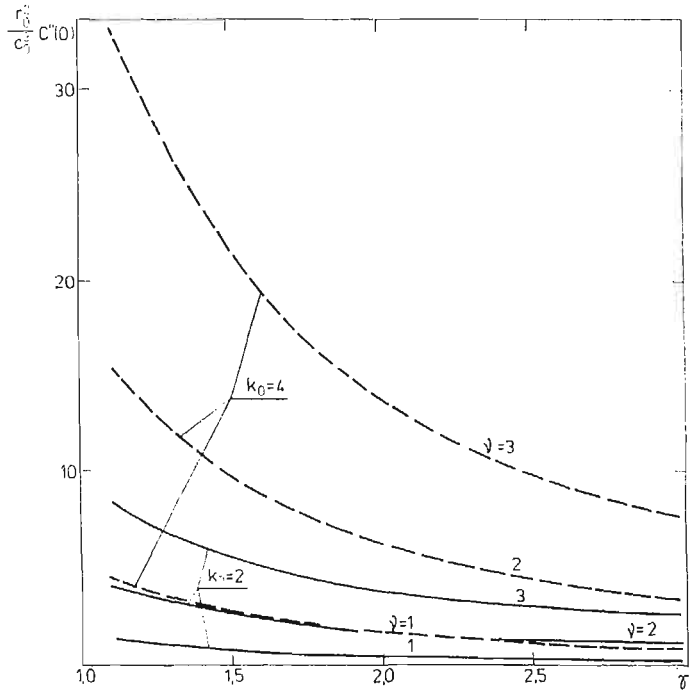
$$\begin{aligned} \varrho_{,rr}(r_0, 0) &= -\frac{2}{c_0} \varrho_{,rr}(r_0, 0) - \frac{2\nu}{\gamma^2 - 1} (\gamma + 2\nu + 1) \left( \frac{\varrho_1}{r_0^2} \right), \\ \varrho_{,ri}(r_0, 0) &= \frac{4}{3} \frac{\gamma^2(\nu^2 - 2\nu - 2) - \gamma(17\nu^2 + 14\nu - 16) + 3\nu^2 - 12\nu + 11}{(\gamma + 1)(5\gamma - 1)(\gamma - 1)} \frac{\varrho_1 c_0}{r_0^2}, \\ \varrho_{,ii}(r_0, 0) &= \left[ \frac{4}{3} \nu \frac{\gamma(4\nu + 1) + 2}{\gamma^2 - 1} - \frac{4\nu^2}{\gamma + 1} \right] \varrho_1 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2. \end{aligned}$$

#### 4. Uwagi końcowe

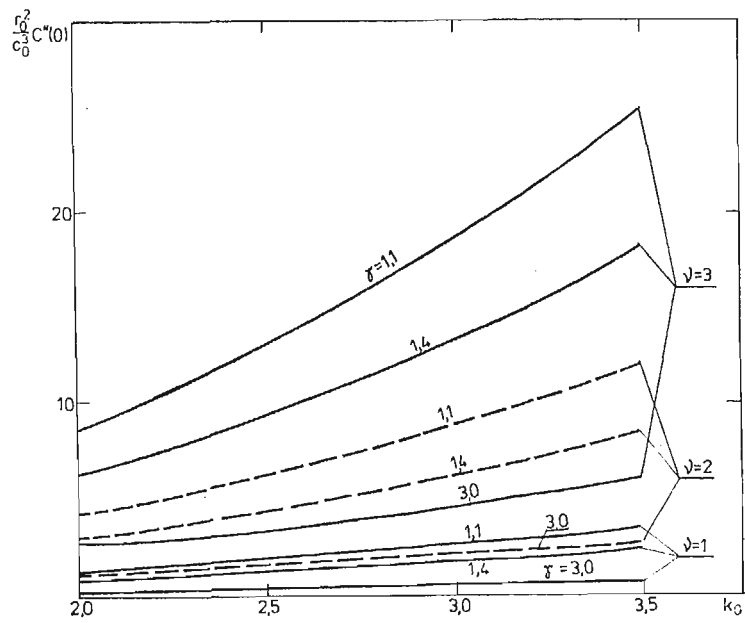
Z wyprowadzonych zależności wynika, że charakterystyki stanu i niestacjonarnego ruchu gazu politropowego w otoczeniu centrum silnego wybuchu zależą od następujących parametrów:  $\gamma$ ,  $k_0$ ,  $\nu$ ,  $\varrho_1$ ,  $\varrho_{0e}$ ,  $D$  i  $r_0$ . Zależność ta widoczna jest w sposób jawny w wyprowadzonych wzorach na współczynniki szeregów Taylora charakteryzujących poszczególne funkcje. Przykładowy charakter zmian pierwszego i drugiego współczynnika szeregu określającego trajektorię czoła fali uderzeniowej pokazujemy w formie bezwymiarowej na rysunkach 1 do 3.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

Tablica 3

Pochnodna $\gamma$	$u_r(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{c_0} v_{r,r}(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{c_0^2} v_{r,t}(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{\varrho_1 c_0^2} p_{r,t}(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{\varrho_1} \varrho_{r,r}(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{c_0^2} c'(0)$
1	2	3	4	5	6	7
$\nu = 1$						
$k_0 = 3$						
1.1	-0.9524	0.1237	-0.9895	-2.7211	54.5455	-0.9091
1.2	-0.9091	0.2066	-0.9642	-2.4793	25.0000	-0.8333
1.3	-0.8696	0.2617	-0.9306	-2.2684	15.3846	-0.7692
1.4	-0.8333	0.2976	-0.8929	-2.0833	10.7143	-0.7143
5/3	-0.7500	0.3375	-0.7875	-1.6875	5.4000	-0.6000
2	-0.6667	0.3333	-0.6667	-1.3333	3.0000	-0.5000
2.5	-0.5714	0.2939	-0.5225	-0.9796	1.6000	-0.4000
3	-0.5000	0.2500	-0.4167	-0.7500	1.0000	-0.3333
7	-0.2500	0.0804	-0.1161	-0.1875	0.1429	-0.1429
$\nu = 2$						
$k_0 = 3$						
1.1	-0.9524	0.2020	-1.9487	-5.4422	109.0909	-1.8341
1.2	-0.9091	0.3306	-1.8733	-4.9387	50.0000	-1.6970
1.3	-0.8696	0.4101	-1.7857	-4.5369	30.7692	-1.5819
1.4	-0.8333	0.4564	-1.6931	-4.1667	21.4286	-1.4841
5/3	-0.7500	0.4875	-1.4500	-3.3750	10.8000	-1.2833
2	-0.6667	0.4444	-1.1852	-2.6667	6.0000	-1.1111
2.5	-0.5714	0.3429	-0.8816	-1.9592	3.2000	-0.9429
3	-0.5000	0.2500	-0.6667	-1.5000	2.0000	-0.8333
7	-0.2500	-0.0268	-0.1071	-0.3750	0.2857	-0.5357

	$\nu = 3$	$k_0 = 3$				
1.1	-0.9524	0.2804	-2.9080	-8.1633	163.6364	-2.7590
1.2	-0.9091	0.4546	-2.7824	-7.4380	75.0000	-2.5606
1.3	-0.8696	0.5584	-2.6407	-6.8053	46.1539	-2.3947
1.4	-0.8333	0.6151	-2.4934	-6.2500	32.1429	-2.2540
5/3	-0.7500	0.6375	-2.1125	-5.0625	16.2000	-1.9667
2	-0.6667	0.5556	-1.7037	-4.0000	9.0000	-1.7222
2.5	-0.5714	0.3918	-1.2408	-2.9388	4.8000	-1.4857
3	-0.5000	0.2500	-0.9167	-2.2500	3.0000	-1.3333
7	-0.2500	-0.1339	-0.0982	-0.5625	0.4286	-0.9286

Pełną charakterystykę zmian wszystkich współczynników określonych wzorami (3.17) i (3.18) oraz (3.25) w funkcji wykładnika izentropii  $\gamma$  dla wartości  $k_0 = 3$  (najczęściej spotykanej w praktyce) i wszystkich rodzajów symetrii ( $\nu = 1, 2, 3$ ) podajemy w tablicach 3 i 4. Zamieszczone w nich dane pozwalają w prosty sposób określać charakterystyki niestacjonarnego ruchu i stanu gazu politropowego w bezpośrednim otoczeniu centrum wybuchu w początkowych chwilach czasu trwania procesu.

Tablica 4

Pochodna $\gamma$	$r_0 u_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{c_0} v_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{c_0^2} v_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{c_0^3} v_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0^2} p_{,rr}$
1	2	3	4	5	6
$\nu = 1$					
1.1	-0.1237	-0.3223	0.0750	2.8035	-0.0750
1.2	-0.2066	-0.4689	0.0626	2.6371	-0.0626
1.3	-0.2617	-0.5190	0.0175	2.4815	-0.0175
1.4	-0.2976	-0.5173	-0.0354	2.3313	0.0354
5/3	-0.3375	-0.4188	-0.1519	1.9560	0.1519
2	-0.3333	-0.2778	-0.2222	1.5556	0.2222
2.5	-0.2939	-0.1380	-0.2351	1.1074	0.2351
3	-0.2500	-0.0655	-0.2083	0.8036	0.2083
7	-0.0804	0.0076	-0.0488	0.1249	0.0488
$\nu = 2$					
1.1	-0.2020	-0.8681	0.2513	9.2001	1.6047
1.2	-0.3306	-1.2233	0.2204	8.5305	1.4826
1.3	-0.4101	-1.3102	0.0905	7.9169	1.4622
1.4	-0.4563	-1.2622	-0.0579	7.3363	1.4689
5/3	-0.4875	-0.9272	-0.3575	5.9295	1.4450
2	-0.4444	-0.5322	-0.4938	4.4883	1.2840
2.5	-0.3429	-0.1881	-0.4506	2.9461	0.9544
3	-0.2500	-0.0298	-0.3333	1.9524	0.6667
7	0.0268	0.1253	0.0191	0.0536	0.0077
$\nu = 3$					
1.1	-0.2804	-1.6805	0.5275	19.2199	5.0115
1.2	-0.4545	-2.3379	0.4683	17.7351	4.5905
1.3	-0.5584	-2.4710	0.2092	16.3811	4.3833
1.4	-0.6151	-2.3484	-0.0830	15.1063	4.2386
5/3	-0.6375	-1.6602	-0.6481	12.0429	3.8169
2	-0.5556	-0.9005	-0.8642	8.9410	3.1358
2.5	-0.3918	-0.2721	-0.7165	5.6703	2.1346
3	-0.2500	0.0060	-0.4583	3.6012	1.3750
7	0.1339	0.3394	0.1100	-0.1054	-0.0609

Na przykład trajektorię ruchu czoła fali uderzeniowej dla  $\gamma = 1.4$  i  $k_0 = 3$  można przedstawić zgodnie z wzorami (3.1) i danymi zamieszczonymi w tablicach 3 i 4 następującym wielomianem potęgowym:

$$R(\xi) = 1 + \xi + \frac{1}{2} a\xi^2 + \frac{1}{6} b\xi^3, \tag{3.27}$$

$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0^3} p_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0^4} p_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1} \varrho_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0} \varrho_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0^2} \varrho_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{c_0^3} c''(0)$
7	8	9	10	11	12
$k_0 = 3$					
-2.8035	13.1932	81.7001	-141.2043	250.2952	2.6446
-2.6371	11.6454	28.5606	-56.8939	106.0606	2.3333
-2.4815	10.3179	13.5931	-31.2370	60.7152	2.0656
-2.3313	9.1766	7.3980	-19.6429	39.3408	1.8367
-1.9560	6.8344	1.9882	-7.8791	17.0100	1.3745
-1.5556	4.8889	0.5000	-3.5000	8.0000	1.0000
-1.1074	3.1347	0.0517	-1.4430	3.4743	0.6678
-0.8036	2.1250	-0.0238	-0.7381	1.8333	0.4762
-0.1259	0.2746	-0.0087	-0.0441	0.1173	0.0936
$k_0 = 3$					
-11.0561	47.4168	436.4788	-565.1107	893.8213	8.8873
-10.2335	41.7731	163.9515	-227.4303	375.7576	7.9057
-9.4696	36.9322	84.3000	-124.5272	213.4294	7.0599
-8.7472	32.7712	49.8352	-77.9788	137.9252	6.3371
-7.0170	24.2438	17.1891	-30.7345	58.1400	4.8823
-5.2785	17.1852	6.4198	-13.2099	26.6667	3.7119
-3.4499	10.8595	2.0353	-5.0862	11.1543	2.6835
-2.2857	7.2500	0.7619	-2.3810	5.6667	2.0952
-0.0804	0.8170	-0.1020	0.0000	0.2551	0.9260
$k_0 = 3$					
-24.7590	102.6710	1064.3926	-1271.7477	1930.5785	18.7120
-22.7940	90.3832	406.2697	-511.6576	809.0909	16.6869
-20.9736	79.8427	212.2473	-279.9338	458.1425	14.9400
-19.2620	70.7837	127.4599	-175.0820	295.1531	13.4467
-15.2116	52.2281	45.7845	-68.6573	123.3900	10.4436
-11.2126	36.8889	17.9568	-29.2284	56.0000	8.0329
-7.0884	23.1743	6.1496	-11.0291	23.0400	5.9203
-4.5179	15.3750	2.5476	-5.0238	11.5000	4.7143
0.0563	1.6272	-0.1624	-0.0735	0.4133	2.3133

gdzie:

$$\bar{R} = \frac{R(\xi)}{r_0}, \quad \xi = \frac{c_0 t}{r_0},$$

$$a = \frac{r_0}{c_0^2} c'(0) = \begin{cases} -0,7143 & \text{dla } \nu = 1 \\ -1,4841 & \text{dla } \nu = 2 \\ -2,2540 & \text{dla } \nu = 3 \end{cases}$$

$$b = \frac{r_0^2}{c_0^3} c''(r_0, 0) = \begin{cases} 1,8367 & \text{dla } \nu = 1 \\ 6,3371 & \text{dla } \nu = 2 \\ 13,4467 & \text{dla } \nu = 3 \end{cases}$$

Z warunku maleńia intensywności fali uderzeniowej w miarę oddalania się od centrum wybuchu (maleńia prędkości propagacji) wynika, że wzór (3.27) można stosować w przedziale

$$0 \leq \xi \leq -\frac{a}{b}. \quad (3.28)$$

Pozostałe funkcje można identyfikować w analogiczny sposób.

Przedstawiona w pracy metoda konstrukcji lokalnego rozwiązania problemu wybuchu skupionego stanowi pewien przyczynek do ogólnej teorii wybuchu punktowego [5]. Usuwa z tej teorii mankamenty związane z założeniem o nieskończonej wartości gęstości energii w centrum wybuchu. Ma ona charakter ogólny i można ją stosować do rozwiązywania problemów propagacji fal uderzeniowych o dowolnej intensywności również w ośrodkach niejednorodnych. Problemami tymi zajmiemy się w oddzielnym opracowaniu.

#### Literatura

1. J. G. TAYLOR, *The formation of a blast wave by a very intense explosion*, Ministry of Home Security, R. C. 210 (115-153), 1941.
2. J. G. TAYLOR, *The propagation and decay of blast waves*, British Civilian Research Committee, 1944.
3. Л. И. Седов, *Движение воздуха при сильном взрыве*, ДАН СССР, т. 52, № 1, 1946.
4. Л. И. Седов, *Распространение сильных взрывных волн*, ПИММ, т. 10, в. 2, 1946.
5. В. П. Коровейников, Н. С. Мельникова, Е. В. Рязанов, *Теория точечного взрыва*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1961.
6. Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, 4-е изд., Гостехиздат, Москва, 1957.
7. Н. Л. Крашенинникова, *О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем*, Известия АН СССР, ОТН, № 8, 1955.
8. Н. Н. Кочина, Н. С. Мельникова, *О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем без учета противодействия*, ПИММ, т. 22, в. 4, 1958.
9. К. П. Станюкович и др., *Физика взрыва*, Изд. Наука, Москва, 1975.
10. W. TRZCIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Shock compression of gas bubbles in ideal compressible liquid*, J. Techn. Phys., 22, 3, 1981.
11. E. WŁODARCZYK, *Роль пузырьков газа в инициировании детонации водонаполненных взрывчатых веществ (ВВВ)*. Успехи Механики 8, 2, 1985.
12. *Plane expansion of real detonation products. Closed form solutions*, M. Techn. Phys., 25, 3-4, 1984.
13. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, Część II, PWN, Warszawa 1962.,



## Р е з ю м е

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ПОЛИТРОПНОМ ГАЗЕ В ОКРЕСТНОСТИ ГАЗОВЫХ ПРОДУКТОВ ВЗРЫВА

В работе построено локальное решение задачи сосредоточенного (точечного) взрыва в политропном газе. Учтена конечная плотность энергии в центре взрыва, что является существенным дополнением по отношению к существующим решениям. Характеристики состояния и движения политропного газа с ударной волной в окрестности центра взрыва представлены в виде рядов Тейлора для функции двух независимых переменных  $(r, t)$ . Коэффициенты ряда определены из уравнений движения и граничных условий задачи. Представлено в виде таблицы изменение этих коэффициентов в функции показателей политропы  $\gamma$  и  $k_0$  для трех симметрий: плоской, цилиндрической и сферической.

Представленное решение является дополнением к теории сосредоточенного взрыва. Оно дополняет существующие автомодельные решения для сильных точечных взрывов, базирующие на предположении о бесконечной плотности энергии в центре взрыва. Исключает недостатки этих решений и дает возможность исследования количественных зависимостей характеристик нестационарного движения политропного газа в окрестности центра взрыва.

## S u m m a r y

## ANALYTIC STUDY OF STRONG SHOCK WAVES IN A POLYTROPIC GAS IN THE VICINITY OF THE EXPLOSION CENTRE

A local solution has been constructed to the problem of concentrated (point) explosion in a polytropic gas. The finite energy density at the explosion centre is taken into account. The state and motion characteristic of the polytropic gas with the shock-wave in the vicinity of the explosion centre are presented in the form of the Taylor series for the functions of two independent variables  $(r, t)$ . The coefficients of the series are determined from the equations of motion and the boundary conditions of the problem. Variation in these coefficients in function of the polytropic exponents of  $\gamma$  and  $k_0 = 3$  for three symmetries: plane, cylindrical and spherical, is presented in the form of tables. The solution presented constitutes a contribution to the theory of concentrated explosion. It complements the existing self-similar solutions for powerful point explosions, these solutions basing upon the assumption of the infinite energy density at the explosion centre. It eliminates the shortcomings of these solutions and raises the possibility of studying the quantitative dependences on the characteristics of a non-stationary motion of the polytropic gas in the vicinity of the explosion centre.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 listopada 1985 roku.*



## ODPOWIEDNIOŚĆ MIĘDZY RÓWNIANAMI TERMODYFUZJI I TEORII MIESZANIN

JAN KUBIK

*Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu*

Wiele form transportu masy i ciepła w ciałach stałych i cieczach z powodzeniem można opisać przez równania termodyfuzji, w których uwzględnia się fakt częstego sprzężenia między obu rodzajami przepływów. Problematyka ta należy już do klasycznych zagadnień fizyki o bogatej literaturze i licznych rozwiązaniach zadań początkowo-brzegowych. Zagadnienie to ulega jednak istotnej komplikacji jeżeli na procesy transportu masy i ciepła zacznie oddziaływać pole naprężeń i deformacje ośrodka. Przyczynę tego stanu rzeczy należy szukać m.in. w innym typie równań opisujących przepływ pędu w ośrodku w stosunku do przepływu ciepła i masy.

W ogólności możliwe są dwa sposoby łącznego opisu transportu masy, ciepła i pędu (krętu) w ośrodku.

Pierwszy polega na poszukiwaniu uogólnień klasycznych równań termodyfuzji i równań mechaniki. Sposób ten jak wiadomo — prowadzi do równań termodyfuzji sprężystej, lepko-sprężystej itp. Wyróżnia się przy tym szkielet oraz dyfundujące względem niego cząstki o odmiennych własnościach kinematycznych i dynamicznych. Z drugiej strony możliwe jest odmienne podejście, kiedy każdemu rodzajowi cząstek przypisujemy równoprawną kinematykę oraz własności przepływu, które zapewniają występowanie zarówno dyfuzji jak i transportu ciepła. Podejście takie jest oczywiście typowe dla teorii mieszanin. Zauważmy, że równoprawne potraktowanie własności kinematycznych każdego ze składników mieszaniny kontrastuje ze stosunkowo prostym i zawężonym potraktowaniem kinematyki dyfundującej masy w termodyfuzji. Istotnie, w termodyfuzji analizuje się tylko kinematykę szkieletu, zaś migrację masy opisuje skalarowe pole koncentracji, którego gradient wyznacza dopiero przepływ dyfundującego składnika.

Podstawy teorii mieszanin pochodzą z prac C. Truesdella, a dalszy jej rozwój zawdzięczamy A. C. Eringenowi, J. D. Ingramowi, A. E. Greenowi, N. Millsowi. Termodynamiczne podstawy teorii podał I. Müller, zaś najpełniejszy wykład zawiera monografia R. Bowena [2]. Nieco inny był rozwój mechanicznych uogólnień termodyfuzji, które znajdujemy w pracach Ju. S. Podstrigacza z lat sześćdziesiątych oraz W. Nowackiego [7] i Aifantisa [1]. Wiele ciekawych wyników z termodyfuzji sprężystej a także z uwzględnieniem przepływu ładunku elektrycznego, uzyskano w ośrodku poznańskim, natomiast równania termodyfuzji lepko-sprężystej podano w pracy [6].

Konsekwencją formalną obu podejść są rozbudowane układy równań charakterystyczne dla zadań brzegowych teorii mieszanin i względnie proste równania termodynamiki. Istotnie, w teorii mieszanin ruch każdego składnika opisują trzy równania, którym odpowiadają w termodynamice równania ujmujące tylko ruch szkieletu oraz skalarowe równania transportu pozostałych składników.

Przedstawione porównanie sugeruje, że celowe jest określenie tej klasy przepływów wieloskładnikowej mieszaniny, która może być aproksymowana przez równania termodynamiki. Ponadto, poszukiwana w pracy odpowiedniość między lokalnymi postaciami bilansów teorii mieszanin i termodynamiki może pośrednio służyć do uzasadnienia poprawności równań termodynamiki.

W całej pracy korzystamy z tradycyjnych oznaczeń stosowanych np. w pracach [2, 4, 5, 8]

## 2. Równania bilansów mieszaniny wieloskładnikowej

Przedstawimy równania bilansów masy, pędu, energii dla każdego ze składników mieszaniny z osobna oraz dla całej mieszaniny w postaci globalnej i lokalnej. W literaturze przedmiotu znane są już dosyć złożone propozycje tych bilansów, w których uwzględnia się różne rodzaje oddziaływań. W niniejszym opracowaniu analizować będziemy jednak najprostszą postać tych bilansów, zakładając jedynie, że w członie źródłowym bilansu dla pojedynczego składnika wystąpi oddziaływanie z pozostałymi składnikami mieszaniny. Oddziaływanie to interpretujemy kolejno jako przekaz masy, pędu, energii i entropii od pozostałych składników.

Bilans masy dla pojedynczego składnika ma postać ( $\alpha = 0, 1, 2 \dots n$ )

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho^\alpha dV = R^\alpha; \quad \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho^\alpha v_k^\alpha) = R^\alpha, \quad (2.1)$$

zaś bilans masy dla całej mieszaniny

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^0 + \dots + \rho^n) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho^0 v_k^0 + \dots + \rho^n v_k^n) = R^0 + \dots + R^n,$$

$$R^0 + \dots + R^n = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho w_k) = 0, \quad \text{przy czym}$$

$$\sum_\alpha R^\alpha = 0, \quad \rho w_k = \sum_\alpha \rho^\alpha v_k^\alpha, \quad \sum_\alpha \rho^\alpha u_k^\alpha = 0.$$

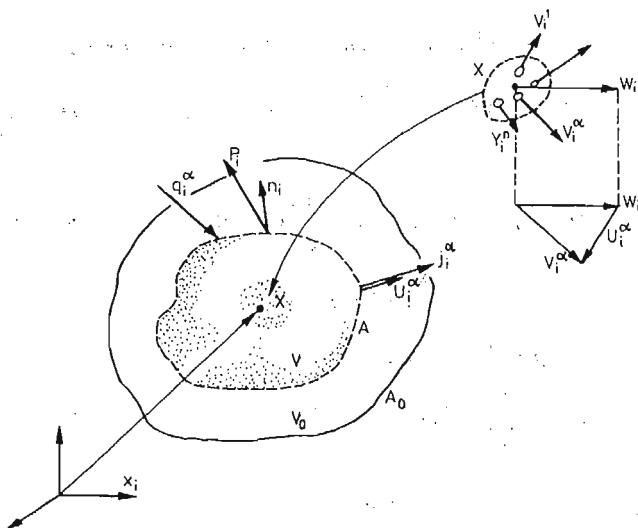
Prędkość  $v_i^\alpha$  każdego ze składników mieszaniny można przedstawić jako sumę prędkości barycentrycznej  $w_k$  oraz przyrostu  $u_k^\alpha (v_i^\alpha = w_k + u_k^\alpha)$

Bilans masy przyjmie wówczas formę

$$\frac{\partial \varrho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\varrho^\alpha (w_k + v_k^\alpha)] = R^\alpha \quad (2.3)$$

Wprowadzając z kolei koncentrację  $c^\alpha = \frac{\varrho^\alpha}{\varrho}$  składnika ( $\alpha$ ) i dokonując przekształceń

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varrho c^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho c^\alpha v_k^\alpha) &= R^\alpha, \\ \varrho \frac{\partial c^\alpha}{\partial t} + \varrho w_k \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_k} + \varrho u_k^\alpha \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_k} + c^\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial t} + c^\alpha \frac{\partial}{\partial x_k} [\varrho (w_k + U_k^\alpha)] &= R^\alpha, \\ \varrho \frac{dc^\alpha}{dt} + c^\alpha \left( \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho w_k) \right) + \varrho u_k^\alpha \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_k} + c^\alpha \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho u_k^\alpha) &= R^\alpha, \\ \varrho \frac{dc^\alpha}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho c^\alpha u_k^\alpha) &= R^\alpha, \end{aligned} \quad (2.4)$$



Rys. 1. Kinematyka mieszaniny

uzyskujemy następujące równanie bilansu masy dla składnika ( $\alpha$ ):

$$\varrho \frac{dc^\alpha}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho^\alpha u_k^\alpha) = R^\alpha, \quad j_k^\alpha = \varrho^\alpha u_k^\alpha. \quad (2.5)$$

Bilans pędu dla komponenta ( $\alpha$ ) ma postać klasyczną z tym, że przekaz pędu od pozostałych składników ujmuje człon źródłowy  $\Phi_i^\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \varrho^\alpha v_i^\alpha dV &= \int_V (\varrho^\alpha F_i^\alpha + \Phi_i^\alpha) dV + \int_A p_i^\alpha dA \\ \varrho^\alpha \frac{dv_i^\alpha}{dt} &= -v_i^\alpha R^\alpha + \Phi_i^\alpha + \varrho^\alpha F_i^\alpha + t_{ij,j}^\alpha \end{aligned} \quad (2.6)$$

a bilans pędu dla całej mieszaniny przyjmie formę

$$\sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \int_V \varrho^{\alpha} v_i^{\alpha} dV = \sum_{\alpha} \int_V (\varrho^{\alpha} F_{ij}^{\alpha} + \Phi_i^{\alpha}) dV + \sum_{\alpha} \int_A t_{ij}^{\alpha} n_j dA, \quad (2.7)$$

$$\varrho \frac{dw_i}{dt} = \varrho F_i + (t_{ij} - \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} v_i^{\alpha} v_j^{\alpha})_{,j},$$

gdzie:

$$\varrho F_i = \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha}, \quad \sum_{\alpha} \Phi_i^{\alpha} = 0, \quad t_{ij} = \sum_{\alpha} t_{ij}^{\alpha}, \quad t_{ij} = t_{ji}.$$

Bilans energii dla całej mieszaniny przedstawiamy w formie uwzględniającej również przekaz energii  $E^{\alpha}$  do składnika ( $\alpha$ ), a pochodzący od pozostałych składników.

$$\sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \int_V \varrho^{\alpha} (U^{\alpha} + K^{\alpha}) dV = \sum_{\alpha} \int_V (\varrho^{\alpha} r^{\alpha} + \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha} v_i^{\alpha} + E^{\alpha}) dV + \sum_{\alpha} \int_A (t_{ij}^{\alpha} v_j^{\alpha} + q_i^{\alpha}) n_i dA \quad (2.8)$$

zaś po wykorzystaniu poprzednich bilansów i wprowadzeniu wielkości:

$$\varrho U = \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} U^{\alpha}, \quad \varrho K = \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} K^{\alpha}, \quad \varrho r = \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} r^{\alpha}, \quad q_i = \sum_{\alpha} q_i^{\alpha}$$

będzie

$$\varrho \frac{d}{dt} (U + K) = \varrho r + \varrho F_i w_i + \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha} u_i^{\alpha} - q_{i,i} + (t_{ij} w_j)_{,i} + \sum_{\alpha} [(t_{ij}^{\alpha} u_j^{\alpha}) - \varrho^{\alpha} (U^{\alpha} + K^{\alpha}) u_i^{\alpha}]_{,i}. \quad (2.9)$$

W powyższym równaniu posilkowano się równościami

$$\sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha} v_i^{\alpha} = \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha} w_i + \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha} u_i^{\alpha} = \varrho F_i w_i + \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha} u_i^{\alpha}, \quad (2.10)$$

$$\sum_{\alpha} t_{ij}^{\alpha} v_j^{\alpha} = t_{ij} w_j + \sum_{\alpha} t_{ij}^{\alpha} u_j^{\alpha}.$$

Bilans energii przedstawiliśmy tutaj dla całej mieszaniny, pomijając bilans dla pojedynczego składnika. Podobnie postąpimy w przypadku nierówności wzrostu entropii, którą podamy także dla całej mieszaniny.

Nierówność wzrostu entropii dla mieszaniny ma postać

$$\sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \int_V \varrho^{\alpha} S^{\alpha} dV \geq \sum_{\alpha} \int_V \frac{\varrho^{\alpha} r^{\alpha}}{T} dV - \sum_{\alpha} \int_A \left( \frac{q_i^{\alpha}}{T} \right) n_i dA, \quad (2.11)$$

$$\varrho \frac{dS}{dt} \geq \frac{\varrho r}{T} - \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} - \sum_{\alpha} (\varrho^{\alpha} u_i^{\alpha} S^{\alpha})_{,i}, \quad (2.12)$$

gdzie:

$$\varrho S = \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} S^{\alpha}.$$

W podanych równaniach przyjęto powszechnie stosowane oznaczenia, w szczególności zaś przez  $\rho$ ,  $\rho^\alpha$ ,  $w_k$ ,  $v_k^\alpha$ ,  $u_k^\alpha$ ,  $R^\alpha$ ,  $\rho^\alpha F_i^\alpha$ ,  $\Phi_i^\alpha$ ,  $t_{ij}^\alpha$ ,  $\rho^\alpha U^\alpha$ ,  $\rho^\alpha K^\alpha$ ,  $\rho^\alpha S^\alpha$ ,  $\rho^\alpha r^\alpha$ ,  $q^\alpha$  oznaczono kolejno gęstości całej mieszaniny i składnika, prędkość średnią i składnika ( $\alpha$ ) oraz przyrost prędkości w stosunku do wartości średniej, źródło masy, siłę masową, przekaz pędu od pozostałych składników, tensor naprężenia składnika, energię wewnętrzną i kinetyczną, entropię, źródło oraz strumień ciepła składnika  $\alpha$ .

### 3. Porównanie równań bilansów teorii mieszanin i termodyfuzji

Lokalne formy równań bilansów masy, pędu, energii i nierówność wzrostu entropii pozwalają na porównanie ich z analogicznymi równaniami występującymi w termodyfuzji. Istotnie, bilanse masy i energii posiadają postacie zbliżone, zaś w bilansie pędu mieszaniny występuje składnik  $\sum_\alpha \rho^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha$  różniący ten bilans od analogicznego w termodyfuzji.

Przyjmujemy w równaniach bilansów mieszaniny, że siła masowa, energia wewnętrzna oraz entropia jednostki masy każdego z  $n$  składników są takie same, tzn.  $F_i^1 = F_i^2 = \dots = F_i^n$ ,  $U^1 = U^2 = \dots = U^n$ ,  $S^1 = S^2 = \dots = S^n$ . Założenie to prowadzi do następującego układu bilansów teorii mieszanin

$$\begin{aligned} \rho \frac{dc^\alpha}{dt} &= R^\alpha - (j_i^\alpha)_{,i} \\ \rho \frac{dw_i}{dt} &= \rho F_i + \left( t_{ij} - \sum_\alpha \rho^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha \right)_{,j} \\ \rho \frac{d}{dt} (U + K) &= \rho r + \rho F_i w_i + \left( t_{ij} w_j - q_i + \sum_\alpha t_{ij}^\alpha u_j^\alpha - \sum_\alpha K^\alpha \rho^\alpha u_i^\alpha \right)_{,i} \\ \rho \frac{dS}{dt} &\geq \frac{\rho r}{T} - \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Przeanalizujemy teraz dalszy szczególny przepływ, kiedy  $\sum_\alpha \rho^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha \approx 0$  Zachodzą tutaj dwie możliwości

( $\epsilon_1$ ) istnieje jeden wyróżniony składnik o dominującej gęstości  $\rho^0$  (np. szkielet ciała kapilarno-porowatego), tak, że zachodzi

$$[\rho^0 \gg \rho^\delta, \delta = 1, 2, \dots, n] \Rightarrow [|\rho^0 u_i^0| \rightarrow 0], \quad (3.2)$$

oraz:

$$\rho w_i \cong \rho^0 v_i^0,$$

tzn. prędkość średnia  $\rho w_i$  jest zbliżona do prędkości składnika o gęstości  $\rho^0$ , co ma miejsce w czasie migracji rozproszonego składnika w szkielecie.

( $\epsilon_2$ ) istnieje kilka składników o porównywalnej masie  $\rho^0 \sim \rho^1 \sim \dots \sim \rho^\beta \dots \sim \rho^k$  i identycznych prędkościach  $v_i^0 = v_i^1 = \dots = v_i^k$  oraz zachodzi

$$[\rho^\beta \gg \rho^\gamma, \beta = 0, 1, \dots, k, \gamma = k+1, \dots, n] \Rightarrow [|\rho^\beta u_i^\beta| \rightarrow 0] \quad (3.3)$$

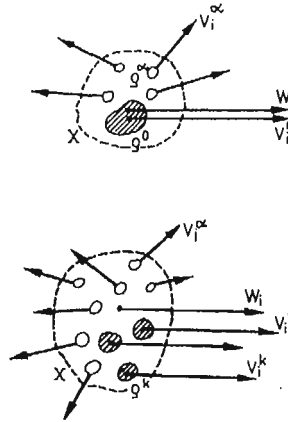
oraz

$$\rho w_i \cong \sum_{\beta} \rho^{\beta} v_i^{\beta}$$

Zauważmy, że konsekwencją przyjęcia ograniczeń (3.2) i (3.3) są również nierówności

$$\rho^0 K^0 \gg \rho^{\delta} K^{\delta}, \quad \delta = 1, 2, \dots, n \tag{3.4}$$

w przypadku  $(\varepsilon_1)$



Rys. 2. Cząstka z wyróżnionym elementem

oraz:

$$\sum_{\beta} \rho^{\beta} K^{\beta} \gg \rho^{\gamma} K^{\gamma}, \quad \beta = 0, 1, \dots, k \quad \gamma = k+1, \dots, n \tag{3.5}$$

dla przypadku  $(\varepsilon_2)$ ,

które pozwalają pominąć składniki  $\sum_{\alpha} \rho^{\alpha} u_i^{\alpha} K^{\alpha}$  w bilansie energii.

Jeżeli teraz dokonamy podstawienia wg relacji

$$\sum_{\alpha} (t_{ij}^{\alpha} u_j^{\alpha})_{,i} = \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{\rho^{\alpha}} t_{ij}^{\alpha} \rho^{\alpha} u_j^{\alpha} \right)_{,i} = \sum_{\alpha} (M_{ijj}^{\alpha})_{,i} \tag{3.6}$$

lub

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} (t_{ij}^{\alpha} u_j^{\alpha})_{,i} &= \sum_{\alpha} \left[ \frac{1}{\rho^{\alpha}} \left( t_{ij}^{\alpha} - \frac{1}{3} t_{ii}^{\alpha} \delta_{ij} \right) j_j^{\alpha} + \frac{1}{\rho^{\alpha}} \left( \frac{1}{3} t_{ii}^{\alpha} \right) j_j^{\alpha} \delta_{ij} \right]_{,i} = \\ &= \sum_{\alpha} \left[ \frac{1}{\rho^{\alpha}} S_{ijj}^{\alpha} \right]_{,i} + \sum_{\alpha} \left[ \frac{1}{\rho^{\alpha}} \frac{t_{ii}^{\alpha}}{3} j_j^{\alpha} \right]_{,i} = \\ &= \sum_{\alpha} (\bar{M}_{ijj}^{\alpha})_{,i} + \sum_{\alpha} (\bar{M}^{\alpha} j_i)_{,i} \end{aligned}$$

to tensor  $M_{ij}^{\alpha}$  charakteryzować będzie przepływ masy wywołany gradientami pól naprężeń  $t_{ij}^{\alpha}$ . Zauważmy przy tym, że przepływ ten ustanie, kiedy  $t_{ij}^1 = \dots = t_{ij}^n$ .



W klasycznej termodyfizji w ciele stałym przepływ masy w bilansie energii reprezentuje strumień  $M^\alpha j_i^\alpha$ , gdzie  $M^\alpha$  jest potencjałem chemicznym dyfundującego składnika a  $j_i^\alpha$  strumieniem masy. Wynika stąd, że pełną zgodność równań bilansów termodyfuzji i teorii mieszanin możemy uzyskać jedynie w przypadku, kiedy  $M_{ij}^\alpha = M^\alpha \delta_{ij}$ .

Zachodzi wówczas

$$\sum_{\alpha} (M_{ij}^{\alpha} j_j^{\alpha})_{,i} = \sum_{\alpha} (M^{\alpha} \delta_{ij} j_j^{\alpha})_{,i} = \sum_{\alpha} (M^{\alpha} j_i^{\alpha})_{,i}, \quad (3.7)$$

czyli potencjał  $M_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{\varrho^{\alpha}} t_{ij}^{\alpha}$  należy zastąpić wyrażeniem  $M^{\alpha} = \frac{1}{\varrho^{\alpha}} t^{\alpha}$ , gdzie  $t^{\alpha} = t_{ii}^{\alpha}$ .

Uzyskamy wówczas następujący układ bilansów

$$\begin{aligned} \varrho \frac{dc^{\alpha}}{dt} &= R^{\alpha} - j_{k,k}^{\alpha}, & j_k^{\alpha} &= \varrho^{\alpha} v_k^{\alpha}, \\ \varrho \frac{dw}{dt} &= \varrho F_i + t_{ik,k}, & & \\ \varrho \frac{d}{dt} (U + K) &= \varrho r + \varrho F_i w_i + (t_{kj} w_j - q_k - \sum_{\alpha} M^{\alpha} j_k^{\alpha})_{,k}, \\ \varrho \frac{dS}{dt} &\geq \frac{\varrho r}{T} - \left( \frac{q_k}{T} \right)_{,k} \end{aligned} \quad (3.8)$$

analogiczny jak w termodyfuzji.

#### Literatura

1. E. C. AIFANTIS, *Diffusion of a perfect fluid in a linear elastic stress field*, Mech. Res. Comm. 3, 245 - 250 1976,
2. R. M. BOWEN, *Theory of Mixtures*, in.: Continuum Physics, Acad. Pres New York 1976,
3. A. C. ERINGEN, J. D. INGRAM, *A continuum theory of chemically reacting media*, Int. J. Eng. Sci 5, 189 - 222 1967,
4. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *A theory of mixtures*, Arch. Rat. Mech. and Analysis 24, 243 - 263, 1967
5. J. KUBIK, *Thermidiffusion flows in a solid with a dominant constituent*, Ruhr- Uni Bochum, IfM 44, 1985,
6. J. KUBIK, *Analogie i podobieństwo liniowych ośrodków odkształcalnych*, ZN Pol. Śl., Mon. 38, Gliwice 1975,
7. W. NOWACKI, *Certain problems of thermidiffusion in solids*, AMS, 23, 6, 1971,
8. I. MÜLLER, *Thermodynamik*. (Die Grundlagen der Materialtheorie) Bertelsmann Universitätsverlag Düsseldorf 1973,
9. K. WILMAŃSKI, *On thermodynamics and function of states of non-isolated systems*, Arch. Ration. Mech. and Analysis 45, 251 - 281, 1972,
10. K. WILMAŃSKI, *Podstawy termodynamiki fenomenologicznej*, PWN, Warszawa 1974.

#### Резюме

#### СООТВЕСТВИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФУЗИИ И ТЕОРИИ СМЕСЕЙ

В статье сравнено уравнения теории смесей уравнениями термодиффузии в твердом теле. С этого сравнения следует, что для некоторых случаев теории смесей получаются уравнения похожие уравнениям термодиффузии.

## S u m m a r y

RELATION BETWEEN EQUATIONS OF THERMODIFFUSION AND THOSE OF THE  
THEORY OF MIXTURES

The equations of the theory of mixtures and those of the viscoelastic thermodiffusion are compared. It results from the comparison particular flows of the theory of mixtures supply the equations similar to the equations of the viscoelastic thermodiffusion.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1985 roku.*

---

## WSTĘPNE BADANIA DYNAMICZNIE PODOBNEGO MODELU SAMOŁOTU PODATNIE ZAWIESZONEGO W TUNELU AERODYNAMICZNYM\*

LECH ŻURKOWSKI  
MARIAN GRUDNICKI  
WIESŁAW KRZEMIEN  
ZBIGNIEW LORENC

*Instytut Lotnictwa*

Obliczenia flatteru przy konstruowaniu samolotów powinny być weryfikowane za pomocą badań modelu flatterowego. Jednakże badanie modeli flatterowych kompletnych samolotów związane jest z szeregiem istotnych trudności. Model taki powinien być „zawieszony swobodnie”, a jednocześnie utrzymywany w ustalonym miejscu przestrzeni pomiarowej. W praktyce uzyskuje się to przez zawieszenie możliwie miękkie. Dotychczas w Polsce eksperymentów takich nie przeprowadzano.

Zasadniczym celem wykonanej pracy było opanowanie techniki wyznaczania prędkości krytycznej flatteru dynamicznie podobnych modeli samolotów zawieszonych elastycznie w tunelu aerodynamicznym. Jedynym nadającym się do tego celu tunelem w Polsce jest tunel w Instytucie Lotnictwa o otwartej przestrzeni pomiarowej średnicy 5 m. Badanym obiektem był udostępniony przez OBR SK Mielec model flatterowy samolotu rolniczego M-15 wykonany w skali liniowej 1 : 7.

M-15 jest samolotem rolniczym dwupłatowym o napędzie odrzutowym, zaprojektowanym i produkowanym w WSK Mielec w połowie lat 70-tych. Model flatterowy samolotu M-15 składał się ze sztywnego kadłuba oraz elastycznych skrzydeł, belek ogonowych i usterzenia. W badanej wersji masa modelu wynosiła 34,8 kg.

### 1. Uproszczona analiza zawieszenia modelu

Schemat zawieszenia przedstawia rys. 1.

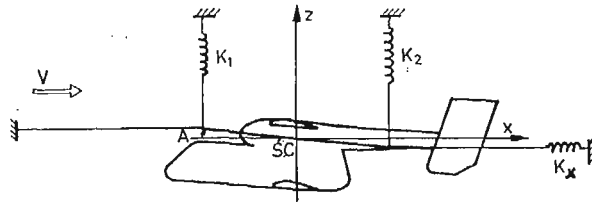
Zawieszenie pozwalało na sprężyste przemieszczanie modelu w obszarze przestrzeni pomiarowej. Sztywności sprężyn dobrano w ten sposób, aby częstotliwości drgań modelu, jako ciała sztywnego na zawieszeniu, były mniejsze od 1 Hz. Najniższe częstotliwości drgań własnych modelu wynosiły ok. 5 Hz. W praktyce oznaczało to, że można zaniedbać wpływ drgań na zawieszeniu na drgania własne modelu i odwrotnie.

---

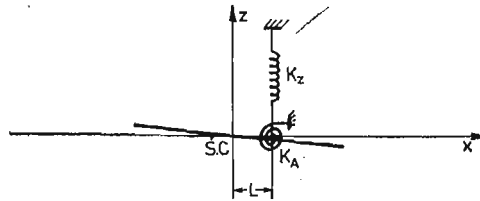
\*) Praca wygłoszona na I Ogólnopolskiej Konferencji „Mechanika w Lotnictwie”

Dla teoretycznego zbadania zawieszenia przyjęto następujący model fizyczny:

- model flutterowy traktowany jest jako ciało sztywne zawieszone sprężysto na sprężynie pionowej i skrętnej, (rys. 2) co w praktyce realizowane jest przez zawieszenie modelu na dwóch pionowych sprężynach,



Rys. 1. Schemat zawieszenia

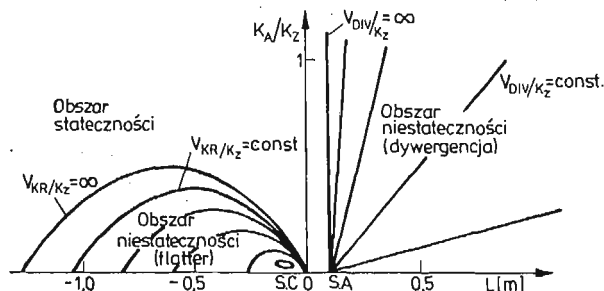


Rys. 2. Fizyczny model zawieszenia

- siły aerodynamiczne na skrzydłach i stateczniku wyznaczono w oparciu o uproszczoną teorię pasową, przy założeniu nieściśliwości, nielepkości i quasistacjonarności przepływu.

Przy takich założeniach otrzymany układ mechaniczny opisany jest układem dwóch liniowych zwyczajnych równań różniczkowych. Rozwiązując ten układ wyznaczono obszar niestateczności zawieszenia modelu samolotu i zbadano przebieg zmienności prędkości krytycznej w tym obszarze. W półpłaszczyźnie  $L, K_A/K_Z$  (rys. 3) obszar niestateczności, w którym może wystąpić rozbieżność skrętna (dywergencja), rozciąga się na prawo od pionowej linii przechodzącej przez środek aerodynamiczny, a obszar niestateczności, w którym może wystąpić flutter zawieszenia, znajduje się poniżej paraboli  $V_{kr}/K_Z = \infty$ .

$L$  oznacza tu położenie środka ciężkości, a  $K_A$  i  $K_Z$  odpowiednie sztywności sprężyny skrętnej i pionowej.



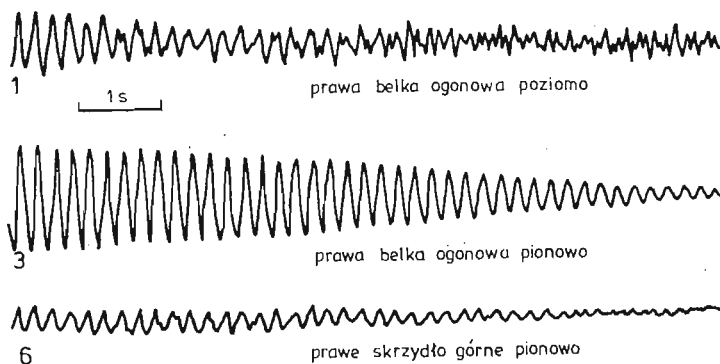
Rys. 3. Zależność  $K_A/K_Z$  od położenia środka sprężystości  $L$

Z analizy rozwiązań układu równań wynikają następujące wnioski:

1. Istnieje pewien zakres położenia środka sztywności, w którym niestateczność modelu nie występuje. W typowych warunkach zakres ten wynosi, w skali modelu, kilkanaście centymetrów. Jest on ograniczony od tyłu położeniem środka aerodynamicznego modelu jako całości. Przesunięcie zawieszenia poza środek aerodynamiczny zagraża wystąpieniem niestateczności statycznej (dywergencji).
2. Przesunięcie środka sztywności do przodu, przed zakres stateczności zagraża wystąpieniem „flutteru zawieszenia”.  
Dalsze przesuwanie środka sztywności do przodu znowu usuwa „flutter zawieszenia” — jest jednak technicznie trudne do realizacji.
3. Przy dostatecznie dużym stosunku  $K_A$  do  $K_Z$  „flutter zawieszenia” nie występuje.
4. Umieszczenie środka sztywności w obszarach, w których może wystąpić „flutter zawieszenia” bądź dywergencja modelu na zawieszeniu nie powoduje automatycznie tych zjawisk — potrzebna do tego jest jeszcze dostateczna prędkość przepływu, większa od pewnej prędkości krytycznej. Jednak po przejściu środka sztywności przez granicę obszaru „flutteru zawieszenia”, albo obszaru dywergencji, spadek prędkości krytycznej jest tak raptowny i do tak małych jej wartości, że badać model poniżej prędkości krytycznej nie można.

## 2. Badania flutteru modelu

Parametrami zmiennymi w modelu były: sztywność układu sterowania sterem wysokość i wyważenie masowe steru.

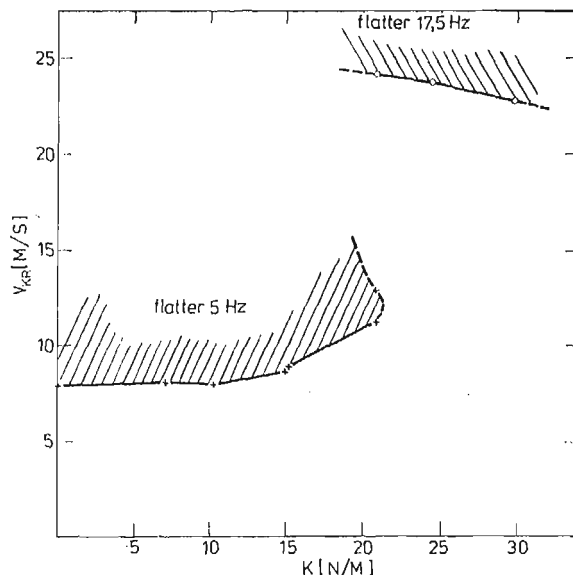


Rys. 4. Zanikanie drgań 5 Hz

Do rejestracji drgań użyto tensometrów oporowych przyklejonych do dźwigarów szkieletu. Otrzymany z tensometrów sygnał zapisywano na oscylografie pętlicowym. Przykładowy zapis drgań przedstawia rys. 4.

Badano prędkość krytyczną flutteru, częstości oraz intensywność tłumienia w zakresie okołokrytycznym. Zaobserwowano dwie postacie drgań samowzbudnych:

1. Flutter o częstości ok. 5,0 Hz i postaci:



Rys. 5. Zależność prędkości krytycznej  $V_{KR}$  od sztywności układu sterowania

- zginanie pionowe belek ogonowych
- wychylenie steru wysokości

Flutter ten występował przy małych sztywnościach układu sterowania.

## 2. Flutter o częstotliwości ok. 17,5 Hz i postaci:

- pionowe zginanie belek ogonowych i zginanie usterzenia poziomego wraz z bocznym zginaniem belek ogonowych
- wychylenie steru wysokości.

Flutter ten występował przy dużych sztywnościach układu sterowania.

### 3. Badania tłumienia flutteru

Badano tłumienie dla flutteru o częstotliwości 5 Hz.

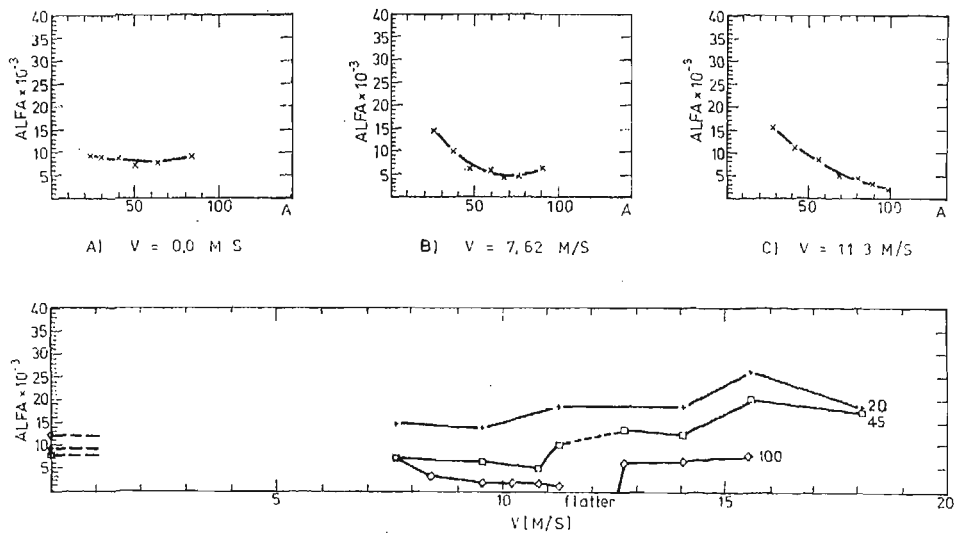
Drgania modelu o tej częstotliwości łatwo było wzbudzić, szczególnie wtedy, gdy w tunelu istniał nawet niewielki przepływ powietrza. Po wzbudzeniu drgań i pozostawieniu modelu samemu sobie, drgania te zanikały na tyle regularnie, że istniała możliwość ich ilościowej interpretacji. Z otrzymanych zapisów drgań odczytywano amplitudę  $A$  co 5 okresów, obliczano względny współczynnik tłumienia  $\alpha$  (ALFA), który przypisywano średniej amplitudzie drgań. Amplitudę mierzono w jednostkach względnych: za 100 przyjęto najmniejszą zarejestrowaną amplitudę ustalonego flutteru 5 Hz.

Wyznaczone współczynniki tłumienia wykazały wyraźną zależność od amplitudy drgań. Zależność tę aproksymowano wielomianem drugiego stopnia i przedstawiono na rys. 6a, b, c.

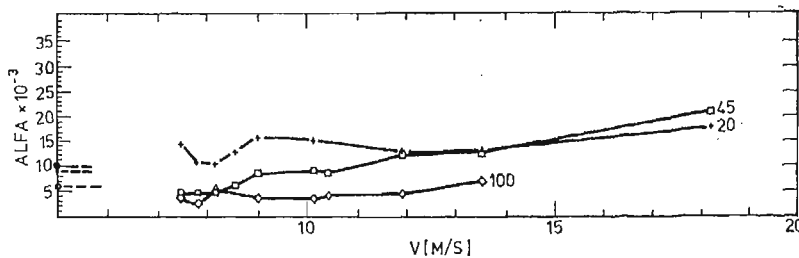
Z wykresów aproksymujących odczytano wartości tłumienia dla wybranych amplitud 100, 45, 20 jednostek względnych. Zależności tłumienia od amplitudy drgań i prędkości

przepływu w tunelu przedstawiają rysunki 6d, 7 i 8. Rys. 6d przedstawia wyniki pomiarów wersji ze sprężynkami modelującymi sztywność układu sterowania o sztywności 42 N/m i bez wyważenia masowego steru wysokości. Charakterystyczny jest przedział od 11,2 m/s do 12,5 m/s, w którym drgania o małej amplitudzie były tłumione, natomiast przy dużych amplitudach przeszły w drgania ustalone o amplitudzie ok. 200 jednostek względnych. Nie stwierdzono zależności amplitudy tych drgań, ustalonych od prędkości przepływu. Przy prędkościach powyżej 12,5 m/s lub poniżej 11,2 m/s drgania gasły.

Zwiększając sztywność układu sterowania o 15% (rys. 7) współczynnik tłumienia dla odpowiednich poziomów amplitud nieco wzrósł, a kształt wykresów zależności tłumienia od amplitudy drgań pozostał podobny. Drgania ustalone znikły. Po dodaniu mas wyważa-



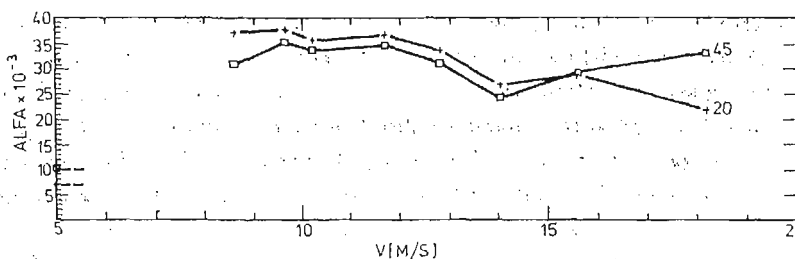
Rys. 6. Zależność współczynnika tłumienia ALFA od amplitudy drgań i prędkości przepływu



Rys. 7. Zależność współczynnika tłumienia ALFA od amplitudy drgań i prędkości przepływu

jących ster wysokości (16 gramów) nastąpił znaczny wzrost względnego współczynnika tłumienia (1,5 do 3 razy). Nie wystąpił flutter pomimo obniżenia sztywności sprężynek modelujących układ sterowania (15 N/m).

Rys. 8 przedstawia wykresy zmian współczynnika tłumienia dla wersji z masami wyważającymi ster wysokości.



Rys. 8. Zależność współczynnika tłumienia ALFA od amplitudy drgań i prędkości przepływu

#### 4. Wnioski

1. W badanym zakresie prędkości współczynnik tłumienia wykazuje wyraźną zależność od amplitudy drgań, malejąc z jej wzrostem. Taka zależność tłumienia od amplitudy powoduje konieczność wzbudzania modelu w czasie prób, w celu uniknięcia zjawiska „przechłodzenia” flutteru.
2. Tłumienie co prawda wzrasta w miarę oddalania się prędkości od obszaru występowania flutteru, ale niezbyt intensywnie. Natomiast przejście tłumienia na ujemne czyli wystąpienie samowzbudzenia jest raptowne.

#### Literatura

1. BISPLINGHOFF R. L., ASHEY H., HALFMAN R. L.; *Aeroelasticity* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1935
2. WASSERMAN L. S., МЫКЫТОВ V. J.; *Manual on Aeroelasticity*, AGARD, Part IV Wind Tunnel Flutter Tests (Chap. 8)
3. KORINEK P.; *Rozbor principu zaveseňi dynamicky podobnych modelu pri experimentu v nzkorychlostim aerodynamickem tunelu*. Zprava VZLU — Praha 1980
4. MALECEK J.; *Mereni na aeroelastickem modelu izolovaneho kridla*. Zpravodaj VZLU 1/1975
5. *Flutter Testing Technics*. NASA SP-415, Washington 1975

#### Резюме

#### ВВОДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ САМОЛЁТА ДЛЯ ИСПЫТАНИЯ НА ФЛАТТЕР, НА ЭЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕРЖАВКЕ, В АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

В статье представлено результаты вводных исследований модели для испытания на флаттер. Для эластической подвески найдены области в которых державка неустойчива. Дано некоторые результаты экспериментальных исследований по колебаниях модели в зависимости от скорости воздуха в аэродинамической трубе.



## S u m m a r y

## PRELIMINARY TESTS OF AN ELASTIC AIRPLANE ELASTICALLY SUSPENDED IN A WIND TUNNEL

In the paper the results of preliminary tests are presented of an elastic airplane model elastically suspended in a wind tunnel for flutter testing. A simple theoretical physical model enabled the authors to determine instability areas of the model suspension. Then some results of experimental determination of amplitude and damping of the model vibrations are given versus the air flow speed in the wind tunnel.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 lutego 1985 roku.*

---



## ANALOGIA SPRĘŻYTO-LEPKOSPĘŻYSTA W PÓLPRZESTRZENI ZE STARZENIEM

BRONISŁAW LECHOWICZ,  
ZBIGNIEW PIEKARSKI

*Politechnika Krakowska*

W pracy rozpatrzono analogię sprężysto-lepkospężystą ze starzeniem dla zagadnień typu szczeliny i stempla w półprzestrzeni, przy różnym pełzaniu postaciowym  $x$  i objętościowym. Przyjęto, że w rozważaniach problemach na brzegu półprzestrzeni ( $x_3 = 0$ ) nie działają naprężenia styczne ( $\sigma_{13} = 0$ ,  $\sigma_{23} = 0$ ). Do rozwiązania problemu zastosowana została metoda transformacji Fouriera. W pierwszej części pracy została przedstawiona metoda stosowania operatorów całkowych uwzględniających starzenie. W trzeciej części omówiono właściwą analogię i rozpatrzono jej przypadki szczególne.

1. W zapisie tensorowym związki fizyczne dowolnego, liniowego, lepkospężystego ośrodka mają postać [1]

$$\varepsilon_{ij} = 2\tilde{\mu}\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{\lambda}\sigma_{kk}, \quad (1)$$

gdzie:  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\delta_{ij}$  — delta Kroneckera,

$\varepsilon_{ij}$  — składowe tensora odkształceń,

$\sigma_{ij}$  — składowe tensora naprężeń,

$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ .

Występujące w (1) wielkości  $2\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\lambda}$  są operatorami całkowymi Voltery II-go rodzaju [2]

$$2\tilde{\mu} \equiv 2\mu_1(t) \left[ 1 + \int_{\tau_1}^t (\dots) \mu(t, \tau) d\tau \right], \quad (2)$$

$$\tilde{\lambda} \equiv \lambda_1(t) \left[ 1 + \int_{\tau_1}^t (\dots) \lambda(t, \tau) d\tau \right], \quad (3)$$

których działanie na daną funkcję określone jest ogólnie wzorem:

$$\tilde{K}y = k_1(t) \left[ y(t) + \int_{\tau_1}^t y(\tau) K(t, \tau) d\tau \right]. \quad (4)$$

Funkcje  $\mu_1(t)$ ,  $\lambda_1(t)$  będące współczynnikami Lamego, określają odkształcenie natychmiastowe ośrodka, jądra  $\mu(t, \tau)$ ,  $\lambda(t, \tau)$  natomiast odkształcenie spowodowane pełzaniem ze starzeniem. Gdy jądra w (2), (3) zależą od różnicy  $(t-\tau)$  czasu obserwacji  $t$  i czasu  $\tau$  określa-

jącego historię materiału, oraz współczynniki  $\mu_1(t)$ ,  $\lambda_1(t)$  są stałe, wtedy ośrodek ma własności ustalone w czasie, czyli nie zachodzi starzenie.

Jak wiadomo, np. z [2], równanie całkowe Volterry II-go rodzaju

$$x(t) = k_1(t) \left[ y(t) + \int_{\tau_1}^t y(\tau) K(t, \tau) d\tau \right] \quad (5)$$

ma zawsze, ze względu na  $y(t)$ , jednoznaczne rozwiązanie gdy znana funkcja  $k_1(t)$  jest ciągła w przedziale  $\tau_1 < \tau < t$  jądro  $K(t, \tau)$  jest ograniczone i ciągłe w trójkącie  $\tau_1 < \tau < t$ ,  $\tau_1 < t < T$ , oraz gdy funkcja  $x(t)$  jest całkowalna. Rozwiązanie równania (5) można wtedy zapisać w formie

$$y(t) = \frac{x(t)}{k_1(t)} - \int_{\tau_1}^t \frac{x(\tau)}{k_1(\tau)} R(t, \tau) d\tau. \quad (6)$$

Funkcja dwóch zmiennych  $R(t, \tau)$  jest rezolwentą jądra  $K(t, \tau)$ , którą obliczamy np. z równania całkowego

$$K(t, \tau) - R(t, \tau) = \int_{\tau}^t K(t, \theta) R(\theta, \tau) d\theta \quad (7)$$

Wprowadzając symbolikę operatorową równania (5), (6) można przedstawić w postaci:

$$x = \tilde{K}y, \quad (8)$$

oraz

$$y = \frac{1}{\tilde{K}} x, \quad (9)$$

gdzie  $\frac{1}{\tilde{K}}$  jest operatorem odwrotnym do operatora  $\tilde{K}$ . Działanie  $\frac{1}{\tilde{K}}$  na funkcję  $x(t)$  jest dane przepisem

$$\frac{1}{\tilde{K}} x = \tilde{R} \frac{x}{k_1}, \quad (10)$$

przy

$$\tilde{R} = 1 - \int_{\tau_1}^t (\dots) R(t, \tau) d\tau, \quad (11)$$

gdzie  $R(t, \tau)$  jest rezolwentą jądra  $K(t, \tau)$ .

Istnienie odwrotnego operatora  $\frac{1}{\tilde{K}}$  jest zapewnione przez istnienie jednoznacznego rozwiązania (6).

Można udowodnić [3], że liniowa kombinacja operatorów całkowych Volterry II-go rodzaju (np. postaci (2) lub (3)), oraz ich iloczyn da się sprowadzić do operatora tego samego rodzaju o jądrze złożonym

$$\tilde{A} \pm \tilde{B} \equiv [a_1(t) \pm b_1(t)] \left[ 1 + \int_{\tau_1}^t (\dots) \frac{a(t)A(t, \tau) \pm b(t)B(t, \tau)}{a(t) \pm b(t)} d\tau \right], \quad (12)$$

oraz

$$\tilde{A}\tilde{B} \equiv a_1(t)b_1(t) \left[ 1 + \int_{\tau_1}^t (\dots) C(t, \tau) d\tau \right], \quad (13)$$

gdzie:

$$C(t, \tau) = B(t, \tau) + \frac{b_1(\tau)}{b_1(t)} A(t, \tau) + \frac{1}{b_1(t)} \int_{\tau}^t b(\Theta) A(t, \Theta) B(\Theta, \tau) d\Theta. \quad (14)$$

Aby otrzymać jądro (14) należy w obliczeniach stosować przekształcenie Dirichleta [2]. W przypadku ogólnym iloczyn operatorów jest nieprzemienne. Przy wyznaczaniu operatorów odwrotnych do sumy lub iloczynu operatorów Voltery należy najpierw otrzymać wyrażenia typu (12) lub (13) a następnie obliczyć odpowiednie rezolwenty.

Uwzględniając wszystkie powyższe rozważania równania fizyczne (1) dają się zawsze przedstawić za pomocą wzorów

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2\tilde{\mu}} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{1}{2\tilde{\mu}} \tilde{\lambda} \frac{1}{2\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}} \varepsilon_{kk} \quad (15)$$

w których  $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

Złożenie trzech operatorów w (15) nie jest przemienne, ponieważ jądra w tych operatorach zależą oddzielnie od  $t$  i  $\tau$ . Przy obliczaniu wartości drugiego składnika w (15) należy korzystać z wyrażen (12), (13), i (10).

2. N. K. Arutunian w [4] udowodnił istnienie analogii sprężysto-lepkosprężystej w trójwymiarowym ośrodku reologicznym, przy takim samym pełzaniu postaciowym i objętościowym, czyli o stałych współczynnikach Poissona. Związki fizyczne (1) dają się sprowadzić do związków stosowanych przez Arutuniana, gdy przyjęte zostaną następujące równości

$$2\tilde{\mu} \equiv \frac{1 + \nu_1(t)}{E(t)} \left[ 1 + \int_{\tau_1}^t (\dots) F_1(t, \tau) d\tau \right], \quad (16)$$

oraz:

$$\tilde{\lambda} \equiv \frac{\nu_1(t)}{E(t)} \left[ 1 + \int_{\tau_1}^t (\dots) F_2(t, \tau) d\tau \right]; \quad (17)$$

gdzie jądra  $F_1$ ,  $F_2$  mają postać

$$F_1(t, \tau) = -\frac{E(t)}{1 + \nu_1(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)], \quad (18)$$

$$F_2(t, \tau) = -\frac{E(t)}{\nu_1(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(t, \tau), \quad (19)$$

a wielkości

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau), \quad (20)$$

$$\delta_1(t, \tau) = \frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)} + \nu_2(t, \tau) C(t, \tau), \quad (21)$$

są funkcjami pełzania, w których moduł Younga  $E(t)$ , współczynniki Poissona  $\nu_1(t)$ ,  $\nu_2(t, \tau)$ , oraz funkcja  $C(t, \tau)$  określane są doświadczalnie.

Ośrodek, w którym zachodzą warunki

$$\nu_1(\tau) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const.}, \quad (22)$$

prowadzące do równości

$$F_1(t, \tau) = F_2(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau), \quad (23)$$

ma takie samo pełzanie postaciowe i objętościowe. Istnienie analogii sprężysto-lepkosprężystej udowodnił Arutunian dla takiego właśnie ośrodka.

G. A. Prokopowicz w pracy [5] wykazał, że omawiana analogia przy różnym pełzaniu postaciowym i objętościowym ma miejsce w przypadku ośrodka dwuwymiarowego. W rozważaniach swoich przyjął jądra typu (18), (19).

G. A. C. Graham w pracy [6] wyprowadził tzw. uogólnioną analogię dla ośrodka trójwymiarowego (półprzestrzeni), przy różnym pełzaniu postaciowym i objętościowym, ale dla własności reologicznych ustalonych w czasie, czyli bez starzenia. Graham przyjmował również, że obszar w którym zadane są warunki brzegowe (obszar kontaktu stempla lub szczeliny) jest zmienny w czasie w zadany sposób. Gdy obszar ten jest w czasie stały, ma miejsce analogia Lee-Alfreya.

3. W pracy niniejszej wykazano istnienie analogii sprężysto-lepkosprężystej w ośrodku trójwymiarowym przy różnym pełzaniu postaciowym i objętościowym, przy uwzględnieniu starzenia, dla zagadnień typu szczeliny i stempla, gdy obszar kontaktu (brzeg) jest zmienny w dowolny sposób. Rozważać będziemy półprzestrzeń, w której wprowadzono kartezjański układ współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$ , tak, że zmienne  $x_1, x_2$  zadane są na brzegowej półpłaszczyźnie, tzn. dla  $x_3 = 0$ . W tak określonej półprzestrzeni rozpatrywana analogia sprężystolepkosprężysta da się zapisać za pomocą następującego twierdzenia.

Jeżeli warunki brzegowe mają postać:

dla naprężeń stycznych

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (24)$$

na całej płaszczyźnie  $x_3 = 0$ , oraz gdy

a) dla szczeliny

$$\sigma_{33} = \sigma_0(x_1, x_2, t) \quad \text{dla} \quad x_1, x_2 \in \Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t), \quad (25)$$

$$u_3 = \begin{cases} 0 & x_1, x_2 \notin \Omega \\ v(x_1, x_2, t) & x_1, x_2 \in \Omega \end{cases} \quad (25)$$

gdzie  $\sigma_0(x_1, x_2, t)$  jest zadaniem naprężeniem, natomiast  $v(x_1, x_2, t)$  jest nieznanym przemieszczeniem,

b) dla stempla

$$u_3 = u_0(x_1, x_2, t) \quad \text{dla} \quad x_1, x_2 \in \Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t),$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0 & x_1, x_2 \notin \Omega \\ S(x_1, x_2, t) & x_1, x_2 \in \Omega \end{cases} \quad (26)$$

gdzie  $u_0(x_1, x_2, t)$  jest zadaniem przemieszczeniem, natomiast  $S(x_1, x_2, t)$  nieznanym naprężeniem.

to wtedy rozwiązanie problemu zawsze da się sprowadzić do układu dwóch sprzężonych ze sobą równań całkowych postaci

$$\int\int_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} w(\xi_1, \xi_2, t) K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = W(x_1, x_2, t),$$

$$\tilde{F}W(x_1, x_2, t) = -4\pi^2 p(x_1, x_2, t), \quad (27)$$

gdzie funkcje  $w$  i  $p$  są równe odpowiednio: dla szczeliny  $v$  i  $\sigma_0$ , oraz dla stępła  $s$  i  $u_0$ . Wielkość  $\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)$  jest dowolnym, zmiennym obszarem na płaszczyźnie  $x_3 = 0$ . Funkcje  $x_1^0(t)$ ,  $x_2^0(t)$  są parametrycznym równaniem brzegu tego obszaru.  $K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$  jest funkcją Greena odpowiedniego problemu — dla szczeliny wynosi

$$K_{sz}[x_1, x_2, \xi_1, \xi_2] = -2\pi[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2]^{-3/2}, \quad (28)$$

dla stępła zaś

$$K_{st}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = 2\pi[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2]^{-1/2}. \quad (29)$$

Operator  $\tilde{F}$  jest operatorem całkowym Volterry II-go rodzaju postaci

$$\tilde{F} \equiv f(t) \left[ 1 + \int_{\tau_1}^t (\dots) F(t, \tau) d\tau \right],$$

w którym wielkości  $f(t)$  i  $F(t, \tau)$  zależą od typu zagadnienia i typu materiału ośrodka. Dla problemu szczeliny, zgodnie z punktem 1., ma kształt

$$\tilde{F}_{sz} = \frac{1}{2\tilde{\mu}} \frac{1}{1 + \frac{1}{\tilde{G}}}, \quad (30)$$

natomiast dla stępła

$$F_{st} \equiv \frac{1}{\tilde{F}_{sz}} = \left( 1 + \frac{1}{\tilde{G}} \right) 2\tilde{\mu}, \quad (31)$$

gdzie mamy

$$\tilde{G} \equiv 1 + \frac{2}{3} \tilde{\lambda} \frac{1}{2\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}. \quad (32)$$

Jedno-jednoznaczne rozwiązanie drugiego równania układu (27) można przedstawić w postaci

$$W(x_1, x_2, t) = -4\pi^2 \frac{1}{\tilde{F}} p(x_1, x_2, t) \quad (33)$$

Po wstawieniu (33) do pierwszego równania układu (27) otrzymujemy równanie całkowe

$$\int\int_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} w(\xi_1, \xi_2, t) K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = -4\pi^2 \frac{1}{\tilde{F}} p(x_1, x_2, t) \quad (34)$$

analogiczne do równania dla odpowiedniego problemu sprężystego, w którym czas  $t$  jest parametrem. Funkcja  $w(\xi_1, \xi_2, t)$  zadana w obszarze  $\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)$  jest podstawową wielkością w przedstawianej analogii. Po jej znalezieniu, z odpowiednich wzorów można określić naprężenia i przemieszczenia w dowolnych punktach półprzestrzeni. W rozważa-

nych problemach przemieszczenia  $u_1, u_2, u_3$  (korzystając z podwójnej transformacji Fouriera) dane są wzorami:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \left[ -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{1}{1 + \tilde{G}} D + x_3 \frac{\tilde{G}}{1 + \tilde{G}} D \right] e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} x_3} \times e^{i(\alpha x_1 + \beta x_2)} d\alpha d\beta, \\
 u_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \right) \frac{1}{1 + \tilde{G}} D + x_3 \beta \frac{\tilde{G}}{1 + \tilde{G}} D \right] \times \\
 &\quad \times e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} x_3} \cdot e^{i(\alpha x_1 + \beta x_2)} d\alpha d\beta, \\
 u_3 &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ D + x_3 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\tilde{G}}{1 + \tilde{G}} D \right] \cdot e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} x_3} \cdot e^{i(\alpha x_1 + \beta x_2)} d\alpha d\beta
 \end{aligned} \tag{35}$$

Wielkość  $D = D(\alpha, \beta, t)$  określona jest za pomocą uzyskanych z podstawowego układu (27) funkcji  $v(\xi_1, \xi_2, t)$  i  $S(\xi_1, \xi_2, t)$  następującymi wzorami:

a) dla szczeliny

$$iD = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} v(\xi_1, \xi_2, t) e^{-i(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \tag{36}$$

b) dla stempla

$$iD = -\frac{1}{2\pi \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \tilde{F}_{st} \iint_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} s(\xi_1, \xi_2, t) e^{-i(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \tag{37}$$

Wstawiając wzory (36) lub (37) do (35), po obliczeniu całek, otrzymujemy funkcje przemieszczeń  $u_1, u_2, u_3$  za pomocą których ze znanych wzorów teorii sprężystości można wyznaczyć tensory odkształceń i naprężeń w całej półprzestrzeni.

Dyskusję równania (34) przeprowadzimy rozpatrując dwa przypadki:

a) Rozdzielenie zmiennych.

Gdy funkcję  $p(x_1, x_2, t)$  zadaną w obszarze  $\Omega = \Omega(t)$  zapisać można w postaci

$$p(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^n p_k(x_1, x_2) A_k(t) \tag{38}$$

to ze związku (33) mamy

$$W(x_1, x_2, t) = -4\pi^2 \sum_{k=1}^n p_k(x_1, x_2) B_k(t), \tag{39}$$

gdzie:

$$B_k(t) = \frac{1}{F} A_k. \tag{40}$$

Znając następnie rozwiązania  $w_k$  równań składowych problemów sprężystych

$$\iint_{\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t)} w_k(\xi_1, \xi_2, t) K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = p_k(x_1, x_2) \tag{41}$$



w których czas jest parametrem, szukane rozwiązanie problemu lepkosprężystego, z zasady superpozycji, otrzymujemy w formie

$$w(\xi_1, \xi_2, t) = -4\pi^2 \sum_{k=1}^n w_k(\xi_1, \xi_2, t) B_k(t). \quad (42)$$

W przypadku gdy jądra operatorów  $2\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\lambda}$  zależą od różnicy argumentów

$$\begin{aligned} \mu(t, \tau) &= \mu(t - \tau), \\ \lambda(t, \tau) &= \lambda(t - \tau), \end{aligned} \quad (43)$$

przy stałych współczynnikach Lamego natychmiastowego odkształcenia

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu(0), \\ \lambda_1 &= \lambda(0), \end{aligned} \quad (44)$$

otrzymujemy analogię rozpatrywaną przez Grahama, natomiast, gdy zachodzą równości (16), (17) przy (22), (23) dostajemy analogię omawianą przez Arutuniana.

b) Obszar całkowania stały w czasie.

Jeżeli w równaniach (27) zachodzi zależność

$$\Omega(x_1^0(t), x_2^0(t), t) = \Omega(x_1^0, x_2^0) = \text{const.} \quad (45)$$

wtedy, po jednoznacznym przedstawieniu w  $(\xi_1, \xi_2, t)$  za pomocą funkcji  $v(\xi_1, \xi_2, t)$  wzorem

$$w(\xi_1, \xi_2, t) = \frac{1}{F} v(\xi_1, \xi_2, t), \quad (46)$$

mamy z (34) równanie

$$\iint_{\Omega(x_1^0, x_2^0)} v(\xi_1, \xi_2, t) K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = -4\pi^2 p(x_1, x_2, t), \quad (47)$$

które określa rozwiązanie problemu sprężystego z czasem jako parametrem. Po wyznaczeniu funkcji  $v$  z (47) rozwiązanie zagadnienia lepkosprężystego ze starzeniem otrzymujemy ze wzoru (46). Jeżeli przyjmiemy, że zachodzą warunki (42), (43), (44) i (45), wtedy z równania (34), po zastosowaniu transformacji Laplacea względem czasu, otrzymujemy analogię Lee-Alfreya.

#### Literatura

1. Я. Н. РАБОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкции*. Изд. Наука, 1966.
2. A. PISKOREK, *Równania całkowite*, WNT, Warszawa 1971.
3. Z. PIEKARSKI, *praca doktorska*, Politechnika Krakowska, 1971.
4. N. K. ARUTUNIAN, *Some problems in Theory of Creep in Concrete Structures*, Pergamon Press, London, 1966, (przekład z rosyjskiego).
5. G. A. PROKOPOWICZ, T.M.M., 20, 6, 1956.
6. G. A. C. GRAHAM, Report No PSR-47, 2-1966, North Caroline State University.

## Р е з ю м е

## УПРУГО — УПРУГОВЯЗКАЯ АНАЛОГИЯ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ СО СТАРЕНИЕМ

В работе обсуждается упруго — упруговязкая аналогия с учётом старения для объёмной и сдвиговой ползучести. Получены решения задач типа трещины и штампа для трёхмерного полупространства при предположении, что зоны контакта изменяются любым образом.

## S u m m a r y

## ELASTIC — VISCOELASTIC ANALOGY FOR A SEMI-SPACE WITH AGEING.

The concept of elastic — viscoelastic analogy for non — invariant in time materials with various deviatoric creep laws has been considered. The particular solutions for crack and punch problems in three — dimensional half — space have been solved. It was assumed that the contact boundaries may change arbitrarily.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1985 roku.*

---

**SZTYWNO-LEPKOPLASTYCZNE PŁYTY KOŁOWE POD INTENSYWNYM  
OBCIĄŻENIEM DYNAMICZNYM.  
ANALIZA TEORETYCZNO-DOŚWIADCZALNA  
I PROPOZYCJE ZASTOSOWAŃ**

WŁODZIMIERZ IDCZAK  
CZESŁAW RYMARZ  
ANDRZEJ SPYCHAŁA

*Wojskowa Akademia Techniczna*

## 1. Wstęp

Jednym z rodzajów obciążeń jakim podlegają konstrukcje jest fala uderzeniowa powstająca w wyniku detonacji materiału wybuchowego, czy mieszaniny gazu energetycznego lub par czy też pyłów z powietrzem. Do konstrukcji w ten sposób obciążanych należą między innymi: obiekty schronowe, tamy przeciwwybuchowe w kopalniach, elementy konstrukcyjne i osłonowe budynków mieszkalnych, przemysłowych i inne.

Rozwiązanie tak obciążonej konstrukcji z uwzględnieniem najczęściej trwałych i często dużych deformacji należy do bardzo złożonych zagadnień teorii konstrukcji sprężysto-lepkoplastycznych. Rozwiązania te, często z konieczności przybliżone, weryfikowane są w sposób doświadczalny i to najczęściej w skali naturalnej.

Badania te zwykle mają na celu:

- 1) określenie parametrów fali uderzeniowej działającej na elementy badanej konstrukcji,
- 2) określenie stanu deformacji konstrukcji.

Pomiar parametrów fali uderzeniowej rodzi szereg problemów natury technicznej:

1. Punkty pomiarowe znajdują się w pobliżu bezpośredniego destrukcyjnego oddziaływania produktów wybuchu. Istnieje obawa uszkodzenia czujników elektronicznych.
2. W celu określenia przestrzennego rozkładu parametrów fali uderzeniowej na badanej konstrukcji trzeba instalować wiele czujników (kilkadziesiąt, a nieraz kilkaset).

W tej sytuacji pomiar elektroniczny jest w zasadzie niemożliwy. Potrzeba do tego celu stosować możliwie prosty, odporny i tani czujnik. Od pewnego czasu w diagnostyce konstrukcji obciążanych falą uderzeniową stosowane są z powodzeniem mechaniczne czujniki ciśnienia, których elementem pomiarowym jest cienka płyta (membrana) pracująca w warunkach kołowej symetrii. Element pomiarowy w wyniku działania bezmasowego impulsu ciśnienia i bardzo wysokiej intensywności i czasie trwania rzędu milisekundy doznaje trwałych odkształceń. Płaski przed obciążeniem element pomiarowy zamienia się pod ob-

ciążeniem w powłokę. Czas trwania impulsu można pomierzyć za pomocą innych technik pomiarowych, lub można go z niewielkim błędem oszacować stosując znane metody fizyki wybuchu. Natomiast wartość nadciśnienia na froncie fali uderzeniowej, która zależy od wielu czynników jest nieznana.

Idea stosowania mechanicznego czujnika ciśnienia polega na powiązaniu trwałych ugięć środka elementu pomiarowego  $W_0$  z nadciśnieniem na froncie fali uderzeniowej  $P_0$  przy znanym czasie jej działania. Należy zbudować zatem zależności funkcyjne  $P_0 = P_0(W_0)$  zwane dalej krzywymi skalowania dla różnych czasów działania fali uderzeniowej.

Celem zasadniczym pracy jest rozwiązanie zagadnienia ruchu cienkiej płyty kołowej obciążonej równomiernie rozłożonym impulsem nadciśnienia, której ugięcia środka mogą osiągać wartość kilkudziesięciu grubości płyty.

Postawiony cel został osiągnięty w następujący sposób:

1. W rozdziale 2 podano rozwiązanie dla cienkiej płyty kołowej w zakresie dużych ugięć pomijając jednak oddziaływanie momentowe. Pominięcie oddziaływań momentowych jest pewnym mankamentem opisu. Jest jednak możliwe do zaakceptowania z uwagi na niewielką sztywność giętą płyty oraz rozważany zakres ugięć [3].
2. Analizując wyniki uzyskane dla dużych ugięć wprowadzono pewne uproszczenia rozwiązując zagadnienie umiarkowanie dużych ugięć z oddziaływaniami momentowymi (rozdział 3) oraz porównano obie teorie.
3. W rozdziale 4 zawarta jest weryfikacja doświadczalna obliczeń teoretycznych.
4. Praca kończy się wnioskami (rozdział 5), w których oceniono otrzymane rozwiązanie oraz omówiono możliwe do zaakceptowania uproszczenia w opisie procesu.

Efektom końcowym pracy jest zbiór krzywych skalowania dla przykładowego elementu pomiarowego.

## 2. Sformułowanie ogólne

Biorąc pod uwagę fakt, iż celem rozważań jest wyznaczenie dynamicznych krzywych skalowania mechanicznych czujników ciśnień będziemy formułowali ogólne równania opisujące duże, trwałe ugięcie rozważanego elementu. Rozwiązanie zagadnienia ograniczać się będzie w zasadzie do znalezienia funkcji wiążącej amplitudę obciążającej fali ciśnienia z trwałym ugięciem centralnego punktu membrany pomiarowej.

Rozważamy element pomiarowy mechanicznego czujnika ciśnień traktując go jako cienką płytę kołowo-symetryczną o promieniu  $R$ , grubości początkowej  $2h_0$ , gęstości materiału  $m$ , utwierdzoną na obwodzie.

Interesuje nas opis teoretyczny uwzględniający następujące elementy:

- 1) parametry geometryczne wyrażone zależnością  $(R/2h_0) = 30 \div 150$ ;
- 2) wartość trwałych ugięć płyty rzędu  $(W_0/2h_0) = 20 \div 30$ , gdzie  $W_0$  oznacza trwałe ugięcie centralnego punktu płyty.

W związku z powyższym przyjmujemy następujące grupy założeń ogólnych [1].

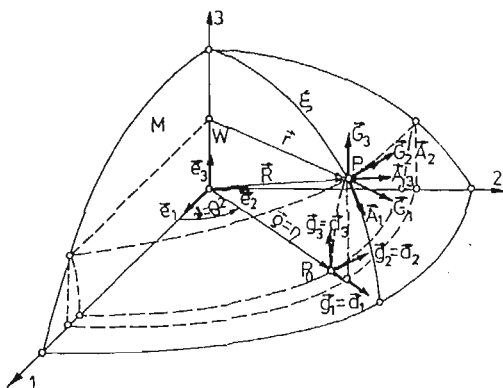
W odniesieniu do modelu procesu ruchu: ugięcia skończone, zakres odkształceń plastycznych, bezmomentową teorię powłok.

W odniesieniu do modelu materiału i konstrukcji: sztywno-lepkoplastyczny, bez wzmocnie-

nia plastycznego, niestowarzyszone prawo płynięcia, warunek plastyczności Hubera-Misesa-Henky'ego.

W odniesieniu do właściwości materiału: ciągliwość, izotropowość, nieściśliwość.

Równania równowagi formułujemy w układzie współrzędnych biegunowych  $(\varrho, \Theta)$  określających położenie punktów materialnych zdefiniowanych w płycie przed derofmacją (rys. 1).



Rys. 1.

Zakres dużych trwałych ugięć elementu pomiarowego mechanicznego czujnika ciśnień opisywany jest następującym układem równań wyprowadzanych w oparciu o przytoczone wyżej założenia [1].

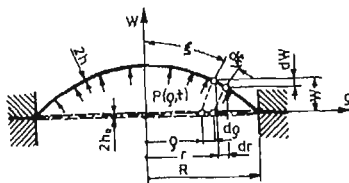
$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & r n_{1,1} + r n_1 \frac{h_{,1}}{h} + (n_1 - n_2) \cdot r_{,1} - \frac{m}{\sigma_0} r (r_{,1} \dot{r} + w_{,1} \dot{w}) = 0, \\
 \text{b)} \quad & k_1 n_1 + k_2 n_2 + p \frac{1}{2h} - \frac{m}{\sigma_0} (r_{,1} \dot{w} - w_{,1} \dot{r}) = 0, \\
 \text{c)} \quad & r n_{1,1}^* + r n_1^* \frac{h_{,1}}{h} + (n_1^* - n_2^*) r_{,1} = 0, \\
 \text{d)} \quad & k_1 n_1^* + k_2 n_2^* + p_1^* \frac{1}{2h} = 0, \\
 \text{e)} \quad & \lambda_1 = \frac{d\xi}{d\varrho}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{\varrho}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{h_0}, \\
 \text{f)} \quad & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \\
 \text{g)} \quad & (r k_2)_{,1} - r_{,1} k_1 = 0, \\
 \text{h)} \quad & k_2 = r^{-1} w_{,1}, \\
 \text{i)} \quad & (r_{,1})^2 + (w_{,1})^2 = 1, \\
 \text{j)} \quad & n_1 - n_1^* = \frac{2k}{\gamma \sigma_0} \left( 2 \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} \right), \\
 \text{k)} \quad & n_2 - n_2^* = \frac{2k}{\gamma \sigma_0} \left( 2 \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} \right).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

W układzie (2.1) oznaczono:

- dynamiczne równania równowagi (a, b),
- równania równowagi stanu granicznego (c, d),
- definicje współczynników wydłużeń nitek materialnych (e),
- warunek nieściśliwości (f),
- warunek zgodności geometrycznej (g),
- równanie krzywizny obwodowej (h),
- tożsamość geometryczną (i),
- związki materiałowe wynikające z koncepcji T. Wierzbickiego tzw. niestowarzyszonego prawa płynięcia (j, k).

W równaniach (2.1) przyjęto następujące oznaczenia:

- $n_1, n_2$  — bezwymiarowe składowe naprężeń głównych,
- $n_1^*, n_2^*$  — bezwymiarowe składowe naprężeń głównych spełniające statyczny warunek plastyczności,
- $k_1, k_2$  — krzywizny główne,
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — współczynniki wydłużeń nitek materialnych w kierunkach głównych,
- $r, w$  — cylindryczne współrzędne punktu definiowane w procesie deformacji (rys. 2),
- $p$  — obciążenie zewnętrzne zmienne w czasie,
- $p^*$  — statyczne obciążenie graniczne [11],
- $2h$  — grubość elementu,
- $k$  — granica plastyczności na ścinanie,
- $\sigma_0$  — graniczne naprężenia uplastyczniające,
- $\gamma$  — współczynnik określający właściwości lepkie materiału.



Rys. 2.

Układ równań (2.1) rozwiązywano metodą różnic skończonych stosując niejawną schemat całkowania równań równowagi. Sposób rozwiązania mający na celu wyznaczenie trwałych ugięć elementu pomiarowego czujnika podano w [1].

## Wyniki

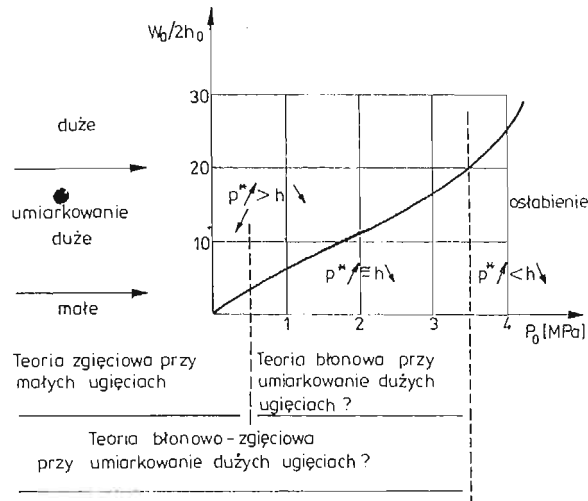
Trwałe ugięcie względne środkowego punktu elementu pomiarowego w funkcji amplitudy fali ciśnienia  $P_0$  działającej na czujnik przedstawiono na rys. 3.

Na krzywej (rys. 3) wyróżnia się trzy obszary z punktu widzenia amplitudy ciśnienia  $P_0$ :

- 1) pierwszy, w którym wzmocnienie geometryczne elementu pomiarowego przeważa nad osłabieniem związanym z maleniem jego grubości,
- 2) drugi, w którym efekty te równoważą się,

3) trzeciej, w której osłabienie przeważa, aż do momentu pojawienia się zniszczenia elementu pomiarowego.

Wykres przedstawiony na rys. 3 sugeruje, iż do otrzymania zadowalającej krzywej skalowania dynamicznego w zakresie ugięć od zera do dwudziestu grubości membrany mógłby



Rys. 3.

wystarczyć opis prostszy, np. teoria ugięć umiarkowanie dużych. Ponadto, aby uwzględnić oddziaływanie momentowe, które mogą być istotne przy mniejszych ugięciach przyjęto sformułowanie w ramach zgięciowo-błonowej teorii umiarkowanie dużych ugięć zdając sobie sprawę z faktu, iż porównanie z wynikami otrzymanymi uprzednio będą nie w pełni adekwatne ze względu na fakt nieuwzględnienia oddziaływań momentowych przy opisie ugięć skończonych.

### 3. Sformułowanie uproszczone

W ramach uproszczonej teorii ugięć umiarkowanie dużych deformacja elementu pomiarowego mechanicznego czujnika ciśnienia opisywana jest następującym, bezwymiarowym równaniem ruchu [3].

$$\nabla^4 w - \frac{6}{8} \beta^2 \dot{w}_{,e} w_{,e} w_{,ee} + \alpha \dot{w} = a[p(\tau) - p^*(w_0)] \quad (3.1)$$

bazującym na: dynamicznym równaniu równowagi, równaniu równowagi stanu granicznego, niestowarzyszonym prawie płynięcia, związkach odkształceniowo-przemieszczeniowych.

W pracy [5] przedstawiono asymptotyczne przejście między układem równań (2.1) określającym skończone ugięcia rozważanego elementu, a równaniem opisującym zakres ugięć umiarkowanie dużych, nie uwzględniającym oddziaływań momentowych, które uwzględnione są dodatkowo w równaniu (3.1).

W równaniu (3.1) przyjęto następujące oznaczenia:

- $w$  — bezwymiarowe ugięcie płyty w kierunku prostopadłym do jej powierzchni środkowej przed deformacją,  
 $p(\tau)$  — powierzchniowa siła zewnętrzna,  
 $p^*(w_0)$  — obciążenie graniczne działające w sposób statyczny na płytę sztywno-plastyczną [6],  
 $\gamma$  — współczynnik określający własności lepkie materiału płyty.

$$w = \frac{W}{R}, \quad \tilde{\gamma} = \gamma \sqrt{3} t_f, \quad a = \frac{3}{16} \tilde{\gamma} \beta,$$

$$p^*(w_0) = 12,5 \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 R}{2h_0}\right)^2},$$

$$\alpha = (mR^3/M_0 t_f^2), \quad \beta = 2R/h_0, \quad t_f = \frac{I}{12,5M_0}, \quad (3.2)$$

$$M_0 = \sigma_0 h_0^2$$

zaś

- $w_0$  — trwałe ugięcie centralnego punktu płyty,  
 $t_f$  — koniec ruchu wg rozwiązania dla płyty idealnie plastycznej [6],  
 $I$  — intensywność równomiernie rozłożonego impulsu,  
 $\sigma_0$  — statyczne naprężenie uplastyczniające.

Równanie (3.1) rozwiązujemy przy następujących warunkach brzegowych:

$$m_r = m_\theta \quad \text{czyli} \quad \dot{w}_{,e} = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = 0$$

$$m_r - m_r^* = m_\theta - m_\theta^* \quad \text{czyli} \quad \dot{w}_{,ee} - \frac{1}{\varrho} \dot{w}_{,e} = 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{w}_{,e} = 0, \quad \dot{w} = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = 1$$

oraz początkowych

$$w = 0, \quad \dot{w} = 0 \quad \text{dla} \quad \tau = 0 \quad (3.4)$$

W równaniu (3.3) oznaczono symbolami  $m_r$ ,  $m_\theta$  bezwymiarowe składowe momentów w kierunkach głównych ( $r$ ,  $\theta$ ), zaś symbolami  $m_r^*$ ,  $m_\theta^*$  bezwymiarowe składowe momentów spełniające warunek stanu granicznego dla odpowiedniego zadania statyki identycznej płyty wykonanej z materiału sztywno-idealnie plastycznego, obciążonej ciśnieniem  $p^*(w_0)$  określonym w układzie zależności (3.2).

Poszukując przybliżonego rozwiązania równania (3.1) przyjmiemy założenie o istnieniu stacjonarnego pola prędkości przemieszczenia płyty, którego profil opisuje funkcja  $\phi_0(\varrho) = (1 - \varrho^2)^2$ , założymy rozwiązanie w postaci iloczynu  $w(\varrho, \tau) = w_0(\tau) \phi_0(\varrho)$  i zażądamy całkowitego spełnienia równania (3.1) [3].

$$\int_0^1 L(w) \Phi_0(\varrho) \varrho d\varrho = 0 \quad (3.5)$$



otrzymując równanie różniczkowe zwyczajne opisujące ruch centralnego punktu płyty będącej elementem pomiarowym mechanicznego czujnika ciśnienia [3]

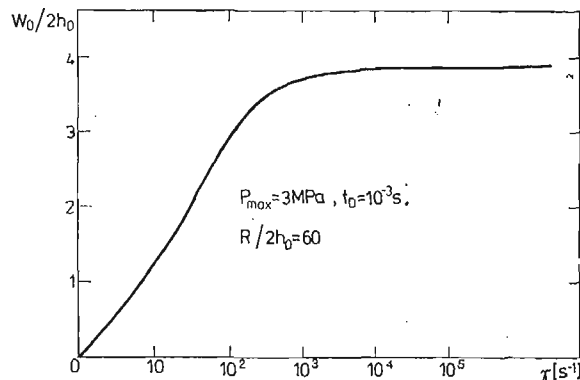
$$\ddot{w}_0 + \frac{320}{3a\alpha} \left( 1 + \frac{3}{280} \beta^2 w_0^2 \right) \dot{w}_0 - \frac{10}{6\alpha} [p(\tau) - p^*(w_0)] = 0 \quad (3.6)$$

Jest to równanie pozwalające przyporządkować trwałe maksymalne ugięcie elementu pomiarowego obciążeniu o znanych parametrach, a tym samym może być wykorzystane jako podstawa do wyznaczenia krzywych skalowania dla czujników mechanicznych zapewniając pomiar dowolnych, rzeczywistych amplitud fali ciśnienia. Rozwiązanie równania (3.6) nie przedstawia żadnej trudności, a w omawianym przypadku całkowano je metodą Runge-Kutty.

### Wyniki

Ze względów praktycznych elementy pomiarowe mechanicznych czujników ciśnienia wykonane zostały z blachy mosiężnej. W literaturze brak jest informacji o wrażliwości tego materiału na prędkość deformacji.

W celu wyjaśnienia wpływu współczynnika  $\gamma$  uwzględniającego efekty lepkie materiału na końcowe ugięcia elementu pomiarowego wykonano szereg testów numerycznych. Wyniki przykładowego testu przedstawione są na rys. 4. Z testów wynika, że dla współczynników  $\gamma > (300 - 500)/\text{sek.}$  materiał w tej konstrukcji można uznać za sztywno-idealnie plastyczny.

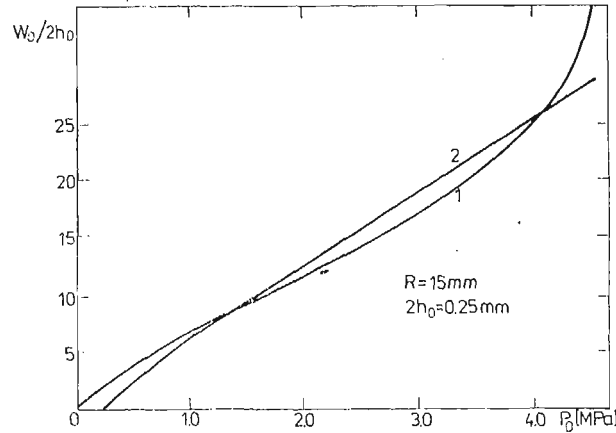


Rys. 4.

Jeżeli teraz założymy, że stal miękka jako materiał istotnie wrażliwy na prędkość deformacji posiada współczynnik  $\gamma \cong 350/\text{s}$  [12], [13], to można przyjąć, że w rozpatrywanej konstrukcji obciążonej falą uderzeniową o czasie trwania rzędu milisekund, wpływ lepkości można pominąć z punktu widzenia efektów końcowych. Popętniane błędy rzędu 10% są dla praktyki inżynierskiej mało istotne.

Gdybyśmy zatem założyli, że mosiądz jest materiałem również istotnie wrażliwym na prędkość deformacji, to w rozpatrywanym zagadnieniu można tę wrażliwość pominąć.

Na rys. 5 przedstawiono względne trwałe ugięcie punktu centralnego membrany pomiarowej w funkcji amplitudy fali uderzeniowej przy ustalonym jej czasie trwania. Wyniki te otrzymano korzystając z bezmomentowej teorii ugięć skończonych [1] i zgięciowo-błonowej teorii ugięć umiarkowanie dużych [2]. Można przyjąć, iż z punktu widzenia potrzeb oma-



Rys. 5.

wianych w pracy, teoria uproszczona może obowiązywać do zakresu trwałych ugięć rzędu  $(W_0/2h_0) \cong 25$ . Jest to zakres stosowany w mechanicznych czujnikach ciśnień.

#### 4. Weryfikacja eksperymentalna

Weryfikację eksperymentalną obliczeń teoretycznych opisano w [4].

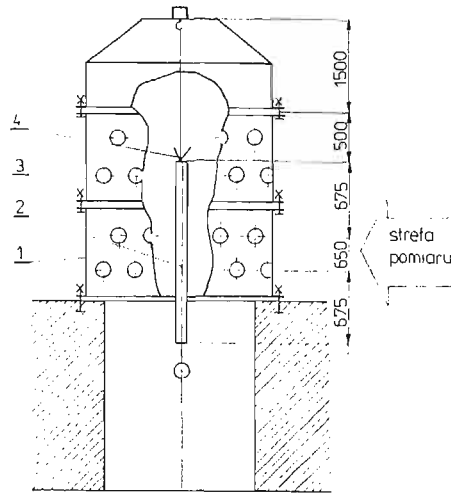
Badania prowadzono w układzie zapewniającym spełnienie następujących warunków:

- 1) płaskość fali uderzeniowej działającej na czujniki,
- 2) niewrażliwość na niejednoczesność detonacji ładunku materiału wybuchowego, który w eksperymencie był źródłem generacji fali uderzeniowej,
- 3) niewrażliwość badanych elementów pomiarowych na wtórne działanie fal uderzeniowych odbitych od różnych powierzchni otoczenia,
- 4) powtarzalność wyników w zakresie kształtu generowanej fali uderzeniowej.

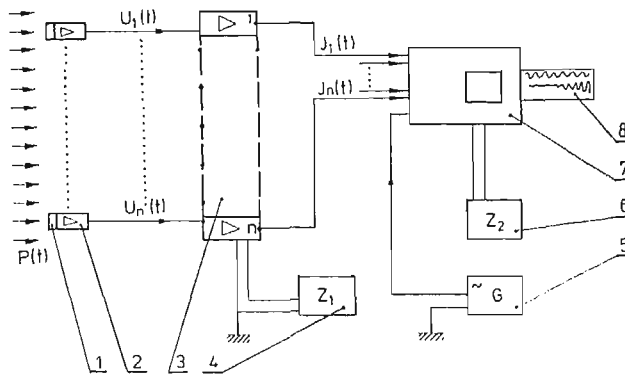
Mając na uwadze powyżej sformułowane warunki wybrano układ badawczy przedstawiony na rys. 6 i rys. 7. Komora pomiarowa miała kształt cylindryczny, źródłem fali uderzeniowej był ładunek cylindryczny z plastycznego materiału wybuchowego. Strefa pomiarowa odpowiednio usytuowana względem źródła fali uderzeniowej znajdowała się na płaszczyźnie komory pomiarowej. Czas trwania obciążenia mierzono elektronicznymi czujnikami rozmieszczonymi w strefie pomiaru.

Fala uderzeniowa generowana w komorze pomiarowej w strefie pomiarowej jest falą padającą, zatem efektywne obciążenie powierzchniowe działające na czujnik wyznaczamy z zależności

$$p(t) = P_{od} \left( 1 - \frac{t}{t_0} \right) \quad (4.1)$$



Rys. 6. Usytuowanie źródła fali uderzeniowej oraz strefy pomiarowej w komorze RKP-2000: 1 — komora pomiarowa, 2 — ładunek plastycznego materiału wybuchowego, 3 — badane membrany, 4 — zapalnik



Rys. 7. Schemat blokowy układu pomiaru czasu trwania obciążenia: 1 — czujnik ciśnienia, 2 — przedwzmacniacz, 3 — wielokanałowy wzmacniacz prądowy TP-76, 4 — zasilacz, 5 — generator wzorcowy ZOPAN, 6 — zasilacz, 7 — oscylograf wielokanałowy 12 LS1, 8 — papier rejestrujący

gdzie  $P_{od}$  jest amplitudą fali odbitej uwzględniającą dynamiczne parcie gazów na przeszkodę  $P_{dpg}$  [7, 8], natomiast  $t_0$  jest czasem trwania obciążenia .

$$P_{od} = P_f + P_{dpg} \tag{4.2}$$

$$P_{dpg} = \frac{2\kappa P_f (P_f - P_a)}{(\kappa - 1)P_f + (\kappa + 1)P_a}$$

gdzie:

- $P_f$  — ciśnienie na czole fali uderzeniowej,
- $P_a$  — ciśnienie atmosferyczne,
- $\kappa$  — wykładnik adiabaty równy w tym przypadku 1, 4.

Wartość amplitudy ciśnienia generowanej detonacją cylindrycznego ładunku materiału wybuchowego o gęstości  $\mu_{MW}$  zależy od jego średnicy  $d$  wyznaczonej z zależności [4]

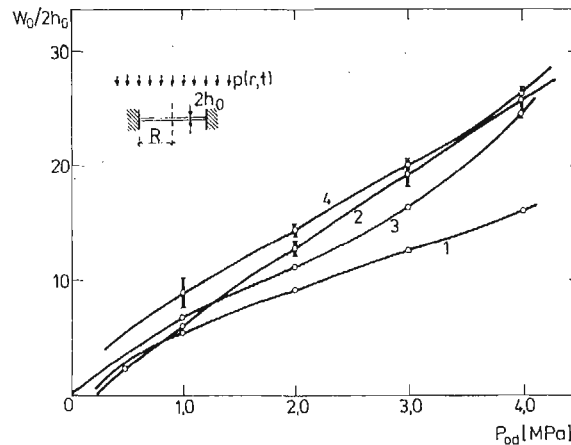
$$d = 2 \left( \frac{0,3R_x^2}{\pi\mu_{MW} \left[ \left( \frac{0,23}{P_f - P_a} + 1 \right)^2 - 1 \right]} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

gdzie  $R_x$  oznacza odległość między frontem fali uderzeniowej, a osią ładunku materiału wybuchowego.

W eksperymentach testowano mechaniczne czujniki ciśnień z wkładkami pomiarowymi o promieniu  $R = 1,5 \cdot 10^{-2}$  [m], grubości  $2h_0 = 2,5 \cdot 10^{-4}$  [m]. Granica plastyczności na ścinanie materiału wynosiła  $k = 167,6$  [MN/m<sup>2</sup>], oraz gęstość materiału  $m = 8,4$  [g/cm<sup>3</sup>].

Tabelaryczne wyniki testów obrobione statystycznie przedstawiono w [4]. Zbudowane na ich podstawie wykresy zamieszczone na rys. 8 przedstawiają względne, trwałe ugięcie środka membrany pomiarowej czujnika jako funkcję amplitudy ciśnienia efektywnie działającego na czujnik.

Dodatkowo na rys. 8 naniesiono krzywą 1 otrzymaną z eksperymentalnego skalowania czujnika poddanego działaniu obciążeń statycznych.

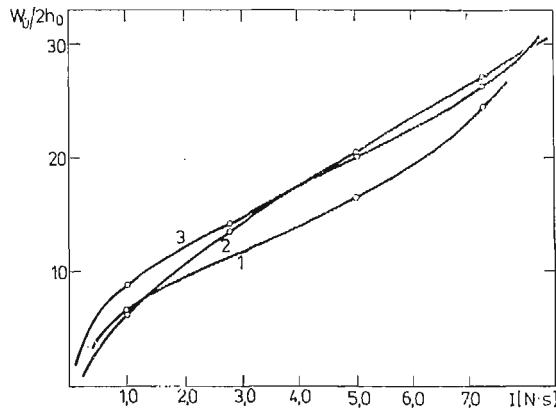


Rys. 8. Zależność trwałego ugięcia centralnego punktu sztywno-plastycznej płyty od parametrów obciążenia  $P_{od}$ ,  $t_0$ : 1 — wyniki eksperymentalne — obciążenie statyczne, 2 — wyniki teorii umiarkowanie dużych ugięć, 3 — wyniki teorii skończonych ugięć, 4 — wyniki eksperymentalne — obciążenie dynamiczne

Porównanie krzywych z rys. 8 jest utrudnione ze względu na to, iż każdemu punktowi określonej amplitudy ciśnienia  $P_{od}$  odpowiada inny czas trwania obciążenia co wynika ze specyfiki eksperymentu. Jednakże porównania takie są możliwe jeśli na osi poziomej odłożymy wartość intensywności impulsu zewnętrznego jaki jest przekazywany przez fale uderzeniowe na czujnik zaś na osi pionowej względne trwałe ugięcie membrany pomiarowej czujnika (rys. 9).

Należy zauważyć, iż teoria uproszczona daje wyniki bliższe eksperymentalnych niż teoria bardziej ogólna. Jest to prawdopodobnie związane z faktem, iż w teorii ugięć umiarkowanie dużych uwzględniono oddziaływania momentowe w opisie ruchu elementu pomiarowego

czujnika, zaś w teorii ugięć skończonych oddziaływań tych nie uwzględniono. Ponadto na taki przebieg krzywych mogły wpłynąć założenia dotyczące metody uproszczonego rozwiązania równań ruchu, które zakładały istnienie stacjonarnego pola prędkości przemieszczeń i spełniania tych równań w sposób całkowity.



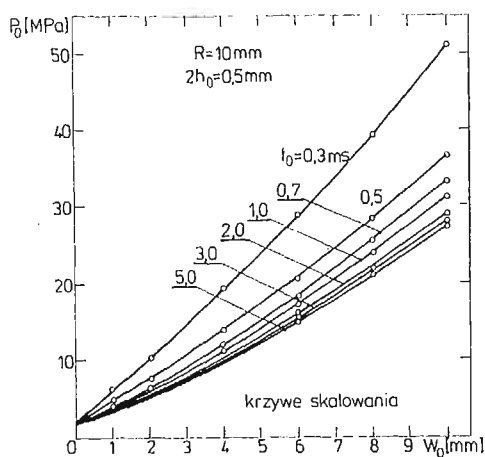
Rys. 9. Zależność trwałych ugięć centralnego punktu sztywno-plastycznej płyty od impulsu obciążającego  $I$ :  
 1 — wyniki teorii skończonych ugięć, 2 — wyniki teorii umiarkowanie dużych ugięć, 3 — wyniki eksperymentalne — obciążenie dynamiczne

Z inżynierskiego punktu widzenia można dopuścić stosowanie zaprezentowanej wyżej teorii uproszczonej do opisu procesu trwałych ugięć elementu pomiarowego mechanicznych czujników ciśnienia, przy czym jak to wynika z rys. 9, należy tak dobierać gabaryty elementu pomiarowego, aby otrzymać jego trwałe ugięcia leżące w zakresie  $15 \leq (W_0/2h_0) \leq 28$ , co zapewni minimalny błąd pomiaru amplitudy ciśnienia.

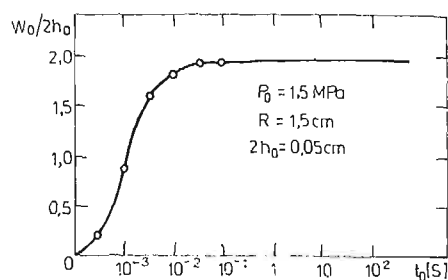
### 5. Wnioski końcowe

Z przeprowadzonych rozważań, testów numerycznych i badań eksperymentalnych wynikają następujące wnioski:

1. W zakresie ugięć względnych  $(W_0/2h_0) < 30$  można z wystarczającą dla praktyki dokładnością stosować uproszczony model procesu (momentowo-membranowa teoria ugięć umiarkowanie dużych) i uproszczony model całkowania zagadnienia.
2. Można również zaniedbać efekty lepkie przyjmując model sztywno-idealnie plastyczny. Okazało się bowiem, że element pomiarowy wykonany z materiału istotnie wrażliwego na prędkość deformacji o badanej konfiguracji i realnych czasach trwania obciążenia rzędu milisekundy, tej wrażliwości nie wykazuje. Potwierdza to tezę, że lepkość konstrukcji nie jest tylko funkcją materiału, ale również jej konfiguracji i obciążenia.
3. Zamieszczone na rys. 10 przykładowe krzywe skalowania zależą od czasu trwania obciążenia  $t_0$ . Z rysunku wynika, że rodzina krzywych posiada asymptotę.
4. Potwierdzeniem wniosku wymienionego w p. 3 jest rys. 11. Z rysunku tego wynika, że dla czasów trwania obciążenia  $t_0 > 10$  ms ugięcia końcowe nie zależą od  $t_0$ . Jest to istotny wniosek posiadający dużą wartość praktyczną.



Rys. 10.



Rys. 11.

## Literatura

1. W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Large deflection of a rigid visco-plastic impulsively loaded circular plate*. J. Tech. Phys., 21, 4, 473 - 487, 1980.
2. G. T. MARCZUK, *Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1983.
3. W. IDCZAK, A. SPYCHAŁA, *Sztynno-lepkoplastyczna płyta kołowa obciążona impulsem ciśnienia*, Biul. WAT, 12, 1978.
4. W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Studies on shock-wave loaded, clamped circular plates*. J. Tech. Phys., 22, 2, 175 - 184, 1981.
5. W. IDCZAK, *Duże ugięcia sztywno-lepkoplastycznej powłoki kołowej w stanie blonowym obciążonej impulsem ciśnienia*. Rozprawa doktorska 1979.
6. T. WIERZBICKI, *Large deflections of strain rate sensitive plate loaded impulsively*, Arch. Mech., 21, 1, 67 - 79, 1969.
7. Ф. СТАПОКЕВИЧ, *Физика взрыва*, Изд. Наука, Москва 1975.
8. Ю. ЯКОВЛЕВ, *Гидродинамика взрыва*, Судпромг. 12, Ленинград 1961.
9. T. WIERZBICKI, *Dynamika powłok lepkoplastycznych*, Rozprawy Inżynierskie, 19, 4, 1971.
10. L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Dynamics of deformable elements of pressure measuring gauges*, WAT, Warszawa 1970.
11. E. T. ONAT, R. M. HAYTHORNTHWAITE, *The load carrying capacity of circular plates at large deflection*, J. Apl. Mech., 23, 1965.
12. T. WIERZBICKI, A. L. FLORENCE, *A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates*, Int. J. Sol. Struct., 6, 1970.
13. T. WIERZBICKI, *Duże ugięcia konstrukcji obciążonych dynamicznie. Przegląd krytyczny stosowanych metod*, Rozpr. Inż., 24, 2, 1976.

## Резюме

ЖЕСТКО — ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЕ КРУГЛЫЕ ПЛИТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИНТЕНСИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ. ТЕОРЕТИЧЕСКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПРИМЕНЕНИЙ

Представлено решение задачи движения тонкой круглой плиты равномерно нагруженной импульсом давления. Под влиянием сильного давления плита достигает прогиба порядка несколь-

ко десятков толщины. Представлена экспериментальная проверка теоретических расчетов. Рассмотрено метод использования достигнутых результатов в проектировании механических устройств до измерения давления.

S u m m a r y

RIGID — VISCOPLASTIC CIRCULAR PLATES UNDER INTENSIVE DYNAMICAL LOADINGS. THEORETICAL-EXPERIMENTAL ANALYSIS AND PROPOSALS OF APPLICATIONS

The solution of the problem of thin circular plate motion has been presented. The plate is loaded by uniformly distributed pressure pulse. The middle point deflections due to the loading are of the range of some tens of plate thicknesses. The experimental verification of theoretical calculations has been presented. The way of application of obtained results in the mechanical gauges for pressure measuring design has been discussed.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 września 1986 roku.*

---





## WPLYW RADIACJI NA PARAMETRY KONCENTRYCZNEJ FALI UDERZENIOWEJ W GAZIE POLITROPOWYM

JERZY TYL  
EDWARD WŁODARCZYK

*Wojskowa Akademia Techniczna*

### 1. Wstęp

Włączenie do badawczego arsenału współczesnej fizyki silnych fal uderzeniowych stworzyło możliwości badania właściwości ośrodków ciągłych w polu superwysokich ciśnień rzędu kilku i więcej milionów megapaskali [1 ÷ 5]. Tego rodzaju fale uderzeniowe propagujące się w ośrodkach ciągłych, generowane są najczęściej za pomocą materiałów wybuchowych.

W badaniach eksperymentalnych wymagana jest odpowiednia intensywność fali uderzeniowej oraz odpowiednia geometria jej czoła. Intensywność fali uderzeniowej można regulować, między innymi, poprzez dobór materiału wybuchowego o odpowiedniej prędkości detonacji. Wachlarz wartości prędkości detonacji współczesnych materiałów wybuchowych stosowanych w technice i badaniach laboratoryjnych zawarty jest w przedziale  $1000 \div 10000$  m/s.

Poza tym zakres parametrów termodynamicznych osiągniętych w doświadczeniach z falami uderzeniowymi można rozszerzyć za pomocą efektów kumulacyjnych. Szczególną rolę w tym względzie odgrywają koncentryczne fale uderzeniowe o symetrii cylindrycznej i kulistej. Problem ten był badany teoretycznie i eksperymentalnie przez wielu autorów [6 ÷ 13]. Przegląd literatury z tego zakresu podany jest między innymi w pracy [14].

W większości analizowanych zagadnień teoretycznych zakłada się, analogicznie jak w klasycznych rozwiązaniach samopodobnych [6], [7], jednowymiarowość procesu oraz zaniedbuje się wpływ lepkości, przewodnictwa cieplnego i promieniowania (radiacji). Mimo tych istotnych uproszczeń, model ten pozwala uzyskać dla wielu zagadnień zgodny z rzeczywistym (eksperymentalnym) obraz zjawisk zachodzących w obszarach położonych w dostatecznej odległości od centrum kumulacji.

Dyskusyjne jest natomiast stosowanie takiego modelu do opisywania zjawisk towarzyszących procesowi kumulacji w obszarze bezpośrednio otaczającym punkt (symetria kulista) lub linię (symetria cylindryczna) koncentracji. Duży wpływ na parametry procesu w tym obszarze mają efekty wielowymiarowe związane z niestabilnością silnych fal uderzeniowych

[15], [16]. Ponadto w otoczeniu centrum kumulacji występują: wysoka temperatura i ciśnienie oraz duże gradienty ich zmian. W związku z tym istotną rolę odgrywają tutaj procesy promieniowania i przewodnictwa cieplnego [17].

Dotychczas nie przeprowadzono szczegółowej analizy procesu koncentracji fali uderzeniowej z jednoczesnym uwzględnieniem niestabilności i efektów dysypacyjnych. W dostępnym piśmiennictwie można spotkać tylko badania o charakterze fragmentarycznym. I tak w pracach [15] i [16] badano w sposób przybliżony wpływ niestabilności, a w publikacjach [18] do [22] wpływ wybranych efektów dysypacyjnych na proces propagacji czoła fali oraz na parametry stanu w centrum kumulacji. W pracach [18], [21] i [22] dokonano oszacowań parametrów stanu gazu w otoczeniu miejsca kumulacji fali, wykorzystując do tego celu rozwiązania samopodobne. Założono przy tym, że na większą część procesu propagacji fali efekty dysypacyjne nie mają wpływu. Z kolei w pracach [19] i [20] analizowano problem numerycznie. Główną uwagę zwrócono na badanie roli przewodnictwa cieplnego w końcowej fazie procesu implozji fal uderzeniowych. Oceny zawarte w pracach [18]÷[22] mają charakter jakościowy. Zatem problem teoretycznego opisu wpływu efektów dysypacyjnych i promieniowania na parametry gazu w okolicy centrum kumulacji fali uderzeniowej pozostaje nadal otwarty.

W niniejszej pracy podejmujemy próbę analizy procesu propagacji koncentrycznej fali uderzeniowej w gazie z uwzględnieniem efektów radiacyjnych. Zagadnienie to rozwiążemy za pomocą metody Chestera-Chisnella-Whithama (CCW) [23]. Na możliwość zastosowania metody CCW do opisu koncentrycznych fal uderzeniowych po raz pierwszy zwrócono uwagę w pracy [24], a obszerną analizę problemu przedstawiono w pracach autorów [14], [25], [26]. W pracy [14] uogólniono metodę CCW, stosowaną wcześniej do analizy kumulacji fal uderzeniowych w gazie doskonałym, na przypadek ośrodka którego właściwości fizyczne wyraża równanie stanu o dowolnej postaci oraz pokazano możliwość poprawnego opisu implozji fali uderzeniowej gdy brzeg (cylindra lub sfery) porusza się ze stałą prędkością.

Układ prezentowanej pracy jest następujący. W rozdziale drugim formułujemy problem i przedstawiamy komplet równań wyjściowych do dalszych analiz. W rozdziale trzecim konstruujemy rozwiązanie problemu oraz analizujemy wyniki dla gazu charakteryzowanego politropą z wykładnikiem  $\gamma = 4/3$ .

Wyniki pracy podsumujemy w rozdziale czwartym.

## 2. Sformułowanie problemu

Stosując metodę CCW do analizy rozprzestrzeniania się fal uderzeniowych żąda się aby na froncie fali spełnione były równocześnie prawa zachowania: masy, pędu i energii, równanie stanu ośrodka oraz różniczkowy związek obowiązujący wzdłuż charakterystyki propagującej się w kierunku czoła fali. Regułę tę wykorzystamy również w niniejszej pracy. W tym celu dokonamy niewielkiej modyfikacji przedstawionych w pracy [14] wyjściowych równań dla analizy koncentrycznych fal uderzeniowych. Okazuje się bowiem, że przy bardzo wysokich temperaturach energia i ciśnienie promieniowania mogą osiągać wartości porównywalne z energią i ciśnieniem ośrodka. Narzuca to konieczność uwzględnienia ich przy budowie adiabaty uderzeniowej.

Założymy, że promieniowanie za frontem fali uderzeniowej jest równowagowe. Wówczas pełną energię promieniowania odniesioną do jednostki masy ośrodka  $\varepsilon_r$  (otrzymaną przez scałkowanie, w przedziale częstotliwości, widmowych energii promieniowania) i ciśnienie promieniowania  $p_r$  można wyrazić za pomocą wzorów [17], [27]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= K \frac{T^4}{\varrho}, \\ p_r &= \frac{K}{3} T^4, \\ p_r &= (\gamma_r - 1) \varrho \xi_r,\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}K &= 7,57 \cdot 10^{-16} [J/(m^3 \cdot K^4)], \\ \gamma_r &= 4/3,\end{aligned}$$

a prawa zachowania na froncie fali uderzeniowej można zapisać w postaci:

$$\varrho(U-u) = \varrho_0 U,\tag{2.2}$$

$$p + p_r = \varrho_0 Uu,\tag{2.3}$$

$$\varepsilon + \varepsilon_r = \frac{u^2}{2},\tag{2.4}$$

gdzie symbole  $U$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$  i  $\varrho$  oznaczają odpowiednio:

prędkość frontu fali, prędkość ruchu ośrodka, ciśnienie, energię wewnętrzną odniesioną do jednostki masy ośrodka, temperaturę i gęstość za frontem fali uderzeniowej ( $\varrho_0$  — jest gęstością ośrodka niezaburzonego).

Ponieważ analizujemy propagację silnej fali uderzeniowej, za czołem której ciśnienie i energia są dużo większe od odpowiednich parametrów przed frontem ( $p_0$ ,  $\varepsilon_0$ ), przyjęto  $p_0 = \varepsilon_0 = 0$ .

Do opisu fizycznych właściwości ośrodka zakładamy równanie stanu gazu doskonałego (zaniedbanie: oddziaływań potencjalnych, dysocjacji i jonizacji molekuł)

$$\begin{aligned}\varepsilon &= c_v T, \\ p &= R \varrho T,\end{aligned}\tag{2.5}$$

gdzie:

$$R = \frac{R'}{\mu}.$$

Symbol  $c_v$  oznacza ciepło właściwe przy stałej objętości,  $\mu$  jest masą molową.  $R' = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  — uniwersalna stała gazowa.

Równania (2.5) można również zapisać w postaci

$$p = \varrho \varepsilon (\gamma - 1),\tag{2.5'}$$

gdzie:

$$\gamma = 1 + \frac{R}{c_v} \text{ — wykładnik politropy.}$$

Analizując koncentryczne fale uderzeniowe za pomocą metody CCW równania (2.1) ÷ (2.5) uzupełnia związek obowiązujący wzdłuż ujemnych charakterystyk.

Uwzględniając energię i ciśnienie promieniowania ma on dla ruchów nierelatywistycznych postać [28], [29]:

$$\frac{d(p+p_r)}{\varrho c} - du + \frac{cu}{u-c} \frac{v dr}{r} = 0, \quad (2.6)$$

gdzie:

$$c = \sqrt{\left[ \frac{\partial(p+p_r)}{\partial \varrho} \right]_s} \quad \text{— oznacza prędkość dźwięku [27.]},$$

$r$  jest współrzędną Eulera frontu fali,  $\nu$  — współczynnikiem symetrii ( $\nu = 1$  — symetria cylindryczna,  $\nu = 2$  — symetria kulista). Wyrażenie na prędkość dźwięku zapisać można w następującej postaci [29], [30]:

$$c = \sqrt{\Gamma_1 \frac{(p+p_r)}{\varrho}}, \quad (2.7)$$

gdzie:

$$\Gamma_1 = \beta + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta+12(1-\beta)(\gamma-1)}, \quad (2.7')$$

$$\beta = \frac{p}{p+p_r}. \quad (2.7'')$$

Uzyskaliśmy w ten sposób komplet równań (2.1) ÷ (2.7) do analizy sformułowanego problemu, którą przedstawimy w rozdziale 3. Przyjmiemy dalej, że zmienne nieindeksowane oznaczać będą parametry na czole fali uderzeniowej dla czasów  $t > 0$ , zaś indeksem „1” wyróżniono początkowe parametry na czole fali ( $t = 0$ ).

Na zakończenie tego rozdziału zwrócimy jeszcze uwagę na fakt, że w warunkach wysokich temperatur efekty radiacyjne powodują podwyższenie temperatury ośrodka przed i za czołem fali oraz prowadzą do zwiększenia szerokości frontu ( $\Delta r$ ) [17]. Zatem otrzymane w niniejszej pracy rozwiązanie, nie uwzględniające struktury frontu fali, jest słuszne dla przypadków, w których szerokość frontu (obejmującego obszar podwyższonej temperatury) jest mała w porównaniu z promieniem czoła fali ( $\Delta r \ll r$ ).

### 3. Rozwiązanie problemu

W celu rozwiązania sformułowanego w poprzednim rozdziale problemu wygodnie jest, wykorzystując równania (2.1) ÷ (2.5), przedstawić parametry na czole fali uderzeniowej ( $u, p, \varrho, c$ ) jako funkcje temperatury:

$$\begin{aligned} |u(T)| &= \sqrt{2 \left( c_v T + \frac{KT^4}{\varrho} \right)}, \\ \varrho(T) &= \varrho_0 \left[ \frac{1}{2} + \frac{c_v}{R} - \frac{KT^3}{6\varrho_0 R} + \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \frac{c_v}{R} - \frac{KT^3}{6\varrho_0 R} \right)^2 + \frac{7}{3} \frac{KT^3}{\varrho_0 R}} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Funkcje  $p(T)$  i  $c(T)$  określają zależności (2.1)<sub>2</sub>, (2.5)<sub>2</sub>, (2.7) i (3.1)<sub>2</sub>. Podstawiając wyrażenia

(3.1) i funkcje  $p(T)$  oraz  $c(T)$  do związku (2.6) otrzymujemy równanie problemu w następującej postaci:

$$\frac{d \ln T}{d \ln r} + a_T(T) = 0, \quad (3.2)$$

gdzie:

$$a_T = v \frac{\rho c^2 |u|}{|u| + c} \left\{ p + 4p_r + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dT} T + \frac{\rho c T}{|u|} \left[ \left( c_v + \frac{4KT^3}{\rho} \right) - \frac{KT^4}{\rho^2} \frac{d\rho}{dT} \right] \right\}^{-1}, \quad (3.2')$$

$$\frac{d\rho}{dT} = -\frac{1}{2} \frac{KT^2}{R} + \frac{\frac{K^2 T^5}{6\rho_0 R^2} + \left( \frac{13}{2} - \frac{c_v}{R} \right) \frac{KT^2}{R}}{2 \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \frac{c_v}{R} - \frac{KT^3}{6\rho_0 R} \right)^2 + \frac{7}{3} \frac{KT^3}{\rho_0 R}}}. \quad (3.2'')$$

Wyrażony wzorem (3.2') parametr  $a_T$  jest tzw. współczynnikiem amplifikacji [14] charakteryzującym prędkość narastania temperatury za czołem fali uderzeniowej w procesie jej koncentracji.

Całkując równanie (3.2) z warunkiem początkowym  $T(r_1) = T_1$  otrzymuje się rozwiązanie w postaci odwrotnej

$$\frac{r}{r_1} = \exp \left[ - \int_{T_1}^T \frac{dT'}{T' a_T(T')} \right]. \quad (3.3)$$

Dla ilościowej analizy zjawiska przyjmijmy, że  $\gamma = \frac{4}{3}$ . Dla tej wartości współczynnika politropy rozwiązanie przyjmuje prostą postać.

Z równań (2.1) ÷ (2.5) wynika, że zachodzą wówczas relacje:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 7, \quad (3.4)$$

$$\frac{u}{U} = \frac{2}{\gamma + 1} = \frac{6}{7},$$

$$p + p_r = \frac{6}{7} \rho_0 U^2, \quad (3.5)$$

$$c = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{(p + p_r)}{\rho}}.$$

Podstawiając (3.4) i (3.5) do związku (2.6) mamy:

$$\frac{dU}{U} = -a^* \frac{dr}{r}, \quad (3.6)$$

gdzie:

$$a^* = \left[ \frac{v}{1 + \frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} \right]_{\gamma = \frac{3}{4}} = \frac{v}{\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}}. \quad (3.6')$$

Po scałkowaniu (3.6) dostajemy:

$$\frac{U}{U_1} = \frac{u}{u_1} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{a^*},$$

$$\frac{p+p_r}{p_1+(p_r)_1} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2a^*} \quad (3.7)$$

Interesującym jest fakt, że dla  $\gamma = 4/3 = \gamma_r$  związki między prędkością propagacji czoła fali  $U$  oraz prędkością ruchu ośrodka  $u$  na czołe fali a położeniem frontu (3.7)<sub>1</sub> są takie same jak w przypadku gdy radiacja nie była uwzględniona [14].

W zasadniczy sposób zmienia się natomiast charakter amplifikacji temperatury. Łatwo to pokazać analizując zależność  $a_T(T)$  (wzór (3.2')). Dla  $\gamma = \frac{4}{3}$  przyjmuje ona prostą postać:

$$a_T = \frac{2a^*}{4-3\beta}. \quad (3.8)$$

Charakteryzujący udział ciśnienia gazodynamicznego ( $p$ ) w całkowitym ciśnieniu ( $p+p_r$ ) współczynnik  $\beta$  (wzór (2.7'')) jest wielkością zmieniającą się od wartości  $\beta = 1$  dla niskich temperatur ( $p \gg p_r$ ) do wartości  $\beta = 0$  dla wysokich temperatur ( $p \ll p_r$ ). Odpowiada to zmianom współczynnika amplifikacji od  $a_T = 2a^*$  do  $a_T = \frac{a^*}{2}$  oraz zależności  $T(r)$  od  $T \sim r^{-2a^*}$  do  $T \sim r^{-a^*/2}$ . Wzrost temperatury na czołe fali (wzrost roli członów radiacyjnych:  $p_r$  i  $\epsilon_r$ ) prowadzi zatem do 4-krotnego osłabienia jej amplifikacji przy koncentracji fali uderzeniowej.

Nie stoi to w sprzeczności z wnioskami wynikającymi ze wzorów (3.7). Ze wzrostem temperatury zmienia się bowiem postać funkcji  $U(T)$ ,  $u(T)$  i  $p(T)$ . O ile przy  $p \gg p_r$ , mamy:  $U$ ;  $u \sim \sqrt{T}$  i  $(p+p_r) \sim T$  to dla  $p \ll p_r$  jest:  $U$ ,  $u \sim T^2$  i  $(p+p_r) \sim T^4$ .

Po podstawieniu do wzoru (2.7'') związków (2.1)<sub>2</sub> i (2.5)<sub>2</sub> oraz uwzględnieniu (3.4)<sub>1</sub> zależność  $\beta(T)$  przyjmuje postać:

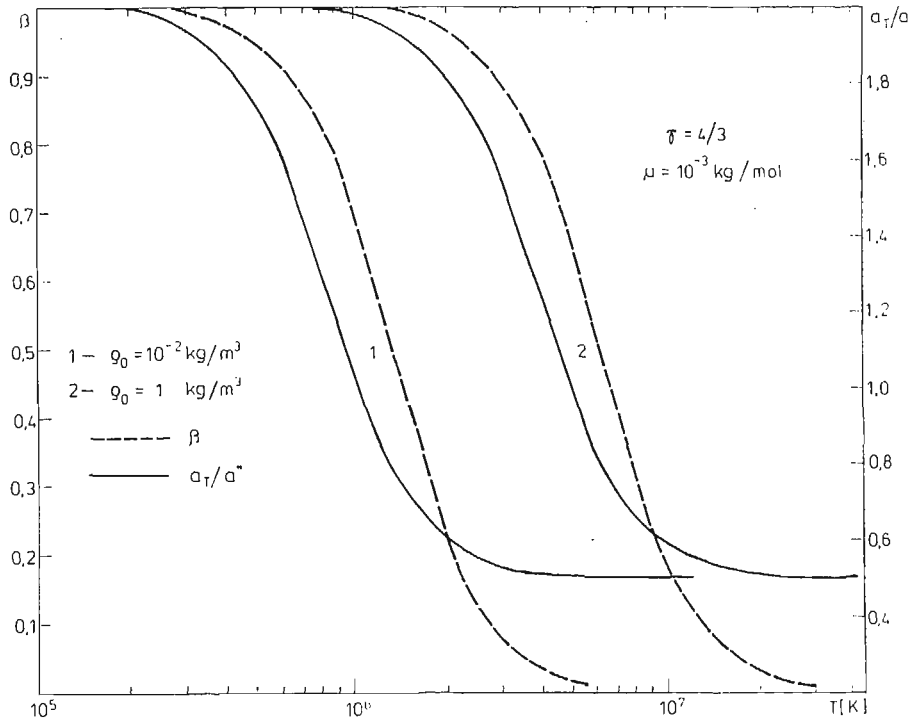
$$\beta = \left(\frac{\mu K T^3}{21 \varrho_0 R'} + 1\right)^{-1}, \quad (3.9)$$

a wstawiając wartości  $K$  i  $R'$  oraz  $\mu = 10^{-3}$  kg/mol mamy

$$\beta = \left(4,34 \cdot 10^{-21} \frac{T^3}{\varrho_0} + 1\right)^{-1} \quad (3.9')$$

Dla ilustracji wpływu radiacji na amplifikację temperatury na rys. 1 przedstawiono zależności  $\beta(T)$  i  $a_T(T)$  dla dwóch wybranych gęstości gazu. Dają one możliwość oceny zakresu parametrów ( $\varrho_0$ ,  $T$ ) dla którego efekty radiacyjne stają się istotne. Wynika z nich, że udział tych efektów zwiększa się ze wzrostem temperatury (może więc zaznaczyć się w końcowej fazie koncentracji fali uderzeniowej).

Temperatura  $\tilde{T}$  powyżej której radiacji nie można zaniedbać jest tym niższa im mniejsza jest początkowa gęstość  $\varrho_0$ .



#### 4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono analizę koncentracji frontów silnych fal uderzeniowych w jednorodnym gazie politropowym z uwzględnieniem efektów radiacyjnych (poprzez uzupełnienie równań gazodynamiki o człony opisujące radiację:  $p_r$  i  $\epsilon_r$ ). Posługując się metodą Chestera-Chisnella-Whithama uzyskano zamknięte rozwiązanie w postaci odwrotnej. Dla gazu charakteryzowanego przez wykładnik politropy  $\gamma = \frac{4}{3}$  dokonano analizy roli radiacji w procesie implozji fali uderzeniowej. Pokazano, że przy bardzo wysokich temperaturach promieniowanie powoduje istotne osłabienie (w porównaniu z przypadkiem gdy efekty radiacyjne nie są uwzględniane) amplifikacji temperatury frontu koncentrycznej fali uderzeniowej.

#### Literatura

1. J. M. WALSH, M. H. RICE, R. G. Mc QUEEN, F. L. YARGER, *Shock-wave compressions of twenty seven metals. Equations of state of metals*, Phys. Rev., **108**, 2, 1957.
2. Л. В. Альтшулер, *Применение ударных волн в физике высоких давлений*, УФН, **85**, 2, 1965.
3. *Physics of high energy density*, Ed. P. Caldirola, H. Knoepfel, New York — London, 1971.
4. М. А. Цыкулин, Е. Г. Попов, *Излучательные свойства ударных волн в газах*, Москва, 1977.

5. H. DERENTOWICZ, *Metody eksperymentalne wytwarzania wysokich ciśnień dynamicznych w układach wybuchowych*, Mater. konf. „Aktualny stan techniki strzelniczej i perspektywy jej rozwoju”, Pokrzywna 1984.
6. G. GUDERLEY, *Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nahe der Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse*, Luftfahrtforschung, XIX, 9, 1942.
7. К. П. СТАНЮКОВИЧ, *Неустановившиеся движения сплошной среды*, Москва, 1971.
8. В. Ф. ДЬЯЧЕНКО, В. С. ИМЩЕННИК, *Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта*, ЖВМиМФ, т. 3, № 5, 1963.
9. Р. И. НИГМАТУЛИН, *Сходящиеся цилиндрические и сферические детонационные волны*, ПММ, вып. 1, 1967.
10. Я. Г. САПУНКОВ, *Сходящиеся детонационные волны в режиме Чепмена-Жуге в среде с переменной и постоянной начальными плотностями*, ПММ, вып. 5, 1967.
11. В. В. СИЛЬБЕСТРОВ, В. М. ТИТОВ, *Сходящаяся ударная волна в жидком водороде*, Физика Горения и Взрыва, вып. 4, 1975.
12. S. KALISKI, A. PARLIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Concentric spherical shock-wave generated by a thermal wave*, J. Techn. Phys., 16, 1, 1975.
13. E. WŁODARCZYK, *Generators of concentric spherical and cylindrical detonation waves*, J. Techn. Phys., 24, 3, 1983.
14. J. TYL, E. WŁODARCZYK, *Analysis of concentric shock-waves*, J. Tech. Phys., 25, 1, 1984.
15. G. В. УИТНАМ, *A new approach to problems of shock dynamics. Part I. Two-dimensional problems*, J. Fluid Mech., 2, 2, 1957.
16. J. H. GARDNER, D. L. BOOK, I. A. BERNSTEIN, *Stability of imploding shocks in the CCW approximation*, J. Fluid Mech., 114, 1982 (41).
17. Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, Ю. П. РАЙЗЕР, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Москва, 1963.
18. Е. И. ЗАБАБАХИН, В. А. СИМОНЕНКО, *Сходящаяся ударная волна в теплопроводном газе*, ПММ, 29, 2, 1965.
19. В. Ф. ДЬЯЧЕНКО, В. С. ИМЩЕННИК, *О сходящейся цилиндрически симметричной ударной волне при наличии диссипативных эффектов*, ПММ, 29, 6, 1965.
20. А. А. МАХМУДОВ, С. П. ПОПОВ, *Влияние теплопроводности на сходящуюся к центру симметрии сильную ударную волну*, Изв. АН СССР, МЖГ, 2, 1980.
21. В. С. ИМЩЕННИК, *Кумуляция сходящихся ударных волн с учетом диссипативных процессов*, ПМТФ, 6, 1980.
22. К. ЯСН, *Assessment of shock-wave convergence-radius in spherical systems of explosion-induced plasma compression*, J. Tech. Phys., 22, 4, 1981.
23. G. В. УИТНАМ, *Linear and nonlinear waves*, New York — London — Sydney — Toronto, 1974.
24. R. F. CHISNELL, *The motion of a shock wave in a channel, with application to cylindrical and spherical shock waves*, J. Fluid Mech., 2, 3, 1957.
25. J. TYL, E. WŁODARCZYK, *Propagation analysis of concentric shock waves fronts in non-homogeneous polytropic gas*, J. Tech. Phys., 26, 1, 1985.
26. J. TYL, E. WŁODARCZYK, *Propagation of concentric shock waves in non-homogeneous solid medium*, J. Tech. Phys. 27, 3, 1986.
27. R. G. SACHS, *Some properties of very intense shock waves*, Phys. Rev., 69, 9÷10, 1946.
28. Y. ONO, S. SAKASHITA, N. OHYAMA, *On the mechanism of stellar explosion*, Suppl. Prog. Theor. Phys., № 20, 1961.
29. S. SAKASHITA, Y. TANAKA, *On the origin of planetary nebulae*, Prog. Theor. Phys., 27, 1, 1962.
30. И. А. КЛИМИШИН, *О теории звездных ударных волн*, Астрон. Журн., 39, 5, 1962.

#### Резюме

#### ВЛИЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ КОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОЛИТРОПНОМ ГАЗЕ

С помощью метода Честера-Чиснелла-Чизема, постоечно замкнутое решение задачи распространения концентрической ударной волны в политропном газе с учётом процесса излучения.



Из полученного решения непосредственно следует, что при высоких температурах излучательные эффекты довольно значительно ослабляют усиление температуры на фронте концентрической ударной волны.

S u m m a r y

EFFECT OF RADIATION UPON PARAMETERS OF A CONCENTRIC SHOCK WAVE IN  
A POLYTROPIC GAS

By employing the Chester-Chisnell-Whitham method an exact form solution has been constructed for the propagation problem of the concentric shock wave in a polytropic gas with the radiation process taken into account. From the solution obtained it is directly evident that at high temperatures the radiation effects reduce appreciably the amplification of temperature at the front of the concentric shock wave.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 stycznia 1986 roku*

---



## METODA MACIERZOWA W ZASTOSOWANIU DO OPTIMALIZACJI CHARAKTERYSTYKI ODKSZTAŁCALNEGO UKŁADU STEROWANIA\*

STANISŁAW DUBIEL

MACIEJ MRÓZ

*Wojskowa Akademia Techniczna*

Sterowanie lotem obiektów latających realizowane jest najczęściej za pomocą sił aerodynamicznych lub innych równoważnych tym siłom oddziaływań. Jednakże niezależnie od sterowań wiele własności obiektu istotnych dla optymalizacji związanych jest z jego konstrukcją, jego wewnętrznymi parametrami. Zmiany w konstrukcji obiektu, wprowadzenie dodatkowych sprzężeń pomiędzy jego elementami zasadniczo wpływają na charakter ruchu. Zadaniem optymalizacji jest ustalenie takich związków między układem sterowania a parametrami konstrukcyjnymi obiektu, aby proces przejściowy całego układu był jak najszybciej tłumiony.

Zależności pomiędzy parametrami obiektu a charakterem jego ruchu wyrażone są analitycznie przez współczynniki równań różniczkowych opisujących dany proces. Z tego względu optymalizacja ruchu obiektu może być wykonywana nie tylko przez dobór odpowiednich oddziaływań zewnętrznych i programu ich zmiany w czasie, lecz również przez dobór odpowiedniej konstrukcji obiektu i parametrów układów wewnętrznych. Synteza optymalnych układów powinna uwzględniać oba obszary optymalizacji, tak obszar sterowań, jak i obszar parametrów obiektu.

Jako szczególny przypadek zbadano dynamikę podłużnego ruchu samolotu z ruchomym ważkim sterem wysokości i odkształcalnym układem sterowania [4].

Stosowane oznaczenia:

$\bar{C}_H$  — współczynnik tłumienia wiskotycznego w układzie sterowania (zredukowany),  
 $k$  — współczynnik sztywności zastępczej w układzie sterowania,  
 $\bar{\kappa}_H$  — zredukowany współczynnik sztywności

$$\bar{C}_H = Cr_{SH}^2, \quad \bar{\kappa}_H = k \cdot r_{SH}^2,$$

$r_{SH}$  — promień bezwładności steru wysokości,  
 $m$  — masa samolotu  
 $m_{SH}$  — masa steru wysokości,  
 $e_H$  — odległość środka masy steru wysokości od jego osi obrotu,  
 $Z_H$  — współrzędna osi obrotu steru wysokości wzdłuż osi  $z$ ,

\*) Referat wygłoszony na I Krajowej Konferencji „Mechanika w lotnictwie”.

$S_H$	— współrzędna osi obrotu steru wysokości wzdłuż osi $x$ ,
$X_d$	— przemieszczenie rączki drążka sterowanego w kierunku $x$ ,
$V(U; V; W)$	— prędkość lotu i jej składowe wzgl. odpowiednich osi układu $Oxyz$ ,
$p, q, r$	— prędkości kątowe obrotu samolotu wzgl. odpowiednich osi,
$L$	— moment przechylający,
$M$	— moment pochylający,
$N$	— moment odchylający,
$M$	— moment pochylający,
$I_H$	— masowy moment bezwładności steru wysokości wzgl. osi obrotu,
$I_y$	— moment bezwładności samolotu wzgl. osi $Oy$ ,
$M_H$	— moment zawiasowy steru wysokości,
$P(t)$	— zewnętrzna siła wymuszająca,
$Q$	— ciężar samolotu,
$M_{HZ}$	— sterujący moment zawiasowy steru wysokości.
$T$	— ciąg silników

### 1. Równania ruchu samolotu

Rozpatruje się podłużny ruch samolotu o napędzie odrzutowym. Przyjmuje się, iż ruch odbywa się w pionowej płaszczyźnie, która pokrywa się z płaszczyzną symetrii samolotu. Równania ruchu zapisano posługując się układem osi przepływu  $Ox_a z_a$ , którego początek umieszczono w środku masy samolotu. Założono, iż samolot jest bryłą sztywną, natomiast układ sterowania sterem wysokości jest odkształcalny, charakteryzujący się odpowiednią sztywnością i tłumieniem.

Przyjęto ustalony ruch prostoliniowy samolotu określony następującymi parametrami

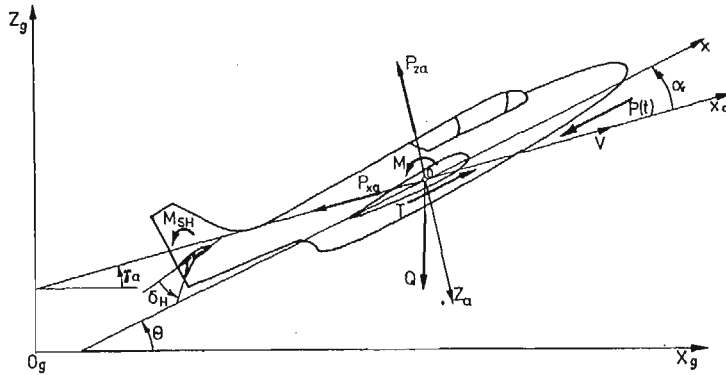
$$V = V_0, \gamma_a = \gamma_{a0}, \Theta = \Theta_0, \alpha = \alpha_0 = \Theta_0 - \gamma_0, \delta_H = \delta_{H0} \text{ — kąt wychylenia steru wysokości dla ustalonego ruchu samolotu.}$$

Ponadto zakłada się, iż małe perturbacje  $V$  nie mają istotnego znaczenia dla procesu optymalizacji, a wartości kątów  $\gamma$  i  $\alpha$  są małe pozwalając na linearyzację ( $\sin \varkappa \cong \varkappa$ ;  $\cos \varkappa \cong 1$ ). Dodatkowo zwroty sił i momentów działających na samolot przyjęto jak na rys. 1. Schemat odkształcalnego układu sterowania sterem wysokości pokazano na rys. 2. Przy powyższych założeniach układ równań opisujących ruch samolotu względem trajektorii lotu poziomego ma postać:

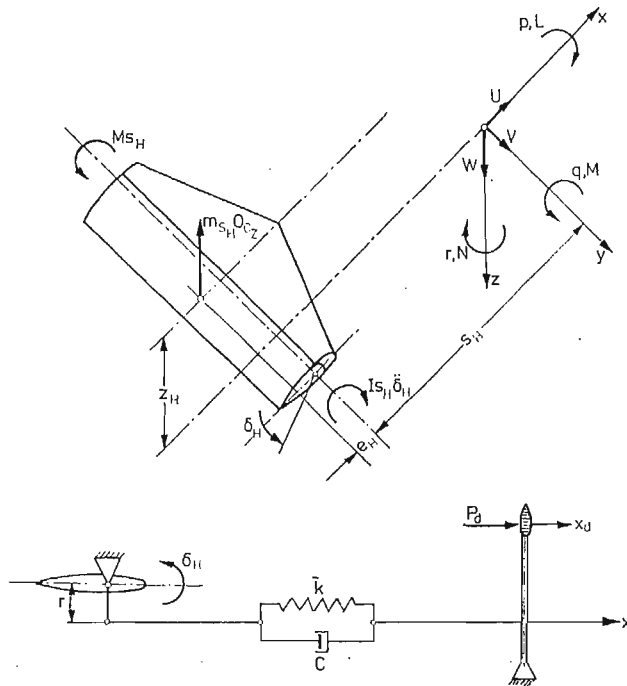
$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} \cos \alpha - C_x \frac{\rho \cdot V^2}{2m} \cdot S - g \sin \gamma_a \cong 0, \quad (1.1)$$

$$V \frac{d\gamma_a}{dt} = \frac{T}{m} \sin \alpha + C_z^\alpha \frac{\rho \cdot V^2}{2m} \cdot S \cdot \alpha - g \cos \gamma_a, \quad (1.2)$$

$$I_y \left( \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 \gamma_a}{dt^2} \right) = - (M^a + M^{\dot{\alpha}}) \dot{\alpha} - M^a \frac{d\gamma_a}{dt} - M^a \cdot \alpha - M^\delta \cdot \delta_H - M^{\dot{\delta}} \cdot \dot{\delta}_H,$$



Rys. 1. Układ współrzędnych osi oraz dodatnie kierunki sił, momentów i kątów



Rys. 2. Schemat odkształcalnego układu sterowania steru wysokości.

$$I_H \cdot \ddot{\delta}_H + \bar{C}_H \cdot \dot{\delta}_H + \bar{\kappa}_H \cdot \delta_H = m_H \cdot e_H V \frac{d\gamma_a}{dt} - (I_H + m_H e_H S_H), \tag{1.3}$$

$$\left( \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 \gamma_a}{dt^2} \right) + M_H + M_{HZ} + m_H e_H g \cos \gamma_a, \tag{1.4}$$

gdzie:

$$q = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\gamma_a}{dt}.$$

Wyliminowując z równań kąt  $\gamma_a$  i jego pochodne oraz pomijając równanie (1.1) jako, że lot jest poziomy ze stałą  $V$

$$(\gamma_a = \gamma_{a0} = 0, \quad \sin \alpha \cong \alpha),$$

równanie (1.2) można zapisać w postaci (1.2')

$$\frac{d\gamma_a}{dt} = b \cdot \alpha - g, \quad (1.2')$$

gdzie:

$$b = \frac{T}{mV} + C_z^\alpha \frac{\rho \cdot V^2}{2} \cdot S.$$

Uwzględniając (1.2') w równaniach (1.3) i (1.4), otrzymuje się układ równań ruchu samolotu z odkształcalnym układem sterowania w następującej postaci:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + C_s \dot{\alpha} + \kappa_s \cdot \alpha = a_0 \cdot \delta_H + a_1 \cdot \dot{\delta}_H + f_1, \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2\delta_H}{dt^2} C_H \cdot \dot{\delta}_H + \kappa_H \cdot \delta_H = b_0 \cdot \alpha + b_1 \cdot \dot{\alpha} + f_2, \quad (1.6)$$

gdzie:

$$C_s = b + \frac{M^q + M^\alpha}{I_y}; \quad C_H = \frac{\bar{C}_H}{I_H} + \left(1 + \frac{m_H e_H S_H}{I_H}\right) \frac{M^\delta}{I_y};$$

$$\kappa_s = \frac{M^q \cdot b + M^\alpha}{I_y}; \quad \kappa_H = \frac{\bar{\kappa}_H}{I_H} + \left(1 + \frac{m_H e_H S_H}{I_H}\right) \frac{M^\delta}{I_y};$$

$$a_0 = -\frac{M^\delta}{I_y};$$

$$b_0 = -\left[ \frac{m_H e_H V \cdot b}{I_H} + \left(1 + \frac{m_H S_H e_H}{I_H}\right) \left( \frac{M^q \cdot b + M^\alpha}{I_H} \right) \right];$$

$$a_1 = -\frac{M^\delta}{I_y};$$

$$b_1 = -\left[ \left( \frac{1 + m_H e_H S_H}{I_H} \right) \left( \frac{M^q + M^\alpha}{I_y} \right) \right];$$

$$f_1 = \frac{M^q}{I_y} \cdot g;$$

$$f_2 = \left[ \frac{m_H e_H}{I_H} (1+V) + \left(1 + \frac{m_H e_H S_H}{I_H}\right) \frac{M^q}{I_y} \right] \cdot g + \frac{M_H + M_{HZ}}{I_H}.$$

W zapisie macierzowym układ równań (1.5) i (1.6) przedstawia się następująco:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{F}(t), \quad (1.7)$$

gdzie:

$$x_1 = \alpha; \quad x_2 = \dot{\alpha}; \quad x_3 = \delta_H; \quad x_4 = \dot{\delta}_H;$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}^* & a_{44}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ f_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\kappa_s; & a_{22} &= -C_s; & a_{23} &= a_0; & a_{24} &= a_1; \\ a_{41} &= b_0; & a_{42} &= b_1; & a_{43}^* &= -\kappa_H; & a_{44}^* &= -C_H. \end{aligned}$$

Współczynniki oznaczone \*) są tymi parametrami, które należy w procesie optymalizacji dobrać celem zapewnienia odpowiedniej charakterystyki napędu ze względu na tłumienie procesu przejściowego.

## 2. Optymalizacja parametrów dynamicznych

Własności dynamiczne obiektu reprezentuje macierz stanu  $\mathbf{A}$ , zatem dla optymalizacji parametrów napędu sterów zapewniających najszybsze tłumienie wahań samolotu rozważania sprowadza się do analizy układu bez wymuszeń, czyli

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Wartości własne macierzy stanu  $\mathbf{A}$  określone są przez równanie charakterystyczne o postaci:

$$|\mathbf{A} \cdot r \mathbf{I}| = 0,$$

gdzie:  $\mathbf{I}$  — jest macierzą jednostkową, a „ $r$ ” dla  $i = 1, 2, 3, 4$  stanowią wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$ .

Macierz  $\mathbf{A}$  nie musi posiadać rzeczywistych wartości własnych, ale ponieważ  $|\mathbf{A} - r \mathbf{I}| = 0$  ma współczynniki rzeczywiste, to wszystkie zespolone wartości własne muszą być parami sprzężone.

Ponieważ  $\text{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^4 r_i$ , a dla najszybszego tłumienia procesu przejściowego żąda się aby wartości własne były niezależne i posiadały jednakowe ujemne części rzeczywiste  $\sigma$  [1, 3] zatem:

$$\text{Re } r_i = \sigma = \frac{\text{tr} \mathbf{A}}{4}. \quad (2.2)$$

Zgodnie z tzw. Sylwestra warunek ujemnych wartości  $\sigma$  jest spełniony, gdy:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^4 r_i > 0.$$

Warunek optymalizacyjny uzyskuje się na drodze przekształcenia macierzy stanu  $\mathbf{A}$  w macierz  $\tilde{\mathbf{A}}$  stosując przekształcenie

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot e^{\sigma t}, \quad (2.3)$$

zatem:

$$\dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{y}, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \sigma \mathbf{I},$$

i wówczas  $\text{tr}(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}) = \text{tr} \mathbf{A} - n \cdot \sigma = 0$

Poszukuje się takich wartości  $C_H$  i  $\kappa_H$  aby rozwiązanie równania (2.4) było rozwiązaniem nierosnącym.

Ponieważ ślad macierzy  $\tilde{\mathbf{A}}$  jest równy zero

$$\text{tr} \tilde{\mathbf{A}} = 0,$$

zatem wartości własne  $\det \tilde{\mathbf{A}}$  winny być urojone lub równe zero [1]. Przekształcamy w tym celu wyznacznik charakterystyczny macierzy do wielomianu

$$|\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}| = (-1)^n [\omega^n - p_1 \omega^{n-1} + p_2 \omega^{n-2} + \dots + (-1)^n p_n]. \quad (2.5)$$

Współczynniki  $p$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tego wielomianu wyrażają się za pomocą elementów macierzy  $\tilde{\mathbf{A}}$  w sposób następujący:

$$p_1 = \tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \dots + \tilde{a}_{nn} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ii} = \text{tr} \tilde{\mathbf{A}},$$

$p_2$  — jest sumą minorów głównych (tj. minorów położonych symetrycznie względem głównej przekątnej) stopnia drugiego macierzy  $\tilde{\mathbf{A}}$

$$p_2 = \sum_{i < j}^{n-1} \begin{vmatrix} \tilde{a}_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & \tilde{a}_{jj} \end{vmatrix}, \quad j > i,$$

$p_3$  — jest sumą minorów głównych stopnia trzeciego,

$$p_3 = \sum_{i < j < h}^{n-2} \begin{vmatrix} \tilde{a}_{ii} & a_{ij} & a_{ih} \\ a_{ji} & \tilde{a}_{jj} & a_{jh} \\ a_{hi} & a_{hi} & \tilde{a}_{hh} \end{vmatrix}, \quad h > j > i,$$

itd, a

$$p_n = \det \mathbf{A},$$

gdzie:  $\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - \sigma$ .

Rozwiązanie równania będzie nierosnącym jeżeli:

$$\begin{aligned} p_i &> 0, & \text{dla } i \text{ — parzystych,} \\ p_i &= 0, & \text{dla } i \text{ — nieparzystych.} \end{aligned}$$

Otrzymuje się w ten sposób warunki na charakterystykę układu napędowego steru, a więc na  $C_H$  i  $\kappa_H$ , która zapewnia najłagodniejsze sterowanie samolotem przy najkrótszym czasie trwania procesu przejściowego.

Dla rozpatrywanego przykładu  $\tilde{\mathbf{A}}$  ma postać:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} -\sigma & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \sigma & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & -\sigma & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}^* & a_{44}^* - \sigma \end{vmatrix},$$

a poszukiwane warunki są następujące:

$$p_1 = \text{tr} \tilde{\mathbf{A}} = -4\sigma + a_{22} + a_{44}^* = 0,$$



$$\begin{aligned}
p_2 &= 3\sigma^2 - \sigma(2a_{22} + a_{44}^*) - (a_{21} + a_{43}^*) > 0, \\
p_3 &= -2\sigma^3 + \sigma^2(2a_{22} + a_{44}^*) + \sigma(a_{21} - a_{22}a_{44}^* + a_{43}^* + a_{42} + a_{24}) + \\
&\quad + (a_{42}a_{23} - a_{22}a_{43}^*) = 0, \\
p_4 &= \det \tilde{\mathbf{A}} = \sigma^4 - \sigma^3(a_{22} + a_{44}^*) + \sigma^2(a_{22}a_{44}^* - a_{43}^* - a_{42}a_{24} - a_{22}) + \\
&\quad + \sigma(a_{22}a_{43}^* - a_{42}a_{23} + a_{21}a_{41}^* - a_{24}a_{41}) + (a_{23}a_{41} - a_{21}a_{43}^*) > 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Najszybsze tłumienie wymaga aby współczynnik  $a_{44}^*$  był co do bezwzględnej wartości jak największy. Zatem jego wartość należy dobrać pod tym kątem widzenia, uwzględniając możliwości konstrukcyjne.

Ponieważ

$$a_{44}^* = - \left[ \frac{\bar{C}_H}{I_H} + \left( 1 + \frac{m_H e_H \cdot S_H}{I_H} \right) \frac{M^\delta}{I_y} \right],$$

zaś  $\bar{C}_H$  — jest współczynnikiem tłumienia w układzie wychylenia steru wysokości,

więc można dobrać współczynnik  $a_{44}^*$  drogą zwiększania  $\frac{m_H e_H \cdot S_H}{I_H}$  oraz  $M^\delta$ . Wartość  $\frac{\bar{C}_H}{I_H}$  można wstępnie dobrać dla izolowanego napędu sterów. Z relacji najszybszego tłumienia dla układu oscylacyjnego wynika

$$\frac{\bar{C}_H}{I_H} = \sqrt{2 \frac{\kappa_H}{I_H}}. \tag{2.7}$$

Pozostaje więc dobranie odpowiedniej wartości współczynnika  $a_{43}^*$ . Wykorzystuje się do tego celu warunek na  $p_3 = 0$ , z którego wynika, że  $a_{43}^*$  winna mieć wartość:

$$a_{43}^* = \frac{\sigma^3 + [a_{21} - a_{22}(1 + a_{41}) + a_{42}a_{21}]\sigma + a_{42}a_{23}}{\sigma - a_{22}}. \tag{2.8}$$

Wartość ta musi ponadto spełniać warunki

$$p_2 > 0 \quad \text{i} \quad p_4 > 0,$$

czyli  $\det \tilde{\mathbf{A}} > 0$  dla  $n$  — parzystego.

Zresztą ten ostatni warunek jest warunkiem koniecznym stateczności układu w ogóle.

Istotne znaczenie mają tu relacje między współczynnikami wiersza drugiego i czwartego macierzy  $\mathbf{A}$ . Szczególnie istotną rolę odgrywa ich zależność od prędkości i wysokości lotu jak i stosunek pochodnych współczynników aerodynamicznych samolotu i sterów. Szczegółowe omówienie ich wpływu na strukturę układu sterowania i na optymalne wartości odpowiednich współczynników wymaga oddzielnego opracowania.

### Wnioski

Zastosowanie nowej metody syntezy liniowego układu dynamicznego przedstawiono na uproszczonym modelu mechanicznym. Uproszczenia idą tak daleko aby z jednej strony dać jak najbardziej przejrzysty obraz stosowania metody i wynikających z tego korzyści, z drugiej zaś strony aby model nie zniekształcał nadmiernie sensu fizycznego procesu. Za taki model uznano sterowanie podłużnym ruchem samolotu, przy założeniu, że małe perturbacje

bacje prędkości nie wpływają w sposób istotny na wzajemne sprzężenie dynamiki lotu samolotu i dynamiki układu sterowania. Potwierdzenie słuszności takiego założenia wymaga porównania wyników układu uproszczonego i układu pomijającego te uproszczenia. Zagadnieniu temu poświęcona będzie oddzielna praca.

Korzyścią uproszczonego modelu jest przejrzystość uzyskanego wyniku w postaci zależności (2.8). Pokazano w nim sprzężenie charakterystyki dynamicznej samolotu i odkształcalnego układu sterowania. Znaczenie tej zależności jest szczególnie istotne dla procesu projektowania.

Dodatkową korzyścią jaką daje zastosowanie proponowanej metody syntezy jest prostota w uzyskaniu odpowiednich częstości wahań układu. Ułatwia to rozwiązywanie równania dla układu przekształconego. Wyznaczenie pierwiastków czysto urojonych dla wyjściowego układu 4-go rzędu sprowadza się do rozwiązania równania bikwadratowego. Daje to możliwość uniknięcia stanów krytycznych [2] dla przypadku kiedy częstości zbliżają się do siebie. Z punktu widzenia praktycznego posiada to niebagatelne znaczenie.

#### Literatura

1. S. DUBIEL, *Liniowy układ dynamiczny o najszybszym tłumieniu*. Mech. Teoret. i Stosow. III/1986.
2. S. DUBIEL, M. PURWIN, *Stan krytyczny w układzie sterowania rakiety w wiązce prowadzącej*. Biul. WAT nr 10 (326) 1979 r.
3. А. Н. ГОЛУБЕНЦЕВ; *Интегральные методы в динамике*. Киев 1967 г.
4. A. KRZYŻANOWSKI, *Dynamika nieautonomicznego ruchu samolotu z odkształcalnymi układami sterowania* — rozprawa doktorska WAT. Warszawa 1982 r.

#### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА К ОПТИМИЗАЦИИ НЕЖЕСТКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Концепция оптимизации системы, обеспечивающая самое быстрое затухание переходного процесса для линейной системы описанной матрично-векторными уравнениями.

Условия в матричной форме дают возможность быстрого установления соответствующих коэффициентов для линейных систем, а в большинстве случаев уравнения управляемых динамических объектов приведены в форме матричной системы уравнений.

Для иллюстрации метода приведен пример динамики продольного движения самолета с тяжелыми рулями высоты и нежесткой системой управления.

#### Summary

#### MATRIX METHOD APPLIED TO OPTIMIZATION OF THE DEFORMABLE CONTROL SYSTEM CHARACTERISTICS

In most of the cases the dynamical control systems are presented in terms of the system of differential equations in the matrix form. Then the coefficients of linear systems of the strongest damping can be determined directly from the optimization conditions. The application of the matrix method has been illustrated by optimization characteristics of the deformable control system for the longitudinal motion of an airplane.

*Praca płynęła do Redakcji dnia 14 lutego 1986 roku.*

## ELASTIC PLATE REINFORCED BY SYSTEM OF SLENDER CORDS

ANDRZEJ GÁŁKA

IPPT, PAN, Warszawa

### Summary

Using the results of [1] the governing system of relations for an elastic plate reinforced by a system of slender cords has been derived. The solution to the axially-symmetric boundary value plane problem has been obtained and discussed.

1. Introduction. Let  $\Omega$  be the regular region in  $R^2$  occupied in the reference configuration by the elastic plate, which is reinforced by system of cords. We assume that the cords coincide with curves  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . We denote by  $t_k(x)$ ,  $n_k(x)$ ,  $x \in \Gamma_k$  the fields of unit vectors tangent and normal to the curve  $\Gamma_k$ , respectively. Let  $s_k(x)$  and  $e_k(x)$  be the values of tension and strain, respectively in cords  $\Gamma_k$ . We assume that the cords are slender, so the values of tension in cords are restricted by the conditions  $s_k \geq 0$ .

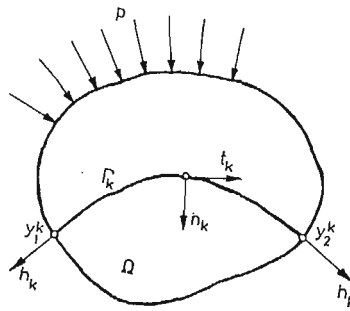


Fig. 1.

We are to derive, within the range of the linear static elasticity, the local relations describing boundary value problem for a plate reinforced by a system of slender cords. Using the obtained local relations we are to solve axially-symmetric boundary value problem for an elastic circular plate reinforced by a system of slender cords.

The starting point of the analysis is the system of relations which have been proposed in [1]; namely:

1° global equilibrium equation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{tr}[S(x)Lv(x)]ds + \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} \operatorname{tr}[t_k(x) \otimes t_k(x)Lv(x)]s_k(x)dl &= \\ = \int_{\partial\Omega} p(x)v(x)dl + \int_{\Omega} b(x)v(x)ds, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (1.1)$$

2° constitutive relations

$$\begin{aligned} E(x) &= \mathcal{H}(x)S(x) \\ e_k(x) - K_k(x)s_k(x) &\in \partial\chi_{\bar{R}^+} + (S_k(x)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

3° strain — displacement relations

$$\begin{aligned} E(x) &= Lu(x), \quad Lv \equiv \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T), \\ e_k(x) &= \operatorname{tr}[t_k(x) \otimes t_k(x)Lu(x)], \end{aligned} \quad (1.3)$$

where:  $S(x)$  is the stress tensor,  $b(x)$  is the body force,  $p(x)$  is the surface force,  $\chi_{\bar{R}^+}(s)$  is the indicator function of  $\bar{R}^+$  e. a.

$$\chi_{R^+}(s) = \begin{cases} 0 & \text{for } s \in R^+ \\ +\infty & \text{for } s \notin R^+ \end{cases}$$

and  $\delta\chi_{R^+}(s)$  is a subdifferential on indicator function at the point  $s$ .

2. Basic relations. In order to obtain the local relations from the global equilibrium equation (1.1) we transform the integrals appearing in Eq. (1.1)

$$\int_{\Omega} \operatorname{tr}[S(x)Lv(x)]ds = \int_{\partial\Omega} S^{ij}v_i n_j dl - \int_{\Omega} S^{ij}v_i dx^1 dx^2 + \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} [[S^{ij}]]v_i n_{kj} dl \quad (2.1)$$

and

$$\int_{\Gamma_k} \operatorname{tr}[t_k \otimes t_k Lv]s_k dl = s_k t^i v_i|_{x=y_2^k} - s_k t_k^i v_i|_{x=y_1^k} - \int_{\Gamma_k} \left( \varkappa_k n_k^i s_k + t_k^i \frac{ds_k}{dl} \right) v_i dl, \quad (2.2)$$

where  $[[S^{ij}]] \equiv S_+^{ij} - S_-^{ij}$ ,  $S_+^{ij}(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ (x-y)n_k > 0}} S^{ij}(x)$ ,  $S_-^{ij}(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ (x-y)n_k < 0}} S^{ij}(x)$ ,

$\varkappa_k$  is the curvature of curve  $\Gamma_k$ , symbol  $d(\cdot)/dl$  denotes derivative in the direction tangent to a curve,  $y_1^k, y_2^k$  are the points of intersection curve  $\Gamma_k$  and boundary  $\partial\Omega$  of the region  $\Omega$ .

The global equilibrium equation have to be satisfied for arbitrary functions  $v \in V$ ; Hence using (2.1) and (2.2), we arrive at local relations

$$\begin{aligned} S^{ij} - b^i &= 0, & x \in \Omega \setminus \bigcup_k \Gamma_k, \\ S^{ij} n_j &= -p^i, & x \in \partial\Omega, \\ \varkappa_k s_k n_k^i + t_k^i \frac{ds_k}{dl} &= -[[S^{ij}]]n_{kj}, & x \in \Gamma_k, \\ s_k &= -h_k, & x \in \Gamma_k \cap \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where  $h_k$  is the known value of a traction in the cord at the boundary (in the tangent direction  $t_k$ ).

Eqs. (1.2), (1.3) can be written as

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \mathcal{K}_{ijlm} S^{lm}, \\ e_k &= K_k s_k, \quad \text{if } s_k > 0, \\ e_k &\leq 0, \quad \text{if } s_k = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

and

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ e_k &= t_k^i t_k^j u_{i,j} \end{aligned} \tag{2.5}$$

respectively.

Eqs. (2.3), (2.4), (2.5) constitute the basic system of relations describing boundary — value plane problem for a plate reinforced by a system of slender cords.

3. Example. Let the elastic circular plate with the concentric hole be isotropic and homogeneous. We assume that the plate is reinforced by a system of slender cords which coincide with curves  $\varrho = \zeta_k = \text{const. } k = 1, \dots, n-1, \zeta_k \in (a, b)$ . Let  $\zeta_0 = a$  and  $\zeta_n = b$ , and let the plate be loaded at the boundary  $\varrho = a$  and  $\varrho = b$  by the known radial tractions  $p_a$  and  $p_b$ , respectively. In order to obtain displacements, stresses, strains and tractions in cords we shall use the relations obtained in Sec. 2. Taking into account the axial symmetry of the pertinent problem we shall write relations (2.3), (2.4) and (2.5) in the polar coordinate system as follows:

1° equilibrium equations

$$\begin{aligned} (\varrho S_\varrho(\varrho))_{,\varrho} - S_\theta(\varrho) &= 0 \\ S_\varrho(a) &= -p_a, \quad S_\varrho(b) = -p_b \\ \frac{1}{\zeta_k} s_k &= -\llbracket S_\varrho(\zeta_k) \rrbracket, \quad s_k \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

where  $S_\varrho$  and  $S_\theta$  are the main values of the stress, tensor,

2° constitutive relations

$$\begin{aligned} E_\varrho &= \frac{1}{E} (S_\varrho - \nu S_\theta), \\ E_\theta &= \frac{1}{E} (S_\theta - \nu S_\varrho), \\ e_k &= \begin{cases} K s_k & \text{for } s_k > 0 \\ \delta_k \leq 0 & \text{for } s_k = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2}$$

3° strain — displacement relations

$$E_\varrho = w_{,\varrho}, \quad E_\theta = \frac{w}{\varrho}, \quad e_k = \frac{w(\zeta_k)}{\zeta_k}. \tag{3.3}$$

In order to obtain solution of the problem given by Eqs. (3.1), (3.2), (3.3), we consider separately the following four cases:

(i) All cords are unstressed:

$$s_k = 0, \quad e_k \leq 0, \quad \text{for } k = 1, \dots, n-1,$$

(ii) All cords are stressed:

$$s_k > 0, \quad e_k = Ks_k, \quad \text{for } k = 1, \dots, n-1,$$

(iii) Cords  $\zeta_1, \dots, \zeta_{\bar{k}-1}$  are unstressed and cords  $\zeta_{\bar{k}}, \dots, \zeta_{n-1}$  are stressed:

$$s_k = 0, \quad e_k \leq 0, \quad \text{for } k = 1, \dots, \bar{k}-1,$$

$$s_k > 0, \quad e_k = Ks_k, \quad \text{for } k = \bar{k}, \dots, n-1,$$

(iv) Cords  $\zeta_1, \dots, \zeta_{\bar{k}-1}$  are stressed but cords  $\zeta_{\bar{k}}, \dots, \zeta_{n-1}$  are not:

$$s_k > 0, \quad e_k = Ks_k, \quad \text{for } k = 1, \dots, \bar{k}-1,$$

$$s_k = 0, \quad e_k \leq 0, \quad \text{for } k = \bar{k}, \dots, n-1.$$

(i) Assume that  $s_k = 0$  hold for  $k = 1, \dots, n-1$ . From (3.1)<sub>3</sub> we see, that  $S_\varrho$  is a continuous function at points  $\zeta_k$ . Eqs. (3.1)<sub>1,2</sub>, (3.2)<sub>1,2</sub> and (3.3)<sub>1,2</sub> represent the system of equations for an elastic plate. In this case the following solution holds

$$S_\varrho = A_1 \frac{1}{\varrho^2} + 2C_1, \quad S_\Theta = -A_1 \frac{1}{\varrho^2} + 2C_1, \tag{3.4}$$

$$E_\Theta = \frac{1-\nu}{E} \left( 2C_1 - A_1 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{\varrho^2} \right), \quad w = E_\Theta \varrho.$$

The constants  $A_1, C_1$  can be found from boundary conditions (3.1)<sub>2</sub>

$$A_1 = \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{b^2 - a^2}, \quad 2C_1 = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \tag{3.5}$$

Relations (3.4) represent the solution to the problem under consideration provided that strains  $e_k$  in cords  $\Gamma_k$ , which are due to loadings  $p_a$  and  $p_b$  satisfy conditions

$$e_k = E_\Theta(\zeta_k) = \frac{w(\zeta_k)}{\zeta_k} \leq 0.$$

From aforementioned conditions we get

$$p_b \geq \frac{\lambda_k^b}{\lambda_k^a} p_a, \tag{3.6}$$

where

$$\lambda_k^a = \frac{1}{a^2} + \frac{\hat{\nu}}{\zeta_k^2}, \quad \lambda_k^b = \frac{1}{b^2} + \frac{\hat{\nu}}{\zeta_k^2}, \quad \hat{\nu} = \frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

Since  $\lambda_{k+1}^b / \lambda_{k+1}^a \leq \lambda_k^b / \lambda_k^a$  for  $k = 1, \dots, n-2$ , then it follows that the inequalities (3.6) are satisfied if

$$(p_a, p_b) \in B_1 = B_1^0 \cup B_1^n, \tag{3.7}$$

where

$$B_1^0 = \left\{ (p_a, p_b) \in R^2; p_a > 0, p_b \geq p_a \frac{\lambda_1^b}{\lambda_1^a} \right\},$$

$$B_1^n = \left\{ (p_a, p_b) \in R^2; p_a \leq 0, p_b \geq p_a \frac{\lambda_{n-1}^b}{\lambda_{n-1}^a} \right\}.$$

If radial tractions  $p_a, p_b$  satisfy the condition (3.7) then the solution to the pertinent problem is given by the relation (3.4) in which constants  $A_1, C_1$  are determined by Eqs. (3.5).

(ii) If  $s_k > 0$  holds for  $k = 1, \dots, n-1$ , then from (3.1)<sub>3</sub> it follows that the stress  $S_\varrho$  is discontinuous for  $\varrho = \zeta_k, k = 1, \dots, n-1$ . Then the system of Eqs. (3.1)<sub>1</sub>, (3.2)<sub>1,2</sub>, (3.3)<sub>1,2</sub> has the solution in every interval  $(\zeta_{k-1}, \zeta_k)$  in the form

$$\begin{aligned} S_\varrho &= \frac{A_k}{\varrho^2} + 2C_k, & S_\theta &= -\frac{A_k}{\varrho^2} + 2C_k, \\ E_\theta &= \frac{1-\nu}{E} \left( 2C_k - \frac{\dot{\nu}}{\varrho^2} A_k \right), & w &= \varrho E_\theta. \end{aligned} \tag{3.8}$$

From Eqs. (3.1)<sub>3</sub>, (3.8)<sub>1</sub> we get

$$s_k = \zeta_k(2C_{k+1} - 2C_k) + \frac{1}{\zeta_k} (A_{k+1} - A_k) \tag{3.9}$$

and from Eqs. (3.3)<sub>3</sub>, (3.8)<sub>1,2</sub> it follows that

$$e_k = \frac{1-\nu}{E} \left( 2C_k - \frac{\dot{\nu}}{\zeta_k^2} A_k \right). \tag{3.10}$$

In order to determine constants  $A_k, C_k$  we take into account boundary conditions (3.1)<sub>2</sub>, equations  $e_k = Ks_k, k = 1, \dots, n-1$  and the continuity conditions for the displacement field. The continuity conditions for displacement at every  $\varrho = \zeta_k$  and equations  $e_k = Ks_k, k = 1, \dots, n-1$ , leads to the following recurrent relations for constants  $A_k, C_k$

$$A_{k+1} = \gamma_k A_k + \delta_k 2C_k, \quad 2C_{k+1} = \alpha_k A_k + \beta_k 2C_k \tag{3.11}$$

where:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{\dot{\nu}^2}{\zeta_k^3} \bar{K}, & \beta_k &= 1 + \frac{\dot{\nu}}{\zeta_k} \bar{K}, \\ \gamma_k &= 1 - \frac{\dot{\nu}}{\zeta_k} \bar{K}, & \delta_k &= \zeta_k \bar{K}, & \bar{K} &= \frac{(1-\nu)^2}{2EK}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

From (3.11) constants  $A_k, C_k, k = 2, \dots, n$  can be expressed in term of constants  $A_1, C_1$

$$A_k = c_k A_1 + d_k 2C_1, \quad 2C_k = a_k A_1 + b_k 2C_1, \tag{3.13}$$

where

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \alpha_k c_k + \beta_k a_k, & b_{k+1} &= \alpha_k d_k + \beta_k b_k, \\ c_{k+1} &= \gamma_k c_k + \delta_k a_k, & d_{k+1} &= \gamma_k d_k + \delta_k b_k, \\ a_1 &= 0, b_1 = 1, & c_1 &= 1, d_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

From boundary conditions (3.1)<sub>2</sub> we obtain

$$\frac{1}{a^2} A_1 + 2C_1 = -p_a, \quad \frac{1}{b^2} A_n + 2C_n = p_b. \tag{3.15}$$

Taking into account (3.13), we get

$$\frac{1}{a^2} A_1 + 2C_1 = -p_a, \quad \nu_n A_1 + \mu_n 2C_1 = -p_o \tag{3.16}$$

where  $\nu_n = 1/b^2 c_n + a_n, \mu_n = 1/b^2 d_n + b_n$ .

The forementioned system of equations has the solution of the form

$$A_1 = \frac{1}{\Delta} (p_b - \mu_n p_a), \quad 2C_1 = \frac{1}{\Delta} \left( \nu_n p_a - \frac{1}{a^2} p_b \right) \tag{3.17}$$

where  $\Delta = 1/a^2 \mu_n - \nu_n$ .

Constants  $A_k, C_k$  will be given by

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\Delta} \left[ p_b \left( c_k - \frac{1}{a^2} d_k \right) + p_a (d_k \nu_n - \mu_n c_k) \right], \\ 2C_k &= \frac{1}{\Delta} \left[ p_b \left( a_k - \frac{1}{a^2} b_k \right) + p_a (b_k \nu_n - \mu_n a_k) \right]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Now, the range of the boundary tractions  $p_a, p_b$  should be determined such that inequalities  $s_k > 0, k = 1, \dots, n-1$  hold. We can prove that sequences of constants  $a_k, b_k, c_k, d_k$ , which are given by (3.14) are monotonic

$$\begin{aligned} a_{k+1} &< a_k < 0, & 1 < b_k < b_{k+1}, \\ c_{k+1} &< c_k < 1, & 0 < d_k < d_{k+1} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Hence

$$\nu_n < \frac{1}{b^2}, \quad \mu_n > 1, \quad \Delta > 0. \tag{3.20}$$

Let us introduce the following denotations

$$\begin{aligned} r_k &= a_k - \nu \frac{1}{\zeta_k^2} c_k, & q_k &= b_k - \nu \frac{1}{\zeta_k^2} d_k, \\ l_k^a &= \frac{1}{a^2} q_k - r_k, & l_k^b &= q_k \nu_n - r_k \mu_n, \end{aligned} \tag{3.21}$$

and note that  $l_k^a > 0$ . Conditions  $s_k > 0$  lead to the range of boundary tractions as follows

$$p_b < p_a \frac{l_k^b}{l_k^a}, \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{3.22}$$

because  $l_{k+1}^b/l_{k+1}^a < l_k^b/l_k^a$  and  $l_1^a = \lambda_1^a$ , inequality (3.22) fulfilled for each  $k = 1, \dots, n-1$  if

$$(p_a, p_b) \in B_2 = B_2^0 \cup B_2^n, \tag{3.23}$$

where

$$\begin{aligned} B_2^0 &= \left\{ (p_a, p_b) \in R^2; \quad p_a < 0, \quad p_b < p_a \frac{l_1^b}{l_1^a} \right\}, \\ B_2^n &= \left\{ (p_a, p_b) \in R^2; \quad p_a > 0 \quad p_b < p_a \frac{l_{n-1}^b}{l_{n-1}^a} \right\}. \end{aligned}$$

If tractions  $p_a, p_b$  satisfy the condition (3.23), then the solution to the pertinent problem is given by relations (3.8), (3.9), (3.10) in which constants  $A_k, C_k$  are determined by Eqs. (3.18).

(iii) If  $s_k = 0$  for  $k = 1, \dots, \bar{k}-1$  and  $s_k > 0$  for  $k = \bar{k}, \dots, n-1$  then the stress  $S_\varrho$  is continuous on the interval  $(a, \zeta_{\bar{k}})$  and discontinuous for  $\varrho = \zeta_k, k = \bar{k}, \dots, n-1$ . System



of equations (3.1)<sub>1</sub>, (3.2)<sub>1,2</sub>, (3.3)<sub>1,2</sub> has the solution given by (3.8) in which for  $\varrho \in (a, \xi_{\bar{k}})$ , we have to substitute  $k = \bar{k}$  and for  $\varrho \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$ ,  $i = \bar{k}+1, \dots, n$  we have to substitute  $k = i$  the values of tension in cords  $\Gamma_k$ ,  $k = \bar{k}, \dots, n-1$  are determined by relation (3.9) and the values of strain  $e_k$  by relation (3.10). Constants  $A_k, C_k, k = \bar{k}, \dots, n$ , which appear in the solution, are determined analogously as before, i.e., from boundary conditions (3.1)<sub>2</sub>, Eqs.  $e_k = Ks_k$  for  $k = \bar{k}, \dots, n-1$  and from continuity condition for displacement. The continuity condition for the displacement field and equations:  $e_k = Ks_k$  lead to recurrent relations (3.11) for  $k = \bar{k}, \dots, n-1$ . From these relations constants  $A_i, C_i, i = k+1, \dots, n$  can be expressed in term of constants  $A_{\bar{k}}, C_{\bar{k}}$ .

$$\begin{aligned} A_i &= c_i(\bar{k})A_{\bar{k}} + d_i(\bar{k})2C_{\bar{k}}, \\ 2C_i &= a_i(\bar{k})A_{\bar{k}} + b_i(\bar{k})2C_{\bar{k}}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

where:

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \alpha_i c_i(\bar{k}) + \beta_i a_i(\bar{k}), & b_{i+1} &= \alpha_i d_i(\bar{k}) + \beta_i b_i(\bar{k}), \\ c_{i+1} &= \gamma_i c_i(\bar{k}) + \delta_i a_i(\bar{k}), & d_{i+1} &= \gamma_i d_i(\bar{k}) + \delta_i b_i(\bar{k}), \\ a_{\bar{k}}(\bar{k}) &= 0, & b_{\bar{k}}(\bar{k}) &= 1, & c_{\bar{k}}(\bar{k}) &= 1, & d_{\bar{k}}(\bar{k}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

From boundary conditions (3.1)<sub>2</sub> we get

$$\frac{A_k}{a^2} + 2C_k = -p_a, \quad \frac{A_n}{b^2} + 2C_n = -p_b. \tag{3.26}$$

Using (3.24) we obtain the system of equation for  $A_{\bar{k}}, C_{\bar{k}}$ , solution of which is given by

$$A_{\bar{k}} = \frac{1}{\bar{\Delta}} (p_b - \mu_n(\bar{k})p_a), \quad 2C_{\bar{k}} = \frac{1}{\bar{\Delta}} \left( \nu_n(\bar{k})p_a - \frac{1}{a^2} p_b \right), \tag{3.27}$$

where:

$$\begin{aligned} \nu_n(\bar{k}) &= \frac{1}{b^2} c_n(\bar{k}) + a_n(\bar{k}), & \mu_n(\bar{k}) &= \frac{1}{b^2} d_n(\bar{k}) + b_n(\bar{k}), \\ \bar{\Delta} &= \frac{1}{a^2} \mu_n(\bar{k}) - \nu_n(\bar{k}). \end{aligned}$$

Constants  $A_i, C_i, i = \bar{k}, \dots, n$  can be expressed in the form

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{\bar{\Delta}} \left[ p_b \left( c_i(\bar{k}) - \frac{1}{a^2} d_i(\bar{k}) \right) + p_a \left( d_i(\bar{k}) \nu_n(\bar{k}) - c_i(\bar{k}) \mu_n(\bar{k}) \right) \right] \\ 2C_i &= \frac{1}{\bar{\Delta}} \left[ p_b \left( a_i(\bar{k}) - \frac{1}{a^2} b_i(\bar{k}) \right) + p_a \left( b_i(\bar{k}) \nu_n(\bar{k}) - a_i(\bar{k}) \mu_n(\bar{k}) \right) \right]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

From conditions  $s_i > 0, i = \bar{k}, \dots, n-1$  we obtain the following restriction on the boundary tractions

$$p_b < p_a \frac{l_i^n(\bar{k})}{l_i^a(\bar{k})}, \quad i = \bar{k}, \dots, n-1, \tag{3.29}$$

where:

$$l_i^q(\bar{k}) = \frac{1}{a^2} q_i(\bar{k}) - r_i(\bar{k}), \quad l_i^n(\bar{k}) = \nu_n(\bar{k}) q_i(\bar{k}) - \mu_n(\bar{k}) r_i(\bar{k}),$$

$$r_i(\bar{k}) = a_i(\bar{k}) - \dot{\nu} \frac{1}{\zeta_i^2} c_i(\bar{k}), \quad q_i(\bar{k}) = b_i(\bar{k}) - \dot{\nu} \frac{1}{\zeta_i^2} d_i(\bar{k}).$$

In the case under discussion, conditions

$$e_i = \frac{1-\nu}{E} \left( 2C_{\bar{k}} - \frac{\dot{\nu}}{\zeta_i^2} A_{\bar{k}} \right) \leq 0 \quad (3.30)$$

ought to be satisfied for  $i = 1, \dots, \bar{k}-1$ . From these conditions we get inequalities

$$p_b \geq p_a \frac{\nu_n(\bar{k}) + \frac{\dot{\nu}}{\zeta_i^2} \mu_n(\bar{k})}{\lambda_i^q} \quad i = 1, \dots, \bar{k}-1 \quad (3.31)$$

Conditions (3.29) and (3.31) are fulfilled if

$$(p_a, p_b) \in B_3^k, \\ B_3^k = \{(p_a, p_b) \in R^2; \quad p_a \leq 0, \quad p_a l_{k-1}^n / \lambda_{k-1}^q \leq p_b < p_a l_k^n / \lambda_k^q\}. \quad (3.32)$$

If boundary tractions  $p_a, p_b$  satisfy the condition

$$(p_a, p_b) \in B_3 = \bigcup_{k=1}^{n-1} B_3^k \quad (3.33)$$

then the solution to the problem under consideration is given by relations (3.8), (3.9), (3.10) in which constants  $A_k, C_k, k = 1, \dots, n$  are determined by (3.28) and where  $A_k = A_{\bar{k}}, C_k = C_{\bar{k}}$  for  $k = 1, \dots, \bar{k}-1$ .

(iv) In this case  $s_k > 0$  for  $k = 1, \dots, \bar{k}-1$  and  $s_k = 0$  for  $k = \bar{k}, \dots, n-1$ . Then the stress  $S_\varrho$  is discontinuous for  $\varrho = \zeta_i, i = 1, \dots, \bar{k}-1$ . System of Eqs. (3.1)<sub>1</sub>, (3.2)<sub>1,2</sub>, (3.3)<sub>1,2</sub> have the solution given by (3.8), in which for  $\varrho \in (\zeta_{i-1}, \zeta_i), i = 1, \dots, \bar{k}-1$  we have to substitute  $k = i$  and for  $\varrho \in (\zeta_{\bar{k}-1}, b)$  we have to substitute  $k = \bar{k}$ . Constants  $A_k, C_k, k = 1, \dots, \bar{k}$  which appear in the solution are determined by the procedure analogous to that given above. From the continuity condition for the displacement field and from relations  $e_k = K s_k, k = 1, \dots, \bar{k}-1$ , we obtain recurrent relations (3.11) for  $k = 1, \dots, \bar{k}-1$  and hence (3.14) holds.

From boundary conditions (3.1)<sub>2</sub> we get

$$\frac{A_1}{a^2} + 2C_1 = -p_a, \quad \frac{1}{b^2} A_{\bar{k}} + 2C_{\bar{k}} = -p_b \quad (3.34)$$

Substituting (3.14) into (3.34), we obtain the system of equations for  $A_1$  and  $C_1$ , solution of which is

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_{\bar{k}}} (p_b - \mu_{\bar{k}} p_a), \quad 2C_1 = \frac{1}{\Delta_{\bar{k}}} \left( \nu_{\bar{k}} p_a - \frac{1}{a^2} p_b \right)$$

where  $\Delta_{\bar{k}} = 1/a^2 \mu_{\bar{k}} - \nu_{\bar{k}}$ .

The formulas for constants  $A_k, C_k$  have the form

$$A_k = \frac{1}{\Delta_{\bar{k}}} \left[ p_b \left( c_k - \frac{1}{a^2} d_k \right) + p_a (d_k \nu_{\bar{k}} - c_k \mu_{\bar{k}}) \right]$$

$$2C_k = \frac{1}{\Delta_{\bar{k}}} \left[ p_b \left( a_k - \frac{1}{a^2} b_k \right) + p_a (b_k \nu_{\bar{k}} - a_k \mu_{\bar{k}}) \right]$$
(3.35)

From inequalities  $s_k > 0, k = 1, \dots, \bar{k}-1$  we obtain the following restriction for loadings

$$p_b < p_a \frac{l_i^{\bar{k}}}{l_i^a} \quad \text{for } i = 1, \dots, \bar{k}-1$$
(3.36)

where

$$l_i^{\bar{k}} = q_i \nu_{\bar{k}} - r_i \mu_{\bar{k}}, \quad l_i^a = \frac{1}{a^2} q_i - r_i.$$

From conditions

$$e_i = \frac{1-\nu}{E} \left( 2C_{\bar{k}} - \frac{\dot{\nu}}{\dot{\sigma}_i^2} A_{\bar{k}} \right) \leq 0, \quad i = \bar{k}, \dots, n-1$$

we obtain

$$p_b \geq p_a \frac{\lambda_{\bar{k}}^b}{l_{\bar{k}}^a}$$
(3.37)

Conditions (3.36) and (3.37) are fulfilled if

$$(p_a, p_b) \in B_4^{\bar{k}}, \quad B_4^{\bar{k}} = \left\{ (p_a, p_b) \in R^2; \quad p_a > 0, \quad p_a \frac{\lambda_{\bar{k}}^b}{l_{\bar{k}}^a} \leq p_b < p_a \frac{\lambda_{\bar{k}-1}^b}{l_{\bar{k}-1}^a} \right\}.$$
(3.38)

If boundary tractions  $p_a, p_b$  satisfy the condition

$$(p_a, p_b) \in B_4 = \bigcup_{k=1}^{n-1} B_4^k$$
(3.39)

then the solution is given by relations (3.8), (3.9), (3.10) in which constants  $A_k, C_k, k = 1, \dots, \bar{k}$  are determined by (3.35), and where  $A_k = A_{\bar{k}}, C_k = C_{\bar{k}}$  for  $k = \bar{k}+1, \dots, n$ .

Note that every pair from sets  $B_1, B_2, B_3, B_4$  is disjoint and that  $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = R^2$ . For the case  $n = 4$  the aforementioned situation is illustrated on Fig. 2.

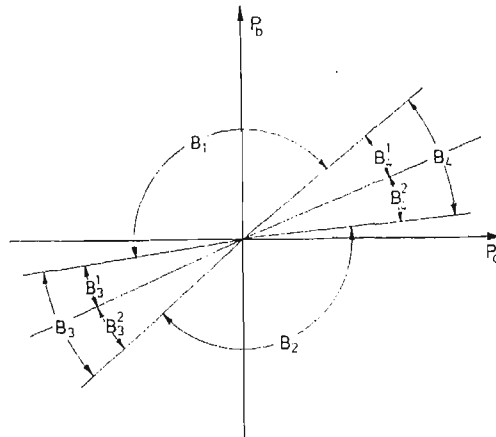


Fig. 2.

For  $(p_a, p_b) \in B_1$  the solution is given as in (i), for  $(p_a, p_b) \in B_2$  as in (ii), for  $(p_a, p_b) \in B_3$  as in (iii) for  $(p_a, p_b) \in B_4$  as in (iv).

#### References

1. Cz. WOŹNIAK, *Materials reinforced by system of cords with constrained tensions*, J. Techn. Phys.

#### Резюме

#### УПРУГАЯ ПЛАСТИНА АРМИРОВАНА ГИБКИМИ ВОЛОКНАМИ

Используя результаты полученные в [1] выведено основную систему отношений для упругой пластины армированной гибкими волокнами. Даются точные решение плоской осево-симметрической граничной задачи.

#### Streszczenie

#### TARCZA SPRĘŻYSTA WZMOCNIONA UKŁADEM WIOTKICH CIĘGIEN

Korzystając z rezultatów uzyskanych w pracy [1] wprowadzono podstawowy układ związków lokalnych dla tarczy sprężystej wzmocnionej układem wiotkich włókien. Rozwiązano osiowo-symetryczne zagadnienie brzegowe dla pierścieniowej tarczy sprężystej wzmocnionej układem  $n$  włókien rozmieszczonych koncentrycznie.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 lutego 1986 roku.*

---

## ANALIZA DOKŁADNOŚCI PROWADZENIA WYPORNOŚCIOWYCH OBIEKTÓW NAWODNYCH PO ZADANEJ TRAJEKTORII W RÓŻNYCH WARUNKACH HYDROMETEOROLOGICZNYCH

ZYGMUNT KITOWSKI

*Wyższa Szkoła Marynarki Wojennej, Gdynia*

### Streszczenie

W artykule przedstawione zostały wnioski dotyczące dokładności utrzymania wypornościowych obiektów nawodnych różnej wyporności na zadanym prostoliniowym odcinku trajektorii (pracujących w oparciu o regulator przedstawiony w pracy [2]) w różnych warunkach hydrometeorologicznych, wynikające z przeprowadzonych badań modelowych.

### 1. Wprowadzenie

Wypornościowe obiekty nawodne należy zaliczyć do tej klasy obiektów, których ze względu na ich właściwości dynamiczne w chwili obecnej nie można w pełni zautomatyzować. W czasie pływania na otwartych akwenach sterowanie obiektem nawodnym realizowane jest najczęściej za pomocą autopilota kursu odpowiedniej konstrukcji. Znaczna część czasu obejmuje jednak pływanie w warunkach ograniczeń na trajektorię ruchu (brzegi, mielizny, tory wodne, inne obiekty stacjonarne i nawodne, wykonywanie zadań specjalnych itp.). W wymienionych przypadkach sterowanie przejmuje najczęściej doświadczony sternik, ponieważ układy automatycznego prowadzenia obiektów pływających po zadanej trajektorii praktycznie nie weszły jeszcze do eksploatacji. Sterowanie ręczne jest jednak niedoskonałe, prowadzić może do powstania niebezpiecznych sytuacji i w efekcie do, kolizji i awarii. Z tego względu najnowszymi rozwiązaniami autopilotów coraz częściej stawiane jest zadanie polegające na realizacji możliwości prowadzenia obiektu przez wąskie tory wodne, kanały, manewrowanie na wodach ograniczonych itp.

Działające w tym czasie na obiekt siły zewnętrzne jak wiatr, falowanie, przechył boczny, niesymetryczne działanie śrub na obiektach dwuśrubowych, niesymetria kadłuba itp., przy wymogu precyzyjnej nawigacji nabierają szczególnego znaczenia i muszą być uwzględnione w procesie sterowania.

W proponowanych obecnie rozwiązaniach rozróżnia się dwa zasadnicze typy autopilotów umożliwiających stabilizację trajektorii: ,

— w pierwszym stabilizację trajektorii realizuje się za pomocą kolejnych zmian kursu zadawo-  
nego obliczanego przez maszynę cyfrową i podawanego na konwencjonalnego auto-

pilota kursu, pracującego w układzie stabilizacji kursu — do grupy tej można zaliczyć te autopiloty, które mają możliwość zmiany kursu obiektu z określoną prędkością kątową zwrotu. Problem prowadzenia obiektu po zadanej trajektorii sprowadza się w tym przypadku do odpowiednio wcześniejszego wyznaczenia momentu rozpoczęcia manewru zmiany kursu obiektu w zależności od żądanej wartości zmiany kursu, prędkości postępowej obiektu i warunków pogodowych tak, aby wyszedł on dokładnie na zadaną trajektorię. Układy te pracujące najczęściej w oparciu o regulatory typu PID w czasie zmiany trajektorii wymagają zmiany struktury np. na PD.

- w drugim stabilizację trajektorii realizuje się wykorzystując maszynę cyfrową do bezpośredniego sterowania trajektorią. Układy te wymagają wprowadzenia do zasady sterowania wartości wielkości odchylenia poprzecznego od zadanej trajektorii. W układach tych można spotkać takie, które do wypracowania części zasady sterowania wykorzystują stosowane do tej pory autopiloty kursu oraz takie w których sygnał sterujący jest realizowany bezpośrednio przez maszynę cyfrową, te ostatnie nie zostały jednak jeszcze sprawdzone w warunkach rzeczywistych.

Wymienione układy przy odpowiednim doborze parametrów i struktury regulatora zapewniają dobrą jakość prowadzenia obiektu po trajektorii. Wymagają one jednak każdorazowej zmiany parametrów regulatora w zależności od warunków pływania i zmian właściwości dynamicznych obiektu. W warunkach eksploatacyjnych jest to praktycznie niemożliwe i wymaga co najmniej przeprowadzenia odpowiednich prób manewrowych przed oddaniem jednostki do eksploatacji.

*Trudności te zmuszają do poszukiwania nowych dróg konstrukcji układów sterowania kursem i trajektorią wypornościowych obiektów nawodnych.* Przeprowadzona analiza istniejących rozwiązań, pozwoliła na wysunięcie tezy, że możliwe jest zaprojektowanie układu prowadzenia obiektów nawodnych po zadanej trajektorii z dokładnością  $\pm 0,25L$  ( $L$  — długość obiektu na wodnicy). Taką dokładność prowadzenia obiektów nawodnych po zadanej trajektorii zapewnić może regulator stanu realizujący bezpośrednie sterowanie cyfrowe. Istota pracy regulatora oparta jest o analizę stanów układu w każdej chwili próbkowania oraz zadanego stanu końcowego. Na podstawie porównania stanu aktualnego z zadanym stanem końcowym maszyna cyfrową wypracowuje odpowiednią poprawkę do sygnału otrzymywanego ze sprzężeń zwrotnych. Suma obu sygnałów podawana jest na urządzenie wykonawcze — maszynę sterową. Zaletą takiego regulatora jest jego prostota. Nie zmienia on swojej struktury przy przejściu z jednego stanu pracy do drugiego. Stałe pozostają również współczynniki sprzężeń zwrotnych układu, których zadaniem jest zapewnienie stateczności kursowej obiektu nawodnego (w praktyce spotykane są obiekty nawodne stateczne i niestateczne kursowo), co jest warunkiem koniecznym stateczności układu prowadzenia obiektu nawodnego po zadanej trajektorii.

Zasada sterowania regulatora ma postać\*

$$m(kT) = - \sum_{i=0}^{n-1} k_i X_i(kT) + m^*(kT), \quad (1)$$

gdzie:

\* ) Jeżeli układ otwarty prowadzenia obiektu po trajektorii jest stateczny, sterowanie realizowane jest tylko za pomocą sygnału  $m^*(kT)$ .

- $k_i$  — współczynniki sprzężeń zwrotnych,  
 $m^*(kT)$  — bieżąca poprawka wypracowywana przez maszynę cyfrową w zależności od zmian warunków pogodowych i charakterystyk dynamicznych obiektu sterowania,  
 $m(kT)$  — sygnał podawany na maszynę sterową.

W artykule została dokonana analiza dokładności prowadzenia wypornościowych obiektów nawodnych po zadanej trajektorii w różnych warunkach hydrometeorologicznych. Jako przykład poprawnej pracy regulatora przedstawiono realizację odchylenia poprzecznego od zadanej trajektorii kilku jednostek o różnych wypornościach.

## 2. Układ bezpośredniego cyfrowego prowadzenia wypornościowych obiektów nawodnych po zadanej trajektorii

Równania różniczkowe opisujące ruch nieliniowego układu prowadzenia obiektu nawodnego po zadanej trajektorii mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= -r_{31}X_2 - q_{31}X_3 + s_{31}X_4 + p_{31}\dot{\alpha}_b, \\ \dot{X}_3 &= -r_{21}X_2 - a|X_3|X_3 - bX_3 + s_{21}X_4 + p_{21}\dot{\alpha}_b, \\ \dot{X}_4 &= X_5, \\ \dot{X}_5 &= -1/T_{MS}X_5 + k_{MS}/T_{MS}m, \\ \dot{X}_6 &= v \sin(X_1 - \Psi_Z - X_3) \pm v_{ZNP}, \\ \dot{X}_7 &= v \cos(X_1 - \Psi_Z - X_3) \pm v_{ZNW}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gdzie:

- $X_1 \div X_7$  — zmienne stanu układu (kurs, prędkość kątowna zwrotu, kąt dryfu, kąt wychylenia płetwy sterowej, prędkość kątowna wychylenia płetwy sterowej, poprzeczne odchylenie od trajektorii, przemieszczenie obiektu wzdłuż trajektorii),  
 $q_{ij}, r_{ij}, s_{ij}$  — współczynniki hydrodynamiczne kadłuba i steru,  
 $k_{MS}$  — współczynnik wzmocnienia maszyny sterowej,  
 $T_{MS}$  — stała czasowa maszyny sterowej,  
 $m$  — sygnał sterujący podawany na maszynę sterową,  
 $\alpha_b, \dot{\alpha}_b$  — wymuszenia od falowania działające na kadłub obiektu (kąt nachylenia stycznej do fali i jego pochodna),  
 $v$  — prędkość postępową obiektu,  
 $v_{ZNP}$  — prędkość znosu obiektu w kierunku poprzecznym do trajektorii będąca wynikiem działania wiatru i prądu,  
 $v_{ZNW}$  — prędkość przemieszczania się obiektu wzdłuż zadanej trajektorii wskutek działania wiatru i prądu,  
 $\Psi_Z$  — kurs zadany.

Równanie (2) zapisane jako wektorowo-macierzowe równanie różniczkowe ma postać:

$$\dot{X}(t) = \mathbf{A}(t)X(t) + B(t)m(t) + C(x, t) \quad (3)$$

gdzie:

- $\mathbf{A}(t)$  — macierz obiektu  $n \cdot n$ , której elementy są funkcją prędkości postępowej obiektu  $v$ , zanurzenia obiektu  $T_z$ , głębokości wody pod stępką  $H$ , parametrów maszyny sterowej itp.,
- $\mathbf{B}(t)$  — wektor sterowania  $n \times 1$ , którego elementy są funkcją parametrów maszyny sterowej
- $\mathbf{X}(t)$  — wektor stanu  $n \times 1$ , charakteryzujący stan obiektu sterowania i maszyny sterowej,
- $m(t)$  — sygnał sterujący podawany na maszynę sterową,
- $\mathbf{C}(x, t)$  — wektor zakłóceń  $n \times 1$ , będący funkcją nieliniowości układu, falowania, wiatru i prądu.

W przypadku zastosowania do sterowania maszyny cyfrowej równanie (3) przyjmuje postać

$$\mathbf{X}(k+1)T = \Phi(kT)\mathbf{X}(kT) + \mathbf{G}(kT)m(kT) + \mathbf{N}(kT)\mathbf{C}(kT) \quad (4)$$

Przyjmując, że czas zmian właściwości dynamicznych układu prowadzenia obiektu po zadanej trajektorii, w porównaniu z czasem wypracowania sygnału sterującego jest duży (rzędu minut lub większy) można przyjąć, że

$$\mathbf{X}(k+1)T = \Phi(T)\mathbf{X}(kT) + \mathbf{G}(T)m(kT) + \mathbf{N}(T)\mathbf{C}(kT) \quad (5)$$

Optymalny ciąg sygnałów sterujących przeprowadzających układ opisany równaniem (5) z dowolnego stanu początkowego  $\mathbf{X}(0)$  do dowolnego stanu  $\mathbf{X}(k)$  (przy założeniu sterowalności i obserwowalności układu) w minimalnym czasie otrzymywany jest z rozwiązania układu

$$\mathbf{M}_1(T)m^T(iT) = \mathbf{X}(k) - \Phi(nT)\mathbf{X}(0) - \mathbf{M}_2(T), \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (6)$$

gdzie:

- $m^T(iT)$  — wektor sygnałów sterujących,
- $\mathbf{X}(0)$  — wektor stanu początkowego układu,
- $\mathbf{X}(k)$  — wektor stanu końcowego układu,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(T) &= [\Phi(n-1)T\mathbf{G}(T); \Phi(n-2)T\mathbf{G}(T); \dots; \Phi(T)\mathbf{G}(T); \mathbf{G}(T)], \\ \mathbf{M}_2(T) &= \Phi(n-1)T\mathbf{N}(T)\mathbf{C}(0) + \Phi(n-2)T\mathbf{N}(T)\mathbf{C}(T) + \dots + \\ &\quad + \Phi(T)\mathbf{N}(T)\mathbf{C}(n-2)T + \mathbf{N}(T)\mathbf{C}(n-1)T \end{aligned}$$

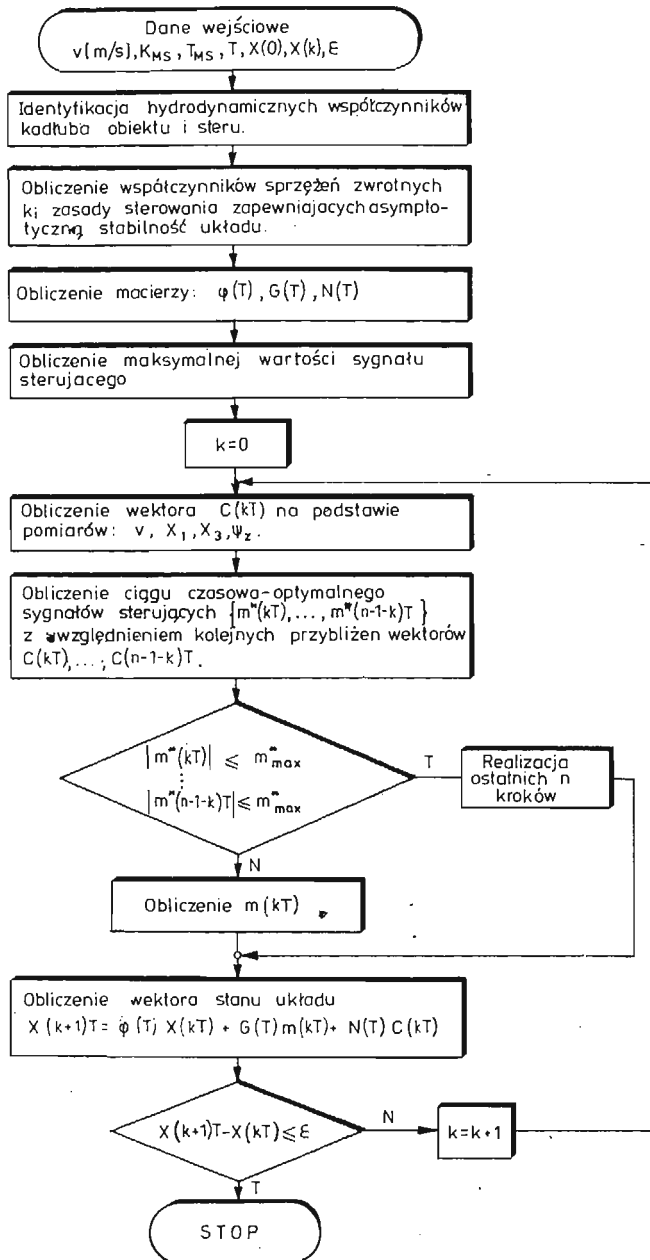
Algorytm obliczania optymalnego ciągu sygnałów sterujących  $\{m(0); m(T); \dots; m(n-1)T\}$  omówiony został w pracy [2], a jego schemat przedstawiono na rys. 1.

Ilustracja graficzna zadania wykonywanego przez regulator, polegającego na przeprowadzeniu obiektu z dowolnego stanu początkowego  $\mathbf{X}(0)$  do dowolnego stanu końcowego  $\mathbf{X}(k)$  w minimalnym czasie, przy minimalnych wartościach odchylenia poprzecznego obiektu od zadanej trajektorii została przedstawiona na rys. 2.

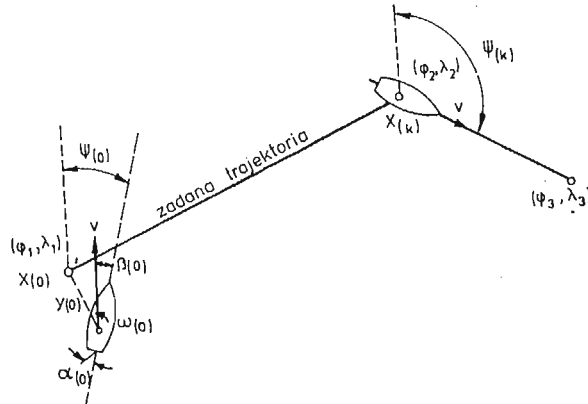
### 3. Wyniki modelowania układu prowadzenia wypornościowych obiektów nawodnych po zadanej trajektorii

Badania modelowe układu prowadzenia obiektów nawodnych po zadanej trajektorii przeprowadzone zostały z uwzględnieniem falowania morskiego [1] oraz wpływu działania wiatru i prądu.





Rys. 1. Algorytm nieliniowego dyskretnego układu prowadzenia obiektu nawodnego po zadanej trajektorii



Rys. 2. Ilustracja graficzna zadania sterowania obiektem nawodnym po zadanej trajektorii wykonywanego przez cyfrowy regulator sterowania bezpośredniego:

$$X^T(0) = [\psi(0) = 15^\circ, \omega(0) = 1^\circ/\text{s}, \beta(0) = 5^\circ, \alpha(0) = -10^\circ, \dot{\alpha}(0) = 3^\circ/\text{s}, \gamma(0) = 20 \text{ m}, X(0) = 0 \text{ m}]$$

$$X^T = [\psi(k) = 120^\circ, \omega(k) = 0^\circ/\text{s}, \beta(k) = 0^\circ, \alpha(k) = 0^\circ, \dot{\alpha}(k) = 0^\circ/\text{s}, \gamma(k) = 0 \text{ m}, X(k) = 1500 \text{ m}]$$

Dla udowodnienia tezy, że przedstawiony układ może być wykorzystany do prowadzenia po zadanej trajektorii z założoną dokładnością obiektów nawodnych o różnej wyporności, przeprowadzona została analiza dokładności sterowania dla jednostek o następujących parametrach:

- 1)  $V = 5000 \text{ m}^3$   
 $L = 100 \text{ m}$   
 $B = 17 \text{ m}$   
 $T_z = 4,6 \text{ m}$

jednostka wyposażona jest w dwie śruby i jeden ster płetwowy umieszczony między nimi.

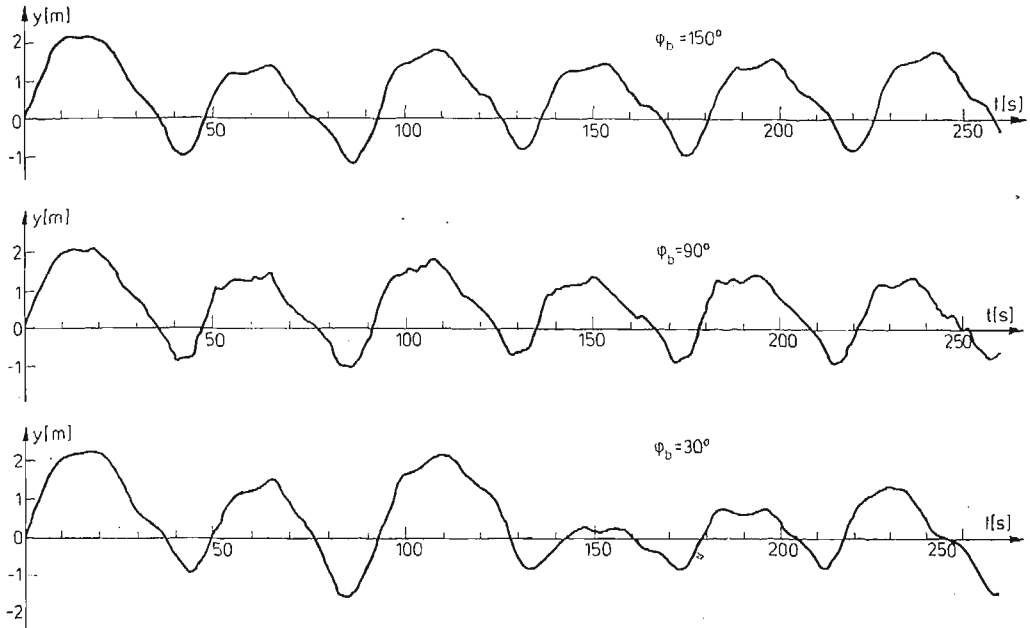
- 2)  $V = 213,76 \text{ m}^3$   
 $L = 36,3 \text{ m}$   
 $B = 7 \text{ m}$   
 $T_z = 1,742 \text{ m}$

jednostka wyposażona jest w dwie śruby i dwa stery płetwowe

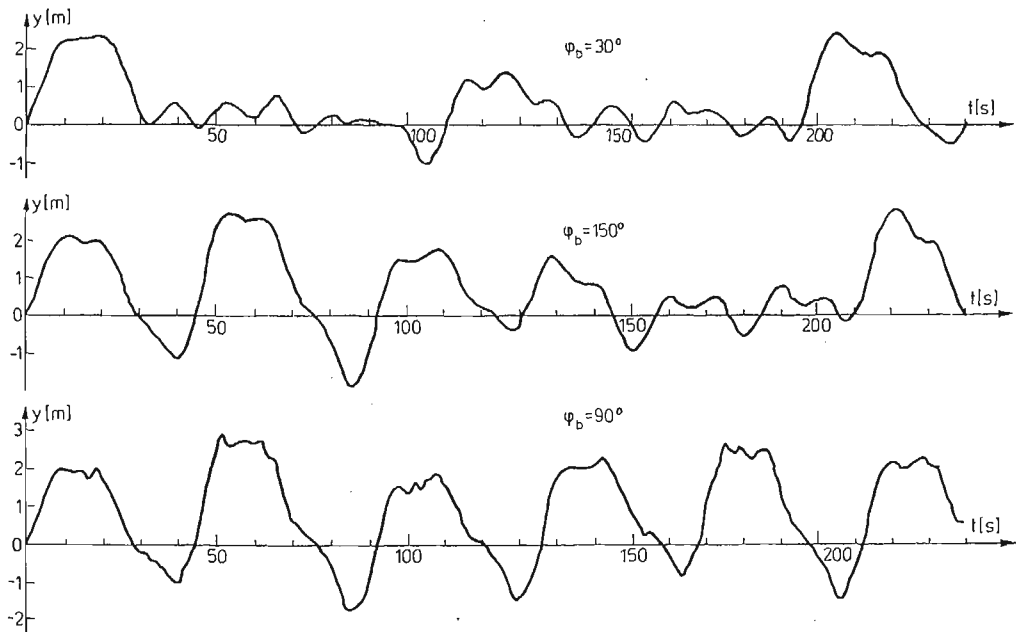
- 3)  $V = 92,12 \text{ m}^3$   
 $L = 29 \text{ m}$   
 $B = 4,7 \text{ m}$   
 $T_z = 1,4 \text{ m}$

jednostka wyposażona jest w jedną śrubę i jeden ster płetwowy.

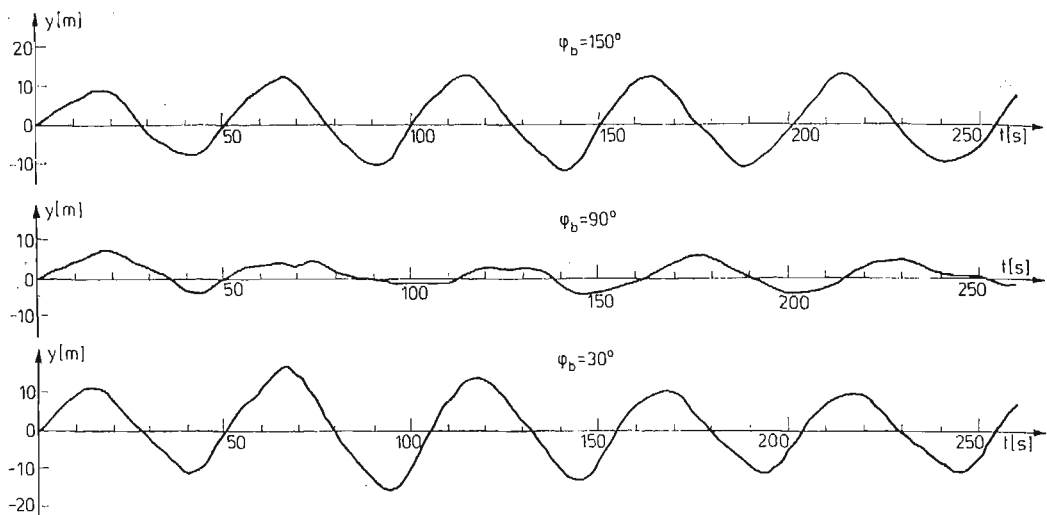
Przykładowe realizacje odchylenia poprzecznego obiektów od zadanej trajektorii dla różnych warunków hydrometeorologicznych oraz różnej prędkości obiektów w czasie stabilizacji na trajektorii i przejściu z jednego prostoliniowego odcinka trajektorii na drugi, przedstawione zostały na rys. 3 ÷ rys. 6.



Rys. 3. Realizacje odchylenia poprzecznego obiektu nawodnego od zadanej trajektorii w czasie stabilizacji obiektu na trajektorii:  $L = 29 \text{ m}$ ,  $v = 4.1156 \text{ m/s}$ ,  $\zeta_{w3\%} = 2 \text{ m}$ ,  $v_{ZNP} = 0,25 \text{ m/s}$

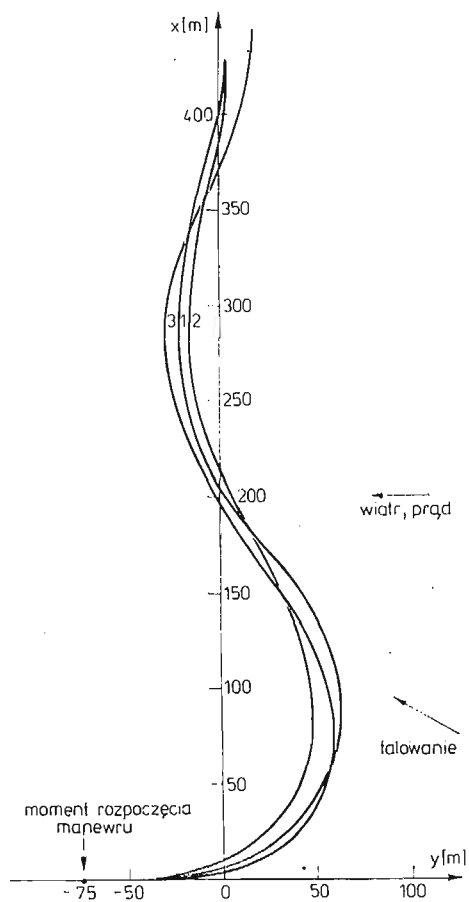


Rys. 4. Realizacje odchylenia poprzecznego obiektu nawodnego od zadanej trajektorii w czasie stabilizacji obiektu na trajektorii:  $L = 36,3 \text{ m}$ ,  $v = 4.1156 \text{ m/s}$ ,  $\zeta_{w3\%} = 2 \text{ m}$ ,  $v_{ZNP} = 0,25 \text{ m/s}$



Rys. 5. Realizacje odchylenia poprzecznego obiektu od zadanej trajektorii w czasie stabilizacji obiektu na trajektorii:

$$L = 100 \text{ m}, \quad v = 7,2023 \text{ m/s}, \quad v_{ZNP} = 0,25 \text{ m/s}$$



Rys. 6. Realizacje odchylenia poprzecznego obiektu od zadanej trajektorii przy przejściu z jednego prostoliniowego odcinka trajektorii na drugi:  $v = 7.2023 \text{ m/s}$ ,  $\varphi_b = 150^\circ$ ,  $\zeta_{w3\%} = 2 \text{ m}$ ,  $v_{ZNP} = 0,25 \text{ m/s}$

1. —  $L = 29 \text{ m}$ , 2. —  $L = 36,3 \text{ m}$ , 3. —  $L = 100 \text{ m}$

#### 4. Wnioski

1. Analiza realizacji odchyień poprzecznych rozpatrywanych obiektów nawodnych, otrzymanych dla różnych prędkości tych obiektów i różnych warunków hydrometeorologicznych, potwierdziła wysoką dokładność pracy proponowanego regulatora. We wszystkich przypadkach wartości  $y$  były mniejsze od  $\pm 0,25 L$ .
2. Stałość struktury regulatora i zastosowanych współczynników sprzężeń zwrotnych nie wpływa na pracę regulatora zarówno przy stabilizacji obiektu nawodnego na zadanej trajektorii jak i przy przejściu z jednego prostoliniowego odcinka trajektorii na drugi.
3. Dla danego kąta kursowego obiektu względem fali  $\varphi_b$  i wysokości fali  $\zeta_{w,3\%}$  — ze wzrostem prędkości postępowej obiektu (w wyniku wzrostu efektywności działania sterów), maleje wartość odchylenia poprzecznego obiektu od zadanej trajektorii.
4. Dla falowania bocznego ( $\varphi_b = 90^\circ$ ), prędkość postępową obiektu ma nieznaczny wpływ na wartości odchylenia poprzecznego od zadanej trajektorii. Zdecydowany wpływ w powyższym przypadku wykazuje wysokość fali  $\zeta_{w,3\%}$ . Ze wzrostem wysokości fali rośnie wartość odchylenia poprzecznego zwłaszcza dla małych jednostek, dla jednostek dużych wpływ ten jest mniej wyraźny.
5. W przypadku małych jednostek i niewielkich prędkości kierunek falowania nie ma w zasadzie wpływu na wartości odchylenia poprzecznego od zadanej trajektorii (odchylenia te dla różnych kierunków fali są porównywalne). Ze wzrostem prędkości tych jednostek uwidacznia się jednak wpływ falowania baksztagowego.
6. W przypadku jednostek dużych uwidacznia się wyraźny wpływ falowania skośnego i baksztagowego (z przewagą falowania baksztagowego) na wartość odchylenia poprzecznego od zadanej trajektorii.
7. Wpływ  $v_{ZNP}$  uwidacznia się przede wszystkim dla jednostek małych. Ze wzrostem wyporności jednostki staje się on coraz mniej widoczny.
8. Prowadzenie obiektu po zadanej trajektorii wymaga większych odchyień od zadanego kursu niż w przypadku stabilizacji kursu. W związku z powyższym rosną straty związane ze wzrostem oporów wynikających ze zwiększenia się kąta dryfu, co powoduje większy spadek prędkości niż przy sterowaniu kursem.

#### Literatura

1. KITOWSKI Z., *Liniowy stochastyczny model falowania morskiego*. Postępy Cybernetyki Nr 1/1985.
2. KITOWSKI Z., *Synteza układu utrzymania okrętu na zadanej trajektorii z dużą dokładnością*, ZN 87A, WSMW, Gdynia 1985.

## Резюме

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ВОДОИЗМЕЩАЮЩИМИ ОБЪЕКТАМИ ПО ЗА-  
|ДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ В РАЗНЫХ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

В работе представлены результаты математического моделирования системы управления водоизмещающими объектами (при использовании регулятора описанного в [2]) по заданной траектории, работающей в разных гидрометеорологических условиях.

## Summary

ANALYSIS OF THE ACCURACY OF THE SURFACE VESSEL GUIDANCE OVER ALONG  
A TRAJECTORY FOR VARIOUS METHEOROLOGICAL CONDITIONS

In the paper we present the results of the mathematical modelling of the accuracy of surface vessel guidance on a given straight segment trajectory (with the controller described in [2]) for various hydro-meteorological conditions.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 marca 1986 roku*

---

## O PEWNYCH ROZWIĄZANIACH RÓWNIANIA DYFUZJI CZ. II\*

JÓZEF WACŁAWIK

*Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków*

W moim liście do Redakcji *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* [3] zwracałem uwagę na nieuzasadnione stwierdzenia i wnioski w pracach [1] i [2]. Polemikę podjął ich Autor dr Eugeniusz Bobuła [4]. Jego odpowiedź zawiera liczne błędy.

Przedmiotem dyskusji są niektóre rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial(cp)}{\partial x} + 2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + cp \right)_{x=0^-} \delta(x) \quad (2)$$

i ich własności.

W równaniu (2)  $p(x, t)$  oznacza stężenie lub temperaturę,  $x$  — oś liczbowa,  $t$  — czas,  $c(x, t)$  — siłę wymuszającą transport,  $\delta(x)$  — dystrybucję delta Diraca.

Dr Bobuła czyni szereg założeń [1]. Między innymi przyjmuje, że funkcja  $p$  jest parzysta:  $p(x, t) = p(-x, t)$ ,  $c$  — nieparzysta:  $c(x, t) = -c(-x, t)$ , a

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} + cp \right)_{x=0^\pm} \neq 0.$$

W odpowiedzi [4] Autor twierdzi, że rozwiązanie równania (2) posiada własność skończonej prędkości impulsu (pierwsza strona odpowiedzi 16 - 17<sub>a</sub>). Można wykazać, że tak nie jest. Dla skrócenia dowodu rozważę przypadek  $c = 0$ . Parzystą funkcję  $p(x, 0)$  w warunku początkowym przedstawiam w postaci sumy dwóch funkcji:  $p(x, 0) = u_0(x) + v_0(x)$ , z których każda jest parzysta. Ponadto przyjmuję, że  $u_0(x)$  jest gładka, zaś  $v_0(x)$  nie posiada pochodnej względem  $x$  w punkcie  $x = 0$ . Rozwiązując równanie

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \delta(x) \quad (6)$$

otrzymuje się dwie parzyste funkcje  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$ .

Pierwszą z nich można wyznaczyć z równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{gdyż} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \delta(x) = 0,$$

\* W MTiS t. 22, z. 3 - 4, 1984 roku została opublikowana odpowiedź Pana Eugeniusza Bobuli na list Pana Józefa Waclawika zamieszczony w MTiS t. 20, z. 1 - 2, 1982 r. Poniżej zamieszczamy polemiczny artykuł Pana Józefa Waclawika, którym to autor zamyka swój udział w dyskusji uważając, że w dostatecznym stopniu zwrócił uwagę na błędy zawarte w rozprawach Pana E. Bobuli.

drugą zaś z równania

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \delta(x).$$

Suma tych rozwiązań  $p(x, t) = u(x, t) + v(x, t)$  spełnia równanie (6):

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial t} = \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial(u+v)}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \delta(x).$$

Funkcja  $u(x, t)$ , jako rozwiązanie klasycznego równania parabolicznego, nie posiada własności skończonej prędkości impulsu, a funkcję  $p(x, 0)$  można przedstawić na nieskończenie wiele sposobów w postaci sumy  $u_0(x) + v_0(x)$ , o składnikach posiadających podane wyżej własności. Zatem funkcja  $p(x, t)$ , będąc sumą  $u(x, t) + v(x, t)$ , nie może mieć własności skończonej prędkości impulsu.

Powyższe jest także dowodem, że funkcja  $p(x, t)$ , będąca rozwiązaniem równania (2), nie może mieć własności lokalizacji zaburzenia. W kwestii tej dr Bębula wypowiada się na drugiej stronie odpowiedzi [4] w punkcie ad 2.4.

Autor odpowiedzi [4] (strona pierwsza w. 16d) stawia pytanie „Czy ... równanie (2) posiada źródło?” i podaje negatywną odpowiedź, stwierdzając w uzasadnieniu, że równanie to nie zawiera funkcji niezależnej od rozwiązań. Źródło w równaniu przewodnictwa nie musi być niezależne od poszukiwanej funkcji. Przykładem może być równanie opisujące przewodnictwo cieplne w rezystorze znajdującym się pod napięciem, opływanym strumieniem nieizotermicznym, gdy oporność zależy od temperatury.

W przypadku rozważanym w pracach [1] i [2] źródło występuje w punkcie  $x = 0$ . Jego wydajność, w przedziale czasu  $t \in (t_1, t_2)$ , można wyliczyć całkując wyrażenie na strumień  $\Phi(x, t)$  względem zmiennej  $t$ :

$$2 \int_{t_1}^{t_2} \Phi(x, t) \Big|_{x=0^-} dt$$

Gdyby nie było źródła to skąd „brałyby się” materia lub energia odplywająca od punktu  $x = 0$  strumieniami o przeciwnych zwrotach!?

Autor przyjął, że dla  $|x| > |\lambda(t)|$  funkcja  $p(x, t) = 0$  (odpowiedź [4] strona pierwsza w. 4d). Funkcja ta spełnia równanie (2) przy  $x \in (-\infty, +\infty)$  a nie tylko przy  $|x| > |\lambda(t)|$ , jak to napisano w odpowiedzi. Natomiast wyrażenie

$$p(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(1 + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{j+1} & |x| \leq |\lambda(t)| \\ 0 & |x| > |\lambda(t)| \end{cases}$$

nie jest rozwiązaniem równania {6}. Współczynnik w równaniu {6} przy  $x \neq 0$  jest funkcją regularną. Rozwiązanie

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(1 + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{j+1} \quad (7)$$

przy  $x = \lambda(t)$  zeruje się, a jego pochodna względem  $x$  w tym punkcie jest różna od zera.



Na zewnątrz linii  $x = \lambda(t)$  rozwiązania (7) nie można zatem przedłużać rozwiązaniem zerowym. Funkcja przedłużona rozwiązaniem zerowym odpowiada równaniu podanemu przez J. Szarskiego w przypadku, gdy spełnione są dodatkowo warunki [2], podane też w liście do Redakcji [3] (wzór (4) i następny). Warunki te oznaczają, że intensywność źródła energii (materii) w punkcie  $x = 0$  dostosowana jest do jej odbioru w punktach  $|x| = |\lambda(t)|$ .

W celu wykazania, że obydwa wzory na strumień, podane przez E. Bobulę i M. Smoluchowskiego są identyczne w odpowiedzi (strona druga punkt ad 2.2) zależności (1) i (5) [3] zostały porównane ze sobą! Jednakże czytelnik pracy [1] nie znajduje w niej tych rozważań, ani równoważnych. Natomiast wywody przedstawione w rozprawie [1] są sprzeczne ze stwierdzeniami zawartymi w punkcie ad 2.2 odpowiedzi. Dr Bobula podaje, że  $c(x, t)$  jest siłą wywołującą transport (np. str. 35 i 36 rozprawy [1]). Ponieważ z porównania (1) i (5) wynika

$$c = -\frac{uF}{k} \quad (8)$$

powinno tam znaleźć się stwierdzenie, że  $c(x, t)$  jest stosunkiem iloczynu siły wywołującej transport  $F$  i ruchliwość cząsteczek  $u$  do współczynnika dyfuzji  $k$ , ze znakiem minus. Gdyby nawet przyjąć, że wzór (1) sugerowany w pracy [1] pochodzi od M. Smoluchowskiego [8] oraz, że wywód Autora pracy [1] jest wynikiem założenia (8) to przecież wyrażenie w liczniku ułamka  $uF$  jest prędkością konwekcji ([8] str. 1105 wzór (4)), o której w pracy [1] nie ma wzmianki. Gdyby nawet Autor przyjął, że  $c(x, t)$  jest stosunkiem prędkości konwekcji do współczynnika dyfuzji, który ma wartość skończoną, to jakie fizyczne znaczenie ma nieskończenie wielka prędkość konwekcji wynikająca z przyjęcia  $c = \frac{x}{2(r-t)}$ , przy  $x$  rosnącym do  $\pm \infty$ . Jak ma być spełnione równanie ciągłości w świetle własności cieczy i gazów!

W tej sytuacji nie zachodzi przypadek sugerowany w punkcie ad. 2.3. Ponadto pozostają aktualne uwagi o niezgodności zwrotów bodźców i przepływów termodynamicznych [3].

Do pewnych wniosków prowadzi także analiza wymiarów fizycznych poszczególnych składników wzorów; na przykład w rozdziale o „cofaniu się” dyfuzji, wzór (24) str. 28 [1].

Gdyby zachodził proces odwrócenia dyfuzji (druga strona [4] w. 8.9g) to można mówić o tworzeniu się struktury, w takim rozumieniu jak to podają I. Prigogine, P. Glansdorff, G. Nicolis [5], [6], W. Ebeling [7].

Według cytowanych monografii warunkami koniecznymi wystąpienia takiego procesu są:

- otwarty układ termodynamiczny,
- przebieg procesu poprzez stany dalekie od równowagi,
- nieliniowość równań opisujących dynamikę.

Muszą być spełnione wszystkie trzy warunki i to jeszcze nie zawsze wystarczy do powstawania struktury. W przypadku rozważanym przez dr Bobulę warunki te nie zachodzą. Opis matematyczny oparty jest na fenomenologicznych prawach Fouriera lub Ficka (czyli tak, jak w liniowej termodynamice procesów nieodwracalnych), równanie bilansu jest liniowe. Odnosnie punktu ad. 2.4. Autor rozważa równania bilansu (nie zachowania!) ze źródłem w punkcie  $x = 0$ .

W celu zbadania jak zmienia się pochodna z całki:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) dx$$

za  $p(x, t)$  podstawiam wyrażenie (24) [1]:

$$p(x, t) = -2 \frac{|x|}{r-t} + 2(r-t)^{-\frac{1}{2}}$$

Wobec parzystości  $p$  ze względu na  $x$  otrzymuję

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) dx = 2 \int_0^{\infty} p(x, t) dx = \left[ -2x^2(r-t)^{-1} + 4x(r-t)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\infty}$$

Całka ta jest nieskończenie wielka ( $-\infty$ ). Gdy  $t \rightarrow r$  rosną wartości obu czynników  $(r-t)^{-1}$  i  $(r-t)^{-\frac{1}{2}}$ .

Natomiast gdy  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x, t) = 0$  (o takim przypadku Autor pisze [1] lecz nie wynika to z wzorów) wystarczy scałkować równanie (6) względem  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) dx = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2 \frac{dp}{dx} \Big|_{x=0^-}$$

Widać, że o zmianie w czasie całki z energii lub ilości materii decyduje źródło w punkcie  $x = 0$  i że całka ta nie jest stała w czasie.

W swoim liście do Redakcji [3] nie kwestionowałem twierdzenia J. Szarskiego [2].

Na zakończenie pragnę oświadczyć, że niniejszym zapowiadam zakończenie swego udziału w dyskusji niezależnie od tego czy dr. E. Bobuła prześle odpowiedź i czy zostanie ona wydrukowana czy nie. Uważam bowiem, że w dostatecznym stopniu podkreśliłem w swoich recenzjach i listach do Redakcji MTiS błędy, nieuzasadnione stwierdzenia i wnioski prac [1], [2], [4]. Niestety trudny problem matematycznego opisu dyfuzji i przewodnictwa ciepła ze skończoną prędkością zaburzenia, pozostaje otwarty. Jego stan podaje monografia K. Wilmańskiego, na co zwróciłem uwagę w poprzednim liście [3].

#### Literatura

1. E. BOBULA, *Równanie zachowawczej dyfuzji w przestrzeni dystrybucji a możliwość wpływu na jej przebieg*, ZN AGH, Górnictwo, z. 104, Kraków, 1979
2. E. BOBULA, *Pseudoźródłowa hipoteza transportu parabolicznego*, rękopis wraz z recenzjami oraz pismem Jacka Szarskiego, złożony w Bibliotece Jagiellońskiej, praca doktorska UJ, 1974, r.
3. J. WACŁAWIK, *List do redakcji*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, t. 20, z. 1÷2, 1982. r.
4. E. BOBULA, *Odpowiedź na list J. Wacławika do Redakcji Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, t. 22, z. 3÷4, 1984 r.
5. P. GLANSDORFF, I. PRIGOGINE, *Thermodynamics of structure, stability and fluctuations*, Wiley — Interscience, N. J. 1971 r.

6. G. NICOLIS, I. PRIGOGINE, *Self — organization in nonequilibrium systems*, Wiley — Interscience, N. J., 1977 r.
7. W. EBELING, *Strukturbildung und irreversible Prozessen*, Treubner, Lipsk, 1976 r.
8. M. SMOLUCHOWSKI, *Ann. der Physik*, 48, 1915.

*List wpłynął do Redakcji dnia 7 marca 1986 roku.*

---



# BIULETYN INFORMACYJNY

## Konferencja Mechaniki Nieliniowej (On nonlinear mechanics) Szanghaj, 28 - 31 października 1985 r.

Konferencja ta była jednym z wielkich spotkań naukowych zorganizowanych, po dłuższej przerwie w Chińskiej Republice Ludowej. Organizatorami byli Chińskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i Szanghajskie Stowarzyszenie Nauki i Techniki (Shanghai Association for Science and Technology). Przewodniczącym Komitetu Honorowego był profesor Chien Wei-zang (Qian Weichang, członek zagraniczny PAN), w skład Komitetu wchodziło wielu wybitnych przedstawicieli mechaniki światowej, w tym profesorowie: C. Truesdell, R. S. Rivlin, L. I. Siedow, a z Polski W. Nowacki. Przewodniczącym Komitetu Naukowego był profesor Guo Zhong-heng z Uniwersytetu Pekńskiego. W Konferencji uczestniczyło 78 uczonych z 23 krajów i terytoriów, w tym z USA, ZSRR, Wielkiej Brytanii R. F. N., Francji i 4 osoby z Polski. Uczestników chińskich było 181 reprezentujących 68 uczelni bądź instytucji naukowych. Na konferencję wpłynęło około 400 referatów, zaakceptowano do wygłoszenia 247 referatów, w tym 113 zagranicznych.

Na zaproszenie organizatorów zostały wygłoszone następujące referaty generalne:

- G. Bianchi, *Nonlinear problems in the mechanics of machines*,
- C. S. Hsu, *Evaluation of metric and topological entropies of strange attractors*,
- A. Jeffrey, *On the many different aspects of nonlinearity in waves*,
- K. Kondo, *Substitution of anholonomicity for non-linearity with wild topological perturbation*,
- Th. Lehmann, *Some remarks on coupled thermo-mechanical processes in thermoplasticity*,
- G. Iooss, *Recent results about secondary bifurcations in the Couette-Taylor problem*,
- W. A. Nash, *Non-linear vibrations of elastic shells*,
- P. D. Panagiotopoulos, *Nonsmooth mechanics and its applications*,
- L. I. Siedow, *General method of formulation of physical models*,
- C. Truesdell, *Classical thermodynamics is a mathematical science*,
- Yeh Kai-yuan, *The development of investigation of flexible structural elements in China*,
- Zhou Heng, *On the nonlinear theory of hydrodynamic stability of parallel flows*.

Przedstawiane referaty naukowe wchodziły w zakres następujących sześciu dziedzin mechaniki nieliniowej:

1. równania konstytutywne w nieliniowej mechanice ośrodków ciągłych,
2. skończone odkształcenia i nieliniowa sprężystość,
3. matematyczna teoria plastyczności,
4. mechanika płynów i fale nieliniowe,
5. drgania nieliniowe,
6. bifurkacja, katastrofy, chaos i stateczność nieliniowa,
7. zagadnienia różne.

Streszczenia większości referatów generalnych i komunikatów naukowych zostały opublikowane, staraniem Komitetu Redakcyjnego pod przewodnictwem profesora Chien Wei-zanga, w specjalnej księdze: *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics*, Science Press, Peking 1985, str. 1381 + +23.

Guo Zhong-heng

V Szwedzko Polskie Sympozjum pt. „Nowe kierunki w mechanice ośrodków ciągłych”

Sympozjum to odbyło się w Jabłonie w dniach 19 - 23 maja 1986 roku i było poświęcone uczczeniu zasług naukowych prof. Stiga Hjalmarasa, członka zagranicznego PTMTS. Oprócz 10 mechaników szwedzkich w konferencji uczestniczył prof. E. Kroner z Uniwersytetu w Stuttgarcie, prof. G. Maugin z Uniwersytetu Piotra i Marii Curie w Paryżu i prof. H. Günther z Laboratorium Fizyki Teoretycznej w Babelsbergu (NRD). Na liście było 24 uczestników polskich, oprócz tego w obradach aktywny udział brali nie wymienieni na liście uczestnicy, w tej liczbie nawet prelegenci. Wygłoszono 29 referatów w tym 11 referatów uczestników szwedzkich oraz 15 polskich. Tematyka Sympozjum była rozległa, od zagadnień biomechaniki poprzez mechanikę kompozytów, mechanikę pękania po modele stochastyczne, ośrodki elektromagnetyczne i teorię defektów. Nowością na Sympozjum w porównaniu z poprzednimi były referaty z mechaniki cieczy i gazów. Uczestnicy mieli możliwość zwiedzenia Zamku Królewskiego w Warszawie i zostali zaproszeni na spotkanie w Ambasadzie Szwecji. Poniżej podajemy tytuły referatów w chronologicznym porządku ich wygłaszania:

- S. Hjalmaras, *A beam model of the human spine under muscular action*
- L. Lindbeck, *Anthropometric and biomechanical characteristics of the spine*
- D. Rogula, *Material continua of identical particles*
- L. Söderholm, *Planetary motion around an object driven by non-gravitational forces*
- O. Brulin, *Continuum equation derived from an orthotropic polar model of the microstructure. Part 1: Applications to composites*
- I. Fischer-Hjalmaras, *Continuum equations derived from an orthotropic polar model of the microstructure. Part 2: Applications to crystals*
- Cz. Woźniak, *Micromorphic effects in a modelling of periodic multilayered elastic composites*
- G. Maugin, *Solitons in micropolar elastic solids*
- Cz. Rymarz, *Gradient models of pseudocontinuum and nonlocal medium*
- L. Soderholm, *Linearly dissipative materials are necessarily objective*
- Z. Olesiak, *Thermal diffusion in the theory of cracks*
- J. Ignaczak, *Decomposition theorem for thermoelastic wave in the light of propagating singular surface theory*
- A. Neimitz, *On certain aspects of hydrogen assisted cracking*
- J. W. Elsner, S. Drobnik, *Coherent structures and their relation to instability processes in around free jet*
- N. Apazidis, *Starting and oscillating flows of a particle-fluid suspension in a circular pipe*
- L. Bogusławski, *The detection of coherent structures in the inner region of turbulent boundary layer*
- V. Cvetkovic, *Continuum analysis of hydrodynamic dispersion in a porous medium*
- P. A. Lindberg, *Wind generation of water waves, effect of short waves on the growth rate of long waves*
- J. Ostrowski, *Wind tunnel simulation and modelling of the flow phenomena in atmospheric boundary layer*
- H. Tinoco, *Gas stirring of melts*
- E. Kröner, *Gauge theory of defects in Bravais crystals*
- K. Sobczyk, *Retardation in fatigue crack growth; empirical hypothesis and probabilistic modelling*
- H. Günther, *On internal mathematical structure of an elastic body*
- R. Hsieh, *Multipolar forces in stationary electromagnetic media*
- J. Stefaniak, T. Hoffman, *Thermomdiffusion in electric conductor with chemical reaction taken into account*
- B. Maruszewski, *Coupled evolution equations in thermoelastic semiconductors with relaxation times*
- E. Danicki, *Reflection of surface acoustic waves from shallow grooves in piezoelectric halfspace*
- T. Lenkowska-Czerwińska, *Nonlinear waves and spin-lattice interaction in one dimensional Heisenberg chain*
- J. P. Nowacki, *Dislocations in dielectrics with polarization gradient*

Zbigniew Olesiak

**XVII Jugosłowiański Kongres Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej**  
**Zadar, 2 - 6 czerwca 1986**

Program Kongresu wraz ze streszczeniami został wydany w pięciu tomach. W pierwszym (136 stron) podany został program obrad, streszczenia 4 referatów generalnych, spis uczestników jugosłowiańskich i zagranicznych i pisma w sprawie plagiatu przedstawionego na poprzednim Kongresie w Bečić w r. 1984 i opublikowanego w streszczeniach tamtego Kongresu.

Z wymienionych 55 uczestników zagranicznych największą liczbę stanowili Rumuni — 22 osoby, nie przyjechał nikt, następną najbardziej liczebną grupę stanowili Polacy, których na liście było 11 osób, przyjechało 8 osób, w tym 4 nie wymienione w spisie. Ponadto w Kongresie uczestniczyli pracownicy nauki z RFN (4 osoby), Włoch (3), ZSRR (3), Portugalii (2), Węgier (2) i po jednej osobie z USA, Czechosłowacji i Kanady.

Cztery tomy Wydawnictwa Kongresowego obejmowały streszczenia referatów, które zostały podzielone zgodnie z tematyką referatów. Pierwszy tom zawierał referaty z mechaniki ogólnej, 45 referatów o objętości 280 stron, drugi tom 43 referaty z mechaniki płynów, 264 strony, trzeci i czwarty tom łącznie 121 referatów z mechaniki ciała stałego (odpowiednio 390 i 400 stron). Każdy z uczestników otrzymał materiały konferencyjne w postaci programu obrad oraz ten tom streszczeń, w którym było zamieszczone streszczenie jego referatu. Pozostałe tomy można było zakupić w cenie 1000 - 1500 dinarów. Nie zostały wygłoszone, znajdujące się w streszczeniach wszystkie referaty autorów rumuńskich, 6 referatów autorów polskich, 2 tureckie i kilka referatów autorów jugosłowiańskich, razem 38 referatów. Z kolei około 10 referatów, w tym 5 autorów zagranicznych, nie zamieszczonych w streszczeniach, zostało wygłoszonych w ramach Kongresu. Językiem obrad był w zasadzie język serbsko-chorwacki. Uczestnicy zagraniczni wygłaszali swoje referaty w języku angielskim, 4 prelegentów przedstawiło referaty po niemiecku (Polak, Węgier i 2 Niemców), jedna osoba w języku rosyjskim.

Wygłoszono 4 referaty generalne. Emerytowany profesor Lujo Šuklje mówił o analizie konsolidacji gruntów. Profesor Ingo Müller z Berlina zachodniego przedstawił referat o symulacji termomechanicznych własności materiałów z pamięcią kształtu. W czasie prelekcji zademonstrował doświadczenia pokazujące zachowanie się materiałów z pamięcią kształtu (dokładniej z pamięcią przemiany fazowej) oraz silnik cieplny wykorzystujący to zjawisko. Wykład ten wzbudził duże zainteresowanie. Referat p.t. „mechanika i nieliniowa analiza konstrukcji” przedstawił profesor Miodrag Sekulović z Belgradu, wykład był ilustrowany świetnie opracowanymi, kolorowymi przezroczami. Czwarty wykład generalny przedstawił profesor Božidar Vujanović z Nowego Sadu. Tematem były prawa konserwatywnych i niekonserwatywnych układów dynamicznych i ich zastosowania. Tego samego dnia, tzn. 4 czerwca, odbyło się zebranie Delegatów Jugosłowiańskiego Towarzystwa Mechaniki, na którym prof. B. Vujanović został wybrany prezesem Towarzystwa po statutowej rezygnacji profesora Luki Vujaševića. Również na stanowisku sekretarza generalnego nastąpiła zmiana i profesora Jovo Jarića, głównego organizatora XVII Kongresu, zastąpił docent Dobrosław Ružić, obaj z Uniwersytetu Belgradzkiego.

Największa liczba wygłoszonych referatów dotyczyła zagadnień mechaniki ciała stałego odkształcalnego, obejmując nie tylko dwie sekcje C<sub>1</sub> i C<sub>2</sub>, które miały taki tytuł, ale również dużą część sekcji A — mechanika ogólna. Referaty w sekcji mechaniki ogólnej dotyczyły teorii ruchu planet i sputników, zagadnień matematycznych ruchu ciał sztywnych z uwzględnieniem różnych efektów, stabilności ruchu układów nieholonomicznych i z więzami, algorytmów optymalizacji, pewnych zagadnień mechaniki relatywistycznej, teorii drgań i mechanizmów. W tej sekcji znalazły się również dwa referaty polskie, a mianowicie profesora Andrzeja Tylikowskiego z Politechniki Warszawskiej p.t. „Stability of continuous systems under time and space dependent stochastic loadings” oraz Wojciecha Gołygowskiego i Jarosława Skrynickiego (Politechnika Lubelska) „Acoustic emission signals in soil media”. Sekcja B — mechanika płynów obejmowała, sądząc ze streszczeń, całą gamę zagadnień od teoretycznych dotyczących stateczności ruchu i zagadnień sterowania, poprzez zagadnienia aplikacyjne, do prac doświadczalnych. W sekcjach mechaniki ciała stałego rozpatrywano zagadnienia teoretyczne związane z różnymi modelami ciał stałych, wymienię tu interesujący referat Dietera Besdo z Hannoveru (RFN) p.t. „Plane systems of blocks with (frictionless) gaps described as Cosserats' media”, następnie zagadnienia termodynamiki ośrodków ciągłych (Milan Mićunović, Kraguje-

vac, mówił o termodynamicznych podstawach wiskoplastyczności), oraz zagadnienia aplikacyjne, doświadczalne, zastosowania technik obliczeniowych, aż do zagadnień teorii pól połączonych i stateczności.

Irina Gorjaczewa z Instytutu Problemów Mechaniki A. N. ZSRR przedstawiła referat o zagadnieniach kontaktowych ciał z uwzględnieniem ścierania, Jovo Jarić wygłosił referat „On generalized displacement derivatives”.

Wymienimy jeszcze pozostałe referaty uczestników polskich. Były to: Kazimierz Sobczyk „Probabilistic modelling of fatigue crack growth”, Zenon Waszczyszyn i Czesław Cichoń (Kraków) „FEM nonlinear and stability analysis of structures”, Józef Kwiatkowski (Politechnika Warszawska, filia w Płocku) „Anwendung der FEM (nichtlineare Theorie) zur Analyse der vorgespannten Stirnschraubenverbindung” oraz Zbigniew Olesiak „Contact and crack problems with diffusive and thermal effects”.

Na zakończenie Kongresu zostały wręczone nagrody im. Rastko Stojanovića za wyróżniające się prace młodych pracowników naukowych z Jugosławii. Pierwszą nagrodę otrzymał Igor Emri za pracę *A new approach to the constitution of ageing process of viscoelastic materials*, drugą nagrodę przyznano Željko Goji za pracę *On mechanism of the photoelastic effect fixation by irradiation*, trzecią nagrodę otrzymała Livija Cvetičanin za pracę *Stability of rotating rotor on which the band is winding up*.

Kongres odbywał się w zespole hotelowym „Borik” pod Zadarem w luksusowych warunkach.

Zbigniew Olesiak

#### Mechanika Ośrodków Ciągłych Ciała Stałego Konferencja w Oberwolfach, 5 - 11 stycznia 1986

W znanym ośrodku nauk matematycznych (Mathematisches Forschungsinstitut, Lorenzenhof, Oberwolfach-Wolke) w Schwarzwaldzie w RFN odbyła się szóstą już konferencja poświęcona zagadnieniom mechaniki ciała stałego odkształcalnego. Przewodniczącymi konferencji byli profesorowie George Herrmann z Uniwersytetu Stanforda (USA) i Horst Lippmann z Uniwersytetu Technicznego w Monachium. Sekretarzem i organizatorem technicznym był dr V. Mannl z Monachium. Lista uczestników, którzy przybyli na konferencję obejmowała 53 nazwiska osób z 13 krajów, w tym z Polski — 7, Bułgarii — 4, Japonii — 3, USA — 2, W. Brytanii — 2, Włoch — 2, oraz Austrii, Czechosłowacji, Francji, Finlandii, Holandii i Turcji. z 46 zgłoszonych referatów wygłoszono dokładnie połowę, w tym tylko 6 z RFN. Organizatorzy postanowili bowiem, że z wygłoszenia referatów zrezygnują wszyscy profesorowie z RFN i niektórzy zagraniczni. Zrezygnowali z wygłoszenia swoich referatów również polscy uczestnicy profesorowie W. Szczepiński, M. Sokołowski i Z. Wesółowski. Po raz pierwszy zostali zaproszeni na konferencję naukowcy japońscy i jeden z Finlandii.

Tradycją tych konferencji jest dość rozległa tematyka, od zagadnień matematycznych poprzez rozwiązania analityczno numeryczne i eksperymenty numeryczne do zagadnień doświadczalnych. Odbyła się również dyskusja „okrągłego stołu” (aczkolwiek w sali wykładowej) na temat przyszłości i perspektyw rozwojowych mechaniki. Na konferencję przyjechało wielu wybitnych uczonych z dziedziny mechaniki teoretycznej, lub jej zastosowań. G. Fichera, profesor Uniwersytetu w Rzymie, był pierwszym wykładcą. Przedmiotem jego wykładu były rozważania dotyczące płaskiego stanu naprężenia w klasycznej teorii sprężystości w opraciu o precyzyjną definicję matematyczną. Z referatu wynikało, że dwuwymiarowy stan naprężenia różni się w sposób zasadniczy od dwuwymiarowego stanu odkształcenia (a nie tylko wartością stałą) powodem jest nadokreśloność dwuwymiarowego stanu naprężeń z punktu widzenia matematycznego.

R. J. Knops (Edynburg) przedstawił pracę o tym jak z pomocą tożsamości Lagrange’a można wykazać ciągłą zależność rozwiązań elastodynamiki od warunków początkowo brzegowych w obszarach nieograniczonych. J. F. Besseling (Delft) przedstawił metodę rozwiązywania zagadnień teorii sprężystości z dużymi obrotami, w której do opisu obrotów zastosowano cztery parametry zamiast trzech, przez co uzyskuje się macierz nieosobliwą i zmniejszenie czasu komputera przy obliczeniach. J. Najjar (Monachium) mówił o zagadnieniach pękania skał na skutek wybuchu. J. Kratochvíl (Praga) zajął się zagadnieniem stateczności dyslokacji. Na podstawie wyników doświadczalnych wyróżnione zostały strefy gęstej i rzadkiej dyslokacji w metalach. J. P. Boehler z Grenoble przedstawił doświadczenia dotyczące ciał anizotropowych,



gdy oś próbki nie pokrywała się z osią symetrii, przy uwzględnieniu niestateczności obrotowej. Autor zaproponował oryginalny sposób mocowania próbek.

J. R. Willis (Bath, Anglia) z charakterystyczną swadą przedstawił metody badania „dość krótkich” szczelin. W pracy posłużono się metodami asymptotycznymi. Zastosowania dotyczyły zagadnień występujących w technice nuklearnej.

H. Petryk (IPPT PAN) przedstawił pracę o geometrycznej, dynamicznej stateczności i lokalnej niestabilności w przypadku procesów odkształceń plastycznych. M. Matczyński (IPPT PAN) omówił niektóre wyniki badań teoretycznych dotyczących szczelin w dwuwymiarowym stanie odkształceń na skutek działania źródeł ciepła. Niżej podpisany przedstawił metodę rozwiązywania zagadnień brzegowych w teorii dyfuzji i termosprężystości.

Po referatach wywiązywała się ożywiona i rzeczowa dyskusja. Tylko jeden referat nie zainteresował dyskutantów. Ośrodek konferencyjny w Oberwolfach może być powodem zazdrości. Jest godny naśladowania pod każdym względem: projektu, wyposażenia, komfortu, organizacji. Trudno znaleźć w skali światowej lepiej pomyślany ośrodek konferencyjny.

W dyskusji „okrągłego stołu” profesor G. Herrmann zreferował poglądy wygłoszone na konferencji poświęconej przyszłości mechaniki zorganizowanej pod koniec 1985 roku przez National Science Foundation w Kalifornii. Współprzewodniczyli jej G. Abrahamson (Stanford Research Institute — International) i F. Leckie (Uniwersytet Illinois, Urbana). Ukazało się również opracowanie na ten temat w Applied Mechanics Division ASME autorstwa J. Rice’a i M. Caroll. Współprzewodniczący dyskusji profesor K. Ikegami z Japonii wymienił działy mechaniki, które jego zdaniem zamierają oraz działy mechaniki, które zaliczył do „wschodzących”. Jego zdaniem są to: mechanika w połączeniu z zagadnieniami interdyscyplinarnymi, problemy zaawansowanej technologii w wysokich i niskich temperaturach, ustrojów pracujących w ekstremalnych warunkach, fuzja nuklearna, zagadnienia mechaniki przestrzeni kosmicznej, efekty promieniowania, warunki wysokiej próżni oraz silnych pól elektromagnetycznych. Drugą grupę problemów rozwojowych miałyby stanowić zagadnienia mechaniki nowych materiałów, w tym kompozytów i materiałów ceramicznych. Następnie rozwój technik obliczeniowych, a więc mechanika komputerowa z zastosowaniem metody elementów skończonych i elementów brzegowych. Do rozwijających się dziedzin należy również biomechanika, układy samorozwijające się i samoregenerujące, biomateriały, wreszcie zagadnienia fizykalnych podstaw mechaniki w oparciu o elektroskopię elektronową, a z drugiej strony w oparciu o interpretację termodynamiczną. W dyskusji, w której zabrało głos 12 uczestników wymieniano jeszcze inne aktualne zagadnienia, a mianowicie zagadnienia dynamiki, nieniszczące metody doświadczalne, problemy mechaniki w procesach wydobywania ropy naftowej, zagadnienia robotyki i sterowania procesami. Koledzy amerykańscy uważali, że środowiska metalurgów i elektryków przejęły dużą część tematyki (a co gorsza zleceń) uprzednio uprawianej przez mechaników. Inni uczestnicy dyskusji zwracali uwagę na kwestię potrzeb w tej dziedzinie kształcenia studentów, ich liczby, potrzeb gospodarki i zmniejszenia się liczby młodych zdolnych ludzi, którzy by chcieli się podjąć trudnych studiów w dziedzinie nauk ścisłych w ogóle. Kwestia ta zależy w dużej mierze od prężności gospodarki danego kraju.

Warto wymienić dużą liczbę wybitnych profesorów, którzy choć nie wygłosili referatów, ale żywo uczestniczyli w dyskusji i byli obecni prawie na wszystkich referatach. Wymienię tu profesorów: D. Besdo, H. Bufler, W. Bürger, G. Grioli, H. G. Hahn, K. Herrmann, D. Kolarow, E. Kröner, Th. Lehmann, I. Müller, O. Mahrenholtz, G. Sefer.

Uczestnicy Konferencji mieli możliwość zwiedzenia huty szkła w Wolfach. Następną konferencją tego typu odbędzie się w styczniu 1989 r.

*Zbigniew Olesiak*



## ROZNY SPIS TREŚCI — 1986

z. 1 — 2

- K. GRYSA, H. KAMIŃSKI, O przybliżonym rozwiązywaniu jednowymiarowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego. 3  
 On approximate solution of one-dimensional inverse heat conduction problems.  
 О приближенных решениях одномерных обратных задач теплопроводности.
- W. OŚWIĘCIMSKI, B. KUŹNICKA, J. SZPIŁ, Wpływ cyklicznych zmian temperatury w zakresie 293K-77K na własności wytrzymałościowe połączeń spawanych miedzi MOB i stali 1H18N9T. 23  
 The effect of cyclic temperature variations within the interval of 293K-77K on tensile strength of welded specimens of MOB copper and 1H18N9T steel.  
 Влияние термоциклирования в интервале температур 293K-77K на прочность сварных соединений меди MOB и стали 1H18N9T.
- M. NOWAK, Analityczny opis wyników badań na zmęczenie jednym równaniem na przykładzie wybranych tworzyw sztucznych. 41  
 A one-equation analytical description of fatigue testing results for selected plastics as examples.  
 Аналитическое описание результатов исследований на усталость одним уравнением на примере избранных пластмасс.
- W. ŁUCJANEK, J. NARKIEWICZ, K. SIBILSKI, Stateczność dynamiczna śmigłowca z wirnikiem przegubowym. 61  
 Dynamic stability of helicopter with hinged rotor.  
 Динамическая устойчивость вертолета с шарнирным креплением лопастей несущего винта.
- J. TYL, E. WŁODARCZYK, Równania stanu produktów detonacji (PD) i materiałów wybuchowych (MW). Równania makrokinetyki wybuchu. (Synteza danych literaturowych). 69  
 Equations of state of detonation products (DP) and explosives (E). Equations of explosion macrokinetics. (Synthesis of the literature data).  
 Уравнения состояния продуктов детонации (ПД) и взрывчатых веществ (ВВ). Уравнения макрокINETIKИ взрыва. (Синтез литературных данных).
- S. DROBNIĄK, Struktury koherentne osiowo-symetrycznej strugi swobodnej. 87  
 Coherent structures of axisymmetric free jet.  
 Когерентные структуры осесимметричной струи.
- S. MARCINKOWSKI, Oprzyrządowanie oraz metody eksperymentalnych badań przepływu pary przez ostatnie stopnie turbin kondensacyjnych. 109  
 Instrumentation and methods of investigation of steam flow through the lost stages of L P turbines.  
 Оборудование и методы экспериментальных исследований пара в последних ступенях конденсационных турбин.
- A. TYLIKOWSKI, Dynamic stability of viscoelastic continuous systems under time-dependent loadings. 127  
 Dynamiczna stateczność lepkosprężystych układów poddanych działaniu zależnego od czasu obciążenia.  
 Динамическая устойчивость вязкоупругих систем под действием нагрузки зависимой от времени.
- J. MARYNIAK, K. MICHAŁEWICZ, Z. WINCZURA, Wpływ rakietowego układu hamującego na ruch zasobnika lotniczego. 139  
 An influence of the rocket braking system on the motion of an air container.  
 Влияние ракетной системы торможения на движение авиационного контейнера.
- J. MARYNIAK, W. WIŚNIEWSKI, Uwagi o hipotezie małej nieliniowości drgań konstrukcji płatowców. 147  
 Remarks on small nonlinearity hypothesis of the airplane vibrations.  
 Замечания о гипотезе малой нелинейности колебаний авиационных конструкций.
- K. JANKOWSKI, J. MARYNIAK, Sprzężenie ruchów przestrzennych śmigłowca o prostoliniowym poziomym locie ustalonym. 151

- Couplings between three-dimensional motions of a helicopter in the steady rectilinear horizontal flight.  
Сопряжение пространственных движений вертолета в установившемся прямолинейном горизонтальном полете.
- Z. DŻYGADŁO, I. NOWOTARSKI, A. OLEJNIK, Zastosowanie dyskretnego modelu odkształcalnego samolotu do badania drgań własnych. 159  
Application of a discrete model of a deformable aeroplane for natural vibration analysis.  
Применение дискретной модели деформируемого самолёта для анализа собственных колебаний.
- Z. DŻYGADŁO, A. KRZYŻANOWSKI, Dynamika nieautonomicznego przestrzennego ruchu samolotu z odkształcalnymi układami sterowania. 171  
Dynamics of non-autonomous spatial motion of an aeroplane with a deformable control system.  
Динамика неавтономного пространственного движения самолёта с деформируемыми системами управления.
- W. SOBIEGAJ, Wpływ parametrów konstrukcyjnych piasty na charakterystyki dynamiczne łopaty wirnika nośnego śmigłowca. 187  
Influence of constructional parameters of the main rotor hub on the dynamic characteristics of the helicopter rotor blade.  
Влияние конструкционных параметров втулки несущего винта вертолета на динамические характеристики лопасти несущего винта вертолета.
- Cz. SZENDZIELORZ, Dynamika ruchu fotela odrzucanego względem samolotu w locie symetrycznym 197  
Dynamics of motion of an ejection seat with respect to an airplane in asymmetric flight.  
Динамика движения катапультного кресла относительно самолёта в симметрическом полёте.
- BIULETYN INFORMACYJNY. 207

## z. 3

- M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd prac nad optymalnym kształtowaniem konstrukcji w warunkach pełzania. 243  
Обзор трудов оптимального проектирования конструкции в условиях ползучести.  
A survey of optimal structural design in creep conditions.
- E. KOSSECKA, Boundary integral equations in the theory of thin plates. 259  
Краевые интегральные уравнения в теории тонких пластинок.  
Brzegowe równania całkowe w teorii cienkich płyt.
- S. DUBIEL, Liniowe układy mechaniczne o najszybszym tłumieniu. 271  
Линейные механические системы с наиболее быстрым затуханием.  
Linear mechanical systems with supreme damping.
- K. NOWIS, Balance equations for mixture and porous media in the light of nonstandard analysis. 281  
Уравнения баланса для смесей и пористых тел в виду нестандартного анализа.  
Równania bilansu dla mieszanin i ciał porowatych w świetle analizy niestandardowej.
- B. ROGOWSKI, Contact between a rigid indenter and a transversely isotropic layer. 295  
Контактная задача жёсткого тела и трансверсально — изотропного слоя.  
Kontakt między sztywnym ciałem i poprzecznie izotropową warstwą.
- R. KRZEWIŃSKI, A. SPYCHAŁA, R. TRĘBIŃSKI, W. WARACHIN, E. WŁODARCZYK, M. ZIELIŃSKI, Metoda generacji wybuchowych dynamicznych obciążeń symulujących tarpięcie. 317  
Метод генерации взрывных динамических нагрузок имитирующих горный удар.  
Method for generation of explosive dynamic loads simulating a crump.
- S. KONIECZNY, Obliczanie płyt mikromorficznych. 331  
Расчёт микроморфных плит.  
Calculation of micromorphic plates.

- H. KOPESKI, J. SMYKLA, Funkcje sklepane w zastosowaniu do fizycznie i geometrycznie nieliniowej analizy płyt prostokątnych. 339  
 Сплайн — функции в применении к анализу физически и геометрически нелинейных прямоугольных пластин.  
 Splines in applications to physically and geometrically nonlinear rectangular plates analysis.
- D. FARYŃSKA, Ł. SOBOLEWSKA, Z. ZAGDAŃSKI, Symulacja cyfrowa lotu samolotu TS-11 „Iskra” w języku macroassembler. 353  
 Цифровая симуляция полёта самолёта ТС-11 „Искра” в языке макроассемблер.  
 Computer simulation of TS-11 „Iskra” plane flight in terms of macroassembler language.
- J. MARYNIAK, J. TRAJER, Analiza numeryczna parametrów lotu i sterowania samolotu w ustalonym ruchu spiralnym. 363  
 Численный анализ параметров полёта и управления самолёта в установившемся спиральном движении.  
 Numerical analysis of airplane flight and control parameters in a steady spiral motion.
- J. MARYNIAK, J. TRAJER, Drgania samolotu w ustalonym ruchu spiralnym. 377  
 Колебания самолёта в установившемся спиральном движении.  
 The vibrations of airplane in a steady spiral motion.
- J. MARYNIAK, J. TRAJER, Symulacja numeryczna sterowanego samolotu w ruchu spiralnym. 387  
 Численная симуляция управляемого самолёта в спиральном движении.  
 Numerical simulation of controlled airplane performing a spiral motion.
- J. TRAJER, Modelowanie cyfrowe procesu sterowania samolotu w ruchu spiralnym. 397  
 Численные моделирования процесса управления самолётом в спиральном движении.  
 Model presentation of numerical process of airplane control in a spiral motion.
- M. STODULSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Analiza porównawcza modeli sprężysto-plastycznego pręta pod działaniem zginania, siły podłużnej i temperatury. 403  
 Сравнительный анализ моделей упруго-пластического стержня под действием изгиба, продольной силы и температуры.  
 A comparative analysis of models of an elastic-plastic bar under bending, axial force and temperature.
- B. WOSIEWICZ, Nieliniowe warunki brzegowe w problemach filtracji ustalonej. 427  
 Нелинейные краевые условия в задачах установившейся фильтрации.  
 Nonlinear boundary conditions for steady seepage problems.
- S. J. KOWALSKI, Ruch ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Opis globalny. 443  
 Движение пористой среды выполненной жидкостью. Общий опись.  
 Motion of a fluid-saturated porous medium. Global description.
- W. OSTACHOWICZ, D. SZWEDOWICZ, Metoda obliczania amplitud drgań wymuszonych belek słabo tłumionych tarciem konstrukcyjnym. 459  
 Метод вычисления амплитуда вынужденных колебаний балок с учётом конструкционного трения.  
 Method of determination of the forced vibration amplitude for the beams with constructional friction.
- BIULETYN INFORMACYJNY 471

z 4

- Dr inż. Kazimierz Tomasz Borsuk — wspomnienie pośmiertne 483
- A. WEGNER, Drgania osiowe fundamentów turbozespołów dużej mocy w świetle badań (Praca przeglądowa) 487  
 Продольные колебания фундаментов турбогенераторов большой мощности на фоне проведённых исследований.

- The longitudinal vibrations of large-turbo-generator foundations according to the experimental investigations.
- R. ŻUCHOWSKI, Problemy zmęczenia cieplnego metali. 501  
 Проблемы термодиффузии металлов.  
 Problems of thermal fatigue of metals.
- Z. GÓRECKI, Metoda automatycznego układania równań równowagi w obliczeniach statycznych ortotropowych, liniowo-sprężystych, cienkościennych prętów pryzmatycznych o dowolnym przekroju wieloobwodowym. 519  
 Метод автоматического построения уравнений равновесия в расчёте статических ортотропных, линейно-упругих, тонкостенных призматических стержней произвольного многосвязного поперечного сечения.  
 Method of automatic construction of differential equations in computation of static, orthotropic, linearly elastic, thin-walled prismatic bars of multi connected cross-section.
- J. A. KOŁODZIEJ, Filtration resistance of a system of parallel cylinders at a transverse creeping flow. 537  
 Фильтрационное сопротивление системы параллельных цилиндров при поперечном ползучим обтекании.  
 Opór filtracyjny układu równoległych cylindrów przy poprzecznym opływie pełzającym.
- R. KAŁUŻA, Doświadczalna analiza stateczności powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej. 551  
 Экспериментальный анализ устойчивости гиперболоидальной оболочки градирни.  
 Experimental analysis of the buckling stability of the hyperbolic cooling tower shell.
- Z. GŁODOWSKI, E. WŁODARCZYK, Analityczne badanie intensywnych fal uderzeniowych w gazie politropowym w otoczeniu gazowych produktów wybuchu. 573  
 Аналитическое исследование интенсивных ударных волн в политропном газе в окрестности газовых продуктов взрыва.  
 Analytic study of strong shock waves in a polytropic gas in the vicinity of the explosion centre.
- J. KUBIK, Odpowiedniość między równaniami termodyfuzji a teorii mieszanin. 593  
 Соответствие уравнений термодиффузии и теории смесей.  
 Relation between equations of thermodiffusion and those of the theory of mixtures.
- L. ŻURKOWSKI, M. GRUDNICKI, W. KRZEMIEŃ, Z. LORENC, Wstępne badania dynamicznie podobnego modelu samolotu podatnie zawieszzonego w tunelu aerodynamicznym. 601  
 Вводные исследования модели самолёта для испытания на флаттер, на эластической державке, в аэродинамической трубе.  
 Preliminary tests of an elastic airplane elastically suspended in a wind tunnel.
- B. LESNOWICZ, Z. PIEKARSKI, Analogia sprężysto-lepkosprężysta w półprzestrzeni ze starzeniem. 609  
 Упруго-упруговязкая аналогия для полуплоскости со старением.  
 Elastic — viscoelastic analogy for a semi-space with ageing.
- W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, Szywno-lepko-plastyczne płyty kołowe pod intensywnym obciążeniem dynamicznym. Analiza teoretyczno-doświadczalna i propozycje zastosowań. 617  
 Жестко — вязкопластические круглые плиты под действием интенсивной динамической нагрузки. Теоретическо-экспериментальный анализ и предложения применений.  
 Rigid — viscoplastic circular plates under intensive dynamical loadings. Theoretical-experimental analysis and proposals of applications.
- J. TYL, E. WŁODARCZYK, Wpływ radiacji na parametry koncentrycznej fali uderzeniowej w gazie politropowym. 631  
 Влияние излучения на параметры концентрической ударной волны в политропном газе.  
 Effect of radiation upon parameters of a concentric shock wave in a polytropic gas.
- S. DUBIEL, M. MRÓZ, Metoda macierzowa w zastosowaniu do optymalizacji charakterystyki odkształcalnego układu sterowania. 641  
 Применение матричного метода к оптимизации нежесткой системы управления.  
 Matrix method applied to optimization of the deformable control system characteristics.

- A. GAŁKA, Elastic plate reinforced by system of slender cords. 649  
Упругая пластина армирована гибкими волокнами.  
Tarcza sprężysta wzmocniona układem wiotkich cięgien.
- Z. KITOWSKI, Analiza dokładności prowadzenia wypornościowych obiektów nawodnych po zadanej trajektorii w różnych warunkach hydrometeorologicznych. 659  
Анализ точности управления водоизмещающими объектами по заданной траектории в разных гидрометеорологических условиях.  
Analysis of the accuracy of the surface vessel guidance over along a trajectory for various meteorological conditions.
- J. WACŁAWIK, O pewnych rozwiązaniach równania dyfuzji. Cz. II. 669
- BIULETYN INFORMACYJNY. 675





## INSTRUKCIE DLA AUTORÓW

### Ogólne

W Mechanice Teoretycznej i Stosowanej drukowane są prace przeglądowe oraz oryginalne teoretyczne i doświadczalne z zakresu mechaniki ciała stałego oraz cieczy i gazów. Publikujemy również dyskusję naukową oraz polemikę dotyczącą prac z mechaniki, które ukazały się w MTiS lub w innych czasopismach naukowych.

W Biuletynie Informacyjnym drukujemy sprawozdania z konferencji naukowych z zakresu mechaniki w kraju i za granicą oraz z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Praca może być złożona do druku w MTiS pod warunkiem jej nieopublikowania w innym czasopiśmie.

Drukujemy w języku polskim oraz na życzenie autorów w języku angielskim pod warunkiem złożenia pracy w tym języku.

Prace należy nadsyłać na adres Redakcji bądź jednego z redaktorów, w dwóch egzemplarzach (oryginał + kopia).

Praca złożona do druku podlega recenzji.

Wszelkie zmiany (poprawki autorskie) po zakwalifikowaniu artykułu do druku i przekazaniu go do drukarni mogą być dokonane tylko w czasie 1 korekty (na koszt autora).

Po opublikowaniu autorzy otrzymują 25 egzemplarzy odbitek swojego artykułu.

### Szczegółowe

- Prace składane do publikacji w MTiS powinny zawierać (wg. kolejności)
  - Tytuł
  - Imię, Nazwisko z podaniem miejsca pracy
  - Abstrakt (w języku polskim)
  - Właściwą pracę
  - Spis literatury
  - Streszczenia w języku
    - praca w języku polskim — rosyjskim w maszynopisie i angielskim
    - praca w języku angielskim — polskim i rosyjskim.
5. Tekst powinien być napisany po jednej stronie (nie na papierze kredowym) z zachowaniem podwójnych odstępów i obustronnych marginesów — z lewej 3 cm, z prawej 1 cm.
6. Wzory należy wpisywać czytelnie, w kolorze czarnym, z zachowaniem numeracji po stronie prawej (należy zwrócić szczególną uwagę na rozróżnienie 1 oraz litery 1, zera i litery o oraz literę g i p).
4. Życzenia autorów dotyczące formy graficznej pracy w tym kroju czcionki, liter greckich itp. powinny być dołączone na osobnej kartce, bądź na marginesie (ołówkiem).
5. Tablice występujące w tekście należy dołączyć na oddzielnych kartkach (jedna na stronie).
6. Podpisy pod rysunkami powinny być wyszczególnione oddzielnie, a nie pod rysunkami.
7. Prosimy o sporządzanie wykazu literatury w sposób następujący: W. Nowacki, Teoria Sprężystości, Warszawa PWN, 1970.
8. Odnośniki należy numerować kolejno w całej pracy, a nie wg strony.
9. Obowiązuje stosowanie układu jednostek SI.



Влияние излучения на параметры концентрической ударной волны в политропном газе.	
Effect of radiation upon parameters of a concentric shock wave in a polytropic gas.	
S. DUBIEL, M. MRÓZ, Metoda macierzowa w zastosowaniu do optymalizacji charakterystyki odkształcalnego układu sterowania.	641
Применение матричного метода к оптимизации нежесткой системы управления.	
Matrix method applied to optimization of the deformable control system characteristics.	
A. GAŁKA, Elastic plate reinforced by system of slender cords.	649
Упругая пластина армирована гибкими волокнами.	
Tarcza sprężysta wzmocniona układem wiotkich cięgien.	
Z. KITOWSKI, Analiza dokładności prowadzenia wypornościowych obiektów nawodnych po zadanej trajektorii w różnych warunkach hydrometeorologicznych.	659
Анализ точности управления водоизмещающими объектами по заданной траектории в разных гидрометеорологических условиях.	
Analysis of the accuracy of the surface vessel guidance over along a trajectory for various meteorological conditions.	
J. WACŁAWIK, O pewnych rozwiązaniach równania dyfuzji. Cz. II.	669
BIULETYN INFORMACYJNY.	675
ROCZNY SPIS TREŚCI 1986	681

Prenumeratę na kraj przyjmują i informacji o cenach udzielają urzędy pocztowe i doręzczyiele na wsi oraz Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” w miastach,

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11. Wysyłka za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

**Terminy przyjmowania prenumerat na kraj i za granicę:**

- do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland.

Our bankers:

BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Sala Kongresowa, pokój 309)

---